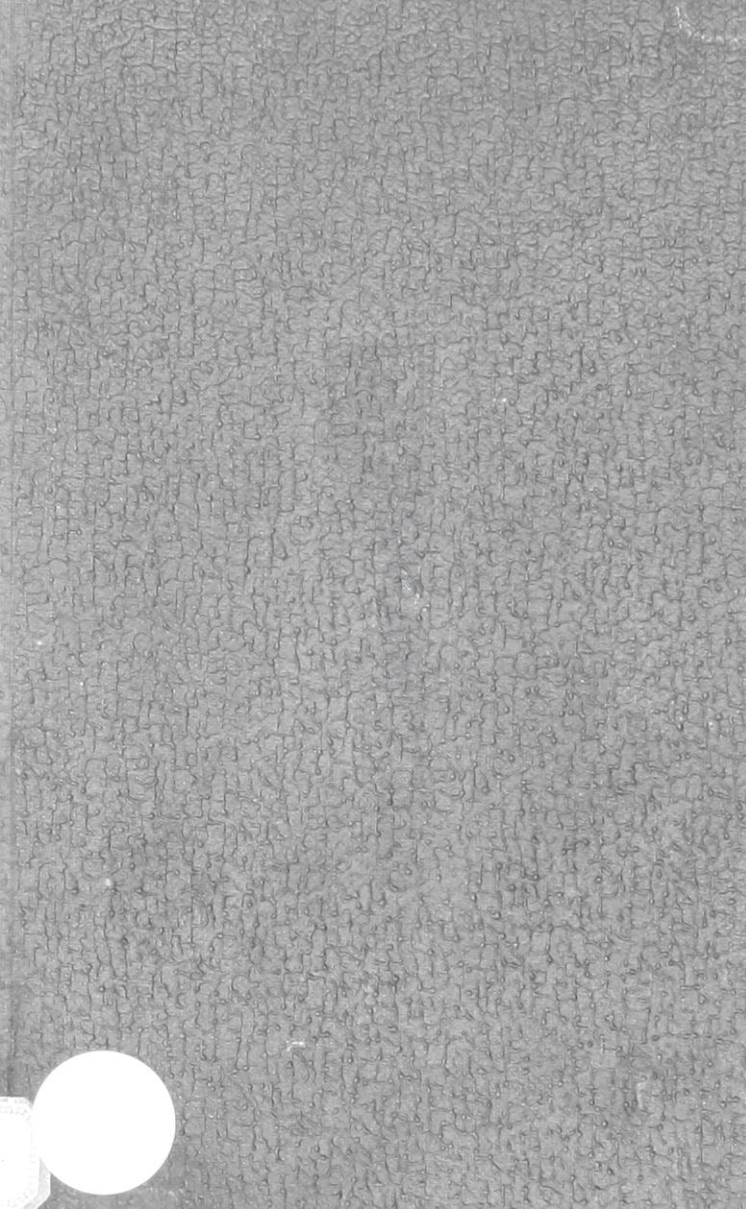




БІБЛІОТЕКА



АДМБ'

№ 1425
Α.

ΒΙΒΛΙΟΚΛΟΝΑΙΔΕΙΑ

ΤΩΝ

ΚΟΡΑΣΙΩΝ

Εἰς εἴκοσι τομίδια,

συλλεγεῖσα

ὑπὸ Δ. Ν. ΦΟΥΔΑ,

καὶ ἐκδοθεῖσα

ὑπὸ ΑΔ. ΣΗ.

Κατ' ἐγκρίσιν τῆς τοῦ Χριστοῦ Μ. Ἐκκλησίας.

ΣΥΝΟΨΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ,
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ, ἢ ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑΣ,
καὶ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ.

Δύο τομίδια εἰς ἑν.



ΕΝ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥΠΟΛΕΙ,

ΤΥΠΟΙΣ Ι. ΛΑΖΑΡΙΔΟΥ.

1852.

Να α νηαη
η Λογιστής



Πρώτος Τυπογράφος

Λογ. 102.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Εἰς τὴν συλλογὴν τοῦ παρόντος τομιδίου κατὰ πρῶτον ἡ Ἀριθμητικὴ τίθεται, ὡς ἀπαραίτητον μάθημα εἰς τὸν κοινωνικὸν βίον. Εἶναι ἐνταυτῷ καὶ διεγερτικὸν τῶν ψυχικῶν δυνάμεων τοῦ ἀνθρώπου, καθὼς καὶ αὐτὴ ἡ πεῖρα μᾶς τὸ ἀπέδειξε.

Τοῦ μαθήματος τούτου ἡ διδασκαλία πρέπει νὰ γίνεται ἀπαξ τῆς ἐβδομάδος, διὰ νὰ μὴ βαρύνῃ τὰς πρωτοπείρους, καὶ τὰς ἐμποδίζῃ ἀπὸ ἄλλων ἐργασιῶν, εἰς διωρισμένην ὥραν, π. χ. τὴν τετάρτην, καθ' ἣν Ἑλληνικὸν μάθημα δὲν γίνεται.

Εἰς διάσκησιν ἑνὸς ἔτους δὲν εἶναι μικρὸν ὄφελος τῶν μαθητριῶν, ὥστε νὰ μάθωσι καλὰ τὰς 4 πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς, ἥτοι: Σύννοψιν ἢ Πρόσθεσιν, Ἀφαίρεσιν, Πολλαπλασιασμόν καὶ Διαίρεσιν.

Τὸ Β'. ἔτος ἡμποροῦν νὰ ἐξακολουθήσωσι τὰ λοιπὰ τῶν κλασμάτων. Ὁ δὲ διδάσκαλος δὲν πρέ-

πει νὰ εὐχαρισῆται εἰς μόνα τὰ παραδείγματα τῆς παρούσης συνόψεως, ἀλλὰ νὰ φέρῃ καὶ ἄλλα, ὅσα ἤθελεν ἐγκρίνει, τῶν συναλλαγῶν τοῦ κοινωνικοῦ βίου, καὶ νὰ προσπαθῇ νὰ τέπρῃ δι' αὐτῶν τὸ πνεῦμα τῶν μαθητριῶν μὲ ὑπομονήν, ἐὰν εὐθὺς δὲν κατελήφθη ὁ λόγος. — Διὰ δὲ τὴν εὐκολίαν ἐτέθησαν, ἀντὶ τῶν δείξεων, μόνον αἱ δοκιμαὶ τῶν πράξεων. — Ἀφέθησαν δὲ καὶ αἱ ὑψηλότεραι ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων διὰ νὰ τὰς διδαχθῶσιν ὅσαι ἐξ αὐτῶν θέλουσι ν' ἀκούσωσι τελειότερα τὴν ἐπιστήμην ταύτην.

Κατετάχθησαν δὲ ἐνταῦθα τὰ στοιχειωδέστερα μόνον καὶ τὰ εὐληπτότερα. — Πολλὰ ὀλίγα ἐξετέθησαν περὶ μεθόδου τῶν τριῶν, ὀλιγώτερα περὶ βαθμῶν καὶ ῥιζῶν, καὶ περὶ συμβολικοῦ Λογισμοῦ, πρὸς ἀπλὴν καὶ μικρὰν μόνον ἰδέαν τῶν πρωτοπειρῶν. Ἐὰν δ' ἐξ αὐτῶν τινα ὁ διδάσκαλος ἐγκρίνῃ ἀκατάλληλα διὰ τὰς νεανίδας, ἡμπορεῖ νὰ τὰ παρατρέξῃ.

Ὡσαύτως καὶ ἡ Γεωμετρία (ἢ Ἐπιπεδομετρία), καὶ ἡ Στερεομετρία, διὰ τὸ τρίτον ἔτος μαθήματα. Εἶναι δὲ χωρισμένα ἀπὸ τὸ ἐπιστημοτικὸν εἶδος τῶν λύσεων καὶ δειξεων, διὰ νὰ μὴ δυσκολεύωνται ἐκ τούτων αἱ ἀρχαίαι, ἀλλ' ἀνεπαισθήτως νὰ μανθάνωσι νὰ λύωσι καὶ νὰ δεικνύωσι κατ' ὀλίγον, ἕως

ὠριμᾶσθαι τὸ λογικόν των εἰς τὴν τούτων τελειότεραν κατάληψιν. Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον ἐξέθεσα γεωμετρικά τινα σχήματα, κατὰ πρῶτον μὲ ἀπλούστατον τρόπον, ὡς προεισαγωγὴν τῶν ἐπομένων. Ταῦτα εἶναι μαθήματα εἰς πάντα πολίτην ἀναγκαῖα, καὶ εἰς πᾶσαν ἀνθρωπίνην κλάσιν. — Πᾶς τεχνίτης ἔχει χρεῖαν τῆς ἐπιστήμης ταύτης, καὶ πᾶς ἄνθρωπος τοῦ κοινωνικοῦ καὶ τοῦ οἰκιακοῦ βίου. Διότι καθεὶς ἐπιθυμεῖ νὰ γνωρίζῃ τὰ διάφορα σχήματα τῶν πραγμάτων, τὰ ὅποια βλέπει, τὴν καταμέτρησιν αὐτῶν, καὶ τὴν ἐφαρμογὴν ἐπομένως· ὅλα ταῦτα ἡ Γεωμετρία μόνη δύναται νὰ τοῦ τὰ χορηγήσῃ. — Διὰ νὰ γίνῃ δὲ τὸ μάθημα τοῦτο χρήσιμον, πρέπει ν' ἀρχίζῃ ἡ διδασκαλία του μετὰ τὸ μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς ἐκ διαλειμμάτων, ὡς κακείνης, ἅπαξ δηλ. τῆς ἐβδομάδος.

Αἱ δυσκολώτεραι (τυχόν) δειξεις προτάσεων τινῶν, καλὸν εἶναι νὰ γίνωνται μηχανικῶς πως. — ὁ κανὼν, ὁ διαβήτης, καὶ τὸ ἡμικύκλιον, ἢ ὁ ἀναγωγεὺς, εἶναι τὰ καταλληλότερα ὄργανα καὶ μέσα τῶν τοιούτων μηχανικῶν δειξεων, τὰς ὁποίας ἡμπορεῖ νὰ κάμῃ ἐπαισθητοτάτας εἰς τοὺς νέους μαθητὰς καὶ νεανίδας ὀυπομονητικὸς καὶ ἐπιτήδειος διδάσκαλος. Ὅσοι δὲ τῶν νέων ἤθελον προχωρήσει εἰς τελειότεραν ἀκρόασιν τῆς Γεωμετρίας

καὶ Στερεομετρίας, θέλουν βοηθηθῇ τὰ μέγιστα,
ἀπὸ τὴν προάσκησιν ταύτην. Ἐὰν δὲ πάλιν ἐξεναν-
τίας ἐκλέξωσι τὴν μερίδα τῶν ἄλλων τοῦ κοινω-
νικοῦ βίου ἀσχολιῶν, δὲν θέλουσι παρατηρεῖ τὸν
αἰσθητὸν τοῦτον κόσμον μετὰ νοῦν παντάπασιν
ἀγεωμέτρητον.

ΣΥΝΟΨΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ.

Περὶ τῆς σημασίας τῶν ἀριθμητικῶν χαρακτήρων.

§. 1. Ἡ μονὰς σημαίνει ἓν πρᾶγμα, ἥγουν ἓν βί-
βλιον, ἓν γρόσιον, ἓνα ἄνθρωπον κτλ. Πολλὰ μο-
νάδες, αἱ ὁποῖαι σημαίνουν ὁμοειδῆ πρᾶγματα, ἥγουν
γρόσια, ἢ βιβλία, ἢ ἄνθρώπους, κάμνουν τὸν ἀριθμὸν.
Ἀριθμὸς λοιπὸν εἶναι ἄθροισμα πολλῶν μονάδων.

§. 2. Οἱ χαρακτῆρες, μετὰ τοὺς ὁποίους σημαίνουμεν
πάντα ἀριθμὸν, εἶναι οἱ ἐφεξῆς δέκα· 1, 2, 3, 4, 5,
6, 7, 8, 9, 0. Σημαίνουνσι δὲ ὁ 1 ἓν, ὁ 2 δύο, ὁ 3
τρία, ὁ 4 τέσσαρα, ὁ 5 πέντε, ὁ 6 ἕξ, ὁ 7 ἑπτὰ, ὁ 8
ὀκτώ, ὁ 9 ἐννέα καὶ τὸ 0 μηδενικόν· ἡ σημασία τῶν
αὐτῇ λέγεται ἰδίᾳ· ἔχουσι δὲ καὶ ἄλλην σημασίαν το-
πικὴν· διότι ἐὰν γράψωμεν τὴν μονάδα τετράκις οὕτως
1111, ἡ πρὸς δεξιὰν πρώτη μονὰς σημαίνει ἓν, ἡ δὲ
δευτέρα δέκα, ἡ δὲ τρίτη ἑκατὸν, ἡ δὲ τετάρτη χίλια· ἡ
μονὰς λοιπὸν τοῦ δευτέρου τόπου σημαίνει δέκα μονάδας
τοῦ πρώτου, ἥγουν εἶναι δεκάς· ἡ δὲ μονὰς τοῦ τρίτου
σημαίνει δέκα μονάδας τοῦ δευτέρου, ἥγουν δέκα δεκά-
δας, καὶ λέγεται ἑκατοντάς· ἡ δὲ μονὰς τοῦ τετάρτου
σημαίνει δέκα μονάδας τοῦ τρίτου, ἥγουν δέκα ἑκατον-
τάδας, καὶ λέγεται χιλιάς.

§. 3. Πᾶς λοιπὸν χαρακτήρ ἔχει δύο σημασίας· μίαν

ιδίαν, καὶ ἄλλην τοπικὴν εἰς τὸν ἀριθμὸν π. χ. 352, ὁ πρὸς δεξιὰν πρῶτος χαρακτήρ 2 ἔχει τὴν ιδίαν του σημασίαν δύο, καὶ τὴν τοποκὴν μονάδας· ὁ δὲ δεύτερος χαρακτήρ 5 ιδίως μὲν σημαίνει πέντε, τοπικῶς δὲ, δεκάδας· ὁ δὲ τρίτος σημαίνει τρεῖς ἑκατοντάδας· ὁ δὲ χαρακτήρ 0, ὅστις ὀνομάζεται μηδενικόν, ιδίαν σημασίαν δὲν ἔχει· ἀναπληρῶνει ὅμως τὴν ἔλλειψιν τῆς τοπικῆς σημασίας, καὶ δίδει εἰς τὸν πρὸ αὐτοῦ κατ' ἀριστερὰν χαρακτήρα τοπικὴν σημασίαν· οὕτω π. χ. ἐὰν εἰς τὰ δεξιὰ τῆς 1 γραφῇ 0, καὶ γένηται 10, ἡ μονὰς εἰς τὸν δεύτερον τόπον σημαίνει δέκα· εἰς δὲ τὸν τρίτον π. χ. 100, σημαίνει ἑκατόν.

§. 4. Ὅταν λοιπὸν εἶναι πολλοὶ χαρακτήρες κατὰ σειρὰν γραμμένοι, ὁ μὲν πρῶτος εἰς τὰ δεξιὰ σημαίνει μονάδας, ὁ δὲ δεύτερος δεκάδας, ὁ δὲ τρίτος ἑκατοντάδας, ὁ δὲ τέταρτος χιλιάδας, ὁ δὲ πέμπτος δεκάδας χιλιάδων, ὁ δὲ ἕκτος ἑκατοντάδας χιλιάδων, ὁ δὲ ἑβδομος ἑκατομμύρια, ἡ милли́ониа, ὁ δὲ ὀγδοὺς δεκάδας ἑκατομμυρίων, ὁ δὲ ἕννατος ἑκατοντάδας ἑκατομμυρίων, ὁ δὲ δέκατος μονάδας δισεκατομμυρίων, ὁ δὲ ἐνδέκατος δεκάδας δισεκατομμυρίων, ὁ δὲ δωδέκατος ἑκατοντάδας δισεκατομμυρίων, ὁ δὲ δέκατος τρίτος ἕως τοῦ δεκάτου πέμπτου τρισεκατομμύρια, ὁ δὲ ἕκτος ἕως τοῦ δεκάτου ὀγδοῦ τετρακισεκατομμύρια, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 5. Ἀπὸ τὰ εἰρημένα μανθάνομεν πῶς νὰ ἐκφράζωμεν πάντα γραμμένον ἀριθμὸν· ἄς εἶναι γραμμένος ἀριθμὸς π. χ. 357893754783252· ἄρχισε ἀπὸ τὰ δεξιὰ καὶ ὑπάγων εἰς τὰ ἀριστερὰ μοίρασε τον μὲ ὑποδιαστολὰς εἰς κόμματα, ἀπὸ τὰ ὅποια νὰ περιέχῃ καθὲν τρεῖς χαρακτήρας· τὸ τελευταῖον κόμμα ἔμπορεῖ νὰ περιέχῃ

καὶ ὀλιγώτερον ἀπὸ τρεῖς. Τὸ πρῶτον λοιπὸν κόμμα, ἢ ἡ πρώτη τριάς σημαίνει μονάδας· τὸ δὲ δεύτερον, χιλιάδας· τὸ τρίτον, ἑκατομμύρια· τὸ τέταρτον, δισεκατομμύρια κ τ λ. Μετὰ δὲ ταύτην τὴν μοίρασιν ἄρχισε νὰ διαβάζῃ· ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ εἰς τὰ δεξιὰ, καὶ εἰς τὴν πρώτην ὑποδιαστολὴν λέγε· τρισεκατομμύρια, εἰς τὴν δευτέραν, δισεκατομμύρια, εἰς τὴν τρίτην, ἑκατομμύρια, εἰς τὴν τετάρτην, χιλιάδες, καὶ εἰς τὴν τελευταίαν ὑποδιαστολὴν ἐννοῦνται αἱ μονάδες· μὲ τὸν τρόπον τοῦτον μεταβάλλεις τὸν προειρημένον ἀριθμὸν εἰς τὸν 357, 893, 754, 783, 252, τὸν ὅποιον ἀναγινώσκεις· Τριακόσια πενήντα ἑπτὰ τρισεκατομμύρια, ὀκτακόσια ἑννεήντα τρία δισεκατομμύρια, ἑπτακόσια πενήντα τέσσαρα ἑκατομμύρια, ἑπτακόσια ὀγδοῇντα τρεῖς χιλιάδες, καὶ διακόσια πενήντα δύο μονάδες· τὸν δὲ ἀριθμὸν π. χ. 41, 364, 035 ἀναγινώσκεις· τεσσαράκοντα ἑν ἑκατομμύρια, τριακόσιαι ἐξήντα τέσσαρες χιλιάδες, καὶ τριάντα πέντε μονάδες, ἐπειδὴ τὸ 0 σημαίνει ὅτι δὲν ὑπάρχει καμμία ἑκατοντάς (§. 3).

§. 6. Ὅταν ἐκφραζόμενον ἀριθμὸν θέλεις νὰ γράψῃς, πρόσθε εἰς τὰ πρῶτα μέρη τοῦ ἀριθμοῦ· ἔταν π. χ. ἀκούσης δισεκατομμύρια, συμπέρανε ὅτι μετὰ τὰ δισεκατομμύρια θέλουν ἀκολουθήσει καὶ ἄλλαι τριάδες τέσσαρες χαρακτήρων (§. 5)· μετὰ τὰ δισεκατομμύρια γράψε ὑποδιαστολὴν καὶ ὀξεῖαν ἄνωθεν, τὸ αὐτὸ κάμε καὶ μετὰ τὰ ἑκατομμύρια· μετὰ δὲ τὰς χιλιάδας, σημείωσε μόνον ὑποδιαστολὴν. Μὲ τοῦτον τὸν τρόπον εἶσαι βέβαιος ὅτι ἔγραψες τὸν ἐκφρασθέντα ἀριθμὸν. Εἰς δὲ τοὺς τόπους ὅπου δὲν ἀκούεις ὄνομα, βάλλε μηδενικόν. Εἰπέ τις π. χ. 25 ἑκατομμύρια, τριάντα χιλιάδες καὶ ὀκτὼ γρόσια· ταῦτα θέλεις γράφει οὕτως· 6,030,008,

Περὶ Προσθέσεως καὶ Ἀφαιρέσεως.

§. 7. Ὅταν θέλεις νὰ προσθέσῃς ἀριθμοὺς τινὰς διὰ νὰ εὗρῃς τὸ κεφάλαιόν των ἀκολουθεῖ τοὺς ἐφεξῆς κανόνας.

α'. Γράψῃς τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τοιαύτην τάξιν, ὥστε αἱ μονάδες νὰ εἶναι ὑποκάτω εἰς τὰς μονάδας, καὶ νὰ σχηματίζωσι μίαν σειρὰν ἀπὸ τὰ ἄνω εἰς τὰ κάτω ὡσαύτως καὶ αἱ δεκάδες, καὶ αἱ ἑκατοντάδες κτλ. καὶ ὑποκάτω ἀπὸ ὅλους σὺρε μίαν γραμμὴν.

β'. Συναψὲ πρῶτον ὅλας τὰς μονάδας, καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν, ἂν εἶναι ὀλιγώτερον ἀπὸ δέκα, γράψῃς το ὑποκάτω ἀπὸ τὰς μονάδας· εἰ δὲ εἶναι δέκα, ἐπειδὴ δέκα μονάδες κάμνουν μίαν δεκάδα (§. 2), ὑποκάτω γράψῃς μηδενικόν, καὶ τὴν δεκάδα φύλαξέ την νὰ τὴν συνάψῃς μὲ τὰς δεκάδας· εἰ δὲ εἶναι περισσότερον ἀπὸ δέκα, γράψῃς τοῦτο τὸ περισσότερον ὑποκάτω, καὶ τὸν δέκα φύλαξέ τον νὰ τὸν συνάψῃς μὲ τὰς δεκάδας· εἰ δὲ εἶναι εἴκοσιν ἢ περισσότερον ἀπὸ εἴκοσι, γράψῃς τὸ μηδενικόν ὑποκάτω, ἢ τὸ περισσότερον, τὸν δὲ εἴκοσι φύλαξέ τον ὡς δύο δεκάδας διὰ νὰ τὸν συνάψῃς ἐφεξῆς· τὸ αὐτὸ δὲ κάμε καὶ εἰς τὰς ἑκατοντάδας, κτλ. οἱ δὲ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς χαρακτηρὲς θέλουν σοῦ δώσῃ τὸ ζητούμενον κεφάλαιον. Τὰ ἐφεξῆς παραδείγματα θέλουν σαφηνίσαι τοὺς κανόνας τούτους.

Ἐνὰς ἔλαθεν εἰς τρεῖς ἡμέρας 352 γρ. 183 γρ.
 12 γρ. Πόσα κάμνουν ὅλα ὁμοῦ; Γράψῃς τοὺς 352
 ἀριθμοὺς καθὼς εἴπαμεν εἰς τὸν πρῶτον κανόνα· 183
 ἔπειτα συναψὲ πρῶτον τὰς μονάδας λέγων· 2 42
 καὶ 3, 5 καὶ 2, 7· γράψῃς λοιπὸν 7 ὑποκάτω 547
 εἰς τὰς μονάδας· ἔπειτα συναψὲ τὰς δεκάδας· 1 καὶ 8,

9 καὶ 5, 14· τὸν μὲν 4 γράψῃς ὑποκάτω εἰς τὰς δεκάδας, τὰ δὲ δέκα, ἐπειδὴ κάμνουν μίαν ἑκατοντάδα (§. 2) φύλαξέ την καὶ συναψὲ την μὲ τὰς ἑκατοντάδας λέγων· 4 καὶ 1, 2 καὶ 3, 5· γράψῃς λοιπὸν καὶ τὸν 5 ὑποκάτω εἰς τὰς ἑκατοντάδας εὗρίσκεις κεφάλαιον 547.

Ἔτερον παράδειγμα.

Τῇ; Εὐρώπῃς ἡ ἐπιφάνεια εἶναι μίλια Γερμανικὰ τετραγωνικὰ
 τῆς Ἀσίας 162,000
 τῆς Ἀφρικῆς 620,000
 τῆς Ἀμερικῆς 530,000
 τῆς Ἀμερικῆς 600,000
 τῆς Νέας Ὀλλανδίας 160,000
 Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῶν πέντε ὁμοῦ 2,072,000
 Ἡπείρων;

§. 8. Διὰ νὰ καταλάβῃς ἂν εἶναι ἀλάνθαστος ὁ λογαριασμός, κάμε δοκιμὴν· ἡ δοκιμὴ τῆς Προσθέσεως γίνεται, ἂν κάμῃς ἀκόμη μίαν φορὰν τὴν συναψὴν ἀπὸ τὰ ἄνω εἰς τὰ κάτω, ἤγουν ἀντίστροφα παρ' ὅ,τι τὴν ἔκαμες πρῶτα, καὶ εὗρῃς πάλιν τὸ αὐτὸ κεφάλαιον· εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα κάμε τὴν συναψὴν οὕτω· 2 καὶ 3, 5 καὶ 2, 7· 5 καὶ 8, 13 καὶ 1, 14· γράψῃς 4 καὶ φύλαξέ την 1 διὰ τὰς ἑκατοντάδας, ὡς εἴπαμεν, ἀνωτέρω· 1 καὶ 3, 4 καὶ 1, 5· καὶ ἐπειδὴ πάλιν τὸ αὐτὸ κεφάλαιον 547 εὗρίσκεις, ἡ πρόσθεσίς σου ἔγινεν ἀλάνθαστος.

Περὶ Ἀφαιρέσεως.

§. 9. Ὅταν ἀπὸ ἑνα ἀριθμοῦν θέλεις ν' ἀφαιρέσῃς ἕνα ἄλλον διὰ νὰ μάθῃς τί ἀπομένει, ἀκολουθεῖ τοὺς ἐφεξῆς κανόνας.

α. Γράψε τὸν μικρότερον ἀριθμὸν ὑποκάτω εἰς τὸν μεγαλύτερον, ὥστε νὰ ἀντιστοιχοῦν αἱ μονάδες τῶν δύο, καὶ αἱ δεκάδες, καὶ αἱ ἑκατοντάδες κτλ. καθὼς καὶ εἰς τὴν Πρόσθεσιν (§. 7).

β'. Ἀρχισε ἀπὸ τὰ δεξιά καὶ ἀφαίρεσε τὰς μονάδας τοῦ μικρότερου ἀριθμοῦ ἀπὸ τὰς τοῦ μεγαλύτερου, καὶ ὅ,τι ἀπομένει, γράψε το ὑποκάτω ἀπὸ τὰς μονάδας· τὸ αὐτὸ κάμνε καὶ εἰς τὰς δεκάδας, ἑκατοντάδας, καὶ ἐφεξῆς.

Ἐνς ἐκέρδισε τὸν περασμένον χρόνον γρόσια 937
937, καὶ ἐξώδευεν 724· πόσα λοιπὸν τοῦ ἔ- 724
μειναν; Ἀποῦ γράψῃς τὸν 724 ὑποκάτω ἀπὸ 243
τὸν 937, ὡς εἶπαμεν (α'), ἀφαίρεσε πρῶτον τὰς μονάδας
ἀπὸ τὰς μονάδας λέγων· 4 ἀπὸ 7, 3· γράψῃς 3 ὑποκάτω
ἀπὸ τὰς μονάδας· δεύτερον, τὰς δεκάδας ἀπὸ τὰς
δεκάδας· 2 ἀπὸ 3, 1· γράψῃς λοιπὸν 1 ὑποκάτω εἰς
τὰς δεκάδας· τρίτον, τὰς 7 ἑκατοντάδας ἀπὸ τὰς 9· καὶ
γράψῃς τὰς 2· μένει λοιπὸν 213.

§. 10. Ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς ὀνομάζεται μειωτέος· ὁ μικρότερος ἀφαιρετέος· καὶ τὸ τί ἀπομένει, διαφορὰ ἢ ὑπόλοιπον.

