ΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΔΙΑΝΟΠΟΥΛΟΥ

Τῷ ἀξιολόγῳ κυρίῳ Δ. Δημητρακόπουλῳ
Διευθυντῇ τοῦ ἐμπ. σχολείου.
Ἐξαιρέτου ὑποδείγματος ἕνεκεν.
Ὁ Α. Κανόπουλος

X
260

3885

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ

ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΥΠΟ

Γ. Α. ΛΙΑΝΟΠΟΥΛΟΥ

Διδάκτορος καὶ Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν Ἐπιστημῶν.

Ἀδεία τοῦ Ὑπουργείου τῆς Δημοσίας Ἐκπαιδεύσεως.

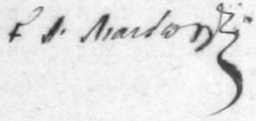
ΕΝ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥΠΟΛΕΙ,

ΤΥΠΟΙΣ Α. ΚΟΡΟΜΗΛΑ ΚΑΙ ΥΙΟΥ.

(Ὁδὸς Πεμπτοπαζάρου Ἀριθ. 11).

1881.

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν κάτω ὑπογραφὴν καταδιωχθήσεται αὐστηρότατα δυνάμει τοῦ περὶ τύπου νόμου.



ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

Ἔχων ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ διδασκαλία τῆς Ἀριθμητικῆς ἐν τοῖς Σχολείοις γίνεται τὸ μὲν ὅπως ἀσκῶνται οἱ μαθηταὶ εἰς τὸ ὀρθῶς σκέπτεσθαι καὶ τὸ κρίνειν, τὸ δὲ ὅπως ἀποκτῶσι δι' αὐτῆς γνώσεις τὰ μάλιστα ἀναγκαίας εἰς τὸν κοινωνικὸν βίον, ἐν τῇ Στοιχειώδει ταύτῃ πραγματείᾳ μου ἀφ' ἑνὸς μὲν παρέθηκα ἁπλᾶ τινα θεωρήματα πρὸς ἀπόδειξιν τῶν διαφόρων ἀριθμητικῶν ἀληθειῶν, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐξέθηκα ὅσον ἠδυνάμην σαφέστερον τὰ περὶ μέτρων, σταθμῶν καὶ νομισμάτων, τὰς συντομεύσεις καὶ ἁπλοποιήσεις ὅσων γίνεται χρῆσις ἐν τῇ κοινωνίᾳ, τὰς διαφόρους μεθόδους πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου, βραχέα τινὰ περὶ χρεωγράφων καὶ ἄλλα τινὰ ἐν τῇ κοινωνίᾳ χρήσιμα. Ἐπειδὴ δὲ ἡ συγγραφή μου προώρισται ὡς διδακτικὸν βιβλίον εἰς τὰ Ἑλληνικὰ καὶ Ἀστυκὰ σχολεῖα καὶ ἐπειδὴ τῶν τοιούτων σχολείων οἱ ἀπόφοιτοι πρέπει νὰ ὦσιν οὕτω κατηρτισμένοι, ὥστε νὰ δύνωνται νὰ εἰσέρχωνται ἀμέσως εἰς τὴν κοινωνίαν, ἐν δὲ τῇ κοινωνίᾳ συχνὰ ἀπαντῶσι ζητήματα ἀνατοκισμοῦ καὶ χρεωλυσίας, προσέθηκα ἐν παραρ-

τήματι ὀλίγα τινὰ περὶ γεωμετρικῶν προόδων καὶ λογαρίθμων. Ἵνα μὴ δ' ἐπιβαρύνωνται οἱ μαθηταὶ δι' ἀγορᾶς λογαριθμικῶν πινάκων, προσέθηκα καὶ λογαριθμικὸν πίνακα μετὰ 5 δεκαδικῶν ψηφίων πρὸς λύσιν τῶν ἁπλουστέρων προβλημάτων τοῦ εἴδους τούτου.

Καὶ ταῦτα μὲν ἐν γένει· ὅσον ἀφορᾷ δὲ τὰ καθέκαστα, θεωρῶ καθῆκόν μου νὰ προσθέσω τὰ ἑξῆς ὀλίγα.

ά. Ἐπειδὴ ἐκ πείρας ἐπείσθην ὅτι οἱ μαθηταὶ εὐκολώτερον ἐννοοῦσι τὴν σημασίαν τῶν κλασμάτων, ἂν παραστήσῃ τις αὐτὰ ὡς πηλίκα διαιρέσεως, ἔδωκα μὲν ἐν ἀρχῇ τὸν ὁρισμὸν τῆς κλασματικῆς μονάδος, ὑπεισήγαγον ὅμως ἐν τοῖς περὶ διαιρέσεως τὸν ὁρισμὸν τοῦ κλάσματος, παραστήσας αὐτὸ ὡς σημείωσιν τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν.

Ὁ τρόπος οὗτος τῆς παραστάσεως τῶν κλασμάτων ἐπιτρέπει ἡμῖν νὰ διακρίνωμεν δύο πηλίκα, τέλειον καὶ ἀτελὲς καὶ νὰ δικαιολογῶμεν εὐκόλως τὰς ἐργασίας δι' ὧν ἐκτελοῦνται αἱ τέσσαρες πράξεις τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

β'. Ἐπειδὴ ἡ γνώμη μου εἶνε ὅτι οἱ μαθηταὶ δὲν πρέπει νὰ λαμβάνωσι βιβλίον ἔντυπον ὡς βοήθημα διὰ τὸ μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς, εἰμὴ ἀφ' οὗ μάθωσι τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐνόμισα ὅτι θὰ ἠὔξανον ἀσκόπως τὰ τυπογραφικὰ φύλλα τοῦ βιβλίου μου, ἂν ἐνησχολούμην εἰς λεπτομερεῖς περι-

γραφὰς τῶν πράξεων τούτων καὶ ἠρκέσθην εἰς συντομωτάτας.

γ'. Ἐπειδὴ ἡ πεῖρα μὲ ἐδίδαξεν ὅτι οἱ μαθηταὶ δυσκόλως ἐννοοῦσι τὴν ἀξίαν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ἂν παραστήσῃ τις αὐτοὺς, ὅπως συνήθως παρίστανται εἰς τὰς Ἀριθμητικὰς, διέκρινα δεκαδικὸν κλάσμα ἀπὸ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, εὐκολύνας οὕτω καὶ τὴν δικαιολογίαν τῶν ἐργασιῶν, δι' ὧν ἐκτελοῦνται αἱ πράξεις.

δ'. Ἐπειδὴ ἡ ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀφ' ἑνὸς μὲν ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τῆς στοιχειώδους Ἀριθμητικῆς, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὀλίγην ἐφαρμογὴν εὑρίσκει εἰς τὸν κοινωνικὸν βίον, περιωρίσθην μόνον εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης. Καὶ

έ. Ἐπειδὴ τὰ περὶ λογαρίθμων ἐτέθησαν μόνον διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ ἀνατοκισμοῦ καὶ τῆς χρεωλυσίας, περιωρίσθην νὰ θεωρήσω τοὺς λογαρίθμους ὡς ἐκθέτας τοῦ ἀριθμοῦ 10.

Ταῦτα καὶ περὶ τῶν καθέκαστα.

Εὐτυχῆ θέλω λογίσει ἐμαυτὸν, ἐὰν τὸ ἔργον μου γένηται κατά τι χρήσιμον τῇ σπουδαζούσῃ νεότητι.

Γ. Α. Λιανοπουλος.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ.

Ὁρισμοί.—Προεισαγωγικαὶ γνώσεις.

1. Ἡ Ἀριθμητική, ὅπως πᾶσαι αἱ Μαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι, ἐξετάζει τὸ ποσόν.

2 Λέγεται δὲ ποσὸν πᾶν τὸ ἐπιδεκτικὸν αὐξήσεως καὶ ἐλαττώσεως π. χ. ὁ χρόνος, τὰ μήκη, τὰ βάρη, τὰ χρήματα κτλ.

3. Τῶν ἐν τῇ φύσει ποσῶν τινὰ μὲν λέγονται διακεκριμένα, τινὰ δὲ συνεχῆ. Λέγεται δὲ τὸ ποσὸν διακεκριμένον μέν, ὅταν τὰ μέρη αὐτοῦ εἶνε ἀπ' ἀλλήλων κεχωρισμένα φυσικῶς· π. χ. πληθὺς μήλων· συνεχὲς δέ, ὅταν τὰ μέρη αὐτοῦ εἶνε οὕτω πρὸς ἄλληλα συνηνωμένα, ὥστε τὸ τέλος τοῦ ἑνὸς δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ἀρχὴ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου· π. χ. ὁ χρόνος, τὸ μῆκος καὶ τὰ τοιαῦτα.

4. Διὰ νὰ γνωρίσωμεν ἀκριβῶς τὸ μέγεθος ἑνὸς ποσοῦ, πρέπει νὰ συγκρίνωμεν αὐτὸ πρὸς τὸ γνωστὸν ἡμῖν μέγεθος ἄλλου τινὸς ποσοῦ ὁμοειδοῦς. Οὕτω· διὰ ν' ἀποκτήσωμεν μὲν ἀκριβῆ γνῶσιν τοῦ μήκους ἑνὸς τοίχου, πρέπει νὰ συγκρίνωμεν αὐτὸ πρὸς τὸ γνωστὸν ἡμῖν μῆκος τοῦ πήχεως· διὰ νὰ λάβωμεν δὲ ἀκριβῆ ἔννοιαν τῆς πληθύος τῶν δένδρων ἑνὸς κήπου, πρέπει να συγκρίνωμεν αὐτην πρὸς τὸ ἓν δένδρον.

5. Ὁ πῆχυς ἐν τῇ πρώτῃ καὶ τὸ δένδρον ἐν τῇ δευτέρᾳ

συγκρίσει καλοῦνται μονάδες. Ὀνομάζεται λοιπὸν μονὰς τὸ ποσὸν, ὅπερ χρησιμεύει ὡς ὅρος συγκρίσεως διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μεγέθους τῶν ὁμοειδῶν αὐτῷ ποσῶν.

6. Ἐκ τῆς συγκρίσεως τοῦ μεγέθους ἑνὸς ποσοῦ πρὸς τὸ μέγεθος τῆς μονάδος εὑρίσκομεν πόσα μεγέθη ἴσα ἕκαστα τῇ μονάδι ἑνούμενα, δύνανται ν' ἀποτελέσωσι τὸ δοθὲν μέγεθος. Οὕτως· ἐκ μὲν τῆς μετρήσεως τοῦ τοίχου εὑρίσκομεν ἐκ πόσων πήχεων ἀποτελεῖται τὸ μῆκος τοῦ τοίχου· ἐκ δὲ τῆς ἀριθμήσεως τῶν δένδρων τοῦ κήπου ποριζόμεθα πόσα δένδρα περιέχονται ἐν τῷ κήπῳ.

7. Τὸ πόσοι πήχεις ἐν τῇ πρώτῃ συγκρίσει καὶ τὸ πόσα δένδρα ἐν τῇ δευτέρᾳ λέγεται ἀριθμός.

Ὀνομάζεται λοιπὸν ἀριθμὸς τὸ ἐκ τῆς συγκρίσεως ἑνὸς ποσοῦ πρὸς τὸ μέγεθος τῆς μονάδος προκύπτον ἀποτέλεσμα.

Ὁ ἀριθμὸς λέγεται συγκεκριμένος ἢ ἀφηρημένος, καθ' ὅσον συνεκφέρεται, ἢ οὔ, τὸ εἶδος τῶν μονάδων τὰς ὁποίας παριστᾷ. Οὕτως ὁ μὲν ἀριθμὸς πέντε ἄνθρωποι εἶνε συγκεκριμένος, ὁ δὲ ἀριθμὸς πέντε, ἀφηρημένος.

8. Ὅταν τὸ μετρητέον ποσὸν εἶνε μικρότερον τῆς ληφθείσης μονάδος, λαμβάνομεν ὡς μονάδα ὡρισμένον τι μέρος τῆς ἀρχικῆς καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν καταμέτρησιν διὰ τῆς νέας ταύτης μονάδος. Οὕτως· ἐὰν ἔχωμεν νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος ὑφάσματος βραχυτέρου τοῦ πήχεως, λαμβάνομεν ὡς μονάδα ὡρισμένον τι μέρος τοῦ πήχεως π. χ. τὸ ὄγδοον καὶ μετροῦμεν τὸ ὕφασμα διὰ τῆς μονάδος ταύτης.

Τὴν νέαν ταύτην μονάδα ὀνομάζομεν κλασματικὴν, τὸ δ' ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ταύτης κλασματικὸν ἀριθμὸν, ἢ ἁπλῶς κλάσμα.

Σημ. Ἐπειδὴ ὅσῳ μικροτέρα εἶνε ἡ μετροῦσα ποσόν τι μονὰς, τόσῳ μεγαλείτερος εἶνε ὁ προκύπτων ἀριθμός· καὶ ἐπειδὴ πάσης μονάδος δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ἄλλην μικροτέραν, ἕπεται ὅτι παντὸς ἀριθμοῦ δυνατὸν νὰ ὑπάρξῃ ἄλλος μεγαλείτερος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Ἀριθμήσεις.

9. Ἀρίθμησις ὀνομάζεται ἡ τέχνη τοῦ σχηματίζειν, παριστάναι καὶ ἀπαγγέλλειν τοὺς ἀριθμοὺς καὶ περιέχει διὰ τοῦτο τὸν σχηματισμὸν, τὴν γραφὴν καὶ τὴν ἀπαγγελίαν αὐτῶν.

α. Σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν. — Οἱ ἀριθμοὶ σχηματίζονται ἐκ τῆς ἑνώσεως μιᾶς ἢ πλειοτέρων μονάδων. Οὕτω· μία μονὰς καὶ ἔτι μία παράγουσι τὸν ἀριθμὸν δύο· ἐννέα μονάδες καὶ ἔτι μία παράγουσι τὸν ἀριθμὸν δέκα· ἐννέα δεκάδες καὶ ἔτι μία, τὸν ἀριθμὸν ἑκατόν· ἐννέα ἑκατοντάδες καὶ ἔτι μία, τὸν ἀριθμὸν χίλια· ἐννεακόσιαι ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδες καὶ ἔτι μία, τὸν ἀριθμὸν ἓν ἑκατομμύριον· ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα ἑκατομμύρια καὶ ἔτι ἓν, τὸν ἀριθμὸν ἓν δισεκατομμύριον καὶ οὕτω καθεξῆς.

β. Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν. — Διὰ τῶν δέκα τούτων χαρακτήρων

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

ὧν ἡ σημασία εἶνε γνωστὴ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τοὺς ἀπείρους τὸ πλῆθος ἀριθμοὺς, παραδεχόμενοι τὴν ἀκόλουθον συνθήκην.

Πᾶν ψηφίον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἑτέρου γεγραμμένον ἐκφράζει μονάδας δεκάκις μεγαλειτέρας.

Κατὰ τὴν συνθήκην ταύτην, ἵνα παραστήσωμεν διὰ τῆς γραφῆς τοὺς ἀριθμοὺς δέκα, ἑκατὸν, χίλια .... πρέπει νὰ γράψωμεν τὸν χαρακτῆρα 1 πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἑνὸς, δύο, τριῶν ... μηδενικῶν. Ἵνα δὲ γράψωμεν ἀριθμὸν περιέχοντα μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας καὶ χιλιάδας, πρέπει νὰ θέσωμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν μονάδων τὰς δεκάδας, πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν δεκάδων τὰς ἑκατοντάδας καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν ἑκατοντάδων τὰς χιλιάδας.

Σημ. Κατὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν αἱ τυχὸν ἐλλείπουσαι τάξεις ἀναπληροῦνται διὰ μηδενικῶν.

γ. Ἀπαγγελία τῶν ἀριθμῶν.— Ἀριθμὸν γεγραμμένον δυνάμεθα ν' ἀναγνώσωμεν κατὰ δύο τρόπους· ἤ δηλ. ἀναγινώσκομεν ἕκαστον ψηφίον χωριστὰ, συναπαγγέλλοντες τὸ εἶδος τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας φανερώνει· ἢ χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα, ἀρχόμενοι ἐκ τῶν δεξιῶν καὶ ἀναγινώσκομεν ἕκαστον τμῆμα ὡς ἕνα ἀριθμὸν, συναπαγγέλλοντες τὸ εἶδος τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ τμήματος. Ὁ τελευταῖος οὗτος τρόπος εἶνε ἐν χρήσει κοινῇ.

Σημ. α. Τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δυνατὸν νὰ ἔχῃ ἓν ἢ καὶ δύο ψηφία.

Σημ. β. Ἵνα διακρίνωμεν τὰ διάφορα τμήματα ἀπ' ἀλλήλων, ὀνομάζομεν τὸ μὲν πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ, τμῆμα τῶν μονάδων· τὸ κατόπιν αὐτοῦ ἐρχόμενον, τμῆμα τῶν χιλιάδων· τὸ κατόπιν τούτου, τμῆμα τῶν ἑκατομμυρίων καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημ. γ. Ἵνα γράψωμεν ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον, πρέπει ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν νὰ προσέξωμεν, ὅπως δώσωμεν

τὴν κατάλληλον θέσιν εἰς ἕκαστον τῶν ἀπαγγελλομένων τμημάτων καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ τυχὸν ἐλλείποντα ψηφία αὐτῶν διὰ τοῦ χαρακτῆρος 0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Πρόσθεσις.

10. Πρόσθεσις ὀνομάζεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν πόσας ἐν συνόλῳ μονάδας περιέχουσι πολλοὶ ὁμοειδεῖς ἀλλήλοις ἀριθμοὶ δεδομένοι.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ταύτης ὀνομάζεται ἄθροισμα, κεφάλαιον, ἢ ὅλον. Οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ, προσθετέοι καὶ τὸ σημεῖον +, διὰ τοῦ ὁποίου δηλοῦμεν, ὅτι πρέπει νὰ γίνῃ πρόσθεσις, σύν.

Εὕρεσις τοῦ ἀθροίσματος πολλῶν ἀριθμῶν.

11. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς προσθέσεως, ἵνα εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν πρῶτον προσθετέον ἑκάστην τῶν μονάδων τοῦ δευτέρου, τρίτου, τετάρτου μέχρι τοῦ τελευταίου προσθετέου, τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην· π. χ. τὸ ἄθροισμα 5+3+2 εὑρίσκεται συμφώνως πρὸς τὰ εἰρημένα οὕτω· 5+1 κάμνουσιν 6· 6+1 κάμνουσιν 7· 7+1 κάμνουσιν 8· 8+1 κάμνουσιν 9· 9+1 κάμνουσι 10.

Ἐπειδὴ ὅμως τοιουτοτρόπως γινομένη ἡ πρόσθεσις καὶ πο-

λὺν χρόνον καταναλίσκει καὶ ἐπίπονος λίαν καθίσταται, ἐπενοήθη ἡ μεθοδικὴ λεγομένη πρόσθεσις, διὰ τῆς ὁποίας ὁ γινώσκων ἀπὸ μνήμης τὰ ἀθροίσματα ἁπλῶν τινων προσθέσεων, δύναται νὰ εὕρῃ τὸ ἄθροισμα οἱασδήποτε προσθέσεως ἀσυγκρίτως ταχύτερα.

Πρὸς ἀκριβῆ κατανόησιν τῆς προσθέσεως ταύτης, ἂς ζητήσωμεν τὸ ἄθροισμα

$$5784+356+2895+72.$$

Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα πρέπει νὰ περιέχῃ μονάδας μὲν $2+5+6+4$, δεκάδας δὲ $7+9+5+8$, ἑκατοντάδας δὲ $8+3+7$ καὶ χιλιάδας $2+5$, ἵνα εὐκολυνώμεθα εἰς τὴν πρόσθεσιν, γράφομεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ὑπὸ τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· ἄγομεν ὑπὸ τὸν τελευταῖον γραμμὴν ὁριζόντιον καὶ ὑπὸ ταύτην γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ ἀθροίσματος.

Τῆς προσθέσεως ἀρχόμεθα ἀπὸ τῶν μονάδων οὕτω·

$$\begin{array}{r} 5784 \\ 356 \\ 2895 \\ 72 \\ \hline 9107 \end{array}$$

Στήλη τῶν μονάδων. — 2 καὶ 5, 7 καὶ 6, 13 καὶ 4, 17· γράφομεν 7 εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων καὶ τὴν δεκάδα προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων.

Στήλη τῶν δεκάδων. — 1 ἡ κρατουμένη καὶ 7, 8 καὶ 9, 17 καὶ 5, 22 καὶ 8, 30· γράφομεν 0 εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων καὶ τὰς 3 ἑκατοντάδας προσθέτομεν εἰς τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν στήλην.

Στήλη τῶν ἑκατοντάδων. — 3 αἱ κρατούμεναι καὶ 8, 11 καὶ 3, 14 καὶ 7, 21· γράφομεν 1 εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων καὶ τὰς 2 χιλιάδας προσθέτομεν εἰς τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν στήλην.

Στήλη τῶν χιλιάδων. — 2 αἱ κρατούμεναι καὶ 2, 4 καὶ 5, 9· γράφομεν 9 εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς προσθέσεως.

Ἵνα προσθέσωμεν πολλοὺς ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς οὕτως ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ὑπὸ τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· καὶ ἀρχίζοντες ἀπὸ τῆς ἐκ δεξιῶν πρώτης στήλης, προσθέτομεν τοὺς ἐν ἑκάστῃ κατακορύφῳ περιεχομένους ἀριθμούς· καὶ ἐὰν μὲν τὸ ἄθροισμα δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, τὸ γράφομεν ὑπὸ τὴν αὐτὴν στήλην· ἐὰν δὲ ὑπερβαίνῃ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, τὰς μὲν μονάδας γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην, ἧς εὑρήκαμεν τὸ ἄθροισμα, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν μετὰ τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας στήλης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Ἀφαίρεσις.

13. Ἀφαίρεσις ὀνομάζεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν κατὰ πόσας μονάδας ἀριθμός τις δεδομένος εἶνε μεγαλείτερος ἄλλου ἐπίσης δεδομένου· ἢ ἡ πρᾶξις, δι' ἧς, δεδομένων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τρίτον, ὅστις μετὰ τοῦ δευτέρου προστιθέμενος, παράγει τὸν πρῶτον· ἢ ἡ πρᾶξις, δι' ἧς δεδο-

μένου τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν, εὑρίσκομεν τὸν ἕτερον· ἢ τέλος, ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν δεδομένον ἀριθμόν, καθ' ὅσας μονάδας περιέχει ἄλλος ἀριθμὸς ἐπίσης δεδομένος.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ταύτης καλεῖται διαφορὰ, ἢ ὑπόλοιπον. Ὁ ἀριθμὸς ὅστις πρόκειται νὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται μειωτέος, ὁ δὲ ἀριθμὸς ὅστις πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ, ἀφαιρετέος. Τὸ δὲ σημεῖον —, οὗτινος γίνεται χρῆσις ἐν τῇ ἀφαιρέσει, καλεῖται πλήν.

14. Γνωρίζοντες ἀπὸ μνήμης ἁπλᾶς τινας ἀφαιρέσεις καὶ παραδεχόμενοι ὡς ἀποδεδειγμένον, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον μιᾶς ἀφαιρέσεως δὲν μεταβάλλεται αὐξανομένων μειωτέου τε καὶ ἀφαιρετέου κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν πᾶσαν ἀφαίρεσιν, ὡς ἀκολούθως.

Ἔστω νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τοῦ ἀριθμοῦ 5892 καὶ 3657.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως, ἵνα εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν τὰς μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας καὶ χιλιάδας τοῦ μειωτέου κατὰ τὰς μονάδας, ἑκατοντάδας καὶ χιλιάδας τοῦ ἀφαιρετέου. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ μονάδες 7 τοῦ ἀφαιρετέου εἶνε περισσότεραι τῶν μονάδων 2 τοῦ μειωτέου, αὐξάνομεν τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου κατὰ 10 καὶ τὸ ἄθροισμα 12 ἐλαττοῦμεν κατὰ τὰς 7 μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου· ἵνα μὴ μεταβληθῇ ὅμως τὸ ὑπόλοιπον, αὐξάνομεν κατὰ 1 τὰς δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἐλαττοῦμεν τὰς 9 δεκάδας τοῦ μειωτέου, οὐχὶ κατὰ 6, ἀλλὰ κατὰ 7 δεκάδας. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐργαζόμεθα μέχρι τοῦ τέλους τῆς πράξεως.

Ἐν τῇ κοινῇ χρήσει διατάσσοντες τὴν ἐργασίαν ὡς ἕπεται

$$\begin{array}{r} 5892 \\ 3567 \\ \hline 2325 \end{array}$$

ἐργαζόμεθα οὕτω.

Στήλη τῶν μονάδων. — 7 ἀπὸ 12, 5· γράφομεν 5 ὑπὸ τὴν τὴν στήλην τῶν μονάδων.

Στήλη τῶν δεκάδων. — 6 καὶ 1, 7· 7 ἀπὸ 9, 2· γράφομεν 2 εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων.

Στήλη τῶν ἑκατοντάδων. — 5 ἀπὸ 8, 3· γράφομεν 3 ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων.

Στήλη τῶν χιλιάδων. — 3 ἀπὸ 5, 2· γράφομεν 2 εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἵνα ἀφαιρέσωμεν δύο ἀριθμοὺς, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ὑπὸ τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· καὶ, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν, ἀφαιροῦμεν τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν ὁμοταγῶν μονάδων τοῦ μειωτέου· ὁσάκις δὲ συμβῇ, αἱ μονάδες μιᾶς τινος τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου νὰ εἶνε μεγαλείτεραι τῶν ὁμοταγῶν μονάδων τοῦ μειωτέου, αὐξάνομεν τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου κατὰ 10 καὶ εἶτα ἀφαιροῦμεν. Ἵνα μὴ μεταβληθῇ ὅμως τὸ ὑπόλοιπον, αὐξάνομεν τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ 1 καὶ μετὰ τοῦτο ἐξακολουθοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Πολλαπλασιασμός.

15. Πολλαπλασιασμὸς ὀνομάζεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας

δοθέντα ἀριθμὸν ἐπαναλαμβάνομεν τοσάκις εἰς τὸν ἑαυτόν του, ὁσάκις ἡ μονὰς ἐπαναληφθεῖσα, παρήγαγεν ἀριθμὸν ἐπίσης δεδομένον.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ταύτης καλεῖται γινόμενον· ὁ εἷς τῶν δεδομένων ἀριθμῶν πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ ἄλλος πολλαπλασιαστής· τὸ δὲ σημεῖον ×, ὅπερ μεταχειριζόμεθα, ἵνα δηλώσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῶσι δύο ἀριθμοί, λέγεται ἐπί.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγονται, κοινῷ ὀνόματι, παράγοντες.

Πολλαπλασιαστέος λέγεται ἐκεῖνος ἐκ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ὅστις μέλλει νὰ ἐπαναληφθῇ πολλάκις εἰς ἑαυτόν.

Ἐξήγησίς τινων ὅρων.

Ἀξίωμα ὀνομάζεται πᾶσα πρότασις, ἧς ἡ ἀλήθεια εἶνε καθ' ἑαυτὴν φανερά· π. χ. Ἡ οἰκία εἶνε μεγαλειτέρα ἑνὸς τῶν δωματίων αὐτῆς.

Θεώρημα ὀνομάζεται πᾶσα πρότασις, ἥτις δὲν εἶνε καθ' ἑαυτὴν φανερὰ, ἀλλ' ἔχει ἀνάγκην ἀποδείξεως· π. χ. Ἡ γῆ εἶνε σφαιροειδής.

Πόρισμα λέγεται πᾶσα συνέπεια προκύπτουσα ἐξ ἄλλης τινὸς προτάσεως· π. χ. Τῆς γῆς οὔσης σφαιροειδοῦς πάντες οἱ τόποι δὲν ἔχουσι τὴν ἀνατολὴν τοῦ Ἡλίου κατὰ τὴν αὐτὴν χρονικὴν στιγμήν.

Σχόλιον ὀνομάζεται οὐσιώδης παρατήρησις γινομένη ἐπὶ μιᾶς, ἢ πλειοτέρων προτάσεων.

Τὸ σημεῖον = χωρίζον δύο ποσότητας, σημαίνει, ὅτι ἡ μία εἶνε ἴση τῆς ἄλλης καὶ λέγεται σημεῖον ἰσότητος· π. χ.

$$5+3=8.$$

Ἡ ποσότης, ἥτις εὑρίσκεται πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ σημείου

τῆς ἰσότητος λέγεται πρῶτον μέλος· ἡ δὲ ποσότης, ἥτις εὑρίσκεται δεξιὰ αὐτοῦ, λέγεται δεύτερον μέλος. Ἡ ὅλη παράστασις λέγεται ἰσότης.

Τὸ σημεῖον >, χωρίζον δύο ποσότητας, σημαίνει ὅτι ἡ πρὸς τὸ ἄνοιγμα γεγραμμένη εἶνε μείζων τῆς πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας.

Ἀξιώματα.

1. Δύο ποσότητες ἴσαι πρὸς τρίτην, εἶνε καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

2. Μία ἰσότης ἢ ἀνισότης δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

3. Μία ἰσότης ἢ ἀνισότης δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

4. Μία ἰσότης ἢ ἀνισότης δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

5. Μία ἰσότης ἢ ἀνισότης δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

6. Μία ἰσότης ἢ ἀνισότης δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν.

7. Μία ἰσότης ἢ ἀνισότης δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἐξαγάγωμεν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν οἱανδήποτε ῥίζαν.

Σημ. ά. Τὰ τρία τελευταῖα ἀξιώματα θὰ νοηθῶσι βραδύτερον.

Σημ. β'. Ἐν τῇ συνεχείᾳ τῆς στοιχειώδους ταύτης πραγματείας παραδεχόμεθα ὡς ἀποδεδειγμένας τὰς ἑξῆς ἀληθείας.

ά. Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, μεταβαλλομένης ὅπως δήποτε τῆς τάξεως τῶν παραγόντων αὐτοῦ· π. χ. $5\times4\times7\times3=7\times5\times3\times4.$

β'. Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἀντικαθισταμένων δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων διὰ τοῦ τετελεσμένου αὐτῶν γινομένου· π. χ.

$$3\times7\times2\times4\times9=24\times7\times9.$$

γ'. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἐπὶ γινόμενον πολλῶν ἄλλων, πρέπει νὰ σχηματίσωμεν γινόμενον ἔκ τε τῶν παραγόντων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τῶν παραγόντων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· π. χ.

$$(5\times8\times9)\times(3\times4)=5\times8\times9\times3\times4.$$

δ'. Τὸ ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων δὲν μεταβάλλεται, μεταβαλλομένης ὅπως δήποτε τῆς τάξεως αὐτῶν· π. χ.

$$3+4+7+9+8=7+8+4+3+9.$$

16. *Θεώρημα.* Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων ἐπὶ ἀριθμόν τινα, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ νὰ ἀθροίσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ ἄθροισμα $5+4+7$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3 καὶ ἂς ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι $5\times3+4\times3+7\times3$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὸ γινόμενον θὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου $5+4+7$, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς 3 προέκυψεν ἐκ τῆς μονάδος. Ἐπειδὴ δὲ ὁ πολλαπλασιαστὴς 3 προῦκυψεν ἐκ τῆς μονάδος, ἐπαναληφθείσης εἰς ἑαυτὴν τρὶς, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ γινόμενον θὰ προκύψῃ ἐκ τοῦ $5+4+7$, ἀφ' οὗ ἐπαναληφθῇ εἰς ἑαυτὸν τρίς. Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν χ τὸ ζητούμενον γινόμενον, θέλομεν ἔχει

$$\chi=5+4+7+5+4+7+5+4+7$$

ἢ

$$\chi=5+5+5+4+4+4+7+7+7$$

Ἀλλὰ

$$5+5+5=5\times3$$
$$4+4+4=4\times3$$
$$7+7+7=7\times3$$

ὅθεν

$$\chi=5\times3+4\times3+7\times3.$$ ὅ. ἔ. δ.

17. *Θεώρημα.* Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἄθροισμα πολλῶν ἄλλων, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἑφ' ἕκαστον προσθετέον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τὰ μερικὰ γινόμενα νὰ τὰ προσθέσωμεν.

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $3+4+5$ καὶ ἂς ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶνε $8\times3+8\times4+8\times5.$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ

$$8\times(3+4+5)=(3+4+5)\times8$$

καὶ ἐπειδὴ

$$(3+4+5)\times8=3\times8+4\times8+5\times8$$

ἕπεται ὅτι

$$8(3+4+5)=3\times8+4\times8+5\times8.$$ ὅ. ἔ. δ.

18. *Θεώρημα.* Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων ἐπὶ ἄθροισμα πολλῶν ἄλλων, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἑφ' ἕκαστον προσθετέον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τὰ μερικὰ γινόμενα νὰ τὰ προσθέσωμεν.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ ἄθροισμα $(7+3+8)$ ἐπὶ $(4+5)$ καὶ ἂς ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ γινόμενον ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι

$$(7+3+8)\times4+(7+3+8)\times5.$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ

$$7+3+8 = 18$$

ἕπεται ὅτι

$$(7+3+8)\times(4+5) = 18\times(4+5).$$

Ἐπειδὴ δὲ

$$18\times(4+5) = 18\times4+18\times5$$

ἕπεται ὅτι

$$(7+3+8)\times(4+5) = 18\times4+18\times5$$

ἤ

$$(7+3+8)\times(4+5) = (7+3+8)\times4+(7+3+8)\times5.$$

ὅ. ἔ. δ.

19. *Θεώρημα.* Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν, ἐπὶ ἀριθμόν τινα, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν, καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἀφαιρετέου τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν.

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ἡ διαφορὰ 9—4 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3 καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι

$$(9-4)\times3 = 9\times3-4\times3$$

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχομεν

$$(9-4)\times3 = 9-4+9-4+9-4 \quad \text{ἤ}$$

$$(9-4)\times3 = 9+9+9-4-4-4$$

ἀλλὰ $9+9+9 = 9\times3$

ὅθεν

$$(9-4)\times3 = 9\times3-4-4-4$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἄνω ἰσότητος ἀφαιρεῖται ὁ 4 τρὶς, ἤτοι τὸ γινόμενον 4×3, ἕπεται ὅτι

$$(9-4)\times3 = 9\times3-4\times3.$$ ὅ. ἔ. δ.

Εὕρεσις τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν.

20. Ἵνα ἐκτελέσωμεν οἷον δήποτε πολλαπλασιασμὸν, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ γινόμενα δύο οἵων δήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Τῷ ὄντι, ὑποτεθείσθω κατ' ἀρχὰς, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 7648 ἐπὶ 7.

Διατάσσοντες τὴν ἐργασίαν ὡς ἕπεται

$$\begin{array}{r} 7648 \\ \times\,7 \\ \hline 53536 \end{array}$$

ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως·

7 ἐπὶ 8 κάμνουν 56· γράφομεν 6 εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων, τὰς δὲ 5 δεκάδας ἐπιφυλασσόμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῆς στήλης τῶν δεκάδων.

Μεταβαίνομεν ἤδη εἰς τὰς δεκάδας. — 7 ἐπὶ 4 κάμνουσιν 28 καὶ 5 αἱ κρατούμεναι γίνονται 33· γράφομεν 3 εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκάδων, τὰς δὲ 3 ἑκατοντάδας ἐπιφυλασσόμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἑκατοντάδων.

Μεταβαίνομεν εἰς τὰς ἑκατοντάδας. — 7 ἐπὶ 6, 42 καὶ 3, 45· γράφομεν 5 εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων.

Μεταβαίνομεν εἰς τὰς χιλιάδας. — 7 ἐπὶ 7, 49 καὶ 4, 53· γράφομεν ὁλόκληρον τὸν 53.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἐπὶ μονοψήφιον ἀριθμὸν, πολλαπλασιάζομεν (ἀρχίζοντες ἀπὸ τῶν δεξιῶν καὶ προχωροῦντες πρὸς τὰ ἀριστερὰ) ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν· καὶ ἐὰν μὲν τὸ γινόμενον δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν ἀριθμὸν 9, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν αὐτὴν στήλην· ἐὰν δὲ ὑπερβαίνῃ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, τὰς μὲν μονά-

δας γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην, ἣς εὑρήκαμεν τὸ γινόμενον, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας στήλης.

Ὑποτεθείσθω δεύτερον, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5742 ἐπὶ 896.

Ἐπειδὴ τὸ πολλαπλασιάσαι τὸν ἀριθμὸν 5742 ἐπὶ 896, ἰσοδυναμεῖ τῷ ἐπαναλαβεῖν αὐτὸν ἑξάκις καὶ ἔτι ἐννενηκοντάκις καὶ ἔτι ὀκτακοσιάκις, πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 5742 πρῶτον ἐπὶ 6 μονάδας, δεύτερον ἐπὶ 9 δεκάδας, τρίτον ἐπὶ 8 ἑκατοντάδας καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ 5742 πολλαπλασιαζόμενος μὲν ἐπὶ 6 μονάδας, δίδει 34452 μονάδας, πολλαπλασιαζόμενος δὲ ἐπὶ 9 δεκάδας, δίδει 51678 δεκάδας, ἢ 516780 μονάδας, πολλαπλασιαζόμενος δὲ ἐπὶ 8 ἑκατοντάδας δίδει 45936 ἑκατοντάδας, ἢ 4593600 μονάδας, τὸ ζητούμενον γινόμενον ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι

34452
+516780
+4593600.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα μένει τὸ αὐτὸ καὶ ἐὰν παραλειφθῶσι τὰ ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ τρίτῳ μερικῷ γινομένῳ μηδενικά, τηρηθῇ δὲ ἡ τάξις αὐτῶν κενὴ, ἡ ἐργασία ἐν τῇ πράξει διατάσσεται ὡς ἀκολούθως

5742
×896
34452
51678
45936
5144832

Ἐν τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἐπὶ πολυψήφιον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἑφ' ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ἐκ δεξιῶν πρώτου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν μερικῶν γινομένων τὸ μὲν δεύτερον φανερώνει δεκάδας, τὸ τρίτον ἑκατοντάδας, τὸ τέταρτον χιλιάδας καὶ καθεξῆς, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν, πρέπει νὰ γράψωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα ὑπ' ἄλληλα οὕτως, ὥστε τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον ἑκάστου μερικοῦ γινομένου νὰ εὑρίσκηται ὑπὸ τὸ δεύτερον τοῦ πρὸ αὐτοῦ.

Ἰδιαίτεροί τινες πολλαπλασιασμοί.

21. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 10, 100, 1000 . . . πρέπει νὰ γράψωμεν κατόπιν τοῦ πολλαπλασιαστέου ἓν, δύο, τρία . . . μηδενικά.

22. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμοὺς ἔχοντας εἰς τὸ τέλος μηδενικὰ, πολλαπλατιάζομεν τὰ σημαντικὰ μέρη τῶν παραγόντων καὶ κατόπιν τοῦ γινομένου γράφομεν τόσα μηδενικὰ, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες.

Ὁ λόγος τῶν ἐργασιῶν τούτων εἶνε προφανής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

Περὶ διαιρέσεως.

23. Διαίρεσις ὀνομάζεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ποσάκις ἀριθμός τις ἐμπεριέχεται εἰς ἄλλον, ἢ ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸν ἕνα τῶν παραγόντων γινομένου τινός, γνωρίζοντες τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων καὶ αὐτὸ τὸ γινόμενον.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ταύτης καλεῖται πηλίκον· τῶν δεδομένων δὲ ἀριθμῶν ἐκεῖνος μέν, εἰς ὃν ζητοῦμεν ποσάκις ἐμπεριέχεται ὁ ἄλλος, λέγεται διαιρετέος, ὁ δεύτερος δὲ τῶν δεδομένων λέγεται διαιρέτης. Σημεῖον δ' ἐν τῇ πράξει ταύτῃ μεταχειριζόμεθα τὸ :, ὅπερ λέγεται διὰ, ἢ μίαν γραμμὴν, γράφοντες ἄνω τὸν διαιρετέον καὶ κάτω τὸν διαιρέτην· ὑπὸ τὴν τελευταίαν δὲ ταύτην σημείωσιν τὸ μὲν πηλίκον λέγεται κλάσμα, ἐκ τῶν δεδομένων δὲ ἀριθμῶν, ὁ μὲν διαιρετέος λέγεται ἀριθμητὴς, ὁ δὲ διαιρέτης παρονομαστὴς καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ὅροι τοῦ κλάσματος.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν αἱ παραστάσεις $\frac{6}{3}$ καὶ $\frac{7}{9}$ λέγονται κλάσματα, ἐκφράζουσι δὲ, ἡ μὲν πρώτη τὸ πηλίκον τοῦ 6 διαιρουμένου διὰ 3, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν 2, ἡ δὲ δευτέρα τὸ πηλίκον τοῦ 7 διαιρουμένου διὰ τοῦ 9. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ δὲ τοῦ κλάσματος ἕπεται, ὅτι πᾶν κλάσμα εἶνε μικρότερον, ἴσον, ἢ μεγαλείτερον τῆς μονάδος, καθ' ὅσον ὁ ἀριθμητὴς εἶνε μικρότερος, ἴσος, ἢ μεγαλείτερος τοῦ παρονομαστοῦ. Ἀναγινώσκεται δὲ πᾶν κλάσμα, δηλουμένου τοῦ μὲν ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ ἀπολύτου ἀριθμητικοῦ, τοῦ δὲ παρονομαστοῦ διὰ τοῦ τακτικοῦ. Οὕτω· τὰ κλάσματα $\frac{6}{3}$ καὶ $\frac{7}{9}$ ἀναγινώσκονται, τὸ μὲν πρῶτον διὰ τῆς φράσεως « ἓξ τρίτα », τὸ δὲ δεύτερον διὰ τῆς φράσεως « ἑπτὰ ἔνατα ».

Σημ. Πρὸς ἀκριβεστέραν κατανόησιν τῆς ἰδέας τοῦ κλάσματος, σημειοῦμεν τὰ ἀκόλουθα.

Εἶνε φανερὸν ὅτι ἐὰν πρόκηται νὰ μοιράσῃ τις εἰς 20 ἀνθρώπους 70 λίρας θέλει δώσει εἰς ἕκαστον αὐτῶν ἀνὰ 3 ἀκεραίας λίρας καὶ ἀνὰ ἓν μέρος τῆς λίρας ἴσον τῷ πηλίκῳ τῶν ὑπολειπομένων 10 λιρῶν, διαιρουμένων διὰ τοῦ 20. Τὸ μέρος λοιπὸν ἐκεῖνο τῆς λίρας ὅπερ πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὰς 3 ἀκεραίας λίρας, ἵνα συμπληρωθῇ τὸ μερίδιον ἑκάστου, λέγεται κλάσμα καὶ σημειοῦται διὰ τῆς παραστάσεως $\frac{10}{20}$. Καταχρηστικῶς ἔπειτα καὶ πᾶν πηλίκον εἴτε μικρότερον εἴτε μεγαλείτερον εἶνε τῆς μονάδος λέγεται ἐπίσης κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ σημειῶται διὰ παρομοίας παραστάσεως.

24. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς πράξεως, ἕπεται ὅτι πάσης διαιρέσεως πηλίκον εἶνε ὁ ἀριθμὸς, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην παράγει τὸν διαιρετέον. Ἐπειδὴ δὲ πᾶν κλάσμα εἶνε πηλίκον δύο ἀριθμῶν καὶ πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ πηλίκον δύο ἄλλων, ἕπεται ὅτι,

Ἵνα τρέψωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, ἔχον ὡς παρονομαστὴν ἀριθμόν τινα δεδομένον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν καὶ τὸ γινόμενον νὰ θέσωμεν ὡς ἀριθμητήν.

Ἀλλ' ὑπάρχουσι διαιρέσεις, τῶν ὁποίων τὸ πηλίκον περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν κατὰ μονάδα διαφερόντων· Οὕτω· τὸ πηλίκον τοῦ 23 διαιρουμένου διὰ τοῦ 7 εἶνε μεῖζον μὲν τοῦ 3, ἔλασσον δὲ τοῦ 4· διότι ὁ 7 πολλαπλασιαζόμενος μὲν ἐπὶ 3 δίδει γινόμενον ἔλασσον τοῦ 23, πολλαπλασιαζόμενος δ' ἐπὶ 4, μεῖζον αὐτοῦ.

Εἰς τὰς τοιαύτας λοιπὸν διαιρέσεις διακρίνομεν δύο εἰδῶν πηλίκα· τὸ τέλειον $3+\frac{2}{7}$, ὅπερ εἶνε μεῖζον τοῦ 3 καὶ ἔλασσον τοῦ 4 καὶ τὸ ἀτελὲς, ὅπερ εἶνε 3.

Τὴν μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ ἀτελὲς πηλίκον ὑπάρχουσαν διαφορὰν, ἥτις πάντοτε εἶνε μικροτέρα τοῦ διαιρέτου, καλοῦμεν ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Οὕτω· ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\frac{23}{7}$ εἶνε 2· διότι

$$23-7\times3=2.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι,

Ὅταν τὸ πηλίκον εἶνε ἀτελὲς, ὁ διαιρετέος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ηὐξημένῳ κατὰ τὸ ὑπόλοιπον.

25. Τὸ τέλειον πηλίκον τοῦ 23, διαιρουμένου διὰ τοῦ 7, ὅπερ συνίσταται ἐκ τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ 3 καὶ ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{7}$, λέγεται μικτὸς ἀριθμός.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τέλειον πηλίκον τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν παρίσταται καὶ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{23}{7}$, ἕπεται ἡ ἰσότης

$$\frac{23}{7}=3+\frac{2}{7}$$

ἥτις δίδωσιν ἡμῖν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας, αἵτινες περιέχονται εἰς κλάσμα μεῖζον τῆς μονάδος, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Ἵνα δὲ τρέψωμεν μικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον ηὐξημένον κατὰ τὸν ἀριθμητὴν νὰ γράψωμεν παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος.

Εὕρεσις τοῦ πηλίκου.

26 *Θεώρημα.* Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου εἶνε ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν μηδενικῶν, ὅσα εἶνε ἀνάγκη νὰ γραφῶσι πρὸς

τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου, ἵνα προκύψῃ ἀριθμὸς μεγαλείτερος τοῦ διαιρετέου.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 5647 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 38 καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πηλίκον ἔχει τρία ψηφία.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ

$$3800 < 5647 < 38000$$

ἢ

$$38\times100 < 5647 < 38\times1000$$

ἕπεται ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε μεῖζον τοῦ 100 καὶ ἔλασσον τοῦ 1000. Ἀλλ' ἐπειδὴ πάντες οἱ ἀριθμοὶ, οἱ μεγαλείτεροι τοῦ 100 καὶ μικρότεροι τοῦ 1000 ἔχουσι τρία ψηφία, ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον θὰ ἔχῃ ὡσαύτως τρία ψηφία. ὅ. ἔ. δ.

27. *Θεώρημα.* Πολλαπλασιαζομένου διαιρετέου καὶ διαιρέτου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἔστω διαιρετέος 25, διαιρέτης 4, πηλίκον ἑπομένως 6 καὶ ὑπόλοιπον 1 καὶ ἂς ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν λάβωμεν διαιρετέον 25×3 λ. χ. καὶ διαιρέτην 4×3, θέλομεν ἔχει πηλίκον μὲν 6, ὑπόλοιπον δὲ 1×3.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὸ θεώρημα εἶνε ἀληθὲς, πρέπει ὁ διαιρετέος 25×3 νὰ εἶνε ἴσος τῷ διαιρέτῃ 4×3 ἐπὶ τὸ πηλίκον 6, σὺν τῷ ὑπολοίπῳ 1×3.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ 25 διαιρούμενος διὰ 4, δίδει πηλίκον μὲν 6, ὑπόλοιπον δὲ 1, ἔχομεν

$$25 = 4\times6+1$$

Ἐὰν ὅμως πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ 3, ποριζόμεθα

$$25\times3 = (4\times6+1)\times3$$

Ἐὰν δ' ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης, λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα

$$25\times3 = 4\times3\times6+1\times3$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Πόρισμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποριζόμεθα ἀ. ὅτι διαιρουμένου διαιρετέου καὶ διαιρέτου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· β'. ὅτι πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς διαιρετέον καὶ διαιρέτην, διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν καὶ γ'. ὅτι πᾶν κλάσμα μένει ἀμετάβλητον, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν οἱ ὅροι αὐτοῦ μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

28. *Θεώρημα.* Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἀτελὲς πηλίκον, ὅταν ὁ μὲν διαιρετέος εἶνε οἷος δήποτε, ὁ δὲ διαιρέτης ἀποτελῆται ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, πρέπει ν' ἀποκόψωμεν ἀπὸ τῶν δεξιῶν τοῦ διαιρετέου ἰσάριθμα τοῖς μηδενικοῖς τοῦ διαιρέτου ψηφία.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 5637 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 100 καὶ ἂς ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἀτελὲς πηλίκον εἶνε 56.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ

$$5600 < 5637 < 5700$$

ἢ

$$56\times100 < 5637 < 57\times100$$

ἔπεται ὅτι

$$56 < 5637 : 100 < 57.$$

29. *Θεώρημα.* Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἀτελὲς πηλίκον, ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε οἷος δήποτε, ὁ δὲ διαιρέτης ἀποτελῆται ὑπὸ σημαντικοῦ ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἐξ ἀριστερῶν πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου τὸ ὁμοειδὲς μέρος τοῦ διαιρετέου.

Ὑποτεθείσθω, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 2745 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 600 καὶ ἂς ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἀτελὲς πηλίκον ἰσοῦται τῷ 27, ὅστις ἐκφράζει τὰς ἐν τῷ διαιρετέῳ περιεχομένας ἑκατοντάδας, διαιρουμένου διὰ τοῦ 6, ὅσις φανερώνει τὰς ἑκατοντάδας τοῦ διαιρέτου.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ προφανῶς ἀληθεύει ἡ ἀνισότης

$$2700 < 2745 < 2800$$

ἢ

$$27\times100 < 2745 < 28\times100$$

ἔπεται ἀληθὴς καὶ ἡ ἀνισότης

$$27\times100 : 6\times100 < 2745 : 600 < 28\times100 : 6\times100$$

ἢ

$$72 : 6 < 2745 : 600 < 28 : 6$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Ἀρχαί τινες χρήσιμοι διὰ τὴν συνέχειαν.

30. Πρὶν ἢ συμπληρώσωμεν τὰ περὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ πηλίκου, ἀνάγκη νὰ παραθέσωμεν τὰς ἑξῆς ἀληθείας, ὧν τὴν ἀπόδειξιν προβάλλομεν τοῖς μαθηταῖς ὡς ζήτημα.

Α'. Πολλαπλασιαζομένου τοῦ διαιρετέου ἐπὶ ἀριθμόν τινα, πολλαπλασιάζεται καὶ τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Β'. Διαιρουμένου τοῦ διαιρετέου δι' ἀριθμοῦ τινος, διαιρεῖται καὶ τὸ πηλίκον διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Γ'. Πολλαπλασιαζομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ ἀριθμόν τινα, διαιρεῖται καὶ τὸ πηλίκον διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Δ'. Διαιρουμένου τοῦ διαιρέτου δι' ἀριθμοῦ τινος, πολλαπλασιάζεται καὶ τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ε'. Αὐξανομένου τοῦ διαιρετέου, τὸ μὲν τέλειον πηλίκον αὐξάνει, τὸ δὲ ἀτελὲς ἢ αὐξάνει ἢ δὲν μεταβάλλεται· π. χ. τοῦ διαιρετέου ὄντος 25 καὶ τοῦ διαιρέτου 6, ἐὰν αὐξηθῇ ὁ διαιρετέος κατὰ 4, τὸ μὲν τέλειον πηλίκον αὐξάνει, τὸ δ' ἀτελὲς μένει τὸ αὐτό.

Ἀνάλογόν τι ἀληθεύει καὶ διαιρουμένου τοῦ διαιρέτου.

Ϛ'. Αὐξανομένου τοῦ διαιρέτου τὸ μὲν τέλειον πηλίκον ἐλαττοῦται, τὸ δὲ ἀτελὲς, ἢ ἐλαττοῦται, ἢ μένει τὸ αὐτό· π. χ. ἐν τῇ ἀνωτέρω διαιρέσει, ἐὰν αὐξηθῇ ὁ διαιρέτης κατὰ 1 καὶ τὸ τέλειον πηλίκον καὶ τὸ ἀτελὲς ἐλαττοῦνται. Ἐὰν ὅμως εἴχομεν διαιρετέον 29 καὶ διαιρέτην 6, αὐξανομένου τοῦ διαιρέτου κατὰ 1, τὸ μὲν τέλειον πηλίκον ἐλαττοῦται, τὸ δὲ ἀτελὲς δὲν μεταβάλλεται.

Ἀνάλογόν τι ἀληθεύει καὶ ἐλαττουμένου τοῦ διαιρέτου.

Ζ'. Ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς διαιρετέους πολλῶν διαιρέσεων, ὧν ὁ διαιρέτης εἶνε ὁ αὐτὸς, καὶ τὸ ἄθροισμα μεταχειρισθῶμεν ὡς διαιρετέον διαιρέσεως ἐχούσης διαιρέτην ἴσον τῷ κοινῷ διαιρέτῃ τῶν προηγουμένων διαιρέσεων, θέλομεν εὕρει τέλειον πηλίκον ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν τελείων πηλίκων τῶν δεδομένων διαιρέσεων.

Η'. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων δι' ἀριθμοῦ τινος, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου, συνήθως τὸν διαιρούμενον ἀκριβῶς, τοὺς δὲ λοιποὺς νὰ τηρήσωμεν τοὺς αὐτούς.

Οὕτως· $8\times10\times7\times9 : 5 = 8\times2\times7\times9$.

Θ'. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ γινομένου πολλῶν παραγόντων, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον διὰ

τοῦ πρώτου παράγοντος τοῦ διαιρέτου, τὸ ἐντεῦθεν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου παράγοντος.

Εὕρεσις τοῦ πηλίκου, ὅταν τοῦτο εἶνε μονοψήφιον.

31. Ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον, ὅταν τοῦτο εἶνε μονοψήφιον, διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου τοῦ διαιρέτου τὸ ὁμοειδὲς μέρος τοῦ διαιρετέου καὶ ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν τὸν εὑρεθησόμενον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν διαιρέτην, παρατηροῦμεν ἐὰν τὸ γινόμενον εἶνε ἴσον, ἔλασσον, ἢ μεῖζον τοῦ διαιρετέου. Καὶ ἐὰν μὲν εἶνε ἔλασσον, ἢ ἴσον, ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς εἶνε τὸ ζητούμενον πηλίκον· ἐὰν δὲ εἶνε μεῖζον, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀριθμοὺς μικροτέρους τοῦ εὑρεθέντος.

Οὕτω· προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ 6748 διαιρουμένου διὰ τοῦ 764, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 67 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 7· καὶ ἐπειδὴ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 9 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην παράγει ἀριθμὸν μεγαλείτερον τοῦ διαιρετέου, λαμβάνομεν ὡς ἀτελὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης τὸν ἀριθμὸν 8.

Ὁ λόγος τῆς ἐργασίας ταύτης εἶνε ὁ ἑξῆς.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 764 εἶνε μεγαλείτερος τοῦ 700, τὸ ἀτελὲς πηλίκον τῆς ἀνωτέρω διαιρέσεως θέλει εἶναι ἔλασσον, ἢ τὸ πολὺ ἴσον (Ἀρχ. 51 §. 30) τῷ ἀτελεῖ πηλίκῳ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 6748 διαιρουμένου διὰ τοῦ 700. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀτελὲς πηλίκον τοῦ 6748 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 700 (§. 29) ἰσοῦται τῷ ἀτελεῖ πηλίκῳ τοῦ 67, διαιρουμένῳ διὰ τοῦ 7, ἔπε-

ται ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον θέλει εἶναι ἔλασσον, ἢ τὸ πολὺ ἴσον τῷ ἀτελεῖ πηλίκῳ τοῦ 67 διὰ 7.

Ἡ ἐργασία διατάσσεται οὕτω

6748	764
636	8

ἐκτελεῖται δὲ ὡς ἑξῆς·

Ὁ 764 εἰς τὸν 6748, ἢ ὁ 7 εἰς τὸν 67, εἰσέρχεται 9· γράφομεν 9 καὶ λέγομεν· 4 ἐπὶ 9, 36 ἀπὸ 38 2· 6 ἐπὶ 9, 54 καὶ 3, 57 ἀπὸ 64, 7· 7 ἐπὶ 9, 63 καὶ 6, 69 ἀπὸ 67 δὲν ἀφαιρεῖται. Ἀπαλείφομεν λοιπὸν τὸν 9 καὶ γράφοντες τὸν 8 λέγομεν· 4 ἐπὶ 8, 32 ἀπὸ 38, 6· 6 ἐπὶ 8, 48 καὶ 3, 51 ἀπὸ 54, 3· 7 ἐπὶ 8, 56 καὶ 5, 61 ἀπὸ 67, 6.

