ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Από τον 20ο στον 21ο Αιώνα

του Ιωάννη Μήττα
Ομότιμου καθηγητή του Γενικού τμήματος της Πολυτεχνικής σχολής του ΑΠΘ

Γραμμένο για ανάμνηση της τελετής απονομής τιμητικής διάκρισης στο συγγραφέα από την Κοσμητεία της Πολυτεχνικής Σχολής κατά την 8 - 11 - 2000

Το έτος 2000 που οδεύει προς τη λήξη του έχει ιδιαίτερη σημασία , θεωρούμενο από μαθηματική σκοπιά. Κι' αυτό, γιατί, η Διεθνής Ενωση Μαθηματικών κατά το συνελθόν στο Ρίο Ντε Τζανέϊρο της Βραζιλίας 19ο Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο στις 6 Μαϊου 1992 αποφάσισε να κηρύξει το έτος 2000 ως "Παγκόσμιο Ετος Μαθηματικών". Το γεγονός, όπως είναι φανερό, είναι ξεχωριστής σημασίας, τόσο για μας τους μαθηματικούς, όσο και για τους φυσικούς και τεχνικούς, που έχουν για θεμέλιο λίθο της επιστήμης τους τα μαθηματικά, αλλά και για τους φιλόσοφους, δεδομένου ότι και αυτοί από την αρχαιότητα αλλά και σήμερα, ιδίως μέσω της θεωρίας των συνόλων, συνδέονται άμεσα με αυτά. Η σημασία τους όμως είναι και γενικότερα σημαντική, αν ληφθεί υπόψη ότι οι μαθηματικές ιδέες επέδρασαν από διάφορες απόψεις στον πολιτισμό από την αρχαιότητα ως τις μέρες μας. Στην εποχή μας οι ιδέες αυτές πολλαπλασιάστηκαν με σχεδόν φανταστικό ρυθμό και οι επιδράσεις τους αυξήθηκαν σε αριθμό και σε πολυπλοκότητα. Φυσικά δεν θα μπορούσαμε στο άρθρο αυτό να κάνουμε έναν απολογισμό για τη σχέση των μαθηματικών με την τέχνη, την τη φιλοσοφία, τις λογική τις κοινωνικές επιστήμες, τη θρησκεία, τη λογοτεχνία και καμιά δεκάδα ακόμη κύριες ανθρώπινες απασχολήσεις και ενδιαφέροντα. Ας αρκεσθούμε όμως από το τεράστιο αυτό πλήθος να αναφέρουμε την επίδραση τους, ιδίως στον αιώνα που πέρασε, στην εξέλιξη της τεχνολογίας σε συνδυασμό με την πληροφορική με το πλήθος των εφαρμογών της, όπως στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές που με ποικίλα συστήματα αλγορίθμων συνέβαλαν στην καλύτερη, στην άριστη θάλεγα, επικοινωνία μεταξύ των ανθρώπων και στην έξοδο του ανθρώπου στο διάστημα. Είναι αρκετά γνωστά τα τεχνολογικά επιτεύγματα, που αποτελούν και αφετηρία για παραπέρα ανάπτυξη, ώστε δεν θα στην καταγραφή τους. Είναι πάντως τόσο αξιοθαύμαστα ως δημιουργήματα του ανθρώπου, ώστε να επιβεβαιώνεται για μια ακόμη φορά ο Σοφόκλειος ύμνος " *Πολλά τα δεινά , κ' ουδέν ανθρώπου δεινότερον πέλει* "

"Τους φυσικούς αριθμούς τους έκανε ο αγαπητός Θεός, αλλά όλα τ' άλλα είναι έργο του ανθρώπου"

Τώρα όσον αφορά το Συνέδριο στο Ρίο, η Διεθνής Ενωση Μαθηματικών κηρύσσοντας το 2000 ως Παγκόσμιο Ετος Μαθηματικών , έθεσε τρεις στόχους. Τη βελτίωση της εικόνας των Μαθηματικών, τη μελέτη της λειτουργίας τους, ως το "κλειδί" για την μελλοντική τους εξέλιξη και τον καθορισμό των μεγάλων μαθηματικών προκλήσεων για τον 21ο αιώνα.

