ΜΗΤΡΟΠΟΛΙΤΟΥ ΓΑΝΟΥ ΚΑΙ ΧΩΡΑΣ

ΠΑΓΚΡΑΤΙΟΥ

ΝΕΑ
ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΙ ΤΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ
ΚΑΙ ΤΗΣ
ΠΤΩΣΕΩΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΣΤΑΜΠΟΥΛ

1947

ΜΗΤΡΟΠΟΛΙΤΟΥ ΓΑΝΟΥ ΚΑΙ ΧΩΡΑΣ

ΠΑΓΚΡΑΤΙΟΥ

ΝΕΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΙ ΤΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ

ΚΑΙ ΤΗΣ

ΠΤΩΣΕΩΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΣΤΑΜΠΟΥΛ

1947

ΣΟΙ,

ΤΩι ΕΚ ΤΗΣ ΝΗΣΟΥ ΠΡΙΓΚΗΠΟΥ
ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΩι ΜΟΥ ΠΑΤΡΙ
ΚΑΙ ΑΟΙΔΙΜΩι ΓΕΡΟΝΤΙ ΜΟΥ
ΑΡΧΙΜΑΝΔΡΙΤΗι
ΠΑΓΚΡΑΤΙΩι ΒΑΤΟΠΑΙΔΙΝΩι

ΕΥΓΝΩΜΟΝΩΣ ΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗΝ ΜΟΥ ΤΑΥΤΗΝ
ΑΦΙΕΡΩ
Ο ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ ΣΟΥ ΥΙΟΣ

ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΑ

Ἀδείᾳ τοῦ Ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ἑλλάδος διδάξαντες ἐπὶ ἱκανὰ ἔτη τὰ ἀνώτερα Μαθηματικὰ ἐν τοῖς ἐν Ἐπιβάταις τῆς Θράκης Ἀρχιγενείοις Ἐκπαιδευτηρίοις, ἐν τῷ Ἡμιγυμνασίῳ τῆς ἐν Βραΐλᾳ τῆς Ρουμανίας Ἑλληνικῆς Κοινότητος καὶ ἐν ταῖς σχολαῖς τῆς ἐν Ρουστσουκίῳ τῆς Βουλγαρίας ἀκμαζούσης Ἑλληνικῆς Κοινότητος, καὶ βλέποντες τὸν ἄχαριν καὶ ἀγενῆ συναγωνισμὸν τῶν συγγραφέων τῶν φυσικομαθηματικῶν βιβλίων, οἵτινες ἁμιλλῶνται, τὶς ἐξ αὐτῶν νὰ καταστήσῃ τὸ σύγγραμμα αὐτοῦ μᾶλλον ἀσαφές, σκοτεινὸν καὶ ἀκατάληπτον διὰ νὰ μεταβάλῃ τὸν βίον τοῦ δυστυχοῦς μαθητοῦ εἰς πραγματικὴν κόλασιν, εἰς τρόπον, ὥστε γενικῶς οἱ σπουδασταὶ νὰ αἰσθάνωνται τὴν μεγαλειτέραν ἀποστροφὴν καὶ ἀπέχθειαν πρὸς τὰ Μαθηματικά, ἅτινα ἔπρεπε νὰ ἀποτελῶσι τὸ μᾶλλον τερπνὸν καὶ εὐχάριστον μάθημα,

Τούτου ἕνεκα, ἐπιθυμοῦντες, ἵνα βελτιώσωμεν τὴν δυσχερῆ θέσιν τῶν μαθητῶν εἰς τρόπον, ὥστε νὰ αἰσθάνωνται οὐχὶ φόβον καὶ τρόμον, ἀλλὰ εὐχαρίστησιν καὶ προθυμίαν εἰς τὴν σπουδὴν τῶν μαθημάτων τῆς Ἀριθμητικῆς, τῆς Γεωμετρίας, τῆς Φυσικῆς, τῆς Ἀλγέβρας, τῆς Τριγωνομετρίας, τῆς Ἀναλυτικῆς, Γεωμετρίας τῶν Ὁριζουσῶν, καὶ ἄλλων, περιήλθομεν εἰς τὴν ἀνάγκην, ἵνα καταρτίσωμεν τὴν κλεῖδα τῆς Ἀλγέβρας. Διὰ τοῦ συγγράμματος ἡμῶν τούτου δύναται καὶ ὁ ἐλαχίστας Μαθηματικὰς γνώσεις ἔχων, νὰ λύῃ πρὸς ψυχαγωγίαν μετ' εὐχαριστήσεως καὶ ἀκόπως τὰ δυσκολώτερα Ἀλγεβρικὰ καὶ Γεωμετρικὰ προβλήματα.

Πρὸς περισσοτέραν δὲ σαφήνειαν καὶ κατανόησιν ἠναγκάσθημεν, ὅπως κατασκευάσωμεν καὶ διάφορα προβλήματα, καὶ ἰδίᾳ τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων, ἵνα δώσωμεν ὁρατὴν καὶ συγκεκριμένην μορφὴν εἰς τὰς θεωρητικὰς ἐννοίας τῶν Φυσικομαθηματικῶν ἐπιστημῶν.

Ἐν τῇ ἐργασίᾳ ἡμῶν ταύτῃ παρετηρήσαμεν μίαν ἀνωμαλίαν καὶ ἀνακρίβειαν εἰς τοὺς νόμους τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων, ἢ μᾶλλον εἰς τοὺς Ἀλγεβρικοὺς τύπους· διότι οἱ νόμοι εἰσὶν ἀμετάβλητοι, σταθεροὶ καὶ αἰώνιοι, ὅπως ἀμετάβλητος καὶ αἰώνιός ἐστι καὶ ὁ ποιήσας αὐτοὺς Θεός.

Τὴν ἀνωμαλίαν ταύτην ἀποδίδοντες κατ' ἀρχὰς εἰς τὴν ἐσφαλμένην ἀντίληψιν ἡμῶν, ἐθεωρήσαμεν ἁμάρτημα νὰ διαμφισβητήσωμεν τὴν ἀλήθειαν τύπων, ἐχόντων γενικὸν καὶ παγκόσμιον κῦρος· διότι εἶσιν ἐξαγόμενα ἀκριβῶν καὶ ἀλανθάστων ὑπολογισμῶν.