Εὕρεσις τοῦ πηλίκου, ὅταν εἶνε πολυψήφιον.

32. Ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον, ὅταν εἶνε πολυψήφιον, χωρίζομεν ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἀρκοῦσιν ἵνα ἀποτελεσθῇ ἀριθμὸς ἢ ἴσος τῷ διαιρέτῃ ἢ μεγαλείτερος μὲν αὐτοῦ, μικρότερος ὅμως τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ. Διαιροῦντες δὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ τοῦ διαιρέτου εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Καταβιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς πρώτης μερικῆς διαιρέσεως τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου· καὶ διαιροῦντες τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου, εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου.

Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν λοιπῶν ψηφίων.

Ὁ λόγος τῆς ἐργασίας ταύτης εἶνε ὁ ἑξῆς·

Προτεθείσθω νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ 36472 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 578.

Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶνε διψήφιον, ἵνα εὕρωμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων αὐτοῦ, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ διαιρέτου τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν ἐν τῷ διαιρετέῳ δεκάδων, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν 3647. Τὸ πηλίκον τῆς μερικῆς ταύτης διαιρέσεως εἶνε 6. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος συνίσταται ἐκ τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 6 δεκάδας, ἐκ τοῦ γινομένου τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὰς ζητουμένας μονάδας τοῦ πηλίκου καὶ ἐκ τοῦ ὑπολοίπου, ἐὰν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ 6 δεκάδας, ἢ ἐὰν ἀπὸ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ 6 καὶ εἰς τὸ ὑπόλοιπον καταβιβάσωμεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 2 τοῦ διαιρετέου, θέλομεν λάβει τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὰς ζητουμένας μονάδας τοῦ πηλίκου, ηὐξημένον κατὰ τὸ ὑπόλοιπον. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὑπόλοιπον εἶνε πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ψηφίου τῶν μονάδων, διαιροῦμεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου.

Ἀναλόγως ἠθέλομεν ἐργασθῆ, ἐὰν τὸ πηλίκον εἶχε ψηφία περισσότερα τῶν δύο.

Ἡ ἐργασία διατάσσεται οὕτω·

3647'2	578
179 2	63
58	

καὶ ἐκτελεῖται ὡς ἀκολούθως·

Ὁ 578 εἰς τὸν 3647, ἢ ὁ 5 εἰς τὸν 36, εἰσέρχεται 6· 6 ἐπὶ 8, 48 ἀπὸ 57, 9· 6 ἐπὶ 7, 42 καὶ 5, 47 ἀπὸ 54, 7· 6 ἐπὶ 5, 30 καὶ 5, 35 ἀπὸ 36, 1. Καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον

ψηφίον καὶ λέγομεν· ὁ 578 εἰς τὸν 1792 ἢ ὁ 5 εἰς τὸν 17, 3· 3 ἐπὶ 8, 24 ἀπὸ 32, 8· 3 ἐπὶ 7, 21 καὶ 3, 24 ἀπὸ 29, 5· 3 ἐπὶ 5, 15 καὶ 2, 17 ἀπὸ 17, 0.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1. Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 85784 γροσίων καὶ ἐξώδευσε δι' ἐπιδιόρθωσιν αὐτῆς 7548 γρόσια. Πόσῳ μετεπώλησεν αὐτὴν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐκέρδισεν 9387 γρόσια ;

(Ἀπ. 102719).

2. Ἄνθρωπός τις ἔχων ἐτήσιον εἰσόδημα 39584 γροσίων, ἔθηκε κατὰ μέρος μετὰ 8 ἔτη 158992 γρόσια. Πόση ἦτο ἡ ἡμερησία δαπάνη ὑποτιθεμένου τοῦ ἔτους ἐκ 365 ἡμερῶν ;

(Ἀπ. 54).

3. 320. ἄνθρωποι πρόκειται νὰ μοιράσωσιν ἀναμεταξύ των ἓν χρηματικὸν ποσόν· ὑποτιθεμένου ὅτι οἱ 80 ἔλαβον ὁμοῦ 5000 φράγκων καὶ ἕκαστος τῶν λοιπῶν ἀνὰ 30, πόσον ἦτο τὸ χρηματικὸν ἐκεῖνο κεφάλαιον ;

(Ἀπ. 12200).

4. Ἠγόρασέ τις 7294 πήχεις ἐριούχου, ἃς μετεπώλησε πρὸς 15 γρόσια τὸν πῆχυν· ὑποτιθεμένου ὅτι εἶχε δώσει διὰ τὴν ἀγορὰν καὶ τὰ ἔξοδα τῆς μεταφορᾶς 95365 γρόσια, πόσα ἐκέρδισε ;

(Ἀπ. 15845).

5. Ἠγοράσαμεν σῖτον ἔκ τινος μὲν μέρους 5745 κοιλὰ πρὸς 25 γρόσια τὸ κοιλὸν, ἐξ ἄλλου δὲ μέρους 3457 κοιλὰ πρὸς 23 γρόσια τὸ κοιλὸν καὶ ἐκ τρίτου μέρους 6572 κοιλὰ πρὸς 19 γρόσια τὸ κοιλόν. Ἀναμιχθέντος τοῦ σίτου τούτου ἐπωλήσαμεν εἰς ἓν μὲν μέρος 4568 κοιλὰ πρὸς 26 γρόσια τὸ κοιλὸν, εἰς ἄλλο δὲ μέρος 6320 κοιλὰ πρὸς 24 γρόσια καὶ εἰς τρίτον μέρος ὁλόκληρον τὸν ὑπολειφθέντα μετὰ τὰς δύο πρώτας πωλήσεις σῖτον πρὸς 18 γρόσια τὸ κοιλόν. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἐπεβαρύνθη ὁ σῖτος μὲ 3785 γροσίων ἔξοδα, νὰ εὑρεθῇ ἐὰν προὔκυψε κέρδος καὶ πόσον.

(Ἀπ. 6388).

6. Ἠγοράσαμεν 5800 ὀκάδας οἴνου πρὸς 3 γρόσια τὴν ὀκάν. Τούτων 1600 ὀκάδας ἐπωλήσαμεν πρὸς 3 γρ. καὶ 30 παράδ. καὶ 2000 ὀκάδας πρὸς 3 γρ. καὶ 10 παράδ. Πόσον πρέπει νὰ πωληθῇ ἡ ὀκὰ τοῦ ὑπολοίπου, ἵνα προκύψῃ κέρδος 1800 γροσίων ;

(Ἀπ. 3 γρ. 2 παρ. ὡς ἔγγιστα).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

Περὶ διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν.

33. *Ὁρισμοί.* Πολλαπλάσιον ἀριθμοῦ τινος ὀνομάζεται τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ ἀριθμόν τινα ἀκέραιον· οὕτω· πολλαπλάσια τοῦ ἀριθμοῦ 7 εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 0, 7, 14, 21, 28, 35 καὶ καθεξῆς· διότι $7\times0=0, 7\times1=7, 7\times2=14, 7\times3=21, 7\times4=28, 7\times5=35$.

Σημ. Τὸ πολλαπλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶνε ἀκριβῶς διαιρετὸν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

Ὑποπολλαπλάσιον, διαιρέτης, ἢ παράγων ἀριθμοῦ τινος ὀνομάζεται ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ἐπὶ ἀκέραιόν τινα ἀριθμὸν πολλα-

πλασιαζόμενος δίδει τὸν δοθέντα· οὕτως· ὑποπολλαπλάσια τοῦ ἀριθμοῦ 24 εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 4, 6, 12, 1, 24· διότι $2\times12=24$, $3\times8=24$, $4\times6=24$, $6\times4=24$, $12\times2=24$, $1\times24=24$, $24\times1=24$.

34. *Θεώρημα.* Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν ἕκαστον πολλῶν ἄλλων, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 3, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν 6, 9, 12, 15 καὶ ἂς ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς διαιρεῖ τὸν ἀριθμὸν $6+9+12+15$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 6, 9, 12, 15 διαιροῦνται ἀκριβῶς ἕκαστος διὰ τοῦ 3, ἕπεται ὅτι ἕκαστος αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 3 ἐπὶ ἀριθμόν τινα ἀκέραιον. Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν Α, Β, Γ, Δ τοὺς ἀριθμούς, οἵτινες, πολλαπλασιάζοντες χωριστὰ ἕκαστος τὸν 3, δίδουσιν ὁ πρῶτος τὸν 6, ὁ δεύτερος τὸν 9, ὁ τρίτος τὸν 12 καὶ ὁ τέταρτος τὸν 15 θέλομεν ἔχει

$$6=3\times\text{Α}$$
$$9=3\times\text{Β}$$
$$12=3\times\Gamma$$
$$15=3\times\Delta$$

Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας ταύτας, θέλομεν πορισθῇ $6+9+12+15=3\times\text{Α}+3\times\text{Β}+3\times\Gamma+3\times\Delta$

Ἐὰν δὲ τέλος ἀντικαταστήσωμεν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἄνω ἰσότητος διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ γινομένου (§. 17) $3\times(\text{Α}+\text{Β}+\Gamma+\Delta)$, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$6+9+12+15=3\times(\text{Α}+\text{Β}+\Gamma+\Delta),$$

ἥτις δεικνύει, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $6+9+12+15$ εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 3 καὶ ἑπομένως ἀκριβῶς διαιρετὸς διὰ 3. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν ἄλλον, διαιρεῖ καὶ τὰ πολ-

λαπλάσια αὐτοῦ. Οὕτω· ὁ ἀριθμὸς 4, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν 8, διαιρεῖ καὶ πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 8 π. χ. τὸν 16. 24, 32, καὶ καθεξῆς.

35. *Θεώρημα.* Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 5, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν ἀριθμὸν 30 καὶ τὸν ἀριθμὸν 10 καὶ ἂς ἀποδειχθῇ, ὅτι διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τὸν ἀριθμὸν $30-10$.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ἐὰν ὀνομάσωμεν Α καὶ Β τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, οἵτινες πολλαπλασιαζόμενοι χωριστὰ ἑκάτερος ἐπὶ τὸν 5 δίδουσιν, ὁ μὲν τὸν 30, ὁ δὲ τὸν 10, θέλομεν ἔχει

$$30=5\times\text{Α}$$
$$10=5\times\text{Β}$$

ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν τὰς ἰσότητας ταύτας θέλομεν πορισθῇ

$$30-10=5\times\text{Α}-5\times\text{Β}\ \text{ἢ}$$
$$30-10=5\times(\text{Α}-\text{Β})\quad(\text{§. 19})$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

36. *Θεώρημα.* — Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαφέρωσιν ἀλλήλων κατὰ πολλαπλάσιον τρίτου, διαιρούμενοι διὰ τοῦ τρίτου ἐκείνου δίδουσι τὰ αὐτὰ ὑπόλοιπα.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 64 καὶ 40, οἵτινες διαφέρουσιν ἀλλήλων κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 6 καὶ ἂς ἀποδειχθῇ, ὅτι ἑκάτερος αὐτῶν, διὰ τοῦ 6 διαιρούμενος, δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ἐὰν ὀνομάσωμεν Υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 40 διαιρουμένου διὰ 6 θέλομεν ἔχει

$$40=\text{πολ. }6+\Upsilon$$

Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης τὸν ἀριθμὸν 24, θέλομεν πορισθῇ

$$40+24=24+\text{πολ. }6+\Upsilon$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἀντικαταστήσωμεν τὸ 24 διὰ τοῦ πολ. 6 θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα:

$$64 = \text{πολ. } 6 + \text{πολ. } 6 + \Upsilon$$

ἢ τὴν ἰσότητα:

$$64 = \text{πολ. } 6 + \Upsilon \qquad (\S.\ 34)$$

ἥτις δεικνύει ὅτι καὶ ὁ 64 διαιρούμενος διὰ τοῦ 6 δίδει ὑπόλοιπον Υ. ὅ. ἔ. δ.

Χαρακτῆρες διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν.

37. *Θεώρημα.* Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 2 ἢ τοῦ 5, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτοῦ.

Ἂς λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 3567 καὶ ἂς ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ 2 ἢ τοῦ 5 ἰσοῦται τῷ ὑπολοίπῳ τοῦ 7 διὰ τοῦ 2 ἢ τοῦ 5.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ἐπειδὴ

$$3567 = 3560 + 7 \qquad (1)$$

καὶ ἐπειδὴ

$$3560 = 356 \times 2 \times 5 \qquad (2)$$

ἡ ἰσότης (1) δύναται ν' ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῶν ἑξῆς δύο:

$$\left.\begin{aligned} 3567 &= \text{πολ. } 2 + 7 \\ 3567 &= \text{πολ. } 5 + 7 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ἀλλ' ἐὰν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῶν ἰσοτήτων (3) ἀφαιρέσωμεν 7 θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας

$$3567 - 7 = \text{πολ. } 2 \qquad (4)$$

$$3567 - 7 = \text{πολ. } 5 \qquad (5)$$

τῶν ὁποίων ἡ μὲν ἰσότης (4) δεικνύει, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 3567 καὶ 7 διαφέροντες ἀλλήλων κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 2 διαιρούμενοι διὰ τοῦ 2 δίδουσι τὰ αὐτὰ ὑπόλοιπα· ἡ δὲ ἰσότης (5) δεικνύει ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 3567 καὶ 7 διαφέροντες ἀλλήλων

κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 5 διαιρούμενοι διὰ τοῦ 5 δίδουσι τὰ αὐτὰ ὑπόλοιπα.

Πόρισμα. Ἐπειδή, ἵνα διαιρῆται ἀριθμός τις διὰ τοῦ 2 ἢ τοῦ 5, πρέπει τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 2 ἢ τοῦ 5, καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν διὰ μὲν τοῦ 2 διαιροῦνται μόνον οἱ ἀριθμοὶ 0, 2, 4, 6, 8, διὰ δὲ τοῦ 5 μόνον οἱ ἀριθμοὶ 0, καὶ 5, ἕπεται ὅτι, ἵνα ἀριθμός τις διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2, πρέπει νὰ λήγῃ ἢ εἰς 0, ἢ εἰς 2, ἢ εἰς 4, ἢ εἰς 6, ἢ εἰς 8· ἵνα δὲ διαιρῆται διὰ 5, πρέπει νὰ λήγῃ εἰς 0 ἢ εἰς 5.

Σημ. Κατὰ παρόμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ἃ ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ τοῦ 4 ἢ τοῦ 25, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ ἀποτελούμενον ἀριθμόν, καὶ β' ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ τοῦ 8 ἢ τοῦ 125, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ὑπὸ τῶν τριῶν τελευταίων ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ ἀποτελούμενον ἀριθμόν.

Τὰς ἀποδείξεις τῶν ἀνωτέρω δύο θεωρημάτων καὶ τὰ ἐκ τούτων πορίσματα προτείνομεν τοῖς μαθηταῖς ὡς ζήτημα.

38. *Θεώρημα.* Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 3 ἢ διὰ 9, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 5748 καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διὰ τοῦ 9 ἰσοῦται τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διὰ τοῦ 9 διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ $5+7+4+8$.

Ἀπόδειξις. Εἶνε φανερὸν ὅτι

$$5748 = 5000 + 700 + 40 + 8$$

ἀλλὰ

$$5000 = 5 \times 1000$$

$$700 = 7 \times 100$$

$$40 = 4 \times 10$$

ὅθεν $5748=5\times1000+7\times100+4\times10+8$

ἀλλὰ $1000=999+1=$πολ. $9+1$

$100=99+1=$πολ. $9+1$

$10=9+1=$πολ. $9+1$

ἑπομένως $5748=$

$5\times($πολ. $9+1)+7\times($πολ. $9+1)+4\times($πολ. $9+1)+8$

Ἐὰν ὅμως ἐκτελέσωμεν τοὺς πολλαπλασιασμοὺς εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης, θὰ ἔχωμεν

$5748=$πολ. $9+5+$πολ. $9+7+$πολ. $9+4+8$ ἢ (Πόρ. § 34)

$5748=$πολ. $9+5+7+4+8$ (§ 34)

Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης τὸν ἀριθμὸν $5+7+4+8$, ποριζόμεθα τὴν ἰσότητα

$5748-(5+7+4+8)=$πολ. 9

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα (§ 36).

Πόρισμα. Ἵνα διαιρῆται λοιπὸν ἀκριβῶς ἀριθμός τις διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9, πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ ν' ἀποτελῇ ἀριθμὸν ἀκριβῶς διαιρετὸν διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

Περὶ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

39. *Ὁρισμοί.* Ὀνομάζεται κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ὁ ἀριθμὸς ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς πάντας. Οὗτω· κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 12, 16, 24, 20, εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 4, 2 καὶ 1.

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅταν δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην, εἰμὴ μόνον τὴν μονάδα· π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 9.

Πολλοὶ ἀριθμοὶ λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, ὅταν ὅλοι οἱ ἀνὰ δύο συνδυασμοὶ αὐτῶν εἶνε πρὸς ἀλλήλους πρῶτοι· π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 8, 9, 7, 11, 19.

40. *Θεώρημα.* Ἵνα εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν μεγαλείτερον διὰ τοῦ μικροτέρου, τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου, τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον διὰ τοῦ δευτέρου καὶ οὕτως ἑξῆς μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0. Ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας τῶν διαιρέσεων τούτων θὰ εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 72 καὶ 15, καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν τούτων εὑρίσκεται, ὅπως ὁρίζει τὸ θεώρημα.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 72 διαιρούμενος διὰ τοῦ 15 δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 12, ὁ δὲ ἀριθμὸς 15 διαιρούμενος διὰ τοῦ ὑπολοίπου 12 δίδει πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 3, καὶ τέλος ὁ 12 διαιρούμενος διὰ τοῦ 3 δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 0, θέλομεν ἔχει :

$$72=15\times4+12$$
$$15=12\times1+3$$
$$12=3\times4$$

Ἀλλ' ὁ 3 διαιρῶν τὸν 12 διαιρεῖ καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ 12×1· διαιρῶν δὲ καὶ ἑαυτὸν διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $12\times1+3$ ἤτοι 15. Ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς διαιρῶν τὸν ἀριθ-

μὸν 15 διαιρεῖ καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ 15×4· διαιρῶν δὲ καὶ τὸν 12 διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 15×4+12, ἤτοι 72. Εἶνε λοιπὸς κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 72 καὶ 15. Εἶνε δὲ καὶ ὁ μέγιστος· διότι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 72 καὶ 15 εἶχον κοινὸν διαιρέτην μεγαλείτερον τοῦ 3, οὗτος διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς 72 καὶ 15 θὰ διήρει καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν (Πορ. § 27) 12· διαιρῶν δὲ καὶ τοὺς ἀριθμοὺς 15 καὶ 12 θὰ διήρει καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν 3, ὅπερ ἀδύνατον. Ὥστε ὁ 3 εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 72 καὶ 15, ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως ἕπεται α. ὅτι ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀριθμοὺς ἐπὶ ἀριθμόν τινα, πολλαπλασιάζεται καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, β'. ὅτι πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν δύο ἄλλους διαιρεῖ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν, καὶ γ'. ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν, ὧν ὁ εἷς διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν ἕτερον, εἶνε ἴσος τῷ μικροτέρῳ μεταξὺ αὐτῶν.

41. Ἡ πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν ἐργασία διατάσσεται οὕτω:

	1	2	3	10
824	576	248	80	8
248	80	8	0	

Ἐκτελεῖται δὲ ὡς ἑξῆς:

Ὁ 576 εἰς τὸν 824 εἰσέρχεται 1· 1 ἐπὶ 576, 576 ἀπὸ 824, 248· ὁ 248 εἰς τὸν 576, 2· 2 ἐπὶ 248, 496 ἀπὸ 576, 80· ὁ 80 εἰς τὸν 248, 3· 3 ἐπὶ 80, 240 ἀπὸ 248, 8· ὁ 8 εἰς τὸν 80, 10· 8 ἐπὶ 10, 80 ἀπὸ 80, 0.

ΣΗΜ. Κατὰ τίνα τρόπον γράφονται τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑ-

πόλοιπα τῶν διαιρέσεων τούτων φαίνεται ἐν τῷ ἀνωτέρω διαγράμματι.

42. *Θεώρημα.* Τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 60 καὶ 48, καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν διαιρέσωμεν ἑκάτερον αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 12, τὰ πηλίκα 5 καὶ 4, ἅτινα προκύπτουσιν, εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 5 εἶνε δ, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 4×12 καὶ 5×12, ἤτοι τῶν ἀριθμῶν 48 καὶ 60, θέλει εἶνε δ×12 (Πόρ. § 40). Ἀλλ' ἡμεῖς γνωρίζομεν ὅτι εἶνε 12· ὥστε ὁ ἀριθμὸς δ×12 πρέπει νὰ εἶνε ἴσος τῷ ἀριθμῷ 12, καὶ ἐπομένως ὁ δ εἶνε ἴσος τῇ μονάδι. Ἀλλ' ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 4 ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα, εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. ὅ. ἔ. δ.

43. *Θεώρημα.* Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων καὶ εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, διαιρεῖ ἐξ ἅπαντος τὸν ἕτερον.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 4, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸ γινόμενον 8×9 καὶ εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν 9, καὶ ἂς ἀποδείξωμεν ὅτι διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν 8.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 4 καὶ 9 εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶνε ἡ μονάς. Ἀλλ' ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἑκάτερον τῶν ἀριθμῶν τούτων ἐπὶ 8, θὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 9 εἶνε, ὡς ἐρρέθη, ἡ μονάς, ὁ

μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 4×8 καὶ 8×9 θὰ εἶνε 1×8 ἤτοι 8. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς 4, ὅστις διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 4×8 καὶ 8×9, τὸν μὲν πρῶτον ὡς πολλαπλάσιόν του, τὸν δὲ δεύτερον ἐξ ὑποθέσεως, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν 8. ὅ. ἔ. δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄.

Περὶ δυνάμεων.

44. Ὀνομάζεται δύναμις ἀριθμοῦ τινος τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἴσων τῷ δοθέντι. Οὕτω τὰ γινόμενα: 2×2, $2\times2\times2$, $2\times2\times2\times2$, εἶνε δυνάμεις τοῦ 2.

Ἡ δύναμις λέγεται δευτέρα μὲν ἢ τετράγωνον, ὅταν οἱ παράγοντες εἶνε δύο· τρίτη δὲ ἢ κύβος, ὅταν οἱ παράγοντες εἶνε τρεῖς· τετάρτη, ὅταν οἱ παράγοντες εἶνε τέσσαρες, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἵνα παραστήσωμεν συμβολικῶς μίαν τινα δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ, γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὀλίγον πρὸς τὰ ἄνω ἀριθμόν τινα καλούμενον ἐκθέτην, ὅστις ἐκφράζει τὸν βαθμὸν τῆς δυνάμεως. Οὕτω· 5^3 ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τριῶν παραγόντων ἴσων τῷ 5.

45. *Θεώρημα.* Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν.

Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ἡ τρίτη δύναμις τοῦ 5 ἐπὶ τὴν τετάρτην δύναμιν τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι $5^3\times5^4=5^7$.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ἐπειδὴ

$$5^3=5\times5\times5$$
$$5^4=5\times5\times5\times5$$

ἕπεται ὅτι: $5^3\times5^4=5\times5\times5\times5\times5\times5\times5=5^7$. ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι, ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, πρέπει εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν νὰ θέσωμεν ἐκθέτην ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν δύο ἐκθετῶν. Οὕτω· $5^7:5^3=5^4$.

Σημ. Ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶνε ἡ μονὰς, δὲν γράφεται. Οὕτω 2^1 γράφεται ἁπλῶς διὰ τοῦ 2.

Σημ. 6΄. Πᾶς ἀριθμὸς ἔχων ἐκθέτην μηδὲν ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα. Οὕτω· $2^0=1$. $5^0=1$. Ὁ λόγος τοῦ γινομένου τούτου εἶνε ὁ ἑξῆς:

Ἔστω νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ ἑξῆς διαίρεσις· $5^4:5^4$.

Κατὰ τὰ προηγουμένως ρηθέντα τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶνε ἴσον μὲ 5^0. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ πηλίκον, ἐπειδὴ οἱ διαιρούμενοι ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι, ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα· ὥστε $5^0=1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄.

Περὶ πρώτων ἀριθμῶν.

46. *Ὁρισμός.* Πρῶτος ἀριθμὸς ὀνομάζεται ἐκεῖνος, ὅστις δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην εἰμὴ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα. Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5, 7, λέγονται πρῶτοι διότι δὲν ἔχουσιν ἄλλους διαιρέτας εἰμὴ ἑαυτοὺς καὶ τὴν μονάδα.

47. *Θεώρημα.* Πᾶς ἀριθμὸς μὴ πρῶτος ἔχει τοὐλάχιστον ἕνα διαιρέτην πρῶτον.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 60, ὅστις δὲν εἶνε πρῶτος, καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ ὑπάρχει τοὐλάχιστον εἷς, ὅστις εἶνε πρῶτος.

Ἀπόδειξις. Ὁ ἀριθμὸς 60 μὴ πρῶτος ἀριθμὸς ὢν ἔχει διαιρέτας τινάς, ὧν ὁ ἐλάχιστος ἔστω δ. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγω ὅτι εἶναι πρῶτος. Διότι, ἐὰν δὲν ἦτο πρῶτος, θὰ εἶχε διαιρέτας μικροτέρους ἑαυτοῦ καὶ μεγαλειτέρους τῆς μονάδος, οἵτινες διαιροῦντες τὸν δ θὰ διαιρῶσι καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ 60. Τοῦτο ὅμως εἶνε ἀδύνατον, διότι παρεδέχθημεν ὅτι ὁ δ εἶνε ἐλάχιστος διαιρέτης τοῦ 60· ὥστε ὁ δ εἶνε πρῶτος. ὅ. ἔ. δ.

48. *Θεώρημα.* Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος δὲν διαιρῇ ἄλλον μὴ πρῶτον, οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἔστω ὁ πρῶτος ἀριθμὸς 5, ὅστις δὲν διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν ἀριθμὸν 14, καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 14 εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 14 εἶχον κοινὸν διαιρέτην διάφορον τῆς μονάδος, οὗτος ἔπρεπε νὰ εἶνε καὶ

τοῦ 5 διάφορος. Ἀλλ' ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 5 καὶ τῆς μονάδος δὲν διαιρεῖ τὸν 5· ὥστε οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 14 εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

49. *Θεώρημα.* Δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι πάντοτε ἕνα τοὐλάχιστον κοινὸν διαιρέτην πρῶτον.

Τῷ ὄντι· ἐὰν δύο ἀριθμοὶ δὲν εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ ἔχωσιν ἀριθμόν τινα κοινῶν διαιρετῶν. Ἂς θεωρήσωμεν ἕνα ἐκ τῶν κοινῶν τούτων διαιρετῶν.

Ἐὰν ὁ διαιρέτης οὗτος δὲν εἶνε ἀριθμὸς πρῶτος, θὰ ἔχῃ ἕνα τοὐλάχιστον διαιρέτην πρῶτον, ὅστις διαιρῶν αὐτὸν θὰ διαιρῇ καὶ ἑκάτερον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

50. *Θεώρημα.* Ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων διαιρεῖ ἕνα τοὐλάχιστον παράγοντα.

Ἔστω ὁ πρῶτος ἀριθμὸς 5, ὅστις διαιρεῖ τὸ γινόμενον $15\times8\times9\times32$, καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι διαιρεῖ ἕνα τοὐλάχιστον παράγοντα.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι ὁ ἀριθμὸς 5 διαιρῶν τὸ γινόμενον $15\times8\times9\times32$ ἢ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ 1080×32 ἐὰν δὲν διαιρῇ τὸν 32, θὰ εἶνε πρῶτος πρὸς αὐτὸν (§. 48) καὶ θὰ διαιρῇ τὸν 1080 (§. 43).

Ἀλλ' ὁ 1080 ἰσοῦται τῷ γινομένῳ $15\times8\times9$ ἢ τῷ ἰσοδυνάμῳ αὐτῷ 120×9. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν 5, ἐὰν δὲν διαιρῇ τὸν 9, θὰ διαιρῇ τὸν 120.

Ἀλλὰ καὶ ὁ 120 ἰσοῦται τῷ γινομένῳ 15×8· ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν 5, ἐὰν δὲν διαιρῇ τὸν 8, θὰ διαιρῇ τὸν 15. Ὥστε πάντως εἷς ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου θὰ εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 5. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα I. Ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν τὸ γινόμενον πολλῶν πρώτων παραγόντων θὰ εἶνε ἴσος ἑνὶ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου.

Πόρισμα II. Ἵνα διαιρῆται γινόμενον πολλῶν πρώτων παραγόντων διὰ γινομένου πολλῶν ἄλλων, πρέπει οἱ παράγοντες τοῦ διαιρέτου νὰ ἐμπεριέχωνται πάντες εἰς τὸν διαιρετέον.

Πόρισμα III. Ἐὰν οἱ πρῶτοι παράγοντες περιέχωνται ἐν τῷ διαιρετέῳ καὶ διαιρέτῃ μετὰ ἐκθετῶν, ἵνα ἐκτελῆται ἀκριβῶς ἡ διαίρεσις, πρέπει οἱ παράγοντες τοῦ διαιρέτου νὰ ἐμπεριέχωνται πάντες εἰς τὸν διαιρετέον ἢ μετὰ μεγαλειτέρων ἢ μετὰ ἴσων ἐκθετῶν.

Σχόλιον. Ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον δύο γινομένων, ὧν ἑκάτερον συνίσταται ἐκ πρώτων παραγόντων, ὅταν ἡ διαίρεσις ἐκτελῆται ἀκριβῶς, πρέπει νὰ γράψωμεν ἕκαστον μὲν τῶν κοινῶν πρώτων παραγόντων μετὰ τῆς διαφορᾶς τῶν ἐκθετῶν, ἕκαστον δὲ τῶν μὴ κοινῶν, ὅπως ὑπάρχει ἐν τῷ διαιρετέῳ· οὕτω:

$$2^6\times3^7\times5^3\times7^2\times11 : 2^4\times3^2\times7 = 2^2\times3^5\times5^3\times7\times11.$$

Τὴν εὕρεσιν τοῦ λόγου τῆς ἐργασίας ταύτης προτείνομεν τοῖς μαθηταῖς ὡς ζήτημα.

51. *Θεώρημα.* Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ οἱαδήποτε δυνάμεις αὐτῶν ἀποτελοῦσιν ἀριθμοὺς πρὸς ἀλλήλους πρώτους.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 9, οἵτινες εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ οἱ 8^3 καὶ 9^4 εἶνε ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους πρῶτοι.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 8^3 καὶ 9^4, ἢ τὰ ἰσοδύναμα αὐτοῖς γινόμενα $8\times8\times8$, $9\times9\times9\times9$, δὲν ἦσαν πρῶτα πρὸς ἄλληλα, θὰ εἶχον κοινόν τινα διαιρέτην πρῶτον, ὅστις διαιρῶν ἑκάτερον τῶν ἀνωτέρω γινομένων θὰ διήρει καὶ ἕνα τῶν παραγόντων ἑκατέρων τούτων. Ἀλλ' ἐὰν συνέβαινε τοῦτο,

οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 9 δὲν θὰ ἦσαν πρὸς ἀλλήλους πρῶτοι, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν. Οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν 8^3 καὶ 9^4 εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. ὅ. ἔ. δ.

52. *Θεώρημα.* Πᾶς ἀριθμὸς μὴ πρῶτος ἀποσυντίθεται εἰς γινόμενον πολλῶν παραγόντων πρώτων.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 210, καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι εἶνε δυνατὸν ν' ἀποσυντεθῇ εἰς γινόμενον πολλῶν παραγόντων πρώτων.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 210 δὲν εἶνε πρῶτος, ὁ ἐλάχιστος αὐτοῦ διαιρέτης 2 εἶνε πρῶτος. Ἀλλ' ὁ 2 διαιρῶν τὸν ἀριθμὸν 210 δίδει πηλίκον 105· ὥστε $210=2\times105$.

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν 210 ἀποσυνετέθη εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶνε πρῶτος.

Ἐὰν καὶ ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων ἦτο πρῶτος, τὸ θεώρημα ἤθελεν εἶναι ἀποδεδειγμένον. Ἀλλ' ὁ παράγων 105 δὲν εἶνε πρῶτος, καὶ ὡς τοιοῦτος ἔχει τὸν ἐλάχιστον αὐτοῦ διαιρέτην 3 πρῶτον. Ὁ ἀριθμὸς ὅμως 3 διαιρῶν τὸν 105 δίδει πηλίκον 35· ὥστε

$$105=3\times35$$

καὶ

$$210=2\times3\times35$$

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν 210 ἀποσυνετέθη εἰς γινόμενον τριῶν παραγόντων, ὧν οἱ δύο εἶνε πρῶτοι. Ἀλλ' ἐὰν ἐξακολουθῶμεν νὰ κάμνωμεν ἐπὶ τοῦ τελευταίου παράγοντος τῶν γινομένων, ἅτινα θὰ εὑρίσκωμεν, ὅ,τι ἐκάμαμεν εἰς τὸν παράγοντα 105, θέλομεν καταντήσει μετά τινας ἐργασίας εἰς γινόμενον ἴσον τῷ δοθέντι ἀριθμῷ ἔχον καὶ τὸν τελευταῖον παράγοντα πρῶτον· διότι ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει ἡ ἐργασία δὲν θὰ εἶχε τέλος, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ 210 ἡ ἀπαύξουσα σειρὰ τῶν μὴ πρώτων διαιρετῶν θὰ ἦτον ἄπειρος, ὅπερ ἀδύνατον.

Πόρισμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, ἵνα ἀποσυνθέσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς πρώτους παράγοντας, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ ἐλαχίστου αὐτοῦ διαιρέτου. Ἐργαζόμενοι δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐπί τε τοῦ πρώτου πηλίκου καὶ τῶν μετὰ ταῦτα εὑρεθησομένων ἐξακολουθοῦμεν μέχρις ὅτου εὕρωμεν πηλίκον τὴν μονάδα. Οἱ διαιρέται, οὓς θὰ μεταχειρισθῶμεν κατὰ τὰς γενησομένας διαιρέσεις, θέλουσιν εἶναι οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ.

Ἐν τῇ πράξει θέτουσι τοὺς μὲν διαιρετέους πρὸς τὰ ἀριστερὰ γραμμῆς κατακορύφου, τοὺς δὲ διαιρέτας πρὸς τὰ δεξιά.

Τὸ κατωτέρω παράδειγμα θέλει σαφηνίσει τὸ πρᾶγμα.

Προτεθείσθω ν' ἀποσυντεθῇ ὁ ἀριθμὸς 2700 εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

Ἡ ἐργασία διατάσσεται μὲν οὕτω,

2700	2
1350	2
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

ἐκτελεῖται δὲ ὡς ἑφεξῆς:

Ὁ ἐλάχιστος διαιρέτης τοῦ 2700 εἶνε ὁ 2· ὁ 2 εἰς τὸν 2700 εἰσέρχεται 1350· ὁ ἐλάχιστος διαιρέτης τοῦ 1350 εἶνε ὁ 2· ὁ 2 εἰς τὸν 1350, 675· ὁ ἐλάχιστος διαιρέτης τοῦ 675 εἶνε ὁ 3· ὁ 3 εἰς τὸν 675,225· ὁ ἐλάχιστος διαιρέτης τοῦ 225 εἶνε ὁ 3· ὁ 3 εἰς τὸν 225,75· ὁ ἐλάχιστος διαιρέτης τοῦ 75 εἶνε ὁ 3· ὁ 3 εἰς τὸν 75,25· ὁ ἐλάχιστος διαιρέτης τοῦ 25 εἶνε ὁ 5· ὁ 5 εἰς τὸν 25,5· ὁ ἐλάχιστος διαιρέτης τοῦ 5 εἶνε ὁ 5· ὁ 5 εἰς τὸν 5,1. Ὥστε:

$$2700 = 2\times2\times3\times3\times3\times5\times5 \quad \text{ἢ}$$
$$2700 = 2^2\times3^3\times5^2.$$

Σημ. Οἱ μαθηταὶ πρέπει ν' ἀσκηθῶσιν, ὅπως εὑρίσκωσι τὰ πηλίκα τῶν γινομένων διαιρέσεων κατὰ τὴν ἀποσύνθεσιν τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας καὶ ταχέως καὶ ἀσφαλῶς.

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν.

53. *Θεώρημα.* Ἵνα εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην πολλῶν ἀριθμῶν, ἀποσυνθέτομεν ἕκαστον αὐτῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, καὶ σχηματίζομεν γινόμενον λαμβάνοντες ἕκαστον τῶν κοινῶν πρώτων παραγόντων ἅπαξ μετὰ τοῦ ἐλαχίστου ἐκθέτου.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 360, 480 καὶ 600, οἵτινες ἀποσυντιθέμενοι εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας δίδουσι:

$$360 = 2^3\times3^2\times5$$
$$480 = 2^5\times3\times5$$
$$600 = 2^3\times3\times5^2$$

καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶνε $2^3\times3\times5$.

Ἀπόδειξις. Ὅτι ὁ ἀριθμὸς $2^3\times3\times5$ εἶνε κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 360, 480 καὶ 600 εἶνε φανερόν· διότι οἱ παράγοντες αὐτοῦ ἐμπεριέχονται πάντες εἰς τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς ἢ μετ' ἐκθετῶν μεγαλειτέρων ἢ τοὐλάχιστον ἴσων. Ὅτι δὲ εἶνε καὶ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν ἕπεται ἐκ τοῦ ὅτι, πᾶν γινόμενον ἔχον ἕνα ἔτι παράγοντα δὲν διαιρεῖ ἀκριβῶς πάντας τοὺς ἀριθμούς· διότι, ἐὰν ὁ ἄλλος ἐκεῖνος παράγων εἶνε εἷς τῶν παραγόντων, οὓς περιέχει τὸ γινόμενον $2^3\times3\times5$, ὁ 3 π. χ. τότε τὸ νέον γινόμενον, ὅπερ θὰ εἶνε $2^3\times3^2\times5$, διαιρεῖ μὲν τὸν 360, δὲν διαιρεῖ ὅμως τοὺς ἄλ-

λους δύο· ἐὰν δὲ εἶνε διάφορος, ὁ 7 π. χ. τότε τὸ νέον γινόμενον ὅπερ εἶνε : $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$, οὐδένα τῶν δεδομένων ἀριθμῶν διαιρεῖ.

Εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου πολλῶν ἀριθμῶν.

54. *Ὁρισμοί.* Ὀνομάζεται κοινὸν πολλαπλάσιον πολλῶν ἀριθμῶν ὁ ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ὅλων. Οὕτω· κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, εἶνε ὁ ἀριθμὸς 24.

Ἐλάχιστον δὲ κοινὸν πολλαπλάσιον πολλῶν ἀριθμῶν ὀνομάζεται ὁ μικρότερος ἀριθμὸς ἐκ τῶν διαιρουμένων ἀκριβῶς δι' ὅλων τῶν δεδομένων. Οὕτω· τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶνε ὁ 12, διότι εἶνε μικρότερος πάντων τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες διαιροῦνται ἀκριβῶς καὶ διὰ τῶν τριῶν τούτων.

55. *Θεώρημα.* Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον πολλῶν ἀριθμῶν, ἀποσυνθέτομεν αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, καὶ σχηματίζομεν γινόμενον λαμβάνοντες ἕκαστον τῶν πρώτων παραγόντων ἅπαξ μετὰ τοῦ μεγίστου ἐκθέτου.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 240, 560, 360, οἵτινες ἀποσυντιθέμενοι εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας δίδουσι:

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5$$
$$560 = 2^4 \times 5 \times 7$$
$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶνε $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· τὸ γινόμενον $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$ εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 240, 560, 360· διότι περιέχει πάντας τοὺς παράγοντας αὐτῶν ἢ μετὰ μεγαλειτέρων ἢ μετὰ ἴσων ἐκθετῶν.

Εἶνε δὲ καὶ τὸ ἐλάχιστον· διότι, ἐὰν παραλείψωμεν ἕνα τῶν παραγόντων, τὸν 3 π. χ., τὸ προκύπτον γινόμενον $2^4 \times 3 \times 5 \times 7$ διαιρεῖται μὲν διὰ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἀριθμοῦ, δὲν διαιρεῖται ὅμως διὰ τοῦ τρίτου.

Πόρισμα. Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, ἐπειδὴ δὲν ἔχουσι κοινὸν παράγοντα, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν. Ὅταν δὲ εἷς ἐκ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν διαιρῆται ἀκριβῶς δι' ἑκάστου τῶν ἄλλων, οὗτος εἶνε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ.

Περὶ κλασμάτων.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν κλασμάτων.

1. Εὑρεῖν τὴν ἀξίαν τῶν $\frac{9}{16}$ τῆς ὀκάδος.

Λύσις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ κλάσματος, ἵνα εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῶν $\frac{9}{16}$ τῆς ὀκάδος, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὰς 9 ὀκάδας εἰς 16 μέρη. Ἀλλὰ αἱ 9 ὀκάδες ἰσοδυναμοῦσι μὲ 3600 δράμια. Τὰ $\frac{9}{16}$ ἑπομένως τῆς ὀκάδος ἰσοδυναμοῦσι τῷ πηλίκῳ τῶν 3600 δραμίων διαιρουμένων διὰ τοῦ 16, ἤτοι 225 δραμίοις.

2. Εὑρεῖν τὴν ἀξίαν τῶν $\frac{14}{15}$ τοῦ ἡμερονυκτίου.

Λύσις. Ἵνα εὕρωμεν τὰ $\frac{14}{15}$ τοῦ ἡμερονυκτίου πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὰ 14 ἡμερονύκτια εἰς 15 μέρη. Ἀλλ' ἐπειδὴ 14 ἡμερονύκτια ἰσοῦνται μὲ 336 ὥρας, τὰ $\frac{14}{15}$ ἰσοῦνται μὲ 22 ὥρας καὶ $\frac{6}{15}$ τῆς ὥρας· ἐπειδὴ δὲ 6 ὧραι ἰσοῦνται μὲ 360 λεπτὰ πρῶτα, τὰ $\frac{6}{15}$ ἰσοῦνται μὲ 24. Ὥστε τὰ $\frac{14}{15}$ τοῦ ἡμερονυκτίου ἰσοῦνται μὲ 22 ὥρας καὶ 24 πρῶτα λεπτά.

3. Εὑρεῖν τὰ $\frac{5}{9}$ τοῦ ἀριθμοῦ 45.

Λύσις. Τὰ $\frac{5}{9}$ τοῦ 45 ἰσοῦνται κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ κλάσματος μὲ τὸ πηλίκον τοῦ πενταπλασίου τοῦ 45 διαιρουμένου διὰ τοῦ 9, ἤτοι μὲ 25.

Πρόβλημα. Ἀποθανών τις ἀφῆκεν 900000 γρόσια· διέταξε δὲ εἰς τὴν διαθήκην του τὰ μὲν $\frac{5}{8}$ τῆς περιουσίας του νὰ μερισθῶσιν ἐξ ἴσου οἱ τρεῖς αὐτοῦ υἱοί· τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου νὰ δοθῶσιν εἰς τὴν ἐκκλησίαν· τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου εἰς τὰ νοσοκομεῖα, καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἰς τοὺς πτωχούς. Ἐκ πόσων γροσίων θ' ἀποτελῆται τὸ μερίδιον ἑκάστου τῶν κληρονόμων;

Λύσις. Ἵνα εὕρωμεν τὸ μερίδιον ἑκάστου τῶν υἱῶν τοῦ διαθέτου, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν $\frac{5}{8}$ τῆς ὅλης περιουσίας. Ἀλλὰ

$$\text{τὰ } \tfrac{5}{8} \text{ τῶν } 900000 = \frac{5 \times 900000}{8} = 562500 \text{ γροσίοις.}$$

Ἑπομένως τὸ μερίδιον ἑκάστου υἱοῦ θὰ εἶνε ἴσον μὲ $\frac{562500}{3}$, ἤτοι μὲ 187500 γρόσια.

Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὴν μερίδα τῆς Ἐκκλησίας, πρέπει ἀπὸ τῆς ὅλης περιουσίας ν' ἀφαιρέσωμεν τὰ 562500 γρόσια, καὶ τῆς διαφορᾶς 237500 νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{3}{5}$.

Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὴν μερίδα τῶν νοσοκομείων, πρέπει ἀπὸ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα ἔμειναν μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν μερίδων τῶν υἱῶν, νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰ 142500 γρόσια τῆς ἐκκλησίας καὶ τῆς διαφορᾶς 95000 νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{3}{4}$.

Ἵνα δὲ τέλος εὕρωμεν τὴν μερίδα τῶν πτωχῶν, πρέπει ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 95000 νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 71250, ὅστις παριστᾷ τὴν μερίδα τῶν νοσοκομείων.

Ἀνάγωγα Κλάσματα.

36. Κλάσμα τι λέγεται ἀνάγωγον, ὅταν δὲν ὑπάρχῃ ἄλλο ἰσοδύναμον ἔχον ὅρους μικροτέρους. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{8}{9}$ εἶνε ἀνάγωγον, διότι πᾶν κλάσμα ἰσοδύναμον αὐτῷ ἔχει ὅρους μεγαλειτέρους.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ, ὃν ἐδώκαμεν, ἕπεται ἀ. ὅτι, ἵνα κλάσμα τι εἶνε ἀνάγωγον, πρέπει οἱ ὅροι αὐτοῦ νὰ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διότι, ἐὰν ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην, διαιροῦντες τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ διαιρέτου τούτου θέλομεν εὕρει κλάσμα ἰσοδύναμον ἔχον μικροτέρους ὅρους· καὶ β'. ὅτι, ἵνα καταστήσωμεν κλάσμα τι ἀνάγωγον, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Ἀναγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

37. Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα δὲν μεταβάλλεται ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὅροι αὐτοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἵνα ἀναγάγωμεν κλάσματα, ἔχοντα διαφόρους παρονομαστάς, εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα ἔχοντα παρονομαστὴν τὸν αὐτόν, εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν· διαιροῦντες δὲ αὐτὸ διαδοχικῶς δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν, πολλα-

σιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου, διαιρουμένου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ περὶ οὗ πρόκειται κλάσματος.

Σχόλιον. Ὅταν οἱ παρονομασταὶ τῶν δεδομένων κλασμάτων εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, ἐπειδὴ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ αὐτῶν, καὶ ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν, διαιρουμένου δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν, ἵνα ἀναγάγωμεν τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων παρονομαστῶν.

Ὅταν δὲ εἷς ἐκ τῶν παρονομαστῶν διαιρῆται ἀκριβῶς δι' ἑκάστου τῶν ἄλλων, ἐπειδὴ αὐτὸς εἶνε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν, ἵνα ἀναγάγωμεν τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, διαιροῦμεν αὐτὸν δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ καὶ ἐπὶ τὰ πηλίκα πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος.

Παραδείγματα ἀναγωγῆς.

1. Ἔστωσαν τὰ κλάσματα

$$\frac{5}{8},\ \frac{9}{20},\ \frac{7}{12},$$

καὶ ἂς ἀναγάγωμεν αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἐπειδὴ

$$8=2^3$$
$$20=2^2\times5$$
$$12=2^2\times3$$

τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν ἔσται $2^3\times3\times5$.

Ἐπειδὴ δὲ

$$2^3\times3\times5 : 2^3 = 3\times5=15$$
$$2^3\times3\times5 : 2^2\times5=2\times3=6$$
$$2^3\times3\times5 : 2^2\times3=2\times5=10$$

τὰ ζητούμενα κλάσματα εἶνε

$$\frac{5\times15}{8\times15}\quad\frac{9\times6}{20\times6}\quad\frac{7\times10}{12\times10}$$

ἢ

$$\frac{75}{120}\quad\frac{54}{120}\quad\frac{70}{120}.$$

2. Ἔστωσαν τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5}$$

καὶ ἂς ἀναχθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἐπειδὴ οἱ παρονομασταὶ 3, 4, 5 εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν εἶνε ἴσον τῷ γινομένῳ $3\times4\times5$.

Ἐπειδὴ δὲ

$$3\times4\times5 : 3=4\times5$$
$$3\times4\times5 : 4=3\times5$$
$$3\times4\times5 : 5=3\times4$$

τὰ ζητούμενα κλάσματα εἶνε

$$\frac{2\times4\times5}{3\times4\times5}\quad\frac{3\times3\times5}{3\times4\times5}\quad\frac{4\times3\times4}{3\times4\times5}$$

3. Ἔστωσαν τὰ κλάσματα

$$\frac{5}{6},\ \frac{7}{12},\ \frac{3}{4}$$

καὶ ἂς ἀναχθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἐπειδὴ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ εἶνε 12, καὶ ἐπειδὴ

$$12 : 6 = 2$$
$$12 : 12 = 1$$
$$12 : 4 = 3$$

ἔπεται ὅτι τὰ ζητούμενα κλάσματα εἶνε

$$\frac{5\times 2}{6\times 2} \quad \frac{7\times 1}{12\times 1} \quad \frac{3\times 3}{3\times 4}$$

ἤτοι

$$\frac{10}{12}, \frac{7}{12}, \frac{9}{12}.$$

Πρόσθεσις.

58. Ἵνα προσθέσωμεν κλάσματα, ἐὰν μὲν ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν παρονομαστὴν τὸν κοινόν (Ἀρχ. Ζ. §. 30). Ἐὰν δὲ ἔχωσι παρονομαστὰς διαφόρους, ἀνάγομεν τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ εἶτα προσθέτομεν· οὕτω

$$\frac{5}{9}+\frac{4}{9}+\frac{7}{9}+\frac{3}{9}=\frac{19}{9}=2+\frac{1}{9}.$$

καὶ

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{18}{24}+\frac{20}{24}+\frac{21}{24}=\frac{59}{24}=2+\frac{11}{24}.$$

Ἵνα προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, ἢ προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ τὰ δύο ἀθροίσματα τὰ ἀθροίζομεν· ἢ τρέπομεν πρῶτον τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα καὶ εἶτα προσθέτομεν· οὕτω

$$5\tfrac{2}{3}+4\tfrac{1}{4}+6\tfrac{5}{6}=5+4+6+\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{5}{6}$$

ἢ

$$5\tfrac{2}{3}+4\tfrac{1}{4}+6\tfrac{5}{6}=\tfrac{17}{3}+\tfrac{17}{4}+\tfrac{41}{6}.$$

Ἀφαίρεσις.

59. Ἵνα ἀφαιρέσωμεν κλάσματα, ἐὰν μὲν ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἀφαιροῦμεν τοὺς ἀριθμητὰς καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν γράφομεν παρονομαστὴν τὸν κοινόν· ἐὰν δὲ ἔχωσι διαφόρους παρονομαστάς, ἀνάγομεν πρῶτον τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ εἶτα ἀφαιροῦμεν· οὕτω·

$$\frac{13}{15}-\frac{7}{15}=\frac{6}{15}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=\frac{1}{12}.$$

Ἵνα δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀκεραίου κλάσμα, ἢ τρέπομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον εἰς κλάσμα, ἔχον παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος καὶ εἶτα ἀφαιροῦμεν· ἢ ἐλαττοῦμεν τὸν ἀκέραιον κατὰ μονάδα καὶ ἀπὸ τῆς μονάδος ἀφαιροῦμεν τὸ κλάσμα· οὕτω·

$$5-\tfrac{3}{7}=\tfrac{35}{7}-\tfrac{3}{7}=\tfrac{32}{7}=4+\tfrac{4}{7}$$

ἢ

$$5-\tfrac{3}{7}=4+1-\tfrac{3}{7}=4+\tfrac{7}{7}-\tfrac{3}{7}=4+\tfrac{4}{7}.$$

Ἵνα δὲ τέλος ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ μικτοῦ μικτόν, ἢ τρέπομεν πρῶτον τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα καὶ εἶτα ἀφαιροῦμεν· ἢ ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ τὰς δύο διαφορὰς τὰς προσθέτομεν· οὕτω·

$$5\tfrac{2}{3}-3\tfrac{4}{9}=\tfrac{17}{3}-\tfrac{31}{9}=\tfrac{51}{9}-\tfrac{31}{9}=\tfrac{20}{9}=2+\tfrac{2}{9}$$

ἢ

$$5\tfrac{2}{3}-3\tfrac{4}{9}=5-3+\tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{9}=2+\tfrac{6}{9}-\tfrac{4}{9}=2+\tfrac{2}{9}.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν ἐν τῇ ἀφαιρέσει τῶν μικτῶν ἀριθμῶν, τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου τύχῃ μικρότερον τοῦ κλάσματος τοῦ ἀφαιρετέου, ἵνα ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον, λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἀπὸ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκεραίων, καὶ ἀφ' οὗ προσθέσωμεν αὐτὴν εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τὸν ἀφαιρετέον. Ὅθεν·

$$9\tfrac{3}{5}-7\tfrac{4}{5}=2+\tfrac{3}{5}-\tfrac{4}{5}=1+1+\tfrac{3}{5}-\tfrac{4}{5}=1+\tfrac{5}{5}+\tfrac{3}{5}-\tfrac{4}{5}=$$
$$1+\tfrac{8}{5}-\tfrac{4}{5}=1+\tfrac{4}{5}.$$

Πολλαπλασιασμός.

60. *ά. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον.* — Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πρέπει, ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ν' ἀφήσωμεν παρονομαστὴν τὸν αὐτόν, ἢ νὰ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ ν' ἀφήσωμεν ἀριθμητὴν τὸν αὐτόν.

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $\frac{5}{9}$ ἐπὶ 2.

Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{5}{9}$ εἶνε πηλίκον διαιρέσεως ἐχούσης διαιρετέον μὲν 5, διαιρέτην δὲ 9· καὶ ἐπειδή, διὰ νὰ διπλασιάσωμεν τὸ πηλίκον, πρέπει, ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ 2, ἢ νὰ διαιρέσωμεν τὸν διαιρέτην διὰ 2 (Ἀρχ. Α. καὶ Δ §. 30) ἔπεται ὅτι,

$$\frac{5}{9}\times 2=\frac{5\times 2}{9}=\frac{5,}{9:2,}$$ ὅ, ἔ. δ.

Παρατ. Τὸν τελευταῖον τρόπον προτιμῶμεν, ὅταν ὁ παρονομαστὴς διαιρῆται διὰ τοῦ ἀκεραίου ἀκριβῶς.

61. *β'. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.* Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀκέραιον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἐπὶ τὸ πηλίκον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητήν.

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀκέραιος 5 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$.

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς $\frac{2}{3}$ εἶνε τρὶς μικρότερος τῶν 2, ἔπεται ὅτι καὶ τὸ γινόμενον θὰ εἶνε τρὶς μικρότερον τοῦ 5×2

ἤτοι $\frac{5\times 2}{3}$ ἢ $\frac{5}{3}\times 2$. ὅ. ἔ. δ.

62. *γ' Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.* Ἵνα

πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστὴν καὶ ὑπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον νὰ γράψωμεν τὸ δεύτερον.

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{3}{4}$.

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς $\frac{3}{4}$ εἶνε τετράκις μικρότερος τοῦ 3, ἔπεται ὅτι καὶ τὸ ζητούμενον γινόμενον θὰ εἶνε τετράκις μικρότερον τοῦ $\frac{5\times 3}{6}$. Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τοῦ 5×3 διαιρουμένου διὰ 6 δύναται νὰ γίνῃ τετράκις μικρότερον, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ 4 καὶ ἀφήσωμεν τὸν διαιρετέον τὸν αὐτόν· ὥστε $\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{5\times 3}{6\times 4}$.

Σχόλιον I. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται δῆλον, ὅτι τὸ γινόμενον ἑνός τινος πολλαπλασιασμοῦ εἶνε μικρότερον, ἴσον, ἢ μεγαλείτερον τοῦ πολλαπλασιαστέου, καθ' ὅσον ὁ πολλαπλαστὴς εἶναι μικρότερος, ἴσος ἢ μεγαλείτερος τῆς μονάδος.

Σχόλιον II. Ὅταν ὁ εἷς ἢ καὶ οἱ δύο παράγοντες εἶνε μικτοί, τρέπομεν πρῶτον τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα καὶ εἶτα πολλαπλασιάζομεν.

ΣΗΜ. Ὅταν πρόκηται νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν κλασματικῶν παραγόντων, πρὶν ἢ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, πρέπει νὰ κάμωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς ἁπλοποιήσεις, ἐξαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας, οἵτινες τυχὸν ὑπάρχουσιν εἰς τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τοὺς παρονομαστὰς εἴτε τῶν αὐτῶν, εἴτε διαφόρων κλασμάτων. Οὕτω προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμόν, ὃν παριστᾷ τὸ γινόμενον $\frac{5}{6}\times\frac{4}{9}\times\frac{12}{19}\times\frac{7}{8}$ πρέπει, πρὶν ἢ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, νὰ μετατρέψωμεν αὐτὸ διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν κοινῶν παραγόντων εἰς τὸ γινόμενον $5\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{19}\times 7$.

