ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙ

1-2

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΑΚΤΙΚΗ

ΚΑΙ

ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ.

Ν. 3 .. ἐκ τῶν τοῦ Γ. Δ. Ἡρᾳδίου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΕΙΡΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗΣ

Διὰ τὰ Σχολεῖα.

ΥΠΟ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Α. ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΟΥ

ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ.

« Οὐ γὰρ ἄνευ γε τῶν Μ[illegible]αθημάτων μή ποτέ τις ἐν πόλεσιν εὐδαί[illegible]μων γένηται φύσις, ἀλλ' οὗτος ὁ τρόπ[illegible]ος, αὕτη ἡ τροφὴ, ταῦτα τὰ Μαθήματ[illegible]α, εἴτε χαλεπὰ εἴτε ῥᾴδια, ταύτῃ πορ[illegible]υτέον· ἀμελῆσαι δὲ οὐθεμιτόν ἐστι θεῶ[illegible]ν, καταφανοῦς γενομένης τῆς πάντων α[illegible]ὐτῶν κατὰ τρόπον λεγομένης φήμης ε[illegible]ὐτυχοῦς . . .

ΠΛΑΤ. ΕΠΙΝΟΜ. »

ΜΕΡΟΣ Α'.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΕΠΙΠΕΔΟΣ

(Μετὰ 183 Ξυλογραφιῶν.)

Ἀδεία τοῦ Ὑπουργείου τῆς Δημοσίας Ἐκπαιδεύσεως.

ΕΝ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥΠΟΛΕΙ

1874.

ΤΥΠΟΙΣ ΒΟΥΤΥΡΑ ΚΑΙ Σ/ΑΣ.

ΤΥΠΟΙΣ ΒΟΥΤΥΡΑ ΚΑΙ Σ/ΑΣ.

Ὁδὸς Ἀρμενικῆς Ἐκκλησίας Ἀριθ. 23.

SISMANOGLIO

ΤΩ, ΑΟΙΔΙΜΩ,

ΛΟΥΚΑ, Ν. ΓΙΑΓΤΖΟΓΛΟΥ

ΦΙΛΩ, ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΩ, ΜΟΥ

ΙΕΡΩΝ.

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ.

Ὁ Πλάτων οὐδὲν ἐνόμιζε τόσον συντελεστικὸν πρὸς τὴν παιδείαν τοῦ ἀνθρώπου, ὅσον τὰ Μαθηματικά, δι' ὧν ὁ νοῦς τροχίζεται, καθίσταται ὀξυδερκέστερος καὶ ἀνακαλύπτων τοὺς νόμους, τοὺς τὸ σύμπαν διέποντας, κατανοεῖ καὶ θαυμάζει τὸ μεγαλεῖον τοῦ δημιουργοῦ, τὴν ἄπειρον αὐτοῦ σοφίαν καὶ τὴν ἐν τῇ ἁπλότητι μεγαλοπρέπειαν καὶ ποικιλίαν αὐτοῦ.

Οἱ ἄπειροι ἐκεῖνοι κόσμοι, οἱ ἐν τῷ διαστήματι μετὰ καταπληκτικῆς ταχύτητος κινούμενοι, οἱ ὡς ἐκ τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν καθιστάμενοι ἀόρατοι, διὰ τῶν Μαθηματικῶν ἐμφανίζονται πρὸ τῶν ἐκπεπληγμένων ἡμῶν ὀφθαλμῶν, ἐξετάζονται καὶ καταμετροῦνται καὶ ἐξαγγέλλουσι τὴν ἄπειρον ἔκτασιν καὶ τὸ ἄπειρον τῶν κόσμων, οἵτινες ἀποτελοῦσι τὸ σύμπαν καὶ μετὰ τόσης ἁρμονίας διάγουσι καὶ τρόπον τινὰ διαβιοῦσιν.

Καὶ τὰ ἔγκατα δὲ τῆς γῆς καὶ τοὺς πυθμένας τῆς θαλάσσης καὶ τὰ ὕψη τῶν ὀρέων καὶ πᾶν ἐν γένει τὸ ὑποπίπτον ὑπὸ τὰς αἰσθήσεις ἐξετάζων ὁ ἄνθρωπος διὰ τῶν Μαθηματικῶν, καθίσταται κύριος τῆς περιστοιχιζούσης αὐτὸν φύσεως, ἐκμεταλλεύεται αὐτὴν καὶ ὠφελούμενος ἀπὸ τοὺς φυσικοὺς νόμους διασχίζει τὰ ὕδατα καὶ τὸν ἀέρα, διαπερᾷ τὰ ὄρη καὶ συγκοινωνεῖ ἀκαριαίως μὲ τὰ ἀπώτατα μέρη. Ταῦτα δὲ κατορθοῖ διὰ τῶν Μαθηματικῶν, δίδων ζωὴν οὕτως εἰπεῖν εἰς τὴν ἀνόργανον ὕλην.

Ὁ Δαιμόνιος οὗτος ἀνὴρ τὴν μεγάλην ταύτην ἀλήθειαν κατανοήσας διὰ παντοίων μέσων προσεπάθει νὰ δημιουργήσῃ ταῦτα.

Περὶ τῆς προσπαθείας δὲ αὐτοῦ ταύτης ὁ Ἐρατοσθένης λέγει ὅτι, «*Δηλίοις τοῦ Θεοῦ χρήσαντος ἐπὶ ἀπαλλαγῇ λοι-*

μοῦ, βωμὸν τοῦ ὄντος διπλασίω κατασκευάσαι, πολλὴν ἀρχιτέκτοσι πεσεῖν ἀπορίαν, ζητοῦσιν ὅπως χρὴ στερεὸν στερεοῦ γενέσθαι διπλάσιον, ἀφίκεσθαι πευσομένους Πλάτωνος περὶ τούτου.

Τοῦ δὲ φάναι αὐτοῖς, ὡς ἄρα οὐ διπλασίου βωμοῦ ὁ Θεὸς δεόμενος τοῦτο Δηλίοις ἐμαντεύσατο, προφέρων δὲ καὶ ὀνειδίζων τοῖς Ἕλλησιν, ἀμελοῦσι Μαθημάτων καὶ Γεωμετρίας ὠλιγωρηκόσι· ἀκολούθως δὲ τῇ τοῦ Πυθίου παραινέσει, πολλὰ καὶ αὐτὸς διέξεισι ὑπὲρ τοῦ ἐν Μαθήμασι χρησίμου κ.τ.λ.»

Δύναταί τις λοιπὸν εὐχερῶς νὰ εἴπῃ, ὅτι ἡ συμβουλὴ τοῦ Πλάτωνος ἔπεσεν ἐν γῇ ἀγαθῇ καὶ ἐρριζοβόλησε καὶ ηὔξησε καὶ ἀνεπτύχθη.

Ὅτι δὲ ἡ γνώμη ἡμῶν αὕτη εἶναι ἀληθὴς, μαρτυρεῖ αὐτὴ ἡ ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν, ἥτις ἀναγράφει πατέρας αὐτῆς τοὺς Ἕλληνας καὶ δημιουργούς.

Ὁ δὲ Πλάτων μετὰ τόσου ζήλου περὶ τὴν μόρφωσιν τῶν Μαθηματικῶν κατέγεινεν, ὥστε συνεκέντρωσε περὶ ἑαυτὸν τοὺς μαθητὰς αὐτοῦ, ἐπιβαλὼν αὐτοῖς τὴν σπουδὴν καὶ τὴν ἐξεύρεσιν τῶν Μαθηματικῶν νόμων καὶ θεωριῶν καθ' ἑαυτὰ, ἀποτρέπων αὐτοὺς ἀπὸ τῆς ἐν ταῖς τέχναις ἐφαρμογῆς, ὡς μαρτυρεῖ τὸ λεγόμενον περὶ Ἀρχίτου τοῦ Ταραντίνου, ὅστις πρῶτος ἐνασχοληθεὶς περὶ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς Γεωμετρίας ἐν ταῖς Τέχναις καὶ τῇ Μηχανικῇ, κατεσκεύασε ξυλίνην περιστερὰν ἱπταμένην, ὅπερ μαθὼν ὁ Πλάτων ἐπὶ τοσοῦτον ὠργίσθη, ὥστε ἔγραψεν αὐτῷ, ὅτι καθυβρίζει τὴν Γεωμετρίαν καταβιβάζων αὐτὴν ἐπὶ τὰ αἰσθητὰ καὶ σωματικὰ, ἀπὸ τῶν νοητῶν καὶ ἀσωμάτων, ἀποκαθιστῶν αὐτὴν βάναυσον.

Ἡ περίοδος δὲ αὕτη ἀπὸ τοῦ Πλάτωνος, καὶ πρὸ ἔτι, μέχρι τῶν ἀλεξανδρινῶν χρόνων, εἶναι ἡ κυριωτέρα ἐποχὴ καθ' ἣν τὰ μαθηματικὰ ἐδημιουργήθησαν κατὰ τὴν ἐπαγωγικὴν καὶ συνθετικὴν μέθοδον, ἐν μέρει δὲ καὶ κατὰ τὴν ἀναλυτικήν.

Καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῶν ἀρχαίων ἐκείνων (*).

Ἀλλὰ καὶ αὐτοὶ, οἱ πρὸς ἡμᾶς πλησιέστεροι Βυζαντινοὶ καὶ οὗτοι ἐν τῷ σταδίῳ τούτῳ δὲν ἔμειναν ἀδρανεῖς, εἰργάσθησαν μετὰ ζέσεως καὶ εἰμή τι ἄλλο ἔπραξαν, καὶ τοῦτο ὅμως εἶναι ἀρκετὸς δι' αὐτοὺς ἔπαινος, ὅτι παρέλαβον μεθ' ἑαυτῶν καὶ διέχυσαν ἀνὰ τὴν Ἑσπερίαν Εὐρώπην, γενόμενοι εἰσηγηταὶ καὶ διδάσκαλοι τῆς ὑψηλῆς ταύτης ἐπιστήμης.

(*) Ἴδε μετὰ τὸ προοίμιον συνοπτικὴν ἱστορίαν τῶν ἀρχαίων μαθηματικῶν Ἑλλήνων.

Καὶ μετὰ τούτους δὲ, οἱ ἐν χαλεποῖς καιροῖς γεννηθέντες ἡμέτεροι πατέρες ἐκαλλιέργουν τὰ Μαθηματικὰ, ἀναζωπυροῦντες τὸν πρὸς αὐτὰ ἔρωτα καὶ τὰ πρῶτα αὐτῶν καὶ σπουδαιότερα συγγράμματα, τῶν τε θεολόγων καὶ ἄλλων σορῶν, ἦσαν τὰ περὶ τὰ Μαθηματικὰ· διότι εἶχον ἐν νῷ τὴν ὑποθήκην τοῦ Πλάτωνος «θρητὸν δεῖ μαθεῖν πρῶτον ἀστρονομίαν· εἰ γὰρ τὸ καταψεύδεσθαι καὶ ἀνθρώπων δεινὸν, πολὺ δεινότερον θεῶν· καταψεύδοιτο δ' ἂν ὁ ψευδεῖς ἔχων δόξας περὶ θεῶν· ψευδεῖς δ' ἂν δόξας ἔχοι περὶ θεῶν, ὁ μηδὲν τὴν τῶν αἰσθητῶν θεῶν φύσιν ἐπεσκεμμένος, τοὐτέστιν ἀστρονομίαν. κ.τ.λ.»

Ἵνα δὲ ὁ ἀναγνώστης ἐξ ἰδίας ἀντιλήψεως κρίνῃ περὶ τῆς περὶ τὰ Μαθηματικὰ λατρείας τῶν ἡμετέρων πατέρων, ὧν τὰ ὀνόματα ἐν τῇ συνοπτικῇ ἱστορίᾳ ἀνεγράψαμεν, ἀναφέρομεν τήνδε τὴν περικοπὴν ἐκ τῆς Μαθηματικῆς Ὁδοῦ τοῦ Μπαλάνου «Ὁ γοῦν ἐν τοῖς μαθηματικοῖς προβλήμασί τε καὶ θεωρήμασιν ὡς δεῖ προγυμνασθεὶς, δυνήσεται δήπουθεν ἀπορώτερόν τε ἅμα καὶ εὐστοχώτερον εἰς τὴν τῶν ἀλλοτρίων κατὰ τὸ ἐφικτὸν ἀνθρώποις ἐλθεῖν κατάληψιν, καὶ τοῖς ἀπορρήτοις τῶν κατὰ φύσιν ἐμβατεῦσαι· ὅσην δὲ καὶ τὴν ἡδονὴν τοῖς ἰδίοις ἐρασταῖς ἡ Μαθηματικὴ χαρίζεται ἐπιστήμη, ἴσασιν οἱ τοῖς κάλλεσι ταύτης ἐντρυφῶντες, τὰ ἀμάραντα ἄνθη τῶν ἐν τῷ ταύτης περιβόλῳ ἀποδρεπόμενοι φυτῶν, καὶ τῶν ἡδυτάτων καρπῶν τούτων συνεχῶς ἀπογευόμενοι· οὐκ οἶδα δ' ὅπως ἡ τοσοῦτον εἰς γνῶσιν τοῖς ἀνθρώποις συντελοῦσα καὶ οὕτω θαυμάσιος ἐπιστήμη τοῖς πλείοσιν ἤδη κατημέληται· καὶ Φυσικὴν μὲν θεωρίαν καὶ Μεταφυσικὴν εὑρήσειεν ἄν τις ἐν οὐκ ὀλίγοις. Ῥητορικὴν τ' αὖ, Διαλεκτικήν τε καὶ Ποιητικὴν, οἱ πλείους διδάσκειν ἐπαγγέλλονται, Μαθηματικῆς δὲ οἱ μὲν πρὸς τοὺς πόνους ἀποδειλιῶντες, ἄλλοι δὲ ὡς μικρόν τι συμβαλλούσης τοῖς φιλομαθέσι, καὶ ἄλλοι ὡς τερατώδη τινὰ ἐπαγγελλομένης διδάσκειν, οὐδένα που λόγον ποιοῦνται,

ἢ βραχύ τι καὶ ταύτης φροντίζουσι, ὡς ἂν μὴ τὰ ἐν τοῖς φυσικοῖς εἰς λόγον ὑποδειγμάτων λαμβανόμενα τῶν Μαθηματικῶν προβλημάτων ἀγνοῶσιν. Ἀλλὰ δεινόν γε καὶ πάνυ δεινὸν ἡ αἰχμαλωσία, τῆς γὰρ Μαθηματικῆς ἐπιστήμης πλεῖστοι τῶν Ἑλλήνων ποτὲ ἐρασταί, ὡς εἴγε καὶ ἄλλοι τινές, γεγονότες, οὕτως ἐνηγκαλίσαντο, καὶ οὕτω τοῖς συνεχέσι πόνοις τε καὶ ἱδρῶσιν ἀφθόνως ἀνεθρέψαντο, ὥστε πολλὰ καὶ γενναῖα τὰ ἐξ αὐτῆς ἀναδεῖξαι γεννήματα, καὶ πατέρες πολλῷ μᾶλλον ἢ τροφοὶ τούτων λογίζεσθαι, ὧν καὶ τὰ μέχρι τοῦδε σωζόμενα συγγράμματα παρὰ πάντων θαυμάζονται, ὡς Εὐκλείδου μὲν τὸ Στοιχειῶδες, Ἀρχιμήδους δὲ τὸ περὶ τὰς μηχανὰς, καὶ Πτολεμαίου τὸ περὶ μεγάλης συντάξεως, καὶ ἄλλων ἄλλα, ὅσ' ἀκριβῆ, καὶ τελειοτέραν τὴν περὶ ἄλλων τινῶν ὑποθέσεων ἔχουσι τὴν διδασκαλίαν. Τανῦν δὲ ἐν τοσαύτῃ τῶν ἑλληνικῶν πραγμάτων καταπτώσει ὄντων . . . . . οὐδὲν ὄντως θαυμαστὸν, εἴ γε τὸ ἑλληνικὸν γένος, μετὰ τῶν ἄλλων αὐτοῦ καλῶν καὶ τοῦ παρὰ τῆς Μαθηματικῆς γεγύμνωται κόσμου· ἐν ἠρεμίᾳ γὰρ τῶν παθῶν, καὶ γαλήνῃ τῆς πολυταράχου ταύτης ζωῆς, τοὺς τῶν ἐπιστημῶν μαργαρίτας ὁ νοῦς συλλέγειν δύναται, καὶ τὸν ποικίλον τῆς μαθηματικῆς καὶ εὐμήχανον ὑφαίνειν κεστόν. Διὸ δὴ ἐν τοσαύτῃ ταραχῇ τῶν πραγμάτων καὶ ζάλῃ τῇ μετὰ τὴν δεινὴν ταύτην αἰχμαλωσίαν τῆς πολυκυμάντου ζωῆς, καὶ παντελεῖ ἔτι τῶν πάλαι ποτὲ ἐν Ἑλλάδι θαυμασίων Ἀκαδημιῶν τε καὶ κοινῶν Μουσοτροφείων ἐρημώσει, τῶν μὲν ὑπὲρ τῶν πρὸς τὸ ζῆν ἀναγκαίων, τὴν πᾶσαν αὐτῶν καταβαλλομένων φροντίδα, τῶν δ' ὅπως τὰς τῶν ἐργοδιωκτῶν φύγωσιν ὠμότητας σπουδαζόντων, μηδενὸς ὄντος τοῦ συναντιλαμβανομένου, μᾶλλον δὲ πολλῶν, εἴ γε δεῖ τἀληθὲς εἰπεῖν, τοῦ γένους τούτου, οὐκ οἶδα τίνος ἕνεκα, κατατρεχόντων. Ποιητικῆς μὲν κάλλος, Ῥητορικῆς δεινότης, Φυσικῆς τε καὶ Μεταφυσικῆς ἀκριβὴς θεωρία, ἠμέληται πως καὶ ἠλαττόνηται. Μαθηματικῆς δὲ χάρις εἰς τὸ παντελὲς ἐξέλιπεν, ὡς μηδὲ εἶγε ἦν, ἢ ὅλως ποτὲ ἤκμαζε τῷ ἑλληνικῷ πιστεύεσθαι γένει κ.τ.λ.»

Καὶ ἐν τούτοις τοιαῦτά τινα λέγει ὁ κλεινὸς διδάσκαλος,

ὅτε καὶ μαθηματικοὶ διαπρέποντες ἤκμαζον σύγχρονοι αὐτῷ καὶ ἄνδρες φιλομουσότατοι οἷοι οἱ Ζωσιμάδαι, Καπλάναι, καὶ ἄλλοι, οἵτινες γενναίως συνέτρεχον πρὸς τὴν ἐκτύπωσιν τοιούτων συγγραμμάτων καὶ δωρεὰν διανομὴν αὐτῶν.

Μετὰ τοὺς Ἕλληνας οἱ Εὐρωπαῖοι καὶ πρὸ πάντων πρῶτοι οἱ Ἰταλοὶ ἐπὶ τὴν σπουδὴν τῆς ἀναλύσεως ἐτράπησαν. Πρῶτος δὲ μνημονεύεται ὁ ἀπὸ Πίσης Λεονάρδος, ὅστις κατὰ τὸν ΙΓ' αἰῶνα, τὰς γνωστὰς μέχρι τῆς ἐποχῆς ἐκείνης ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων πρωτοβαθμίους καὶ δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις καὶ τὴν ἀπροσδιόριστον ἀνάλυσιν διέδωκε τοῖς συμπολίταις αὐτοῦ.

Κατὰ τὸν ΙϚ' δὲ αἰῶνα πάλιν Ἰταλοὶ, οἱ Γεωμέτραι Σκιπίων Φερέη καὶ Ταρταγλίας, ἀνεκάλυψαν τὴν ἐπίλυσιν τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων. Καὶ ἡ τοῦ τετάρτου δὲ βαθμοῦ ἐπίλυσις ἀνεκαλύφθη ὑπὸ τοῦ Λουδοβίκου Φερέη, τοῦ μαθητοῦ τοῦ περιφήμου Καρδάνου, Ἰταλοῦ καὶ τούτου. Ἀλλὰ κυρίως μεγάλως ἀνέπτυξε τὴν Ἄλγεβραν ὁ Γάλλος Βιέτος (1540—1600)· ἐπεξέτεινε τὰς ἀλγεβρικὰς γνώσεις, ἀνακαλύψας τοὺς κανόνας τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν ἐξισώσεων, τὸν τρόπον δι' οὗ ἐξίσωσίς τις σχηματίζεται διὰ τῶν θετικῶν αὐτῆς ῥιζῶν, γνωστῶν οὐσῶν, καὶ μάλιστα μέθοδον δι' ἧς εὑρίσκονται αὗται.

Μετὰ τοὺς προηγουμένους δὲ ἐνησχολήθησαν καθόλου περὶ τὰ μαθηματικὰ οἱ μέγιστοι τῶν φιλοσόφων Καρτέσιος, Νεύτων, Λεϊβνίτιος καὶ Λαπλὰς καὶ ἅπασα ἐν γένει ἡ χορεία τῶν τε φιλοσόφων καὶ γεωμετρῶν Εὐρωπαίων, οἵτινες συνδυάσαντες τὴν Ἄλγεβραν μετὰ τῆς Γεωμετρίας ἐπενόησαν τὴν λεγομένην **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ** τουτέστι τὴν **ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ**, τὸν **ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΝ** καὶ **ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΝ**, καὶ **ΤΟΝ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ**, δι' ὧν ἐδημιούργησαν τὴν **ΟΥΡΑΝΙΟΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ** καὶ **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ** καὶ τὴν **ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ** τῶν **ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ** καὶ τοιοῦτον ἐπὶ τέλους δόντες χαρακτῆρα τῇ **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**, ὥστε αὕτη νὰ ἦναι ταυτόσημος πρὸς τὴν καθόλου μαθηματικὴν ἐπιστήμην, ἣν περιέβαλον κατὰ τὸν δέκατον ἕβδομον αἰῶνα διὰ τοῦ φιλοσοφικοῦ μανδύου, συντάξαντες συγγράμματα φιλοσοφικὰ ἐπ' αὐτῆς, καὶ δικαιώ-

σαντες πληρέστατα, τὸ ἐπὶ τῆς ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος ὑπ' αὐτοῦ γραφὲν «μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω»· διότι κατὰ τὸν Μπαλάνον «λαμπρὸν τεκμήριον, ἐφ' ὅσον οὐκ ἀλλότριος, ἢ ἀνωφελὴς, ἢ ἄκοσμος, ἀλλ' οἰκεία, ἐπωφελὴς καὶ ἐπιτηδεία ἡ Μάθησις πρὸς τὸ ὀρθῶς φιλοσοφεῖν».

Οὕτω λοιπὸν ἀφοῦ τὰ Μαθηματικὰ ἔρθασαν ἀφ' ἑνὸς εἰς τὸν κολοφῶνα τῆς ἀναπτύξεως, ἀφ' ἑτέρου ἦσαν καὶ ὀλίγοις προσιτά, ὡς ἐκ τοῦ φιλοσοφικοῦ αὐτῶν χαρακτῆρος. Ἵνα λοιπὸν καὶ τοῖς πολλοῖς ταῦτα γίνωσι γνωστὰ, συνετάχθησαν εἰδικὰ ἐγχειρίδια ὅλως ὁμως θεωρητικῶς συντεταγμένα, πρὸς χρῆσιν τῶν σχολείων, ὧν τινὰ καὶ ἐν τῇ ἡμετέρᾳ γλώσσῃ μετεφράσθησαν.

Ἀλλὰ τὰ στοιχειώδη ταῦτα θεωρητικὰ συγγράμματα, τὰ ὁποῖα συνετάχθησαν πρὸς διάδοσιν δὴθεν τῶν Μαθηματικῶν, ὄχι μόνον δὲν ἐπέτυχον τοῦ σκοποῦ, τοῦ νὰ καταστήσωσιν αὐτὰ τοῖς πᾶσι προσιτὰ, ἀλλ' ἐξ ἐναντίας ταῦτα κατέστησαν, μισητὰ μὲν καὶ ἀφόρητα παρὰ τοῖς διδασκομένοις, παρὰ δὲ τοῖς παιδαγωγοῖς ἐγέννησαν τὴν πεποίθησιν, ὅτι οὔτε διὰ τὴν τοῦ νοὸς παίδευσιν εἶναι ταῦτα κατάλληλα. Σχεδὸν δὲ καὶ ὡς παροιμία φέρεται, ὅτι διὰ νὰ ἐπιδώσῃ τις ἐπὶ τὰ Μαθηματικὰ δηλ. διὰ νὰ μάθῃ ὀλίγην Ἀριθμητικὴν Ἄλγεβραν καὶ Γεωμετρίαν, πρέπει νὰ ἔχῃ νοῦν μαθηματικόν· ἐν τούτοις κατὰ τὸν κλεινὸν αὐτῶν θεράποντα τὸν Poisson les mathématiques ne repoussent personne elles ne demandent qu'un culte assidu.

Ποῦ πρέπει νὰ ἀποδοθῇ τάχα τοῦτο, εἰς τὴν ἔλλειψιν νοῦ μαθηματικοῦ, ἢ εἰς τὸ ἐλαττωματικὸν τοῦ ἐπικρατοῦντος διδακτικοῦ συστήματος.

Ἵνα ὁ ἀναγνώστης μόνος κρίνῃ ποῦ ἔγκειται τὸ κακὸν ἀναφέρομεν τὰς γνώμας δύο ἐκ τῶν ἐπισημοτέρων συγγραφέων. Τούτων ὁ μὲν Edmond Degranges (Arithmétique 1867) ταῦτα περὶ Ἀριθμητικῆς λέγει· «Ὀλίγοι ἐπιστημονικοὶ κλάδοι ἐν τῷ βίῳ εἶναι τόσον μεγάλης καὶ πραγματικῆς χρησιμότητος, ὅσον ἡ Ἀριθμητικὴ· αὕτη καὶ ἐν παντὶ μὲν τῷ βίῳ εἶναι χρήσιμος, ἰδίᾳ δὲ ἐν τῷ ἐμπορίῳ καὶ τῇ βιομηχανίᾳ, αἵτινες εἶναι αἱ βάσεις τῶν νέων κοινωνιῶν».

Θὰ ἦτο λοιπὸν χρησιμώτατον βιβλίον τι συντεταγμένον μετὰ πολλῆς ἁπλότητος ἐν ταῖς ἀποδείξεσι καὶ ἀρκετὰ εὐκατάληπτον, ὥστε καὶ οἱ ὀλίγον βραδεῖς τὸν νοῦν νὰ ἐννοῶσιν αὐτό.

Εἶναι ἀληθὲς ὅτι πολλὰ συγγράμματα ἐγράφησαν ἐπὶ τῆς ἐπιστήμης ταύτης πολλοῦ λόγου ἄξια, ἀλλὰ ταῦτα εἶναι ἀποκλειστικῶς συντεταγμένα πρὸς μελέτην ἐκείνων μόνων, οἵτινες θὰ σπουδάσωσιν ἰδίως τὰ Μαθηματικὰ ἢ ἐπιστήμην τινὰ, ἣν διὰ βίου θὰ μελετῶσιν.

Δυστυχῶς οἱ μὲν τῶν συγγραφέων θεωροῦντες τὴν Ἀριθμητικὴν ὡς ἁπλῆν εἰσαγωγὴν εἰς τὰ Μαθηματικὰ ἐπ' ὀλίγον περὶ αὐτὴν διατρίβουσι καὶ μεταβαίνουσι σπεύδοντες πρὸς τὴν Ἄλγεβραν.

Δικαίως λοιπὸν δύναταί τις νὰ εἴπῃ ὅτι, τὰ συγγράμματα ταῦτα, τὰ ὀνομαζόμενα δηθεν διδακτικὰ, εἶναι ὅλως ἄχρηστα πρὸς τοὺς πολλοὺς, οἵτινες ἐπιδίδονται πρὸς τὴν βιομηχανίαν ἢ τὸ ἐμπόριον ἢ ἄλλο τι βιοποριστικὸν ἔργον.

Ἄλλοι δὲ πάλιν βαρυνόμενοι φαίνεται, τὴν ἀριθμητικὴν λύσιν τῶν προβλημάτων καταφεύγουσιν εἰς τὴν ἀλγεβρικήν.

«Ὁποίας λοιπὸν ὠφελείας πρόξενα εἶναι τοιαῦτα βιβλία πρὸς τοὺς νέους ἐκείνους, οἵτινες δι' ἄλλο στάδιον εἶναι προωρισμένοι; Νὰ τὸ ἐπαναλάβωμεν; οὐδεμιᾶς. Διότι ἐλλείπει ἀπ' αὐτῶν ἡ ἁπλότης, τὸ εὔληπτον καὶ σκόπιμον.

Διὰ τοῦτον δὲ τὸν λόγον πολλοὶ ἀγνοοῦσι τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ εἶναι ἕκαστοτε εἰς ἀμηχανίαν. Τὸ χειρότερον δὲ πάντων εἶναι ὅτι οἱ σπουδάζοντες αὐτὴν, τοιαῦτα ἔχοντες ἀκατάλληλα ἐγχειρίδια ἀποθαρρύνονται εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς καὶ ἐκλαμβάνουσιν ἑαυτοὺς ἀνικάνους πρὸς τὴν σπουδὴν τῶν μαθηματικῶν· ἐνῷ ἐξ ἐναντίας τὴν ἀνικανότητα ἔπρεπε νὰ ἀποδώσωσιν εἰς τὰ διδακτικὰ βιβλία δι' ὧν ἡ Ἀριθμητικὴ διδάσκεται.

Παντοῦ δὲ ὅπου στρέψῃ τις τὴν προσοχήν του θέλει παρατηρήσει τὴν ἀγνοιαν τῆς Ἀριθμητικῆς, ἥτις εἶναι ἐγκλεῖστον τοῦ ὁποίου καλὸν εἶναι νὰ γνωρίζωμεν τὴν θεω-

ρίαν, ἀλλὰ τὴν πρακτικὴν χρῆσιν πρὸ τῶν ἄλλων πρέπει νὰ μελετῶμεν».

Ὁ δὲ ἀκαδημαϊκὸς H. Sonnet (Géométrie theorique et pratique 1866) ταῦτα λέγει περὶ Γεωμετρίας.

«Τὰ μέχρι τοῦδε γεωμετρικὰ ἐγχειρίδια, τὰ μᾶλλον εὐπόληπτα εἶναι ὅλως θεωρητικά· αἱ ἐφαρμογαὶ εἶναι ἐλάχισται καὶ ἀσήμαντοι· πολὺν δὲ κατ' ἐξαίρεσιν τόπον κατέχουσιν ἐν τοῖς συγγράμμασι τούτοις αἱ ἀφηρημέναι θεωρίαι. Κυρίως δὲ οἱ συγγραφεῖς αὐτῶν ταῦτα συντάττοντες ὑπέθετον φαίνεται, ὅτι ὅλος ὁ κόσμος ἔμελλε νὰ σπουδάσῃ εἰδικῶς τὰ ὑψηλὰ μαθηματικὰ ἢ ἐπιστήμην τινά».

Ἐπὶ τέλους κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον διωρθώθη ἡ κατάστασις αὕτη ἐν Εὐρώπῃ διὰ τρόπου δυστυχῶς δυσκατορθώτου παρ' ἡμῖν, διὰ τῆς ἱδρύσεως δηλ. εἰδικῶν σχολῶν τὰ Μαθηματικὰ παραδιδουσῶν κατὰ τὰς ἀνάγκας τῆς νῦν κοινωνίας.

Καὶ ταῦτα μὲν καθόλου περὶ τῆς ἐπιστήμης καὶ τῆς διαδόσεως τῶν Μαθηματικῶν.

Νῦν δὲ ῥίπτοντες ἓν βλέμμα περί τε τὴν ἱστορίαν καὶ τὰ διάφορα συγγράμματα, παρατηροῦμεν, ὅτι πολλοὶ περὶ τὰ τοιαῦτα εἰδικοὶ ἄνδρες, κατιδόντες τὴν ἀνάγκην τῆς ἁπλοποιήσεως καὶ διαδόσεως τῶν μαθηματικῶν, πρὸς ὑλικὴν εὐημερίαν τοῦ ἀνθρώπου, συνέγραψαν εἰδικὰ συγγράμματα τεχνικά, βιομηχανικὰ καὶ πρακτικὰ ἐξ αὐτῆς τῆς ὑψηλῆς ἐπιστήμης παραχθέντα καὶ γινόμενα καταληπτὰ διὰ μόνης τῆς γνώσεως τῆς Γεωμετρίας, Ἀριθμητικῆς καὶ Ἀλγέβρας.

Διότι οὕτω π. χ. περὶ τῆς ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ τῆς σπουδαιοτάτης ταύτης ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ἥτις εἶναι ἡ κλεὶς τῆς ἐν γένει ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΗΣ ἐπιστήμης, λέγει ὁ Βέλγος Courtin ἐν τῷ προσφάτῳ αὐτοῦ συγγράμματι· *La résistance des Matériaux* 1873, ὅτι «ὑπάρχουσιν ἄπειρα συγγράμματα πολλοῦ λόγου ἄξια· ἀλλὰ δυστυχῶς ταῦτα πάντα ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ Διαφορικοῦ καὶ Ὁλοκληρωτικοῦ ὑπολογισμοῦ συντεταγμένα, ἀπαιτοῦσι διὰ τὰ γείρωσι καταληπτὰ πολυχρόνιον σπουδὴν καὶ ὡς ἐκτούτου οἱ κατασκευασταὶ καὶ ἐν γένει ἡ βιομηχανία δὲν δύνανται νὰ ὠφεληθῶσιν ἀπὸ τὴν μελέτην αὐτῶν, εἰμὴ ἐλάχιστά τινα.

Εἶναι λοιπὸν χρησιμωτάτη ἡ σύνταξις ἁπλῶν ἐγχειρι-

δίων καταληπτῶν τοῖς περὶ τὰ τοιαῦτα ἐρασχολουμένοις σιδηρουργοῖς, ξυλουργοῖς, κτίσταις καὶ λοιποῖς».

Καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῆς ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ, περὶ δὲ τῆς ἐν γένει ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ ἥτις εἶναι ὁ μόνος εὐεργέτης τοῦ ἀνθρώπου, λέγει ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Ζαριέ, ὁ διευθυντὴς καὶ ἱδρυτὴς τοῦ πολυτεχνικοῦ σχολείου τῆς Λίμας ἐν τῷ συγγράμματι αὐτοῦ *Cours élémentaires de sciences mathématiques, physiques et mécaniques*, ὅτι οἱ διάσημοι μαθηματικοὶ Κάρολος Dupin καὶ Πορσελαὶ κατέγειναν τὰ καταστήσωσι τὴν *ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ* προσιτὴν, ἄνευ τῆς γνώσεως τῶν ὑψηλῶν ἐκείνων Μαθηματικῶν, δι' ὧν τέως ἐδιδάσκετο, προσπαθοῦντες τὰ καταστήσωσιν αὐτὴν στοιχειώδη καὶ καταληπτὴν διὰ μόνης τῆς Ἀριθμητικῆς, Ἀλγέβρας καὶ Γεωμετρίας. Διὰ τῶν προσπαθειῶν δὲ τῶν ἀνδρῶν ἐκείνων, διὰ τῶν στοιχειωδῶν γνώσεων μόνων, δύνανται νῦν νὰ ἐκτιμήσωσι τὰ πλεονεκτήματα τῶν μηχανῶν, ἐφαρμοζομένων κατὰ τὰς διαφόρους ἀνάγκας τῆς βιομηχανίας, νὰ ὑπολογίζωσι καταλλήλως τὰ μηχανικὰ ἔργα αὐτῶν καὶ νὰ κατασκευάζωσιν αὐτάς.»

Οἱ Εὐρωπαῖοι δὲ τὰς γνώμας ταύτας τῶν προμνημονευθέντων συγγραφέων πρὸ πολλοῦ ἔθεσαν εἰς ἐνέργειαν· καὶ σχολεῖα εἰδικὰ ὡς προείπομεν ἱδρυσαν καὶ συγγράμματα κατάλληλα συνέταξαν καὶ οὕτω ἐσχημάτισαν νέον διακλαδισμόν, δι' οὗ σχεδὸν κατεβίβασαν τὴν ἐπιστήμην μέχρι τῆς εὐτελοῦς καλύβης τοῦ σιδηρουργοῦ, τοῦ κτίστου, τοῦ ναυπηγοῦ καὶ παντὸς ἐν γένει τεχνίτου καὶ οὕτω ἔφθασαν εἰς τὴν ἀληθῆ ἐκείνην εὐδαιμονίαν καὶ ἰσχύν, ἐνῷ συνάμα ἐξηυγένισαν τὰς τέχνας καὶ ἀπὸ περιφρονητέων, ὡς ἐθεώρουν αὐτὰς οἱ ἡμέτεροι πρόγονοι, κατέστησαν ὑψηλὰς καὶ ἀξίας τοῦ σεβασμοῦ καὶ τῆς ὑπολήψεως παντὸς ἀνθρώπου, ὁποίας δήποτε κοινωνικῆς τάξεως· οὕτω δὲ καὶ ἐπραγματοποίησαν τὴν μεγάλην ἐκείνην προφητικὴν ἀλήθειαν τοῦ Πλάτωνος, τοῦ εἰπόντος «ὅτι τότε μόνον μία πόλις εὐδαιμονεστάτη τὰ Μαθηματικὰ παρέξωσι τὴν συνδρομὴν αὐτῶν». Πρὸς δὲ καὶ ἐξ ἀνάγκης τὰς γλώσσας αὐτῶν κατέστησαν παγκοσμίους. Καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῶν ἐν Εὐρώπῃ, οἵτινες καὶ διὰ πολλοὺς μὲν ἄλλους λό-

γους καὶ διότι δὲν εἶχον οὔτε τὴν γλῶσσαν αὐτῶν κινδυνεύουσαν νὰ σώσωσιν, οὔτε τὴν θρησκείαν αὐτῶν ἐπαπειλουμένην, εὗρον τὸν ἀναγκαῖον καιρὸν περὶ αὐτὰ νὰ στρέψωσι τὴν προσοχὴν αὐτῶν· ἡμεῖς δὲ οὓς χαλεποὶ καιροὶ ἐπίεζον κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην, εἶναι καιρὸς νῦν νὰ ἐνασχοληθῶμεν περὶ τὰς ἐφημερομένας μαθηματικὰς ἐπιστήμας· ἀλλὰ τίνι τρόπῳ; διὰ τῆς ἱδρύσεως εἰδικῶν σχολῶν εἶναι ἀδύνατον πρὸς τὸ παρόν. Μία καὶ μόνη καθ' ἡμᾶς ὑπάρχει ὁδός, ἡ ἐν τοῖς σχολείοις τοῖς ἡμετέροις ἀναζωπύρησις τοῦ μαθηματικοῦ πνεύματος, χρησιμοποιούντων διὰ καταλλήλου διδασκαλίας, μὴ ἀποβλεπούσης πῶς νὰ καταστήσῃ τοὺς διδασκομένους ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΑΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΟΥΣ, ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ ἢ ἄλλο τι· πολλοῦ γε καὶ δεῖ τοιαῦτα τινὰ νὰ σκεπτώμεθα, ἀλλὰ μόνον πῶς τὸν ἱκανὸν χρόνον ὃν δαπανῶσι σήμερον πρὸς τὴν διδασκαλίαν τῶν θεωρητικῶν μαθηματικῶν ἀποκλειστικῶς, νὰ χρησιμοποιήσωμεν οὕτως, ὥστε ἐνῷ ἀφ' ἑνὸς θὰ διεγείρῃ τὸ παρατηρητικὸν τοῦ μαθητοῦ καὶ τὸ ἐρευνητικὸν πνεῦμα, ἀφ' ἑτέρου νὰ παρέχῃ αὐτῷ τὰς ἀναγκαίας γνώσεις, ἵνα ἐν παντὶ κλάδῳ δύναται νὰ χρησιμοποιῇ αὐτὰς ἐν τῷ βίῳ πρὸς δὲ καὶ διὰ τὴν ὑψηλὴν Μαθηματικὴν νὰ προγυμνάζῃ τὸν μαθητήν. Οὕτω δὲ νομίζομεν ὅτι καὶ τὰς τέχνας ἐμψυχοῦμεν, εὐγενεστέραν περὶ αὐτῶν σχηματίζοντες ἰδέαν καὶ τὴν βιομηχανίαν, ἥτις ἔστρεψεν ἤδη τὰ βλέμματα αὐτῆς πρὸς τὴν ἡμετέραν Ἀνατολὴν θεραπεύομεν καὶ πρὸς τὰς ἐπιστήμας ἀρκούντως προπαρασκευαζόμεθα, καὶ ἐπαναφέρομεν εἰς τὴν πατρίδα τὴν παλαιὰν αὐτῆς εὐκλειαν καὶ παντοδυναμίαν, ἵνα οὕτω δικαίως δυνάμεθα νὰ καυχώμεθα ὅτι διετηρήσαμεν πιστῶς τὰς προγονικὰς ὑποθήκας.

Ἀλλὰ ταῦτα νομίζομεν ὅτι κατορθοῦμεν ἐγκολπούμενοι τὸ σύστημα τοῦτο τῆς διδασκαλίας τῶν Μαθηματικῶν, καὶ ἀπορρίπτοντες τὸ τέως ἐπικρατοῦν, καὶ τὰς ἰδεολογίας ἐκείνας δι' ὧν ζητῶμεν νὰ φανῶμεν ὑπέρτεροι τῶν ἄλλων.

Ἡμεῖς δὲ ταῦτα ἐν νῷ ἔχοντες καὶ θέλοντες κατά τι νὰ συντελέσωμενεῖς τὴν πραγματοποίησιν τῶν ἀνωτέρω, ἀπεφασίσαμεν τὴν σύνταξιν μαθηματικῆς σειρᾶς, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς Γεωμετρίας, ἧς τὸ παρὸν ἐγχειρίδιον εἶναι τὸ πρῶτον μέρος, τοῦ ὁποίου πρὸ τεσσάρων ἐτῶν ἐξηγγείλαμεν τὴν ἔκδοσιν. Ἐὰν δὲ

ἀνεβάλομεν μέχρι τοῦδε αὐτήν, τοῦτο ἐγένετο ὅλως παρὰ τὴν ἡμετέραν θέλησιν, διότι προσεδοκῶμεν περιστάσεις εὐνοϊκωτέρας, ἵνα ἐπιτρέψωσι τὴν ἐξ ἰδίων ἡμῶν τοὐλάχιστον ἔκδοσιν αὐτῆς.

Καὶ τὸ μὲν σύνολον τοῦ παρόντος ἐγχειριδίου εἶναι μὲν συντεταγμένον κατὰ τὸ προεκτεθὲν πνεῦμα, ἀλλ' ὅμως δὲν εἶναι ξένον ἐν ἀνάγκῃ καὶ πρὸς τὸ ἐπικρατοῦν νῦν σύστημα τῆς θεωρητικῆς διδασκαλίας τῶν Μαθηματικῶν, διότι ἐὰν ὁ διδάσκαλος τὰς ἐν αὐτῷ προτάσεις καὶ τὰς ἀριθμητικὰς ἐφαρμογὰς παραλάβῃ μόνον πρὸς διδασκαλίαν, θέλει ἔχει ἐγχειρίδιον διδακτικόν, τὸ ὁποῖον διὰ τὸ ἁπλοῦν τῶν ἀποδείξεων τῶν προτάσεων, καὶ τὸ ποικίλον τῶν ἐφαρμογῶν, δὲν νομίζομεν ὅτι ἤθελε νομισθῇ ὑποδεέστερον τῶν νῦν ὑπαρχόντων ἐν χρήσει.

Πρὸς δὲ δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς πρακτικὸν ἐγχειρίδιον πρὸς τὸν λαμβάνοντα μόνας τὰς προτάσεις ἄνευ ἀποδείξεων καὶ τὰς τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας καὶ Τοπογραφίας ἐφαρμογάς.

Καὶ ἐν τοῖς ἑλληνικοῖς δὲ σχολείοις δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς διδακτικὸν βιβλίον, ἐὰν ὁ διδάσκαλος διδάξῃ τὰς δι' ἀστερίσκων προτάσεις τοῦ πίνακος τῶν ἐμπεριεχομένων καὶ τινας ἀριθμητικὰς ἐφαρμογὰς καὶ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας ἐπίσης δι' ἀστερίσκων σημειουμένας.

Ἀλλὰ πρὸς ἀκριβῆ καὶ ὠφέλιμον χρῆσιν τοῦ τοιούτου συστήματος εἶναι ἀπαραίτητος ἡ χρῆσις ἐργαλείων, ἀνάλογος χρόνος καὶ ἐκδρομαί. Ἐνομίσαμεν λοιπὸν ὅτι θεραπεύομεν καὶ τὴν σπουδαιοτάτην ἀνάγκην ταύτην, κατασκευάζοντες ἐργαλεῖα ἐν σμικρότητι, ὅμοια πρὸς τὰ ἐν χρήσει, τὰ ὁποῖα μεταχειριζόμενος ὁ διδάσκαλος νὰ δύναται ἐν αὐτῇ τῇ παραδόσει ἐνῷ διδάσκει, ἐπί τινος τραπέζης νὰ ἐκτελῇ τὰς ἀναφερομένας ἐπὶ τῆς γῆς ἐργασίας καὶ ἐνῷ συνάμα θὰ ἀποδεικνύῃ ψηλαφητῶς τὰς γεωμετρικὰς ἀληθείας, καὶ τὴν σκοπιμότητα αὐτῶν, ἐν ταὐτῷ θὰ διεγείρῃ τὸ ἐνδιαφέρον τῶν μαθητῶν. Τὰ ἐργαλεῖα δὲ ταῦτα παρέχομεν δωρεὰν πρὸς τὰ σχολεῖα, τὰ ὁποῖα ἤθελον παραδεχθῇ τὸ ἡμέτερον σύστημα, μετὰ μεγάλης ζημίας χρηματικῆς καὶ πόνων ἐκτελέσαντες ταῦτα.

Τοιοῦτόν τι εἶναι τὸ ἡμέτερον ἐγχειρίδιον· ἐκδίδοντες δὲ τοῦτο εἰς φῶς ἐλπίζομεν, ὅτι οἱ περὶ τὰ τοιαῦτα ἐνασχολού-

μενοι, λαμϐάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰ τοιαῦτα ἐγχειρίδια καὶ ἰδίως μάλιστα τὰ κράτιστα τοῦ H. Sonnet καὶ M. Ch. Roguet καὶ λοιπῶν καὶ τὸ ἡμέτερον ἀρχέϐουλον τῆς ἐπιχειρήσεως ἐν νῷ ἔχοντες, θέλουσιν ἴσως φανῇ ὑπὲρ τοῦ ἡμετέρου ἔργου ἐπιεικεῖς τὴν κρίσιν.

Ὡς πρὸς τὴν τιμὴν δὲ τοῦ ἐγχειριδίου ἥτις φαίνεται κάπως ὑπερϐολική, καὶ ταύτην θέλουσιν εὕρει μετρίαν, ἀναλογιζόμενοι τὸν σκοπὸν αὐτοῦ καὶ τὰς ὑπερόγκους δαπάνας εἰς ἃς ὑπεκύψαμεν.

Ἔγραφον κατὰ τὸν Αὔγουστον τοῦ 1874.

Γ. Α. ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ.

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ
ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.

Πρῶτος τῶν Ἑλλήνων Μαθηματικῶν φέρεται Θαλῆς ὁ Μιλήσιος· ὅστις ἀκμάσας περὶ τὸν ἕκτον αἰῶνα καὶ μαθὼν ἀπὸ τῶν Αἰγυπτίων τὰς τότε γνώσεις περὶ μαθηματικῶν, διέδωκεν εἰς Ἑλλάδα τὰς γεωμετρικὰς γνώσεις, πολλὰς τῆς Γεωμετρίας ἀνακαλύψας προτάσεις καὶ βαλὼν τὰ θεμέλια τῆς ἐπιστήμης· πρῶτος οὗτος ἐν Ἑλλάδι παρετήρησε τὰς ἰσημερίας, ἡλιοστάσια καὶ τροπὰς, καὶ τὰς τοῦ Ἡλίου καὶ τῆς Σελήνης ἐκλείψεις, προειπὼν τινὰς τῷ Κύρῳ.

Καὶ ὁ Πυθαγόρας δὲ ὁ Σάμιος περὶ τὰ μαθηματικὰ διέπρεψε καὶ ἰδίως τὴν θεωρίαν τῶν Ἀριθμῶν, ἣν ἀνέμιξε μετὰ τῆς φιλοσοφίας αὐτοῦ· ἀνεκάλυψε τὴν γνωστὴν ἑκατόμϐην καὶ τὰ μάλα συνετέλεσε πρὸς τὴν τῶν μαθηματικῶν ἀνάπτυξιν. Τούτου μαθηταὶ ἔξοχοι καὶ παρὰ Πλάτωνος μνημονευόμενοι εἶναι Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος καὶ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος. Σύγχρονοι σχεδὸν τούτων εἶναι ὁ Βρίσων, ὁ Ἀντιφῶν καὶ ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος· οἱ πρῶτοι ἐξ ὅσων γνωρίζομεν ἐπιχειρήσαντες τὸ πολύκροτον ἐκεῖνο ζήτημα, τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου νὰ λύσωσι.

Κατὰ τὸν Πρόκλον μάλιστα ὁ Ἱπποκράτης οὗτος πρῶτος συνέλεξε καὶ κατὰ τάξιν ἐξέδωκεν ἁπάσας τὰς τότε γεωμετρικὰς γνώσεις· τὴν δὲ τοῦ κύϐου διπλασίασιν πρῶτος εὗρε διὰ τῶν δύο μέσων ἀναλόγων καὶ τὸν τρόπον τοῦτον μέχρι τοῦδε παραδέχονται.

Δεινὸς περὶ τὰ μαθηματικὰ ἦτο ἐπίσης καὶ ὁ Δημόκριτος· τούτου εἶναι ἀληθὲς ὅτι δὲν σώζονται συγγράμματα, ἀλλὰ τὸ λεγόμενον ὅτι ὁ Ἀριστοτέλης φθονῶν τοῦ ἀνδρὸς τὴν δόξαν συνέτεινεν εἰς τὴν ἀπώλειαν αὐτῶν, δὲν εἶναι μὲν ἀληθὲς, μαρτυρεῖ ὅμως ὅτι σπουδαίας ὁ ἀνὴρ εἶχε κάμει προόδους.

Μέγιστος ἐπίσης μαθηματικὸς ἦτο καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος· τούτου τὰ συγγράμματα ἀπωλέσθησαν· ἐγένετο δὲ διδάσκαλος τοῦ Πλάτωνος, οὗτινος οὐδεὶς τῶν πρὸ αὐτοῦ τὰ μαθηματικὰ εἰς τοσοῦτον προήγαγεν ὡς αὐτὸς, ἀνακαλύψας τὴν ἀνάλυσιν καὶ περὶ τὴν Γεωμετρίαν τὰ μάλα ἐνασχοληθεὶς καὶ πολλὰς αὐτῆς προτάσεις ἀνακαλύψας καὶ ὅστις ἐπὶ τέλους τὰ φιλοσοφικὰ αὐτοῦ συγγράμματα

διὰ μαθηματικῶν λόγων διευκρίνησε καὶ ἀπέδειξε καὶ πᾶσαν ἀξίαν λόγου μαθηματικὴν γνῶσιν μετὰ τῆς φιλοσοφίας ἀνέμιξε καὶ ὅστις ἐπὶ τέλους ἐπὶ τῆς θύρας τῆς Ἀκαδημίας αὐτοῦ ἐπέγραψε «μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω».

Ὁ Θέων μάλιστα ὁ Σμυρναῖος εἰδικῶς ἔγραψε πολλοῦ λόγου ἀξίαν πραγματείαν περὶ τῶν μαθηματικῶν, τῶν ἀναγκαίων πρὸς ἀκριβῆ κατάληψιν τῶν συγγραμμάτων τοῦ Πλάτωνος. Ἐν ταύτῃ δὲ λέγει ἐν τῷ Α' Κεφ. «ὅτι ἀναγκαῖα τὰ Μαθήματα».

«Τῶν μὲν οὖν συμπάσης Γεωμετρίας καὶ συμπάσης Μουσικῆς καὶ Ἀστρονομίας ἔμπειρον γενόμενον, τοῖς Πλάτωνος συγγράμμασιν ἐντυγχάνειν, μακαριστὸν μὲν εἴ τω γένοιτο· οὐ μὲν εὔπορον, οὐδὲ ῥᾴδιον· ἀλλὰ πάνυ πολλοῦ τοῦ ἐκ παίδων πόνου δεόμενον· ὥστε καὶ τοὺς διημαρτηκότας τοῦ ἐν τοῖς μαθήμασι ἀσκηθῆναι, ὀρεγομένους δὲ τῆς γνώσεως τῶν συγγραμμάτων αὐτοῦ, μὴ παντάπασιν ὧν ποθοῦσι διαμαρτεῖν, κεφαλαιώδη καὶ σύντομον ποιησόμεθα τῶν ἀναγκαίων, καὶ ὧν δεῖ μάλιστα τοῖς ἐντευξομένοις Πλάτωνι μαθηματικῶν θεωρημάτων παράδοσιν· ἀριθμητικῶν τε καὶ μουσικῶν καὶ γεωμετρικῶν τῶν τε κατὰ στερεομετρίαν καὶ ἀστρονομίαν· ὧν χωρὶς οὐχ οἷόν τε εἶναι φασὶ, τυχεῖν τοῦ ἀρίστου βίου· διὰ πολλῶν πάνυ δηλώσας ὡς οὐ χρὴ τῶν μαθημάτων ἀμελεῖν».

Ἀπὸ τῆς Ἀκαδημίας δὲ ταύτης τοῦ Πλάτωνος ἐξῆλθον μέγιστοι μαθηματικοὶ ἀνὰ πᾶσαν τὴν Ἑλλάδα, τὴν ἐπιστήμην ταύτην διαδόντες. Ὁ Πρόκλος ἀναφέρει δέκα καὶ τρεῖς ἐξ ὧν διέπρεψαν τὰ μάλα Λεοδάμας ὁ Θάσιος, Ἀρχίτας ὁ Ταραντῖνος καὶ Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος· ὁ πρῶτος τούτων κυρίως περὶ τὴν ἀνάλυσιν ἐνασχοληθεὶς πολλὰ κατὰ τὸν Λαέρτιον ἐφεῦρε θεωρήματα· ὁ Ἀρχίτας οὗτος εἶναι ὁ κατασκευάσας τὴν ξυλίνην ἱπταμένην περιστερὰν καὶ πρῶτος δημιουργὸς, τῆς Ἐφηρμοσμένης Γεωμετρίας. Περὶ αὐτοῦ ἀναφέρει ὁ Εὐτόκιος ὅτι συνέγραψε στοιχεῖα Γεωμετρίας καὶ ἄλλον τρόπον περὶ διπλασιάσεως τοῦ κύβου. Ὁ δὲ Ἀθηναῖος Θεαίτητος συνέγραψε συγγράμματα «περὶ στοιχείων γεωμετρικῶν» καὶ τῆς «τῶν κανονικῶν σωμάτων διαγραφῆς τε καὶ παραβολῆς».

Νεοκλείδης ὁ διδάσκαλος τοῦ Λέοντος, τοῦ μεγίστου ἐκείνου μαθηματικοῦ, ὅστις συνέγραψε «στοιχεῖα τῆς καθόλου μαθήσεως» καὶ τὰ προϋπάρχοντα ἁπλοποίησε.

Εὐδόξιος ὁ Κνίδιος ὅστις κατὰ τὸν σχολιαστὴν συνέγραψεν ἅπαν τὸ κατ' Εὐκλείδην Ε' βιβλίον τῆς Γεωμετρίας καὶ τὰς κωνικὰς τομὰς

παρὰ τοῦ Πλάτωνος παραλαβὼν, ἱκανῶς ηὔξησε, πρῶτος δὲ περὶ Ἀστρονομίας ἐπραγματεύθη καὶ δεύτερος μετὰ τὸν Ἀρχίταν, τὴν Γεωμετρίαν εἰς τὰς τέχνας ἐφήρμοσε.

Μαθηματικοὶ ἐπίσης ἦσαν Ἀμύκλας ὁ Ἡρακλειότης, Μέναιχμος καὶ Δημόστρατος, Ἑλικὼν ὁ Κυζικηνὸς, Θεύδιος, Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος καὶ Φίλιππος ὁ Μηδμαῖος, πάντες οὗτοι Πλατωνικοὶ, ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἐφευρετὴς τῶν κωνικῶν τομῶν ἐγένετο, δι' ὧν εὗρε καὶ τὰς δύο μέσας ἀναλόγους.

Καὶ ὁ Ξενοκράτης δὲ ὁ φιλόσοφος καὶ οὗτος μαθηματικὸς ἦτο καὶ διδάσκαλος μάλιστα ἐπ' ὀλίγον τοῦ Ἀριστοτέλους· τοσοῦτον δὲ οὗτος τῆς συμβουλῆς τοῦ Πλάτωνος ἤκουσεν, ὥστε λέγεται ὅτι ἀπέβαλε τινὰ θέλοντα νὰ γίνῃ ἀκροατὴς αὐτοῦ ἄπειρος ὢν Γεωμετρίας, εἰπὼν αὐτῷ «ἄπελθε οὐ γὰρ ἔχεις λαβὰς φιλοσοφίας».

Ὁ δὲ Ἀριστοτέλης, ὡς ὁ Πλάτων, κατέγεινε καὶ οὗτος σπουδαίως περὶ τὰ μαθηματικά· τὰ δὲ συγγράμματα αὐτοῦ εἶναι πλήρη μαθηματικῶν ἀποδείξεων. Ὁ Βλαγκάνος συναγαγὼν πάντα ταῦτα ἀπετέλεσε τόμον ὁλόκληρον.

Τούτου μαθηταὶ διαπρεπεῖς ἦσαν Εὔδημος καὶ Θεόφραστος ὧν ὁ τελευταῖος συνέγραψε δύο βιβλία περὶ ἀριθμῶν, τέσσαρα περὶ Γεωμετρίας καὶ ἓν περὶ ἀτόμων γραμμῶν· πρὸς δὲ καὶ μαθηματικὴν ἱστορίαν.

Τούτων διάδοχοι εἶναι Ἀρισταῖος, Ἰσίδωρος καὶ Ὑψικλῆς, οἵτινες συνέταξαν τὰ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ τοῦ Εὐκλείδου πέντε περὶ στερεῶν βιβλία, ὅστις παραλαβὼν ταῦτα καὶ τὰς ἄλλας τότε γνωστὰς γεωμετρικὰς γνώσεις συνέταξε τὸ ἄριστον αὐτοῦ σύστημα περὶ Γεωμετρίας, ὅπερ ἀνὰ πᾶσαν τὴν Ἑλλάδα καὶ Εὐρώπην ἐχρησίμευσεν ὡς τὸ κάλλιστον ἐγχειρίδιον. Μετ' αὐτὸν ἀποθανόντα τῷ 254 π. Χ. ἔπεται ὁ Ἐρατοσθένης, πολλὰ περὶ μαθηματικῶν συγγράψας, ὧν τινα σώζονται καὶ ὁ Ἀρχιμήδης ὁ μέγας ἐκεῖνος νοῦς, οὗ τὰς μαθηματικὰς γνώσεις καὶ νοῦν δύναταί τις νὰ εὕρῃ ἔν τε τῷ Πολυβίῳ, Πλουτάρχῳ, Τέτζῃ καὶ ἄλλοις.

Οὗτος κατὰ προτροπὴν τοῦ Ἱέρωνος ἐφαρμόσας τὴν Γεωμετρίαν εἰς τὴν Μηχανικὴν κατεσκεύασε τοὺς φακοὺς ἐκείνους δι' ὧν κατέκαυσε τὰ ἐχθρικὰ πλοῖα τῶν Ῥωμαίων καὶ ὅστις ἐπὶ τοσοῦτον περὶ τὴν ἐπιστήμην ἦτο ἀφωσιωμένος, ὥστε ὅταν οἱ στρατιῶται εἰσῆλασαν εἰς τὴν οἰκίαν αὐτοῦ εἶπε τὸ γνωστὸν ἐκεῖνο «μή μου τοὺς κύ-

χλους τάραττε.» Καὶ τὴν θεωρίαν δὲ τῶν μοχλῶν ἀνεκάλυψε καὶ περὶ τῆς δυνάμεως αὐτῶν εἶπε «δῶς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινήσω».

Σύγχρονος τῷ Ἀρχιμήδῃ ὑπῆρξεν Κόνων ὁ Γεωμέτρης καὶ Ἀστρονόμος, οὗ τὸν θάνατον πενθῶν ἀναφέρει ὁ Ἀρχιμήδης· μετ' αὐτὸν δὲ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ὁ καὶ Μέγας Γεωμέτρης ἐπικληθείς· τούτου σώζονται ἑπτὰ βιβλία περὶ τῶν κωνικῶν· πρὸς δὲ καὶ τὰ κατὰ τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Εὐκλείδου 14ον καὶ 15ον βιβλία συντμηθέντα ὑπὸ τοῦ Ὑψικλέους.

Μαθηματικοὶ ἦσαν ἐπίσης ὁ Ἵππαρχος καὶ Μενέλαος ὧν ὁ μὲν ἓξ ὃ δὲ τέσσαρα συνέγραψε βιβλία περὶ τῶν ὑποτεινουσῶν ἐν τῷ κύκλῳ· ὁ δὲ Μενέλαος καὶ τρία βιβλία περὶ σφαιρικῶν τριγώνων συνέγραψεν· ὁ δὲ Θεοδόσιος ὁ Τριπολίτης συνέγραψε τρία βιβλία περὶ σφαιρικῶν, μεγάλης ἀπολαύοντα ἔτι καὶ νῦν ὑπολήψεως.

Μετὰ τούτους ἀνεφάνη περὶ τὸ 70 μ. Χ. Πτολεμαῖος ὁ Κλαύδιος ὁ κατὰ Πλίνιον «ὑπὲρ τὴν φύσιν τῶν θνητῶν.» Οὗτος οὐκ μόνον τὴν Ἀστρονομίαν ἀνέπτυξε καὶ ἴδιον ἀστρονομικὸν σύστημα ἐγκατέλιπεν, ἀλλὰ καὶ τῆς Γεωμετρίας ἦτο ἐγκρατέστατος, ὡς ἐξάγεται ἐκ τῶν ὑπ' αὐτοῦ γραφέντων γεωμετρικῶς.

Καὶ ὁ Πλούταρχος δὲ περὶ τὰ μαθηματικὰ μετ' ἐπιτυχίας ἐνησχολήθη ὡς μαρτυροῦσι τὰ ὑπ' αὐτοῦ γραφέντα μαθηματικὰ προβλήματα παντὸς εἴδους.

Μαθηματικοὶ ἐπίσης ἦσαν Εὐτόκιος ὁ Ἀσχαλωνίτης καὶ Ἀπολλώνιος ὁ Σχολιαστὴς τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ Φίλων καὶ Διοκλῆς καὶ Σπόρος καὶ Ἥρων, ὅστις ἐγκατέλιπε πολλοῦ λόγου ἄξιον μνημεῖον ἔτι καὶ νῦν θαυμαζόμενον, τὴν διπλασίασιν τοῦ κύβου.

Μετὰ τούτους ἤκμασαν Κτησίβιος ὁ Ἀλεξανδρεὺς, μέγιστος μεταξὺ τῶν μαθηματικῶν καὶ ὁ Δίδυμος, οὗ τινας θεωρίας προτιμᾷ ὁ Πρόκλος τοῦ Εὐκλείδου.

Τούτων σχεδὸν σύγχρονος εἶναι ὁ Διόφαντος ὅστις περὶ τὴν Ἀριθμητικὴν ἐφάνη ὁ πρώτιστος τῶν Ἑλλήνων, ὁ καὶ πρῶτος γράψας τὴν θαυμασίαν ἐκείνην ἀναλυτικὴν μέθοδον, τὴν γνωστὴν διὰ τοῦ ἀραβικοῦ ὀνόματος Ἄλγεβρα.

Μετὰ τούτους ἕπονται Πρόκλος 519 μ. Χ. ὁ Λύκιος, Θέων ὁ Σμυρναῖος καὶ ὁ Βυζαντινὸς Πρόκλος, ὅστις κατέκαυσεν ὡς ἄλλος Ἀρχιμήδης, τὸν τοῦ Βιταλιανοῦ στόλον πολιορκοῦντος τὴν Κωνσταντινούπολιν, διὰ τῆς ὀπτικῆς μηχανῆς τῶν κατόπτρων· καὶ ὁ Πάππος ὁ Βυζαντινὸς, ὅστις κατὰ μὲν τὸν χρόνον τῆς γεννήσεως αὐτοῦ συγ-

καταλέγεται ἐν τοῖς προμνημονευθεῖσι, κατὰ δὲ τὸν νοῦν καὶ τὴν μάθησιν πρὸς τοὺς ἀρχαίους ἐκείνους καὶ δημιουργοὺς τῆς ἐπιστήμης. Τούτου παντοειδῆ μαθηματικὰ συγγράμματα ἀναφέρονται εἰς ὀκτὼ βιβλία, ὧν τὰ ἓξ σώζονται.

Μετὰ τοὺς προμνημονευθέντας καὶ πολλοὶ μὲν ἄλλοι Βυζαντινοὶ περὶ τὰ μαθηματικὰ διέπρεψαν, ἀλλὰ κυρίως ἄξιος πολλοῦ λόγου καὶ μεταξὺ τῶν διακεκριμένων κατατάσσεται ὁ Θεόδωρος Μετοχίτης, ὁ ἐκ τῆς Νικαίας τῆς Βιθυνίας καταγόμενος (*), ὅστις ἐπὶ τοῦ Ἀνδρονίκου τοῦ αὐτοκράτορος ἀκμάσας, κατὰ τὸν ΙΓ' αἰῶνα, ἐπὶ τοσοῦτον ὑπὸ τοῦ φιλομούσου ἐκείνου ἀλλὰ νωθροῦ αὐτοκράτορος ἐτιμήθη διὰ τὴν παιδείαν αὐτοῦ καὶ τὴν πολιτικὴν πεῖραν, ὥστε κατέλαβε τὰ ἀνώτατα ἀξιώματα.

Καὶ περὶ μὲν τῆς ἄλλης τοῦ ἀνδρὸς σοφίας οὐ τοῦ παρόντος, περὶ δὲ τῆς περὶ τὰ μαθηματικὰ καὶ πολλοὶ μὲν ἄλλοι, ἰδίᾳ δὲ ὁ Καντακουζηνὸς ἐν τῇ ἱστορίᾳ αὐτοῦ Τόμ. Α'. ταῦτα λέγει· «Τὴν γὰρ Ἀστρονομίαν ἀπό τινος Βρυεννίου φαύλας τινὰς καὶ οὐκ ἀκριβεῖς πάνυ παραλαβὼν ἀρχὰς, αὐτὸς ἰδίοις πόνοις ἐξηκριβώσατο, ὡς καὶ μετὰ ταῦτα πολλοῖς ἐν ἐπιστήμῃ τοῦ μαθήματος σὺν ἀκριβείᾳ γενέσθαι παρ' αὐτοῦ διδαχθέντας· ὁ καὶ θαυμάζοντος βασιλέως, καὶ πρός τινα τῶν ἐκείνῳ φοιτησάντων ἐρομένου, πῶς ὁ Μετοχίτης ἐκ φαύλων τῶν ἀρχῶν ὡρμημένος, οὕτως ἠδυνήθη πρὸς τελείαν ἐξεύρεσιν τοῦ μαθήματος ἐλθεῖν, «οὐ θαυμαστὸν, φάναι, βασιλεῦ, τὸν ἐρωτηθέντα, ἐκ λαμπάδος μικρᾶς πυρσὸν ἀναφθῆναι μέγαν» ἐπαινέσαι τε τοῦτον τῆς ἀγχινοίας τὸν βασιλέα καὶ τὸ οἰκεῖον τῆς εἰκόνος θαμάσαι.

(*) Ἡ εἰκὼν Θεοδώρου τοῦ Μετοχίτου ἀνευρεθεῖσα ἐν Κωνσταντινουπόλει πλησίον τῶν τειχῶν ἐν τῇ Μονῇ τῆς χώρας (νῦν Καχριὲ Τζαμισὶ) ἐξειργασμένη διὰ μωσαϊκοῦ ἐπὶ τῆς μεγάλης θύρας τοῦ ναοῦ ἀντεγράφη ὑπό τινος φίλου. Ἐν τῇ εἰκόνι ταύτῃ ὁ Μετοχίτης γονυπετὴς ἔμπροσθεν τοῦ Σωτῆρος φέρει ἐπὶ τῆς κεφαλῆς καλύπτραν βυζαντινὴν (καλπάκιον). Ἡ ἐπιγραφὴ τῆς εἰκόνος ἔχει ὡς ἑξῆς: Ο ΚΤΗΤΩΡ ΛΟΓΟΘΕΤΗΣ ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΘΕΟΔΩΡΟΣ Ο ΜΕΤΟΧΙΤΗΣ (Βλέπε Μεσαιωνικὴν Βιβλιοθήκην ὑπὸ Σάθα Τόμ. Β'.).

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ
ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ.

Πάντα τὰ περὶ ἡμᾶς καὶ εἰς τὰς αἰσθήσεις ἡμῶν ὑποπίπτοντα ἀντικείμενα καλοῦνται *σώματα*.

Ἕκαστον σῶμα κατέχει μέρος τι τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται *ὄγκος* αὐτοῦ.

Ἐπιφάνεια σώματος λέγεται τὸ ὅριον τὸ διαχωρίζον αὐτὸ ἀπὸ τὸ περιέχ διάστημα. Ἡ ἔκτασις δὲ τῆς ἐπιφανείας καλεῖται *ἐμβαδόν*.

Πολλὰ σώματα περιορίζονται ὑπὸ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας, ὡς ἡ σφαῖρα, τὸ ᾠὸν κ.τ.λ., ἄλλα δὲ ὑπὸ πολλῶν ὡς ὁ κύβος. Ἐν τοῖς σώμασι τούτοις αἱ ἐπιφάνειαι συναπαντῶνται ἀνὰ δύο καὶ τὸ κοινὸν ὅριον αὐτῶν ὀνομάζεται *γραμμή*. Ἡ ἔκτασις δὲ τῆς γραμμῆς λέγεται *μῆκος*.

Πολλαὶ ἐπιφάνειαι περιορίζονται ὑπὸ πολλῶν καὶ διακεκριμένων γραμμῶν, ὡς αἱ ἕδραι τοῦ κύβου, ἔνθα αἱ γραμμαὶ συναπαντῶνται ἀνὰ δύο. Τὸ δὲ μέρος ἐκεῖνο ὅπερ εἶναι κοινὸν ὅριον τῶν γραμμῶν τούτων ὀνομάζεται *σημεῖον*, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει ἔκτασιν.

Τὴν ἐπιφάνειαν ἥτις εἶναι τὸ ὅριον τῶν σωμάτων δυνάμεθα νὰ φανταζώμεθα καὶ μὴ ὄντες ἠναγκασμένοι νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν σῶμά τι ὡρισμένον, ἐπειδὴ αὕτη δύναται νὰ ἀποτελέσῃ ὅριον οἱουδήποτε σώματος διὰ τῆς φαντασίας σχηματιζομένου.

Ὅπως δὲ δυνάμεθα νὰ φανταζώμεθα ἐπιφανείας καὶ ἄνευ ὡρισμένων σωμάτων, οὕτω καὶ γραμμὰς ἀνεξαρτήτους τῶν ἐπιφανειῶν καὶ σημεῖα ἀνεξάρτητα τῶν γραμμῶν.

Ὅπως λοιπὸν δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν σώματα, ἐπιφανείας καὶ γραμμὰς νοερῶς καὶ πραγματικῶς, οὕτω καὶ τὰς ἐπ' αὐτῶν πράξεις διακρίνωμεν ἐπίσης εἰς νοερὰς καὶ πραγματικὰς πολὺ ἀπ' ἀλλήλων διαφερούσας. Διότι δυνατὸν μὲν π. χ. νὰ τμηθῇ σῶμά τι νοερῶς διὰ πολλῶν ἐπιφανειῶν διαφόρου φύσεως καὶ πολυτρόπως εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχωσι κοινὸν ὅριον μίαν τῶν ἐπιφανειῶν τούτων, ἀλλ' ἡ νοερὰ ὅμως καὶ ἀκριβὴς αὕτη πρᾶξις πραγματοποιεῖται μέχρι τινὸς ὁρίου καὶ ὄχι ἀκριβῶς, διότι ἐν τῇ πραγματοποιήσει εἴμεθα ἠναγκασμένοι νὰ μεταχειριζώμεθα κοπτερόν τι ἐργαλεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει πάχος τι, ἐνῷ αἱ ἐπιφάνειαι διὰ τῶν ὁποίων τέμνομεν νοερῶς τὰ σώματα δὲν ἔχουσι τοιοῦτον.

Ὁμοίως δυνατὸν νὰ τμηθῇ ἀκριβῶς διὰ τοῦ νοὸς ἐπιφάνειά τις διὰ πολλῶν γραμμῶν διαφόρου φύσεως καὶ πολυτρόπως· ἀλλ' ἐν τῇ πραγματοποιήσει ἡ ἀφηρημένη αὕτη πρᾶξις μέχρι τινὸς ὁρίου κατορθοῦται, διότι ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας χαρασσομένη γραμμὴ, ἵνα παραστήσῃ τὴν τομὴν ἔχει πλάτος καὶ ἐπομένως δὲν ἐκτελεῖ ἀκριβῶς αὐτὴν, ἐνῷ αἱ γραμμαὶ διὰ τῶν ὁποίων τέμνονται νοερῶς αἱ ἐπιφάνειαι δὲν ἔχουσι τοιοῦτον.

Τέλος τὰ σημεῖα τὰ ἐπὶ γραμμῆς παριστάμενα ἔχουσιν ἔκτασίν τινα ἐπαισθητὴν, ἐνῷ δυνατὸν νὰ νοηθῇ ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς πλῆθος σημείων οὐδεμίαν ἔκτασιν ἐχόντων.

Τὰ σώματα, αἱ ἐπιφάνειαι καὶ αἱ γραμμαὶ ὀνομάζονται σχήματα.

Ἡ ἐπιστήμη δὲ ἡ πραγματευομένη τὴν σύγκρισιν, τὴν διαίρεσιν, τὴν καταμέτρησιν καὶ ἐν γένει τὴν ἀποκάλυψιν τῶν ὑποκρυπτομένων ἀληθειῶν εἰς τὰς γραμμὰς, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰ σώματα τὰ κατὰ διάνοιαν χαρασσόμενα ἢ σχεδιαζόμενα, λέγεται **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**.

Πρὸς πραγματοποίησιν ὅμως *μέχρις ὁρίου τινὸς* τῶν ἀληθειῶν ὅσαι ἀναφέρονται εἰς τὰ ἀφηρημένα σχήματα τοὐτέστιν πρὸς *καταμέτρησιν ἀποστάσεων καὶ ὑψέων ἀπροσίτων* ἢ μὴ, ἀναγκαίων εἰς τὴν *ὁδοποιΐαν* καὶ τὴν *πολεμικὴν τέχνην*, *διὰ τὴν καταμέτρησιν* ἢ *σχεδίασιν* ἀγρῶν, πόλεων, ἐπικρατειῶν τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ πυθμένος τῶν θαλασσῶν, ἢ τοῦ σχήματος τῆς γῆς, διὰ τὴν ναυτικὴν καὶ γεωγραφίαν χρησίμων, διὰ τὴν καταμέτρησιν τοῦ μεγέθους καὶ τῆς ἀποστάσεως τῶν οὐρανίων σωμάτων κ.τ.λ., ἡ γεωμετρία ἀνατρέχει εἰς τὴν συνδρομὴν διαφόρων **ΟΡΓΑΝΩΝ** ἢ **ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ** καὶ τότε ὀνομάζεται **ΟΡΓΑΝΙΚΗ** ἢ **ΠΡΑΚΤΙΚΗ** γεωμετρία πρὸς δὲ καὶ **ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ** ἥτις περιλαμβάνει τὴν *Μηκομετρίαν*, *Ὑψομετρίαν*, *Ἀγρομετρίαν*, *Χωρομετρίαν* ἢ *Τοπογραφίαν*, *Ὑδρογραφίαν*, *Ναυτικὴν*, *Γεωδαισίαν*, *Γεωγραφίαν*, *Ἀστρονομίαν*, ὧν ἑκάστη ἀποτελεῖ εἰδικὸν ἢ ἐφηρμοσμένον ἢ τεχνικὸν κλάδον τῶν Μαθηματικῶν Ἐπιστημῶν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν ἐξάγεται ὅτι ἡ γεωμετρία κυρίως διαιρεῖται εἰς τρία μέρη τὴν **ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΝ** ἥτις ἐρευνᾷ τὰς γραμμὰς, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰ σώματα καὶ ἀποκαλύπτει ἀπολύτως τὰς μεταξὺ αὐτῶν σχέσεις, τὰς ὁποίας μεταχειρίζεται πρὸς σύγκρισιν καὶ καταμέτρησιν αὐτῶν, εἰς **ΠΡΑΚΤΙΚΗΝ** ἥτις ὑποβοηθουμένη ὑπὸ τῆς πρώτης εὑρίσκει τὰ καταλληλα ἐργαλεῖα πρὸς πραγματοποίησιν μέχρι τινὸς ὁρίου τῶν ὑπὸ τῆς Θεωρητικῆς ἀνακαλυφθεισῶν ἀληθειῶν καὶ εἰς **ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗΝ** ἥτις ἐγκολπουμένη τὰ ἐξαγόμενα τῶν δύο προηγουμένων καὶ ἐφαρμόζουσα ταῦτα καθιστᾷ τὸν ἄνθρωπον κύριον καὶ γνώστην τῆς περὶ αὐτὸν φύσεως καὶ εὐδαίμονα.

Διὰ τὴν σπουδὴν τοῦ σχήματος καὶ διὰ τὴν καταμέτρησιν τῆς ἐκτάσεως τῶν σωμάτων, ἡ γεωμετρία δὲν λαμβάνει ποσῶς ὑπ' ὄψιν τὰς ἰδιότητας αὐτῶν, τοὐτέστιν τὸ χρῶμα, τὸ βάρος, τὸν βαθμὸν τῆς σκληρότητος ἢ ἀπαλότητος κ.τ.λ. Ὅ,τι δὲ ἀποκαλύπτει ὡς πρὸς σχῆμά τι ἢ καὶ πρὸς ἔκτασίν τινα ἐφαρμόζεται εἰς ὅλα τὰ σώματα οἱασδήποτε φύσεως καὶ ἂν ἦναι, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸ σχῆμα ἢ τὴν ἔκτασιν ταύτην.

Ἡ Γεωμετρία διαστέλλεται εἰς δύο πρώτιστα μέρη, τοὐτέστιν εἰς **ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ** καὶ εἰς **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ ΤΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ**. Τὸ πρῶτον περιέχει τὰς ἰδιότητας

τῶν γραμμῶν, τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν σχημάτων ὧν τὰ σημεῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ *ἐπίπεδον*, πρὸς δὲ καὶ τὴν καταμέτρησιν τοῦ μήκους καὶ τῆς ἐπιφανείας. Τὸ δεύτερον μέρος περιλαμβάνει τὰς ἰδιότητας τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν γραμμῶν ἐν γένει, τὰ σχήματα τῶν σωμάτων, τὴν καταμέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ὄγκων τῶν σχετικῶν πρὸς ταῦτα τὰ σώματα.

Περαίνομεν τὰς εἰσαγωγικὰς ταύτας γνώσεις ἀναφέροντες τοὺς ἑξῆς ἀπαραδιάστους καὶ θεμελιώδεις *γεωμετρικοὺς ὅρους*.

Θεώρημα λέγεται πᾶσα ἀλήθεια γινομένη φανερὰ διὰ συλλογισμοῦ, ὅστις καλεῖται *ἀπόδειξις*.

Πρόβλημα ὀνομάζεται πᾶν ζήτημα, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ τὴν εὕρεσιν μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀγνώστων ἐχουσῶν σχέσιν πρὸς ἄλλας γνωστὰς ἢ δεδομένας ποσότητας.

Πρότασις λέγεται ἀδιακρίτως καὶ τὸ θεώρημα καὶ τὸ πρόβλημα.

Πόρισμα καλεῖται ἡ πηγάζουσα συνέπεια ἐκ μιᾶς ἢ πολλῶν προηγουμένων προτάσεων.

Ἀξιώματα ὀνομάζονται ἐκεῖναι αἱ ἀλήθειαι αἵτινες εἶναι φανεραὶ ἀφ' ἑαυτῶν, καὶ ἑπομένως ἀνεπίδεκτοι ἀποδείξεως, ὡς αἱ ἑξῆς:

α.) Δύο ποσότητες ἴσαι πρὸς τρίτην τινὰ, εἶναι καὶ μεταξὺ αὐτῶν ἴσαι.

β'.) Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ μέρους, ἢ τὸ μέρος μικρότερον τοῦ ὅλου.

γ'.) Τὸ ὅλον ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν αὐτοῦ.

δ'.) Ἐὰν εἰς ἴσα προστεθῶσιν ἢ ἀφαιρεθῶσιν ἴσα, τὰ ἀθροίσματα ἢ τὰ ὑπόλοιπα θέλουσιν εἶσθαι ἴσα.

ε'). Ἀπὸ ἑνὸς εἰς ἄλλο σημεῖον μία μόνη ἄγεται εὐθεῖα.

ς'.) Δύο γραμμαί, δύο ἐπιφάνειαι, δύο στερεὰ τότε λέγονται ἴσα, ὅταν τιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τὸ ἄλλο, ἐφαρμόζονται καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ σημεῖα καὶ ἐντελῶς.

Ἐκ τῶν ἀξιωμάτων τούτων τὸ ε. καὶ ς'. ὑπὸ τῆς πείρας βεβαιοῦνται.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΕΠΙΠΕΔΟΣ.

---

§.—1.

Σημεῖα καὶ Εὐθεῖα γραμμὴ ἐπὶ τῆς γῆς ἢ ἐπὶ χάρτου, Ἐπίπεδον, Ὁρισμὸς καὶ γέννεσις τῆς γωνίας. Ἐφαρμογαί. Χάραξις τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῆς γῆς ἢ ἐπὶ χάρτου. Καταμέτρησις τῶν εὐθειῶν. Ἄλυσος, Ἀκόντιον, Ταινία, Δεκάμετρον Χαλύβδινον, Βερνιέρος.

Ἐμπήγοντες εἰς τὴν γῆν πασσαλίσκον τινὰ α προσδιορίζομεν οὕτως *ἓν σημεῖον* ἐπὶ τῆς γῆς. Ἑνοῦντες δὲ τὰ ἐπὶ τῆς γῆς δύο σημεῖα α καὶ β διὰ χορδῆς θέλομεν ἔχει ἐπὶ τῆς γῆς τὴν εὐθεῖαν *Γραμμήν*. Σχῆμα 1.

Τὸ σημεῖον παρίσταται ἐπὶ χάρτου διὰ μιᾶς στιγμῆς. Ἡ δὲ εὐθεῖα γραμμὴ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς 1.



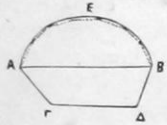
Σχ. 1.

Ὁρισμοί. Ἡ συντομωτέρα ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύω σημείων Α καὶ Β. Σχ. 2. λέγεται *Εὐθεῖα Γραμμή*.

Ἀπαγγέλλομεν οἱανδήποτε εὐθεῖαν γραμμὴν διὰ τῶν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς εὑρισκομένων γραμμάτων, π. χ. λέγοντες ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ, τουτέστιν, *ἄλφα βῆτα*, ἐννοοῦμεν τὴν μεταξὺ τοῦ σημείου *ἄλφα* καὶ *βῆτα* ὑπάρχουσαν ἀπόστασιν.

© ISIS MANOGLOU

Ἡ ἐκ τῶν εὐθειῶν γραμμῶν ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ συνισταμένη γραμμὴ ΑΓΔΒ, λέγεται *Κεκλασμένη γραμμή*. Σχ. 2.



Σχ. 2.

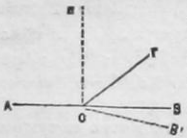
Αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ εἶναι αἱ *πλευραὶ* τῆς κεκλασμένης γραμμῆς.

Ἡ γραμμὴ ΑΕΒ, ἥτις οὔτε εὐθεῖα οὔτε κεκλασμένη εἶναι, λέγεται *Καμπύλη*. Αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κεκλασμένη γραμμή, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι *ἀπειροελάχιστοι*.

Ἐπίπεδον λέγεται ἡ ἐπιφάνεια ἐπὶ τῆς ὁποίας δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐντελῶς εὐθεῖά τις καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις.

Σχῆμα ἐπίπεδον λέγεται τὸ κεχαραγμένον ἐπὶ ἐπιπέδου.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν εὐθεῖάν τινα ΟΓ. Σχ. 3. κατ' ἀρχὰς ταυτιζομένην μετὰ τῆς ΑΒ, ὅτι στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον Ο, τότε καθόσον ἀπομακρύνεται αὕτη τῆς ΑΒ ἡ μεγαλητέρα ἢ ἡ μικροτέρα ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν εὐθειῶν λέγεται γωνία. Τὸ σημεῖον Ο τῆς συναπαντήσεως τῶν γραμμῶν λέγεται κορυφή, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΟΒ καὶ ΟΓ λέγονται πλευραὶ τῆς γωνίας.



Σχ. 3.

Σημειοῦμεν τὴν γωνίαν διὰ τριῶν γραμμάτων, ὧν τὰ δύο ἄκρα γράμματα ἀναφέρονται εἰς τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ μεσαῖον γράμμα εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας καὶ λέγομεν, ἡ γωνία ΒΟΓ.

Ἡ γωνία ἐπὶ τῆς γῆς παρίσταται διὰ τριῶν πασσαλίσκων, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῆς διὰ τῆς χορδῆς. Σχ. 1.

Ἡ εὐθεῖα ΟΓ σχηματίζει μὲ τὴν ΑΒ, καὶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος, δύο γωνίας ΒΟΓ καὶ ΓΟΑ, αἵτινες λέγονται *προσκείμεναι γωνίαι*. Σχ. 3.

Κατὰ τὴν κίνησίν της ἡ ΟΓ, ἐνόσῳ ἀπομακρύνεται τῆς ΟΒ θὰ καταντήσῃ νὰ λάβῃ θέσιν τινὰ ΟΠ, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ προσκείμεναι ἢ ἐφεξῆς γωνίαι ΒΟΠ, ΠΟΑ θὰ ἦναι ἴσαι καὶ τότε λέγονται *ὀρθαί*. Πᾶσα γωνία, ὡς ἡ ΒΟΓ, μικροτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας ΒΟΠ, καλεῖται *ὀξεῖα*· πᾶσα δὲ γωνία, ὡς ἡ ΓΟΑ, μεγαλητέρα τῆς ὀρθῆς λέγεται *ἀμβλεῖα*.

Ὅταν εὐθεῖά τις ΟΠ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΑΒ δύο ὀρθὰς γωνίας, τότε ἡ εὐθεῖα αὕτη λέγεται *κάθετος* ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἢ καὶ ἀντιστρόφως, ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τῆς ΟΠ. Σχ. 3.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.

Ἐξ ἑνὸς σημείου Ο, *ἐπὶ εὐθείας τινὸς* ΑΒ *ὑπάρχοντος μία μόνη κάθετος δύναται νὰ ὑψωθῇ ἡ* ΟΠ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ὑποθέσωμεν καὶ δευτέραν κάθετον πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς ΟΠ, ἡ μία τῶν προσκειμένων γωνιῶν αὐξάνει, ἡ δὲ ἄλλη σμικρύνεται καὶ ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν δὲν ὑπάρχει πλέον, ὅπερ ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.

Τὸ ἄθροισμα δύο προσκειμένων γωνιῶν ΒΟΓ, ΓΟΑ *εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας*. Σχ. 3.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἐκ τῶν γνωστῶν σχέσεων

$$\text{ΒΟΓ}=\text{ΠΟΒ}-\text{ΠΟΓ} \quad \text{καὶ} \quad \text{ΓΟΑ}=\text{ΠΟΑ}+\text{ΠΟΓ},$$

προσθέτοντες μέλος πρὸς μέλος, λαμβάνομεν

$$\text{ΒΟΓ}+\text{ΓΟΑ}=\text{ΠΟΒ}+\text{ΠΟΑ}=2\ \text{ὀρθαῖς}.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν προσκειμένων γωνιῶν ΓΟΑ *καὶ* ΓΟΒ *ἦναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, αἱ πλευραὶ* ΟΑ *καὶ* ΟΒ *ἀποτελοῦσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν γραμμήν*. Σχ. 3.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ προεκβολὴ τῆς ΟΑ ἦτον εὐθεῖά τις ΟΒ', διάφορος τῆς ΟΒ, ἠθέλομεν ἔχει ΓΟΑ + ΓΟΒ' = 2 ὀρθαῖς καὶ ἑπομένως ΓΟΒ' = ΓΟΒ, ὅπερ ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ Σχ. 4 *διασταυρούμεναι σχηματίζουσι τὰς ἐκ κορυφῆς ἀντιθέτους γωνίας* ΑΟΓ, ΔΟΒ *ἴσας*.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν (Προτ. 2) ἔχομεν τὰς σχέσεις ΑΟΓ+ΑΟΔ=2 ὀρθ. καὶ ΑΟΔ+ΔΟΒ=2 ὀρθ. ἐκ τούτων ποριζόμεθα ΑΟΓ+ΑΟΔ=ΑΟΔ+ΔΟΒ, ἀπὸ τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον μέλος τῆς ὁποίας ἀφαιροῦντες τὴν ΑΟΔ, εὑρίσκομεν ΑΟΓ=ΔΟΒ.



Σχ. 4.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΑΟΔ=ΒΟΓ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η. Ἵνα χαράξωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν ἐπὶ χάρτου μεταχειριζόμεθα τὸν Κανόνα. Τοποθετοῦμεν τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο οὕτως, ὥστε ἡ μία πλευρὰ αὐτοῦ νὰ διέρχηται ἐκ τῶν δύο σημείων, τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ ἑνώσωμεν δι' εὐθείας γραμμῆς, καὶ ἀκολουθοῦμεν τὴν πλευρὰν προσαρμόζοντες εἰς αὐτὴν γραφίδα, τῆς ὁποίας ἡ αἰχμὴ ἐπιστηρίζεται ἐπὶ τοῦ χάρτου. Ἡ ἐργασία αὕτη γίνεται ἀκριβεστέρα ἐφ' ὅσον ὁ χάρτης εἶναι μᾶλλον τεταμένος, ἡ αἰχμὴ τῆς γραφίδος λεπτοτέρα, ὁ δὲ κανὼν εὐθύς. Ἡ δὲ πρᾶξις δοκιμάζεται οὕτω·

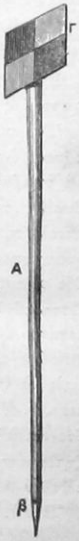
Χαράττομεν γραμμήν τινα ΑΒ Σχ. 5 κατὰ τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ κανόνος ΑΒΓ'Δ', ἔπειτα στρέφομεν αὐτὸν περὶ τὴν ΑΒ, ὅπως λάβῃ τὴν θέσιν ΑΒΓΔ. Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ καὶ κατὰ τὴν νέαν θέσιν τοῦ Κανόνος ταυτίζηται μὲ τὴν χαραχθεῖσαν γραμμήν, βέβαιον ὅτι ἡ γραμμὴ αὕτη εἶναι εὐθεῖα, ἐπειδὴ ἡ ἐλαχίστη κυρτότης, ἣν δυνατὸν νὰ διακρίνωμεν κατὰ τὴν πρώτην θέσιν τοῦ κανόνος παρουσιαζομένη τότε κατ' ἐναντίαν ἔννοιαν, ἀποκαθιστᾷ τὸ λάθος ἐπαισθητόν, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα.



Σχ. 5.

Ἐπίσης διὰ τοῦ αὐτοῦ κανόνος χαράττομεν εὐθείας γραμμὰς ἐπὶ τραπέζης, καὶ ἐν γένει ἐπὶ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν μικρᾶς ἐκτάσεως. Ὅταν ὅμως ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐκτεταμένη, τότε προσαρμόζομεν εἰς τὰ δύο σημεῖα, διὰ τῶν ὁποίων θὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα τὰ ἄκρα χορδῆς καλῶς τανυσμένης. Τὴν χορδὴν ταύτην, χρίομεν μὲ χρῶμα συνήθως ἐρυθροῦν, κρατοῦμεν διὰ δύο δακτύλων τὸ μέσον αὐτῆς, καὶ τὴν ἀπομακρύνομεν τῆς ἐπιφανείας. Ἔπειτα ἀφίνομεν τὴν χορδήν, ἥτις διὰ τῆς ἐλαστικότητός της προσβάλλουσα τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ τὴν θέσιν τὴν ὁποίαν εἶχε κατ' ἀρχὰς, θέλει χαράξει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας εὐθεῖαν γραμμήν.

Ἡ ἐργασία αὕτη ὑπὸ τῶν τεχνιτῶν λέγεται ΣΤΑΦΝΙΣΜΑ.



Σχ. 6.

Οἱ κηπουροὶ καὶ οἱ κτίσται χαράττουσιν εὐθεῖαν γραμμὴν ἐπὶ τῆς γῆς ἀκολουθοῦντες διὰ πασσαλίσκου τὴν διεύθυνσιν τῆς χορδῆς τὴν ὁποίαν τανύουσι διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς εἰς τὰ δύο σημεῖα τὰ προσδιορίζοντα τὴν εὐθεῖαν γραμμήν. Σχ. 1.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2α. Διὰ νὰ χαράξωμεν ἐπὶ τῆς γῆς εὐθεῖαν μεγίστης ἐκτάσεως περιοριζόμεθα εἰς τὸ νὰ σημειώνωμεν τὰ ἄκρα καὶ ἀριθμόν τινα σημείων ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς εὐθείας. Πρὸς τοῦτο μεταχειριζόμεθα ΑΚΟΝΤΙΑ τὰ ὁποῖα ἐμπήγομεν εἰς τὴν γῆν Κατακορύφως, τουτέστι νὰ μὴ κλίνωσιν οὔτε πρὸς τὰ ἀριστερὰ οὔτε πρὸς τὰ δεξιὰ, (Ἴδε ἐφαρμ. 6, 7 καὶ §. 16. Μέρ, Β'.)

Τὸ ἀκόντιον συνήθως εἶναι ῥάβδος Α Σχ. 6. φέρουσα πρὸς τὰ ἄνω τὸν σκοπὸν Γ, τουτέστι μικρὸν τετράγωνον, ἐκ χάρτου ἢ στερεᾶς τινος ὕλης, κεχρωματισμένον διὰ χρώματος ἐρυθροῦ, καὶ λευκοῦ. Διὰ τοῦ σκοποῦ διακρίνεται τὸ ἀκόντιον ἀπὸ μεγάλων ἀποστάσεων. Τὸ ἀκόντιον πρὸς τὰ κάτω φέρει ἀκίδα β, τουτέστιν ἀπολήγει εἰς σιδηρὰν αἰχμὴν δι' ἧς ἐμπήγνυται εἰς τὴν γῆν. Ἐὰν Α καὶ Γ Σχ. 7. ἦναι τὰ εἰς τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς ἐμπεπηγμένα ἀκόντια, ἵνα προσδιορίσωμεν μεταξὺ αὐτῶν τὴν θέσιν ἑτέρου, στεκόμεθα ὀλίγον ὄπισθεν τῆς γραμμῆς ΑΓ, οὕτως, ὥστε τὸ ἀκόντιον Γ νὰ κρύπτηται ὑπὸ τὸ ἀκόντιον Α, καὶ διὰ συνεργάτου ἐμπήγομεν τὸ ἀκόντιον Β μεταξὺ τῶν δύο τούτων σημείων, ποιοῦν-



Σχ. 7.

τες νεῦμα πρὸς αὐτὸν νὰ κρατῇ αὐτὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἢ πρὸς τὰ δεξιὰ, ἕως οὗ νὰ κρύψωσι αὐτὸ τὰ ἀκόντια Α καὶ Γ.

Ὁμοίως ἐμπήγομεν τόσα ἀκόντια ἐφ' ὅσον ἀνάγκη ὑπάρχει. Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται Εὐθυγράμμισις· ἀπὸ δὲ τοὺς τεχνίτας, Περασιά. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὐθυγραμμοῦμεν γραμμὴν ἐπὶ ἀνωμάλου ἐδάφους εὑρισκομένην.

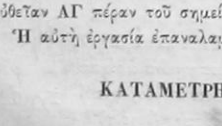
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η. Νὰ προεκβληθῇ εὐθεῖα κεχαραγμένη οὖσα ἐπὶ χάρτου ἢ ἐπὶ τῆς γῆς.

Ἐπὶ τοῦ χάρτου ἡ ἐργασία ἐκτελεῖται ἐὰν θέσωμεν τὸν κανόνα οὕτως, ὥστε ἀρκετὸν μέρος τῆς μιᾶς αὐτοῦ πλευρᾶς νὰ ταυτίζηται μὲ τὴν ῥηθεῖσαν εὐθεῖαν, καὶ τότε τὸ ἐξέχον μέρος τοῦ κανόνος προσδιορίζει τὴν προεκβολὴν τῆς εὐθείας. Διὰ τῆς χορδῆς ἡ ἐργασία ἐκτελεῖται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ἵνα δὲ προεκβάλωμεν εὐθυγραμμισμένην γραμμὴν ΑΒ Σχ. 7, τῆς ὁποίας Α καὶ Β εἶναι τὰ δύο τελευταῖα ἀκόντια, στεκόμεθα ὄπισθεν τοῦ ἀκοντίου Α οὕτως, ὥστε αὐτὸ νὰ κρύπτῃ τὸ εἰς τὸ Β ὑπάρχον ἀκόντιον, καὶ διὰ συνεργάτου ἐμπήγομεν ἕτερον ἀκόντιον εἰς τὸ Γ, ἐκεῖθεν τοῦ σημείου Β, ὁδηγοῦντες αὐτὸν νὰ κρατῇ τὸ ἀκόντιον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἢ πρὸς τὰ δεξιὰ, ἕως οὗ νὰ κρύπτηται τὸ ἀκόντιον Γ ὑπὸ τὸ ἀκόντιον Α. Ἡ δοθεῖσα γραμμὴ ΑΒ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔχουσιν οὕτω δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Γ. Ἄρα ταυτίζονται, καὶ ἡ ΒΓ εἶναι ἡ ζητουμένη προεκβολή. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προεκβάλλομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ πέραν τοῦ σημείου Γ.

Ἡ αὐτὴ ἐργασία ἐπαναλαμβάνεται καὶ διὰ γραμμὴν ἀνώμαλον.

ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ἀριθμοὺς ὁ λόγος δύο δεδομένων γραμμῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Σχ. 8.



Σχ. 8.

Λαμβάνομεν ἀνοιγμα διαβήτου ἴσον τῇ μικροτέρᾳ ΓΔ τῶν δύο γραμμῶν, καὶ φέρομεν αὐτὸ ἀπὸ Α εἰς Β τοσάκις, ὅσον εἶναι δυνατόν· ὑποθέσωμεν ὅτι εἰσῆλθε 2 φορὰς πλέον τοῦ ὑπολοίπου ΕΒ, ἔχομεν τότε τὴν ἑξῆς ἔκφρασιν

$$\text{ΑΒ}=\text{ΓΔ}\times 2+\text{ΕΒ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1].$$

Μεταφέρομεν ἐπίσης τὴν ΕΒ ἐπὶ τῆς ΓΔ τοσάκις, ὅσον εἶναι δυνατόν· ὑποθέσωμεν ὅτι ἐμπεριέχεται 3 φορὰς πλέον τοῦ ὑπολοίπου ΦΔ, ἔχομεν τότε τὴν ἑξῆς σχέσιν,

$$\text{ΓΔ}=\text{ΕΒ}\times 3+\text{ΦΔ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2].$$

Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΦΔ ἐπὶ τῆς ΕΒ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι εἰσήχθη 5 φορὰς πλέον τοῦ ὑπολοίπου ΟΒ, τότε ἔχομεν,

$$\text{ΕΒ}=\text{ΦΔ}\times 5+\text{ΟΒ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [3].$$

Ἐὰν φέρωμεν ὁμοίως τὴν ΟΒ ἐπὶ τῆς ΦΔ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἐμπεριελήφθη 2 φορὰς ἀκριβῶς, τότε ἔχομεν,

$$\text{ΦΔ}=\text{ΟΒ}\times 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [4].$$

Ἤδη βλέπομεν ὅτι, διὰ τῆς τελευταίας σχέσεως, ἡ [3] γίνεται

$$\text{ΕΒ}=\text{ΟΒ}\times 2\times 5+\text{ΟΒ}=\text{ΟΒ}\times 10+\text{ΟΒ}=11\times\text{ΟΒ} \quad . \quad [5].$$

Διὰ τῶν ἐκφράσεων [4] καὶ [5] ἡ [2] γίνεται,

$$\text{ΓΔ}=\text{ΟΒ}\times 11\times 3+\text{ΟΒ}\times 2=\text{ΟΒ}\times 33+\text{ΟΒ}\times 2$$
$$=\text{ΟΒ}\times 35 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [6].$$

Διὰ δὲ τῶν σχέσεων [5] καὶ [6] ἡ [1] γίνεται,

$$\text{ΑΒ}=\text{ΟΒ}\times 35\times 2+\text{ΟΒ}\times 11=\text{ΟΒ}\times 70+\text{ΟΒ}\times 11$$
$$=\text{ΟΒ}\times 81 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [7].$$

Οὕτω τὸ μῆκος ΟΒ ἐμπεριέχεται 35 φορὰς εἰς τὴν ΓΔ καὶ 81 εἰς τὴν ΑΒ. Ἄρα αἱ δεδομέναι γραμμαὶ εἶναι μεταξὺ τῶν ὡς 35 πρὸς 81.

Τὸ μῆκος ΟΒ τὸ ἐμπεριεχόμενον κατ' ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς τὰ δεδομένα μήκη καλεῖται Κοινὸν Μέτρον.

Τὸ προηγούμενον παράδειγμα δεικνύει ἀρκούντως τὸν τρόπον διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν εἰς ἀριθμοὺς τὸν λόγον δύο γραμμῶν. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ φέρωμεν τὴν μικροτέραν ἐπὶ τῆς μεγαλητέρας τοσάκις, ὅσον εἶναι δυνατόν· ἐπίσης νὰ μεταφέρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς συγκρίσεως ταύτης ἐπὶ τῆς μικροτέρας, ἔπειτα τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον ἐπὶ τοῦ πρώτου καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπόν τι τὸ ὁποῖον νὰ εἰσέρχηται ἀκριβῶς εἰς τὸ πρὸ αὐτοῦ ἄνευ ὑπολοίπου. Τὸ τελευταῖον τοῦτο ὑπόλοιπον εἶναι τὸ Κοινὸν Μέτρον τῶν προταθεισῶν γραμμῶν· τοὺς δὲ ζητουμένους ἀριθμοὺς λαμβάνομεν, συγχωνεύοντες τὰς διαφόρους σχέσεις, αἵτινες

προέκυψαν ἐκ τῶν διαφόρων πράξεων, ἐκ τῆς τελευταίας ἀρχίζοντες καὶ προχωροῦντες εἰς τὴν πρώτην. Ἐὰν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον δὲν εἰσέρχηται ἀκριβῶς εἰς τὸ πρὸ αὐτοῦ, τότε αἱ εὐθεῖαι λέγονται Ἔκμετροι.

Ἡ μέθοδος αὕτη ἔχει μεγίστην ἀναλογίαν μὲ τὴν χορηγουμένην ὑπὸ τῆς ἀριθμητικῆς πρὸς εὕρεσιν τοῦ Μεγίστου Κοινοῦ Διαιρέτου δύο ἀριθμῶν.

Ἐκ τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἕπεται ὅτι, διὰ νὰ μετρήσωμεν γραμμήν τινα, πρέπει νὰ συγκρίνωμεν αὐτὴν πρὸς ἄλλην τινὰ κατὰ Συνθήκην λαμβανομένην, ἥτις λέγεται Μονάς.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5η. Ἡ ἐν χρήσει γραμμικὴ μονὰς εἶναι τὸ γαλλικὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 δεκατόμετρα, ἕκαστον δεκατόμετρον εἰς 10 ἑκατοστόμετρα, καὶ ἕκαστον ἑκατοστόμετρον εἰς 10 χιλιοστόμετρα.

Διὰ μεγάλας ἀποστάσεις λαμβάνομεν ὡς μονάδα, τὸ δεκάμετρον, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ μὲ 10 μέτρα, τὸ ἑκατόμετρον τὸ περιέχον 10 δεκάμετρα, τὸ χιλιόμετρον τὸ ἰσοδυναμοῦν μὲ 10 ἑκατόμετρα, τὸ μυριάμετρον ὅπερ περιέχει 10 χιλιόμετρα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6η. Πρὸς καταμέτρησιν εὐθυγραμμημένης γραμμῆς ἐπὶ τῆς γῆς, ἔχομεν τὰ ἑξῆς ἐργαλεῖα·

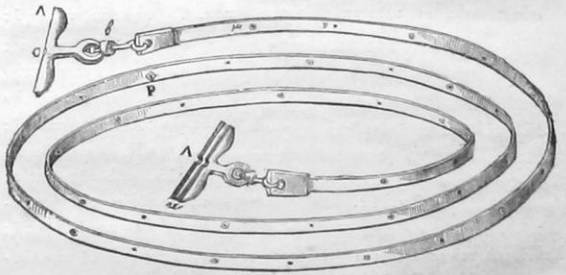
Α'. ΑΛΥΣΟΣ. Αὕτη συνίσταται ἐκ 50 εὐθυγράμμων ἀγκυλίων, ἐκ σύρματος σιδηροῦ, ἐχόντος διάμετρον $3^1/_2$ χιλιοστομέτρων καὶ Ο, 2 μῆκος, συνδεομένων διὰ κρίκων, τὸ δὲ ὅλον μῆκος τῆς ἁλύσου εἶναι 1 δεκάμετρον. Ἡ ἅλυσος ἑκατέρωθεν ἀπολήγει εἰς δύο λαβίδας, διὰ τῶν ὁποίων τανύεται· ὁ πέμπτος κρίκος, ὁ δέκατος, ὁ δέκατος πέμπτος καὶ οὕτω καθεξῆς ἀνὰ πέντε, εἶναι ἐκ χαλκοῦ καὶ διαιροῦσι τὴν ἅλυσον εἰς ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει μῆκος ἑνὸς μέτρου· τὸ Σχ. 9 παριστᾷ τὴν ἅλυσον κατὰ τὸ ἑκατοστὸν τοῦ φυσικοῦ αὐτῆς μεγέθους·

Β'. ΧΩΡΟΜΕΤΡΙΚΗ ΒΕΛΟΝΗ. Αἱ βελόναι αἱ συνοδεύουσαι τὴν ἅλυσον εἶναι ἔνδεκα τὸν ἀριθμὸν δι' ἀπόστασιν ἑνὸς ἑκατομέτρου, καὶ αἵτινες συνίστανται ἐκ σύρματος σιδηροῦ Π, τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον ἀπολήγει εἰς αἰχμὴν, καὶ τὸ ἕτερον εἰς κύκλον Σχ. 9, ἵνα εὐκόλως μετακομίζωνται.

Σχ. 9.

Διὰ τῶν βελονῶν σημειοῦμεν ἐπὶ τῆς γῆς τὰ διαδοχικὰ ἄκρα τῆς ἁλύσου, ὅταν αὕτη εἰσέρχηται πολλάκις εἰς τὴν εὐθυγραμμημένην γραμμήν. Ὅταν αἱ καταμετρήσεις γίνωνται ἐπὶ καλλιεργημένων γαιῶν, προσδένεται ἐπὶ τῆς κεφαλῆς τῶν βελονῶν τεμάχιον ἐρυθρᾶς ταινίας, ἵνα ἀποκαταστήσῃ αὐτὰς εὐδιακρίτους.

Γ'. ΔΕΚΑΜΕΤΡΟΝ ΧΑΛΥΒΔΙΝΟΝ. Τοῦτο εἶναι ταινία χαλυβδίνη, μῆκος ἔχουσα δέκα μέτρων, καὶ ἡ ὁποία ἀπολήγει ἑκατέρωθεν εἰς δύο λαβίδας χαλκίνους Λ. Ἐπὶ τῆς ταινίας ταύτης τὰ μὲν δεκατόμετρα δεικνύονται δι' ὀπῶν ν διάμετρον ἐχουσῶν 0,002 τοῦ μέτρ. τὰ δὲ διπλᾶ δεκατόμετρα, διὰ κυκλίσκων χαλκίνων μ, ἐχόντων διάμετρον 0,008 τοῦ μέτρου. Τὰ μέτρα παρίστανται διὰ κύκλων διάμετρον ἐχόντων 0,015 τοῦ μέτρου, τὸ δὲ μέσον τοῦ δεκαμέτρου σημειοῦται διὰ ῥόμβου χαλκίνου Ρ. Τὸ μῆκος τοῦ ἐργαλείου τούτου κανονίζεται διὰ τῶν κοχλιῶν β τῶν εὑρισκομένων εἰς ἑκάστην λαβίδα. Σχ. 10.



Σχ. 10.

Κατὰ τὸ μῆκος ἑκάστης λαβίδος ὑπάρχει αὔλαξ ἡμικυλινδρικὸς κ, ἐντὸς τοῦ ὁποίου εἰσάγεται ἡ βελόνη ἐν καιρῷ τῆς καταμετρήσεως, καὶ διὰ τῆς εὑρισκομένης ὀπῆς Ο, ἐν τῷ μέσῳ τῆς λαβίδος, διέρχεται ἡ Μολύβδαινα (σαοῦλι) ὁπόταν καταμετροῦντες ἀναγκαζώμεθα νὰ κρατῶμεν τὸ δεκάμετρον ἄνω τοῦ ἐδάφους.

Δ'. Η ΜΟΛΥΒΔΑΙΝΑ σύγκειται ἐκ νήματος Ν εἰς τοῦ ὁποίου τὴν ἄκραν κρέμαται βάρος, σχῆμα ἔχον κυλίνδρου Κ, ἀπολῆγον εἰς κῶνον τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ εἶναι χαλύβδινος. Σχ. 11.

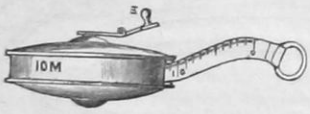
Ἡ διεύθυνσις τῆς μολυβδαίνης λέγεται Κατακόρυφος.

Ε'. ΤΑΙΝΙΑ. Αὕτη εἶναι συνήθης ταινία 10 ἢ 20 μέτρων μήκους διηρημένη εἰς μέτρα, δεκατόμετρα καὶ ἑκατοστόμετρα, ἥτις περιελίσσεται περὶ ἕνα ἄξωνα ἐντὸς κυλινδρικῆς πυξίδος διὰ τοῦ στροφάλου Ξ, Σχ. 12. Ὁ εἷς τὸ ἄκρον αὐτῆς προσδεδεμένος κρίκος τὴν ἐμποδίζει νὰ εἰσέλθῃ ἐντελῶς εἰς τὴν πυξίδα. Ἡ ταινία ἂν καὶ ἐπιταχύνῃ τὴν καταμέτρησιν, δὲν δίδει ὅμως ἐξαγόμενα ἀκριβῆ, ἐπειδὴ ἡ ἐλαστικότης αὐτῆς καὶ ἡ μεταβολὴ τῆς ἀτμοσφαίρας ἐπηρεάζουσι τὴν κατασκευήν της.



Σχ. 11.

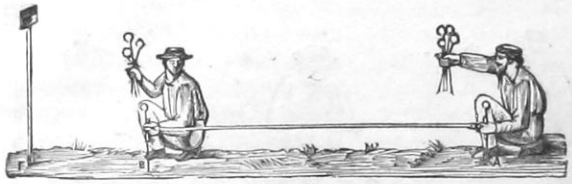
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7η. Καταμέτρησις Ὁριζοντίου Γραμμῆς, τουτέστι καθέτου ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς μολυβδαίνης, διὰ τοῦ χαλυβδίνου δεκαμέτρου. Δύο συνεργάται εὐθυγραμμίζουσι (ἐφαρμ. 2) τὴν ἐπὶ τῆς γῆς γραμμήν. Ἔπειτα ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν ὁ διευθύνων τὴν ἐργασίαν, ἐμπήγει εἰς τὴν ἀρχὴν Α τῆς γραμμῆς βελόνην Π, Σχ. 13, 14 καὶ 15, ἐπὶ τῆς ὁποίας προσαρμόζει τὸν ἡμικυλινδρικὸν αὔλακα τῆς λαβίδος Λ τοῦ δεκαμέτρου. Ὁ ἕτερος τούτων, ὅστις κρατεῖ τὴν δέσμην τῶν δέκα βελονῶν, ὁδηγούμενος ὑπὸ τοῦ πρώτου ἐμπήγει εἰς τὸ Β, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθυγραμμίας, βελόνην τὴν ὁποίαν κρατεῖ διὰ τῆς ἀριστερᾶς ἐντὸς τῆς δευτέρας λαβίδος, διὰ τῆς ὁποίας τανύει τὸ δεκάμετρον Σχῆμα 14. Τούτου γενομένου, ὁ εἰς τὸ Α εὑρισκόμενος ὁδηγὸς λαμβάνει διὰ τῆς δεξιᾶς, τὴν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὑπάρχουσαν βελόνην καὶ μεταβαίνει εἰς Β, καθ' ὃν χρόνον καὶ ὁ βοηθὸς αὐτοῦ εἰς Γ, ἔνθα προσαρμόζων διὰ τῆς ἀριστερᾶς τὴν λαβίδα τοῦ δεκαμέτρου εἰς τὴν βελόνην τὴν ὁποίαν



Σχ. 12.


Σχ. 13.

ἀφῆκεν ὁ βοηθός του, ὁδηγεῖ αὐτὸν εἰς τὸ νὰ ἐμπήξῃ ἑτέραν βελόνην. Καὶ οὕτω καθεξῆς.


Σχ. 14.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ἐπειδὴ κατὰ τὴν διαδοχικὴν μεταφορὰν τοῦ δεκαμέτρου, ἑκάστη βελόνη μεταβαίνει εἰς τὰς χεῖρας τοῦ ὁδηγοῦ, οὗτος ἀρκεῖ νὰ ἀριθμήσῃ πόσας βελόνας κρατεῖ ἵνα εὕρῃ ποσάκις τὸ δεκάμετρον περιέχεται εἰς τὴν εὐθυγραμμίαν. Τὰ κλάσματα τοῦ μέτρου ἀναγινώσκονται διὰ τῶν ὑποδιαιρέσεων τοῦ δεκαμέτρου, ἢ διὰ τοῦ διπλοῦ Δεκατομέτρου (ἐφαρμ. 8).

Ὅταν ἡ εὐθυγραμμία ἔχῃ μῆκος πολλῶν ἑκατομέτρων, τότε ὁ κρατῶν τὴν δέσμην τῶν βελονῶν εἰδοποιεῖ τὸν ὁδηγόν του νὰ σημειώσῃ ἐπὶ τοῦ σημειωματαρίου ἓν ἑκατόμετρον, ὁσάκις αἱ βελόναι μεταβαίνουσιν εἰς τὰς χεῖρας ἐκείνου. Τούτου γενομένου ὁ ὁδηγὸς ἐπιστρέφει τὰς δέκα βελόνας εἰς τὸν βοηθόν του ἀφίνων τὴν ἑνδεκάτην ὅπου τὴν εἶχεν ἐμπήξῃ ὁ βοηθός, ἵνα χρησιμεύσῃ ὡς ἀφετηρία διὰ τὴν ἐξακολούθησιν τῆς ἐργασίας.

Ἐὰν, ἐν καιρῷ τῆς καταμετρήσεως, τὸ ἀνώμαλον τοῦ ἐδάφους ἀναγκάζῃ τὸν βοηθόν νὰ κρατήσῃ τὴν λαβίδα τοῦ δεκαμέτρου εἰς ὕψος τι, ἄνω τοῦ ἐδάφους Σχ. 15 καὶ 16, τότε οὗτος κρατεῖ, ἐφ' ὅσον



Σχ. 15.

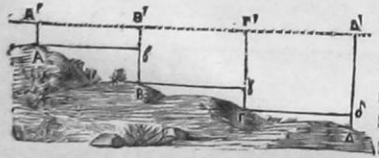
εἶναι δυνατὸν, ὁριζοντίως τὸ δεκάμετρον καὶ διὰ τῆς ὀπῆς τῆς ὑπαρχούσης ἐν τῷ μέσῳ τῆς λαβίδος εἰσάγει τὸ νῆμα τῆς μολυβδαίνης



Σχ. 16.

τὴν ὁποίαν διευθύνει, κατὰ τὰς ὁδηγίας τοῦ ὁδηγοῦ του, ἕως οὗ ἡ αἰχμὴ τοῦ κώνου ὑποδείξῃ σημεῖόν τι Ε, ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας κείμενον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐμπήγει βελόνην. Ἀκολούθως εἰς τὴν βελόνην ταύτην ὁ ὁδηγὸς προσαρμόζων τὴν λαβίδα τοῦ δεκαμέτρου ἐξακολουθεῖ τὴν καταμέτρησιν, ὡς ἐλέχθη.

Τὸ τοιοῦτον συμβαίνει κατὰ τὴν μέτρησιν εὐθυγραμμημένης γραμμῆς ἐπὶ ἀνωμάλου ἐδάφους, ὡς δεικνύει τὸ Σχ. 16 τὸ ὁποῖον ἐξηγεῖ τὴν ἐργασίαν. Κατὰ τὸ σχῆμα τοῦτο ὡς μέτρον τῆς ἀνωμάλου γραμμῆς ΑΒΓΔ Σχ. 17 λαμβάνεται τὸ ἄθροισμα Αδ + Βγ + Γδ, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει ποσάκις τὸ δεκάμετρον μετεφέρθη ἀπὸ Α εἰς Δ ὁριζοντίως κρατούμενον.



Σχ. 17.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων εἶναι φανερὸν ὅτι ἀντὶ νὰ καταμετρήσωμεν γραμμήν τινα ΑΒΓΔ ἐπὶ τῆς γῆς ἐρριμένην, μετροῦμεν τὴν ὁριζόντειον Α′Δ′ ἥτις ἀπολήγει εἰς τὰ κατακορύφως ἐμπεπηγμένα ἀκόντια κατὰ τὰ ἄκρα Α, Δ, τῆς ἀνωμάλου γραμμῆς. Ἐπειδὴ ἔχομεν

$$A\delta + B\gamma + \Gamma\beta = A'B' + B'\Gamma' + \Gamma'\Delta' = A'\Delta'.$$

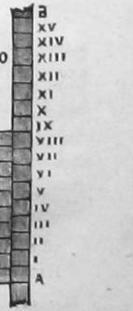
(§. 3. Πρότασις 24 καὶ 25). Περὶ τούτου ἴδε §. 16 καὶ 17 τοῦ δευτέρου μέρους.

Διὰ νὰ καταμετρήσωμεν γραμμὰς μικρᾶς ἐκτάσεως μεταχειριζόμεθα ράβδον μῆκος ἔχουσαν δύο μέτρων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8η. Τὰς γραμμὰς τὰς ὁποίας χαράττομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου καταμετροῦμεν, λαμβάνοντες ἢ ἴσον ἄνοιγμα διαβήτου, τὸ ὁποῖον μεταφέρομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς κανόνος διηρημένου εἰς ἑκατοστὰ καὶ χιλιοστὰ τοῦ μέτρου, ἢ διὰ τοῦ Διπλοῦ Δεκατομέτρου, ὅπερ εἶναι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διηρημένον, καὶ κατεσκευασμένον εἰς εἶδος μικροῦ κανόνος, εἰς τρόπον ὥστε ἡ διηρημένη αὐτοῦ πλευρὰ δύναται νὰ προσαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος γραμμῆς. Ἀρκεῖ τότε ὀλίγη ἕξις πρὸς ἐκτίμησιν τῶν κλασμάτων τοῦ χιλιοστομέτρου μεθ' ἱκανῆς προσεγγίσεως.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9η. Ἵνα προεκτείνωμεν τὴν προσέγγισιν ταύτην μέχρι τοῦ δεκάκις χιλιοστοῦ, μεταχειριζόμεθα τὸν Βερνιέρον.

Ἔστω ΑΒ Σχ. 18, ἡ πλευρὰ διηρημένου Κανόνος εἰς χιλιοστόμετρα καὶ ΓΔ ἡ πλευρὰ ἑτέρου, δυναμένου νὰ κινῆται κατὰ τὸ μῆκος τοῦ πρώτου. Ἡ πλευρὰ τοῦ δευτέρου τούτου καὶ μικροῦ Κανόνος ἔχει μῆκος 9 χιλιοστομέτρων, καὶ διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ καλεῖται Βερνιέρος. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μῆκος ἑκάστης διαιρέσεως τοῦ Βερνιέρου εἶναι τὰ $^9/_{10}$ τοῦ χιλιοστομέτρου, ἕπεται ὅτι αἱ κεχαραγμέναι γραμμαὶ 1 καὶ Ι ἐπὶ τῶν δύο Κανόνων διαφέρουσι κατὰ $^1/_{10}$ τοῦ χιλιοστομέτρου, αἱ γραμμαὶ 2 καὶ ΙΙ κατὰ $^2/_{10}$, αἱ γραμμαὶ 3 καὶ ΙΙΙ κατὰ $^3/_{10}$ τοῦ χιλιοστομέτρου καὶ οὕτω καθεξῆς.



Σχ. 18.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάτων τοῦ χιλιοστομέτρου, ὅστις περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς γραμμῆς XIII καὶ τοῦ σημείου Ο τῆς πλευρᾶς τοῦ Κανόνος. Φέρομεν τὸν Βερνιέρον κατὰ τὸ μῆκος τοῦ Κανόνος, ἕως οὗ τὸ ἄκρον αὐτοῦ Δ, συμπέσῃ μὲ τὸ σημεῖον Ο. Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην, ὅλαι αἱ σχετικαὶ θέσεις τῶν γραμμῶν τῶν δύο Κανόνων μεταβάλλονται ἐκτὸς δύο αἵτινες ταυτίζονται ἐπαισθητῶς.

Παραδεχθῶμεν ὅτι ἡ γραμμὴ 3 τοῦ Βερνιέρου καὶ ἡ VII τοῦ Κανόνος ταυτίζονται Σχ. 19, τότε ὅμως ἡ γραμμὴ 2 προηγεῖται τῆς VI κατὰ $^1/_{10}$ τοῦ χιλιοστομέτρου, ἡ δὲ γραμμὴ 1 προηγεῖται τῆς

V κατὰ $^3/_{10}$ καὶ ἑπομένως τὸ ἄκρον Γ τοῦ Βερνιέρου θὰ προηγῆται τῆς γραμμῆς IV κατὰ $^3/_{10}$ τοῦ χιλιοστομέτρου. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ Γ καὶ IV εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τοῦ Δ$\frac{9}{10}$ καὶ XIII· ἡ τελευταία αὕτη ἀπόστασις εἶναι ἄρα $^3/_{10}$ τοῦ χιλιοστομέτρου. Βλέπομεν ὅθεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάτων τοῦ χιλιοστομέτρου, ὁ περιλαμβανόμενος μεταξὺ τοῦ σημείου Ο καὶ τῆς γραμμῆς XII τοῦ Κανόνος εἶναι ἀκριβῶς ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τὸν δεικνύοντα τὴν τάξιν τῆς ταυτιζομένης γραμμῆς τοῦ Βερνιέρου μὲ γραμμήν τινα τοῦ Κανόνος.



Σχ. 19.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰ δέκατα τῆς διαιρέσεως τοῦ Κανόνος διαιροῦντες αὐτὸν καθ' οἱονδήποτε ἄλλο σύστημα. Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰ τριακοστὰ τοῦ Κανόνος π. χ. λαμβάνοντες τὸ μῆκος τοῦ Βερνιέρου ἴσον μὲ 29 διαιρέσεις τοῦ Κανόνος, καὶ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν εἰς 30 ἴσα μέρη. Πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅμως ὅτι, τὸ πάχος τῶν γραμμῶν πολλάκις ἐμποδίζει νὰ διακρίνωμεν ἀκριβῶς ποία γραμμὴ τοῦ Βερνιέρου ταυτίζεται μὲ γραμμήν τινα τοῦ Κανόνος, ἐπειδὴ εἰς περιστάσεις τινὰς αἱ γραμμαὶ αὗται σχεδὸν ταυτίζονται.

---

§.—2.

Ἀξίωμα. Τρίγωνα. Ἁπλούστεραι περιστάσεις τῆς ἰσότητος αὐτῶν. Ἰδιότητες τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Ἰδιότητες τῆς καθέτου καὶ τῶν πλαγίων τῶν ἀγομένων ἐξ ἑνὸς σημείου εἰς γραμμὴν εὐθεῖαν. Περιστάσεις τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

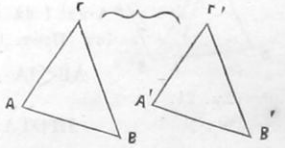
Ἀξίωμα. Δύο γραμμαὶ εἴτε δύο ἐπιφάνειαι τότε λέγονται ἴσαι, ὅταν ἐπ' ἀλλήλων τιθέμεναι ἐφαρμόζονται καθ' ὅλα καὶ ἐντελῶς.

Ὁρισμός. Τρίγωνον καλεῖται ἐπίπεδον σχῆμα ΑΒΓ, Σχ. 20 περιοριζόμενον ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν γραμμῶν, αἵτινες καλοῦνται *πλευραὶ* τοῦ τριγώνου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ *εἶναι ἴσα ὅταν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην* ΑΒ=Α′Β′ *προσκειμένην εἰς ἴσας γωνίας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ* Α=Α′ *καὶ* Β=Β′.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν θέσωμεν τὸ τρίγωνον Α′Β′Γ′ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ Α′Β′ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἴσην της ΑΒ, ἡ πλευρὰ Α′Γ′ θέλει ἀκολουθήσει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΓ, ἐπειδὴ ἡ γωνία Α′=Α, καὶ τὸ σημεῖον Γ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΑΓ, ἡ δὲ πλευρὰ Β′Γ′ θέλει ἀκολουθήσει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΒΓ, διότι ἡ γωνία Β′=Β, καὶ τὸ σημεῖον Γ′ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΒΓ. Τὸ σημεῖον Γ′ ἀνάγκη νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ ΒΓ, θέλει πέσει ἄρα ἐπὶ τοῦ Γ, ἐπομένως τὰ δύο τρίγωνα ἐφαρμόζονται, ἄρα εἶναι ἴσα.



Σχ. 20.

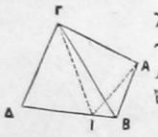
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ *εἶναι ἴσα ὅταν ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας* ΑΓ=ΑΓ, Β′Γ′=ΒΓ, *καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην* Γ=Γ′ Σχ. 20.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν θέσωμεν τὸ τρίγωνον Α′Β′Γ′ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε αἱ ἴσαι γωνίαι Γ′ καὶ Γ νὰ ἐφαρμοσθῶσι· τὸ σημεῖον Α′ θέλει πέσει εἰς τὸ Α, διότι ΑΓ=ΑΓ, καὶ τὸ σημεῖον Β′ εἰς τὸ Β, διότι Β′Γ′=ΒΓ, ἑπομένως τὰ δύο τρίγωνα συμπίπτουσιν. Ἄρα εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7.

Ὅταν δύο τρίγωνα ΔΒΓ, ΑΒΓ Σχ. 21 *ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας τὴν* ΑΓ=ΔΓ *καὶ τὴν* ΒΓ *κοινὴν, τὴν δὲ ἐξ αὐτῶν τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἄνισον, ἡ τρίτη πλευρὰ* ΔΒ *ἡ εἰς τὴν μεγαλητέραν γωνίαν ἀντικειμένη, εἶναι μεγαλητέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς* ΑΒ *τῆς ἀντικειμένης εἰς τὴν μικροτέραν γωνίαν.*



Σχ. 21.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν ὅλην γωνίαν ΔΓΑ εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῆς εὐθείας ΓΙ, καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα Α καὶ Ι τὰ δύο τρίγωνα ΔΓΙ, ΑΓΙ εἶναι ἴσα (Πρότ. 6) ἄρα ΙΑ=ΙΔ. Ἀλλ' ἔχομεν

ΑΒ<ΙΑ+ΙΒ, ἢ <ΙΔ+ΙΒ ἢ <ΔΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ Σχ. 20 *εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ* ΑΒ=Α′Β′, ΑΓ=Α′Γ′, ΒΓ=Β′Γ′.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν αἱ γωνίαι δὲν ἦναι ἴσαι π. χ. ὅταν Γ>Γ′ τότε θέλομεν ἔχει (Πρότ. 7), ΑΒ>Α′Β′, ὅπερ ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9.

Ὁρισμός. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον λέγεται τὸ ἔχον δύο ἴσας πλευράς, τὴν δὲ τρίτην ἄνισον καὶ καλουμένην βάσιν. Κορυφὴ δὲ τοῦ τριγώνου λέγεται ἡ κορυφὴ τῆς ἀπέναντι αὐτῆς γωνίας.

Εἰς πᾶν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ Σχ. 22 *αἱ γωνίαι* Α *καὶ* Β *αἱ ἀντικείμεναι εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς, εἶναι ἴσαι.*



Σχ. 22.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὴν κορυφὴν Γ μὲ τὸ μέσον Ι τῆς βάσεως *ἔχομεν δύο ἴσα τρίγωνα,* ΑΓΙ καὶ ΒΓΙ (Πρότ. 8) ἄρα Α=Β.

Αἱ εἰς τὸ σημεῖον Ι γωνίαι εἶναι ἐπίσης ἴσαι καὶ ἑπομένως ὀρθαί. Οὕτως *ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὴν κορυφὴν ἰσοσκελοῦς τινος τριγώνου καὶ τὸ μέσον τῆς βάσεως, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς βάσεως.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10.

Ἐὰν τριγώνου τι ΑΒΓ Σχ. 23 *ἔχῃ δύο ἴσας γωνίας* ΓΑΒ=ΓΒΑ, *αἱ ἀντικείμεναι εἰς αὐτὰς πλευραὶ εἶναι ἴσαι.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν ΑΓ μεγαλητέραν τῆς ΓΒ, τότε λαμβάνομεν τὴν ΑΙ=ΓΒ καὶ ἄγομεν τὴν ΙΒ. Τὰ τρίγωνα ΙΑΒ καὶ ΓΒΑ θέλουσιν εἶσθαι ἴσα, διότι ἔχουσι μίαν

γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν· ἄρα ἡ γωνία ΙΒΑ=ΓΑΒ=ΓΒΑ, ὅπερ ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11.

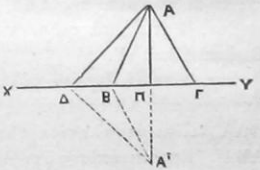
Ἐξ ἑνὸς σημείου Α Σχ. 24 *εὑρισκομένου ἐκτὸς τῆς εὐθείας* ΧΥ, *δὲν δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν ἐπ' αὐτῆς παρὰ μίαν καὶ μόνην κάθετον τὴν* ΑΠ.



Σχ. 23.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἠδυνάμεθα νὰ ἄξωμεν καὶ δευτέραν κάθετον τὴν ΑΒ π. χ. τότε στρέφοντες τὸ σχῆμα περὶ τὴν ΧΥ οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Α νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α′, ἠθέλαμεν ἔχει κατὰ τὸ σημεῖον Π γωνίας ὀρθάς. Ἄρα ΑΠΑ′ ἤθελεν εἶσθαι εὐθεῖα γραμμὴ (Πρότ. 3).

Ἐπίσης ἠθέλαμεν ἔχει, κατὰ τὸ σημεῖον Β, γωνίας ὀρθάς· ἄρα ΑΒΑ′ ἤθελεν εἶσθαι δευτέρα τις γραμμὴ εὐθεῖα, ἀγομένη ἀπὸ τὸ σημεῖον Α εἰς τὸ σημεῖον Α′, ὅπερ ἄτοπον.

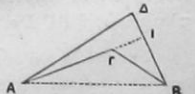


Σχ. 24.

Ὁρισμός. Πᾶσα γραμμὴ, ὡς ἡ ΑΒ, διαφέρουσα τῆς καθέτου καλεῖται *πλαγία.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12.

Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Α *ἄξωμεν εἰς τὸ σημεῖον* Β, Σχ. 25 *καὶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας* ΑΒ, *δύο κεκλασμένας γραμμὰς* ΑΓΒ, ΑΔΒ *ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία νὰ περιέχῃ τὴν ἄλλην, ἡ πρώτη εἶναι μεγαλητέρα τῆς δευτέρας κεκλασμένης γραμμῆς.*



Σχ. 25.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν προεκβάλωμεν τὴν ΑΓ ἕως εἰς τὸ σημεῖον Ι, θέλομεν ἔχει τὰς ἀνισότητας ΓΒ<ΓΙ+ΙΒ καὶ ΑΓ+ΓΙ<ΑΔ+ΔΙ, ἃς προσθέτοντες μέλος πρὸς μέλος, λαμβάνομεν ΓΒ+ΑΓ+ΓΙ<ΓΙ+ΙΒ+ΑΔ+ΔΙ ἄρα ΓΒ+ΑΓ<ΔΒ+ΑΔ.

ISMANOGLIO

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Α Σχ. 24 ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΧΥ ὑπάρχοντος, καταβιβάσωμεν ἐπ' αὐτῆς τὴν κάθετον ΑΠ καὶ διαφόρους πλαγίας ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ. 1ον, ἡ κάθετος θὰ ἦναι μικροτέρα πάσης πλαγίας. 2ον, αἱ δύο πλάγιαι ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ἐξ ἴσου ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς Π τῆς καθέτου θὰ ἦναι ἴσαι. 3ον, ἐκ δύο πλαγίων ἡ μεγαλητέρα θὰ ἦναι ἡ μᾶλλον ἀπέχουσα τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου.

Ἀπόδειξις. 1ον. Ἂς στρέψωμεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν ΧΥ οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Α νὰ πέσῃ εἰς τὸ Α', ὥστε νὰ ἔχωμεν ΑΠ=Α'Π καὶ ΑΒ=Α'Β. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εἰς τὸ σημεῖον Π γωνίαι εἶναι ὀρθαί, ἡ ΑΠΑ' εἶναι εὐθεῖα μικροτέρα τῆς ΑΒΑ', ἄρα ΑΠ, ἡ μικροτέρα τῆς ΑΠΑ' εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒ, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒΑ'.

2ον. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΠΒ καὶ ΑΠΓ εἶναι ἴσα (Πρότ. 6) ἄρα ΑΒ=ΑΓ.

3ον. Ἐπειδὴ ἔχομεν τὴν ΑΔ=Α'Δ καὶ τὴν ΑΔΑ' μεγαλητέραν τῆς ΑΒΑ' (Πρότ. 12) ἄρα ἡ ΑΔ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς ΑΔΑ' εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΒ, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒΑ'. Ἕπεται ἐπίσης ὅτι ΑΔ>ΑΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῶν ἐν τῇ προτάσει 13 ἀναφερομένων ἔπονται αἱ ἑξῆς ἀντίστροφοι.

Δύο πλάγιαι ἴσαι ἀπέχουσιν ἰσάκις ἐκ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου. Ἐκ δύο πλαγίων ἀνίσων ἡ μεγαλητέρα ἀπέχει περισσότερον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου.

Ὁρισμός. Ὀρθογώνιον τρίγωνον λέγεται τὸ ἔχον μίαν ὀρθὴν γωνίαν· ὑποτείνουσα δὲ αὐτοῦ ἡ ἀντικειμένη εἰς αὐτὴν πλευρὰ ὡς ἡ ΒΓ Σχ. 26.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.



Σχ. 26.

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' Σχ. 26 *εἶναι ἴσα ὅταν ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας* ΒΓ=Β'Γ' *καὶ ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην* Γ=Γ', *ἐκτὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας* Α=Α'.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὰς ἴσας γωνίας Γ καὶ Γ', τὸ σημεῖον Β' θέλει πέσει εἰς τὸ Β, τὸ σημεῖον Α' ἐπὶ τῆς ΓΑ· πρὸς δὲ τούτοις ἡ πλευρὰ Β'Α' ἡ κάθετος τῆς Γ'Α' θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΒΑ, καθέτου ἐπὶ τῆς ΓΑ (Πρότ. 11). Λοιπὸν ἡ μὲν Β'Α' θέλει πέσει ἐπὶ τὴν ΒΑ, τὸ δὲ σημεῖον Α' θέλει ταυτισθῆ μὲ τὸ Α, καὶ τὰ δύο τρίγωνα θὰ συμπέσωσιν, ἄρα εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' Σχ. 26 *εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας* ΒΓ=Β'Γ', *καὶ ἀνὰ μίαν πλευρὰν ἴσην* ΑΒ=Α'Β'.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὴν Α'Β' ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ πλευρὰ Α'Γ' θέλει ἀκολουθήσει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΓ, καὶ τὸ σημεῖον Γ' θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Γ, ἐν ἐναντίᾳ δὲ περιπτώσει, αἱ ὑποτείνουσαι θὰ ἦναι δύο πλάγιαι ἀνισάκις ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ΑΒ καὶ ἑπομένως ἄνισοι, ὅπερ ἄτοπον.

---

§.—3.

1ον. Εὐθεῖαι παράλληλοι. Ὅταν δύο παράλληλοι συναπαντῶνται ὑπὸ τεμνούσης, αἱ τέσσαρες ὀξεῖαι γωνίαι αἱ οὕτω προκύπτουσαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ὡς καὶ αἱ τέσσαρες ἀμβλεῖαι καὶ ἀντιστρόφως. Ὀνόματα τῶν διαφόρων τούτων γωνιῶν. Γωνίαι τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι ἢ κάθετοι.—2ον. Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου τινὸς καὶ οἱουδήποτε πολυγώνου. Παραλληλόγραμμα. Ἰδιότητες τῶν πλευρῶν, τῶν γωνιῶν καὶ τῶν διαγωνίων των.

1ον.

Ὁρισμός. Παράλληλοι γραμμαὶ λέγονται αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ὑπάρχουσαι καὶ μὴ συναπαντῶσαι ἀλλήλας, ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσιν ὡς αἱ ΑΒ, ΓΔ Σχ. 27.

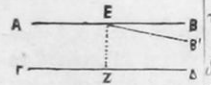
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τρίτης καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εὑρισκόμεναι εἶναι παράλληλοι μεταξύ των.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν εἶχον κοινόν τι σημεῖον θὰ ἠδυνάμεθα ἐκ τοῦ σημείου ἐκείνου νὰ καταβιβάσωμεν δύο καθέτους ἐπὶ τῆς τρίτης εὐθείας, ὅπερ ἀδύνατον (Πρότ. 11).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17.

Ἐξ ἐνὸς σημείου Ε *ἐκτὸς τῆς εὐθείας* ΓΔ *ὑπάρχοντος δὲν δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν παρὰ μίαν καὶ μόνην παράλληλον τὴν* ΕΒ.



Σχ. 27.

Ἀπόδειξις. Θέλομεν παραδεχθῆ τὴν πρότασιν ταύτην ὡς φανεράν.

Ὅτι ὅμως « *ἐκ τοῦ σημείου* Ε *δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν πάντοτε εὐθεῖαν παράλληλον τῆς* ΓΔ » τοῦτο ἀποδεικνύεται οὕτως. Ἐκ τοῦ σημείου Ε καταβιβάζομεν τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τῆς ΓΔ, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ε ὑψοῦμεν τὴν ΕΒ κάθετον ἐπὶ τῆς ΕΖ. Τότε κατὰ τὴν δεκάτην ἕκτην πρότασιν ἡ εὐθεῖα ΕΒ θέλει εἶναι παράλληλος τῆς ΓΔ, διότι ἀμφότεραι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΕΖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ Σχ. 27 ἦναι παράλληλοι, πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τῆς μιᾶς εἶναι ἐπίσης καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ΕΖ, ἡ ἐπὶ τῆς ΑΒ κάθετος, δὲν ἦναι κάθετος τῆς ΓΔ, τότε ἐκ τοῦ σημείου Ζ δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν κάθετον ἐπὶ τῆς ΕΖ, καὶ ἑπομένως παράλληλον τῆς ΑΒ, (Πρότ. 16), τοὐτέστιν ἠθέλαμεν δυνηθῆ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ζ νὰ φέρωμεν δύο παραλλήλους τῆς ΑΒ, ὅπερ ἀδύνατον.

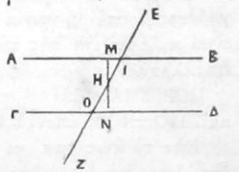
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Δύο παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ Σχ. 28 *ὅταν συναπαντῶνται ὑπὸ τῆς τεμνούσης* ΕΖ, *αἱ τέσσαρες προκύπτουσαι ὀξεῖαι γωνίαι* ΕΙΒ, ΑΙΟ, ΙΟΔ, ΓΟΖ *εἶναι ἴσαι μεταξύ των ὡς καὶ αἱ τέσσαρες ἀμβλεῖαι γωνίαι* ΕΙΑ, ΒΙΟ, ΙΟΓ, ΔΟΖ.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ μέσου Η τῆς ΙΟ, ἂς ἄξωμεν τὴν ΜΝ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἥτις εἶναι ἐπίσης κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΗΙΜ, ΗΟΝ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην ΙΗΜ=ΟΗΝ (Πρότ. 4). Ἄρα ἡ γωνία ΗΙΜ=ΗΟΝ.

Ἐπίσης ἡ γωνία ΕΙΒ=ΗΙΜ καὶ ἡ ΓΟΖ=ΗΟΝ. Ἄρα αἱ τέσσαρες ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι.



Σχ. 28.

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ἀμβλείας γωνίας.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ, ΕΙΒ+ΒΙΖ=2 ὀρθ. καὶ ΕΟΓ+ΓΟΖ=2 ὀρθ. ἕπεται ἡ ἰσότης ΕΙΒ+ΒΙΖ=ΕΟΓ+ΓΟΖ, ἐκ τῆς ὁποίας ἀφαιροῦντες τὰ ἴσα ΕΙΒ=ΓΟΖ, ἔχομεν ΒΙΖ=ΕΟΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΒΙΟ καὶ ΙΟΔ ἰσοδυναμεῖ μὲ δύο ὀρθάς, ὡς καὶ τὸ τῶν γωνιῶν ΑΙΟ καὶ ΙΟΓ.

Ὁρισμός. Καλοῦνται *σύστοιχοι γωνίαι* ὡς ἡ ΕΙΒ καὶ ΙΟΔ, αἱ εὑρισκόμεναι ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης, ἡ μὲν ἐκτὸς τῶν παραλλήλων, ἡ δὲ ἐντός, καὶ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ διευθύνονται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν Σχ. 28.

Καλοῦνται *γωνίαι ἐναλλὰξ ἐντὸς* ὡς ἡ ΑΙΟ καὶ ΙΟΔ, Σχ. 28, αἱ εὑρισκόμεναι ἐντὸς τῶν παραλλήλων καὶ ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης κείμεναι.

Καλοῦνται *διαδοχικαὶ γωνίαι* ὡς ἡ ΒΙΟ καὶ ΙΟΔ, Σχ. 28, αἱ εὑρισκόμεναι ἐντὸς τῶν παραλλήλων καὶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης κείμεναι.

Κατὰ τὰ εἰρημένα λοιπὸν ἡ προηγουμένη πρότασις δύναται νὰ ἐκφωνηθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

Δύο παράλληλοι συναπαντώμεναι ὑπό τινος τεμνούσης σχηματίζουσι τὰς ἐναλλὰξ ἐντὸς γωνίας ἴσας ὡς καὶ τὰς συστοίχους γωνίας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ. *Ἐὰν αἱ ἐναλλὰξ ἐντὸς γωνίαι* ΑΙΟ, ΙΟΔ *ἦναι ἴσαι ἢ αἱ σύστοιχοι γωνίαι* ΕΙΒ, ΙΟΔ, *αἱ εὐθεῖαι* ΑΒ, ΓΔ *αἱ συναπαντώμεναι ὑπὸ τῆς τεμνούσης* ΕΖ *εἶναι παράλληλοι* Σχ. 28.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Η τῆς ΙΟ, ἄξωμεν ἐπὶ τῆς

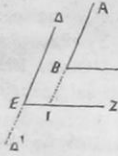
ΑΒ κάθετον τὴν ΜΝ, τὰ τρίγωνα ΗΙΜ, ΗΟΝ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουσιν ἀνὰ μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς ἴσας γωνίας. Λοιπὸν ἡ γωνία ΗΝΟ εἶναι ὀρθή. Ἄρα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΜΝ καὶ ἑπομένως εἶναι παράλληλοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἡ γωνία ΕΙΒ=γων. ΙΟΔ θέλομεν ἔχει καὶ ΑΙΟ=ΙΟΔ, ἐπειδὴ ΕΙΒ=ΑΙΟ.

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ΒΙΟ καὶ ΙΟΔ ἦναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, ἔχομεν ΑΙΟ=ΙΟΔ καὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΓΔ παραλλήλους.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20.

Δύο γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΖ, Σχ. 29. *τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι διαδοχικῶς παράλληλοι καὶ διευθύνονται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν εἶναι ἴσαι.*



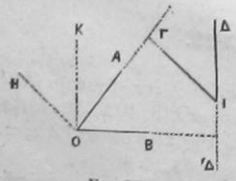
Σχ. 29.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν προεκβάλωμεν τὴν ΑΒ ἕως εἰς τὸ σημεῖον Ι θέλομεν ἔχει ΑΒΓ=ΒΙΖ ὡς συστοίχους γωνίας καὶ ΒΙΖ=ΔΕΙ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ=ΔΕΖ.

Αἱ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, τοῦτέστι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς ὅταν, ὡς αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἔχωσι τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ διευθύνονται κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21.

Δύο γωνίαι ΑΟΒ, ΓΙΔ, Σχῆμα 30, *ὅταν ἔχωσι τὰς πλευράς των ἀμοιβαίως καθέτους, εἶναι ἴσαι ἢ ἀναπληρωματικαί.*



Σχ. 30.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ο ἄξωμεν τὰς ΟΗ καὶ ΟΚ παραλλήλως τῆς ΙΓ καὶ ΙΔ θὰ ἔχωμεν ΗΟΚ=ΓΙΔ, (Πρότ. 20). Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γων. ΗΟΑ=ΚΟΒ,

ὡς ὀρθὴ, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ κοινὸν μέρος ΚΟΑ, θὰ ἔχωμεν ΗΟΚ=ΑΟΒ. Ἄρα ΓΙΔ=ΑΟΒ.

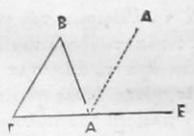
Αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΙΔ' εἶναι παραπληρωματικαί.

2ον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ΑΒΓ *ἰσοδυναμεῖ μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας* Σχ. 31.

Ἀπόδειξις. Ἂν προεκβάλωμεν τὴν πλευρὰν ΑΓ μέχρι τοῦ σημείου Ε καὶ ἄξωμεν τὴν ΑΔ παράλληλον τῇ ΒΓ τότε θὰ ἔχωμεν ΑΒΓ=ΒΑΔ, ὡς ἐναλλὰξ ἐντὸς, καὶ ΑΓΒ=ΔΑΕ, ὡς συστοίχους γωνίας.



Σχ. 31.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ἄρα τὸ αὐτὸ, μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΒΑΓ, ΒΑΔ, ΔΑΕ, τοὐτέστι μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας (Πρότ. 2).

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΒΑΕ τοῦ τριγώνου, ἐκείνη δηλ. ἥτις σχηματίζεται ἀπὸ μίαν πλευρὰν καὶ τὴν προεκβολὴν μιᾶς τῶν δύο ἄλλων, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου.

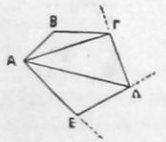
Ὁρισμός. Πολύγωνον καλεῖται τὸ ἐπίπεδον σχῆμα, τὸ περιοριζόμενον ἀπὸ εὐθείας γραμμὰς, αἵτινες λέγονται καὶ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου. Οὕτω τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕ Σχ. 32 εἶναι πολύγωνον.

Ὁρισμός. Διαγώνιος πολυγώνου λέγεται ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰς κορυφὰς δύο μὴ προσκειμένων γωνιῶν ὡς ἡ ΑΓ καὶ ΑΔ Σχ. 32· *περίμετρος* δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου ἰσοῦται μὲ δὶς τοσαύτας ὀρθὰς γωνίας, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του μεῖον δύο.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς Α, ἄξωμεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ ἀποσυνθέτομεν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα τόσα, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν μεῖον δύο. Τῷ ὄντι ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον Α, ὡς κοινὴν κορυφὴν τῶν τριγώνων τούτων, ἑκάστη πλευρὰ ΕΔ, ΔΓ, ΓΒ, τοῦ πολυγώνου χρησιμεύει ὡς βάσις εἰς ἕκαστον τρίγωνον, ἐξαιρουμένων τῶν πλευρῶν ΑΕ, ΑΒ, τῶν σχηματιζουσῶν τὴν γωνίαν Α τοῦ πολυγώνου.



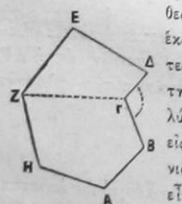
Σχ. 32.

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑκάστου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ δὶς τόσας ὀρθὰς γωνίας, ὅσα εἶναι τὰ τρίγωνα, ἢ ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου μεῖον δύο.

Ἐὰν διὰ τοῦ ν ἐκφράσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν πολυγώνου τινός, καὶ διὰ τοῦ Γ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον $\Gamma = 2(\nu - 2)$ ὀρθ.

Κατὰ τὸν τύπον τοῦτον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πενταγώνου ἰσοῦται μὲ $2(5-2) = 6$ ὀρθαῖς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς τὴν προηγουμένην πρότασιν ὑπεθέσαμεν τὸ πολύγωνον κυρτόν, ἤτοι τοιοῦτον, ὥστε ἑκάστη πλευρὰ προεκβαλλομένη νὰ μὴ τέμνῃ τὸ πολύγωνον. Ἐὰν τὸ πολύγωνον δὲν ἦναι κυρτόν, τότε εὑρίσκονται εἰς αὐτὸ καὶ εἰσέχουσαι γωνίαι ὡς τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖΗ Σχ. 33. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἵνα τὸ θεώρημα ἐπίσης ἐφαρμόζηται ἀντικαθιστῶμεν ἑκάστην γωνίαν εἰσέχουσαν διὰ τῆς διαφορᾶς τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπὶ τὴν γωνίαν ταύτην. Τῷ ὄντι, ἡ διαγώνιος ΖΓ διαιρεῖ τὸ πολύγωνον εἰς δύο κυρτὰ πολύγωνα καὶ ἐπειδὴ εἰς ἕκαστον πολύγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δὶς τόσας ὀρθὰς γωνίας ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του μεῖον δύο, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν δύο πολυγώνων ἰσοῦται μὲ δὶς τόσας ὀρθὰς γωνίας ὅσος εἶναι



Σχ. 33.

ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν καὶ τῶν δύο πολυγώνων μεῖον τέσσαρα· ἡ διαγώνιος οὕτως ἐλήφθη δίς. Ἐὰν παρατηρήσωμεν αὐτήν, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ ὅλον ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τοσάκις δύο ὀρθὰς γωνίας, ὅσαι πλευραὶ ὑπάρχουσιν εἰς τὸ προταθὲν πολύγωνον μεῖον δύο. Εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἰσέρχονται αἱ δύο γωνίαι ΒΓΖ, ΔΓΖ τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς τὸ Γ, ἐπειδὴ $\text{ΖΓΒ} + \text{ΖΓΔ} = 4$ ὀρθαῖς—ΒΓΔ, βλέπομεν ὅτι κατὰ τὴν ἐκτίμησιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου, πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἑκάστην εἰσέχουσαν γωνίαν ΒΓΔ διὰ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῆς πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας.

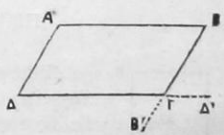
Τοιούτου εἴδους πολύγωνα θὰ ἴδωμεν εἰς τὴν §. 10. ἐφαρμ. 47.

Ὁρισμός. Τὸ πολύγωνον τὸ ἔχον τέσσαρας πλευρὰς λέγεται *τετράπλευρον*. Καλεῖται δὲ καὶ *παραλληλόγραμμον* ὅταν ἔχῃ τὰς ἀντικειμένας πλευρὰς παραλλήλους Σχ. 34.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24.

Παντὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ *αἱ ἀπέναντι γωνίαι ὡς ἡ* ΒΑΔ *καὶ* ΒΓΔ *εἶναι ἴσαι.*

Ἀπόδειξις. Εἶναι βέβαιον ὅτι $\text{ΒΑΔ} = \text{Β′Γ′Δ′}$, (Πρότ. 20), καὶ $\text{Β′Γ′Δ′} = \text{ΒΓΔ}$, (Πρότ. 4), ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν $\text{ΒΑΔ} = \text{ΒΓΔ}$.



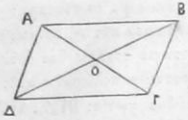
Σχ. 34.

Αἱ διαδοχικαὶ γωνίαι ὡς ἡ Α *καὶ* Δ, Σχ. 34, *εἶναι παραπληρωματικαί*, (Πρότ. 18. Πόρισ.).

Αἱ ἀντικείμεναι πλευραὶ εἶναι ἴσαι· ἐπειδὴ ἐὰν ἄξωμεν τὴν ΑΓ, Σχ. 35, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι κοινὴν πλευρὰν τὴν ΑΓ, προσκειμένην εἰς ἴσας γωνίας. Ἄρα $\text{ΑΒ} = \text{ΓΔ}$ καὶ $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25.

Ἐὰν εἰς τετράπλευρόν τι ΑΒΓΔ Σχ. 35 *δύο ἀντικείμεναι πλευραὶ* ΑΒ *καὶ* ΓΔ, *ἦναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ σχῆμα εἶναι παραλληλόγραμμον.*



Σχ. 35.

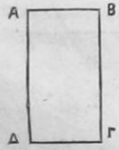
Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἄξωμεν τὴν ΑΓ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ θὰ ἔχωσι τὰς γωνίας ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσας, ὡς ἐναλλὰξ ἐντὸς καὶ περιλαμβανομένας μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ἄρα ἡ γωνία ΑΓΒ=ΓΑΔ· ἄρα ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι (Πρότ. 19).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26.

Ἐὰν τετραπλεύρου τινὸς ΑΒΓΔ, Σχ. 35, *αἱ ἀντικείμεναι πλευραὶ ἦναι ἴσαι* ΑΒ=ΓΔ *καὶ* ΑΔ=ΒΓ, *τὸ σχῆμα εἶναι παραλληλόγραμμον.*

Ἀπόδειξις. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔπειται ἄρα ὅτι αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΑΓΔ αἱ κατέχουσαι θέσιν ἐναλλὰξ ἐντὸς, εἶναι ἴσαι, ἄρα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι (Πρότ. 19)· ἐπίσης τῶν γωνιῶν ΑΓΒ, ΓΑΔ οὐσῶν ἴσων, αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27.



Σχ. 36.

Αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ *παντὸς παραλληλογράμμου* ΑΒΓΔ Σχ. 35 *τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη.*

Ἀπόδειξις. Τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ ἔχοντα ἀνὰ μίαν πλευρὰν ἴσην τὴν ΑΒ=ΓΔ, καὶ προσκειμένην εἰς ἴσας γωνίας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ὡς ἐναλλὰξ ἐντὸς, εἶναι ἴσα. Ἄρα ΑΟ=ΟΓ καὶ ΒΟ=ΟΔ.



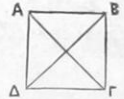
Σχ. 37.

Ὁρισμοί. Ἐὰν παραλληλόγραμμον ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθὴν, αἱ τρεῖς ἄλλαι ἐπίσης εἶναι ὀρθαὶ (Πρότ. 24), τὸ δὲ σχῆμα λέγεται ὀρθογώνιον Σχ. 36.

Ἐὰν αἱ πλευραὶ ἦναι ἴσαι, τὸ σχῆμα λέγεται *ῥόμβος* Σχ. 37.

Ὁ *Ῥόμβος*, ὅταν ἔχῃ τὰς γωνίας ὀρθὰς, καλεῖται *τετράγωνον* Σχ. 38.

Τοῦ παραλληλογράμμου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι, τοῦ ῥόμβου κάθετοι, τοῦ δὲ τετραγώνου καὶ κάθετοι καὶ ἴσαι.



Σχ. 38.

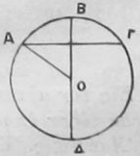
---

§.—4.

1ον. Περὶ Περιφερείας καὶ κύκλου. Ἀμοιβαῖαι σχέσεις τῶν τόξων καὶ τῶν χορδῶν. Ἡ ἀκτὶς, ἡ κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς διαιρεῖ αὐτὴν καὶ τὸ ὑπ' αὐτῆς ὑποτεινόμενον τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἀμοιβαῖα σχέσις τοῦ μήκους τῶν χορδῶν καὶ τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν ἐκ τοῦ κέντρου. 2ον. Συνθήκη ὅπως εὐθεῖά τις εἶναι ἐφαπτομένη εἰς περιφέρειαν. Τόξα περιλαμβανόμενα μεταξὺ παραλλήλων χορδῶν. Συνθήκη τῆς ἐπαφῆς καὶ τῆς τομῆς δύο κύκλων. Ἐφαρμογαί. Χάραξις τοῦ κύκλου ἐπὶ χάρτου ἢ ἐπὶ τῆς Γῆς.

1ον.

Ὁρισμοί. Περιφέρεια κύκλου λέγεται καμπύλη τις γραμμὴ ΑΒΓΔΑ Σχ. 39 τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἐπίσης ἀφ' ἑνὸς ἐσωτερικοῦ σημείου Ο τὸ ὁποῖον καλεῖται *κέντρον*. *Κύκλος* δὲ εἶναι τὸ περικλειόμενον διάστημα ὑπὸ τῆς περιφερείας.



Σχ. 39.

Τὸ μέρος τῆς περιφερείας ΑΒΓ καλεῖται *τόξον*, *χορδὴ* δὲ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἡ ἑνοῦσα τὰ ἄκρα τοῦ τόξου. Πᾶσα χορδὴ ὑποτείνει δύο τόξα τὸ ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ Σχ. 39.

Πᾶσα χορδὴ διερχομένη ἐκ τοῦ κέντρου κύκλου λέγεται *διάμετρος*, ὡς ἡ ΒΔ. Πᾶσα δὲ γραμμὴ διαβαίνουσα ἐκ τοῦ κέντρου καὶ ἀπολήγουσα εἰς σημεῖόν τι τῆς περιφερείας, καλεῖται *ἀκτὶς*, ὡς ἡ ΑΟ. Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι, ὡς καὶ αἱ διάμετροι.

Δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι ὅταν ἔχωσι τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἐὰν ταυτίσωμεν τὰ κέντρα, αἱ περιφέρειαι ἐφαρμόζονται καθ' ὅλα τὰ σημεῖα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28.

Πᾶσα χορδὴ AB Σχ. 40 *εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἄξωμεν, τὴν ΟΑ καὶ ΟΒ θὰ ἔχωμεν AB<ΟΑ+ΟΒ<2×ΟΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29.

Πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν διπλώσωμεν τὸ σχῆμα κατὰ τὴν διάμετρον, τὰ δύο μέρη τῆς περιφερείας ἐφαρμόζωνται καθ' ὅλα τὰ σημεῖα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 30.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, τὰ ἴσα τόξα AB=ΓΔ Σχ. 40, *ὑποτείνουσιν ἴσας χορδάς.*



Σχ. 40.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν διπλώσωμεν τὸ σχῆμα κατὰ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου τῆς διαβαινούσης διὰ τοῦ μέσου Η τοῦ τόξου ΑΓ, αἱ δύο ἡμιπεριφέρειαι θὰ ἐφαρμοσθῶσι καὶ τὸ μὲν σημεῖον Γ θὰ πέσῃ ἐπὶ τὸ Α, τὸ δὲ Δ ἐπὶ τὸ Β· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ AB θὰ ἐφαρμόζωνται, ἑπομένως θὰ ἦναι καὶ ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 31.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, τὸ μικρότερον τόξον ὑποτείνει τὴν μικροτέραν χορδήν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τόξ. ΑΒ<τόξ. ΑΜ Σχ. 40, ἄγοντες τὰς εὐθείας ΟΒ καὶ ΟΜ, ἔχομεν τὰς ἀνισότητας AB<ΑΙ+ΙΒ καὶ ΟΜ<ΟΙ+ΙΜ, ἃς προσθέτοντες μέλος πρὸς μέλος, λαμβάνομεν

AB+ΟΜ<ΑΙ+ΙΒ+ΟΙ+ΙΜ ἢ AB+ΟΜ<ΟΒ+ΑΜ,

καὶ τέλος AB<ΑΜ, διότι ΟΒ=ΟΜ ὡς ἀκτῖνες.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 32.

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων προτάσεων ἕπονται αἱ ἑξῆς ἀντίστροφοι.

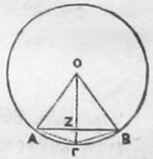
Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, ἢ εἰς ἴσους κύκλους δύο ἴσαι χορδαὶ ὑποτείνουσιν ἴσα τόξα· ἡ δὲ μικροτέρα χορδὴ ὑποτείνει μικρότερον τόξον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 33.

Ἡ ἀκτὶς ΟΓ Σχ. 41, *ἡ κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς* AB *διαιρεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὸ ὑποτεινόμενον ὑπ' αὐτῆς τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΓΑ, ΓΒ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΖΑ καὶ ΓΖΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέραν· ἄρα ΑΓ=ΓΒ.

Αἱ χορδαὶ αὗται ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, καὶ τὰ ὑποτεινόμενα ὑπ' αὐτῶν τόξα εἶναι ὁμοίως ἴσα.



Σχ. 41.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 34.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, δύο ἴσαι χορδαὶ AB, ΓΔ Σχ. 40, *ἰσάκις ἐκ τοῦ κέντρου ἀπέχουσιν.*

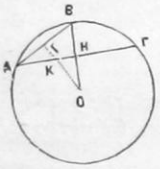
Ἀπόδειξις. Ἐὰν διπλώσωμεν τὸ σχῆμα κατὰ τὴν διάμετρον τὴν διερχομένην ἐκ τοῦ μέσου Η, τοῦ τόξου ΑΓ, ὡς εἴδομεν (Πρότ. 30), τὰ ἴσα τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ ἐφαρμόζωνται, ὡς καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν. Τὸ αὐτὸ ἄρα θέλει συμβῆ καὶ διὰ τὴν κάθετον τὴν καταβιβαζομένην ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ ἑκάστης χορδῆς (Πρότ. 11).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 35.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, ἐκ δύο ἀνίσων χορδῶν AB, ΑΓ Σχ. 42, *ἡ μᾶλλον ἀπέχουσα τοῦ κέντρου εἶναι ἡ μικροτέρα.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἄξωμεν τὰς καθέτους ΟΙ καὶ ΟΗ, θὰ ἔχωμεν ΟΗ<ΟΚ, (Πρότ. 13), ἀλλ' ἡ ΟΚ εἶναι μικροτέρα τῆς ΟΙ. Ἄρα ΟΙ>ΟΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 36.



Σχ. 42.

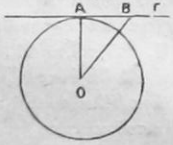
Ἐκ τῶν δύο τελευταίων προτάσεων ἕπονται αἱ ἑξῆς ἀντίστροφοι.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, δύο χορδαὶ ἰσάκις ἐκ τοῦ κέντρου ἀπέχουσαι εἶναι ἴσαι καὶ, ἐκ δύο χορδῶν ἀνισάκις τοῦ κέντρου ἀπεχουσῶν, ἡ μᾶλλον ἀπέχουσα τούτου εἶναι ἡ μικροτέρα.

2ον.

Ὁρισμός. Εὐθεῖά τις λέγεται *ἐφαπτομένη* εἰς τὴν περιφέρειαν, καθὼς καὶ περιφέρεια *ἐφαπτομένη* τῆς εὐθείας, ὅταν αἱ δύο αὗται γραμμαὶ ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 37.



Σχ. 43.

Πᾶσα γραμμὴ ΑΓ Σχ. 43, *κάθετος ἐπὶ τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος* ΟΑ *ἐφάπτεται τῆς περιφερείας.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ κέντρον μὲ οἱονδήποτε σημεῖον Β τῆς εὐθείας ταύτης, ἐκτὸς τοῦ Α σημείου, θέλομεν ἔχει ΟΒ>ΟΑ· τὸ σημεῖον Β εὑρίσκεται ἄρα ἐκτὸς τῆς περιφερείας.

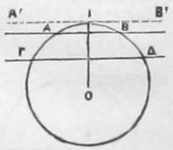
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 38.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ. *Πᾶσα εὐθεῖα* ΑΓ Σχ. 43, *ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εἰς σημεῖόν τι* Α *εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος* ΟΑ.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι, πᾶν σημεῖον τῆς ἐφαπτομένης ἐκτὸς τοῦ Α, εὑρισκόμενον ἐκτὸς τῆς περιφερείας μᾶλλον ἀπέχει τοῦ κέντρου· ἄρα ἡ ἀκτὶς ΑΟ εἶναι ἡ συντομωτέρα ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἐκ τῆς εὐθείας ΑΓ. Ἡ ἀκτὶς αὕτη εἶναι ἄρα κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΓ. Διότι ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, ὁ ποῦς τῆς καθέτου ὡς συντομωτέρας οὔσης θὰ εὑρίσκετο ἐντὸς τοῦ κύκλου, καὶ ἡ ΑΓ δὲν ἤθελεν εἶσθαι ἐφαπτομένη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 39.

Δύο παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ Σχ. 44, *διαχωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἴσα τόξα.*



Σχ. 44.

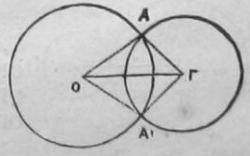
Ἀπόδειξις. Ἐὰν καταβιβάσωμεν ἐπὶ τῶν παραλλήλων τούτων τὴν κοινὴν κάθετον ΟΙ, τὸ σημεῖον Ι εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΙΒ καὶ τοῦ ΓΙΔ τόξου, (Πρ. 33). Ἄρα ΓΙ=ΙΔ καὶ ΑΙ=ΙΒ ἐξ οὗ ἀφαιροῦντες ἔχομεν ΓΙ—ΑΙ=ΙΔ—ΙΒ ἢ ΑΓ=ΒΔ.

Τὸ θεώρημα ἐφαρμόζεται ἐπίσης, ἐὰν μία τῶν παραλλήλων ἦναι ἐφαπτομένη ὡς ἡ Α'Β'.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ κέντρον μὲ τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς Ι, ἡ εὐθεῖα ΟΙ θὰ ἦναι κάθετος ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης (Πρ. 38) ὡς καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου ΓΔ τῆς ἐφαπτομένης· ἄρα τὸ σημεῖον Ι εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΓΙΔ (Πρότ. 33).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 40.

Ὁρισμός. Δύο περιφέρειαι λέγονται ἐφαπτόμεναι ὅταν ἔχωσιν ἓν καὶ μόνον κοινὸν σημεῖον.



Σχ. 45.

Ἐὰν δύο περιφέρειαι Ο *καὶ* Ι Σχ. 45 *ἔχωσιν ἓν κοινὸν σημεῖον* Α *εὑρισκόμενον ἐκτὸς τῆς γραμμῆς* ΟΓ, *ἥτις ἑνώνει τὰ κέντρα, θέλουσιν ἔχει καὶ δεύτερον σημεῖον κοινόν.*

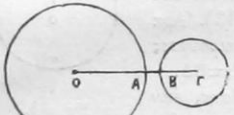
Ἀπόδειξις. Ἐὰν στρέψωμεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν ΟΓ οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Α νὰ πέσῃ εἰς τὸ Α′, θέλομεν ἔχει ΟΑ′=ΟΑ καὶ ΓΑ′=ΓΑ· τὸ σημεῖον Α′, ἀνήκει ἄρα εἰς τὰς δύο περιφερείας.

Ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι, ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται, τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἥτις ἑνόνει τὰ κέντρα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 41.

Δύο περιφέρειαι δύνανται νὰ λάβωσι πέντε διαφόρους θέσεις σχετικῶς ἡ μία πρὸς τὴν ἄλλην.

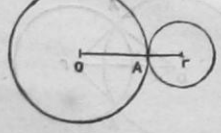
Ἀπόδειξις. α). *Ἡ μία περιφέρεια νὰ ἦναι ἐξωτερικὴ πρὸς τὴν ἄλλην* Σχ. 46, *καὶ τότε ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μεγαλητέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων.* Ἐπειδὴ τὸ ὑπερβαίνει κατὰ ΑΒ.



Σχ. 46.

β′). *Νὰ ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς* Σχ. 47 *καὶ τότε ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων.* Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς Α εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα.

γ′.) *Νὰ τέμνωνται* Σχ. 45, *καὶ τότε ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, μεγαλητέρα δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.*

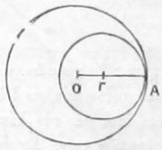


Σχ. 47.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἑνώσωμεν ἓν τῶν σημείων τῆς τομῆς Α, μετὰ τῶν δύο κέντρων, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν ΟΓ<ΟΑ+ΑΓ, πρὸς δὲ καὶ τὴν ΟΓ+ΑΓ>ΟΑ, ἐξ ἧς προκύπτει ΟΓ>ΟΑ—ΑΓ.

δ′). *Νὰ ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς* Σχ. 48 *καὶ τότε ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων.*

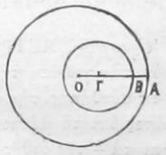
Ἀπόδειξις. Τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς Α εὑρισκομένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῶν κέντρων, ἔχομεν ΟΓ=ΟΑ—ΑΓ.



Σχ. 48.

ε′). *Ἐὰν ἡ μία τῶν περιφερειῶν περιέχῃ τὴν ἄλλην* Σχ. 49 *τότε ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἔχομεν ΟΓ=ΟΑ—ΓΒ—ΑΒ εἶναι φανερὸν ὅτι, ΟΓ<ΟΑ—ΓΒ—ΑΒ+ΑΒ, ἄρα ΟΓ<ΟΑ—ΓΒ.



Σχ. 49.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὅπως γνωρίσωμεν τὴν σχετικὴν θέσιν δύο περιφερειῶν, ἀρκεῖ νὰ συγκρίνωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 10η. Ἵνα χαράξωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου κύκλον, μεταχειριζόμεθα διαβήτην τοῦ ὁποίου τὸ ἓν σκέλος φέρει γραφίδα, τὸ δὲ ἄλλο ἀπολήγει εἰς αἰχμήν. Θέτομεν τὴν αἰχμὴν εἰς τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον ἐκλέγομεν ὡς κέντρον καὶ στρέφομεν τὸ πρῶτον σκέλος περὶ τὸ δεύτερον, ἐπιστηρίζοντες τὴν γραφίδα ἐπὶ τοῦ χάρτου. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο σκελῶν δὲν μεταβληθῇ, ἡ χαραχθεῖσα Καμπύλη εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἐπειδὴ ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ κέντρου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 11η. Διὰ νὰ χαράξωμεν κύκλον ἐπὶ τῆς γῆς ἐμπήγομεν πασσαλίσκον εἰς τὸ κέντρον, ἔπειτα λαμβάνομεν χορδὴν τῆς ὁποίας τὰ δύο ἄκρα ἔχουσιν ἀνὰ ἕνα κρίκον ἐξ ὧν τὸν μὲν ἕνα διαπερῶμεν εἰς τὸν ἐν τῷ κέντρῳ πασσαλίσκον, τὸν δὲ ἄλλον εἰς ἕτερον τὸν ὁποῖον στρέφομεν περὶ τὸ κέντρον. Ἡ χορδὴ ὅμως πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ τάνυσμα κατὰ τὴν κίνησιν αὐτῆς καὶ οἱ πασσαλίσκοι τὴν αὐτὴν θέσιν, ὥστε ἡ ἀκτὶς νὰ ἦναι σταθερὰ, καὶ τότε ἡ αἰχμὴ τοῦ κινουμένου πασσαλίσκου θέλει χαράξει περιφέρειαν.

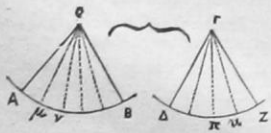
§.—5.

Μέτρον τῶν γωνιῶν. Ἐὰν ἐξ ἑκάστης κορυφῆς δύο γωνιῶν γράψωμεν τόξον κύκλου διὰ τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος, ὁ λόγος τῶν γωνιῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τόξων τῶν διαχωριζομένων ὑπὸ τῶν πλευρῶν των. Ἐκτίμησις τῶν γωνιῶν εἰς μοίρας, πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτά. Ἐγγεγραμμέναι γωνίαι. Ἐφαρμογαί. Ἐργαλεῖα διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν γωνιῶν ἐπὶ χάρτου ἢ ἐπὶ τῆς γῆς κεχαραγμένων. Ἀναγωγεύς. Γραφόμετρον.

Ὁρισμός. ΜΕΤΡΟΝ γωνίας τινὸς λέγεται ὁ λόγος αὐτῆς πρὸς τὴν γωνίαν τὴν λαμβανομένην ὡς μονάδα. Λαμβάνομεν δὲ ἐκ συνθήκης τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὡς μονάδα τῶν γωνιῶν. Λέγοντες ὅτι τὸ μέτρον γωνίας τινὸς εἶναι $\frac{3}{4}$ ἐννοοῦμεν ὅτι αὕτη εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας. Ἀνάγομεν δὲ τὴν σύγκρισιν τῶν γωνιῶν εἰς τὴν τῶν τόξων διὰ τῆς ἑξῆς προτάσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 42.

Ὁ λόγος τῶν γωνιῶν ΑΟΒ *καὶ* ΔΓΖ Σχ. 50 *εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τῶν τόξων* ΑΒ *καὶ* ΔΖ *τῶν γεγραμμένων ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτῶν, ὡς ἀπὸ κέντρου, μετὰ τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος καὶ διαχωριζομένων ὑπὸ τῶν πλευρῶν των.*



Σχ. 50.

Ἀπόδειξις. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΔΖ ἔχουσι κοινὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται πεντάκις μὲν εἰς τὸ τόξον ΑΒ τετράκις δὲ εἰς τὸ ΔΖ θὰ ἔχωμεν $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΖ}} = \frac{5}{4}$

Διαιροῦμεν τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΔΖ εἰς μέρη ἴσα τῷ κοινῷ μέτρῳ, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως μ, ν, ... π, κ, ... ἄγομεν τὰς ἀκτῖνας Ομ, Ον, ... Γπ, Γκ, ... καὶ οὕτω σχηματίζομεν μερικὰς γωνίας ΑΟμ, μΟν, ... ΖΓκ, πΓκ, ... ἴσας ἀλλήλαις. Τῷ ὄντι ἵνα συγκρίνωμεν τὰς γωνίας μΟν, πΓκ, μεταφέρομεν τὸν κύκλον Γ ἐπὶ τὸν κύκλον Ο, οὕτως, ὥστε τὰ κέντρα αὐτῶν νὰ συμπέσωσιν, ὡς καὶ αἱ περιφέρειαι καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν στρέψωμεν αὐτοὺς πέριξ τοῦ οὕτως ἀποκατασταθέντος κοινοῦ κέντρου. Ἀλλ' ἐὰν φέρωμεν τὸ σημεῖον κ εἰς τὸ σημεῖον μ, ἐπειδὴ τὰ τόξα πκ καὶ μν εἶναι ἴσα, τὸ σημεῖον π συμπίπτει εἰς τὸ ν. Αἱ εὐθεῖαι Γκ καὶ Γπ συμπίπτουσιν διαδοχικῶς μὲ τὰς εὐθείας Ομ, Ον ἄρα αἱ γωνίαι πΓκ καὶ μΟν ἐφαρμόζονται καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι μία οἱαδήποτε τῶν μερικῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζουσῶν τὴν γωνίαν ΑΟΒ, εἶναι ἴση μὲ μίαν οἱανδήποτε τῶν μερικῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζουσῶν τὴν γωνίαν ΔΓΖ· ἄρα ὅλαι αἱ μερικαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΟΒ περιλαμβάνει πέντε ἐξ αὐτῶν, ἡ δὲ ΔΓΖ τέσσαρας· ἔχομεν ἄρα

$$\frac{\text{ΑΟΒ}}{\text{ΔΓΖ}} = \frac{5}{4} \text{ καὶ ἑπομένως } \frac{\text{ΑΟΒ}}{\text{ΔΓΖ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΖ}}$$

Ἡ πρότασις αὕτη ἀφοῦ δύναται νὰ ἀποδειχθῇ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν ἦναι τὸ κοινὸν μέτρον, ὁμοίως ἐπαληθεύει καὶ ὅταν τὸ κοινὸν τοῦτο μέτρον ἦναι ἀπειροελάχιστον, τουτέστιν ὅταν τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΔΖ ἦναι ἔκμετρα.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ γωνίαι, ὡς ἡ ΑΟΒ καὶ ΔΓΖ αἱ ἔχουσαι τὴν κορυφήν των εἰς τὸ κέντρον κύκλου τινὸς λέγονται *κεντρικαὶ γωνίαι*, καὶ ἡ προηγουμένη πρότασις δύναται νὰ ἐκφωνηθῇ οὕτως· *αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ἔχουσι τοιοῦτον λόγον, ὁποῖον τὰ διαχωριζόμενα ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῶν τόξα ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν.*

Εἰς τὸ πρακτικὸν μέρος ἵνα συγκρίνωμεν τὰ τόξα ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἢ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν ὑπάρχοντα, καὶ ἑπομένως τὰς κεντρικὰς γωνίας, διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν οἱασδήποτε ἀκτῖνος διὰ γραμμῶν ἐκ τοῦ κέντρου ἀγομένων καὶ ἀποληγουσῶν εἰς τὴν περιφέρειαν εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν *μοίρας*· ἑκάστην δὲ μοῖραν διαιροῦμεν εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν *πρῶτα λεπτὰ* καὶ ἕκαστον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα.

Οὕτως ἕκαστον τόξον δύναται νὰ ἐκφρασθῇ εἰς μοίρας,

πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτά· π. χ. λέγομεν τόξον 68 μοιρῶν, 47 πρώτων καὶ 15 δευτέρων λεπτῶν, τὸ ὁποῖον γράφομεν οὕτω $68^0\,47'\,15''$.

Καλεῖται γωνία μιᾶς μοίρας ἐκείνη ἧς ἡ κορυφὴ ὅταν τεθῇ εἰς τὸ κέντρον διηρημένου κύκλου διαχωρίζεται ὑπὸ τῶν πλευρῶν της τόξον μιᾶς μοίρας, γωνία δὲ ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ, ἡ γωνία τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ διαχωρίζουσι τόξον ἑνὸς λεπτοῦ, καὶ γωνία ἑνὸς δευτέρου λεπτοῦ ἡ γωνία τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ διαχωρίζουσι τόξον ἑνὸς δευτέρου λεπτοῦ.

Οἱαδήποτε γωνία δύναται ἄρα νὰ ἐκτιμηθῇ εἰς μοίρας, λεπτὰ καὶ εἰς δευτερόλεπτα, ὡς τὸ τόξον.

Αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας διαχωρίζουσι τόξον 90^0, τοῦτέστι τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας, ἐπειδὴ δύο διάμετροι κάθετοι διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη. Δυνάμεθα ἄρα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν διὰ τῆς γωνίας 90^0.

Δύο παραπληρωματικῶν γωνιῶν τὸ ἄθροισμα ἰσοδυναμεῖ μὲ $2\times 90^0=180^0$.

Ὅταν γωνία τις ἦναι ἐκπεφρασμένη διὰ μοιρῶν καὶ πρώτων καὶ δευτέρων λεπτῶν, λαμβάνομεν τὸ παραπλήρωμα αὐτῆς ἀφαιροῦντες τὴν γωνίαν ἀπὸ 180^0. Οὕτω τὸ παραπλήρωμα τῆς γωνίας $68^0\,47'\,15''$ εἶναι $111^0\,12'\,45''$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοδυναμεῖ μὲ 180^0.

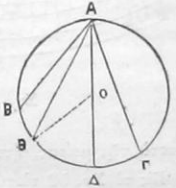
Ἐὰν τὸ τρίγωνον ἦναι ὀρθογώνιον, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἑτέρων γωνιῶν ἰσοδυναμεῖ μὲ 90^0, αἱ δὲ γωνίαι λέγονται συμπληρωματικαί. Ἐὰν ἡ μία τούτων ἦναι γνωστή, ἀφαιροῦντες αὐτὴν ἀπὸ 90^0 εὑρίσκομεν τὴν ἄλλην. Οὕτω τὸ συμπλήρωμα τῆς γωνίας $68^0\,47'\,15''$ εἶναι $21^0\,12'\,45''$.

Ὁρισμός. Ἐγγεγραμμένη γωνία λέγεται ἐκείνη τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου, καὶ τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι χορδαί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 43.

Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου τόξου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της, ἤτοι ὁ λόγος τῆς γωνίας πρὸς τὴν γωνίαν τὴν λαμβανομένην ὡς μονάδα, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ ἡμίσεως τοῦ τόξου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της πρὸς τὴν μονάδα τοῦ τόξου.

Ἀπόδειξις. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου Σχ. 51 ἄγομεν τὴν διάμετρον ΑΔ καὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ. Ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΒΟΔ τοῦ τριγώνου ΒΟΑ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν ΟΑΒ καὶ ΟΒΑ, (Πρ. 22)· ἀλλ' αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι, ἐπειδὴ ΟΑ=ΟΒ ὡς ἀκτῖνες· ἡ γωνία ΒΟΔ ἄρα εἶναι διπλασία τῆς γωνίας ΟΑΒ ἢ τῆς ΒΑΔ. Ἀλλὰ ΒΟΔ ὡς κεντρικὴ γωνία ἔχει μέτρον τὸ τόξον ΒΔ τὸ διαχωριζόμενον ὑπὸ τῶν πλευρῶν της, ἄρα ἡ γωνία ΒΑΔ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΔ.



Σχ. 51.

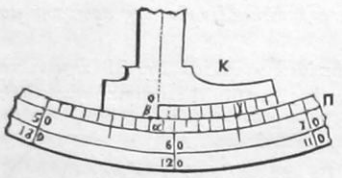
Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ γωνία ΔΑΓ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔΓ. Ἄρα ΒΑΓ ἤτις εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΒΑΔ, ΔΑΓ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΔ πλέον τοῦ ἡμίσεως τοῦ τόξου ΔΓ, τοῦτέστι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΓ.

Ἐὰν πρόκηται περὶ τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΒ', ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν Β'ΑΔ καὶ ΒΑΔ, ἔπεται ὅτι ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου Β'Δ μεῖον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ΒΔ, τοῦτέστι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΒ'.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία εἰς ἡμιπεριφέρειαν εἶναι γωνία ὀρθή, ἐπειδὴ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης ἡμιπεριφερείας, τοῦτέστι τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 12η. Εἰς τὸ πρακτικὸν μέρος αἱ περιφέρειαι διαιροῦνται εἰς μοίρας καὶ ἡμισείας μοίρας. Ἵνα δὲ ἐκτιμήσωμεν τὰ λεπτὰ ἀνατρέχομεν εἰς τὸν Κυκλικὸν Βερνιέρον, ὅστις εἶναι μικρός τις κυκλικὸς κανὼν Κ Σχ. 52, τοῦ ὁποίου τὸ ἐσωτερικὸν τόξον ἔχει ἀκριβῶς τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ἣν καὶ ἡ διηρημένη περιφέρεια Π, καὶ ὅστις δύναται νὰ κινηθῇ κατὰ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ταύτης. Τὸ μῆκος τοῦ Βερνιέρου περιέχει 29 διαιρέσεις τῆς περιφερείας, καὶ διαιρεῖται εἰς 30 ἴσα μέρη. Διὰ τοῦ ἐργαλείου τούτου δυνάμεθα ἄρα

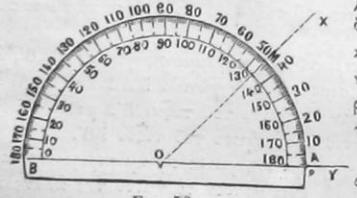
ὡς ἐλέχθη (ἐφαρμ. 9), νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰ τριακοστὰ τῆς μιᾶς τῶν διαιρέσεων τῆς περιφερείας. Ἐὰν ἡ περιφέρεια ἦναι διῃρημένη εἰς ἡμισείας μοίρας, διὰ τοῦ Βερνιέρου δυνάμεθα νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰ τριακοστὰ τῆς ἡμισείας μοίρας, τουτέστι τὰ ἑξηκοστὰ τῆς μοίρας, ἢ τὰ πρῶτα λεπτά. Ἐὰν ἡ περιφέρεια ἦναι διῃρημένη εἰς μοίρας, ὁ Βερνιέρος δεικνύει τὰ τριακοστὰ τῆς μοίρας, ἤτοι τόξα 2 λεπτῶν.



Σχ. 52.

Εἰς τὸ Σχ. 52 τὸ τόξον αβ εἶναι 42 λεπτῶν· διότι ἡ ἑβδόμη διαίρεσις τοῦ Βερνιέρου ταὐτίζεται μὲ διαίρεσίν τινα τῆς περιφερείας, καὶ ἡ διαφορὰ μιᾶς διαιρέσεως τοῦ Βερνιέρου καὶ τῆς περιφερείας εἶναι $^1/_{10}$ τῆς μοίρας ἤτοι ἓξ λεπτῶν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 13η. Διὰ τοῦ Ἀναγωγέως καταμετροῦμεν τὰς γωνίας ἐπὶ τοῦ χάρτου Σχ. 53. Οὗτος δὲ εἶναι ἡμικύκλιον συνήθως ἐκ χαλκοῦ ἢ κέρατος, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια καλουμένη Ἄντυξ, εἶναι διῃρημένη εἰς μοίρας καὶ ἐπαρκεῖ διὰ τὰς μικρὰς ἐργασίας.



Σχ. 53.

Αἱ γραμμαὶ τῆς διαιρέσεως σημειοῦνται 10 ἀνὰ 10 ἢ 5 ἀνὰ 5, ἐκ τοῦ Ο μέχρι τῶν 180°, καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΜΒ καὶ κατὰ τὴν ΒΜΑ.

Ἔστω πρὸς καταμέτρησιν ἡ γωνία ΧΟΥ, φέρομεν τὸ ἐργαλεῖον ἐπὶ τῆς γωνίας ταύτης οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον αὐτοῦ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν κορυφὴν Ο, καὶ ἡ διάμετρος ΑΒ νὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν ΟΥ μιᾶς τῶν πλευρῶν, τότε ἡ ἄλλη πλευρὰ ΟΧ τῆς γωνίας συναπαντᾷ τὴν ἐξωτερικὴν περιφέρειαν τοῦ Ἀναγωγέως εἰς σημεῖόν τι Μ, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν διαχωριζομένων μοιρῶν ὑπὸ τῶν σημείων Α καὶ Μ εἶναι τὸ μέτρον τῆς προταθείσης γωνίας, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος

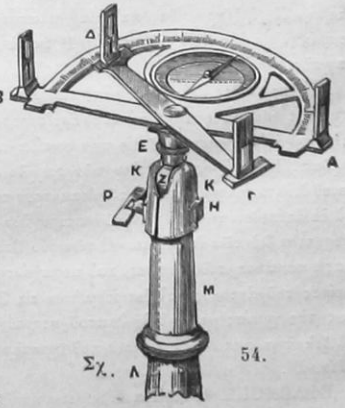
εἶναι τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΑΜ. Εἰς τὸ σχῆμα ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι 46°.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ. Ἵνα κατασκευάσωμεν εἰς σημεῖόν τι Ο δεδομένης εὐθείας ΒΥ γωνίαν ἴσην μὲ γνωστὴν, θέτομεν τὴν διάμετρον τοῦ ἀναγωγέως ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΥ οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον νὰ πίπτῃ εἰς τὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς ζητουμένης γωνίας, σημειοῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου σημεῖόν τι Μ, ἀπέναντι τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀναγωγέως, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τῆς δοθείσης γωνίας, καὶ ἄγομεν τὴν ΟΜ, ἡ δὲ γωνία ΜΟΥ, εἶναι ἡ ζητουμένη, ἐπειδὴ ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον τῆς δεδομένης γωνίας.

Ὅταν ὁ ἀναγωγεὺς ἦναι ἐκ χαλκοῦ, ὁ ἄντυξ εἶναι ἀνοικτὸς ἐκ τῆς διαμέτρου μέχρις ἀποστάσεώς τινος τῆς περιφερείας, ἵνα διακρίνωμεν τὰς εὐθείας ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐργαζόμεθα· εἰς δὲ τὸ κέντρον αὐτοῦ εὑρίσκεται χαραγμὴ δι' ἧς διακρίνομεν τὸ σημεῖον, εἰς ὃ πρέπει νὰ τεθῇ τὸ κέντρον αὐτοῦ.

Ἀναγωγεὺς μεγαλητέρας ἀκτῖνος δύναται νὰ χρησιμεύσῃ εἰς τὸ νὰ καταμετρῶμεν καὶ νὰ χαράττωμεν γωνίας ἐπὶ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν μεγαλητέρας ἐκτάσεως, ὡς ἐπὶ τραπέζης, ἐπὶ σανιδώματος, ἐπὶ τοίχου κτλ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 14η. Ἐπὶ τῆς γῆς μεταχειριζόμεθα μεγαλήτερον ἀναγωγέα· ὅστις καλεῖται Γραφόμετρον Σχ. 54. Τοῦτο δὲ εἶναι ἡμικύκλιον διῃρημένον εἰς μοίρας, καὶ ἡμισείας μοίρας, ἔνθα αἱ γραμμαὶ τῆς διαιρέσεως σημειοῦνται κατὰ δύο διευθύνσεις, ὡς καὶ εἰς τὸν ἀναγωγέα. Τὸ ἡμικύκλιον φέρει δύο Δίοπτρα μὲ τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ σκοπεύωμεν κατὰ δύο διευθύνσεις. Ἐν τῶν διόπτρων τὸ ΑΒ εἶναι σταθερὸν καὶ ἀποτελεῖ μέρος τοῦ ἄντυγος, τὸ ἕτερον ΓΔ στρεφόμενον περὶ τὸν κάθετον ἄξονα εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ



Σχ. 54.

ἄντυγος, δύναται νὰ κινηθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ὁ ἄντυξ προσαρμόζεται εἰς ῥάβδον ἐκ χαλκοῦ Ε, τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνσις εἶναι ἡ προεκβολὴ τοῦ ἄξωνος καὶ ἀπολήγει εἰς μικρὰν σφαῖραν Ζ, διάμετρον ἔχουσαν δύο ἕως τρία ἑκατοστόμετρα.

Ἡ σφαῖρα ἐμπλέκεται μεταξὺ δύο κογχῶν Κ,Κ τὰς ὁποίας δυνάμεθα κατ' ἀρέσκειαν νὰ χαλαρώσωμεν ἢ νὰ συσφίγξωμεν διὰ τοῦ κοχλίου Ρ, οὕτω δὲ ἐπιτρέπεται ἢ ἐμποδίζεται πᾶσα κίνησις τῆς σφαίρας, καὶ ἑπομένως ἡ ἀλλαγὴ τῆς διευθύνσεως τοῦ ἄντυγος.

Τὸ σύστημα τοῦτο δι' οὗ διευθετοῦμεν κατὰ βούλησιν τὸν ἄντυγα καλεῖται ΓΟΝΥ.

Αἱ κόγχαι πρὸς τὰ κάτω συνδέονται διὰ ῥάβδου ἀπολήγούσης εἰς κοῖλον κύλινδρον Μ, ἢ περιστόμιον.

Εἰς τὸ περιστόμιον τοῦτο ἐναρμόζομεν τὸν κορμὸν Λ τοῦ τρίποδος, ὅστις φέρει τὸ ἐργαλεῖον. Οἱ πόδες τοῦ τρίποδος πρὸς τὰ ἄνω προσκολλῶνται εἰς τὸν κορμὸν Λ διὰ κοχλιῶν κ ἐπιτρεπόντων τὴν κατ' ἀρέσκειαν χαλάρωσιν ἢ σύσφιγξιν τῶν ποδῶν πρὸς τὸν κορμὸν Σχ. 55. Ἕκαστος ποὺς ἀπολήγει εἰς Ἀκίδα Ο, ἐκ σιδήρου, ἥτις ἐμπηγομένη εἰς τὸ ἔδαφος χορηγεῖ τὴν ἀναγκαίαν στερεότητα εἰς τὸ ἐργαλεῖον.

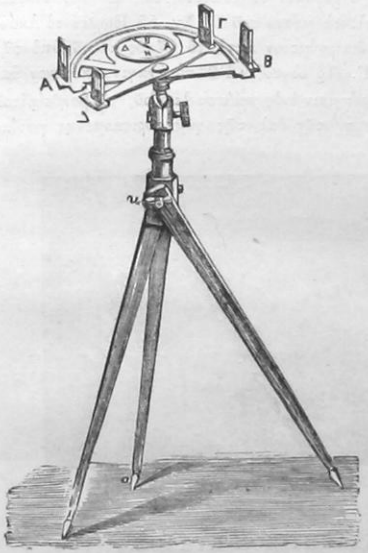
Τὸ δὲ δίοπτρον εἶναι κανὼν Κ, Σχ. 56 ὅστις φέρει δύο Πτερύγια, τοὐτέστι πλάκας Π ἐκ χαλκοῦ, ἐμπηγομένας καθέτως εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κανόνος, ἑκάστη τῶν ὁποίων φέρει στενωτάτην καὶ ἐπιμήκη χαραγμὴν Χ, ἢ Παρωπίδα, καὶ μίαν πλατυτέραν ὁπὴν ἢ Θυρίδα διαιρουμένην εἰς δύο ὑπὸ τῆς τριχὸς Τ, κατὰ τὴν προεκβολὴν τῆς χαραγμῆς.

Αἱ Παρωπίδες καὶ αἱ Θυρίδες τῶν δύο πτερυγίων τοῦ αὐτοῦ διόπτρου εἶναι διατεταγμέναι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, ἤτοι ἡ Παρωπὶς τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν Θυρίδα τοῦ ἑτέρου, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα. Καὶ τὸ μὲν ἐπίπεδον τῶν τριχῶν τῶν πτερυγίων τοῦ σταθεροῦ διόπτρου, διέρχεται διὰ τῆς διαμέτρου τοῦ ἡμικυκλίου 0^0—180^0, τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν τριχῶν τῶν πτερυγίων τοῦ κινουμένου διόπτρου διέρχεται διὰ τῶν διαιρέσεων Ο τῶν δύο Βερνιέρων τῶν εὑρισκομένων κατὰ τὰ ἄκρα τοῦ κανόνος, καὶ περιεχόντων ἑκατέρου 29 ἡμισείας μοίρας τοῦ ἄντυγος καὶ διαιρουμένων εἰς 30 ἴσα μέρη, καὶ ἑπομένως τὰς γωνίας μετὸν ἑνὸς λεπτοῦ μετρούντων.

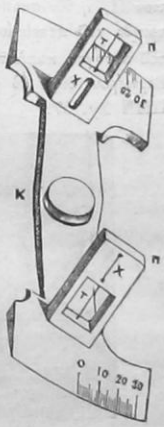
Διὰ τὴν καταλλήλον θέσιν τοῦ γραφομέτρου ἴδε §. 16 καὶ 17. Μέρ. Β'.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 15η. Ἵνα θέσωμεν τὴν διάμετρον τοῦ γραφομέτρου

κατὰ τὴν διεύθυνσιν γραμμῆς εὐθυγραμμημένης, ἀρκεῖ νὰ τοποθετήσωμεν τὸ ἐργαλεῖον μεταξὺ τῶν ἄκρων αὐτῆς οὕτως, ὥστε ὅταν σκοπεύωμεν ἐκ τοῦ πτερυγίου Α διὰ μέσου τοῦ Β καὶ ἀντιστρόφως,



Σχ. 55.



Σχ. 56.

τὸ πρῶτον ὁρώμενον ἀκόντιον νὰ κρύπτῃ τὸ ἄλλο, καὶ νὰ τέμνηται κατὰ τὸ ὕψος αὐτοῦ ὑπὸ τῆς τριχὸς τοῦ πτερυγίου Β.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 16η. Ἵνα καταμετρήσωμεν διὰ τοῦ γραφομέτρου τὴν σχηματιζομένην γωνίαν ὑπὸ δύο διευθύνσεων Σχ. 57, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὴν κορυφὴν Μ τῆς γωνίας καὶ ἓν σημεῖον Ν καὶ Π, ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς, εἰς τὸ ὁποῖον ἐμπήγομεν ἀκόντιον, ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας οὐδὲν ἀξιοσημείωτον ἀντικείμενον, τοὐτέστι κωδωνοστάσιον, οἰκοδομὴ, δένδρον, πύργος, κορυφὴ ὄρους κ.τ.λ. τὸ ὁποῖον νὰ χρησιμεύσῃ ὡς σκοπός. Καὶ τῷ ὄντι, σταθμεύομεν ἐπὶ τῆς κορυφῆς Μ, ἤτοι τοποθετοῦμεν

τὸ ἐργαλεῖον οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου νὰ ἦναι ἀκριβῶς ἄνω τῆς κορυφῆς Μ, ὅπερ γίνεται διὰ τῆς μολυβδαίνης (ἐφαρμ. 6, δ΄.). Διευθύνομεν ἔπειτα τὴν διάμετρον κατὰ τὴν ΜΝ, ὡς ἐλέχθη προηγουμένως, στρέφομεν τὸ δίοπτρον, ἕως οὗ σκοπεύοντες ἐκ τοῦ πτερυγίου Δ καὶ διὰ μέσου τοῦ Γ, Σχ. 55 ἴδωμεν τὸ ἀκόντιον Π, ἢ τὸν σκοπὸν διαιρούμενον κατὰ τὸ μῆκος αὐτοῦ ὑπὸ τῆς τριχὸς τοῦ πτερυγίου Γ. Τὸ δὲ τόξον ΓΒ τὸ ἀναγινωσκόμενον ἐπὶ τοῦ ἄντυγος, κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ, τῇ βοηθείᾳ τοῦ Βερνιέρου, δίδει τὸ μέτρον τῆς ἐπὶ τῆς γῆς εὑρισκομένης γωνίας ΠΜΝ Σχ. 57.



Σχ. 57.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 16΄. Ἐκ τῶν ὅσων ἀνεφέραμεν περὶ Κυκλικοῦ Βερνιέρου εἶναι φανερὸν ὅτι γωνία τις π. χ. 6° ἐπὶ τῆς γῆς ὑπάρχουσα δύναται νὰ καταμετρηθῇ κατὰ προσέγγισιν μέτρον ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ· τοῦτέστι τὸ λάθος εἶναι ὀλιγώτερον ἑνὸς λεπτοῦ πρώτου· τούτου τεθέντος, ἐὰν διά τινος ἐργαλείου ἠδυνάμεθα νὰ καταμετρήσωμεν ἀπ' εὐθείας πολλαπλάσιόν τι τῆς γωνίας ταύτης π. χ. τὸ ἑξαπλοῦν 36° τοῦ ὁποίου ἡ προσέγγισις εἶναι ἐπίσης μέτρον ἑνὸς λεπτοῦ πρώτου, τότε τὸ ἕκτον τοῦ πολλαπλασίου τούτου θέλει ἐκφράζει τὸ μέτρον τῆς ἐπὶ τῆς γῆς ὑπαρχούσης γωνίας μὲ προσέγγισιν $^1/_6$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ, τοῦτέστιν μέτρον δέκα δευτερολέπτων· τὸ ἐργαλεῖον δὲ ὅπερ μεταχειριζόμεθα ἐν τῇ ἐργασίᾳ ταύτῃ εἶναι ὁ Ἐπαναληπτικὸς Κύ-

κλος τοῦ ὁποίου τήν τε εἰκόνα, περιγραφὴν καὶ χρῆσιν θέλομεν ἀναφέρει εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν· φθάνομεν δὲ εἰς μεγαλητέραν προσέγγισιν λαμβάνοντες μεγαλήτερον πολλαπλάσιον τῆς καταμετρηθησομένης γωνίας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 17η. Τί ἐννοοῦμεν λέγοντες Καταμέτρησιν ἢ Σχεδίασιν Γωνίας, ἢ Σχήματος ἐπὶ τῆς γῆς εὑρισκομένου; Πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι διὰ τοῦ γραφομέτρου δὲν μετροῦμεν τὴν ἐπὶ τῆς γῆς γωνίαν ΝΜΠ, ἀλλὰ τὴν γωνίαν Ν΄Μ΄Π΄ ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου εὑρισκομένην, τοὐτέστιν ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου τῆς διευθύνσεως τῆς Κατακορύφου §. 1, ἐφαρμ. 6.

Πρὸς τοῦτο ἀποκαθιστῶμεν τὸν ἄντυγα τοῦ γραφομέτρου ὁριζόντιον διὰ μέσου τῆς Στάθμης διὰ Φυσαλίδος §. 16. Μέρ. Β΄. καὶ τὰς πλευρὰς ΜΝ, ΜΠ τῆς γωνίας ΝΜΠ μετροῦντες ὁριζοντίως §. 1. ἐφαρμ. 6 καὶ 7. Καὶ ἐν γένει ὅταν πρόκηται νὰ καταμετρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν, ἢ νὰ σχεδιάσωμεν τὸ σχῆμα ἀγροῦ, ἢ πόλεως, καταμετροῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἢ σχεδιάζομεν τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον κατέχει ὁ ἀγρὸς ἢ ἡ πόλις ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου διερχομένου ἐκ τοῦ ὑψηλοτέρου ἢ χαμηλοτέρου σημείου τοῦ ἀγροῦ ἢ τῆς πόλεως. Τὸ δὲ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προκύπτον σχῆμα εἰς μὲν τὴν γεωμετρίαν λέγεται Προβολὴ, εἰς δὲ τὴν ἀγρομετρίαν Προτοσοφόρος Βάσις.

Ὁ λόγος τῆς τοιαύτης καταμετρήσεως εὑρίσκεται εἰς τὰς §. 16 καὶ 17 τοῦ Β΄ Μέρους.

Ἄρα εἰς τὸ πρακτικὸν μέρος τῆς γεωμετρίας δὲν μετροῦμεν ἢ σχεδιάζομεν τὰς ἐπὶ τῆς γῆς γραμμὰς, γωνίας ἢ σχήματα, ἀλλὰ τὰς προβολὰς αὐτῶν ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Τοιοῦτος δὲ εἶναι ὁ σκοπὸς τῆς **ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ.**

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὁριζόντιον Ἐπίπεδον εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῶν ἠρεμούντων ὑδάτων μικρᾶς ἐκτάσεως.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 18η. Ἵνα σχηματίσωμεν ἐπὶ τῆς γῆς καὶ εἰς σημεῖόν τι Μ δεδομένης εὐθείας ΜΝ γωνίαν ἴσην μὲ δεδομένην γωνίαν, ἐμπήγομεν τὸ ἀκόντιον Ν ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς δεδομένης εὐθείας, καὶ σταθμεύομεν εἰς τὸ σημεῖον Μ οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον μὲν τοῦ γραφομέτρου νὰ ἦναι ἄνω τοῦ σημείου τούτου, ἡ δὲ διάμετρος νὰ διευθύνηται κατὰ τὴν ΜΝ καὶ στρέφομεν τὸ κινούμενον δίοπτρον ἕως οὗ τὸ τόξον ΓΒ ἐκφράσῃ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς λεπτοῦ τὸ μέτρον τῆς δοθείσης γωνίας. Ἐπὶ τέλους σκοπεύοντες διὰ τῶν πτερυγίων

Δ καὶ Γ καὶ ἐμπήγοντες τὸ ἀκόντιον Π ἐπὶ τῆς διευθύνσεως ΔΓ, βλέπομεν ὅτι ἡ διεύθυνσις ΜΠ σχηματίζει μὲ τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΜΝ, γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν. Σχ. 55 καὶ 56.

---

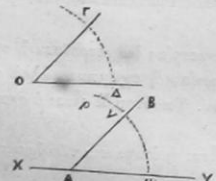
§.—6.

1ον. Στοιχειώδη προβλήματα πρὸς κατασκευὴν τῶν γωνιῶν καὶ τῶν τριγώνων. 2ον. Ἀγωγὴ τῶν καθέτων καὶ τῶν παραλλήλων. Ἁπλοποίησις τῆς κατασκευῆς διὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τοῦ Ἀναγωγέως. Δοκιμὴ τοῦ ὀρθογωνίου. Ἐφαρμογαί. Ἐργαλεῖον πρὸς ἀγωγὴν τῶν καθέτων καὶ παραλλήλων ἐπὶ τῆς γῆς.

1ον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.

Εἰς τὸ σημεῖον Α *εὐθείας τινὸς* ΧΥ Σχ. 58 *νὰ σχηματισθῇ γωνία ἴση τῇ δεδομένῃ γωνίᾳ* ΓΟΔ.



Σχ. 58.

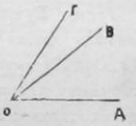
Κατασκευή. Ἐκ τοῦ σημείου Ο, ὡς ἀπὸ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε, γράφομεν τὸ τόξον κύκλου ΓΔ ὡς καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, τὸ ἀόριστον τόξον μρ· ἔπειτα λαμβάνομεν ἄνοιγμα διαβήτου ἴσον τῇ χορδῇ τοῦ τόξου ΓΔ, τὸ ὁποῖον φέρομεν ἐπὶ τοῦ τόξου μρ, ἀπὸ μ εἰς ν, καὶ ἑνοῦμεν τὰ σημεῖα Α καὶ ν, καὶ τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ θέλει σχηματίσει μὲ τὴν ΑΥ τὴν γωνίαν ΒΑΥ, ἴσην τῇ δεδομένῃ γωνίᾳ.

Ἀπόδειξις. Τὰ τόξα ΓΔ καὶ μν εἶναι ἴσα, ὡς γεγραμμένα μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, ἔχουν δὲ καὶ ἴσας χορδάς, ἄρα αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ΓΟΔ καὶ ΒΑΥ εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.

Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ μὲ τὴν διαφορὰν δύο δεδομένων γωνιῶν.

Λύσις. α. Ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΟ Σχ. 59, ἐπὶ τῆς ὁποίας εἰς τὸ σημεῖον Ο, σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΑΟΒ ἴσην μὲ μίαν τῶν δεδομένων γωνιῶν, καὶ τὴν γωνίαν ΒΟΓ, ἴσην μὲ τὴν δευτέραν, τότε ἡ γωνία ΑΟΓ θέλει εἶσθαι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν προταθεισῶν γωνιῶν.



Σχ. 59.

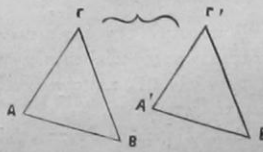
Λύσις. β'. Ἀχθήτω εὐθεῖά τις ΑΟ, καὶ σχηματισθήτω εἰς τὸ σημεῖον Ο ἡ γωνία ΑΟΓ, ἴση τῇ μεγαλητέρᾳ τῶν δύο δεδομένων γωνιῶν, καὶ ἡ γωνία ΓΟΒ ἴση τῇ μικροτέρᾳ, τότε ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο δεδομένων γωνιῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν πρόκηται νὰ κατασκευασθῇ τὸ συμπλήρωμα δεδομένης τινὸς γωνίας ΒΑΥ Σχ. 58 ἀρκεῖ νὰ προεκβάλωμεν μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΥΑ κατὰ τὴν ΑΧ, ἵνα ἡ γωνία ΒΑΧ ἦναι τὸ ζητούμενον συμπλήρωμα (Πρότ. 2).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.

Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ καὶ αἱ εἰς αὐτὴν προσκείμεναι γωνίαι εἶναι γνωσταί.

Λύσις. Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ Σχ. 20 ἴσην μὲ τὴν γνωστὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου καὶ εἰς μὲν τὸ σημεῖον Α κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΒΑΓ, ἴσην μὲ μίαν τῶν γνωστῶν γωνιῶν, εἰς δὲ τὸ σημεῖον Β τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην μὲ τὴν δευτέραν τῶν δεδομένων καὶ τότε αἱ οὕτως ἀγόμεναι εὐθεῖαι θέλουσι συναπαντηθῇ εἰς τὸ σημεῖον Γ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 20.

Διὰ νὰ ἦναι δὲ δυνατὴ ἡ κατασκευὴ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων γωνιῶν νὰ ἦναι μικρότερον 2 ὀρθῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.

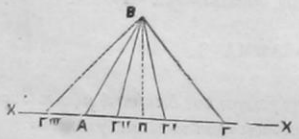
Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ καὶ ἡ μεταξὺ αὐτῶν περιλαμβανομένη γωνία εἶναι γνωσταί.

Λύσις. Σχηματίζομεν τὴν γωνίαν Γ Σχ. 20 ἴσην μὲ τὴν γνωστὴν γωνίαν καὶ ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς λαμβάνομεν ἐκ τῆς κορυφῆς ἀρχίζοντες τὸ μῆκος ΑΓ, ἴσον μὲ τὴν μίαν τῶν δεδομένων πλευρῶν, καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης τὸ μῆκος ΓΒ, ἴσον μὲ τὴν δευτέραν πλευρὰν καὶ ἄγομεν τὴν ΑΒ, καὶ τότε σχηματίζεται οὕτω τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.

Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ καὶ ἡ ἀντικειμένη γωνία εἰς μίαν τῶν πλευρῶν τούτων εἶναι γνωσταί.

Λύσις. Σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΒΑΧ Σχ. 60 ἴσην μὲ τὴν δεδομένην καὶ ἀρχίζοντες ἐκ τῆς κορυφῆς, λαμβάνομεν τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν προσκειμένην πλευρὰν εἰς τὴν γνωστὴν γωνίαν. Ἐκ τοῦ σημείου Β ὡς ἀπὸ κέντρου μὲ ἄνοιγμα διαβήτου ἴσον μὲ τὴν γνωστὴν πλευρὰν τὴν ἀντικειμένην εἰς τὴν δεδομένην γωνίαν, γράφομεν τόξον κύκλου τέμνον τὴν ΑΧ εἰς τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἄγομεν τὴν ΒΓ, καὶ σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 60.

Διὰ νὰ ἦναι δὲ δυνατὴ ἡ λύσις τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος, πρέπει τὸ γραφόμενον τόξον νὰ συναπαντᾷ τὴν ΑΧ· πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ ἡ πλευρὰ ΒΓ, ἡ ἀντικειμένη εἰς τὴν δεδομένην γωνίαν, νὰ ἦναι τοὐλάχιστον ἴση μὲ τὴν κάθετον ΒΠ, τὴν καταβιβαζομένην ἐκ τοῦ σημείου Β ἐπὶ τῆς ΑΧ, καὶ οὕτω σχηματίζομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΠ. Ἐὰν ἦναι

ὅμως μεγαλητέρα τῆς καθέτου καὶ μικροτέρα τῆς δεδομένης πλευρᾶς ΑΒ, τὸ τόξον τοῦ κύκλου τέμνει τὴν ΑΧ εἰς δύο σημεῖα Γ' καὶ Γ'', πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ σημείου Α, ἑκατέρωθεν τῆς καθέτου καὶ οὕτω σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΑΒΓ' καὶ ΑΒΓ'', τὰ χρησιμεύοντα δύο λύσεις τοῦ προβλήματος. Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ ἦναι μεγαλητέρα τῆς ΑΒ, τὸ τόξον τοῦ κύκλου τέμνει ὁμοίως τὴν ΑΧ εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Γ''', ἐκ τῶν ὁποίων τὸ Γ εἶναι πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Α, καὶ τότε μόνον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ λύει τὸ πρόβλημα, ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ''', ἡ πλευρὰ ΒΓ''' δὲν ἀντίκειται εἰς τὴν δεδομένην γωνίαν ΒΑΧ, ἀλλ' εἰς τὸ συμπλήρωμα αὐτῆς ΒΑΧ'.

Ἐπίσης τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν, ὁπόταν ἡ δεδομένη γωνία ἦναι ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.

Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι γνωσταί.

Λύσις. Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ Σχ. 20 ἴσην μὲ μίαν τῶν γνωστῶν πλευρῶν, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α ὡς ἀπὸ κέντρου μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δευτέραν δεδομένην πλευρὰν, γράφομεν τόξον κύκλου καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β ὡς ἀπὸ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ τριγώνου, γράφομεν νέον τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ πρῶτον εἰς τὸ Γ, καὶ ἐπὶ τέλους φέροντες τὴν ΑΓ καὶ ΒΓ, σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διὰ νὰ ἦναι δὲ τὸ πρόβλημα ἐπιδεκτικὸν λύσεως, πρέπει τὰ δύο τόξα νὰ συναπαντηθῶσι, ὅπερ γίνεται ὁπόταν ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν κέντρων ἦναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων ΑΓ καὶ ΒΓ, μεγαλητέρα δὲ τῆς διαφορᾶς των (Πρότ. 41).

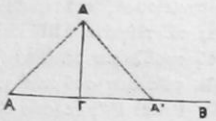
2ον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7.

Εἰς τὸ σημεῖον Γ Σχ. 61 τῆς εὐθείας ΑΒ νὰ ὑψωθῇ κάθετος.

Κατασκευή. Ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Γ λαμβάνομεν ἐπὶ

τῆς ΑΒ δύο ἴσα μήκη ΓΑ καὶ ΓΑ′ ἐξ ἑκάστου τῶν σημείων Α καὶ Α′, ὡς ἀπὸ κέντρων, μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ἀλλὰ μεγαλητέραν τῆς ΑΓ, γράφομεν δύο τόξα κύκλου, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἄγομεν τὴν ΓΔ ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ.



Σχ. 61.

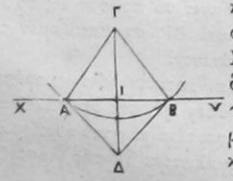
Ἀπόδειξις. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ΔΑ καὶ ΔΑ′, τὰ τρίγωνα ΔΓΑ καὶ ΔΓΑ′ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἄρα αἱ γωνίαι ΔΓΑ καὶ ΔΓΑ′ εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως ὀρθαί.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὰ τόξα τέμνονται ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΓΑ, καὶ ἡ ἀπόστασις ΑΑ′ εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, μεγαλητέρα δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, ἥτις εἶναι μηδέν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8.

Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΧΥ νὰ καταβιβασθῇ κάθετος ἐκ τοῦ σημείου Γ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ὑπάρχοντος Σχ. 62.

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ σημείου Γ ὡς ἀπὸ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν λαμβανομένην γράφομεν τόξον κύκλου τέμνον τὴν ΧΥ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἐκ τῶν ὁποίων, ὡς ἀπὸ κέντρων μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα μεγαλητέραν τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ, γράφομεν δύο τόξα κύκλου, τὰ ὁποῖα συναπαντῶνται εἰς σημεῖόν τι Δ καὶ ἄγομεν τὴν ΓΔ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.



Σχ. 62.

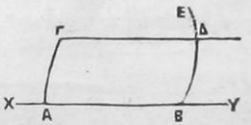
Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἄξωμεν τὰς εὐθείας ΓΑ, ΓΒ καὶ ΔΑ, ΔΒ, τὰ τρίγωνα ΓΑΔ, ΓΒΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἄρα αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΒΓΔ εἶναι ἴσαι. Τὰ τρίγωνα ΓΑΙ καὶ ΓΒΙ ἔχουσι λοιπὸν ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην ΑΓΙ=ΒΓΙ περιλαμβανομένην μεταξὺ ἴσων

πλευρῶν, ἄρα εἶναι ἴσα, καὶ αἱ γωνίαι ΓΙΑ καὶ ΓΙΒ εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως ὀρθαί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9.

Ἐκ τοῦ σημείου Γ Σχ. 63 *ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΧΥ ὑπάρχοντος νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος αὐτῆς.*

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ σημείου Γ ὡς ἀπὸ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν λαμβανομένην γράφομεν ἀόριστον τόξον κύκλου τὸ ΒΕ, τέμνον τὴν ΧΥ εἰς τὸ σημεῖον Β, ἐκ τοῦ ὁποίου, ὡς ἀπὸ κέντρου μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, γράφομεν τόξον κύκλου τὸ ΓΑ καὶ λαμβάνομεν ἄνοιγμα διαβήτου ἴσον μὲ τὴν χορδὴν τοῦ τόξου ΓΑ, τὸ ὁποῖον φέρομεν ἐπὶ τοῦ ἀορίστου ΒΕ, ἀπὸ Β εἰς Δ, καὶ τότε ἡ οὕτω προσδιοριζομένη γραμμὴ ΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος.



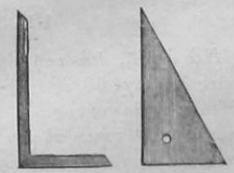
Σχ. 63.

Ἀπόδειξις. Τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα καὶ ἴσας τὰς χορδάς· αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΔ εἶναι ἴσαι καὶ ἐπειδὴ αὗται εἶναι ἐναλλὰξ ἐντός, αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10.

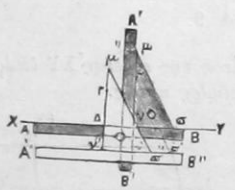
Τὰς προηγουμένας λύσεις ἁπλοποιοῦμεν μεταχειριζόμενοι τὸ *ὀρθογώνιον*, τὸ ὁποῖον εἶναι τρίγωνον ὀρθογώνιον ἢ γωνία ὀρθὴ ἐκ ξύλου, ἢ μετάλλου Σχ. 64 τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ἡ πλευρὰ τοῦ κανόνος.

Νὰ ἀχθῇ, διὰ τοῦ Ὀρθογωνίου κάθετος ἐπὶ τῆς εὐθείας ΧΥ, ἐξ ἑνὸς σημείου Γ, εἴτε ἐκτὸς τῆς εὐθείας εἴτε ἐξ ἑνὸς σημείου Δ, ἐπ' αὐτῆς ὑπάρχοντος. Σχ. 65.


Σχ. 64.