Ἐπειδὴ ὅμως οἱ ἐξαγαγόντες τοὺς τύπους τούτους ἦσαν ἄνθρωποι, ὑποκείμενοι πάντοτε εἰς τὴν πλάνην καὶ τὴν ἀπάτην, ὅπως καὶ πράγματι ἠπατήθησαν, ἐὰν δὲν ἀπατώμεθα ἡμεῖς, παραδεχόμενοι ὡς ἀληθεῖς τοὺς ἀνακριβεῖς καὶ λελανθασμένους θεμελιώδεις τύπους τῆς Φυσικῆς.

$$\upsilon = gt, \quad \text{καὶ} \quad h = \upsilon t \pm \frac{g}{2} t^2$$

Ἐξ ὧν προκύπτουσιν ἅπαντες οἱ λοιποὶ τύποι τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων, καὶ ἐφ' ὧν στηρίζονται πλεῖστοι νόμοι τῆς Μηχανικῆς.

Ἐκ διαφόρων δοκιμῶν καὶ πειραμάτων, πεισθέντες ὅτι ἐν τοῖς τύποις τούτοις ὑποκρύπτεται σοβαρὸν λάθος, ὅπερ ἐπὶ αἰῶνας διέφυγε τὴν προσοχὴν καὶ ὀξυδέρκειαν καὶ τῶν μεγαλειτέρων μαθηματικῶν κεφαλῶν τοῦ κόσμου, ἠθελήσαμεν νὰ ἀνακαλύψωμεν αὐτό. Ἀλλὰ μετὰ πολλὰς προσπαθείας κατενοήσαμεν ὅτι, τὸ πρᾶγμα δὲν ἦτο τόσον ἁπλοῦν καὶ εὔκολον, ὅσον κατ' ἀρχὰς ἐνομίσαμεν· διότι ἠγωνιζόμεθα ἵνα συλλάβωμεν ἐν τῷ σκότει μίαν σκιὰν ἀόρατον.

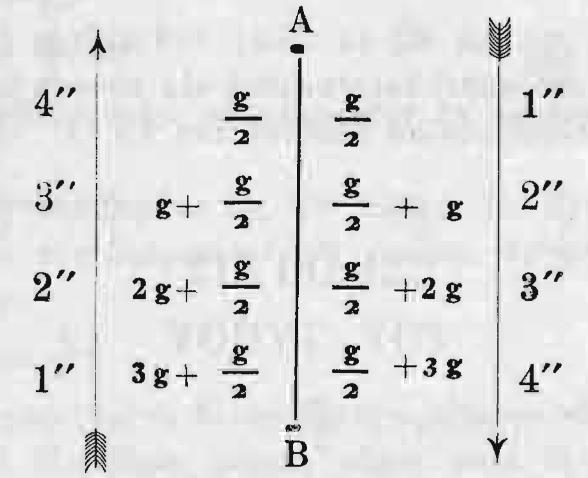
Ἐν τούτοις τῷ ἀρχαίῳ στοιχοῦντες γνωμικῷ «Διὰ τῆς ὑπομονῆς τὰ πάντα δοῦλα γίγνεται» καὶ ζωηρὰν ἔχοντες κλίσιν πρὸς ἀνεύρεσιν τῆς ἀληθείας, ἥτις ἀποτελεῖ τὸ τέρμα πάσης ἐπιστήμης, καὶ ἀδιαφοροῦντες παντελῶς εἰς τὰς ἀποδοκιμασίας καὶ ἐπικρίσεις τῶν εἰδικῶν, ἐπεδόθημεν μετ' ἐπιμονῆς καὶ ἀποφασιστικότητος εἰς τὴν ἔρευναν καὶ ἐπὶ τριάκοντα καὶ πλέον ἔτη ἐργαζόμενοι, κοπιάζοντες, ἀγρυπνοῦντες καὶ περὶ δοκιμὰς καὶ πειράματα ἀσχολούμενοι, κατατρίβοντες πολυτιμότατον χρόνον καὶ εἰς πλείστας ὑλικὰς θυσίας ὑποβαλλόμενοι, ἐκδιδόντες τὰ πορίσματα τῶν μελετῶν ἡμῶν, μέχρις οὗ ἐπὶ τέλους κατωρθώσαμεν τελευταίως νὰ ἀνακαλύψωμεν τὰ ἐπιδιωκόμενα λάθη καὶ δὴ πρῶτον ἐν τῷ τύπῳ

$$\upsilon = gt$$

ὅστις παρέχει τὴν κεκτημένην ἢ τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα τοῦ κατακορύφως κατιόντος ἢ ἀνιόντος κινητοῦ.

ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Ἡ Φυσικὴ διδάσκει ὅτι, τὸ κατακορύφως ἀνιὸν σῶμα δὶς διέρχεται ἐξ ἑκάστου σημείου τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ, ἅπαξ ἀνιὸν καὶ ἅπαξ πῖπτον, διανύον τὰ αὐτὰ διαδοχικὰ διαστήματα τοῦ ὕψους μετὰ τῆς αὐτῆς μὲν ἀλλ' ἀντιθέτου ταχύτητος, ὡς φαίνεται ἐν τῷ ἀπέναντι διαγράμματι.



Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σφαῖρα Β, ριπτομένη κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, διανύει τὸ διάστημα ΒΑ εἰς χρόνον

$t = 4''$ δευτερόλεπτα

τόσον χρόνον $t = 4''$ δευτερόλεπτα

δαπανᾷ καὶ ἡ σφαῖρα Α πίπτουσα ἐκ τοῦ σημείου Α εἰς τὸ σημεῖον Β, διανύουσα τὰ αὐτὰ διαδοχικὰ διαστήματα, ἅπερ διήνυσε καὶ ἡ σφαῖρα Β ἀνιοῦσα. Ἐπειδὴ δὲ ἡ σφαῖρα Α κατιοῦσα κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ τετάρτου δευτερολέπτου διήνυσε διάστημα

$$e = \frac{g}{2} + 3g$$

δῆλον καὶ προφανές, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ τετάρτου δευτερολέπτου ἔχει ἀποκτήσῃ ταχύτητα

$$\upsilon = \frac{g}{2} + 4g$$

διότι μόνον ἡ κτηθεῖσα αὕτη ταχύτης δύναται ὡς ἀρχικὴ ταχύτης νὰ ἀναβιβάσῃ τὴν σφαῖραν Β εἰς τὸ σημεῖον Α εἰς χρόνον

$t = 4''$ δευτερόλεπτα

Ἡ κεκτημένη ταχύτης τοῦ τύπου τῆς Φυσικῆς

$$\upsilon = gt$$

οὐδέποτε δύναται νὰ ἀναβιβάσῃ τὴν σφαῖραν Β εἰς τὸ σημεῖον Α, ἐξ οὗ ἔπεσεν.