Διαίρεσις.

ά. Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκεραίου.

63. Ἵνα διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, πρέπει ἢ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ ν' ἀφήσωμεν παρονομαστὴν τὸν αὐτόν· ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ν' ἀφήσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ τὸ κλάσμα $\frac{8}{9}$ διὰ τοῦ ἀκεραίου 4.

Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{8}{9}$ εἶνε πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ 8 διαιρουμένου διὰ τοῦ 9· καὶ ἐπειδὴ πᾶν πηλίκον γίνεται τετράκις μικρότερον, ἢ διαιρουμένου τοῦ διαιρετέου διὰ 4, ἢ πολλαπλασιαζομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ 4, ἕπεται, ὅτι

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8 : 4}{9} = \frac{8}{9 \times 4}$$

β'. Διαίρεσις ἀκεραίου διὰ κλάσματος.

64. Ἵνα διαιρέσωμεν ἀκέραιον διὰ κλάσματος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντεστραμμένον.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 9 διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης $\frac{3}{4}$ εἶνε τετράκις μικρότερος τοῦ 3, ἕπεται ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον θὰ εἶνε τετράκις μεγαλείτερον τοῦ πηλίκου τοῦ 9 διαιρουμένου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 9 διαιρούμενος διὰ 3 δίδει πηλίκον $\frac{9}{3}$, τὸ ζητούμενον θὰ εἶνε $\frac{9}{3} \times 4$ ἢ $9 \times \frac{4}{3}$.

Σημ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἵνα διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντεστραμμένον.

Σχόλιον I. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀποδείξεων ἕπεται ὅτι τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως εἶνε μικρότερον, ἴσον ἢ μεγαλείτερον τοῦ διαιρετέου, καθ' ὅσον ὁ διαιρέτης εἶνε μεγαλείτερος, ἴσος ἢ μικρότερος τῆς μονάδος.

Σχόλιον II. Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 15 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{3}{5}$.

Κατὰ τὰ ἤδη ἀποδειχθέντα τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ $15 \times \frac{5}{3}$ ἤτοι τῷ ἀριθμῷ 25.

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς πᾶσαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἕπεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 15 ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ 25. Ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 15 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{3}{5}$, εὑρίσκομεν ἀριθμόν, οὗτινος τὰ $\frac{3}{5}$ ἰσοῦνται τῷ ἀριθμῷ 15 καὶ ἐὰν ἀντιστρόφως ζητῶμεν ἀριθμόν, οὗτινος τὰ $\frac{3}{5}$ ἰσοῦνται τῷ ἀριθμῷ 15, εὑρίσκομεν αὐτόν, διαιροῦντες τὸν ἀριθμὸν 15 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{3}{5}$. Ἡ εὕρεσις τῶν $\frac{3}{5}$ τοῦ 15 κατορθοῦται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἐν ᾧ ἡ εὕρεσις ἀριθμοῦ, οὗτινος τὰ $\frac{3}{5}$ ἰσοῦνται τῷ ἀριθμῷ 15, ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς διαιρέσεως.

Τὰ δύο ταῦτα πρέπει καλῶς νὰ διακρίνωμεν.

Σχόλιον III. Ὅταν ὁ εἷς τῶν διαιρουμένων ἀριθμῶν, ἢ καὶ ἀμφότεροι, εἶνε μικτοὶ ἀριθμοί, τότε πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου, τρέπομεν πρῶτον τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα εἶτα διαιροῦμεν.

Σχόλιον IV. Παρατηροῦντες τὸ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως δύο κλασμάτων, συμπεραίνομεν ὅτι ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ διαιρετέου, πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δι-

αιρέτου, διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ διαιρέτου, πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρετέου.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

1. Ν' ἀναχθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}, \frac{7}{15}, \frac{11}{24}, \frac{17}{36}$.
2. Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ ἑξῆς πρόσθεσις·
$$7\frac{4}{9}+6\frac{5}{7}+5\frac{8}{15}.$$
3. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις·
   ά. $6-\frac{3}{5}$.
   β'. $7-\frac{15}{8}$
   γ'. $5\frac{4}{7}-2\frac{3}{8}$
   δ'. $7\frac{8}{15}-3\frac{7}{8}$
   ε'. $4\frac{5}{9}-3$
   ς'. $\frac{32}{5}-4\frac{3}{8}$.
4. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·
   α'. $\frac{5}{9}\times 4$
   β'. $8\times\frac{3}{4}$
   γ'. $\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\frac{5}{7}\times\frac{8}{9}$
   δ'. $5\frac{2}{3}\times 8$
   ε'. $8\frac{4}{7}\times 3\frac{5}{6}$.
5. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις·
   α'. $\frac{7}{15} : 4$
   β'. $\frac{15}{19} : 5$
   γ'. $9 : \frac{4}{5}$
   δ'. $12 : \frac{6}{7}$
   ε'. $\frac{5}{6} : \frac{3}{4}$
   ς'. $3\frac{4}{5} : 6$
   ζ'. $5 : 2\frac{3}{5}$
   η'. $8\frac{2}{3} : 5\frac{4}{5}$.

6. *Πρόβλημα* I. Ἀγοράσαντες τεμάχιον ἐριούχου πρὸς 200 φράγκα τὰ 17 μέτρα καὶ μεταπωλήσαντες αὐτὸ πρὸς 190 φράγκα τὰ 13 μέτρα, ἐκερδίσαμεν 48 φράγκα. Πόσον ἦτο τὸ μῆκος τοῦ τεμαχίου; $(16\ \frac{88}{105})$.

7. *Πρόβλημα* II. Ἠγοράσαμεν $25\ \frac{3}{5}$ τοῦ πήχεως ὑφάσματός τινος· τούτων ἐπωλήσαμεν εἰς ἓν μὲν μέρος $8\ \frac{4}{9}$ πήχ. εἰς ἄλλο δὲ μέρος $3\ \frac{2}{3}$ καὶ εἰς τρίτον $5\ \frac{7}{10}$. Πόσαι πήχεις ἔμειναν; $(7\ \frac{71}{900})$.

8. *Πρόβλημα* III. Τρεῖς σφαῖραι ζυγίζουσιν ὁμοῦ $12\ \frac{1}{7}$ χιλιόγραμμα. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν τῶν δύο βαρυτέρων εἶνε $9\ \frac{5}{6}$ χιλιόγραμμα καὶ ὅτι ἡ ἐλαφροτέρα ζυγίζει $1\ \frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον τῆς μεσαίας, πόσον εἶνε τὸ βάρος ἑκάστης; $(2\ \frac{13}{42}, 3\ \frac{41}{42}, 5\ \frac{6}{7})$.

9. *Πρόβλημα* IV. Τρεῖς ἑταιρίαι ἐργατῶν τελειώνουσιν ἔργον, ἡ πρώτη εἰς 9 ἡμέρας, ἡ δευτέρα εἰς 10 καὶ ἡ τρίτη εἰς 12. Ἐὰν ἐργασθῶσιν ὁμοῦ τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς πρώτης, τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς δευτέρας καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς τρίτης, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον; $(9\ \frac{27}{37})$.

10. *Πρόβλημα* V. Τρεῖς ἐργάται ὁμοῦ ἐργαζόμενοι τελειώνουσιν ἓν ἔργον εἰς 4 ἡμέρας. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ πρῶτος τελειώνει μόνος του τὸ ἔργον εἰς 9 ἡμέρας καὶ ὁ δεύτερος εἰς 12, εἰς πόσας ἡμέρας δύναται νὰ τελειώσῃ αὐτὸ ὁ τρίτος ἐργάτης; (18).

11. *Πρόβλημα* VI. Τρεῖς κρῆναι πληροῦσι δεξαμενὴν ἡ 1η εἰς 2 ὥρας, ἡ 2α εἰς 4 καὶ ἡ 3η εἰς $3\ \frac{1}{2}$. Κατὰ πόσον αὐξάνει, ἢ ἐλαττοῦται καθ' ὥραν τὸ ἐν τῇ δεξαμενῇ ταύτῃ περιεχόμενον ὕδωρ, ἐὰν συγχρόνως ἀνοιχθῶσι δύο κρουνοί, οἵτινες δύνανται νὰ κενώσωσιν αὐτὴν, ὁ μὲν πρῶτος εἰς $1\ \frac{1}{2}$ ὥραν, ὁ δὲ δεύτερος εἰς 3; $(\frac{1}{28})$.

12. *Πρόβλημα VII.* Ἐὰν ἀφ' οὗ πωλήσω τὰ $\frac{3}{7}$ τῶν ὠῶν, ἄτινα ἔφερα εἰς τὴν ἀγοράν, ἔλεγέ τις, προσθέσω 65, θέλω ἔχει τὸν ἀρχικὸν ἀριθμὸν τῶν ὠῶν πυξημένον κατὰ τὸ ἥμισύ του. Πόσα ὠὰ εἶχε φέρει εἰς τὴν ἀγοράν; (70).

13. *Πρόβλημα VIII.* Κρήνη πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 8 ὥρας· ἑτέρα τις κρήνη πληροῖ τὴν αὐτὴν δεξαμενὴν εἰς 12 ὥρας καὶ τρίτη κρήνη πληροῖ τὴν ἰδίαν δεξαμενὴν εἰς 10 ὥρας. Πόσον μέρος τῆς δεξαμενῆς πληροῦσιν αἱ τρεῖς κρῆναι ἐν μιᾷ ὥρᾳ ὁμοῦ ῥέουσαι; $(\frac{37}{120})$.

14. *Πρόβλημα IX.* Κρήνη πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 8 ὥρας· ἑτέρα τις κρήνη κενοῖ τὴν αὐτὴν δεξαμενὴν εἰς 12 ὥρας. Κενῆς οὔσης τῆς δεξαμενῆς, ἐὰν ἀνοίξωμεν ἀμφοτέρας τὰς κρήνας, εἰς πόσας ὥρας θέλει πληρωθῇ ἡ δεξαμενή; (24).

15. *Πρόβλημα X.* Δεξαμενὴ πληροῦται ὑπό τινος μὲν κρήνης εἰς 6 ὥρας, ὑπὸ ἄλλης εἰς 8 καὶ ὑπὸ τρίτης εἰς 10. Ὑποτιθεμένου, ὅτι τῶν τριῶν κρηνῶν ῥεουσῶν ἐπὶ 2 ὥρας, ἡ δεξαμενὴ χρειάζεται 26 λίτρας, ἵνα πληρωθῇ, πόση εἶνε ἡ χωρητικότης τῆς δεξαμενῆς; (120).

16. *Πρόβλημα XI.* Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, οὗτινος τὰ $\frac{2}{5}$, τὰ $\frac{5}{12}$ καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ προστιθέμενα δίδουσιν ἀριθμόν, ὅστις, ἐὰν ἐλαττωθῇ κατὰ 112, δίδει 600. (480).

17. *Πρόβλημα XII.* Ῥάβδος εἶνε διηρημένη εἰς 4 μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ πρῶτον νὰ εἶνε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὁλικοῦ μήκους τῆς ῥάβδου, τὸ δεύτερον τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ πρώτου, τὸ τρίτον τὰ $\frac{5}{4}$ τοῦ δευτέρου καὶ τὸ τέταρτον 4 πήχεις. Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῆς ῥάβδου; (60).

18. *Πρόβλημα XIII.* Ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ μου, ἔλεγέ τις, εἶνε τὰ $\frac{4}{15}$ τῆς ἡλικίας μου. Ἀλλὰ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ μου, πυξημένα κατὰ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἡλικίας μου ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν ὑπερβαίνοντα τὴν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ μου κατὰ 27. Πόση ἡ ἡλικία ἑκατέρου; (12, 45).

19. *Πρόβλημα XIV.* Εἶχέ τις ποσότητά τινα χρημάτων. Ταύτης τὰ $\frac{3}{8}$ ἔδωκεν εἴς τι μέρος· τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου εἰς ἄλλο καὶ ἔμειναν εἰς αὐτὸν 9000 γρόσια. Πόσα χρήματα εἶχε; (24000).

20. *Πρόβλημα XV.* Ἠγόρασέ τις 8400 ὀκάδας πράγματός τινος πρὸς $3\frac{5}{8}$ γρόσια τὴν ὀκᾶν. Τούτου τὰ $\frac{3}{5}$ ἐπώλησε πρὸς $3\frac{3}{4}$ γρόσια, τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου πρὸς $3\frac{1}{2}$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς $4\frac{1}{8}$. Ζητεῖται νὰ μάθωμεν ἐκέρδισεν ἢ ἔχασε καὶ πόσα; (ἐκέρδ. 3150).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ'.

Περὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

65. Δεκαδικὸν κλάσμα ὀνομάζεται πᾶν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν οἷον δήποτε, παρονομαστὴν δὲ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν· π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{158}{100}$.

Ἄλλη γραφὴ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος.

66. Ἔστω τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $\frac{3564}{1000}$.

Εἶνε φανερόν, ὅτι

$$\frac{3564}{1000}=\frac{3000}{1000}+\frac{500}{1000}+\frac{60}{1000}+\frac{4}{1000}.$$

ἢ

$$\frac{3564}{1000}=3+\frac{5}{10}+\frac{6}{100}+\frac{4}{1000}.$$

Ἀλλ' ἐὰν νοήσωμεν ὑπάρχουσαν καὶ ἐπὶ δεκαδικῶν μονάδων μικροτέρων τῆς ἀκεραίας τὴν συνθήκην, ἣν παρεδέχθημεν, προκειμένου περὶ τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν, χωρίσωμεν δὲ πρὸς διάκρισιν τὰς ἀκεραίας μονάδας ἀπὸ τῶν κλασματικῶν δι' ὑποστιγμῆς, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ ἀνωτέρω δεκαδικὸν κλάσμα καὶ οὕτω· 3,564. Τὰ δεκαδικὰ λοιπὸν κλάσματα γράφονται κατὰ δύο τρόπους, ἢ τιθεμένου τοῦ ἀρμοδίου παρονομαστοῦ, ἢ χωριζομένων ἀπὸ τῶν δεξιῶν τοῦ ἀριθμητοῦ τόσων ψηφίων, δι' ὑποστιγμῆς, ὅσα εἶνε τὰ μηδενικὰ τοῦ παρονομαστοῦ· ὑπὸ τὴν τελευταίαν ταύτην γραφὴν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα λέγεται δεκαδικὸς ἀριθμός.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται

α'. Ὅτι, ἵνα τρέψωμεν δεκαδικὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, πρέπει ν' ἀπαλείψωμεν τὸν παρονομαστὴν καὶ νὰ χωρίσωμεν ἀπὸ τῶν δεξιῶν τοῦ ἀριθμητοῦ δι' ὑποστιγμῆς τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής.

β'. Ὅτι τὸ πρῶτον μετὰ τὴν ὑποστιγμὴν ψηφίον φανερώνει δέκατα, τὸ δεύτερον ἑκατοστά, τὸ τρίτον χιλιοστὰ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

γ'. Ὅτι, ἵνα τρέψωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς δεκαδικὸν κλάσμα, πρέπει ν' ἀπαλείψωμεν τὴν ὑποστιγμὴν καὶ εἰς τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν νὰ γράψωμεν παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσα ψηφία εἶχεν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς.

Ἀπαγγελία τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

67. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 5,36845.

Ἐπειδὴ

$$5{,}36845 = \frac{536845}{100000}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\frac{536845}{100000} = 5 + \frac{36845}{100000},$$

ὁ δοθεὶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται ἢ ὡς τὸ κλάσμα $\frac{536845}{100000}$ ἢ ὡς ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $5 + \frac{36845}{100000}$.

Ἀπαγγέλλομεν λοιπὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν γεγραμμένον κατὰ δύο τρόπους· ἢ ὅπως ἀπαγγέλλεται τὸ ἰσοδύναμον δεκαδικὸν κλάσμα, ἢ ὅπως ἀπαγγέλλεται ὁ μικτὸς ἀριθμός, ὁ προκύπτων ἐκ τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ ἰσοδυνάμου δεκαδικοῦ κλάσματος.

Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

68. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,567.

Ἐπειδὴ

$$3{,}567 = \frac{3567}{1000}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\frac{3567}{1000} = \frac{356700}{100000}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\frac{356700}{100000} = 3{,}56700$$

ἕπεται ὅτι

$$3{,}567 = 3{,}56700.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται ὅτι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν γραφῶσι πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ὁσαδήποτε μηδενικά· συμβαίνει δὲ τοῦτο, διότι διὰ τῆς γραφῆς τῶν μηδενικῶν πολλαπλασιάζονται ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ ἰσοδυνάμου δεκαδικοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

69. *Καρών.* Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικόν τινα ἀριθμὸν ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν, πρέπει νὰ μετακινήσωμεν τὴν ὑποστιγμὴν ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τόσας θέσεις, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.

Τῷ ὄντι· ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 6,365 ἐπὶ 100.

Ἐπειδὴ

$$6,\,365 = \frac{6365}{1000}$$

ἔπεται ὅτι

$$6,\,365 \times 100 = \frac{6365}{1000} \times 100$$

ἀλλὰ

$$\frac{6365}{1000} \times 100 = \frac{6365}{10}$$

ὥστε

$$6,\,365 \times 100 = 636,5,$$

ὅπερ ἀποδεικνύει τὴν ἀλήθειαν τοῦ κανόνος.

ΣΗΜ. I. Κατὰ παρόμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι, ἵνα διαιρέσωμεν δεκαδικόν τινα ἀριθμὸν διὰ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, μετακινοῦμεν τὴν ὑποζιγμὴν ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τόσας θέσεις, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης.

ΣΗΜ. II. Πρὸς δεξιὰν παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ὑπάρχουσαν ὑποστιγμήν.

ΣΗΜ. III. Τὰ ψηφία, ἅτινα εὑρίσκονται δεξιὰ τῆς ὑποστιγμῆς, λέγονται δεκαδικά.

Πρόσθεσις.

70. *Κανών.* Ἵνα προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, καθιστῶμεν πρῶτον αὐτοὺς ἰσαρίθμους κατὰ τὰ δεκαδικὰ ψηφία, γράφοντες μηδενικὰ εἰς ἐκείνους, οἵτινες ἔχουσιν ὀλιγώτερα· καὶ προσθέτοντες ἔπειτα αὐτοὺς μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν

τῶν ὑποστιγμῶν, χωρίζομεν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα εἶχε τότε εἷς ἐκ τῶν προσθετέων.

Ὁ κανὼν οὗτος ἐξάγεται εὐκόλως ἐὰν τραπῇ ἕκαστος τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἰς δεκαδικὸν κλάσμα καὶ ζητηθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων, ἅτινα προκύπτουσιν.

ΣΗΜ. Ἐν τῇ κοινῇ χρήσει προσθέτουσι τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, γράφοντες αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως ὥστε αἱ ὑποστιγμαὶ νὰ συμπίπτωσι καὶ προσθέτοντες ὡσανεὶ οἱ προσθετέοι ἦσαν ἀκέραιοι ἀριθμοί, γράφουσι τὴν ὑποστιγμὴν ὑπὸ τὴν στήλην, ὑπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκετο.

Τὸ κατωτέρω παράδειγμα σαφηνίζει τὸ πρᾶγμα.

$$\begin{array}{r} 68,\,5637 \\ 6,\,482 \\ 7,\,54958 \\ 6,\,35 \\ \hline 88,\,94528 \end{array}$$

Ἀφαίρεσις.

71. *Κανών.* Ἵνα ἀφαιρέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, καθιστῶμεν πρῶτον αὐτοὺς ἰσαρίθμους ὡς πρὸς τὰ δεκαδικὰ ψηφία καὶ ἀφαιροῦντες ἔπειτα τοὺς ἀριθμούς, μὴ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ὑποστιγμάς, χωρίζομεν τόσα ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅσα ἔχει τότε εἷς ἐκ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

ΣΗΜ. I. Ἐν τῇ συνήθει χρήσει, ἡ ἀφαίρεσις γίνεται κατὰ τρόπον ἀνάλογον τῷ τῆς προσθέσεως.

Πολλαπλασιασμός.

72. *Κανών.* Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς μὴ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ὑπο-

στιγμὰς καὶ χωρίζομεν ἀπὸ τοῦ γινομένου τόσα ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο παράγοντες.

Ὁ κανὼν οὗτος ἐξάγεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἰσοδυνάμων δεκαδικῶν κλασμάτων.

Διαίρεσις.

73. *Κανών.* Ἵνα διαιρέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς, καθιστῶμεν αὐτοὺς ἰσαρίθμους ὡς πρὸς τὰ δεκαδικὰ ψηφία, καὶ πρὸς εὕρεσιν μὲν τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ πηλίκου, διαιροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς οἵτινες προκύπτουσι μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν ὑποστιγμῶν, πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν δεκαδικῶν αὐτοῦ μερῶν, γράφομεν ἀνὰ ἓν μηδενικὸν εἰς τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

Ἡ ἀλήθεια τοῦ κανόνος τούτου εἶνε προφανής.

Τὸ κατωτέρω παράδειγμα θέλει σαφηνίσει τὸ πρᾶγμα.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 38,56789 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 6,25.

Ἡ πρᾶξις γίνεται οὕτω·

3856789	625000
106789	6,1708624
44289	
5390	
3900	
1500	
2500	
000	

Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

74. Ἔστω τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{7}{8}$ καὶ ἂς ζητήσωμεν τὸν ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ εἶνε μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἔπεται ὅτι ὁ ἰσοδύναμος δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν περιέχει ἀκεραίας μονάδας· ἐπειδὴ δὲ μία ἀκεραία μονὰς ἰσοδυναμεῖ 10 δεκάτοις, ἵνα εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάτων, πολλαπλασιάζομεν τὰς 7 μονάδας ἐπὶ 10 καὶ τὸ γινόμενον 70 διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 8. Ἀλλὰ τὰ 70 δέκατα διαιρούμενα διὰ τοῦ 8, δίδουσιν 8 δέκατα σὺν $\frac{6}{8}$ τοῦ δεκάτου, τὰ δὲ $\frac{6}{8}$ τοῦ δεκάτου, τρεπόμενα εἰς ἑκατοστὰ, δίδουσιν 7 ἑκατοστὰ σὺν $\frac{4}{8}$ τοῦ ἑκατοστοῦ καὶ τὰ $\frac{4}{8}$ τοῦ ἑκατοστοῦ δίδουσι 5 χιλιοστά. Λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$, τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν, δίδει μηδεμίαν ἀκεραίαν μονάδα, 8 δέκατα, 7 ἑκατοστὰ καὶ 5 χιλιοστὰ καὶ ἰσοδυναμεῖ ἑπομένως τῷ δεκαδικῷ ἀριθμῷ 0,875.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Ἵνα τρέψωμεν κλάσμα κοινὸν εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν, πρέπει, πρὸς εὕρεσιν μὲν τῶν ἀκεραίων μονάδων, νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν δεκαδικῶν μερῶν νὰ γράφωμεν ἀνὰ ἓν μηδενικὸν εἰς τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα καὶ νὰ ἐξακολουθῶμεν τὴν διαίρεσιν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

70	8
60	0,875
40	
0	

Σχόλιον. Ἐφαρμόζοντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα εἰς τὰ κλάσματα $\frac{15}{16}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{11}{12}$ καὶ παρατηροῦντες ὅτι τὸ μὲν κλάσμα $\frac{15}{16}$ ἰσοδυναμεῖ τῷ δεκαδικῷ ἀριθμῷ 0,9375, τὰ δὲ κλάσματα $\frac{7}{11}$ καὶ $\frac{11}{12}$ τοῖς περιοδικοῖς ἀριθμοῖς 0,6363 . . . . . καὶ 0,91666 . . . . συμπεραίνομεν ὅτι ὡρισμένα μόνον κλάσματα

τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμούς. Ἐφιστῶντες δὲ τὴν προσοχὴν ἡμῶν ἐπὶ τῶν περιοδικῶν ἀριθμῶν 0,636363... καὶ 0,91666... καὶ παρατηροῦντες, ὅτι τοῦ μὲν πρώτου ἡ περίοδος 63 (ἤτοι τὰ ἐπαναλαμβανόμενα ψηφία) ἀρχίζει ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποστιγμήν, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ παρεντίθενται ψηφία τινὰ μεταξὺ τῆς περιόδου 6 καὶ τῆς ὑποστιγμῆς, συμπεραίνομεν, ὅτι οἱ περιοδικοὶ ἀριθμοὶ εἶνε δύο εἰδῶν· ἐκεῖνοι δηλ. ὧν ἡ περίοδος ἀρχίζει ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποστιγμὴν καὶ ἐκεῖνοι τῶν ὁποίων ἡ περίοδος ἀρχίζει τινὰ ψηφία μετὰ τὴν ὑποστιγμήν. Οἱ πρῶτοι λέγονται ἁπλοῖ περιοδικοὶ καὶ οἱ δεύτεροι μικτοί.

Συνθήκη τροπῆς κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

75. Ἵνα τρέπηται κλάσμα κοινὸν ἀνάγωγον εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, πρέπει ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ, ἀποσυντιθέμενος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, νὰ μὴ περιέχῃ ἄλλους παράγοντας παρὰ μόνον τὸν 2 ἢ τὸν 5 ἢ καὶ ἀμφοτέρους.

Τῷ ὄντι· ἡ γραφὴ τῶν μηδενικῶν εἰς τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα ἰσοδυναμεῖ τῷ πολλαπλασιασμῷ τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ 10, 100, 1000... ἐπειδὴ δέ, τοῦ κλάσματος ὄντος ἀναγώγου, οἱ ὅροι εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἵνα προκύψῃ ὑπόλοιπον μηδέν, πρέπει ὁ παρονομαστὴς νὰ διαιρῇ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος μηδενικῶν· ἀλλ' ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ὑπὸ μηδενικῶν δὲν περιέχει ἄλλους πρώτους παράγοντας εἰμὴ τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5. Ὁ παρονομαστὴς λοιπὸν τοῦ κλάσματος, ἵνα τρέπηται τὸ κλάσμα ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, δὲν πρέπει νὰ περιέχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας, εἰμὴ τὸν 2 καὶ 5.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ΄.

Περὶ μέτρων, σταθμῶν καὶ νομισμάτων.

76. Ἓν ἐκ τῶν σπουδαιοτέρων ἔργων τῆς συντακτικῆς τῶν Γάλλων συνελεύσεως εἶνε καὶ ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῶν μέτρων, σταθμῶν καὶ νομισμάτων. Τὸ σύστημα τοῦτο, προσφυέστατον ὄν, διά τε τὴν φυσικὴν αὐτοῦ μονάδα καὶ τὴν εὐκολίαν, μεθ' ἧς ἐκτελοῦνται οἱ ὑπολογισμοί, παρεδέχθησαν καὶ ἐφήρμοσαν ἐν ταῖς πρὸς ἀλλήλους συναλλαγαῖς πλὴν τῶν Γάλλων καὶ ἄλλοι λαοί. Καὶ ἡ Ἑλληνικὴ δὲ κυβέρνησις προέβη τῷ 1836 εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ συστήματος τούτου μετά τινων μεταρρυθμίσεων εἰς τὸ Ἑλληνικὸν βασίλειον, ἀλλὰ μέχρι τοῦδε δὲν κατωρθώθη ἡ πλήρης αὐτοῦ ἐφαρμογή.

Μονὰς τοῦ συστήματος τούτου εἶνε τὸ μέτρον (mètre), ὅπερ ἐλήφθη ἴσον τῷ δεκάκις ἑκατομμυριοστῷ τοῦ τετάρτου τοῦ γηΐνου μεσημβρινοῦ, καὶ κατὰ ταύτην τὴν μονάδα ἐσχηματίσθησαν ἥ τε μονὰς βάρους καὶ ἡ μονὰς τοῦ νομίσματος.

Μονάδες ἐκτάσεως.

α. Μονάδες μήκους.

77. Ἡ ἀρχικὴ μονὰς εἶνε, ὡς εἴρηται, τὸ μέτρον· πρὸς μέτρησιν ὅμως ποσῶν πολὺ μεγάλων μεταχειρίζονται δεκαδικὰ πολλαπλάσια τοῦ μέτρου, ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ δεκαπλασίου καὶ προχωροῦντες ἄνευ διακοπῆς μέχρι τοῦ μυριοπλασίου· πρὸς

μέτρησιν δὲ ποσῶν μικρῶν μεταχειρίζονται δεκαδικὰ ὑποπολλαπλάσια τοῦ μέτρου, ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ ὑποδεκαπλασίου καὶ προχωροῦντες μέχρι τοῦ ὑποχιλιοπλασίου.

Πίναξ τῶν μονάδων τοῦ μήκους.

Μυριάμετρα	Χιλιόμετρα	ἑκατόμετρα	δεκάμετρα	μέτρα	ὑποδεκάμετρα	ὑφεκατόμετρα	ὑποχιλιόμετρα
1=	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000
	1=	10	100	1000	10000	100000	1000000
		1=	10	100	1000	10000	100000
			1=	10	100	1000	10000
				1=	10	100	1000
					1=	10	100
						1=	10

Ἡ τοιαύτη τῶν μονάδων τοῦ μήκους κατασκευὴ ἐπιτρέπει, ὥστε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως ἑνός τινος μήκους νὰ γράφηται ὑπὸ μορφὴν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ: Οὕτω· τὸ μῆκος, ὅπερ

μετρηθὲν διὰ τῶν δεκαδικῶν μονάδων ἔδωκε 5 μυριάμετρα, 6 χιλιόμετρα, 4 ἑκατόμετρα, 3 δεκάμετρα, 6 μέτρα, 7 ὑποδεκάμετρα, 2 ὑφεκατόμετρα καὶ 4 ὑποχιλιόμετρα παρίσταται ὑπὸ τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 56436,724 μέτρα. Ἀντιστρόφως· ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 7653,245 δεκάμετρα, σημαίνει ὅτι τὸ μῆκος, ὅπερ οὗτος παριστᾷ, περιέχει 7 μυριάμετρα, 6 χιλιόμετρα, 5 ἑκατόμετρα, 3 δεκάμετρα, 2 μέτρα, 4 ὑποδεκάμετρα καὶ 5 ὑφεκατόμετρα.

ΣΗΜ. Ἡ Ἑλληνικὴ κυβέρνησις, εἰσαγαγοῦσα τὸ σύστημα τοῦτο παρέλαβε τὰ μὲν ὑποπολλαπλάσια τοῦ μέτρου ἅπαντα, ἐκ δὲ τῶν πολλαπλασίων αὐτοῦ μόνον τὸ χιλιοπλάσιον καὶ μυριοπλάσιον.

Πίναξ τῶν Ἑλληνικῶν μονάδων.

Σχοινὶς myriam.	στάδιον kilomè	πῆχυς mètre	παλάμη decimètre	δάκτυλος centimètre	γραμμὴ millimètre
1=	1000	10000	100000	1000000	10000000
	1=	1000	10000	100000	1000000
		1=	10=	100	1000
			1=	10	100
				1=	10

Γ'. Μονάδες ἐπιφανείας.

78. Ἡ ἀρχικὴ μονὰς τῆς ἐπιφανείας εἶνε τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, (ἤτοι τὸ τετράγωνον, οὗτινος ἑκάστη πλευρὰ εἶνε ἴση ἑνὶ μέτρῳ), τὰ δὲ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια αὐτῆς εἶνε τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον, τὸ τετραγωνικὸν ἑκατόμετρον, τὸ τετραγωνικὸν χιλιόμετρον, τὸ τετραγωνικὸν μυριάμετρον, τὸ τετραγωνικὸν ὑποδεκάμετρον, τὸ τετραγωνικὸν ὑφεκατόμετρον καὶ τὸ τετραγωνικὸν ὑποχιλιόμετρον.

Πίναξ τῆς σχέσεως τῶν μονάδων τῆς ἐπιφανείας.

1 τετραγων.	μυριάμετρον	= 100	τετραγ.	χιλιομέτροις
1 »	χιλιόμετρον	= 100	»	ἑκατομέτροις
1 »	ἑκατόμετρον	= 100	»	δεκαμέτροις
1 »	δεκάμετρον	= 100	»	μέτροις
1 »	μέτρον	= 100	»	ὑποδεκαμέτροις
1 »	ὑποδεκάμετ.	= 100	»	ὑφεκατομέτροις
1 »	ὑφεκατόμετ.	= 100	»	ὑποχιλιομέτροις

ΣΗΜ. Ἡ Ἑλληνικὴ κυβέρνησις παρέλαβεν ὡς ἀρχικὴν μὲν μονάδα ἐπιφανείας τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, ὅπερ ἐκάλεσε τετραγωνικὸν πῆχυν, ὡς μονάδα δὲ διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀγρῶν μετεχειρίσθη τὸ στρέμμα, ὅπερ λογίζεται ἴσον μὲ 1000 τετραγωνικοὺς πήχεις.

γ'. *Μονάδες ὄγκου.*

79. Ἡ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ ὄγκου εἶνε τὸ κυβικὸν μέτρον, τὰ δὲ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια αὐτῆς εἶνε τὸ κυβικὸν δεκάμετρον, τὸ κυβικὸν ἑκατόμετρον, τὸ κυβικὸν χιλιάμετρον, τὸ κυβικὸν μυριάμετρον, τὸ κυβικὸν ὑποδεκάμετρον, τὸ κυβικὸν ὑφεκατόμετρον καὶ τὸ κυβικὸν ὑποχιλιόμετρον. Ἐπειδὴ δὲ μία κυβικὴ μονὰς ἰσοδυναμεῖ 1000 κυβικαῖς μονάσιν ἀμέσως κατωτέρας δεκαδικῆς τάξεως, ἔπεται ὅτι αἱ μονάδες τοῦ ὄγκου ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας τὴν ἑξῆς σχέσιν:

1 κυβ.	μυριάμετρον	= 1000	κυβ.	χιλιαμέτροις
1 »	χιλιάμετρον	= 1000	»	ἑκατομέτροις
1 »	ἑκατόμετρον	= 1000	»	δεκαμέτροις
1 »	δεκάμετρον	= 1000	»	μέτροις
1 »	μέτρον	= 1000	»	ὑποδεκαμέτροις
1 »	ὑποδεκάμετ.	= 1000	»	ὑφεκατομέτροις
1 »	ὑφεκατόμετ.	= 1000	»	ὑποχιλιαμέτροις

δ'. *Μονάδες χωρητικότητος.*

80. Ἡ ἀρχικὴ μονὰς τῆς χωρητικότητος εἶνε ἡ λίτρα (litre) ἥτις ἔχει ὄγκον ἴσον ἑνὶ κυβικῷ δεκατομέτρῳ, τὰ δὲ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια αὐτῆς εἶνε τὸ δεκάλιτρον (décalitre), τὸ ἑκατόλιτρον (hectolitre), τὸ ὑποδεκάλιτρον (décilitre), τὸ ὑφεκατόλιτρον (centilitre) καὶ τὸ ὑποχιλιόλιτρον (centimètre-cube), ὅπερ ἔχει ὄγκον ἴσον ἑνὶ κυβικῷ ὑφεκατομέτρῳ.

Πίναξ τῶν μονάδων τῆς χωρητικότητος.

Ἑκατόλιτρον	δεκόλιτρον	λίτρα	ὑποδεκάλιτρον	ὑφεκατόλιτρον	ὑποχιλιόλιτρον
1 =	10	100	1000	10000	100000
	1 =	10	100	1000	10000
		1 =	10	100	1000
			1 =	10	100
				1 =	10

Σημ. Ἡ Ἑλληνικὴ κυβέρνησις ὠνόμασε κοιλὸν μὲν τὸ ἑκατόλιτρον, κοτύλην τὸ ὑποδεκάλιτρον, μύστρον τὸ ὑφεκατόλιτρον καὶ κύβον τὸ ὑποχιλιόλιτρον.

Πίναξ τῶν Ἑλληνικῶν μονάδων.

Κοιλὸν	λίτρα	κοτύλη	μύστρον	κύβος
1 =	100	1000	10000	100000
	1 =	10	100	1000
		1 =	10	100
			1 =	10

Μονάδες βάρους.

81. Ἡ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ βάρους εἶνε τὸ γραμμάριον (gramme) ὅπερ ἰσοδυναμεῖ τῷ βάρει ἑνὸς κυβικοῦ ὑφεκατομέτρου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4^0. Πολλαπλάσια δὲ καὶ ὑποπολλαπλάσια τῆς μονάδος ταύτης εἶνε τὸ δεκάγραμ-

μον, τὸ ἑκατόγραμμον, τὸ χιλιόγραμμον, τὸ καντάριον, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ 100 χιλιογράμμοις, ὁ τόνος, ὅστις ἰσοδυναμεῖ 1000 χιλιογράμμοις, τὸ ὑποδεκάγραμμον, τὸ ὑφεκατόγραμμον καὶ τὸ ὑποχιλιόγραμμον.

Πίναξ τῶν μονάδων τοῦ βάρους.

Τόνος	καντάριον	χιλιόγραμ.	γραμμάριον	ὑποδεκάγραμ.	ὑφεκατόγραμ.	ὑποχιλιόγραμμον
1 =	10	1000	1000000	10000000	100000000	1000000000
	1 =	100	100000	1000000	10000000	100000000
		1 =	1000	100000	1000000	10000000
			1 =	100	100000	1000000
				1 =	10	100000
					1 =	10000
						1 =	10

Σημ. Ἡ Ἑλληνικὴ κυβέρνησις παρεδέχθη καὶ αὕτη τὸ γραμμάριον, ὅπερ ὠνόμασε δραχμὴν, ὡς ἀρχικὴν μονάδα τοῦ βάρους, καθὼς καὶ τὸ ὑποδεκάγραμμον καὶ ὑφεκατόγραμμον, ἅτινα ἐκάλεσε τὸ μὲν πρῶτον ὀβολὸν, τὸ δὲ δεύτερον κόκκον, εἰσήγαγεν ὅμως τὴν Μνᾶν, ἣν λογίζεται ἴσην 1500 δραχμαῖς, μὴ τηρήσασα τὴν δεκαδικὴν διαίρεσιν, τὸ τάλαντον, ὅπερ λογίζεται ἴσον 100 μναῖς καὶ τὸν τόνον, ὅνπερ λογίζεται ἴσον 10 ταλάντοις, παραδεχθεῖσα τοιουτοτρόπως τὴν ἐν τῷ κατωτέρω πίνακι σχέσιν.

Πίναξ τῶν Ἑλληνικῶν μονάδων.

Τόνος	Τάλαν.	Μνᾶ	Δραχμὴ	ὀβολὸς	κόκκος
1 =	10	1000	1500000	15000000	150000000
	1 =	100	150000	1500000	15000000
		1 =	1500	15000	150000
			1 =	10	100
				1 =	10

Σημ. Πρὶν ἢ ὁμιλήσωμεν περὶ τῶν μονάδων τοῦ νομίσματος, ἀνάγκη νὰ προτάξωμεν τὰ ἑξῆς·

1. Τίτλος νομίσματος ὀνομάζεται τὸ πηλίκον τοῦ βάρους τοῦ ἐν τῷ νομίσματι περιεχομένου πολυτίμου μετάλλου, διαιρουμένου διὰ τοῦ ὁλικοῦ βάρους τοῦ νομίσματος· π. χ. Λέγοντες, ὅτι ὁ τίτλος τῆς λίρας στερλίνας εἶνε $0,916\frac{2}{3}$ ἐννοοῦμεν, ὅτι εἰς βάρος ἀγγλικῶν λιρῶν, ἴσον 1000 γραμμαρίοις, τὰ $916\frac{2}{3}$ εἶνε καθαρὸς χρυσός.

2. Πραγματικὴ ἀξία νομίσματός τινος ὀνομάζεται ἡ ἀξία τοῦ ἐν τῷ νομίσματι περιεχομένου μετάλλου, ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀξίαν ἄλλου νομίσματος λαμβανομένου ὡς ὅρου συγκρίσεως.

Πρόβλημα. Τοῦ τίτλου τοῦ εἰκοσοφράγκου ὄντος 0, 900

καὶ τοῦ βάρους 6, γρ. 45161, νὰ εὑρεθῇ ἡ πραγματικὴ ἀξία τῆς λίρας στερλίνας, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ μὲν τίτλος αὐτῆς εἶνε 0, 916$\frac{2}{3}$ τὸ δὲ βάρος 7,γρ. 980855.

Λύσις. Ἐπειδὴ βάρος 6γρ., 45161 τιμᾶται 20 φράγκων, βάρος μὲν 1 γραμμαρίου θέλει τιμᾶσθαι $\frac{20}{6,\ 45161}$ φράγ. βάρος δὲ 7, 980855 θέλει τιμᾶσθαι $\frac{20 \times 7,\ 980855}{6,\ 45161}$.

Ἐπειδὴ δὲ βάρος 7, 980855 γραμμαρίων ὑπὸ τὸν τίτλον 0, 900 τιμᾶται $\frac{7,\ 980855 \times 20}{6,\ 45161}$ φράγκα, τὸ αὐτὸ βάρος, ὅταν μὲν ὁ τίτλος αὐτοῦ εἶνε 1, θέλει τιμᾶσθαι

$$\frac{7,98085 \times 20}{6,45161 \times 0,900}$$

ὅταν δὲ ὁ τίτλος αὐτοῦ εἶνε 0,916 $\frac{2}{3}$, θέλει τιμᾶσθαι

$$\frac{7,\ 980855 \times 20 \times 0,\ 916\ \frac{2}{3}}{6,\ 45161 \times 0\ ,\ 900},$$

ἤτοι 25 φρ., 21.

Πόρισμα. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ἐξαγομένου ἕπεται, ὅτι, ἐὰν καλέσωμεν β, τ, α τὸ βάρος, τὸν τίτλον καὶ τὴν ἀξίαν τοῦ νομίσματος, ὅπερ λαμβάνεται ὡς ὅρος συγκρίσεως καὶ Β, Τ, α τὸ βάρος, τὸν τίτλον καὶ τὴν ἀξίαν τοῦ ἄλλου νομίσματος, θέλομεν ἔχει τὸν τύπον

$$\chi = \frac{\beta \times \tau \times \alpha}{\Beta \times \Upsilon}$$

ὅστις δίδωσι τὸν κανόνα, δι' οὗ εὑρίσκομεν τὴν πραγματικὴν ἀξίαν ἑνὸς νομίσματος.

Μονάδες νομίσματος.

82. Ἡ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μὲν ἀργυροῦ νομίσματος εἶνε ἡ

δραχμὴ, τοῦ δὲ χρυσοῦ τὸ εἰκοσάδραχμον. Καλεῖται δὲ δραχμὴ μὲν ἡ ἀξία βάρους 5 γραμμαρίων ἀργυρῶν ὑπὸ τὸν τίτλον 0,835· εἰκοσάδραχμον δὲ ἡ ἀξία βάρους 6,45161 γραμμαρίων χρυσῶν ὑπὸ τὸν τίτλον 0,900.

Σχέσις τῶν νέων μονάδων πρὸς τὰς παλαιάς.

83. ά. Μονάδες μήκους. Πρὸ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ συστήματος, περὶ οὗ ὡμιλήσαμεν, καὶ μέχρι σήμερον ἀκόμη γίνεται χρῆσις ἐν Ἑλλάδι διὰ τὴν μέτρησιν τῶν μηκῶν, τοῦ μικροῦ, τοῦ μεγάλου καὶ τοῦ τεκτονικοῦ πήχεως. Ἡ σχέσις δὲ αὐτῶν πρὸς τὸ μέτρον εἶνε ἡ ἑξῆς·

1 μικρὸς πῆχυς=0,648 μετρ.
1 μέγας πῆχυς=0,669 »
1 τεκτον. πῆχ.=0,75

ἀντιστρόφως

ἓν μέτρον=1,5432 μικρ. πήχ.
ἓν μέτρον=1,495 μεγ. πήχ.
ἓν μέτρον=1,333 τεκτ. πήχ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων ἕπεται ά. ὅτι

Ἵνα τρέψωμεν πήχεις εἰς μέτρα, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ἐὰν μὲν οἱ πήχεις εἶνε μικροὶ, ἐπὶ 0, 648, ἐὰν δὲ οἱ πήχεις εἶνε μεγάλοι, ἐπὶ 0, 669, ἐὰν δὲ οἱ πήχεις εἶνε τεκτονικοὶ ἐπὶ 0, 75.

Ἵνα δὲ τρέψωμεν μέτρα εἰς πήχεις, πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ, προκειμένου μὲν περὶ μικρῶν πήχεων, ἐπὶ 1, 5432· προκειμένου δὲ περὶ μεγάλων ἐπὶ 1, 495· προκειμένου δὲ περὶ τεκτονικῶν, ἐπὶ 1, 333.

β'. Μονάδες βάρους.

Ἡ κυριωτέρα μονὰς κατὰ τὸ παλαιὸν καὶ ἐπικρατοῦν ἔτι σύστημα εἶνε ἡ ὀκά. Λογίζεται δὲ ἡ ὀκὰ ὡς ἑξῆς·

1 ὀκὰ = 1, 283 χιλιόγραμ.
1 χιλιόγρ. = 0, 779 ὀκαδ. = 312 δράμια.

Ἵνα τρέψωμεν λοιπὸν ὀκάδας εἰς χιλιόγραμμα, πολλαπλασιάζομεν αὐτὰς ἐπὶ 1, 283, ἵνα δὲ τρέψωμεν χιλιόγραμμα εἰς ὀκάδας, πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ ἐπὶ 0, 779.

γ'. Μονάδες νομίσματος.

Ἡ κυριωτέρα μονὰς τοῦ νομίσματος εἶνε ἐν μὲν τῇ Ἑλλάδι ἡ παλαιὰ δραχμὴ, ἐν δὲ τῇ Τουρκίᾳ τὸ γρόσιον. Εὑρίσκονται δὲ αἱ νομισματικαὶ αὗται μονάδες ἐν τῇ ἑξῆς σχέσει πρὸς ἀλλήλας.

1 φράγκον = 1,12 παλ. δραχ.
1 » = 4,39 χρυσ. γρόσια
1 παλ. δραχ. = 0,89 φραγ.
1 παλ. δραχ. = 3,91 χρυσ. γρόσια
1 χρυσ. γρος. = 0,2278 φράγκ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων ἐξάγεται εὐκόλως ὁ κανὼν τῆς μετατροπῆς τῶν μονάδων τούτων εἰς ἀλλήλας.

Πίνακες τῶν μέτρων, σταθμῶν καὶ νομισμάτων ἄλλων τινῶν κρατῶν.

ἀ. Ἀγγλία.

1. Μέτρα.

ὀργυιὰ	ὑάρδα	ποὺς	δάκτυλ.	γραμμὴ	ἀξία εἰς μέτρα γαλ.
1=	2	6	72	864	1.8288
	1=	3	36	432	0.9144
		1=	12	144	30.4794 ὑρεκατόμε.
			1=	12	12.3995 ὑποχιλιόμ.

ΣΗΜ. Εἰς τὰς ἐμπορικὰς ἐργασίας ἐν Κωνσταντινουπόλει λογίζονται τὴν μὲν ὑάρδαν ἴσην μὲ 1. 3336 τοῦ μικροῦ πήχεως Κων/πόλεως, τὸν δὲ πῆχυν ἴσον μὲ 0. 7498 τῆς ὑάρδας καὶ τρέπουσιν ἑπομένως τὰς μὲν ὑάρδας εἰς πήχεις πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς ἐπὶ 1. 3336, τοὺς δὲ πήχεις εἰς ὑάρδας, πολλαπλασιάζοντες αὐτοὺς ἐπὶ 0. 7498.

2. Σταθμά.

Α'. Ἐμπορίου.

τόνος	καντάρ.	κουσάρτερ	λίτρα βαρεῖα	οὐγκία	δράμιον	ἀξία εἰς χιλιόγραμμα	ἀξία εἰς ὀκάδας.
1=	20	80	2240	35840	573440	1016.0475	792.517
	1=	4	112	1792	28672	50.8024	39.624
		1=	28	548	8768	12.7106	9.906.
			1=	16	256	453γρ.5926	141 δρ.
				1=	16	28. 3495	8δρ., 8.

Β'. Ἰατρικὰ καὶ τῶν πολυτίμων μετάλλων καὶ λίθων.

λίτρα ψιλὴ	οὐγκία	δραχ.	σκρούπουλ.	κόκκος	ἀξία εἰς χιλιόγραμμα	ἀξία εἰς δράκμια
1=	12	96	288	5760	373γρ. 241948	116δράμ.35
	1=	8	24	480	31. 103496	9, 69
		1=	3	60	3. 887937	1, 21
			1=	20	129,ὑφεκατ. 577	

3. *Νομίσματα.*

Νομίσματα	βάρος	τίτλος	ἀξία εἰς φράγκ.	ἀξία εἰς γρ. χρυσᾶ
Λίρα στερλίνα· χρυσοῦν νόμισμα, δυνάμενον 20σελίνια	7.98	0 916 $\frac{2}{3}$	25.22	110.575
Σελίνιον· ἀργυροῦν νόμισμα, δυνάμενον 12 δηνάρια	5.655	0.925	1.26	5.52
Δηνάριον· χαλκοῦν νόμισμα, δυνάμενον 4 φαρδίνια	11.336		0.10	18, παρ. 4.

6'. Ῥωσσία.

1. *Μέτρα.*

Ὀργυιὰ archine	ποὺς	δάκτυλ.	γραμμὴ	ἀξία εἰς μέτρα
1=	7	84	840	2, 1336 μέτρα
	1=	12	120	304, 79 ὑποχιλιόμ.
		1=	10	2, 54

2. *Σταθμά.*

Βέρκοβιτζ	πούτιον	λίτρα	οὐγκία	ἀξία εἰς χιλιόγραμμα	ἀξία εἰς ὁκάδ.
1=	10	400	6400	163, 81	127, 608
	1=	40	640	16, 381	12, 7608
		1=	16	409 γρ. 517	127 δρ. 769

3. *Νομίσματα.*

Νομίσματα	βάρος	τίτλος	ἀξία εἰς φράγκ.	ἀξία εἰς γρ. χρυσᾶ
Αὐτοκρατορικὸν πώλιον· χρυσοῦν νόμισμα, δυνάμενον 5 ῥούβλια .	6.545	0.916 $\frac{2}{3}$	20.67	90 γρ. 27
Ῥούβλιον· ἀργυροῦν νόμισμα, δυνάμενον 100 καπίκια	20.736	0.868	4	17. 56

Συμπληρωματικά τινα περὶ μέτρων καὶ σταθμῶν.

1. Τὸ κοιλὸν Κ/πόλεως ἰσοδυναμεῖ μὲ 33,266 λίτρας.
2. » Θεσσαλονίκης » 4 κοιλοῖς Κ/πόλεως.
3. » Γαλαζίου » 11,48 » »
4. » Βραΐλας » 18,9 » »
5. Ὁ σάκκος τῆς Ῥωσσίας » 7,44 » »
6. Ἡ Ῥωσ. ψάθα (Tsche-wert) » 5,95 » »
7. Τὸ Κουάρτερ » 8,245 » »
8. Τὸ γρόσιον τοῦ Γαλαζίου » 1,15 γροσίοις »
   (17,375 γρ. ἰσοδυναμοῦσιν 1 μετζιτίφ).
9. Τὸ γρόσιον Βραΐλας ἰσοδυναμεῖ 1,63 γροσίοις Κ/πόλεως
   (12,25 γρ. δύνανται 1 μετζ.).

Σημ. Ὡς μέτρα χωρητικότητος μεταχειρίζονται ἐν τῇ πωλήσει τοῦ ἐλαίου, ἐν Μιτυλήνῃ μὲν τὸ λαγήνιον, ἐν Ἀδραμυττίῳ δὲ τὸ ἀγιάριον. Ἰσοδυναμοῦσι δὲ ἐν συγκρίσει πρὸς τὰς ὀκάδας, τὸ μὲν λαγήνιον μὲ 6,25 ὀκάδας, τὸ δὲ ἀγιάριον μὲ 9,25. Διὰ νὰ τρέψωμεν λοιπὸν τὰ μέτρα ταῦτα εἰς ὀκάδας, πολλαπλασιάζομεν, προκειμένου μὲν περὶ λαγηνίων, ἐπὶ 6,25, προκειμένου δὲ περὶ ἀγιαρίων ἐπὶ 9,25. Διὰ νὰ τρέψωμεν δὲ ὀκάδας εἰς τοιαῦτα μέτρα, πολλαπλασιάζομεν, προκειμένου μὲν περὶ λαγηνίων, ἐπὶ 0,16, προκειμένου δὲ περὶ ἀγιαρίων ἐπὶ 0,108108.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΣΤ'.

Περὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν.

84. Συμμιγὴς ἀριθμὸς ὀνομάζεται πᾶς συγκεκριμένος ἀριθμός, ὅστις συνίσταται ἐκ πολλῶν μερῶν, ἀναφερομένων εἰς διαφόρους μονάδας, τῶν ὁποίων τὸ σύστημα δὲν εἶνε δεκαδικόν. Π. χ. 5 λιρ. στερλ. 15 σελ. 7 δην. 3 φαρδ.

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς μονάδας τῆς ἐσχάτης ὑποδιαιρέσεως.

85. Ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 5 λ. ς. 15 σελ. 7 δην. 3 φαρδ. εἰς φαρδίνια.

5
×20
100
+15
115
×12
1380
+7
1387
×4
5548
+3
5551 φαρδ.

Ἐπειδὴ 1 λίρα δύναται 20 σελίνια, αἱ 5 λίραι δύνανται 5×20 ἤτοι 100. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς περιέχει 15 σελίνια, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς μετατρέπεται εἰς τὸν ἀριθμὸν 115 σελ. 7 δην. 3 φαρδ.

Ἐπειδὴ πάλιν 1 σελίνιον δύναται 12 δηνάρια, τὰ 115 σελίνια δύνανται 1380 δηνάρια. Ἐπειδὴ καὶ ἐν τῷ συμμιγεῖ περιέχονται 7 δηνάρια, ὁ δοθεὶς συμμιγὴς μετατρέπεται εἰς τὸν ἀριθμὸν 1387 δην. 3 φαρδ. Ἐπειδὴ τέλος ἓν δηνάριον δύναται 4 φαρδίνια, τὰ 1387 δηνάρια δύνανται 1387×4· ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν 3 ἔτι φαρδίνια, ὁ δοθεὶς συμμιγὴς ἰσοδυναμεῖ 5551 φαρδινίοις.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Ἵνα τρέψωμεν συμμιγῆ εἰς μονάδας τῆς ἐσχάτης ὑποδιαιρέσεως, τρέπομεν, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης ὑποδιαιρέσεως, τὰς μονάδας ἑκάστης ὑποδιαιρέσεως εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας καὶ προσθέτομεν καὶ τὸ ὁμοειδὲς μέρος τοῦ συμμιγοῦς.

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς κλάσμα.

Ἐπειδὴ ἓν δηνάριον δύναται 4 φαρδίνια, τὰ 5551 φαρδίνια ἰσοῦνται μὲ $\frac{5551}{4}$ δηνάρια.

Ὥστε

5 λιρ. στερ. 15 σελ. 7 δην. 3 φαρδ.$=\frac{5551}{4}$ δην.

Ἐπειδὴ δὲ ἓν σελίνιον δύναται 12 δηνάρια, τὰ $\frac{5551}{4}$ δηνάρια δύνανται $\frac{5551}{12\times4}$

Ἐπειδὴ τέλος 1 λίρα δύναται 20 σελίνια, τὰ $\frac{5551}{12\times4}$ σελίνια δύνανται $\frac{5551}{20\times12\times4}$ λίρας, ὥστε

$$5 \text{ λ. στ. } 15 \text{ σελ. } 7 \text{ δην. } 3 \text{ φαρδ.} = \frac{5551}{12\times4} \text{ σελ.}$$

καὶ 5 λ.στ. 15 σελ. 7 δην. 3 φαρ. $= \frac{5551}{20\times12\times4}$ λίρ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν δύο τινά· ἀ. ὅτι πᾶς συμμιγὴς εἶνε δυνατὸν νὰ τραπῇ εἰς κλάσμα ἐκφράζον μονάδας μιᾶς τινος ὑποδιαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς καὶ β'. ὅτι ἵνα εὕρωμεν τὸ κλάσμα, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ δοθέντι συμμιγεῖ ἀριθμῷ, πρέπει ἀριθμητὴν μὲν νὰ θέσωμεν τὸν ἀριθμόν, ὃν εὑρίσκομεν, τρέποντες τὸν συμμιγῆ εἰς μονάδας τῆς ἐσχάτης ὑποδιαιρέσεως, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες φανερώνουσι τὴν πρὸς ἀλλήλας σχέσιν τῶν μονάδων τοῦ συμμιγοῦς, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς μονάδος, ἣν πρέπει νὰ παριστᾷ τὸ κλάσμα καὶ προχωροῦντες μέχρι τῆς τελευταίας.

Τροπὴ ἀριθμοῦ τινος εἰς συμμιγῆ.

86. Ὑποθέσωμεν ἀ. ὅτι πρόκειται νὰ τρέψωμεν 78548 δευτερόλεπτα εἰς συμμιγῆ.