Σχετικά με το τελευταίο, κρίνουμε σκόπιμο και χάριν παραλληλισμού, να αναφερθούμε στον αντίστοιχο στόχο που έθεσε το 2ο Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο που έγινε στο Παρίσι στις 8 Αυγούστου του 1900 , δηλαδή 100 χρόνια πριν. Στο Συνέδριο αυτό ο David Hilbert, ένας από τους κορυφαίους μαθηματικούς της εποχής του, αλλά και όλων των εποχών, με μια ιστορική του ομιλία, αφού συνόψισε τις τάσεις της μαθηματικής επιστήμης κατά τον 19ο αιώνα, καθόρισε και τον στόχο των μαθηματικών για τον αιώνα που ανέτειλε τότε, δηλαδή τον 20ο, διατυπώνοντας τα 23 ανοιχτά προβλήματά τους που κάλυπταν όλα τα πεδία των μαθηματικών και τα οποία ο ίδιος επέλεξε ως τα αντιπρωσοπευτικότερα. Από τα προβλήματα αυτά μερικά λύθηκαν πριν από τον θάνατό του, το 1943, όπως π.χ. το 2ο σχετικά με την απόδειξη της πληρότητας των μαθηματικών θεωριών που απαντήθηκε το 1931 από τον Αυστριακό μαθηματικό και λογικό Kurt Goedel , αλλά μετά τον θάνατό του, όπως π.χ. το 16ο σχετικά με την τοπολογία των αλγεβρικών καμπύλων των επιφανειών, που οδήγησε στην θετική απάντηση στην εικασία του Fermat το 1995, στη δύση του 20ου αιώνα, από τον Βρετανό Andrew Wilew, ενώ άλλα παρέμειναν ακόμη άλυτα.

Αξίζει να περιγράψουμε παρενθετικώς τα δύο λυμένα προβλήματα που αναφέραμε λόγω και της μεγάλης σπουδαιότητάς τους.

Ως προς το πρώτο τονίζουμε ότι βασικός στόχος του Hilbert, που έδωσε την τελική διαμόρφωσή στην λεγόμενη αξιωματική μέθοδο, ήταν η ίδρυση μιας μαθηματικής θεωρίας με σύστημα αξιωμάτων που να ήταν συμβιβαστό και πλήρες. Το σύστημα είναι συμβιβαστό, όταν είναι απαλλαγμένο από αντιφάσεις, όταν δηλαδή καμιά πρότασή του δεν αντιφάσκει με καμιά άλλη πρόταση του συστήματος και είναι πλήρες, όταν κάθε πρότασή του που προφανώς περιγράφεται με έννοιες που περιέχονται στα αξιώματα, μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι ορθή ή μη ορθή. Και τόσο αυτός, όσο και οι περισσότεροι μαθηματικοί των τριών πρώτων δεκαετιών του 20ου αιώνα, πίστευαν ότι αυτό ήταν δυνατό και μάλιστα για κάθε μαθηματικά κλάδο. Οι ελπίδες τους όμως αποδείχτηκαν φρούδες. Διότι ο Goedel διέψευσε την πίστη τους αυτή, αποδεικνύοντας ότι το συμβιβαστό των αξιωμάτων μιας θεωρίας και η πληρότητά της είναι έννοιες αντιφατικές, με άμεσο προφανές συμπέρασμα ότι, αν ένα σύστημα υποτεθεί συμβιβαστό, τότε δεν είναι πλήρες και επομένως υπάρχουν προτάσεις μέσα σ' αυτό μη αποκρίσιμες. Επί πλέον ο Goedel απέδειξε ότι, αν ένα λογικό σύστημα περιλαμβάνει το σύστημα των φυσικών αριθμών, το συμβιβαστό του συστήματος δεν μπορεί να αποδειχθεί μέσα σ' αυτο, δηλαδή με τα μέσα που διαθέτει αυτό, ενώ άλλος σύγχρονός του μαθηματικός ο αμερικανός Alonso Curch, απέδειξε λίγο μετά, το 1936, ότι σ' ένα οποιοδήποτε λογικό συμβιβαστό σύστημα που περιέχει το σύστημα των φυσικών αριθμών, δεν υπάρχει μέθοδος που να επιτρέπει να αποφανθούμε ποιες προτάσεις μπορούν να αποδειχθούν εντός του συστήματος. Αλλο εκπληκτικό, πράγματι, συμπέρασμα κι' αυτό αλλά και πόση απογοήτευση!

