

В. СЕПОЛА

10

Аннотация к работе В. С. Сепола

GRVER-01261

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

900 ΒΕΡΟΙΑΣ

Αριθ. εισ. 8090/69

Έξ. αγοράς 2000

Ο. Παπαδόπουλος



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΙΕΡΑ

ΚΑΤΗΧΗΣΙΣ

ΥΠΟ

Α. Ν. ΒΕΡΝΑΡΔΑΚΗ.

Ἐπὶ τῇ δοκιμασίᾳ καὶ κρίσει τῆς Κεντρικῆς
Ἐκκλησιαστικῆς Ἐπιτροπῆς

ΒΡΑΒΕΥΘΕΙΣΑ ΠΑΤΡΙΑΡΧΙΚΩΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΔΙΚΩΣ
ΕΝ Τῷ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΙΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚῷ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜῳ

ΤΗΣ

ΜΕΓΑΛΗΣ ΤΟΥ ΧΡΙΣΤΟΥ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣ,

καὶ εἰσαχθεῖσα ὑπ' αὐτῆς εἰς τὰ ἑλληνικὰ Σχολεῖα πρὸς
διδασκαλίαν τῆς ἐν αὐτοῖς μαθητευούσης
ὀρθοδόξου νεολαίας.

(Ἀδελφ. τοῦ ἐπὶ τῇ: ἐκπαιδεύσει: Αὐτοκρατ. Ὑπουργείου).

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ.



ΕΝ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥΠΟΛΕΙ,
ΠΑΡ' ΑΠΑΣΙ ΤΟΙΣ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΑΙΣ.

1872.

Αρ. Επ. 8030

Πάν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν κάτωθι σφραγίδα τῆς κεντρικῆς ἐκκλησιαστικῆς Ἐπιτροπῆς καὶ τὴν κάτωθι ὑπογραφήν τοῦ συγγραφέως θέλει θεωρηθῇ ὡς ἐκ τυποκλοπίας προερχόμενον καὶ προκαλέσῃ τὴν ὅπου δεῖ δικαστικὴν καταδίωξιν τοῦ τυποκλόπου.

Πρὸς ἐξασφάλισιν ἀπὸ τῆς τυποκλοπίας ἐξετελέσθησαν αἱ νόμιμοι παρὰ ταῖς αὐτοκρατορικαῖς ἀρχαῖς διατυπώσεις.

Ἐπὶ τῷ αὐτῷ σκοπῷ ὁ συγγραφεὺς προσφέρει δέκα ὀθωμανικὰς λίρας εἰς τὸν ὅστις ἐπιδώσῃ εἰς αὐτὸν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν κάτωθι σφραγίδα καὶ ὑπογραφήν μετὰ τῆς ἐμμαρτύρου καταδείξεως τοῦ παρ' οὗ ἐλήφθη τὸ ἀσφράγιστον καὶ ἀνυπόγραφον ἢ ὅπωςδήποτε ἄλλως κλεψίτυπον βιβλίον.

Τα δύο ἡμῶναι γρ. 28 = μίσητοι

AP. E. 8090



Ὁ Πατριάρχης Κωνσταντινουπόλεως
Ἀνθιμος ἐπιβεβαίωσι.



Ἡ Κεντρικὴ Ἐκκλησιαστικὴ Ἐπιτροπὴ τοῦ Οἰκουμενικοῦ Πατριαρχείου, διελθοῦσα τὴν ὑπὸ τοῦ Κ. Δημητρίου Ν. Βερναρδάκη ἐκπονηθεῖσαν καὶ ὑποβληθεῖσαν αὐτῇ Ἱερὰν Κατήχησιν πρὸς χρῆσιν τῶν ἐλλήνων σχολείων καὶ εὐροῦσα αὐτὴν σύμφωνον πρὸς τὸ διάγραμμα τοῦ ὑπ' αὐτῆς προκηρυχθέντος ὑπὸ ἡμερομηνίαν 10 Δεκεμβρίου 1869 διζωνίσματος, μετὰ τὴν προσήκουσαν ἐπιθεώρησιν, ἐγκρίνει τὴν ἐκτύπωσιν αὐτῆς καὶ τὴν εἰσαγωγὴν ἐν ταῖς καθ' ἡμᾶς ἐλληνικοῖς σχολείοις. Ἐξασφαλίζει δὲ τὸν συγγραφεὰ κατὰ τῆς τυποκλοπίας διὰ τῆς ἐπιθέσεως τῆς ἐκυτῆς σφραγίδος ἐφ' ἐκάστου τῶν ἀντιτύπων.

Τῇ 2 Ἰουνίου 1872.

Ὁ ἀντιπρόεδρος τῆς Κεντρικῆς

Ἐκκλ. Ἐπιτροπῆς

† Ο ΝΥΣΣΗΣ ΚΑΛΛΙΝΙΚΟΣ.

† Ο Μ. ΠΡΩΤΟΣ Δ. ΕΥΕΛΠΙΔΗΣ.

† Ο ΑΡΧ. Β. ΒΥΡΕΝΝΙΟΣ.

† Ο ΑΡΧΙΕ. ΤΗΣ Ι. ΣΥΝΟΔΟΥ ΑΡΧ. Κ. ΕΥΤΥΧΙΑΔΗΣ.

† Ο ΜΕΓ. ΑΡΧΙΔ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

† Ο ΓΡΑΜ. ΑΡΧ. Γ. ΑΦΘΟΝΙΑΔΗΣ.

Δημόσια Κεντρικὴ Ἐκκλησιαστικὴ Ἐπιτροπὴ

✠ ΑΝΘΙΜΟΣ ΕΛΕΩ ΘΕΟΥ ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΣ ΚΩΝ-
ΣΤΑΝΤΙΝΟΥΠΟΛΕΩΣ ΝΕΑΣ ΡΩΜΗΣ ΚΑΙ
ΟΙΚΟΥΜΕΝΙΚΟΣ ΠΑΤΡΙΑΡΧΗΣ.