§. 11. Ὅταν ὅλος ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μικρότερος ἀφ' ὅ-
λον τὸν μειωτέον, αἱ δὲ μονάδες, δεκάδες κτλ. εἶναι με-
γαλῆτεραι ἀπὸ τὰς μονάδας, δεκάδας κτλ. τοῦ μειωτέου,
τότε, ἐπειδὴ τὸ μεγαλύτερον δὲν ἐμπορεῖ ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ
τὸ μικρότερον, πρέπει νὰ δανεισθῇ ἀπὸ τὸν εἰς τὰ ἀρι-
στερὰ γειτονέοντα τόπον μίαν μονάδα, ἢ ὅποια ἀξίζει
δέκα μονάδας τοῦ εἰς τὰ δεξιά γείτονός της τύπου (§. 2),
καὶ νὰ τὴν συνάψῃς μετὰ τὰς παρούσας μονάδας, καὶ οὕτω
νὰ κάμῃς τὴν ἀφαίρεσιν· ἐπάνω τοῦ χαρακτῆρος, ἀπὸ τὸν
ὅποιον ἐδανείσθῃς τὴν μονάδα, γράψῃς στίγμα· ὁ δὲ χα-

ρακτῆρ οὗτος μετὰ τὸ στίγμα ἀξίζει τώρα μίαν μονάδα
ὀλιγώτερον πᾶρ' ὅσας σημαίνει· ἐὰν δὲ ὁ γειτονέων χα-
ρακτῆρ εἶναι μηδὲν, δανείσου ἀπὸ τὸν τρίτον τόπον μίαν
μονάδα, τὴν ὅποιαν φέρε μετὰ τὸν νοῦν σου εἰς τὸν δεύτε-
ρον, ὅπου ἀξίζει 10· ἐκ δὲ τῶν 10 τούτων ἄφες μετὰ τὸν
νοῦν σου εἰς τὸν δεύτερον τόπον 9, καὶ τὴν μονάδα φέρε
τὴν εἰς τὸν πρῶτον τόπον, ὅπου ἀξίζει 10 κτλ. βάλε στίγ-
μα καὶ εἰς τὸν τρίτον τόπον καὶ εἰς τὸ 0· τὸ μηδὲν μετὰ τὸ
στίγμα ἀξίζει τότε 9. Μ' ἐχρεώσῃς ἕνας λ.χ. γρόσια 8709,
καὶ μ' ἔδωκεν ἐξ αὐτῶν 5437· πόσα μένουσιν νὰ 8709
μετὰ τῆς 7; 7 ἀπὸ 9, 2· 3 ἀπὸ τὸ 0 δὲν ἀφαι- 5437
ροῦνται· λάβε λοιπὸν μίαν μονάδα ἀπὸ τὸν 7, 3272
καὶ μεταφέρῃς τὴν εἰς τὸν τόπον τοῦ 0, ὅπου ἀξίζει δέκα·
καὶ εἰπὲ· 3 ἀπὸ 10, 7· ἔπειτα, ἐπειδὴ τὰ 7 ἔγειναν 6,
εἰπέ· 4 ἀπὸ 6, 2· καὶ τελευταῖον 5 ἀπὸ 8, 3· ἔμειναν
λοιπὸν νὰ λαμβάνω γρόσια 3272.

Χρεωστῶ ἐνὸς γρόσια 2003, καὶ τοῦ ἔδωκα 135, πό-
σα τοῦ χρεωστῶ ἀκόμη; 5 ἀπὸ 3 δὲν ἀφαιροῦν- 2003
ται· ὑπάγω λοιπὸν εἰς τὸν δεύτερον τόπον νὰ 135
δανεισθῶ μονάδα καὶ δὲν εὗρίσκω· εἰς τὸν τρί- 1868
τον ὁμοίως· λαμβάνω λοιπὸν ἀπὸ τὸν τέταρτον μονάδα
μίαν, ἣτις εἰς τὸν τρίτον ἀξίζει δέκα· ἀπὸ τὰς δέκα
ταύτας λαμβάνω μίαν, καὶ τὴν φέρω εἰς τὸν δεύτερον, ὅ-
που καὶ αὕτῃ ἀξίζει δέκα· ἀπὸ τὰς δέκα ταύτας λαμβά-
νω μίαν καὶ τὴν φέρω εἰς τὸν πρῶτον, ὅπου ἀξίζει δέκα,
καὶ τρία, δεκατρία· εἰς τὸν πρῶτον λοιπὸν τόπον ἔχων
13, εἰς τὸν δεύτερον 9, εἰς τὸν τρίτον 9, εἰς τὸν τέταρ-
τον 1, κάμνω τὴν ἀφαίρεσιν· 5 ἀπὸ 13, 8· 3 ἀπὸ 9,
6· 1 ἀπὸ 9, 8· μηδὲν (τὸ ὅποιον ἐννοεῖται εἰς τὸν τέ-

ταρτον τόπον τοῦ ἀφαιρετέου) ἀπὸ 1, 1' χρεωστῶ λοιπὸν ἀκόμη 1868 γρ.

Ἔτερον παράδειγμα.

Ὁ Κολόμβος ἀνεκάλυψε τὴν Ἀμερικὴν κατὰ	1852
τὸ 1492 Μ.Χ. πόσος καιρὸς εἶναι μέχρι τοῦδε	1492
τοῦ 1852 ;	<u>360</u>

§. 12. Διὰ νὰ βεβαιωθῇ ὅτι εἶναι ἀλάνθαστος ἡ ἀφαίρεσις, σύναψε τὴν διαφορὰν μετὰ τὸν ἀφαιρετέον, καὶ θέλεις λάβει τὸν μειωτέον· ἐὰν δὲν τὸν λάβῃς, ἡ πρᾶξις σου εἶναι ἐσφαλμένη, καὶ πρέπει νὰ τὴν κάμῃς ἀκόμη μίαν φορὰν· εἰς τὸ δεῦτερον παράδειγμα συνεπτῶν τὸν ἀφαιρετέον 135 μετὰ τὴν διαφορὰν 1868, καὶ εὐρίσκων τὸν μειωτέον 2003, συμπεραίνει, ὅτι εἶναι ἀλάνθαστος ἡ πρᾶξις σου.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ.

§. 13. Ἀριθμὸν νὰ πολλαπλασιάσωμεν θέλει νὰ εἴπῃ νὰ τὸν λάβωμεν πολλάκις· τρία λεπτά ἢ παράδες, ἢ πᾶν ἄλλο π. χ. δύο φοραὶ λαμβανόμενα κάμνουν εἴς λεπτά· εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν λοιπὸν δίδονται δύο ἀριθμοί· εἰς τὸν ὅποιον λαμβάνομεν πολλάκις, ἢ τὸν πολλαπλασιάζομεν, καὶ εἰς τὸ παράδειγμά μας εἶναι ὁ 3, καὶ ὀνομάζεται πολλαπλασιαστής· καὶ ἄλλος, ὅστις δείχνει πόσας νὰ λάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ ὀνομάζεται πολλαπλασιαστής· εἰς δὲ τὸ παράδειγμά μας εἶναι ὁ 2· καὶ οἱ δύο λέγονται μετὰ κοινὸν ὄνομα ^{πολλαπλασιαστέον} πολλαπλασιαστέον, ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν, λέγεται ^{προκύπτων} προκύπτων ἢ γινόμενος, ἢ οὐδετέρως τὸ γινόμενον, τὸ προκύπτον, ὅστις εἶναι εἰς τὸ παράδειγμά μας ὁ 6.

§. 14. Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι σύντομος σύναψις, διότι εἰς τὸ παράδειγμά μας ἐὰν συνάψωμεν 3 καὶ 3 λαμβάνομεν κεφάλαιον 6.

Ἔτερον παράδειγμα.

Εἰς ἐννοήσωμεν εἰς πίνακά τινα 5 σειρὰς, ἐκάστη τῶν ὁποίων νὰ περιέχῃ π. χ. 7 μονάδας, φανερόν ὅτι διὰ νὰ εὐρώμεν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων ὧλων πρέπει τὰς 7 τῆς μιᾶς σειρᾶς νὰ λάβωμεν πεντάκις, ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 7 μετὰ 5=35· ἀλλὰ τὰς μονάδας ταύτας ἐμποροῦμεν νὰ θεωρήσωμεν ὡς συνισταμένας ἀπὸ 7 σειρᾶς, καὶ ἐκάστη σειρὰ περιέχει 5 μονάδας· 1 1 1 1 1 1 1 ὅθεν τὸ ἄθροισμά των εὐρίσκεται καὶ 1 1 1 1 1 1 1 ἐὰν λάβωμεν τὸν 5 ἐπτάκις, ἤτοι 1 1 1 1 1 1 1 τὸν πολλαπλασιάσωμεν 5 μετὰ 7· τὸ 1 1 1 1 1 1 1 αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ 1 1 1 1 1 1 1 δι' ὁποιοὺςδήποτε ἄλλους παράγοντας· ὅθεν εἶναι ἀδιάφορον ὡς πρὸς τὸ γινόμενον, ὅποῖος θεωρηθῇ πολλαπλασιαστής, καὶ ὅποῖος πολλαπλασιαστέος.

§. 15. Διὰ νὰ ἀποκτήσῃς ἔξιν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν, πρέπει νὰ μάθῃς ἀπὸ στήθους τὸν Πυθαγορικὸν πίνακα, ἢ τὴν λεγομένην Προπαίδειαν, ἥτις εἶναι ἡ ἐφεξῆς.

1	1	1	5	25
2	2	4	5	30
3	3	6	5	35
4	4	8	5	40
5	5	10	5	45
6	6	12	5	50
7	7	14	6	36
8	8	16	6	42
9	9	18	6	48
10	10	20	6	54
3	3	9	6	60
3	4	12	7	49
3	5	15	7	56
3	6	18	7	63
3	7	21	7	70
3	8	24	8	64
3	9	27	8	72
3	10	30	8	80
4	4	16	9	81
4	5	20	9	90
4	6	24	10	100
4	7	28	10	100
4	8	32	10	100
4	9	36	10	100
4	10	40	10	100

§. 16. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν σημειούμενον προαγουμένως τὰ ἐφεξῆς.

α. Οἱ αὐτοὶ ^{ἐφαρμόζοντες} ποῖηται δίδουν τὸν αὐτὸν προκύπτοντα· ὁ 3 π. χ. νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν 4 κάμνει 12. καὶ ὁ 4 μὲ τὸν 3 πάλιν κάμνει 12· πάντοτε ὅμως συνειθίζουσιν νὰλέγουν τὸν μεγαλύτερον πολλαπλασιαστέον, καὶ τὸν μικρότερον πολλαπλασιαστήν· μ' ὅλον ὅτι εἶναι ἀδι-

ἀφορὸν νὰ δώσωμεν ὅποιον ὄνομα θέλωμεν καὶ εἰς τὸν ἕνα καὶ εἰς τὸν ἄλλον.

β'. Πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος μὲ τὴν μονάδα μένει ὁ αὐτός· διότι ὁ 6 λαμβανόμενος μίαν φορὰν δίδει πάλιν 6.

γ'. Πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος μὲ τὸ μηδενικὸν δίδει προκύπτοντα μηδέν· διότι 5 νὰ τὸν λάβωμεν 0, θέλει νὰ εἴπῃ νὰ μὴ τὸν λάβωμεν παντάπασι, ἤγουν νὰ γράψωμεν μηδέν.

§. 17. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής ἔχῃ ἕνα μόνον χαρακτῆρα, γράψῃ τὸν ὑποκάτω εἰς τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου· καὶ πολλαπλασιάζων πρῶτον τὰς μονάδας, ἔπειτα τὰς δεκάδας, ἑκατοντάδας κτλ. τοῦ πολλαπλασιαστέου, γράψῃ τὰ προκύπτοντα ὑποκάτω

232

εἰς τοὺς τόπους τῶν· εἰς τὸ ἀντικρὺ παράδειγμα 696

πολλαπλασίασε τὸν 2 (μονάδων σημαντικὸν) μὲ τὸν 3, καὶ τὸν 6 γράψῃ ὑποκάτω εἰς τὰς μονάδας· ἔπειτα πολλαπλασίασε τὸν 3 (δεκάδων σημαντικὸν) μὲ τὸν αὐτὸν 3, καὶ τὸν 9 γράψῃ ὑποκάτω εἰς τὰς δεκάδας· τὸν δὲ προκύπτοντα ἀπὸ 2 (ἑκατοντάδων σημαντικὸν) καὶ 3, ἤγουν τὸν 6 γράψῃ εἰς τὸν τόπον τῶν ἑκατοντάδων· προκύπτων λοιπὸν θέλει εἶσθαι ὁ 696.

§. 18. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής ἔχει εἰς τὸ τέλος μηδενικὰ καθὼς ὁ 400, χωρίσέ τα διὰ γραμμῆς, καὶ πολλαπλασίασε μόνον τοὺς σημαντικοὺς χαρακτῆρας, π.χ. τὸν 4, μὲ τὸν πολλαπλασιαστήν, καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ προκύπτοντος πρόσθε· τὰ χωρισθέντα μηδενικά· ἃς εἶναι τοῦ 400 πολλαπλασιαστής ὁ 2·

400

ὁ πολλαπλασιασμὸς λοιπὸν γίνεται εὐκολώτερα, καθὼς φαίνεται ἐνταῦθα.

800

§. 19. Εάν ὁ προκύπτων ὑπὸ τοῦ πρώτου χαρακτη-
 ρ; τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ σύγ-
 κριται ἀπὸ δύο χαρακτηῖρας, εἶναι φανερόν ὅτι περιέχει
 δεκάδας καὶ μονάδας· γράψε λοιπὸν μόνον τὰς μονάδας
 ὑποκάτω ἀπὸ τὰς μονάδας, τὰς δὲ δεκάδας φύλαξε διὰ τὴν
 προσθέσιν εἰς τὸν ἐφεξῆς προκύπτοντα· ἔστω 567
 π. χ. νὰ πολλαπλασιάσῃς 567 μὲ 4· τετράκις 4
 7 κάμνουν 28· γράψε μόνον 8 εἰς τὸν τύπον 2268
 τῶν μονάδων· τετράκις 6 κάμνουν 24, καὶ 2 αἱ φυλαχθεῖ-
 σαι δεκάδες, κάμνουν 26· γράψε μόνον τὰς 6 δεκάδας εἰς
 τὸν τύπον τῶν δεκάδων· αἱ δὲ εἴκοσι δεκάδες, ἐπειδὴ
 κάμνουν δύο ἑκατοντάδας, αἱ φυλαχθοῦν διὰ τὸ ἐφεξῆς
 προκύπτον· τετράκις 5 κάμνουν 20, καὶ δύο αἱ φυλαχθεῖ-
 σαι ἑκατοντάνδες, κάμνουν 22· γράψε λοιπὸν τὰς μὲν δύο
 ἑκατοντάδας εἰς τὸν τύπον τῶν ἑκατοντάδων· τὰς δὲ εἴ-
 κοσι ἑκατοντάδας, ἐπειδὴ κάμνουν 2 χιλιάδας, γράψε εἰς
 τὸν τύπον τῶν χιλιάδων (§. 4).

§. 20. Εάν μεταξὺ τῶν χαρακτηῖρων τοῦ πολλαπλα-
 σιαστέου εὐρεθῶσι μηδενικά, γράψε προκύπτοντα ἐκ τοῦ
 μηδενικοῦ καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τὸ 0, ἐάν δὲν ἐφύ-
 λαξῃς καμμῖν δεκάδα, ἑκατοντάδα κτλ. ἀπὸ τὸν πολ-
 λαπλασιασμόν τοῦ προτέρου χαρακτηῖρος (§. 18)· εἰ δ' ἐ-
 φύλαξας, γράψε τὸ φυλαχθὲν εἰς τὸν τύπον 2009
 μηδενικοῦ· πόσον ἀξίζουσιν π. χ. 2009 δεκάδες 3
 ἢ πρὸς τρία γρόσια τὴν οὐκάν; ὁ προκύπτων 6027
 ἀποκρίνεται· 6027 γρόσια.

§. 21. Όταν ὁ πολλαπλασιαστής εἶναι 10 ἢ 100, ἢ
 1000 ἢ, εἰς ἓνα λόγον, ἡ μονὰς μὲ ὅσαδήποτε μηδενικά,
 πρόσθε εἰς τὸ τέλος τοῦ πολλαπλασιαστέου τὰ μηδενικά

τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἐτελείωσας τὸν πολλαπλα-
 σισμόν.

Πόσα κάμνουν 36 πήχεις ὑψάματος πρὸς 10 γρόσια
 ὁ πήχυς; πρόσθε εἰς τὸν 36 τὸ μηδενικόν, καὶ θέλεις,
 λάβειν προκύπτοντα τὸν 360.

Ἐξοδεύων τις 100 γρόσια τὸν μῆνα, πόσα ἐξώδευεν
 εἰς διάστημα μηνῶν 21; πρόσθε εἰς τὸν 21 δύο μηδε-
 νικά, καὶ θέλεις λάβειν τὸν 2100, ὅστις φανερώνει τὸ ζη-
 τούμενον.

§. 22. Εάν καὶ οἱ δύο ποιηταὶ ἔχωσιν εἰς τὸ τέλος
 μηδενικά, ἀπόβαλέ τα, καὶ πολλαπλασίασε τοὺς σημαν-
 τικοὺς χαρακτηῖρας τοῦ πρώτου μὲ τοὺς τοῦ δευτέρου·
 εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ προκύπτοντος, βάλε τὰ ἀποκοπέντα
 μηδενικά καὶ ἐκ τῶν δύο ποιητῶν· ἔστω π. χ. νὰ πολ-
 λαπλασιάσῃς 3600 μὲ 200· πολλαπλασίασε λοιπὸν 36
 μὲ 2, καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ προκύπτοντος 72 πρόσθε
 τέσσαρα μηδενικά· θέλει εἶσθαι λοιπὸν προκύπτων, ὁ
 720000.

§. 23. Εάν ὁ πολλαπλασιαστής ἔχῃ πλέον παρὰ ἓνα
 χαρακτηῖρα, ἀκολουθεῖ τοὺς ἐφεξῆς κανόνας.

α'. Γράψε τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑποκάτω εἰς τὸν
 πολλαπλασιαστέον, ὥστε νὰ ἀντιστιχοῦν οἱ τύποι τῶν
 δύο, καθὼς εἴπαμεν ἄλλου (§. 7).

β'. Πολλαπλασίασε τὸν πρώτον χαρακτηῖρα τοῦ πολ-
 λαπλασιαστοῦ μὲ ὅλους ἐφεξῆς τοὺς χαρακτηῖρας τοῦ πολ-
 λαπλαστέου, καὶ βάλε τὰ προκύπτοντα ἐκ δεξιῶν εἰς ἀρι-
 στερά καθὲν εἰς τὸν τύπον του· ἔπειτα πολλαπλα-
 σίασε τὸν δεύτερον χαρακτηῖρα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ μὲ
 ὅλους πάλιν τοὺς χαρακτηῖρας τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ
 κάμε ἀρχὴν νὰ βάλλῃς τὰ προκύπτοντα ἀπὸ τὸν τύπον

τῶν δεκάδων, ἤγουν τὸν δεύτερον, ἐπειδὴ τὸ προκύπτον ἀπὸ τὰς δεκάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι δεκάδες· ἐφεξῆς πολλαπλασιαστέου τοὺς χαρακτήρας τοῦ πολλαπλασιαστέου μετὰ τὸν τρίτον χαρακτήρα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ τὸ πρῶτον γινόμενον βάλῃ εἰς τὸν τόπον τῶν ἑκατοντάδων κτλ.

γ'. Ἐὰν μετὰ τῶν χαρακτήρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εὐρεθῇ μηδενικόν, ἄφες τὸν τόπον τοῦτον, ἐπειδὴ εἰς τὸ γινόμενον θέλουν ἐμβῆ περιττῶς μηδενικά· καὶ μετὰ ταῦτα εἰς τὸν ἐφεξῆς.

δ'. Ὑποκάτω ἀπὸ τὰ μερικὰ γινόμενα ἄγαγε γραμμὴν καὶ σύνψέ τα εἰς ἓν κεφάλαιον.

Παράδειγμα.

12050	καντάρια	σακχάρως	πρὸς	12050
207	γρόσια	τὸ καντάριον,	πόσα ἀξίζουν;	207
ὁ	προκύπτων	ἀριθμὸς ἐκ	τῆς πράξεως	84350
φανερώνει	τὸ ζητούμενον.			2410 ..
				2494350

§. 24. Τὴν δοκιμὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θέλομεν μάθει μετὰ τὴν διαιρέσιν.

§. 25. Μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν μεταβάλλονται τὰ πεντάγροσα εἰς γρόσια, τὰ γρόσια εἰς παράδες, καὶ ἔλα τὰ μεγαλύτερα μεγέθη εἰς τὰ περιεχόμενα εἰς αὐτὰ μικρότερα.

Πόσα γρόσια κάμνουν 75. πεντάγροσα; Ἐπειδὴ τὸ πεντάγροσον περιέχει 5 γρόσια, πολλαπλασιάζετε τὸν 75 μετὰ τὸν 5, καὶ ὁ προκύπτων θέλει δώσει 375 γρόσια.

Πόσους παράδες κάμνουν 112 γρόσια;

Ἐπειδὴ τὸ γρόσιον διαιρεῖται εἰς 40 παράδες, πολλαπλασιάζετε τὸν ἀριθμὸν 112 μετὰ 40· καὶ θέλεις εὐρεῖ 4480 παράδες.

Πόσα γρόσια κάμνουν 37 εικοσάρια χρυσᾶ;

Ἐπειδὴ τὸ χρυσοῦν εικοσάρι περιέχει 20 γρόσια, πολλαπλασιάζετε τὸν 37 μετὰ τὸν 20, καὶ ὁ προκύπτων θέλει σὲ δώσει 740 γρόσια.

Πόσα δράμια κάμνουν 113 ὀκκάδες;

Ἐπειδὴ ἡ ὀκκά περιέχει τετρακόσια δράμια, πολλαπλασιάζετε τὰς ὀκκάδας μετὰ 400, καὶ θέλεις εὐρεῖ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν.

Περὶ Διαίρεσεως ἢ Μοιρασμοῦ.

§. 26. Ἡ διαίρεσις χρησιμεύει εἰς δύο τινα· πρῶτον, ὅταν μοιράζωμεν ἀριθμὸν τινα εἰς ἴσα μέρη· 8 γρόσια π. χ. νὰ μοιραστοῦν εἰς δύο ἀνθρώπους, καθεὶς θέλει λάβῃ 4· δεύτερον, ὅταν θέλωμεν νὰ μάθωμεν πόσαις φοραῖς περιέχεται εἰς ἀριθμὸς εἰς ἄλλον· ἂν π. χ. πανίου πῆχους τιμᾶται 5 γρόσια, πόσους πῆχους ἡμπορῶ ν' ἀγοράσω μετὰ 15 γρόσια; ὅσας φορὰς ἐμπεριέχεται ὁ 5 εἰς τὰ 15, δηλαδὴ τρεῖς.

§. 27. Εἰς τὴν διαιρέσιν δίδονται δύο ἀριθμοί· ὁ διαιρούμενος, ὃς τις ὀνομάζεται διαιρετέος, καὶ ὁ διαιρὼν, ὃς τις ὀνομάζεται διαιρετὴς· εἰς τὰ δύο παραδείγματά μας διαιρετέοι ἦσαν ὁ 8 καὶ ὁ 15· διαιρέται, ὁ 2 καὶ ὁ 5.

Ὁ ἀριθμὸς, ὃς τις ἐκβαίνει ἀπὸ τὴν διαιρέσιν, ὀνομάζεται πηλίκον· εἰς τὰ παραδείγματά μας εἶναι ὁ 4 καὶ ὁ 3.

§. 28. Εἰς τὴν διαιρέσιν παρατηροῦμεν τὰ ἐφεξῆς.

α. Ἄπας ἀριθμὸς περιέχεται εἰς τὸν ἑαυτὸν του μίαν

φοράν· ὁ 2 π. χ. περιέχεται εἰς τὸν 2 μίαν φοράν.

β'. Πᾶς ἀριθμὸς, π. χ. ὁ 5, διαιρούμενος διὰ 1 δίδει πηλίκον ὅλον τὸν ἐαυτὸν του· διότι ὁ 1 εἰς τὸν 5 περιέχεται πεντάκις.

γ'. Κάνεις ἀριθμὸς δὲν περιέχεται εἰς τὸ 0· διὰ τοῦτο τὸ 0 μηδὲν διαιρούμενον δι' ὅποιουδήποτε ἀριθμοῦ δίδει πηλίκον 0.

δ'. Ὅταν ἡ διαίρεσις δὲν γίνεται ἀκριβῶς, λαμβάνομεν πηλίκον τὸν ἀριθμὸν, ὃς τις περιέχεται μὲ κατάλοιπον τι εἰς τὸν διαιρετέον· ὁ 7 π. χ. διαιρούμενος διὰ 2, δίδει πηλίκον 3, καὶ μένει καὶ 1, ἀλλὰ δὲν δίδει πηλίκον τὸν 4, ἐπειδὴ δις 4 κάμνει 8.

§. 29. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχει ἓνα χαρακτῆρα, ἀκολουθεῖ τοὺς ἐφεξῆς κανόνας.

α'. Γράψε τὸν διαιρετέον, καὶ πρὸς ἀριστεράν αὐτοῦ ἄγαγε ὀρθὴν γραμμὴν, καὶ πρὸς τ' ἀριστερὰ τῆς γραμμῆς γράψε τὸν διαιρέτην· πρὸς δεξιὰν τοῦ διαιρετέου γράψε ἄλλην ὀρθὴν γραμμὴν, διὰ νὰ βάλῃς τὸ πηλίκον.

β'. Παράτηρησε ποσάκις περιέχεται ὁ διαιρέτης εἰς τὸν πρῶτον πρὸς τ' ἀριστερὰ χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου· καὶ τὸν ἀριθμὸν, ὃς τις φανερώνει τὸ ποσάκις, γράψε τον ὡς πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ πηλίκου.

γ'. Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι μεγαλύτερος παρὰ τὸν εἰς τ' ἀριστερὰ πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου, συμπάλαβε μετ' αὐτοῦ καὶ τὸν γείτονά του δεύτερον χαρακτῆρα.

δ'. Πολλαπλασίασε τὸ εὖρεθὲν πηλίκον μὲ τὸν διαιρέτην, καὶ γράψε τὸ γινόμενον ὑποκάτω εἰς τὸ διαιρεθὲν μέρος τοῦ διαιρετέου.

ε'. Ἀφαίρεσε τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸ διαιρεθὲν μέρος τοῦ διαιρετέου· καὶ εἰ μὲν μένῃ τι κατάλοιπον, καταβίβασε

καὶ γράψε πλησίον τὸν ἐγγύς χαρακτῆρα τοῦ διαιρέτου, καὶ διαίρεσε τὸ κατάλοιπον μετὰ τοῦ καταβιβάσθέντος χαρακτῆρος· εἰ δὲ δὲν μείνῃ κατάλοιπον, διαίρεσε τὸν καταβιβάσθέντα χαρακτῆρα.

ς'. Εἰ μὲν τὸ μένον κατάλοιπον εἶναι μεγαλύτερον παρὰ τὸν διαιρέτην, αὐξήσε τὸ πηλίκον μίαν ἢ δύο μονάδας, ἕως οὗ τὸ κατάλοιπον νὰ γείνη μικρότερον· εἰ δὲ τὸ γινόμενον εἶναι μεγαλύτερον παρὰ τὸ διαιρεθὲν μέρος, μίκρυνε τὸ πηλίκον μίαν ἢ δύο μονάδας.

ζ'. Μετὰ τὴν πρώτην διαίρεσιν, ἀφ' οὗ καταβιβάσῃς δεύτερον χαρακτῆρα εἰς διαίρεσιν, καὶ ἴδῃς ὅτι ὁ διαιρέτης εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ αὐτὸν, βάλε πηλίκον μηδενικόν· καὶ ἔπειτα καταβίβασε τὸν ἐφεξῆς χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου, καὶ διαίρεσε τοὺς δύο ὁμοῦ.

η'. Ἐπάνω εἰς τὸν καταβιβαζόμενον χαρακτῆρα γράψε στίγμα, διὰ νὰ διακρίνεται ἀπὸ τοὺς μὴ καταβιβασθέντας ἀκόμῃ.

θ'. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κάμνε, ἕως οὗ νὰ καταβιβάσῃς ὅλους τοὺς χαρακτῆρας τοῦ διαιρετέου.

Παράδειγμα. Ἐὰν δύο ἄνθρωποι μαιρασθῶσι 2580 γρόσια πόσα θέλει λάβει καθείς;

Γράψε τὸν διαιρετέον 2580, καὶ πρὸς ἀριστεράν αὐτοῦ τὸν διαιρέτην κατὰ τὸν α'. κανόνα.

Διαίρεσε τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου 2 μὲ τὸν διαιρέτην· 2 περιέχονται εἰς τὸν 2 μίαν φοράν· γράψε λοιπὸν πηλίκον 1.