Εἰς τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον τῆς ἀνόδου διανύει τὸ διάστημα

$$e = 3g$$

εἰς τὸ δεύτερον δευτερόλεπτον τῆς ἀνόδου διανύει διάστημα

$$e = 2g$$

εἰς τὸ τρίτον δευτερόλεπτον τῆς ἀνόδου διανύει διάστημα

$$e = g$$

Καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου δευτερολέπτου παύει ἀνιοῦσα καὶ μηδέποτε ἀφικνουμένη εἰς τὸ σημεῖον Α, διότι ἡ ταχύτης αὐτῆς υ ἐλαττωθεῖσα κατέστη ἴση τῷ Ο.

ΕΞΕΛΕΓΞΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ

$$h = υt + \frac{g}{2} t^2$$

Ἡ σφαῖρα Ε, ριπτομένη κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω μετ᾽ ἀρχικῆς ταχύτητος **υ** ἐπὶ χρόνον t=4″ δευτερόλεπτα διανύει τὰ διαδοχικὰ διαστήματα τῆς στήλης ΕΖ, ἅτινα προστιθέμενα, παρέχουσι τὸ ὕψος h.

Ἐπειδὴ $4 = t$, ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν τὸν τύπον τῆς Φυσικῆς.

$$\begin{array}{lll} \text{E} & υ + \frac{g}{2} & 1'' \\ & υ + \frac{g}{2} + g & 2'' \\ & υ + \frac{g}{2} + 2g & 3'' \\ \text{Z} & υ + \frac{g}{2} + 3g & 4'' \end{array}$$

$$h = 4υ + 8g$$
$$h = 4υ + \frac{g}{2}\, 16$$
$$h = 4υ + \frac{g}{2}\, 4^2$$
$$h = υt + \frac{g}{2}\, t^2$$

Ἀλλὰ τύπος, προκύπτων ἐκ τοιούτων κλασματικῶν διαδοχικῶν διαστημάτων, δὲν δύναταί ποτε νὰ θεωρηθῇ ὡς ὀρθὸς καὶ ἀκριβής.

Διότι δὲν πρέπει νὰ λησμονῶμεν ὅτι, τὸ κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω ριπτόμενον σῶμα μετ᾽ ἀρχικῆς ταχύτητος υ, ἀποτελεῖ συνέχειαν πτώσεως τοῦ αὐτοῦ σώματος πίπτοντος ἐξ ἀνωτέρου ὕψους.

Ὅπως δὲ τὸ διάστημα τοῦ ἐλευθέρως πίπτοντος σώματος μεθ᾽ ἑκάστην χρονικὴν μονάδα αὐξάνει κατὰ g, οὕτω καὶ τὸ διάστημα τοῦ κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω ριπτομένου σώματος, μεθ᾽ ἑκάστην χρονικὴν μονάδα αὐξάνει κατὰ g καὶ οὐχὶ κατὰ $\frac{g}{2}$ εἰς τὴν πρώτην μονάδα τοῦ χρόνου.

Ἐπειδὴ δὲ ἅπαξ ριφθὲν κατακορύφως τὸ σῶμα, δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μὴ ριφθέν, διότι τὰ γινόμενα οὐκ ἀπογίνονται, δὲν ἐπιτρέπεται ἓν τοῖς τύποις.

$$υ_t = υ^0 + gt \qquad (1)$$

καὶ

$$h = υt + \frac{g}{2} t^2 \qquad (2)$$

νὰ ὑποθέτωμεν τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα $υ=0$, καὶ νὰ ἐξάγωμεν τοὺς τύπους

$$υ = gt$$
$$h = \frac{g}{2} t^2 \qquad (3)$$

οἵτινες δὲν εἶναι ὀρθοὶ οὔτε ἀκριβεῖς, διότι προκύπτουσιν ἐκ λελανθασμένων τύπων, (1) καὶ (2).

Σφάλλεται λοιπὸν ἡ Φυσικὴ βασιζομένη εἰς τὸν τύπον (3), ὅτι τὸ ἐλευθέρως πῖπτον σῶμα, κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πρώτου δευτερολέπτου διανύει διάστημα ὕψους.

$$h = \frac{g}{2}$$

Διότι οὐδεμία μηχανή, μεταχειριζομένη ὑλικὰ ὄργανα δύναται νὰ βεβαιώσῃ ἡμᾶς, ὅτι πράγματι τὸ ἐλευθέρως πῖπτον σῶμα κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πρώτου δευτερολέπτου διανύει διάστημα ὕψους

$$h = \frac{g}{2}$$

Ἀλλὰ καὶ ἂν πρὸς στιγμὴν παραδεχθῶμεν ὅτι, τὸ ἐλευθέρως πῖπτον σῶμα κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πρώτου δευτερολέπτου διανύει διάστημα ὕψους

$$h = \frac{g}{2}$$

τότε τὰ διάφορα διαδοχικὰ διαστήματα, ἅτινα ἐλευθέρως πῖπτον σῶμα διανύει ἐπὶ χρόνον t, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπ᾽ εὐθείας καὶ οὐχὶ ἐκ τύπου

$$h = υt + \frac{g}{2} t^2$$

ὑποτιθέμενοι τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα $υ=0$

Σῶμα βαρὺ κατακορύφως πῖπτον ἐπὶ χρόνον t=4″ δευτερόλεπτα, διανύει τὰ διαδοχικὰ διαστήματα τῆς στήλης Η Θ, ἅτινα προστιθέμενα παρέχουσι τὸ ὕψος h.

$$\begin{array}{lll} \text{H} & \frac{g}{2} & 1'' \\ & \frac{g}{2} + g & 2'' \\ & \frac{g}{2} + 2g & 3'' \\ \text{Θ} & \frac{g}{2} + 3g & 4'' \end{array}$$

Ἐπειδὴ 4″=t ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$h = 8g$$
$$h = \frac{g}{2}\, 16$$
$$h = \frac{g}{2}\, 4^2$$
$$h = \frac{g}{2}\, t^2$$