Ἱερῶτατε μητροπολίτα (θεοφιλέστατε ἐπίσκοπε) . . ἐν ἀγίῳ Πνεύ-
ματι ἀγαπητὲ ἀδελφε καὶ συλλειτουργε τῆς Ἡμῶν Μετριοτήτος, Κύ-
ριε . . . χάρις εἴη τῇ αὐτῆς Ἀρχιερωσύνῃ καὶ εἰρήνῃ παρὰ Θεοῦ. Ἡ με-
γάλη τοῦ Χριστοῦ Ἐκκλησία, ἥς μέλημα σπουδαιότατον ἦν αἰετοτε ἡ
ἐν παιδείᾳ καὶ νοουθεσίᾳ Κυρίου ἀνατροφή καὶ ἐκπαίδευσις τῆς ὑπὸ τὸν
οἰκουμενικὸν αὐτῆ· θρόνον νεότητος, ἐπιθυμοῦσα νὰ παγιωθῇ ἐν τοῖς
κατὰ τόπους ἐκπαιδευτήρις ἐν σύστημα ὁμοιομόρφου διδασκαλίας
ὅσον ἐνεστὶν εὐμεθοδέστερον καὶ τελειότερον, πρὸς τὸν σκοπὸν δὲ
τοῦτον λαβοῦσα ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ἑλλειψὶς ὁμοιομόρφων διδακτικῶν βι-
βλίων, ἀνεπιλήπτων ἅμα καὶ εὐμεθόδων τῆς ἐν τοῖς ἀλληλοδιδακτι-
κοῖς καὶ ἑλληνικοῖς Σχολείοις ἱερᾶς διδασκαλίας καθίστατο οὐσιῶδες
καὶ δυσυπέροβητον πρόσκομμα, ἔγνω τὴν Ἰδρυσιν εἰδικοῦ περὶ ἱερᾶς
ἱστορίας καὶ κατηχήσεως διὰ τὰ ἀλληλοδιδακτικά καὶ ἑλληνικά Σχο-
λεῖα διαγωνίσματος, ἑπαθλον καὶ γέρας προθεῖσα τὴν προνομιακὴν
εἰσχωγὴν τῶν ἐν τῷ διαγωνίσματι τούτῳ ἐγκριθσομένων βιβλίων
εἰς τὰ ὑπὸ τὸν οἰκουμενικὸν θρόνον Σχολεῖα τῶν ὁρθοδόξων. Καὶ δὴ
κριθέντος πρῶτον ἤδη τοῦ ἀγῶνος ὑπὸ τῆς καθ' ἡμᾶς Κεντρικῆς Ἐκ-
κλησιαστικῆς Ἐπιτροπῆς κατὰ τὰ νενομισμένα, ἐνεκρίθησαν ὑπ' αὐ-
τῆς μετ' ἀκριβοῦς καὶ λεπτομερῆ ἐλεγχον καὶ δοκιμασίαν ὧς ἐκπλη-
ροῦντα τοὺς ὅρους τοῦ διαγωνίσματος καὶ τελειότερα πάντων τῶν
μέχρι τοῦδε ὑπαρχόντων, τέσσαρα συγγράμματα ἱερᾶς ἱστορίας καὶ
κατηχήσεως, ἔργα τοῦ σοφολογιωτάτου ἐν καθηγηταῖς Κυρίου Δημη-
τρίου Ν. Βερναρδάκη. Τὴν ἐγκρίσιν ταύτην, ἐπικυρωθεῖσαν ὑπὸ τε τῆς
Ἡμῶν Μετριοτήτος καὶ ὑπὸ τῆς περὶ Ἡμᾶς ἀγιωτάτης Συνόδου, ἀνα-
κοινοῦντες καὶ πρὸς τὴν Ἀρχιερωσύνῃν αὐτῆς διὰ τῆς παρούσης πα-
τριάρχικης καὶ συνοδικῆς ἐγκυκλίου ἐπιστολῆς, ἐντελλόμεθα Αὐτῇ,
ἵνα ἀπολύσῃα ἐγκύκλιον πρὸς τοὺς φιλοχρίστους ἐφόρους, διευθυντάς
καὶ διδασκάλους τῶν κατὰ τὴν θεόσωστον Αὐτῆς ἐπαρχίαν ἑλληνικῶν

καὶ ἀλληλοδιδασκτικῶν Σχολείων, προτρέψῃ νὰ εἰσαγάγωσιν εἰς αὐτὰ τὰ προῤῥηθέντα βιβλία τῆς ἱερᾶς ἱστορίας καὶ κατηχήσεως, ἐξηγουσα πρὸς αὐτοὺς ὅτι ταῦτα ἐκρίθησαν ὑπὸ τῆς Ἐκκλησίας κατὰλληλα εἰς διδασκαλίαν τῇ ὀρθοδόξῳ νοολογίᾳ. Ἡ δὲ τοῦ Θεοῦ χάρις καὶ τὸ ἁ-
πειρον ἔλεος εἴη μετ' αὐτῆς.

αωοβ', Αὐγούστου ιδ'.

† Ο ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥΠΟΛΕΩΣ ἐν Χριστῷ ἀγαπητὸς ἀδελφός,

† Ο ΕΦΕΣΟΥ ΑΓΑΘΑΓΓΕΛΟΣ ἐν Χριστῷ ἀγαπητὸς ἀδελφός,

† Ο ΠΡΑΚΛΕΙΑΣ ΠΑΝΑΡΕΤΟΣ ἐν Χριστῷ ἀγαπητὸς ἀδελφός,

† Ο ΝΙΚΟΜΗΔΕΙΑΣ ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ ἐν Χριστῷ ἀγαπητὸς ἀδελφός,

† Ο ΝΙΚΑΙΑΣ ΙΩΑΝΝΙΚΙΟΣ ἐν Χριστῷ ἀγαπητὸς ἀδελφός,

† Ο ΤΟΡΝΟΒΟΥ ΓΡΗΓΟΡΙΟΣ ἐν Χριστῷ ἀγαπητὸς ἀδελφός,

† Ο ΙΚΟΝΙΟΥ ΣΩΦΡΟΝΙΟΣ ἐν Χριστῷ ἀγαπητὸς ἀδελφός,

† Ο ΔΙΑΔΥΜΟΤΕΙΧΟΥ ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ ἐν Χριστῷ ἀγαπητὸς ἀδελφός,

† Ο ΣΑΜΟΥ ΓΑΒΡΙΗΛ ἐν Χριστῷ ἀγαπητὸς ἀδελφός,

† Ο ΒΕΛΙΓΡΑΔΩΝ ΑΝΘΙΜΟΣ ἐν Χριστῷ ἀγαπητὸς ἀδελφός,

† Ο ΝΥΣΣΗΣ ΚΑΛΛΙΝΙΚΟΣ ἐν Χριστῷ ἀγαπητὸς ἀδελφός.

Τὰ δύο βιβλία Κατήχου καὶ Ἀρ. Δομηνίου ἡμῶνται
στ. 28 ἢτοι εἰς δύο τόμους. ἡ Κατήχου ἡμῶνται στ.
8. ἡ Ἀρ. Δομηνίου 20.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ.