Κατασκευή. Θέτομεν τὸν κανόνα κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΒ

οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ νὰ ταὐτίζηται μὲ τὴν εὐθεῖαν ΧΥ, ἔπειτα θέτομεν ἐπὶ τοῦ κανόνος τὸ ὀρθογώνιον μνπ οὕτως ὥστε ἡ πλευρὰ νπ τῆς ὀρθῆς γωνίας, νὰ ταὐτισθῇ μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κανόνος τὸν ὁποῖον μεταφέρομεν κατὰ τὴν Α′Β′, οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ νὰ ταὐτίζηται μὲ τὴν δευτέραν πλευρὰν μν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου. Σύρομεν τὸ ὀρθογώνιον κατὰ τὴν πλευρὰν τοῦ κανόνος Α′Β′ ἕως οὗ λάβει τὴν θέσιν ρν′π′ μεταφέρομεν δὲ τὸν κανόνα Α′Β′ εἰς Α″Β″, ἐπιστηρίζοντες αὐτὸν ἐπὶ τῆς πρώτης πλευρᾶς ν′π′ τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον σύρομεν κατὰ τὴν πλευρὰν τοῦ κανόνος, ἕως οὗ ἡ πλευρὰ ρν′ λάβῃ τὴν θέσιν μ″ν″, ὅτε διαβαίνει ἐκ τοῦ σημείου Γ ἢ Δ. Ἐπὶ τέλους γράφομεν εὐθεῖαν γραμμὴν ὁδηγοῦμενοι ὑπὸ τῆς πλευρᾶς μ″ν″ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τότε ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.



Σχ. 65.

Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι ν″π′ καὶ ΧΥ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι τῆς μν οὖσαι· ὡς καὶ αἱ εὐθεῖαι μ′ν″, μν′, ὡς κάθετοι ἐπὶ τῆς ν″π′· ἄρα ἡ μ″ν″ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΧΥ.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Δυνάμεθα ἀμέσως νὰ σύρωμεν τὸ ὀρθογώνιον ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἕως οὗ ἡ πλευρὰ μν διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Γ ἢ Δ, ἀλλὰ τότε ἡ τομὴ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ μν καὶ τῆς ΧΥ δὲν λαμβάνεται ἀκριβῶς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11.

Νὰ ἀχθῇ, διὰ τοῦ ὀρθογωνίου παράλληλος τῆς εὐθείας ΧΥ Σχ. 66 ἐξ ἑνὸς δεδομένου σημείου Γ, ἐκτὸς τῆς εὐθείας ὑπάρχοντος.

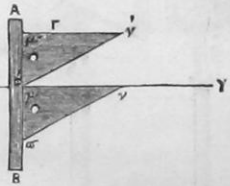
Λύσις. Θέτομεν τὸ μὲν ὀρθογώνιον οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ μν τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ ταὐτίζηται μὲ τὴν εὐθεῖαν ΧΥ, τὸν δὲ κανόνα ΑΒ κατὰ τὴν δευτέραν πλευρὰν μπ τῆς ὀρθῆς γωνίας, καὶ σύρομεν τὸ ὀρθογώνιον κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς πλευρᾶς τοῦ κανόνος, ἕως οὗ ἡ πλευρὰ μν διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Γ, καὶ κατὰ τὴν πλευρὰν μ′ν′ γράφομεν εὐθεῖαν, ἥτις εἶναι ἡ

ζητουμένη παράλληλος· ἐπειδὴ μ′ν′ καὶ μν ἢ ΧΥ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τῆς μ′π.

Αἱ αὐταὶ κατασκευαὶ δύνανται νὰ γίνωσι καὶ διὰ τοῦ Ἀναγωγέως.

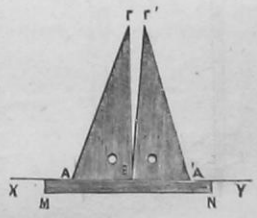
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12.

Νὰ δοκιμασθῇ ἡ ἀκρίβεια τοῦ ὀρθογωνίου.



Σχ. 66.

Λύσις. Γράφομεν εὐθεῖαν ἀπέραντον τὴν ΧΥ Σχ. 67 ἐν ᾗ προσαρμόζοντες τὸν δεδοκιμασμένον κανόνα ΜΝ, θέτομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου κατὰ τὴν πλευρὰν τοῦ κανόνος, καὶ ἄγομεν γραμμὴν κατὰ τὴν ΒΓ πλευράν, καὶ στρέφομεν ἔπειτα τὸ ὀρθογώνιον οὕτως, ὥστε νὰ λάβῃ τὴν θέσιν Α′ΒΓ′, χαράττοντες γραμμὴν κατὰ τὴν ΒΓ′. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ ΒΓ′ δὲν ταὐτίζονται, τὸ ὀρθογώνιον δὲν εἶναι ἀκριβές.



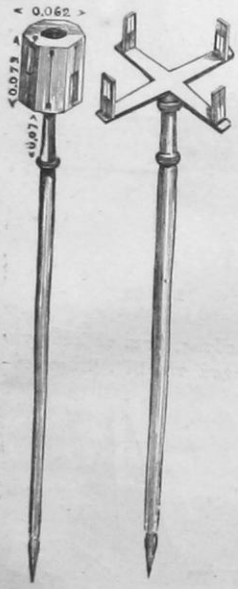
Σχ. 67.

Ἀπόδειξις. Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, Α′ΒΓ′ πρέπει νὰ ᾖναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, καὶ αἱ πλευραὶ ΒΓ, ΒΓ′ νὰ ταὐτίζωνται, ἐὰν αἱ γωνίαι αὗται ᾖναι ὀρθαί, ἢ τὸ ὀρθογώνιον ᾖναι ἀκριβές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 19η. Ἐπὶ τῆς γῆς δυνάμεθα νὰ φέρωμεν καθέτους διὰ τοῦ γραφομέτρου, ἐπειδὴ τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο δύναται νὰ χρηγήσῃ γωνίας 90°. Συνήθως ὅμως μεταχειριζόμεθα τὸν Χωρομετρικὸν Γνώμονα ὅστις σύγκειται ἐκ τεσσάρων πτερυγίων εὑρισκομένων εἰς τὰ ἄκρα δύο κανόνων, τεμνομένων κατ' ὀρθὰς γωνίας, τὰ ὁποῖα συνήθως κατασκευάζονται ἐπὶ πυξίδος ὀκταγώνου Σχ. 68. Τὸ δὲ ἐργαλεῖον στηρίζεται ἐπὶ ἀκοντίου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 20η. Ἐὰν πρόκηται νὰ ὑψώσωμεν εἰς σημεῖόν τι

Ο τῆς εὐθείας ΑΒ Σχ. 69 κάθετον, ἐμπήγομεν τὸν γνώμονα εἰς τὸ σημεῖον Ο, καὶ τὸν στρέφομεν οὕτως, ὥστε ἡ διεύθυνσις τῶν δύο κατ' ἐναντι πτερυγίων νὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας ΑΒ. Τούτου γενομένου ἡ διεύθυνσις τότε τῶν δύο ἄλλων πτερυγίων εἶναι ἡ τῆς ζητουμένης καθέτου.

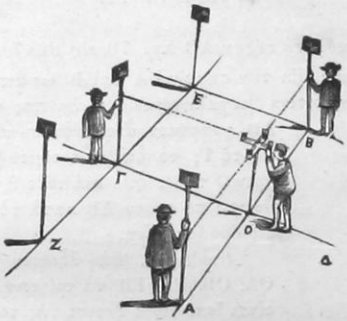


Σχ. 68.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 21η. Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν περὶ τῆς ἀκριβείας τοῦ γνώμονος, στρέφομεν αὐτὸν κατὰ τεταρτημόριον περιφερείας, ὥστε τὰ πτερύγια τῶν ὁποίων ἡ διεύθυνσις ἦτο ΓΔ, νὰ λάβωσι τὴν διεύθυνσιν ΑΒ, τὰ δὲ δύο ἄλλα τὴν ΓΔ· ἐὰν δὲ τοῦτο δὲν συμβῇ τὸ ἐργαλεῖον εἶναι ἀτελές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 22α. Ἵνα καταβιβάσωμεν ἐκ τινος σημείου Γ, Σχ. 69, κάθετον ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ, ἐμπήγομεν εἰς τὸ σημεῖον Γ ἀκόντιον, ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ ἀντικείμενόν τι δυνάμενον νὰ χρησιμεύσῃ ὡς σκοπός. Θέτομεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τῆς διευθύνσεως ΑΒ οὕτως, ὥστε τὰ κατέναντι πτερύγια νὰ εὑρίσκωνται κατὰ τὴν διεύθυνσιν ταύτην· ἔπειτα μετατοπίζομεν τὸ ἐργαλεῖον κατὰ τὸ μῆκος τῆς ΑΒ, ἕως οὗ σκοπεύοντες διὰ τῶν δύο ἄλλων πτερυγίων ἴδωμεν τὸ εἰς τὸ σημεῖον Γ ἀκόντιον διαιρούμενον κατὰ τὸ μῆκος αὐτοῦ ὑπὸ τῆς τριχὸς τοῦ κατέναντι πτερυγίου. Τὸ σημεῖον Ο, ἔνθα εὑρίσκεται τότε ὁ γνώμων ἀνήκει εἰς τὴν ζητουμένην κάθετον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἵνα ἐκ τοῦ σημείου Γ φέρωμεν παράλληλον τῆς ΑΒ, ἀρκεῖ ἐκ τοῦ Γ νὰ ἄξωμεν τὴν ΓΟ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὡς προηγουμένως καὶ εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς ΓΟ, ὑψοῦντες τὴν κάθετον ΖΕ, ἔχομεν τὴν ζητουμένην παράλληλον.



Σχ. 69.

§.—7.

Διαίρεσις εὐθείας ἢ τόξου εἰς δύο ἴσα μέρη. Χάραξις περιφερείας διαβαινούσης ἀπὸ τρία δεδομένα σημεῖα. Ἀγωγὴ ἐφαπτομένης εἰς τὴν περιφέρειαν ἔκ τινος δεδομένου σημείου ἐκτὸς τῆς περιφερείας ὑπάρχοντος. Ἀγωγὴ κοινῆς ἐφαπτομένης εἰς δύο κύκλους.—Χάραξις ἐπὶ δεδομένης εὐθείας τμήματος κύκλου ἐπιδεκτικοῦ δεδομένης γωνίας. Ἐφαρμογαί. Κεντρόφυξ δύναμις. Κεντρόμολος δύναμις. Διάδοσις τῆς κινήσεως τῶν μηχανῶν. Ὀδοντωτοὶ τροχοί. Ἀτερμον λωρίον. Συναρμογαί. Χάραξις καμπύλης σιδηροδρόμου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 13.

Νὰ διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ Σχ. 62 *εἰς δύο ἴσα μέρη.*

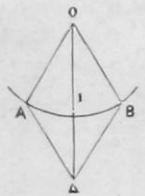
Κατασκευή. Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β ὡς ἀπὸ κέντρων μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα μεγαλητέραν τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ, γράφομεν δύο τόξα κύκλου τεμνόμενα εἰς τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἀπὸ τὰ αὐτὰ σημεῖα καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα δύο ἄλλα τόξα, τεμνόμενα εἰς τὸ δεύτερον σημεῖον Δ, καὶ ἄγομεν τὴν ΓΔ, ἥτις διαιρεῖ τὴν ΑΒ κατὰ τὸ Ι εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἀπόδειξις. Ἀποδεικνύεται, (Πρόβλ. 8) ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΙΓ καὶ ΒΙΓ εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 14.

Νὰ διαιρεθῇ τὸ τόξον ΑΒ Σχ. 70 *εἰς δύο ἴσα μέρη.*

Κατασκευή. Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β ὡς ἀπὸ κέντρων, μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα μεγαλητέραν τοῦ ἡμίσεος τῆς χορδῆς ΑΒ, γράφομεν δύο τόξα συναπαντώμενα εἰς τὸ Γ, τὸ ὁποῖον ἑνοῦμεν μὲ τὸ κέντρον Ο τοῦ τόξου, καὶ τότε ἡ γραμμὴ ΟΓ διαιρεῖ τὸ τόξον ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Ι, εἰς δύο ἴσα μέρη.



Σχ. 70.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἄξωμεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΓΑ, ΓΒ, τὰ τρίγωνα ΓΑΟ, ΓΒΟ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ΑΟΓ, ΒΟΓ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, θὰ ᾖναι ὁμοίως ἴσα καὶ τὰ περιλαμβανόμενα ὑπ' αὐτῶν τόξα ΑΙ, ΙΒ.

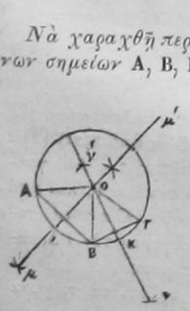
ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸν αὐτὸν τρόπον μεταχειριζόμεθα ἵνα διαιρέσωμεν γωνίαν τινὰ ΑΟΒ, εἰς δύο ἴσα μέρη. Πρὸς τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ἐν πρώτοις τὸ τόξον ΑΒ.

Ὁρισμός. Ἡ διαιροῦσα εὐθεῖα εἰς δύο ἴσα μέρη γωνίαν τινὰ λέγεται *διχοτόμος*.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 15.

Νὰ χαραχθῇ περιφέρεια διαβαίνουσα ἐκ τριῶν δεδομένων σημείων Α, Β, Γ, Σχ. 71 *μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων.*

Κατασκευή. Ἀγομεν τὰς γραμμὰς ΑΒ, ΒΓ, καὶ διαιροῦντες ἑκάστην τούτων εἰς δύο ἴσα μέρη, φέρομεν καθέτους τὰς εὐθείας μμ', νν', ἐπὶ τὰ μέσα Ι καὶ Κ τῶν εὐθειῶν τούτων (Πρόβλ. 8 καὶ 13).



Σχ. 71.

Αἱ κάθετοι θέλουσι συναπαντηθῇ εἰς τὸ σημεῖον Ο, ὅπερ εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

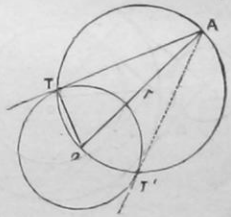
Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἄξωμεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἔχομεν ΟΑ=ΟΒ ὡς πλαγίας, ἰσάκις ἀπεχούσας τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ΟΙ, καὶ τὴν ΟΒ=ΟΓ, ἐπειδὴ ἑκάστη τούτων ἰσάκις ἀπέχει τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ΟΚ. Ἄρα ἡ ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ καὶ ἡ γραφομένη περιφέρεια ἐκ τοῦ σημείου Ο, ὡς ἀπὸ κέντρου μὲ ἀκτῖνα ΟΑ, θέλει διέλθει ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ.

Ἐὰν τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἦσαν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τότε αἱ εὐθεῖαι μμ', νν' θέλουσιν εἶσθαι παράλληλοι, καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ἠδυνάμεθα νὰ γράψωμεν περιφέρειαν διερχομένην ἀπὸ τριῶν ἐπ' εὐθείας κειμένων σημείων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 16.

Ἐκ τοῦ σημείου Α Σχ. 72 *δεδομένου ἐκτὸς τῆς περιφερείας* Ο, *νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν.*

Κατασκευή. Ἄγομεν τὴν ΟΑ, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὡς ἀπὸ διαμέτρου γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις συναπαντᾷ τὴν πρώτην εἰς τὰ σημεῖα Τ, Τ', καὶ φέρομεν τὰς ΑΤ, ΑΤ', τῶν ὁποίων ἑκάστη ἐφάπτεται τῆς περιφερείας Ο.



Σχ. 72.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἄξωμεν τὴν ΟΤ, ἡ γωνία ΟΤΑ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμιπεριφέρειαν· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΤ εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν Ο, ὡς κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΤ.

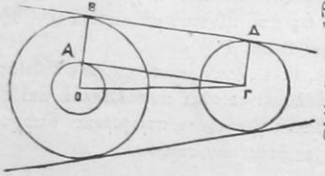
Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ εὐθεῖα ΑΤ' εἶναι ἐπίσης ἐφαπτομένη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 17.

Νὰ ἀχθῇ κοινὴ ἐφαπτομένη εἰς δύο δεδομένας περιφερείας Ο *καὶ* Γ Σχ. 73 *καὶ* 74.

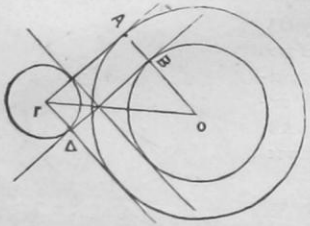
Κατασκευή. Ἐκ τοῦ σημείου Ο, ὡς ἀπὸ κέντρου μὲ ἀκτῖνα ΟΑ, ἴσην μὲ τὴν διαφορὰν ἢ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν γνωστῶν κύκλων, γράφομεν περιφέρειαν. Ἐκ τοῦ σημείου Γ ἄγομεν εἰς τὴν περιφέρειαν τὴν ἐφαπτομένην ΓΑ

(Πρόβλ. 16), καὶ ἑνοῦμεν τὸ κέντρον Ο μὲ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς διὰ τῆς εὐθείας ΟΑ, ἥτις ἀπαντᾷ τὴν πρώτην περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Β. Ἄγομεν τὴν ἀκτῖνα ΓΔ παράλληλον τῆς ΟΒ καὶ ἑνοῦμεν τὰ σημεῖα Β, Δ, καὶ τότε ἡ ΒΔ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.



Σχ. 73.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῆς ΓΔ, καὶ ἡ εἰς τὸ σημεῖον Α γωνία εἶναι ὀρθή, τὸ σχῆμα ΑΒΔΓ εἶναι ὀρθογώνιον· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΒΔ, ἡ κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῶν ἀκτίνων ΟΒ, ΓΔ εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο περιφερειῶν.



Σχ. 74.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὑπάρχουσι κοιναὶ ἐφαπτόμεναι τέσσαρες, ὧν δύο ἐξωτερικαί, καὶ δύο ἐσωτερικαί· ὡς ἐκ τούτου τέσσαρες εἶναι αἱ λύσεις τοῦ προβλήματος· γίνονται δὲ τρεῖς, ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς, δύο δὲ ἐὰν τέμνωνται, καὶ μία μόνη ἐὰν ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς. Τὸ πρόβλημα δὲν λύεται ὅταν μία τῶν περιφερειῶν περιλαμβάνῃ τὴν ἄλλην.

Ὁρισμοί. Καλεῖται *τμῆμα κύκλου*, τὸ περιλαμβανόμενον μέρος μεταξὺ τοῦ τόξου ΑμΒ Σχ. 75 καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ ΑΒ.

Ἡ γωνία ΑΜΒ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς κυκλικὸν τμῆμα, ἐὰν ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας κῆται ἐπὶ τοῦ τόξου, καὶ αἱ πλευραὶ διέρχωνται διὰ τῶν ἄκρων τῆς χορδῆς.

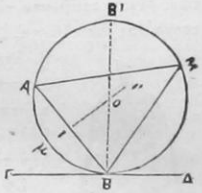
Ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὸ αὐτὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΜΒ εἶναι ἴσαι, ἐπειδὴ ἔχουσι μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑμΒ (Πρότ. 43).

Λέγομεν ὅτι κυκλικὸν τμῆμα εἶναι *ἐπιδεκτικὸν* δεδομένης γωνίας, ὅταν ἑκάστη τῶν εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένων γωνιῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 18.

Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ΑΒ Σχ. 75 *νὰ κατασκευασθῇ κυκλικὸν τμῆμα ἐπιδεκτικὸν δεδομένης γωνίας.*

Κατασκευή. Εἰς τὸ σημεῖον Β σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΑΒΓ, ἴσην μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν, καὶ εἰς τὸ ἄκρον Β ὑψοῦμεν τὴν ΒΒ′ κάθετον ἐπὶ τῆς ΒΓ, καὶ τὴν Η′ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, αἵτινες θὰ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Ο, ἐξ οὗ, ὡς ἀπὸ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα ΟΒ, γράφομεν περιφέρειαν, τῆς ὁποίας τὸ τμῆμα ΑΜΒ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 75.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΑΒΒ′ ἰσοδυναμεῖ μὲ μίαν ὀρθήν, τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἔχει μέτρον τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας· ἀλλὰ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΒΒ′ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΒ′, ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑμΒ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΜΒ ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον, ἄρα εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΓ, τουτέστι μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἡ δεδομένη γωνία ἦναι ὀρθή, τότε ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ἡμιπεριφέρειαν ἐπὶ τῆς ΑΒ ὡς διαμέτρου λαμβανομένης.

Ἐὰν ἡ δεδομένη γωνία ἦναι ἀμβλεῖα, τὸ κέντρον Ο εὑρίσκεται κάτωθεν τῆς ΑΒ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 23η. Ὅταν περιστρέφωμεν τὴν σφενδόνην κατὰ τὴν μηχανικὴν ἀποδεικνύεται ὅτι διαρκούσης τῆς κινήσεως συνυπάρχουσι δύο ἴσαι καὶ ἀντίθετοι δυνάμεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη ἕλκουσα τὸν λίθον κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ σχοινίου πρὸς τὰ ἔσω τοῦ κύκλου, καλεῖται Κεντρόμολος δύναμις, ἡ δευτέρα ἀνθέλκουσα αὐτὸν ἐκ τῶν ἔσω πρὸς τὰ ἔξω μετὰ ἴσης ἐπιτάσεως καὶ παράγουσα τὴν ἐν τῇ

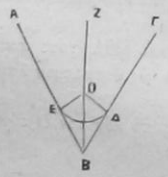
χειρὶ αἰσθανομένην πίεσιν, σταθερῶς διευθυνομένην πρὸς τὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ὁ περιστρεφόμενος λίθος καλεῖται Κεντρόφυξ δύναμις, ἥτις δὲν ὑπάρχει πλέον ἅμα ἡ κεντρόμολος δύναμις παύσῃ τοῦ νὰ ἐνεργῇ. Ἀποδεικνύεται προσέτι ὅτι, ἅμα ἀφεθῇ ἐλεύθερον τὸ σχοινίον τῆς σφελδόνης, ὁ λίθος ἀκολουθεῖ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν περιφέρειαν τὴν ὁποίαν περιέγραφεν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 24η. Αἱ χορδαὶ αἱ περιστρεφόμεναι ἐπὶ τῶν τροχαλιῶν σχηματίζουσιν εὐθείας ἐφαπτομένας ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτῶν. Ἵνα χαράξωμεν τὰς διευθύνσεις χορδῆς περιστρεφομένης ἐπὶ τροχαλίας Σχ. 76 καὶ διερχομένης ἐκ δύο δεδομένων σημείων Α καὶ Β, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν, ἐκ τῶν δύο τούτων σημείων ἐφαπτομένας εἰς τὴν ἐσωτερικὴν περιφέρειαν τοῦ αὐλακος τῆς τροχαλίας. Ἄγοντες ἔπειτα παραλλήλους τῶν ἐφαπτομένων χορηγοῦμεν εἰς τὴν χορδὴν τὸ κατάλληλον πάχος.



Σχ. 76.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 25η. Ἡ χάραξις τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ἐφαπτομένων περιφερειῶν εἶναι ἀναπόφευκτος διὰ νὰ πραγματοποιήσωμεν τὴν λεγομένην Συναρμογὴν εἰς τὰς τέχνας. Ἡ ἐργασία αὕτη συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἑνοῦμεν τὰς γραμμὰς οὕτως, ὥστε νὰ μὴ σχηματίζωσι μεταξύ των οὐδεμίαν γωνίαν. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται π. χ. νὰ ἐξαλείψωμεν σανίδος διά τινος τόξου τὴν γωνίαν ΑΒΓ Σχ. 77, ἀρχίζοντες ἀπό τινος σημείου Δ. Ὑψοῦμεν εἰς τὸ σημεῖον Δ κάθετον ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἥτις ἀπαντᾷ εἰς τὸ Ο τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΑΒΓ. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ο καταβιβάσωμεν τὴν ΟΕ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΟΔ καὶ ΟΕ εἶναι ἴσαι. Ἐὰν λοιπὸν ἐκ τοῦ σημείου Ο, ὡς ἀπὸ κέντρου, μὲ τὴν ΟΔ ὡς ἀκτῖνα, γράψωμεν τόξον, τοῦτο θὰ ἐφάπτηται τῆς ΒΓ εἰς τὸ Δ, καὶ τῆς ΑΒ εἰς τὸ Ε, καὶ θὰ συναρμόζῃ τὰς εὐθείας ΑΕ καὶ ΓΔ.



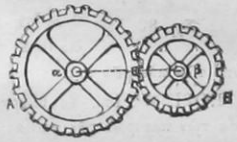
Σχ. 77.

Ἵνα ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ΟΔ=ΟΕ στρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν ΟΒ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΟΒΔ=γων. ΟΒΕ ἡ εὐθεῖα ΟΔ πίπτει ἐπὶ τῆς ΒΕ, καὶ τὸ σημεῖον Ο μένει ἀκίνητον. Ἄρα αἱ κάθετοι ΟΔ καὶ ΟΕ, αἱ μετροῦσαι τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου Ο ἐξ ἑκάστης πλευρᾶς τῆς γωνίας ΑΒΓ, ἀνάγκη νὰ συμπέσωσι, διότι ἄλλως ἐκ τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΒΕ δύο κάθετοι θὰ ὑπάρξωσι, ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ΟΔ=ΟΕ. Ὁμοίως δὲ καὶ ΒΔ=ΒΕ.

Ἐκ τῆς ἀποδείξεως ταύτης ἕπεται ἡ ἑξῆς πρότασις.

Πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου γωνίας ἰσάκις ἀπέχει ἐξ ἑκάστης πλευρᾶς αὐτῆς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 26η. Διὰ νὰ μεταδώσωμεν τὴν κίνησιν τοῦ τροχοῦ μηχανῆς εἰς τὸν τροχὸν ἑτέρας, θέτομεν εἰς ἐπαφὴν τὰς περιφερείας αὐτῶν, καὶ τὰς καθοπλίζομεν μὲ σειρὰν ὀδόντων οἵτινες ἀναγκάζουν τοὺς τροχοὺς νὰ κινῶνται πρὸς ἐναντίαν διεύθυνσιν. Ἵνα σχεδιάσωμεν δύο ὀδοντωτοὺς τροχούς, χαράττομεν κατ' ἀρχὰς δύο ἐφαπτομένας περιφερείας, Ἀρχικὰς Περιφερείας καλουμένας, ἐπὶ τῶν ὁποίων κατατάττομεν τοὺς ὀδόντας ἐκ διαλλειμμάτων ἐξέχοντας· κοιλαίνομεν ἔπειτα τὰ μεταξὺ τῶν ὀδόντων διαστήματα τοῦ αὐτοῦ τροχοῦ, ἵνα οἱ ὀδόντες τοῦ ἄλλου εἰσέρχωνται εἰς αὐτά. Σχ. 78.

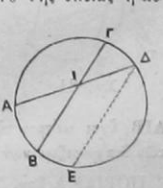


Σχ. 78.

Αἱ ἐπὶ τοῦ σχήματος 78 πρώτισται περιφέρειαι εἶναι κεχαραγμέναι διὰ σημείων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ον.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 27η. Πᾶσα γωνία ΑΙΒ Σχ. 79 τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι ἐντὸς κύκλου ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ διαχωριζομένου τόξου ΑΒ ὑπὸ τῶν πλευρῶν της, πλέον τοῦ ἡμίσεος τοῦ διαχωριζομένου τόξου ΓΔ ὑπὸ τῆς προεκβολῆς αὐτῶν.

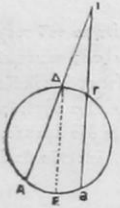


Σχ. 79.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΔΕ παράλληλον τῆς ΓΒ, αἱ γωνίαι ΑΙΒ καὶ ΑΔΕ θὰ ἦναι ἴσαι ὡς σύστοιχοι, ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΔΕ, ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ διαχωριζομένου ὑπὸ τῶν πλευρῶν της τόξου ΑΕ τουτέστι τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒ, πλέον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ΒΕ τόξου, καὶ ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΓΒ, ΔΕ, τὰ τόξα ΒΕ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσα, διὰ τοῦτο καὶ ἡ γωνία ΑΔΕ ἢ ἡ ἴση αὐτῇ ΑΙΒ, ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΒ πλέον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ΓΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ον.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 28η. Πᾶσα γωνία ΑΙΒ Σχ. 80 τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν διαχωριζομένων τόξων ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ τῶν πλευρῶν της.

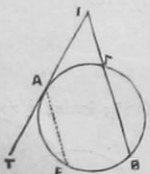


Σχ. 80.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν ἄξωμεν τὴν ΔΕ παράλληλον τῆς ΓΒ αἱ γωνίαι ΑΙΒ καὶ ΑΔΕ θὰ ἦναι ἴσαι ὡς σύστοιχοι. Ἀλλὰ, ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΔΕ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ περιλαμβανομένου τόξου ΑΕ, μεταξὺ τῶν πλευρῶν της, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΕΒ. Πρὸς δὲ, ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΔΕ καὶ ΓΒ, τὰ τόξα ΓΔ, ΕΒ εἶναι ἴσα· ἄρα ἡ γωνία ΑΔΕ, ἢ ἡ ἴση αὐτῇ ΑΙΒ, ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν διαχωριζομένων τόξων ΑΒ καὶ ΓΔ ὑπὸ τῶν πλευρῶν της.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον. Τὸ θεώρημα τοῦτο ὑπάρχει προσέτι, καὶ ὅταν μία τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ἐφάπτηται τῆς περιφερείας.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω ΤΙ Σχ. 81, ἡ ἐφαπτομένη πλευρὰ εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἄγομεν τὴν ΑΕ παράλληλον τῆς ΓΒ καὶ ἔχομεν τὰς γωνίας ΤΑΕ καὶ ΑΙΒ ἴσας ὡς συστοίχους. Ἡ γωνία ὅμως ΤΑΕ, σχηματιζομένη ὑπὸ ἐφαπτομένης καὶ τῆς χορδῆς ἥτις ἀπολήγει εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς, ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ὑποτεινομένου τόξου ΑΕ ὑπὸ τῆς χορδῆς, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΕΒ. Ἐπειδὴ ὅμως ΕΒ=ΑΓ, ἕνεκα τῶν παραλλήλων εὐθειῶν, ἄρα ἡ ΤΑΕ, ἢ ἡ ἴση αὐτῇ ΑΙΒ, ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων ΑΕΒ καὶ ΑΓ τῶν διαχωριζομένων ὑπὸ τῶν πλευρῶν της.



Σχ. 81.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὑπάρχει ἐὰν ἡ τέμνουσα ΙΓΒ γίνῃ καὶ αὐτὴ ἐφαπτομένη. Ἄρα τὸ θεώρημα εἶναι γενικόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ον.

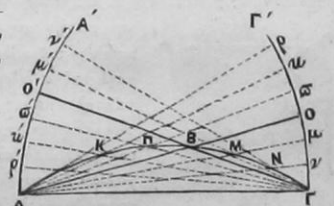
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 29η. Ἐὰν ἐκ δύο δεδομένων σημείων Α καὶ Γ Σχ. 82 ἄξωμεν τὰ ζεύγη τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΒ, ΑΒ′ καὶ ΓΒ′, κτλ. σχηματιζουσῶν μεταξύ των γωνίας ἴσας ΑΒΓ καὶ ΑΒ′Γ κτλ. τὰ σημεῖα Β καὶ Β′ κτλ. εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας τῆς διερχομένης ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Γ.

Ἐν ἄλλοις λόγοις ἡ διερχομένη περιφέρεια ἐκ τῶν σημείων Α, Β καὶ Γ διέρχεται ἐπίσης καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β′. Τῷ ὄντι, ἐὰν τὸ ἐναντίον συμβαίνῃ, τὸ σημεῖον Β′ θέλει εἶσθαι ἐντὸς εἴτε ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Ἐὰν ὑπάρχῃ ἐντὸς, ἡ γωνία ΑΒ′Γ θὰ ἔχῃ μέτρον, τόξον μεγαλήτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ τόξου ΑΜΓ (Θεώρ. 2) καὶ θὰ ἦναι ἐπομένως μεγαλητέρα τῆς γωνίας ΑΒΓ. Ἐὰν τὸ σημεῖον Β′ ὑπάρχῃ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἡ γωνία ΑΒ′Γ θὰ ἔχῃ μέτρον, τόξον μικρότερον τοῦ τόξου ΑΜΓ (Θεώρ. 2) καὶ θὰ ἦναι ἐπομένως μικροτέρα τῆς γωνίας ΑΒΓ. Τὰ δύο ταῦτα ἐξαγόμενα εἶναι ἐναντία τῆς ὑποθέσεώς μας· ἄρα τὸ σημεῖον Β′ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας.



Σχ. 82.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 30η. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα προσδιορίζομεν διὰ σημείων τόξον κύκλου, τοῦ ὁποίου δίδονται τρία σημεῖα Α, Β καὶ Γ Σχ. 83 καὶ τὸ κέντρον ἀπρόσιτον. Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Γ ὡς ἀπὸ κέντρων, μὲ τὴν ἀπόστασιν ΑΓ ὡς ἀκτῖνα, γράφομεν δύο ἀόριστα τόξα τὰ ΑΑ′, ΓΓ′, καὶ ἄγομεν τὰς γραμμὰς ΑΒ καὶ ΒΓ τὰς ὁποίας ἐκτείνομεν ἕως οὗ ἀπαντήσωσι τὰ τόξα εἰς τὰ σημεῖα Ο, Ο′, καὶ φέρομεν ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΓ′, ἐκ τοῦ σημείου Ο ἀρχίζοντες τὰς ἴσας ἀποστάσεις οπ, πκ, κρ, κτλ. ἐντεῦθεν τοῦ σημείου, καὶ τὰς ομ, μν, κτλ. ἐκεῖθεν αὐτοῦ. Ὁμοίως φέρομεν ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΑ′, ἐκ τοῦ σημείου Ο′ ἀρχίζοντες, τὰς ἀποστάσεις ο′π′, π′κ′, κ′ρ′, κτλ. ἴσας μὲ τὰς προηγουμένας, ὡς καὶ τὰς ἀποστάσεις ο′μ′, μ′ν′, κτλ. θέτοντες τὰ γράμματα κατ' ἀντίστροφον τάξιν ἐπὶ τῶν δύο τόξων, ἤτοι ἐὰν τὴν ομ φέρομεν ἐντεῦθεν τοῦ σημείου Ο, ἡ ο′μ′ νὰ λαμβάνηται ἐκεῖθεν τοῦ Ο′. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ διὰ τὰ ἄλλα γράμματα. Τούτου τεθέντος, ἑνοῦμεν τὴν



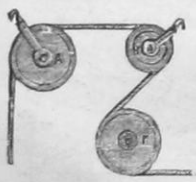
Σχ. 83.

Αμ καὶ Γμ′, τὴν Αν καὶ Γν′ κτλ. τὴν Απ καὶ Γπ′ τὴν Αx καὶ Γx′, αἵτινες τέμνονται διαδοχικῶς εἰς τὰ σημεῖα M,N κ.τ.λ. Π,Κ καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὰ οὕτω λοιπὸν λαμβανόμενα σημεῖα M,N, κ.τ.λ. Π,Κ ἀνήκουσιν εἰς τόξον κύκλου διερχόμενον ἐκ τῶν δεδομένων τριῶν σημείων Α, Β, Γ.

Τῷ ὄντι αἱ γωνίαι ΒΑΜ, ΒΓΜ εἶναι ἴσαι ἐπειδὴ ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον ομ=ο′μ′· ἄρα ἕνεκα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Μ, Γ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. Ἐπίσης αἱ γωνίαι ΒΑΝ, ΒΓΝ εἶναι ἴσαι, ἐπειδὴ ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον ον=ο′ν′· ἄρα τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Ν, Γ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. Ἄρα ὅλα τὰ σημεῖα ὡς τὰ Μ, Ν, Π, Κ, κ.τ.λ. εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου διερχομένου ἐκ τῶν σημείων Α, Β καὶ Γ.

Ἡ κατασκευὴ αὕτη ἐφαρμόζεται ἰδίως κατὰ τὴν χάραξιν σιδηροδρομικῶν γραμμῶν, ἔνθα τὰ κυκλικὰ αὐτῶν μέρη εἶναι μεγίστης ἀκτῖνος.

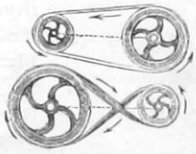
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 31η. Ἄγομεν ἐφαπτομένην κοινὴν εἰς δύο περιφερείας, ὅταν σχεδιάζωμεν χορδὴν περιστρεφομένην ἐπὶ πολλὰς τροχαλίας. Ἐὰν ἡ χορδὴ ᾖναι ἐξωτερικὴ ἀπὸ τὴν μίαν εἰς τὴν ἄλλην τροχαλίαν, ὡς γίνεται ἀπὸ Α εἰς Β Σχ. 84, ἄγομεν τότε ἐφαπτομένην κοινὴν καὶ ἐξωτερικὴν πρὸς τὰς περιφερείας τοῦ αὐλακος τῶν τροχαλιῶν, καὶ μετὰ ταῦτα δίδομεν εἰς τὴν χορδὴν τὸ κατάλληλον πάχος, ἄγοντες παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην. Ἐὰν ἡ χορδὴ ᾖναι ἐσωτερικὴ ἀπὸ τὴν μίαν εἰς τὴν ἄλλην τροχαλίαν ὡς συμβαίνει ἀπὸ Β εἰς Γ, πράττομεν ὡς ἀκολούθως. Ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τροχαλίας Γ, μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ ἀκτῖνι τοῦ αὐλακος τῆς τροχαλίας, ηὐξημένῃ κατὰ τὸ πάχος τῆς χορδῆς, γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἄγομεν κοινὴν ἐφαπτομένην ἐσωτερικὴν πρὸς τὴν περιφέρειαν ταύτην καὶ τὴν τοῦ αὐλακος τῆς τροχαλίας Β, δίδομεν ἐπὶ τέλους εἰς τὴν χορδὴν τὸ κατάλληλον πάχος, φέροντες πρὸς τὴν ἐφαπτομένην παράλληλον.



Σχ. 84.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 32α. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐνεργοῦμεν ἵνα σχεδιάσωμεν τὸ Ἄτερμον Λωρίον ὅπερ μεταδίδει τὴν κίνησιν τροχοῦ τινος εἰς ἕτερον Σχ. 85 εἴτε κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν ὡς δεικνύει

τὸ ἄνω μέρος τοῦ σχήματος ἔνθα τὸ λωρίον εἶναι ἐξωτερικὸν, εἴτε κατ' ἀντίθετον, ὡς δεικνύει τὸ δεύτερον μέρος ἔνθα εἶναι ἐσωτερικόν. Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις συναρμόζομεν τὰ εὐθύγραμμα μέρη τῆς ἐξωτερικῆς πλευρᾶς τοῦ λωρίου διὰ τόξων κύκλου γεγραμμένων ἐκ τοῦ κέντρου ἑκάστου τροχοῦ.



Σχ. 85.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῶν θεωρημάτων τῶν ἐφαρμογῶν 27 καὶ 28 ἕπεται ἡ ἀκόλουθος ἀξιοσημείωτος συνέπεια, ὅτι «καθοιονδήποτε τρόπον καὶ ἂν τμηθῇ περιφέρεια ἀπὸ τὰς πλευρὰς γωνίας, τὰ διαχωριζόμενα τόξα ὑπὸ τῶν πλευρῶν της δίδουσι πάντοτε τὸ μέτρον τῆς γωνίας».

Ἐπειδὴ ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας πίπτει ἐξ ἅπαντος εἴτε ἐντὸς τοῦ κύκλου, εἴτε ἐπὶ τῆς περιφερείας, εἴτε ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

---

§.—8.

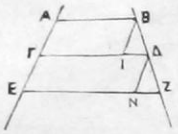
1ον. Γραμμαὶ ἀνάλογοι. Πᾶσα γραμμὴ παράλληλος τῆς πλευρᾶς τριγώνου διαιρεῖ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς εἰς ἀνάλογα μέρη, καὶ ἀντιστρόφως. Ἰδιότης τῆς διχοτόμου γωνίας τριγώνου. — 2ον. Ὅμοια πολύγωνα. Ἐὰν φέρωμεν γραμμὴν παράλληλον τῇ μιᾷ πλευρᾷ τριγώνου, τὸ οὕτω προκύπτον μερικὸν τρίγωνον εἶναι ὅμοιον τῷ ἀρχικῷ. Συνθῆκαι τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.— 3ον. Ἀποσύνθεσις τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἰς ὅμοια τρίγωνα. Λόγος τῆς περιμέτρου τῶν πολυγώνων. Ἐφαρμογαί. Ἀγωγὴ παραλλήλου γραμμῆς πρὸς γραμμὴν ἀπρόσιτον. Καταμέτρησις ἀπροσίτων ἀποστάσεων.

1ον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 44.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΕ *καὶ* ΒΖ Σχ. 86 *τέμνωνται ὑπὸ τῶν παραλλήλων* ΑΒ, ΓΔ *καὶ* ΕΖ, *οὕτως, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης* ΑΓ=ΓΕ, *τότε θὰ συνυπάρχῃ καὶ ἡ ἐξῆς* ΒΔ=ΔΖ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἄξωμεν τὰς ΒΙ καὶ ΔΝ παραλλήλως τῇ ΑΕ, ἐν πρώτοις θὰ ἔχωμεν ΒΙ=ΑΓ, ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΑΒΙΓ εἶναι παραλληλόγραμμον (Πρότ. 24). Ἐπίσης καὶ τὴν ΔΝ=ΓΕ· ἄρα καὶ τὴν ΒΙ=ΔΝ. Τὰ τρίγωνα ΒΙΔ καὶ ΔΝΖ εἶναι ἄρα ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην, τὰς γωνίας ΙΒΔ καὶ ΝΔΖ ἴσας ὡς συστοίχους, καὶ τὰς γωνίας ΒΙΔ καὶ ΔΝΖ ἴσας, ἐπειδὴ ἔχουσι τὰς πλευρὰς παραλλήλους καὶ διευθυνομένας κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Ἄρα ΒΔ=ΔΖ.



Σχ. 86.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 45.

Πᾶσα γραμμὴ παράλληλος τῇ πλευρᾷ τριγώνου τινὸς ΑΒΓ Σχ. 87 *διαιρεῖ εἰς ἀνάλογα μέρη τὰς δύο ἄλλας πλευράς.*

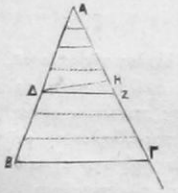
Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν τὰς ΑΔ καὶ ΔΒ ἐμμέτρους καὶ ὅτι τὸ κοινὸν αὐτῶν μέτρον περιλαμβάνεται κατ' ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς τὴν ΑΔ καὶ ΔΒ, π. χ. 4 φορὰς εἰς τὴν ΑΔ καὶ 3 εἰς τὴν ΔΒ· ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν προκύπτει ἡ σχέσις

$$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}}=\frac{4}{3}$$

Ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως, ἐὰν φέρωμεν παραλλήλους τῇ ΒΓ αὗται θὰ διαιρῶσι τὴν ΑΓ εἰς ἴσα μέρη κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, καὶ τότε ἡ μὲν εὐθεῖα ΑΖ θὰ περιέχῃ τέσσαρα μέρη, ἡ δὲ ΖΓ τρία καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν $\frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΖΓ}}=\frac{4}{3}$ καὶ ἐπομένως τὴν σχέσιν

$$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}}=\frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΖΓ}} \quad \ldots\ldots [1].$$

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἐπειδὴ εἶναι ἀληθὴς κατὰ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ κοινὸν μέτρον τῆς ΑΔ καὶ ΔΒ εἶναι ἐλάχιστον, ἀληθεύει ἐπίσης καὶ ὅταν τοῦτο ἦναι ἀπειροελάχιστον, τουτέστιν ὅταν αἱ γραμμαὶ ΑΔ καὶ ΔΒ ἦναι ἔκμετροι.



Σχ. 87.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῆς σχέσεως [1], ἀντιστρέφοντες τοὺς λόγους καὶ προσθέτοντες ἔπειτα τὴν μονάδα εἰς ἕκαστον μέλος συνάγομεν τὴν σχέσιν $\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΑΔ}}{\text{ΑΔ}}=\frac{\text{ΖΓ}+\text{ΑΖ}}{\text{ΑΖ}}$ ἢ $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΖ}}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 46.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ. *Ἐὰν εὐθεῖά τις* ΔΖ, *διαιρῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τὰς δύο πλευρὰς τριγώνου, αὕτη εἶναι παράλληλος τῇ τρίτῃ πλευρᾷ.*

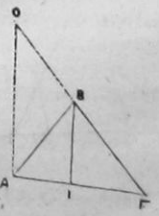
Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ ΔΖ δὲν ἦναι παράλληλος τῇ ΒΓ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΗ παράλληλον τῇ ΒΓ, καὶ διάφορον τῆς ΔΖ. Τότε ἐξ ἀνάγκης θὰ ἔχωμεν $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΗ}}$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἡμετέραν ὑπόθεσιν ἔχομεν τὴν σχέσιν $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΖ}}$, ἐπομένως $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΗ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΖ}}$, ἐξ ἧς συνάγομεν ΑΗ=ΑΖ, ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ ΔΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 47.

Ἡ διχοτόμος ΒΙ Σχ. 88 *τῆς γωνίας* ΑΒΓ *τριγώνου τινὸς διαιρεῖ τὴν ἀντικειμένην πλευρὰν εἰς δύο τμήματα* ΑΙ *καὶ* ΙΓ, *ἀνάλογα τῶν προσκειμένων πλευρῶν* ΑΒ *καὶ* ΒΓ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἄξωμεν τὴν ΑΟ παράλληλον τῇ ΒΙ καὶ περατουμένην ὑπὸ τῆς προεκβολῆς τῆς ΓΒ, θὰ ἔχωμεν (Πρότ. 45) τὴν σχέσιν $\frac{\text{ΑΙ}}{\text{ΙΓ}}=\frac{\text{ΟΒ}}{\text{ΒΓ}}$. Ἀλλ' αἱ γωνίαι ΟΑΒ καὶ ΑΒΙ εἶναι ἴσαι ὡς ἐναλλὰξ ἐντός, ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι ΒΟΑ καὶ ΓΒΙ ὡς σύστοιχοι· πρὸς δὲ ἡ ΑΒΙ=ΓΒΙ, ἐπειδὴ ἡ ΒΙ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας



Σχ. 88.

ΑΒΓ, ἄρα ΟΑΒ=ΒΟΑ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΟ εἶναι ἰσοσκελὲς (Πρότ. 10). Ἄρα, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν ΟΒ διὰ τῆς ΑΒ, καὶ νὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν $\frac{ΑΙ}{ΙΓ}=\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2ον.

Ὁρισμός. Δύο τρίγωνα λέγονται ὅμοια, ὅταν ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας. Αἱ ἀντικείμεναι πλευραὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας καλοῦνται *ὁμόλογοι*, ὡς καὶ αἱ κορυφαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 48.

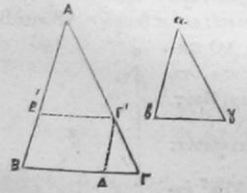
Τέμνοντες τρίγωνον διὰ παραλλήλου γραμμῆς πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ σχηματίζομεν τρίγωνον μερικὸν, ὅμοιον τῷ πρώτῳ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ μερικὸν καὶ τὸ ὅλον τρίγωνον ἔχουσι μίαν γωνίαν κοινὴν καὶ τὰς δύο ἄλλας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ὡς συστοίχους.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 49.

Δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ Σχ. 89 *ἔχουσι τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.*

Ἀπόδειξις. Ἂν λάβωμεν ΑΒ′=αβ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β′ φέρωμεν τὴν Β′Γ′ παράλληλον τῇ ΒΓ, τότε (Πρότ. 45) θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν $\frac{ΑΒ′}{ΑΒ}=\frac{ΑΓ′}{ΑΓ}$.



Σχ. 89.

Ἐὰν ἄξωμεν τὴν Γ′Δ παράλληλον τῇ ΑΒ, θὰ ἔχωμεν ἐπίσης τὴν σχέσιν $\frac{ΑΓ′}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΒΓ}=\frac{Β′Γ′}{ΒΓ}$, καὶ ἑπομένως τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων, $\frac{ΑΒ′}{ΑΒ}=\frac{ΑΓ′}{ΑΓ}=\frac{Β′Γ′}{ΒΓ}$.

Ἀλλ' ἡ γωνία Α′Β′Γ′ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΑΒΓ καὶ ἑπομένως τῇ αβγ· τὰ δύο τρίγωνα Β′ΑΓ′, βαγ εἶναι ἄρα ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουσιν ἀνὰ μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς ἴσας γωνίας.

Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν τὰς εὐθείας ΑΒ′, ΑΓ′ καὶ Β′Γ′ διὰ τῶν ἴσων αβ, αγ καὶ βγ, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{αβ}{ΑΒ}=\frac{αγ}{ΑΓ}=\frac{βγ}{ΒΓ},$$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 50.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ. *Ὅταν δύο τρίγωνα* ΑΒΓ, αβγ, Σχ. 89 *ἔχωσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους εἶναι ὅμοια.*

Ἀπόδειξις. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{αβ}{ΑΒ}=\frac{αγ}{ΑΓ}=\frac{βγ}{ΒΓ} \qquad [1],$$

λαμβάνοντες ὡς ἀνωτέρω ΑΒ′=αβ, καὶ ἄγοντες τὴν Β′Γ′ παράλληλον τῇ ΒΓ, ἔχομεν ὡς προηγουμένως τὴν σχέσιν

$$\frac{ΑΒ′}{ΑΒ}=\frac{ΑΓ′}{ΑΓ}=\frac{Β′Γ′}{ΒΓ} \qquad [2].$$

Εἰς τὰς ἀναλογίας [1] καὶ [2], βλέπομεν ὅτι οἱ ἑπόμενοι εἶναι οἱ αὐτοί, καὶ οἱ δύο ἡγούμενοι αβ, ΑΒ′ ἴσοι· ἄρα ΑΓ′=αγ, Β′Γ′=βγ. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΑΒ′Γ′, αβγ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουσι τὰς πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒ′Γ′, ΑΒΓ ἔχουσι τὰς γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ εἶναι ὅμοια, ἄρα καὶ τὰ τρίγωνα αβγ, ΑΒΓ εἶναι ὅμοια.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 51.

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ Σχ. 89 *εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχωσιν ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην τὴν* Α=α, *περιλαμβανομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων.*

Ἀπόδειξις. Λαμβάνοντες ΑΒ′=αβ καὶ ἄγοντες τὴν Β′Γ′ παράλληλον τῆς ΒΓ, σχηματίζομεν τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒ′Γ′, ΑΒΓ καὶ ἔχομεν (Πρότ. 45), $\frac{ΑΒ′}{ΑΒ}=\frac{ΑΓ′}{ΑΓ}$, ἀλλὰ κατὰ

τὴν ἡμετέραν ἐκφώνησιν ἔχομεν τὴν σχέσιν $\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{\alpha\gamma}{A\Gamma}$ καὶ ἐπειδὴ $AB'=\alpha\beta$, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ $A\Gamma'=\alpha\gamma$. Τὰ δύο τρίγωνα $AB'\Gamma'$, $\alpha\beta\gamma$ εἶναι ἄρα ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην περιλαμβανομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν.

Ἄρα τὸ τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$ εἶναι ὅμοιον τῷ $AB\Gamma$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 52.

Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια ὅταν ἔχωσι τὰς πλευράς των παραλλήλους.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων θέλουσιν εἶσθαι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί. Ἔστωσαν λοιπὸν A, B, Γ αἱ γωνίαι τοῦ ἑνὸς καὶ α, β, γ αἱ γωνίαι τοῦ ἑτέρου.

α΄.) Ἐὰν $A+\alpha=2$ ὀρθ., $B+\beta=2$ ὀρθ., $\Gamma+\gamma=2$ ὀρθ. τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ ἓξ ὀρθὰς γωνίας ἀντὶ τεσσάρων.

β΄.) Ἐὰν $A+\alpha=2$ ὀρθ., $B+\beta=$ὀρθ., καὶ $\Gamma=\gamma$, τὸ ἄθροισμα τῶν ἓξ γωνιῶν εἶναι μεγαλήτερον τεσσάρων ὀρθῶν.

γ΄.) Τέλος, ἐὰν $A+\alpha=2$ ὀρθ., $B=\beta$ καὶ $\Gamma=\gamma$, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν δὲν δύναται νὰ ἦναι τὸ αὐτὸ εἰς τὰ δύο τρίγωνα, ἐκτὸς ἐὰν $A=\alpha=90^0$.

Ἄρα ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν $A=\alpha$, $B=\beta$ καὶ $\Gamma=\gamma$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον. Αἱ παράλληλοι πλευραὶ τῶν τριγώνων εἶναι ὁμόλογοι, ἐπειδὴ ἀντίκεινται εἰς ἴσας γωνίας.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι, δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχωσι τὰς πλευράς των καθέτους, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον. Αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι ὁμόλογοι, ἐπειδὴ ἀντίκεινται εἰς ἴσας γωνίας.

3ον.

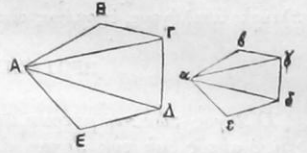
Ὁρισμοί. Δύο πολύγωνα λέγονται ὅμοια, ὅταν ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους. Ὁμόλογοι δὲ πλευραὶ εἶναι αἱ ἀπολήγουσαι εἰς ἴσας κορυφάς.

Αἱ τῶν ἴσων γωνιῶν κορυφαὶ εἶναι ὁμόλογοι· αἱ ὁμόλογοι δὲ πλευραὶ ἀπολήγουσιν εἰς ὁμολόγους κορυφάς· Ὁμοίως ὀνομάζονται ὁμόλογοι διαγώνιοι αἱ ἑνοῦσαι δύο ὁμολόγους κορυφάς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 53.

Δύο ὅμοια πολύγωνα $AB\Gamma\Delta E$ καὶ $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ Σχ. 90 *ἀναλύονται εἰς ἰσοπλήθη τρίγωνα ὅμοια καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένα.*

Ἀπόδειξις. Ἂν ἐκ δύο ὁμολόγων κορυφῶν A καὶ α φέρωμεν ὅσας δυνάμεθα διαγωνίους, τότε τὰ οὕτω προκύπτοντα τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $\alpha\beta\gamma$, δίδουσι κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἐκφώνησιν τὰς ἑξῆς σχέσεις



Σχ. 90.

$B=\beta$ καὶ $\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{B\Gamma}{\beta\gamma}$,

καὶ τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια (Πρότ. 51), καὶ ἐπομένως ἔχομεν γων. $B\Gamma A=$γων. $\beta\gamma\alpha$, ἐξ ἧς συνάγομεν

$$B\Gamma\Delta-B\Gamma A=\beta\gamma\delta-\beta\gamma\alpha \text{ ἢ } A\Gamma\Delta=\alpha\gamma\delta.$$

Ἡ ὁμοιότης τούτων τῶν τριγώνων δίδει $\frac{B\Gamma}{\beta\gamma}=\frac{A\Gamma}{\alpha\gamma}$, καὶ ἐπειδὴ $\frac{B\Gamma}{\beta\gamma}=\frac{\Gamma\Delta}{\gamma\delta}$ ἕπεται ὅτι καὶ $\frac{A\Gamma}{\alpha\gamma}=\frac{\Gamma\Delta}{\gamma\delta}$.

Τὰ τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ καὶ $\alpha\gamma\delta$ εἶναι ἄρα ὅμοια (Πρότ. 51). Ἐξακολουθοῦντες δὲ οὕτως ἀποδεικνύομεν ἐπίσης τὴν ὁμοιότητα καὶ τῶν ἄλλων τριγώνων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 54.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ. *Ἐὰν δύο πολύγωνα* $AB\Gamma\Delta E$ καὶ $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ Σχ. 90 *ἀναλύωνται εἰς ἰσοπλήθη ὅμοια τρίγωνα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένα, τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια.*

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν τῶν ὁμολόγων τριγώνων ἕπεται κατ' ἀρχὰς ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν τῶν δύο πολυγώνων, καὶ ἀκολούθως ἡ σειρὰ τῶν ἴσων λόγων

$$\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{B\Gamma}{\beta\gamma}=\frac{A\Gamma}{\alpha\gamma},\quad \frac{A\Gamma}{\alpha\gamma}=\frac{\Gamma\Delta}{\gamma\delta}=\frac{A\Delta}{\alpha\delta},\quad \frac{A\Delta}{\alpha\delta}=\frac{\Delta E}{\delta\varepsilon}=\frac{AE}{\alpha\varepsilon}\ \text{κ.τ.λ.}$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἐξαλείφοντες τοὺς λόγους τῶν διαγωνίων ἔχομεν

$$\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{B\Gamma}{\beta\gamma}=\frac{\Gamma\Delta}{\gamma\delta}=\frac{\Delta E}{\delta\varepsilon}=\frac{AE}{\alpha\varepsilon}.$$

Τὰ πολύγωνα ἔχουσιν ἄρα τὰς γωνίας των ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, ἑπομένως εἶναι ὅμοια.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 55.

Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν λόγον δύο οἱωνδήποτε ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἀπόδειξις. Ἡ συνέχεια τῶν ἴσων λόγων Σχ. 90

$$\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{B\Gamma}{\beta\gamma}=\frac{\Gamma\Delta}{\gamma\delta}=\frac{\Delta E}{\delta\varepsilon}=\frac{AE}{\alpha\varepsilon}.$$

δίδει

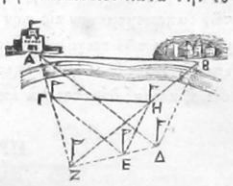
$$\frac{AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta E+AE}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon+\alpha\varepsilon}=\frac{AB}{\alpha\beta}$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 33η. Διὰ τῶν προτάσεων 45 καὶ 46 δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ δεδομένον τι σημεῖον, ἐπὶ τῆς γῆς ὑπάρχον, παράλληλον εὐθείας ἀπροσίτου.

Ἔστω Γ Σχ. 91 τὸ δεδομένον σημεῖον καὶ ΑΒ ἡ ἀπρόσιτος γραμμή, προσδιοριζομένη ὑπὸ δύο ὁρατῶν σημείων Α καὶ Β. Ἐμπήγομεν ἀκόντιον εἰς τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἕτερον εἰς σημεῖόν τι Δ. Ἐκ τοῦ Γ ἄγομεν παράλληλον τῇ εὐθείᾳ ΑΔ, τῆς ὁποίας τὸ ἄκρον Δ εἶναι προσιτὸν (§. 6. ἐφαρμ. 22), ἔστω δὲ ΓΕ ἡ παράλληλος αὕτη. Ἐμπήγομεν ἀκόντιον εἰς τὸ Ε. καὶ μετὰ ταῦτα εἰς τὸ Ζ, σημεῖον τῆς συναπαντήσεως τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΔΕ προεκβεβλημένων, καὶ ἐκ

τοῦ σημείου Ε ἄγομεν τὴν ΕΗ παράλληλον τῇ εὐθείᾳ ΔΒ ἥτις τὸ ἄκρον Δ εἶναι προσιτόν. Ἔπειτα ἐμπήγομεν ἀκόντιον κατὰ τὴν τομὴν Η τῆς παραλλήλου ταύτης μὲ τὴν εὐθεῖαν ΖΒ, καὶ τότε τὰ ἀκόντια Γ καὶ Η προσδιορίζουσι τὴν ζητουμένην παράλληλον.



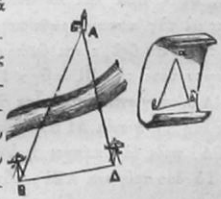
Σχ. 91.

Τῷ ὄντι διὰ μὲν τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΓΕ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΖΓ:ΑΓ=ΖΕ.ΕΔ, διὰ δὲ τῶν ΔΒ, ΕΗ τὴν ΖΕ:ΔΕ=ΖΗ:ΗΒ, αἱ ἀναλογίαι αὗται ἐπειδὴ ἔχουσι κοινὸν λόγον, οἱ δύο ἄλλοι λόγοι ἐπίσης σχηματίζουσιν ἀναλογίαν, καὶ ἔχομεν ΖΓ:ΑΓ=ΖΗ:ΗΒ, ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι ἡ ΓΗ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 34η. Διὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων δυνάμεθα νὰ ἐκτιμήσωμεν, μὲ ἱκανὴν προσέγγισιν, τὴν ἀπόστασιν δύο σημείων ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι ἀπρόσιτον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.

«Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων Α καὶ Β, Σχ. 92, χωριζομένων δι' ἑνὸς προσκόμματος. π. χ. ποταμοῦ, τὸν ὁποῖον δὲν δυνάμεθα νὰ διέλθωμεν». Ἐκλέγομεν, ἐπὶ τῆς γῆς, τρίτον σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἀπόστασις ΒΔ νὰ δύναται νὰ καταμετρηθῇ ἀπ' εὐθείας. Μετροῦμεν διὰ τοῦ γραφομέτρου τὰς γωνίας ΑΒΔ καὶ ΑΔΒ τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΔ, ἥτις καλεῖται Βάσις, καὶ ὑπὸ τῶν ὀπτικῶν ἀκτίνων ΒΑ καὶ ΔΑ τῶν ἀγομένων ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεως πρὸς τὸ ἀπρόσιτον σημεῖον. Ἄγομεν ἔπειτα ἐπὶ χάρτου γραμμὴν ἐπὶ τῆς ὁποίας φέρομεν τὸ μῆκος δὸ ἴσον μὲ τόσα χιλιοστόμετρα, ὅσας μονάδας περιέχει ἡ ΒΔ. Εἰς τὰ σημεῖα δ καὶ δ, οχηματίζομεν γωνίας διαδοχικῶς ἴσας μὲ τὰς καταμετρηθείσας διὰ τοῦ γραφομέτρου, καὶ σχηματίζομεν οὕτω τὸ μικρὸν τρίγωνον αδδ ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΑΒΔ,

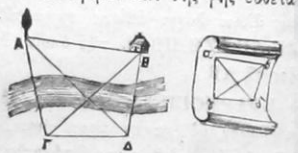


Σχ. 92.

ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν χιλιοστομέτρων τὸν ὁποῖον περιέχει ἡ αδ ἐκφράζει τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς τὴν ἀπόστασιν ΑΒ. Τῷ ὄντι, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ:αδ=ΒΔ:δδ ἀλλ' ἐπειδὴ ΒΔ=δδ×1000 ἔπεται ὅτι ΑΒ=αδ×1000. Σημειωτέον δὲ ὅτι ἡ κλίμαξ δύναται νὰ ληφθῇ κατὰ βούλησιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 35η. «Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀπόστασις δύο ἀπροσίτων σημείων Α καὶ Β, Σχ. 93.» Ἐκλέγομεν ἐπὶ τῆς γῆς εὐθετάν τινα ΓΔ, τὴν ὁποίαν καταμετροῦμεν ἀκριβῶς, καὶ γράφομεν ἐπὶ χάρτου τὴν εὐθεῖαν γδ, ἔχουσαν τόσα χιλιοστόμετρα, ὅσα μέτρα περιέχει ἡ ΓΔ. Μετροῦμεν ἔπειτα διὰ τοῦ γραφομέτρου τὰς γωνίας ΑΓΔ καὶ ΑΔΓ καὶ σχηματίζομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τὰς αγδ καὶ αδγ, ἴσας μὲ τὰς καταμετρηθείσας. Ἔπεται τότε ὅτι τὸ τρίγωνον αγδ εἶναι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΑΓΔ καὶ θὰ ἔχωμεν, ὡς ἀνωτέρω, ΑΓ=αγ×1000.



Σχ. 93.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον μετροῦμεν διὰ τοῦ γραφομέτρου τὰς γωνίας ΒΓΔ, ΒΔΓ καὶ κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τὰς βγδ, δδγ ἴσας μὲ τὰς καταμετρηθείσας. Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἔπεται ὅτι τὸ τρίγωνον δγδ, εἶναι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΒΓΔ, καὶ ὡς ἐκ τούτου ἔχομεν τότε τὴν ΒΓ=δγ×1000.

Ἀλλ' ἡ γωνία αγδ, οὖσα ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν αγδ καὶ δγδ, εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΑΓΒ, ἥτις εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ, πρὸς δὲ ὑπάρχει ἡ ἀναλογία ΑΓ:αγ=ΒΓ:δγ.

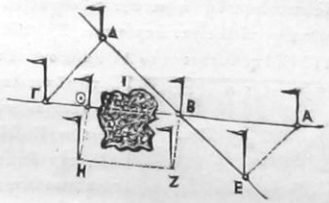
Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, αδγ ἔχουσιν ἄρα μίαν γωνίαν ἴσην περιλαμβανομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, ἑπομένως εἶναι ὅμοια, καὶ ὡς ἐκ τούτου ἔπεται ἡ ἀναλογία ΑΒ:αδ=ΑΓ:αγ, καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ=αγ×1000, ἔχομεν ἐπίσης καὶ τὴν ΑΒ=αδ×1000.

Ἐὰν ἄρα μετρήσωμεν τὴν αδ, ὁ ἀριθμὸς τῶν χιλιοστομέτρων τῶν περιεχομένων εἰς αὐτὴν, θὰ παραστήσῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων τῆς ἀποστάσεως ΑΒ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 36η. Νὰ προεκβληθῇ, ἐκεῖθεν προσκόμματος, εὐθεῖα ἐπὶ τῆς γῆς ὑπάρχουσα. Σχ. 94.

ΛΥΣΙΣ 1η. Ἂς προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐκεῖθεν τοῦ δάσους Ι. Πρὸς τοῦτο εἰς τὸ σημεῖον Β φέρομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὴν κάθετον ΒΖ, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος λαμβάνεται οὕτως, ὥστε ἡ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Ζ ὑψουμένη κάθετος ΗΖ νὰ μὴ διακόπτηται ὑπὸ τοῦ δάσους.



Σχ. 94.

Ἐπίσης ἡ ΗΖ λαμβάνεται οὕτως, ὥστε ἡ ἐπ' αὐτῆς ἀγομένη κάθετος ΗΘ=ΖΒ νὰ μὴ διακόπτηται. Τούτων οὕτως ἐχόντων, τὸ σημεῖον Θ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΑΒ. Ὅθεν ἐὰν εἰς τὸ Θ ὑψώσωμεν κάθετον τὴν ΓΘ ἐπὶ τῆς ΗΘ, αὕτη θὰ ἦναι ἡ ζητουμένη προεκβολὴ τῆς ΑΒ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον. Προκειμένου νὰ καταμετρηθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΓ, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ τοιοῦτον εὐκόλως γίνεται ἀφοῦ ἐκτελεσθῇ ἡ προμνημονευθεῖσα ἐργασία, καὶ ἂν ἀντὶ τῆς ΒΘ λάβωμεν τὸ μῆκος ΗΖ. Ἐπειδὴ, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς του τὸ σχῆμα ΒΘΗΖ εἶναι ὀρθογώνιον, ἄρα ἡ ΖΗ=ΒΘ (Πρότ. 25).

ΛΥΣΙΣ 2α. Ἡ προεκβολὴ εὐθείας τινὸς ἐκεῖθεν προσκόμματος ἄγεται καὶ οὕτως. Ἐκ τινος σημείου Β φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΒΕ ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τὴν ἀπόστασιν ΔΒ=ΒΕ τοιαύτην, ὥστε ἡ εἰς τὸ σημεῖον Δ ὑψουμένη ἐπ' αὐτῆς κάθετος ΔΓ, νὰ μὴ διακόπτηται ὑπὸ τοῦ προσκόμματος. Τούτου γενομένου κατὰ τὰ σημεῖα Ε καὶ Δ, φέρομεν, ἐπὶ τῆς ΔΕ τὰς καθέτους ΕΑ καὶ ΔΓ καὶ λαμβάνομεν ΔΓ=ΑΕ· οὕτω τὸ σημεῖον Γ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΕ, ΔΒΓ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς καὶ μίαν γωνίαν ἴσην καὶ ἑπομένως ἡ γων. ΓΒΔ=γων. ΑΒΕ, ἄρα αἱ πλευραὶ ΓΒ καὶ ΒΑ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας γραμμῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον. Τὸ σχῆμα δεικνύει σαφέστατα τίνι τρόπῳ δυνά-

μεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον Β τῆς συναπαντήσεως δύο εὐθυγραμμιῶν ΑΓ καὶ ΕΔ ἐπὶ τῆς γῆς κεχαραγμένων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.

Νὰ προσδιορισθῇ ἡ μεταξὺ τῶν χωρίων Α καὶ Β ἀπόστασις ἐκ τῶν ὁποίων τὸ Β εἶναι ἀπρόσιτον. Σχ. 95.

ΛΥΣΙΣ 1η. Φέρομεν τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ, ἧς τὸ μῆκος λαμβάνεται κατ' ἀρέσκειαν, λαμβάνομεν τὴν ΑΔ=ΔΓ, εἰς δὲ τὸ σημεῖον Γ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΓ, τὴν ὁποίαν προεκτείνομεν ἕως οὗ συναπαντήσῃ τὴν προεκβολὴν τῆς ΔΒ, εἰς τὸ σημεῖον Ε. Τὸ μῆκος δὲ τοῦτο τῆς ΓΕ εἶναι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις τῶν χωρίων.



Σχ. 95.

Ἐπειδή, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς των τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΔΓΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσιν ἀνὰ μίαν πλευρὰν ἴσην ΑΔ=ΔΓ, καὶ ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην ΒΔΑ=ΓΔΕ, ὡς ἀπὸ κορυφῆς ἀντιθέτους. Ἄρα ἡ ΑΒ=ΓΕ.

ΛΥΣΙΣ 2α. Λαμβάνομεν τὴν ΑΔ=α κατ' ἀρέσκειαν καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ζ ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ΖΗ, τὴν ὁποίαν ἐκτείνομεν ἕως οὗ συναπαντήσῃ τὴν ΔΒ εἰς τὸ σημεῖον Η καὶ καταμετροῦμεν αὐτήν, ἔστω δὲ ΖΗ=6 καὶ ΔΖ=γ. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΗΖΔ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΔ:ΖΔ=ΑΒ:ΖΗ ἐξ ἧς συνάγομεν ΑΒ=$\frac{\alpha \times 6}{\gamma}$.

---

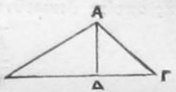
§.—9.

Σχέσεις τῆς καταβιβαζομένης καθέτου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῶν τμημάτων αὐτῆς καὶ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας μετὰ τῆς ὑποτεινούσης. Σχέσεις τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τριγώνου τῆς ἀντικειμένης εἰς γωνίαν ὀρθήν, ὀξεῖαν ἢ ἀμβλεῖαν, καὶ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.—Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου ὑπάρχοντος ἄξωμεν τεμνούσας, ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὰ δύο σημεῖα τῆς τομῆς ἑκάστης τεμνούσης μετὰ τῆς περιφερείας, εἶναι σταθερός, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ διεύθυνσις ἑκάστης τεμνούσης.—Περίπτωσις καθ' ἣν ἡ τέμνουσα εἶναι ἐφαπτομένη. Ἐφαρμογαί. Ἀγωγὴ τῶν καθέτων ἐπὶ τῆς γῆς δι' ἁπλῆς χορδῆς. Καταμέτρησις ἀπροσίτων ἀποστάσεων κατὰ τὰς στρατιωτικὰς κατοπτεύσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 56.

Ἡ κάθετος ΑΔ Σχ. 96 *ἡ καταβιβαζομένη ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου* ΑΒΓ, *διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο μερικὰ τρίγωνα ὅμοια πρὸς τὸ ὅλον τρίγωνον καὶ μεταξύ των.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουσι τὴν γωνίαν Β κοινήν, εἶναι ἰσογώνια, ἤτοι ὅμοια. Διὰ τοῦτο καὶ τὸ ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΑΔΓ, καὶ ἐπομένως τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ εἶναι ὅμοια.



Σχ. 96.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 57.

Ἡ κάθετος ΑΔ *εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων* ΒΔ *καὶ* ΔΓ *τῆς ὑποτεινούσης* ΒΓ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, συγκρίνοντες τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ, εὑρίσκομεν τὴν ἀναλογίαν

ΒΔ:ΑΔ=ΑΔ:ΔΓ. . . . . [1].

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 58.

Ἑκάστη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ προσκειμένου αὐτῇ τμήματος.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ συγκρίνοντες τὸ μερικὸν τρίγωνον ΑΒΔ, πρὸς τὸ ὅλον ΑΒΓ, εὑρίσκομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\text{ΒΔ}:\text{ΑΒ}=\text{ΑΒ}:\text{ΒΓ}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2].$$

ὁμοίως καὶ τὴν

$$\text{ΔΓ}:\text{ΑΓ}=\text{ΑΓ}:\text{ΒΓ}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [3].$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 59.

Τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μεταξύ των, ὡς τὰ τμήματα τῆς ὑποτεινούσης.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἐκ τῶν σχέσεων [2] καὶ [3] ἔπονται αἱ ἀκόλουθοι

$$\overline{\text{ΑΒ}}^2=\text{ΒΔ}\times\text{ΒΓ},\quad \overline{\text{ΑΓ}}^2=\text{ΔΓ}\times\text{ΒΓ}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [4].$$

τὰς ὁποίας διαιροῦντες μέλος πρὸς μέλος, ἔχομεν

$$\frac{\overline{\text{ΑΒ}}^2}{\overline{\text{ΑΓ}}^2}=\frac{\text{ΒΔ}\times\text{ΒΓ}}{\text{ΔΓ}\times\text{ΒΓ}}=\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}},$$

ἤτοι τὴν ἀναλογίαν $\overline{\text{ΑΒ}}^2:\overline{\text{ΑΓ}}^2=\text{ΒΔ}:\text{ΔΓ}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 60.

Τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης, ὡς τὸ προσκείμενον τμῆμα τῇ πλευρᾷ ταύτῃ πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἐκ τῆς σχέσεως $\overline{\text{ΑΒ}}^2=\text{ΒΔ}\times\text{ΒΓ}$, εὑρίσκομεν διαιροῦντες διὰ $\overline{\text{ΒΓ}}^2$ ἢ διὰ $\text{ΒΓ}\times\text{ΒΓ}$, τὴν

$$\frac{\overline{\text{ΑΒ}}^2}{\overline{\text{ΒΓ}}^2}=\frac{\text{ΒΔ}\times\text{ΒΓ}}{\text{ΒΓ}\times\text{ΒΓ}}=\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΒΓ}}.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὴν

$$\frac{\overline{\text{ΑΓ}}^2}{\overline{\text{ΒΓ}}^2}=\frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΒΓ}}.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 61.

Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, προσθέτοντες μέλος πρὸς μέλος τὰς δύο σχέσεις [4] (Πρότ. 59), λαμβάνομεν τὸ ἑξῆς ἐξαγόμενον.

$$\overline{\text{ΑΒ}}^2+\overline{\text{ΑΓ}}^2=\text{ΒΔ}\times\text{ΒΓ}+\text{ΔΓ}\times\text{ΒΓ}=(\text{ΒΔ}+\text{ΔΓ})\times\text{ΒΓ}=\text{ΒΓ}\times\text{ΒΓ}=\overline{\text{ΒΓ}}^2,$$

ἤτοι $\overline{\text{ΑΒ}}^2+\overline{\text{ΑΓ}}^2=\overline{\text{ΒΓ}}^2$.

Ἐὰν π. χ. ΑΒ=5 καὶ ΑΓ=12, ἔχομεν

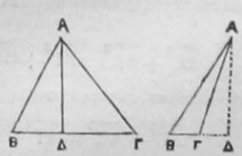
$$\overline{\text{ΒΓ}}^2=25+144=169, \text{ καὶ } \text{ΒΓ}=\sqrt{169}=13.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὴν ἄμεσον ἀπόδειξιν τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἴδε ἐν §. 12. Προτ. 61ʹ.

Ὁρισμός. Καλεῖται *προβολὴ* εὐθείας ἐπί τινα ἄλλην, ἡ περιλαμβανομένη ἀπόστασις μεταξὺ τῶν ποδῶν τῶν καταβιβαζομένων καθέτων ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πρώτης εὐθείας ἐπὶ τὴν δευτέραν. Οὕτω ΒΔ καὶ ΔΓ Σχ. 97 εἶναι αἱ προβολαὶ τῆς ΑΒ καὶ ΑΓ ἐπὶ τὴν ΒΓ εὐθεῖαν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 62.

Τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς ΑΓ, Σχ. 97 *τριγώνου τιτὸς* ΑΒΓ, *τῆς ἀντικειμένης εἰς ὀξεῖαν γωνίαν* Β, *εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν* ΑΒ *καὶ* ΒΓ *μεῖον τοῦ διπλασίου γινομένου τῆς μιᾶς αὐτῶν* ΒΓ *ἐπὶ τὴν προβολὴν* ΒΔ *τῆς ἄλλης, εὑρισκομένην ἐπὶ τῆς τελευταίας ταύτης πλευρᾶς.*



Σχ. 97.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\Delta\Gamma=B\Gamma-B\Delta$ ἢ $\Delta\Gamma=B\Delta-B\Gamma$· ἐκ τῆς δευτέρας τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνομεν τὴν

$$\overline{\Delta\Gamma}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{B\Delta}^2-2B\Gamma\times B\Delta,$$

καὶ προσθέτοντες τὴν $\overline{A\Delta}^2$ εἰς ἕκαστον αὐτῆς μέλος εὑρίσκομεν

$$\overline{\Delta\Gamma}^2+\overline{A\Delta}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{B\Delta}^2+\overline{A\Delta}^2-2B\Gamma\times B\Delta$$

εἰς τὴν ὁποίαν ἀντεισάγοντες τὰς τιμὰς

$$\overline{\Delta\Gamma}^2+\overline{A\Delta}^2=\overline{A\Gamma}^2 \text{ καὶ } \overline{B\Delta}^2+\overline{A\Delta}^2=\overline{AB}^2,$$

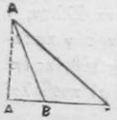
ἔχομεν

$$\overline{A\Gamma}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{AB}^2-2B\Gamma\times B\Delta.$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 63.

Τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς ΑΓ Σχ. 98, *τριγώνου τινὸς* ΑΒΓ, *τῆς ἀντικειμένης εἰς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν* ΑΒΓ, *ἰσοῦνται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν* ΑΒ *καὶ* ΒΓ, *πλέον τοῦ διπλασίου γινομένου τῆς μιᾶς αὐτῶν* ΒΓ, *ἐπὶ τὴν προβολὴν* ΒΔ *τῆς ἄλλης, εὑρισκομένην ἐπὶ τὴν τελευταίαν πλευράν.*



Σχ. 98.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\Delta\Gamma=B\Gamma+B\Delta$ καὶ

$$\overline{\Delta\Gamma}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{B\Delta}^2+2B\Gamma\times B\Delta,$$

προσθέτοντες εἰς ἕκαστον μέλος αὐτῆς $\overline{A\Delta}^2$, εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$\overline{\Delta\Gamma}^2+\overline{A\Delta}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{B\Delta}^2+\overline{A\Delta}^2+2B\Gamma\times B\Delta$$

εἰς τὴν ὁποίαν ἀντεισάγοντες τὰς τιμὰς

$$\overline{\Delta\Gamma}^2+\overline{A\Delta}^2=\overline{A\Gamma}^2 \text{ καὶ } \overline{B\Delta}^2+\overline{A\Delta}^2=\overline{AB}^2$$

ἔχομεν

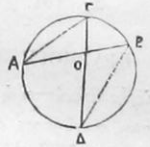
$$\overline{A\Gamma}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{AB}^2+2B\Gamma\times B\Delta.$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 64.

Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου, ληφθέντος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου, ἄξωμεν τεμνούσας, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὰ δύο σημεῖα τῆς τομῆς ἑκάστης τεμνούσης μὲ τὴν περιφέρειαν, εἶναι σταθερὸν, οἱαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ διεύθυνσις αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ά). Ὑποτεθείσθω τὸ σημεῖον Ο Σχ. 99 ἐντὸς τοῦ κύκλου, καὶ ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ δύο τέμνουσαι. Ἐὰν ἄξωμεν τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ, τὰ τρίγωνα ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΓ, ὡς καὶ αἱ Γ καὶ Β, ἐπειδὴ ἔχουσι μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΔ. Ἔχομεν ἄρα (Πρότ. 49), τὴν σχέσιν

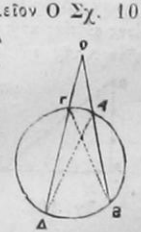


Σχ. 99.

$$\frac{OB}{O\Delta}=\frac{O\Gamma}{OA}$$

ἐξ ἧς προκύπτει ἡ $OA\times OB=O\Gamma\times O\Delta$ ἥτις ἐκφράζει σταθερὰν ποσότητα.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ β'). Ὑποτεθείσθω τὸ σημεῖον Ο Σχ. 100 ἐκτὸς τοῦ κύκλου, καὶ ἔστωσαν ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ αἱ τέμνουσαι. Ἄγομεν τὴν ΑΔ καὶ ΒΓ, καὶ σχηματίζομεν τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΑΔ καὶ ΟΓΒ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ Δ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουσι μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΓ, καὶ τὴν γωνίαν Ο κοινήν· ἄρα (Πρότ. 49),



Σχ. 100.

$$\frac{OA}{O\Delta}=\frac{O\Gamma}{OB}$$

ἐξ ἧς προκύπτει ἡ σχέσις

$$OA\times OB=O\Gamma\times O\Delta,$$

ἥτις εἶναι σταθερὰ ποσότης.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ πρότασις ὑπάρχει ὁμοίως, ἐὰν μία τῶν τεμνουσῶν γίνῃ ἐφαπτομένη, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 101. Ἐπειδὴ, ἐὰν στρέψωμεν τὴν τέμνουσαν ΟΒ, τοῦ σχήματος 100,

περὶ τὸ σταθερὸν σημεῖον Ο, ἕως οὗ τὰ δύο σημεῖα Α, Β συμπέσωσιν, ἡ πρότασις ἀληθεύει ὅσον πλησίον καὶ ἂν ἦναι τὰ σημεῖα ταῦτα· θὰ ἐπαληθεύῃ ὁμοίως καὶ ὅταν συμπέσωσι, καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

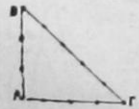


Σχ. 101.

$$\text{ΟΑ}\times\text{ΟΑ}=\text{ΟΓ}\times\text{ΟΔ} \text{ ἢ } \overline{\text{ΟΑ}}^2=\text{ΟΓ}\times\text{ΟΔ},$$

ὅπερ ἐκφωνοῦμεν οὕτως· *ἡ ἐφαπτομένη* ΟΑ *εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς τεμνούσης* ΟΔ, *καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ αὐτῆς μέρους* ΟΓ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 36η. Ἔστω ἡ ἰσότης $\overline{\text{ΑΒ}}^2+\overline{\text{ΑΓ}}^2=\overline{\text{ΒΓ}}^2$, (Πρότ 61), ἐξ ἧς προκύπτει ἡ $\overline{\text{ΑΒ}}^2=\overline{\text{ΒΓ}}^2-\overline{\text{ΑΓ}}^2$ ἢ $\overline{\text{ΑΓ}}^2=\overline{\text{ΒΓ}}^2-\overline{\text{ΑΒ}}^2$. Ἔστωσαν, σιασδήποτε οὔσης τῆς μονάδος, ΑΒ=6 καὶ ΑΓ=8, ἔπεται τότε ὅτι $\overline{\text{ΑΓ}}^2=36+64=100$ καὶ $\text{ΑΓ}=\sqrt{100}=10$. Ἐὰν αἱ ΑΒ καὶ ΒΓ πλευραὶ ἦσαν γνωσταὶ, τότε ἠθέλομεν εὕρει τὴν $\overline{\text{ΑΓ}}^2=100-36=64$ ἐξ ἧς προκύπτει ἡ $\text{ΑΓ}=\sqrt{64}=8$. Ἐὰν αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΓ ἦναι δεδομέναι, θὰ ἔχωμεν $\overline{\text{ΑΒ}}^2=100-64=36$ ἐξ ἧς τὴν $\text{ΑΒ}=\sqrt{36}=6$. Διὰ τοῦ μέσου τούτου ἄγομεν ἐπὶ δεδομένης εὐθείας κάθετον. Οὕτω π. χ. ἵνα ὑψώσωμεν κάθετον εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς εὐθείας ΑΓ Σχ. 102, λαμβάνομεν τὴν ΑΓ ἴσην πρὸς τέσσαρας μονάδας μήκους, τῆς μονάδος κατ' ἀρέσκειαν λαμβανομένης, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α, ὡς ἀπὸ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ 3 μονάδας, γράφομεν τόξον κύκλου· ὁμοίως καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ ὡς ἀπὸ κέντρου μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ 5 μονάδας, γράφομεν δεύτερον τόξον κύκλου, ὅπερ τέμνει τὸ πρῶτον εἰς τὸ σημεῖον Β, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 4 εἶναι μικρότερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5 καὶ μεγαλήτερος τῆς διαφορᾶς αὐτῶν. Ὅθεν ἡ ΑΒ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος. Τῷ ὄντι ἄγοντες τὴν ΑΓ, ἔχομεν ΑΓ=4, ΑΒ=3, καὶ ΒΓ=5, ἐξ ἧς προκύπτουσιν αἱ $\overline{\text{ΑΓ}}^2=16$, $\overline{\text{ΑΒ}}^2=9$ καὶ $\overline{\text{ΒΓ}}^2=25$, ἀλλὰ $25=9+16$ ἄρα $\overline{\text{ΒΓ}}^2=\overline{\text{ΑΒ}}^2+\overline{\text{ΑΓ}}^2$.



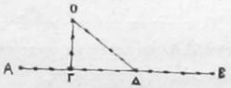
Σχ. 102.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπειδὴ ἔχει τὴν ἰδιότητα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔπεται ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθὴ, διότι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 3 καὶ 4 ἔχει ὑποτείνουσαν 5, ἑπομένως εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ (Πρότ. 8).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 37η. Διὰ τῆς Ἐφαρμ. 36 δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπὶ τῆς γῆς, καθέτους μικρᾶς ἐκτάσεως.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἡ χορδὴ ΑΒ Σχ. 103 δώδεκα μέτρων μήκους, διαιρουμένη διὰ κρίκων Γ καὶ Δ εἰς τρόπον ὥστε ΑΓ=3 μέτρ:, ΓΔ=4 μέτρ:, καὶ ΔΒ=5 μέτρ:, ἐνοῦμεν τὰ ἄκρα Α καὶ Β δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ κρίκου Ο, καὶ τανύομεν συγχρόνως τὰ τρία μέρη ΟΓ, ΟΔ καὶ ΓΔ τῆς χορδῆς, τὸ δὲ τρίγωνον ΟΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ. Διὰ τῆς χορδῆς δὲ ταύτης ἄγομεν καθέτους ὡς ἐξῆς.



Σχ. 103.

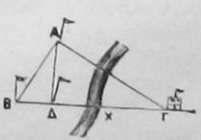
Τανύομεν τὸ μέρος ΓΔ τῆς χορδῆς ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας διὰ πασσαλίσκων οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Γ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἡ κάθετος πρέπει νὰ διελθῃ. Τανύομεν ὁμοίως τὴν χορδὴν, διὰ τοῦ κρίκου Ο, ὁ δὲ δι' αὐτοῦ διερχόμενος πασσαλίσκος εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ζητουμένης καθέτου, ἥτις εἶναι ἡ τῆς ΓΟ διεύθυνσις.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ μῆκος τῆς χορδῆς δυνατὸν νὰ διαιρεθῇ καθ' οἱανδήποτε μονάδα εἰς δώδεκα ἴσα μέρη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 38η. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ ἀπροσίτου σημείου Γ καὶ τοῦ προσιτοῦ Δ Σχ. 104.

ΛΥΣΙΣ. Εἰς τὸ σημεῖον Δ ὑψοῦμεν κάθετον (ἐφαρμ. 37) ἐπὶ τῆς ΔΓ τὴν ὁποίαν δι' ἀκοντίων χαράττομεν ἐπὶ τῆς γῆς. Εἰς σημεῖόν τι Α, τοῦ ὁποίου μετροῦμεν τὴν ἐκ τοῦ σημείου Δ ἀπόστασιν, ἥτις δυνατὸν νὰ ἦναι μικρὰ ἢ μεγάλη, ἀναλόγως τῆς ἐκτάσεως τοῦ τόπου ἐφ' οὗ ἐργαζόμεθα, ἄγομεν τὴν ΑΓ δι' ἀκοντίων, καὶ ἔπειτα τὴν



Σχ. 104.

ΑΒ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ καταμετροῦμεν τὴν ΒΔ, ἐκ δὲ τῆς ἀναλογίας ΒΔ: ΑΔ=ΑΔ: ΔΓ, προκυπτούσης ἀπὸ τῆς ἰδιότητος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου (Πρότ. 57), συνάγομεν

$$\Delta\Gamma=\frac{\Delta\Delta\times\Delta\Delta}{\Delta\Delta}.$$

Ἐὰν ΑΔ=10 μέτροις καὶ $\Delta\Delta=\frac{2}{10}$, θὰ ἔχωμεν τὴν

$$\Delta\Gamma=\frac{1000}{2}=500 \text{ μέτροις}.$$

Ἡ σύντομος αὕτη μέθοδος, ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς περιστάσεις καθ' ἃς ἡ ΑΔ ἠμπορεῖ νὰ ἦναι ἐλαχίστη, ἐφαρμόζεται κατὰ τὰς Στρατιωτικὰς Κατοπτεύσεις.

Ὁ τύπος τῆς ΔΓ δεικνύει ὅτι, τὸ ἐλάχιστον λάθος ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς καθέτου γινόμενον, δὲν χορηγεῖ ἀκριβῆ ἐκτίμησιν τῆς ΒΔ καὶ ἑπομένως τῆς ζητουμένης ἀποστάσεως ΔΓ· ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ἐπιστήσωμεν τὴν προσοχήν μας κατὰ τὴν χάραξιν τῆς ΑΔ καὶ ΑΒ διὰ τοῦ γνώμονος ἢ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς 37 γιγνομένην.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 39η. Ἐκ τοῦ σημείου Ζ νὰ προσδιορισθῇ ἡ μεταξὺ τῶν ἀπροσίτων σημείων Α καὶ Β ἀπόστασις Σχ. 91.

ΛΥΣΙΣ. Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν 38 προσδιορίζομεν τὴν ἀπόστασιν ΖΒ, καὶ ἔκ τινος σημείου Γ, ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς ΖΑ εὑρισκομένου φέρομεν τὴν παράλληλον ΓΗ τῆς ΑΒ (§. 8. ἐφαρμογὴ 33), καὶ καταμετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις ΖΗ, ΓΗ· τότε τὰ ὅμοια τρίγωνα ΓΖΗ καὶ ΑΖΒ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΒ: ΓΗ=ΒΖ: ΗΖ, ἐξ ἧς ἔχομεν τὴν

$$\text{ΑΒ}=\frac{\Gamma\text{Η}\times\text{ΒΖ}}{\text{ΗΖ}}.$$

---

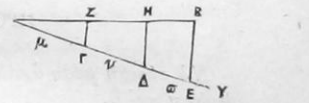
§—10.

Διαίρεσις εὐθείας εἰς ἴσα ἢ ἀνάλογα μέρη πρὸς δεδομένας γραμμάς. Εὕρεσις τετάρτης ἀναλόγου τριῶν εὐθειῶν δοθεισῶν καὶ μέσης ἀναλόγου μεταξὺ δύο εὐθειῶν. Κατασκευὴ ἐπὶ δεδομένης εὐθείας, πολυγώνου ὁμοίου δεδομένῳ πολυγώνῳ. Ἐφαρμογαί. Ἀναγωγικὸς καὶ Ἀναλογικὸς ἢ Μειονογράφος διαβήτης. Δεκαδικὴ Κλίμαξ. Ἀντιγραφὴ σχεδίων. Μέθοδοι σχεδιάσεως. Σχεδίασις μεγάλων ἐπιφανειῶν. Τριγωνικὴ Δικτύωσις. Σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας. Ὑδρογραφία.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 19.

Νὰ διαιρεθῇ ἡ δεδομένη εὐθεῖα ΑΒ Σχ. 105 *εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δεδομένων γραμμῶν* μ, ν, π.

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ σημείου Α ἄγομεν τὴν ἀπέραντον γραμμὴν ΑΥ ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τὴν ΑΓ=μ, ΓΔ=ν, ΔΕ=π, ἑνοῦντες δὲ τὴν ΕΒ, ἄγομεν τὴν ΓΖ καὶ ΔΗ παράλληλον τῆς ΕΒ καὶ τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ διαιρεῖται εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η, εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δεδομένων γραμμῶν.



Σχ. 105.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ (Πρότ. 45), ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΗΖ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\Gamma\Delta}=\frac{\mu}{\nu}, \text{ ὁμοίως } \frac{\text{ΗΖ}}{\text{ΑΗ}}=\frac{\Gamma\Delta}{\text{ΑΔ}} \text{ καὶ } \frac{\text{ΗΒ}}{\text{ΑΗ}}=\frac{\Delta\text{Ε}}{\text{ΑΔ}},$$

διαιροῦντες δὲ μέλος πρὸς μέλος τὰς δύο τελευταίας σχέσεις εὑρίσκομεν τὴν

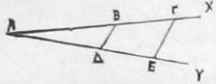
$$\frac{\text{ΗΖ}}{\text{ΗΒ}}=\frac{\Gamma\Delta}{\Delta\text{Ε}}=\frac{\nu}{\pi}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἵνα διαιρέσωμεν εὐθεῖάν τινα ΑΒ εἰς ν ἴσα μέρη, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἐπὶ τῆς ΑΥ, ἐκ τοῦ Α ἀρχίζοντες ν ἴσα μήκη, καὶ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν αὐτὴν ὡς προηγουμένως κατασκευήν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 20.

Νὰ εὑρεθῇ τετάρτη ἀνάλογος τριῶν δεδομένων εὐθειῶν α, β, γ. Σχ. 106.

Λύσις. Πρόκειται νὰ εὑρεθῇ μῆκός τι Χ ἱκανοποιοῦν τὴν ἀναλογίαν α:β=γ:Χ.



Σχ. 106.

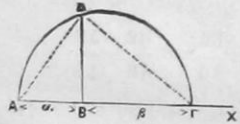
Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον ἐπὶ τῶν πλευρῶν οἱασδήποτε γωνίας ΧΑΥ, λαμβάνομεν τὰ μήκη ΑΒ=α, ΒΓ=β, καὶ ΑΔ=γ· ἔπειτα ἄγομεν τὴν ΒΔ, καὶ φέρομεν τὴν ΓΕ παράλληλον τῇ ΒΔ· τότε τὸ μῆκος ΔΕ εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος. Ἐπειδὴ ἔχομεν (Πρότ. 45), ΑΒ:ΒΓ=ΑΔ:ΔΕ ἢ α:β=γ:ΔΕ, ἄρα Χ=ΔΕ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 21.

Νὰ εὑρεθῇ μέση ἀνάλογος μεταξὺ δύο δεδομένων εὐθειῶν α καὶ β.

Λύσις. Πρέπει νὰ εὑρεθῇ μῆκός τι Χ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν α:Χ=Χ:β ἢ $X^2=\alpha\times\beta$.

Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον, ἐπὶ τῆς ἀπεράντου γραμμῆς ΑΧ Σχ. 107, φέρομεν τὰ μήκη ΑΒ=α καὶ ΒΓ=β· ἐπὶ δὲ τῆς ΑΓ, ὡς ἀπὸ διαμέτρου, γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Β, ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ΒΔ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος. Ἐπειδὴ ἐὰν ἄξωμεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΔΓ, τὸ τρίγωνον ΑΔΓ θὰ ἦναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ σημεῖον Δ (Πρότ. 27), καὶ ἑπομένως (Πρότ. 57), θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν



Σχ. 107.

ΑΒ:ΒΔ=ΒΔ:ΒΓ ἢ α:ΒΔ=ΒΔ:β, ἄρα Χ=ΒΔ.

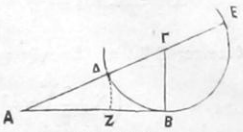
ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν λάβωμεν τὴν ΑΒ=α καὶ τὴν ΑΓ=β τότε ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος εἶναι ἡ ΑΔ (Πρότ. 58).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 22.

Νὰ διαιρεθῇ ἡ δεδομένη εὐθεῖα ΑΒ, εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεῖζον αὐτῶν νὰ ἦναι μέσον ἀνάλογον με-

ταξὺ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ μικροτέρου αὐτῆς μέρους. Σχ. 108.

Κατασκευή. Εἰς τὸ ἄκρον Β τῆς εὐθείας ΑΒ, φέρομεν τὴν κάθετον ΒΓ, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἴσην τῷ ἡμίσει τῆς ΑΒ. Διὰ τοῦ σημείου Γ ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ διὰ τῆς ἀκτῖνος ΓΒ γράφομεν περιφέρειαν. Ἄγομεν τὴν ΑΓ ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Δ, καὶ λαμβάνομεν ΑΖ=ΑΔ.



Σχ. 108.

Τούτων γενομένων, λέγομεν ὅτι ἡ ΑΒ ἐτμήθη εἰς τὸ σημεῖον Ζ, καθ' ἃ τὸ παρὸν πρόβλημα ἀπαιτεῖ, ἤτοι ἡ ἀκόλουθος ὑπάρχει ἀναλογία ΑΒ:ΑΖ=ΑΖ:ΖΒ.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι ἡ ΑΒ οὖσα κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΓΒ, εἶναι ἐφαπτομένη. Ἐὰν δὲ προεκταθῇ ἡ ΑΓ μέχρις οὗ συναντήσῃ ἐκ δευτέρου τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε, ἡ ἐξῆς ἀποτελεῖται ἀναλογία (Πρότ. 64),

ΑΕ:ΑΒ=ΑΒ:ΑΔ.

Ἐκ ταύτης δὲ παράγεται ἡ ἀναλογία

ΑΕ—ΑΒ:ΑΒ=ΑΒ—ΑΔ:ΑΔ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀκτὶς ΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ διάμετρος ΔΕ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως ΑΕ—ΑΒ=ΑΔ=ΑΖ. Ἐπειδὴ πρὸς τούτοις ΑΖ=ΑΔ, ἕπεται ὅτι ΑΒ—ΑΔ=ΖΒ. Οὕτω λοιπὸν τῶν ἀντεισαγωγῶν γενομένων, ἔχομεν τὴν

ΑΖ:ΑΒ=ΖΒ:ΑΔ ἢ ΑΖ

καὶ μετατιθεμένων τῶν ὅρων, τὴν ἀναλογίαν

ΑΒ:ΑΖ=ΑΖ:ΖΒ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ 1η. Ἡ τοιαύτη τῆς εὐθείας ΑΒ κατατομὴ ὀνομάζεται διαίρεσις εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. Σημειωτέον δὲ, ὅτι καὶ ἡ διατέμνουσα ΑΕ διῃρέθη εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον εἰς τὸ σημεῖον Δ, διότι, οὔσης τῆς ΑΒ=ΔΕ, ὑπάρχει ἡ ἐξῆς ἀναλογία

ΑΕ:ΔΕ=ΔΕ:ΑΔ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ 2α. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ, ἔχομεν

$$AB=\Delta E,\ \Delta\Gamma=\frac{AB}{2}=\frac{\alpha}{2},\ AZ=A\Delta=X \text{ καὶ } ZB=\Upsilon,$$

θέτοντες $AB=\alpha$. Ἐκ τῆς σχέσεως $\overline{A\Gamma}^2=\overline{AB}^2+\overline{\Gamma B}^2$ συνάγομεν

$$\left(X+\frac{\alpha}{2}\right)^2=\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4} \text{ ἢ } \left(X+\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{5\alpha^2}{4},$$

ἢ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν δύο μελῶν, ἔχομεν τὴν

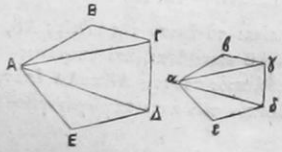
$$\frac{\alpha}{2}\sqrt{5}=X+\frac{\alpha}{2}\cdot \text{ ἐξ ἧς συνάγομεν τὴν}$$

$$X=\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)=\alpha\times\frac{2{,}236-1}{2}=\alpha\times 0{,}618.$$

Καὶ $\Upsilon=\alpha-X=\alpha-\alpha\times 0{,}618=\alpha(1-0{,}618)=\alpha\times 0{,}384$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 23.

Νὰ κατασκευασθῇ, ἐπὶ δεδομένης εὐθείας αε Σχ. 90, *πολύγωνον ὅμοιον τῷ δεδομένῳ πολυγώνῳ* ΑΒΓΔΕ.



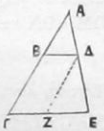
Σχ. 90.

Λύσις. Ὑποθέτοντες τὴν δεδομένην εὐθεῖαν αε, ὁμόλογον τῆς ΑΕ, ἄγομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ καὶ σχηματίζομεν τὴν γωνίαν αεδ ἴσην τῇ ΑΕΔ, καὶ τὴν γωνίαν εαδ ἴσην τῇ ΕΑΔ, καὶ τότε τὸ τρίγωνον αεδ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΕΔ. Ὁμοίως σχηματίζομεν τὴν γωνίαν αδγ=ΑΔΓ καὶ τὴν δαγ=ΔΑΓ καὶ τότε τὸ τρίγωνον αγδ εἶναι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΑΓΔ. Σχηματίζομεν ἐπίσης τὴν γωνίαν αγβ=ΑΓΒ καὶ τὴν γαβ=ΓΑΒ καὶ τότε τὸ τρίγωνον αβγ εἶναι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ. Τὰ δύο πολύγωνα συνιστάμενα ἀπὸ ἰσοπληθῆ ὅμοια τρίγωνα καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένα εἶναι ὅμοια.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 10η. Τὰ μέρη ΒΔ καὶ ΓΕ Σχ. 109 δύο παραλλήλων, τὰ περιλαμβανόμενα μεταξὺ τῶν πλευρῶν γωνίας τινὸς ΓΑΕ ἔχουσι τοιοῦτον λόγον μεταξύ των, ὁποῖον καὶ αἱ ἀποστάσεις τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας πρὸς τὴν τομὴν ἑκάστης πλευρᾶς καὶ τῆς παραλλήλου.

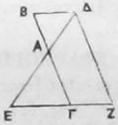
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν τὴν ΔΖ παράλληλον τῇ ΑΓ καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΕ:ΑΔ=ΓΕ:ΓΖ· ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ μήκη ΓΖ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσα ὡς παράλληλα, καὶ περιλαμβανόμενα μεταξὺ παραλλήλων προκύπτει ἡ ἀναλογία ΑΕ:ΑΔ=ΓΕ:ΒΔ.



Σχ. 109.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ θεώρημα ὑπάρχει ὁμοίως καὶ ὅταν ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας πίπτει μεταξὺ τῶν παραλλήλων, καὶ μία ἐξ αὐτῶν τέμνῃ τὴν προεκβολὴν τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 110. Ἐπειδὴ φέροντες τὴν ΔΖ παράλληλον τῇ ΒΓ ἔχομεν ΑΕ:ΑΔ=ΕΓ:ΓΖ. Ἀλλὰ ΓΖ=ΒΔ, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων περιλαμβανόμεναι· ἄρα προκύπτει ἡ ἀναλογία

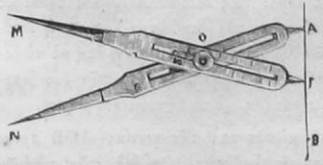
ΑΕ:ΑΔ=ΕΓ:ΒΔ.



Σχ. 110.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 11η. Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς 10, κατασκευάζομεν ἐργαλεῖον δι' οὗ λαμβάνομεν ἀμέσως τὸ ἥμισυ τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον κ. τλ. μέχρι τοῦ δωδεκάτου δεδομένης εὐθείας.

Τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο καλεῖται Ἀναγωγικὸς Διαβήτης, καὶ συνίσταται ἐκ δύο ἴσων βραχιόνων ΑΝ καὶ ΓΜ Σχ. 111 οἵτινες, ἑκατέρωθεν ἀπολήγουσιν εἰς αἰχμὴν, ἐφαρμόζονται δὲ καὶ συσφίγγονται μεταξὺ δύο κομβίων. Κατὰ τὸ μῆκος τῶν βραχιόνων ὑπάρχει χαραγμὴ ἐντὸς τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ὁ ἄξων Ο ὁ συνενῶν τὰ κομβία καὶ ὅστις, κινούμενος κατὰ τὸ μῆκος τῆς χαραγμῆς, ἐπιτρέπει τὴν εἰς οἱονδήποτε σημεῖον διασταύρωσιν τῶν βραχιόνων.



Σχ. 111.

Ἵνα λάβωμεν διὰ τοῦ ἐργαλείου τούτου τὸ ἥμισυ τῆς εὐθείας ΑΒ,

ἐφαρμόζομεν ἐν πρώτοις τοὺς βραχίονας καὶ σύρομεν τὸν ἄξωνα ἐντὸς τῆς διπλῆς χαραγμῆς οὕτως, ὥστε ἡ ἀπόστασις ΟΑ νὰ ᾖναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως ΟΝ, ὅπερ εὐκόλως γίνεται διὰ τῶν κεχαραγμένων διαιρέσεων ἐφ' ἑνὸς τῶν βραχιόνων, καὶ ἐπὶ γλωσσιδίου τινὸς μὲ τὸ ὁποῖον ὁ ἄξων συνενοῦται. Ἀνοίγομεν τότε τοὺς βραχίονας καὶ λαμβάνομεν διὰ τῶν ἄκρων Μ καὶ Ν ἀπόστασιν ἴσην τῇ ΑΒ καὶ τότε ἡ ἀπόστασις ἡ χωρίζουσα τὰ ἄκρα Α καὶ Γ εἶναι τὸ ζητούμενον μῆκος. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν διάταξιν τοῦ ἐργαλείου ἔχομεν ΟΜ=ΟΝ καὶ ΟΓ=ΟΑ καὶ ἑπομένως τὴν ἀναλογίαν

$$\text{ΟΑ:ΟΝ=ΟΓ:ΟΜ.}$$

Ἐπειδὴ λοιπὸν ΜΝ καὶ ΑΓ εἶναι παράλληλοι, προκύπτει κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἡ ἀναλογία

$$\text{ΑΓ:ΜΝ=ΟΑ:ΟΝ ἢ ΑΓ:ΑΒ=1:2.}$$

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον αὐξάνοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν διαιρέσεων τῶν κεχαραγμένων ἐπὶ τῶν βραχιόνων, λαμβάνομεν διὰ τοῦ ἐργαλείου, κλάσμα ἁπλοῦν δεδομένου μήκους ὡς τὰ $^2/_3$, $^3/_5$ κ.τ.λ.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ ἐργαλείου ἀνάγομεν γραμμὰς καὶ ἐπιφανείας εὐκόλως.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 42α. Ὁμοίως διὰ τῆς ἐφαρμ. 40 κατασκευάζομεν ἐργαλεῖον ἕτερον, τὸ ὁποῖον καλεῖται Μειονογράφος ἢ Ἀναλογικὸς Διαβήτης, ὅστις σύγκειται ἐκ δύο κανόνων τοῦ αὐτοῦ μήκους, ἑνουμένων διὰ στρόφιγγος, οὗτινος τὸ κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον τῆς συναπαντήσεως τῶν ἐσωτερικῶν πλευρῶν ΟΑ καὶ ΟΒ τῶν δύο κανόνων Σχ. 112, αἱ ὁποῖαι εἶναι διηρημέναι εἰς ἰσάριθμα καὶ ἴσα μέρη.



Σχ. 112.

α΄.) Ὅταν πρόκηται νὰ εὕρωμεν εὐθεῖαν γραμμήν, ἧς ὁ λόγος πρὸς δεδομένου μῆκος εἶναι ὡς 3:10, ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην ἕως οὗ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο διαιρέσεων 10 γίνῃ ἴση μὲ τὸ δεδομένον μῆκος· ἡ ἀπόστασις τότε τῶν δύο διαιρέσεων 3 εἶναι ἴση μὲ τὸ ζητούμενον μῆκος.

Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας ΑΟΒ εἶναι διηρημέναι εἰς ἀνάλογα μέρη διὰ τῶν εὐθειῶν 3—3 καὶ 10—10, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι, καὶ ἑπομένως ἀνάλογοι τῶν ἀποστάσεων 0,3 καὶ 0,10 ἤτοι τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 10. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διαιροῦμεν καὶ δεδομένα μήκη εἰς ἴσα μέρη.

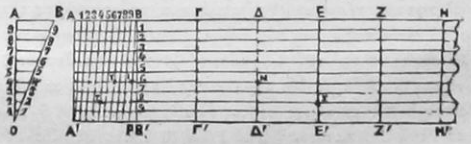
β΄.) Ἵνα διαιρέσωμεν δεδομένον μῆκος εἰς δύο μέρη, τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι ὡς 3:7· ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ μικροτέρου τῶν δύο μερῶν πρὸς τὴν ὅλην γραμμὴν εἶναι ὡς 3:3+7 ἢ 3:10, ἕπεται ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο μετασχηματιζόμενον εἰς τὸ πρῶτον, ἔχει καὶ τὴν αὐτὴν λύσιν.

γ΄.) Ἵνα διαιρέσωμεν δεδομένον μῆκος εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, 4 καὶ 5· βλέπομεν ὅτι ὁ λόγος τοῦ μικροτέρου μέρους πρὸς ὁλόκληρον τὴν γραμμὴν εἶναι ὡς 3:3+4+5, ἤτοι 3:12, ὁ τοῦ μέσου ὡς 4:12 καὶ ὁ τοῦ μεγαλητέρου ὡς 5:12.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται γνωστὸν ὅτι ὁ μειονογράφος διαβήτης τότε μόνον χρησιμεύει πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ γενικοῦ προβλήματος, τῆς διαιρέσεως δεδομένου μήκους εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν, ὁπόταν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν, δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν διαιρέσεων τῶν κεχαραγμένων ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ἑκάστου κανόνος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 43η. Ὅταν πρόκηται νὰ ὑποδιαιρέσωμεν μικροτάτην γραμμὴν εἰς μέγαν ἀριθμὸν ἴσων μερῶν, δὲν δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τὰς μέχρι τοῦδε μεθόδους, ἐπειδὴ τὸ πάχος τῶν γραμμῶν τῆς ὑποδιαιρέσεως ἀποκαθιστᾷ ἀδύνατον τὴν ἐργασίαν, ἣν καθιστῶμεν δυνατὴν διὰ τοῦ ἀκολούθου μέσου.

Ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰ δέκατα τοῦ μήκους ΑΒ Σχ. 113. Ἐπὶ οἱασδήποτε εὐθείας ΑΟ· φέρομεν 10 ἴσα μέρη



Σχ. 113.

καὶ ἄγομεν τὴν ΒΟ, ἐκ δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως 1, 2, 3 κ.τ.λ. ἄγομεν παραλλήλους τῇ ΑΒ. Εἶναι δὲ φανερὸν (§. 8. Πρότ. 44) ὅτι ἡ γραμμὴ 1—1 εἶναι τὸ δέκατον τῆς ΑΒ, ἡ 2—2 τὰ δύο δέκατα, ἡ 3—3 τὰ τρία δέκατα αὐτῆς καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν τὴν ΑΒ=0,006 μέτρ. λάβωμεν ὡς μονάδα, ἵνα παραστήσωμεν τὸ μέτρον ἐπὶ τοῦ χάρτου, τότε τὸ δεκατόμετρον θέλει ἐκφρασθῇ διὰ τῆς γραμμῆς 1—1, τὰ δύο δεκατόμετρα διὰ τῆς 2—2, καὶ οὕτω καθεξῆς. Πᾶσα γραμμὴ διηρημένη εἰς ἴσα μέρη τῇ ΑΒ λέγε-

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ται Κλίμαξ. Εἰς τὴν Χωρογραφίαν, εἰς τὰ Ἀρχιτεκτονικὰ Σχέδια, κατὰ τὸν Σχεδιασμὸν τῶν μηχανῶν κ.τ.λ. μεταχειριζόμεθα τοιαύτας κλίμακας, πρὸς ἃς ἀναφέρομεν ὅλας τὰς γραμμὰς τοῦ ἐπιπέδου ἢ τοῦ σχεδίου, τότε ἡ ΑΒ λαμβάνεται ἴση μὲ 0,001. 0,002. 0,0025 ἢ 0,01. 0,02. 0,10. 0,20, τοῦ μέτρου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 44η. Ἔστω ΑΒ Σχ. 113 ἡ μονὰς, καὶ ἔστωσαν ΒΓ, ΓΔ κ.τ.λ. σειρά τις ἴσων γραμμῶν πρὸς τὴν ΑΒ. Ὑψοῦμεν τὴν ΑΑ′, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος λαμβάνεται κατ' ἀρέσκειαν, κάθετον τῆς ΑΒ, τήν ὁποίαν διαιροῦμεν εἰς δέκα ἴσα μέρη, ἐκ δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ταύτης ἄγομεν παραλλήλους τῇ ΑΔ· ὡς καὶ ἐκ τῶν σημείων Β, Γ, Δ κ.τ.λ. φέρομεν παραλλήλους τῇ ΑΑ′, διαιροῦντες τὴν ΑΒ εἰς δέκα ἴσα μέρη καὶ ἑνοῦντες τὸ σημεῖον Α′ μὲ τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως 1, καὶ ἐξ ὅλων τῶν ἄλλων σημείων τῆς διαιρέσεως φέροντες παραλλήλους τῇ Α′1. Ἐκ τῆς κατασκευῆς ταύτης ἕπεται ὅτι ἡ ΑΒ θὰ ἦναι ἴση τῇ Α′Β′· ἐπειδὴ αἱ δύο παράλληλοι ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ καθ' ὅλα των τὰ σημεῖα ἰσάκις ἀπέχουσιν, καὶ αἱ 9 πρῶται διαιρέσεις τῆς Α′Β′ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς 9 τελευταίας τῆς ΑΒ, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων γραμμῶν περιεχόμεναι, (Πρότ. 26) τῆς Α′Β′ διαιρουμένης εἰς 10 ἴσα μέρη. Τὰ μέρη τῶν παραλλήλων τὰ μεταξὺ ΡΒ καὶ ΒΒ′ παριστάνουσι τὰ δέκατα τῆς ΡΒ′, καὶ ἑπομένως τὰ ἑκατοστὰ τῆς Α′Β′ ἢ τῆς ΑΒ.

Διὰ νὰ καταμετρήσωμεν μὲ τὴν κλίμακα ταύτην τὸ περιλαμβανόμενον μῆκος μεταξὺ τῶν δύο ἄκρων διαβήτου, φέρομεν αὐτὸ ἐπὶ μιᾶς τῶν παραλλήλων τῆς ΑΔ οὕτως, ὥστε τὰ δύο ἄκρα τοῦ διαβήτου νὰ συμπίπτωσι μὲ δύο σημεῖα τῆς διαιρέσεως Ν καὶ Υ π. χ. ὅτε εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μῆκος τοῦτο συντίθεται, ἀπὸ Ν 6 ἢ 2 μονάδας, ἀπὸ ΓΙ ἢ 3 δέκατα καὶ ἀπὸ Ι 6 ἢ 6 ἑκατοστά· ὅθεν ἔχομεν ΝΥ=2,36 μέτρ. ἐὰν ΑΒ=1 μέτρ.

Ἐπίσης βλέπομεν ὅτι ἡ ἔκφρασις τοῦ μήκους ΣΤ εἶναι 3,58 μέτρ. καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν ἡ ΑΒ ἐκφράζῃ 10 μέτρ. τότε ΝΥ=23,6 μέτρ. καὶ ΣΤ=35,8 μέτρ. ἐπὶ τοῦ χάρτου.

Ἵνα μῆκός τι ἐκφρασθῇ διὰ μονάδων καὶ μερῶν μονάδος τῆς κλίμακος, λαμβάνομεν ἐπίσης ἐπὶ τῆς κλίμακος ἄνοιγμα διαβήτου ἴσον μὲ τὸ μῆκος τοῦτο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 45η. 1ον. Ἵνα ἀντιγράψωμεν σχέδιον θέτομεν ἐπ' αὐτοῦ διαφανῆ χάρτην ἐπὶ τοῦ ὁποίου γράφομεν, διὰ τοῦ κανόνος καὶ

τοῦ μολυβδοκονδύλου, τὴν περίμετρον καὶ τὰς λεπτομερείας τοῦ σχεδίου. Τὸ οὕτω δὲ λαμβανόμενον ἀντίγραφον, μεταφέρομεν εἰς τὸ καθαρὸν, διὰ τοῦ μολυβδωμένου χάρτου. 2ον. Θέτομεν τὸ σχέδιον ἐπὶ τοῦ χάρτου τῆς ἀντιγραφῆς, καὶ διὰ λεπτῆς βελόνης τρυπῶμεν τὴν περίμετρον καὶ τὰς λεπτομερείας ἐὰν ἦναι δυνατόν· τὰς οὕτω δὲ λαμβανομένας ὀπὰς ἐπὶ τοῦ χάρτου τῆς ἀντιγραφῆς ἐπιζευγνύοντες διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ μολυβδοκονδύλου, ἔχομεν τὴν ζητουμένην ἀντιγραφήν.

ΠΕΡΙ ΣΧΕΔΙΑΣΕΩΣ (Ἐφαρμ. 17).

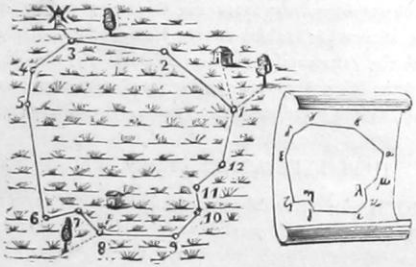
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 46η. Ἐὰν δεδομένον πολύγωνον ἦναι κεχαραγμένον ἐπὶ τῆς γῆς, καὶ πρόκηται νὰ κατασκευάσωμεν, τοῦτέστι νὰ σχεδιάσωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου πολύγωνον ὅμοιον, μεταχειριζόμεθα τὰς ἑξῆς μεθόδους.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΩΝ. Ἐὰν τὸ πολύγωνον ἦναι μικρᾶς ἐκτάσεως αἱ διαγώνιοι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ καταμετροῦνται διὰ τοῦ δεκαμέτρου· τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ π, χ. Σχ. 90 τὸ διαιροῦμεν εἰς τρίγωνα διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΑΔ, ἔπειτα μετροῦμεν ὅλας τὰς πλευρὰς καὶ διαγωνίους, καὶ ἐπὶ τεμαχίου χάρτου σχηματίζομεν ἐκ τοῦ προχείρου σχῆμα ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔΕ καὶ γράφομεν ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς καὶ διαγωνίου τὸν ἀριθμὸν τὸν ἐκφράζοντα τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων τῶν περιλαμβανομένων εἰς τὴν σύστοιχον ἐπὶ τῆς γῆς πλευρὰν, ἢ διαγώνιον. Διὰ τοῦ προχείρου τούτου ἰχνογραφήματος καὶ διὰ τῆς κλίμακος σύρομεν, ἐπὶ τοῦ χάρτου τῆς ἀντιγραφῆς τὴν αβ, ἣν λαμβάντμεν ἐκ συνθήκης ὁμόλογον τῆς ΑΒ, καὶ ἐπὶ τῆς ὁποίας κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον αβγ ὅμοιον τῷ ΑΒΓ. Ἐπὶ δὲ τῆς αγ ὁμολόγου τῆς ΑΓ, κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον αγδ ὅμοιον τῷ ΑΓΔ, καὶ τέλος ἐπὶ τῆς αδ, τὸ αδε· τὸ δὲ οὕτω προκύπτον πολύγωνον αβγδε θὰ ἦναι ὅμοιον τῷ ἐπὶ τῆς γῆς ΑΒΓΔΕ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 47η. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΟΔΕΥΣΕΩΣ. Ἔστω τὸ ἐπὶ τῆς γῆς πολύγωνον 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12, Σχ. 114 τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ διατρέξωμεν τὰς πλευρὰς, καὶ συγχρόνως νὰ διακρίνωμεν σταθμεύοντες ἐπὶ οἱασδήποτε κορυφῆς π. χ. τῆς 1 τὴν ἔμπροσθεν αὐτῆς 2 καὶ τὴν ὀπίσθεν 12 κορυφήν.

Μεταφέρομεν αὐτὸ ἐπὶ τοῦ χάρτου ἀφοῦ πρῶτον ἱστάμενοι ἐφ' ἑκάστης κορυφῆς μετρήσωμεν τὴν γωνίαν αὐτῆς, ἀρχίζοντες ἀπὸ τῆς 1, καὶ τὴν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῆς προσκειμένην πλευρὰν, καὶ γράψωμεν τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ πίνακος.

Εἰς τὴν πρώτην κάθετον στήλην τοῦ πίνακος τούτου γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν κορυφῶν, εἰς τὴν τρίτην τὰ μήκη τῶν πλευρῶν,



Σχ. 114.

ΠΙΝΑΞ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ 114.

Κορυφαὶ γωνιῶν.	Ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν πρὸς τὰ σταθερὰ ἀντικείμενα.	Μήκη τῶν πλευρῶν.	Καταμετρηθεῖσαι γωνίαι	Διορθωμέναι γωνίαι.
1	δένδρου 8,75 μ. οἰκίας 9,58	56,10 μ.	111°	110° 57′
2	(. . . . .)	58,23	149° 50′	149° 46′
3	μύλου 10,98 δένδρου 18, 5	29,00	132° 50′	132° 46′
4	(. . . . .)	20,18	140° 47′	140° 43′
5	(. . . . .)	70,58	161° 34′	161° 30′
6	(. . . . .)	21,18	71° 19′	71° 16′
7	(. . . . .)	23,16	248° 2′	247° 59′
8	οἰκίας 39,55 δένδρου 10,25	44,82	138° 55′	138° 52′
9	(. . . . .)	18,25	134° 14′	134° 11′
10	(. . . . .)	13,60	138° 17′	138° 14′
11	(. . . . .)	24,30	218° 7′	218° 4′
12	(. . . . .)	28,50	155° 45′	155° 42′
			1800° 40′	1800° 00′

εἰς τὴν τετάρτην τὰς ἀντιστοιχούσας γωνίας εἰς ἑκάστην κορυφὴν τοῦ πολυγώνου.

Ἔπειτα σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου (Πρότ. 23). Ἐὰν ὅμως τοῦτο ἔχῃ εἰσεχούσας γωνίας ὡς τὴν 7 καὶ 11, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, γράφομεν εἰς τὴν τετάρτην στήλην τοῦ πίνακος τὴν διαφοράν, ἀπὸ 360°, ἑκάστης εἰσεχούσης γωνίας (§. 3. 2ον. Σημείωσις)· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν καταμετρηθεισῶν γωνιῶν εὑρέθη 1800° 40′, ἐνῷ τὸ καθαυτὸ εἶναι 1800°, διότι τὸ πολύγωνον ἔχει 12 πλευρὰς καὶ ἑπομένως 180° × 10 =1800°, ἄρα τὸ ὑπὸ τοῦ ἐργαλείου προκύπτον λάθος εἶναι 40′ περισσότερον τοῦ δέοντος, τὸ ὁποῖον διανέμομεν ἐπίσης εἰς ὅλας τὰς γωνίας ὡς ἑξῆς.

Ἀφαιροῦμεν ἐξ ἑκάστης γωνίας τὸ $^1/_{12}$ τῶν 40′ ἢ κάλλιον, ἵνα μὴ ἔχωμεν κλάσματα τοῦ λεπτοῦ, ἀφαιροῦμεν 3′ ἀπὸ τὰς ὀκτὼ, καὶ 4′ ἀπὸ τὰς τέσσαρας ἄλλας γωνίας.

Ἡ πέμπτη στήλη τοῦ πίνακος περιέχει τὰς διωρθωμένας γωνίας.

Διὰ τὴν δευτέραν στήλην τοῦ πίνακος ἴδε (ἐφαρμ. 48. Σημ.).

Διὰ τοῦ πίνακος τούτου καὶ τῆς κλίμακος δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ χάρτου, ὅμοιον πολύγωνον τῷ ἐπὶ τῆς γῆς, ἀφοῦ λάβωμεν γραμμήν τινα αβ ἴσην τῇ ἐπὶ τῆς γῆς 1—2, ὡς ὁμόλογον.

Ἐπειδὴ κατασκευάζοντες εἰς τὸ ἄκρον 6 γωνίαν ἴσην τῇ διορθωμένῃ 2, φέρομεν τὴν 6γ ἴσην τῇ 2—3 καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς γ, σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην τῇ διορθωμένῃ 3, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς λμ εἰς τῆς ὁποίας τὸ ἄκρον μ σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην τῇ διορθωμένῃ γωνίᾳ 12 καὶ ἄγομεν τὴν μα, ἥτις πρέπει νὰ ἦναι ἴση τῇ 12—1· ὅπερ ἐὰν δὲν γίνῃ, αἱ ἐργασίαι εἶναι λανθασμέναι.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 48η. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ. Οἱ γεωμέτραι ὅταν πρόκηται νὰ σχεδιάσωσι μέρος γῆς ἐπὶ χάρτου μεταχειρίζονται, ὡς βάσιν τῆς ἐργασίας πολλὰ τοιαῦτα πολύγωνα συνεχόμενα, Τοπογραφικὰ Πολύγωνα καλούμενα.

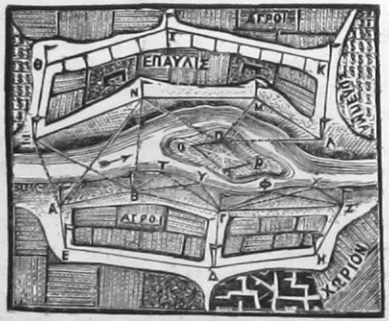
Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τοιοῦτον σχεδιασμὸν, λαμβάνομεν ὡς παράδειγμα τὸ Σχῆμα 115 τὸ παριστάνον πεδιάδα δι' ἧς διέρχεται ποταμὸς ἐντὸς τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται νῆσος. Τὸ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ποταμοῦ βέλος δεικνύει τὴν διεύθυνσιν τοῦ Ῥεύματος. Ἐκτελοῦμεν δὲ τὴν ἐργασίαν ὡς ἑξῆς.

Σχηματίζομεν τὰ συνεχόμενα Τοπογραφικὰ Πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, καὶ ΓΔΗΖ ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ ἐπὶ τῆς

γῆς σημειοῦνται διὰ πασσαλίσκων, ἕκαστος τῶν ὁποίων φέρει ἀριθμὸν δεικνύοντα τὴν τάξιν ἑκάστης κορυφῆς· τὴν δὲ ἐπὶ τῆς γῆς χάραξιν τῶν πολυγώνων κάμνομεν ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἑξῆς τέσσαρας συνθήκας.

α΄). «Ἑκάστη πλευρὰ νὰ δύναται νὰ καταμετρηθῇ».

β΄.) «Σταθμεύοντες εἰς μίαν οἱανδήποτε κορυφὴν, π. χ. εἰς τὴν Α, νὰ δυνάμεθα νὰ σκοπεύωμεν διὰ τοῦ γραφομέτρου τὴν ὄπισθεν Ε καὶ τὴν ἔμπροσθεν αὐτῆς κορυφὴν Β, ὅπερ γίνεται ἐὰν ἀκολουθῶμεν τὰς ὁδοὺς τὰς διαχωριζούσας τὰ διάφορα ἀντικείμενα, ἀγροὺς, δάση, κ.τ.λ.».



Σχ. 115.

γ΄.) «Ἑκάστη γωνία νὰ ἦναι μεγαλητέρα τῶν 7° καὶ μικροτέρα τῶν 173°, διότι διὰ τοῦ γραφομέτρου μόλις δυνάμεθα νὰ καταμετρήσωμεν γωνίαν μικροτέραν τῶν 7°».

δ΄.) «Αἱ πλευραὶ τῶν πολυγώνων νὰ διέρχωνται ὅσον τὸ δυνατὸν πλησιέστερα τῶν σημείων, ἅτινα πρόκηνται νὰ προσδιορισθῶσιν ἐπὶ τοῦ χάρτου, π. χ. τῆς περιμέτρου τῶν ἀγρῶν, τῶν ἀμπελώνων, τῶν δασῶν, τῆς ὄχθης τῶν ποταμῶν κ.τ.λ. ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα».

Τούτων οὕτως ἐχόντων σχηματίζοντες δι' ἑκάστου τοπογραφικὸν πολύγωνον ἰδιαίτερον πίνακα (ἐφαρμ. 47), καταγράφομεν τὰς κορυφὰς, τὰς γωνίας, τὰ μήκη τῶν πλευρῶν καὶ τὰς διωρθωμένας γωνίας. Διὰ τῶν πινάκων τούτων καὶ διὰ καταλλήλου κλίμακος εὐκόλως ἐπὶ χάρτου μεταφέρομεν τὰ ἐπὶ τῆς γῆς κεχαραγμένα πολύγωνα (ἐφαρμ. 47).

Ἤδη εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἠδυνάμεθα ὅλα τὰ πλησίον ἑκάστης πλευρᾶς τοπογραφικοῦ τινὸς πολυγώνου εὑρισκόμενα σημεῖα νὰ προσδιορίσωμεν σχετικῶς πρὸς τὴν πλευρὰν ταύτην, θὰ εἴχομεν ἐπὶ χάρτου ὅλας τὰς λεπτομερείας τοῦ μέρους τῆς πεδιάδος τοῦ διαχωριζομένου ὑπὸ τῆς δεξιᾶς ὄχθης τοῦ ποταμοῦ.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου καὶ τοῦ τοπογραφικοῦ πολυγώνου ΘΙΚΛΜΝΞ θὰ ἠδυνάμεθα νὰ σχεδιάσωμεν ἐπὶ χάρτου ὅλας τὰς λεπτομερείας τοῦ μέρους τῆς πεδιάδος τοῦ διαχωριζομένου ὑπὸ τῆς ἀριστερᾶς ὄχθης.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ ὄχθη ποταμοῦ λέγεται ἡ πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ ἡμῶν εὑρισκομένη ὅταν ἀκολουθῶμεν τὴν διεύθυνσιν τοῦ ῥεύματος.

Ἐπίσης διὰ τοῦ τοπογραφικοῦ πολυγώνου ΟΠΡΣ θὰ ἐσχεδιάζομεν τὰς λεπτομερείας τῆς νήσου.

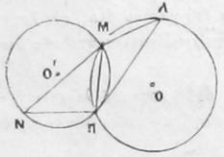
Καὶ τῷ ὄντι διὰ τριγώνων (Πρόβλ. 6. §. 6) προσδιορίζομεν τὰς πλησίον εἰς ἑκάστην πλευρὰν τοπογραφικοῦ τινὸς πολυγώνου εὑρισκομένας λεπτομερείας· π. χ. ἵνα προσδιορίσωμεν τὴν δεξιὰν ὄχθην τοῦ ποταμοῦ ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΖ τῶν τοπογραφικῶν πολυγώνων ΑΒΓΔΕ, ΓΖΗΔ, μετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις ΒΤ, ΓΤ, ΒΥ, ΓΥ, ΓΦ, ΖΦ, ΓΧ, ΖΧ, καὶ διὰ τῶν τριγώνων ΒΓΤ, ΒΓΥ, ΓΖΦ, ΓΖΧ, προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα Τ, Υ, Φ, Χ τῆς ὄχθης. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ διὰ τῶν ἄλλων λεπτομερειῶν τὸν προσδιορισμόν.

«Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἵνα προσδιορίσωμεν τὴν θέσιν σημείου τινὸς, ἐπὶ τῆς γῆς ὑπάρχοντος, ἀρκεῖ νὰ καταμετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ σχετικῶς πρὸς τὰ δύο ἄκρα τῆς πλευρᾶς τοπογραφικοῦ πολυγώνου ἢ πρὸς δύο σημεῖα ὡρισμένα ἤδη» (ἴδε §. 12. ἐφαρμ. 79 καὶ 80).

Τέλος ἵνα ἔχωμεν τὸ γενικὸν σχέδιον τῆς πεδιάδος ἀρκεῖ νὰ συνδέσωμεν τὰ προηγούμενα τρία μερικὰ σχέδια, τοὐτέστιν τὸ τῆς νήσου καὶ τὸ τῶν διαχωριζομένων διὰ τοῦ ποταμοῦ δύο μερῶν τῆς πεδιάδος. Πρὸς τοῦτο, μεταχειριζόμεθα τὸ πρόβλημα 17, ἤτοι καταμετροῦμεν τὰς γωνίας ΝΠΜ, ΜΠΛ σταθμεύοντες εἰς τὸ σημεῖον Π καὶ ἐπὶ τῶν προσδιωρισμένων πλευρῶν ΝΜ, ΜΛ κατασκευάζομεν τμήματα κύκλων ἐπιδεκτικὰ τῶν καταμετρηθεισῶν γωνιῶν Σχ. 116. Τότε ἡ τομὴ τῶν κύκλων θέλει προσδιορίσει τὸ σημεῖον Π, καὶ οὕτω συνδέεται τὸ πολύγωνον τῆς νήσου μὲ τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ποτα-

μοῦ εὑρισκόμενον σύστημα τῶν πολυγώνων. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον συνδέομεν τὸ ἀριστερὸν μὲ τὸ δεξιὸν μέρος τῆς πεδιάδος.

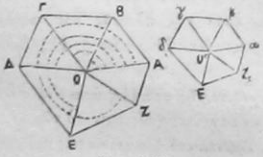
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἶναι ἀνάγκη νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐὰν πρὸς ἀποπεράτωσιν τοῦ σχεδιασμοῦ ἀπαιτῆται πολὺς χρόνος οἱ εἰς τὰς κορυφὰς τῶν τοπογραφικῶν πολυγώνων εὑρισκόμενοι πασσαλίσκοι, ἕνεκα τῶν μεταλλαγῶν τῆς ἀτμοσφαίρας, τῶν διερχομένων τὰς ὁδοὺς ἁμαξῶν, διαβατῶν κ.τ.λ. ἐνδεχόμενον νὰ ἐξαλειφθῶσιν. Προλαμβάνομεν δὲ τὰ κατὰ τὴν περίστασιν ταύτην ἀπαντώμενα προσκόμματα, πρὸς ἐξακολούθησιν τῆς ἐργασίας, καθ' ὃν καιρὸν ἐκλέγομεν τὰς κορυφὰς τῶν πολυγώνων, προσδιορίζοντες τὴν θέσιν τοῦ πασσαλίσκου ὅταν ᾖναι ἐπισφαλὴς πρὸς δύο σταθερὰ ἀντικείμενα, δένδρα, οἰκίας, κωδωνοστάσια κ.τ.λ. πλησίον αὐτοῦ εὑρισκόμενα.



Σχ. 114.

Ἵνα προσδιορίσωμεν π. χ. τὴν θέσιν τοῦ πασσαλίσκου 1, Σχ. 114 καταμετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις αὐτοῦ πρὸς τὴν οἰκίαν καὶ τὸ πλησίον αὐτοῦ εὑρισκόμενον δένδρον, τὰς ὁποίας καταγράφομεν εἰς τὴν δευτέραν στήλην τοῦ πίνακος, ἀπέναντι τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος κορυφῆς. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ διὰ τὰς ἄλλας κορυφὰς ὡς δεικνύει ὁ πίναξ τοῦ σχήματος 114.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 49η. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ. Ἐὰν ἐντὸς τοῦ πολυγώνου ὑπάρχῃ σημεῖόν τι Ο Σχ. 117, ἐκ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ σκοπεύσωμεν καὶ νὰ καταμετρήσωμεν τὰς ἀποστάσεις αὐτοῦ πρὸς ἑκάστην κορυφὴν τοῦ πολυγώνου, δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν αὐτὸ ἐπὶ τοῦ χάρτου ὡς ἑξῆς.



Σχ. 117.

Σταθμεύοντες εἰς τὸ σημεῖον Ο καταμετροῦμεν τὴν γωνίαν ΑΟΒ, ἀφοῦ διευθύνομεν τὸ μὲν σταθερὸν δίοπτρον τοῦ γραφομέτρου κατὰ τὴν ΑΟ, τὸ δὲ κινητὸν κατὰ τὴν ΒΟ. Τὸ αὐτὸ πράττοντες καὶ διὰ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς περὶ τὸ σημεῖον Ο εὑρισκομένας, τὸν μὲν αὔξοντα ἀριθμὸν τῶν γωνιῶν θέτομεν εἰς τὴν

πρώτην στήλην τοῦ πίνακος, τοὺς δὲ βαθμοὺς ἑκάστης γωνίας εἰς τὴν τρίτην, εἰς δὲ τὴν δευτέραν στήλην τὰ μήκη τῶν γραμμῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ καὶ εἰς τὴν τετάρτην τὰς διωρθωμένας γωνίας.

Διὰ τοῦ πίνακος τούτου καὶ τῆς κλίμακος, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ χάρτου τὸ πολύγωνον αβγδεζ ὅμοιον τῷ ἐπὶ τῆς γῆς ΑΒΓΔΕΖ. Τῷ ὄντι λαμβάνοντες διὰ τῆς κλίμακος τὴν πλευρὰν οα=ΟΑ, καὶ θεωροῦντες αὐτὴν ὁμόλογον τῆς ΑΟ, κατασκευάζομεν εἰς τὸ σημεῖον Ο′ γωνίαν ἴσην τῇ διωρθωμένῃ γωνίᾳ ΑΟΒ, καὶ φέρομεν τὴν οβ=ΟΒ. Εἰς τὸ ἄκρον ο τῆς οβ, κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην τῇ διωρθωμένῃ ΒΟΓ, καὶ φέρομεν τὴν ογ=ΟΓ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἡ συνένωσις τότε τῶν σημείων α, β, γ, δ, ε, ζ σχηματίζει τὸ ζητούμενον πολύγωνον.

Ἵνα ἀποφύγωμεν τὸ ὑπὸ τῆς διαδοχικῆς κινήσεως τοῦ σταθεροῦ διόπτρου προκύπτον λάθος τῆς σκοπεύσεως εἰς τὰς γωνίας ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, κ.τ.λ. καταμετροῦμεν τὰς γωνίας ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΑΟΔ, κ.τ.λ. ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 117, διευθύνοντες τὸ σταθερὸν δίοπτρον διαρκῶς κατὰ τὴν ΟΑ, καὶ διαδοχικῶς τὸ κινητὸν κατὰ τὰς διευθύνσεις ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, κ.τ.λ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 50η. ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΝΘΕΤΟΣ. Ὅταν πρόκηται νὰ εὐθυγραμμήσωμεν τὴν ὁδὸν συνοικίας τινός, σχηματίζομεν τὸ σχέδιον τῆς ὁδοῦ ὡς ἑξῆς. Ἔστωσαν, Σχ. 118, ὁδοὶ διαχωρίζουσαι τὰ



Σχ. 118.

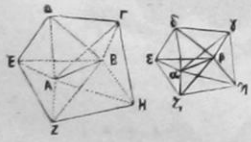
διάφορα οἰκόπεδα συνοικίας· σχηματίζομεν κατὰ τὸ μῆκος τῆς ὁδοῦ τὴν κεκλασμένην γραμμὴν ΑΒΓΔ τῆς ὁποίας αἱ κορυφαὶ ἐκλέγονται οὕτως, ὥστε α.) Νὰ δυνάμεθα νὰ καταμετρῶμεν τὰς μεταξὺ αὐτῶν ἀποστάσεις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κ.τ.λ. β′.) Σταθμεύοντες εἰς ἑκάστην

κορυφὴν, νὰ δυνάμεθα νὰ σκοπεύωμεν ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερα σημεῖα τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὁδοῦ, καὶ νὰ καταμετρῶμεν ἑκάστου σημείου τὴν ἐκ τῆς κορυφῆς ταύτης ἀπόστασιν. Τούτων οὕτως ἐχόντων καταμετροῦμεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κ.τ.λ. καὶ σταθμεύοντες εἰς ἑκάστην τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ καὶ Δ ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τῆς ἀκτινοβολίας, καὶ οὕτω σχεδιάζομεν τὰς ὁδοὺς, τὰς δὲ οἰκοδομὰς, οἰκόπεδα, κήπους καὶ λοιπὰς λεπτομερείας διὰ τριγώνων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ 1η. Ἡ αὐτὴ ἐργασία ὑπὸ τῶν μηχανικῶν γίνεται καὶ οὕτως· ἀφοῦ χαράξωσι τὴν γραμμὴν ΑΒΓΔ, σταθμεύοντες εἰς τὸ Β, διὰ τῶν ἀποστάσεων ΑΒ, ΒΓ, ΒΙ, ΒΚ, ΒΛ, ΒΜ, καὶ τῶν γωνιῶν ΑΒΙ, ΑΒΜ, ΜΒΛ, ΛΒΓ, ΓΒΚ καὶ ΚΒΙ προσδιορίζουσι τὴν γραμμὴν ΑΒΓ καὶ τὰ τέσσαρα σημεῖα Κ, Ι, Λ, Μ περὶ τὸν σταθμὸν Β. Τὸ αὐτὸ πράττουσι καὶ διὰ τοὺς σταθμοὺς Γ, Δ. Τὰς δὲ λεπτομερείας τῶν ὁδῶν, τῶν οἰκοπέδων, τῶν κήπων κ.τ.λ. προσδιορίζουσι διὰ τριγώνων ἢ διὰ τῆς μεθόδου τῶν συντεταγμένων §. 12. ἐφαρμ. 80.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ 2α. Τὴν μέθοδον τῆς ἀκτινοβολίας ἐφαρμόζομεν εἰς ἑκάστην κορυφὴν τοπογραφικοῦ τινὸς πολυγώνου, ἵνα σχεδιάσωμεν τὰς εἰς ἑκάστην πλευρὰν τοῦ πολυγώνου εὑρισκομένας λεπτομερείας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 51η. **ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ.** Ἐὰν ἐντὸς τοῦ πολυγώνου ἐκλέξωμεν γραμμὴν τὴν ὁποίαν εὐκόλως δυνάμεθα νὰ καταμετρήσωμεν καὶ ἐξ ἑκάστου ἄκρου τῆς ὁποίας νὰ διακρίνωμεν τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, ἡ ἐργασία ἐκτελεῖται καὶ ὡς ἑξῆς. Σχ. 119.



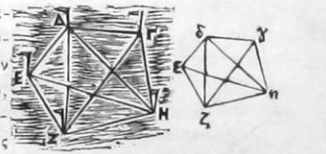
Σχ. 119.

Ἀφοῦ καταμετρήσωμεν τὴν ΑΒ, ἥτις λέγεται **Βάσις**, σταθμεύομεν εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ διευθύνομεν τὴν διάμετρον τοῦ γραφομέτρου κατὰ τὴν βάσιν ΑΒ, τὸ δὲ κινητὸν δίοπτρον στρέφοντες διαδοχικῶς πρὸς ἑκάστην κορυφὴν τοῦ πολυγώνου, καταμετροῦμεν τὰς γωνίας ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΒΕ, ΑΒΖ, ΑΒΗ. Ἀκολούθως σταθμεύοντες εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ διευθύνοντες τὴν διάμετρον τοῦ γραφομέτρου κατὰ τὴν ΑΒ, καταμετροῦμεν τὰς γωνίας ΓΑΒ, ΔΑΒ, ΕΑΒ, ΖΑΒ, ΗΑΒ.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἐπὶ τοῦ χάρτου λαμβάνομεν διὰ τῆς κλίμακος αβ=ΑΒ, καὶ εἰς τὸ ἄκρον β σχηματίζομεν τὰς γωνίας αβγ

=ΑΒΓ, αβδ=ΑΒΔ, αβε=ΑΒΕ, αβζ=ΑΒΖ, καὶ αβη=ΑΒΗ. Εἰς δὲ τὸ σημεῖον α κατασκευάζομεν τὰς γωνίας γαβ=ΓΑΒ, δαβ=ΔΑΒ, εαβ=ΕΑΒ, ζαβ=ΖΑΒ καὶ ηαβ=ΗΑΒ, καὶ οὕτω προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα γ, δ, ε, ζ, η, τῶν ὁποίων ἡ συνένωσις σχηματίζει τὸ ζητούμενον πολύγωνον. Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΖΗ τοῦ πολυγώνου δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν βάσιν, ἡ ἐργασία γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς δεικνύει τὸ Σχῆμα 120.

Ἐὰν τὸ γήπεδον ᾖναι ἀπρόσιτον ὡς ἐκ τῆς συσσωρεύσεως ὑδάτων κ.τ.λ. τότε ἐκλέγομεν τὴν βάσιν Α′Β′ ἐκτὸς τοῦ πολυγώνου, ἐκ τῶν ἄκρων τῆς ὁποίας νὰ δυνάμεθα νὰ σκοπεύωμεν τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου. Ἡ ἐργασία ἐκτελεῖται κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον κατὰ τὸ Σχῆμα 121.



Σχ. 120.

Ἐὰν τὸ γήπεδον ἔχῃ σημαντικὴν ἔκτασιν, ὡς ἀγροκήπιον 20 ἕως 30 χιλιάδων πλέθρων, μία μόνη βάσις ἐνδέχεται νὰ ᾖναι ἀνεπαρκὴς διὰ τὸν σχεδιασμόν. Τότε ἐκλέγομεν καὶ ἄλλας βάσεις ὧν τὴν σχετικὴν θέσιν προσδιορίζομεν διὰ διατομῶν. Οὕτως εἰς τὸ Σχῆμα 122 λαμβάνομεν διαδοχικῶς, ὡς βάσιν τὴν πλευρὰν ΑΒ, καὶ τὰς γραμμὰς ΕΝ καὶ ΗΜ καὶ τὸ σχῆμα διαιροῦμεν εἰς τρία πολύγωνα Ι, ΙΙ, καὶ ΙΙΙ, ἕκαστον τῶν ὁποίων σχεδιάζομεν χωριστά.



Σχ. 121.

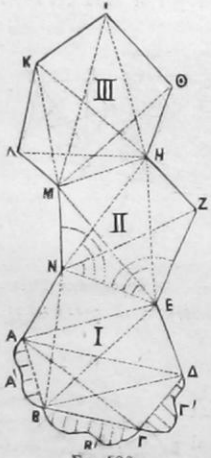
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 52α. Δυνάμεθα, διὰ τῆς μεθόδου τῶν διατομῶν, νὰ προσδιορίσωμεν τὰς λεπτομερείας τὰς περὶ ἑκάστην πλευρὰν τοπογραφικοῦ τινὸς πολυγώνου εὑρισκομένας, ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ λάβωμεν τὴν πλευρὰν ταύτην ὡς βάσιν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 53η. Δυνάμεθα νὰ συνδέσωμεν τὰ δύο μέρη τῆς πεδιάδος τοῦ Σχ. 115 καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν διατομῶν.

Λαμβάνοντες π. χ. τὴν πλευρὰν ΑΒ ὡς βάσιν, σταθμεύομεν εἰς τὸ ἄκρον Α καὶ καταμετροῦμεν τὰς γωνίας ΒΑΞ καὶ ΒΑΝ· ἔπειτα μεταβαίνοντες εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον Β, καταμετροῦμεν τὰς γωνίας

ΑΒΝ καὶ ΑΒΞ καὶ οὕτω συνδέομεν τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ μὲ τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ποταμοῦ μερικὸν σχέδιον.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 54η. ΣΧΕΔΙΑΣΙΣ ΜΕΓΑΛΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ. ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΔΙΚΤΥΩΣΙΣ. Αἱ μέχρι τοῦδε ἐκτεθεῖσαι μέθοδοι τῆς σχεδιάσεως ἐφαρμόζονται εἰς μικρὰς ἐπιφανείας γηπέδων· ἐὰν ὅμως



Σχ. 122.

πρόκηται νὰ ἐφαρμόσωμεν αὐτὰς πρὸς σχεδίασιν δήμου ἢ ἐπαρχίας, τότε ἐνεργοῦμεν διὰ σειρᾶς μικρῶν καὶ διαδοχικῶν σχεδιασμῶν συνεχομένων, ἀλλὰ τὰ λάθη τὰ εἰς ἕκαστον μερικὸν σχεδιασμὸν παρεισδύοντα, ἐπιπροστιθέμενα ἀποκαθιστῶσι λελανθασμένον τὸ σχέδιον τοῦ δήμου ἢ τῆς ἐπαρχίας.

Πρὸς ἀποφυγὴν τῶν παρεισδυόντων τούτων λαθῶν, ἀνατρέχομεν εἰς τὴν μέθοδον τῆς Τριγωνικῆς Δικτυώσεως· δηλ. καλύπτομεν τὴν σχεδιασθησομένην ἐπιφάνειαν, ἐὰν ᾖναι προσιτὴ διὰ σειρᾶς συνεχομένων τριγώνων, τῶν ὁποίων κορυφαὶ εἶναι σημαντικὰ σημεῖα, οἷα εἶναι τὰ ἀκόντια, δημόσια κτίρια, κωδωνοστάσια κ.τ.λ. Ἐὰν τὸ γήπεδον ᾖναι ἀπρόσιτον τοῦτέστιν ἐὰν καλύπτηται ὑπὸ λίμνης ἢ ἐκτεταμένου δάσους τὰ τρίγωνα περιγράφονται,

Τὰ τρίγωνα ταῦτα πρέπει νὰ ᾖναι ὅσον τὸ δυνατὸν ἰσόπλευρα· σχετικῶς δὲ πρὸς τὴν σχεδιαζομένην ἔκτασιν καλοῦνται τρίγωνα πρώτης, δευτέρας ἢ τρίτης τάξεως. Τὰ τῆς πρώτης εἶναι ἐν χρήσει κατὰ τὰς μεγάλας Γεωδαιτικὰς ἐργασίας ἐπικρατείας τινός. Τὰ τῆς δευτέρας εἰς τὴν τοπογραφίαν ἐπαρχίας, καὶ τὰ τῆς τρίτης πρὸς σχεδίασιν δήμων ἢ μεγάλων ἰδιοκτησιῶν.

Ἡ δικτύωσις ἐπικρατείας τινός, ἧς αἱ κορυφαὶ τῶν τριγώνων ἀπέχουσιν ἀλλήλων 20 ἢ 30 χιλιόμετρα ἀποτελεῖ γενικόν τι σχέδιον, ὑποδιαιρούμενον εἰς πολλὰ μερικά. Τὴν ἐργασίαν δὲ ταύτην ἐκτελοῦμεν, καλύπτοντες ἕκαστον τρίγωνον πρώτης τάξεως διὰ σειρᾶς τριώνων δευτέρας καὶ τρίτης.

Αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων τῆς τρίτης τάξεως συνήθως ἔχουσαι

μῆκος ἑνὸς ἢ δύο χιλιομέτρων, χρησιμεύουσιν ὡς βάσεις διὰ τὴν σχεδίασιν τῶν λεπτομερειῶν, τοῦτέστι τῶν ποταμῶν, οἰκοπέδων, λιμνῶν, λειμώνων, κήπων καὶ δασῶν κ.τ.λ.

Τὰ τρίγωνα τῆς δευτέρας καὶ τρίτης τάξεως εἶναι ἐν χρήσει εἰς τὴν τοπογραφίαν ὅπου τὸ σφαιροειδὲς τῆς γῆς δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ περὶ τῶν ὁποίων γενήσεται λόγος ἐνταῦθα.

Οἱαδήποτε καὶ ἂν ᾖναι ἡ διὰ τριγωνικῆς δικτυώσεως σχεδιασθησομένη ἔκτασις, ἀπαιτεῖ 1ον. Τὴν ἐκλογὴν σειρᾶς σημαντικῶν σημείων, ὁριζόντων τοὺς σταθμοὺς ἢ τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων καὶ 2ον. Μιᾶς καὶ μόνης βάσεως μετὰ προσοχῆς μετρουμένης. Τὰ σημαντικὰ σημεῖα ἐκλέγομεν ἐξετάζοντες κατ' ἀρχὰς τοὺς τόπους. Ἐὰν ἡ σχεδιασθησομένη ἐπιφάνεια δὲν ᾖναι ἐκτεταμένη, ἐκλέγομεν ὡς σημεῖα σκοπεύσεως, ἀκόντια ἔχοντα μῆκος 8 ἕως δέκα μέτρων.

Ὅταν γνωρίζομεν τὸ μῆκος τῆς βάσεως τοῦ πρώτου τριγώνου, καὶ τὰς δύο αὐτοῦ γωνίας, αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ εὑρίσκονται γεωμετρικῶς (§. 6. Πρόβλ. 3), ἢ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ (ἐφαρμ. 55).

Οὕτως ἔχοντες τὴν τιμὴν τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου τριγώνου, δυνάμεθα ἐπὶ χάρτου νὰ παραστήσωμεν γεωμετρικῶς τὴν σχετικὴν θέσιν τῶν τριῶν αὐτοῦ κορυφῶν (§. 6. Πρόβλ. 6).

Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον τῶν ἄλλων τριγώνων, ἔχει βάσιν τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ πρώτου, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὰς δύο γωνίας αὐτοῦ, ἵνα προσδιορισθῇ καὶ αὐτὸ ὡς τὸ πρῶτον τρίγωνον· οὕτω δὲ ἑξακολουθοῦντες θέλομεν προσδιορίσει καὶ τὸ τελευταῖον τρίγωνον.

Ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον ταύτην πρὸς σχεδίασιν μικρᾶς τινὸς περιφερείας Σχ. 123 περιεχούσης ἐξ χωρία τὰ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε** καὶ **Ζ** εἰς τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εὑρίσκονται ὑψηλὰ σημεῖα. Ἑνοῦμεν, ἀνὰ δύο, τὰ κέντρα τῶν χωρίων καὶ λαμβάνομεν τὸ πρῶτον σύμπλεγμα τῶν τριγώνων **ΑΒΓ**, **ΒΓΔ**, **ΓΔΕ**, **ΓΕΖ** καὶ **ΑΓΖ**. Ἕκαστον τῶν τριγώνων τούτων ὑποδιαιρεῖται εἰς σειρὰν μικροτέρων, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ σημαντικὰ σημεῖα τοῦ γηπέδου. Ἐὰν ἐντὸς τῶν τελευταίων τριγώνων εὑρί-



Σχ. 123.

σκονται λεπτομέρειαι ἄξιαι λόγου αὗται προσδιορίζονται ὅταν καλύψωμεν τὰ τρίγωνα ταῦτα διὰ μικροτέρων τριγώνων.

Ἀφοῦ καταστρώσωμεν οὕτω τὸ τριγωνομετρικὸν σύμπλεγμα, καὶ ἐμπήξωμεν ἀκόντια, ὅπου ὑπάρχει ἔλλειψις σημαντικῶν σημείων εἰς τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων, ἐνεργοῦμεν τὴν καταμέτρησιν τῆς βάσεως, κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστομέτρων τινῶν.

Εἰς τὴν παροῦσαν περίστασιν ἐκλέγομεν ὡς βάσιν τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ διὰ τοῦ γραφομέτρου, ἢ δι' οἱουδήποτε γωνιομέτρου σταθμεύοντες ἐπὶ τῶν κορυφῶν τῶν γωνιῶν ΒΑΓ καὶ ΑΒΓ μετροῦμεν ἀκριβῶς τὴν τιμὴν αὐτῶν. Οὕτως ἔχομεν ἱκανὰ δεδομένα πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ μήκους τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, καὶ τῆς σχετικῆς θέσεως τῶν κορυφῶν Α, Β καὶ Γ. Γνωρίζοντες τὴν πλευρὰν ΒΓ, πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ τριγώνου ΒΓΔ ἀρκεῖ νὰ καταμετρήσωμεν τὰς γωνίας αὐτοῦ Β καὶ Γ. Ἐπίσης γνωστῆς οὔσης τῆς πλευρᾶς ΑΓ, τὸ τρίγωνον ΑΓΖ ἐπιλύεται, ἐὰν ἔχωμεν τὰς γωνίας Α καὶ Γ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐπιλύομεν καὶ τὰ ἄλλα τρίγωνα ΓΕΖ, ΓΔΕ.

Εὐκόλως ἐπιλύονται καὶ τὰ μικρὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΒΟΓ, κ.τ.λ. Τῷ ὄντι τῆς βάσεως ΑΒ οὔσης κοινῆς εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΟΒ, ἀρκεῖ νὰ καταμετρήσωμεν τὰς γωνίας ΒΑΟ, ΑΒΟ πρὸς εὕρεσιν τῶν πλευρῶν ΑΟ, ΟΒ. Ἡ ἐπίλυσις τῶν λοιπῶν μικρῶν τριγώνων γίνεται ὡς ἡ τῶν μεγάλων.

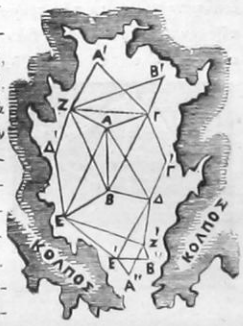
Βλέπομεν ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη τῆς σχεδιάσεως, προσομοιάζουσα πρὸς τὴν τῶν διατομῶν εἶναι ἁπλῆ, σύντομος καὶ ἀκριβής, διότι ἐπιτυγχάνομεν ταύτης καταμετροῦντες μίαν καὶ μόνην βάσιν καὶ τὰς γωνίας ἑκάστου τριγώνου, τῶν πλευρῶν προσδιοριζομένων τριγωνομετρικῶς.

Αἱ λεπτομέρειαι σχεδιάζονται ἰδιαιτέρως, ἀφοῦ συνδεθῶσι πρὸς τὰ μικρὰ τρίγωνα. Οὐδεμίαν δυσκολίαν παρουσιάζει ἡ κατάστρωσις τοῦ σχεδίου.

Ἡ τριγωνικὴ δικτύωσις ἐκτελεῖται καὶ ὡς ἑξῆς.

Ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ σχεδιάσωμεν ἐπὶ χάρτου τὴν ὑπὸ τοῦ Σχ. 124 παριστανομένην χερσόνησον. Πρὸς τοῦτο ἐκλέγομεν τὴν βάσιν ΑΒ ἀνάλογον τῆς ἐκτάσεως τῆς Χερσονήσου, καὶ δυναμένην νὰ καταμετρηθῇ. Ἔπειτα ἐξ ἑκάστου ἄκρου τῆς βάσεως, ἐκλέγομεν τῆς πρώτης τάξεως τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε, Ζ οὕτως, ὥστε ἕκαστον τούτων νὰ σχηματίζῃ μὲ τὰ δύο ἄκρα τῆς βάσεως, τρίγωνον

ὡς ἔγγιστα ἰσόπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι νὰ δύνανται νὰ καταμετρηθῶσι. Εἶναι βέβαιον ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἐπὶ χάρτου διὰ καταλλήλου κλίμακος καὶ διὰ τοῦ προβλ. 3 ἢ 6 τῆς §. 6. Διὰ τῶν σημείων τῆς πρώτης τάξεως ἐκλέγομεν ἐπὶ τῆς γῆς καὶ ἔπειτα μεταφέρομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τὰ τῆς δευτέρας τάξεως σημεῖα Α′, Β′, Γ′, Δ′, Ε′, Ζ′, λαμβάνοντες τὴν ἀπόστασιν δύο σημείων τῆς πρώτης τάξεως ὡς βάσιν· π. χ. λαμβάνοντες ὡς βάσιν τὴν ἀπόστασιν ΖΓ τῶν σημείων Ζ καὶ Γ, διὰ τῶν τριγώνων Α′ΖΓ καὶ Β′ΖΓ, προσδιορίζομεν τῆς δευτέρας τάξεως τὰ σημεῖα Α′, Β′. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προσδιορίζομεν καὶ ἕτερα σημεῖα, τρίτης τάξεως, ὡς τὰ Α″, Β″, καὶ τετάρτης καὶ πέμπτης κ.τ.λ. ἐὰν ᾖναι ἀνάγκη, καὶ διὰ τῶν τελευταίων, προσδιορίζομεν τὴν περίμετρον τῆς χερσονήσου. Τέλος διὰ νὰ ἔχωμεν ὅλας τὰς λεπτομερείας τῆς χερσονήσου, ἀρκεῖ νὰ σχεδιάσωμεν τὰς εἰς ἕκαστον τρίγωνον εὑρισκομένας.



Σχ. 124.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καταμετροῦμεν καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ἑκάστου τριγώνου, ἵνα διανείμωμεν ἐπίσης τὸ ἐκ τῶν γωνιομέτρων χορηγούμενον λάθος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 55η. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ. Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν 54, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων εἶναι ἀρκούντως μεγάλαι, ὅπως κατασκευάσωμεν αὐτὰς γεωμετρικῶς, ἀνάγκη νὰ λάβωμεν κλίμακα τοιαύτην ὥστε τὸ 0,01 νὰ ἐκφράζῃ 100, 200 ἢ 300 κ.τ.λ. μέτρα, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι ἡ γεωμετρικὴ προσδιόρισις τῆς μεταξὺ τῶν σταθμῶν ἀποστάσεως, θέλει εἶσθαι λανθασμένη κατ' ἀριθμόν τινα μέτρων. Ἐὰν ὅμως γνωρίζοντες τὴν μίαν πλευρὰν τριγώνου τινός, καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας, ἠδυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τὰ ἄλλα μέρη τοῦ τριγώνου, ἠθέλαμεν τότε προσδιορίσει δι' ὁμοίου ὑπολογισμοῦ ὅλα τὰ μέρη τῆς τριγωνικῆς δικτυώσεως, ὡς καὶ τῶν λεπτομερειῶν, καὶ τότε ἡ μὲν γεωμετρικὴ κατασκευὴ τοῦ σχεδίου θέλει χορηγήσει κατὰ προσέγγισιν τὴν σχετικὴν θέσιν τῶν λεπτομερειῶν, οἱ δὲ δι' ὑπολογισμοῦ

εὑρεθέντες καὶ ἐπὶ τοῦ σχεδίου γεγραμμένοι ἀριθμοὶ θέλουσι παραστήσει τὰς διαστάσεις τῶν λεπτομερειῶν μεθ' ἑκατοστομέτρων τινῶν. Ἡ ἐπίλυσις τῶν προβλημάτων 4, 5, 6, 7, τῆς §. 6. συνιστᾷ τὴν Τριγωνομετρίαν, ἥτις εἶναι ἐφαρμογὴ τῆς Ἀλγέβρας εἰς τὴν γεωμετρίαν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 56η. ΣΧΕΔΙΑΣΙΣ ΠΟΛΕΩΣ Η ΧΩΡΙΟΥ. Σχεδιάζομεν πόλιν διὰ τῆς τριγωνικῆς δικτυώσεως, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς ἦναι ἐκτεταμένη. Ἐὰν ὅμως ἔχῃ μικρὰν ἔκτασιν περιορίζομεν αὐτὴν, ὡς εἰς τὸ Σχ. 125, ἐντὸς τοπογραφικοῦ τινὸς πολυγώνου ΑΒΓΔΕ μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ ὁποίου συνδέονται αἱ ὁδηγήτριαι, τοὐτέστιν αἱ γραμμαὶ αἱ χρησιμεύουσαι ὡς βάσεις διὰ τὴν σχεδίασιν τῶν ὁδῶν ἢ τῶν οἰκοπέδων.



Σχ. 125.

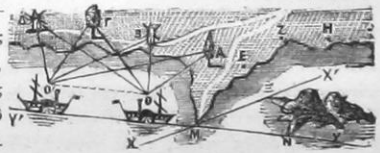
Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου σχεδιάζεται καὶ χωρίον.

Τὸ τοπογραφικὸν πολύγωνον σχεδιάζεται διὰ τῆς μεθόδου τῆς ὀδεύσεως (ἐφαρμ. 47), αἱ ὁδοὶ, τὰ οἰκόπεδα, αἱ πλατεῖαι, οἱ κῆποι κ.τ.λ. σχεδιάζονται διὰ τῆς μεθόδου τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων (§. 12. ἐφαρμ. 80), ἔνθα αἱ τετμημέναι εἶναι μεγάλαι ὁδηγήτριαι γραμμαὶ κεχαραγμέναι κατὰ τὸν ἄξονα τῶν ὁδῶν, καὶ αἱ τεταγμέναι ἀπολήγουσιν εἰς τὰς βάσεις τριγώνων, ἢ εἰς τὰς πλευρὰς τοπογραφικῶν πολυγώνων. Ἡ διεύθυνσις τῶν γραμμῶν τούτων λαμβάνεται διὰ τῶν γωνιομέτρων καὶ μετρεῖται διὰ τοῦ χαλυβδίνου δεκαμέτρου. Ἡ κατασκευὴ τοῦ σχεδίου οὐδεμίαν δυσκολίαν παρουσιάζει.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 57η. Αἱ μέχρι τοῦδε μέθοδοι σχεδιάσεως ἐδίδαξαν ἡμᾶς ἀκριβῶς τὸν τρόπον τοῦ σχεδιασμοῦ ἐπιφανείας τινὸς στερεᾶς· ἵνα λάβωμεν δὲ ἰδέαν τινὰ καὶ περὶ τῶν ἐν τοῖς ὑδατώδεσι μέρεσι τῆς γῆς γιγνομένων σχεδιάσεων ἀναφέρομεν ὀλίγα τινὰ περὶ ὑδρογραφίας, ἥτις εἶναι ἰδιαίτερος κλάδος τῆς Γεωμετρίας.

ΥΔΡΟΓΡΑΦΙΑ. Αὕτη σκοπὸν ἔχουσα τὴν ἐπὶ χάρτου παράστασιν τῶν ὑδατωδῶν μερῶν τῆς γῆς, περιλαμβάνει τὸν σχεδιασμὸν τῶν ἐπιφανειῶν, τὴν ὑποβρύχιον χωροστάθμισιν, (ἴδε §. 16. Μέρ. Β'.) καὶ τὴν χάραξιν τῶν ναυτικῶν χαρτῶν. Ὁ σχεδιασμὸς τῶν ἐπιφανειῶν σύγκειται ἀπὸ δύο μέρη, περιλαμβάνοντα σχεδιασμοὺς παραλιῶν, χωρῶν ἱκανῆς ἐκτάσεως, μεγάλων νήσων κ.λ. ἀποτελοῦντα τὴν κατάρτησιν γενικοῦ χάρτου, καὶ τὸν σχεδιασμὸν λιμενίσκων, ὅρμων μετὰ τῶν νησιδίων, τῶν ὑφάλων, τῶν σκοπέλων κ.τ.λ. τοὺς ὁποίους δυνατὸν νὰ περιλαμβάνωσι, καὶ τῶν ὁποίων ἡ σχεδίασις συνιστᾷ τὴν Ὑδρογραφικὴν Τοπογραφίαν θαλασσίου διαστήματος μικρᾶς ἐκτάσεως. Κατὰ τὴν πρώτην περίστασιν, ἐὰν ἡ μὲν παραλία ἦναι προσιτὴ καθ' ὅλα αὐτῆς τὰ σημεῖα, αἱ ἐργασίαι δὲν διαφέρουσι ποσῶς ἀπὸ τὰς τῆς τοπογραφίας, ὅτε καὶ μεταχειριζόμεθα τὰ αὐτὰ ἐργαλεῖα, ἤτοι τὸ Θεοδόλιχον, τὸν Ἐπαναληπτικὸν Κύκλον κ.τ.λ. Ἐὰν δὲ ἡ παραλία δὲν ἦναι προσιτὴ, τότε ἐκτελοῦμεν τὴν δι' Ἀτμοπλοίων λεγομένην σχεδίασιν, μεταχειριζόμενοι τὰ ἀνταναλαστικὰ ἐργαλεῖα, τὸ Ἐκτοκύκλιον, τὴν Ἀποκλιτικὴν Πυξίδα κ.τ.λ. ὡς ἑξῆς.

Κινοῦμεν τὸ ἀτμόπλοιον ἕως οὗ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Ο Σχ. 126 κατὰ τὴν εὐθυγραμμίαν δύο ἀκρωτηρίων Μ καὶ Ν, καὶ ἀγκυροβολοῦντες ἐνταῦθα καταμετροῦμεν τὰς γωνίας ΜΟΑ, ΜΟΒ, ΜΟΓ, ΜΟΔ, ΜΟΕ κ.τ.λ. τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ τῆς διευθύνσεως ταύτης, καὶ τῶν ὀπτικῶν ἀκτίνων τῶν διευθυνομένων πρὸς τὰ σημεῖα τῆς παραλίας, τὴν ὁποίαν πρόκειται νὰ παραστήσωμεν ἐπὶ χάρτου. Τούτου γενομένου κινοῦμεν τὸ ἀτμόπλοιον, ἀκολουθοῦντες τὴν διεύθυνσιν ΟΜΝ, καὶ σταθμεύομεν εἰς νέον τι σημεῖον Ο′ ἔνθα καταμετροῦμεν τὰς γωνίας ΜΟ′Α, ΜΟ′Β, ΜΟ′Γ κ.τ.λ. τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ τῆς διευθύνσεως Ο′ΜΝ ἢ τῆς Γ′ΜΝ′ καὶ τῶν ὀπτικῶν ἀκτίνων τῶν διευθυνομένων πρὸς τὰ σημεῖα τῆς παραλίας τὰ ὑπὸ τοῦ πρώτου σταθμοῦ παρατηρηθέντα. Καταμετροῦμεν τὴν βάσιν ΟΟ′ καὶ ἔχομεν ὅλα τὰ ἀναγκαῖα μέσα πρὸς σχεδίασιν τοῦ ἐπιπέδου τῆς παραλίας ΑΒΓΔ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον σχεδιάζομεν τὸ μέρος ΜΕΖΗ διά τινος νέας εὐθυγραμμίας ΧΧ′ διερχομένης ἐκ τῶν ἀκρωτηρίων Μ καὶ Ξ.



Σχ. 126.

Καὶ κατ' ἀρχὰς προσδιορίζομεν τὰ τῆς πρώτης τάξεως σημεῖα τῆς παραλίας. Ἔπειτα διὰ τῶν σημείων τῆς πρώτης τάξεως, τὰ προσδιωρισμένα ἤδη ἐπὶ τοῦ χάρτου, ὁρίζομεν τὴν θέσιν νέων σταθ-

μῶν ἀπὸ τοὺς ὁποίους προσδιορίζομεν τὰ τῆς δευτέρας τάξεως καὶ οὕτω καθεξῆς.

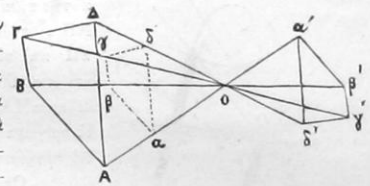
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 58η. Διὰ νὰ καταμετρήσωμεν ἀπ' εὐθείας τὴν ἐπὶ τῆς θαλάσσης βάσιν, τὴν ὑπὸ δύο πλοίων περατουμένην, μεταχειριζόμεθα ράβδον μεταλλίνην μήκους ὡρισμένου, τὴν ὁποίαν ἀποκαθιστῶμεν πλευστὴν διὰ φελῶν. Μετὰ ταῦτα φέρομεν δύο πλοιάρια κατὰ τὸ μῆκος τῆς βάσεως, ὁδηγούμενοι ὑπὸ σημείων παριστανομένων ἐπὶ τῆς θαλάσσης διὰ φελῶν ἐφωδιασμένων μὲ τεμάχιον μολύβδου, δι' οὗ ἀποκαθίστανται τὰ σημεῖα δυσκίνητα. Ἡ ἐργασία αὕτη ἀπαιτεῖ νὰ ᾖναι ἡ θάλασσα γαληνιαία, ἐφαρμόζεται δὲ εἰς μικρὰς ἀποστάσεις καὶ δὲν εἶναι βεβαίως ἀκριβής.

Καταμετροῦμεν τὴν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης βάσιν καὶ οὕτω· ἀφοῦ ἀγκυροβολήσῃ δεύτερον ἀτμόπλοιον εἰς τὸ σημεῖον O′ σταθμεύομεν εἰς τὸ σημεῖον O, θέτοντες τὸν ἄντυγα τοῦ γωνιομέτρου κατακορύφως. Διευθύνομεν τὴν μὲν διάμετρον τοῦ ἐργαλείου ἀποκαθισταμένην ὁριζόντιον, πρὸς τὸν ἱστὸν τοῦ εἰς τὸ O′ σημεῖον σταθμεύοντος ἀτμοπλοίου, τὸ δὲ κινητὸν δίοπτρον εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ ἱστοῦ, καὶ καταμετροῦμεν τὴν ἐπὶ τοῦ ἄντυγος σχηματιζομένην οὕτω γωνίαν ὡς καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἱστοῦ. Τούτου τεθέντος εἶναι βέβαιον ὅτι σχηματίζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι γνωστὴ, οὖσα τὸ μῆκος τοῦ ἱστοῦ, τὸ διαχωριζόμενον ὑπὸ τῶν ὀπτικῶν ἀκτίνων τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σταθμοῦ O, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς διαμέτρου, καὶ τοῦ κινητοῦ διόπτρου· ἡ δὲ ἄλλη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἐπὶ τῆς θαλάσσης βάσεως OO′ ηὐξημένον κατὰ τὴν ἐκ τοῦ σταθμοῦ O′ ἀπόστασιν τοῦ σκοπευθέντος ἱστοῦ, ἣν προσδιορίζομεν διὰ τῆς τριγωνομετρίας ἢ διὰ τῆς κλίμακος, ἀφοῦ κατασκευάσωμεν ἐπὶ χάρτου τρίγωνον ὅμοιον μὲ τὸ προηγούμενον.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 59η. Διὰ τῆς θεωρίας τῶν ὁμοίων πολυγώνων δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν οἱονδήποτε σχῆμα κατὰ δεδομένον λόγον.

α.) Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔ Σχῆμα 127 τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ διαγράψωμεν ἐπὶ χάρτου ἀνάγοντες κατὰ $^3/_5$, τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου ἐν ᾧ εὑρίσκεται τὸ πολύγωνον, σημεῖόν τι O καὶ ἄγομεν τὰς εὐθείας AO, BO, ΓO, ΔO ἐφ' ἑκάστης τῶν ὁποίων λαμβάνομεν αο$=^3/_5$ AO, βο$=^3/_5$ BO, γο$=^3/_5$ ΓO, δο$=^3/_5$ ΔO, καὶ τὰς ἀποτελούσας τὸ πολύγωνον αβγδ ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα αοβ

καὶ ΑΟΒ ἔχουσιν ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην περιλαμβανομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν εἶναι ὅμοια, ὡς καὶ τὰ τρίγωνα βογ, ΒΟΓ καὶ γοδ, ΓΟΔ καὶ δοα, ΔΟΑ, ἐὰν ἄξωμεν τὰς διαγωνίους βδ, ΒΔ, τὰ τρίγωνα βοδ, ΒΟΔ εἶναι ἐπίσης ὅμοια ἐπειδὴ ἔχουσιν ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην περιλαμβανομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν· ἄρα αβ$=^3/_5$ ΑΒ, βγ$=^3/_5$ ΒΓ, γδ$=^3/_5$ ΓΔ, δα$=^3/_5$ ΔΑ καὶ βδ$=^3/_5$ ΒΔ· τὰ τρίγωνα βαδ καὶ ΒΑΔ ἔχουσι τὰς πλευρὰς των ἀναλόγους ἑπομένως εἶναι ὅμοια, ὡς καὶ τὰ τρίγωνα βγδ, ΒΓΔ. Τὰ δύο πολύγωνα αβγδ καὶ ΑΒΓΔ ἐπειδὴ συντίθενται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ὁμοίων τριγώνων, καὶ κατὰ τὸν αὐτὴν τάξιν τεταγμένων, εἶναι ὅμοια.



Σχ. 127.

Ἡ ἀπόδειξις αὕτη ἐφαρμόζεται ὁμοίως καὶ εἰς πολύγωνα ἔχοντα ὁσασδήποτε πλευράς.

Τὰς ἀποστάσεις οα, οβ, κ.τ.λ. δυνάμεθα νὰ φέρωμεν καὶ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῶν συστοίχων εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ κ.τ.λ., αἵτινες ἀποτελοῦσι τὸ πολύγωνον α′β′γ′δ′ ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

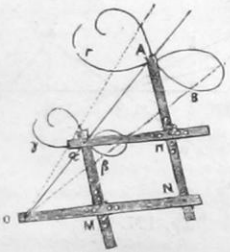
Τὸ σημεῖον O λέγεται Κέντρον τῆς Ὁμοιότητος, καὶ ὁ λόγος τῆς αβ πρὸς τὴν ΑΒ ἢ τῆς βγ πρὸς τὴν ΒΓ κ.τ.λ. Λόγος τῆς Ὁμοιότητος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ προηγουμένη κατασκευὴ δὲν ἐφαρμόζεται μόνον εἰς τὰ κυρτὰ πολύγωνα (Πρότ. 23. Σημ.), ἀλλὰ καὶ εἰς οἱαδήποτε πολύγωνα ὡς καὶ εἰς τὰ καμπυλόγραμμα σχήματα, ἐπειδὴ πᾶσα καμπύλη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κεκλασμένη γραμμὴ τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι ἀπειροελάχιστοι (§. 1. Ὁρισμοί.).

Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην αἱ εὐθεῖαι ΟΑ καὶ οα, ΟΒ καὶ οβ κ.τ.λ. ἔχουσι μεταξύ των σταθερὸν λόγον. Ἐν τῇ ἐφαρμογῇ ὅμως τοῦτο ἐκπληροῦται διὰ καταλλήλου ἐργαλείου διὰ τοῦ ὁποίου ἀντιγράφομεν καὶ ἀνάγομεν εὐκόλως οἱονδήποτε σχῆμα κατὰ δεδομένον λόγον.

Τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο καλεῖται Παντογράφος Σχ. 128 καὶ εἶναι κατεσκευασμένον ὡς ἑξῆς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 60η. Δύο κανόνες ΟΝ καὶ ΑΝ Σχ. 128 συνδέονται εἰς τὸ σημεῖον Ν οὕτως, ὥστε ἕκαστος τούτων νὰ περιστρέφηται ἐλευθέρως περὶ αὐτό· δύο δὲ ἄλλοι αΜ καὶ αΠ, συνδεόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τὸ σημεῖον α, συνέχονται μὲ τοὺς πρώτους διὰ ξυλοκάρφων περὶ ἃ στρέφονται καὶ αὐτοί· εἶναι δὲ καὶ οἱ τέσσαρες οὕτω διατεθειμένοι ὥστε τὰ σημεῖα ο, α καὶ Α εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καὶ τὰ μήκη αΜ καὶ ΝΠ εἶναι ἴσα, ὡς καὶ τὰ ΜΝ καὶ αΠ· καὶ τὸ μὲν σχῆμα αΜΝΠ εἶναι παραλληλόγραμμον, αἱ δὲ εὐθεῖαι αΜ καὶ ΑΝ παράλληλοι, τὰ δὲ τρίγωνα ΟαΜ καὶ ΟΑΝ ὅμοια, διὸ προκύπτει ἡ ἀναλογία



Σχ. 128.

Οα:ΟΑ=ΟΜ:ΟΝ.

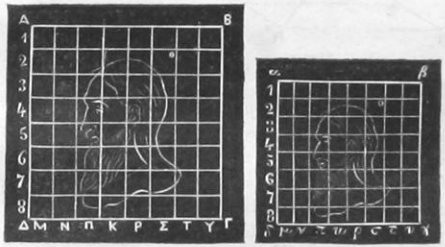
Ἐπειδὴ ὅμως οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν λάβωσιν οἱ κανόνες, τὸ σχῆμα αΜΝΠ εἶναι παραλληλόγραμμον, αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ὑπάρχουσι πάντοτε καὶ τὰ μήκη ΟΜ καὶ ΟΝ μένουσιν ἀμετάβλητα, ὡς καὶ ὁ λόγος αὐτῶν, ὅστις εἶναι ὁ τῶν ἀποστάσεων οα καὶ ΟΑ, αἵτινες μένουσι πάντοτε ἀνάλογοι. Ἐὰν ἄρα τὸ σημεῖον ο μείνῃ ἀκίνητον, καὶ δι' αἰχμῆς εὑρισκομένης εἰς τὸ Α, ἀκολουθήσωμεν τὰς γραμμὰς σχήματός τινος ΑΒΓ ἡ γραφίς, ἡ εἰς τὸ α εὑρισκομένη θέλει τότε χαράξει ἐπὶ τοῦ χάρτου ὅμοιον σχῆμα αβγ, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ πρὸς τὸ πρῶτον τοιοῦτον λόγον οἷον ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΟΝ.

Δι' ὁπῶν εὑρισκομένων ἐπὶ τῶν κανόνων δυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν κατὰ θέλησιν τὸν λόγον τῆς ΟΜ πρὸς τὴν ΟΝ, μεταθέτοντες τὰ ξυλόκαρφα οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον α νὰ ὑπάρχῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΑ.

ΕΦΑΡΝΟΓΗ 61η. Β΄.) Περικλείομεν τὸ ἀναχθησόμενον σχῆμα ἐντὸς τετραγώνου τὸ ὁποῖον ὑποδιαιροῦμεν διὰ γραμμῶν παραλλήλων πρὸς τὰς πλευράς, εἰς ἀριθμόν τινα ἴσων τετραγώνων. Οὕτω ἐὰν πρόκηται π. χ. νὰ ἀνάξωμεν τὰς γραμμὰς τῆς ἐν τῷ σχήματι 129 προτομῆς κατὰ τὸν λόγον τοῦ 5 πρὸς τὸν 3, λαμβάνομεν εὐθεῖαν τινα αβ ἐπὶ τοῦ χάρτου, ἐφ' οὗ θὰ γίνῃ ἡ ἀναγωγὴ, ἴσην μὲ $^3/_5$ τῆς ΑΒ, ἐφ' ἧς κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον αβγδ, τὸ ὁποῖον ὑποδιαιροῦμεν εἰς **τόσα** τετράγωνα ἴσα, **ὅσα** ἔχει καὶ τὸ πρῶτον. Διὰ

νὰ ἀποφύγωμεν δὲ τὴν σύγχυσιν σημειοῦμεν διὰ τῶν ὁμοίων γραμμάτων Μ, Ν, Π, κ.τ.λ. καὶ μ, ν, π, κ.τ.λ., τὰς στήλας τῶν τετραγώνων τὰς παραλλήλους τῇ ΑΔ καὶ αδ, καὶ δι' ὁμοίων ἀριθμῶν τὰς σειρὰς τῶν τετραγώνων τὰς παραλλήλους τῇ ΑΒ καὶ αβ.

Μετὰ ταῦτα ἵνα προσδιορίσωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τῆς ἀντιγραφῆς τὸ σημεῖον Ο τοῦ πρωτοτύπου, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὸ τετράγωνον, ὅπερ ἀνήκει συγχρόνως εἰς τὴν στήλην Σ καὶ εἰς τὴν σειρὰν 2.



Σχ. 129.

Τὸ σημεῖον ἄρα πρέπει νὰ σημειωθῇ ἐν τῇ ἀναγωγῇ ἐντὸς τοῦ μικροῦ τετραγώνου, ὅπερ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀντίστοιχον στήλην σ καὶ εἰς τὴν σειρὰν 2, καὶ ἐὰν τὰ τετράγωνα ἦναι μικρὰ, ἀρκεῖ ὀλίγη ἔξις ἵνα διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ προσδιορίσωμεν ἄνευ ἐπαισθητοῦ λάθους τὴν θέσιν τοῦ σημείου. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λαμβάνομεν καὶ τὰ λοιπὰ σημεῖα.

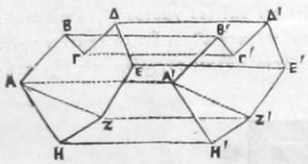
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 62α. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀνάγομεν καὶ ἀντιστρόφως τὸ μικρὸν εἰς μέγα. Σημειωτέον ὅμως ὅτι ἐὰν τὸ ἀναγόμενον σχῆμα ἔχει λάθος τι (ἐφαρμ. 54) σμικρύνεται τοῦτο ἢ μεγεθύνεται ἀναλόγως τοῦ εἴδους τῆς ἀναγωγῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ μέθοδος τῶν τετραγώνων ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν πρόκηται νὰ ἀντιγράψωμεν σχῆμά τι διατηροῦντες τὸ ἀρχικὸν αὐτοῦ μέγεθος· ἀρκεῖ δὲ πρὸς τοῦτο τὸ δεύτερον τετράγωνον νὰ ἦναι ἴσον τῷ πρώτῳ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 63η. Μεταχειριζόμεθα τὴν ἐξῆς ἐπίσης μέθοδον πρὸς ἀντιγραφὴν σχήματός τινος.

Προκειμένου νὰ ἀντιγραφῇ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖΗ Σχ. 130,

ἄγομεν ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, τὰς παραλλήλους γραμμὰς ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, κ.τ.λ. τοῦ αὐτοῦ μήκους, τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα Α′, Β′, Γ′, Δ′, Ε′, Ζ′, Η′, προσδιορίζουσι πολύγωνον ἴσον τῷ προτα-



Σχ. 130.

θέντι. Ἐπειδὴ, κατὰ τὴν κατασκευὴν, τὸ σχῆμα ΑΒΒ′Α′ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ ΑΒ=Α′Β′. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ δευτέρου πολυγώνου εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι πρὸς τὰς τοῦ πρώτου. Δυνάμεθα τὸ αὐτὸ νὰ εἴπωμεν καὶ διὰ τὰς διαγωνίους, ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΑΑ′Ζ′Ζ, εἶναι ἐπίσης παραλληλόγραμμον, καὶ ἡ ΑΖ=Α′Ζ′. Τὰ δύο πολύγωνα ἔχουσιν ἄρα τὰς πλευρὰς των ἴσας καὶ τὰς διαγωνίους ἐπίσης· δύνανται ἄρα νὰ ἀποσυντεθῶσιν εἰς ἰσοπλῆθῆ τρίγωνα ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. Τὰ τρίγωνα ταῦτα ὡς καὶ τὰ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμενα πολύγωνα εἶναι ἴσα.

Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου ἀντιγράφομεν οἱονδήποτε ἄλλο σχῆμα.

---

§—11.

1ον. Κανονικὰ Πολύγωνα. Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον ἐγγράφεται καὶ περιγράφεται εἰς κύκλον. Ἐγγραφὴ εἰς κύκλον δεδομένον τετραγώνου, κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ δεκαγώνου. **2ον.** Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο κανονικῶν πολυγώνων ἐχόντων ἴσην πλευρὰν πλὴν εἶναι τοιοῦτος οἷος ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν περιγεγραμμένων κύκλων. Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι σταθερός. Κατὰ προσέγγισιν ἐκτίμησις τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, διὰ τῆς ἐξευρέσεως τῆς περιμέτρου τῶν κανονικῶν πολυγώνων, τῶν ἐκ 4, 8, 16, 33, κ.τ.λ. ἀποτελουμένων πλευρῶν, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς δεδομένον κύκλον. Ἐφαρμογαί. Διαίρεσις τῆς περιφερείας εἰς 360 ἴσα μέρη. Ὑποδιαίρεσις ἐπιφανείας εἰς κανονικὰ σχήματα. Χρῆσις τῶν κανονικῶν πολυγώνων. Ἐφαρμογαὶ εἰς τὴν μηχανικήν. Γωνιώδης ταχύτης τῶν τροχῶν. Ἀριθ-

μητικαὶ ἐφαρμογαί. Εὐθύνσις τῶν τόξων. Προσδιορισμὸς τῆς ἀκτῖνος κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι ἀπρόσιτον.

1ον.

Ὁρισμός. Πολύγωνον κανονικὸν λέγεται τὸ σχῆμα τὸ ἔχον τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας ἴσας.

Ἐὰν διὰ τοῦ ν παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν, ὅστις εἶναι καὶ ὁ τῶν γωνιῶν, γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου $2(\nu-2)$, λαμβανομένης ὡς μονάδος τῆς ὀρθῆς γωνίας. Ἐὰν τὸ πολύγωνον ἦναι κανονικὸν, ἑκάστη τῶν γωνιῶν εἶναι τὸ $\frac{1}{\nu}$ μέρος τοῦ ἀθροίσματος τούτου καὶ ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου

$$\frac{2(\nu-2)}{\nu}.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 65.

Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ Σχ. 131 *ἐγγράφεται εἰς κύκλον· τουτέστι δύναται νὰ διέλθῃ περιφέρεια ἀφ' ὅλας τὰς κορυφάς του.*

Ἀπόδειξις. Πρὸς τοῦτο γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην ἐκ τριῶν διαδοχικῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι Ο ἐκ τοῦ ὁποίου καταβιβάζομεν ἐπὶ τῆς ΒΓ τὴν κάθετον ΟΚ καὶ φέρομεν τὰς ΟΑ καὶ ΟΔ. Ἐὰν στρέψωμεν τότε τὸ σχῆμα ΟΚΓΔ περὶ τὴν ΟΚ θέλει συμπέσει μὲ τὸ ΟΚΒΑ, καὶ ἐπειδὴ αἱ εἰς τὸ Κ γωνίαι εἶναι ὀρθαί, ἔχομεν τὴν ΚΓ=ΚΒ (Πρότ. 33)· καὶ τὰς γωνίας ΚΓΔ καὶ ΚΒΑ ἴσας ὡς καὶ τὰς πλευρὰς ΓΔ καὶ ΒΑ, ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον εἶναι κανονικόν. Ἄρα τὸ σημεῖον Δ θέλει πέσει ἐπὶ τὸ Α· ἄρα ΟΔ=ΟΑ, καὶ ἡ περιφέρεια ἡ διαβαίνουσα ἐκ τῶν τριῶν διαδοχικῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, θέλει διέλθει καὶ ἐκ τῆς τετάρτης κορυφῆς Δ. Ἀποδεικνύεται



Σχ. 131.

δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὅτι θέλει διέλθει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν κορυφῶν.

Τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι καὶ *κέντρον τοῦ πολυγώνου*· ἡ δὲ ἀκτὶς ΟΑ τοῦ κύκλου εἶναι ἐπίσης *ἀκτὶς τοῦ πολυγώνου*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 66.

Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ Σχ. 131 *περιγράφεται εἰς κύκλον, τοῦτέστι δυνατὸν νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.*

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καταβιβάσωμεν κάθετον, ὡς τὴν ΟΚ, ἑφ' ἑκάστης πλευρᾶς, αὗται θέλουσιν εἶσθαι ἴσαι, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κ.τ.λ. εἶναι ἴσαι χορδαὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ὡς ἰσάκις ἀπέχουσαι τοῦ κέντρου. Ἐὰν ἄρα ἐκ τοῦ σημείου Ο ὡς ἀπὸ κέντρου μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ ΟΚ γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θέλει διέλθει ἐκ τοῦ ποδὸς ἑκάστης καθέτου καὶ θὰ ἐφάπτηται τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, ἐπειδὴ ἑκάστη πλευρὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος.

Ἡ τε ἐγγεγραμμένη καὶ περιγεγραμμένη περιφέρεια ἔχουσι τὸ αὐτὸ κέντρον.

Ὁρισμός. Ἡ ἀκτὶς ΟΚ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας καλεῖται *ἀποτέμνουσα* τοῦ πολυγώνου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 67.

Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον ἐντὸς κύκλου.



Σχ. 132.

Κατασκευή. Ἄγομεν δύο διαμέτρους καθέτους τὴν ΑΓ καὶ ΒΔ Σχ. 132 καὶ φέρομεν τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΑ, τὸ δὲ οὕτω προκύπτον σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ αἱ εἰς τὸ Ο γωνίαι εἶναι ὀρθαί, τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΑ εἶναι ἴσα, ἑπομένως καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν. Ἄρα τὸ πολύγωνον ἔχει τὰς πλευρὰς ἴσας. Ἐκτὸς τούτου αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμιπεριφέρειαν, ἄρα τὸ σχῆμα εἶναι τετράγωνον.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ τρίγωνον ΑΟΒ δίδει (Πρότ. 61),

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2 \text{ ἢ } \overline{AB}^2=2A^2$$

ἐὰν διὰ τοῦ Α παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Ἄρα

$$AB=\sqrt{2A^2}=A\sqrt{2}=A\times 1{,}414213562.$$

Τοιαύτη εἶναι ἡ ἔκφρασις τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 68.

Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον.

Κατασκευὴ καὶ Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ Σχ. 131 τὸ ζητούμενον ἑξάγωνον· ἐὰν ἄξωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καὶ ΟΔ, κ.τ.λ. διαιροῦμεν οὕτω τὸ πολύγωνον εἰς ἓξ τρίγωνα ἰσοσκελῆ ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευρὰς των ἴσας ἑκατέραν ἑκατέραν, ἑπομένως καὶ τὰς εἰς τὸ Ο γωνίας ἴσας· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμά των ἰσοδυναμεῖ μὲ 4 ὀρθὰς, ἑκάστη τούτων εἶναι τὸ 6ον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, τοὐτέστι $\frac{4}{6}$ ἢ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς, οὕτω ἡ ΒΟΓ$=\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν ΟΒΓ καὶ ΟΓΒ τοῦ τριγώνου ΒΟΓ, εἶναι ἴσον μὲ 2 ὀρθὰς μεῖον $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς, τοὐτέστι $\frac{4}{3}$· καὶ ἐπειδὴ αἱ δύο αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι, διότι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ἑκάστη αὐτῶν εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς, ἢ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΒΟΓ εἶναι ἄρα ἴσαι μεταξύ των. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς τρεῖς πλευράς. Οὕτως ἡ πλευρὰ ΒΓ, τοῦ ἐγγεγραμμένου *κανονικοῦ ἑξαγώνου, εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.*

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς κύκλον, ἀρκεῖ ἄρα νὰ λάβωμεν ἀνοιγμα διαβήτου ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα, νὰ φέρωμεν αὐτὸ ἑξάκις ἐπὶ τῆς περιφερείας, καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ οὕτω προκύπτοντα σημεῖα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 69.

Δοθέντος κανονικοῦ τινὸς ἐγγεγραμμένου πολυγώνου

ΕΙΣΙΜΑΝΟΓΙΟ

εἰς περιφέρειαν Σχ. 132, τὰ ἐγγραφῆ ἐντὸς τῆς αὐτῆς περιφερείας, κανονικὸν πολύγωνον ἔχον πλῆθος πλευρῶν διπλασίαν.

Κατασκευή. Λαμβάνομεν τὰ μέσα μ, ν, π καὶ κ τῶν τόξων τῶν ὑποτεινομένων ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ δεδομένου πολυγώνου, καὶ ἑνοῦμεν ἕκαστον τῶν σημείων τούτων μὲ τὴν πλησίον κορυφήν, διὰ τῶν εὐθειῶν μΑ, μΒ, νΒ, νΓ, κ.τ.λ. Τὸ οὕτω δὲ λαμβανόμενον πολύγωνον ἔχει πλῆθος πλευρῶν διπλασίαν, καὶ εἶναι κανονικόν.

Ἀπόδειξις. α.) Ἐπειδὴ τὰ τόξα ΑμΒ, ΒνΓ, κ.τ.λ. εἶναι ἴσα, ἐπίσης εἶναι καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν, ἑπομένως καὶ αἱ χορδαὶ Αμ, μΒ, Βν, νΓ κ.τ.λ. αἱ ὑποτεινόμεναι ὑπ' αὐτῶν. Τὸ οὕτω δὲ λαμβανόμενον πολύγωνον ἔχει τὰς πλευρὰς ἴσας.

β'.) Αἱ γωνίαι τοῦ νέου πολυγώνου τούτου θέλουσιν εἶσθαι ἴσαι, ἐπειδὴ ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον. Ἄρα τὸ πολύγωνον εἶναι κανονικόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπειδὴ ἔχομεν

$$Aμ+μB>AB \text{ καὶ } Bν+νΓ>BΓ$$

καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕπεται ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ δευτέρου πολυγώνου εἶναι μεγαλητέρα τῆς τοῦ πρώτου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 70.

Δοθείσης τῆς περιμέτρου **Π** *κανονικοῦ τινὸς πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι* **Α**, *νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος* **Π** *τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος πλῆθος πλευρῶν διπλασίαν.*

Κατασκευή. Ἔστω ΑΒ Σχ. 133 ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου πολυγώνου. Ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἄγομεν τὴν διάμετρον ΓΔ, κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ φέρομεν τὴν ΑΓ καὶ ΑΔ. Ἔστω ἡ ΑΙ ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ δεδομένου πολυγώνου, ἴση τῷ α καὶ ἡ ΑΓ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου ἴση τῷ Χ. Καλοῦντες ν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, ἔχομεν $\Pi=2αν$ καὶ $π=2νX$.



Σχ. 133.

Ἀπόδειξις. Τὸ ζήτημα συνίσταται ἄρα εἰς τὸ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν Χ, γνωρίζοντες τὸ α καὶ Α.

Ἀλλ' ἡ γωνία ΓΑΔ ἐπειδὴ εἶναι ὀρθή, προκύπτει ἡ σχέσις (Πρότ. 58),

$$\overline{AΓ}^2=ΓΙ\times ΓΔ \text{ ἢ } X^2=ΓΙ\times 2A$$

πρὸς δὲ ἡ

$$ΓΙ=ΓΟ-ΟΙ=A-ΟΙ\cdot$$

ἀλλ' ἐὰν ἄξωμεν τὴν ΟΑ, ἔχομεν

$$\overline{OA}^2=\overline{OI}^2+\overline{AI}^2 \text{ ἐξ ἧς } \overline{OI}^2=\overline{OA}^2-\overline{AI}^2,$$

$$\text{ἢ } \overline{OI}^2=A^2-α^2, \text{ καὶ } OI=\sqrt{A^2-α^2},$$

ἑπομένως

$$ΓΙ=A-\sqrt{A^2-α^2}, \text{ καὶ } X^2=(A-\sqrt{A^2-α^2}).2A,$$

ἐξ ἧς ἕπεται ἡ ἔκφρασις

$$X=\sqrt{(A-\sqrt{A^2-α^2}).2A}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ τιμὴ τῆς Χ δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω

$$X=\sqrt{(A+α)A}-\sqrt{(A-α)A}$$

ἐπειδή, ὑψοῦντες τὰ δύο μέλη τῆς ἐκφράσεως ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν τιμὴν τῆς X^2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 24.

Νὰ ἐγγραφῇ ἐντὸς κύκλου κανονικὸν δεκάγωνον.

Λύσις. Ἔστω ΑΒ Σχ. 134 ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου. Ἄγομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ καὶ τὸ οὕτω προκύπτον τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ αἱ γωνίαι ΟΑΒ καὶ ΟΒΑ ἴσαι, ἡ δὲ κεντρικὴ γωνία ΑΟΒ ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς, καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἰσοδυναμεῖ μὲ 2 ὀρθὰς γωνίας, μεῖον $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς τοῦ-



Σχ. 134.

τέστι μὲ $\frac{8}{5}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι, ἑκάστη τούτων ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τούτου, ἤτοι $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Ἄρα ἑκάστη τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας AOB. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, τὴν OBA π. χ. εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῆς εὐθείας BI, ἑκάστη τῶν γωνιῶν τούτων ABI, IBO θέλει ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς καὶ τότε τὸ τρίγωνον IBO εἶναι ἰσοσκελές· ἐπίσης καὶ τὸ τρίγωνον ABI, ἐπειδὴ ἡ εἰς τὸ A γωνία ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{4}{5}$ ὀρθ. καὶ ἡ εἰς τὸ B γωνία μὲ $\frac{2}{5}$ ὀρθ., ἕπεται ὅτι ἡ γωνία AIB ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς ὡς καὶ ἡ γωνία A. Ἔχομεν ἄρα

$$AB = BI = IO.$$

Ἀλλὰ BI ἐπειδὴ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ABO, ἔχομεν εἰς τὸ τρίγωνον AOB τὴν ἀναλογίαν

$$AI : IO = AB : BO,$$

ἀντικαθιστῶντες τὴν AB διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ IO, καὶ τὴν BO διὰ τῆς OA, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$AI : IO = IO : OA,$$

τοὐτέστιν ἡ ἀκτὶς AO διαιρεῖται κατὰ τὸ I σημεῖον εἰς *μέσον καὶ ἄκρον λόγον* (Πρόβλ. 23). Ἀλλὰ $AB = IO$, ἄρα *ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ μεγαλήτερον τμῆμα τῆς ἀκτῖνος, διαιρουμένης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.*

Ἵνα διαιρέσωμεν περιφέρειαν εἰς 10 ἴσα μέρη, διαιροῦμεν τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, καὶ φέρομεν δεγαλήτερον τῶν δύο τμημάτων.

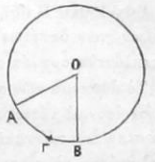
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καλοῦντες A τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ α τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ἔχομεν (Πρόβλ. 23)

$$\alpha = \frac{A}{2}(\sqrt{5}-1) = A \times 0{,}61803.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον. Ἐὰν ἑνώσωμεν ἀνὰ δύο διὰ χορδῶν τὰς κορυφὰς τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ΑΒΓΔΕΖΗΘΚΑ λαμβάνομεν τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πεντάγωνον ΑΓΕΗΚ.

Ἐὰν ἀπ' ἐναντίας, διπλασιάσωμεν διαδοχικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν, ἐγγράφομεν τὰ κανονικὰ πολύγωνα τὰ ἐξ 20, 40, 80 καὶ 160 πλευρῶν συνιστάμενα, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον. Ἔστω τὸ μὲν τόξον AB Σχ. 135 τὸ ἕκτον μέρος τῆς περιφερείας, τὸ δὲ AΓ τὸ δέκατον, λαμβανόμενα διὰ τῶν προειρημένων προτάσεων. Ἡ διαφορὰ ΓB τῶν τόξων τούτων ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$, ἤτοι $\frac{1}{15}$ τῆς περιφερείας· ἡ δὲ χορδὴ τοῦ τόξου BΓ θέλει εἶσθαι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαπενταγώνου.



Σχ. 135.

Διπλασιάζοντες διαδοχικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν ἐγγράφομεν τὰ κανονικὰ πολύγωνα τὰ ἐκ 30, 60, 120, 240, κ.τ.λ. πλευρῶν συνιστάμενα, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 64η. Ἐὰν πρόκηται νὰ διαιρέσωμεν περιφέρειαν εἰς 360 ἴσα μέρη, ἢ μοίρας, κατ' ἀρχὰς ἐγγράφομεν τὸ κανονικὸν πολύγωνον τῶν 120 πλευρῶν ἢ, ὅπερ τὸ αὐτό, εὑρίσκομεν τὸ 120ὸν μέρος τῆς περιφερείας τοῦ ὁποίου τὸ τρίτον λαμβανόμενον διὰ ψηλαφήσεων, ἄνευ δυσκολίας θέλει ἐκφράσει τὸ 360ὸν τῆς περιφερείας, τοὐτέστι τόξον μιᾶς μοίρας.

Ὁμοίως διαιροῦντες ἀκριβῶς τὴν περιφέρειαν εἰς 3 ἴσα μέρη, διαιροῦμεν διὰ ψηλαφήσεων ἕκαστον τούτων εἰς ἕτερα τρία καὶ οὕτω ἔχομεν τὸ 9ον τῆς περιφερείας· ἔπειτα ἐὰν λάβωμεν τὸ $^1/_{10}$ αὐτῆς ἀκριβῶς, ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων τόξων $^1/_9 - ^1/_{10}$ θέλει εἶσθαι τὸ $^1/_{90}$ τῆς περιφερείας, τοῦ ὁποίου τὸ τέταρτον λαμβανόμενον ἀκριβῶς διὰ δύο διαδοχικῶν διχοτομήσεων θέλει ἐκφράσει τὸ 360ὸν μέρος τῆς περιφερείας ἢ τόξον μιᾶς μοίρας.

Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ προειρημένα, βλέπομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν ἀναντιρρήτως τὰ κανονικὰ πολύγωνα τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι εἷς τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64, 80, 96, 120, 128, 160, 192, 240, 256, 320, 384, 480, 512, κ.τ.λ.

Διὰ τριγωνομετρικῶν μεθόδων δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν πλευρὰν κανονικοῦ τινὸς πολυγώνου ὡρισμένου εἴδους, γνωρίζοντες τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

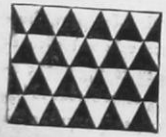
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 65η. Τὸ σχῆμα τῶν κανονικῶν πολυγώνων ἐφαρ-

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

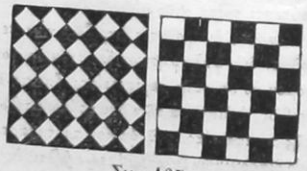
μόζεται εἰς τὴν κατασκευαστικήν. Αἱ δεξαμεναὶ αἱ καλλωπίζουσαι τοὺς κήπους ἔχουσι συχνάκις τὸ σχῆμα ἑξαγώνου ἢ ὀκταγώνου κανονικοῦ. Αἱ χορτοπλινθώσεις [ἐκ χλόης τάπητες] παριστάνουσιν ἐνίοτε τὸ αὐτὸ σχῆμα, ἔνιοι θάλαμοι καλούμενοι τῆς ὑποδοχῆς εἶναι ὀκτάγωνοι, ὡς καὶ τὸ δάπεδον τῶν σκιάδων καὶ ἄλλων τοιούτων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 66η. Ἐν τῇ καταστρώσει ἐκ μαρμάρων ἢ πολυτίμων ξύλων, τῶν δαπέδων τῶν οἰκιῶν καὶ ἄλλων οἰκοδομῶν κ.τ.λ. μεταχειριζόμεθα συχνάκις τὰ κανονικὰ πολύγωνα.

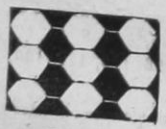
Τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν περὶ σημεῖόν τι, ἐπειδὴ εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας, διὰ νὰ καλύψωμεν λοιπὸν ἐπιφάνειαν διὰ κανονικῶν πολυγώνων ἴσων, πρέπει ἡ γωνία ἑκάστου πολυγώνου νὰ ἦναι ὑποπολλαπλάσιόν τι τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν, ὅπερ συμβαίνει εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον· ἐπειδὴ ἡ γωνία αὐτοῦ, ἤτις ἰσοδυναμεῖ μὲ $^2/_3$ τῆς ὀρθῆς, εἶναι τὸ $^1/_6$ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει εἰς τὸ τετράγωνον, ἐπειδὴ ἡ γωνία αὐτοῦ οὖσα ὀρθὴ εἶναι τὸ τέταρτον 4 ὀρθῶν. Ἐπίσης τὸ τοιοῦτον ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον, ἐπειδὴ ἡ γωνία αὐτοῦ οὖσα $^4/_3$ τῆς ὀρθῆς, εἶναι τὸ τρίτον τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν. Δυνάμεθα ἄρα νὰ καλύψωμεν ἐπιφάνειαν διὰ κανονικῶν σχημάτων δηλ. ἰσοπλεύρων τριγώνων Σχ. 136, διὰ τετραγώνων Σχ. 137 ἢ διὰ κανονικῶν ἑξαγώνων Σχ. 138 ἐκτὸς τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, ἐπειδὴ ἡ γωνία αὐτοῦ οὖσα $^6/_5$ τῆς ὀρθῆς, δὲν εἶναι ὑποπολλαπλάσιον τεσσάρων ὀρθῶν καὶ τῶν πολυγώνων τῶν ἐχόντων πλευρὰς περισσοτέρας τῶν 6, ἐπειδὴ τρεῖς ἐκ τῶν γωνιῶν των σχηματίζουσιν ἄθροισμα μεγαλήτερον τεσσάρων ὀρθῶν· ἐν τούτοις διὰ τοῦ συνδυασμοῦ διαφόρων κανονικῶν σχημάτων καλύπτομεν οἱανδήποτε ἐπιφάνειαν ὡς π. χ. δι' ὀκταγώνων καὶ τετραγώνων Σχ. 139, ἑξαγώνων καὶ



Σχ. 136.

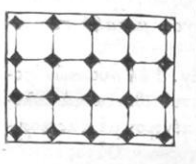


Σχ. 137.

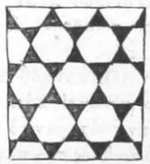


Σχ. 138.

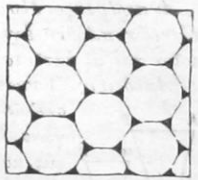
ἰσοπλεύρων τριγώνων Σχ. 140, δωδεκαγώνων καὶ ἰσοπλεύρων τριγώνων Σχ. 141. Ἐνίοτε μεταχειριζόμεθα συνάμα πολύγωνα κανονικὰ καὶ ἀκανόνιστα, τὰ ὁποῖα ὅμως διατάττομεν κατά τινα τάξιν. Οὕτω δὲ καλύπτομεν, ἢ ὑποδιαιροῦμεν ἐπιφάνειαν δι' ἑξαγώνων κανονικῶν καὶ ῥόμβων Σχ. 142, ἢ δι' ὀκταγώνων, τετραγώνων καὶ τραπεζίων ὀρθογωνίων. Σχ. 143.



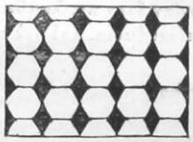
Σχ. 139.



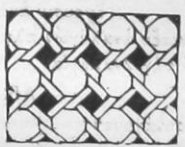
Σχ. 140.



Σχ. 141.



Σχ. 142.



Σχ. 143.

2ον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 71.

Δύο κανονικὰ πολύγωνα ἔχοντα ἴσην πλευρῶν πλῆθὺν εἶναι σχήματα ὅμοια.

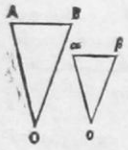
Ἀπόδειξις. ά.) Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τῆς γωνίας κανονικοῦ τινὸς πολυγώνου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν, αὕτη θὰ ἦναι ἡ αὐτὴ καὶ διὰ τὰ δύο πολύγωνα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῶν πλευρῶν πληθύν, ἐπομένως (§. 11, 1ον), ταῦτα ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· β'.) τὰς δὲ πλευρὰς ἀναλόγους, ἐπειδὴ αὗται εἶναι ἴσαι εἰς ἕκαστον πολύγωνον.

ISIS MAGLIO

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 72.

Αἱ περίμετροι δύο κανονικῶν πολυγώνων ἐχόντων ἴσην πλευρῶν πλῆθὺν ἔχουσι τοιοῦτον λόγον μεταξύ των ὁποῖον καὶ αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ΑΟΒ καὶ αοβ Σχ. 144 δύο τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων εἰς ἃ ἀποσυντίθενται τὰ πολύγωνα, ὅταν ἑνώσωμεν τὸ κέντρον μὲ τὰς κορυφάς, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ν. Οὗτος ἐπειδὴ εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ εἰς τὰ δύο πολύγωνα, ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΟΒ καὶ αοβ εἶναι τὸ $\frac{1}{\nu}$



Σχ. 144.

μέρος 4 ὀρθῶν, ἄρα εἶναι ἴσαι. Τὰ δύο τρίγωνα ἔχουσιν ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην περιλαμβανομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν καὶ εἶναι ὅμοια, καὶ διὰ τοῦτο ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$AB : a\beta = AO : ao$$

ἐξ ἧς συνάγομεν

$$\nu.AB : \nu.a\beta = AO : ao, \text{ ἢ } \Pi : \pi = A : \alpha,$$

καλοῦντες Π καὶ π τὰς περιμέτρους καὶ Α, α τὰς ἀκτῖνας τῶν πολυγώνων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 73.

Ἡ περιφέρεια δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ἡ περίμετρος τοῦ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ διπλασιάζονται διαδοχικῶς.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ διπλασιαζομένου διαδοχικῶς τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἡ περίμετρος αὐτοῦ αὐξάνει, οὕτω δυνάμεθα νὰ ἀπολήξωμεν εἰς πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος νὰ διαφέρῃ τῆς περιφερείας ὅσον θέλομεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 74.

Αἱ περιφέρειαι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἀκτῖνές των.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι ἔστωσαν Π καὶ π δύο περιφέρειαι,

Α καὶ α αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν. Φαντασθῶμεν ὅτι ἐνεγράψαμεν εἰς τὰς δύο περιφερείας κανονικὰ πολύγωνα ἴσην πλευρῶν πλῆθὺν ἔχοντα, καὶ ἔστωσαν Π′ καὶ π′ αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων. Θέλομεν ἔχει κατὰ τὴν πρότασιν 72, τὴν ἀναλογίαν

$$\Pi' : \pi' = A : \alpha.$$

Ἐπειδὴ ἡ σχέσις αὕτη ὑπάρχει οἱαδήποτε καὶ ἂν ᾖναι ἡ πληθὺς τῶν πλευρῶν τῶν δύο πολυγώνων, θέλει ὑπάρχει ὁμοίως καὶ ἐὰν ὁ ἀριθμὸς οὗτος ᾖναι ἄπειρος. Ἀλλὰ τότε αἱ περίμετροι Π′ καὶ π′ διαφέρουσι κατὰ ἀπειροελάχιστον τῶν περιφερειῶν Π καὶ π· δυνάμεθα ἄρα νὰ γράψωμεν τὴν ἀναλογίαν

$$\Pi : \pi = A : \alpha.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 75.

Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι σταθερός.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν (Πρότ. 74) συνάγομεν διαδοχικῶς

$$\Pi \times \alpha = \pi \times A \text{ καὶ } \Pi : A = \pi : \alpha$$

ἑπομένως καὶ τὴν ἔκφρασιν

$$\frac{\Pi}{2A} = \frac{\pi}{2\alpha} = \pi.$$

Τοῦ π ἐκφράζοντος ἀριθμὸν *σταθερόν*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 76.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος π.

Κατασκευή. Πρὸς συντομίαν λαμβάνομεν περιφέρειαν ἧς ἀκτὶς εἶναι ἡ μονάς. Κατὰ τὴν Πρότ. 67, ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι $\sqrt{2}$, τῆς ὁποίας τὸ ἥμισυ εἶναι $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Ἐὰν θέσωμεν $A=1$ εἰς τὸν τύπον τῆς Προτ. 70, λαμβάνομεν

$$X = \sqrt{1+\alpha} - \sqrt{1-\alpha} \quad \ldots\ldots [1].$$

Εἰσάγοντες δὲ εἰς τὸν τύπον τοῦτον τὴν ἀξίαν $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, εὑρίσκομεν τὴν πλευράν, καὶ ἑπομένως τὴν περίμετρον τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀκταγώνου.

Εἰσάγοντες ἀντὶ α, εἰς τὸν αὐτὸν τύπον, τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταγώνου, εὑρίσκομεν τὴν πλευράν καὶ τὴν περίμετρον τοῦ ἐκ δεκαὲξ πλευρῶν συνισταμένου ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐνεργοῦντες λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰς περιμέτρους τῶν κανονικῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων τῶν συνισταμένων ἐκ 32, 64, 128, 256 . . . . . κ.τ.λ. πλευρῶν. Οὕτω πλησιάζομεν ἐφ' ὅσον ἀνάγκη ὑπάρχει τὴν περὶ ἧς ὁ λόγος περιφέρειαν. Τὸ δὲ ἥμισυ τῆς κατὰ προσέγγισιν λαμβανομένης τιμῆς τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ π.

Ἡ μέθοδος αὕτη ἐκτὸς τοῦ ὅτι εἶναι ἐπίπονος, δίδει προσέγγισιν ἀνεπαρκῆ. Ἐπειδὴ ὁσάκις πολλαπλασιάζομεν τὴν λαμβανομένην πλευρὰν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ προκύπτον λάθος ἐκ τοῦ λαμβανομένου ὡρισμένου ἀριθμοῦ δεκαδικῶν ψηφίων δι' αὐτὴν αὐξάνει κατὰ τοὺς διαδοχικοὺς πολλαπλασιασμούς.

Διὰ συντομωτέρων μεθόδων, μὴ στοιχειωδῶν, εὑρίσκομεν $\pi=3{,}14159265358979\overset{3}{3}$. Ὁ ἀριθμὸς $\frac{22}{7}$ εἶναι ἑτέρα κατὰ προσέγγισιν τιμὴ τοῦ π, ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εὑρεθεῖσα, εἶναι δὲ ἀκριβὴς μέχρι τῶν ἑκατοστῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 77.

Γνωστῆς οὔσης τῆς ἀκτῖνος κύκλου, εὑρίσκεται ἡ περιφέρεια αὐτοῦ πολλαπλασιαζομένης τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ 2 καὶ ἐπὶ τὸν λόγον π.

Ἀπόδειξις. Καλοῦντες Α τὴν ἀκτῖνα καὶ Π τὴν περιφέρειαν, ἔχομεν (Πρότ. 75), $\Pi=2A\pi$. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης λαμβάνομεν

$$A=\frac{\Pi}{2\pi},$$

τοὐτέστι, γνωρίζοντες τὴν περιφέρειαν κύκλου, λαμβάνομεν τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ, διαιροῦντες τὴν περιφέρειαν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ λόγου π.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 67η. Κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν (§. 7. ἐφαρμ. 26), προσδιορίζεται ἡ διάμετρος τῶν Πρωτίστων Περιφερειῶν οὕτως, ὥστε αἱ ταχύτητες τῆς περιστροφῆς νὰ ἔχωσι δεδομένον λόγον. Ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν διαμέτρων δύο τροχῶν ὧν ὁ εἷς περιστρέφεται πεντάκις καθ' ὃν καιρὸν ὁ ἕτερος τριάκις· ἐπειδὴ ἕνεκα τῆς ἐπαφῆς τῶν τροχῶν, ἡ σχετικὴ κίνησις τῶν πρωτίστων περιφερειῶν δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐκτυλίξεως τῆς μιᾶς ἐπὶ τὴν ἄλλην περιφέρειαν, ἕπεται ὅτι πεντάκις ἡ περιφέρεια τοῦ πρώτου πρέπει νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ 3 φοράς τὴν περιφέρειαν τοῦ δευτέρου τροχοῦ, ἢ καλοῦντες Π καὶ Π′ τὰς περιφερείας, πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\Pi\times 3=\Pi'\times 5,$$

ἐξ ἧς

$$\Pi:\Pi'=3:5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

ἀλλὰ (Πρότ. 74. §. 10)· ἐὰν καλέσωμεν Α καὶ Α′ τὰς ἀκτῖνας τῶν περιφερειῶν τούτων, θέλομεν ἔχει τὴν

$$\Pi:\Pi'=A:A' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2].$$

Ἕνεκα δὲ τοῦ κοινοῦ λόγου τῶν ἀναλογιῶν [1] καὶ [2], καὶ τὴν

$$A:A'=3:5.$$

Τοὐτέστιν, «αἱ ἀκτῖνες τῶν τροχῶν εἶναι ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ τῶν ταχυτήτων».