Πολλαπλασίασε τὸ πηλίκον 1 μὲ τὸν διαιρέτην 2, καὶ τὸ γινόμενον 2 ὑπόγραψε εἰς τὸν διαιρεθέντα χαρακτῆρα 2, καὶ ἀφαίρετέ το ἀπὸ αὐτὸν (καν. δ', ε').

Διαιρέτης. Διαιρέτος. Πηλίκον.
 Ἐπειδὴ δὲν μένει κατάλοιπον, 2 | 2580 | 1290
 καταβίβασε τὸν 5, καὶ διαίρεσέ
 τον διὰ τοῦ διαιρέτου 2· ὁ 2 εἰς
 τὸν 5 περιέχεται δύο φορές (§.
 27, δ), γράψε πηλίκον 2· τὸν δὲ
 γινόμενον ὑπὸ τοῦ πηλίκου 2 καὶ
 τοῦ διαιρέτου 2, τὸν 4, γράψε
 ὑπὸ τὸν 5 καὶ ἀφάιρσέ τον ἀπ' αὐτόν.

Εἰς τὸ κατάλοιπον 4 πρόσγραψε τὸν χαρακτῆρα 8· καὶ
 διαίρεσε τὸν 18 διὰ 2· ὁ 2 εἰς τὸν 18 περιέχεται ἀκρι-
 βῶς ἑνέα φορές· γράψε πηλίκον 9· δύο φορές 9 κάμνουν
 18, τὰ ὅποια ἀφαιρούμενα ἀπὸ 18 δὲν ἀφίνουν κατάλοι-
 πον· καταβίβασε τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα 0· καὶ ἐπειδὴ
 ὁ 2 δὲν περιέχεται εἰς τὸ μηδέν, γράψε τελευταῖον χα-
 ρακτῆρα τοῦ πηλίκου τὸ 0 (§. 27, γ').

Λαμβάνει λοιπὸν καθεὶς 1290 γρόσια.

Παράδειγμα ἄλλο. Ἐνας θέλει νὰ πληρώσῃ 10060
 γρόσια εἰς πεντόγροσα· πόσα πρέπει νὰ δώσῃ; διαίρεσε
 τὸν δοθέντα ἀριθμὸν μὲ 5 καὶ Διαιρέτης. Διαιρέτος. Πηλίκον.
 θέλεις εὐρεῖ τὸ ζητούμενον. 6 | 10060 | 2012

Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος χαρακτῆρ
 τοῦ διαιρέτου δὲν περιέχει τὸν
 5 διαιρέτην, λάβε καὶ τὸν δεύ-
 τερον 0 (κν. γ'). ὁ 5 εἰς τὸν
 10 περιέχεται δὶς· γράψε πη-
 λίκον 2· δις 5 δέκκ, τὰ ὅποια
 ἀφαιρούμενα ἀπὸ 10 καταλείπουν μηδέν· καταβίβασε τὸν
 ἑγγὺς χαρακτῆρα 0· καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὸν δὲν περιέχεται

ὁ διαιρέτης, γράψε πηλίκον 0 (κν. ζ'). Καταβίβασε
 τὸν ἐφεξῆς χαρακτῆρα 6· εἰς αὐτὸν ἐμπεριέχεται ἅπαξ·
 καὶ τὸ γινόμενον ὑπὸ 1 καὶ 5, ὁ 5 ἀφαιρούμενος ἀπὸ
 6 καταλείπει 1· πλησίον τῆς 1 γράψε τὸν τελευταῖον
 χαρακτῆρα 0· ὁ 5 εἰς τὸν 10 περιέχεται δις κτλ.

Οἱ γυμνασμένοι εἰς τοὺς λογαριασμοὺς συνηθίζουν νὰ
 κάμνουν τὴν ἀφάιρσιν τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ διαιρέτου
 καὶ τοῦ πηλίκου χωρὶς νὰ γράφουν τὸ γινόμενον. Ἴδου τὰ
 δύο παραδείγματα μας γραμμένα μὲ τοιοῦτον τρόπον.

$$\begin{array}{r|l} 2 \mid 2580 \mid 1290 & 5 \mid 10060 \mid 2012 \\ \hline 5 & \hline 18 & 06 \\ 0 & 40 \\ & 0 \end{array}$$

§. 30 Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἴναι 10, 100, 1000 κτλ.
 ἦγουν εἴναι ἡ μονάς μὲ ἐν ἡ πλείοτερα μηδενικά, κάμνομεν
 εὐθὺς τὴν διαίρεσιν, ἀποκόπτοντες ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ δι-
 αιρέτου τόσους χαρακτῆρας, ὅσα μηδενικά ἔχει ἡ μονάς·
 καὶ εἰ μὲν οἱ κοπτόμενοι χαρακτῆρες εἴναι μηδενικά, ἡ
 διαίρεσις εἴναι ἀκριβής· εἰ δὲ εἴναι ἀριθμῶν χαρακτῆρες,
 μένει κατάλοιπον, τὸ ὅποιον συνιστᾷ κλάσμα, περὶ τοῦ
 ὁποίου θέλομεν ὁμιλήσει ὕστερον.

Παράδειγμα. Ἐὰν δέκα πήχεις ὑφάτματος τιμῶνται
 90 γρόσια, πόσον τιμᾶται ὁ πήχυς; διαίρεσε τὸν 90 διὰ
 τοῦ 10, ἦγουν ἀπόκοψε ἐν μηδενικὸν ἀπὸ αὐτόν· πηλίκον
 εἴναι ὁ 9, καὶ τόσον τιμᾶται ὁ πήχυς.

§. 31. Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἔχῃ ἓνα χαρακτῆρα ἄλλον
 παρὰ τὴν μονάδα, καὶ εἰς τὰ δεξιὰ του ἐν ἡ πλείοτερα
 μηδενικά, ἀκολουθεῖ τὸν ἐφεξῆς κανόνα:

* Κόψε τὰ μηδενικά τοῦ διαιρέτου, καὶ ἱσαριθμούς χα-
 (ΣΥΝΟΨ. ΑΡΙΘΜΗΤ.)

πρακτῆρα; ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου· καὶ διαίρεσε μὲ τὸν ἕνα χαρακτῆρα τοῦ διαιρέτου τοῦ ἐπιλοίπου; χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου· εἰ μὲν οἱ $4(0 \mid 189(4 \mid 47 \frac{11}{40})$ κοπέντες χαρακτῆρες εἶναι μηδε-

νικά, καὶ ἐκ τῆς διαίρεσεως δὲν μείνη κατάλοιπον, τὸ πηλίκον εἶναι ἀκριβές· εἰ δὲ εἶναι ἀριθμῶν χαρακτῆρες, καὶ μείνη καὶ τι κατάλοιπον, μετὰ τοῦ καταλοίπου θέλουν συστήσει κλάσμα.

Παράδειγμα. 1894 νὰ διαιρεθῶσι μὲ τὸν 40. Τὸ πηλίκον δίδουσιν; Ἀπ. 47 καὶ $\frac{14}{40}$.

§. 32. Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἔχῃ πολλοὺς ἀριθμητικούς χαρακτῆρας, ἀκολουθεῖ πρὸς τοὺς ἄλλους καὶ τοὺς ἐρεξῆς κανόνες:

α. Εἰ μὲν ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσος ἢ μικρότερος ἀπὸ ἰσχυροὺς χαρακτῆρας τοῦ διαιρετέου κειμένους εἰς τ' ἀριθμούς, παρατήρησε πόσαις φοραῖς περιέχεται ὁ διαιρέτης εἰς τοὺς τοὺς χαρακτῆρας· εἰ δὲ εἶναι μεγαλύτερος, λάβε ἀκόμη ἕνα χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου, καὶ σημειώσας τον μὲ στίγμα, διὰ νὰ ἐξούρη, ὡς πού ἐφθασας.

β'. Διὰ νὰ καταλάβῃς πόσαις περιέχεται ὁ διαιρέτης εἰς τοὺς ἀντιτίχους τοῦ διαιρετέου χαρακτῆρας, παρατήρησε πόσαις περιέχεται ὁ πρῶτός του χαρακτῆρ εἰς τὸν πρῶτον ἢ εἰς τοὺς δύο πρῶτους ἐκεῖνον· καὶ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις φανερώνει τὸ πόσαις, γράψε πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ πηλίκου.

γ'. Πολλαπλασιάσε τὸν διαιρέτην μὲ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον, καὶ τὸ γινόμενον ἀφαίρεσε ἀπὸ τὸ διαιρεθὲν μέρος τοῦ διαιρετέου· εἰ μὲν τὸ γινόμενον εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ μέρος τοῦτο, τὸ πηλίκον ἐβίβλην μεγαλύτερον ἀπ' ὅ,τι ἔπρεπε, καὶ πρέπει νὰ τὸ μικρύνῃς μίαν ἢ δύο μονάδας· εἰ δὲ εἶναι ἡμετὰ τὴν ἀφαίρεσιν διαφορὰ μεγαλύτερα ἀπὸ τὸν διαιρέτην, τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον

ἀπ' ὅ,τι ἔπρεπε, καὶ εἶναι ἀνάγκη νὰ τὸ μεγάλυνῃς.

δ'. Εἰς τὸ κατάλοιπον πρόσθεσε τὸν ἐρεξῆς τοῦ διαιρετέου χαρακτῆρα, καὶ ἐπανάλαβε τὴν διαίρεσιν, ἕως ὅ νὰ μὴ μείνη κανεὶς χαρακτῆρ.

Παράδειγμα Α'. Ἐὰν πῆγεις ὑρί- $25 \mid 425 \mid 17$
σματος 25, τιμῶνται γρόσια 425, 25
πόσα τιμᾶται ὁ πῆγος; διαίρεσας 175
τὸν 425 μὲ 25 εὗρίσκεις πηλίκον 175
17, ὅς τις εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ πῆγους. 000

Παράδειγμα Β'. Ἠγόρασεν 786 $150650 \mid 191 \frac{524}{800}$
ἕνας 786 καντάρια καφρὲ διὰ 786
γρόσια 150650, πόσα γρόσια 7205
τιμᾶται τὸ καντάριον; διαί- 7074
ρεσε τὸν ἀριθμὸν τῶν γροσίων 1310
μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν κανταρίων, 786
καὶ θέλεις εὐρεῖ πηλίκον 191, 524
καὶ κατάλοιπον 524, τὸ ὅποιον συνιστᾷ κλάσμα τὸ $\frac{524}{800}$.

Παράδειγμα Γ'. Ἐὰν 320 $32(0 \mid 8960(0 \mid 280$
καντάρια βαμβακίου τιμῶν- 64
ται 89600 γρόσια, πόσον 256
ἀξίζει τὸ καντάριον; διαίρεσε 256
τὸν ἀριθμὸν τῶν γροσίων μὲ 000
τὸν ἀριθμὸν τῶν κανταρίων, ἐφαρμόζων ἐδῶ καὶ τὸ εἰρη-
μένον περὶ μηδενικῶν τοῦ διαιρέτου (§. 30), καὶ θέλεις
εὐρεῖ γρόσια 280.

§. 33. Ἡ δοκιμὴ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ θεμελιώνεται εἰς τὴν ἀλήθειαν ταύτην. Ἐὰν ὁ προκύπτων διαιρεθῇ δι' ἐνὸς ποιητοῦ, δίδει πηλίκον τὸν ἄλλον ποιητήν· ὁ πολλαπλασιασμὸς λοιπὸν δοκιμάζεται διὰ τῆς διαίρεσεως, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἐξῆς παράδειγμα.

Πολυπλασιασμός	δοκιμή αὐτοῦ
380	24 9120 380 ὁ ἄλλος
24	192 ποιητῆς
1520	... ἡ
76	38(0 912(0 24 ὁ ἄλλος
9120	152 ποιητῆς

§. 34. Ἡ δὲ δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως γίνεται ἂν πολυπλασιασάντες τὸ πηλίκον μετὰ τὸν διαιρέτην λάβωμεν προκύπτοντα τὸν διαιρετέον, ὅταν ἡ διαίρεσις εἴναι ἀκριβής· ἂν δὲν εἴναι ἀκριβής, συνάπτομεν εἰς τὸν προκύπτοντα καὶ τὸ κατάλοιπον· καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα εἴναι ἴσον μετὰ τὸν διαιρετέον, ἡ διαίρεσις ἔγεινεν ἀσφαλτος· εἰ δὲ μὴ, εἴναι ἐσφαλμένη.

Διαίρεσις	Δοκιμή
7 3420 488 $\frac{4}{7}$	488
62	7
60	3416
4	4
	3420

§. 35. Ἐμπορεῖς νὰ μεταβάλης τοὺς παράδες εἰς γρόσια, καὶ τὰ δράμια εἰς ὀκκάδας, καὶ ὅλα τὰ μικρότερα εἰς τὰ μεγαλύτερα, εἰς τὰ ὅποια περιέχονται, διὰ τῆς διαιρέσεως· ἂν θέλῃς π. χ. νὰ μεταβάλης 5000 παράδες εἰς γρόσια διαίρεστε τῶν ἀριθμὸν τῶν παρὰδων μετὰ 40, καὶ τὸ πηλίκον 125 φανερόναι ὅτι οἱ εἰρημένοι παράδες κάμνουν γρόσια 125· εἰ δὲ θέλεις νὰ μεταβάλης 14000 δράμια εἰς ὀκκάδας, διαίρεστε τὰ δράμια μετὰ 400, καὶ θέλεις εὐρεῖν ὀκκάδας 35.

Περὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν.

§. 36. Συμμιγεῖς ἀριθμοὶ λέγονται, ὅταν αἱ μονάδες τῶν δὲν εἴναι ὁμοειδεῖς, ἀλλὰ διάφοροι, μεγαλύτερη καὶ μικρότεραι· αἱ μικρότεραι ὅμως νὰ περιέχονται εἰς τὰς μεγαλύτερας· π. χ. 32 γρ. 15 παρ. 13 ὀκ. 51 δραμ. Ἐμποροῦν δὲ τὰ μικρότερα εἶδη νὰ διακρίνωνται ἀπὸ τὰ μεγαλύτερα μετὰ διαστολὴν γραφομένην μεταξὺ π. χ. γρ. 32, 15· καὶ ὀκ. 13, 51.

§. 37. Εἰς τὴν σύναψιν τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν πρέπει νὰ φυλάξῃς πρὸς τοῖς ἄλλοις καὶ τοὺς ἐφεξῆς κανόνας.

α. Γράψε τοὺς ἀριθμοὺς ὑπαλλήλους, ὥστε τὰ μικρότερα εἶδη ν' ἀντιστοιχοῦν μετὰ τὰ μικρότερα, καὶ τὰ μεγαλύτερα μετὰ τὰ μεγαλύτερα· οἱ παρ. π. χ. μετὰ τοὺς παρ. καὶ τὰ γρόσια μετὰ τὰ γρόσια. Τὰ μικρότερα μέρη νὰ εἴναι πάντοτε εἰς τὰ δεξιὰ τῶν μεγαλύτερων.

β'. Σύναψε πρῶτον τὸ μικρὸν εἶδος· καὶ εἰ μὲν αἱ μονάδες τοῦ κερχλαίου κάμνουν ὀλιγώτερον παρὰ μίαν μονάδα τοῦ μεγαλύτερου εἶδους, γράψε το ὑποκάτω τῆς γραμμῆς· εἰ δὲ μὴ, μεταβάλε το εἰς τὸ μεγαλύτερον (§. 35)· καὶ ἀρῆσας τὸ κατάλοιπον, ἂν εἴναι, σύναψε τὸ μεγαλύτερον εἶδος, τὸ ὅποσον ἔγεινεν ἀπὸ τὸ μικρότερον, μετὰ τὰς μονάδας τοῦ μεγαλύτερου. Τὸ ἐφεξῆς παρὰδειγμα σαφηνίζει τὰ εἰρημένα.

Ἐνας ἔλαθεν εἰς τρεῖς μῆνας τὰ ἐφεξῆς χρήματα, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὸ κερφάλαιον.

γρόσια 732,	5.
512,	8.
370,	28.

ἔλαβε λοιπὸν γρόσια 4615. 1 παρ.

§. 38. Διὰ τὴν ἀρχιρέσσης συμμιγῇ ἀριθμὸν ἀπὸ συμμιγῇ, ἀκολουθεῖ τοὺς ἐφεξῆς κανόνας.

α. Γράψτε τὸν ἀρχιρετέον ὑποκάτω εἰς τὸν μειωτέον, ὡς εἴπαμεν ἀνωτέρω (§. 37. α).

β. Ἀρχίρετε τὸ μικρότερον εἶδος ἀπὸ τὸ ἀντίστιχόν του καὶ ἔπειτα τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀντίστιχόν του· ἂν τὸ μειωτέον μικρὸν εἶδος εἴναι μικρότερον παρὰ τὸ ἀντίστιχόν του ἀρχιρετέον, δανείσου μίαν μονάδα ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον εἶδος, καὶ μετάθετέ την εἰς τὰς μονάδας τοῦ μικροῦ, καὶ σύνψέψτε τὴν μετὰ αὐτὴ τὸν ἀριθμὸν, ἀπὸ τὸν ὅποιον ἐδανείσθη· τὴν μονάδα, πρέπει νὰ τὸν ἐκλάβης ἔπειτα ὀλιγώτερον μίαν μονάδα.

Ἐνὸς ἐχρώσται γρόστ. 32, 15 καὶ ἔδωκε 32, 15.
γρ. 42, 18. Πόσα χρώσται ἀκόμη; ἡ δια- 42, 10.
φορὰ μὲν λέγει γρ. 20, 5. 20, 5.

§. 39. Ἐὰν θέλῃς νὰ πολλαπλασιάσῃς μὲ ἀριθμὸν τοὺς συμμιγῆς ἀκολουθεῖ τὰ ἐφεξῆς.

Πολλαπλασιάσας πρῶτον τὸ μικρότερον εἶδος, καὶ ἔπειτα τὸ μεγαλύτερον· ἂν τὸ γινόμενον μικροῦ εἴδους φανερόνῃ πλῆθος μονάδων, αἱ ὅσαι ἐμποροῦν νὰ ἀναχθῶν εἰς τὸ μεγαλύτερον, ἀνάγαγέ τας εἰς τὸ τέλος τῆς πράξεως, καὶ σύνψέψτες μετὰ αὐτό.

Τέσσαρα παιδία ἐχοῦσαν ἐπίσης τὴν 428, 15.
πατρικὴν τῶν περιουσίαν, καὶ ἔπλεε καθέν 4
γρόστ. 428, 15. Πόση λοιπὴν ἦτον ὅλη γρ. 1713, 20.
ὅλη ἡ περιουσία;

§. 40. Διὰ τὴν διαιρέσσης συμμιγῇ ἀριθμὸν ἀκολουθεῖ τὰ ἐξῆς.

Διαιρετέ πρῶτον τὸ μεγαλύτερον εἶδος, καὶ ἔπειτα τὸ μικρότερον· ἂν εἰς τὴν διαιρέσιν τοῦ πρώτου μείνη τι

κατάλοιπον, μετάθετέ το εἰς τὸ μικρότερον εἶδος, συναψέ το μ' αὐτό, καὶ κίμε τὴν διαιρέσιν.

Τέσσαρα παιδία θέλουν νὰ 4 | 1715 | 428 $\frac{3}{4}$
μοιράσων γρ. 1715. Πόσα θέλει 11
λάβει καθέν; τὸ πλῆκτον μὲν 35
λέγει γρόστια 428 $\frac{3}{4}$.

§. 41. Αἱ δοκιμαὶ τούτων τῶν πράξεων γίνονται ὡς αὐτῶς καθὼς καὶ αἱ δοκιμαὶ τῶν ἀριθμῶν ἀριθμῶν.

ΤΟΥ Β' ΕΤΟΥΣ.

Περὶ Κλάσμάτων.

§. 42. Ἐὰν ὅλον τι, π. χ. τὸ γρόσιον διαιρέσῃς εἰς δύο ἢ τρία, ἢ πλείοτερα ἴσα μέρη, καὶ λάβῃς ἐν ἢ πλείοτερα ἀπ' αὐτὰ τὰ μέρη, τὰ μέρη ταῦτα τοῦ ὅλου λέγονται κλάσμα.

§. 43. Πᾶν κλάσμα γράφεται μὲ δύο ἀριθμούς· ὁ εἰς φανερόν· εἰς πόσα μέρη ἐδιαιρέσθημεν τὸ ὅλον, καὶ ὀνομάζεται παρονομαστής· ὁ δευτέρος, Πόσα μέρη ἐλάβομεν, καὶ ὀνομάζεται ἀριθμητής· πρῶτον ἐκφράζομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ ἔπειτα τὸν παρονομαστήν, καὶ γράφομεν ἐκείνον ἐπάνω καὶ τοῦτον ὑποκάτω, καὶ μεταξὺ τῶν μίαν γραμμὴν· π. χ. $\frac{3}{4}$ γρόσιον θέλει νὰ εἴπῃ τρία τέταρτα ἢ τεταρτημόρια τοῦ γροσίου. $\frac{4}{5}$ δὲ τέσσαρα πέμπτα ἢ πεμπτημόρια τῆς ὁλῆς κτλ.

§. 44. Εἰς τὰ κλάσματα παρατηροῦμεν τὰ ἐφεξῆς.

α. Κλάσμα, τὸ ὅποιον ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν καὶ

παρονομαστήν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὅλον π. χ. $\frac{4}{4}$ γρ. εἶναι ἴσον μὲ ἓν γρόσι.

β'. Κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστήν, εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ ὅλον π. χ. $\frac{3}{4}$ γροσίου, τοῦτο ὀνομάζεται καὶ γνήσιον κλάσμα.

γ'. Κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς ὑπερέχει τὸν παρονομαστήν, εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ὅλον, καὶ ὀνομάζεται νόθον κλάσμα· π. χ. $\frac{5}{4}$ γροσίου ἀξίζει πλέον παρὰ ἓν γρόσι.

δ'. Ἐὰν εἶναι ἀριθμὸς ὁλόκληρος καὶ κλάσμα ὁμοῦ, λέγεται συμμιγὲς κλάσμα ἢ συμμιγὴς ἀριθμὸς (§. 36.) π. χ. $3\frac{1}{4}$ γρ. ἢ $3\frac{1}{2}$ ὀκάδες, ἤγουν 3 ὁλόκληρα γρόσια καὶ $\frac{1}{4}$ γροσίου, ἢ ὁλόκληροι ὀκκάδες καὶ $\frac{1}{2}$ ὀκάς.

§. 45. Τὸ κλάσμα δὲν εἶναι ἄλλο τίποτε, εἰμὴ διαίρεσις τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· π. χ. $\frac{12}{6}$ γρ. σημαίνει, ὅτι δώδεκα γρόσια πρέπει νὰ διαιρεθοῦν εἰς ἕξ ἴσας μοίρας· τὰ νόθα κλάσματα διαιροῦνται πραγματικῶς, καὶ ἂν μείνῃ τι, γίνεταί ἀριθμητὴς κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὸ πηλίκον· π. χ. $\frac{13}{6}$ γροσίου κάμουν 2 γρόσια $\frac{1}{6}$ γροσίου.

§. 46. Ἐὰν θέλῃς ὁλόκληρον ἀριθμὸν νὰ τὸν παραστήσῃς εἰς σχῆμα κλάσματος μὲ ὅποιονδήποτε παρονομαστήν. Πολλαπλασιάσας τὸν ἀριθμὸν μὲ τὸν παρονομαστήν, καὶ κάμε τὸ γινόμενον ἀριθμητὴν, εἰς τὸν ὁποῖον ὑπόγραψε τὸν παρονομαστήν· π. χ. 2 γρ. νὰ τὰ κάμῃς τρίτῃ, πολλαπλασιάσας 2 μὲ 3, καὶ εἰς τὸν 6 ὑπόγραψε τὸν 3, καὶ θέλεις λάβεῖν $\frac{6}{6}$.

§. 47. Ἐὰν συμμιγὲς κλάσμα (§. 44 δ') θέλῃς νὰ τὸ γράψῃς ὡς ἓν νόθον κλάσμα, πολλαπλασιάσας τὸν ὁλόκληρον ἀριθμὸν μὲ τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος, τὸ

δὲ γινόμενον σύναψε μὲ τὸν ἀριθμητὴν, εἰς τὸν ὁποῖον ὑπόγραψε τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος· $2\frac{1}{2}$ π. χ. γίνονται μ' αὐτὸν τὸν τρόπον $\frac{5}{2}$, καὶ $6\frac{3}{4}$ γίνονται $\frac{27}{4}$.

§. 48. Πολλάκις τὸ κλάσμα τοῦ μεγαλητέρου εἶδους ἀξίζει μονάδας τινὰς τοῦ μικροτέρου· $\frac{1}{2}$ γρσ. π. χ. ἀξίζει 8 παρ. $\frac{1}{4}$ 10 κτλ. Εἰς τοιαύτας λοιπὸν περιστάσεις, ὅταν θέλῃς νὰ μάθῃς τί ἀξίζει τὸ κλάσμα, πολλαπλασιάσας τὸν ἀριθμητὴν μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχει τὸ μεγαλῆτερον εἶδος, καὶ διαίρεςσε τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Παράδειγμα, Πόσους παράδες κάμουν $\frac{3}{5}$ γροσίου; Πολλαπλασιάσας τὸ ἀριθμητὴν 3 μὲ τὸν 5, καὶ τὸ γινόμενον 15 διαίρῃσας μὲ τὸν 5 λαμβάνεις 3 παράδες.

§. 49. Ὅταν εἰς τὴν διαίρεσιν ἀπομένῃ τι κατὰλοιπον (§. 30), ἐμποροῦμεν νὰ τὸ παραστήσωμεν ὡς κλάσμα· καὶ ὅταν ἐπιδέχεται ἀναγωγὴν εἰς μικρότερον εἶδος, νὰ συνεχίσωμεν τὴν διαίρεσιν. Ἐὰν π. χ. μοιρασθῶσι 5 ἄνθρωποι 22 γρόσια θέλουν λάβει 4 γρ. καθεὶς, καὶ $\frac{2}{5}$, ἤγουν $\frac{8}{5}$, τὸ ὁποῖον εἶναι 16 παρ.

§. 50. Παντὸς κλάσματος, ὅταν καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστής πολλαπλασιασθῶσι μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἡ τιμὴ δὲν μεταβάλλεταί· $\frac{2}{5}$ γρ. π. χ. ἂν πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ 2 καὶ ὁ 5 μὲ τὸν 2 γίνεταί κλάσμα $\frac{4}{10}$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{2}{5}$ · διότι ἓν πέμπτον γροσίου εἶναι 8 παρ. καὶ 2 πέμπτα εἶναι 16.

§. 51. Ἐὰν κλάσματος διαιρεθῇ καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστής μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἡ τιμὴ του μένει ἀμετάβλητος· διότι $\frac{8}{20}$ γροσίου ἰσοδυναμοῦν μὲ 20 παρ. (§. 48)· ἂν δὲ διαίρῃσῃς τὸν 8 μὲ 4, καὶ τὸν 20 μὲ 4,

λαμβάνοις κλάσμα $\frac{2}{3}$, τὸ ὁποῖον καὶ αὐτὸ ἰσοδυναμεῖ μὲ 16 παρὰ δ.

§. 52. Πᾶν λοιπὸν κλάσμα διὰ διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μικρύνει τοὺς ὅρους του, χωρὶς νὰ μεταβάλῃ τὴν τιμὴν του ἐμποροῦμεν νὰ ὀνομαζώμεν τοῦτο *σύντμησις* τοῦ κλάσματος. Διὰ νὰ συντέμωμεν λοιπὸν τὸ κλάσμα, πρέπει νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, ὃς τις νὰ εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ, διὰ νὰ τοῦς διαιρέσωμεν μὲ αὐτόν, καὶ νὰ συστήσωμεν νέον κλάσμα μὲ τὰ πηλίκια.

§. 53. Πολλῶς εὐρίσκωμεν τὸν κοινὸν διαιρέτην μὲ μόνην τὴν παρατήρησιν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ διότι ἐξεύρομεν ἐκ πείρας τὰ ἐφεξῆς.

α. Αριθμὸς, τοῦ ὁποῖου ὁ τελευταῖος χαρακτήρ εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς (ἄρτιος δὲ ἀριθμὸς λέγεται ὁ διαιρούμενος εἰς δύο ἴσα μέρη, καὶ ὀνομαζόμενος κοινότερα *ζυγὸς*, τοῦ ὁποῖου ἐναντίας εἶναι ὁ περιττός, ἢ μονός), ἔχουν, 2, 4, 6, 8, 10, διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 2.