Ας αναφέρουμε ότι γίνεται έτσι φανερό ότι το σύστημα των πραγματικών αριθμών, που κατασκευάστηκε με αφετηρία το σύστημα των φυσικών αριθμών, είναι συμβιβαστό, αν το τελευταίο αυτό είναι συμβιβαστο, που δικαιολογεί την άποψη του μεγάλου Πυθαγόρα ότι όλα (για τα Μαθηματικά τουλάχιστον) εξαρτώνται από τους φυσικούς αριθμούς και που παραδέχθηκε 25 αιώνες μετά ο μεγάλος ενορατικός μαθηματικός Kronecker με τη φράση του *"τους φυσικούς αριθμούς τους έκανε ο αγαπητός Θεός, όλα τα άλλα είναι έργο του ανθρώπου"*

Για τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών εργάστηκαν κορυφαίοι μαθηματικοί από την αρχαιότητα (Εύδοξος ο Κνίδιος) ως τους νεότερους χρόνους (D' Alambert, Gauss, Dedekind, Weirstrass, Cantor, Peano, και άλλοι). Το σύστημα αυτό , που από την γέννησή του δεν παρουσίασε καμιά αντινομία , απέκτησε στέρεες βάσεις για να στηριχθεί σ' αυτό το οικοδόμημα της Μαθηματικής Αναλύσεως, καθώς και άλλων συνδεδεμένων με αυτήν κλάδων (Αριθμητική Ανάλυση, Στατιστική, θεωρία Πιθανοτήτων, Μηχανική, Αστρονομία κ.α.)και οι μαθηματικοί δεν διακατέχονται από αισθήματα ανασφάλειας αποδεχόμενοι αυτό .

Ως προς το άλλο από τα λυμένα προβλήματα του Hilbert που αναφέραμε, θα περιοριστούμε, μια που δεν είναι δυνατή σε ένα άρθρο ευρύτερη επισκόπηση, σε μια, σημαντικη όμως, κλάση αλγεβρικών καμπύλων, στις ελλειπτικές, γιατί σχετίζονται άμεσα με την απόδειξη της εικασίας του Fermat, που παρά τις προσπάθειες επιφανών μαθηματικών για την απόδειξή της, παρέμεινε πρόβλημα άλυτο για 350 περίπου χρόνια.

Οι ελλειπτικές καμπύλες δεν είναι ούτε ελλείψεις, ούτε ελλειπτικές συναρτήσεις, αλλά κυβικές εξισώσεις της μορφής $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx$, δηλαδή το σύνολο των λύσεων αυτών, όπου a, b, c ακέραιοι ή εν γένει, ρητοί αριθμοί (αναφερόμαστε σε αλγεβρικές καμπύλες στο σώμα των ρητών). Από όλα τα σημεία μιας αλγεβρικής καμπύλης ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα ρητά τους σημεία, αν υπάρχουν τέτοια. Φυσικό λοιπόν το ερώτημα αν μια ελλειπτική καμπύλη έχει ή δεν έχει ρητά σημεία και σε περίπτωση καταφατικής απαντήσεως, αν το πλήθος τους είναι περιορισμένο ή άπειρο. Διαπιστώθηκε με παραδείγματα ότι υπάρχουν ελλειπτικές καμπύλες για κάθε μια από τις οποίες υπάρχει κάποιος τύπος που παρέχει το πλήθος των ρητών σημείων. Αυτές λέγονται καμπύλες modular (ο ακριβής ορισμός τους δύσκολο να αποδοθεί εδώ). Ετσι προκύπτει το ερώτημα κατά πόσο όλες οι ελλειπτικές καμπύλες είναι modular. Οι Ιάπωνες μαθηματικοί Yutaka, Tamiyama και Coro Shimura, ύστερα από πολύμοχθο έρευνα οδηγήθηκαν το 1979 στην διατύπωση της εικασίας που φέρει το όνομά τους, ότι όλες οι ελλειπτικές καμπύλες είναι modular