Εγμ. Νικητ.
1887

Ἀφορμὴν εἰς τὴν σύνταξιν τοῦ ἀνὰ χειρὸς βιβλίου ἔδωκεν εἰς τὸν συγγραφέα τὸ διαγώνισμα τῆς Μεγάλῃς τοῦ Χριστοῦ Ἐκκλησίας, τὸ «τεθὲν ὑπὸ τῆς Ἐκκλησιαστικῆς Κεντρικῆς Ἐπιτροπῆς κελεύσει τῆς Α. Θ. Παναγιότητος», οὗτινος τὸ πρόγραμμα ἐξεδόθη τῇ 40 Δεκεμβρ. 1869, δημοσιευθὲν καὶ ἐν τοῖς «Στατιστικαῖς Πίναξιν τῶν ἐν Κωνσταντινουπόλει καὶ κατὰ τὰ πρόσκαιρα σχολείων τῶν ὀρθοδόξων, τοῖς καταρτισθεῖσι φροντίδι καὶ ἐπιστάσει τῆς κεντρικῆς Ἐκκλησιαστικῆς Ἐπιτροπῆς, ἐκδοθεῖσι δὲ φιλετίμῳ δαπάνῃ τοῦ ἐνδοξοτάτου καὶ μουσοτραφεύς ἀρχοντας μεγάλου Λογιστάτου τῆς τοῦ Χριστοῦ μεγάλης Ἐκκλησίας Κ. Σταυράκη τοῦ Ἀριστάρχου, ἐν Κωνσταντινουπόλει 1870». Ἡ ἐκδοῦσα τὸ πρόγραμμα τοῦ διαγωνίσματος τούτου Ἐπιτροπὴ προοιμιάζεται περὶ τοῦ σκοποῦ αὐτοῦ ὡς ἐξῆς: «Ἡ Κεντρικὴ Ἐκκλησιαστικὴ Ἐπιτροπὴ λαβοῦσα ὑπ' ὄψιν τὴν πληθύν καὶ ποικιλίαν τῶν ἐν τοῖς καθ' ἡμᾶς διδασκῆτορις τῆς μέσης καὶ κατωτέρας ἐκπαιδεύσεως ἐν χρήσει βιβλίων ἱερᾶς ἱστορίας καὶ ἱερᾶς κατηχήσεως, καὶ φροντίζουσα περὶ τῆς ἀσφαλοῦς οὐχ ἥττον ἢ καὶ εὐμεθόδου καὶ δημοιομόρφου διδασκαλίας τῶν ἱερῶν τούτων μαθημάτων, λαβοῦσα δὲ προηγουμένως τὴν περὶ τούτου προσκυνητὴν ἐντολὴν τῆς Α. Θ. Παναγιότητος, ἐνέκρινεν ἵνα ἐκθῇται εἰς διαγωνισμόν τὴν συγγραφὴν κατὰ τὰς ἐκδοῦσας πρὸς διδασκαλίαν βιβλίων, ὀνομάζουσα εἰδικὴν ἐπιτροπὴν ἐξ ἀρμοδίων προσώπων, εἰς τὴν ὑποβληθῇσονται τὰ διαγωνίσματα, ὅπως τὰ ἐγκριθέντα βιβλία ἐκδοθέντα εἰσαχθῶσιν ἀκολούθως εἰς τὰ ὑπὸ τὸν οἰκουμενικὸν θρόνον σχολεῖα τῶν Ὀρθοδόξων». Ἀφ' οὗ δὲ ἐκθῆται καὶ ὀρίζει λεπτομερῶς τὰ προσόντα τῆς τοῦ ἱερᾶς ἱστορίας καὶ τῆς κατηχήσεως, ἡ Ἐπιτροπὴ προσκαλοῦσα τοὺς δυναμένους ἐκ τῶν λογίων κληρικῶν καὶ λαϊκῶν εἰς τὸν διαγωνισμόν τοῦτον, ὀρίζει προθεσμίαν ἐνὸς ἔτους, ἐν ᾧ ἀνάγκη πᾶσα παρουσίασαι τὰ συγγράμματα τῇ Ἐπιτροπῇ». Κατὰ τὸ φθινόπωρον τοῦ 1870 ἔτους εἶδον κατὰ τύχην ἐν Μυτιλήνῃ τοὺς προβλεθέντας Πίνα-

και, ὅθεν καὶ ἔγνων τὰ περὶ τοῦ διαγωνίσματος τούτου. Εἰ καὶ ὁ καιρὸς εἶχε παρέλθῃ καὶ ἑστερούμην τὰ ἀναγκαῖα βοηθήματα, ἐπει-
 δὴ ὁμως ἡ ἐν τῇ φίλῃ πατρίδι διαμονὴ μοὶ παρείχεν ἀνετον καὶ πλή-
 ρη σχολήν, καὶ ἡ ἱκανὴ πλουσία βιβλιοθήκη τοῦ ἐκεῖ Γυμνασίου ἡδύ-
 νατο νὰ ἀναπληρώσῃ ἐν μέρει τὴν παρ' ἐμοὶ ἄλλειψιν πολλῶν ἀπε-
 ραιτήτων θεολογικῶν βιβλίων, ἀπεφάσισα μετὰ πολλοῦ δισταγμοῦ
 νὰ ἀποδυθῶ εἰς τὸν ἀγῶνα, καὶ τὰ τέσσαρα διαγωνιστήρια τεύχη ἐξ-
 απεστάλησαν εἰς Κωνσταντινούπολιν ἐντὸς τῆς προθεσμίας, ὅπου καὶ
 ἐδοκιμάσθησαν καὶ ἐκρίθησαν μόνον. Τῇ 17 Ἰουλίου 1871 ἡ Ἐπιτρο-
 πὴ ὑπέβαλεν εἰς τὴν Α. Σ. τὸν Τοποτηρητὴν τοῦ Οἰκουμενικοῦ Θρό-
 νου καὶ τὴν περὶ αὐτὸν ἀγίαν καὶ ἱερὰν Σύνοδον ἔκθεσιν περὶ τοῦ δια-
 γωνίσματος, ἐξ ἧς ἀποσπῶμεν τὴν ἐξῆς κρίσιν τῶν ἐξετασθέντων χει-
 ρογράφων ὡς γενικωτέραν. «Ἐξ ἀνάγκης οὖν περιορισθῆσα ἡ Ἐπιτρο-
 πὴ εἰς τούτων μόνων τὴν ἐξέλεγχιν, καὶ διεξελοῦσα ταῦτα μετὰ πά-
 σης τῆς ἀπαιτουμένης ἐπιστασίας νοός, ἰδοὺ οἷαν ἐκφέρει ἐπ' αὐτῶν
 γνωμοδότησιν. Ἀριδὴλως μαρτυροῦντα ἐμβριθείαν τε καὶ εἰδικότητα
 ἐπιστημονικὴν καὶ πολυμάθειαν οὐ τὴν τυχοῦσαν, καὶ καθόλου θεω-
 ρούμενα, τὰ μὲν δύο ἐκτενέστερα ἐν μείζονι βαθμῷ, τὰ δ' ἕτερα δύο
 ἐπιτομώτερα ἐν ἡττονι, ἀξιόλογα λογίζονται προϊόντα ὀρίμου δια-
 νοίας, λέξει καὶ φράσει ἀπλουστερὰ μὲν, ἐκλεκτῇ δὲ καὶ καταλλήλῳ
 πρὸς τὸν σκοπὸν καὶ τοῖς θεοῖς νοήμασιν ἐμπρεπούση ἐξεργασμένα,
 πολλὴν δὲ τὴν τάξιν καὶ τὴν σαφήνειαν ἔχοντα διὰ πάντων ἐπανθοῦ-
 σαν, καὶ ὁμολογουμένως κρίνονται ἐπαίνου ἄξια διὰ τε τὴν ἐκλογὴν
 τῆς ὕλης, τὸ εὐμέθοδον καὶ τὴν κρίσιν. Ὡς ἐκ τούτου δὲ τὰ μὲν ἐκ-
 τενέστερα κατ' ἐξοχὴν εἰσιν οὐ μόνον πολλῶ τῶν παρ' ἡμῖν φερομέ-
 νων τελειότερα, ἀλλὰ καὶ ἐν πᾶσιν ὡς ἐγγιστα τῷ προδιατυπωθέντι
 ἀγωνίσματι στοιχοῦντα καὶ συνάδοντα». Μετὰ τὴν κρίσιν ταύτην ἔ-
 πονται ἱκαναὶ παρατηρήσεις τῆς Ἐπιτροπῆς εἰς διάφορα μέρη τῆς ἱ-
 στορίας καὶ μάλιστα τῆς ἑκατηχήσεως, τῆς ὁποίας ὡς κυριωτέρα ἑλ-
 λειψις σημειοῦται τὸ ὅτι δὲν ἐξετελέσθη ὁ ἐ. ὅρος τοῦ προγράμματος,
 ἦτοι ἡ ἐπαρκὴς ἔκθεσις τῶν διαφορῶν τῶν ἑτεροδόξων πρὸς τὴν ὀρ-
 θόδοξον ἐκκλησίαν καὶ ἡ ἐπαρκὴς ἀνασκευὴ αὐτῶν. Ἡξίου δὲ ἡ Ἐπι-
 τροπὴ καὶ ἄλλας πολλὰς διασκευὰς καὶ προσθήκας, εἰς τὸ δογματι-
 κὸν μάλιστα καὶ ἱστοτελεστικὸν μέρος τῆς κατηχήσεως, καὶ ὑπὸ τοῦ
 ὅρου τούτου ἐσκόπει νὰ προκαλέσῃ τὴν δέουσαν ἐκκλησιαστικὴν σί-
 στασιν. Ἡ Α. Σ. ὁ Τοποτηρητὴς καὶ ἡ περὶ αὐτὸν ἀγία Σύνοδος ἀπε-