Ἐπειδὴ $1'$ δύναται $60''$, διαιροῦντες τὸν ἀριθμὸν 78548 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 60, εὑρίσκομεν ὅτι ἐν τοῖς $78548''$ περιέχονται 1309 καὶ $8'''$ ὥστε

$$78458'' = 1309' \; 8''.$$

Ἐπειδὴ δὲ 1 ὥρα δύναται $60'$, διαιροῦντες τὰ $1309'$ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 60, εὑρίσκομεν 21 ὥρας καὶ $49''$ ὥστε

$$78548'' = 21 \text{ ὥρ. } 49' \; 8''.$$

Ὑποθέσωμεν β'. ὅτι πρόκειται νὰ τραπῶσι τὰ $\frac{70}{27}$ τοῦ ἡμερονυκτίου εἰς συμμιγῆ.

Εἶνε γνωστὸν ὅτι

$$\frac{70 \text{ ἡμ.}}{27} = 2 \text{ ἡμ.} + \frac{16}{27}$$

ἀλλὰ

$$\frac{16 \text{ ἡμ.}}{27} = \frac{16\times24 \text{ ὥρ.}}{27} = 14 \text{ ὥρ.} + \frac{6}{27}$$

καὶ

$$\frac{6 \text{ ὥρ.}}{27} = \frac{16\times60'}{27} = 13' + \frac{9}{27}$$

καὶ

$$\frac{9'}{27} = \frac{9\times60''}{27} = 20''.$$

ὥστε

$$\frac{70 \text{ ἡμ.}}{27} = 12 \text{ ἡμ. } 14 \text{ ὥρ. } 13' \; 20''.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών.

Ἵνα τρέψωμεν κλάσμα εἰς συμμιγῆ, πρέπει, πρὸς εὕρεσιν μὲν τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως, νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν μονάδων τῶν ἄλλων τάξεων νὰ τρέπωμεν πρῶτον τὰ διαδοχικὰ

ὑπόλοιπα εἰς μονάδας τάξεως ἀμέσως κατωτέρας ἐκείνης, ἣν ἕκαστον παριστᾷ καὶ νὰ ἐξακολουθῶμεν τὴν διαίρεσιν μέχρις οὗ εὕρωμεν καὶ τὰς μονάδας τῆς ἐσχάτης ὑποδιαιρέσεως.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἀκολούθως·

70	27
16	2 ἡμ. 14 ὥρ. 13′ 20″
×24	
384	
6	
×60	
360	
9	
×60	
540	
0	

Πρόσθεσις.

87. *Κανών.* Ἵνα προσθέσωμεν συμμιγεῖς ἀριθμούς, γράφομεν πρῶτον αὐτοὺς ὑπ' ἀλλήλους οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ὑπὸ τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην καὶ προσθέτομεν χωριστὰ τὰς μονάδας ἑκάστης στήλης, ἀρχίζοντες ἀπὸ τῆς ἐκ δεξιῶν πρώτης. Καὶ ἂν μὲν πάντα τὰ εὑρεθησόμενα ἀθροίσματα εἶνε μικρότερα ἕκαστον μιᾶς μονάδος τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, γράφομεν αὐτὰ ὑπὸ τὴν οἰκείαν στήλην, χωρίζοντες τὸ ἄθροισμα ἀπὸ τῶν προσθετέων διὰ γραμμῆς· ἂν δὲ προκύψῃ ἄθροισμά τι μεγαλείτερον μιᾶς μονάδος τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαιρέσεως, διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει τὴν σχέσιν, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν μονάδων τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην, ἧς εὑρήκαμεν τὸ ἄθροισμα, τὸ δὲ πηλίκον προσθέτομεν μετὰ τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις·

1ον παράδειγμα

4 ἡμ.	15 ὥρ.	24′	32″
3	5	15	8
7	3	20	10
14 ἡμ.	23 ὥρ.	59′	50″

2ον παράδειγμα

5 λ.	18 σελ.	10 δην.	3 φαρ.
4	17	5	2
8	19	11	1
19 λ.	16 σελ.	3 δην.	2 φαρ.

Ἀφαίρεσις.

88. *Κανών.* Ἵνα ἀφαιρέσωμεν συμμιγεῖς ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς ὑπ' ἀλλήλους οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ὑπὸ τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην καὶ ἀφαιροῦμεν τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν ὁμοειδῶν μονάδων τοῦ μειωτέου ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ἐκ δεξιῶν πρώτης. Ἐὰν δὲ συμβῇ ἐν μιᾷ ἢ καὶ πλείοσι τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων, ὁ ἀφαιρετέος νὰ εἶνε μεγαλείτερος τοῦ μειωτέου, αὐξάνομεν πρῶτον τὸν μειωτέον κατὰ τὰς μονάδας, ἃς περιέχει μία μονὰς τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ εἶτα ἀφαιροῦμεν· ἵνα μὴ μεταβληθῇ ὅμως τὸ ὑπόλοιπον αὐξάνομεν κατὰ μίαν μονάδα καὶ τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται μὲν οὕτω·

15 ὑάρ.	2 π.	8 δάκ.	9 γρ.
8	1	9	7
7 ὑάρ.	0	11 δάκ.	2 γρ.

ἐκτελεῖται δὲ ὡς ἑξῆς·

Στήλη τῶν γραμμῶν. 7 ἀπὸ 9, 2· γράφομεν 2 εἰς τὴν στήλην τῶν γραμμῶν.

Στήλη τῶν δακτύλων. 9 δάκτυλοι ἀπὸ 8 δακτύλων δὲν ἀφαιροῦνται· προστίθεμεν λοιπὸν εἰς τοὺς 8 δακτύλους τὸ ἰσότιμον ἑνὸς ποδὸς, ἤτοι 12 δακτύλους καὶ λέγομεν· 9 ἀπὸ 20, 11· γράφομεν 11 ὑπὸ τὴν στήλην τῶν δακτύλων.

Στήλη τῶν ποδῶν. 1 ποὺς καὶ εἷς, ὃν πρέπει νὰ προσθέσωμεν πρὸς ἀντιστάθμισιν τοῦ ποδὸς, ὃν προσεθήκαμεν εἰς τοὺς 8 δακτύλους τοῦ μειωτέου, δίδουσι 2· 2 λοιπὸν πόδες ἀφαιρούμενοι ἀπὸ 2 δίδουσι 0· γράφομεν λοιπὸν 0 ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ποδῶν.

Στήλη τῶν ὑαρδῶν. 8 ἀπὸ 15, 7· γράφομεν 7 ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ὑαρδῶν.

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.

89. *Κανών.* Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν, τὰς μονάδος ἑκάστης ὑποδιαιρέσεως τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν. Καὶ ἐὰν μὲν μηδὲν ἐκ τῶν εὑρεθησομένων γινομένων ὑπερβαίνῃ μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας στήλης, γράφομεν ἕκαστον αὐτῶν ὑπὸ τὴν οἰκείαν στήλην· ἐὰν δὲ εὑρεθῇ γινόμενον μεγαλείτερον μιᾶς μονάδος τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει τὴν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεταξὺ τῶν μονάδων τῆς τάξεως τοῦ γινομένου ἐκείνου καὶ τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην εἰς ἣν ἀνήκει τὸ γινόμενον, τὸ δὲ πηλίκον προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας στήλης.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω

8 στ.	18 ὀκ.	250 δραμ.
		×5
42 στ.	5 ὀκ.	50 δρ.

καὶ ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς·

Στήλη τῶν δραμίων. $5 \times 250 = 1250$· ἀλλὰ 1250 δράμια διαιρούμενα διὰ 400, δίδουσι 3 ὀκάδας καὶ 50 δράμια. Γράφομεν λοιπὸν 50 εἰς τὴν στήλην τῶν δραμίων.

Στήλη τῶν ὀκάδων. $5 \times 18 = 90$ καὶ 3, αἵτινες προῦκυψαν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δραμίων, γίνονται 93 ὀκάδες, αἵτινες δίδουσι 2 στατῆρας καὶ 5 ὀκάδας. Γράφομεν λοιπὸν 5 ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ὀκάδων.

Στήλη τῶν στατήρων. $5 \times 8 = 40$ καὶ 2 στατῆρες, οἵτινες προῦκυψαν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ὀκάδων, γίνονται 42. Γράφομεν λοιπὸν 42 ὑπὸ τὴν στήλην τῶν στατήρων.

Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.

90. *Κανών.* Ἵνα διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἀκεραίου, πρέπει, πρὸς εὕρεσιν μὲν τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως τοῦ πηλίκου, νὰ διαιρέσωμεν τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου· πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν μονάδων τῶν ἄλλων τάξεων, νὰ τρέπωμεν τὰ διάφορα ὑπόλοιπα εἰς μονάδας τάξεως ἀμέσως κατωτέρας ἐκείνης, ἣν παριστῶσι, καὶ ἀφ' οὗ προσθέτωμεν τὸ ὁμοειδὲς μέρος τοῦ συμμιγοῦς νὰ διαιρῶμεν τὸ προκύπτον ἄθροισμα διὰ τοῦ διαιρέτου.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται μὲν οὕτω·

25 ἡμ. 17 ὥρ. 35′ 42″	7
	3 ἡμ. 16 ὥρ. 13′ 40″ $\frac{2}{7}$

4
×24
96
+17
113
1
×60
60
+35
95
4
×60
240
+42
282
0

ἐκτελεῖται δὲ ὡς ὡς ἐξῆς·

Τάξις τῶν ἡμερονυκτίων. Ὁ 7 εἰς τὰ 25 ἡμερονύκτια εἰσέρχεται 3· 3 ἐπὶ 7, 21 ἀπὸ 25, 4. Γράφομεν εἰς τὸ πηλίκον 3 ἡμερονύκτια.

Τάξις τῶν ὡρῶν. Ὑπελείφθησαν ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ἡμερονυκτίων 4 ἡμέραι, αἵτινες δύνανται 96 ὥρας· 96 λοιπὸν ὧραι, ἃς δύνανται αἱ 4 ἡμέραι καὶ 17, ἃς ἔχει ὁ διαιρετέος, δίδουσιν 113 ὥρας, αἵτινες διαιρούμεναι διὰ τοῦ 7, δίδουσι 16 ὥρας. Γράφομεν 16 εἰς τὴν τάξιν τῶν ὡρῶν τοῦ πηλίκου.

Τάξις τῶν πρώτων λεπτῶν. Ὑπελείφθη ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ὡρῶν 1 ὥρα, ἥτις δύναται 60′. Τὰ 60′ λοιπόν, ἅτινα δίδωσιν ἡ μία ὥρα καὶ τὰ 35′, ἅτινα ἔχει ὁ συμμιγής, δίδουσιν 95′, ἅτινα διαιρούμενα διὰ τοῦ 7 δίδουσι 13′.

Τάξις τῶν δευτέρων λεπτῶν. Ὑπελείφθησαν 4 πρῶτα λεπτά, ἅτινα δύνανται 240″. Τὰ 240 λοιπὸν δεύτερα λεπτὰ καὶ τὰ 42 τοῦ συμμιγοῦς δίδουσι 282″, ἅτινα διαιρούμενα διὰ τοῦ 7 δίδουσι 40″ $\frac{2}{7}$.

ΣΗΜ. ά. Τὰς διαιρέσεις ταύτας, ὅταν ὁ διαιρέτης δὲν εἶνε μέγας, πρέπει νὰ συνηθίσωσιν οἱ μαθηταὶ νὰ ἐκτελῶσι χωρὶς νὰ γράφωσι τὰ ὑπόλοιπα.

ΣΗΜ. β′. Ἡ ἀλήθεια τῶν κανόνων, οὓς ἐδώκαμεν εἶνε προφανής.

Πολλαπλασιασμὸς τῶν συμμιγῶν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

91. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς ἀρχῆς, ὅτι τὸ γινόμενον ἑνός τινος πολλαπλασιασμοῦ γίνεται τοσάκις μεγαλείτερον ἢ μικρότερον, ὁσάκις εἷς ἐκ τῶν παραγόντων γίνηται μεγαλείτερος ἢ μικρότερος καὶ ἐπί τινων θεωρημάτων τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ (§. 16 καὶ 18) δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν συμμιγῶν εὐκολώτερα καὶ ταχύτερα, ὅταν μάλιστα οἱ παράγοντες εἶνε ἀριθμοὶ ἀρκετὰ μεγάλοι.

ά. Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.

Ἔστω νὰ ἐκτελεσθῇ κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ συμμιγοῦς 5 υἱάρ. 2 πόδ. 8 δάκ. 9 γραμ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 28.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται μὲν οὕτω·

5 υἱάρ. 2 πόδ. 8 δάκ. 9 γραμ.

28

πόδ. 2 =	1 1/2	140			
	1/2	14			
δάκ. 8 =	6	4	2		
	2	4	2		
γραμ. 9 =	6	1	1	8	
	3	0	1	2	
		0	0	7	
		165 ὑάρ. 1 π.		5 δάκτ.	

Ἐκτελεῖται δὲ ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστέος εἶνε ἄθροισμα 5 υἱαρδῶν, 2 ποδῶν, 8 δακτύλων καὶ 9 γραμμῶν, ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα. Προβαίνομεν λοιπὸν εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν διαφόρων τούτων γινομένων ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως.

Ἀνωτάτη τάξις. 5 υἱάρδαι πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ 28 δίδουσιν 140 υἱάρδας. Γράφομεν λοιπὸν 140 ὑπὸ τὴν στήλην τῶν υἱαρδῶν.

Τάξις τῶν ποδῶν. Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν δύο ποδῶν ἐπὶ 28, ἀποσυνθέτομεν τοὺς δύο πόδας εἰς μέρη οὕτως, ὥστε τὸ μὲν πρῶτον νὰ εἶνε ὑποπολλαπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ 3, ὅστις δεικνύει πόσους πόδας δύναται μία υἱάρδα, τὰ δὲ ἄλλα, ὑποπολλαπλάσια ἢ πάλιν τοῦ 3 ἢ ἕκαστον τοῦ προηγουμένου. Ἀντὶ δὲ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο πόδας ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 28 πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ ἐπιφυλασσόμενοι νὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα μετὰ τὴν εὕρεσιν ὅλων. Ἐνταῦθα ἀποσυνθέτομεν τοὺς 2 πόδας εἰς 1 1/2 πόδας, οἵτινες εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς μιᾶς υἱάρδας καὶ εἰς 1/2, ὅστις εἶνε τὸ τρίτον τῶν 1 1/2 ποδῶν. Σκεπτόμεθα δὲ πρὸς εὕρεσιν τῶν γινομένων τοῦ 1 1/2 καὶ τοῦ 1/2 ὡς ἑξῆς:

Ἐπειδή, ἐὰν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 1 υἱάρδαν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 28, ἠθέλομεν λάβει γινόμενον 28 υἱάρδας, πολλαπλασιάζοντες ἤδη 1 1/2 πόδας, ἤτοι ἡμίσειαν υἱάρδαν ἐπὶ 28, θέλομεν λάβει τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς 1 υἱάρδας, ἤτοι 14 υἱάρδας.

Ἀλλ' ἐπειδὴ 1 1/2 πόδες δίδουσι γινόμενον 14 υἱάρδας, 1/2 ποῦς, ὅστις εἶνε τὸ 1/3 τῶν 1 1/2, θέλει δώσει τὸ τρίτον τῶν 14 υἱαρδῶν, ἤτοι 4 υἱάρδ. 2 ποδ.

Τάξις τῶν δακτύλων. Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν 8 δακτύλων πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ 28, ἀποσυνθέτομεν τοὺς 8 δακτύλους εἰς 6, οἵτινες εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ἑνὸς ποδὸς καὶ εἰς 2, οἵτινες εἶνε τὸ τρίτον τῶν 6 δακτύλων, καὶ πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς 6 δακτύλους καὶ ἔπειτα τοὺς δύο.

Ἐπειδὴ δὲ ἥμισυς ποὺς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 28 ἔδωκε 4 υἱάρδ. 2 ποδ., οἱ 6 δάκτυλοι, οἵτινες ἰσοδυναμοῦσι τῷ ἡμίσει τοῦ ποδὸς, θέλουσι δώσει τὸ αὐτὸ γινόμενον.

Ἐπειδὴ πάλιν οἱ 6 δάκτυλοι δίδουσι 4 υἱάρδ. 2 πόδ., οἱ 2 δάκτυλοι θέλουσι δώσει τὸ τρίτον τῶν 4 υἱαρδ. 2 ποδ., ἤτοι 1 υἱάρδ. 1 π. 8 δακ.

Τάξις τῶν γραμμῶν. Ἀποσυνθέτοντες τέλος τὰς 9 γραμμὰς εἰς 6 καὶ εἰς 3 γραμμὰς εὑρίσκομεν τὰ ἀντιστοιχοῦντα γινόμενα ὡς ἑξῆς:

Ἐπειδὴ 2 δάκτυλοι πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ 28 ἔδωκαν γινόμενον 1 υἱάρδ. 1 π. 8 δακ., αἱ 6 γραμμαὶ, αἵτινες εἶνε τὸ τέταρτον τῶν δύο δακτύλων, θέλουσι δώσει τὸ τέταρτον τῶν 1 υἱάρδ. 1 ποδ. 8 δακ., ἤτοι 1 πόδ. 2 δακ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ 3 γραμμαὶ εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν 6, τὸ γινόμενον τῶν τριῶν γραμμῶν θὰ εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν 1 ποδ. 2 δακ. ἤτοι 7 δακ.

Εὑρίσκοντες λοιπὸν οὕτω τὰ διάφορα μερικὰ γινόμενα προσθέτομεν ἀκολούθως ταῦτα καὶ εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον.

6′. Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα.

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον ὁ συμμιγὴς 8 ὥρ., 15′, 40″ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{19}{20}$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

8 ὥρ. 15′ 40″

$\frac{19}{20}$

$\frac{10}{20}$	4 ὥρ.	7′	50″
$\frac{8}{20}$	2	3	55
$2\frac{1}{2}$ / $\frac{2}{20}$	1	1	$57\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$ / $\frac{2}{20}$	0	12	$23\frac{2}{5}+\frac{1}{10}$
$\frac{1}{20}$	0	24	$26\frac{4}{5}+\frac{1}{5}$
	7 ὥρ.	50′	53″

ἐκτελεῖται δὲ ὡς ἑξῆς:

Ἀποσυνθέτομεν κατὰ πρῶτον τὸν πολλαπλασιαστὴν $\frac{19}{20}$ εἰς μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μὲν πρῶτον νὰ εἶνε ἀκέραιον ὑποπολλαπλάσιον τῆς μονάδος, πάντα δὲ τὰ ἄλλα ἢ πάλιν τῆς μονάδος ἢ ἕκαστον τοῦ προηγουμένου, καὶ ἀφ᾽ οὗ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐφ᾽ ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ

πολλαπλασιαστοῦ, προσθέτομεν ἔπειτα τὰ μερικὰ γινόμενα. Ἐνταῦθα ἀποσυνθέτομεν τὰ $\frac{19}{20}$ εἰς $\frac{10}{20}$ ἅπερ εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος, εἰς $\frac{8}{20}$ ἅπερ εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{10}{20}$, εἰς $\frac{2\frac{1}{2}}{20}$, ἅπερ εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{5}{20}$, εἰς $\frac{1\frac{1}{2}}{20}$, ὅπερ εἶνε τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν $\frac{2\frac{1}{2}}{20}$, καὶ εἰς $\frac{1}{20}$ ὅπερ εἶνε τὸ διπλάσιον τοῦ $\frac{\frac{1}{2}}{20}$.

Προβαίνομεν δὲ μετὰ τοῦτο εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν διαφόρων γινομένων.

ά. γινόμενον. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστέος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὴν μονάδα δίδει γινόμενον ἴσον πρὸς ἑαυτόν, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{10}{20}$ ἤτοι ἐπὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος θὰ δώσῃ γινόμενον τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἤτοι 4 ὥρ. 7′ 50″.

β′. γινόμενον. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστέος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ $\frac{10}{20}$ ἔδωκε γινόμενον 4 ὥρ. 7′ 50″, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{8}{20}$, ἅπερ εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{10}{20}$, θέλει δώσει γινόμενον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ 4 ὥρ. 7′ 50″, ἤτοι 2 ὥρ. 3′ 55″.

γ′. γινόμενον. Ἐπειδὴ δὲ πάλιν ὁ νέος πολλαπλασιαστὴς $\frac{2\frac{1}{2}}{20}$ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{8}{20}$, καὶ ἐπειδὴ ὁ $\frac{8}{20}$ ἔδωκε γινόμενον 2 ὥρ. 3′ 55″, ὁ $\frac{2\frac{1}{2}}{20}$ θέλει δώσει τὸ ἥμισυ τῶν 2 ὥρ. 3′ 55″, ἤτοι 1 ὥρ. 1′ $57\frac{1}{2}$″.

δ′. γινόμενον. Ἐπειδὴ πάλιν ὁ πολλαπλασιαστέος, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ $\frac{2\frac{1}{2}}{20}$, ἔδωκε γινόμενον 1 ὥρ. 1′ $57''\frac{1}{2}$, ὁ αὐτὸς ἀριθμός, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{\frac{1}{2}}{20}$, ὅπερ εἶνε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ

$\frac{2\ 1/2}{20}$, θέλει δώσει τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 1 ὥρ. 1′ 57″ $\frac{1}{2}$, ἤτοι 12′ 23″ $\frac{2}{5}+\frac{1}{10}$.

ε. *γινόμενον*. Τέλος, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστέος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{\frac{1}{2}}{20}$, δίδει γινόμενον 12′ 23″ $\frac{2}{5}+\frac{1}{10}$, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{1}{20}$, θέλει δώσει τὸ διπλάσιον· τ. ε. 24′ 46″ $\frac{4}{5}+\frac{1}{5}$.

Εὑρόντες λοιπὸν οὕτω τὰ διάφορα γινόμενα καὶ προσθέτοντες αὐτὰ, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον.

γ′. *Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ.*

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 5 λ. 11 σελ. 8 δην. ἐπὶ 6 ποδ. 8 δακ. 9 γραμ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω:

5 λιρ. 11 σελ. 8 δην.
6 ποδ. 8 δακ. 9 γραμ.

		30 λιρ.			
11 σελ. =	10	3			
	1	0	6 σελ.		
8 δην. =	6	0	3		
	2	0	1		
8 δακ. =	6	2	15	10	
	2	0	18	$7\ \frac{1}{3}$	
9 γρμ. =	6	0	4	$7\ \frac{3}{4}+\frac{1}{12}$	
	3	0	2	$3\ \frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{24}$	
		37 λ.	11 σελ.	5 δην. $\frac{1}{12}$	

Ἐκτελεῖται δὲ ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς 6 ποδ. 8 δακ. 9 γραμ. εἶνε ἄθροισμα 6 ποδ. 8 δακ. 9 γραμ., ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον,

πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον πρῶτον ἐπὶ 6 πόδας, δεύτερον ἐπὶ 8 δακτύλους καὶ τρίτον ἐπὶ 9 γραμμὰς καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα. Ἀλλὰ πολλαπλασιάζοντες τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ 6 πόδας κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων, εὑρίσκομεν ἐκ τῶν μερικῶν γινομένων τὰ πέντε πρῶτα. Μεταβαίνομεν λοιπὸν εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ἄλλων γινομένων.

Γινόμενον τῶν δακτύλων. Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 8 δακτύλους, ἀποσυνθέτομεν τοὺς 8 δακτύλους εἰς 6 δακτύλους, οἵτινες εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ἑνὸς ποδὸς καὶ εἰς 2 δακτύλους, οἵτινες εἶνε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 6 καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ ἑκάτερον τῶν μερῶν τούτων.

Σκεπτόμεθα δὲ πρὸς εὕρεσιν τῶν γινομένων ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστέος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ ἕνα πόδα δίδει γινόμενον ἴσον ἑαυτῷ, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 6 δακτύλους, οἵτινες εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἑνὸς ποδὸς, θέλει δώσει τὸ ἥμισυ ἑαυτοῦ, ἤτοι 2 λ. 15 σελ. 10 δην.

Ἐπειδὴ δὲ 6 δάκτυλοι ἔδωκαν γινόμενον 2 λιρ. 15 σελ. 10 δην., οἱ δύο δάκτυλοι, οἵτινες εἶνε τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν 6 δακτύλων, θέλουσι δώσει τὸ τρίτον τῶν 2 λιρ. 15 σελ. 10 δην. ἤτοι 18 σελ. 7 δην. $\frac{1}{3}$.

Γινόμενον τῶν γραμμῶν. Ἵνα εὕρωμεν πάλιν τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 9 γραμμὰς, ἀποσυνθέτομεν τὰς 9 γραμμὰς εἰς 6 γραμμὰς, αἵτινες εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ δακτύλου καὶ εἰς 3 γραμμὰς, αἵτινες εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ 6 καὶ πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἐπὶ 6 γραμμὰς καὶ ἔπειτα ἐπὶ 3.

Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ δύο δάκτυλοι, πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστέον, ἔδωκαν γινόμενον 18 σελ. 7 δην. $\frac{1}{3}$, αἱ 6 γραμμαὶ, αἵτινες εἶνε τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν 2 δακτύλων, θέλουσι δώσει τὸ

$\frac{1}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 18 σελ. 7 δην. $\frac{1}{3}$· ἤτοι 4 σελ. 7 δην. $\frac{3}{4}+\frac{1}{12}$.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ 6 γραμμαὶ ἔδωκαν γινόμενον 4 σελ. 7 δην. $\frac{3}{4}+\frac{1}{12}$, αἱ 3 γραμμαὶ θέλουσι δώσει 2 σελ. 3 δην. $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{24}$.

Εὑρόντες ἤδη ἅπαντα τὰ μερικὰ γινόμενα, ἐκ τῆς προσθέσεως αὐτῶν εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον.

Συμπλήρωσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν συμμιγῶν.

92. Εἴδομεν μέχρι τοῦδε, πῶς ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων. Ἐξετάσωμεν ἤδη πῶς εἶνε δυνατὸν νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις αὕτη ἄνευ τῆς βοηθείας τῶν ὑποπολλαπλασίων.

α. Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα.

*Καν*ών. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον, ὅπερ εὑρίσκομεν, διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

β'. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἢ κλάσματος ἐπὶ συμμιγῆ.

*Καν*ών. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἢ κλάσμα ἐπὶ συμμιγῆ, τρέπομεν πρῶτον τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς κλάσμα, ἐκφράζον τὰς μονάδας, ἃς ὁρίζει τὸ πρόβλημα καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸ κλάσμα, ὅπερ θὰ προκύψῃ.

γ'. Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ.

*Καν*ών. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ συμμιγῆ, ἢ τρέπομεν ἀμφοτέρους εἰς κλάσματα καὶ πολλαπλασιάζομεν ἢ τρέπομεν μόνον τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς κλάσμα, ἐκφράζον

τὰς μονάδας ἃς ὁρίζει τὸ πρόβλημα καὶ ἐπὶ τὸ προκύπτον κλάσμα πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον.

Πρόβλημα. Ἠγοράσαμεν 5 υἱάρ. 2 ποδ. 8 δακ. 9 γραμ. πράγματός τινος πρὸς 4 μετζ. 10 γρ. 30 παρ. τὸν πόδα. Πόσα μετζίτια ἐπληρώσαμεν;

Λύσις. Ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4 μετζ. 10 γρ. 30 παρ. ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 5 υἱάρ. 2 π. 8 δακ. 9 γρ.

Ἵνα δὲ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τρέπομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς κλάσμα ἐκφράζον τὰς μονάδας, ἃς ὁρίζει τὸ πρόβλημα, δηλ. πόδας καὶ εἶτα πολλαπλασιάζομεν.

δ'. Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος.

*Καν*ών. Ἵνα διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντεστραμμένον.

ε. Διαίρεσις ἀκεραίου ἢ κλάσματος διὰ συμμιγοῦς.

*Καν*ών. Ἵνα διαιρέσωμεν ἀκέραιον ἢ κλάσμα διὰ συμμιγοῦς, τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς κλάσμα καὶ εἶτα διαιροῦμεν.

στ'. Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς.

*Καν*ών. Ἵνα διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ συμμιγοῦς τρέπομεν πρῶτον ἀμφοτέρους εἰς κλάσματα καὶ ἀφ' οὗ γίνῃ τοῦτο, διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρέτου, διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρετέου.

Πρόβλημα. Ἀντὶ 25 λιρῶν, 15 σελινίων, 7 δηναρίων καὶ 2 φαρδινίων, ἠγοράσαμεν 5 υἱάρδας, 1 πόδα, 6 δακτύλους καὶ 10 γραμμὰς ὑφάσματός τινος. Πόσον τιμᾶται ἡ υἱάρδα;

Λύσις. Ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος τούτου, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 25 λ. 15 σελ. 7δην. 2 φαρδ. διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 5 υἱάρ. 1 πόδ. 6 δακ. 10 γρ.

Ἡ ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως ταύτης γίνεται οὕτω·

25λ. 15σελ. 7δην. 2φαρ.	5υἱάρ. 1πόδ. 6δάκ. 10γρ.
×20	×3
500	15
+15	+1
515	16
12	12
6180	192
+7	+6
6187	198
×4	12
24748	2376
+2	+10
24750	2386

24750 ἀριθμητὴς διαιρετέου. 2386 ἀριθμ. τοῦ διαιρέτου.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ μὲν παρονομαστὴς τοῦ διαιρετέου εἶνε $4\times12\times20$, ὁ δὲ παρονομαστὴς τοῦ διαιρέτου $12\times12\times3$, ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἑξῆς διαίρεσιν.

$$24750\times12\times12\times3 \;\big|\; 2386\times4\times12\times20$$

ἥτις μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν μεταπίπτει εἰς τὴν ἑξῆς·

22275	4772
3187	4λίρ. 13τελ. 4δην. 1φαρ. $\frac{668}{4772}$.
×20	
63740	
1704	
×12	
20448	
1360	
×4	
5440	
668	

Εὐκολίαι τινὲς περὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων.

93. Ἐπειδὴ αἱ πράξεις γίνονται εὐκολώτερον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε δεκαδικοί, μετατρέπομεν πολλάκις τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς εἰς ἰσοδυνάμους δεκαδικούς, καὶ μετὰ τοῦτο μεταβαίνομεν εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων.

Οἱ συχνότερον ἐν τῇ ἀγορᾷ ἡμῶν ἀπαντῶντες συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶνε τὰ γρόσια, οἱ πήχεις καὶ αἱ ὀκάδες. Περὶ τὴν μετατροπὴν λοιπὸν αὐτῶν εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ἂς ἀσχοληθῶμεν.

Α'.

Μετατροπὴ τῶν παράδων εἰς ἑκατοστὰ τοῦ γροσίου.

94. Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς παράδων ἰσοδυναμεῖ κλάσματι γροσίου ἔχοντι ἀριθμητὴν μὲν τὸν δοθέντα ἀριθμόν, παρονομαστὴν δὲ τὸν 40 καὶ ἐπειδὴ

$$100 = 40 \times 2\tfrac{1}{2} = 2 \times 40 + \tfrac{40}{2}$$

ἔπεται ὅτι ἵνα τρέψωμεν παράδες εἰς ἑκατοστὰ γροσίου, πρέπει εἰς τὸ διπλάσιον αὐτῶν νὰ προσθέσωμεν τὸ ἥμισύ των· οὕτω· ἐπειδὴ $37 + 37 + \tfrac{37}{2} = 92\tfrac{1}{2}$ ἔπεται ὅτι

$$37 \text{παρ.} = 0.92\tfrac{1}{2} \text{ γροσίου}$$

ἢ

$$37 \text{παρ.} = 0.925 \text{ τοῦ γροσίου.}$$

95. *Ἀντιστρόφως.* Ἵνα τρέψωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν γροσίου εἰς παράδας πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ἐπὶ 40· οὕτω

0,875 τοῦ γροσίου = 35 παρ. διότι $0,875 \times 40 = 35$.

96. *Κανών.* Ἵνα τρέψωμεν γρόσια εἰς ἑκατοστὰ μετζιτίου, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰ ἐπὶ 5. Οὕτω 16 γρόσια ἰσοδυναμοῦσι 0,80 τοῦ μετζιτίου, διότι $16 \times 5 = 80$.

Β'.

Μετατροπὴ τῶν παράδων εἰς χιλιοστὰ τοῦ μετζιτίου.

97. Ἐπειδὴ ἓν μετζίτιον δύναται 800 παράδας ἔπεται ὅτι πᾶς ἀριθμὸς παράδων ἰσοῦται κλάσματι τοῦ μετζιτίου ἔχοντι ἀριθμητὴν μὲν τὸν δεδομένον ἀριθμόν, παρονομαστὴν δὲ τὸν 800. Ἐπειδὴ δὲ

$$1000 = 800 + \tfrac{800}{4}$$

ἔπεται, ὅτι ἵνα τρέψωμεν παράδας εἰς χιλιοστὰ μετζιτίου, πρέπει εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν παράδων νὰ προσθέσωμεν τὸ τέταρτον αὐτῶν. Οὕτω·

ἐπειδὴ $35 + \tfrac{35}{4} = 43\tfrac{3}{4}$, ἔπεται ὅτι

$$35 \text{ παραδ.} = 0,043\tfrac{3}{4} \text{ τοῦ μετζιτίου}$$

ἢ

$$35 \text{ παραδ.} = 0,04375 \text{ τοῦ μετζιτίου.}$$

Ἐφαρμογή. Τραπήτω ὁ συμμιγὴς 4 μετζ. 18 γρ. 35 παρ. εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν μετζιτίου.

Ἐπειδὴ

$$18 \text{ γρ.} = 0,90 \text{ μετζ.}$$

καὶ

$$35 \text{ παρ.} = 0,04375$$

ἔπεται ὅτι

$$4 \text{ μετζ. } 18 \text{ γρ. } 35 \text{ παρ.} = 4,94375 \text{ μετζ.}$$

98. Ἵνα τρέψωμεν ἀντιστρόφως δεκαδικὸν μέρος μετζιτίου εἰς γρόσια καὶ παράδας, πρέπει πρὸς εὕρεσιν μὲν τῶν γροσίων νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος ἐπὶ 20, πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν παράδων νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ προκύψαν μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον δεκαδικὸν μέρος ἐπὶ 40· οὕτω·

Ἵνα εὕρωμεν μὲ πόσα γρόσια καὶ παράδας ἰσοδυναμεῖ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ 5 μετζ., 3658 ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς·

$$\text{γρόσια} = 0,3658 \times 20 = 7,3160 = 7$$
$$\text{παράδες} = 0,3160 \times 40 = 12,6400 = 12,64$$

ὥστε

$$5 \text{ μ., } 3658 = 5 \text{ μετζ. } 7 \text{ γρ. } 12 \text{ παρ., } 64.$$

Γ'.

Μετατροπὴ ρουπίων εἰς δέκατα τοῦ πήχεως.

99. Ἐπειδὴ ὁ πῆχυς δύναται 8 ρούπια, ἔπεται ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ρουπίων ἰσοῦται κλάσματι πήχεως, ἔχοντι ἀριθμητὴν μὲν τὸν δοθέντα ἀριθμόν, παρονομαστὴν δὲ τὸν 8. Ἐπειδὴ δὲ

$$10 = 8 + \tfrac{8}{4}$$

ἔπεται ὅτι ἵνα τρέψωμεν ρούπια εἰς δέκατα τοῦ πήχεως, πρέ-

πει εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν ρουπίων νὰ προσθέσωμεν τὸ τέταρτον αὐτῶν. Οὕτω· ἐπειδὴ $7+\frac{7}{4}=8\frac{3}{4}$, ἔπεται ὅτι

$$7 \text{ ρούπ.} = 0{,}8\ \tfrac{3}{4}\ \pi\eta\chi. = 0{,}875.$$

100. Ἵνα τρέψωμεν ἀντιστρόφως δεκαδικὸν μέρος ρουπίων εἰς πήχεις, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ 8.

Δ'.

Μετατροπὴ τῶν δραμίων εἰς χιλιοστὰ ὀκάδος.

101. Ἐπειδὴ ἡ ὀκὰ δύναται 400 δράμια καὶ ἐπειδὴ

$$1000 = 400+400+\tfrac{400}{2},$$

ἔπεται, ὅτι ἵνα τρέψωμεν δράμια εἰς χιλιοστὰ ὀκάδος, πρέπει εἰς τὸ διπλάσιον τῶν δραμίων νὰ προσθέσωμεν τὸ ἥμισυ αὐτῶν. Οὕτω·

Ἐπειδὴ $300+300+\frac{300}{2}=750$, ἔπεται ὅτι

$$300 \text{δράμια} = 0.\ 750\ \text{ὀκάδος}.$$

Ἵνα τρέψωμεν ἀντιστρόφως χιλιοστὰ ὀκάδος εἰς δράμια, πρέπει νὰ πολλαπλαπλασιάσωμεν αὐτὰ ἐπὶ 400· οὕτω·

$$0{,}560\text{ὀκάδ.} = 0{,}560\times400 = 224{,}000 = 224\text{δράμια}.$$

Ε'.

Μετατροπὴ χρυσῶν γροσίων εἰς ἀργυρᾶ καὶ ἀντιστρόφως.

102. Ἐπειδὴ ἡ λίρα δύναται 108 ἀργυρᾶ γρόσια, ἔπεται ὅτι, ἵνα τρέψωμεν λίρας χρυσᾶς εἰς ἀργυρᾶς, πολλαπλασιάζομεν αὐτὰς ἐπὶ 108 καὶ διαιροῦμεν δι' 100· ἵνα δὲ τρέψωμεν ἀντιστρόφως ἀργυρᾶς λίρας εἰς χρυσᾶς, πολλαπλασιάζομεν αὐτὰς ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 108. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον γίνεται καὶ ἡ μετατροπὴ τῶν χρυσῶν γροσίων εἰς ἀργυρᾶ καὶ τὸ ἀντίστροφον.

Ἄλλαι τινὲς συντομίαι.

103. Ἐπειδὴ ὁ 5 εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ 10, ἵνα μὲν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 5, γράφομεν εἰς τὸ τέλος ἓν μηδενικὸν καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 2· ἵνα δὲ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 5, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 2 καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 10.

104. Ἐπειδὴ ὁ 25 εἶνε τὸ τέταρτον τοῦ 100, ἵνα μὲν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 25, γράφομεν εἰς τὸ τέλος δύο μηδενικὰ καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 4· ἵνα δὲ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ τοῦ 25, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 4 καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100.

105. Ἐπειδὴ ὁ 125 εἶνε τὸ ὄγδοον τοῦ 1000, ἵνα μὲν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 125, γράφομεν εἰς τὸ τέλος τρία μηδενικὰ καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 8· ἵνα δὲ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ τοῦ 125, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 8 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 1000.

106. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς $12\frac{1}{2}$ εἶνε τὸ ὄγδοον τοῦ 100, ἵνα μὲν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ $12\frac{1}{2}$, γράφομεν εἰς τὸ τέλος δύο μηδενικὰ καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 8· ἵνα δὲ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ $12\frac{1}{2}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 8, καὶ διαιροῦμεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ 100.

107. Ἐπειδὴ ὁ $3\frac{1}{3}$ εἶνε τὸ τρίτον τοῦ 10, ἵνα μὲν πολλα-

πλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ $3\frac{1}{3}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 10 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 3· ἵνα δὲ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ $3\frac{1}{3}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 3 καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ 10.

108. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 11 ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι 10+1 ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 11, πρέπει νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς τὸ δεκαπλάσιόν του.

Ἀναλόγως πολλαπλασιάζομεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 101, 1001, 10001 καὶ καθεξῆς.

109. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 9 ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ 10—1, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 9, πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀπὸ τοῦ δεκαπλασίου του.

Ἀναλόγως γίνεται ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 99, 999, 9999 καὶ καθεξῆς.

110. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 15 ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι 10+5, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 15, πρέπει τὸ δεκαπλάσιον αὐτοῦ νὰ αὐξήσωμεν κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ δεκαπλασίου.

111. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 98 ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ 100—2, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 98, πρέπει ἀπὸ τὸ ἑκατονταπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ διπλάσιόν του.

112. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς $16\frac{2}{3}$ εἶνε τὸ ἕκτον τοῦ 100, ἵνα μὲν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ $16\frac{2}{3}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 100 καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 6· ἵνα δὲ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ $16\frac{2}{3}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 6 καὶ διαιροῦμεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ 100.

113. Πολλάκις, ἵνα ἐκτελέσωμεν πολλαπλασιασμόν τινα ἀναλύομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς μέρη οὕτως, ὥστε τὸ πρῶτον νὰ εἶνε εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες δίδουσιν εὐκόλως τὸ

γινόμενον, πάντοτε δὲ τὰ ἄλλα ὑποπολλαπλάσια ἕκαστον τοῦ προηγουμένου. Οὕτως· ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 625, ἀποσυνθέτομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς 500, ὅπερ εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ 1000 καὶ εἰς 125, ὅπερ εἶνε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 500 καὶ πολλαπλασιάζοντες τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ 500, προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τὸ τέταρτον αὐτοῦ.

114. Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 15, λαμβάνομεν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ δεκάτου τοῦ διπλασίου τοῦ διαιρετέου· διότι

$$\frac{\alpha}{15} = \frac{2\times\alpha}{10\times 3}.$$

Πολλαπλασιασμὸς τῶν ἀκεραίων ἄνευ τῆς γραφῆς τῶν μερικῶν γινομένων.

115. Ὁ πεπειραμένος λογιστὴς δύναται νὰ εὑρίσκῃ τὸ ἐξαγόμενον ἑνός τινος πολλαπλασιασμοῦ, χωρὶς νὰ γράφῃ τὰ διάφορα μερικὰ γινόμενα.

Ἵνα κατανοήσωμεν τίνι τρόπῳ κατορθοῦται τοῦτο, ἂς πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 5673 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 452.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω·

$$\begin{array}{r} 5673 \\ \times 452 \\ \hline 2564196 \end{array}$$

ἐκτελεῖται δὲ ὡς ἑξῆς·

Μονάδες τοῦ γινομένου. Ἐπειδὴ αἱ μονάδες τοῦ γινομένου θὰ προκύψωσιν ἐκ τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἐπειδὴ αἱ μονάδες τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶνε 3 καὶ αἱ μονάδες τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 2, ἔπεται ὅτι αἱ μονάδες τοῦ γινομένου εἶνε 6. Γράφομεν λοιπὸν 6 εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων.

Δεκάδες τοῦ γινομένου. Ἐπειδὴ αἱ δεκάδες τοῦ γινομένου θὰ συνίστανται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος δύο γινομένων· ἤτοι τοῦ γινομένου τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ τοῦ γινομένου τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαζέου καὶ ἐπειδὴ τὸ πρῶτον γινόμενον εἶνε 14 καὶ τὸ δεύτερον 15, αἱ δεκάδες τοῦ γινομένου θὰ εἶνε 29. Γράφομεν λοιπὸν 9 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων, ἐπιφυλασσόμενοι νὰ προσθέσωμεν τὰς δύο ἑκατοντάδας μετὰ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ γινομένου.

Ἑκατοντάδες τοῦ γινομένου. Ἐπειδὴ αἱ ἑκατοντάδες τοῦ γινομένου θὰ συνίστανται ἐκ τῶν δύο ἑκατοντάδων, αἵτινες προῦκυψαν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκάδων καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τριῶν γινομένων· ἤτοι, τοῦ γινομένου τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὅπερ εἶνε 12, τοῦ γινομένου τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαζέου, ὅπερ εἶνε ὡσαύτως 12 καὶ ἐκ τοῦ γινομένου τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὰς δεκάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὅπερ εἶνε 35, ἕπεται ὅτι θὰ ἰσοῦνται τῷ ἀριθμῷ 61. Γράφομεν λοιπὸν 1 εἰς τὴν τάξιν τῶν ἑκατοντάδων καὶ τὰς 6 χιλιάδας ἐπιφυλασσόμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰς εὑρεθησομένας χιλιάδας.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν καὶ τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ γινομένου.

Πολλαπλασιασμὸς τῶν ἀκεραίων διὰ μερικῶν γινομένων ὀλιγαριθμοτέρων τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

116. Πολλάκις ἐν τῇ ἐκτελέσει τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε τοιοῦτος ὥστε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ

γινόμενον μεταχειριζόμενοι μερικὰ γινόμενα ὀλιγώτερα τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Τὸ κατωτέρω παράδειγμα θέλει σαφηνίσει τὸ πρᾶγμα.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 85647 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 24568.

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς δύναται ν' ἀποσυντεθῇ εἰς 24 χιλιάδας, 56 δεκάδας καὶ 8 μονάδας· καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῶν ἀριθμῶν 24, 56 καὶ 8 οἱ δύο πρῶτοι εἶνε πολλαπλάσια τοῦ τρίτου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον, προσθέτοντες εἰς τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ πολλαπλασιαστέου, πρῶτον μὲν τὸ ἑπταπλάσιον ($7\times8=56$), δεύτερον δὲ τὸ τριπλάσιον ($3\times8=24$) τοῦ πρώτου μερικοῦ γινομένου. Ἐν τῇ ἐκτελέσει ὅμως τῆς προσθέσεως ταύτης, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι τὸ δεύτερον μερικὸν γινόμενον φανερώνει δεκάδας καὶ τὸ τρίτον χιλιάδας καὶ νὰ γράψωμεν ἐπομένως τὸ πρῶτον ἐκ τῶν δεξιῶν ψηφίον τοῦ δευτέρου μερικοῦ γινομένου ὑπὸ τὸ δεύτερον τοῦ πρώτου καὶ τὸ πρῶτον ἐκ τῶν δεξιῶν ψηφίον τοῦ τρίτου μερικοῦ γινομένου ὑπὸ τὸ τρίτον τοῦ δευτέρου.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται μὲν οὕτω·

$$\begin{array}{r} 85647 \\ \times 24568 \\ \hline 685176 \\ 4796232 \\ 2055528 \\ \hline 2104175496 \end{array}$$

ἐκτελεῖται δὲ ὡς ἑξῆς·

α. μερικὸν γινόμενον· $8\times 85647 = 685176$
β. μερικὸν γινόμενον· $7\times 685176 = 4796232$
γ. μερικὸν γινόμενον· $3\times 685176 = 2055528$
ὁλικὸν γινόμενον . . . . . $= 2104175496$

Ἀσκήσεις. Ὁ μαθητὴς ἂς ἐφαρμόσῃ τὰ προειρημένα ἐπὶ τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

1 *Πρόβλημα.* Ἠγοράσαμεν 8 πήχεις καὶ 5 ῥοῦπια πράγματός τινος πρὸς 2 μετζίτια 18 γρόσια καὶ 25 παράδες τὸν πῆχυν. Πόσα χρήματα ἐπληρώσαμεν;

2 *Πρόβλημα.* Ἠγοράσαμεν 15 ὀκάδας καὶ 350 δράμια πρὸς 8 γρόσια καὶ 35 παράδας τὴν ὀκάν. Πόσα χρήματα ἐπληρώσαμεν;

3. Ἐκτελεσθήτωσαν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί.

ά. 87948×5
β′. 95648×25
γ′. 198564×125
δ′. 654847×9
ε′. 965478×99
ς′. 854769×98
ζ′. 657847×999
η′. 756948×998
θ′. 648937×9999
ι′. 476937×998
ια′. 756475×750
ιβ′. 947894×625
ιγ′. 658472×7298 (διὰ τριῶν μερικῶν γινομένων)
ιδ′. 546943×3648126 (διὰ τεσσάρων μερικῶν γινομένων)
ιε′. 654726×458 (ἄνευ μερικῶν γινομένων)
ις′. 376548×5647 (ἄνευ μερικῶν γινομένων).

4. Ἐκτελεσθήτωσαν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις.

α′. 89465 : 5
β′. 96548 : 5
γ′. 75494 : 25
δ′. 65485 : 25

ε′. 95425 : 25
ς′. 68473 : 125
ζ′. 54326 : 125
η′. 37250 : 125
θ′. 65625 : 125
ι′. 45648 : 50
ια′. 87390 : 50
ιβ′. 74850 : 50
ιγ′. 95675 : 500
ιδ′. 75689 : 500
ιε′. 65000 : 500
ις′. 78500 : 500
ιζ′. 65425 : 5000
ιη′. 94845 : 5000.

Ὑπολογισμοὶ διὰ τῶν σταθερῶν πολλαπλασιαστῶν.

117. Ἐν ταῖς λογιστικαῖς ἐργασίαις πρὸς λύσιν τῶν διαφόρων προβλημάτων μεταχειρίζονται ἀριθμούς τινας, ἐφ' οὓς πολλαπλασιαζόμενος ὁ δεδομένος, δίδει τὸν ζητούμενον. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λέγονται σταθεροὶ πολλαπλασιασταὶ καὶ εὑρίσκονται ἅπαξ ἵνα χρησιμεύωσιν ἐν ὅσῳ αἱ τιμαὶ τῶν νομισμάτων μένουσιν αἱ αὐταί.

Ἵνα κατανοήσωμεν τὰ περὶ τούτων, ἂς λύσωμεν τὰ ἑξῆς προβλήματα.

Πρόβλημα I. Ἠγοράσαμεν ὕφασμα πρὸς 5,75 φράγκα τὸ μέτρον. Πόσων γροσίων τιμᾶται ὁ μέγας πῆχυς Κ/πόλεως, ὑποτιθεμένου, ὅτι ἡ λίρα δύναται φράγκα μὲν 22,80, γρόσια δὲ 108;

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν Χ τὴν τιμὴν τοῦ μεγάλου πήχεως εἰς γρόσια.

Ἐπειδὴ 1 μέγας πῆχυς δύναται 0,669 τοῦ μέτρου, ἡ τιμὴ τοῦ μεγάλου πήχεως θέλει εἶναι τὰ 0,669 τῶν 5,75 φρ. ἤτοι $5,75 \times 0,669$.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ 22,80 φράγκα δύνανται 108 γρόσια, τὸ μὲν ἓν φράγκον θὰ δύνηται $\frac{108}{22,80}$, τὰ δὲ $5,75 \times 0,669$ φράγκα θὰ δύνωνται $\frac{108 \times 5,75 \times 0,669}{22,80}$.

Ἐπειδὴ δὲ τέλος

$$\frac{0,669 \times 108}{22,80} = 3,168$$

ἔπεται ὅτι

$$X = 5,75 \times 3,168.$$

Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 3,168 ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μεγέθους τοῦ πήχεως, ὅπερ εἶνε σταθερὸν καὶ ἐκ τῆς τιμῆς τῆς λίρας εἰς φράγκα καὶ εἰς γρόσια· ὥστε, ἐνόσῳ ἡ τιμὴ τῆς λίρας εἰς φράγκα καὶ εἰς γρόσια διατηρεῖται ἡ αὐτή, δυνάμεθα νὰ λύωμεν τὰ τοῦ αὐτοῦ εἴδους προβλήματα πολλαπλασιάζοντες τὴν εἰς φρ. τιμὴν τοῦ ὑφάσματος ἐπὶ τὸν σταθερὸν πολλαπλασιαστὴν 3,168.

Σημ. Ὅταν πρόκηται περὶ μικροῦ πήχεως, ὁ σταθερὸς πολλαπλασιαστὴς εἶνε 3,067.

Πρόβλημα. II. Οὔσης τῆς τιμῆς τῆς λίρας εἰς φράγκα καὶ εἰς γρόσια ὡς ἀνωτέρω, πόσων γροσίων τιμᾶται ἡ ὀκὰ πράγματός τινος, ἀγορασθέντος πρὸς 3,25 φράγκα τὸ χιλιόγραμμον;

Λύσις. Ἐπειδὴ 1 χιλιόγραμμον δύναται 312 δράμια, ἔπεται ὅτι ἡ ὀκὰ εἶνε τὰ $\frac{400}{312}$ τοῦ χιλιογράμμου καὶ ἡ τιμὴ ἑπομένως αὐτῆς φράγκα $3,25 \times \frac{400}{312}$.

Ἐπειδὴ δὲ 1 φράγκον δύναται $\frac{108}{22,80}$ γρόσια, ἔπεται ὅτι ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς ὀκάδος ἔσται $3,25 \times \frac{400 \times 108}{312 \times 22,80}$.

Ἐπειδὴ δὲ τέλος ὁ ἀριθμὸς $\frac{400 \times 108}{312 \times 22,80}$ ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ 6,07, ἔπεται ὅτι ἵνα λύωμεν τὰ τοῦ εἴδους τούτου προβλήματα, πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὴν εἰς φράγκα τιμὴν τοῦ πράγματος ἐπὶ τὸν σταθερὸν πολλαπλασιαστὴν 6,07.

Πρόβλημα III. Ἠγοράσαμεν ὕφασμα πρὸς 2,25 σελίνια τὴν ὑάρδαν. Πόσων γροσίων τιμᾶται ὁ μικρὸς πῆχυς Κ/πόλεως;

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ μὲν ὑάρδα δύναται 0,914 τοῦ μέτρου, ὁ δὲ μικρὸς πῆχυς 0,648, ἔπεται ὅτι ὁ πῆχυς εἶνε τὰ $\frac{648}{914}$ τῆς ὑάρδας. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὑάρδα τιμᾶται 2,25 σελινίων, ὁ πῆχυς θὰ τιμᾶται $2,25 \times \frac{648}{914}$. Ἐπειδὴ δὲ ἀφ' ἑτέρου ἓν σελίνιον δύναται 5,52 χρυσᾶ ἢ 5,96 ἀργυρᾶ γρόσια, ἔπεται ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ μικροῦ πήχεως θέλει εἶναι $2,25 \times \frac{648 \times 5,96}{914}$.

Ἐπειδὴ δὲ τέλος ὁ ἀριθμὸς $\frac{648 \times 5,96}{914}$ ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ 4,22, ἔπεται ὅτι ἵνα λύωμεν τὰ τοιούτου εἴδους προβλήματα, πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὴν εἰς σελίνια τιμὴν τῆς ὑάρδας ἐπὶ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν 4,22.

Σημ. Ὅταν ζητῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ μεγάλου πήχεως πρέπει νὰ μεταχειριζώμεθα ὡς σταθερὸν πολλαπλασιαστὴν τὸν ἀριθμὸν 4,36.

Πρόβλημα IV. Ἠγοράσαμεν σῖτον πρὸς 290 γρόσια Βραΐλας τὸ κοιλὸν τῆς αὐτῆς πόλεως. Πόσων γροσίων τιμᾶται τὸ κοιλὸν Κων/πόλεως;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ γρόσιον Βραΐλας δύναται 1,63 γρόσια Κ/πόλεως, ἔπεται ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ κοιλοῦ τῆς Βραΐλας εἰς γρόσια Κ/πόλεως εἶνε $290 \times 1{,}63$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ κοιλὸν Βραΐλας δύναται 18,9 κοιλὰ Κ/πόλεως, ἔπεται ὅτι τὸ κοιλὸν Κ/πόλεως θὰ τιμᾶται $\frac{290 \times 1{,}63}{18{,}9}$ γρόσια Κ/πόλεως.

Ἐπειδὴ δὲ τέλος ὁ ἀριθμὸς $\frac{1{,}63}{18{,}9}$ ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ 0,0862, ἔπεται, ὅτι ἵνα λύωμεν τὰ τοιούτου εἴδους προβλήματα, πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὴν εἰς γρόσια Βραΐλας τιμὴν τοῦ κοιλοῦ τῆς αὐτῆς πόλεως ἐπὶ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν 0,0862.

Ἀσκήσεις.

1. Ἠγοράσαμεν σῖτον πρὸς 7 ρούβλια τὸν Ῥωσσικὸν σάκκον. Πόσων ἀργυρῶν γροσίων τιμᾶται τὸ κοιλὸν Κ/πόλεως;

2. Ἠγοράσαμεν σῖτον πρὸς 120 γρόσια Γαλαζίου τὸ κοιλὸν τῆς αὐτῆς πόλεως. Πόσων παλαιῶν δραχμῶν τιμᾶται τὸ κοιλὸν Κ/πόλεως;

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

1. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς προσθέσεις.

Α′.

15 ὑαρ.	2 π.	10 δ.	11 γρ.
18	1	7	10
19	0	8	9

Β′.

8 ἡμ.	15 ὥρ.	40′	$52'' \frac{4}{9}$
7	16	52′	$45'' \frac{7}{8}$
6	19	48′	$49'' \frac{11}{20}$

2. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις.

Α′.

7 λ.	17 σελ.	8 δην.	3 φαρ.
4	18	9	2

Β′.

8 κουάρτ.	15 λίτρ.	13 οὐγ.	10 δραχ.
4	18	15	$12 \frac{5}{9}$

Γ′.

9 Ῥωσ. ὀργ.	5 πόδ.	10 δακ.	$9 \frac{3}{5}$ γρ.
5	6	11	$7 \frac{5}{8}$

3. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί.

Α′.

8 λίτρ. 11 οὐγκ. 10 δραχ.
$\times 15$

Β′.

7 ἡμ. 15 ὥρ. 19′ 25″
$\times 18$

Γ'.

5 λιρ. 18 σελ. 10 δην. 3 φαρ. $\frac{3}{4}$
$\times 28$

Δ'.