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει ἐὰν οἱ τροχοὶ, περιεστρέφοντο διὰ τῆς ἁπλῆς ἐπαφῆς ἢ διὰ τοῦ Ἀτέρμονος Λωρίου· ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ἕπεται ὅτι γνωστοῦ ὄντος τοῦ λόγου τῶν ταχυτήτων τῆς περιστροφῆς καὶ τῆς διαμέτρου ἑνὸς τῶν τροχῶν εὑρίσκεται ἡ διάμετρος τοῦ ἑτέρου τούτων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 68η. Ὅταν ἅμαξά τις σύρηται κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν εἶναι βέβαιον ὅτι ἕκαστον σημεῖον τῆς περιφερείας τῶν τροχῶν ἐφάπτεται τῆς γῆς, ὡς νὰ ἐξετυλίσσοντο αἱ περιφέρειαι ἐπ' αὐτῆς ἀδιακόπως. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἐντὸς δεδομένου χρόνου, ἕκαστος τροχὸς ἐκτελεῖ τόσας περισσοτέρας στροφὰς, ὅσον ἡ περιφέρεια αὐτοῦ εἶναι μικροτέρα, ἄρα «αἱ ταχύτητες τῶν τροχῶν εἶναι ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ τῶν περιφερειῶν», ἢ, ὅπερ τὸ αὐτὸ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, «ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ τῶν διαμέτρων, ἢ τῶν ἀκτίνων των». Ἐὰν π. χ. αἱ διάμετροι τῶν ἐμπροσθίων καὶ τῶν ὀπισθίων τροχῶν ἦναι μεταξύ των ὡς 2: 3, αἱ ταχύτητες τῶν τροχῶν εἶναι ὡς 3: 2.

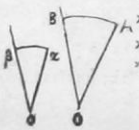
Ἕνεκα τούτου οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοὶ φθείρονται ταχύτερον κατὰ τοὺς ἄξονάς των, καὶ ἔχουσιν ἀνάγκην συχνοτέρας ἐπιδιορθώσεως.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 69η. Εἰς ἴσους κύκλους γνωρίζομεν ὅτι ἡ αὐτὴ κεντρικὴ γωνία καταμετρεῖται ἀπὸ ἴσα τόξα. Τὸ αὐτὸ ὅμως δὲν συμβαίνει δι' ἀνίσους κύκλους· τὰ τόξα εἰς ἀνίσους κύκλους τὰ καταμετροῦντα τὴν αὐτὴν κεντρικὴν γωνίαν λέγονται ὅμοια.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5ον.

«Τὰ ὅμοια τόξα εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἀκτῖνές των».

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἔστωσαν ΑΒ καὶ αβ Σχ. 145 δύο ὅμοια τόξα, καταμετροῦντα τὰς ἴσας γωνίας ΑΟΒ=αοβ εἰς κύκλους τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ΑΟ καὶ αο.



Σχ. 145.

Ἔχομεν ἐν πρώτοις τὰς ἀναλογίας

ΑΒ: περιφ. ΑΟ=ΑΟΒ: 4 ὀρθ.

αβ: περιφ. αο=αοβ: 4 ὀρθ.

Ἐπειδὴ ΑΟΒ=αοβ, αἱ δύο ἀναλογίαι ἔχουσι κοινὸν λόγον καὶ οἱ δύο ἄλλοι λόγοι σχηματίζουσι τὴν ἀναλογίαν

ΑΒ: περιφ. ΑΟ=αβ: περιφ. αο,

ἢ

ΑΒ: αβ=περιφ. ΑΟ: περιφ. αο.

Ἀλλὰ, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχομεν,

περιφ. ΑΟ: περιφ. αο=ΑΟ: αο,

ἄρα, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου τῆς ἀναλογίας ταύτης καὶ τῆς προηγουμένης, ἔχομεν τὴν ζητουμένην ἀναλογίαν

ΑΒ: αβ=ΑΟ: αο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 70η. «Δύο τροχῶν κινουμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, ἡ γωνιώδης ταχύτης εἶναι ἡ αὐτὴ, τοὐτέστιν αἱ ἀκτῖνες γράφουσι γωνίας ἴσας εἰς ἴσους χρόνους. Τὸ αὐτὸ ὅμως δὲν συμβαίνει διὰ τὴν πραγματικὴν ταχύτητα τῶν διαφόρων σημείων τῆς περιφερείας των».

Τὰ γραφόμενα τόξα ὑπὸ τῶν διαφόρων σημείων τῆς περιφερείας εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἀντιστοιχοῦσιν μὲ ἴσας κεντρικὰς γωνίας· εἶναι ἄρα ὅμοια καὶ ἀνάλογα τῶν ἀκτίνων των. Οὕτως αἱ ταχύτητες τῶν περιφερειῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ὑφουμένων τροχῶν, εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν.

«Ἐν γένει ἡ ταχύτης οἱουδήποτε σημείου τροχοῦ τινος, λαμβανομένου ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἢ ἐντὸς τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6ον.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 71η. «Αἱ κεντρικαὶ γωνίαι, αἱ συστοιχοῦσαι μὲ τόξα τοῦ αὐτοῦ μήκους, εἶναι ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ τῶν ἀκτίνων τῶν τόξων».

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἔστωσαν Α καὶ Α′ αἱ ἀκτῖνες, μ τὸ κοινὸν μῆκος τῶν τόξων, α καὶ α′ αἱ κεντρικαὶ γωνίαι αἱ συστοιχοῦσαι μὲ αὐτὰ, ἔχομεν τὰς ἀναλογίας

μ: περιφ. Α=α: 4 ὀρθ. καὶ μ: περιφ. Α′=α′: 4 ὀρθ.

ὧν οἱ ἄκροι εἶναι οἱ αὐτοὶ, τὰ δὲ γινόμενα τῶν μέσων ἴσα, καὶ παράγουσι τὴν σχέσιν

α × περιφ. Α=α′ × περιφ. Α′,

ἐξ ἧς συνάγομεν

α: α′=περιφ. Α′: περιφ. Α ἢ (Πρότ. 74), α: α′=Α′: Α.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τούτου ἀπαντᾶται εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.

Ἡ διάμετρος τοῦ 40/ράγκου εἶναι 26 χιλιοστόμετρα, ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του;

Εἰς τὸν τύπον Π=2Απ, θέτοντες 2Α=26 χιλιοστόμετρα, καὶ $\pi=\frac{22}{7}$, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ἐξαγόμενον κατὰ προσέγγισιν 0,1 τοῦ χιλιοστομέτρου, ἔχομεν διὰ τὴν ζητουμένην περιφέρειαν Π=26 χιλιοστ. × $\frac{22}{7}$=81,7 χιλιοσ. ὡς ἔγγιστα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρος δεξαμενῆς κυκλικῆς, τῆς ὁποίας ἡ περιφέρεια εἶναι 82,7 μέτρα.

Ἐκ τοῦ τύπου $\Pi = 2A\pi$ λαμβάνομεν $2A = \frac{\Pi}{\pi}$ εἰς τὸν ὁποῖον θέτοντες $\Pi = 82{,}7$ μέτρ. καὶ τὸν λόγον $\pi = \frac{355}{113}$, τὸν εὑρεθέντα ὑπὸ τοῦ Μετίου, ἵνα εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον μέχρι τῶν ἑκατοστῶν, ἔχομεν διὰ τὴν ζητουμένην διάμετρον

$$2A = 82{,}7 \text{ μέτρ.} : \frac{355}{113} = 82{,}7 \text{ μέτρ.} \times \frac{113}{355} = 26{,}32 \text{μέτρα.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.

Ἡ ἀκτὶς τοῦ ἰσημερινοῦ εἶναι 6376984 μέτρ. ποῖος εἶναι ὁ γραφόμενος δρόμος ἐξ ἑκάστου σημείου τῆς περιφερείας αὐτοῦ κατὰ τὸ διάστημα ἑνὸς δευτερολέπτου;

Ἡ διάμετρος τοῦ ἰσημερινοῦ ἐπειδὴ εἶναι τὸ διπλοῦν τῶν 6376984 μέτρων ἢ 12753968 μέτρ., ἔχομεν τὴν περιφέρειαν, πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἵνα ἔχωμεν τὸ γινόμενον κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς μέτρου, λαμβάνομεν τὰ ὀκτὼ πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τῆς τιμῆς τοῦ π· ἡ ζητουμένη περιφέρεια θέλει εἶσθαι 12753968 μέτρ. × 3,14159265 ἢ 40067772 μέτρ., ἧς παραλείπομεν τὰ κλάσματα τοῦ μέτρου. Τοιοῦτος εἶναι ὁ δρόμος τὸν ὁποῖον διατρέχει ἐντὸς 24 ὡρῶν ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἰσημερινοῦ. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸν δρόμον τὸν διατρεχόμενον ἐντὸς δευτερολέπτου, ἤτοι τὴν ταχύτητα αὐτοῦ, διαιροῦμεν τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ τῶν δευτερολέπτων τῶν ἐμπεριεχομένων ἐντὸς 24 ὡρῶν, τουτέστι διὰ 86400. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν, εὑρίσκομεν πηλίκον 463,7 μέτρ. ὡς ἔγγιστα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.

Ἡ διάμετρος τῶν ὀπισθίων τροχῶν ἁμάξης εἶναι 1,2 μέτρ. ἡ τῶν ἐμπροσθίων 0,8 μέτρ. πόσας στροφὰς κάμνει ἕκαστος τῶν τροχῶν τούτων, ὅταν ἡ ἅμαξα διατρέξῃ τὸ διάστημα ἑνὸς χιλιομέτρου;

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν περιφέρειαν τῶν ὀπισθίων τροχῶν πολλαπλασιάζομεν 1,2 μέτρ. ἐπὶ τὸν λόγον 3,1416 καὶ τὸ γινόμενον

εἶναι 3,7699 μέτρ. ἢ 3,77 μέτρ. Διαιροῦντες δὲ τὰ 1000 μέτρα διὰ τῆς περιφερείας ταύτης, τὸ πηλίκον 265,2 . . . θέλει ἐκφράσει τὸν ἀριθμὸν τῶν περιστροφῶν τῶν γενομένων ὑπὸ τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος τροχοῦ. Οὕτως ὁ ὀπίσθιος τροχὸς ἐκτελεῖ 265 περίπου στροφὰς εἰς τὸ χιλιόμετρον. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὰς στροφὰς τὰς γενομένας ὑπὸ τοῦ ἐμπροσθίου τροχοῦ, ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶν περιστροφῶν ἐπειδὴ εἶναι ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ τῶν διαμέτρων, σημειοῦντες διὰ X τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν περιστροφῶν, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν 0,8 μέτρ. : 1,2 μέτρ. = 265,2 : X ἢ 2 : 3 = 265,2 : X ἐξ ἧς συνάγομεν, $X = \frac{265{,}2 \times 3}{2} = 397{,}8$. Οὕτως ὁ ἐμπρόσθιος τροχὸς ἐκτελεῖ ὡς ἔγγιστα 398 περιστροφὰς εἰς τὸ χιλιόμετρον.

ΕΥΘΥΝΣΙΣ ΤΩΝ ΤΟΞΩΝ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 72α. Ἡ εὐθυνσις τῶν κυκλικῶν τόξων προκύπτει ἐκ τῆς τῶν περιφερειῶν. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ M τὸ μῆκος τόξου, διὰ Γ τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν, καὶ διὰ Π τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν M : Π = Γ : 360° ἐξ ἧς

$$M = \Pi \times \frac{\Gamma}{360^0} = \frac{2\pi A \Gamma}{360^0}$$

σημειοῦντες διὰ τοῦ A τὴν ἀκτῖνα.

Τουτέστιν, «λαμβάνομεν τὸ μῆκος τόξου πολλαπλασιάζοντες τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἰς ἣν ἀνήκει ἐπὶ τὸν λόγον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μοιρῶν ἐκ τῶν ὁποίων συνίσταται, πρὸς 360 μοίρας.»

Συνάγομεν ὁμοίως ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας

$$\Gamma = 360^0 \times \frac{M}{\Pi} = \frac{360^0 \times M}{2\pi A}$$

Τουτέστιν, «λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τόξου εἰς μοίρας, ὅταν τὸ μῆκός του ἦναι γνωστόν, ὡς καὶ τὸ τῆς περιφερείας εἰς ἣν ἀνήκει, πολλαπλασιάζοντες 360^0 ἐπὶ τὸν λόγον τὸν μεταξὺ τοῦ μήκους τοῦ τόξου καὶ τοῦ τῆς περιφερείας ὑπάρχοντας.»

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.

Κύκλου ἔχοντος διάμετρον 0,92 μέτρ. νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ τὸ μῆκος τοῦ τόξου $18^0\ 26'$.

Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι 0,92 μέτρ. × 3,141 ἢ 2,890 μέτρ. καλοῦντες δὲ X τὸ μῆκος τοῦ προταθέντος τόξου, ἔχομεν

$$X = 2{,}890 \text{ μέτρ.} \times \frac{18^0\ 26'}{360^0} = 2{,}890 \text{ μέτρ.} \times \frac{1106}{21600} = 0{,}148 \text{ μέτρ.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.

Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (Πρόβλ. 5) τὸ τόξον τὸ ἔχον μῆκος ἑνὸς μέτρου.

Καλοῦντες X τὴν τιμὴν τοῦ τόξου εἰς μοίρας ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν 2,89 μέτρ. : 1 μέτρ. $= 360^0 : X$ ἐξ ἧς συνάγομεν

$$X = 360^0 \times \frac{1}{2{,}89} \text{ ἢ } X = 124^0\ 34'\ 2'',9 \text{ ὡς ἔγγιστα.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7.

Δύο τόποι κείμενοι ὑπὸ τὸν ἰσημερινὸν ἔχουσι γεωγραφικὸν μῆκος $5^0\ 17'$, ζητεῖται ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἰς μυριάμετρα.

Ἡ περιφέρεια τοῦ ἰσημερινοῦ ἐπειδὴ εἶναι 40067772 μέτρ., ἐὰν σημειώσωμεν διὰ τοῦ X τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $360^0 : 5^0\ 17' = 40067772$ μέτρ. : X ἢ

$$21600' : 317' = 40067772 \text{ μέτρ.} : X \text{ ἐξ ἧς συνάγομεν}$$

$$X = \frac{40067772 \text{ μέτρ.} \times 317}{21600} = 588032 \text{ μέτρ. ἢ } X = 58{,}8 \text{ μυριάμετρα.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8.

Ὑπὸ 47 μοιρῶν πλάτος, ἑκάστη μοῖρα μήκους ἰσοδυναμεῖ μὲ 75782 μέτρα· ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ παραλλήλου τούτου;

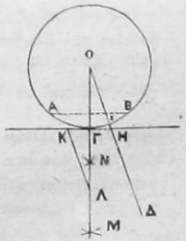
Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 360^0 τὴν τιμὴν ἑκάστης μοίας, ρ

ἔχομεν τὸ μῆκος τῆς ὅλης περιφερείας 27281720 μέτρ. τὴν ὁποίαν διαιροῦντες διὰ τοῦ λόγου 3,1415926 . . . εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον 8683978 μέτρ. τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ 4341980 μέτρ. εἶναι ἡ ζητουμένη ἀκτίς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 73η. Ἐν τῇ ἐφαρμογῇ λαμβάνομεν διὰ τὴν εὐκολίαν μῆκος ἴσον τῇ περιφερείᾳ κύκλου κεχαραγμένου ἐπὶ χάρτου ἢ σανίδος ὡς ἑξῆς. Παρατηροῦντες ὅτι ὁ εὑρεθεὶς ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους λόγος $3\frac{2}{7}$, ἰσοδυναμεῖ μὲ $3\frac{1}{7}$· εὑρίσκομεν ὅτι ἡ περιφέρεια ἰσοδυναμεῖ ὡς ἔγγιστα τρὶς τὴν διάμετρον καὶ ἓν ἕβδομον. Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι ὀλίγον μεγαλητέρα τοῦ δέοντος, ἀλλὰ δὲν ὑπερβαίνει τὰ 2 χιλιοστόμετρα, τοὐτέστι τὸ 500ὸν τῆς ἀκτῖνος καὶ ὡς ἐκ τούτου εἶναι ἀρκετὴ ἐν τῇ ἐφαρμογῇ· (ἴδε § 13 ἐφαρμ. 92).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 74η. Ὁσάκις ἐπὶ τῆς γῆς πρόκειται νὰ καταμετρηθῇ περιφέρειά τις, ἧς ἡ ἀκτὶς ἄγνωστος, καὶ τὸ κέντρον ἀδύνατον νὰ διακρίνωμεν, ὅταν π. χ. πρόκηται νὰ καταμετρήσωμεν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως πύργου κυκλικοῦ, δεξαμενῆς κ.τ.λ. εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα ὡς ἑξῆς·

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς δεδομένης περιφερείας δύο σημεῖα A καὶ B Σχ. 146 κατὰ θέλησιν, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων ὡς ἀπὸ κέντρου καὶ διὰ μήκους νήματος μὲ ἀκτῖνα, γράφομεν δύο τόξα τεμνόμενα εἰς τὸ σημεῖον M· ὁμοίως προσδιορίζομεν τὸ δεύτερον σημεῖον N, μεταβάλλοντες τὸ μῆκος τοῦ νήματος καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν MN ἥτις προεκτεινομένη θέλει διέλθει ἐκ τοῦ κέντρου O· ἐπειδὴ κατὰ τὴν κατασκευήν, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἔχει δύο σημεῖα ἰσάκις ἀπέχοντα τῶν ἄκρων τῆς χορδῆς AB, καὶ ἑπομένως εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς. Ἄγομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεύτερον εὐθεῖαν ΔΙ, διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου. Εἰς τὸ σημεῖον Γ, εἰς ὃ τέμνεται ἡ MN μετὰ τῆς περιφερείας, ὑψοῦμεν κάθετον τὴν ΓΗ ἐπὶ τῆς ΓΜ, ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τὴν ΓΚ=ΓΗ, καὶ ἄγομεν τὴν ΚΛ παράλληλον τῇ ΔΙ, καὶ ἔχομεν τὴν ΓΛ ἴσην μὲ τὴν ζητουμένην ἀκτῖνα ΓΟ.



Σχ. 146.

Ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωνα ΟΓΗ, ΛΓΚ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἀνὰ μίαν πλευρὰν ἴσην ΓΚ=ΓΗ, προσκειμένην εἰς δύο ἴσας γωνίας ἑ-

κατέραν ἑκατέρᾳ, τοὐτέστιν ΟΓΗ=ΔΓΚ ὡς ὀρθαὶ, καὶ ΟΗΓ=ΔΚΓ ὡς ἐναλλὰξ ἐντός. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ καταμετρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ ἵνα ἔχωμεν τὴν ζητουμένην ἀκτῖνα,

Τὸ ζήτημα τοῦτο συχνότατα ἀπαντᾶται ὅταν καταστρώνωμεν τοὺς τοπογραφικοὺς χάρτας. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην διὰ τοῦ γραφομέτρου τρία σημεῖα τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος περιφερείας μεταφέρωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου, ἔπειτα δὲ ἄγωμεν περιφέρειαν διερχομένην ἐκ τῶν σημείων τούτων καὶ διὰ τῆς κλίμακος εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα (Πρόβλ. 15.).

---

§.—12.

Καταμέτρησις τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ τριγώνου, τοῦ τραπεζίου καὶ οἱουδήποτε πολυγώνου. Ἀποσύνθεσις τῶν πολυγώνων εἰς τρίγωνα καὶ εἰς τραπέζια ὀρθογώνια. Σχέσεις ὑπάρχουσαι μεταξὺ τοῦ κατασκευαζομένου τετραγώνου ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τριγώνου ἀντικειμένης εἰς ὀρθὴν, ὀξεῖαν ἢ ἀμβλεῖαν γωνίαν καὶ τῶν κατασκευαζομένων τετραγώνων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν. Ἐφαρμογαί. Μονὰς ἐπιφανείας καὶ ὑποδιαίρεσις αὐτῆς. Ἀριθμητικὰ προβλήματα. Ἐφαρμογαὶ εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν καὶ ἀγρομετρίαν. Σχεδίασις ἀγροκηπίου καὶ ἀκανονίστου γραμμῆς. Ὀρθογώνιοι ἄξονες.

Ὁρισμός. Ὀνομάζονται σχήματα *ἰσοδύναμα* ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα εἶναι μὲν ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, οὐχὶ δὲ καὶ ὁμοίως ἐσχηματισμένα, ἢ ἴσα κατ' ἐφαρμογήν.

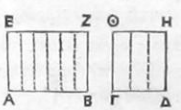
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 78.

Δύο ὀρθογώνια τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΑΒΕΖ, ΓΔΗΘ *εἶναι μεταξὺ των ὡς αἱ βάσεις των.* Σχ. 147.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν κατ' ἀρχὰς ἐμμέτρους τὰς βάσεις τῶν ὀρθογωνίων (§. 3.—Ὁρισμός)· καὶ διαιρουμένας εἰς ἴσα μέρη διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν μέτρου, ὅπερ περιλαμβάνεται ἓξάκις εἰς τὴν ΑΒ καὶ τρὶς εἰς τὴν ΓΔ, καὶ ὅτι ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{\Gamma\Delta}{AB}=\frac{3}{6}.$$

Ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ὑψοῦμεν καθέτους αἱ ὁποῖαι ὑποδιαιροῦσι τὰ δύο ὀρθογώνια εἰς ἕτερα τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους, τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζονται ἐπιτιθέμενα ἀλλήλοις. Τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ, θέλει περιέχει πέντε τὸ δὲ ΓΔΘΗ τρία, ἄρα



Σχ. 147.

$$\frac{\Gamma\Delta H\Theta}{ABEZ}=\frac{3}{6} \text{ καὶ ἑπομένως } \frac{\Gamma\Delta H\Theta}{ABEZ}=\frac{\Gamma\Delta}{AB}.$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἡ πρότασις ὑπάρχουσα διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν εἶναι ἐλάχιστον τὸ κοινὸν μέτρον τῶν δύο βάσεων, ἀναντιῤῥήτως ὑπάρχει καὶ ὅταν εἶναι ἀπειροελάχιστον, τοὐτέστιν αἱ βάσεις εἶναι ἔκμετροι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι, «δύο ὀρθογώνια τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξὺ των ὡς τὰ ὕψη των.»

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 79.

Δύο ὀρθογώνια οἱαδήποτε τοιοῦτον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὁποῖον τὰ γινόμενα τῶν βάσεων αὐτῶν, πολλαπλασιασθεισῶν ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα ὕψη.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Ο καὶ ο τὰ δύο ὀρθογώνια, τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι Β καὶ β καὶ Υ, υ τὰ ὕψη, λαμβάνοντες βοηθητικόν τι ὀρθογώνιον Ο' τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β καὶ τὸ ὕψος Υ καὶ συγκρίνοντες μὲν αὐτὸ μετὰ τοῦ ὀρθογωνίου Ο λαμβάνομεν (Πρότ. 78)

$$\frac{O}{O'}=\frac{B}{\beta}, \text{ μετὰ δὲ τοῦ ο, } \frac{O'}{o}=\frac{\Upsilon}{\upsilon},$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας μέλος πρὸς μέλος, καὶ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα Ο' εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτους μέλους, ἔχομεν

$$\frac{O}{o}=\frac{B}{\beta}\times\frac{\Upsilon}{\upsilon} \quad \ldots\ldots [1]$$

ἤ $$O:o=B\times\Upsilon:\beta\times\upsilon,$$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἵνα καταμετρήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἢ τὴν ἔκτασιν ἐπιφανείας τινός, ζητοῦμεν τὸν λόγον αὐτῆς πρὸς τὴν μονάδα τῆς

ἐπιφανείας. Λαμβάνομεν δὲ ὡς τοιαύτην μονάδα τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἡ μονὰς τοῦ μήκους.

Τῷ ὄντι, ἐὰν συγκρίνωμεν τὸ ὀρθογώνιον O, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι B καὶ τὸ ὕψος Υ, πρὸς τὸ τετράγωνον T, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι τ, θέλομεν ἔχει ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω σχέσιν [1],

$$\frac{O}{T}=\frac{B}{\tau}\times\frac{\Upsilon}{\tau} \quad \ldots\ldots \quad [2].$$

Ἀλλὰ $\frac{O}{T}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων ἐπιφανείας τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς τὸ O, $\frac{B}{\tau}$ δὲ καὶ $\frac{\Upsilon}{\tau}$ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ μονάδων μήκους ἐμπεριεχόμενοι εἰς τὸ B καὶ Υ. Ἡ σχέσις [2] ἐκφράζει ἄρα ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων ἐπιφανείας τῶν ἐμπεριεχομένων ἐντὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων μήκους τῶν περιεχομένων εἰς τὴν βάσιν αὐτοῦ, πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων μήκους τῶν περιλαμβανομένων εἰς τὸ ὕψος, ὅπερ ἐκφωνοῦμεν οὕτω· *τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.*

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου λαμβάνεται πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του, τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐκφράζοντος τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. Ἕνεκα τούτου, εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καλεῖται τετράγωνον ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.

Ὁρισμός. Τὰ ἴσην ἐπιφάνειαν ἔχοντα σχήματα λέγονται *ἰσοδύναμα.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 75η. Διὰ τῶν προηγουμένων δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν τὴν ὑποδιαίρεσιν τῶν μονάδων τῆς ἐπιφανείας.

Τὸ γραμμικὸν ἑκατοστόμετρον ἐπειδὴ ἰσοδυναμεῖ μὲ 10 χιλιοστόμετρα, ἓν ἑκατοστόμετρον τετραγωνικὸν ἰσοδυναμεῖ μὲ 10×10 ἢ 100 χιλιοστόμετρα τετραγωνικά.

Τοῦ γραμμικοῦ δεκατομέτρου περιέχοντος 10 ἑκατοστόμετρα, τὸ δεκατόμετρον τὸ τετραγωνικὸν περιέχει 10×10 ἢ 100 ἑκατοστόμετρα τετραγωνικά.

Τοῦ δὲ μέτρου 10 δεκατόμετρα, τὸ τετραγωνικὸν μέτρον 10×10 ἢ 100 δεκατόμετρα τετραγωνικά.

Τοῦ δεκαμέτρου 10 μέτρα, τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον 10×10 ἢ 100 μέτρα τετραγωνικά.

Καὶ τοῦ ἑκατομέτρου 10 δεκάμετρα τὸ τετραγωνικὸν ἑκατόμετρον 10×10 ἢ 100 δεκάμετρα τετραγωνικὰ, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημειωτέον ὅτι, κατὰ τὰς καταμετρήσεις τῶν ἀγρῶν τὸ τετραγωνικὸν ἑκατόμετρον λέγεται Ἑκτάριον, τὸ δεκάμετρον Στρέμμα ἢ Πλέθρον καὶ τὸ τετραγωνικὸν μέτρον Ἑκατοστόπλεθρον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ 1η. Τὸ μετρικὸν τοῦτο σύστημα ἔχει τὴν εὐκολίαν ὅτι' ἁπλῆς μεταθέσεως τῆς ὑποδιαστολῆς νὰ μετατρέπῃ τὰς μονάδας τῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ μήκους τὰς μὲν εἰς τὰς δὲ ἑναλλάξ. Οὕτω 16,651973 μ. τ. τρέπονται εἰς 1665,1973 δεκατ. τ. ἢ εἰς 166,519, 73 ἑκατοστομ. τ. ἢ εἰς 16651973 χιλιοστόμ. τ. Ἐπίσης 273654 μέτρ. τ. τρέπονται εἰς 2736,54 δεκάμετρ. τ. ἢ εἰς 27,3654 ἑκτάρ. τ. ἢ εἰς 27 ἑκτάρια 36 πλέθρα καὶ 54 ἑκατοστόπλεθρα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ 2α. Ἐπειδὴ εἷς πῆχυς τεκτονικὸς τῆς Κωνσταντινουπόλεως ἰσοδυναμεῖ μὲ $0,75=\frac{3}{4}$ τοῦ Γαλλικοῦ μέτρ. ἤτοι 1 πῆχ. $=\frac{3}{4}$ μέτρ. ἐξ οὗ $(1)^2$ πῆχ. $=(\frac{3}{4})^2$ μέτρ. ἤτοι 1 πῆχ. τετρ. $=\frac{9}{16}$ μέτρ. ἄρα ἵνα τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 246 μέτρ. τ. εἰς πήχεις τεραγωνικοὺς, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ $\frac{9}{16}$· ἤτοι

246 μέτρ.τ. $=246$ μέτρ.τ : $\frac{9}{16}=\frac{246\times16}{9}$ π.τ $=437\ \frac{1}{3}$ π.τετρ. ἀντιστρόφως ἵνα τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 24 πῆχ. τετρ. εἰς μέτρα τετραγωνικὰ, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ $\frac{9}{16}$ ἤτοι π. τ. $24=\frac{24\times9}{16}$ μέτρ. τετρ. $=13,5$ μέτρ. τετρ.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9.

Τὸ δάπεδον δωματίου τετραγώνου ἔχει 5,23 μέτρ. πλάτος, ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου περιέχει 523 ἑκατοστόμετρα· τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $523\times523=273529$ ἑκατοστόμετρα τετραγωνικά· ἢ 27 μ. τ. 35 δεκατ. τ. 29 ἑκατοστόμ. τ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10.

Κάλυμμα τραπέζης ἔχον σχῆμα ὀρθογώνιον, ἔχει 4,23 μέτρ. πλάτος 2,61 μέτρ. ὕψος· ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

Τὸ μὲν πλάτος εἶναι 423 ἑκατοστομέτρων, τὸ δὲ ὕψος 261· τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι ἄρα $423 \times 261 = 110403$ ἑκατοστόμετρα τετραγωνικὰ, ἤ 11 μ. τ. 4 δεκ. τ. 3 ἑκατοστόμετρα. τ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11.

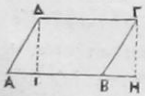
Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἀγροῦ σχήματος ὀρθογωνίου, ἔχοντος 24,7 δεκάμετρ. μῆκος 13,3 δεκάμετρ. πλάτος ;

Ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 247 μέτρων καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ 133. Ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι $247 \times 133 = 32851$ μέτρων τετραγωνικῶν ἤ 3 ἑκταρίων, 28 πλέθρων καὶ 51 ἑκατοστοπλέθρων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 80.

Τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου τινὸς ΑΒΓΔ Σχ. 148 *εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως* ΑΒ *πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἤτοι ἐπὶ τὴν κάθετον* ΔΙ *τὴν καταβιβαζομένην ἀπὸ μίαν τῶν κορυφῶν ἐπὶ τὴν βάσιν.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἐὰν καταβιβάσωμεν τὴν ΓΗ κάθετον ἐπὶ τὴν προεκβολὴν τῆς ΑΒ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΙΔ καὶ ΒΗΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας (Πρότ. 24), καὶ ἀνὰ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, τὴν ΔΑΙ=ΓΒΗ ὡς συστοίχους γωνίας. Ἀλλ' ἐὰν ἐκ τοῦ προταθέντος παραλληλογράμμου ἀφαιρέσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΙΔ καὶ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ ἴσον τρίγωνον ΒΗΓ, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται.



Σχ. 148.

Τὸ μέτρον τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ἄρα τὸ μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου ΙΗΓΔ, τουτέστι τὸ γινόμενον τῆς ΙΗ ἤ ΔΓ ἤ τῆς ΑΒ πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸ ὕψος ΔΙ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12.

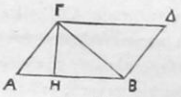
Ὅταν ἀγροῦ σχήματος παραλληλογράμμου, ἡ βάσις εἶναι

3,17 δεκάμ. ἤ 317 δεκατόμετρα, καὶ τὸ ὕψος 1,84 δεκάμ. ἤ 185 δεκατόμετρα, τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $317 \times 185 = 58645$ δεκατόμετρα τετραγωνικὰ ἤ 5 δεκάμετρα, 86 μέτρ. καὶ 45 δεκατόμετρα τετραγώνικά.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 81.

Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου τινὸς ΑΒΓ Σχ. 149 *εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως* ΑΒ *ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἤτοι ἐπὶ τὴν κάθετον* ΓΗ *τὴν καταβιβαζομένην ἐκ τῆς κορυφῆς εἰς τὴν βάσιν.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἐὰν ἄξωμεν τὴν ΓΔ παράλληλον τῇ ΑΒ, καὶ τὴν ΒΔ παράλληλον τῇ ΑΓ, σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον ΑΒ×ΓΗ. Ἀλλὰ τὸ προταθὲν τρίγωνον ὂν ἴσον τῷ τριγώνῳ ΒΓΔ (Πρότ. 24), εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου· ἄρα ἔχει μέτρον $\frac{1}{2}$ ΑΒ×ΓΗ.



Σχ. 149.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἵνα διαιρεθῇ γινόμενόν τι διὰ 2, διαιροῦμεν διὰ 2 ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ· δυνάμεθα ἄρα, ἵνα λάβωμεν τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους, ἤ τὸ ὕψος ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως. Ἡ παρατήρησις αὕτη ἁπλοποιεῖ τὸν ὑπολογισμὸν ἐὰν εἷς τῶν δύο παραγόντων ἦναι ἀριθμὸς ἄρτιος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 13.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ βάσις τριγώνου εἶναι 11,4 μέτρα ἤ 114 δεκατόμετρα, καὶ τὸ ὕψος 8,7 μέτρ. ἤ 87 δεκατόμετρα· τότε πολλαπλασιάζομεν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως, ἤ 57 δεκατόμετρα ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ὅτι εἶναι 4959 δεκατόμετρα τετραγωνικὰ, ἤτοι 49 μέτρ. τ. καὶ 59 δεκατ. τ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 76η. Ἐὰν τὸ τρίγωνον ἦναι κεχαραγμένον ἐπὶ τῆς γῆς, τὸ ὕψος αὐτοῦ λαμβάνομεν, φέροντες ἐκ τῆς κορυφῆς κάθετον ἐπὶ τῆς βάσεως (§ 6 ἐφαρμ. 20. § 9 ἐφαρμ. 37), τὴν ὁποίαν μετροῦμεν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 77η. Ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι κεχαραγμένον ἐπὶ τοῦ

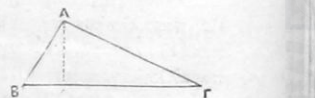
χάρτου διὰ τοῦ τριγώνου, φέρομεν ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν, τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸ μῆκος διὰ τῆς κλίμακος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 78η. Ἐὰν τὸ τρίγωνον εὑρίσκηται ἐπὶ τῆς γῆς, εἴτε ἐπὶ χάρτου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, γνωρίζοντες τὰ μήκη τῶν τριῶν πλευρῶν διὰ τοῦ ἑξῆς τύπου

$$E=\sqrt{(\Pi-\alpha)\,(\Pi-6)\,(\Pi-\gamma)\Pi}$$

ἔνθα **E** παριστάνει τὴν ἐπιφάνειαν, τὰ α, 6, γ, τὰς πλευρὰς καὶ Π τὴν ἡμιπερίμετρον $\dfrac{\alpha+6+\gamma}{2}$ τοῦ τριγώνου.

Τῷ ὄντι ἔστω ΒΑΓ Σχ. 150. ἡ μεγαλητέρα τῶν τριῶν γωνιῶν τριγώνου τινὸς ΑΒΓ. Ἐκ τοῦ σημείου **Α** καταβιβάζομεν ἐπὶ τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς τὴν κάθετον ΑΔ, ἥτις πίπτει ἐντὸς τοῦ τριγώνου, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι **Β** καὶ **Γ** εἶναι ὀξεῖαι.



Σχ. 150.

Ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς συντομίαν $\text{ΒΓ}=\alpha$, $\text{ΑΓ}=6$, $\text{ΑΒ}=\gamma$, $\text{ΑΔ}=\upsilon$, $\text{ΔΒ}=\mu$ καὶ $\text{ΔΓ}=\nu$.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ δίδει $\gamma^2=\upsilon^2+\mu^2$, ἐξ ἧς συνάγομεν $\upsilon^2=\gamma^2-\mu^2$....[1].

Τὸ τρίγωνον ΑΓΔ δίδει $6^2=\upsilon^2+\nu^2$, ἐξ ἧς προκύπτει $\upsilon^2=6^2-\nu^2$.

Ἐξισοῦντες τὰς δύο τιμὰς τοῦ υ^2, ἔχομεν $\gamma^2-\mu^2=6^2-\nu^2$ . . . .[2].

Ἀλλὰ $\mu+\nu=\alpha$ ἐξ ἧς προκύπτει

$$\nu=\alpha-\mu, \text{ καὶ ἑπομένως } \nu^2=\alpha^2+\mu^2-2\alpha\mu.$$

Ἕνεκα τῆς τελευταίας ταύτης τιμῆς ἡ ἰσότης [2] γίνεται

$$\gamma^2-\mu^2=6^2-\alpha^2-\mu^2+2\alpha\mu,$$

ἢ $\gamma^2=6^2-\alpha^2+2\alpha\mu$, ἐξ ἧς $\mu=\dfrac{\gamma^2+\alpha^2-6^2}{2\alpha}$.

Ἡ ἰσότης δὲ [1] τρέπεται εἰς

$$\upsilon^2=\gamma^2-\left(\frac{\gamma^2+\alpha^2-6^2}{2\alpha}\right)^2=\frac{4\alpha^2\gamma^2-6(\gamma^2+\alpha-6^2)^2}{4\alpha^2},$$

ἐξ ἧς συνάγομεν

$$\upsilon=\frac{\sqrt{4\alpha^2\gamma^2-(\gamma^2+\alpha^2-6^2)^2}}{2\alpha}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ **E** τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἔχομεν

$$E=\frac{\alpha\times\upsilon}{2}=\tfrac{1}{4}\sqrt{4\alpha^2\gamma^2-(\gamma^2+\alpha^2-6^2)^2}$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{[2\alpha\gamma-(\gamma^2+\alpha^2-6^2)][2\alpha\gamma+(\gamma^2+\alpha^2-6^2)]}$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{[6^2-(\alpha-\gamma)^2][(\alpha+\gamma)^2-6^2]}$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(6-\alpha+\gamma)(6+\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma+6)(\alpha+\gamma+6)}.$$

Θέτοντες $\alpha+6+\gamma=2\Pi$, ἔχομεν

$$6-\alpha+\gamma=\alpha+6+\gamma-2\alpha=2\Pi-2\alpha=2(\Pi-\alpha)$$
$$6+\alpha-\gamma=\alpha+6+\gamma-2\gamma=2\Pi-2\gamma=2(\Pi-\gamma)$$
$$\alpha+\gamma-6=\alpha+6+\gamma-26=2\Pi-26=2(\Pi-6).$$

Ἡ ἔκφρασις τῆς ἐπιφανείας **E** δύναται ἄρα νὰ γραφῇ οὕτω

$$E=\tfrac{1}{4}\sqrt{16(\Pi-\alpha)(\Pi-6)(\Pi-\gamma)\Pi},$$

ἄρα $E=\sqrt{(\Pi-\alpha)(\Pi-6)(\Pi-\gamma)\Pi}$.

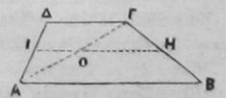
Τοῦτέστιν ἵνα λάβωμεν τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς, πρέπει « νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν, νὰ ἀφαιρέσωμεν ἐξ αὐτοῦ διαδοχικῶς ἑκάστην πλευράν, νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεταξύ των τὰ τρία ὑπόλοιπα, ὡς καὶ τὴν ἡμιπερίμετρον, καὶ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου. »

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 14.

Ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἑκάστη τῶν τριῶν πλευρῶν εἶναι 41, 16 καὶ 37 μέτρων, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 94 μέτρ. καὶ τὸ ἥμισυ 47 μέτρ. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἐκ τούτου διαδοχικῶς τὰς τρεῖς πλευράς, λαμβάνομεν τὰ ὑπόλοιπα 6 μέτρ., 31 μέτρ., 10 μέτρα. Ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου εἶναι

$$E=\sqrt{6\times31\times10\times47}=295{,}66 \text{ μ. τ.}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. Τραπέζιον καλεῖται τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ Σχ. 151 τὸ ἔχον δύο πλευρὰς **ΑΒ** καὶ **ΓΔ** παραλλήλους, αἵτινες εἶναι αἱ **Βάσεις** τοῦ τραπεζίου καὶ τὸ ὕψος ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων, ἢ ἡ κάθετος ἡ καταβιβαζομένη ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης βάσεως.



Σχ. 151.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 82.

Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου τινὸς ΑΒΓΔ *εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων αὐτοῦ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ὕψος.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἄξωμεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, ἔχομεν, καλοῦντες υ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου,

$$\text{ΑΒΓ}=\tfrac{1}{2}\text{ΑΒ}\times\upsilon \text{ καὶ } \text{ΑΓΔ}=\tfrac{1}{2}\Gamma\Delta\times\upsilon$$

τὰς ὁποίας προσθέτοντες, ἔχομεν

$$\text{ΑΒΓ}+\text{ΑΓΔ}=\text{ΑΒΓΔ}=\tfrac{1}{2}\text{ΑΒ}\times\upsilon+\tfrac{1}{2}\Gamma\Delta\times\upsilon=\tfrac{1}{2}(\text{ΑΒ}+\Gamma\Delta)\upsilon.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν, ἐκ τοῦ μέσου Ο τῆς διαγωνίου ΑΓ, φέρωμεν τὴν ΗΙ παράλληλον τῆς βάσεως, τὸ σημεῖον Ι εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΔ, καὶ τὸ σημεῖον Η τὸ μέσον τῆς ΓΒ (Πρότ. 45). Πρὸς τούτοις τὰ τρίγωνα ΙΑΟ καὶ ΔΑΓ εἶναι ὅμοια καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\text{ΙΟ}:\Delta\Gamma=\text{ΑΟ}:\text{ΑΓ}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΟ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΓ, καὶ ἡ ΙΟ τὸ ἥμισυ τῆς ΔΓ, ἄρα καὶ ἡ ΟΗ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ.

Ἄρα $\frac{1}{2}(\text{ΑΒ}+\Gamma\Delta)=\text{ΟΗ}+\text{ΙΟ}=\text{ΙΗ}$. Τοὐτέστι τὸ *ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὴν εὐθεῖαν ἥτις ἐνόνει τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.*

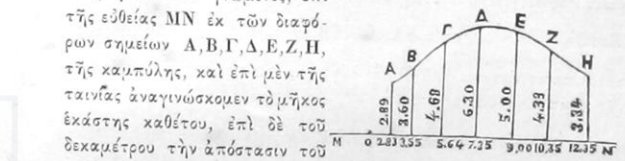
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 15.

Τραπεζίου ἐπὶ τῆς γῆς κεχαραγμένου, ἡ μεταξὺ τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἀπόστασις μετρηθεῖσα εὑρέθη 97 μέτρων, ἑκατέρα δὲ τῶν βάσεων 231 καὶ 145, ὁποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεων εἶναι 376 μέτρων, τὸ δὲ ἥμισυ, 188 πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸ ὕψος 97, εὑρίσκομεν γινόμενον 18236 τετραγωνικὰ μέτρα, ἢ 1 ἑκτάριον 82 πλέθρα καὶ 36 ἑκατοστόπλεθρα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 79η. «Νὰ μεταφέρωμεν ἐπὶ χάρτου ἀκανόνιστον γραμμὴν εὑρισκομένην ἐπὶ τῆς γῆς».

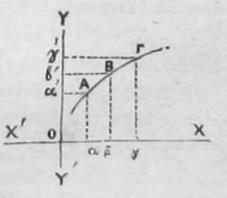
Ἔστω π. χ. ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΒΓΔΕΖΗ Σχ. 152 ἥτις περιορίζει κῆπον, ποταμὸν, κ.τ.λ. χαράττομεν ἐπὶ τῆς γῆς εὐθεῖάν τινα ΜΝ, ἥτις δυνατὸν νὰ ᾖναι καὶ μία τῶν πλευρῶν τοπογραφικοῦ τινος πολυγώνου, πλησίον τῆς καμπύλης ταύτης, ἐφ' ὅσον εἶναι δυνατὸν, καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης ΜΝ σημειοῦμεν σημεῖόν τι Ο, καλούμενον Ἀρχή. Ἐκ ταύτης ἀρχίζοντες τανύομεν τὸ χαλύβδινον δεκάμετρον κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΜΝ, καὶ φέρομεν καθέτους διὰ τῆς ταινίας, ἢ διὰ τοῦ γνώμονος, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΝ ἐκ τῶν διαφόρων σημείων Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η, τῆς καμπύλης, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς ταινίας ἀναγινώσκομεν τὸ μῆκος ἑκάστης καθέτου, ἐπὶ δὲ τοῦ δεκαμέτρου τὴν ἀπόστασιν τοῦ ποδὸς αὐτῆς πρὸς τὴν ἀρχὴν Ο. Ἐὰν ὅμως ἡ τελευταία αὕτη ἀπόστασις ὑπερβαίνῃ τὰ δέκα μέτρα, τότε μεταφέρομεν τὸ δεκάμετρον ἐφ' ὅσον ἀνάγκη ὑπάρχει ἐμπήγοντες βελώνην (ἐφαρμ. 7) καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὰς ἀποστάσεις τοῦ ποδὸς ἑκάστης καθέτου ἐκ τοῦ σημείου Ο. Ἀποπερατοῦντες δὲ τὰς ἀναγκαίας καταμετρήσεις καταγράφομεν αὐτὰς, χαράσσοντες ἐπὶ τοῦ σημειωματαρίου πρόχειρον ἰχνογράφημα τῆς καμπύλης, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 152.



Σχ. 152.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 80η. Ἡ αὐτὴ πρᾶξις γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς. Σχ. 153.

Φέρομεν δύο καθέτους γραμμὰς ὡς τὰς ΥΥ′ καὶ ΧΧ′, αἵ ὁποῖαι νὰ περιλαμβάνωσιν ἐντὸς τῆς γωνίας ΥΟΧ τὴν καμπύλην ΑΓ. Ἐξ ἑκάστου σημείου Α,Β,Γ, τῆς καμπύλης φέρομεν τὰς καθέτους Αα, Ββ, Γγ, ἐπὶ τῆς ΟΧ, καὶ καταμετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις οα, οβ, ογ. Ἀπὸ τὰ αὐτὰ σημεῖα τῆς καμπύλης φέρομεν τὰς καθέτους Αα′, Ββ′, Γγ′, ἐπὶ τῆς Υ′Υ καὶ καταμετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις οα′, οβ′, ογ′ καὶ μετὰ ταῦτα κατασκευάζομεν ἐκ τοῦ προχείρου τὸ σχῆμα ἐπὶ τοῦ σημειωματαρίου.



Σχ. 153.

Διὰ νὰ μεταφέρωμεν δὲ ἐπὶ χάρτου τὴν καμπύλην ΑΓ, γράφομεν δύο καθέτους παριστανούσας τὰς ΧΧ′ καὶ ΥΥ′ καὶ ἐκ τοῦ σημείου ο τῆς συναπαντήσεώς των φέρομεν ἀποστάσεις ἴσας μὲ τὰς οα, οβ, ογ, ἐπὶ δὲ τῆς ΥΥ′, ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ο ἀρχίζοντες, φέρομεν ἀποστάσεις ἴσας μὲ τὰς οα′, οβ′, ογ′, ἀπὸ δὲ τὰ διάφορα ση-

μεῖα τὰ οὕτω προσδιορισθέντα ἐπὶ τῶν γραμμῶν τούτων, ὑψοῦμεν καθέτους, τῶν ὁποίων ἡ συναπάντησις προσδιορίζει τὰ σημεῖα Α,Β,Γ, καὶ ἑπομένως τὴν καμπύλην ΑΓ. Ἡ γραμμὴ ΧΧ′ λέγεται ἄξων τῶν τεταγμένων, ἡ δὲ ΥΥ′ τῶν τεταγμένων· καὶ αἱ δύο ὁμοῦ λέγονται ἄξονες τῶν συντεταγμένων.

Ἐπειδὴ $$\alpha\alpha'=\alpha A, \beta\beta'=\beta B, \gamma\gamma'=\gamma\Gamma,$$

αὗται παριστάνονται διὰ Υ καὶ λέγονται τεταγμέναι τῶν σημείων τῆς καμπύλης· ἐπίσης ἐπειδὴ

$$o\alpha=o'A, o\beta=o'B, o'\gamma=\gamma'\Gamma,$$

αὗται ἐκφράζονται διὰ Χ καὶ λέγονται τετμημέναι τῶν αὐτῶν σημείων Α,Β,Γ, κτλ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι γνωρίζοντες τὰς συντεταγμένας Χ καὶ Υ σημείου τινός, ὡς πρὸς δύο ἄξονας ΧΧ′ καὶ ΥΥ′ προσδιορίζομεν τὴν θέσιν αὐτοῦ σχετικῶς πρὸς τοὺς ἄξονας τούτους. Διὰ πᾶν σημεῖον ἐπὶ μὲν τοῦ ΧΧ′ εὑρισκόμενον, ἔχομεν Υ=0, ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος ΥΥ′, τὴν Χ=0.

Τὸ σημεῖον ο λέγεται Ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.

Θεωροῦνται, αἱ ἀξίαι τῆς Χ, αἱ ὑπολογιζόμεναι κατὰ τὴν διεύθυνσιν οΧ, ἤτοι ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρωτίστου σημείου ο, θετικαί, αἱ δὲ κατὰ τὴν οΧ′, ἤτοι ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ, ἀρνητικαί.

Αἱ τιμαὶ τῆς Υ αἱ κατὰ τὴν διεύθυνσιν οΥ ὑπολογιζόμεναι, εἶναι θετικαὶ, αἱ δὲ κατὰ τὴν οΥ′, ἀρνητικαί.

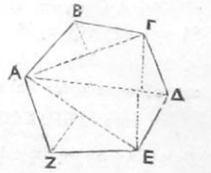
Ἡ δὲ ὡς πρὸς δύο ἄξονας προσδιόρισις σημείου ἢ γραμμῆς τινος εἶναι ἡ βάσις τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας ἡ ὁποία εἶναι ἐφαρμογὴ τοῦ ὑπολογισμοῦ εἰς τὴν Γεωμετρίαν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 83.

Ἡ ἐπιφάνεια ἢ τὸ ἐμβαδὸν οἱουδήποτε πολυγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς ἐπιφανείας τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα ἀποσυντίθεται τὸ πολύγωνον.

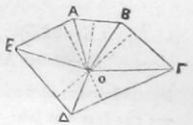
Ἡ δὲ εἰς τρίγωνα ἀποσύνθεσις πολυγώνου τινὸς γίνεται πολυτρόπως.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 81η. α'). Φέρομεν, ὡς δεικνύει τὸ Σχῆμα 154, ἀπὸ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κορυφὴν Α τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ καὶ ΑΕ, ἐπὶ ἑκάστης τῶν ὁποίων καταβιβάζομεν κάθετον ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς Β,Γ,Δ,Ε,Ζ· ταύτας δὲ καταμετροῦμεν ὡς καὶ τὰς διαγωνίους ΑΓ,ΑΔ,ΑΕ, καὶ ἔχομεν τὰ ἀναγκαῖα μέσα πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ.



Σχ. 154.

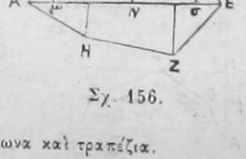
β'.) Ἀποσυνθέτομεν, ὡς δεικνύει τὸ Σχῆμα 155, τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα, διὰ γραμμῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἐσωτερικοῦ σημείου Ο πρὸς τὰς κορυφάς. Ἐν τῇ ἐφαρμογῇ δὲν χαράττομεν τὰς γραμμὰς ταύτας, ἐπειδὴ καταβιβάζοντες ἐκ τοῦ σημείου Ο κάθετον εἰς ἑκάστην πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, καταμετροῦμεν αὐτὴν, ὡς καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, κτλ. καὶ οὕτως ἔχομεν ὅλα τὰ μέσα πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.



Σχ. 155.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 82α. Εἰς τὴν ἀγρομετρίαν μεταχειρίζονται μέθοδον συντέμνουσαν τὰς ἐπὶ τῆς γῆς ἐργασίας, τὴν ἑξῆς·

Ἐὰν πρόκηται τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ, Σχ. 156, νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν, ἐμπήγομεν ἀκόντιον εἰς ἑκάστην κορυφὴν αὐτοῦ, καὶ ἐκ τῶν μᾶλλον ἀπομεμακρυσμένων κορυφῶν Α καὶ Ε, ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΕ, ἥτις λέγεται Ὁδηγήτρια. Ἐξ ἑκάστης δὲ κορυφῆς Β, Γ, Δ, Ζ, Η, καταβιβάζομεν ἐπ' αὐτῆς τὰς καθέτους Βμ, Γν, Δπ, Ζρ, Ηκ καὶ οὕτω τὸ πολύγωνον ἀποσυνθέτομεν εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ τραπέζια.



Σχ. 156.

Διὰ τὴν ἀποσύνθεσιν δὲ ταύτην λαμβάνομεν τὰ σημεῖα μ,κ,ν,ρ,π, μεταφέροντες τὸν χωρομετρικὸν γνώμονα κατὰ τὸ μῆκος τῆς ὁδηγητρίας. Τούτων γινομένων ἡ ἐκτίμησις τοῦ ἐμβαδοῦ ἑκάστου μέρους ἐκ τῶν ὁποίων συνίσταται τὸ πολύγωνον γίνεται εὐκόλως. Τῶντε

μετροῦντες διὰ τοῦ δεκαμέτρου τὰς καθέτους Βμ, Γν, Δπ, Ζρ, Ηκ καὶ τὰ μέρη Αμ, μν, νπ, πΕ, Ακ, κρ, ρΕ τῆς ὁδηγητρίας ἔχομεν (Πρότ. 81 καὶ 82) τὴν σχέσιν

$$\text{ΑΒμ}=\tfrac{1}{2}\text{Αμ}\times\text{Βμ},\text{Βμν}\Gamma=\tfrac{1}{2}\mu\nu\times(\text{Βμ}+\Gamma\nu),$$

καὶ οὕτω καθεξῆς· ἐπὶ τέλους δὲ τὸν ἑξῆς τύπον

$$\text{ἐπιφ. ΑΒΓΔΕΖΗ}=\tfrac{1}{2}[\text{Αμ}\times\text{Βμ}+\mu\nu\times(\text{Βμ}+\Gamma\nu)+\nu\pi$$
$$\times(\Gamma\nu+\Delta\pi)+\text{Ε}\pi\times\Delta\pi+\kappa\rho\times(\text{Ζ}\rho+\text{Η}\kappa)+\text{Α}\kappa\times\text{Η}\kappa+\text{Ε}\rho\times\text{Ζ}\rho]$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ. Ὑποθέσωμεν ὅτι εὕρομεν ἐκτελοῦντες τὴν ἀνωτέρω προμνημονευθεῖσαν καταμέτρησιν τὰς ἀκολούθους τιμὰς

$$\text{Αμ}=20,5\mu\cdot\ \mu\nu=60,3\mu\cdot\ \nu\pi=57,1\mu\cdot\ \pi\text{Ε}=31,8\mu\cdot$$
$$\kappa\text{Ε}=52,7\mu\cdot\ \rho\kappa=73,6\mu\cdot\ \text{Αρ}=40,4\mu\cdot\ \text{Βμ}=27,2\mu\cdot$$
$$\Gamma\nu=52\mu\cdot\ \Delta\pi=43,5\mu\cdot\ \text{Ζ}\kappa=62,1\mu\cdot\ \text{Η}\rho=48,9\mu\cdot$$

ἀντεισάγοντες δὲ ταύτας εἰς τὸν προηγούμενον τύπον καὶ ἐκτελοῦντες τὰς δεικνυομένας πράξεις εὑρίσκομεν

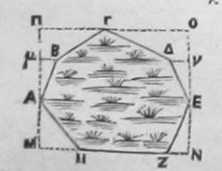
$$\text{ἐπιφ. ΑΒΓΔΕΖΗ}=\tfrac{1}{2}[557,80\mu.\tau+4775,76\mu.\tau+5353,05\mu.\tau+$$
$$+1383,33\mu.\tau+3458,97\mu.\tau+8169,60\mu.\tau+1975,56\mu.\tau.],$$

$$\text{ἢ ἐπιφάν. ΑΒΓΔΕΖΗ}=\frac{25773,84\mu.\tau.}{2}=12886,92\mu.\tau.$$

ἤτοι 1 ἑκτάριον, 28 πλέθρα καὶ 87 ἑκατοστόπλεθρα. Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην τιμὴν ηὐξήσαμεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῶν ἑκατοστοπλέθρων, ἐπειδὴ βπεται ὁ 9.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 83η. Ἐὰν τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου ᾖναι ἀπρόσιτον καὶ πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ, τότε ἀνατρέχομεν εἰς τὴν ἀκόλουθον μέθοδον.

Ἔστω ΑΒΓΔΕΖΗ Σχ. 157, τὸ προταθὲν πολύγωνον. Ἀφοῦ ἐμπήξωμεν ἀκόντια εἰς ὅλας τὰς κορυφάς, προεκτείνομεν μίαν πλευράν, π. χ. τὴν ΗΖ. Ἐκ τῶν ἄκρων κορυφῶν Α καὶ Ε καταβιβάζομεν ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΗΖ τὰς καθέτους ΑΜ καὶ ΕΝ, τὰς ὁποίας προεκτείνομεν ἐκεῖθεν τῶν σημείων Α καὶ Ε. Ἐκ τῆς κορυφῆς Γ, τῆς μᾶλλον ἀπομεμακρυσμένης τῆς ΖΗ, καταβιβάζομεν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΜ



Σχ. 157.

καὶ ΕΝ προεκβαλλομένων, τὴν κοινὴν κάθετον ΠΟ, καὶ σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΜΝΟΠ, ἐντὸς τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται τὸ προταθὲν πολύγωνον εἷς τινα μέρη ἐγγεγραμμένον.

Τούτων γενομένων λαμβάνομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθογωνίου, ἐκ τῆς ὁποίας ἀφαιροῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν περιλαμβανομένων μερῶν μεταξὺ τοῦ πολυγώνου καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου καὶ οὕτω ἔχομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυγώνου. Πρὸς τοῦτο ἐξ ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου τῶν μὴ εὑρισκομένων ἐπ' οὐδεμιᾶς πλευρᾶς τοῦ ὀρθογωνίου, καταβιβάζομεν τὰς καθέτους Βμ, Δν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ταύτης καὶ καταμετροῦμεν διὰ τοῦ δεκαμέτρου τὰς καθέτους, ὡς καὶ τὰ μήκη ΑΜ, Αμ, Πμ, ΠΓ, ΓΟ, Ον, νΕ, ΕΝ, ΖΝ, ΖΗ, ΜΗ, μΒ, καὶ Δν, δι' ὧν εὑρίσκοντες τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθογωνίου ΜΝΟΠ, τὴν τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΜΗ, ΑμΒ, ΔΕν, ΕΝΖ, καὶ τὴν τῶν ὀρθογωνίων τραπεζίων ΠΓΒμ, ΓΟνΔ, ἔχομεν τὸν τύπον

$$\text{ἐπιφ. ΑΒΓΔΕΖΗ}=\text{ΜΝ}\times\text{ΜΠ}-\tfrac{1}{2}[\text{ΑΜ}\times\text{ΜΗ}+\text{Αμ}\times$$
$$\mu\text{Β}+\Pi\mu\times(\mu\text{Β}+\Pi\Gamma)+\text{Ο}\nu\times(\text{Ο}\Gamma+\Delta\nu)+\Delta\nu\times\nu\text{Ε}+$$
$$\text{ΕΝ}\times\text{ΝΖ}].$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκτελοῦντες τὰς καταμετρήσεις εὕρομεν τὰς

$$\mu\text{Β}=20\mu\cdot\ \Delta\nu=22,3\mu\cdot\ \text{ΜΑ}=50,7\mu\cdot\ \text{Αμ}=41\mu\cdot\ \mu\Pi=37,8\mu\cdot$$
$$\Pi\Gamma=76,9\mu\cdot\ \Gamma\text{Ο}=75\mu\cdot\ \text{ον}=39,2\mu\cdot\ \nu\text{Ε}=48,6\mu\cdot\ \text{ΕΝ}=41,7\mu\cdot$$
$$\text{ΖΝ}=43,4\mu\cdot\ \text{ΜΗ}=30\mu.$$

ἐξ ὧν προκύπτουσιν αἱ

$$\text{ΜΝ}=\Pi\text{Ο}=76,9\mu\cdot+75\mu\cdot=151,9\mu\cdot$$
$$\text{ΜΠ}=50,7\mu\cdot+41\mu.+37,8\mu\cdot=129,5\mu.$$

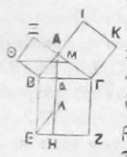
ἀντεισάγοντες δὲ τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν προηγούμενον τύπον καὶ ἐκτελοῦντες τοὺς δεικνυομένους ὑπολογισμοὺς εὑρίσκομεν

$$\text{ἐπιφ. ΑΒΓΔΕΖΗ}=19671,05\mu.\tau-\tfrac{1}{2}[1521\mu.\tau+820\mu.\tau+$$
$$+3662,82\mu.\tau+3814,16\mu.\tau+1083,78\mu.\tau+1809,78\mu.\tau]$$
$$=19671,05\mu.\tau-\frac{12711,54\mu.\tau}{2},$$
$$=19671,05\mu.\tau-6355,77\mu.\tau.=13315,28\mu.\tau=\text{1ἑκτάριον, 33 πλέθρα καὶ 15 ἑκαστοστόπλεθρα.}$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 61ª.

Διὰ τὸ ἐπίσημον τῆς προτάσεως τῆς ἐν τῷ (§. 9. Πρότ. 61) παραθέτομεν ἐνταῦθα καὶ τὴν ἄμεσον ἀπόδειξιν αὐτῆς.

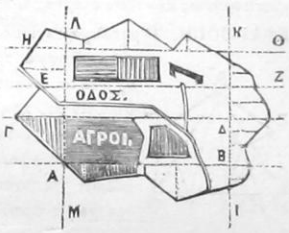
Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ΑΒΘΞ, ΑΓΚΙ καὶ ΒΓΖΕ τὰ κατασκευαζόμενα τετράγωνα ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ Σχ. 158. Καταβιβάζοντες τὴν ΑΔΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῆς ΕΖ καὶ ἄγοντες τὴν ΘΜ παράλληλον τῇ ΒΓ καὶ τὴν ΕΑ παράλληλον τῇ ΒΑ· σχηματίζομεν τὰ παραλληλόγραμμα ΒΓΜΘ καὶ ΒΕΛΑ τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζονται, ἐπειδὴ ΒΑ=ΒΘ, ὡς πλευρὰ τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου, ὁμοίως ΒΓ=ΒΕ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Πρὸς δέ, ἡ γωνία ΘΒΓ εἶναι 90^0 πλέον τῆς γωνίας ΑΒΓ, καὶ ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι 90^0 πλέον τῆς αὐτῆς γωνίας ΑΒΓ. Τὰ δύο παραλληλόγραμμα ἔχουσιν ἄρα ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων, ὥστε ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὴν ἴσην γωνίαν καὶ τὰς ἴσας πλευρὰς αἱ ἄλλαι πλευραὶ θὰ συμπέσωσιν ὡς παράλληλοι τῶν πρώτων. Ἀλλὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓΜΘ ἰσοδυναμεῖ (Πρότ. 79. Σημ.) μὲ τὸ τετράγωνον ΑΒΘΞ διότι ἔχουσιν ἔνθεν μὲν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΘ, ἔνθεν δὲ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, καὶ ἡ ΑΞ εἶναι ἡ προεκβολὴ τῆς ΑΓ. Τὸ δὲ παραλληλόγραμμον ΒΕΛΑ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΒΕΗΔ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΕ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἄρα τὸ τετράγωνον ΑΒΘΞ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΒΕΗΔ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΓΚΙ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΓΔΗΖ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀρθογωνίων ΒΕΗΔ καὶ ΓΔΗΖ σχηματίζει τὸ τετράγωνον ΒΓΖΕ· ἄρα τὸ τετράγωνον τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ ΑΓ.



Σχ. 158.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 84η. Σχεδίασις Ἀγροκηπίου. Ἐὰν πρόκηται νὰ σχεδιασθῇ ἐπιφάνειά τις μεγάλης ἐκτάσεως ὡς π. χ. ἀγροκηπίου, ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τῆς ἀποσυνθέσεως τῆς ἐπιφανείας εἰς τραπέζια καὶ ὀρθογώνια τρίγωνα, ἐπειδὴ δὲ προκύπτουσι λάθη τινὰ, τότε πρὸς

ἀποφυγὴν αὐτῶν τῶν ὑπὸ τοῦ γνώμονος προκυπτόντων, ἐκλέγομεν πολλὰς βάσεις παραλλήλους ἢ καθέτους μεταξύ των, σχηματιζούσας σχήματα τετράγωνα ἢ ὀρθογώνια, καὶ τοιαύτας, ὥστε αἱ ἐπ' αὐτῶν ἀγόμεναι κάθετοι, ἐξ ἑκάστου σημαντικοῦ σημείου νὰ ὦσιν ἐλάχιστοι. Οὕτως εἰς τὸ Σχ. 159, φέρομεν διὰ τοῦ γνώμονος, τὰς παραλλήλους βάσεις ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ καὶ τὰς καθέτους ΙΚ, ΑΜ, ἐπὶ τῶν ὁποίων καταβιβάζομεν κάθετον ἐξ ἑκάστης γωνίας ἢ σημαντικοῦ σημείου, τὴν ὁποίαν καταμετροῦμεν. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ τριγώνου εὐκόλως σχεδιάζεται τὸ ἀγροκήπιον ἐπὶ χάρτου.

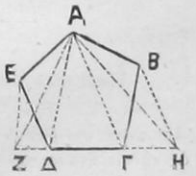


Σχ. 159.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 25.

« Νὰ μετασχηματισθῇ οἱονδήποτε πολύγωνον εἰς ἰσοδύναμον, τοῦτέστιν εἰς ἴσον τρίγωνον ».

Ἔστω τὸ μετασχηματισθησόμενον πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ Σχ. 159 δίς. Ἐν πρώτοις ἀπαλείφομεν τὴν γωνίαν αὐτοῦ Ε ἑνοῦντες διὰ τῆς ΑΔ τὰ ἄκρα Α καὶ Δ τῶν πλευρῶν αὐτῆς καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς Ε ἄγοντες τὴν ΕΖ παράλληλον τῇ ΑΔ ἥτις, προεκτείνεται ἕως οὗ ἀπαντήσῃ εἰς τὸ σημεῖον Ζ τὴν προεκβολὴν τῆς προσκειμένης εἰς αὐτὴν πλευρᾶς ΔΓ καὶ τὴν ΑΖ. Τῷ ὄντι ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΕΖ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΖΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα κοινὴν βάσιν τὴν ΑΔ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὅπερ εἶναι ἡ τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΕΖ ἀπόστασις· ὅθεν ἀντὶ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ ἰσοδύναμον αὐτοῦ σχῆμα ΑΒΓΖ τὸ ἔχον μίαν γωνίαν ὀλιγωτέραν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀπαλείφομεν τὴν γωνίαν Β τοῦ τελευταίου σχήματος διὰ τῶν πα-



Σχ. 159 δίς.

ραλλήλων ΑΓΒ καὶ ΒΠ καὶ τῆς ΑΗ καὶ οὕτω ἔχομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΗΖ τὸ ἰσοδύναμον τῷ διδομένῳ πολυγώνῳ ΑΒΓΔΕ.

Ἂν τὸ πολύγωνον ἔχῃ εἰσεχούσας γωνίας ἐκτελοῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, δεικνύει δὲ καὶ τὸ Σχῆμα 159 τρίς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Ὁ μετασχηματισμὸς τῶν ἀκανονίστων πολυγώνων εἰς ἰσοδύναμα τρίγωνα ἢ ἄλλα τινὰ κανονικὰ σχήματα ἀπαντᾶται ἀ). Κατὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ κτηματολογικοῦ χάρτου πόλεως ἢ κτήματος, ἔνθα τὴν ἐπιφάνειαν ἑκάστου πολυγωνικοῦ οἰκοπέδου ἢ ἀγροῦ εὑρίσκομεν εὐκόλως, τρέποντες αὐτὸ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον χωρὶς ποσῶς νὰ χαράξωμεν τὰς πρὸς τὴν ἐργασίαν ταύτην καταλλήλους εὐθείας, ἀλλὰ διὰ μόνης τῆς κινήσεως δύο τριγωνικῶν κανόνων, ἕως οὗ εὑρόντες τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ ζητουμένου τριγώνου προσδιορίζομεν διὰ τοῦ ἡμίσεος τοῦ γινομένου τῶν τελευταίων τούτων εὐθειῶν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυγωνικοῦ οἰκοπέδου ἢ τοῦ ἀγροῦ. β'). Κατὰ τὴν μεταῤῥύθμισιν τῶν ὁδῶν πόλεως, τὰ ἀκανόνιστα πολυγωνικὰ οἰκόπεδα μετασχηματίζονται εἰς ἄλλα κατάλληλα πρὸς κατασκευὴν οἰκοδομῆς. γ'). Κατὰ τὴν διανομὴν τῶν ἐπιφανειῶν (ἐφαρμ. 96)· καὶ δ'). Κατὰ τὴν λύσιν διαφόρων ἄλλων ζητημάτων.



Σχ. 159 τρίς.

---

§—13.

Αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των. Ἐπιφάνεια κανονικοῦ πολυγώνου. Ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου, τοῦ τομέως καὶ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος. Λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο κύκλων. Ἐφαρμογαί. Ἀναγωγὴ τῶν ἐπιφανειῶν. Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί. Περὶ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. Τύπος δι' οὗ καταμετροῦμεν τὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας περιοριζομένης ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς. Δοκιμαὶ τῶν σχεδιάσεων. Ἐπίλυσις ἐξισώσεως οἱουδήποτε βαθμοῦ μίαν ἄγνωστον περιεχούσης. Παράστασις τῶν γραμμῶν δι' ἐξισώσεων. Χάραξις καμπύλης σιδηροδρόμου. Πρόβλημα τῶν δύο μέσων ἀνα-

λόγων. Διανομὴ τῶν γαιῶν τῆς αὐτῆς ἢ διαφόρου φύσεως. Διάφορα προβλήματα. Ἐπανόρθωσις τῶν ὁρίων. Αἱ τρεῖς καμπύλαι. Ἔλλειψις, Ὑπερβολὴ καὶ Παραβολή. Χρῆσις αὐτῶν.

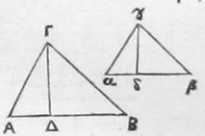
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 84.

Αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ *καὶ* αβγ Σχ. 160 *εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων πλευρῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν καταβιβάσωμεν τὰς καθέτους ΓΔ καὶ γδ, τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ αγδ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουσιν ἀνὰ μίαν γωνίαν ὀξεῖαν ἴσην Α=α· ἔχομεν ἄρα (Πρότ. 49),

$$\Gamma\Delta : \gamma\delta = A\Gamma : \alpha\gamma$$

ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ δεδομένα τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἔχομεν ἐπίσης



Σχ. 160.

$$AB : \alpha\beta = A\Gamma : \alpha\gamma :$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἀναλογίας ταύτας μέλος πρὸς μέλος καὶ διαιροῦντες διὰ 2 τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου λόγου ἔχομεν

$$\frac{\frac{1}{2}\,AB.\Gamma\Delta}{\frac{1}{2}\,\alpha\beta.\,\gamma\delta} = \frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{\alpha\gamma}^2},$$

Ἀλλὰ, ἡ $\frac{1}{2}$ ΑΒ.ΓΔ ἐκφράζει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἡ $\frac{1}{2}\,\alpha\beta \times \gamma\delta$ τὸ τοῦ τριγώνου αβγ (Πρότ. 81). Δυνάμεθα ἄρα νὰ γράψωμεν

$$AB\Gamma : \alpha\beta\gamma = \overline{A\Gamma}^2 : \overline{\alpha\gamma}^2,$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 85.

Δύο πολύγωνα ὅμοια ΑΒΓΔΕ, αβγδε Σχ. 90 *εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ταῦτα ἀποσυντίθενται

εἰς ὅμοια τρίγωνα ἔχομεν κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, τὰς ἀναλογίας

$$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{αβγ}}=\frac{\overline{\text{ΑΒ}}^2}{\overline{\text{αβ}}^2}=\frac{\overline{\text{ΑΓ}}^2}{\overline{\text{αγ}}^2},\quad \frac{\text{ΑΓΔ}}{\text{αγδ}}=\frac{\overline{\text{ΑΓ}}^2}{\overline{\text{αγ}}^2}=\frac{\overline{\text{ΑΔ}}^2}{\overline{\text{αδ}}^2},\quad \frac{\text{ΑΔΕ}}{\text{αδε}}=\frac{\overline{\text{ΑΔ}}^2}{\overline{\text{αδ}}^2}.$$

πρὸς δὲ ἕνεκα τῶν κοινῶν λόγων ἔχομεν τὴν ἰσοπηλικότητα

$$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{αβγ}}=\frac{\text{ΑΓΔ}}{\text{αγδ}}=\frac{\text{ΑΔΕ}}{\text{αδε}}=\frac{\overline{\text{ΑΒ}}^2}{\overline{\text{αβ}}^2}$$

τῆς ὁποίας τοὺς ὅρους προσθέτοντες συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{\text{ΑΒΓ}+\text{ΑΓΔ}+\text{ΑΔΕ}}{\text{αβγ}+\text{αγδ}+\text{αδε}}=\frac{\overline{\text{ΑΒ}}^2}{\overline{\text{αβ}}^2}\ \text{ἢ}\ \frac{\text{ΑΒΓΔΕ}}{\text{αβγδε}}=\frac{\overline{\text{ΑΒ}}^2}{\overline{\text{αβ}}^2},$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 85η. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐσχεδιάσαμεν ἐπὶ χάρτου τρίγωνον ἐπὶ τῆς γῆς κεχαραγμένον λαμβάνοντες διὰ κλίμακα τὸ χιλιοστόμετρον, θέλομεν ἔχει

$$\text{ΑΓ}=1000\times\text{αγ},$$

καὶ ἑπομένως τὴν ἀναλογίαν

$$\text{ΑΒΓ}:\text{αβγ}=1000000:1,$$

τουτέστι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ἐπὶ χάρτου χαραχθέντος, εἶναι τὸ ἑκατομμυριοστὸν τοῦ κεχαραγμένου ἐπὶ τῆς γῆς τριγώνου.

Ἐὰν λοιπὸν ἐκτιμήσωμεν εἰς χιλιοστόμετρα τετραγωνικὰ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μικροῦ τριγώνου, πολλαπλασιάζοντες αὐτὴν ἐπὶ 1000000, θέλομεν ἔχει τὴν τοῦ μεγάλου τριγώνου.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τούτου θεωροῦνται τὰ τετραγωνικὰ χιλιοστόμετρα ὡς τετραγωνικὰ μέτρα. Ἐπειδὴ τὸ μέτρον περιέχει 1000 χιλιοστόμετρα, ἓν μέτρον τετραγωνικὸν περιέχει 1000×1000 χιλιοστόμετρα τετραγωνικὰ τουτέστιν 1000000.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 86η. Ὅταν καταγράψωμεν τὸ ἐπίπεδον γηπέδου τινός, εἶναι γνωστὸς ὁ ὑπάρχων λόγος μεταξὺ μιᾶς πλευρᾶς αἰασδήποτε τοῦ κεχαραγμένου ἐπὶ τῆς γῆς πολυγώνου καὶ τῆς ὁμολόγου

πλευρᾶς τοῦ ἐπὶ τοῦ χάρτου πολυγώνου. Ἐὰν ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ΑΒ καὶ αβ εἶναι δύο ὁμόλογοι πλευραί, θέλομεν ἔχει τὴν σχέσιν

$$\text{ΑΒ}=\text{αβ}\times\nu,$$

τοῦ ν ὄντος ἀριθμοῦ ἐξαρτωμένου ἀπὸ τὴν ἐκλεχθεῖσαν κλίμακα· καὶ ἑπομένως $\overline{\text{ΑΒ}}^2=\overline{\text{αβ}}^2\times\nu^2$.

Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν πολυγώνων εἶναι ἄρα μεταξύ των ὡς

$$\overline{\text{αβ}}^2\times\nu^2:\overline{\text{αβ}}^2\ \text{ἢ ὡς}\ \nu^2:1.$$

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἵνα λάβωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐπὶ τῆς γῆς κεχαραγμένου πολυγώνου, πρέπει νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν τοῦ ἐπιπέδου, καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὴν ἐπὶ ν^2. Ἐν γένει ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ᾖναι τὸ κατὰ συνθήκην ληφθὲν μῆκος ἵνα παραστήσῃ τὴν μονάδα ἐπὶ τοῦ χάρτου, τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τοῦ μήκους τούτου θέλει παραστήσει τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Ἄρα διὰ τοῦ τετραγώνου τούτου λαμβανομένου ὡς μονάδος ἐπιφανείας, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐπιπέδου, ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν γραμμῶν τοῦ σχήματος ἐξεφράσθη διὰ μονάδος μήκους ἴσης μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τούτου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 87η. Ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ σχεδιασθῇ τὸ ἐπὶ τοῦ χάρτου σχῆμα τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ νὰ ᾖναι τὸ 40000ὸν μέρος τῆς τοῦ γηπέδου καὶ ὅτι ζητεῖται ἡ κλίμαξ. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν

$$\overline{\text{αβ}}^2:\overline{\text{ΑΒ}}^2=1:40000,$$

ἑκάστου ὅρου τῆς ὁποίας ἐξαγόντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἔχομεν

$$\text{αβ}:\text{ΑΒ}=1:\sqrt{40000}$$

ἤτοι τὴν ἀναλογίαν

$$\text{αβ}:\text{ΑΒ}=1:200,$$

ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι ἑκάστη γραμμὴ τοῦ σχεδίου πρέπει νὰ ᾖναι τὸ 200ὸν μέρος τοῦ μέτρου, τουτέστι 5 χιλιοστόμετρα. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν κλίμαξ εἶναι 5 χιλιοστόμετρα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 86.

Ἡ ἐπιφάνεια κανονικοῦ τινὸς πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ *Σχ.* 131 *εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς περιμέτρου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀποτεμνούσης* ΟΚ.

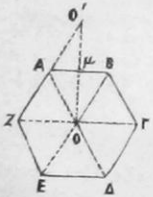
Ἀπόδειξις. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου ἰσοδυναμεῖ μὲ ν φορὰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τριγώνου ΒΟΓ, τοῦ ν ἐκφράζοντος τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν, καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου εἶναι ΒΟΓ$=\frac{1}{2}$ΒΓ$\times$ΟΚ, ἄρα

$$\text{ΑΒΓΔΕΖ}=\tfrac{1}{2}\text{ΒΓ}\times\text{ΟΚ}\times\nu=\tfrac{1}{2}\nu\times\text{ΒΓ}\times\text{ΟΚ}.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ν$\times$ΒΓ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, τοὐτέστιν ἡ πλευρὰ ΒΓ ἐπαναληφθεῖσα τοσάκις ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ἄνω ἰσότης ἐκφράζει τὴν πρότασιν τὴν ὁποίαν ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ 1η. Ἐὰν πρόκηται νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν δεξαμενῆς, τῆς ὁποίας τὸ σχῆμα εἶναι κανονικὸν πλύγωνον, τότε μὴ δυνάμενοι νὰ μετρήσωμεν ἀπευθείας τὴν ἀποτέμνουσαν αὐτοῦ, λαμβάνομεν αὐτὴν ὡς ἐξῆς.

Ἐπὶ τοῦ μέσου μ μιᾶς τῶν πλευρῶν ΑΒ, Σχ. 161, ὑψοῦμεν κάθετον τὴν μο'. Γνωρίζοντες δὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν ΖΑΒ τοῦ πολυγώνου, τῆς ὁποίας τὸ ἥμισυ εἶναι ἡ γωνία ΟΑμ. Σχηματίζομεν τότε εἰς τὸ σημεῖον Α τὴν γωνίαν μΑΟ' ἴσην τῇ ΟΑμ, καὶ τότε τὰ οὕτω προκύπτοντα ὀρθογώνια τρίγωνα μΑΟ' καὶ μΑΟ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα μίαν πλευρὰν κοινὴν, καὶ ἀνὰ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην· ἄρα ομ' εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀποτέμνουσαν ομ.



Σχ. 161.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ 2α. Ὑπάρχουσι κανονικὰ τινὰ πολύγωνα τῶν ὁποίων τὴν ἀποτέμνουσαν δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ὑπολογίσωμεν γνωρίζοντες τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς των.

Ἔστωσαν π. χ. ΑΒ, Σχ. 161, ἡ πλευρὰ ἑξαγώνου κανονικοῦ, Ο τὸ κέντρον, καὶ ομ ἡ ἀποτέμνουσα. Ἐὰν ἄξωμεν τὴν ΑΟ θέλομεν ἔχει εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον Αμο, τὴν σχέσιν

$$\overline{\text{AO}}^2=\overline{\text{Aμ}}^2+\overline{\text{Oμ}}^2.$$

Ἀλλὰ ΑΟ εἶναι ἴση τῇ ΑΒ, ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον εἶναι ἑξάγωνον κανονικὸν, ἄρα ἔπεται ὅτι ΑΟ εἶναι τὸ διπλοῦν τῆς Αμ, καὶ $\overline{\text{AO}}^2$ εἶναι ἴση μὲ

$$2\times\text{Aμ}\times 2.\text{Aμ}, \text{ ἢ } 4\times\overline{\text{Aμ}}^2$$

καὶ ἑπομένως ἴση τῇ ἐκφράσει

$$4.\overline{\text{Aμ}}^2=\overline{\text{Aμ}}^2+\overline{\text{Oμ}}^2,$$

ἐξ ἧς συνάγομεν

$$3\times\overline{\text{Aμ}}^2=\overline{\text{Oμ}}^2, \text{ καὶ } \text{Oμ}=\text{Aμ}\times\sqrt{3}$$
$$=\text{Aμ}\times 1{,}442, \text{ ἢ ομ}=\text{AB}\times 0{,}721,$$

Τοὐτέστιν, « λαμβάνομεν τὴν ἀποτέμνουσαν κανονικοῦ ἑξαγώνου, πολλαπλασιάζοντες τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 3, ἢ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 3 ὅπερ τὸ αὐτό».

Σημειωτέον ὅτι αἱ σχέσεις αὗται ὑποθέτουσι τὸ τρίγωνον ΑΟΒ ἰσόπλευρον. Οὕτως, « εἰς πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἡ καταβιβαζομένη κάθετος ἀπὸ μίαν τῶν κορυφῶν ἐπὶ τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς, ἰσοδυναμεῖ τῇ πλευρᾷ ταύτῃ πολλαπλασιαζομένῃ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 3.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 87.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν λοιπὸν ἐγγράψωμεν εἰς αὐτὸν κανονικὸν πολύγωνον, καλοῦντες ε τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυγώνου, **π** τὴν περίμετρον, καὶ υ τὴν ἀποτέμνουσαν, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προηγούμενα ε$=\frac{1}{2}$**π**υ. (Πρότ. 86).

Ἐπειδὴ ἡ σχέσις αὕτη ὑπάρχει οἱοσδήποτε καὶ ἂν ᾖναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν, ὑπάρχει ἐπίσης καὶ ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ᾖναι ἄπειρος, ὅτε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου ἀποκαθίσταται ἐπιφάνεια Ε τοῦ κύκλου· ἡ περίμετρος **π** γίνεται περιφέρεια Π, καὶ ἡ ἀποτέμνουσα υ ἀκτὶς Α τοῦ κύκλου· ἔχομεν ἄρα Ε$=\frac{1}{2}$**π**.Α, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον. Εἴδομεν ὅτι ἡ ἔκφρασις τῆς περιφερείας Π, εἶναι 2πΑ· ἄρα

$$\text{Ε}=\tfrac{1}{2}2\pi.\text{Α}^2 \text{ ἢ } \text{Ε}=\pi.\text{Α}^2,$$

τοὐτέστι *λαμβάνομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου πολλα-*

πλασιαζοντες τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνός του, ἐπὶ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον. Κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 1, ἡ ἐπιφάνεια εἶναι $\pi \times 1$, ἤ π. Οὕτως ὁ λόγος π τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, ὁ ἐκφράζων τὴν ἡμιπεριφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι 1, εἶναι ἐπίσης ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 16.

Δεξαμενὴ κυκλικὴ ἔχει διάμετρον 21,6 μέτρ. ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς;

Οὖσης τῆς διαμέτρου 21,6 μέτρ. ἡ ἀκτὶς αὐτῆς εἶναι 10,8 μέτρ. καὶ τὸ τετράγωνον 116,64 μέτρ. ὅπερ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν λόγον 3,1416, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια εἶναι 366,43 μέτρ. τ. κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκατομέτρου τετραγωνικοῦ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 17.

Ἡ διάμετρος τοῦ τεσσαρακονταφράγκου εἶναι 26 χιλιοστόμετρα, ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

Ἡ ἀκτὶς εἶναι 13 χιλιοστόμετρα, τὸ δὲ τετράγωνον αὐτῆς 169 χιλιοστόμετρα τετραγωνικὰ, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν λόγον $\frac{22}{7}$, δίδει τὴν ζητουμένην ἐπιφάνειαν ἥτις εἶναι 531 χιλιοστόμετρα τετραγωνικὰ, ὡς ἔγγιστα, τοὐτέστι 5 ἑκατοστόμετρα καὶ 31 χιλιοστόμετρα τετραγωνικά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 18.

Ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι 6 μέτρων; (Πρότ. 87. Πόρισμ. 1.)

Ἐκ τοῦ τύπου $E=\pi A^2$ λαμβάνομεν τὴν ἔκφρασιν τῆς ἀκτῖνος

$$A=\sqrt{\frac{E}{\pi}}$$

εἰς τὴν ὁποίαν θέτοντες $E=6$ μ.τ, $\pi=\frac{22}{7}$ ἔχομεν τὴν ἔκφρασιν

$$A=\sqrt{\frac{6\times 7}{22}}=\sqrt{\frac{42}{22}}=\sqrt{1,9091}$$

ἤ $A=1,38$ τοῦ μέτρου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 19.

Πόσων τετραγωνικῶν λευγῶν εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου περιφέρεια εἶναι ἡ τοῦ ἰσημερινοῦ;

Ἐπειδὴ τῆς περιφερείας τοῦ ἰσημερινοῦ ἑκάστη μοῖρα περιέχει 25 λεύγας, πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς ἐπὶ 360^0 εὑρίσκομεν τὴν μὲν περιφέρειαν αὐτοῦ ἴσην μὲ 9000 λεύγας, τὴν δὲ διάμετρον

$$\frac{9000}{3,1415926}$$

ἤ 2864, 7890, καὶ τὴν ἀκτῖνα 1432,3945 λεύγας.

Ἡ περιφέρεια πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα δίδει ὡς ἔγγιστα 12891550 τετραγωνικὰς λεύγας· ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τούτου, εἶναι ἄρα ἴση μὲ 6445775 τετραγωνικὰς λεύγας.

Ὁρισμός. Καλεῖται *κυκλικὸς τομεὺς*, τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο ἀκτίνων. Οὕτως ΑΟΒ καὶ ΔΓΖ Σχ. 50, εἶναι τομεῖς κυκλικοί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 88.

Δύο τομεῖς τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ κεντρικαὶ γωνίαι. (Πρότ. 42).

Προσδιορίζομεν τὴν ἐπιφάνειαν Τ, τοῦ τομέως, γνωρίζοντες τήν τε ἀκτῖνα αὐτοῦ Α καὶ τὸ τόξον α. Τῷ ὄντι ἔχομεν, συγκρίνοντες τὸν τομέα πρὸς τὸν κύκλον, τὴν ἀναλογίαν

Τ: κύκλ. $A=a$: περιφ. Α ἤ Τ: $\pi A^2=a:2\pi A$, ἐξ ἧς

$$T=\frac{\pi A^2\times a}{2\pi A}=\frac{A\times a}{2}.$$

Τοὐτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τομέως εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ τόξον τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ βάσις τοῦ τομέως.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν διὰ Γ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου τοῦ τομέως, ἔχομεν (§. 11. ἐφαρμ. 72) τὰς ἀναλογίας

$$M:2\pi A=\Gamma:360^0 \text{ καὶ } T:\pi A^2=\Gamma:360^0$$

ἐξ ἧς $$T=\frac{\pi A^2.\Gamma}{360^0}.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 89.

Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων τομέων εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Ε καὶ ε αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων τομέων, ἐχόντων τὴν αὐτὴν κεντρικὴν γωνίαν, καὶ βάσιν ὅμοια τόξα. Σημειοῦντες διὰ Γ,γ τὰ τόξα καὶ διὰ Α,α τὰς ἀκτίνας θέλομεν ἔχει

$$E=\tfrac{1}{2}\Gamma\times A \text{ καὶ } \varepsilon=\tfrac{1}{2}\gamma\times\alpha,$$

καὶ ἑπομένως τὴν ἀναλογίαν

$$E:\varepsilon=\Gamma\times A:\gamma\times\alpha.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τόξα Γ καὶ γ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν.

$$\Gamma:\gamma=A:\alpha \cdot \text{ ἄρα } E:\varepsilon=A^2:\alpha^2.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὁμοίως ἔχομεν καὶ τὴν ἀναλογίαν

$$E:\varepsilon=\Gamma^2:\gamma^2$$

ἤτοι δύο τομεῖς ὅμοιοι εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν τόξων τὰ ὁποῖα χρησιμεύουσιν ὡς βάσεις.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 20.

Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τομέως τοῦ ὁποίου ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι 75^0, καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου 10 μέτρα ;

Κατὰ τὸν τελευταῖον τύπον (Πρότ. 88) ἔχομεν

$$T=\frac{3,1416\times 100\mu.\tau.\times 75}{360}=65,45\mu.\tau.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 21.

Εἰς κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 12 ἑκατοστόμετρα, ποία εἶναι ἡ κεντρικὴ γωνία τομέως, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι 50 ἑκατοστόμετρα τετραγωνικά ;

Ὁ αὐτὸς τύπος (Πρότ. 88) δίδει τὴν ἔκφρασιν

$$50\varepsilon.\tau.=\frac{3,1416\times 144\varepsilon.\tau.\Gamma}{360},$$

ἐξ ἧς συνάγομεν

$$\Gamma=\frac{50\varepsilon.\tau.\times 360}{3,1416\times 144\varepsilon.\tau.}=90^0 47' 18'',4.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 22.

Ἡ ἐπιφάνεια τομέως εἶναι 32 δεκατομέτρων τετραγωνικῶν καὶ ἡ κεντρικὴ γωνία 48^0, ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἰς ὃν ἀνήκει

Ὁ αὐτὸς τύπος (Πρότ. 88) δίδει

$$32\,\delta.\tau.=\frac{3,1416\times A^2\times 48^0}{360}$$

ἐξ οὗ συνάγομεν $$A^2=\frac{32,\delta.\tau.\times 360^0}{3,1416\times 48},=76,3942\delta\,\tau.$$

καὶ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν εὑρίσκομεν

$$A=8,74\delta.\ \text{ἢ}\ O,874\mu.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. Καλεῖται *τμῆμα κύκλου* τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τοῦ τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ. Οὕτω ΑΓμΑ Σχ. 133 εἶναι τμῆμα κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 90.

Νὰ καταμετρηθῇ ἡ ἐπιφάνεια κυκλικοῦ τμήματος.

Διὰ νὰ καταμετρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶναι ἡ ὑπάρχουσα διαφορὰ μεταξὺ τοῦ τομέως ΑΟΓΑ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΟΓ τῶν ὁποίων τὴν ἔκφρασιν τῆς ἐπιφανείας γνωρίζοντες, ἔχομεν

$$\text{ΑΟΓΑ}=\text{ΑμΓ}\times\tfrac{1}{2}\text{ΟΓ} \text{ καὶ } \text{ΑΟΓ}=\tfrac{1}{2}\text{ΟΓ}\times\text{ΑΗ}$$

ἐξ ὧν συνάγομεν

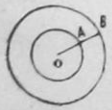
$$\text{ΑΟΓΑ}-\text{ΑΟΓ}=\tfrac{1}{2}\text{ΟΓ}\,(\text{ΑμΓ}-\text{ΑΗ})$$

$$=\tfrac{1}{2}\text{ΟΓ}\times\tfrac{4}{2}\,(2\text{ΑμΓ}-2\text{ΑΗ})=\tfrac{1}{2}\text{ΟΓ}.\tfrac{1}{2}\,(\text{ΑΓΒ}-\text{ΑΒ})$$

τοὐτέστιν *ἡ ἐπιφάνεια κυκλικοῦ τμήματος ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεος τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τοῦ διπλασίου τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 88η. Εὑρίσκομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιλαμβανομένου διαστήματος μεταξὺ δύο χορδῶν παραλλήλων, καὶ τῶν τόξων τὰ ὁποῖα διαχωρίζουσιν αὗται, λαμβάνοντες τὴν διαφορὰν δύο κυκλικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουσιν αἱ παράλληλοι.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 89η. Ἡ κυκλικὴ ζώνη ἡ περιλαμβανομένη μεταξὺ δύο συγκεντρικῶν περιφερειῶν ΟΑ καὶ ΟΒ, Σχ. 162, εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κύκλων τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ΟΑ καὶ ΟΒ. Ἡ ἔκφρασις τῆς ἐπιφανείας τῆς ζώνης εἶναι ἄρα



Σχ. 162.

$$\pi\times\overline{\text{ΟΑ}}^2-\pi\times\overline{\text{ΟΒ}}^2 \text{ ἢ } \pi\times\left(\overline{\text{ΟΑ}}^2-\overline{\text{ΟΒ}}^2\right),$$

τοὐτέστιν, «ἡ ζώνη ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων τῶν δύο κύκλων.»

ΟΡΙΣΜΟΣ. Κυκλικὸν τραπέζιον λέγεται τὸ περιλαμβανόμενον

διάστημα ΑΒβα ὑπὸ τῶν τόξων ΑΒ καὶ αβ δύο συγκεντρικῶν περιφερειῶν καὶ τῆς διαφορᾶς Αα καὶ Ββ τῶν ἀκτίνων των. Σχ. 163.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 89η'. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ. Ἐὰν σημειώσωμεν διὰ **Μ** καὶ μ τὰ δύο τόξα, διὰ Α καὶ α τὰς ἀκτῖνας καὶ διὰ Γ τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τῆς κεντρικῆς γωνίας, ἥτις εἶναι κοινὴ εἰς τοὺς δύο τομεῖς, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ σχηματίζει τὸ κυκλικὸν τραπέζιον, ἡ ἔκφρασις τῆς ἐπιφανείας τοῦ τελευταίου εἶναι (Πρότ. 88),



Σχ. 163.

$$\frac{\pi\text{Α}^2.\Gamma}{360^0}-\frac{\pi\alpha^2.\Gamma}{360^0} \text{ ἢ } \frac{\pi\Gamma}{360^0}(\text{Α}^2-\alpha^2) \text{ ἢ}$$

$$\frac{\pi\Gamma}{360^0}(\text{Α}+\alpha)(\text{Α}-\alpha), \text{ ἢ προσέτι } \left(\frac{\pi\text{ΑΓ}}{360^0}+\frac{\pi\alpha\Gamma}{360^0}\right)(\text{Α}-\alpha).$$

Ἀλλὰ $\dfrac{\pi\alpha\Gamma}{360^0}=\dfrac{\text{Μ}}{2}$ καὶ $\dfrac{\pi\text{ΑΓ}}{360^0}=\dfrac{\mu}{2}$ (ἐφαρμ. 72).

Ἡ ἔκφρασις τῆς ἐπιφανείας τοῦ τραπεζίου γράφεται καὶ οὕτω

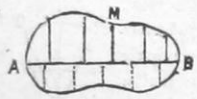
$$\tfrac{1}{2}\,(\text{Μ}+\mu)\,(\text{Α}-\alpha).$$

τοὐτέστιν «ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυκλικοῦ τραπεζίου ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο τόξων, τὰ ὁποῖα εἶναι βάσεις αὐτοῦ ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων.»

Ἐὰν ὀνομάσωμεν «Ὕψος τοῦ κυκλικοῦ τραπεζίου τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι «ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυκλικοῦ τραπεζίου ἔχει μέτρον, τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων, ἢ τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων.» Ἡ ἐκφώνησις αὕτη εἶναι ἀνάλογος μὲ τὴν τοῦ εὐθυγράμμου τραπεζίου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 90η. «Ἵνα μετρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν σχήματος περιοριζομένου ὑπὸ ἀκανονίστου καμπύλης, μεταχειριζόμεθα τὴν αὐτὴν ἐκείνην μέθοδον ὁποίαν καὶ εἰς τὴν ἀγρομετρίαν πρὸς καταμέ-

τρησιν τῆς ἐπιφανείας πολυγώνου. Ἄγομεν τὴν τέμνουσαν ἡ ὁδηγήτριαν AB, Σχ. 164, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς μεγαλητέρας ἐκτάσεως τοῦ σχήματος, ἥτις διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο μέρη, ἐφ' ἑκάστου τῶν ὁποίων λαμβάνομεν σειρὰν τινα σημείων ἀρκετὰ πυκνῶν, ἵνα τὰ διαχωριζόμενα ὑπ' αὐτῶν τόξα συνταυτίζωνται ἐπαισθητῶς μὲ τὰς χορδάς των. Ἐξ ἑκάστου δὲ σημείου τῆς διαιρέσεως καταβιβάζομεν κάθετον ἐπὶ τῆς ὁδηγητρίας καὶ τὸ σχῆμα οὕτως ἀναλύεται εἰς τραπέζια ὀρθογώνια, ἀποπερατούμενα εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα. Συνήθως διαιροῦμεν τὴν ὁδηγήτριαν εἰς ἴσα μέρη, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως π, κ, ρ, . . . Σχ. 165, ὑψοῦμεν καθέτους. Ἐὰν σημειώσωμεν διὰ η τὸ μῆκος μιᾶς τῶν διαιρέσεων αὐτῆς, διὰ Υ_1, Υ_2, ... , Υ_ν, τὰ μήκη τῶν καθέτων τῶν καταβιβαζομένων ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Π, Κ, ... , Β ἐπ' αὐτῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν τραπεζίων τῶν οὕτω λαμβανομένων, εὐκόλως ὑπολογίζεται διὰ τοῦ τύπου



Σχ. 164.



Σχ. 165.

$$\tfrac{1}{2}\eta(\Upsilon_1+\Upsilon_2)+\tfrac{1}{2}\eta(\Upsilon_2+\Upsilon_3)+\tfrac{1}{2}\eta(\Upsilon_3+\Upsilon_4)+ \\ +\ldots\ldots+\tfrac{1}{2}\eta(\Upsilon_{\nu-1}+\Upsilon_\nu),$$

ἢ, ὅπερ τὸ αὐτὸ

$$\tfrac{1}{2}\eta(\Upsilon_1+\Upsilon_2+\Upsilon_2+\Upsilon_3+\Upsilon_3+\Upsilon_4+\Upsilon_4+\ldots\ldots\Upsilon_{\nu-1}+\Upsilon_{\nu-1}+\Upsilon_\nu)$$

ἢ, $\tfrac{1}{2}\eta[2(\Upsilon_1+\Upsilon_2+\Upsilon_3+\ldots\ldots+\Upsilon_\nu)-(\Upsilon_1+\Upsilon_\nu)]$.

Ἐὰν σημειώσωμεν διὰ Υ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν καθέτων, ἡ προηγουμένη ἔκφρασις γίνεται

$$\eta\times\left[\Upsilon-\left(\frac{\Upsilon_1+\Upsilon_\nu}{2}\right)\right]$$

Οὕτω τῆς ὁδηγητρίας οὔσης διηρημένης εἰς ἴσα μέρη, λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην ἐπιφάνειαν, πολλαπλασιάζοντες μίαν διαίρεσιν αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν καθέτων, ἐλαττούμενον κατὰ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄκρων καθέτων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 91η. Εἰς τὴν Ἀγρομετρίαν μεταχειριζόμεθα μέθοδον ταχυτέραν μὲν τῆς προηγουμένης, οὐχὶ τοσοῦτον ὅμως ἀκριβῆ. Αὕτη δὲ συνίσταται εἰς τὸ νὰ τέμνωμεν τὴν καμπύλην διὰ τῶν εὐθειῶν AB, ΒΓ, ΓΔ, Σχ. 166 οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα πίπτουσιν ἐκτὸς τοῦ οὕτω σχηματιζομένου πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ νὰ ἐξισοῦται, ὡς ἔγγιστα, μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων τὰ ὁποῖα μένουσιν ἐντὸς τοῦ πολυγώνου. Τότε καταμετροῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυγώνου κατὰ τὰς γνωστὰς μεθόδους, καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἐκφράζει τὴν ζητουμένην ἐπιφάνειαν. Ἡ ἀκρίβεια τῆς πράξεως ταύτης συνίσταται εἰς τὴν κατάλληλον ἐκλογὴν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 166.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 91.

Δύο κύκλοι εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ἢ τῶν διαμέτρων.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν διὰ Ε καὶ ε παραστήσωμεν τὰς ἐπιφανείας τῶν δύο κύκλων, τῶν ὁποίων ἀκτῖνες εἶναι Α καὶ α ἔχομεν (**Πρότ.** 87) τὰς ἐκφράσεις

$$\mathrm{E}=\pi\mathrm{A}^2 \text{ καὶ } \varepsilon=\pi\alpha^2$$

ἐξ ὧν διαιροῦντες μέλος πρὸς μέλος λαμβάνομεν

$$\frac{\mathrm{E}}{\varepsilon}=\frac{\pi\mathrm{A}^2}{\pi\alpha^2} \text{ ἤτοι } \frac{\mathrm{E}}{\varepsilon}=\frac{\mathrm{A}^2}{\alpha^2}=\frac{4\mathrm{A}^2}{4\alpha^2}=\frac{(2\mathrm{A})^2}{(2\alpha)^2}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 92α. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ. Τὸ πολυθρύλλητον τοῦτο πρόβλημα βασίζεται ἐπὶ τῆς Εὐθύνσεως τῆς Περιφερείας· ἐπειδὴ ἐὰν ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀκριβῶς εὐθεῖαν ἴσην μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, ζητοῦντες μέσην ἀνάλογον μεταξὺ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς ἀκτῖνος, ἠθέλομεν ἔχει τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἰσοδυναμοῦντος

μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου. Τῷ ὄντι, ἔστω Π ἡ μέση ἀνάλογος καὶ Α ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$2\pi \times A : \Pi = \Pi : \frac{A}{2}$$

ἐξ ἧς $\Pi^2 = 2\pi \times A \times \frac{A}{2}$ ἢ $\Pi^2 = \pi \times A^2$,

τοὐτέστι « τὸ τετράγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν Π, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι Α». Ἐπειδὴ ὅμως ἀπεδείχθη Μαθηματικῶς, ὅτι ἡ εὔθυνσις τῆς περιφερείας ἀδύνατον εἶναι νὰ ἐκτελεσθῇ ἀκριβῶς, ἄρα ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου εἶναι αὐτόχρημα ματαιοπονία. Ἐκτὸς τούτου καὶ ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι δυνατὴ, αὕτη ἐν τῇ ἐφαρμογῇ δὲν θέλει χορηγήσει προσέγγισιν μεγαλητέραν τῆς νῦν. Τῷ ὄντι ἡ σχέσις

$$\Pi^2 = \pi \times A^2 \text{ δίδει } \Pi = A \times \sqrt{\pi}$$

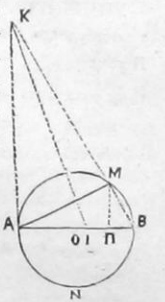
ἤτοι $\Pi = A \times \sqrt{3,141592653589\ldots} = A \times 1,7724538\ldots$

« Λαμβάνομεν ἄρα τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυναμοῦντος μὲ κύκλον, πολλαπλασιάζοντες τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ ἐπὶ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν 1,7724538 . . . .» Ἐὰν π. χ., ἡ ἀκτὶς ἦναι 100 μέτρων, ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου θέλει εἶσθαι $100\,\mu \times 1,7724538\ldots$ ἢ 177,24538 μέτρ. καὶ ἐν τῇ ἐφαρμογῇ 177, 245 μέτρ., ἐπειδὴ μέχρι χιλιοστομέτρου ἡ ἐκτίμησις γίνεται.

Ἂν καὶ οὐδεμία ἀκριβὴς Γεωμετρικὴ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου ὑπάρχῃ, ἐζητήθησαν ὅμως λύσεις προσεγγίζουσαι διὰ τῶν ὁποίων, ἐν ἀνάγκῃ, ἀποφεύγομεν τοὺς ὑπολογισμοὺς (*), καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἀναγράφομεν τὴν ἀκόλουθον τοῦ Sonnet.

(*) Ἐκ τῶν Ἑλλήνων, ὁ Βρίσων, ὁ Ἀντιφῶν καὶ ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος, ὡς καὶ ἄλλοι κατέγειναν περὶ τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου, ὁ δὲ τελευταῖος εὗρε καὶ τὴν λύσιν τοῦ περὶ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου προβλήματος (ἴδε Μέρος Β'.). Αἱ δὲ ὑπὸ τῶν ἀρχαίων μαθηματικῶν Νικοστράτου καὶ Νικοδήμου δοθεῖσαι γεωμετρικαὶ καὶ προσεγγίζουσαι λύσεις εὑρίσκονται εἰς τὸν Τόμ. Β'. Βιβλ. 7. Πρότ. ΙΑ'. τῆς Μαθηματ. ὁδοῦ ὑπὸ Μπαλάνου Βασιλοπούλου Ἀρχιπρεσβυτέρου Ἰωαννίνων καὶ διδασκάλου, ἐκδοθεῖσα τῷ ᾳψμθ.

Ἔστω ΑΜΒΝ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς ἡ ἀπέραντος ἐφαπτομένη ΑΚ Σχ. 167. Λαμβάνομεν τὸ διάστημα ΟΙ ἴσον μὲ τὸ ἕκτον τῆς ἀκτῖνος ΟΒ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ι, ὡς ἀπὸ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ διπλοῦν τῆς διαμέτρου ΑΒ, γράφομεν τόξον κύκλου τέμνον τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Κ καὶ φέρομεν τὴν ΚΙ καὶ ΚΒ καὶ τὴν χορδὴν ΑΜ, ἥτις εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἡμίσεος ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ, ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυναμοῦντος μὲ τὸν κύκλον.



Σχ. 167.

Τῷ ὄντι, πρὸς εὐκολίαν ἔστω ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ἡ μονάς. Θέλομεν ἔχει ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, $OI = \frac{1}{6}, AI = \frac{7}{6}, AB = 2, KI = 4$.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΚΙ, ἔχομεν

$$\overline{AK}^2 = \overline{KI}^2 - \overline{AI}^2 = 16 - \frac{49}{36} = \frac{527}{36},$$

Εἰς δὲ τὸ ΑΚΒ,

$$\overline{KB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AK}^2 = 4 + \frac{527}{36} = \frac{671}{36}.$$

Ἀλλ' ἡ γωνία ΑΜΒ εἶναι ὀρθὴ, ἐπειδὴ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμιπεριφέρειαν καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜΒ καὶ ΑΚΒ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὴν γωνίαν Β κοινὴν, εἶναι ὅμοια καὶ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν

$$AM : AB = AK : KB,$$

ἐξ ἧς συνάγομεν

$$\overline{AM}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 : \overline{KB}^2 \text{ ἢ } \overline{AM}^2 : 4 = \frac{527}{36} : \frac{671}{36} = 527 : 671,$$

ἐξ ἧς προκύπτει

$$\overline{AM}^2 = \frac{4 \times 527}{671} = \frac{2108}{671} \text{ καὶ } AM = \sqrt{\frac{2108}{671}} = 1,7724502\ldots.$$

Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ἀνωτέρω τιμὴν τῆς Π, θέσωμεν $A = 1$, θέλομεν ἔχει $\Pi = 1,7724538\ldots$.

Βλέπομεν ὅτι ἡ ὑπάρχουσα διαφορὰ μεταξὺ τῆς προσεγγιζούσης ἀξίας ΑΜ καὶ τῆς ἀληθοῦς τιμῆς τῆς Π εἶναι 0,0000036 . . . . , τοὐτέστι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος μιᾶς μονάδος τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως· ὥστε θεωρητικῶς ὁμιλοῦντες λέγομεν ὅτι τὸ λάθος δὲν

θέλει εἶσθαι τὸ ἥμισυ τοῦ χιλιοστομέτρου, εἰς κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 100 μέτρων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. α.) Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Μ καταβιβάσωμεν ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ τὴν κάθετον ΜΠ θέλομεν ἔχει (Πρότ. 58 καὶ 43 Πόρισμ.)

$$\text{ΑΠ}:\text{ΑΜ}=\text{ΑΜ}:\text{ΑΒ}$$

ἐξ ἧς συνάγομεν

$$\overline{\text{ΑΜ}}^2=\text{ΑΠ}\times\text{ΑΒ}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ΑΜ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυναμοῦντος μὲ τὸν κύκλον, ἔχομεν

$$\overline{\text{ΑΜ}}^2=\pi\times\overline{\text{ΟΑ}}^2,$$

ἀλλὰ

$$\text{ΑΒ}=\text{ΟΑ}\times 2.$$

Ἄρα

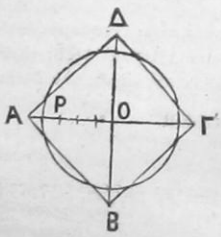
$$\pi\times\overline{\text{ΟΑ}}^2=\text{ΑΠ}\times\text{ΟΑ}\times 2$$

ἐξ ἧς συνάγομεν

$$\text{ΑΠ}=\frac{\pi\times\text{ΟΑ}}{2}=\frac{2\pi\times\text{ΟΑ}}{4},$$

τουτέστιν ΑΠ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τέταρτον τῆς εὐθυνθείσης περιφερείας.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. β'.) Ἄγομεν Σχ. 167ον δύο διαμέτρους καθέτους, διαιροῦμεν μίαν ἐξ αὐτῶν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ αὐξάνομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΡ κατὰ μίαν διαίρεσιν καὶ λαμβάνομεν



Σχ. 167ον

$$\text{ΟΑ}=\tfrac{5}{4}\text{ΟΡ}.$$

Τούτων γενομένων ἐὰν κατασκευάσωμεν τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ ἡμιδιαγώνιος εἶναι ἡ ΟΑ, τοῦτο θέλει εἶσθαι ἰσοδύναμον τῷ κύκλῳ. Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι 1,768 . . . . ἀντὶ 1,772 . . . .

Ἡ προσέγγισις αὕτη εἶναι ἀρκετὴ ἐν τῇ ἐφαρμογῇ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. γ'.) Τετραγωνίζομεν τὸν τομέα εὑρίσκοντες τὴν ἀξίαν τοῦ τόξου, τουτέστιν, τὴν βάσιν, καὶ ζητοῦντες μέσην ἀνάλογον μεταξὺ τοῦ τόξου καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς ἀκτῖνος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 93η. Τὰ λεχθέντα ἐν τῇ § 13. Πρότ. 85 περὶ τῶν ὁμοίων πολυγώνων ἐφαρμόζονται ὁμοίως εἰς δύο οἱαδήποτε σχήματα ὅμοια· ἐπειδὴ πᾶσα καμπύλη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κεκλασμένη

τις γραμμὴ, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι ἀπειροελάχιστοι, πᾶν καμπυλόγραμμον σχῆμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πολύγωνον· ἄρα δυνάμεθα νὰ ἐκφωνήσωμεν τὴν ἑξῆς γενικὴν πρότασιν « ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι δύο οἰωνδήποτε ὁμοίων πολυγώνων εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων γραμμῶν των.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 94η. Ἀνεφέραμεν ἐν τῇ ἐφαρμογῇ 90 τὴν καταμέτρησιν, μεθ' ἱκανῆς προσεγγίσεως τῆς ἐπιφανείας καμπυλογράμμου τινὸς σχήματος· ἤδη δὲ διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν τετραγώνου ἰσοδυναμοῦντος τῷ σχήματι τούτῳ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐκφράζοντος τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια καμπυλογράμμου σχήματος εἶναι 552,25 μ.τ. καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυναμοῦντος τετραγώνου Χ, θέλομεν ἔχει

$$\text{Χ}^2=552{,}25\ \mu.\tau.\ \text{ἢ}\ \text{Χ}=\sqrt{552{,}25\ \mu.\tau.}=23{,}5\ \mu.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 95η. ΔΟΚΙΜΗ ΤΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΕΩΝ. Εἶναι ἀνάγκη νὰ ἠξεύρωμεν κατὰ πόσον εἶναι ἀκριβῆ τὰ ἐπὶ τοῦ χάρτου σχεδιαζόμενα ἐπίπεδα, ἐπειδὴ τὰ αἴτια διὰ τῶν ὁποίων προκύπτουσι τὰ λάθη κατὰ τοὺς σχεδιασμοὺς εἶναι πολλά. Πρώτη δοκιμὴ εἶναι ἡ ἐκ τῆς φύσεως αὐτῶν τῶν πραγμάτων χορηγουμένη, δηλ. ἡ ἐκτέλεσις ὅλς τοῦ σχεδιασμοῦ διὰ τῆς αὐτῆς ἢ διὰ διαφόρου μεθόδου, ἐὰν πρόκηται περὶ ἐπιφανείας μὴ ὑπερβαινούσης τὰ 300 πλέθρα.

Ἡ τῶν μεγάλων ἐπιφανειῶν τῶν σχεδιαζομένων διὰ τῆς μεθόδου τῶν διατομῶν ἢ τῆς τριγωνικῆς δικτυώσεως δοκιμὴ γίνεται διά τινος νέας δικτυώσεως, ἐκλεγομένων ὡς κορυφῶν τῶν τριγώνων, ἄλλων σημαντικῶν σημείων ἀπὸ τὰ τῆς πρώτης δικτυώσεως διαφερόντων. Ἐὰν ἡ δικτύωσις ἐγένετο διὰ τοῦ ἐπαναληπτικοῦ κύκλου, §. 5 ἐφαρ. 16ον τὰ λάθη δὲν ἀποδίδονται πλέον εἰς τὴν καταμέτρησιν τῶν γωνιῶν, ἀλλ' εἰς τὴν τῆς βάσεως. Ἄρα ἀνάγκη νὰ ἐπαναληφθῇ πολλάκις παλινδρομικῶς καὶ κατὰ τὰς δύο διευθύνσεις ἡ ὁριζόντειος καταμέτρησις τῆς βάσεως, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος θὰ ἔχωμεν, μὲ ἱκανὴν προσέγγισιν, λαμβάνοντες τὸν μέσον ὅρον τῶν καταμετρήσεων. Π. χ. ἐὰν καταμετρήσαντες τετράκις τὴν βάσιν εὕρομεν 1158,04 μέτρ. 1158,00 μέτρ. 1158,10 μέτρ. καὶ 1157,99 μέτρ, τὸ μῆκος αὐτῆς εἶναι

$$\frac{1158{,}04\mu.+1158{,}00\mu.+1158{,}10\mu.+1157{,}99\mu.}{4}=1158{,}0325\mu.$$

Ἐν γένει τὰ λάθη προέρχονται ἐκ τῆς καταμετρήσεως τῶν γραμ-

μῶν, ἐπειδὴ ἀδύνατον ἡ καταμέτρησίς των νὰ ἐκτελεσθῇ ἀκριβῶς.

Ἐκτὸς τούτου ἡ χρῆσις τῶν ἐργαλείων μὲ διόπτρας παράγει τόσον σημαντικὰ λάθη, ὅσον αἱ γραμμαὶ τῆς σκοπεύσεως εἶναι μεγαλήτεραι· ὀλιγώτερα δὲ ὅταν μεταχειριζώμεθα τὸ χαλύβδινον δεκάμετρον καὶ ἐργαλεῖα μὲ τηλεσκόπια, τῶν ὁποίων τὴν χρῆσιν διδάσκει ἡ ὀπτικὴ καὶ ὀφείλει νὰ γνωρίζῃ ὁ γεωμέτρης.

Τὸ σχέδιον ἐπιφανείας τινὸς δοκιμάζεται, συγκρινομένου τοῦ μήκους τῶν ἐπὶ τῆς γῆς εὑρισκομένων γραμμῶν, μὲ τὸ τῶν ὁμολόγων ἐπὶ τοῦ σχεδίου.

Αἱ γωνίαι ἀφοῦ καταμετρηθῶσιν ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς γῆς, πρέπει νὰ ᾖναι ἴσαι μὲ τὰς συστοιχούσας ἐπὶ τοῦ σχεδίου.

Ἐὰν ἡ ἐπὶ τῆς γῆς ἐπιφάνεια ᾖναι μικρὰ, ἡ δοκιμὴ γίνεται διὰ δύο συντεταγμένων ἀξόνων (ἐφαρμ. 80) κεχαραγμένων ἔνθεν μὲν ἐπὶ τοῦ σχεδίου, ἔνθεν δὲ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ εἰς τὸ αὐτὸ μέρος. Τότε ἡ σχετικὴ θέσις τῶν σημαντικῶν σημείων τοῦ γηπέδου, ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας, πρέπει νὰ ᾖναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν θέσιν τῶν αὐτῶν σημείων τῶν παριστανομένων ἐπὶ τοῦ σχεδίου.

Ἐὰν τὸ σχέδιον παριστᾷ μεγάλην ἔκτασιν γηπέδου, ἡ δοκιμὴ γίνεται, συγκρινομένων τῶν μεταξὺ τῶν κορυφῶν τῶν τριγώνων ἀποστάσεων ἐπὶ τοῦ γηπέδου, μὲ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν ἐπὶ τοῦ σχεδίου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 96η. ΥΠΟΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ. Εἰς τὰς τέχνας ἡ τοιαύτη ὑποδιαίρεσις δύναται νὰ παρουσιασθῇ ὑπὸ διαφόρους περιστάσεις, ὡς καὶ εἰς τὴν ἀγρομετρίαν π. χ. ὅταν ἰδιοκτησία τις ἀγρῶν ἢ γαιῶν πρόκηται νὰ διανεμηθῇ μεταξὺ κληρονόμων, κατὰ τὰς διατάξεις τῆς διαδοχῆς, εἰς τοιαύτην περίστασιν ἡ διανομὴ γίνεται διαιρουμένης τῆς ἰδιοκτησίας εἰς ἐπίπεδα σχήματα ἴσα ἢ ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.



Σχ. 168.

Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον Σχ. 168 εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν διὰ γραμμῶν ἀγομένων παραλλήλως πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ διαιρεθῇ εἰς τέσσαρα μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ, διὰ τῶν παραλλήλων γραμμῶν ΖΗ, ΕΘ, ΔΙ τῇ ΑΓ. Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον

ἔχομεν τὰ τέσσαρα ὅμοια τρίγωνα ΖΒΗ, ΕΒΘ, ΔΒΙ καὶ ΑΒΓ τῶν ὁποίων αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι α, α+β, α+β+γ, α+β+γ+δ. Τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν § 13. Πρότ. 84, λοιπὸν ἔχομεν τὰς σχέσεις

1η. $\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΖΒΗ}}=\frac{\overline{\text{ΑΒ}}^2}{\overline{\text{ΒΖ}}^2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{\alpha}$ ἐξ ἧς $\text{ΒΖ}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}\times\sqrt{\text{ΑΒ}}$.

2α. $\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΕΒΘ}}=\frac{\overline{\text{ΑΒ}}^2}{\overline{\text{ΒΕ}}^2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{\alpha+\beta}$ ἐξ ἧς $\text{ΒΕ}=\frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}\times\sqrt{\text{ΑΒ}}$.

3η. $\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΔΒΙ}}=\frac{\overline{\text{ΑΒ}}^2}{\overline{\text{ΒΔ}}^2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{\alpha+\beta+\gamma}$ ἐξ ἧς $\text{ΒΔ}=\frac{\sqrt{\alpha+\beta+\gamma}}{\sqrt{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}\times\sqrt{\text{ΑΒ}}$.

Αἱ ἐκφράσεις αὗται δίδουσι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῶν τριγώνων καὶ ἑπομένως τὴν θέσιν τῶν σημείων Ζ, Ε καὶ Δ, διὰ τῶν ὁποίων φέρομεν τὰς παραλλήλους ΖΗ, ΕΘ καὶ ΔΙ τῇ ΑΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.

Νὰ διαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη διὰ παραλλήλων εὐθειῶν τῇ ΑΓ.

Εἰς τοὺς εὑρεθέντας τύπους τοῦ 1ου προβλήματος ὑποθέτοντες $\alpha=\beta=\gamma=\delta=1$ εὑρίσκομεν τοὺς ἑξῆς·

1ον. $\text{ΒΖ}=\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\sqrt{\text{ΑΒ}}$, 2ον. $\text{ΒΕ}=\sqrt[4]{\frac{2}{4}}\sqrt{\text{ΑΒ}}$, 3ον. $\text{ΒΔ}=\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\sqrt{\text{ΑΒ}}$.

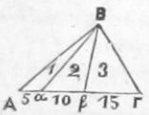
Διὰ τῶν τελευταίων τύπων προσδιορίζομεν τὰ μήκη ΒΖ, ΒΕ καὶ ΒΔ καὶ διὰ τῶν σημείων Ζ, Ε καὶ Δ φέροντες τὰς παραλλήλους ΖΗ, ΕΘ καὶ ΔΙ τῇ ΑΓ διαιροῦμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.

Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν, διὰ γραμμῶν ἀγομένων ἀπὸ μίαν κορυφὴν τοῦ τριγώνου.

Λόγου χάριν νὰ διαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ Σχ. 169 εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 5, 10 καὶ 15 διὰ γραμμῶν ἀγομένων ἐκ τῆς

κορυφῆς Β. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν, ὡς οἱ ἀριθμοὶ 5, 10 καὶ 15.



Σχ. 169.

Ἐὰν διαιρέσωμεν ἄρα τὴν βάσιν ΑΓ εἰς 5+10+15=30 ἴσα μέρη, λάβωμεν δὲ 5, 10 καὶ 15 μέρη καὶ ἐκ τῶν οὕτω λαμβανομένων σημείων α, β φέρωμεν τὰς γραμμὰς αΒ καὶ βΒ θέλομεν ἔχει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.

Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς ἴσα μέρη διὰ γραμμῶν ἀγομένων ἀπὸ μίαν κορυφήν.

Ἵνα διαιρέσωμεν π. χ. τρίγωνόν τι εἰς τρία ἴσα μέρη διαιροῦμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ εἰς τόσα μέρη καὶ τὰ οὕτω λαμβανόμενα σημεῖα ἑνοῦντες μὲ τὴν κορυφὴν ἔχομεν τὸ ζητούμενον. Ἐπειδὴ τὰ οὕτω προκύπτοντα τρίγωνα ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.

Νὰ διαιρεθῇ τετράγωνον εἰς ἴσα μέρη.

Διαιροῦμεν μίαν αὐτοῦ πλευρὰν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσα καὶ τὸ τετράγωνον, ἐκ δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ὑψοῦμεν καθέτους ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ταύτης καὶ οὕτω διαιροῦμεν τὸ τετράγωνον, καθ' ἃ τὸ πρόβλημα ἀπαιτεῖ. Ἐπειδὴ τὰ οὕτω προκύπτοντα ὀρθογώνια εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

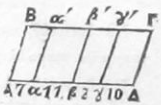
Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διαιρεῖται εἰς ἴσα μέρη καὶ ὀρθογώνιον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.

Νὰ διαιρεθῇ παραλληλόγραμμον εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν.

Ἵνα διαιρεθῇ π. χ. τὸ παραλληλόγραμμον Σχ. 170 ΑΒΓΔ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 7, 11, 8 καὶ 10, διαιρεῖται ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ΑΔ εἰς ἴσα μέρη 7+11+8+10=36 καὶ ἐκ τῶν σημείων α, β καὶ γ τῆς διαιρέσεως ἄγομεν τὰς γραμμὰς αα', ββ' καὶ γγ'.

παραλλήλως ταῖς πλευραῖς ΑΒ καὶ ΓΔ. Τὰ οὕτω προκύπτοντα τέσσαρα παραλληλόγραμμα, ἐπειδὴ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, ἤ ὡς οἱ δεδομένοι ἀριθμοί.



Σχ. 170.

«Ἵνα τὰ παραλληλόγραμμον διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη, ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ μία πλευρὰ αὐτοῦ εἰς ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως νὰ ἀχθῶσι γραμμαὶ παραλλήλως τῶν δύο ἄλλων.»

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7.

Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς ἴσα μέρη.

Ἵνα διαιρεθῇ τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ Σχ. 171 εἰς τρία ἴσα μέρη διὰ γραμμῶν ἀπολήγουσῶν εἰς τὰς δύο βάσεις αὐτοῦ, ἑκατέρας τῶν βάσεων αὐτοῦ διαιρουμένης εἰς τρία ἴσα μέρη, ἑνοῦμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διὰ τῶν εὐθειῶν ΕΗ, ΖΘ καὶ τὰ οὕτω προκύπτοντα τραπέζια 1, 2 καὶ 3 ἐπιλύουσι τὸ πρόβλημα, ἐπειδὴ ἕκαστον τούτων ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.



Σχ. 171.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8.

Νὰ διαιρεθῇ τὸ τραπέζιον εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν, διὰ γραμμῶν ἀπολήγουσῶν εἰς τὰς βάσεις.

Νὰ διαιρεθῇ τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 10, 15 καὶ 20. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν ἑκάστην αὐτοῦ βάσιν εἰς 10+15+20=45 ἴσα μέρη καὶ ἑνοῦντες τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διὰ τῶν εὐθειῶν ΕΗ, ΖΘ κατασκευάζομεν τὰ τραπέζια 1, 2 καὶ 3 τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ ζητούμενα· καὶ ἐπειδὴ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων, τουτέστιν

ἔχομεν $1:2:3::\frac{\Gamma H+AE}{2}\cdot\frac{H\Theta+EZ}{2}\cdot\frac{\Theta\Delta+BZ}{2}$

ἤ 10:15:20.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9.

Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν διὰ γραμμῶν παραλλήλων τῶν βάσεων.

Νὰ διαιρεθῇ τὸ τραπέζιον ΑΓΗΖ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 6, γ καὶ δ διὰ γραμμῶν ἀγομένων παραλλήλως πρὸς τὰς βάσεις. Πρὸς τοῦτο προεκβάλλομεν τὴν ΑΖ καὶ ΓΗ μέχρι τοῦ Β καὶ ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἔνθα ΒΖ εἶναι γνωστή. Κατὰ τὸ 1ον πρόβλημα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\text{BZ}=\frac{\alpha}{\alpha+6+\gamma+\delta}\times\sqrt{\text{AB}}$$

ἐξ ἧς συνάγομεν τὴν ἀξίαν α τοῦ τριγώνου ΖΒΗ,

$$\alpha=\frac{\text{BZ}}{\sqrt{\text{AB}}-\text{BZ}}\times(6+\gamma+\delta)=\alpha'$$

τὴν ὁποίαν εἰσάγοντες εἰς τὰς ἐκφράσεις τῆς ΒΕ καὶ ΒΔ ἔχομεν διὰ τὴν λύσιν τοῦ προκειμένου προβλήματος τοὺς τύπους

$$\text{BE}=\frac{\alpha+6}{\alpha+6+\gamma+\delta}\times\sqrt{\text{AB}},\quad \text{B}\Delta=\frac{\alpha+6+\gamma}{\alpha+6+\gamma+\delta}\times\sqrt{\text{AB}}.$$

Εἰς τοὺς τελευταίους τούτους τύπους ὑποθέτοντες $6=\gamma=\delta=1$ ἔχομεν $\text{BE}=\frac{\alpha+1}{\alpha+3}\times\sqrt{\text{AB}}$, $\text{B}\Delta=\frac{\alpha+2}{\alpha+3}\times\sqrt{\text{AB}}$ οἵτινες ἐπιλύουσι τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

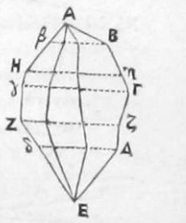
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10.

Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς μέρη ἴσα διὰ γραμμῶν ἀγομένων παραλλήλως πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11.

Νὰ διαιρεθῇ πολύγωνον εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν καὶ διὰ γραμμῶν κεκλασμένων ἀπολήγουσῶν εἰς δύο κορυφὰς τοῦ πολυγώνου.

Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖΗ Σχ. 172 τὸ ὁποῖον πρόκηται νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία μέρη, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχωσι μεταξύ των τοιοῦτον λόγον οἷον ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ 3, 4, 5.



Σχ. 172.

Ἐξ ὅλων τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η τοῦ πολυγώνου, ἐκτὸς τῶν μᾶλλον ἀπομεμακρυσμένων Α καὶ Ε, φέρομεν τὰς παραλλήλους Βϑ, Ηη, Γγ, Ζζ, Δδ, τῶν ὁποίων ἡ διεύθυνσις λαμβάνεται κατ' ἀρέσκειαν, πάντοτε ὅμως ἐντὸς τοῦ πολυγώνου. Διαιροῦμεν ἑκάστην παράλληλον καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 5 καὶ ἑνοῦντες τὰ οὕτω προκύπτοντα σημεῖα ὡς καὶ τὰς κορυφὰς Α, Ε, ὡς δεικνύει τὸ Σχ. 172, τὸ πολύγωνον διαιροῦμεν, καθ' ἃ τὸ πρόβλημα ἀπαιτεῖ. Ἐπειδὴ τὰ εἰς τὰς κορυφὰς Α καὶ Ε ἀπολήγοντα τρίγωνα ΒΑϑ, ΔΕδ καὶ ἕκαστον τῶν παρεμπιπτόντων τραπεζίων εἶναι διῃρημένον εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 5 (Πρόβλ. 3 καὶ 8), ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν τούτων εἶναι ὡς οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12.

Νὰ διαιρεθῇ καμπυλόγραμμον σχῆμα εἰς μέρη τοιαῦτα, ὡς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἀπαιτεῖ.

Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὴν περίμετρον τοῦ σχήματος Σχ. 173 εἰς μικρότατα μέρη καὶ τοιαῦτα, ὥστε τὸ τόξον δύο διαδοχικῶν διαιρέσεων νὰ ταὐτίζηται ἐπαισθητῶς μὲ τὴν χορδὴν καὶ οὕτω μετασχηματίζοντες τὸ καμπυλόγραμμον σχῆμα, ὡς ἔγγιστα, εἰς εὐθύγραμμον πολύγωνον καταντῶμεν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ 11ου προβλήματος.


Σχ. 173.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 13.

Νὰ διαιρεθῇ πολύγωνον εἰς ἴσα μέρη διὰ κεκλασμένων γραμμῶν ἀπολήγουσῶν εἰς δύο κορυφὰς τοῦ πολυγώνου.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῶσιν αἱ παράλληλοι αἱ εἰς τὸ 11 πρόβλημα μνημονευθεῖσαι εἰς ἴσα μέρη.

© ΕΘΝΙΚΟΝ ΜΕΤΣΟΒΙΟ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 14.

Νὰ διαιρεθῇ οἱονδήποτε πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ Σχ. 174 εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν, διὰ γραμμῶν διερχομένων ἔκ τινος ἐσωτερικοῦ καὶ γνωστοῦ σημείου Ο.



Σχ. 174.

Εἰς τὴν παροῦσαν περίστασιν τὸ σημεῖον Ο δυνατὸν νὰ παριστᾷ φρέαρ, κρήνην, κτλ. εἰς τὸ ὁποῖον ἀνάγκη νὰ ἀπολήγωσιν αἱ διάφοροι μερίδες γηπέδου τινὸς ΑΒΓΔΕΖ, προκειμένου νὰ διανεμηθῇ εἰς πολλοὺς κληρονόμους, ἡ δὲ μία τῶν διατεμνουσῶν νὰ παρίσταται διά τινος ἀτραποῦ, φράκτου, ῥύακος, κτλ. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει ἡ πρώτη τῶν διατεμνουσῶν γραμμῶν λαμβάνεται κατ' ἀρέσκειαν καὶ ἔστω αὕτη ἡ ΟΙ.

Ἔστωσαν Α καὶ α ἡ γνωστὴ ἐπιφάνεια τοῦ τε πολυγώνου καὶ τῆς πρώτης μερίδος, καὶ τὸ τρίγωνον ΟΙΗ ἴσον μὲ α. Φέροντες ἐκ τοῦ σημείου Ο τὴν κάθετον ΟΞ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἔχομεν

$$\alpha=\tfrac{1}{2}\text{ΗΙ}\times\text{ΟΞ}\ \text{ἐξ ἧς}\ \text{ΗΙ}=\frac{2\alpha}{\text{ΟΞ}}.$$

Ἐπειδὴ ἡ ΟΞ δύναται νὰ καταμετρηθῇ ἀπ' εὐθείας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια α εἶναι γνωστή, δι' ἁπλῆς διαιρέσεως λαμβάνομεν τὴν ΗΙ. Τοῦ σημείου Η, οὕτω προσδιορισθέντος, ἄγομεν τὴν ΑΟ καὶ τὴν ΗΘ παράλληλον τῇ ΑΟ καὶ φέρομεν τὴν ΘΟ. Τὰ τρίγωνα ΑΗΟ, ΑΘΟ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΟ, καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, τοὐτέστιν τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων ΗΘ, ΑΟ. Εἰς ἕκαστον τούτων προσθέτοντες τὸ τρίγωνον ΙΑΟ, ἔχομεν ἄρα

$$\text{ΑΗΟ}+\text{ΙΑΟ}=\text{ΑΘΟ}+\text{ΙΑΟ}\ \text{ἢ}\ \text{ΗΟΙ}=\text{ΙΑΘΟ},$$

τοὐτέστι τὸ σχῆμα ΙΑΘΟ εἶναι ἴσον τῇ πρώτῃ μερίδι.

Γνωρίζοντες τὴν δευτέραν μερίδα καὶ τὸ μῆκος τῆς καταβιβαζομένης καθέτου ἐκ τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΖ, λαμβάνομεν ὡς προηγουμένως τὴν τρίτην γραμμὴν τῆς διαιρέσεως, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ τὰς λοιπάς.

Ἐὰν ἡ παράλληλος ΗΘ ἀπαντᾷ τὴν πλευρὰν ΑΖ ἐκεῖθεν τοῦ σημείου Ζ, τότε ἵνα μὴ συγχύσωμεν τὸ σχῆμα πρὸς τὸ μέρος τοῦτο, ὑποθέτομεν ὅτι ἡ περίπτωσις αὕτη συμβαίνει κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τῆς τελευταίας μερίδος δεξιόθεν τῆς ΟΙ, ὁπότε ἐνεργοῦμεν ὡς ἐξῆς.

Φαντασθῶμεν τὸ τρίγωνον ΟΙΚ ἴσον τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ μερίδι, ἧς ἡ ἐπιφάνεια εἶναι β, πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν ἔκφρασιν

$$\beta=\tfrac{1}{2}\text{ΙΚ}\times\text{ΟΞ}\ \text{ἐξ ἧς}\ \text{ΙΚ}=\frac{2\beta}{\text{ΟΞ}}.$$

Οὕτω προσδιορισθέντος τοῦ σημείου Κ, φέρομεν τὴν ΟΒ καὶ τὴν ΚΛ παράλληλον τῇ ΟΒ, ἥτις ἀπαντᾷ εἰς τὸ Λ τὴν προεκβολὴν τῆς πλευρᾶς ΒΓ, καὶ ἑνοῦμεν τὴν ΟΛ. Τὰ τρίγωνα ΟΒΚ, ΟΒΛ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΟΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἴσα· διὸ τὸ σχῆμα ΟΙΒΛ εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΟΙΚ ἢ τῇ ζητουμένῃ μερίδι.

Φέρομεν τὴν ΟΓ, καὶ τὴν ΑΝ παράλληλον τῆς ΟΓ· τὰ τρίγωνα ΟΓΛ, ΟΓΝ εἶναι ἴσα ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΟΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ΟΙΒΛ=ΟΙΒΓΝ, τοὐτέστι τὸ σχῆμα ΟΙΒΓΝ εἶναι ἡ ζητουμένη μερίς.

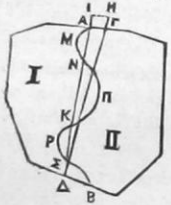
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Μέχρι τοῦδε ὑπεθέσαμεν ὅτι αἱ γαῖαι ἦσαν τῆς αὐτῆς ποιότητος καὶ ὡς ἐκ τούτου ἐλάβομεν ὑπ' ὄψιν μόνον τὴν ἔκτασιν τῶν ἐπιφανειῶν. Ἀλλ' ἐὰν αἱ γαῖαι ἦναι διαφόρου φύσεως, τότε πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὄχι μόνον τὴν ἔκτασιν, ἀλλὰ καὶ τὴν ἀξίαν ἑκάστης ποιότητος, ὅτε διακρίνομεν τὰς ἑξῆς δύο περιστάσεις.

ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ 1η. Ἐὰν ἡ ἀνωτέρας ποιότητος γῆ εἶναι μικρᾶς ἐκτάσεως καὶ οἱ συμμέτοχοι ὁμοφωνοῦσιν εἰς τὸ νὰ ἀποτελέσῃ μὲν αὕτη ἓν τῶν ζητουμένων μεριδίων, ἀποζημιωθῶσι δὲ τὰ λοιπὰ μερίδια ἑνεκα τῆς κατωτέρας ποιότητος τῆς γῆς διὰ μεγαλητέρας ἐκτάσεως, τότε ἐκτελεῖται ἡ διανομὴ ἀφοῦ καταμετρηθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστης ποιότητος γῆς, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν ἀξίαν τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας καὶ σχηματισθῇ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ἵνα, εὑρεθείσης οὕτω τῆς ἀξίας τῆς ὅλης ἰδιοκτησίας, διανεμηθῇ αὕτη ἀναλόγως κατὰ τὸ δίκαιον ἑκάστου κληρονόμου ἢ συμμετόχου. Ἐὰν ὅμως ἡ ὅλη ἀξία τῆς ἀνωτέρας ποιότητος γῆς δὲν ἐξισοῦται μὲ τὸ ἀντιστοιχοῦν μερίδιον, τότε προσθέτομεν εἰς αὐτὴν μέρος γῆς κατωτέρας ποιότητος, ἵνα συμπληρωθῇ τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος μερίδιον, καὶ διανέμομεν τὸ περίσσευμα τῆς κατωτέρας ποιότητος γῆς ἀνεξαρτήτως τῆς ἀξίας της.

ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ 2α. Ἐὰν ἡ τῆς ἀνωτέρας ποιότητος γῆ ἦναι μεγάλης ἐκτάσεως καὶ ἕκαστος τῶν κληρονόμων ἀπαιτεῖ νὰ ἔχῃ ἐξ αὐτῆς μέρος, τότε διανέμομεν χωριστὰ τὴν τῆς ἀνωτέρας καὶ κατωτέρας ποιότητος γῆν, ἀνεξαρτήτως τῆς ἀξίας τῶν γαιῶν καὶ ἐκλέγομεν τὰ ὅρια οὕτως, ὥστε τὰ χαραχθέντα διὰ τὰς ἀνωτέρας ποιότητος γαίας νὰ συνεχίζωνται ὅσον τὸ δυνατὸν μὲ τὰ τῆς κατωτέρας ποιότητος.

ΕΠΑΝΟΡΘΩΣΙΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ.

Ὅταν δύο ἰδιοκτησίαι Ι καὶ ΙΙ διαχωρίζωνται ὑπὸ ἀκανονίστου καμπύλης ΑΠΡΒ Σχ. 175 καὶ πρόκειται τὸ καμπυλόγραμμον τοῦτο ὅριον νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τῆς εὐθείας γραμμῆς ΑΔ ἡ ἐργασία αὕτη καλεῖται «ἐπανόρθωσις τῶν ὁρίων» καὶ ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς. Χαράττομεν, ὡς ἔγγιστα, εὐθεῖαν τινὰ ΑΔ οὕτως, ὥστε νὰ μὴ μεγεθύνῃ τὴν μίαν τῶν ἰδιοκτησιῶν ἐπὶ βλάβῃ τῆς ἑτέρας, καὶ καταμετροῦμεν μετὰ προσοχῆς τὰ μέρη ΑΜΝΑ, ΚΡΣΚ τὰ ἐκ τῆς ἰδιοκτησίας Ι ἀφαιρούμενα, ὡς καὶ τὰ ΝΠΚΝ, ΣΒΔΣ τῆς ἰδιοκτησίας ΙΙ καὶ ἐὰν μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχῃ



Σχ. 175.

εξίσωσις, ἡ εὐθεῖα ΑΔ θέλει εἶσθαι τὸ νέον ὅριον. Ἐπειδὴ εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς τὸ τοιοῦτον δὲν λαμβάνει χώραν, ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει διαφορά τις α καὶ ὅτι τὸ ὅριον πρέπει νὰ μετατοπισθῇ δεξιόθεν κατὰ τὴν ΓΔ. Εἰς τοιαύτην περίστασιν καταμετροῦμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, διαιροῦμεν τὸ α διὰ $\frac{1}{2}$ ΑΔ καὶ εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τῆς ΑΔ, ἢ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς της εὑρισκόμενον, ὑψοῦμεν κάθετον τὴν ΗΠ ἴσην τῷ λαμβανομένῳ πηλίκῳ· ἐκ δὲ τοῦ σημείου Η φέρομεν παράλληλον ΗΓ τῇ ΑΔ, ἥτις ἀπαντᾷ εἰς τὸ Γ σημεῖον τὸ ὅριον τῆς ἰδιοκτησίας Ι, ἡ ὁποία πρόκειται νὰ ἐλαττωθῇ· ἡ δὲ εὐθεῖα ΓΔ ἡ οὕτω προσδιοριζομένη εἶναι τὸ νέον ζητούμενον ὅριον. Τῷ ὄντι τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἔχει μέτρον

$$\text{ΑΔ}\times\tfrac{1}{2}\text{ΗΠ}=\text{ΑΔ}\times\tfrac{1}{2}\times\frac{2\alpha}{\text{ΑΔ}}=\alpha.$$

Ἐὰν αἱ ἰδιοκτησίαι ἦναι διαφόρου ἀξίας πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἀξίαν τῶν μερῶν ΑΜΝΑ, ΝΠΚΝ κ.τ.λ. τὴν δὲ ΑΔ νὰ προσδιορίσωμε διὰ ψηλαφήσεων.

ΑΡΧΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

(Ἴδε Ἐφαρμ. 80).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

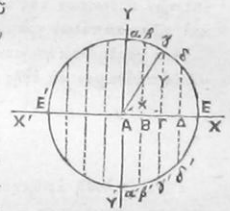
ΕΦΑΡΜ. 97. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς ἐκείνης, τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἐξ ἑνὸς ἐσωτερικοῦ σημείου Α κατὰ σταθερὰν ποσότητα α.

Ἔστω γ ἓν τῶν σημείων τῆς ζητουμένης γραμμῆς Σχ. 176, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι Χ=ΑΓ, Υ=Γγ, λογίζονται ἐπὶ τῶν ἀξόνων ΧΧ′, ΥΥ′, τῶν διερχομένων ἐκ τοῦ ἐσωτερικοῦ σημείου Α. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓγ δίδει τὴν σχέσιν

$$\text{Χ}^2+\text{Υ}^2=\alpha^2 \text{ ἐξ ἧς}$$

$$[1]\ \ldots\ \text{Υ}=\pm\sqrt{\alpha^2-\text{Χ}^2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐκφράζουσα τὴν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεταξὺ τῶν συντεταγμένων Χ, Υ καὶ τῆς ἀποστάσεως α τῶν σημείων τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος γραμμῆς, εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ζητουμένης γραμμῆς.



Σχ. 176.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ.

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν [1] αἱ τιμαὶ τῆς Χ περιλαμβάνονται μεταξὺ 0 καὶ ±α, ἑκάστη τῶν ὁποίων δίδει μίαν τιμὴν διὰ τὴν Υ. Ἄρα ὑποθέτοντες α=2 καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν [1] θέτοντες διαδοχικῶς

$$\left.\begin{array}{l}\text{Χ}=0\\ \text{Χ}=0{,}5=\text{ΑΒ}\\ \text{Χ}=1{,}0=\text{ΑΓ}\\ \text{Χ}=1{,}5=\text{ΑΔ}\\ \text{Χ}=2{,}0=\text{ΑΕ}\end{array}\right\}\ \text{εὑρίσκομεν}\ \left\{\begin{array}{l}\text{Υ}=\pm\ 2{,}00=\text{Αα}=\text{Αα}'\\ \text{Υ}=\pm 1{,}136=\text{Βδ}=\text{Βδ}'\\ \text{Υ}=\pm 1{,}732=\text{Γγ}=\text{Γγ}'\\ \text{Υ}=\pm 1{,}322=\Delta\delta=\Delta\delta'\\ \text{Υ}=\pm\ 0{,}00\end{array}\right.$$

Διὰ τῶν τιμῶν τούτων καὶ τῶν ἀξόνων, προσδιορίζομεν διὰ σημείων τὸ τμῆμα αΒ′ά τῆς γραμμῆς. Ἐπίσης τὸ ἕτερον τμῆμα αΕ′ά κατασκευάζομεν διὰ τῶν αὐτῶν τιμῶν τῆς Υ, λαμβάνοντες τὰς τιμὰς τῆς Χ ἀρνητικῶς, ἐπειδὴ αἱ ἀνωτέρω τιμαὶ τῆς Χ ἀρνητικῶς λαμβανόμεναι χορηγοῦσι τὰς αὐτὰς, ὡς καὶ ἀνωτέρω τιμὰς τῆς Υ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν βλέπομεν ὅτι ἡ ζητουμένη γραμμὴ εἶναι κύκλος.

Ἡ Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία ἀποδεικνύει ὅτι, πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ εἰς Χ καὶ Υ ἐκφράζει εὐθεῖαν γραμμὴν, τοῦ δὲ δευτέρου εἰς Χ καὶ Υ κύκλον, ἔλλειψιν, παραβολὴν ἢ ὑπερβολὴν, τοὐτέστι καμπύλην γραμμήν. Ὥστε ἡ Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία ἀναζητεῖ ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων τὰς ἀληθείας ὅσαι ἀναφέρονται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν καμπύλων γραμμῶν.

Ἵνα χρησιμοποιήσωμεν τὴν δι' ἐξισώσεων παράστασιν τῶν γραμμῶν ἐπιλύσωμεν τὰ ἑξῆς προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.

« Νὰ ἐπιλυθῇ ἀριθμητική τις ἐξίσωσις οἱουδήποτε βαθμοῦ μίαν ἄγνωστον περιέχουσα ».

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$X^5+5X^4+X^3-16X^2-20X-16=0,$$

τῆς ὁποίας τοὺς ὅρους μετεφέραμεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν Ἄλγεβραν, πᾶσα τιμὴ τῆς Χ ἀποκαθιστῶσα τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἄνω ἐξισώσεως μηδὲν, εἶναι μία ῥίζα τῆς ἐξισώσεως, ἔπεται ὅτι ἐὰν θέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$[1] \quad . \quad . \quad . \quad Y=X^5+5X^4+X^3-16X^2-20X-16$$

πᾶσα τιμὴ τῆς Χ ἀποκαθιστῶσα μηδὲν τὴν Υ, εἶναι ἐπίσης μία ῥίζα τῆς ἐξισώσεως. Ἐὰν λοιπὸν κατασκευάσωμεν τὴν ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως [1] παριστανομένην καμπύλην, αἱ τετμημέναι τῶν σημείων καθ' ἃ ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα ΧΧ′ τῶν τετμημένων, θὰ ἐκφράσωσι τὰς ῥίζας τῆς προταθείσης ἐξισώσεως· ἐπειδὴ διὰ τὰ σημεῖα ταῦτα ἔχομεν Υ=0.

Ἵνα κατασκευάσωμεν τὴν καμπύλην, λαμβάνομεν τοὺς δύο ὀρθογωνίους ἄξονας τῶν συντεταγμένων ΧΧ′, ΥΥ′ καὶ δίδομεν εἰς τὴν

Χ διαδοχικῶς διαφόρους τιμὰς δι' ἑκάστην τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν ἑτέραν διὰ τὴν Υ καὶ οὕτω σχηματίζομεν τὸν ἑξῆς πίνακα Σχ. 177.

διὰ $\begin{cases} X=0,0 \\ X=OA=0,5 \\ X=OB=1 \\ X=O\Gamma=1,5 \\ X=O\Delta=2 \end{cases}$ εὑρίσκομεν $\begin{cases} Y=O\delta=-16 \\ Y=A\alpha=-29,53 \\ Y=B\beta=-45 \\ Y=\Gamma\gamma=-45,72 \\ Y=0,00 \end{cases}$

διὰ $\begin{cases} X=OE=-0,5 \\ X=OZ=-1 \\ X=OH=-1,5 \\ X=O\Theta=-2 \\ X=OI=-2,5 \\ X=OK=-3 \\ X=O\Lambda=-3,5 \\ X=OM=-4 \end{cases}$ εὑρίσκομεν $\begin{cases} Y=E\varepsilon=-9,84 \\ Y=Z\zeta=-9,00 \\ Y=H\eta=-7,65 \\ Y=0,00 \\ Y=I\Theta=+16,00 \\ Y=KI=+35,00 \\ Y=\Lambda\varkappa=+40,00 \\ Y=0,00 \end{cases}$

Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου συνάγομεν ὅτι αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι 2, −2 καὶ −1, ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐκφράζουσι τὰς τετμημένας τῶν σημείων Δ, Θ καὶ Μ τῆς καμπύλης διὰ τὰ ὁποῖα ἡ Υ εἶναι μηδέν.



Σχ. 177.

Ἐπεριορίσθημεν μέχρι τῶν τιμῶν Χ=2 καὶ Χ=−4 ἐπειδὴ ἐκεῖθεν τούτων αἱ τιμαὶ τῆς Υ εἶναι θετικαὶ, τοὐτέστι μεγαλήτεραι τοῦ μηδενός.

Κατὰ τὴν θεωρίαν τῶν ἐξισώσεων, ἵνα εὕρωμεν τὰς φανταστικὰς ῥίζας τῆς προταθείσης ἐξισώσεως, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὴν διὰ τοῦ γινομένου

$$(X-2)(X+3)(X+4)=X^3+4X^2-4X-16$$

τῶν διωνύμων παραγόντων, τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν ἀφαιροῦντες

διαδοχικῶς ἐκ τῆς X τὰς πραγματικὰς ῥίζας, καὶ νὰ ἐξισώσωμεν μὲ μηδὲν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον· αἱ δὲ ῥίζαι τότε

$$X=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad X'=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

τῆς οὕτω προκυπτούσης ἐξισώσεως

$$X^2+X+1=0$$

εἶναι αἱ φανταστικαὶ ῥίζαι τῆς προταθείσης ἐξισώσεως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν αἱ ῥίζαι ἦναι ἀκέραιαι ὡς εἰς τὴν προκειμένην περίστασιν, λαμβάνομεν αὐτὰς ταχέως καὶ ἄνευ τοῦ ἰχνογραφήματος τῆς καμπύλης. Τῷ ὄντι ἀφοῦ εὕρωμεν τιμήν τινα τῆς Υ πλησιάζουσαν τῷ μηδενὶ, τότε αὐξάνοντες ἢ ἐλαττοῦντες καταλλήλως τὴν X, καταντῶμεν εἰς τὴν τιμὴν Υ=0, καὶ ἡ εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς X εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

Κατὰ τὰ ζητήματα τῆς πρακτικῆς μηχανικῆς ἀνάγκη συνήθως ὑπάρχει μιᾶς μόνης πραγματικῆς ῥίζης, ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ θετικῆς, ὅτε κατασκευάζομεν τὴν ἐξίσωσιν διὰ μόνων τῶν θετικῶν τιμῶν τῆς X.

Ἐπίσης ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$X^3-3X^2-7X-40=0$$

τοῦ τρίτου βαθμοῦ καὶ τὴν ὁποίαν, κατὰ τὰ προηγούμενα, γράφομεν ὑπὸ τὴν μορφὴν

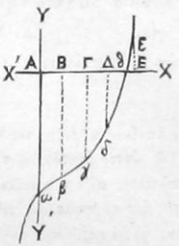
$$Y=X^3-3X^2-7X-40.$$

Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην ἐξίσωσιν διὰ πᾶσαν διδομένην τιμὴν εἰς τὴν X εὑρίσκομεν ἑτέραν τῆς Υ, ὅθεν σχηματίζομεν τὸν ἑξῆς πίνακα,

διὰ $\begin{pmatrix} X=1=AB \\ X=2=A\Gamma \\ X=3=A\Delta \\ X=4=AE \end{pmatrix}$ εὑρίσκομεν $\begin{pmatrix} Y=-35=A\alpha \\ Y=-30=B\beta \\ Y=-19=\Gamma\gamma \\ Y=+\ 4=E\varepsilon \end{pmatrix}$

διὰ τοῦ ὁποίου κατασκευάζομεν τὴν καμπύλην αβγδε ἐπὶ τοὺς ἄξονας X′X, Υ′Υ διὰ θετικὰς τιμὰς τῆς X Σχ. 178.

Εἰς τὸν πίνακα βλέπομεν ὅτι τῆς Υ ἀποκατασταθείσης θετικῆς, ἕπεται ὅτι ἡ προταθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν ῥίζαν θετικὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ 3 καὶ 4.



Σχ. 178.

Ῥίπτοντες ἁπλοῦν βλέμμα ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως βλέπομεν ὅτι ἐκεῖθεν τοῦ 4, αἱ τῆς Υ τιμαὶ εἶναι θετικαὶ καὶ ἀνώτεραι τοῦ μηδενός· καὶ ἐπειδὴ ἐντεῦθεν τῆς τιμῆς X=4, ὑπάρχει μία καὶ μόνη τιμὴ τῆς X δίδουσα Υ=0, ὅπερ καὶ αὐτὴ ἡ καμπύλη δεικνύει, ἄρα μία καὶ μόνη πραγματικὴ καὶ θετικὴ ῥίζα ὑπάρχει εἰς τὴν ἐξίσωσιν. Ἡ κλίμαξ τοῦ ἰχνογραφήματος τῆς καμπύλης δίδει διὰ τὸ σημεῖον 0 τῆς συναπαντήσεως τῆς καμπύλης μὲ τὸν ἄξονα X′X, Δθ=0,9 καὶ ἑπομένως διὰ τὴν ζητουμένην ῥίζαν 3,9. Ἵνα ἔχωμεν μεγαλητέραν προσέγγισιν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Διὰ μὲν X=3,9 ἡ ἐξίσωσις δίδει Υ=0,99 ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι ἡ τιμὴ X= 3,9 εἶναι μεγαλητέρα τοῦ δέοντος.

Διὰ δὲ X=3,8 εὑρίσκομεν Υ=1,85 ἄρα ἡ τῆς X τιμὴ περιλαμβάνεται μεταξὺ 3,8 καὶ 3,9.

Τῆς τιμῆς τῆς X αὐξανομένης κατὰ 3,9—3,8=0,1 διὰ τὴν ἀξίαν Υ=1,85+0,99=2,84 καὶ ὑποτιθεμένων τῶν αὐξήσεων ἀναλόγων ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ὅτι ἡ καμπύλη εἶναι εὐθεῖα διὰ μικρὰς τιμὰς τῆς X καὶ Υ, π. χ. διὰ τὴν αὔξησιν 1,85 τῆς Υ, ἡ X αὐξάνει κατὰ $0,1\times\frac{1,85}{2,84}=0,065$. Ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶναι ἄρα, ὡς ἔγγιστα 3,865. Ἀντεισάγοντες τὴν ῥίζαν ταύτην εἰς τὴν προταθεῖσαν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν Υ=0,03, ἥτις εἶναι προσεγγισις ἱκανὴ ἐν τῇ ἐφαρμογῇ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐργαζόμενοι καταντῶμεν εἰς μεγαλητέραν προσέγγισιν. Αἱ ἀρνητικαὶ ῥίζαι ἐπίσης εὑρίσκονται ὡς αἱ θετικαί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.

Δύο δοθεισῶν γραμμῶν α καὶ β νὰ εὕρωμεν δύο μέσας ἀναλόγου X καὶ Υ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

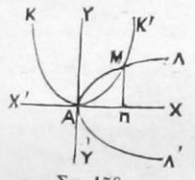
Ἔστω $\alpha > \beta$ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἔχομεν τὰς ἀναλογίας $\alpha : X :: X : \Upsilon,\ X : \Upsilon :: \Upsilon : \beta$,

ἐξ ὧν προκύπτουσιν αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha\Upsilon = X^2,\ \beta X = \Upsilon^2$$

τῶν ὁποίων αἱ ῥίζαι ἐπιλύουσι τὸ πρόβλημα.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ ἡ αὐτὴ τιμὴ τῆς X ἱκανοποιεῖ ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων, αἱ ὑπ' αὐτῶν παριστανόμεναι γραμμαὶ θὰ συναπαντηθῶσιν ἐπί τι σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι εἶναι αἱ ζητούμεναι γραμμαί.



Σχ. 179.

Ἐπιλύοντες τὰς ἐξισώσεις ὡς πρὸς τὴν Υ ἔχομεν $\Upsilon = \frac{X^2}{\alpha}$ καὶ $\Upsilon = \pm\sqrt{\beta X}$ ἑκάστη τούτων κατασκευαζομένη ἐπὶ τοὺς ἄξονας XX', ΥΥ' Σχ. 179 δίδει τὴν παραβολὴν (ἴδε Μέρ. Β'.) ΚΚ' καὶ ΛΛ' αἱ δὲ συντεταγμέναι $X = A\Pi$, $\Upsilon = M\Pi$ τοῦ σημείου τῆς συναπαντήσεως M εἶναι αἱ ζητούμεναι δύο μέσαι ἀνάλογοι.

Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ πρόβλημα διὰ τὴν περίστασιν τοῦ $\alpha = 4$ καὶ $\beta = 2$.

Ἐκ τοῦ προβλήματος τούτου ἐξαρτᾶται ἡ ἐπίλυσις τοῦ Δηλίου προβλήματος, ἴδε Μέρ. Β'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.

Ἔστωσαν αἱ εὐθυγραμμίαι σιδηροδρόμου ΓΤ, ΔΤ νὰ συναρμοσθῶσι κατὰ τὰ σημεῖα A, B διὰ τοῦ κυκλικοῦ τόξου AB.

Ἔστωσαν τὰ μήκη AT, BT Σχ. 180 τῶν ἐφαπτομένων καὶ α ἡ ἀκτὶς OA τοῦ κύκλου. Λαμβάνοντες τὴν ἐφαπτομένην AT καὶ τὴν ἀκτῖνα AO ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων καὶ τὸ A ὡς ἀρχὴν αὐτῶν καὶ σημεῖόν τι μ τοῦ τόξου AB τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι εἶναι X καὶ Υ, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\Upsilon^2 = X(2\alpha - X)$$ ἐξ ἧς $\Upsilon = \pm\sqrt{X(2\alpha - X)}$.

Δίδοντες εἰς τὴν X διαφόρους τιμὰς, διὰ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὰς συστοίχους τιμὰς τῆς Υ, καὶ οὕτω προσδιορίζομεν τόσα σημεῖα τῆς καμπύλης ἐφ' ὅσον ἀνάγκη ὑπάρχει.

Ἐπίσης λαμβάνοντες τὴν χορδὴν AB καὶ τὴν διχοτόμον OT, ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, ἔχομεν δι' οἱονδήποτε σημεῖον μ,

$$\Upsilon = EZ = OZ - OE.$$

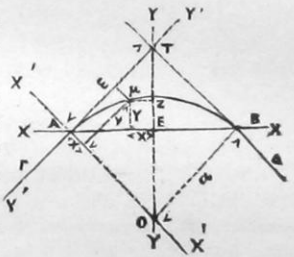
Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον OZμ δίδει τὴν σχέσιν

$$OZ = \sqrt{\alpha^2 - X^2},$$

ὡς καὶ τὸ OAT (§. 9. Πρότ. 58), τὴν $\alpha^2 = OE \times OT$ ἐξ ἧς

$$OE = \frac{\alpha^2}{OT} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \varepsilon^2}}$$ ἄρα $\Upsilon = \sqrt{\alpha^2 - X^2} - \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \varepsilon^2}}$.

Ἡ αὐτὴ τιμὴ τῆς X λαμβανομένη μὲ τὸ σημεῖον $+$ ἢ $-$, δίδει μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμὴν διὰ τὴν Υ, ἐπειδὴ ἡ καμπύλη εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν Υ.



Σχ. 180.

Ἀρκεῖ ἄρα οἱ ὑπολογισμοὶ νὰ γίνωσι διὰ τὸ ἓν μέρος τῆς καμπύλης, ὅπως χρησιμεύσωσιν οἱ αὐτοὶ καὶ διὰ τὸ ἄλλο. Ἐπὶ τούτῳ οἱ κατασκευασθέντες πίνακες καλούμενοι Κυκλογραφικοὶ ἀπλουστεύουσι τοὺς ὑπολογισμοὺς καὶ τὰς ἐργασίας.

Τὸ μῆκος τοῦ τόξου AμB λαμβάνεται κατὰ τὴν §. 11, ἐφαρμ. 72.

Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ πρόβλημα διὰ $\alpha = 257$ μ. καὶ $\varepsilon = 152$ μ.

ΤΕΛΟΣ

ΤΟΥ Α'. ΜΕΡΟΥΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΠΙΝΑΞ

ΤΩΝ ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ Σελ. ά.
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ Σελ. 1.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

ΠΡΟΤ. 1ˊ. Ἐξ ἑνὸς σημείου Ο, ἐπὶ εὐθείας τινὸς ΑΒ ὑπάρχοντος μία μόνη κάθετος δύναται νὰ ὑψωθῇ ἡ ΟΠ. §. 1 σελ. 7.

ΠΡΟΤ. 2ˊ. Τὸ ἄθροισμα δύο προσκειμένων γωνιῶν ΒΟΓ, ΓΟΑ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας. σχ. 3. §. 1. σελ. 7.

ΠΡΟΤ. 3ˊ. Ἀντιστρόφως. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν προσκειμένων γωνιῶν ΓΟΑ καὶ ΓΟΒ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, αἱ πλευραὶ ΟΑ καὶ ΟΒ ἀποτελοῦσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν γραμμήν. σχ. 3. §. 1. σελ. 7.

ΠΡΟΤ. 4ˊ. Δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ σχ. 4 διασταυρούμεναι σχηματίζουσι τὰς ἐκ κορυφῆς ἀντιθέτους γωνίας ΑΟΓ, ΔΟΒ ἴσας. §. 1. σελ. 7.

ΠΡΟΤ. 5ˊ. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα ὅταν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην ΑΒ=Α′Β′ προσκειμένην εἰς ἴσας γωνίας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ Α=Α′ καὶ Β=Β′. §. 2. σελ. 18.

ΠΡΟΤ. 6ˊ. Δύο τρίγωνα ΔΒΓ, ΑΒΓ σχ. 21, εἶναι ἴσα ὅταν ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας Α′Γ′=ΑΓ, Β′Γ′=ΒΓ καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην Γ=Γ′. σχ. 20. §. 2. σελ. 19.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

ΠΡΟΤ. 7'. Όταν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΓ σχ. 21 ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας τὴν ΑΓ=ΔΓ καὶ τὴν ΒΓ κοινὴν, τὴν δὲ ἐξ αὐτῶν τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἄνισον, ἡ τρίτη πλευρὰ ΔΒ ἡ εἰς τὴν μεγαλητέραν γωνίαν ἀντικειμένη, εἶναι μεγαλητέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΒ τῆς ἀντικειμένης εἰς τὴν μικροτέραν γωνίαν. §. 2. σελ. 19.

ΠΡΟΤ. 8'. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' σχ. 20 εἶναι ἴσα ὅταν ἔχωσι τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ΑΒ=Α'Β' ΑΓ=Α'Γ' ΒΓ=ΒΓ'. §. 2. σελ. 20.

ΠΡΟΤ. 9'. Εἰς πᾶν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ σχ. 22 αἱ γωνίαι Α καὶ Β αἱ ἀντικείμεναι εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς εἶναι ἴσαι § 2. σελ. 20.

ΠΡΟΤ. 10'. Ἐὰν τρίγωνόν τι ΑΒΓ σχ. 23 ἔχῃ δύο ἴσας γωνίας ΓΑΒ=ΓΒΑ, αἱ ἀντικείμεναι εἰς αὐτὰς πλευραὶ εἶναι ἴσαι. §. 2. σελ. 20.

ΠΡΟΤ. 11'. Ἐξ ἑνὸς σημείου Α σχ. 24 εὑρισκομένου ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΧΥ, δὲν δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν ἐπ' αὐτῆς παρὰ μίαν καὶ μόνην κάθετον τὴν ΑΠ.

ΠΡΟΤ. 12'. Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Α ἄξωμεν εἰς τὸ σημεῖον Β, σχ. 25 καὶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ δύο κεκλασμένας γραμμὰς ΑΓΒ, ΑΔΒ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία νὰ περιέχῃ τὴν ἄλλην, ἡ πρώτη εἶναι μεγαλητέρα τῆς δευτέρας κεκλασμένης γραμμῆς. §.12. σελ. 21.

ΠΡΟΤ. 13'. Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Α σχ. 24 ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΧΥ ὑπάρχοντος καταβιβάσωμεν ἐπ' αὐτῆς τὴν κάθετον ΑΠ καὶ διαφόρους πλαγίας ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ. 1ον ἡ κάθετος θὰ ᾖναι μικροτέρα πάσης πλαγίας· 2ον αἱ δύο πλάγιαι ΑΒ καὶ ΑΓ αἱ ἐξ ἴσου ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς Π' τῆς καθέτου θὰ ᾖναι ἴσαι· 3ον ἐκ δύο πλαγίων ἡ μεγαλητέρα θὰ ᾖναι ἡ μᾶλλον ἀπέχουσα τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου. §. 2. σελ. 22.

ΠΡΟΤ. 14'. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' σχ. 26 εἶναι ἴσα ὅταν ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας ΒΓ=Β'Γ' καὶ ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην Γ=Γ', ἐκτὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας Α=Α'. §. 2. σελ. 22.

ΠΡΟΤ. 15'. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' σχ. 26 εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας ΒΓ=Β'Γ' καὶ ἀνὰ μίαν πλευρὰν ἴσην ΑΒ=Α'Β' §. 2. σελ. 23.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

ΠΡΟΤ. 16'. Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τρίτης καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εὑρισκόμεναι εἶναι παράλληλοι μεταξύ των. §.3. σελ. 23.

ΠΡΟΤ. 17'. Ἐξ ἑνὸς σημείου Ε ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΓΔ ὑπάρχοντος δὲν δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν παρὰ μίαν καὶ μόνην παράλληλον τὴν ΕΒ. §. 3. σελ. 23.

ΠΡΟΤ. 18'. Δυο παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ σχ. 28 ὅταν συναπαντῶνται ὑπὸ τῆς τεμνούσης ΕΖ, αἱ τέσσαρες προκύπτουσαι ὀξεῖαι γωνίαι ΕΙΒ, ΑΙΟ, ΙΟΔ, ΓΟΖ εἶναι ἴσαι μεταξύ των ὡς καὶ αἱ τέσσαρες ἀμβλεῖαι γωνίαι ΕΙΑ, ΒΙΟ, ΙΟΓ, ΔΟΖ. §.3. σελ. 24.

ΠΡΟΤ. 19'. Ἀντιστρόφως. Ἐὰν αἱ ἐναλλὰξ ἐντὸς γωνίαι ΑΙΟ, ΙΟΔ ἦναι ἴσαι ἢ αἱ σύστοιχοι γωνίαι ΕΙΒ, ΙΟΔ, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ αἱ συναπαντώμεναι ὑπὸ τῆς τεμνούσης ΕΖ εἶναι παράλληλοι. σχ. 28 §. 3. σελ. 25.

ΠΡΟΤ. 20'. Δύο γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΖ σχ. 29 τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι διαδοχικῶς παράλληλοι καὶ διευθύνονται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν εἶναι ἴσαι. §. 3. σελ. 26.

ΠΡΟΤ. 21'. Δύο γωνίαι ΑΟΒ, ΓΙΔ σχ. 30 ὅταν ἔχωσι τὰς πλευρὰς των ἀμοιβαίως καθέτους, εἶναι ἴσαι ἢ ἀναπληρωματικαί. §. 3. σελ. 26.

ΠΡΟΤ. 22'. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ΑΒΓ ἰσοδυναμεῖ μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας. σχ. 31. §. 3. σελ. 27.

ΠΡΟΤ. 23'. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου ἰσοῦται μὲ δὶς τοσαύτας ὀρθὰς γωνίας, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του μεῖον δύο. §. 3. σελ. 27.

ΠΡΟΤ. 24'. Παντὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αἱ ἀπέναντι γωνίαι καὶ ἡ ΒΑΔ καὶ ΒΓΔ εἶναι ἴσαι. §. 3. σελ. 29.

ΠΡΟΤ. 25'. Ἐὰν εἰς τετράπλευρόν τι ΑΒΓΔ σχ. 35 δύο ἀντικείμεναι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ, ἦναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ σχῆμα εἶναι παραλληλόγραμμον. §.3. σελ. 29.

ΠΡΟΤ. 26'. Ἐὰν τετραπλεύρου τινὸς σχ. ΑΒΓΔ, σχ. 35 αἱ ἀντικείμεναι πλευραὶ ἦναι ἴσαι ΑΒ=ΓΔ καὶ ΑΔ=ΒΓ, τὸ σχῆμα εἶναι παραλληλόγραμμον. §.3. σελ. 30.

ΠΡΟΤ. 27'. Αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ παντὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ σχ. 35, τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη. §. 3. σελ. 30.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

ΠΡΟΤ. 28'. Πᾶσα χορδὴ ΑΒ σχ. 40 εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου. §. 4. σελ. 32.

ΠΡΟΤ. 29'. Πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη. §. 4. σελ. 32.

ΠΡΟΤ. 30'. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, τὰ ἴσα τόξα ΑΒ=ΓΔ σχ. 40 ὑποτείνουσιν ἴσας χορδάς. §. 4. σελ. 32.

ΠΡΟΤ. 31'. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, τὸ μικρότερον τόξον ὑποτείνει τὴν μικροτέραν χορδήν. §. 4. σελ. 32.

ΠΡΟΤ. 32'. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους δύο ἴσαι χορδαὶ ὑποτείνουσιν ἴσα τόξα· ἡ δὲ μικροτέρα χορδὴ ὑποτείνει μικρότερον τόξον. §. 4. σελ. 33.

ΠΡΟΤ. 33'. Ἡ ἀκτὶς ΟΓ σχ. 41 ἡ κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ διαιρεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὸ ὑποτεινόμενον ὑπ' αὐτῆς τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη. §. 4 σελ. 33.

ΠΡΟΤ. 34'. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, δύο ἴσαι χορδαὶ ΑΒ, ΓΔ σχ. 40 ἰσάκις ἐκ τοῦ κέντρου ἀπέχουσιν. §.4. σελ. 33.

ΠΡΟΤ. 35'. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, ἐκ δύο ἀνίσων χορδῶν ΑΒ. ΑΓ σχ. 42 ἡ μᾶλλον ἀπέχουσα τοῦ κέντρου εἶναι ἡ μικροτέρα. §. 4. σελ. 33.

ΠΡΟΤ. 36'. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων προτάσεων ἕπονται αἱ ἑξῆς ἀντίστροφοι. §. 4. σελ. 34.

ΠΡΟΤ. 37'. Πᾶσα γραμμὴ ΑΓ σχ. 43 κάθετος ἐπὶ τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΑ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας. §. 4. σελ. 34.

ΠΡΟΤ. 38'. Ἀντιστρόφως. Πᾶσα εὐθεῖα ΑΓ σχ. 43 ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εἰς σημεῖόν τι Α εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΑ. §. 4. σελ. 34.

ΠΡΟΤ. 39'. Δύο παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ σχ. 44, διαχωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἴσα τόξα. §. 4. σελ. 35.

ΠΡΟΤ. 40'. Ἐὰν δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ι σχ. 45, ἔχωσιν ἓν κοινὸν σημεῖον Α εὑρισκόμενον ἐκτὸς τῆς γραμμῆς ΟΓ, ἥτις ἑνόνει τὰ κέντρα, θέλουσιν ἔχει καὶ δεύτερον σημεῖον κοινόν. §.4. σελ. 35.

ΠΡΟΤ. 41'. Δύο περιφέρειαι δύνανται νὰ λάβωσι πέντε διαφόρους θέσεις σχετικῶς ἡ μία πρὸς τὴν ἄλλην. §.4. σελ. 36

ΠΡΟΤ. 42'. Ὁ λόγος τῶν γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΔΓΖ σχ. 50, εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΔΖ τῶν γεγραμμένων ἐκ τῆς

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

κορυφῆς αὐτῶν, ὡς ἀπὸ κέντρου, μετὰ τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος καὶ διαχωριζομένων ὑπὸ τῶν πλευρῶν των. §.5. σελ. 38.

ΠΡΟΤ. 43'. Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου τόξου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της, ἤτοι ὁ λόγος τῆς γωνίας πρὸς τὴν γωνίαν τὴν λαμβανομένην ὡς μονάδα, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ ἡμίσεος τοῦ τόξου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της πρὸς τὴν μονάδα τοῦ τόξου. §. 5. σελ. 41.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

ΠΡΟΒΛ. 1'. Εἰς τὸ σημεῖον Α εὐθείας τινὸς ΧΥ σχ. 58 νὰ σχηματισθῇ γωνία ἴση τῇ δεδομένῃ γωνίᾳ ΓΟΔ. §. 6. σελ. 48.

ΠΡΟΒΛ. 2'. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ καὶ αἱ εἰς αὐτὴν προσκείμεναι γωνίαι εἶναι γνωσταί. §.6. σελ. 49.

ΠΡΟΒΛ. 4'. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ καὶ ἡ μεταξὺ αὐτῶν περιλαμβανομένη γωνία εἶναι γνωσταί. §.6. σελ. 50.

ΠΡΟΒΛ. 5'. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ καὶ ἡ ἀντικειμένη γωνία εἰς μίαν τῶν πλευρῶν τούτων εἶναι γνωσταί. §. 6. σελ. 50.

ΠΡΟΒΛ. 6'. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι γνωσταί. §.6. σελ. 51.

ΠΡΟΒΛ. 7'. Εἰς τὸ σημεῖον Γ σχ. 61 τῆς εὐθείας ΑΒ νὰ ὑψωθῇ κάθετος. §.6. σελ. 51.

ΠΡΟΒΛ. 8'. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΧΥ νὰ καταβιβασθῇ κάθετος ἐκ τοῦ σημείου Γ, ἐκτὸς τῆς εὐθείας ὑπάρχοντος. σχ. 62. § 6. σελ. 52.

ΠΡΟΒΛ. 9'. Ἐκ τοῦ σημείου Γ σχ. 63 ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΧΥ ὑπάρχοντος νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος αὐτῆς. § 6. σελ. 53.

ΠΡΟΒΛ. 13'. Νὰ διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ σχ. 62 εἰς δύο ἴσα μέρη. §. 7. σελ. 57.

ΠΡΟΒΛ. 14'. Νὰ διαιρεθῇ τὸ τόξον ΑΒ σχ. 70 εἰς δύο ἴσα μέρη. §. 7. σελ. 58.

ΠΡΟΒΛ. 15'. Νὰ χαραχθῇ περιφέρεια διαβαίνουσα ἐκ τριῶν δεδομένων σημείων Α, Β, Γ, σχ. 71 μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων. §. 7. σελ. 58.

ΠΡΟΒΛ. 16'. Ἐκ τοῦ σημείου Α σχ. 74 δεδομένου ἐκτὸς τῆς πε-

ριφερείας Ο, νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν. §. 7. σελ. 59.

ΠΡΟΒΛ. 17°. Νὰ ἀχθῇ κοινὴ ἐφαπτομένη εἰς δύο δεδομένας περιφερείας Ο καὶ Γ σχ. 73 καὶ 74. §. 7. σελ. 59.

ΠΡΟΒΛ. 18°. Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ΑΒ σχ. 75 νὰ κατασκευασθῇ κυκλικὸν τμῆμα ἐπιδεκτικὸν δεδομένης γωνίας. §. 7. σελ. 61.

ΘΕΩΡ. 1. Ἔφαρμ. 27. Πᾶσα γωνία ΑΙΒ σχ. 79, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι ἐντὸς κύκλου ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ διαχωριζομένου τόξου ΑΒ ὑπὸ τῶν πλευρῶν της, πλέον τοῦ ἡμίσεος τοῦ διαχωριζομένου τόξου ΓΔ ὑπὸ τῆς προεκβολῆς αὐτῶν. §. 7. σελ. 63.

ΘΕΩΡ. 2. Ἔφαρμ. 28. Πᾶσα γωνία ΑΙΒ σχ. 80 τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν διαχωριζομένων τόξων ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ τῶν πλευρῶν της. §. 7. σελ. 64.

ΘΕΩΡ. 3. Ἔφαρμ. 29. Ἐὰν ἐκ δύο δεδομένων σημείων Α καὶ Γ σχ. 82 ἀγάγωμεν τὰ ζεύγη τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΒ ΑΒ′ καὶ ΓΒ′ κ.τ.λ. σχηματιζουσῶν μεταξύ των γωνίας ἴσας ΑΒΓ καὶ ΑΒ′Γ κ.τ.λ. τὰ σημεῖα Β καὶ Β′ κ.τ.λ. εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας τῆς διερχομένης ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Γ. §. 7. σελ. 65.

ΠΡΟΤ. 44°. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΒΖ σχ. 86 τέμνωνται ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ καὶ ΕΖ οὕτως, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης ΑΓ=ΓΕ′ τότε θὰ συνυπάρχῃ καὶ ἡ ἐξῆς ΒΔ′=ΔΖ. §. 8. σελ. 68.

ΠΡΟΤ. 45°. Πᾶσα γραμμὴ παράλληλος τῇ πλευρᾷ τριγώνου τινὸς ΑΒΓ σχ. 87 διαιρεῖ εἰς ἀνάλογα μέρη τὰς δύο ἄλλας πλευράς. §. 8. σελ. 68.

ΠΡΟΤ. 46°. Ἀντιστρόφως. Ἐὰν εὐθεῖά τις ΔΖ διαιρῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τὰς δύο πλευρὰς τριγώνου, αὕτη εἶναι παράλληλος τῇ τρίτῃ πλευρᾷ. §. 8. σελ. 69.

ΠΡΟΤ. 47°. Ἡ διχοτόμος ΒΙ σχ. 88 τῆς γωνίας ΑΒΓ τριγώνου τινός, διαιρεῖ τὴν ἀντικειμένην πλευρὰν αὐτῆς εἰς δύο τμήματα ΑΙ καὶ ΑΓ, ἀνάλογα τῶν προσκειμένων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ. §. 8. σελ. 69.

ΡΟΤ. 48°. Τέμνοντες τρίγωνον διὰ παραλλήλου γραμμῆς πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ σχηματίζομεν τρίγωνον μερικὸν, ὅμοιον τῷ πρωτῳ. §. 8. σελ. 70.

ΠΡΟΤ. 49°. Δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ σχ. 89 ἔχουσι τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους. §. 8. σελ. 70.

ΠΡΟΤ. 50°. Ἀντιστρόφως. Ὅταν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ σχ. 89 ἔχωσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους εἶναι ὅμοια. §. 8. σελ. 71.

ΠΡΟΤ. 51°. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ σχ. 89 εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχωσι ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην τὴν Α=α περιλαμβανομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων. §. 8. σελ. 71.

ΠΡΟΤ. 52°. Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχωσι τὰς πλευράς των παραλλήλους. §. 8. σελ. 72.

ΠΡΟΤ. 53°. Δύο ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε σχ. 90 ἀναλύονται εἰς ἰσοπληθῆ τρίγωνα ὅμοια καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένα. §. 8. σελ. 73.

ΠΡΟΤ. 54°. Ἀντιστρόφως. Ἐὰν δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε σχ. 90 ἀναλύωνται εἰς ἰσοπληθῆ ὅμοια τρίγωνα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένα, τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια. §. 3. σελ. 73.

ΠΡΟΤ. 55°. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν λόγον δύο οἱωνδήποτε ὁμολόγων πλευρῶν. §. 8. σελ. 74.

ΠΡΟΤ. 56°. Ἡ κάθετος ΑΔ σχ. 96, ἡ καταβιβαζομένη ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο μερικὰ τρίγωνα ὅμοια πρὸς τὸ ὅλον τρίγωνον καὶ μεταξύ των. §. 9. σελ. 79.

ΠΡΟΤ. 57°. Ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων καὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ. §. 9. σελ. 79.

ΠΡΟΤ. 58°. Ἑκάστη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ προσκειμένου αὐτῇ τμήματος. §. 9. σελ. 79.

ΠΡΟΤ. 59°. Τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μεταξύ των, ὡς τὰ τμήματα τῆς ὑποτεινούσης. §. 9. σελ. 80.

ΠΡΟΤ. 60°. Τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης, ὡς τὸ προσκείμενον τμῆμα τῇ πλευρᾷ ταύτῃ πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν. §. 9. σελ. 80.

ΠΡΟΤ. 61°. Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης τοῦ ὀρθογωνίου τρι-

γώνου ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας. §. 9. σελ. 81.

ΠΡΟΤ. 62°. Τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς ΑΓ σχ. 97 τριγώνου τινὸς ΑΒΓ, τῆς ἀντικειμένης εἰς ὀξεῖαν γωνίαν Β, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, μεῖον τοῦ διπλασίου γινομένου τῆς μιᾶς αὐτῶν ΒΓ ἐπὶ τὴν προβολὴν ΒΔ τῆς ἄλλης, εὑρισκομένην ἐπὶ τῆς τελευταίας ταύτης πλευρᾶς. §. 9. σελ. 81.

ΠΡΟΤ. 63°. Τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς ΑΓ σχ. 98, τριγώνου τινὸς ΑΒΓ, τῆς ἀντικειμένης εἰς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ΑΒΓ, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, πλέον τοῦ διπλασίου γινομένου τῆς μιᾶς αὐτῶν ΒΓ ἐπὶ τὴν προβολὴν ΒΔ τῆς ἄλλης, εὑρισκομένην ἐπὶ τὴν τελευταίαν πλευράν. §. 9. σελ. 82.

ΠΡΟΤ. 64°. Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου, ληφθέντος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου, ἄξωμεν τεμνούσας, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὰ δύο σημεῖα τῆς τομῆς ἑκάστης τεμνούσης μὲ τὴν περιφέρειαν, εἶναι σταθερὸν αἰσθήποτε καὶ ἂν ᾖναι ἡ διεύθυνσις αὐτῶν. §. 9. σελ. 83.

ΠΡΟΒΛ. 19°. Νὰ διαιρεθῇ ἡ δεδομένη εὐθεῖα ΑΒ σχ. 105 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δεδομένων γραμμῶν μ, ν, π. §. 10. σελ. 87.

ΠΡΟΒΛ. 20. Νὰ εὑρεθῇ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν δεδομένων εὐθειῶν α, β, γ. σχ. 106. §. 10. σελ. 87.

ΠΡΟΒΛ. 21. Νὰ εὑρεθῇ μέση ἀνάλογος μεταξὺ δύο δεδομένων εὐθειῶν α καὶ β. §. 10. σελ. 88.

ΠΡΟΒΛ. 22. Νὰ διαιρεθῇ ἡ δεδομένη εὐθεῖα ΑΒ, εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεῖζον αὐτῶν νὰ ᾖναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ μικροτέρου αὐτῆς μέρους. §. 10. σελ. 89.

ΠΡΟΒΛ. 23°. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ δεδομένης εὐθείας αε σχ. 90, πολύγωνον ὅμοιον τῷ δεδομένῳ πολυγώνῳ ΑΒΓΔΕ. §. 10. σελ. 90.

ΘΕΩΡ. 4. Ἐφαρμ. 40. Τὰ μέρη ΒΔ καὶ ΓΕ σχ. 109 δύο παραλλήλων, τὰ περιλαμβανόμενα μεταξὺ τῶν πλευρῶν γωνίας τινὸς ΓΑΕ ἔχουσι τοιοῦτον λόγον μεταξύ των, ὁποῖον καὶ αἱ ἀποστάσεις τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας πρὸς τὴν τομήν.

ΠΡΟΤ. 65. Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ σχ. 131 ἐγγράφεται εἰς κύκλον· τοῦτέστι δύναται νὰ διέλθῃ περιφέρεια ἀφ' ὅλας τὰς κορυφάς του. §. 11 σελ. 115.

ΠΡΟΤ. 66°. Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ σχ. 131 περιγράφεται εἰς κύκλον, τοῦτέστι δυνατὸν νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. §. 11. σελ. 116.

ΠΡΟΤ. 67°. Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον ἐντὸς κύκλου. §. 11. σελ. 116.

ΠΡΟΤ. 68°. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον. §. 11. σελ. 117.

ΠΡΟΤ. 69. Δοθέντος κανονικοῦ τινος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἰς περιφέρειαν σχ. 132, νὰ ἐγγραφῇ ἐντὸς τῆς αὐτῆς περιφερείας κανονικὸν πολύγωνον, ἔχον πλῆθὺν πλευρῶν διπλασίαν. §. 11. σελ. 118.

ΠΡΟΤ. 70. Δοθείσης τῆς περιμέτρου Π κανονικοῦ τινος πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι Α, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος Π τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος πλῆθὺν πλευρῶν διπλασίαν. § 11. σελ. 118.

ΠΡΟΒΛ. 24. Νὰ ἐγγραφῇ ἐντὸς κύκλου κανονικὸν δεκάγωνον § 11. σελ. 119.

ΕΦΑΡΜ. 64. Πῶς γίγνεται ἡ διαίρεσις περιφερείας εἰς 360 μέρη ἢ μοῖρας. § 11. σελ. 121.

ΠΡΟΤ. 71°. Δύο κανονικὰ πολύγωνα ἔχοντα ἴσην πλευρῶν πλῆθὺν εἶναι σχήματα ὅμοια. § 11. σελ. 123.

ΠΡΟΤ. 72°. Αἱ περίμετροι δύο κανονικῶν πολυγώνων ἐχόντων ἴσην πλυρῶν πλῆθὺν ἔχουσι τοιοῦτον λόγον μεταξύ των, ὁποῖον καὶ αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν. §. 11. σελ. 124.

ΠΡΟΤ. 73°. Ἡ περιφέρεια δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ἡ περίμετρος τοῦ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ διπλασιάζονται διαδοχικῶς. § 11. σελ. 124.

ΠΡΟΤ. 74°. Αἱ περιφέρειαι εἶναιμεταξύ των ὡς αἱ ἀκτῖνες των. § 11. σελ. 124.

ΠΡΟΤ. 75°. Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶνα σταθερός. §. 11. σελ. 125.

ΠΡΟΤ. 76°. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος π. §. 11. σελ. 125.

ΠΡΟΤ. 77°. Γνωστῆς οὔσης τῆς ἀκτῖνος κύκλου, εὑρίσκεται ἡ περιφέρεια αὐτοῦ, πολλαπλασιαζομένης τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ 2 καὶ ἐπὶ τὸν λόγον π. §. 11. τελ. 126.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

ΘΕΩΡ. 5. Τὰ ὅμοια τόξα εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἀκτῖνές των. § 11. σελ. 128.

ΘΕΩΡ. 6. Ἐφαρμ. 71. Αἱ κεντρικαὶ γωνίαι, αἱ συστοιχοῦσαι μὲ τὰ τόξα τοῦ αὐτοῦ μήκους, εἶναι ἐν ἀντιστρόφῳ λογῳ τῶν ἀκτίνων τῶν τόξων. §. 1. σελ. 129.

ΕΦΑΡΜ. 71'. Πόθεν προκύπτει ἡ εὐθυνσις τῶν κυκλικῶν τόξων; §. 11. σελ. 131.

ΠΡΟΤ. 78'. Δύο ὀρθογώνια τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΑΒΕΖ, ΓΔΗΘ εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των. §. 12. σελ. 134.

ΠΡΟΤ. 79'. Δύο ὀρθογώνια οἱαδήποτε, τοιοῦτον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὁποῖον τὰ γινόμενα τῶν βάσεων αὐτῶν πολλαπλασιασθεισῶν ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα ὕψη. §. 12. σελ. 135.

ΠΡΟΤ. 80'. Τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου τινὸς ΑΒΓΔ σχ. 148 εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ΑΒ πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἤτοι ἐπὶ τὴν κάθετον ΔΙ τὴν καταβιβαζομένην ἀπὸ μίαν τῶν κορυφῶν ἐπὶ τὴν βάσιν. §. 12. σελ. 138.

ΠΡΟΤ. 81'. Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου τινὸς ΑΒΓ σχ. 149 εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ΑΒ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἤτοι τὴν ἐπὶ κάθετον ΓΗ, τῶν καταβιβαζομένων ἐκ τῆς κορυφῆς εἰς τὴν βάσιν. §. 12. σελ. 139.

ΠΡΟΤ. 82'. Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου τινὸς ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων αὐτοῦ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ὕψος. §. 12. σελ. 142.

ΠΡΟΤ. 83'. Ἡ ἐπιφάνεια ἢ τὸ ἐμβαδὸν οἱουδήποτε πολυγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς ἐπιφανείας τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα ἀποσυντίθεται τὸ πολύγωνον. §. 12. σελ. 144.

ΠΡΟΒΛ. 84'. Νὰ μετασχηματισθῇ οἱονδήποτε πολύγωνον εἰς ἰσοδύναμον, τουτέστιν εἰς ἴσον τρίγωνον. §. 12. σελ. 149.

ΠΡΟΤ. 84'. Αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ αβγ σχ. 160 εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων πλευρῶν. §. 13. σελ. 151.

ΠΡΟΤ. 85'. Δύο πολύγωνα ὅμοια ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε σχ. 90 εἶναι μεταξύ των, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. §. 13. σελ. 151.

ΠΡΟΤ. 86'. Ἡ ἐπιφάνεια κανονικοῦ τινὸς πολυγώνου ΑΒΓΔΕ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

σχ. 131 εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς περιμέτρου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀποτεμνούσης ΟΚ. §. 13. σελ. 153.

ΠΡΟΤ. 87'. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος. §. 13. σελ. 155.

ΠΡΟΤ. 88. Δύο τομεῖς τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ κεντρικαὶ γωνίαι (Πρότ. 42). §. 13. σελ. 157.

ΠΡΟΤ. 89. Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων τομέων εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των. §. 13. σελ. 158.

ΠΡΟΤ. 90. Νὰ καταμετρηθῇ ἡ ἐπιφάνεια κυκλικοῦ τμήματος. §. 13. σελ. 160.

ΕΦΑΡΜ. 88. Πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιλαμβανομένου διαστήματος μεταξὺ δύο χορδῶν παραλλήλων καὶ τῶν τόξων τὰ ὁποῖα διαχωρίζουσιν αὐταί. §. 13. σελ. 160.

ΕΦΑΡΜ. 89. Ποία εἶναι διαφορὰ τῶν κύκλων τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ΟΑ καὶ Ο□. §. 13. σελ. 160.

ΕΦΑΡΜ. 89. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυκλικοῦ τραπεζίου ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο τόξων, τὰ ὁποῖα εἶναι βάσεις αὐτοῦ ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων του. §. 13. σελ. 161.

ΠΡΟΤ. 91. Δύο κύκλοι εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ἢ τῶν διαμέτρων. §. 13. σελ. 163.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

ΠΡΟΒΛ. 1'. Ἡ διάμετρος τοῦ 40/φράγκου εἶναι 26 χιλιοστόμετρα, ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του. §. 11. σελ. 129.

ΠΡΟΒΛ. 2'. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρος δεξαμενῆς κυκλικῆς, τῆς ὁποίας ἡ περιφέρεια εἶναι 82,7 μέτρ. §. 11. σελ. 129.

ΠΡΟΒΛ. 3. Ἡ ἀκτὶς τοῦ ἰσημερινοῦ εἶναι 6376984 μέτρ. ποῖος εἶναι ὁ γραφόμενος δρόμος ἐξ ἑκάστου σημείου τῆς περιφερείας αὐτοῦ κατὰ τὸ διάστημα ἑνὸς δευτερολέπτου. §. 11. σελ. 130.

ΠΡΟΒΛ. 4. Ἡ διάμετρος τῶν ὀπισθίων τροχῶν ἁμάξης εἶναι 1,2 μέτρ. ἡ τῶν ἐμπροσθίων 0,8 μέτρ. πόσας στροφὰς κάμνει ἕκαστος τῶν τροχῶν τούτων, ὅταν ἡ ἅμαξα διατρέξῃ τὸ διάστημα ἑνὸς χιλιοστομέτρου; §. 11. σελ. 130.

ΠΡΟΒΛ. 5. Κύκλου ἔχοντος διάμετρον 0,92 μέτρ. νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

τῆς περιφερείας αὐτοῦ τὸ μῆκος τοῦ τόξου $18^0\,26'$. §. 11. σελ. 132.

ΠΡΟΒΛ. 6. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (Πρόβλ. 5 τὸ τόξον τὸ ἔχον μῆκος ἑνὸς μέτρου. §. 11. σελ. 132.

ΠΡΟΒΛ. 7. Δύο τόποι κείμενοι ὑπὸ τὸν ἰσημερινὸν ἔχουσι γεωγραφικὸν μῆκος $5^0\,17'$, ζητεῖται ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἰς μυριάμετρα. §. 11. σελ. 132.

ΠΡΟΒΛ. 8. Ὑπὸ 47 μοιρῶν πλάτος, ἑκάστη μοῖρα μήκους ἰσοδυναμεῖ μὲ 75782 μέτρα· ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ παραλλήλου τούτου. §. 11. σελ. 132.

ΠΡΟΒΛ. 9'. Τὸ ἐμβαδὸν δωματίου τετραγώνου ἔχει 5,23 μέτρ. πλάτος, ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ; §. 12. σελ. 137.

ΠΡΟΒΛ. 10'. Κάλυμμα τραπέζης ἔχον σχῆμα ὀρθογώνιον ἔχει 4,23 μέτρ. πλάτους, 2,61 ὕψους, ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του. §. 12. σελ. 138.

ΠΡΟΒΛ. 11'. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἀγροῦ σχήματος ὀρθογωνίου, ἔχοντος μῆκος 24,7 δεκάμετρα, 13,3 δεκάμ. πλάτος. §. 12. σελ. 138.

ΠΡΟΒΛ. 12'. Ὅταν ἀγροῦ, σχήματος παραλληλογράμμου, ἡ βάσις εἶναι 3,17 δεκάμ. ἢ 317 δεκατόμετρα, καὶ τὸ ὕψος 1,85 δεκάμ. τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $317 \times 185 = 58645$ δεκατόμετρα τετραγωνικὰ ἢ 5 δεκάμ, 86 μέτρ. καὶ 45 δεκατόμετρα τετραγωνικά. §. 12. σελ. 138.

ΠΡΟΒΛ. 13'. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 11 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 8. §. 12. σελ. 139.

ΠΡΟΒΛ. 14. Νὰ εὑρεθῇ δι' ὑπολογισμοῦ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν 41, 16 καὶ 37 μέτρα. §. 12. σελ. 141.

ΠΡΟΒΛ. 15'. Τραπεζίου ἐπὶ τῆς γῆς κεχαραγμένου, ἡ μεταξὺ τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἀπόστασις μετρηθεῖσα εὑρέθη 97 μέτρα, ἑκατέρα δὲ τῶν βάσεων 231 καὶ 145, ὁποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. §. 12. σελ. 142.

ΠΡΟΒΛ. 16'. Δεξαμενὴ κυκλικὴ ἔχει διάμετρον 21,6 ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς; §. 13. σελ. 156.

ΠΡΟΒΛ. 17'. Ἡ διάμετρος τοῦ τεσσαρακονταφράγκου εἶναι 26 χιλιοστόμετρα, ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ; §, 13. σελ. 156.

ΠΡΟΒΛ. 18'. Ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι 6 μέτρων (Πρότ. 87, Πόρ. 1). §. 13. σελ. 156.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

ΠΡΟΒΛ. 19. Πόσων τετραγωνικῶν λευγῶν εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου περιφέρεια εἶναι ἡ τοῦ ἰσημερινοῦ. §. 13. σελ. 157.

ΠΡΟΒΛ. 20. Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τομέως, τοῦ ὁποίου ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι 75^0 καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου 10 μέτρα. §. 13. σελ. 159.

ΠΡΟΒΛ. 21. Εἰς κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὴ εἶναι 12 ἑκατοστόμετρα, ποία εἶναι ἡ κεντρικὴ γωνία τομέως, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι 50 ἑκατοστόμετρα τετραγωνικά. §. 13. σελ. 159.

ΠΡΟΒΛ. 22. Ἡ ἐπιφάνεια τομέως εἶναι 32 δεκατομέτρων τετραγωνικῶν καὶ ἡ κεντρικὴ γωνία 480, ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἰς ὃν ἀνήκει. §. 13. σελ. 159.

ΙΧΝΟΓΡΑΦΙΑ.

ΠΡΟΒΛ. 10'. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ ὀρθογωνίου κάθετος ἐπὶ τῆς εὐθείας ΧΥ, ἐξ ἑνὸς σημείου Γ, εἴτε ἐκτὸς τῆς εὐθείας, εἴτε ἐξ ἑνὸς σημείου Δ, ἐπ' αὐτῆς ὑπάρχοντος. §. 6. σελ. 53.

ΠΡΟΒΛ. 11'. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ ὀρθογωνίου παράλληλος τῆς εὐθείας ΧΥ σχ. 66 ἐξ ἑνὸς δεδομένου σημείου Γ, ἐκτὸς τῆς εὐθείας ὑπάρχοντος. §. 6. σελ. 54.

ΠΡΟΒΛ. 12'. Πῶς δοκιμάζεται ἡ ἀκρίβεια τοῦ ὀρθογωνίου. §. 6. σελ. 55.

ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

ΕΦΑΡΜ. 4. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ἀριθμοὺς ὁ λόγος δύο δεδομένων γραμμῶν ΑΒ καὶ ΓΔ σχ. 8. §. 1. σελ. 10.

ΕΦΑΡΜ. 16'. Πῶς διὰ τοῦ κυκλικοῦ Βερνιέρου γωνία τις π. χ. 6^0 ἐπὶ τῆς γῆς ὑπάρχουσα δύναται νὰ καταμετρηθῇ κατὰ προσέγγισιν μέτρου ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ. §. 5. σελ. 46.

ΕΦΑΡΜ. 25'. Εἰς τί χρησιμεύει ἡ χάραξις τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ἐφαπτομένων περιφερειῶν. §. 7. σελ. 62.

ΕΦΑΡΜ. 33. Πῶς φέρεται ἀπὸ δεδομένου τι σημεῖον ἐπὶ τῆς γῆς ὑπάρχον παράλληλος εὐθείας ἀπροσίτου. §. 8. σελ. 74.

ΕΦΑΡΜ. 41. Δι' ὁποίου ἐργαλείου εὑρίσκεται ἀμέσως τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον, μέχρι τοῦ δωδεκάτου δεδομένης εὐθείας. §. 10. σελ. 91.

ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

ΕΦΑΡΜ. 42. Περὶ Μειονογράφου ἢ ἀναλογικοῦ διαβήτου, καὶ τῆς χρήσεως καὶ κατασκευῆς αὐτοῦ. §. 10. σελ. 92.

ΕΦΑΡΜ. 43*. Πῶς γίνεται ἡ ὑποδιαίρεσις μικροτάτης γραμμῆς εἰς μέγαν ἀριθμὸν ἴσων μερῶν. §. 10. σελ. 93.

ΕΦΑΡΜ. 44*. Περὶ δεκαδικῆς κλίμακος. §. 10. σελ. 94.

ΕΦΑΡΜ. 45*. Πῶς ἀντιγράφεται σχέδιόν τι. §. 10. σελ. 95.

ΕΦΑΡΜ. 55. Περὶ τοῦ σκοποῦ τῆς τριγωνομετρίας. §. 10. σελ. 107.

ΕΦΑΡΜ. 59*. Πῶς ἀνάγεται οἱονδήποτε σχῆμα κατὰ δεδομένον λόγον. §. 10. σελ. 110.

ΕΦΑΡΜ. 60—61—62. Περὶ τοῦ Παντογράφου τῆς κατασκευῆς καὶ χρήσεως αὐτοῦ καὶ ὁδηγίαι πρὸς ἀναγωγὴν σχεδίων.

ΕΦΑΡΜ. 63*. Περὶ ἄλλης μεθόδου πρὸς ἀντιγραφὴν σχήματός τινος.

ΕΦΑΡΜ. 65*—66*. Περὶ τῆς χρήσεως τῶν κανονικῶν πολυγώνων.

ΕΦΑΡΜ. 92. Περὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. §. 13. σελ. 163—166.

ΕΦΑΡΜ. 93. Ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι δύο οἱωνδήποτε ὁμοίων πολυγώνων εἶναι μεταξύ των, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων γραμμῶν των. §. 13. σελ. 166.

ΕΦΑΡΜ. 94. Πῶς εὑρίσκεται ἡ πλευρὰ τετραγώνου, ἰσοδυναμοῦντος σχήματι καμπυλογράμμῳ. §. 13. σελ. 167.

ΕΦΑΡΜ. 90*. Ὁποίαν μέθοδον μεταχειρίζονται ἵνα μετρήσωσι τὴν ἐπιφάνειαν σχήματος περιοριζομένου ὑπὸ ἀκανονίστου καμπύλης. §. 13. σελ. 161.

ΜΗΚΟΜΕΤΡΙΑ.

ΠΡΟΒΛ. 1*. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων Α καὶ Β σχ. 92 χωριζομένων δι' ἑνὸς προσκόμματος π. χ. ποταμοῦ, τὸν ὁποῖον δὲν δυνάμεθα νὰ διέλθωμεν. §. 8. σελ. 75.

ΠΡΟΒΛ. 2*. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀπόστασις δύο ἀπροσίτων σημείων Α καὶ Β, σχ. 93. §. 8. σελ. 76.

ΠΡΟΒΛ. 3*. Νὰ προεκβληθῇ ἐκεῖθεν προσκόμματος, εὐθεῖα ἐπὶ τῆς γῆς ὑπάρχουσα. §. 8. σελ. 77.

ΜΗΚΟΜΕΤΡΙΑ.

ΠΡΟΒΛ. 4*. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ μεταξὺ τῶν χωρίων Α καὶ Β ἀπόστασις ἐκ τῶν ὁποίων τὸ Β εἶναι ἀπρόσιτον σχ. 95. §. 9. σελ. 78.

ΠΡΟΒΛ. 5. Ἐφαρμ. 37*. Πῶς φέρονται ἐπὶ τῆς γῆς κάθετοι μικρᾶς ἐκτάσεως δι' ἁπλῆς χορδῆς. §. 9. σελ. 85.

ΠΡΟΒΛ. 6. Ἐφαρμ. 38. Πῶς προσδιορίζεται κατὰ τὰς στρατιωτικὰς κατοπτεύσεις ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ ἀπροσίτου σημείου Γ καὶ τοῦ προσιτοῦ Δ σχ. 104. §.9. σελ. 85.

ΠΡΟΒΛ. 6. Ἐφαρμ. 39. Ἐκ τοῦ σημείου Ζ νὰ προσδιορισθῇ ἡ μεταξὺ τοῦ ἀπροσίτου σημείου ἀπόστασις σχ. 91. §. 10. σελ. 91.

ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑ.

ΕΦΑΡΜ. 46*. Περὶ τῆς μεθόδου τῶν διαγωνίων.

ΕΦΑΡΜ. 47. Περὶ τῆς μεθόδου τῆς δδεύσεως. §. 10. σελ. 95.

ΕΦΑΡΜ. 48. Περὶ τῆς μεθόδου τῶν πολυγώνων. §. 70. σελ. 97.

ΕΦΑΡΜ. 49. Περὶ τῆς μεθόδου τῆς ἀκτινοβολίας. §. 10. σελ. 100.

ΕΦΑΡΜ. 51. Περὶ τῆς μεθόδου τῶν διατομῶν. §. 10. σελ. 102.

ΕΦΑΡΜ. 52—53. Χρῆσις τῆς μεθόδου τῶν διατομῶν. §. 10. σελ. 103.

Περὶ σχεδιάσεως μεγάλων ἐπιφανειῶν καὶ τριγωνικῆς δικτυώσεως. §. 10. σελ. 104.

ΕΦΑΡΜ. 56. Περὶ σχεδιάσεως πόλεως ἢ χωρίου. §. 10. σελ. 108.

ΕΦΑΡΜ. 74. Πῶς εὑρίσκεται ἡ ἄγνωστος ἀκτὶς περιφερείας τινὸς ἧς τὸ κέντρον δὲν διακρίνεται. §. 11. σελ. 133.

ΕΦΑΡΜ. 78. Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου τινὸς εἴτε ἐπὶ χάρτου, εἴτε ἐπὶ τῆς γῆς ὄντος. §. 12. σελ. 140.

ΕΦΑΡΜ. 79. Πῶς μεταφέρεται ἐπὶ τοῦ χάρτου ἀκανόνιστος γραμμὴ εὑρισκομένη ἐπὶ τῆς γῆς. §. 12. σελ. 142.

ΕΦΑΡΜ. 86*. Ὅταν καταγράφηται τὸ ἐπίπεδον γηπέδου τινὸς, πῶς εὑρίσκεται ἡ κατάλληλος κλίμαξ. §. 13. σελ. 152.

ΕΦΑΡΜ. 95. Περὶ τῆς δοκιμῆς τῶν σχεδιάσεων. §. 13. σελ. 167.

ΥΔΡΟΓΡΑΦΙΑ.

Περὶ ὑδρογραφίας καὶ τοῦ σκοποῦ αὐτῆς. §. 10. σελ. 108.

ΕΦΑΡΜ. 58, Πῶς καταμετρεῖται ἀπ' εὐθείας ἡ ἐπὶ τῆς θαλάσσης βάσις, ἡ ὑπὸ δύο πλοίων περατουμένη. §. 10. σελ. 110.

ΜΗΧΑΝΙΚΗ.

ΕΦΑΡΜ. 23. Τί συμβαίνει κατὰ τὴν μηχανικὴν, ὅταν περιστρέφωμεν τὴν σφενδόνην, §. 7. σελ. 61.

ΕΦΑΡΜ. 24. Αἱ χορδαὶ αἱ περιστρεφόμεναι ἐπὶ τῶν τροχαλιῶν σχηματίζουσιν εὐθείας ἐφαπτομένας ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτῶν. §. 7. σελ. 62.

ΕΦΑΡΜ. 26. Πῶς μεταδίδεται ἡ κίνησις τοῦ τροχοῦ μηχανῆς εἰς τὸν τροχὸν ἑτέρας. §. 7. σελ. 63.

ΕΦΑΡΜ. 31. Πῶς ἄγεται ἐφαπτομένη κοινὴ εἰς δύο περιφερείας. §. 7. σελ. 66.

ΕΦΑΡΜ. 32. Πῶς σχεδιάζεται τὸ Ἄτερμον Λωρίον, ὅπερ μεταδίδει τὴν κίνησιν τροχοῦ τινὸς εἰς ἕτερον. §. 7. σελ. 66.

ΕΦΑΡΜ. 67. Πῶς προσδιορίζεται ἡ διάμετρος τῶν πρωτίστων περιφερειῶν τῶν ὁδοντωτῶν τροχῶν, ὥστε αἱ ταχύτητες τῆς περιστροφῆς νὰ ἔχωσι δεδομένον λόγον. §. 11. σελ. 127.

ΕΦΑΡΜ. 68. Περὶ τῆς κινήσεως τῶν τροχῶν καθ' ἑαυτοὺς καὶ συγκριτικῶς ὁ εἷς πρὸς τὸν ἕτερον. §. 11. σελ. 127.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Η ΑΓΡΟΜΕΤΡΙΑ.

Πῶς προσδιορίζεται ἐπὶ τῆς γῆς σημεῖον καὶ σχηματίζεται γραμμή. §. 1. σελ. 5.

ΕΦΑΡΜ. 1°. Πῶς χαράττεται διὰ τοῦ κανόνος γραμμὴ ἐπὶ τοῦ χάρτου. §. 1. σελ. 8.

ΕΦΑΡΜ. 2°. Πῶς χαράττεται ἐπὶ τῆς γῆς εὐθεῖα μεγίστης ἐκτάσεως. §. 1. σελ. 9.

ΕΦΑΡΜ. 5°. Ποία εἶναι ἡ ἐν χρήσει γραμμικὴ μονάς. §. 1. σελ. 12.

ΕΦΑΡΜ. 6°. Περὶ τῶν ἐργαλείων διὰ τῶν ὁποίων καταμετρεῖται εὐθυγραμμισμένη γραμμὴ ἐπὶ τῆς γῆς. §. 1. σελ. 12.

ΕΦΑΡΜ. 7°. Πῶς καταμετρεῖται ὁριζόντειος γραμμή. §. 1. σελ. 14.

ΕΦΑΡΜ. 8°. Πῶς καταμετροῦνται αἱ γραμμαὶ αἱ ἐπὶ τοῦ χάρτου χαρασσόμεναι. §. 1. σελ. 17.

ΕΦΑΡΜ. 9°. Πῶς διὰ τοῦ Βερνιέρου ἡ προσέγγισις αὕτη προεκτείνεται μέχρι τοῦ δεκάκις χιλιοστοῦ. §. 1. σελ. 17.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Η ΑΓΡΟΜΕΤΡΙΑ.

ΕΦΑΡΜ. 10°. Πῶς χαράττεται ἐπὶ τοῦ χάρτου κύκλος. §. 4. σελ. 37.

ΕΦΑΡΜ. 11°. Πῶς χαράττεται κύκλος ἐπὶ τῆς γῆς. §. 4. σελ. 37.

ΕΦΑΡΜ. 12°. Πῶς εὑρίσκονται διὰ τοῦ κυκλικοῦ Βερνιέρου τὰ πρῶτα λεπτὰ τῶν περιφερειῶν. §. 5. σελ. 41.

ΕΦΑΡΜ. 13°. Πῶς διὰ τοῦ ἀναγωγέως καταμετροῦμεν τὰς γωνίας ἐπὶ τοῦ χάρτου· καὶ ὁποῖός τις οὗτος ὁ ἀναγωγεύς. §. 5. σελ. 42.

ΕΦΑΡΜ. 14°. Ὁποῖός τις ὁ ἀναγωγεὺς ὃν μεταχειριζόμεθα ἐπὶ τῆς γῆς. §. 5. σελ. 43.

ΕΦΑΡΜ. 15°. Πῶς τίθεται ἡ διάμετρος τοῦ γραφομέτρου κατὰ τὴν διεύθυνσιν γραμμῆς εὐθυγραμμισμένης. §. 5. σελ. 45.

ΕΦΑΡΜ. 16°. Πῶς καταμετρεῖται διὰ τοῦ γραφομέτρου ἡ σχηματιζομένη γωνία ὑπὸ δύο διευθύνσεων. §. 5. σελ. 45.

ΕΦΑΡΜ. 17°. Τί ἐστὶ καταμέτρησις ἢ σχεδίασις γωνίας ἢ σχήματος ἐπὶ τῆς γῆς εὑρισκομένου. §. 5. σελ. 47.

ΕΦΑΡΜ. 18°. Πῶς σχηματίζεται ἐπὶ τῆς γῆς καὶ εἰς σημεῖόν τι Μ δεδομένης εὐθείας ΜΝ γωνία ἴση μὲ δεδομένην γωνίαν. §. 5. σελ. 47.

ΕΦΑΡΜ. 19°. Πῶς φέρονται κάθετοι ἐπὶ τῆς γῆς διὰ τοῦ γνώμονος. §. 6. σελ. 55.

ΕΦΑΡΜ. 20°. Πῶς ὑψοῦται εἰς σημεῖόν τι Ο τῆς εὐθείας κάθετος. §. 6. σελ. 56.

ΕΦΑΡΜ. 21°. Πῶς βεβαιοῦται ἡ ἀκρίβεια τοῦ γνώμονος. §. 6. σελ. 55.

ΕΦΑΡΜ. 22°. Πῶς καταβιβάζεται ἔκ τινος σημείου Γ σχ. 69 κάθετος ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ. §. 6. σελ. 56,

ΕΦΑΡΜ. 73°. Πῶς λαμβάνεται ἐν τῇ ἐφαρμογῇ διὰ τὴν εὐκολίαν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας. §. 11. σελ. 133.

ΕΦΑΡΜ. 75°. Περὶ τῆς ὑποδιαιρέσεως τῶν μονάδων τῆς ἐπιφανείας. §. 12. σελ. 139.

ΕΦΑΡΜ. 76°. Πῶς εὑρίσκεται τὸ ὕψος τριγώνου κεχαραγμένου ἐπὶ τῆς γῆς. §. 12. σελ. 139.

ΕΦΑΡΜ. 77°. Πῶς εὑρίσκεται τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τοῦ κεχαραγμένου ἐπὶ τοῦ χάρτου. §. 12. σελ. 139.

ΕΦΑΡΜ. 81°. Περὶ τῶν καταλλήλων πράξεων πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐπιφανείας πολυγώνου τινός. §. 12. σελ. 145.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Η ΑΓΡΟΜΕΤΡΙΑ.

ΕΦΑΡΜ. 82'. Περὶ τῆς μεθόδου τὴν ὁποίαν μεταχειρίζονται εἰς τὴν ἀγρομετρίαν, ἵνα συντέμνωσι τὰς ἐπὶ τῆς γῆς ἐργασίας. §. 12. σελ. 145.

ΕΦΑΡΜ. 83'. Περὶ τῆς μεθόδου τὴν ὁποίαν μεταχειρίζονται, ὅταν τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἀπρόσιτον. §. 12. σελ. 146.

ΕΦΑΡΜ. 84'. Περὶ σχεδιάσεως ἀγροκηπίων. §. 12. σελ. 148.

Πῶς λαμβάνεται ἡ ἀποτέμνουσα δεξαμενῆς σχήματος κανονικοῦ πολυγώνου. §. 13. σελ. 154. Σημ. 1η.

ΕΦΑΡΜ. 91'. Περὶ τῆς συντόμου μεθόδου, τὴν ὁποίαν μεταχειρίζονται εἰς τὴν ἀγρομετρίαν. §. 13. σελ. 163.

ΕΦΑΡΜ. 96. Περὶ τῆς ὑποδιαιρέσεως τῶν ἐπιπέδων σχημάτων. §. 13. σελ. 168.

ΠΡΟΒΛ. 1. Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον σχ. 168 εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν διὰ γραμμῶν ἀγομένων παραλλήλως πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου. §. 13. σελ. 168.

ΠΡΟΒΛ. 2. Νὰ διαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη διὰ παραλλήλων εὐθειῶν τῇ ΑΓ. §. 13. σελ. 168.

ΠΡΟΒΛ. 3. Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν, διὰ γραμμῶν ἀγομένων ἀπὸ μίαν κορυφὴν τοῦ τριγώνου. §. 13. σελ. 169.

ΠΡΟΒΛ. 4. Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς ἴσα μέρη διὰ γραμμῶν ἀγομένων ἀπὸ μίαν κορυφήν. §. 13. σελ. 170.

ΠΡΟΒΛ. 5. Νὰ διαιρεθῇ τετράγωνον εἰς ἴσα μέρη. §. 13. σελ. 170.

ΠΡΟΛ. 6. Νὰ διαιρεθῇ παραλληλόγραμμον εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν. §. 13. σελ. 170.

ΠΡΟΒΛ. 7. Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς ἴσα μέρη. §. 13. σελ. 171.

ΠΡΟΛ. 8. Νὰ διαιρεθῇ τὸ τραπέζιον εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν, διὰ γραμμῶν ἀπολήγουσῶν εἰς τὰς βάσεις. §. 13. σελ. 171.

ΠΡΟΒΛ. 9. Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν διὰ γραμμῶν παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις. §. 13. σελ. 172.

ΠΡΟΒΛ. 10. Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς μέρη ἴσα διὰ γραμμῶν ἀγομένων παραλλήλως πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ. §. 13. σελ. 172.

ΠΡΟΒΛ. 11. Νὰ διαιρεθῇ πολύγωνον εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν καὶ διὰ γραμμῶν κεκλασμένων, ἀπολήγουσῶν εἰς δύο κορυφὰς τοῦ πολυγώνου. §. 13. σελ. 173.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Η ΑΓΡΟΜΕΤΡΙΑ.

ΠΡΟΒΛ. 12. Νὰ διαιρεθῇ καμπυλόγραμμον σχῆμα εἰς μέρη τοιαῦτα, ὡς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἀπαιτεῖ. §. 13. σελ. 173.

ΠΡΟΒΛ. 13. Νὰ διαιρεθῇ πολύγωνον εἰς ἴσα μέρη διὰ κεκλασμένων γραμμῶν, ἀπολήγουσῶν εἰς δύο κορυφὰς τοῦ πολυγώνου. §. 13. σελ. 173.

ΠΡΟΒΛ. 14. Νὰ διαιρεθῇ οἱονδήποτε πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ σχ. 174 εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν, διὰ γραμμῶν διερχομένων ἔκ τινος ἐσωτερικοῦ καὶ γνωστοῦ σημείου Ο. §. 13. σελ. 174.

Περὶ ἐπανορθώσεως τῶν ὁρίων. §. 13. σελ. 176.

Πῶς ἐνεργοῦμεν ὅταν αἱ γαῖαι εἶναι διαφόρου φύσεως. §. 13. σελ. 175.

ΟΔΟΠΟΙΙΑ.

ΕΦΑΡΜ. 30. Πῶς προσδιορίζεται διὰ σημείων τόξον κύκλου, τοῦ ὁποίου δίδονται τρία σημεῖα ΑΒ καὶ Γ καὶ τὸ κέντρον ἀπρόσιτον. §. 7. σελ. 65.