φάσιαν νὰ ἐρωτηθῇ ἐὰν ἀποδέχεται τὰς παρατηρήσεις ταύτας ὁ συγγραφεύς, ὅς τις καὶ λαβὼν ἀντίγραφον τῆς ἐκθέσεως παρὰ τοῦ ἐν Κωνσταντινουπόλει ἀντιπροσώπου του ὅχι μόνον ἀπεδέχθη εὐγνωμόνως, ὡς εἰκός, τὰς παρατηρήσεις καὶ διορθώσεις καὶ ὁδηγίας τῆς ἐκκλησίας, ἀλλὰ καὶ διώρθωσε κατ' αὐτὰς τὸ χειρόγραφον, διασκευάσας ἐν πολλοῖς τὸ ἀ. μάλιστα καὶ β'. μέρος τῆς κατηχήσεως, συμπληρώσας τὰς εἰς τὴν Γραφὴν καὶ τοὺς ἐκκλησιαστικοὺς πατέρας καὶ συγγραφεῖς παραπομπάς, καὶ προσθεῖς, εἰς τὰς ὑποσημειώσεις μάλιστα, πολλὰ οὐσιώδη καὶ χρήσιμα, τὰ ὁποῖα οἱ μὲν μαθηταὶ δὲν θὰ διέρχονταν, θέλουσιν ὅμως χρησιμεύειν ὡς βοήθημα εἰς τοὺς διδασκάλους, ὅσοι στεροῦνται ἐπαρκῶν καὶ καταλλήλων βοηθημάτων. Τοιουτοτρόπως δὲ καὶ εἰς τοὺς μαθητὰς αὐτοὺς δὲν θέλει ἀποβῇ ἄχρηστον τὸ βιβλίον καὶ ἀφ' οὗ ἀπολυθῶσιν ἐκ τῆς σχολῆς, διότι δύνανται καὶ μετέπειτα νὰ καταφεύγωσιν εἰς αὐτὸ πρὸς πρόχειρον λύσιν οἰασθήπουτε προσπιπτούσης ἐκάστοτε δογματικῆς ἀπορίας, ἐκ τῶν σπουδαίων τοῦλάχιστον καὶ γενικωτέρων (*). Μετὰ τὴν τοιαύτην διασκευὴν τὰ χειρόγραφα ἐπιστράφησαν, ἐξητάθησαν ἐκ νέου ὑπὸ τῆς Ἐπιτροπῆς, καὶ τῇ 13 Ἰουνίου 1872 ἐξεδόθη ἡ ἐπομένη πρὸς τὸν συγγραφεῖα Πατριαρχικὴ καὶ Συνοδικὴ ἐπιστολή.

« Ἀνθιμος ἐλέω Θεοῦ ἀρχιεπίσκοπος Κωνσταντινουπόλεως
νέας Ῥώμης καὶ Οἰκουμενικὸς Πατριάρχης.

Σοφολογιώτατε καθηγητά, κύριε Δ. Βερναρδάκη, ἡμέτερε κατὰ πνεῦμα υἱὲ λίαν ἀγαπητέ, τὴν περιπόθητον ἡμῖν αὐτῆς σοφολογιότητα ἐκ ψυχῆς ἐν Κυρίῳ εὐχόμενοι εὐλογοῦμεν πατρικῶς. Μετὰ ζωηρᾶς ἰδόντες θυμηδίας τὴν ζηλωτὴν προθυμίαν, μεθ' ἧς ἐσπεύσεν ὁ τέως ἡμῖν ἄγνωστος διαγωνιστὴς συμμορφωθῆναι πληρέστερα πρὸς τὰς παρὰ τῆς καθ' ἡμᾶς Κεντρικῆς Ἐκκλησιαστικῆς Ἐπιτροπῆς ὑποδειχθείσας αὐτῷ ὁδηγίας, παραδεξάμενος τὰς ὑπ' αὐτῆς ἐπενεχθείσας τροποποιήσεις καὶ διασκευάσας τὰ ὑπὸ τὸν ἑλεγχον αὐτῆς ὑποβληθέντα τέσσαρα πολλοῦ λόγου ἄξια πονήματα αὐτοῦ, ἐκρίναμεν εὐλογον καὶ δίκαιον ἵνα ἀσπασθῶμεν τὴν περὶ αὐτῶν εὐμενῇ τῆς ἐν λόγῳ ἐπιτρο-

(*) Ἀλλὰ καὶ εἰς τὰ γυμνάσια, νομίζω, δύναται νὰ διδάσκαται ἡ παροῦσα κατήχησις ἐπὶ τοῦ παρόντος, μέχρις οὗ συνταχθῇ ἄλλη τις καταλληλοτέρα δι' αὐτά.