β'. Αριθμὸς, τοῦ ὁποῖου ὁ τελευταῖος χαρακτήρ εἶναι ἀριθμὸς περιττός, ἔχουν 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 κτλ. δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 2.

γ'. Αριθμὸς, τοῦ ὁποῖου διαιρεῖται διὰ 3 τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων, διαιρεῖται καὶ αὐτὸς διὰ 3· διαιροῦνται λοιπὸν διὰ 3 οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ 3, 6, 9, 12, 15, 21, 42, 813, 723, κτ. ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων καθενὸς τούτων, λαμβανόμενον χωρὶς παρατήρησιν μονάδων καὶ δεκάδων κ.τ.λ. τὸ ἄθροισμα π.χ. τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ, 7 καὶ 2 καὶ 3. τὸ 12 διαιρεῖται διὰ 3.

δ'. Αριθμὸς, τοῦ ὁποῖου οἱ δύο τελευταῖοι χαρακτῆρες

ὡς εἰς ἀριθμὸς θεωροῦνται ἐνός διαιροῦνται δ' ἂ 4, διαιρεῖται καὶ αὐτὸς διὰ 4· π.χ. 124 διαιρεῖται διὰ 4, ἐπειδὴ 24 διαιρεῖται διὰ 4· τοιοῦτοι εἶναι καὶ οἱ ἀριθμοὶ 48, 1844, 2400.

ε. Αριθμὸς, τελειόνων εἰς 5 ἢ 0, διαιρεῖται διὰ 5· τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 315 κτλ.

ς'. Αριθμὸς, ἄρτιος (α'), τοῦ ὁποῖου τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων διαιρεῖται διὰ 3 (γ'), διαιρεῖται καὶ διὰ 6· τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 6, 18, 432, 2162.

Οἱ διὰ τοῦ 7 διαιρετοὶ ἀριθμοὶ δὲν διακρίνονται εὐκολά· πρέπει λοιπὸν νὰ δοκιμάζωμεν τὴν δι' αὐτοῦ διαίρεσιν των.

ζ'. Αριθμὸς, τοῦ ὁποῖου οἱ τρεῖς τελευταῖοι χαρακτῆρες ὡς εἰς ἀριθμὸς θεωρούμενοι διαιροῦνται διὰ 8, διαιρεῖται καὶ αὐτὸς διὰ 8· π.χ. 18408 εἶναι διαιρετός διὰ 8, ἐπειδὴ 408 διαιρεῖται διὰ 8.

η. Αριθμὸς, τοῦ ὁποῖου τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων διαιρεῖται διὰ 9, διαιρεῖται καὶ αὐτὸς διὰ 9· τοιοῦτοι ἀριθμοὶ εἶναι 9, 18, 27, 3645, 7101.

θ'. Αριθμὸς, ἔχων πρὸς δεξιὰν ἑν μηδενικόν, ἢ δύο, ἢ τρία κτλ. διαιρεῖται διὰ 10, 100, 1000 κτλ. διαιροῦνται λοιπὸν ἀκριβῶς

40 μὲ 10

700 μὲ 10 καὶ 100

2000 μὲ 10 καὶ 100 καὶ 1000 κτλ.

§. 54. Μὲ ταύτας τὰς παρατηρήσεις εὐρίσκων τὸν κοινὸν διαιρέτην ἀριθμοῦ καὶ παρονομαστοῦ δύνασθαι νὰ συντέμῃ· τὸ κλάσμα· ἔστω νὰ συντεμηθῇ, π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{3}{20}$ · ἐπειδὴ οἱ ὅροι του εἶναι ἄρτιοι ἀριθμοὶ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων καθενὸς διαιρεῖται διὰ 3

(άνωτ. 5'), είναι λοιπόν κοινὸς διαιρέτης ὁ 6, διὰ τοῦ ὁποίου φέρεται τὸ κλάσμα εἰς $\frac{6 \cdot 0}{12 \cdot 0}$ · καὶ τοῦτο εἰς $\frac{6}{12}$ (6'), καὶ τοῦτο τελευταῖον εἰς $\frac{1}{2}$ (5').

§. 55. Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι πολλὰ μεγάλοι, αἱ παρατηρήσεις αὗται γίνονται δυσμεταχειρίστοι, καὶ τότε πρέπει νὰ μεταχειρισθῶμεν τὴν ἐφεξῆς μέθοδον εἰς εὐρεσιν τοῦ κοινοῦ διαιρέτου.

α'. Διαίρεσε τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ· καὶ ἐὰν δὲν μείνῃ κατάλοιπον, ὁ ἀριθμητὴς εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ ἐκτοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ.

β'. Ἐὰν μείνῃ τι κατάλοιπον, διαίρεσε δι' αὐτοῦ τὸν πρότερον διαιρέτην· καὶ ἐὰν καὶ εἰς αὐτὴν τὴν διαίρεσιν μείνῃ κατάλοιπον, διαίρεσε πάλιν δι' αὐτοῦ τὸν διαιρέτην τῆς δευτέρας διαίρεσεως· καὶ κάμνε τοῦτο ἐφεξῆς, ἕως οὗ νὰ εὕρῃς διαιρέτην ἀκριβῆ εἰς μίαν διαίρεσιν· μ' αὐτὸν διαιροῦνται ἀκριβῶς καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ δοθέντος κλάσματος.

γ'. Ἐὰν ἐπαναλαμβάνων τὰς διαίρεσεις καταντήσῃς εἰς κατάλοιπον τὴν μονάδα, τὸ κλάσμα δὲν συντέμνεται, ἐπειδὴ κοινὸς διαιρέτης δὲν εὐρίσκεται ἄλλος, εἰμὴ ἡ 1. Τὰ ἐφεξῆς παραδείγματα ἐξηγοῦσι σαφέστερα τὰ εἰρημένα.

Παράδειγμα Α. Ἐστω νὰ συντημηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{663}{1105}$

Διαίρετης Διααιρετέος

$$\begin{array}{r} 663 \overline{) 1105} \quad 1 \\ \text{κατάλ.} \quad 442 \overline{) 663} \quad 1 \\ \text{κατάλ.} \quad 221 \overline{) 442} \quad 2 \\ \hline 000 \end{array}$$

Ἄρα διὰ 221 διαιρεθὲν τὸ κλάσμα καὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν, γίνεται $\frac{3}{5}$.

Παράδειγμα Β'. Νὰ συντέμῃς τὸ κλάσμα $\frac{37}{101}$.

$$\begin{array}{r} \text{Ἐπειδὴ διὰ τῆς} \quad 37 \overline{) 101} \quad 12 \\ \text{πρῶτως λαμβάνο-} \quad 27 \overline{) 37} \quad 1 \\ \text{μεν κοινὸν διαιρέ-} \quad 10 \overline{) 27} \quad 2 \\ \text{την τὴν 1, τὸ} \quad 7 \overline{) 10} \quad 1 \\ \text{κλάσμα δὲν δύνα-} \quad 3 \overline{) 7} \quad 2 \\ \text{ται νὰ συντημηθῇ.} \quad 4 \end{array}$$

§. 56. Ἐὰν δὲν συντέμνεται ἀκριβῶς τὸ κλάσμα, ἐμπορεῖ νὰ συντημηθῇ περίπου, ἤγουν μὲ κάποιαν μὲν ἑλλειψιν, ἀλλ' ὅχι πολλὰ μεγάλην· γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν ἀπορρίψωμεν ἰσαριθμούς ἀπὸ τὰ δεξιὰ χαρακτῆρας· π. χ. $\frac{2113}{4132}$ εἶναι περίπου $\frac{2}{4}$ ἢ $\frac{1}{2}$.

§. 57. Δύο κλάσματα ἐμπορεῖς νὰ φέρῃς εἰς τοὺς αὐτοῦ παρονομαστὰς χωρὶς νὰ βλάβῃς τὴν τιμὴν των· αἱ εἶναι $\frac{2}{3}$, π. χ. καὶ $\frac{3}{4}$ · πολλαπλασιάσας λοιπὸν τοῦ πρώτου τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου, καὶ θέλει γενῇ τὸ πρῶτον $\frac{8}{12}$ · πολλαπλασιάσας ἔπειτα τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου. Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον τὸ μὲν πρῶτον θέλει γενῇ $\frac{8}{12}$, τὸ δὲ δεύτερον $\frac{9}{12}$ · ὅτι δὲ ἡ τιμὴ των μένει εἶναι φανερόν· διότι τοῦ μὲν πρώτου ἀριθμητῆς καὶ παρονομαστῆς ἐπολλαπλασιάσθησαν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 4· τοῦ δὲ δευτέρου, μὲ τὸν 3, (§. 50.)

§. 58. Ὅταν τρεῖς κλάσματα θέλῃς νὰ τὰ φέρῃς εἰς τοὺς αὐτοῦ παρονομαστὰς, πολλαπλασιάσας ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ πρώτου μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἄλλων, καὶ τοὺς τοῦ δευτέρου μὲ

τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν παρονομαστῶν τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ τοῦ τρίτου μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν παρονομαστῶν τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου· μὲ τοῦτον τὸν τρόπον τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ μεταβάλλονται εἰς $\frac{12}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{18}{24}$, χωρὶς νὰ χάσουν τὴν τιμὴν των (§. 50.). Ὡσαύτως ἐμπορεῖ νὰ φέρῃ καὶ πλείονερα κλάσματα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς.

§. 59. Διὰ πλείοτεράν ευκολίαν τῶν ἐκθέσεων ἐξηγοῦμεν ἐνταῦθα σύμβολά τινε, τὰ ὅποια παραλαμβάνονται εἰς τὰς πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς. Τὸ $+$ σημαίνει σύναψιν τῶν ἀριθμῶν, μετὰ τῶν ὁποίων γράφεται, καὶ ἀναγινώσκεται καὶ τὸ $-$ σημαίνει ὅτι ὁ πρὸς δεξιὰν αὐτοῦ ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν εἰς τ' ἀριστερά, καὶ ἀναγινώσκεται πλήν· τὸ $=$ σημαίνει ἴσον. Κατὰ τοῦτον λοιπὸν τὸν τρόπον $3 + 5 = 8$, καὶ $8 - 3 = 5$. Θέλει νὰ εἴπῃ ὅτι 3 συναπτόμενα μὲ 5 εἶναι ἴσα μὲ τὸν 8, καὶ 8 πλὴν τοῦ 3 εἶναι ἴσον μὲ τὸν 5· τὸ $\times$ σημαίνει πολλαπλασιασμὸν, καὶ ἀναγινώσκεται ἐπὶ π. χ. $3 \times 5 = 15$ · τὸ $:$ σημαίνει διαιρέσιν, καὶ ἀναγινώσκεται διὰ π. χ. $8 : 4 = 2$, ἔχουν 8 διαφεύμενος διὰ 4 δίδει πηλίκον 2· ἀλλ' ἡ διαιρέσις σημαίνεται καὶ μὲ τὸ κλάσμα αὐτῷ, $\frac{8}{4} = 2$ (§. 45).

§. 60. Διὰ νὰ συνάψῃς κλάσματα, ἀκολούθει τὰ ἐξῆς.

α'. Φέρε τὰ κλάσματα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς· διότι κατ' ἄλλον τρόπον δὲν ἐμποροῦν νὰ συναψθῶν.

β'. Λάβε τὸ κεφάλαιον τῶν ἀριθμητικῶν, καὶ ὑποκάτω αὐτοῦ γράψε τὸν παρονομαστὴν τὸν κοινόν.

γ'. Σύνεψε τὸ κλάσμα.

Παράδειγμα. Πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν κλασμάτων

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$; Ταῦτα ἰσοδυναμοῦν μὲ τὰ $\frac{6}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{15}{90}$ · λοιπὸν $\frac{6}{9} + \frac{5}{6} + \frac{15}{90} = \frac{120}{90} = 1 \frac{30}{90}$ (§. 45.).

§. 61. Ἐὰν εἶναι τὰ κλάσματα συμμιγῆ (§. 44 δ'), σύναψε πρώτον τὰ κλάσματα, ὡς εἴπαμεν· ἔπειτα τοὺς ὁλοκλήρους ἀριθμούς· καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων εἶναι νόθον κλάσμα, σύναψε τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἐκβαίνοντα ὁλόκληρον ἀριθμὸν (§. 45.) μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν ὁλοκληρῶν.

Παράδειγμα· ἐμεταχειρίσθη ἕνας μόσχον δράμιαι $1 \frac{1}{2}$, καὶ $2 \frac{2}{3}$, καὶ $5 \frac{3}{4}$. Πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιόν των; σύναψε πρώτον τὰ κλάσματα $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, ἀπὸ τὰ φέρῃς εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς, (ὡς §. 57. §. 58.) $= \frac{12}{12} + \frac{16}{12} + \frac{18}{12} = \frac{46}{12} = 3 \frac{11}{12}$. σύναψε ἔπειτα τοὺς ὁλοκληρούς, $1 + 2 + 5 = 8$ · καὶ $8 + 3 \frac{11}{12} = 9 \frac{11}{12}$, σχεδὸν 10.

§. 62. Ὅταν ἀφαιρῇς κλάσμα ἀπὸ κλάσματος, ἀκολούθει τὰ ἐξῆς.

α'. Φέρε τὰ κλάσματα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς.

β'. Ἀφάίρεσε τὸν ἀριθμητικὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀριθμητικὸν τοῦ μειωτέου, καὶ εἰς τὴν διαφορὰν των ὑπέγραψε τὸν κοινὸν παρονομαστὴν.

Ἔστω νὰ ἀφαιρέσῃς $\frac{1}{2}$ ἀπὸ $\frac{3}{4}$, ἔχουν $\frac{3}{8}$ ἀπὸ $\frac{6}{8}$ (§. 57)· ἄρα $\frac{6}{8} - \frac{1}{2} = \frac{6}{8} - \frac{4}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

§. 63. Ἐὰν τὰ κλάσματα εἶναι συμμιγῆ, (§. 44 δ'), ἀφάίρεσε πρώτον τὸ κλάσμα ἀπὸ τὸ κλάσμα, καὶ ἔπειτα τὸ ὁλόκληρον ἀπὸ τὸ ὁλόκληρον· π. χ. ἐχρεώσται ἕνας $12 \frac{1}{4}$ γρ. καὶ ἔδωκε $7 \frac{1}{2}$. Πόσα χρεώσται ἀκόμη; πρῶτον $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$ · ἔπειτα, $12 - 7 = 5$ · χρεώσται λοιπὸν γρόσια $5 \frac{1}{4}$.

§. 64. Ὅταν ζητῇς νὰ ἀφαιρέσῃς κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιου

ον ἀριθμὸν, δανείσου μίαν μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιον καὶ μετὰβαλέ την εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστήν τὸν τοῦ ἀφαιρετέου κλάσματος (§. 45.), καὶ ἀφαίρεσε ἀπ' αὐτοῦ τὸ ἀφαιρετέον κλάσμα. Ἐάν π. χ. ἀπὸ 5 δράμια ἀφαιρέσῃ; $\frac{1}{5}$ δρ. πόσον μένει; Δανείσου ἀπὸ τὸν 5 μίαν 1, καὶ μετὰβαλέ την εἰς $\frac{5}{5}$ $\frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ μένουν λοιπὸν 4 $\frac{4}{5}$ δρ.

§. 65. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσῃς κλάσμα τὸ $\frac{3}{5}$ π. χ. μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν τὸν 5, πολλαπλασίασε τὸν ἀριθμητὴν του μὲ τὸν 5, καὶ ἔφες του τὸν αὐτὸν παρονομαστήν $\frac{3}{5} \times 5 = \frac{15}{5}$.

§. 66. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσῃς συμμιγὲς κλάσμα μὲ κλάσμα, φέρε εἰς ἓν κλάσμα τὸ συμμιγὲς, καὶ πολλαπλασίασε τὰ κλάσματα, ἀριθμητὴν μὲ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστήν μὲ παρονομαστήν. Ἐάν π. χ. πῆχυς ὑψάσματος τιμᾶται 1 $\frac{3}{4}$, πόσον τιμῶνται $\frac{3}{5}$ πῆχυν; $1 \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{7}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{20} = 1 \frac{1}{10}$.

§. 67. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσῃς συμμιγὲς κλάσμα μὲ συμμιγὲς, φέρε καὶ τὸ ἓν εἰς ἓν κλάσμα καὶ τὸ ἄλλο, καὶ πολλαπλασιάσε τα ἀριθμητὴν μὲ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστήν μὲ παρονομαστήν. Ἐάν π. χ. ἡ ὀκκὰ τοῦ ὑδραργύρου τιμᾶται 6 $\frac{1}{2}$ γρ. πόσον τιμῶνται 2 $\frac{3}{4}$ ὀκκάδες; $6 \frac{1}{2} \times 2 \frac{3}{4} = \frac{13}{2} \times \frac{11}{4} = \frac{143}{8} = 17 \frac{7}{8}$ γρ.

§. 68. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσῃς κλάσμα μὲ κλάσμα, πολλαπλασιάσε τα ἀριθμητὴν μὲ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστήν μὲ παρονομαστήν καὶ λοιπὸν $\frac{3}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{12}{30}$. Ἐάν π. χ. μία ὀκκὰ ὑψάριχ τιμῶνται $\frac{3}{4}$ γρ. πόσον τιμῶνται $\frac{2}{5}$ ὀκ.; $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

§. 69. Διὰ νὰ διαιρέσῃς κλάσμα μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν, πολλαπλασίασε δι' αὐτοῦ τὸν παρονομαστήν του. Ἐάν π.

χ. 4 μοιρασθῶσι $\frac{2}{3}$ γροσίον, πόσον θέλει λάβει καθείς; $\frac{2}{3} : \frac{2}{3} \times 2 = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

§. 70. Πρὶν τελειώσωμεν τὸ παρὸν μέρος, κρίνομεν ἀνγκαῖον νὰ εἰπωμεν καὶ πῶς εὐρίσκεται ἡ μέση τιμὴ πολλῶν πραγμάτων διαφόρου τιμῆς, ἢ, καθὼς συνηθίζομεν νὰ λέγομεν, πόσον ἔρχεται ἓνα μὲ τὸ ἄλλο. Ὅταν λοιπὸν δοθῶσι τιμαὶ διαφόρων πραγμάτων, σὺναψέ τας ὅλας, καὶ διαίρεσε τὸ κεφάλαιον μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πραγμάτων.

Ἐξώδευσα π. χ. τὸν Σεπτέμβριον μῆνα γρ. 200. 14, τὸν Ὀκτώβριον γρ. 150. 12, τὸν Νοέμβριον γρ. 130. 10, τὸν δὲ Δεκέμβριον γρ. 180. 17. Πόσον ἔρχεται ὁ μῆνας ἓνας μὲ τὸν ἄλλον; σύναψε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς, καὶ τὸ κεφάλαιον διαίρεσε γρ. 200. 14 μὲ τὸν 4 ἀριθμὸν τῶν μηνῶν ἔρχεται λοιπὸν 150. 12 καθείς μὴν πρὸς γρόσια 180. 17

465 καὶ 23 παράδες. 4 [661. 13 [165. 23

—0—

Περὶ Λόγου καὶ Ἀναλογίας καὶ τῆς Μεθόδου τῶν τριῶν.

§. 71. Ὅταν συγκρίνεις δύο ἀριθμοὺς διὰ νὰ μάθης πόσαις φοραῖς περιέχεται ὁ εἷς εἰς τὸν ἄλλον, τότε λέγεις ὅτι ζητεῖς νὰ μάθης τίνα λόγον ἔχει ὁ εἷς εἰς τὸν ἄλλον. Λόγος λοιπὸν ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν εἶναι τὸ πηλίκον, τὸ ὅποιον ἐκβαίνει ἀπὸ τὴν διαίρεσιν τοῦ ἐνὸς διὰ τοῦ ἄλλου.

§. 72. Εἰς πάντα λόγον ἀπαιτοῦνται δύο ἀριθμοί, οἱ

ὅποιοι ὀνομάζονται ὄροι· εἰς ἐξ αὐτῶν γράφεται πρῶτος καὶ ὀνομάζεται ἡγούμενος ὄρος· μετ' αὐτὸν γράφεται τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως ($:$), καὶ πρὸς δεξιὰν αὐτοῦ γράφεται ὁ ἄλλος ὄρος· ὅστις λέγεται ἐπόμενος· ὁ λόγος λοιπὸν, τὸν ὅποιον ἔχει ὁ 2 πρὸς τὸν 6 γράφεται οὕτως $2 : 6$ · ἐδῶ ὁ λόγος εἶναι 3, ἐπειδὴ ὁ 2 περιέχεται εἰς τὸν 6 τρίς· ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται καὶ *πηλίκον τοῦ λόγου*.

§. 73. Δύο λόγοι λέγονται ἰσάλληλοι, ὅταν τὰ πηλίκια τῶν εἶναι ἴσα· π. χ. ὁ λόγος $2 : 6$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον $7 : 21$ · διότι τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{2}{6} = 3$, καὶ τὸ πηλίκον τοῦ δευτέρου εἶναι $\frac{7}{21} = 3$.

§. 74. Ὁ λόγος μένει ἀμετάβλητος, ἂν δὲν μεταβληθῇ τὸ πηλίκον τοῦ· τὸ δὲ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, ἂν καθέις ἐκ τῶν ὄρων πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· διότι $3 : 6$ εἶναι ὁ αὐτὸς λόγος καὶ $3 \times 2 : 6 \times 2$, ἢ γουν $6 : 12$, ἐπειδὴ τὸ πηλίκον εἶναι καὶ εἰς τοὺς δύο 2 · καὶ $5 : 15$ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν $\frac{5}{6} : \frac{15}{6}$, ἢ γουν μὲ $4 : 3$, πηλίκον εἶναι καὶ εἰς τοὺς δύο 3.

§. 75. Ὅταν εἰς τὸν λόγον ὁ ἡγούμενος ὄρος εἶναι μεγαλύτερος παρὰ τὸν ἐπόμενον, ὁ λόγος λέγεται *μειούμενος*, π. χ. $6 : 2$ · ὅταν δὲ ὁ ἡγούμενος εἶναι μικρότερος, ὁ λόγος λέγεται *αὐξων*, π. χ. $3 : 6$.

§. 76. Δύο λόγοι ἴσοι καὶ ὀνομάζονται *ἀναλογίαι*. Εἰς τὴν ἀναλογίαν λοιπὸν εἶναι τέσσαρες ὄροι· μεταξὺ δὲ τῶν δύο λόγων γράφεται τὸ σύμβολον τῆς ἰσότητος $=$, ἢ τὸ ($::$). Ἀνγκινώσκεται δὲ ἡ ἀναλογία οὕτως· ὁ 3 ἔχει πρὸς τὸν 6 λόγον, τὸν ὅποιον ἔχει ὁ 7 πρὸς τὸν 21· ἢ, συντομώτερον, ὁ 3 πρὸς 6 ὡς ὁ 7 πρὸς 21.

§. 77. Ἡ ἀναλογία ὀνομάζεται *ὀρθή*, ἂν οἱ δύο ἴσοι λόγοι τῆς εἶναι ἢ καὶ οἱ δύο αὐξωντες, ἢ καὶ καὶ οἱ δύο

μειούμενοι· π. χ. $2 : 4 = 7 : 14$, ἢ $6 : 2 = 18 : 6$. Ἀντίστροφος δὲ, ὅταν ὁ εἰς λόγος εἶναι αὐξων, καὶ ὁ ἄλλος μειούμενος, π. χ. $3 : 6 = 8 : 4$. Λέγοντες ὅμως ἀναλογίαν ἐννοοῦμεν πάντοτε τὴν ὀρθήν.

§. 78. Ὁ πρῶτος καὶ ὁ τέταρτος ὄρος τῆς ἀναλογίας λέγονται *ἄκρα*· ὁ δὲ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος, μέσα· εἰς τὴν ἀναλογίαν π. χ. $2 : 4 :: 7 : 14$, ὁ 2 καὶ 14 εἶναι ἄκρα, ὁ δὲ 4 καὶ 7 μέσα.

§. 79. Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν μέσων· διότι εἰς τὴν ἀναλογίαν $2 : 4 :: 7 : 14$, τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων εἶναι $2 \times 14 = 28$ · γινόμενον δὲ ὑπὸ τῶν μέσων, $4 \times 7 = 28$.

§. 80. Ἡ ἀντίστροφος ἀναλογία (§. 77.) μεταβάλλεται εἰς ὀρθήν, ἂν μόνον ἀντιστραφῇ εἰς ἀπὸ τοῦς λόγους τῆς· π. χ. $3 : 12 :: 8 : 2$, γίνεται ὀρθή, ἢ ἂν ἀντιστρέψῃ τὸν πρῶτον λόγον, $12 : 3 :: 8 : 2$, ἢ ἂν ἀντιστρέψῃ τὸν δεύτερον, $3 : 12 :: 2 : 8$. ἐπειδὴ εἰς πᾶσαν μίαν ἀπὸ τὰς δύο ἀντιστροφὰς τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν μέσων.

§. 81. Ἡ ἀναλογία μένει ἀμετάβλητος, ἂν οἱ δύο μέσοι ὄροι μεταβάλουν τὴν τόπον τῶν, καὶ γείνη ὁ δεύτερος τρίτος, καὶ ὁ τρίτος, δεύτερος· ἂν π. χ. εἶναι ἀναλογία $2 : 4 :: 8 : 16$, εἶναι ἀναλογία καὶ $2 : 8 :: 4 : 16$. Ὡσαύτως δύναται ὁ πρῶτος ὄρος νὰ γείνη τέταρτος, καὶ ὁ τέταρτος πρῶτος, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀναλογία· ἂν π. χ. εἶναι ἀναλογία $2 : 4 :: 8 : 16$, εἶναι ἀναλογία καὶ $16 : 4 :: 8 : 2$ · διότι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν μέσων (§. 79.).

§. 82. Πολλάκις εἰς ἀναλογίαν τινα εἶναι ἄγνωστος ἓνας ὅρος, καὶ μάλιστα ὁ τέταρτος, οἱ δὲ ἄλλοι τρεῖς εἶναι γνωστοί· ὁ τέταρτος λοιπὸν ὅρος εὐρίσκεται, ἐὰν τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν μέσων διαιρεθῇ διὰ τοῦ πρώτου· ὁ ἄγνωστος ὅρος σημαίνεται μὲ τὸ χ . π. χ. $2 : 6 :: 8 : \chi$, ὁ τέταρτος ὅρος χ εἶναι ἴσος μὲ τὸ $6 \times 8 = 48$ διαιρεθὲν διὰ τοῦ 2, ἤγουν εἶναι ὁ 24.

§. 83. Καθὼς εὐρέθη ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας, οὕτως ἐμπορεῖ νὰ εὐρεθῇ καὶ ἄλλος τις, ἐὰν οἱ λοιποὶ τρεῖς εἶναι γνωστοί. Εἰ μὲν ὁ ἄγνωστος εἶναι εἰς ἀπὸ τὰ ἄκρα, τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν μέσων διαιρούμενον μὲ τὸ ἄλλο γνωστὸν ἄκρον μᾶς δίδει πηλίκον τὸ ἄγνωστον ἄκρον· ἐὰν π. χ. εἶναι $\chi : 24 :: 3 : 8$, τὸ γινόμενον $24 \times 3 = 72$, διαιρεθὲν διὰ 8, μᾶς δίδει πρῶτον ὅρον τὸν 9. Εἰ δὲ ὁ ἄγνωστος ὅρος εἶναι εἰς ἀπὸ τοὺς μέσους, τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων διαιρούμενον διὰ τοῦ ἄλλου μέσου τοῦ γνωστοῦ μᾶς δίδει τὸν ζητούμενον· π. χ. $3 : \chi :: 4 : 12$, $3 \times 12 = 36$, $\frac{36}{4} = 9$. 9 λοιπὸν εἶναι ὁ δεῦτερος ὅρος.

§. 84. Μέθοδος τῶν τριῶν ὀνομάζεται ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν ἀπὸ τρεῖς γνωστούς ὅρους τῆς ἀναλογίας εὐρίσκομεν τὸν ἄγνωστον τέταρτον. Καθὼς δὲ ἡ ἀναλογία εἶναι ἢ ὀρθὴ ἢ ἀντίστροφος (§. 77)· οὕτως εἶναι ὀρθὴ ἢ ἀντίστροφος καὶ ἡ εἰς αὐτὴν γινομένη μέθοδος τῶν τριῶν.