ΕΦΑΡΜ. 50. Περὶ τῆς συνθέτου μεθόδου τῆς σχεδιάσεως κατὰ τὴν μεταρρύθμισιν τῆς ὁδοῦ συνοικίας. §. 10. σελ. 101.

ΠΡΟΒΛ. 3. Ἔστωσαν αἱ εὐθυγραμμίαι σιδηροδρόμου ΓΤ, ΔΤ νὰ συναρμοσθῶσι κατὰ τὰ σημεῖα ΑΒ διὰ τοῦ κυκλικοῦ τόξου ΑΒ. §. 13. σελ. 182.

Χάραξις τόξου τοῦ ὁποίου τρία μόνον σημεῖα εἶναι γνωστά. §. 7. σελ. 65. ἐφαρμ. 30.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

ΕΦΑΡΜ. 80. Πῶς μεταφέρεται ἐπὶ χάρτου ἀκανόνιστος γραμμὴ αὐρισκομένη ἐπὶ τῆς γῆς. §. 12. σελ. 143.

ΠΡΟΒΛ. 1'. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς ἐκείνης τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἐξ ἑνὸς ἐσωτερικοῦ σημείου Α κατὰ σταθερὰν ποσότητα α. §. 13. σελ. 177.

Περὶ κατασκευῆς τῆς ἐξισώσεως. §. 13. σελ. 177.

ΠΡΟΒΛ. 1. Νὰ ἐπιλυθῇ ἀριθμητικὴ τις ἐξίσωσις οἱουδήποτε βαθμοῦ μίαν ἄγνωστον περιέχουσα. §. 13. σελ. 178.

ΠΡΟΒΛ. 2. Δύο δοθεισῶν γραμμῶν α καὶ 6 νὰ εὕρωμεν δύο μέσας ἀναλόγους Χ καὶ Γ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. §. 13. σελ. 181.

ΕΡΓΑΛΕΙΑ.

Πασσαλίσκος . . . . . §. 1. σελ. 5. Σχ. 1'.
Κανών . . . . . §. 1. » 8. Σχ. 5'.
Ἀκόντιον . . . . . §. 1. » 9. Σχ. 7'.
Σκοπός . . . . . §. 1. » 9. Σχ. 7'.
Χωρομετρικὴ Βελόνη . . . . §. 1. » 12. Σχ. 9'.
Ἄλυσος . . . . . §. 1. » 12. Σχ. 9'.
Δεκάμετρον Χαλύβδινον . . . §. 1. » 13. Σχ. 10'.
Μολύβδαινα . . . . . §. 1. » 13. Σχ. 11'.
Ταινία . . . . . §. 1. » 14. Σχ. 12'.
Διπλοῦν Δεκατόμετρον . . . . §. 1. » 17.
Βερνιέρος Εὐθύγραμμος . . . . §. 1. » 17. Σχ. 18.19'.
Διαβήτης . . . . . §. 4. » 37.
Βερνιέρος Κυκλικός . . . . . §. 5. » 41. Σχ. 52.
Ἀναγωγεύς . . . . . §. 5. » 53. Σχ. 53'.
Γόνυ . . . . . §. 5. » 44. Σχ. 54'.
Γραφόμετρον . . . . . §. 5. » 43. Σχ. 54'.
Ἐπαναληπτικὸς Κύκλος . . . §. 5. » 46.
Χωρομετρικὸς Γνώμων . . . . §. 6. » 51. Σχ. 68'.
Ὀρθογώνιον Τρίγωνον ἢ Γνώμων §. 6. » 53. Σχ. 64'.
Ἀναγωγικὸς ἢ Ἀναλογικὸς Διαβήτης . . . . . §.10. » 91. Σχ. 112.
Δεκαδικὴ Κλίμαξ . . . . . §.10. » 91. Σχ. 113'.
Παντογράφος . . . . . §.10. » 112. Σχ. 128.

ΣΗΜ. Τὰ θεωρήματα τὰ ὁποῖα ἀνεφέραμεν ἐν τῇ Θεωρητικῇ Γεωμετρίᾳ χρησιμεύουσι πρὸς κατασκευὴν τινῶν ἐργαλείων.

Πρὸς συμπλήρωσιν τῶν ἀρχῶν τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας ἔπρεπε νὰ ἀναφέρωμεν τὰς τρεῖς καμπύλας γραμμὰς, ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ καιρὸς δὲν ἐπέτρεψεν ἡμῖν τοῦτο θέλομεν ἀναφέρει αὐτὰς εἰς τὸ Β'. ΜΕΡΟΣ.

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΕΝ ΤΩι ΠΙΝΑΚΙ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΩΝ.

Σελ.	8	στίχ.	11	ἀντὶ τῆν	γράφε τὴν
»	9	»	32	» εἶναι	» ἦναι
»	10	»	»	» ἔκφραοιν	» ἔκφρασιν
»	12	»	23	» εὐθυγράγμων	» εὐθυγράμμων
»	14	»	3	» ἄξωνα	» ἄξονα
»	»	»	12	» ὁριζοντίου	» ὁριζοντείου
»	15	»	10	» ειδποιεῖ	» εἰδοποιεῖ
»	»	»	17	» λαβιδα	» λαβίδα
»	16	»	1	» ὁριζοντίως	» ὁριζοντείως
»	»	»	13	» »	» »
»	25	»	20	» ἑκοτέροθεν	» ἑκατέρωθεν
»	26	»	26	» αῦτὴν	» αὐτὴν
»	32	»	1	» ταυτισωμεν	» ταὐτίσωμεν
»	35	»	17	» ἦναι	» ἦναι
»	37	»	25	» πασσαλῖσκον	» πασσαλίσκον
»	39	»	18	» ἦναι	» ἦναι
»	39	»	19	» »	» »
»	40	»	1	» λέγυμεν	» λέγομεν
»	»	»	4	» τεθῆ	» τεθῇ
»	41	»	2	» ἡμίσεως	» ἡμίσεος
»	41	»	20	» »	» »
»	43	»	37	» ἄξωνα	» ἄξονα
»	54	»	3	» »	» »
»	47	»	8	» ὁριζοντίου	» ὁριζοντείου
»	»	»	12	» »	» »
»	»	»	26	» »	» »
»	»	»	27	» »	» »
»	50	»	4	» περιλαμβανομένῆ	» περιλαμβανομένη
»	53	»	14	» ἀπὸ	» ἀπὸ
»	54	»	13	» λάβει	» λάβῃ
»	55	»	28	» ἐπειδὴ	» ἐπειδὴ

Σελ.	55	στίχ. 32	ἀντὶ δὲ	γράφε δὲ
»	56	» »	» κατ' ἔναντι	» κατέναντι
»	58	» 22	» εὖθείας	» εὐθείας
»	60	» 6	» ἑνοῦμεν	» ἑνοῦμεν
»	60	» 32	» κῆται	» κῆται
»	61	» 33	» ἐπιτάσεως	» ἐπιτάσεως
»	75	» 32	» σχηματίζομεν	» σχηματίζομεν
»	81	» 19	» τιτὸς	» τινὸς
»	91	» 35	» ἐργαλείαυ	» ἐργαλείου
»	92	» 1	» ἄξωνα	» ἄξονα
»	94	» 11	» τῇ ΑΑ′, διαιροῦντες	» τῇ ΑΑ′.Διαιροῦντες
»	»	» 14	» φέροντες	» φέρομεν
»	95	» 24	» λαμβάντμεν	» λαμβάνομεν
»	95	» 30	» ἐπὶ	» ἐπὶ
»	98	» 3	» τέοσαρας	» τέσσαρας
»	98	» 15	» πρόκηνται	» πρόκεινται
»	100	» 16	» κωδονοστάσια	» κωδωνοστάσια
»	108	» 22	» ἄξωνα	» ἄξονα
»	110	» 31	» πρόκειται	» πρόκηται
»	111	» 16	» τὸν	» τὴν
»	112	» 34	» εὐθεῖαῖ	» εὐθεῖάν
»	113	» 17	» ἔχει	» ἔχῃ
»	117	» 11	» ἀκτίνας	» ἀκτίνας
»	119	» 29	» ἡτις	» ἥτις
»	119	» 23	» ἀκτίνας	» ἀκτῖνας
»	124	» 23	» ἔγγεγραμμένου	» ἐγγεγραμμένου
»	127	» 21	» ἀτέρμονος	» ἀτέρμου
»	131	» 1	» διαιροῦντες	» διαιρούντων
»	131	» 12	» προκύπτε	» προκύπτει
»	131	» 26	» ἦναι	» ἦναι
»	135	» 2	» αὐτῇ	» αὐτῆς
»	137	» 20	» τεραγωνικοὺς	» τετραγωνικούς.
»	139	» 1	» 4	» 5
»	139	» 4	» αετραγώνικὰ	» τετραγωνικὰ
»	140	» 26	» $\frac{4\alpha^2\gamma^2-6(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2}$	» $\frac{4\alpha^2\gamma^2-(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2}$
»	141	» 19	» ὑποθέσωμετ	» ὑποθέσωμεν
»	143	» 15	» βελώνην	» βελόνην

Σελ.	146	στίχ. 2	ἀντὶ ἔχομεν	γράφε ἔχομεν
»	152	» 6	» ὥρους	» ὅρους
»	154	» 11	» πλύγωνον	» πολύγωνον
»	158	» 11	» ἀκτίνας	» ἀκτῖνας
»	159	» 12	» κα	» καὶ
»	166	» 6	» συνάγομεν	» συνάγομεν
»	166	» 17	» ἴσα	» ἴσα
»	171	» 22	» ἑκάστην	» ἑκάστην
»	173	» 1	» πρόκηται	» πρόκειται
»	176	» 31	» $\Delta\Delta\times\frac{1}{2}\Pi\Pi=\Delta\Delta\times\frac{1}{2}\times\frac{2\alpha}{\Delta\Delta}=\alpha$,	
			γράφε $\Delta\Delta\times\frac{1}{2}\Pi\Pi=\Delta\Delta\times\frac{1}{2}\times\frac{2\alpha}{\Delta\Delta}=\alpha$	
»	176	» 34	» προσδιορίσωμνε	γράφε προσδιωρίσωμεν
»	181	» 9	» περ	» ὅπερ
»	181	» 30	» ἀναλόγου	» ἀναλόγους

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΕΙΡΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ. Ἀριθ. 1.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗΣ

Διὰ τὰ Σχολεῖα.

ΥΠΟ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Α. ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΟΥ

ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ.

«Ἀεὶ ὁ Θεὸς γεωμετρεῖ.»
Πλάτ. Συμπ. Πρόβλ. 6'. Πλουτ. Τὰ Ἠθικ.

ΜΕΡΟΣ Β'.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ.

(Μετὰ 170 Ξυλογραφιῶν).

Ἀδείᾳ τοῦ Ὑπουργείου τῆς Δημοσίας Ἐκπαιδεύσεως.

ΕΝ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥΠΟΛΕΙ
1876.

ΤΥΠΟΙΣ ΒΟΥΤΥΡΑ ΚΑΙ Σ/ΑΣ.

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον κάτωθι τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφήν μου θεωρεῖται κλοπιμαῖον καὶ καταδιώκεται κατὰ τὸν νόμον.

ΤΟ ΑΝΑ ΧΕΙΡΑΣ

ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΜΕΡΟΣ

ΤΗΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

δὲν θὰ ἔβλεπε τὸ φῶς ἐὰν γενναίως δὲν συνεισέφερεν ὑπὲρ τῆς ἐκδόσεως αὐτοῦ ὁ ἀκάματος ἀρωγὸς παντὸς καλοῦ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Ο ΖΑΡΙΦΗΣ.

Γ. Α. ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ.

Ἀναγκαῖον τὸν τέλειον ἄνδρα καὶ θεωρητικὸν εἶναι τῶν ὄντων, καὶ πρακτικὸν τῶν δεόντων· τοῦτο δ' ἔξεστι καὶ ἐκ τούτων συνιδεῖν . . .

Τὰ Ἀρέσκ. τοῖς Φιλοσόφ. Βιβλ. Α'. Πλουτ. Τὰ Ἠθικ.

ΣΥΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ. *Γεωμετρία* καλεῖται ἡ ἐπιστήμη ἡ διδάσκουσα τὸ σύνολον τῶν ἀλληλούχων ἀληθειῶν, τῶν ἐνυπαρχουσῶν μὲν εἰς τὰ *συγκεκριμένα μεγέθη*, τὰ εἰς τὰς αἰσθήσεις ἡμῶν ὑποπίπτοντα, παραγομένων δὲ διὰ τοῦ λογικοῦ συλλογισμοῦ, ἐφαρμοζομένου ἐπὶ προφανῶν τινων ἀρχῶν.

Συγκεκριμένα μεγέθη εἰσὶν αἱ *γραμμαὶ*, αἱ *ἐπιφάνειαι*, τὰ *σχήματα* καὶ οἱ *ὄγκοι*· αἱ δὲ ἀλήθειαι ἐκφράζουσι τὰς ἐνυπαρχούσας σχέσεις εἰς τὰ συστατικὰ μέρη τῶν μεγεθῶν καὶ ἀποβλέπουσι τὴν σύγκρισιν καὶ τὴν καταμέτρησιν αὐτῶν.

Ἐκ τῶν *ἀρχῶν*, αἱ μέν εἰσιν ἀφῃρημέναι καὶ ἐφαρμόζονται ἐφ' οἱουδήποτε μεγέθους (Ἀξίωμα α', β', γ', καὶ δ'. Μέρος Α'.) αἱ δὲ, (Ἀξίωμα ε', καὶ στ'. Μέρος Α'.) ἀνήκουσιν εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἰδίως, καὶ διὰ τῆς αἰσθήσεως καθίστανται αὐτόδηλοι.

Αἱ ἐν λόγῳ *ἀλήθειαι* διακρίνονται ὑπὸ τὸ ὄνομα *Προτάσεις* ἢ *Θεωρήματα*, αἱ δὲ *ἀρχαί*, ἐξ ὧν ἐξαρτῶνται αἱ προτάσεις, καλοῦνται *ἀξιώματα*.

Λαμβάνομεν γνῶσιν περὶ τῆς ἀληθείας τοῦ ὅλου συναρμολογήματος ἑκάστης προτάσεως, διὰ τῆς *ἀποδείξεως*.

Ἀπόδειξις δὲ εἶναι ἡ παραγωγὴ τῆς ἀληθείας προτάσεώς τινος ἐξ ἄλλων *προτάσεων* ἢ *ἀρχῶν* ὁμολογουμένως ἀληθῶν *.

(*) Πρῶτος ὁ Εὐκλείδης (320 — 285 π. Χ.) συνῆψεν εἰς ἓν ὅλον καὶ συνημμολόγησε σύστημα διδακτικὸν τῶν στοιχείων τῆς γεωμετρίας. Οὗτος συλλέξας τὰς μέχρι τῆς ἐποχῆς του γνωστὰς γεω-

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ. Τούτων τεθέντων, ἐὰν παραδεχθῶμεν τὸ ὑπὸ τῶν λογικευομένων ὁμολογούμενον ὅτι «*ὁ τελικὸς σκοπὸς πάσης νοήσεως εἶναι ἡ ἀλήθεια*» καὶ ὅτι, «*σκοπὸς τῆς λογικῆς εἶναι ἡ ἔκθεσις τῶν νόμων τοῦ διανοεῖσθαι*», ἕπεται ὅτι, ἡ διδασκαλία τῆς *καθαρᾶς γεωμετρίας*, δεόντως ὀφείλει νὰ προηγηθῇ *πάσης ἐπιστημονικῆς ἢ φιλοσοφικῆς* γνώσεως, καθότι εἶδος τι *φυσικῆς λογικῆς* αὕτη ἀποτελοῦσα, ἀναντιῤῥήτως συντείνει εἰς τὸ νὰ ὀξύνῃ

μετρικὰς γνώσεις καὶ προσθέσας εἰς ταύτας τὰς ἑαυτοῦ ἀνακαλύψεις καὶ καθιερώσας ἀναντίῤῥητον ἀπόδειξιν ἐν ἑκάστῃ προτάσει μὴ ἐχούσῃ πρότερον τοιαύτην, συνέταξε τὸ περιώνυμον αὐτοῦ σύγγραμμα.

Κατὰ τὴν ὁμολογίαν τῶν σχολιαστῶν, καθ' ἅπαν τὸ συναρμολόγημα τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εὑρίσκει τις τὸν ἐπιστημονικὸν τύπον· ἐπειδὴ καθ' ὅλα τὰ μέρη τοιαύτη ἀλληλουχία ὑπάρχει ὥστε, ἑκάστη πρότασις ἔχει τὰς πρώτας καὶ ἀναγκαίας σχέσεις πρὸς τὰς πρὸ αὐτῆς καὶ πρὸς τὴν μετ' αὐτὴν πρότασιν, αὗται δὲ πάλιν ἔχουσι τὴν ἀκροτάτην ἑνότητα πρὸς τὰς θεμελιώδεις ἀρχάς.

Αἱ ἀποδείξεις γίνονται διὰ τῆς μεθόδου τῆς καλουμένης ἀπαγωγὴ εἰς τὸ ἄτοπον, ἥτις, κατὰ τοὺς λογικευομένους, «εἶναι πολλοῦ λόγου ἀξία, ὡς συντείνουσα τὰ μέγιστα εἰς τὴν ἐπέκτασιν καὶ διόρθωσιν τῆς ἀνθρωπίνης γνώσεως·» καὶ ἧς χρῆσιν ἐποιήσατο ὁ Εὐκλείδης ὅπως ἀπορύγῃ τὰς ἀπὸ τῶν σοριστῶν προερχομένας ἀντιρρήσεις.

Ἡ ἀποδεικτικὴ δὲ αὕτη μεθοδος στηρίζεται ἐπὶ τοῦτο ὅτι, « πᾶσα ὑπόθεσις ἀντικειμένη εἰς τὴν ἐκφώνησιν προτάσεώς τινος ἐπιφέρει ἀντίφασιν». Διὰ τῆς τοιαύτης μεθόδου συνδυάζεται, κατά τινα τρόπον, καὶ συγκεντροῦται ἀριθμός τις ἐπικτήτων προτάσεων πρός τινα σκοπόν.

Ἐν γένει, ἡ κατ' Εὐκλείδην γεωμετρία ἀποτελεῖ ἰδιάζουσαν καὶ αὐθύπαρκτον ἐπιστήμην οὐδόλως προστρέχουσαν εἰς τὴν ἐπιστήμην τῶν ἀριθμῶν. Τούτου ἕνεκεν, ὑπὸ τῶν σχολιαστῶν, προσωνομάσθη «Εὐαγγέλιον τῶν στοιχείων τῆς γεωμετρίας» πρὸς δὲ «Ἀριστούργημα λογικῆς». *(Histoire des Mathématiques).*

Τὰ στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, ἐν Ἀγγλίᾳ, καὶ τὴν σήμερον κατ' ἔκτασιν διδάσκονται· ἐκυκλοφόρησαν δὲ ὑπὲρ τὰς δύο χιλιάδας ἔτη.

Ἡ κατὰ Λέγενδρον ὅμως γεωμετρία, ἥτις ἐχρησίμευσεν ὡς τύπος

καὶ ποδηγετῇ τὸν νοῦν, ὅστις θεωρεῖται ὡς τὸ ὄργανον πάσης ἐπιστημονικῆς δημιουργίας (*). Οὕτως, ἀπό τινας γνωστὰς ἀληθείας μεταβαίνῃ τις εἰς ἄλλας ἐπὶ μᾶλλον ὑποκρυπτομένας.

Τούτου ἕνεκεν, ὁ Πλάτων (430 — 347 π. Χ.), τοιαύτην λογικὴν προτάξας πάσης μαθήσεως ἐπὶ τῆς ἀκαδημίας αὐτοῦ ἐπέγραψε τὸ «*μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω*»· ὁ δὲ Ξενοκράτης, πρὸς τὸν προσερχόμενον αὐτῷ ἀκροατὴν γενέσθαι τῆς φιλοσορίας καὶ ἄπειρον ὄντα γεωμετρίας, ἔλεγεν, «*ἄπελθε, οὐ γὰρ λαβὰς ἔχεις φιλοσοφίας*».

Ἀλλ' ἡ διδασκαλία τῆς γεωμετρίας οὐ μόνον ἀναγκαία θεωρεῖται, ὡς τὰ μάλα συντείνουσα εἰς τὴν *λογικὴν διαπαίδευσιν τοῦ νοὸς*, ἀλλ' ἐν ταὐτῷ καὶ ἀπαραίτητος, ὡς *ἀφετηρία πάσης πρακτικῆς καὶ βιοποριστικῆς γνώσεως.*

Τῷ ὄντι, τοῖς πᾶσιν εἶναι γνωστὸν ὅτι, ὅπως προπαρασκευάσωμεν τὴν ὑπὸ τῆς φύσεως δαψιλῶς χορηγουμένην ὕλην πρὸς ἰδίαν ἡμῶν χρῆσιν, καθυποβάλλομεν αὐτὴν *εἰς τὴν κί-*

εἰς τὰ πλεῖστα τῶν νέων συγγραμμάτων, ὅλως τὸ ἐναντίον ἔχει· ἐπειδὴ οὗτος (1782—1833) παραλαβὼν τὰς πλείστας προτάσεις τῆς γεωμετρίας τοῦ Εὐκλείδου, καὶ θεωρήσας τὴν γεωμετρίαν ὡς ἐπιστήμην καθαροῦ συλλογισμοῦ, καὶ δοκιμάσας νὰ ἀνασκευάσῃ τὴν κατ' Εὐκλείδην θεωρίαν τῶν παραλλήλων, δὲν διετήρησε τὴν γνησιότητα τῶν καθαρῶς γεωμετρικῶν μεθόδων τῶν ἀρχαίων, ἀλλ' ἀπεναντίας, ἀναμίξας ἐν ταῖς ἀποδείξεσι τὰς ἀριθμητικὰς μεθόδους τῆς νεωτέρας ἀναλύσεως, ἐκ βάθρων μετέτρεψε τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας.

Ἐντεῦθεν ἔλαβον τὴν ἀρχὴν των τὰ στοιχεῖα τῆς νεωτέρας γεωμετρίας, ἥτις, διὰ τὸ εὔληπτον τῶν ἀποδείξεων, ἐθεωρήθη κατάλληλον σύστημα διδασκαλίας, πρὸς διάδοσιν, ἁπλῶς μόνον, τῶν γεωμετρικῶν προτάσεων. *(J. M. C. Duhamel, des Méthodes dans les Sciences de Raisonnement. — F. Hoefer, Histoire des Mathématiques. — Commentaire sur les XXXII Premières Propositions des Éléments d'Euclide, par J. Hoüel).*

(*) «Ὁ νοῦς γὰρ ἡμῶν ὁ θεός». Μένανδρος· ἐκ τῶν Πλατωνικ. Ζητημ. Ζήτημα Α'. Πλουτάρχου Τὰ Ἠθικά.

νησιν, εἰς τὸν μετασχηματισμὸν, εἰς τὴν ἀνάλυσιν καὶ τὴν σύνθεσιν. Ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων ἐργασιῶν, αἵτινες μεγίστην πρὸς ἀλλήλας ἔχουσι σχέσιν, αἱ δύο πρῶται ἀναφέρονται εἰς τὴν γεωμετρίαν· ἐπειδὴ, πᾶν σῶμα κινούμενον δὲν δύναται ἢ νὰ διαγράψῃ γραμμήν τινα, ἢ σχῆμα· πρὸς σχηματοποίησιν δὲ, ἀνάγκη νὰ ἐκπληρωθῶσι μεταξὺ τῶν συστατικῶν μερῶν τοῦ σχήματος αἱ συνθῆκαι, ἃς διδάσκει ἡ καθαρὰ γεωμετρία. Ἐντεῦθεν λοιπὸν προκύπτει ἡ καλουμένη καθ' ὕλην γεωμετρία, τουτέστιν ἡ ἐφηρμοσμένη, ἐκ ταύτης δὲ πάλιν, αἱ γεωμετρικαὶ καὶ αἱ μηχανικαὶ τέχναι. Ἄρα, καὶ ὡς βιοποριστικὴ ἀπαραίτητος ἐστὶν ἡ γεωμετρία.

Ἀλλ' ἐν γένει, τὰ μαθηματικὰ, τῶν ὁποίων τὸ οὐσιωδέστερον μέρος ἀποτελεῖ ἡ γεωμετρία, δὲν εἶναι ἄλλο ἢ γυμναστικὴ τῆς νοήσεως, δι' ἧς ὁ νοῦς, ὡς ὑπογραμμὸν ἔχων λογικὴν ἄκαμπτον καὶ αὐστηρὰν, ἐφαρμοζομένην εἰς θεμελειώδεις καὶ ὁμολογουμένας τινὰς ἀρχὰς, ὀξύνεται καὶ ἐπεκτείνει τήν τε νοερὰν καὶ τὴν πραγματικὴν γνῶσιν. Ἐπόμενον λοιπὸν ὅτι ἡ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν ποσῶς δὲν πρέπει νὰ παρεκλίνῃ τῆς τοιαύτης αὐστηρᾶς λογικῆς.

Ἡ πεῖρα ὅμως ἀπέδειξεν ὅτι, ἐν τῷ μέσῳ τῆς ἄκρας αὐστηρότητος τῶν λογικῶν συλλογισμῶν, οἵτινες ἐπικρατοῦσι καθ' ἅπαν τὸ συναρμολόγημα τῶν μαθηματικῶν ἢ τῶν γεωμετρικῶν ἀποδείξεων, ἡ προσοχὴ τῶν πρωτοπείρων προώρως ἀπαυδᾷ καὶ οἱ νέοι δυσκολεύονται νὰ ἐντυπώσωσι ἐν τῇ μνήμῃ αὐτῶν τὰς ἀποδεικνυομένας ἀληθείας· οὕτω δὲ ἡ σπουδὴ τῶν μαθηματικῶν, τουτέστιν ἡ διαμάχη, οὕτως εἰπεῖν, τῶν λογικῶν συλλογισμῶν ἐν ταῖς ἀποδείξεσιν, εἰς ὀλίγων τινῶν νέων τὴν διάνοιαν ἐμφυτεύεται καὶ καρποφορεῖ.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ. Τούτου ἕνεκα ἐθεωρήθη ἐπάναγκες ὅπως καθιερωθῇ κατάλληλος διδασκαλία τῶν στοιχείων τῆς γεωμετρίας, δι' ἧς νὰ ἐπιτευχθῇ τὸ ἀπ' αὐτῆς προσδοκώμενον ἀποτέλεσμα.

Τὰ τῆς γεωμετρίας στοιχεῖα συνήθως εἰσὶ τὰ κατ' Εὐκλείδην καὶ τὰ κατὰ Λέγενδρον· δι' ὃ καὶ τὰ διδακτικὰ συστήματα ἀναφέρονται εἰς ταῦτα ἢ ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα.

Ὑπὸ τῶν ὀπαδῶν τοῦ Εὐκλείδου ἐκρίθη ἵνα ἡ διδασκαλία τῆς γεωμετρίας ᾖ ὁμοιόμορφος καὶ βαθμιαία ὡς ὑπογραμμὸν ἔχουσα τὴν αὐστηροτέραν λογικὴν, καθ' ἣν αἱ δυσχέρειαι ὑποδεικνύωνται καθ' ὅσον ὁ νοῦς προετοιμάζεται εἰς τὴν ὑποδοχὴν καὶ τὴν ἀντίληψιν αὐτῶν (*). Ἡ διδασκαλία αὕτη διαστέλλεται εἰς πειραματικὴν καὶ εἰς ἐπιστημονικήν. Κατὰ τὸ σύστημα τοῦτο τῆς διδαχῆς αἱ διάφοροι θεωρίαι, αἱ ὡς προεισαγωγὴ τιθέμεναι εἰς τὴν ὅλως ἐπιστημονικὴν διδασκαλίαν, δέον νὰ ἀποτελῶσι τὸν σύνδεσμον σειρᾶς τινος μαθημάτων βαθμιαίων καὶ ἀλληλούχων. Ἑκάστη σειρὰ δέον νὰ περιλαμβάνῃ τὴν πρὸ αὐτῆς καί τινας ἀποδείξεις διὰ συλλογισμοῦ γενομένας. Ἐν γένει δὲ, ἡ στοιχειωδεστέρα σειρὰ τῶν μαθημάτων δέον νὰ διαφέρῃ τῆς ὑψηλοτέρας σειρᾶς, κατά τινας μόνον καταργήσεις ἢ ἀπαγορεύσεις οὕτως, ὥστε ἡ θέσις ἑκάστης ἀποδείξεως νὰ εὑρίσκηται συνεταλμένη, ἐν καιρῷ δὲ τῷ δέοντι νὰ παρεντίθηται αὕτη καθ' ὅσον τὸ πνεῦμα τῶν μαθητῶν εἶναι δεόντως προπαρεσκευασμένον.

Ἡ μὲν πειραματικὴ διδασκαλία παραδέχεται ὡς βάσεις τὰς ἑξῆς συνθήκας·

α'.) Ὅτι ἡ ἄκρα τῆς λογικῆς αὐστηρότης, ἥτις δέον νὰ ἐπικρατῇ καθ' ἅπασαν τὴν διδασκαλίαν, οὐδόλως διακινδυνεύει ἐὰν κατὰ βούλησιν παραμεληθῇ ἡ ἀπόδειξις ὁμολογουμένης τινὸς προτάσεως, ἢ ἐὰν ἀντὶ τῆς καθ' αὐτὸ ἀποδείξεως, ἥτις ἐν τῇ ἀρχῇ ἤθελεν θεωρηθῇ περίπλοκος, γίνῃ παραδεκτὴ ἀτελής τις ἀπόδειξις, ἐν ἀνάγκῃ δὲ καὶ σφαλερὰ, ἐπειδὴ ἡ ἐν λόγῳ πρότασις καὶ πάλιν ὑφίσταται.

β'.) Ὅτι ἡ λογικὴ κατ' οὐδὲν διακινδυνεύει ἐὰν εἰς τὴν σειρὰν τῶν συλλογισμῶν παρεντεθῇ, προσωρινῶς, χάσμα τι, ὅταν τοῦτο σαφῶς ὑποδεικνύηται καὶ δὲν ὑποκρύπτηται.

γ'.) Ὅτι ἐν τῇ ἀρχῇ ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιάζωνται τὰ ἀξιώματα, τουτέστι τινὲς τῶν προτάσεων νὰ ἐκλαμβάνωνται ὡς τοιαῦτα.

δ'.) Ὅτι ἀντὶ ἀποδείξεων δύναται νὰ γίνῃ χρῆσις τῶν ἐπαληθεύσεων τῶν γενομένων διὰ πειράματος, ἢ δι' ἀναλογίας, ἢ διὰ συμπεράσματος.

Ἡ πειραματικὴ διδασκαλία δέον νὰ περιλαμβάνῃ τήν τε

(*) *J. Houël. Réflexions sur l'enseignement de la géométrie élémentaire.*

ὀρομαλογίαν καὶ τὴν διαγραφὴν τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῶν πρὸς σχηματοποίησιν τῶν τεχνικῶν ἢ φυσικῶν ἀντικειμένων, τὴν διαχείρισιν τῶν ἐργαλείων, τὴν ἐπίλυσιν διαφόρων προβλημάτων τῆς ἐπιπεδογραφίας καὶ τῆς τοπογραφίας, πρὸς δὲ νὰ περιλαμβάνῃ τὴν κατασκευὴν τῶν σχημάτων διὰ τοῦ σύρματος καὶ τῆς πλαστικῆς ἀργύλου, τὴν διὰ τῶν προβολῶν παράστασιν τῶν σχημάτων, ἐφαρμογὰς εἰς τὴν γεωγραφίαν, τὴν ἀστρονομίαν, τὴν τοπογραφίαν, κτλ. πρὸς δὲ τούτοις νὰ περιέχῃ τὴν σπουδὴν τῶν ἁπλουστέρων ἰδιοτήτων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, παρισταμένων διὰ σημείων, ἐπὶ εὐθείας τινὸς λαμβανομένων, ἢ διὰ τῆς ἐπιρανείας ὀρθογωνίων σχημάτων, ἢ διὰ τοῦ ὄγκου παραλληλεπιπέδων. Ἐπὶ τέλους, πρέπει νὰ παρακολουθῆται ἡ σπουδὴ αὕτη ὑπὸ τῶν στοιχείων τῆς κοσμογραφίας, τῆς μηχανικῆς, τῆς φυσικῆς καὶ τῆς χημείας.

Ἡ δὲ ἐπιστημονικὴ διδασκαλία τῆς γεωμετρίας ὡς προεισαγωγὴ εἰς τὴν σπουδὴν τῶν μαθηματικῶν τιθεμένη, καὶ αὐτὴ ὡς ἡ πειραματικὴ, ἐκρίθη νὰ ᾖ βαθμιαία· νὰ περιορίζηται δὲ εἰς τὰ στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ εἰς τὰς στοιχειώδεις γνώσεις τῶν κωνικῶν τομῶν.

Τῇ σπουδῇ ταύτῃ δέον νὰ προσαρτηθῇ ἡ τῶν στοιχείων τῆς ἀλγέβρας, συνδυαζομένων τῶν κανόνων τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ μετὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν σχημάτων, διὰ συλλογισμῶν ἀναλόγων μὲ τοὺς τοῦ δευτέρου βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου. Οὕτω, διά τε τῆς γεωμετρίας καὶ τῆς ἀναλύσεως ἱδρυθήσονται οἱ θεμελειώδεις κανόνες τοῦ ἀλγεβρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τῆς ἐπιλύσεως τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, καὶ τὰ κυριώτερα θεωρήματα τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων. Ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν δὲ τῶν ὁρίων καὶ τὴν ἐξήγησιν τῶν σχέσεων, τῶν ὑπαρχουσῶν μεταξὺ τῶν ἀλόγων ποσῶν, δέον νὰ προσαρτηθῇ ἡ συμβολικὴ παράστασις τῶν ἀλόγων ἀριθμῶν, καὶ ἡ θεωρία τῶν ἀναλογιῶν μεταξὺ ἀλόγων μεγεθῶν. Ταῦτα δὲ πάντα δέον νὰ παρακολουθήσῃ ἡ σπουδὴ τῶν λογαρίθμων καὶ ἡ τῆς τριγωνομετρίας.

Ἐν τῇ βαθμιαίᾳ ταύτῃ σπουδῇ, ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἀρχαίων, πρέπει νὰ ἀνιδρυθῶσι, βραχέως μέν, ἀλλ' ἀκριβῶς, αἱ θεμελειώδεις γνώσεις τῆς ἐπιστήμης, ἀφ' ἑτέρου

δὲ, κατὰ τὰς διαδοχικὰς ἀναθεωρήσεις τῆς γεωμετρίας, τῇ ἐφαρμογῇ τῶν γνωστῶν ἤδη γενομένων τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας προτάσεων, δέον νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν καὶ αἱ μέθοδοι τῆς νεωτέρας ἀναλύσεως, ἵνα οἱ σπουδασταὶ μυηθῶσιν εἰς τὰς διαρρόους μεθόδους, τὰς ὁποίας βραδύτερον θέλουσιν ἐφαρμόσῃ εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ὑψηλοτέρας ἐπιστήμης, χωρὶς ποσῶς νὰ ἐξέλθωσι τῶν ὁρίων τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Οὕτω, π. χ. καταστατθήσονται γνωσταὶ αἱ πολυάριθμοι ἐφαρμογαὶ τῆς ἀρχῆς τῶν ὁρίων ἔν τε τῇ γεωμετρίᾳ καὶ τῇ ἀριθμητικῇ. Ἡ σπουδὴ τῶν γεωμετρικῶν τόπων, θεωρουμένη ὡς γενικὸν μέσον τῆς ἐπιλύσεως τῶν ὡρισμένων προβλημάτων, θέλει προετοιμάσει τὴν ἰδέαν τῆς συνεκθέσεως μετὰ μιᾶς ἢ καὶ μετὰ δύο μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων· λαμβανομένης δὲ ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς κινήσεως, αὕτη θὰ συντείνῃ εἰς τὴν αἰσθητὴν παράστασιν τῶν συνεκθέσεων μετὰ τριῶν ἢ καὶ μετὰ τεσσάρων μεταβλητῶν.

Διὰ τοῦ κύκλου καὶ τῶν τοῦ κώνου τομῶν, ἐφαρμοσθήσεται ἡ μέθοδος τῶν ἐφαπτομένων, καὶ ἡ μέθοδος τῶν ὁρίων ἐκρασθήσεται διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἀπειροστῶν. Ἐντεῦθεν ἐπανερχόμενοι ἐπὶ τοῦ ζητήματος τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων, θέλομεν παρουσιάσει αὐτὸ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐφαπτομένων ἐν τῇ περιπτώσει μιᾶς μεταβλητῆς ἀνεξαρτήτου.

Πρὸς δικαιολόγησιν καὶ γενίκευσιν τῶν περιωρισμένων καὶ ἀτελῶν ὁρισμῶν, διὰ τῶν κανονικῶν πολυγώνων γενομένων, πρὸς μέτρησιν τοῦ κύκλου καὶ τῶν τριῶν στρογγύλων σωμάτων, δέον νὰ εἰσαχθῶσιν αἱ ἀφωρῶσαι γνώσεις τὸ μῆκος οἱασδήποτε καμπύλης καὶ τὴν ἐπιφάνειαν οἱασδήποτε καμπύλης ἐπιφανείας. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ὁ τετραγωνισμὸς καὶ ὁ κυβισμὸς τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν σωμάτων ἐπιτευχθήσεται οὐ μόνον διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἀρχαίων, ἀλλὰ καὶ διὰ τῶν εὐθέων μεθόδων ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ὁ ὁλοκληρωτικὸς ὑπολογισμός· πρὸς δὲ δοθήσεται παράδειγμα τῶν περικυκλουσῶν καμπύλων, τῆς ἀντιστρόφου μεθόδου τῶν ἐφαπτομένων, κτλ. Ἐν ἄλλοις λόγοις, τὸ κείμενον τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου θέλει συντελέσει ὅπως ἐκτεθῶσιν ἅπασαι αἱ θεμελειώδεις γνώσεις τῆς νεωτέρας ἀναλύσεως.

Πρὸς συναρμολόγησιν τοιούτου διδακτικοῦ συστήματος διὰ τὰ ἡμέτερα ἐκπαιδευτήρια, ἐπάναγκές ἐστιν ἀφ' ἑνὸς μὲν ὁ κύκλος τῆς διδασκαλίας τῆς γεωμετρίας ἐπὶ μᾶλλον νὰ ἐπεκταθῇ οὐ μόνον ἐν τοῖς γυμνασίοις καὶ τοῖς διδασκαλείοις, ἀλλὰ καὶ ἐν αὐτοῖς τοῖς νηπιαγωγίοις, καθ' ὅλας δὲ τὰς περιόδους ταύτας αἱ θεωρητικαὶ γνώσεις νὰ συμπαρακολουθῶνται ὑπὸ καταλλήλων *πρακτικῶν, βιοποριστικῶν* καὶ *θεωρητικῶν ἐφαρμογῶν*. Ἀφ' ἑτέρου δέ, βάσις τοῦ συστήματος δέον νὰ τεθῇ ἡ γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδου μετά τινων διασαφήσεων καὶ τροποποιήσεων περὶ τὰς ἀποδείξεις (*), ὅπερ ἀπαιτεῖ οὐ τὴν τυχοῦσαν μελέτην.

Τὸ διδακτικὸν τῆς γεωμετρίας σύστημα τὸ ἔχον ὡς βάσιν τὰ *στοιχεῖα* τοῦ Λεγένδρου ἢ τὰ τῆς *νεωτέρας γεωμετρίας*, περιστρέφεται ἀποκλειστικῶς μόνον περὶ τὴν διάδοσιν τῶν γεωμετρικῶν προτάσεων, *ὑπὸ πρακτικὴν, βιοποριστικὴν* καὶ *λογικὴν* ὅλως ἔποψιν. Βασίζεται δὲ εἰς τοῦτο ὅτι, αἱ *διάφοροι προτάσεις τῆς ἀφηρημένης γεωμετρίας παράγονται διὰ λογικοῦ συλλογισμοῦ ἀναφερομένου εἰς γραμμὰς καὶ εἰς σχήματα ὅλως ὑποθετικὰ, δι' ἁπλῶν ὑποθέσεων διαγραφόμενα*, καὶ τοῦτο πρὸς διεξήγησιν, ἐπὶ πίνακος ἢ ἐπὶ χάρτου. Ἀλλ' ἐάν τις ἤθελε δοκιμάσῃ νὰ *πορισθῇ τὸ ἀπὸ τῆς προτάσεως προσδοκώμενον πρακτικὸν ἀποτέλεσμα, μεγάλας τότε δυσκολίας θέλει ἀπαντήσῃ, ἐπειδὴ, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, αἱ ὅλως ὑποθετικαὶ ἐργασίαι ἀνάγκη νὰ ἀντικατασταθῶσι δι' ἄλλων ὅλως πραγματικῶν, πρὸς συναρμολόγησιν τοῦ πραγματικοῦ σχήματος εἰς ὃ ἀναφέρεται ἡ ἐν λόγῳ πρότασις· αἱ δὲ πραγματικαὶ ἐργασίαι ἐπιτυγχάνονται διὰ τῆς ἐξασκήσεως τοῦ τε ὀφθαλμοῦ καὶ τῆς χειρὸς πρὸς δὲ καὶ δι' ἐργαλείων καὶ γραφικῶν πράξεων, ἃς ἡ ἀφηρημένη γεωμετρία οὐδόλως ἀναφέρει.*

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι μόνη τῆς ἀφηρημένης γεωμετρίας ἡ διδασκαλία, ἐκτὸς τῆς *λογικῆς*, οὐδεμίαν πρακτικὴν ὠφέλειαν παρέχει τοῖς σπουδασταῖς.

(*) Ἡ λήθη εἰς ἣν περιέπεσαν τὰ στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἀποδίδεται εἰς τὴν πλοκὴν τῆς αὐστηρᾶς λογικῆς τῆς ἐπικρατούσης κατὰ τὰς ἀποδείξεις.

Τούτου ἕνεκα ἐκρίθη ὅπως τῆς *ἀφηρημένης γεωμετρίας* προηγηθῇ ἡ διδασκαλία τῆς *πρακτικῆς γεωμετρίας* (*). Αὕτη δὲ πρέπει νὰ περιλαμβάνῃ τὰς γραφικὰς πράξεις, δι' ὧν συναρμολογοῦνται τὰ *πραγματικὰ σχήματα*, τὴν χρῆσιν τῶν διαφόρων *ἐργαλείων* τῆς *ἐγγραφίας* καὶ τῆς *τοπογραφίας*, πρὸ παντὸς δὲ ἄλλου, δέον νὰ περιέχῃ τὴν ἀπόδειξιν τῶν προτάσεων τῆς *ἀφηρημένης γεωμετρίας*, ἐπὶ πραγματικῶν σχημάτων. Αἱ δὲ ἀποδείξεις αὗται πρέπει ἐν γένει νὰ γίνωνται διὰ γραφικῶν πειραμάτων καταληπτῶν γενομένων διὰ μόνης τῆς ὁράσεως. Πρὸς δὲ τούτοις, τῇ σπουδῇ ταύτῃ πρέπει νὰ προσαρτηθῶσιν ἐφαρμογαὶ εἰς τὴν *ἀριθμητικὴν*, εἰς τὴν *χωροστάθμησιν*, εἰς τὴν *ἐπιπεδογραφίαν*, εἰς τὴν *ἀρχιτεκτονικὴν*, εἰς τὴν *κοσμηματογραφίαν*, κτλ.

Ἡ συστηματοποίησις τῆς τοιαύτης γεωμετρίας πρό τινων ἐτῶν ἤρξατο ἐν Γερμανίᾳ, Βελγικῇ, Ἀγγλίᾳ, Ῥωσσίᾳ, ἐπ' ἐσχάτων δὲ καὶ ἐν Γαλλίᾳ.

Πρὸ πάντων ὅμως διὰ τὴν διάδοσιν τῶν γεωμετρικῶν ἀληθειῶν καὶ διὰ τὴν ἐν τῷ πρακτικῷ βίῳ χρησιμοποίησιν αὐτῶν τὰ μάλα συνετέλεσεν ἡ *ἀνάμικτος τῆς γεωμετρίας διδασκαλία*. Αὕτη δὲ περιλαμβάνει τὰς προτάσεις τῆς ἀφηρημένης γεωμετρίας, μεθ' ἁπλουστάτων ἀποδείξεων, πρὸς δὲ ἐφαρμογὴν προσηρτημένην ἑκάστῃ προτάσει καὶ ἀναφερομένην εἰς ἐφημοσμένον ἢ τεχνικόν τινα κλάδον τῆς γεωμετρίας.

Ἐν Γαλλίᾳ π. χ. τῷ 1824 πρῶτος ὁ βαρῶνος Charles Dupin ἀκολουθήσας τὸ παράδειγμα τῶν ἐν Πρωσσίᾳ καὶ Ἀγγλίᾳ, συνημμολόγησε *τὴν νέαν διδασκαλίαν* (**) ὑπὸ τὸν

(*) *Éléments de Géométrie Pratique, par E.—A. Tarnier. Géométrie Concrète, par Édouard Lagout.*

(**) Οὗτος διὰ τὴν νέαν διδασκαλίαν, ἐκτὸς ἄλλων, λέγει·

Βλέπομεν, εἰς τὰς ἡμετέρας πόλεις ὅτι οἱ πλεῖστοι τῶν νέων κτῶνται ἐκπαίδευσιν ὅλως φιλολογικὴν ἡ δὲ διάνοια αὐτῶν ἀσκόπως παιδαγωγουμένη στερεῖται πάσης πρακτικῆς καὶ ἐφημοσμένης γνώσεως. Οἱ νέοι οὗτοι ὑποπίπτουσιν εἰς τὴν ἐσχάτην δυστυχίαν καὶ ἀθλιότητα, ἐὰν μεθ' ὅλας τὰς προσπαθείας δὲν κατορθώσωσιν ὅπως ἐπιτύχωσιν εἰς γραφεῖον θέσιν τινὰ ὑποδεεστέρου ὑπαλλήλου. Ἐνίοτε

τίτλον *Γεωμετρία καὶ μηχανικὴ τῆς μηχανουργίας τῶν ἐπαγγελμάτων καὶ τῶν ὡραίων τεχνῶν*, διὰ τῆς ὁποίας προυτίθετο τὴν ἀνάπτυξιν καὶ τὴν ἐπέκτασιν τῶν τεχνῶν καὶ τῆς βιομηχανίας ἐν Γαλλίᾳ.

Ἡ διδασκαλία αὕτη ἅμα ἐφαρμοσθεῖσα ἐπέφερε τὸ προσδοκώμενον ἀποτέλεσμα. Καὶ τῳόντι τῇ 26 ὀκτωβρίου τοῦ 1824, εἷς τι μόνον μέρος τῶν Παρισίων παραδεκτὴ γενομένη διὰ τὴν ἐργατικὴν τοῦ λαοῦ τάξιν, καὶ ἐν ὥρᾳ τῆς διακοπῆς τῶν ἐργασιῶν γενομένη, μέχρι 26 ὀκτωβρίου τοῦ 1825 διεδόθη εἰς ἅπασαν τὴν βιομηχανικὴν τάξιν τῶν πολιτῶν πεντήκοντα καὶ ἐννέα πόλεων, ὧν ὁ πληθυσμὸς συνεποσοῦτο εἰς 2040000· οἱ εἰς τοῦτο δὲ συντελέσαντες καθηγηταὶ ἠριθμοῦντο εἰς ἑξήκοντα τρεῖς. Οὗτοι δὲ δὲν ἦσαν μόνον οἱ δι' ὑπουργικοῦ διατάγματος ὑποχρεωθέντες καθηγηταὶ τῶν μαθηματικῶν τῶν διαφόρων τούτων πόλεων, ἀλλὰ καὶ οἱ μηχανικοὶ τῆς ὁδοποιΐας, τῆς ὑδρογραφίας, τῶν μεταλείων, τοῦ ἐπιτελείου καὶ τοῦ ναυτικοῦ, τῶν ἐν λόγῳ πόλεων, μετὰ μεγίστης προθυμίας ἐργασθέντες συνετέλεσαν εἰς τὴν διάδοσιν τῆς νέας διδασκαλίας εἰς τριάκοντα τέσσαρας ἐπαρχίας τῆς Γαλλίας. Ἡ δὲ σύμπραξις τῆς τότε κυβερνήσεως συνέτεινε νὰ διαδοθῇ ἡ διδαχὴ αὕτη καὶ εἰς τὰς λοιπὰς πεντήκοντα δύο ἐπαρχίας.

Ἡ διὰ τῆς διδασκαλίας ταύτης ἐπελθοῦσα ἐν Γαλλίᾳ ἐνί-

καταρῶνται τὴν πρώτην αὐτῶν ἐκπαίδευσιν, τὴν τόσον μεγαλοπρεπῆ, ἀλλ' ὅμως ἄχρηστον! Ἡ διδασκαλία τῆς φιλοτεχνίας καὶ τῆς βιομηχανίας δύναται νὰ παράσχῃ τοῖς νέοις τούτοις εὐρύτατον στάδιον· ἐπειδὴ διδαχθέντες οὗτοι τὰ στοιχεῖα, τὰ τοσοῦτον εὔκολα, τῆς γεωμετρίας καὶ τῆς μηχανικῆς ἐφηρμοσμένα εἰς τὴν μηχανουργίαν, εἰς τὰ ἐπαγγέλματα καὶ εἰς τὰς ὡραίας τέχνας, ἠδύναντο τότε, εἴτε ὡς καθηγηταὶ νὰ διδάξωσι τὰς στοιχειώδεις ταύτας γνώσεις καὶ σχηματίσωσι θεωρητικοὺς καλλιτέχνας, εἴτε, ἐν τοῖς ἐργοστασίοις καὶ τοῖς τεχνουργείοις, νὰ εὕρωσι βίον ἄνετον καὶ ἀξιοπρεπῆ εἰς πρᾶξιν θέντες τὰς ἐφηρμοσμένας αὐτῶν γνώσεις. Καὶ οὕτω θὰ εἶχον βίον ἐνεργὸν, ἐπικερδῆ καὶ εἰρηνικὸν ὀφειλόμενον εἰς τὴν νέαν διδασκαλίαν. *(Géométrie et Mécanique des Arts et Métiers et des Beaux–Arts. Par le Baron Charles Dupin. 1825).*

σχυσις τῶν τεχνῶν, τῆς βιομηχανίας, τοῦ ἐμπορίου καὶ τῶν ἐπιστημῶν, δὲν ἐβράδυνε νὰ ἐμφυτεύσῃ, εἷς τινας, τὴν ἰδέαν ὅπως καὶ ἐν αὐτοῖς τοῖς ἐκπαιδευτηρίοις, ἐκτὸς τῆς *ὅλως θεωρητικῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν*, εἰσαχθῇ καὶ ἡ *θετικὴ διδασκαλία* αὐτῶν, τουτέστιν ἡ διδασκαλία *τῆς ἀναγκαίας θεωρίας μετὰ τῶν καταλλήλων ἐφαρμογῶν*(*). Ἡ ἰδέα αὕτη ἐνισχυθεῖσα καὶ δι' ὑπουργικοῦ διατάγματος συνέτεινεν εἰς τὴν ἔκδοσιν πλείστων ὅσων διδακτικῶν συγγραμμάτων, ὧν ἡ πληθὺς καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐκδόσεων (1824 — 1876) ἐπιμαρτυρεῖ τὴν ὑπὸ *τῆς θετικῆς διδασκαλίας* προσγινομένην τοῖς σπουδασταῖς ὠφέλειαν.

Οὕτω καὶ ἐγὼ πεπεισθὼς εἰς τὴν πρόθυμον ὑποστήριξιν τῶν κυρίων Διευθυντῶν τε καὶ Καθηγητῶν, δὲν ἐθεώρησα ἄσκοπον τοῦ νὰ προβῶ εἰς τὴν σύνταξιν *τῆς Θεωρητικῆς, Πρακτικῆς καὶ Ἐφηρμοσμένης Γεωμετρίας*, ἵνα καὶ ἐν τοῖς καθ' ἡμᾶς ἐκπαιδευτηρίοις δοκιμασθῇ ἡ ἐκ *τῆς θετικῆς διδασκαλίας* τῶν μαθηματικῶν προσγινομένη ὠφέλεια.

Ἡ *Γεωμετρία* τὴν ὁποίαν προσφέρω τοῖς Ἕλλησι σπουδασταῖς ἐπόμενον εἶναι ὅτι ἐκ πρώτης ἀφετηρίας δὲν δύναται νὰ ᾖναι ἄλλο, καὶ τοῦτο ἕνεκα προφανῶν λόγων, ἤ πραγματοποίησις τῶν κυριωτέρων μερῶν τοῦ διαγράμματος τῆς θετικῆς σπουδῆς τῆς γεωμετρίας· τοῦτο δέ, καθ' ὑπαγόρευσιν τῶν δοκιμοτέρων εὐρωπαϊκῶν συγγραμμάτων καὶ ἐξ ἰδίας πείρας, ἐνόμισα κατάλληλον διὰ τὰ καθ' ἡμᾶς ἐκπαιδευτήρια.

Τὸ θεωρητικὸν τῆς ἐν λόγῳ γεωμετρίας μέρος σύγκειται ἐκ τῶν προτάσεων τῶν προωρισμένων διὰ τὰ ἑλληνικὰ σχολεῖα καὶ τὰ γυμνάσια μέ τινας προσθαφαιρέσεις, τῶν δὲ Προτάσεων αἱ ἀποδείξεις γίνονται ἁπλούστατα διὰ τῶν μεθόδων *τῆς νεωτέρας γεωμετρίας*. Ἀπέφυγον δὲ τὴν δικαιολόγησιν *τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἐμμέτρων ἢ ἐκμέτρων μεγεθῶν*, αἵτινες ἀναλογοῦσι πρὸς τὰς τῶν *ἐμμέτρων ἢ ἐκμέτρων ἀριθμῶν*, περιορισθεὶς ἁπλῶς μόνον εἰς τὴν συσχέτισιν αὐτῶν διὰ τῆς *ἐκφράσεως τοῦ λόγου δύο εὐθειῶν εἰς ἀριθμούς*.

Ὡς πρὸς τὰς ἐφαρμογὰς, οὐδόλως περιωρίσθην εἰς τὰ διαγραφόμενα ὅρια ὑπὸ τῶν ἐπισημοτέρων εὐρωπαϊκῶν συγγραμ-

(*) *H. Sonnet, Géométrie Theorique et Pratique. 1866.*

μάτων, ἐπειδὴ τινὰς τῶν ἐφαρμογῶν *ὑπὸ διδακτικὴν* μὲν *ἔποψιν* θεωρήσας ἐτήρησα ὡς ἔχουσι καὶ εἰς τὰ ἐν λόγῳ συγγράμματα, τὰς πλειοτέρας δὲ συνεπλήρωσα καὶ ἐπεξέτεινα, ὑπὸ *πρακτικὴν* καὶ *τεχνικὴν ἔποψιν* (*), καὶ τοῦτο ἐφ' ὅσον μοὶ τὸ ἐπέτρεψαν αἱ περιστάσεις.

Εὐτυχὴς δὲ ἤθελον λογισθῇ ἐὰν, τῇ συνηγορίᾳ καὶ ὑποστηρίξει τῶν κυρίων *Διευθυντῶν* καὶ *Καθηγητῶν* καὶ παντὸς φιλομούσου ὁμογενοῦς, δυνηθῶ νὰ συντελέσω κἀγὼ εἰς τὴν συμπλήρωσιν διαρυθμιστικοῦ τινος διαγράμματος τῆς *θετικῆς διδασκαλίας* τῶν μαθηματικῶν, διὰ τὰ καθ' ἡμᾶς ἐκπαιδευτήρια, κἄπως ἀνταξίου τῆς ἰδιαζούσης τῷ ἔθνει ἡμῶν φιλοτιμίας.

Ἔγραφον ἐν Κωνλει κατὰ μῆνα Ἰούλιον τοῦ 1876.

Γ. Α. ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ.

(*) Οὕτω π. χ. διὰ τῶν ἐφαρμογῶν τῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν πρακτικὴν γεωμετρίαν, τὴν χωροσταθμησιν, τὴν ἐπιπεδογραφίαν, τὴν τοπογραφίαν, τὴν ἄλγεβραν, τὴν ἐφηρμοσμένην ὀπτικὴν, τὴν ταχυμετρίαν (τὴν νεωτέραν γεωδαισίαν), τὴν φυσικὴν γεωγραφίαν, πρὸς δὲ εἰς τὴν διὰ τῆς ὄψεως, διὰ τοῦ ἤχου καὶ δι' ἁπλουστάτων ἐργαλείων καταμέτρησιν τῶν ἀποστάσεων καὶ τῶν ὑψῶν, διὰ τῶν ἀναφερομένων ἐφαρμογῶν εἰς τὴν κοσμογραφίαν, τὴν μηχανικὴν, τὴν ἀρχιτεκτονικὴν, τὴν βλητικὴν, καὶ ἐπὶ τέλους διὰ τῆς βαθμιαίας χρήσεως καὶ τῆς ῥυθμίσεως τῶν ἁπλουστέρων μέχρι καὶ αὐτῶν τῶν ἐντελεστέρων ἐργαλείων, προεβέμην τὴν πρακτικὴν διαπαίδευσιν τῶν μαθητευομένων, καὶ τὴν ἐμφύτευσιν ἐν τῷ νῷ αὐτῶν, διὰ τῆς ἐπανειλημμένης ὑπομνήσεως, τῶν προτάσεων τῆς γεωμετρίας. Πρὸς τούτοις δύναται νὰ καταστῇ ἡ θεωρητικὴ, πρακτικὴ καὶ ἐφηρμοσμένη αὕτη γεωμετρία πρακτικὸς ὁδηγὸς τῶν ἐργοδηγῶν, τῶν ἐργολάβων, τῶν ἀρχιτεκτόνων, τῶν μηχανικῶν, κτλ. Αἱ ἐφαρμογαὶ ἀπόκεινται εἰς τὴν ἐκλογὴν τοῦ καθηγητοῦ, αἱ δὲ δι' ἀστερίσκου ὑποδεικνύμεναι, ἐν τῷ πίνακι τῶν περιεχομένων, ἐν ἀνάγκῃ δύνανται νὰ παραληφθῶσιν.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ.

§. 14.

Ὁρισμὸς τοῦ ἐπιπέδου.—Δύο ἐπίπεδα ἐφαρμόζονται ὅταν ἔχωσι τρία κοινὰ σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα.—Προσδιορισμὸς τῆς θέσεως τοῦ ἐπιπέδου. Ἰδιότητες μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τῷ διαστήματι ἀγομένων. Συνθήκη ἵνα εὐθεῖά τις ἦναι κάθετος ἐπὶ ἐπιπέδου. Ἰδιότητες τῆς καθέτου καὶ τῶν πλαγίων εὐθειῶν, τῶν καταβιβαζομένων ἐπὶ ἐπιπέδου ἔκ τινος σημείου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τούτου κειμένου. Ἐφαρμογή. Ἐκ τινος σημείου, εἴτε ἐπί τινος ἐπιπέδου εἴτε ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου κειμένου, νὰ καταβιβασθῇ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Περὶ παραλληλισμοῦ τῶν ἐν τῷ διαστήματι εὐθειῶν. Παραλληλισμὸς τῶν ἐπιπέδων. Περὶ προβολῶν. Ἐφαρμογαί. Προβλήματα ἐπὶ τῶν προβολῶν. Τέχνη χωροσταθμήσεως.

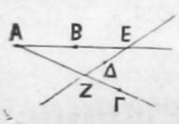
ΟΡΙΣΜΟΣ 1. *Ἐπίπεδον* καλεῖται ἡ ἐπιφάνεια ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐφαρμόζεται ἐντελῶς καὶ καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις εὐθεῖα γραμμὴ ἔχουσα δύο κοινὰ σημεῖα μὲ αὐτήν.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Πᾶσα εὐθεῖα ἁπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον εἰς ἓν καὶ μόνον σημεῖον, τὸ ὁποῖον καλεῖται ποὺς τῆς εὐθείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.

Δύο ἐπίπεδα Π *καὶ* Π′ *ἐφαρμόζονται, ὅταν ἔχωσι τρία κοινὰ σημεῖα* Α, Β *καὶ* Γ, *μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα.* (Σχ. 1)

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν καὶ τέταρτον σημεῖον Δ κείμενον εἰς τὸ ἐπίπεδον Π, ἐπὶ τοῦ ὁποίου φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου Δ τὴν εὐθεῖαν ΕΖ συναπαντῶσαν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ. Τούτου τεθέντος ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἐπειδὴ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β μὲ τὸ ἐπίπεδον Π, θέλει κεῖσθαι εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ὡς καὶ οἱονδήποτε αὐτῆς σημεῖον Ε· ὁμοίως ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἐπειδὴ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Γ μὲ τὸ ἐπίπεδον Π′ θέλει κεῖσθαι εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ὡς καὶ οἱονδήποτε αὐτῆς σημεῖον Ζ. Ἀλλ' ἡ εὐθεῖα ΕΖ, ἐπειδὴ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα μὲ τὸ ἐπίπεδον Π′ θέλει κεῖσθαι εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο· λοιπὸν τὸ σημεῖον Δ θέλει κεῖσθαι εἰς τὸ ἐπίπεδον Π′.



Σχ. 1

Ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι πᾶν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν δύο ἐπιπέδων κείμενον θέλει κεῖσθαι καὶ εἰς τὸ ἕτερον. Ἄρα τὰ δύο ἐπίπεδα συμπίπτουσι καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα προσδιορίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνου ἐπιπέδου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.

Δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι προσδιορίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνου ἐπιπέδου.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν λάβωμεν ὁμοῦ μὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δύο εὐθειῶν καὶ ἕτερον ἐφ' ἑκάστης τούτων, θέλομεν ἔχει τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα διὰ τῶν ὁποίων ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον διέρχεται. (Πρότ. 1. Πόρισμα.)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3.

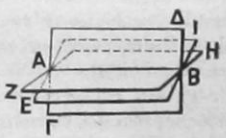
Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι προσδιορίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνου ἐπιπέδου.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§. 3. Μέρ. Α′), δύο παράλληλοι κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· πρὸς δὲ, διὰ τῶν παραλλήλων τούτων δὲν διέρχεται εἰμὴ ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον, διότι λαμβάνοντες δύο σημεῖα ἐπὶ μιᾶς τῶν παραλλήλων καὶ τρίτον ἐπὶ τῆς ἄλλης, θέλομεν ἔχει τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα διὰ τῶν ὁποίων προσδιορίζεται ἡ θέσις ἑνὸς καὶ μόνου ἐπιπέδου (Πρότ. 1. Πόρισμα).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Ἡ κοινὴ δύο ἐπιπέδων τομὴ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν γραμμῶν (Μέρος Α′. Εἰσαγωγ. γνώσεις), ἐπειδὴ ἡ κοινὴ δύο ἐπιφανειῶν τομὴ εἶναι γραμμὴ, αὕτη ἐὰν εἶχε τρία μόνον σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα, τότε τὰ δύο ἐπίπεδα θὰ συνέπιπτον καὶ δὲν θὰ ἐτέμνοντο, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ἐκφώνησιν τῆς προτάσεως. Λοιπὸν *ἡ κοινὴ δύο ἐπιπέδων τομὴ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.*



Σχ. 2.

Ὁμοίως εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ εὐθεῖα αὕτη ΑΒ δύναται νὰ ᾖναι ἡ κοινὴ ὁσωνδήποτε ἐπιπέδων τομὴ (Σχ. 2).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Ἐξ ἑνὸς σημείου ἐπὶ εὐθείας τινὸς κειμένου, δυνατὸν νὰ ὑψωθῶσιν εἰς τὸ διάστημα ὁσαισδήποτε εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης.

Ἀπόδειξις. Διότι, διὰ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ (Σχ. 2.) δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ὁσαδήποτε ἐπίπεδα, καὶ ἐπὶ ἑκάστου τῶν ὁποίων νὰ ὑψώσωμεν, εἰς τὸ σημεῖον Α, εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

Ἐξ ἑνὸς σημείου ἐκτὸς εὐθείας τινὸς ὑπάρχοντος, δὲν δύναται νὰ καταβιβασθῇ εἰς τὸ διάστημα, εἰμὴ μία καὶ μόνη κάθετος ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης.

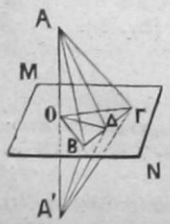
Ἀπόδειξις. Διότι, ἤ τε εὐθεῖα καὶ τὸ σημεῖον προσδιορίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δὲν δυνάμεθα νὰ καταβιβάσωμεν ἐκ τοῦ σημείου τούτου, εἰμὴ μίαν καὶ μόνην κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας (Πρότ. 11. Μέρ. Α΄.)

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Εὐθειά τις λέγεται *κάθετος ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς*, ὅταν ἦναι κάθετος ἐπὶ ὅλων τῶν εὐθειῶν, τῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ διερχομένων διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς (Ὁρισμ. 1. Πόρισμα). Ἀντιστρόφως, τὸ ἐπίπεδον λέγεται κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7.

Ἐὰν εὐθειά τις ΟΑ *ἦναι κάθετος ἐπὶ δύο ἄλλων* ΟΒ *καὶ* ΟΓ *ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* ΜΝ *κειμένων καὶ διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς* Ο *διερχομένων, λέγομεν ὅτι θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πάσης ἄλλης* ΟΔ, *διερχομένης διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένης, τουτέστι θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* ΜΝ. (Σχ. 3.)

Ἀπόδειξις. Ἄγομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ εὐθεῖάν τινα ΒΓ, συναπαντῶσαν τὰς τρεῖς εὐθείας ΟΒ, ΟΔ καὶ ΟΓ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΑΟ τὴν ΟΑ΄ ἴσην τῇ ΟΑ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΔ, ΑΓ, Α΄Β, Α΄Δ καὶ Α΄Γ. Αἱ εὐθεῖαι ΒΑ καὶ ΒΑ΄ εἶναι ἴσαι, ἐπειδὴ ὑπετέθησαν ὅτι ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ΟΒ ἐπὶ τῆς ΑΑ΄, ὡς καὶ αἱ εὐθεῖαι ΓΑ καὶ ΓΑ΄. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄ΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς τρεῖς πλευρὰς τῶν ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ὅθεν καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ Α΄ΒΓ εἶναι ἴσαι.



Σχ. 3.

Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ Α΄ΒΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσιν ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ

ἴσων πλευρῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ὅθεν καὶ ΔΑ=ΔΑ΄. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΔΟ καὶ Α΄ΔΟ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας εἶναι ἴσα· ὅθεν καὶ αἱ προσκείμεναι γωνίαι ΑΟΔ καὶ Α΄ΟΔ εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως ὀρθαί. Ἄρα ἡ ΑΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΟΔ, καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Ὅλαι αἱ κάθετοι ΟΒ, ΟΔ, ΟΓ, *κτ.λ. αἱ εἰς σημεῖόν τι* Ο *τῆς εὐθείας* ΑΑ΄ *ὑψούμεναι, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ δὲ ἐπίπεδον αὐτὸ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς* ΑΑ΄. (Σχ. 3.)

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν τὸ ἐπίπεδον ΜΝ τῶν δύο εὐθειῶν ΟΒ καὶ ΟΔ ἀπεδείχθη ὅτι εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΑ΄, πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ δὲ ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ΜΝ περιέχει καὶ ὅλας τὰς ἄλλας καθέτους. Τῷ ὄντι, ἐὰν ἡ ΟΓ κῆται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΑΟ καὶ ΟΓ θέλει τμήσει τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν διαφέρουσαν τῆς ΟΓ, ἥτις θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΑ΄, καὶ ἠθέλομεν ἔχει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΑΟΓ δύο καθέτους ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΑ΄ καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9.

Ἐκ τινος δεδομένου σημείου, εἴτε ἐπὶ δεδομένης εὐθείας εἴτε ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου, πάντοτε δυνάμεθα νὰ ἀγάγωμεν ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης.

Ἀπόδειξις. α) Διότι, ἐὰν τὸ δεδομένον σημεῖον Ο (Σχ. 3.) κῆται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΑ΄, τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖνται ὅλαι αἱ κάθετοι αἱ εἰς τὸ σημεῖον Ο ὑψούμεναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΑ΄, εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΑ΄. Ἐπειδὴ δὲ ἐπίπεδόν τι κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΑ΄ περιέχει ὅλας τὰς ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης καθέτους, ἕπεται ὅτι δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ εἰμὴ ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΑ΄ εἰς τὸ σημεῖον Ο.

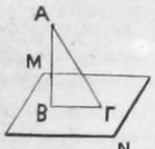
β΄) ἐὰν τὸ δεδομένον σημεῖον Γ κῆται ἐκτὸς τῆς εὐθείας

ΑΑ′, καταβιβάζομεν τὴν ΓΟ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΑ′, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ο, ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΑ′, εἰς τὸ ὁποῖον θέλει κεῖσθαι ἡ ΓΟ, καὶ ἐπομένως τὸ σημεῖον Γ. Ἀλλ' ἡ εὐθεῖα ΟΓ κεῖται καθέτως ἐπὶ τῆς ΑΑ′ καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐκ τοῦ σημείου Γ ἀγόμενον. Ἀοιπὸν δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ εἰμὴ ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΑ′, τὸ ὁποῖον ἐκπληροῖ τὰς συνθήκας ταύτας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10.

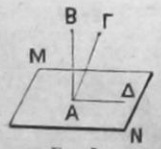
Ἐκ τινος δεδομένου σημείου, εἴτε ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου εἴτε ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένου, πάντοτε δυνάμεθα νὰ ἀγάγωμεν μίαν καὶ μόνην εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

Ἀπόδειξις. α) Ἐὰν τὸ δεδομένον σημεῖον Α (Σχ. 4) ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κῆται, ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΑΓ δύο κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ ἄγομεν τὴν ΒΓ. Τούτου τεθέντος, ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ τῆς διερχομένης ἐκ τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κειμένης· ὅθεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θέλει ἔχει δύο ὀρθὰς γωνίας, ὅπερ ἀδύνατον.



Σχ. 4.

β) Ἐὰν τὸ δεδομένον σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κῆται (Σχ. 5), ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΑΓ δύο κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ὑψούμεναι. Αἱ εὐθεῖαι αὗται, αἱ εἰς τὸ σημεῖον Α συνερχόμεναι, προσδιορίζουσιν ἓν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον, ἐπειδὴ ἔχει τὸ σημεῖον Α κοινὸν μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, θέλει τμήσει αὐτὸ κατά τινα εὐθεῖαν ΑΔ. Ἀοιπὸν ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΔ τῆς διερχομένης ἐκ τοῦ ποδὸς αὐτῆς, εἰς δὲ τὸ σημεῖον Α θέλομεν ἔχει δύο καθέτους ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΔ, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ ΑΔ κειμένας, ὅπερ ἀδύνατον (Μέρ. Α′. Πρότ. 1.).



Σχ. 5.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5. Πᾶσα εὐθεῖα μὴ οὖσα κάθετος ἐπί τινος ἐπιπέδου λέγεται *πλαγία*, ὡς ἡ ΑΓ. (Σχ. 4.)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11.

Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Ο, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κειμένου, καταβιβάσωμεν ἐπ' αὐτοῦ τὴν κάθετον ΟΠ, καὶ ἀγάγωμεν διαφόρους πλαγίας ΟΑ, ΟΒ καὶ ΟΓ, λέγομεν ὅτι· (Σχ. 6.)

α′) Ἡ κάθετος ΟΠ θέλει εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας.

β′) Αἱ δύο πλάγιαι ΟΑ καὶ ΟΒ αἱ ἰσάκις ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς Π τῆς καθέτου θέλουσιν εἶναι ἴσαι.

γ′) Ἐκ δύο πλαγίων ΟΔ καὶ ΟΓ, ἡ εἰς μεγαλειτέραν ἀπόστασιν ΓΠ ἀπὸ τοῦ ποδὸς Π ἠγμένη εἶναι μεγαλειτέρα.

Ἀπόδειξις 1. Ἐὰν ἀγάγωμεν τὴν ΑΠ, ἡ εὐθεῖα ΟΠ θέλει εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτῆς καὶ μικροτέρα τῆς πλαγίας ΟΑ, διότι αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΠ καὶ ΑΠ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κεῖνται (Μέρ. Α. Πρότ. 13).

2. Ἐπειδὴ ἡ ΑΠ ὑποτίθεται ἴση τῇ ΒΠ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΠ καὶ ΟΒΠ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ἀοιπὸν καὶ ἡ ΟΑ εἶναι ἴση τῇ ΟΒ.



Σχ. 6.

3. Ἐπειδὴ ἡ ΠΓ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΠΔ, ἐὰν λάβωμεν ΠΒ=ΠΔ καὶ ἀγάγωμεν τὴν ΟΒ θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ΟΒ=ΟΔ. Ἀλλ' ἡ ΟΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΟΓ (Μ. Α′. Πρότ. 13)· ἄρα καὶ ἡ ΟΔ ἴση τῇ ΟΒ, θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς ΟΓ.

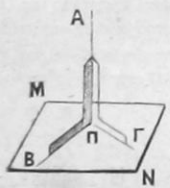
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1. Ἐπειδὴ αἱ πλάγιαι ΟΑ, ΟΔ καὶ ΟΒ εἶναι ἴσαι, τὰ σημεῖα Α, Δ καὶ Β ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τοῦ ποδὸς Π τῆς καθέτου, ἐπομένως κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΑΔΒ, τῆς ἐχούσης κέντρον τὸν πόδα Π τῆς καθέτου ΟΠ. Ἀοιπὸν, ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Ο προσαρμόσωμεν τὸ ἄκρον χορδῆς τινος ΟΒ καὶ διὰ τῆς εὑρισκομένης γραφίδος εἰς τὸ δεύτερον ἄκρον Β γράψωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ περιφέρειαν, τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ταύτης, τὸ προσδιοριζόμενον διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Δ καὶ Β (§. 7. Πρόβλ. 15), θέλει

εἶναι ὁ ποὺς τῆς ἐκ τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ καταβιβαζομένης καθέτου, ἡ δὲ κάθετος θέλει παρασταθῆ ὑπὸ τῆς τανυομένης χορδῆς κατὰ τὰ σημεῖα Π καὶ Ο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2. Πρόβλημα. Εἰς τὸ σημεῖον Π ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ (Σχ. 6) κειμένου, νὰ ὑψωθῆ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

Λύσις α΄) Ἐκ τοῦ σημείου τούτου ὡς ἀπὸ κέντρου μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράφομεν περιφέρειαν, ἐφ' ἧς λαμβάνομεν τρία σημεῖα Α, Δ καὶ Β. Εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα ἐπιθέτομεν τὰ ἄκρα τριῶν ἴσων χορδῶν ΑΟ, ΔΟ καὶ ΒΟ ἀφθαιρέτου μήκους, τὰς ὁποίας τανύομεν φέροντες ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο τὰ δεύτερα ἄκρα τῶν χορδῶν. Τούτου γενομένου ἡ διὰ τοῦ οὕτω προσδιορισθέντος σημείου Ο καὶ τοῦ δεδομένου σημείου Π ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ διερχομένη καὶ τανυομένη χορδὴ ΟΠ, θέλει προσδιορίσει τὴν διεύθυνσιν τῆς ζητουμένης καθέτου.

β΄.) Ἐν τῇ ἐφαρμογῇ τὸ πρόβλημα τοῦτο συνήθως ἐπιλύεται διὰ τῆς διπλῆς ὀρθῆς γωνίας, ἥτις συντίθεται ἐκ δύο ὀρθῶν γωνιῶν (Μέρ. Α΄. Σχ. 64), τῶν ὁποίων αἱ δύο μεγαλείτεραι πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας ταὐτίζονται, αἱ δὲ μικρότεραι τίθενται ὑπό τινα γωνίαν ΒΠΓ (Σχ. 7), τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ ἐπιτιθεμένη ἐπὶ τὸ σημεῖον Π, εἰς ὃ ἡ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου πρόκειται νὰ ὑψωθῆ, τότε ἡ διεύθυνσις τῆς εὐθείας ΠΑ, κατὰ τὴν ὁποίαν ταὐτίζονται αἱ μεγαλείτεραι πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας, θέλει προσδιορίσει τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ζητουμένης καθέτου.



Σχ. 7.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12.

Ἔστω ΟΑ *κάθετός τις ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* ΜΝ, *καὶ* ΒΓ *εὐθεῖά τις, κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Ἐὰν ἐκ τοῦ ποδὸς* Ο *τῆς καθέτου καταβιβάσωμεν τὴν* ΟΔ *κάθετον ἐπὶ τῆς* ΒΓ *καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα* Α *καὶ* Δ, *λέγομεν ὅτι ἡ* ΑΔ *θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς* ΒΓ (Σχ. 3).

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν ΓΔ=ΒΔ καὶ ἄγομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ, ΟΒ καὶ ΟΓ. Ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι ἴση τῇ ΔΓ, ἡ πλαγία ΟΒ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΟΓ (Μέρ. Α΄. Πρότ. 13), ἑπομένως καὶ ἡ πλαγία ΑΒ ἴση τῇ ΑΓ (Πρότ. 11). Λοιπὸν τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Δ τῆς εὐθείας ΑΔ ἀπέχουσιν ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων Β καὶ Γ τῆς εὐθείας ΒΓ. Ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

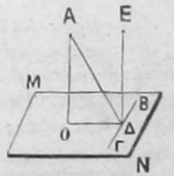
ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΟΔ καὶ ΑΔ θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν ΑΟΔ (Πρότ. 7).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΟ *ἦναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* ΜΝ, *πᾶσα εὐθεῖα* ΔΕ *παράλληλος τῇ* ΑΟ *θέλει εἶσθαι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* ΜΝ (Σχ. 8).

Κατασκευή. Ἔστω ΟΔ ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῶν παραλλήλων ΑΟ καὶ ΕΔ. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ἄγομεν τὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τῆς ΟΔ, καὶ φέρομεν τὴν ΑΔ.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ πόρισμα τῆς προηγουμένης προτάσεως, ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΟΔΕ καὶ ἡ γωνία ΕΔΓ εἶναι ὀρθή. Ὁμοίως καὶ ἡ γωνία ΕΔΟ εἶναι ὀρθή, διότι ἡ ΑΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΟΔ καὶ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΟ (Μέρ. Α΄. Πρότ. 17. Πόρ.). Ἄρα ἡ εὐθεῖα ΔΕ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΟΔ καὶ ΒΓ, θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν ΜΝ.



Σχ. 8.

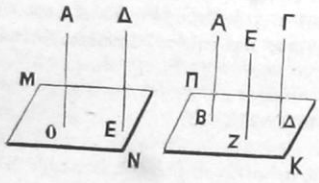
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΟ *καὶ* ΔΕ *ἦναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* ΜΝ, *θέλουσιν εἶναι παράλληλοι* (Σχ. 9).

Ἀπόδειξις. Ἐὰν δὲν ἦναι παράλληλοι, τότε ἡ ἐκ τοῦ σημείου Ε ἀγομένη παράλληλος τῇ ΑΟ ἤθελεν εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ ἠθέλομεν ἔχει εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ε τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ δύο καθέτους. Ὅπερ ἀδύνατον (Πρότ. 10).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Δύο εὐθεῖαι ΑΒ *καὶ* ΓΔ *ἐν τῷ διαστήματι, παράλληλοι τρίτης τινὸς* ΕΖ, *εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι* (Σχ. 9).



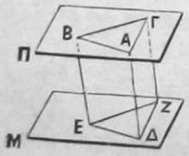
Σχ. 9.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐὰν ἀγάγωμεν τὸ ἐπίπεδον ΠΚ κάθετον ἐπὶ τῆς τρίτης εὐθείας, τοῦτο θέλει εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὰς δύο πρώτας (Πρότ. 13)· ἄρα αἱ δύο πρῶται εὐθεῖαι εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι (Πρότ. 14).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

Δύο γωνίαι ΑΒΓ *καὶ* ΔΕΖ *ἐν τῷ διαστήματι, ὅταν ἔχωσι τὰς πλευρὰς των παραλλήλους καὶ διευθυνομένας κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, εἰσὶν ἴσαι* (Σχ. 10).

Ἀπόδειξις. Ἐὰν λάβωμεν ΕΔ=ΒΑ καὶ ΕΖ=ΒΓ καὶ φέρωμεν τὰς εὐθείας ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΖ, τὰ οὕτω προκύπτοντα τετράπλευρα ΑΒΕΔ καὶ ΓΒΕΖ θέλουσιν εἶσθαι παραλληλόγραμμα (Μέρ. Α'. Πρότ. 25) καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΓΖ, αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι τῆς ΒΕ, θέλουσιν εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι καὶ παράλληλοι· ὅθεν τὸ σχῆμα ΑΔΖΓ θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ ἑπομένως ΔΖ=ΑΓ. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἄρα καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, αἱ ἀντικείμεναι εἰς ἴσας πλευράς, εἶναι ἴσαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Σχ. 10.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ. Εὐθεῖά τις λέγεται *παράλληλος ἐπιπέδῳ τινί*, ὅταν δὲν δύνηται νὰ συναπαντήσῃ αὐτό, ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσιν ἡ τε εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον. Ἀντιστρόφως, τὸ ἐπίπεδον λέγεται παράλληλον τῇ εὐθείᾳ.

Δύο ἐπίπεδα εἶναι *παράλληλα*, ὅταν δὲν συναπαντῶνται ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17.

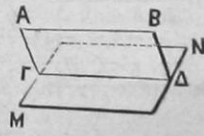
Ἐξ ἑνὸς σημείου Ο *μία καὶ μόνη παράλληλος δεδομένῃ τινὶ εὐθείᾳ* ΔΕ *δύναται νὰ ἀχθῇ ἐν τῷ διαστήματι* (Σχ. 9).

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἦτο δυνατὸν νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου Ο δύο παράλληλοι, αὗται ἤθελον εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, τοῦ ἀγομένου καθέτως ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ΔΕ, ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Πᾶσα εὐθεῖα ΑΒ *παράλληλος τῇ* ΓΔ, *τῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* ΜΝ *κειμένῃ, εἶναι παράλληλος καὶ τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ.* (Σχ. 11).

Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κείμεναι (Πρότ. 3), ἡ ΑΒ ἐὰν συνήντα τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, τοῦτο ἤθελε συμβῇ κατά τι σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς ΓΔ τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒΔΓ καὶ ΜΝ. Ἀλλ' ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῇ ΓΔ· ὅθεν ἡ ΑΒ δὲν δύναται νὰ συναπαντήσῃ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, καὶ εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ.



Σχ. 11.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19.

Όταν εὐθεῖά τις ΑΒ *ἦναι παράλληλος ἐπιπέδῳ τινὶ* ΜΝ, *ἡ κοινὴ τομὴ* ΓΔ *τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετά τινος ἐπιπέδου* ΑΒΔΓ, *διὰ τῆς* ΑΒ *διερχομένου, θέλει εἶναι παράλληλος τῇ* ΑΒ (Σχ. 11).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔΓ, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ συνήντα τὴν ΓΔ, ἤθελε συναπαντήσει καὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ὅπερ εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἐὰν ἔκ τινος σημείου* Δ *τοῦ ἐπιπέδου* ΜΝ, *παραλλήλου τῇ εὐθείᾳ* ΑΒ (Σχ. 11), *ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα* ΓΔ *παράλληλος τῇ* ΑΒ, *ἡ εὐθεῖα αὕτη θέλει κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* ΜΝ.

Ἀπόδειξις. Διότι ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, τὸ διὰ τῆς ΑΒ καὶ τοῦ σημείου Δ διερχόμενον ἐπίπεδον, ἤθελε τμήσει τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν ΕΔ, διάφορον τῆς ΔΓ, ἥτις θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ, καὶ ἠθέλομεν ἔχει ἐκ τοῦ σημείου Δ δύο εὐθείας παραλλήλους τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΑΒ, ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20.

Όταν εὐθεῖά τις ἦναι παράλληλος πρὸς δύο ἐπίπεδα, θέλει εἶναι παράλληλος καὶ τῇ κοινῇ τῶν ἐπιπέδων τούτων τομῇ.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν ἔκ τινος σημείου τῆς κοινῆς τῶν δύο ἐπιπέδων τομῆς ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ, αὕτη θέλει κεῖσθαι ἐπὶ τῶν δύο προταθέντων ἐπιπέδων (Πρότ. 19. Πόρισμα).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21.

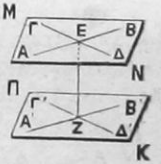
Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἶναι παράλληλα.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ εὐθείας τινὸς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ, εἰμὴ ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας· λοιπὸν δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουσιν. Ἄρα τὰ ἐπίπεδα τὰ κάθετα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἶναι παράλληλα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22.

Όταν δύο διασταυρούμεναι εὐθεῖαι ΑΒ *καὶ* ΓΔ *ἦναι ἀμοιβαίως παράλληλοι δύο ἄλλων ἐπίσης διασταυρουμένων εὐθειῶν* Α'Β' *καὶ* Γ'Δ', *τὸ προσδιοριζόμενον ἐπίπεδον* ΜΝ *ὑπὸ τῶν δύο πρώτων εἶναι παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου* ΠΚ, *τοῦ προσδιοριζομένου ὑπὸ τῶν δευτέρων εὐθειῶν* (Σχ. 12).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῇ Α'Β', εἶναι παράλληλος καὶ τῷ ἐπιπέδῳ ΠΚ. Ἐὰν λοιπὸν τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΚ δὲν ἦναι παράλληλα, τότε θέλουσι τμηθῆ κατά τινα εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΑΒ ἢ τῇ Α'Β' (Πρότ. 19). Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος τῇ Γ'Δ', εἶναι παράλληλος καὶ τῷ ἐπιπέδῳ ΠΚ· ὅθεν, ἐὰν τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΚ δὲν ἦναι παράλληλα, τότε θέλουσι τμηθῆ κατά τινα εὐθεῖαν παράλληλον τῇ Γ'Δ'. Ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ τούτου βλέπομεν ὅτι ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΠΚ πρέπει νὰ ἦναι παράλληλος πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας Α'Β' καὶ Γ'Δ', ὅπερ ἀδύνατον (Πρότ. 4). Ἄρα τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

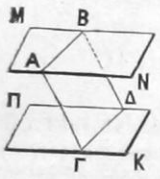


Σχ. 12.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἵνα ἀγάγωμεν ἐπίπεδον παράλληλον δεδομένῳ τινὶ ἐπιπέδῳ ΜΝ, ἔκ τινος σημείου Ζ, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τούτου κειμένου, ἀρκεῖ να διαγράψωμεν ἐπὶ τοῦ δεδομένου ἐπιπέδου δύο διασταυρουμένας εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἐκ τοῦ γνωστοῦ σημείου Ζ νὰ φέρωμεν δύο παραλλήλους τῶν εὐθειῶν τούτων. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν παραλλήλων προσδιοριζόμενον ἐπίπεδον ΠΚ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23.

Αἱ κοιναὶ τομαὶ ΑΒ *καὶ* ΓΔ, *δύο παραλλήλων ἐπιπέδων* ΜΝ *καὶ* ΠΚ *μεθ' ἑνὸς τρίτου* ΑΒΓΔ, *εἶναι παράλληλοι* (Σχ. 13).



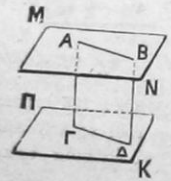
Σχ. 13.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΓΒ κείμεναι, δὲν ἦναι παράλληλοι, προεκτεινόμεναι ἤθελον συναπαντηθῆ. Λοιπὸν καὶ τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΚ, ἐφ' ὧν αὗται κεῖνται, ἤθελον ἐπίσης συναπαντηθῆ, ἑπομένως δὲν ἤθελον εἶναι παράλληλα, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ΜΝ *καὶ* ΠΚ *ἦναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα* ΑΓ *κάθετος ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου* ΜΝ, *θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου* ΠΚ (Σχ. 14).

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν ἀγάγωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ εὐθεῖάν τινα ΓΔ, τὸ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΓ καὶ ΓΔ διερχόμενον ἐπίπεδον θέλει τμήσει τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν ΑΒ, παράλληλον τῇ ΓΔ (Πρότ. 23). Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΓ ἡ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, θέλει εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῆς ΓΔ. Λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἡ κάθετος ἐπὶ οἱασδήποτε εὐθείας διαβαινούσης ἐκ τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ κειμένης, εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.



Σχ. 14.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. *Ἐκ τινος σημείου* Α (Σ. 14), *ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου* ΠΚ *κειμένου, δὲν δύναται νὰ ἀχθῇ εἰμὴ ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον* ΜΝ *παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ.*

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Α ἀχθῇ ἡ ΑΓ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Α ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΓ, τὸ ἐπίπεδον ΜΝ θέλει

εἶναι παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΠΚ (Πρότ. 21). Ὑπάρχει δὲ ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΠΚ. Διότι πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΠΚ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α ἀγόμενον, θέλει εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ καθέτου (Πρότ. 24)· τοιοῦτον δὲ ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς ΑΓ ἓν καὶ μόνον ὑπάρχει (Πρότ. 9).

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. *Δύο ἐπίπεδα παράλληλα τρίτῳ τινὶ, εἶναι καὶ μεταξὺ των παράλληλα.*

Ἀπόδειξις. Διότι δύο ἐπίπεδα παράλληλα δεδομένῳ τινὶ ἐπιπέδῳ δὲν ἔχουσι κοινόν τι σημεῖον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25.

Τὰ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ *καὶ* ΠΚ, *περιεχόμενα μέρη* ΑΓ *καὶ* ΒΔ, *δύο εὐθειῶν εἶναι ἴσα* (Σχ. 14).

Ἀπόδειξις. Διότι, τὸ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΓ καὶ ΒΔ ἀγόμενον ἐπίπεδον θέλει τμήσει τὰ δύο πρῶτα κατὰ δύο παραλλήλους εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ, καὶ τὸ οὕτω προκύπτον σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ΑΓ=ΒΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀπόστασις εἶναι καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἔκτασιν ἡ αὐτή. Ἐπειδή, ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ ἦσαν κάθετοι ἐπὶ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΠΚ, ἤθελον εἶναι καὶ παράλληλοι, καὶ ἑπομένως κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἴσαι· πρὸς δὲ ἤθελον καταμετρεῖ τὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν τῶν δύο ἐπιπέδων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26.

Τὰ μεταξὺ τριῶν παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμενα μέρη δύο εὐθειῶν ΑΒ *καὶ* ΓΔ *εἶναι παράλληλα* (Σχ. 15).

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Α,Ε,Β καὶ Γ,Ι,Δ τὰ σημεῖα καθ' ἃ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνουσι τὰ ἐπίπεδα Μ, Ν καὶ Κ. Ἐκ

τοῦ σημείου Γ ἄγομεν τὴν ΓΖ παράλληλον τῇ ΑΒ, ἥτις τέμνει τὰ ἐπίπεδα Ν καὶ Κ κατὰ τὰ σημεῖα Η καὶ Ζ, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὰς εὐθείας ΗΙ καὶ ΖΔ, αἵτινες εἶναι παράλληλοι, διότι εἰσὶν αἱ τομαὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΖΔ μετὰ τῶν ἐπιπέδων Ν καὶ Κ. Λοιπὸν ἔχομεν (Μέρος Α'. Πρότασ. 45) τὴν ἀναλογίαν ΓΗ:ΗΖ=ΓΙ:ΙΔ, ἀλλὰ ΓΗ=ΑΕ καὶ ΗΖ=ΕΒ ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμεναι· ἄραΑΕ:ΕΒ=ΓΙ:ΙΔ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

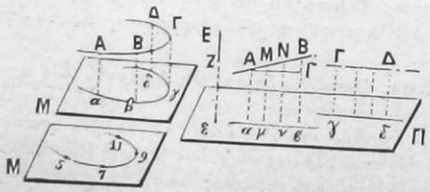


Σχ. 15.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΒΟΛΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

α') Καλεῖται, *Προβολὴ σημείου ἐπί τινος ἐπιπέδου*, ὁ ποὺς τῆς ἐκ τοῦ σημείου τούτου καταβιβαζομένης καθέτου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, π. χ. τὰ σημεῖα α, β, γ καὶ δ πόδες τῶν ἐκ τῶν σημείων Α, Β, Γ καὶ Δ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Μ καταβιβαζομένων καθέτων Αα, Ββ, Γγ καὶ Δδ (Σχ. 16),

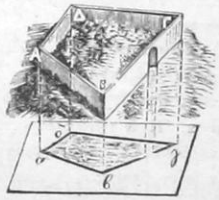


Σχ. 16.

καλοῦνται προβολαὶ τῶν σημείων Α, Β, Γ καὶ Δ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5. Ἐν τῇ ἐφαρμογῇ αἱ κάθετοι Αα, Βγ, Γγ καὶ Δδ, αἱ μετροῦσαι τὰς ἀποστάσεις, τῶν σημείων Α, Β, Γ καὶ Δ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου Μ, καλοῦνται Ὑψόμετρα τῶν σημείων τούτων· τὸ δὲ ἐπίπεδον Μ καλεῖται ἐπίπεδον τῶν ὑψομέτρων ἢ ὑψομετρικὸν ἐπίπεδον.

β') Καλεῖται *προβολὴ γραμμῆς τινος* ΑΒΓΔ *ἐπί τινος* ἐπιπέδου Μ ἡ γραμμὴ αβγδ ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν προβολῶν τῶν σημείων τῆς γραμμῆς ΑΒΓΔ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.



Σχ. 28.

γ') Ἐνγένει καλεῖται *προβολὴ οἱουδήποτε σχήματος*, ἐν τῷ διαστήματι, ἐπί τινος ἐπιπέδου, τὸ σχηματιζόμενον σχῆμα ὑπὸ τῶν προβολῶν τῶν πλευρῶν τοῦ ἐν τῷ διαστήματι σχήματος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Οὕτως ἡ προβολὴ τοῦ περιτοιχισμένου γηπέδου ΑΒΓΔ εἶναι τὸ σχῆμα αβγδ, (Σχ. 28).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4. Ἡ διαφορὰ ΒΓ (Σχ.16) τῶν ὑψομέτρων Αα καὶ Ββ δύο σημείων Α καὶ Β ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π λαμβανομένων, ἐκφράζει τὸ σχετικὸν ὕψος τῶν δύο τούτων σημείων. Οὕτω τὸ σημεῖον Β κεῖται ὑψηλότερα τοῦ Α κατὰ τὴν ἀπόστασιν ΒΓ. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι ὅπως προσδιορισθῇ τὸ σχετικὸν ὕψος ὁσωνδήποτε σημείων, ἀρκεῖ ἐν πρώτοις νὰ προσδιορισθῶσι τὰ ὑψόμετρα αὐτῶν σχετικῶς πρός τι ἐπίπεδον, ἐπίπεδον συγκρίσεως καλούμενον, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ, λαμβανομένων τῶν ὑψομέτρων ἀνὰ δύο, θέλει ἐκφράσει τὸ σχετικὸν ὕψος τῶν σημείων ἐκείνων ἐπὶ τῶν ὑψομέτρων τῶν ὁποίων ἐγένετο ἡ ἀφαίρεσις. Οὕτω π.χ. ἐὰν ἠδυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰ ὑψόμετρα τῶν κορυφῶν τῶν ὀρέων, τοῦ πυθμένος τῶν ποταμῶν, τῶν λιμνῶν, τῶν θαλασσῶν κτλ λαμβάνοντες ὡς ἐπίπεδον συγκρίσεως τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, ἠθέλομεν προσδιορίσει τὰ σχετικὰ ὕψη τῶν ὀρέων, τὰ βάθη τῶν ποταμῶν, τῶν λιμνῶν, τῶν θαλασσῶν κτλ. καὶ ἠθέλομεν ἔχει ἀκριβῆ ἰδέαν τῶν ἀνωμαλιῶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πλανήτου μας. Ἡ προσδιόρισις δὲ τοῦ σχετικοῦ ὕψους τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς ἀποτελεῖ ἴδιον τεχνικὸν κλάδον τῆς Γεωμετρίας διακρινόμενον ὑπὸ τὸ ὄνομα Τέχνη Χωροσταθμήσεως.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6. Ἐν τῇ ἐφαρμογῇ τὸ ὑψομετρικὸν ἐπίπεδον τῶν ἐν τῷ διαστήματι σημείων Α, Β, Γ, καὶ Δ παριστᾶται, ὡς δεικνύει τὸ ἐπίπεδον Μ ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται αἱ προβολαὶ α, β, γ καὶ δ τῶν σημείων τούτων καὶ πλησίον αὐτῶν οἱ ἀριθμοὶ 5, 7, 9, καὶ 11 οἱ ἐκφράζοντες τὰ ὑψόμετρα, ἤτοι τὰ μήκη τῶν συστοιχούντων καθέ-

των εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ διαστήματος. Τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Μ παριστᾷ τὸ ὑψομετρικὸν ἐπίπεδον τῆς ἐν τῷ διαστήματι καμπύλης γραμμῆς ΑΒΓΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ ἐν τῷ διαστήματι θέσις σημείου τινὸς προσδιορίζεται ὑπὸ τοῦ ὑψομέτρου, καὶ τῆς προβολῆς ἐπί τινος ἐπιπέδου τοῦ σημείου τούτου.

2. Ἡ ἐν τῷ διαστήματι θέσις εὐθείας τινὸς προσδιορίζεται ὑπὸ τῆς προβολῆς ἐπί τινος ἐπιπέδου, καὶ τῶν ὑψομέτρων τῶν δύο ἄκρων τῆς εὐθείας ταύτης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27.

Ἡ προβολὴ εὐθείας γραμμῆς ἐπί τινος ἐπιπέδου εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Κατασκευή. Ἐκ τινος σημείου Α τῆς εὐθείας ΑΒ καταβιβάζομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π τὴν κάθετον Αα (Σχ. 16), καὶ φέρομεν διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Αα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον θέλει τμήσει τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν αβ, ἥτις θέλει εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου προβολὴ τῆς ΑΒ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Μ, Ν, ... τῆς εὐθείας ΑΒ καταβιβάσωμεν καθέτους ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π, αἱ κάθετοι αὗται θέλουσιν εἶσθαι παράλληλοι τῇ Αα, καὶ θέλουσι κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΑα (Πρότ. 3), ἑπομένως δὲν δύνανται νὰ συναπαντήσωσι τὸ ἐπίπεδον Π, εἰμὴ εἰς σημεῖα ἐπὶ τῆς εὐθείας αβ κείμενα. Ἄρα ἡ εὐθεῖα αβ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ.

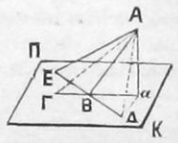
ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν μὲν ἡ εὐθεῖα ΖΕ (Σχ. 16) ᾖναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π, ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου εἶναι τὸ σημεῖον ε, ἐὰν δὲ ἡ εὐθεῖα ΓΔ ᾖναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ Π, ἡ προβολὴ αὐτῆς γδ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28.

Ἡ ὀξεῖα γωνία ΑΒα, *ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς εὐθείας* ΑΒ *καὶ τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* ΠΚ *προβολῆς αὐτῆς* Βα, *εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης* ΑΒΔ, *σχηματιζομένης*

ὑπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ *καὶ ἑτέρας τινὸς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* ΠΚ *κειμένης, καὶ διὰ τοῦ σημείου τῆς συναπαντήσεως* Β *διερχομένης* (Σχ. 17).

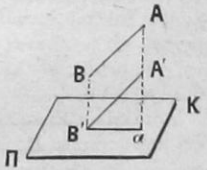
Ἀπόδειξις. Ἐὰν λάβωμεν ΒΔ=Βα καὶ φέρωμεν τὴν ΑΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒα καὶ ΑΒΔ θέλουσιν ἔχει τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινήν, τὰς πλευρὰς Βα καὶ ΒΔ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ Αα τοῦ πρώτου θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΔ τοῦ δευτέρου· ἐπειδὴ ἡ μὲν Αα εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ, ἡ δὲ ΑΔ πλαγία. Ἄρα ἡ γωνία ΑΒα εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΑΒΔ (Μέρ. Α'. Πρότ. 7).



Σχ. 17.

ΠΟΡΙΣΜΑ. 1. Ἐπειδὴ ἡ ὀξεῖα γωνία ΑΒα εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης ΑΒΔ, ἕπεται ὅτι ἡ παραπληρωματικὴ αὐτῆς ΑΒΓ εἶναι μεγαλειτέρα πάσης ἄλλης ΑΒΕ, διότι ὑπαρχούσης πάντοτε τῆς σχέσεως ΑΒα+ΑΒΓ=ΑΒΔ+ΑΒΕ=2 ὀρθαῖς, καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒα<ΑΒΔ, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ΑΒΓ>ΑΒΕ. Ἡ περὶ ἧς ἐγένετο λόγος ὀξεῖα γωνία ΑΒα ὠνομάσθη *γωνία τῆς εὐθείας μετὰ τοῦ ἐπιπέδου.*

2. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 18), τῆς ὁποίας ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ προβολὴ εἶναι ἡ Β'α δὲν ἀπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον, τότε ἡ σχηματιζομένη γωνία Α'Β'α' ὑπὸ τῆς προβολῆς Β'α καὶ τῆς εὐθείας Β'Α' τῆς ἐκ τοῦ σημείου Β' ἀγομένης παραλλήλως τῇ ΒΑ καὶ μεταξὺ τῶν καθέτων ΒΒ' καὶ Αα περιλαμβανομένης, θέλει ἐκφράσει τὴν ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΑ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ σχηματιζομένην γωνίαν.



Σχ. 18.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6. Ἔστωσαν ΑΒ εὐθεῖά τις, τῆς ὁποίας ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ προβολὴ εἶναι ἡ αβ, καὶ Αα=υ, Βδ=ύ τὰ ὑψόμετρα τῶν δύο αὐτῆς ἄκρων (Σχ. 19), καὶ ΑΓ παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου τῆς προβολῆς. Τούτου τεθέντος, ἐν τῇ ἐφαρμογῇ ὁ λόγος $\frac{Βδ-Αα}{ΑΓ}=\frac{ΒΓ}{αβ}$ τῆς διαφορᾶς τῶν ὑψομέτρων τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας πρὸς τὴν

προβολὴν αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ καλεῖται κλίσις τῆς εὐθείας ΑΒ. Ὁ μὲν ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος τοῦ ἐκφράζοντος τὴν κλίσιν λέγεται ὕψος, ὁ δὲ παρονομαστὴς βάσις, καὶ λέγομεν ὅτι ἡ ἐπί τινος ἐπιπέδου κλίσις εὐθείας τινὸς εἶναι 2 ὕψος πρὸς 3 βάσιν, ἤτοι $\frac{2}{3}$ ὅταν τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς τῆς εὐθείας οὔσης 3, τὸ ὕψος ἄνω τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἑνὸς τῶν σημείων τῆς εὐθείας ταύτης εἶναι 2.

Ἐὰν καλέσωμεν Κ τὴν κλίσιν ἔχομεν τὸν τύπον

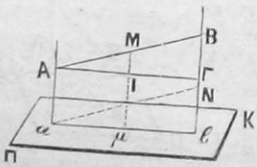
$$\frac{Bβ-Aα}{AΓ}=\frac{ύ-υ}{αβ}=K.$$

Εἰς τὸν τύπον τοῦτον ἐὰν θέσωμεν $ύ=4^{μ},7$, $υ=3^{μ},1$ καὶ $αβ=2^{μ},5$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ κλίσις τῆς εὐθείας πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς προβολῆς εἶναι $K=0^{μ},64$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν ΒΑΓ τῆς κλίσεως, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ χάρτου τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ΑΓ=2,5 καὶ ΒΓ=ύ−υ=1,6, καὶ διὰ τοῦ ἀναγωγέως νὰ μετρήσωμεν τὴν ἐπὶ τοῦ χάρτου συστατχοῦσαν εἰς τὴν ΒΑΓ γωνίαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.

Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ὑψομέτρου υ″ σημείου τινὸς Μ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ κειμένου, τῆς ὁποίας τὰ ὑψόμετρα υ καὶ ύ, ὡς καὶ ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ προβολὴ αὐτῆς Π εἶναι γνωστὴ, νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ μ τοῦ σημείου τούτου, ἡ προσδιοριζομένη ὑπὸ τῆς ἀποστάσεως αμ=χ. (Σχ. 19).



Σχ. 19.

Λύσις. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΜΙ καὶ ΑΒΓ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΙ:ΑΓ=ΜΙ:ΒΓ, ἥτις τρέπεται εἰς

$$αμ:αβ=Mμ-Aα:Bβ-Aα,$$

ἢ εἰς $χ:Π=υ''-υ:ύ-υ$,

ἐξ ἧς συνάγομεν $\quad χ=Π\times\frac{υ''-υ}{ύ-υ}. \quad . \quad . \quad . \quad [1].$

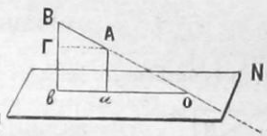
Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέσωμεν $Π=2,5$, $υ=3,1$, $ύ=4,7$ καὶ $υ''=4,2$ εὑρίσκομεν $χ=2,5\times\frac{1,1}{1,6}=1^{μ},71$.

Ὅταν ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Μ ἦναι γνωστὴ διὰ τῆς ἀποστάσεως Αμ, τὸ δὲ ὑψόμετρον αὐτοῦ υ″ ἄγνωστον, τότε διὰ τοῦ τύπου [1] εὑρίσκομεν αὐτὸ ὅτι εἶναι $υ''=υ+\frac{χ}{Π}(ύ-υ)$.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν $Π=2,5$, $χ=2$, $υ=3,1$ καὶ $ύ=4,7$, εὑρίσκομεν $υ''=4^{μ},38$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.

Γνωστῆς οὔσης τῆς προβολῆς Π εὐθείας τινὸς ΑΒ (Σχ. 20), καὶ τῶν ὑψομέτρων αὐτῆς υ καὶ ύ, νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον Ο, εἰς ὃ ἡ εὐθεῖα αὕτη ἀπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον τῆς προβολῆς ΜΝ.



Σχ. 20.

Λύσις. Ἔστωσαν αο=χ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΓ παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ. Τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα Ααο καὶ ΒΓΑ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν αο:Αα=ΑΓ:ΒΓ, ἥτις τρέπεται εἰς τὴν $χ:υ=Π:ύ-υ$, ἐξ ἧς προκύπτει

$$χ=\frac{Π\times υ}{ύ-υ}.$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον τοῦτον $Π=2^{μ},5$, $υ=3^{μ},1$ καὶ $ύ=4^{μ},7$ εὑρίσκομεν $χ=4^{μ},84$.

Ἐὰν ἡ ἐν τῷ διαστήματι εὐθεῖα ΑΒ ἦναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, τότε ύ=υ, καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ προηγουμένου τύπου γίνεται μηδέν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.

Γνωστῆς οὔσης τῆς προβολῆς Π, ἐπί τινος ἐπιπέδου ΜΝ, τῆς ἐν τῷ διαστήματι εὐθείας ΑΒ, ὡς καὶ τῶν ὑψομέτρων υ καὶ ύ τῶν δύο αὐτῆς ἄκρων, νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ταύτης.

Λύσις. Ἔστω χ τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ΑΒ (Σχ. 20)· τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τότε δίδει τὴν σχέσιν $χ^2=\overline{AΓ}^2+\overline{BΓ}^2$, ἐξ ἧς προκύπτει $\quad χ=\sqrt{Π^2+(ύ-υ)^2}.$

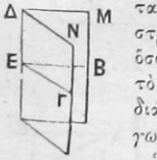
Διὰ $υ=3,1$, $ύ=4,7$ καὶ $Π=2,5$ εὑρίσκομεν $χ=\sqrt{8,81}=2^{μ},96$.

§. 15.

Ὁρισμὸς καὶ γένεσις τῶν διέδρων γωνιῶν. Δίεδρος γωνία ὀρθή. Ἐπίπεδος γωνία ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν. Δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἐπίπεδοι αὐτῶν γωνίαι. Ἐφαρμογή. Μέτρησις τῶν διέδρων γωνιῶν. Ἐπίπεδα κάθετα πρὸς ἄλληλα. Ἐφαρμογή. Ὁρισμοί. Πρακτικαὶ ἀρχαὶ ἐπὶ τῶν κατακορύφων καὶ ὁριζοντείων διευθύνσεων.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

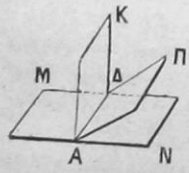
1. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ἐπίπεδόν τι ΑΜ (Σχ. 21), κατ' ἀρχὰς ταυτιζόμενον μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΑΝ, ὅτι στρέφεται περὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, τότε καθ' ὅσον ἀπομακρύνεται τοῦτο τοῦ ἐπιπέδου ΑΝ τὸ μεγαλείτερον ἢ μικρότερον ἀπ' ἀλλήλων διάστημα τῶν ἐπιπέδων καλεῖται *δίεδρος γωνία*.



Σχ. 21.

Ἡ κοινὴ τῶν δύο ἐπιπέδων τομὴ ΑΔ καλεῖται *κόψις τῆς διέδρου γωνίας*, τὰ δὲ σχηματίζοντα τὴν δίεδρον γωνίαν ἐπίπεδα καλοῦνται *ἕδραι* αὐτῆς.

Σημειοῦμεν τὴν δίεδρον γωνίαν διὰ τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα παριστῶσι τὴν κόψιν αὐτῆς· ἐὰν δὲ πολλαὶ δίεδροι γωνίαι ἔχωσι κοινήν τινα κόψιν (Σχ. 22), σημειοῦμεν ἑκατέραν τούτων διὰ τεσσάρων γραμμάτων, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ δύο, τιθέμενα εἰς τὸ μέσον παριστῶσι τὴν κόψιν, ἑκάτερον δὲ τῶν δύο ἄλλων μετὰ τῶν τὴν κόψιν παριστώντων, παριστῶσι τὰς δύο αὐτῆς ἕδρας καὶ λέγομεν, ἡ δίεδρος γωνία ΑΔ, ἢ ἡ δίεδρος γωνία ΜΑΔΚ, ΚΑΔΠ καὶ ΝΑΔΠ.



Σχ. 22.

Ἡ δίεδρος γωνία εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐκτάσεως τῶν ἑδρῶν αὐτῆς.

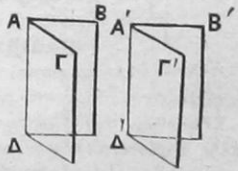
2. Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται ἴσαι, ὅταν αἱ ἕδραι αὐτῶν ἐπιτιθέμεναι ταυτίζωνται.

3. Ἐὰν εἰς σημεῖόν τι Ε τῆς κόψεως τῆς διέδρου γωνίας ΑΔ (Σχ. 21), ἀγάγωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἑκατέρας τῶν ἑδρῶν τὰς καθέτους ΓΕ καὶ ΒΕ, ἡ οὕτω σχηματιζομένη γωνία ΒΕΓ καλεῖται, ἡ εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν ἀντιστοιχοῦσα *ἐπίπεδος γωνία*.

Ἡ ὑπὸ τῶν καθέτων σχηματιζομένη αὕτη γωνία ΒΕΓ εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τῆς κόψεως ΑΔ καὶ ἂν ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι· διότι ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Δ σχηματισθῇ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἡ ἐπίπεδος γωνία ΜΔΝ, αἱ εὐθεῖαι ΔΝ καὶ ΕΓ θέλουσιν εἶσθαι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΔ καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΕΝ, κείμεναι· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΔΜ θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΕΒ. Ἄρα αἱ γωνίαι ΒΕΓ καὶ ΜΔΝ εἶναι ἴσαι (Πρότ. 16).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29.

Δύο δίεδροι γωνίαι ΑΔ, Α'Δ' *εἶναι ἴσαι, ὅταν ἔχωσι τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας* ΒΑΓ *καὶ* Β'Α'Γ' *ἴσας* (Σχ. 23).



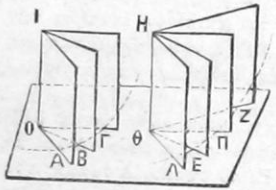
Σχ. 23.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΑΓ (Πρότ. 7), ἡ δὲ Α'Δ' ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Β'Α'Γ', ἔπεται ὅτι ἐὰν φέρωμεν τὴν δευτέραν δίεδρον γωνίαν Α'Δ' ἐπὶ τῆς πρώτης ΑΔ, οὕτως ὥστε αἱ ἴσαι ἐπίπεδοι γωνίαι Β'Α'Γ' καὶ ΒΑΓ νὰ συμπέσωσιν, αἱ κάθετοι Α'Δ' καὶ ΑΔ θέλουσι ταυτισθῇ (Πρότ. 10), ἑπομένως καὶ αἱ ἕδραι Β'Α'Δ' καὶ ΒΑΔ, Γ'Α'Δ' καὶ ΓΑΔ. Λοιπὸν αἱ προταθεῖσαι δίεδροι γωνίαι ἐπειδὴ ταυτίζονται εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 30.

Δύο δίεδροι γωνίαι ΑΠΘΖ *καὶ* ΑΙΟΓ *εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἐπίπεδοι αὐτῶν γωνίαι* ΑΘΖ *καὶ* ΑΟΓ *τουτέστι θέλομεν ἔχει* ΑΙΟΓ : ΑΠΘΖ = ΑΟΓ : ΑΘΖ, (Σχ. 24).

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τῶν διέδρων τούτων γωνιῶν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ἔχουσι κοινὸν μέτρον (Πρότ. 42. Μέρ. Α'.) τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται δὶς εἰς τὴν ἐπίπεδον γωνίαν ΑΟΓ καὶ τρὶς εἰς τὴν ΛΘΖ· ὁ λόγος τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν θέλει εἶναι 3:2.



Σχ. 24.

Διὰ τῆς κόψεως ΗΘ καὶ τῶν γραμμῶν τῆς διαιρέσεως ΘΠ καὶ ΘΕ τῆς γωνίας ΛΘΖ, φέρομεν ἐπίπεδα· τὴν αὐτὴν δὲ κατασκευὴν ἐπαναλαμβάνομεν καὶ διὰ τὴν ἐπίπεδον γωνίαν ΑΟΓ. Οὕτω διὰ τῆς τοιαύτης κατασκευῆς αἱ δύο δίεδροι γωνίαι ἀποσυντίθενται εἰς μερικὰς διέδρους γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, διότι αἱ ἐπίπεδοι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι (Πρότ. 29) καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν δίεδρος γωνία ΗΘ περιλαμβάνει τρεῖς, ἡ δὲ ΟΙ, δύο· λοιπὸν ὁ λόγος τῶν διέδρων τούτων γωνιῶν εἶναι 3:2 ὅθεν προκύπτει ἡ ἀναλογία ΔΙΟΓ:ΛΗΘΖ=ΑΟΓ:ΛΘΖ.

Ἡ πρότασις αὕτη ἐπαληθεύει καὶ ὅταν τὸ κοινὸν μέτρον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΟΓ καὶ ΛΘΖ ἦναι ἀπειροελάχιστον, τουτέστιν ὅταν αἱ γωνίαι αὗται ἦναι ἔκμετροι (Μέρ. Α'. Πρότ. 42).

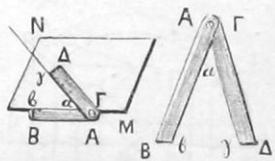
ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ δίεδρος γωνία ἡ ἔχουσα ἐπίπεδον γωνίαν ὀρθὴν καλεῖται *δίεδρος γωνία ὀρθή*.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῆς προηγουμένης προτάσεως ἕπεται ὅτι ὁ λόγος οἱασδήποτε διέδρου γωνίας πρὸς τὴν δίεδρον ὀρθὴν γωνίαν εἶναι τοιοῦτος, οἷος εἶναι ὁ τῆς συστοιχούσης αὐτῇ ἐπιπέδου γωνίας πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ὅπερ ἐκφωνοῦμεν οὕτω· *πᾶσα δίεδρος γωνία μετρεῖται ὑπὸ τῆς συστοιχούσης αὐτῇ ἐπιπέδου γωνίας.*

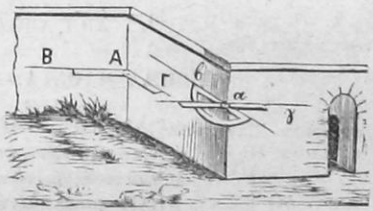
Ὅθεν αἱ δίεδροι γωνίαι ἐκφράζονται διὰ μοιρῶν πρώτων καὶ δευτέρων λεπτῶν, ὡς αἱ συστοιχοῦσαι αὐταῖς ἐπίπεδοι γωνίαι· π.χ. ἡ δίεδρος γωνία $45^0\ 18'\ 35''$ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐπίπεδον γωνίαν $45^0\ 18'\ 35''$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7. Ἐν τῇ ἐφαρμογῇ ἡ καταμέτρησις τῶν διέδρων γωνιῶν γίνεται καὶ διὰ τῶν ἑξῆς ἐργαλείων.

α.) Διὰ τοῦ Ψευδογνώμονος ὅστις συντίθεται ἐκ δύο ἰσομήκων κανόνων ΑΒ καὶ ΓΥ (Σχ. 25), συνερχομένων κατὰ τὸ ἓν αὐτῶν ἄκρον καὶ περιστρεφομένων περί τινα ἄξονα κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο, καὶ τῶν ὁποίων αἱ κόψεις ΑΒ, αβ καὶ ΓΔ, αγ εἶναι παράλληλοι καὶ ἀποπερατῶσι τὰ σκέλη τοῦ ἐργαλείου. Ἵνα δὲ καταμετρήσωμεν διὰ τοῦ ἐργαλείου τούτου τὴν ὑπὸ δύο τοίχων σχηματιζομένην γωνίαν ΒΑΓ (Σχ. 26), εἴς τι σημεῖον Α τῆς κόψεως τῶν τοίχων ὑψοῦμεν δύο καθέτους ΒΑ καὶ ΑΓ ἐπὶ τῆς κόψεως ταύτης καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῶν τοίχων κειμένας, θέτομεν τὴν κορυφὴν Α τοῦ ψευδογνώμονος (Σχ. 25), εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὑπὸ τῶν τοίχων σχηματιζομένης γωνίας ΒΑΓ καὶ ἀνοίγομεν τὰ σκέλη αὐτοῦ ἕως οὗ αἱ ἐξωτερικαὶ κόψεις ΑΒ καὶ ΓΔ τῶν σκελῶν συμπέσωσι μὲ τὰς πλευρὰς ΒΑ καὶ ΑΓ τῆς γωνίας τῶν δύο τοίχων. Τούτου γενομένου, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὸ οὕτω λαμβανόμενον ἄνοιγμα βαγ τῶν σκελῶν τοῦ ψευδογνώμονος, μεταφέρομεν αὐτὸν ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ ὀρθογωνίου σανίδος ΜΝ (Σχ. 25), οὕτως ὥστε κατά τινα πλευρὰν αὐτῆς προσαρμόζομεν τὴν ἐσωτερικὴν κόψιν αβ τοῦ ἑνὸς σκέλους τοῦ ἐργαλείου κατὰ δὲ τὴν κόψιν αγ τοῦ ἑτέρου σκέλους, γράφομεν ἐπὶ τῆς σανίδος γραμμήν. Λοιπὸν ἡ οὕτω σχηματιζομένη γωνία ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τῆς σανίδος καὶ τῆς ἐπ' αὐτῆς χαραχθείσης γραμμῆς καὶ ἡ διὰ τοῦ ἀναγωγέως μετρουμένη, θέλει εἶναι τὸ μέτρον τῆς διέδρου γωνίας τῆς ὑπὸ τῶν τοίχων σχηματιζομένης.



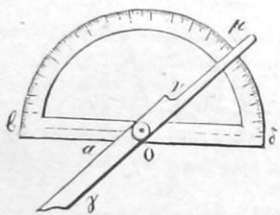
Σχ. 25.



Σχ. 26.

β'.) Διὰ τοῦ Γωνιομέτρου τὸ ὁποῖον εἶναι μετάλλινος ἀναγωγεὺς δμδ (Σχ. 27), ('Εφαρμ. 13. Μέρος Α'.) εἰς τοῦ ὁποίου τὸ κέν-

τρον περιστρέφεται ὁ κανὼν γμ διὰ τῆς κόψεως γ μ τοῦ ὁποίου ἀναγινώσκονται αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ τόξου τοῦ ἀναγωγέως. Καταμετροῦμεν δὲ διὰ τοῦ γωνιομέτρου τὴν ὑπὸ δύο τοίχων σχηματιζομένην δίεδρον γωνίαν, ἀφοῦ εἰς σημεῖόν τι α τῆς κόψεως τῶν τοίχων (Σχ. 26), φέρομεν ὡς προηγουμένως, τὰς δύο καθέτους αβ καὶ αγ κατὰ τὰς ὁποίας προσαρμόζομεν τὰς ἐσωτερικὰς κόψεις αβ καὶ αγ, τῆς τε διαμέτρου καὶ τοῦ κανόνος γμ τοῦ γωνιομέτρου, ἡ οὕτω δὲ σχηματιζομένη ἐκ κορυφῆς ἀντίθετος γωνία δομ (Σχ. 27), ἡ ὑπὸ τῆς κόψεως γμ τοῦ κανόνος γμ ὑποδεικνυομένη, εἶναι τὸ μέτρον τῆς ὑπὸ τῶν τοίχων σχηματιζομένης διέδρου γωνίας.

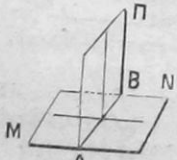


Σχ. 27.

Συνήθως ἐν τῇ πράξει χωρὶς νὰ χαραχθῶσιν αἱ ἐπὶ τῆς κόψεως τῆς διέδρου γωνίας κάθετοι εὐθεῖαι, τίθενται τὰ σκέλη τοῦ ψευδογνώμονος ἢ τοῦ γωνιομέτρου, ὡς προείρηται, διὰ μόνου τοῦ ὀφθαλμοῦ ἔχοντος κἄποιαν ἕξιν.

ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΘΕΤΑ.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐὰν προεκβληθῇ μία τῶν ἑδρῶν διέδρου τινὸς γωνίας ΠΒΑΝ. π.χ. ἡ ΜΑΒ, θέλει σχηματισθῇ δευτέρα τις δίεδρος γωνία ΠΒΑΜ προσκειμένη εἰς τὴν πρώτην. Ἐὰν αἱ προσκείμεναι αὗται δίεδροι γωνίαι ὦσι ἴσαι, τὸ ἐπίπεδον ΠΑ λέγεται *κάθετον* ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, αἱ δὲ ἴσαι δίεδροι γωνίαι καλοῦνται *ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι* (Σχ. 29).



Σχ. 29.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 31.

Δι' εὐθείας τινὸς ΒΑ *ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* ΜΝ *κειμένης ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον* ΠΑ *κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου δύναται πάντοτε νὰ ὑψωθῇ* (Σχ. 29).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 32.

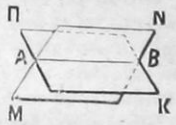
Τὸ ἄθροισμα δύο προσκειμένων διέδρων γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς διέδρους γωνίας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 33.

Δύο διασταυρούμενα ἐπίπεδα σχηματίζουσι τὰς ἐκ κορυφῆς ἀντιθέτους διέδρους γωνίας ἴσας (Σχ. 30).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 34.

Δύο παράλληλα ἐπίπεδα ὅταν συναπαντῶνται ὑπό τινος τρίτου, αἱ τέσσαρες προκύπτουσαι δίεδροι ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των ὡς καὶ αἱ τέσσαρες ἀμβλεῖαι γωνίαι.



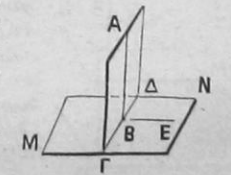
Σχ. 30.

Ἡ ἀπόδειξις τῶν προτάσεων τούτων κατὰ πάντα εἶναι ὁμοία μὲ τὴν τῶν προτάσεων 1, 2, 4, καὶ 18 τοῦ Α'. Μέρους, ὁ δὲ μαθητὴς δύναται ἀφ' ἑαυτοῦ νὰ ἐκτελέσῃ αὐτήν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 35.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΒ *ἦναι κάθετος ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς* ΜΝ, *πᾶν ἐπίπεδον* ΑΓ *διὰ τῆς* ΑΒ *διερχόμενον θέλει εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου* (Σχ. 31).

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἀγάγωμεν ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ τὴν εὐθεῖαν ΒΕ κάθετον εἰς τὴν κοινὴν τῶν δύο ἐπιπέδων τομὴν ΓΔ, ἡ εὐθεῖα ΒΑ κάθετος οὖσα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, θέλει εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέρας τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΒΕ. Ἀλλ' ἡ γωνία ΑΒΕ ὑπὸ δύο καθέτων ΒΑ καὶ ΒΕ ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΓΔ σχηματιζομένη, μετρεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΑΓΔ, καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὀρθὴ τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα.



Σχ. 31.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 36.

Ἐάν ἐπίπεδόν τι ΑΓΔ ᾖναι κάθετον ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς ΜΝ, *πᾶσα εὐθεῖα* ΒΑ *ἐπὶ τοῦ πρώτου ἐπιπέδου ἀγομένη καθέτως ἐπὶ τῆς κοινῆς τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων τομῆς* ΓΔ, *εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἐπιπέδου* ΜΝ (Σχ. 31).

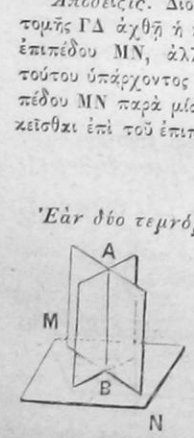
Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΔ ἀχθῇ ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ, ἡ γωνία ΑΒΕ θέλει εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα ΑΓΔ καὶ ΜΝ ὑπετέθησαν κάθετα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Ἄρα ἡ εὐθεῖα ΒΑ κάθετος οὖσα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΒΕ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ΑΓΔ καὶ ΜΝ (Σχ. 31) ὦσι κάθετα, καὶ ἐξ ἑνὸς σημείου Β τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς ΓΔ ἀχθῇ εὐθεία τις κάθετος ἐπὶ ἑνὸς τῶν δύο ἐπιπέδων, π.χ. ἐπὶ τοῦ ΜΝ· ἡ κάθετος αὕτη θέλει κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΓΔ.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν ἐπὶ τῆς κοινῆς τῶν δύο ἐπιπέδων τομῆς ΓΔ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΒΑ, αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἀλλ' ἐκ τοῦ σημείου Α ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τούτου ὑπάρχοντος δὲν δυνάμεθα νὰ ἀγάγωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ παρὰ μίαν καὶ μόνην κάθετον· ἄρα ἡ ΒΑ θέλει κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΔ τοῦ καθέτου ἐπὶ τοῦ ΜΝ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 37.

Ἐὰν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα ὦσι κάθετα ἐπὶ τρίτον τινὸς ΜΝ, *ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ* ΑΒ *θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ τρίτου τούτου ἐπιπέδου* (Σχ. 32).



Σχ. 32.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου Α τῶν δύο πρώτων ἐπιπέδων καταβιβάσωμεν κάθετον ἐπὶ τοῦ τρίτου ἐπιπέδου ΜΝ, αὕτη πρέπει νὰ κῆται συγχρόνως ἐπὶ ἑκατέρου τῶν δύο πρώτων ἐπιπέδων (Πρότ. 36 Πόρισμα). Ἄρα ἡ κοινὴ τῶν ἐπιπέδων τομὴ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ.

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΙ ΚΑΙ ΟΡΙΖΟΝΤΕΙΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8. Ὁρισμὸς α'. Ἡ διεύθυνσις τῆς μολυβδαίνης τουτέστιν ἡ διεύθυνσις ἣν λαμβάνει χορδή τις ὑπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου κρατουμένη, ταννομένη δὲ ὑπό τινος βάρους αἰωρουμένου διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου (Σχ. 11. Μέρ. Α'.) λέγεται κατακόρυφος. Ἡ κατακόρυφος γραμμὴ προεκτεινομένη μὲν ἄνω τῆς κεφαλῆς τοῦ παρατηρητοῦ ἀπαντᾷ τὸν οὐράνιον θόλον εἰς νοητόν τι σημεῖον κατακόρυφον σημεῖον ἢ Ζενὶθ καλούμενον· προεκτεινομένη δὲ κάτωθεν τοῦ παρατηρητοῦ διὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς διέρχεται καὶ ἀπαντᾷ τὸν οὐράνιον θόλον εἰς ἀντίθετον σημεῖον τοῦ πρώτου, ἀντικόρυφον σημεῖον ἢ Ναδὴρ καλούμενον.

Ὁρισμὸς β'.) Αἱ κατακόρυφοι δύο τόπων ὑπὸ μεγίστης ἀποστάσεως διαχωριζομένων, προεκτεινόμεναι, τείνουσι νὰ σχηματίσωσι γωνίαν τινὰ περί τι σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τῆς γῆς, σχῆμα ἐχούσης πεπιεσμένης σφαίρας (§. 26 Ἐφαρ. 127). Ἐὰν ὅμως ἡ μεταξὺ τῶν δύο τόπων ἀπόστασις δὲν εἶναι σημαντικῆς ἐκτάσεως, τότε ἡ γωνία τῶν κατακορύφων εἶναι τοσοῦτον μικρὰ ὥστε αἱ κατακόρυφοι δύνανται νὰ ἐκληφθῶσι παράλληλοι· τὴν ὑπόθεσιν ταύτην παραδεχόμεθα κατὰ τὰς τεχνικὰς τῆς γεωμετρίας ἐφαρμογὰς ὡς καὶ εἰς τὰς τῶν συνήθων καταμετρήσεων. Καὶ τῷ ὄντι, διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ εὑρίσκομεν ὅτι ἐὰν ἡ μεταξὺ δύο ἐπὶ τῆς γῆς τόπων ὁριζόντειος ἀπόστασις ᾖναι 100 χιλιομέτρων, ἡ ὑπὸ τῶν κατακορύφων σχηματιζομένη γωνία τῶν τόπων τούτων εἶναι 54', καὶ ὅτι ἡ διεύθυνσις τῶν κατακορύφων πάντων τῶν ἐπὶ τῆς γῆς σημείων τῶν περιλαμβανομένων ἐντὸς κύκλου διάμετρον ἔχοντος 100 χιλιόμετρα, δύναται νὰ θεωρηθῇ παράλληλος, πρὸς δὲ ὅτι τὰ ὅρια τοῦ κύκλου τούτου δὲν δύνανται νὰ ὑπερβῶσι καὶ αἱ μᾶλλον ἐκτεταμέναι τοπογραφικαὶ καταμετρήσεις.

Ὁρισμὸς γ'.) Ἡ ἐπὶ τῆς κατακορύφου κάθετος εὐθεῖα καλεῖται ὁριζόντειος εὐθεῖα

Ὁρισμὸς δ'.) Τὸ διὰ τῆς κατακορύφου διερχόμενον ἐπίπεδον καλεῖται κατακόρυφον ἐπίπεδον. Κατακόρυφα δὲ ἐπίπεδα σχηματίζουσι τὰ περιτοιχίσματα τῶν οἰκιῶν, τῶν δωματίων, τὰ θυρόφυλλα, αἱ κυγκληδόσεις. Αἱ πλάγιαι ὄψεις τῶν τοίχων ἔχουσι κατακόρυφον διεύθυνσιν.

Ὁρισμὸς έ. Τὸ ἐπὶ τῆς κατακορύφου κάθετον ἐπίπεδον καλεῖται ἐπίπεδον ὁριζόντειον. Τοιοῦτον δὲ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῶν ἠρεμούντων ὑδάτων μικρὰς ἐκτάσεως, τουτέστι τῶν λιμένων, τῶν λιμνῶν, τῶν ἐντὸς δοχείου περιεχομένων ὑδάτων. Ὁριζόντεια ἐπίπεδα εἶναι ὁμοίως τὰ δάπεδα τῶν δωματίων, ἡ ἄνω ἕδρα ἰματιοθήκης, τῆς τραπέζης, τῶν διαχωρισμάτων ἀρμαρίου κ.τ.λ.

Ὁρισμὸς ς΄.) Πᾶν ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον οὔτε ὁριζόντειον εἶναι οὔτε κατακόρυφον, καλεῖται πλάγιον ἢ κεκλιμένον ἐπίπεδον. Διὰ τοιούτων ἐπιπέδων σχηματίζεται ἡ στέγη τῶν οἰκιῶν.

Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων καὶ τῶν προτάσεων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰς παραγράφους 14 καὶ 15 ἔπονται αἱ ἑξῆς πρακτικαὶ ἀρχαί.

Ἀρχὴ α΄.) Αἱ κατακόρυφοι εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ὡς καὶ αἱ ὁριζόντειοι, αἱ κάθετοι ἐπὶ εὐθείας τινὸς εἶναι παράλληλοι.

β΄.) Τὰ ὁριζόντεια ἐπίπεδα τὰ κάθετα ἐπὶ εὐθεῖας τινὸς ἢ ἐπὶ ἐπιπέδου εἶναι παράλληλα. Ὁμοίως τὰ κατακόρυφα ἐπίπεδα τὰ κάθετα ἐπὶ εὐθείας τινὸς ἢ ἐπὶ ἐπιπέδου εἶναι παράλληλα.

γ΄.) Τὸ ὑπὸ δύο συναπαντομένων ὁριζοντείων εὐθειῶν ὁριζόμενον ἐπίπεδον εἶναι ὁριζόντειον.

δ΄.) Δι' οἱασδήποτε δεδομένης εὐθείας, δυνατὸν εἶναι νὰ ἀχθῇ κατακόρυφον ἐπίπεδον. Διότι ἔκτινος σημείου τῆς εὐθείας ταύτης ἐὰν φέρωμεν κατακόρυφον αὐτῇ μετὰ τῆς δεδομένης εὐθείας ὁρίζει τὴν θέσιν ἑνὸς κατακορύφου ἐπιπέδου.

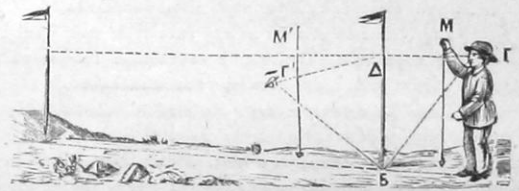
έ.) Αἱ κοιναὶ τομαὶ δύο ὁριζοντείων ἐπιπέδων μεθ' ἑνὸς τρίτου εἶναι εὐθεῖαι, ὁριζόντειοι καὶ παράλληλοι (ἐφαρ. 113. §. 23).

ς΄.) Πᾶσα εὐθεῖα κάθετος οὖσα ἐπὶ δύο ἄλλων ὁριζοντείων εὐθειῶν διερχομένων διά τινος σημείου τῆς εὐθείας ταύτης εἶναι κατακόρυφος.

ζ΄.) Ἡ κοινὴ τομὴ δύο κατακορύφων ἐπιπέδων εἶναι κατακόρυφος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9. Ἵνα ἐμπήξωμεν κατακορύφως ἀκόντιον εἰς τὸ ἔδαφος, ἱστάμεθα εἰς ἀπόστασίν τινα ἀπὸ τοῦ ἀκοντίου τούτου καὶ ἐκ τῆς θέσεως ταύτης ἀφ' ἑνὸς αἰωροῦμεν τὴν μολύβδαιναν ἐκ τοῦ σημείου Μ (Σχ. 33), οὕτως ὥστε ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς ΓΒ, ἡ ἐπιψαύουσα τὴν χορδὴν τῆς μολυβδαίνης, νὰ ἀπαντᾷ τὴν βάσιν Β τοῦ ἀκοντίου, ἀφ' ἑτέρου διὰ συνεργάτου ἡ κορυφὴ Δ τοῦ ἀκοντίου διευθύνεται οὕτως ὥστε ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς ΓΔ ἡ ἐπιψαύουσα τὴν χορδὴν τῆς μολυβδαίνης νὰ ἀπαντᾷ τὸ ἀκόντιον κατὰ τὸ μῆκος αὐτοῦ καὶ οὕτω τὸ ἀκόντιον λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν ΔΒ παράλληλον τῆς ἐκ τοῦ σημείου Μ αἰωρουμένης μολυβδαίνης. Τούτου γενομένου, μεταβαίνοντες εἰς τὸ σημεῖον Γ΄ κατὰ διεύθυνσιν Γ΄Δ ὡς ἔγγιστα κάθετον ἐπὶ τῆς πρώτης διευθύνσεως ΓΔ, καὶ ἐπαναλαμβάνοντες ἐκ τῆς νέας ταύτης θέσεως τὰ προειρημένα, θέτομεν τὸ ἀκόντιον κατὰ διεύθυνσιν παράλληλον τῆς μολυβδαίνης, τῆς ἐκ τοῦ σημείου Μ΄ αἰωρουμένης, ὁδηγούμενοι ὑπὸ τῶν ὀπτικῶν ἀκτίνων Γ΄Β καὶ Γ΄Δ. Εἶναι φανερὸν ὅτι (ὁρισμ. δ΄.) τὰ ἐπίπεδα ΔΓΒ καὶ ΔΙ΄Β εἶναι κατακόρυφα, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ τομὴ ΔΒ γενομένη κατὰ τὸ μῆκος τοῦ ἀκοντίου τοῦ εἰς τὸ σημεῖον Β ἐμπεπηγμένου εἶναι κατακόρυφος (ἀρχὴ ζ΄).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 10. Δοκιμάζομεν δὲ ἐὰν ἐμπεπηγμένον τι ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἀκόντιον ἦναι κατακόρυφον, ἀφοῦ κατὰ δύο καθέτους διευθύνσεις, ὡς προείπομεν, φέρωμεν τὰς ὀπτικὰς ἀκτῖνας ΓΒ καὶ Γ΄Β τὰς διερχομένας διὰ τῆς βάσεως Β τοῦ ἀκοντίου, καὶ ἐπιψαυούσας τὴν χορδὴν τῆς μολυβδαίνης, τῆς ἐκ διαδοχῆς αἰωρουμένης ἐκ τοῦ σημείου Μ καὶ Μ΄, βλέπομεν, ἐὰν μὲν τὸ μῆκος τοῦ ἀκοντίου ἀπαντᾷ τὴν ὀπτικὴν ἀκτῖνα ΓΔ καὶ Γ΄Δ τὴν ἐπιψαύουσαν ὁμοίως τὴν χορδὴν τῆς μολυβδαίνης τὴν ἐκ τοῦ σημείου Μ καὶ Μ΄ αἰωρουμένην, τότε ἡ διεύθυνσις τοῦ ἀκοντίου εἶναι κατακόρυφος. Ἐὰν δὲ τὸ τοιοῦτον δὲν λαμβάνει χώραν, τότε ἡ διεύθυνσις τοῦ ἀκοντίου ἦναι πλαγία, καὶ ἐπανορθοῦται ὡς προελέχθη.



Σχ. 33.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δοκιμάζομεν ἐὰν ἡ κόψις τοίχου, ἢ τὸ μῆκος δοκοῦ ἦναι κατακόρυφος διεύθυνσις.

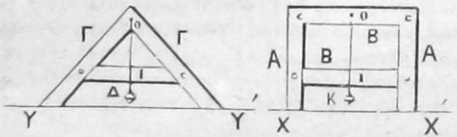
Ἡ ἐργασία αὕτη ὑπὸ τῶν τεκτόνων μας καλεῖται «Σαούλιασμα».

§.—16.

Τέχνη χωροσταθμήσεως. Ἐργαλεῖά τινα χωροσταθμήσεως. Ἁπλῆ καὶ σύνθετος χωροστάθμησις

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 11. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν ε΄. δυνατὸν εἶναι νὰ κατασκευασθῇ ἁπλούστατον ἐργαλεῖον, δι' οὗ νὰ τίθηται εὐθεῖα γραμμὴ ἢ ἐπίπεδον ὁριζοντείως, διότι ἀρκεῖ τὸ διὰ τῆς βάσεως τοῦ ἐργαλείου διερχόμενον ἐπίπεδον νὰ ἦναι κάθετον ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς μολυβδαίνης τῆς προσηρτημένης εἰς τὸ ἐργαλεῖον. Τοιοῦτον ἐργαλεῖον εἶναι,

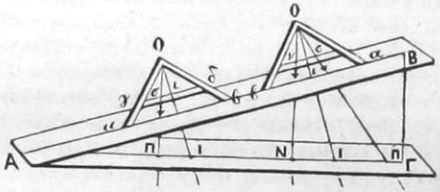
α΄) Τὸ Ἀλφάδιον, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἐκ δύο ἰσομήκων κανόνων Γ καὶ Γ (Σχ. 34), συνδεομένων διά τινος τρίτου Δ ὑπὸ τὸ



Σχ. 34.

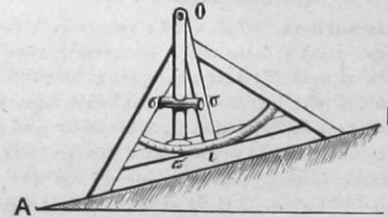
σχῆμα τοῦ γράμματος Α. Στηρίζομεν τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ κεκλιμένον πρὸς τὸ ὁριζόντειον ἐπίπεδον ΑΓ, καὶ σημειοῦμεν τὸ σημεῖον σ ἐπὶ τοῦ κανόνος γδ, (Σχ. 35) τῆς διευθύνσεως ΟΠ τῆς μολυβδαίνης τῆς αἰωρουμένης ἐκ τοῦ σημείου Ο καὶ καθέτου οὔσης ἐπὶ τοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου ΑΓ. Μεταστρέφοντες τὸ ἀλφάδιον ἀπὸ ἄκρου εἰς ἄκρον κατ' ἐναντίαν διεύθυνσιν δι' ἐκ τῆς πρώτης διευθύνσεως αβ, στηρίζομεν αὐτὸ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ καὶ σημειοῦμεν ἐπὶ τοῦ κανόνος γδ νέον τι σημεῖον ν τῆς διευθύνσεως ΟΝ, ἣν λαμβάνει ἡ μολύβδαινα κατὰ τὴν νέαν θέσιν τοῦ ἐργαλείου, ἥτις εἶναι ὁμοίως κάθετος ἐπὶ τοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου ΑΓ. Τούτου γενομένου εἶναι φανερὸν α΄.) ὅτι ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου ι τῆς βάσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου νοσ, καὶ τοῦ σημείου Ο τῆς αἰωρήσεως τῆς μολυβδαίνης, χαράξωμεν ἐπὶ τοῦ κανόνος γδ τὴν διεύθυντιν τῆς ΟΙ, ἣν καλοῦμεν ἀφετηρίαν γραμμὴν, αὕτη κάθετος οὖσα ἐπὶ τῆς βά-

σεως τοῦ τριγώνου τούτου θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ τῆς διερχομένης διὰ τῆς βάσεως βα τοῦ ἀλφαδίου, καὶ ἡ γωνία νΟι ὑπὸ τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς Οι καὶ τῆς διευθύνσεως Ον τῆς μολυβδαίνης απο-



Σχ. 35.

τελουμένη θέλει εἶναι ἴση τῇ ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒ καὶ ΑΓ σχηματιζομένῃ γωνίᾳ ΒΑΓ, διότι αἱ γωνίαι αὗται ἔχουσι τὰς πλευρὰς των ἀμοιβαίως καθέτους. Ὅθεν ἐὰν κλίνοντες τὸ ἐπίπεδον ΑΒ πρὸς τὸ ὁριζόντειον ἐπίπεδον ΑΓ κατὰ $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$ κτλ. σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ γεγραμμένου ἐκ τοῦ σημείου Ο ὡς ἀπὸ κέντρου (Σχ. 36), τὴν διεύθυνσιν, ἣν λαμβάνει τότε ἡ μολύβδαινα κατὰ τὰς διαδοχικὰς ταύτας κλίσεις, θέλομεν ἔχει ἐργαλεῖον κατάλληλον πρὸς μέτρησιν τῆς κλίσεως κεκλιμένου τινὸς ἐπιπέδου. β΄.) Ἐπειδὴ (Σχ. 35), ἡ γωνία νΟι ἡ ἴση τῇ ΒΑΓ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ιΟπ, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία νΟσ εἶναι διπλασία τῆς γωνίας ΒΑΓ· τουτέστιν ἡ γωνία νΟσ, ἡ ἀποτελουμένη ὑπὸ δύο διαδοχικῶν διευθύνσεων τῆς μολυβδαίνης ἃς λαμβάνει, στηριζομένου τοῦ ἀλφαδίου κατὰ δύο ἀντιθέτους διευθύνσεις ἐπὶ κεκλιμένου τινὸς ἐπιπέδου, εἶναι διπλασία τῆς γωνίας τῆς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ τοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου ἀποτελουμένης. γ΄.) Ἵνα εὐθεῖά τις ΑΒ ἦναι ὁριζόντειος ἀρκεῖ, ἀφοῦ στηρί-



Σχ. 36.

ξωμεν ἐπ'αὐτῆς τὸ ἀλφάδιον, ἡ διεύθυνσις τῆς μολυβδαίνης νὰ ταὐτισθῇ μετὰ τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς Οι. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει στρέφομεν τὴν εὐθεῖαν ταύτην περὶ τὸ ἓν ἄκρον της Α μέχρις οὗ ἡ χορδὴ τῆς μολυβδαίνης ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς καὶ οὕτως ἡ ΑΒ ἀποκαθίσταται ὁριζόντειος. δ'.) Ἵνα τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο χρησιμοποιήσωμεν καὶ διὰ τὴν μέτρησιν τῆς κατὰ μέτρον κλίσεως εὐθείας ἢ ἐπιπέδου τινός, ἐπὶ τῆς γδ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου ι (Σχ. 35), σημειοῦμεν διαρίθμων καὶ διὰ γραμμῶν, ἐκ τοῦ σημείου Ο ἀγομένων, τὰ 0,10. 0,20, 0,30 κτλ. τῆς ἐκ τοῦ σημείου Ο ἀποστάσεως τῆς γδ. ἥτις λαμβάνεται ἴση τῇ ιγ καὶ καλεῖται ἀποτέμνουσα τοῦ ἀλφαδίου. Τούτου τεθέντος ἕνεκα τῆς φύσεως τοῦ τριγώνου γΟδ, ἔχομεν ιγ=ιΟ=1. Πρὸς μέτρησιν λοιπὸν τῆς κλίσεως ΒΑΓ, τουτέστι πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου τοῦ ὕψους ΓΒ πρὸς τὴν βάσιν ΑΓ (Ἐφαρμ. 6), παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΒΑΓ καὶ ισπ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ ἔχουσι τὰς πλευράς των ἀμοιβαίως καθέτους, δίδουσι τὴν ἰσοπηλικότητα $\frac{ΒΓ}{ΑΓ}=\frac{ισ}{Οι}$. Ἐὰν, λόγου χάριν, τὸ σημεῖον σ πίπτῃ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 20, ἡ ἰσοπηλικότης αὕτη τρέπεται εἰς τὴν $\frac{ΒΓ}{ΑΓ}=\frac{20}{100}=0,20$, ἥτις ἐκφράζει ὅτι ἡ κατὰ μέτρον κλίσις ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι 0,20.

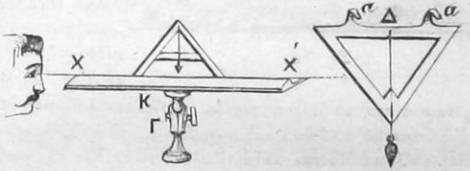
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 12. Ὅριον τῆς χρήσεως ἢ ἔριξις τοῦ ἀλφαδίου. Παραδεχόμενοι ὅτι ἡ συνταύτισις τῆς διευθύνσεως τῆς μολυβδαίνης μετὰ τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς Οι γίνεται κατὰ προσέγγισιν σι=$0^{μ},001$, καὶ ὅτι ἀντὶ τῆς καθ'αὐτὸ ὁριζοντείου εὐθείας ΑΓ λαμβανομένης ὡς ὁριζοντείου τῆς ΑΒ προκύπτει τὸ σφάλμα ΒΓ=σ διὰ τὴν ἀπόστασιν ΑΓ=χ καὶ διὰ α μῆκος τῆς ἀποτεμνούσης Οι, τότε ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων σΟι καὶ ΒΑΓ ἕπεται ἡ ἀναλογία $1^{μ}.001:α=σ:χ$, ἐξ ἧς λαμβάνεται ἡ ζητουμένη ἀπόστασις $χ=1000\times α\times σ$, πολλαπλασιαζομένων τῶν ἡγουμένων ἐπὶ 1000.

Εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον ὑποθέτοντες γνωστὴν τὴν ἀποτέμνουσαν α, τότε δι'ἑκάστην ἀπόστασιν, ἀποδιδομένην εἰς τὴν χ, εὑρίσκομεν τὴν προσέγγισιν τοῦ ἐργαλείου, ἢ παραδεχόμενοι συνήθως σ=$0^{μ},1$ εὑρίσκομεν $χ=100\times α$· λοιπὸν ἡ χρῆσις τοῦ ἀλφαδίου περιορίζεται μέχρι τοῦ ἑκατονταπλασίου τῆς ἀποτεμνούσης του.

ε'.) **ΕΦΑΡΜΟΓΗ 13.** Ἡ τεκτονικὴ στάθμη. ἥτις σχηματίζεται διὰ δύο ἰσομήκων κανόνων Α καὶ Α (Σχ. 34) συνδεομένων,

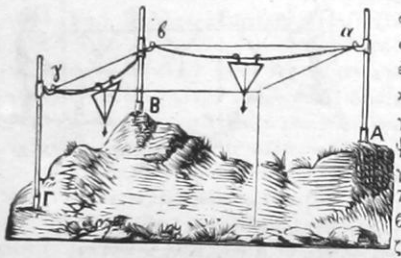
κατ'ὀρθὰς γωνίας, μετὰ δύο ἄλλων Β καὶ Β ἐπίσης ἰσομήκων. Ἡ ἀπὸ τῶν μέσων Ο καὶ Ι τῶν κανόνων Β καὶ Β διερχομένη καὶ ἐπ'αὐτῶν χαρασσομένη ἀφετηρία γραμμὴ, εἶναι παράλληλος τῆς διευθύνσεως τῶν κανόνων Α καὶ Α, κάθετος δὲ ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ποδῶν τοῦ ἐργαλείου ὁριζομένης. Ἡ χάραξις τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς ἐπὶ τῆς τεκτονικῆς στάθμης γίνεται ὡς ἡ τοῦ ἀλφαδίου.

γ'.) **ΕΦΑΡΜΟΓΗ 14.** Ὁ χωροβάτης ὁ ἀπὸ τῶν ἀρχαιοτάτων χρόνων γνωστὸς, καὶ τοῦ ὁποίου χρῆσιν ποιοῦνται καὶ τὴν σήμερον οἱ ὑδρονομεῖς καὶ οἱ τέκτονες τῆς Κωνστ/λεως, σχηματίζεται ὑπὸ τριῶν κανόνων, ἰσόπλευρον ἢ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἀποτελούντων (Σχ. 37), κατὰ τὸ ὕψος τοῦ ὁποίου χαράσσεται ἡ ἀφετηρία γραμμὴ, ἐφ'ἧς προσαρμόζεται ἡ διεύθυνσις τῆς μολυβδαίνης. Ἐπὶ τοῦ κανόνος, εἰς τὸ μέσον τοῦ ὁποίου αἰωρεῖται ἡ μολύβδαινα, ὑψοῦνται δύο ἰσομήκη ἁρπάγια α καὶ α, διὰ τῶν ὁποίων αἰωρεῖται τὸ ἐργαλεῖον εἰς τὸ μέσον χορδῆς. Τὸ μὲν ἓν ἄκρον τῆς χορδῆς προσδένεται εἰς σημεῖόν τι δ (Σχ. 38), κατὰ βούλησιν λαμβανόμενον, ἐπὶ κατακορύφως ἱσταμένης ῥάβδου Β, διῃρημένης εἰς μέτρα δεκατόμετρα καὶ ἑκατοστόμετρα, τὸ δὲ ἕτερον ἄκρον κρατούμενον τανύεται καὶ κινεῖται ἡ χορδὴ κατὰ τὸ μῆκος τῆς ῥάβδου Α, ἕως οὗ ἡ μολύβδαινα ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς τοῦ χωρεβάτου, καὶ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον α τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντείου εὐθείας μετὰ τοῦ σημείου δ κείμενον. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προσδιορίζεται τὸ σημεῖον γ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντείου μετὰ τοῦ σημείου δ κείμενον ὡς καὶ οἱονδήποτε ἄλλο σημεῖον. Τούτου τεθέντος ἕπεται ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν δα καὶ δγ κτλ. ὁριζόμενον ἐπίπεδον εἶναι ὁριζόντειον, τὰ σημεῖα δ, α καὶ γ εἶναι αἱ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου προβολαὶ τῶν σημείων Α, Β καὶ Γ τοῦ



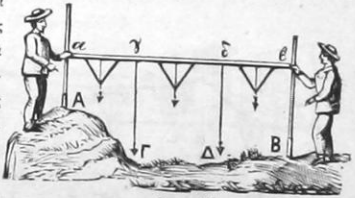
Σχ. 37.

ἐδάφους, ὅτι αἱ ἀποστάσεις βα καὶ βγ αἱ διὰ τῆς ταινίας ἢ τῆς ἁλύσσου καταμετρούμεναι εἶναι αἱ ὁριζόντειοι ἀποστάσεις τῶν σημείων Β, Γ καὶ Α, τὰ δὲ ἀναγινωσκόμενα μήκη Αα, Βδ καὶ Γγ ἐπὶ τῶν διηρημένων ῥάβδων εἶναι τὰ ὑψόμετρα τῶν σημείων τοῦ ἐδάφους ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντειον ἐπίπεδον αβγ, καὶ ὅτι καταμετροῦντες τὴν γωνίαν αβγ διὰ τοῦ ψευδογνώμονος ἢ τοῦ γωνιομέτρου (Ἐφ. 7) ἔχομεν τὴν προβολὴν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντείου τούτου ἐπιπέδου τῆς ὑπὸ τῶν σημείων Α, Β καὶ Γ τοῦ ἐδάφους σχηματιζομένης γωνίας. Ὅθεν ἐὰν λάβωμεν ἐκ συνθήκης ὡς ἐπίπεδον προβολῆς καὶ συγκρίσεως, τὸ ὁριζόντειον ἐπίπεδον, τότε εὐκόλως θέλομεν καταρτίζει τό τε σχέδιον τῆς προβολῆς καὶ τὸ ὑψομετρικὸν ἐπίπεδον τῶν σημείων τοῦ ἐδάφους. Πρὸς τοῦτο μετροῦμεν ὁριζοντείως τὰς μεταξὺ τῶν σημείων ἀποστάσεις, ὡς προελέχθη (Ἐφ. 7. Μερ. Α′), τὰς δὲ γωνίας μετροῦμεν ὁριζοντείως, τιθεμένου ἁπλῶς τοῦ ἀντυγος τοῦ γωνιομέτρου ὁριζοντείως, τὰ δὲ ὑψόμετρα τῶν σημείων λαμβάνομεν, ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντειον ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς περὶ τὸν ἄξονα τοῦ ἐργαλείου περιστροφικῆς κινήσεως τῆς γραμμῆς τῶν διόπτρων (Ἴδε Ἐφαρμ. 44, 69 καὶ 70).



Σχ. 38

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 15. Χωροβάτης ὑπὸ τοῦ Βιτρουβίου περιγραφόμενος. Ἐὰν ἀντὶ τῆς χορδῆς αβ (Σχ. 38) λάβωμεν κανόνα αβ (Σχ. 39), μῆκος ἔχοντα 20 ῥωμαϊκῶν ποδῶν ἢ 6 μέτρων ὡς ἔγγιστα, κάτωθεν τοῦ ὁποίου νὰ αἰωρῶνται πλεῖσται μολύβδαιναι, θέλομεν ἔχει τὸν ὑπὸ τοῦ Βιτρουβίου περιγραφόμενον χωροβάτην, τοῦ ὁποίου χρῆσιν ἐποιοῦντο οἱ Ἕλληνες χωρομέτραι ἐπὶ τῆς ἐποχῆς τοῦ Αὐγούστου. Οὗτοι, τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο κρατοῦντες μεταξὺ δύο κατακορύφων ῥάβδων οὕτως, ὥστε ἡ διεύθυνσις ἑκάστης μολυβδαίνης νὰ ταὐτίζηται μετὰ τῆς ἀντιστοίχου ἀφετηρίας γραμμῆς, προσδιώριζον τὴν μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β ὁριζόντειον ἀπόστασιν αβ, ὡς καὶ τὰ ὑψόμετρα αὐτῶν αΑ καὶ βΒ. Τῶν παρεμπιπτόντων δὲ σημείων Γ καὶ Δ τὰ ὑψόμετρα προσδιώριζον διὰ τῆς καταμετρήσεως τοῦ μήκους τῆς μολυβδαίνης τῆς αἰωρουμένης διαδοχικῶς ἐκ τοῦ σημείου γ καὶ δ τοῦ κανόνος, καὶ τῶν ὁποίων ἡ ὁριζόντειος ἀπόστασις εἶναι αγ καὶ γδ ἐπὶ τοῦ κανόνος ἀναγινωσκομένη. Ὅταν ὅμως ὁ ἄνεμος ἀποκαθίστα ἀμφίβολον τὴν ὁριζόντειον θέσιν τοῦ ἐργαλείου, τότε οὗτοι ὁδηγούμενοι ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον ἔχεον ἐντὸς αὐλακος κατὰ τὸ μῆκος τοῦ κανόνος εὑρισκομένου, μῆκος μὲν ἔχοντος 5 ποδῶν, ἤτοι $1^{\mu},48$, πλάτος δὲ ἑνὸς δακτύλου, ἤτοι $0^{\mu},0185$, βάθος δὲ ἑνὸς καὶ ἡμίσεως δακτύλου (τοῦ ῥωμαϊκοῦ ποδὸς περιέχοντος 16 δακτύλους), ἀποκαθίστων τὸν κανόνα ὁριζόντειον. Ὁ χωροβάτης, τὸν ὁποῖον περιεγράψαμεν ἐν τῇ Ἐφαρμ. 14 εἶναι ἁπλοποίησίς τις τοῦ ὀγκώδους καὶ δυσχρήστου ἐν τῇ πράξει ἐργαλείου τοῦ ὑπὸ τὸ Σχ. 39 παριστανομένου (*).



Σχ. 39.

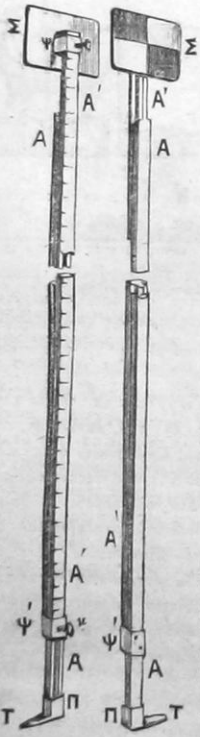
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 16. Κανονοφόρος χωροβάτης. Οὗτος ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἀλφαδίου Α (Σχ. 37) καὶ τοῦ κανόνος Κ, τοῦ ὁποίου ἡ ἄνωκόψις ΧΧ′, χρησιμεύουσα ὅπως διευθύνωμεν ὀπτικὴν εὐθεῖαν ὁριζόντειον, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς τοῦ ἀλφαδίου. Διὰ τοῦ γόνατος, τοῦ εὑρισκομένου κατὰ τὸ μέσον τοῦ κανόνος, τίθεται τὸ ἐργαλεῖον ἐπὶ τρίποδος καὶ δύναται νὰ περιστρέφηται περὶ τὸν ἄξονά του.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 17. Τὰ ἐργαλεῖα τὰ ὁποῖα χορηγοῦσιν ὀπτικὰς εὐθείας ὁριζοντείους κειμένας ἐπὶ τὸ ὁριζόντειον ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς τοῦ ἐργαλείου, καὶ τὰ ὁποῖα καλοῦνται ἐργαλεῖα χωροσταθμήσεως, συνοδεύονται μεθ' ἑνὸς δευτέρου ἐργαλείου καλουμένου ὑψομέτριον.

Τὸ ὑψομέτριον (Σχ. 40) εἶναι ῥάβδος μήκους δύο ἢ τεσσάρων μέτρων (Ἐφαρ. 41), διηρημένη εἰς μέτρα δεκατόμετρα καὶ ἑκατοστόμετρα κατὰ τὸ μῆκος τῆς ὁποίας κινεῖται ἢ ἵσταται, εἰς οἱονδήποτε

(*) *Traité du Nivellement par P. Breton.*

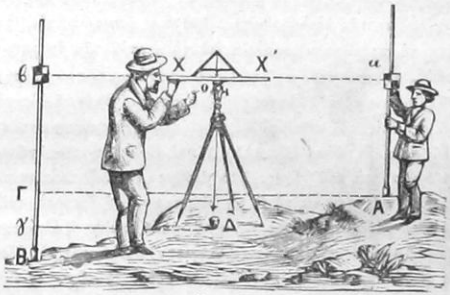
σημεῖον, διὰ καταλλήλου περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ κοχλίου κ, ὁ σκοπὸς Σ. Τούτου δὲ αἱ εὐθεῖαι τῆς σκοπεύσεως, αἱ διὰ τοῦ λευκοῦ καὶ ἐρυθροῦ χρώματος μεθ' οὗ εἶναι χρωματισμένος ὁ σκοπὸς σχηματιζόμεναι, τέμνονται κατ' ὀρθὰς γωνίας, οὕτως ὥστε ἡ μὲν εἶναι ὁριζόντειος ἡ δὲ κατακόρυφος. Τὸ σημεῖον τῆς διατομῆς τῶν εὐθειῶν τῆς σκοπεύσεως, σημεῖον σκοπεύσεως καλούμενον, κινεῖται κατὰ τὸ μῆκος τῆς ῥάβδου, ὑπό τινος βοηθοῦ, ἕως οὗ ἀπαντήσῃ τὴν διὰ τοῦ ἐργαλείου διευθυνομένην ὁριζόντειον ὀπτικὴν ἀκτῖνα τοῦ παρατηρητοῦ, καὶ προσδιορίσῃ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου τοῦ ἐδάφους ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἵσταται κατακορύφως τὸ ὑψομέτριον. Τότε ἀναγινώσκει ὁ βοηθὸς τὰς διαιρέσεις τῆς ῥάβδου, τὰς μεταξὺ τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ τοῦ σημείου τῆς σκοπεύσεως περιεχομένας, αἵτινες ἐκφράζουσι τὸ ὑψόμετρον.



Σχ. 40.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 18. Ἁπλὴ χωροστάθμησις (Σχ. 41). Ἵνα προσδιορίσωμεν διὰ τοῦ κανονοφόρου χωροβάτου τὴν διαφορὰν τοῦ ὕψους τῶν σημείων Α καὶ Β τοῦ ἐδάφους, τοποθετοῦμεν τὸ ἐργαλεῖον ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας αὐτῶν καὶ ὡς ἔγγιστα εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἑκατέρου τούτων. Ἐπὶ ἑκάστου τῶν σημείων Α καὶ Β διά τινος βοηθοῦ στηρίζομεν κατακορύφως ὑψομέτριον καὶ διὰ τοῦ κοχλίου τοῦ γόνατος στρέφομεν τὸν κανόνα τοῦ ἐργαλείου ἕως οὗ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθυγραμμίας τῶν σημείων Α καὶ Β, ταὐτισθῇ δὲ ἡ μολυβδαίνα μετὰ τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς. Τότε λέγομεν ὅτι τὸ ἐργαλεῖον εὑρίσκεται εἰς Σταθμόν. Τούτου τεθέντος διευθύνομεν ὀπτικὴν ἀκτῖνα κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΧΧ′ τοῦ κανόνος καὶ διὰ χειρονομίας ὁδηγοῦμεν τὸν βοηθὸν, ὅστις κρατεῖ εἰς τὸ σημεῖον Α τὸ ὑψόμετρον, νὰ κινήσῃ τὸν σκοπὸν μέχρις οὗ τὸ

σημεῖον τῆς σκοπεύσεως ἀπαντήσῃ εἰς τὸ α τὴν ὁριζόντειον ὀπτικὴν εὐθεῖαν, προσδιορισθῇ δὲ οὕτως ἡ λεγομένη ἐμπρόσθιος ῥιπὴ α. Ἵνα λάβωμεν δὲ τὴν ὀπίσθιον ῥιπὴν β, ἀφίνοντες τὸ ἐργαλεῖον



Σχ. 41.

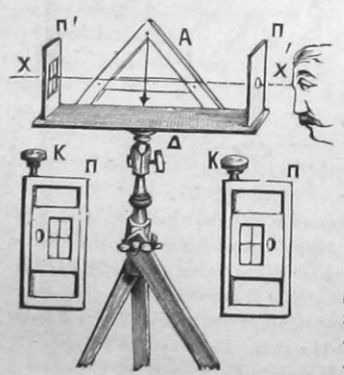
εἰς τὴν αὐτὴν πάντοτε θέσιν, διευθύνομεν ὀπτικὴν ἀκτῖνα κατὰ τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν Χ′Χ τοῦ κανόνος ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου τοῦ εἰς τὸ σημεῖον Β ἱσταμένου. Ἡ διαφορὰ ΒΓ τῶν οὕτω προσδιοριζομένων ὑψομέτρων Ββ καὶ Αα, προσδιορίζει τὴν ζητουμένην διαφορὰν τοῦ ὕψους τῶν σημείων Α καὶ Β. Ἡ ἐργασία αὕτη ἥτις λέγεται ἁπλὴ χωροστάθμησις ἐκτελεῖται μὲν διὰ οἱουδήποτε ἐργαλείου χορηγοῦντος ὁριζόντειον ὀπτικὴν εὐθεῖαν, ἐφαρμόζεται δὲ πάντοτε ὅταν ἀντὶ τοῦ κανονοφόρου χωροβάτου μεταχειριζώμεθα τὴν ὑδροστάθμην. Τότε ἡ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β ἀπόστασις δὲν ὑπερβαίνει τὰ 50 μέτρα· ὅταν δὲ μεταχειριζώμεθα ἐργαλεῖον φέρον διόπτραν ἡ αὐτὴ ἀπόστασις δὲν ὑπερβαίνει τὰ 200 ἢ 240 μέτρα, ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ ὕψους τῶν σημείων δὲν ὑπερβαίνει τὸ ὕψος τοῦ ὑψομετρίου, τὸ ὁποῖον συνήθως εἶναι 2 ἕως 4 μέτρα (Ἴδε Ἐφαρμ. 41).

Παρατήρησις ά.) Διερχομένης πάντοτε τῆς ὑπὸ τῶν ἐργαλείων χορηγουμένης ὀπτικῆς ὁριζοντείου εὐθείας ἄνω τῶν σημείων τοῦ ἐδάφους, ἡ διαφορὰ ΒΓ τῶν ὑψομέτρων Ββ καὶ Αα τῶν σημείων Α καὶ Β (Σχ. 41) δύναται νὰ ἦναι θετικὴ ἢ ἀρνητική. Οὕτως, ἐὰν λάβωμεν π. χ. τὴν διαφορὰν Ββ − Αα = + ΒΓ, αὕτη δεικνύει ὅτι τὸ σημεῖον Β τοῦ ὁποίου τὸ ὑψόμετρον ἐλήφθη ὡς ἀφαιρετέος κεῖται χαμηλότερα τοῦ Α, ἐπειδὴ ἔχει ὑψόμετρον μεγαλείτερον. Ἂν δὲ ἀντιθέτως λάβωμεν τὴν διαφορὰν Αα − Ββ = − ΒΓ, αὕτη δεικνύει ὅτι τὸ σημεῖον

Α, τοῦ ὁποίου τὸ ὑψόμετρον ἐλήφθη ὡς ἀφαιρετέος, κεῖται ὑψηλότερα τοῦ Β, ἐπειδὴ ἔχει ὑψόμετρον μικρότερον.

Παρατήρησις β΄) Συνήθως θέτομεν τὸ ἐργαλεῖον μεταξὺ τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ζητεῖται ἡ διαφορὰ τοῦ ὕψους, καὶ μάλιστα ὅταν ποιῶμεν χρῆσιν τῆς ὑδροστάθμης. Τοῦτο δὲ ὅπως ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐλαττώσωμεν τὸ πρόχυπτον σφάλμα διὰ τὸ κυρτὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος δι' ἧς σκοπεύομεν, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἀποφύγωμεν τὴν μέτρησιν τοῦ ὕψους τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος τοῦ ἐμπεριεχομένου ἐν τῇ ὑδροστάθμῃ, ἄνω τοῦ σημείου τοῦ σταθμοῦ, ἥτις μέτρησις δυσκόλως ἐπιτυγχάνεται Τῷ ὄντι, ἔστωσαν (Σχ. 41) Δ καὶ Β δύο σημεῖα, τῶν ὁποίων ζητεῖται ἡ διαφορὰ τοῦ ὕψους. Σταθμεύομεν ἐπὶ ἑνὸς τούτων π.χ. ἐπὶ τὸ Δ, καὶ στηρίζομεν εἰς τὸ Β τὸ ὑψομέτριον, ἡ διαφορὰ τοῦ ὕψους τῶν σημείων τότε θέλει εἶναι Βγ=Βδ—ΔΟ καθ' ἣν ἡ ἀπόστασις ΔΟ δυσκόλως μετρεῖται μετ' ἀκριβείας ἐὰν μεταχειριζώμεθα τὴν ὑδροστάθμην, ἐν ᾧ διὰ τῆς ταινίας εὐκόλως μετρεῖται ἐὰν ἔχωμεν ἐν χρήσει ἐκτὸς τῆς ὑδροστάθμης οἱονδήποτε ἄλλο ἐργαλεῖον χωροσταθμήσεως.

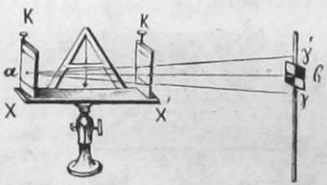
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 19. Διοπτροφόρος χωροβάτης. Οὗτος σύγκειται ἐκ τοῦ ἀλφαδίου Α καὶ τοῦ διόπτρου Δ (Ἐφαρμ. 14. Μέρ. Α΄), τοῦ ὁποίου ἡ ὀπτικὴ εὐθεῖα ΧΧ΄ (Σχ. 42), ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς κυκλικῆς παροπίδος τοῦ πτερυγίου Π καὶ τοῦ κέντρου τῆς θυρίδος τοῦ πτερυγίου Π΄, τοῦ ὑπὸ τῆς διασταυρώσεως μιᾶς ὁριζοντείου καὶ μιᾶς κατακορύφου τριχὸς ἀποτελουμένου, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς τοῦ ἀλφαδίου. Ἵνα δὲ σκοπεύωμεν καὶ κατὰ τὰς δύο διευθύνσεις ΧΧ΄ καὶ Χ΄Χ τοῦ διόπτρου, ἕκαστον πτερύγιον Π συνίσταται ἐξ ἑνὸς ὀρθογωνίου περιγυρώματος ἐκ τεσσάρων ἐπιμήκων καὶ στενοτάτων κανονίσκων σχηματι-



Σχ. 42.

ζομένου, τὸ ὁποῖον περικλείει πλαίσιον δι' ὅλκοῦ κρατούμενον καὶ δυνάμενον νὰ κινηθῇ κατακορύφως διὰ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ κοχλίου Κ. Ἐπὶ ἑκάστου πλαισίου ἐκκόπτεται ἐπιμήκης ὀρθογώνιος θυρὶς τῆς ὁποίας τὸ κέντρον, τὸ ὑπὸ τῶν δύο διασταυρουμένων τριχῶν σχηματιζόμενον, κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντείου γραμμῆς ἐφ' ἧς καὶ τὸ κέντρον τῆς ἐπὶ τοῦ πλαισίου ἐντεινομένης κυκλικῆς παροπίδος. Ἡ παροπὶς κεῖται πρὸς τὰ δεξιὰ μὲν τῆς θυρίδος ἐπὶ τοῦ ἑνὸς πτερυγίου, πρὸς τὰ ἀριστερὰ δὲ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου πτερυγίου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 20. Ἵνα δοκιμάσωμεν ἐὰν ἡ διεύθυνσις τῆς ὀπτικῆς εὐθείας τῶν πτερυγίων τούτων εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς τοῦ ἀλφαδίου, ἀφοῦ ἀποκαταστήσωμεν τὴν εὐθεῖαν ταύτην ὡς ἔγγιστα παράλληλον τῆς διευθύνσεως τοῦ κανόνος Δ τοῦ διόπτρου διὰ τῶν κοχλιῶν Κ τῶν πτερυγίων· στήνομεν τὸ ἐργαλεῖον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ ταὐτίζομεν τὴν διεύθυνσιν τῆς μολυβδαίνης μετὰ τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς τοῦ ἀλφαδίου. Τούτου γενομένου διευθύνομεν κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΧΧ΄ τοῦ διόπτρου (Σχ. 43) ὀπτικὴν εὐθεῖαν, ἥτις ἀπαντᾷ εἰς τὸ γ τὸ κατακορύφως ἱσταμένον ὑψομέτριον εἰς ἱκανὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἐργαλείου. Ἔπειτα περιστρέφοντες τὸ ἐργαλεῖον περὶ τὸν ἄξονά του κατὰ 180° σκοπεύομεν διὰ τῆς κυκλικῆς παροπίδος κατὰ τὴν διεύθυνσιν Χ΄Χ, καὶ ἐὰν μὲν ἴδωμεν καὶ πάλιν τὸ σημεῖον γ νὰ ταὐτίζηται μετὰ τοῦ κέντρου τῆς θυρίδος τοῦ κατέναντι πτερυγίου, τότε ἡ διεύθυνσις τῆς ὀπτικῆς εὐθείας τοῦ διόπτρου εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς τοῦ ἀλφαδίου. Ἐὰν δὲ ἀντὶ τοῦ σημείου γ ἴδωμεν τὸ κέντρον τῆς θυρίδος νὰ ἀπαντᾷ τὸ ὑψομέτριον εἰς τὸ γ΄, τότε θέτοντες τὸ κέντρον τοῦ σκοποῦ τοῦ ὑψομετρίου εἰς τὸ σημεῖον δ, μέσον τῆς ἀποστάσεως γγ΄, δι' ἑνὸς τῶν κοχλιῶν Κ, κινοῦμεν τὸ πλαίσιον τοῦ ἑτέρου τῶν πτερυγίων ἕως οὗ σκοπεύοντες διὰ τοῦ διόπτρου ἴδωμεν νὰ ταὐτισθῇ τὸ κέντρον τῆς θυρίδος μετὰ τοῦ σημείου δ. Οὕτως ἡ σκοπευτικὴ εὐθεῖα αδ τοῦ διόπτρου ἀποκαθίσταται κάθετος ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς τοῦ ἀλφαδίου.

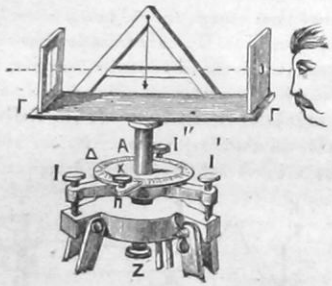


Σχ. 43.

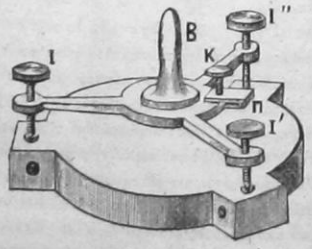
Ἐν τῇ δοκιμῇ ταύτῃ ὑπεθέσαμεν ὅτι γενομένης τῆς περὶ τὸν

ἄξονα περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ ἐργαλείου. ἡ ὀπτικὴ εὐθεῖα τοῦ διόπτρου στρέφεται περὶ τὸ μέσον αὐτῆς ἐπὶ ὁριζοντείου ἐπιπέδου διερχομένου ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς συναπαντήσεως τῆς προεκβολῆς τοῦ ἄξονος τοῦ ἐργαλείου, καὶ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας ταύτης. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τοῦ γόνατος μεθ' οὗ τὸ δίοπτρον συνδέεται, ἡ ὑπόθεσις αὕτη, ἵνα μὴ εἴπωμεν ἀδύνατον, δυσκόλως κατορθοῦται ἐν τῇ πράξει, διὰ τοῦτο δίδεται εἰς τὸ ἐργαλεῖον ἡ ἑξῆς διάταξις.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 21. Οἱ τρεῖς ἰσοπεδοτικοὶ κοχλίαι. Ἐν τῷ μέσῳ τοῦ κανόνος τοῦ διόπτρου (Σχ. 44), ἵσταται καθέτως κοῖλος κορμὸς Α μετὰ τοῦ ὁποίου συνδέεται τὸ δίοπτρον, καὶ εἰς τοῦ ὁποίου τὸ ἄκρον ὑπάρχει δίσκος Δ, δυνάμενος νὰ περιστραφῇ μετὰ τοῦ κορμοῦ Α περί τινα ἄξονα Β (Σχ. 45). Ὁ ἄξων οὗτος κάθετος ὢν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τε δίσκου Δ καὶ τοῦ κανόνος ΓΓ τοῦ διόπτρου, λαμβάνει κατακόρυφον διεύθυνσιν διὰ τῶν ἰσοπεδοτικῶν κοχλιῶν Ι, Ι′ καὶ Ι″. Οὗτοι διαπερῶσι τοὺς τρεῖς βραχίονας πρὸς οὓς συνδέεται ὁ ἄξων Β καὶ στηρίζουσι τὸ ἐργαλεῖον ἐπὶ τοῦ τρίποδος (Σχ. 44), συνδεομένου τοῦ ἄξονος Β μετὰ τοῦ τρίποδος, τῇ καταλλήλῳ περιστροφικῇ κινήσει τοῦ κοχλίου Ζ. Ὁ ἄξων δὲ οὗτος εἶναι κατακόρυφος ὅταν περιστρεφομένου τοῦ συνόλου τοῦ συστήματος ΓΓΔΔ καὶ ὁλόκληρον περιφέρειαν, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς περιστροφῆς ἡ διεύθυνσις τῆς μολυβδαίνης ταὐτίζηται μετὰ τῆς



Σχ. 44.



Σχ. 45.

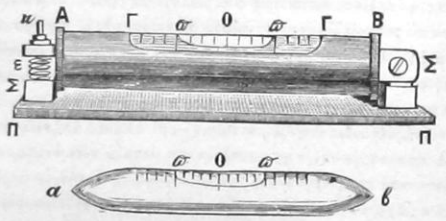
ἀφετηρίας γραμμῆς τοῦ ἀλφαδίου. Τότε τῆς ὀπτικῆς εὐθείας τοῦ διόπτρου κατασταθείσης διὰ τοῦ κοχλίου τοῦ πτερυγίου καθέτου ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς μολυβδαίνης, ὡς ἐλέχθη δύναται τὸ ἐργαλεῖον νὰ χρησιμεύσῃ διὰ τὴν ἀγωγὴν ὁριζοντείων ὀπτικῶν ἀκτίνων ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κειμένων. Ἡ δὲ περιστροφικὴ κίνησις τοῦ τε κορμοῦ Α καὶ τοῦ δίσκου Δ διακόπτεται διὰ τῆς περιώνης Π, τῆς καθηλωμένης πρὸς τὰ κάτω τοῦ ἄξονος Β διὰ ἑνὸς τῶν δύο αὐτῆς σκελῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων συσφύγγεται ὁ δίσκος Δ, τῇ καταλλήλῳ περιστροφικῇ κινήσει τοῦ συμπιεστικοῦ κοχλίου Κ. Ἐπὶ τέλους δὲ, ἵνα καταστήσωμεν τὸν δίσκον Δ ὁριζόντειον, στρέφομεν τὸ ἐργαλεῖον (Σχ. 44) περὶ τὸν ἄξονά του ἕως οὗ ἡ βάσις τοῦ ἀλφαδίου λάβῃ διεύθυνσιν παράλληλον τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης δύο τῶν ἰσοπεδοτικῶν κοχλιῶν, τουτέστι τῶν Ι καὶ Ι′, διὰ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τῶν ὁποίων ταὐτίζομεν τὴν διεύθυνσιν τῆς μολυβδαίνης μετὰ τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς τοῦ ἀλφαδίου· τούτου γενομένου, περιστρέφομεν ἐκ νέου τὸ ἐργαλεῖον ἕως οὗ ἡ βάσις τοῦ ἀλφαδίου λάβῃ διεύθυνσιν ὡς ἔγγιστα κάθετον ἐπὶ τῆς πρώτης, καὶ διὰ τῆς περιστροφῆς τοῦ τρίτου κοχλίου Ι″, ταὐτίζομεν πάλιν τὴν διεύθυνσιν τῆς μολυβδαίνης μετὰ τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς τοῦ ἀλφαδίου, ἐὰν ἀπομακρύνηται ταύτης. Τοιουτοτρόπως καθίσταται ὁ δίσκος Δ παράλληλος πρὸς δύο ὁριζοντείους εὐθείας τεμνομένας, καὶ εἶναι ὁριζόντιος.

Ἡ διάταξις αὕτη, ἐπειδὴ ἐπαυξάνει τὴν ἀξίαν τῶν ἐργαλείων, γίνεται μόνον διὰ τὰ ἐργαλεῖα, τὰ ὁποῖα ἀντὶ διόπτρων φέρουσι τηλεσκόπια ἤτοι διόπτρας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 22. Στάθμη διὰ φυσαλίδος ἢ ἀεροστάθμη. Τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο συντίθεται ἐξ ἑνὸς ὑελίνου σωλῆνος αβ (Σχ. 46), ἀνεπαισθήτως κυρτουμένου πρὸς τὰ ἄνω, ὅστις πληροῦται οἰνοπνεύματος ἢ αἰθέρος, ἐκτὸς διαστήματός τινος, ὑπὸ ὁμοιόλυγος ἀέρος ἢ φυσαλίδος ππ κατεχομένου. Ὁ σωλὴν οὗτος ἑρμητικῶς κλειόμενος προφυλάσσεται ὑπό τινος ὀρειχαλκίνου κυλινδρικοῦ περικαλύμματος ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἀφίνει ἐλεύθερον τὸ κυρτὸν τοῦ ὑελίνου σωλῆνος μέρος ΓΓ. Ἐπιστηρίζεται δὲ ἑκάστον ἄκρον αὐτοῦ ἐπὶ ἐπιμήκους ὀρειχαλκίνου ὀρθογωνίου κανόνος ΠΠ διά τινος στηρίγματος Σ καθέτως ἱσταμένου ἐπὶ τοῦ κανόνος ΠΠ. Τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ σχήματος στήριγμα Σ σχηματίζει στροφέα περὶ τὸ κέντρον τοῦ ὁποίου στρέφεται ἡ ἀεροστάθμη. Τὸ ἕτερον τῆς ἀεροσταθμης ἄκρον Α κινεῖται διὰ τῆς διαστολῆς ἢ συστολῆς τοῦ σπυροειδοῦς ἐλατηρίου ε, ἐφ' οὗ

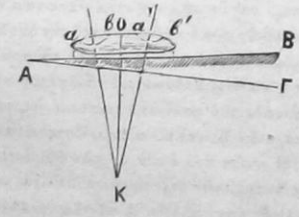
ἐπικάθηται τὸ ἄκρον· ἡ δὲ διαστολὴ ἢ συστολὴ γίνεται τῇ καταλλήλῳ περιστροφικῇ κινήσει τοῦ ἐπανορθωτικοῦ κοχλίου κ.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ κατὰ τὴν φυσικὴν ἡ διαχωρίζουσα ἐπιφάνεια δύο σώματα, τοῦ μὲν ῥευστοῦ τοῦ δὲ ἀερίου, ἐντὸς δοχείου



Σχ. 46.

καὶ ἐν καταστάσει ἠρεμίας εὑρισκόμενα, εἶναι ὁριζόντειος, ἔπεται ὅτι ἡ ἀεροστάθμη θέλει εἶναι κεκανονισμένη, ὅταν θέτοντες αὐτὴν ἐπὶ ὁριζοντείου ἐπιπέδου προσδιορίσωμεν διὰ χαραγῶν ἐπὶ τοῦ ὑελίνου σωλῆνος δύο σημεῖα π καὶ π, ἀναφορικὰ σημεῖα καλούμενα, εἰς ἴσην ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀπόστασιν εὑρίσκονται τὰ ἄκρα τῆς φυσαλίδος ππ, τῆς ὑπὸ τὸ κυρτὸν μέρος τοῦ σωλῆνος καὶ ἄνω τοῦ οἰνοπνεύματος εὑρισκομένης.

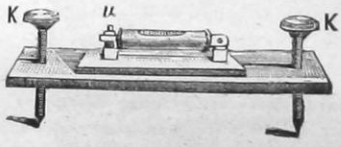


Σχ. 47

Δοκιμάζομεν δὲ ἐὰν ἡ τοιαύτη ἐργασία ἀκριβῶς ἐγένετο ἐπὶ ἀεροστάθμης, τὴν ὁποίαν πρόκειται νὰ μεταχειρισθῶμεν, θέτοντες αὐτὴν ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΑΒ (Σχ. 47), καὶ σημειοῦντες τὰ ἄκρα τῆς φυσαλίδος τῆς κατεχούσης τὴν θέσιν αβ. Μεταστρέφοντες ἔπειτα τὸ ἐργαλεῖον κατὰ 180^0 σημειοῦμεν τὰ ἄκρα τῆς φυσαλίδος, ἥτις ἀναφαίνεται κατὰ τὴν α'β' διὰ τὴν νέαν ταύτην τῆς ἀεροστάθμης θέσιν.

Τούτου γενομένου τὸ μέσον ο τῆς αβ' πρέπει ἰσάκις νὰ ἀπέχῃ τῶν ἀναφορικῶν σημείων, ἑκατέρωθεν τῶν ὁποίων ὑπάρχουσιν ἴσαι διαιρέσεις, ἐὰν ἡ ἀεροστάθμη ἦναι κανονισμένη. Ἐν ἐναντίᾳ δὲ περιπτώσει ἐπανορθοῦμεν αὐτὴν ἔχοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν ἀκτίνων τῆς κυρτότητος τοῦ ὑελίνου σωλῆνος, τῶν διερχομένων διὰ τοῦ κέντρου τῆς φυσαλίδος κατὰ τὰς δύο διαδοχικὰς θέσεις ὑπὸ τὰς ὁποίας τίθεται ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἡ ἀεροστάθμη, σχηματιζομένη γωνία αΚβ' εἶναι διπλασία τῆς ὑπὸ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου ΑΓ ἀποτελουμένης γωνίας (Ἐφαρμ. 11).

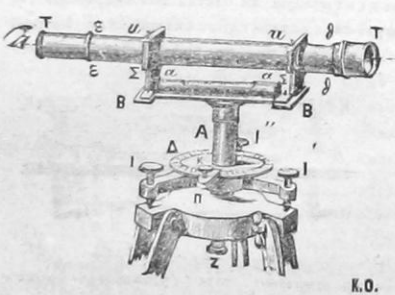
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 23. Ἐπανόρθωσις τῆς ἀεροστάθμης. Εἶναι φανερὸν ὅτι, θέτοντες τὴν ἀερόσταθμην ἐπὶ εὐθείας ὁριζοντείου, δυνάμεθα νὰ ἐπαναφέρωμεν τὴν φυσαλίδα ππ μεταξὺ τῶν ἀναφορικῶν της σημείων π καὶ π, ἐνεργοῦντες καταλλήλως ἐπὶ τοῦ ἐπανορθωτικοῦ κοχλίου κ (Σχ. 46). Ἀλλ' ἐπειδὴ τοιαύτην τινὰ εὐθεῖαν δὲν ἔχομεν ὑπὸ τὴν διάθεσίν μας, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέτομεν τὴν ἀεροστάθμην ἐπὶ κανόνος, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα (Σχ. 48) στηρίζονται διὰ δύο ἰσοπεδοτικῶν κοχλιῶν Κ καὶ Κ', καὶ ὅτι ἡ φυσαλὶς δὲν περιορίζεται μεταξὺ τῶν ἀναφορικῶν της σημείων· τότε ἐπαναφέρομεν αὐτὴν μεταξὺ τῶν ὁρίων της, ἐνεργοῦντες καταλλήλως ἐπὶ τοῦ ἐπανορθωτικοῦ κοχλίου κ. Τούτου τεθέντος, μεταστρέφομεν τὴν ἀεροστάθμην κατὰ 180^0 καὶ ἀριθμοῦμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν διαιρέσεων κατὰ τὸν ὁποῖον ἐκτοπίσθη ἡ φυσαλὶς τῶν ἀναφορικῶν της σημείων. Κατὰ τὰ προειρημένα ἐπειδὴ ἡ ἐκτόπισις τῆς φυσαλίδος καταμετρεῖ τὸ διπλοῦν τῆς πρὸς τὸ ὁριζόντειον ἐπίπεδον κλίσεως τοῦ κανόνος, ἀρκεῖ νὰ ἐνεργήσωμεν ἐπὶ τῶν ἰσοπεδοτικῶν κοχλιῶν Κ καὶ Κ' οὕτως, ὥστε νὰ παλινδρομήσῃ ἡ φυσαλὶς κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διαιρέσεων καθ' ἃς ἐξετοπίσθη αὕτη τῶν ἀναφορικῶν της σημείων. Οὕτω καθίσταται ὁ κανὼν ὁριζόντειος. Πρὸς ἐπανόρθωσιν δὲ τῆς ἀεροστάθμης δὲν μένει ἄλλο εἰμὴ νὰ ἐπαναφέρωμεν τὴν φυσαλίδα μεταξὺ τῶν ἀναφορικῶν της σημείων, ἐνεργοῦντες καταλλήλως ἐπὶ τοῦ ἐπανορθωτικοῦ κοχλίου κ. Ὁ τρόπος δι' οὗ ἐπανορθοῦται ἡ ἀεροστάθμη ἐκφωνεῖται λοιπὸν οὕτω· παρατηροῦμεν πρὸ καὶ μετὰ τὴν μεταστροφὴν



Σχ. 48

» τῆς ἀεροστάθμης τὴν φυσαλίδα, καὶ διορθοῦμεν τὸ ἥμισυ τῆς παρεκ-
» τροπῆς μεταξὺ τῶν ἀναφορικῶν της σημείων διὰ τῶν κοχλιῶν τοῦ
» ἐργαλείου εἰς ὃ ἀνήκει ἡ ἀεροστάθμη, τὸ δὲ ἄλλο ἥμισυ διὰ τοῦ ἐπα-
» νορθωτικοῦ κοχλίου τῆς ἀεροστάθμης. » Παρατηρητέον δὲ ὅτι μὲ
πρώτην δοκιμὴν ἐπειδὴ δὲν καταντῶμεν εἰς τὴν ἀκριβῆ ἐπανόρθωσιν
τῆς ἀεροστάθμης, ἐπαναλαμβάνομεν πολλάκις τὴν δοκιμὴν μεταστρέ-
φοντες αὐτὴν μέχρις οὗ ἡ φυσαλὶς καταστα θῇ ἀμετακίνητος μεταξὺ
τῶν ἀναφορικῶν της σημείων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 24. Ἐπανόρθωσις τοῦ κατακορύφου ἄξο-
νος ἐργαλείου τινός. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἀεροστάθμη
αα (Σχ. 49) ἐπικάθηται ἐπὶ εὐθείας περιστρεφομένης μετὰ τοῦ ἄξο-
νος τούτου διὰ τοῦ
στροφέως Β (Σχ.
45) τοῦ στηριζο-
μένου κατακορύ-
φως ἐπὶ τριῶν βρα-
χιόνων ἕκαστος
τῶν ὁποίων φέρει
ἰσοπεδοτικὸν κοχ-
λίαν Ι, Ι′ καὶ Ι″.
Περιστρέφομεν τὸ
ἐργαλεῖον μέχρις
οὗ ἡ ἀεροστάθμη
λάβῃ διεύθυνσιν

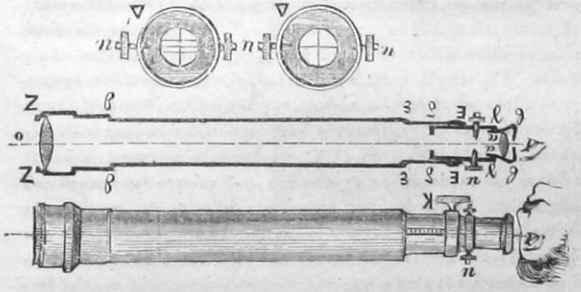


Σχ. 49.

παράλληλον τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης δύο ἰσοπεδοτικοὺς κοχλίας Ι καὶ
Ι′ ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐνεργοῦντες φέρομεν τὴν φυσαλίδα μεταξὺ τῶν
ἀναφορικῶν της σημείων. Τούτου τελέντος, μεταστρέφομεν τὸ ἐργα-
λεῖον κατὰ 180° καὶ ἡ ἀεροστάθμη παρουσιάζεται τότε κατὰ τὴν
ἀντίθετον διεύθυνσιν. Ἐνεργοῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐπανορθωτικοῦ κοχλίου
αὐτῆς μέχρις οὗ παλινδρομήσῃ ἡ φυσαλὶς κατὰ τὸ ἥμισυ τῶν διαι-
ρέσεων καθ' ἃς αὕτη ἤθελεν ἐκτοπισθῇ τῶν ἀναφορικῶν της σημείων
συνεπείᾳ τῆς δευτέρας ταύτης θέσεως τῆς ἀεροστάθμης. Οὕτω τῆς
ἀεροστάθμης κανονισθείσης καὶ τῆς γραμμῆς τῆς ἑνούσης τοὺς ἐν
λόγῳ ἰσοπεδοτικοὺς κοχλίας καταστα θείσης ὁριζοντείου, μεταστρέ-
φομεν ἐκ τρίτου τὸ ἐργαλεῖον κατὰ 90° μέχρις οὗ ἡ ἀεροστάθμη
λάβῃ διεύθυνσιν κάθετον τῆς ἣν κατεῖχε θέσεως καὶ ἐνεργοῦντες ἐπὶ
τοῦ τρίτου ἰσοπεδοτικοῦ κοχλίου Ι″, ἐπαναφέρομεν τὴν φυσαλίδα

μεταξὺ τῶν ἀναφορικῶν της σημείων. Τὸ ἐπίπεδον τῶν τριῶν κοχλιῶν
εἶναι λοιπὸν ὁριζόντειον, ἐπίσης καὶ ὁ δίσκος Δ, ἑπομένως καὶ ὁ ἄξων
ὅστις εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτοῦ, εἶναι ἐπίσης κατακόρυφος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 25. Διόπτρα. Διὰ νὰ σκοπεύωμεν εἰς μεγάλας
ἀποστάσεις ἀντικαθιστῶμεν τὸ δίοπτρον τῶν ἐργαλείων διὰ τῆς διό-
πτρας (Σχ. 50). Αὕτη δὲ εἶναι ἐπιμήκης κυλινδρικὸς μετάλλινος
σωλὴν μήκους $0^{\mu},30$ ἕως $0^{\mu},35$ σχηματιζόμενος διὰ τῆς συναρμογῆς
τριῶν μικροτέρων σωλήνων. Εἰς τὸ κέντρον τῆς βάσεως τοῦ μικροτέ-
ρου σωλῆνος αββα ὑπάρχει λεπτοτάτη ὀπὴ παροπὶς καλουμένη,
διότι εἰς αὐτὴν τίθεται ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ, ὄπισθεν δὲ αὐ-
τῆς ὑέλινος φακὸς προοφθάλμιος καλούμενος, καὶ διάμετρον ἔχων
$0^{\mu},009$. Ὁ σωλὴν οὗτος ἐναρμοζόμενος μετὰ τοῦ σωλῆνος γδδγ κι-
νεῖται μετ' αὐτοῦ, μέχρι τινὸς, ἐντὸς τοῦ σωλῆνος EZZE διὰ περι-



Σχ. 50.

στροφικῆς κινήσεως τοῦ κοχλίου Κ. Ὁ σωλὴν γέδγ διαφράσσεται διά
τινος διαφράγματος Δ, τὸ ὁποῖον εἶναι κρίκος διαιρούμενος ὑπὸ
δύο διασταυρουμένων ἀραχναίων νημάτων, τοῦ μὲν ὁριζοντείου τοῦ δὲ
κατακορύφου, ἐὰν ἡ διόπτρα ἀνήκῃ εἰς ἐργαλεῖον χωροσταθμήσεως
ἢ εἰς γωνιόμετρον· ὑπὸ τριῶν δὲ ὁριζοντείων καὶ ἑνὸς κατακορύφου νή-
ματος ὡς τὸ διάφραγμα Δ′, ἐὰν ἡ διόπτρα ἀποτελῇ τὴν λεγομένην
Σταδίαν, (ἴδε Ἐφαρμ. 92. §. 23) δι' ἧς μετροῦνται αἱ ἀπο-
στάσεις δι' ὑπολογισμοῦ ἄνευ τῆς ταινίας καὶ τοῦ δεκαμέτρου (Ἐφαρμ.
6. Μέρ. Α). Συνήθως τὸ διάφραγμα φέρει τρία ὁριζόντεια ἀραχνᾶ
νήματα μεθ' ἑνὸς κατακορύφου ὅταν ἡ διόπτρα ἀνήκῃ εἰς ταχυμε-
τρικὸν ἐργαλεῖον καὶ καλεῖται νηματοφόρος κρίκος (Ἐφαρμ.

96.). Ὁ κρίκος τοῦ διαφράγματος δύναται νὰ κινηθῇ ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω δι' ἑνὸς ἢ περισσοτέρων κοχλιῶν κ, οἵτινες διαπερῶσι τὸν κύλινδρον τῆς διόπτρας. Εἰς τὸ ἄκρον ΖΖ τοῦ μεγαλειτέρου σωλῆνος ΕΖΖΕ ὑπάρχει δέλινος φακὸς μεγαλείτερος τοῦ πρώτου, ἀντικειμενικὸς καλούμενος, καὶ διάμετρον ἔχων 0^{μ}, 026 ἕως 0^{μ}.036, ἐπειδὴ διευθύνεται πρὸς τὸ ἀντικείμενον, τὸ ὁποῖον σκοπεύομεν διὰ τοῦ προσφθαλμίου, θέτοντες τὸν ὀφθαλμὸν εἰς τὴν παροπίδα.

Ὀπτικὸς ἄξων, ἄξων τοῦ σχήματος. Τούτων οὕτως ἐχόντων, κατὰ τὴν ὀπτικήν, αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες αἱ ἀπὸ τοῦ σκοποῦ ἢ ἀπό τινος ἀντικειμένου ἐκπεμπόμεναι, διέρχονται διὰ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ θλώμεναι καὶ συντρέχουσιν εἰς σημεῖόν τι καλούμενον συζυγὶς ἑστία τοῦ φακοῦ τούτου, εἰς ὃ σχηματίζεται ἀντεστραμμένον τὸ εἴδωλον τοῦ σκοπευομένου ἀντικειμένου. Τὸ εἴδωλον τοῦτο τὸ βλέπομεν καθαρῶς καὶ εἰς μέγα σχῆμα διὰ τοῦ προσφθαλμίου, ὅστις εἶναι μεγεθυντικὸς φακὸς εἰς τοῦ ὁποίου τὴν ἑστίαν εὑρίσκεται τὸ εἴδωλον. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ἑστία εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ἥτις ἐπιζευγνύει αὐτὴν μὲ τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ, ἕπεται ὅτι ἐὰν θέσωμεν τὸ σημεῖον τῆς διασταυρώσεως τῶν ἀραχναίων νημάτων ἐπὶ τῆς ἑστίας, τὸ σημεῖον τοῦτο θέλει συμπέσῃ μετὰ τοῦ εἰδώλου τοῦ σκοπευομένου σημείου π.χ τοῦ κέντρου τοῦ σκοποῦ τοῦ ὑψομετρίου. Λοιπὸν ἡ οὕτως ὁριζομένη εὐθεῖα ἐκ τοῦ σημείου τῆς διασταυρώσεως καὶ τοῦ κέντρου τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ θέλει διέλθει ὁμοίως διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σκοποῦ καὶ καλεῖται ὀπτικὸς ἄξων ἢ γραμμὴ διοπτρῶν.

Ὁ ὀπτικὸς ἄξων πρέπει νὰ διακρίνηται τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα τῶν ὑελίνων φακῶν ὡς καὶ τοῦ ἄξονος ΟΟ, τοῦ σχήματος τῆς διόπτρας. Ὁ δὲ ἄξων τοῦ σχήματος εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ κατὰ τὴν ὁποίαν ἐὰν φέρωμεν ἐπίπεδον, τοῦτο θέλει τμήσῃ τὸ σχῆμα τῆς διόπτρας εἰς δύο ἴσα μέρη, ἕκαστον ὅμοιον μὲ τὴν εἰκόνα, ἥτις παριστᾷ εἰς τὸ (Σχ. 50) τὸ ἐσωτερικὸν τῆς διόπτρας. Αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι γραμμαὶ κατὰ σύμπτωσιν δυνατὸν νὰ συμπέσωσιν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 26. Ἐπειδὴ ἡ συζυγὶς ἑστία λαμβάνει διάφορον θέσιν ἐντὸς τοῦ νηματοφόρου σωλῆνος γδδγ ἀναλόγως τῆς ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ ἀποστάσεως τοῦ ἀντικειμένου, διὰ τοῦτο διὰ περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ κοχλίου Κ μετακινοῦμεν αὐτὴν μέχρις οὗ ἴδωμεν καθαρῶς σκοπεύοντες διὰ τῆς παροπίδος τῆς διόπτρας, τὸ

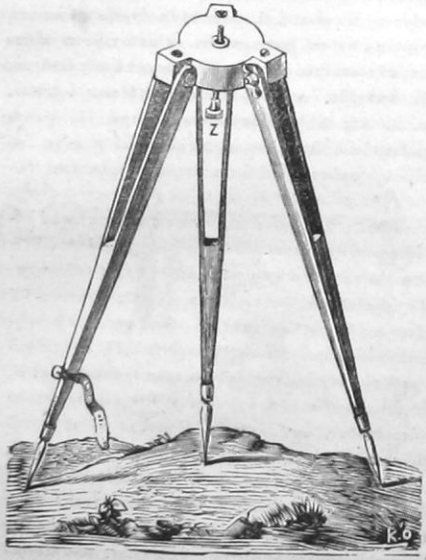
εἴδωλον τοῦ σκοπευομένου σημείου, καὶ ἡ διασταύρωσις τῶν νημάτων συμπέσῃ μετὰ τῆς ἑστίας. Ἡ ἐργασία αὕτη ἐπαναλαμβάνεται δι' ὅλα τὰ σημεῖα, τὰ ἀνισάκις ἀπέχοντα τοῦ σημείου, ἐφ' οὗ ἵσταται ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἡ διόπτρα καὶ καλεῖται κατεύθυνσις τῆς διόπτρας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 27. Ἔφιξις διόπτρας. Ἡ ἔφιξις τῆς διόπτρας, τουτέστιν ἡ ἀπόστασις μέχρι τῆς ὁποίας βλέπομεν τὰ δι' αὐτῆς παρατηρούμενα ἀντικείμενα, δὲν εἶναι ἀπεριόριστος, ἐπειδὴ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος καὶ τὴν λάμψιν τοῦ ἀντικειμένου. Οὕτω π.χ. τεμάχιον λευκοῦ χάρτου, ἐπὶ τῆς κορυφῆς ἀκοντίου τιθέμενον, διὰ τῆς διόπτρας φαίνεται καθαρῶς ἀπὸ 200 ἕως 300 μέτρων ἀποστάσεως· ὁ σκοπὸς ἀκοντίου (Ἐφαρμ. 2. Μέρ. Α'.) ἢ ὑψομετρίου (Ἐφαρμ. 17), φαίνεται ἐξ ἀποστάσεως 400 ἕως 500 μέτρων· ἱστὸς, φέρων πρὸς τὰ ἄνω μέλανα ξύλινον δίσκον, φαίνεται ἀπὸ ἀποστάσεως μεγαλειτέρας τῶν 6000 μέτρων.

Διὰ τοῦ διόπτρου μόλις διακρίνομεν ἀκόντιον εἰς ἀπόστασιν 50 μέτρων ἀπὸ τοῦ διόπτρου εὑρισκόμενον.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 28. Ἀεροστάθμη μετὰ διόπτρας τοῦ μηχανικοῦ *Egault*. Τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο συντίθεται ἐκ μιᾶς διόπτρας ΤΤ (Σχ. 49), στηριζομένης ὁριζοντείως κατὰ τὸ μῆκός της, διὰ βρογχωτήρων κλειομένων ἢ ἀνοιγομένων τῇ περιστροφικῇ κινήσει τοῦ κανόνος κ καὶ κ περὶ τὸν στροφέα του, ἐπὶ δύο στηριγμάτων Σ καὶ Σ. Τὰ στηρίγματα ἵστανται καθέτως ἐπὶ τοῦ κανόνος ΒΒ, ἄνω τοῦ ὁποίου ἐπαναπαύεται ἡ ἀεροστάθμη αα, κάτωθεν δὲ καὶ ἐν τῷ μέσῳ τοῦ κανόνος προσαρμόζεται καθέτως ὁ κορμὸς Α μετὰ τοῦ καθέτου εἰς αὐτὸν δίσκου Δ. Εἰς τὸ κοῖλον τοῦ κορμοῦ Α, ἐναρμόζεται ὁ καυλὸς τοῦ ἄξονος Β (Σχ. 45), διὰ τῆς βάσεως τοῦ ὁποίου στηρίζεται τὸ σύνολον τοῦ ἐργαλείου ἐπὶ τῆς κυκλικῆς πινακίδος τοῦ τρίποδος (Σχ. 51). Ἡ βάσις αὕτη συνδέεται στερεῶς μετὰ τοῦ τρίποδος, ἐὰν ἐναρμώσωμεν κάτω τοῦ ἄξονος Β τὸν καυλὸν τοῦ κοχλίου Ζ, περὶ τὸν ὁποῖον στρέφεται σπειροειδὲς ἐλατήριον. Ἡ διάταξις τοῦ ἐργαλείου εἶναι τοιαύτη, ὥστε, ἐὰν στηρίξωμεν αὐτὸ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, καὶ καταστήσωμεν, καθ' ὅσα γνωρίζομεν, τὸν κορμὸν αὐτοῦ Α κατακόρυφον, τότε ὁ δίσκος Δ, ὁ κανὼν ΒΒ καὶ ἡ ἐφαπτομένη ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς φυσαλίδος καθίστανται ὁριζόντειοι· αἱ δὲ γεννήτριαι εθ καὶ εθ τοῦ κυλινδρικοῦ σωλῆνος εθθε τῆς διόπτρας, αἱ διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων κα0' ἃ ἐφάπτεται ἡ διόπτρα τῶν βρογχωτήρων τῶν περιζωννυόντων

αὐτὴν, καὶ ὁ ἄξων ΟΟ τοῦ σχήματος τῆς διόπτρας (Σχ. 49), καθίστανται παράλληλοι τοῦ δίσκου Δ, καὶ ἑπομένως ὁριζόντειοι. Ἐὰν λοιπὸν ἐνεργήσωμεν οὕτως, ὥστε ὁ ὀπτικὸς ἄξων τῆς διόπτρας νὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ ἄξονος τοῦ σχήματος αὐτῆς, καὶ περιστρέψωμεν τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο περὶ τὸν κορμὸν Α, καὶ κατευθύνωμεν τὴν διόπτραν διαδοχικῶς πρὸς τὰ σημεῖα, τὰ ὑπὸ τοῦ ὑψομετρίου διαδοχικῶς κατεχόμενα, αἱ οὕτω περὶ τὸ σημεῖον τοῦ σταθμοῦ προκύπτουσαι σκοπευτικαὶ εὐθεῖαι θὰ κεῖνται ἐπὶ ὁριζοντείου ἐπιπέδου, διερχομένου ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ ἄξονος τῆς διόπτρας. Ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰ σχετικὰ ὕψη τῶν σημείων τοῦ ἐδάφους (§. 14. Ἐφαρ. 3, 4, 5).

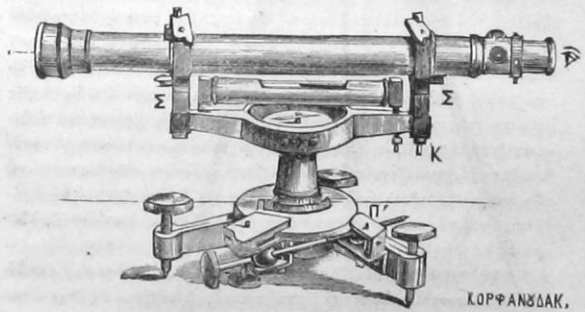


Σχ. 51.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, αἱ συνθῆκαι, αἵτινες πρέπει νὰ ἐκπληρωθῶσιν, ὁπόταν τοποθετοῦμεν τὴν χωροστάθμην τοῦ κ. *Egault* εἰς σημεῖόν τι τοῦ ἐδάφους κατὰ τὰς ἐργασίας τῆς χωροσταθμήσεως, εἰσὶν αἱ ἀκόλουθοι.

1). Ἡ ὁριζόντειος γραμμὴ τῆς φυσαλίδος πρέπει νὰ κατασταθῇ παράλληλος τοῦ δίσκου Δ· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀνοίξωμεν τοὺς πόδας τοῦ τρίποδος μέχρις οὗ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους νὰ περιλάβωσιν ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλειτέραν ἔκτασιν, καὶ διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἡ πινακὶς αὐτοῦ κατασταθῇ ὁριζόντειος. Τούτου γενομένου, διὰ τῶν τριῶν ἰσοπεδοτικῶν κοχλιῶν καὶ τοῦ ἐπανορθωτικοῦ κοχλίου, καθ' ὅσα εἴδομεν, ἀποκαθιστῶμεν τὸν δίσκον Δ ὁριζόντειον.

2). Νὰ κατασταθῇ ὁ ἄξων τοῦ σχήματος τῆς διόπτρας παράλληλος τοῦ ὁριζοντείου δίσκου Δ. Πρὸς τοῦτο, σκοπεύοντες διὰ τῆς διόπτρας σημεῖόν τι εἰς κατάλληλον ἀπὸ τοῦ ἐργαλείου ἀπόστασιν καὶ εἰς τὸ ὕψος τοῦ ἐργαλείου ὡς ἔγγιστα εὑρισκόμενον, ὡς π. χ. τὸ σκοπευτικὸν σημεῖον τοῦ σκοποῦ τοῦ ὑψομετρίου, περιστρέφομεν τὴν χωροστάθμην περὶ τὸν ἄξονά της Α κατὰ 180^0, ἔπειτα δὲ καὶ τὴν διόπτραν ἀπὸ ἄκρου εἰς ἄκρον, χωρὶς ποσῶς νὰ μετατεθῶσιν αἱ γεννήτριαι, αἵτινες ἐφάπτοντο τοῦ βάθους τῶν βρογχωτήρων κατὰ τὴν πρώτην θέσιν τῆς διόπτρας. Ἀπὸ τῆς νέας ταύτης θέσεως τοῦ ἐργαλείου σκοπεύομεν διὰ τῆς διόπτρας ἐκ δευτέρου τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος σκοπευτικὸν σημεῖον, καὶ ἐὰν τοῦτο εὑρίσκηται ἄνω ἢ κάτω τῆς



Σχ. 52.

γραμμῆς τῶν διοπτρῶν, τότε ἡ εἰς τὸ βάθος τῶν βρογχωτήρων ἐπαναπαυομένη γεννήτρια δὲν εἶναι ὁριζόντειος, πρὸς δὲ εἷς τῶν βρογχωτήρων εἶναι χαμηλότερος τοῦ ἑτέρου. Τὴν ἔλλειψιν ταύτην ἐπανορθοῦμεν εὐκόλως, μετά τινας δοκιμὰς, τῇ περιστροφῇ κοχλίου τινὸς Κ (Σχ. 52), εὑρισκομένου κάτωθεν ἑνὸς τῶν στηριγμάτων Σ καὶ Σ, διὰ τοῦ ὁποίου ὁ βρογχωτὴρ δύναται νὰ ὑψωθῇ ἢ νὰ καταβιβασθῇ.

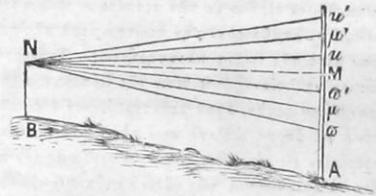
3). Νὰ κατασταθῇ ὁ ὀπτικὸς ἄξων τῆς διόπτρας παράλληλος τοῦ ὁριζοντείου δίσκου Δ, ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ, παράλληλος τοῦ ἄξονος τοῦ σχήματος τῆς διόπτρας. Τῷ ὄντι πρέπει ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ καὶ τῆς διασταυρώσεως τῶν

ἀραχναίων νημάτων, νὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ ἄξονος τοῦ σχήματος τοῦ ἐξωτερικοῦ κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἀποτελοῦσι μέρος αἱ ἐπὶ τῶν βρογχωτήρων στηριζόμεναι ἐπιφάνειαι. Δοκιμάζομεν δὲ, ἐὰν ἡ συνθήκη αὕτη ἐκπληροῦται ὡς ἐξῆς. Ἀφοῦ σκοπεύσωμεν τὸ κέντρον τοῦ σκοποῦ ὑψομετρίου τινὸς, ἀπέχοντος καταλλήλως τοῦ ἐργαλείου, περιστρέφομεν τὴν διόπτραν ἐντὸς τῶν βρογχωτήρων περὶ τὸν ἄξονά της κατὰ 180^0· τότε ἐὰν τὸ κέντρον τοῦ σκοποῦ εὑρεθῇ καὶ πάλιν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντείου νήματος, ἡ διόπτρα εἶναι κεντροθετημένη ὡς πρὸς τὸ νῆμα τοῦτο. Ἐὰν δὲ τὸ κέντρον τοῦ σκοποῦ εὑρεθῇ κάτω ἢ ἄνω τοῦ νήματος, τότε διὰ τοῦ εὑρισκομένου κοχλίου εἰς τὸ ἄκρον τοῦ κατακορύφου νήματος μετακινοῦμεν τὸ ὁριζόντειον νῆμα κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ διαστήματος, κατὰ τὸ ὁποῖον εἶχεν ἐκτοπισθῇ τοῦ κέντρου τοῦ σκοποῦ. Δι' ἀναλόγου ἐργασίας, λαμβάνοντες ὡς σκοπευτικὸν σημεῖον κατακόρυφον εὐθεῖαν π. χ. τὴν κόψιν τοίχου, θέλομεν προσδιορίσει εὐκόλως τὴν θέσιν καὶ τοῦ ἑτέρου νήματος, καὶ τότε ἡ διόπτρα θέλει εἶναι ἐντελῶς κεντροθετημένη. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου, καὶ ἑπομένως ἡ τοῦ νηματοφόρου κρίκου μεταβάλλεται μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σκοπευομένου σημείου, εἶναι φανερὸν ὅτι ἕνεκα τῆς μετακινήσεως ταύτης ἡ διόπτρα ἐνδέχεται νὰ μὴ εὑρίσκηται πλέον κεντροθετημένη. Πρὸς ἀποφυγὴν δὲ τοῦ τοιούτου κωλύματος, τοποθετοῦμεν τὸ ἐργαλεῖον ὡς ἔγγιστα εἰς ἴσην ἀπόστασιν τῶν δύο σημείων, τῶν ὁποίων ζητεῖται ἡ διαφορὰ τοῦ ὕψους (Ἐφαρμ. 30), ἤτις ἀπόστασις ὅσον τὸ δυνατὸν δὲν πρέπει νὰ μεταβάλληται ὅταν μεταβαίνωμεν ἀπὸ σταθμοῦ εἰς σταθμόν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 29. Μέθοδος τοῦ *Egault*. Ἐν τῇ πράξει, ἐπειδὴ πολλάκις εἶναι ἀδύνατον νὰ κρατῆται τὸ ὑψομέτριον εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς χωροστάθμης, ἀφ' ἑτέρου δὲ καὶ χρόνος ἀπαιτεῖται πολὺς διὰ τὴν τοιαύτην προφύλαξιν, ἐδέησεν ὅπως ζητηθῇ μέθοδος δι' ἧς αἱ ἐργασίαι τῆς χωροσταθμήσεως νὰ ἐκτελῶνται μετὰ διόπτρας μὴ κεντροθετημένης. Διὰ τῆς μεθόδου, τῆς ὑπὸ τοῦ *Egault* ὑποδειχθείσης, δυνάμεθα νὰ ἐνεργήσωμεν ἀσφαλῶς μεθ' ἑνὸς ἐργαλείου, τοῦ ὁποίου οὐ μόνον ἡ διόπτρα δὲν εἶναι κεντροθετημένη, ἀλλὰ καὶ ὁ ἄξων τοῦ σχήματος αὐτῆς ὡς καὶ ἡ ὁριζόντειος τῆς φυσαλίδος δὲν εἶναι παράλληλοι τοῦ δίσκου Δ. Ἡ μέθοδος αὕτη ἔχει ὡς ἑξῆς· ἀφοῦ πρῶτον καταστήσωμεν τὸν δίσκον Δ ὅσον τὸ δυνατὸν ὁριζόντειον, κανονίζομεν τὴν ἀπόστασιν τοῦ νηματοφόρου κρίκου κατὰ τὴν ὅρασιν τοῦ παρατηρητοῦ, καὶ κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ ἐργαλείου ἀπόστασιν τοῦ ὑψομε-

τρίου, καὶ διευθύνομεν ἐπὶ τοῦ σημείου, τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ὑψόμετρον, τέσσαρας ῥιπὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὰς τέσσαρας θέσεις, τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ ἡ διόπτρα, μένοντος πάντοτε τοῦ αὐτοῦ νήματος ὁριζοντείου.