ὃν δέν δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν ὡς ὀρθὸν καὶ ἀκριβῆ· διότι, ὡς ἐλέχθη, οὐδεμία μηχανὴ ἀποδεικνύει ὅτι, ὄντως τὸ ἐλευθέρως πῖπτον σῶμα κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πρώτου δευτερολέπτου διανύει διάστημα ὕψους

$$h = \frac{g}{2}$$

Τὸ μετ᾽ ἀρχικῆς ταχύτητος υ κατακορύφως ριπτόμενον σῶμα, κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πρώτου δευτερολέπτου διανύει διάστημα ὕψους·

$$h = \upsilon + g$$

Εἰς τὸ τέλος δὲ τοῦ πρώτου δευτερολέπτου ἀποκτᾷ ταχύτητα·

$$\upsilon_t = \upsilon + 2g$$

Ὅθεν σῶμα, ριπτόμενον κατακορύφως μετ᾽ ἀρχικῆς ταχύτητος *υ*, εἰς χρόνον $t = 4''$ δευτερόλεπτα, διανύει τὰ ἑξῆς διαδοχικὰ διαστήματα.

$$\begin{array}{ll} \upsilon + g & 1'' \\ \upsilon + 2g & 2'' \\ \upsilon + 3g & 3'' \\ \upsilon + 4g & 4'' \end{array}$$

Ἄθροισμα $= \quad h = 4\upsilon + 10g$

ἢ $\quad h = 4\upsilon + \frac{g}{2}\, 20$

ἢ $\quad h = 4\upsilon + \frac{g}{2} \times 4 \times (4+1)$

Ἐπειδὴ δὲ $4 - t$, ἀντικαθιστῶντες, λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$h = \upsilon t + \frac{g}{2}\, t\,(t+1)$$

Ἡμεῖς τὸν τύπον τοῦτον θεωροῦμεν ὀρθὸν καὶ ἀκριβῆ. Ἴσως πλανώμεθα, διότι τὸ σφάλλεσθαι ἀνθρώπινον, ἀλλ᾽ἐλπίζομεν ὅτι θὰ δώσωμεν ἀφορμὴν εἰς τοὺς σοφοὺς Καθηγητὰς νὰ ἀναθεωρήσωσι τοὺς τύπους τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων.

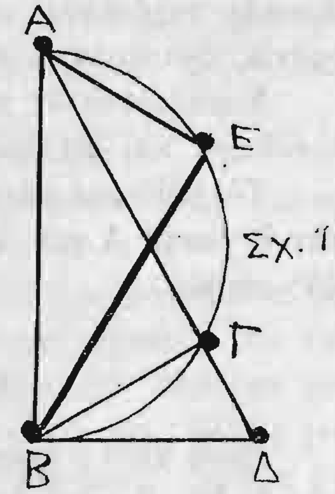
Ταῦτα συντόμως ὡς ἐν προλόγῳ, καὶ εἰσερχόμεθα εἰς τὸ κύριον θέμα τῆς πολυχρονίου ἐργασίας ἡμῶν, εἰς μίαν νέαν θεωρίαν ἐπὶ τοῦ ἐκκρεμοῦς, ἁπλουστάτην καὶ ἀπηλλαγμένην τῶν πολυπλόκων ἀλγεβρικῶν ὑπολογισμῶν, προτάσσοντες ἓν θεώρημα τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

Ἔγραφον ἐν Πέραν Κων]πόλεως τῇ 16 Μαρτίου 1947

† *Ο ΜΗΤΡΟΠΟΛΙΤΗΣ ΓΑΝΟΥ ΚΑΙ ΧΩΡΑΣ ΠΑΓΚΡΑΤΙΟΣ*

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.

Ἐν ᾧ χρόνῳ σφαῖρα, πίπτουσα κατακορύφως, δεικνύει τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου κύκλου τινός, ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ παρομοία σφαῖρα, κυλυομένη πλαγίως πρὸς τὰ κάτω, διανύει τὸ μῆκος χορδῆς, ἀγομένης ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τῆς διαμέτρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου.



Ἔστω ἡ διάμετρος ΑΒ, σχ. 1. καὶ τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΑΒΔ, καὶ ἀποδειχθήτω ὅτι αἱ σφαῖραι Α καὶ Ε, συγχρόνως ἀφιέμεναι ἐλεύθεραι οὕτως, ὥστε ἡ μὲν σφαῖρα Α, νὰ πέσῃ κατακορύφως, ἡ δὲ σφαῖρα Ε νὰ κινηθῇ πλαγίως, κυλιομένη ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΕΒ, συγχρόνως ἀφικνοῦνται εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ συγκρούονται.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΕΒ καὶ ΑΒΔ, λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν.

$$ΑΒ : ΕΒ = ΔΑ : ΒΑ$$

α΄.) Οἱ μὲν δύο πρῶτοι ὅροι ΑΒ καὶ ΕΒ τῆς ἀναλογίας ταύτης δεικνύουσιν ὅτι, ὅσον χρόνον δαπανᾷ κατακορύφως πίπτουσα ἡ σφαῖρα Α, ἵνα διανύσῃ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου ΑΒ, τόσον χρόνον δαπανᾷ πλαγίως κυλιομένη πρὸς τὰ κάτω καὶ ἡ σφαῖρα Ε, ἵνα διανύσῃ τὸ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΕΒ. Διότι ἐκ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΕΒ ἐλαττοῦται ἡ ἕλξις τῆς γῆς, καὶ ἡ σφαῖρα Ε βραδύτερον κατερχομένη, διανύει ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διάστημα ἔλασσον τοῦ ὑπὸ τῆς σφαίρας Α διανυομένου.

Ἑπομένως αἱ σφαῖραι Α καὶ Ε, συγχρόνως ἀφιέμεναι ἐλεύθεραι καὶ πίπτουσαι, συγχρόνως ἀφικνοῦνται εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ συγκρούονται.

β΄.) Οἱ δὲ δύο τελευταῖοι ὅροι ΔΑ καὶ ΒΑ τῆς ἀναλογίας ταύτης δεικνύουσιν ὅτι αἱ σφαῖραι Β καὶ Δ συγχρόνως καὶ μετὰ τὰ τῆς αὐτῆς δυνάμεως ἢ ἀρχικῆς ταχύτητος *υ* ὠθούμεναι ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω οὕτως, ὥστε ἡ μὲν σφαῖρα Β νὰ ἀνέλθῃ κατακορύφως, ἡ δὲ σφαῖρα Δ νὰ κινηθῇ πλαγίως πρὸς τὰ ἄνω, κυλιομένη ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΔΑ, συγχρόνως ἀφικνοῦνται εἰς τὸ σημεῖον Α. Διότι ἐκ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΔΑ ἐλαττοῦται ἡ ἕλξις τῆς γῆς, καὶ ἡ σφαῖρα Δ ταχύτερον ἀνερχομένη, διανύει ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διάστημα μεῖζον τοῦ ὑπὸ τῆς σφαίρας Β διανυομένου.