§. 85. Εἰς τὴν μέθοδον τῶν τριῶν πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἐφεξῆς.

Οἱ τέσσαρες ὅροι πρέπει νὰ ἔχουν δύο ὀνόματα· ἐν ὀνομα οἱ δύο, καὶ ἐν ἄλλο οἱ ἄλλοι δύο. π. χ. 2 ὀκ. καφρὲ : 8 ὀκ. :: 8 γρόσια : χ . ἐδῶ ἐν ὀνομα εἶναι ὀκκὰ καφρὲ, καὶ ἄλλο γρόσια.

Διὰ νὰ ἡξεύρωμεν, ἂν ἡ μέθοδος εἶναι ὀρθὴ ἢ ἀντίστρο-

φος, πρέπει νὰ ἐξετάζωμεν τὸ πρᾶγμα οὕτως· εἰ μὲν ἐμποροῦμεν νὰ εἰπώμεν, ὅσον πλειότερα—τόσον πλειότερα· ἢ ὅσον ὀλιγώτερα, τόσον ὀλιγώτερα· ἢ μέθοδος εἶναι ὀρθή· εἰ δὲ λέγομεν ὅσον πλειότερα, τόσον ὀλιγώτερα, ἢ ὅσον ὀλιγώτερα, τόσον πλειότερα, ἢ μέθοδος εἶναι ἀντίστροφος· διὰ νὰ καταλάβωμεν σαφέστερα τὸ λεγόμενον, πρέπει νὰ τὸ ἐξηγήσωμεν μὲ τὰ ἐφεξῆς.

§. 86. Ὄρθὴ ἀναλογία ἐμφιλοχωρεῖ

α'. Μεταξὺ τοῦ πλήθους τῶν ὠνίων καὶ τῆς τιμῆς των, διότι διπλάσιον ὠνιον ἀξίζει διπλὴν τιμὴν· καὶ τριπλάσιον τριπλὴν κτλ. καὶ τὸ ἥμισυ, ἡμιστίαν· καὶ τὸ τριτημόριον τριτημόριον τιμῆς· ἐμποροῦμεν λοιπὸν ἐδῶ νὰ εἰπώμεν· ὅσον πλειότερα τὰ ὠνια, τόσον πλειότερα ἡ τιμὴ των· ἢ ὅσον ὀλιγώτερα, τόσον ὀλιγώτερα.

β'. Ὁ κόπος μὲ τὴν πληρωμὴν εἶναι εἰς ἀναλογίαν· διότι ὅσον πλειότερος εἶναι ὁ κόπος, τόσον πλειότερα καὶ ἡ πληρωμή· καὶ ὅσον ὀλιγώτερος, τόσον ὀλιγώτερα κτλ.

γ'. Τὸ καταβαλλόμενον κεφάλαιον εἶναι μὲ τὸ κέρδος εἰς ὀρθὴν ἀναλογίαν· διότι ὅσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ κεφάλαιον, τόσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ κέρδος κτλ. Παρεκτὸς τούτων εἶναι καὶ ἄλλαι περιστάσεις, ὅπου ἐμφιλοχωρεῖ ὀρθὴ μέθοδος τῶν τριῶν.

§. 87. Μεταξὺ τοῦ πλήθους τῶν ἐργατῶν καὶ τοῦ καιροῦ εὐρίσκεται ἀντίστροφος ἀναλογία· ὅσον πλειότερους ἐργάτας ἔχω νὰ μοῦ σκάψουν τὸν κῆπον, τόσον ὀλιγώτερον καιρὸν θέλουν ἐξοδεύσιν· καὶ ὅσον ὀλιγώτερος, τόσον πλειότερος καιρὸς χρειάζεται. Παρεκτὸς τούτου, εὐρίσκονται καὶ ἄλλαι περιστάσεις, ὅποτε ἐμβαίνει εἰς χρῆσιν ἢ ἀντίστροφος μέθοδος.

§. 88. Ὄταν λοιπὸν εἰς πρᾶξιν ἀριθμητικὴν ἀναφανέ-

ται ἀναλογία μὲ τρεῖς γνωστῶς ὄρους, ὁ τέταρτος ἐμπορεῖ νὰ εὐρεθῇ διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδου. Πρέπει δὲ νὰ φυλάξῃ· εἰς ταύτην τὴν μέθοδον τὰ ἐρεξῆς.

α. Βάλε τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τάξιν· εἰς τὸν κοινὸν βίον συνεθίζου· νὰ βάλλουν τρίτον ὄρον ἐκεῖνον, ὅπου γίνεται τὸ ζήτημα· πρῶτον τὸν ὁμώνυμόν του· δεύτερον, τὸν ὁμώνυμον μὲ τὸν ζητούμενον τέταρτον· ἀλλ' ἐπειδὴ, ἂν μετατεθοῦν οἱ μέσοι ὄροι, ἡ ἀναλογία δὲν χάνεται (§. 81) διὰ τοῦτο τακτικώτερον, βάλε πρῶτον τοὺς δύο ὁμώνυμους, καὶ ἔπειτα τοὺς δύο ἄλλους (§. 85).

β. Ἐξέτασε, ἂν ἡ μέθοδος εἶναι ὀρθή ἢ ἀντίστροφος (§. 85)· ἂν εἶναι ἀντίστροφος, κάμε τὴν ὀρθήν (§. 80).

γ. Πολλαπλασίασε τοὺς δύο μέσους, καὶ τὸ γινόμενον διαίρεσε διὰ τοῦ πρώτου (§. 82). Τὰ ἐρεξῆς· παραδείγματα θέλουν σαφηνίσαι τοὺς κανόνας.

Παράδειγμα Α'. Ἐὰν 3 αὐγά τιμῶνται 8 πρ. πόσου· πρ. ἀξίζου 60 αὐγά· $3 : 60 :: 8 : \chi$. $60 \times 8 = 480$. $\frac{480}{3} = 160$ πρ. = γρόσι. 4.

Παράδειγμα Β'. Ἐὰν πέντε ἐργάται σκάπτωσι τὸ χωράριον εἰς 4 ἡμέρας, πόσας ἡμέρας θέλουν τὸ σκάψειν ἐργάται 10· 5 ἐργ. : 4 ἡμ. :: 10 ἐργ. : χ . ἡ ἀναλογία εἶναι ἀντίστροφος (§. 87)· μετὰβαλε λοιπὸν τοὺς ὄρους. $40 : 4 :: 5 : \chi$. $4 \times 5 = 20$. $20 : 10 = 2$.

Παράδειγμα Γ'. Ἐὰν ἡμισεὶς δωδεκάς μανδηλίων τιμᾶται 10 γρ. πόσον ἀξίζου τρεῖς δωδεκάδες· ἡμισεὶς δωδεκάς εἶναι 6 μανδηλίας· καὶ 3 δωδεκάδες· εἶναι 36· κάμε λοιπὸν τὴν ἐρεξῆς· μέθοδον τῶν τριῶν $6 : 36 :: 10 : \chi$. $36 \times 10 = 360$. $360 : 6 = 60$ γρόσια.

Παράδειγμα Δ'. Ἐὰν λαμβάνει μνηναῖον γρόσι. 35, πόσα λοιπὸν θέλει λάβει εἰς δύο χρόνους καὶ 4 μῆνας· ἐ-

πειδὴ ὁ χρόνος ἔχει 12 μῆνας· λοιπὸν δύο χρόνοι καὶ 4 μῆνες κάμνουν μῆνας 28· κάμε τὴν ἐρεξῆς· μέθοδον τῶν τριῶν $1 \text{ μὴν} : 35 \text{ γρ.} :: 28 \text{ μῆνες} : \chi$. καὶ θέλεις εὐρεῖ γρόσια 480.

§. 89. Ἐκ τούτων ἀπάντων γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ μέθοδος τῶν τριῶν ἀπαιτεῖ οὐσιαστικῶς τὸν πολλαπλασιασμόν καὶ τὴν διαίρεσιν. Ἡ δὲ δοκιμὴ τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν εὐρεθέντα τέταρτον ὄρον μὲ τὸν πρῶτον, καὶ τὸν δεύτερον μὲ τὸν τρίτον, καὶ ἂν τὰ δύο γινόμενα εἶναι ἴσα, ἡ πρᾶξις μα· εἶναι ἀλάνθαστος (§. 79).

— 0 —

Περὶ Βαθμῶν καὶ Ρίζων.

§. 90. Ἐκθέτονται ὀλίγιστα περὶ βαθμῶν καὶ ρίζων καὶ ἄλλων τινῶν συμβόλων, ὡς χρησιμεύοντα εἰς τὴν Γεωμετρίαν, πρὸς μικράν τινα ιδέαν, μὲ τὸν ἀπλούστατον τρόπον.

§. 91. Πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος μὲ τὸν αὐτόν του γίνεται βαθμὸς· δεύτερος· αὐτὸς δὲ ὁ ἀριθμὸς εἶναι ρίζα τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, καὶ βαθμὸς πρῶτος· π. χ. 3 πολλαπλασιαζόμενος μὲ 3 γίνεται 9· ὁ 9 λέγεται βαθμὸς δεύτερος· ὁ δὲ 3 λέγεται βαθμὸς πρῶτος· καὶ ρίζα τοῦ 9· ἂν πάλιν ὁ 9 πολλαπλασιασθῇ μὲ τὴν ρίζαν του, γίνεται βαθμὸς τρίτος· π. χ. $9 \times 3 = 27$ · ὁ 27 λέγεται τρίτος βαθμὸς τοῦ 3.

§. 92. Ὁ δεύτερος βαθμὸς λέγεται καὶ τετράγωνος ἀριθμὸς, ἡ τετράγωνον ἀπλῶς· ὁ δὲ πρῶτος βαθμὸς ἀνα-

φερόμενος, πρὸς τὸν δευτέρον λέγεται ἡ τετραγωνικὴ *ρίζα* του· ὁ τρίτος βαθμὸς ὀνομάζεται καὶ *κύβος*· καὶ ὁ πρῶτος ἀνφερόμενος, πρὸς αὐτὸν, λέγεται ἡ *κυβικὴ ρίζα* του.

§. 93. Ὄταν περιστάνωμεν τὴν *ρίζαν* βαθμοῦ τινος, μεταχειριζόμεθα τὸ σύμβολον $\sqrt{\quad}$, τὸ ὁποῖον λέγεται *ρίζικόν*· ὑποκάτω εἰς αὐτὸ γράφομεν τὸν βαθμὸν, καὶ ἐπάνω του γράφομεν 2· ἂν εἶναι ἡ *ρίζα* τετραγωνική·

3 δὲ, ἂν εἶναι *κυβική*· π. χ. $\sqrt[3]{9}$ φανερώνει τὴν τετραγωνικὴν *ρίζαν* τοῦ 9· $\sqrt[3]{27}$ φανερώνει τὴν *κυβικὴν ρίζαν* τοῦ 27· καὶ εἰς τοὺς δύο σχηματισμοὺς ἐννοεῖται ὁ 3 (§. 91).

§. 94. Ὄταν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν βαθμὸν ἀριθμοῦ τινός, γράφομεν ἐπάνω του 2, ἂν ὁ βαθμὸς εἶναι *δευτέρος*, ἢ τετράγωνον· 3, ἂν εἶναι *τρίτος*, ἢ *κύβος*· π. χ. 2^3 φανερώνει τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποῖου τετραγωνικὴ *ρίζα* εἶναι ὁ 2· 2^3 , τὸν *κύβον*, τοῦ ὁποῖου *ρίζα* *κυβικὴ* εἶναι ὁ 2· ὁ γραφόμενος ἐπάνω ἀριθμὸς ὀνομάζεται *βαθμοδείκτης*.

§. 95. Τὸ σύμβολον $>$, ἢ τὸ $<$ σημαίνει, ὅτι ὁ ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι εἰς τὸ ἀνοικτὸν μέρος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις εἶναι εἰς τὸ γωνιωδὲς μέρος· π. χ. $5 > 3$, θέλει νὰ εἴπῃ ὁ 5 εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 3· $3 < 9$ θέλει νὰ εἴπῃ, ὅτι ὁ 3 εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν 9.

==o==

Περὶ τοῦ Συμβολικοῦ Λογισμοῦ.

§. 96. Ὄταν ὀνομασθῇ ὁ ἀριθμὸς, π. χ. 5 δρχμας, δὲν ἐμπορεῖ νὰ σημάνη ἄλλα τινα πράγματα, εἰμὴ μόνον τὰς δρχμάς· ὅταν δὲ μείνῃ ἀκατανόμαστος, π. χ. 5, ἐμπορεῖ νὰ σημάνη ἢ 5 δρχμάς, ἢ 5 φλωρία, ἢ 5 ἀνθρώπους κτλ. πάντοτε ὅμως σημαίνει 5, καὶ ὅχι πλείονα ἢ ὀλιγώτερα·

§. 97. Ἐμπορεῖ ὅμως νὰ εὐρεθῇ καὶ χαρακτήρ, ὁ ὁποῖος νὰ μὴ σημαίνῃ διωρισμένην τινὰ ποσότητα, ἀλλ' ἀπροσδιόριστον· π. χ. νὰ μὴ σημαίνῃ μόνον τὸν 5, ἀλλ' ἀπροσδιόριστος, ἢ αὐτὸν, ἢ τὸν 6, ἢ τὸν 7 κτλ. ὧς τοιοῦτοι χαρακτῆρες περελήφθησαν ἀπὸ τοὺς μαθηματικούς· τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου· α, π. χ. εἶναι ἀριθμὸς ἀπροσδιόριστος, ὡσαύτως καὶ β καὶ γ κτλ.

§. 98. Εἰς τοὺς χαρακτῆρας τούτους γίνονται ὅλαι αἱ πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς· καὶ ἡ ἐπιστήμη ἥτις τὰς διδάσκει ὀνομάζεται *Συμβολικὸς Λογισμός*. Ἐδῶ λέγομεν ὀλίγα μόνον τινὰ περὶ αὐτῶν.

§. 99. Διὰ νὰ συνάψῃς δύο ἢ πλείονους τοιοῦτους χαρακτῆρας, γράψῃς τὸν ἓνα μετὰ τὸν ἄλλον, καὶ μεταξὺ των τὸ σύμβολον $+$ τῆς συνάψεως (§. 59)· διὰ νὰ συνάψῃς π. χ. τοὺς α, β, γ χαρακτῆρας, γράψῃς $\alpha + \beta + \gamma$, καὶ ἐτελείωσας τὴν σύναψιν.

§. 100. Διὰ νὰ ἀφαιρέσῃς τὸν β χαρακτῆρα ἀπὸ τὸν α, γράψῃς πρῶτον τὸν α, ἔπειτα τὸ τῆς ἀφαιρέσεως σύμβολον $-$, καὶ τελευταῖον τὸν β, οὕτως $\alpha - \beta$.

§. 101. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσῃς τὸ α μετὰ τὸ β, γράψῃς μεταξὺ των τὸ $\times$ σύμβολον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· οὕτως $\alpha \times \beta$ · ἢ χωρὶς τὸ σύμβολον γράψῃς τὸ ἐν κατόπιν τοῦ (ΣΥΝΟΨ. ΑΡΙΘΜΗΤ.) 3

ἄλλου οὕτως αβ· ἔαν πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσῃς τὸ $\alpha + \beta$ μὲ τὸ γ , πολλαπλασίασε καθὲν γράμμα μὲ τὸ γ , οὕτως $\alpha\gamma + \beta\gamma$, ἢ παρένθεσε τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ μετ' αὐτὸν γράψε τὸν πολλαπλασιαστήν, ἢ μὲ τὸ σύμβολον $\times$, ἢ καὶ χωρὶς αὐτό· οὕτως $(\alpha + \beta) \times \gamma$, ἢ $(\alpha + \beta) \gamma$ · ὅ,τι σημαίνει τὸ πρῶτον, τὸ αὐτὸ σημαίνει καὶ τὸ δεύτερον.

§. 102. Εἰς τὴν διαίρεσιν μεταχειρίσθητι ἢ τοῦ λόγου τοῦ σύμβολου, π. χ. $\alpha : \beta$, ἢ παράστησε τὴν διαίρεσιν εἰς εἶδος κλάσματος, π. χ. $\frac{\alpha}{\beta}$.

§. 103. α^3 , β^3 · σημαίνουν ὅτι τὸ α ἐτετραγωνίσθη· ὡσαύτως καὶ τὸ β . $\sqrt[3]{\alpha^2}$, $\sqrt[3]{\beta^2}$ σημαίνουν νὰ ἐκβάλωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀπὸ τοῦ α^2 , ἢ ἀπὸ τοῦ β^2 (§. 87, 88).

§. 104. Ὅταν τέσσαρα γράμματα α , β , γ , δ , εἶναι εἰς ἀναλογίαν, τὰ παριστάνομεν οὕτως· $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$ (§. 76)· ὅθεν ἔπεται, ὅτι $\alpha\delta = \beta\gamma$ (§. 79)· καὶ $\alpha = \frac{\beta\gamma}{\delta}$, καὶ $\delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$ καὶ $\beta = \frac{\alpha\delta}{\gamma}$, καὶ $\gamma = \frac{\alpha\delta}{\beta}$, (§. 81, 82).

Αἱ ὀλίγαι αὗται γνώσεις τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ θέλουσιν μᾶς χρησιμεύειν εἰς τὴν Γεωμετρίαν.

Εἰς τὴν διδασκαλίαν δὲν ἐγκρίνη καὶ τὰ μικρὰ τελευταῖα ταῦτα κατάλληλα διὰ τὰς νεανίδας, ἀλλὰ τὰ παρὰ βέλῃ· ὡσαύτως καὶ τὴν ἐφαρμογὴν των εἰς τὰ ἐξῆς μαθήματα.

ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

Ἐπιπεδομετρία.

§. 1.

Σῶμα γεωμετρικὸν ἢ στερεὸν ὀνομάζεται πᾶν ὅ,τι ἐκτείνεται κατὰ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος, καὶ περι-κλείεται εἰς ὅριά τινα. Τὰ ὅριά του ταῦτα ὀνομάζονται ἐπιφάνεια.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ἑκτασιν, τὴν ὁποῖαν πιάνει τὸ οἰκήμα μας κατὰ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἢ ὕψος, θεωροῦμεν σῶμα γεωμετρικὸν ἢ στερεόν· οἱ δὲ τοῖχοι τοῦ οἰκήματος εἶναι αἱ ἐπιφάνειαι του.

§. 2. Ἐπιφάνεια εἶναι διάστημα, τὸ ὁποῖον ἐκτείνεται κατὰ μῆκος καὶ πλάτος· ὁ τοῖχος, π. χ. τοῦ οἰκήματος εἶναι ἐπιφάνεια· τὸ ἐπάνω μέρος τῆς τραπέζης εἶναι ἐπιφάνεια· τὸ χαρτίον, ἐπάνω εἰς τὸ ὁποῖον γράφομεν, θεωρούμενον κατὰ μῆκος καὶ πλάτος μόνον, εἶναι ἐπιφάνεια κτλ.

§. 3. Διάστημα κατὰ μῆκος μόνον ἐκτείνόμενον ὀνομάζεται γραμμὴ· τὰ δὲ πέρατά της ὀνομάζονται σημεῖα.

Ἄν σύρῃς τὸ κονδύλιον εἰς τὸ χαρτίον, θέλεις γράφειν γραμμὴν· καὶ ἔαν μόνον ἐγγίξῃς τὴν μύτην τοῦ κονδυλίου εἰς τὸ χαρτίον, θέλεις γράφειν σημεῖον.

§. 4. Εὐθεῖα γραμμὴ, ἢ εὐθεῖα ἀπλῶς ὀνομάζεται, τὴν ὁποῖαν ἐννοεῖται ὅτι γράφει τὸ κονδύλιον χωρὶς νὰ γυρίσῃ εἰς τὰ δεξιὰ ἢ εἰς τὰ ἀριστερά, ἀλλὰ πάντοτε τρέχει κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν εἰς τὰ ἔμπροσθεν. Καμπύλη δὲ γραμμὴ

εἶναι, τὴν ὁποίαν ὅταν γράφῃ τὸ κοινὸν ἐκτείνει πάντοτε ἀπὸ τὸν εἰς τὰ ἔμπροσθεν δρόμον του.

Ἀξίωμα. Ἀπὸ πᾶν σημείον εἰς πᾶν σημείον ἔχομεν τὴν ἄδειαν νὰ γράψωμεν εὐθείαν, καὶ τὴν γραμμὴν νὰ ἐκτείνωμεν, ὅσον θέλομεν, καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα της.

§. 5. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν γράφομεν ἐπάνω εἰς μίαν ἐπιφάνειαν μεταξὺ δύο σημείων της, πίπτῃ ὅλη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ὀνομάζεται *ἐπίπεδος*, ἢ ἀπλῶς *ἐπίπεδον*· τοιαύτη εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς τραπέζης, τοῦ καθρέπτου, τοῦ ἀκινήτου ὕδατος· κτλ. Κυρτὴ δὲ ἐπιφάνεια εἶναι, ἥτις δὲν ἔχει κανὲν μέρος ἐπίπεδον· τοιαύτη εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια τοῦ ποτηρίου, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αὐγοῦ κτλ.

§. 6. Ἐὰν διὰ δύο σημείων Α καὶ Β (Σχ. 4.) γραφῇ εὐθεῖα ἡ ΑΒ, δὲν ἐμπορεῖ νὰ γραφῇ ἄλλη εὐθεῖα διὰ τῶν αὐτῶν σημείων, ἥτις νὰ ἔχῃ διάφορον θέσιν ἀπὸ τὴν ΑΒ. διότι, ἂν θελήσῃς διὰ τῶν αὐτῶν σημείων νὰ γράψῃς ἄλλην, αὕτη θέλει πέσει ἐπάνω εἰς τὴν πρώτην.

§. 7. Δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 2.), καθ' ἓν μόνον σημείον τὸ Ο τέμνονται ὑπ' ἀλλήλων, καὶ ὅχι κατὰ πλειότερα· διότι καθὼς ἔχουν δύο ἢ πλεονέστερα σημεία κοινά, ἢ μία εὐθεῖα πίπτει ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην (§. 6).

§. 8. Δύο εὐθεῖαι ΑΓ, ΓΒ, (Σχ. 3.) ἀρχόμεναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Γ, καὶ χωροῦσαι κατὰ διαφόρους φορὰς, κάμνουν *εὐθύγραμμον γωνίαν*· καὶ αἱ μὲν εὐθεῖαι ΑΓ, ΑΒ ὀνομάζονται *πλευραὶ τῆς γωνίας*· τὸ δὲ κοινὸν αὐτῶν σημείον Γ, *κορυφὴ τῆς γωνίας*.

Ἡ γωνία σημαίνεται μὲ τρία γράμματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ μέσον εἶναι κυρίως τὸ σημαντικόν της· π. χ. ΑΓΒ, καὶ ΒΓΑ, σημαίνουν τὴν γωνίαν, τῆς ὁποίας πλευραὶ εἶναι ἡ

ΑΓ καὶ ἡ ΒΓ. Σημαίνεται δὲ καὶ μὲ ἓν γράμμα, τὸ ὁποῖον θάλλεται μεταξὺ τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας.

§. 9. Ἐὰν ἡ τῆς ΑΓΒ γωνίας πλευρὰ ΑΓ προαχθῇ ἕως τὸ Δ, θέλει γένειν ἄλλη γωνία ΒΓΔ, ἥτις ὀνομάζεται *ἐφεξῆς* τῆς ΑΓΒ. Γωνία δὲ ἡ ΑΟΓ (Σχ. 4.), ἥτις εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐφεξῆς τῆς ΓΟΒ ὀνομάζεται *ὀρθή*· ἡ δὲ εὐθεῖα ΓΟ, ὅταν αἱ ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὀνομάζεται *κάθετος*· ὅταν δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι ἀνισοί (Σχ. 3.), ἡ εὐθεῖα ΒΓ λέγεται *πλαγία* εἰς τὴν ΑΔ.

§. 10. Ἐπειδὴ ὀρθὴ γωνία εἶναι ἡ ἴση μὲ τὴν ἐφεξῆς της (§. 9.) λοιπὸν καὶ ἡ ἐφεξῆς εἶναι ὀρθή· ἡ κάθετος λοιπὸν κάμνει δύο ὀρθάς. Ἐπειδὴ δὲ ἡ κάθετος θέσις τῆς εὐθείας εἶναι μία· διότι εὐθὺς ἀπὸ τοῦ παραλλήλῃ παύει νὰ εἶναι κάθετος, καὶ γίνεται πλαγία· πᾶσαι λοιπὸν αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἰσάλληλοι.

§. 11. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΔ (Σχ. 5.) ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ι, δὲν ἐμποροῦν νὰ ἔγερθῶν δύο διάφοροι κάθετοι ΙΖ, ΙΓ.

§. 12. Ἐκτεταμένα μεγέθη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν σκεπάζει τὸ ἄλλο· καθὼς δύο χαρτιά, ὅταν βελθῇ τὸ ἓν ἐπάνω τοῦ ἄλλου, καὶ τὸ πρῶτον σκεπάζῃ ἀκριβῶς τὸ δεύτερον· εἶναι ἐξ ἁπαντος ἴσα. Καὶ δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἐμποροῦν νὰ σκεπάσουν ἢ μία τὴν ἄλλην· ὡσαύτως καὶ δύο γωνίαι ἴσαι.

§. 13. **Ἀξιώματα.** α. Δύο μεγέθη ἴσα μὲ τρίτον τι, εἶναι καὶ ἀλλήλων ἴσα.

β'. Ἐὰν εἰς ἴσα προσεθῶν ἴσα, τὰ ὅλα θέλουν εἶσθαι ἴσα.

γ'. Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀφαιρεθῶν ἴσα, τὰ κατὰλοιπα θέλουν εἶσθαι ἴσα.

§. 14. Τὸ κεφάλαιον δύο ἐφεξῆς γωνιῶν ΑΙΖ + ΖΙΑ

(Σχ. 6.) είναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· διότι ἔμπορεῖ διὰ τοῦ I νὰ νοηθῇ καθέτος ἱσταμένη εἰς τὴν ΑΔ ἢ ΙΓ. Δοιπὸν ΑΙΓ + ΓΙΔ = 20· ἄρα καὶ ΑΙΖ + ΖΙΓ + ΓΙΔ, ἢ ΑΙΖ + ΖΙΔ = 20.

§. 15. Ἐὰν δύο γωνίαι ΑΙΖ, ΖΙΔ (Σχ. 6.) ἔχουσαι κοινὴν τὴν κορυφὴν I, καὶ μίαν κοινὴν πλευράν τὴν ΙΖ, εἶναι ἴσαι μὲ δὲ δύο ὀρθάς· αἱ ἐξωτερικαὶ αὐτῶν πλευραὶ ΑΙ, ΙΔ κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας· διότι, ἂν δὲν εἶναι τοῦτο ἀληθινὸν ὥς εἶναι ἡ ΙΘ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὴν ΑΙ. Εἶναι λοιπὸν ΑΙΖ + ΖΙΘ = 20 (§. 14)· καὶ ΑΙΖ + ΖΙΔ = 20, κατὰ τὴν ὑπόθεσίν μας· ἄρα ΑΙΒ + ΖΙΘ = ΑΙΖ + ΖΙΔ (§. 13.) καὶ ΖΙΘ = ΖΙΔ (§. 13, γ'). ἤγουν τὸ μέρος ἴσον μὲ τὸ ὅλον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

§. 16. Πᾶσα μὴ ὀρθὴ γωνία εἶναι ἢ μικροτέρα ἢ μεγαλύτερα ἀπὸ ὀρθῆς· ἢ μικροτέρα ὀνομάζεται ὀξεῖα· ἢ μεγαλύτερα, ἀμβλεία. Γωνία δὲ ἡ ΑΙΖ, ἥτις μετὰ τῆς ὀξείας γωνίας ΖΙΓ (Σχ. 6.) ὁμοῦ λαμβανόμεναι κάμνουν μίαν ὀρθήν, ὀνομάζεται ἢ πρώτη τῆς δευτέρας παραπλήρωμα· ὡσαύτως καὶ ἡ δευτέρα τῆς πρώτης· ἀπὸ δύο δὲ ἐφεξῆς γωνίας ΑΙΖ, ΖΙΔ ἡ μία λέγεται τῆς ἄλλης ἀναπλήρωμα εἰς δύο ὀρθάς.