Οὕτως, ἐὰν λάβωμεν ἐπί τινος σημείου Α (Σχ. 53) δύο ὑψόμετρα Απ καὶ Απ', ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν λαμβάνεται πρὸ, τὸ δὲ μετὰ τὴν περιστροφικὴν κίνησιν τῆς διόπτρας ἐντὸς τῶν βρογχωτήρων, καὶ περὶ τὸν ἄξονά της κατὰ 180^0, εἶναι φανερὸν ὅτι, κατὰ τὰς δύο ταύτας παρατηρήσεις, τὸ ὁριζόντειον νῆμα θέλει εὑρεθῇ διαδοχικῶς εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἄνω καὶ κάτω τοῦ ἄξονος τοῦ σχήματος τῆς διόπτρας. Τὸ δὲ ἡμιάθροισμα Αμ, τῶν οὕτω λαμβανομένων δύο ἐξαγομένων, θέλει ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἄξονος, τουτέστιν εἰς τὸ ὑψόμετρον, τὸ ὁποῖον ἤθελε προσδιορισθῇ ὑπὸ μιᾶς καὶ μόνης παρατηρήσεως γενομένης μετὰ διόπτρας ἐντελῶς κεντροθετημένης. Τούτου τεθέντος, μεταστρέφομεν τὴν διόπτραν ἀπὸ ἄκρου εἰς ἄκρον ἐντὸς τῶν βρογχωτήρων, καὶ ἐπαναφέρομεν μὲ ὅλον τὸ σύστημα τοῦ ἐργαλείου τὸν προσοφθάλμιον φακὸν εἰς τὸν ὀφθαλμὸν, διὰ περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ κορμοῦ Α τοῦ ἐργαλείου κατὰ 180^0, προσέχοντες ὅπως τὸ μὲν ὁριζόντειον νῆμα τῆς διόπτρας καὶ μετὰ τὴν μεταστροφὴν ᾖ ὁριζόντειον, ἡ δὲ φυσαλὶς ἐν ἑκάστῃ σκοπεύσει νὰ ἀνακαλῆται μεταξὺ τῶν ἀναφορικῶν της σημείων. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι ἐὰν ἐπαναλάβωμεν διὰ τὴν οὕτω προκύψασαν νέαν θέσιν τοῦ ἐργαλείου, τὰς προαναφερθείσας δύο παρατηρήσεις, θέλομεν λάβει δύο νέα ὑψόμετρα Ακ καὶ Ακ', τῶν ὁποίων τὸ ἡμιάθροισμα Αμ' ἤθελε προσδιορισθῇ, ὡς καὶ τὸ προηγούμενον Αμ, ὑπὸ μιᾶς καὶ μόνης παρατηρήσεως, γενομένης διὰ κεντροθετημένης διόπτρας.



Σχ. 53.

Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι, διὰ τὰ δύο ταῦτα ζεύγη τῶν παρατηρήσεων, ὁ ὀπτικὸς ἄξων ὡς καὶ ὁ ἄξων τοῦ σχήματος τῆς διόπτρας διαδοχικῶς λαμβάνει δύο θέσεις ἰσάκις ἀπεχούσας τῆς ὁριζοντείου ΝΜ· λοιπὸν τὸ πραγματικὸν ὑψόμετρον ΑΜ θέλει εἶναι τὸ ἡμιά-

θροισμα τῶν δύο προηγουμένως ληφθέντων ὑψομέτρων, ἤτοι ὁ μέσος ὅρος τῶν τεσσάρων παρατηρήσεων· ὅθεν ἔχομεν

$$\text{ΑΜ}=\frac{\text{Αμ}+\text{Αμ}'}{2}=\frac{\text{Απ}+\text{Απ}'+\text{Αx}+\text{Αx}'}{4}.$$

Πρὸς δὲ, παρατηροῦντες ὅτι,

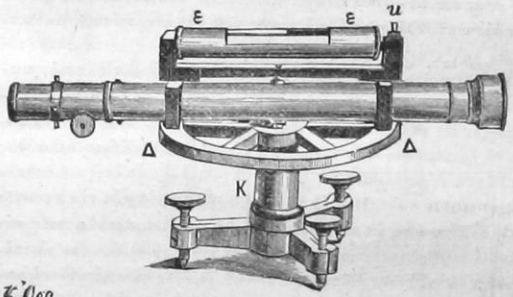
$$\text{ΑΜ}=\frac{\text{Απ}+\text{Αx}'}{2}=\frac{\text{Απ}'+\text{Αx}}{2},$$

συνάγομεν ὅτι, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον, ἀρκεῖ νὰ περιορισθῶμεν εἰς δύο ἐκ τῶν τεσσάρων προαναφερθεισῶν παρατηρήσεων· π.χ. λαμβάνομεν τὴν πρώτην μετὰ τῆς τετάρτης, ἢ τὴν δευτέραν μετὰ τῆς τρίτης παρατηρήσεως. Τουτέστιν, ἐν πρώτοις σκοπεύομεν καθ' οἱανδήποτε θέσιν τῆς διόπτρας, ἔπειτα σκοπεύομεν δευτέραν μόνον φοράν, ἀφοῦ μεταστρέψωμεν διὰ μιᾶς τὴν διόπτραν ἀπὸ ἄκρου εἰς ἄκρον, ὡς καὶ περὶ τὸν ἄξονά της κατὰ 180°, καὶ ἐπαναφέρωμεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ὀφθαλμοῦ μας τὸν προσοφθάλμιον φακόν. Τότε τὸ ἡμιάθροισμα τῶν οὕτω λαμβανομένων ἐξαγομένων θέλει δώσει τὸ ζητούμενον ὑψόμετρον.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 50. Ἡ μέθοδος τοῦ *Egault* ὑπόκειται καὶ αὕτη εἰς σφάλματα. Τῳόντι, ἐπειδὴ ἐν τῇ πράξει ἀφ' ἑνὸς μὲν πολλάκις συμβαίνει εἷς κόκκος κονιορτοῦ ἢ τεμάχιον σκωρίας νὰ παρεντεθῶσι μεταξὺ τῆς διόπτρας καὶ τοῦ χείλους τῶν βροχωτήρων, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἕνεκα τῆς ἀνίσου χρήσεως τῶν προστριβομένων μερῶν νὰ ἀλλειωθῶσι τὰ μέρη ταῦτα, τούτου ἕνεκεν ὁ ἄξων τοῦ σχήματος τῆς διόπτρας δὲν δύναται νὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του, μεταστρεφομένης τῆς διόπτρας ἀπὸ ἄκρου εἰς ἄκρον. Λοιπὸν βλέπομεν ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη ὑπόκειται εἰς σφάλματα, καὶ ἐν περιπτώσει καθ' ἣν ἔχομεν ὑπὸ τὴν διάθεσίν μας ἐργαλεῖον καλῶς κεκανονισμένον. Τὰ σφάλματα δὲ ταῦτα δυνάμεθα νὰ ἀποφύγωμεν, θέτοντες τὴν χωροστάθμην εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ζητεῖται ἡ διαφορὰ τοῦ ὕψους. Ὁπωσδήποτε ὅμως τὸ ἐργαλεῖον πρέπει νὰ κανονίζηται πάντοτε ὅσον τὸ δυνατὸν καλλίτερον πρὶν ἢ ποιήσωμεν χρῆσιν αὐτοῦ, ἵνα οὕτω κατασταθῇ ἡ ἐπανόρθωσις τῶν σφαλμάτων μικροτέρα· ἐὰν δὲ ἡ ἐπανόρθωσις κατασταθῇ μεγαλειτέρα ἔπεται ὅτι τὸ ἐργαλεῖον μετεκινήθη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 51. Ἀεροστάθμη μετὰ διόπτρας τοῦ κ. *Lenoir* (σχ. 54). Ἡ χωροστάθμη αὕτη, ἁπλουστέρα τῆς τοῦ κυρίου *Egault*, σύγκειται ἐξ ἑνὸς ἁπλοῦ κύκλου ΔΔ, εἰς τοῦ ὁποίου τὸ κέν-

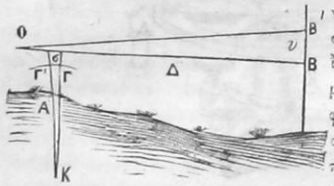
τρον ἵσταται καθέτως κορμὸς Κ, φέρων τρεῖς ἰσοπεδοτικοὺς κοχλίας, διὰ τῶν ὁποίων στηρίζεται τὸ ἐργαλεῖον ἐπὶ τῆς πινακίδος τοῦ τρίποδος. Τὸν κύκλον τοῦτον καθιστῶμεν ὁριζόντειον διὰ τῶν ἰσοπεδοτικῶν κοχλιῶν, ἐὰν θέσωμεν ἐπ' αὐτοῦ ἀεροστάθμην. Τούτου τεθέντος, ἐκβάλομεν τὴν ἀεροστάθμην καὶ ἀντικαθιστῶμεν αὐτὴν διὰ μιᾶς διόπτρας, ἄνω τῆς ὁποίας τοποθετεῖται ἡ ἀεροστάθμη ee, ἐπὶ τῶν τετραγώνων βροχωτήρων τῆς διόπτρας. Κατὰ τὴν διάταξιν ταύτην τοῦ ἐργαλείου εἶναι βέβαιον ὅτι, ὅταν ὁ κύκλος ἦναι ὁριζόντειος καὶ οἱ τετράγωνοι βροχωτῆρες ἴσοι, τότε ἡ φυσαλὶς τῆς ἀεροστάθμης θέλει εἶναι



Σχ. 54.

μεταξὺ τῶν ἀναφορικῶν της σημείων. Ὅθεν ἵνα ἡ χωροστάθμη ἦ κεκανονισμένη, ἀρκεῖ ἡ ἀεροστάθμη νὰ κανονισθῇ ἐπὶ τοῦ κανόνος αὐτῆς διὰ τῆς μεταστροφῆς, νὰ κεντροθετηθῇ ἡ διόπτρα, καὶ ἐπὶ τέλους νὰ ἀποκατασταθῇ ἡ ἰσότης τῶν τετραγώνων βροχωτήρων, ἥτις δυνατὸν νὰ μὴ ὑπάρχῃ ἕνεκα τῆς προστριβῆς ἢ ἄλλης τινὸς αἰτίας. Διὰ τοῦ ἐργαλείου τούτου προσδιορίζονται δύο ῥῖπαι ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου, τοῦ ἱσταμένου ἐπὶ τοῦ σημείου, τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ὑψόμετρον. Ἐκ τούτων δὲ, ἡ μὲν μία λαμβάνεται πρὸ, ἡ δὲ ἄλλη, ἀφοῦ στραφῇ ἡ διόπτρα ἐντὸς τῶν βροχωτήρων περὶ τὸν ἄξονά της. Τὸ ἡμιάθροισμα τῶν οὕτω λαμβανομένων δύο ὑψομέτρων δίδει τὸ ζητούμενον ὑψόμετρον. Ἡ διαφορὰ ὅμως τῶν δύο τούτων ῥιπῶν δέον νὰ ἦναι 1 ἕως 2 ἑκατοστόμετρα, ὅταν ἡ τοῦ σκοπευομένου σημείου ἀπόστασις ἦναι 100 μέτρων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 52. Ὅριον τῆς χρήσεως, ἤτοι ἔφιξις τῆς ἀεροσταθμικῆς μετὰ διόπτρας. Εἰ καὶ εἰς μεγάλας ἀποστάσεις δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν καθαρῶς τὰ ἀντικείμενα διά τινος καλῆς διόπτρας, ὁ βαθμὸς ὅμως τῆς εὐαισθησίας τῆς φυσαλίδος, ἥτις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου τοῦ ὑελίνου σωλῆνος, περιορίζει τὴν ἔφιξιν τῶν ἀεροστάθμων μετὰ διόπτρας. Τῷ ὄντι, ἔστω (Σχ. 55), υ ἡ ποσότης κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς ΟΒ′ ἀπομακρύνεται τῆς ὁριζοντείου εὐθείας ΟΒ διὰ τὴν ἀπόστασιν Δ, καὶ σ, τὸ σφάλμα εἰς τὸ ὁποῖον ὑποκύπτομεν, ὅταν δοκιμάζωμεν νὰ περιορίσωμεν τὴν φυσαλίδα μεταξὺ τῶν ἀναφορικῶν της σημείων. Τούτου τεθέντος τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα ΒΟΒ′ καὶ Γ′ΚΓ χορηγοῦσι τὴν ἀναλογίαν Δ:Α=υ:σ, ἐξ ἧς συνάγεται $\Delta = A \times \frac{\upsilon}{\sigma}$.

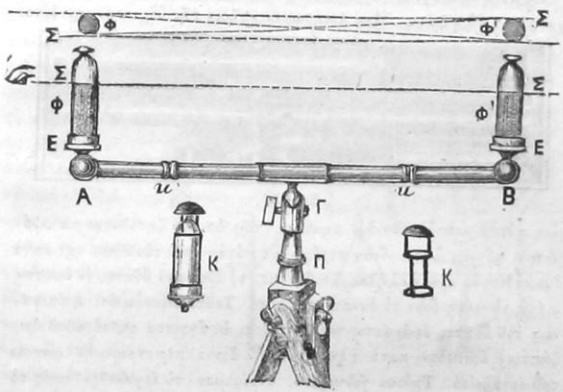


Σχ. 55.

Ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς Α τῆς κυρτότητος τοῦ ὑελίνου σωλῆνος, ὅστις περιέχει τὴν φυσαλίδα, λαμβάνεται συνήθως ἴση 15^{μ}, ἀφ'ἑτέρου ὁ ὀφθαλμὸς προσδιορίζει τὴν θέσιν τῆς φυσαλίδος κατὰ προσέγγισιν $\sigma = 0^{\mu},00025$, ἐὰν λοιπὸν παραδεχθῶμεν ὅτι τὸ υ δύναται νὰ ᾖναι ἴσον μὲ $0^{\mu},002$, χωρὶς νὰ συνεπιφέρῃ ἐπαισθητὴν ἀσυνέπειαν ἐπὶ τοῦ τελικοῦ ἐξαγομένου τῆς χωροσταθμήσεως, τότε ἔχομεν, $\Delta = 15 \times \frac{0,002}{0,00025} = 120$ μέτρα.

Διὰ τὰς μεγάλας τῆς χωροσταθμήσεως ἐργασίας, ἡ ἀπόστασις Δ =100 μέτρων εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς ἀπὸ τοῦ ἐργαλείου ἀποστάσεως τοῦ ὑψομετρίου· ἡ ἐπιδεξιότης ὅμως τοῦ χωροσταθμοῦντος, ἡ ἀκρίβεια τοῦ ἐργαλείου, καὶ ἡ διαταξις τοῦ ἐδάφους, δύνανται ἐνίοτε νὰ ἐπαυξήσωσι τὴν ἀπόστασιν ταύτην.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 53. Ὑδροστάθμη. Ὅταν πρόκηται περὶ χωροσταθμήσεως μικρᾶς ἐκτάσεως, τῆς ὁποίας τὴν ἐκτέλεσιν ἀναγκαζόμεθα νὰ ἐμπιστευθῶμεν εἰς βοηθοὺς ἧττον ἐπιτηδείους, τότε χρῆσιν ποιούμεθα τῆς ὑδροστάθμης. Τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο σύγκειται ἐξ ἑνὸς σωλῆνος ΑΒ (Σχ. 56), μήκους ἑνὸς μέτρου ἢ ἑνὸς μέτρου καὶ τριάκοντα ἑκατοστομέτρων, διαμέτρου δὲ $0^{\mu},02$ ἕως $0^{\mu},03$, ὅστις ἀπολήγει εἰς δύο σφαίρας καὶ συνδέεται ἐν τῷ μέσῳ αὐτοῦ μεθ'ἑνὸς περιστομίου Π, δι'οὗ στηρίζεται τὸ ἐργαλεῖον ἐπὶ τρίποδος. Εἰς ἕκαστον ἄκρον τοῦ σωλῆνος ἀνορθοῦται διὰ κοχλίου ἐξόγκωμα Ε, ἐντὸς τοῦ ὁποίου προσκολλᾶται δι'ἰσπανικοῦ κηροῦ κυλινδρικὴ κρυστάλλινος φιάλη Φ καὶ Φ′. Ἑκάστη φιάλη διάμετρον μὲν ἔχει $0^{\mu},03$ ἕως $0^{\mu},04$, μῆκος δὲ $0^{\mu},08$ ἕως 0,12. Τὸ μῆκος δὲ τοῦτο εἶναι ἐλεύθερον τοῦ ἐξογκώματος, καὶ ἄνευ πυθμένος εἰς τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον συγκολλᾶται πρὸς τὸ ἐξόγκωμα. Ἡ φιάλη ἀποστενοῦται ἐν εἴδει λαιμοῦ κατὰ τὸ ἐλεύθερον ἄκρον αὐτῆς οὕτως, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἄνοιγμα διάμετρον ἔχων ἑνὸς ἑκατοστομέτρου. Αἱ φιάλαι τῆς αὐτῆς ὑδροστάθμης ἔχουσι τὴν αὐτὴν διάμετρον.



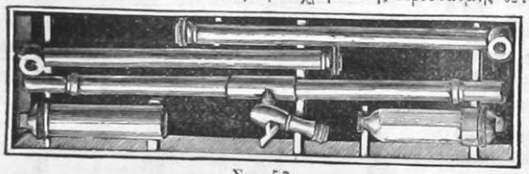
Σχ. 56.

Ὁ σωλὴν εἶναι ἐκ ψευδαργύρου, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον δὲ ἐξ ὀρειχάλκου. Ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει τὸ περιστόμιον συνδέεται μετὰ γόνατος Γ, διὰ τοῦ ὁποίου περιστρέφεται εὐκολώτερον τὸ ἐργαλεῖον ἐπὶ τοῦ τρίποδος. Ὁ σωλὴν ΑΒ σχηματίζεται ἐκ τριῶν ἄλλων συναρμολογουμένων, διὰ δύο κοχλιορυχημένων κρίκων κ καὶ κ· οὕτω δὲ τὸ ἐργαλεῖον, ἀναλυόμενον εἰς τρεῖς μικροὺς σωλῆνας καὶ εἰς δύο φιάλας, δύναται νὰ προφυλάσσηται ἐντὸς κιβωτίου (Σχ. 57).

Ἡ ὑδροστάθμη πληροῦται ὕδατος μέχρις οὗ τὸ ὕδωρ φθάσῃ τὸ ἥμισυ ἢ τὰ δύο τρίτα τοῦ ὕψους ἑκάστης φιάλης. Ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ

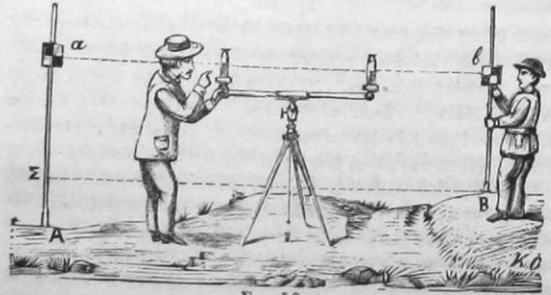
πληροῦται ὁ σωλὴν, κλίνομεν αὐτὸν, φράσσοντες διὰ τοῦ λιχανοῦ δακτύλου τὸ στόμιον τῆς χαμηλοτέρας φιάλης, καὶ ταράσσομεν τὸν σωλῆνα ἵνα ἐκβάλωμεν τὸν ἀέρα, ὅστις δυνατὸν νὰ ἐναπέμεινεν ἐντὸς αὐτοῦ. Τὸν δὲ χειμῶνα τὸν σωλῆνα πληροῦμεν οἰνοπνεύματος ἵνα ἀποφύγωμεν τὴν πῆξιν τοῦ ὕδατος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 54. Διαχείρησις τῆς ὑδροστάθμης. Ἁπλῆ χωροστάθμησις. Ἵνα ποιήσωμεν χρῆσιν τῆς ὑδροστάθμης θέτο-



Σχ. 57.

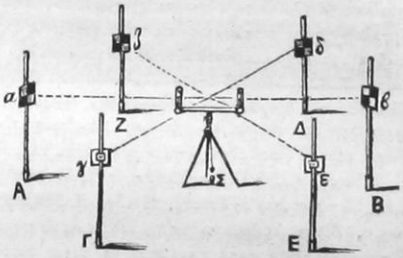
μεν αὐτὴν μεταξὺ τῶν δύο σημείων, τῶν ὁποίων ζητοῦνται τὰ ὑψόμετρα, οὕτως, ὥστε, ὅταν στρέφωμεν αὐτὴν περὶ τὸν ἄξονά της κατὰ δύο καθέτους πρὸς ἀλλήλας διευθύνσεις, τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος ἐν ἑκάστῃ φιάλῃ νὰ μένῃ ὅσον τὸ δυνατὸν τὸ αὐτό. Τοῦτο δεικνύει ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἐν ἑκάστῃ φιάλῃ κεῖται ὡς ἔγγιστα εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντειον ἐπίπεδον κατὰ τὴν περὶ τὸν ἄξονα περιστροφικὴν κίνησιν τοῦ ἐργαλείου. Τούτου γενομένου, στρέφομεν τὸ ἐργαλεῖον πρὸς τὸ



Σχ. 58.

ὑψομέτριον, τὸ ἐπὶ τοῦ σημείου Β ἀνορθούμενον (Σχ. 58), καὶ ἱστάμενοι ὄπισθεν τῆς πλησιεστέρας φιάλης εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς μέτρου ἢ ἑνὸς καὶ ἡμίσεως μέτρου ἀπ' αὐτῆς, διευθύνομεν ὀπτικὴν ἀκτῖνα ΣΣ

ἐφαπτομένην ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς (Σχ. 56) τῶν καμπύλων, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν ἄκρων τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, τοῦ ἐν ἑκάστῃ φιάλῃ περιεχομένου. Τὸ σημεῖον Β, ἔνθα ἡ ὀπτικὴ αὐτὴ ἀκτὶς ἀπαντᾷ τὸ ὑψομέτριον, προσδιορίζει τότε τὴν λεγομένην ἐμπρόσθιον ῥιπὴν τῆς σταθμήσεως. Ἐπίσης, θέτοντες τὸ ὑψομέτριον ἐπὶ τοῦ δευτέρου σημείου Α (Σχ. 58), προσδιορίζομεν τὴν ὀπίσθιον ῥιπὴν α, ἐνεργοῦντες ὡς ἐπὶ τοῦ πρώτου σημείου. Λοιπὸν ἡ διαφορὰ ΑΣ, τῶν οὕτω προσδιορισθέντων ὑψομέτρων, τῶν δύο σημείων τούτων, ἐκφράζει τὴν διαφορὰν τοῦ ὕψους τῶν σημείων. Ὁμοίως προσδιορίζομεν τὰ ὑψόμετρα ὁσωνδήποτε σημείων περὶ τὸν σταθμὸν Σ εὑρισκομένων, στρέφοντες τὴν ὑδροστάθμην περὶ τὸν ἄξονά της, καὶ διευθύνοντες διαδοχικῶς ὀπτικὴν ἀκτῖνα ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου, τοῦ στηριζομένου διαδοχικῶς ἐπὶ ἑκάστου σημείου (Σχ. 59). Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εὕρομεν $\mathrm{B}=0^{\mu},754$ καὶ $\alpha\mathrm{A}=1^{\mu},347$, τότε ἡ διαφορὰ τοῦ ὕψους τῶν σημείων Α καὶ Β θέλει εἶναι $1^{\mu},347-0^{\mu},754=0^{\mu},593$· ἐὰν δὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς συγκρίσεως ληφθῇ 100 μέτρα κάτω τοῦ σημείου Β, τότε τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου Β θέλει εἶναι 100 μέτρων, τοῦ δὲ σημείου Α, $100^{\mu}+0^{\mu},593=100^{\mu},593$.



Σχ. 59.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 55. Κατὰ τὴν ὑδροστατικὴν, ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια ῥευστοῦ τινος, ἐντὸς δύο συγκοινωνούντων ἀγγείων περιεχομένου, κεῖται ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου, ἕπεται ὅτι αἱ ὀπτικαὶ ἀκτῖνες, αἱ προσδιοριζόμεναι διὰ τῆς περιστροφῆς τῆς ὑδροστάθμης περὶ τὸν ἄξονά της, τότε θέλουσιν εἶναι ὁριζόντειοι, ὅταν αἱ δύο φιάλαι ἔχωσι τὴν αὐτὴν διάμετρον. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, οἱ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος σχηματιζόμενοι μηνίσκοι, θέλουσιν ἔχει διάφορον κυρτότητα ἐν ἑκάστῃ φιάλῃ, αἱ δὲ μέλαιναι γραμμαὶ, αἱ ὑπὸ τῶν μηνίσκων σχηματιζόμεναι καὶ τὴν κατεύθυνσιν τῆς ὑδροστάθμης

ὁδηγοῦται, δὲν θέλουσι κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου. Σημειωτέον δὲ ὅτι, ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ὁριζόμενον ἐπίπεδον τῆς σταθμήσεως πρέπει νὰ εὑρίσκηται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς ἐργασίας τῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ·

α΄) ἀνάγκη νὰ ἐμποδίζωμεν τὴν ἐλάττωσιν τῆς ποσότητος τοῦ ἐν τῇ ὑδροστάθμῃ περιεχομένου ὕδατος, ἥτις δύναται νὰ προέλθῃ ἐκ τῆς ἐξατμίσεως, ἢ ἐκ τῆς διὰ τῶν ῥωγμῶν τοῦ σωλῆνος διϊδρώσεως, ὡς καὶ τὴν ἐπαύξησιν τοῦ ἐν τῇ ὑδροστάθμῃ ὕδατος, ἥτις δύναται νὰ προέλθῃ ἐκ τῆς ἐν ταῖς φιάλαις εἰσχωρήσεως τῆς βροχῆς, ὅταν τὸ ἐργαλεῖον ᾖναι ἐκτεθειμένον εἰς τοὺς ὑετούς. Ἀπορεύγομεν δὲ τὰ δύο ταῦτα προσκόμματα, ἐφοδιάζοντες ἑκάστην φιάλην δι' ἑνὸς περικαλύμματος Κ (Σχ. 56), τὸ ὁποῖον ἐλαττόνει τὴν ἐξάτμισιν, προφυλάσσει δὲ αὐτὰς τῆς βροχῆς, ὅταν τὸ ἐργαλεῖον, ἱστάμενον ἐπὶ πολὺ εἴς τινα σταθμὸν, ᾖναι ἐκτεθειμένον εἰς τὸν καύσωνα ἢ εἰς τὴν βροχήν.

β΄) ἀνάγκη ἐντὸς τοῦ σωλῆνος νὰ μὴ ἐναπομείνῃ ἀὴρ, ὅστις καθ' ὃν καιρὸν ἐνεργοῦμεν διὰ τοῦ ἐργαλείου δυνατὸν νὰ ὑπεκφύγῃ, καὶ ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος νὰ καταβῇ.

γ΄) αἱ φιάλαι ἀνάγκη νὰ ἔχωσι τὴν αὐτὴν διάμετρον καθ' ὅλον τὸ μῆκός των. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, ἡ φιάλη, ἥτις ἔχει μεγαλειτέραν διάμετρον, ὅταν μεταβαίνῃ κατὰ τὴν περιστροφικὴν αὐτῆς κίνησιν εἰς κατώτερον ὕψος, τότε τὸ ὕψος τοῦ ἐν αὐτῇ ὕδατος θέλει κατά τι ἐλαττωθῇ.

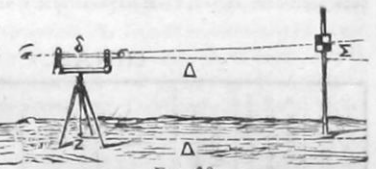
δ΄) αἱ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ γενόμεναι σκοπεύσεις ἀνάγκη νὰ γίνωνται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ παρατηρητοῦ, ἐπειδὴ δύο διάφοροι παρατηρηταὶ σπανίως λαμβάνουσι τὰ αὐτὰ ἐπὶ τῶν μηνίσκων σημεῖα ὅπως διευθύνωσι τὰς ὀπτικὰς αὐτῶν ἀκτῖνας.

Ἵνα γίνωσι καταφανέστεραι αἱ γραμμαὶ, αἱ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν μηνίσκων σχηματιζόμεναι, χρωματίζομεν τὸ ὕδωρ δι' ἰνδοκοκκίνης.

Ὁ Ἱέρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς, Ἕλλην γεωμέτρης, ἀκμάσας κατὰ τὰς ἀρχὰς τῆς πρώτης π. Χ. ἑκατονταετηρίδος, περιγράφει ἐν τῷ συγγράμματι αὐτοῦ, τῷ ἐπιγραφομένῳ «αἱ διόπτραι», ὑδροστάθμην καθ' ὅλα ὁμοίαν μὲ τὴν νῦν ἐν χρήσει, ἐκτός τινων λεπτομερειῶν περὶ τὴν κατασκευήν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 56. Ὅριον τῆς χρήσεως, ἡ ἔφεσις τῆς ὑδροστάθμης. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων ἕπεται ὅτι ἡ ὑδροστάθμη, τὴν ὁποίαν μεταχειριζόμεθα συνήθως διὰ περιωρισμένας χωροσταθμήσεις, θέλει γείνει παραίτιος πολλῶν σφαλμάτων, ἐὰν ἠθέλομεν τὴν μεταχειρισθῇ διὰ χωροσταθμήσεις ἐχούσας σημασίαν τινά. Ὅθεν ἀνάγκη νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἔφεσιν τοῦ ἐργαλείου τούτου.

Πρὸς τοῦτο, ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς ἀπομακρύνεται τῆς ὁριζοντείου κατὰ τὴν ποσότητα σ, διὰ τὸ μῆκος δ, τῆς ὑδροστάθμης καὶ ὅτι διὰ τὴν ἀπόστασιν Δ τὸ προκύπτον σφάλμα ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου εἶναι Σ (Σχ. 60). Τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα προκύπτουσιν ἐκ τῆς ὑποθέσεως ταύτης,



Σχ. 60.

δίδουσι τὴν σχέσιν $$\Sigma = \sigma \times \frac{\Delta}{\delta}.$$

Ὑποθέτοντες ὅτι, τὸ σ δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν $0^{\mu},0005$, καὶ ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ἐργαλείου εἶναι $\delta = 1^{\mu},30$, διὰ τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἐργαλείου ἀπὸ τοῦ ὑψομετρίου $\Delta = 25$ μέτρων, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ σφάλμα θέλει εἶναι $$\Sigma = \frac{0.0005 \times 25}{1,30} = 0^{\mu},0096.$$

Ἡ ἀξία τοῦ Δ, ἥτις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ὁράσεως καὶ ἐκ τῆς ἐπιτηδειότητος τοῦ χωροσταθμοῦντος, δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὰ 25 ἢ 30 μέτρα, ἐὰν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς χωροσταθμήσεως ἀπαιτῇ ἀκρίβειάν τινα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 57. Χωροστάθμησις δι' ἀκτινοβολίας. Πολλάκις συμβαίνει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἵσταται ἡ ὑδροστάθμη, νὰ δυνάμεθα νὰ χωροσταθμήσωμεν ἀριθμόν τινα σημείων Α, Β, Γ, Δ, κτλ. (Σχ. 59). Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἐφ' ὅσον λαμβάνομεν τὰ διάφορα ἐξαγόμενα, καταγράφομεν αὐτὰ ἐπὶ πίνακος, κατὰ τὸ προκείμενον ὑπόδειγμα, πληροῦντος τὰς σελίδας τοῦ σημειωματαρίου τῆς χωροσταθμήσεως.

Εἰς τὴν πρώτην στήλην τοῦ προκειμένου πίνακος σημειοῦμεν τὰ πρὸς χωροσταθμησιν σημεῖα, τὰ ὁποῖα ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον σημειοῦνται δι' ἀριθμῶν, δεικνυόντων τὴν τάξιν ἑκάστου σημείου, ἐπὶ δὲ τοῦ ἐδάφους προσδιορίζονται διὰ πασσαλίσκων.

Εἰς τὴν δευτέραν στήλην καταγράφονται αἱ μεταξὺ τῶν σημείων ὁριζόντειοι ἀποστάσεις (ἴδε Ἐφαρμ. 69).

Εἰς τὴν τρίτην στήλην καταγράφονται τὰ ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου ἀναγινωσκόμενα ὕψη.

Εἰς τὴν τετάρτην ἢ τὴν πέμπτην στήλην ἐγγράφεται ἡ διαφορὰ ἑκάστου ἀριθμοῦ τῆς τρίτης στήλης πρὸς τὸν ἀμέσως ἑπόμενον, καθ' ὅσον ὁ πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι μεγαλείτερος ἢ μικρότερος τοῦ δευτέρου.

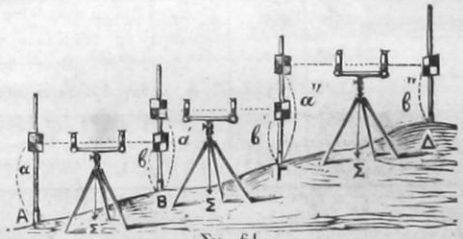
ΠΙΝΑΞ.

Σημεῖα πρὸς χωροστάθμησιν.	Ὁρίζόντειοι ἀποστάσεις μετὰ ξὺ τῶν σημείων.	Ῥῖπαὶ σταθμήσεως.	Διαφοραί. θετικαί.	Διαφοραί. ἀρνητικαί.	Ὑψόμετρα.	Παρατηρήσεις.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	μέτρα.	μέτρα.	μέτρα.	μέτρα.	μέτρα.	
Α. (*)	»	1,235	»	»	100,00	(*) Θέσις τοῦ
Β.	125,54	0,823	0,412	»	100,412	σημείου, φύσις
Γ.	143,85	1,052	»	0,229	100,183	τοῦ ἐδάφους, ἰ-
Δ.	88,32	0,731	0,321	»	100,504	διοκτήτης, κλ.

Εἰς τὴν ἕκτην στήλην καταγράφονται τὰ ὑψόμετρα τῶν πρὸς χωροστάθμησιν σημείων, τῶν ὁποίων ἕκαστον ὑψόμετρον προσδιορίζεται, προστιθεμένης τῆς θετικῆς ἢ ἀφαιρουμένης τῆς ἀρνητικῆς διαφορᾶς σημείου τινός, ἀπὸ τοῦ ὑψομέτρου, τοῦ ἀμέσως προηγουμένου αὐτῷ σημείου.

Ἐν τῇ πράξει, τὸ ὑψόμετρον τοῦ ἀρχικοῦ σημείου Α προσδιορίζεται δι' ἰδιαιτέρας χωροσταθμήσεως, λαμβάνεται δὲ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται καὶ τὰ ὑψόμετρα τῶν λοιπῶν σημείων Β, Γ, Δ κτλ. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καλεῖται ἐπίπεδον συγκρίσεως (Ἐφαρμ. 3, 4. §. 14).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 38. Σύνθετος χωροστάθμησις. Ὅταν δὲν δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰ ὑψόμετρα δύο σημείων Α καὶ Δ (Σχ. 61) ἀπὸ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ, τότε διὰ μιᾶς πρώτης καὶ ἁπλῆς χωροσταθμήσεως μεταβαίνομεν ἀπὸ τοῦ ὑψομέτρου τοῦ σημείου Α εἰς τὸ ὑψόμετρον τοῦ παρεμπίπτοντος σημείου Β (Ἐφαρμ. 34)· τούτου γενομένου, διὰ δευτέρας ἁπλῆς χωροσταθμίσεως, μεταβαίνομεν εἰς τὸ ὑψόμετρον δευτέρου παρεμπίπτοντος σημείου Γ, μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ σημείων, καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις οὗ προσδιορίσωμεν τὸ ὑψόμετρον καὶ τοῦ τελευταίου σημείου Δ. Τῷ ὄντι, ἐὰν καλέσωμεν τὸ μὲν σημεῖον Α, σημεῖον ἀναχωρήσεως, τὸ δὲ Δ, σημεῖον ἀφίξεως, σημειώσωμεν δὲ διὰ α, ά, α'' κτλ. τὰς ὀπισθίους ῥιπὰς σταθμίσεως, τουτέστι τὰ μήκη τοῦ ὑψομετρίου, τὰ προσδιοριζόμενα, ὅταν σκοπεύωμεν ἐστραμμένοι ὄντες πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως, καὶ διὰ β, β', β'' κτλ. τὰς ἐμπροσθίους ῥιπὰς σταθμήσεως, τοὐτέστι τὰ μήκη τοῦ ὑψομετρίου, τὰ προσδιοριζόμενα, ὅταν σκοπεύωμεν ἐστραμμένοι πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἀφίξεως, καὶ ἐπὶ τέλους ἐὰν σημειώσωμεν διὰ Δυ, τὴν διαφορὰν τοῦ ὕψους τῶν σημείων Α καὶ Δ, θέλομεν ἔχει τὰς ἐκφράσεις α—β, ά—β', α''—β'' κλ.



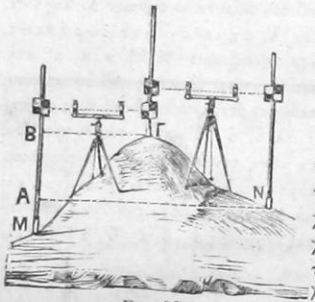
Σχ. 61.

Ἑκάστη τῶν ἐκφράσεων τούτων προκύπτει ὑπὸ τῆς ἀντιστοίχου ἁπλῆς χωροσταθμήσεως, καὶ ἐκφράζει τὴν διαφορὰν τοῦ ὕψους τῶν σημείων Α καὶ Δ. Ὅθεν θέλομεν ἔχει τὸν τύπον,

$$\Delta u = \alpha - \beta + \acute{\alpha} - \beta' + \alpha'' - \beta'' + \text{κλ.}$$
$$= (\alpha + \acute{\alpha} + \alpha'' + \ldots) - (\beta + \beta' + \beta'' + \ldots),$$

ὅστις ἐκφωνεῖται οὕτως «ἐν τῇ συνθέτῳ χωροσταθμήσει ἡ διαφορὰ » τοῦ ὕψους, μεταξὺ τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως καὶ τοῦ σημείου » τῆς ἀφίξεως, ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ, τῇ λαμβανομένῃ, ἀφαιρουμένου » τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμπροσθίων ῥιπῶν σταθμήσεως ἀπὸ τοῦ ἀθροί- » σματος τῶν ὀπισθίων ῥιπῶν». Ἡ διαφορὰ αὕτη, ἐὰν μὲν ἦναι μηδέν, τὸ σημεῖον τῆς ἀφίξεως κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως, ἐὰν δὲ ἦναι ἀρνητική, τὸ σημεῖον τῆς ἀφίξεως εἶναι χαμηλότερον τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως.

Ὁ τύπος οὗτος ἐπαληθεύει, οἱονδήποτε καὶ ἂν ᾖναι τὸ σχῆμα τοῦ ἐδάφους. Τῷ ὄντι, ἡ διαφορὰ τοῦ ὕψους τῶν σημείων M καὶ N (Σχ. 62) ἰσοῦται μὲ MB—AB· ἀλλ'ἐπειδὴ MB=α—6, καὶ AB=6′—ά, αὕτη τρέπεται εἰς Δυ=(α—6)—(6′—ά)=(α+ά)—(6+6′).



Σχ. 62.

Τὰ παρεμπίπτοντα σημεῖα B, Γ, κτλ. μεταξὺ τῶν ἀκροτελευταίων σημείων Α καὶ Δ, δυνατὸν νὰ μὴ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας τῶν σημείων Α καὶ Δ. Τοῦτο συμβαίνει ἐν τῇ πράξει, ὅταν ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας τῶν σημείων ὑπάρχωσι κωλύματα, ὡς λόγου χάριν δάσος, οἰκοδομαὶ, ἀπότομοι βράχοι κτλ. Ὅταν ἐκτελῶμεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὰς ἐπὶ τῆς συνθέτου χωροσταθμήσεως ἀναγκαίας πράξεις, ἐφ'ὅσον προχωροῦμεν, καταγράφομεν τὰ λαμβανόμενα ἐξαγόμενα ἐπὶ πίνακος, πληροῦντος τὰς σελίδας τοῦ σημειωματαρίου τῆς συνθέτου χωροσταθμήσεως. Οὕτως, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εὕρομεν α=1^{μ},123 ά=1^{μ},421 α″=1^{μ},524, α‴=0^{μ},125 καὶ 6=0^{μ},527, 6′=0^{μ},615, 6″=1^{μ},587, 6‴=2^{μ},345, καταρτίζομεν τὸν πίνακα ὡς δεικνύεται εἰς τὴν ἀκόλουθον σελίδα.

Ἡ διαφορὰ ἑκάστου ἀριθμοῦ τῆς τρίτης στήλης ἐπὶ ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τετάρτης στήλης, ὅστις εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀμέσως ἑπόμενον στίχον, καταγράφεται εἰς τὴν πέμπτην ἢ ἕκτην στήλην τοῦ πίνακος, καθ'ὅσον ὁ πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι μεγαλείτερος ἢ μικρότερος τοῦ δευτέρου, τουτέστι καθόσον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους εἶναι ἀνωφερὴς ἢ κατωφερής.

Εἰς τὴν ἑβδόμην στήλην τοῦ πίνακος λαμβάνομεν ὡς ὑψόμετρον τοῦ σημείου Α τῆς ἀναχωρήσεως, 100 μέτρα (Ἐφαρμ. 34), καὶ προσδιορίζομεν τὸ ὑψόμετρον τῶν διαδοχικῶν σημείων Β, Γ, Δ, κτλ. ἀφοῦ προσθέσωμεν, εἰς τὸ ὑψόμετρον τῶν 100 μέτρων καὶ διαδοχικῶς εἰς ἕκαστον προσδιοριζόμενον ὑψόμετρον, τὴν ἀντίστοιχον διαφορὰ ντῆς πέμπτης. ἢ ἀφοῦ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτοῦ τὴν ἀντίστοιχον διαφορὰν τῆς ἕκτης στήλης τοῦ πίνακος.

Εἰς τὴν ὀγδόην στήλην λαμβάνομεν σημείωσιν τῆς θέσεως τοῦ σημείου, τοῦ ἰδιοκτήτου, τῆς φύσεως τοῦ ἐδάφους, κτλ. εἰς ὃ ἀνήκει

ΠΙΝΑΞ.

Σημεῖα πρὸς χωροστάθμησιν	Ὁριζόντιοι ἀποστάσεις μετὰ ξὺ τῶν σημείων	Ῥιπαὶ σταθμήσεως. ὀπίσθιοι.	Ῥιπαὶ σταθμήσεως. ἐμπρόσθιοι.	Διαφοραί. θετικαί	Διαφοραί. ἀρνητικαί	Ὑψόμετρα.	Παρατηρήσεις.
1	2.	3.	4.	5	6.	7.	8
	μέτρα.	μέτρα.	μέτρα.	μέτρα.	μέτρα.	μέτρα.	(*) Θέσις τοῦ σημείου, φύσις τοῦ ἐδάφους. ἰδιοκτήτης, κτλ.
Α. (*)	»	1,123	»	»	»	100.	
Β.	128,52	1,421	0,527	0,596	»	100,596	
Γ.	154,32	1,524	0,615	0,806	»	101,402	Δοκιμή.
Δ.	125,82	0,125	1,587	»	0,063	101,339	5,074—4,193=
Ε.	189,75	»	2,345	»	2,220	99,119	2,283—1,402=
Ἀθροίσεις.	598,41	4,193	5,074	1,402	2,283		100—99,119 = 0,881.

ἑκάστων τῶν σημείων Α, Β, Γ, κτλ. πρὸ πάντων δὲ ὅταν διὰ τῶν σημείων τούτων πρόκηται νὰ διέλθῃ ὁ ἄξων τῆς μελετωμένης ὁδοῦ, ἥτις θέλει ἑνώσει τὰ δύο ἀκροτελευταῖα σημεῖα Α καὶ Ε.

Ὡς δοκιμὴν τοῦ ὑπολογισμοῦ, βλέπομεν ἐὰν ἡ διαφορὰ τοῦ ὕψους 100—99,119=0^{μ},881, τῶν δύο ἀκροτελευταίων σημείων Α καὶ Ε, ᾖναι ἴση τῇ διαφορᾷ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμπροσθίων ῥιπῶν ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀπισθίων ῥιπῶν, ἢ ἴση τῇ διαφορᾷ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τῆς ἕκτης στήλης ἀριθμῶν ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῆς πέμπτης στήλης τοῦ πίνακος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 39. Δοκιμὴ τῆς συνθέτου χωροσταθμήσεως. Ἀφοῦ προσδιορίσωμεν τὴν διαφορὰν τοῦ ὕψους τῶν σημείων Α καὶ Ε ἐνεργοῦντες κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΒΓΔΕ κλ. τότε, ἐὰν εὕρωμεν τὴν αὐτὴν διαφορὰν, ἐκτελοῦντες τὴν χωροστάθμησιν καὶ κατὰ τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν ΕΔΓΒΑ, ἐπόμενον εἶναι ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τῆς χωροσταθμήσεως εἶναι ἀκριβές. Ἐπειδὴ ὅμως ἐν τῇ πράξει τὸ τοιοῦτον σπανίως συμβαίνει, θεωροῦμεν ἐν γένει ὡς ἀκριβῆ τὴν χωροστάθμησιν, ὅταν ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἐξαγομένων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν,

ἐν ᾧ ἐκτελοῦμεν τὴν χωροστάθμησιν καὶ κατὰ τὰς δύο διευθύνσεις ΑΕ καὶ ΕΑ, δὲν ὑπερβαίνει 10 ἢ 12 χιλιοστόμετρα δι' ἕκαστον χιλιόμετρον τῆς χωροσταθμουμένης ἀποστάσεως.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 40. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων ἕπεται ὅτι, ἐὰν ἐκτελέσωμεν σύνθετον χωροστάθμησιν, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς κορυφῆς ὄρους καὶ πρὸς τὴν ὑπόρρειαν αὐτοῦ προχωροῦντες μέχρι τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, θέλομεν οὕτω προσδιορίσει τὸ ὕψος τῆς κορυφῆς τοῦ ὄρους ἄνω τῆς θαλάσσης. Τοιουτοτρόπως εὑρέθη ὅτι αἱ Ἤπειροι, κατὰ μέσον ὅρον, ἀνυψοῦνται ἄνω τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης ὀλιγώτερον τῶν 300 μέτρων, τὰ δὲ ὑψηλότερα ὄρη δὲν ὑπερβαίνουσι τὰ 8500 μέτρα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 41. Ὑψομέτρια. Κατὰ τὰς ἐργασίας τῆς χωροσταθμήσεως χρῆσιν ποιούμεθα δύο εἰδῶν ὑψομετρίων, τουτέστι τοῦ ὁλκοτοῦ ἢ ὠθιστοῦ ὑψομετρίου, καὶ τοῦ φθεγγομένου ὑψομετρίου.

Ὑψομέτριον ὠθιστόν. Τοῦτο σύγκειται ἐκ μιᾶς ξυλίνης ῥάβδου Α (Σχ. 40), καλῶς ἀπεζηραμένης, ἥτις πρὸς τὰ κάτω φέρει σιδηρᾶν πτέρναν Π, συνδεομένην μετὰ ποδώματος Τ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου θέτει τὸν πόδα ὁ βοηθός, ὅστις καλεῖται ὑψομετριοφόρος, καὶ στηρίζει τὸ ὑψομέτριον κατακορύφως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Εἷς σκοπὸς Σ (Ἐφαρ. 17), διαιρούμενος εἰς τέσσαρα ἴσα τετράγωνα κεχρωματισμένα ἐναλλὰξ διὰ λευκοῦ καὶ ἐρυθροῦ χρώματος, δύναται νὰ κινηθῇ κατὰ τὸ μῆκος τῆς ῥάβδου Α ἢ Α′, διὰ τοῦ ψελλίου Ψ, τὸ ὁποῖον διαπερᾷ ἡ ῥάβδος, καὶ μετὰ τοῦ ὁποίου ὁ σκοπὸς εἶναι συνδεδεμένος. Ὁ δὲ σκοπὸς ἐπιστηρίζεται εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ μήκους τῆς ῥάβδου διά τινος συμπιεστικοῦ κοχλίου. Ἡ ῥάχις τοῦ ὑψομετρίου ὑποδιαιρεῖται εἰς ἑκατοστόμετρα καὶ δεκατόμετρα, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ τελευταῖα μόνον σημειοῦνται δι' ἀριθμῶν, ἀπὸ τοῦ ποδὸς τοῦ ἐργαλείου ἀρχομένης τῆς διαιρέσεως. Ἡ ὑποδιαίρεσις αὕτη περιορίζεται μέχρι τῶν δύο μέτρων, εἰς τὰ ὁποῖα φθάσας ὁ σκοπὸς ἵσταται εἰς τὸ ὅριον τοῦτο διά τινος ἐλατηρίου. Τὸ ὕψος, εἰς ὃ εὑρίσκεται ἡ ὁριζόντειος σκοπευτικὴ γραμμὴ τοῦ σκοποῦ, ὑποδεικνύεται ὑπὸ τῆς γραμμῆς, τῆς διὰ τοῦ μηδενὸς διακρινομένης καὶ κεχαραγμένης ἐπὶ τοῦ ψελλίου. Τὸ ὕψος δὲ τοῦτο προσδιορίζεται μετὸν χιλιοστομέτρου, ἀναγινωσκομένων τῶν μὲν μέτρων καὶ τῶν ἑκατοστομέτρων, ἐπὶ τῆς ῥάβδου, τῶν δὲ χιλιοστομέτρων, ἐπὶ τῆς ὑποδιηρημένης εἰς χιλιοστόμετρα κατακορύφου κόψεως τῆς ἐκκοπίδος, τῆς πρὸς τὰ κάτω τοῦ ψελλίου Ψ εὑρισκομένης.

Πρὸς δὲ τούτοις, ἡ ῥάβδος Α φέρει κατὰ τὸ μῆκός της ἐντομὴν, εἰς ἣν, ὅταν εἰσέρχηται ἡ γλωττὶς, ἡ κατέχουσα τὸ μῆκος τῆς δευτέρας ῥάβδου Α′, σχηματίζεται ὀλκὸς, δι' οὗ ἡ ῥάβδος Α′, ὡθουμένη δύναται νὰ κινῆται κατὰ τὸ μῆκος τῆς ῥάβδου Α.

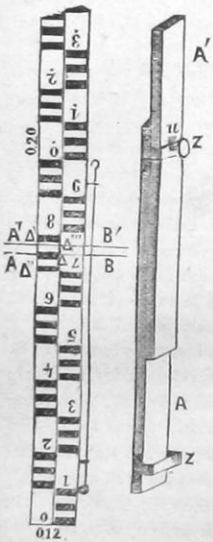
Διὰ τοῦ ψελλίου Ψ′, ὁμοίου μὲ τὸ τοῦ σκοποῦ, καὶ τοῦ συμπιεστικοῦ του κοχλίου κ, οἱ δύο κανόνες Α καὶ Α′ συσφιγγόμενοι συσσωματοποιοῦνται, ὅταν τὰ ὑψόμετρα τῶν σημείων τοῦ ἐδάφους δὲν ὑπερβαίνωσι τὰ δύο μέτρα. Δι' ὑψόμετρα ὅμως, ἄνω τῶν δύο μέτρων, ὁ σκοπὸς μεταφέρεται ἐπὶ τῆς διαιρέσεως τῶν δύο μέτρων, ἐπὶ τῆς πρώτης ὑποδιηρημένης ῥάβδου, ὅπου συνδεόμενος διὰ τοῦ συμπιεστικοῦ κοχλίου μετὰ τῆς ῥάβδου Α′, μένει ἀνεξάρτητος τῆς ῥάβδου Α, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος δὲν φθάνει μέχρι τοῦ σημείου τούτου. Τούτου γενομένου, ὅταν χαλαρωθῇ ὁ κοχλίας τοῦ κάτω ψελλίου Ψ′, οἱ δύο κανόνες ἀποκαθίστανται ἀνεξάρτητοι, ὁ δὲ κανὼν Α′ δύναται νὰ ἀνυψωθῇ, ἐφ' ὅσον ὑπάρχῃ ἀνάγκη, μεθ' ἑαυτοῦ δὲ καὶ ὁ σκοπός.

Ἡ ἄκρα τῆς ῥάβδου Α′ φθάνει μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς πτέρνης Π. Δευτέρα ὑποδιαίρεσις εἰς μέτρα καὶ δεκατόμετρα, γενομένη ἐπὶ τῆς πλαγίας ὄψεως τῆς ῥάβδου Α, καὶ ἀρχομένη ἀπὸ τῆς κατωτάτης ἄκρας τῆς ῥάβδου Α′, χρησιμεύει πρὸς προσδιόρισιν τοῦ ὕψους, εἰς ὃ φθάνει ὁ σκοπὸς ἄνω τοῦ ὑψομέτρου τῶν δύο μέτρων. Πρὸς τὰ κάτω τοῦ ψελλίου Ψ′, τὸ ὁποῖον συνδεδεμένον ὂν μετὰ τοῦ κανόνος Α′, κινεῖται μετ' αὐτοῦ, ὑπάρχει ὡς εἰς τὸ ψέλλιον Ψ, ἐκκοπὶς, τῆς ὁποίας μία τῶν κατακορύφων κόψεων ὑποδιηρημένη οὖσα εἰς χιλιοστόμετρα, χρησιμεύει πρὸς ἐκτίμησιν τῶν χιλιοστομέτρων τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς τὸ ὕψος, εἰς ὃ εὑρίσκεται ὁ σκοπὸς ἄνω τῶν δύο μέτρων.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ῥάβδος Α′ δὲν δύναται νὰ προεξέχῃ τῆς ῥάβδου Α, εἰμὴ κατὰ $1^{\mu},80$, ἕπεται ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν, διὰ τοῦ ὠθιστοῦ ὑψομετρίου, ὑψόμετρον ὑπεράνω τῶν $3^{\mu},80$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 42. Φθεγγόμενον ὑψομέτριον. Ἵνα ἀποφύγωμεν τὸ σφάλμα, ὅπερ δύναται νὰ συμβῇ, εἴτε εἰς τὴν ἀνάγνωσιν τοῦ ὑψομέτρου, εἴτε εἰς τὴν τοποθέτησιν τοῦ σκοποῦ, ὅταν χρῆσιν ποιώμεθα τοῦ ὠθιστοῦ ὑψομετρίου, καὶ μάλιστα ὅταν ἀντὶ τῆς ὑδροστάθμης ἐσμὲν ἐφωδιασμένοι μετὰ ἀεροστάθμης, φερούσης διόπτραν, τότε ποιούμεθα χρῆσιν τοῦ φθεγγομένου ὑψομετρίου. Τούτου ἡ καταλληλοτέρα διάταξις κατὰ τὸν κύριον *Bourdaloue*, ἔχει ὡς ἑξῆς.

Εἷς ξύλινος κανὼν (Σχ. 63), πλάτους $0^{\mu},12$, ὑποδιαιρεῖται εἰς ἰσάλληλα μέρη, ἕκαστον ἴσον μὲ $0^{\mu},04$, κεχρωματισμένα δὲ ἐναλλὰξ δι' ἐρυθροῦ καὶ λευκοῦ χρώματος. Αἱ ὑποδιαιρέσεις αὗται, ἀνὰ πέντε διατάττονται κατ' ὁμάδας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἰσοδυναμεῖ μὲ δύο δεκατόμετρα. Ἑκάστη ὁμὰς κατέχει τὸ ἥμισυ τοῦ πλάτους τοῦ κανόνος, οὗτινος τὸ ἕτερον ἥμισυ φέρει ἀριθμὸν εἰς μέγα σχῆμα, ὑποδεικνύοντα τὸ σύνολον τῶν κάτωθεν αὐτοῦ εὑρισκομένων ὁμάδων. Οἱ ἀριθμοί, οἱ δεικνύοντες τὰς ὁμάδας ἀρτίας τάξεως, κατέχουσι τὰ ἀριστερὰ, οἱ δὲ τὰς τῆς περιττῆς τάξεως, τὰ δεξιὰ τοῦ ὑψομετρίου. Τὸ ὑψόμετριον τοῦτο μεταστρέφεται τὸ ἄνω κάτω, ἵνα οἱ ἐπ' αὐτοῦ σημειούμενοι ἀριθμοὶ, παρουσιαζόμενοι ἀνεστραμμένοι, διὰ μέσου τῆς διόπτρας, φανῶσιν ὄρθιοι, καὶ ἑπομένως εὐκολυνθῇ ἡ ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου ἀνάγνωσις τοῦ ὑψομέτρου. Τὰ ψηφία τῆς δευτέρας δεκάδος φέρουσι πρὸς τὰ ἄνω μίαν στιγμὴν, τὰ τῆς τρίτης δεκάδος δύο, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν στιγμῶν δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων, τὸν ἐμπεριεχόμενον εἰς τὸ ὑψόμετρον.



Σχ. 63.

Κατὰ τὴν διάταξιν ταύτην τοῦ φθεγγομένου ὑψομετρίου, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπ' αὐτοῦ λαμβάνομεν μίαν ῥιπὴν σταθμήσεως· ἵνα προσδιορίσωμεν τότε τὸ ὑψόμετρον, ἀρκεῖ· α') νὰ διπλασιάσωμεν τὸ σύστοιχον ψηφίον, τὸ ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου σημειούμενον, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο θέλει ἐκφράσει δεκατόμετρα· β') νὰ τετραπλασιάσωμεν τὰς μικρὰς ὑποδιαιρέσεις, τὰς μεταξὺ τοῦ ψηφίου τούτου καὶ τοῦ σκοπευθέντος σημείου περιεχομένας, καὶ τὸ ἐξαγόμενον θέλει ἐκφράσει ἑκατοστόμετρα· γ') νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ κλάσμα τῆς τελευταίας ὑποδιαιρέσεως, τῆς ὑπὸ τῆς ῥιπῆς τῆς σταθμήσεως διατεμνομένης, δηλαδὴ τὸ κάτωθεν αὐτῆς εὑρισκόμενον κλάσμα, καὶ νὰ ἀθροίσωμεν τὰ τρία ταῦτα ἐξαγόμενα. Οὕτως, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σκοπευτικὴ γραμμὴ ἀπαντᾷ τὸ ὑψομέτριον κατὰ τὴν AB εἰς τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὑποδιαιρέσεως

$\Delta\Delta'''$, τότε τὸ ὑψόμετρον θέλει εἶναι,

$$0^{\mu},70\times 2+0,04\times 2+0,04\times\tfrac{3}{5}=1^{\mu},507.$$

Ἡ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον προσδιόρισις τοῦ ὑψομέτρου παρουσιάζει δυσκολίαν τινὰ, ἣν ἀποφεύγομεν, ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον τοῦ *Egault* (Ἐφαρμ. 29). Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην δὲν λαμβάνομεν πλέον τὸ ἡμιάθροισμα τῶν προσδιοριζομένων ὑψομέτρων, διὰ τῶν δύο ῥιπῶν τῆς σταθμήσεως, ἀλλ' ὑπολογίζομεν τὰ ὑψόμετρα ταῦτα, θεωροῦντες τὰ μὲν ψηφία τοῦ ὑψομετρίου ὡς ἐκφράζοντα δεκατόμετρα, τὰς δὲ ὑποδιαιρέσεις ἰσοδυναμούσας μὲ δύο ἑκατοστόμετρα, καὶ σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν οὕτω προσδιοριζομένων ὑψομέτρων ἵνα ἔχωμεν τὸ ζητούμενον ὑψόμετρον. Οὕτως, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σκοπευτικὴ γραμμὴ τῆς πρώτης ῥιπῆς ἀπαντᾷ τὸ ὑψομέτριον κατὰ τὴν AB, τότε θέλομεν καταγράψει εἰς τὸ σημειωματάριον τῆς χωροσταθμήσεως τὸ ὑψόμετρον $0,70+0,02\times 2+0,02\times\frac{3}{5}=0^{\mu},753$.

Τούτου γενομένου, ἐὰν στρέψωμεν τὸ ἐργαλεῖον περὶ τὸν ἄξονά του, καὶ τὴν διόπτραν ἐντὸς τῶν βρογχωτήρων, καὶ ἂν φέρωμεν τὴν δευτέραν ῥιπὴν τῆς σταθμήσεως, τῆς ὁποίας ἡ σκοπευτικὴ γραμμὴ ἀπαντᾷ τὸ ὑψομέτριον κατὰ τὴν $A'B'$ εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὑποδιαιρέσεως $\Delta'\Delta'''$, τὸ δεύτερον ὑψόμετρον τὸ καταγραφησόμενον, ἐν τῷ σημειωματαρίῳ, θέλει εἶναι $0,775$· ὅθεν ἡ καθ' αὐτὸ ῥιπὴ εἶναι

$$0,753+0,775=1^{\mu},528.$$

Τὸ φθεγγόμενον ὑψομέτριον ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον σχηματίζεται ὑπὸ δύο κανόνων A καὶ A' (Σχ. 63), δύο μέτρων μήκους ἑκάστου, οἵτινες συσσωματοῦνται διὰ δύο ζευκτήρων Z καὶ Z, ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν κανόνων προσηλουμένων, καὶ διὰ τοῦ κοχλίου κ. Ὁ κανὼν, ὁ ἀνεξάρτητος τῶν ζευκτήρων, ὠθούμενος δύναται νὰ κινηθῇ κατὰ τὸ μῆκος τοῦ πρώτου, ἀφοῦ χαλαρωθῇ ὁ κοχλίας κ, καὶ οὕτω τὸ ὑψομέτριον ἀναπτύσσεται μέχρι $3^{\mu},80$ τοῦ μέτρου. Διὰ δὲ τῆς παρηρτημένης εἰς τὸ ὑψόμετριον μολυβδαίνης ὁ βοηθὸς δύναται νὰ κρατῇ αὐτὸ κατακορύφως. Ἐπειδὴ ἡ ἀνάγνωσις τῆς ῥιπῆς τῆς σταθμήσεως ἐπὶ τοῦ φθεγγομένου ὑψομετρίου πρέπει νὰ ἐκτελῆται μετὰ μεγίστης ταχύτητος, λαμβάνομεν, ὡς μᾶλλον τῆς κατακορύφου πλησιάζουσαν, τὴν μικροτέραν ῥιπὴν ἐκ τῶν ὅσων δυνάμεθα νὰ ἀναγνώσωμεν, καθ' ὃν καιρὸν τὸν ὑψομέτριον ταλαντεύεται ὑπὸ τοῦ ἀνέμου κινούμενον

§. 17.

Πολύεδρος ἢ στερεὰ γωνία. Τρίεδρος γωνία. Ἰδιότητες τῆς τριέδρου γωνίας, καὶ κατασκευὴ αὐτῆς. Παραπληρωματικαὶ τρίεδροι γωνίαι. Συνθῆκαι τῆς κατασκευῆς τριέδρου γωνίας.

ΟΡΙΣΜΟΙ. ἀ.) *Πολύεδρος, ἢ στερεὰ* γωνία καλεῖται, τὸ σχηματιζόμενον σχῆμα ὑπὸ ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα τέμνονται μὲν ἀνὰ δύο κατ' εὐθείας γραμμὰς, συντρεχούσας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, περιορίζονται δὲ ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου καὶ τῆς ἀμοιβαίας αὐτῶν τομῆς.

β'.) Αἱ μὲν κοιναὶ τῶν ἐπιπέδων τομαὶ ὀνομάζονται *κόψεις* τῆς στερεᾶς γωνίας, τὸ δὲ σημεῖον δι' οὗ αἱ κόψεις διέρχονται, καλεῖται *κορυφὴ* τῆς στερεᾶς γωνίας.

Τὸ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν κόψεων περιεχόμενον ἐπίπεδον καλεῖται *ἕδρα* ἢ *ἐπίπεδος γωνία* τῆς στερεᾶς γωνίας.

γ'.) Γωνία *τρίεδρος* καλεῖται ἡ τρεῖς ἕδρας ἔχουσα, ὡς ἡ στερεὰ γωνία Κ, τῆς ὁποίας κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Κ, αἱ δὲ ἕδραι τὰ τρία ἐπίπεδα ΑΚΒ, ΑΚΓ καὶ ΒΚΓ (Σχ. 64), καὶ κόψεις, αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ καὶ ΚΓ καθ' ἃς τέμνονται τὰ τρία ἐπίπεδα.

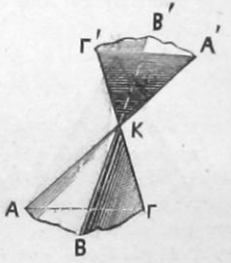
Σημειοῦνται αἱ μὲν πολύεδροι γωνίαι διὰ τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς, ἢ διὰ τοῦ γράμματος τούτου καὶ ἐκείνων τὰ ὁποῖα δεικνύουσιν ἀνὰ ἓν σημεῖον ἑκάστης κόψεως, καὶ οὕτω λέγομεν, ἡ στερεὰ γωνία Κ, ἢ ἡ γωνία ΚΑΒΓ (Σχ. 64). Αἱ δὲ δίεδροι, στερεᾶς τινος γωνίας, σημειοῦνται ὑπὸ τῶν δύο γραμμάτων τῆς συστοίχου αὐτῇ κόψεως.

δ'.) Κυρταὶ στερεαὶ γωνίαι καλοῦνται αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, μιᾶς οἱασδήποτε τῶν ἑδρῶν των προεκβαλομένης, κείμεναι.

ε.) Ἐὰν προεκβάλωμεν τὰς κόψεις ΑΚ, ΒΚ καὶ ΓΚ στερεᾶς τινος γωνίας ΚΑΒΓ (Σχ.64), θέλομεν σχηματίσει νέαν στερεὰν γωνίαν ΚΑ'Β'Γ', ἥτις καλεῖται *συμμετρικὴ* τῆς *πρώτης*.

Ἂν καὶ αἱ ἐπίπεδοι καὶ δίεδροι γωνίαι τῆς νέας στερεᾶς γωνίας ΚΑ'Β'Γ' ἦναι ἴσαι μὲ τὰς ἐπιπέδους καὶ διέδρους γωνίας τῆς ΚΑΒΓ, αἱ στερεαὶ ὅμως αὗται γωνίαι ἐπιτιθέμεναι

δὲν ταὐτίζονται. Διότι, ἐὰν παρατηρητής τις τοποθετηθῇ ἐντὸς τῆς τριέδρου ταύτης γωνίας ΚΑΒΓ, οὕτως ὥστε ἐπακουμβῶν ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΚΓ νὰ ἔχῃ τὴν κεφαλὴν πρὸς τὴν κορυφὴν Κ, εἶναι βέβαιον ὅτι πρὸς μὲν τὰ δεξιὰ αὐτοῦ θέλει ἔχει τὴν ἕδραν ΑΚΒ, πρὸς δὲ τὰ ἀριστερὰ τὴν ΒΚΓ ἕδραν. Ὁμοίως ἐὰν ὁ αὐτὸς παρατηρητὴς ἔχῃ τὴν κεφαλὴν πρὸς τὴν κορυφὴν Κ τῆς τριέδρου γωνίας ΚΑ'Β'Γ', ἐπακουμβῶν τὴν ῥάχιν ἐπὶ τῆς ἕδρας Α'ΚΓ', ἴσης τῇ ΑΚΓ, θέλει ἔχει πρὸς τὰ δεξιὰ τὴν ἕδραν Β'ΚΓ', πρὸς δὲ τὰ ἀριστερὰ τὴν Α'ΚΒ'. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὰ μέρη τῶν δύο τριέδρων γωνιῶν ἐπειδὴ εἶναι κατὰ διάφορον τάξιν διατεταγμένα, καὶ τῆς ἐπιθέσεως τῶν δύο ἴσων ἑδρῶν ΑΚΓ καὶ Α'ΚΓ' π. χ. γενομένης, αἱ λοιπαὶ ἕδραι δὲν θέλουσι ταύτισθῇ.



Σχ. 64.

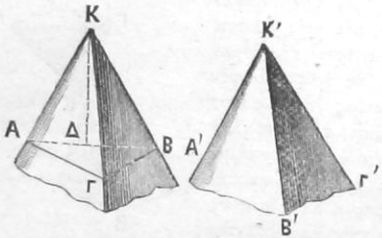
ς'.) Δύο ὁποιαδήποτε στερεαὶ γωνίαι λέγονται ἴσαι, ὅταν ἐπιτιθέμεναι ταὐτίζωνται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 38.

Εἰς πᾶσαν τρίεδρον γωνίαν, μία οἱαδήποτε ἐπίπεδος γωνία εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος, μεγαλειτέρα δὲ τῆς διαφορᾶς τῶν λοιπῶν δύο ἐπιπέδων γωνιῶν (Σχ. 65).

Ἀπόδειξις 1.) Τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως ταύτης χρήζει ἀποδείξεως μόνον ἐν περιπτώσει, καθ' ἣν ἡ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων συγκρινομένη ἐπίπεδος γωνία εἶναι μεγαλειτέρα ἑκατέρας αὐτῶν. Τῷ ὄντι, ἔστω ΑΚΒ ἡ μεγαλειτέρα ἐπίπεδος γωνία τῆς τριέδρου γωνίας ΚΑΒΓ. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΚΒ σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΑΚΔ=ΑΚΓ. Ἡ εὐθεῖα ΚΔ θέλει εὑρίσκεσθαι ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΚΒ. Τούτου τεθέντος, ἐπιζευγνύομεν σημεῖόν τι Α τῆς κόψεως ΚΑ μὲ σημεῖόν τι Β τῆς κόψεως ΚΒ, καὶ ἡ οὕτω προκύπτουσα εὐθεῖα

ΑΒ θέλει ἀπαντήσει εἰς τὸ σημεῖον Δ τὴν εὐθεῖαν ΚΔ. Ἀκμβάνομεν ΚΓ=ΚΔ, καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΓ, ΓΒ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΚΓ καὶ ΑΚΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην ΑΚΓ=ΑΚΔ, ἐκ κατασκευῆς, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν ΚΓ=ΚΔ, τὴν δὲ πλευρὰν ΚΑ κοινήν· ἑπομένως ΑΓ=ΑΔ. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχομεν ΑΒ<ΑΓ+ΓΒ,



Σχ. 65.

ἐκ τῆς ὁποίας, ἀφαιροῦντες ἀφ' ἑνὸς μὲν ΑΔ, ἀφ' ἑτέρου δὲ ΑΓ, ἥτις εἶναι ἴση τῇ ΑΔ, θέλομεν ἔχει ΒΔ<ΓΒ. Λοιπὸν εἰς τὰ τρίγωνα ΚΒΔ καὶ ΚΒΓ ἡ πλευρὰ ΚΒ εἶναι κοινή, αἱ πλευραὶ ΚΔ καὶ ΚΓ ἴσαι ἐκ κατασκευῆς, καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΔ τοῦ πρώτου εἶναι μικροτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς ΒΓ τοῦ δευτέρου. Ἄρα ἡ γωνία ΒΚΔ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΒΚΓ (Προτ. 7. Μέρος Α'.) ἑπομένως ἔχομεν, προσθέτοντες εἰς τὰς γωνίας ταύτας τὰς ἴσας γωνίας ΑΚΔ καὶ ΑΚΓ,

$$\text{ΒΚΔ} + \text{ΑΚΔ} < \text{ΒΚΓ} + \text{ΑΚΓ}$$

ἤτοι

$$\text{ΑΚΒ} < \text{ΒΚΓ} + \text{ΑΚΓ}.$$

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2). Ἡ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα σχέσις, ἐπειδὴ ὑπάρχει δι'οἱανδήποτε γωνίαν, θέλει μᾶς χορηγήσει ὁμοίως

$$\text{ΑΚΒ} + \text{ΑΚΓ} > \text{ΒΚΓ},$$

ἐξ ἧς συνάγομεν

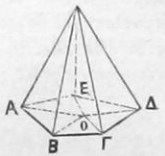
γων. ΑΚΒ > γων. ΒΚΓ — γων. ΑΚΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 39.

Εἰς πᾶσαν πολύεδρον γωνίαν κυρτὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν (Σχ. 66).

Ἀπόδειξις. Ἔστω Κ ἡ πολύεδρος γωνία, τὴν ὁποίαν τέμνομεν δι' ἐπιπέδου ἀγομένου ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς κόψεως

ΚΑ, καὶ συναπαντῶντος ὅλας αὐτῆς τὰς κόψεις ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, κτλ. πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κορυφῆς Κ, καὶ ἔστω ΑΒΓΔΕ τὸ πολύγωνον, τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου μὲ ἑκάστην ἕδραν τῆς γωνίας Κ, καὶ ἐντὸς αὐτοῦ τὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον ἐπιζευγνύομεν μὲ ἑκάστην κορυφὴν τοῦ πολυγώνου διὰ τῶν εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, κτλ. Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ θέλει οὕτω διαιρεθῆ εἰς τόσα μερικὰ τρίγωνα, ἐξ ὅσων ἀποτελεῖται καὶ ἡ πολύεδρος γωνία Κ. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, κτλ. τῶν ἐχόντων κορυφὴν Ο, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ΑΚΒ, ΒΚΓ, κτλ. τῶν ἐχόντων κορυφὴν Κ.



Σχ. 66

Τὸ σημεῖον Α εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς τριέδρου γωνίας ΑΚΒΕ, τῆς ὁποίας ἡ ἐπίπεδος γωνία ΕΑΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ΚΑΕ καὶ ΚΑΒ· ἐπειδὴ δὲ

$$\text{ΕΑΒ} = \text{ΕΑΟ} + \text{ΒΑΟ}$$

ἔχομεν

$$\text{ΕΑΟ} + \text{ΒΑΟ} < \text{ΚΑΕ} + \text{ΚΑΒ}.$$

Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχομεν,

$$\text{ΑΒΟ} + \text{ΓΒΟ} < \text{ΚΒΑ} + \text{ΚΒΓ},$$
$$\text{ΒΓΟ} + \text{ΔΓΟ} < \text{ΚΓΒ} + \text{ΚΓΔ},$$
$$\text{ΓΔΟ} + \text{ΕΔΟ} < \text{ΚΔΓ} + \text{ΚΔΕ},$$
$$\text{ΔΕΟ} + \text{ΑΕΟ} < \text{ΚΕΔ} + \text{ΚΕΑ}.$$

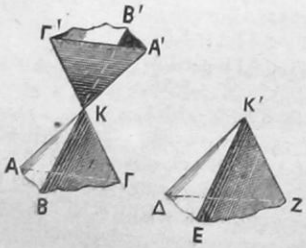
Προσθέτοντες κατὰ τάξιν τὰς ἀνισότητας ταύτας εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ΑΒΓ + ΒΓΔ + ΓΔΕ κτλ. τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Ο, εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος ΑΒΚ + ΚΒΓ + ΚΓΒ + κτλ, τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Κ. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Κ, κατ' ἀντιστάθμησιν, εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Ο, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον Κ, εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον Ο. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὸ σημεῖον Ο

σχηματιζομένων γωνιῶν δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τεσσάρων γωνιῶν, σχηματιζομένων ὑπὸ δύο εὐθειῶν εἰς τὸ σημεῖον Ο διασταυρουμένων, καὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖ τέσσαρας γωνίας ὀρθὰς (Πρότ. 2 καὶ 4. Μέρ. Α'), τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Κ, τουτέστι, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν σχηματιζουσῶν τὴν πολύεδρον γωνίαν Κ, εἶναι ἄρα μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 40.

Ὅταν δύο τρίεδροι γωνίαι Κ καὶ Κ' ἔχωσι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην, τὴν ΚΒ ἴσην τῇ Κ'Ε, καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν ἕδρας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν ΑΚΒ=ΔΚ'Ε καὶ ΒΚΓ=ΕΚ'Ζ, αἱ τρίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη (Σχ. 67).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὴν ἕδραν ΔΚ'Ε ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΚΒ, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων γωνιῶν ΚΒ καὶ Κ'Ε, τὸ ἐπίπεδον ΕΚ'Ζ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΚΓ, καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΚΓ καὶ ΕΚ'Ζ εἶναι ἴσαι, ἡ κόψις Κ'Ζ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΚΓ. Τούτου γενομένου, αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι ταυτίζονται. Ἄρα ἔχουσι καὶ τὰ λοιπὰ αὐτῶν μέρη ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Σχ. 67.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἐὰν αἱ ἴσαι ἕδραι τῶν δύο τριέδρων γωνιῶν ἦναι ἀντιστρόφως διατεταγμέναι ὡς πρὸς τὰς ἴσας διέδρους γωνίας, τότε, ἐπιθέτοντες τὴν τρίεδρον γωνίαν Κ' ἐπὶ τῆς ΚΑ'Β'Γ', συμμετρικῆς τῆς ΚΑΒΓ γωνίας, θέλομεν ἀποδείξει, ὡς ἀνωτέρω, τὴν πρότασιν καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 41.

Ὅταν δύο τρίεδροι γωνίαι ΚΑΒΓ καὶ Κ'ΔΕΖ ἔχωσι μίαν ἕδραν ἴσην, τὴν ΑΚΓ ἴσην τῇ ΔΚ'Ζ, καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ διέδρους γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν ΚΑ ἴσην τῇ Κ'Δ, καὶ τὴν ΚΓ ἴσην τῇ Κ'Ζ, αἱ τρίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη ἴσαι (Σχ. 67).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὴν ἕδραν Κ'ΔΖ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΚΓ, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων γωνιῶν ΚΑ καὶ ΔΚ', ΚΓ καὶ Κ'Ζ, τὰ ἐπίπεδα ΔΚ'Ε καὶ ΖΚ'Ε θέλουσι πέσει διαδοχικῶς ἐπὶ τῶν ΑΚΒ καὶ ΓΚΒ, καὶ ἐπομένως ἡ κόψις Κ'Ε, ἐπὶ τῆς κόψεως ΚΒ. Ἄρα αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι ταυτίζονται, λοιπὸν εἶναι ἴσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

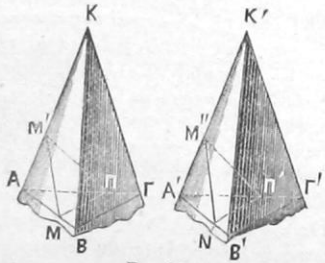
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἐὰν αἱ ἴσαι δίεδροι γωνίαι ἦναι ἀντιστρόφως διατεταγμέναι ὡς πρὸς τὰς ἴσας ἕδρας, ἐπιθέτοντες τότε τὴν τρίεδρον γωνίαν Κ' ἐπὶ τῆς ΚΓ'Β'Α', συμμετρικῆς τῆς ΚΑΒΓ γωνίας, θέλομεν ἀποδείξει ὁμοίως τὴν πρότασιν καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 42.

Ὅταν δύο τρίεδροι γωνίαι Κ καὶ Κ' ἔχωσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τουτέστι ΑΚΒ=Α'Κ'Β', ΑΚΓ=Α'Κ'Γ' καὶ ΒΚΓ=Β'Κ'Γ', αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων ἑδρῶν δίεδροι γωνίαι θέλουσιν εἶναι ἴσαι, τουτέστι ΚΓ=Κ'Γ', ΚΒ=Κ'Β' καὶ ΚΑ=Κ'Α' (Σχ. 68).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἐὰν ἐπὶ τῆς τριέδρου γωνίας Κ λάβωμεν τὴν ΚΑ κατὰ βούλησιν, καὶ τὰς εὐθείας ΚΒ, ΚΓ, Κ'Α', Κ'Β' καὶ Κ'Γ' ἴσας τῇ ΚΑ, καὶ ἀγάγωμεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, Α'Β', Β'Γ' καὶ Α'Γ', τὰ δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΚΑΒ, Κ'Α'Β' θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΚΒΓ καὶ Κ'Β'Γ' θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὁμοίως καὶ τὰ ἰσοσκελῆ ΚΑΓ καὶ Κ'Α'Γ'. Ἐκ τῆς ἀνὰ δύο ἰσότητος τῶν τριγώνων τούτων ἕπεται ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ

Α′Β′Γ′ θέλουσιν εἶναι ἴσα, διότι ΑΒ=Α′Β′, ΒΓ=Β′Γ′ καὶ ΑΓ=Α′Γ′. Πρὸς δὲ, ἐὰν ἔκτινος σημείου Μ′ τῆς κόψεως ΚΑ, ἀγάγωμεν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν ΚΑΒ καὶ ΚΑΓ τὰς εὐθείας Μ′Μ καὶ Μ′Π καθέτους ἐπὶ τῆς ΚΑ, αἱ κάθετοι αὗται θέλουσι συναπαντήσει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, διότι αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι ΚΑΒ καὶ ΚΑΓ εἶναι ὀξεῖαι, διὸ ἑνοῦμεν τὰ σημεῖα ταῦτα Μ καὶ Π διὰ τῆς εὐθείας ΜΠ.



Σχ. 68.

Τούτων γενομένων, ἐπὶ τῆς τριέδρου γωνίας Κ, ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὰ αὐτὰ καὶ διὰ τὴν τρίεδρον γωνίαν Κ′, ἀφοῦ ἐπ'αὐτῆς λάβωμεν Α′Μ″ =ΑΜ′, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜ′Μ καὶ Α′Μ″Ν θέλουσιν εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουσι τὰς πλευρὰς ΑΜ′ καὶ Α′Μ″, καὶ τὰς ὀξείας γωνίας Μ′ΑΜ καὶ Μ″Α′Ν ἴσας. Ἄρα ΑΜ=Α′Ν καὶ Μ′Μ=Μ″Ν. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜ′Π καὶ Α′Μ″Π′ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ἑπομένως ΑΠ=Α′Π′ καὶ Μ′Π=Μ″Π′.

Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΜΑΠ καὶ ΝΑ′Π′ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην ΜΑΠ=ΝΑ′Π′, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ἄρα ΜΠ=ΝΠ′. Ἐπὶ τέλους τὰ δύο τρίγωνα ΜΜ′Π καὶ ΝΜ″Π′ εἶναι ἴσα ὡς ἰσόπλευρα. Ἄρα ἡ γωνία ΜΜ′Π, ἡ τὴν δίεδρον γωνίαν ΚΑ μετροῦσα, εἶναι ἴση τῇ ΝΜ″Π′, ἥτις μετρεῖ τὴν δίεδρον γωνίαν Κ′Α′. Ἀοιπὸν αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων ἑδρῶν ΚΒΓ καὶ Κ′Β′Γ′ δίεδροι γωνίαι ΚΑ καὶ Κ′Α′ εἶναι ἴσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

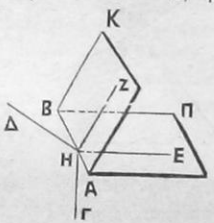
ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν αἱ ἕδραι τῶν δύο τριέδρων γωνιῶν Κ καὶ Κ′ ἦναι ἴσαι καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμέναι, αἱ τρίεδροι γωνίαι θὰ ἦναι ἴσαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Σχόλιον λέγεται ἡ ἐπὶ μιᾶς ἢ καὶ ἐπὶ πλειοτέρων προτάσεων γενομένη παρατήρησις ἐπὶ σκοπῷ τοῦ νὰ καταδειχθῇ ὁ μεταξὺ αὐτῶν σύνδεσμος ἢ ἡ ὠφέλεια ἢ ὁ περιορισμός.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 43.

Ἐὰν ἔκτινος σημείου Η, *ληφθέντος ἐπὶ τῆς κόψεως* ΑΒ *τῆς διέδρου γωνίας* ΑΒΠΚ *τῶν δύο ἐπιπέδων* Η *καὶ* Κ, *καὶ ἐκτὸς τῆς γωνίας ταύτης ὑψώσωμεν τὰς καθέτους* ΓΗ *καὶ* ΔΗ *ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας, ἡ ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων σχηματιζομένη γωνία* ΔΗΓ *εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας* ΖΗΕ, *τῆς μετρούσης τὴν δίεδρον γωνίαν τῶν ἐπιπέδων* Π *καὶ* Κ (Σχ. 69).

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ δίεδρος γωνία ΑΒΚΠ. Εἰς τὸ σημεῖον Η τῆς κόψεως ΑΒ τῆς γωνίας ταύτης, καὶ ἐκτὸς αὐτῆς, ὑψοῦμεν τὴν μὲν ΗΓ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π, τὴν δὲ ΗΔ κάθετον ἐπὶ τοῦ Κ, καὶ οὕτως ὥστε ἑκάτερον τῶν ἐπιπέδων τούτων π.χ. τὸ Π, προεκβαλλόμενον νὰ ἀφίνῃ ἔνθεν μὲν τὸ ἕτερον ἐπίπεδον Κ, ἐκεῖθεν δὲ τὴν ἐπ'αὐτοῦ ἀγομένην κάθετον ΗΓ. Τούτου τεθέντος, εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΗΔ καὶ ΗΓ, ἀμφότεραι ἐπειδὴ εἶναι κάθετοι, ἐπὶ τῆς κόψεως ΑΒ, τὸ ὑπ' αὐτῶν προσδιοριζόμενον ἐπίπεδον θέλει ἐπίσης εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς κόψεως ταύτης, καὶ θέλει τμήσει τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Κ, κατὰ τὰς καθέτους ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας ΗΕ καὶ ΗΖ, τὰς σχηματιζούσας τὴν ἐπίπεδον γωνίαν ΖΗΕ, ἥτις μετρεῖ τὴν δίεδρον γωνίαν ΑΒΠΚ. Ἀλλ' εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο ἐπίπεδον, αἱ πλευραὶ ΗΔ καὶ ΗΓ εἶναι ἀμοιβαίως κάθετοι ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΗΖ καὶ ΗΕ τῆς ἐπιπέδου γωνίας ΖΗΕ καὶ διευθύνονται ἐκτὸς τῆς γωνίας ταύτης. Ἄρα ἡ γωνία ΓΗΔ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας ΖΗΕ (προτ. 21 Μέρ. Α′)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



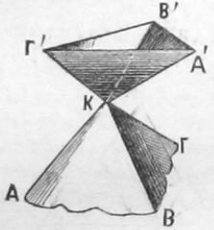
Σχ. 69.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 44.

Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Κ *τριέδρου τινὸς γωνίας* ΚΑΒΓ *ὑψώσωμεν ἐφ' ἑκάστης ἕδρας καθέτους διευθυνομένας ἐκ-*

τὸς τῆς γωνίας ταύτης, αἱ τρεῖς αὗται κάθετοι θέλουσι σχηματίσει δευτέραν τινὰ τρίεδρον γωνίαν ΚΑ′Β′Γ′, τῆς ὁποίας αἱ μὲν ἐπίπεδοι γωνίαι εἰσὶ παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων γωνιῶν, αἱ δὲ δίεδροι γωνίαι παραπληρωματικαὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς πρώτης τριέδρου γωνίας ΚΑΒΓ (Σχ. 70).

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΚΑ′ ἡ κάθετος ἐπὶ τῆς ἕδρας ΒΚΓ, ἡ διευθυνομένη ἐκτὸς τῆς τριέδρου γωνίας οὕτως, ὥστε ἡ ἕδρα ΒΚΓ προεκβαλλομένη, νὰ ἀφίνῃ ἔνθεν μὲν τὴν στερεὰν γωνίαν, ἐκεῖθεν δὲ τὴν κάθετον ΚΑ′. Ὁμοίως ἔστω ἡ μὲν ΚΒ′, κάθετος ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΚΓ, ἡ δὲ ΚΓ′, κάθετος ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΚΒ.



Σχ. 70.

1ον. Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ΚΑ′ καὶ ΚΒ′ εἰσὶ κάθετοι ἐπὶ τῶν ἑδρῶν ΒΚΓ καὶ ΑΚΓ, τῆς ἐπὶ τῆς κόψεως ΚΓ σχηματιζομένης διέδρου γωνίας, κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν ἡ γωνία Α′ΚΒ′ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς διέδρου γωνίας ΚΓ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ γωνίαι Α′ΚΓ′ καὶ Β′ΚΓ′ εἰσὶν ἀμοιβαίως παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων γωνιῶν ΚΒ καὶ ΚΑ.

2ον. Ἐπειδὴ ἡ κόψις ΚΑ, τομὴ τῶν ἑδρῶν ΑΚΒ καὶ ΑΚΓ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΚΓ′ καὶ ΚΒ′, καὶ ἑπομένως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Β′ΚΓ′, καὶ ἡ γωνία ΑΚΑ′ εἶναι ἀμβλεῖα, ἔπεται ὅτι ἡ μὲν ΚΑ κεῖται ἔνθεν, ἡ δὲ ΚΑ′ ἐκεῖθεν τοῦ ἐπιπέδου Β′ΚΓ′, ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, τὸ ἐπίπεδον Β′ΚΓ′, προεκβαλλόμενον, ἀφίνει ἔνθεν μὲν τὴν τρίεδρον γωνίαν ΚΑ′Β′Γ′, ἐκεῖθεν δὲ τὴν κάθετον ΚΑ. Τὸν αὐτὸν συλλογισμὸν ἐφαρμόζοντες καὶ διὰ τὰς δύο ἄλλας κόψεις ΚΒ καὶ ΚΓ, βλέπομεν ὅτι αἱ κόψεις ΚΑ, ΚΒ καὶ ΚΓ τῆς τριέδρου γωνίας ΚΑΒΓ εἶναι ἀμοιβαίως κάθετοι ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου γωνίας ΚΑ′Β′Γ′, αἵτινες διευθύνονται ἐκτὸς τῆς γωνίας ταύτης. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ τρίεδρος γωνία ΚΑΒΓ εὑρίσκεται κατεσκευασμένη διὰ τῆς ΚΑ′Β′Γ′, ὅπως ἡ τρίεδρος αὕτη γωνία κατεσκευάσθη διὰ τῆς ΚΑΒΓ. Ἄρα αἱ δίεδροι γωνίαι ΚΑ′, ΚΒ′, ΚΓ′ τῆς τριέδρου

γωνίας ΚΑ′Β′Γ′ εἰσὶ παραπληρωματικαὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΒΚΓ, ΑΚΓ, ΑΚΒ τῆς τριέδρου γωνίας ΚΑΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο τρίεδροι γωνίαι* λέγονται *παραπληρωματικαί*, ὅταν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς μιᾶς ὦσι παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ἑτέρας· καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς τριέδρου γωνίας ΚΑΒΓ ὦσιν ἴσαι, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς ΚΑ′Β′Γ′, παραπληρωματικῆς τῆς ΚΑΒΓ, θέλουσιν εἶναι ἐπίσης ἴσαι, καὶ ἀντιστρόφως.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ πρότασις (44) ἐφαρμόζεται καὶ δι'οἱανδήποτε κυρτὴν πολύεδρον γωνίαν, ἐπειδὴ ἡ ἀπόδειξις, τοῦ ὅτι ἡ γωνία Α′ΚΒ′ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς διέδρου γωνίας ΚΓ, δὲν ἐξαρτᾶται ποσῶς ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λοιπῶν ἑδρῶν, τῆς πολυέδρου γωνίας, ἀλλ' ἁπλῶς μόνον ἐκ τῆς κατασκευῆς τῆς γενομένης ὡς πρὸς τὴν διέδρου γωνίαν ΚΓ. Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνεται διὰ τὴν ἀπόδειξιν ὅτι ἡ ΚΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Β′ΚΓ′.

Λοιπὸν ἡ πολύεδρος γωνία, ἡ ἔχουσα τὰς καθέτους ΚΑ′, καὶ ΚΒ′ ὡς κόψεις, εἶναι ἄρα *παραπληρωματικὴ τῆς ἀρχικῆς πολυέδρου γωνίας*, τουτέστιν αἱ ἕδραι αὐτῆς εἰσὶ τὰ παραπληρώματα τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς προταθείσης· καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 45.

Ὅταν δύο τρίεδροι γωνίαι ἔχωσι τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν τριέδρων τούτων γωνιῶν θέλουσιν εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Κ καὶ Κ′ αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι. Καλέσωμεν μὲν Α, Β, Γ, τὰς διέδρους γωνίας, καὶ α, β, γ, τὰς ἐπιπέδους γωνίας τῆς πρώτης· Α′, Β′, Γ′ δὲ τὰς διέδρους γωνίας, καὶ α′, β′, γ′ τὰς ἐπιπέδους γωνίας τῆς δευτέρας τριέδρου γωνίας.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν καλέσωμεν Π καὶ Π′ τὰς παραπληρωματικὰς τριέδρους γωνίας τῶν τριέδρων γωνιῶν Κ καὶ Κ′, κατὰ τὴν Πρότ. 44 αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι,

2.ὀρθ.—Α, 2.ὀρθ.—Β, 2.ὀρθ.—Γ,

τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας Π, θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς τὰς ἐπιπέδους γωνίας

2.ὀρ.—Α′, 2.ὀρ.—Β′, 2.ὀρ.—Γ′

τῆς Π′. Ἀλλὰ καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι,

2 ὀρθ.—α, 2.ὀρθ.—β, 2.ὀρθ.—γ

τῆς Π, εἰσὶν ἴσαι πρὸς τὰς διέδρους γωνίας

2.ὀρθ.—ά, 2.ὀρθ.—β′, 2.ὀρθ.—γ′

τῆς παραπληρωματικῆς τριέδρου γωνίας Π′, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. Ἄρα καὶ α=ά, β=β′, γ=γ′· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν αἱ ἴσαι ἕδραι τῶν τριέδρων γωνιῶν Κ καὶ Κ′ ὦσι κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμέναι, αἱ τρίεδροι γωνίαι θέλουσιν εἶναι ἴσαι, εἰ δὲ μή, συμμετρικαί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 46.

ά. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διέδρων γωνιῶν τριέδρου τινὸς γωνίας εἶναι μεγαλείτερον δύο ὀρθῶν γωνιῶν, μικρότερον δὲ ἓξ ὀρθῶν γωνιῶν.

β′. Ἐὰν εἰς τὴν μικροτέραν δίεδρον γωνίαν προστεθῶσι δύο γωνίαι ὀρθαί, τὸ οὕτως ἀποτελούμενον ἄθροισμα εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων διέδρων γωνιῶν.

Ἀπόδειξις ά.) Ἔστωσαν μ, ν, π, αἱ τρεῖς δίεδροι γωνίαι τῆς δεδομένης τριέδρου γωνίας, καὶ Μ, Ν, Π αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῆς τριέδρου γωνίας· θέλομεν ἔχει, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν παραπληρωματικῶν τριέδρων γωνιῶν, τὰς ἰσότητας

μ=2.ὀρθ.—Μ, ν=2.ὀρθ.—Ν, π=2.ὀρθ.—Π,

τὰς ὁποίας προσθέτοντες μέλος πρὸς μέλος, παριζόμεθα τὴν ἑξῆς·

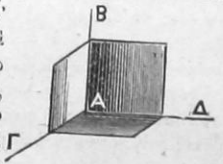
$$\mu+\nu+\pi=6.\text{ὀρθ.}-M-N-\Pi=6.\text{ὀρθ.}-(M+N+\Pi).$$

Ἀλλ' ἀπεδείχθη προηγουμένως ὅτι τὸ ἄθροισμα Μ+Ν+Π εἶναι μεγαλείτερον τοῦ μηδενὸς καὶ μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν (Πρότασις 39). Ἄρα ἡ διαφορὰ 6.ὀρθ.—(Μ+Ν+Π), ἤτοι τὸ ἄθροισμα μ+ν+π, εἶναι μικρότερον ἓξ καὶ μεγαλείτερον δύο ὀρθῶν γωνιῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι μία τριέδρος γωνία δύ-

νανται νὰ ἔχῃ τὰς δύο ἢ καὶ τὰς τρεῖς διέδρους γωνίας ὀρθὰς ἢ ἀμβλείας. Ἐὰν μὲν αἱ δίεδροι γωνίαι ὦσιν ὀρθαί, αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἐπίσης ὀρθαί, καὶ ἀντιστρόφως· ἡ δὲ γωνία λέγεται *τρισορθογώνιος τρίεδρος γωνία*.

Ἵνα κατασκευάσωμεν τρισορθογώνιον τρίεδρον γωνίαν, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν δύο κάθετα πρὸς ἄλληλα ἐπίπεδα ΒΑΓ καὶ ΒΑΔ (Σχ. 71), τεμνόμενα ὑφ' ἑνὸς τρίτου ΓΑΔ, καθέτου ὅμως ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΑΒ, τῶν δύο πρώτων ἐπιπέδων. Ἑκάστη κόψις, τῆς οὕτω σχηματιζομένης τριέδρου γωνίας, ἐπειδὴ εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ τρίτου τινός, εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων κόψεων, καὶ ἑπομένως αἱ τρεῖς ἕδραι τῆς τριέδρου ταύτης γωνίας εἶναι ὀρθαὶ γωνίαι.



Σχ. 71.

Ὁμοίως, ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο καθέτων πρὸς ἀλλήλας εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ὑψώσωμεν τρίτην τινὰ εὐθεῖαν ΑΔ, κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, θέλουσι προκύψει αἱ τρεῖς κόψεις τριέδρου γωνίας μὲ ὀρθογωνίους ἕδρας.

Ἀλλ' αἱ ὀρθογώνιοι αὗται ἕδραι εἶναι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς διέδρους γωνίας· ἄρα αἱ τρεῖς δίεδροι γωνίαι τῆς ἐν λόγῳ τριέδρου γωνίας εἶναι ὀρθαί.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. Τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν στερεᾶς τινος γωνίας, ἐχούσης ν ἕδρας, εἶναι μεγαλείτερον (2ν—4) ὀρθῶν γωνιῶν, μικρότερον δὲ 2ν ὀρθῶν γωνιῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν τῆς δεδομένης στερεᾶς γωνίας, ΣΔ τὸ σύνολον τῶν διέδρων αὐτῆς γωνιῶν, καὶ ΣΕ′ τὸ σύνολον τῶν ἑδρῶν τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας, κατὰ τὸ Σχόλιον τῆς 44 Προτάσεως ἔχομεν τὴν σχέσιν ΣΔ=2ν.ὀρθ.—ΣΕ′, ἐξ ἧς συνάγομεν ΣΔ+ΣΕ′=2ν.ὀρθ.· ἀλλὰ ΣΕ′>0 καὶ ΣΕ′<4.ὀρθ.· ἄρα τὸ ἄθροισμα ΣΔ τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς προταθείσης στερεᾶς γωνίας περιλαμβάνεται μεταξὺ 2ν—4 καὶ 2ν ὀρθῶν γωνιῶν.

Ἀπόδειξις β′.) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μ παριστᾷ τὴν μικροτέραν δίεδρον γωνίαν τῆς δεδομένης τριέδρου γωνίας. Αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῆς τριέδρου γωνίας

θέλουσιν εἶναι

$$2.\text{ὀρθ.}-\mu,\ 2.\text{ὀρθ.}-\nu,\ 2.\text{ὀρθ.}-\pi,$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μεγαλειτέρα εἶναι προφανῶς ἡ $2.\text{ὀρθ.}-\mu$. Ἀλλὰ, κατὰ τὴν 38 Πρότασιν, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$2.\text{ὀρθ.}-\mu < 2.\text{ὀρθ.}-\nu+2.\text{ὀρθ.}-\pi,$$

ἐκ τῆς ὁποίας, προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο αὐτῆς μέλη $\mu+\nu+\pi$, ποριζόμεθα μετὰ τὴν ἀναγωγὴν

$$2.\text{ὀρθ.}+\nu+\pi < 4.\text{ὀρθ.}+\mu.$$

Ἀφαιροῦντες ἐκ τῶν δύο μελῶν τῆς τελευταίας ταύτης $2.\text{ὀρθ.}$, θέλομεν ἔχει $\nu+\pi < 2.\text{ὀρθ.}+\mu$.

Λοιπόν, ἐὰν εἰς τὴν μικροτέραν δίεδρον γωνίαν μ προσθέσωμεν $2.\text{ὀρθ.}$ προκύπτει ἄθροισμα μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος $\nu+\pi$ τῶν δύο ἄλλων.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3. Πρὸς κατασκευὴν τριέδρου γωνίας μὲ τρεῖς δεδομένας διέδρους γωνίας μ, ν καὶ π πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ περιέχηται μεταξὺ 2 καὶ 6 ὀρθῶν γωνιῶν, καὶ ἡ μικροτέρα τούτων, αὐξηθεῖσα κατὰ δύο ὀρθὰς, νὰ ἀποτελῇ ἄθροισμα μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι αἱ συνθῆκαι αὗται εἶναι ἀναγκαῖαι (Πρότ. 46)· μένει λοιπὸν νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ ἐπαρκεῖς.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $\mu+\nu+\pi$ περιέχεται μεταξὺ 2 καὶ 6 ὀρθῶν, τὸ ἄθροισμα

$$2.\text{ὀρθ.}-\mu+2.\text{ὀρθ.}-\nu+2.\text{ὀρθ.}-\pi$$

θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ 0 καὶ 4 ὀρθῶν, ἤτοι θέλομεν ἔχει

$$2.\text{ὀρθ.}-\mu+2.\text{ὀρθ.}-\nu+2.\text{ὀρθ.}-\pi > 0.\text{ὀρθ.}$$

ἢ $$< 4.\text{ὀρθ.} \ldots\ldots [1],$$

καὶ ἐπειδὴ $2.\text{ὀρθ.}+\mu > \nu+\pi$,

θέλομεν ἔχει, ἀφαιροῦντες καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης $\mu+\nu+\pi-2.\text{ὀρθ.}$

τὴν ἑξῆς $2.\text{ὀρθ.}-\mu < 2.\text{ὀρθ.}-\nu+2.\text{ὀρθ.}-\pi \ldots\ldots [2]$.

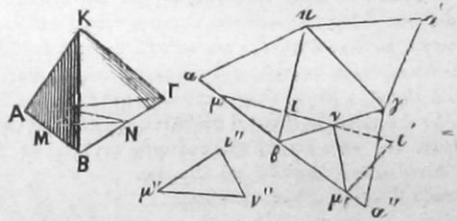
Ἄρα, ἐὰν κατασκευάσωμεν στερεὰν τρίεδρον γωνίαν, διὰ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν $2.\text{ὀρθ.}-\mu$, $2.\text{ὀρθ.}-\nu$, $2.\text{ὀρθ.}-\pi$, αἵτινες ἐκπληροῦσι τὰς ἀνισότητας [1] καὶ [2], ἤτοι τὰς συνθήκας τῆς ἀποδειχθείσης προτάσεως, ἡ παραπληρωματικὴ τῆς τριέδρου ταύτης γωνίας τρίεδρος γωνία θέλει ἔχει διὰ διέδρους γωνίας τὰς δεδομένας μ, ν, π. Ἄρα διὰ τριῶν δεδομένων διέδρων γωνιῶν μ, ν, καὶ π, ἐκπληρουσῶν τὰς

ἀνωτέρω συνθήκας, δυνάμεθα πάντοτε νὰ κατασκευάσωμεν τρίεδρον γωνίαν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 47. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δοθεισῶν τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τριέδρου γωνίας, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τρεῖς δίεδροι αὐτῆς γωνίαι.

Κατασκευή. Ἔστω ΚΑΒΓ (Σχ. 72), ἡ τρίεδρος γωνία, τῆς ὁποίας αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΚΒ, ΒΚΓ καὶ ΑΚΓ εἶναι γνωσταί, ζητεῖται δὲ νὰ εὑρεθῇ ἐν πρώτοις ἡ δίεδρος γωνία ΚΒ. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν τριῶν κόψεων, ἐκ τῆς κορυφῆς Κ ἀρχίζοντες, τὰς ἴσας ἀποστάσεις ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ καὶ ΑΓ. Ἐκ τινος σημείου Ι, τῆς



Σχ. 72.

κόψεως ΚΒ, ὑψοῦμεν ἐπὶ τῆς κόψεως ταύτης, καὶ ἐπὶ τῶν ἑδρῶν ΑΚΒ καὶ ΒΚΓ κειμένας, τὰς καθέτους ΙΜ καὶ ΙΝ, ἡ δὲ οὕτω σχηματιζομένη γωνία ΜΙΝ ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων, θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη δίεδρος γωνία ΚΒ, ἐπειδὴ ἡ γωνία αὕτη ΜΙΝ μετρεῖ τὴν δίεδρον γωνίαν ΚΒ. Τούτου τεθέντος, τῆς γωνίας ΚΑΒ οὔσης μιᾶς τῶν πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΚΒ γωνιῶν, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀξεῖα. Λοιπὸν, ἡ πλαγία ΒΑ θέλει ἀπαντήσει τὴν κάθετον ΙΜ, ὡς καὶ ἡ ΒΓ τὴν κάθετον ΙΝ. Ἄρα, ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν, θέλομεν σχηματίσει τὸ τρίγωνον ΙΜΝ.

Ἐκ τῆς κατασκευῆς ταύτης ἕπεται ὅτι, ἐὰν ἠδυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς τὸ τρίγωνον ΙΜΝ, ἠθέλομεν εὐκόλως προσδιορίσει τὴν ζητουμένην γωνίαν ΜΙΝ, του-

τέστι τὴν δίεδρον ΚΒ. Ὅθεν ἡ λύσις τοῦ προβλήματος ἄγεται εἰς τὴν κατασκευήν, ἐπὶ ἐπιπέδου τινός, τοῦ τριγώνου ΙΜΝ.

Λύσις. Ἔστωσαν ακβ, βκγ, γκά, αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος τριέδρου γωνίας, διατεταγμέναι διαδοχικῶς ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ κα=κβ=κγ =ΚΒ. Ἐπιζευγνύομεν τὰς εὐθείας αβ, βγ καὶ γά. Τὰ τρίγωνα ακβ, βκγ καὶ γκά, θέλουσιν εἶναι διαδοχικῶς ἴσα μὲ τὰ τρίγωνα ΑΚΒ, ΒΚΓ καὶ ΓΚΑ· ἐπειδὴ ἔχουσιν ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ἐὰν λοιπὸν διὰ τῶν πλευρῶν αβ, βγ καὶ γά κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον α''βγ, τὸ τρίγωνον τοῦτο θέλει εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τῶν δύο τριγώνων τούτων εἶναι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. Πρὸς τούτοις, ἔστω βι=ΒΙ. Ἐκ τοῦ σημείου ι ἂς ἀγάγωμεν τὴν μν κάθετον ἐπὶ τῆς κβ, τὸ τρίγωνον μιβ θέλει εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΜΙΒ, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι μίαν πλευρὰν ἴσην, τὴν βι=ΒΙ προσκειμένην εἰς ἴσας γωνίας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τουτέστι τὴν γωνίαν μιβ= ΜΙΒ, ὡς ὀρθαί, καὶ τὴν γωνίαν μβι=ΜΒΙ, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ακβ καὶ ΑΚΒ. Δι' ἀναλόγου συλλογισμοῦ βλέπομεν ὅτι τὰ τρίγωνα βιν καὶ ΒΙΝ θέλουσιν εἶναι ἴσα. Ἄρα θέλομεν ἔχει καὶ ιμ=ΙΜ, ιν=ΙΝ.

Ἐὰν λάβωμεν βμ'=βμ καὶ φέρωμεν τὴν μ'ν, τὸ τρίγωνον μ'βν θέλει εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΜΒΝ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὰ τρίγωνα ταῦτα δύο ἴσας πλευρὰς βμ'=βμ=ΒΜ καὶ βν=ΒΝ, περιεχομένας μεταξὺ ἴσων γωνιῶν γβά' καὶ ΓΒΑ, αἵτινες ἀνήκουσιν εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα ά'βγ καὶ ΑΒΓ. Ἄρα καὶ μ'ν=ΜΝ.

Ἐὰν λοιπόν, διὰ τῶν εὐθειῶν ιμ, ιν καὶ μ'ν κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον μ'ιν, τὸ τρίγωνον τοῦτο θέλει εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΜΙΝ, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουσιν ἔχει τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. Ἄρα ἡ γωνία μ'ιν εἶναι ἴση τῇ ζητουμένῃ γωνίᾳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 48. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δοθεισῶν δύο ἐπιπέδων γωνιῶν τριέδρου τινὸς γωνίας καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης διέδρου γωνίας, νὰ προσδιορισθῇ ἡ τρίτη ἐπίπεδος γωνία.

Κατασκευή. Ἔστωσαν ΑΚΒ καὶ ΒΚΓ (Σχ. 72), αἱ δεδο-

μέναι δύο ἐπίπεδοι γωνίαι. Ἐὰν, ὡς προηγουμένως, λάβωμεν ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ, καὶ φέρωμεν τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, ὑψώσωμεν δὲ τὰς καθέτους ΙΜ καὶ ΙΝ ἐπὶ τῆς κόψεως ΚΒ, καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν, ἡ οὕτω προκύπτουσα γωνία ΜΙΝ, ἐπειδὴ μετρεῖ τὴν δίεδρον γωνίαν ΑΚΒΓ, ἥτις ὑπετέθη γνωστή, εἰς τὸ τρίγωνον ΜΙΝ εἶναι γνωσταὶ δύο πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία· δυναμεθα ἄρα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον τοῦτο, καὶ ἑπομένως νὰ ποριθῶμεν τὴν ἄγνωστον ἐπίπεδον γωνίαν ΑΚΓ, ὡς ἐζῆς.

Λύσις. Ἔστωσαν ακβ καὶ βκγ αἱ δεδομέναι ἐπίπεδοι γωνίαι, διαδοχικῶς ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εὑρισκόμεναι. Ἔστω κα=κβ=ΚΒ. Τὰ τρίγωνα ακβ καὶ βκγ θέλουσιν εἶναι διαδοχικῶς ἴσα πρὸς τὰ τρίγωνα ΑΚΒ καὶ ΒΚΓ. Πρὸς δὲ ἔστω βι=ΒΙ. Ἂς ἀγάγωμεν ἐκ τοῦ σημείου ι τὴν εὐθεῖαν μν κάθετον ἐπὶ τῆς κβ· τὰ τρίγωνα μιβ καὶ νιβ θέλουσιν εἶναι διαδοχικῶς ἴσα πρὸς τὰ τρίγωνα ΜΙΒ καὶ ΝΙΒ.

Ἂς κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον μ''ι'ν'', εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία μ''ι'ν'' νὰ ἦναι ἴση τῇ δεδομένῃ γωνίᾳ, τῇ σχηματιζομένῃ ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΚΒ καὶ ΒΚΓ, καὶ μ''ι'=μι =ΜΙ, ν''ι''=νι=ΝΙ. Τὸ τρίγωνον τοῦτο θέλει εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΜΙΝ, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουσιν ἔχει μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν, ἑπομένως καὶ μ''ν''=ΜΝ. Διὰ τῶν πλευρῶν μβ, βν καὶ μ''ν'', ἂς κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον μ'βν· τὸ τρίγωνον τοῦτο θέλει εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΜΒΝ, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουσιν ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς των ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ.

Ἐπὶ τῆς εὐθείας βμ', ἂς λάβωμεν βά'=βα, καὶ ἀγάγωμεν τὴν γά'· τὸ τρίγωνον ά'βγ θέλει εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι α''βγ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων μ'βν καὶ ΜΒΝ· περιπλέον δὲ ἔχομεν βγ=ΒΓ καὶ βά'=βα=ΒΑ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι καὶ ά'γ=ΑΓ. Ἐὰν λοιπὸν κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῆς κγ τὸ τρίγωνον άκγ, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ἔχωμεν κά=κγ καὶ γά=γά', τὸ τρίγωνον τοῦτο θέλει εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΑΚΓ, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουσιν ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς των ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. Ἄρα ἡ γωνία άκγ θέλει εἶναι ἡ τρίτη ζητουμένη ἐπίπεδος γωνία.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἀφοῦ προσδιορισθῇ οὕτω καὶ ἡ τρίτη ἐπίπεδος γωνία, δυνάμεθα, κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα, νὰ προσδιορίσωμεν καὶ τὰς δύο ἄλλας διέδρους γωνίας.

ΠΡΟΤΑΤΙΣ 49. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δοθείσης μιᾶς ἐπιπέδου γωνίας καὶ τῶν προκειμένων αὐτῇ δύο διέδρων γωνιῶν τριέδρου τινὸς γωνίας, νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι ἐπίπεδοι γωνίαι καὶ ἡ τρίτη δίεδρος γωνία.

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Α τὴν δεδομένην ἐπίπεδον γωνίαν, διὰ Μ καὶ Ν τὰς ἐπιπέδους γωνίας, τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὰς δεδομένας διέδρους γωνίας, κατὰ τὴν (Πρότ. 44) ἡ τρίεδρος γωνία, ἡ παραπληρωματικὴ τῆς δεδομένης τριέδρου γωνίας, θέλει ἔχει δύο ἐπιπέδους γωνίας ἴσας μὲ 2.ὀρθ.—Μ καὶ 2.ὀρθ.—Ν, πρὸς δὲ τὴν μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένην δίεδρον γωνίαν ἴσην μὲ 2.ὀρθ.—Α.

Τούτου τεθέντος, κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην ἐπίπεδον γωνίαν, ἣν καλοῦμεν Π, τῆς παραπληρωματικῆς ταύτης τριέδρου γωνίας, καὶ ἐπομένως, κατὰ τὴν (Πρότ. 47) τὰς δύο αὐτῆς διέδρους γωνίας, ἃς καλοῦμεν Β καὶ Γ. Ἄρα, τῆς προταθείσης τριέδρου γωνίας, ἡ μὲν τρίτη δίεδρος γωνία θέλει εἶναι 2.ὀρθ.—Π, αἱ δὲ δύο ζητούμεναι ἐπίπεδοι γωνίαι θέλουσιν εἶναι 2.ὀρθ.—Β καὶ 2.ὀρθ.—Γ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 50. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δοθεισῶν τῶν τριῶν διέδρων γωνιῶν, τριέδρου τινὸς γωνίας, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι αὐτῆς γωνίαι.

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Μ, Ν, Π τὰς ἐπιπέδους γωνίας, αἵτινες μετροῦσι τὰς δεδομένας διέδρους γωνίας, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς παραπληρωματικῆς τριέδρου γωνίας θέλουσιν εἶναι 2.ὀρθ.—Μ, 2.ὀρθ.—Ν καὶ 2.ὀρθ.—Π. Τούτου γενομένου, ἐφαρμόζοντες ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς παραπληρωματικῆς ταύτης γωνίας τὴν (Πρότ. 47), εὑρίσκομεν διαδοχικῶς τὰς τρεῖς διέδρους αὐτῆς γωνίας, ἃς

παριστῶμεν διὰ Α, Β, καὶ Γ, ἢ τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους γωνίας, καὶ ἐκ τῶν τελευταίων τούτων ποριζόμεθα τὰς ἐπιπέδους γωνίας 2.ὀρθ.—Α, 2.ὀρθ.—Β, 2.ὀρθ.—Γ τῆς προταθείσης τριέδρου γωνίας.

---

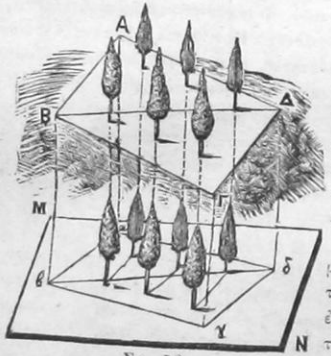
§—18.

Προσοδοφόρος βάσις τῶν γαιῶν. Καταμέτρησις τῆς προβολῆς γωνίας τινὸς καὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς. Γωνιόμετρα. Ἐπαναληπτικὸς κύκλος. Θεοδόλιχον. Καταμέτρησις τῶν γωνιῶν δι' ἐπαναλήψεως. Δοκιμὴ καὶ ῥύθμισις τῶν γωνιομέτρων. Αἰσθητὸς ὁρίζων. Μεσημβρινός. Χάραξις μεσημβρινῆς γραμμῆς. Μαγνητικὴ βελόνη. Μαγνητικὸς μεσημβρινός, ἀπόκλισις τῆς μαγνητικῆς βελόνης. Χάραξις τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Ἀποκλιτικὴ πυξίς. Χωρομετρικὴ πυξίς. Προσδιόρισις, καταμέτρησις καὶ διόρθωσις τοῦ Ἀζιμούθ. Ἐκκεντρικότης τῆς διόπτρας τῆς πυξίδος. Παντόμετρον.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 45. Οἱ περὶ καταμετρήσεως τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν σχημάτων ἐν τῇ §. 12 ἀναφερόμενοι κανόνες, ὡς καὶ αἱ περὶ σχεδιάσεως μέθοδοι τῆς §. 10, ὑποθέτουσιν ὅτι τὰ καταμετρούμενα ἢ σχεδιαζόμενα σχήματα κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἂν καὶ τὰ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κείμενα σχήματα, ὡς π. χ. τὰ τῶν ἀγρῶν, τῶν πόλεων, κτλ. δὲν ἐκπληροῦσι τὴν συνθήκην ταύτην, αἱ αὐταὶ καὶ πάλιν μέθοδοι ἐφαρμόζονται πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἢ πρὸς σχεδίασιν ἐπὶ χάρτου τοῦ σχήματος αὐτῶν, μία μόνη ὅμως διαφορὰ ὑπάρχει, ὅτι αἱ μέθοδοι αὗται δὲν ἀναφέρονται ἀμέσως εἰς τὸ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κείμενον σχῆμα ΑΒΓΔ (Σχ. 73), ἀλλ' εἰς τὸ σχῆμα αβγδ τῆς προβολῆς αὐτοῦ, τῆς εὑρισκομένης ἐπὶ ὁριζοντείου ἐπιπέδου ΜΝ. Τῷ ὄντι, ἡ πεῖρα ἀπέδειξεν ὅτι, ἐπὶ τοσοῦτον αἱ γαῖαι εἰσὶν ὀλιγώτερον προσοδοφόροι, ἐφ' ὅσον αὗται εἶναι ὀλιγώτερον ὁριζόντιοι, διότι ὅσον αἱ γαῖαι εἶναι κεκλιμέναι, τόσον τὰ ὑέτια ὕδατα, καθ' ὃν καιρὸν διατρέχουσι τὴν μεγαλειτέραν κλίσιν τοῦ ἐδάφους, συμπαρασύρουσι τὴν φυτικὴν γῆν, καὶ ἀποκαθιστῶσι τὰς γαίας ἀνύδρους, ξηρὰς καὶ ἐπομένως ἀγόνους. Πρὸς δὲ τούτοις τὰ φυτὰ, ἐπειδὴ διευθύνονται κατα-

κορύφως καὶ ὄχι καθέτως ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῶν γαιῶν, ἕπεται ὅτι, ἡ ἔκτασις τῆς γῆς ΑΒΓΔ, οἱασδήποτε οὔσης τῆς κλίσεως αὐτῆς πρὸς τὸ ὁριζόντειον ἐπίπεδον ΜΝ, δὲν δύναται νὰ ἐμπεριέχῃ μεγαλειτέραν ποσότητα φυτῶν τῆς ὁριζοντείου αὐτῆς προβολῆς αβγδ, ἥτις, ἐν τῇ ἀγρομετρίᾳ καλεῖται προσοδοφόρος βάσις τῆς γῆς ΑΒΓΔ.

Τούτου τεθέντος, ἐπὶ τοῦ σχήματος, βλέπομεν ὅτι ἡ ὁριζόντειος προβολὴ αβγδ τῆς γῆς ΑΒΓΔ, ἐπειδὴ ἀναλύεται εἰς τόσα σχήματα, εἰς ὅσα καὶ ἡ γῆ αὕτη, ἕπεται ὅτι, ἐὰν καταμετρήσωμεν τὴν προβολὴν ἑκάστης τῶν γωνιῶν καὶ τῶν εὐθειῶν, εἰς ἃς ἀναλύεται τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ, διὰ τῶν οὕτω λαμβανομένων ἐξαγομένων, τῆς κλίμακος καὶ τῶν ἐν ταῖς παραγράφοις 10 καὶ 12 ἐκτεθειμένων μεθόδων, δυνάμεθα νὰ σχεδιάσωμεν ἢ νὰ καταμετρήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς αβγδ τῆς γῆς ΑΒΓΔ.



Σχ. 73.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 44. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων ἕπεται ὅτι, ἡ καταμέτρησις τοῦ ἐμβαδοῦ, ὡς καὶ ἡ ἐπὶ χάρτου σχεδίασις τῆς προβολῆς τῶν ἐπὶ τῆς γῆς κειμένων σχημάτων, ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἑξῆς δύο προβλημάτων.

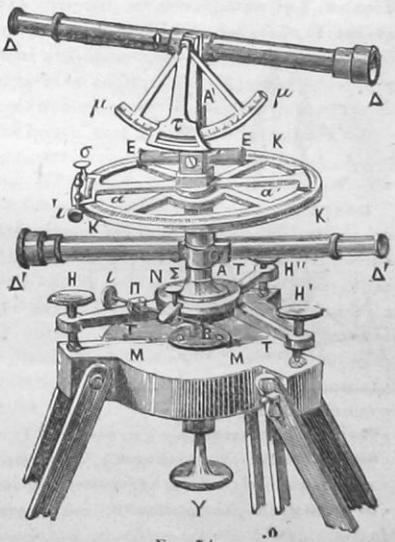
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ὁριζόντειος προβολὴ τῆς ἐπὶ τῆς γῆς γωνίας, τῆς ὑπὸ δύο διευθύνσεων ἀποτελουμένης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ὁριζόντειος προβολὴ τῆς ἐπὶ τῆς γῆς γραμμῆς.

Ἡ ἐπίλυσις τοῦ πρώτου προβλήματος δίδεται ἀμέσως ὑπὸ τοῦ ἐργαλείου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 45. Περιγραφὴ τοῦ γωνιομέτρου κύκλου. Τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο σύγκειται ἐξ ἑνὸς ὁριζοντείου κύκλου ΚΚΚ (Σχ. 74), κινουμένου περὶς κατακορύφου ἄξονος ὅστις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ ἐκ μιᾶς περιστρεφομένης διόπτρας ΔΔ, ἥτις δύναται μὲν νὰ κινεῖται, περὶ τὸν ὁριζόντειον ἄξονα Ο, καὶ

νὰ περιστρέφηται περὶ τὸν κατακόρυφον ἄξονά τοῦ κύκλου. Ὁ ὁριζόντειος κύκλος ἀναποσπάστως συνδέεται μεθ' ἑνὸς κοίλου κορμοῦ Α, κινουμένου πέριξ ἐσωτερικοῦ τινος ἄξονος Β. Ὁ ἄξων δὲ συνδέεται πρὸς τὰ κάτω μεθ' ἑνὸς δίσκου Ν, ὅστις δύναται νὰ συνδεθῇ μετὰ ὑποστηρίγματος, συσφιγγομένης περώνης τινὸς διὰ τοῦ συμπιεστικοῦ κοχλίου Σ. Τὸ σύνολον δὲ τῶν περιγραφέντων τούτων μερῶν, τουτέστιν ὁ κύκλος ΚΚ, ὁ κορμὸς Α, καὶ ὁ δίσκος Ν, ἀποτελοῦσι τὸ λεγόμενον, πρὸς συντομίαν, σύστημα τοῦ κύκλου. Ὁ ὁριζόντειος ἄξων Ο τῆς διόπτρας ΔΔ, ὡς καὶ ὁ ὁριζόντειος κύκλος στηρίζονται ἐπὶ τῆς κορυφῆς δευτέρου κοίλου κορμοῦ Α', περιστρεφομένου περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα Β. Ὁ κορμὸς Α' φέρει, πρὸς τὰ κάτω, τὸν κανόνα αά, εἰς τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εὑρίσκονται κυκλικοὶ βερνιέροι· τούτων δὲ ἡ ἀφετηρία γραμμὴ τῶν διαιρέσεων κεῖται ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου, τοῦ διὰ τοῦ ὀπτικοῦ ἄξονος τῆς διόπτρας διερχομένου. Κατὰ τὴν ὁριζόντειον περιστροφικὴν κίνησιν τῆς διόπτρας ΔΔ, οἱ βερνιέροι τοῦ κανόνος αά στρέφονται καὶ διατρέχουσι τὰς διαιρέσεις τοῦ ἄντυγος τοῦ ὁριζοντείου κύκλου, ἐν τῶν ἄκρων τοῦ κανόνος αά δύναται νὰ συνδεθῇ μετὰ τοῦ ἄντυγος συσφιγγομένης περώνης τινός, διὰ τοῦ συμπιεστικοῦ κοχλίου σ. Τὸ σύνολον τῶν τριῶν τελευταίων τούτων μερῶν, τουτέστιν ἡ διόπτρα ΔΔ, ὁ κορμὸς Α' καὶ ὁ κανὼν αά, ἀποτελεῖ τὸ σύστημα



Σχ. 74.

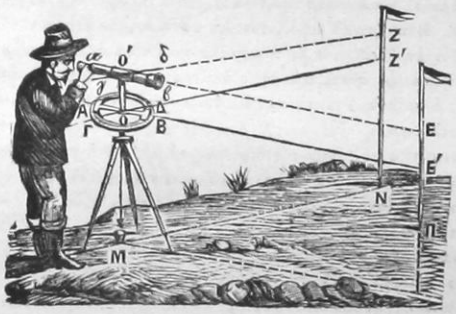
τῆς διόπτρας. Καθέτως τοῦ ἄξονος τῆς διόπτρας ὑπάρχει κανὼν τ μετὰ βερνιέρου, ὅστις διατρέχει τὰς διαιρέσεις τοῦ τόξου μμ, τοῦ καθηλωμένου ἐπὶ τοῦ κορμοῦ Α′· τοῦ τόξου δὲ ἡ ἀφετηρία γραμμὴ τῶν διαιρέσεων O^0, διευθύνεται κατακορύφως. Αἱ διαιρέσεις τοῦ τόξου περιορίζονται ἑκατέρωθεν τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς 0^0, μέχρις 60^0. Τὸ σύνολον τοῦ ἐργαλείου στηρίζεται μὲν ἐπὶ τῆς πινακίδος ΜΜ τοῦ τρίποδος διὰ τριῶν ἰσοπεδοτικῶν κοχλιῶν Η, Η′, Η″, οἵτινες διαπερῶσι τοὺς βραχίονας Τ, Τ, Τ, καὶ ἀποτελοῦσι μέρος τοῦ ἄξονος Β, συνδέεται δὲ ἀναποσπάστως μετὰ τῆς πινακίδος, διὰ τοῦ κοχλίου Υ. Συνήθως εἰς τὸν κορμὸν Α, προσαρτᾶται δευτέρα τις διόπτρα Δ′Δ′, ὡς ἐγγιστα ὀριζόντειος, ἥτις ἐπιδέχεται ἀνεπαίσθητον κίνησιν· ἡ κίνησις δὲ ῥυθμίζεται διὰ καταλλήλων κοχλιῶν, καὶ τὸ ἐργαλεῖον ἀποτελεῖ τὸν λεγόμενον ἐπαναληπτικὸν κύκλον.

Διὰ τῆς ἀεροστάθμης ΕΕ τῆς στηριζομένης καθέτως πρὸς τὸν κορμὸν Α′, ῥυθμίζεται τὸ ἐργαλεῖον, τὸ ὁποῖον κατατάσσεται μεταξὺ τῶν ἐντελεστέρων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 46. Ὅπως σταθμεύσωμεν διὰ τοῦ ἐργαλείου τούτου ἐπὶ σημείου τινός, διευθετοῦμεν τὴν πινακίδα ΜΜ τοῦ τρίποδος ὅσον τὸ δυνατὸν ὀριζοντείως, ἐμπηγνύοντες τοὺς τρεῖς πόδας εἰς τὸ ἔδαφος καταλλήλως. Ἔπειτα, ἀφ᾽οὗ συσφίξωμεν τὸν κοχλίαν Σ, τὸν δὲ σ χαλαρώσωμεν, περιστρέφομεν τὸ σύστημα τῆς διόπτρας ἕως οὗ ἡ ἀεροσταθμη ΕΕ λάβῃ διεύθυνσιν παράλληλον τῆς εὐθείας, τῆς ὁριζομένης ὑπὸ δύο ἰσοπεδοτικῶν κοχλιῶν Η καὶ Η′. Ἔπειτα περιστρέφομεν καταλλήλως τοὺς κοχλίας τούτους, ὑποθέντες τὴν ἀεροστάθμην κεκανονισμένην, ὥστε ἡ φυσαλὶς τῆς ἀεροστάθμης νὰ περιορισθῇ μεταξὺ τῶν ἀναφορικῶν της σημείων. Τούτου γενομένου, περιστρέφομεν ἐκ δευτέρου τὸ σύστημα τῆς διόπτρας, ἕως οὗ ἡ ἀεροστάθμη λάβῃ διεύθυνσιν κάθετον τῆς πρώτης διευθύνσεως, καὶ στρέφομεν τὸν τρίτον ἰσοπεδοτικὸν κοχλίαν Η″ ὅπως ἡ φυσαλὶς τῆς ἀεροστάθμης ἐπανέλθῃ μεταξὺ τῶν ἀναφορικῶν της σημείων. Οὕτω λοιπὸν ἐπειδὴ ἡ ἀεροστάθμη κατέστη παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου, ἔπεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι ὀριζόντειον, διότι ἐκ τῶν γενομένων ἤδη περιέχει δύο ὀριζοντείους εὐθείας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 47. Ἵνα καταμετρήσωμεν δὲ τὴν προβολὴν τῆς γωνίας ΝΜΠ, σταθμεύομεν, διὰ τοῦ ἐργαλείου, ἐπὶ τῆς κορυφῆς Μ τῆς γωνίας, ὡς προελέχθη, εἰς τρόπον ὥστε ὁ κατακόρυφος τοῦ ἐργαλείου ἄξων νὰ εὑρίσκηται ἄνω τῆς κορυφῆς, τὸ ὁποῖον γίνεται ἐὰν

ἐξαρτήσωμεν τὴν μολύβδαιναν κάτω τοῦ κοχλίου Υ. Ἔπειτα συσφίγγοντες τὸν κοχλίαν Σ, καὶ χαλαροῦντες τὸν κοχλίαν σ (Σχ. 74 καὶ 75), περιστρέφομεν τὸ σύστημα τῆς διόπτρας, ἕως οὗ ἡ διαίρεσις μηδὲν τοῦ κανόνος ἀά ἀντιστοιχίσῃ μὲ τὴν διαίρεσιν μηδὲν τοῦ κύκλου· τότε τὸν μὲν κοχλίαν σ σφίγγομεν, τὸν δὲ Σ χαλαροῦμεν, καὶ περιστρέφομεν τὸ σύνολον τῶν δύο συστημάτων τοῦ ἐργαλείου, τὰ ὁποῖα ἀποκαθίστανται οὕτως ἀναπόσπαστα, ἕως οὗ, σκοπεύοντες διὰ τῆς διόπτρας αβ (Σχ. 75), ἴδωμεν ὡς ἔγγιστα ὄπισθεν τῆς διασταυρώσεως τῶν νημάτων τῆς διόπτρας τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ ἡμῶν κείμενον ἀκόντιον Π. Τότε σφίγγομεν τὸν κοχλίαν Σ, καὶ διὰ περιστροφικῆς



Σχ. 75.

κινήσεως τοῦ ἀναλλητικοῦ κοχλίου ι, ἀνακαλοῦμεν βραδέως τὸ ἀκόντιον, ἀκριβῶς ὄπισθεν τῆς διασταυρώσεως τῶν νημάτων. Τούτου γενομένου, χαλαροῦμεν τὸν κοχλίαν σ, καὶ περιστρέφομεν τὸ σύστημα τῆς διόπτρας ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ, ἕως οὗ, σκοπεύοντες ἐκ τῆς νέας ταύτης θέσεως γδ τῆς διόπτρας, ἴδωμεν ὡς ἔγγιστα ὄπισθεν τῆς διασταυρώσεως τῶν νημάτων τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἡμῶν κείμενον ἀκόντιον Ν. Τότε συσφίγγομεν τὸν κοχλίαν σ, καὶ διὰ περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ ἀνακλητικοῦ κοχλίου ί, ἀνακαλοῦμεν βραδέως μὲν, ἀλλὰ ἀκριβῶς, ὄπισθεν τῆς διασταυρώσεως τῶν νημάτων τὸ ἀκόντιον Ν. Ἀναγινώσκομεν, διὰ τῶν βερνιέρων, τὴν γωνίαν ΒΟΔ, καθ᾽ ἣν τὸ σύστημα τῆς διόπτρας περιεστράφη, καὶ ἔχομεν τὴν ζητουμένην προβολὴν τῆς γωνίας ΝΜΠ· ἐπειδὴ αἱ μὲν Ο′Ο, ΖΝ καὶ ΕΠ εἶναι κατακόρυφοι εὐθεῖαι, τὸ δὲ Ζ′ΟΕ′ ἐπίπεδον ὀριζόντειον.

Ἐὰν, αἱ ὑπὸ τῶν δύο βερνιέρων τοῦ κανόνος αά προσδιοριζόμεναι δύο γωνίαι, δὲν εἶναι ἴσαι, τότε τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν θέλει ἐκφράσει τὴν ζητουμένην γωνίαν. Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἐπειδὴ ἡ διὰ τοῦ βερνιέρου, τοῦ εὑρισκομένου πρὸς τὸ μέρος ά, ἀναγινωσκομένη γωνία εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ δέοντος κατὰ 180 μοίρας, πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτάς.

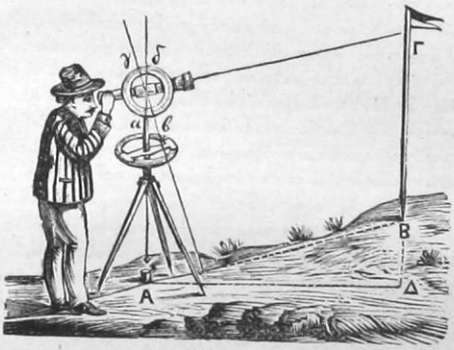
Μετὰ τὴν ἀνάγνωσιν τῆς γωνίας, μεταχειριζόμεθα τὴν δευτέραν διόπτραν Δ′Δ′ ὅπως δοκιμάσωμεν μὴ τυχὸν ὁ κύκλος μετεκινήθη κατὰ τὴν περιστροφικὴν κίνησιν τῆς διόπτρας ΔΔ. Πρὸς τοῦτο, καθ' ὃν καιρὸν συνδέομεν ἀναποσπάστως, διὰ τοῦ κοχλίου σ, τὸν κανόνα αά μετὰ τοῦ κύκλου κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΒ (Σχ. 75), τῆς πρώτης πλευρᾶς ΜΠ τῆς γωνίας, διευθύνομεν τὴν κάτω διόπτραν Δ′Δ′, στρέφοντες αὐτὴν ὀλίγον, πρός τι μεμακρυσμένον σημεῖον, δυνάμενον νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ἀναφορικὸν σημεῖον, καὶ συσφίγγομεν τὴν διόπτραν μετὰ τοῦ κορμοῦ Α κατὰ τὴν διεύθυνσιν ταύτην. Τούτου γενομένου, ἐὰν μετὰ τὴν περιστροφὴν τῆς ἄνω διόπτρας ΔΔ, δι' ἧς ὁ κανὼν αά λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν τῆς δευτέρας πλευρᾶς ΜΝ, τὸ ἀναφορικὸν σημεῖον εὑρίσκεται καὶ πάλιν ὄπισθεν τῆς διασταυρώσεως τῶν νημάτων τῆς διόπτρας Δ′Δ′, εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ κύκλος τοῦ ἐργαλείου δὲν μετεκινήθη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 48. Καθ' ὃν καιρὸν καταμετροῦμεν τὴν ἐπὶ τῆς γῆς γωνίαν, διὰ τοῦ κύκλου, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν συγχρόνως, εἴτε τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ κατὰ βούλησιν διευθυνομένη ἐπὶ τοῦ ἀκοντίου σκοπευτικὴ γραμμὴ τῆς διόπτρας μετὰ τῆς ὁριζοντείου, εἴτε τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἑκάστη πλευρὰ ΑΒ τῆς ἐπὶ τῆς γῆς γωνίας, μετὰ τῆς ὁριζοντείου ΑΔ (Σχ. 76) Τοῦτο δὲ γίνεται διὰ τοῦ τόξου μμ (Σχ. 74), τὸ ὁποῖον διατρέχει ὁ κανὼν οτ, ὁ καθέτως τοῦ ἄξονος τῆς διόπτρας καθηλωμένος. Διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν οὐδὲν ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν, ἐπειδὴ ἡ ὡς πρὸς τὴν ὁριζόντειον διεύθυνσις τῆς διόπτρας ἀμέσως δεικνύεται, ὑπὸ τοῦ κανόνος οτ, ἐπὶ τοῦ τόξου μμ· ὅσον δὲ ἀφορᾷ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἐνεργοῦμεν ὡς ἑξῆς.

Σκοπεύομεν ἐπὶ τοῦ ἀκοντίου, ἢ ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου, σημεῖόν τι Γ, τοιοῦτον ὥστε νὰ ἔχωμεν ΒΓ=ΑΟ, τοῦ ὕψους τοῦ ἐργαλείου ΑΟ ἢ ΜΟ′ (Σχ. 75), μετρουμένου ἀπ' εὐθείας· ἡ δὲ οὕτως ἐπὶ τοῦ τόξου μμ δεικνυομένη γωνία αοβ ἢ ἡ γοδ, ὑπὸ τοῦ κανόνος βγ (Σχ. 76), θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη κλίσις ΒΑΔ· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὗται αοβ, ΒΑΔ ἔχουσι τὰς πλευράς των αδ, ΑΔ καὶ ΑΒ, βγ ἀμοιβαίως καθέτους.

Θέλομεν ἴδῃ (Ἐφαρμ. 70), ὅτι διὰ τῆς γωνίας αοβ=ΒΑΔ καὶ τοῦ μήκους ΑΒ, τῆς ἐπὶ τῆς γῆς εὐθείας, τίνι τρόπῳ προσδιορίζηται ἡ προβολὴ ΑΔ τῆς εὐθείας ταύτης. Εἴς τινα ἐργαλεῖα τὸ τόξον μμ ἀντικαθίσταται δι' ἑνὸς κύκλου, ὅστις λαμβάνει τὴν κατακόρυφον διεύθυνσιν διὰ τῆς ἐπ' αὐτοῦ εὑρισκομένης ἀεροστάθμης (Σχ. 88).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 49. Ἡ δι' ἐργαλείου καταμέτρησις γωνίας τινὸς ὑπόκειται εἰς δύο λάθη, ἐκ τῶν ὁποίων, τὸ μὲν προέρχεται ὡς ἐκ τῆς κατευθύνσεως τῆς διόπτρας τοῦ ἐργαλείου καὶ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ ἓν δευτερόλεπτον, τὸ δὲ προέρχεται ὡς ἐκ τῆς ἀναγνώσεως τῆς γωνίας, ἣν ποιοῦμεν ἐπὶ τοῦ ἄντυγος τοῦ κύκλου, καὶ τὸ ὁποῖον λάθος εἶναι μεῖον ἑνὸς λεπτοῦ· τοῦτο δὲ δύναται νὰ σμικρυνθῇ κατὰ βούλησιν διὰ τῶν ἑξῆς μεθόδων.



Σχ. 76.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 50. Μέθοδος τῆς ἐπαναλήψεως. α). Ἀφοῦ στήσωμεν τὸ ἐργαλεῖον ἐπὶ τῆς κορυφῆς Μ, τῆς καταμετρηθησομένης γωνίας ΝΜΠ (Σχ. 75), καὶ ἐπαναλάβωμεν ὡς εἰς τὴν (Ἐφαρμ. 47) τὴν διὰ τὴν καταμέτρησιν ταύτην ἀναγκαίαν ἐργασίαν, τότε ἀντὶ νὰ ἀναγνώσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄντυγος τοῦ κύκλου τὴν γωνίαν ΔΟΒ, χαλαρώσωμεν τὸν κοχλίαν Σ (Σχ. 74), ἐν ᾧ ὁ κοχλίας σ εἶναι συνεσφιγμένος, καὶ στρέψωμεν τὸ σύνολον τοῦ ἐργαλείου ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ἵνα ἐπαναφέρωμεν, τὴν μὲν διόπτραν ὡς ἔγγιστα κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΜΠ, τὸ δὲ ἀκόντιον Π ἀκριβῶς ὄπισθεν τῆς δια-

σταυρώσεως τῶν νημάτων τῆς διόπτρας, ἀφ' οὗ συσφίγξωμεν τὸν κοχλίαν Σ, καὶ περιστρέψωμεν τὸν ἀνακλητικὸν κοχλίαν ι. Ἔπειτα χαλαρώσωμεν τὸν κοχλίαν σ, καὶ περιστρέφωμεν τὸ σύστημα τῆς διόπτρας ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἵνα ἐπαναφέρωμεν τὴν διόπτραν κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΜΝ. Τούτου γενομένου, ἡ οὕτω προσδιοριζομένη γωνία ἐπὶ τοῦ ἄντυγος τοῦ κύκλου, ὑπὸ τοῦ κανόνος ααί, εἶναι διπλασία τῆς γωνίας ΔΟΒ, ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις μηδὲν τοῦ κύκλου ἐκ τῶν προτέρων εἶχε διαγράψει, ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ, γωνίαν ἴσην τῇ ΔΟΒ. Διὰ σειρᾶς τοιούτων κινήσεων ἐπαναφέρομεν διαδοχικῶς τὴν διόπτραν ὁμοῦ μὲ τὸν κύκλον κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΜΠ, καὶ ἀκολούθως μόνην τὴν διόπτραν κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΜΝ· ὁμοίως ἐπαναφέρομεν τὴν διόπτραν μετὰ τοῦ κύκλου κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΜΠ, ἀκολούθως δὲ μόνην τὴν διόπτραν κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΜΝ. Οὕτω λοιπὸν ἐξακολουθοῦμεν ἕως οὗ ὁ κανὼν ααί ὑποδείξῃ, ἐπὶ τοῦ κύκλου, πολλαπλάσιόν τι τῆς γωνίας ΔΟΒ. Προσδιορίζομεν δὲ τὸ μέτρον τοῦ πολλαπλασίου τούτου ἀφοῦ ἀριθμήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν περιστροφῶν, καθ' ἃς περιεστράφη τὸ ἐργαλεῖον καθ' ὁλόκληρον περιφέρειαν, ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ, καὶ ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ 360^0, καὶ εἰς τὸ οὕτω λαμβανόμενον γινόμενον προσθέσωμεν τὴν ἐπὶ τοῦ ἄντυγος τοῦ κύκλου δεικνυομένην γωνίαν ὑπὸ τοῦ κανόνος ααί. Οὕτω π. χ. ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἠριθμήσαμεν τρεῖς ἀκεραίας περιστροφὰς τοῦ ἐργαλείου καθ' ἃς καιρὸν ζητοῦμεν τὸ ἑξηκονταπλάσιον τῆς ζητουμένης γωνίας, καὶ ὅτε ἡ ἐπὶ τοῦ κύκλου δεικνυομένη ὑπὸ τοῦ κανόνος ααί γωνία εἶναι 314^0 $31'$ θέλομεν προσθέσει, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, εἰς τὴν γωνίαν ταύτην $3 \times 360^0 = 1080^0$, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως διὰ 60 τοῦ ἀθροίσματος 1394^0 $31'$, θέλει ἐκφράσει μεῖον $1''$, τὸ μέτρον τῆς ζητουμένης γωνίας.

δ') Ἐὰν ὁ κύκλος φέρῃ δύο διόπτρας παραλλήλως τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου κινουμένας, καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τῆς μὲν ἄνω διόπτρας ὁ ὀπτικὸς ἄξων ἁπανταᾷ τὸν κατακόρυφον ἄξονα, τὸν διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου διερχόμενον, τῆς δὲ κάτω διόπτρας ὁ ἄξων διέρχεται ὀλίγον πλαγίως τοῦ ἄξονος τούτου, καὶ ἂν ἡ διάταξις τοῦ ἐργαλείου εἶναι τοιαύτη ὥστε, εἴτε ἑκάστη τῶν διοπτρῶν, εἴτε τὸ σύνολον τοῦ συστήματος τοῦ ἐργαλείου νὰ δύνηται νὰ περιστραφῇ περὶ τὸν κατακόρυφον ἄξονα τοῦ ἐργαλείου, τότε ἐκτελοῦμεν τὴν ἐπανάληψιν τῆς γωνίας ὡς ἑξῆς·

Διευθύνομεν τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου μετὰ τῆς ἄνω διόπτρας ΔΔ πρὸς τὸ ἀκόντιον Π (Σχ. 75), τὴν δὲ κάτω διόπτραν Δ'Δ' πρὸς τὸ ἀκόντιον Ν. Τούτου γενομένου, περιστρέφομεν τὸ ὅλον σύστημα τοῦ ἐργαλείου ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ, ἕως οὗ ἡ κάτω διόπτρα ἐπανέλθῃ εἰς τὸ ἀκόντιον Π, καὶ διευθύνομεν τὴν ἄνω διόπτραν κατὰ τὸ ἀκόντιον Ν. Ὁμοίως περιστρέφομεν τὸ ὅλον σύστημα τοῦ ἐργαλείου ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ, ἕως οὗ ἡ κάτω διόπτρα ἐπανέλθῃ εἰς τὸ ἀκόντιον Π, καὶ διευθύνομεν τὴν ἄνω διόπτραν κατὰ τὸ ἀκόντιον Ν. Ὁμοίως, περιστρέφομεν τὸ ὅλον σύστημα τοῦ ἐργαλείου ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ, ἕως οὗ ἡ ἄνω διόπτρα ἐπανέλθῃ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΜΝ, διευθύνομεν δὲ ἔπειτα τὴν κάτω διόπτραν πρὸς τὸ ἀκόντιον Π, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐκ τῆς πολλαπλῆς ἐργασίας ταύτης εἶναι βέβαιον ὅτι, ἡ πρὸς καταμέτρησιν γωνία ΠΜΝ ἐπαναλαμβάνεται μὲν ὡς προηγουμένως, ἀλλὰ, πρὸς ἀνάγνωσιν τοῦ οὕτω λαμβανομένου πολλαπλασίου, εἶναι ἀνάγκη ἡ ἄνω διόπτρα νὰ ἐπανέλθῃ πρὸς τὸ ἀκόντιον Ν, ἐπειδὴ αὕτη συμπαρατύρει τὸν κανόνα ααί, ὅστις φέρει τοὺς βερνιέρους· ὅθεν τὸ διὰ τῆς τοιαύτης μεθόδου λαμβανόμενον πολλαπλάσιον εἶναι ἄρτιος ἀριθμός. Ἡ δὲ μέθοδος αὕτη καλεῖται, ἡ τῆς διττῆς ἐπαναλήψεως.

γ'). Ὁμοίως ἐπαναλαμβάνομεν ἐπανειλημμένως τὴν καταμέτρησιν τῆς γωνίας ΔΟΒ, ἐκλέγοντες κατὰ βούλησιν, ἐπὶ τοῦ ἄντυγος τοῦ κύκλου ὡς ἀφετηρίαν, διάφορα σημεῖα, ὁ δὲ μέσος ὅρος τῶν οὕτω λαμβανομένων ἐξαγομένων, θέλει προσδιορίσει τὸ μέτρον τῆς ζητουμένης γωνίας ΔΟΒ.

Ἡ μέθοδος τῆς ἐπαναλήψεως τῶν γωνιῶν ἀποδίδεται εἰς τὸν *Borda*· ἐκοινοποιήθη δὲ τὸ πρῶτον κατὰ τὸ 1777 ὑπὸ τοῦ ἀστρονόμου *Tobie Mayer*.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 81. Ἐν τούτοις καὶ ἡ μέθοδος τῆς ἐπαναλήψεως ὑπόκειται εἰς σφάλματα, ἅτινα προέρχονται ἐκ τῆς ἀτελείας τῶν συμπιεστικῶν καὶ ἀνακλητικῶν κοχλιῶν καὶ ἐκ τῶν ἀλλοιώσεων, ἃς ὑφίσταται ὁ ἄξων ἕνεκα τῆς περὶ αὐτὸν παρατεταμένης κινήσεως τοῦ κύκλου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 82. Δοκιμὴ τοῦ κύκλου. Ἵνα βεβαιωθῶμεν περὶ τῆς ἀκριβείας τοῦ κύκλου, ἐν πρώτοις δοκιμάζομεν ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὁριζοντείου κύκλου ἦναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ ὅλου συστήματος τοῦ ἐργαλείου· πρὸς τοῦτο, ἀποκαθιστῶμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ὁριζόντειον, ἔπειτα

στρέφομεν αὐτὸν περὶ τὸν ἄξονά του, καὶ παρατηροῦμεν ἐὰν κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην διατηρῇ ὁριζόντειον θέσιν· ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ μεταχειριζόμεθα τὴν ἀεροστάθμην ὡς εἰ ἐθέτομεν τὸ ἐργαλεῖον εἰς σταθμόν. Ἔπειτα δοκιμάζομεν ἐὰν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὑρίσκηται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς. Πρὸς τοῦτο, ἀναγινώσκομεν τὰς δεικνυομένας γωνίας ὑπὸ τῶν δύο ἄκρων τοῦ κανόνος αά, καὶ παρατηροῦμεν ἐὰν αὗται διαφέρωσι κατὰ 180^0. Βεβαιούμεθα δὲ περὶ τῆς ἀκριβείας τῶν διαιρέσεων τοῦ κύκλου, ἐὰν, καταμετροῦντες μίαν καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ἐπανειλημμένως διὰ τῆς μεθόδου γ'), ὡς μέσον ὅρον τῶν καταμετρήσεων εὑρίσκωμεν πάντοτε τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Τέλος ἵνα δοκιμάσωμεν, ἐὰν ὁ ὀπτικὸς ἄξων τῆς διόπτρας ΔΔ διαγράφῃ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου, ἀποκαθιστῶμεν τὸν κύκλον ὁριζόντειον, σκοπεύομεν διὰ τῆς διόπτρας τὸ κατώτατον σημεῖον καταχορύφου τινὸς εὐθείας, ὡς π.χ. τῆς κόψεως οἰκοδομῆς, καὶ συνδέομεν, διὰ τοῦ συμπιεστικοῦ κοχλίου τοῦ κανόνος αά, τὸν κανόνα μετὰ τοῦ κύκλου. Τούτου γενομένου, ἐὰν, ἐν ᾧ περιστρέφωμεν τὴν διόπτραν περὶ τὸν ὁριζόντειον αὐτῆς ἄξονα Ο, ἡ διασταύρωσις τῶν νημάτων διατρέχει τὸ μῆκος τῆς κατακορύφου εὐθείας, τότε εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ ἄξων τῆς διόπτρας περιγράφει κατακόρυφον ἐπίπεδον (Σχ. 74).

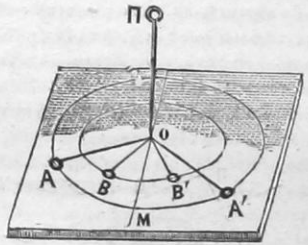
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 53. Ὁρισμὸς ά). Αἰσθητὸς ὁρίζων τόπου τινὸς καλεῖται, ὁ μέγας κύκλος, τὸν ὁποῖον διακρίνομεν πέριξ ἡμῶν, ὅταν ἐπὶ τόπου τινὸς ἱστάμενοι ἔχωμεν ἀνεμπόδιστον τὴν περὶ ἡμᾶς θέαν.

β'). Ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος παντὸς τόπου διακρίνονται τέσσαρα πρώτιστα μέρη, τὸ Ἀνατολικὸν, τὸ Δυτικὸν, τὸ Μεσημβρινὸν καὶ τὸ Ἀρκτικόν. Ἀνατολικὸν μὲν λέγεται τὸ μέρος ἐκεῖνο τοῦ ὁρίζοντος ἀπὸ τοῦ ὁποίου ὁ Ἥλιος φαίνεται ἀνερχόμενος ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ἢ ἀνατέλλων. Δυτικὸν δὲ τὸ μέρος ἀπὸ τοῦ ὁποίου ὁ Ἥλιος φαίνεται κατερχόμενος ὑπὸ τὸν ὁρίζοντα ἢ δύων. Μεσημβρινὸν δὲ ἢ Νότιον λέγεται τὸ μέρος πρὸς ὃ κατὰ τὴν Μεσημβρίαν φαίνεται ἱστάμενος ὁ Ἥλιος, καὶ Ἀρκτικὸν ἢ Βόρειον τὸ ἀντίθετον πρὸς τὸ μεσημβρινὸν μέρος

γ'). Μεσημβρινὸς τόπου τινὸς καλεῖται, ἡ νοητὴ γραμμὴ, ἡ διὰ τοῦ βορείου καὶ νοτίου μέρους τοῦ ὁρίζοντος καὶ τοῦ κατακορύφου καὶ ἀντικορύφου σημείου τοῦ τόπου διερχομένη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 54. Χάραξις Μεσημβρινῆς γραμμῆς. Πρὸς χάραξιν γραμμῆς ἀντιστοιχούσης τῷ μεσημβρινῷ τόπου τινὸς, ἐπὶ ὁριζοντείου ἐπιπέδου (Σχ. 77), χαράσσομεν ἕνα ἢ πλείονας ὁμοκέν-

τρους κύκλους, εἰς τὸ κέντρον τῶν ὁποίων θέτομεν κατακορύφως βελόνην τινὰ, καὶ παρατηροῦμεν, πρὸ μεσημβρίας, τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ἀκριβῶς ἡ ἄκρα τῆς σκιᾶς ΟΑ, τῆς βελόνης Π, ἁπαντᾷ μίαν τῶν περιφερειῶν· ὁμοίως παρατηροῦμεν, μετὰ μεσημβρίαν, τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ἀκριβῶς ἡ ἄκρα τῆς σκιᾶς ΟΑ' ἁπαντᾷ ἐκ δευτέρου τὴν αὐτὴν περιφέρειαν· τὸ ὑπὸ τῶν δύο σκιῶν ΟΑ καὶ ΟΑ' περιλαμβανόμενον τόξον ΑΑ' διχοτομοῦμεν εἰς τὸ σημεῖον Μ, ὅπερ ἑνοῦμεν μετὰ τοῦ κέντρου Ο· ἡ δὲ εὐθεῖα γραμμὴ ΟΜ, ἡ ἑνοῦσα τὰ δύο ταῦτα σημεῖα, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν μεσημβρινὸν τοῦ τόπου, καὶ ὀνομάζεται διὰ τοῦτο μεσημβρινὴ γραμμή. Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν μεσημβρινὴν γραμμὴν μετὰ μεγαλειτέρας ἀκριβείας, σημειοῦμεν τὰ σημεῖα Β καὶ Β', τοῦ δευτέρου κύκλου, ὡς καὶ τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ' τοῦ τρίτου κύκλου, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, εἰς ἃ φθάνει ἡ σκιὰ τῆς βελόνης πρὸ μεσημβρίας καὶ μετὰ μεσημβρίαν· ἔπειτα διχοτομοῦμεν τὰ τόξα ΒΒ', ΓΓ' κτλ. καὶ ἑνοῦμεν τὰ μέσα αὐτῶν Μ', Μ'' κτλ.· ἡ γραμμὴ, ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα ταῦτα, εἶναι ἡ μεσημβρινὴ γραμμὴ τοῦ τόπου. Ἐὰν δὲ ἡ γραμμὴ αὕτη ᾖναι εὐθεῖα, τότε, ἡ διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς μεσημβρινῆς γραμμῆς γενομένη πρᾶξις, εἶναι ὀρθή.



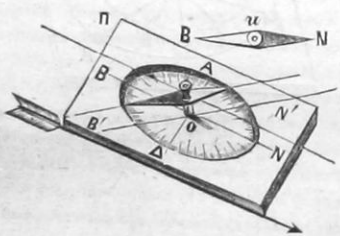
Σχ. 77.

Διὰ νὰ μεταφέρωμεν δὲ ἐπὶ τῆς γῆς τὴν οὕτω χαραχθεῖσαν μεσημβρινὴν γραμμὴν, προσαρμόζομεν κατὰ τὴν γραμμὴν ταύτην ΟΜ τὴν κόψιν κανόνος, διευθύνομεν κατὰ τὴν κόψιν ταύτην ὀπτικὴν εὐθεῖαν, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ὁποίας ἐμπηγνύομεν εἰς τὸ ἔδαφος ἀκόντια, καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ἀκοντίων τούτων προσδιοριζομένη ἐπὶ τῆς γῆς εὐθεῖα θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 55. Μαγνητικὴ βελόνη. Αὕτη εἶναι μαγνητισμένον ταμάχιον ΒΝ βεβαμμένου χάλυβος, ἔχον σχῆμα ἐπιμήκους ῥομβοειδοῦς. Ἐν τῷ μέσῳ τῆς βελόνης ὑπάρχει κωνικὸν ἐξ ἀχάτου λίθου κοίλωμα κ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ στηρίζεται ἐπὶ τῆς κορυφῆς

καθέτου ὀβελίσκου Ο (Σχ. 78), καὶ τότε ἡ βελόνη δύναται ἐλευθέρως νὰ περιστρέφηται περὶ αὐτήν. Ἡ βελόνη διαιρεῖται εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν εἶναι λευκὸν, τὸ δὲ βεβαμμένον· καὶ ἡ μὲν ἄκρα Β τοῦ λευκοῦ αὐτῆς μέρους καλεῖται Βόρειος πόλος τῆς βελόνης, τὸ δὲ ἄκρον Ν, τοῦ βεβαμμένου μέρους, νότιος πόλος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 86. Μαγνητικὸς Μεσημβρινὸς, ἀπόκλισις τῆς μαγνητικῆς βελόνης. Ἐὰν ἐπὶ ὁριζοντείου ἐπιπέδου χαράξωμεν, κατὰ τὴν (Ἐφαρμ. 54), τὴν μεσημβρινὴν γραμμὴν ΒΝ τοῦ τόπου, ἐν ᾧ εὑρισκόμεθα (Σχ. 78), καὶ ἐπ' αὐτῆς φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΔ, ἀντιστοιχοῦσαν μὲ τὴν γραμμὴν τῆς ἀνατολῆς καὶ τῆς δύσεως τοῦ ἡλίου, εἰς δὲ τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν τούτων, ὡς ἀπὸ κέντρου, ἂν γράψωμεν κύκλον διαιρούμενον εἰς μοίρας καὶ ἡμισείας μοίρας, καὶ εἰς τὸ κέντρον στήσωμεν κατακορύφως τὸν ὀβελίσκον τῆς μαγνητικῆς βελόνης, θέλομεν ἰδεῖ ὅτι, ὁ μὲν νότιος πόλος Ν τῆς βελόνης θέλει διευθυνθεῖ ὡς ἔγγιστα πρὸς βορρᾶν, ὁ δὲ βόρειος πόλος Β, πρὸς νότον. Ἡ διεύθυνσις Β′Ν′ τῆς βελόνης, ἥτις καὶ μαγνητικὸς μεσημβρινὸς καλεῖται, θέλει σχηματίσει μετὰ τῆς μεσημβρινῆς γραμμῆς ΒΝ τὴν γωνίαν ΒΟΒ′ ὀξεῖαν, ἢ τὴν ΒΔΝ′ ἀμβλεῖαν, ἥτις λέγεται ἀπόκλισις τῆς μαγνητικῆς βελόνης.



Σχ. 78.

Ἡ ἀπόκλισις εἶναι δυτικὴ, ὅταν ὁ πόλος Ν τῆς βελόνης ᾖναι πρὸς δυσμὰς τῆς μεσημβρινῆς γραμμῆς, ἀνατολικὴ δὲ, ὅταν ᾖναι πρὸς ἀνατολάς. Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὴν αὐτὴν πρᾶξιν εἰς διαφόρους τόπους, θέλομεν ἰδεῖ ὅτι, ἡ ἀπόκλισις τῆς μαγνητικῆς βελόνης εἰς τοὺς τόπους τούτους δὲν εἶναι σταθερὰ, ἀλλὰ μεταβλητή· δύναται δὲ νὰ θεωρηθῇ ἡ ἀπόκλισις ὡς σταθερὰ δι' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν τόπον. Ἐκ τῶν παρατηρήσεων τούτων ἕπεται ὅτι, γνωρίζοντες τὴν μαγνητικὴν ἀπόκλισιν τόπου τινὸς, προσδιορίζομεν τὴν διεύθυνσιν τῆς μεσημβρινῆς γραμμῆς αὐτοῦ. Ἕνεκα τούτου εἰς τὸν ἄντυγα τῶν γωνιομέτρων

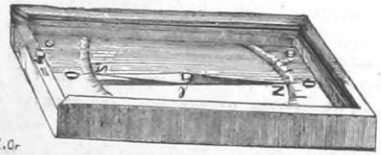
ὑπάρχει μαγνητικὴ βελόνη, τῆς ὁποίας ἡ γραμμὴ ΒΝ, παριστανομένη διὰ ΝS, εἶναι παράλληλος τῇ ἀφετηρίᾳ γραμμῇ 0°—180° τοῦ γωνιομέτρου. Τούτου τελέντος, ἐὰν διευθύνωμεν τὴν διάμετρον, ἥτοι τὴν ἀφετηρίαν γραμμὴν τοῦ γωνιομέτρου, κατὰ μίαν πλευρὰν τοπογραφικοῦ τινος πολυγώνου (Ἐφαρμ. 46, 47, 48 κτλ. Μέρος Α′), καὶ ἀναγνώσωμεν τὴν ὑπὸ τῆς διευθύνσεως τῆς βελόνης καὶ τῆς γραμμῆς NS σχηματιζομένην τότε γωνίαν, θέλομεν ἔχει ἐπὶ τοῦ χάρτου τὴν διεύθυνσιν τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ, ἐὰν κατασκευάσωμεν τὴν γωνίαν ταύτην ἐπὶ τῆς ἐπὶ τοῦ χάρτου ὁμολόγου πλευρᾶς τοῦ τοπογραφικοῦ πολυγώνου. Ἵνα προσδιορίσωμεν δὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ τόπου, οὗτινος τὸ σχέδιον ἔχομεν ὑπ' ὄψιν, ἀρκεῖ ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τοῦ ἤδη προσδιορισθέντος μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ, νὰ κατασκευάσωμεν γωνίαν ἴσην τῇ μαγνητικῇ ἀποκλίσει τοῦ τόπου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 87. Χάραξις τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Ὅπως χαράξωμεν, ἐπί τινος ὁριζοντείου ἐπιπέδου, τὴν διεύθυνσιν τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ, θέτομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου τὸ ἐπίπεδον Π (Σχ. 78), ὅπερ φέρει τὴν μαγνητικὴν βελόνην. Περιστρέφομεν τὸ ἐπίπεδον Π, ἕως οὗ ἡ διεύθυνσις τῆς βελόνης ταυτισθῇ μετὰ τῆς γραμμῆς ΒΝ, ἥτις εἶναι παράλληλος τῶν δύο πλευρῶν τοῦ ἐπιπέδου Π. Τούτου γενομένου, γράφοντες γραμμὴν, ἥτις ἐν τῇ τοπογραφίᾳ παρίσταται δι' ἑνὸς βέλους, κατὰ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐπιπέδου Π, τὴν παράλληλον τῇ εὐθείᾳ ΒΝ, θέλομεν ἔχει τὸ ζητούμενον. Συνήθως ἡ πρᾶξις αὕτη ἐκτελεῖται διὰ τῆς ἀποκλιτικῆς πυξίδος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 88. Ἀποκλιτικὴ πυξίς. Εἰς τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο ἡ βελόνη εὑρισκομένη ἐντὸς ξυλίνου κιβωτίου σχήματος ὀρθογωνίου, κινεῖται ἐλευθέρως ἐπὶ τῆς κορυφῆς μικροῦ ὀβελίσκου, ὥστις ἐμπηγνύεται καθέτως ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ κιβωτίου· ὁ βόρειος πόλος τῆς βελόνης μετατοπίζεται ἐπὶ διηρημένου τόξου, ἱσταται δὲ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 0°, ὅταν ἡ διεύθυνσις τῆς βελόνης ᾖναι παράλληλος ταῖς μεγάλαις πλευραῖς τοῦ κιβωτίου.

Τὸ κιβώτιον πρὸς τὰ ἄνω φέρει διαφανῆ ὕελον, κλείεται δὲ δι' ἑνὸς ξυλίνου πώματος, τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται δι' ὅλου εἰς τὸ περιχείλωμα τοῦ κιβωτίου. Ἐφ' ὅσον τὸ κιβώτιον εἶναι κεκλεισμένον, τὸ ξύλινον πῶμα ἐπακουμβᾷ ἐπὶ τοῦ κομβίου κ, τὸ ὁποῖον πιεζόμενον ἀνυψοῖ τὸ χάλκινον γλωσσίδιον γ. Τοῦτο δὲ ἀνυψοῖ τὴν βελόνην καὶ ἀπαλλάσσει αὐτὴν νὰ περιστρέφηται περὶ τὴν κορυφὴν τοῦ ὀβελίσκου

ἐφ'ὅσον τὸ ἐργαλεῖον δὲν εὑρίσκηται εἰς ἐνέργειαν. Ἅμα τοῦ κιβωτίου ἀποκαλυφθέντος, τὸ κομβίον κ ἀναφαίνεται ἀφ'ἑαυτοῦ, τὸ γλωσσίδιον γ καταπίπτει, τὸ κοίλωμα τῆς βελόνης ἐπανέρχεται εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ ὀβελίσκου, καὶ ἡ βελόνη ἐπαναλαμβάνει τὴν κίνησιν αὐτῆς (Σχ. 79).



Σχ. 79.

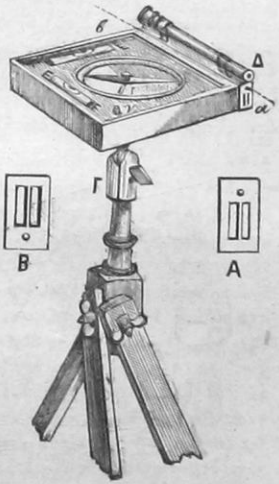
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 59. Ἐὰν παραδεχθῶμεν ὅτι ἡ διεύθυνσις τῆς μαγνητικῆς βελόνης ἦναι ἐπαισθητῶς σταθερὰ διὰ μεγάλην τινὰ ἔκτασιν χώρας τινός, τότε δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν αὐτὴν πρὸς προσδιορισμὸν τῆς διευθύνσεως τῶν ἐπὶ τῆς γῆς κεχαραγμένων γραμμῶν. Πρὸς τοῦτο δὲ καλοῦμεν μαγνητικὸν ἀζιμοῦθ, ὁριζοντείου εὐθείας, τὴν ὑπὸ τῆς διευθύνσεως τῆς μαγνητικῆς βελόνης καὶ τῆς εὐθείας ταύτης σχηματιζομένην γωνίαν. Οὕτω τὸ τόξον νμ μετρεῖ τὸ μαγνητικὸν ἀζιμοῦθ τῆς ὑπὸ τῆς διευθύνσεως τῆς μαγνητικῆς βελόνης μπ καὶ τῆς εὐθείας ΒΟ σχηματιζομένης γωνίας (Σχ. 80). Ἵνα ἀποφύγωμεν δὲ πᾶσαν σύγχυσιν, συνεφωνήθη ὅπως λογίζωνται τὰ ἀζιμοῦθ ἀπὸ 0° ἕως 360°, ἀπὸ τοῦ μαγνητικοῦ βορρᾶ ἀρχόμενοι καὶ στρεφόμενοι ἵνα ἐπανέλθωμεν εἰς αὐτὸν πρὸς δυσμάς, πρὸς νότον καὶ πρὸς ἀνατολάς, τουτέστιν ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ βέλους δεικνυομένην φοράν. Οὕτω τὸ τόξον νμ μετρεῖ τὸ μαγνητικὸν ἀζιμοῦθ τῆς εὐθείας ΓΟ.



Σχ. 80.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 60. Χωρομετρικὴ πυξίς. Διὰ τὴν καταμέτρησιν τοῦ μαγνητικοῦ ἀζιμοῦθ τῶν ἐπὶ τῆς γῆς κεχαραγμένων εὐθειῶν, μεταχειριζόμεθα τὴν χωρομετρικὴν πυξίδα. Τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο συνίσταται ἐκ μιᾶς μαγνητικῆς βελόνης, περιστρεφομένης ἐπὶ τῆς κορυφῆς ὀβελίσκου καὶ εἰς τὸ κέντρον διηρημένου κύκλου εἰς 360°, ὅστις εὑρίσκεται εἰς τὸ βάθος τοῦ πυθμένος τετραγώνου κιβωτίου. Αἱ διαιρέσεις τοῦ ἄντυγος ἀριθμοῦνται ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Ἡ ἀφετηρία γραμμὴ 0°—180°, ἡ κατὰ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου κεχαραγμένη, εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ κιβωτίου. Κατὰ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς διαιρέσεως 90°, προσαρμόζεται ξυλίνη ῥάβδος αβ, ἥτις περιστρέφεται πέριξ ἑνὸς ἄξονος διευθυνομένου κατὰ τὴν προεκβολὴν τῆς διαμέτρου 270°—90°.

Ἡ ῥάβδος αβ ἐπέχει τόπον διόπτρου, χρησιμεύει δὲ νὰ ἄγωμεν ὀπτικὰς ἀκτῖνας παραλλήλως τῆς διαμέτρου 0°—180°. Πρὸς τοῦτο ἡ ῥάβδος αὕτη διαπερᾶται, καθ'ὅλον της τὸ μῆκος ὑπὸ ὀρθογωνίου ὀπῆς, καὶ καλύπτεται κατὰ τὰ ἄκρα της ὑπὸ μεταλλίνου πλακιδίου Α καὶ Β. Εἰς ἕκαστον πλακίδιον ἐκτέμνονται δύο ἐπιμήκεις ὀρθογώνιοι ὀπαὶ οὕτως, ὥστε μεταξὺ αὐτῶν να παρεμπίπτῃ στενοτάτη καὶ ἐπιμήκης λωρὶς, ἵνα ἐπέχῃ τόπον τῆς κατακορύφου τριχὸς τῆς θυρίδος διόπτρου. Ὁμοίως ἐκτέμνεται λεπτοτάτη κυκλικὴ ὀπὴ ἵνα χρησιμεύσῃ ὡς παρωπὶς διόπτρου. Τὰ πλακίδια ταῦτα διατίθενται κατὰ τὰ ἄκρα τῆς ῥάβδου, ὡς τὰ πτερύγια τοῦ διόπτρου, τουτέστι κατ'ἀντίστροφον τάξιν (Ἐφαρμ. 14. Μέρ. Α'). Ὅθεν ἔπεται ὅτι, θέτοντες τὸν ὀφθαλμὸν εἰς τὴν παρωπίδα τοῦ πλακιδίου α ἢ τοῦ πλακιδίου β, δυνάμεθα νὰ σκοπεύωμεν παραλλήλως τῇ διαμέτρῳ 0°—180°, καὶ κατὰ τὰς δύο διευθύνσεις. Ἐν τῇ πράξει σκοπεύομεν πάντοτε κατὰ τὴν διεύθυνσιν 180°—0°. Ἐνίοτε τὸ δίοπτρον τῆς πυξίδος ἀντικαθίσταται διὰ μιᾶς περιστρεφομένης διόπτρας, τῆς ὁποίας ὁ ὀπτικὸς ἄξων εἶναι παράλληλος τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς 180°—0°.

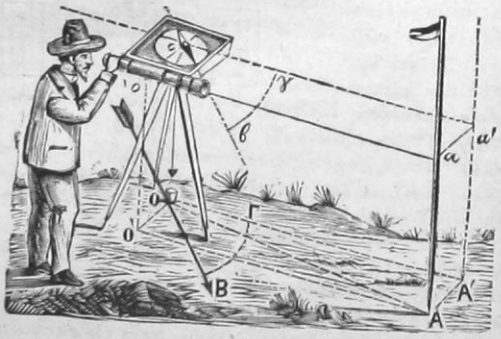


Σχ. 81.

Τὸ κιβώτιον τῆς πυξίδος πρὸς τὰ ἄνω φέρει ὕελον, δι' ἧς προφυλάσσονται τὰ ἐν αὐτῷ, καλύπτεται δὲ δι' ἑνὸς ξυλίνου πώματος εἰσερχομένου εἰς τὸ περιχείλωμα τοῦ κιβωτίου δι' ὅλκοῦ. Διὰ τοῦ γόνατος

Γ, στηρίζεται τὸ κιβώτιον ὁριζοντείως ἐπὶ τρίποδος, καὶ περιστρέφεται περὶ τὸν κατακόρυφον ἄξονα τὸν διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διερχόμενον. Κάτω τῆς βελόνης ὑπάρχει γλωσσίδιον Ι, τὸ ὁποῖον δυνάμενον νὰ καταπέσῃ, ἢ νὰ ἀνυψωθῇ τῇ πιέσει τοῦ κομβίου ν, ἐπαναφέρει τὸ μέσον τῆς βελόνης ἐπὶ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀβελίσκου, ἢ ἀπαλλάσσει αὐτὸ τοῦ νὰ περιστρέφηται, περὶ τὴν κορυφὴν τοῦ ὀβελίσκου, ἐν ὅσῳ τὸ ἐργαλεῖον δὲν εὑρίσκεται εἰς ἐνέργειαν. Ἡ πρὸς βορρᾶν πάντοτε διευθυνομένη κυανόχρους ἄκρα τῆς βελόνης καλεῖται **βόρειος πόλος** τῆς βελόνης. Τὸ δὲ κιβώτιον καὶ ἡ βελόνη τίθενται ὁριζοντείως, διὰ τῶν δύο ἀεροστάθμων Ε καὶ Ε, αἱ ὁποῖαι εἶναι καθηλωμέναι ἐντὸς τοῦ κιβωτίου, κατὰ δύο καθέτους πρὸς ἀλλήλας διευθύνσεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 61. Προσδιορισμὸς τοῦ ἀζιμουθ διευθύνσεώς τινος ΟΑ. Ἀφοῦ τοποθετήσωμεν τοὺς τρεῖς βραχίονας τοῦ τρίποδος περὶ τὸ σημεῖον Ο (Σχ. 82), οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον τῆς πυξίδος νὰ εὑρίσκηται ἐπὶ τῆς κατακορύφου τοῦ σημείου τούτου, τότε,

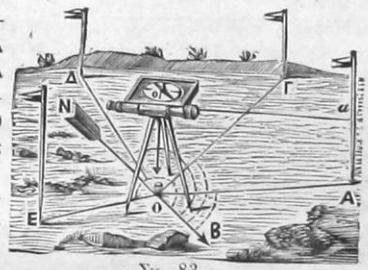


Σχ. 82.

ἀποκαθιστῶμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ὁριζόντειον, εἴτε διὰ τῶν ἀεροστάθμων εἴτε διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ, ὑπὸ τῶν ἄκρων τῆς βελόνης ὁδηγούμενοι. Ἔπειτα στρέφομεν βραδέως τὸ κιβώτιον, περὶ τὸν κατακόρυφον αὐτοῦ ἄξονα, μέχρις οὗ τὸ δίοπτρον ἢ ἡ διόπτρα τοῦ ἐργαλείου λάβῃ τὴν διεύθυνσιν ΟΑ, καὶ σκοπεύομεν δι' αὐτῆς οὕτως, ὥστε νὰ ἴδωμεν τὸ ἀκόντιον Α νὰ ἀπαντᾷ τὴν διασταύρωσιν τῶν νημάτων τῆς διόπτρας. Τούτου γενομένου, τὸ μαγνητικὸν ἀζιμουθ τῆς διευθύνσεως

ΟΑ δεικνύεται ὑπὸ τῆς διαιρέσεως τοῦ κύκλου, ἄνω τῆς ὁποίας ἵσταται ὁ βόρειος πόλος τῆς βελόνης, τουτέστιν ἡ γωνία ἀοβ=Α'ΟΒ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, περιστρέφοντες τὸ κιβώτιον τῆς πυξίδος περὶ τὴν κατακόρυφον τοῦ σημείου Ο, καὶ διευθύνοντες διαδοχικῶς τὴν διόπτραν κατὰ τὰ εἰς τὰ σημεῖα Α, Γ, Δ καὶ Ε ἐμπεπηγμένα ἀκόντια (Σχ. 83), θέλομεν προσδιορίσει τὰ ἀζιμοὺθ ΒΟΑ, ΒΟΓ, ΒΟΔ καὶ ΒΟΔΕ. Τῶν τελευταίων δὲ τούτων ἡ διαφορὰ ΒΟΓ—ΒΟΑ, ΒΟΔ—ΒΟΓ, ΒΟΔΕ—ΒΟΔ καὶ 360°—ΒΔΕ, λαμβανομένων τῶν ἀζιμουθ ἀνὰ δύο, ἐκφράζει τὰς ὑπὸ τῶν διευθύνσεων ΟΑ, ΟΓ, ΟΔ καὶ ΟΕ σχηματιζομένας περὶ τὸ σημεῖον Ο γωνίας ΑΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΕ καὶ 360° —ΒΔΕ. Ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν ἀζιμουθ ἦναι μεγαλειτέρα τῶν 180°, τότε ἀφαιροῦμεν αὐτὴν ἀπὸ 360° ἵνα ἔχωμεν τὸ μέτρον τῆς γωνίας.

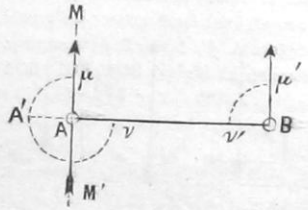


Σχ. 83.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 62. Ἐκκεντρικότης τῆς διόπτρας τῆς πυξίδος. Ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ τῆς σκοπεύσεως τῆς διόπτρας δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, περὶ τὸ ὁποῖον στρέφεται ἡ βελόνη, τουτέστιν, ἐπειδὴ εἶναι ἐκκεντρική, ἔπεται ὅτι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι, ἀντὶ νὰ σκοπεύσωμεν τὸ σημεῖον ά (Σχ. 82), σκοπεύομεν τὸ σημεῖον α, τὸ ὁποῖον ἀπέχει τοῦ ά κατὰ τὴν ποσότητα αά, ἴσην τῇ ἐκκεντρικότητι ο ο', τότε, ἡ γραμμὴ τῆς σκοπεύσεως γίνεται παράλληλος τῇ οα, καὶ τὸ ἀζιμοὺθ τῆς εὐθείας όα εἶναι ὁμοίως τὸ τῆς οά. Ἐὰν ὅμως σκοπεύσωμεν τὸ σημεῖον α, τότε σφάλλομεν, κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς θέσεως τοῦ σημείου τούτου, κατὰ άα ἴσον τῇ ἀκτῖνι τῆς πυξίδος. Ἀλλ' ἡ ἀκτὶς αὕτη δὲν ὑπερβαίνει τὰ 10 ἢ 12 ἑκατοστόμετρα· ἔπεται λοιπὸν ὅτι, ἐὰν ἡ κλίμαξ (Ἐφαρμ. 101), πρὸς σχεδιογράφησιν τῶν σημείων τοῦ ἐδάφους, ἦναι $\frac{1}{1000}$, τότε ἡ διόρθωσις τοῦ σφάλματος θέλει εἶναι $\frac{1}{10}$ τοῦ χιλιοστομέτρου καὶ δύναται νὰ παραμεληθῇ.

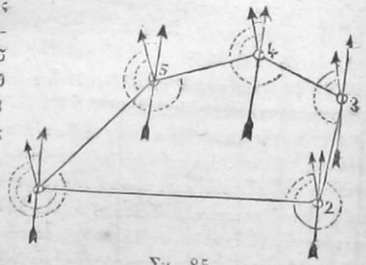
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 63. Καταμέτρησις τοῦ Ἀζιμουθ τῆς διευθύνσεως τῶν πλευρῶν τοπογραφικοῦ τινος πολυγώνου. Ἐν πρώτοις ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 84). Τὸ ἀζιμοὺθ τῆς

διευθύνσεως ΑΒ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ τόξου μΑ′ν. Τὸ δὲ ἀζιμοὺθ τῆς διευθύνσεως ΒΑ, ὑπὸ τοῦ τόξου μ′ν′. Τούτου τεθέντος, ἐὰν ὑποθέσωμεν τὰς διευθύνσεις τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ εἴς τε τὸ σημεῖον Α καὶ εἰς τὸ σημεῖον Β παραλλήλους, ἕπεται ὅτι τὸ τόξον Α′μ εἶναι ἴσον τῷ τόξῳ μ′ν′, καὶ ὅτι τὰ δύο ἀζιμοὺθ διαφέρουσι κατὰ τὸ τόξον Α′ν, ἤτοι κατὰ 180°.



Σχ. 84.

Ἤδη, ἔστω τὸ πολύγωνον 12345 (Σχ. 85). Ἐξ ἑκάστης αὐτοῦ κορυφῆς καταμετροῦμεν τὰ ἀζιμοὺθ τῶν δύο πλευρῶν, αἵτινες ἄρχονται ἐκ τοῦ σημείου τούτου. Οὕτως, ἐκ τοῦ σημείου 1 καταμετροῦμεν τὸ ἀζιμοὺθ τῆς διευθύνσεως 1—2 καὶ τὸ τῆς διευθύνσεως 1—5· ἐκ τοῦ σημείου 2, τὸ ἀζιμοὺθ τῆς διευθύνσεως 2—3 καὶ τὸ τῆς διευθύνσεως 2—1· ἐκ τοῦ σημείου 3, καταμετροῦμεν τὸ ἀζιμοὺθ τῆς 3—4 καὶ τὸ τῆς 3—2 διευθύνσεως, καὶ οὕτω καθεξῆς.



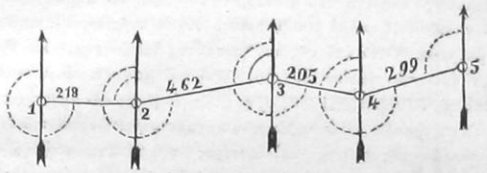
Σχ. 85.

Καὶ τὰ μὲν ἀζιμοὺθ τῶν διευθύνσεων 1—2, 2—3, 3—4, κτλ. καλοῦνται ἐμπρόσθια ἀζιμοὺθ, τὰ δὲ τῶν διευθύνσεων 2—1, 3—2, 4—3, κτλ. καλοῦνται ὀπίσθια ἀζιμούθ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 64. Διόρθωσις τῶν ἀζιμοὺθ ὡς πρὸς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινὸν τοῦ ἀρχικοῦ σταθμοῦ.

Ὅταν μεταβαίνωμεν ἀπὸ μίαν κορυφὴν εἰς ἄλλην τοπογραφικοῦ τινος πολυγώνου, ἐπειδὴ πολλαὶ αἰτίαι ἐπηρεάζουσαι τὴν μαγνητικὴν βελόνην παρεκκλίνουσιν αὐτὴν τοῦ μαγνητικοῦ της μεσημβρινοῦ, ὡς π. χ. τεμάχιον σιδήρου περὶ τὴν κορυφὴν ταύτην εὑρισκόμενον, ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ διεύθυνσις τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ διερχομένου ἐξ ἑκάστης κορυφῆς 2, 3, 4 κτλ. τοῦ πολυγώνου δὲν θέλει

εἶναι ἀμετάβλητος, τουτέστι παράλληλος τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ, τοῦ διερχομένου ἐκ τῆς ἀρχικῆς κορυφῆς 1. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἥτις πάντοτε συμβαίνει ἐν τῇ πράξει, διορθόνομεν τὰ ἀζιμοὺθ τῶν κορυφῶν 2, 3, 4 κτλ, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς 1 καταμετρηθὲν ἀζιμοὺθ, πρὸς δὲ καὶ τὴν ἰδιότητα ὅτι «τὰ ἀπὸ » τῶν δύο ἄκρων εὐθείας τινὸς λαμβανόμενα ἀζιμοὺθ εἶναι παραπλη» ρωματικά» (Ἐφαρμ. 63). Ὡς παράδειγμα δὲ ἀναφέρομεν τὸν ἑξῆς πίνακα τοῦ (Σχ. 86), εἰς ὃν αἱ καταγεγραμμέναι γωνίαι ἐμετρήθησαν



Σχ. 86.

ΠΙΝΑΞ

τῆς κεκλασμένης γραμμῆς 1 2 3 4 5 (Σχ. 86).

Ἀζιμούθ.				Ἀζιμοὺθ διορθωμένα.		Διαφοραὶ τῶν διορθωμένων ἀζιμούθ, ἤτοι γωνίαι τῶν κορυφῶν.		Ἀποστάσεις μεταξὺ τῶν κορυφῶν.
Ὀπίσθια.		Ἐμπρόσθια.		Ὀπίσθια.	Ἐμπρόσθια.	Κορυφαί	Γωνίαι.	
Διευθύνσεις.	Τιμαί.	Διευθύνσεις.	Τιμαί.					
1		2		3		4		5
	° ′		° ′	° ′	° ′	1	. . .	
2—1	102,42	1—2	302,38	102,38	302,38	2	211,85	218,00
3—2	114,26	2—3	314,27	114,23	314,23	3	174,70	462,00
4—3	88,48	3—4	288,96	88,93	288,93	4	231,40	205,00
5—4	120,50	4—5	319,88	120,33	320,33	5	. . .	299,00

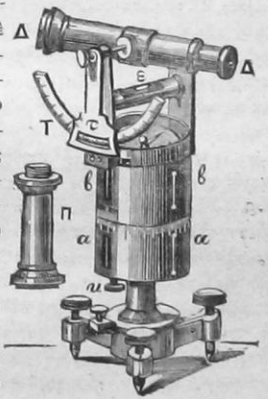
δι' ἐργαλείου (Σχ. 88, καὶ Σχ. 164), τοῦ ὁποίου ὁ κύκλος ἀντὶ νὰ ἦναι διηρημένος εἰς 360 μοίρας, διαιρεῖται εἰς 400 βαθμούς, ἕκαστος δὲ βαθμὸς διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη. Κατὰ τὴν δευτέραν ταύτην δεκαδικὴν διαίρεσιν τοῦ κύκλου, τὸ ἄθροισμα δύο παραπληρωματικῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ 200 βαθμούς, δύο δὲ συμπληρωματικῶν μὲ 100 βαθμούς. Ὅθεν ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ταύτης βασιζόμενοι, καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν γωνίαν 302,38, ὑπὸ τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ καὶ τῆς διευθύνσεως 1—2, σχηματιζομένην εἰς τὸν ἀρχικὸν σταθμὸν 1, ποριζόμεθα εὐκόλως, ἐκ τῶν καταμετρηθεισῶν διὰ τοῦ ἐργαλείου γωνιῶν τῆς πρώτης καὶ δευτέρας τοῦ πίνακος στήλης, τὰς διορθωμένας καὶ ἐν τῇ τρίτῃ τοῦ πίνακος στήλῃ καταγεγραμμένας γωνίας. Ἡ τετάρτη τοῦ πίνακος στήλη περιέχει τὰς γωνίας τῶν κορυφῶν τῆς κεκλασμένης γραμμῆς 12345, ἑκάστη τῶν ὁποίων προσδιορίζεται ἀφαιρουμένων τῶν ἀζιμοὺθ τῆς ἀντιστοίχου κορυφῆς τῶν καταγεγραμμένων ἐν τῇ τρίτῃ τοῦ πίνακος στήλῃ. Ἡ δὲ πέμπτη στήλη τοῦ πίνακος περιέχει τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τῆς κεκλασμένης γραμμῆς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 65. Σχεδίασις διὰ μαγνητικῆς βελόνης. Ἀφοῦ καταρτίσωμεν τὸν πίνακα τῆς προηγουμένης ἐφαρμογῆς, τότε, διὰ τῶν γωνιῶν τῆς τετάρτης στήλης, καὶ τῶν ἀποστάσεων τῆς πέμπτης στήλης, καὶ τῆς κλίμακος, εὐκόλως μεταφέρομεν ἐπὶ χάρτου τὴν κεκλασμένην γραμμὴν 12345. Ὁμοίως, διὰ τῶν ἀριθμῶν τῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ, ἐν τῇ τρίτῃ στήλῃ τοῦ πίνακος τεταγμένων, τοῦ τε ἀναγωγέως καὶ τῆς κλίμακος, εὐκόλως δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τὴν αὐτὴν κεκλασμένην γραμμὴν, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου, ἐκ συνθήκης, εὐθεῖάν τινα ὡς ὁμόλογον τῆς διευθύνσεως τοῦ διὰ τῆς κορυφῆς 1 διερχομένου μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ (Ἐφαρμ. 59 Μέρ Α'). Ἐὰν δὲ περὶ ἑκάστην κορυφὴν τῆς κεκλασμένης γραμμῆς 12345 ὑπάρχωσι καὶ ἄλλα σημεῖα (Σχ. 118 Μέρ. Α'), καὶ τούτων τὰ ἀζιμοὺθ, καὶ τὰς ἐκ τῆς ἀντιστοίχου κορυφῆς ἀποστάσεις, καταμετροῦντες καὶ καταγράφοντες εἰς τὸν ἐν λόγῳ πίνακα, μεταφέρομεν ὁμοίως καὶ τὰ σημεῖα ταῦτα ἐπὶ τοῦ χάρτου διὰ τοῦ ἀναγωγέως.

Ἐπὶ τέλους, ἵνα ἔχωμεν τὰς ἐν τῷ ἀνωτέρῳ πίνακι γωνίας, ὡς πρὸς τὸν ἀστρονομικὸν μεσημβρινὸν, τοῦτο καταρθοῦμεν προσθέτοντες ἢ ἀφαιροῦντες ἐξ ἑκατέρας γωνίας τὴν κλίσιν τῆς μαγνητικῆς βελόνης, καθ' ὅσον αὕτη εἶναι δυτικὴ ἢ ἀνατολική. Εἰς τὸ (Σχ. 85),

ἡ κλίσις εἶναι δυτικὴ, ἡ δὲ διεύθυνσις τοῦ ἀστρονομικοῦ μεσημβρινοῦ παρίσταται διὰ τοῦ μεγάλου βέλους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 66. Παντόμετρον. Τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο χρησιμεύει συγχρόνως ὡς χωρομετρικὸς γνώμων, χωρομετρικὴ πυξὶς, γωνιόμετρον, καὶ ὡς χωροστάθμη. Σύγκειται δὲ ἐκ δύο κυλινδρικῶν τυμπάνων ἐξ ὀρειχάλκου, τῆς αὐτῆς διαμέτρου, καὶ ἐπιτιθεμένων τοῦ μὲν ἐπὶ τοῦ δέ. Τὸ κάτω τύμπανον αα συνδέεται μεθ' ἑνὸς περιστομίου Π (Σχ. 87), δι' οὗ στηρίζεται ἐπὶ ἀκοντίου, ἢ μεθ' ἑνὸς βάθρου φέροντος τρεῖς ἰσοπεδοτικοὺς κοχλίας, δι' οὗ στηρίζεται τὸ ἐργαλεῖον ἐπὶ τῆς πινακίδος τοῦ τρίποδος (Σχ. 51). Τὸ πρὸς τὰ ἄνω εὑρισκόμενον τύμπανον 66, στρέφεται περὶ τὸν κοινὸν ἄξονα ἀμφοτέρων τῶν τυμπάνων, τῇ περιστροφικῇ κινήσει τοῦ κοχλίου κ. Ἡ κίνησις δὲ αὕτη μεταδίδεται δι' ὀδοντοτῶν τροχῶν, εὑρισκομένων ἐντὸς τῶν τυμπάνων. Ἐπὶ ἑκάστου τυμπάνου ἐντέμνονται, κατὰ δύο ἐπίπεδα κάθετα πρὸς ἄλληλα, δύο παρωπίδες καὶ δύο θυρίδες, αἵτινες διατίθενται οὕτως ὥστε, ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι, σχηματίζουσιν ἐπὶ ἑκάστου τυμπάνου δύο δίοπτρα κάθετα πρὸς ἄλληλα. Ἵνα δὲ ἀγάγωμεν, διὰ τοῦ ἐργαλείου τούτου, ἐκ τινος γνωστοῦ σημείου, κάθετον ἐπὶ γνωστῆς εὐθείας, στηρίζομεν τὸ ἐργαλεῖον εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, στρέφομεν τὸ ἄνω τύμπανον 66, ἕως οὗ ἡ διεύθυνσις ἑνὸς τῶν διόπτρων ταὐτισθῇ



Σχ 87.

μετὰ τῆς γνωστῆς εὐθείας, ἔπειτα σκοπεύομεν διὰ τῆς παρωπίδος τοῦ ἄλλου διόπτρου καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν ζητουμένην κάθετον.

Τὸ σταθερὸν τύμπανον αα περατοῦται πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ ἀργυρᾶς στεφάνης, διηρημένης εἰς 360 μοίρας ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι 360. Ἡ ὁριξ τῆς θυρίδος τοῦ ἐν τῷ τυμπάνῳ τούτῳ ἐντεμνομένου διόπτρου, ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς εἰς τὸ 0 τῆς διαιρέσεως τῆς στεφάνης. Τὸ κινητὸν τύμπανον 66, πρὸς τὰ κάτω περατοῦται ἐπίσης ὑπὸ στεφάνης ἀργυρᾶς· ἐπ' αὐτῆς εὑρίσκεται βερνιέρος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀφετηρία διαίρε-

σις 0^0, ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς εἰς τὴν τρίχα τῆς θυρίδος τοῦ ἑνὸς τῶν διόπτρων, τῶν ἐκτεμνομένων εἰς τὸ κινητὸν τοῦτο τύμπανον. Αἱ δύο στεφάναι συμπίπτουσι πάντοτε, καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τῆς στεφάνης τοῦ τυμπάνου ϐϐ, περὶ τὴν σταθερὰν στεφάνην τοῦ τυμπάνου αα. Ἡ σταθερὰ στεφάνη, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, διαιρεῖται εἰς μοίρας, ὁ δὲ βερνιέρος σχηματίζεται ἐξ 29 μοιρῶν, αἵτινες διαιροῦνται εἰς 30 ἴσα μέρη· ὅθεν, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν διαιρέσεων τοῦ βερνιέρου καὶ τῶν τῆς σταθερᾶς στεφάνης, εἶναι 2 λεπτῶν· ἄρα αἱ γωνίαι καταμετροῦνται διὰ τοῦ ἐργαλείου τούτου μεῖον 2 λεπτῶν. Πρὸς καταμέτρησιν γωνίας, στηρίζομεν τὸ κέντρον τοῦ ἐργαλείου εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας καὶ διευθύνομεν τὸ μὲν δίοπτρον, τὸ ἀντίστοιχον εἰς τὴν διαίρεσιν $0^0 - 180^0$ τοῦ σταθεροῦ τυμπάνου αα, κατὰ τὴν μίαν πλευράν, τὸ δὲ δίοπτρον τοῦ βερνιέρου τοῦ κινητοῦ τυμπάνου ϐϐ, κατὰ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας· τούτου γενομένου, προσδιορίζομεν τὸ μέτρον τῆς γωνίας, ἀναγινώσκοντες ἐπὶ τῆς σταθερᾶς στεφάνης τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν, ἃς διέδραμεν ἡ ἀφετηρία γραμμὴ τοῦ βερνιέρου. Πρὸς τὰ ἄνω τοῦ τυμπάνου ϐϐ ὑπάρχει μαγνητικὴ βελόνη, στρεφομένη περὶ τὸ κέντρον διηρημένου κύκλου. Εἰς τὸν κύκλον τοῦτον, τὰ διὰ τῶν καθέτων διαμέτρων ἀγόμενα ἐπίπεδα, διέρχονται διὰ τῶν καθέτων διόπτρων τοῦ τυμπάνου ϐϐ· πρὸς δὲ, αἱ διάμετροι αὗται, ἐπειδὴ ἐκφράζουσιν, ἡ μὲν τὸν μαγνητικὸν μεσημϐρινὸν, ἡ δὲ τὴν ἐπὶ τούτου κάθετον, εἶναι φανερὸν ὅτι, διὰ τῆς τοιαύτης διατάξεως, τὸ ἐργαλεῖον χρησιμεύει καὶ ὡς χωρομετρικὴ πυξίς. Διὰ τῆς ἀεροστάθμης ε τὸ ἐργαλεῖον τίθεται ὁριζοντεύως.

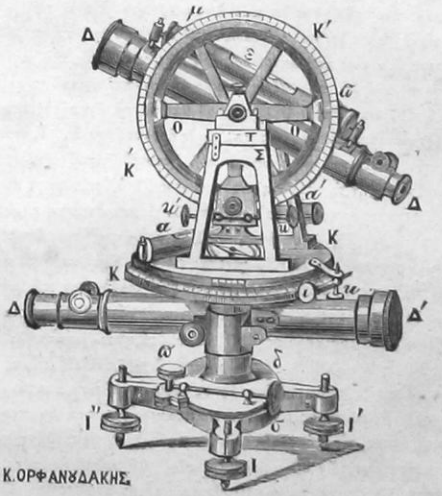
Ὅταν ἡ διόπτρα ΔΔ, δι' ἧς σκοπεύομεν εἰς μεγάλας ἀποστάσεις, φέρῃ πρὸς τὰ ἄνω ἀεροστάθμην, τότε καὶ ὡς διοπτροφόρος χωροστάθμη δύναται νὰ χρησιμεύσῃ τὸ ἐργαλεῖον.

Διὰ τοῦ τόξου Τ καὶ τοῦ κανόνος τ, τοῦ καθηλωμένου καθέτως ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς διόπτρας, καταμετροῦμεν τὰς ὑπὸ τῶν διαδοχικῶν διευθύνσεων τοῦ ἄξονος τῆς διόπτρας καὶ τῆς ὁριζοντείου γραμμῆς σχηματιζομένας γωνίας.

Τὸ δὲ ἁπλοῦν παντόμετρον σύγκειται ἐκ μόνων τῶν τυμπάνων, τῆς μαγνητικῆς βελόνης, καὶ τοῦ περιστομίου Π.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 67. Θεοδόλιχον ἀγγλικὸν διττῆς ἐπαναλήψεως. Τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο ἔχει μεγίστην ἀναλογίαν πρὸς τὸν ἐπαναληπτικὸν κύκλον (Ἐφαρμ. 45), ἐκτός τινων διαφορῶν περὶ

τὴν κατασκευήν. Ὁ ὁριζόντειος κύκλος ΚΚ τοῦ θεωδολίχου (Σχ. 88) σύγκειται ἐκ δύο συγκεντρικῶν κύκλων, τοῦ μὲν ἐξωτερικοῦ, τοῦ δὲ ἐσωτερικοῦ. Ὁ ἐξωτερικὸς κύκλος διαιρεῖται εἰς 360^0, ἢ κατὰ τὴν δεκαδικὴν διαίρεσιν εἰς 400 ϐαθμούς, καὶ συνδέεται ἀναποσπάστως μεθ' ἑνὸς κοίλου κορμοῦ, μετὰ τοῦ ὁποίου στρέφεται περὶ τὸν κατακορύφως ἱστάμενον ἄξονα, διὰ τῶν ἰσοπεδοτικῶν κοχλιῶν Ι, Ι' καὶ Ι'', ὅταν ὁ συμπιεστικὸς κοχλίας π ᾖναι χαλαρωμένος. Ὁ ἐξωτερικὸς οὗτος κύκλος συνδέεται μὲν ἀναποσπάστως μετὰ τοῦ ἄξονος,



Σχ. 88.

συσφιγγομένου τοῦ κοχλίου π· περιστρέφεται δὲ περὶ τὸν ἄξονα μετὰ τῆς διόπτρας ϐραδέως καὶ κανονικῶς, τῇ περιστροφικῇ κινήσει τοῦ ἀνακλητικοῦ κοχλίου σ. Τὰ περιγραφέντα δὲ ταῦτα μέρη ἀποτελουσι τὸ σύστημα τοῦ ἐξωτερικοῦ ὁριζοντείου κύκλου. Ἐπὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ κύκλου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου εἰσὶ κεχαραγμένοι δύο βερνιέροι, ἐκ διαμέτρου ἀντίθετοι, ἀνορθοῦνται δύο ὀρθοστάται Σ καὶ Σ, ἐφ' ὧν ἐπαναπαύεται διὰ προσκεφαλαίων ὁριζόντειος ἄξων. Περὶ τὸν ἄξονα τοῦτον στρέφεται κατακορύφως ὅτε κύκλος Κ'Κ' καὶ ἡ διόπτρα ΔΔ,

μεθ' ὅλου τοῦ συστήματος τούτου, περὶ τὸν κατακόρυφον ἄξονα, ὅταν χαλαρωθῇ ὁ συμπιεστικὸς κοχλίας κ. Τὸ σύνολον τῶν τελευταίως περιγραφέντων μερῶν ἀποτελεῖ τὸ σύστημα τοῦ ἐσωτερικοῦ ὁριζοντείου κύκλου, ἢ τὸ τῆς διόπτρας ΔΔ, τὸ ὁποῖον σύστημα στρέφεται, βραδέως μὲν, ἀλλὰ κανονικῶς, περὶ τὸν κατακόρυφον αὐτοῦ ἄξονα, ὅταν συσφίγγηται ὁ κοχλίας κ, καὶ περιστρέφηται ὁ ἀνακλητικὸς κοχλίας ι. Τὰ ἐν λόγῳ δύο συστήματα συνδεόμενα ἀναποσπάστως διὰ τῆς συσφίξεως τοῦ κοχλίου κ, ἀμφότερα δύνανται νὰ περιστρέφωνται κατὰ βούλησιν περὶ τὸν γενικὸν καὶ κατακόρυφον ἄξονα τοῦ βάθρου τοῦ ἐργαλείου, διὰ τῆς χαλαρώσεως τοῦ κοχλίου π· περιστρέφονται δὲ ἀμφότερα βραδέως καὶ κανονικῶς διὰ τῆς συσφίξεως τοῦ συμπιεστικοῦ κοχλίου π, καὶ διὰ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἀνακλητικοῦ κοχλίου σ.

Ὁ ὁριζόντειος κανὼν ΟΟ, εἰς τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εὑρίσκονται βερνιέροι, συνδέεται διὰ κανόνος μεθ' ἑνὸς ὀρθοστάτου Σ. Κανονίζεται ἡ ὁριζόντειος θέσις τοῦ κανόνος διὰ τοῦ ἐπανορθωτικοῦ κοχλίου κ', καὶ τῆς ἀεροστάθμης ά, ἀφοῦ πρῶτον κανονισθῇ ὁ ὁριζόντειος κύκλος ΚΚ διὰ τῆς ἀεροστάθμης α, καὶ τῶν τριῶν ἰσοπεδοτικῶν κοχλιῶν, καὶ ἀφοῦ κεντροθετηθῇ ἡ διόπτρα. Ἡ δὲ ἀρίθμησις τῶν διαιρέσεων τοῦ κατακορύφου κύκλου Κ'Κ' γίνεται ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, καὶ ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ, κατὰ τὴν διεύθυνσιν πΚ'μΚ', οὕτως ὥστε, ὅταν ἡ διόπτρα ᾖναι ὁριζόντειος, τότε ἡ ἀφετηρία γραμμὴ τῶν βερνιέρων τοῦ κανόνος ΟΟ νὰ ταὐτίζηται μετὰ τῆς διαμέτρου 0^0-180^0 ἢ 0^G-200^G, ἐὰν ὁ κύκλος διαιρῆται εἰς μοίρας ἢ εἰς βαθμούς. Ἐκ τῆς τοιαύτης διατάξεως τοῦ ἐργαλείου ἕπεται ὅτι, στρεφομένης τῆς διόπτρας μετὰ τοῦ κατακορύφου κύκλου περὶ τὸν ὁριζόντειον ἄξονα, ἡ ἐπὶ τοῦ κύκλου τούτου ἀναγινωσκομένη γωνία, ἐὰν ᾖναι μικροτέρα τῶν 90 μοιρῶν ἢ τῶν 100 βαθμῶν, τότε ἡ διὰ τῆς διόπτρας ΔΔ σκοπευομένη διεύθυνσις εἶναι ἀνωφερής· ἐὰν ὅμως ἡ γωνία αὕτη ᾖναι μεγαλειτέρα τῶν 90^0 ἢ τῶν 100^G, ἐὰν ὁ κύκλος ᾖναι διηρημένος εἰς μοίρας ἢ εἰς βαθμούς, τότε, ἡ διεύθυνσις τῆς διόπτρας εἶναι κατωφερής. Αἱ κατακόρυφοι αὗται γωνίαι εἶναι φανερὸν ὅτι λαμβάνονται ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον τοῦ κέντρου τοῦ ἐργαλείου.

Διὰ τῆς ἀεροστάθμης ε, ἡ διόπτρα ΔΔ τίθεται ὁριζοντείως, καὶ τὸ ἐργαλεῖον χρησιμεύει ὡς χωροστάθμη (Ἐφαρμ. 28). Διὰ τῆς περὶ τὸν ὁριζόντειον καὶ κατακόρυφον ἄξονα, κατὰ ἡμιπεριφέρειαν, περιστροφικῆς κινήσεως τῆς διόπτρας, καὶ διὰ τοῦ προσκεφαλαίου Τ τοῦ ἑνὸς τῶν ἄκρων τοῦ ὁριζοντείου ἄξονος, εὐκόλως ἡ διόπτρα δύναται νὰ

κεντροθετηθῇ. Τὸ προσκεφάλαιον Τ ἀνυψοῦται ἢ χαμηλοῦται τῇ περιστροφῇ κοχλίου ἄνωθεν αὐτοῦ εὑρισκομένου. Διὰ τῆς διόπτρας ΔΔ' κατορθοῦται ἡ διὰ διττῆς ἐπαναλήψεως καταμέτρησις τῶν γωνιῶν.

Ἄνω τοῦ ὁριζοντείου κύκλου ΚΚ ὑπάρχει μαγνητικὴ βελόνη. Αὕτη κανονίζεται οὕτως, ὥστε, ὅταν ἡ βελόνη ταὐτίζηται μετὰ τῆς γραμμῆς, τῆς δεικνυούσης τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινὸν, καὶ ἡ ἀφετηρία γραμμὴ τῶν διαιρέσεων τοῦ ἐξωτερικοῦ κύκλου συμπίπτῃ μετὰ τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς τῶν βερνιέρων τοῦ ἐσωτερικοῦ κύκλου, τότε, ὑπὸ τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ καὶ τοῦ ἄξονος τῆς διόπτρας ΔΔ, νὰ σχηματίζηται γωνία ἴση τῇ μαγνητικῇ κλίσει τοῦ τόπου.

Πρὸς καταρτισμὸν τοῦ ὑψομετρικοῦ σχεδίου ἐκτάσεώς τινος (Ἐφαρ. 3 καὶ 91), ὡς π. χ. τῆς μελετωμένης σιδηροδρομικῆς γραμμῆς, ἡ ῥηθεῖσα γωνία λαμβάνεται κατὰ βούλησιν, καὶ κατ' αὐτὴν κανονίζονται τὰ ἐργαλεῖα, τὰ ὁποῖα θέλουν λάβει μέρος ἐν τῇ ἐργασίᾳ ταύτῃ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 68. Διὰ νὰ καταμετρήσωμεν διά τινος κεκανονισμένου θεωδολίχου τὰ ἀζιμοὺθ διαφόρων διευθύνσεων, αἵτινες εὑρίσκονται περὶ τὴν κορυφὴν τοπογραφικοῦ τινος πολυγώνου (Ἐφ. 61), ἐνεργοῦμεν ὡς ἑξῆς. Στήνομεν τὸ κέντρον τοῦ ἐργαλείου ἄνω τῆς κορυφῆς ταύτης, καὶ στρέφομεν ὁριζοντείως τὸν ἐξωτερικὸν ὁριζόντειον κύκλον ΚΚ περὶ τὸν ἄξονα τοῦ βάθρου τοῦ ἐργαλείου οὕτως, ὥστε ἡ μαγνητικὴ βελόνη νὰ ταὐτισθῇ μετὰ τῆς γραμμῆς, τῆς δεικνυούσης τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινὸν, καὶ ὅτε, διὰ τοῦ κοχλίου π συσφίγγομεν τὸν κύκλον πρὸς τὸ βάθρον. Ἔπειτα, κατευθύνομεν τὴν διόπτραν διαδοχικῶς πρὸς ἕκαστον σημεῖον περὶξ τῆς κορυφῆς τοῦ πολυγώνου κείμενον, ἐν ᾧ περιστρέφομεν τὴν διόπτραν ΔΔ περὶ τὸν κατακόρυφον ἄξονα ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ οὕτως, ὥστε μετὰ τὴν ἀποπεράτωσιν τῆς περιστροφικῆς ταύτης κινήσεως νὰ ἐπανέλθῃ ἡ διόπτρα εἰς τὸ πρῶτον ἐκ τῶν σημείων πρὸς ὃ εἶχε κατευθυνθεῖ. Τούτου γενομένου, αἱ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντείου κύκλου ἀναγινωσκόμεναι γωνίαι, καὶ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν διαδοχικῶν διευθύνσεων τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς τῶν βερνιέρων τοῦ ἐσωτερικοῦ κύκλου, κατευθυνομένης τῆς διόπτρας πρὸς ἕκαστον σημεῖον, τότε θέλουσιν ἐκφράσει τὰ ζητούμενα ἀζιμούθ.

Τὸ θεωδόλιχον χρησιμεύει διὰ μεγάλας τοπογραφικὰς καὶ γαιοδαιτικὰς ἐργασίας, δι' ἀστρονομικὰς παρατηρήσεις, διὰ τὴν χάραξιν τῆς διευθύνσεως σιδηροδρόμων, ὁδῶν κτλ. διὰ τὴν χάραξιν καὶ σχεδίασιν

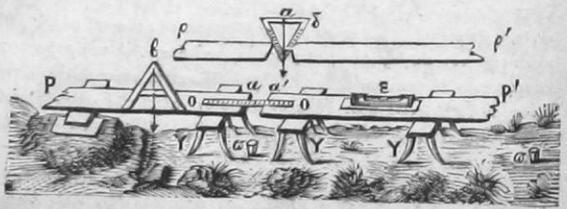
ὑπονομοστοῶν, ὁδῶν ἐντὸς τῶν μεταλλείων, ὅπερ εἶναι τὸ ἀντικείμενον τῆς ὑπογείου Γεωμετρίας (*). Πρὸς δὲ τὸ Θεωδόλιχον τρέπεται εἰς ταχυμέτριον, διὰ τῆς ἀντικαταστήσεως τῆς διόπτρας αὐτοῦ, διὰ τῆς σταδίας, τουτέστι διὰ τῆς ἀναλλοιώτου διόπτρας τοῦ κυρίου *Porro* (ἴδε Ἐφαρμ. 92).

Καταμέτρησις τῆς προβολῆς γραμμῆς τινος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κειμένης.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 69. Ἡ προβολὴ εὐθείας τινὸς, ἤτοι ἡ μεταξὺ δύο σημείων ὁριζόντειος ἀπόστασις, μετρεῖται ἀπ' εὐθείας, ἐὰν μεταφέρωμεν κατὰ τὴν εὐθυγραμμίαν τῶν δύο σημείων, ἀπὸ τοῦ ἑνὸς εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον, καὶ τοσάκις ἐφ' ὅσον εἶναι δυνατὸν, δεδομένου μῆκος ὁριζοντείως κρατούμενον.

Πρὸς καταμέτρησιν, μετὰ μεγίστης ἀκριβείας, ὁριζοντείων ἀποστάσεων, χρῆσιν ποιούμεθα ράβδους ὑελίνους, μεταλλίνους ἢ ξυλίνους. Ἵνα δὲ τῶν ξυλίνων ράβδων τὸ μῆκος ὀλιγώτερον διαστέλληται ἢ συστέλληται ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῶν μεταβολῶν τῆς ἀτμοσφαίρας, ἐμβάπτομεν αὐτὰς ἐντὸς βεβρασμένου ἐλαίου, καὶ ἀποξηρανθείσας χρίομεν διὰ βερενικείου (βερνίκι).

Μεταφέρομεν διαδοχικῶς τὰς ράβδους ταύτας P, P′ (Σχ. 89), κατὰ τὴν εὐθυγραμμίαν τῶν δύο ἄκρων τῆς καταμετρηθησομένης



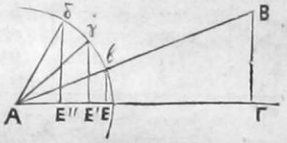
Σχ. 89.

εὐθείας, διευθετοῦντες αὐτὰς ὁριζοντείως, ἐπὶ ὑπερεισμάτων Γ, διὰ τῆς ἀεροστάθμης ε ἢ τοῦ ἀλφαδίου β. Τρεῖς ἢ τέσσαρες τοιαῦται ράβδοι ἐπαρκοῦσι διὰ τὴν καταμέτρησιν ταύτην. Ἀποφεύγομεν δὲ τὴν ὀπισθοδρόμισιν, ἤτις δύναται νὰ προέλθῃ, ὡς ἐκ τῆς ἐπιπροσθέσεως τῶν ἄκρων δύο διαδοχικῶν ράβδων, καταμετροῦντες τὸ μεταξὺ τῶν δύο ράβδων διάλειμμα ἀά διὰ τοῦ βαθμολογουμένου κανόνος ΟΟ,

(*) *Manuel du Géomètre Souterrain par M. E. Sarran.*

ἢ διὰ τῆς σφηνὸς δ. Ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει εἰσάγομεν τὴν σφῆνα μετὰ προσοχῆς εἰς τὸ μεταξὺ τῶν ράβδων ρ, καὶ ρ′, διάλειμμα, καὶ ἀριθμοῦμεν τὰς ἐπ' αὐτῆς βαθμολογημένας διαιρέσεις. Ἐὰν διὰ τῆς τοιαύτης μεθόδου πρόκηται νὰ καταμετρήσωμεν τὴν προβολὴν τῆς βάσεως (Ἐφαρμ. 51 καὶ 54. Μέρος Α′), τότε ὁρθετοῦμεν αὐτὴν, θέτοντες εἰς ἕκαστον ἄκρον τῆς βάσεως, κατάλληλον ὅριον ἐπὶ τοῦ ὁποίου χαράσσομεν δύο γραμμὰς, ὧν τὸ σημεῖον τῆς διασταυρώσεως ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἄκρον τῆς βάσεως. Διὰ μιᾶς δὲ διόπτρας ἐμπηγνύομεν ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς βάσεως ἀκόντια, τὰ ὁποῖα ἀντικαθιστῶμεν ἔπειτα διὰ πασσαλίσκων π (Σχ. 89).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 70. Δι' ὑπολογισμοῦ καταμέτρησις τῆς προβολῆς εὐθείας τινὸς (Σχ. 90). Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, τῆς ὁποίας ζητεῖται τὸ μῆκος τῆς προβολῆς ΑΓ. Ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς εὐθείας ΑΒ, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα Αδ, ἴσην μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους, γράφομεν περιφέρειαν. Ἐκ τοῦ σημείου δ καταβιβάζομεν τὴν κάθετον δΕ ἐπὶ τῆς ὁριζοντείου ΓΑ, καὶ ἔχομεν τὴν προβολὴν ΑΕ τῆς μονάδος τοῦ μήκους. Τούτων γενομένων, τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑδΕ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΒ:Αδ=ΑΓ:ΑΕ ἐξ ἧς ἐξάγεται



Σχ. 90.

$$\text{ἡ σχέσις} \qquad \text{ΑΓ}=\frac{\text{ΑΕ}\times\text{ΑΒ}}{\text{Αδ}} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΑΓ}=\text{ΑΕ}\times\text{ΑΒ},$$

ἐπειδὴ Αδ=1. Ἄρα, «διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν ὁριζόντειον προβολὴν κεκλιμένης εὐθείας, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ταύτης ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς μονάδος τοῦ μήκους». Ἀλλ' ἐκ τοῦ σχήματος γίνεται φανερὸν ὅτι, ἐφ' ὅσον, ἡ πρὸς τὴν ὁριζόντειον ΑΓ κλίσις τῆς μονάδος Αδ=Αγ=Αδ=1 εἶναι μεγαλειτέρα, ἐπὶ τοσοῦτον ἡ προβολὴ αὐτῆς ΑΕ, ΑΕ′ καὶ ΑΕ″, εἶναι μικροτέρα· γίνεται δὲ μηδὲν, ὅταν ἡ Αδ κατασταθῇ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΓ. Λοιπὸν, ἐὰν διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἠδυνάμεθα νὰ καταρτίσωμεν πίνακα, ὅστις νὰ περιέχῃ τὰς διαδοχικὰς ταύτας κλίσεις, ἐκπερασμένας εἰς μοίρας, καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς αὐτὰς μήκη τῆς προβολῆς τῆς μονάδος, τότε δι' ἁπλοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἠθέλομεν προσδιορίζει τὴν προβολὴν κεκλιμένης εὐθείας, ἐὰν ἦναι γνωστὸν τὸ μῆκος αὐτῆς καὶ ἡ ὡς πρὸς τὴν ὁριζόντειον κλίσις τῆς εὐθείας. Τοιοῦτος δὲ πίναξ εἶναι ὁ ἑξῆς.

ΠΙΝΑΞ.

Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ὁριζοντείου προβολῆς τῶν μετρουμένων ἀποστάσεων κατὰ τὴν κλίσιν τοῦ ἐδάφους.

Κλισις εἰς Μοίρας.	Προβολὴ ἑνὸς μέτρου, ἢ συνημ. a.	Κλίσις εἰς Μοίρας.	Προβολὴ ἑνὸς μέτρου, ἢ συνημ. a.	Κλίσις εἰς Μοίρας.	Προβολὴ ἑνὸς μέτρου, ἢ συνημ. a.
1°	0,99985.	11°	0,98163.	21°	0,93358.
2	0,99939.	12	0,97815.	22	0,92718.
3	0,99863.	13	0,97437.	23	0,92050.
4	0,99756.	14	0,97030.	24	0,91355.
5	0,99619.	15	0,96593.	25	0,90631.
6	0,99452.	16	0,96126.	26	0,89879.
7	0,99255.	17	0,95630.	27	0,89101.
8	0,99027.	18	0,95106.	28	0,88295.
9	0,98769.	19	0,94552.	29	0,87462.
10	0,98481.	20	0,93969.	30	0,86603.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καταμετρηθείσης εὐθείας εἶναι $371^{\mu},36$, καὶ ὅτι ἡ ὡς πρὸς τὴν ὁριζόντειον κλίσις αὐτῆς εἶναι 20^{0}· τότε βλέπομεν εἰς τὸν πίνακα ὅτι ἡ κλίσις 20^{0} ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν προβολὴν 0,93969 τῆς μονάδος, καὶ ἡ ζητουμένη ὁριζόντειος προβολὴ θέλει εἶναι $371,36 \times 0,939$ ἢ $348^{\mu},967$.

Εὑρίσκεται ἡ προβολὴ τῆς ἀποστάσεως $157^{\mu},50$, τῆς ὁποίας ἡ ὡς πρὸς τὴν ὁριζόντειον κλίσις εἶναι $12^{0},30'$, ἐὰν λάβωμεν τὸ γινόμενον $153^{\mu},75$, τοῦ ἡμιαθροίσματος 0,97626 τῶν δύο προβολῶν 0,97815 καὶ 0,97437, ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν $157^{\mu},50$.