Ἑπομένως αἱ σφαῖραι Β καὶ Δ, συγχρόνως καὶ μετὰ τῆς αὐτῆς ἀρχικῆς ταχύτητος **υ** ὠθούμεναι ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, συγχρόνως ἀφικνοῦνται εἰς τὸ σημεῖον Α, καὶ συγκρούονται. ὅ ἔ δ.

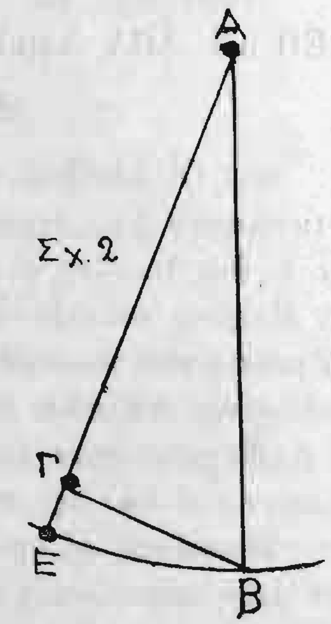
Κατὰ ταῦτα δὲ καὶ αἱ σφαῖραι Α καὶ Γ, συγχρόνως ἀφιέμεναι ἐλεύθεραι καὶ πίπτουσαι, συγχρόνως ἀφικνοῦνται εἰς τὸ σημεῖον Β.

Τὸ δεύτερον μέρος τοῦ θεωρήματος τούτου ἀληθεύει μόνον, ὅταν ἡ γωνία Δ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΔΑ ἦναι ἴση ἢ μείζων τῶν 45^0 μοιρῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.

Ἐνῷ χρόνῳ ἐκκρεμὲς διανύει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ, ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ ἐλευθέρως πίπτον σῶμα τῆς αὐτῆς μάζης διανύει διάστημα ὕψους ἴσον τὸ μήκει τοῦ ἐκκρεμοῦς.

Ἔστω τὸ ἐκκρεμὲς Ε καὶ ἡ σφαῖρα Α κειμένη ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ ἐκκρεμοῦς, Σχ. 2, καὶ ἀποδειχθήτω ὅτι τὸ ἐκκρεμὲς Ε καὶ ἡ σφαῖρα Α συγχρόνως ἀφιέμενα ἐλεύθερα, συγχρόνως ἀφικνοῦνται εἰς τὸ σημεῖον Β.



Ἀπόδειξις. Ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΑΕ, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Γ τίθεμεν τὴν σφαῖραν Γ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σφαῖρα Γ. καὶ τὸ ἐκκρεμὲς Ε, συγχρόνως ἀφιέμενα ἐλεύθερα συγχρόνως ἀφικνοῦνται εἰς τὸ σημεῖον Β.

Ἐὰν καταστήσωμεν τὸ τόξον ΕΒ πολὺ μικρὸν ἴσον πρὸς 2^0 μοίρας, τότε ἡ μὲν σφαῖρα Γ συμπίπτει καὶ συνταυτίζεται μετὰ τοῦ ἐκκρεμοῦς Ε, τὸ δὲ κεκλιμένον ἐπίπεδον ΓΒ σμικρυνόμενον συμπίπτει καὶ συναντίζεται μετὰ τοῦ τόξου τῶν 2^0 μοιρῶν, ὁπότε ἥ τε σφαῖρα Γ καὶ τὸ ἐκκρεμὲς Ε κινοῦνται ἐπὶ τοῦ τόξου τῶν 2^0 μοιρῶν.

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα αἱ σφαῖραι Α καὶ Γ συγχρόνως ἀφιέμεναι ἐλεύθεραι συγχρόνως ἀφικνοῦνται εἰς τὸ σημεῖον Β, δῆλον καὶ προφανές, ὅτι τὸ ἐκκρεμὲς πλάτους τόξου 2 μοιρῶν καὶ ἡ σφαῖρα Α συγχρόνως ἀφιέμεναι ἐλεύθεραι, συγχρόνως ἀφικνοῦνται εἰς τὸ σημεῖον Β.

Ἄρα ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, ἐνῷ τὸ ἐκκρεμὲς διανύει τὸ τόξον τῶν 2^0 μοιρῶν, ἡ σφαῖρα Α διανύει τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς ΑΒ.

ὅ ἔ δ.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ

Ἡ πειραματικὴ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου ἐστιν ἁπλουστάτη, καὶ ἕκαστος δύναται νὰ ἐκτελέσῃ αὐτήν.

Λαμβάνομεν δύο κόκκους κομβολογίου, ἢ δύο μικρὰ ὅμοια μεταλλικὰ σφαιρίδια, ὧν τὸ ἓν κρεμῶμεν διὰ λεπτοῦ νήματος ἐκ τοῦ ἄκρου τραπέζης οὕτως, ὥστε νὰ κατέρχηται μέχρι τοῦ δαπέδου χωρὶς νὰ ἅπτηται αὐτοῦ, τὸ δὲ ἕτερον κρατοῦμεν διὰ τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ ἐκκρεμοῦς, διὰ δὲ τῆς ἀριστερᾶς χειρὸς ἐκβάλλωμεν τὸ ἐκκρεμὲς τῆς κατακορύφου θέσεως αὐτοῦ, καὶ εἶτα συγχρόνως ἀφίεμεν ἀμφότερα νὰ πέσωσι, καὶ βλέπομεν ὅτι πίπτοντα, συναντῶνται ἐπὶ τῆς καθέτου τοῦ ἐκκρεμοῦς ΑΒ.

Ἀκριβεστέρα πειραματικὴ ἀπόδειξις γίνεται διὰ δύο ἠλεκτρικῶν πηνίων (bobines), δι' ὧν κρατοῦμεν μετέωρα ἀμφότερα, ἐκκρεμὲς Ε καὶ σφαῖραν Α. Μετὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος πίπτουσι ταῦτα συγχρόνως καὶ συγκρούονται.

ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΤΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ

Τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, οὗ αἱ αἰωρήσεις τελοῦνται ἐν ἑνὶ δευτερολέπτῳ, παριστᾷ τὸ διάστημα, ὅπερ ἐλευθέρως πίπτον σῶμα διανύει κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πρώτου ἡμίσεως δευτερολέπτου.

Τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, οὗ αἱ αἰωρήσεις τελοῦνται ἐν δυσὶ δευτερολέπτοις παριστᾷ τὸ διάστημα, ὅπερ ἐλευθέρως πίπτον σῶμα διανύει κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πρώτου δευτερολέπτου.