πῆς κρίσιν, διότι ἐν τῇ πρὸς ἡμᾶς καὶ τὴν ἱερὰν Σύνοδον ἐκθέσει αὐ-
τῆς αὐθόρως διατάξει ν' ἀπορριφθῇ πεπαρρησιασμένως ὁμολογοῦσα,
ὅτι μετὰ τὰς μνησθείσας μικρὰς βελτιώσεις, τὰ βιβλία ταῦτα σύμ-
φωνα πρὸς τοὺς ὅρους τοῦ τεθέντος κατὰ τὴν 10 δεκεμβρίου τοῦ 1869
δικωνίσματος ἀπαρτίζουν ἐν ὅλῳ τῆς στοιχειώδους διδασκαλίας
τῶν ἱερῶν μαθημάτων, οὐχὶ πάντως τέλειον καθ' ἑαυτὸ, ἀλλὰ γε
πολλῷ τῷ μέτρῳ ὑπερέχον ὑπὸ πάσας τὰς ἐπόψεις τῶν ἐν χρήσει ὁ-
μαιοδῶν διδακτικῶν βιβλίων, καὶ ὡς τοιοῦτον ἐγκρίνει αὐτὸ εἰσα-
κτέον ἐν τοῖς καθ' ἡμᾶς σχολείοις, χορηγομένης ἐπὶ τούτῳ τῆς προ-
σηκούσης ἐκκλησιαστικῆς ὑποσηρίξεως. Κατὰ συνέπειαν συνοδικῇ δια-
γνώσει καὶ ὁμοφώνῳ ψήφῳ ἐγνωμὴν ἐπιστέψαι τὰ οὕτως ἐγκριθέντα
τέσσαρα πονήματα τῷ στεφάνῳ τῆς νίκης καὶ ἀποδοῦναι τὸ ὀφειλό-
μενον ἐπαθλὸν τῆς ἀκαμάτου φιλοπονίας καὶ τῆς εὐρείας πολυμαθείας
τῷ ἀγνώστῳ φιλοπονήσαντι αὐτά. Διὸ καὶ συνοδικῶς προκαθημένων
ἡμῶν, παρόντων καὶ τῶν μελῶν τῆς Κεντρικῆς Ἐκκλησιαστικῆς Ἐπι-
τροπῆς, ἀποσφραγισθὲν τὸ ἄχρις ἐκείνης τῆς στιγμῆς ἐνταφάγιστον
δελτίον, ἐφανέρωσεν ἡμῖν μετὰ δικαίας ἐκπλήξεως καὶ ἀνεκκαλήτου
χαρᾶς, ὅτι ὁ τέως γνωστὸς ὡς βαθὺς φιλόλογος, δεινὸς πολυέταρος,
καὶ πολὺς τῆς γενικῆς ἱστορίας καθηγητῆς ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Ἀ-
θηνῶν, ἀνεφάνη νῦν καὶ δαινότερος θεολόγος. Ἐπὶ δὲ τῇ διπλῇ ταύτῃ
ἐπιτυχίᾳ εὐλόγως χιλιοστήν ταύτην φορὰν ἀνακράζαντες, ὅτι οὐκ ἐκ-
λείψουσι τῷ Κυρίῳ ἀξιόμαχοι στρατιῶται καὶ τῇ θρησκείᾳ γενναῖοι
πρόμαχοι, σπεύδομεν ἐπιδαψιλεῦσαι τῇ περισπουδάζοντι ἡμῖν αὐτῇς
σοφολογιότητι τὰς πατρικὰς ἡμῶν εὐλογίας, ἐκφράζοντες συνάμα καὶ
τὸν δίκαιον ἐπαινον διὰ τὴν φιλοπονίαν, ἣν μετὰ ζήλου ἀπαρκαμίλλου
κατέβαλεν ὑπὲρ τοῦ φωτισμοῦ καὶ τῆς ἐν παιδείᾳ καὶ νοουθεσίᾳ Κυ-
ρίου διαμορφώσεως τῆς ὀρθοδόξου νεολαίας. Περιβαλόντες δὲ τὰ δια-
ληρθέντα τέσσαρα πονήματα αὐτῆς διὰ τῆς ἐπισήμου καὶ ὀριστικῆς
ἐκκλησιαστικῆς ἡμῶν ἐγκρίσεως, καὶ συγχαίροντες αὐτῇ ἐπὶ τῷ θριάμ-
βῳ, ὃν οὕτως ἤρατο, χαίρομεν καθορώντες κοσμηθεῖσαν τὴν νεοτέραν
ἐκκλησιαστικὴν ἡμῶν φιλολογίαν διὰ συγγραμμάτων πολλὴν μὲν πε-
ριποιούντων αὐτῇ τιμὴν, πλείονα δὲ δόξαν καὶ εὐκλειαν τῇ ἀγίᾳ τοῦ
Χριστοῦ Ἐκκλησίᾳ, σεμνυνομένη δικαίως καὶ εὐφραίνομένη ἐπὶ τέκνοις
οὕτως εὐσεβέσι καὶ φιλομήτεσι, πλείστον ὕσιν ὑπισχνουμένοις τῇ
καθ' ἡμᾶς ὀρθοδόξῳ νεολαίᾳ ἡθικὴν ὠφέλειαν. Ὅθεν καὶ μετὰ τῆς
παρούσης πατριαρχικῆς ἐπιστολῆς ἐπισυνάπτοντες τέσσαρα περὶ τοιαύ-

τικά τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος Κεντρικῆς Ἐκκλησιαστικῆς Ἐπιτροπῆς, ἀνὰ ἐν ἰδίᾳ δι' ἕκαστον τῶν συγγραμμάτων αὐτῆς πρὸς ἐξασφάλισιν τοῦ χορηγηθέντος αὐτῇ προνομίου, παραγόμεθα καθ' ὑπαγόρευσιν καὶ ἤκοντος ἱεροῦ ὑποδείξει διὰ τοῦ ἐπισυνυμμένου παραρτήματος τῆς ῥηθείσης ἐπιτροπῆς μικρὰς τινὰς ἐλλείψεις ἀναφανείσας καὶ πάλιν ἐν τοῖς συγγράμμασιν αὐτοῖς τοῖτοις, μεθ' αὐτῶν ἀμφιβάλλοντες, ὅτι καὶ ταύτας μετὰ τῆς αὐτῆς προθυμίας παραδεχθήσεται(*), καθ' ὅσον καὶ ἐν τῇ ἰδίᾳ αὐτῆς ὁρθῶς ἐννοουμένῳ συμφέροντι ἐγκρίεται ἡ μᾶλλον ἐφικτὴ τούτων τελειοποίησις. Ἐπὶ τούτοις ποθοῦντες ἵνα πράσχωμεν τῇ αὐτῆς σφοδρολογιότητι νέον δείγμα τῆς ἐκκλησιαστικῆς ἡμῶν εὐαρεσκείας, ἐκρίναμεν δίκαιον ἅμα καὶ εὐλογον ἵνα διπλασιάσωμεν τὴν τέως χορηγηθεῖσαν αὐτῇ τριετὴ προθεσμίαν εἰς ἐξαετῆ, ἀντὶ τῆς πενταετοῦς ἣν ἐξῆστήσατο, ὅπως γενναιότεροι αὐτῆς ἀναδειχθέντες, δικαιότερον φανώμεν ἀμείβοντες τὴν φιλοπορίαν καὶ τὸν ἀκάματον ζῆλον αὐτῆς. Ἡ δὲ τοῦ Θεοῦ χάρις καὶ τὸ ἄπειρον ἔλεος εἴη μετὰ τῆς περιουθήτου ἡμῖν αὐτῆς σφοδρολογιότητος.

α.ω.σ'. ἰουνίου ιγ'.

+ Ὁ Κωνσταντινουπόλεως ἐν Χριστῷ διάπυρος εὐχέτης.

Τοιαύτη ἐν συντόμῳ ἡ ἀφορμὴ καὶ ἱστορία τῆς συντάξεως καὶ ἐκδόσεως τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου καὶ τῶν ἐπιλοίπων τριῶν.

Ἀλλὰ πῶς, ἤθελεν ἐρωτήσῃ τις, λαϊκὸς ἐγὼ καὶ μὴ θεολόγος, ἀπεφάσισα ν' ἀποδυθῶ εἰς τοιοῦτον ἀγῶνα; Τοῦτο δὲν εἶνε σύνηθες, τὸ ὁμολογῶ, ἀλλὰ δὲν εἶνε ὅμως καὶ ὅλως ἀσύνηθες· καὶ διὰ τὰ μὴ τρέχω μακράν, ἀναφέρω (καθ' ὅσον, ἐννοεῖται, εἶνε δυνατόν νὰ συγκρίνη τις τὰ μικρὰ μὲ τὰ μεγάλα) αὐτὸν τὸν πατέρα τῆς καθ' ἡμᾶς νεοελληνικῆς φιλολογίας, τὸν Κοραῆν. Τίς μετέφρασε τὴν κατ' ἑχέσιν τοῦ Πλάτωνος, ἥτις ὑπὲρ τὴν ἡμῖν αἰῶνα διδάσκεται εἰς τὰ σχολεῖά μας; Λαϊκὸς καὶ μὴ θεολόγος, ὁ Κοραῆς. Τίς ἐχειραγωγῆσεν ἀνὰ χιλιάδας καὶ μυριάδας εἰς τὰ στοιχειώδη διδάγματα τῆς ἱερᾶς ἡμῶν πίστεως διὰ τῆς ἐπὶ ἡμῖν αἰῶνα ἐν τοῖς ἀλληλοδιδασκτικοῖς σχυλίοις διδασκομένης στοιχειώδους ἱερᾶς κατ' ἐχέσιν καὶ ἱστορίας τὴν ὁρθόδοξον ἑλληνικὴν νεολογίαν; Πάλιν ὁ Κοραῆς, ὅστις κύριον μελίτημα εἶχεν ὄχι τὴν θεολογίαν, ἀλλὰ τὴν γλώσσαν τὴν ἑλληνικὴν. Διὰ τὰ πα-

(*) Καὶ αἱ παρατηρήσεις αὗται ἐγένοντο παραδεκταί, καὶ τὰ σημειωθέντα χωρία ἐτροποποιήθησαν κατ' αὐτάς.