Ἐὰν ἡ ἐπὶ τῆς γῆς γραμμὴ ᾖναι ἀκανόνιστος, τότε ἀποσυνθέτομεν αὐτὴν εἰς εὐθύγραμμα μέρη. Ἑκάστου μέρους μετροῦμεν τὸ μῆκος, καὶ τὴν κλίσιν, διὰ τῆς Ἐφαρμ. 48, ἢ διὰ τοῦ ἐργαλείου τοῦ παριστανομένου ὑπὸ τοῦ Σχ. 36· προσδιορίζομεν τὴν προβολὴν ἑκάστου μέρους, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τούτων θέλει ἐκφράσει τὴν προβολὴν τῆς ἀκανονίστου γραμμῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ προβολὴ τῆς ἀκανονίστου γραμμῆς ΑΒΓΔ (Σχ. 17. Μέρ. Α'), τῆς ὁποίας τὰ τρία εὐθύγραμμα μέρη καταμετρηθέντα εὑρέθησαν ὅτι εἶναι $65^{\mu},40$, 78^{μ} καὶ $59^{\mu},40$, αἱ δὲ κλίσεις αὐτῶν $25^{0}25'$, 20^{0} καὶ $18^{0}15'$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 71. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ a τὴν ὑπὸ τῆς εὐθείας

ΑΒ καὶ τῆς ὁριζοντείου ΑΓ (Σχ. 90) σχηματιζομένην γωνίαν, καὶ καλέσωμεν συνημίτονον τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν γωνίαν ταύτην προβολὴν τῆς μονάδος, ἥτις παρίσταται, συντομίας χάριν, διὰ συνημ. a, ὡς ἔκφρασιν τῆς προβολῆς τῆς κεκλιμένης εὐθείας, θέλομεν τότε ἔχει $\text{ΑΓ} = \text{συνημ.}a \times \text{ΑΒ}$.

---

§.—19.

Πολύεδρα. Παραλληλεπίπεδα. Καταμέτρησις τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ὁποιουδήποτε παραλληλεπιπέδου, τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, καὶ ὁποιουδήποτε πρίσματος.

ΟΡΙΣΜΟΙ. α'.) *Πολύεδρον* καλεῖται πᾶν γεωμετρικὸν σῶμα ὑπὸ ἐπιπέδων περιοριζόμενον. Καὶ τὰ μὲν ἐπίπεδα ἀποτελοῦσι τὰς *ἕδρας* τοῦ πολυέδρου, αἱ δὲ τομαὶ τῶν ἐπιπέδων, τὰς *κόψεις*, τὰ δὲ ἄκρα τῶν κόψεων σχηματίζουσι τὰς *κορυφὰς* τοῦ πολυέδρου.

β'.) *Διαγώνιος* πολυέδρου τινὸς καλεῖται ἡ εὐθεῖα, ἡ ἑνοῦσα δύο κορυφὰς μὴ ἀνηκούσας εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἕδραν. Αἱ ἕδραι, αἱ ἀπολήγουσαι εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κορυφήν, σχηματίζουσι τὴν καλουμένην *πολύεδρον ἢ στερεὰν γωνίαν*.

γ'.) *Παραλληλεπίπεδον* καλεῖται τὸ πολύεδρον ΑΒΓΔΕΖΗΘ (Σχ. 91), τὸ περιοριζόμενον ὑπὸ ἓξ ἐπιπέδων παραλλήλων, ἀνὰ δύο λαμβανομένων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 51.

Αἱ ἕδραι παντὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι σχήματα παραλληλόγραμμα. Αἱ δὲ παράλληλοι κόψεις ἴσαι (Σχ. 91).

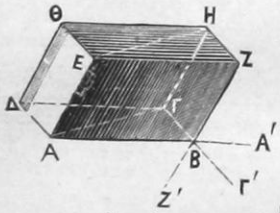
Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ αἱ κόψεις ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΖΕ καὶ ΔΓΗΘ ὑπὸ τοῦ τρίτου ΑΒΓΔ γενόμεναι, ὁμοίως ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΕΘΔ καὶ

ΒΖΗΓ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ γενόμεναι. Ἄρα τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς λοιπὰς ἕδρας. Λοιπόν, αἱ παράλληλοι κόψεις εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 52.

Δύο ἀντικείμεναι τριέδροι γωνίαι Β καὶ Θ παντὸς παραλληλεπιπέδου ἀπὸ τῶν αὐτῶν μερῶν σχηματιζόμεναι, ἐπιτιθέμεναι δὲν συμπίπτουσιν (Σχ. 91).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς κόψεις ΒΑ, ΒΓ καὶ ΒΖ, κατὰ τὰς εὐθείας ΒΑ′, ΒΓ′ καὶ ΒΖ′, ἡ οὕτω σχηματιζομένη τρίεδρος γωνία ΒΑ′Γ′Ζ′, μεταφερομένη παραλλήλως πρὸς ἑαυτήν, θέλει συμπέσει μετὰ τῆς τριέδρου γωνίας Θ· ἡ δὲ ἀντίθετος αὐτῆς τρίεδρος ΒΑΓΖ, ἡ ἀπὸ τὰ αὐτὰ μέρη σχηματιζομένη, δὲν συμπίπτει (§. 17. Ὁρισμὸς ε΄).



Σχ. 91.

ΟΡΙΣΜΟΣ δ΄.) Αἱ ἀντικείμεναι ἕδραι ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ τοῦ παραλληλεπιπέδου καλοῦνται *βάσεις*, ἡ δὲ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν βάσεων καλεῖται *ὕψος* τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι *ὀρθογώνιον*, ὅταν αἱ παράπλευροι κόψεις ὦσι κάθετοι ἐπὶ τῶν βάσεων, καὶ ὅτε τὸ ὕψος αὐτοῦ ἦναι μία τῶν κόψεων τούτων.

Αἱ τρεῖς κόψεις, αἱ ἀπολήγουσαι εἰς τὴν αὐτὴν κορυφήν, εἶναι αἱ τρεῖς *διαστάσεις* τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τουτέστι τὸ *μῆκος*, τὸ *πλάτος* καὶ τὸ *ὕψος*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 53.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους, εἶναι ἰσοδύναμα, τουτέστιν ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὰς βάσεις τῶν παραλληλεπιπέδων, τότε αἱ παράπλευροι κόψεις, αἱ κάθετοι

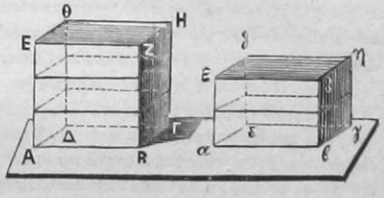
ἐπ'αὐτὰς, θέλουσι λάβει ἀνὰ δύο τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν· καὶ ἐπειδὴ αἱ κόψεις αὗται εἶναι ἴσαι, ὡς μετροῦσαι τὸ κοινὸν ὕψος τῶν δύο παραλληλεπιπέδων, τὰ ἄνω αὐτῶν ἄκρα ὁμοίως θέλουσι συμπέσει. Λοιπόν, τὰ δύο παραλληλεπίπεδα θέλουσιν ἔχει τὰς κορυφὰς των κοινὰς, καὶ ἑπομένως θέλουν συμπέσει καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἔκτασιν· ἄρα εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 54.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΒΓΔΕΖΗΘ καὶ αβγδεζηθ, τῆς αὐτῆς βάσεως, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη των ΑΕ καὶ αε (Σχ. 92).

Ἀπόδειξις. Ὑποθέτομεν ἐν πρώτοις ὅτι τὰ ὕψη τῶν παραλληλεπιπέδων εἶναι ἔμμετρα. Διαιροῦμεν τὸ ὕψος ΑΕ εἰς μέρη ἴσα τῷ κοινῷ μέτρῳ, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν ΑΕ ὑποθέτωμεν ὅτι περιλαμβάνει τρία, τὸ δὲ αε δύο, καὶ ὅτε προκύπτει ἡ ἀναλογία $\text{ΑΕ} : \text{αε} = 3 : 2$.

Τούτου τεθέντος, ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως τῆς ΑΕ φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓΔ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως τῆς αε, ἐπίπεδον παράλληλον τῆς βάσεως αβγδ. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἀναλύουσι τὸ μὲν παραλληλεπίπεδον ΑΗ, εἰς τρία ἴσα ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, ὡς ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη (Πρότ. 53), τὸ δὲ παραλληλεπίπεδον αη, εἰς δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ὁμοίως ἴσα πρὸς ἄλληλα, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Λοιπόν, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $\text{ΑΗ} : \text{αη} = 3 : 2$. Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης καὶ τῆς προηγουμένης ἀναλογίας προκύπτει ἡ ἀκόλουθος $\text{ΑΗ} : \text{αη} = \text{ΑΕ} : \text{αε}$.



Σχ. 92.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀναλογία αὕτη ἐπαληθεύει διὰ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν εἶναι ἐλάχιστον τὸ κοινὸν μέτρον τῶν δύο ὑψῶν, ἀναντιῤῥήτως ἀληθεύει καὶ ὅταν ἦναι ἀπειροελάχιστον, του-

τέστιν ὅταν τὰ ὕψη ἦναι ἔκμετρα. Ἄρα δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα κτλ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἡ πρότασις δύναται νὰ ἐκφωνηθῇ ὑπὸ γενικωτέραν ἔκφρασιν οὕτως· *ὅταν δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ἔχωσι δύο διαστάσεις κοινὰς, ὁ μεταξὺ αὐτῶν λόγος εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τῶν μὴ κοινῶν διαστάσεων.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 55.

Δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη αὐτῶν, ἢ ὡς τὰ γινόμενα τῶν τριῶν αὐτῶν διαστάσεων.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Π καὶ π δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, Α, Β καὶ Γ αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ πρώτου, καὶ α, β καὶ γ αἱ τοῦ δευτέρου. Πρὸς τούτοις, ἂς θεωρήσωμεν δύο ἄλλα ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, τὸ μὲν Π′ ἔχον διαστάσεις α, Β καὶ Γ, τὸ δὲ Π″ τὰς διαστάσεις α, β καὶ Γ. Ἕνεκα τῆς προηγουμένης προτάσεως ἔχομεν τὰς ἀναλογίας

$$\Pi : \Pi' = A : \alpha,\quad \Pi' : \Pi'' = B : \beta,\quad \Pi'' : \pi = \Gamma : \gamma.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἀναλογίας ταύτας μέλος πρὸς μέλος, καὶ ἐξαλείφοντες τοὺς παράγοντας Π′ καὶ Π″ γενομένους κοινοὺς εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου μέλους, λαμβάνομεν

$$\Pi : \pi = A\times B\times\Gamma : \alpha\times\beta\times\gamma \ldots \quad [1].$$

Ἀλλὰ $A\times B : \alpha\times\beta$ ἐκφράζει τὸν λόγον τῶν ὀρθογωνίων, ὧν τὸ μὲν ἔχει διαστάσεις Α καὶ Β, τὸ δὲ α καὶ β (Πρότ. 79. Μέρ. Α′). Τὰ ὀρθογώνια λοιπὸν ταῦτα δύνανται νὰ ληφθῶσιν ὡς αἱ βάσεις τῶν παραλληλεπιπέδων, τῶν ὁποίων τὰ ὕψη θέλουσιν εἶναι αἱ διαστάσεις Γ καὶ γ.

Ἡ σχέσις [1] δύναται ἄρα νὰ ἐκφωνηθῇ οὕτω· *δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη αὐτῶν, ἢ ὡς τὰ γινόμενα τῶν τριῶν των διαστάσεων.*

Μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ἵνα καταμετρήσωμεν τὸν ὄγκον πολυέδρου τινὸς, ζητοῦμεν τὸν λόγον αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα τοῦ ὄγκου. Λαμβάνομεν δὲ ὡς μονάδα τοῦ ὄγκου τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τὸ

ὁποῖον ἔχει ὕψος μὲν τὴν μονάδα τοῦ μήκους, βάσιν δὲ τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας, τουτέστι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς μονάδος τοῦ μήκους. Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσαι, καλεῖται *κύβος*.

Λοιπὸν, ἔστω Π ὀρθογωνιόν τι παραλληλεπίπεδον, Β ἡ βάσις αὐτοῦ, Υ τὸ ὕψος, μ ἡ μονὰς τοῦ μήκους, ε ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας, καὶ ο, ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου. Θέλομεν ἔχει, ἕνεκα τῆς προηγουμένης προτάσεως, τὴν σχέσιν

$$\frac{\Pi}{o} = \frac{B}{\varepsilon}\times\frac{\Upsilon}{\mu} \ldots \quad [2].$$

Ἀλλὰ $\frac{\Pi}{o}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων ὄγκου, τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς τὸ προταθὲν παραλληλεπίπεδον· $\frac{B}{\varepsilon}$ δὲ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων ἐπιφανείας, τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς τὴν βάσιν, καὶ $\frac{\Upsilon}{\mu}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων μήκους, τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἡ σχέσις [2] δύναται ἄρα νὰ ἐκφωνηθῇ οὕτως· *ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων ὄγκου, τῶν ἐμπεριεχομένων ἐντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων ἐπιφανείας, τῶν περιεχομένων εἰς τὴν βάσιν αὐτοῦ, πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων μήκους, τῶν περιλαμβαομένων εἰς τὸ ὕψος, ἢ, ὅπερ τὸ αὐτὸ, τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. Ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι ὀρθογώνιον, ὅπερ ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτοῦ διαστάσεων (Πρότ. 79. Μέρ. Α′), δυνάμεθα προσέτι νὰ εἴπωμεν ὅτι, *τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων.*

2. Ἐὰν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἦναι κύβος, τότε αἱ τρεῖς αὐτοῦ διαστάσεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, ὁ δὲ ὄγκος αὐτοῦ ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων ἴσων τῇ κόψει τοῦ κύβου, ἢ τὴν τρίτην δύναμιν τῆς κόψεως ταύτης. Ἕνεκα τούτου, εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καλεῖται κύβος ἡ τρίτη δύναμις ἀριθμοῦ τινος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 72. Διὰ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν τὴν ὑποδιαίρεσιν τῶν μονάδων τοῦ ὄγκου.

Ἐπειδὴ τὸ ἑκατοστόμετρον ἐμπεριέχει 10 χιλιοστόμετρα, ἓν ἑκατοστόμετρον κυβικὸν ἐμπεριέχει $10\times10\times10$ ἢ 1000 χιλιοστόμετρα κυβικά.

Τοῦ δεκατομέτρου περιέχοντος 10 ἑκατοστόμετρα, τὸ κυβικὸν δεκατόμετρον περιέχει $10\times10\times10$ ἢ 1000 ἑκατοστόμετρα κυβικά.

Τοῦ δὲ μέτρου περιέχοντος 10 δεκατόμετρα, τὸ κυβικὸν μέτρον περιέχει 1000 δεκατόμετρα κυβικά.

Τοῦ δεκαμέτρου 10 μέτρα, τὸ κυβικὸν δεκάμετρον περιέχει 1000 μέτρα κυβικὰ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὸ μετρικὸν τοῦτο σύστημα, μᾶς χορηγεῖ τὴν εὐκολίαν δι' ἁπλῆς μεταθέσεως τῆς ὑποδιαστολῆς, νὰ μετατρέπωμεν τὰς μονάδας τοῦ ὄγκου, τὰς μὲν εἰς τὰς δὲ, ἐναλλάξ.

Οὕτω 13,057319μ.κ. ἀνάγονται εἰς 13057,319δ.κ. ἢ 13057319ε.κ.

Σημειωτέον ὅτι κατὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν καυσίμων ξύλων, τὸ κυβικὸν μέτρον καλεῖται στέρον (*stère*) καὶ, διὰ τὴν καταμέτρησιν τῆς χωρητικότητος, τὸ κυβικὸν δεκατόμετρον καλεῖται λίτρα. Ἡ λίτρα ἰσοδυναμεῖ μὲ 312,50 δράμια.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἐμπεριλαμβανομένου ἀέρος ἐντὸς ὀρθογωνίου δωματίου ἔχοντος $10^{\mu},42$ μῆκος, 7^{μ} πλάτος καὶ $3^{\mu},8$ ὕψος;

Ὁ ζητούμενος ὄγκος ἐκπερασμένος εἰς ἑκατοστόμετρα κυβικὰ, εἶναι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀριθμῶν 1042, 700 καὶ 380, τουτέστι 27717200ε.κ. ἢ 277,172μ.κ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5. Τεμάχιον μαρμάρου, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει $2^{\mu},3$ μῆκος, $1^{\mu},6$ πλάτος καὶ $0^{\mu},9$ χόνδρος, ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

Αἱ τρεῖς δεδομέναι διαστάσεις ἄγονται διαδοχικῶς εἰς 23, 16 καὶ 9 δεκατόμετρα· ὁ ὄγκος τοῦ μαρμάρου εἶναι $23\times16\times9$ ἢ 3312 δεκατόμετρα κυβικὰ ἢ 3μ.κ. καὶ 312δ.κ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6. Σωρὸς καυσίμων ξύλων ἔχει $13^{\mu},4$ μῆκος, 8^{μ} πλάτος καὶ $7^{\mu},2$ ὕψος· ζητεῖται ἡ εἰς στέρα ποσότης τῶν ξύλων.

Τὸ σχῆμα τῶν σωρῶν ἐντὸς τῶν ξυλαποθηκῶν εἶναι τὸ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Αἱ τρεῖς ἄνω διαστάσεις λοιπὸν τρέπονται

εἰς 134, 50 καὶ 72 δεκατόμετρα κυβικά· ὁ ὄγκος λοιπὸν τῆς σωροῦ ἰσοδυναμεῖ μὲ $134\times50\times72$, ἢ 482400δ.κ. ἢ 482,400μ.κ. τουτέστι 482 στέρα καὶ 4 δεκατόστερα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7. Ὀρθογώνιος δεξαμενὴ ἔχει $6^{\mu},4$ μῆκος, $3^{\mu},5$ πλάτος, $2^{\mu},7$ βάθος, καὶ περιέχει ὕδωρ μέχρι τῶν $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους αὐτῆς· πόσας λίτρας ὕδατος περιέχει;

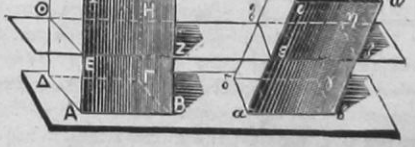
Τὸ ἐντὸς τῆς δεξαμενῆς ὕδωρ σχηματίζει ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ κόψεις εἶναι διαδοχικῶς 64, 35 καὶ 18 δεκατόμετρα, ἐπειδὴ 18 εἶναι τὰ δύο τρίτα τοῦ 27. Ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου εἶναι ἄρα $64\times35\times18$, ἢ 40320 δεκατόμετρα κυβικά. Λοιπὸν ἡ δεξαμενὴ περιέχει ὕδωρ 40320 λίτρας.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἰσοδύναμα* στερεὰ σώματα καλοῦνται ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα εἶναι μὲν ἴσα κατὰ τὸν ὄγκον, οὐχὶ δὲ καὶ ὁμοίως ἐσχηματισμένα, ἢ ἴσα κατ' ἐφαρμογήν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 56.

Δύο παραλληλεπίπεδα ΑΛ *καὶ* αλ, *ὅταν ἔχωσιν ἰσοδυνάμους βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ἰσοδύναμα* (Σχ. 93).

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν τὰς κάτω βάσεις τῶν παραλληλεπιπέδων ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κειμένας. Τούτου τεθέντος, τέμνομεν τὰ παραλληλεπίπεδα δι' ἐπιπέδου παραλ-



Σχ. 93.

λήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν βάσεων, καὶ ἔστωσαν ΕΖΗΘ καὶ εζηθ αἱ οὕτω προκύπτουσαι τομαί. Ἡ πρώτη τῶν τομῶν τούτων εἶναι ἴση τῷ σχήματι ΑΒΓΔ, ἐπειδὴ τὰ οὕτω προκύπτοντα δύο τετράπλευρα ἔχουσι τὰς πλευρὰς των ἴσας

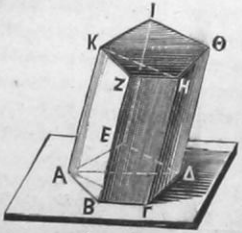
ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων περιεχόμεναι (Πρότ. 25), καὶ τὰς γωνίας ἴσας, ἐπειδὴ τῶν γωνιῶν τούτων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι καὶ διευθύνονται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ τομὴ εζηθ εἶναι ἴση τῷ σχήματι αβγδ. Ἀλλὰ τὰ σχήματα ΑΒΓΔ καὶ αβγδ ὑπετέθησαν ἰσοδύναμα, ὅθεν καὶ τὰ ΕΖΗΘ καὶ εζηθ εἶναι ἐπίσης ἰσοδύναμα. Τὰ δύο λοιπὸν παραλληλεπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, δύνανται νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς ἰσοπληθεῖς καὶ ἀπειροελαχίστους τομὰς ἰσοδυνάμους· ἄρα τὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι ἰσοδύναμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 57.

Τὸ μέτρον παντὸς παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον μέτρον εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ἔχοντος βάσιν ἰσοδύναμον καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (Πρότασις 56).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Πρίσμα* καλεῖται τὸ πολύεδρον (Σχ. 94), ὡς τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ, τοῦ ὁποίου αἱ δύο μὲν ἕδραι, ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘΙΚ καλούμεναι *βάσεις*, εἶναι πολύγωνα ἴσα καὶ παράλληλα, αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι εἶναι παραλληλόγραμμα.



Σχ. 94.

Τὸ πρίσμα λέγεται *τριγωνικὸν, τετραγωνικὸν, πενταγωνικὸν*, κτλ. ὅταν ἡ βάσις αὐτοῦ ἦναι τρίγωνον, τετράγωνον, πεντάγωνον κτλ.

Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν βάσεων.

Τὸ πρίσμα εἶναι *ὀρθὸν*, ὅταν αἱ παράπλευροι κόψεις ἦναι κάθετοι ἐπὶ τῆς βάσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 58.

Δύο τριγωνικὰ πρίσματα ὅταν ἔχωσι βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὡς ἡ τῆς (Προτ. 56), μόνῃ τῇ διαφορᾷ ὅτι αἱ τομαὶ ἐν τῇ παρούσῃ περιπτώσει εἶναι τριγωνικαί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 59.

Πᾶν τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΕΗΖ *εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου* ΑΒΓΔΕΖΗΘ, *τοῦ ἔχοντος διπλασίαν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος* (Σχ. 91).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΕΗΖ καὶ ΑΓΔΕΗΘ, εἰς ἃ ἀναλύεται τὸ παραλληλεπίπεδον, εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουσιν ἴσας βάσεις ΑΒΓ=ΑΔΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (Πρότ. 58).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 60.

Τὸ μέτρον παντὸς τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐὰν καλέσωμεν Β τὴν βάσιν, καὶ Υ τὸ ὕψος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, τὸ μέτρον τοῦ παραλληλεπιπέδου, τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν 2Β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ Υ, θέλει εἶναι 2Β×Υ, (Πρότ. 57). Ἀλλὰ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου· ἄρα τὸ μέτρον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος θέλει εἶναι Β×Υ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 61.

Τὸ μέτρον ὁποιουδήποτε πρίσματος ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ *ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ* (Σχ. 94).

Ἀπόδειξις. Διὰ τῆς κόψεως ΑΚ καὶ τῶν λοιπῶν παραλλήλων κόψεων ΓΗ καὶ ΔΘ, μὴ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας κειμένων, φέρομεν τὰ ἐπίπεδα ΚΑΓΗ καὶ ΚΑΔΘ. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα, *διαγώνια ἐπίπεδα* καλούμενα, ἀναλύουσι τὸ ὅλον πρίσμα εἰς τριγωνικὰ πρίσματα τοῦ αὐτοῦ ὕψους. Τούτου γενομένου, καλέσωμεν π, π', π'' τὰ μερικὰ πρίσματα, Β, Β', Β'' τὰς βάσεις αὐτῶν, καὶ Υ, τὸ κοινὸν ὕψος· θέλομεν ἔχει (Πρότ. 60), τὰς ἰσότητας

$$\pi=\varepsilon\times\Upsilon,\ \pi'=\varepsilon'\times\Upsilon,\ \pi''=\varepsilon''\times\Upsilon,$$

τὰς ὁποίας προσθέτοντες εὑρίσκομεν τὴν ἔκφρασιν

$$\Pi=\pi+\pi'+\pi''=(\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon'')\times\Upsilon.$$

Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν Β, τὴν βάσιν τοῦ ὅλου πρίσματος Π, ἥτις ἰσοδυναμεῖ τῷ ἀθροίσματι τῶν βάσεων τῶν μερικῶν πρισμάτων, ἡ τελευταία ἔκφρασις τρέπεται εἰς τὴν $\Pi=\text{Β}\times\Upsilon$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ ὄγκος τοίχου ἔχοντος $32^{\mu},50$ μῆκος, $0^{\mu},45$ πλάτος καὶ $5^{\mu},40$ ὕψος, πρὸς δὲ καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ, τιμωμένου τοῦ κυβικοῦ μέτρου ἀντὶ 45,60 φράγκων.

ΛΥΣΙΣ. Ἀφοῦ ζητήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν κυβικῶν μέτρων τοῦ τοίχου, ὅστις εἶναι $32,5\times5,4\times0,45=78,975^{\mu.κ.}$ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὴν τιμὴν 45,60 φράγκα τοῦ κυβικοῦ μέτρου, καὶ εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀξίαν τοῦ τοίχου

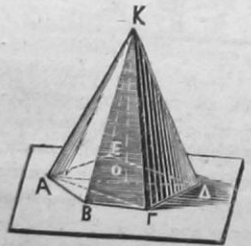
$$45,60\times78,975=3601,26.\ \text{φράγκα}.$$

---

§—20.

Πυραμίς. Καταμέτρησις τοῦ ὄγκου τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, καὶ ὁποιασδήποτε πυραμίδος. Ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Ὁρισμοί.

Πυραμὶς καλεῖται τὸ πολύεδρον, ὡς τὸ ΚΑΒΓΔΕ (Σχ. 98), τοῦ ὁποίου μία ἕδρα ΑΒΓΔΕ, καλουμένη *βάσις*, εἶναι πολύγωνον ὁποιονδήποτε, αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι, τρίγωνα ἔχοντα κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον Κ. Ἡ κοινὴ αὕτη κορυφὴ εἶναι *ἡ κορυφὴ* τῆς πυραμίδος.



Σχ. 98.

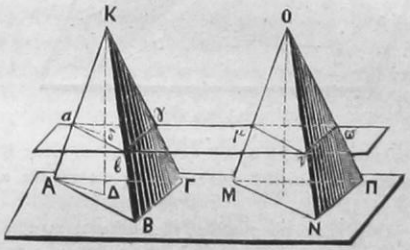
Τὸ *ὕψος* τῆς πυραμίδος εἶναι τὸ μῆκος τῆς καταβιβαζομένης καθέτου ἐκ τῆς κορυφῆς εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως.

Ἡ πυραμὶς εἶναι *τριγωνική*, *τετραγωνική*, *πενταγωνική*, κτλ. ὅταν ἡ βάσις της ᾖναι τριγωνον, τετράγωνον, πεντάγωνον, κτλ. *Κανονική* δέ, ὅταν ἡ βάσις ᾖναι κανονικὸν πολύγωνον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 62.

Ἐὰν, παραλλήλως τῆς βάσεως ΑΒΓ *τριγωνικῆς τινος πυραμίδος* ΚΑΒΓ, *φέρωμεν ἐπίπεδον, ἡ οὕτω προκύπτουσα τριγωνικὴ τομὴ* αβγ *θέλει ἔχει τοιοῦτον λόγον πρὸς τὸ τρίγωνον* ΑΒΓ, *οἷον λόγον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὰ τετράγωνα τῶν ἐκ τῆς κορυφῆς* Κ *ἀποστάσεων* ΚΔ *καὶ* Κδ *τῶν τριγώνων* αβγ *καὶ* ΑΒΓ (Σχ. 95).

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ σημείου Κ καταβιβάζομεν ἐπὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ καὶ αβγ τὴν κοινὴν κάθετον Κδ Δ, τῆς ὁποίας τὰ μέρη ΚΔ καὶ Κδ καταμετροῦσι τὰς ἐκ τῆς κορυφῆς Κ ἀποστάσεις τῶν ἐπιπέδων τούτων. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ ἔχουσι τὰς πλευρὰς των παραλλήλους,



Σχ. 95.

ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπειδὴ εἰσὶν τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, ὑφ' ἑνὸς τρίτου γενόμεναι ἔχουσι λοιπὸν τὰς γωνίας των ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ (Πρότ. 16), καὶ εἶναι ὅμοια· ἄρα

$$\overline{\alpha\beta}^2 : \overline{\text{AB}}^2 = \alpha\beta\gamma : \text{ABΓ}.$$

Ἀλλ' ἡ αβ ἐπειδὴ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ, τὰ τρίγωνα ΑΚΒ καὶ αΚβ εἶναι ὅμοια, καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\alpha\beta : \text{AB} = \text{K}\alpha : \text{KA}.$$

Φέρομεν τὴν ΑΔ καὶ αδ· αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλλη-

λοι ὡς τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ καὶ αβγ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΚΔ γενόμεναι· τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΚΔ καὶ αΚδ εἶναι ὅμοια καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\text{ΚΑ} : \text{Κα} = \text{ΚΔ} : \text{Κδ}, \quad \text{ἐξ ἧς τὴν} \quad \text{αβ} : \text{ΑΒ} = \text{Κδ} : \text{ΚΔ}.$$

Ἐκ τῆς δευτέρας τούτων ποριζόμεθα τὴν ἀναλογίαν

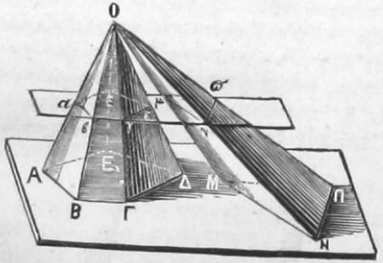
$$\overline{\text{αβ}}^2 : \overline{\text{ΑΒ}}^2 = \overline{\text{Κδ}}^2 : \overline{\text{ΚΔ}}^2,$$

καὶ ἐπὶ τέλους τὴν ἀναλογίαν,

$$\text{αβγ} : \text{ΑΒΓ} = \overline{\text{Κδ}}^2 : \overline{\text{ΚΔ}}^2.$$

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ὁποιαδήποτε πυραμὶς (Σχ. 96 καὶ 95) τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς·



Σχ. 96.

ά.) αἱ πλευραὶ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, κτλ. καὶ τὸ ὕψος ΚΔ τῆς πυραμίδος θέλουσι διαιρεθῆ ἀναλόγως εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ, κτλ. καὶ δ.

β'.) ἡ γενομένη οὕτω τομὴ αβγδε, θέλει εἶναι πολύγωνον ὅμοιον τῇ βάσει ΑΒΓΔΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 63.

Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΚΑΒΓ *καὶ* ΟΜΝΠ, *ὅταν ἔχωσι βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ἰσοδύναμοι* (Σχ. 95).

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ βάσεις τῶν δύο τούτων πυραμίδων εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τέμνομεν τὰς δύο πυραμίδας δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῶν βάσεων,

καὶ ἔστωσαν αβγ καὶ μνπ αἱ προκύπτουσαι τομαί. Καλοῦμεν Υ τὸ κοινὸν ὕψος τῶν δύο πυραμίδων, καὶ υ τὴν ἀπόστασιν ἐκ τῆς κορυφῆς Κ ἢ Ο τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν ἔχομεν τὰς ἀναλογίας

$$\text{αβγ} : \text{ΑΒΓ} = \upsilon^2 : \Upsilon^2 \quad \text{καὶ} \quad \text{μνπ} : \text{ΜΝΠ} = \upsilon^2 : \Upsilon^2,$$

καὶ ἑπομένως τὴν ἰσοπληθικότητα

$$\frac{\text{αβγ}}{\text{ΑΒΓ}} = \frac{\text{μνπ}}{\text{ΜΝΠ}}.$$

Ἀλλ' οἱ παρανομασταὶ τῶν ἴσων τούτων κλασμάτων εἶναι ἰσοδύναμοι, τοιοῦτοι λοιπὸν πρέπει νὰ ἦναι καὶ οἱ ἀριθμηταί. Ἄρα αἱ τομαὶ αβγ καὶ μνπ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἀλλ' αἱ προτεθεῖσαι πυραμίδες, ἐπειδὴ ἔχουσιν ἴσα ὕψη, δύνανται νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς ἰσοπληθεῖς τομὰς ἰσοδυνάμους πρὸς ἀλλήλας καὶ ἀπειροελαχίστους. Ἄρα αἱ πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. Ἐὰν δύο ὁποιαδήποτε πυραμίδες ἔχωσι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τὰς βάσεις ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ γενόμεναι τομαὶ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ τῶν βάσεων θέλουσιν εἶσθαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων. Ἐὰν δὲ αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων ἦναι ἰσοδύναμοι, καὶ αἱ γενόμεναι τομαὶ θέλουσιν εἶσθαι ἰσοδύναμοι.

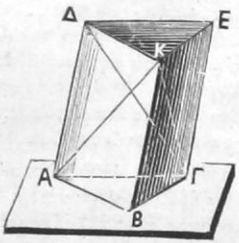
Πόρισμα 2. Δύο ὁποιαδήποτε πυραμίδες, ὅταν ἔχωσιν ἰσοδυνάμους βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 64.

Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς ΚΑΒΓ *εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος* ΑΒΓΔΚΕ, *τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος τῆς πυραμίδος* (Σχ. 97).

Ἀπόδειξις. Διὰ τῶν εὐθειῶν ΚΔ καὶ ΚΓ φέρομεν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ἕδραν ΑΔΕΓ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΔΓ, καὶ τὸ πρίσμα ἀναλύεται εἰς τρεῖς τριγωνικὰς πυραμίδας ΚΑΒΓ, ΚΑΔΓ καὶ ΚΔΕΓ. Ἀλλ' αἱ πυραμίδες ΚΑΒΓ καὶ ΚΑΔΓ ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον Γ, βάσεις δὲ ΑΚΒ καὶ ΑΚΔ, τουτέστι τὰ δύο τρίγωνα εἰς ἃ ἀναλύεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΚΔ· λοιπόν, αἱ πυραμίδες αὗται ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος· ἄρα εἶναι ἰσοδύναμοι. Ὁμοίως αἱ πυραμίδες ΚΑΔΓ καὶ ΚΔΕΓ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν Κ, βάσεις

δὲ ΑΔΓ καὶ ΔΕΓ, τουτέστι τὰ τρίγωνα, εἰς ἃ ἀναλύεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔΕΓ· ὅθεν αἱ πυραμίδες ἔχουσιν ἴσας βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ἄρα ἰσοδύναμοι.



Σχ. 97.

Τὸ προταθὲν λοιπὸν πρίσμα ἀποσυνετέθη οὕτως εἰς τρεῖς ἰσοδυνάμους πυραμίδας. Ἡ προταθεῖσα λοιπὸν πυραμὶς ΚΑΒΓ, ἥτις εἶναι μία τῶν τριῶν, εἶναι ἄρα τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 65.

Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ὡς μέτρον τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Β τὴν βάσιν, καὶ διὰ Υ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος, τὸ τριγωνικὸν πρίσμα, τὸ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἔχει ὡς μέτρον Β×Υ (Πρότ. 60)· ὅθεν ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος τούτου καὶ ἔχει ὡς μέτρον τὴν ἔκφρασιν $\frac{1}{3}$ Β×Υ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 66.

Ὁποιαδήποτε πυραμὶς ΚΑΒΓΔΕ, ἔχει ὡς μέτρον τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς (Σχ. 98).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα ΚΑΔ καὶ ΚΑΓ, τὰ διὰ τῆς κορυφῆς Κ καὶ τῶν διαγωνίων ΑΔ καὶ ΑΓ διερχόμενα, διαιροῦσι τὴν πολυγωνικὴν πυραμίδα ΚΑΒΓΔΕ εἰς τόσας τριγωνικὰς πυραμίδας τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΚΟ, εἰς ὅσα τρίγωνα ἀναλύεται τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ τῆς βάσεως αὐτῆς, κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, ἑκάστη τῶν τριγωνικῶν τούτων πυραμίδων ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς της ΑΒΓ, ΑΓΔ καὶ ΑΔΕ ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους αὐτῆς ΚΟ. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν τούτων πυραμίδων, ἤ ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς ΚΑΒΓΔΕ, θέλει ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ καὶ ΑΔΕ, ἤ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους ΚΟ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. Αἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως, αἱ τῆς αὐτῆς βάσεως πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ὕψη των.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον ὁποιουδήποτε πολυεδρικοῦ σώματος, ἀρκεῖ νὰ ἀναλύσωμεν αὐτὸ εἰς πυραμίδας· ἡ δὲ ἀνάλυσις αὕτη γίνεται πολυτρόπως. Ὁ ἁπλούστερος τούτων συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἀχθῶσι τὰ τῆς διαιρέσεως ἐπίπεδα ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας. Οὕτω θέλουσι σχηματισθῆ τόσαι μερικαὶ πυραμίδες, ὅσας ἕδρας ἔχει τὸ πολύεδρον, ἐξαιρουμένων τῶν ἑδρῶν τῶν σχηματιζουσῶν τὴν στερεὰν γωνίαν· ἑκάστης δὲ μερικῆς πυραμίδος εὐκόλως εὑρίσκεται τὸ μέτρον.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κόλουρος πυραμὶς* καλεῖται τὸ ἀπολειπόμενον μέρος ΑΒΓαβγ τῆς πυραμίδος ΚΑΒΓ, ὅταν ἀποσπάσωμεν αὐτῆς τὸ ἄνω μέρος, δι' ἐπιπέδου παραλλήλως τῆς βάσεως ἀγομένου. Ἡ οὕτω προκύπτουσα τομὴ αβγ σχηματίζει τὴν δευτέραν βάσιν, ἡ δὲ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν βάσεων εἶναι τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος (Σχ. 95).

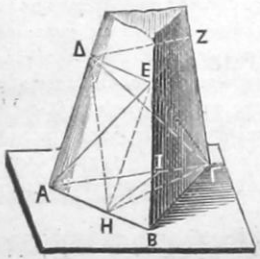
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 67.

Ἡ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἴση τῷ ἀθροίσματι τριῶν πυραμίδων ἐχουσῶν κοινὸν μὲν ὕψος, τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος, βάσεις δὲ, ἡ μὲν τὴν κάτω, ἡ δὲ τὴν ἄνω βάσιν τῆς κολούρου πυραμίδος, καὶ ἡ τρίτη πυραμὶς τὴν μεταξὺ τῶν δύο τούτων βάσεων μέσην ἀνάλογον (Σχ. 99).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐὰν διὰ μὲν τῶν σημείων Α, Ε καὶ Γ, φέρωμεν ἐπίπεδον τέμνον τὰς ἕδρας ΑΒΕΔ καὶ ΒΕΖΓ κατὰ τὰς εὐθείας ΑΕ καὶ ΕΓ, διὰ δὲ τῶν σημείων Δ, Ε καὶ Γ, ἐπίπεδον τέμνον τὴν ἕδραν ΑΔΖΓ, κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΔΓ, ἡ κόλουρος πυραμὶς θέλει ἀναλυθῆ εἰς τρεῖς τριγωνικὰς πυραμίδας ΕΑΒΓ, ΕΔΖΓ καὶ ΕΔΑΓ. Ἐκ τούτων ἡ πρώτη, ἔχουσα κορυφὴν τὸ Ε καὶ βάσιν ΑΒΓ, θέλει ἔχει ὡς μέτρον (Πρότ. 65), τὴν ἔκφρασιν $\frac{1}{3}$ ΑΒΓ×Υ, ἐὰν καλέσωμεν Υ τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος.

Ἡ δευτέρα, ἐπειδὴ δύναται νὰ ἔχῃ κορυφὴν τὸ Γ καὶ βάσιν ΔΕΖ, καὶ τὸ τῆς κολούρου πυραμίδος ὕψος, θέλει ἔχει ὡς μέτρον $\frac{1}{3}$ ΔΕΖ×Υ.

Τούτου τεθέντος, φέρομεν τὴν ΕΗ παράλληλον τῇ ΑΔ, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὰς ΔΗ καὶ ΗΓ. Ἡ τρίτη πυραμὶς ΕΔΑΓ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν πυραμίδα, ἥτις ἔχει τὴν αὐτὴν μὲν βάσιν ΔΑΓ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Η, ἐπειδὴ ἀμφότεραι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος· διότι ἡ ΕΗ παράλληλος οὖσα τῇ ΔΑ, εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ΔΑΓ (Πρότ. 18). Ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΗΔΑΓ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἔχει κορυφὴν μὲν τὸ Ε, βάσιν δὲ ΑΗΓ, καὶ ὕψος τὸ τῆς κολούρου πυραμίδος, ἑπομένως θέλει ἔχει ὡς μέτρον τὴν ἔκφρασιν $\frac{1}{3}$ ΑΗΓ×Υ· λοιπὸν ἡ κόλουρος πυραμὶς ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν τριῶν πυραμίδων εἰς ἃς ἀναλύεται, τουτέστι,



Σχ. 99.

κολούρ.πυραμ. ΑΒΓΔΕΖ=$\frac{1}{3}$ Υ (ΑΒΓ + ΔΕΖ + ΑΗΓ). . . . [1].

Ἤδη μένει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ βάσις ΑΗΓ εἶναι μέση γεωμετρικὴ ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο βάσεων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ. Τῷ ὄντι, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΗΓ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των· ὅθεν προκύπτει ἡ ἀναλογία ΑΒΓ : ΑΗΓ = ΑΒ : ΑΗ ἢ ΑΒ : ΔΕ . . . . [2].

Πρὸς δὲ τούτοις, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΗΙ παράλληλον τῇ ΒΓ καὶ ἑπομένως τῇ ΕΖ, τὰ τρίγωνα ΑΗΙ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουσιν ἀνὰ μίαν πλευρὰν ἴσην ΑΗ=ΔΕ, πρὸς δὲ καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. Τὰ δὲ τρίγωνα ΑΗΓ καὶ ΑΗΙ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι λοιπὸν πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των· ὅθεν προκύπτει ἡ ἀναλογία

ΑΗΓ : ΑΗΙ = ΑΓ : ΑΙ ἢ ΑΗΓ : ΔΕΖ = ΑΓ : ΔΖ . . . [3].

Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ὡς ἰσογώνια (Πρότ. 23), εἶναι ὅμοια, δι' ὃ προκύπτει ἡ ἀναλογία

ΑΒ : ΔΕ = ΑΓ : ΔΖ . . . . . [4].

Ἐκ τῆς συγκρίσεως δὲ τῶν ἀναλογιῶν [2], [3] καὶ [4] προκύπτει ἡ ἐξῆς ΑΒΓ : ΑΗΓ = ΑΗΓ : ΔΕΖ, ἐξ ἧς ποριζόμεθα τὴν ἔκφρασιν $\text{ΑΗΓ} = \sqrt{\text{ΑΒΓ} \times \text{ΔΕΖ}}$.

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἐκφράσεως ἕπεται λοιπὸν ὅτι, τὸ τρίγωνον ΑΗΓ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος· ἄρα ἡ ἔκφρασις [1] ἱκανοποιεῖ τὴν ἐκφωνηθεῖσαν πρότασιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 68.

Ὁποιαδήποτε κόλουρος πυραμὶς μετὰ παραλλήλων βάσεων ΑΒΓΔΕ *καὶ* αβγδε, *ἔχει ὡς μέτρον τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεων αὐτῆς καὶ τῆς μέσης γεωμετρικῆς ἀναλόγου μεταξὺ τῶν βάσεων τούτων* (Σχ. 96).

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ, ἔστω τὸ τρίγωνον ΜΝΠ ἰσοδύναμον τῇ βάσει ταύτῃ, καὶ τὸ ὁποῖον νὰ ἀποτελῇ τὴν βάσιν πυραμίδος τινὸς ΟΜΝΠ, ἐχούσης τὴν αὐτὴν κορυφὴν τῇ πυραμίδι ΟΑΒΓΔΕ, τῆς ὁποίας ἀποτελεῖ μέρος ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος κόλουρος πυραμίς.

Τούτου τεθέντος, προεκτείνομεν τὸ ἐπίπεδον αβγδε, τὸ ὁποῖον θέλει τμήσει τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΟΜΝΠ κατὰ τὸ τρίγωνον μνπ. Ἀλλ' ἀποδεικνύεται (Πρότ. 62. Πόρισμα), ὅτι τὰ πολύγωνα αβγδε καὶ ΑΒΓΔΕ εἶναι ὅμοια καὶ ὅτι εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἐκ τοῦ σημείου Ο ἀποστάσεων αὐτῶν. Λοιπὸν (Πρότ. 63. Πόρισμα) ἔχομεν τὴν ἔκφρασιν $\frac{\text{αβγδε}}{\text{ΑΒΓΔΕ}} = \frac{\text{μνπ}}{\text{ΜΝΠ}}$.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ παρανομασταὶ τῆς ἐκφράσεως ταύτης ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἰσοδύναμοι, τοιοῦτοι πρέπει νὰ ᾖναι καὶ οἱ ἀριθμηταί. Ἄρα μνπ = αβγδε.

Λοιπὸν αἱ πυραμίδες ΟΑΒΓΔΕ καὶ ΟΜΝΠ εἶναι ἰσοδύναμοι, ἐπειδὴ ἔχουσιν ἰσοδυνάμους βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (Πρότ. 63. Πόρισμα 2)· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ πυραμίδες οαβγδε καὶ ομνπ εἶναι ἰσοδύναμοι· ἄρα, ἡ προταθεῖσα κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔΕαβγδε ἰσοδυναμεῖ τῇ τριγωνικῇ κολούρῳ πυραμίδι ΜΝΠμνπ. Ἀλλ' ἡ τελευταία ἔχει ὡς μέτρον (Πρότ. 67) τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν

βάσεων αὐτῆς καὶ τῆς μέσης γεωμετρικῆς ἀναλόγου μεταξὺ τῶν βάσεων τούτων. Ἡ προταθεῖσα κόλουρος πυραμὶς ἔχει λοιπὸν τὸ αὐτὸ μέτρον, ἐπειδὴ δὲ ἔχει καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος τῆς κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος καὶ βάσεις διαδοχικῶς ἰσοδυνάμους, ἄρα, *ὁποιαδήποτε κόλουρος πυραμὶς ἔχει ὡς μέτρον τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων αὐτῆς καὶ τῆς μέσης γεωμετρικῆς ἀναλόγου μεταξὺ τῶν βάσεων τούτων.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9. Δεξαμενὴ, σχήματος τετραγώνου, ἔχει 12 μέτρων πλευρὰν, οἱ τοῖχοι εἶναι κεκλιμένοι καὶ ὁ πυθμὴν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι $10^{\mu.}$, τὸ βάθος δὲ τῆς δεξαμενῆς $2^{\mu.},10$· ζητεῖται ἡ χωρητικότης αὐτῆς.

Λύσις. Ὁ ἐσωτερικὸς ὄγκος τῆς δεξαμενῆς εἶναι ὁ τῆς κολούρου πυραμίδος μὲ βάσεις τετραγώνους. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς μεγαλειτέρας βάσεως εἶναι $144^{\mu.\tau.}$· ἡ τῆς μικροτέρας $100^{\mu.\tau.}$· ἡ δὲ τῆς μέσης γεωμετρικῆς ἀναλόγου μεταξὺ τῶν βάσεων εἶναι $\sqrt{144\times100}=12\times10$, τουτέστιν $120^{\mu.\tau.}$· ἡ ἔκφρασις τῆς ζητουμένης χωρητικότητος εἶναι ἄρα $\frac{1}{3}\,2^{\mu.},10\,(144^{\mu.\tau.}+100^{\mu.\tau.}+120^{\mu.\tau.})$. Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν $254^{\mu.κ.},8$ ἢ 2548 ἑκατόλιτρα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς μεγαλειτέρας πυραμίδος τῆς Αἰγύπτου, ἥτις ἔχει βάσιν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 232,75 μέτρων, ὕψος δὲ 146 μέτρων.

Λύσις. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως εἶναι $(232,75)^2$, ὁ δὲ ὄγκος τῆς πυραμίδος $\frac{1}{3}(232,75)^2\times146=2636398^{\mu.κ.},032$, ὡς ἔγγιστα $0^{\mu.κ.},001$ κατὰ πλέον. Ἵνα λάβωμεν δὲ ἀκριβῆ ἰδέαν τοῦ ὑπερμεγέθους τούτου ὄγκου τῆς πυραμίδος, ὑποθέτομεν ὅτι σχηματίζομεν ἐκ τοῦ ὑλικοῦ, τοῦ συνιστῶντος τὴν πυραμίδα, τοῖχον ἔχοντα 2 μέτρων ὕψος, πλάτος δὲ $0^{\mu.},40$. Τὸ μῆκος τοῦ τοίχου τούτου θέλει εἶναι $\frac{2636398,032}{2\times0,40}=3270497$ μέτρων, τουτέστι 3270 χιλιομέτρων ὡς ἔγγιστα, διὰ τοῦ ὁποίου δύναται νὰ περιτοιχισθῇ ἡ Γαλλία περίπου.

§—21.

Πολύεδρα ὅμοια. Ἐὰν τμήσωμεν πυραμίδα, δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει, ἡ οὕτω προσδιοριζομένη μερικὴ πυραμὶς εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν ἀρχικὴν πυραμίδα. Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες, ὅταν ἔχωσιν ἀνὰ μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην, περιλαμβανομένην μεταξὺ δύο ὁμοίων ἑδρῶν, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμέναι, εἶναι ὅμοιαι. Ἀπόσύνθεσις τῶν ὁμοίων πολυέδρων εἰς ὁμοίας τριγωνικὰς πυραμίδας. Λόγος τῶν ὄγκων τῶν ὁμοίων πολυέδρων. Ἐφαρμογή. Διπλασίασις κύβου. Προβλήματα ἀναλυτικῆς γεωμετρίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Δύο πολύεδρα λέγονται *ὅμοια*, ὅταν ἔχωσι τὰς πολυέδρους γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ περιεχομένας ὑπὸ ἰσαρίθμων ἑδρῶν ὁμοίων. *Ὁμόλογα* δὲ λέγονται τὰ ἀντιστοιχοῦντα μέρη δύο ὁμοίων πολυέδρων.

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν πολυέδρων γωνιῶν συνεπάγεται ἡ ἰσότης τῶν ὁμολόγων διέδρων γωνιῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 69.

Δύο πολύεδρα ὅμοια ἔχουσι τὰς ὁμολόγους κόψεις ἀνάλογους.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ πρότασις ἐπαληθεύει διὰ τὰς κόψεις, αἵτινες ἀνήκουσιν εἰς δύο ὁμολόγους ἕδρας· ἀφ' ἑτέρου δὲ, αἱ ἕδραι τοῦ αὐτοῦ πολυέδρου συνδέονται ὑπὸ κοινὰς κόψεις, ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι οἱ λόγοι τῶν ὁμολόγων κόψεων, οἱαιδήποτε καὶ ἂν ὦσι, σχηματίζουσι σειρὰν ἴσων λόγων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 70.

Ἡ ἐκ τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔΕ, *τῆς δι' ἐπιπέδου αβγδε παραλλήλου τῇ βάσει γενομένης, προκύπτουσα μερικὴ πυραμὶς οαβγδε εἶναι ὁμοία τῇ ἀρχικῇ πυραμίδι* (Σχ. 96).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἀφ' ἑνὸς αἱ πλευραὶ αδ, βγ, γδ, κτλ. εἶναι διαδοχικῶς παράλληλοι ταῖς πλευραῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ. ὡς τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπό τινος τρίτου γενόμεναι, ἕπεται ὅτι αἱ ἕδραι αοδ, βογ, γοδ, κτλ.

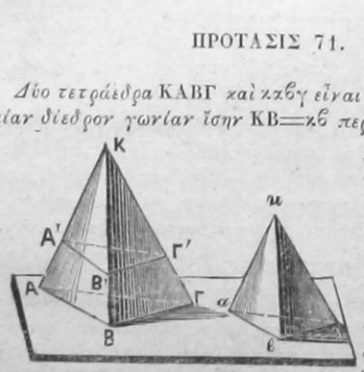
εἶναι διαδοχικῶς ὅμοιαι πρὸς τὰς ἕδρας ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, κτλ. Ἀλλ' ἡ ὁμοιότης τῶν ἑδρῶν τούτων δίδει τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$\frac{\alpha\beta}{AB} = \frac{o\beta}{OB} = \frac{\beta\gamma}{B\Gamma} = \frac{o\gamma}{O\Gamma} = \frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta} = \text{κτλ.}$$

ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι, τὰ πολύγωνα αβγδε καὶ ΑΒΓΔΕ ἔχουσι τὰς πλευρὰς των ἀναλόγους, ἔχουσι δὲ καὶ τὰς γωνίας ἴσας, ἐπειδὴ αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι. Ἄρα, αἱ δύο πυραμίδες ἔχουσι τὰς ἕδρας των ὁμοίας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· πρὸς δὲ τὴν στερεὰν γωνίαν Ο κοινήν. Ἀφ' ἑτέρου αἱ τρίεδροι γωνίαι ΑΟΒΕ καὶ αοβε ἔχουσι τὰς ἕδρας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ὡς καὶ τὰς διέδρους γωνίας (Πρότ. 34) ἴσας, πρὸς δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένας· ὅθεν αἱ δύο αὗται στερεαὶ γωνίαι ἐφαρμόζονται· ἄρα εἶναι ἴσαι. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ἰσότης καὶ τῶν λοιπῶν στερεῶν γωνιῶν Β καὶ β, Γ καὶ γ, κτλ. Λοιπόν, αἱ δύο πυραμίδες ἔχουσι καὶ τὰς στερεὰς αὐτῶν γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. Ἄρα αἱ πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 71.

Δύο τετράεδρα ΚΑΒΓ *καὶ καβγ εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχωσι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην* ΚΒ=κβ *περιεχομένην ὑπὸ ὁμοίων ἑδρῶν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένων* (Σχ. 100).



Σχ. 100.

Ἀπόδειξις. Μεταφέρομεν τὸ τετράεδρον καβγ ἐπὶ τοῦ ΚΑΒΓ οὕτως, ὥστε αἱ μὲν δίεδροι ἴσαι γωνίαι ΚΒ καὶ κβ νὰ συμπέσωσιν, ἡ δὲ κορυφὴ κ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Κ. Τούτου γενομένου, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ακβ καὶ ΑΚΒ, ἡ εὐθεῖα κα θέλει εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΚΑ, καὶ ἡ κγ ἐπὶ τῆς ΚΓ, τὸ δὲ τετράεδρον καβγ θέλει λάβει τὴν θέσιν ΚΑ'Β'Γ'.

Ἀλλ' αἱ γωνίαι αβκ καὶ ΑΒΚ εἶναι ἴσαι, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν ἑδρῶν ακβ καὶ ΑΚΒ, ὅθεν ἡ Α'Β' θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ· ὁμοίως καὶ ἡ Β'Γ' θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ. Λοιπόν, τὸ ἐπίπεδον Α'Β'Γ' εἶναι παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓ (Πρότ. 22), καὶ ἕνεκα τῆς προηγουμένης προτάσεως, ἡ πυραμὶς ΚΑ'Β'Γ' εἶναι ὁμοία τῇ πυραμίδι ΚΑΒΓ. Ἄρα αἱ προταθεῖσαι πυραμίδες καβγ καὶ ΚΑΒΓ εἶναι ὅμοιαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 72.

Δύο πολύεδρα, συντιθέμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τετραέδρων ὁμοίων καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένων, εἶναι ὅμοια.

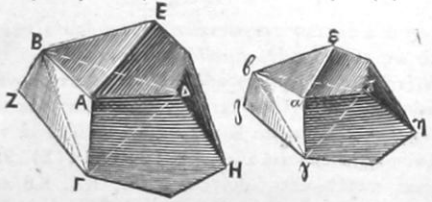
Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἀφ' ἑνὸς αἱ ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι, ὡς συντιθέμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριέδρων γωνιῶν ἴσων καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένων, εἶναι ἴσαι· ἀφ' ἑτέρου δέ, ἐὰν εἰς ἓν τῶν δύο πολυέδρων πληθύς τις τριγώνων εὑρίσκηται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ σχηματίζῃ πολύγωνον ἐπίπεδον, τὰ ὁμόλογα τρίγωνα τοῦ δευτέρου πολυέδρου θέλουσιν εἶναι ὁμοίως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων γωνιῶν τῶν ὁμολόγων τετραέδρων· πρὸς δὲ αἱ ὁμόλογοι ἕδραι θέλουσιν εἶναι ὅμοιαι, ἐπειδὴ συντίθενται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ὁμοίων τριγώνων κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένων. Ἄρα τὰ δύο πολύεδρα εἶναι ὅμοια.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 73.

Ἀντιστρόφως, δύο ὅμοια πολύεδρα ἀναλύονται εἰς ἰσοπλήθη ὅμοια τετράεδρα, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένα (Σχ. 101).

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν τὴν κόψιν ΑΓ τοῦ ἑνὸς τῶν πολυέδρων, καὶ ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τῶν τεμνομένων κατὰ τὴν κόψιν ταύτην, λαμβάνομεν τὰς κόψεις ΑΒ καὶ ΑΔ, ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἀρχιζοντες, οὕτω δὲ σχηματίζομεν τὸ τετράεδρον ΑΓΒΔ, τοῦ ὁποίου ἡ δίεδρος γωνία ΑΓ εἶναι ἡ τοῦ πολυέδρου. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐνεργοῦντες καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου

πολυέδρου, σχηματίζομεν τὸ ὁμόλογον τετράεδρον αγβδ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΓΒΔ, ἐπειδὴ ἀμφότερα ἔχουσι τὴν διέδρον γωνίαν ΑΓ=αγ, ὡς ὁμολόγους διέδρους γωνίας τῶν δύο πολυέδρων, τὰς ἕδρας ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ ὁμοίας μὲ τὰς ἕδρας αβγ καὶ αγδ, ὡς τρίγωνα ὁμόλογα, καὶ ἀποτελοῦντα μέρος τῶν δύο ὁμολόγων ἑδρῶν τῶν δύο πολυέδρων (Πρότ. 71).



Σχ. 101.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν ἀποσπάσωμεν ἐκ τῶν προταθέντων πολυέδρων τὰ δύο ταῦτα ὅμοια τετράεδρα, τὰ ἑναπολειπόμενα δύο πολύεδρα θέλουσιν εἶναι ὅμοια· κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐνεργοῦντες, θέλομεν ἀποσπάσει ὁμοίως δύο ὅμοια τετράεδρα, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἄρα, *δύο ὅμοια πολύεδρα ἀναλύονται εἰς ἰσοπληθῆ ὅμοια τετράεδρα καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένα.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 74.

Αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων κόψεων.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Κ καὶ κ δύο ὁμόλογοι κόψεις τῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων, Ε, Ε′, Ε″ κτλ. αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ἑδρῶν τοῦ πρώτου, καὶ ε, ε′, ε″ κτλ. αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ἑδρῶν τοῦ δευτέρου πολυέδρου, θέλομεν ἔχει (Πρότ. 85. Μέρος Α′) τὰς ἐκφράσεις

$$\frac{E}{\varepsilon}=\frac{K^2}{\kappa^2},\quad \frac{E'}{\varepsilon'}=\frac{K^2}{\kappa^2},\quad \frac{E''}{\varepsilon''}=\frac{K^2}{\kappa^2},\ \text{κτλ.}$$

Ἐκ τῶν ἐκφράσεων τούτων προκύπτει ἡ ἰσοπηλικότης

$$\frac{E}{\varepsilon}=\frac{E'}{\varepsilon'}=\frac{E''}{\varepsilon''}=\ldots=\frac{K^2}{\kappa^2},$$

καὶ ἑπομένως

$$\frac{E+E'+E''+\ldots}{\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''+\ldots}=\frac{K^2}{\kappa^2}.$$

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 75.

Οἱ ὄγκοι δύο ὁμοίων τριγωνικῶν πυραμίδων εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι δύο ὁμολόγων κόψεων.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ αἱ πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὴν μικροτέραν ἐντὸς τῆς μεγαλειτέρας οὕτως, ὥστε αἱ ἴσαι στερεαὶ γωνίαι Κ καὶ κ (Σχ. 100), νὰ ταύτισθῶσι, καὶ τότε αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΒΓ καὶ αβγ (Σχ. 95) θέλουσιν εἶναι παράλληλοι, διότι αἱ κόψεις ΚΑ, ΚΒ καὶ ΚΓ διαιροῦνται εἰς τὰ σημεῖα α, β καὶ γ, εἰς δύο μέρη, ἔχοντα πρὸς ἄλληλα σταθερόν τινα λόγον. Πρὸς δὲ, ἔστω ΚΔ (Σχ. 95) ἡ κοινὴ κάθετος, τῶν ἐπιπέδων τῆς βάσεως· κατὰ τὴν (Πρότ. 62), ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

$$\alpha\beta\gamma : ABΓ = K\delta^{-3} : K\Delta^{-3} \ldots . [1].$$

Ἀλλ' ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας αδ καὶ ΑΔ, αὗται θέλουσιν εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑφ' ἑνὸς τρίτου γενόμεναι· ὅθεν προκύπτει ἡ ἀναλογία

$$K\delta : K\Delta = K\alpha : KA \ldots . [2].$$

Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν [1] καὶ [2] ἕπεται ἡ ἑξῆς

$$\alpha\beta\gamma : ABΓ = K\alpha^{-2} : KA^{-2} \ldots [3].$$

Πολλαπλασιάζοντες λοιπὸν, μέλος πρὸς μέλος, τὰς ἀναλογίας [2] καὶ [3], καὶ διαιροῦντες διὰ 3 τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου λόγου, λαμβάνομεν τὴν ἰσοπληκότητα

$$\frac{\frac{1}{3}\alpha\beta\gamma\times K\delta}{\frac{1}{3}ABΓ\times K\Delta}=\frac{K\alpha^{-3}}{KA^{-3}} \ldots . [4].$$

Ἀλλ' οἱ δύο ὅροι τοῦ πρώτου λόγου τῆς [4] ἐκφράζουσι τοὺς ὄγκους τῶν πυραμίδων Καβγ καὶ ΚΑΒΓ (Πρότ. 65)· ἄρα

$$\frac{K\alpha\beta\gamma}{KABΓ}=\frac{K\alpha^{-3}}{KA^{-3}}.$$

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 76.

Οἱ ὄγκοι, δύο ὁμοίων πολυέδρων, εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι δύο ὁμολόγων κόψεων.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο, ὁ ὄγκος τοῦ πρώτου πολυέδρου, καὶ Π, Π′, Π″, κτλ. οἱ ὄγκοι τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων εἰς ἃς ἀναλύεται, πρὸς δὲ, Α, Α′, Α″ κτλ. αἱ ἐπὶ τῶν πυραμίδων τούτων λαμβανόμενοι κόψεις. Ὁμοίως ἔστωσαν ο, π, π′, π″ κτλ., α, ά, α′ κτλ. τὰ ἀντιστοιχοῦντα ποσὰ εἰς τὸ δεύτερον πολύεδρον. Θέλομεν ἔχει, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων, τὴν ἰσοπηλικότητα

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\acute{\alpha}}{A'} = \frac{\alpha''}{A''} = \text{κτλ. ἐξ ἧς, } \frac{\alpha^3}{A^3} = \frac{\acute{\alpha}^3}{A'^3} = \frac{\alpha''^3}{A''^3} = \text{κτλ. [1].}$$

Αἱ τριγωνικαὶ ὁμόλογοι πυραμίδες ἐπειδὴ εἶναι ὅμοιαι, ἔχομεν (Προτ. 75), τὰς σχέσεις

$$\frac{\pi}{\Pi} = \frac{\alpha^3}{A^3}, \quad \frac{\pi'}{\Pi'} = \frac{\acute{\alpha}^3}{A'^3}, \quad \frac{\pi''}{\Pi''} = \frac{\alpha''^3}{A''^3}, \text{ κτλ. . . [2],}$$

καὶ ἑπομένως, ἕνεκα τῶν ἴσων λόγων [1],

$$\frac{\pi}{\Pi} = \frac{\pi'}{\Pi'} = \frac{\pi''}{\Pi''} = \text{κτλ. καὶ, } \frac{\pi + \pi' + \pi'' + \text{κτλ.}}{\Pi + \Pi' + \Pi'' + \text{κτλ.}} = \frac{\pi}{\Pi},$$

τουτέστιν $\quad \frac{o}{O} = \frac{\pi}{\Pi}$.

Ἐπὶ τέλους, ἡ τελευταία αὕτη σχεσις, ἕνεκα τῆς πρώτης ἐκ τῶν [2], δίδει τὴν $\quad \frac{o}{O} = \frac{\alpha^3}{A^3}$.

Ὅπερ ἔδει δειξαι.

Ἐὰν αἱ κόψεις τοῦ ἑνὸς τῶν πολυέδρων ἐμπεριέχωσι δὶς τὰς ὁμολόγους κόψεις τοῦ δευτέρου, ὁ ὄγκος τοῦ πρώτου θέλει εἶναι ὀκταπλάσιος τοῦ δευτέρου πολυέδρου. Ἵνα ὦσιν οἱ ὄγκοι δύο πολυέδρων, ὡς 1 πρὸς 2, ἀρκεῖ αἱ ὁμόλογοι ἕδραι νὰ ὦσι πρὸς ἀλλήλας ὡς $\sqrt[3]{1}$ πρὸς $\sqrt[3]{2}$, τουτέστιν ὡς 1 πρὸς $\sqrt[3]{2}$.

Ἐν γένει, ἐὰν αἱ ὁμόλογοι κόψεις δύο ὁμοίων πολυέδρων ὦναι πρὸς ἀλλήλας ὡς μ πρὸς ν, οἱ ὄγκοι αὐτῶν θέλουσιν εἶναι ὡς μ^3 πρὸς ν^3. Ἐὰν οἱ ὄγκοι τῶν πολυέδρων ὦναι ὡς μ πρὸς ν, αἱ ὁμόλογοι κόψεις αὐτῶν θέλουσιν εἶναι ὡς $\sqrt[3]{\mu}$ πρὸς $\sqrt[3]{\nu}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὰ ὑπὸ καμπύλων ἐπιφανειῶν ἀποπερατούμενα σώματα, ἐπειδὴ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς πολύεδρα, τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι εἶναι ἀπειροελάχιστοι, ἔπεται ὅτι δύο ὁποιαδήποτε σώματα ὅμοια δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς πολύεδρα ὅμοια, καὶ ἑπομένως, ἕνεκα τῆς προηγουμένης προτάσεως, *οἱ ὄγκοι, δύο ὁποιωνδήποτε ὁμοίων σωμάτων, εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων γραμμῶν των.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 73. Εἰς τὴν μηχανικὴν, ἀρχιτεκτονικὴν καὶ ἐν γένει εἰς τὰς τέχνας, ὅταν πρόκηται νὰ κατασκευασθῇ τι, οἷον μηχανὴ, οἰκοδομὴ, σκεῦος, κτλ. ἐκ τῶν προτέρων καταρτίζομεν εἰς σμικρὸν τὸ σχέδιον, ἢ τὸ πρότυπον τοῦ κατασκευάσματος τούτου. Τοῦ τελευταίου τὸν ὄγκον ἢ τὴν χωρητικότητα προσδιορίζομεν, καταμετροῦντες τὸν ὄγκον ἢ τὴν χωρητικότητα τοῦ σχεδίου ἢ τοῦ προτύπου, καὶ ἐφαρμόζομεν τὴν Πρότασιν 76.

Τῷ ὄντι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ κλίμαξ τοῦ σχεδίου ἢ τοῦ προτύπου εἶναι τὸ ἑκατοστόμετρον, ὁ λόγος τῶν κύβων, τῶν ὁμολόγων κόψεων τοῦ κατασκευάσματος καὶ τοῦ προτύπου, θέλει εἶναι ὡς $(1)^3$ πρὸς $(100)^3$, ἢ ὡς 1 πρὸς 1000000. Ὅθεν, ἀφοῦ καταμετρηθῇ ὁ ὄγκος ἢ ἡ χωρητικότης τοῦ προτύπου ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῇ αὕτη ἐπὶ 1000000, ὅπως εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἢ ἡ χωρητικότης τοῦ κατασκευάσματος.

Εἶναι βέβαιον ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 1000000 μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ νὰ θεωρήσωμεν τὰ κυβικὰ ἑκατοστόμετρα ὡς κυβικὰ μέτρα.

Ὁμοίως προσδιορίζομεν τὸν λόγον κατὰ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ αὐξήσωμεν τὰς διαστάσεις τοῦ προτύπου, ἵνα ὁ ὄγκος αὐτοῦ αὐξηθῇ κατὰ δεδομένον λόγον, ὡς ἐξῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι κατηρτίσθη δι' ἐργοστάσιον τὸ πρότυπον λέβητος, τοῦ ὁποίου ἡ χωρητικότης εἶναι 4 λιτρῶν, καὶ ὅτι πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ τοῦ προτύπου τούτου λέβης, χωρητικότητα ἔχων 40 ἑκατολίτρων ἢ 4000 λιτρῶν. Τούτου τεθέντος, ἐὰν σημειώσωμεν διὰ Μ καὶ μ δύο ὁποιασδήποτε ὁμολόγους γραμμὰς τοῦ τε λέβητος καὶ τοῦ προτύπου, ἔχομεν (Πρότ. 76) τὴν ἀναλογίαν

$$4000^{\text{λίτρ.}} : 4^{\text{λίτρ.}} = M^3 : \mu^3 \text{ ἢ τὴν } M^3 : \mu^3 = 1000 : 1,$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα

$$M : \mu = \sqrt[3]{1000} : \sqrt[3]{1} \text{ ἢ τὴν } M : \mu = 10 : 1,$$

Ἡ τελευταία αὕτη ἀναλογία δεικνύει ὅτι αἱ ὁμόλογοι διαστάσεις τοῦ προτύπου πρέπει νὰ δεκαπλασιασθῶσιν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 74. Διπλασίασις κύβου. Τὸ πρόβλημα τοῦτο συνίσταται εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ ἡ κόψις κύβου, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι διπλάσιος τοῦ ὄγκου δεδομένου κύβου. Ἵνα ἔχωμεν τὴν ἀριθμητικὴν αὐτοῦ λύσιν, ἔστω α ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου κύβου, καὶ Χ ἡ τοῦ ζητουμένου· κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἔχομεν τὴν σχέσιν $X^3=2a^3$, ἐξ ἧς προκύπτει

$$X=a\sqrt[3]{2}=a\times 1,2599\ldots$$

Ἄρα, εὑρίσκεται ἡ πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου, πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐκφράζοντος τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου κύβου, ἐπὶ τὴν κυβικὴν βίζαν τοῦ 2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ πρὸς λύσιν. Νὰ εὑρεθῇ κύβος διπλάσιος τοῦ $(1,52)^3$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11. Νὰ εὑρεθῇ κύβος διπλάσιος δεδομένου κύβου a^3.

Ἀλγεβρικὴ λύσις. Ἔστω Χ ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου κύβου· κατὰ τὴν ἐκφώνησιν ἔχομεν $2a^3=X^3$. Ἐὰν λοιπὸν ζητήσωμεν μεταξὺ τῆς πλευρᾶς α, τοῦ δεδομένου κύβου, καὶ τοῦ διπλασίου αὐτῆς 2α, δύο μέσας ἀναλόγους, ἡ πρώτη αὐτῶν θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου κύβου. Τῷ ὄντι, ἔστω ἡ μὲν πρώτη τῶν μέσων Χ, ἡ δὲ δευτέρα Υ, ἔχομεν (Πρόβλ. 2. §. 13), τὰς ἀναλογίας

$$a : X=X : Y \quad \text{καὶ} \quad X : Y=Y : 2a$$

ἐξ ὧν ποριζόμεθα τὰς ἐξισώσεις

$$aY=X^2 \quad \text{καὶ} \quad 2aX=Y^2 \ldots [1].$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως λαμβάνοντες τὴν τιμὴν τοῦ Υ, τὴν ὁποίαν ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος $2a^3=X^3$.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων [1] ποριζόμεθα ὅτι, ἡ μὲν πρώτη τῶν μέσων ἀναλόγων εἶναι $X=a\sqrt[3]{2}$, ἡ δὲ δευτέρα $Y=\frac{(a\sqrt[3]{2})^2}{a}$.

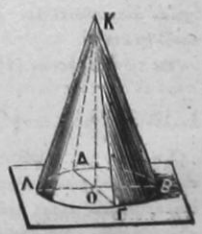
Σημείωσις. Πρῶτος ὁ Ἱπποκράτης ὁ χῖος ἐπεννόησεν ὅτι, ἐὰν εὑρεθῶσι δύο εὐθειῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος εἶναι διπλασία, δύο μέσαι ἀνάλογοι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, θέλει διπλασιασθῇ ὁ κύβος. Διὰ τὴν ἀρχὴν δὲ τοῦ προβλήματος τούτου, ἐκτὸς ἄλλων, λέγουσιν ὅτι ἐπιβληθείσης νόσου τοῖς Δηλίοις, κατὰ τὸν χρησμόν, διετάχθησαν νὰ διπλασιάσωσιν ἕνα τῶν βωμῶν. Ἀπεστάλησαν λοιπὸν εἰς τοὺς ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ τοῦ Πλάτωνος γεωμέτρας, ζητοῦντες παρ' αὐτῶν τὴν λύσιν τοῦ ζητήματος. Ἀρχύτας μὲν ὁ Ταραντῖνος λέγεται ὅτι διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὗρε τὴν λύσιν τῶν δύο μέσων ἀναλόγων· ὁ Εὔδοξος δέ, διὰ τῶν καμπύλων γραμμῶν. Αἱ λύσεις αὗται, ἐπειδὴ δὲν ἦσαν εὔχρηστοι διὰ τὰς συνήθεις ἀνάγκας, ὁ Μένεχμος ἐφεῦρε εὔκολον καὶ κατάλληλον, ἥτις εἶναι ἡ πρόσκτεθεῖσα. Διὰ διαφόρων μηχανικῶν μεθόδων κατήντησαν εἰς τὸ αὐτό, Πλάτων, Ἥρων, Φίλων ὁ Βυζάντιος, Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος, Διοκλῆς, Πάππος, Σπόρος, Ἀρχύτας, Νικομήδης καὶ Ἐρατοσθένης.

§.—22.

Κῶνος. Παράλληλοι τομαὶ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου. Κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, τοῦ κολούρου κώνου μὲ παραλλήλους βάσεις. Ὄγκος τοῦ κώνου καὶ τοῦ κολούρου κώνου. Χωρητικότης τῶν βυτίδων. Κυβισμὸς τῶν ἀνεκφλοιώτων ξύλων. Κύλινδρος ὀρθὸς μὲ κυκλικὰς βάσεις. Μέτρον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. *Κῶνος* καλεῖται τὸ παραγόμενον στερεὸν ἐκ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ΑΟΚ (Σχ. 102), περί τινα τῶν πλευρῶν ΚΟ τῆς ὀρθῆς γωνίας Ο.

Ἐν τῇ περιστροφικῇ ταύτῃ κινήσει, ἡ μὲν πλευρὰ ΑΟ παράγει κυκλικὸν ἐπίπεδον ΑΔΒΓ, ὅπερ *βάσις* τοῦ *κώνου* καλεῖται, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΑΚ τοῦ τριγώνου, παράγει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. Τὸ σημεῖον Κ, εἶναι ἡ *κορυφὴ* τοῦ *κώνου*, ἡ εὐθεῖα ΟΚ, ὁ *ἄξων* ἢ τὸ *ὕψος* τοῦ *κώνου*, καὶ ἡ ὑποτείνουσα ΑΚ, ἡ *πλευρὰ* ἢ ἡ *γεννήτρια* τοῦ κώνου.



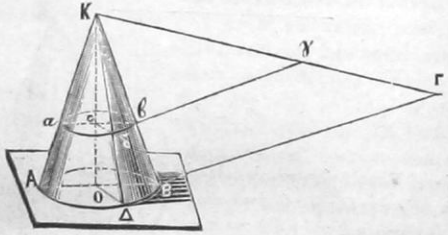
Σχ. 102.

Πᾶσα κωνικὴ τομὴ ΚΔΓ, διὰ τοῦ ἄξονος διερχομένη, εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον διπλάσιον τοῦ γεννήτορος τριγώνου ΚΟΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 77.

Πᾶσα κωνικὴ τομὴ αδδ, ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῆς βάσεως τοῦ κώνου γενομένη, εἶναι κύκλος (Σχ. 103).

Ἀπόδειξις. Ἔστω ο τὸ σημεῖον, ἔνθα τὸ ἐπίπεδον ἁπαντᾷ τὸν ἄξονα, καὶ ΚαΑ, ΚδΔ δύο οἱαιδήποτε πλευραί. Ἀγομεν τὰς εὐθείας οα, οδ κτλ. ΟΑ, ΟΔ, κτλ. Αἱ εὐθεῖαι οα καὶ ΟΑ



Σχ. 103.

θέλουσιν εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου τινὸς ΑΟΚ γενόμεναι· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ οδ εἶναι παράλληλος τῇ ΟΔ. Λοιπόν, ἕπεται ἡ ἀναλογία

$$\text{οα} : \text{ΑΟ} = \text{Κο} : \text{ΚΟ} = \text{δο} : \text{ΔΟ}.$$

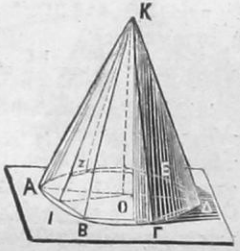
Ἀλλά, ΑΟ=ΟΔ· λοιπὸν καὶ αο = οδ· ἐν ἄλλοις λόγοις, τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης αδβ ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ σημείου ο· λοιπόν, ἡ καμπύλη εἶναι περιφέρεια κύκλου, τοῦ ὁποίου κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον ο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κώνου ΚΑΔΒ ἀφαιρεθῇ ὁ προκύπτων κῶνος Καδβ διά τινος παραλλήλου τῇ βάσει ΑΔΒ τομῆς, τὸ μένον στερεὸν αΑΔΒδβ καλεῖται *κόλουρος* κῶνος ἢ *κορμὸς* κώνου. Ὁ κόλουρος κῶνος αΑΔΒδβ παράγεται ἐκ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ τραπεζίου οΟΑα περὶ τὴν πλευρὰν οΟ, τὴν κάθετον ἐπὶ τῶν δύο παραλλήλων αὐτοῦ βάσεων ΑΟ καὶ αο. Ἡ ἀκίνητος εὐθεῖα οΟ καλεῖται *ἄξων* ἢ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου, οἱ κύκλοι ΑΔΒ καὶ αδβ *βάσεις*, ἡ δὲ Αα *πλευρὰ* τοῦ κολούρου κώνου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 78.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου (Σχ. 104).

Ἀπόδειξις. Εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου ἐγγράφομεν κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ, ἑνοῦμεν τὴν κορυφὴν Κ μὲ ἑκάστην κορυφὴν τοῦ πολυγώνου, καὶ οὕτω σχηματίζεται *ἐγγεγραμμένη κανονικὴ πυραμὶς* εἰς τὸν κῶνον, τῆς ὁποίας ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια συντίθεται ἐξ ἴσων πρὸς ἄλληλα ἰσοσκελῶν τριγώνων.



Σχ. 104.

Ἔστω ΚΙ, τὸ ὕψος ἑνὸς τῶν τριγώνων τούτων· τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος ἐπὶ $\frac{1}{2} \times$ ΚΙ. Ἀλλ' ἐὰν διπλασιάσωμεν ἀδιακόπως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕΖ, ἡ περίμετρος τῆς βάσεως ταύτης θέλει ἔχει ὡς ὅριον τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἡ εὐθεῖα ΚΙ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου, ἡ δὲ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, θέλει ἔχει ὡς ὅριον τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. Ἄρα διὰ τὸ ὅριον, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου θέλει εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς περιφερείας ΟΑ ἐπὶ $\frac{1}{2} \times$ ΚΑ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν Α ᾖναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου, καὶ Π ἡ πλευρά, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου θέλει εἶναι

$$2\pi\text{Α} \times \frac{\Pi}{2} = \pi\text{Α} \times \Pi.$$

Ἡ ὁλόκληρος δὲ ἐπιφάνεια

$$\pi\text{ΑΠ} + \pi\text{Α}^2 = \pi\text{Α}\ (\text{Α} + \Pi).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12. Ποία εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κωνικῆς στέγης πύργου, ἐχούσης $6^{\mu},8$ διάμετρον τῆς βάσεως, πλευρὰν δὲ $4^{\mu},4$;

Δύσις. Ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια, κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς τετραγωνικοῦ δεκατομέτρου, εἶναι $3,14159 \times 3^{\mu},4 \times 4^{\mu},4 = 46^{\mu.\tau.},99$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 79.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου ΑΔΒαδβ *ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ* (Σχ. 103).

Ἀπόδειξις. Ὑψοῦμεν εἰς τὸ σημεῖον Β, κάθετον ἐπὶ τῆς ΚΒ, εἰς τὴν ὁποίαν δίδομεν τὸ μῆκος ΒΓ ἴσον τῇ εὐθύνσει τῆς περιφερείας ΟΒ· ἐπιζευγνύομεν τὴν ΚΓ, καὶ ἄγομεν τὴν βγ παράλληλον τῇ ΒΓ. Ἐκ τῆς τοιαύτης κατασκευῆς ἔπεται ἡ ἰσοπλικότης

$$\frac{\beta\gamma}{B\Gamma} = \frac{K\beta}{KB} = \frac{o\beta}{OB} = \frac{\text{περιφ.}o\beta}{\text{περιφ.}OB}.$$

Ἀλλὰ ΒΓ=περιφ. ΟΒ, λοιπὸν καὶ βγ=περιφ. οβ. Τούτου τεθέντος, τὸ μὲν τρίγωνον ΚΒΓ ἔχει ὡς μέτρον ΒΓ×½ ΚΒ, ἤ περιφ. ΟΒ×½ ΚΒ, τουτέστιν τὸ μέτρον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ὅλου κώνου· τὸ δὲ τρίγωνον Κβγ ἔχει ὡς μέτρον βγ×½ Κβ, ἤ περιφ. οβ×½ Κβ, ὅπερ εἶναι τὸ μέτρον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ μικροῦ κώνου Καβ. Λοιπόν, τὸ τραπέζιον ΒΓβγ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου. Ἀλλὰ τὸ τραπέζιον τοῦτο ἔχει ὡς μέτρον

$$\tfrac{1}{2}(B\Gamma + \beta\gamma) \times B\beta.$$

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου ἔχει ἄρα δι' ἔκφρασιν

$$\tfrac{1}{2}(\text{περιφ. }OB + \text{περιφ. }o\beta) \times B\beta,$$

ἥτις ἱκανοποιεῖ τὴν ἐκφώνησιν τῆς προτάσεως.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. Καλοῦντες Α καὶ α τὰς ἀκτῖνας τῶν δύο βάσεων, Π τὴν πλευράν, καὶ Ε τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου, θέλομεν ἔχει τὸν τύπον

$$E = \pi(A + \alpha)\Pi.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἑνόνει τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν Ββ καὶ Γγ τοῦ τραπεζίου, ἰσοδυναμεῖ τῇ περιφερείᾳ, τῇ προσδιοριζομένῃ ὑφ' ἑνὸς ἐπιπέδου ἀγομένου παραλλήλως καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου. *Ἄρα, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς μέσης περιφερείας ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 3. Ἐκ τοῦ μέσου Ι τῆς Ββ φέρομεν τὴν Ιμ κάθετον ἐπὶ τῆς Κο, τὴν Ιν κάθετον ἐπὶ τῆς βΒ, καὶ τὴν βπ, κάθετον ἐπὶ τῆς ΟΒ. Τούτου γενομένου, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου ἐκφράζεται οὕτω (Σχ. 105),

περιφ. Ιμ×Ββ ἤ 2π.Ιμ×Ββ.

Ἀλλὰ, τὰ τρίγωνα Ιμν καὶ βπΒ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· λοιπόν,

$$I\mu : I\nu = \beta\pi : \beta B,$$

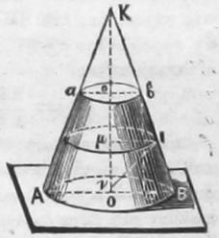
ἐξ ἧς προκύπτει

$$I\mu \times B\beta = I\nu \times \beta\pi.$$

διὰ τῆς τελευταίας ταύτης σχέσεως ἡ ἔκφρασις τῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου τρέπεται εἰς τὴν

$$2\pi \times I\nu \times \beta\pi \text{ ἤ } 2\pi \times I\nu \times Oo,$$

ἥτις ἐκφωνεῖται οὕτως· «*ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας ἀκτὶς εἶναι ἡ εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ὑψουμένη κάθετος καὶ μέχρι τοῦ ἄξονος προεκτεινομένη, ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κώνου*».



Σχ. 105.

Τοιαύτη ἔκφρασις δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ εἰς ὁλόκληρον τὸν κῶνον· ἐπειδὴ οὗτος εἶναι κόλουρος κῶνος, τοῦ ὁποίου ἡ ἄνω βάσις εἶναι μηδέν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 80.

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἔχει ὡς μέτρον τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ (Σχ. 104).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, γνωρίζομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη πυραμὶς ΚΑΒΓΔΕΖ ἔχει ὡς μέτρον ⅓ ΑΒΓΔΕΖ×ΚΟ, ἀφ' ἑτέρου δὲ, ἐὰν διπλασιάσωμεν ἀδιακόπως τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑδρῶν, ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος τείνει ἀδιακόπως πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου, τείνει ἀδιακόπως πρὸς τὴν βάσιν ταύτην, ἔπεται λοιπὸν ὅτι διὰ τὸ ὅριον θέλομεν ἔχει

$$\text{Κῶνος } KAB\Delta Z = \tfrac{1}{3} \text{ κυκλ. } AO \times KO,$$

ᾖ, καλοῦντες Ο τὸν ὄγκον τοῦ κώνου, Υ τὸ ὕψος, καὶ Α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως $\quad O=\frac{1}{3}.\pi A^2.Υ$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 15. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, οὗτινος ἡ ἀκτὶς εἶναι $0^{\mu},25$, τὸ δὲ ὕψος $0^{\mu},50$.

Λύσις. Εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστομέτρου κυβικοῦ $\quad O=\frac{1}{3}.3,1415926.(0^{\mu},25)^3.0^{\mu},50=0^{\mu.κ.},032725$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 81.

Ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου ἔχει ὡς μέτρον τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων αὐτοῦ καὶ τῆς μέσης γεωμετρικῆς ἀναλόγου μεταξὺ τῶν βάσεων τούτων.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ὁ κόλουρος κῶνος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κόλουρος πυραμίς, τῆς ὁποίας αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ πολύγωνα ἀπείρου ἀριθμοῦ πλευρῶν ἀπειροελαχίστων, ἕπεται ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ὄγκου τοῦ κολούρου κώνου ἄγεται εἰς τὸ τῆς κολούρου πυραμίδος.

Λοιπόν, καλοῦντες Ο τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου, Α καὶ α τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεων, καὶ Υ τὸ ὕψος αὐτοῦ, θέλομεν ἔχει, παρατηροῦντες ὅτι πA^2 εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς κάτω βάσεως, πa^2 ἡ τῆς ἄνω βάσεως, καὶ $\sqrt{\pi a^2\times\pi A^2}$ ἢ $\pi A a$ ἡ μέση γεωμετρικὴ ἀνάλογος μεταξὺ τῶν βάσεων τούτων,

$$O=\frac{1}{3}.Υ\,(\pi A^2+\pi a^2+\pi A a),$$

τουτέστιν $\quad O=\frac{1}{3}.\pi Υ\,(A^2+a^2+A a)$. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 14. Ζητεῖται κατὰ προσέγγισιν μιᾶς λίτρας, ἡ χωρητικότης κάδου, τοῦ ὁποίου ὁ πυθμὴν ἔχει $1^{\mu},80$ διάμετρον, τὸ δὲ στόμιον $2^{\mu},20$, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ βάθος εἶναι $1^{\mu},50$.

Λύσις. Κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν ἔχομεν διὰ τὴν χωρητικότητα τοῦ κάδου,

$$O=\frac{1}{3}\times 3,14159\times 1^{\mu},5[(0^{\mu},9)^2+(1^{\mu},1)^2+0^{\mu},9\times 1^{\mu},1].$$

ἢ $O=4^{\mu.κ.},728$, τουτέστι 47 ἑκατόλιτρα καὶ 28 λίτρας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 15. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, οὗτινος ἡ πλευρὰ ὡς καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι ἓν μέτρον.

Λύσις. Τὸ ὕψος τοῦ κώνου προσδιορίζεται ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ

ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τὸ ὕψος καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου. Λοιπόν, τὸ ζητούμενον ὕψος εἶναι $\sqrt{1^2-0,5^2}=\sqrt{0,75}$, ὁ δὲ ζητούμενος ὄγκος $\frac{1}{3}.0,5^2\times\sqrt{0,75}\times\pi=0,2267$ μέτρα τετραγωνικὰ, κατὰ προσέγγισιν $0,0001$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 16. Ζητεῖται ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου, οὗτινος τὸ ὕψος εἶναι $0^{\mu},42$, ὁ δὲ ὄγκος 25 κυβικὰ δεκατόμετρα.

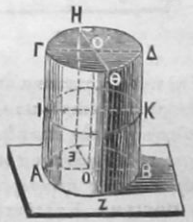
Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν Α τὴν ἀκτῖνα, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\frac{1}{3}.\pi A^2\times 0^{\mu},42=0^{\mu},025.$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\quad A^2=\frac{0,025\times 3}{0,42\times\pi}=\frac{25}{140}\times\frac{1}{\pi}=0^{\mu},05641$,

τουτέστιν $\quad A=\sqrt{0,05641}=0^{\mu},238$ μετὸν $0,001$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Καλεῖται *ὀρθὸς κύλινδρος* μὲ κυκλικὰς βάσεις, ἡ ἁπλῶς ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος, τὸ παραγόμενον στερεὸν ἐκ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως ὀρθογωνίου τινὸς ΑΟΟ'Γ περί τινα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΟΟ'. Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην αἱ πλευραὶ ΟΑ καὶ Ο'Γ, οὖσαι πάντοτε κάθετοι ἐπὶ τῆς ΟΟ', παράγουσι δύο ἴσους καὶ παραλλήλους κύκλους, οἵτινες καλοῦνται *βάσεις* τοῦ κυλίνδρου. Ἡ πλευρὰ ΑΓ παράγει *τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν* τοῦ κυλίνδρου καὶ καλεῖται *γενέτρια*, ἡ δὲ ἀκίνητος πλευρὰ ΟΟ' καλεῖται *ἄξων* ἢ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.



Σχ. 106.

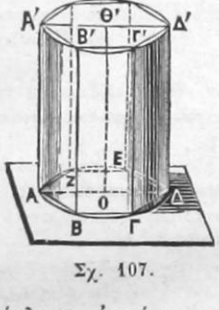
Ἐπειδὴ, ἑκάστου σημείου τῆς ΑΓ, στρεφόμενον περὶ τὴν ΟΟ' παράγει κύκλον ἴσον καὶ παράλληλον μὲ ἑκατέραν τῶν βάσεων, ἕπεται ὅτι πᾶσα κυλινδρικὴ τομὴ ΙΚ, ὑπὸ καθέτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδου γενομένη, εἶναι κύκλος ἴσος πρὸς ἑκατέραν τῶν βάσεων (Σχ. 106).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 82.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ (Σχ. 107).

Ἀπόδειξις. Ἐγγράφομεν εἰς τὴν κάτω βάσιν τοῦ κυλίν-

δρου πολύγωνον κανονικόν, τὸ ΑΒΓΔΕΖ, ἐξ ἑκάστης κορυφῆς τοῦ ὁποίου φέρομεν τὰς γεννητρίας ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, κτλ., ἑνοῦμεν τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων καὶ οὕτω σχηματίζομεν κανονικὸν πρίσμα ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα τοῦτο εἶναι ὀρθόν, αἱ παράπλευροι ἕδραι αὐτοῦ εἰσὶ σχήματα ὀρθογώνια τοῦ αὐτοῦ ὕψους, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν ἁπάντων τῶν ὀρθογωνίων τούτων σχημάτων, τουτέστιν ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν γενν ήτριαν, ἡ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Λοιπόν, ἐὰν αὐξήσωμεν ἀδιακόπως τὴν πλευρὰν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ, ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος θέλει ἔχει ὡς ὅριον τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ περίμετρος τοῦ πολυγώνου τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. Ἄρα, *ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*



Σχ. 107.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Καλοῦντες Α τὴν ἀκτῖνα τῆς κυκλικῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, Υ τὸ ὕψος, καὶ Ε τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, θέλομεν ἔχει $E = 2\pi A\Upsilon$, διὰ δὲ τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, ἥτις συνίσταται ἐκ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ηὐξημένης κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν τῶν δύο βάσεων, τὴν ἔκφρασιν, $2\pi.A.\Upsilon + 2\pi.A^2$ ἢ $2\pi A \times (\Upsilon + A)$.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν σχίσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον πρίσματος, κατά τινα κόψιν ΒΒ′ (Σχ. 107), εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ ἐπί τινος ἐπιπέδου, κατὰ ὀρθογώνιον σχῆμα, ἔχοντος βάσιν μὲν, τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου, ὕψος δὲ, τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ ἐπί τινος ἐπιπέδου κατά τι ὀρθογώνιον σχῆμα, ἔχοντος ὕψος μὲν, τὸ τοῦ κυλίνδρου, βάσιν δὲ, τὴν περιφέρειαν τῆς κυκλικῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 83.

Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι προφανὴς, ὅταν θεωρήσωμεν τὸν κύλινδρον ὡς τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸν πρίσμα, τοῦ ὁποίου ἡ πληθὺς τῶν ἑδρῶν αὐξάνει ἀδιακόπως.

Λοιπόν, καλοῦντες Ο τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου, Α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως, καὶ Υ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἔχομεν τὴν ἔκφρασιν

$$O = \pi A^2.\Upsilon.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 17. Ὀπόση ποσότης σιδηροφύλλου ἀπαιτεῖται ἵνα κατασκευασθῇ σωλὴν μήκους μὲν 8 μέτρων διαμέτρου δὲ $0^{\mu},6$;

Λύσις. Κατὰ τὴν πρότ. 82 ἔχομεν

$$E = 2 \times 3,14159 \times 0,3 \times 8 = 15,^{\mu.\tau}08.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. 18. Ζητεῖται, κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς κυβικοῦ ἑκατοστομέτρου, ὁ ὄγκος τοῦ ἀτμοῦ, τὸν ὁποῖον περιέχει ὁ κύλινδρος ἀτμομηχανῆς, οὗτινος ἡ διάμετρος εἶναι $0^{\mu},5$ τὸ δὲ ὕψος $0^{\mu},8$.

Λύσις. Κατὰ τὴν πρότασιν 83 ἔχομεν

$$O = 3,141592\,(0^{\mu},25)^2.0^{\mu},8 = 1,^{\mu.κ}.570796.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 19. Ζητεῖται ἡ διάμετρος κυλινδρικοῦ δοχείου, οὗτινος τὸ βάθος εἶναι $2^{\mu},4$, ἡ δὲ χωρητικότης 1200 ἑκατολίτρων.

Λύσις. Ἐπειδὴ 1200 ἑκατόλιτρα ἰσοδυναμοῦσι πρὸς $120^{\mu.κ.}$, καλοῦντες λοιπὸν Χ τὴν ἀκτῖνα τοῦ δοχείου, ἔχομεν

$$120^{\mu.κ.} = \pi X^2 \times 2,40.$$

ἑπομένως

$$X = \sqrt{\frac{120}{\pi \times 2,4}} = \sqrt{\frac{50}{\pi}} = \sqrt{\frac{25 \times 2}{\pi}} = 5\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{1}{\pi}} =$$

$$= 2,821 \times \sqrt{2} = 2,821 \times 1,414 = 3^{\mu},989.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 20. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὰ μέτρα τῆς χωρητικότητος τῶν ρευστῶν ἔχουσι σχῆμα κυλίνδρου, οὗτινος τὸ ὕψος εἶναι διπλάσιον τῆς διαμέτρου, ζητεῖται ἡ διάμετρος τῆς λίτρας.

Λύσις. Λαμβάνοντες ὡς μονάδα μήκους τὸ δεκατόμετρον, ὡς μονάδα δὲ ὄγκου τὸ κυβικὸν δεκατόμετρον, τουτέστι τὴν λίτραν, καὶ καλοῦντες Α τὴν ἀκτῖνα τοῦ κυλίνδρου, 2Α τὴν διάμετρον καὶ 4Α τὸ ὕψος αὐτοῦ, θέλομεν ἔχει τὴν σχέσιν

$$1 = \pi A^2 \times 4A = 4\pi A^3.$$

ἐξ ἧς προκύπτει $A^3 = \frac{1}{4\pi} = 0{,}079577471\ldots.$

καὶ ἐπομένως $A = \sqrt[3]{0{,}079577471} = 0^{\delta.\mu.}{,}430.$

Λοιπὸν ἡ διάμετρος τῆς λίτρας εἶναι $0^{\delta.\mu.}{,}86$, ἢ 86 χιλιοστόμετρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς 172 χιλιοστόμετρα.

ΠΙΝΑΞ

τῶν διαστάσεων τῶν κυριωτέρων κυλινδρικῶν μέτρων.

Διὰ τὰ ῥευστὰ ἢ ὑγρά.				Διὰ τὰ ξηρὰ ἢ στερεά.		
Ὀνομασία μέτρου.	Διάμετρος.	Ὕψος.	χωρεῖ λίτρας.	Ὀνομασία μέτρου.	Διάμετρος καὶ ὕψος.	χωρεῖ λίτρας.
Λίτρα	0,086	0,172	1	$\frac{1}{4}$ κοιλοῦ.	0,3162	25
Δεκάλιτρον	0,185	0,371	10	Ἡμίκοιλον.	0,3994	50
Ἑκατόλιτρον	0,40	0,80	100	Κοιλόν.	0,5033	100

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 21. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τῆς τοιχοποιΐας φρέατος κυλινδρικοῦ σχήματος, καὶ ἔχοντος βάθος μὲν $4^{\mu}{,}75$, διάμετρον δὲ ἐσωτερικὴν $0^{\mu}{,}62$. Τὸ ὁμοιόμορφον πάχος τῆς τοιχοποιΐας ταύτης εἶναι $0^{\mu}{,}35$.

Λύσις. Ὁ ζητούμενος ὄγκος τῆς τοιχοποιΐας εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων δύο κυλίνδρων, ἐχόντων ὕψος μὲν τὸ αὐτό, διάμετρον δὲ $0^{\mu}{,}62$, καὶ $0{,}62+0{,}35=0{,}97$· λοιπὸν ὁ ζητούμενος ὄγκος ἰσοῦται μὲ

$$\pi\times(0{,}97)^2\times 4{,}75 - \pi\times(0{,}62)^2\times 4{,}75,$$

τουτέστι $\pi\times(0{,}97^2-0{,}62^2)\times 4{,}75 = 8^{\mu.κ.}{,}304$

(Ἐφαρμ. 89. Μέρος Α′).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 22. Ζητεῖται πόσαι ὀπτόπλινθοι (τοῦβλα) ἀπαιτοῦνται πρὸς κατασκευὴν 1825 κυβικῶν μέτρων τοιχοποιΐας.

Λύσις. Ἑκάστη πλίνθος ἔχει μῆκος μὲν $0^{\mu}{,}24$, πλάτος δὲ $0^{\mu}{,}12$, καὶ πάχος $0^{\mu}{,}04$, συμπεριλαμβανομένης καὶ τῆς μεταξὺ αὐτῶν ἀμμοκονίας, τουτέστιν ἔχει στερεότητα $0{,}001152^{\mu.κ.}$ ἢ 1152 κυβικῶν ἑκατοστομέτρων· ἐπειδὴ δὲ τὸ κυβικὸν μέτρον περιέχει 1000000 κυβικὰ ἑκατοστόμετρα, ἕπεται ὅτι $\frac{1000000}{1152} = 868$ εἶναι

ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀπτοπλίνθων, αἵτινες ἀναγκαιοῦσι δι' ἕκαστον κυβικὸν μέτρον. Λοιπόν, πρὸς κατασκευὴν τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος τοίχου ἐν ὅλοις, ἀπαιτοῦνται ὀπτόπλινθοι $1825\times 868 = 1584100$.

ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΣ ΤΩΝ ΒΥΤΙΔΩΝ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 75. Τὸ σχῆμα τῆς βυτίδος, μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς κυρτότητος τῶν δουγιῶν (*douves*), αἵτινες τὴν συνιστῶσι, δύναται νὰ θεωρηθῇ συγκείμενον ἐκ δύο κολούρων κώνων, ἐχόντων μεγάλην μὲν βάσιν κοινὴν, τὸν μεσαῖον κύκλον τῆς βυτίδος, μικρὰς δὲ βάσεις, τοὺς ἀκροτελευταίους κύκλους τῆς βυτίδος.

Τούτου τεθέντος, ὅπως προσδιορίσωμεν λοιπὸν τὴν στερεότητα βυτίδος τινὸς, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸ διπλάσιον τῆς στερεότητος τοῦ κολούρου κώνου, τοῦ ἔχοντος βάσεις τοὺς δύο ῥηθέντας κύκλους (Προτ. 81). Διὰ μεγαλειτέραν προσέγγισιν ὑποδιαιροῦμεν τὴν βυτίδα εἰς πλειοτέρους τῶν δύω κολούρων κώνων.

Ἐν Ἀγγλίᾳ πρὸς προσδιόρισιν τοῦ ὄγκου Ο βυτίδος τινὸς, γίνεται χρῆσις τοῦ τύπου τοῦ *Oughtred*. Ὁ τύπος οὗτος λαμβάνεται ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ ὄγκου τῶν δύο κολούρων κώνων, A^2 ἀντὶ Αα, καὶ τότε ἔχομεν, καλοῦντες Μ τὸ ἐντὸς τῆς βυτίδος μῆκος, τὸν τύπον

$$O = \tfrac{1}{3}\pi.M\,(2A^2+a^2)\ldots.[1].$$

Ἐν Γαλλίᾳ γίνεται χρῆσις τοῦ τύπου τοῦ *Dez*. Κατὰ τὸν τύπον ταῦτον ἡ χωρητικότης τῆς βυτίδος εἶναι ἴση τῇ τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἔχοντος ὕψος μὲν τὸ μῆκος Μ τῆς βυτίδος, ἀκτῖνα δὲ τὴν διαφορὰν τῆς ἐσωτερικῆς ἀκτῖνος Α, τοῦ μεσαίου κύκλου τῆς βυτίδος, ἐπὶ τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς διαφορᾶς (Α—α). Ὁ τύπος οὗτος δίδει ἐξαγόμενα κατά τι μικρότερα τῶν τοῦ προηγουμένου τύπου καὶ εἶναι ὁ ἑξῆς·

$$O = \pi M\,[A - \tfrac{3}{8}(A-a)]^2\ldots.[2].$$

Συνήθως ὅμως ἐν τῇ πράξει ὑποτίθεται ἡ χωρητικότης Ο βυτίδος τινὸς, ἴση τῇ τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος ὕψος μὲν τὸ μῆκος Μ τῆς βυτίδος, διάμετρον δὲ τῆς βάσεως $D = \dfrac{\delta+2\Delta}{3}$, τοῦ δ ἐκφράζοντος τὴν διάμετρον ἢ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν διαμέτρων τῶν δύο ἀκροτελευταίων κύκλων, ἐὰν οὗτοι ἦναι ἄνισοι, τοῦ δὲ Δ, τὴν διάμετρον τοῦ μεσαίου κύκλου. Ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει ὁ τύπος εἶναι

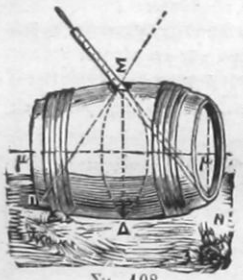
$$O = \tfrac{1}{4}\pi D^2 M = \tfrac{1}{36}.\pi\,(\delta+2\Delta)^2\times M\ldots.[3].$$

Ἡ διάμετρος Δ προσδιορίζεται διὰ τοῦ κυκλομετρίου (Ἐφαρμ. 76)

ἢ διὰ βαθμολογημένης ῥάβδου εἰσαγομένης διὰ τοῦ στομίου· ἐν τῇ τελευταίᾳ περιπτώσει λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ πάχος τῶν δουγιῶν, τὸ ὁποῖον συνήθως εἶναι $0^{\mu},01$ ἕως $0^{\mu},02$.

Διὰ $\delta = 0^{\mu},59$, $\Delta = 0^{\mu},71$ καὶ $M = 0^{\mu},936$ εὑρίσκομεν $O = 0^{\mu.κ.},330 = 330$ λίτρας.

Ἐν Τουρκίᾳ, Ἑλλάδι, Γαλλίᾳ καὶ εἰς τινα μέρη τῆς Ἰταλίας, ἡ καταμέτρησις τῶν βυτίδων γίνεται διὰ τοῦ βυτιδομετρίου ἢ βαρελομετρίου. Τοῦτο δὲ κατασκευάζεται ἐπὶ τῇ βάσει ἰδιαιτέρου μέτρου, ἰδίως τοῦ οἴνου, τὸ ὁποῖον καλεῖται βαρέλα, καὶ περιέχει κατὰ μέσον ὅρον 48 ὀκάδας ἢ 0,064 κυβικὰ μέτρα, ἤτοι 64 λίτρας.



Σχ. 108.

Τὸ βαρελομέτριον εἶναι ῥάβδος, ἐκ ξύλου ἢ σιδήρου, διῃρημένη εἰς μέρη ἀνάλογα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ εἰς χωρητικότητα μιᾶς βαρέλας. Διὰ νὰ καταμετρήσωμεν λοιπὸν τὴν χωρητικότητα βυτίδος εἰσάγομεν διὰ τοῦ στομίου Σ τὴν ῥάβδον, μέχρις οὗ συναπαντήσει τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει ὁ ἄκρος κύκλος τῆς βυτίδος (καθρέπτης) μὲ τὸν κορμὸν αὐτῆς ΠΔΝ, καὶ ὁ ἀριθμὸς ὅστις συμπίπτει μὲ τὸ μέσον τοῦ στομίου Σ ἐπὶ τῆς ῥάβδου, δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν βαρελῶν, τὰς ὁποίας χωρεῖ ἡ βυτίς. Ἐὰν π. χ. ἐπὶ τῆς ῥάβου δεικνύεται κατὰ τὸ στόμιον τῆς βυτίδος ὁ ἀριθμὸς 7, ἡ βυτὶς χωρεῖ 7 βαρέλας, τουτέστιν $7 \times 64 = 448$ λίτρας, ἢ $7 \times 48 = 336$ ὀκάδας (Σχ. 108).

Ἐὰν τὸ μῆκος ΣΝ δὲν ἦναι ἴσον τῷ ΣΠ, τότε λαμβάνεται ὁ μέσος τούτων ὅρος.

Ὅταν πρόκηται νὰ εὑρεθῇ τὸ περιεχόμενον ὑγρὸν εἰς βυτίδα μὴ πλήρη, εἰσάγεται διὰ τοῦ στομίου βαθμολογημένη ῥάβδος, δι' ἧς μετρεῖται τὸ ὕψος τοῦ ὑγροῦ Υ καὶ ἡ διάμετρος Δ τοῦ μέσου κύκλου· ἔπειτα λαμβάνεται ὁ λόγος $\frac{\Upsilon}{\Delta}$, καὶ διὰ τοῦ ἑξῆς πίνακος εὑρίσκεται ποία χωρητικότης ο ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν λόγον $\frac{\Upsilon}{\Delta}$, ἐὰν ἡ χωρητικότης Ο τῆς βυτίδος ἦτο ἡ μονάς. Τούτου γινομένου, πολλαπλασιάζομεν τὴν χωρητικότητα ο ἐπὶ τὴν τῆς ὅλης βυτίδος, ἣν προσδιορίζομεν, ὡς προελέχθη, καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὴν στερεότητα τοῦ ἐν τῇ μὴ πλήρῃ βυτίδι εὑρισκομένου ὑγροῦ.

Οὕτω π.χ. διὰ βυτίδα, τῆς ὁποίας ἡ μέση διάμετρος εἶναι $\Delta = 0,80$, τὸ δὲ ὑγρὸν εἰς ὕψος $\Upsilon = 0,32$, ἔχομεν τὸν λόγον $\frac{\Upsilon}{\Delta} = \frac{0,32}{0,80} = 0,40$, ὅστις εἰς τὸν πίνακα ἀντιστοιχεῖ μὲ ο = 0,37.

$\frac{\Upsilon}{\Delta}$	Χωρητικότης ο εἰς Βυτίνην ἧς ἡ χωρητικότης Ο εἶναι ἡ μονάς.
1,0	1,000
0,9	0,950
0,8	0,860
0,7	0,750
0,6	0,630
0,5	0,500
0,4	0,370
0,3	0,250
0,2	0,140
0,1	0,050

Ἐὰν λοιπὸν ἡ χωρητικότης τῆς βυτίδος ἦναι 500 λιτρῶν, τὸ ἐν αὐτῇ ὑγρὸν εἶναι $O' = O \times o = 500 \times 0,37 = 185$ λιτρῶν.

Διὰ $\Delta = 0,80$ καὶ $\Upsilon = 0,27$ ἔχομεν $\frac{\Upsilon}{\Delta} = \frac{0,27}{0,80} = 0,3375$.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ παρατηροῦμεν ὅτι ἐπειδὴ εἰς τὸν πίνακα δὲν εὑρίσκεται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς χωρητικότητος ο, προσδιορίζομεν αὐτὴν δι' ἁπλῆς ἀναλογίας ὡς ἑξῆς· $o = 0,250 + (0,370 - 0,250) \times \frac{0,3375 - 0,250}{0,1} = 0,250 + 0,0405 = 0,2905$.

Ἀκολούθως ποριζόμεθα

$$O' = O \times o = 500 \times 0,2905 = 145,250 \text{ λίτρας.}$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύναται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ποσότης τοῦ ἐκ τῆς βυτίδος μεταγγιζομένου ὑγροῦ.

Ἐν Γαλλίᾳ οἱ βασμολόγοι χρῆσιν ποιοῦνται τοῦ βαρελομετρίου διὰ βυτίδας ὁμοίου σχήματος, τῶν ὁποίων ἡ χωρητικότης δὲν ὑπερβαίνει τὰς 160 λίτρας.

Ἐὰν τὸ σχῆμα τῶν βυτίδων ἦτο ὁμοιόμορφον, τότε ἐν καὶ τὸ αὐτὸ βαρελομέτριον καταλλήλως βαθμολογημένον ἤρκει διὰ τὴν καταμέτρησιν τῆς χωρητικότητος αὐτῶν. Ἐν Γαλλίᾳ διακρίνονται 16 εἴδη βυτίδων διαφόρου σχήματος, καὶ δι' ἕκαστον τῶν ὁποίων γίνεται χρῆσις ἰδιαιτέρου βαρελομετρίου *(jauge)*. Ἐκ τούτων τὰ μὲν 10 σχηματίζονται ἐκ τετραγώνου ξυλίνης ῥάβδου, τῆς ὁποίας ἡ βαθμολόγησις δεικνύεται διὰ καθηλωμένων ἥλων ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας.

Ἡ ῥάβδος αὕτη καλεῖται ἁπλοῦν βαρελομέτριον καὶ χρησιμεύει εἰς τὴν καταμέτρησιν τῶν βυτίδων, ὧν ἡ χωρητικότης φθάνει μέχρι τῶν 500 λιτρῶν. Τὰ λοιπὰ 6 βαρελομέτρια σχηματίζονται ἐπὶ τὰς ἓξ ἕδρας ἑξαέδρου ῥάβδου βαθμολογημένης ὁμοίως διὰ καθηλωμένων ἥλων ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας. Ἡ ῥάβδος αὕτη καλεῖται μέγα βαρελομέτριον.

Πρὸς δὲ τούτοις, οἱ δασμολόγοι συλλέγουσι τοὺς ἐπὶ τῶν ὑγρῶν ἐπιβαλλομένους φόρους, θεωροῦντες τὴν χωρητικότητα τῆς βυτίδος ἴσην τῇ τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἔχοντος ὕψος μὲν τὸ μῆκος M τῆς βυτίδος, διάμετρον δὲ τῆς βάσεως $D=\delta+(\Delta-\delta)\times 0,56$. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὁ τύπος δι' οὗ προσδιορίζεται ἡ χωρητικότης τῶν βυτίδων εἶναι

$$O=\tfrac{4}{4}\ \pi D^2 M=\tfrac{1}{4}\ \pi[\delta+(\Delta-\delta)\times 0,56]^2\times M \ldots\ldots [4].$$

Τὰ διὰ τοῦ τύπου τούτου λαμβανόμενα ἐξαγόμενα εἰσὶν κατά τι μικρότερα τῶν διὰ τοῦ τύπου [3] προσδιοριζομένων.

Ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς 0,56 ὑποθέτει ὅτι ἡ κυρτότης τῶν δουγιῶν σχηματίζει τόξον παραβολῆς, ὅπερ εἶναι τὸ συνηθέστερον. Ἐν περιπτώσει καθ' ἣν ἡ ἐν λόγῳ κυρτότης προσεγγίζει τὴν ἔλλειψιν ἢ τὴν ὑπερβολὴν, ὡς σταθερὸς ἀριθμὸς λαμβάνεται τότε ὁ $0^{\mu},59$ ἢ $0^{\mu},50$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 76. Κυκλομέτριον. Τοῦτο εἶναι ταινία φέρουσα ἐπὶ ἑκατέρων τῶν μετώπων δύο κλίμακας οὕτως, ὥστε τὰ μηδενικὰ νὰ ἀντιστοιχῶσιν. Ἐκ τούτων ἡ μὲν πρώτη διαιρεῖται εἰς ἑκατοστόμετρα, πρὸς μέτρησιν τῶν μηκῶν, ἡ δὲ δευτέρα εἰς μέρη ἑκατοστὸν τῶν ὁποίων ἰσοῦται μὲ 13 ἑκατοστόμετρα καὶ $\frac{1}{7}$ ἢ $\frac{22}{7}=\pi$ τοῦ ἑκατοστομέτρου. Τούτου τεθέντος, περιελίσσομεν τὴν ταινίαν περὶς περιφερείας τινὸς, καὶ τότε ἡ μὲν πρώτη κλίμαξ χορηγεῖ ἀπευθείας τὴν εὐθυνσιν αὐτῆς, ἡ δὲ δευτέρα τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου τῆς περιφερείας εἰς ἑκατοστόμετρα. Διὰ τοῦ κυκλομετρίου εὐκόλως μετρεῖται, ἡ διάμετρος στήλης τινὸς, κορμοῦ δένδρου, βυτίδος, εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ ὕψους αὐτῶν περιελισσομένης τῆς ταινίας.

ΚΥΒΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΝΕΚΦΛΟΙΩΤΩΝ ΞΥΛΩΝ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 77. Ἀνεκφλοίωτα ξύλα καλοῦνται τὰ ἐκ τῶν δένδρων κοπτόμενα στελέχη καὶ τὰ ὁποῖα φέρουσι τὸν φλοιόν των. Τὸ πάχος τοῦ φλοιοῦ τῆς δρυὸς εἶναι κατὰ μέσον ὅρον $0^{\mu},015$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα τῶν ἀνεκφλοίωτων ξύλων εἶναι τὸ τοῦ κολούρου κώνου, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος αὐτῶν εὐκόλως προσδιορίζεται διὰ τοῦ τύπου τῆς Προτάσεως 81.

Συνήθως ὁ ὄγκος οὗτος λαμβάνεται ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς τομῆς τοῦ κορμοῦ, κατὰ τὸ μέσον τοῦ μήκους αὐτοῦ γενομένης, ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ κορμοῦ. Διὰ τοῦ κυκλομετρίου εὐκόλως προσδιορίζεται ἡ διάμετρος καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ κορμοῦ, εἰς ὁποιονδήποτε σημεῖον τοῦ μήκους αὐτοῦ. Λοιπὸν, οὔσης Δ τῆς μέσης διαμέτρου τοῦ κορμοῦ, τοῦ

φλοιοῦ μὴ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν, καὶ M ὄντος τοῦ μήκους, ὁ ὄγκος O τοῦ κορμοῦ ἐκφράζεται οὕτω·

$$O=\frac{\pi\Delta^2}{4}\times M=0,7854\times\Delta^2\times M. \ldots\ldots [1].$$

Τὰ διὰ τὴν κατασκευὴν ἀναγκαῖα ξύλα, τὰ κανονικὸν σχῆμα ἔχοντα, λαμβάνονται ἐκ τοῦ κορμοῦ καὶ τοῦ στελέχους τῶν δένδρων, ἀφοῦ προηγουμένως ἐκτελεσθῇ ἐπ' αὐτῶν ὁ λεγόμενος τετραγωνισμός. Οὕτω π.χ. ὅταν πρόκηται νὰ ληφθῇ ἐκ τοῦ κορμοῦ δένδρου τινὸς ξύλον, τοῦ ὁποίου τὸ σχῆμα νὰ ᾖναι τετραγωνικὸν πρίσμα, ἡ βάσις τοῦ πρίσματος θέλει εἶναι τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ἐν τῇ μικροτέρᾳ βάσει τοῦ κορμοῦ. Συνήθως ὅμως ἐν τῇ πράξει τετραγωνίζεται ὁ κορμὸς κατὰ τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ἐν τῇ γενομένῃ τομῇ, κατὰ τὸ μέσον τοῦ μήκους τοῦ κορμοῦ. Κατὰ τὴν περίστασιν ταύτην, τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἰς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι Δ, οὔσης $\frac{\Delta^2}{2}$, (Πρότ. 67. Μέρ. Α'), ὁ ὄγκος O' τοῦ τετραγωνισμένου κορμοῦ δίδεται διὰ τοῦ τύπου

$$O'=\frac{\Delta^2}{2}\times M=0,5\times\Delta^2\times M \ldots\ldots [2].$$

Τούτου γίνεται χρῆσις ὑπὸ τῶν ἐμπορευομένων τὴν ξυλίαν.

Ἐκ τῶν δύο τύπων [1] καὶ [2] ἕπεται ὅτι

$$\frac{O'}{O}=\frac{2}{\pi}=\frac{100}{157}.$$

Ἄρα, διὰ νὰ ἔχωμεν ἓν κυβικὸν μέτρον τετραγωνισμένου ξύλου ἀπαιτεῖται ἡ ποσότης $1^{\mu.κ.},570$ ἀνεκφλοιώτου ξύλου, πρὸ πάντων δὲ $1^{\mu.κ.},660$, διὰ τὸ ἀκανόνιστον τοῦ σχήματος τῶν ξύλων.

Ἐν Γαλλίᾳ ὑπὸ τῶν δασμολόγων γίνεται χρῆσις τοῦ προηγουμένου τύπου ἢ τοῦ $O'=\left(\frac{\pi\Delta(1-0,1)}{4}\right)^2\times M=0,5\times\Delta^2\times M.$

Ὁ τύπος οὗτος ὑποθέτει τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ἴσην πρὸς τὸ τέταρτον τῆς διαφορᾶς τῆς μεσαίας περιφερείας τοῦ κορμοῦ ἐπὶ τὸ $0,1$ τῆς περιφερείας ταύτης.

Εἰς τὸ πυροβολικὸν γίνεται χρῆσις τοῦ τύπου

$$O'=\frac{\Pi^2}{25}\times M=\frac{\pi^2\Delta^2}{25}\times M=0,3948\times\Delta^2\times M,$$

εἰς τὸν ὁποῖον, Π ἐκφράζει τὴν μεσαίαν περιφέρειαν τοῦ κορμοῦ. Ὁ ὑπὸ τοῦ τελευταίου τούτου τύπου προσδιοριζόμενος κυβισμὸς εἶναι ὡς ἔγγιστα, τὸ ἥμισυ τοῦ πραγματικοῦ κυβισμοῦ τοῦ κορμοῦ, τοῦ διὰ τοῦ τύπου [1] προσδιοριζομένου, εἶναι δὲ πρὸς τὸν τοῦ τύπου [2] ὡς 4:5.

Ἐπὶ τέλους, ἐπειδὴ τὸ πάχος τοῦ σομφώματος, τουτέστι τοῦ μετὰ τὸν φλοιὸν μέρους τοῦ κορμοῦ, εἶναι ὡς ἔγγιστα τὸ πέμπτον τῆς ἀκτῖνος τῆς συνήθους ὁρυδς, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς καρδίας τοῦ κορμοῦ $A - \frac{A}{5} = \frac{4A}{5}$, ἕπεται ὅτι ὁ κύκλος $\pi.\frac{16}{25} \times A^2$ τῆς καρδίας τοῦ κορμοῦ, εἶναι ὡς ἔγγιστα τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κύκλου πA^2 τοῦ κορμοῦ, καὶ ὅτι δι' ἓν κυβικὸν μέτρον καθαροῦ ξύλου ἀπαιτεῖται ἡ ποσότης $1^{\mu.κ.},500$ ξύλου μετὰ τοῦ σομφώματος.

Τὰ αὐτὰ βεβαίως δύνανται νὰ ἐπαναληφθῶσι καὶ δι' ὁποιονδήποτε ἄλλο εἶδος ξύλου.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐν γένει κύλινδρος ὀρθὸς καλεῖται τὸ περιλαμβανόμενον στερεὸν ὑπὸ δύω παραλλήλων ἐπιπέδων, καὶ τῆς παραγομένης ἐπιφανείας ὑπὸ τῆς κινήσεως εὐθείας καθέτου ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τούτων, ἥτις εὐθεῖα διαγράφει ἐπὶ ἑκατέρου τῶν ἐπιπέδων καμπύλην κλειστήν. Ὁ ὑπὸ τῆς καμπύλης περιοριζόμενος χῶρος σχηματίζει τὴν *βάσιν* τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τὸ *ὕψος* αὐτοῦ. Ἡ περιγραφομένη ἐπιφάνεια ὑπὸ τῆς κινουμένης εὐθείας εἶναι *κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια*· ἡ δὲ κινουμένη εὐθεῖα, ἡ γεννήτρια τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

Οἱ ἐν ταῖς προτάσεσιν 82 καὶ 83 ἀναφερόμενοι συλλογισμοὶ δὲν ἐφαρμόζονται μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου σχηματίζεται ὑπὸ τῆς περιφερείας κύκλου, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ βάσις αὕτη ὑπὸ ὁποιασδήποτε καμπύλης σχηματίζηται. Ἐπειδὴ οἱαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ περιοριζουσα καμπύλη τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου, δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς αὐτὴν πολύγωνον, καὶ νὰ κατασκευασθῇ ὀρθὸν πρίσμα, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι τὸ πολύγωνον τοῦτο, τὸ δὲ ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου ὕψος. Τὸ πρίσμα τοῦτο θέλει εἶναι *ἐγγεγραμμένον* εἰς τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, μετὰ τῆς ὁποίας οὐδὲν κοινὸν ἔχει ἢ τὰς ἀγομένας γεννητρίας ἐξ ἑκάστης κορυφῆς τῆς πολυγωνικῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. Ἐὰν ἡ περιοριζουσα τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου καμπύλη ἔχῃ ἐλιγμούς τινας, τότε τὸ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον πολύγωνον τέμνει τὴν βάσιν κατά τινα σημεῖα, ἐπομένως καὶ τὸ πρίσμα τέμνει τὸν κύλινδρον. Ἀλλ' ἐὰν αὐξήσωμεν ἀδιακόπως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ πολύγωνον, θέλει προσεγγίζει ἀδιακόπως τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου, ἐπομένως ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος θέλει ὁμοίως προσεγγίζει ἀδιακόπως τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐφαρμώσωμεν εἰς τὸν κύλινδρον τοῦτον ὅσα ἀπεδείχθησαν διὰ τὸ πρίσμα. Ἄρα, *ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ εὐθυνθέντος μήκους τῆς καμπύλης τῆς περιοριζούσης τὴν βάσιν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.*

Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεως, τῆς ὑπὸ οἱασδήποτε καμπύλης περιοριζομένης, ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

---

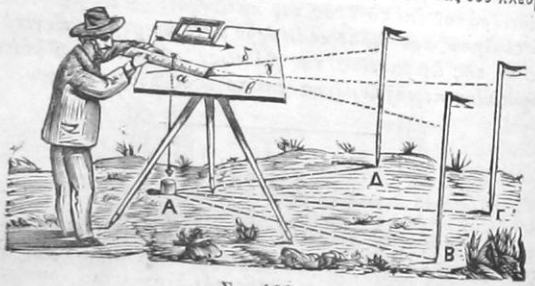
§.—23.

Σχεδιογράφησις διὰ τραπάζης. Ταχυμετρία. Διαστημετρικὴ διόπτρα ἢ Σταδία. Προβλήματα ταχυμετρίας. Κλίμακες. Ἔριξις τῶν ἐργαλείων. Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ἀντικειμένων. Διατομή. Ἔκτυπον τοῦ ἐδάφους. Γραμμὴ μεγαλειτέρας κλίσεως. Ὁριζόντειοι καμπύλαι. Ὑψομετρικὸν σχέδιον. Ἀνάγνωσις τοπογραφικῶν σχεδίων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 78. Κατὰ τὰ ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς §. 18 λεχθέντα, ἐὰν σχηματίσωμεν τεχνητόν τι ὁριζόντειον ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους στηριζόμενον, καὶ προσδιορίσωμεν ἐπ' αὐτοῦ τὴν προβολὴν α σημείου τινὸς Α τοῦ ἐδάφους (Σχ. 109), εἰς δὲ τὴν προβολὴν ταύτην ἐὰν ἐμπήξωμεν καθέτως τοῦ ἐπιπέδου λεπτοτάτην βελόνην α, εἶναι φανερὸν ὅτι, χαράσσοντες ἐπὶ τοῦ τεχνητοῦ ἐπιπέδου, διὰ μολυβδοχοκονδύλου, ἢ διὰ τῆς αἰχμῆς τοῦ σκέλους διαβήτου, τὰς διαδοχικὰς διευθύνσεις, ἃς λαμβάνει ἡ πλευρὰ κανόνος στρεφομένου περὶ τὴν βελόνην ταύτην, καὶ πρὸς τὰ ἀκόντια Β, Γ, Δ, κτλ. κατευθυνομένου, α) θέλομεν προσδιορίσει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὴν προβολὴν αβ, αγ, αδ, κτλ. τῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κεχαραγμένων διευθύνσεων ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, κτλ. β') θέλομεν προσδιορίσει τὴν προβολὴν βαγ, γαδ, κτλ. τῶν ὑπὸ τῶν διευθύνσεων τούτων σχηματιζομένων ἐπὶ τοῦ ἐδάφους γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΔ, κτλ. καὶ γ') λαμβάνοντες διὰ τῆς κλίμακος, αβ=ΑΒ, αγ=ΑΓ, αδ=ΑΔ, κτλ. θέλομεν προσδιορίσει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὴν σχετικὴν θέσιν τῶν προβολῶν α, β, γ, δ, κτλ. τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, κτλ.

τοῦ ἐδάφους. Ἡ σύντομος καὶ γραφικὴ αὕτη μέθοδος τῆς σχεδιάσεως, ἡ ὅλως ἀνεξαρτήτως τῆς καταμετρήσεως τῶν γωνιῶν γενομένη, καλεῖται σχεδιογράφησις ἢ ἐπιπεδογράφησις διὰ τραπέζης.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 79. Τράπεζα. Ἡ τράπεζα σύγκειται ἐκ τριῶν διακεκριμένων μερῶν· α') ἐκ τοῦ πίνακος, ὅστις εἶναι σανὶς, μήκους μὲν $0^{\mu},60$, πλάτους δὲ $0^{\mu},50$ ἕως $0^{\mu},55$, κατὰ τὰς δύο πλευρὰς



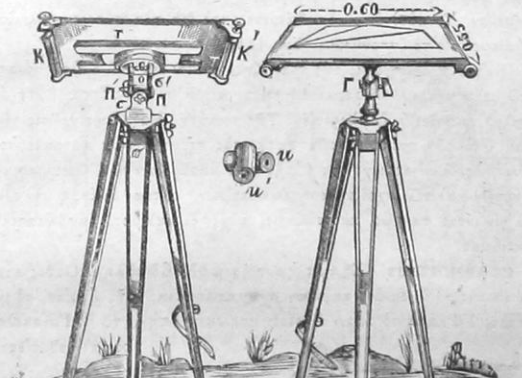
Σχ. 109.

τῆς ὁποίας ὑπάρχουσι δύο κύλινδροι Κ καὶ Κ'. Διὰ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τῶν κυλίνδρων τούτων τανύεται φύλλον χάρτου ἐπὶ τοῦ ὁποίου σχεδιογραφοῦμεν. β') Ἐκ τοῦ γόνατος, καὶ γ') ἐκ τοῦ τρίποδος (Σχ. 110). Κάτωθεν τοῦ πίνακος ὑπάρχουσι δύο ἐπιμήκεις καὶ παράλληλοι ῥάβδοι Τ καὶ Τ, μεταξὺ τῶν ὁποίων δύναται νὰ σύρηται κατὰ βούλησιν τετράγωνος σανὶς, ἥτις κάτωθεν προεξέχει εἰς κύκλον, εἰς τὸ κέντρον τοῦ ὁποίου ὀρθοῦται σιδηροῦς ἄξων ο. Ὁ ἄξων οὗτος εἰσερχόμενος εἰς τὸ κέντρον δευτέρου τινὸς κύκλου, διαρθρουμένου μετὰ τῆς πινακίδος π τοῦ τρίποδος, δύναται νὰ περιστρέφηται περὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τούτου ἢ νὰ συνδέηται ἀναποσπάστως μετ' αὐτοῦ τῇ περιστροφῇ πτερυγωτοῦ τινος περικοχλίου. Ἡ διάρθρωσις δὲ τοῦ δευτέρου κύκλου μετὰ τῆς πινακίδος τοῦ τρίποδος γίνεται διὰ τοῦ γόνατος τοῦ στρατιωτικοῦ μηχανικοῦ *Cugnot* τοῦ ἀποθανόντος τῷ 1804.

Ὁ ἐφευρέτης τῆς τραπέζης λέγεται ὅτι εἶναι Ἰωακεὶμ ὁ Πραιτόριος (1537—1616) ὅστις ἐδίδαξε τὰ μαθηματικὰ εἰς τὸν αὐτοκράτορα Μαξιμιλιανὸν τὸν δεύτερον.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 80. Γόνυ τοῦ κ. *Cugnot*. Τοῦτο συνίσταται ἐκ δύο ἴσων κυλίνδρων κ καὶ κ' τῆς αὐτῆς διαμέτρου. Οἱ κύλινδροι διαπερῶν-

ται κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ πάχους των καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν εἰσὶ κάθετοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐκ τούτων, ὁ μὲν κύλινδρος κ δύναται νὰ περιστρέφηται μεταξὺ δύο στηριγμάτων σ', ἀνορθουμένων καθέτως ἐπὶ τοῦ πρώτου τῶν προαναφερθέντων κύκλων, ὁ δὲ κ' μεταξὺ δύο στηριγμάτων σ, ἀνορθουμένων ἐπὶ τῆς πινακίδος π τοῦ τρίποδος. Διὰ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τῶν περικοχλίων Π καὶ Π', ἕκαστος τῶν



Σχ. 110.

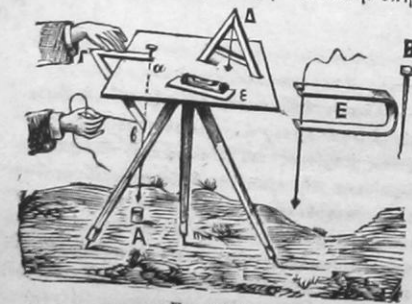
κυλίνδρων συσφίγγεται μεταξὺ τῶν στηριγμάτων ὑπὸ τῶν ὁποίων περιορίζεται. Ἐὰν λοιπὸν τὸ μὲν περικόχλιον Π' χαλαρώσωμεν, τὸ δὲ Π συσφίξωμεν, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ σύστημα θέλει περιστραφεῖ περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου κ. Τουναντίον τὸ σύστημα θέλει στραφῆ περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου κ' ὅταν τὸ μὲν περικόχλιον Π' συσφίγξωμεν, τὸ δὲ Π χαλαρώσωμεν. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι ἡ τράπεζα δύναται νὰ λάβῃ ὡς πρὸς τὴν ὁριζόντειον διεύθυνσιν ἁπάσας τὰς δυνατὰς κλίσεις, πρὸς δὲ καὶ αὐτὴν τὴν ὁριζόντειον διεύθυνσιν, οἱαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ θέσις τοῦ τρίποδος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 81. Ὁριζόντειος διευθέτησις τῆς τραπέ-

ζης. Ἵνα διευθετήσωμεν τὸν πίνακα τῆς τραπέζης ὁριζοντείως, ἀφ' οὗ πρῶτον δώσωμεν τὸ ἀναγκαῖον ὕψος εἰς τὴν τράπεζαν ἀνοίγοντες καταλλήλως τοὺς βραχίονας τοῦ τρίποδος, στηρίζομεν ἐπὶ τοῦ πίνακος τὸ ἀλφάδιον, ἢ τὴν ἀεροστάθμην καθέτως τῆς διευθύνσεως τοῦ ἑνὸς τῶν κυλίνδρων, καὶ στρέφομεν τὸ σύστημα περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου τούτου μέχρις οὗ ἡ μολύβδαινα ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς, ἢ ἡ φυσαλλὶς περιορισθῇ μεταξὺ τῶν ἀναφορικῶν της σημείων. Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνοντες καὶ διὰ τὸν δεύτερον κύλινδρον φθάνομεν εἰς τὸ ζητούμενον (Σχ. 111).

Ἐνίοτε ἡ διάρθρωσις τῆς τραπέζης γίνεται διὰ τοῦ ἁπλοῦ γόνατος τοῦ γραφομέτρου, (Ἐφαρμ. 14. Μέρ. Α') δι' οὗ στηρίζεται αὕτη ἐπὶ ἁπλοῦ τρίποδος ἢ ἐπὶ ἀκοντίου. Τῆς τοιαύτης διατάξεως χρῆσις γίνεται ὑπὸ τῶν στρατιωτικῶν κατὰ τὰς στρατιωτικὰς κατοπτεύσεις. Συνήθως δὲ γίνεται χρῆσις αὐτῆς πρὸς κατάρτισιν τῶν Ὀρειγραφικῶν χαρτῶν καὶ τῶν σχεδιογραφήσεων ἐκείνων, αἵτινες ἀνάγκη μὲν εἶναι νὰ γίνωνται ταχέως καὶ εὐώνως, οὐχὶ δὲ καὶ μετὰ μαθηματικῆς ἀκριβείας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 82. Ἐξαρτὴρ τῆς μολυβδαίνης. Οὗτος εἶναι γωνία τις αΓβ ἐκ δύο κανόνων σχηματιζομένη, τῆς ὁποίας τὸ μὲν σκέλος Γβ κατὰ τὸ ἄκρον β φέρει κυκλικὴν ὀπὴν, τὸ δὲ Γα σκέλος,



Σχ. 111.

τὸ ἐπὶ τοῦ πίνακος τῆς τραπέζης ἐφαρμοζόμενον, φέρει ἐντομὴν α. Ἡ ἐντομὴ προσαρμόζεται κατὰ τὸ μῆκος λεπτοτάτης βελόνης Β, τὴν ὁποίαν ἐμπηγνύομεν μετ' εὐκολίας καθέτως ἐπὶ τοῦ πίνακος τῆς τραπέζης, ἀφ' οὗ σχηματίσομεν εἰς τὴν κεφαλὴν της σφαιρίδιον ἐξ ἰσπανικοῦ κηροῦ. Ἡ ὀπὴ β καὶ ἡ ἐντομὴ α εὑρίσκονται ἐπὶ καθέτου ἐπὶ τοῦ σκέλους Γα γραμμῆς. Ἡ γραμμὴ αὕτη σχηματίζεται ὑπὸ τῆς χορδῆς τῆς μολυβδαίνης ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ὀπῆς β, καὶ ἀπολήγει εἰς τὴν ἐντομὴν α. Ἐντεῦθεν

ἔπεται ὅτι, ὅταν τὸ σκέλος Γα τοῦ ἐξαρτῆρος εἶναι ὁριζόντειον, τότε τὸ ἐπὶ τῆς τραπέζης κείμενον σημεῖον α, τὸ ὑπὸ τῆς βελόνης δεικνυόμενον, θέλει εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Α τοῦ ἐδάφους, τὸ ὁποῖον σημεῖον ὑποδεικνύεται ὑπὸ τῆς αἰχμῆς τῆς μολυβδαίνης, τῆς διερχομένης διὰ τῆς ὀπῆς β. Ἐνίοτε ὁ ἐξαρτὴρ σχηματίζεται ἐκ δύο ἰσομήκων παραλλήλων κανόνων Ε, συναρμοζομένων διὰ τόξου καὶ καλεῖται Περώνη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 83. Ἀντιστοίχησις τῆς τραπέζης. Ἵνα προσδιορίσωμεν ἐπὶ τῆς τραπέζης τὴν προβολὴν σημείου τινὸς Α τοῦ ἐδάφους (Σχ. 111), ἐν πρώτοις δίδομεν τὸ ἀναγκαῖον ὕψος εἰς τὴν τράπεζαν, ἀνοίγοντες καταλλήλως τὰ σκέλη τοῦ τρίποδος περὶ τὸ σημεῖον Α, καὶ διευθετοῦμεν ὁριζοντείως τὸν πίνακα αὐτῆς (Ἐφαρμογὴ 81), καὶ ἔπειτα, διὰ τῆς ἀριστερᾶς χειρὸς ἐφαρμόζομεν ἐπὶ τοῦ πίνακος τὸ σκέλος Γα τοῦ ἐξαρτῆρος Γ, αἰωροῦντες διὰ τῆς δεξιᾶς τὴν μολύβδαιναν, τῆς ὁποίας ἡ χορδὴ διέρχεται διὰ τῆς ὀπῆς β. Τούτου γενομένου, κινοῦμεν ἐπὶ τῆς τραπέζης τὸ σκέλος Γα τοῦ ἐξαρτῆρος, μέχρις οὗ ἡ αἰχμὴ τῆς αἰωρουμένης μολυβδαίνης ὑποδείξῃ τὸ κέντρον τοῦ πασσαλίσκου Α, καὶ τότε τὸ ἐπὶ τῆς τραπέζης προσδιοριζόμενον σημεῖον, διὰ τῆς βελόνης τῆς ἐμπηγνυομένης κατὰ τὸ μῆκος τῆς ἐντομῆς α, καθέτως ἐπὶ τοῦ πίνακος, θέλει εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Α.

Τὰ ἐπὶ τῆς τραπέζης προσδιοριζόμενα σημεῖα συνήθως τρυπῶνται διὰ τῆς αἰχμῆς τοῦ διαβήτου καὶ διὰ κυκλίσκων διακρίνονται.

Ἀντιστρόφως. Ἵνα διευθετήσωμεν τὴν τράπεζαν οὕτως, ὥστε τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον α νὰ ἀντιστοιχήσῃ μὲ τὸ σημεῖον Α τοῦ ἐδάφους, ἐμπηγνύομεν τοὺς βραχίονας τοῦ τρίποδος περὶ τὸ σημεῖον Α καὶ διευθετοῦμεν τὸν πίνακα τῆς τραπέζης ὁριζοντείως οὕτως ὥστε, ἡ διὰ τοῦ σημείου Α διερχομένη κατακόρυφος νὰ περιλαμβάνῃ τὸ σημεῖον α. Τοῦτο δὲ ἐπιτυγχάνεται ὡς ἑξῆς· ἐν πρώτοις, διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ διευθετοῦμεν ὡς ἔγγιστα ὁριζοντείως τὸν πίνακα τῆς τραπέζης ἄνω τοῦ σημείου Α, κάτωθεν δὲ τοῦ πίνακος καὶ ἀκριβῶς ὑπὸ τὸ σημεῖον α, ἀφίνομεν νὰ καταπέσῃ λιθάριον. Ἐὰν τὸ λιθάριον τοῦτο ἐπὶ τὸ σημεῖον Α δὲν ἐπιπέσῃ, τότε ἐπανειλημμένως μετατοπίζομεν καταλλήλως ἓν τῶν τριῶν σκελῶν τοῦ τρίποδος καὶ διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ διευθετοῦμεν ὁριζοντείως τὸν πίνακα μέχρις οὗ, τὸ ὑπὸ τὸ σημεῖον α, ἐπανειλημμένως ἀφιέμενον λιθάριον πέσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Α. Γενομένης τῆς προκαταρκτικῆς ταύτης ἐργασίας σφίγγομεν τοὺς βραχίο-

νας τοῦ τρίποδος πρὸς τὴν πινακίδα, τῇ περιστροφῇ τῶν πτερυγιωτῶν περικοχλίων, καὶ διευθετοῦμεν ὁριζοντείως τὸν πίνακα τῆς τραπέζης διὰ τῆς ἀεροστάθμης ἢ τοῦ ἀλφαδίου. Ἔπειτα δοκιμάζομεν διὰ τοῦ ἐξαρτῆρος ἐὰν προσαρμόζοντες τὴν ἐντομὴν τοῦ σκέλους Γα πρὸς τὴν βελόνην τὴν εἰς τὸ σημεῖον α ἀνορθουμένην, ἡ αἰχμὴ τῆς ἀπὸ τοῦ ἑτέρου σκέλους αἰωρουμένης μολυβδαίνης ὑποδεικνύῃ τὸ σημεῖον Α. Ἐὰν δὲ τὸ τοιοῦτον δὲν λαμβάνει χώραν, ἐπανειλημμένως μετατοπίζομεν καταλλήλως τὸ ἓν τῶν σκελῶν τοῦ τρίποδος, συσφίγγομεν τοὺς βραχίονας αὐτοῦ πρὸς τὴν πινακίδα, καὶ διὰ τῆς ἀεροστάθμης ἐπανειλημμένως ἀποκαθιστῶμεν ὁριζόντειον τὸν πίνακα τῆς τραπέζης μέχρις οὗ, ἐπανειλημμένως ἀφοῦ δοκιμάσωμεν διὰ τοῦ ἐξαρτῆρος, ἡ αἰχμὴ τῆς μολυβδαίνης ὑποδείξῃ τὸ κέντρον τοῦ πασσαλίσκου Α. Ἡ πρᾶξις αὕτη ὡς καὶ ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς καλεῖται ἀντιστοίχησις τῆς τραπέζης.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 84. Μέθοδος τῆς ἀκτινοβολίας. Ὅπως διὰ τῆς τραπέζης σχεδιογραφίσωμεν τὰ περὶ τὸ σημεῖον Α κείμενα σημεῖα Β, Γ, Δ, κτλ. τοῦ ἐδάφους (Σχ. 109), ἐν πρώτοις ἐκλέγομεν ἐπὶ τοῦ τεταμένου ἐπὶ τῆς τραπέζης χάρτου σημεῖόν τι α· εἰς τοῦτο ἐμπηγνύομεν βελόνην. Τὸ σημεῖον δὲ τοῦτο πρέπει νὰ ᾖναι τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἔκτασις τῆς τραπέζης νὰ δύνηται νὰ περιλάβῃ τὰ περὶ τὸ σημεῖον α ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα τοῦ ἐδάφους. Τούτου γενομένου, ποιοῦμεν νὰ ἀντιστοιχήσῃ τὸ σημεῖον α τῆς τραπέζης μὲ τὸ σημεῖον Α τοῦ ἐδάφους (Ἐφαρμ. 83), καὶ συσφίγγομεν τὸ πτερυγιωτὸν περικόχλιον ο τοῦ ἄξονος τοῦ πίνακος τῆς τραπέζης, ἵνα οὐδεμίαν ὁριζόντειον περιστροφικὴν κίνησιν νὰ δύνηται νὰ λάβῃ ὁ πίναξ. Ἔπειτα, χαράσσομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου, διὰ τῆς αἰχμῆς τοῦ σκέλους διαβήτου, τὰς διαδοχικὰς διευθύνσεις αβ, αγ, αδ, κτλ. ἃς λαμβάνει ἡ πλευρὰ τοῦ κανόνος, τοῦ περὶ τὴν βελόνην α περιστρεφομένου καὶ κατευθυνομένου πρὸς τὸ ἐμπεπηγμένον ἀκόντιον εἰς ἕκαστον σημεῖον Β, Γ, Δ, κτλ. λαμβάνομεν διὰ τῆς κλίμακος καὶ τοῦ διαβήτου τὰς ἀποστάσεις αβ, αγ, αδ, κτλ. διαδοχικῶς ἴσας μὲ τὰς ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, κτλ. τὰς διὰ τῆς ἀλύσσου ἢ τῆς ταινίας ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καταμετρουμένας, καὶ προσδιορίζομεν οὕτω τὴν σχετικὴν θέσιν τῶν σημείων α, β, γ, κτλ. τῶν ἀντιστοιχούντων μὲ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, κτλ. τοῦ ἐδάφους.

Ὡς δοκιμὴν τῆς πράξεως ταύτης μετροῦμεν, διὰ τοῦ διαβήτου καὶ τῆς κλίμακος, τὰς ἀποστάσεις βγ, γδ, κτλ. καὶ βλέπομεν ἐὰν αὗται εἶσιν ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς ἐπὶ τῆς γῆς μετρηθείσας ἀποστάσεις ΒΓ, ΓΔ, κτλ.

Ἡ προσδιόρισις τῶν αὐτῶν σημείων γίνεται καὶ οὕτως· ἀφοῦ λάβωμεν διὰ τῆς κλίμακος τὴν ἀπόστασιν αβ = ΑΒ ἐπὶ τῆς διευθύνσεως αβ τῆς κεχαραγμένης ἐπὶ τῆς τραπέζης, καὶ προσδιορίσωμεν οὕτω τὸ σημεῖον β, προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον γ λαμβάνοντες διὰ τῆς κλίμακος τὴν ἀπόστασιν βγ = ΒΓ, τὴν ὁποίαν διὰ τοῦ διαβήτου μεταφέρομεν ἀπὸ β εἰς γ, ἐπακολουθοῦντες τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑνὸς σκέλους τοῦ διαβήτου εἰς τὸ σημεῖον β, τὴν δὲ τοῦ ἑτέρου σκέλους ἐπὶ τῆς διευθύνσεως αγ τῆς χαραχθείσης ἤδη ἐπὶ τῆς τραπέζης. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, διὰ τοῦ σημείου γ, προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον δ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὡς δοκιμὴν τῆς πράξεως ταύτης, μετροῦμεν, διὰ τῆς κλίμακος καὶ τοῦ διαβήτου, τὴν ἀπόστασιν αγ καὶ παρατηροῦμεν ἐὰν αὕτη ᾖναι ἴση τῇ ἐπὶ τῆς γῆς μετρουμένῃ ἀποστάσει ΑΓ, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι πρὶν ἢ ἀρχίσωμεν νὰ χαράττωμεν τὰς σκοπευομένας διευθύνσεις, τουτέστιν ἀφοῦ ποιήσωμεν πρῶτον νὰ ἀντιστοιχήσῃ τὸ ἐπὶ τῆς τραπέζης κείμενον σημεῖον α μὲ τὸ σημεῖον Α τοῦ ἐδάφους, καὶ ἀφ' οὗ καταστήσωμεν ἀκίνητον τὸν πίνακα αὐτῆς, τῇ περιστροφῇ τοῦ πτερυγιωτοῦ περικοχλίου τοῦ ἄξονος, τότε χαράττομεν ἐπὶ τῆς τραπέζης τὴν διεύθυνσιν τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Πρὸς τοῦτο, θέτομεν εἰς μίαν ἄκραν τῆς τραπέζης τὴν ἀποκλιτικὴν πυξίδα, τὴν ὁποίαν στρέφομεν περὶ ἑαυτὴν μέχρις οὗ ἡ βελόνη ταυτισθῇ μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς γραμμῆς *NS*, τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν μεγαλειτέραν πλευρὰν τῆς πυξίδος. Χαράττομεν γραμμὴν κατὰ τὴν πλευρὰν ταύτην, ἥτις θέλει παραστήσει τὴν ζητουμένην διεύθυνσιν. Τούτου γενομένου, μετὰ τὴν ἀποπεράτωσιν τῆς σχεδιογραφήσεως τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, κτλ., δοκιμάζομεν καθ' ὃν καιρὸν ἐπροσδιορίζομεν ἐπὶ τῆς τραπέζης τὰ σημεῖα β, γ, δ, κτλ. ἐὰν ἡ τράπεζα μετεκινήθη. Πρὸς τοῦτο, παρατηροῦμεν ἐὰν ἡ μαγνητικὴ βελόνη ταυτίζηται μετὰ τῆς γραμμῆς *NS*, ἐφαρμοζομένης τῆς μεγαλειτέρας πλευρᾶς τῆς πυξίδος κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐπὶ τῆς τραπέζης χαραχθέντος, ἐκ τῶν προτέρων, μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 85. Δοθείσης ἐπὶ τῆς τραπέζης τῆς σχετικῆς θέσεως τῶν προβολῶν α, β, γ, δ, κτλ. τῶν σημείων τοῦ ἐδάφους Α, Β, Γ, Δ, κτλ., καὶ τῆς διευθύνσεως τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ, νὰ διευθετηθῇ ἡ τράπεζα ἄνω τοῦ σημείου Α, οὕτως ὥστε ἕκαστον τῶν ἐπ' αὐτῆς κειμένων σημείων α, β, γ, δ, κτλ. νὰ ἀντιστοιχήσῃ μὲ τὸ ἀνταποκρινόμενον αὐτῷ σημεῖον Α, Β, Γ, Δ, κτλ.

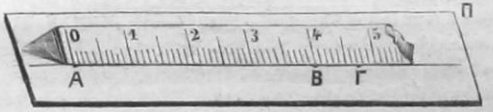
τοῦ ἐδάφους. Πρὸς τοῦτο, διευθετοῦμεν ὁριζοντείως τὴν τράπεζαν καὶ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν ἐπ' αὐτῆς κείμενον σημεῖον α νὰ ἀντιστοιχῇ μὲ τὸ σημεῖον Α τοῦ ἐδάφους, μία δὲ ἐπ' αὐτῆς κειμένη διεύθυνσις, ὡς π. χ. ἡ αβ, νὰ ἀντιστοιχῇ μὲ τὴν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἀνταποκρινομένην αὐτῇ διεύθυνσιν ΑΒ. Ἡ διευθέτησις δὲ αὕτη κατορθοῦται ὡς ἑξῆς (Σχ. 109).

Ἐν πρώτοις διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ διευθετοῦμεν ὡς ἔγγιστα ὁριζοντείως τὴν τράπεζαν ἄνω τοῦ σημείου Α, ταυτίζομεν τὴν μεγαλειτέραν πλευρὰν τῆς ἀποκλιτικῆς πυξίδος μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ, καὶ στρέφομεν τὸν πίνακα τῆς τραπέζης περὶ τὸν ἄξονά του, μέχρις οὗ ἡ διεύθυνσις τῆς μαγνητικῆς βελόνης ταυτισθῇ μετὰ τῆς γραμμῆς *NS*. Ἡ ἀλληλουχία δὲ τῶν πράξεων τούτων ἐπαναλαμβάνεται μέχρις οὗ ἀφιέμενον λιθάριον ὑπὸ τὸ σημεῖον α πέσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Α. Τούτου ἐπιτευχθέντος, εἰς τὸ σημεῖον α, ὡς καὶ εἰς σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς διευθύνσεως αβ κείμενον, ἐμπηγνύομεν δύο βελόνας. Κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν βελονῶν διευθύνομεν ὀπτικὴν ἀκτῖνα πρὸς τὸ ἀκόντιον Β, στρέφοντες ἀνεπαισθήτως τὸν πίνακα τῆς τραπέζης περὶ τὸν ἄξονά του, καὶ ἔπειτα διὰ τοῦ ἐξαρτῆρος δοκιμάζομεν, ἐὰν τὸ σημεῖον α ἀντιστοιχῇ μὲ τὸ σημεῖον Α. Ἐὰν κατὰ τὴν δοκιμὴν ταύτην τὸ σημεῖον α δὲν ἀντιστοιχῇ μὲ τὸ Α, τότε ἐπανειλημμένως μετατοπίζομεν καταλλήλως ἓν τῶν σκελῶν τοῦ τρίποδος, καὶ διευθετοῦμεν διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ ὁριζοντείως τὴν τράπεζαν· ἔπειτα κατὰ τὴν διεύθυνσιν αβ, ὑπὸ τῶν βελονῶν βοηθούμενοι, διευθύνομεν ἐπανειλημμένως ὀπτικὴν ἀκτῖνα πρὸς τὸ ἀκόντιον Β. Διευθύνομεν δὲ τὴν ἀκτῖνα, ἀφ' οὗ στρέψωμεν τὸν πίνακα περὶ τὸν ἄξονά του, καὶ ποιήσωμεν διὰ τοῦ ἐξαρτῆρος τὸ σημεῖον α νὰ ἀντιστοιχίσῃ μὲ τὸ σημεῖον Α.

Τῆς προκαταρκτικῆς ταύτης ἐργασίας γενομένης, ἐπὶ τέλους συσφίγγομεν τὰ σκέλη τοῦ τρίποδος πρὸς τὴν πινακίδα, διευθετοῦμεν ὁριζοντείως τὴν τράπεζαν διὰ τῆς ἀεροστάθμης ἢ τοῦ ἀλφαδίου, προσαρμόζομεν τὴν πλευρὰν τοῦ κανόνος κατὰ τὴν διεύθυνσιν αβ τῶν δύο βελονῶν, καὶ διευθύνομεν κατὰ τὴν πλευρὰν τοῦ κανόνος ὀπτικὴν ἀκτῖνα κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΒ, στρέφοντες ἀνεπαισθήτως τὸν πίνακα τῆς τραπέζης περὶ τὸν ἄξονά του. Τὴν ἀλληλουχίαν τῶν πράξεων τούτων ἐπαναλαμβάνομεν, μέχρις οὗ ποιήσωμεν διὰ τοῦ ἐξαρτῆρος, τὸ σημεῖον α νὰ ἀντιστοιχίσῃ μὲ τὸ σημεῖον Α. Τότε ἀποκαθιστῶμεν ἀκίνητον τὸν πίνακα τῆς τραπέζης τῇ περιστροφῇ τοῦ πτερυγιωτοῦ περικοχλίου τοῦ ἄξονος, καὶ προσδιορίζομεν οὕτω τὴν

ζητουμένην διευθέτησιν τῆς τραπέζης. Ὡς δοκιμὴν, ἀφ' ἑνὸς παρατηροῦμεν ἐὰν ἡ μαγνητικὴ βελόνη ταυτίζηται μετὰ τῆς γραμμῆς *NS*, ἐφαρμοζομένης τῆς μεγαλειτέρας πλευρᾶς τῆς πυξίδος κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐπὶ τῆς τραπέζης κεχαραγμένου μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ· ἀφ' ἑτέρου περιστρέφομεν περὶ τὴν βελόνην α τὸν κανόνα, ἔπειτα διευθύνομεν ὀπτικὴν ἀκτῖνα διαδοχικῶς πρὸς ἕκαστον τῶν ἀκοντίων Β, Γ, Δ, κτλ. καὶ παρατηροῦμεν ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦ κανόνος ταυτίζηται διαδοχικῶς μὲ ἑκάστην τῶν ἐπὶ τῆς τραπέζης κεχαραγμένων διευθύνσεων αβ, αγ, αδ, κτλ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 86. Κανών. Ὁ κανὼν δι' οὗ χαράσσονται ἐπὶ τῆς τραπέζης αἱ διὰ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ σκοπευόμεναι διευθύνσεις, εἶναι συνήθως τὸ διπλοῦν δεκατόμετρον (Ἐφαρμ. 8. Μέρ. Α'), σχῆμα ἔχον τὸ τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος. Τούτου ἡ πλευρὰ διηρημένη οὖσα εἰς ἑκατοστόμετρα καὶ χιλιοστόμετρα, χρησιμεύει καὶ ὡς κλίμαξ, δι' ἧς μετροῦνται αἱ ἀποστάσεις τῶν ἐπὶ τῆς τραπέζης προσδιοριζομένων σημείων. Τὸ 112 σχῆμα παριστᾷ μέρος τοῦ διπλοῦ

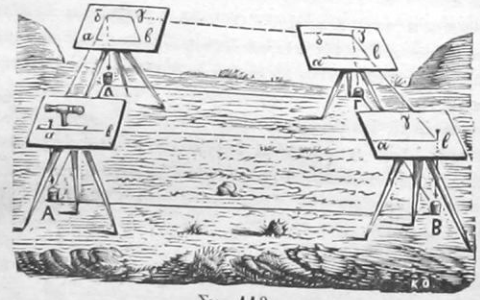


Σχ. 112

δεκατομέτρου, τὸ ὁποῖον περιέχει 53 χιλιοστόμετρα. Ἡ κατὰ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ χαρασσομένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π εὐθεῖα ΑΒ περιέχει 4 ἑκατοστόμετρα ἢ 40 χιλιοστόμετρα, ἡ δὲ ΑΓ, 47 χιλιοστόμετρα. Ἐὰν λάβωμεν λοιπὸν διὰ κλίμακα $\frac{1}{10\,000}$ καθ' ἣν περίπτωσιν 0,001 ἐκφράζει 2 μέτρα, τότε ἡ μὲν ΑΒ θέλει ἐκφράσει 80 μέτρα, ἡ δὲ ΑΓ, 94 μέτρα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 87. Μέθοδος τῶν πολυγώνων. Ἵνα σχεδιαγραφήσωμεν διὰ τῆς τραπέζης τὸ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κείμενον τοπογραφικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔ (Σχ. 113), κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν 83, προσδιορίζομεν ἐπὶ τῆς τραπέζης τὸ σημεῖον α, εἰς ὃ ἐμπηγνύομεν βελόνην, καὶ διευθετοῦμεν ὁριζοντείως τὴν τράπεζαν οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον α νὰ ἀντιστοιχήσῃ μὲ τὴν κορυφὴν Α, καὶ ὅτε ἀποκαθιστῶμεν ἀκίνητον τὸν πίνακα τῆς τραπέζης. Τούτου γενομένου, στρέφομεν περὶ τὴν βελόνην α τὸν κανόνα ἢ τὸν γνώμονα (Ἐφαρμ-

90) καὶ διευθύνομεν κατὰ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ὀπτικὴν ἀκτῖνα πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Β ἀνορθούμενον ἀκόντιον, καὶ ἐπὶ τῆς τραπέζης χαράττομεν κατὰ τὴν πλευρὰν τοῦ κανόνος τὴν διεύθυνσιν αδ, ἐφ' ἧς λαμβάνομεν διὰ τῆς κλίμακος αδ=ΑΒ. Μεταφέρομεν ἔπειτα τὴν τράπεζαν ἐπὶ τῆς κορυφῆς Β τοῦ πολυγώνου, καὶ διευθετοῦμεν αὐτὴν (Ἐφαρμ. 85) οὕτως, ὥστε τὸ μὲν σημεῖον δ νὰ ἀντιστοιχήσῃ μὲ τὴν κορυφὴν Β, ἡ δὲ διεύθυνσις δα μὲ τὴν ΒΑ, καὶ ὅτε ἀποκαθιστῶμεν ἀκίνητον τὸν πίνακα αὐτῆς. Τούτου γενομένου, περὶ τὴν βελόνην

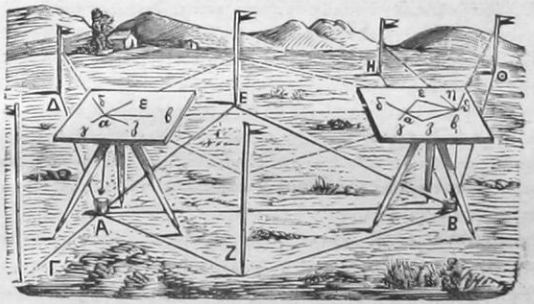


Σχ. 113.

τοῦ σημείου δ, στρέφοντες τὸν κανόνα διευθύνομεν αὐτὸν πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Γ ἀνορθούμενον ἀκόντιον, καὶ χαράττομεν ἐπὶ τῆς τραπέζης τὴν διεύθυνσιν δγ, ἐφ' ἧς λαμβάνομεν διὰ τῆς κλίμακος δγ=ΒΓ.

Τὰ αὐτὰ ἐπαναλαμβάνομεν ἐπὶ τῆς κορυφῆς Γ, καὶ χαράττομεν ἐπὶ τῆς τραπέζης τὴν διεύθυνσιν γδ, ἐφ' ἧς λαμβάνομεν διὰ τῆς κλίμακος γδ=ΓΔ. Ἐπὶ τέλους, μεταφέρομεν τὴν τράπεζαν ἐπὶ τῆς κορυφῆς Δ, ἐφ' ἧς διευθετοῦμεν αὐτὴν ὁριζοντείως, καὶ οὕτως ὥστε, τὸ μὲν σημεῖον δ νὰ ἀντιστοιχήσῃ μὲ τὴν κορυφὴν ταύτην, ἡ δὲ διεύθυνσις δγ μὲ τὴν πλευρὰν ΔΓ τοῦ πολυγώνου· ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὴν πλευρὰν τοῦ κανόνος ἐπὶ τῆς διευθύνσεως δα τῶν σημείων δ καὶ α, καὶ διευθύνομεν ὀπτικὴν ἀκτῖνα. Ἐὰν λοιπὸν ἡμὲν ὀπτικὴ αὕτη ἀκτὶς ἀπαντήσῃ τὸ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Α ἱστάμενον ἀκόντιον, ἡ δὲ διὰ τῆς κλίμακος μετρουμένη ἀπόστασις δα εὑρεθῇ ἴση τῇ ΔΑ, τότε λέγομεν ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς τραπέζης πολύγωνον κλείει, καὶ εἶναι τὸ ζητούμενον.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 88. Μέθοδος τῆς ὁδεύσεως ἢ τῆς πορείας. Καθ' ὃν καιρὸν πραγματοποιοῦμεν τὰ ἐν τῇ προηγουμένῃ ἐφαρμογῇ λεχθέντα, συγχρόνως, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν εἰς ἑκάστην κορυφὴν τοῦ πολυγώνου τὴν μέθοδον τῆς ἀκτινοβολίας πρὸς σχεδιαγράφησιν τῶν εὑρισκομένων λεπτομερειῶν περὶ ἑκάστην πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, τότε λέγομεν ὅτι ἐνεργοῦμεν κατὰ τὴν μέθοδον τῆς πορείας. Οὕτω π. χ. οὔσης τῆς τραπέζης ἄνω τῆς κορυφῆς Α (Σχ. 114), ἀφ' ἧς προσδιωρίσθη ἡ αδ=ΑΒ, στρέφομεν περὶ τὸ σημεῖον α τὸν κανόνα, τὸν ὁποῖον κατευθύνομεν διαδοχικῶς πρὸς τὰ ἀκόντια Γ, Δ, Ε, Ζ, κτλ. καὶ χαράττομεν ἐπὶ τῆς τραπέζης τὰς διευθύνσεις αγ, αδ, αε, αζ, κτλ. Ἐφ' ἑκάστης τῶν διευθύνσεων τούτων λαμβάνομεν διὰ τῆς κλίμακος αγ=ΑΓ, αδ=ΑΔ, αζ=ΑΖ, κτλ., καὶ προς-



Σχ. 114.

διορίζομεν ἐπὶ τῆς τραπέζης τὰ σημεῖα γ, δ, ε, ζ, κτλ. Τούτου γενομένου, μεταβαίνομεν εἰς τὴν δευτέραν κορυφὴν Β τοῦ πολυγώνου, καὶ διευθετοῦμεν τὴν τράπεζαν οὕτως, ὥστε τὸ μὲν σημεῖον δ νὰ ἀντιστοιχήσῃ μὲ τὸ Β, ἡ δὲ διεύθυνσις δα, μὲ τὴν πλευρὰν ΒΑ τοῦ πολυγώνου· ἔπειτα προσδιορίζομεν τὰ περὶ τὴν κορυφὴν Β κείμενα σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, κτλ. στρέφοντες περὶ τὸ δ τὸν κανόνα τὸν ὁποῖον κατευθύνομεν διαδοχικῶς πρὸς τὰ ἀκόντια Ε, Ζ, Η, Θ, κτλ. καὶ χαράττοντες ἐπὶ τῆς τραπέζης τὰς διευθύνσεις δε, δζ, δη, κτλ. ἐφ' ἑκάστης τῶν ὁποίων λαμβάνομεν διὰ τῆς κλίμακος δε=ΒΕ, δζ=ΒΖ, δη=ΒΗ, κτλ., οὕτω προσδιορίζομεν ἐπὶ τῆς τραπέζης τὰ σημεῖα ε, ζ, η, θ, κτλ. Τὰ αὐτὰ ἐπαναλαμβάνομεν καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν λοιπῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 89. Μέθοδος τῶν διατομῶν. Ἐὰν ὅμως ἐκ τῆς δευτέρας κορυφῆς Β τοῦ πολυγώνου δυνηθῶμεν νὰ σκοπεύσωμεν τὰ ἐκ τῆς πρώτης κορυφῆς Α σκοπευθέντα σημεῖα, τότε, ἀφ' οὗ πρῶτον ἐκ τῆς πρώτης κορυφῆς χαράξωμεν ἐπὶ τῆς τραπέζης τὰς διευθύνσεις αε, αζ, κτλ. (Σχ. 114), μεταβαίνομεν εἰς τὴν δευτέραν κορυφήν. Ἐκ ταύτης σκοπεύομεν τὰ αὐτὰ σημεῖα ε, ζ, κτλ., χαράττομεν ἐπὶ τῆς τραπέζης τὰς διευθύνσεις βε, βζ, κτλ., αἵτινες τέμνουσι τὰς πρώτας, καὶ προσδιορίζομεν οὕτω τὰ σημεῖα ε, ζ, κτλ. διὰ τῆς καλουμένης μεθόδου τῶν διατομῶν, χωρὶς ποσῶς νὰ καταμετρήσωμεν, ἐκτὸς τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ πολυγώνου, οὐδεμίαν ἄλλην γραμμήν.

Ἐκτὸς τῶν μέχρι τοῦδε ἀναφερομένων μεθόδων διὰ τῆς τραπέζης προσδιορίζεται πρὸς τούτοις ἡ θέσις σημείων τινῶν προσδιοριζομένων διὰ τῆς τομῆς τριῶν ὀπτικῶν ἀκτίνων, αἵτινες διευθύνονται ἐκ τριῶν γνωστῶν ἐπὶ τῆς τραπέζης σημείων. Τὰ γνωστὰ δὲ ταῦτα σημεῖα εἶναι αἱ τρεῖς κορυφαὶ τριγώνου, ἀποτελοῦντος μέρος τριγωνικῆς τινος δυκτιώσεως, ἥτις συνήθως γίνεται διὰ τοῦ γραφομέτρου, τοῦ κύκλου ἢ τοῦ θεωδολίχου. Αἱ διὰ τῶν οὕτω προσδιοριζομένων σημείων λαμβανόμεναι εὐθεῖαι χρησιμεύουσιν ἐπίσης ὡς βάσεις πρὸς προσδιόρισιν τῶν λεπτομερειῶν τῶν εὑρισκομένων ἐν ἑκάστῳ τριγώνῳ.

Ἐν τῇ τοπογραφίᾳ γίνεται χρῆσις καὶ ἑτέρων μεθόδων τὰς ὁποίας παραλείπομεν ἐνταῦθα.

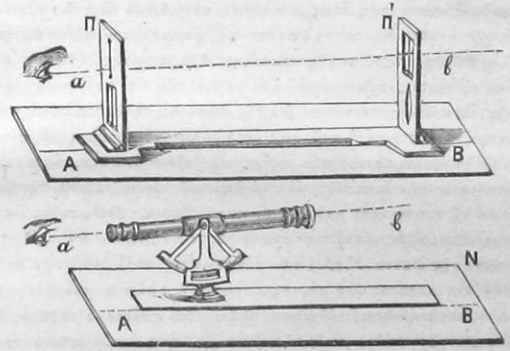
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 90. Γνώμων. Γνώμων μετὰ διόπτρας. Ἵνα μετὰ μεγαλειτέρας ἀκριβείας χαράττωμεν ἐπὶ τῆς τραπέζης τὰς σκοπευομένας διευθύνσεις ποιοῦμεν χρῆσιν τοῦ γνώμονος. Οὗτος εἶναι δίοπτρον (Σχ. 115), εἰς τὸ ὁποῖον τὸ διὰ τῆς γραμμῆς τῶν πτερυγίων διερχόμενον ἐπίπεδον περιλαμβάνει ἀκριβῶς τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ κανόνος, ἥτις καλεῖται ἀφετηρία γραμμὴ τοῦ γνώμονος. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι πᾶσα εὐθεῖα, διὰ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ κανόνος καὶ ἐπὶ τῆς τραπέζης χαρασσομένη, θέλει εἶναι ἡ προβολὴ τῆς διὰ τῶν πτερυγίων σκοπευομένης διευθύνσεως αβ.

Δοκιμάζομεν τὴν ἀκρίβειαν τοῦ γνώμονος οὕτως· ἐμπηγνύομεν κατακορύφως δύο βελόνας ἐπὶ διευθετημένης ὁριζοντείως τραπέζης, ἐφαρμόζομεν κατὰ τὰς βελόνας ταύτας τὴν ἀφετηρίαν γραμμὴν καὶ δι' ἀκοντίων ἔνθεν καὶ ἔνθεν προσδιορίζομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὴν ὑπὸ τῶν πτερυγίων προσδιοριζομένην εὐθυγραμμίαν. Τούτου γενομένου, μεταστρέφομεν τὸν γνώμονα ἀπὸ ἄκρου εἰς ἄκρον καὶ ἐφαρμόζομεν ἐκ δευτέρου κατὰ τὰς βελόνας τὴν ἀφετηρίαν γραμμὴν αὐτοῦ· ἐὰν,

κατὰ τὴν νέαν ταύτην θέσιν τοῦ γνώμονος, ἡ εὐθυγραμμία τῶν πτερυγίων εὑρίσκηται καὶ πάλιν ἐπὶ τῆς χαραχθείσης εὐθυγραμμίας, εἶναι βέβαιον ὅτι ὁ γνώμων εἶναι ἀκριβής. Ἐνεναντίᾳ περιπτώσει ῥυθμίζομεν τὸν γνώμονα διὰ τῶν κοχλιῶν τῶν εὑρισκομένων περὶ τὴν βάσιν ἑκάστου πτερυγίου.

Διὰ νὰ σκοπεύωμεν εὐκρινῶς εἰς μεγάλας ἀποστάσεις, ἀντικαθιστῶμεν τὰ πτερύγια τοῦ γνώμονος διὰ μιᾶς διόπτρας, τῆς ὁποίας ὁ ὀπτικὸς ἄξων ἀντικαθιστᾷ τὴν γραμμὴν τῶν πτερυγίων.

Ἡ κατασκευὴ τοῦ γνώμονος τούτου ἀνάγκη νὰ ἐκπληροῖ τὰς ἑξῆς δύο συνθήκας. α.) Ὁ ὀπτικὸς ἄξων τῆς διόπτρας πρέπει νὰ ᾖναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ὁριζοντείου ἄξονος τῆς περιστροφῆς, καὶ νὰ διαγράφῃ



Σχ. 115.

κατὰ τὴν περιστροφικὴν κίνησιν, ἣν μεταδίδομεν αὐτῇ, ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν καὶ οὐχὶ κωνικήν. β'.) Τὸ διὰ τῆς γραμμῆς τῶν διοπτρῶν διερχόμενον ἐπίπεδον (Ἐφαρμ. 25) νὰ περιλαμβάνῃ ἀκριβῶς τὴν πλευρὰν τοῦ κανόνος, τουτέστιν τὴν ἀφετηρίαν γραμμὴν τοῦ γνώμονος.

Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ δύο αὗται συνθῆκαι ἐκπληροῦνται ὅταν ὁ ὁριζόντειος ἄξων, περὶ τὸν ὁποῖον στρέφεται ἡ διόπτρα, ᾖναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κανόνος, κάθετος δὲ ἐπὶ τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς.

Ἵνα δοκιμάσωμεν ἐὰν ἡ τελευταία αὕτη συνθήκη ἐκπληροῦται, διευθετοῦμεν ὁριζοντείως τὴν τράπεζαν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς, κατὰ βούλησιν, σημεῖόν τι εἰς ὃ ἐμπηγνύομεν βελόνην.

Τούτου γενομένου, στρέφοντες περὶ τὴν βελόνην τὸν γνώμονα, καὶ διὰ τῆς διόπτρας σκοπεύοντες μεμακρισμένον τι σημεῖον, ὡς π. χ. τὴν γωνίαν κτιρίου, τὸν σταυρὸν κωδωνοστασίου, κτλ. χαράττομεν ἐπὶ τῆς τραπέζης εὐθεῖαν γραμμὴν κατὰ τὴν ἀφετηρίαν γραμμὴν τοῦ γνώμονος. Ἔπειτα, στρέφοντες τὴν μὲν διόπτραν περὶ τὸν ὀπτικὸν αὐτῆς ἄξονα κατὰ 180^0, τὸν δὲ κανόνα περὶ τὴν βελόνην, σκοπεύομεν καὶ πάλιν τὸ αὐτὸ σημεῖον, καὶ χαράττομεν ἐπὶ τῆς τραπέζης δευτέραν γραμμὴν κατὰ τὴν ἀφετηρίαν γραμμὴν τοῦ γνώμονος. Ἐὰν ὅμως αἱ δύο αὗται γραμμαὶ δὲν ταυτίζονται, ἢ δὲν ἦναι παράλληλοι, τότε εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία δεικνύει τὸ διπλοῦν τοῦ σφάλματος, τὸ ὁποῖον ἐπανορθοῦται διὰ τοῦ νηματοφόρου κρίκου τῆς διόπτρας. Πρὸς ἐπανόρθωσιν δὲ τοῦ σφάλματος τούτου ἐφαρμόζομεν τὴν ἀφετηρίαν γραμμὴν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τῆς διχοτόμου, τῆς ἐπὶ τῆς τραπέζης κεχαραγμένης ἤδη γωνίας, καὶ κινοῦμεν τὸν νηματοφόρον κρίκον διὰ τῶν ἐπὶ τούτῳ κοχλιῶν οὕτως, ὥστε ἐν ᾧ σκοπεύομεν διὰ τῆς διόπτρας, ἡ διασταύρωσις τῶν νημάτων νὰ πίπτῃ ἐπὶ τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος σκοπευθέντος σημείου.

Καθ' ὃν χρόνον ἐκτελοῦμεν τὴν προρρηθεῖσαν δοκιμὴν, δυνάμεθα νὰ δοκιμάσωμεν συγχρόνως, ἐὰν τὸ ὑπὸ τοῦ ὀπτικοῦ ἄξονος τῆς διόπτρας διαγραφόμενον ἐπίπεδον ἦναι κατακόρυφον. Πρὸς τοῦτο ἐνεργοῦμεν οὕτως ὥστε, κατὰ τὴν κατακόρυφον κίνησιν τῆς διόπτρας, τὸ σημεῖον τῆς διασταυρώσεως τῶν νημάτων νὰ ἀκολουθῇ τὴν διεύθυνσιν τῆς κατακορύφου κόψεως κτιρίου, ἢ τὴν τῆς μολυβδαίνης. Ἀλλ' ἡ κατακόρυφος διεύθυνσις τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ὁριζοντείου διευθετήσεως τῆς τραπέζης, ἥτις ὡς ἔγγιστα κατορθοῦται· ἄρα, μετὰ μαθηματικῆς ἀκριβείας δὲν δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν κατακόρυφον περιστροφικὴν κίνησιν τοῦ ὀπτικοῦ ἄξονος τῆς διόπτρας. Ἐν τούτοις ἡ τελευταία αὕτη συνθήκη σχεδὸν οὐδόλως ἐπηρεάζει τὰς ἐπὶ τῆς τραπέζης χαρασσομένας ὁριζοντείους γωνίας, ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ τοῦ ὀπτικοῦ ἄξονος διαγραφόμενον ἐπίπεδον ἀνεπαισθήτως παρεκκλίνει τῆς κατακορύφου.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι ὁ ἐπὶ τοῦ πίνακος τῆς τραπέζης τεταμένος χάρτης, διαστελλόμενος ἢ συστελλόμενος ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἀτμοσφαίρας, ὑπόκειται εἰς δύο ἀντιθέτους κινήσεις, αἵτινες ἀποκαθιστῶσιν ἀμφίβολον τὴν ἀκρίβειαν τοῦ σχεδιογραφήματος. Τούτου ἕνεκα πλεῖστοι γεωμέτραι τοῦ κτηματολογίου μετὰ περιφρονήσεως ἀπορρίπτουσι τὴν χρῆσιν τῆς τραπέζης, ἥτις καθίσταται σχεδὸν ἀπαραίτητος διὰ τὴν σχεδιογράφησιν τῶν μερῶν ἐκείνων, τὰ ὁποῖα καλύπτονται ὑπὸ δασῶν, ἢ διασχίζονται ὑπὸ βαθέων φαράγγων. Ἐν τούτοις ὁ γεωμέτρης, διὰ τῆς ἐπιτηδειότητος αὐτοῦ καὶ διὰ τῶν καταλλήλων προφυλάξεων περὶ τὴν θερμοκρασίαν, ἐπιτυγχάνει, μεταχειριζόμενος τὴν τράπεζαν, τὴν ἐπαρκῆ διὰ τὴν πρᾶξιν ἀκρίβειαν.

Ἐν Κωνσταντινουπόλει, ἔνθα δὲν ὑπάρχει γενικὸς κτηματολογικὸς χάρτης, μαστίζεται δὲ ἡ πόλις αὕτη ὑπὸ καταστρεπτικωτάτων πυρκαϊῶν, ἡ τράπεζα μεγίστης εὐκολίας πρόξενος ἐγένετο· ἐπειδὴ αἱ παρανάλωμα τοῦ πυρὸς γινόμεναι συνοικίαι, διὰ τῆς τραπέζης ταχέως καὶ μεθ' ἱκανῆς ἀκριβείας σχεδιογραφοῦμεναι, ἀμέσως καθυποβάλλονται εἰς τὰς ὑπὸ τῆς ὁδοποιΐας ὁριζομένας μεταρρυθμίσεις, καὶ παραχωρεῖται εἰς τοὺς ἰδιοκτήτας ἐντὸς βραχυτάτου χρόνου ἡ ἄδεια τῆς ἀνοικοδομήσεως.

Ἐν Γερμανίᾳ μεγίστη χρῆσις γίνεται τῆς τραπέζης, ἰδίως δὲ τῆς ταχυμετρικῆς τραπέζης (ἴδε Ἔφαρμ. 100). Ἐπ' ἐσχάτων τῆς τελευταίας ταύτης ἐγένετο χρῆσις ἐν Ἑλλάδι διὰ τὴν κατάρτισιν τοῦ ἀρχαιολογικοῦ χάρτου τῶν Ἀθηνῶν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 91. Ταχυμετρία. Ἐκ τῶν ἐφαρμογῶν τῆς τέχνης τοῦ σχεδιογραφεῖν ἢ χωροσταθμίζειν, αἵτινες κυρίως ἀποβλέπουσι τὰς ἀνάγκας τῆς γεωργίας, τῆς βιομηχανίας, τῶν δημοσίων ἔργων, τουτέστι τὰ ἀφορῶντα τὴν ἀποξήρανσιν τῶν ἑλῶν, τὴν ἄρδευσιν τῶν γαιῶν, τὴν ὑδραγωγίαν, τὴν μελέτην τῶν τε μεγάλων καὶ μικρῶν ἀρτηριῶν τῆς συγκοινωνίας, κτλ. ἡ μᾶλλον σπουδαία Ἐφαρμογὴ, πρὸς δὲ καὶ ἐπίπονος, εἶναι ἐκείνη, ἥτις σκοπὸν ἔχει τὸν σχηματισμὸν τοῦ κτηματολογίου ὑπὸ τὴν ἔποψιν τῆς καταρτίσεως τοῦ τίτλου τῆς ἰδιοκτησίας. Ὁ σχηματισμὸς κτηματολογίου κατέστη ἐν τῇ παρούσῃ ἐποχῇ, ἐν τοῖς πεπολιτισμένοις ἔθνεσιν, ἡ πρώτη καὶ ἡ μᾶλλον κατεπείγουσα ἀνάγκη τῆς γεωργίας. Ἀλλ' ἀπὸ τοῦ 1823, ἐν Ἰταλίᾳ, ἔνθα μεγάλαι κτηματολογικαὶ ἐργασίαι ἔλαβον χώραν, αἱ μέχρι τοῦδε γνωσταὶ γραφικαὶ μέθοδοι (Ἔφαρμ. 114 καὶ 115) τῆς σχεδιογραφήσεως κατεδείχθησαν, ὑπὸ μαθηματικὴν μὲν ἀκρίβειαν, ὅλως ἀνακριβεῖς, ὑπὸ οἰκονομικὴν δὲ ἔποψιν, πολυδάπανοι, διὰ τὸ ἐπίπονον καὶ τὴν πολυχειρίαν· διὸ ἐγένετο ἀνάγκη νὰ καθιερωθῇ ἄλλη νέα μέθοδος Ταχυμετρικὴ κληθεῖσα, ἥτις ὑπὸ μαθηματικὴν καὶ οἰκονομολογικὴν ἔποψιν νὰ ἐκπληροῖ τὰς ἀναλόγους ἀνάγκας τοῦ κοινωνικοῦ βίου.

Ἐν τῇ ταχυμετρικῇ ταύτῃ μεθόδῳ α) ἐκ συνθήκης λαμβά-

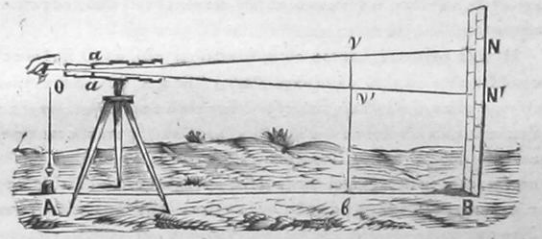
νεται ἡ μεσημβρινὴ γραμμὴ καὶ ἡ ἐπ' αὐτῆς κάθετος ὡς δύο ὀρθογώνιοι ἄξονες (Ἐφαρμ. 80 Μέρ. Α'). Ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τούτους, διὰ τῆς τετραμμένης καὶ τῆς τεταγμένης ἑκάστης κορυφῆς παντὸς σχήματος, προσδιορίζεται ἡ θέσις αὐτοῦ. Τοιουτοτρόπως ἐξασφαλίζεται ἡ ἀκριβὴς καὶ ἀπόλυτος ἐπὶ τῆς γῆς θέσις τοῦ σχήματος, ὅταν τοῦτο ἤθελεν ἐκφράζει ἀκίνητόν τινα ἰδιοκτησίαν, τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα τῆς ὀρθοτήσεως ἐνδέχεται νὰ ἐξαλειφθῶσι δι' ὁποιασδήποτε αἰτίας: 6'.) Ἀριθμητικῶς προσδιορίζονται αἱ ἐν λόγῳ συντεταγμέναι, ἀνεξαρτήτως τῆς κλίμακος καὶ τοῦ διαβήτου, ἐπὶ τῶν ὁποίων, ἐφαρμοζομένου τοῦ ὑπολογισμοῦ, προσδιορίζονται αἱ διαστάσεις τοῦ σχήματος. Διὰ τῶν διαστάσεων τούτων οὐ μόνον ἡ καταμέτρησις τῆς τε περιμέτρου καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος γίνεται, ἀλλὰ καὶ ἡ γεωμετρικὴ αὐτοῦ κατασκευὴ δι' ὁποιασδήποτε κλίμακος κατορθοῦται ἐπὶ χάρτου διηρημένου εἰς τετράγωνα, ἁπλῶς καταγραφομένων τῶν διαστάσεων τούτων εἰς κατάλληλον βιβλίον.

Ἡ ὅλως τριγωνομετρικὴ αὐτημέθοδος συγκεφαλαιοῦται εἰς δώδεκα προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἐπιλύονται διὰ τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, ἢ ἁπλῶς καὶ ταχέως διὰ τῶν λογαριθμικῶν λεγομένων κανόνων. Ἐπὶ τοῦ παρόντος, θέλομεν περιορισθῆ εἰς τὸ ὅλως πρακτικὸν καὶ ἀνεξάρτητον τῆς τριγωνομετρίας μέρος τῆς μεθόδου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἑξῆς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 92. Διαστημέτριον ἢ Σταδία τοῦ *Green*. Ἐὰν προσκολληθῶσιν δύο ἀραχνᾶται νήματα α ἐπὶ τοῦ νηματοφόρου κρίκου διόπτρας τινός, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ ἀπόστασις τοῦ κρίκου τούτου, τοῦ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ καλουμένου μικρόμετρον, νὰ ᾖναι ἀμετάβλητος, εἶναι φανερὸν ὅτι ἐν τῇ διόπτρᾳ ταύτῃ θέλει σχηματισθῆ, διὰ τὸν παρατηρητήν, ἀμετάβλητός τις γωνία NON' (Σχ. 116), διαστημετρικὴ γωνία καλουμένη. Ὑπὸ τὴν γωνίαν δὲ ταύτην ὁ παρατηρητὴς θέλει περιλαμβάνει πάντα τὰ ἀντικείμενα, τὰ διὰ τῆς διόπτρας ὑπ' αὐτοῦ παρατηρούμενα.

Ἡ διόπτρα αὕτη καὶ ἐν φθεγγόμενον ὑψομέτριον καταλλήλως βαθμολογημένον συνιστῶσι τὴν σταδίαν. Δι' αὐτῆς προσδιορίζεται, δι' ἁπλῆς ἀναγνώσεως ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου, ἡ μεταξὺ δύο σημείων **A** καὶ **B** ἀπόστασις. Τῷ ὄντι, ἐὰν, διὰ μίαν ὁριζόντειον ἀπόστασιν **AB**, ἐκ τῶν προτέρων μετρηθεῖσαν, αἱ δύο ὀπτικαὶ ἀκτῖνες **ON** καὶ **ON'** διαχωρίζωσιν ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου **B** τὸ διάστημα **NN'**, εἶναι βέβαιον

ὅτι τὸ διάστημα **NN'** θέλει εἶναι 2, 3, κτλ. φορὰς μικρότερον, ἐὰν ἡ ἀπόστασις **AB** καταστραθῇ 2, 3 φορὰς μικροτέρα, ἐπειδὴ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $ON' : on' = NN' : nn'$ ἢ $AB : A\beta = NN' : nn'$. Τούτου τεθέντος, ἐπὶ ὁριζοντείου ἐκτάσεως λαμβάνομεν τὴν ἀπόστασιν **AB** ἴσην μὲ 200 μέτρα, καὶ εἰς τὸ σημεῖον **B** στηρίζομεν κατακορύφως τὸ ὑψομέτριον· τὴν δὲ παρωπίδα ο τῆς διόπτρας συστοιχίζομεν μὲ τὸ σημεῖον **A**, καὶ ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου σημειοῦμεν διὰ γραμμῶν τὰ σημεῖα **N** καὶ **N'**, καθ' ἃ ἕκαστον νῆμα τοῦ μικρομέτρου ἁπανταᾷ τὸ ὑψομέτριον, κατευθυνομένης τῆς διόπτρας ὁριζοντείως. Τούτου γενομένου, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ μεταξὺ τῶν σημείων **N** καὶ **N'** διάστημα εἰς 200 ἴσα μέρη, λάβωμεν δὲ ἓν ἐξ αὐτῶν ὡς μονάδα καὶ δι' αὐτῆς βαθμολογήσωμεν τὸ ὅλον μῆκος τοῦ ὑψομετρίου, εἶναι φα-



Σχ. 116.

νερὸν ὅτι ἑκάστη μονὰς τοῦ ὑψομετρίου θέλει ἀντιστοιχεῖ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μὲ ὁριζόντειον ἀπόστασιν ἑνὸς μέτρου. Λοιπὸν, ἵνα προσδιορίσωμεν τὴν μεταξὺ τῶν σημείων **A** καὶ **B** ὁριζόντειον ἀπόστασιν, μικροτέραν ἢ μεγαλειτέραν τῶν 200 μέτρων, ἀρκεῖ νὰ ἀναγνώσωμεν ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ὑπὸ τῶν νημάτων τῆς διόπτρας καὶ μεταξὺ τῶν σημείων **N** καὶ **N'** διαχωριζομένων. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ἴσος τῇ διαφορᾷ $BN - BN'$ καὶ καλεῖται γεννήτωρ ἀριθμός. Τοῦτον θέλομεν παραστήσει ἁπλῶς διὰ $\Gamma = N - N'$.

Ἐὰν δι' ἁπλοῦ κωνικοῦ σωλῆνος ἀντικαταστήσωμεν τὴν διόπτραν, τότε ἡ ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου ἀνάγνωσις γίνεται δι' ἑνὸς βοηθοῦ, ὅστις ὑπὸ τὰς ὁδηγίας τοῦ γεωμέτρου κινεῖ κατὰ τὸ μῆκος τοῦ ὑψομετρίου σκοπὸν ὅμοιον μὲ τὸν τοῦ ὡθιστοῦ ὑψομετρίου (Σχ. 40).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 93. Σταδία τοῦ κ. *Porro*. Τὸ μικρόμετρον

τῆς διόπτρας ταύτης σχηματίζεται ἐκ τριῶν ὁριζοντείων νημάτων, ἰσάκις ἀπ' ἀλλήλων ἀπεχόντων, καὶ διαιρουμένων κατὰ τὸ μέσον ὑπό τινος τρίτου (Ἐφαρμ. 25) κατακορύφου νήματος. Τὰ νήματα ταῦτα, προσφόρως, ἀντικατεστάθησαν ὑπὸ τοῦ γάλλου ὀπτικοῦ κ. *Richer* διὰ τεσσάρων χαραγῶν, γενομένων ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἕδρας τοῦ δευτέρου προσφθαλμίου φακοῦ, ὅστις ἀποτελεῖ μέρος τοῦ προσφθαλμίου τῆς διόπτρας. Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τοῦ κατακορύφου νήματος, μετὰ τοῦ μεσαίου ὁριζοντείου νήματος, χρησιμεύει διὰ τὴν κατεύθυνσιν τῆς διόπτρας, τὰ δὲ ἀκροτελευταῖα ὁριζόντεια νήματα, διὰ τὴν προσδιόρισιν τῶν ἀποστάσεων. Τὸ μεσαῖον νῆμα, ὅπερ νῆμα τοῦ ἄξονος καλεῖται, χρησιμεύει ἐπίσης διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀποστάσεως, ὅταν τὸ διὰ τῆς διόπτρας ὁρώμενον μέρος τοῦ ὑψομετρίου δὲν ἦναι ἱκανὸν νὰ περιλάβῃ τὸ εἴδωλον τῶν ἀκροτελευταίων νημάτων, ἢ ὅταν ἡ συνδρομὴ αὐτῶν διακόπτηται ὑπό τινος προσκόμματος.

Πρὸς δὲ τούτοις ἡ διόπτρα αὕτη ἐμπεριέχει τὸν ἀναλλοίωτον σωλῆνα τοῦ ἰταλοῦ μηχανικοῦ *Porro* (Ἐφαρμ. 96). Διὰ τοῦ σωλῆνος τούτου ἡ μὲν κορυφὴ τῆς διαστημετρικῆς γωνίας, ἥτις καὶ ἀναλλοίωτον σημεῖον καλεῖται, μετατίθεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ ἐργαλείου, τουτέστιν εἰς τὸ σημεῖον περὶ τὸ ὁποῖον στρέφεται ἡ διόπτρα, ἡ δὲ γωνία μένει ἀμετάβλητος καὶ ἀνεξάρτητος τῆς κινήσεως τοῦ προσφθαλμίου καὶ τῆς ἀποστάσεως τοῦ ἀντικειμένου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 94. Ὑψομέτριον. Τοῦτο σύγκειται ἐκ δύο ἰσομήκων κανόνων, ἑκαστος τῶν ὁποίων ἔχει μῆκος μὲν δύο μέτρων, πλάτος δὲ $0^{\mu},09$, καὶ συνδεομένων διὰ στρόφιγγος.

Ἡ βαθμολόγησις τοῦ ὑψομετρίου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ῥυθμίσεως τῆς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεως τῶν ἀκροτελευταίων ὁριζοντείων νημάτων τοῦ μικρομέτρου. Ἡ ῥύθμισις αὕτη γίνεται οὕτως ὥστε, ὅταν ἡ ἀπὸ τοῦ ἀναλλοιώτου σημείου τῆς διόπτρας ὁριζόντειος ἀπόστασις τοῦ ὑψομετρίου ἦναι 200 μέτρων, τὸ ὑπὸ τῶν ἀκροτελευταίων νημάτων ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου διαχωριζόμενον διάστημα νὰ ἰσοῦται μὲ ἓν μέτρον. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι, διαιροῦντες τὸ διάστημα τοῦτο εἰς 200 ἴσα μέρη, λαμβάνομεν $\frac{1}{200}$, ἤτοι πέντε χιλιοστόμετρα ὡς μονάδα τῆς βαθμολογήσεως τοῦ ὑψομετρίου. Ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου αἱ διὰ λευκοῦ, ἐρυθροῦ καὶ κυανοῦ χρώματος διακρινόμεναι διαιρέσεις ἐκφράζουσιν ἑκατοντάδας, ἡμισείας ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ διπλᾶς μονάδας.

Αἱ ἑκατοντάδες ὡς καὶ αἱ ἡμίσειαι ἑκατοντάδες κατέχουσι τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ ἥμισυ πλάτος τοῦ ὑψομετρίου, τὸ ὁποῖον εἶναι κεχρωματισμένον ἐκ λευκοῦ χρώματος. Ἐκ τούτων, αἱ μὲν πρῶται δεικνύονται δι' ἐρυθρῶν γραμμῶν, αἱ δὲ δεύτεραι διὰ κυανῶν· σημειοῦνται δὲ διὰ ἀριθμῶν μόνον αἱ διαιρέσεις τῶν ἑκατοντάδων. Αἱ διαιρέσεις τῶν δεκάδων ἐναλλὰξ εἰσι κεχρωματισμέναι δι' ἐρυθροῦ καὶ λευκοῦ χρώματος καὶ εὑρίσκονται εἰς τὸ πρῶτον τέταρτον τοῦ πλάτους τοῦ ὑψομετρίου. Τὸ δεύτερον τέταρτον περιλαμβάνει τὰς διπλᾶς μονάδας· ἐκ τούτων ὅσαι μὲν εἶναι ἀπέναντι τῶν δι' ἐρυθροῦ χρώματος παριστα-μένων δεκάδων ἐναλλὰξ δεικνύονται δι' ἐρυθροῦ καὶ λευκοῦ χρώματος, ὅσαι δὲ ἀντιστοιχοῦσι μὲ δεκάδας λευκοῦ χρώματος, ἐναλλὰξ δεικνύονται διὰ λευκοῦ καὶ κυανοῦ χρώματος.



Σχ. 117.

Ὡς ἐκ τῆς ῥυθμίσεως τοῦ μικρομέτρου ἕπεται ὅτι τὸ ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου ὑπὸ τῶν δύο ἀκροτελευταίων νημάτων διαχωριζόμενον μῆκος εἶναι πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ ἐργαλείου ἀπόστασιν τοῦ ὑψομετρίου ὡς 1 : 200. Ἄρα, αἱ διαιρέσεις τῶν ἑκατοντάδων ἀντιστοιχοῦσι μὲ 50 ἑκατοστόμετρα, αἱ τῶν δεκάδων, μὲ 5 ἑκατοστόμετρα, αἱ δὲ διπλαῖ μονάδες, μὲ ἓν ἑκατοστόμετρον. Εἰς τὸ Σχ. 117, αἱ διὰ λευκῶν γραμμῶν δεικνυόμεναι διαιρέσεις παριστῶνται δι' ἐρυθροῦ χρώματος, αἱ δὲ μέλαιναι, διὰ κυανοῦ, καὶ οἱ ἀριθμοί, διὰ μέλανος χρώματος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 95. Ἀνάγνωσις τῆς ῥιπῆς. Ἀφοῦ τὸ ὑψομέτριον στηριχθῇ διὰ τῆς μολυβδαίνης κατακορύφως ἐπὶ τοῦ σημείου, εἰς ὃ πρέπει νὰ κατευθυνθῇ ἡ σταδία, τότε ἡ ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου ἀνάγνωσις τῆς ῥιπῆς γίνεται ἀδιακρίτως ἐπὶ οἱουδήποτε μέρους αὐτοῦ, ἀρκεῖ μόνον τὰ δύο ἀκροτελευταῖα νήματα νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου. Ἐν τούτοις προτιμᾶται ἡ κατεύθυνσις ἡ μᾶλλον προσεγγίζουσα πρὸς τὴν ὁριζόντειον.

Ἐν γένει διευθύνομεν τὸ κάτω νῆμα ἀκριβῶς ἐπὶ μιᾶς διαιρέσεως τῶν ἑκατοντάδων ἵνα ἡ ἐκτίμησις τοῦ κλάσματος τῆς διπλῆς μονάδος ἐκτελεσθῇ διὰ τοῦ πρὸς τὰ ἄνω κειμένου νήματος. Ἡ τοιαύτη ἐργασία ἁπλοποιεῖ τὴν ἀφαίρεσιν μεταξὺ τῶν δύο ῥιπῶν πρὸς εὕρεσιν τοῦ γεννήτορος ἀριθμοῦ $\Gamma = N - N'$. Ἐὰν δὲ τοῦτο ἦναι ἀδύνατον,

τότε διευθύνομεν τὸ κάτω νῆμα ἀκριβῶς ἐπὶ μιᾶς διαιρέσεως τῶν δεκάδων. Οὕτως, ἐὰν διευθύνωμεν π. χ. τὸ κάτω νῆμα ἐπὶ τῆς τρίτης διαιρέσεως τῶν ἑκατοντάδων, ἀναγινώσκομεν ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου τὴν ῥιπὴν 300, τοῦ κάτω νήματος, καὶ 434,5 τὴν τοῦ ἄνω, καὶ λέγομεν 434,5 ἐπὶ 300· συγχρόνως δὲ γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους ἐπὶ τοῦ σημειωματαρίου καὶ λαμβάνομεν τὸ ἐξαγόμενον 134,5 τῆς ἀφαιρέσεως, ὅπερ ἐκφράζει τὸν γεννήτορα ἀριθμὸν

$$\Gamma = N - N' = 434{,}5 - 300{,}0 = 134{,}5.$$

Σημειωτέον δὲ ὅτι ὁ ἀριθμὸς Γ τότε μόνον θέλει ἐκφράζει τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς διόπτρας ὁριζόντειον ἀπόστασιν τοῦ ὑψομετρίου, ὅταν αὕτη κατευθύνηται οὕτως, ὥστε ὁ ὀπτικὸς αὐτῆς ἄξων νὰ ἦναι ὁριζόντειος. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ τοιοῦτον οὐδόλως συμβαίνει ἐν τῇ πράξει, θέλομεν ἰδεῖ κατωτέρω (ἐφαρμ. 98) τίνι τρόπῳ, διὰ τοῦ γεννήτορος ἀριθμοῦ $N - N'$, καὶ τῆς κατακορύφου γωνίας, τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τοῦ ὀπτικοῦ ἄξονος τῆς διόπτρας, καὶ τῆς διὰ τοῦ ἀναλλοιώτου σημείου τοῦ ἐργαλείου διερχομένης κατακορύφου, προσδιορίζεται ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ὁριζόντειος ἀπόστασις. Τὴν ῥιπὴν τοῦ μεσαίου νήματος εὑρίσκομεν εἴτε ἀπευθείας, ἀναγινώσκοντες αὐτὴν ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου, εἴτε, λαμβάνοντες τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ῥιπῶν N καὶ N', ὅπερ, κατὰ τὸ προηγούμενον παράδειγμα, εἶναι 367,25. Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον $\frac{N+N'}{2} = 367,25$, διαιροῦντες διὰ 0,02 εὑρίσκομεν κατὰ τὴν βαθμολόγησιν τοῦ ὑψομετρίου τὸν ἀριθμὸν $1^{\mu},8362$, ὅστις ἐκφράζει εἰς μέτρα τὸ ὕψος εἰς ὃ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου τὸ σημεῖον τῆς ῥιπῆς τοῦ μεσαίου νήματος τοῦ μικρομέτρου, ἄνω τοῦ ποδὸς τοῦ ὑψομετρίου. Ὁ τελευταῖος οὗτος ἀριθμὸς παρίσταται διὰ T.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 96. Ῥύθμισις τοῦ μικρομέτρου. Ἵνα ῥυθμίσωμεν τὸ μικρόμετρον τῆς σταδίας ἐπὶ ὁριζοντείου ἐδάφους καταμετροῦμεν εὐθεῖαν γραμμὴν διακοσίων μέτρων μήκους· εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς στηρίζομεν κατακορύφως τὸ ὑψομέτριον, εἰς δὲ τὸ ἕτερον ἄκρον τὸ κέντρον τοῦ ἐργαλείου. Τούτου γενομένου, κατευθύνομεν ὡς ἔγγιστα ὁριζοντείως τὴν σταδίαν πρὸς τὸ ὑψομέτριον καὶ παρατηροῦμεν ἐὰν τὰ ἀκροτελευταῖα νήματα διαχωρίζωσιν ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου τόσας διαιρέσεις, ὅσας μονάδας ἐμπεριέχει τὸ μῆκος τῆς εὐθείας. Τὴν πρᾶξιν ταύτην ἀκριβῶς πραγματοποιοῦμεν διευθύνοντες τὰ δύο νήματα ἐπὶ τὰς διαιρέσεις τῶν ἑκατοντάδων. Ἐν τῇ παρούσῃ περιστάσει τὰ νήματα πρέπει νὰ διαχωρίζωσι διακοσίας διαι-

ρέσεις τοῦ ὑψομετρίου, αἵτινες ἐξισοῦνται μὲ μῆκος ἑνὸς μέτρου. Ἐὰν ὅμως ἡ συνθήκη αὕτη δὲν ἐκπληροῦται, τότε ἀποσπῶμεν τὴν διόπτραν τῆς στεράνης ΣΣ, δι' ἧς αὕτη περιβεβλημένη οὖσα συνδέεται μετὰ τοῦ κατακορύφου κύκλου καὶ τοῦ ὑποστηρίγματος. Πρὸς τὸν σκοπὸν δὲ τοῦτον, διὰ μὲν τῆς ἀριστερᾶς χειρὸς κρατοῦμεν τὸ ἀντικειμενικὸν ἄκρον ΑΑ τῆς διόπτρας, διὰ δὲ τῆς δεξιᾶς τὸ προσοφθάλμιον ΠΠ, καὶ διὰ περιστροφικῆς κινήσεως διαχωρίζομεν τὰ δύο ταῦτα ἄκρα. Οὕτω λοιπὸν, διαλυομένης τῆς διόπτρας, παρατηροῦμεν ἐντὸς τοῦ ἀντικειμενικοῦ μέρους αὐτῆς τὸν ἀναλλοίωτον σωλῆνα σ, διὰ προστριβῆς κρατούμενον, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ κινήσωμεν πλησιάζοντες ἢ ἀπομακρύνοντες αὐτὸν τοῦ προσοφθαλμίου, πρὸς ῥύθμισιν τοῦ μικρομέτρου. Οὕτω παραδείγματος χάριν, ἐν καιρῷ τῆς παρατηρήσεως, ἐὰν τὰ νήματα διαχωρίζωσιν ὑπὲρ τὰς διακοσίας διαιρέσεις τοῦ ὑψομετρίου, τότε ἀπομακρύνομεν τῶν νημάτων τὸ ἀναλλοίωτον σημεῖον τῆς διόπτρας, ὠθοῦντες τὸν σωλῆνα πρὸς τὸ ἀντικειμενικὸν αὐτῆς ἄκρον· ἐὰν δὲ διαχωρίζωσιν ὀλιγωτέρας τῶν διακοσίων, πλησιάζομεν τὸ ἀναλλοίωτον σημεῖον, ἀπωθοῦντες τὸν σωλῆνα. Σημειωτέον δὲ ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ῥύθμισις ἐπιτυγχάνεται μετά τινας ἐπανειλημμένας δοκιμάς.



Σχ. 118.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 97. Κατακόρυφος κύκλος τῆς διόπτρας. Ὁ κατακόρυφος κύκλος Κ'Κ' (Σχ. 164), μετὰ τοῦ ὁποίου συνδέεται ἡ διόπτρα ΔΔ, σύγκειται ἐκ δύο συγκεντρικῶν κύκλων τοῦ μὲν ἐξωτερικοῦ, τοῦ δὲ ἐσωτερικοῦ. Ὁ ἐξωτερικὸς κύκλος συνδεόμενος μετὰ τῆς διόπτρας στρέφεται μετ' αὐτῆς καὶ διαιρεῖται εἰς 400 βαθμούς, καὶ εἰς ἡμίσεις βαθμούς, τῶν ὁποίων ἡ ἀφετηρία γραμμὴ εἶναι ἡ διαίρεσις 100^{β}—400^{β}, διευθυνομένη κατακορύφως.

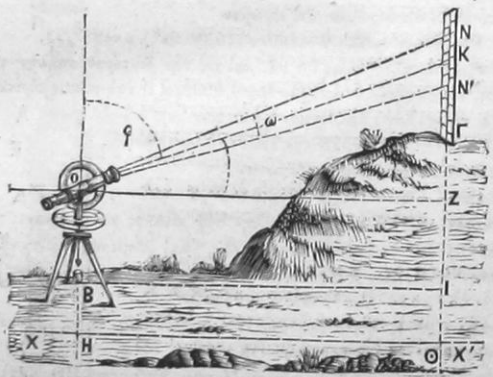
Ὁ ἐσωτερικὸς κύκλος ἀκίνητος ὢν φέρει, κατὰ τὴν κατακόρυφον διεύθυνσιν δύο βερνιέρους· ἕκαστος τούτων περιέχει δώδεκα βαθμοὺς τοῦ κύκλου, καὶ διαιρεῖται εἰς 50 ἴσα μέρη· ὅθεν, ἡ ἐκτίμησις τῶν κατακορύφων γωνιῶν γίνεται μεῖον δύο ἑκατοστῶν τοῦ βαθμοῦ. Ἡ

διάταξις αὕτη, εἶναι φανερὸν ὅτι ἐπιτρέπει, διὰ τῆς ἀπολύτου ἀξίας τῆς κατακορύφου γωνίας, νὰ ἀναγνωρίσωμεν ἐὰν ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς εὑρίσκηται ἄνω ἢ κάτω τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς διόπτρας διερχομένης ὁριζοντείου. Οὕτω, ἐὰν ἡ κατακόρυφος γωνία ᾖναι μικροτέρα τῶν 100 βαθμῶν, ἡ διὰ τῆς διόπτρας διερχομένη ὀπτικὴ ἀκτὶς εἶναι ἀνωφερής· ἐὰν δὲ ᾖναι μεγαλειτέρα τῶν 100 βαθμῶν, εἶναι κατωφερής.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 98. Προβλήματα ταχυμετρίας. Τὰ προβλήματα ταῦτα ἐπιλύονται τῇ βοηθείᾳ τοῦ θεωδολίχου, τοῦ ὁποίου ἡ διόπτρα ἀντικαθίσταται ὑπὸ μιᾶς σταδίας καὶ καλεῖται Ταχυμέτριον (ἴδε Ἐφαρμ. 151).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ μεταξὺ τῶν σημείων Β καὶ Γ (Σχ. 119) ὁριζόντειος ἀπόστασις ΗΘ.

Λύσις. Διευθετοῦμεν εἰς μὲν τὸ σημεῖον Β, τὸ κέντρον τοῦ ταχυμετρίου, εἰς δὲ τὸ Γ, τὸ ὑψομέτριον, πρὸς τὸ ὁποῖον κατευθύνομεν τὴν



Σχ. 119.

σταδίαν. Τούτου γενομένου, ἔστωσαν $N=\Gamma N$ καὶ $N'=\Gamma N'$ αἱ ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου ἀναγινωσκόμεναι ῥῖπαὶ ὑπὸ τῶν δύο ἀκροτελευταίων νημάτων τοῦ μικροτέρου, $\Gamma=N-N'$, ὁ γεννήτωρ ἀριθμός, καὶ φ, ἡ ὑπὸ τοῦ ἄξονος ΟΚ τῆς σταδίας καὶ τῆς κατακορύφου ΒΟ, τῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐργαλείου διερχομένης, σχηματιζομένη [κατακόρυφος γωνία.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, λαμβάνοντες τὸ συμπλήρωμα 100—φ τῆς γωνίας φ, θέλομεν προσδιορίσει τὴν ὑπὸ τοῦ ὀπτικοῦ ἄξονος ΟΚ τῆς σταδίας, καὶ τῆς ὁριζοντείου ΟΖ, σχηματιζομένην γωνίαν ΚΟΖ τοῦ ὀρθογωνίου εἰς τὸ Ζ τριγώνου ΚΟΖ. Τούτου ἡ πλευρὰ ΟΖ=ΒΙ=ΗΘ, ἐκφράζει τὴν ὁριζόντειον ἀπόστασιν τῶν σημείων Β καὶ Γ, τῆς ΧΧ' ὑποτιθεμένης ὁριζοντείου. Ὅθεν, ἐὰν καλέσωμεν Α τὴν ἀπόστασιν, προσδιορίζομεν αὐτὴν διὰ τοῦ τριγωνομετρικοῦ τύπου (*)

$$A=\Gamma\times\text{ημίτ.}^2\varphi\ldots..[\alpha].$$

Ἐν τῇ ἐφαρμογῇ ὁ τύπος οὗτος ἀντικαθίσταται διὰ τοῦ ἐξῆς ἁπλουστέρου

$$A=\Gamma\times D.$$

Τὸν ἀριθμὸν D εὑρίσκομεν εἰς τὴν δευτέραν στήλην τοῦ κάτωθι πίνακος καὶ ἀπέναντι τῆς κατακορύφου γωνίας φ, ἀκολουθοῦντες τὴν πρὸς τὰ ἄνω ἢ τὴν πρὸς τὰ κάτω τοῦ πίνακος εὑρισκομένην ἀρίθμησιν τῶν κατακορύφων γωνιῶν, καθ' ἣν περίπτωσιν τὸ φ εἶναι μεγαλείτερον ἢ μικρότερον τῶν 100 βαθμῶν.

Οὕτω, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εὕρωμεν

$$\Gamma=N-N'=625,0-100=525,0 \quad \text{καὶ} \quad \varphi=98^{G},93,$$

τότε ἀπέναντι τῆς γωνίας 98,93 καὶ εἰς τὴν δευτέραν στήλην τοῦ πίνακος, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν $D=0,9998$, καὶ ἐπὶ τέλους εὑρίσκομεν διὰ τὴν ἐν λόγῳ ὁριζόντειον ἀπόστασιν

$$A=525\times 0,9998=524^{\mu},895.$$

Ὡς δεύτερον παράδειγμα ἔστωσαν

$$\Gamma=N-N'=212,0-152,5=59,5 \quad \text{καὶ} \quad \varphi=101,48.$$

Εὑρίσκομεν εἰς τὴν δευτέραν στήλην τοῦ πίνακος καὶ ἀπέναντι τῆς γωνίας 101,48 τὸν ἀριθμὸν $D=0,9995$, καὶ ἑπομένως διὰ τὴν ζητουμένην ὁριζόντειον ἀπόστασιν

$$A=59,5\times 0,9995=59^{\mu},47.$$

Σημειωτέον δὲ ὅτι ὁ ἀνωτέρω τριγωνομετρικὸς τύπος ἐκφράζει τὴν προβολὴν τῆς ἀποστάσεως ΟΚ.

Ὁμοίως καταμετροῦμεν τὴν ὁριζόντειον ἀπόστασιν ΗΘ, καὶ ἂν στηρίξωμεν τὸ μὲν ἐργαλεῖον εἰς τὸ σημεῖον Γ, τὸ δὲ ὑψομέτριον εἰς τὸ Β. Καθ' ἣν δὲ περίπτωσιν τὸ οὕτω λαμβανόμενον ἐξαγόμενον, διαφέρει τοῦ πρώτου, τότε λαμβάνομεν τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν διὰ τὴν ἀπόστασιν ΗΘ.

(*) *La Tachéométrie, par J. Porro, 1858*, σελ. 75. *Guide Pratique de Tachéométrie, par J. Porro (neveu) 1861*. σελὶς 46. *Levés de Plans à la Stadia, Par Moinot, 1874*.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Δοθέντος τοῦ ὑψομέτρου ΗΒ=υ, ἄνω τῆς ὁριζοντείου ΧΧ′, τοῦ σημείου Β, νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὑψόμετρον ΘΓ=ύ τοῦ σημείου Γ.

Λύσις. Ἡ ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος τούτου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ὁριζοντείου ἀποστάσεως τῶν προκειμένων σημείων, ἐκ τοῦ ὕψους ΟΒ τοῦ ἐργαλείου, ἐκ τοῦ ὕψους ΚΓ=Τ τοῦ μεσαίου νήματος, ἄνω τοῦ ποδὸς τοῦ ὑψομετρίου, ἐκπερρασμένου εἰς μέτρα, καὶ τελευταῖον ἐκ τοῦ βοηθητικοῦ ὕψους ΚΖ.

Τὸ βοηθητικὸν ὕψος ΚΖ, ὅπερ ὑ π ο λ ε λ ο γ ι σ μ έ ν ο ν ὕψος καλεῖται, ἐκφράζεται διὰ τοῦ Υ καὶ προσδιορίζεται διὰ τοῦ τριγωνομετρικοῦ τύπου

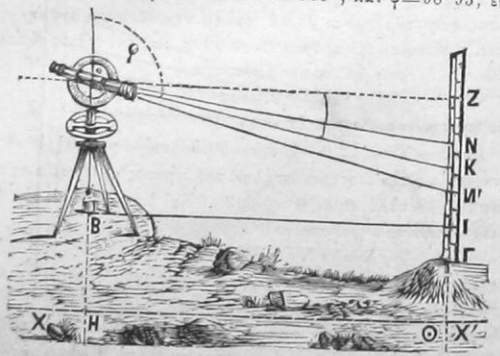
$$\Upsilon = A \times \text{συνεφ}.\varphi.$$

Ὁ τύπος οὗτος ἐν τῇ ἐφαρμογῇ ἀντικαθίσταται διὰ τοῦ ἐξῆς ἁπλουστέρου

$$\Upsilon = A \times H,$$

τοῦ Η εὑρισκομένου ἐν τῇ τρίτῃ στήλῃ τοῦ πίνακος ἀπέναντι τῆς κατακορύφου γωνίας φ.

Οὕτω, διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ $A=525^{\mu}$, καὶ $\varphi=98^{g}93$, εὑρί-



Σχ. 120.

σκομεν ἐν τῇ τρίτῃ στήλῃ τοῦ πίνακος καὶ ἀπέναντι τῆς γωνίας 98,93, ὅτι Η=0,0168, καὶ ἑπομένως

$$\Upsilon = 525 \times 0{,}0168 = 8{,}82.$$

Τούτου τεθέντος, διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προκειμένου προβλήματος διακρίνομεν τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις.

Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς α′). Ὅταν ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου Β εἰς τὸ σημεῖον Γ

ἀγομένη εὐθεῖα ᾖναι ἀνωφερὴς, τότε ἡ γωνία φ εἶναι μικροτέρα τῶν 100 βαθμῶν, καὶ κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔστωσαν, υ=ΒΗ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου Β, ἄνω τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, Ε=ΟΒ τὸ ὕψος τοῦ ἐργαλείου, $K\Gamma = T = \frac{N+N'}{0{,}04}$, ΚΖ=Υ καὶ ύ=ΘΓ τὸ ζητούμενον ὑψόμετρον τοῦ σημείου Γ.

Τούτου τεθέντος, βλέπομεν (Σχ. 119), ὅτι τὸ ὑψόμετρον τοῦτο δίδεται ὑπὸ τῆς ἐκφράσεως

$$\Theta\Gamma = \Theta I + IZ + (ZK - K\Gamma),$$

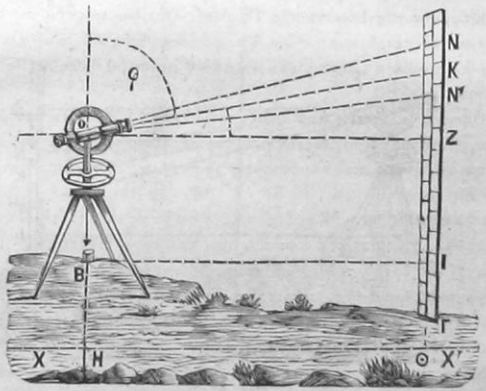
ἢ διὰ τοῦ τύπου $\text{ύ} = \upsilon + E + (\Upsilon - T) \ldots . [1]$.

Διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἔχομεν

$$\Upsilon = 8{,}82 \text{ καὶ } T = \frac{625+100}{0{,}04} = 1{,}81,$$

εὑρίσκομεν ύ=33^{μ},36, ὑποθέτοντες τὸ ὕψος τοῦ ἐργαλείου Ε=1,35, τὸ δὲ ὑψόμετρον τοῦ σημείου Β, υ=25 μέτρα.

Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς β′). Ὅταν ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου Β εἰς τὸ σημεῖον



Σχ. 121.

Γ ἀγομένη εὐθεῖα ᾖναι κατωφερὴς, τότε ἡ κατακόρυφος γωνία φ δύναται νὰ ᾖναι μεγαλειτέρα ἢ μικροτέρα τῶν 100 βαθμῶν.

1. Ἔστω φ μεγαλείτερον τῶν 100 βαθμῶν (Σχ. 120), διατηροῦντες τὰς αὐτὰς ὡς καὶ ἀνωτέρω συμβολικὰς παραστάσεις ἐν πρώτοις εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ζητουμένου ὑψομέτρου δίδεται ὑπὸ τῆς

ἐκφράσεως $\Theta\Gamma = oH - Z\Gamma = \upsilon + E - (ZK + K\Gamma)$·
ἢ διὰ τοῦ τύπου $\upsilon = \upsilon + E - (\Upsilon + T)$. . . . . [2].

Διὰ $\varphi = 101^{6},48$ καὶ $N = 212$, $N' = 152,5$, κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα, εὑρίσκομεν $A = 59^{\mu},47$ καὶ $T = 0,911$· ἑπομένως διὰ $\Upsilon = A \times H$ = εὑρίσκομεν ἐν τῇ τρίτῃ στήλῃ τοῦ πίνακος ἀπέναντι τῆς γωνίας 101,48 ὅτι $H = 0,0233$, καὶ ἐπὶ τέλους $\Upsilon = 0,021$, καὶ $\Upsilon + T = 0,932$. Λοιπὸν, διὰ $\upsilon = 30$ μέτρα καὶ $E = 1,32$, εὑρίσκομεν $\upsilon = 30^{\mu},39$.