§. 17. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ (Σχ. 7.) τέμνωσιν ἀλλήλας, αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι α, γ εἶναι ἴσαι· διότι α + β = 20, καὶ β + γ = 20 (§. 14.)· ἄρα καὶ α + β = β + γ (§. 13.)· καὶ ἐπομένως α = γ (§. 13, γ').

§. 18. Ἐπίπεδον κλεισμένον πανταχόθεν μὲ γραμμάς, λέγεται σχῆμα· ἂν αἱ γραμμαὶ εἶναι εὐθεῖαι, τὸ σχῆμα λέγεται εὐθύγραμμα· ἂν εἶναι καμπύλαι, καμπυλόγραμμα· ἢ μικτόν, ἂν εἶναι μέρος εὐθείας, καὶ μέρος καμπύλαι.

§. 19. Τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται τρίγωνον, ὅταν ἔχῃ τρεῖς πλευράς καὶ τρεῖς γωνίας· τετράπλευρον,

τὸ ἔχον τέσσαρας πλευράς· πεντάγωνον, ἑξάγωνον, καὶ ἐν γένει πολύγωνον, ἂν αἱ γωνίαι τοῦ εἶναι πέντε, ἕξ, ἢ πλείότεραι· τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ εἶναι ἴσαι, λέγεται ἰσοσκελές· τοῦ ὁποίου δὲ αἱ τρεῖς εἶναι ἴσαι, ἰσοπλευρον. Σκαληνὸν δὲ, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι ἄνιστοι.

§. 20. Ἡ εὐθεῖα εἶναι ἐλαχίστη ἀπ' ὅλας τὰς γραμμάς αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα· διότι αὕτη προπορεύεται πάντοτε εἰς τὰ ἔμπροσθεν· αἱ δὲ, ἀλλάσσουν τὸν ὁρθὸν δρόμον (§. 4.) καὶ ἐπομένως εἶναι καμπύλαι, ἢ γωνιώδεις γραμμαί.

§. 21. Ἐκ δὲ τούτου ἔπεται, ὅτι αἱ δύο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 8.) πλευραὶ ΑΓ + ΒΓ εἶναι μεγαλύτεραι ἀπὸ τὴν λοιπὴν ΑΒ. Καὶ ἐὰν ἡ κορυφὴ Ζ τριγώνου τοῦ ΑΖΒ κείται ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας ἄλλου τριγώνου τοῦ ΑΓΒ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν θάσιν ΑΒ, ἐξ ἅπαντος εἶναι ΑΓ + ΒΓ > ΑΖ + ΒΖ (§. 20.).

§. 22. Τὸ ἀπόστημα τόπου τινὸς ἀπ' ἄλλου εἶναι ἢ ἐλαχίστη ὁδὸς ἀπ' ὅλας, τὰς ὁποίας ἔμπορεῖ τις νὰ περιπατήσῃ ἐρχόμενος ἀπὸ τὸν πρῶτον τόπον εἰς τὸν δεύτερον.

§. 23. Τὸ ἀπόστημα λοιπὸν σημείου ἀπ' ἄλλο σημείον εἶναι ἢ μεταξὺ τῶν δύο σημείων εὐθεῖα (§. 20.).

§. 24. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΚ (Σχημ. 9.) ἀκίνητος μένουσα κατὰ τὸ Κ, περιφερθῇ ὅλη, ἕως οὐ νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸν αὐτὸν τόπον ὅθεν ἤρχησε νὰ κινῆται, γεννᾶται σχῆμα, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται Κύκλος.

§. 25. Ὅλη μὲν γραμμὴ ΑΔΒΖΟΕΑ, ἥτις ἐγράφη ἀπὸ τὸ τῆς εὐθείας ἄκρον, ὀνομάζεται περιφέρεια· καὶ μέρος τι αὐτῆς τὸ ΕΟΖ, τόξον· ἢ εὐθεῖα ΕΖ, ἥτις συνάπτει τὰ τοῦ τόξου πέρατα Ε, Ζ, χορδὴ τοῦ τόξου. Τὸ σημεῖον Κ

ονομάζεται κέντρον τοῦ κύκλου. Αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΔ, ΚΒ, αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἕως τὴν περιφέρειαν, ἀκτῖνες τοῦ κύκλου καὶ ἡμιδιάμετροι. Χορδὴ δὲ διαβαίνουσα διὰ τοῦ κέντρου, ὅποια ἢ ΑΒ, ὀνομάζεται διάμετρος τοῦ κύκλου.

§. 26. Πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι (§. 24, 25.), καὶ ἐπομένως καὶ αἱ διάμετροι· διότι πᾶσα διάμετρος εἶναι διπλασία τῆς ἀκτίνος (§. 25.).

§. 27. Τὸ τοῦ κύκλου μέρος ΑΚΔΑ (Σχ. 9.), τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΔ καὶ τῶν ἀκτίνων ΑΚ, ΔΚ αἵτινες τελευτῶσιν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, ὀνομάζεται τομεὺς τοῦ κύκλου· τὸ δὲ μέρος ΕΟΖΕ, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς χορδῆς ΕΖ, καὶ τοῦ τόξου τῆς ΕΟΖ, ὀνομάζεται τμήμα τοῦ κύκλου.

§. 28. Ἡ διάμετρος ΑΒ διαιρεῖ τὸν μὲν κύκλον εἰς δύο ἴσα τμήματα, τὰ ὅποια λέγονται ἡμικύκλια· τὴν δὲ περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα τόξα ΑΔΒ, ΔΟΒ, τὰ ὅποια λέγονται ἡμιπεριφέρειαι.

§. 29. Ἄττημα. Μὲ σημεῖον δομένον, καὶ ἀκτῖνα, ἐμποροῦμεν νὰ γράψωμεν κύκλον διὰ τοῦ ὀργάνου, τὸ ὅποιον ὀνομάζεται διαβήτης.

§. 30. Ἐὰν λοιπὸν εὐθείας τῆς ΑΔ (Σχ. 10) δοθῇ σημεῖον τὸ Γ, ἐμποροῦμεν ἀπ' αὐτῆς νὰ κόψωμεν διὰ τοῦ κύκλου μέρος τὸ ΓΒ ἢ τὸ ΑΒ ἴσον μὲ ἄλλην δομένην εὐθεῖαν τὴν ΔΕ.

§. 31. Κύκλοι, τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι, εἶναι καὶ αὐτοὶ ἴσοι, καὶ αἱ περιφέρειαι τῶν ἴσων· διότι, ἔὰν βαλῇ ὁ εἰς ἐπάνω τοῦ ἄλλου κατὰ τὰ κέντρα, τὸν σκεπάζει ἀκριβῶς (§. 12).

§. 32. Τομεῖς κυκλικοὶ ΑΚΕΑ, ΙΖΒΙ (Σχ. 11.) κύ-

κλων μὲ ἴσας ἀκτῖνας, ἴσας γωνίας ἔχοντες εἰς τὸ κέντρον, εἶναι ἴσοι· εἶναι ἴσα δὲ καὶ τὰ τόξα τῶν ΑΘΕ, ΙΔΒ.

§. 33. Ἐὰν ἴσων κύκλων αἱ εἰς τὸ κέντρον γωνίαι τῶν τομέων εἶναι ἄνισοι, εἶναι ἄνισοι καὶ οἱ τομεῖς αὐτοὶ καὶ τὰ τόξα τῶν.

§. 34. Ἰσα λοιπὸν τόξα καὶ ἴσοι τομεῖς ἴσων κύκλων ἔχουσι καὶ ἴσας εἰς τὸ κέντρον γωνίας.

§. 35. Δύο διάμετροι ΑΒ, ΔΟ (Σχ. 12.), αἱ ὅποιαι στέκουσιν ἐν τῷ κέντρῳ, διαιροῦν τὸν κύκλον εἰς τέσσαρας ἴσους τομεῖς, καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα τεταρτημόρια.

§. 36. Πᾶς κύκλος καὶ πᾶσα περιφέρεια διαιρεῖται ἀπὸ τοῦς Γεωμέτραις εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὅποια ὀνομάζονται μοῖραι. Πᾶσα μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 λεπτά, καὶ πᾶν λεπτὸν εἰς 60 δευτέρη· τὸ Ο σημεινέται μοῖρας, τὸ ' λεπτά, τὸ " δευτέρη κ.τ. ἄρα 23° 28' 32" σημαίνει 23 μοῖρας καὶ 28 λεπτά, καὶ 32 δευτέρη.

§. 37. Πᾶν κυκλικὸν τεταρτημόριον ΑΟ, ΟΒ, ΒΔ, ΔΑ περιέχει 90° (§. 35, 36)· καὶ ἡ ὀρθὴ γωνία λοιπὸν περιέχει 90°. Καὶ εἰς ἓνα λόγον, ἕσας μοῖρας καὶ λεπτά καὶ δευτέρη περιέχει κυκλικὸν τι τόξον, τὸ ὅποιον γράρεται μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν γωνίας τινὸς, καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας μεταξὺ τῶν δύο πλευρῶν· τόσας μοῖρας καὶ λεπτά καὶ δευτέρη περιέχει καὶ ἡ γωνία.

§. 38. Νὰ μετρήσωμεν τι μέγεθος θέλει νὰ εἴπῃ νὰ λάβωμεν μέτρον διωρισμένον, τὸ ὅποιον νὰ παρατηρήσωμεν ποσάκις ἐμπεριέχεται εἰς τὸ μετρούμενον μέγεθος. Ἐὰν τὸ μέγεθος εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ μέτρον, πρέπει τὸ μέτρον νὰ εἶναι μοιρασμένον εἰς πολλὰ μικρὰ μέρη, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσα ἐκ τούτων ἐμπεριέχει τὸ μετρούμε-

νον μέγεθος. Μέτρα συνειθισμένα είναι ἡ ὀργυιά, ἥτις περιέχει 6 πόδας· ὁ ποὺς περιέχει 12 δακτύλους· ὁ δάκτυλος, 12 γραμμᾶς· ἡ γραμμὴ, 12 στίγματα· τὸ Γερμανικὸν μίλιον, ὀργυιάς 3333.

§. 39. Μέτρον γωνίας· εἶναι τόξον κύκλου γραφόμενον ὡς εἶπαμεν (§. 37) με κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, καὶ ἀκτῖνα μίαν πλευρὰν, καὶ περιεχόμενον μεταξύ τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας.

§. 40. Μέτρον λοιπὸν τῆς μὲν ὀρθῆς γωνίας εἶναι 90° , τῆς δὲ ὀξείας $< 90^\circ$, τῆς δὲ ἀμβλείας $> 90^\circ$ (§. 16, 37, 38).

Τὸ ἡμικύκλιον, τὸ ὁποῖον παριστάνεται εἰς τὸ σχ. 13 εἶναι διηρημένον εἰς 180° · καὶ με αὐτὸ μετροῦν πᾶσαν γωνίαν· ὀνομάζεται δὲ Ἀναγωγέως.

§. 41. Πρόβλημα. Νὰ μετρήσῃς διὰ τοῦ ἀναγωγέως γωνίαν γραμμένην εἰς τὸ χαρτίον τὴν ΒΚΕ.

Βάλε τὸ κέντρον τοῦ ἀναγωγέως εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, καὶ τὴν ἀκτῖνά του ἐπάνω εἰς τὴν πλευρὰν ΒΚ. καὶ ἴδε πόσας μοίρας περιέχει τὸ μεταξύ ΒΚ καὶ ΚΕ κείμενον τόξον· με τοῦτον τὸν τρόπον ἐμέτρησας τὴν γωνίαν (§. 39).

§ 42. Πρόβλημα. Εὐθείας δοθείσας τῆς ΑΒ νὰ συστήσῃς ἐπ' αὐτῆς γωνίαν ζητουμένην, π. χ. 40° .

Βάλε τὸν ἀναγωγέα ἐπάνω εἰς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, ὥστε νὰ ἐφαρμόζεται ἡ ἀκτὶς του εἰς αὐτήν, καὶ τὸ κέντρον του νὰ πίπτῃ εἰς τὸ σημεῖον Κ, ὅπου θέλει εἶσθαι ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας, καὶ εἰς τὴν 40° τοῦ ἀναγωγέως γράψῃ ἀντιστίχως ἐν σημείον· καὶ δι' αὐτοῦ καὶ τοῦ Κ ἄγαγε με τὸν κανόνα εὐθεῖαν γραμμένην αὕτη μετὰ τῆς ΑΒ περιέχουν τὴν ζητουμένην γωνίαν.

§. 43. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ (Σχ. 14.) με τρίτην τὴν ΑΒ περιέχουν εἰς τὴν αὐτὴν πλευρὰν δύο γωνίας α, β, αἵτινες ὁμοῦ λαμβανόμεναι εἶναι $< 20^\circ$ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι προαγόμεναι πρὸς τὰ μέρη ὅπου εἶναι αἱ γωνίαι α, β, θέλουν συμπέσειν εἰς ἐν σημεῖον τὸ Ε.

§. 44. Ἐὰν εἰς εὐθεῖαν τὴν ΑΒ συστήσῃς δύο α, β, (§. 4), αἱ ὁποῖαι ὁμοῦ λαμβανόμεναι νὰ εἶναι $< 180^\circ$ αἱ πευραὶ ΑΕ, ΒΕ θέλουν συμπέσειν εἰς τὸ Ε, καὶ θέλουν κάμειν τρίγωνον· ἐὰν δὲ προάξῃς τὴν πλευρὰν ΒΕ τοῦ τριγώνου ΒΑΕ ἕως τὸ Ζ, καὶ μετρήσῃς τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΑΕΖ (§. 41), θέλεις τὴν εὐρεῖν $= \alpha + \beta$ · καὶ εἰς ἓνα λόγον πᾶσα ἐκτὸς γωνία ΑΕΖ τριγώνου τοῦ ΒΑΕ εἶναι ἴση με τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ἐντὸς τοῦ τριγώνου, τῶν ἀπεναντίων τῆς ἐκτὸς.

§. 45. Παντὸς τριγώνου ΑΒΕ αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι με δύο ὀρθάς· διότι, ἂν μακρύνῃς τὴν πλευρὰν ΒΕ ἕως τὸ Ζ, θέλει εἶσθαι ΑΕΖ $= \alpha + \beta$ (§. 44.)· ἀλλ' εἶναι καὶ ΑΕΖ $+ \gamma = 20$ (§. 14.)· ἄρα $\alpha + \beta + \gamma = 20$.

§. 46. Ἐὰν τριγώνου δοθῇ με μοίρας μία γωνία, ἄρ' οὐ ἀφαιρεθῇ αὕτη ἀπὸ 180° , μανθάνομεν καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο λοιπῶν γωνιῶν, ἐὰν δὲ δοθῇ τὸ κεφάλαιον δύο γωνιῶν, ἄρ' οὐ ἀφαιρεθῇ τοῦτο ἀπὸ 180° , μανθάνομεν καὶ τὴν τρίτην γωνίαν· εἶναι φανερόν λοιπὸν, ὅτι τριγώνου τινὸς μία μόνον γωνία ἐμπορεῖ νὰ εἶναι ὀρθή, ἢ μία μόνον ἀμβλεία· αἱ δὲ λοιπαὶ δύο εἶναι τότε ἀναγναικάως ὀξεῖαι.

§. 47. Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον δὲν δύνανται νὰ καταβιβασθῶσι δύο διάφοροι κάθετοι ἐπάνω εἰς τὴν αὐτὴν τρίτην εὐθεῖαν.

§. 48. Τὸ τρίγωνον ὀνομάζεται ὀρθογώνιον, ὁξυγώνιον

ριοι, ἀμβλυγώνιοι, ἂν ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν, ἢ μίαν ἀμβλείαν, ἢ ὅλας ὀξείας· αἱ περιέχουσαι τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου πλευραὶ ὀνομάζονται κάθετοι· ἡ δὲ τρίτη, ὑποτείνουσα.

§. 49. Ἐν δύο τρίγωνα ΒΑΓ, ΔΕΖ (Σχ. 15.) ἔχωσιν ἴσας δύο γωνίας· τὰς Β, Ε, ἔχωσι δὲ ἴσας καὶ τὰς πλευράς, αἵτινες περιέχουσι τὰς γωνίας, ἵγουν $BA=EA$, $BΓ=EZ$, εἶναι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἴσαι μὲ τὰς λοιπὰς, πᾶσα μία μὲ πᾶσαν μίαν, καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ μὲ τὴν τρίτην· καὶ ὅλον τὸ ἓν τρίγωνον ἴσον μὲ ὅλον τὸ ἄλλο· διότι, ἂν τὸ ἓν τρίγωνον βαλθῇ ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο, ὥστε τὸ Γ νὰ καίται ἐπάνω τοῦ Ζ, καὶ ἡ ΕΖ ἐπάνω τῆς ΒΓ, θέλει τὸ σκεπᾶσθαι μὲ ἀκριβεῖαν.

§. 50. Εὐθεῖα ἡ ΑΔ (Σχ. 16.), ἥτις διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΒΑΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΑΓ, κόπτει εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ τὴν θάσιν ΒΓ καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον, καὶ στέκει κάθετος εἰς τὴν θάσιν.

§. 51. Ἐκ δὲ τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι αἱ εἰς τὴν βάσιν γωνίαι Β, Γ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἰσάληλοι· ἂν δὲ εἶναι τὸ τρίγωνον ἐνταυτῷ καὶ ἰσόπλευρον, πᾶσαι αἱ γωνίαι του εἶναι ἴσαι, καὶ πᾶσα μία $= \frac{2}{3}O = 60^\circ$.

§. 52. Ἐὰν ἀκτὶς ἡ ΚΖ (Σχ. 17.), ἢ ἡ διάμετρος ΗΖ διχοτομήσῃ τὴν γωνίαν ΑΚΘ, ἢ τὸ τόξον ΑΖΘ, θέλει διχοτομήσῃ καὶ τὴν χορδὴν ΑΘ, καὶ θέλει σταθῆν κάθετος εἰς αὐτήν.

§. 53. Ἐὰν ἐν ἀπὸ τὰ δύο ἴσα σκέλη ἰσοσκελοῦς τριγώνου τοῦ ΒΓΑ (Σχ. 16.), τὸ ΑΒ, προχθῇ διὰ τῆς κορυφῆς Α ἕως τὸ Ε, ἢ ἐκτὸς γωνία ΕΑΓ· θέλει εἶσθαι διπλὴ πάσης μιᾶς ἀπὸ τὰς εἰς τὴν βάσιν ἰσαλλήλους (§. 44.).

§. 54. Εὐθεῖα ἡ ΑΔ, ἥτις ἐκ τῆς Α κορυφῆς τοῦ ἰσο-

σκελοῦς τριγώνου καταβιβάζεται κάθετος εἰς τὴν βάσιν ΒΓ, θέλει διχοτομήσῃ τὴν γωνίαν, καὶ τὴν βάσιν, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον· διότι κατ' ἄλλον τρόπον δύναται ἄλλη εὐθεῖα τέμνουσα εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν Α νὰ σταθῇ κάθετος εἰς τὴν βάσιν (§. 50.), τὸ ὅποιον ἀντιφάσκει μὲ τὸν §. 47.

§. 55. Ἡ ΗΖ διάμετρος (Σχ. 17.), ἥτις στέκει κάθετος εἰς χορδὴν τὴν ΑΘ, διχοτομεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὸ τόξον τῆς ΑΖΘ, καὶ τὴν εἰς τὸ κέντρον γωνίαν ΑΚΘ.

§. 56. Εὐθεῖα ἡ ΑΔ (Σχ. 16.), ἥτις διχοτομεῖ τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, καὶ διέρχεται διὰ τῆς γωνίας Α αὕτη στέκει κάθετος εἰς τὴν βάσιν, καὶ ἔχει καὶ ὅλας τὰς ἡδὴ εἰρημένας ιδιότητες· διότι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ Α ἀχθῇ κάθετος εἰς τὴν ΒΓ, θέλει διαβῆν ἀπὸ τὸ Δ (§. 54.) καὶ θέλει εἶσθαι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ΔΑ (§. 6.).

§. 57. Διάμετρος ἡ ΗΖ (Σχ. 17.), ἥτις διχοτομεῖ τὴν χορδὴν ΑΘ, στέκει ἐνταυτῷ κάθετος ἐπάνω τῆς, καὶ διχοτομεῖ καὶ τὴν εἰς τὸ κέντρον γωνίαν ΑΚΘ, καὶ τὸ τόξον ΑΘ.

§. 58. Εὐθεῖα ἐγειρόμενη κάθετος ἀπὸ τὸ μέσον Α (Σχ. 16) τῆς βάσεως ΑΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΓΑ, διαβαίνει διὰ τῆς γωνίας Α.

§. 59. Εὐθεῖα, ἡ ΗΖ (Σχ. 17.), ἥτις στέκει κάθετος εἰς τὴν χορδὴν ΑΘ κατὰ τὸ ν, εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου.

§. 60. Ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ (Σχ. 18.) εἶναι ἄνισοι, ἡ μεγαλύτερα ὑποτείνει μεγαλύτεραν γωνίαν, καὶ ἡ μικροτέρα μικροτέραν· διότι ἔστω $ΑΓ > ΑΒ$ · θέλει εἶσθαι λοιπὸν μέρος τι τῆς ΑΓ. π. χ. τὸ $ΑΔ = ΑΒ$ · καὶ ἀφ' οὗ ἀχθῇ ἡ ΒΔ θέλει εἶσθαι ἡ γωνία $ΑΒΔ = ΑΔΒ$

(§. 51.) καὶ $ABΓ > ABA'$ ἄρα καὶ $ABΓ > AAB$. Εἶναι δὲ καὶ $AAB > AΓB$ (§. 44). ἄρα καὶ $ABΓ > AΓB$.

§. 61. Ἐάν τρίγωνον ἔχη δύο γωνίας ἴσας, ἔχει ἴσας καὶ τὰς πλευράς, αἵτινες ὑποτείνουσιν εἰς τὰς ἴσας γωνίας· διότι, ἂν εἶναι αἱ πλευραὶ ἄνισοι, θέλουν εἶσθαι ἄνισοι καὶ αἱ γωνίαι (§. 60.). Τρίγωνον λοιπὸν, τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας τὰς τρεῖς γωνίας, εἶναι ἰσοπλευρον.

§. 62. Τριγώνου, τοῦ ὁποῖου αἱ δύο γωνίαι εἶναι ἄνισοι, εἰς τὴν μεγαλητέραν γωνίαν ὑποτείνει πλευρὰ μεγαλητέρα, καὶ εἰς τὴν μικροτέραν μικροτέρα.

§. 63. Ὁρθογωνίου μὲν τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγωνίου δὲ ἡ τὴν ἀμβλείαν, εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ πᾶσαν μίαν ἐκ τῶν δύο λοιπῶν πλευρῶν.

§. 64. Ἀπ' ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ ἄρχθουν ἀπὸ σημείου εἰς ἄλλην εὐθεῖαν, ἐλαχίστη εἶναι ἡ κάθετος· εἶναι λοιπὸν αὕτη τὸ τοῦ σημείου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ἀπόστημα. Καὶ ἐξ ἐναντίας ἡ ἐλαχίστη ἀπ' ὅλας τὰς εὐθείας αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ ἄρχθωσιν, ἀπὸ σημείου εἰς εὐθεῖαν εἶναι κάθετος εἰς αὐτήν· καὶ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰς δεδομένην εὐθεῖαν, δύο μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἠμποροῦν νὰ ἄρχθωσιν, ἡ μία ἐκ δεξιῶν, καὶ ἡ ἄλλη ἐξ ἀριστερῶν τῆς καθέτου.

§. 65. Ἐάν τριγώνου τοῦ $ABΓ$ (§χ. 15.) αἱ τρεῖς πλευραὶ AB , $ΒΓ$, $ΑΓ$ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς πλευράς τριγώνου τοῦ $ΔΕΕ$, τὰς $ΔΕ$, $ΕΖ$, $ΖΔ$, πᾶσα μία μὲ πᾶσαν μίαν θέλουν εἶσθαι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι τῶν δύο τριγώνων αἱ ὑποτείνουσιν τὰς ἴσας πλευράς· διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἠμποροῦν νὰ σκεπασθοῦν (§. 12.).

§. 66. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ἔχουν ἴσας ἐπιφανείας· καὶ ἐάν σταθοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τὰ δύο καὶ

ἐφαρμοσθῶν αἱ πλευραὶ των, θέλουν συμπέσειν οὕτως, ὥστε δὲν θέλει διακρίνεσθαι τὸ ἐν ἀπὸ τοῦ ἄλλο.

§. 67. Πρόβλημα. Ἐάν δοθοῦν τρεῖς εὐθεῖαι AB , $ΘΗ$, KA , (§χ. 19.), ἀπὸ τὰς ὁποίας αἱ δύο ὁμοῦ λαμβανόμεναι εἶναι μεγαλητέραι ἀπὸ τὴν τρίτην· νὰ συστήσῃς τρίγωνον μὲ αὐτάς.

Βάλε μίαν ἀπ' αὐτάς, τὴν AB , βάσιν, καὶ μὲ κέντρον τὸ A καὶ ἀκτῖνα τὴν $ΘΗ$, καὶ κέντρον τὸ B , καὶ ἀκτῖνα τὴν KA , γράψε κύκλους, οἱ ὁποῖοι τέμνονται κατὰ τὰ σημεῖα $Γ$, $Δ$. καὶ ἄγαγε τὰς εὐθείας $ΑΔ$, $ΒΔ$, ἢ $ΒΓ$, $ΑΓ$ · καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους θέλει συσταθῆν τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

§. 68. Ὡσαύτως ἠμπορεῖς νὰ συστήσῃς ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τρίγωνον ἰσοσκελές, ἢ καὶ ἰσοπλευρον.

§. 69. Ἀπὸ σημείου τοῦ $Γ$ (§χ. 20) εὐθείας τῆς AB ἠμπορεῖς νὰ ἐγείρῃς κάθετον, ἐάν λάβῃς $ΓΔ = ΓΕ$, καὶ ἐπάνω τῆς $ΔΕ$ συστήσῃς ἰσοσκελές τρίγωνον τὸ $ΔΕΖ$, καὶ ἀγάγῃς εὐθεῖαν τὴν $ΓΖ$ (§. 56.).

§. 70. Εὐθύγραμμον γωνίαν τὴν $ABΓ$ (§χ. 21.) ἠμπορεῖς νὰ διχοτομήσῃς μὲ τὴν εὐθεῖαν BZ , ἐάν λάβῃς $BA = BE$, καὶ συστήσῃς ἐπὶ τῆς $ΔΕ$ τὸ ἰσοσκελές τρίγωνον $ΔΕΖ$ · γίνεται λοιπὸν $ABZ = ΓBZ$ (§. 65, 68).

§. 71. Εὐθεῖαν τὴν $ΒΓ$ (§χ. 16.) ἠμπορεῖς νὰ κόψῃς εἰς δύο ἴσα μέρη μὲ κάθετον τὴν $ΑΔ$, ἐάν συστήσῃς ἐπάνω τῆς $ΒΓ$ ἰσοσκελές τρίγωνον τὸ $ABΓ$, καὶ διχοτομήσῃς τὴν ὑπ' αὐτῆς ὑποτεينوμένην γωνίαν (§. 68, 70).

§. 72. Συμπεραίνεται ἐκ τούτων, ὅτι πᾶσαν εὐθεῖαν, καὶ πᾶσαν γωνίαν, καὶ ἐπομένως πᾶν κυκλικὸν τόξον ἠμποροῦμεν νὰ κόψωμεν εἰς 4, 8, 16, 32, κτλ. ἴσα μέρη (§. 70, 71).