Η εικασία των Tamiyama , Shimura είναι πολύ πιο σημαντική για τη θεωρία αριθμών από ό,τι εκείνη του Fermat, αυτή προκύπτει σαν πόρισμα από την προηγούμενη. Την εικασία των Tamiyama, Shimura απέδειξε ορθή ο Andrew Wiles το 1995 ύστερα από επίπονες προσπάθειες. Οσον αφορά τη σχέση της εικασίας του Fermat με την εικασία των Tamiyama, Shimura, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι συνέβαλαν στην απόδειξη της πρώτης από την δεύτερη οι μαθηματικοί Gerhart Frey, Jean-Pierre Serre και Kenneth Ribet με την απόδειξη σημαντικών βοηθητικών προτάσεων και με την κατασκευή ενός αντιπαραδείγματος στην εικασία των Tamiyama, Shimura από αντιπαράδειγμα της εικασίας Fermat. Η απόδειξη λοιπόν της εικασίας Fermat, ότι δηλαδή η απόδειξη της εξίσωσης $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx$ δεν επαληθεύεται για καμιά τριάδα φυσικών αριθμών x, y, z για n, έχει ως εξής. Εστω ότι οι φυσικοί αριθμοί a, b, c επαληθεύουν την εξίσωση Fermat ότι δηλαδή ισχύει an + bn = cn. Τότε, όπως απέδειξε ο Ribet, η ελλειπτική καμπύλη $y^2 = x(x-an)(x-bn)$ δεν είναι modular, που αντιφάσκει στην εικασία των Tamiyama, Shimura (την ορθότητα της οποίας απέδειξε ο Wiles).

Τώρα, όσον αφορά την διακήρυξη του Ρίο, με αυτήν η Διεθνής Ενωση Μαθηματικών προγραμμάτισε σειρά εκδηλώσεων (συνέδρια, διαγωνισμούς κλπ) με τις οποίες θα προσπαθήσει να ανταποκριθεί στους τρεις στόχους που έθεσε για την γενικότερη σημασία της Μαθηματικής Επιστήμης. Στο πλαίσιο αυτό και οι Μαθηματικές Ενώσεις σ' όλο τον κόσμο, υπό την αιγίδα της Unesco, προγραμμάτισαν σειρά επιστημονικών εκδηλώσεων. Σχετικώς αναφέρουμε ότι και η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία στο ίδιο αυτό πλαίσιο προγραμμάτισε σειρά δραστηριοτήτων, όπως (i) την οργάνωση Πανελλήνιου Συνεδρίου με θέμα "τα Μαθηματικά Κλειδί Ανάπτυξης" (ii) την κυκλοφορία έντυπου υλικού στα σχολεία για την προβολή του ρόλου των Μαθηματικών στην ανάπτυξη και τη συμβολή της Αρχαίας Ελλάδας στην καλλιέργεια και την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, καθώς και (iii) την πραγματοποίηση ημερίδων στα παραρτήματά της με ανάλογα θέματα.

Η αφετηρία λοιπόν το 2000 ως Παγκόσμιο Ετος Μαθηματικών και γνώμονα τους τρεις στόχους που έθεσε η Διεθνής Ενωση Μαθηματικών, η Μαθηματική Επιστήμη πορεύεται στον 21ο αιώνα για να γνωρίσει αναμφίβολα, ιδίως, με τις σύγχρονες εξελίξεις, καινούργιες κατακτήσεις ώστε να μπορεί να ισχυρισθεί, όπως λέει ο Βρετανός μαθηματικός και φιλόσοφος Alfred North Whitehead, ότι είναι *"η πιο αυθεντική δημιουργία του ανθρωπίνου πνεύματος"*

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. **ACZEL** *A. Fermat"s Last Theorem*. Μετάφραση στα Ελληνικά, Α. Βαλαδάκης . Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα

2 **Αρτεμιάδης Ν.** *Κορυφαίες στιγμές στα Μαθηματικά*. Πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών. Τ. 68ος (1998)

3. **KLINE M.** *Mathematics in Westerne Culture. T. I,II* Oxford University Press 1953. Μετάφραση στα Ελληνικά, Σ. Μαρκέτος. Εκδόσεις Κώδικας. Αθήνα.

4. **ΜΗΤΤΑΣ Ι.** *Σύντομο οδοιπορικό στα Μαθηματικά*