2. Ἔστω φ μικρότερον τῶν 100 βαθμῶν, τότε κατὰ τὸ (Σχ. 121), ἔχομεν $\Gamma\Theta = oH - Z\Gamma = \upsilon + E - (\Gamma K - ZK)$,
ἢ τὸν τύπον $\upsilon = \upsilon + E - (T - \Upsilon)$ . . . . . [3].

Ἐπὶ τῶν προβλημάτων τούτων στηρίζεται ἡ κατάρτισις τοῦ σημειωματαρίου, τοῦ ὁποίου γίνεται χρῆσις ἐν τῇ ταχυμετρίᾳ.

Ὁ ἀπέναντι ὑποδεικνυόμενος πίναξ εἶναι ἀπόσπασμα τῶν πινάκων, οὓς κατήρτισε πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ σημειωματαρίου τοῦ ταχυμετρίου ἡ ἑταιρία ἡ ἀναλαβοῦσα τὴν μελέτην τῶν σιδηροδρόμων τῆς Εὐρωπαϊκῆς Τουρκίας. Οἱ πίνακες οὗτοι περιλαμβάνουσι τὰ τετράγωνα τῶν ἡμιτόνων ἢ τῶν συνημιτόνων καὶ τῶν ἐφαπτομένων ἀπὸ 0 μέχρι 50 βαθμῶν (ἴδε Τριγωνομετρίαν).

Ὅπως ἡ ὁριζόντειος ἀπόστασις οὕτω καὶ τὸ ὑψόμετρον προσδιορίζεται δίς. Πρὸς τοῦτο, ἐκτελοῦμεν τὰς παρατηρήσεις κατὰ δύο ἀντιθέτους διευθύνσεις, καὶ λαμβάνομεν, ἐν ἀνάγκῃ, τὸν μέσον ὅρον τῶν δύο ἐξαγομένων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 99. Ἔφιξις τῆς σταδίας. Κατὰ τὸν *Porro*, μὲ σταδίαν, τῆς ὁποίας ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς ἔχει διάμετρον $0^{\mu},060$, δύναται νὰ καταμετρηθῇ ἀπόστασις 200 μέτρων κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{2000}$ τοῦ μήκους της· ἀπόστασις δὲ 200 μέχρι 400 μέτρων κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$· καὶ ἀπόστασις 400 μέχρι 800 μέτρων, κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{400}$ τοῦ μήκους της.

Κατὰ τὴν θεωρίαν τῶν διοπτρῶν, σταδία ἄνευ ἀναλλοιώτου σωλῆνος, τῆς ὁποίας ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς ἔχει διάμετρον $0^{\mu},035$ ἢ $0^{\mu},040$, δίδει τὰς ἀποστάσεις κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{200}$ τοῦ μήκους αὐτῶν, ὑπὸ τὰς χεῖρας ἐξησκημένου καὶ ἐπιτηδείου γεωμέτρου εὑρισκομένη.

Ἡ ἔφιξις τῶν ἁπλῶν τούτων διοπτρῶν εἶναι 400 ἢ 300 μέτρων, τῶν διαιρέσεων τοῦ ὑψομετρίου ἐχουσῶν πάχος $0^{\mu},02$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο τῆς θεωρίας βεβαιοῦται καὶ ὑπὸ τῆς πείρας.

ΠΙΝΑΞ

101^{6}

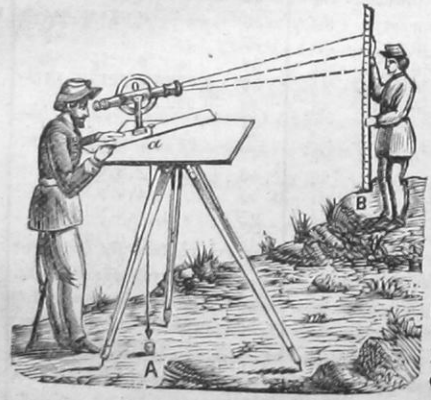
Ἑκατοστὰ τοῦ βαθμοῦ.	D	H	Ἑκατοστὰ τοῦ βαθμοῦ.	Ἑκατοστὰ τοῦ βαθμοῦ.	D	H	Ἑκατοστὰ τοῦ βαθμοῦ.
0	0,9998	0,0160	100	25	0,9996	0,0195	75
1	»	0,0161	99	26	»	0,0196	74
2	»	0,0162	98	27	»	0,0198	73
3	»	0,0163	97	28	»	0,0200	72
4	»	0,0164	96	29	»	0,0202	71
5	»	0,0165	95	30	»	0,0204	70
6	»	0,0166	94	31	»	0,0205	69
7	»	0,0168	93	32	»	0,0207	68
8	»	0,0169	92	33	»	0,0208	67
9	0,9998	0,0171	91	34	»	0,0209	66
10	0,9997	0,0172	90	35	»	0,0211	65
11	»	0,0174	89	36	»	0,0213	64
12	»	0,0175	88	37	»	0,0215	63
13	»	0,0177	87	38	»	0,0217	62
14	»	0,0178	86	39	0,9996	0,0219	61
15	»	0,0180	85	40	0,9995	0,0221	60
16	»	0,0181	84	41	»	0,0222	59
17	»	0,0183	83	42	»	0,0224	58
18	»	0,0184	82	43	»	0,0226	57
19	0,9997	0,0186	81	44	»	0,0227	56
20	0,9996	0,0187	80	45	»	0,0229	55
21	»	0,0189	79	46	»	0,0230	54
22	»	0,0190	78	47	»	0,0232	53
23	»	0,0192	77	48	»	0,0233	52
24	»	0,0193	76	49	0,9995	0,0235	51
25	»	0,0195	75	50	0,9994	0,0236	50

Ἑκατοστὰ τοῦ βαθμοῦ.	D	H	Ἑκατοστὰ τοῦ βαθμοῦ.	Ἑκατοστὰ τοῦ βαθμοῦ.	D	H	Ἑκατοστὰ τοῦ βαθμοῦ.

98^{6}

Ἐν Γαλλίᾳ μέχρι τοῦδε ἐγένετο χρῆσις τῆς ταχυμετρίας ἁπλῶς μόνον διὰ τὴν μελέτην σιδηροδρομικῶν τινων γραμμῶν. Ἐν Ἰταλίᾳ ἡ χρῆσις τῆς ταχυμετρίας ἐγένετο ἀπὸ τοῦ 1823 διὰ μεγάλας σχεδιογραφήσεις καὶ χωροσταθμήσεις. Αἱ ἐργασίαι αὗται ἐλήφθησαν ὡς βάσεις διὰ τὴν μελέτην σιδηροδρόμων, δδῶν, ὑδραγωγείων ἐπὶ ἀνωμάλου ἐδάφους, καὶ διὰ τὴν διάτρυσιν τῶν Ἄλπεων. Πρὸς δὲ ἐχρησίμευσαν εἰς τὴν σύνταξιν μεγάλων ἐπιπεδογραφήσεων, αἵτινες ἀπέβλεπον τὴν μελέτην τῶν ὠχυρωτικῶν καὶ στρατιωτικῶν ἔργων τοῦ Πιεμοντίου, τοῦ δουκάτου τῆς Γενεύης, κτλ. (ἴδε Ἐφαρμ. 151). Ἐν Τουρκίᾳ διὰ τῆς ταχυμετρίας ἐγένετο τὸ πλεῖστον μέρος τῆς μελέτης τῶν σιδηροδρομικῶν γραμμῶν· ἤδη δὲ δοκιμάζεται ἡ χρῆσις αὐτῆς πρὸς κατάρτισιν τοῦ κτηματολογικοῦ χάρτου τοῦ ς΄ τμήματος. Φρονοῦμεν δὲ ὅτι τὰ πλεονεκτήματα τῆς ὅλως ἀναλυτικῆς ταύτης μεθόδου θὰ καταστήσωσιν αὐτὴν κοινὴν εἰς πάντα τὰ ἔθνη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 100. Ταχυμετρικὴ τράπεζα. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων γίνεται δῆλον ὅτι, ἐὰν τὴν διόπτραν τοῦ γνώμονος τῆς τραπέζης ἀντικαταστήσωμεν διὰ μιᾶς σταδίας, θέλομεν ἔχει τὴν ταχυμετρικὴν τράπεζαν (Σχ. 122). Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, τὸ ὕψος τοῦ ἐργαλείου εἶναι Αο. Οὕτως, ἡ ἀπόστασις ἑκάστου σημείου, σκοπευομένου διὰ τῆς σταδίας, προσδιορίζεται δι' ἁπλῆς ἀναγνώσεως, ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου γενομένης, καὶ μεταφέρεται ἐπὶ τῆς τραπέζης διὰ τῆς κλίμακος· τὸ δὲ ὑψόμετρον τοῦ σημείου καταγράφεται περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο.



Σχ. 122.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 101. Κλίμακες. Γραμμὴ γραφική. Γραμμὴ φυσική. Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν 43, 44 καὶ 46 τοῦ Α΄ μέρους, ἕπεται ὅτι αἱ γραμμαὶ αἱ συνιστῶσαι σχεδιογράφημά τι προσδιορίζονται διὰ τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος. Αὕτη δὲ ἐκφράζει τὸν λόγον μεταξὺ τῶν γραμμῶν τοῦ σχεδιογραφήματος, καὶ τῶν ὁμολόγων γραμμῶν τοῦ ἐδάφους. Αἱ γραμμαὶ τοῦ σχεδιογραφήματος καλοῦνται γραφικαὶ γραμμαί, αἱ δὲ ὁμόλογοι γραμμαὶ τοῦ ἐδάφους, καλοῦνται φυσικαὶ γραμμαί. Ὁ λόγος οὗτος ἐκφράζεται διὰ κλάσματος τοῦ ὁποίου ἀριθμητὴς μὲν εἶναι ἡ μονὰς, παρονομαστὴς δὲ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 10.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν διὰ τοῦ γ παραστήσωμεν τὴν γραφικὴν γραμμὴν, τῆς ὁποίας ἡ ὁμόλογος φυσικὴ γραμμὴ εἶναι Γ, ἔχομεν τὴν ἰσοπηλικότητα $\frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{1}{M}$. Τὸ κλάσμα $\frac{1}{M}$, ὅπερ παριστᾷ τὴν ἀριθμητικὴν κλίμακα, γίνεται $\frac{1}{2500}$, $\frac{1}{5000}$. κτλ. καθ' ἣν περίπτωσιν τὸ Μ ἰσοῦται μὲ 2500, 5000, κτλ. μέτρα, καὶ ὅτε λέγομεν ὅτι τὸ σχεδιογράφημα ἐγένετο μὲ κλίμακα $\frac{1}{2500}$ ἢ $\frac{1}{5000}$ ἢ κτλ. Αἱ ἐν χρήσει δ' ἀριθμητικαὶ κλίμακές εἰσιν·

αἱ δεκαδικαὶ κλίμακες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$, κτλ.
αἱ διπλάσιαι » $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{5000}$, $\frac{1}{50000}$, »
αἱ ὑποδιπλάσιαι » $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{200}$, $\frac{1}{2000}$, $\frac{1}{20000}$, »

Ἐκ τῆς ἰσοπηλικότητος $\frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{1}{M}$, διαδοχικῶς προκύπτει

$$\gamma = \frac{\Gamma}{M} \qquad \text{καὶ} \qquad \Gamma = \gamma \times M,$$

τουτέστι «τὸ γραφικὸν μῆκος ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως » τοῦ ὁμολόγου αὐτῷ φυσικοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλίμακος.

» Τὸ φυσικὸν μῆκος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὁμολόγου αὐτῷ » γραφικοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τῆς κλίμακος».

Λοιπόν, ὅταν ἐχωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἀριθμητικὴν κλίμακα, ἕπεται ὅτι ἡ ἐκτίμησις γραφικοῦ ἢ φυσικοῦ τινος μήκους γίνεται διά τινος ἀμέσου καταμετρήσεως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους γενομένης, καὶ διὰ μιᾶς πράξεως τῆς διαιρέσεως ἢ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Τὴν πρᾶξιν δὲ ταύτην ἁπλοποιοῦμεν κατασκευάζοντες σχῆμα, γραφικὴ κλίμαξ καλούμενον, δι' οὗ εὑρίσκονται ἢ μεταφέρονται αἱ πραγματικαὶ εὐθεῖαι γραμμαὶ ἐπὶ τοῦ σχεδιογραφήματος δι' ἁπλοῦ ἀνοίγματος τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτου (Ἐφαρμ. 8. Μέρ. Α΄).

Τὴν κατασκευὴν τῆς γραφικῆς κλίμακος βλέπε Ἐφαρμ. 43, Μέρ. Α′.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 102. Ἁπλῆ γραφικὴ κλίμαξ εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ χάρτου τοῦ σχεδιογραφήματος χαραξομένη εὐθεῖα, καὶ εἰς ἴσα μέρη διαιρουμένη, ἥτις δίδει τὴν ἀπόστασιν κατὰ προσέγγισιν 10 μέτρων, ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς μικροτέρας διαιρέσεως.

Ὅριον τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν σημείων τῆς πρώτης τάξεως. Ἔφιξις τῶν ἐργαλείων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 103. Τύπος γενικός. Ἔστω α τὸ φυσικὸν μῆκος τῆς πλευρᾶς τριγώνου, σχηματιζομένου ὑπὸ τριῶν σημείων τῆς πρώτης τάξεως (Ἐφαρμ. 54. Μέρ. Α′). Ὑποθέσωμεν ὅτι καταμετροῦμεν μίαν γωνίαν τοῦ τριγώνου· εἶναι φανερὸν ὅτι ἐπὶ τῆς καταμετρήσεως ταύτης θέλει προκύψει σφάλμα, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται πρὸς τὴν προσέγγισιν τοῦ γωνιομέτρου, τὸ ὁποῖον ἔχομεν ὑπ' ὄψιν. Ἔστω λοιπὸν σ τὸ τόξον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ σφάλμα τοῦτο καὶ εἰς κύκλον, οὗτινος ἡ ἀκτὶς εἶναι ἡ μονάς. Εἰς τὸν κύκλον οὗτινος ἡ ἀκτὶς εἶναι α, τὸ πραττόμενον σφάλμα θέλει εἶναι σ×α, τουτέστι διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς θέσεως τοῦ ἄκρου, τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος πλευρᾶς α, θέλει προκύψει τὸ σφάλμα σ×α. Τούτου τεθέντος, ἐπὶ τοῦ σχεδίου, τὸ ἀντιστοιχοῦν σφάλμα θέλει εἶναι $\frac{\sigma\times\alpha}{M}$, τοῦ κλάσματος $\frac{1}{M}$ ἐκφράζοντος τὴν ἀριθμητικὴν κλίμακα (Ἐφαρμ. 101).

Ἀλλὰ ἐκ τῆς πείρας ἀποδεικνύεται ὅτι, ἵνα ἐπὶ τοῦ σχεδίου ἐκτιμηθῇ διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπόστασίς τις, πρέπει αὕτη νὰ ᾖναι μεγαλειτέρα τῶν $0^{\mu},0002$. Λοιπὸν, ὀφείλομεν νὰ ἔχωμεν τὸν γενικὸν τύπον

$$\frac{\sigma\alpha}{M}\geqq 0^{\mu},0002.$$

Ἐκ τούτου προκύπτουσι διαδοχικῶς οἱ ἑξῆς·

$$\alpha\geqq\frac{0^{\mu},0002\times M}{\sigma}\ldots.[\alpha]\text{ καὶ }\sigma\geqq\frac{0^{\mu},0002\times M}{\alpha}\ldots.[6].$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 104. Ἔφιξις τοῦ γραφομέτρου. Εἰς τὴν τοπογραφίαν σπανίως γίνεται χρῆσις ἀριθμητικῆς κλίμακος, μεγαλειτέρας τῆς $\frac{1}{10000}$, ὅτε M=10000. Ἡ δὲ καταμέτρησις τῶν γωνιῶν, διὰ τοῦ γραφομέτρου ἢ διοἱουδήποτε γωνιομέτρου, ἄνευ τῆς μεθόδου τῆς ἐπαναλήψεως ἐκτελουμένη, γίνεται κατὰ προσέγγισιν 1′.

Τούτου τεθέντος, εἰς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ μονὰς, 180° παρίστανται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ π=$3^{\mu},1415926$· λοιπὸν, τὸ πρῶτον λεπτὸν παρίσταται διὰ $\frac{\pi}{180\times 60}$, ἢ $0^{\mu},0002909\ldots.$ ἢ, ὡς ἔγγιστα, $0^{\mu},0003$.

Ἄρα, σ=$0^{\mu},0003$.

Εἰσάγοντες λοιπὸν εἰς τὸν τύπον [α] τὰς τιμὰς τοῦ M καὶ σ εὑρίσκομεν $\alpha\leqq 6666^{\mu}$.

Ἡ ἀξία λοιπὸν τοῦ α ἐκφράζει τὸ ὅριον τῆς πλευρᾶς τῶν τριγώνων τῆς πρώτης τάξεως, ὅπερ συνήθως ἐν τῇ ἐφαρμογῇ περιορίζεται μεταξὺ 3 καὶ 4 χιλιομέτρων, πρὸς δὲ καὶ τὴν ἔφιξιν τοῦ γωνιομέτρου ἐκφράζει.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον [6] θέσωμεν, α=4000^{μ}, ὅπερ ἐκφράζει τὸ ἀνώτερον ὅριον τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς, τῆς τριγωνικῆς δυκτιώσεως τοῦ ὑψομετρικοῦ χάρτου τῆς Γαλλίας, καὶ M=80000, ὅπερ ἐκφράζει τὸν παρανομαστὴν τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος τοῦ χάρτου τούτου, εὑρίσκομεν $\sigma\leqq 0^{\mu},0004$.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο ἐξαγόμενον ἐκφράζει ὅριον σφάλματος μεγαλείτερον τοῦ προκύπτοντος ἐκ τῆς καταμετρήσεως τῶν γωνιῶν κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς λεπτοῦ. Λοιπὸν, διὰ τὴν κατάρτισιν τοῦ σχεδιογραφήματος μόνον, ἡ καταμέτρησις τῶν γωνιῶν δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνηται διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἐπαναλήψεως· ἐπειδὴ αὕτη ἀποβλέπει τὴν προσδιόρισιν τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων τῆς τριγωνικῆς δυκτιώσεως ὡς πρὸς τὴν μεσημβρινὴν γραμμὴν καὶ τὴν κάθετον.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 105. Ἔφιξις τῆς χωρομετρικῆς πυξίδος. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὑπάρχει ἔφιξις μεγίστη καὶ ἔφιξις ἐλαχίστη. Ἐκ τούτων ἡ μὲν πρώτη ἀποδίδοται εἰς τὴν ἀβεβαιότητα τῆς ἀναγνώσεως τῆς γωνίας, ἡ δὲ δευτέρα εἰς τὸ ὅτι ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (Ἐφαρμ. 63).

Ἔφιξις μεγίστη. Ἐπειδὴ ἡ μικροτέρα διαίρεσις τοῦ ἄντυγος τῆς πυξίδος, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ κύκλος διαιρεῖται εἰς 400 βαθμοὺς, εἶναι 50′, τῆς ὁποίας τὸ τέταρτον δυνάμεθα νὰ ἐκτιμήσωμεν διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ, ἕπεται ὅτι διὰ τῆς πυξίδος αἱ γωνίαι καταμετροῦνται κατὰ προσέγγισιν 12′,50. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν σ=12′,50. Εἰς τὸν τύπον λοιπὸν [α], θέτοντες ἀντὶ τοῦ σ, τὸ μῆκος τοῦ τόξου 12′,50, τοῦ ἀνήκοντος εἰς κύκλον οὗτινος ἀκτὶς εἶναι ἡ μονὰς, καὶ διαιροῦντες διὰ M, εὑρίσκομεν $\alpha\leqq 0^{\mu},05$.

Ἡ ἀξία αὕτη, ἥτις ὡς ἔγγιστα ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους

τῆς μαγνητικῆς βελόνης, ἐκφράζει τὸ ὅριον οὕτως· « Ἡ γραφικὴ » ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ κέντρου τῆς πυξίδος καὶ τοῦ σκοπευομένου » σημείου δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους τῆς ἐν τῇ » πυξίδι μαγνητικῆς βελόνης. »

Τὴν συνθήκην δὲ ταύτην ἐκπληροῦμεν συμπλησιάζοντες τὰ σημεῖα οὕτως, ὥστε ἐπὶ τοῦ σχεδίου τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ $0^{\mu},10$.

Ἔφιξις ἐλαχίστη. Κατὰ τὰ ἐν τῇ Ἐφαρμ. 63 (Σχ. 82) λεχθέντα, τὸ σφάλμα, τὸ ὡς ἐκ τῆς ἐκκεντρικότητος προερχόμενον, ἰσοῦται μὲ οο′, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ μὲ τὴν γωνίαν ΟΑΟ′=Α′ΟΑ. Καθίσταται δὲ μεγαλείτερον ἐπὶ τοσοῦτον, ἐφ' ὅσον τὸ σημεῖον Α εἶναι πλησιέστερον τοῦ κέντρου Ο. Ἀλλὰ τὸ σφάλμα τοῦτο καταντᾷ μέχρι 12′,50. Ἄρα, ἀρκεῖ νὰ ζητηθῇ τὸ ἐλάχιστον τῆς πλευρᾶς Ο′Α τοῦ τριγώνου ΟΑ′Ο′, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία δὲν ὑπερβαίνει 12′,50.

Διὰ τῆς τριγωνομετρίας εὑρίσκομεν (Ἐφ. 55. Μέρ. Α′).

$$\text{Ο′Α}=\frac{\text{ο′ο}}{\text{ἐφαπτ.ΟΑΟ′}}.$$

Ἀλλὰ οο′=0,05, ΟΑΟ′=12′,50, καὶ ἐφαπτ. ΟΑΟ′=0,002· λοιπόν, Ο′Α=25 μέτρα.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο ἐξαγόμενον δεικνύει ὅτι ἡ μεταξὺ τοῦ κέντρου τῆς πυξίδος καὶ τοῦ σκοπευομένου σημείου περιλαμβανομένη ἀπόστασις πρέπει νὰ ἦναι 25 ἢ 30 μέτρων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 106. Ἔφιξις τῆς τραπέζης. Ἡ ἀκρίβεια τοῦ διὰ τῆς τραπέζης γενομένου σχεδιασμοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μεγέθους τῶν εὐθειῶν, ἐπὶ τῶν ὁποίων προσαρμόζεται ἡ ἀφετηρία γραμμὴ τοῦ γνώμονος (Ἐφαρμ. 90), καθ' ὃν καιρὸν συστοιχίζεται ἡ ἐπὶ τῆς τραπέζης εὐθεῖα μὲ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν αὐτῇ γραμμὴν τοῦ ἐδάφους· ἐπειδὴ εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ προσάρμωσις αὕτη γίνεται ἀκριβεστέρα ἐπὶ τοσοῦτον, ἐφ' ὅσον ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι μακροτέρα.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ὅταν σκοπεύωμεν διὰ τοῦ γνώμονος διεύθυνσίν τινα, στρέφοντες αὐτὸν περὶ τὴν βελόνην, ἀνάγκη νὰ στίξωμεν τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀφετηρίας γραμμῆς τοῦ γνώμονος περὶ τὸ χεῖλος τοῦ πίνακος τῆς τραπέζης οὕτως, ὥστε ἡ ὑπὸ τῆς στίξεως καὶ τοῦ σημείου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἵσταται ἡ βελόνη, περιλαμβανομένη εὐθεῖα νὰ ἦναι, ὅσον τὸ δυνατόν, μακροτέρα.

Ἀλλ' ἡ εὐθεῖα αὕτη καθ' ὅλας τὰς περιστάσεις δὲν δύναται νὰ ἦναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐν τῷ πίνακι ἐγγεγραμμένου κύκλου·

ὅθεν, ἐὰν ἡ ἀφετηρία γραμμὴ ἀπομακρύνηται τῆς εὐθείας ταύτης κατὰ 0,0002, ὅπερ ἐκφράζει τὸ ὅριον τῶν διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἐκτιμωμένων ποσοτήτων, τότε ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἄκρων τῆς ἀφετηρίας, καὶ ἐπὶ τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος κύκλου, θέλει προκύψει γωνιῶδες σφάλμα 0,0002. Ἀφ' ἑτέρου, εἰς τὸν κύκλον τοῦτον, οὗτινος ἡ ἀκτὶς εἶναι $0^{\mu},25$, τὸ τόξον ἑνὸς βαθμοῦ ἐκφράζεται διὰ $0^{\mu},004$· ὅθεν, ὁ ἀριθμὸς $0^{\mu},0002$ ἀντιστοιχεῖ μὲ γωνίαν 5′. Λοιπόν, διαιροῦντες διὰ Μ τὸν τύπον (α), καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς αὐτὸν ἀντὶ σ τὸ μῆκος τοῦ τόξου 5′, ἀνήκοντος εἰς κύκλον οὗτινος ἡ ἀκτὶς εἶναι ἡ μονὰς, εὑρίσκομεν $\alpha=0^{\mu},125$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἐκφωνεῖται ὡς ἑξῆς.

« Τὰ ἐκ τῆς παρατηρήσεως προκύπτοντα σφάλματα καθίστανται » ἀνεπαίσθητα ἐπὶ τοσοῦτον, ἐφ' ὅσον ἡ ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ γραφικὴ » ἀπόστασις τοῦ σκοπευομένου σημείου δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν, » $0^{\mu},125$, ἢ τὸ τέταρτον τῆς πλευρᾶς τῆς τραπέζης, τουτέστι » 1250 μέτρα διὰ τὴν ἀριθμητικὴν κλίμακα $\frac{1}{10000}$. »

Ἐὰν ὅμως στίξωμεν τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀφετηρίας καὶ ἐπὶ τὰς δύο πλευρὰς τοῦ περιχειλώματος τοῦ πίνακος, τότε προσδιορίζονται εὐθεῖαι διπλάσιαι τῶν προλεχθεισῶν, αἵτινες δύνανται νὰ ὑποτεθῶσιν ὅτι περιλαμβάνονται εἰς κύκλον, οὗτινος ἡ ἀκτὶς εἶναι $0^{\mu},50$. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὁ ἀριθμὸς 0,0002 εἰς τὸν κύκλον τοῦτον ἀντιστοιχεῖ μὲ γωνίαν 2′,50. Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν εἰς τὸν τύπον (α) ἀντὶ σ, τὸ μῆκος τοῦ τόξου 2′,50 ἀνήκοντος εἰς κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἡ μονὰς, εὑρίσκομεν ὡς ἔριξιν τῆς τραπέζης $\alpha=2500^{\mu}$, ὅπερ εἶναι ἐξαγόμενον μεγαλείτερον τοῦ προηγουμένου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 107. Ἔφιξις τῆς ἀποκλιτικῆς πυξίδος. Τοῦ ἐργαλείου τούτου ἡ μαγνητικὴ βελόνη ἔχει μῆκος $0^{\mu},11$. Ἀλλὰ τὸ τόξον ἑνὸς βαθμοῦ ἐκφράζεται διὰ $0^{\mu},0008$ ἐπὶ κύκλου, διαμετρον ἔχοντος τὸ μῆκος τῆς βελόνης· ὅθεν, ὁ ἀριθμὸς 0,0002 ἀντιστοιχεῖ μὲ γωνίαν 25′. Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν εἰς τὸν τύπον (α) ἀντὶ σ, τὸ μῆκος τοῦ τόξου 25′, ἀνήκοντος εἰς κύκλον, οὗτινος ἀκτὶς εἶναι ἡ μονὰς, εὑρίσκομεν ἀνεξαρτήτως τοῦ Μ, $\alpha=0,025$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει ὅτι « ἐπὶ τοσοῦτον καταντῶμεν εἰς ἐξαγόμενα ἀκριβῆ, » ἐφ' ὅσον κλίνομεν ἐπὶ γραφικῶν γραμμῶν, μὴ ὑπερβαινουσῶν τὸ » μῆκος τῆς μαγνητικῆς βελόνης. » Διὰ κλίμακα $\frac{1}{10000}$, ἡ γραφικὴ αὕτη ποσότης ἀντιστοιχεῖ εἰς 250 μέτρα.

Ἐν τούτοις ἡ ἀποκλιτικὴ πυξὶς δύναται ἐπιτυχῶς νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν συστοίχησιν τῆς τραπέζης, καὶ ἐν περιπτώσει καθ'

ἦν ἡ ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ ἀπόστασις τῶν σκοπευομένων σημείων ὑπερβαίνει τὰ 250 μέτρα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 108. Ἔφιξις τῆς ἁλύσου καὶ τοῦ χαλυβδίνου δεκαμέτρου. Ἡ διὰ τῆς ἁλύσου ἢ τοῦ χαλυβδίνου δεκαμέτρου καταμέτρησις τῶν ἀποστάσεων, ἐπειδὴ κατεδείχθη ἐπίπονος καὶ πολυδάπανος, μάλιστα δὲ διὰ καταμετρήσεις ἐπὶ ἀνωμάλου ἐδάφους ἐκτελουμένας, προὐτιμήθη ἡ διὰ τῆς σταδίας καταμέτρησις τῶν ἀποστάσεων τῶν ὑπερβαινουσῶν τὰ 50 μέτρα.

Διὰ τῆς ἁλύσου, ἐπὶ ὁριζοντείου ἐδάφους, ἡ καταμέτρησις ἀποστάσεως ἑνὸς χιλιομέτρου γίνεται κατὰ προσέγγισιν $0^{\mu}{,}50$· ἐπὶ ἀνωμάλου δὲ ἐδάφους κατὰ προσέγγισιν 2 μέχρι 3 μέτρων. Τῆς αὐτῆς ἀποστάσεως, καὶ ἐπὶ ὁριζοντείου ἐδάφους, ἡ διὰ τοῦ χαλυβδίνου δεκαμέτρου ἐκτελουμένη καταμέτρησις γίνεται κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἕως 0,2.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ.

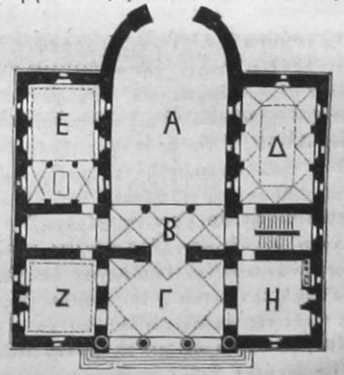
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 109. Ὕψος, Πρόσοψις, Ἐπίπεδον, Κάτοψις. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν προβολὴν (§. 14) τοῦ ἐξωτερικοῦ καὶ ὁρατοῦ μέρους σώματός τινος, ὡς π. χ. οἰκοδομῆς, ἢ μηχανῆς, ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ μιᾷ τῶν πρωτίστων ἑδρῶν αὐτοῦ, λαμβάνομεν τὸ ὕψος ἢ τὴν πρόσοψιν τῆς οἰκοδομῆς, ἢ τῆς μηχανῆς. Ἐὰν ἡ προβολὴ ἐκτελεσθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου ὁριζοντείου, καὶ ἀπὸ τοῦ κατωτάτου σημείου τοῦ σώματος διερχομένου, λαμβάνομεν τὸ ἐπίπεδον ἢ τὴν κάτοψιν τοῦ σώματος.

Διατομή. Ἐκτὸς τῆς διὰ τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐπιπέδου παραστάσεως τῶν ἀντικειμένων λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν καὶ αἱ διατομαί. Διατομὴ δὲ καλεῖται ἡ ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας σχεδιογράφησις τῆς τομῆς τῆς γενομένης δι' ἐπιπέδου κατακορύφου ἢ ὁριζοντείου, τὸ ὁποῖον νοερῶς διασχίζει τὴν οἰκοδομὴν ἢ τὴν μηχανήν.

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων ἕπεται ὅτι, ἐκλέγοντες καταλλήλως ἱκανὸν ἀριθμὸν διατομῶν, θέλομεν δυνηθῇ, διὰ τοῦ σχεδιογραφήματος αὐτῶν καὶ τῆς κλίμακος, νὰ λάβωμεν γνῶσιν τοῦ τε σχήματος καὶ τοῦ μεγέθους τῶν μερῶν τοῦ ἀντικειμένου, μετὰ μαθηματικῆς ἀκριβείας καὶ μετὰ τοσαύτης σαφηνίας ὡς νὰ ἀνελύομεν τὰ διὰ τῶν διατομῶν παριστανόμενα μέρη, ἵνα ἀλληλοδιαδόχως διέλθωσιν αὐτὰ ὑπὸ τὰ βλέμματα τοῦ παρατηρητοῦ· ἢ ὡς νὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἐνεργήσωμεν οὕτως, ὥστε νὰ εἰσχωρήσωσιν, δι' αὐτῆς τῆς ὕλης ἐξ ἧς συντίθεται τὸ ἀντικείμενον, τὰ βλέμματα τοῦ παρατηρητοῦ εἰς ὅλας ἐν γένει τὰς λεπτομερείας τοῦ ἐσχεδιογραφημένου ἀντικειμένου.

Ὅταν τὸ παρασταθησόμενον ἀντικείμενον παρουσιάζῃ περιπλοκήν τινα, ἀφ' οὗ λάβωμεν τὸ γενικὸν ἐπίπεδον καὶ τὸ ὕψος τοῦ συνόλου καὶ δείξωμεν τὰς πρωτίστας διατομάς, τότε κατὰ μέρος ἐπαναλαμβάνομεν μὲ μεγαλειτέραν κλίμακα τὰς οὐσιωδεστέρας λεπτομερείας διὰ διατομῶν ἢ προβολῶν καταλλήλως ἐκλεγομένων. Διὰ τῶν τελευταίων περιγράφομεν σαφῶς τὸ σχῆμα καὶ τὴν διάταξιν. Τοιουτοτρόπως δὲ δίδομεν ἀκριβῆ ἰδέαν τῆς οἰκοδομῆς ἢ τῆς μηχανῆς, ἢ οἱουδήποτε ἀντικειμένου.

Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τὴν σύγχυσιν ἐνῷ σχεδιογραφοῦμεν τὰς διατομάς, διὰ γραμμῶν πλαγίων δεικνύομεν τὰ στερεὰ μέρη, τὰ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς διατομῆς τεμνόμενα· τὰ κενὰ δὲ μέρη δεικνύομεν ἄνευ γραμμῶν. Ἡ κατάλληλος ἐκλογὴ καὶ διαγραφὴ τῶν σκιῶν, τὰς ὁποίας ῥίπτουσιν αἱ διάφοροι λεπτομέρειαι, ἐπαυξάνουσι τὴν εὐκρίνειαν τοῦ σχεδίου.



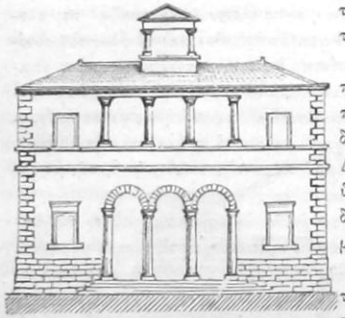
Σχ. 123.

Ἡ χάραξις τῶν σκιῶν συνιστᾷ τὴν σκιαγραφίαν, ἥτις βασίζεται ἐπὶ γεωμετρικῶν κανόνων. Περὶ ταύτης δὲ οὐδεὶς λόγος γενήσεται ἐνταῦθα.

Τὸ σύνολον τῶν προβολῶν καὶ τῶν διατομῶν δυνάμεθα νὰ συνενώσωμεν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχεδίου, τουτέστιν ἐκτὸς τῶν στερεῶν μερῶν, τῶν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς διατομῆς τεμνομένων, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ἐπὶ τοῦ σχήματος τὴν προβολὴν τῶν πλησίον τοῦ ἐπιπέδου τούτου εὑρισκομένων μερῶν οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωμεν ἐσωτερικήν τινα ἄποψιν τῶν κοιλομάτων τῶν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς διατομῆς ἀποκαλυπτομένων.

Τὸ Σχῆμα 123 παριστᾷ τὸ ἐπίπεδον οἰκίας. Οἱ τοῖχοι καὶ αἱ στῆ-

λαι ἐτμήθησαν κατὰ τὸ ὁμαλὸν τοῦ ἐσωτερικοῦ ἐδάφους αὐτῆς. Ἡ προβολὴ τῶν βαθμίδων τῆς ἀναβάθρας ἐλήφθη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς διατομῆς ὡς καὶ ἡ τῶν βαθμίδων τῆς ἐσωτερικῆς κλίμακος.



Σχ. 124.

Αἱ λεπτομέρειαι τοῦ ἐπιπέδου εἶναι αἱ ἑξῆς· τὸ **Α**, παριστᾷ αὐλήν· **Β**, διάδρομον· **Γ**, πρόδομον. **Δ**, ἑστιατόριον· **Ε**, ὑπνωτήριον· **Ζ**, σπουδαστήριον καὶ τὸ **Η**, μαγειρεῖον.

Τὸ Σχῆμα 124, παριστᾷ τὸ ὕψος τῆς ὄψεως τῆς αὐτῆς οἰκίας.

Τὸ δὲ Σχῆμα 125, παριστᾷ κατακόρυφον διατομὴν ἑτέρας οἰκίας κατὰ τὸ αὐτὸ ὕψος. Τὸ ἐπίπεδον τῆς διατομῆς ὑποτίθεται διερχόμενον διὰ τοῦ μέσου τῆς ὄψεως. Ἡ προβολὴ τῶν ἐσωτερικῶν θυρῶν, τῶν κιόνων, τῶν στρωτήρων τῆς στέγης, κτλ., λαμβάνεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς διατομῆς.

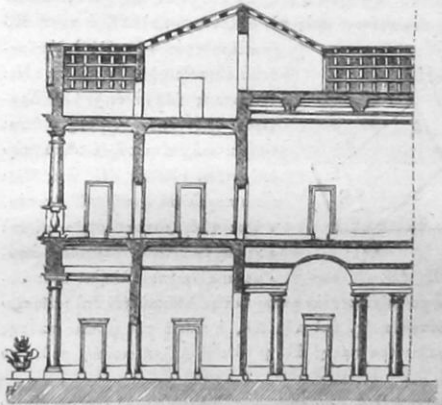
ΕΚΤΥΠΩΝ ΤΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 110. **Γενικὴ χωροστάθμησις γηπέδου.** Ἵνα λάβωμεν ἀκριβῆ ἰδέαν τῆς ἀνωμαλίας γηπέδου τινός, ἀνάγκη νὰ προσδιορίσωμεν τὰ ὑψόμετρα πολυαρίθμων σημείων. Ἡ προσδιόρισις τῶν ὑψομέτρων τούτων συνιστᾷ τὴν γενικὴν χωροστάθμησιν, ἥτις ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς:

Ἐν πρώτοις, λαμβάνομεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶσιν αἱ κορυφαὶ τῶν πολυγώνων ἢ τῶν τριγώνων πολυγωνικῆς ἢ τριγωνικῆς τινος δυκτιώσεως· διατρέχομεν τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων ἢ τῶν τριγώνων, προσδιορίζοντες δι' ἁπλῆς ἢ διὰ συνθέτου χωροσταθμήσεως τὰ ὑψόμετρα τῶν διαδοχικῶν τούτων κορυφῶν, τουτέστι τῶν σημείων τῆς πρώτης τάξεως· καὶ διὰ τῶν τελευταίων τούτων προσδιορίζομεν τὰ ὑψόμετρα τῶν τῆς δευτέρας τάξεως σημείων, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τούτου γενομένου, διὰ τῶν ὑψομέτρων τῶν τῆς πρώτης, δευτέρας, τρίτης, κτλ. τάξεως σημείων, ὡς κεντρικῶν σημείων λαμβανομένων, προσδιορίζομεν δι' ἀκτινοβολίας τὰ ὑψόμετρα τῶν λοιπῶν σημείων, τουτέστι τῶν λεπτομερειῶν, διευθετοῦντες τὸ ἐργαλεῖον τῆς χωροσταθμήσεως ἐπὶ ἑκάστου κεντρικοῦ σημείου, τὸ δὲ ὑψόμετρον διαδοχικῶς ἐπὶ τῶν λοιπῶν σημείων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 111. **Διατομή.** Ὅταν πρόκηται νὰ λάβωμεν ἀκριβῆ γνῶσιν τῆς ἀνωμαλίας τοῦ ἐδάφους κατά τινα ὡρισμένην γραμμὴν, ἐπὶ τῆς γραμμῆς ταύτης σημειοῦμεν διὰ πασσαλίσκων σημεῖα ἀνὰ 50 ἢ 100 μέτρα, τῶν ὁποίων τὰ ὑψόμετρα προσδιορίζομεν κατὰ τὰ ἐν τῇ (Ἐφαρμ. 18 καὶ 38) λεχθέντα. Τὸ ἐξαγόμενον δὲ τῆς τοιαύτης χωροσταθμήσεως παριστάνομεν ἐπὶ χάρτου ὡς ἑξῆς. Γράφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν ἐκλαμβάνομεν ὡς τὴν ὁριζόντειον ἀνάπτυξιν τῆς ὁριζοντείου προβολῆς, τῆς διὰ τῶν σημείων τοῦ ἐδάφους διερχομένης γραμμῆς. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης φέρομεν διὰ τῆς κλίμακος τὰς ὁριζοντείους ἀποστάσεις, τὰς μεταξὺ τῶν σημείων τούτων· ἔπειτα, ἐπὶ ἑκάστου τῶν οὕτω λαμβανομένων ἐπὶ τῆς εὐθείας σημείων, ὑψοῦμεν κάθετον· ἐπὶ δὲ τῆς καθέτου φέρομεν διὰ διπλῆς ἢ τριπλῆς κλίμακος, τὰ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς συγκρίσεως ὑψόμετρα τῶν ἀντιστοίχων σημείων, καὶ διὰ καμπύλης ἑνοῦμεν τὰ οὕτω προσδιοριζόμενα σημεῖα. Τούτου γενομένου, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ μὲν καμπύλη θέλει παραστήσει τὴν ἀνωμαλίαν τοῦ ἐδάφους κατὰ τὴν ὁρισθεῖσαν γραμμήν· τὸ μεταξὺ δὲ διά-

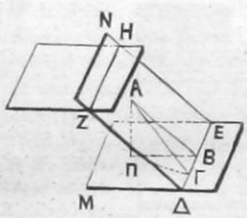


Σχ. 125.

στημα τῆς καμπύλης καὶ τῆς εὐθείας, ἥτις ἐκφράζει τὸ ἐπίπεδον τῆς συγκρίσεως, τὴν διατομὴν τοῦ ἐδάφους θέλει παραστήσει.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 112. Κατὰ πλάτος διατομή. Ὅταν πρόκηται νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ὄγκον γηίνου τινὸς ζώνης, τότε ἀφ' οὗ ἐκτελέσωμεν τὴν κατὰ μῆκος διατομὴν τῆς ζώνης, ἐκτελοῦμεν καὶ ἑτέρας διατομὰς ἀνὰ 20, 30, 50, κτλ. μέτρα, καθέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς κατὰ μῆκος διατομῆς, αἵτινες καλοῦνται κατὰ πλάτος διατομαί.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 113. Γραμμὴ μεγαλειτέρας κλίσεως. Ἔστω ἐπίπεδόν τι N, κεκλιμένον πρὸς τὸν ὁρίζοντα, καὶ ΔΕ ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου τούτου μεθ' ἑνὸς ὁριζοντείου ἐπιπέδου Μ, ἥτις θέλει εἶναι ὁριζόντειος (Ἀρχὴ έ. §. 15). Δεύτερον ὁριζόντειον ἐπίπεδον θέλει τμήσει τὸ ἐπίπεδον Ν κατὰ τὴν ὁριζόντειον εὐθεῖαν ΖΗ, ἥτις θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΔΕ. Λοιπόν, «ὅλαι αἱ ὁριζόντειοι εὐθεῖαι αἱ ἐπὶ »κεκλιμένου τινὸς ἐπιπέδου ἀγό»μεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλ»λήλας.» Τούτου τεθέντος, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ μιᾶς τῶν ὁριζοντείων τούτων π. χ. ἐπὶ τῆς ΔΕ, ἡ κλίσις τῆς εὐθείας ταύτης θέλει εἶναι μεγαλειτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ΑΓ, κλινούσης πρὸς τὴν ὁριζόντειον ΔΕ.



Σχ. 126.

Τῷ ὄντι, ἔστω ΑΠ ἡ κατακόρυφος τοῦ σημείου Α· ἐπιζευγνύομεν τὰς ΠΒ καὶ ΠΓ· ἡ εὐθεῖα τότε ΑΓ, ὡς πλαγία τῆς ΔΕ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΒ, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΕ· ἀλλ' αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι πλάγιοι ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντειον ἐπίπεδον Μ. Λοιπόν, ἡ μικροτέρα τούτων μᾶλλον πλησιάζει τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ΑΠ, ἤτοι ΠΒ<ΠΓ· ἀλλ' ἡ κλίσις τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι $\frac{\text{ΑΠ}}{\text{ΠΒ}}$, τῆς δὲ εὐθείας ΑΓ εἶναι $\frac{\text{ΑΠ}}{\text{ΠΓ}}$. Ἄρα, ἡ κλίσις τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς κλίσεως τῆς εὐθείας ΑΓ. Ἕνεκα τούτου αἱ γραμμαὶ, αἱ κάθεται ἐπὶ τῶν ὁριζοντείων γραμμῶν κεκλιμένου τινὸς ἐπιπέδου, καλοῦνται γραμμαὶ μεγαλειτέρας κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Κλίσις δὲ ἐπιπέδου καλεῖται ἡ κλίσις τῶν γραμμῶν τῆς μεγαλειτέρας κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου.

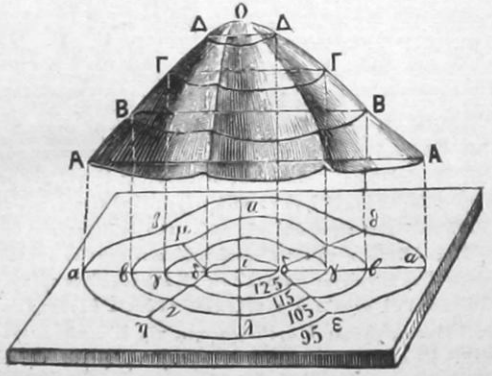
Ὅταν αἱ ὁριζόντειοι γραμμαὶ ἦναι καμπύλαι, τότε ἡ γραμμὴ τῆς μεγαλειτέρας κλίσεως εἶναι κάθετος ἐπὶ ἑκάστης ἐφαπτομένης τῶν ὁριζοντείων καμπύλων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 114. Ὁριζόντειοι καμπύλαι. Ὁριζόντειος καμπύλη λέγεται ἡ τομὴ ΑΑ, ἢ ΒΒ, ΓΓ, κτλ. τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐδάφους (Σχ. 127), δι' ὁριζοντείου ἐπιπέδου γενομένη, τουτέστιν ἐκείνη τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὑψόμετρον. Ἐπὶ τοῦ ἐδάφους προσδιορίζεται ὁριζόντειός τις καμπύλη δι' ἑνὸς ἐργαλείου χωροσταθμήσεως καὶ τοῦ ὠθιστοῦ ὑψομετρίου.

Ἔστω διὰ τοῦ σημείου α νὰ διέλθῃ ἡ ὁριζόντειος καμπύλη αλακ. πρὸς τοῦτο, ὁ μὲν γεωμέτρης διευθετεῖ τὸ ἐργαλεῖον εἰς τὸ Β, εἰς ἀπόστασίν τινα ἀπὸ τοῦ σημείου α, ὁ δὲ βοηθὸς κρατῶν κατακορύφως τὸ ὑψομέτριον εἰς τὰ σημεῖον α θέτει ὑπὸ τὰς ὀδηγίας ἐκείνου τὸν σκοπὸν εἰς τὸ ὑπὸ τῆς ὁριζοντείου τοῦ ἐργαλείου δεικνυόμενον ὕψος. Τούτου γενομένου, ὁ βοηθὸς ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ σημείου α καὶ προχωρεῖ, χωρὶς ποσῶς νὰ ἀναβαίνῃ οὐδὲ νὰ καταβαίνῃ, μέχρι 5 ἢ 10 μέτρων, ἕνθα καὶ στηρίζει τὸ ὑψομέτριον, ἀφίνων πάντοτε τὸν σκοπὸν εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἀκολούθως ὁ γεωμέτρης ὁδηγεῖ τὸν βοηθὸν, διὰ χειρονομίας νὰ ἀναβῇ ἢ νὰ καταβῇ, μέχρις οὗ τὸ κέντρον τοῦ σκοποῦ νὰ εὑρεθῇ καὶ πάλιν εἰς τὸ ὑπὸ τῆς ὁριζοντείου τοῦ ἐργαλείου δεικνυόμενον ὕψος. Ἔστω η τὸ οὕτω προσδιοριζόμενον σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, εἰς ὃ ἐμπηγνύεται πασσαλίσκος. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προσδιορίζονται καὶ τὰ σημεῖα λ, ε, α, ζ, κτλ. τὰ ὁποῖα ἀφοῦ σημειωθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἐδαφους γίνεται ἡ σχεδιογράφησις τῆς δι' αὐτῶν διερχομένης γραμμῆς αηλεα. Ἡ τελευταία αὕτη παριστᾷ μέρος τῆς διὰ τοῦ σημείου α διερχομένης ὁριζοντείου καμπύλης. Τὸ μέρος δὲ τῆς καμπύλης ταύτης δύναται νὰ προεκτανθῇ κατὰ βούλησιν, ἀφ' οὗ λάβωμεν ὡς ἀρχὴν, διὰ τὴν ἐξακολούθησιν τῆς ἐργασίας, τὸ τελευταῖον προσδιορισθὲν ἤδη σημεῖον καὶ μετατοπίσωμεν τὸ ἐργαλεῖον.

Λαμβάνομεν τὴν τομὴν τοῦ ὑπὸ τοῦ Σχήματος 127 παριστανομένου λόφου, τὴν γενομένην δι' ὁριζοντείων ἐπιπέδων, τῶν ὁποίων ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις εἶναι ἀμεταβλήτος καὶ ἴση μὲ δύο μέτρα, ὡς ἐξῆς. Προσδιορίζομεν ἐπὶ τῆς κλιτύος τοῦ λόφου τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, κτλ. οὕτως ὥστε, τὰ ὑψόμετρα αὐτῶν, ἀνὰ δύο λαμβανόμενα, νὰ διαφέρωσιν κατὰ δύο μέτρα, καὶ καθ' ὅσα γνωρίζομεν, προσδιορίζομεν τὴν ἐξ ἑκάστου σημείου διερχομένην ὁριζοντείον καμπύλην. Ἡ προσδιόρισις δὲ τῶν σημείων Β, Γ, Δ, κτλ. γίνεται ὡς ἐξῆς.

Διευθετοῦμεν τὸ ἐργαλεῖον μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β, εἰς δὲ τὸ Α στηρίζομεν τὸ ὑψομέτριον· ἔπειτα, διὰ χειρονομίας ὁδηγοῦμεν τὸν βοηθὸν νὰ τοποθετήσῃ τὸ κέντρον τοῦ σκοποῦ εἰς τὸ ὕψος τῆς ὑπὸ τοῦ ἐργαλείου προσδιοριζομένης ὁριζοντείου. Τούτου γενομένου, ἀφαιροῦμεν δύο μέτρα ἀπὸ τῆς ἤδη προσδιορισθείσης ῥιπῆς τοῦ σημείου Α, καταβιβάζοντες κατὰ 2 μέτρα τὸν σκοπὸν ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου· ἔπειτα ὁδηγοῦμεν τὸν βοηθὸν οὕτως, ὥστε νὰ προχωρῇ μὲν κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΔ, νὰ κρατῇ δὲ κατακορύφως τὸ ὑψομέτριον, μέχρις οὗ τὸ κέντρον τοῦ σκοποῦ εὑρεθῇ καὶ πάλιν ἐπὶ τῆς ὑπὸ τοῦ ἐργαλείου δεικνυομένης ὁριζοντείου. Οὕτως ὁ ποὺς τοῦ ὑψομετρίου θέ-



Σχ. 127.

λει ὑποδείξει τὸ σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον θὰ εὑρίσκηται δύο μέτρα ἄνω τοῦ σημείου Α. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προσδιορίζονται καὶ τὰ σημεῖα Γ, Δ, κτλ.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἐὰν τὴν ἐργασίαν ταύτην ἐκτελέσωμεν κατὰ τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν ΔΑ, ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ λόφου ἀρχίζοντες, τότε εἶναι φανερὸν ὅτι, ἀπὸ τῆς ῥιπῆς ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν, προσθέτομεν εἰς αὐτὴν τὸ ὕψος τοῦ ζητουμένου σημείου.

Ὅ,τι ἀνεφέρομεν περὶ τῆς γραμμῆς ΑΔ, ἐὰν τοῦτο ἐφαρμόσωμεν καὶ ἐπὶ ἑκάστης γραμμῆς, χαρακτηριζούσης τὸ σχῆμα τοῦ ἐδάφους, τότε διευκολύνομεν τὰ μέγιστα τὴν σ᾽ὁριζοντείων καμπύλων παρά-

στασιν τοῦ ἐδάφους. Τοιαῦται δὲ χαρακτηριστικαὶ γραμμαὶ εἶναι ἡ κορυφαία καὶ ἡ βαθεῖα γραμμή, ἢ ἡ ῥευματιά.

Αἱ χαρακτηριστικαὶ γραμμαὶ εἶναι τοιαῦται ὥστε, ἵνα ἀπομακρυνθῶμεν ἐξ ἑκατέρας τούτων, δεξιόθεν ἢ ἀριστερόθεν, ἀνάγκη εἶναι διὰ μὲν τὴν κορυφαίαν, νὰ καταβῶμεν, διὰ δὲ τὴν βαθεῖαν γραμμήν, νὰ ἀναβῶμεν.

Εἰς τὸ Σχ. 127, τοιαῦται γραμμαὶ εἶναι αἱ αδ, ικ, ιλ, καὶ αἱ ηδ, εδ, θδ, ζδ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 115. Ὑψομετρικὸν ἢ τοπογραφικὸν σχέδιον. Τοιοῦτον εἶναι τὸ σχέδιον ἐπὶ τοῦ ὁποίου αἱ ἀνωμαλίαι τοῦ ἐδάφους παρίστανται διὰ πολυαρίθμων ὁριζοντείων καμπύλων γραμμῶν, ἰσάκις ἀπ᾽ἀλλήλων ἀπεχουσῶν. Τὰ ὑψόμετρα τῶν καμπύλων τούτων εἰσὶ πάντοτε ἀκέραιοι ἀριθμοί, τουτέστιν 10^{μ}, 20, 30, κτλ. ἢ 100^{μ}, 200, 300. Ἡ ἀμετάβλητος διαφορὰ τῶν ὑψομέτρων δύο διαδοχικῶν ὁριζοντείων καμπύλων, καλεῖται ἰσαπόστασις τῶν καμπύλων καὶ παρίσταται διὰ ι.

Ἔχοντες ὑπ᾽ὄψιν τοπογραφικόν τι σχέδιον, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ἔκτυπον τοῦ ὑπ᾽αὐτοῦ παριστανομένου μέρους τοῦ ἐδάφους. Οὕτω π. χ. ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ κλίμαξ τοῦ τοπογραφικοῦ σχεδίου εἶναι $\frac{1}{10000}$, ἡ δὲ ἰσαπόστασις τῶν ὁριζοντείων καμπύλων πέντε μέτρων, ἡ ἰσαπόστασις ἐπὶ τοῦ σχεδίου θέλει παρασταθῇ διὰ ἡμίσεως χιλιοστομέτρου. Τούτου τεθέντος, ἐπὶ φύλλου χάρτου, ἡμίσεως χιλιοστομέτρου πάχους, διαγράφομεν ἑκάστην ὁριζόντειον καμπύλην, καὶ περικόπτομεν τὸν χάρτην κατὰ τὴν καμπύλην ταύτην. Ἔπειτα, ἐπὶ σανίδος, ὑπό τινων ἀναφορικῶν σημείων ὁδηγούμενοι, τοποθετοῦμεν ἀλλεπαλλήλως καὶ κατὰ τάξιν τὰ οὕτω προκύπτοντα καμπυλώδη φύλλα τοῦ χάρτου, ἀπὸ τῆς χαμηλοτέρας ἀρχίζοντες καὶ μέχρι τῆς ὑψηλοτέρας καμπύλης καταντῶντες. Τούτων γενομένων, θέλομεν ἔχει ἐν πρώτοις τὸ διὰ κλιμακτήρων ἢ τὸ κλιμακωτὸν λεγόμενον ἔκτυπον, καὶ ἀκολούθως τὸ ἔκτυπον, τὸ ὁποῖον θὰ ἀπεικονίσῃ πιστότατα τὸ ἔδαφος ὁμοῦ μὲ τὰ ὄρη, τὰς πεδιάδας καὶ παντὸς εἴδους λεπτομερείας ἀπὸ τοῦ τοπογραφικοῦ σχεδίου λαμβανομένας, καλύπτοντες διὰ κηροῦ τὰ μεταξὺ τῶν προσδοχῶν διαστήματα οὕτως, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἐπιφάνεια συνεχὴς μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν καμπύλων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 116. Ἰσαπόστασις τῶν καμπύλων. Ἴδομεν ὅτι ἡ γραμμὴ τῆς μεγαλειτέρας κλίσεως τέμνει κατ᾽ὀρθὰς, ἁπάσας

τὰς ὁριζοντείους γραμμάς. Τούτου τεθέντος, ἔστωσαν ζ α η καὶ ν β μ αἱ προβολαὶ δύο διαδοχικῶν ὁριζοντείων καμπύλων, καὶ αβ, ἡ ἐπ' αὐτῶν κοινὴ κάθετος, (Σχ. 127), ἥτις εἶναι τόξον τῆς προβολῆς τῆς γραμμῆς τῆς μεγαλειτέρας κλίσεως ΑΒ. Λωρίς τις στενοτάτη τοῦ ἐδάφους, κατὰ τὸ μῆκος τῆς αβ λαμβανομένη, δύναται νὰ ἐξομοιωθῇ μὲ κεκλιμένον ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ ὁριζόντειοι καμπύλαι ταυτίζονται μὲ τὰς καμπύλας τῶν σημείων α καὶ β, καὶ τότε ἡ αβ θέλει εἶναι ἡ γραμμὴ τῆς μεγαλειτέρας κλίσεως τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Ἀλλ' ἡ κλίσις τοῦ ἐδάφους κατὰ τὸ μῆκος τῆς αβ εἶναι ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς τῶν ὑψομέτρων τῶν σημείων α καὶ β (Ἐφαρμ. 6) πρὸς τὴν ὁριζόντειον ἀπόστασιν αβ τῶν σημείων τούτων· ὅθεν, καλοῦντες κ τὴν κλίσιν ταύτην, καὶ ι τὴν ἰσαπόστασιν τῶν ὁριζοντείων καμπύλων, θέλομεν ἔχει,

$$\kappa = \frac{\iota}{\alpha\beta}.$$

Παραδεχόμεθα ὅτι, τῆς κλίμακος ὁποιασδήποτε οὔσης, ἡ αὐτὴ ἀπόστασις αβ ἀντιστοιχεῖ πάντοτε εἰς τὴν αὐτὴν κλίσιν κ. Ἡ συνθήκη αὕτη προϋποθέτει ὁμοίως τὸ ι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τῆς κλίμακος τοῦ σχεδίου.

Ἀφ' ἑτέρου, ἐκ συνθήκης, ἡ γραφικὴ ἰσαπόστασις λαμβάνεται ἴση μὲ $\iota = 0^{\mu},0005$. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ φυσικὴ ἰσαπόστασις Ι λαμβάνεται, πολλαπλασιαζομένου τοῦ ι ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν Μ τῆς κλίμακος τοῦ σχεδίου:

διὰ Μ= 5000, θέλομεν ἔχει Ι=0,0005 × 5000= $2^{\mu},50$,
» Μ=10000, » » Ι=0,0005 × 10000= 5 ,00,
» Μ=20000, » » Ι=0,0005 × 20000=10 ,00,

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου ἕπεται ὅτι, τοῦ ι μένοντος ἀμεταβλήτου, ἡ κλίσις ἐπὶ τοσοῦτον θέλει εἶναι μεγαλειτέρα, ἐφ' ὅσον ἡ αβ εἶναι μικροτέρα. Λοιπόν, «εἰς πᾶν τοπογραφικὸν σχέδιον, ἡ κλίσις τοῦ ἐδάφους παρίσταται ἐπὶ τοσοῦτον μεγαλειτέρα, ἐφ' ὅσον αἱ ὁριζόντειοι καμπύλαι μᾶλλον συμπλησιάζουσιν». Ἐὰν, συντομίας χάριν, ἀντὶ ὁριζοντείων καμπύλων, παραστήσωμεν τὰς ἀνωμαλίας τοῦ ἐδάφους διὰ πυκνῶν καθέτων γραμμῶν ἐπὶ τῆς διευθύνσεως, καὶ ἐν τῷ μεταξὺ διαστήματι δύο διαδοχικῶν καμπύλων, τότε ἡ κλίσις ἐπὶ τοσούτων θέλει παρασταθῇ μεγαλειτέρα, ἐφ' ὅσον αἱ κάθετοι γραμμαὶ εἶσιν βραχύτεραι, πλησιέστεραι καὶ παχύτεραι.

Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου β ἀγάγωμεν κοινὴν κάθετον ἐπὶ τῆς καμπύλης νμ καὶ ἐπὶ τῆς ἀκολούθου γγ, θέλομεν ἔχει τὴν γραμμὴν τῆς μεγαλειτέρας κλίσεως τοῦ μεταξὺ τῶν νέων τούτων καμπύλων περιλαμβανομένου μέρους τοῦ ἐδάφους. Τοιουτοτρόπως ἐξακολουθοῦντες θέλομεν πορισθῇ ἀνώμαλον γραμμὴν, ἥτις θέλει εἶναι γραμμὴ τῆς μεγαλειτέρας κλίσεως τοῦ ἐδάφους· ὅθεν, «αἱ γραμμαὶ τῆς μεγαλειτέρας κλίσεως τέμνουσι κατ' ὀρθὰς τὰς ὁριζοντείους καμπύλας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 117. Κάθετοι ἢ σκιαγραφικαὶ γραμμαί. Ἡ δι' ὁριζοντείων καμπύλων παράστασις τοῦ ἐδάφους εἶναι ἡ ἀκριβεστέρα. Τῆς χαράξεως τῶν καμπύλων γενομένης μετὰ προσοχῆς ἐπὶ χάρτου, εὐκόλως προσδιορίζεται ἐπὶ τοῦ σχεδίου τὸ ὑψόμετρον ὁποιουδήποτε σημείου, μολονότι ἡ μὲν ἰσαπόστασις τῶν καμπύλων σημειοῦται περὶ τὸ περιθόριον τοῦ σχεδίου, τὸ δὲ ὑψόμετρον ἑκάστης καμπύλης ἄπαξ.

Ὅταν ὅμως τὸ τοπογραφικὸν σχέδιον καταρτίζηται μὲ κλίμακα $\frac{1}{10000}$, ἢ ἔτι μικροτέραν, τότε ἡ παράστασις τῶν ἀνωμαλιῶν γίνεται ἐκφραστικωτέρα, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰς ὁριζοντείους καμπύλας διὰ τῶν καθέτων ἢ τῶν σκιαγραφικῶν γραμμῶν. Αἱ γραμμαὶ αὗται εἶσιν αἱ τῆς μεγαλειτέρας κλίσεως γραμμαὶ τῆς ἐπιφανείας· χαράσσονται δὲ καθέτως μεταξὺ δύο διαδοχικῶν καμπύλων οὕτως, ὥστε μεταξὺ τῶν ἄκρων αὐτῶν νὰ ἐναπολείπηται ἀνεπαίσθητον λευκὸν διάστημα πρὸς ὑπόδειξιν τῶν καμπύλων, αἵτινες εἶσιν ἀπαραίτητοι πρὸς ἀνάγνωσιν τῆς κλίσεως τῶν ἀνωφερειῶν καὶ κατωφερειῶν (Σχ. 128). Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ χάραξις τῶν τοιούτων γραμμῶν ἀπαιτεῖ προσοχὴν πρὸς δὲ καὶ τὴν συνδρομὴν ἐπιδεξίου τεχνήτου.



Σχ. 128.

Ἐν Γαλλίᾳ, κατὰ τὸ 1827, ἡ ὑπὸ τοῦ ὑπουργείου τοῦ πολέμου διορισθεῖσα ἐπιτροπὴ παρεδέχθη ὡς σκιαγραφικὰς γραμμὰς, λεπτοτάτας γραμμὰς ὡς ἔγγιστα παραλλήλους καὶ ἀπ' ἀλλήλων ἀπεχούσας κατὰ τὸ τέταρτον τοῦ μήκους αὐτῶν, διὰ τὰς κλίσεις τὰς μεταξὺ ἑνὸς καὶ δεκαπέντε βαθμῶν, τουτέστι τὰς μεταξὺ 54' καὶ 13°30'. Ἐκεῖθεν δὲ τῆς κλίσεως ταύτης, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἰσαπόστασις τῶν καμπύλων εἶναι $0^{\mu},002$, τὸ μεταξὺ διάστημα τῶν σκιαγραφικῶν γραμμῶν λαμβάνεται, ὡς ἔγγιστα, ἀμετάβλητον καὶ ἴσον τῷ ἥμισει χιλιοστομέτρου· αὐξάνει δὲ ἀναλόγως τὸ πάχος αὐτῶν μέχρι τῆς κλίσεως 50 βαθμῶν, ἤτοι 45°.

Τὸ ἁπλούστατον τοῦτο σύστημα τῆς χαράξεως τῶν σκιαγραφικῶν γραμμῶν μέχρι τῆς σήμερον εἶναι ἐν χρήσει. Ἤδη ὅμως ἐγένετο παραδεκτὴ καὶ ἡ διὰ τοῦ Διαπασῶν χάραξις.

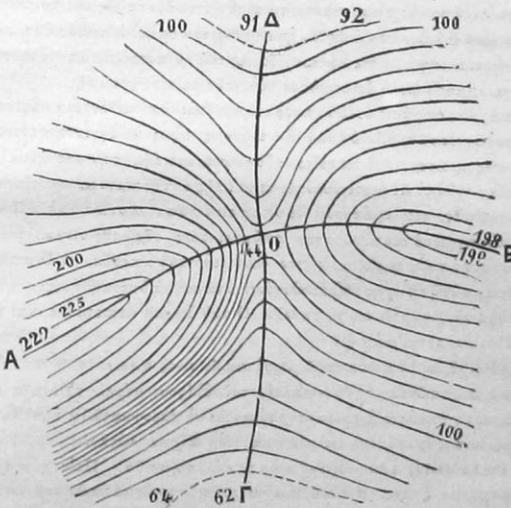
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 118. Διάκρισις τῶν ἐπὶ τοπογραφικοῦ τινος σχεδίου παριστανομένων ἀνωμαλιῶν τοῦ ἐδάφους, λόφων ἢ κορυφῶν, ὀροπεδίων, κοιλάδων, αὐχένων, κτλ. Τὸ σχῆμα 127 παριστᾷ λόφον. Ἐὰν ἡ ἰσαπόστασις ἐν τῷ σχήματι ἦναι 10 μέτρων, τὸ δὲ ὑψόμετρον τῆς χαμηλοτέρας καμπύλης 95 μέτρων, τὸ ὑψόμετρον τοῦ λόφου τούτου θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ 95 καὶ 125. Ἡ κορυφὴ τοῦ λόφου σημειοῦται διὰ σημείου, πλησίον δὲ αὐτοῦ γράφεται τὸ ὑψόμετρον. Ἐπὶ τοῦ σχήματος βλέπομεν ὅτι ἡ κλίσις, κατὰ τὴν διεύθυνσιν ιλ, εἶναι μᾶλλον ἀπότομος ἢ κατὰ τὴν διεύθυνσιν αδ. Αἱ κλίσεις ὑπολογίζονται, γνωστῆς οὔσης τῆς κλίμακος τοῦ σχεδίου.

Τὸ ὀροπέδιον κατὰ τοῦτο μόνον διαφέρει τοῦ λόφου καθ' ὃ ἡ κορυφὴ αὐτοῦ ἀντὶ νὰ ἀπολήγῃ εἰς σημεῖόν τι κείμενον ὑψηλότερον τῶν πέριξ σημείων, περιορίζεται ὑπὸ ὁριζοντείου ἐκτάσεως κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ἐκτεταμένης. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἡ ἀνωτάτη ὁριζόντειος καμπύλη, ἀντὶ νὰ συνίσταται ἐξ ἑνὸς σημείου μετὰ τοῦ ὑψομέτρου του εἶναι στικτὴ γραμμὴ, παριστῶσα τὴν καμπύλην τῆς βάχης, ἢ τὸ χεῖλος τοῦ ὀροπεδίου. Ἡ στικτὴ αὕτη καμπύλη φέρει καὶ τὸ ὑψόμετρόν της.

Διακρίνονται δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ ἀνωμαλίαι τοῦ ἐδάφους διὰ τῆς χαράξεως τῶν χαρακτηριστικῶν γραμμῶν. Ἐπὶ τοπογραφικοῦ τινος σχεδίου ἡ κορυφαία γραμμὴ ἁπανταᾷ τὴν κοιλότητα τῶν ὁριζοντείων καμπύλων, ὅταν καταβαίνοντες ἀκολουθῶμεν τὴν γραμμὴν ταύτην· τοιαύτη δὲ εἶναι ἡ γραμμὴ ΑΟΒ (Σχ. 129). Ἡ βαθεῖα γραμμὴ ἁπανταᾷ τὴν κυρτότητα τῶν ὁριζοντείων καμπύλων, ὅταν καταβαίνοντες ἀκολουθῶμεν τὴν γραμμὴν ταύτην· τοιαύτη δὲ εἶναι ἡ γραμμὴ ΓΟΔ. Ἡ βαθεῖα γραμμὴ ὑποδεικνύει πάντοτε τὸ βάθος τῶν κοιλάδων, τῶν αὐχένων ἢ τῶν φαράγγων. Συνήθως ταύτην διατρέχει ῥύαξ, ὅστις προσλαμβάνει τὰ ὑέτια ὕδατα ὑπὸ τῶν ἑκατέρωθεν κειμένων κλίσεων. Ἡ κορυφαία γραμμὴ εἶναι ἡ γραμμὴ τῆς διανομῆς τῶν ὑδάτων, καὶ ὑποδιαιρεῖ τὸ ἔδαφος εἰς κλιτύας. Τὸ σημεῖον Ο τῆς συναπαντήσεως τῆς κορυφαίας ΑΟΒ καὶ τῆς βαθείας γραμμῆς ΓΟΔ συνιστᾷ τὸν αὐχένα, ὅστις ἐπὶ τοῦ σχεδίου φέρει τὸ ὑψόμετρόν του.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 119. Συνοπτικὴ περιγραφὴ τῶν ἀνωμαλιῶν τοῦ ἐδάφους. Ἐν γένει τὸ ἔδαφος σύγκειται ἐκ σειρᾶς ὀροπεδίων, περιοριζομένων ὑπὸ λείων ἢ ἀποκρήμνων κλίσεων. Ὀροπέδιον μικρᾶς ἐκτάσεως, ὑψούμενον ἐν τῷ μέσῳ πεδιάδος, συνήθως καλεῖται κορυφὴ ἢ λόφος. Τὰ μᾶλλον ἐκτεταμένα ὀροπέδια ὅταν ὦσι προστεθειμένα καὶ ἐπαυξάνωνται, ἀφίνουσι μεταξὺ των χαμηλότερα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται κοιλάδες ἢ σχηματίζουσε κλιμακηδὸν ἀναβαθμούς, ὅπερ συμβαίνει εἰς τὰ ὀρεινὰ μέρη.

Ὅταν αἱ προεξοχαὶ τοῦ ἐδάφους δὲν παρουσιάζωσιν εἰς τὸ ἀνώτατον αὐτῶν μέρος πεδίον ἐκτενέστερον τῆς ἐκτάσεως τῶν πλευρῶν των, τότε



Σχ. 129.

φαίνονται ὑπ' ἀκανόνιστον σχῆμα ἀποτελοῦν τὰ ὄρη. Ἐκ τούτων ὅσα ἔχουσιν ὕψος 600 μέχρις 1400 μέτρων ἀποτελοῦσιν τὰ μικρὰ ὄρη, ὅσα δὲ ἔχουσι 1500 μέχρι 2700 μέτρων ὕψους, τὰ μεσαῖα ὄρη, ἐκεῖθεν τῶν 2700μ σχηματίζονται τὰ μεγάλα ὄρη, τῶν ὁποίων τὰ ἀνώτερα μέρη ἔχουσιν διάφορον βλάστησιν καὶ κλίμα τῶν κατωτέρων μερῶν.

Τὰ ὄρη σπανίως εὑρίσκονται ἀπομεμονωμένα· συνήθως εἰσὶ διατεθειμένα κατὰ σειράς, αἵτινες ἀκολουθοῦσι τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ εὐθύγραμμον.

Ἑκάστη σειρὰ ὀρέων παρουσιάζει ἑκατέρωθεν δύο κλιτύας, τουτέστι δύο πλαγίας καὶ κεκλιμένας ἐπιφανείας, συνερχομένας κατὰ ἀκανόνιστόν τινα γραμμὴν, ἥτις καλεῖται κορυφαία γραμμὴ ἢ γραμμὴ τῆς διανομῆς τῶν ὑδάτων. Δύο παράλληλοι σειραὶ ὀρέων ἐν τῷ μεταξὺ αὐτῶν ἀφίνουσι κοιλάδα, ἡ δὲ γραμμὴ κατὰ τὴν ὁποίαν συναπαντῶνται αἱ δύο ἀντικρὺς κλιτύες αὐτῶν, καλεῖται βαθεῖα γραμμὴ ἢ ῥευματιά. Καθ' ἣν περίπτωσιν ἡ κοιλὰς εἶναι στενὴ, τότε τὰ ὑέτια ὕδατα ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἀκολουθοῦσι τὴν βαθεῖαν γραμμήν· ἐὰν ὅμως ἡ κοιλὰς ἔχῃ εὐρύχωρον ἄνοιγμα, τότε οἱ διασχίζοντες αὐτὴν ποταμοὶ διαγράφουσιν ἑλιγμοὺς κατὰ πολὺ διαφέροντας τοὺς τῆς βαθείας γραμμῆς.

Συνήθως σειράτις ὀρέων παρακολουθεῖται ὑπὸ μικροτέρων δευτερευουσῶν σειρῶν, τῶν ὁποίων ἡ διεύθυνσις εἶναι ὡς ἔγγιστα κάθετος ἐπὶ τῆς πρώτης. Ἡ διάταξις αὕτη προσομοιάζει τὴν σπονδυλικὴν στήλην ἰχθύος. Αἱ δευτερεύουσαι σειραὶ τῆς αὐτῆς κλιτύος, πρωτίστης τινὸς σειρᾶς, περιλαμβάνουσι δευτερευούσας κοιλάδας. Πρὸς μετάβασιν ἀπὸ δευτερευούσης τινὸς κοιλάδος τῆς μιᾶς τῶν κλιτύων πρωτίστης τινὸς σειρᾶς, εἰς τινα δευτερεύουσαν κοιλάδα, τὴν συστοιχοῦσαν αὐτῇ ἐπὶ τῆς ἑτέρας κλιτύος, ἀνάγκη νὰ ὑπερπηδήσωμεν τὴν κορυφαίαν γραμμὴν εἰς τὸ σημεῖον Ο καθ' ὃ εἶναι πεπιεσμένη, καὶ τὸ ὁποῖον καλεῖται αὐχήν.

Τὸ Σχῆμα 129, παριστᾷ μέρος σειρᾶς τινος ὀρέων.

Τὰ συνιστῶντα τὴν ἀνωμαλίαν τοῦ ἐδάφους μέρη, τὰ ὁποῖα ἐν τοῖς προηγουμένοις ἀνεφέραμεν, δύνανται νὰ παρουσιασθῶσι καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν χώραν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 120. Συνθηματικὰ σημεῖα. Πρὸς σύνταξιν τοπογραφικοῦ τινος σχεδίου γίνεται χρῆσις συνθηματικῶν τινων σημείων διὰ τῶν ὁποίων ἀναπληροῦται ἡ ἀκριβὴς παράστασις τῶν ἐν τῷ σχεδίῳ ἐκτεθησομένων ἀντικειμένων. Τὰ σημεῖα ταῦτα, ὁρισθέντα ὑπὸ τῆς ἐπιτροπῆς τῆς διορισθείσης ὑπὸ τῆς Γαλλικῆς κυβερνήσεως τῷ 1826 καὶ 1828, συμποσοῦνται εἰς πολλὰς ἑκατοντάδας· ἐκ τούτων ἀναφέρομεν τὰ κυριώτερα.

Ἐν πρώτοις θέλομεν θεωρήσει ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἀποβλέπουσι τὴν παράστασιν τῶν κατοικουμένων τόπων, ὡς π. χ. πόλεων, χωρίων,

καὶ ἀπομεμονωμένων ἰδιοκτησιῶν. Τὸ δὲ Σχῆμα 130, παριστᾷ τὰ κυριώτερα τούτων.

Ὑπὸ τὸν ἀριθ. 1 δεικνύεται ὁ σχηματισμὸς πόλεως ἀτοιχίστου. Γίνεται δὲ χρῆσις τοῦ σημείου τούτου ὅταν ἡ κλίμαξ ᾖναι ἱκανὴ διὰ τὴν παράστασιν τῆς γενικῆς διατάξεως τῶν ὁδῶν καὶ τῶν οἰκοδομῶν. Ἐν ἐναντίᾳ δὲ περιπτώσει γίνεται χρῆσις τοῦ ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν 2 συνθηματικοῦ σημείου. Ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν 3 παριστᾶται θέσις ὀχυρὰ ἢ φρούριον. Ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν 4, κωμόπολις ἢ χωρίον, ἐν περιπτώσει καθ' ἣν ἡ κλίμαξ εἶναι μεγάλη· ἐνἐναντίᾳ περιπτώσει γίνεται χρῆσις τοῦ ὑπὸ τὸν ἀριθ. 5 σημείου. Ὑπὸ τὸν ἀριθ. 6 παριστῶνται αἱ ἀπομεμονωμέναι οἰκοδομαί.

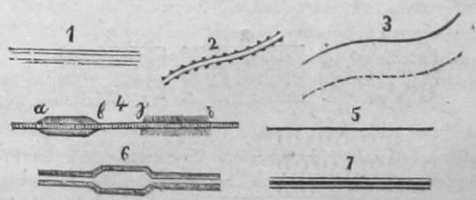


Σχ. 130.

Τῶν συνθηματικῶν σημείων 2, 3 καὶ 5 χρῆσις γίνεται μᾶλλον εἰς τὴν γεωγραφίαν παρὰ εἰς τὴν τοπογραφίαν.

Κατὰ δεύτερον λόγον θεωροῦνται τὰ μέσα τῆς συγκοινωνίας ἀποβλέποντα συνθηματικὰ σημεῖα ὡς π. χ. τῶν ὁδῶν, τῶν ἁτραπῶν, τῶν σιδηροδρόμων καὶ τῶν διορύγων, τῶν ὁποίων τὰ συνηθέστερα δεικνύονται ἐν τῷ Σχ. 131.

Ὑπὸ τὸν ἀριθ. 1 παρίσταται ἐπαρχιακὴ ὁδὸς, ὑπὸ τὸν ἀριθ. 2, ὁδὸς μεγάλης συγκοινωνίας μετὰ δενδροστοιχίας ἑκατέρωθεν. Ὑπὸ τὸν ἀριθ. 3 παρίσταται, ἀναλόγως τῆς κλίμακος, ὁδὸς ἢ ἁτραπός. Καὶ ἂν μὲν ἡ ἁτραπὸς ᾖναι προσιτὴ εἰς τοὺς ἵππους καὶ τοὺς ἡμιόνους, τότε παρίσταται διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, ἐὰν δὲ εἰς μόνους τοὺς πεζοὺς, διὰ στικτῆς γραμμῆς. Ὑπὸ τὸν ἀριθ. 4 παρίσταται σιδηρό-

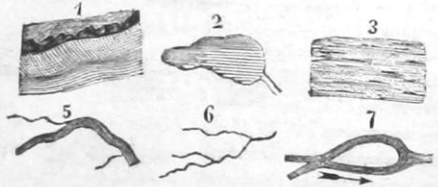


Σχ. 131.

ἄρμος, τοῦ ὁποίου τὸ μέρος αβ εἶναι εἰς ἔκχωμα, τὸ δὲ γδ εἰς ἐπίχωμα· ὁμοίως καὶ ὑπὸ τὸν ἀριθ.5 ἀλλ'εἰς μικροτέραν κλίμακα.

Τὸ ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν 6 συνθηματικὸν σημεῖον, παριστᾷ διόρυγα πλώϊμον ὡς καὶ τὸ ὑπ'ἀριθ.7, ἀλλ'εἰς μικροτέραν κλίμακα.

Παρατηροῦμεν δ'ὅτι πᾶν εἶδος συγκοινωνίας ἐπὶ τῶν τοπογραφι-

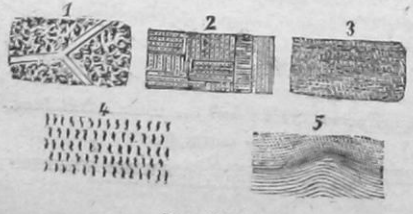


Σχ. 132.

κῶν σχεδίων παρίσταται πλατύτερον παρ'ὅσον δεικνύει ἡ κλίμαξ αὐτοῦ, ἐπειδὴ ἄλλως ἀδύνατον νὰ διακριθῇ τῆς δι'ἁπλῆς γραμμῆς παριστανομένης ἁτραποῦ.

Ἡ τρίτη κατηγορία τῶν συνθηματικῶν σημείων ἀποβλέπει τὰ στάσιμα ἢ ῥέοντα ὕδατα, τὰ συνηθέστερα τῶν ὁποίων δεικνύονται ἐν τῷ Σχ.132.

Ὑπὸ τὸν ἀρθ.1 παρίσταται ἡ ἀκτὴ τῆς θαλάσσης, ὑπὸ δὲ τὸν ἀριθ.2, ἀναλόγως τῆς κλίμακος, λίμνη, ὑδροστάσιον ἢ τέλμα (βάλτος)· ὑπὸ τὸν ἀριθ.3, ἕλος· ὑπὸ τοὺς ἀριθ.7 καὶ 5, μέγας ἢ μικρὸς ποταμός· ὑπὸ δὲ τὸν ἀριθμὸν 6 παρίσταται, ἀναλόγως τῆς κλίμακος, παραποτάμιον ἢ ἁπλοῦν ῥυάκιον.

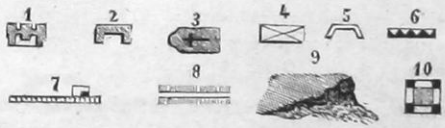


Σχ. 133.

Τὴν αὐτὴν παρατήρησιν ποιοῦμεν διὰ τὸ πλάτος τῶν ποταμῶν, ὁποίαν καὶ προηγουμένως ἀναφέραμεν περὶ τοῦ πλάτους τῶν ὁδῶν.

Εἰς τὸ Σχ. 133, ἀναφέρονταί τινα ἐκ τῶν συνθηματικῶν σημείων τῶν ἀποβλεπόντων τὰ δάση, τὰς κεκαλλιεργημένας γαίας κτλ. Ὑπὸ τὸν ἀριθ.1, παρίστανται δάσος, ὑπὸ τὸν ἀριθ.2, κεκαλλιεργημέναι γαῖαι· ὑπὸ τὸν ἀριθ.3, λειμών· ὑπὸ τὸν ἀριθ.4, ἀμπελῶνες· ὑπὸ δὲ τὸν ἀριθ.5, ἄμμος ὑπὸ ὑδάτων περικεκλεισμένη.

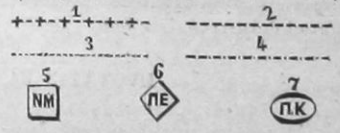
Ἐν τῷ Σχ.134, παρίστανται ἰδιαίτερά τινα ἀντικείμενα, ὡς π.χ. ὑπὸ τὸν ἀριθ.1, ἀνάκτορον· ὑπὸ τὸν ἀριθ.2, ἔπαυλις· ὑπὸ τὸν



Σχ. 134.

ἀριθ.3, ἐκκλησία· ὑπὸ τὸν ἀριθ.4, ἀποθήκη διὰ στρατιωτικὴν ὑπηρεσίαν· ὑπὸ δὲ τοὺς ἀριθ.5 καὶ 6, παρίστανται τηλεβολοστάσια· ὑπὸ τὸν ἀριθ.7, σταθμὸς σιδηροδρόμου· ὑπὸ τὸν ἀριθ.8, προκύμαιον ἢ ἐπίχωμα· ὑπὸ τὸν ἀριθ.9, παρίσταται ἀπορροὰς ἢ ὁποιονδήποτε ἀπόχρημνον· ὑπὸ δὲ τὸν ἀριθ.10, ὀχυρὰ θέσις.

Τὰ ὑπὸ τὸ Σχ. 135, παριστάμενα ἀποβλέπουσιν ὅλως τὸ διοικητικὸν μέρος, οὕτω π.χ. ἡ ὑπ'ἀριθ. 1 γραμμὴ παριστᾷ τὴν ὁροθετικὴν γραμμὴν δύο κρατῶν· ἡ ὑπ'ἀριθ. 2, δύο δικαιοδοσιῶν· ἡ ὑπ'ἀριθ.4, δύο ἐπαρχιῶν· ἡ ὑπ'ἀριθ.3, παριστᾷ τὴν ὁροθετικὴν γραμμὴν δύο δήμων. Τὸ ὑπ'ἀριθ.5 συνθηματικὸν σημεῖον παριστᾷ νομαρχεῖον ἢ πρωτεύουσαν τοῦ νομοῦ· τὸ ὑπ'ἀριθ.6, πρωτεύουσαν ἐπαρχίας· τὸ δὲ ὑπ'ἀριθ.7, τὴν πρωτεύουσαν κώμης τινός.



Σχ. 135.

§.—24.

Σφαῖρα. Τομαὶ ἐπίπεδοι τῆς σφαίρας. Μέγιστοι κύκλοι· μικροὶ κύκλοι. Πόλοι κύκλου. Δοθείσης σφαίρας στερεᾶς νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς. Ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας. Μέτρον τῆς παραγομένης ἐπιφανείας ὑπὸ κανονικῆς κεκλασμένης γραμμῆς, στρεφομένης περὶς ἄξονος ἀγομένου ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτῆς. Ἐπιφάνεια τῆς σφαιρικῆς ζώνης· ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας. Ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως. Ὄγκος τῆς σφαίρας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Σφαῖρα καλεῖται τὸ ὑπὸ κυρτῆς ἐπιφανείας περατούμενον στερεόν, τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα ἰσάκις ἀπέχουσιν ἀφ' ἑνὸς ἐσωτερικοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον καλεῖται *κέντρον*.

Πᾶσα εὐθεῖα, ὡς ἡ ΟΓ καὶ ΟΜ (Σχ. 136), διαβαίνουσα ἐκ τοῦ κέντρου Ο καὶ ἀπολήγουσα εἰς σημεῖόν τι τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καλεῖται *ἀκτίς*. Λοιπόν, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, *ὅλαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι*. Πᾶσα εὐθεῖα, ὡς ἡ ΑΒ διερχομένη ἐκ τοῦ κέντρου καὶ ἑκατέρωθεν ἀπολήγουσα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, καλεῖται *διάμετρος*. Ἡ διάμετρος εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος. Λοιπόν, *ὅλαι αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 84.

Δύο σφαῖραι εἶναι ἴσαι ὅταν ἔχωσι τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἂν ταυτίσωμεν τὰ κέντρα, αἱ σφαιρικαὶ ἐπιφάνειαι θέλουσι ταυτισθῆ· ἐν ἐναντίᾳ δὲ περιπτώσει, θέλουσιν ὑπάρξει σημεῖα ἀνισάκις τοῦ κέντρου ἀπέχοντα, ὅπερ ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 85.

Πᾶσα τομὴ σφαίρας ὑπ' ἐπιπέδου τινὸς ΓΜΔ *γινομένη εἶναι κύκλος* (Σχ. 136).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐὰν καταβιβάσωμεν ἐκ τοῦ κέντρου Ο τῆς σφαίρας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς τομῆς ΓΜΔ, τὴν κάθετον διάμετρον ΠΠ′, ἥτις ἀπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον Ι, λάβωμεν δὲ ἐπὶ τῆς οὕτω προκυπτούσης καμπύλης ΓΜΔ δύο οἱαδήποτε σημεῖα Γ καὶ Μ, καὶ ἀγάγωμεν τὰς εὐθείας ΓΙ, ΜΙ, ΓΟ, ΜΟ, τὰ τρίγωνα ΓΙΟ καὶ ΜΙΟ θέλουσιν εἶναι ὀρθογώνια εἰς τὸ σημεῖον Ι· ἐπειδὴ ἡ μὲν ΟΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, τὰ δὲ τρίγωνα ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας ΓΟ=ΜΟ, ὡς ἀκτῖνες, καὶ τὴν πλευρὰν ΟΙ κοινήν· λοιπόν, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, καὶ ἔχομεν ΓΙ=ΜΙ. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου χορηγουμένης καμπύλης ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ ποδὸς Ι τῆς καθέτου ΟΙ· ἄρα, ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον Ι.



Σχ. 136.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. Ἡ ἀκτὶς ΙΓ εἶναι ἐπὶ τοσοῦτον μικροτέρα, ἐφ' ὅσον ἡ ἀπόστασις ΟΙ εἶναι μεγαλειτέρα· ἐπειδὴ τῆς ὑποτεινούσης ΓΟ οὔσης ἀπεταθλήτου, ἑπομένως καὶ τοῦ ἀθροίσματος $\overline{\text{ΙΓ}}^2 + \overline{\text{ΟΙ}}^2$, ἕπεται ὅτι ὁ κύκλος, ὁ ὑπὸ τῆς τομῆς παραγόμενος τότε εἶναι ὁ μέγιστος, ὅταν ἡ ἀπόστασις ΟΙ εἶναι μηδέν, τουτέστιν ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον διέρχηται ἀπὸ τοῦ κέντρου· τοῦ κύκλου τούτου ἀκτὶς εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην, ὁ κύκλος τῆς σφαιρικῆς τομῆς καλεῖται *μέγιστος κύκλος*. Λοιπόν, *ὅλοι οἱ μέγιστοι κύκλοι εἶναι ἴσοι*. Ὅταν τὸ ἐπίπεδον τῆς σφαιρικῆς τομῆς δὲν διαβαίνῃ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ ἀκτὶς αὐτῆς εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, καὶ ὁ κύκλος τῆς σφαιρικῆς τομῆς καλεῖται *μικρὸς κύκλος*.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΓΠ καὶ ΜΠ, τὰ τρίγωνα ΓΙΠ καὶ ΜΙΠ, τὰ ὀρθογώνια εἰς τὸ σημεῖον Ι, ἔχουσι τὰς πλευρὰς ΓΙ καὶ ΙΜ ἴσας κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, πρὸς τούτοις καὶ τὴν πλευρὰν ΠΙ κοινήν. Τα τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἄρα ἴσα, καὶ ἔχομεν ΠΓ=ΠΜ. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὸ

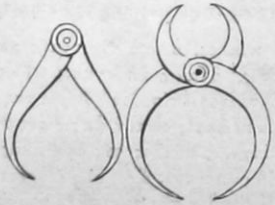
σημεῖον Π ἰσάκις ἀπέχει τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΓΜΔ. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται *πόλος τοῦ κύκλου*.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὸ σημεῖον Π, ὅπερ εἶναι τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τῆς καθέτου ἐπὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, εἶναι ἐπίσης πόλος ὅλων τῶν παραλλήλων κύκλων πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὸ δεύτερον ἄκρον Π′ τῆς διαμέτρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 86. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δοθείσης σφαίρας τινὸς στερεᾶς νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς (Σχ. 136).

Λύσις. Ἐκ τινος σημείου Π ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας λαμβανόμενον, μὲ ἀκτῖνα αὐθαίρετον, ἀλλὰ μικροτέραν τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, γράφομεν διὰ τοῦ *σφαιρικοῦ διαβήτου* (Σχ. 137), τὴν καμπύλην ΓΜΔ, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ἡ καμπύλη αὕτη θέλομεν ἀποδείξῃ ὅτι εἶναι περιφέρεια κύκλου.



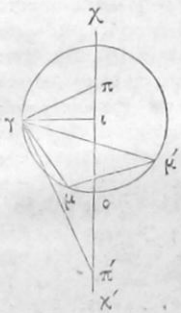
Σχ. 137.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΠΟ, ΓΟ, ΜΟ, ΓΠ καὶ ΜΠ, τὰ οὕτω προκύπτοντα τρίγωνα ΠΓΟ καὶ ΠΜΟ, θέλουσιν ἔχει τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τουτέστι τὴν ΠΟ κοινήν, τὴν ΓΟ=ΜΟ, ὡς ἀκτῖνας τῆς σφαίρας, καὶ ΓΠ=ΜΠ, ἐπειδὴ ἡ καμπύλη ΓΜΔ ἐχαράχθη μὲ ἄνοιγμα διαβήτου ἀμετάβλητον.

Ἀλλ' ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Γ καὶ Μ καταβιβάσωμεν ἐπὶ τῆς ΠΟ καθέτους, αὗται θέλουσι συναπαντηθῇ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ι. Λοιπὸν, ὅλαι αἱ κάθετοι αἱ καταβιβαζόμεναι ἐκ τῶν διαφόρων σημείων τῆς καμπύλης ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΠ, ἐπειδὴ συνέρχονται περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ι, κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ χαραχθεῖσα καμπύλη εἶναι σφαιρικὴ τομὴ δι' ἐπιπέδου γενομένη, ἥτις, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, εἶναι κύκλος.

(ΓΕΩΜ. ΘΕΩΡ. ΠΡΑΚΤ. καὶ ΕΦΗΡΜ.

Τούτου τεθέντος, ληφθήτωσαν κατ' ἀρέσκειαν ἐπὶ τῆς περιφερείας ΓΜΔ τρία σημεῖα, τὰ Γ, Μ καὶ Μ′, καὶ διὰ τοῦ διαβήτου, τὰ εὐθύγραμμα μεταξὺ τῶν σημείων τούτων ἀποστήματα ΓΜ, ΓΜ′, ΜΜ′, τὰ ὁποῖα δὲν ἐχαράχθησαν ἐπὶ τοῦ σχήματος πρὸς ἀπορυγὴν συγχύσεως. Μεταφέρομεν τὰς ἀποστάσεις ταύτας ἐπί τινος ἐπιπέδου, καὶ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον γμμ′ (Σχ. 138), τοῦ ὁποίου πλευραὶ θέλουσιν εἶναι αἱ ἀποστάσεις αὗται, καὶ γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου. Ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι ἴση τῇ περιφερείᾳ ΓΜΔ, ἡ δὲ ἀκτὶς γι, ἴση τῇ ἀκτῖνι ΓΙ τῆς περιφερείας ΓΜΔ, τῆς χαραχθείσης ἐπὶ τῆς σφαίρας, ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι ΓΜΜ′ καὶ γμμ′ εἶναι περιγεγραμμέναι εἰς ἴσα τρίγωνα.



Σχ. 138.

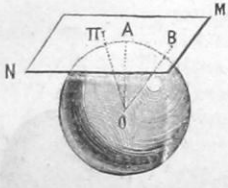
Ἐκ τοῦ σημείου ι (Σχ. 138), ἀχθήτω ἡ ἀπέραντος εὐθεῖα χχ′, κάθετος ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος γι, καὶ ἐκ τοῦ σημείου γ, ὡς ἀπὸ κέντρου μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ ἄνοιγμα ΠΓ τοῦ διαβήτου, δι' οὗ ἐχαράξαμεν τὴν καμπύλην ἐπὶ τῆς σφαίρας, χαραχθήτω τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον ἀπαντᾷ τὴν χχ′ εἰς σημεῖόν τι π, καὶ ἐπιζευχθήτω ἡ γπ. Τὸ τρίγωνον πιγ εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΠΙΓ, ἐπειδὴ ἀμφότερα εἶναι ὀρθογώνια, ἔχουσι δὲ καὶ τὰς ὑποτεινούσας ἴσας γπ=ΓΠ, καὶ ἀνὰ μίαν πλευρὰν ἴσην γι=ΓΙ.

Εἰς τὸ σημεῖον γ ὑψωθήτω ἡ γπ′ κάθετος ἐπὶ τῆς γπ, τὰ δὲ οὕτω προκύπτοντα τρίγωνα πγπ′ καὶ ΠΓΠ′ θέλουσιν εἶναι ἴσα. Τῷ ὄντι, ἐὰν διὰ τῶν σημείων Π, Γ, Π′ διέλθῃ ἐπίπεδον, τοῦτο θέλει τμήσει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστόν τινα κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι ΠΠ′· λοιπὸν, ἡ γωνία ΠΓΠ′ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμιπεριφέρειαν καὶ εἶναι ὀρθή. Περιπλέον δὲ τὰ τρίγωνα πγπ′ καὶ ΠΓΠ′ ἔχουσι τὴν γωνίαν γππ′ ἴσην τῇ ΓΠΠ′, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων γιπ καὶ ΓΙΠ. Εἶναι ἄρα ἰσογώνια, ἐπειδὴ δὲ καὶ γπ=ΓΠ, ἔπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα. Ἑπομένως ἡ γραμμὴ ππ′ εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον ΠΠ′ τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ἥμισυ οπ ἢ οπ′, τῆς γραμμῆς ταύτης, εἶναι ἡ ζητουμένη ἀκτίς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας καλεῖται τὸ ἔχον ἓν καὶ μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 87.

Πᾶν ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνός τινος ΟΑ *τῆς σφαίρας, ἐφάπτεται τῆς σφαίρας* (Σχ. 139).



Σχ. 139.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ κέντρον Ο μὲ οἱονδήποτε σημεῖον Β τοῦ ἐπιπέδου, διάφορον τοῦ Α, ἡ πλαγία ΟΒ θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς καθέτου ΑΟ· τὸ σημεῖον Β κεῖται ἄρα ἐκτὸς τῆς σφαίρας. Τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἔχει λοιπὸν τὸ μόνον σημεῖον Α κοινὸν μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας. *Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 88.

Ἀντιστρόφως. Πᾶν ἐπίπεδον ΜΝ, *ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας* Ο, *εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος* ΟΑ, *τῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἀγομένης.*

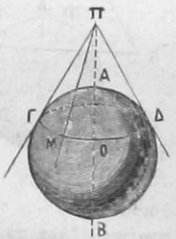
Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἐὰν ἡ ΟΑ δὲν ἦναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καταβιβαζομένη κάθετος θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας ΟΑ, ἑπομένως ὁ ποὺς τῆς καθέτου ταύτης θέλει κεῖσθαι ἐντὸς τῆς σφαίρας. Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν ΜΝ, διὰ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ταύτης διερχόμενον, τέμνει ἀναγκαίως τὴν σφαῖραν, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐξ ἑνὸς σημείου, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τινὸς κειμένου, ἓν μόνον ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἄγεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3. *Ἐφαπτομένη σφαίρας* τινὸς καλεῖται ἡ εὐθεῖα ἥτις ἐφάπτεται τῆς περιφερείας κύκλου γεγραμμένου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ἐφαπτομένη τῆς σφαίρας εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος, τῆς διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἀγομένης, καὶ ὅτι εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἔστωσαν ἡ σφαῖρα Ο (Σχ. 140), καὶ τὸ σημεῖον Π, τὸ ἐκτὸς τῆς σφαίρας κείμενον· διὰ τῆς διαμέτρου ΑΒ ἄγομεν ὁποιονδήποτε ἐπίπεδον, τέμνον τὴν σφαῖραν κατὰ τὸν μέγιστον κύκλον ΑΓΒ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Π, τὴν ἐφαπτομένην ΠΓ τοῦ κύκλου τούτου. Τούτου τεθέντος, εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν περιστρέψωμεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν διάμετρον ΠΒ, κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην, ὁ μὲν κύκλος ΑΓΒ θέλει παράξει τὴν σφαῖραν, ἡ δὲ εὐθεῖα ΠΓ, πάντοτε ἐφαπτομένη τῆς σφαίρας καὶ τὸ αὐτὸ μῆκος ἔχουσα, θέλει διαγράψει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κώνου. Λοιπὸν, ὅλαι αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς σφαίρας, αἱ ἐκ τινος ἐξωτερικοῦ σημείου ἀγόμεναι, εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, καὶ σχηματίζουσι τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κυκλικοῦ τινος καὶ ὀρθοῦ κώνου. Ὁ κῶνος οὗτος καλεῖται *κῶνος περιγεγραμμένος εἰς τὴν σφαῖραν.*



Σχ. 140.

Ἐὰν δὲ ἀχθῶσιν εἰς τὴν σφαῖραν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι παραλλήλως τῆς διαμέτρου ΑΒ, θέλει σχηματισθῆ *κύλινδρος περιγεγραμμένος εἰς τὴν σφαῖραν.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 4. Ἐὰν ἐγγράψωμεν εἰς τόξον κύκλου ΠΚ (Σχ. 141) τὴν σειρὰν τῶν ἴσων χορδῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, σχηματίζεται ἡ λεγομένη *κεκλασμένη κανονικὴ γραμμή.* Τὸ κέντρον Ο τοῦ τόξου εἶναι ἐπίσης *κέντρον* τῆς κεκλασμένης γραμμῆς. Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Ο καταβιβάσωμεν ἐφ' ἑκάστην πλευρὰν τῆς κεκλασμένης γραμμῆς τὰς καθέτους Ομ, Ον, Οπ, Οκ, ἑκατέρα τούτων θέλει διαιρέσει ἑκάστην πλευρὰν εἰς δύο ἴσα μέρη (Πρότ. 33. Μέρος Α'), πρὸς δὲ αἱ κάθετοι αὗται θέλουσιν εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ἐπειδὴ αἱ ἴσαι χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, κτλ., ἰσάκις ἐκ τοῦ κέντρου ἀπέχουσιν. Ἡ γραφομένη περιφέρεια ἐκ τοῦ σημείου Ο ὡς ἀπὸ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα Ομ, θέλει ἄρα διέλθει ἐκ τῶν σημείων ν, π, κ, ἐφαπτομένη τῶν

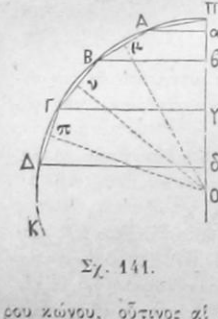
πλευρῶν τῆς κεκλασμένης γραμμῆς· διότι αἱ πλευραὶ αὗται εἶναι κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων Ομ, Ον, κτλ.

Ἡ περιφέρεια αὕτη καλεῖται *ἐγγεγραμμένη* εἰς τὴν κεκλασμένην γραμμήν.

Ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Α, Β, Γ, καὶ Δ, καταβιβάσωμεν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΠ, τὰς καθέτους Αα,Ββ, Γγ, Δδ· ἡ ἀπόστασις αδ, ἡ περιλαμβανομένη μεταξὺ τῶν ποδῶν τῶν ἀκροτελευταίων καθέτων, εἶναι *ἡ προβολὴ* τῆς κεκλασμένης γραμμῆς ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΠ· πρὸς δὲ καὶ ἡ προβολὴ τοῦ τόξου ΑΔ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 89.

Ἡ παραγομένη ἐπιφάνεια ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ μέρους τῆς κανονικῆς κεκλασμένης γραμμῆς ΑΒΓΔΕ, *περὶ τὸν ἄξονα* ΟΠ, *ὅστις εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου καὶ διέρχεται ἐκ τοῦ κέντρου αὐτῆς* Ο, *ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς προβολῆς* αδ, *τῆ ἐπὶ τοῦ ἄξονος λαμβανομένης, ἐπὶ τὴν ἐγγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὴν κεκλασμένην γραμμήν, τῆς ὁποίας ἀκτὶς εἶναι ἡ* Ομ (Σχ. 141).



Σχ. 141.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν περὶ τὸν ἄξονα ΟΠ περιστροφικὴν κίνησιν τοῦ σχήματος, ἡ μὲν πλευρὰ ΑΒ θέλει γράψει τὴν ἐπιφάνειαν κολούρου κώνου, οὗτινος αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι ἡ Αα καὶ Ββ· ἡ δὲ πλευρὰ ΒΓ θέλει γράψει τὴν ἐπιφάνειαν κολούρου κώνου, οὗτινος αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι ἡ Ββ καὶ Γγ· καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἀλλὰ (Πρότ. 79. Πόρισ. 3), ἑκάστη τῶν ἐπιφανειῶν τούτων ἔχει ὡς μέτρον ἑκάστην τῶν ἑξῆς ἐκφράσεων $2\pi \times \text{Ομ} \times \text{αβ}$, $2\pi \times \text{Ον} \times \text{βγ}$, $2\pi \times \text{Οπ} \times \text{γδ}$.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀκτῖνες Ομ, Ον, καὶ Οπ, εἶναι ἴσαι, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκφράσεων τούτων, τουτέστιν ἡ παραγομένη ἐπιφάνεια ὑπὸ τῆς κεκλασμένης γραμμῆς, ἔχει διὰ ἔκφρασιν

$$2\pi \times \text{Ομ}\,(\text{αβ} + \text{βγ} + \text{γδ}) \quad \text{ἢ} \quad 2\pi \times \text{Ομ} \times \text{αδ}$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8. *Σφαιρικὴ ζώνη* καλεῖται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ διαχωριζόμενον ὑπὸ δύο κύκλων, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα. Οἱ κύκλοι οὗτοι εἶναι αἱ *βάσεις τῆς ζώνης*, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν ἀπόστασις, τὸ *ὕψος τῆς ζώνης*.

Ὅταν τὸ ἕτερον τῶν ἐπιπέδων τῆς βάσεως ἐφάπτηται τῆς σφαίρας, ἡ ζώνη θέλει ἔχει μίαν βάσιν, τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶναι ἡ ἀπὸ τοῦ πόλου τῆς κυκλικῆς βάσεως ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

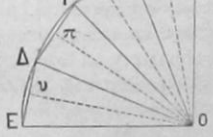
Ἔστω ΑΒΓΔ σφαιρικὴ τις ζώνη, ΠΠ' ἡ διάμετρος, ἡ κάθετος ἐπὶ τῶν δύο βάσεων αὐτῆς, καὶ ΠΓΑΠ' μέγιστος κύκλος διὰ τῶν σημείων Π καὶ Π' διερχόμενος. Ὅταν στραφῇ ἡ ἡμιπεριφέρεια περὶ τὴν διάμετρον ΠΠ' θέλει παράξει τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ τόξον ΑΓ τὴν σφαιρικὴν ζώνην, τῆς ὁποίας τὸ ὕψος ΟΙ εἶναι ἡ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΠΠ' προβολὴ τοῦ τόξου ΑΓ (Σχ. 136).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 90.

Ἡ Ἐπιφάνεια τῆς ζώνης ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΕ τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον παράγει τὴν ζώνην (Σχ. 142), καὶ εἰς ὃ ἐγγράφομεν κανονικὴν κεκλασμένην γραμμήν, τὴν ΑΒΓΔΕ. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ παραγομένη ἐπιφάνεια ὑπὸ τῆς γραμμῆς ταύτης στρεφομένης περὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΠ, ἐκφράζεται οὕτω (Σχ. 141)·

$$2\pi \times \text{Ομ} \times \text{αδ}.$$



Σχ. 142.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν αὐξήσωμεν ἀδιακόπως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς κεκλασμένης γραμμῆς, εἶναι φανερὸν ὅτι αὕτη θέλει πλησιάζει ἀδιακόπως πρὸς τὸ τόξον ΑΕ, ἡ δὲ παραγομένη ἐπιφάνεια ὑπὸ τῆς κεκλασμένης γραμμῆς, θέλει πλησιάζει ἀδιακόπως πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΕ παραγομένην ζώνην, ἡ δὲ κάθετος Ομ, πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ τόξου τούτου. Λοι-

πὸν, ἡ ἔκφρασις $2\pi \times$ Ομ θέλει πλησιάζει ἀδιακόπως πρὸς τὴν περιφέρειαν, τῆς ὁποίας τὸ τόξον ΑΕ ἀποτελεῖ μέρος, τουτέστι πρὸς τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου. Δυνάμεθα ἄρα νὰ εἴπωμεν ὅτι, *ἡ ἐπιφάνεια τῆς ζώνης ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς ζώνης.*

Ἡ αὐτὴ ἔκφρασις ἐφαρμόζεται καὶ διὰ τὴν ζώνην τὴν ἔχουσαν μίαν βάσιν.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Ζ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ζώνης, διὰ Υ τὸ ὕψος καὶ διὰ Α, τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, θέλομεν ἔχει τὴν ἔκφρασιν $Z = 2\pi \times A \times Y$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 91.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τεσσάρων μεγίστων κύκλων.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέλθῃ ἐπίπεδον, τοῦτο θέλει διαιρέσῃ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς δύο *ἡμισφαίρια*, ἢ *σφαιρικὰ τμήματα*, ἔχοντα ὕψος τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας. Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστου τμήματος ἔχει ὡς μέτρον $2\pi A \times A$ ἢ $2\pi A^2$. Ἀοιπὸν, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔχει ὡς μέτρον $4\pi A^2$ ἢ 4 φορὰς πA^2, τουτέστιν εἶναι ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τεσσάρων μεγίστων κύκλων. *Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τῆς ἀκτῖνος, ἢ διὰ τῆς διαμέτρου της ἢ διὰ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου. Πρὸς τοῦτο, ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, Δ ἡ διάμετρος, Π ἡ περιφέρεια, καὶ Ε ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς· ἐν πρώτοις ἔχομεν $E = 4\pi A^2$ . . . . . [1].

Εἰς τὸν τύπον τοῦτον ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ Α, $\frac{\Delta}{2}$, λαμβάνομεν

$$E = 4\pi \times \frac{\Delta^2}{4} = \pi\Delta^2 \ldots\ldots [2].$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἔκφρασιν $\frac{2\pi A \times A}{2} = \pi A^2$ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου, θέσωμεν $A = \frac{\Pi}{2\pi}$, αὕτη τρέπεται εἰς $\frac{\Pi^2}{4\pi}$, καὶ ἡ ἔκφρασις τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἥτις ἰσοῦται μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους, γίνεται

$$E = \frac{\Pi^2}{4\pi} \times 4 = \frac{\Pi^2}{\pi} \ldots\ldots [3].$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αἱ ἐπιφάνειαι δύο σφαιρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των.* Τῷ ὄντι, ἔστωσαν Α καὶ Α' αἱ ἀκτῖνες, Ε καὶ Ε' αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο σφαιρῶν· κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἔχομεν τὰς ἰσότητας,

$$E = 4\pi A^2 \text{ καὶ } E' = 4\pi A'^2.$$

Διαιροῦντες τὰς ἰσότητας ταύτας, καὶ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα 4π, ὁριζόμεθα τὴν ἀναλογίαν

$$E : E' = A^2 : A'^2.$$

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 25. Ζητεῖται ἡ ἐπιφάνεια τῆς γῆς.

Λύσις. Ἡ ἐπιφάνεια μεγίστου τινὸς κύκλου τῆς γηΐνου σφαίρας ἰσοῦται μὲ 4000 μυριάμετρα. Ὅθεν, διὰ τοῦ τύπου [3] ὁριζόμεθα τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς, ἥτις εἶναι $\frac{4000^2}{\pi} = 16000000 \times \frac{1}{\pi} = 5092958$ τετραγωνικὰ μυριάμετρα ὡς ἔγγιστα,

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 24. Τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον σχηματίζει ἑκάστην κατεψυγμένην ζώνην, εἶναι ὡς ἔγγιστα 52,65 μυριαμέτρων, καὶ ζητεῖται ἡ ἐπιφάνεια τῆς ζώνης.

Λύσις. Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ἰσοῦται μὲ

$$2 \times 3,141592 \times 636^{\mu},62 \times 52,65 = 201600,$$

μέτρον ἑνὸς τετραγωνικοῦ μυριαμέτρου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 23. Ζητεῖται ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι 11 ἑκατοστομέτρων.

Λύσις. Ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια ἰσοῦται μὲ $22^2 \times \pi = 1520^{\text{τ.ε.}},53$ μέτρον ἑνὸς τετραγωνικοῦ χιλιοστομέτρου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 26. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑράσματος, ἐκ τοῦ ὁποίου σχηματίζεται ἀερόστατον εἶναι 250 τετραγωνικῶν μέτρων· ζητεῖται ἡ διάμετρος τοῦ σφαιρώματος τούτου.

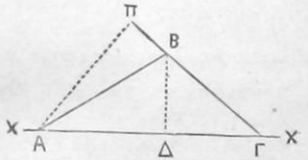
Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου $\pi\Delta^2 = 250$ ὁριζόμεθα,

$$\Delta = \sqrt{\frac{250}{\pi}} = \sqrt{79,5775} = 8^{\mu},92 \text{ μέτρον ἑκατοστομέτρου.}$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 92.

Ὁ παραγόμενος ὄγκος, ἐκ τῆς περιστροφῆς τριγώνου τινὸς περί τινα εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου τούτου κειμένην, καὶ διά τινος τῶν κορυφῶν αὐτοῦ διερχομένην, ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς παραγομένης ἐπιφανείας ὑπὸ τῆς ἀπέναντι τῆς κορυφῆς ταύτης πλευρᾶς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς καθέτου, τῆς καταβιβαζομένης ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ἐπὶ τῆς ἀντικειμένης αὐτῇ πλευρᾶς.

Ἀπόδειξις. Ἐν τῇ προτάσει ταύτῃ τρεῖς περιπτώσεις διακρίνομεν· α') ἔστω ἡ περίπτωσις καθ' ἣν ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς ΧΧ (Σχ. 143), ταυτίζεται μὲ μίαν πλευρὰν ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Καταβιβάζομεν τὴν ΒΔ, κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΓ. Ὁ παραγόμενος ὄγκος ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ περὶ τὴν ΑΓ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα



Σχ. 143.

τῶν κώνων, τῶν παραγομένων ἐκ τῆς περιστροφῆς τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ, καὶ τῶν ὁποίων τὸ μέτρον εἶναι $\frac{1}{3}\pi\overline{\text{ΒΔ}}^2 \times \text{ΑΔ}$ καὶ $\frac{1}{3}\pi\overline{\text{ΒΔ}}^2 \times \text{ΔΓ}$· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἔκφρασιν,

$$\text{ὄγκος ΑΒΓ}=\tfrac{1}{3}\pi\overline{\text{ΒΔ}}^2(\text{ΑΔ}+\text{ΔΓ})=\tfrac{1}{3}\pi\overline{\text{ΒΔ}}^2\times\text{ΑΓ}=\tfrac{1}{3}\pi\times\text{ΒΔ}\times\text{ΒΔ}\times\text{ΑΓ}$$

Ἀλλὰ, ΒΔ × ΑΓ ἐκφράζει τὸ διπλοῦν τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅπερ ἐκφράζεται καὶ οὕτω ΒΓ.ΑΠ, ἐὰν ΑΠ ᾖναι ἡ κάθετος ἡ ἐπὶ τῆς ΒΓ ἀγομένη. Ἄρα, ἔχομεν τὸν τύπον·

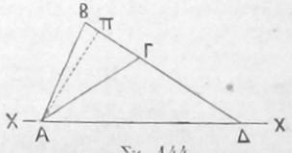
$$\text{ὄγκος ΑΒΓ}=\tfrac{1}{3}\pi.\text{ΒΔ}.\text{ΒΓ}.\text{ΑΠ}=\tfrac{1}{3}\text{ΑΠ}.\pi\text{ΒΔ}.\text{ΒΓ}.$$

Ἀλλά, πΒΔ.ΒΓ, ἐκφράζει (Πρότ. 78) τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΒΔΓ, ἤτοι τὴν παραγομένην ἐπιφάνειαν ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τῆς πλευρᾶς ΒΓ· ἄρα,

$$\text{ὄγκος ΑΒΓ}=\tfrac{1}{3}\text{ΑΠ}.\ \text{ἐπιφ.ΒΓ}\cdot$$

ἡ ἔκφρασις αὕτη ἰκανοποιεῖ τὴν ἐκφώνησιν τῆς προτάσεως.

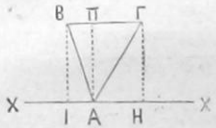
Περίπτωσις β'. Ὁ ἄξων ΧΧ ἔστω νὰ συναπαντᾷ τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 144), χωρὶς ποσῶς νὰ ταυτίζηται μὲ τὴν ΑΓ. Προεκτείνομεν τὴν ΒΓ ἕως οὗ συναπαντήσῃ κατὰ τὸ Δ τὸν ἄξονα, καὶ καταβιβάζομεν τὴν ΑΠ κάθετον ἐπὶ τῆς ΒΓ. Τούτου γενομένου, ὁ παραγόμενος ὄγκος ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλει εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν παραγομένων ὄγκων ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ. Ἀλλὰ, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα (Περίπτ. α'),



Σχ. 144.

ἔχομεν, ὄγκος ΑΒΔ$=\frac{1}{3}$ ΑΠ. ἐπιφ. ΒΔ
καὶ ἐπὶ τέλους, ὄγκος ΑΓΔ$=\frac{1}{3}$ ΑΠ. ἐπιφ. ΓΔ·
ἄρα, ὄγκος ΑΒΓ$=\frac{1}{3}$ΑΠ(ἐπιφ.ΒΔ$-$ἐπιφ.ΓΔ)$=\frac{1}{3}$ΑΠ.ἐπιφ.ΒΓ.

Περίπτωσις γ'. Ὅταν ὁ ἄξων ΧΧ ᾖναι παράλληλος τῆς πλευρᾶς ΒΓ, καταβιβάζομεν τὴν ΑΠ κάθετον ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ ἄγομεν τὴν ΒΙ καὶ ΓΗ, κάθετον ἐπὶ τῆς ΧΧ. Ὁ παραγόμενος ὄγκος ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ παραγομένου κυλίνδρου ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ὀρθογωνίου ΒΙΗΓ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγομένων κώνων ἐκ τῆς περιστροφῆς τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΙΒ καὶ ΑΗΓ· λοιπὸν ἔχομεν,



Σχ. 145.

$$\text{ὄγκος ΑΒΓ}=\pi.\overline{\text{ΒΙ}}^2.\text{ΒΓ}-\tfrac{1}{3}\pi\overline{\text{ΒΙ}}^2.\text{ΑΙ}-\tfrac{1}{3}\pi\overline{\text{ΓΗ}}^2.\text{ΑΗ},$$

ἤ, ἐπειδὴ ΓΗ$=$ΒΙ,

$$\text{ὄγκ.ΑΒΓ}=\pi\overline{\text{ΒΙ}}^2.(\text{ΒΓ}-\tfrac{1}{3}\text{ΑΙ}-\tfrac{1}{3}\text{ΑΗ})=\pi.\overline{\text{ΒΙ}}^2[\text{ΒΓ}-\tfrac{1}{3}(\text{ΑΙ}+\text{ΑΗ})]=$$

$$=\pi.\overline{\text{ΒΙ}}^2(\text{ΒΓ}-\tfrac{1}{3}\text{ΒΓ})=\pi\overline{\text{ΒΙ}}^2.\tfrac{2}{3}\text{ΒΓ},$$

διότι ΑΙ$+$ΑΗ$=$ΙΗ$=$ΒΓ. Ἀλλὰ, ΒΙ$=$ΑΠ. Ἄρα, ἔχομεν τὸν τύπον ὄγκος ΑΒΓ$=\frac{1}{3}$ΑΠ.2π.ΒΙ.ΒΓ.

Ἀλλὰ, 2π.ΒΙ.ΒΓ ἐκφράζει (Πρότ. 82) τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, ἤτοι τὴν παραγομένην ἐπιφάνειαν ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ· ἔχομεν λοιπὸν,

$$\text{ὄγκος ΑΒΓ}=\tfrac{1}{3}\text{ΑΠ.ἐπιφ.ΒΓ}.$$

Ἄρα, ἡ πρότασις εἶναι γενική.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6. *Κανονικὸς πολυγωνικὸς τομεὺς* καλεῖται τὸ περιοριζόμενον σχῆμα ὑπὸ κανονικῆς τινος γραμμῆς κεκλασμένης ΑΒΓΔΕ (Σχ. 142), καὶ ὑπὸ τῶν ἀκτίνων ΟΑ καὶ ΟΕ, τῶν ἀγομένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς ταύτης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 93.

Ὁ παραγόμενος ὄγκος ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ πολυγωνικοῦ κανονικοῦ τομέως ΟΑΒΓΔΕΟ *περὶ τὴν ἀκτῖνα* ΟΑ, *ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ὑπὸ τῆς κεκλασμένης γραμμῆς* ΑΒΓΔΕ *παραγομένης ἐπιφανείας, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος* Ομ *τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐὰν καταβιβάσωμεν ἐκ τοῦ κέντρου Ο, ἐπὶ ἑκάστην πλευρὰν τῆς κεκλασμένης γραμμῆς, τὰς καθέτους Ομ, Ον, Οπ, Ου, κτλ. καὶ ἀγάγωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, οἱ παραγόμενοι ὄγκοι ὑπὸ τῆς περιστροφῆς ἑκάστου τριγώνου ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, κτλ. θέλουσιν ἔχει διαδοχικῶς ὡς μέτρον (Πρότ. 92)·

$\frac{1}{3}$Ομ.ἐπιφ.ΑΒ, $\frac{1}{3}$Ον.ἐπιφ.ΒΓ, $\frac{1}{3}$Οπ.ἐπιφ.ΓΔ, $\frac{1}{3}$Ου.ἐπιφ.ΔΕ, κτλ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκφράσεων τούτων, ἤ ὁ παραγόμενος ὄγκος ὑπὸ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως, ἔχει λοιπὸν δι' ἔκφρασιν

$$\tfrac{1}{3}\text{Ομ.}\ (\text{ἐπιφ. ΑΒ} + \text{ἐπιφ. ΒΓ} + \text{ἐπιφ. ΓΔ} + \text{ἐπιφ. ΔΕ}),$$

ἐπειδὴ ὅλαι αἱ κάθετοι Ομ, Ον, Οπ, Ου, εἰσὶν ἴσαι. Ἡ ἔκφρασις αὕτη τρέπεται εἰς τὴν ἀκόλουθον·

$$\tfrac{1}{3}\text{Ομ.ἐπιφ.ΑΒΓΔΕ},$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὴν ἐκφωνηθεῖσαν πρότασιν.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7. *Σφαιρικὸς τομεὺς* καλεῖται ὁ παραγόμενος ὄγκος ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΟΕ (Σχ. 142), περὶ μίαν τῶν δύο ἀκτίνων, αἵτινες τὸν περιορίζουσι. Κατὰ τὴν περιστροφὴν ταύτην, ἡ περιφέρεια, ἧς τὸ τόξον ΑΕ ἀποτελεῖ μέρος, περιγράφει σφαῖραν· *σφαιρικὸς τομεὺς* δὲ εἶναι τὸ τῆς σφαίρας ταύτης μέρος, τὸ ἀποπερατούμενον ὑπὸ τῆς σφαιρικῆς ζώνης, τῆς ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΕ παραγομένης, ἥτις *βάσις* τοῦ τομέως καλεῖται, καὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος ΟΕ παραγομένης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 94.

Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ὑφ' ἧς περατοῦται ζώνης ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐὰν ἐγγράψωμεν εἰς τὸ τόξον ΑΕ τὴν κανονικὴν κεκλασμένην γραμμὴν ΑΒΓΔΕ, ὁ παραγόμενος ὄγκος ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως ΟΑΒΓΔΕΟ περὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ, ἔχει ὡς μέτρον, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη,

$$\tfrac{1}{3}\ \text{Ομ} \times \text{ἐπιφ. ΑΒΓΔΕ}.$$

Ἀλλὰ, ἐὰν αὐξήσωμεν ἀδιακόπως τὴν πληθὺν τῶν πλευρῶν τῆς κεκλασμένης γραμμῆς, αὕτη θέλει πλησιάζει ἀδιακόπως πρὸς τὸ τόξον ΑΕ, ἡ δὲ παραγομένη ἐπιφάνεια ὑπὸ τῆς κεκλασμένης γραμμῆς, θέλει πλησιάζει ἀδιακόπως πρὸς τὴν παραγομένην ἐπιφάνειαν ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΕ, καὶ ἐπομένως ὁ ὑπὸ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως παραγόμενος ὄγκος θέλει πλησιάζει ἀδιακόπως πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως. Πρὸς τούτοις δὲ ἡ ἀκτὶς Ομ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὴν κεκλασμένην γραμμὴν θέλει πλησιάζει ἀδιακόπως πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ τόξου ΑΕ. Ἄρα ἔχομεν

$$\text{ὄγκος ΑΟΕ} = \tfrac{1}{3}\text{ΑΟ} \times \text{ἐπιφ.ΑΕ},$$

ἤτοι, *ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως ἔχει ὡς μέτρον τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ὑφ' ἧς περατοῦται ζώνης ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.*

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν Α ᾖναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, καὶ Υ τὸ ὕψος τῆς ζώνης, τουτέστι ἡ προβολὴ τοῦ τόξου ΑΕ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΑ, κατὰ τὴν Πρότασιν 90, ἡ ἐπιφάνεια τῆς ζώνης ἔχει ὡς μέτρον 2π.Α.Υ. Λοιπόν, ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως ἐκφράζεται οὕτω· $2\pi\text{ΑΥ} \times \frac{1}{3}\text{Α}$ ἢ $\frac{2}{3}\pi\text{Α}^2\text{Υ}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 95.

Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ παράγων τὸν σφαιρικὸν τομέα κυκλικὸς τομεὺς εἶναι ἡμικύκλιον, ὁ ὑπ' αὐ-

τοῦ παραγόμενος ὄγκος θέλει εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας. Ἀλλὰ τότε ἡ ζώνη, ἡ τὸν σφαιρικὸν τομέα περατοῦσα, θέλει εἶναι ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. Λοιπόν, *ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.*

ΣΧΟΛΙΟΝ 1. Ἐπειδὴ τὸ ὕψος Υ τῆς σφαιρικῆς ζώνης ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι ἡ διάμετρος, ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν τὸ Υ διὰ 2Α εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, λαμβάνομεν διὰ τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας τὴν ἔκφρασιν

$$\tfrac{2}{3}\,\pi A^2.2A \quad \text{ἢ} \quad \tfrac{4}{3}\,\pi A^3 \ldots . [1].$$

ΣΧΟΛΙΟΝ 2. Ἔστω Ο ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας, Α ἡ ἀκτίς, Δ ἡ διάμετρος καὶ Ε ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς· κατὰ τὴν (Πρότ. 95) ἔχομεν τὸν τύπον

$$O = E \times \frac{A}{3}.$$

Εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέτοντες ἀντὶ Ε καὶ Α, $\pi\Delta^2$ καὶ $\frac{\Delta}{2}$ εὑρίσκομεν

$$O = \pi\Delta^2 \times \frac{\Delta}{6} = \frac{1}{6}\pi\Delta^3 \ldots . [2].$$

Ἐκ τοῦ τύπου [1] εὐκόλως ποριζόμεθα ὅτι, *οἱ ὄγκοι τῶν σφαιρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων των.*

ΣΧΟΛΙΟΝ 3. Ὁ τύπος $O = \frac{4}{3}\pi A^3$ γράφεται καὶ οὕτω·

$$O = \frac{4\times 3{,}1415\ldots}{3} \times A^3 = 4{,}1887902\ldots \times A^3,$$

ἢ ἁπλῶς

$$O = 4{,}1888 \times A^3.$$

Ἐκ τοῦ τελευταίου τύπου ἕπεται ὅτι *ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἰσοῦται καὶ τῷ γινομένῳ τοῦ κύβου τῆς ἀκτῖνος της ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν* 4,1888.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 27. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας τηλεβόλου, ἧς ἡ διάμετρος εἶναι 22 ἑκατοστομέτρων.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς εἶναι 11 ἑκατοστόμετρα, ἡ ἔκφρασις τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας, ἀναφερομένη πρὸς τὸ κυβικὸν ἑκατοστόμετρον, εἶναι $\frac{4}{3}$. $3{,}1416.(11)^3$. Ἐκτελοῦντες τὸν ὑπολογισμὸν εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς κυβικοῦ ἑκατοστομέτρου, 5575 ἑκατοστόμετρα ἢ 5 δεκατόμετρα καὶ 575 ἑκατοστόμετρα κυβικά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 28. Ζητεῖται ὁ ὄγκος σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἐπιφάνεια εἶναι τεσσάρων τετραγωνικῶν μέτρων.

Λύσις. Ἐπειδὴ $E = 4\pi A^2$, καὶ $E = 4$, ἔχομεν $4 = 4\pi A^2$, καὶ ἑπομένως

$$A = \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \qquad \text{ἀλλὰ,} \qquad O = E \times \frac{A}{3},$$

λοιπόν,

$$O = 4 \times \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{\pi}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0^{\mu.κ.},75225,$$

ἤτοι 752 δεκατόμετρα καὶ 250 ἑκατοστόμετρα κυβικά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 29. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τῆς γηΐνου σφαίρας.

Λύσις. Ἡ περιφέρεια ἑνὸς μεγίστου κύκλου εἶναι ἴση μὲ 4000 μυριάμετρα, ἡ δὲ ἀκτὶς ἴση μὲ

$$\frac{\Pi}{2\pi} = \frac{2000^{\mu\upsilo\rho.}}{\pi}$$

Λοιπόν,

$$O = \frac{4}{3}\pi \times \frac{2000^3}{\pi^3} = \frac{4\times 8000000000}{3\pi^2} =$$

$$= \frac{32000000000}{3} \times \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = 1080731740^{\mu.κ.}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 30. Ζητεῖται ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινός, τῆς ὁποίας ὁ ὄγκος ἰσοῦται μὲ ἓν κυβικὸν μέτρον.

Λύσις. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν $1 = \frac{4}{3}\pi A^3$.

Ἐκ τῆς ἐκφράσεως ταύτης συνάγομεν

$$A^3 = \frac{3}{4\pi} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{\pi} = 0{,}238732414\cdot$$

καὶ ἑπομένως

$$A = \sqrt[3]{0{,}238732414} = 0^{\mu}{,}620 \text{ μεῖον χιλιοστομέτρου.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 31. Ἐν τῇ ἀστρονομίᾳ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου πρὸς τὴν τῆς γῆς εἶναι ὡς 108 πρὸς 556· ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ ἡλίου.

Λύσις. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο τούτων σωμάτων εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν 108 καὶ 556, ὅστις εἶναι 1279268· ὅθεν ὁ ἥλιος εἶναι ὡς ἔγγιστα 1279000 φορὰς ὀγκωδέστερος τῆς γῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 32. Ζητεῖται ὁ ὄγκος σφαίρας, ἧς ἡ ἐπιφάνεια ἰσοῦται μὲ ἓν τετραγωνικὸν μέτρον.

Λύσις. Καλοῦντες Α τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, Ε τὴν ἐπιφάνειαν καὶ Ο τὸν ὄγκον, ἔχομεν τὰς ἐκφράσεις

$$E = 4\pi A^2 \qquad \text{καὶ} \qquad O = \tfrac{4}{3}\pi A^3.$$

Ἐκ τῆς πρώτης λαμβάνοντες τὴν ἀξίαν τοῦ Α καὶ ἀντικαθιστῶν-

τες αὐτὴν εἰς τὴν δευτέραν τῶν δύο ἐκφράσεων, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς ἀναγωγὰς

$$O=\frac{E\sqrt{E}}{6\sqrt{\pi}}.$$

Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ὁ τύπος οὗτος δίδει·

$$O=\frac{1^{\mu.κ.}}{6\sqrt{3,141592}}=0,094,$$

ἤτοι 94 δεκατόμετρα κυβικά.

---

§.—25.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 121. Ὄγκος οἱουδήποτε σώματος. Ἡ διὰ προσεγγίσεως καταμέτρησις τοῦ ὄγκου σώματος, περιοριζομένου ὑφ' οἱασδήποτε καμπύλης ἐπιφανείας, γίνεται, ἐὰν ἀποσυνθέσωμεν αὐτό, διὰ παραλλήλων καὶ καθέτων πρὸς ἄλληλα ἐπιπέδων, εἰς παραλληλεπίπεδα.

Διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ ὄγκου λοφίσκου γίνεται χρῆσις τῶν κατακορύφων ἐπιπέδων.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ τομὴ τοῦ ἐδάφους μὲ ἕκαστον τῶν κατακορύφων ἐπιπέδων λαμβάνεται δι' εὐθυγραμμισμένης γραμμῆς ἀκοντίων. Αἱ μὲν κατακόρυφοι κόψεις τῶν παραλληλεπιπέδων ἢ τῶν πυραμίδων, εἰς ἃς ἀποσυντίθεται τὸ ἔδαφος, διὰ χωροσταθμήσεως καταμετροῦνται, αἱ δὲ ὁριζόντιοι κόψεις τῶν βάσεών των εἶναι αἱ ὁριζόντιοι ἀποστάσεις μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν κατακορύφων ἐπιπέδων, αἵτινες εὐκόλως μετροῦνται.

Εἰς τὴν ὁδοποιΐαν ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται κυβισμὸς τῶν χωμάτων· γίνεται δὲ διὰ μιᾶς κατὰ μῆκος διατομῆς καὶ πολλῶν κατὰ πλάτος διατομῶν καθέτων ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς πρώτης.

Διὰ σώματα μικρᾶς ἐκτάσεως, τὰ ὁποῖα δὲν δύνανται νὰ ἐξομοιωθῶσι πρὸς τὰ γεωμετρικὰ σώματα, γίνεται χρῆσις τῆς ἑξῆς μεθόδου:

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 122. Προσδιόρισις τοῦ ὄγκου τῶν σωμάτων διὰ τοῦ βάρους αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐὰν προσδιωρίζετο τὸ βάρος τῆς μονάδος τοῦ ὄγκου τῶν κυριωτέρων σωμάτων, τῶν ὁποίων γίνεται χρῆσις ἐν τῇ ἐφαρμογῇ, τότε τὸ

βάρος τοῦ σώματος ἀρκεῖ διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ ὄγκου του· ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τοῦ ὄγκου, τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς τὸ σῶμα, προσδιορίζεται ἐὰν ζητήσωμεν ποσάκις τὸ βάρος τοῦ σώματος ἐμπεριέχει τὴν μονάδα τοῦ ὄγκου.

Ἀλλὰ κατὰ τὴν φυσικὴν μία λίτρα ἀπεσταγμένου ὕδατος, τεσσάρων βαθμῶν θερμοκρασίας τοῦ ἑκατονταβάθμου θερμομέτρου, ζυγίζει 1 χιλιόγραμμον ἢ 312,5 δράμια· ἂς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι ἀγγεῖον, τοῦ ὁποίου ἡ χωρητικότης δὲν δύναται νὰ ἐκτιμηθῇ γεωμετρικῶς, ζυγίζει 6 χιλιόγραμμα, ὅταν ἦναι κενόν, καὶ 13 ὅταν ἦναι πλῆρες ἀπεσταγμένου ὕδατος ὑπὸ τοὺς ἀνωτέρω ὅρους. Τούτου τεθέντος, ἕπεται ὅτι τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ὕδατος εἰς τὸ ἀγγεῖον εἶναι 7 χιλιόγραμμα, ὁ δὲ ὄγκος ἢ ἡ χωρητικότης τοῦ ἀγγείου 7 λιτρῶν ἢ 7 κυβικῶν δεκατομέτρων.

Ἀντιστρόφως, γνωστοῦ ὄντος τοῦ ὄγκου σώματός τινος, τουτέστι τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τοῦ ὄγκου, τὸν ὁποῖον ἐμπεριέχει τὸ σῶμα, τότε, πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ τὸ βάρος τῆς μονάδος τοῦ ὄγκου, προσδιορίζομεν τὸ ὅλον βάρος τοῦ σώματος ἄνευ τῆς χρήσεως τοῦ ζυγοῦ.

Εἰδικὸν βάρος. Τὸ βάρος τῆς μονάδος τοῦ ὄγκου ἑκάστου σώματος καλεῖται εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος.

Ἐκ συνθήκης δὲ λαμβάνεται ὡς μονὰς τοῦ ὄγκου, διὰ τὴν ἐκτίμησιν τοῦ εἰδικοῦ βάρους τῶν σωμάτων, τὸ κυβικὸν δεκατόμετρον. Λοιπόν, τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀπεσταγμένου ὕδατος εἶναι 1.

Τὸ εἰδικὸν βάρος διαφόρων σωμάτων προσδιορίσθη μὲ μεγάλην ἀκρίβειαν ὑπὸ τῶν φυσικῶν.

Τινὰ τῶν σωμάτων τούτων περιλαμβάνει ὁ ὄπισθεν ὑπεδεικνυόμενος πίναξ.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 33. Ζητεῖται τὸ βάρος τεμαχίου μαρμάρου τῆς Πάρου, σχῆμα ἔχοντος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μῆκος μὲν, 15 δεκατομέτρων, πλάτος 12, καὶ 9 δεκατομέτρων ὕψος.

Λύσις. Ὁ ὄγκος τοῦ μαρμάρου εἶναι $15\times12\times9$ ἢ 1620 δεκατόμετρα κυβικά. Ἀλλ' εἰς τὸν πίνακα βλέπομεν ὅτι τὸ κυβικὸν δεκατόμετρον τοῦ μαρμάρου τῆς Πάρου ζυγίζει 2,837 χ.γρ. ἄρα, τὸ παραλληλεπίπεδον ζυγίζει 1620 φορὰς 2,837, τουτέστιν 4598,94 χιλιόγραμμα.

ΠΙΝΑΞ

τῆς ἰδικῆς βαρύτητος διαφόρων σωμάτων.

Σώματα.	Εἰδικὸν βάρος.	Σώματα.	Εἰδικὸν βάρος.
Πλατίνη εἰς πεταλειον.	22,069	Πηλὸς γαιώδης.	1,700
Πλατίνη σφυρήλατος.	20,337	Δρῦς ξηρά.	1,670
Χρυσὸς σφυρήλατος.	19,362	Γῆ ἀργιλώδης.	1,600
Χρυσὸς κεχωνευμένος.	19,258	Πλίνθος ἥττον ὀπτή.	1,500
Ὑδράργυρος.	13,598	Φυτικὴ γῆ.	1,400
Μόλυβδος κεχωνευμένος.	11,352	Γαιάνθραξ.	1,329
Ἄργυρος κεχωνευμένος.	10,474	Ὕδωρ θαλάσσιον.	1,026
Χαλκὸς κεχωνευμένος.	8,788	Ὕδωρ ἀπεσταγμένον.	1,000
Χάλυψ (τσελίκι).	7,816	Οἶνος *(Bordeaux)*.	0,994
Σίδηρος.	7,788	Οἶνος *(Borgogne)*.	0,992
Κασσίτερος κεχωνευμένος (καλάϊ).	7,291	Ἔλαιον τοῦ λίνου.	0,940
Χυτὸς σίδηρος.	7,207	Πετρέλαιον.	0,840
Ζίγκος κεχωνευμένος.	6,861	Πάγος.	0,932
Μάρμαρον τῆς Πάρου.	2,837	Δρῦς χλωρά.	0,930
Μάρμαρον σύνηθες.	2,717	Ἅλας θαλάσσιον.	0,920
Ὕαλος.	2,488	Ἔλαιον ἀγριογογγύλης.	0,919
Λίθος μυλίτης.	2,484	Ἐλαιόλαδον.	0,915
Λίθος γυψώδης.	2,168	Πτελέα (καρὰ-ἀγάτς).	0,800
Πορσελάνη.	2,145	Καρυά.	0,671
Πλίνθος λίαν ὀπτή.	2,200	Φιλλύρα (φλαμουρηά).	0,604
Πλίνθος συνήθης.	2,200	Κέδρος.	0,561
Ἐλεφαντόδους (φιλδισι).	1,917	Ἐλάτη.	0,550
Ἄμμος καθαρὰ.	1,900	Αἴγειρος (καβάκι).	0,383
Πηλὸς καθαρὸς.	1,900	Ἀπηδέα.	0,660
Ἀλάβαστρος.	1,874	Κερασέα.	0,720
Γῆ συνήθης.	1,700	Φελός.	0,240
		Τσιχοποιία.	1,700—3,200

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 34. Ζητεῖται τὸ βάρος ἑλατίνου κυλίνδρου, ἔχοντος μῆκος μὲν, 4^{μ},52, ἀκτῖνα δὲ, 0^{μ},21.

Λύσις. Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου τούτου εἶναι

$$3,1416\times(0^{\mu},21)^2\times 4,52.$$

τουτέστι 0,626220 μ.κ. ἢ 626,220 δ.κ. Ἀλλὰ κατὰ τὸν πίνακα, τὸ βάρος τοῦ κυβικοῦ δεκατομέτρου τῆς ἐλάτης εἶναι 0,55 χ.γρ.· τὸ βάρος λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου εἶναι $0^{\chi}\cdot^{\gamma\rho},55\times 626^{\delta}\cdot^{\kappa},220$, τουτέστι 344,421 χιλιόγραμμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 35. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης λαγήνου, ἥτις πλήρης ἐλαίου ζυγίζει 16 χ.γρ., ἄνευ δὲ τούτου 7,2 χ.γρ.

Λύσις. Τὸ βάρος τοῦ περιλαμβανομένου εἰς αὐτὴν ἐλαίου εἶναι $16^{\chi}\cdot^{\gamma\rho}-7^{\chi}\cdot^{\gamma\rho},2=8^{\chi}\cdot^{\gamma\rho},8$. Ἀλλὰ, εἰς τὸν πίνακα τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ἐλαίου εἶναι 0,915 χ.γρ.· ὅθεν, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας λίτρας ἐμπεριέχει ἡ λάγηνος, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου 8,8 χ.γρ. διὰ τοῦ βάρους τῆς λίτρας 0,915 χ.γρ., τὸ δὲ πηλίκον 9,617 ἐκφράζει τὴν χωρητικότητα τῆς λαγήνου εἰς λίτρας ἢ εἰς δεκατόμετρα κυβικά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 36. Ζητεῖται ὁ ὄγκος χρυσῆς ῥάβδου, τῆς ὁποίας τὸ βάρος εἶναι 4,329 χιλιογράμμων.

Λύσις. Τὸ βάρος τοῦ κυβικοῦ δεκατομέτρου τοῦ χρυσοῦ κατὰ τὸν πίνακα εἶναι 19,258 χ.γρ.. Ὅθεν, λαμβάνομεν τὸν ζητούμενον ὄγκον διαιροῦντες τὸ βάρος 4,329 χ.γρ. τῆς ῥάβδου διὰ τοῦ βάρους 19,258 χ.γρ. τοῦ κυβικοῦ δεκατομέτρου. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως εἶναι 0,224789 δ.κ. ἢ 224,789 ἑκατοστόμετρα κυβικά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 37. Ἀγγεῖον κυλινδρικὸν, τοῦ ὁποίου ἡ ἐσωτερικὴ βάσις ἀκτῖνα ἔχει 1,3 δ.μ. βάρος δὲ 2,5 χ.γρ., ζητεῖται μέχρι τίνος ὕψους πρέπει νὰ πληρωθῇ ἀπεσταγμένου ὕδατος, ἵνα ζυγίζῃ 14 χιλιόγραμμα.

Λύσις. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ 2,5 χ.γρ. καὶ 14 χ.γρ. εἶναι 11,5. Μία λίτρα ἀπεσταγμένου ὕδατος ζυγίζει 1 χιλιόγραμμον· ὅθεν, τὸ βάρος 11,5 χ.γρ. παριστᾷ 11,5 λίτ. καθαροῦ ὕδατος ἢ 11,500 δ.κ. Τὸ προταθὲν λοιπὸν ζήτημα τρέπεται εἰς τὸ ἑξῆς. «Ζητεῖται τὸ ὕψος κυ»λίνδρου, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 1,3 δεκατόμετρα, ὁ »ὄγκος δὲ 11,500 κυβικὰ δεκατόμετρα.»

Ἀλλ' ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος· ὅθεν, διαιροῦντες τὸν ὄγκον διὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεως λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον ὕψος. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως εἶναι $\frac{22}{7}\times(1^{\delta}\cdot^{\mu},3)^2$ ἢ 5,31 δ.τ. τὸ πηλίκον τοῦ 11,500 δ.κ. διὰ 5,31 δ.τ. εἶναι 2,16 δ.μ.· πρέπει ἄρα νὰ πληρωθῇ τὸ ἀγγεῖον ἀπεσταγμένου ὕδατος μέχρι τοῦ ὕψους 2,16 δ.μ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 38. Ζητεῖται ἡ διάμετρος σφαίρας τηλεβόλου, βάρους 24 χιλιογράμμων ἢ $(24\times 312,5)=18,75$ ὀκάδων.

ΠΙΝΑΞ

σιδηρῶν ῥάβδων τετραγώνου καὶ κυκλικῆς τομῆς, μήκους ἑνὸς μέτρου.

Πλευρὰ ἢ διάμετρος εἰς χιλιοστόμετρα.	Τετραγ. Σίδηρα. Βάρος εἰς χιλιόγραμμα.	Στρογγ. Σίδηρα. Βάρος εἰς χιλιόγραμμα.	Πλευρὰ ἢ διάμετρος εἰς χιλιοστόμετρα.	Τετραγ. Σίδηρα. Βάρος εἰς χιλιόγραμμα.	Στρογγ. Σίδηρα. Βάρος εἰς χιλιόγραμμα.
1	0,008		31	7,484	5,880
2	0,031	0,024	32	7,975	6,266
3	0,070	0,055	33	8,481	6,664
4	0,125	0,098	34	9,003	7,074
5	0,195	0,158	35	9,540	7,496
6	0,280	0,220	36	10,093	7,930
7	0,382	0,300	37	10,662	8,377
8	0,498	0,392	38	11,246	8,836
9	0,631	0,496	39	11,806	9,307
10	0,779	0,612	40	12,451	9,791
11	0,942	0,740	41	13,092	10,280
12	1,121	0,881	42	13,738	10,794
13	1,316	1,034	43	14,400	11,314
14	1,526	1,199	44	15,078	11,846
15	1,752	1,377	45	15,771	12,391
16	1,994	1,506	46	16,479	13,048
17	2,251	1,768	47	17,204	13,517
18	2,523	1,983	48	17,944	14,098
19	2,811	2,209	49	18,699	14,692
20	3,115	2,448	50	19,470	15,296
21	3,435	2,692	55	23,559	18,510
22	3,769	2,962	60	28,036	22,028
23	4,120	3,237	65	32,884	25,853
24	4,486	3,525	70	38,161	29,983
25	4,868	3,824	75	43,806	34,419
26	5,265	4,136	80	49,843	39,162
27	5,677	4,461	85	56,208	44,210
28	6,106	4,797	90	63,088	49,563
29	6,550	5,146	95	70,287	55,224
30	7,009	5,507	100	77,880	61,190

Λύσις. Ὁ χυτὸς σίδηρος ἐκ τοῦ ὁποίου κατασκευάζονται αἱ σφαῖραι, κατὰ τὸν πίνακα, ζυγίζει 7,207 χ.γρ. τὸ δεκατόμετρον τὸ κυβικὸν διαιροῦντες λοιπὸν 24 χ.γρ. διὰ 7,207 χ.γρ., εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι 3,330095 δ.κ. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἔχωμεν τὸν ὄγκον σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι γνωστὴ, πολλαπλασιάζομεν τὸν κύβον τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ 4,1888. Διαιροῦντες λοιπὸν τὸν ὄγκον 3,330095 δ.κ. διὰ 4,1888 εὑρίσκομεν πηλίκον τὸν κύβον τῆς ἀκτῖνος, ὅστις εἶναι 0,794976 δ.κ. Ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου εἶναι 0,926 δ.μ. τούτου δὲ τὸ διπλοῦν εἶναι 1,852 δ.μ., ἢ $0^{\mu},185$, καὶ ἐκφράζει τὴν ζητουμένην διάμετρον.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 125. Βάρος τῶν σιδηρῶν ῥάβδων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος σιδηρᾶς ῥάβδου μήκους δεδομένου, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τοῦτο ἐπὶ τὸν ἐν τῷ κατέναντι πίνακι ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν, εἰς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ἢ εἰς τὴν διάμετρον τῆς ῥάβδου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 39. Ζητεῖται τὸ βάρος σιδηρᾶς ῥάβδου τετραγώνου τομῆς, μῆκος μὲν ἐχούσης $5^{\mu},45$, πλευρὰν δὲ $0^{\mu},032$.

Λύσις. Κατὰ τὸν προηγούμενον πίνακα ἔχομεν

$$7,975 \times 5,45 = 43,46 \text{ χ.γρ.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 40. Ζητεῖται τὸ βάρος σιδηρᾶς ῥάβδου κυκλικῆς τομῆς τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι $5^{\mu},45$, ἡ δὲ διάμετρος $0^{\mu},032$.

Λύσις. Κατὰ τὸν προηγούμενον πίνακα ἔχομεν

$$6,266 \times 5,45 = 34,15 \text{ χ.γρ.}$$

Παρατήρησις. Εὑρίσκεται τὸ βάρος ῥάβδου τετραγώνου τομῆς, μῆκος ἑνὸς μέτρου, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ πλάτος ἐπὶ τὸ πάχος καὶ ἐπὶ 7γράμμα 788 χιλιόγρ. Ἐπίσης εὑρίσκεται τὸ βάρος τῶν κυκλικῶν ῥάβδων, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου, ἐκπεφρασμένης εἰς χιλιοστόμετρα, ἐπὶ 6 γράμμα 219 χιλιόγρ. 140 χιλιοστά· τοῦ τελευταίου τούτου ἀριθμοῦ ἐκφράζοντος τὸ βάρος κυκλικοῦ σιδήρου διαμέτρου ἔχοντος 1 χιλιοστόμετρον, μῆκος δὲ, ἓν μέτρον.

ΕΘΝΙΚΟΝ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

§—26.

Ἀρχιτεκτονική. Ὑποβρύχιος χωροστάθμησις. Σχῆμα τῆς γῆς. Ἀκτὶς τῆς γῆς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 124. Ἀρχιτεκτονική. Αὕτη εἶναι τέχνη τοῦ κατασκευάζειν καὶ ῥυθμίζειν τὰς οἰκοδομάς. Καὶ ὡς τέχνη μὲν, ἂν καὶ ἐξαρτᾶται ὁριστικῶς ἐκ τῆς καλλαισθησίας, ἐν τούτοις συνδέεται μετὰ τῆς Γεωμετρίας διὰ τοὺς νόμους τῆς συμμετρίας, οἵτινες προΐστανται τῆς γενικῆς διαταξεως, διὰ τὰς ἀναλογίας, ἃς ἀπονέμει εἰς τὰ διάφορα μέρη τῆς οἰκοδομῆς ἡ τήρησις τῶν κανόνων τῶν ἀρίστων πρωτοτύπων, καὶ διὰ τοὺς κανόνας τῆς κοσμηματογραφίας· ὡς ἐπιστήμη δὲ ἡ ἀρχιτεκτονικὴ περιλαμβάνει ἁπάσας τὰς ἀπαιτουμένας γνώσεις διὰ τὴν κατασκευαστικὴν καὶ πολυτρόπως χρῆσιν ποιεῖται τῶν μαθηματικῶν. Ἡ λιθοτομία καὶ ἡ ξυλουργία, π.χ. διδάσκουσι τὴν θεωρίαν τῶν κανόνων, καθ' οὓς δίδεται εἰς τὰ διάφορα μέρη τῆς οἰκοδομῆς, τὸ κατάλληλον σχῆμα. Ἡ θεωρία τῆς ἀντιστάσεως τῶν ὑλῶν χορηγεῖ τοὺς κανόνας καθ' οὓς ὑπολογίζομεν τὰς διαστάσεις τῶν μερῶν τούτων. Ἡ μηχανικὴ δὲ χορηγεῖ τὰς ἀναγκαίας μηχανὰς καὶ ἐργαλεῖα, δι' ὧν μεταφέρεται τὸ ὑλικὸν τῆς οἰκοδομῆς ὅπου δεῖ.

Τέλος, ἡ Περιγραφικὴ Γεωμετρία χορηγεῖ τοὺς κανόνας, καθ' οὓς παρίστανται ἐπὶ χάρτου ἡ οἰκοδομὴ, τὰ διάφορα μέρη αὐτῆς ὡς καὶ αἱ σκιαὶ τὰς ὁποίας ῥίπτουσιν.

Ἕκαστον ἔθνος ἔχει ἰδιάζοντα ῥυθμὸν ἀρχιτεκτονικῆς. Τὸ Ἑλληνικὸν ὅμως ἔθνος καὶ τὸ Ῥωμαϊκὸν κατέλιπον ἡμῖν ἔξοχα δείγματα ἀρχιτεκτονικῆς.

Ἐκ τῶν προῤῥηθέντων ἕπεται ὅτι ἐνταῦθα δὲν δυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν ἢ τινὰς μόνον τῶν γενικῶν κανόνων, οὓς τηροῦσιν αἱ νεώτεραι οἰκοδομαί. Οὗτοι δὲ εἰσίν·

α.) Ἡ πρόσοψις οἰκοδομῆς τινος ἀνάγκη νὰ ἦναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς κατακόρυφόν τινα ἄξονα· ὁ ἄξων δὲ οὗτος νὰ διέρχηται πάντοτε διὰ τοῦ μέσου ἀνοίγματος, π.χ. διὰ τοῦ μέσου θύρας, ἥτις ἐν τῇ περιστάσει ταύτῃ καθίσταται πρωτίστη, ἢ διὰ τοῦ μέσου παραθύρου, καὶ τότε αἱ θύραι τοποθετοῦνται συμμετρικῶς.

β'.) Τὸ μῆκος τῆς προσόψεως δύναται νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ὕψος, ὅταν πρόκηται περὶ μεμονωμένου οἰκίσκου· ἐν γένει δὲ τὸ μῆκος τῆς προσόψεως ἐμπεριέχει 1 ½ ἕως 3 φορὰς τὸ ὕψος τῆς οἰκοδομῆς.

γ'.) Ἐὰν ἡ οἰκοδομὴ ἀπαιτῇ μεγαλείτερον μῆκος, τότε ἀποφεύγομεν τὴν μονοτονίαν τῶν γραμμῶν, διά τινων ἐσοχῶν ἢ προεξοχῶν τεταγμένων συμμετρικῶς ἐπὶ τῆς πρωτίστης προσόψεως τῆς οἰκοδομῆς· ἢ, ἂν τοῦτο ἦναι ἀκατόρθωτον, ὑποδιαιροῦμεν τὸ μῆκος διὰ λαξευτῶν καὶ προεξεχόντων λίθων, τεταγμένων ἀλυσσοειδῶς καὶ διαιρούντων τὸ ὅλον ὕψος τῆς προσόψεως. Διὰ τοὺς στρατῶνας καὶ τὰ ἐργοστάσια, ἐνίοτε ἀπαιτεῖται σημαντικὸν μῆκος· ἐν οἱᾳδήποτε ὅμως περιστάσει τὸ μῆκος δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ 10κις τὸ ὕψος τῆς οἰκοδομῆς.

Δι' Αὐτοκρατορικοῦ διατάγματος τῇ 27 Ἰουλίου 1859 ἡ Γαλλικὴ Κυβέρνησις ἐκανόνισεν ὡς ἑξῆς τὰ ὕψη τῶν οἰκοδομῶν ὡς πρὸς τὸ πλάτος τῶν ὁδῶν.

Πλάτος ὁδοῦ.	Ὕψος μέγιστον τῶν οἰκοδομῶν.
Κάτω τῶν $7^{\mu},80$.	$11^{\mu},70$.
Ἀπὸ $7,80$ ἕως $9^{\mu},75$.	$14,60$.
Ἄνω τῶν $9,75$.	$17,55$.

Ἐν τούτοις κατὰ τὸ Α' ἄρθρον, εἰς τὰς ὁδοὺς 20 μέτρων καὶ ἄνωθεν πλάτους τὸ ὕψος τῶν οἰκοδομῶν δύναται νὰ φθάσῃ εἰς 20 μέτρα, ἀλλὰ δι' οἱανδήποτε περίστασιν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀροφῶν δὲν πρέπει νὰ ἦναι ὑπεράνω τῶν πέντε, ἄνω τοῦ προσγείου, συμπεριλαμβανομένου τοῦ μεταξὺ τοῦ προσγείου καὶ τοῦ πρώτου πατώματος.

Αἱ εἰς τὰς δημοσίους ὁδοὺς (ἄρθρ. 5), τοὺς περιπάτους καὶ εἰς τὰς ἐξοχὰς εὑρισκόμεναι οἰκοδομαὶ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν ὕψος ὑπεράνω τῶν $17,55$ μέτρων, μετρούμενον ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Ἡ διοίκησις δύναται ἐν τούτοις νὰ ἐξαιρέσῃ τοῦ κανόνος τὰς ὑψηλοτέρας οἰκοδομὰς, τὰς διὰ τεχνικὸν ἢ ἐπιστημονικὸν ἢ βιομηχανικὸν σκοπὸν προωρισμένας.

Τὸ ἐλάχιστον ὕψος τῶν πατωμάτων ὡρίσθη εἰς $2^{\mu},60$. Τὸ ὕψος τῆς Κορυφαίας γραμμῆς τῆς στέγης δὲν ὑπερβαίνει τὸ ἥμισυ τοῦ πλάτους τῆς οἰκοδομῆς, συμπεριλαμβανομένων τῶν προεξοχῶν καὶ τῶν χωρονίδων. Ἐνταῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ κλίσις τῆς ὀροφῆς φθάνει μέχρι 45^{0} ἢ 50%.

Οἱ σωλῆνες τῆς καπνοδόχης ἀνυψοῦνται ὑπὲρ τὰ $0^{\mu},60$, ἄνω τῆς κορυφαίας· ἀπομακρύνονται δὲ τῆς ὄψεως τοῦ τοίχου τῆς προσόψεως κατὰ $1^{\mu},50$.

Ἡ δὲ εἰς πατώματα διαίρεσις ἐν γένει γίνεται κατὰ τὸν ἀκόλουθον κανόνα· ἐὰν ἡ οἰκοδομὴ ἔχῃ ἓν μόνον πάτωμα, διαιρεῖται τὸ ὅλον ὕψος αὐτῆς εἰς 12 μέρη· λαμβάνονται ἐξ αὐτῶν 7 διὰ τὸ πρόσγειον, καὶ 5 διὰ τὸ πρῶτον πάτωμα. Ἐὰν ἡ οἰκοδομὴ ἔχῃ δύο πατώματα, διαιρεῖται τὸ ὅλον ὕψος εἰς 16 μέρη· ἐξ αὐτῶν λαμβάνονται 7 διὰ τὸ πρόσγειον, 5 διὰ τὸ πρῶτον πάτωμα καὶ 4 διὰ τὸ δεύτερον. Ἐλαττοῦται μὲν βαθμηδὸν τὸ ὕψος τῶν πατωμάτων, καθόσον αὐτὰ ἀνυψοῦνται· μένει ὅμως πάντοτε ἀνώτερον τοῦ ἀριθμοῦ $2^{\mu},60$.

Ὁ κ. *Mandar* ὁρίζει τὰ ἀκόλουθα ὕψη.

Διὰ τὰ	ὑπόγεια.	Ὕψος ἀπὸ	$2^{\mu},27$	ἕως $2^{\mu},92$.
»	πρόσγεια.	» »	3,25	» 4,22 καὶ 5,20.
Μεταξὺ προσγείου καὶ ἀ πατώματος			2,27	» 2,60·
ἀ. πάτωμα	. . . . .		3,25	» 3,90 καὶ 5,85
β'. »	. . . . .		2,92	» 3,90
γ'. »	. . . . .		2,60	» 2,92
δ'. »	. . . . .		2,27	» 2,60.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι τὰ ὕψη 2,27 πρέπει νὰ περιορίζωνται εἰς $2^{\mu}60$, συμφώνως πρὸς τὰς διοικητικὰς διατάξεις.

Ὁ αὐτὸς συγγραφεὺς ὥρισε τὴν ἀναγκαίαν ἐπιφάνειαν τῶν διαφόρων μερῶν διαιτήματος, μικροῦ, μεσαίου ἢ μεγάλου ὡς ὑποδεικνύει ὁ ἑξῆς πίναξ.

ΠΙΝΑΞ.

Μέρη.	Διαίτημα. Μικρόν.	Μέσον.	Μέγα.
Θάλαμοι ὑποδοχῆς.	μ.τ. 15,19 ἕως 22,79	μ.τ. 34,19 ἕως 45,58	μ.τ. 56,98 ἕως 79,77
Αἴθουσαι.	13,30 » 18,99	28,49 » 37,99	45,58 » 68,38
Κοιτῶνες.	11,40 » 15,20	24,69 » 30,39	37,99 » 56,98
Τὸ ὑπὸ τῆς κλίμακος κατεχόμενον διάστημα.	9,50 » 13,30	18,99 » 24,69	30,39 » 45,58
Προθάλαμοι καὶ πρόδομοι.	7,60 » 11,40	15,20 » 18,99	24,69 » 37,99
Σπουδαστήρια.	5,70 » 7,60	11,40 » 15,20	18,99 » 30,39

Αἱ διαστάσεις τῶν ἑστιῶν, αἵτινες ἦσαν ἄλλοτε ὀγκωδέστατοι, ἡμέραν παρ'ἡμέραν ἐλαττοῦνται ἕνεκα τῆς ἐπωφελοῦς προσκολλήσεως ἐπ'αὐτὰς φαθεντιανῶν πλακῶν. Ἐκ τούτων αἱ μὲν ἔχουσιν $0^{\mu},80$ πλάτος ἐπὶ $0^{\mu},80$ ὕψος, αἱ δὲ μεγαλείτεραι $1^{\mu},95$ πλάτος ἐπὶ $1^{\mu},30$ ὕψος. Τὸ πλάτος τῆς πινακίδος μεταβάλλεται ἀπὸ $0^{\mu},27$ ἕως $0^{\mu},43$· τὸ δὲ βάθος τῆς ἑστίας ἀπὸ $0^{\mu},45$ ἕως $0^{\mu},80$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 128. Ὑποβρύχιος χωροστάθμησις ἢ βολιδοσκόπησις. Ἡ ἐργασία αὕτη σκοπὸν ἔχει τὴν ἀποπεράτωσιν τῶν ὑδρογραφικῶν χαρτῶν (Ἐφαρμ. 57. Μέρος Α'), καὶ προσδιορίζει τὸ ἔκτυπον τοῦ πυθμένος τῆς θαλάσσης πλησίον τῶν ἀκτῶν. Πραγματοποιεῖται δὲ διὰ τῆς βολίδος. Ἡ βολὶς σύγκειται ἐκ χορδῆς στερεᾶς ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς ὁποίας κρέμαται μικρὰ μάζα μολύβδου εἰς σχῆμα κώνου. Ὁ κῶνος οὗτος πρὸς τὰ κάτω φέρει κοίλωμα εἰς ὃ τίθεται ἄλειμμα. Ἡ χορδὴ εἶναι βαθμολογημένη εἰς ὀργυιὰς καὶ πόδας· ἡ ὀργυιὰ ἀποτελεῖ 5 πόδας ἢ $1^{\mu},624$. Ὅταν ῥίψωμεν τὴν βολίδα εἰς ὡρισμένον σημεῖον, τὸ μῆκος τοῦ ἐμβαπτιζομένου μέρους τῆς χορδῆς προσδιορίζει τὸ βάθος τοῦ πυθμένος ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης· διὰ δὲ τῶν προσκεκολλημένων τεμαχίων εἰς τὸ ἄλειμμα εὑρίσκομεν τὴν φύσιν τοῦ πυθμένος ἂν ἦναι βραχώδης, ἰλυώδης ἢ ἀμμώδης. Ἐὰν ὁ πυθμὴν ἦναι ἰλυώδης ἢ ἀμμώδης, καὶ θέλωμεν νὰ γνωρίσωμεν τὴν φύσιν τοῦ πραγματικοῦ πυθμένος, τοῦ κάτωθεν εὑρισκομένου, μεταχειριζόμεθα τὴν λογχοβολίδα. Αὕτη δὲ εἶναι ῥάβδος σιδηρᾶ ἀπολήγουσα εἰς αἰχμὴν καὶ ἐναρμοζομένη, κατὰ τὸ μέσον, εἰς μάζαν μολύβδου. Τὸ βάρος τοῦ μολύβδου συντελεῖ ἵνα ἡ αἰχμὴ διαπεράσῃ τὴν ἐλαφρὰν γῆν τοῦ πυθμένος καὶ φθάσῃ τὸν σκληρὸν πυθμένα· πλαγίως δὲ φέρει ἐγκοπὰς, πεπληρωμένας ἀλείμματος, ἐντὸς τῶν ὁποίων προσκολλῶνται τὰ συστατικὰ μέρη τοῦ πρώτου διαπερωμένου ἐδάφους· ἐὰν τὸ δεύτερον ἔδαφος ἦναι βραχῶδες, τότε τὸ ἄλειμμα λαμβάνει τοὺς τύπους τῶν βράχων. Εἰς ἑκάστην βολιδοσκόπησιν εἶναι ἀνάγκη νὰ σημειώσωμεν τὴν ὥραν, καθ'ἣν αὕτη γίνεται ὅπως λάβωμεν ὑπ'ὄψιν τὸ εἰς τὴν αὐτὴν ὥραν σύστοιχον ὕψος τῆς θαλάσσης, τὸ ἐκ τῆς πλημμυρίδος ἢ τῆς ἀμπώτιδος προερχόμενον. Ταυτοχρόνως δὲ καταμετροῦμεν διὰ τοῦ γωνιομέτρου, συνήθως δὲ διὰ τοῦ ἐκτημορίου, τοῦ ἐν τῇ ναυτικῇ χρησίμου, τὰς σχηματιζομένας γωνίας ὑπὸ τῶν ὀπτικῶν ἀκτίνων τῶν ἀγομένων εἰς τρία σημεῖα τῆς παραλίας τὰ ἤδη σημειωθέντα ἐπὶ τοῦ χάρτου· ἢ καταμετροῦμεν διὰ τοῦ γραφομέτρου τὰς σχηματιζομένας γωνίας ὑπὸ

τῆς διευθύνσεως δύο ἐπὶ τῆς παραλίας κειμένων σημείων καὶ ὑπὸ τῶν ὀπτικῶν ἀκτίνων τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῶν σημείων τούτων πρὸς τὸ σημεῖον τῆς βολίδος. Αἱ γωνίαι αὗται προσδιορίζουσι τὴν θέσιν τοῦ πλοιαρίου καθ' ἣν στιγμὴν γίνεται ἡ βολιδοσκόπησις. Τὰς βολιδοσκοπήσεις συνήθως ποιοῦμεν ἀκολουθοῦντες σύστημά τι γραμμῶν· ἐκ τούτων αἱ μὲν ἀναχωροῦσιν ἀποκλίνουσαι ἐξ ἑνὸς κεντρικοῦ σημείου πρὸς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς παραλίας, αἱ δὲ, ἀπεναντίας εἶναι παράλληλοι, κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον, τῆς γραμμῆς τῆς παραλίας. Αὐξάνομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν βολιδοσκοπήσεων καθ' ὅσον πλησιάζομεν εἰς τὴν παραλίαν καὶ εἰς τὰ κινδυνώδη μέρη, τῶν ὁποίων ὁ προσδιορισμὸς εἶναι ἀναπόφευκτος εἰς τὴν ἀκτοπλοΐαν. Οὕτως, ἀφ' οὗ ἐπὶ τοῦ χάρτου προσδιορίσωμεν τὰς θέσεις τῆς βολίδος, εἰς ἑκάστην τούτων γράφομεν τὸν ἀριθμὸν, τὸν δεικνύοντα τὸ βάθος τοῦ πυθμένος.

Εἰς τοὺς πλείστους λιμένας τῆς Εὐρώπης ὑπάρχει κλίμαξ τῆς παλιρροίας, δι' ἧς προσδιορίζεται τὸ ὕψος τῆς θαλάσσης ἄνω τοῦ κατὰ μέσον ὅρον ὕψους τῶν ὑδάτων. Δι' ὃ ἐν καιρῷ τῆς βολιδοσκοπήσεως σημειοῦται ἡ ὥρα, ἵνα διὰ τῆς τοιαύτης κλίμακος προσδιορισθῇ, κατὰ τὴν αὐτὴν ὥραν, τὸ ἀντίστοιχον ὕψος τῆς θαλάσσης ἄνω τοῦ κατὰ μέσον ὅρον ὕψους αὐτῆς, καὶ μετὰ ταῦτα, ἄνω τοῦ χαμηλοτέρου ὕψους.

Ἡ προηγουμένη μέθοδος ἀναφέρεται εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὰ ὕδατα ἔχουσι σημαντικὸν βάθος καὶ ὕψος μεταβλητόν. Ἐὰν ὅμως τὰ ὕδατα ὦσι στάσιμα, τότε λαμβάνεται τὸ βάθος αὐτῶν ὡς πρὸς τὴν ἰσοσταθμίαν των, ἥτις ὑποτίθεται γνωστή.

Ἐν περιπτώσει καθ' ἣν τὰ ὕδατά εἰσι βατὰ, εἷς συνεργάτης τότε εἰσέρχεται εἰς αὐτὰ καὶ βολιδοσκοπεῖ δι' ἑνὸς ὑδρομετρίου ἢ βαθομετρίου, ὅπερ εἶναι ῥάβδος διηρημένη εἰς μέτρα ἑκατοστὰ καὶ χιλιοστά. Διὰ τριγώνων προσδιορίζονται αἱ ὑπὸ τοῦ ὑδρομετρίου κατεχόμεναι θέσεις, ὡς πρὸς δύο γνωστὰ σημεῖα τῆς παραλίας.

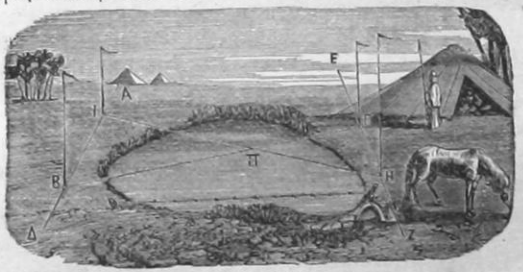
Ἐν περιπτώσει δὲ, καθ' ἣν δὲν ὑπάρχει πρόχειρον ἐργαλεῖον διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν γωνιῶν, τότε γίνεται χρῆσις τῆς ἀκολούθου μεθόδου τῶν εὐθυγραμμιῶν.

Ἔστωσαν γνωστὰ σημεῖα τὰ, Α, Δ, Ζ, Γ, καὶ Ι, (Σχ. 146). Ἐκ δύο συνεργατῶν ὁ μὲν πρῶτος ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α, προχωρεῖ ἐπὶ τῆς διευθύνσεως ΑΔ, καὶ ἵσταται εἰς τὸ Β, καθ' ἣν στιγμὴν φθάσῃ ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΠΓ τοῦ εἰς τὸ σημεῖον Π εὑρισκομένου πλοιαρίου καὶ τοῦ γνωστοῦ σημείου Γ. Τούτου γενομένου, ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μετρεῖ-

ται ἡ ἀπόστασις ΑΒ, καὶ χαράσσεται ἐπὶ τοῦ χάρτου ἡ προβολὴ τῆς διευθύνσεως ΒΓ. Ἔπειτα, ὁ δεύτερος συνεργάτης καθ' ὃν χρόνον προχωρεῖ ἐπὶ τῆς διευθύνσεως ΖΓ ἵσταται εἰς τὸ Η, καθ' ἣν στιγμὴν φθάσῃ ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΠΙ. Ἡ εὐθεῖα ΠΗ, μεταφερομένη ἐπὶ τοῦ χάρτου, προσδιορίζει διὰ τῆς συναπαντήσεώς της μετὰ τῆς ΓΒ, τὴν θέσιν Π τοῦ ὑδρομετρίου, καὶ ἐπομένως τὸ σημεῖον εἰς ὃ σημειοῦται τὸ βάθος.

Ἡ αὐτὴ πρᾶξις ἐπαναλαμβάνεται καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην θέσιν τοῦ ὑδρομετρίου.

Ὅταν ὅμως ἡ ἐπιφάνεια τῶν πρὸς βολιδοσκόπησιν ὑδάτων ἦναι μικρᾶς ἐκτάσεως, τότε τανύομεν ἀπὸ τῆς μιᾶς εἰς τὴν ἄλλην ὄχθην, χορδὴν κατὰ γνωστὰς διευθύνσεις. Ἡ χορδὴ δυνατὸν νὰ ἦναι βαθμο-



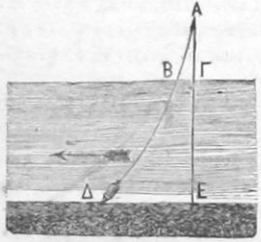
Σχ. 146.

λογημένη, καὶ τότε ῥίπτομεν τὴν βολίδα ἐξ ἑκάστης διαιρέσεως τῆς χορδῆς. Διὰ τοῦ μέσου τούτου, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐντελῆ ἰδέαν τῶν ἀνωμαλιῶν τοῦ ὑποβρυχίου γηπέδου (Σχ. 146).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 126. Ἡ ὑποβρύχιος χωροστάθμησις εἶναι ἀναπόφευκτος εἰς τοὺς ποταμοὺς, ὅπως γνωρίσωμεν τὰ διαβατὰ μέρη αὐτῶν (τοὺς πόρους). Ταῦτα δὲ χρησιμεύουσιν εἰς τὴν διάβασιν τῶν στρατευμάτων, καὶ ὅτε διὰ μὲν τὸ πεζικὸν, τὸ βάθος δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ 1^{μ}, διὰ δὲ τὸ ἱππικὸν, $1^{\mu},3$ καὶ διὰ τὴν διάβασιν τῶν πολεμοφοδίων $0^{\mu},80$. Ἡ ὑποβρύχιος χωροστάθμησις χρησιμεύει πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς χωρητικότητος τῶν ποταμῶν καὶ τὴν γεφύρωσιν αὐτῶν, κτλ.

Ἐν ᾧ βολιδοσκοποῦμεν ποταμόντινα, τὸ ῥεῦμα συνήθως παρασύρει τὴν βολίδα ἀπὸ τῆς κατακορύφου διευθύνσεως ΑΕ (Σχ. 147), πρὸς

τὴν ΑΔ, τούτου ἕνεκα λαμβάνοντες ὡς μέτρον τὸ μῆκος τῆς χορδῆς, εὑρίσκομεν βάθος μεγαλείτερον τοῦ πραγματικοῦ. Ἂν π.χ. Α ἦναι ἡ ἄκρα τῆς χορδῆς, τὴν ὁποίαν κρατοῦμεν, καὶ ΒΓ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος, ἠθέλομεν λάβει ὡς ὕψος τοῦ ὕδατος τὴν ΑΔ, μεῖον τοῦ διαστήματος ΑΒ τῆς χειρὸς, μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, ἐνῷ τὸ πραγματικὸν βάθος εἶναι (ΑΕ—ΑΓ).



Σχ. 147.

Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν τούτου καταμετροῦμεν τὸ μέρος ΑΒ τῆς χορδῆς, ὅπερ εἶναι ἐκτὸς τοῦ ὕδατος, μετροῦμεν ἐπίσης τὴν ΑΓ, ἥτις εἶναι τὸ ὕψωμα τῆς χειρὸς ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ποταμοῦ, καὶ διὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\text{ΑΒ} : \text{ΑΓ} = \text{ΑΔ} : \text{ΑΕ},$$

ἐξ ἧς προκύπτει $$\text{ΑΕ} = \frac{\text{ΑΓ} \times \text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}.$$

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει εἰς τοὺς ναύτας ὅταν διὰ τῆς βολίδος πλησιάζωσιν πρὸς τὴν ξηρὰν, ἐπειδὴ ἡ κίνησις τότε τοῦ πλοίου παρεκτρέπει τὴν βολίδα τῆς κατακορύφου γραμμῆς καὶ τὴν ὁποίαν μετροῦσιν ὡς προηγουμένως.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 127. Σχῆμα τῆς γῆς. α΄). Ἐφ' οἱουδήποτε μέρους ἐλευθέρου τῆς γῆς καὶ ἂν σταθῶμεν, ὁ ὁρίζων φαίνεται πάντοτε κυκλικὸς, καὶ ὅσον ὑψηλότερον εἶναι τὸ μέρος, ἔνθα ἱστάμενοι παρατηροῦμεν, τόσον μεγαλείτερος φαίνεται ὁ ὁρίζων. Ἐὰν ἡ γῆ ἦτο πολύεδρόν τι σῶμα, ὁ ὁρίζων ἤθελε φανῆ γωνιώδης ὑπὸ διάφορα σχήματα καὶ οὐδόλως ἐπεκτεινόμενος. Ἀλλ' ἐπειδὴ τοιοῦτόν τι δὲν συμβαίνει, ἕπεται ὅτι ἡ γῆ καθ' ὅλα αὐτῆς τὰ μέρη εἶναι σφαιροειδής. β΄.) Ἐν παραλίᾳ τινὶ εὑρισκόμενοι καὶ πλοτόν τι μακρόθεν καταπλέον παρατηροῦντες, διακρίνομεν πρῶτον τὴν κορυφὴν τῶν ἱστῶν αὐτοῦ, ἔπειτα δὲ βαθμηδὸν τὰ κάτω μέρη καθ' ὅσον τὸ πλοῖον προσέρχεται, καὶ ἐπὶ τέλους τὸ σκάφος. Τοῦ δὲ ἐκπλέοντος πλοίου πρῶτον μὲν τὸ σκάφος αὐτοῦ ἀφανίζεται ἀφ' ἡμῶν, ἔπειτα δὲ τὰ ἄνω αὐτοῦ μέρη, καθ' ὅσον τοῦτο ἀπομακρύνεται. Ἐὰν ἡ τῆς γῆς ἐπιφάνεια ἦτον ἐπίπεδος, ἠθέλομεν ἰδεῖ τὸ μὲν καταπλέον πλοῖον ὁλόκληρον, μάλιστα δὲ τὰ κάτω αὐτοῦ μέρη ὡς παχύτερα, καὶ κατ' ἀρχὰς μὲν πολὺ μικρὸν, βαθμηδὸν δὲ μεγαλείτερον, ἐλαττουμένης τῆς ἀφ' ἡμῶν ἀποστάσεως αὐτοῦ, τὸ ἐναντίον δὲ ἤθελε συμβῆ εἰς τὸ ἐκπλέον πλοῖον. Ἀλλ' ἐπειδὴ τότε μόνον βλέπομεν ὁλόκληρον τὸ πλοῖον, ὅταν φθάσῃ εἰς μέρος θαλάσσης ἐπὶ ὁριζοντείου γραμμῆς κείμενον, ἐφ' ἧς καὶ ὁ ἡμέτερος ὀφθαλμὸς, ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ἀποδώσωμεν τὴν αἰτίαν τῶν φαινομένων τούτων εἰς τὸ σφαιροειδὲς σχῆμα τῆς γῆς. Ἄρα, ἡ γῆ εἶναι σφαιροειδής.

Σχῆμα δὲ τῆς γῆς λέγοντες ἐννοοῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν θαλασσῶν, προεκτεινομένην νοερῶς καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν. Ἡ στερεὰ ἐπιφάνεια, μὲ ὅλας τὰς φαινομένας ἀνωμαλίας της, δὲν ἀπομακρύνεται τῆς ἐπιφανείας τῶν θαλασσῶν κατὰ πολύ· ἐπειδὴ τὸ κατὰ μέσον ὅρον ὕψος τῶν ἠπείρων ἄνω τῶν θαλασσῶν δὲν ὑπερβαίνει τὰ 300 μέτρα, τὰ δὲ ὑψηλότερα ὄρη δὲν ὑπερβαίνουσι 8500^{μ}, τουτέστι δὲν ἔχουσιν ὕψος 2 λευγῶν ἢ μόλις τὸ $\frac{1}{2000}$ τῆς ἀκτῖνος. Τὸ κατὰ μέσον ὅρον βάθος τῶν θαλασσῶν εἶναι ὡς ἔγγιστα 1500 μέτρων, τὸ δὲ μέγιστον αὐτῶν βάθος φθάνει τὸ ὕψος τῶν ὑψηλοτέρων ὀρέων. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς ὑδρογείου σφαίρας καλύπτεται ὑπὸ τῶν ὑδάτων ὑπὲρ τὰ $\frac{2}{3}$. Ἐὰν ἡ γῆ παρασταθῇ ὑπὸ σφαίρας, διάμετρον ἐχούσης ἓν μέτρον, ἐπ' αὐτῆς αἱ ἀνωμαλίαι θέλουσιν ἐκφρασθῆ διὰ 0,7 τοῦ χιλιοστομέτρου.



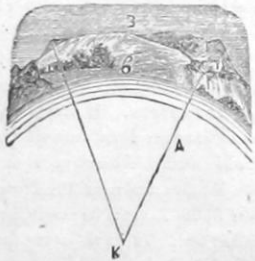
Σχ. 148.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 128. Ἀκτὶς τῆς γῆς. Ἔστω ἡ σφαῖρα ΚΔ ἡ γῆ, καὶ ἐπ' αὐτῆς δύο κατακόρυφα ὕψη Αα καὶ Ββ ἴσα, καὶ εἰς τοιαύτην ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΒ νὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς. Ἐπιζευχθήτωσαν ἡ ΚΔ καὶ ΑΚ, καὶ προεκβληθήτω ἡ ΑΚ μέχρι τοῦ Ε, ὥστε ἡ αΕ νὰ ἦναι διάμετρος τῆς γῆς (Σχ. 148). Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΔ εἶναι ἐφαπτομένη, ἡ δὲ ΑΕ διατέμνουσα, ἔχομεν (Πρότ.64. Μέρ Α΄) τὴν ἀναλογίαν $\text{ΑΕ} : \text{ΑΔ} = \text{ΑΔ} : \text{Αα}$, ἐξ ἧς προκύπτει $\text{ΑΕ} = \frac{\overline{\text{ΑΔ}}^2}{\text{Αα}}$.

Ἀλλὰ, δύο ἀντικείμενα $1^{\mu},5$ ὕψους παύουσι τοῦ νὰ ἦναι ὁρατὰ εἰς ἀπόστασιν δύο λευγῶν ἐκ 4444 μέτρων ἑκάστης· λοιπὸν, ἔχομεν ΑΒ=2 λεύγας, ὅταν $\text{Αα} = 1^{\mu},50$· καὶ διὰ τὰς τιμὰς ταύτας ὁ προηγούμενος τύπος δίδει ὡς ἀκτῖνα τῆς γῆς

$$\alpha E=\frac{1\,\text{λεύγ.}}{1^{\mu},5}=\frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{1}{4444}}=2962\tfrac{2}{3}\,\text{λεύγ.}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 129. Ἀναγωγὴ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης τῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καταμετρουμένων μεγάλων ἀποστάσεων (Σχ. 149). Ἔστωσαν Β μεγάλη τις ἀπόστασις, ὡς π.χ. ἡ βάσις τριγωνικῆς δικτυώσεως, Θ ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης προβολὴ αὐτῆς, Α ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς, καὶ υ τὸ ὑψόμετρον τῆς βάσεως ἄνω τῆς θαλάσσης.



Σχ. 149.

Ἀλλὰ κατὰ τὴν Πρότ. 5. §. 11, ἔχομεν τὴν ἔκφρασιν,

$$\frac{B}{\Theta}=\frac{A+\upsilon}{A}\ldots\ldots[1],\quad\text{ἐξ ἧς προκύπτει}$$

$$\Theta=\frac{A\times B}{A+\upsilon}\ldots\ldots[2].$$

Ἐπειδὴ δὲ μεταξὺ Α+υ καὶ Α μικρὰ διαφορὰ ὑπάρχει, ἔπεται ὅτι ἡ διὰ τοῦ τύπου [2] προσδιόρισις τοῦ Θ δὲν εἶναι τόσον ἀκριβής. Τούτου ἕνεκα ἡ ἔκφρασις [1] τρέπεται εἰς $\frac{B}{\Theta}=\frac{\upsilon}{A}$, ἐξ ἧς προκύπτει $B-\Theta=\frac{\Theta\times\upsilon}{A}$, εἰς τὴν ὁποίαν εἰσάγοντες τὴν ἀξίαν [2], πορίζόμεθα τὸν τύπον, $B-\Theta=\frac{B\times\upsilon}{A+\upsilon}$.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΠΕΡΙ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΙΝΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.

§.—27.

Ὁρισμὸς τῆς ἐλλείψεως. Χάραξις τῆς ἐλλείψεως διὰ σημείων, ἢ διὰ συνεχοῦς κινήσεως. Ἄξονες. Κορυφαί. Ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες τῆς καμπύλης. Ὁρισμὸς τῆς ἐφαπτομένης οἱασδήποτε καμπύλης. Αἱ ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες, αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἑστιῶν πρός τι σημεῖον τῆς ἐλλείψεως, σχηματίζουσι μετὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, καὶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς γραμμῆς ταύτης, δύο ἴσας γωνίας. Ἀγωγὴ ἐφαπτομένης εἰς τὴν ἔλλειψιν ἐκ τινος σημείου ἐπὶ τῆς καμπύλης ἢ ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου. Κάθετος εἰς τὴν ἔλλειψιν.

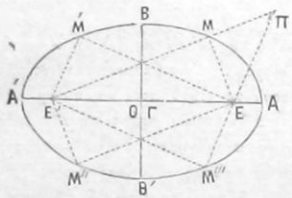
ΟΡΙΣΜΟΣ 1. *Ἔλλειψις* καλεῖται ἡ καμπύλη γραμμή, τῆς ὁποίας τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἑκάστου τῶν σημείων αὐτῆς πρὸς δύο σταθερὰ σημεῖα, εἶναι ἀμετάβλητον.

Ἀπὸ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εὐκόλως ὁδηγούμεθα εἰς τὴν χάραξιν τῆς καμπύλης διὰ σημείων. Πρὸς τοῦτο, ἔστωσαν Ε καὶ Ε' (Σχ. 150), τὰ δύο σταθερὰ σημεῖα, καὶ τὸ σημεῖον Ο, τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΕΕ'. Ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Ο, φέρομεν δύο ἀποστάσεις ΟΑ καὶ ΟΑ' ἴσας τῷ ἡμίσει τῆς ἀμεταβλήτου καὶ τῆς γνωστῆς ποσότητος, τῆς ἐκφραζούσης τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἑκάστου σημείου τῆς καμπύλης, ἀπὸ τῶν σημείων Ε καὶ Ε'. Τούτου γενομένου, σημειωθήτω ἐπὶ τῆς ΑΑ' καὶ μεταξὺ τοῦ Ε καὶ Ε', οἱονδήποτε σημεῖον Γ, ἐκ δὲ τῶν σημείων Ε καὶ Ε' ὡς ἀπὸ κέντρων μὲ ἀκτῖνα ΑΓ καὶ Α'Γ γράφομεν δύο τόξα κύκλου, τὰ ὁποῖα συναπαντώμενα προσδιορίζουσι τὸ σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὴν ἔλλειψιν.

Τῷ ὄντι· α.) Τὰ δύο τόξα τέμνονται, ἐπειδὴ ἀφ' ἑνὸς μὲν ἔχομεν ΑΓ + Α'Γ > ΕΕ', ἤτοι *τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων εἶναι μεγαλείτερον τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων*. Ἀφ' ἑτέρου δὲ, Α'Γ − ΑΓ = Ε'Γ − ΕΓ, ἐπειδὴ ΑΕ = Α'Ε', ὡς ἐκ κατασκευῆς· ἀλλὰ, Ε'Γ − ΕΓ < ΕΤ + ΕΓ· λοιπόν, *ἡ διαφορὰ τῶν ἀκτίνων μικροτέρα ἐστὶ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων*. Ἄρα, *τὰ τόξα τέμνονται*.

6′.) Τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὴν ἔλλειψιν· ἐπειδή, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΜΕ καὶ ΜΕ′, θέλομεν ἔχει ΜΕ = ΑΓ, ΜΕ′ = ΑΓ· ἄρα, ΜΕ + ΜΕ′ = ΑΓ + ΑΓ = ΑΑ′ = ἀμεταβλήτῳ ποσότητι.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἐκ τῶν σημείων Ε καὶ Ε′ ὡς ἀπὸ κέντρων καὶ μὲ ἀκτῖνα ΑΓ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τέσσαρα τόξα συναπαντώμενα εἰς τὰ σημεῖα Μ, Μ′, Μ″ καὶ Μ‴, ὑπὸ τῶν τεσσάρων τόξων τῶν γραφομένων ἀπὸ τῶν αὐτῶν κέντρων Ε καὶ Ε′ μὲ ἀκτῖνα Α′Γ. Τὰ τέσσαρα ταῦτα σημεῖα ἀνήκουσιν εἰς τὴν ἔλλειψιν καὶ κεῖνται συμμετρικῶς ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΑ′, καὶ τὴν κάθετον ΒΒ′, τὴν ἀγομένην ἐπὶ τῆς ΑΑ′ ἐκ τοῦ σημείου Ο, τουτέστι τὰ σημεῖα ταῦτα ἀνὰ δύο λαμβανόμενα ἰσάκις ἀπέχουσι τῶν εὐθειῶν ΑΑ′ καὶ ΒΒ′.



Σχ. 150.

Διὰ νὰ χαράξωμεν δὲ τὴν καμπύλην διὰ συνεχοῦς κινήσεως, λαμβάνομεν χορδὴν ἔχουσαν μῆκος ΑΑ′, καὶ προσαρμόζομεν τὰ ἄκρα αὐτῆς πρὸς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ε′, τανύοντες ἔπειτα τὴν χορδὴν διὰ τῆς αἰχμῆς μολυβδοκονδύλου ἢ πασαλίσκου Μ, κινοῦμεν αὐτόν. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ΜΕ καὶ ΜΕ′ μένει πάντοτε ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς χορδῆς, ἤτοι πρὸς ΑΑ′, ἔπεται ὅτι ἡ αἰχμὴ Μ θέλει περιγράψει τὴν ἔλλειψιν.

Τοιουτοτρόπως χαράσσεται ἡ ἔλλειψις ὑπὸ τῶν τεχνητῶν μὲν, ἐπὶ σανίδος, ὑπὸ τῶν κηπουρῶν δὲ, ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὅταν τὸ σημεῖον Π εὑρίσκηται ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν σημείων Ε καὶ Ε′ εἶναι μεγαλείτερον τῆς εὐθείας ΑΑ′.

Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν ΠΕ καὶ ΠΕ′, καὶ ἔστω Μ τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ ΠΕ′ συναπαντᾷ τὴν καμπύλην. Ἄγομεν τὴν ΜΕ, καὶ ἔχομεν ΜΕ < ΠΜ + ΠΕ. Προσθέτοντες εἰς ἕκαστον μέλος τῆς ἀνισότητης ταύτης τὴν ἀπόστασιν ΜΕ′, ἔχομεν

ΜΕ + ΜΕ′ < ΠΜ + ΜΕ′ + ΠΕ ἢ < ΠΕ′ + ΠΕ.

Ἀλλά, ΜΕ + ΜΕ′ = ΑΑ′· ἄρα, ΑΑ′ < ΠΕ′ + ΠΕ.

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἡ ἔλλειψις ἔχει τὸ σχῆμα τὸ ὑπὸ τοῦ (Σχ. 150) δεικνυόμενον. Αὕτη δὲ εἶναι ἐπὶ τοσοῦτον ἐπιμήκης, ἐφ' ὅσον ἡ ἀπόστασις ΑΑ′ ὑπερβαίνει τὴν ἀπόστασιν ΕΕ′.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Τὸ σημεῖον Ο καλεῖται *κέντρον* τῆς ἐλλείψεως, ἡ εὐθεῖα ΑΑ′ *μεγας ἄξων* καὶ ἡ ΒΒ′ *μικρὸς ἄξων*. Τὰ σημεῖα Α, Α′, Β, καὶ Β′, εἶναι αἱ *κορυφαὶ*, τὰ δὲ σημεῖα Ε καὶ Ε′ καλοῦνται *ἑστίαι*. Αἱ μεταβλητὰι ἀποστάσεις ΜΕ καὶ ΜΕ′ εἶναι αἱ *ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες* τοῦ μεταβλητοῦ σημείου Μ. Ἡ ἀπόστασις ΕΕ′ καλεῖται ἀπόστασις τῶν ἑστιῶν καὶ παρίσταται διά 2γ. Ὅθεν, ἡ ἔλλειψις ἐκφωνεῖται καὶ οὕτως· *εἰς τὴν ἔλλειψιν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιβατικῶν ἀκτίνων εἶναι ἴσον τῷ μεγάλῳ ἄξονι.*

Ἐὰν καλέσωμεν α τὸν ἡμίμεγαν ἄξονα, β τὸν ἡμίμικρον ἄξονα, καὶ γ τὴν ἡμιαπόστασιν τῶν ἑστιῶν Ε καὶ Ε′ (Σχ. 150), ἔπεται ὅτι, ἐπειδὴ ἡ κορυφὴ Β ἰσάκις ἀπέχει τῶν ἑστιῶν, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐπιβατικῶν ἀκτίνων τῆς κορυφῆς ταύτης ἰσοῦται μὲ 2α, ἡ ἀπόστασις ΒΕ ἰσοῦται τῷ α. Λοιπὸν, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΟΕ, δίδει τὴν σχέσιν

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2, \quad \text{ἐξ ἧς προκύπτει} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}.$$

Προσδιορίζεται δὲ ἡ ἔλλειψις ἐὰν ὦσι γνωστοὶ οἱ δύο ἄξονες αὐτῆς ΑΑ′ καὶ ΒΒ′· ἐπειδὴ αἱ ἑστίαι αὐτῆς προσδιορίζονται ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Β, ὡς ἀπὸ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα α γράψωμεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸν ἄξονα ΑΑ′ εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Ε′, τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ ἑστίαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3. *Ἐκκεντρικότης τῆς ἐλλείψεως* καλεῖται ὁ λόγος τῆς ἀποστάσεως ΕΕ′ τῶν ἑστιῶν πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα ΑΑ′, ἤτοι ὁ λόγος τοῦ γ πρὸς τὸ α.

Τὸ σχῆμα τῆς ἐλλείψεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐκκεντρικότητος αὐτῆς. Τῆς ἐκκεντρικότητος μηδενιζομένης μὲν, αἱ δύο ἑστίαι συγχωνεύονται πρὸς τὸ κέντρον καὶ ἡ ἔλλειψις γίνεται κύκλος. Γενομένης δὲ ἐλαχίστης, αἱ ἑστίαι συμπλησιάζουσιν, οἱ ἄξονες ἐπὶ μᾶλλον ἐξισοῦνται πρὸς ἀλλήλους, καὶ ἡ καμπύλη ὀλίγον διαφέρει τῆς περιφερείας κύκλου. Τοιοῦτόν τι συμβαίνει εἰς τὰς τροχιὰς τῶν πλανητῶν. Ἐφ' ὅσον ἡ ἐκκεντρικότης αὐξάνει, ἡ διαφορὰ τῶν ἀξόνων ἐπίσης αὐξάνει, ἡ καμπύλη συμπιέζεται ἐπὶ μᾶλλον, καὶ τείνει πρὸς τὸν μέγαν αὐτῆς ἄξονα ὅταν ἡ ἐκκεντρικότης ἐξισωθῇ πρὸς τὴν μονάδα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 150. Τροχιὰ τῆς γῆς. Ὁ δρόμος τὸν ὁποῖον διατρέχει περὶ τὸν ἥλιον ἐκ δυσμῶν πρὸς ἀνατολὰς τὸ κέντρον τῆς γῆς κατὰ τὴν διάρκειαν ἑνὸς ἔτους, ἤτοι ἐντὸς τριακοσίων ἑξήκοντα πέντε ἡμερῶν περίπου, εἶναι ἔλλειψις, ἥτις καλεῖται τροχιὰ τῆς γῆς. Ἡ μία τῶν ἑστιῶν τῆς ἐλλείψεως ταύτης κατέχεται ὑπὸ τοῦ ἡλίου. Τὰ μεταξὺ τῶν κορυφῶν διαστήματα τῆς ἐκτεταμένης ταύτης ἐλλείψεως ἐκφράζουσι τὴν διάρκειαν τῶν τεσσάρων ἐποχῶν τοῦ ἔτους. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς γῆς ἀπόστασις τοῦ ἡλίου εἶναι μεταβλητή. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς μεγαλειτέρας καὶ τῆς μικροτέρας ἀποστάσεως εἶναι ὡς ἔγγιστα ἑκατὸν ἕνδεκα χιλιάδων λευγῶν.

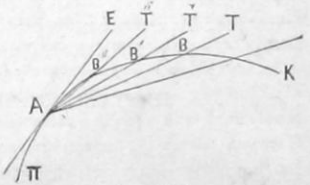
Ὁ ἡμίμεγας ἄξων τῆς τροχιᾶς τῆς γῆς εἶναι ὡς ἔγγιστα 153493000 χιλιομέτρων, ὁ δὲ ἡμίμικρος ἄξων 153454000 χιλιομέτρων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.

Ἡ ἔλλειψις εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονάς της, καὶ διαιρεῖται ὑπ' αὐτῶν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἐὰν ἀγάγωμεν τὰς εὐθείας Μ′Ε, Μ′Ε′, Μ″Ε καὶ Μ″Ε′, τὰ τρίγωνα ΜΕΕ′ καὶ Μ″ΕΕ′ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς τρεῖς πλευρὰς των ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἐὰν λοιπὸν διπλώσωμεν τὸ σχῆμα κατὰ τὴν ΑΑ′, τὸ τρίγωνον Μ″ΕΕ′ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΜΕΕ′, τὸ δὲ σημεῖον Μ″ ἐπὶ τοῦ Μ. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ ἔλλειψις διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ μεγάλου αὐτῆς ἄξονος ΑΑ′. Ἀφ' ἑτέρου τὰ τρίγωνα ΜΕΕ′ καὶ Μ′Ε′Ε εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουσι τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἐὰν λοιπὸν διπλώσωμεν τὸ σχῆμα κατὰ τὴν ΒΒ′, τὸ σημεῖον Ε′ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Ε, ἐπειδὴ αἱ εἰς τὸ Ο γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ, καὶ Ε′Ο=ΕΟ, ἡ δὲ εὐθεῖα Ε′Μ′ θέλει λάβει τὴν τῆς ΜΕ διεύθυνσιν, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν Μ′Ε′Ε καὶ ΜΕΕ′· καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὰ προλεχθέντα Μ′Ε′=ΜΕ, τὸ σημεῖον Μ′ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Μ. Ἀοιπὸν, ἡ ἔλλειψις διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ μικροῦ ἄξονός της. Ἄρα, *οἱ δύο ἄξονες διαιροῦσι τὴν ἔλλειψιν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 4. Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Α καμπύλης τινος ΠΚ (Σχ. 151), φέρωμεν τὴν τέμνουσαν ΑΒΤ, καὶ στρέψωμεν αὐτὴν περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο οὕτως, ὥστε, καθ' ὅσον αὕτη λαμβάνει τὰς διαδοχικὰς θέσεις ΑΒ′Τ′, ΑΒ″Τ″, κτλ. τὸ δεύτερον σημεῖον τῆς διατομῆς Β νὰ πλησιάζῃ ἐπὶ μᾶλλον τὸ Α, ἡ δὲ τέμνουσα νὰ τείνῃ πρὸς ἀμεταβλητόν τινα θέσιν ΑΕ, τότε τὸ ὅριον τῶν θέσεων τῆς τεμνούσης ταύτης καλεῖται *ἐφαπτομένη* τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Α.



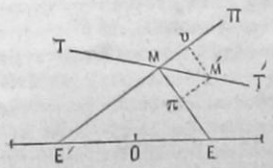
Σχ. 151.

Ὅταν ἡ τέμνουσα φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν ΑΕ, τότε τὰ δύο σημεῖα τῆς τομῆς συγχωνεύονται εἰς ἓν καὶ μόνον τὸ Α.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.

Ἡ ἐφαπτομένη εἰς σημεῖόν τι Μ τῆς ἐλλείψεως διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν σχηματιζομένην γωνίαν ΠΜΕ ὑπὸ μιᾶς τῶν ἐπιβατικῶν ἀκτίνων ΜΕ τοῦ σημείου τούτου καὶ τῆς προεκβολῆς ΜΠ τῆς ἑτέρας ἀκτῖνος (Σχ. 152).

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν τὰς ἴσας ἀποστάσεις Μπ καὶ Μυ ἐπὶ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ΜΕ, καὶ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΜΕ′, ἐκ δὲ τῶν σημείων Ε καὶ Ε′, ὡς ἀπὸ κέντρων μὲ ἀκτῖνα Επ καὶ Ε′υ, γράφομεν δύο τόξα, τεμνόμενα εἰς σημεῖόν τι Μ′. Τὸ σημεῖον Μ′ ἀνήκει εἰς τὴν ἔλλειψιν· ἐπειδὴ αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῶν σημείων Ε καὶ Ε′ εἶναι Επ καὶ Ε′υ ἢ ΜΕ − Μπ καὶ ΜΕ′ + Μυ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ ΜΕ + ΜΕ′. Ἡ εὐθεῖα ΜΜ′ εἶναι λοιπὸν τέμνουσα. Ἀλλὰ, ἐὰν πληθῶσιν αἱ ἀποστάσεις Μπ καὶ Μυ ἐπὶ μᾶλλον μικρότεραι, τὸ σημεῖον Μ′ θὰ πλησιάζῃ ἀδιακόπως πρὸς τὸ σημεῖον Μ, ἤ, κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν, ἡ τέμνουσα θὰ τείνῃ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, τὰ δὲ τόξα Μ′π καὶ Μ′υ θὰ τείνωσιν ἐπὶ μᾶλλον πρὸς τὰς εὐθείας τὰς καθέτους ἐπὶ τῆς ΜΕ καὶ ΜΕ′.



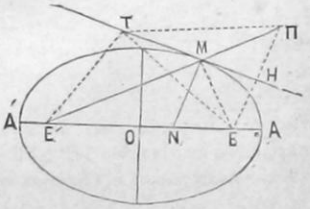
Σχ. 152.

Τὰ τρίγωνα ΜπΜ′ καὶ ΜυΜ′, εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν ὑποτείνουσαν ΜΜ′ κοινὴν, καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, Μπ=Μυ· λοιπὸν, αἱ γωνίαι Μ′Μπ καὶ Μ′Μυ εἶναι ἴσαι. Ἄρα, ἡ ἐφαπτομένη διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν σχηματιζομένην γωνίαν ΠΜΕ, κτλ. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς τὴν ἔλλειψιν ἔκ τινος σημείου ἐπὶ τῆς καμπύλης ἢ ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου.

Λύσις. Διὰ νὰ ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην εἰς τὴν ἔλλειψιν ἔκ τινος σημείου Μ τῆς καμπύλης (Σχ.153), φέρομεν τὰς ἐπιβατικὰς ἀκτῖνας ΜΕ καὶ ΜΕ′, προεκτείνομεν τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα ΜΕ′ κατὰ ποσότητα ΜΠ ἴσην τῇ ἐπιβατικῇ ἀκτῖνι ΜΕ, ἐπιζευγνύομεν τὴν ΠΕ, καὶ ἐπ' αὐτῆς καταβιβάζομεν, ἐκ τοῦ σημείου Μ, τὴν κάθετον ΜΗ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη· ἐπειδὴ αὕτη διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΠΜΕ (Προτ. 2).



Σχ. 153.

Διὰ νὰ ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην εἰς τὴν ἔλλειψιν ἀπὸ τοῦ σημείου Τ ἐκτὸς τῆς καμπύλης κειμένου (Σχ.153), ἐκ τοῦ σημείου Τ ὡς ἀπὸ κέντρου μὲ ἀκτῖνα ΤΕ γράφομεν τόξον, τέμνον εἰς τὸ σημεῖον Π τὸ γραφόμενον τόξον ἐκ τοῦ σημείου Ε′, ὡς ἀπὸ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῷ μεγάλῳ ἄξονι ΑΑ′, καὶ ἄγομεν τὴν ΠΕ, ἐπὶ τῆς ὁποίας, ἐκ τοῦ σημείου Τ, καταβιβάζομεν κάθετον τὴν ΤΗ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. Προσδιορίζομεν δὲ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς φέροντες τὴν ΗΕ′, ἥτις ἀπαντᾷ τὴν καμπύλην εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ. Ἐὰν ἡ καμπύλη δὲν ἦναι κεχαραγμένη, τότε τὸ σημεῖον Μ τῆς ἐπαφῆς θέλει εἶναι τὸ σημεῖον τῆς συναπαντήσεως τῶν εὐθειῶν ΠΕ′ καὶ ΤΗ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΤΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΕ, καὶ αἱ ἀποστάσεις ΠΤ καὶ ΤΕ εἶναι ἴσαι ἐκ κατασκευῆς, αἱ

πλάγιαι αὗται ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, καὶ ἔχομεν ΠΗ=ΗΕ. Λοιπὸν, ΜΠ=ΜΕ, ὡς πλάγιαι ἰσάκις ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ΜΗ.

Ἀλλὰ Ε′Μ + ΜΠ=ΑΑ′· ἄρα, Ε′Μ + ΜΕ=ΑΑ′, ἤτοι τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὴν ἔλλειψιν. Πρὸς δὲ τούτοις τὰ τρίγωνα ΠΜΗ καὶ ΕΜΗ ἐπειδὴ εἶναι ἴσα, αἱ γωνίαι ΠΜΗ καὶ ΕΜΗ εἶναι ἴσαι, καὶ ἡ εὐθεῖα ΜΗ διαιρεῖ τὴν γωνίαν ΠΜΕ εἰς δύο ἴσα μέρη. Λοιπὸν, ἡ ΜΗ ἢ ΤΗ εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Ἐναπολείπεται ἤδη νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι, τὰ δύο τόξα τὰ ὁποῖα προσδιορίζουσι τὸ σημεῖον Π τέμνονται· τοῦτο δὲ συμβαίνει ὅταν ἡ ἀπόστασις ΤΕ′ τῶν κέντρων ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων ΤΕ καὶ ΑΑ′, μεγαλειτέρα δὲ τῆς διαφορᾶς των.

Ἵνα δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει πάντοτε ἡ ἀνισότης

$$\text{ΤΕ}' < \text{ΤΕ} + \text{ΑΑ}',$$

παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΕΤΕ′ ἔχομεν τὴν ἀνισότητα ΤΕ′<ΤΕ + ΕΕ′, ἥτις ὑπάρχει καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ΕΕ′ διὰ τῆς μεγαλειτέρας ποσότητος ΑΑ′. Ἀποδεικνύομεν δὲ ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων, ἐὰν καταδείξωμεν τὴν ὕπαρξιν τῶν ἀνισοτήτων ΤΕ′>ΤΕ − ΑΑ′ καὶ ΤΕ′>ΑΑ′ − ΤΕ, καθ' ἣν περίπτωσιν ἡ ΤΕ εἶναι μεγαλειτέρα ἢ μικροτέρα τῆς ΑΑ′.

Καὶ ἡ μὲν πρώτη τῶν ἀνισοτήτων τούτων εἶναι προφανὴς, ἐὰν ἡ ΤΕ′ ἦναι μεγαλειτέρα τῆς ΤΕ, ἐν ἐναντίᾳ δὲ περιπτώσει, τρέπεται εἰς τὴν ἐξῆς αὐτόδηλον ἀνισότητα ΑΑ′>ΤΕ—ΤΕ′· ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΕΤΕ′ ἔχομεν τὴν ἀνισότητα

$$\text{ΕΕ}' > \text{ΤΕ} - \text{ΤΕ}',$$

ἥτις ὑπάρχει καὶ ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ΕΕ′ διὰ τῆς μεγαλειτέρας ποσότητος ΑΑ′. Ἡ δὲ δευτέρα τῶν ἀνισοτήτων ΤΕ′>ΑΑ′ − ΤΕ γράφεται καὶ οὕτω ΤΕ′ + ΤΕ>ΑΑ′· ἀλλ' ἡ ἀνισότης αὕτη ὑπάρχει πάντοτε ἐὰν τὸ σημεῖον Τ κῆται ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως. Ἄρα, τὰ δύο τόξα τέμνονται.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι, τὰ δύο ταῦτα τόξα ἐπειδὴ συναπαντῶνται εἰς δύο σημεῖα, τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο λύσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθετος καμπύλης* τινὸς καλεῖται ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἀγομένη εὐθεῖα καθέτως ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Εἰς τὴν ἔλλειψιν, ἡ κάθετος ΜΝ *διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ τῶν δύο ἐπιβατικῶν ἀκτίνων* ΜΕ *καὶ* ΜΕ′ *σχηματιζομένην* (Σχ. 153).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΠΜΗ καὶ ΕΜΗ εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία Ε′ΜΤ εἶναι ἴση τῇ ΕΜΗ. Ἀλλὰ ΝΜΤ=ΝΜΗ, ὡς ὀρθαὶ γωνίαι· ἄρα,

$$\text{ΝΜΤ} - \text{Ε′ΜΤ} = \text{ΝΜΗ} - \text{ΕΜΗ} \text{ ἢ } \text{ΝΜΕ′} = \text{ΝΜΕ}.$$

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Μῆκος ἐλλειπτικοῦ τόξου ἢ τῆς ἐλλείψεως. Τὸ μῆκος τῆς ἐλλείψεως ἢ ἐλλειπτικοῦ τινος τόξου ὑπὸ οὐδεμιᾶς κατασκευῆς τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας δίδεται ἀκριβῶς· πρὸς καταμέτρησιν δὲ τούτου καταφεύγομεν εἰς μηχανικὰ ὅλως μέσα ὡς π.χ. περιελίσσομεν τὴν καμπύλην διὰ νήματος, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος μετροῦμεν ἀνελίσσοντες αὐτό. Πρὸς τούτοις δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἔλλειψιν ἢ τὸ ἐλλειπτικὸν τόξον ὡς συνιστάμενον ἐξ ἐλαχίστων εὐθειῶν γραμμῶν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα, ὡς ἔγγιστα, ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος αὐτῆς, ἢ μὲ τὸ τοῦ τόξου τῆς ἐλλείψεως (Ἐφαρμ. 90. Μέρ. Α′).

Καλοῦντες μ τὸ μῆκος τῆς ἡμιελλείψεως, τῆς ὁποίας α καὶ β εἶναι ὁ ἡμίμεγας καὶ ὁ ἡμίμικρος ἄξων, ἔχομεν κατὰ τὸν ὁλοκληρωτικὸν ὑπολογισμόν, τὸν τύπον

$$\mu = \pi\alpha\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\varepsilon\right)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\varepsilon^2\right)^2 - \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^3\right)^2 - \ldots\ldots\right],$$

εἰς τὸν ὁποῖον $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$, καὶ ἡ ἡμιεκκεντρικότης εἶναι $\gamma = \sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, ἐκπεφρασμένη διὰ τοῦ α καὶ β.

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον τοῦτον α=β=Α, τουτέστιν ὅταν ἡ ἡμιέλλειψις ἦναι ἡ ἡμιπεριφέρεια, ἔχομεν τὸν τύπον

$$\mu = \pi.\text{Α}.$$

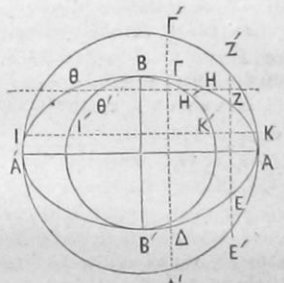
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 41. Διὰ $\alpha = 15^{\mu}$ καὶ $\beta = 10^{\mu}$ ζητεῖται ἡ ἀξία τοῦ μ.

Ἐπιφάνεια τῆς ἐλλείψεως. Καλοῦντες Ε τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἐλλείψεως, ἧς 2α καὶ 2β εἶναι ὁ μέγας καὶ ὁ μικρὸς ἄξων, ἔχομεν τὸν τύπον $\text{Ε} = \pi.\alpha.\beta.$

Διὰ $\alpha = 3^{\mu}$ καὶ $\beta = 2^{\mu}$, εὑρίσκομεν $\text{Ε} = 3{,}1416 \times 3 \times 2$, ἤτοι $\text{Ε} = 18{,}85$ μέτρ. τετραγ.

Ἐπιφάνεια ἐλλειπτικοῦ τμήματος περιλαμβανομένου μεταξὺ δύο χορδῶν παραλλήλων πρὸς τὸν μικρὸν ἄξονα, ἢ πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα.

α.) Γράφομεν κύκλον ἐπὶ τοῦ μεγάλου ἄξονος ΑΑ′ (Σχ. 154), προσδιορίζομεν τὴν ἐπιφάνειαν ε τοῦ κυκλικοῦ τμήματος Γ′Δ′Ε′Ζ′ (Πρότ. 30. Μέρ. Α′), καὶ ἐπὶ τέλους ποριζόμεθα τὴν ἐπιφάνειαν ε τοῦ ἐλλειπτικοῦ τμήματος ΓΔΕΖ ἐκ τῆς ἀναλογίας $\varepsilon : \acute{\varepsilon} = \beta : \alpha$, ἐξ ἧς προκύπτει $\varepsilon = \acute{\varepsilon} \times \frac{\beta}{\alpha}$.



Σχ. 154.

β′.) Ὅταν αἱ χορδαὶ ΘΗ καὶ ΙΚ, αἱ περιορίζουσαι τὸ τμῆμα, ἦναι παράλληλοι πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα, τότε γράφομεν κύκλον ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος ΒΒ′, καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλλειπτικοῦ τμήματος ποριζόμεθα ἐκ τῆς ἀναλογίας ΘΗΙΚ ἢ ε : Θ′Η′Ι′Κ′ ἢ ἐ=α : β, ἐξ ἧς προκύπτει ὁ τύπος $\varepsilon = \acute{\varepsilon} \times \frac{\alpha}{\beta}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς καλεῖται τὸ παραγόμενον στερεὸν ἐκ τῆς περιστροφῆς ἐλλείψεώς τινος περὶ ἕνα τῶν δύο αὐτῆς ἀξόνων.

Ἐπιφάνεια τοῦ ἐλλειψοειδοῦς. Ἵνα προσδιορίσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ἀποσυνθέτομεν τὴν γεννήτριαν ἔλλειψιν εἰς μικρὰς εὐθείας γραμμάς, μετροῦμεν, κατὰ τοὺς ἤδη γνωστοὺς κανόνας, τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ κώνου ἢ τοῦ κολούρου κώνου, τὴν ὁποίαν παράγει ἑκάστη τῶν εὐθειῶν κατὰ τὴν περιστροφικὴν κίνησιν τῆς γεννητρίας ἐλλείψεως, καὶ ἐπὶ τέλους ἀθροίζομεν τὰς ἐπιφανείας ταύτας.

Ὄγκος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς. Ὅταν τὸ ἐλλειψοειδὲς ἦναι οἱονδήποτε, τουτέστιν ὅταν τὸ ἀγόμενον ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου καθέτως ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα 2α προσδιορίζῃ οὐχὶ κύκλον, ἔχοντα

διάμετρον 2β, ὡς τοῦτο συμβαίνει εἰς τὸ ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς, ἀλλὰ ἔλλειψιν, τῆς ὁποίας οἱ ἄξονες εἶναι 2β καὶ 2γ, τότε ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τούτου προσδιορίζεται διὰ τοῦ τύπου

$$O=\tfrac{4}{3}\times\pi.\alpha.\beta.\gamma.$$

Διὰ τὸ ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς, καθ'ὅσον ἡ γεννήτρια ἔλλειψις περιστρέφεται περὶ τὸν μέγαν ἢ μικρὸν ἄξονα, τότε θέτοντες $\alpha=\beta$ ἢ $\gamma=\alpha$ εἰς τὸν προηγούμενον τύπον εὑρίσκομεν διαδοχικῶς

$$O=\tfrac{4}{3}\times\pi.\alpha.\beta^2 \quad \text{ἢ} \quad O=\tfrac{4}{3}\times\pi.\alpha^2.\beta.$$

Καθ' ἣν δὲ περίπτωσιν ἡ γεννήτρια ἔλλειψις εἶναι κύκλος, τότε ἔχομεν $\alpha=\beta=A$, καὶ οἱ προηγούμενοι τύποι τρέπονται εἰς τὸν ἑξῆς·

$$O=\tfrac{4}{3}\times\pi.A^3.$$

Τῳόντι, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ ἐλλειψοειδὲς εἶναι σφαῖρα, ἧς ἡ ἀκτὶς εἶναι Α.

---

§—28.

Ὁρισμὸς τῆς παραβολῆς διὰ τῆς ἑστίας καὶ τῆς διευθυντρίας. Χάραξις τῆς καμπύλης διὰ σημείων ἢ διὰ συνεχοῦς κινήσεως. Ἄξονες. Κορυφαί. Ἐπιβατικὴ ἀκτὶς τῆς παραβολῆς. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὴν παράλληλον τοῦ ἄξονος αὐτῆς καὶ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος, τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς. Ἀγωγὴ ἐφαπτομένης εἰς τὴν παραβολὴν ἔκ τινος σημείου ἐπὶ τῆς καμπύλης ἢ ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου. Κάθετος καὶ ὑποκάθετος. Τὸ τετράγωνον χορδῆς τινος καθέτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος εἶναι ἀνάλογον τῆς ἐκ τῆς κορυφῆς ἀποστάσεως τῆς χορδῆς. Παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. *Παραβολὴ* καλεῖται ἡ καμπύλη, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ ἀποστάσεις ἑκάστου σημείου αὐτῆς, ἔκ τινος ἀμεταβλήτου ὡς πρὸς τὴν θέσιν εὐθείας καὶ ἐκ σταθεροῦ τινος σημείου, εἶναι ἴσαι.