8 ὑαρ. 2 ποδ. 9 δακ. 8 γρ. $\frac{3}{4}$
$\times \frac{23}{24}$

Ε'.

6 λιρ. 15 σελ. 8 δην. 2 φαρ. $\frac{3}{4}$
$\times 5$ ποδ. 9 δακ. 8 γρ. $\frac{2}{3}$

Σημ. Οἱ τέσσαρες τελευταῖοι πολλαπλασιασμοὶ νὰ ἐκτελεσθῶσι κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μέθοδος αὕτη καὶ τὴν κρίσιν τοῦ μαθητοῦ ἀναπτύσσει καὶ ἐν μεγάλῃ χρήσει εὑρίσκεται, καλὸν εἶνε ὁ διδάσκων νὰ ἀπαιτῇ, ὅπως οἱ μαθηταὶ αὐτοῦ ἐκτελῶσι τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν συμμιγῶν πάντοτε κατὰ ταύτην τὴν μέθοδον.

4. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις.

Α'.

15 ὑαρ. 2 πόδ. 10 δ. 7 $\frac{2}{3}$ γρ. : 8

Β'.

18 στατ. 42 ὀκ. 250 $\frac{5}{8}$ δρ. : 12

Γ'.

25 λιρ. 18 σελ. 10 δην. 3 φαρδ. : $\frac{5}{8}$

Δ'.

28 λιρ. 15 σελ. 9 δ. 2 φαρ. : 35 ὀκ. 275 δραμ.

5. Ἠγοράσαμεν 9600 ὀκάδας πράγματός τινος πρὸς 13 γρ. 35 παρ. τὴν ὀκάν. Τοῦ πράγματος τούτου τὰ μὲν $\frac{3}{8}$ ἐπώλησα πρὸς 14 γρ. 15 παρ. τὴν ὀκάν· τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου πρὸς 14 γρόσια 5 παρ. καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 13 γρ. 33 παρ. τὴν ὀκάν. Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν, ἂν ἐκερδίσαμεν καὶ πόσον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ'.

Περὶ τετραγώνου καὶ τετραγωνικῆς ῥίζης.

118. *Ὁρισμοί.* Τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος ὀνομάζεται τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτόν. Π. χ. τετράγωνον τοῦ 5 εἶνε ὁ 25· διότι $5 \times 5 = 25$.

119. Τετραγωνικὴ δὲ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος παράγει τὸν δοθέντα· π. χ. τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 36 εἶνε ὁ 6· διότι $6 \times 6 = 36$.

120. Σημειοῦται δὲ ἡ μὲν ὕψωσις ἀριθμοῦ τινος εἰς τὸ τετράγωνον διὰ τοῦ ἐκθέτου 2, ἡ δὲ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης διὰ τοῦ σημείου $\sqrt{\ }$, ὅπερ λέγεται ῥιζικὸν καὶ τίθεται ὑπεράνω τοῦ ἀριθμοῦ, οὗτινος ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν. Οὕτω· τὸ μὲν σύμβολον 25^2 φανερώνει τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ 25, τὸ δὲ σύμβολον $\sqrt{25}$ φανερώνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 25.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ

$$\sqrt{25}=5$$

καὶ ἐπειδὴ

$$25=5^2$$

ἕπεται ὅτι

$$\sqrt{5^2}=5.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει ὅτι, ὅταν εἴς τινα ἀριθμὸν εὑρεθῶσι καὶ τὰ δύο σημεῖα, ἤτοι τὸ σημεῖον τῆς ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἀναιροῦνται ἀμφότερα.

121. *Θεώρημα.* Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν συνίσταται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου, ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $5+3$ καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι

$$(5+3)^2=5^2+2\times5\times3+3^2.$$

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ τετραγώνου

$$(5+3)^2=(5+3)\times(5+3)$$

ἀλλὰ

$$(5+3)\times(5+3)=(5+3)\times5+(5+3)\times3 \quad \text{ἢ}$$
$$(5+3)\times(5+3)=5\times5+5\times3+5\times3+3\times3 \quad \text{ἢ}$$
$$(5+3)\times(5+3)=5^2+2\times5\times3+3^2$$

ὥστε

$$(5+3)^2=5^2+2\times5\times3+3^2, \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Σημ. Ἐν τῇ συνεχείᾳ παραδεχόμεθα, ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ γινομένου πολλῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν τετραγώνων τῶν παραγόντων αὐτῶν καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν

τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν παραγόντων αὐτῶν. Ὡσαύτως, ὅτι, ἵνα μὲν εὕρωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ γινομένου πολλῶν πρώτων παραγόντων, πρέπει νὰ διπλασιάσωμεν τὸν ἐκθέτην ἑκάστου πρώτου παράγοντος· ἵνα δὲ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου πολλῶν πρώτων παραγόντων, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 2 τὸν ἐκθέτην ἑκάστου πρώτου παράγοντος.

Ἡ ἀπόδειξις τῶν προτάσεων τούτων προβάλλεται τοῖς μαθηταῖς ὡς ζήτημα.

122. *Θεώρημα.* Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, ἐὰν δὲν εἶνε ἴση ἀκεραίῳ τινὶ ἀριθμῷ, μήτε κλασματικῷ ἀριθμῷ δύναται νὰ εἶνε ἴση.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 34, ὅστις ὢν μεγαλείτερος τοῦ 25 καὶ μικρότερος τοῦ 36, ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν μεγαλειτέραν τοῦ 5 καὶ μικροτέραν τοῦ 6, καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα, ἥτις οὐδενὶ ἀκεραίῳ ἀριθμῷ εἶνε ἴση, οὔτε κλασματικῷ δύναται νὰ εἶνε ἴση.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ἐὰν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 34 ἦτο εἷς ἐκ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, οἵτινες περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 6, ἐὰν ἠθέλομεν καλέσει $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῇ ἀνάγωγον κλάσμα, ἠθέλομεν ἔχει

$$\sqrt{34}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Ἀλλ' ἐὰν ἠθέλομεν ὑψώσει ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον, ἠθέλομεν πορισθῇ τὴν ἰσότητα

$$34=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

ἥτις εἶνε ἀδύνατος· διότι ἐν ᾧ τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς εἶνε ἀκέραιον, τὸ δεύτερον εἶνε κλάσμα ἀνάγωγον, ὅπερ οὐδενὶ ἀ-

κεραίῳ ἀριθμῷ δύναται νὰ εἶνε ἴσον. Ὥστε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου οὔτε κλασματικῷ ἀριθμῷ δύναται νὰ εἶνε ἴση. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου ἐξάγεται ὅτι ὑπάρχουσιν ἀριθμοί, ὧν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι δὲν ἐξάγονται ἀκριβῶς. Δὲν ἕπεται ὅμως ἐκ τούτου ὅτι δὲν θέλομεν ζητεῖ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν τοιούτων ἀριθμῶν· διότι καίτοι δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν αὐτὴν ἀκριβῶς, δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν διαφέροντα τῆς ἀληθοῦς τετραγωνικῆς ῥίζης αὐτῶν ὅσῳ ὀλίγῳ θέλομεν.

123. *Ὁρισμοί.* 1. Οἱ ἀριθμοί, ὧν αἱ ῥίζαι ἐξάγονται ἀκριβῶς, λέγονται τέλεια τετράγωνα.

2. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀριθμοῦ μὴ τελείου τετραγώνου, ἐπειδὴ δι' οὐδεμιᾶς μονάδος δύναται νὰ καταμετρηθῇ ἐντελῶς, λέγεται ἀριθμὸς ἀσύμμετρος.

3. Ὁ μικρότερος τῶν κατὰ μονάδα διαφερόντων δύο ἀριθμῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ, μὴ τελείου τετραγώνου, λέγεται τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ ἐκείνου κατὰ προσέγγισιν μονάδος. Οὕτω· τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 75 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ ἀριθμὸς 8.

Σημ. Ἐπειδὴ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 100 εἶνε 10, καὶ τοῦ 1 εἶνε 1, ἕπεται, ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα πάντων τῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλειτέρων τοῦ 1 καὶ μικροτέρων τοῦ 100 εἶνε μεγαλειτέρα τοῦ 1 καὶ μικροτέρα τοῦ 10. Τὴν τετραγωνικὴν δὲ ῥίζαν πάντων τῶν ἀριθμῶν τούτων πρέπει νὰ γινώσκῃ ὁ μαθητὴς ἀπὸ μνήμης, εἴτε οἱ ἀριθμοὶ εἶνε τέλεια τετράγωνα, εἴτε οὔ.

124. *Θεώρημα.* Ἵνα εὕρωμεν τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ μεγαλειτέρου τοῦ 100, πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μεγίστου τελείου τετραγώνου, τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 2354 καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης ἰσοῦται τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ 16, ὅστις εἶνε τὸ μέγιστον τέλειον τετράγωνον, ὅπερ ἐμπεριέχεται εἰς τὸν 23.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ἐπειδὴ

$$1600 < 2354 < 2500$$

ἕπεται ὅτι

$$\sqrt{1600} < \sqrt{2354} < \sqrt{2500}$$

ἐπειδὴ δὲ

$$\sqrt{1600} = \sqrt{16 \times 100} = 4 \times 10 = 40$$

καὶ $\sqrt{2500} = \sqrt{25 \times 100} = 5 \times 10 = 50$

ἕπεται ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 2354 εἶνε μεγαλειτέρα τοῦ 40 καὶ μικροτέρα τοῦ 50, ἤτοι ἔχει 4 δεκάδας. ὅ. ἔ. δ.

125. *Θεώρημα.* Ἐὰν ἀπὸ ἀριθμοῦ τινος μεγαλειτέρου τοῦ 100 ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης, τετραμμένων εἰς μονάδας καὶ διαιρέσωμεν τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς διαφορᾶς διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, θέλομεν εὕρει πηλίκον ἴσον, ἢ μεγαλείτερον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ῥίζης.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 3272, οὗτινος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἔχει 5 δεκάδας καὶ ἂς ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ 50, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν 2500 καὶ τὸν ἀριθμὸν 77, ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς διαφορᾶς 772, διαιρέσωμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ 5, ἤτοι τοῦ 10,

τὸ πηλίκον 7, ὅπερ θὰ εὕρωμεν, εἶνε ἢ ἴσον, ἢ μεγαλείτερον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 3272.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ἐὰν καλέσωμεν χ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 3272, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα μὲν

$$\sqrt{3272} = 5\times10+\chi$$

ἐὰν ὁ ἀριθμὸς 3272 εἶνε τέλειον τετράγωνον· τὴν ἀνισότητα δὲ

$$\sqrt{3272} > 5\times10+\chi$$

ἐὰν ὁ ἀριθμὸς 3272 δὲν εἶνε τέλειον τετράγωνον.

Ἀλλ' ἐν πάσῃ περιπτώσει, ἐὰν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, θέλομεν ἔχει

$$3272 \leqq (5\times10+\mathrm{X})^2$$

ἢ

$$3272 \leqq 50^2+2\times50\times\mathrm{X}+\mathrm{X}^2$$

ἢ

$$3272 \leqq 2500+2\times50\times\mathrm{X}+\mathrm{X}^2.$$

Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὸν ἀριθμὸν 2500, θέλομεν πορισθῆ

$$3272 - 2500 \leqq 2\times50\times\mathrm{X}+\mathrm{X}^2$$

ἢ

$$772 \leqq 2\times5\times\mathrm{X}\times10+\mathrm{X}^2$$

Ἐὰν δὲ ἐπιστήσωμεν τὴν προσοχὴν ἡμῶν ἐπὶ τῆς τελευταίας παραστάσεως, θέλομεν ἐννοήσει, ὅτι ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τοῦ 772 εἶνε ἢ ἴσος, ἢ μεγαλείτερος τοῦ ἀριθμοῦ $2\times5\times\mathrm{X}$ καὶ ἑπομένως ὅτι ἀληθεύει ἡ παράστασις

$$77 \leqq 2\times5\times\mathrm{X}$$

Ἐὰν δὲ τέλος διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 2×5, θέλομεν ἔχει

$$77 : 2\times5 \leqq \mathrm{X}$$

ἢ

$$7 \leqq \mathrm{X}. \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Σχόλιον. Ἵνα δοκιμάσωμεν ἐὰν ὁ 7 εἶνε τὸ ψηφίον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 3272 ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ ὁ 772 (ἤτοι τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης) πρέπει νὰ εἶνε ἴσος ἢ μεγαλείτερος τοῦ ποσοῦ $2\times50\times\mathrm{X}+\mathrm{X}^2$, ἵνα δοκιμάσωμεν ἐὰν ὁ 7 εἶνε τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, πρέπει, τιθεμένου τοῦ 7 εἰς τὴν θέσιν τοῦ X, τὸ ποσὸν $2\times50\times\mathrm{X}+\mathrm{X}^2$ νὰ εἶνε ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ 772. Ἀλλὰ τὸ ποσὸν $2\times50\times\mathrm{X}+\mathrm{X}^2$ δύναται νὰ ὑποτεθῇ γινόμενον τοῦ $2\times50+\mathrm{X}$ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ X· ὥστε, διὰ νὰ εἶνε ὁ 7 ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης, πρέπει τὸ γινόμενον τοῦ $2\times50+7$, πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 7, νὰ εἶνε ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ 772. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς $2\times50+7$, ἤτοι ὁ 107, προκύπτει ἐὰν γραφῇ ὁ 7 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τῆς ῥίζης. Ὥστε, ἵνα δοκιμάσωμεν, ἐὰν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 7 εἶνε τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, πρέπει νὰ γράψωμεν αὐτὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης καὶ ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμόν· καὶ ἐὰν μὲν εὕρωμεν γινόμενον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ ὑπολοίπου, ὅπερ εὑρίσκομεν, ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον τοῦ ὁλικοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, τετραμμένων εἰς μονάδας, παραλαμβάνομεν αὐτὸ ὡς ψηφίον τῶν μονάδων

τῆς ῥίζης· εἰδεμὴ, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον ἀριθμόν.

Σημ. Ἐν τῇ πράξει ἀντὶ ν' ἀφαιρῶσιν ἀπὸ ὅλου τοῦ ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης τετραμμένων εἰς μονάδας, ἀφαιροῦσι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ καὶ εἰς τὸ ὑπόλοιπον καταβιβάζουσι τὰ δύο ἄλλα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

126. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω δύο θεωρημάτων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παντὸς ἀριθμοῦ.

Τῷ ὄντι· ἂς ζητήσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 56472965.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 56472965 εἶνε μεγαλείτερος τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα θὰ ἔχῃ καὶ δεκάδας καὶ μονάδας. Ἵνα εὕρωμεν τὰς δεκάδας τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μεγίστου τελείου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ὁλικῷ ἀριθμῷ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ. Ἀλλὰ καὶ ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ 56472965, ὅστις εἶνε 564729, εἶνε καὶ αὐτὸς μεγαλείτερος τοῦ 100· αἱ δεκάδες λοιπὸν τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης εὑρίσκονται, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου τελείου τετραγώνου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 5647. Ἀλλὰ καὶ ὁ ἀριθμὸς 5647 εἶνε μεγαλείτερος τοῦ 100, καὶ αἱ δεκάδες τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης εὑρίσκονται, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου τελείου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν ἀριθμὸν 56. Ἀλλ' ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου τελείου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ 56, εἶνε 7· ὥστε 7 εἶνε τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 5647.

Ἐὰν ἤδη ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ 5647 τὸ τετράγωνον τοῦ 7, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάσωμεν τὰ ἄλλα δύο ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, θέλομεν εὕρει τὴν διαφορὰν, περὶ ἧς λαλοῦμεν ἐν τῷ τελευταίῳ θεωρήματι. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς διαφορᾶς διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης καὶ τὸ πηλίκον 5 δοκιμάσωμεν κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον, θέλομεν ἴδει, ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 5647 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε 75.

Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 75 εἶνε ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 564729. Ἵνα εὕρωμεν λοιπὸν τὰς μονάδας τῆς ῥίζης αὐτοῦ, πρέπει ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 5647 ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ 75 καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου νὰ καταβιβάσωμεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ· ἀφ' οὗ δὲ διαιρέσωμεν τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τοῦ ἐξαγομένου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ 75, νὰ δοκιμάσωμεν τὸ πηλίκον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Ἴδωμεν ἤδη τίνι τρόπῳ γίνεται ἡ ἀφαίρεσις τοῦ τετραγώνου τοῦ 75.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 75 ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι, $70+5$, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ θὰ συνίσταται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 70, ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ 70 ἐπὶ 5 καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 5. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ 70 ἀφῃρέθη ἤδη ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 5647 καὶ ἀφῆκεν ὑπόλοιπον 747· μένει λοιπὸν ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 747 τὸ ἄθροισμα $2\times70\times5+5^2$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $2\times70\times5+5^2$ εἶνε γινόμενον τοῦ $2\times70\times5$, ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ 145, πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 5. Πρὸς συμπλήρωσιν λοιπὸν τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ τετραγώνου τοῦ 75

πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου 747 τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ψηφίου τῆς ρίζης 5, πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις προκύπτει μετὰ τὴν γραφὴν τοῦ ψηφίου τούτου πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τοῦ 7.

Ἀλλὰ, τῆς εἰρημένης ἀφαιρέσεως ἐκτελεσθείσης, ἐὰν καταβιβάσωμεν τὰ δύο ἄλλα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ 564729 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 22 καὶ τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων, ὅστις εἶνε ἐνταῦθα 222, διαιρέσωμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ 75, ὅπερ εἶνε 150, τὸ μὲν πηλίκον 1 θέλει εἶναι τὸ ἄλλο ψηφίον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης, ὁ δὲ ἀριθμὸς 751 ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ ἀριθμοῦ 56472965.

Ἵνα τέλος εὕρωμεν καὶ τὰς μονάδας τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου 2229 τὸ γινόμενον τοῦ 1501 ἐπὶ 1 καὶ ἀφ' οὗ καταβιβάσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 728 τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ 56472965 καὶ διαιρέσωμεν τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς διαφορᾶς, ὅστις εἶνε 7286, διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ 751, ὅπερ εἶνε 1502, θέλομεν εὕρει πηλίκον 4, ὅπερ δοκιμαζόμενον ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκεται ὂν τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ.

Ἐκ των ἀνωτέρω ἐξάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ τινος μεγαλειτέρου τοῦ 100, ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως·

α'. Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς διψήφια τμήματα, ἀρχόμενοι ἐκ τῶν δεξιῶν.

β'. Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, ὅπερ δυνατὸν νὰ ἔχῃ καὶ ἓν μόνον ψηφίον.

γ'. Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον τὴν εὑρεθεῖσαν ρίζαν καὶ ἀφ' οὗ ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον ἀπὸ τοῦ πρώτου τμήματος, καταβιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἐξαγομένου τὸ ἀκόλουθον τμῆμα καὶ ἔχομεν οὕτω τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον.

δ'. Διαιροῦμεν τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ρίζης.

ε. Γράφομεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τῆς ρίζης καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον. Καὶ ἂν μὲν εὕρωμεν γινόμενον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ ὑπολοίπου, λαμβάνομεν τὸ πηλίκον τοῦτο ὡς δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης· ἂν δὲ μεγαλείτερον, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μικροτέρους ἀριθμοὺς, ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου, μέχρις οὗ εὕρωμεν μικρότερον γινόμενον.

ς'. Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ψηφίου τῆς ρίζης ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις προκύπτει μετὰ τὴν γραφὴν τοῦ ψηφίου τούτου πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης· καὶ ἀφ' οὗ καταβιβάσωμεν τὸ ἑπόμενον τμῆμα, ἐργαζόμεθα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, πρὸς εὕρεσιν καὶ τῶν λοιπῶν ψηφίων τῆς ρίζης.

Ἐν τῷ κατωτέρω ὑποδείγματι φαίνεται ὁ τρόπος, καθ' ὃν διατάσσεται ἡ πρᾶξις·

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{56,47,29,65} & 7514 \\ \hline -49 & \\ \hline 747 & \\ -725 & \\ \hline 2229 & \\ -1501 & \\ \hline 7286.5 & \\ -6009\,6 & \\ \hline 1276\,9 & \end{array}$$

145	1501	15024
×5	×1	×4
725	1501	60096

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος καθ' οἱανδήποτε προσέγγισιν.

127. Ἔστω νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 15 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

Λέγοντες, ὅτι ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 15 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$, ἐννοοῦμεν ὅτι πρέπει νὰ εὑρεθῶσι δύο κλάσματα μεταξὺ τῶν ὁποίων νὰ ἐμπεριέχηται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ἅτινα νὰ ἔχωσι κοινὸν παρονομαστὴν 100 καὶ ἀριθμητὰς διαφέροντας ἀλλήλων κατὰ μίαν μονάδα.

Ἂς καλέσωμεν X τὸν μικρότερον ἀριθμητήν.

Ἐπειδὴ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 15 πρέπει νὰ ἐμπεριέχηται μεταξὺ τοῦ κλάσματος $\frac{X}{100}$ καὶ τοῦ κλάσματος $\frac{X+1}{100}$, θέλομεν ἔχει

$$\frac{X}{100} < \sqrt{15} < \frac{X+1}{100}.$$

Ἀλλ' ἐὰν ὑψώσωμεν τοὺς τρεῖς τούτους ἀριθμοὺς εἰς τὸ τετράγωνον, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{X}{100}$ εἶνε $\frac{X^2}{100^2}$ καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{X+1}{100}$, $\frac{(X+1)^2}{100^2}$, θέλομεν λάβει

$$\frac{X^2}{100^2} < 15 < \frac{(X+1)^2}{100^2}.$$

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς τελευταίους τούτους ἀριθμοὺς ἐπὶ 100^2, θέλομεν πορισθῇ

$$X^2 < 15 \times 100^2 < (X+1)^2.$$

Ἐὰν δὲ τέλος ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν ἀνωτέρω τριῶν ἀριθμῶν, θέλομεν ἔχει

$$X < \sqrt{15 \times 100^2} < X+1$$

ἐξαγόμενον, ὅπερ δεικνύει, ὅτι ἵνα εὕρωμεν τὸν ἀριθμητὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 15 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 15 ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 100 καὶ τοῦ ἐξαγομένου νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Παρατήρησις. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 15 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ εἶνε $\frac{387}{100}$ ἢ 3,87. Ἀλλ' ἐὰν ἐπιστήσωμεν τὴν προσοχὴν ἡμῶν ἐπί τε τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων καὶ τοῦ ἐξαγομένου, παρατηροῦμεν, ὅτι, ἵνα εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάτου· τ. ε. ἵνα ὑπολογίσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν μεθ' ἑνὸς δεκαδικοῦ ψηφίου, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 10, ὅπερ εἶνε 100 καὶ εὑρόντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου, ἀποκόπτομεν ἀπὸ τῶν δεξιῶν αὐτῆς ἓν δεκαδικὸν ψηφίον. Ἵνα δὲ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 100, ὅπερ εἶνε 10000 καὶ ἀπὸ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ γινομένου ἀποκόπτομεν δύο δεκαδικὰ ψηφία. Ἀνάλογα γίνονται προκειμένου νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ καὶ καθεξῆς.

Ἐκ τούτων λοιπὸν συμπεραίνομεν ὅτι,

Ἵνα εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ κατὰ δεκαδικήν τινα προσέγγισιν, πρὸς εὕρεσιν μὲν τῶν ἀκεραίων μονάδων τῆς ῥίζης, ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγίστου τελείου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ· πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν δε-

καθικῶν αὐτῆς μερῶν, γράφομεν εἰς τὰ μετὰ ταῦτα ὑπόλοιπα ἀνὰ ἓν ζεῦγος μηδενικῶν καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν ἐργασίαν, ὅσῳ θέλομεν.

Τὸ κατωτέρω ὑπόδειγμα δεικνύει τὸν τρόπον, καθ' ὃν διατάσσεται ἡ ἐργασία

$\sqrt{15}$ |	3,872		
— 9 |	68	767	7742
60.0	×8	×7	×2
— 544	544	5369	15484
560.0			
— 5369			
2310.0			
— 15484			
7616			

Εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης κλάσματος.

128. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ τετραγώνου καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἵνα εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν οἱουδήποτε κλάσματος ἀναγώγου, πρέπει νὰ θέσωμεν ἀριθμητὴν μὲν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ, παρονομαστὴν δὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δεδομένου κλάσματος. Ἐπειδὴ ὅμως, τῶν ὅρων ὄντων οὐχὶ τελείων τετραγώνων, προκύπτει λάθος κατά τε τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ κατὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ παρονομαστοῦ, πρὶν ἢ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τοιοῦτον ἀριθμόν, ὥστε εἷς ἐκ τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος νὰ γίνηται τέλειον τετράγωνον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀξία τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης δύναται νὰ ὑπολογισθῇ εὐκολώτερα, ὄντος τοῦ παρονομαστοῦ ἀκεραίου, ὁ πολλαπλασιάζων τοῦ ὅρους ἀριθμὸς λαμβάνεται οὕτως, ὥστε νὰ καθίσταται τέλειον τετράγωνον ὁ παρονομαστής. Ἐπειδὴ δὲ τέλος ἀριθμός τις δύναται νὰ καταστῇ τέλειον τετράγωνον, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἐκείνους τοὺς πρώτους παράγοντας, οἵτινες ἐμπεριέχονται ἐν τῷ ἀριθμῷ μετ' ἐκθέτου περιττοῦ, ἕπεται, ὅτι

Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν οἱουδήποτε κλάσματος ἀναγώγου, ἀποσυνθέτομεν ἁ. τὸν παρονομαστὴν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, πολλαπλασιάζομεν β'. τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον ἐκείνων τῶν πρώτων παραγόντων, οἵτινες ἐμπεριέχονται ἐν τῷ ἀριθμῷ μετ' ἐκθέτου περιττοῦ, ἐξάγομεν δὲ τέλος τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ προκύπτοντος κλάσματος. Οὕτω πως ἐργαζόμενοι, εὑρίσκομεν τὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν κλάσματος ἔχοντος ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα παρονομαστὴν δὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ παρονομαστοῦ καταστάθέντος τελείου τετραγώνου.

Ἔστω π. χ. νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ κλάσματος $\frac{17}{24}$.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 24, ἀποσυντιθέμενος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, δίδει $2^3 \times 3$· καὶ ἐπειδὴ καὶ ὁ παράγων 2 καὶ ὁ παράγων 3 ἐμπεριέχονται μετ' ἐκθέτου περιττοῦ, πρέπει πρὶν ἢ ζητήσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ κλάσματος $\frac{17}{24}$, νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ γινόμενον 2×3. Ἀλλὰ πολλαπλασιαζομένων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος τούτου ἐπὶ τὸ γινόμενον 2×3, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{17 \times 6}{2^4 \times 3^2}$· ὥστε· ἵνα εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ κλάσματος $\frac{17}{24}$, πρέπει νὰ ζητήσωμεν τὴν τε-

τραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἰσοδυνάμου αὐτῷ κλάσματος $\frac{17\times6}{2^4\times3^2}$.

Ἡ τετραγωνικὴ ὅμως ῥίζα τοῦ κλάσματος $\frac{17\times6}{2^4\times3^2}$ εἶνε $\frac{10}{12}$. ὥστε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ κλάσματος $\frac{17}{24}$ εἶνε κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δωδεκάτου $\frac{10}{12}$.

Ἀσκήσεις.

1. Εὑρεθήτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 2 μετὰ 8 δεκαδικῶν ψηφίων.

2. Εὑρεθήτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 5 μετὰ 6 δεκαδικῶν ψηφίων.

3. Εὑρεθήτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$.

4. Εὑρεθήτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ κλάσματος $\frac{25}{48}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1200}$.

5. Εὑρεθήτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ κλάσματος $\frac{19}{72}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12000}$.

6. Εὑρεθήτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ κλάσματος $\frac{28}{75}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1500}$.

7. Εὑρεθήτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ κλάσματος $\frac{39}{84}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{420}$.

ΜΕΡΟΣ Β'.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Περὶ λόγων καὶ ἀναλογιῶν.

129. Λόγος δύο ἀριθμῶν ὀνομάζεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν. Π. χ. λόγος, τῶν μὲν ἀριθμῶν 8 καὶ 4 εἶνε ὁ 2, τῶν δὲ ἀριθμῶν 5 καὶ 6 ὁ $\frac{5}{6}$.

130. Ἵνα σημειώσωμεν τὸν λόγον δύο ἀριθμῶν μεταχειριζόμεθα ἓν ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως, ἀναγινώσκοντες αὐτὸ: πρός. Οὕτως ἵνα σημειώσωμεν τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 7 μεταχειριζόμεθα ἢ τὴν παράστασιν 5 : 7 ἢ τὴν παράστασιν $\frac{5}{7}$, ἀναγινώσκοντες ἑκατέραν τούτων διὰ τῆς φράσεως : 5 πρὸς 7.

131. Ἀντίστροφον λόγον δύο ἀριθμῶν ὀνομάζομεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ δευτέρου διὰ τοῦ πρώτου. Οὕτω τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 11 ὁ μὲν εὐθὺς λόγος εἶνε $\frac{6}{11}$, ὁ δὲ ἀντίστροφος $\frac{11}{6}$.

132. Ἀναλογία ὀνομάζεται ἡ ἰσότης δύο λόγων. Οὕτως ὅταν ἔχωμεν δύο λόγους ἴσους, π. χ. τοὺς λόγους 6 : 3 καὶ 8 : 4 καὶ γράψωμεν τὸν ἕνα κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ ἄλλου καὶ μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος, κατασκευάζομεν τὴν ἀναλογίαν

6 : 3 = 8 : 4.

133. Ἐκ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, οἵτινες συνιστῶσι μίαν ἀναλογίαν, ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος λέγονται ἡγούμενοι, ὁ δεύτερος καὶ ὁ τέταρτος ἑπόμενοι, ὁ πρῶτος καὶ ὁ τέταρτος ἄκροι καὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μέσοι τῆς ἀναλογίας.

Σημ. Κατὰ τὴν ἀνάγνωσιν τῶν ἀναλογιῶν τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος δὲν ἀπαγγέλλεται ἴσον ἀλλὰ ὡς· οὕτως ἡ ἀναλογία

$$6 : 3 = 8 : 4$$

ἀναγινώσκεται ὡς ἑξῆς·

6 πρὸς 3 ὡς 8 πρὸς 4.

134. Λόγος ἀναλογίας τινὸς ὀνομάζεται τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, διαιροῦντες ἕνα τῶν ἡγουμένων αὐτῆς διὰ τοῦ ἑπομένου αὐτῷ. Οὕτω· λέγοντες ὅτι ὁ λόγος μιᾶς ἀναλογίας εἶνε 5, ἐννοοῦμεν ὅτι ἑκάτερος τῶν ἡγουμένων αὐτῆς εἶνε πεντάκις μεγαλείτερος τοῦ οἰκείου ἑπομένου· λέγοντες δὲ, ὅτι ὁ λόγος μιᾶς ἀναλογίας εἶνε $\frac{2}{3}$, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ πηλίκον ἑκατέρου ἡγουμένου, διαιρουμένου διὰ τοῦ ἑπομένου αὐτῷ, εἶνε κλάσμα ἰσοδύναμον τῷ κλάσματι $\frac{2}{3}$.

Σημ. Τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα παρέχουσι μέσον, διὰ τοῦ ὁποίου κατασκευάζεται εὐκολώτατα ἀναλογία, οἱουδήποτε λόγου.

Τῷ ὄντι· ὑποτεθείσθω ὅτι πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν ἀναλογίαν, ἔχουσαν λόγον $\frac{3}{4}$.

Λαμβάνομεν δύο οἵους δήποτε ἀριθμοὺς, τὸν 5 καὶ τὸν 7 π. χ., πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 5 καὶ τοὺς ὅρους τοῦ προκύπτοντος κλάσματος μεταχειριζόμεθα ὡς ὅρους τοῦ πρώτου λόγου τῆς ἀναλογίας· πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τοὺς ὅρους τοῦ αὐτοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 7 καὶ τοὺς ὅρους τοῦ προκύπτοντος κλάσματος, μεταχειριζόμενοι ὡς ὅρους τοῦ δευτέρου λόγου τῆς ἀναλογίας, εὑρίσκομεν τὴν ἀναλογίαν

$$15 : 20 = 21 : 28$$

Ἀσκήσεις·

1. Νὰ κατασκευασθῇ ἀναλογία, ἔχουσα τὸν λόγον 4.
2. Νὰ κατασκευασθῇ ἀναλογία, ἔχουσα τὸν λόγον $\frac{1}{7}$.
3. Νὰ κατασκευασθῇ ἀναλογία, ἔχουσα τὸν λόγον $\frac{5}{8}$.

Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

135. *Θεώρημα.* Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶνε ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν μέσων.

Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$15 : 20 = 18 : 24$$

καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητος

$$15 \times 24 = 20 \times 18.$$

Ἀπόδειξις. Ἡ δοθεῖσα ἀναλογία δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὑπὸ μορφὴν ἰσότητος ὡς ἑξῆς

$$\frac{15}{20} = \frac{18}{24}.$$

Ἀλλ' ἐὰν ἀναγάγωμεν τὰ ἴσα κλάσματα $\frac{15}{20}$ καὶ $\frac{18}{24}$ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, θέλομεν ἔχει

$$\frac{15 \times 24}{20 \times 24} = \frac{20 \times 18}{20 \times 24}.$$

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος ἐπὶ τὸ γινόμενον 20×24, θέλομεν πορισθῇ

$$15 \times 24 = 20 \times 18. \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

136. *Θεώρημα.* Ὅταν ἔχωμεν τέσσαρας ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν δύο νὰ εἶνε ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν ἄλλων δύο, δυνάμεθα ἐξ αὐτῶν νὰ σχηματίσωμεν ἀναλογίαν, γράφοντες τοὺς ὅρους τοῦ ἑνὸς γινομένου ὡς ἄκρους καὶ τοὺς ὅρους τοῦ ἑτέρου γινομένου ὡς μέσους.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 8, 5, 10, 4, οἵτινες δίδουσι τὴν ἰσότητα

$$8\times5 = 10\times4$$

καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ἡ ἀναλογία

$$8 : 10 = 4 : 5.$$

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δοθείσης ἰσότητος διὰ τοῦ γινομένου 10×5, θέλομεν ἔχει

$$\frac{8\times5}{10\times5} = \frac{10\times4}{10\times5}$$

ἢ

$$\tfrac{8}{10} = \tfrac{4}{5}.$$

Ἐὰν δὲ γράψωμεν τὴν τελευταίαν ἰσότητα ὑπὸ μορφὴν ἀναλογίας, θέλομεν πορισθῇ

$$8 : 10 = 4 : 5. \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Πόρισμα I. Ἐπειδὴ ἐν τῷ σχηματισμῷ τῆς ἀναλογίας δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἄκρους, ἢ τοὺς ὅρους τοῦ ἑνὸς, ἢ τοὺς ὅρους τοῦ ἑτέρου γινομένου· καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῶν ὅρων τοῦ γινομένου, οἵτινες θὰ γίνωσιν ἄκροι τῆς ἀναλογίας, ἑκάτερος δύναται νὰ γίνῃ πρῶτος ἢ δεύτερος, ἐκ δὲ τῶν ὅρων τοῦ γινομένου οἵτινες θὰ γίνωσι μέσοι, ἑκάτερος δύναται νὰ γίνῃ δεύτερος ἢ τρίτος, ἕπεται ὅτι

Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ δυνάμεθα νὰ μεταλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν δύο ἄκρων, ἢ τὴν θέσιν τῶν δύο μέσων, ἢ νὰ κάμωμεν τοὺς ἄκρους μέσους καὶ τοὺς μέσους ἄκρους τῆς ἀναλογίας.

Πόρισμα II. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἕνα ἄκρον καὶ ἕνα μέσον τῆς αὐτῆς ἀναλογίας μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἡ ἀναλογία δὲν μεταβάλλεται.

Παρατήρησις. Στηριζόμενοι ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω πορίσματος, δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν ἀναλογίαν, ἔχουσαν ὅρους κλασματικοὺς, εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον, ἔχουσαν ὅρους ἀκεραίους.

Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$\tfrac{3}{4} : \tfrac{2}{5} = 4 : \tfrac{32}{15}$$

καὶ ἂς εὕρωμεν ἄλλην ἀναλογίαν ἰσοδύναμον, ἔχουσαν ὅρους ἀκεραίους.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν μὲν πρῶτον καὶ δεύτερον ὅρον τῆς ἀναλογίας ἐπὶ τὸ γινόμενον 4×5, τὸν δὲ τρίτον καὶ τέταρτον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 15, θέλομεν ἔχει

$$\frac{3\times4\times5}{4} : \frac{2\times4\times5}{5} = 4\times15 : \frac{32\times15}{15}$$

ἢ

$$3\times5 : 2\times4 = 4\times15 : 32.$$

Τὸ ἀνωτέρω ἐξαγόμενον δεικνύει, ὅτι

Ἵνα τρέψωμεν ἀναλογίαν ἔχουσαν ὅρους κλασματικοὺς εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον, ἔχουσαν ὅρους ἀκεραίους, ἀπαλείφομεν διαδοχικῶς ἕκαστον παρονομαστὴν· καὶ ἐὰν μὲν ὁ ὅρος τοῦ ὁποίου ἀπαλείφομεν τὸν παρονομαστὴν εἶνε ἄκρος πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀπαλειφθέντα παρονομαστὴν ἕνα μέσον· ἐὰν δὲ εἶνε μέσος, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀπαλειφθέντα παρονομαστὴν ἕνα ἄκρον.

137. *Θεώρημα.* Ἵνα εὕρωμεν ἕνα ὅρον μιᾶς ἀναλογίας, ὄντα ἄγνωστον, ἐὰν μὲν ὁ ἄγνωστος ὅρος εἶνε ἄκρος, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο μέσους καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου· ἐὰν δὲ ὁ ἄγνωστος εἶνε μέσος, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ἄκρους καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου.

Ἔστωσαν αἱ ἀναλογίαι

$$5 : 9 = 8 : \chi$$
$$7 : 8 = \chi : 9$$

καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι θέλομεν ἔχει, ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἀναλογίας

$$\chi = \frac{8 \times 9}{5}$$

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας

$$\chi = \frac{7 \times 9}{8}$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶνε ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν μέσων, θέλομεν ἔχει, ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἀναλογίας

$$5 \times \chi = 8 \times 9 \qquad (1)$$

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας

$$\chi \times 8 = 7 \times 9 \qquad (2).$$

Ἀλλ' ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα μὲν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1) διὰ 5, ἀμφότερα δὲ τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (2) διὰ 8, θέλομεν ἔχει, ἐκ μὲν τῆς πρώτης

$$\chi = \frac{8 \times 9}{5}$$

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας

$$\chi = \frac{7 \times 9}{8} \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

ΣΗΜ. Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀγνώστου ὅρου μιᾶς ἀναλογίας ἐπικαλεῖται λύσις τῆς ἀναλογίας.

Ἀσκήσεις.

Λυθήτωσαν αἱ ἑξῆς ἀναλογίαι·

1). $\frac{5}{8} : 4 = 7 : \chi$.
2). $\frac{3}{4} : 9 = \chi : 6$.
3). $\frac{2}{3} : \frac{5}{8} = 8 : \chi$.

4). $\frac{5}{9} : \frac{3}{5} = \chi : 9$.
5). $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{4}{5} : \chi$.
6). $\frac{4}{5} : \frac{7}{8} = \chi : \frac{3}{4}$.
7). $5{,}04 : 3{,}2 = \chi : 4$.
8). $2{,}25 : 4{,}5 = 8{,}525 : \chi$.
9). $3{,}24 : \frac{4}{9} = 5{,}2 : \chi$.
10). $6{,}08 : 4{,}5 = \chi : \frac{9}{8}$.

Σημ. Ἐὰν μετὰ τὴν μετατροπὴν μιᾶς τινος ἀναλογίας εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον, ἔχουσαν ὅρους ἀκεραίους, ὑπάρχωσι κοινοὶ διαιρέται ἑνὸς ἄκρου καὶ ἑνὸς μέσου τῆς ἀναλογίας, ὀφείλομεν, πρὶν ἢ ζητήσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου, νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἄκρον καὶ τὸν μέσον ἐκεῖνον διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν. Ἡ ἐργασία αὕτη καλεῖται ἁπλοποίησις τῆς ἀναλογίας.

138. *Θεώρημα.* Ὅταν δύο ἀναλογίαι ἔχωσιν ἕνα κοινὸν λόγον, ἐκ τῶν δύο ἄλλων λόγων σχηματίζεται ἀναλογία.

Ἔστωσαν αἱ ἀναλογίαι

$$10 : 5 = 6 : 3$$
$$8 : 4 = 6 : 3$$

καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ἀναλογίας

$$10 : 5 = 8 : 4.$$

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ἐπειδὴ ἐκ τῶν δεδομένων ἀναλογιῶν προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες

$$\frac{10}{5} = \frac{6}{3}$$
$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$$

καὶ ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων ἡ ἰσότης

$$\frac{10}{5} = \frac{8}{4} \qquad \text{(ἀξίωμα 1ον)}$$

ἕπεται ἡ ἀλήθεια τῆς ἀναλογίας

$$10 : 5 = 8 : 4. \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Πορισμα. Ὅταν ἔχωμεν δύο ἀναλογίας, τῶν ὁποίων οἱ ἑπόμενοι εἶνε ἴσοι, οἱ ἡγούμενοι αὐτῶν σχηματίζουσιν ἀναλογίαν.

Τῷ ὄντι· ἐκ τῶν ἀναλογιῶν

$$12 : 4 = 9 : 3$$
$$8 : 4 = 6 : 3$$

προκύπτουσιν αἱ ἀναλογίαι

$$12 : 9 = 4 : 3$$
$$8 : 6 = 4 : 3$$

ἐξ ὧν, ἡ ἀναλογία

$$12 : 9 = 8 : 6.$$

Παρατήρησις. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ὅταν ἔχωμεν δύο ἀναλογίας, τῶν ὁποίων οἱ ἡγούμενοι εἶνε ἴσοι, οἱ ἑπόμενοι σχηματίζουσιν ἀναλογίαν.

139. *Θεώρημα.* Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει τοιοῦτον λόγον πρὸς τὸν δεύτερον, ὃν λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον.

Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$8 : 10 = 12 : 15$$

καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ἀναλογίας

$$8+10 : 10 = 12+15 : 15.$$

Ἀπόδειξις. Ἡ δοθεῖσα ἀναλογία δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω

$$\frac{8}{10} = \frac{12}{15}.$$

Ἀλλ' ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης τὴν μονάδα, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{8}{10}+1 = \frac{12}{15}+1$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν ἀντὶ τῆς μονάδος, εἰς μὲν τὸ πρῶτον μέλος τὸ κλάσμα $\frac{10}{10}$, εἰς δὲ τὸ δεύτερον τὸ κλάσμα $\frac{15}{15}$, θέλομεν

ἔχει

$$\frac{8}{10}+\frac{10}{10} = \frac{12}{15}+\frac{15}{15}.$$

ἐὰν δὲ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν εἴς τε τὸ πρῶτον καὶ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης, ποριζόμεθα τὴν ἰσότητα

$$\frac{8+10}{10} = \frac{12+15}{15}$$

ἥτις δίδωσι τὴν ἀναλογίαν

$$8+10 : 10 = 12+15 : 15 \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

ΣΗΜ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὸν δεύτερον, ὃν λόγον ἔχει ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον.

140. *Θεώρημα.* Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὸν πρῶτον, ὃν λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τρίτον.

Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$12 : 4 = 9 : 3$$

καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ὅτι

$$12+4 : 12 = 9+3 : 9.$$

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· οὔσης ἀληθοῦς τῆς ἀναλογίας

$$12 : 4 = 9 : 3$$

εἶνε ἀληθὴς καὶ ἡ ἀναλογία

$$4 : 12 = 3 : 9$$

Οὔσης δὲ τῆς τελευταίας ἀναλογίας ἀληθοῦς, ἀληθεύει καὶ ἡ ἀναλογία

$$4+12 : 12 = 3+9 : 9. \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

ΣΗΜ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔ-

χει λόγον πρὸς τὸν πρῶτον, ὃν λόγον ἔχει ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τρίτον.

Σχόλιον. Συνδυάζοντες τὰ δύο τελευταῖα θεωρήματα ἐξάγομεν ὅτι

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὸν πρῶτον ἢ τὸν δεύτερον, ὃν λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τρίτον ἢ τὸν τέταρτον.

141. *Θεώρημα.* Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ὃν λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$10 : 6 = 35 : 21$$

καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ἡ ἀναλογία

$$10+6 : 10-6 = 35+21 : 35-21.$$

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· οὔσης ἀληθοῦς τῆς ἀναλογίας

$$10 : 6 = 35 : 21$$

ἀληθεύουσι καὶ αἱ ἀναλογίαι

$$\left.\begin{array}{l} 10+6 : 6 = 35+21 : 21 \\ 10-6 : 6 = 35-21 : 21 \end{array}\right\} \text{(σχόλιον §. 140).}$$

Οὐσῶν δὲ ἀληθῶν τῶν τελευταίων ἀναλογιῶν, ἀληθεύει καὶ ἡ ἀναλογία

$$10+6 : 10-6 = 35+21 : 35-21,$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

142. *Θεώρημα.* Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων, ὃν λόγον ἔχει εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸν ἑπόμενόν του.

Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$15 : 5 = 18 : 6$$

καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ἡ ἀναλογία

$$15+18 : 5+6 = 15 : 5.$$

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ὑπαρχούσης τῆς ἀναλογίας

$$15 : 5 = 18 : 6$$

ὑπάρχει καὶ ἡ ἀναλογία

$$15 : 18 = 5 : 6$$

ὑπαρχούσης δὲ τῆς τελευταίας ἀναλογίας, ὑπάρχει καὶ ἡ ἀναλογία

$$15+18 : 15 = 5+6 : 5$$

ἥτις μεταλλασσομένων τῶν δύο μέσων δίδωσι τὴν ἀναλογίαν

$$15+18 : 5+6 = 15 : 5$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Σημ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἑπομένων, ὃν λόγον ἔχει εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸν ἑπόμενόν του.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἐξῆς θεωρήματος προβάλλεται τοῖς μαθηταῖς ὡς γύμνασμα.

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ὃν λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

143. *Θεώρημα.* Εἰς πᾶσαν σειρὰν ἴσων λόγων τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων, ὃν λόγον ἔχει εἷς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενόν του.

Ἔστω ἡ σειρὰ τῶν ἴσων λόγων

$$8 : 4 = 10 : 5 = 6 : 3$$

καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ἡ ἀναλογία

$$8+10+6 : 4+5+3 = 6 : 3$$

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ἐὰν λάβωμεν τοὺς δύο πρώτους λόγους τῆς δοθείσης σειρᾶς, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$8 : 4 = 10 : 5$$

Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν ἀναλογίαν ταύτην τὸ προηγούμενον θεώρημα, θέλομεν πορισθῆ τὴν ἀναλογίαν

$$8+10 : 4+5 = 10 : 5.$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν εἰς τὴν ἀναλογίαν ταύτην, ἀντὶ τοῦ λόγου $10 : 5$, τὸν ἴσον αὐτῷ $6 : 3$, θέλομεν λάβει τὴν ἀναλογίαν

$$8+10 : 4+5 = 6 : 3,$$

ἧς ὑπαρχούσης, ὑπάρχει καὶ ἡ ἀναλογία

$$8+10+6 : 4+5+3 = 6 : 3,$$

ἥτις ἐπρόκειτο ν' ἀποδειχθῇ.

Σημ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον θὰ ἐγίνετο ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος καὶ ἂν οἱ λόγοι τῆς σειρᾶς ἦσαν περισσότεροι τῶν τριῶν.

144. *Θεώρημα.* Τὰ γινόμενα τῶν ὁμοταγῶν ὅρων πολλῶν ἀναλογιῶν σχηματίζουσιν ἀναλογίαν.

Ἔστωσαν αἱ ἀναλογίαι

$$8 : 12 = 10 : 15$$
$$14 : 21 = 16 : 24$$
$$9 : 18 = 11 : 22$$

καὶ ἂς ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ἀναλογίας

$$8\times14\times9 : 12\times21\times18 = 10\times16\times11 : 15\times24\times22.$$

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ὑπαρχουσῶν τῶν ἀναλογιῶν τούτων, ὑπάρχουσι καὶ αἱ ἰσότητες

$$\frac{8}{12} = \frac{10}{15}$$
$$\frac{14}{21} = \frac{16}{24}$$
$$\frac{9}{18} = \frac{11}{22}$$

ὑπαρχουσῶν δὲ τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων ὑπάρχει καὶ ἡ ἰσότης

$$\frac{8}{12}\times\frac{14}{21}\times\frac{9}{18} = \frac{10}{15}\times\frac{16}{24}\times\frac{11}{22}$$

ἥτις προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεδομένων. Ὑπαρχούσης δὲ τέλος τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος, ὑπάρχει καὶ ἡ ἰσότης

$$\frac{8\times14\times9}{12\times21\times18} = \frac{10\times16\times11}{15\times24\times22}$$

ἥτις δίδωσι τὴν ἀναλογίαν

$$8\times14\times9 : 12\times21\times18 = 10\times16\times11 : 15\times24\times22,$$

ἥτις ἐπρόκειτο ν' ἀποδειχθῇ.

Πόρισμα. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἕπεται, ὅτι,

Πάσης ἀναλογίας δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν ὅλους τοὺς ὅρους εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν· διότι· ἐὰν τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν γράψωμεν πολλάκις καὶ ἐκ τοῦ γινομένου τῶν ὁμοταγῶν ὅρων σχηματίσωμεν ἀναλογίαν, θέλομεν εὕρει ἀναλογίαν, ἔχουσαν τοὺς ὅρους τῆς πρώτης, ὑψωμένους εἰς δύναμιν ἔχουσαν ἐκθέτην ἴσον τῷ ἀριθμῷ τῶν ἀναλογιῶν.

Σημ. Ἐπειδὴ ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης εἶνε πρᾶξις ἀντίστροφος τῆς ὑψώσεως εἰς δύναμιν, ἕπεται ὅτι

Πᾶσα ἀναλογία δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἐξαχθῇ πάντων τῶν ὅρων αὐτῆς ἡ αὐτὴ ῥίζα.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ ἡ ἀναλογία ἥτις προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ὁμοταγῶν ὅρων πολλῶν ἀναλογιῶν ἔχει πρῶτον ὅρον τὸ γινόμενον τῶν πρώτων ὅρων τῶν δεδομένων ἀναλογιῶν, δεύτερον, τὸ γινόμενον τῶν δευτέρων, τρίτον, τὸ γινόμενον τῶν τρίτων καὶ τέταρτον, τὸ γινόμενον τῶν τετάρτων, ἕπεται ὅτι, πρὶν ἢ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ὅρων, δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς τυχὸν ὑπάρχοντας κοινοὺς παράγοντας εἰς ἕνα ἄκρον καὶ ἕνα μέσον, ἢ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας, ἢ καὶ διαφόρων ἀναλογιῶν.

Ἀσκήσεις.

Ἀποδειχθήτωσαν αἱ ἑξῆς προτάσεις.

1. Ὑπαρχούσης τῆς ἀναλογίας

$$8 : 4 = 6 : 3$$

ὑπάρχει καὶ ἡ ἀναλογία

$$(8+4)^2 : (6+3)^2 = 8 \times 4 : 6 \times 3.$$

2. Τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου ὅρου μιᾶς ἀναλογίας εἶνε μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Περὶ ποσῶν ἀναλόγων.

145. Δύο ποσὰ λέγονται ἀνάλογα, ὅταν δύο ὁποῖαι δήποτε τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ἔχωσι τὸν αὐτὸν ἢ τὸν ἀντίστροφον λόγον πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ ἑτέρου. Π. χ. πρᾶγμα καὶ ἀξία τοῦ πράγματος εἶνε ποσὰ ἀνάλογα· διότι, ἐὰν 5 ὀκάδες πράγματός τινος τιμῶνται 15 γρόσια, αἱ 10 ὀκάδες τοῦ αὐτοῦ πράγματος θὰ τιμῶνται 30 καὶ ὁ λόγος 5 : 10 τῶν τοῦ πράγματος τιμῶν θὰ εἶνε ἴσος τῷ λόγῳ 15 : 30 τῶν τιμῶν τῆς ἀξίας, δηλ. θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία

$$5 : 10 = 15 : 30.$$

Ὡσαύτως· ἐργάται καὶ χρόνος, καθ' ὃν τελειώνει ἓν ἔργον εἶνε ποσὰ ἀνάλογα· διότι ἐὰν 3 ἐργάται τελειώνωσιν ἓν ἔργον

εἰς 10 ἡμέρας, 6 ἐργάται τῆς αὐτῆς δυνάμεως θέλουσι τελειώσει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 5 ἡμέρας καὶ ὁ λόγος τῶν δύο τιμῶν τοῦ πρώτου ποσοῦ θέλει εἶνε ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν δύο τιμῶν τοῦ ἑτέρου, δηλ. θέλει ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

$$3 : 6 = 5 : 10.$$

146. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἀναλόγων ποσῶν ἕπεται, ὅτι ὑπάρχουσι δύο εἰδῶν ἀνάλογα ποσά· ἐκεῖνα δηλ. τῶν ὁποίων δύο τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ ἑτέρου καὶ ἐκεῖνα τῶν ὁποίων δύο τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ἔχουσι τὸν ἀντίστροφον λόγον πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ ἑτέρου. Τὰ πρῶτα λέγονται κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα ποσὰ καὶ τὰ δεύτερα ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσά.

Λέγονται λοιπὸν δύο ἀνάλογα ποσὰ, κατ' εὐθεῖαν μὲν ἀνάλογα, ὅταν δύο οἱαι δήποτε τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ ἑτέρου· ἀντιστρόφως δὲ ἀνάλογα, ὅταν δύο οἱαι δήποτε τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ἔχωσι τὸν ἀντίστροφον λόγον πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ ἑτέρου.

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τίθεται καὶ οὕτω·

Δύο ποσὰ λέγονται κατ' εὐθεῖαν μὲν ἀνάλογα, ὅταν, πολλαπλασιαζομένης ἢ διαιρουμένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς, πολλαπλασιάζηται ἢ διαιρῆται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· ἀντιστρόφως δὲ ἀνάλογα, ὅταν, πολλαπλασιαζομένης ἢ διαιρουμένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς, διαιρῆται ἢ πολλαπλασιάζηται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Οὕτω· πρᾶγμα καὶ ἀξία τοῦ πράγματος εἶνε ποσὰ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα, διότι εἰς διπλασίαν ποσότητα πράγματος ἀντιστοιχεῖ διπλασία ἀξία αὐτοῦ· ἐργάται δὲ καὶ χρόνος εἶνε ποσὰ

ἀντιστρόφως ἀνάλογα, διότι εἰς διπλασίους ἐργάτας ἀντιστοιχεῖ ὑποδιπλάσιος χρόνος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.

147. Κατὰ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν λύονται ἐκεῖνα τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα δίδοται ἡ τιμὴ ἑνὸς ποσοῦ καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ ἑνὸς ἄλλου πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ πρῶτον εἶνε κατ' εὐθεῖαν ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογον καὶ ζητεῖται ποίαν τιμὴν λαμβάνει τὸ πρῶτον, ὅταν τὸ ἄλλο λάβῃ νέαν τιμήν. Π. χ. Τὸ πρόβλημα « Πόσων γροσίων τιμῶνται αἱ 18 ὀκάδες πράγματός τινος, δοθέντος ὅτι ἀντὶ 25 γροσίων ἀγοράζονται 7 ὀκάδες τοῦ αὐτοῦ πράγματος », εἶνε τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν· διότι δίδοται ἡ ἀξία, 25 γρόσια, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν, 7 ὀκάδας, τοῦ ἑτέρου ποσοῦ, καὶ ζητεῖται πόση θὰ γίνῃ ἡ ἀξία τοῦ πράγματος, ὅταν τὸ ποσὸν τοῦ πράγματος ἀπὸ 7 ὀκάδων μεταβληθῇ εἰς 18.

148. Τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν κατατάσσονται κατὰ δύο στίχους, οὕτως ὥστε αἱ τιμαὶ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ νὰ εὑρίσκωνται ὑπ' ἀλλήλας. Π. χ. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, παρισταμένου τοῦ ἀγνώστου διὰ τοῦ Χ, κατατάσσεται ὡς ἑξῆς·

7 ὀκ.	25 γρ.
18	Χ

Ὁ ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου εὑρισκόμενος ἀριθμὸς λέγεται, διὰ λόγους εὐνοήτους, δεδομένος· οἱ δὲ ἀριθμοί, οἵτινες εὑρίσκονται εἰς τὸν αὐτὸν στίχον, λέγονται ἀντίστοιχοι. Οὕτως· ἀντίστοιχος μὲν τοῦ δεδομένου εἶνε ὁ 7, ἀντίστοιχος δὲ τοῦ ἀγνώστου ὁ 18.