§. 73. Εάν δύο τρίγωνα $ABΓ$, $ΔΕΖ$ (Σχ. 45.) ἔχωσιν ἴσα· τὰς γωνίας B , E , καὶ τὰς ἀντιστήκους πλευράς AB , $ΔΕ$ ἴσας, ἴσας δὲ καὶ τὰς ὑποτείνουσας ὑποκάτω τῶν ἴσων γωνιῶν πλευράς $ΑΓ$, $ΔΖ$, εἶναι δὲ $ΑΓ > AB$, καὶ ἐπομένως $ΔΖ > ΔΕ$, θέλει εἶσθαι ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ πρώτου τριγώνου ἴση μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ δευτέρου τριγώνου· καὶ αἱ γωνίαι, αἵτινες ὑποτείνονται ἀπὸ τὰς ἴσας πλευράς, ἴσαι· διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα σκεπάζουσιν ἄλληλα. Εάν λοιπὸν τριγώνων ὀρθογωνίων ἢ ἀμβλυγωνίων αἱ ὑποτείνουσαι τὴν ὀρθὴν ἢ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν εἶναι ἴσαι (εἶναι δὲ καὶ αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι ἴσαι εἰς τὰ ἀμβλυγώνια), τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

§. 74. Εὐθεῖαι, αἵτινες, ὅσον καὶ ἂν προαχθοῦν, δὲν συμπίπτουν πούποτε, ὀνομάζονται παράλληλοι· ἐν π. χ. αἱ χορδαὶ BM , $ΑΘ$ (Σχ. 17.) στέκουν κάθετοι εἰς τὴν διάμετρον HZ , δὲν συμπίπτουν πούποτε, ὅσον καὶ ἂν προαχθοῦν, καὶ ἐπομένως εἶναι παράλληλοι.

§. 75. Πρόβλημα. Εἰς τὴν εὐθεῖαν EZ (Σχ. 23.) νὰ κατασκευάσῃς γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δεδομένην $ABΓ$.

Μὲ κέντρον τὸ B καὶ ἀκτῖνα τινὰ γράψε τόξον τὸ $ΘΗ$ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας· καὶ μὲ κέντρον τὸ E καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράψε τόξον τέμνον τὴν EZ κατὰ τὸ A , καὶ ἐφάρμοσε τοῦ τόξου τὴν χορδὴν $ΘΗ$ ἀπὸ τοῦ A εἰς τὸ K , καὶ ἄγαγε τὸν $EΚ$. θέλει εἶσθαι λοιπὸν ἡ γωνία $E=ABΓ$ (§. 65).

§. 76. Πρόβλημα. Διὰ σημείου τοῦ O (Σχ. 24.) νὰ ἀγάγῃς εὐθεῖαν παράλληλον τῆς $ΓΔ$.

Απὸ σημείον τι τῆς $ΓΔ$ τὸ $Σ$ καὶ διὰ τῶν σημείων O , $Σ$ ἄγαγε εὐθεῖαν τὴν $EΖ$ · καὶ σύστησε τὴν γωνίαν $μ$ ἴσην μὲ τὴν $ν$ (§. 75)· ἡ AB λοιπὸν εἶναι παράλληλος τῆς $ΓΔ$,

διότι, ἐὰν AB καὶ $ΓΔ$ προαχόμεναι κατὰ τὸ B , συνέπιπταν, ἤθελε συσταθῇν τρίγωνον, ὅπου ἡ ἐκτὸς γωνία $μ$ ἦθελεν εἶσθαι μεγαλύτερα παρὰ τὴν $ν$ (§. 44.) ἐνῶ τὴν ἐκάμαμεν ἴσην μὲ αὐτὴν, ἀλλ' ἐπειδὴ προσέτι εἶναι καὶ $μ = ρ$, καὶ $ν = υ$ (§. 17)· ἄρα εἶναι καὶ $ρ = υ$ καὶ αἱ εὐθεῖαι AB , $ΓΔ$ προαχόμεναι κατὰ τὰ A , $Γ$ δὲν δύνανται νὰ συμπέσωσι.

§. 77. Παράλληλόγραμμοι ὀνομάζονται τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου πᾶσα πλευρὰ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ἀπεναντίον τῆς (Σχ. 27. 28. 29. 30)· ἐὰν εἶναι μόνον δύο πλευραὶ τοῦ παράλληλοι, τὸ σχῆμα λέγεται τραπέζοειδές (Σχ. 3)· καὶ ἐὰν δὲν ἔχῃ καμμίαν παράλληλον μὲ ἄλλην, τραπέζιον (Σχ. 32).

§. 78. Ἐμπορεῖ τὸ τετράπλευρον $ABΓΔ$ νὰ διαιρεθῇ διὰ τῆς $BΔ$ διαγωνίου (Σχ. 33.) εἰς δύο τρίγωνα· ὅλαί αἱ ἑξ γωνίαι τῶν δύο τριγώνων συνάμα λαμβανόμεναι εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τέσσαρας γωνίας τοῦ τετραπλεύρου συνάμα λαμβανομένας· λοιπὸν τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς.

§. 79. Εάν $ΑΔ$, $BΓ$ εἶναι παράλληλοι ἴσαι, καὶ ἐπιζευχθοῦν τὰ ἄκρα τῶν μὲ τὰς εὐθείας AB , $ΓΔ$, θέλει γενῆναι παραλληλόγραμμοι τὸ σχῆμα $ABΓΔ$ · διότι, ἐὰν ἀγάγῃς τὴν $BΔ$, τὰ τρίγωνα $ABΔ$, $BΓΔ$ θέλουν ἔχειν μίαν γωνίαν ἴσην μὲ μίαν, ἦγουν $ΑΔΒ = ΔΒΓ$, καὶ δύο ἀντιστήκους πλευράς, $ΑΔ = BΓ$, $BΔ = BΔ$ · εἶναι λοιπὸν καὶ $ABΔ = BΔΓ$ (§. 49.), καὶ AB παράλληλος μὲ τὴν $ΓΔ$.

§. 80. Εάν εὐθείας τῆς AB (Σχ. 34.) τὰ ἀπ' ἄλλης τῆς $ΓΔ$ δύο ἀποστήματα $EΖ$, $ΘΗ$ εἶναι ἴσα, αἱ εὐθεῖαι AB , $ΓΔ$ εἶναι παράλληλοι· διότι $EΖ$, $ΘΗ$ εἶναι παράλληλοι ὡς κάθετοι ἐπὶ τῆς AB (§. 64.)· ἄρα καὶ AB , $ΓΔ$ (§. 79).

§. 81. Εάν δύο ἀποστήματα ΕΖ, ΗΚ εὐθείας τῆς ΑΜ ἀπ' ἄλλην τὴν ΓΔ εἶναι ἄνισα (Σχ. 35.)· αἱ εὐθεῖαι θέλουν συμπίσειν πρὸς τὰ μέρη, ὅπου εἶναι τὸ μικρότερον ἀπόστημα.

§. 82. Παράλληλοι εὐθεῖαι ἀπέχουν δι' ὅλου τοῦ μήκους των ἐπίσης ἀπ' ἀλλήλων· διότι ἐάν μόνον δύο ἀποστήματά των ἦσαν ἄνισα, αἱ εὐθεῖαι δὲν ἦσαν παράλληλοι (§. 81).

§. 83. Ὅλα τὰ σημεῖα Ε, Θ, Ν (Σχ. 36), τὰ ὅποια ἀπέχουν ἐπίσης ἀπὸ εὐθείαν τὴν ΓΔ, εὐρίσκονται εἰς εὐθεῖαν.

§. 84. Πᾶν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (Σχ. 37.) διαιρεῖται ὑπὸ τῆς διαγωνίου ΒΔ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα, τὰ ὅποια ἔχουν ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας· διότι ἡ γωνία $\angle ADB = \angle BDC$, καὶ ἡ γωνία $\angle ABD = \angle BDC$, εἶναι δὲ καὶ $AD = BC$, καὶ $AB = DC$. ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΔΓ σκεπάζουσιν ἄλληλα (§. 42.).

§. 85. Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ, καὶ αἱ κατὰ διαγώνιον γωνίαι εἶναι ἴσαι.

§. 86. Εάν παραλληλογράμμου δύο πλευραὶ, γωνίαν περιέχουσαι εἶναι ἴσαι, εἶναι ἴσαι πᾶσαι αἱ τέσσαρες· καὶ ἐάν μία γωνία εἶναι ὀρθή, εἶναι καὶ πᾶσα μία ἀπὸ τὰς λοιπὰς ὀρθή.

§. 87. Τετράγωνον ὀνομάζεται τὸ ἰσόπλευρον καὶ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον (Σχ. 7.)· ῥόμβος δὲ, τὸ ἰσόπλευρον καὶ πλαγιογώνιον παραλληλόγραμμον (Σχ. 29.)· ἀνισόπλευρον δὲ καὶ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ὀνομάζεται κατ' ἐξοχὴν ὀρθογώνιον (Σχ. 28.)· εἰδὲ εἶναι ἀνισόπλευρον καὶ πλαγιογώνιον, ὀνομάζεται ῥομβοειδὲς (Σχ. 30.).

§. 88. Εάν Α εἶναι ὀρθή γωνία (Σχ. 27), καὶ αἱ περιέχουσαι αὐτὴν πλευραὶ ἴσαι, τὸ σχῆμα εἶναι τετράγωνον· ἐάν δὲ Α εἶναι μὴ ὀρθή, καὶ αἱ περιέχουσαι αὐτὴν πλευραὶ ἴσαι, τὸ σχῆμα εἶναι ῥόμβος (Σχ. 29)· ὀρθογώνιον δὲ, ἐάν ἡ Α εἶναι ὀρθή, καὶ αἱ πλευραὶ τῆς ἄνισοι (Σχ. 28).

§. 89. Τὰ τετράγωνα εἶναι ἴσα, ἐάν αἱ πλευραὶ των εἶναι ἴσαι· ἄνισα δὲ, ἐάν αἱ πλευραὶ των εἶναι ἄνισοι.

§. 90. Τὰ ἴσα τετράγωνα ἔχουν ἴσας πλευρὰς· τὸ μεγαλύτερον τετράγωνον ἔχει πλευρὰν μεγαλύτεραν παρὰ τὸ μικρότερον.

§. 91. Εάν τριγώνου τοῦ ΑΒΔ (Σχ. 37.) μία πλευρὰ ἡ ΑΒ ληφθῇ ὡς βᾶσις, ὕψος αὐτοῦ λέγεται εὐθεῖα ἡ ἀγόμενη κάθετος εἰς τὴν βᾶσιν ἀπὸ τὴν ὑπ' αὐτῆς ὑποτεταμένην γωνίαν. Εάν δὲ μία ἀπὸ τὰς παρακειμένας εἰς τὴν βᾶσιν γωνίας εἶναι ἀμβλεία, πρέπει νὰ προαχθῇ ἡ βᾶσις, διὰ νὰ πέσῃ ἐπάνω τῆς ἡ κάθετος· ἐάν δὲ παραλληλογράμμου τοῦ ΑΒΓΔ (Σχ. 37.) ληφθῇ βᾶσις ἡ ΑΒ, ὕψος αὐτοῦ τὸ ΔΕ εἶναι τὸ τῆς βᾶσεως ἀπὸ τὴν ἀπεναντίον τῆς πλευρὰν ἀπόστημα.

§. 92. Παραλληλόγραμμα, ἔχοντα ἴσας βᾶσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἴσα· διότι ἂς σταθοῦν δύο τοιαῦτα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΑΒΕΖ (Σχ. 38.) εἰς μίαν κοινὴν βᾶσιν τὴν ΑΒ· θέλουν εὐρεθῇ λοιπὸν αἱ ἀπεναντίον των πλευραὶ ΓΔ, ΕΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (§. 83)· εἶναι δὲ καὶ $GD = AB = EZ$ (§. 85)· ἄρα $GD + GZ = EZ + GZ$, ἢ $DZ = GE$. Εἶναι δὲ καὶ $AD = BC$, $AZ = BE$ (§. 91). Εἶναι λοιπὸν τὸ τρίγωνον $ADZ =$ τῷ τριγώνῳ BGE (§. 65).

§. 93. Πᾶν παραλληλόγραμμον εἶναι διπλάσιον τριγώνου τὴν αὐτὴν βᾶσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος.

§. 94. Δύο ἢ πλείότερα ἰσοῦψῃ τρίγωνα συνάμα λαμ-

βανόμενα είναι ἴσα μὲ ἐν τρίγωνον ἰσοϋπὲς τοῦ ὁποίου ἡ βάσις· εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων ἐκεῖνων.

§. 95. Τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μία ὀργυιὰ, ἢ ἓνας ποῦς, ἢ ἓνας δάκτυλος, ὀνομάζεται τετραγωνικὴ ὀργυιὰ, ἢ τετραγωνικὸς ποῦς, ἢ τετραγωνικὸς δάκτυλος· εἶναι δὲ ταῦτα μέτρα, διὰ τῶν ὁποίων μετροῦνται αἱ ἐπιφάνειαι.

§. 96. Ἐὰν ὀρθογωνίου ὑποθέσωμεν τὴν μὲν βάσιν ΑΒ (Σχ. 39.) 6 ὀργυιάς, τὸ δὲ ὕψος ΑΓ ὀργυιάς 5· καὶ διὰ μὲν τῶν σημείων τῶν μερῶν τῆς βάσεως ἀγάγωμεν παραλλήλους μὲ τὸ ὕψος, διὰ δὲ τῶν σημείων τῶν μερῶν τοῦ ὕψους παραλλήλους μὲ τὴν βάσιν, θέλει περιέχειν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ τετραγωνικά· ὀργυιάς $6 \times 5 = 30$, τὰς ὁποίας εὐκόλως ἐμποροῦμεν ν' ἀριθμήσωμεν εἰς τὸ σχῆμα.

§. 97. Ἐὰν ὀνομάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον Ο, καὶ τὴν βάσιν του β, καὶ τὸ ὕψος του υ, θέλει εἶσθαι $O = \beta \upsilon$, ἤγουν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του.

§. 98. Ἐὰν τὸ Τ σημάξη τετράγωνον (Σχ. 40), καὶ μίαν του πλευρὰν τὸ Π, θέλει εἶσθαι $T = \pi \times \pi$, (§. 97) ἢ συνομώτερα $T = \pi^2$. ἤγουν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς πλευρᾶς· του πολλαπλασιαζομένης ἐφ' ἑαυτήν· ἔαν εἶναι $\Pi = 30$ θέλει εἶσθαι $T = 30 \times 30 = 900$ τετραγωνικά· ὀργυιάς.

§. 99. Ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου (Σχ. 41.) μία κάθετος· κ εἶναι· 3 ὀργυιάς, ἢ δὲ ἄλλη Κ=4, καὶ μετροῦν ἡ ὑποτείνουσα, θέλει εὐρεθῆν 5 ὀργυιάς· καὶ ἐπειδὴ $3^2 = 9$, καὶ $4^2 = 16$, καὶ $5^2 = 25$. ἄρα $5^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, καὶ, ἐὰν βάλωμεν τὰ γράμματα Υ, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὑποτείνουσαν, καὶ Κ, κ, τὰ ὁποῖα σημαίνουν

καθέτους, θέλει εἶσθαι $\Upsilon^2 = \text{Κ}^2 + \kappa^2$, ἤγουν τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας εἶναι ἴσον μὲ τὰ δύο τετράγωνα τῶν καθέτων τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

§. 100. Ἐπειδὴ ἡ μὲν ὀργυιὰ περιέχει ἐξ πόδας, ὁ δὲ ποῦς 12 δακτύλους· ὁ δὲ δάκτυλος, 12 γραμμάς· διὰ τοῦτο μία τετραγωνικὴ ὀργυιὰ περιέχει τετραγωνικούς· πόδας $6 \times 6 = 36$ · εἰς δὲ τετραγωνικὸς ποῦς, δακτύλους $12 \times 12 = 144$ · εἰς δὲ τετραγωνικὸς δάκτυλος, γραμμάς τετραγωνικάς $12 \times 12 = 144$.

§. 101. Ἐπειδὴ πᾶν παραλληλόγραμμον εἶναι ἴσον μὲ ὀρθογώνιον τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (§. 97), διὰ τοῦτο, ἐὰν π σημάξη παραλληλόγραμμον, καὶ β βάσιν καὶ υ ὕψος, εἶναι $\pi = \beta \upsilon$ (§. 97), ἤγουν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του.

§. 102. Ἐπειδὴ πᾶν τρίγωνον ἐμπορεῖ νὰ εἶναι τὸ ἡμισυ τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ, ἐὰν Δ μὲν ὀνομασθῇ τὸ τρίγωνον· β δὲ ἡ βάσις, υ δὲ τὸ ὕψος του, θέλει εἶσθαι $\Delta = \upsilon \times \frac{\beta}{2} = \frac{\upsilon \beta}{2} = \frac{\epsilon \upsilon}{2} = \beta \frac{\upsilon}{2}$, ἤγουν, πᾶν τρίγωνον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμισυ γινόμενον ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του, ἢ ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἡμισείας βάσεως, καὶ τοῦ ὕψους του, ἢ ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος ὕψους καὶ τῆς βάσεώς του· διότι καὶ αἱ τρεῖς ἐκφράσεις ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν.

§. 103. Ἐὰν ἐννοήτης τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν (Σχ. 42.) διηρημένην εἰς ὅσαδήποτε ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΕ κτλ. καὶ ἐπιζεύξης τὰς χορδὰς τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κτλ., καὶ ἀγάγης τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ κτλ., θέλει συστήσιν τόσα ἰσάλληλα τρίγωνα, εἰς ὅσα ἴσα μέρη ἐδιείρεσας τὴν περιφέρειαν. Τὸ δὲ οὕτως ἐγγραφόμενον

σχῆμα ΑΒΓΔΕΖΑ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

§. 404. Σχῆμα ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον ὀνομάζεται *Κανονικόν*· τοιοῦτον εἶναι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, καὶ τὸ τετράγωνον· ἐὰν δὲ ἔχη πλειοτέρας πλευράς, ὀνομάζεται *Κανονικὸν Πολύγωνον*· τὸ δὲ μὴ τοιοῦτον, λέγεται *Ἀκανόνιστον*· ἰδιαίτερα δὲ ὀνομάζεται πεντάγωνον, ἑξάγωνον, ἑπτάγωνον κτλ. ἐὰν ἔχη πλευράς 5, 6, 7 κλ.

§. 405. Ἐπειδὴ τὸ κανονικὸν πολύγωνον σύγκειται ἀπὸ τόσα τρίγωνα, ὅσα εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ (§. 403), καὶ τὸ τρίγωνον εἶναι $= \beta \frac{1}{2}$, ἐὰν λάβωμεν τὰς βάσεις μῶν τριγώνων ὅλων, ἤγουν τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου, καὶ τὴν πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸ ἥμισυ ὕψος ἐνὸς τριγώνου, εὐρίσκομεν τὸ ἔμβαδὸν τοῦ πολυγώνου. Τὸ πολύγωνον λοιπὸν τὸ κανονικὸν εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς περιμέτρου καὶ τοῦ ἡμίσεος ὕψους ἐνὸς τῶν τριγώνων τοῦ· ἢ ὑπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου καὶ τοῦ ὕψους τούτου· ἢ μὲ τὸ ἥμισυ γινόμενον ὑπὸ τῆς περιμέτρου καὶ τούτου τοῦ ὕψους· ὅλαι αὗται αἱ ἐκφράσεις ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν, ὡς εἶναι φανερόν.

§. 406. Πᾶν ἀκανόνιστον σχῆμα ἐμπορεῖς νὰ διαιρέσῃς εἰς παραλληλόγραμμα ἢ τραπεζοειδῆ, ἢ μέρος μὲν εἰς τὰ εἰρημένα σχήματα, μέρος δὲ εἰς τρίγωνα (Σχ. 45, 46, 47.)· τὸ τελευταῖον ἐμπορεῖ νὰ γείνῃ κατὰ διαφόρους τρόπους· διότι ἢ ἐμποροῦν ἀπὸ ἓν σημεῖον ἐντὸς τοῦ σχήματος νὰ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς ὅλας τὰς γωνίας (Σχ. 45), ἢ ἀπὸ μίαν ἢ πλειοτέρας γωνίας (Σχ. 46, 47.) εἰς τὰς λοιπὰς γωνίας τοῦ σχήματος. Ἐὰν δὲ ταῦτα μετρηθῶσι καθὲν μὲ τοὺς ἑως τοῦδε εἰρημένους κανόνας, τὸ κεφάλαιόν των παριστάνει ἀναμφιβόλως τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ἀκανονίστου πολυγώνου.

§. 407. Ὅμοια τρίγωνα λέγονται τὰ δ, Δ, (σχ. 50), ἐὰν ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας μὲ πᾶσαν μίαν, ἤγουν $\alpha = \Lambda$, $\beta = \Delta$, $\gamma = \Gamma$ · αἱ δὲ πλευραὶ αἱ ὁποῖαι ὑποτείνουν τὰς ἴσας γωνίας λέγονται ἀντίστοιχοι, δηλ. ἡ αβ εἶναι ἀντίστοιχος τῆς ΑΒ, καὶ ἡ ΒΓ, καὶ ἡ ΓΑ τῆς γα.

§. 408. Τῶν ὁμοίων τριγώνων αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, ἤγουν εἶναι $\alpha\beta : \Lambda\Delta :: \beta\gamma : \Delta\Gamma :: \gamma\alpha : \Gamma\Delta$ · καὶ $\alpha\beta : \Lambda\Delta :: \Lambda\Gamma : \alpha\gamma$, καὶ $\Lambda\gamma : \alpha\gamma :: \Gamma\beta : \gamma\beta$ · διότι ἐὰν διαιρεθῶσιν εἰς ἴσα μέρη αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων, δ, Δ, θέλομεν ἰδεῖ τὰ μέρη τῆς αβ: τὰ μέρη τῆς ΑΒ:: τὰ μέρη τῆς βγ: ΒΓ κτλ.

§. 409. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΕΖ (σχῆμ. 51), ἐὰν ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΒΓ μὲ μίαν πλευράν του τὴν ΕΖ, θέλουν συσταθῇ δύο τρίγωνα ὅμοια ΑΒΓ, ΑΕΖ, ἄρα ΑΒ: ΒΕ:: ΑΓ: ΓΖ, καὶ ΑΒ: ΑΓ:: ΑΕ: ΑΖ.

§. 410. Ἐὰν ἀγάγῃς ἐπὶ τῆς γδ (Σχ. 60. καθεῖτους τὰς αγ, βδ ἰσαλλήλους, καὶ τέμῃς τὴν βδ εἰς 6 ἴσα μέρη, καὶ διὰ τῶν κατατομῶν ἀγάγῃς παραλλήλους μὲ τὴν αβ, καὶ τὴν διαγώνιον βγ, θέλουν γενῇ τρίγωνα τὰ β14, β22, β33 κτλ. ὅμοια καὶ ἀλλήλων καὶ τοῦ τριγώνου γδδ, εἶναι δὲ β1 ἐν ἑκτημόριον, β2 δύο ἑκτημόρια, β3 τρία ἑκτημόρια κτλ. τῆς βδ, ἄρα καὶ 11 εἶναι ἐν ἑκτημόριον, 22 δύο ἑκτημόρια, 33 τρία ἑκτημόρια τῆς γδ. Διὰ τοῦτο ἐὰν γδ σημαίνῃ ὀργυιάν, 11 θέλει σημαίνειν ἓνα πόδα, 22 δύο πόδας, 33 τρεῖς πόδας κτλ.

Ἐὰν δὲ τέμῃς τὴν βδ (σχ. 61.) εἰς 10 ἴσα μέρη, καὶ κάμῃς ὅλα τὰ ἤδη εἰρημένα, θέλουν εἶσθαι β1, β2, β3 κτλ. ἐν δεκατημόριον, δύο, τρεῖς κτλ. τῆς βδ. Καὶ ἐὰν ἡ γδ σημαίνῃ δέκα ὀργυίας, τὰ 11, 22, 33 θέλουν σημαίνειν μίαν ὀργυιάν, δύο, τρεῖς κτλ.

Ἐάν εὐθείαν τυχοῦσαν τὴν αβ (Σχ. 62 μ, 62 ν) διαιρέσης εἰς πολλὰ μέρη ἴσα, καὶ ἐπάνω τῆς στήσεως καθέτους τὰς αγ, βδ, καὶ ἐκλάβης ὀργυιὰν ἐν ἀπὸ τὰ μέρη ταῦτα, καὶ διαιρέσης τὴν αγ εἰς 6 ἴσα μέρη· ἢ ἐάν ἐκλάβης ἐν ἀπὸ τὰ τοιαῦτα μέρη ὀργυιὰν (Σχ. 62 ν)· καὶ διορίσης ἀπὸ τοῦ α πρὸς τὸ γ μέρη ἴσα 10, καὶ τελευταῖον ἐπιζεύξης τὴν Ογ, θέλεις κατασκευάσῃς τὴν ὀνομαζομένην κλίμακα· ἥτις φανερόναι ὀργυιάς καὶ πόδας (Σχ. 62 μ), καὶ ὀργυιάς (Σχ. 62 ν).

§. 111. Ἐάν εὐθεῖα ἐπὶ χάρτου γραμμὴν περιέχῃ τόσας ὀργυιάς καὶ πόδας ἕκ τῆς κλίμακος, ὅσους καὶ μετρημένη ἐπὶ τῆς γῆς γραμμῇ, αἱ δύο γραμμαὶ λέγονται *σύμμετροι*.

§. 112. Ἐάν τριγώνου τοῦ αβγ (Σχ. 63) πλευρὰ ἢ αγ εἶναι σύμμετρος μὲ τριγώνου τοῦ αβγ πλευρὰν τὴν αΓ, καὶ α=Α, καὶ γ=Γ, θέλει εἶσθαι καὶ β=B, καὶ τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουν εἶσθαι ὅμοια· θέλει εἶσθαι δὲ καὶ βγ σύμμετρος μὲ τὴν ΒΓ, καὶ βα μὲ τὴν ΒΑ. Ἐάν λοιπὸν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευρὰν μὲ μίαν πλευρὰν σύμμετρον, καὶ γωνίας τὰς προσκειμένας ἴσας, τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ λοιπαὶ ἀντίστοιχοι πλευραὶ τῶν εἶναι σύμμετροι. Λέγονται δὲ καὶ αὐτὰ τὰ τρίγωνα *σύμμετρα ἀλλήλων*.

§. 113. Ἐάν δύο ὀρθογωνίων τριγώνων αβγ (Σχ. 64.) εἶναι σύμμετροι αἱ ὑποτείνουσαι ΒΓ, βγ, καὶ Β=β, θέλουν εἶσθαι σύμμετροι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ, καὶ τὰ τρίγωνα σύμμετρα.

§. 114. Ἐάν ἀχθῶσι κάθετοι εἰς τῶν ὁμοίων τριγώνων αβγ. αβγ (Σχ. 65.) τὰς ἀντιστίχους πλευράς αΓ, αγ, αἱ ΒΘ, βθ, θέλει εἶσθαι ΒΘ:βθ::ΑΘ:αθ::ΟΓ:

Ογ· ἄρα καὶ ΒΘ:βθ::ΑΘ+ΟΓ:αθ+θγ::ΑΓ:αγ. Διὰ τοῦτο τῶν ὁμοίων τριγώνων τὰ ὕψη εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις.

§. 115. Ἐάν δύο ἀντιστίχους πλευράς αΓ, αγ ἐκλάβωμεν ὡς βάσεις δύο συμμέτρων τριγώνων αβγ, αβγ. τὰ ὕψη τῶν ΒΘ, βθ, θέλουν εἶσθαι σύμμετρα, καὶ τὸ τρίγωνον αβθ σύμμετρον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΘβ, τὸ δὲ θβγ μὲ τὸ ΘΒΓ· καὶ ὅσα τετραγωνικά μέρη περιέχει τὸ ἐν ἑκ τῆς κλίμακος, τόσα καὶ τὸ ἄλλο ἀληθινὰ ἐπὶ τῆς γῆς, ἐάν εἶναι γραμμένον εἰς τὴν γῆν.

§. 116. Ἐάν ὀρθογωνίου τριγώνου (Σχ. 68.) ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΑΔ ἀχθῇ εἰς τὴν ὑποτείνουσαν ΒΔ κάθετος ἢ ΑΕ, ἡ γωνία Β τριγώνου τοῦ ΒΕΑ θέλει εἶσθαι ἡ αὐτὴ καὶ γωνία τοῦ ΒΑΔ τριγώνου, καὶ ἡ γωνία ΒΕΑ = Ο = ΒΑΔ, καὶ ἐπομένως τὸ τρίγωνον ΒΕΑ ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον ΒΑΔ· ὡσαύτως εἶναι καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΑ ὅμοιον μὲ τὸ ΒΑΔ, καὶ ἐπομένως καὶ τὰ τρίγωνα ΒΕΑ, ΔΕΑ ὅμοια. Ἐάν λοιπὸν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας τριγώνου ὀρθογωνίου ἀχθῇ κάθετος εἰς τὴν ὑποτείνουσαν, θέλει τὸ διαιρέσειν εἰς δύο τρίγωνα ὅμοια καὶ μετ' ἀλλήλων καὶ μετὰ τοῦ ὅλου.