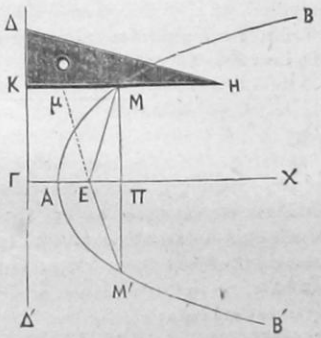
Χάραξις τῆς καμπύλης α.) Ἀπὸ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εὐκόλως ὁδηγούμεθα εἰς τὴν χάραξιν τῆς καμπύλης διὰ σημείων. Πρὸς τοῦτο, ἐκ τοῦ σταθεροῦ σημείου Ε (Σχ.155), καταβιβάζομεν ἐπὶ τῆς ἀμεταβλήτου εὐθείας ΔΔ′, τὴν κάθετον

ΓΧ, καὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΜ′, ἄγομεν παράλληλον τῇ ΔΔ′. Ἐκ τοῦ σημείου Ε ὡς ἀπὸ κέντρου μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ ἀποστάσει ΓΠ, τῶν δύο παραλλήλων ΜΜ′ καὶ ΔΔ′, γράφομεν δύο τόξα κύκλου· τὰ δὲ σημεῖα Μ καὶ Μ′, καθ' ἃ τὰ τόξα ταῦτα τέμνουσι τὴν εὐθεῖαν ΜΜ′, ἀνήκουσιν εἰς τὴν παραβολήν. Ἐπειδή, ἐὰν καταβιβάσωμεν τὴν ΜΚ κάθετον ἐπὶ τῆς ΔΔ′, θέλομεν ἔχει ΜΚ=ΓΠ=ΜΕ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. Τὰ δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ εὑρίσκονται εἰς ἴσην ἐκ τῆς ΓΧ ἀπόστασιν, ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΠΕ καὶ Μ′ΠΕ ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας, ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὴν πλευρὰν ΕΠ κοινήν· ἄρα,

$$\text{ΜΠ}=\text{Μ′Π}.$$

Εὐκόλως δὲ συμπεραίνομεν ὅτι ἡ καμπύλη σύγκειται ἐκ δύο μερῶν συμμετρικῶν πρὸς τὴν ΓΧ, τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζονται διπλουμένου τοῦ σχήματος κατὰ τὸ μῆκος τῆς ΓΧ.



Σχ. 155.

β′.) Ἵνα χαράζωμεν τὴν καμπύλην διὰ συνεχοῦς κινήσεως, ἐφαρμόζομεν κατὰ τὴν ἀμετάβλητον εὐθεῖαν ΔΔ′ τὴν μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ *τριγωνικοῦ κανόνος* ΗΚΔ, λαμβάνομεν χορδὴν ἴσην πρὸς τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΚΗ τοῦ κανόνος, καὶ προσαρμόζομεν τὸ μὲν ἓν αὐτῆς ἄκρον ἐπὶ τοῦ σημείου Η, τὸ δὲ ἕτερον, ἐπὶ τοῦ σημείου Ε. Τούτου γενομένου, διὰ τῆς αἰχμῆς γραφίδος, τανύομεν τὸ νῆμα κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΗΜΕ, ἐπακολουθοῦντες αὐτὴν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΚΗ τοῦ κανόνος, καὶ κινοῦμεν τὸν κανόνα κατὰ τὸ μῆκος τῆς ΔΔ′, κρατοῦντες πάντοτε τὴν χορδὴν τανυομένην καὶ προσηρμοσμένην ἐπὶ τῆς ΚΗ· ἡ δὲ οὕτω διαγραφομένη καμπύλη εἶναι τόξον παραβολῆς. Ἐπειδὴ τὸ μῆκος τοῦ νήματος, ΜΗ + ΜΕ εἶναι ἴσον τῇ ΚΗ, ἕπεται ὅτι ΜΚ=ΜΕ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. Πᾶν σημεῖον μ, ἐκτὸς τῆς παραβολῆς κείμενον, ὀλιγώτερον ἀπέχει τῆς ἀμεταβλήτου εὐθείας ΔΔ′, μᾶλλον δὲ τοῦ σταθεροῦ σημείου Ε. Ἐπειδή, ἐὰν φέρωμεν τὴν μΚ κάθετον ἐπὶ τῆς ΔΔ′, ἥτις συναπαντᾷ τὴν καμπύλην εἰς τὸ σημεῖον Μ, καὶ τὰς εὐθείας μΕ καὶ ΜΕ, θέλομεν ἔχει τὴν ἀνισότητα ΜΕ<μΕ+μΜ ἢ ΜΚ<μΕ+μΜ,
ἐξ ἧς προκύπτει ΜΚ—μΜ<μΕ, ἢ μΚ<μΕ·
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Ἡ ἀμετάβλητος εὐθεῖα ΔΔ′ καλεῖται *διευθύντρια τῆς παραβολῆς*, τὸ δὲ σταθερὸν σημεῖον Ε *ἑστία*. Ἡ ἀπόστασις ΜΕ εἶναι ἡ *ἐπιβατικὴ ἀκτὶς* τοῦ σημείου Μ, ἡ εὐθεῖα ΓΧ, ὁ ἄξων τῆς καμπύλης, τὸ δὲ σημεῖον Α, μέσον τῆς ΓΕ, εἶναι ἡ κορυφή.

Λοιπὸν ἡ παραβολὴ ἐκφωνεῖται καὶ οὕτω· *πᾶν σημεῖον τῆς παραβολῆς ἰσάκις ἀπέχει τῆς ἑστίας καὶ τῆς διευθυντρίας.*

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω γενομένης χαράξεως τῆς παραβολῆς ἕπεται ὅτι, ἡ καμπύλη εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα, καὶ περιορίζεται ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α πρὸς τὸ μέρος τῆς διευθυντρίας. Πρὸς τὸ ἀντίθετον δὲ μέρος ἡ καμπύλη ἐπεκτείνεται ἀδιακόπως, ἀπομακρυνομένη ἐπὶ μᾶλλον τοῦ ἄξονος.

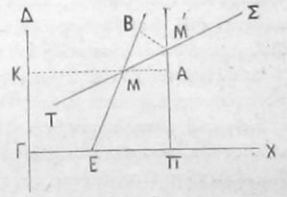
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Ἡ ἐφαπτομένη εἰς σημεῖόν τι Μ τῆς παραβολῆς διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΚΜΕ, *τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ παράλληλος* ΜΚ *τοῦ ἄξονος, καὶ ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς* ΜΕ *τοῦ σημείου* Μ *τῆς ἐπαφῆς* (Σχ. 156).

Κατασκευή. Προεκτείνομεν τὴν ΜΚ κατὰ ποσότητα ΜΑ, καὶ φέρομεν τὴν ΑΠ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Προεκβάλλομεν τὴν ΜΕ κατὰ ποσότητα ΜΒ, ἴσην τῇ ΜΑ, καὶ ἐκ τῆς ἑστίας Ε, ὡς ἀπὸ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα ΒΕ, γράφομεν τόξον κύκλου, τέμνον τὴν ΑΠ εἰς σημεῖόν τι Μ′, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὴν παραβολήν.

Ἀπόδειξις. Τῷ ὄντι, ἀφ′ ἑνὸς μὲν ἡ ἀπὸ τῆς διευθυντρίας ἀπόστασις τοῦ σημείου Μ′ εἶναι ἴση τῇ ΑΚ, ἢ τῇ ΜΚ+ΜΑ,

ἡ δὲ ἀπὸ τῆς ἑστίας ἀπόστασις τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ′ εἶναι ἴση τῇ ΕΒ ἢ τῇ ΜΕ+ΜΒ, ἀφ′ ἑτέρου δὲ αἱ ἀποστάσεις αὗται εἶσιν ἴσαι, διότι ΜΚ=ΜΕ καὶ ΜΑ=ΜΒ· ἄρα, τὸ σημεῖον Μ′ κεῖται ἐπὶ τῆς παραβολῆς.



Σχ. 156.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν αἱ ΜΑ καὶ ΜΒ ληφθῶσιν ἐπὶ μᾶλλον μικρότεραι, τὸ τόξον τοῦ κύκλου Μ′Β ἀδιακόπως θέλει τείνει εἰς τὸ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἐπὶ τῆς ΒΜ κάθετον, καὶ τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΑΜ′ καὶ ΜΒΜ′, ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν ὑποτείνουσαν κοινήν, καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην ΜΑ=ΜΒ, αἱ γωνίαι Μ′ΜΑ καὶ Μ′ΜΒ θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ἡ δὲ τέμνουσα ΜΜ′ θέλει τείνει ἀδιακόπως πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ σημείου Μ τῆς παραβολῆς (Προτ. 1. Ὁρισμός, §. 27). Ἄρα, ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Μ διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΒΜΑ, καὶ ἑπομένως τὴν γωνίαν ΚΜΕ, ἥτις εἶναι ἐκ κορυφῆς ἀντίθετος τῆς πρώτης. *Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς τὴν παραβολὴν ἀπό τινος σημείου Μ *τῆς καμπύλης* (Σχ. 157).

Λύσις. Φέρομεν τὴν ΜΚ παράλληλον τοῦ ἄξονος, ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον Μ μετὰ τῆς ἑστίας, καὶ διαιροῦμεν τὴν γωνίαν ΚΜΕ εἰς δύο ἴσα μέρη, διὰ τῆς εὐθείας ΤΖ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

ΣΧΟΛΙΟΝ 1. Τὸ τρίγωνον ΜΕΤ εἶναι ἰσοσκελές· ἐπειδὴ αἱ μὲν γωνίαι ΚΜΤ καὶ ΜΤΑ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐναλλαξ ἐντός, αἱ δὲ γωνίαι ΚΜΤ καὶ ΤΜΕ ἴσαι, ἐκ κατασκευῆς· λοιπόν, ΜΤΑ=ΤΜΕ· ἄρα, ΤΕ=ΜΕ.

Ἀλλὰ, ΜΕ=ΜΚ=ΓΠ· ὅθεν, ΤΕ=ΓΠ. Ἀφαιροῦντες ΓΕ ἐξ ἑκάστου μέλους τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος ἔχομεν, ΓΤ=ΕΠ· ἀλλὰ, ΓΑ=ΑΕ (Ὁρισμὸς 2),
ἄρα, ΤΓ+ΓΑ=ΕΠ+ΑΕ, ἢ ΑΤ=ΑΠ.

Ἡ *κορυφὴ* Α εἶναι λοιπὸν τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΤΠ, ἥτις *ὑπεφαπτομένη* καλεῖται.

Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι, ἵνα ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς καμπύλης, καταβιβάζομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὴν κάθετον ΜΠ, λαμβάνομεν ΑΤ=ΑΠ, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὴν ΜΤ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

ΣΧΟΛΙΟΝ 2. Ἐὰν ἀγάγωμεν τὴν ΕΚ, ἥτις τέμνει τὴν ΜΤ εἰς σημεῖόν τι Ι, τὰ τρίγωνα ΜΙΚ καὶ ΜΙΕ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουσιν ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην ΙΜΚ=ΙΜΕ, περιλαμβανομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Λοιπόν, αἱ εἰς τὸ Ι γωνίαι εἶναι ὀρθαί, καὶ τὸ σημεῖον Ι εἶναι τὸ μέσον τῆς ΚΕ. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι ἐὰν καταβιβάσωμεν ἐκ τοῦ σημείου Ι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἄξονος, αὕτη θέλει διέλθει ἐκ τῆς κορυφῆς Α, ἥτις εἶναι τὸ μέσον τῆς ΓΕ.

Ἡ εὐθεῖα ΑΙ εἶναι ἡ εἰς τὸ σημεῖον Α ἐφαπτομένη, ἐπειδὴ ὡς ἐκ τῆς συμμετρίας τῆς καμπύλης γίνεται δῆλον ὅτι ἡ ἐπὶ τῆς κορυφῆς ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἄξονος. *Λοιπὸν, ἐὰν καταβιβάσωμεν ἐκ τῆς ἑστίας* Ε *τὴν κάθετον* ΕΙ *ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης* ΜΤ, *ὁ ποὺς* Ι *τῆς καθέτου εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφὴν τῆς καμπύλης.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς τὴν παραβολὴν ἐκ τινος σημείου Ζ *ἐκτὸς τῆς καμπύλης κειμένου* (Σχ.157).

Λύσις. Ἐκ τοῦ σημείου Ζ, ὡς ἀπὸ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ ἀποστάσει ΖΕ, γράφομεν τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν διευθύντριαν εἰς τὸ σημεῖον Κ, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ζ ἐκτὸς τῆς παραβολῆς κείμενον μᾶλλον πλησιάζει πρὸς τὴν διευθύντριαν παρὰ πρὸς τὴν ἑστίαν. Ἔπειτα, ἐπιζευγνύομεν τὴν ΚΕ καὶ καταβιβάζομεν ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἐπὶ τῆς ΚΕ τὴν κάθετον ΖΤ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

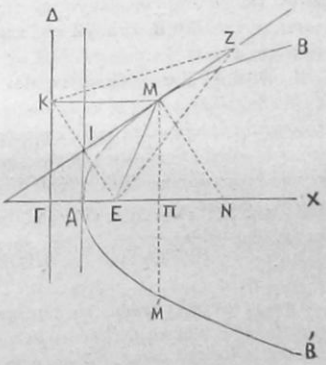
Προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς, φέροντες παραλλήλως τοῦ ἄξονος τὴν ΚΜ, ἥτις θέλει ἀπαντήσει τήν τε καμπύλην καὶ τὴν ἐφαπτομένην ΖΤ εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Μ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ αἱ ἀποστάσεις ΖΚ καὶ ΖΕ εἶναι ἴσαι,

ἐκ κατασκευῆς, ἡ δὲ ΖΤ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΚΕ, τὸ σημεῖον Ι τῆς συναπαντήσεως τῶν εὐθειῶν ΖΤ καὶ ΚΕ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΚΕ· λοιπόν, ΜΚ=ΜΕ, τὸ δὲ σημεῖον τῆς συναπαντήσεως τῆς εὐθείας ΚΜ μετὰ τῆς ΖΤ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καμπύλης. Πρὸς δὲ τούτοις τὰ τρίγωνα ΚΙΜ καὶ ΕΙΜ, ἐπειδὴ εἶναι ἴσα, αἱ γωνίαι ΙΜΚ καὶ ΙΜΕ εἶναι ἴσαι. Ἄρα, ἡ ΜΤ εἶναι ἡ εἰς τὸ σημεῖον Μ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς.

ΣΧΟΛΙΟΝ 3. Τὸ γραφόμενον τόξον ἐκ τοῦ σημείου Ζ, ὡς ἀπὸ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ΖΕ, ἐπειδὴ τέμνει τὴν διευθύντριαν εἰς δύο σημεῖα, τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο λύσεις.

ΣΧΟΛΙΟΝ 4. Ἐὰν ἀγάγωμεν τὴν κάθετον ΜΝ (Σχ. 157), ἡ γωνία ΕΜΝ θέλει εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς ΕΜΤ, ἡ δὲ γωνία ΜΝΕ, τὸ τῆς ΕΤΜ· λοιπόν, αἱ γωνίαι ΕΜΝ καὶ ΜΝΕ εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως (Πρότ. 10 Μέρ. Α') ἔχομεν, ΕΝ=ΕΜ=ΓΠ, καὶ ΕΝ−ΕΠ=ΓΠ−ΕΠ· ἄρα, ΠΝ=ΓΕ.



Σχ. 157.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3. Ἡ ἀπόστασις ΠΝ *ὑποκάθετος* καλεῖται, ἡ δὲ ἀμετάβλητος ἀπόστασις ΓΕ, *ἡμιπαράμετρον*. Ὅθεν, ἡ προαποδειχθεῖσα ἰδιότης ἐκφωνεῖται καὶ οὕτως· *εἰς τὴν παραβολὴν ἡ ὑποκάθετος εἶναι ἀμετάβλητος καὶ ἴση τῷ ἡμιπαραμέτρῳ.*

ΣΧΟΛΙΟΝ 5. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι διὰ νὰ ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς παραβολῆς, φέρομεν τὴν τεταγμένην ΜΠ τοῦ σημείου τούτου, καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος λαμβάνομεν ΠΝ=ΓΕ καὶ ἐπιζευγνύομεν τὴν ΜΝ. Εἰς δὲ τὸ σημεῖον Μ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τῆς ΜΝ τὴν ΤΖ, ἥτις θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Εἰς τὴν παραβολὴν τὸ τετράγωνον τῆς καθέτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος χορδῆς τινος τῆς καμπύλης, εἶναι ἀνάλογον τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀποστάσεως τῆς χορδῆς (Σχ. 157).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΤΜΝ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ σημεῖον Μ, καὶ ἡ ΜΠ κάθετος ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης, ἔχομεν

$$\overline{\text{ΜΠ}}^2 = \text{ΤΠ} \times \text{ΠΝ}.$$

Ἀλλὰ, ΤΠ=2.ΑΠ, ἡ δὲ ΠΝ εἶναι ποσότης ἀμετάβλητος, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ p, καὶ ἔχομεν

$$\overline{\text{ΜΠ}}^2 = 2.\text{ΑΠ} \times \text{p} = 2\text{p}.\text{ΑΠ}.$$

Προεκτείνοντες λοιπὸν τὴν ΜΠ εἰς Μ', ἔχομεν

$$\text{Μ'Π} = \text{ΜΠ}\cdot \text{ὅθεν, } \text{ΜΜ'} = 2.\text{ΜΠ}\cdot$$

ἑπομένως $\overline{\text{ΜΜ'}}^2 = 4.\overline{\text{ΜΠ}}^2 = 8\text{p}.\text{ΑΠ}$ καὶ $\dfrac{\overline{\text{ΜΜ'}}^2}{\text{ΑΠ}} = 8\text{p}.$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως μεταξὺ τῶν ποσοτήτων $\overline{\text{ΜΜ'}}^2$ καὶ ΑΠ εἶναι ἀμετάβλητον, κατὰ τὴν ἀριθμητικήν, ἕπεται ὅτι αἱ ποσότητες αὗται εἰσὶν ἀνάλογοι. *Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Παραβολοειδές. Στρεφομένης τῆς παραβολῆς περὶ τὸν ἑαυτῆς ἄξονα, ἡ οὕτω παραγομένη ἐπιφάνεια εἶναι ἡ τοῦ *παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς*.

---

§.—29.

Θεωρία τοῦ βλήματος· βλητική. Τροχιὰ τῶν ὅπλων καὶ προσδιόρισις αὐτῆς. Σκοποδείκτης ἢ ὑψομέτριον.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 151. Θεωρία τοῦ βλήματος. Ἐν τῇ μηχανικῇ ἀποδεικνύεται ὅτι, τῶν ἐν τῷ κενῷ, τουτέστι μὴ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ ἀέρος, βαλλομένων σωμάτων τὸ κέντρον διαγράφει τὴν παραβολήν, ἥτις τροχιὰ τοῦ σώματος καλεῖται.

Ἡ δὲ πεῖρα διδάσκει ὅτι, ἡ τροχιὰ αὕτη, ὅταν ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τοῦ ἀέρος εὑρίσκωνται τὰ σώματα, εἶναι καμπύλη γραμμὴ, προσομοιάζουσα πρὸς τὴν παραβολήν.

Λοιπὸν, τὸ κέντρον τῆς σφαίρας οἱουδήποτε πυροβόλου ὅπλου, ὅταν ἐξέρχηται τοῦ στομίου τῆς κάννης, τῇ ἐπενεργείᾳ τῆς ἀναπτυσσομένης δυνάμεως ἅμα τῇ ἀναρλέξει τῆς πυρίτιδος, ἐπειδὴ εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος καὶ τῆς βαρύτητος, εἶναι φανερὸν ὅτι θέλει διαγράψει παραβολοειδῆ καμπύλην ΑΕΕ'Τ κειμένην ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος ΑΑ' τοῦ κοίλου τῆς κάννης (Σχ. 158).

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι, διὰ νὰ προσβάλλωμεν σημεῖόν τι, ὅπερ σημεῖον σκοπεύματος καλεῖται, διὰ τῆς βολῆς ὅπλου, ἐν πρώτοις ἀνάγκη ὁ ἄξων τοῦ κοίλου τῆς κάννης τοῦ ὅπλου νὰ κατευθυνθῇ πρὸς τὴν κατακόρυφον τὴν διὰ τοῦ σημείου τοῦ σκοπεύματος διερχομένην. Ἡ συνθήκη δὲ αὕτη ἐκπληροῦται δι' ὀπτικῆς τινος εὐθείας ΣΣ' κατευθυνομένης κατὰ μίαν γεννήτριαν τῆς ἐπιφανείας τῆς κάννης, καὶ ἥτις κεῖται ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τῆς κάννης διερχομένου, ἐπειδὴ ὁ ἄξων ΑΑ', ὅστις καὶ γραμμὴ τοῦ βλήματος καλεῖται, εἶναι νοητή τις γραμμή. Ἡ ὀπτικὴ αὕτη εὐθεῖα καλεῖται σκοπευτικὴ γραμμή.

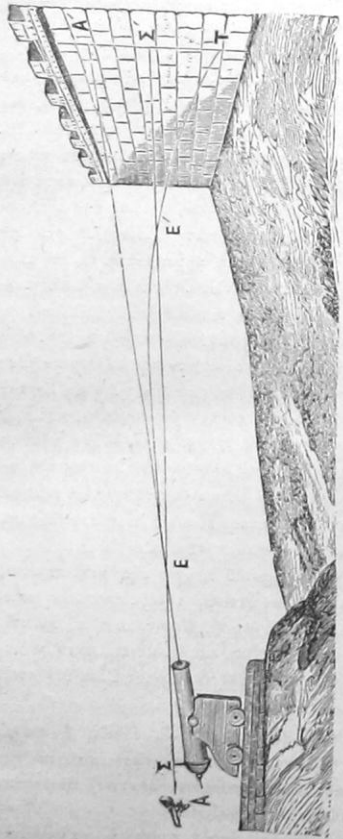
ΟΡΙΣΜΟΙ. Ἡ ὑπὸ τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς καὶ τοῦ ἄξονος σχηματιζομένη γωνία ΣΕΑ=Α'ΕΣ' καλεῖται φυσικὴ σκοπευτικὴ γωνία.

Ἡ κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ βλήματος, σχηματιζομένη γωνία ὑπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ ὁρίζοντος, καλεῖται γωνία τοῦ βλήματος.

Ἐπίπεδον τοῦ βλήματος καλεῖται, τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον, κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ βλήματος, ἐμπεριέχει τὸν ἄξονα τῆς κάννης. Ἡ τροχιὰ δὲ ὁλόκληρος ἐμπεριέχεται εἰς τὸ αὐτὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον. Αὕτη ἀνοῦται μὲν κατὰ πρῶτον μετὰ τοῦ ἄξονος, ἀπομακρύνεται δὲ ἐξ αὐτοῦ ἀκολούθως, καὶ καθ' ὅσον τὸ βλῆμα ἀπομακρύνεται τοῦ στομίου τῆς κάννης.

Ὅταν ἡ σκοπευτικὴ γραμμὴ, ὁριζοντεία οὖσα κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βλήματος, ἡ φυσικὴ σκοπευτικὴ γωνία καὶ ἡ τοῦ βλήματος γωνία εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ὅταν τὸ σχῆμα τῆς κάννης ἦναι κολουροκωνικὸν καὶ ἡ σκοπευτικὴ γραμμὴ διέρχηται διὰ τῆς κορυφῆς ἐξοχῆς τινος, ἥτις στόχαστρον καλεῖται, προσηρτημένης τῷ στόματι τῆς κάννης, τότε ἡ σκοπευτικὴ γραμμὴ ἐνδέχεται νὰ ἦναι παράλληλος τῷ ἄξονι.



Σχ. 158.

Ὅταν τὸ προσβλητόμενον σημεῖον ἦναι ὑψωμένον, ἡ κάννη ἐμπορεῖ νὰ ἴδωμεν τὸν σκοπόν, πρὸ πάντων δὲ ὅταν βάλλωμεν εἰς μεγάλας ἀποστάσεις. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει προσαρτᾶται πλησίον τῆς κωλάθρας τῆς κάννης (πλησίον τῆς πυρειδόχης) μεταλλικὴ πλακὶς ὑψομέτριον ἢ σκοποδείκτης καλουμένη. Αὕτη εἶναι διῃρημένη εἰς βαθμούς· καὶ δυνάμεθα ἀνυψοῦντες τὴν πλακίδα καταχρύσως, νὰ σκοπεύωμεν διὰ τῆς κορυφῆς της, ἥτις σκοπευτικὴ ἔγκοπὴ καλεῖται, καὶ διὰ τοῦ ὑψηλοτέρου σημείου τοῦ στοχάστρου· τοιουτοτρόπως δὲ κατορθοῦμεν νὰ αὐξήσωμεν τεχνικῶς τὴν φυσικὴν σκοπευτικὴν γωνίαν καὶ νὰ διακρίνωμεν τὸν σκοπόν.

Ἡ μεταξὺ τοῦ σκοποδείκτου καὶ τοῦ στοχάστρου ἀπόστασις, καλεῖται φυσικὴ γραμμή.

Ἀμετάβλητος σκοπευτικὴ γραμμὴ καλεῖται ἡ ἀπὸ τῆς ἐντομῆς τῆς κωλάθρας καὶ τῆς κορυφῆς τοῦ στοχάστρου διερχομένη. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει καὶ ἡ σκοπευτικὴ γωνία τοῦ ὅπλου εἶναι ἀμετάβλητος.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς σχετικῆς θέσεως τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς καὶ τῆς τροχιᾶς ἐξαρτᾶται ἡ διατομὴ τῶν γραμμῶν τούτων, ἕπεται ὅτι ἕκαστον εἶδος ὅπλου ἔχει ἰδίαν σκοπευτικὴν γωνίαν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 132. Ἐξετάζοντες τὸ Σχῆμα 158 βλέπομεν ὅτι ἡ σκοπευτικὴ γραμμὴ ΣΣ′ τέμνει τὴν τροχιὰν τοῦ βλήματος κατὰ δύο διάφορα σημεῖα Ε καὶ Ε′. Ἐκ τούτων τὸ μὲν Ε, εἶναι πλησιέστερον εἰς τὸ στόμιον τῆς κάννης, τὸ δὲ Ε′, ἀπότερον. Τὸ δεύτερον σημεῖον Ε′, ἐξ εὐθυωρίας ῥιπὴ καλεῖται, ἡ δὲ ἀπόστασις ἐκ τοῦ στομίου τῆς κάννης, μέχρι τοῦ δευτέρου σημείου τῆς διατομῆς τῆς τροχιᾶς, καλεῖται βολὴ τῆς ἐξ εὐθυωρίας ῥιπῆς.

Ἐκεῖθεν τῆς ἐξ εὐθυωρίας βολῆς ἡ τροχιὰ χαμηλοῦται κάτωθεν τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς· χαμηλοῦται δὲ τοσούτῳ μᾶλλον καθόσον βαθμηδὸν τὸ βλῆμα ἀπομακρύνεται τοῦ στομίου τῆς κάννης. Ἐντεῦθεν τῆς ἐξ εὐθυωρίας βολῆς, καὶ μεταξὺ τῶν δύο σημείων, καθ' ἃ ἡ τροχιὰ τέμνεται ὑπὸ τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς, τὸ βλῆμα ὑψοῦται ἄνωθεν τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς κατὰ βαθμοὺς διαφέροντας, ἀναλόγως τῆς ἀποστάσεως. Ἡ ὕψωσις τοῦ βλήματος πλησίον τῶν σημείων τῆς τομῆς εἶναι ἐλαχίστη· μεγαλειτέρα δὲ κατὰ τὸ μέσον τῆς εὐθείας γραμμῆς τῆς ἑνούσης τὰ δύο ταῦτα σημεῖα.

Ἐκ τοῦ στομίου τῆς κάννης μέχρι τοῦ πρώτου τῆς τομῆς σημείου, τὸ κέντρον τοῦ βλήματος εὑρίσκεται κάτωθεν τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς κατὰ βαθμὸν διαφέροντα ἀναλόγως τῆς ἀποστάσεως τοῦ σκοποῦ· ἀλλ' ὁ βαθμὸς οὗτος εἶναι ἀνεπαίσθητος, καὶ ἑπομένως, κατὰ τὸ μέρος τοῦτο τῆς τροχιᾶς, τὸ βλῆμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐφαπτόμενον τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς.

Ἐξ ἀποστάσεως ἴσης τῇ ἐξ εὐθυωρίας βολῇ, ἐπειδὴ ἡ τροχιὰ ἁπαντᾷ τὴν σκοπευτικὴν γραμμήν, ἕπεται ὅτι, πρὸς ἐπιτυχίαν σημείου εἰς τὴν ἀπόστασιν ταύτην, ἀπαιτεῖται νὰ διευθυνθῇ ἡ σκοπευτικὴ γραμμὴ ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ἰδίου σημείου.

Ἐκεῖθεν τῆς ἐξ εὐθυωρίας βολῆς, ἐπειδὴ ἡ τροχιὰ χαμηλοῦται κάτωθεν τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς, ἕπεται ὅτι, πρὸς ἐπιτυχίαν σημείου κειμένου εἰς ἀπόστασιν μεγαλειτέραν τῆς ἐξ εὐθυωρίας βολῆς, ἀπαιτεῖται νὰ διευθυνθῇ ἡ σκοπευτικὴ γραμμὴ ἄνωθεν τοῦ σημείου

τούτου· ὡς π.χ. εἰς τὸ Σ′ ὅταν πρόκηται νὰ προσβληθῇ τὸ σημεῖον Τ. Ἵνα προσδιορισθῇ δὲ κατὰ πόσον πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἡ διεύθυνσις τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς ὅπως ἐπιτευχθῇ ὁ σκοπός, ἀπαιτεῖται νὰ γνωσθῇ κατὰ πόσον ἡ τροχιὰ χαμηλοῦται κάτωθεν τῆς γραμμῆς ταύτης εἰς ἀπόστασιν εἰς ἣν κεῖται τὸ βληθησόμενον σημεῖον.

Καθόσον ἡ τροχιὰ χαμηλοῦται κάτω τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς, κατὰ τοσοῦτον ἄνωθεν τοῦ πρὸς ἐπιτυχίαν σημείου ἀπαιτεῖται ἡ γραμμὴ αὕτη νὰ κατευθυνθῇ.

Πρὸς ἐπιτυχίαν σημείου κειμένου ἐντεῦθεν τῆς ἐξ εὐθυωρίας βολῆς, καὶ μεταξὺ τῶν δύο διατομῶν, κατὰ τὸ Σχῆμα, ἀπαιτεῖται νὰ κατευθυνθῇ ἡ σκοπευτικὴ γραμμὴ κάτωθεν τοῦ σημείου τούτου, καὶ ἐφ᾽ ἑτέρου τινὸς σημείου καθέτως ἀπέχοντος ἀπ᾽αὐτοῦ κατὰ τοσοῦτον, καθ᾽ὅσον ἡ τροχιὰ ἀπέχει ἀπὸ τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς, εἰς ἣν ἀπόστασιν κεῖται τὸ πρὸς ἐπιτυχίαν σημεῖον.

Πρὸς ἐπιτυχίαν σημείου, ἀπέχοντος ἐκ τοῦ στομίου τῆς κάννης κατ᾽ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν τῆς πρώτης διατομῆς Ε τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς καὶ τῆς τροχιᾶς, πρέπει νὰ κατευθυνθῇ ἡ σκοπευτικὴ γραμμὴ πρὸς αὐτὸ τοῦτο τὸ σημεῖον.

Ἐπὶ τέλους, ἐὰν τὸ πρὸς ἐπιτυχίαν σημεῖον ἦναι πλησιέστερον πρὸς τὸ στόμιον τῆς κάννης ἢ ἡ πρώτη διατομὴ Ε, πρέπει νὰ σκοπεύσῃ τις ἄνωθεν αὐτοῦ, ἵνα ἐπιτύχῃ τοῦ σημείου διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βλήματος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 133. Ἐκ τῆς ἀνακεφαλαιώσεως τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων ἕπεται ὅτι, α) ὁπόταν τὸ σημεῖον τοῦ σκοπεύματος κῆται ἐπὶ μιᾶς τῶν δύο διατομῶν τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς καὶ τῆς τροχιᾶς, πρέπει νὰ σκοπεύῃ τις ἐπ᾽αὐτοῦ τοῦ ἰδίου σημείου.

β′.) Ὁπόταν τὸ σημεῖον τοῦ σκοπεύματος κῆται μεταξὺ τῶν προαναμνησθεισῶν δύο διατομῶν πρέπει νὰ σκοπεύῃ κάτωθεν τοῦ σημείου τούτου.

γ′.) Ὁπόταν τὸ σημεῖον τοῦ σκοπεύματος κῆται ἐκεῖθεν τῆς ἐξ εὐθυωρίας βολῆς, πρέπει νὰ σκοπεύῃ ἄνωθεν τοῦ σημείου τούτου, κατὰ τοσοῦτον περισσότερον καθ᾽ὅσον τὸ σημεῖον ἤθελεν εἶναι πλέον μεμακρυσμένον.

δ′.) Ὁπόταν τὸ σημεῖον τοῦ σκοπεύματος κῆται μεταξὺ τοῦ στομίου τῆς κάννης καὶ τῆς πρώτης διατομῆς, πρέπει νὰ σκοπεύῃ ἄνωθεν τοῦ σημείου τούτου.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι, τὸ πρῶτον σημεῖον Ε τῆς διατομῆς συνήθως πίπτει τόσον πλησίον τῆς κάννης, ὥστε δὲν λαμβάνεται ὑπ᾽ὄψιν ἡ θέσις αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ βλῆμα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 134. Εὐστοχία. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ εὐστοχία τοῦ βλήματος ἀπαιτεῖ τὴν γνῶσιν τῆς τροχιᾶς ἑκάστου ὅπλου, διὰ τὸ αὐτὸ γέμισμα καὶ τὴν αὐτὴν βολήν, ὅπως προσδιορίσωμεν τὸν τρόπον τοῦ διευθύνειν τὸ ὅπλον σχετικῶς ὡς πρὸς τὸν ἐπιτευχθησόμενον σκοπὸν, κατὰ τὴν ἀπόστασιν εἰς ἣν εὑρίσκεται οὗτος ἐκ τοῦ στομίου τῆς κάννης, καὶ ὅπως καταρτίσωμεν τοὺς κανόνας τοῦ βλήματος αὐτοῦ (§. 31. Ἐφαρμ. 149).

Ἡ ἐπιστήμη, ἡ τὴν κίνησιν τῶν βλημάτων πραγματευομένη, δι᾽ἐξισώσεων καὶ μαθηματικῶν τύπων, καὶ ἔχουσα ὑπ᾽ὄψιν τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀέρος, βλητικὴ καλεῖται (*). Καὶ ἡ μὲν θεωρητικὴ προσδιόρισις τῆς τροχιᾶς εἰς τὸν ἀέρα μεγάλας δυσκολίας παρουσιάζει, καθ᾽ὃ ἀποβλέπουσα τὸν ὁλοκληρωτικὸν ὑπολογισμὸν καὶ τὴν λογιστικὴν μηχανικήν· ἡ πρακτικὴ ὅμως εἶναι ὅλως ἁπλουστάτη διὰ τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας γινομένη.

Λαμβάνομεν δὲ ἰδέαν τινὰ τοῦ σκοποῦ τῆς ἐπιστήμης ταύτης, ἐκ τῶν ἑξῆς προβλημάτων, τὰ ὁποῖα αὕτη ἐπιλύει διὰ μαθηματικῶν ὑπολογισμῶν.

α.) Γνωστῆς οὔσης τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος τοῦ βλήματος καὶ τῆς γωνίας τοῦ ῥίμματος, νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἔφιξις τῆς βολῆς τοῦ βλήματος.

β′.) Γνωστῆς οὔσης τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος τοῦ βλήματος καὶ τῆς ἐφίξεως αὐτοῦ, νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία τοῦ ῥίμματος.

γ′.) Γνωστῶν οὐσῶν τῶν διαστάσεων πυροβόλου τινὸς ὅπλου, τοῦ βάρους τοῦ γεμίσματος καὶ τοῦ βλήματος, νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ βλήματος.

δ′.) Γνωστῆς οὔσης τῆς γωνίας τοῦ ῥίμματος ὅπλου τινὸς, νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ διαιρέσεις τοῦ σκοποδείκτου.

(*) *Piobert, Traité d'Artillerie. Didion, traité de Balistique. Persy, cours de Balistique. Poisson, traité de mécanique.* Κοντουμᾶ, ὁπλική.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 135. Τροχιὰ ὅπλου. Διὰ νὰ γνωρίσωμεν ἀκριβῶς τὴν ὑπό τινος βλήματος διαγραφομένην καμπύλην, φροντίζομεν ὅπως διέλθῃ τοῦτο κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἐναερίου δρόμου αὐτοῦ, ἐκ σειρᾶς τινος κατακορύφων διαφραγμάτων ἐκ χάρτου, καταλλήλου ὕψους, καὶ διατεταγμένων κατ' ἴσας ἀποστάσεις, 25 μέτρων ἑκάστης. Σημειοῦμεν πρὸς τοῦτο ἐπὶ ἑκάστου διαφράγματος τὸ σημεῖον τῆς διαβάσεως τῆς ἐπεκτάσεως τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς τοῦ ὅπλου, τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τροχιάν, ἔπειτα βάλλομεν μίαν βολὴν δι' αὐτοῦ καὶ μετροῦμεν διαδοχικῶς ἐπὶ ἑκάστου διαφράγματος τὴν ὕψωσιν ἢ τὴν καταβίβασιν τῶν σημείων τῆς διαβάσεως τῆς τροχιᾶς, σχετικῶς ὡς πρὸς τὰ σημεῖα τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἄπειροι αἱτίαι συμβάλλουσιν, ὥστε, ὅταν βάλλωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ὅπλου καὶ μετὰ τοῦ αὐτοῦ γεμίσματος καὶ τῆς αὐτῆς βολῆς, ἡ διαγραφομένη καμπύλη εἰς ἑκάστην βολὴν νὰ διαφέρῃ, τούτου ἕνεκα, συνήθως, γίνεται χρῆσις τῆς ἀκολούθου μεθόδου διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς μέσης τροχιᾶς ὅπλου τινός.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 136. Μέση τροχιά. Ἡ μέθοδος αὕτη συνίσταται εἰς τὴν προσδιόρισιν σημείων τινῶν τῆς τροχιᾶς τοῦ ὅπλου. Πρὸς τοῦτο δὲ, κατακορύφως τοποθετοῦμεν, κατ' ἴσας ἀποστάσεις 50 μέτρων ἑκάστης, σκοπόν τινα, μέχρι 250 μέτρων. Ἐξ ἑκάστης δὲ ἀποστάσεως βάλλομεν ἀριθμόν τινα βολίδων, τοὐλάχιστον 20, σκοπεύοντες πάντοτε εἰς τὸ κέντρον τοῦ σκοποῦ, καὶ προσδιορίζομεν εἰς ἑκάστην ἀπόστασιν τὸ μέσον σημεῖον τῆς προσκρούσεως, τουτέστι τὸ μέσον τῶν σημείων διὰ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν, κατὰ τὰ ὁποῖα ἡ βολὶς κτυπᾷ τὸν σκοπόν. Τούτου γενομένου, ἐπὶ τοῦ χάρτου γράφομεν ἀπέραντον εὐθεῖαν, ἐπὶ τῆς ὁποίας θεωροῦντες αὐτὴν ὡς ἄξονα τῶν τετμημένων, φέρομεν ἀπό τινος σημείου καὶ διὰ τῆς κλίμακος τὰς ἀποστάσεις 50, 100, 150, 200, 250[μ], ἐξ ὧν ἐβάλομεν. Ἐπὶ ἑκάστου δὲ τῶν οὕτω προσδιορισθέντων σημείων ἐπὶ τῆς ἀπεράντου εὐθείας ἀνυψοῦμεν τετμημένην (Μέρ. Α'. Ἐφαρ. 80), ἐφ' ἧς φέρομεν μὲ κλίμακα 25κις ἢ 50κις μεγαλειτέραν, τὴν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ σκοποῦ καὶ τοῦ μέσου σημείου τῆς προσκρούσεως, ἀντίστοιχον ἀπόστασιν τῇ τετμημένῃ. Τὰ οὕτω προσδιοριζόμενα ὑπὸ τῶν τετμημένων σημεῖα ἑνοῦντες διὰ τόξων οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελέσωσι κανονικὴν καμπύλην, προσδιορίζομεν τὴν μέσην τροχιὰν τοῦ ὅπλου σχετικῶς ὡς πρὸς τὴν ἀπέραντον γραμμὴν τῶν τετμημένων, ἥτις ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι ἡ σκοπευτικὴ γραμμή.

Ὅθεν, τὰ σημεῖα τῆς τομῆς, τῆς οὕτω χαραχθείσης καμπύλης μετὰ τῆς ἀπεράντου εὐθείας, προσδιορίζουσι τὰ δύο σημεῖα τῆς διατομῆς τῆς τροχιᾶς μετὰ τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς τοῦ ὅπλου.

Ἐν τῷ πειράματι τούτῳ, ἡ σκοπευτικὴ γραμμὴ κατευθύνεται ὁριζοντείως, ὅπερ ἐπιτυγχάνεται, ὅταν τὸ σημεῖον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου σκοπεύομεν, εὑρίσκηται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ στόχαστρον τοῦ ὅπλου.

Τοιουτοτρόπως προσδιορίζεται ἡ μέση τροχιὰ τῶν ὅπλων ἐκείνων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ σκοπευτικὴ γωνία εἶναι ἀμετάβλητος καὶ ὅτε ἡ σκοπευτικὴ γραμμὴ διέρχεται ἀπὸ τῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς κωλάθρας ἐντομῆς καὶ τῆς κορυφῆς τοῦ στοχάστρου. Ἐκ τῆς ἀποστάσεως τῶν ἐπὶ τῆς κάννης σταθερῶν τούτων σημείων, καὶ ἐκ τοῦ σχετικοῦ αὐτῶν ὕψους ἐξαρτᾶται τὸ μέγεθος τῆς σκοπευτικῆς γωνίας· οὕτω π.χ. «ἡ σκοπευτικὴ γωνία ἐπὶ τοσοῦτον αὐξάνει, ἐφ' ὅσον ἡ ἀπὸ τῆς ἐντομῆς τῆς κωλάθρας ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τοῦ στοχάστρου ἐλαττοῦται, ἢ ὅπερ ταὐτὸν, καθ' ὅσον ἡ φυσικὴ γραμμὴ ἐλαττοῦται».

Ὅταν ὁ ἄξων τῆς κάννης ὁριζοντείως κρατῆται, ἡ τροχιὰ τῆς βολίδος εὑρίσκεται κάτωθεν τῆς γραμμῆς ταύτης, καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ προηγουμένου πειράματος δίδει χαμηλώματα. Πρὸς προσδιορισμὸν λοιπὸν τοῦ σημείου τῆς ἐξ εὐθυωρίας ῥιπῆς, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, χαράττομεν τὴν σκοπευτικὴν γραμμὴν ἐπὶ τοῦ ἰχνογραφήματος τῆς τροχιᾶς, εἰς τὴν πραγματικὴν αὐτῆς θέσιν· ἡ δὲ τομὴ τῆς γραμμῆς ταύτης μετὰ τῆς καμπύλης δίδει τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ἵνα δὲ προληφθῶσιν, ὅσον τὸ δυνατὸν, εἰς τὸ ῥίμμα αἱ μεγάλαι ἐκκλίσεις, αἱ προερχόμεναι ἐκ τῆς ἀνεπιτηδειότητος τῶν βαλλόντων, οὗτοι κάθηνται ἐπί τινος ἕδρας ἔμπροσθεν τραπέζης· ἐπὶ ταύτης τίθεται εἷς σάκκος πλήρης πιτύρων ἢ χώματος, δυνάμενος νὰ ὑψωθῇ κατὰ βούλησιν· ἔπειτα τοποθετεῖται τὸ κάτω μέρος τῆς κάννης ἐπὶ τοῦ σάκκου οὕτως, ὥστε οἱ βραχίονες καὶ αἱ χεῖρες νὰ λαμβάνωσιν προσφόρως τὰς θέσεις των. Ἐὰν ὁ σκοπευτὴς τοποθετηθῇ οὕτω, θέλει εἶναι εὔκολον εἰς αὐτὸν νὰ κρατήσῃ τὴν μεγαλειτέραν ἀκινησίαν ἐν ᾧ πιέζει τὸ σκάνδαλον, καὶ νὰ διατηρῇ ἐπομένως καλὴν κατεύθυνσιν εἰς τὴν σκοπευτικὴν γραμμήν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 137. Σκοπός. Σημεῖα προσκρούσεως. Διὰ τὴν προσδιόρισιν τῶν σημείων τῆς τροχιᾶς μέχρι 250 μέτρων γίνεται χρῆσις σκοποῦ τινος, ἐκ σανίδων ἐχουσῶν τεσσάρων μέτρων πλευρὰν, εἰς τὸ κέντρον τοῦ ὁποίου ὑπάρχει μικρὸς μέλας κύκλος χρησιμεύων ὡς σημεῖον σκοπεύματος. Διὰ τοῦ κύκλου τούτου διέρχονται

δύο εὐθεῖαι γραμμαί, ἡ μὲν ὁριζόντειος, ἡ δὲ κατακόρυφος, αἵτινες χρησιμεύουσιν ὡς ἄξονες διὰ τὴν προσδιόρισιν τῶν συντεταγμένων τῶν διαφόρων προσκρούσεων τῶν βολίδων.

Ἵνα προσδιορίσωμεν τὸ μέσον σημεῖον τῆς προσκρούσεως, μετροῦμεν τὴν ὕψωσιν ἢ τὸ χαμήλωμα ἑκάστου σημείου προσκρούσεως ἄνωθεν τῆς ὁριζοντείου γραμμῆς, τῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σκοποῦ διερχομένης. Προσθέτομεν πάσας τὰς ὑψώσεις ἀφ' ἑνὸς, καὶ πάντα τὰ χαμηλώματα ἀφ' ἑτέρου· ἔπειτα δὲ ἀφαιροῦντες τὸ δεύτερον ἄθροισμα ἀπὸ τοῦ πρώτου διαιροῦμεν τὴν διαφορὰν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν βληθεισῶν βολῶν.

Εἶναι δὲ φανερὸν (Μέρ. Α'. Ἐφαρμ. 80) ὅτι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ὑψώσεων ἦναι μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν χαμηλωμάτων, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἐκφράζει ὕψωσιν, καὶ πρέπει νὰ ἀχθῇ ἄνωθεν τῆς ὁριζοντείου· τότε παρουσιάζει σημεῖον κείμενον ἔνθεν τῆς ἐξ εὐθυωρίας ῥιπῆς. Ἐὰν ἀπεναντίας τὸ ἄθροισμα τῶν χαμηλωμάτων ἦναι μεγαλείτερον, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως, ἐπειδὴ εἶναι χαμήλωμα, πρέπει νὰ ἀχθῇ κάτωθεν τῆς ὁριζοντείου τῶν ἀξόνων, καὶ τότε ἀνταποκρίνεται εἰς σημεῖον, κείμενον ἐκεῖθεν τῆς ἐξ εὐθυωρίας ῥιπῆς.

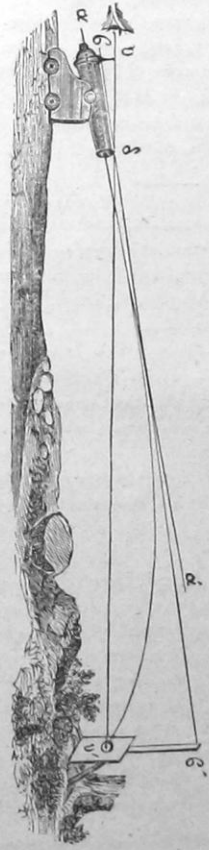
Τὰ αὐτὰ ἐπαναλαμβάνομεν διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ σημείου τῆς προσκρούσεως καὶ ὡς πρὸς τὸν κατακόρυφον ἄξονα, τὸν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ σκοποῦ διερχόμενον.

Ἡ δὲ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν ἐν λόγῳ δύο ἀξόνων ἀπόστασις τοῦ ὡς ἀνωτέρω προσδιοριζομένου σημείου τῆς προσκρούσεως, καλεῖται μέση ἀπόλυτος ἔκκλισις.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 138. Σκοπὸς τοῦ Σκοποδείκτου. Ἀφ' οὗ προσδιορισθῇ ἡ τροχιὰ ὅπλου τινὸς μὲ ἀμετάβλητον σκοπευτικὴν γραμμὴν, καὶ ἐξ αὐτῆς καταρτισθῶσιν οἱ κανόνες τοῦ ῥίμματος, τότε δὲν μένει ἄλλο εἰμὴ νὰ ἐντυπώσωμεν εἰς τὴν μνήμην ἡμῶν τοὺς κανόνας τούτους. Διὰ τούτων ἀμέσως προσδιορίζοντες τὴν ὕψωσιν ἢ τὸ χαμήλωμα τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς, ἄνω ἢ κάτω τοῦ σημείου τοῦ σκοπεύματος, καθ' ὅσον τοῦτο εὑρίσκεται ἐκεῖθεν ἢ ἐντεῦθεν τοῦ σημείου τῆς ἐξ εὐθυωρίας ῥιπῆς, ἐπιτυγχάνομεν τοῦ σημείου τούτου. Οἱ κανόνες ὅμως οὗτοι ὅσον ἁπλοῖ καὶ ἂν φαίνωνται, κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν ἀπαιτοῦσι ἰσχυρὸν μνημονικὸν, διὸ καθίστανται σχεδὸν φανταστικοὶ εἰς τὸν πόλεμον, ἕνεκα τῆς ὀλίγης ἀταραξίας τοῦ στρατιώτου. Τούτου ἕνεκα ἐζητήθη μέσον, διὰ οὗ νὰ δυνάμεθα νὰ σκοπεύωμεν πάντοτε κατ' εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ προσβάλω-

μεν. Ἀλλ' ἡ ἀπόστασις τῆς ἐξ εὐθυωρίας ῥιπῆς μεταβάλλεται μὲ τὴν σκοπευτικὴν γωνίαν. πρὸς ἐπίτευξιν λοιπὸν τοῦ ζητουμένου, ἀρκεῖ νὰ καταρτισθῶσιν νέαι μεταβλητὰι ἡ γωνία αὕτη κατὰ τὸ ὅρκον, καὶ νὰ ὁρισθῶσιν ὅπου γίνεται σκοπευτικὴ γραμμὴ καλυμμένη τελείως, αἱ τιμαὶ τῶν βαστιρῶν αὐτῶν μὲ τὴν τροχιὰν βλήματος ῥιπτομένου ἐξ εὐθυωρίας βολὰς τελικὰς, ὅπως καὶ ἀκτῖνας τοῦ σκοποδείκτου.

Πρακτικὸς προσδιορισμὸς τοῦ σκοποδείκτου. Λίθαι ῥιπτόμενοι ἢ ἄλλα βλήματα ἀμετάβλητα, μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα, ἀκολουθοῦσι τὴν αὐτὴν τροχιὰν, ὅταν ἡ γωνία τῆς ῥιπῆς μένῃ ἡ αὐτή· ἔστω λοιπὸν ἡ τροχιὰ αὕτη ἡ ΟΑ (Σχ. 159).



Σχ. 159.

Θέλομεν ἐπιλέξει ἐπὶ τοῦ ὑποτεθέντος ἤδη ὁρίζοντος, καὶ ἐν ἀποστάσει ἀπὸ τοῦ σκοποῦ, κατὰ τὴν ἀπόστασιν ὁρίζοντος, ἥτις εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν, καθ' ἣν πρέπει νὰ σκοπεύωμεν ἄνωθεν τοῦ σκοποῦ, ἕτερον σημεῖον, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ὁριζοντείου γραμμῆς

τὴν ὁποίαν θέτομεν καθέτως ἐπὶ τῆς κάννης πρὸς τὸ μέρος τῆς πυριτοδόχης, καὶ δι' ἐπανειλημμένων δοκιμῶν κόπτομεν τὴν ῥάβδον ταύτην τόσον, ὥστε ἡ σκοπευτικὴ γραμμὴ υδ′, ἡ διερχομένη ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτῆς καὶ τῆς τοῦ στοχάστρου, νὰ διέρχηται καὶ ἐκ τοῦ σημείου υ′, ἑπομένως ἡ δυ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον ὕψος.

Τούτου τεθέντος, τῆς γωνίας υδδ′ οὔσης ἐπαισθητῶς ὀρθῆς, τὰ δύο τρίγωνα υδδ′ καὶ δ′δύ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὅμοια· ὅθεν, ἐκ τῆς ἀναλογίας τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, προκύπτει

$$\delta\upsilon = \frac{\delta'\upsilon' \times \delta\delta'}{\delta\upsilon'}.$$

Λοιπὸν, τὸ ὕψος τοῦ σκοποδείκτου εἰς χιλιοστόμετρα εἶναι ἴσον τῇ ἀποστάσει τῇ μεταξὺ τῶν δύο σκοπευτικῶν σημείων τῆς κάννης, πολλαπλασιαζομένῃ ἐπὶ τὴν ποσότητα, καθ' ἣν πρέπει νὰ σκοπεύσωμεν ἄνωθεν τοῦ σκοποῦ, καὶ διαιρουμένῃ διὰ τῆς ἀποστάσεως, εἰς ἣν εὑρισκόμεθα ἐξ αὐτοῦ τοῦ ἰδίου σκοποῦ.

Ὁ δὲ σκοποδείκτης εἶναι μεταλλίνη πλακὶς, κινουμένη διὰ προστριβῆς ἐντὸς ὀλκοῦ ἀνορθουμένου πλησίον τῆς πυριτοδόχης.

Ὁ σκοποδείκτης λέγεται ἀρνητικὸς ὅταν ἦναι κανονισμένος διὰ τὰς ἐντεῦθεν τῆς ἐξ εὐθυωρίας ῥιπῆς ἀποστάσεις, καὶ καθ' ἣν περίπτωσιν τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι ἀμετάβλητον.

Διὰ τῶν συνήθων ὅπλων, π. χ. τῶν κυνηγετικῶν, βάλλομεν τὰ ἀντικείμενα ἐκ τῆς ἀποστάσεως τῆς ἐξ εὐθυωρίας βολῆς, ἤτις, δι' ὅλα τὰ ὅπλα, πρέπει νὰ ἐξισοῦται μὲ τὴν ἔφιξιν τοῦ κρισιμωτέρου ἀποτελέσματος τοῦ ὅπλου.

Ἐπὶ τέλους ὑπομιμνήσκομεν ὅτι πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν κανόνων τοῦ βίμματος ὅπλου τινὸς, ἀπαραίτητος εἶναι ἡ ἐκτίμησις τῆς ἀπὸ τοῦ στομίου τῆς κάννης ἀποστάσεως τοῦ προσβληθησομένου ἀντικειμένου. Πρὸς τοῦτο, οἱμὲν στρατιωτικοὶ ἐξασκοῦνται εἰς τὸ νὰ ἀναγνωρίζωσι, διὰ τῆς δυνάμεως τῆς ὁράσεως, καὶ διὰ γνωστὰς ἀποστάσεις ποῖα ἐκ τῶν μερῶν τοῦ ἱματισμοῦ, τῆς ἀποσκευῆς, τοῦ ὅπλου, ἢ τοῦ προσώπου, μᾶλλον διακρίνονται. Οἱ δὲ κυνηγοὶ ὅπως γνωρίσωσιν, ἐὰν τὸ θήραμα αὐτῶν εὑρίσκηται ἐπὶ τοῦ σημείου τῆς ἐξ εὐθυωρίας ῥιπῆς, ἐκ τῶν προτέρων ἐξασκοῦνται εἰς τὸ νὰ ἀναγνωρίζωσιν, ἐκ τῆς ἀποστάσεως ταύτης τὰ μᾶλλον διακρινόμενα σημεῖα ἐπὶ τοῦ θηράματος (ἴδε §. 31).

§.—30.

Ὁρισμὸς τῆς ἕλικος τῆς παραγομένης ἐκ τῆς περιελίξεως ἐπιπέδου ὀρθογωνίου τριγώνου, περὶ τὸν ὀρθὸν κύλινδρον. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἕλικος σχηματίζει μὲ τὴν γεννήτριαν τοῦ κυλίνδρου γωνίαν ἀμετάβλητον.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἕλιξ καλεῖται ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΜΜ′Β (Σχ. 160), τὴν ὁποίαν παράγει ἡ ὑποτείνουσα ΒΗ ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ΒΔΗ, ὅταν, ταυτιζομένης τῆς μιᾶς αὐτοῦ πλευρᾶς ΒΔ τῆς ὀρθῆς γωνίας, μὲ μίαν τῶν γεννητριῶν ὀρθογωνίου τινὸς κυλίνδρου μὲ κυκλικὰς βάσεις, περιελίσσηται τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου περὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην, εἶναι φανερὸν ὅτι, ἡ πλευρὰ ΒΔ μένει ἀκίνητος, καὶ ἡ ΔΗ περιελίσσεται ἅπαξ ἢ πολλάκις περὶ τὴν περιφέρειαν ΟΑ τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ πλευρὰ ΒΗ λαμβάνει τὸ σχῆμα τῆς ἕλικος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9.

Ἡ μεταξὺ ἀπόστασις δύο σημείων Μ *καὶ* Μ′ *τῆς ἕλικος, ἐπὶ τῆς αὐτῆς γεννητρίας τοῦ κυλίνδρου διαδοχικῶς κειμένων, εἶναι ἀμετάβλητος* (Σχ. 160).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἐὰν ἀνελίξωμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου, τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ θέλουσι λάβει ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΗ τὰς θέσεις μ καὶ μ′, αἱ δὲ κάθετοι μπ καὶ μ′π′, ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΔΗ καταβιβαζόμεναι, θέλουσιν εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι πρὸς τὰς ΜΠ καὶ Μ′Π. Ἐὰν λοιπὸν ἀγάγωμεν τὴν μν παράλληλον τῆς ΔΗ, ἡ ἀπόστασις μ′υ, ἡ ἴση τῇ μ′π′—μπ, θέλει εἶναι ἴση τῇ Μ′Π—ΜΠ, ἢ τῇ ΜΜ′.

Πρὸς τούτοις δέ, ἐπειδὴ πρὸ τῆς ἀνελίξεως τὰ δύο σημεῖα π καὶ π′ συνέπιπτον εἰς τὸ σημεῖον Π, ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασις ππ′ ἢ μυ, εἶναι ἴση τῇ περιφερείᾳ τοῦ ἀνελισσομένου κύκλου ΟΑ, τουτέστιν ἴση ἀμεταβλήτῳ ποσότητι.

Ἀλλὰ, τὰ τρίγωνα μυμ′ καὶ ΗΔΒ εἶναι ὅμοια (Πρότ. 52. Μέρ. Α′)· λοιπὸν, ἔχομεν $\frac{\mu'\upsilon}{\beta\delta} = \frac{\mu\upsilon}{\delta\eta}$, ἐξ ἧς προκύπτει,

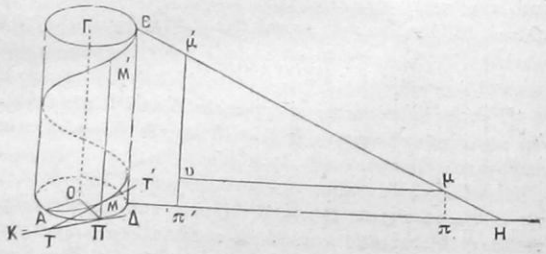
$$\mu'\upsilon \text{ ἢ } \mathrm{MM}' = \mu\upsilon \times \frac{\beta\delta}{\delta\eta} = \text{ἀμεταβλήτῳ ποσότητι.}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. *Ἡ μεταξὺ δύο σημείων τῆς ἕλικος ἀμετάβλητος ἀπόστασις* ΜΜ′, *διαδοχικῶς κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς γεννητρίας τοῦ κυλίνδρου, καλεῖται καμπὴ τῆς ἕλικος.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10.

Ἡ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἀπόστασις ΜΠ *σημείου τινὸς* Μ *τῆς ἕλικος εἶναι ἀνάλογος τοῦ τόξου* ΑΠ, *τοῦ διαχωριζομένου ἐπὶ τῆς βάσεως ταύτης, ὑπὸ τῆς γεννητρίας, τῆς διαβαινούσης ἐκ τοῦ σημείου* Μ, *καὶ ὑπὸ τῆς ἀρχῆς* Α *τῆς ἕλικος, τουτέστιν ὑπὸ τοῦ σημείου, εἰς ὃ ἡ καμπύλη ἀπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως* (Σχ. 160).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ (Πρότ. 10) ΜΠ = μπ καὶ τόξ. ΑΠ = Ηπ, καὶ τὰ τρίγωνα μπΗ καὶ ΒΔΗ εἶναι ὅμοια (Πρότ. 48. Μέρ. Α′), ἔχομεν $\frac{\mu\pi}{\pi H} = \frac{B\Delta}{\Delta H}$. ἄρα, $\frac{M\Pi}{A\Pi} = \frac{B\Delta}{\Delta H}$ = ἀμεταβλήτῳ ποσότητι.



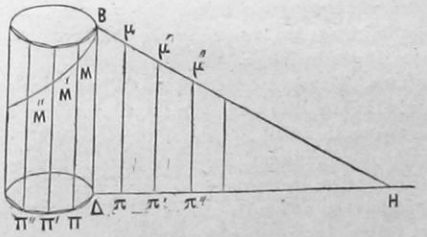
Σχ. 160.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Κατὰ τὴν πρότασιν ταύτην ἔπεται ὅτι ἡ ἀπόστασις ΜΠ ἐπίσης εἶναι ἀνάλογος τῆς γωνίας ΑΟΠ, τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῶν ἀκτίνων ΟΑ καὶ ΟΠ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν εἰς τὴν ἀρχὴν Α τῆς ἕλικος ἀπολήγει, ἡ δὲ εἰς τὸν πόδα Π, τῆς ἐκ τοῦ σημείου Μ διαβαινούσης γεννητρίας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11.

Ἡ σχηματιζομένη γωνία ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἕλικος καὶ τῆς ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἀγομένης γεννητρίας τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἀμετάβλητος (Σχ. 161).

Ἀπόδειξις. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα, τοῦ ὁποίου μία κόψις νὰ ταυτίζηται μὲ τὴν πλευρὰν ΒΔ τοῦ τριγώνου ΒΔΗ, τὸ ὁποῖον παράγει τὴν ἕλικα, καὶ ἔστωσαν ΜΠ, Μ′Π′, Μ″Π″, κτλ., αἱ διαδοχικαὶ κόψεις τοῦ πρίσματος. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΔΗ τὰς ἀποστάσεις Δπ, ππ′, π′π″, κτλ. διαδοχικῶς ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς ΔΠ, ΠΠ′, Π′Π″, κτλ. τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος· καὶ ἐκ τῶν σημείων π, π′, π″, κτλ. ὑψοῦμεν ἐπὶ τῆς ΔΗ τὰς καθέτους πμ, π′μ′, π″μ″, κτλ. Τούτου γενομένου, ἐὰν περιελίξωμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΒΔΗ περὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος, εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ σημεῖα π, π′, π″, κτλ. θέλουσι πέσει διαδοχικῶς ἐπὶ τῶν σημείων Π, Π′, Π″, κτλ. αἱ δὲ εὐθεῖαι πμ, π′μ′, π″μ″, κτλ. θέλουσι λάβει τὴν διεύθυνσιν τῶν εὐθειῶν ΠΜ, Π′Μ′, Π″Μ″, κτλ. καὶ ἡ ὑποτείνουσα ΒΗ τοῦ τριγώνου ΒΔΗ περιελισσο-



Σχ. 161.

μένη, θέλει παράξει τὴν κεκλασμένην γραμμὴν ΒΜΜ′Μ″.... Ὅθεν (Πρότ. 18. Μέρ. Α′), αἱ γωνίαι ΔΒΜ, ΠΜΜ′, Π′Μ′Μ″, κτλ. διαδοχικῶς θέλουσιν εἶσθαι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας ΔΒμ, πμμ′, π′μ′μ″, κτλ. λοιπὸν καὶ μεταξύ των εἶναι ἴσαι, ὡς καὶ πρὸς τὴν γωνίαν ΔΒΗ. Τούτου τεθέντος, ἂν αὐξήσωμεν ἀδιακόπως τὴν πληθὺν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ΔΠΠ′Π″... τῆς βάσεως τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον πρίσματος, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ πολύγωνον τοῦτο θέλει τείνει ἀδιακόπως πρὸς τὸν κύκλον τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος θέλει πλησιάζει ἀδιακόπως πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἡ κεκλασμένη γραμμὴ

ΒΜΜ′Μ′′ . . . θέλει τείνει πρὸς τὴν ἕλικα· αὕτη δὲ παράγεται, περιελισσομένου τοῦ τριγώνου ΒΔΗ περὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλ' ἑκάστη τῶν πλευρῶν τῆς κεκλασμένης γραμμῆς, ἐπειδὴ ἀδιακόπως σχηματίζει μὲ τὴν ἀντίστοιχον κόψιν τοῦ προίσματος γωνίαν ἴσην τῇ γωνίᾳ ΔΒΗ, ἔπεται λοιπὸν ὅτι τὸ διαχωριζόμενον τόξον τῆς ἕλικος ὑπὸ δύο γεννητριῶν τοῦ κυλίνδρου, ἀπειροελαχίστως ἀπ' ἀλλήλων ἀπεχουσῶν, καὶ τὸ ὁποῖον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εὐθεῖα γραμμή, σχηματίζει, μεθ' οἱασδήποτε γεννητρίας τοῦ κυλίνδρου, γωνίαν ἴσην τῇ γωνίᾳ ΔΒΗ.

Ἀλλά, τὸ τόξον καμπύλης τινός, περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο σημείων κατ' ἀπειροελάχιστον ἀπ' ἀλλήλων ἀπεχόντων, ταυτίζηται (Ὁρισμός 4. §.27) μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης, τὴν ἀγομένην ἐξ ἑνὸς τῶν σημείων τούτων· ἄρα, ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἕλικος σχηματίζει μὲ τὴν γεννήτριαν τοῦ κυλίνδρου, τὴν διερχομένην ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, γωνίαν ἀμετάβλητον καὶ ἴσην τῇ γωνίᾳ ΔΒΗ τοῦ γεννήτορος τριγώνου· *ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ὅταν τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ κατ' ἀπειροελάχιστον ἀπ' ἀλλήλων ἀπέχωσιν, ἐπίσης κατὰ τοσοῦτον ἀπέχουσι καὶ τὰ σημεῖα Π καὶ Π′, καὶ ἐνῷ τὸ τόξον ΜΜ′ τείνει νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἕλικος, ὁμοίως καὶ τὸ τόξον ΠΠ′ τείνει νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου· αἱ δὲ εὐθεῖαι ΜΜ′ καὶ ΠΠ′ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν παραλλήλων γεννητριῶν ΜΠ καὶ Μ′Π′. Ἄρα, ἤτε ἐφαπτομένη τῆς ἕλικος εἰς δεδομένον τι σημεῖον τῆς καμπύλης, καὶ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ ποδὸς τῆς γεννητρίας τῆς διαβαινούσης ἀπὸ τοῦ δεδομένου σημείου, ἀμφότεραι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς τὴν ἕλικα ἐκ τινος σημείου Μ *ἐπὶ τῆς καμπύλης κειμένου* (Σχ.160).

Λύσις. Ἄγομεν τὴν γεννήτριαν ΜΠ καὶ τὴν ἐφαπτομένην ΠΚ εἰς τὸν κύκλον ΑΟ τῆς βάσεως, καὶ φέρομεν ἐπὶ τοῦ

ἐπιπέδου ΜΠΚ τὴν εὐθεῖαν ΜΤ, σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΜΠ γωνίαν ἴσην τῇ γωνίᾳ ΔΒΗ. Ἡ εὐθεῖα ΜΤ, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὰ τρίγωνα ΤΠΜ καὶ Ηπμ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ εἶναι ὀρθογώνια, καὶ ἔχουσι τὴν μὲν πλευρὰν ΜΠ=μπ, τὴν δὲ γωνίαν ΠΜΤ=πμΗ=ΔΒΗ. Ὅθεν καὶ ΤΠ=Ηπ=ΑΠ. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην εἰς τὴν ἕλικα ἔκ τινος σημείου Μ τῆς καμπύλης καὶ ὡς ἑξῆς·

Φέρομεν τὴν γεννήτριαν ΜΠ καὶ τὴν ἐφαπτομένην ΠΚ εἰς τὴν κυκλικὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου. Ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ταύτης λαμβάνομεν τὸ μῆκος ΤΠ ἴσον τῇ εὐθύνσει τοῦ τόξου ΑΠ, τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τοῦ σημείου Π καὶ τῆς ἀρχῆς Α τῆς ἕλικος, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὴν ΜΤ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

---

§.—31.

Ἐκτίμησις τῶν ἀποστάσεων διὰ βηματισμοῦ, διὰ τῆς διαρκείας τοῦ χρόνου, διὰ τοῦ ἤχου, διὰ τῆς ὁράσεως, διὰ τοῦ ναυτομέτρου καὶ διὰ τῆς στρατιωτικῆς σταδίας. Ἐκτίμησις τῶν ἀποστάσεων ὑπὸ τῶν στρατιωτικῶν καὶ τῶν κυνηγῶν. Κανόνες τοῦ βήματος. Μέτρησις ἀπροσίτων ὑψῶν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 139. Ἡ διὰ βηματισμοῦ καταμέτρησις. Αὕτη σκοπὸν ἔχει τὴν διὰ βημάτων καταμέτρησιν τῶν ἀποστάσεων. Κατ' αὐτὴν ἀπαιτεῖται ἵνα ὁ μετρῶν κανονίζῃ τὸ βῆμα αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα τοῦ μήκους. Κατορθοῖ δὲ τοῦτο ἀπαριθμῶν, δεκάκις καὶ παλινδρομικῶς, τὸν ἀριθμὸν τῶν βημάτων καὶ τοῦ κλάσματος αὐτῶν, τὰ ὁποῖα ἐμπεριέχονται εἰς ἀπόστασιν 100 μέτρων, ἐκ τῶν προτέρων, διὰ τῆς ἁλύσου ἢ τῆς ταινίας καταμετρηθεῖσαν, καὶ λαμβάνει τὸν μέσον ὅρον τῶν ἀπαριθμήσεων. Τὸ μῆκος τοῦ βήματος μεταβάλλεται ἀπὸ $0^{\mu},75$ ἕως $0^{\mu},77$ καὶ $0^{\mu},80$. Τοῦ μὲν πρώτου ἀριθμοῦ χρῆσις γίνεται ἐν Γερμανίᾳ, τοῦ δευτέρου ἐν Ἑλλάδι, τοῦ δὲ τρίτου ἀριθμοῦ ἐν Γαλλίᾳ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 140. Ὁ βηματιστὴς, ἢ τὸ βηματομέτριον. Ἔχων τις τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο ἐν τῷ θυλακίῳ του δύναται δι' αὐτοῦ

νὰ προσδιορίσῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν βημάτων, τὰ ὁποῖα ἐκτελεῖ, ἐντὸς οἱουδήποτε χρονικοῦ διαστήματος χωρὶς ποσῶς νὰ φροντίσῃ διὰ τὴν ἀπαρίθμησιν τῶν βημάτων. Τὸ μετάλλινον τοῦτο ἐργαλεῖον ἔχει τὸ μέγεθος καὶ τὸ σχῆμα συνήθους ὡρολογίου. Ὁ μηχανισμὸς αὐτοῦ συνίσταται εἰς ἕνα μοχλόν, ὅστις ταλαντεύεται περὶ τὸ ἄκρον του, τὸ ὁποῖον διαπερᾶται ὑπὸ ὁριζοντείου ἄξονος, ὅταν τὸ ἐργαλεῖον, κρατούμενον ἐκ τῆς κρικοτῆς λαβῖδός του, ἦναι κατακόρυφον. Εἰς δὲ τὸ ἕτερον ἄκρον τοῦ μοχλοῦ ὑπάρχει καθηλωμένη τοξοειδὴς μεταλλίνη πλακίς. Διὰ τῆς πλακίδος ταύτης ὁ μοχλὸς εὑρίσκεται ἐν στατικῇ ἰσορροπίᾳ, ἐν ᾧ τὸ κάτω μέρος τοῦ ἑτέρου ἄκρου τοῦ μοχλοῦ ἐπερείδεται ἐπὶ ἐλατηρίου, ἄνωθεν δὲ, ἐπὶ δευτέρου ἐλατηρίου, διὰ ὀδοντωτοῦ τινος τροχοῦ.

Ἡ κίνησις τοῦ μοχλοῦ παράγεται ἐκ τῶν κανονικῶν καὶ διαδοχικῶν κλονισμῶν, οὓς ὑφίσταται τὸ σῶμα καθ' ὃν χρόνον οἱ πόδες κανονικῶς διασκελίζουσι τὸ ἔδαφος. Κανονίζεται δὲ ἡ παλινδρομικὴ κίνησις τοῦ μοχλοῦ οὕτως, ὥστε ἡ διάρκεια ἑκάστης ἀναλικνήσεως νὰ ἀντιστοιχῇ μὲ τὴν διάρκειαν τῆς διασκελίσεως ἑνὸς βήματος· τοῦτο δὲ ἐπιτυγχάνομεν, βραχύνοντες ἢ ἐπιμηκύνοντες τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως, διὰ τῆς ἀνυψώσεως ἢ χαμηλώσεως κοχλίου τινὸς εὑρισκομένου κάτωθεν τοῦ μοχλοῦ.

Ἡ παλινδρομικὴ καὶ κανονικὴ κίνησις τοῦ μοχλοῦ μετατρεπομένη διὰ συμπλοκῆς ὀδοντωτῶν τροχῶν εἰς κυκλικὴν κίνησιν, μεταδίδεται εἰς ἄξονα, ὅστις περιστρέφει βελόνην, καὶ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ καλέσωμεν βηματοδείκτην. Ἡ ἄκρα τῆς βελόνης διατρέχει τὴν περιφέρειαν κυκλικῆς πλακὸς, διηρημένης εἰς δώδεκα ἴσα μέρη, ἕκαστον δὲ τούτων τῶν μερῶν ὑποδιαιρεῖται εἰς τέσσαρα ἄλλα. Αἱ ἐπὶ τῆς πλακὸς διαιρέσεις σημειοῦνται ἀπαραλλάκτως ὡς καὶ αἱ ἐπὶ τῆς πλακὸς ὡρολογίου. Τὸ ἐν λόγῳ ἐργαλεῖον καὶ ὁδομέτριον καλεῖται.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 141. Καταμέτρησις διὰ τῆς διαρκείας τοῦ χρόνου. Δυνάμεθα νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰς ἀποστάσεις, μακρόθεν ἢ ἐκ τοῦ πλησίον, ὑπολογίζοντες τὴν διάρκειαν τοῦ ἀναγκαίου χρόνου πρὸς διάνυσιν αὐτῶν· τὸ δὲ γινόμενον τῆς διαρκείας ταύτης ἐπὶ τὴν ταχύτητα, τουτέστιν ἐπὶ τὸ διανυόμενον διάστημα εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, θέλει ἐκφράσει τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν. Ἐπειδὴ εἶναι γνωστὸν ὅτι π. χ. κατὰ τὴν διάρκειαν ἑνὸς λεπτοῦ, τὸ διανυόμενον διάστημα, ὑφ' ἑνὸς ἢ ὑφ' ὁμάδος ἀνθρώπων, εἶναι κατὰ μέσον ὅρον 50 μέτρων, διὰ τὸ σύνηθες βάδισμα· 70 δὲ μέτρων, μὲ ἐπιταχυντικὸν βῆμα· 30 μέτρων, μὲ ὀδοιπορικὸν βῆμα· καὶ 137, μὲ γυμναστικὸν βῆμα. Διὰ τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα, τὸ διανυόμενον διάστημα ὑπὸ τοῦ ἵππου εἶναι 86 μέτρων, διὰ σύνηθες βάδισμα· 190 δὲ μέτρων, διὰ τριποδισμοῦ, καὶ 390 διὰ καλπασμοῦ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 142. Ἡ διὰ τῆς ὁράσεως καταμέτρησις. Τῆς τοιαύτης καταμετρήσεως χρῆσις γίνεται ὑπὸ τῶν στρατιωτικῶν πρὸς ἐπιτυχίαν τοῦ ἀπὸ τοῦ βλήματος τοῦ ὅπλου των προσδοκωμένου καταστρεπτικοῦ ἀποτελέσματος (§. 29). Πρὸς τοῦτο δὲ θέτουσιν ἄνδρας εἰς γνωστὰς ἀποστάσεις, παρατηροῦντες ποῖα ἐκ τῶν μερῶν τοῦ ἱματισμοῦ, τῆς ἀποσκευῆς, τοῦ ὁπλισμοῦ ἢ τοῦ προσώπου διακρίνονται διὰ τῆς δυνάμεως τῆς ὁράσεως. Ἀφ' οὗ ἀσκηθῶσιν εἰς τοῦτο, θέτουσιν ἄνδρα τινὰ εἰς ἀπόστασιν ἄγνωστον, καὶ ἐκτιμᾷ ἕκαστος τὴν ἀπόστασιν ταύτην, τὴν ὁποίαν δοκιμάζει διὰ τῆς ἀπευθείας καταμετρήσεως.

Οἱ κυνηγοὶ γνωρίζοντες τὰς ὑπὸ τοῦ ὅπλου των χορηγουμένας τρεῖς θανατηφόρους βολὰς, ἐξασκοῦνται εἰς τὴν ἐκτίμησιν τῆς ἀπ' αὐτῶν ἀποστάσεως τοῦ θηράματος, μετροῦντες διὰ τῆς ταινίας τὰς ἀποστάσεις, καθ' ἃς φονεύεται ἢ οὐ τὸ ὑπ' αὐτῶν θηρευόμενον.

Αἱ τρεῖς δὲ προμνημονευθεῖσαι βολαὶ εἶναι, ἡ κατὰ σκοπὸν βολὴ, ἤτοι ἡ ἐξευθυωρίας βολὴ, ἥτις εἶναι 22 μέτρων. Ἡ μικρὰ βολὴ, ἥτις εἶναι 22—36 μέτρων καὶ ἡ μακρὰ βολὴ, ἥτις εἶναι 36—45 μέτρων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 143. Γνώρισις τῶν ἀποστάσεων. Δύναταί τις ἐν συνήθει ἀτμοσφαιρικῇ καταστάσει νὰ ποιήσῃ διάγνωσιν τῶν ἀποστάσεων, μεθ' ἱκανῆς πιθανότητος, ἔχων ὑπ' ὄψιν τὰ ἀκόλουθα ὑπὸ τῆς πείρας δοθέντα ἐξαγόμενα.

α.) Ἐξ ἀποστάσεως τεσσάρων χιλιομέτρων, διὰ τῆς συνήθους ὁράσεως, δύνανται νὰ ἀριθμηθῶσιν τὰ παράθυρα μεγάλης οἰκίας ἢ καταστήματος· β'.) ἐξ ἀποστάσεως 2200 μέτρων, οἱ ἄνθρωποι καὶ οἱ ἵπποι, διακρίνονται ὡς σημεῖα· γ'.) ἐξ ἀποστάσεως 1200 μέτρων, καθαρῶς διακρίνεται ἵππος· δ'.) ἐξ ἀποστάσεως 800 μέτρων, διακρίνεται ἡ κίνησις τῶν ἀνθρώπων· ε.) ἐξ 700 μέτρων, ἀπὸ καιροῦ εἰς καιρὸν διακρίνεται ἡ κεφαλὴ τῶν ἀνθρώπων· ς'.) ἐπὶ τέλους δὲ ὅτι ἐξ ἀποστάσεως 400 μέτρων, καθαρώτατα διακρίνεται ἡ κεφαλὴ τῶν ἀνθρώπων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 144. Ἐκτίμησις τῶν ἀποστάσεων διὰ τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου. Ἐν τῇ φυσικῇ, διὰ τῆς ἀεραντλίας, ἐγένετο γνωστὸν ὅτι ἡ διάδοσις τοῦ ἤχου ἀποδίδεται εἰς τὴν ἐπενέργειαν

τοῦ ἀέρος· ἐπίσης, συγκρίσεως γενομένης μεταξὺ τοῦ στιγμιαίου ἀποτελέσματος τῆς λάμψεως καὶ τῆς τοῦ ἤχου ταχύτητος ἐν τῇ ἀτμοσφαίρᾳ, γνωστὸν ἐγένετο ὅτι ἡ ταχύτης αὕτη εἶναι ὡρισμένη καὶ ἀμετάβλητος· τοῦ ἤχου ὄντος βαρέως ἢ ὀξέως, ἰσχυροῦ ἢ ἀδυνάτου.

Πρὸς τούτοις γνωστὸν ἐγένετο ὅτι ὁ ἦχος, ὡς ἔγγιστα, διατρέχει διάστημα 34 δεκαμέτρων εἰς τὸ δευτερόλεπτον, ἐν εὐδίᾳ ἀτμοσφαίρᾳ· καὶ ὅτι ὁ ἀὴρ ἐπαισθητῶς ἐπηρεάζει τὴν ταχύτητα ταύτην διευθυνόμενος, ὡς ἔγγιστα, κατὰ τὴν τοῦ ἤχου διεύθυνσιν, πρὸς δὲ ὅτι, ὁ συνήθως ἄνεμος ἐπαυξάνει ἢ ἐλαττόνει, ὡς ἔγγιστα κατὰ ἓν δεκάμετρον, τὴν ταχύτητα τοῦ ἠρεμοῦντος ἤχου, ἐνῷ θυελλώδης ἄνεμος μεταβάλλει αὐτὴν κατὰ τρία δεκάμετρα.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν παρατηρητής τις δυνηθῇ νὰ ἐκτιμήσῃ τὸν δαπανηθέντα χρόνον ἀπὸ τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν γεννᾶται ὁ ἦχος καὶ ἐκείνης, καθ' ἣν ἀκούει τὸν ἦχον, εἶναι βέβαιον ὅτι θέλει προσδιορίσει τὴν ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασιν τοῦ σημείου, ἔνθα ὁ ἦχος ἔλαβε τὴν ἀρχήν του, πολλαπλασιάζων τὸν ἀριθμὸν τῶν δευτερολέπτων τοῦ δαπανηθέντος χρόνου ἐπὶ (34 $\pm$ τῆς ταχύτητος τοῦ ἀνέμου). Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ἐκπυρσοκρότησις τῶν πυροβόλων ὅπλων παρακολουθεῖται ὑπὸ ἀκαριαίας λάμψεως, ἐὰν λοιπὸν παρατηρήσωμεν τὸν δαπανηθέντα χρόνον ἀπὸ τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν βλέπομεν τὴν λάμψιν τοῦ ὅπλου, ἥτις εἶναι ἡ ἀρχὴ τοῦ κρότου, καὶ ἐκείνης, καθ' ἣν ἀκούομεν τὸν κρότον, δυνάμεθα νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν ἀφ' ἡμῶν ἀπόστασιν τοῦ ὅπλου.

Ἐπειδὴ ἡ τοιαύτη ἐκτίμησις τῶν ἀποστάσεων κυρίως ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς παρατηρήσεως τοῦ χρόνου, τὰ δὲ ἐντελέστερα καὶ μᾶλλον εὐμετακόμιστα χρονόμετρα δίδουσι τὸν χρόνον μὲ ἀβεβαιότητα ἑνὸς τετάρτου ἢ ἡμίσεως δευτερολέπτου, διὰ τοῦτο τῆς τοιαύτης καταμετρήσεως χρῆσις γίνεται μόνον διὰ μεγάλας ἀποστάσεις.

Σημειοῦντες λοιπὸν διὰ τ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου, διὰ π τὴν ἀβεβαιότητα τῆς παρατηρήσεως τοῦ χρόνου χ, καὶ διὰ σ τὸ ἐξ αὐτῆς προκύπτον σφάλμα ἐπὶ τῆς ἀποστάσεως α· θέλομεν ἔχει, μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς ἐπηρείας τοῦ ἀνέμου.

$$\alpha \pm \sigma = (\chi \pm \pi)\tau, \quad \text{καὶ} \quad \sigma = \pi.\tau = \pi.34 \text{ δεκάμ.}$$

Τῆς δὲ προσεγγίσεως τοῦ χρονομέτρου οὔσης ἓν τέταρτον δευτερολέπτου, τὸ σ θέλει εἶναι 8 ἕως 9 δεκάμετρα.

Τούτου ἕνεκεν, ὡς κατώτερον ὅριον, τῶν διὰ τοῦ ἤχου ἐκτιμωμένων ἀποστάσεων, λαμβάνεται ἡ τῶν 8 ἑκατομέτρων, ἥτις ὑπόκειται εἰς σφάλμα ἐκφραζόμενον διὰ τοῦ ἑνὸς δεκάτου τοῦ μήκους αὐτῆς. Δι' ἀπόστασιν 8 χιλιομέτρων, τὸ σφάλμα δὲν θέλει ὑπερβῆ τὸ ἑκατοστὸν τῆς ἀποστάσεως.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 145. Προσδιόρισις τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου καὶ τῆς ἀποστάσεως ἀνεξαρτήτως τῆς ἐπηρείας τοῦ ἀνέμου. Ἔστωσαν δύο παρατηρηταὶ Α καὶ Β, ἕκαστος τῶν ὁποίων φέρει ὡρολόγιον μὲ δευτερόλεπτα, καὶ πᾶν ὅ,τι ἀναγκαίως πρὸς παραγωγὴν συγχρόνου ἐκπυρσοκροτήσεως. Οὗτοι τοποθετοῦνται εἰς ἕκαστον ἄκρον τῆς ἀποστάσεως ΑΒ, ἐπὶ τοσοῦτον μεγάλης ὅσον ἐπιτρέπει ἡ ἐπέκτασις τοῦ ἤχου, καὶ ἐνεργοῦσιν οὕτως, ὥστε αἱ ἐκπυρσοκροτήσεις τῶν ὅπλων των νὰ διαδέχωνται ἡ μία τὴν ἄλλην τόσον ταχέως, ὥστε ἐν τῷ χρονικῷ τούτῳ διαστήματι, ἡ κατάστασις τῆς ἀτμοσφαίρας νὰ μὴ μεταβληθῇ. Ἕκαστος παρατηρητὴς σημειοῖ τὸν δαπανηθέντα χρόνον ἀπὸ τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν βλέπει τὴν λάμψιν, ἥτις τὸν εἰδοποιεῖ τὴν ὑπὸ τοῦ ἑτέρου γενομένην ἐκπυρσοκρότησιν, καὶ ἐκείνης, καθ' ἣν ἀκούει τὸν κρότον.

Ἔστωσαν λοιπὸν χ καὶ χ' ὁ ἀριθμὸς τῶν δευτερολέπτων, τὰ ὁποῖα δαπανᾷ ὁ κρότος ὅπως φθάσῃ εἰς ἕκαστον παρατηρητὴν Α καὶ Β, τ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου, ἢ τὸ ὑπ' αὐτοῦ διανυόμενον διάστημα εἰς τὸ δευτερόλεπτον, καὶ ἐν εὐδίᾳ ἀτμοσφαίρᾳ, λ ἡ διόρθωσις τῆς ταχύτητος ταύτης ὡς ἐκ τῆς ἐπενεργείας τοῦ ἀέρος προερχομένη, καὶ α ἡ ἀπόστασις ΑΒ· εἶναι βέβαιον ὅτι θέλομεν ἔχει, εἰς μὲν τὸν σταθμὸν Α,

$$\alpha = \chi\,(\tau \mp \lambda) \quad \text{εἰς δὲ τὸν Β,} \quad \alpha = \chi'\,(\tau \pm \lambda).$$

Ἐκ τῶν ἐκφράσεων τούτων, διαδοχικῶς ποριζόμεθα (κατὰ τὴν Ἄλγεβραν) τοὺς ἑξῆς τύπους·

$$\tau = \frac{\alpha\,(\chi+\chi')}{2\chi.\chi'} \quad \ldots\ldots [1]. \qquad \mp\lambda = \frac{\alpha(\chi-\chi')}{2\chi.\chi'} \quad \ldots\ldots [2].$$

$$\alpha = \frac{2\tau.\chi.\chi'}{\chi+\chi'} \quad \ldots\ldots [3].$$

Ἐκ τῶν τύπων [1] καὶ [2] ἔπεται ὅτι, ἐὰν προσδιορίσωμεν τριγωνομετρικῶς τὴν ἀπόστασιν α, εὑρίσκομεν ἐν καιρῷ τῆς παρατηρήσεως, τὴν τιμὴν τοῦ τ καὶ λ.

Τὸ πείραμα τοῦτο ἐπαναληφθὲν ὑπὸ διαφόρους καταστάσεις τῆς ἀτμοσφαίρας καὶ ἐκ τῶν ἄκρων βάσεων διάφορον μῆκος ἐχουσῶν πάντοτε ἐχορήγησε διὰ τὸ τ ἀξίαν πλησιάζουσαν τὰ 34 δεκάμετρα, ἐνῷ ταυτοχρόνως ἡ τοῦ λ ἀξία εὑρέθη μεταξὺ 1 καὶ 3 δεκαμέτρων.

Οὕτω π.χ. διὰ τοῦ ταυτοχρόνως γενομένου πειράματος μεταξὺ

τῆς πυραμίδος τοῦ *Montmarte* καὶ τοῦ πύργου *Montlhery*, τῆς Γαλλίας, ἡ μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀπόστασις τριγωνομετρικῶς προσδιορισθεῖσα, εὑρέθη ἴση μὲ α=2853 δεκάμετρα, ἕκαστος τῶν παρατηρητῶν εὗρε, διὰ τοῦ χρονομέτρου, χ=88,5 καὶ χ′=81.

Διὰ τὰς τιμὰς ταύτας οἱ προμνημονευθέντες τύποι δίδουσι

τ=33,7 δεκάμ. καὶ λ=1,5 δεκάμ.

Ἐπὶ τέλους, διὰ τοῦ τύπου [3] προσδιορίζεται ἀπόστασίς τις ὑπὸ δύο παρατηρητῶν, τοποθετημένων κατὰ τὰ ἄκρα τῆς ἀποστάσεως ταύτης, ἀνεξαρτήτως τῆς ἐπενεργείας τοῦ ἀνέμου.

Ἡ διὰ τοῦ ἤχου καταμέτρησις τῶν ἀποστάσεων γίνεται ὑπὸ τῶν στρατιωτικῶν, ἐν καιρῷ πολιορκίας, ναυμαχίας, κτλ. κἄποτε δὲ καὶ ὑπὸ τῶν τοπογράφων καὶ τῶν μηχανικῶν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 146. Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ὕψους ἀντικειμένου τινός, νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀφ' ἡμῶν ἀπόστασις αὐτοῦ· καὶ ἀντιστρόφως, γνωστῆς οὔσης τῆς ἀποστάσεως νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀντικειμένου.

Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον γίνεται χρῆσις δύο μεταλλίνων πλακιδίων Π καὶ Π′ (Σχ. 162), συνδεομένων διὰ βαθμολογημένης ταινίας α. Ἐκ τούτων ἡ μὲν πλακὶς Π φέρει παρωπίδα, δι' ὃ προοφθάλμιος πλακὶς καλεῖται, ἡ δὲ Π′ σχηματίζει πλαίσιον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ὅταν κινῆται διὰ τοῦ δακτύλου τῆς ἀριστερᾶς χειρὸς, ἡ πλακὶς π, αὕτη ἀνυψοῦται ἄνω τοῦ χείλους τῆς βάσεως τοῦ πλαισίου, τὸ ὁποῖον ἀντικειμενικὴ πλακὶς καλεῖται.

Ἡ δὲ ἀνύψωσις τῆς πλακίδος π, μετρῆται εἰς χιλιοστόμετρα, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλαγίων πλευρῶν τοῦ πλαισίου Π′.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν διὰ τῆς παρωπίδος σκοπεύσωμεν ἀντικείμενόντι, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι Υ, καὶ ὑψώσωμεν τὴν πλακίδα π, μέχρις οὗ τὸ φαινόμενον ὕψος τοῦ ἀντικειμένου περιορισθῇ ὑπὸ τοῦ κάτω χείλους τῆς πλακίδος ταύτης καὶ τοῦ πλαισίου, παραστήσωμεν δὲ διὰ υ τὸ ἐπὶ τοῦ πλαισίου ἀναγινωσκόμενον ὕψος, διὰ Λ δὲ τὴν ἀπὸ τῆς παρωπίδος ἀπόστασιν ΠΥ τοῦ ἀντικειμένου, τότε ὡς ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν οὕτω σχηματιζομένων τριγώνων, προκύπτει ἡ ἀναλογία Λ : Υ = α : υ· ἐξ ἧς λαμβάνομεν διαδοχικῶς τοὺς τύπους

$$\Lambda = \frac{\alpha \times \Upsilon}{\upsilon} \quad \text{καὶ} \quad \Upsilon = \frac{\Lambda \times \upsilon}{\alpha}.$$

Ὁ πρῶτος τῶν δύο τούτων τύπων δίδει τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἀντικειμένου γνωστοῦ ὄντος τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Πρὸς τοῦτο σκοπεύομεν

ἀντικείμενα γνωστοῦ ὕψους, ὡς π.χ. τὸ γνωστὸν ὕψος τοῦ ἀνδριάντος τοῦ Ναπολέοντος τοῦ Α′, ἐπὶ τῆς πλατείας τῶν Βενδωμῶν, τὸ ὕψος τοῦ ὁποίου γνωστὸν κατασκευῆς, τὸ παραβρόδουσιν οἱ κ. κ. Ο. Μορὲλ καὶ Σία, ὅπως τὸ ὕψος τοῦ ἀνδριάντος τοῦ Ναπολέοντος τοῦ Α′, ἐπὶ τῆς πλατείας τῶν Βενδωμῶν, ὅπερ, καθὼς παρατηροῦμεν, εἶναι ἴσον πρὸς

Τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο εἶναι ἀναγκαιότατον εἰς τοὺς ὁδοποιοὺς, πρὸς προσδιόρισιν ἀποστάσεώς τινος ἢ τοῦ πλάτους ποταμοῦ, λιμένος ἢ πορθμοῦ. Εἰς τοὺς περιηγητὰς, εἰς τοὺς ζωγράφους, κτλ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 147. Στρατιωτικὴ σταδία. Εἰς τὸν πρῶτον τύπον τῆς προηγουμένης ἐφαρμογῆς, ὑποθέντες τὸ ὕψος Γ τοῦ ἀντικειμένου, ὡς καὶ τὴν ἐκ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπόστασιν α τοῦ πλαισίου ἀμετάβλητον, βλέπομεν ὅτι ἡ ἀφ' ἡμῶν ἀπόστασις Α τοῦ ἀντικειμένου εἶναι ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ τοῦ φαινομένου ὕψους υ τοῦ ἀντικειμένου, τουτέστιν, αὐξανομένης τῆς ἀποστάσεως Α, τὸ ὕψος υ σμικρύνεται, ἐλαττουμένης δὲ, αὐξάνει (Ἐφαρμ. 71. §. 11). Ἐντεῦθεν γίνεται δῆλον ὅτι, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰ εἰς γνωστὰς ἀποστάσεις ἀντιστοιχοῦντα φαινόμενα ὕψη ἀντικειμένου τινὸς, ὡς π.χ. τὸ ὕψος $1^{\mu},75$ ἢ $1^{\mu},80$ πεζοῦ στρατιώτου ἀναστήματος μετρίου, ἢ τὸ ὕψος $2^{\mu},50$ στρατιώτου ἐφίππου, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐργαλεῖον, δι' οὗ νὰ προσδιορίζωμεν τὰς ἀποστάσεις ἀπὸ 100 μέχρις 600 μέτρων, σκοπεύοντες τὸ ἀμετάβλητον ὕψος τοῦ ἀντικειμένου, ἐν ᾧ κρατοῦμεν τὸ ἐργαλεῖον εἰς ἀμετάβλητον ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπόστασιν.

Τοιοῦτον ἐργαλεῖον εἶναι ἡ στρατιωτικὴ σταδία, διὰ τῆς ὁποίας ἰδίως οἱ στρατιωτικοὶ προσδιορίζουσι τὰς ἀποστάσεις πεζοῦ ἢ ἐφίππου στρατιώτου πρὸς κανόνισιν τοῦ βήματος.

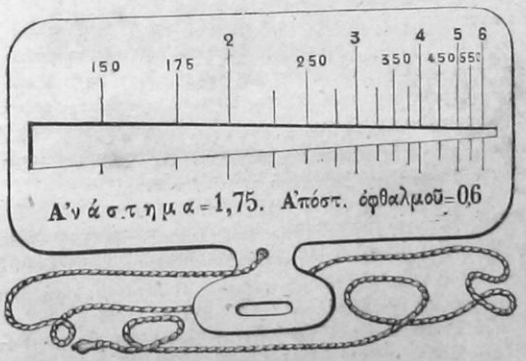
Αὕτη δὲ εἶναι μεταλλίνη πλὰξ (Σχ. 163), ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐντέμνεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον· εἰς τοῦτο, τὸ μεταξὺ τῶν ἴσων πλευρῶν διάστημα χρησιμεύει εἰς τὴν κατάταξιν τοῦ φαινομένου ὕψους τοῦ ἀντικειμένου ἀναλόγως τῶν ἀποστάσεων. Ἡ κατάταξις αὕτη γίνεται διὰ γραμμῶν, χαρασσομένων ἐπὶ τῆς πλακὸς, ἑκάστη τῶν ὁποίων φέρει ἀριθμὸν δεικνύοντα τὴν ἀντιστοιχοῦσαν ἀπόστασιν εἰς τὸ ὑποδεικνυόμενον ὑπὸ τῆς γραμμῆς ταύτης φαινόμενον ὕψος τοῦ ἀντικειμένου.

Τὸ σχῆμα παριστᾷ τὴν σταδίαν εἰς φυσικὸν μέγεθος, δίδουσαν τὰς ἀποστάσεις ἀπὸ 150—600 μέτρων, δι' ἀνάστημα πεζοῦ στρατιώτου $1^{\mu},75$, καὶ διὰ τὴν ἀμετάβλητον ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπόστασιν $0^{\mu},60$ τοῦ ἐργαλείου.

Τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἐπὶ ξύλου ἢ ἐπὶ χονδροῦ χάρτου ἀντιγράφοντες μετὰ προσοχῆς τὸ Σχ. 163 ἐπὶ διαφανοῦς χάρτου, καὶ τὸ οὕτω δὲ λαμβανόμενον ἀντίγραφον μεταφέροντες ἐπὶ τοῦ ξύλου ἢ ἐπὶ τοῦ χονδροῦ χάρτου περικόπτομεν αὐτὸ ὡς καὶ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Ἡ δὲ σταδία εὑρίσκεται πάντοτε εἰς τὴν

αὐτὴν ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπόστασιν, διὰ χορδῆς $0^{\mu},60$ μήκους, τῆς ὁποίας τὸ ἓν ἄκρον προσδέεται τῇ σταδίᾳ, τὸ δὲ ἕτερον κρατεῖται διὰ τῶν ὀδόντων. Ἡ δεξιὰ χεὶρ κρατεῖ τὴν πλάκα κατακορύφως, τανυομένης τῆς χορδῆς, ἐνῷ ὁ ἀριστερὸς ἀντίχειρ εὑρίσκεται ἐπὶ τῶν διαιρέσεων. Ἡ σκόπευσις γίνεται οὕτως, ὥστε αἱ σκοπευτικαὶ ἀκτῖνες, αἵτινες ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, νὰ διέρχωνται ἀκριβῶς ἀπὸ τὸ κατώτατον καὶ ἀνώτατον σημεῖον τοῦ ἀντικειμένου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι $1^{\mu},75$ ἢ $2^{\mu},50$, καθ' ἣν περίπτωσιν ἡ σταδία εἶναι βαθμολογημένη ὡς πρὸς τὸ ὕψος πεζοῦ ἢ ἐφίππου στρατιώτου.

Συνήθως ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐπιφανείας τῆς σταδίας εἰσὶν αἱ διαιρέσεις τοῦ φαινομένου ὕψους πεζοῦ, ἐπὶ τῆς ἑτέρας δὲ, αἱ τοῦ ἐφίππου.



Σχ. 163.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 148. Βαθμολόγησις τῆς σταδίας. Ἡ βαθμολόγησις γίνεται εἴτε διὰ τῆς πείρας εἴτε διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ. Διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν λαμβάνομεν, ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἐφαρμογῆς 146, τὴν ἔκφρασιν, $$\upsilon = \frac{1}{A} \times \Gamma.\alpha.$$

Εἰς τὴν ἔκφρασιν ταύτην τὸ μὲν α ἐκφράζει τὴν ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀμετάβλητον ἀπόστασιν τῆς σταδίας, τὸ Γ, τὸ ἀμετάβλητον ὕψος τοῦ ἀντικειμένου, τὸ Α, τὴν ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπόστασιν τοῦ ἀντικειμένου, καὶ τὸ υ, τὸ φαινόμενον ὕψος αὐτοῦ. Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς σταδίας αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώ-

νου ἀποστάσεις τῶν φαινομένων ὑψῶν εἰσιν ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἀντικειμένου, καλοῦντες λοιπὸν Α καὶ Α′ τὰς ἀποστάσεις, η, τὸ μῆκος τοῦ ὕψους τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ φαινόμενον ὕψος τοῦ ἀντικειμένου, ἐκ τῆς ἀποστάσεως Α σκοπευομένου, καὶ η—χ, τὴν ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου ἀπόστασιν τοῦ φαινομένου ὕψους τοῦ ἀντικειμένου, διὰ τὴν ἐκ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπόστασιν Α′, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$A:A' = \eta - \chi : \eta, \qquad \text{ἐξ ἧς ποριζόμεθα} \qquad \chi = \frac{\eta(A' - A)}{A'}.$$

Τὸ περὶ ἐκτιμήσεως τῶν ἀποστάσεων δυσκολώταταν ζήτημα κατέστη ἓν τῶν σπουδαιοτέρων προβλημάτων τῆς ἐφηρμοσμένης γεωμετρίας, πρὸς λύσιν τοῦ ὁποίου προὐτάθησαν διάφορα ἐργαλεῖα, τῶν ὁποίων τὴν περιγραφὴν παραλείπομεν ἐνταῦθα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 149. Κανόνες τοῦ ῥίμματος. Καθ'ὅσα ἀνεφέραμεν ἐν τῇ §. 29. Ἐφαρμ. 138, ὁ σκοποδείκτης τῶν τουφεκίων κανονίζεται ἀναλόγως τῆς ἀποστάσεως τοῦ σκοποῦ· ὅσον δὲ ὁ σκοπὸς εἶναι ἀπομεμακρυσμένος ἐπὶ τοσοῦτον καὶ ὁ σκοποδείκτης πρέπει νὰ ὑψόνηται ἄνω τῆς κάννης.

Αἱ διαιρέσεις τοῦ σκοποδείκτου παριστῶσι τὰς θέσεις τῆς σκοπευτικῆς γραμμῆς, λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν ἑξῆς διατάξεων·

Διὰ σκοποδείκτου τῶν 200 μέτρων.

Ὅταν βάλλωμεν ἐξ ἀποστάσεως 100 μέτρων, πρέπει νὰ σκοπεύωμεν τοὺς πόδας· ὅταν δὲ ἐξ 150, τὰ γόνατα· ὅταν ἐκ 200, τὴν ζώνην, καὶ ὅταν ἐκ 250, τὴν κεφαλήν.

Διὰ σκοποδείκτου τῶν 400 μέτρων.

Ὅταν βάλλωμεν ἐξ ἀποστάσεως 350 μέτρων, πρέπει νὰ σκοπεύωμεν τὴν κνήμην, ὅταν ἐκ 400, τὴν ζώνην· ὅταν ἐκ 450, τὴν κορυφὴν τῆς κεφαλῆς.

Διὰ σκοποδείκτου τῶν 600 μέτρων.

Ὅταν βάλλωμεν ἐξ ἀποστάσεως 600 μέτρων, πρέπει νὰ σκοπεύωμεν τὴν ζώνην.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 150. Μέτρησις ἀπροσίτων ὑψῶν. Πρὸς μέτρησιν ἀπροσίτου ὕψους ἐπαναλαμβάνομεν ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου, ὅπερ διέρχηται ἀπὸ τοῦ ζητουμένου ὕψους, τὰς αὐτὰς πράξεις, ἃς ἀνεφέραμεν ἐν §. 8 καὶ 9 τοῦ Α′ μέρους, καὶ ἐξετελέσαμεν ἐπὶ ὁριζοντείου ἐπιπέδου.

§.—32.

Ταχυμέτριον καὶ ῥύθμισις αὐτοῦ. Μεγεθυντικὴ ἰσχὺς διόπτρας. Ὁρίζων διόπτρας. Ἀχρωματισμὸς τῶν διοπτρῶν. Διαστημετρικαὶ διόπτραι μετὰ πολλαπλῆς παρωπίδος. Ὑψομέτριον ταχυμετρίου. Κλώψ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 151. Ταχυμέτριον τοῦ ὀπτικοῦ *Richer*. Τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο εἶναι τὸ σύνηθες θεωδόλιχον (ἐφαρμ. 67), τὸ ὁποῖον ὑπέστη τροποποιήσεις τινὰς περὶ τὴν κατασκευήν του. Συνίσταται δὲ ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν ὡς τὸ θεωδόλιχον καὶ ὁ ἐπαναληπτικὸς κύκλος.

Διόπτρα τοῦ ταχυμετρίου. Ἡ διόπτρα ΔΔ (Σχ. 164) τοῦ ἐν λόγῳ ἐργαλείου, εἶναι ἡ τοῦ κ. *Porro*, τῆς ὁποίας τὴν μὲν περιγραφὴν ἀνεφέραμεν ἐν τῇ Ἐφαρμ. 93, τὴν δὲ ῥύθμισιν ἐν τῇ Ἐφαρ. 96. Αὕτη κατευθύνεται διὰ τοῦ κοχλίου Ν (Ἐφαρ. 26).

Ἡ διόπτρα εἶναι ὁμόκεντρος πρὸς τοὺς κύκλους ΚΚ καὶ Κ′Κ′ τοῦ ἐργαλείου. Ὁ ἄξων, περὶ τὸν ὁποῖον περιστρέφεται ἡ διόπτρα, ὑποστηρίζεται διὰ δύο ὀρθοστατῶν Σ καὶ Σ′, ἀνορθουμένων ἐπὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ ὁριζοντείου κύκλου ΚΚ, καὶ εὑρίσκεται εἰς τοιοῦτον ὕψος, ὥστε ἡ διόπτρα ἐλευθέρως περιστρέφεται, κατακορύφως καθ'ὁλόκληρον περιφέρειαν, χωρὶς ποσῶς νὰ ἀποσπασθῇ τῶν βρογχωτήρων της (Ἐφαρμ. 28, §.16).

Ὁριζόντειος καὶ κατακόρυφος κύκλος τοῦ ταχυμετρίου. Ἑκάτερος τῶν κύκλων τούτων ΚΚ καὶ Κ′Κ′ σύγκειται ἐκ δύο συγκεντρικῶν κύκλων, τοῦ μὲν ἐξωτερικοῦ, τοῦ δὲ ἐσωτερικοῦ. Ὁ ὁριζόντειος κύκλος ΚΚ εὑρίσκεται κάτω τῆς διόπτρας καὶ εἰς ἱκανὴν ἀπ'αὐτῆς ἀπόστασιν ὅπως ἡ διόπτρα ἐλευθέρως ποιῇ τὴν κατακόρυφον περιστροφικὴν κίνησίν της. Ὁ ἐσωτερικὸς ὁριζόντειος κύκλος ὡς καὶ τὸ σύστημα τοῦ ἐργαλείου, μετὰ τοῦ ὁποίου συνδέεται διὰ τῶν ὀρθοστατῶν Σ καὶ Σ′, συνδέεται μὲν ἀναποσπάστως μετὰ τοῦ ἐξωτερικοῦ κύκλου ΚΚ, τῇ περιστροφῇ συμπιεστικοῦ τινος κοχλίου, ὅστις δὲν φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα, περιστρέφεται δὲ περὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΚΚ βραδέως καὶ κανονικῶς τῇ περιστροφῇ τοῦ ἀνακλητικοῦ κοχλίου κ. Ὁ δὲ ἐξωτερικὸς κύκλος ΚΚ συνδέεται μὲν ἀναποσπάστως μετὰ τοῦ βάθρου, τοῦ φέροντος τοὺς τρεῖς ἰσοπεδοτικοὺς κοχλίας τοῦ ἐργαλείου, διὰ τῆς συσφίξεως τοῦ συμ-

πιεστικοῦ κοχλίου π, περιστρέφεται δὲ βραδέως καὶ κανονικῶς περὶ τὸ βάθρον, τῇ περιστροφῇ τοῦ ἀνακλητικοῦ κοχλίου σ. Τὸ βάθρον, τὸ ὁποῖον συνιστᾷ τὸν γενικὸν κατακόρυφον ἄξονα τοῦ ἐργαλείου, συνδέεται ἀναποσπάστως μετὰ τῆς πινακίδος τοῦ τρίποδος (Σχ. 51), διὰ τοῦ κοχλίου Γ.

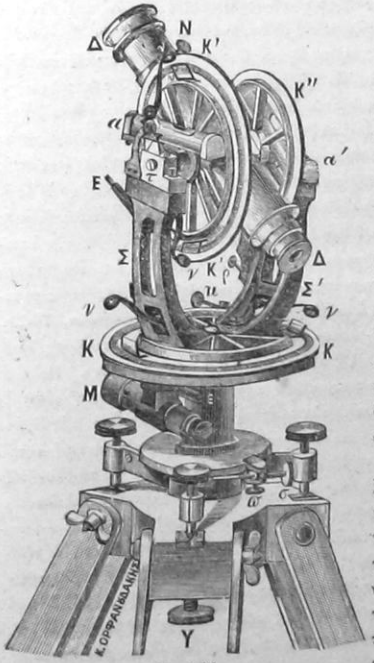
Ὁ κατακόρυφος κύκλος Κ′Κ′ κεῖται πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ παρὰ τῇ διόπτρᾳ ΔΔ· διαπερᾶται δὲ τὸ κέντρον αὐτοῦ διὰ τοῦ ὁριζοντείου ἄξονος τῆς περιστροφῆς, καὶ πρὸς τὸν ὁποῖον καθηλοῦται. Πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς διόπτρας εὑρίσκεται δεύτερός τις ἁπλοῦς κύκλος Κ″, ὅστις χρησιμεύει διὰ τὴν ἰσορροπίαν τοῦ ἐργαλείου. Ὁ τελευταῖος οὗτος κύκλος Κ″φέρει συμπιεστικόν τινα κοχλίαν, ὁ ὁποῖος δὲν φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα, καὶ τὸν ἀνακλητικὸν κοχλίαν ρ. Ἡ περώνη τοῦ συμπιεστικοῦ τούτου κοχλίου, εὑρίσκεται ἐπ᾽αὐτοῦ τοῦ κύκλου Κ″, ἡ δὲ σφαῖρα, ἡ σχηματίζουσα τὸ περικόχλιον τοῦ ἀνακλητικοῦ κοχλίου ρ, συνδέεται μετὰ τοῦ ὀρθοστάτου Σ′.

Τῇ καταλλήλῳ περιστροφῇ τοῦ ἐν λόγῳ συμπιεστικοῦ κοχλίου, ὅτε κύκλος Κ″, ἡ διόπτρα ΔΔ, καὶ ὁ ἐξωτερικὸς κύκλος Κ′Κ′, περιστρέφονται περὶ τὸν ὁριζόντειον ἄξονα τῆς περιστροφῆς ἢ συνδέονται ἀναποσπάστως μὲ τοὺς ὀρθοστάτας Σ καὶ Σ′. Τῇ περιστροφῇ δὲ τοῦ ἀνακλητικοῦ κοχλίου ρ, ὅτε κύκλος Κ″, ἡ διόπτρα ΔΔ, καὶ ὁ ἐξωτερικὸς κύκλος τοῦ κατακορύφου κύκλου Κ′Κ′, περιστρέφονται περὶ τὸν κοινὸν ὁριζόντειον ἄξονα βραδέως καὶ κανονικῶς.

Ἡ βαθμολόγησις ἐπὶ ἀμφοτέρων τῶν κύκλων γίνεται ἐντελῶς καὶ κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα, τουτέστιν ἀπὸ 0^{G}—400^{G}, πρὸς διευκόλυνσιν τοῦ ὑπολογισμοῦ. Ἐπὶ τῶν ὁριζοντείων κύκλων ΚΚ, ὁ ἀμετακίνητος ἐξωτερικὸς κύκλος φέρει τὴν βαθμολόγησιν, ὁ δὲ ἐσωτερικός, τοὺς βερνιέρους οὓς συμπαρασύρει ἡ ὁριζόντειος περιστροφικὴ κίνησις τῆς διόπτρας. Ἐπὶ δὲ τοῦ κατακορύφου κύκλου Κ′Κ′ ὅλως τὸ ἐναντίον συμβαίνει· ὁ κινητὸς ἐξωτερικὸς κύκλος φέρει τὴν βαθμολόγησιν, ὁ δὲ ἀμετακίνητος ἐσωτερικὸς κύκλος, τοὺς δύο ἐκδιαμέτρους ἀντιθέτους βερνιέρους. Ἡ διεύθυνσις τῶν βερνιέρων εἶναι κατακόρυφος· αὕτη δὲ ῥυθμίζεται διὰ τοῦ ἐπανορθωτικοῦ κοχλίου Ε, ὅστις συνδέεται μετὰ τοῦ ὀρθοστάτου Σ.

Ἡ τοιαύτη διάταξις τοῦ ἐργαλείου ἐπιτρέπει εἰς τὸν παρατηρητήν, χωρὶς ποσῶς νὰ μετακινηθῇ τῆς θέσεως, ἀφ᾽ἧς ποιεῖ τὰς παρατηρήσεις, νὰ ἀναγνώσῃ ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου τὰς βίπας τῆς κατευθύνσεως τῆς διόπτρας, καὶ ἐπὶ τῶν κύκλων, τὴν ὁριζόντειον καὶ κατακόρυφον γωνίαν. Ἡ ἀνάγνωσις τῶν γωνιῶν εὐκολύνεται διὰ τῶν μεγεθυντικῶν φακῶν ν.

Ἀφετηρία γραμμὴ τῶν κύκλων. Ἡ ἀφετηρία γραμμὴ τοῦ ὁριζοντείου κύκλου, καθ᾽ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ σταθμοῦ, κατευθύνεται πρὸς τὸν βορρᾶν, διὰ τῆς μαγνητικῆς βελόνης τῆς προσηρτημένης πρὸς τὸν κορμὸν τοῦ βάθρου τοῦ ἐργαλείου. Τοῦ κατακορύφου κύκλου ἡ ἀφετηρία γραμμὴ, ἀντιστοιχεῖ μὲ τὴν διαίρεσιν 100^{G}, ἥτις παριστᾷ τὴν ὁριζόντειον. Τούτου ἕνεκεν, ἡ ἀπόλυτος ἀξία τῆς κατακορύφου γωνίας ὅηλον ποιεῖ ἐὰν ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς τοῦ παρατηρητοῦ, κῆται ἄνω ἢ κάτω τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς διόπτρας διερχομένης ὁριζοντείου (Ἐφαρμ. 67 καὶ 97).



Σχ. 164.

Μαγνητικὴ βελόνη. Αὕτη εὑρίσκεται αἰωρημένη, ἐντὸς τῆς ὁριζοντείου διόπτρας Μ, τῆς κειμένης κάτω τοῦ ὁριζοντείου κύκλου ΚΚ καὶ προσηρτημένης πρὸς τὸν κορμὸν τοῦ βάθρου τοῦ ἐργαλείου. Ἐπὶ τῆς ἀντικειμενικῆς ὑάλου τῆς διόπτρας εὑρίσκονται αἱ ὑποδιαιρέσεις καὶ ἡ διεύθυνσις *NS*. Τὸ προσοφθάλμιον τῆς διόπτρας ταύτης κινεῖται διὰ τῆς ἕλξεως ἢ ἀπωθήσεως. Ἡ μαγνητικὴ βελόνη ῥυθμίζεται διὰ τοῦ ἐπανορθωτικοῦ κοχλίου ε, ὅταν ἔχωμεν ὑπ᾽ὄψιν τὰ ἐν τῷ τέλει τῆς Ἐφαρμ. 67 λεχθέντα. Οἱ ἐπανορθωτικοὶ κοχλίαι Ε καὶ ε διὰ κλειδὸς περιστρέφονται.

Ἀεροστάθμη. Ἡ ἀεροστάθμη α καθηλοῦται πρὸς τὸν ἀμετακίνητον κατακόρυφον κύκλον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου εἰσὶ κεχαραγμένοι οἱ βερνιέροι. Διὰ τῆς ἀεροστάθμης ταύτης ὑποδεικνύεται ἡ ὁριζόντειος θέσις τῆς διόπτρας ΔΔ, ὅταν ὁ βερνιέρος ὑποδεικνύῃ τὴν διαίρεσιν 100ᵇ. πρὸς δὲ, καὶ σχηματίζεται τὸ ἀναφορικὸν ἐπίπεδον τῶν κατακορύφων γωνιῶν. Δι' αὐτῆς καὶ τῶν τριῶν ἰσοπεδοτικῶν κοχλιῶν τοῦ βάθρου διευθετεῖται ὁριζοντείως τὸ ταχυμέτριον κατὰ τὴν Ἐφαρμ. 24.

Ἡ ῥύθμισις τῆς ἀεροστάθμης γίνεται διὰ τῆς μεταστροφῆς κατὰ τὴν Ἐφαρμ. 23. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ μεταστροφὴ γίνεται εὐκόλως, ἐπειδὴ διὰ τῶν διαιρέσεων τοῦ ὁριζοντείου κύκλου ἀμέσως λαμβάνονται δύο ἐκ διαμέτρου ἀντίθετοι θέσεις τῆς ἀεροστάθμης α.

Ἡ δευτέρα ἀεροστάθμη ά, ἡ δύο ὄψεις ἔχουσα, καθηλοῦται πρὸς τὸν ἁπλοῦν κύκλον Κ'' καὶ συνιστᾷ ἀεροστάθμην μετὰ διόπτρας κατὰ τὸ ἀγγλικὸν σύστημα, τὸ ὁποῖον σύγκειται ἐκ μιᾶς ἀεροστάθμης καθηλωμένης ἐπὶ διόπτρας. Ἡ διττὴ ὄψις τῆς ἀεροστάθμης ταύτης χρησιμοποιεῖ τὴν διόπτραν ΔΔ καὶ ὡς ἀεροστάθμην τοῦ κ. *Egault*. Τῆς τοιαύτης δὲ διατάξεως χρῆσις γίνεται πρὸς προσδιόρισιν μετὰ μεγίστης ἀκριβείας τοῦ ὑψομέτρου σημείων τινῶν. Τὸ Σχ. 164 παριστᾷ τὸ ταχυμέτριον κατὰ τὸ πέμπτον τοῦ φυσικοῦ μεγέθους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 152. Ῥύθμισις τῶν ἐργαλείων. Πρὶν ἢ ποιήσωμεν χρῆσιν μετρητικοῦ τινος ἐργαλείου, ἀνάγκη εἶναι ἐν πρώτοις νὰ δοκιμάσωμεν, ἐὰν ἕκαστον συστατικὸν μέρος αὐτοῦ ἐκπληροῖ τὰς ἀναλόγους καὶ ἀναγκαίας συνθήκας πρὸς ἐπιτυχίαν τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐργαλείου προσδοκωμένου ἀποτελέσματος. Τὸ σύνολον τῶν μερικῶν τούτων δοκιμῶν συνιστᾷ τὴν ῥύθμισιν τοῦ ἐργαλείου.

Περὶ τῶν προφυλάξεων, αἵτινες δέον νὰ προηγηθῶσι τῆς ῥυθμίσεως. Πρὶν ἢ ῥυθμίσωμεν ἐργαλεῖόν τι, ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ἐὰν, αἱ μὲν περῶναι, αἱ διὰ τὴν παρεμπόδισιν τῆς περιστροφικῆς κινήσεως προωρισμέναι (Ἐφαρμ. 21, 24, 28, 45, καὶ 67), περιπτύσσωσιν ἀκριβῶς τοὺς κύκλους, αἱ δὲ παρειαὶ τῶν σφαιριδίων, τὰ ὁποῖα ἐπέχουσι τόπον περικοχλίου, ἐὰν καταλλήλως συμπλησιάζωσιν. Ἐπειδὴ, ἐὰν ταῦτα οὕτως ἔχωσι, τότε ἡ ἀνακλητικὴ ὡς καὶ ἡ αὐθαίρετος περιστροφικὴ κίνησις τῶν μερῶν εὐκόλως γίνονται, καὶ σὐδεμία παρακύλησις τῶν κοχλιῶν λαμβάνει χώραν καθ' ὃν χρόνον ἐξασκοῦμεν προσπάθειάν τινα ἐπὶ τῶν κύκλων· ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ διακοπὴ ὡς καὶ ἡ μετάδοσις τῆς κινήσεως τῶν συστατικῶν μερῶν τοῦ ἐργαλείου ἐπιτυγχάνει δεόντως.

Ὁπόταν τὸ ἐργαλεῖον ἦναι διευθετημένον, τὰ σκέλη τοῦ τρίποδος ἀνάγκη νὰ διασκελίζωσιν ἱκανὴν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἔκτασιν, ἵνα οὕτω χορηγηθῇ αὐτῷ στερεὰ βάσις. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ πινακὶς τοῦ τρίποδος ἀνάγκη νὰ ἦναι ὡς ἔγγιστα ὁριζόντειος· ἐπειδὴ οὕτω διευκολύνεται ἡ διευθέτησις· αἱ δὲ ἀκίδες τῶν σκελῶν νὰ ἐμπηγνύωνται ἀσφαλῶς ἐπὶ τοῦ ἐδάφους (Σχ. 51, 74 καὶ 58), ἵνα, διὰ τῆς συσφίξεως τοῦ πτερυγιωτοῦ περικοχλίου ἑκάστου κοχλίου, ὅστις διαπερᾷ τὴν πινακίδα καὶ τὸ σκέλος τοῦ τρίποδος, ἐπιτύχωμεν τὸ ἀναπόσπαστον τοῦ ἐργαλείου μετὰ τοῦ τρίποδος.

Ἐπὶ τέλους, ἵνα ἀναγινώσκωμεν ταχέως, συνάμα δὲ καὶ ἀσφαλῶς τὰ βαθμολογημένα μέρη τοῦ ἐργαλείου, ἀνάγκη εἶναι ἡ ἀργυρᾶ λωρὶς, ἐπὶ τῆς ὁποίας συνήθως ἐκτελεῖται ἡ βαθμολόγησις, νὰ διατηρῆται καθαρά. Πρὸς τοῦτο, ἐκ διαλειμμάτων δι' ἀπαλοῦ πανίου, προστρίβομεν τὴν βαθμολόγησιν καθέτως πρὸς τὰς διαιρέσεις, ἵνα ὡς ἐκ τῆς προστριβῆς μὴ προκύψωσι ῥαβδώσεις κατὰ τὴν διεύθυνσιν αὐτῶν.

Αἱ προφυλάξεις αὗται ἐπὶ τοσοῦτον πρέπει νὰ λαμβάνωνται οὐσιωδῶς ὑπ' ὄψιν, ἐφ' ὅσον ἡ διάρκεια τῶν παρατηρήσεων, τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ γενομένων, εἶναι παρατεταμένη.

Διευθέτησις, στῆσις, στάθμευσις ἢ τοποθέτησις ἐργαλείου. Ὑπὸ τοὺς ὅρους τούτους ἐννοοῦμεν τὴν πρᾶξιν, ἥτις χορηγεῖ εἰς τὰ συστατικὰ μέρη τοῦ ἐργαλείου τὴν κατάλληλον θέσιν, δι' ἧς ἐπιτυγχάνεται τὸ ἀπὸ τοῦ ἐργαλείου προσδοκώμενον ἀποτέλεσμα. Ὑπὸ τοὺς ὅρους δὲ, ῥύθμισις, κανόνισις ἢ ἐπανόρθωσις ἐργαλείου, ἐννοοῦμεν τὴν δοκιμὴν τῆς ἐν λόγῳ πράξεως.

Ἐν τῇ §. 16 ἀνεφέραμεν τὴν διευθέτησιν καὶ τὴν ῥύθμισιν τῶν ἐργαλείων τῆς χωροσταθμήσεως· ἐν τῇ §. 18 καὶ 23, τὴν διευθέτησιν τῶν γωνιομέτρων καὶ τῆς τραπέζης· μένει λοιπὸν νὰ πραγματευθῶμεν περὶ τῆς ῥυθμίσεως τῶν γωνιομέτρων. Ἀλλ' ἐκ τῶν γωνιομέτρων τὸ περιπλοκώτερον εἶναι τὸ ταχυμέτριον· περιγράφοντες λοιπὸν τὴν ῥύθμισιν τοῦ τελευταίου τούτου, βέβαιον εἶναι ὅτι δίδομεν ἀκριβῆ ἰδέαν τῆς πράξεως, δι' ἧς ἐκτελεῖται ἡ ῥύθμισις τῶν γωνιομέτρων ἐν γένει.

Ῥύθμισις τοῦ ταχυμετρίου. Ἡ ῥύθμισις τοῦ ἐργαλείου τούτου ἐκτελεῖται κατὰ τὴν ἀκόλουθον τάξιν. Κατὰ τὴν ἐφαρμ. 24 καὶ 25, ῥυθμίζομεν τὴν ἀεροστάθμην α (Σχ. 164), καὶ ἔπειτα διευθετοῦμεν ὁριζοντείως τὸν κύκλον ΚΚ, κατακορύφως δὲ τὸν

ἄξονα τοῦ ἐργαλείου. Τούτου γενομένου, ῥυθμίζομεν τὸ μὲν μικρόμετρον τῆς διόπτρας ΔΔ κατὰ τὴν Ἐφαρμ.96, τὴν δὲ θέσιν αὐτοῦ ῥυθμίζομεν οὕτως, ὥστε τὸ μεσαῖον νῆμα νὰ ἦναι ὁριζόντιον. Ἀκολούθως ῥυθμίζομεν τὸν βερνιέρον τοῦ κατακορύφου κύκλου Κ′Κ′, τὴν κατακόρυφον περιστροφικὴν κίνησιν τῆς διόπτρας ΔΔ, καὶ ἐπὶ τέλους, ῥυθμίζομεν τὴν πυξίδα Μ διὰ τοῦ κοχλίου ε καὶ τῆς Ἐφαρμ.67.

Ῥύθμισις τῆς ὁριζοντείου θέσεως τοῦ μικρομέτρου. Ἀφοῦ ἐκτελέσωμεν τὰ ἐν τῇ Ἐφαρμ.96 λεχθέντα ῥυθμίζομεν τὴν θέσιν τοῦ μικρομέτρου οὕτως, ὥστε τὸ μεσαῖον αὐτοῦ νῆμα νὰ ἦναι ὁριζόντειον, ἐν περιπτώσει καθ' ἣν τὰ προσκεφάλαια τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς τῆς διόπτρας ΔΔ εὑρίσκονται ἐπὶ ὁριζοντείου ἐπιπέδου. Πρὸς τοῦτο, κατευθύνομεν τὸ κατακόρυφον νῆμα τοῦ μικρομέτρου πρὸς τὸ κατακορύφως ἱστάμενον ὑψομέτριον, καὶ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῆς διαχωριζούσης τὰς μεγάλας ἀπὸ τὰς μικρὰς διαιρέσεις τῆς βαθμολογήσεως αὐτοῦ, καὶ παρατηροῦμεν ἐὰν τὸ νῆμα ἀκολουθῇ τὴν γραμμὴν ταύτην, περιστρεφομένης τῆς διόπτρας κατακορύφως. Ἐὰν ὅμως τὸ τοιοῦτον δὲν λαμβάνῃ χώραν, τότε περιστρέφομεν τὸν σωλῆνα τῆς διόπτρας κατά τινα βήματα τοῦ κοχλίου, καὶ οὕτως ἀποκαθιστῶμεν τὴν συνταύτισιν μεταξὺ τοῦ νήματος καὶ τῆς ἐν λόγῳ γραμμῆς. Ἔπειτα, συσφίγγομεν τὰ δύο μέρη τῆς διόπτρας, ἀφοῦ κρατήσωμεν ἀμετακινήτως τὸ προσοφθάλμιον μέρος αὐτῆς, τὸ δὲ ἀντικείμενικὸν περιστρέψωμεν.

Ῥύθμισις τοῦ βερνιέρου τοῦ κατακορύφου κύκλου. Ἡ πρᾶξις αὕτη συντελεῖ εἰς τὸ νὰ συμπίπτῃ ἡ ἀφετηρία γραμμὴ τοῦ βερνιέρου μετὰ τῆς διαιρέσεως 100^{β} τοῦ κύκλου, ὅταν ἡ διὰ τοῦ μεσαίου νήματος τῆς διόπτρας διερχομένη ὀπτικὴ ἀκτὶς ἦναι ὁριζόντειος. Τούτου τεθέντος, ἀφοῦ ἀποπερατώσωμεν τὴν προαναφερθεῖσαν ῥύθμισιν καὶ χωρὶς ποσῶς νὰ μετακινήσωμεν τὸ ταχυμέτριον οὐδὲ τὸ ὑψομέτριον, ἐνεργοῦμεν τὴν ἐν λόγῳ ῥύθμισιν ὡς ἑξῆς·

Ταυτίζομεν τὴν διαίρεσιν μηδὲν τοῦ βερνιέρου μετὰ τῆς διαιρέσεως 100^{β}, κατευθύνομεν τὸ μεσαῖον νῆμα ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου σημειοῦμεν, διὰ διακριτικοῦ τινος σημείου, τὸ σημεῖον τῆς ῥιπῆς. Ἔπειτα, περιστρέφομεν κατὰ ἡμιπεριφέρειαν τὴν διόπτραν ΔΔ, ἐπίσης καὶ τὸν κύκλον ΚΚ, καὶ ἐπαναφέρομεν οὕτω τὴν διόπτραν πρὸς τὸ ὑψομέτριον. Τούτου γενομένου, ταυτίζομεν τὴν διαίρεσιν 0^{β} τοῦ βερνιέρου μετὰ τῆς διαιρέσεως 300^{β} τοῦ κατακορύφου κύκλου Κ′Κ′,

καὶ σημειοῦμεν ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου τὸ οὕτως λαμβανόμενον νέον σημεῖον τῆς ῥιπῆς. Ἐὰν λοιπὸν τὰ ἐκ τῶν δύο παρατηρήσεων προκύπτοντα σημεῖα τῆς ῥιπῆς συμπίπτωσι, τότε βέβαιον εἶναι ὅτι ἡ ζητουμένη συνθήκη ἐκπληροῦται. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, σημειοῦμεν τὸ μέσον τῆς μεταξὺ τῶν σημείων τούτων ἀποστάσεως, κατευθύνομεν τὸ μεσαῖον νῆμα πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο, διὰ τοῦ ἀνακλητικοῦ κοχλίου ρ, ὅστις συμπαρασύρει τὸν κύκλον, καὶ ἔπειτα, διὰ τοῦ ἐπανορθωτικοῦ κοχλίου Ε, ἐπαναφέρομεν τὴν διαίρεσιν 0^{β} τοῦ βερνιέρου ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 300^{β}. Τῆς πράξεως ταύτης μετ' ἀκριβείας γενομένης, ἐὰν ἐπαναφέρωμεν τὴν διόπτραν εἰς τὴν θέσιν, ἣν κατεῖχε κατὰ τὴν πρώτην παρατήρησιν, τότε ἐπόμενον εἶναι ὅτι ἡ διόπτρα θέλει ὑποδείξει τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ῥιπῆς.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι, τὸ διὰ τῆς τοιαύτης ἐργασίας καὶ ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου προσδιοριζόμενον σημεῖον τῆς ἐπανορθώσεως, οὐδόλως προσδιορίζει τὴν διὰ τῆς διόπτρας διερχομένην ὁριζόντειον, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦτο προσδιωρίσθη ἀνεξαρτήτως τῆς ἀεροστάθμης. Τούτου ἕνεκεν ἡ ἐν λόγῳ ῥύθμισις δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ ὑφ' ὁπωσανδήποτε κλίσιν καὶ εἰς ὁποιονδήποτε σημεῖον καὶ ἂν εὑρίσκηται διευθετημένον τὸ ἐργαλεῖον, ἀρκεῖ μόνον ἀπὸ τοῦ ἐργαλείου νὰ δυνάμεθα νὰ σκοπεύωμεν ὡρισμένον τι σημεῖον καὶ εἰς ἱκανὴν ἀφ' ἡμῶν ἀπόστασιν εὑρισκόμενον, ἵνα ἡ διπλῆ παρατήρησις ἐπιφέρῃ ἐπαισθητὴν διαφορὰν ἐπὶ τῶν ἐξαγομένων. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ὡς σκοπὸς δύναται νὰ χρησιμεύσῃ (Ἐφαρμ. 17) ὁ σταυρὸς κωδωνοστασίου, ἡ καπνοδόχη οἰκίας, καὶ ἐν ἀνάγκῃ ὡς σκοπευτικὸν σημεῖον δύναται νὰ ληφθῇ διακριτικόν τι σημεῖον ἐπὶ βράχου, δένδρου, οἰκοδομῆς, κτλ. Ἡ δὲ ῥύθμισις γίνεται ὡς ἑξῆς·

Διευθετοῦμεν ὁριζοντείως τὸ ταχυμέτριον, κατευθύνομεν πρὸς τὸ σκοπευτικὸν σημεῖον τὴν διόπτραν, καὶ ποιοῦμεν τὴν πρώτην παρατήρησιν ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου ἀναγινώσκοντες· μετ' ἀκριβείας τὴν κατακόρυφον γωνίαν. Τούτου γενομένου, περιστρέφομεν τὸν ὁριζόντιον κύκλον κατὰ ἡμιπεριφέρειαν, ἐπαναφέρομεν τὴν διόπτραν ἐκ δευτέρου ἐπὶ τὸ σημεῖον τῆς σκοπεύσεως, καὶ ἀναγινώσκομεν τὴν οὕτω προκύπτουσαν κατακόρυφον γωνίαν, ἣν καταγράφομεν κάτωθεν τούτων τῆς πρώτης. Ἔπειτα, ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τούτων ἀφαιροῦμεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν, ἤτοι 200 βαθμούς, καὶ τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς ταύτης θέλει ὑποδείξει τὴν διαίρεσιν τοῦ κύκλου, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν ὁριζόντειον. Ἐὰν τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς

τῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ 100 βαθμοὺς, τότε βέβαιον εἶναι ὅτι ἡ ζητουμένη συνθήκη ἐκπληροῦται. Ἐὰν ὅμως ἦναι μεγαλειτέρα ἢ μικροτέρα τῶν 100^{6}, τότε ἡ ρύθμισις ἐκτελεῖται διὰ τοῦ κοχλίου Ε.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐκ μὲν τῆς πρώτης παρατηρήσεως προκύπτει ἡ κατακόρυφος γωνία $74^{6},47$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, ἡ γωνία $324^{6},76$· τότε ἐκ τοῦ ἀθροίσματος $399^{6},23$ τῶν γωνιῶν τούτων ἀφαιροῦμεν 200 βαθμοὺς καὶ λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ $99^{6},615$ τῆς οὕτω προκυπτούσης διαφορᾶς $199^{6},23$. Λοιπὸν, ἡ διαίρεσις $99^{6},615$ τοῦ κύκλου ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ὁριζόντειον τῆς διόπτρας θέσιν. Ἵνα δὲ συμπέσῃ ἡ διαίρεσις 100^{6} τοῦ κύκλου μὲ τὴν ἀφετηρίαν τοῦ βερνιέρου, ἀρκεῖ νὰ μετακινήσωμεν τὸν βερνιέρον διὰ τοῦ κοχλίου Ε, κατὰ $0^{6},385$, ἤτοι κατὰ τὴν διαφορὰν τὴν ὑπάρχουσαν μεταξὺ τῆς γωνίας $99^{6},615$, τῆς ὑπὸ τῆς προηγουμένης ἐργασίας προκυψάσης καὶ τῆς γωνίας 100 βαθμῶν.

Αἱ διὰ τὴν ρύθμισιν τοῦ βερνιέρου προρρηθεῖσαι πράξεις ὑποθέτουσιν ὅτι ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς τοῦ κύκλου διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τοῦ κύκλου διέρχεται. Ὅθεν, ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὰς δύο παρατηρήσεις ὑπὸ διαφόρους κλίσεις, καὶ εὕρωμεν ὡς ἐξαγόμενον τὴν αὐτὴν γωνίαν διὰ τὴν ὁριζόντειον, τότε ἐπόμενον εἶναι ὅτι ἡ συνθήκη αὕτη ἐκπληροῦται· ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ἐργαλεῖον εἶναι κακῶς κατεσκευασμένον.

Ἐλαττοῦμεν δὲ τὰ ὡς ἐκ τῆς κακῆς κατασκευῆς προερχόμενα σφάλματα, ἐνεργοῦντες οὕτως ὡς νὰ ἐδοκιμάζομεν τὸν παραλληλισμὸν τῶν δύο ὀρθοστατῶν Σ καὶ Σ (Σχ. 52), τῆς ἀεροστάθμης τοῦ *Egault*. Ἐκτελοῦμεν δὲ τὴν πρᾶξιν ταύτην ὡς ἑξῆς·

Ἐκλέγομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους δύο σημεῖα ἀπ' ἀλλήλων ἀπέχοντα κατὰ 200 μέτρα, καὶ εἰς τὸ αὐτὸ, ὡς ἔγγιστα ὕψος κείμενα. Ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τούτων διευθετοῦμεν τὸ ταχυμέτριον καὶ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου στηρίζομεν κατακορύφως τὸ ὑψομέτριον. Τούτου γενομένου, περιορίζομεν τὴν φυσαλίδα τῆς ἀεροστάθμης α (Σχ. 164) μεταξὺ τῶν ἀναφορικῶν της σημείων, ταυτίζομεν τὴν διαίρεσιν 100^{6} τοῦ κύκλου μετὰ τῆς ἀφετηρίας τοῦ βερνιέρου, ἔπειτα ἀναγινώσκομεν ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου τὴν ῥιπὴν τοῦ μεσαίου νήματος τῆς διόπτρας καὶ μετροῦμεν ἀκριβῶς τὸ ὕψος εἰς ὃ εὑρίσκεται ὁ ἄξων τῆς διόπτρας ἄνω τοῦ σημείου ἐφ' οὗ σταθμεύει τὸ ἐργαλεῖον. Τούτου γενομένου, ἀνταλλάσσομεν τὴν θέσιν τοῦ ταχυμετρίου μὲ τὴν τοῦ ὑψομετρίου καὶ ἐπαναλαμβάνομεν ἐκ τῆς νέας ταύτης θέσεως τὰ αὐτὰ ὡς καὶ προηγουμένως.

Ἀθροίζομεν ἀφ' ἑνὸς τὰ ὕψη τοῦ ταχυμετρίου, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὰ ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου ἀναγνωσθέντα ὕψη, καὶ ἐὰν τὰ οὕτω λαμβανόμενα ἀθροίσματα ὦσιν ἴσα πρὸς ἄλληλα ἐπόμενον εἶναι ὅτι ἡ ἀφετηρία τοῦ βερνιέρου συμπίπτει μετὰ τῆς διαιρέσεως 100^{6} τοῦ κύκλου· ἐν ἐναντίᾳ δὲ περιπτώσει ἡ διαφορὰ τῶν ἐν λόγῳ ἀθροίσεων θέλει ὑποδείξει τὸ διπλοῦν τῆς παρεκτροπῆς.

Πρὸς ἐπανόρθωσιν δὲ τῆς παρεκτροπῆς ταύτης, σημειοῦμεν ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου τὸ σημεῖον, καθ' ὃ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη ἡ διαφορὰ αὕτη, καὶ ἐπαναφέρομεν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τὸ μεσαῖον νῆμα τῆς διόπτρας ἐνεργοῦντες ἐπὶ τῶν ἰσοπεδοτικῶν κοχλιῶν τοῦ βάθρου τοῦ ἐργαλείου. Ἐν τῇ περιπτώσει ὅμως ταύτῃ, ἐπειδὴ ἡ φυσαλὶς μετατοπίζεται, ἐπαναφέρομεν αὐτὴν μεταξὺ τῶν ἀναφορικῶν της σημείων, ἐνεργοῦντες ἐπὶ τοῦ ἐπανορθωτικοῦ κοχλίου Ε τοῦ βερνιέρου (Σχ. 164). Διὰ πλειοτέραν ἀκρίβειαν ἡ πρᾶξις αὕτη πολλάκις ἐπαναλαμβάνεται.

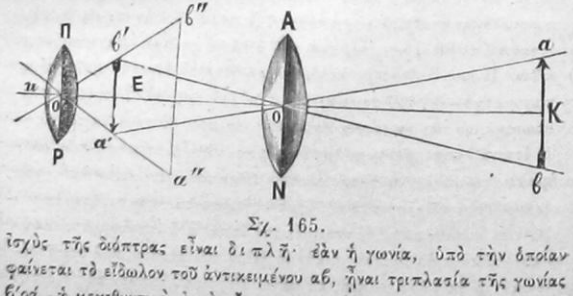
Ῥύθμισις τῆς κατακορύφου κινήσεως τῆς διόπτρας. Ἡ ρύθμισις αὕτη γίνεται ὡς ἡ τοῦ γνώμονος μετὰ διόπτρας (Ἐφαρμ. 90)· συνήθως ὅμως γίνεται οὕτως· ἐκλέγομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους σημεῖόν τι σταθμεύσεως τοιοῦτον, ὥστε νὰ εὑρίσκηται εἰς ἱκανὴν ἀπόστασιν ἀπό τινος κτιρίου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑπάρχει διακριτικόν τι σημεῖον. Τούτου τεθέντος, διευθετοῦμεν ὅσον τὸ δυνατὸν ὁριζοντείως τὸ ταχυμέτριον ἐπὶ τοῦ σημείου τῆς σταθμεύσεως, τὸ δὲ σημεῖον τῆς διασταυρώσεως τῶν νημάτων κατευθύνομεν πρὸς τὸ σημεῖον τοῦ κτιρίου· ἔπειτα, περιστρέφομεν κατακορύφως τὴν διόπτραν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω καὶ σημειοῦμεν πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κτιρίου τὴν ῥιπὴν τῆς διασταυρώσεως τῶν νημάτων. Τούτου γενομένου, περιστρέφομεν τὸν ὁριζόντειον κύκλον κατὰ ἡμιπεριφέρειαν, τὴν δὲ διόπτραν κατευθύνομεν καὶ πάλιν πρὸς τὸ διακριτικὸν σημεῖον τοῦ κτιρίου, καὶ περιστρέφομεν αὐτὴν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, μέχρις οὗ ἴδωμεν τὸ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κτιρίου σημειωθὲν σημεῖον. Τοῦτο δὲ κατορθοῦμεν ἀνυψοῦντες ἢ χαμηλοῦντες τὸ προσκεφάλαιον τ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 135. Μεγεθυντικὴ ἰσχὺς διόπτρας τινός, ο, τὸ ὀπτικὸν **AN** (Σχ. 165), ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς διόπτρας τινός, ο, τὸ ὀπτικὸν αὐτοῦ κέντρον (Ἐφαρμ. 25), καὶ αβ, ἀπομεμακρυσμένον τι ἀντικείμενον. Ἐκ τοῦ σημείου α ἀχθήτω πρὸς τὸ κέντρον ο ἡ γραμμὴ αφά· ἐπὶ τῆς γραμμῆς ταύτης, κατὰ τὴν ὀπτικὴν, θέλουσι συνέλθει αἱ ἐκ τοῦ σημείου α ἐκπεμπόμεναι ἡλιακαὶ ἀκτῖνες, αἱ ἐπαισθητῶς πα-

ράλληλοι. Ὁμοίως, ἐπὶ τῆς γραμμῆς δεβ′ θέλει σχηματισθῆ ἡ ἑστία τῶν παραλλήλων ἀκτίνων, τῶν ἐκ τοῦ σημείου β ἐκπεμπομένων.

Τὸ εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου αβ, τὸ ἐν τῇ ἑστίᾳ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ σχηματισθησόμενον, θέλει εἶναι τὸ β′ά, καὶ τὸ ἀπομεμακρυσμένον ἀντικείμενον αβ θέλει παρατηρηθῆ, διὰ τοῦ γυμνοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ εὐρισκομένου εἰς τὸ ὀπτικὸν κέντρον ο τοῦ φακοῦ ΑΝ, ὑπὸ τὴν γωνίαν αοβ, ἢ ὑπὸ τὴν ἐκ κορυφῆς ἀντικειμένην γωνίαν β′οά.

Ἔστω ΠΡ ὁ προσοφθάλμιος φακὸς καὶ εἰς τοιαύτην εὑρισκόμενος θέσιν, ὥστε τὸ εἴδωλον β′ά νὰ κατέχῃ τὴν ἑστίαν αὐτοῦ, καὶ ἔστω ο′ τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ φακοῦ τούτου. Τὸ εἴδωλον β′ά θέλει παρατηρηθῆ ὑπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ εὑρισκομένου ὄπισθεν τοῦ προσοφθαλμίου οὕτως, ὡς νὰ εὑρίσκηται ὁ ὀφθαλμὸς εἰς τὸ σημεῖον ό, τουτέστε θέλει παρατηρηθῆ ὑπὸ τὴν γωνίαν β′όά. Τούτου τεθέντος, ὁ λόγος τῆς γωνίας β′όά πρὸς τὴν γωνίαν β′οά ἐκφράζει τὴν μεγεθυντικὴν ἰσχὺν τῆς διόπτρας· οὕτω π.χ. ἐὰν τὸ διὰ τῆς διόπτρας ὁρώμενον ἀντικείμενον αβ φαίνηται εἰς τὴν θέσιν β′′ά′, καὶ ὑπὸ γωνίαν β′′όά′ διπλασίαν τῆς γωνίας αοβ, ἢ τῆς άοβ′, τότε ἡ μεγεθυντικὴ



Σχ. 165.

ἰσχὺς τῆς διόπτρας εἶναι διπλῆ· ἐὰν ἡ γωνία, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται τὸ εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου αβ, ἦναι τριπλασία τῆς γωνίας β′οά, ἡ μεγεθυντικὴ ἰσχὺς ἔσεται τριπλῆ. Ἐπὶ τέλους, ἐὰν τὸ εἴδωλον φαίνηται ὑπὸ γωνίαν ἑξηκονταπλασίαν τῆς γωνίας άοβ′, τότε ἡ μεγεθυντικὴ ἰσχὺς τῆς διόπτρας ἔσεται ἑξηκονταπλῆ· καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἀλλ' ἡ β′ά εἶναι κοινὴ χορδὴ τῶν γωνιῶν β′οά καὶ β′όά· ὅθεν (§. 11. Θεώρ. 6) ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\text{γων.}\beta'\acute{o}\acute{a} : \text{γων.}\beta'o\acute{a} = Eo : Eo' \ldots . [\alpha]$$

ἐξ ἧς προκύπτει ἡ ἔκφρασις,

$$\text{μεγεθυντ. ἰσχὺς} = \frac{\text{γων. } \beta'\acute{o}\acute{a}}{\text{γων. } \beta'o\acute{a}} = \frac{Eo}{Eo'},$$

εἰς τὴν ὁποίαν ἡ Eo καὶ Eo′ ἐκφράζει τὴν ἀπόστασιν τοῦ εἰδώλου α′β′, ἢ τῆς ἑστίας E, ἐξ ἑκατέρου τῶν φακῶν ΑΝ καὶ ΠΡ.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ καταμέτρησις τῆς ἀποστάσεως τῆς ἑστίας φακοῦ τινος ἐν τῇ πράξει εἶναι ἐπίπονος, τούτου ἕνεκα γίνεται χρῆσις τῶν ἑξῆς κανόνων, τῶν ἀποδεικνυομένων ἐν τῇ ὀπτικῇ, πρὸς εὕρεσιν τῆς μεγεθυντικῆς ἰσχύος διόπτρας.

ά.) «Ἡ εὐθύγραμμος μεγεθυντικὴ ἰσχὺς διόπτρας ἰσοῦται πρὸς τὸ » πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς διαμέτρου τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ διὰ » τῆς διαμέτρου, τῆς διὰ τοῦ προσοφθαλμίου διερχομένης δέσμης » τῶν ἀκτίνων.»

β′.) «Ἡ κατ' ἐπιφάνειαν μεγεθυντικὴ ἰσχὺς διόπτρας ἰσοῦται πρὸς » τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν προρρηθεισῶν διαμέτρων, ἢ πρὸς τὸν » λόγον τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κύκλων, τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς » διαμέτρους ταύτας.»

Ἐκ τῆς ἀναλογίας [α] ἕπεται ὅτι, «ἡ ὑποτεινομένη γωνία ὑπό » τινος ἀντικειμένου εἶναι ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ τῆς ἐκ τοῦ ὀφθαλμοῦ » ἀποστάσεως τοῦ ἀντικειμένου.»

Ἐκ δὲ τοῦ κανόνος β′ ἕπεται ὅτι, «αἱ διαστάσεις τοῦ προσοφθαλμίου » φακοῦ εἰσιν ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ τῆς μεγεθυντικῆς ἰσχύος.»

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 134. Ὁρίζων διόπτρας. Ἐὰν ἀγάγωμεν ἐκ τῶν ἄκρων Π καὶ Ρ τοῦ προσοφθαλμίου φακοῦ ΠΡ καὶ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου ο, τοῦ ἀντικειμενικοῦ αβ θέλει σχηματισθῆ εἰς τὴν θέσιν ά6′. Τούτου τεθέντος, εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ σημεῖα τὰ μᾶλλον μεμακρυσμένα τῆς κεντρικῆς γραμμῆς κΚ παρὰ τὰ σημεῖα α καὶ β θέλουσι σχηματισθῆ ἐπὶ τοῦ εἰδώλου, κάτωθεν τοῦ σημείου ά, ἄνωθεν δὲ τοῦ σημείου β′· ὅθεν, αἱ ἀκτῖνες, αἱ ἐκπεμπόμεναι ἐκ τῶν σημείων τοῦ ἀντικειμένου ἄνωθεν τοῦ σημείου α, κάτωθεν δὲ τοῦ σημείου β, δὲν θέλουσι φθάσει εἰς τὸν προσοφθάλμιον φακὸν μετὰ τὴν περὶ τὸ κέντρον ο διασταύρωσιν αὐτῶν, καὶ τούτου ἕνεκα θέλουσιν εἶναι ἀόρατα.

Τὸ διπλάσιον τῆς σχηματιζομένης γωνίας ὑπὸ τοῦ ἄξονος κΚ καὶ τῆς γραμμῆς οα ἐκφράζει τὴν φωνιώδη ἔκτασιν τῶν ἀντικειμένων, κατὰ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ παρατηρῶμεν αὐτὰ ἐντὸς τῆς διόπτρας, καὶ καλεῖται ἡ γωνία αὕτη αοβ, ὁρίζων τῆς διόπτρας.

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων ἕπεται ὅτι ά) ὁ ὁρίζων τῆς διόπτρας μεταβάλλεται μὲ τὰς διαστάσεις τοῦ προσοφθαλμίου φακοῦ, ἢ μᾶλλον, ὁ ὁρίζων ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀνοίγματος τοῦ δακτυλίου,

τοῦ περιζωννύοντος τὸν φακὸν τοῦτον, ἢ τὸ ἄκρον δὸ τοῦ σωλῆνος γδδγ τῆς διόπτρας (Ἐφαρμ. 25. Σχ. 50). 6'.) Ὁ ὁρίζων διόπτρας τινὸς μεταβάλλεται μὲ τὴν μεγεθυντικὴν ἰσχὺν αὐτῆς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 135. Ἀχρωματισμὸς τῶν διοπτρῶν. Τὰ ἐντὸς τῶν διοπτρῶν σχηματιζόμενα εἴδωλα τῶν ἀντικειμένων ἀποδίδονται εἰς τὸ πρισματικὸν σχῆμα τῶν συστατικῶν μερῶν τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ· ἐπειδὴ, διὰ τῆς τοιαύτης διατάξεως, ἡ δέσμη τῶν παραλλήλων ἀκτίνων, διὰ τοῦ φακοῦ τούτου διερχομένη, θλᾶται καὶ τείνει νὰ ἀπαντήσῃ τὸν ἄξονα εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἐνῷ ὅταν ὁ φακὸς δὲν ἦναι πρισματικῶς, ἐν τῇ ἑστίᾳ αὐτοῦ εἴδωλον δὲν ὑπάρχει. Ἀλλ' αἱ συνιστῶσαι τὸ λευκὸν ἢ ἡλιακὸν φῶς ἀκτῖνες, ἐπειδὴ (κατὰ τὴν φυσικὴν), ὅταν διά τινος φακοῦ διέρχωνται, θλῶμεναι ἀποσυντίθεται εἰς ἑπτὰ ἁπλᾶ χρώματα ἀνίσου διαθλαστικότητος, καὶ τείνουσι νὰ ἀπαντήσωσι τὸν ἄξονα εἰς πλεῖστα σημεῖα, τουτέστιν εἰς πλείστας ἑστίας, ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι εἰς τὸ σύνολον τοῦ ὑπὸ τοῦ φακοῦ παραγομένου εἰδώλου προκύπτει σύγχυσις. Προλαμβάνεται δὲ ἡ ἀλλοίωσις τοῦ εἰδώλου διὰ τῶν ἀχρωματικῶν φακῶν.

Οἱ ἀχρωματικοὶ φακοὶ σύγκεινται ἐκ τῆς ἑνώσεως δύο διαφόρων φακῶν, ἀποτελουμένων ἐκ δύο διαφόρου διαθλαστικότητος οὐσιῶν. Ἐκ τῶν φακῶν τούτων, ὁ μὲν εἶναι ἀμφίκυρτος καὶ ἀποτελεῖται ἐκ συνήθους ὑάλου *(crown—glass)*, ὁ δὲ εἶναι ἐπιπεδόκοιλος ἢ κυρτόκοιλος, καὶ ἀποτελεῖται ἐκ κρυστάλλου περιέχοντος ἱκανὴν ποσότητα μυλύβδου *(flint glass)*, καὶ ἔχει κοινὸν ἄξονα μὲ τὸν πρῶτον. Ἡ κοίλη ἐπιφάνεια τοῦ ἑνὸς ταυτίζεται ἀκριβῶς μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἑτέρου φακοῦ, αἱ δὲ καμπυλότητες αὐτῶν προσδιορίζονται οὕτως, ὥστε αἱ μικραὶ δέσμαι τῶν ἀκτίνων, αἱ διὰ τοῦ συνόλου τῶν δύο φακῶν διερχόμεναι, νὰ ἐξέρχωνται ὅλως λευκαί. Ἡ διάμετρος τῶν ἀντικειμενικῶν ἀχρωματικῶν φακῶν, μέχρι τινός, ἐλαμβάνετο ἴση τῷ $\frac{1}{12}$ τῆς ἀποστάσεως τῆς ἑστίας τοῦ φακοῦ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 136. Πολλαπλῆ παρωπὶς ἐν ταῖς διαστημετρικαῖς διόπτραις (Ἐφαρμ. 92. §. 23). Καθ' ὅσα ἀνεφέραμεν ἐν τῇ Ἐφαρμ. 153 καὶ 154 εἶναι φανερὸν ὅτι, τὸ μέγεθος τῆς διαστημετρικῆς γωνίας, ἐν τοῖς διαστημετρίοις, καὶ ἐν γένει, τὸ διαχωριζόμενον διάστημα ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου, τοῦ εἰς γνωστήν τινα ἀπὸ τοῦ ἐργαλείου ἀπόστασιν εὑρισκομένου, εἶναι ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ τῆς μεγεθυντικῆς ἰσχύος διὰ τὰς διαφόρου μεγέθους διόπτρας. Τὸ μῆκος

τῶν διαιρέσεων τοῦ ὑψομετρίου, αἵτινες παριστῶσι τὴν μονάδα τῆς ἀποστάσεως (Ἐφαρμ. 94, §. 23), θέλει εἶναι ἐπίσης ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ τῆς μεγεθυντικῆς ἰσχύος· λοιπὸν, αὐξανομένης τῆς ἰσχύος τῆς διόπτρας, δυνάμεθα μὲν νὰ βραχύνωμεν ἀναλόγως τὰς διαιρέσεις τοῦ ὑψομετρίου, οὐχὶ δὲ καὶ νὰ ἐπεκτείνωμεν τὴν προσέγγισιν τῆς καταμετρήσεως τῆς ἀποστάσεως.

Διὰ τὴν ἐπίκτασιν τῆς προσεγγίσεως καὶ διὰ τὴν δοκιμὴν τῆς καταμετρήσεως τῆς ἀποστάσεως γίνεται χρῆσις ἰσχυρῶν διοπτρῶν μετὰ πολλαπλῆς παρωπίδος. Συνήθως δὲ γίνεται χρῆσις τῆς τριπλῆς παρωπίδος, τῆς ὁποίας τὸ μικρόμετρον φέρει ἑπτὰ ὁριζοντείους χαραγὰς καὶ μίαν κατακόρυφον (Ἐφαρμ. 93).

Αἱ τρεῖς αὗται παρωπίδες ἀποτελοῦνται ἐκ τριῶν λεπτοτάτων ὀπῶν, γενομένων ἐπὶ τῆς κυκλικῆς πλακὸς 66 (Σχ. 50, §. 16), τῆς εὑρισκομένης εἰς τὸ προσοφθάλμιον τῆς διόπτρας.

Ἐκ τῶν τριῶν παρωπίδων, τῆς μεσαίας ὁ ὁρίζων περιλαμβάνει τὰς τρεῖς μεσαίας χαραγὰς τοῦ μικρομέτρου, ἑκατέρας δὲ τῶν δύο ἄλλων, περιλαμβάνει τὴν δυάδα τῶν ἀκροτελευταίων χαραγῶν. Τὸ μεταξὺ δὲ τῶν χαραγῶν διάστημα ῥυθμίζεται οὕτως, ὥστε ἀ.) ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γενομένων ῥιπῶν ἐπὶ τοῦ ὑψομετρίου, διὰ τῶν πρὸς τὰ ἄνω κειμένων χαραγῶν, ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γενομένων ῥιπῶν, διὰ τῶν δύο πρὸς τὰ κάτω κειμένων χαραγῶν, νὰ ἰσοῦται τῷ γενικῷ ἀριθμῷ Γ (Ἐφαρ.92)· 6') ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ῥιπῶν τῶν δύο ἀκροτελευταίων χαραγῶν ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀκολούθων, τῶν πρὸς τὸ κέντρον πλησιαζόντων, νὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{10}$ Γ· καὶ γ'.) ἡ διαφορὰ τῶν ῥιπῶν τῶν δύο ἀκροτελευταίων χαραγῶν τῆς μεσαίας παρωπίδος νὰ ἰσοῦται ἐπίσης μὲ $\frac{1}{10}$ Γ.

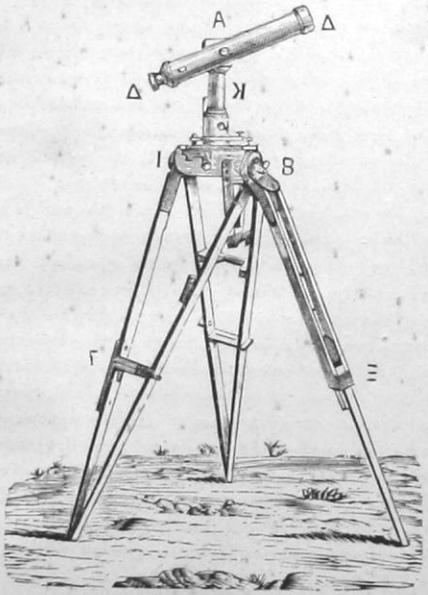
Ὁ συνδυασμὸς τῶν τριῶν παρωπίδων ἀρ' ἑνὸς χορηγεῖ τὴν βάσανον τῆς ἀποστάσεως, ἀρ' ἑτέρου εἰκολύνει τὴν ἀνάγνωσιν τῶν μεγάλων ἀποστάσεων, διὰ τὰς ὁποίας τὸ ὕψος τοῦ ὑψομετρίου εἶναι ἀνεπαρκὲς, πρὸς δὲ καὶ ὁποιωνδήποτε ἀποστάσεων, ὅταν μέρος τοῦ ὑψομετρίου ὑπὸ προσκομμάτων καλύπτηται.

Κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς καὶ τὰ πειράματα τοῦ κ. *Porro*, μὲ ἀναλλοίωτον διόπτραν τριπλῆς παρωπίδος, τῆς ὁποίας ὁ μὲν ἀντικειμενικὸς φακὸς διάμετρον ἔχει 55—60 χιλιοστόμετρα, ἡ δὲ μεγεθυντικὴ ἰσχὺς εἶναι ἑξηκονταπλῆ, ἢ ὀγδοηκονταπλῆ, δύνανται νὰ καταμετρηθῶσι ἀποστάσεις 100^{μ} μὲ προσέγγισιν 12 χιλιοστομέτρων.

19.

Τῆς τριπλῆς παρωπίδος γίνεται χρῆσις εἰς τὰ ἐργαλεῖα, τῶν ὁποίων ἡ διόπτρα εἶναι μὲν πεντηκονταπλῆς ἢ ἑκατονταπλῆς ἰσχύος, ἀναλόγως τῶν διαστάσεών της, ἔχει δὲ ἀντικειμενικὸν φακόν, οὗτινος ἡ διάμετρος εἶναι ὑπεράνω τῶν 55 χιλιοστομέτρων.

Ἡ διάμετρος τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ τῶν διοπτρῶν εἰς τὰ γεωδαιτικὰ ἐργαλεῖα δὲν ὑπερβαίνει τὰ 4 ἑκατοστόμετρα, ἡ δὲ μεγε-



(Σχ. 166).

θυντικὴ ἰσχὺς τῶν διοπτρῶν τούτων, δὲν ὑπερβαίνει τὴν τεσσαρακονταπλῆν. Ἐν Ἀγγλίᾳ μεγίστη σημασία ἐδόθη εἰς τὸ μέγεθος τῆς διόπτρας τῶν ἐργαλείων τῶν πρὸς κατάρτησιν τοῦ χάρτου τῆς Ἀγγλίας ὡρισθέντων. Τῶν ἄγγλων μηχανικῶν τὰ ἐργαλεῖα τῆς χωροσταθμήσεως φέρουσι διόπτρας μήκους $0^{\mu},75$, τῶν ὁποίων οἱ ἀντικειμενικοὶ φακοὶ ἔχουσι διάμετρον 60 χιλιοστομέτρων.

Ἡ διάμετρος τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ τῶν διοπτρῶν ἐν τοῖς ἐργαλείοις τῆς χωροσταθμήσεως καὶ τῆς σχεδιογραφήσεως δὲν ὑπερβαίνει τὰ 35 χιλιοστόμετρα. Ἐν τῇ ταχυμετρίᾳ γίνεται χρῆσις ἀντικειμενικῶν φακῶν, τῶν ὁποίων ἡ διάμετρος λαμβάνεται ἴση μὲ 35 χιλιοστόμετρα ἢ 4 ἕως 6, ἢ 7 ἑκατοστόμετρα. Ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς τῆς διόπτρας, τοῦ ὑπὸ τοῦ σχήματος 161 παρισταμένου ταχυμετρίου διάμετρον ἔχει 4 ἑκατοστομέτρων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 137. Φ θεγγόμενον ὑψομέτριον τοῦ ταχυμετρίου. Τοῦτο μῆκος ἔχει 4 ἢ 5 μέτρων, καὶ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἐπὶ τὰς δύο αὐτοῦ ἑδρας φέρει τρεῖς βαθμολογήσεις· ἑκάστη δὲ τούτων ὑποδιαιρεῖται εἰς ἰσάλληλα μέρη, ἕκαστον ἴσον μὲ $0^{\mu},04$, τὸ ὁποῖον παριστᾷ ἐπὶ τοῦ ἑδάφους ὁριζόντειον ἀπόστασιν ἑνὸς μέτρου. Εἰς τὴν διὰ μεγάλας ἀποστάσεις προωρισμένην βαθμολόγησιν τὸ διάστημα $0^{\mu},04$ ὑποδιαιρεῖται εἰς δύο ἰσάλληλα μέρη διὰ διακριτικῆς γραμμῆς δεικνυούσης ἐπὶ τοῦ ἑδάφους ὁριζόντειον ἀπόστασιν ἡμίσεως μέτρου. Ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἕδρας ὑπάρχουσιν αἱ δύο λοιπαὶ βαθμολογήσεις· ἐπὶ τῆς μιᾶς τούτων τὸ διάστημα $0^{\mu},04$ διαιρεῖται εἰς πέντε ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐκφράζει, ἐπὶ τοῦ ἑδάφους, ἀπόστασιν εἴκοσιν ἑκατοστομέτρων. Ἐπὶ τῆς τρίτης βαθμολογήσεως, ἡ δι' ἀποστάσεις μικροτέρας τῶν 100^{μ} προωρισμένη, τὸ διάστημα $0^{\mu},04$ ὑποδιαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐκφράζει, ἐπὶ τοῦ ἑδάφους, ἀπόστασιν ἑνὸς δεκατομέτρου.

Ἀλλ' ἡ πεῖρα μᾶς διδάσκει ὅτι, ἡ διὰ τῶν χαραγῶν τοῦ μικρομέτρου γινομένη ἀνάγνωσις τοῦ κλάσματος τῶν διαιρέσεων τοῦ ὑψομετρίου γίνεται κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ ὅλου, τὴν ἀπόστασιν κατὰ προσέγγισιν $0^{\mu},05$ λαμβάνομεν, χρῆσιν ποιούμενοι τῆς πρώτης βαθμολογήσεως· κατὰ προσέγγισιν δὲ $0^{\mu},02$, τῆς δευτέρας· καὶ ἐπὶ τέλους, κατὰ προσέγγισιν $0^{\mu},01$ ἔχομεν τὴν ἀπόστασιν, χρῆσιν ποιούμενοι τῆς τρίτης βαθμολογήσεως.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 138. Κλώψ (*) *(cleps)*. Τοῦτο εἶναι ταχυμετρικὸν ἐργαλεῖον, νεωτάτης ἐφευρέσεως τοῦ *Porro*, τοῦ ὁποίου ἡ διόπτρα ΔΔ (Σχ. 166), εἶναι τριπλῆς παρωπίδος, διάμετρον δὲ ἔχει ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς 60 χιλιοστόμετρα. Ἡ διόπτρα περιστρέφεται ὁριζοντείως καὶ κατακορύφως περὶ τινα κορμὸν Κ. Ἐπὶ τοῦ κορμοῦ ὑπάρχει κιβώτιον Ι (Σχ. 167), ἐντὸς τοῦ ὁποίου εὑρίσκονται δύο βαθ-

(*) *Manuale Pratico Di Geodesia Moderna Del Prof. I. Porro.*

μολογημένοι κύκλοι πρὸς μέτρησιν τῆς ὁριζοντείου καὶ τῆς κατακορύφου γωνίας προωρισμένοι.

Ἡ ἀνάγνωσις τῶν γωνιῶν γίνεται διά τινων προοφθαλμίων πρὸς τὰ ἔμπροσθεν τοῦ κιβωτίου κειμένων, καὶ ἕκαστον τῶν ὁποίων φέρει μικρόμετρον.



Σχ. 167.

Ὁ κορμὸς Κ στηρίζεται ἐπὶ τῆς πρισματικῆς πινακίδος ΒΙ, πρὸς τὴν ὁποίαν συνδέονται διὰ πτερυγιωτῶν κοχλιῶν, τὰ σκέλη τοῦ τρίποδος, ὅστις ὑποστηρίζει τὸ σύνολον τοῦ ἐργαλείου. Ἐπὶ τῆς πινακίδος ὑπάρχει σφαιρικὴ ἀεροστάθμη δι' ἧς διευθετεῖται τὸ ἐργαλεῖον. Ἡ μαγνητικὴ βελόνη εὑρίσκεται ἐντὸς διόπτρας ὡς ἡ τοῦ ταχυμετρίου.

Τὸ ἐργαλεῖον μεταφέρεται ἀπὸ σταθμοῦ εἰς σταθμὸν ὡς δεικνύει τὸ (Σχ. 167).

Τὸ ἐργαλεῖον, κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ (Σχ. 167) δεικνυομένην θέσιν, στρέφεται περὶ τὴν πινακίδα αὐτοῦ μέχρις οὗ λάβῃ θέσιν μεταξὺ τῶν βραχιόνων τοῦ τρίποδος· τότε οὗτοι διπλώνονται κατὰ τὰ μέσα αὐτῶν καὶ τὸ σύνολον τοῦ ἐργαλείου ἐναποτιθέμενον ἐντὸς κιβωτίου προφυλάσσεται.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Β' ΜΕΡΟΥΣ

ΤΗΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Δεδομένου κανονικοῦ τινος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ, νὰ περιγράψωμεν εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν πολύγωνον ὅμοιον (Σχ. 168).

Κατασκευή. Εἰς τὰ σημεῖα Ν, Ξ, Π, Ρ, κτλ. μέσα τῶν τόξων ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, κτλ. ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας ΘΙ, ΙΚ, ΚΛ, κτλ. αἵτινες θέλουσιν εἶναι. κατὰ τὴν Πρότ. 39, §. 4, ἀμοιβαίως παράλληλοι ταῖς χορδαῖς ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, κτλ. καὶ τὸ οὕτω σχηματιζόμενον πολύγωνον ΘΙΚΑΜΗ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον περιγεγραμμένον πολύγωνον, ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ πολυγώνῳ ΑΒΓΔΕΖ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἀφ' ἑνὸς μὲν αἱ πλευραὶ ΘΙ, ΙΚ, ΚΛ, κτλ. εἶναι ἀμοιβαίως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, κτλ. ἔχουσι δὲ καὶ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν· ὅθεν, αἱ γωνίαι ΗΘΙ, ΘΙΚ, ΙΚΛ, κτλ. τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου ΗΘΙΚΛΜ θέλουσιν εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ὡς ἀμοιβαίως ἴσαι πρὸς τὰς ἴσας μεταξύ των γωνίας τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ.



Σχ. 168.

Ἀφ' ἑτέρου δὲ, ἐὰν ἀγάγωμεν τὴν ΟΘ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΘΝ καὶ ΟΘΤ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ΟΘ κοινὴν καὶ τὰς πλευρὰς ΘΝ καὶ ΘΤ ἴσας, ὡς ἐφαπτομένας, ἀχθείσας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐξωτερικοῦ σημείου Θ (Πρόβλ. 16, §. 7). Ὅθεν, ἡ γωνία ΘΟΝ εἶναι ἴση τῇ ΘΟΤ. Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΒΟΝ εἶναι ἴση τῇ ΒΟΤ, διότι τὰ τόξα ΒΝ καὶ ΒΤ εἶναι ἴσα, ὡς τὰ ἡμίση ἴσων τόξων ΒΓ καὶ ΒΑ.

Ἄρα, αἱ δύο εὐθεῖαι ΟΒ καὶ ΟΘ ταυτίζονται, τουτέστι τὸ σημεῖον Β κεῖται ἐπὶ τῆς ΟΘ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε,

κτλ. κεῖνται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΟΙ, ΟΚ, ΟΛ, κτλ. Τούτου τεθέντος, εἰς τὰ τρίγωνα ΗΟΘ, ΘΟΙ, ΙΟΚ, κτλ. ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ. θέλομεν ἔχει τὰς ἀναλογίας,

$$\text{ΗΘ} : \text{ΑΒ} = \text{ΟΘ} : \text{ΟΒ} \text{ καὶ } \text{ΟΘ} : \text{ΟΒ} = \text{ΘΙ} : \text{ΒΓ},$$

ἐκ τῶν ὁποίων ποριζόμεθα, ἕνεκα τῶν κοινῶν λόγων

$$\text{ΟΑ} : \text{ΟΗ} \text{ καὶ } \text{ΟΒ} : \text{ΟΘ}, \quad \text{τὴν ἀναλογίαν}$$

ταύτην $\quad \text{ΗΘ} : \text{ΑΒ} = \text{ΘΙ} : \text{ΒΓ} = \text{ΙΚ} : \text{ΓΔ} = \text{κτλ.}$

Ἀλλὰ, $\text{ΑΒ} = \text{ΒΓ} = \text{ΓΔ} = \text{κτλ.}$ Ἄρα, καὶ $\text{ΗΘ} = \text{ΘΙ} = \text{ΙΚ} = \text{κτλ.}$ Λοιπὸν, τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ἔχει καὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας πρὸς ἀλλήλας. Ἄρα εἶναι κανονικὸν καὶ ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ (Ὁριστ. §. 8 καὶ 11).

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. Γνωστοῦ ὄντος τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου ΗΘΙΚΛΜ διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς αὐτὸ τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ, ἑνοῦμεν τὸ κέντρον Ο μὲ τὰς κορυφὰς Η, Θ, Ι, Κ, κτλ. τοῦ δεδομένου πολυγώνου διὰ τῶν εὐθειῶν ΟΗ, ΟΘ, ΟΙ, κτλ., αἵτινες συναπαντῶσι τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, κτλ., ἐπίσης ἑνοῦμεν τὰ σημεῖα ταῦτα διὰ τῶν χορδῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ. καὶ τὸ οὕτω σχηματιζόμενον πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ, θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον. Εἰς τὸ αὐτὸ δὲ πολύγωνον καὶ πάλιν καταντῶμεν, ἑνοῦντες τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς Τ, Ν, Ξ, Π, κτλ. διὰ τῶν χορδῶν ΤΝ. ΝΞ. ΞΠ, κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. Ἄρα, δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν εἰς δεδομένον κύκλον τόσα κανονικὰ πολύγωνα, ὅσα καὶ νὰ ἐγγράψωμεν· καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ϛ'. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Γνωστῆς οὔσης τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ τινος πολυγώνου καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ζητεῖται ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου ὁμοίου πολυγώνου (Σχ. 168).

Λύσις. Ἔστωσαν, $\text{ΑΒ} = 2\alpha$ καὶ $\text{ΗΘ} = \text{Χ}$ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου, καὶ $\text{ΑΟ} = \text{Α}$ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΗΟΘ καὶ ΑΟΒ προκύπτει ἡ ἀναλογία

$$\text{ΗΘ} : \text{ΑΒ} = \text{ΟΗ} : \text{ΟΑ}.$$

Ἀλλὰ καὶ $\quad \text{ΟΗ} : \text{ΟΑ} = \text{ΟΤ} : \text{ΟΓ}.$

Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν τούτων προκύπτει ἡ ἑξῆς

$$\text{ΗΘ} : \text{ΑΒ} = \text{ΟΤ} : \text{ΟΓ},$$

ἢ ἡ ἀναλογία $\quad \text{Χ} : 2\alpha = \text{Α} : \text{ΟΓ}.$

Ἀλλὰ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΒΓ ἔχομεν

$$\text{ΟΓ} = \sqrt{\text{ΟΒ}^2 - \text{ΒΓ}^2} = \sqrt{\text{Α}^2 - \alpha^2}.$$

ἄρα, $\quad \text{Χ} : 2\alpha = \text{Α} : \sqrt{\text{Α}^2 - \alpha^2},$

καὶ ἑπομένως $\quad \text{Χ} = \dfrac{2\alpha . \text{Α}}{\sqrt{\text{Α}^2 - \alpha^2}}$

ΣΧΟΛΙΟΝ. Γνωστῆς οὔσης τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ τινος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἰς κύκλον, οὗτινος ἀκτὶς εἶναι ἡ μονὰς, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πληθὺς τῶν πλευρῶν εἶναι ν, δυνάμεθα, διὰ τῆς ἐπαναληπτικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τῆς Προτ. 70, §. 11 καὶ τοῦ τύπου τῆς προηγουμένης προτάσεως, νὰ ὑπολογίσωμεν ἐν πρώτοις μὲν καὶ διαδοχικῶς τὴν πλευρὰν ὡς καὶ τὴν περίμετρον τῶν ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων, τῶν συνισταμένων ἐκ 2ν, 4ν, 8ν, 16ν, ... πλευρῶν· ἀκολούθως δὲ, νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν πλευρὰν ὡς καὶ τὴν περίμετρον τῶν περιγεγραμμένων ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων. Ἐὰν λάβωμεν δὲ ὡς ἀφετηρίαν τοῦ ὑπολογισμοῦ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον εὑρίσκομεν τὰ ἀκόλουθα ἑξαγόμενα·

Ἐγγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα.		Περιγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα.	
Ἀριθ. πλευρῶν.	Ἡμιπερίμετρος.	Ἀριθ. πλευρῶν.	Ἡμιπερίμετρος.
6	3,0000	6	3,4641
12	3,1058	12	3,2154
24	3,1326	24	3,1596
48	3,1393	48	3,1460
96	3,1410	96	3,1427

Ἐκ τῶν ἐξαγομένων τούτων εὐκόλως ὁδηγούμεθα ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ θεωρήσωμεν ὡς φανερὰν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν·

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ περίμετρος τοῦ τε ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸν κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πληθὺς τῶν πλευρῶν ἀδιακόπως αὐξάνει.

Ἀρ᾽ ἑτέρου δέ, ἐπειδὴ (Πρότ. 75, §. 11) ὁ λόγος π τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ἰσοῦται τῇ ἡμιπεριφερείᾳ κύκλου, οὗτινος ἡ ἀκτὶς εἶναι ἡ μονὰς, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἡμιπερίμετρον παντὸς πολυγώνου ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ ἐν λόγῳ περιφερείᾳ ὡς τὴν προσεγγίζουσαν, κατὰ μεῖον, τιμὴν τοῦ π, τὴν δὲ ἡμιπερίμετρον παντὸς περιγεγραμμένου πολυγώνου ὡς τὴν προσεγγίζουσαν, κατὰ πλέον, τιμὴν τοῦ λόγου π.

Λοιπὸν ἡ ἀξία τοῦ π, μεῖον $0^{\mu},001$, εἶναι $= 3,142$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ΄. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δοθείσης τῆς περιμέτρου **Π** ἐγγεγραμμένου τινὸς κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τῆς περιμέτρου Π τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου, νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ περίμετροι **π**′ καὶ Π′ τοῦ τε ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου, τῶν ἐχόντων πλῆθὺν πλευρῶν διπλασίαν (Σχ. 169).

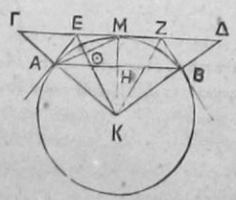
Δύσις. Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ πλευραὶ τῶν ἐχόντων **Π** καὶ Π περιμέτρους πολυγώνων, καὶ ν, ἡ πλῆθὺς τῶν πλευρῶν αὐτῶν.

Φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΜ, καὶ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΕ καὶ ΒΖ, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὰς ΚΕ καὶ ΚΖ. Ἡ χορδὴ ΑΜ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος 2ν πλευρὰς καὶ **π**′ περίμετρον, ἡ δὲ ΕΖ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος 2ν πλευρὰς καὶ Π′ περίμετρον. Τούτων οὕτως ἐχόντων, κατὰ τὴν Πρότ. 72 τῆς §. 11, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\Pi' : \boldsymbol{\pi} = \text{ΚΓ} : \text{ΚΑ ἢ ΚΜ} \ldots [1].$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΚΕ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΚΜ τοῦ τριγώνου ΚΓΜ, κατὰ τὴν Πρότ. 47 τῆς §. 8, ἔχομεν

$$\text{ΓΕ} : \text{ΕΜ} = \text{ΚΓ} : \text{ΚΜ} \ldots [2].$$



Σχ. 169.

Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν [1] καὶ [2] προκύπτει ἡ ἀναλογία

$$\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi} = \text{ΓΕ} : \text{ΕΜ},$$

καὶ ἐξ ἧς ἕπεται ἡ ἀκόλουθος

$$\Pi + \boldsymbol{\pi} : 2\boldsymbol{\pi} = \Gamma\text{Μ} : 2\text{ΕΜ ἢ ΕΖ}.$$

Ἀλλ᾽ αἱ εὐθεῖαι ΓΜ καὶ ΕΖ περιέχονται 2ν φορὰς εἰς τὰς περιμέτρους Π καὶ Π′. Ἄρα, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\Pi + \boldsymbol{\pi} : 2\boldsymbol{\pi} = \Pi : \Pi',$$

καὶ ἑπομένως

$$\Pi' = \frac{2\boldsymbol{\pi} \times \Pi}{\Pi + \boldsymbol{\pi}} \ldots\ldots [\text{A}].$$

Προσδιορίζομεν δὲ τὴν περίμετρον **π**′, παρατηροῦντες ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΕΘΜ καὶ ΜΑΗ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ ἔχουσι τὰς γωνίας ΕΘΜ καὶ ΑΗΜ ἴσας, ὡς ὀρθὰς, καὶ τὰς γωνίας ΕΜΑ καὶ ΠΑΜ ἴσας, ὡς ἐχούσας ὡς μέτρον ἡ μὲν, τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΜΒ, ἡ δὲ, τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΜ=ΜΒ. Λοιπὸν, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\text{ΑΜ} : \text{ΑΗ} = \text{ΕΜ} : \text{ΜΘ ἢ } \frac{1}{2}\text{ΕΜ} : \text{ΕΖ} : \text{ΑΜ}$$

Ἀλλ᾽ αἱ εὐθεῖαι ΑΜ καὶ ΑΗ περιέχονται 2ν φορὰς εἰς τὰς περιμέτρους **π**′ καὶ **π**, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΑΜ ὁμοίως 2ν φορὰς εἰς τὰς περιμέτρους Π′ καὶ **π**′. Λοιπὸν, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\boldsymbol{\pi}' : \boldsymbol{\pi} = \Pi' : \boldsymbol{\pi}',$$

ἐξ ἧς προκύπτει

$$\boldsymbol{\pi}' = \sqrt{\Pi' . \boldsymbol{\pi}}.$$

Ἄρα, διὰ τοῦ τύπου [Α], εὑρίσκομεν

$$\boldsymbol{\pi}' = \sqrt{\frac{2\Pi . \boldsymbol{\pi}^2}{\Pi + \boldsymbol{\pi}}} \ldots\ldots [\text{B}].$$

Προσδιόρισις τοῦ λόγου π τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ὁ Ὁλλανδὸς μαθηματικὸς Σνέλλιος «*Snellius*» (1627) ἀπὸ τῆς περιμέτρου, τοῦ τε ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἰς κύκλον, ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν μονάδα, ἀφορμώμενος, διὰ τῶν τύπων [Α] καὶ [Β] τῆς προηγουμένης προτάσεως ὑπελόγισε διαδοχικῶς τὰς περιμέτρους τῶν κανονικῶν πολυγώνων, τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων, τὰ ἑξ 8, 16, 32, 64, 128 . . . πλευρῶν συνιστάμενα· ἐπεξέτεινε δὲ τοὺς ὑπολογισμούς του μέχρις οὗ ἑκάστη τῶν δύο τελευταίων εὑρεθεισῶν τιμῶν, διαιρεθεῖσα διὰ τῆς διαμέτρου 2, τῷ ἐχρήγησεν ὡς πηλίκον τὸν αὐτὸν μὲν ἀριθμὸν μέχρι τοῦ δωδεκάτου δεκαδικοῦ ψηφίου, ἐκεῖθεν δὲ τοῦ ψηφίου τούτου, διάφορα ἄλλα δεκαδικὰ ψηφία.

Ἀλλὰ, κατὰ τὴν πρότασιν γ΄, ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν περιμέτρων τῶν δύο κανονικῶν πολυγώνων τῶν ἐγγε-

γραμμένων καὶ περιγεγραμμένων, τὰς ὁποίας ἐχορήγησαν αἱ δύο προμνημονευθεῖσαι τιμαὶ, ἕπεται ὅτι τὸ κοινὸν μέρος τῶν τιμῶν τούτων εἶναι ἡ κατὰ προτέγγισιν τιμὴ τοῦ λόγου π, μεῖον τοῦ δωδεκάτου δεκαδικοῦ ψηφίου.

Πρὸ τοῦ Σνελλίου, ἐπίσης ὁ Ὁλλανδὸς μαθηματικὸς Μέτιος εὗρεν ὡς τιμὴν τοῦ π. $\frac{355}{113}$, μεῖον 0,000001.

Πρῶτος ὁ Ἀρχιμήδης ὅμως ἀπέδειξεν ὅτι ὁ λόγος π, εἶναι μεγαλείτερος μὲν τοῦ $3\frac{10}{71} = 3,140$ μικρότερος δὲ τοῦ $3\frac{10}{70} = 3,142$, διὰ τῶν ἑξῆς προτάσεων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου (δηλ. ἡ ἀκτὶς) ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, (μιᾷ τῶν καθέτων πλευρῶν), ἡ δὲ περίμετρος, τῇ λοιπῇ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, λόγον ἔχει ὃν ια' πρὸς ιδ', ἔγγιστα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶν, καὶ ἔτι ὑπερέχει. ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

Ἑκάστης προτάσεως ἕπεται ἡ ἀπόδειξις.

Ἡ ἀπόδειξις τῶν προτάσεων τούτων, αἵτινες ἀποτελοῦσι τὸ βιβλίον τοῦ Ἀρχιμήδους Μέτρησις κύκλου, ὅλως ξέναι εἰσὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ ἀπείρου. Οἱ δὲ Εὐρωπαῖοι γεωμέτραι στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ὅτι «δύο ποσότητες κατ' ἀπειροελάχιστον διαφέρουσαι εἰσὶν πρὸς ἀλλήλας ἴσαι» καὶ διὰ τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων πολυγώνων, ἐπεκτείναντες τὴν τιμὴν τοῦ π μέχρι

$$\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\ldots$$

κατεμέμφθησαν τοῦ Ἀρχιμήδους, ἀγνοοῦντες βεβαίως τόν τε σκοπὸν καὶ τὰ ὑπ' ἐκείνου γραφέντα (α), πρὸς δὲ καὶ τὰ ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων

(α) *Montucla, Histoire des Mathematiques.* Τόμ. I. Σελ. 224. Ἐπίσης ὑπὸ *Ferdinand Hoefer.* Σελ.203.

τῶν πρὸ καὶ μετὰ τὸν Ἀρχιμήδην διὰ τὸν αὐτὸν τοῦτον σκοπὸν εἰρημένα· τοῦτο μαρτυρεῖ αὐτὸς ὁ Εὐτόκιος ὁ Ἀσκαλωνίτης, ὁ σχολιαστὴς τοῦ Ἀρχιμήδους (α), ὅστις μετὰ τὴν πρότασιν ἃ λέγει·

« Εἴη δ' ἂν ὡς πρὸς τὸ προκείμενον ἐρεῖῆς, τὸ γεγραμμένον Ἀρχιμήδει βιβλίδιον, Κύκλου μέτρησις, τὴν ἐπιγραφὴν ἔχον. Ἐν ᾧ τὴν πρόθεσιν τἀνδρὸς ἐξ αὐτῆς τῆς ἐπιγραφῆς γνωρίζομεν. Βούλεται γὰρ ἐπιδεῖξαι, τίνι χωρίῳ εὐθυγράμμῳ ἴσος ἂν εἴη κύκλος· πρᾶγμα πάλαι, πρὸς τῶν πρὸ αὐτοῦ κλεινῶν φιλοσόφων ἐζητημένον. Δῆλον γὰρ ὅτι τοῦτ' ἂν εἴη τὸ ζητούμενον, ὅπερ Ἱπποκράτης τε ὁ Χῖος καὶ Ἀντιφῶν ζητήσαντες ἐπιμελῶς, ἐκείνους ἡμῖν τοὺς παραλογισμοὺς εὑρήκασιν, οὓς ἀκριβῶς εἰδέναι νομίζω, τούς τε τὴν Εὐδήμου Γεωμετρικὴν ἱστορίαν ἐπεσκεμμένους, καὶ τῶν Ἀριστοτελικῶν μετασχόντας Κηρίων.

» Ἀλλ' ἔστι μὲν τοῦτο τὸ βιβλίον, ὡς φησὶν Ἡρακλείδης ἐν τῷ Ἀρχιμήδους βίῳ, πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον. Δείκνυσι γὰρ, ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει, ἔλαττον μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μεῖζον δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. Τοῦτο οὖν, φησὶ, σύνεγγυς δεδεῖχθαι· εὑρῆσθαι μέντοι αὐτῷ, διά τινων ἐλίκων, εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ κύκλου περιφερείᾳ. »

Περὶ τὸ τέλος δὲ τοῦ βιβλίου Μέτρησις κύκλου·

« Ἰστέον δὲ, ὅτι καὶ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐν τῷ Ὀκυτοκίῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ δι' ἀριθμῶν ἑτέρων, ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγάγων. Τοῦτο δὲ ἀκριβέστερον μὲν εἶναι δοκεῖ· οὐ χρήσιμον δὲ πρὸς τὸν Ἀρχιμήδους σκοπόν. Ἔφαμεν γὰρ αὐτὸν σκοπὸν ἔχειν, ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ, τὸ σύνεγγυς εἰρεῖν διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας. Ὥστε οὐδὲ Πέρσ ὁ Νικαεὺς εὔκαιρον εὑρεθήσεται μέμψιν ἐπάγων Ἀρχιμήδει, ὡς μὴ ἀκριβῶς εὑρόντι, Ποίᾳ εὐθεῖα ἴση ἐστὶ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια. Ἐξ ὧν αὐτὸς ἐν τοῖς Κηρίοις φησὶ· τὸν ἑαυτοῦ διδάσκαλον, Φίλωνα λέγων τὸν ἀπὸ Γαδάρων, εἰς ἀκριβεστέρους ἀριθμοὺς ἀγάγειν, τῶν ὑπ' Ἀρχιμήδους εἰρημένων τοῦτε ζ', φησὶ καὶ τῶν κδ'. Ἅπαντες γὰρ ἐφεξῆς φαίνονται τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἠγνοηκότες· κέχρηνται δὲ καὶ τοῖς τῶν μυριάδων πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς· οἷς οὐκ εὐκόλον παρακολουθεῖν, τὸν μὴ διὰ τῶν Μάγνου Λογιστικῶν ἡγμένον. Εἰ δέ τις ὅλως ἐβούλετο εἰς ἔλαττον αὐτὰ καταγαγεῖν· ἐχρῆν τοῖς ἐν τῇ Μαθηματικῇ Συντάξει Κλαυδίου Πτολεμαίου εἰρημένοις ἀκολουθοῦντα, διὰ τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν, καὶ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν, τοῦτο ποιεῖν· καὶ πεποιήκειν ἂν ἐγὼ τοῦτο, εἰμὴ, ὅπερ πολλάκις εἶπον, ἐνενόουν, ὡς οὔτε ἀκριβῶς δυνατὸν, διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων, εἰρεῖν, τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ἴσην εὐθεῖαν. Καὶ εἴτις τὸ σύνεγγυς καὶ παραμικρὸν προσέχοι· ἀρκεῖ τὰ ὑπ' Ἀρχιμήδους ἐνταῦθα εἰρημένα.

(α) Ἀρχιμήδους τὰ σωζόμενα μετὰ τῶν Εὐτοκίου τοῦ Ἀσκαλωνίτου ὑπομνημάτων. Ἐκδοθέντα ἐν ὀξονίῳ τῷ 1812 Ἑλληνολατινιστί.

» Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου Ὑπόμνημα εἰς τὴν Ἀρχιμήδους τοῦ κύκλου μέτρησιν· ἐκδόσεως παραναγνωσθείσης τῷ Μιλησίῳ Μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ, τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ. »

Ἡ ἀπόδειξις τῆς Προτ. 19, ὑποθέτει ὅτι, ἐκ τοῦ μέσου Π τῆς διατεμνούσης ΙΟ, φέρομεν διαδοχικῶς ἐπὶ ἑκάστης παραλλήλου ΑΒ καὶ ΓΔ τὴν κάθετον ΗΜ καὶ ΠΝ (Σχ. 28, Μέρος Α').

Κατὰ τὰ ἐν τῇ §. 1, Ἐφαρμ. 4 λεχθέντα. ἡ ἀπόδειξις τῶν Προτάσεων 62 καὶ 63 στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς δύο ἐυαποδείκτων ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν· α'.) τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τοῦ πρώτου, πλέον τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ, μεῖον τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον ἀριθμόν. β'.) Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀριθμῶν, πλέον τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον ἀριθμόν.

Ἡ δὲ ἀπόδειξις ἑκατέρας τῶν ἰδιοτήτων τούτων γίνεται οὕτω·

α'.), $3^2=(5-2)^2=5^2+2^2-2\,(5\times 2)=9$

β'.), $5^2=(3+2)^2=3^2+2^2+2\,(3\times 2)=25.$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης ἔχει ὡς ἑξῆς.

Ἀπόδειξις. Θέλομεν παραδεχθῆ τὴν πρότασιν ταύτην ὡς φανεράν. Ὅτι ὅμως «ἐκ τοῦ σημείου Ε (Σχ. 27), δυνάμεθα νὰ ἀγάγωμεν πάντοτε εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΓΔ» τοῦτο ἀποδεικνύεται οὕτως. Ἐκ τοῦ σημείου Ε καταβιβάζομεν τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τῆς ΓΔ, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ε ὑψοῦμεν τὴν ΕΒ κάθετον ἐπὶ τῆς ΕΖ. Τότε κατὰ τὴν Πρότ 16, ἡ εὐθεῖα ΕΒ θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΓΔ, διότι ἀμφότεραι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΕΖ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. § 13.

Οἱ τύποι τοῦ προβλήματος τούτου προφανῶς εἰσὶν οἱ ἀκόλουθοι·

$$BZ=\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}\times AB,$$

$$BE=\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}\times AB,\qquad B\Delta=\sqrt{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}\times AB.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. § 13.

Οἱ τύποι τοῦ προβλήματος τούτου, καθ' ὅσα γνωρίζομεν, εἰσὶν,

$$BZ=\sqrt{\tfrac{1}{4}}\times AB,\quad BE=\sqrt{\tfrac{1}{2}}\times AB,\quad B\Delta=\sqrt{\tfrac{3}{4}}\times AB.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9. § 13.

Ἐκ τοῦ πρώτου τῶν τριῶν τύπων τοῦ πρώτου προβλήματος λαμβάνομεν τὴν ἀξίαν τοῦ α,

$$\alpha=\frac{\overline{BZ}^2}{\overline{AB}^2-\overline{BZ}^2}\times\Big(\beta+\gamma+\delta\Big)=\acute{\alpha},$$

τὴν ὁποίαν εἰσάγομεν διαδοχικῶς εἰς τοὺς δύο ἄλλους τύπους, καὶ ποριζόμεθα τοὺς τύπους τοῦ προβλήματος 9,

$$BE=\sqrt{\frac{\acute{\alpha}+\beta}{\acute{\alpha}+\beta+\gamma+\delta}}\times AB,\quad B\Delta=\sqrt{\frac{\acute{\alpha}+\beta+\gamma}{\acute{\alpha}+\beta+\gamma+\delta}}\times AB.$$

Εἰς τοὺς τύπους τούτους εἰσάγοντες $\beta=\gamma=\delta=1$ λαμβάνομεν τοὺς τύπους τοῦ προβλήματος 10 τῆς § 13.

$$BE=\sqrt{\frac{\acute{\alpha}+1}{\acute{\alpha}+3}}\times AB\ \text{καὶ}\ B\Delta=\sqrt{\frac{\acute{\alpha}+2}{\acute{\alpha}+3}}\times AB.$$

Τῆς AB οὔσης ἴσης τῇ AZ+ZB, καὶ τῆς ἀξίας τῆς ZB λαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἀναλογίας,

$$(BZ+AZ):BZ=A\Gamma:ZH,$$

ἢ τῆς $$AZ:BZ=(A\Gamma-ZH):ZH,$$

ἐξ ἧς ποριζόμεθα.

$$BZ=\frac{AZ\times ZH}{(A\Gamma-ZH)}$$

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ.

Σελὶς 15 στίχ. 14 ἀντὶ δύο εὐθειῶν γράφε δύο παραλλήλων εὐθειῶν.

Σελὶς 15 στίχ. 30 ἀντὶ εἶναι παράλληλα γράφε εἶναι ἀνάλογα.

» 16 » 20 » Βγ » Βδ

» 22 Σχ. 21 » Α

Σελὶς 33 καὶ 34 στίχ. 21 καὶ 14 ἀντὶ ιοπ γράφε ιος.

Σελ. 34 στίχ. 21 ἀντὶ Παραδεχόμενοι γρ. Ἐὰν παραδεχθῶμεν.

Σελ. 40, 41, 47 καὶ 48 ἀντὶ παροπὶς γράφε παρωπὶς.

Σελ. 122 στίχ. 9 καὶ σελ. 127 στίχ. 13 ἀντὶ ἀπειροελαχίστους γράφε ἀπειροελαχίστους πρὸς τὸ χόνδρος.

Σελὶς 184 στίχ. 9 ἀντὶ Γενεύης γράφε Γενούης.

» 224 » 2 » ἰδικῆς » εἰδικῆς.

» 288 » 10 » πρισματικῶς γράφε πρισματικός.

ΠΙΝΑΞ

ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

Ἀντικείμενον τῆς Γεωμετρίας Σελὶς α'.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

§ 14. Περὶ ἐπιπέδου.— Ἰδιότητες μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τῷ διαστήματι ἀγομένων. — Εὔθετα κάθετος ἐπὶ ἐπιπέδου. — Ἰδιότητες τῆς καθέτου καὶ τῶν πλαγίων εὐθειῶν, τῶν καταβιβαζομένων ἐπὶ ἐπιπέδου ἔκ τινος σημείου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου κειμένου. — Περὶ παραλληλισμοῦ τῶν ἐν τῷ διαστήματι εὐθειῶν. — Παραλληλισμὸς τῶν ἐπιπέδων. — Περὶ προβολῶν.

§ 15. Περὶ διέδρων γωνιῶν. — Ἐπίπεδος γωνία ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν. — Σχέσις τῶν διέδρων γωνιῶν πρὸς ἀλλήλας. — Μέτρησις τῶν διέδρων γωνιῶν. — Ἐπίπεδα κάθετα πρὸς ἄλληλα.

§ 17. Περὶ πολυέδρων γωνιῶν. — Ἰδιότητες τῆς τριέδρου γωνίας, καὶ κατασκευὴ αὐτῆς.—Παραπληρωματικαὶ τρίεδροι γωνίαι. — Συνθῆκαι πρὸς κατασκευὴν τριέδρου γωνίας.

§ 19. Περὶ πολυέδρων.—Περὶ παραλληλεπιπέδων. — Περὶ καταμετρήσεως τοῦ ὄγκου τῶν παραλληλεπιπέδων καὶ τῶν πρισμάτων.

§ 20. Περὶ πυραμίδων. — Περὶ καταμετρήσεως τοῦ ὄγκου τῶν πυραμίδων.

§ 21. Περὶ ὁμοίων πολυέδρων. — Παράλληλοι τομαὶ τῆς πυραμίδος. —Περὶ ὁμοιότητος τῶν πυραμίδων.—Περὶ ἀποσυνθέσεως ὁμοίων πολυέδρων εἰς ὁμοίας πυραμίδας.—Σχέσις μεταξὺ τῶν ὄγκων τῶν ὁμοίων πολυέδρων.

§ 22. Περὶ κώνου.— Παράλληλοι τομαὶ τοῦ κώνου. — Περὶ καταμετρήσεως τῆς τε ἐπιφανείας καὶ τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου καὶ τοῦ κολούρου κώνου μὲ παραλλήλους βάσεις. — Περὶ κυλίνδρου. — Περὶ καταμετρήσεως τῆς τε ἐπιφανείας καὶ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου.

§ 24. Περὶ σφαίρας.—Τομαὶ ἐπίπεδοι τῆς σφαίρας. – Περὶ καταμετρήσεως τῆς τε ἐπιφανείας καὶ τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΠΕΡΙ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΙΝΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.

§ 27. Περὶ ἐλλείψεως.—§ 28. Περὶ παραβολῆς.—§ 30. Περὶ τῆς ἕλικος.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

Βλέπε § 14, 19, 20, 21, 22, 24 καὶ 25.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (*).

§ 14. Ἀγωγὴ καθέτου ἔκ τινος σημείου τοῦ διαστήματος ἐπὶ ἐπιπέδου τινός. — Ἐκ τινος σημείου ἐπὶ ἐπιπέδου τινος κειμένου νὰ ὑψωθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἔφαρμ. 1—2.

§ 15. Ἐργαλεῖα πρὸς μέτρησιν διέδρων γωνιῶν. — Κατακόρυφοι καὶ ὁριζόντειοι εὐθεῖαι.—Τρόπος τοῦ ἐμπηγνύειν κατακορύφως ἀκόντια εἰς τὸ ἔδαφος —Δοκιμὴ τῆς κατακορύφου διευθύνσεως τῶν ἀκοντίων. Ἔφαρμ. 7—10.

§ 18. Προσοδοφόρος βάσις τῶν γαιῶν. — Καταμέτρησις τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ σχεδίασις τῶν σχημάτων. Ἔφαρμ. 43—44.

§ 19. Ὑποδιαίρεσις τῶν μονάδων τοῦ ὄγκου. Ἔφαρμ. 72.

§ 21. Χρῆσις τῶν πρωτύπων. Ἔφαρμ. 73.

§ 22. Περὶ χωρητικότητος τῶν βυτίδων, τύποι τῆς χωρητικότητος. Βαρελομέτριον. Βαρέλα. Κυκλομέτριον. — Περὶ κυβισμοῦ τῶν ἀνεκρλοιώτων ξύλων. Ἔφαρμ. 75—77.

§ 23. Ὕψος, πρόσοψις, ἐπίπεδον, κάτοψις, ἤτοι γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ἀντικειμένων. Ἔφαρμ. 109.

§ 25. Προσδιόρισις τοῦ ὄγκου οἱουδήποτε σώματος. — Προσδιόρισις τοῦ ὄγκου τῶν σωμάτων διὰ τοῦ βάρους αὐτῶν· καὶ ἀντιστρόφως.— Προσδιόρισις τοῦ βάρους τῶν σιδηρῶν ῥάβδων. Ἔφαρμ. 121—123.

ΧΩΡΟΣΤΑΘΜΗΣΙΣ

§ 16. Ἀλφάδιον. — Ὅριον τῆς χρήσεως ἤτοι ἔφιξις αὐτοῦ. — Τεκτονικὴ στάθμη.—Ὁ χωροβάτης.—Κανονοφόρος χωροβάτης.—Περὶ ὑψομετρίου.—Ἁπλῆ χωροστάθμησις.—Διοπτροφόρος χωροβάτης καὶ δοκιμὴ αὐτοῦ. — Περιγραφὴ τοῦ διοπτροφόρου χωροβάτου. Οἱ τρεῖς ἰσοπεδοτικοὶ κοχλίαι.— Στάθμη διὰ φυσαλίδος ἢ ἀεροστάθμη. — Ἐπανόρθωσις τῆς ἀεροστάθμης.— Ἐπανόρθωσις τοῦ κατακορύφου ἄξονος ἐργαλείου τινος. Ἔφαρμ. 11—24. — Ἀεροστάθμη μετὰ διόπτρας τοῦ κ. *Egault*. — Μέθοδος τοῦ *Egault*. — Περὶ τῶν σφαλμάτων τῆς

(*) Αἱ ὑπ' ἀστερίσκου συνοδευόμεναι ἐφαρμογαὶ ἐν ἀνάγκῃ παραλείπονται.

(ΓΕΩΜ. ΘΕΩΡ. ΠΡΑΚΤ. καὶ ΕΦΗΡΜ.

μεθόδου τοῦ *Egault*. — Ἀεροστάθμη μετὰ διόπτρας τοῦ κ. *Lenoir*. — Ὅριον τῆς χρήσεως, ἢ ἔφιξις τῆς ἀεροστάθμης μετὰ διόπτρας. Ἔφαρμ. 28'—32'. —Ὑδροστάθμη. — Διαχείρισις τῆς ὑδροστάθμης. Ἁπλῆ χωροστάθμησις.—Περιγραφὴ τῆς ὑδροστάθμης. — Ὅριον τῆς χρήσεως, ἢ ἔφιξις τῆς ὑδροστάθμης. — Χωροστάθμησις δι' ἀκτινοβολίας.— Σύνθετος χωροστάθμησις. — Δοκιμὴ τῆς συνθέτου χωροσταθμήσεως. — Προσδιόρισις τοῦ ὕψους τῶν ὀρέων. Ἔφαρμ. 33—40. — Ὑψομέτριον ὁλκοτὸν καὶ φθεγγόμενον. Ἔφαρμ. 41'—42'. — Ἔκτυπον τοῦ ἐδάφους. Κατὰ μῆκος καὶ κατὰ πλάτος διατομή. Ἔφαρμ. 110—112.

ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑ.

§ 14. — Ὑψομετρικὸν ἐπίπεδον. — Τέχνη χωροσταθμήσεως.— Προσδιορισμὸς τῆς θέσεως σημείου ἐν τῷ διαστήματι κειμένου.— Τί λέγεται κλίσις εὐθείας τινὸς πρὸς ἐπίπεδον. Προβλήματα ἐπὶ τῶν προβολῶν. Ἔφαρμ. 3—6.

§ 18.— Νὰ προσδιορισθῇ ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ τῆς γῆς γωνίας. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ τῆς γῆς ἐρριμμένης εὐθείας. Ἔφαρμ. 44. Περιγραφὴ τοῦ γωνιομέτρου ἢ τοῦ ἐπαναληπτικοῦ κύκλου. —Διαχείρησις τοῦ κύκλου πρὸς μέτρησιν γωνιῶν.—Μέτρησις τῆς κλίσεως τῶν ἐπὶ τῆς γῆς γραμμῶν.—Περὶ τῶν ἀμαρτημάτων εἰς ἃ ὑπόκειται ἡ δι' ἐργαλείου καταμέτρησις γωνίας τινός.— Μέθοδος τῆς ἐπαναλείψεως. Περὶ τῶν ἀμαρτημάτων εἰς ἃ ὑπόκειται ἡ μέθοδος τῆς ἐπαναλείψεως.— Δοκιμὴ τοῦ γωνιομέτρου κύκλου. Ἔφαρμ. 45'—52'. Ἡ διὰ τῆς μαγνητικῆς βελόνης προσδιόρησις τῆς διευθύνσεως τῶν ἐπὶ τῆς γῆς κειμένων εὐθειῶν. — Χωρομετρικὴ πυξίς.—Προσδιόρισις τοῦ ἀζιμουθὶ διευθύνσεως τινός. Ἔφαρμ. 59—61.—Ἐκκεντρικότης τῆς διόπτρας τῆς πυξίδος. 62'. Καταμέτρησις τοῦ Ἀζιμουθὶ τῆς διευθύνσεως τῶν πλευρῶν τοπογραφικοῦ τινος πολυγόνου. 63. Διόρθωσις τοῦ Ἀζιμουθὶ ὡς πρὸς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινὸν τοῦ ἀρχικοῦ σταθμοῦ. 64' —Σχεδίασις διὰ μαγνητικῆς βελόνης. Παντόμετρον. Ἔφαρμ. 65—66 —Θεωδόλιχον ἀγγλικὸν διττῆς ἐπαναλήψεως. Διαχείρισις τοῦ Θεωδολίχου. 67'—68'. Καταμέτρησις τῆς προβολῆς εὐθείας τινος γραμμῆς ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κειμένης.— Περὶ τῆς δι' ὑπολογισμοῦ καταμετρήσεως τῆς προβολῆς εὐθείας τινός.— Ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τῆς προβολῆς. Ἔφαρμ. 69—71.

§ 23.'— Σχεδιογράφησις διὰ τραπέζης.— Συστατικὰ μέρη τῆς τραπέζης. — Γόνυ τοῦ κ. *Cugnot*.— Ὁριζόντειος διευθέτησις τῆς

τραπέζης. — Ἐξαρτὴρ τῆς μολυβδαίνης. — Ἀντιστοίχησις τῆς τραπέζης. — Μέθοδος τῆς ἀκτινοβολίας. — Περὶ κανόνος ἢ διπλοῦ δεκατομέτρου. — Μέθοδος τῶν πολυγώνων. — Μέθοδος τῆς ὁδεύσεως ἢ τῆς πορείας. — Μέθοδος τῶν διατομῶν. — Γνώμων. Γνώμων μετὰ διόπτρας καὶ ῥύθμισις αὐτοῦ. — Κλίμακες. Γραμμὴ γραφική. Γραμμὴ φυσική. — Ἁπλῆ γραφικὴ κλίμαξ. — Τύπος γενικός. Ἔφιξις τῶν πλευρῶν τῆς τριγωνικῆς δικτυώσεως. — Ἔφιξις τοῦ γραφομέτρου. — Ἔφιξις τῆς χωρομετρικῆς πυξίδος. — Ἔφιξις τῆς τραπέζης. — Ἔφιξις τῆς ἀποκλιτικῆς πυξίδος. — Ἔφιξις τῆς ἁλύσου καὶ τοῦ χαλυβδίνου δεκαμέτρου. — Γραμμὴ μεγαλειτέρας κλίσεως. — Ὁριζόντιοι καμπύλαι. Ὑψομετρικὸν ἢ τοπογραφικὸν σχέδιον. — Ἰσαπόστασις τῶν καμπύλων. — Κάθετοι ἢ σκιαγραφικαὶ γραμμαὶ καὶ χάραξις αὐτῶν. — Συνθηματικὰ σημεῖα. Ἐφαρμ. 78ˑ—120ˑ.

§ 26. — Ὑποβρύχιος χωροστάθμησις ἢ βολιδοσκόπησις. Μέτρησις τῆς παρεκτροπῆς τῆς βολίδος. — Ἀναγωγὴ, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, τῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καταμετρουμένων μεγάλων ἀποστάσεων. Ἐφ. 127—129. § 32. — Ῥύθμισις τῶν ἐργαλίων. Ἐφ. 152ˑ.

ΟΠΤΙΚΗ.

§ 16. — Διόπτρα. Ὀπτικὸς ἄξων. Ἄξων τοῦ σχήματος. Ἑστία συζυγής. Κατεύθυνσις τῆς διόπτρας. — Ἔφεξις τῆς διόπτρας. Ἐφαρμ. 25ˑ—27ˑ.

§ 32. — Μεγεθυντικὴ ἰσχὺς διόπτρας. — Ὁρίζων διόπτρας. — Ἀχρωματισμὸς τῶν διοπτρῶν. Ἐφαρμ. 153ˑ—155ˑ.

ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ, Η ΤΑΧΥΜΕΤΡΙΑ.

§ 23. — Ταχυμετρία. — Σταδία ἢ διαστημέτριον. Ἐφαρμ. 91.—92. Σταδία τοῦ κ. *Porro*. — Ὑψομέτριον τῆς σταδίας. — Ἀνάγνωσις τῆς ῥιπῆς. — Ῥύθμισις τοῦ μικρομέτρου. — Κατακόρυφος κύκλος τῆς διόπτρας. Ἐφαρμ. 93ˑ—97ˑ. Προβλήματα ταχυμετρίας. Ἔφιξις τῆς σταδίας. — Ταχυμετρικὴ τράπεζα. Ἐφαρμ. 98ˑ—100ˑ.

§ 32. — Κλώψ τοῦ κ. *Porro (Cleps)*. — Πολλαπλῆ παρωπὶς ἐν ταῖς διαστημετρικαῖς διόπτραις. Ταχυμέτριον καὶ ῥύθμισις αὐτοῦ. — Ὑψομέτριον ταχυμετρίου. Ἐφαρμ. 151ˑ—156ˑ.

ΚΟΣΜΟΓΡΑΦΙΑ.

§ 15. — Κατακόρυφος τόπου. Σημεῖον κατακόρυφον καὶ ἀντικόρυφον τόπου τινός. Ἐφαρμ. 8.

§ 18. — Αἰσθητὸς ὁρίζων τόπου τινός, — Χάραξις μεσημβρινῆς γραμμῆς. — Μαγνητικὴ βελόνη. — Μαγνητικὸς μεσημβρινὸς, ἀπόκλισις τῆς μαγνητικῆς βελόνης. — Χάραξις μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. — Ἀποκλιτικὴ πυξίς. Ἐφαρμ. 53—58

§ 26. — Σχῆμα τῆς γῆς. — Ἀκτὶς τῆς γῆς. Ἐφαρμ. 127—128.

§ 27. Τροχιὰ τῆς γῆς. Ἐφαρμ. 130.

ΦΥΣΙΚΗ ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ.

§ 23. Διάκρισις τῶν ἐπὶ τοπογραφικοῦ τινος σχεδίου παριστανομένων ἀνωμαλιῶν τοῦ ἐδάφους. — Συνοπτικὴ περιγραφὴ τῶν ἀνωμαλιῶν τοῦ ἐδάφους. Ἐφαρμ. 118—119.

ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ.

§ 26. Ἀρχιτεκτονικὴ καὶ οἱ κυριώτεροι αὐτῆς κανόνες. Ἐφαρμ. 124.

ΜΗΚΟΜΕΤΡΙΑ.

§ 31. Ἡ διὰ βηματισμοῦ καταμέτρησις τῶν ἀποστάσεων. — Ὁ βηματιστὴς ἢ τὸ βηματομέτριον (*Pédomètre*). — Καταμέτρησις διὰ τῆς διαρκείας τοῦ χρόνου. — Ἡ διὰ τῆς ὁράσεως καταμέτρησις τῶν ἀποστάσεων ὑπὸ τῶν στρατιωτικῶν καὶ τῶν κυνηγῶν. — Γνώρισις τῶν ἀποστάσεων. — Ἐκτίμησις τῶν ἀποστάσεων διὰ τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου. — Προσδιόρισις τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου καὶ τῆς ἀποστάσεως ἀνεξαρτήτως τῆς ἐπηρείας τοῦ ἀνέμου. — Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ὕψους ἀντικειμένου τινος, νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀφ' ἡμῶν ἀπόστασις αὐτοῦ, καὶ ἀντιστρόφως· γνωστῆς οὔσης τῆς ἀποστάσεως, νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀντικειμένου. Ναυτόμετρον. — Στρατιωτικὴ σταδία. Βαθμολόγησις αὐτῆς. — Μέτρησις ἀπροσίτων ὑψῶν. Ἐφ. 139—150.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

§ 21. Διπλασίασις κύβου. Ἐφαρμ. 74ˑ.

ΒΑΛΤΙΚΗ.

§ 29. Θεωρία τοῦ βλήματος. Ὁριστικοί. — Βολὴ τῆς ἐξ εὐθυωρίας ῥιπῆς. — Ἀνακεφαλαίωσις τῶν ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ βλήματος προερχομένων κανόνων. — Προβλήματα βλητικῆς. — Πειραματικὴ προσδιόρισις τῆς τροχιᾶς ὅπλου. — Γεωμετρικὴ προσδιόρισις τῆς μέσης τροχιᾶς ὅπλου τινός. — Σκοπὸς τοῦ ὁποίου χρῆσις γίνεται πρὸς προσδιόρισιν τῶν σημείων τῆς τροχιᾶς. — Σημεῖα προσκρούσεως. — Σκοποδείκτης καὶ πρακτικὴ προσδιόρισις τῶν διαιρέσεων αὐτοῦ. Ἐφαρμ. 131ˑ—138ˑ. § 31. Κανόνες τοῦ βλήματος. Ἐφαρμ. 149ˑ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ σελὶς 393.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ,

ΔΙΑ ΤΗΝ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΙΝ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

ΤΗΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗΣ

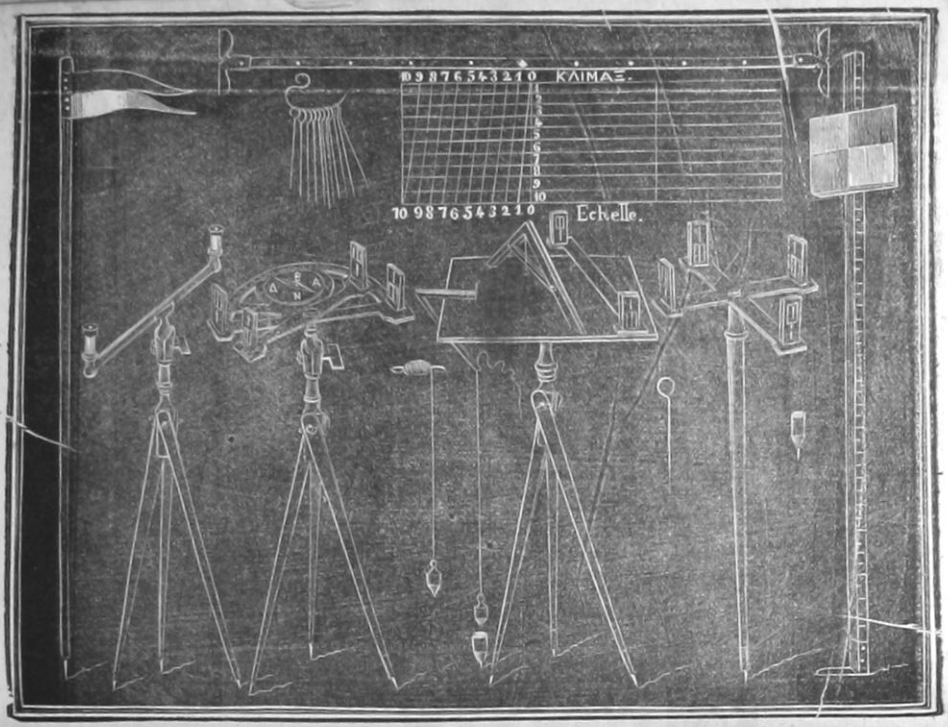
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ,

Ὑπὸ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Α. ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΟΥ.

Ἡ συλλογὴ αὕτη περιέχει (Σχ. Α.), τὰ ἑξῆς ἐργαλεῖα·

Ἓξ πασσαλίσκους, ἓξ ἀκόντια, ἑνδεκα χωρομετρικὰς βελόνας, χαλύβδινον δεκάμετρον, γνώμονα μετὰ τοῦ στηρίγματος, γραφόμετρον μετὰ πυξίδος καὶ Βερνιέρων· πρὸς δὲ τρίποδα, μολύβδαιναν μετὰ τοῦ ἐξαρτήρος, δεκαδικὴν κλίμακα, ἀλφάδιον, τράπεζαν μετὰ τοῦ γνώμονος, ὑδροστάθμην καὶ ἓν ὑψομέτριον μετὰ τοῦ σκοποῦ.



(Σχ. Α.)