Τὸ μῆκος ἐκκρεμοῦς, οὗ αἱ αἰωρήσεις τελοῦνται ἐν τέσσαρσι δευτερολέπτοις, παριστᾷ τὸ διάστημα, ὅπερ ἐλευθέρως **πίπτον** σῶμα διανύει κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν δύο πρώτων δευτερολέπτων, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΦΥΣΙΚΗ ΜΟΝΑΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Τὸ δευτερόλεπτον δὲν εἶναι τεχνητὴ ἢ κατὰ συνθήκην μονὰς τοῦ χρόνου, ἀλλὰ φυσικὴ μονὰς τοῦ χρόνου, ὅπως τὸ ἡμερονύκτιον ὁ σεληνιακὸς μὴν καὶ τὸ ἔτος εἶναι φυσικαὶ μονάδες τοῦ χρόνου. Καὶ ἐπὶ τῇ βάσει ταύτῃ, ὅτι τὸ δευτερόλεπτον εἶνε φυσικὴ μονὰς τοῦ χρόνου, οἱ πρῶτοι Μαθηματικοὶ διήρευσαν τὴν ἡμέραν οὐχὶ εἰς 10 ἢ εἰς 100 ὥρας κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀλλὰ εἰς 24 ὥρας, ἐξισώσαντες τὰ 60'' δευτερόλεπτα πρὸς 1' πρῶτον λεπτὸν καὶ τὰ 60' πρῶτα λεπτὰ πρὸς μίαν ὥραν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς 15^0 μοίρας τῆς φαινομενικῆς τροχιᾶς τοῦ ἡλίου.

ΤΑ ΔΙΑΝΥΟΜΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

Ἐὰν τὸ μῆκος ἐκκρεμοῦς, οὗ αἱ αἰωρήσεις τελοῦνται ἐν ἑνὶ δευτερολέπτῳ, λάβωμεν ὡς μονάδα μήκους, ὡς ἕνα πῆχυν, καὶ καλέσωμεν t τὸν χρόνον μιᾶς ἡμιαιωρήσεως καὶ h τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας.

$t = \frac{1}{2''}$ καὶ $h = 1$ πῆχυν

Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ ὁμαλῶς μεταβαλλομένῃ κινήσει τῶν σωμάτων, τὰ διανυόμενα διαστήματά εἰσιν ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων, ἐν οἷς διανύονται, τὸ ἐλευθέρως πῖπτον σῶμα διανύει τὰ ἑξῆς διαδοχικὰ διαστήμαμα.

ἐπὶ 1 χρον. μονάδα $h = 1^2 = 1$ πῆχυν
ἐπὶ 2 χρον. μονάδα $h = 2^2 = 4$ »
ἐπὶ 3 χρον. μονάδα $h = 3^2 = 9$ »
ἐπὶ 4 χρον. μονάδα $h = 4^2 = 16$ »

Τὰ δὲ διαδοχικὰ διαστήματα, ἅτινα ἐλευθέρως πῖπτον σῶμα διανύει κατὰ τὴν διάρκειαν ἑκάστης χρονικῆς μονάδος, εἰσὶ τὰ ἑξῆς:

κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς 1 χρον. μονάδος $h=1$ πῆχυν
κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς 2 χρον. μονάδος $h=3$ »
κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς 3 χρον. μονάδος $h=5$ »
κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς 4 χρον. μονάδος $h=7$ »
καὶ ἐπὶ 4 χρον. μονάδας διανύει $h=16=4^2$ »

Ὥστε τὰ μὲν διαδοχικὰ διαστήματα τοῦ ὕψους, ἅτινα ἐλευθέρως πῖπτον σῶμα διανύει κατὰ τὴν διάρκειαν ἑκάστης χρονικῆς μονάδος εἰσὶν ἀνάλογα τῶν περιττῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

Ὡς χρονικὴ δὲ μονὰς ἐν τοῖς διαστήμασι τούτοις, λαμβάνεται τὸ ἥμισυ τοῦ δευτερολέπτου, διότι τόσον χρόνον $t = \frac{1}{2}$ δαπανᾷ ἡ κατάβασις ἐκκρεμοῦς, ἔχοντος μῆκος ἑνὸς ἀκριβῶς πήχεως.

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ δύο μονάδας διαφέρουσι τὰ διανυόμενα διαστήματα, ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι, ἥ τε ἐπιτάχυνσις g καὶ ἐπιβράδυνσις g ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ 2 μεθ᾽ ἕκαστον ἥμισυ δευτερόλεπτον.

ΤΥΠΟΙ

α΄) Οἱ τύποι τοῦ ἐλευθέρως πίπτοντος σώματος

Κεκτημ. ταχύτης $\upsilon=2t+1$ $\qquad \upsilon=2\sqrt{h}+1$

Διάστημα ὕψους $h=t^2$ $\qquad h=\frac{(\upsilon-1)^2}{4}$

Χρονικ. μονάδες $t=\sqrt{h}$ $\qquad t=\frac{\upsilon-1}{2}$

β΄) Οἱ τύποι τοῦ κατακορύφως ριπτομένου σώματος

Ἀρχικὴ ταχύτης $\upsilon = \frac{h}{t} \mp t \mp 1$

Διάστημα ὕψους $h = (\upsilon \pm t \pm 1)\, t$

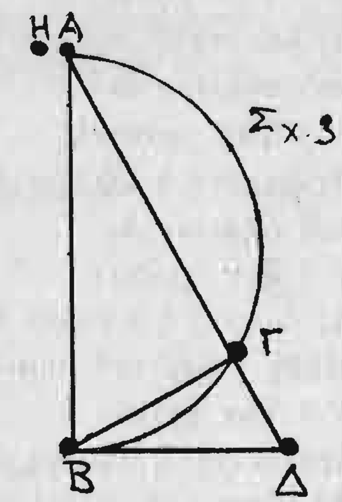
Χρον. μονάδες $t = \frac{\mp(\upsilon \pm 1) \pm \sqrt{(\upsilon \pm 1)^2 \pm 4h}}{2}$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου

Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΔ σχ. 3 ἔχομεν τὰς ἰσότητας.

Γωνία $A = 30^0$
Διάμετρος $AB = 1$
ἡμ. $A = B\Gamma = 0{,}5$
συν. $A = A\Gamma = 0{,}86602$



Ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας Α κεῖνται δύο σφαῖραι Η καὶ Α.