πραΐσω δὲ καὶ ἐκ τῶν εὐρωπαϊκῶν φιλολογιῶν αὐτὴν τὴν νεωτάτην, τὴν Γερμανικὴν, ὃ καθ' αὐτὸ πατὴρ τῆς γερμανικῆς ποιήσεως καὶ φιλολογίας καὶ γλώσσης, ὁ Λεσσίγγιος, οὐ μόνον ἐξεολόγει ἀλλὰ καὶ μετέδωκεν, ὥς γνωστὸν, σπουδαίαν βοήθην εἰς τὸ θρησκευτικὸν καὶ θεολογικὸν φρόνημα τοῦ ἔθνους του. Φαίνεται λοιπόν, ὅτι ὑπάρχει τις ἐνίοτε ἀρξενεστέρη μὲν καὶ ἐσωτερικώτερη, ἀλλ' οὐσιώδης καὶ πραγματικὴ σχέσις μεταξὺ φιλολογίας καὶ θεολογίας, μεταξὺ θρησκείας καὶ γλώσσης. Καὶ ἀληθῶς τί ἄλλο σαφέστερον ἅμα καὶ χαρακτηριστικώτερον καὶ ολοκληρωτικώτερον τῆς ἐν ἀνθρώποις πνευματικῆς οὐσίας παρὰ τὴν θρησκείαν καὶ τὴν γλῶσσαν; Τί δὲ ἄλλο ἀξιώτερον προσοχῆς καὶ μελέτης ἐμβριθοῦς παρ' αὐτάς, ὅταν μάλιστα τὰ ἔθνη διέρχωνται τὴν περίοδον ἐκείνην, τὴν ἐπικίνδυνον ἅμα καὶ γόνιμον, ἣτις συνήθως λέγεται μεταβατικὴ, καὶ ἣτις πράκειται νὰ ὀδηγήσῃ αὐτὰ ἢ εἰς τὴν σωτηρίαν καὶ εὐκλείαν, ἢ εἰς τὴν ὀλέθρον καὶ τὴν κακοδαιμονίαν; Ὅταν δὲ τὰ ἔθνη ταῦτα εὐρεθῶσιν ἐν τῷ μέσῳ τῶν πλέον ἀντιθέτων καὶ ὀρμητικῶν ρευμάτων τῆς γλώσσης, τῆς θρησκείας καὶ τοῦ πολιτισμοῦ, ὅπως οἱ κατὰ τὴν ἀνατολὴν ὁρμάδουσι ἡμεῖς; Ἕλληνες, τότε οἱ κίνδυνοι τῆς ἀκροφθαλμοῦς ταύτης θέσεως αὐξάνουσιν ἐπ' ἀπειρον, καὶ εἶνε ἀδύνατον ὅστις καὶ ὀλίγον ἐγκύψῃ εἰς τὴν μελέτην τῆς γλώσσης καὶ τοῦ πολιτισμοῦ, νὰ μὴ ἐγκύψῃ καὶ εἰς θρησκευτικὰς μελέτας, καὶ βλέπων συσσωρευμένα ὁσημέραι μελανὰ καὶ φοβεράν τρικυμίαν προμηνύοντα νέφη εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πελάγους, ὅπου πλέει τὸ μικρὸν καὶ ἀσθενὲς σκάφος; τῶν ὁμοδόξων του, νὰ μὴ στρέψῃ ἐκαστικὴν καὶ περιδεῆς βλέμμα πρὸς τὸ πηδάλιον καὶ τὸν πηδαλιωχόν, πρὸς τὴν ἰσράν τῶν πατέρων του π' ἔστιν, ἣτις διέσωσεν αὐτοὺς δι' ὅλων τῶν μακρῶν καὶ πολυκυμάντων αἰώνων. Οἷδὲν ἄρα παράδοξον, ἔαν συγγραφεῖς, ὡς κύριον μελέτημα ἔχων τὴν γλῶσσαν καὶ τὴν ἱστορίαν, καὶ παρακολουθῶν ὅχι ἀπαθῶς οὐδ' ἀδικρόως ἀπὸ πωλίων ἤδη ἐτών(*) τὰς ποικίλας καὶ παντοειδεῖς περιπετείας τῶν κατὰ τὴν ἀνατολὴν ὁμοπίστων του, καὶ βλέπων τὸ μὲν παρὸν πληθεῖς ἀποτυχιῶν καὶ ὀλισθημάτων, τὸ δὲ μέλλον πλήρες κινδύνων διὰ τὸν πάτριον πολιτισμόν, τὴν πάτριον γλῶσσαν, καὶ τὸ πάτριον θρή-

(*) Ὡς πλὴν ἄλλων ὅσα π. χ. ἔγραψον περὶ τῆς θρησκευτικῆς ἡμῶν κατὰ τὴν ἐποχὴν πρὸ 1858 ἐν Μονάχῳ ἐν ταῖς περὶ νεοελληνικῆς-δραματικῆς φιλολογίας καὶ ποιήσεως προλεγομένοις.