Πρόβλημα I. Πόσων γροσίων τιμῶνται οἱ 28 πήχεις πράγματός τινος, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι οἱ 15 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος τιμῶνται 47 γροσίων;

Λύσις. Καθὼς προηγουμένως εἴπομεν τὸ πρόβλημα κατατάσσεται ὡς ἑξῆς·

15 πηχ.	47 γρ.
28	Χ

Ἀλλ' ἐπειδὴ τῶν ποσῶν ὄντων κατ' εὐθεῖαν ἀναλόγων 15 πήχεις τιμῶνται 47 γροσίων, εἰς μὲν πῆχυς θέλει τιμᾶσθαι $\frac{47}{15}$ γροσίων, 28 δὲ πήχεις θέλουσι τιμᾶσθαι $\frac{47 \times 28}{15}$.

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει, ὅτι, ἵνα λύσωμεν πᾶν πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὄντων τῶν ποσῶν κατ' εὐθεῖαν ἀναλόγων, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δεδομένον ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχον τοῦ ἀγνώστου καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ δεδομένου.

Πρόβλημα II. Εἰς πόσον χρόνον τελειώνουσιν ἔργον τι 15 ἐργάται, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ αὐτὸ ἔργον δύνανται νὰ τελειώσωσιν 8 ἐργάται εἰς 17 ἡμέρας;

Λύσις. Ἀφ' οὗ κατατάξωμεν τὸ πρόβλημα ὡς ἔπεται

8 ἐρ.	17 ἡμ.
15	χ

καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ ποσὰ εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς, πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ ἀγνώστου.

Ἐπειδὴ 8 ἐργάται τελειώνουσι τὸ ἔργον εἰς 17 ἡμέρας, εἷς μὲν ἐργάτης θέλει τελειώσει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς ὀκτάκις περισσότερον χρόνον, ἤτοι εἰς 17×8 ἡμέρας, 15 δὲ ἐργάται θέλουσι τελειώσει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς δεκαπεντάκις ὀλιγώτερον χρόνον, ἤτοι εἰς $\frac{17 \times 8}{15}$ ἡμέρας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι

Ἵνα λύσωμεν πᾶν πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὄντων τῶν ποσῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δεδομένον ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχόν του καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ ἀγνώστου.

ΣΗΜ. Οἱ ἀνωτέρω δύο κανόνες ὑποθέτουσι τὸ πρόβλημα κατατεταγμένον κατὰ δύο στίχους.

149. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται δῆλον, ὅτι ἡ λύσις παντὸς προβλήματος τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν εἶνε εὐκολωτάτη, ἀρκεῖ νὰ εἶνε τοῦτο κατατεταγμένον, ὡς τὰ μέχρι τοῦδε λυθέντα, κατὰ δύο στίχους. Ἀλλὰ πάντων τῶν προβλημάτων ἡ εἰς δύο στίχους κατάταξις δὲν εἶνε ὅσῳ τῶν προηγουμένων προβλημάτων εὔκολος. Ἀπαιτεῖται πολλάκις νὰ ἐκτελεσθῶσι πολλαὶ ἐργασίαι, πρὶν ἢ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοί, οἵτινες θ' ἀποτελέσωσι τοὺς στίχους τοῦ προβλήματος. Ἐὰν δὲ συναντᾷ τις μικρὰν δυσκολίαν περὶ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς Ἀριθμητικῆς, ἡ δυσκολία ἔγκειται ἐν τῇ εὑρέσει τῶν προκαταρκτικῶν ἐργασιῶν, ἥτις μὴ ὑποκειμένη, ἕνεκα τῆς μεγάλης ποικιλίας τῶν προβλημάτων, εἰς γενικοὺς κανόνας, ἀρίνεται εἰς τὴν κρίσιν τοῦ λύοντος τὸ πρόβλημα.

Ἡ λύσις τοῦ κατωτέρω προβλήματος θέλει παράσχει μικράν τινα ἰδέαν τῶν εἰρημένων.

Πρόβλημα. Ἔργον τι πρέπει νὰ περατωθῇ ἐντὸς 21 ἡμερῶν. Ἐμισθώθησαν δὲ πρὸς τοῦτο 10 ἐργάται, οἵτινες ἐξετέλεσαν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἔργου εἰς 9 ἡμέρας. Δύνανται οἱ 10 ἐργάται νὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς ὡρισμένης προθεσμίας καὶ ἐὰν δὲν δύνωνται, πόσοι πρέπει νὰ προστεθῶσι;

Λύσις. Ἐπειδὴ διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἔργου οἱ 10 ἐργάται δαπανῶσιν 9 ἡμέρας, διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ὁλοκλήρου τοῦ ἔργου, θέλουσι δαπανήσει 27 ἡμέρας. Ὥστε οἱ 10 ἐργάται δὲν ἀρκοῦσι διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου ἐντὸς τῆς προθεσμίας τῶν 21 ἡμερῶν.

Ζητήσωμεν λοιπὸν πόσοι ἐργάται πρέπει νὰ προστεθῶσιν.

Ἐπειδὴ ἐκ μὲν τῆς προθεσμίας παρῆλθον 9 ἡμέραι, τοῦ δὲ ἔργου ὑπολείπονται τὰ $\frac{2}{3}$· καὶ ἐπειδὴ οἱ 10 ἐργάται, μένοντες μόνοι ἤθελον τελειώσει τὰ ὑπολειπόμενα $\frac{2}{3}$ εἰς 18 ἡμέρας, ἐνῷ ὑπολείπονται ἐκ τῆς προθεσμίας τῶν 21 ἡμερῶν μόνον 12, ἕπεται, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Πόσοι ἐργάται δύνανται νὰ τελειώσωσιν ἔργον εἰς 12 ἡμέρας, γνωστοῦ ὄντος ὅτι 10 ἐργάται τελειώνουσι τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 18 ἡμέρας;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο κατατάσσεται μὲν οὕτω

18 ἡμ.	10 ἐργ.
12	X

λύεται δὲ ὑπὸ τοῦ τύπου

$$X = \frac{10 \times 18}{12} = 15.$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1. Ἐν 30 ἡμέραις ἐργάτης τις κερδίζει 180 φράγκα· ἐν πόσαις ἡμέραις δύναται νὰ κερδίσῃ 210 φράγκα; (Ἀπ. 35).

2. Ἐν 20 ἡμέραις ἐργάτης τις ἐκέρδισεν 140 φράγκα· πόσα φράγκα ἤθελε κερδίσει, ἐὰν εἰργάζετο 6 ἡμέρας περισσότερον; (Ἀπ. 182).

3. Ὑπόδημα μετάξινον ζυγίζον 20 ἑκατόγραμμα τιμᾶται 240 φράγκα· πόσον ἤθελε τιμηθῇ, ἐὰν ἐζύγιζεν 90 ἑκατόγρ.; (Ἀπ. 1080).

4. Πόσα χιλιόγραμμα ἄρτου ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν διατροφὴν 150 ἀνθρώπων, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι δι' 130 χιλιογράμμων τρέφονται 65 ἄνθρωποι; (Ἀπ. 300).

5. Πόσον τιμῶνται 200 μέτρα ἐριούχου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὰ $\frac{7}{10}$ αὐτῶν τιμῶνται 540 φράγκα; (Ἀπ. 771,44).

6. Πόσα φράγκα πρέπει νὰ πληρώσωμεν διὰ τὴν μεταφορὰν 10712 χιλιογράμμων βάρους, πληρώσαντες 354 φράγκα διὰ τὴν μεταφορὰν 3678 χιλιογράμμων; (Ἀπ. 1031 $\frac{5}{613}$).

7. Πόσαι ὧραι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν κένωσιν δεξαμενῆς μήκους 4 μέτρων, πλάτους 3 καὶ βάθους 2,50, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐν 12 λεπτοῖς κενοῦται ἓν κυβικὸν μέτρον; (Ἀπ. 6).

8. Συνεφώνησέ τις νὰ πληρώσῃ 500 φράγκα διὰ τὴν κατασκευὴν 200 τετραγωνικῶν μέτρων τοίχου. Πόσα φράγκα θέλει πληρώσει διὰ τὴν κατασκευὴν 450 τετραγωνικῶν τεκτονικῶν πήχεων; (Ἀπ. 632,81).

9. Συνεφώνησέ τις νὰ πληρώσῃ 850 φράγκα διὰ τὴν κατασκευὴν 180 κυβικῶν μέτρων τοίχου. Πόσα φράγκα θέλει πληρώσει διὰ τὴν κατασκευὴν 325 κυβικῶν τεκτονικῶν πήχεων; (Ἀπ. 647,46).

10. Φρουρὰ 1500 ἀνδρῶν ἔχει τροφὰς δι' 6 μῆνας. Πόσοι πρέπει νὰ ἐξέλθωσι τοῦ φρουρίου, ἵνα ἐξαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ 2 μῆνας περισσότερον; (Ἀπ. 375).

11. Φρουρὰ 1200 ἀνδρῶν, μέλλουσα νὰ ὑπερασπισθῇ φρούριόν τι ἐπὶ 18 μῆνας, ἔχει ζωοτροφίας μόνον διὰ 11 μῆνας. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ τὸ σιτηρέσιον, διὰ νὰ ἐξαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ 18 μῆνας; (Ἀπ. Κατὰ $\frac{7}{18}$ τοῦ ἀρχ. σιτηρεσ.).

12. Φρουρὰ 400 στρατιωτῶν πολιορκουμένων εἶχε τροφὰς διὰ 21 ἡμέρας, ὅτε ἔφθασεν εἰς αὐτὴν ἐπικουρία 120 στρατιωτῶν, ἔχουσα τροφὰς διὰ 5 ἡμέρας. Ἐὰν ἑνώσωσι τὰς τροφὰς αὐτῶν οἱ δεύτεροι στρατιῶται μετὰ τῶν τροφῶν τῶν πρώτων στρατιωτῶν, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος στρατιώτης, ἵνα ἐξαρκέσωσιν αἱ ζωοτροφίαι 21 ἡμέρας; (Ἀπ. $\frac{75}{91}$).

13. Ὡρολόγιον ὑστερίζον 2 $\frac{1}{2}$ λεπτὰ εἰς 3 ὥρας δεικνύει ἀληθῆ μεσημβρίαν. Μετὰ πόσον χρόνον θέλει δεικνύει καὶ πάλιν ἀληθῆ χρόνον; (Ἀπ. 864).

14. Τὸ βάθος ἀρτεσιανοῦ τινος φρέατος εἶνε 505 μέτρων, ἡ δὲ θερμοκρασία αὐτοῦ κατὰ τὸν πυθμένα 27^0,33. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ θερμοκρασία βάθους 28 μέτρων εἶνε σταθερὰ καὶ ἴση μὲ 11^0,7, πόση θὰ εἶνε ἡ θερμοκρασία στρώματος κειμένου εἰς βάθος 217 μέτρων, ὑποτιθεμένου ὅτι κάτω τῶν 28 μέτρων ἡ θερμοκρασία αὐξάνει ἀναλόγως τοῦ βάθους;
(Ἀπ. 17^0,89).

15. Τῶν αὐτῶν δεδομένων ὑπαρχόντων, πόσον τὸ βάθος θερμῆς πηγῆς, ἧς ἡ θερμοκρασία κατὰ τὸν πυθμένα εἶνε 65^0,35; (Ἀπ. 1665μ.,49).

16. Ἠγόρασέ τις ἐν Βραΐλᾳ 400 κοιλὰ σίτου καὶ ἐπλήρωσε 70000 γρόσια Βραΐλας διὰ τὴν ἀγορὰν καὶ 125 λίρας τουρκίας διὰ τὸν ναῦλον καὶ ἄλλα ἔξοδα. Ἀντὶ πόσων ἀργυρῶν γροσίων Κωνσταντινουπόλεως πρέπει νὰ πωλήσῃ 750 κοιλὰ Κωνσταντινουπόλεως, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὑπολογίζει ἐπὶ τοῦ ὅλου σίτου κέρδος 200 λιρῶν; (Ἀπ. 14801,58).

17. Ἐφόρτωσέ τις ἐν Τενέδῳ 156000 ὀκάδας οἴνου καὶ ἐπλήρωσε 375000 γρόσια, ὑπολογιζομένης τῆς λίρας πρὸς 114 γρόσια, διὰ τὴν ἀγορὰν καὶ 250 λίρας ἀγγλικὰς δι' ἀναπόφευκτα ἔξοδα καὶ ναῦλον μέχρι Μασσαλίας. Ἀντὶ πόσων φράγκων πρέπει νὰ πωληθῶσι 3380 χιλιόγραμμα, ὑποτιθεμένου, ὅτι ὁ οἰνέμπορος προσδοκᾷ κέρδος 12000 φράγκων ἐξ ὅλου τοῦ οἴνου; (Ἀπ. 1665,16).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

150. Κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν λύονται ἐκεῖνα τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα δίδοται ἡ τιμὴ ἑνὸς ποσοῦ καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ πολλῶν ἄλλων πρὸς τὰ ὁποῖα τὸ πρῶτον εἶνε κατ' εὐθεῖαν ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογον καὶ ζητεῖται ποίαν τιμὴν λαμβάνει τὸ πρῶτον, ὅταν πάντα τὰ ἄλλα λάβωσι νέας τιμάς.

Πρόβλημα. Εἰς πόσας ἡμέρας τελειώνουσιν ἔργον, οὗτινος τὸ μῆκος εἶνε 50 πήχεων, 10 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι 15 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 11 ὥρας τὴν ἡμέραν τελειώνουσιν εἰς 18 ἡμέρας ἔργον μήκους 60 πήχεων;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο κατατάσσεται μὲν οὕτω

15 ἐρ.	11 ὥρ.	18 ἡμ.	60 π.μ.
10	12	χ	50

λύεται δὲ ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 15 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 11 ὥρας τὴν ἡμέραν, τελειώνουσιν εἰς 18 ἡμέρας ἔργον μήκους 60 πήχεων, εἷς μὲν ἐργάτης θέλει τελειώσει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 18×15 ἡμέρας, 10 δὲ ἐργάται θέλουσι τελειώσει αὐτὸ εἰς $\frac{18\times15}{10}$ ἡμέρας.

Ἐπειδὴ δὲ 10 ἐργάται ἐργαζόμενοι 11 ὥρας τὴν ἡμέραν τελειώνουσιν ἔργον μήκους 60 πήχεων εἰς $\frac{18\times15}{10}$ ἡμέρας, οἱ αὐτοὶ ἐργάται ἐργαζόμενοι μὲν 1 ὥραν τὴν ἡμέραν θέλουσι τελειώσει τὸ ἔργον εἰς $\frac{18\times15\times11}{10}$ ἡμέρας, ἐργαζόμενοι δὲ 12 ὥρας τὴν ἡμέραν θέλουσι τελειώσει αὐτὸ εἰς $\frac{18\times15\times11}{10\times12}$ ἡμέρας.

Ἐπειδὴ τέλος οἱ 10 ἐργάται ἐργαζόμενοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν τελειώνουσιν ἔργον μήκους 60 πήχεων εἰς $\frac{18\times15\times11}{10\times12}$ ἡμέρας, οἱ αὐτοὶ ἐργάται, ἐργαζόμενοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἤθελον χρειασθῆ $\frac{18\times15\times11}{10\times12\times60}$ ἡμέρας, ἐὰν τὸ μῆκος ἦτο ἑνὸς πήχεως καὶ $\frac{18\times15\times11\times50}{10\times12\times60}$ ἡμέρας, ὄντος τοῦ μήκους 50 πήχεων.

Ἀλλ' αὗται αἱ ἡμέραι εἶνε αἱ ζητούμεναι· ὥστε

$$\chi=\frac{18\times15\times11\times50}{10\times12\times60}.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει, ὅτι

Ἵνα εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον εἰς τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν δεδομένον ἐπὶ τοὺς ἑαυτοῦ μὲν ἀντιστοίχους, προκειμένου περὶ ποσῶν, ἅτινα εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὸ δοθὲν, ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους δὲ τοῦ ἀγνώστου, προκειμένου περὶ ποσῶν ἅτινα εἶνε κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα πρὸς τὸ δοθὲν, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἄλλων ἀριθμῶν, οὓς περιέχουσιν οἱ στίχοι τοῦ προβλήματος.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1. Στοιχειοθέτης ἐργαζόμενος 10 ὥρας καθ' ἡμέραν στοιχειοθετεῖ εἰς 6 ἡμέρας 80 σελίδας. Εἰς πόσας ἡμέρας δύναται νὰ στοιχειοθετήσῃ 210 σελίδας, 9 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐργαζόμενος; (Ἀπ. $17\frac{1}{2}$).

2. Φρουρὰ 400 στρατιωτῶν ἔχει τροφὰς δι' ἐννέα μῆνας, τοῦ σιτηρεσίου ὄντος 800 γραμμαρίων. Πόσον πρέπει νὰ γίνῃ τὸ σιτηρέσιον τοῦ στρατιώτου, ἵνα ἐξαρκέσωσιν αἱ ζωοτροφίαι 10 μῆνας, ὑποτιθεμένου ὅτι προσετέθησαν τῇ φρουρᾷ 150 στρατιῶται ἐπίκουροι; (Ἀπ. 523, 45).

3. Ὁδοιπόρος, βαδίζων 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, διανύει 75 λεύγας εἰς 10 ἡμέρας. Πόσον διάστημα θέλει διανύσει εἰς 15 ἡμέρας, βαδίζων 9 ὥρας καθ' ἡμέραν; (Ἀπ. 100).

4. Δίδομεν 75 φράγκα καθ' ἑβδομάδα εἰς 5 ἐργάτας ἐργαζομένους 10 ὥρας καθ' ἡμέραν. Πόσα πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς 12 ἐργάτας, ἐργασθέντας 9 ὥρας καθ' ἑκάστην ἐπὶ 5 ἡμέρας; (Ἀπ. 115, 70).

5. Ἠγοράσαμεν δύο τεμάχια ὑφάσματος τοῦ αὐτοῦ εἴδους. Καὶ τὸ μὲν πρῶτον τεμάχιον, ἔχον μῆκος 6 πήχεων καὶ πλάτος $1\frac{1}{2}$, ἠγοράσθη ἀντὶ 350 φράγκων· τὸ δὲ δεύτερον τεμάχιον, ἔχον μῆκος $5\frac{3}{4}$ καὶ πλάτος $2\frac{1}{4}$ ἠγοράσθη ἀντὶ 400 φράγκων. Ποῖον τῶν δύο τεμαχίων εἶνε τὸ εὐθηνότερον; (Ἀπ. τὸ β' κατὰ 103, 125).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε.

Περὶ τόκου.

151. Τόκος ὀνομάζεται τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ δανείζων χρήματα.

Ἐπιτόκιον καλεῖται ὁ τόκος τῶν 100 εἰς ἓν ἔτος.

Χρόνος ὀνομάζεται ὁ καιρὸς καθ' ὃν μένουσιν εἰς τὰς χεῖρας τοῦ ὀφειλέτου τὰ δανεισθέντα χρήματα.

Κεφάλαιον δὲ λέγεται τὰ δανεισθέντα χρήματα.

Πρόβλημα. Πόσον τόκον δίδουσιν 8400 δραχμαὶ πρὸς 6 ἐπὶ τοῖς 100, εἰς 3 ἔτη;

Λύσις. Ἐπειδὴ 100 δραχμαὶ εἰς 1 ἔτος δίδουσι τόκον 6, μία μὲν δραχμὴ εἰς τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα θέλει δώσει τόκον ἑκατοντάκις ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{6}{100}$, 8400 δὲ δραχμαὶ θέλουσι δώσει τόκον $\frac{8400 \times 6}{100}$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ 8400 δραχμαὶ εἰς 1 ἔτος δίδουσι τόκον $\frac{8400 \times 6}{100}$, τὸ αὐτὸ ποσὸν εἰς 3 ἔτη θέλει δώσει τόκον τρὶς μεγαλείτερον, ἤτοι $\frac{8400 \times 6 \times 3}{100}$ δραχμάς.

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει, ὅτι

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 100.

Ὁ κανὼν οὗτος παρίσταται ἀναλυτικῶς διὰ τοῦ τύπου

$$T = \frac{K \times E \times X}{100} \quad (A)$$

ἐν ᾧ τὸ γράμμα T σημαίνει τὸν τόκον, τὸ γράμμα K τὸ κεφάλαιον, τὸ γράμμα E τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸ γράμμα X τὸν χρόνον.

Σχόλιον. Ὁ ἀνωτέρω τύπος ὑποθέτει, ὅτι ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε τὸ ἔτος. Ἐὰν λοιπὸν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τύπους οἵτινες νὰ δίδωσι τὸν τόκον, ὅταν ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ὁ μὴν, ἢ ἡ ἡμέρα, πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸν χρόνον εἰς ἔτη διαιροῦντες αὐτὸν διὰ τοῦ 12 μέν, ἐὰν ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ὁ μὴν, διὰ τοῦ 360 δέ, ἐὰν ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ἡ ἡμέρα καὶ νὰ θέσωμεν ἐν τῷ τύπῳ τὰ ἐξαγόμενα ἀντὶ τοῦ γράμματος X. Οὕτως· ἵνα εὕρωμεν τὸν τόκον κεφαλαίου 10500 δραχμῶν εἰς 27 μῆνας πρὸς 8 τοῖς 100, ἐπειδὴ 27 μῆνες ἰσοῦνται μὲ $\frac{27}{12}$ τοῦ ἔτους, ἠθέλομεν ἔχει

$$T = \frac{10500 \times 8 \times \frac{27}{12}}{100} \quad \text{ἢ}$$

$$T = \frac{10500 \times 8 \times 27}{1200} \quad (1)$$

Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὸν τόκον 4800 δραχμῶν πρὸς 5 τοῖς 100 εἰς 250 ἡμέρας, ἐπειδὴ αἱ 250 ἡμέραι ἰσοδυναμοῦσι μὲ $\frac{250}{360}$ τοῦ ἔτους, ἠθέλομεν ἔχει

$$T = \frac{4800 \times 5 \times \frac{250}{360}}{100} \quad \text{ἢ}$$

$$T = \frac{4800 \times 5 \times 250}{36000}. \quad (2)$$

Οἱ τύποι 1 καὶ 2 παριστάμενοι γενικῶς ὡς ἑξῆς

$$T = \frac{K \times E \times X}{1200} \quad (A')$$

$$T = \frac{K \times E \times X}{36000} \quad (A'')$$

δεικνύουσιν ὁ μὲν A', ὅτι

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου, ὅταν ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ὁ μὴν, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 1200.

Ὁ δὲ A'', ὅτι

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου, ὅταν ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ἡ ἡμέρα, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 36000.

Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου, χρόνου καὶ κεφαλαίου.

152. Ἐπειδὴ ἀληθεύει ἡ ἰσότης

$$T = \frac{K \times E \times X}{100}$$

ἔπεται ἀληθὴς καὶ ἡ ἰσότης

$$T \times 100 = K \times E \times X$$

ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς πρώτης, πολλαπλασιαζομένων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ 100.

Ἀλλ' ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος, ἢ διὰ τοῦ $K \times X$, ἢ διὰ τοῦ $K \times E$, ἢ διὰ τοῦ $E \times X$, θέλομεν πορισθῆ, διαιροῦντες μὲν διὰ τοῦ $K \times X$, τὸν τύπον

$$\text{Ε} = \frac{\text{Τ} \times 100}{\text{Κ} \times \text{Χ}} \qquad (\text{Β})$$

διαιροῦντες δὲ διὰ τοῦ Κ×Ε, τὸν τύπον

$$\text{Χ} = \frac{\text{Τ} \times 100}{\text{Κ} \times \text{Ε}} \qquad (\Gamma)$$

διαιροῦντες δὲ διὰ τοῦ Ε×Χ, τὸν τύπον

$$\text{Κ} = \frac{\text{Τ} \times 100}{\text{Ε} \times \text{Χ}} \qquad (\Delta)$$

οἵτινες δεικνύουσιν, ὁ μὲν τύπος (Β) ὅτι

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον.

Ὁ δὲ τύπος (Γ) ὅτι

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.

Ὁ δὲ τύπος (Δ) ὅτι

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον.

Σημ. Οἱ τύποι (Β), (Γ) καὶ (Δ) ὑποθέτουσιν, ὅτι ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε τὸ ἔτος. Οἱ τύποι, οὓς μεταχειριζόμεθα ὅταν ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ὁ μὴν ἢ ἡ ἡμέρα, εἶνε, ὅταν μὲν ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ὁ μὴν

$$\text{Ε} = \frac{\text{Τ} \times 1200}{\text{Κ} \times \text{Χ}} \qquad (\text{Β}')$$

$$\text{Κ} = \frac{\text{Τ} \times 1200}{\text{Ε} \times \text{Χ}} \qquad (\Gamma')$$

ὅταν δὲ ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ἡ ἡμέρα

$$\text{Ε} = \frac{\text{Τ} \times 36000}{\text{Κ} \times \text{Χ}} \qquad (\text{Β}'')$$

$$\text{Κ} = \frac{\text{Τ} \times 36000}{\text{Ε} \times \text{Χ}} \qquad (\Gamma'')$$

Πρόβλημα I. Πόσον τόκον δίδουσιν 8000 φράγκα πρὸς 4 ἐπὶ τοῖς 100 εἰς 3 ἔτη;

Λύσις. Ἐπειδὴ

$$\text{Κ} = 8000$$
$$\text{Ε} = 4$$
$$\text{Χ} = 3$$

ἔχομεν

$$\text{Τ} = \frac{8000 \times 4 \times 3}{100} = 960$$

Πρόβλημα II. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 9000 δραχμ. πρὸς 5 ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν δίδει τόκον 2700 δραχμάς;

Λύσις. Ἐπειδὴ

$$\text{Κ} = 9000$$
$$\text{Ε} = 5$$
$$\text{Τ} = 2700$$

ἔχομεν

$$\text{Χ} = \frac{2700 \times 100}{9000 \times 5} = 6$$

Πρόβλημα III. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθησαν 12000 γρόσια, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι εἰς 1 ἔτος καὶ 3 μῆνας ἔδωκαν τόκον 900 γρόσια;

Λύσις. Ἐπειδὴ

$$\text{Κ} = 12000$$
$$\text{Χ} = 1 \text{ ἔτ. } 3 \text{ μην.} = 15 \text{ μην.}$$
$$\text{Τ} = 900$$

ἔχομεν

$$\text{Ε} = \frac{900 \times 1200}{12000 \times 15} = 6$$

Πρόβλημα IV. Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 4 ἐπὶ τοῖς 100, ἐπὶ 1 ἔτος καὶ 6 μῆνας, δίδει τόκον 360 δραχμ.;

Λύσις. Ἐπειδὴ

$$\text{Ε} = 4$$
$$\text{Χ} = 18 \text{ μην.}$$
$$\text{Τ} = 360$$

ἔχομεν

$$\text{Κ} = \frac{360 \times 1200}{18 \times 4} = 6000$$

Συντομίαι περὶ τὴν εὕρεσιν τοῦ τόκου, ὅταν ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ἡ ἡμέρα.

I.

Μέθοδος τῶν σταθερῶν διαιρετῶν.

153. Ἐὰν εἰς τὸν τύπον

$$\text{Τ} = \frac{\text{Κ} \times \text{Ε} \times \text{Χ}}{36000}$$

θέσωμεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ Ε, ἢ 2, ἢ $2\frac{1}{2}$, ἢ 3, ἢ 4, ἢ $4\frac{1}{2}$, ἢ 5, ἢ 6, ἢ $7\frac{1}{2}$, ἢ 8, ἢ 9, ἢ 10, ἢ 12, θέλομεν ἔχει

διὰ $\text{Ε} = 2$ $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Κ} \times \text{Χ}}{18000}$

διὰ $\text{Ε} = 2\frac{1}{2}$ $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Κ} \times \text{Χ}}{14400}$

διὰ $\text{Ε} = 3$ $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Κ} \times \text{Χ}}{12000}$

διὰ $\text{Ε} = 4$ $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Κ} \times \text{Χ}}{9000}$

διὰ $\text{Ε} = 4\frac{1}{2}$ $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Κ} \times \text{Χ}}{8000}$

διὰ $\text{Ε} = 5$ $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Κ} \times \text{Χ}}{7200}$

διὰ $\text{Ε} = 6$ $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Κ} \times \text{Χ}}{6000}$

διὰ $\text{Ε} = 7\frac{1}{2}$ $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Κ} \times \text{Χ}}{4800}$

διὰ $\text{Ε} = 8$ $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Κ} \times \text{Χ}}{4500}$

διὰ $\text{Ε} = 9$ $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Κ} \times \text{Χ}}{4000}$

διὰ $\text{Ε} = 10$ $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Κ} \times \text{Χ}}{3600}$

διὰ $\text{Ε} = 12$ $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Κ} \times \text{Χ}}{3000}$

Οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν 18000, 14400, 12000, 9000, 8000, 7200, 6000, 4800, 4500, 4000, 3600, 3000, οἵτινες ἐν τῇ εὑρέσει τοῦ τόκου, χρησιμεύουσιν ὡς διαιρέται, ὁ πρῶτος ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 2, ὁ δεύτερος ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε $2\frac{1}{2}$, ὁ τρίτος ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 3, ὁ τέταρτος ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 4, ὁ πέμπτος ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε $4\frac{1}{2}$, ὁ ἕκτος ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 5, ὁ ἕβδομος ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 6, ὁ ὄγδοος ὅταν τὸ ἐπιτοκιον εἶνε $7\frac{1}{2}$, ὁ ἔννατος ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 8, ὁ δέκατος ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 9, ὁ ἑνδέκατος ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 10 καὶ ὁ δωδέκατος ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 12, λέγονται σταθεροὶ διαιρέται.

Κανών. Ἵνα εὕρωμεν λοιπὸν τὸν τόκον οἵου δήποτε κεφαλαίου εἰς τινας ἡμέρας, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὰς ἡμέρας καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου, ὅστις ἀντιστοιχεῖ τῷ δοθέντι ἐπιτοκίῳ.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὰς ἡμέρας καθ' ἃς ἔμεινεν εἰς τὸν τόκον λέγεται Τοκάριθμος, ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἀπαγγέλεται οὕτως·

Ἵνα εὕρωμεν τὸν τόκον οἵου δήποτε κεφαλαίου εἰς τινας ἡμέρας, διαιροῦμεν τὸν τοκάριθμον διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου, ὅστις ἀντιστοιχεῖ τῷ δοθέντι ἐπιτοκίῳ.

Σχόλιον. Ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον τοῦ προβλήματος εἶνε διάφορον τῶν ἐν τῷ ἀνωτέρῳ πίνακι περιεχομένων, πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου, ἀποσυνθέτομεν τὸ ἐπιτόκιον εἰς μέρη τοιαῦτα ὥστε τὸ μὲν πρῶτον νὰ εἶνε ἴσον ἑνὶ τῶν ἐν τῷ ἀνωτέρῳ πίνακι περιεχομένων, πάντα δὲ τὰ ἄλλα ὑποπολλαπλάσια ἕκαστον τοῦ προηγουμένου· καὶ λαβόντες τὸν τόκον τοῦ κεφαλαίου ὡς πρὸς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ ἐπιτοκίου, προσδιορίζομεν καὶ τὰ ἄλλα μέρη τοῦ ζητουμένου τόκου διὰ τῆς μεθόδου τῶν ὑποπολλαπλασίων.

Παράδειγμα. I. Πόσον τόκον δίδουσιν 7500 δραχμαὶ εἰς 29 ἡμέρας πρὸς $5\frac{1}{2}\,{}^0/_0$;

Λύσις.

$$5\tfrac{1}{2} = \begin{cases} 5 \mid \text{Τόκος πρὸς } 5\,{}^0/_0 = \dfrac{7500\times 29}{7200} = 30,\ 21 \\ 1/2 \mid \text{Τόκ. πρὸς } 1/2\ {}^0/_0, \text{ὅπερ εἶνε τὸ } \frac{1}{10} \text{ τοῦ } 5 = 3,\ 021 \end{cases}$$

Τόκος λοιπὸν πρὸς $5\,1/2$ . . . . . $= 33,\ 231.$

Παράδειγμα II. Πόσον τόκον δίδουσι 8400 φράγκα πρὸς $11\,1/2$ τοῖς ἑκατὸν εἰς 60 ἡμέρας;

$$11\tfrac{1}{2} = \begin{cases} 10 \mid \text{Τόκος πρὸς } 10\,{}^0/_0 = \dfrac{8400\times 60}{3600} = 140,\ 00 \\ 1 \mid \text{Τόκ. πρὸς } 1\,{}^0/_0 \text{ ὅπερ ἴσ. τῷ } \frac{1}{10} \text{ τοῦ } 10 = 14,\ 00 \\ 1/2 \mid \text{Τόκ. πρὸς } 1/2 \text{ ὅπερ εἶνε ἥμισυ τοῦ } 1 = 7,\ 00 \end{cases}$$

Τόκος πρὸς $11\,1/2$ $= 161,\ 00$

II.

Μέθοδος τῶν ὑποπολλαπλασίων τοῦ 36.

154. Ἐὰν εἰς τὸν τύπον

$$\tau = \frac{\text{Κ}\times\varepsilon\times\chi}{36000}$$

θέσωμεν ἀντὶ τοῦ ε, 36, θέλομεν ἔχει

$$\tau = \frac{\text{Κ}\times\chi}{1000}.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο χρησιμεύει εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ τόκου, οἵου δήποτε ὄντος τοῦ ἐπιτοκίου ὡς ἑξῆς.

Λαμβάνομεν βοηθητικῶς τὸν τόκον τοῦ κεφαλαίου πρὸς 36 τοῖς ${}^0/_0$. Ἀποσυνθέτομεν τὸ δοθὲν ἐπιτόκιον εἰς μέρη τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον νὰ εἶνε ὑποπολλαπλάσιον τοῦ 36, πάντα δὲ τὰ ἄλλα ὑποπολλαπλάσια, ἢ τοῦ 36, ἢ ἕκαστον τοῦ προηγουμένου του· καὶ ἀφ' οὗ λάβωμεν τοιαῦτα ὑποπολλαπλάσια τοῦ βοηθητικοῦ τόκου, ὁποῖα ὑποπολλαπλάσια τοῦ 36 εἶνε τὰ μέρη τοῦ ἐπιτοκίου, προσθέτομεν τοὺς μερικοὺς τόκους, πλὴν τοῦ βοηθητικοῦ, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον.

Παράδειγμα I. Πόσον τόκον δίδουσι 4800 φράγκα πρὸς $11\,1/2$ τοῖς ἑκατὸν εἰς 50 ἡμέρας.

$$11\,^1/_2 = \begin{cases} 9 & \text{Τόκος πρὸς } 9\,{}^0/_0 = 60,00 \\ 2 & \text{Τόκος πρὸς } 2\,{}^0/_0 = 13,33 \\ 1/_2 & \text{Τόκος πρὸς } {}^1/_2\,{}^0/_0 = 3,33 \end{cases}$$

Τόκος πρὸς $36\,{}^0/_0$ = 240,00

Τόκος πρὸς $11\,{}^1/_2$ = 76,66.

Παράδειγμα II. Πόσον τόκον δίδουσιν 7200 δραχμαὶ πρὸς $10\,{}^1/_4$ τοῖς ἑκατὸν εἰς 75 ἡμέρας;

Λύσις.

Τόκος πρὸς $36\,{}^0/_0 = \frac{7200 \times 75}{1000} = 540,00$

$$10\,{}^1{}_4 \begin{cases} 9 & \text{ὁ τόκ. πρὸς } 9\,{}^0/_0 \text{ ἰσοῦται τῷ } {}^1/_4 \text{ τοῦ } 540 = 135,00 \\ 1 & \text{ὁ τόκ. πρὸς } 1\,{}^0/_0 \text{ ἰσοῦται τῷ } {}^1/_9 \text{ τοῦ } 135 = 15,00 \\ 1/_4 & \text{ὁ τόκ. πρὸς } {}^1/_4\,{}^0/_0 \text{ ἰσοῦται τῷ } {}^1/_4 \text{ τοῦ } 15 = 3,75 \end{cases}$$

Τόκος πρὸς $10\,{}^1/_4$ 153,75

III.

Μέθοδος τῶν ὑποπολλαπλασίων τῶν ἡμερῶν.

155. Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους τῆς §. 152 θέσωμεν ἀντὶ Χ, εἰς τὸν πρῶτον 180, εἰς τὸν δεύτερον 144, εἰς τὸν τρίτον 120, εἰς τὸν τέταρτον 90, εἰς τὸν πέμπτον 80, εἰς τὸν ἕκτον 72, εἰς τὸν ἕβδομον 60, εἰς τὸν ὄγδοον 48, εἰς τὸν ἔνατον 45, εἰς τὸν δέκατον 40, εἰς τὸν ἑνδέκατον 36 καὶ εἰς τὸν δωδέκατον 30, θέλομεν λάβει ἐξ ἁπάντων τὸν τύπον

$$T = \frac{K}{100}.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει ὅτι δι' ἕκαστον τῶν ἐπιτοκίων τῆς §. 152 ὑπάρχει ἀριθμός τις ἡμερῶν, μετὰ παρέλευσιν τῶν ὁποίων πᾶν κεφάλαιον δίδει τόκον ἴσον τῷ ἑκατοστῷ αὐτοῦ.

Τῆς ἰδιότητος ταύτης ποιούμεθα χρῆσιν πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου, ὅσαι δήποτε καὶ ἂν εἶνε αἱ ἡμέραι, (ἀρκεῖ τὸ ἐπιτόκιον νὰ εἶνε ἓν τῶν ἐν τῷ πίνακι τῆς §. 152 περιεχομένων), ἐὰν ἀποσυνθέσωμεν τὰς ἡμέρας εἰς μέρη, ὧν τὸ μὲν πρῶτον νὰ εἶνε ἴσον τῷ ἀριθμῷ τῶν ἡμερῶν, αἵτινες δίδουσι τόκον ἴσον τῷ ἑκατοστῷ τοῦ κεφαλαίου, ἢ ἑνὶ τῶν ὑποπολλαπλασίων τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν τούτων, πάντα δὲ τὰ λοιπὰ ὑποπολλαπλάσια ἕκαστον τοῦ προηγουμένου του, καὶ λαβόντες τοιαῦτα ὑποπολλαπλάσια τοῦ ἑκατοστοῦ τοῦ κεφαλαίου, ὁποῖα ὑποπολλαπλάσια τῶν εἰρημένων ἡμερῶν εἶνε τὰ μέρη τοῦ χρόνου τοῦ προβλήματος, προσθέσωμεν τοὺς μερικοὺς τούτους τόκους.

Παράδειγμα I. Πόσον τόκον δίδουσιν 7200 δραχμαὶ πρὸς $6\,{}^0/_0$ εἰς 89 ἡμέρας;

$$89 = \begin{cases} 60 & \text{τόκος τῶν } 60 \text{ ἡμερῶν} = 72,00 \\ 20 & \text{τόκος τῶν } 20 \text{ »} = 24,00 \\ 5 & \text{τόκος τῶν } 5 \text{ »} = 6,00 \\ 2\,{}^1/_2 & \text{τόκος τῶν } 2\,{}^1/_2 \text{ »} = 3,00 \\ 1/_2 & \text{τόκος τῆς } {}^1/_2 \text{ ἡμέρας} = 0,60 \\ 1 & \text{τόκος τῆς } 1 \text{ »} = 1,20 \end{cases}$$

Τόκος τῶν 89 ἡμερῶν = 106,80

Παράδειγμα II. Πόσον τόκον δίδουσιν 8500 δραχμαὶ πρὸς $10\,{}^0/_0$ εἰς 135 ἡμέρας;

$$135 = \begin{cases} 36 & \text{τόκος τῶν } 36 \text{ ἡμερῶν} = 85,00 \\ 36 & \text{» » } 36 \text{ »} = 85,00 \\ 36 & \text{» » } 36 \text{ »} = 85,00 \\ 18 & \text{» » } 18 \text{ »} = 42,50 \\ 6 & \text{» » } 6 \text{ »} = 14,16 \\ 3 & \text{» » } 3 \text{ »} = 7,08 \end{cases}$$

Τόκος τῶν 135 ἡμερῶν = 318,74

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1. Πόσον κερδίζομεν ἐπὶ τοῖς 100, πωλοῦντες, 8 μῆνας μετὰ τὴν ἀγοράν, ἀντὶ 4,80 πρᾶγμα, ὅπερ ἠγοράσαμεν ἀντὶ 4 φράγκων; (Ἀπ. 30).

2. Ἀγοράσας ἀντὶ 8500 φράγκων σῖτον, ἐκέρδισα, μεταπωλήσας αὐτὸν 95 ἡμέρας μετὰ τὴν ἀγοράν, 10 ἐπὶ τοῖς 100. Πόσα χρήματα ἔλαβον ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ σίτου (Ἀπ. 224,30).

3. Ἀγοράσας τις ἐριοῦχον ἀντὶ 25 φράγκων τὸ μέτρον, ἐπιθυμεῖ νὰ κερδίσῃ 12 ἐπὶ τοῖς 100. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ μέτρον; (Ἀπ. 28).

4. Ἀγοράσας τις πρᾶγμα ἀντὶ 8500 δραχμῶν, μετεπώλησεν αὐτὸ ἀντὶ 9200. Πόσον τοῖς 100 ὠφελήθη; (Ἀπ.8,23).

5. Ἠγόρασέ τις 8400 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς 1,25 τὴν ὀκὰν καὶ ἐξώδευσεν 800 φράγκα διὰ τὴν μεταφοράν, 1 $^1/_2$ τοῖς ἑκατὸν διὰ δημοτικὸν φόρον καὶ 3 τοῖς 100 τελωνειακὰ δικαιώματα. Ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 12 ἐπὶ τοῖς 100, πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ ἔλαιον; (Ἀπ. 1,55 τὴν ὀκάν).

6. Ἠγόρασέ τις 7200 κοιλὰ σίτου πρὸς 6 φράγκα τὸ κοιλόν· ἐπλήρωσε δὲ ἀσφάλιστρα μὲν 2 ἐπὶ τοῖς 100, ναῦλον 1200 φράγκα, εἰς τὴν ἀποθήκην 350 φράγκα, εἰς τὸ τελωνεῖον 3 ἐπὶ τοῖς 100 καὶ μεσιτικὰ $^1/_2$ τοῖς 100. Πόσον πρέπει νὰ πωληθῇ τὸ κοιλόν, ἵνα προκύψῃ κέρδος 10 ἐπὶ τοῖς 100; (Ἀπ. 7,19).

7. Ἐφόρτωσέ τις 348 βαρέλια οἴνου, ὧν ἕκαστον περιεῖχε 2500 χιλιόγραμμα ἀγορασθέντα πρὸς 0,25 τοῦ φράγκου· ἐπλήρωσε δὲ 1200 φράγκα διὰ ναῦλον, 800 φράγκα διὰ προμήθειαν καὶ 3 τοῖς ἑκατὸν εἰς τὸ τελωνεῖον. Ἐκ δὲ τῶν 348

βαρελίων 3 μετετράπησαν εἰς ὄξος καὶ 50 ἐρρίφθησαν εἰς τὴν θάλασσαν, γενομένης τρικυμίας. Ὑποτιθεμένου, ὅτι τὸ ὄξος ἐπωλήθη πρὸς 0,12 τοῦ φράγκου, πόσον πρέπει νὰ πωληθῇ ὁ οἶνος, ἵνα προκύψῃ κέρδος 8 ἐπὶ τοῖς 100; (Ἀπ. 0,33).

8. Πόσον τόκον ἔλαβέ τις ἐκ κεφαλαίου 24000 δραχμῶν, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὰ μὲν $\frac{5}{24}$ τοῦ κεφαλαίου ἔμειναν εἰς τὸν τόκον ἐπὶ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνας πρὸς 8 τοῖς ἑκατόν, τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ὑπολοίπου ἐπὶ 247 ἡμέρας πρὸς 9 τοῖς 100, τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου ἐπὶ 135 ἡμέρας πρὸς 7 $\frac{1}{2}$ τοῖς 100 καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἐπὶ 97 ἡμέρας πρὸς 6 $^0/_0$; (Ἀπ. 1188,74).

9. Ἠγόρασέ τις οἶνον πρὸς 40 λεπτὰ τὴν ὀκάν. Μεταπωλήσας δὲ αὐτὸν μετὰ 8 μῆνας ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ μὲν 220 δρ. ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν δὲ 17,1875. Ἐκ πόσων ὀκάδων συνίστατο ὁ ἀγορασθεὶς οἶνος;

10. Εἶχέ τις 200000 δραχμὰς εἰς τόκον πρὸς 4 $^0/_0$. Μετὰ 2 ἔτη ἀφαιρῶν τὸ τέταρτον καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἀφίνει εἰς τόκον ἐπὶ 7 μῆνας, μετὰ τοὺς ὁποίους ἀφαιρέσας πάλιν τὸ τέταρτον, ἀφῆκε τὸ ὑπόλοιπον εἰς τόκον ἐπὶ 13 μῆνας. Πόσους τόκους ἔλαβε κατὰ τὸ διάστημα τῶν 44 τούτων μηνῶν;

11. Ἠγόρασέ τις ἐν Ὀδησσῷ 1200 ψάθας σίτου πρὸς 5 ρούβλια τὴν ψάθαν. Ἐπλήρωσε δὲ, μετενεγκὼν τὸν σῖτον ἐν Κωνσταντινουπόλει, φόρον εἰσαγωγῆς 2 ἐπὶ τοῖς 100 καὶ ἔξοδα μεταφορᾶς καὶ ἀποθηκῶν 90 λίρας Τουρκίας. Ὑποτιθεμένου ὅτι μετὰ 8 μῆνας ἐπώλησε τὰ μὲν $\frac{3}{8}$ τοῦ σίτου πρὸς 24 ἀργυρᾶ γρόσια τὸ κοιλόν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρὸς 25, νὰ εὑρεθῇ ἐὰν προὔκυψε κέρδος καὶ πόσον ἐπὶ τοῖς 100.

Περὶ δημοσίων δανείων.

156. Αἱ κυβερνήσεις, ὡς οἱ ἰδιῶται, δανείζονται διὰ τὰς

δημοσίους ἀνάγκας ποσὰ κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον μεγάλα, πληρώνουσαι τοῖς πιστωταῖς αὐτῶν τόκους ἐκ τοῦ δημοσίου ταμείου. Πρὸς δήλωσιν δὲ τῆς ὀφειλῆς αὐτῆς πᾶσα κυβέρνησις ἐκδίδει ὁμολογίας, μικροῦ κεφαλαίου ἑκάστην, τίτλους τοῦ δημοσίου χρέους ἢ ἐγγραφὰς καλουμένας, ἐπὶ τῇ ὄψει τῶν ὁποίων πληρώνει τοὺς τόκους ἐπὶ τῷ ὁρισθέντι ἅπαξ ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ δανείου ἐπιτοκίῳ, ἢ καθ' ἑξαμηνίαν, ἢ καὶ κατ' ἔτος.

157. Αἱ κυβερνήσεις δὲν πληρώνουσι τὰ χρέη αὐτῶν μετὰ ὡρισμένην προθεσμίαν, ὅπως οἱ ἰδιῶται. Ἐάν τις λοιπὸν ἔχῃ κυβερνητικὰς ὁμολογίας καὶ θέλῃ τὸ ἀντίτιμον αὐτῶν, πωλεῖ αὐτὰς εἰς τὸ χρηματιστήριον· καὶ ἂν μὲν κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς πωλήσεως ὁ τόκος ἐφ' ᾧ τοκίζονται τὰ χρήματα εἶνε μικρότερος τοῦ τόκου τῶν ὁμολογιῶν θέλει συναγάγει περισσότερα χρήματα τῶν ἐν ταῖς ὁμολογίαις ἐγγεγραμμένων· ἂν δὲ ὁ τόκος τῶν χρημάτων σὺν τῇ δαπάνῃ τῆς πωλήσεως εἶνε ἴσος τῷ τόκῳ τῶν ὁμολογιῶν, θέλει συναγάγει τόσα χρήματα, ὅσα εἶνε ἐγγεγραμμένα ἐν ταῖς ὁμολογίαις· ἂν δὲ τέλος ὁ τόκος τῶν χρημάτων εἶνε μεγαλείτερος τοῦ τόκου τῶν ὁμολογιῶν, θέλει συναγάγει χρήματα ὀλιγώτερα ἐκείνων, ἅτινά εἰσιν ἐγγεγραμμένα ἐν ταῖς ὁμολογίαις. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει αἱ ὁμολογίαι λέγονται ὑπεράρτιοι· ἐν τῇ δευτέρᾳ ἄρτιοι καὶ ἐν τῇ τρίτῃ ὑπάρτιοι.

158 Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται δῆλον ὅτι ἡ ἀξία μιᾶς τινος ὁμολογίας δὲν μένει ἀμετάβλητος καὶ ἴσῃ τῇ ὀνομαστικῇ ἀξίᾳ τῆς Ὁμολογίας, ἀλλ' αὐξομειοῦται κατὰ τὰς περιςάσεις. Διακριτέον λοιπὸν δύο ἀξίας ἐν ἑκάστῃ ὁμολογίᾳ δημοσίου δανείου τὴν ὀνομαστικὴν, ἥτις εἶνε ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ τίτλῳ καὶ ἀπέναντι τῆς ὁποίας πληρώνει ἡ κυβέρνησις τὸν τόκον ἐπὶ τῷ ὁρισθέντι κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ δανείου ἐπιτοκίῳ καὶ τὴν τρέχουσαν ἣν ὁρίζουσιν αἱ περιστάσεις· ὥστε ἐάν τις

ἀγοράσῃ ὁμολογίας τοῦ αὐτοῦ δανείου κατὰ διαφόρους ἐποχὰς δὲν ἔπεται ὅτι ἐτόκισε τὰ χρήματά του ἐπὶ τῷ αὐτῷ ἐπιτοκίῳ· διότι καίτοι αἱ τρέχουσαι ἀξίαι τῶν ὁμολογιῶν πιθανὸν νὰ ἦσαν διάφοροι, ἡ κυβέρνησις πληρώνει τόκον ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας, ἥτις εἶνε σταθερὰ καὶ ἀμετάβλητος.

159. Ἡ πώλησις καὶ ἀγορὰ τῶν ὁμολογιῶν τοῦ δημοσίου δανείου γίνεται διὰ τῶν μεσιτῶν, οἵτινες λαμβάνουσιν ἐπὶ τούτῳ ποσόν τι ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν, καλούμενον μεσιτείαν. Ἡ μεσιτεία λογίζεται ἐπὶ τῆς τρεχούσης ἀξίας καὶ εἶνε ἐν Γαλλίᾳ $\frac{1}{8}$ ἐπὶ τοῖς ἑκατόν.

160. Ἐκτὸς τῆς μεσιτείας προστίθεται εἰς τὴν ἀξίαν τῶν ὁμολογιῶν ὁ φόρος τοῦ χαρτοσήμου ὅστις ἐν Γαλλίᾳ συνίσταται ἐξ 0,80 τοῦ φράγκου, ἐὰν τὸ ποσὸν εἶνε κατώτερον τῶν 10000 φράγκων καὶ ἐξ 1,80 ἐν πάσῃ ἄλλῃ περιπτώσει.

161. Ὅταν ἡ κυβέρνησις θέλῃ ν' ἀπαλλαγῇ ἑνός τινος χρέους αὐτῆς, ἀγοράζει τὰς ὁμολογίας τοῦ δανείου ἐκείνου εἰς τὸ χρηματιστήριον ὡς ἤθελε κάμει εἷς οἷος δήποτε κεφαλαιοῦχος.

162. Ἡ Γαλλικὴ κυβέρνησις ἔχει τέσσαρα τοιαῦτα δάνεια, ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ ὁμολογία ἔχει ὀνομαστικὴν ἀξίαν 100 φράγκων. Καίτοι ὅμως ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία εἶνε ἡ αὐτὴ, ἐπειδὴ τὰ ἐπιτόκια εἶνε διάφορα (3, 4, $4\frac{1}{2}$, 5), αἱ τρέχουσαι ἀξίαι διαφέρουσιν. Οὕτως· ἀναγινώσκομεν εἰς τὰ χρηματιστικὰ δελτία.

Γαλλικὰ χρεώγραφα.

Δάνειον τῶν 3 %	78,20
Δάνειον τῶν 4 %	86,70
Δάνειον τῶν 4 $\frac{1}{2}$ %	96,80
Δάνειον τῶν 5 %	101,50.

Πρόβλημα I. Παρέδωκέ τις εἷς τινα μεσίτην 25000 φράγκων, ἵνα ἀγοράσῃ αὐτῷ ὁμολογίας τῶν 5 $^0/_0$. Πόσον τόκον θέλει ἀπολαμβάνει ἐκ τῶν χρημάτων του ἐτησίως;

Λύσις. Ἐπειδὴ

$$\text{Μεσιτικὰ} = \frac{25000}{800} = 31{,}25$$

$$\text{Χαρτόσημον} \ldots\ldots\ldots = 1{,}80$$

$$\text{Ἕπεται ὅτι ἡ δαπάνη τῆς ἀγορᾶς} = 33{,}05$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ δαπάνη εἶνε 33,05, τὸ διαθέσιμον διὰ τὰς ὁμολογίας κεφάλαιον εἶνε 25000—33,05, ἤτοι 24966,95.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ τρέχουσα ἀξία τῶν ὁμολογιῶν εἶνε 101,50, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγορασθησομένων ὁμολογιῶν ἔσται $\frac{24966{,}95}{101{,}50}$ ἢ 245, μενόντων 99φρ.,45, ἅτινα θὰ ἐπιστραφῶσι τῷ καταβαλόντι τὰ χρήματα.

Ἐπειδὴ δὲ τέλος ἑκάστη ὁμολογία δίδωσι τόκον 5 φράγκα, ὁ ἐτήσιος τόκος ἔσται 245×5, ἤτοι 1225 φρ.

Πρόβλημα II. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκίζει τις τὰ χρήματα αὐτοῦ ἀγοράζων ὁμολογίας τῶν 5 $^0/_0$ μὲ τρέχουσαν ἀξίαν 101,50;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ 101,50 δίδουσι τόκον 5, τὸ μὲν 1 φράγκον θέλει δώσει τόκον $\frac{5}{101{,}50}$, τὰ δὲ 100 θέλουσι δώσει τόκον $\frac{5\times100}{101{,}50}$ ἤτοι 4,92.

Πρόβλημα III. Ἠγόρασέ τις ὁμολογίας τῶν 3 $^0/_0$ πρὸς 67φρ.,45, ἀφ' ὧν εἶχεν ἐτησίαν πρόσοδον 1374 φράγκα. Μεταπωλήσας αὐτὰς πρὸς 69,10 πόσα φράγκα ὠφελήθη;

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ ἐτησία πρόσοδος ἦτο 1374 φράγκα αἱ

ὁμολογίαι ἦσαν $\frac{1374}{3}$, ἤτοι 458. Ἐπειδὴ δὲ δι' ἑκάστην ὁμολογίαν ἐπληρώθη κατὰ τὴν ἀγορὰν μεσιτεία 0,084, ἕπεται ὅτι ἡ μὲν μία ὁμολογία τιμᾶται ἀντὶ 67,534 (67,50+0,084), αἱ δὲ 458 ἀντὶ 30930,57 (67,534×458).

Ἐπειδὴ δὲ δι' ἑκάστην πωληθεῖσαν ὁμολογίαν ἐπληρώθη μεσιτεία $\frac{69{,}10}{800}$, ἤτοι 0,086, ἕπεται ὅτι κατὰ τὴν πώλησιν προκύπτουσιν ἐκ μὲν τῆς μιᾶς ὁμολογίας φράγκα 69,10 — 0,086 ἤτοι 69,014, ἐκ δὲ τῶν 458, φράγκα 31608,41.

Ἐπειδὴ δὲ τέλος τὸ κέρδος ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῆς πωλήσεως καὶ τῆς ἀγορᾶς, ἕπεται ὅτι ἐὰν καλέσωμεν X τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος, θέλομεν ἔχει

$$X=31608{,}41-30930{,}57=677{,}84.$$

Πρόβλημα IV. Τῆς τρεχούσης τιμῆς τῶν ὁμολογιῶν τῶν 3 $^0/_0$ οὔσης 75,20, πόσον κεφάλαιον πρέπει νὰ διαθέσῃ τις, ἵνα ἔχῃ ἐτησίαν πρόσοδον 6000 φράγκων;

Λύσις. Ἐπειδὴ διὰ νὰ λαμβάνῃ τις τόκον 3 φρ. πρέπει νὰ διαθέσῃ 75,20, ἕπεται ὅτι ἐὰν μὲν θέλῃ νὰ λαμβάνῃ τόκον 1 πρέπει νὰ διαθέσῃ $\frac{75{,}20}{3}$, ἐὰν δὲ θέλῃ νὰ λαμβάνῃ τόκον 6000, πρέπει νὰ διαθέσῃ $\frac{75{,}20\times6000}{3}$, ἤτοι 150400 φρ.

ΣΗΜ. Εἰς τὰς 150400 φράγκων προσθετέον τὴν μεσιτείαν $\frac{150400}{800}$ ἤτοι 188 φράγκα καὶ τὰ τέλη τοῦ χαρτοσήμου 1,80.