Ἐὰν αἱ σφαῖραι αὗται ἀφεθῶσιν ἐλεύθεραι, ἡ μὲν σφαῖρα Η θὰ πέσῃ κατακορύφως κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς διαμέτρου ΑΒ, ἡ δὲ σφαῖρα Α θὰ κινηθῇ πλαγίως κυλιομένη ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΑΓ.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σφαῖρα Η πίπτουσα

κατακορύφως διανύει τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου AB εἰς χρόνον $t = 10$ χρονικὰς μονάδας.

Καὶ ἡ σφαῖρα A κατὰ τὸ θεώρημα 1, σελ. 11, ἀφιεμένη ἐλευθέρα καὶ κυλιομένη πλαγίως πρὸς τὰ κάτω, διανύει τὸ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΑΓ εἰς χρόνον $t = 10$ χρονικὰς μονάδας.

Ἡ μὲν σφαῖρα Η, πίπτουσα κατακορύφως ἐπὶ 10 χρον. μονάδας διανύει τὰ ἑξῆς διαδοχικὰ διαστήματα.

$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19= \quad = AB = 100$ πήχεις

Ἡ δὲ σφαῖρα A, κυλιομένη πλαγίως πρὸς τὰ κάτω ἐπὶ 10 χρονικὰς μονάδας, διανύει τὰ ἑξῆς διαδοχικὰ διαστήματα·

$(1+3+5+7+9+11+13+15+17+19) \times$ συν. $A = ΑΓ = 86{,}60254$ πήχ.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ μὲν σφαῖρα B κατακορύφως ἀνιοῦσα ἐπὶ 10 μονάδας, διανύει τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου $BA = 100$ μέτρα.

Ἡ δὲ σφαῖρα Δ, κυλιομένη πλαγίως πρὸς τὰ ἄνω ἐπὶ 10 χρον.-κὰς μονάδας, διανύει τὸ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΔΑ. Ὅθεν ἔχομεν

$$\frac{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19}{\text{συν. } A} = ΔΑ = 115{,}470 \text{ πήχεις.}$$

Δὲν πρέπει νὰ φανῇ ἡμῖν παράδοξον ὅτι, ἡ σφαῖρα Δ ἀνιοῦσα, ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διανύει διάστημα μεῖζον τοῦ ὑπὸ τῆς σφαίρας B διανυομένου, διότι ἡ μὲν σφαῖρα B ἀνιοῦσα ὑφίσταται ὅλον τὸ βάρος αὐτῆς, καὶ ἕνεκα τούτου βραδύτερον ἀνέρχεται, ἡ δὲ σφαῖρα Δ ἀνέρχεται ταχύτερον, διότι μέρος τοῦ βάρους αὐτῆς δέχεται τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ΔΑ, ὅπερ ἀντιδρᾷ καὶ εἰς τὴν ἕλξιν τῆς γῆς.

Ὅθεν ἔχομεν

α′.) Τὸν χρόνον $t = 10$ χρονικὰς μονάδας ἂς δαπανᾷ ἡ σφαῖρα Η κατακορύφως πίπτουσα, ἵνα κατέλθῃ μέχρι τοῦ σημείου B

β′.) Τὸν χρόνον $t = 10$ χρονικὰς μονάδας ἂς δαπανᾷ ἡ σφαῖρα B, κατακορύφως ἀνιοῦσα, ἵνα ἀνέλθῃ μέχρι τοῦ σημείου A.

γ′.) Τὸν χρόνον $t = 10$ χρονικὰς μονάδας ἂς δαπανᾷ ἡ σφαῖρα A, πλαγίως πρὸς τὰ κάτω κυλιομένη, ἵνα κατέλθῃ μέχρι τοῦ σημείου Γ.

δ′.) Τὸν χρόνον $t = 10$ χρονικὰς μονάδας ἂς δαπανᾷ ἡ σφαῖρα Δ, πλαγίως πρὸς τὰ ἄνω κυλιομένη, ἵνα ἀνέλθῃ μέχρι τοῦ σημείου A.

Ὑπολείπεται ἤδη νὰ εὕρωμεν:

α′.) Τὸν χρόνον t, ὃν δαπανᾷ ἡ σφαῖρα A, πλαγίως πρὸς τὰ κάτω κυλιομένη, ἵνα κατέλθῃ μέχρι τοῦ σημείου Δ.

β′.) Τὸν χρόνον t, ὃν δαπανᾷ ἡ σφαῖρα Γ, πλαγίως πρὸς τὰ ἄνω κυλιομένη, ἵνα ἀνέλθῃ μέχρι τοῦ σημείου A.

γ′.) Τὸν χρόνον t, ὃν δαπανᾷ ἡ σφαῖρα B, πλαγίως πρὸς τὰ ἄνω κυλιομένη, ἵνα ἀνέλθῃ μέχρι τοῦ σημείου Γ.

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῆς ΑΔ, σχ. 3, παρέχει τὸν χρόνον t, ὃν δαπανᾷ ἡ σφαῖρα A, ἵνα κατέλθῃ μέχρι τοῦ σημείου Δ.

$$t = \sqrt{ΑΔ} = \sqrt{115{,}47} = 10{,}745 = 5'',3{,}725$$

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῆς $ΑΓ = 86{,}602$ παρέχει τὸν χρόνον t, ὃν δαπανᾷ ἡ σφαῖρα Γ, ἵνα ἀνέλθῃ μέχρι τοῦ σημείου A.

$$t = \sqrt{ΓΑ} = \sqrt{86{,}602} = 9{,}306 = 4'',653$$

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῆς $ΒΓ, = 50$, παρέχει τὸν χρόνον t, ὃν δαπανᾷ ἡ σφαῖρα B, ἵνα ἀνέλθῃ μέχρι τοῦ σημείου Γ.

$$t = \sqrt{ΒΓ} = \sqrt{50} = 7{,}07106 = 3'',5355.$$

Τοῦτο ἐν συντόμῳ ἐστι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πολυχρονίου ἐργασίας ἡμῶν, ὅπερ καὶ ὑποβάλλομεν εἰς τὴν αὐστηρὰν κρίσιν τῶν σοφῶν Καθηγητῶν τῶν Μαθηματικῶν Ἐπιστημῶν, ἀδιαφοροῦντες ἐὰν ἡ γνώμη αὐτῶν θὰ ἦνε εὐμενὴς ἢ δυσμενής· συνειθίσαμεν νὰ βλέπωμεν εἰρωνικὰ μειδιάματα.