§. 117. Ἡ κάθετος ΑΕ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τῆς ὑποτείνουσας τμημάτων ΒΕ, καὶ ΔΕ.

§. 118. Ἡ ἀπὸ παντὸς σημείου Α τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΔ ἀγομένη κάθετος ΑΕ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τῆς διμέτρου τμημάτων ΒΕ, ΕΔ· καὶ πᾶσα μία ἀπὸ τὰς δύο χορδὰς ΑΔ, ἢ ΑΒ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς διαμέτρου ΒΔ καὶ τοῦ εἰς τὴν χορδὴν παρακειμένου τμήματος ΔΕ ἢ ΒΕ.

§. 119. Ἐάν λοιπὸν θέλεις νὰ εὕρῃς μέσων ἀνάλογον

τῶν δεδομένων εὐθειῶν α , β , ἄγαγε ἀπροσδιόριστον εὐθεῖαν τὴν AX (Σχ. 69.) καὶ λάβε $BE = \alpha$, καὶ $ED = \beta$, καὶ διχοτόμησε τὴν BD κατὰ τὸ K , καὶ μὲ κέντρον τὸ K καὶ ἀκτῖνα τὴν KD γράψε κύκλον, καὶ ἐκ τοῦ E στήσε κάθετον ἐπὶ τῆς διαμέτρου BD τὴν EA , ἥτις θέλει εἶσθαι ἡ ζητούμενη μέση ἀνάλογος.

§. 120. Σχήματα, τὰ ὅποια σκεπάζονται ὑπ' ἀλλήλων, εἶναι ὅμοια. Καὶ δύο σχήματα τὰ ὅποια εἶναι ὅμοια μὲ τρίτον τι, εἶναι καὶ ἀλλήλων ὅμοια.

§. 121. Ὅμοια σχήματα δι' ἀντιστίχων διαγωνίων διαιροῦνται εἰς ὅμοια τρίγωνα.

§. 122. Εἰς τὰ ὅμοια σχήματα δύο ἀντίστιχοι διαγώνιοι εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς δύο ἀντίστιχοι πλευραί.

§. 123. Ἐπειδὴ δύο πλευραὶ σχήματος ἔχουν πρὸς ἀλλήλας λόγον, τὸν ὅποιον δύο ἀντίστιχοι πλευραὶ τοῦ ὁμοίου τοῦ σχήματος διὰ τοῦτο καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα, ἔχουν ἡ περίμετρος τοῦ ἑνὸς πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ ἄλλου ἔχει λόγον, τὸν ὅποιον ἔχει μία πλευρὰ τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν τὴν ἀντίστιχον τοῦ ἄλλου σχήματος.

§. 124. Δύο ὁμοίων σχημάτων, ἐὰν τοῦ ἑνὸς μία πλευρὰ εἶναι διπλασία, τριπλασία κτλ. παρὰ τὴν ἀντίστιχον τοῦ ἄλλου, θέλει εἶσθαι ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου διπλασία, τριπλασία κτλ. παρὰ τὴν τοῦ δευτέρου.

§. 125. Αἱ περίμετροι τῶν ὁμοίων σχημάτων εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ διαγώνιοι των.

§. 126. Δύο κανονικῶν πολυγώνων μὲ ἰσαριθμούς πλευρὰς αἱ περίμετροι εἶναι ὡς αἱ μεγαλήτεραι ἢ αἱ μικρότεραι ἀκτίνες των.

§. 127. Ἐπειδὴ τὰ ὅμοια σχήματα ἔμπορουν νὰ δι-

αἰρεθοῦν εἰς ἰσαριθμὰ ὅμοια τρίγωνα· ταῦτα δὲ εἶναι ὡς ἀπὸ τῶν ἀντιστίχων πλευρῶν τετράγωνα· ἄρα καὶ ἐκεῖνα εἶναι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἀντιστίχων των πλευρῶν τετράγωνα, ἢ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἀντιστίχων των διαγωνίων τετράγωνα.

§. 128. Ὅταν μᾶς δοθῇ διάμετρος κύκλου μὲ ἀριθμούς, ἔμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν περιφέρειάν των δι' ἑνὸς ἀπὸ τοὺς ἐξῆς δύο λόγους· διότι, ἂν ἡ δοθεῖσα διάμετρος εἶναι 10 π. χ. λέγομεν ἢ $7 : 22 :: 10 : \chi$ · καὶ μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν εὐρίσκομεν τὴν ζητούμενην περιφέρειαν· Ἐπειδὴ εὕρηκαν, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἔχει λόγον $:: 113 : 355$, ἢ $100 : 314$, ἢ $7 : 22$.

ΣΤΕΡΕΩΜΕΤΡΙΑ.

§. 129. Σχήμα, τὸ ὅποιον ἔχει τρεῖς διαστάσεις, μήκος, πλάτος, βάθος ἢ ὕψος, λέγεται σῶμα μαθηματικὸν ἢ στερεόν.

§. 130. Ἐὰν τρίγωνον, τετράγωνον, ἢ πολύγωνον κάτωθεν πρὸς τὰ ἄνω κινηθῇ παραλλήλως μὲ τὸν ἐκυτόν του, καὶ ἀναβαῖνον ἀρίνη ἐπιφανείας στερεουμένης ἴσας μὲ τὸν ἐκυτόν του, γεννᾶται στερεὸν τὸ ὅποιον ὀνομάζεται πρίσμα· καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν τοῦ κινηθέντος σχήματος ὀνομάζεται τριγωνικόν, τετραγωνικόν, πολυγωνικόν πρίσμα· τὸ κινηθὲν σχῆμα ὀνομάζεται βάσις τοῦ στερεοῦ.

§. 131. Ἐὰν ἡ βάσις εἶναι παραλληλόγραμμον, τὸ πρίσμα λέγεται παραλληλεπίπεδον· ἐὰν δὲ εἶναι τετράγωνον, καὶ ἀναβῇ εἰς ὕψος ἴσον μὲ τὴν πλευράν του, τὸ πρίσμα λέγεται κύβος.

§. 132. Εάν ἡ βάσις εἶναι κύκλος (Σχ. 75.), τὸ πρίσμα λέγεται *κύλινδρος*· οἱ δύο κύκλοι του, *βάσεις* τοῦ κυλίνδρου· εὐθεῖα δὲ ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ κέντρα τῶν κύκλων ἢ *αβ*, *ἄξων* τοῦ κυλίνδρου καὶ *ὑψος* του.

§. 133. Εάν ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ μεσαίτατα σημείων βάσεων τοῦ πρίσματος εἶναι κάθετος εἰς αὐτὰ, τὸ πρίσμα λέγεται *ὀρθόν*· ἐν δὲ πλαγίᾳ, *πλάγιον*· ὕψος δὲ λέγεται τὸ ἀπόστημα τῶν δύο βάσεων· εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου ἄξων καὶ ὕψος εἶναι τὸ αὐτὸ (§. 132), τοῦ δὲ πλαγίου, ὁ ἄξων εἶναι διάφορος παρὰ τὸ ὕψος.

§. 134. Εάν εἰς τὸ μέσον ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓΔ (Σχ. 76) σταθῇ κάθετος ἡ βα, καὶ ἀπὸ τοῦ α σημείου ἐπιζευχθῶσιν εἰς τὰς γωνίας τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖαι αἱ Αα, Βα, Γα, Δα, θέλει γεννηθῇ *πυραμὶς*· τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀνομάζεται *βάσις* τῆς πυραμίδος, τὸ δὲ σημεῖον α *κορυφή*· τὸ δὲ ἀπόστημα τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς βάσεως, *ὑψος*· ἐάν δὲ ἡ εὐθεῖα βα σταθῇ πλαγίᾳ εἰς τὸ ἐπίπεδον, ἡ πυραμὶς λέγεται *πλαγίᾳ*, ἐνῶ ἡ πρώτη λέγεται *ὀρθή*· καὶ ἐάν ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον, τετράγωνον, πολύγωνον, ἡ πυραμὶς λέγεται *τριγωνική*, *τετραγωνική*, *πολύγωνική*.

§. 135. Εάν εὐθεῖα ἡ βα (Σχ. 77.) ἴσταται κάθετος εἰς τὸ κέντρον κύκλου, καὶ περὶ τὴν περιφέρειάν του περιαχθῇ ἡ αΓ εὐθεῖα, ἕως οὗ νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, θέλει γεννηθῇ *κῶνος*· καὶ ὁ μὲν κύκλος λέγεται *βάσις* τοῦ κῶνου, τὸ δὲ α *κορυφή* του, τὸ δὲ ἀπόστημα τῆς ἀπὸ τὴν βάσιν, *ὑψος*· ἡ δὲ εὐθεῖα αβ, *ἄξων*· ἐάν ὁ ἄξων εἶναι κάθετος εἰς τὸν κύκλον, ὁ κῶνος λέγεται *ὀρθός*· εἰ δὲ μὴ, *πλάγιος*.

§. 136. Εάν ὁ κῶνος τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ ἄξωνος ἕως τὴν βάσιν, ἡ τομὴ εἶναι τρίγωνον.

§. 137. Κῶνοι καὶ πυραμίδες, τεμνόμενοι μὲ ἐπίπεδα παράλληλα τῶν βάσεων των, γίνονται *κόλουροι* ἢ *κολοβαί*.

§. 138. Αἱ πλευραὶ τοῦ μὲν πρίσματος εἶναι τετράπλευροι, τῆς δὲ πυραμίδος τρίπλευροι· τοῦ δὲ κυλίνδρου καὶ τοῦ κῶνου εἶναι μία καμπύλη ἐπιφάνεια.

§. 139. Εάν ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΚΔ (Σχ. 78.) περιεχθῇ περὶ τὴν μένουσαν ἀκίνητον διάμετρον ΑΒ, ἕως οὗ νὰ ἐπανεέλθῃ εἰς τὸ αὐτὸ, θέλει γεννηθῇ *σφαῖρα*· ἡ ΑΒ διάμετρος ὀνομάζεται *ἄξων* τῆς σφαίρας· *κέντρον* της, τὸ Κ κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου· τὰ σημεία Α, Β, *πόλοι* τῆς σφαίρας.

§. 140. Εάν ἀπὸ τοῦ Α πόλου ἕως τοῦ Β τμηθῇ ἡ σφαῖρα μὲ ἐπίπεδα κάθετα εἰς τὸν ἄξωνα, θέλουν γεννηθῇ κύκλοι, οἵτινες μεγαλύνονται ἕως τοῦ κέντρου, καὶ ἐντεῦθεν πάλιν μικρύνονται ἕως τὸν ἄλλον πόλον· ὁ κύκλος, ὅστις διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *ἡμισφαίρια*, εἶναι μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος· καὶ ἐπεὶ πολλοὶ κύκλοι ἐμποροῦν νὰ τὴν διαιρέσουν εἰς ἴσα μέρη· εἶναι λοιπὸν καὶ πολλοὶ οἱ μέγιστοι κύκλοι εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν.

§. 141. Εἰς τὰ στερεὰ σώματα ζητεῖται νὰ μετρήσωμεν τὴν ἐξωτερικὴν των ἐπιφάνειαν, διὰ νὰ μάθωμεν πόσα τετραγωνικά μέρη περιέχει· καὶ ἔπειτα νὰ μετρήσωμεν καὶ τὴν στερεότητά των· λέγομεν λοιπὸν συντόμως τὸ πρῶτον, καὶ ἔπειτα τὸ δεύτερον.

§. 142. Διὰ νὰ μετρήσῃς τὴν ἐπιφάνειαν πρίσματος, μέτρησε πρῶτον τὴν βάσιν του, ὡς ἐπίπεδον σχῆμα, καθὼς ἐδειξάμεν εἰς τὴν Ἐπίπεδομετρίαν· τὸ διπλοῦν αὐτῆς κάμνει τὴν ἄνω καὶ τὴν κάτω βάσιν της· ἔπειτα

μέτρησε καθέν παραλληλόγραμμον ἀπὸ τὰ περικυκλῶντα τὸ πρίσμα. τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν βάσεων καὶ τῶν παραλληλογράμμων τούτων θέλει σὲ δώσει τὴν ζητούμενην ἐπιφάνειαν.

§. 143. Διὰ τὴν εὐρὴς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλεπίπεδου, μέτρησε μόνον μίαν βάσιν, καὶ δύο ἐφεξῆς κοιμένας πλευρὰς, καὶ διπλασίασε τὸ ἄθροισμά των.

§. 144. Διὰ τὴν εὐρὴς τὴν ἐπιφάνειαν ὀρθοῦ κυλίνδρου, μέτρησε πρῶτον μίαν τοῦ βάσιν καὶ διπλασίασε τὴν· ἔπειτα πολλαπλασίασε τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του· σύναψε τὸ διπλῶν τῆς βάσεως μὲ τὸ γινόμενον τοῦτο· τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἡ ζητούμενη ἐπιφάνεια.

§. 145. Διὰ τὴν εὐρὴς τὴν ἐπιφάνειαν πυραμίδος, μέτρησε χωριστὰ τὴν βάσιν της, καὶ πᾶσαν μίαν πλευράν της· καὶ συνάψας αὐτὰς ἔχεις τὸ ζητούμενον.

§. 146. Διὰ τὴν εὐρὴς τὴν ἐπιφάνειαν ὀρθοῦ κώνου, μέτρησε πρῶτον τὴν βάσιν του, καὶ μ' αὐτὴν σύναψε τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς βάσεως, καὶ τῆς ἡμισείας πλευρᾶς αΓ (§χ. 77).

§. 147. Διὰ τὴν εὐρὴς τὴν ἐπιφάνειαν ὀρθοῦ κολοβοῦ κώνου (§χ. 79.), μέτρησε πρῶτον διὰ τῶν διαμέτρων ΑΒ, ΓΔ τὰς δύο βάσεις α, β· δεύτερον, πολλαπλασίασε τὸ ἥμισυ κεφάλαιον τῶν περιφερειῶν των μὲ τὴν πλευράν ΑΓ· καὶ σύναψέ τὰ ὅλα.

§. 148. Διὰ τὴν εὐρὴς τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας, εὐρὲ διὰ τῆς ἀκτίνος της τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίστου κύκλου της· καὶ τὴν περιφέρειαν ταύτην πολλαπλασίασε μὲ τὴν διάμετρον, εὐρίσκεις τὸ ζητούμενον.

§. 149. Καθὼς εἰς τὴν μέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν ἔμε-

ταχειρίσθμεν μέτρα τετραγωνικά, οὕτως εἰς τὴν μέτρησιν τῶν στερεῶν μεταχειριζόμεθα μέτρα κυβικά.

§. 150. Εἰς εὐρεσιν τῆς στερεότητος πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ μήκος μὲ τὸ πλάτος (καὶ τοῦτο εἶναι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον)· καὶ τὸ τετραγωνικὸν γινόμενον πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα μὲ τὸ ὕψος· τὸ δεύτερον τοῦτο γινόμενον εἶναι κυβικὸν μέτρον.

§. 151. Κῦβος, τοῦ ὁποῦ πᾶσα πλευρά εἶναι μία ὀργυία, εἶναι κυβικὴ ὀργυιά· εἰ δὲ εἶναι πούς, κυβικὸς ποὺς· εἰ δὲ εἶναι δάκτυλος, κυβικὸς δάκτυλος.

§. 152. Φαντάσου μίαν τετραγωνικὴν ὀργυιάν ΑΒΓΔ (§χ. 80.) ὑψηλὴν ἕνα πόδα, ἡ πολλαπλασιασμένη μὲ 1· θέλει λοιπὸν γεννηθῇ σχῆμα τὸ ΖΔ τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει 36 τετραγωνικοὺς πόδας, ἀλλὰ 36 κυβικοὺς πόδας.

§. 153. Πολλαπλασίασε τώρα τοὺς 36 τετραγωνικοὺς πόδας ἡ τὴν τετραγωνικὴν ὀργυιάν ΑΒΓΔ (§χ. 81.), ἅς μὲ τὴν 1, ἀλλὰ μὲ 6 πόδας, ἡγουν μὲ μίαν ὀργυιάν· θέλει γεννηθῇ κύβος ὁ ΚΒ περιέχων ἐξάκις 36, ἡγουν 216 κυβικοὺς πόδας· ὁ κύβος οὗτος ὀνομάζεται κυβικὴ ὀργυιά.

§. 154. Ὡσαύτως ὁ κυβικὸς πούς περιέχει δακτύλους κυβικοὺς $12 \times 12 \times 12 = 1728$ · καὶ τόσας κυβικὰς γραμμὰς ὁ κυβικὸς δάκτυλος.

§. 155. Διὰ τὴν εὐρὴς τὴν στερεότητα τοῦ πρίσματος, πολλαπλασίασε τὴν βάσιν του μὲ τὸ ὕψος του· καὶ τὸ γινόμενον θέλει σὲ δώσει μὲ κυβικά μέτρα τὴν στερεότητα τοῦ πρίσματος.

§. 156. Ἐπειδὴ δὲ παραλληλεπίπεδον καὶ κύβος καὶ κύλινδρος εἶναι πρίσματα (§. 131, 132), ἄρα καὶ ἐκ τούτων καθέν εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του.

§. 157. Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τριτημόριον πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὴν πυραμίδα· διότι φαντάσθαι εἰς κύβον τὸν ΑΘ (Σχ. 82.) πυραμίδα τὴν ΑΕΒΓ ἱσταμένην ἐπὶ τῆς βάσεως μὲ τὸν κύβον, καὶ ἔχουσαν τὴν κορυφὴν τῆς εἰς τὸ μέσον τοῦ κύβου, καὶ θέλεις καταλάβει εὐκόλως ὅτι ἐλλείπουν ἀκόμῃ 5 τοιαῦται πυραμίδες διὰ νὰ ἀναπληρώσωσι τὸν κύβον· εἶναι λοιπὸν ἡ πυραμὶς $\frac{1}{6}$ τοῦ ὅλου κύβου, καὶ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἡμισέως· ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ ἡμισὺς κύβος εἶναι πρίσμα τὸ ΑΙΝΚΓΒ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὴν πυραμίδα· ἄρα ἡ πυραμὶς εἶναι τριτημόριον τοῦ τοιούτου πρίσματος.

§. 158. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ κύλινδρος εἶναι πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος· ὡσαύτως καὶ ὁ κῶνος πυραμὶς· διὰ τοῦτο καὶ ὁ κῶνος εἶναι τριτημόριον κυλίνδρου, ὅστις ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸν κύλινδρον.

§. 159. Διὰ νὰ εὕρῃς τὴν στερεότητα τῆς πυραμίδος, πολλαπλασίασε τὴν βάσιν τῆς μὲ ὅλον τὸ ὕψος τῆς· τὸ γινόμενον εἶναι πρίσμα (§. 155.) τοῦ ὁποίου λαβὼν τὸ τριτημόριον εὐρίσκεις τὴν στερεότητα τῆς πυραμίδος (§. 157).

§. 160. Τὸ αὐτὸ δὲ πρέπει νὰ κάμωμεν καὶ εἰς τὸν κῶνον, ὅστις εἶναι τριτημόριον τοῦ κυλίνδρου (§. 158).

§. 161. Διὰ νὰ εὕρῃς τὴν τῆς σφαίρας στερεότητα, πολλαπλασίασε τὴν ἐπιφανείαν τῆς (§. 147.) μὲ $\frac{1}{6}$ τῆς διαμέτρου τῆς, ἢ μὲ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀκτίνος τῆς.

§. 162. Ἐπειδὴ δὲ μὲ τὴν ἐκμέτρησιν ταύτην εὐρίσκεται, ὅτι σφαίρας ἐχούσης διάμετρον 1 πρὸς σφαίρας ἐχούσης διάμετρον 2, ἡ στερεότης πρὸς τὴν στερεότητα εἶναι ὡς 1 πρὸς 8· συμπεραίνεται ἐκ τούτου, ὅτι αἱ σφαί-

ραι πρὸς ἀλλήλας εἶναι, ὡς οἱ τῶν ἀκτίνων τῶν κύβοι, ἢ ὡς οἱ τῶν διαμέτρων τῶν· ἐν λοιπὸν μία σφαῖρα ἔχει διάμετρον ἕνα πόδα, καὶ ἄλλη δέκα, ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν ἔχει λόγον τὸν ὁποῖον ἔχει 1 : 1000.

§. 163. Ἡ γωνία τοῦ κύβου, τῆς πυραμίδος, τοῦ παραλληλεπίπεδου κτλ. λέγεται γωνία τερεά· ἡ τερεά λοιπὸν γωνία σχηματίζεται ἀπὸ ἐπιπέδους γωνίας, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ ἀποτελοῦν τὴν κορυφὴν τῆς στερεᾶς γωνίας.

§. 164. Τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι χρειάζονται τουλάχιστον διὰ νὰ συσταθῇ μία στερεά.

§. 165. Αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ὅμοιαι, ἐὰν αἱ περιέχουσαι αὐτὰς ἐπίπεδοι εἶναι ἰσάριθμοι, καὶ πᾶσα μία μὲ πᾶσαν μίαν ἴση κατὰ τάξιν.

§. 166. Ὅμοια στερεὰ λέγονται, τὰ ὁποῖα περιέχονται ὑπὸ ἰσαρίθμων ἐπιπέδων καὶ ὁμοίων ἐνὸς πρὸς ἄλλο κατὰ τάξιν· ὁ κύβος π. χ. εἶναι ὅμοιος μὲ ἄλλον κύβον, ἐπειδὴ καθεὶς περιέχεται ἀπὸ ἐξ τετραγώνων, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια.

§. 167. Καθὼς ὅμοια ἐπίπεδα σχήματα ἔχουν ἴσας τὰς ἀντιστίχους γωνίας, οὕτω καὶ αἱ ἀντίστιχοι στερεαὶ γωνίαι τῶν ὁμοίων στερεῶν εἶναι ἴσαι.

§. 168. Αἱ ἀντίστιχοι πλευραὶ δύο ὁμοίων ἐπιπέδων σχημάτων εἶναι ἀνάλογοι· καὶ τὴν ἀναλογίαν ταύτην φυλάττουσι καὶ ὅταν τὰ ὅμοια ἐπίπεδα εἶναι πλευραὶ ὁμοίων στερεῶν.

§. 169. Στερεαὶ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἐμβαλλόμεναι μὲ τὴν φαντασίαν ἢ μία εἰς τὴν ἄλλην, ἐφαρμόζονται ἀκριβῶς, εἶναι ἴσαι.

§. 170. Ἐὰν τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι συνέρχονται εἰς ἓν σημεῖον, εἶναι 360°. ἀποτε-

λοῦν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν (§. 36.), καὶ ὅχι στερεὰν γωνίαν.

§. 171. Ἄρα τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, αἵτινες συνιστῶσι γωνίαν στερεάν, πρέπει νὰ εἶναι μικρότερον παρὰ 360° .

§. 172. Κανονικὰ στερεὰ ὀνομάζονται, τῶν ὁποίων αἱ πλευраὶ εἶναι ἰσάλληλα κανονικὰ ἐπίπεδα σχήματα.

§. 173. Ἐπειδὴ λοιπὸν πᾶσα γωνία κανονικοῦ στερεοῦ σύγκειται ἀπὸ τοιαύτας ἐπιπέδους γωνίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἰσάλληλοι καὶ κατὰ τὸν ἀριθμὸν καὶ κατὰ τὸ μέγεθος ἀναγκαίως πᾶσαι αἱ γωνίαι τοῦ κανονικοῦ στερεοῦ εἶναι ἰσάλληλοι.

§. 174. Κανονικὰ σώματα εἶναι πέντε, καὶ ὅχι πλείότερα. Διότι εἰς πᾶν κανονικὸν στερεὸν ἀπαιτοῦνται ἴσα κανονικὰ ἐπίπεδα τοῦ αὐτοῦ εἶδους (§. 172.)· καὶ ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, αἵτινες συνιστῶσι στερεάν γωνίαν, πρέπει πάντοτε νὰ εἶναι μικρότερον παρὰ 360° (§. 171)· εἶναι φανερόν, ὅτι εἰς γένεσιν κανονικοῦ στερεοῦ ἐμποροῦν νὰ χρησιμεύσωσι μόνον τὰ ἑφεξῆς κανονικὰ ἐπίπεδα, ἰσοπλευρὰ τρίγωνα, τετράγωνα, καὶ κανονικὰ πεντάγωνα.

α. Τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἡ γωνία εἶναι $= 60^\circ$ (§. 51)· τρεῖς λοιπὸν ἐξ αὐτῶν κάμνουν 180° καὶ τέσσαρα τοιαῦτα τρίγωνα συνιστῶσι στερεὸν κανονικόν, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται τετράεδρον, ἐπειδὴ ἔχει τέσσαρας ἐπιφανείας.

β'. Τέσσαρες γωνίαι ἰσοπλεύρων τριγώνων κάμνουν 240° καὶ ὀκτὼ τοιαῦτα τρίγωνα ἀποτελοῦν ὀκτάεδρον, ἐπειδὴ ἔχει ὀκτὼ ἐπιφανείας.

γ'. Πέντε τοιαῦται γωνίαι κάμνουν 300° , καὶ 20

τρίγωνα κάμνουν εἰκοσάεδρον· ἐξ δὲ γωνίαι εἶναι 360° καὶ λοιπὸν ἄλλο στερεὸν κανονικὸν δὲν γίνεται ἐξ ἰσοπλεύρων τριγώνων.

δ'. Τρεῖς γωνίαι τετραγώνου κάμνουν $3 \times 90 = 270^\circ$ καὶ ἐξ τετράγωνα κάμνουν τὸν κύβον, ὅστις λέγεται καὶ ἐξάεδρον· ἐπειδὴ δὲ 4 γωνίαι τετραγώνου κάμνουν 360° , εἶναι φανερόν ὅτι ἄλλο κανονικὸν στερεὸν δὲν δύναται νὰ συσταθῇ ἐκ τετραγώνων.

ε. Ἡ γωνία τοῦ κανονικοῦ τετραγώνου εἶναι $= 108^\circ$, καὶ 3 ἐξ αὐτῶν κάμνουν 324° . δώδεκα δὲ πεντάγωνα συνιστῶσι τὸ δωδεκάεδρον, ἐπειδὴ ἔχει δώδεκα πλευράς· ἐπειδὴ δὲ $4 \times 108 = 432^\circ$, ἄλλο λοιπὸν κανονικὸν στερεὸν δὲν γίνεται ἐκ κανονικῶν πενταγώνων.

Τοῦ ἐξαγώνου ἡ γωνία εἶναι $= 120^\circ$, τρεῖς δὲ ἐξ αὐτῶν κάμνουν 360° · ἄρα ἐκ κανονικῶν ἐξαγώνων στερεὸν δὲν γίνεται· οὐδὲ ἐξ ἐπταγώνων, οὐδὲ ἐξ ἄλλων πολυγώνων. Τὰ κανονικὰ λοιπὸν στερεὰ εἶναι πέντε, καὶ ὅχι πλείότερα.

Διὰ νὰ καταλαμβάνωσιν αἱ πρωτόπειροι τὰ εἰρημένα σχήματα, πρέπει νὰ τὰ ἔχουν πρὸ ὀφθαλμῶν κατασκευασμένα ἐκ ξύλων· διότι μὲ τὸν τρόπον τοῦτον ἐμποροῦν νὰ λάβωσιν εὐκρινῇ καθενὸς τὴν ἔννοιαν.

ΤΕΛΟΣ.

ΠΙΝΑΞ

ΤΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΒΙΒΛΟΝ ΤΑΥΤΗΝ.

Ἀριθμητική.	σελ.
Περὶ τῆς σημασίας τῶν ἀριθμητικῶν χαρακτήρων.	7
Περὶ Προσθέσεως καὶ Ἀφαιρέσεως	10
Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ	14
Περὶ Διαιρέσεως ἢ μοιρασμοῦ	24
Περὶ Συμμιγῶν ἀριθμῶν	29
Περὶ Κλασμάτων	34
Περὶ Λόγου καὶ Ἀναλογίας, καὶ τῆς Μεθόδου τῶν τριῶν	44
Περὶ Βαθμῶν καὶ Ριζῶν	47
Περὶ τοῦ Συμβολικοῦ λογισμοῦ	49
Ἀπλὴ Γεωμετρία.	
Ἐπιπεδομετρία	54
Στερεομετρία	57