Πρόβλημα V. Διὰ 48400 φράγκων ἠγόρασέ τις ὁμολογίας τῶν 4 $^1/_2$ καὶ ἀπολαμβάνει ἐτησίως 2250 φράγκα. Ποία ἦτο ἡ τρέχουσα τιμὴ τῆς ὁμολογίας;

Λύσις. Ἐπειδὴ ἐξ ἑκάστης ὁμολογίας προκύπτει τόκος

$4\ ^1/_2$, ἵνα μὲν εὕρωμεν πόσας ὁμολογίας εἶχεν ἀγοράσει, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2250 διὰ τοῦ $4\ ^1/_2$· ἵνα δὲ εὕρωμεν πόσον ἐτιμᾶτο κατὰ τὴν ἀγορὰν ἑκάστη ὁμολογία πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 18400 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὁμολογιῶν.

Ταῦτα ποιοῦντες εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν ὁμολογιῶν εἶνε 500, ἡ δὲ τρέχουσα τιμὴ 96,80.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1. Τί ἐκ τῶν δύο εἶνε προτιμότερον, νὰ τοκίσωμεν τὰ χρήματά μας πρὸς 4 ἐπὶ τοῖς 100, ἢ ν' ἀγοράσωμεν ὁμολογίας τῶν $3\ ^0/_0$ ἀντὶ 78φρ.,20 ἑκάστην;

2. Τί εἶνε προτιμότερον, νὰ ἀγοράσωμεν ὁμολογίας τῶν $3\ ^0/_0$ πρὸς 69,50, ἢ ν' ἀγοράσωμεν ὁμολογίας τῶν $5\ ^0/_0$ πρὸς 101,75;

3. Ἠγόρασέ τις ὁμολογίας τῶν $4\ ^0/_0$ ἀντὶ 85,60 ἑκάστην ἀφ' ὧν εἶχεν ἐτησίαν πρόσοδον 2400. Πόσα ἐπὶ τοῖς 100 κερδίζει, ἐὰν πωλήσῃ αὐτὰς πρὸς 89 φρ., 50;

Ἑλληνικὰ χρεώγραφα.

Κεφάλαιον Δανείου		Ἐπιτοκὰ	Χρόνος πληρωμῆς τοῦ τόκου	Ὀνομαστικὴ ἀξία
120000000	φράγ.	5	Καθ' ἑξαμην. ἀπὸ 1 Ἰανουαρ	500φρ.
60000000	»	6	Κατὰ τριμηνίαν ἀπὸ 20 »	500
26000000	»	6	Καθ' ἑξαμην. ἀπὸ 15 Ἰουνίου	560δρ.
10000000	»	6	» » » »	250
28000000	δραχ.	9	» » ἀπὸ 15 Ἀπριλ.	280
28000000	»	8	» » » »	280
6000000	»	6	Κατ' ἔτος 31 Δεκεμβρίου	100
4000000	»	8	Καθ' ἑξαμ. ἀπὸ 15 Ἀπριλίου	280

Προβλήματα.

1. Τῆς τρεχούσης τιμῆς τοῦ δανείου τῶν $5\ ^0/_0$ οὔσης 362 φράγκων, πόσον τοῖς 100 τοκίζει τις τὰ χρήματα αὐτοῦ, ἀγοράζων ὁμολογίας τοῦ δανείου τούτου;

Λύσις. Ἐπειδὴ ἑκάστη ὁμολογία δίδει τόκον 25 φράγκα, τὰ 100 φράγκα δίδουσι τόκον $\frac{2500}{362}$ ἤτοι 6,90.

2. Τῆς τρεχούσης τιμῆς τοῦ δανείου τῶν $9\ ^0/_0$ οὔσης 298 δραχμὰς, πόσον τοῖς 100 τοκίζει τις τὰ χρήματα αὐτοῦ ἀγοράζων ὁμολογίας τοῦ δανείου τούτου;

3. Ἔχων τις ὁμολογίας τοῦ δανείου τῶν 28000000 τῶν $8\ ^0/_0$ καὶ ἀπολαμβάνων ἐτησίως 1840 δραχμὰς, πόσας δραχμὰς θέλει συλλέξει ἐὰν πωλήσῃ αὐτὰς μὲ τὴν τρέχουσαν τιμὴν τῶν 290 δραχμῶν, τῆς μεσιτείας οὔσης $^1/_8$ ἐπὶ τοῖς 100;

4. Τί εἶνε προτιμότερον, ν' ἀγοράσωμεν ὁμολογίας τοῦ δανείου τῶν 60000000 πρὸς 420 φράγκα, ἢ νὰ τοκίσωμεν τὰ χρήματά μας πρὸς $6\ ^1/_2$ τοῖς 100;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

Περὶ ὑφαιρέσεως.

163. Ὑφαίρεσις ὀνομάζεται ἡ ἔκπτωσις, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται γραμμάτιον ἐξαργυρούμενον πρὸ τοῦ τέλους τῆς προ-

θεσμίας αὐτοῦ. Π. χ. ἐὰν ἔχωμεν γραμμάτιον 5000 φράγκων, ὅπερ μέλλει νὰ ἐξαργυρωθῇ μετὰ 8 μῆνας καὶ θελήσωμεν νὰ πωλήσωμεν αὐτὸ σήμερον, ὁ ἀγοραστὴς, ὅστις θὰ λάβῃ τὰς 5000 φράγκων μετὰ 8 μῆνας, δὲν θὰ πληρώσῃ ἡμῖν 5000 φράγκων, ἀλλ' ὀλιγώτερα π. χ. 4800. Τὸ ποσὸν λοιπὸν τῶν 200 φράγκων, κατὰ τὸ ὁποῖον ἐκπίπτει ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου, ἐξαργυρουμένου πρὸ τοῦ τέλους τῆς προθεσμίας αὐτοῦ, ὀνομάζεται ὑφαίρεσις.

164. Ἐν παντὶ γραμματίῳ διακριτέον λοιπὸν δύο ἀξίας· τὴν ὀνομαστικὴν, ἥτις εἶνε ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ γραμμάτιον καὶ ἣν ἔχει τὸ γραμμάτιον κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας αὐτοῦ καὶ τὴν προεξόφλησιν, ἥτις εἶνε ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου ἐξαργυρουμένου πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας αὐτοῦ καὶ ἥτις διαφέρει τῆς ὀνομαστικῆς, κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν.

165. Ἵνα ᾖ ἡ ὑφαίρεσις δικαία πρέπει νὰ λαμβάνηται ἴση τῷ τόκῳ τῆς προεξοφλήσεως· διότι τότε, ὁ μὲν ἀγοραστὴς τοῦ γραμματίου λαμβάνει κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας τὰ χρήματα, ἅτινα ἔδωκε πρὸς ἀγορὰν τοῦ γραμματίου, σὺν τῷ τόκῳ αὐτῶν· ὁ δὲ πωλητὴς πληρώνει τὸν τόκον τῶν χρημάτων τὰ ὁποῖα ἔλαβεν. Οὐδέτερος λοιπὸν τούτων ζημιοῦται.

166. Ἀλλὰ δὲν γίνεται οὕτως ἡ ὑφαίρεσις εἰς τὴν ἀγοράν. Ὁ ἀγοραστὴς τοῦ γραμματίου δὲν ἐλαττώνει τὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου κατὰ τὸν τόκον τῆς προεξοφλήσεως, ἀλλὰ κατὰ τὸν τόκον αὐτῆς τῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου. Οὕτω δὲ ἐκτελῶν τὴν ἐξαργύρωσιν, αὐτὸς μὲν λαμβάνει τόκον χρημάτων περισσοτέρων ἢ ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα δανείζει· ὁ πωλητὴς δὲ τοῦ γραμματίου πληρώνει τόκον χρημάτων περισσοτέρων ἢ ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα δανείζεται. Ἡ οὕτω λογιζομένη ὑφαίρεσις λέγεται ἐξωτερική· ἡ δὲ λαμβανομένη, ἴση τῷ τόκῳ τῆς προεξοφλήσεως, λέγεται ἐσωτερική.

Σημ. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε ῥηθέντων ἕπεται, ὅτι ἐὰν καλέσωμεν Α τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν ἑνὸς γραμματίου, Π τὴν προεξόφλησιν καὶ Υ τὴν ὑφαίρεσιν, θέλομεν ἔχει

$$\text{Α} = \Pi + \Upsilon$$
$$\Pi = \text{Α} - \Upsilon$$
$$\Upsilon = \text{Α} - \Pi.$$

Περὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

167. *Πρόβλημα.* Πόσην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ὑρίσταται γραμμάτιον 8000 δραχμῶν ἐξαργυρούμενον 2 ἔτη πρὸ τοῦ τέλους τῆς προθεσμίας αὐτοῦ πρὸς 6 ἐπὶ τοῖς 100;

Λύσις. Ἐπειδὴ 100 δραχμαὶ εἰς ἓν ἔτος δίδουσι τόκον 6, εἰς 2 ἔτη θέλουσι δώσει τόκον 2×6. Ἐὰν λοιπὸν ἔχωμεν γραμμάτιον $100+2\times6$ δραχμῶν καὶ θελήσωμεν νὰ ἐξαργυρώσωμεν αὐτὸ 2 ἔτη πρὸ τοῦ τέλους τῆς προθεσμίας αὐτοῦ, θέλομεν ἔχει ὑφαίρεσιν μὲν 2×6, προεξόφλησιν δὲ 100.

Ἀλλ' ἐπειδὴ γραμμάτιον $100+2\times6$ ἔχει ὑφαίρεσιν 2×6 καὶ προεξόφλησιν 100, γραμμάτιον 1 θέλει ἔχει ὑφαίρεσιν καὶ προεξόφλησιν $100+2\times6$ φορὰς μικροτέρας, ἤτοι ὑφαίρεσιν μὲν $\frac{2\times6}{100+2\times6}$, προεξόφλησιν δὲ $\frac{100}{100+2\times6}$.

Ἐπειδὴ δὲ τέλος γραμμάτιον ἔχον ἀξίαν ἴσην τῇ μονάδι ἔχει ὑφαίρεσιν μὲν $\frac{2\times6}{100+2\times6}$, προεξόφλησιν δὲ $\frac{100}{100+2\times6}$ γραμμάτιον 8000 δραχμῶν θέλει ἔχει ὑφαίρεσιν μὲν $\frac{8000\times2\times6}{100+2\times6}$, προεξόφλησιν δὲ $\frac{8000\times100}{100+2\times6}$.

Κανών. Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα δεικνύουσιν ὅτι

Πρὸς εὕρεσιν μὲν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 100, ηὐξημένου κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ χρόνου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς ἐσωτερικῆς προεξοφλήσεως πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 100, ηὐξημένου κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.

Οἱ τύποι, δι' ὧν ἐκφράζεται ὁ κανὼν οὗτος εἶνε οἱ ἑξῆς

$$\Upsilon = \frac{A \times E \times X}{100 + E \times X}$$

$$\Pi = \frac{A \times 100}{100 + E \times X}$$

Σημ. Στηριζόμενοι ἐπὶ τοῦ ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος τῆς προεξοφλήσεως, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς τύπους, οἵτινες δίδουσι τὸ ἐπιτόκιον, τὸν χρόνον καὶ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου ὡς ἑξῆς.

α. Τύποι τοῦ ἐπιτοκίου. Ἐπειδὴ, τῆς ὑφαιρέσεως οὔσης Υ, ἡ προεξόφλησις ἔσται Α—Υ, ἕπεται ὅτι

$$E = \frac{\Upsilon \times 100}{(A - \Upsilon) \times X}$$

Ἐπειδὴ δὲ $\Upsilon = A - \Pi$ καὶ $\Pi = A - \Upsilon$ ἕπεται ὅτι

$$E = \frac{(A - \Pi) \times 100}{\Pi \times X}.$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι χρησιμεύουσι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου, ὁ μὲν πρῶτος δεδομένης τῆς ὑφαιρέσεως, ὁ δὲ δεύτερος δεδομένης τῆς προεξοφλήσεως.

β'. Τύποι τοῦ χρόνου. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, δεδομένης μὲν τῆς ὑφαιρέσεως

$$X = \frac{\Upsilon \times 100}{(A - \Upsilon) \times E}$$

δεδομένης δὲ τῆς προεξοφλήσεως

$$X = \frac{(A - \Pi) \times 100}{\Pi \times E}.$$

γ'. Τύποι τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου. Ἐπειδὴ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἰσοῦται τῇ προεξοφλήσει σὺν τῇ ὑφαιρέσει καὶ ἐπειδὴ ἡ ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος τῆς προεξοφλήσεως, θέλομεν ἔχει

$$A = \Pi + \frac{\Pi \times E \times X}{100}$$

τύπον, ὅστις δίδει τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου δεδομένης τῆς προεξοφλήσεως αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ προεξόφλησις εἶνε τὸ κεφάλαιον, ὅπερ εἰς χρόνον Χ πρὸς Ε $^0/_0$ δίδει τόκον Υ καὶ ἐπειδὴ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἰσοῦται τῇ ὑφαιρέσει σὺν τῇ προεξοφλήσει, θέλομεν ἔχει

$$A = \Upsilon + \frac{\Upsilon \times 100}{E \times X}$$

τύπον, ὅστις δίδει τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν, δεδομένης τῆς ὑφαιρέσεως.

Σημ. Πάντες οἱ ἀνωτέρω τύποι ὑποθέτουσιν ὅτι ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε τὸ ἔτος. Ἵνα εὕρωμεν τοὺς ἀντιστοίχους τύπους, ὅταν ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ὁ μὴν ἢ ἡ ἡμέρα, πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ 100, εἰς πάντας τοὺς εὑρεθέντας,

τὸν ἀριθμὸν μὲν 1200, ὅταν ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ὁ μὴν, τὸν ἀριθμὸν δὲ 36000, ὅταν ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ἡ ἡμέρα.

Ὁ λόγος τοῦ γινομένου τούτου εἶνε προφανής.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία παντὸς γραμματίου ἐξαργυρουμένου πρὸ τοῦ τέλους τῆς προθεσμίας αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῆς προεξοφλήσεως καὶ τῆς ὑφαιρέσεως, ἤτοι δύο ποσοτήτων, ὧν ἡ μία εἶνε τόκος τῆς ἄλλης, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ λύσωμεν, κατὰ τοὺς τύπους τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, πάντα τὰ προβλήματα εἰς ἃ δίδοται τὸ ἄθροισμα δύο τοιούτων ποσοτήτων, μεταχειριζόμενοι, πρὸς εὕρεσιν μὲν τῆς ποσότητος, ἥτις ἀντιπροσωπεύει τὸν τόκον, τὸν τύπον

$$\Upsilon = \frac{\text{A} \times \text{E} \times \text{X}}{100 + \text{E} \times \text{X}}$$

πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς ποσότητος, ἥτις ἀντιπροσωπεύει τὸ κεφάλαιον, τὸν τύπον

$$\Pi = \frac{\text{A} \times 100}{100 + \text{E} \times \text{X}}$$

καὶ θέτοντες ἑκάστοτε εἰς τὴν θέσιν τοῦ A τὸ δεδομένον ἄθροισμα.

Πρόβλημα I. Ἐδανείσαμεν κεφάλαιόν τι πρὸς $8\,^0/_0$ καὶ μετὰ 10 μῆνας ἐλάβομεν κεφάλαιον καὶ τόκους ὁμοῦ 15000 φράγκων. Πόσον ἦτο τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον;

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ 15 χιλιάδες φράγκων εἶνε ἄθροισμα τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ τόκου καὶ ἐπειδὴ ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ὁ μὴν, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου θέλομεν μεταχειρισθῆ τὸν τύπον

$$\Pi = \frac{\text{A} \times 1200}{1200 + \text{E} \times \text{X}}$$

ἐν ᾧ θέλομεν θέσει 15 χιλιάδας ἀντὶ τοῦ A, 8 ἀντὶ τοῦ E καὶ 10 ἀντὶ τοῦ X.

II. Ἠγοράσαμεν πρᾶγμά τι, ὅπερ πωλήσαντες 1 ἔτ. καὶ 4 μῆνας μετὰ τὴν ἀγορὰν ἀντὶ 12 χιλιάδων φράγκων ἐκερδίσαμεν 15 ἐπὶ τοῖς ἑκατόν. Πόσα χρήματα ἐκερδίσαμεν;

Λύσις. Θεωροῦντες τὴν ἀγορὰν ὡς κεφάλαιον καὶ τὸ κέρδος ὡς τόκον, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου μεταχειριζόμεθα τὸν τύπον

$$\Upsilon = \frac{\text{A} \times \text{E} \times \text{X}}{1200 + \text{E} \times \text{X}}$$

ἐν ᾧ ἀντικαθιστῶμεν 12 χιλιάδας ἀντὶ τοῦ A, 15 ἀντὶ τοῦ E καὶ 16 ἀντὶ τοῦ X.

III. Ἠγόρασέ τις πρᾶγμα, ὅπερ κατὰ τὸν γενόμενον λογαριασμὸν ἐτιμᾶτο 18 χιλιάδας φράγκων. Τὸ κατάστημα ἐκ τοῦ ὁποίου ἐγένετο ἡ ἀγορὰ συνειθίζει νὰ κάμνῃ ἔκπτωσιν τοῖς πληρώνουσι τοῖς μετρητοῖς $8\,^0/_0$ ἐπὶ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα λαμβάνει. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ ὁ ἀγοραστὴς ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι θὰ πληρώσῃ τοῖς μετρητοῖς;

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ 18 χιλιάδες φράγκων πρέπει νὰ ὑποτεθῶσιν ἄθροισμα τῶν πληρωθησομένων χρημάτων καὶ τοῦ τόκου αὐτῶν πρὸς $8\,^0/_0$ εἰς 1 ἔτος, θέλομεν ἔχει

$$\text{X} = \frac{18000 \times 100}{100 + 8}.$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1. Πόσην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ὑφίσταται γραμμάτιον 9600 φράγκων, ἐξαργυρούμενον 9 μῆνας πρὸ τοῦ τέλους τῆς προθεσμίας αὐτοῦ πρὸς $8\,^0/_0$; (543,39).

2. Πόσην ἐσωτερικὴν προεξόφλησιν δίδει γραμμάτιον 12

χιλιάδων δραχμῶν, ἐξαργυρούμενον 1 ἔτος καὶ 3 μῆνας πρὸ τοῦ τέλους τῆς προθεσμίας αὐτοῦ πρὸς 6 ἐπὶ τοῖς ἑκατόν; (11178,30).

3. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις γραμματίου 10500 φράγκων, ἐξαργυρουμένου 10 μῆνας πρὸ τοῦ τέλους τῆς προθεσμίας αὐτοῦ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἔδωκεν ὑφαίρεσιν 1080 φράγκων; (13,75).

4. Πόσον χρόνον πρὸ τοῦ τέλους τῆς προθεσμίας αὐτοῦ ἐξηργυρώθη γραμμάτιον 8400 δραχμῶν πρὸς 6 τοῖς ἑκατόν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἔδωκε προεξόφλησιν μὲ τῆς ὁποίας τὰ $\frac{3}{5}$ ἠγοράσαμεν 3600 ὀκάδας πράγματός τινος πρὸς 1δρ.,20 τὴν ὀκάν; (2ἔτ. 9μ. 10ἡμ).

5. Ποῖον ἦτο τὸ κεφάλαιον τοῦ γραμματίου, ὅπερ ἐξαργυρωθὲν 8 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας αὐτοῦ, πρὸς 5 τοῖς ἑκατόν, ἔδωκεν ὑφαίρεσιν 960 δραχμάς; (29760).

6. Ἠγοράσαμεν πρᾶγμά τι, ὅπερ μεταπωλήσαντες 15 μῆνας μετὰ τὴν ἀγορὰν ἀντὶ 9000 δραχμῶν ἐκερδίσαμεν 8 ἐπὶ τοῖς ἑκατόν. Πόσα χρήματα εἴχομεν δώσει διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ πράγματος; (8181,81).

7. Ἐδανείσαμεν κεφάλαιόν τι πρὸς 9 τοῖς ἑκατὸν καὶ μετὰ 1ἔτ. καὶ 8 μῆνας ἐλάβομεν κεφάλαιον καὶ τόκους ὁμοῦ 25 χιλιάδας φράγκων. Πόσος ἦτο ὁ τόκος; (3260,87).

8. Ἔχει τις τρία γραμμάτια, ὧν τὸ πρῶτον 840 δραχμῶν, ἐξαργυρωτέων μετὰ 8 μῆνας, τὸ δεύτερον 960 ἐξαργυρωτέων μετὰ 15 μῆνας καὶ τὸ τρίτον 1800, ἐξαργυρωτέων μετὰ 26 μῆνας. Ἐὰν θέλῃ ν' ἀνταλλάξῃ τὰ γραμμάτια ταῦτα ἀνθ' ἑνὸς πληρωτέου μετὰ 20 μῆνας, πόσων δραχμῶν θὰ εἶνε τὸ γραμμάτιον ἐκεῖνο, ὑποτιθεμένου τοῦ ἐπιτοκίου 6 ἐπὶ τοῖς ἑκατόν; (3621,97).

Περὶ ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

168. Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις, ὡς ἤδη εἴπομεν, εἶνε ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου. Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν Α τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου, Ε τὸ ἐπιτόκιον, Χ τὸν χρόνον, Υ τὴν ὑφαίρεσιν καὶ Π τὴν προεξόφλησιν, θέλομεν ἔχει

$$\Upsilon = \frac{\text{Α} \times \text{Ε} \times \text{Χ}}{100}$$

$$\text{καὶ } \Pi = \text{Α} - \frac{\text{Α} \times \text{Ε} \times \text{Χ}}{110}$$

Εὕρεσις τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, δεδομένης τῆς ἐξωτερικῆς προεξοφλήσεως.

169. Καθ' ἃ ἀνωτέρω ἐσημειώσαμεν, ἡ ἐξωτερικὴ προεξόφλησις δίδοται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\Pi = \text{Α} - \frac{\text{Α} \times \text{Ε} \times \text{Χ}}{100}$$

Ἀλλ' ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος, θέλομεν ἔχει

$$\Pi = \frac{\text{Α} \times 100 - \text{Α} \times \text{Ε} \times \text{Χ}}{100}$$

Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ὡς γινόμενον τοῦ Α, πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὴν διαφορὰν $100 - \text{Ε} \times \text{Χ}$, θέλομεν λάβει

$$\Pi = \frac{\text{Α} \times (100 - \text{Ε} \times \text{Χ})}{100}$$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνωτέρω ἰσό-

τητος διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{100-E\times X}{100}$, θέλομεν πορισθῆ τὸν τύπον

$$A = \frac{\Pi\times 100}{100-E\times X}$$

ὅστις δεικνύει ὅτι

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν ἑνὸς γραμματίου, δεδομένης τῆς ἐξωτερικῆς προεξοφλήσεως, πολλαπλασιάζομεν τὴν προεξόφλησιν ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100, ἠλαττωμένου κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον.

Ὁ αὐτὸς τύπος ἔχει τὴν μορφὴν μὲν

$$A = \frac{\Pi\times 1200}{1200-E\times X}$$

ὅταν ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ὁ μήν· τὴν μορφὴν δὲ

$$A = \frac{\Pi\times 36000}{36000-E\times X}$$

ὅταν ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ἡ ἡμέρα.

Σχόλιον. Τῶν ἀνωτέρω τύπων γίνεται ὡσαύτως χρῆσις ὅταν πρόκηται ν' ἀναβληθῆ ἡ πληρωμὴ ἑνὸς γραμματίου εἰς ἐποχὴν κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον ἀπομεμακρυσμένην, ἢ ὅταν πρόκηται νὰ εὑρεθῆ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου ἐξοφλοῦντος μετά τινα χρόνον χρέος, ὅπερ ὀφείλομεν νὰ πληρώσωμεν σήμερον.

Ἐν τοῖς ἑξῆς δύο παραδείγματα εἰσηγούμεθα σαφέστερον.

I. Ἡ πληρωμὴ χρεωστικοῦ ἡμῶν γραμματίου 8000 δραχμῶν λήγει σήμερον. Ἐὰν θέλωμεν ν' ἀναβάλωμεν τὴν πληρωμὴν τοῦ χρέους ἡμῶν ἐπὶ 45 ἡμέρας πρὸς 8 $^0/_0$, πόση θὰ εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ὅπερ θ' ἀντικαταστήσῃ τὸ πρῶτον;

Λύσις. Κατὰ τοὺς κανόνας τοῦ ὀρθοῦ λόγου, ἐπειδὴ μένουσιν εἰς χεῖρας ἡμῶν ἐπὶ 45 ἡμέρας χρήματα ξένα εἰς 8000 δραχμῶν συμποσούμενα, ὀφείλομεν νὰ πληρώσωμεν κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς ἐξοφλήσεως, πλὴν τῶν 8000 καὶ τὸν τόκον αὐτῶν πρὸς 6 $^0/_0$ ἐπὶ 45 ἡμέρας. Ἀλλὰ δὲν γίνεται οὕτως ἐν τῇ ἀγορᾷ. Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ νέου γραμματίου δὲν συνίσταται ἐκ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ παλαιοῦ, ηὐξημένης κατὰ τὸν τόκον αὐτῆς, ἀλλ' εἶνε τοσαύτη, ὥστε ἐὰν ὁ πιστωτὴς θελήσῃ νὰ πωλήσῃ τὸ γραμμάτιον, ἅμα τῇ ἐκδόσει του, νὰ δύνηται νὰ λάβῃ ὡς προεξόφλησιν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ παλαιοῦ γραμματίου. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ νέου γραμματίου θὰ συνίσταται ἐκ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ παλαιοῦ γραμματίου καὶ τοῦ τόκου τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ νέου καὶ εὑρίσκεται διὰ τοῦ τύπου

$$A = \frac{\Pi\times 36000}{36000-E\times X}$$

ἐν ᾧ τὸ μὲν Π θ' ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ 8000, τὸ Ε διὰ τοῦ 8 καὶ τὸ Χ διὰ τοῦ 45.

II. Ἠγοράσαμεν πρᾶγμα, ὅπερ κατὰ τὸν γενόμενον λογαριασμὸν τιμᾶται 15000 φράγκων. Τὸ κατάστημα ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἠγοράσαμεν τὸ πρᾶγμα δίδει ἡμῖν τὸ δικαίωμα νὰ δώσωμεν γραμμάτιον πληρωτέον μετὰ 5 μῆνας πρὸς 6 ἐπὶ τοῖς 100. Πόσων φράγκων θὰ εἶνε τὸ γραμμάτιον ἐκεῖνο;

Λύσις. Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἐκείνου πρέπει νὰ εἶνε τοσαύτη ὥστε, ἐὰν ὁ πιστωτὴς θελήσῃ νὰ πωλήσῃ τὸ γραμμάτιον, ἅμα τῇ ἐκδόσει του, νὰ δύνηται νὰ λάβῃ 15,000 φράγκων. Ἵνα εὕρωμεν λοιπὸν τὴν ζητουμένην ὀνομαστικὴν ἀξίαν, πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον

$$A = \frac{\Pi \times 1200}{1200 - E \times X}$$

ἐν ᾧ Π=1200, Ε=6 καὶ Χ=5.

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον Ε×Χ εἶνε ὁ τόκος τῶν 100, ἡ πρότασις, ἣν ἀντικαθιστᾷ ὁ τύπος

$$A = \frac{\Pi \times 100}{100 - E \times X}$$

δύναται νὰ ἐκφρασθῇ οὕτως·

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν γραμματίου δεδομένης τῆς ἐξωτερικῆς προεξοφλήσεως, πολλαπλασιάζομεν τὴν προεξόφλησιν ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100 ἠλαττωμένου κατὰ τὸν τόκον του.

Πρόβλημα. Ὀφείλομεν εἴς τινα ἐξ ἀγορᾶς ἐμπορευμάτων 18000 φράγκων. Ὁ πιστωτὴς ἡμῶν δίδει ἡμῖν τὸ δικαίωμα νὰ δώσωμεν εἰς αὐτὸν γραμμάτιον πληρωτέον μετὰ 75 ἡμέρας πρὸς 6 $^0/_0$. Πόση θὰ εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ μὲν μεσιτεία εἶνε $\frac{1}{8}$ $^0/_0$, ἡ δὲ προμήθεια τῆς τραπέζης $\frac{1}{4}$ $^0/_0$;

Λύσις. Καὶ ἐνταῦθα θὰ γίνῃ χρῆσις τοῦ τύπου

$$A = \frac{\Pi \times 100}{100 - E \times X}$$

ὅστις δίδει τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν γραμματίου, δεδομένης τῆς προεξοφλήσεως. Ἡ μόνη διαφορὰ εἶνε ὅτι, ἐπειδὴ ἔχομεν ἐπιτόκια διάφορα καὶ χρόνους διαφόρους, τῆς προμηθείας καὶ μεσιτείας ὑποτιθείσης πάντοτε χρόνον ἓν ἔτος, πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς τὸν τύπον τοῦτον ἀντὶ μὲν τοῦ Π τὸν ἀριθμὸν 18000, ἀντὶ δὲ τοῦ Ε×Χ τὸ ἄθροισμα τριῶν τόκων, τοῦ τόκου τῶν 100 δραχμῶν εἰς 75 ἡμέρας ἐπὶ ἐπιτοκίῳ 6, τοῦ τόκου τῶν 100 δραχμῶν εἰς 1 ἔτος ἐπὶ ἐπιτοκίῳ $\frac{1}{8}$ καὶ τοῦ τόκου τῶν 100 δραχμῶν εἰς 1 ἔτος ἐπὶ ἐπιτοκίῳ $\frac{1}{4}$.

Ἀλλὰ

Τόκος 75 ἡμερῶν =	τόκ. 60 ἡμερῶν	=	1,00
	τόκ. 15 »	=	0,25
Τόκος 100 δραχ. =	πρὸς $\frac{1}{8}$	=	0,125
	πρὸς $^1/_4$	=	0,25
καὶ	Ε×Χ	=	1,625

ὥστε

$$A = \frac{18000 \times 100}{100 - 1,625} = 18297,33.$$

Ὁ λογαριασμὸς ὃν θὰ στείλῃ πρὸς ἡμᾶς ὁ πιστωτὴς ἡμῶν θὰ ἔχῃ ὡς ἑξῆς·

Ἀξία ἐμπορευμάτων	=	18000 φρ.
Τόκος ἀξ. γρ. πρὸς 6 $^0/_0$ εἰς 60 ἡμ.	=	182,9733
» » » εἰς 15 »	=	45,7433
μεσιτεία πρὸς $^1/_8$ $^0/_0$	=	22,8716
προμήθεια πρὸς $^1/_4$ $^0/_0$	=	45,7433
Ἀξία γραμματίου	=	18297,3315

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

Περὶ μερισμοῦ ἀριθμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.

170. Λέγοντες ὅτι πρόκειται νὰ μερισθῇ ἀριθμός τις, ὁ 360 π. χ., ἀναλόγως πολλῶν ἄλλων ἀριθμῶν, τῶν ἀριθμῶν

3, 4, 5 π. χ., ἐννοοῦμεν, ὅτι πρέπει νὰ εὑρεθῶσι τόσοι ἀριθμοί, ὅσοι εἶνε οἱ ἀριθμοὶ ἀναλόγως τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ μερισθῇ ὁ 360, καὶ τοιοῦτοι ὥστε τὸ μὲν ἄθροισμα αὐτῶν νὰ εἶνε ἴσον τῷ ἀριθμῷ 360, ὁ πρῶτος δὲ τῶν ζητουμένων νὰ ἔχῃ τοιοῦτον λόγον πρὸς τὸν ἀριθμὸν 3, ὁποῖον λόγον ἔχει ὁ δεύτερος πρὸς τὸν 4 καὶ ὁ τρίτος πρὸς τὸν 5.

171. Ὁ ἀριθμὸς 360, ὅστις πρόκειται νὰ μερισθῇ, ὀνομάζεται μεριστέος· οἱ ἀριθμοὶ 3, 4, 5, ἀναλόγως τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ γίνῃ ὁ μερισμός, ὀνομάζονται μερίζοντες· οἱ δὲ ἀριθμοί, οἵτινες ζητοῦνται, ὀνομάζονται μέρη.

Εὕρεσις τῶν μερῶν.

172. Κατὰ τὰ προηγουμένως ῥηθέντα, ἐὰν ὀνομάσωμεν Χ, Ψ, Ω τὰ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ 360, μεριζομένου ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 5, θέλομεν ἔχει ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν ἰσότητα

$$\text{Χ}+\Psi+\Omega = 360$$

ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$\text{Χ} : 3 = \Psi : 4 = \Omega : 5.$$

Ἀλλ' ἐὰν ἀληθεύῃ ἡ ἀνωτέρω σειρὰ τῶν ἴσων λόγων, ἀληθεύουσι καὶ αἱ ἀναλογίαι

$$\text{Χ}+\Psi+\Omega : 3+4+5 = \text{Χ} : 3$$
$$\text{Χ}+\Psi+\Omega : 3+4+5 = \Psi : 4$$
$$\text{Χ}+\Psi+\Omega : 3+4+5 = \Omega : 5 \text{ (§. 143).}$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ ὁ ἀριθμὸς 360 εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀθροίσματος Χ+Ψ+Ω εἰς ἁπάσας τὰς ἀναλογίας, καὶ ζητηθῇ ἡ τιμὴ μὲν τοῦ Χ ἐκ τῆς πρώτης, ἡ τιμὴ δὲ τοῦ Ψ ἐκ τῆς δευτέρας καὶ ἡ τιμὴ τοῦ Ω ἐκ τῆς τρίτης, θέλουσι προκύψει οἱ τύποι

$$\text{Χ} = \frac{360\times 3}{3+4+5}$$

$$\Psi = \frac{360\times 4}{3+4+5}$$

$$\Omega = \frac{360\times 5}{3+4+5}$$

οἵτινες δίδουσι τὸν ἑξῆς κανόνα.

Κανών. Ἵνα εὕρωμεν ἓν οἱονδήποτε μέρος ἀριθμοῦ μεριζομένου ἀναλόγως πολλῶν ἄλλων, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μεριστέον ἐπὶ τὸν ὁμοταγῆ μερίζοντα καὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μεριζόντων.

Μερισμὸς ἀριθμοῦ τινος ἀναλόγως κλασματικῶν μεριζόντων.

173. *Πρόβλημα.* Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 72, ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$.

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα ταῦτα, ἀναγόμενα εἰς τὸν αὐτὸν παρανομαστήν, δίδουσι

$$\frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}$$

ἀντὶ νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 72 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, μερίζομεν αὐτὸν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$.

Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν Χ, Ψ, Ω τὰ ζητούμενα μέρη, θέλομεν ἔχει

$$\text{Χ} = \frac{72\times\frac{8}{12}}{\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{10}{12}}$$

$$\Psi = \frac{72\times\frac{9}{12}}{\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{10}{12}}$$

$$\Omega = \frac{72\times\frac{10}{12}}{\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{10}{12}}$$

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 12 ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους

τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἰσοδυναμοῦσι τοῖς μέρεσι Χ, Ψ, Ω, θέλομεν πορισθῆ

$$\text{X} = \frac{72\times 8}{8+9+10}$$

$$\Psi = \frac{72\times 9}{8+9+10}$$

$$\Omega = \frac{72\times 10}{8+9+10}.$$

Τὰ ἀνωτέρω δεικνύουσι δύο τινά· ἀ. ὅτι τὰ μέρη ἀριθμοῦ τινος μεριζομένου εἰς μέρη ἀνάλογα δὲν μεταβάλλονται, πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων ἁπάντων τῶν μεριζόντων μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ β'. ὅτι, ἵνα μερίσωμεν ἀριθμόν τινα ἀναλόγως κλασματικῶν μεριζόντων, ἀνάγομεν πρῶτον τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· ἀπαλείφομεν κατόπιν τὸν κοινὸν παρονομαστὴν καὶ μερίζομεν τὸν μεριστέον ἀναλόγως τῶν ἀριθμητῶν.

Μερισμὸς ἀριθμοῦ εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

174. Ἵνα μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 80 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 5, 7, 8, πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἀναλόγως τῶν κλασμάτων $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$. Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν Χ, Ψ, Ω τὰ ζητούμενα μέρη, θέλομεν ἔχει

$$\text{X} = \frac{80\times 7\times 8}{7\times 8+5\times 8+5\times 7}$$

$$\Psi = \frac{80\times 5\times 8}{7\times 8+5\times 8+5\times 7}$$

$$\Omega = \frac{80\times 5\times 7}{7\times 8+5\times 8+5\times 7}$$

Σύνθετος μερισμός.

175. *Πρόβλημα.* Μία ἑταιρία ἐργατῶν ἐτελείωσεν ἔργον 50 πήχεων μήκους, 2 πλάτους καὶ 8 βάθους. Ἄλλη δέ τις ἑταιρία ἐτελείωσεν ἔργον 45 πήχεων μήκους, 3 πλάτους καὶ 7 βάθους. Ὑποτιθεμένου, ὅτι ἐπληρώθησαν εἰς τὰς δύο ἑταιρίας 840 φράγκα, πόσα φράγκα ἀναλογοῦσιν εἰς ἑκάστην ἑταιρίαν;

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν Χ καὶ Ψ τὰ μέρη καὶ Κ τὸ ποσὸν τῶν φράγκων, ἅτινα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἑκατέραν τῶν ἑταιριῶν διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου, ἔχοντος μῆκος, πλάτος καὶ βάθος ἴσα ἕκαστα τῇ μονάδι.

Εἶνε φανερόν, ὅτι ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ἑταιριῶν δικαιοῦται νὰ λάβῃ Κ φράγκα διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος, πλάτος καὶ βάθος ἴσα τῇ μονάδι, ἕπεται ὅτι ἡ μὲν πρώτη ἑταιρία δικαιοῦται λαβεῖν $\text{K}\times 50\times 2\times 8$ φράγκα, ἡ δὲ δευτέρα $\text{K}\times 45\times 3\times 7$· ὥστε

$$\text{X} = \text{K}\times 50\times 2\times 8 \qquad (1)$$
$$\Psi = \text{K}\times 45\times 3\times 7.$$

Ἀλλὰ

$$\text{X}+\Psi = 840$$

ὥστε

$$\text{K}\times 50\times 2\times 8+\text{K}\times 45\times 3\times 7=840.$$

Ἀλλ' ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης ὡς γινόμενον τοῦ Κ ἐπὶ $50\times 2\times 8+45\times 3\times 7$, θέλομεν ἔχει

$$\text{K}\times(50\times 2\times 8+45\times 3\times 7)=840$$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $50\times 2\times 8+45\times 3\times 7$, θέλομεν πορισθῆ

$$K = \frac{840}{50 \times 2 \times 8 + 45 \times 3 \times 7}$$

Ἐὰν δὲ τέλος θέσωμεν εἰς ἑκατέραν τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἀντὶ τοῦ K τὸ κλάσμα $\frac{840}{50 \times 2 \times 8 + 45 \times 3 \times 7}$, θέλομεν λάβει

$$X = \frac{840 \times 50 \times 2 \times 8}{50 \times 2 \times 8 + 45 \times 3 \times 7}$$

$$\Psi = \frac{840 \times 45 \times 3 \times 7}{50 \times 2 \times 8 + 45 \times 3 \times 7.}$$

Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα δεικνύουσιν ὅτι ὅταν τὰ μέρη ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν τιμῶν πολλῶν ποσῶν, πρὸς ἃ εἰσιν ἀνάλογα, πολλαπλασιάζομεν τὰς τιμὰς τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς ἕκαστον τῶν μερῶν ἐπ' ἀλλήλας καὶ μερίζομεν τὸν μεριστέον ἀναλόγως τῶν γινομένων.

Προβλήματα ἑταιρίας.

176. Προβλήματα ἑταιρίας λέγονται ἐκεῖνα ἐν οἷς πρόκειται νὰ μερισθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ἐπιχειρήσεώς τινος ἀναλόγως τῶν καταβολῶν πολλῶν συνεταίρων καὶ τῶν χρόνων καθ' οὓς ἔμειναν αἱ καταβολαὶ αὗται ἐν τῇ ἐπιχειρήσει.

Τὰ προβλήματα τῆς ἑταιρίας εἶνε προβλήματα τοῦ ἁπλοῦ μὲν μερισμοῦ, ὅταν πρόκηται νὰ μερισθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ἀναλόγως μὲν τῶν καταβολῶν πολλῶν συνεταίρων, ὅταν οἱ χρόνοι, καθ' οὓς ἔμειναν τὰ χρήματα εἰς τὴν ἑταιρίαν, εἶνε ἴσοι, ἀναλόγως δὲ τῶν χρόνων, καθ' οὓς ἔμειναν τὰ χρήματα ἑκάστου εἰς τὴν ἑταιρίαν, ὅταν αἱ καταβολαὶ εἶνε ἴσαι· τοῦ συνθέτου δὲ μερισμοῦ, ὅταν πρόκηται νὰ μερισθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ἀναλόγως τῶν τε καταβολῶν καὶ τῶν χρόνων.

Ἵνα λύσωμεν λοιπὸν ἐν οἱονδήποτε πρόβλημα τῆς ἑταιρίας, πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημίαν ἀναλόγως μὲν τῶν καταβολῶν, ὅταν οἱ χρόνοι εἶνε ἴσοι· ἀναλόγως δὲ τῶν χρόνων, ὅταν αἱ καταβολαὶ εἶνε ἴσαι· ἀναλόγως δὲ τῶν γινομένων τῶν καταβολῶν ἐπὶ τοὺς χρόνους, ὅταν καὶ αἱ καταβολαὶ καὶ οἱ χρόνοι εἶνε ἄνισοι.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1. Ἀποθανών τις ἀφῆκε περιουσίαν 64000 φράγκων καὶ διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ αὐτοῦ νὰ μερισθῇ αὕτη εἰς τοὺς τέσσαρας υἱούς του ἀναλόγως τῶν ἡλικιῶν αὐτῶν. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἡλικία τῶν υἱῶν του εἶνε 5, 7, 9, 11, πόση εἶνε ἡ μερὶς ἑκάστου; (Ἀπ. 10000, 14000, 18000, 22000).

2. Ἀποθανών τις ἀφῆκε περιουσίαν 87000 φράγκων καὶ διέταξε νὰ μερισθῇ αὕτη εἰς τοὺς τέσσαρας υἱούς του ἀναλόγως τῶν ἡλικιῶν αὐτῶν. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου ἔχει λόγον πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου ὡς 3 : 2· ἡ ἡλικία τοῦ δευτέρου πρὸς τὴν τοῦ τρίτου ὡς 4 : 3 καὶ ἡ τοῦ τρίτου πρὸς τὴν τοῦ τετάρτου ὡς 2 : 1, πόση εἶνε ἡ μερὶς ἑκάστου; (Ἀπ. 36000, 24000, 18000, 9000).

3. Ἀρίνει τις ἐν τῇ διαθήκῃ αὐτοῦ 150000 δραχμὰς καὶ διατάσσει νὰ μερισθῶσιν αὗται εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἡλικιῶν τῶν τέκνων αὐτοῦ. Ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ ἡλικίαι τῶν τέκνων αὐτοῦ εἶνε 4, 6, 8, 12, πόση ἡ μερὶς ἑκάστου; (Ἀπ. 60000, 40000, 30000, 20000).

4. Εἶχέ τις κεφάλαιόν τι, ὅπερ διαιρέσας εἰς τρία ἴσα μέρη ἐτόκισε τὸ μὲν πρῶτον μέρος πρὸς 4 $^0/_0$ ἐπὶ 9 μῆνας, τὸ δὲ δεύτερον πρὸς 5 $^0/_0$ ἐπὶ 8 μῆνας, καὶ τὸ τρίτον πρὸς 6 $^0/_0$

ἐπὶ 10. Ἔλαβε δὲ τόκους ἐν ὅλῳ 1700 φράγκα. Πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον; (Ἀπ. 45000).

5. Ἀποθανών τις ἀφῆκε περιουσίαν 74 χιλιάδας δραχμῶν καὶ διέταξε νὰ μερισθῇ αὕτη εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του ὡς ἑξῆς· ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς μερίδος τοῦ πρώτου καὶ ὁ τρίτος τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς μερίδος τοῦ δευτέρου. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος; (Ἀπ. 24000, 20000, 30000).

6. Εἶχέ τις κεφάλαιόν τι, ὅπερ διαιρέσας εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τοῖς ἀριθμοῖς 1, 2, 3, ἐτόκισε τὸ μὲν πρῶτον πρὸς 5 $^0/_0$ ἐπὶ 2 ἔτη, τὸ δὲ δεύτερον πρὸς 6 $^0/_0$ ἐπὶ 3 ἔτη, τὸ δὲ τρίτον πρὸς 8 $^0/_0$ ἐπὶ ἓν ἔτος. Ὑποτιθεμένου, ὅτι τὸ σύνολον τῶν τόκων εἶνε 7000 φράγκων, πόσα ἦσαν τὰ τοκισθέντα πρὸς 5, 6, καὶ 8 τοῖς 100 χρήματα; (Ἀπ. 10000, 20000, 30000).

7. Εἶχέ τις εἰς τόκον κεφάλαιόν τι πρὸς 4 $^0/_0$. Μετὰ δύο ἔτη ἀφαιρεῖ τὸ τέταρτον καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἀφίνει εἰς τόκον ἐπὶ 7 μῆνας μετὰ τοὺς ὁποίους ἀφαιρέσας καὶ πάλιν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ νέου κεφαλαίου ἀφίνει τὸ ὑπόλοιπον εἰς τόκον ἐπὶ 13 μῆνας. Πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον, ὑποτιθεμένου ὅτι ἔλαβε κατὰ τοὺς 44 τούτους μῆνας τόκους 24375 δραχμάς; (Ἀπ. 200000).

8. Ἀποθανών τις ἀφῆκε περιουσίαν 12 χιλιάδων δραχμῶν καὶ διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ αὐτοῦ νὰ μερισθῇ αὕτη μεταξὺ τοῦ υἱοῦ του, τῆς θυγατρός του καὶ τῆς συζύγου του, οὕτως ὥστε ἡ μὲν θυγάτηρ του νὰ λάβῃ τὰ $\frac{7}{8}$ τῆς μερίδος τοῦ υἱοῦ του, ἡ δὲ σύζυγός του τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μερίδων τοῦ υἱοῦ καὶ τῆς θυγατρός. Πόση ἡ μερὶς ἑκάστου; (Ἀπ. 4800, 4200, 3000).

9. Τρεῖς συνέταιροι ἀνέλαβον ἐπιχείρησίν τινα καταβαλόντες ὁ πρῶτος 10 χιλιάδας φράγκα, ὁ δεύτερος 12 χιλιάδας καὶ ὁ τρίτος 8 χιλιάδας. Μετὰ παρέλευσιν χρονικοῦ τινος διαστήματος ἡ ἐπιχείρησις αὕτη ἔδωκε κέρδος 12160 φράγκων. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν συνεταίρων, ὑποτιθεμένου ὅτι ὁ πρῶτος ὡς διευθυντὴς τῆς ἑταιρίας θὰ λάβῃ 4 $^0/_0$ περισσότερον; (Ἀπ. 4160, 4800, 3200).

10. Ἄνθρωπός τις ἀνέλαβεν ἐπιχείρησιν καταβαλὼν 12 χιλιάδας φράγκων. Μετὰ 8 μῆνας προσέλαβε συνέταιρον καταβαλόντα 15 χιλιάδας φράγκων καὶ 4 μῆνας μετὰ ταῦτα ἄλλον συνέταιρον καταβαλόντα 18 χιλιάδας φράγκων. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι δύο ἔτη ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιχειρήσεως παρετηρήθη κέρδος 39650 φράγκων, πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν συνεταίρων, ὑποτιθεμένου, ὅτι ὁ πρῶτος ὡς διευθυντὴς τῆς ἑταιρίας θὰ λάβῃ 5 $^0/_0$ περισσότερον; (Ἀπ. 15900, 12500, 11250).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄.

Περὶ ἀναμίξεως.

177. Δύο εἰδῶν προβλήματα ἀναμίξεως ὑπάρχουσιν· ἐκεῖνα ἐν οἷς ζητεῖται ἡ μέση τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος καὶ ἐκεῖνα ἐν οἷς ζητεῖται κατὰ ποῖον τρόπον πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἀνάμιξις.

Α΄. εἶδος.

Πρόβλημα. Ἐὰν ἀναμίξωμεν 400 ὀκάδας οἴνου οὗτινος ἡ

ὀκὰ τιμᾶται 4 γροσίων, μετὰ 300 ὀκάδων τιμωμένων 3 γροσίων τὴν ὀκὰν καὶ μετὰ 500 ὀκάδων τιμωμένων 5 γροσίων τὴν ὀκάν, πόσον θὰ τιμηθῇ ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος;

Λύσις. Ἐπειδὴ ἑκάστη μὲν ὀκὰ τοῦ πρώτου εἴδους τιμᾶται 4 γροσίων, ἑκάστη δὲ ὀκὰ τοῦ δευτέρου 3 καὶ ἑκάστη ὀκὰ τοῦ τρίτου 5, ἐδόθησαν διὰ μὲν τὴν ἀγορὰν τῶν 400 ὀκάδων τοῦ πρώτου εἴδους 400×4 γρόσια, διὰ δὲ τὴν ἀγορὰν τῶν 300 ὀκάδων τοῦ δευτέρου εἴδους 300×3, διὰ δὲ τὴν ἀγορὰν τῶν 500 ὀκάδων τοῦ τρίτου εἴδους 500×5.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ μὲν ἀγορασθεῖσαι ὀκάδες εἶνε $400+300+500$, τὰ δὲ δαπανηθέντα γρόσια $400\times4+300\times3+500\times5$, ἔπεται ὅτι ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος θὰ τιμᾶται

$$\frac{400\times4+300\times3+500\times5}{400+300+500}.$$

Τὸ ἀνωτέρω ἐξαγόμενον δεικνύει ὅτι

Ἵνα εὕρωμεν τὴν μέσην τιμὴν τῆς μονάδος τοῦ μίγματος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον βάρος ἐπὶ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν βαρῶν.

Προβλήματα τοῦ μέσου χρόνου.

178. *Πρόβλημα* I. Ἔχει τις τῇ 1ῃ Αὐγούστου τρία γραμμάτια. Τῶν γραμματίων δὲ τούτων, τὸ μὲν ἕν, ὅπερ ἔχει ὀνομαστικὴν ἀξίαν 500 φράγκων, πρόκειται νὰ ἐξαργυρωθῇ τῇ 15ῃ Σεπτεμβρίου· τὸ δ' ἕτερον, ὅπερ ἔχει ἀξίαν 600 φράγκων, πρόκειται νὰ ἐξαργυρωθῇ τῇ 10ῃ Ὀκτωβρίου· τὸ δὲ τρίτον, ὅπερ ἔχει ὀνομαστικὴν ἀξίαν 800 φράγκων, πρόκειται νὰ ἐξαργυρωθῇ τῇ 25ῃ Σεπτεμβρίου. Ἐὰν θελήσῃ ν' ἀνταλλάξῃ

τὰ τρία ταῦτα γραμμάτια ἀνθ' ἑνός, πότε πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἐξαργύρωσις τοῦ γραμματίου ἐκείνου;

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ μὲν προθεσμία τοῦ πρώτου γραμματίου λήγει μετὰ 46 ἡμέρας, ἡ δὲ προθεσμία τοῦ δευτέρου μετὰ 71, ἡ δὲ προθεσμία τοῦ τρίτου μετὰ 56, ἔπεται ὅτι ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ πρόκειται ν' ἀναμιχθῶσι 500 φράγκα τῶν 46 ἡμερῶν μετὰ 600 φράγκων τῶν 71 ἡμερῶν καὶ μετὰ 800 φράγκων τῶν 56 ἡμερῶν.

Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν χ τὰς ἡμέρας μετὰ τὰς ὁποίας πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἐξαργύρωσις τοῦ ζητουμένου γραμματίου θέλομεν ἔχει

$$\chi=\frac{500\times46+600\times71+800\times56}{500+600+800}=58 \text{ ἡμέρ.}$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει ὅτι

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἡμέραν, καθ' ἣν δύναται νὰ γίνῃ, διὰ μιᾶς πληρωμῆς, ἡ ἐξόφλησις πολλῶν γραμματίων, ἐχόντων διαφόρους λήξεις, πολλαπλασιάζομεν ἑκάστην ὀνομαστικὴν ἀξίαν ἐπὶ τὸν ἀντιστοιχοῦντα χρόνον, προσθέτομεν τὰ γινόμενα καὶ διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὀνομαστικῶν ἀξιῶν τῶν δεδομένων γραμματίων.

179. *Πρόβλημα* II. Ὀφείλει τις τῇ 1ῃ Ἰουλίου 2ε000 δραχμὰς πληρωτέας τῇ 10 Νοεμβρίου. Τῇ 15 Σεπτεμβρίου ἐπλήρωσεν ἐπὶ λογαριασμῷ 8000 δραχμὰς, τῇ δὲ 15 Ὀκτωβρίου 12000. Κατὰ ποίαν ἡμέραν πρέπει νὰ γίνῃ ἡ πληρωμὴ τῶν ὑπολειπομένων 5000 δραχμῶν;

Λύσις. Εἶνε φανερὸν, ὅτι ὁ τόκος τὸν ὁποῖον χάνει ὁ ὀφειλέτης πληρώσας 56 ἡμέρας πρὸ τῆς προθεσμίας 8000 δραχμὰς καὶ 26 ἡμέρας πρὸ τῆς προθεσμίας ἄλλας 12000, πρέπει νὰ εἶνε ἴσος τῷ τόκῳ, τὸν ὁποῖον θὰ δώσωσιν αἱ ὑπόλοι-

ποι 5000 δραχμαὶ εἰς τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος θὰ παρέλθῃ ἀπὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας μέχρι τῆς ἐξοφλήσεως. Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν χ τὰς ἡμέρας, αἵτινες πρέπει νὰ παρέλθωσιν ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς ἐξοφλήσεως, θέλομεν ἔχει

$$\frac{5000\times X\times E}{36000}=\frac{8000\times 56\times E}{36000}+\frac{12000\times 26\times E}{36000}$$ ἢ

$$5000\times X=8000\times 56+12000\times 26$$

ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης διὰ 5000, θέλομεν πορισθῇ

$$X=\frac{8000\times 56+12000\times 26}{5000}=152 \text{ ἡμερ.}$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει ὅτι

Ὅταν ζητῶμεν τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πληρωθῇ τὸ ὑπόλοιπον χρέους, ἀπέναντι τοῦ ὁποίου ἐπληρώθησαν κατὰ διαφόρους ἐποχὰς πρὸ τῆς προθεσμίας διάφορα ποσά, πρὸς εὕρεσιν τῶν ἡμερῶν, αἵτινες πρέπει νὰ παρέλθωσι μετὰ τὴν λῆξιν τῆς προθεσμίας, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἑκάστην δόσιν ἐπὶ τὰς ἡμέρας, αἵτινες παρεμβάλλονται ἀπὸ τῆς πληρωμῆς τῆς δόσεως μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας, νὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ χρέους, ὅπερ ὑπολείπεται νὰ πληρωθῇ.

Β΄. εἶδος.

180. *Πρόβλημα.* Ἔχει τις δύο ἀποθήκας σίτου. Ὑποτιθεμένου, ὅτι τῆς μιᾶς ἀποθήκης ὁ σῖτος τιμᾶται 5 φράγκων τὸ κοιλὸν καὶ τῆς ἑτέρας 7, κατὰ ποῖον τρόπον πρέπει νὰ σχηματίσωμεν μῖγμα, οὗτινος τὸ κοιλὸν νὰ τιμᾶται 6,15;

Λύσις. Ἐπειδὴ ἐξ ἑκάστου κοιλοῦ τοῦ πρώτου εἴδους, λαμ-

βανομένου διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ μίγματος, προκύπτει κέρδος 1,15, ἐξ ἑκάστου δὲ κοιλοῦ τοῦ δευτέρου ζημία 0,85· καὶ ἐπειδὴ τοσαῦτα πρέπει νὰ εἶνε τὰ κοιλά, ἅτινα πρέπει νὰ ληφθῶσιν ἐξ ἑκατέρου εἴδους, ὥστε τὸ κέρδος ὅπερ προκύπτει ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους νὰ εἶνε ἴσον τῇ ζημίᾳ, ἥτις προκύπτει ἐκ τοῦ δευτέρου, ἔπεται ὅτι ἐὰν καλέσωμεν χ τὰ κοιλά, ἅτινα θὰ ληφθῶσιν ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους καὶ ψ τὰ κοιλά, ἅτινα θὰ ληφθῶσιν ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους, θέλομεν ἔχει

$$1{,}15\times\chi=0{,}85\times\psi$$ ἢ

$$\chi:\psi=0{,}85:1{,}15.$$

Ἡ ἀναλογία αὕτη δεικνύει δύο τινά· ἀ.