ΤΕΛΟΣ ΚΑΙ ΤΩ ΘΕΩ ΔΟΞΑ

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

Τριγωνομετρικαὶ ἀσκήσεις
Ἡ Μουσικὴ Κλῖμαξ
Τὸ Ἑλληνικὸν Ἡμερολόγιον
Ἡ ἐναρμόνισις τῆς Ἐκκλ. Βυζαντινῆς Μουσικῆς
Ὁ Ἐπιτάφιος Θρῆνος μετρικῶς διωρθωμένος
Οἱ ἀκριβεῖς τύποι τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων
Ἓν Μαθηματικὸν λάθος
Μία πλάνη τῆς Ἀλγέβρας Φανταστικοὶ ἀριθμοὶ
Οἱ Παλαιοημερολογῖται, οἱ Νεοημερολογῖται καὶ τὸ Ἅγιον Πάσχα
Ἀδολεσχία φιλάριθμος
Ὁ Πασχαλιοδείκτης
Ἑρμηνεία τῆς Ἀκολουθίας τῶν Χαιρετισμῶν

ΕΤΟΙΜΑ ΠΡΟΣ ΕΚΤΥΠΩΣΙΝ

Τὸ Νέον Μέγα Ὡρολόγιον | Ἀμφότερα ἐγκεκριμένα
Τὸ Νέον Ἁγιασματήριον | ὑπὸ τῆς Μεγάλης Ἐκκλησίας
Μικρὸν Ἀρχιερατικὸν
Τὰ Μεγαλυνάρια τῶν ἑορτῶν διωρθωμένα καὶ συμπεπληρωμένα
Ἡ Κλεὶς τῆς Ἀλγέβρας
Πραγματεία περὶ ὡραιότητος καὶ μακροβιότητος τοῦ ἀνθρώπου
Ἡ Μουσικὴ Κλῖμαξ ἔκδοσις Β'.

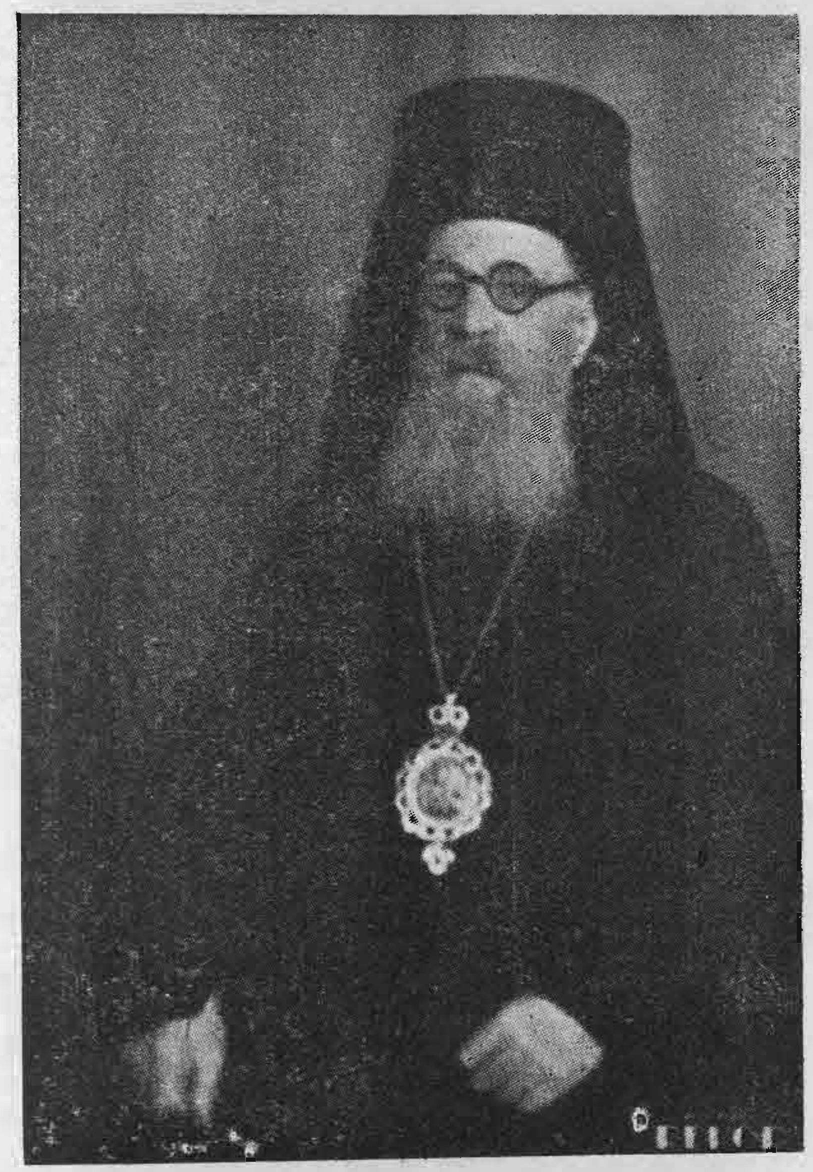
ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΝ

Τὸ ὄργανον τῆς Ἐκκλησ. Βυζαντινῆς Μουσικῆς

Διεύθυνσις: Mitropolit PANKRATİOS
Rum Patrikhanesi, Fener. — İstanbul - Türkiye

Basımevi M. KOSTANTINOPULOS

ΤΥΠΟΙΣ Μ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΓΑΛΑΤΑ ΓΕΡΑΔΗ ΤΖΑΜΙ, ΚΑΡΑΝΤΙΝΑ ΣΟΚΑΚ ΓΙΟΡΔΑΝ ΧΑΝ



† Ο ΜΗΤΡΟΠΟΛΙΤΗΣ ΓΑΝΟΥ ΚΑΙ ΧΩΡΑΣ
ΠΑΓΚΡΑΤΙΟΣ (ΒΑΤΟΠΑΙΔΙΝΟΣ)
ΜΑΚΕΔΩΝ
ΕΚ ΒΑΒΔΟΥ ΤΗΣ ΧΑΛΚΙΔΙΚΗΣ
ΔΙΔΑΣΚΑΛΟΣ ΤΗΣ ΘΕΟΛΟΓΙΑΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΕΛΟΣ ΤΗΣ ΑΓΙΑΣ ΚΑΙ ΙΕΡΑΣ ΣΥΝΟΔΟΥ
ΤΟΥ ΟΙΚΟΥΜΕΝΙΚΟΥ ΠΑΤΡΙΑΡΧΕΙΟΥ