σκευμα, προσπαθῶν δὲ ἐς τῶν ἐνόντων νὰ συντελέσῃ καὶ αὐτὸς εἰς τὴν πνευματικὴν αὐτῶν ἐνίσχυσιν καὶ στήριξιν, εἰ δυνατόν δὲ καὶ πρόσδον καὶ βελτίωσιν, ἐπέκυψε κατὰ τὴ μέτρον τῆς ἀσθενείας του καὶ εἰς ὀρθοκευτικὰς καὶ θεολογικὰς μελέτας. Ἡ ὀρθοσκεία, ἡ ὁληθὴς δαλονότης καὶ ἀξία τοῦ ὀνόματος, εἰς τι ἀνώτερον καὶ περιεκτικώτερον, ἅμα δὲ καὶ γενικώτερον καὶ ισχυρότερον καὶ μακροβιώτερον τῆς ἡθικότητος· ἀλλὰ μὴν ἡ ἡθικότης εἶνε ἡ κατ' ἐξοχὴν ἀρετὴ τοῦ ἀνθρώπου, ὃ ἐν τῷ ἀνθρώπῳ ἄνθρωπος οὕτως εἶπεν. Ἡ κατ' αὐτὸ ἀρετὴ καὶ ἀκμὴ τῶν ἐθνῶν συνίσταται κυρίως εἰς τὴν ἐν αὐτοῖς μικρὰν ἢ μεγάλην ἡθικὴν οὐσίαν καὶ δύναμιν, ἡ δὲ δύναμις αὕτη τότε μόνον εἶνε πραγματικὴ καὶ ζωογόνα, ὅταν πηγάζῃ ἐκ τῆς ὀρθοσκείας· ἡ συνταυτίζεται πρὸς αὐτήν. Ἡθικὴ δὲ χειραφέτησις ἀπὸ τῆς ὀρθοσκείας καὶ αὐτονομία, καὶ ἂν ὑπῆρξέ ποτε δυνατόν διὰ τὸ ἄτομον, ὧς ἐκτακτόν τι καὶ ἐξαιρετικὸν φαινόμενον, διὰ τὸν λαὸν καὶ διὰ τὸ ἔθνος εἶνε παντοῦ καὶ πάντοτε ἀπάτη καὶ ψεῦδος, χίμαιρα ἀνυπόστατος, καὶ σύμπτωμα βεβαίωτατον κοινωνικῆς ἀποσυνθέσεως καὶ πολιτικοῦ μαρασμοῦ, ἐὰν ὅχι καὶ θανάτου. Διὰ τοῦτο καὶ λέγω μετὰ πεποιθήσεως, ὅτι λαὸς, ὅποιος ὁ τῶν ὀρθοδόξων Ἑλλήνων, ἐμμένων πιστὸς εἰς τὸ πάτριον ὀρθόσκευμα, καὶ διεσώζων ἀκόμῃ τὰ ἀγνὰ καὶ πατροπαράδοτα ἡθι τοῦ, δύναται ν' ἀτενίσκῃ πάντοτε θαρραλέως, καὶ ἀντι τοῦ ἐλαχίστου φόβου πρὸς τὸ μέλλον, ἐὰν μόνον δὲν ἐκλόνῃσι τὴν εἰς Χριστὸν πάτριον αὐτοῦ πίστιν ἢ ἡμιμάθεια καὶ αἱ περὶ ἡθικῆς αὐτονομίας· τῶν λαῶν χίμαιραι τῶν μωρῶν καὶ δοκησιόφων, καὶ δὲν ἐμόλυνε τὰ ἀγνὰ τοῦ ἡθι τὸ δυσῶδες ρεῦμα τῆς διφθορεῖς καὶ ἐξαχρειώσεως, τὸ ὁσμῆραι ὑπερρότερον καταφερόμενον ἐκ τῆς πολλοῦ μὲν παρηκμακύνει καὶ ἐξηχρειωμένης, ἡθικῶς δὲ καὶ ὀρθοκευτικῶς ἀνιάτωι· σχεδὸν πασχούσης Δύσεως, ὁσμῆραι δὲ πλείωτερον δυσυχῶς ἐπινεμόμενον καὶ κατὰκλύζον τοὺς λαοὺς τῆς Ἀνατολῆς. Τὸ πάτριον ὀρθόσκευμα τῶν ὀρθοδόξων Ἑλλήνων εἶνε αὕτη ἡ διδασκαλία τοῦ Χριστοῦ καὶ τῶν ἀποστόλων ἀνάθετο καὶ ἀπαραχάρακτος, ἥτις ἀπέχουσα ἐξ ἡσῶν ἀπὸ τε τῆς δεσποτικῆς καὶ πᾶσαν ἄλλην ἀνάπτυξιν καὶ κίνησιν τοῦ ἀνθρώπινου πνεύματος παρακωλυούσης συγκεντρώσεως τοῦ Ἀτινισμού, καὶ ἀπὸ τῆς τὰ πάντα τὰ ἱερὰ καὶ ὅσα ἐγκαταλείπουσας μονονουχί ἐρμαιον εἰς τὴν ἀτομικὴν αὐτοβουλίαν καὶ ἰδιοφροσύνην τοῦ τυχόντος ἀκολασίας τῶν διαμαρτυρομένων, προώριται νὰ γύσῃ νέον φῶς εἰς τὸν κόσμον ἐκ τῆς ἀρχικῆς αὐτῆς ἐρίας, ὑπερ καὶ οὐδαί συμβῇ.

ἀφύκτως, ἐὰν μόνον τεθῇ ἐγκαίρως φραγμός εἰς τὰ ἐξωθεν εἰσελαύ-
 νοντα ρυπαρὰ καὶ μεμολυσμένα ρεύματα, καὶ ἐὰν τὰ ἥθη τῶν ὀρθο-
 δόξων ἔλθωσιν εἰς στενοτέραν συνάφειαν πρὸς τὸ πάτριον θρησκευμα,
 ἐὰν δηλονότι τὸ εἰς τοὺς ἐξωτερικοὺς μόνον τύπους περιορισθὲν καὶ ἀ-
 πονεκρωθὲν γράμμα ζωοποιηθῇ ὅταν τάχος διὰ τοῦ πνεύματος τοῦ
 Εὐαγγελίου, καὶ ἡ χριστιανικὴ διδασκαλία χύσῃ τὰ ζωογόνα αὐτῆς
 νάματα εἰς τὴν ἀκυρέστως διψῶσαν αὐτὰ χριστιανικὴν λατρείαν. Ἡ
 μεγάλη τοῦ Χριστοῦ Ἐκκλησία, ἡ σεβασμία πάντων ἡμῶν μήτηρ καὶ
 τροφός, ἔθηκεν ἤδη τὰς πρώτας βάσεις εἰς τοιαύτην βελτίωσιν καὶ
 πρόοδον τῆς θρησκευτικῆς οἰκοδομῆς καὶ διδασκαλίας τοῦ ὀρθοδόξου
 πληρώματος, συστήσασα τὸ περὶ τῶν ἱερῶν μαθημάτων διαγώνισμα,
 καὶ εὐχαριστῶ τὸν Θεὸν ὅτι ἡζήωσεν ἐμέ, τὸ ἐλάχιστον τῆς Ἐκκλη-
 σίας ταύτης τέκνον, νὰ τύχω τῶν εὐχῶν καὶ εὐλογιῶν αὐτῆς, ἀγωνι-
 σθεῖς ἀτελείεστα ἀλλὰ πρῶτος ἐν τῇ νέῃ ταύτῃ καὶ αὖτις μέγαν καὶ
 ὑψηλὸν σκοπὸν ἐπιδιώκουσῃ πνευματικῇ σταδιοδρομίᾳ. Εὐγνωμονῶ δὲ
 καὶ πρὸς τὰ σεβαστὰ μέλη τῆς κεντρικῆς Ἐκκλησιαστικῆς Ἐπιτρο-
 πῆς, ἥτις ἀποβλέψασα μετ' εὐμενεὺς ἐπιεικείας εἰς τὰς πολλὰς καὶ
 πολυειδεῖς ἔλκε ψεις τοῦ ἔργου μου, ἐθεώρησεν αὐτὸ ὡς κατάλληλον νὰ
 χρησιμεύσῃ ὡς ὄργανον τοῦ μετ' αὐτοῦ καὶ ἱερωτάτου τούτου σκοποῦ
 τῆς ἐκκλησίας.

Ἐν Κωνσταντινουπόλει, τῇ 22 Αὐγούστου 1871.

A. N. B.

ΠΡΟΕΙΣΑΓΩΓΗ.

§. 1.

Ἡρ. Τί προαπαιτεῖται διὰ νὰ ἐννοήσωμεν ἀκριβῶς τί ἐστὶ κατήχησις;

Ἀπ. Ἐπειδὴ ἡ κατήχησις εἶνε μάθημα ὀρησκειτικόν, διὰ νὰ ἔχωμεν ὅσον τὸ δυνατόν ἀκριβέστεραν ἔννοιαν τοῦ μαθήματος τούτου, προαπαιτεῖται νὰ γνωρίσωμεν τί εἶνε ἐν γένει ὀρησκειά, καὶ πόσα καὶ ποῖα εἶνε τὰ διάφορα αὐτῆς εἶδη ἢ ὀρησκειύματα.