Ὅτι τὰ ληφθησόμενα ποσὰ ἐξ ἑκατέρου τῶν σίτων εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰς διαφορὰς τῆς μέσης τιμῆς καὶ ἑκατέρας τῶν τιμῶν τῶν δεδομένων ποσοτήτων καὶ β΄.

Ὅτι, ὅταν τὸ βάρος τοῦ μίγματος εἶνε γνωστόν, ἵνα εὕρωμεν πόσα κοιλὰ πρέπει νὰ ληφθῶσιν ἐξ ἑκατέρου εἴδους διὰ τὸν καταρτισμὸν τοῦ μίγματος, πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸ βάρος τοῦ μίγματος ἀναλόγως τῶν διαφορῶν τῆς μέσης τιμῆς καὶ ἑκατέρας τῶν τιμῶν τῶν δεδομένων ποσοτήτων, μὲ τὴν οὐσιώδη ὅμως παρατήρησιν ὅτι ὡς πρῶτος μερίζων πρέπει νὰ ληφθῇ ἡ δευτέρα διαφορὰ καὶ ὡς δεύτερος ἡ πρώτη.

Ἐφαρμογή. Ἔχει τις δύο εἰδῶν οἴνους, ὧν ἡ τιμὴ κατ' ὀκὰν εἶνε τοῦ μὲν πρώτου 4 γρόσια, τοῦ δὲ δευτέρου 6. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους, ἵνα ἀποτελέσῃ μῖγμα 400 ὀκάδων, ὧν ἡ τιμὴ κατ' ὀκὰν 4 γρ. 35 παρ.;

Λύσις. Τῆς πρώτης διαφορᾶς οὔσης 35 παράδων καὶ τῆς δευτέρας 45, ἵνα εὕρωμεν τὰ ζητούμενα, πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 400 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 45 καὶ 35.

Ἐκτελοῦντες λοιπὸν τὸν ῥηθέντα μερισμόν, εὑρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ ληφθῶσιν ἐκ μὲν τοῦ ἀ. εἴδους

$$\frac{400\times45}{80}, \text{ ἤτοι } 225 \text{ ὀκάδες}$$

ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου

$$\frac{400\times35}{80}, \text{ ἤτοι } 175 \text{ ὀκάδες.}$$

Δοκιμή. Ἵνα δοκιμάσωμεν, ἐὰν τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα εἶνε ἀκριβῆ, πρέπει νὰ ζητήσωμεν τὴν μέσην τιμὴν μίγματος ἀποτελουμένου ἐκ 225 ὀκάδων οἴνου, τιμωμένου 4 γροσίων κατ' ὀκὰν καὶ ἐξ 175 ὀκάδων οἴνου, τιμωμένου 6 γροσίων κατ' ὀκάν. Καὶ ἂν μὲν εὕρωμεν μέσην τιμὴν ἴσην 4 γρ. καὶ 35 παρ. ἡ ἐργασία ἐγένετο ἀκριβῶς· ἐὰν δὲ μικροτέραν ἢ μεγαλειτέραν, ὑπῆρξεν ἐν τῇ ἐκτελέσει τῆς ἐργασίας λάθος.

Πρόβλημα II. Ἔχομεν πέντε ἀποθήκας σίτου. Τῆς μιᾶς ἀποθήκης ὁ σῖτος τιμᾶται 18 φράγκων τὸ ἑκατόλιτρον, τῆς δευτέρας 18,50, τῆς τρίτης 19,50, τῆς τετάρτης 21,10 καὶ τῆς πέμπτης 21,90. Ἐὰν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν μῖγμα 840 ἑκατολίτρων, οὗτινος τὸ ἑκατόλιτρον νὰ τιμᾶται 20 φρ. πόσα ἑκατόλιτρα πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστης ἀποθήκης;

Λύσις. Ἐπειδή, λαμβανομένου ἑνὸς ἑκατολίτρου ἐξ ἑκάστου εἴδους, τὸ μὲν κέρδος ὅπερ προκύπτει ἐκ τῶν σίτων, ὧν ἡ τιμὴ εἶνε κατωτέρα τῆς μέσης, εἶνε 4 φράγκα, ἡ δὲ ζημία, ἥτις προκύπτει ἐκ τῶν σίτων, ὧν ἡ τιμὴ εἶνε ἀνωτέρα, εἶνε 3 φράγκα, ἵνα τὸ κέρδος καλύπτῃ τὴν ζημίαν, πρέπει, ἐν τῇ κατασκευῇ τοῦ μίγματος, νὰ λαμβάνωμεν ἀνὰ 3 ἑκατόλιτρα ἐκ τῶν τῆς κατωτέρας τιμῆς καὶ ἀνὰ 4 ἐκ τῶν τῆς ἀνωτέρας. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ κατωτέρας τιμῆς σῖτοι εἶνε 3 εἰδῶν, καὶ οἱ ἀνωτέρας δύο, ἔπεται ὅτι τὰ ληφθησόμενα ἑκατόλιτρα θὰ εἶνε, ἐκ μὲν τῶν τῆς κατωτέρας τιμῆς σίτων 9, ἐκ δὲ τῶν τῆς ἀνωτέρας 8. Ἐπειδὴ δὲ τέλος εἰς τὰ 17 ἑκατόλιτρα τοῦ μίγματος περιέχονται ἀνὰ τρία ἑκατόλιτρα ἐκ τῶν τῆς κατωτέρας τιμῆς καὶ ἀνὰ 4 ἐκ τῶν τῆς ἀνωτέρας, ἔπεται ὅτι εἰς τὰ 840 ἑκατόλιτρα εἰσὶν ἀνὰ $\frac{840\times3}{17}$ ἑκατόλιτρα ἐκ τῶν τῆς κατωτέρας καὶ ἀνὰ $\frac{840\times4}{17}$ ἐκ τῶν τῆς ἀνωτέρας τιμῆς.

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος τούτου διατάσσονται ὡς ἑξῆς·

$$\left.\begin{matrix}18 & . & . & . & 2 \\ 18{,}50 & . & . & . & 1{,}50 \\ 19{,}50 & . & . & . & 0{,}50\end{matrix}\right\} = 4 \qquad 3\times3 = 9$$

$$20$$

$$\left.\begin{matrix}21{,}10 & . & . & . & 1{,}10 \\ 21{,}90 & . & . & . & 1{,}90\end{matrix}\right\} = 3 \qquad 2\times4 = \tfrac{8}{17}$$

Β$^{\alpha}$ *Λύσις.* Τῶν τοιούτων προβλημάτων, ἀπροσδιορίστων ἄλλως τε ὄντων, ἡ λύσις γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς·

Γράφονται ἀριστερὰ μὲν κατακορύφου γραμμῆς πᾶσαι αἱ

18	21,10
18,50	21,90
19,50	21,90

τιμαὶ αἱ κατώτεραι τῆς μέσης, δεξιὰ δὲ αὐτῆς πᾶσαι αἱ ἀνώτεραι, λαμβανομένης δὶς μιᾶς μὲν τῶν κατωτέρων ἐὰν αἱ κατώτεραι εἶνε ὀλιγαριθμότεραι τῶν ἀνωτέρων, μιᾶς δὲ τῶν ἀνωτέρων, ἐὰν αἱ ἀνώτεραι εἶνε ὀλιγαριθμότεραι τῶν κατωτέρων. Λαμβάνονται αἱ διαφοραὶ τῆς μέσης τιμῆς καὶ ἑκάστης τῶν τιμῶν τῶν ἀναμιγνυομένων ποσοτήτων καὶ μερίζεται τὸ βάρος τοῦ μίγματος ἀναλόγως τῶν διαφορῶν τούτων, λαμβανομένης τῆς τελευταίας διαφορᾶς ὡς πρώτου μεριζόντος, τῆς προτελευταίας ὡς δευτέρου καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Οὕτως, ἐπειδὴ αἱ εἰρημέναι διαφοραὶ εἶνε 2, 1,50, 0,50,

1,10, 1,90, 1,90, ἐὰν καλέσωμεν α, β, γ, δ, ε, τὰ ἑκατόλιτρα ἄτινα θὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους, θέλομεν ἔχει

$$\alpha = \frac{840 \times 1,90}{8,90}$$

$$\beta = \frac{840 \times 1,90}{8,90}$$

$$\gamma = \frac{840 \times 1,10}{8,90}$$

$$\delta = \frac{840 \times 0,50}{8,90}$$

$$\varepsilon = \frac{840 \times 2}{8,90} + \frac{840 \times 1,50}{8,90}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ θ'.

Συνεζευγμένη μέθοδος.

181. Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην λύονται ἐκεῖνα τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα πρόκειται νὰ προσδιορισθῇ σχέσις ἰσότητος ἢ ἰσοδυνάμου μεταξὺ μιᾶς ποσότητος δεδομένης καὶ ἄλλης τινὸς ποσότητος συνδεομένης μετὰ τῆς πρώτης διὰ σειρᾶς γνωστῶν σχέσεων.

Πρόβλημα. Πόσων ἀργυρῶν γροσίων τιμᾶται σῖτος 50 κοιλῶν Κ/πόλεως, γνωσοῦ ὄντος ὅτι 37,8 κοιλὰ Κ/πόλεως δύνανται 2 κοιλὰ Βραΐλας, 5 κοιλὰ Βραΐλας τιμῶνται 18 λιρῶν τουρκίας καὶ 3 λίραι δύνανται 324 γρόσια ;

Λύσις. Τὰ προβλήματα ταῦτα κατατάσσονται μὲν ὡς ἔπεται·

Χ ἀργ. γρ.	50 κ. Κ/πόλ.
37,8 κ. Κ.	2 κ. Β.
5 κ. Β.	18 λιρ. τουρ.
3 λ. τ.	324 γρ.

Λύονται δὲ ὡς ἑξῆς.

Κατὰ πρῶτον ἐκ τῆς μεταξὺ τῶν κοιλῶν Κωνσταντινουπόλεως καὶ κοιλῶν Βραΐλας ὑπαρχούσης σχέσεως, εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ 50 κ. Κων/πόλεως δύνανται $\frac{50 \times 2}{37,8}$ κοιλὰ Βραΐλας.

Μετὰ τοῦτο στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς σχέσεως ὅτι 5 κοιλὰ Βραΐλας τιμῶνται 18 λιρῶν, εὑρίσκομεν ὅτι τὰ $\frac{50 \times 2}{37,8}$ κοιλὰ Βραΐλας τιμῶνται $\frac{50 \times 2 \times 18}{37,8 \times 5}$ λίρας.

Τέλος ἐκ τῆς μεταξὺ λίρας καὶ γροσίου ὑπαρχούσης σχέσεως, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ $\frac{50 \times 2 \times 18}{37,8 \times 5}$ λίραι ἰσοδυναμοῦσι μὲ $\frac{50 \times 2 \times 18 \times 324}{37,8 \times 5 \times 3}$ γρόσια.

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει ὅτι

Ἵνα λύσωμεν πᾶν πρόβλημα τῆς συνεζευγμένης μεθόδου, πρέπει πρῶτον μὲν νὰ κατατάξωμεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον τοῦ προβλήματος εἰς δύο στήλας, οὕτως ὥστε ὁ πρῶτος ὅρος τῆς πρώτης στήλης, ὅστις εἶνε ὁ ἄγνωστος τοῦ προβλήματος, νὰ εἶνε ὁμοειδὴς μὲ τὸν τελευταῖον τῆς δευτέρας, ὁ δεύτερος τῆς πρώτης ὁμοειδὴς μὲ τὸν πρῶτον τῆς δευτέρας καὶ οὕτω καθεξῆς, ἔπειτα δὲ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀ-

ριθμοὺς, οἵτινες ἀποτελοῦσι τὴν στήλην, ἥτις δὲν περιέχει τὸν ἄγνωστον καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἀποτελοῦσι τὴν στήλην, ἥτις περιέχει τὸν ἄγνωστον. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶνε τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Περὶ γεωμετρικῶν προόδων.

1. Πρόοδος γεωμετρικὴ ὀνομάζεται σειρὰ ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἶνε τοσάκις μεγαλείτερος ἢ μικρότερος τοῦ δευτέρου, ὁσάκις οὗτος τοῦ τρίτου, ὁσάκις ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου καὶ οὕτω καθεξῆς· π. χ. ἡ σειρὰ

$$1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : \qquad (1)$$

τῆς ὁποίας ἕκαστος ὅρος εἶνε δὶς μικρότερος τοῦ ἑπομένου αὐτῷ καὶ ἡ σειρὰ

$$27 : 9 : 3 : 1 : \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{9} : \tfrac{1}{27} : : : \qquad (2)$$

τῆς ὁποίας ἕκαστος ὅρος εἶνε τρὶς μεγαλείτερος τοῦ ἑπομένου αὐτῷ, εἶνε πρόοδοι γεωμετρικαί.

2. Λόγος γεωμετρικῆς τινος προόδου ὀνομάζεται τὸ σταθερὸν πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ὅρου διὰ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ. Οὕτω· τῆς μὲν προόδου (1) ὁ λόγος εἶνε 2, τῆς δὲ προόδου (2) ὁ λόγος εἶνε $\frac{1}{3}$.

3. Ἡ πρόοδος λέγεται αὔξουσα μὲν, ὅταν οἱ ὅροι προβαίνωσιν αὐξανόμενοι, φθίνουσα δὲ ὅταν οἱ ὅροι προβαίνωσιν ἐλαττούμενοι. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ δὲ τῶν προόδων προκύπτει ὅτι ὁ

λόγος μιᾶς προόδου εἶνε μεγαλείτερος μὲν τῆς μονάδος, ὅταν ἡ πρόοδος εἶνε αὔξουσα, μικρότερος δ' αὐτῆς, ὅταν ἡ πρόοδος εἶνε φθίνουσα.

Εὕρεσις τῶν διαφόρων ὅρων τῆς προόδου δεδομένου τοῦ πρώτου ὅρου καὶ τοῦ λόγου.

4. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ λόγου ἕπεται ὅτι ἐὰν καλέσωμεν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ τοὺς ὅρους μιᾶς τινος προόδου καὶ π τὸν λόγον αὐτῆς, θέλομεν ἔχει

$$\beta=\alpha.\pi$$
$$\gamma=\beta.\pi=\alpha.\pi^2$$
$$\delta=\gamma.\pi=\alpha.\pi^3$$
$$\varepsilon=\delta.\pi=\alpha.\pi^4$$
$$\zeta=\varepsilon.\pi=\alpha.\pi^5$$
$$\eta=\zeta.\pi=\alpha.\pi^6$$
$$\theta=\eta.\pi=\alpha.\pi^7$$
$$\iota=\theta.\pi=\alpha.\pi^8$$
$$\kappa=\iota.\pi=\alpha.\pi^9$$
$$\lambda=\kappa.\pi=\alpha.\pi^{10}.$$

Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα δεικνύουσιν, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν ἕνα οἱονδήποτε ὅρον μιᾶς τινος προόδου, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον ἐπὶ τὸν λόγον φέροντα ἐκθέτην, ἴσον τῷ ἀριθμῷ τῶν ὅρων, οἵτινες προηγοῦνται τοῦ ζητουμένου.

Ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς τινος προόδου.

5. Ἐὰν ὀνομάσωμεν Κ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων μιᾶς τινος γεωμετρικῆς προόδου, καὶ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ τοὺς ὅρους αὐτῆς, θέλομεν ἔχει

$$\text{K}=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\theta+\iota+\kappa+\lambda. \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ τὸν λόγον τῆς προόδου, θέλομεν πορισθῆ

$$\text{K}.\pi=\alpha.\pi+\beta.\pi+\gamma.\pi+\delta.\pi+\varepsilon.\pi+\zeta.\pi+\eta.\pi+\theta.\pi+\iota.\pi+\lambda.\pi$$

ἢ

$$\text{K}.\pi=\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\theta+\iota+\kappa+\lambda\pi. \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ, οὔσης τῆς προόδου αὐξούσης, ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τῆς ἰσότητος (2) τὴν ἰσότητα (1), θέλομεν λάβει

$$\text{K}.\pi-\text{K}=\lambda.\pi-\alpha$$

Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης ὡς γινόμενον τοῦ Κ καὶ τοῦ π—1, θέλομεν ἔχει

$$\text{K}\times(\pi-1)=\lambda.\pi-\alpha$$

Ἐὰν δὲ τέλος διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος διὰ τοῦ π—1, θέλομεν πορισθῆ τὸν τύπον

$$\text{K}=\frac{\lambda.\pi-\alpha}{\pi-1}$$

ὅστις δεικνύει ὅτι

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων μιᾶς προόδου γεωμετρικῆς αὐξούσης, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν τελευταῖον ὅρον τῆς προόδου ἐπὶ τὸν λόγον, νὰ ἐλαττώσωμεν τὸ γινόμενον κατὰ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς προόδου καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν διὰ τοῦ λόγου ἠλαττωμένου κατὰ μονάδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ τῶν κοινῶν λογαρίθμων.

5. Κοινὸς λογάριθμος ἢ ἁπλῶς λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος λέγεται ὁ ἐκθέτης, εἰς ὃν πρέπει νὰ ὑψωθῇ ὁ 10, ἵνα παρα

γάγῃ τὸν δοθέντα. Οὕτως· ὁ λογάριθμος τῶν ἀριθμῶν 1, 10, 100, 1000 . . . εἶνε 0, 1, 2, 3, διότι ὁ 10 ὑψούμενος διαδοχικῶς εἰς τὰς δυνάμεις 0, 1, 2, 3, δίδωσιν 1, 10, 100, 1000.

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς ἀποτελούμενος ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν εἶνε δύναμις τοῦ 10, ἧς ὁ ἐκθέτης ἔχει ἰσαρίθμους τοῖς μηδενικοῖς τοῦ ἀριθμοῦ μονάδας, ἕπεται ὅτι ὁ λογάριθμος παντὸς τοιούτου ἀριθμοῦ ἔχει τόσας μονάδας, ὅσα εἶνε τὰ μηδενικὰ τοῦ ἀριθμοῦ. Οὕτω

$$\text{λογ. } 1000000 = 6.$$

6. *Θεώρημα.* Ὁ λογάριθμος παντὸς ἀριθμοῦ, μὴ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, εἶνε ἀριθμὸς ἀσύμμετρος.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 5000 καὶ ἂς ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λογάριθμος αὐτοῦ εἶνε ἀσύμμετρος.

Ἀπόδειξις. Ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ τούτου δὲν εἶνε ἀκέραιος εἶνε φανερόν· διότι, τοῦ ἀριθμοῦ περιεχομένου μεταξὺ τοῦ 1000 καὶ τοῦ 10000, ὁ λογάριθμος ἐμπεριέχεται μεταξὺ τοῦ 3 καὶ τοῦ 4.

Ὅτι δὲ οὐδὲ κλασματικὸς εἶνε ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Ὑποτεθείσθω πρὸς στιγμὴν ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ 5000 εἶναι ἴσος τῷ κλασματικῷ ἀριθμῷ $\frac{\alpha}{\beta}$. Τότε θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης

$$10^{\frac{\alpha}{\beta}} = 5000 \ldots\ldots$$

Ἀλλ' ἐὰν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης εἰς τὴν ἀκεραίαν δύναμιν β, θέλομεν ἔχει

$$\left(10^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\beta} = 5000^{\beta}$$

Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσό-

τητος διὰ γινομένου ἐκ β παραγόντων, ἴσων τῷ $10^{\frac{\alpha}{\beta}}$, θέλομεν ἔχει

$$10^{\frac{\alpha}{\beta}} \times 10^{\frac{\alpha}{\beta}} \times \ldots \times 10^{\frac{\alpha}{\beta}} = 5000^{\beta}$$

Ἐὰν δὲ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος, θέλομεν πορισθῆ

$$10^{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{\alpha}{\beta} + \ldots + \frac{\alpha}{\beta} = 5000^{\beta} \quad \text{ἢ}$$

$$10^{\alpha} = 5000^{\beta}.$$

Ἡ τελευταία ὅμως ἰσότης δὲν εἶνε ἀληθής· διότι, ἐν ᾧ τὸ πρῶτον μέλος, ὂν ἀκεραία δύναμις τοῦ 10, ἀποτελεῖται ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, τὸ δεύτερον μέρος εἶνε ἀκεραία δύναμις τοῦ 5000, ἥτις οὐδέποτε δύναται νὰ εἶνε ἴση μὲ ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν.

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη προέκυψεν ἐκ τῆς ἰσότητος

$$10^{\frac{\alpha}{\beta}} = 5000.$$

ὥστε καὶ αὕτη ἡ ἰσότης εἶνε ψευδής· ὅ. ἔ δ.

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες δὲν ἀποτελοῦνται ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, εἶνε ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι καὶ δὲν ἐκτιμῶνται ἐπομένως ἀκριβῶς, ἐκτιμῶσιν αὐτοὺς διὰ δεκαδικῶν ἀριθμῶν κατὰ προσέγγισιν μιᾶς τινος δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως, μεταχειριζόμενοι τόσῳ περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσῳ μεγαλειτέραν ἀκρίβειαν ἀπαιτεῖ τὸ ζήτημα εἰς ὃ ἐφαρμόζομεν τὸν λογάριθμον.

7. Τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνός τινος ἀριθμοῦ ὀνομάζεται χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου.

Οὕτω· τοῦ ἀριθμοῦ 3, 69897 ὄντος λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 5000, τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ, ὅπερ εἶνε ἐνταῦθα 3, λέγεται χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαριθμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ 5000.

8. *Θεώρημα.* Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνός τινος ἀριθμοῦ ἔχει τόσας μονάδας, ὅσα εἶνε τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, πλὴν ἑνός.

Ἔστω ὁ πενταψήφιος ἀριθμὸς 45647 καὶ ἀποδειχθήτω, ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ εἶνε 4 ἢ (5—1).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἀληθεύει ἡ ἀνισότης

$$10000 < 45647 < 100000$$

ἕπεται ὅτι ἀληθεύει καὶ ἡ ἀνισότης

$$\text{λογ. } 10000 < \text{λογ. } 45647 < \text{λογ. } 100000.$$

Ἀλλὰ

$$\text{λογ. } 10000 = 4$$
$$\text{καὶ λογ. } 100000 = 5$$

ὥστε

$$4 < \text{λογ. } 45647 < 5 \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

9. *Θεώρημα.* Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἄλλον ἀποτελούμενον ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, τὸ μὲν δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται, τὸ χαρακτηριστικὸν ὅμως αὐξάνει κατὰ μονάδας ἰσαρίθμους τοῖς μηδενικοῖς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ὑποθέτοντες ὅτι

$$\chi = \text{λογ. } \alpha$$

καὶ ἑπομένως ὅτι

$$10^{\chi} = \alpha$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος ἐπὶ ἀριθμόν τινα ἀποτελούμενον ὑπὸ τῆς μονάδος ἀ-

κολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, ἐπὶ τὸν 1000 ἤτοι τὸν 10^3 π. χ. θέλομεν ἔχει

$$10^{\chi} \times 10^{3} = \alpha \times 1000.$$

Ἐκτελοῦντες δὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς τὸ πρῶτον μέλος, τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος θέλομεν πορισθῆ τὴν ἰσότητα

$$10^{\chi+3} = \alpha \times 1000$$

ἢ τὴν ἰσοδύναμον αὐτῇ

$$\chi + 3 = \text{λογ. } (\alpha \times 1000),$$

ἥτις δεικνύει, ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ α αὐξάνει κατὰ 3 ἀκεραίας μονάδας, πολλαπλασιαζομένου τοῦ α ἐπὶ 1000. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα δι' ἄλλου ἀποτελουμένου ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, τὸ μὲν δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται, τὸ χαρακτηριστικὸν ὅμως ἐλαττοῦται κατὰ μονάδας ἰσαρίθμους τοῖς μηδενικοῖς τοῦ διαιρέτου.

Ἀρνητικοὶ Λογάριθμοι.

10. Κατὰ τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα, ὄντος 2,73878 τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 548, ὑπάρχουσιν ἅπασαι αἱ κατωτέρω ἰσότητες

$$\text{λογ. } 54800 = 4{,}73878$$
$$\text{λογ. } 5480 = 3{,}73878$$
$$\text{λογ. } 54{,}8 = 1{,}73878$$
$$\text{λογ. } 5{,}48 = 0{,}73878$$
$$\text{λογ. } 0{,}548 = 0{,}73878 - 1$$
$$\text{λογ. } 0{,}0548 = 0{,}73878 - 2.$$

Ἀφήσωμεν τὰς τέσσαρας πρώτας καὶ ἐπιχήσωμεν τὴν προσοχὴν ἡμῶν εἰς τὰς δύο τελευταίας ἰσότητας.

Οἱ ἀριθμοὶ (0,73878—1) καὶ (0,73878—2), οἵτινες παριστῶσιν, ὁ μὲν πρῶτος τὸν λογάριθμον τοῦ 0,548, ὁ δὲ δεύτερος τὸν λογάριθμον 0,0548, ἐπειδὴ ἀμφότεροι εἶνε διαφοραὶ, ὧν ὁ ἀφαιρετέος μεγαλείτερος τοῦ μειωτέου, εἶνε μικρότεροι τοῦ μηδενικοῦ καὶ παρίστανται συνήθως ὁ μὲν πρῶτος διὰ τῆς παραστάσεως $\bar{1}$,73878, ὁ δεύτερος διὰ τῆς παραστάσεως $\bar{2}$,73878. Οἱ τοιοῦτοι λογάριθμοι λέγονται ἀρνητικοὶ λογάριθμοι πρὸς ἀντιδιαστολὴν ἀπὸ τῶν ἄλλων λογαρίθμων οἵτινες λέγονται θετικοί. Εἶνε δὲ μικρότεροι τοῦ μηδενικοῦ, διότι, ὡς εἴρηται, εἶνε διαφοραὶ ἀφαιρέσεων, ἐν αἷς ὁ ἀφαιρετέος μεγαλείτερος τοῦ μειωτέου· ἐννοεῖ δ' ἕκαστος εὐκόλως, ὅτι, ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὴν περιουσίαν ἡμῶν κατὰ ποσὸν μεγαλείτερον αὐτῆς, θέλει μένει ἡμῖν ποσὸν μικρότερον τοῦ μηδενικοῦ· διότι τότε οὐ μόνον στερούμεθα περιουσίας, ἀλλὰ καὶ ἐπιβαρυνόμεθα διὰ χρέους.

Παρατήρησις ά. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται φανερὸν ὅτι οἱ ἀρνητικοὶ λογάριθμοι ἀνήκουσιν εἰς ἀριθμοὺς μικροτέρους τῆς μονάδος καὶ ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτῶν περιέχει τόσας μονάδας, ὅσα εἶνε τὰ μηδενικὰ σὺν ἑνὶ, ἅτινα περιλαμβάνονται μεταξὺ τῆς ὑποδιαστολῆς καὶ τοῦ σημαντικοῦ μέρους τοῦ ἀριθμοῦ. Οὕτως· ὁ λογάριθμος τοῦ 0,00375 ἔχει χαρακτηριστικὸν $\bar{3}$ καὶ ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν λογάριθμον $\bar{4}$,69897, εἶνε 0,0005.

Παρατήρησις β'. Πολλάκις ἀναγκαζόμεθα ἢ νὰ προσθέτωμεν ἀρνητικοὺς μετὰ θετικῶν λογαρίθμων, ἢ ν' ἀφαιρῶμεν ἀρνητικοὺς λογαρίθμους ἀπὸ θετικῶν. Καὶ περὶ μὲν τῆς πρώτης περιπτώσεως ἀρκούμεθα νὰ δηλώσωμεν ὅτι, πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς

πράξεως, πρέπει, μετὰ τὴν προσθήκην τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων, νὰ σχηματίσωμεν χωριστὰ τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν χαρακτηριστικῶν σὺν ταῖς μονάσιν αἵτινες προκύπτουσιν ἐκ τῆς προσθήκης τῶν δεκαδικῶν μερῶν καὶ χωριστὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν χαρακτηριστικῶν καὶ ἀπὸ τοῦ μεγαλειτέρου ἀθροίσματος ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ μικρότερον. Καὶ ἂν μὲν τὸ θετικὸν ἄθροισμα εἶνε τὸ μεγαλείτερον, ὁ προκύπτων λογάριθμος εἶνε θετικός· ἂν δὲ τὸ ἀρνητικὸν ἄθροισμα εἶνε τὸ μεγαλείτερον, ὁ προκύπτων λογάριθμος εἶνε ἀρνητικός. Ὁ λόγος τῆς ἐργασίας ταύτης εἶνε προφανής.

Ἵνα ὅμως ἐννοήσωμεν τὰ κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν γινόμενα, ἂς ἐκτελέσωμεν τὴν ἑξῆς ἀφαίρεσιν

$$5{,}37265 - \bar{3}{,}84726.$$

Ἐπειδὴ

$$\bar{3}{,}84726 = 0{,}84726 - 3$$

ἔπεται ὅτι

$$5{,}37265 - \bar{3}{,}84726 = 5{,}37265 - (0{,}84726 - 3).$$

Ἐπειδὴ δὲ, ὄντος τοῦ ἀφαιρετέου 0,84726—3 κατὰ 3 μονάδας μικροτέρου τοῦ ἀριθμοῦ 0,84726, τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως, ἥτις σημειοῦται ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος, ἔσται κατὰ 3 μονάδας μεγαλείτερον τοῦ ὑπολοίπου τῶν ἀριθμῶν 5,37265 καὶ 0,84726, ἔπεται ὅτι

$$5{,}37265 - \bar{3}{,}84726 = 5{,}37265 - 0{,}84726 + 3$$

ἢ

$$5{,}37265 - \bar{3}{,}84726 = 5{,}37265 + 3 - 0{,}84726$$

ἢ

$$5{,}37265 - \bar{3}{,}84726 = 5{,}37265 + 2 + 1 - 0{,}84726$$

ἀλλὰ

$$1 - 0{,}84726 = 0{,}15274$$

ὥστε

$$5\,37265 - \bar{3},84726 = 5,37265 + 2 + 0,15274$$

ἤ

$$5,37265 - \bar{3},84726 = 5,37265 + 2,15274.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει ὅτι

Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ θετικοῦ λογαρίθμου ἀρνητικὸν λογάριθμον, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον θετικόν τινα λογάριθμον ἔχοντα χαρακτηριστικὸν μὲν κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ ἀφαιρετέου, δεκαδικὸν δὲ μέρος τὸ συμπλήρωμα τοῦ δεκαδικοῦ μέρους αὐτοῦ· ἤτοι τὸ ὑπόλοιπον τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ἀρνητικοῦ λογαρίθμου ἀπὸ τῆς μιᾶς ἀκεραίας μονάδος.

Σημ. ά. Εὑρίσκουσι τὸ συμπλήρωμα τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἑνός τινος λογαρίθμου, ἀφαιροῦντες πάντα μὲν τὰ ψηφία, πλὴν τοῦ πρώτου πρὸς τὰ δεξιά, ἀπὸ 9, τὸ δὲ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιά, ἀπὸ 10.

Σημ. β'. Ἐν τοῖς διὰ τῶν λογαρίθμων ὑπολογισμοῖς οὐδέποτε ἀφαιροῦμεν θετικὸν λογάριθμον, ἀλλὰ μετατρέποντες αὐτὸν εἰς ἰσοδύναμον ἀρνητικόν, ἀντὶ ν' ἀφαιρῶμεν, προσθέτομεν.

Ἡ μετατροπὴ δὲ αὕτη γίνεται ὡς ἑξῆς.

Ὑποτεθείσθω ὅτι πρόκειται νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ ἀφαίρεσις τῶν λογαρίθμων 7,56472 καὶ 3,65378.

Ἐὰν καλέσωμεν X τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως, θέλομεν ἔχει

$$X = 7,56472 - 3,65378$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος προσθέσωμεν καὶ ἀφαιρέσωμεν τὴν μονάδα, θέλομεν πορισθῇ

$$X = 7,56472 - 3,65378 + 1 - 1$$

ἤ

$$X = 7,56472 - 3 - 1 + 1 - 0,65378$$

ἤ

$$X = 7,56472 - 4 + 0,34622$$

ἤ

$$X = 7,56472 + \bar{4},34622.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει ὅτι

Ἵνα μετατρέψωμεν τὸν ἀφαιρετέον μιᾶς τινος ἀφαιρέσεως λογαρίθμων εἰς ἀρνητικὸν λογάριθμον καὶ συνεπῶς τὴν ἀφαίρεσιν εἰς πρόσθεσιν, πρέπει τὸ μὲν χαρακτηριστικὸν τοῦ ἀφαιρετέου ν' αὐξήσωμεν κατὰ μονάδα, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος ν' ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ συμπληρώματός του. Οὕτω

$$4,76532 - 2,65385 = 4,76532 + \bar{3},34615$$

καὶ

$$7,65847 - 6,57470 = 7,65847 + \bar{7},42530.$$

Χρῆσις τῶν πινάκων τοῦ βιβλίου.

11. Ἐπειδὴ εἰς πολλὰς περιστάσεις ἔχομεν ἀνάγκην νὰ γνωρίζωμεν ὁτὲ μὲν τὸν λογάριθμον δεδομένου τινὸς ἀριθμοῦ, ὁτὲ δὲ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς δεδομένον λογάριθμον, κατεσκευάσθησαν πίνακες δι' ὧν ἐπιτυγχάνονται καὶ τὰ δύο ταῦτα. Τοιοῦτον πίνακα, ἀλλὰ μικρόν, δημοσιεύομεν καὶ ἡμεῖς εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου.

Ἴδωμεν τὴν διάταξιν καὶ χρῆσιν τοῦ πίνακος τούτου ἐν τοῖς ἑξῆς προβλήμασιν.

Πρόβλημα. I. Εὑρεθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 59.

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον ἐπὶ τῆς στήλης, ἥτις φέρει ἐπιλίδα Ἀριθ., τὸν ἀριθμὸν 59 καὶ ἀντιγράφομεν κατόπιν

τὸν ἐν τῇ στήλῃ, ἥτις φέρει ἐπικεφαλίδα 0, δεξιὰ τοῦ 59 γεγραμμένον ἀριθμόν. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 59. Προτάσσομεν αὐτοῦ μίαν ἀκεραίαν μονάδα, ἥτις εἶνε τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ 59 καὶ ἔχομεν οὕτω τὸν ζητούμενον λογάριθμον μετὰ 5 δεκαδικῶν ψηφίων.

ΣΗΜ. Ἐν τῷ πίνακι, ὅπερ δημοσιεύομεν, δὲν ἐμπεριέχεται τὸ χαρακτηριστικόν, ὡς εὐκόλως εὑρισκόμενον.

Πρόβλημα II. Εὑρεθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 365.

Λύσις. Εὑρίσκομεν εἰς μὲν τὴν στήλην, ἥτις φέρει ἐπικεφαλίδα Ἀριθ., τὸν ἀριθμὸν 36, εἰς δὲ τὴν πρώτην ὁριζοντίαν σειρὰν τὸν ἀριθμὸν 5 καὶ ἀντιγράφομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 365 ἐκ τοῦ μέρους ὅπου συναντᾶται ἡ ὁριζοντία, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ 36, μετὰ τῆς κατακορύφου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ 5.

ΣΗΜ. Τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλειτέρων τοῦ 1 καὶ μικροτέρων τοῦ 10 εὑρίσκομεν ἐν τῇ στήλῃ 0 ἀντικρὺ τῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλειτέρων τοῦ 10 καὶ μικροτέρων τοῦ 100.

Οὕτως· ὁ λογάριθμος τοῦ 5 εὑρίσκεται ἀντικρὺ τοῦ 50· ὁ λογάριθμος τοῦ 8 ἀντὶ τοῦ 80 καὶ οὕτω καθεξῆς.

Πρόβλημα III. Εὑρεθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 56743.

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 56743 εἶνε ἴσον τῷ δεκαδικῷ μέρει τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 567,43 καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 567,43 εἶνε μεγαλείτερος τοῦ 567 κατὰ 43 ἑκατοστὰ, παραδεχόμενοι ὅτι ἡ αὔξησις τῶν ἀριθμῶν εἶνε ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν λογαρίθμων αὐτῶν, εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον λογάριθμον ὡς ἑξῆς.

Ἀντιγράφομεν κατὰ πρῶτον τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 567, ὅπερ εἶνε 75358. Λαμβάνομεν τὴν διαφορὰν τοῦ ἀριθμοῦ 75358 καὶ τοῦ ἀριθμοῦ 75445 ὅστις εὑρίσκεται δεξιὰ τοῦ 75358 καὶ ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν 87 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 0,43, προσθέτομεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου, ὅπερ εἶνε 37, εἰς τὸν ἀριθμὸν 75358 καὶ ἔχομεν οὕτω τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 56743. Προτάσσομεν τὸ χαρακτηριστικὸν 4 καὶ ἔχομεν τὸν ζητούμενον λογάριθμον.

ΣΗΜ. Ἡ διαφορὰ τοῦ ἀντιγραφομένου λογαρίθμου ἀπὸ τοῦ δεξιόθεν αὐτοῦ γεγραμμένου ἀριθμοῦ λέγεται διαφορὰ τοῦ πίνακος.

Κανών. Ἵνα εὕρωμεν τὸν λογάριθμον παντὸς ἀριθμοῦ, λαμβάνομεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἀποτελεῖται ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων ψηφίων τοῦ δοθέντος· εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν τοῦ πίνακος· πολλαπλασιάζομεν αὐτὴν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις ἀποτελεῖται ὑπὸ τῶν ἄλλων ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ, ἐξαιρουμένων τῶν τριῶν πρώτων· ἀπορρίπτομεν ἐκ τῶν δεξιῶν τοῦ γινομένου ἰσάριθμα τοῖς ψηφίοις τοῦ ἀριθμοῦ, ἐφ' ὃν ἐπολλαπλασιάσαμεν τὴν διαφορὰν τοῦ πίνακος καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν προσθέτοντες εἰς τὸν ἀντιγραφέντα λογάριθμον, ἔχομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου.

Πρόβλημα IV. Εὑρεθήτω ὁ ἀριθμὸς ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν λογάριθμον 4,68937.

Λύσις. Ζητοῦμεν κατ' ἀρχὰς εἰς τὴν στήλην 0 τὸν ἀριθμὸν 68937· καὶ ἂν μὲν εὕρωμεν αὐτὸν, ἀντιγράφομεν τὸν ἐν τῇ στήλῃ, ἥτις φέρει ἐπικεφαλίδα Ἀριθ., ἀριθμὸν καὶ γράφομεν κατόπιν αὐτοῦ τρία μηδενικὰ, ἵνα ἀποτελέσωμεν ἀριθμὸν πενταψήφιον, συμφώνως τῷ χαρακτηριστικῷ τοῦ δοθέντος λογα-

ρίθμου· ἂν δὲ δὲν ὑπάρχῃ γεγραμμένος λαμβάνομεν ἐκ τῶν μικροτέρων αὐτοῦ ἀριθμῶν τὸν μᾶλλον πλησιάζοντα εἰς αὐτὸν καὶ ἀκολουθοῦντες τὴν αὐτὴν ὁριζόντιον ζητοῦμεν πάλιν τὸν ἀριθμὸν 68937· καὶ ἂν μὲν εὕρωμεν αὐτὸν ἀντιγράφομεν τὰ ψηφία, ἅτινα κεῖνται εἰς τὴν στήλην Ἀριθ. καὶ εὑρίσκονται εἰς τὴν αὐτὴν μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ὁριζοντίαν γραμμήν, ἐπιτάσσοντες αὐτοῖς καὶ τὸ ψηφίον ὅπερ φέρει ἐπικεφαλίδα ἡ κατακόρυφος εἰς ἣν εὑρίσκεται ὁ ἀριθμός· ἂν δὲ δὲν εὕρωμεν αὐτόν, ὡς συμβαίνει καὶ ἐνταῦθα, λαμβάνομεν ἐκ τῶν μικροτέρων αὐτοῦ ἀριθμῶν τὸν μᾶλλον πλησιάζοντα εἰς αὐτὸν ὅστις εἶνε ἐνταῦθα 68931, καὶ ἀντιγράφομεν τὸν ἀριθμὸν 489 ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτόν· διαιροῦντες δὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν 68931 καὶ 68937, ἥτις εἶνε 6, διὰ τῆς διαφορᾶς τοῦ πίνακος, ἥτις εἶνε 89, προσθέτομεν τὸ πηλίκον 0,067 εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἀποχωρίζομεν ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ 5 ψηφία ὡς ἀκέραιον μέρος τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς εἶνε 48906,7.

ΣΗΜ. Ἵνα εὕρωμεν τὸν λογάριθμον δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μικροτέρου ἢ μεγαλειτέρου τῆς μονάδος, ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις προκύπτει μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῆς ὑποδιαστολῆς καὶ προτάσσομεν τὸ χαρακτηριστικὸν σύμφωνα τοῖς μέχρι τοῦδε εἰρημένοις.

12. *Θεώρημα.* Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου πολλῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων αὐτῶν.

Ἔστω

$$\left.\begin{array}{l} \chi = \text{λογ. } \alpha \\ \psi = \text{λογ. } \beta \\ \omega = \text{λογ. } \gamma \end{array}\right\} \quad (1)$$

καὶ ἀποδειχθήτω ὅτι

$$\chi+\psi+\omega = \text{λογ. } \alpha.\ \beta.\ \gamma.$$

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι· ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) ἐξάγονται αἱ ἰσότητες

$$10^{\chi} = \alpha$$

$$10^{\psi} = \beta$$

$$10^{\omega} = \gamma$$

Ἀλλ' ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἰσότητας ταύτας πορίζόμεθα

$$10^{\chi+\psi+\omega} = \alpha.\ \beta.\ \gamma$$

ἐξ ἧς $\chi+\psi+\omega = \text{λογ. } \alpha.\beta.\gamma.$ ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. Ἵνα εὕρωμεν λοιπὸν τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον ἑκάστου παράγοντος, καὶ ζητοῦμεν εἰς τὸν πίνακα τὸν ἀριθμὸν ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὑρεθησομένων λογαρίθμων.

ΣΗΜ. Κατὰ παρόμοιον τρόπον ἀποδεικνύονται καὶ τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

1. Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν.

2. Ὁ λογάριθμος τῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος ἰσοῦται τῷ λογαρίθμῳ τοῦ ἀριθμοῦ, πολλαπλασιαζομένῳ ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως.

3. Ὁ λογάριθμος τῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος ἰσοῦται τῷ λογαρίθμῳ τοῦ ἀριθμοῦ, διαιρουμένῳ διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης.

ΣΗΜ. α. Ἡ ἀπόδειξις τῶν θεωρημάτων τούτων προβάλλεται τοῖς μαθηταῖς ὡς ζήτημα.

ΣΗΜ. β'. Τὸ τελευταῖον τῶν ἀνωτέρω τριῶν θεωρημάτων δεικνύει ὅτι, ἵνα εὕρωμεν μίαν οἱανδήποτε ρίζαν ἑνός τινος ἀριθμοῦ, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ζητοῦμεν εἰς τὸν πίνακα τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἀντιστοιχεῖ τῷ πηλίκῳ τοῦ εὑρεθέντος λογαρίθμου διαιρουμένου διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης. Οὕτως· ἵνα εὕρωμεν τὴν τρίτην ρίζαν τοῦ 512, διαιροῦμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 512, ὅστις εἶνε 2,70927 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3 καὶ ζητοῦντες τὸν ἀριθμὸν ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ πηλίκον 0,90309, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 512 εἶνε 8.

ΣΗΜ. γ'. Τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα παρίστανται ὑπὸ τῶν ἑξῆς τύπων·

$$\text{λογ.}\frac{\alpha}{\beta} = \text{λογ.}\alpha - \text{λογ.}\beta$$

$$\text{λογ.}\alpha^{\mu} = \mu.\text{λογ.}\alpha$$

$$\text{λογ.}\sqrt[\mu]{\alpha} = \frac{\text{λογ.}\alpha}{\mu}$$

Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων.

I.

Περὶ ἀνατοκισμοῦ.

13. Λέγομεν ὅτι δανείζομεν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ, ἢ ἐπὶ συνθέτοις τόκοις, ὅταν εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους προσθέτωμεν τὸν τόκον εἰς τὸ κεφάλαιον.

Γενικὸν πρόβλημα τοῦ ἀνατοκισμοῦ. Ἐδανείσαμεν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ κεφάλαιον α, πόσους συνθέτους τόκους θέλομεν λάβει μετὰ ν ἔτη, ὑποτιθεμένου, ὅτι τὸ ἐπιτόκιον εἶνε ε;

Λύσις. Ἐπειδὴ 100 νομισματικαὶ μονάδες δίδουσιν εἰς 1 ἔτος τόκον ε, μία νομισματικὴ μονὰς θέλει δώσει $\frac{\varepsilon}{100}$ καὶ α νομισματικαὶ μονάδες $\frac{\alpha \times \varepsilon}{100}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ α νομισματικαὶ μονάδες δίδουσι τόκον $\frac{\alpha \times \varepsilon}{100}$, τὸ κεφάλαιον τοῦ δανείου εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους θέλει εἶναι $\alpha + \frac{\alpha \times \varepsilon}{100}$, ἤτοι $\alpha \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον μετὰ παρέλευσιν μὲν τοῦ δευτέρου ἔτους τὸ κεφάλαιον θέλει εἶναι $\alpha \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$ ἤτοι $\alpha \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2$, μετὰ παρέλευσιν δὲ τοῦ τρίτου ἔτους $\alpha \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^3$ καὶ μετὰ παρέλευσιν τῶν ν ἐτῶν $\alpha \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}$.

Ὥστε· ἐὰν καλέσωμεν Α τοὺς ζητουμένους συνθέτους τόκους, θέλομεν ἔχει τὸν τύπον

$$\text{Α} = \alpha \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}. \qquad (1)$$

ὅστις, λαμβανομένων τῶν λογαρίθμων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, μεταπίπτει εἰς τὸν ἑξῆς·

$$\text{Λογ. Α} = \text{λογ.}\alpha + \nu.\ \text{λογ.}\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right).$$

Ἐφαρμογή. Ἔστω $\alpha = 3600$· $\varepsilon = 4\frac{1}{2}$ καὶ $\nu = 20$.

Ἐπειδὴ $\varepsilon = 4,5$, ὁ μὲν ἀριθμὸς $\frac{\varepsilon}{100}$ θέλει ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ 0,045, ὁ δὲ ἀριθμὸς $1 + \frac{\varepsilon}{100}$ τῷ ἀριθμῷ 1,045. Ὥστε

$$\text{Λογ. A} = \begin{cases} \text{λογ. } 3600 \\ \\ +20 \times \text{λογ. } (1{,}045) \end{cases}$$

Ἀλλὰ

$$\begin{array}{rl} \text{Λογ. } 3\,600 & = 3{,}55630 \\ 20 \times \text{λογ. } 1{,}045 & = 0.38220 \\ \hline \text{λογ. A} & = 3.93850 \end{array}$$

καὶ $\text{A} = 8679{,}6.$

14. Ἂς λάβωμεν καὶ πάλιν τὸν τύπον

$$\text{Λογ. A} = \text{λογ.}\alpha + \nu.\ \text{λογ.}\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Ἐὰν μὲν ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὴν ποσότητα $\nu.\ \text{λογ.}\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$, θέλομεν ἔχει τὸν τύπον

$$\text{λογ.A} - \nu.\ \text{λογ.}\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) = \text{λογ.}\alpha$$

διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον δεδομένων τῶν συνθέτων τόκων, τοῦ χρόνου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου.

Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν τὸν λογ.α καὶ διαιρέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον διὰ τοῦ $\text{λογ.}\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$, θέλομεν εὕρει τὸν τύπον

$$\nu = \frac{\text{λογ. A} - \text{λογ. } \alpha}{\text{λογ.}\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)}$$

ὅστις δίδει τὸν χρόνον.

Ἐὰν δὲ τέλος ἀφαιρέσωμεν τὸν λογ. α καὶ διαιρέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον διὰ τοῦ ν, θέλομεν πορισθῆ τὸν τύπον

$$\text{λογ.}\left[1 + \frac{\varepsilon}{100}\right] = \frac{\text{λογ. A} - \text{λογ.}\alpha}{\nu}$$

ὅστις δίδει τὸν $\text{λογ.}\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$, δι' οὗ εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ πίνακος τὴν ἀξίαν τοῦ $1 + \frac{\varepsilon}{100}$, ἣν ἐλαττοῦντες κατὰ μίαν μονάδα, λαμβάνομεν τὴν ἀξίαν τοῦ $\frac{\varepsilon}{100}$, ἐξ οὗ τὸ ἐπιτόκιον.

II.

Περὶ χρεωλυσίας.

15. Λέγοντες ὅτι δανειζόμεθα χρήματα χρεωλυτικῶς, ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, ἐπὶ ὡρισμένον ἀριθμὸν ἐτῶν, πληρώνομεν τὸ αὐτὸ ποσὸν πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ χρέους ἡμῶν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ τεθειμένου.

Τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον θὰ πληρώνωμεν ἐτησίως λέγεται χρεώλυτρον. Εἶνε δὲ πάντοτε μεγαλείτερον τῶν ἐτησίων τόκων τοῦ κεφαλαίου, διότι, ὄντων μὲν τῶν τόκων μεγαλειτέρων, τὸ κεφάλαιον αὐξάνει, παρερχομένων τῶν ἐτῶν· ὄντων δὲ τῶν τόκων ἴσων, τὸ κεφάλαιον μένει ἀμετάβλητον· εἰς ἀμφοτέρας δὲ τὰς περιστάσεις, ἡ ἐξόφλησις τοῦ χρέους δὲν εἶνε δυνατή.

Γενικὸν πρόβλημα τῆς χρεωλυσίας. Ἐδάνεισέ τις κεφάλαιον α χρεωλυτικῶς. Πόσον χρεώλυτρον θὰ λαμβάνῃ, ὑποτιθεμένου ὅτι τὸ μὲν ἐπιτόκιον εἶνε ε, ἡ δὲ ἐξόφλησις μέλλει νὰ γίνῃ μετὰ ν ἔτη;

Λύσις. Ἂς ὀνομάσωμεν X τὸ χρεώλυτρον.

Ἐπειδὴ ἡ πρώτη δόσις τοῦ χρεωλύτρου θὰ μείνῃ εἰς χεῖρας τοῦ δανειστοῦ $\nu - 1$ ἔτη, ἡ δευτέρα $\nu - 2$, ἡ τρίτη $\nu - 3$ καὶ οὕτω καθεξῆς, ὁ δανειστὴς, καίτοι λαμβάνει πάντοτε X, ὀφείλει νὰ πιστώσῃ τὸν ὀφειλέτην του μετὰ τὴν πρώτην δόσιν διὰ τοῦ ποσοῦ $\text{X}\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu - 1}$, μετὰ τὴν δευτέραν διὰ τοῦ

ποσοῦ $X\times(1+\frac{\varepsilon}{100})^{\nu-2}$ καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἡμέραν τοῦ δανείου ἐχρέωσεν ὁ δανειστὴς τὸν ὀφειλέλην του διὰ τοῦ ποσοῦ $\alpha\times(1+\frac{\varepsilon}{100})^{\nu}$, ὅταν ἐπέλθῃ ἡ ἐξόφλησις τοῦ χρέους, θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης

$$x\left(1+\tau\right)^{\nu-1}+x\times\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu-2}+\ldots..$$

$$+x\times\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)+x=\alpha\times\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}$$

ἢ ἡ ἰσότης

$$x+x\times\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)+\ldots.+x\times\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu-1}$$

$$=\alpha\times\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}$$

ἢ

$$x\times\left[1+\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)+\ldots.+\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu-1}\right]$$

$$=\alpha\times\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}.$$

ἀλλὰ τὸ ποσὸν, ὅπερ εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ἀγκύλης, εἶνε τὸ ἄθροισμα γεωμετρικῆς προόδου αὐξούσης καὶ ἰσοδυναμεῖ τῷ ποσῷ $\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}-1}{\frac{\varepsilon}{100}}$. Ὥστε ἡ ἀνωτέρω ἰσότης μεταπίπτει εἰς τὴν ἑξῆς

$$x\times\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}-1}{\frac{\varepsilon}{100}}=\alpha\times\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}$$

ἐκ τῆς ὁποίας, διαιρουμένων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}-1}{\frac{\varepsilon}{100}}$ προκύπτει

$$x=\frac{\alpha\times\frac{\varepsilon}{100}\times\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}}{\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}-1}.$$

Ἐὰν τέλος καλέσωμεν Κ τὸ ποσὸν $\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}$, θὰ ἔχωμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$K=\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}$$

ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$x=\frac{\alpha\times\frac{\varepsilon}{100}\times K}{K-1}$$

Ἐὰν δὲ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους θέλομεν ἔχει

$$\log K=\nu\times\log\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$$

$$\log.X=\log.\alpha+\log.\frac{\varepsilon}{100}+\log.K-\log.(K-1).$$

Ἐφαρμογή. Ἔστω

$$\alpha=50000\text{ φρ.},\ \nu=40,\ \varepsilon=5.$$

Τότε θὰ ἔχωμεν

$$\log(1{,}05)=0{,}02119$$
$$40.\log(1{,}05)=0{,}84760$$
$$K=7{,}04$$

$$\log X = \begin{matrix} \log.\ \alpha & = 4{,}69897 \\ \log.\ \frac{\varepsilon}{100} & = \bar{2}{,}69897 \\ \log.\ K & = 0{,}84760 \\ \log.(K-1) & = \bar{1}{,}21896 \end{matrix} = 3{,}46450$$

καὶ

$$X = 2914{,}10$$

16. *Εὕρεσις τοῦ χρόνου.* Προηγουμένως ἀπεδείξαμεν ὅτι

$$X = \frac{\alpha \times \frac{\varepsilon}{100} \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu} - 1}$$

ἀλλ' ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ $\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu} - 1$, θέλομεν ἔχει

$$X \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu} - X = \alpha \times \frac{\varepsilon}{100} \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}$$

Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης τὸν ἀριθμὸν $X - \alpha \times \frac{\varepsilon}{100} \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}$, θέλομεν πορισθῆ

$$X \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu} - \alpha \times \frac{\varepsilon}{100} \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu} = X$$

Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν τὸ πρῶτον μέλος ὡς γινόμενον τοῦ $\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}$ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ $X - \alpha \times \frac{\varepsilon}{100}$, θέλομεν ἔχει

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu} \left(X - \alpha \times \frac{\varepsilon}{100}\right) = \alpha$$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $X - \alpha \times \frac{\varepsilon}{100}$, θέλομεν πορισθῆ

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu} = \frac{X}{X - \alpha \times \frac{\varepsilon}{100}}$$

Ἐὰν δὲ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, θέλομεν ἔχει

$$\nu.\ \log.\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) = \log.\ X - \log.\left(X - \alpha \times \frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη διὰ τοῦ ποσοῦ $\log.\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$ θέλομεν πορισθῆ

$$\nu = \frac{\log.\ X - \log.\left(X - \alpha \times \frac{\varepsilon}{100}\right)}{\log.\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)}.$$

ΤΕΛΟΣ.

ISMANOGLIO

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΩΝ ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ.

—

Ἐν Σελ.	29	σίχ. 6 ἀντὶ τῷ	27 . . .	γραπ. τῷ πηλίκῳ τοῦ	27.
»	»	» 16 »	72 . . .	»	27
»	54	ἀντὶ 900000	. . .	»	800000
»	»	» $\frac{5}{8}$	. . .	»	$\frac{45}{64}$
»	77	» 1 σχοιν=1000 σαδ.		» 1 σχοιν.=10 σαδ.	
»	82	σίχ. 16 ἀντὶ α	. . .	»	χ
»	»	» 18 » $\chi=\frac{B\times T\times\alpha}{B\times\Upsilon}$		» $\chi=\frac{B\times T\times\alpha}{\beta\times\tau}$	
»	84	ἀντὶ 12,3995 ὑποχιλιάμ.		»	25,3995
»	131	σίχῳ 28 ἀντὶ $2\times70\times5$		»	$2\times70+5$.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΙ

ΜΕΤΑ 5 ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΨΗΦΙΩΝ

ΑΠΟ ΤΟΥ 1 — 1000.

Αριθ.	Λογάριθμοι.									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03342	03743
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070	06446	06819	07188	07555
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691	10037	10380	10721	11059
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033	13354	13672	13988	14301
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137	16435	16732	17026	17319
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033	19312	19590	19866	20140
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748	22011	22272	22531	22789
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304	24551	24797	25042	25285
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717	26951	27184	27416	27646
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003	29226	29447	29667	29885
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188	51322	51455	51587	51720
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020
Αριθ.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Λογάριθμοι.									

Λογάριθμοι.

Αριθ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283
35	54407	54531	54654	54777	54901	55023	55145	55267	55388	55509
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957
55	74036	74115	74194	74273	74350	74429	74507	74586	74663	74741
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268
Αρθ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Λογάριθμοι.

Λογάριθμοι.

Αριθ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708
79	89765	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328
Αριθ.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Λογάριθμοι.

Αριθ	Λογάριθμοι.									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169	92221	92273	92324	92376
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957
Αριθ.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Αριθ. Λογάριθμοι.									

ΒΙΒΛΙΟΔΕΤΕΙΟΝ
ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΥ
ΕΝ ΣΑΛΑΤΑ