§. 2.

Τί λέγεται ἐν γένει ὀρησκεία καὶ τί λατρεία;

Ὀρησκειά ἐν γένει¹⁾ λέγεται ἡ εὐλαβὴς τοῦ ἀνθρώπου σχέσις²⁾ πρὸς ὃν τι, ὡς θεῖον ὑπ' αὐτοῦ νοούμενον καὶ πιστευόμενον. Τὸ δὲ σύνολον τῶν ἱερῶν πράξεων καὶ τελετῶν, δι' ὧν ὁ ἄνθρωπος ἐκφράζει καὶ ἐξωτερικῶς τὰ ὀρησκειτικὰ αἰσθημάτων ἢ τὰς ὀρησκειτικὰς του ιδέας, ὀνομάζεται λατρεία³⁾.

1) Ὅπως πολλῶν ἄλλων πραγμάτων καὶ ἐπιστημῶν, οὕτω καὶ τῆς ὀρησκείας ὁ ὁρισμὸς εἶνε δύσκολος· ἄνευ ἐκτενεστεράς καὶ λεπτομεροῦς περιγραφῆς τῶν μερικωτέρων ἐννοιῶν, ὅσαι συναπτερίζουσιν αὐτόν. Τοῦτο ὅμως εἶνε ἀδύνατον νὰ γείνη ἐν τῇ παρόντι ἐγχειρίδι· ὅθεν καὶ ἡρέσθημεν εἰς τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, λιτόν μὲν, ἀλλ' ἔσως ὅχι καὶ ἥττον ὀρθόν ἢ ἀκριβὴ τῶν παμπληθῶν παρὰ τοῖς διαφόροις θεολόγοις καὶ φιλοσόφοις, ἀρχαίοις τε καὶ νεωτέροις, φερομένων.

2) Ἡ σχέσις αὕτη ὀφείλει νὰ νοηθῇ ὡς ἀμοιβαία, ἀλλ' ἡ μὲν τοῦ ἀνθρώπου πρὸς τὸ θεῖον εἶνε σχέσις εὐλαβείας, ἡ δὲ τοῦ Θεοῦ πρὸς τὸν ἄνθρωπον σχέσις προνοίας καὶ ἐπισκέψεως καὶ οἰκονομίας· ὁμοίως.

3) «In nullum uomen religionis, seu verum seu falsum, coadunari homines posse, nisi aliquo signaculorum vel sacramentorum visibilibus consortio colligentur». Augustin. contra Faustum. cap. 2.

§. 3.

Πόσα καὶ ποῖα εἶνε τὰ διάφορα εἶδη τῆς ἐν γένει θρησκείας ἢ θρησκειύματα;

Καὶ πάλαι καὶ σήμερον ὑπῆρχον καὶ ὑπάρχουσι πολλὰ εἶδη θρησκείας ἢ θρησκειύματα. Πολλὰ ἔθνη π. χ. τῆς Ἀσίας ἐξέλαβον ὡς θεὸν αὐτὴν τὴν φύσιν, τὴν ὁποίαν καὶ ἐλάτρευσαν· ἡ τοιαύτη δὲ θρησκεία καλεῖται ἐν γένει φυσιοκρατεία. Καὶ οἱ μὲν Ἴνδοι θεοποίησαν καὶ ἐλάτρευσαν τὰς ἐν τῇ φύσει ἐνοικούσας δυνάμεις, καὶ ἡ τοιαύτη θρησκευτικὴ θεωρία λέγεται πανθεϊσμός. Οἱ δὲ Πέρσαι συνεχέντρωσαν τὰς δυνάμεις ταύτας εἰς δύο ἀντιθέτους καὶ ἀντιμάχους θεότητες, ὧν ἡ μὲν ἐθεωρήθη ὡς ἀρχὴ παντός ἀγαθοῦ, ἡ δὲ ὡς ἀρχὴ παντός κακοῦ, καὶ τὸ τοιοῦτον θρησκευτικὸν σύστημα λέγεται δυασμός. Ἄλλοι ἐλάτρευσαν οὐράνιά τινα σώματα, ὅσον τὸν ἥλιον, τὴν σελήνην, κττ. τοιοῦτον δὲ θρησκεῖον εἶνε ἡ αστρολατρεία τῶν Χαλδαίων. Ἄλλοι ὅπως οἱ Αἰγύπτιοι περιέπεσον εἰς τὴν κτηνολατρείαν, θεοποιήσαντες καὶ λατρεύσαντες ζῶα τινα. Ἄλλοι πάλιν ἐπροσωποποίησαν διὰ τῆς ποιητικῆς των φαντασίας φυσικὰς τινὰς ἢ καὶ ἠθικὰς¹⁾ δυνάμεις ἢ ιδέας ἐπὶ τὸ ἀνθρωπομορφότερον, καὶ τοιαύτη εἶνε π. χ. ἡ πολυθεία τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀνθρωπόμορφα ταῦτα πλάσματα τῆς φαντασίας ἀπεικονίσθησαν ἐν τῇ λατρείᾳ καὶ διὰ τῶν εἰκαστικῶν τεχνῶν, καὶ μάλιστα τῆς γλυπτικῆς, τὰ τοιαῦτα θρησκειύματα ἐξέπεσον πολλάκις εἰς εἰδωλολατρείαν, ἥτοι θεοποίησιν αὐτῶν τῶν καλλιτεχνικῶν εἰδώλων ἢ ὁμοιωμάτων. Ἀλλαχοῦ δὲ πάλιν ἐπεκράτησε καὶ ἀπλήτης κτισματολατρεία, ἥτοι ἀποθέσις καὶ λατρεία φυσικῶν

1) Ἠθικὰς λέγοντες ἐννοοῦμεν τὴν λέξιν ὅχι κατὰ τὴν κοινὴν, ἀλλὰ κατὰ τὴν μέσιν καὶ ἀδιάφορον ἔννοιαν, ἣν ἔχει ὡς ὅρος τεχνικός, ἐκλαμβάνομένη ὁμοίως ἐπὶ καλοῦ καὶ ἐπὶ κακοῦ. Αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος ιδέαι ἦσαν ὡς ἐπὶ τὸ πλεστον ιδέαι παθῶν φυχῶν, καὶ ἐνίστα κτηνοδῶν. Καὶ αἱ ὀλίγισται δὲ ἀγαθαὶ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν αὐτῶν ιδέαι οὐδέποτε σχεδὸν ἔμειναν ἀδιάφοροι ἐν τῇ λατρείᾳ ἢ ἐν τῇ καλλιτεχνικῇ καὶ ποιητικῇ παραστάσει. Πρὸς. Ῥωμ. ε. 26—32, αἱ Augustin. de Civitate Dei, XII. 2, 3.

τινῶν ἀφύχων ἀντικειμένων, ὁδὸν ὄρους, δένδρου, λίθου, κτ.τ.)
 ἡ ξοανολατρεία (φετηχισμός), καὶ ἀλλαχοῦ τέλος ἡ ὀρη-
 σκεία ἐξώκειλεν εἰς γοητείαν.

2) Εἰς τὰ ἀνωτέρω ὀρησκέυματα δὲν συγκατελέξαμεν καὶ τὸν σημερινὸν Ἰου-
 δαϊσμόν, ὡς καὶ τὸν Ἰσλαμισμόν, διότι ὁ μὲν πρῶτος εἶναι ὀρησκευμα ὅλως
 σχεδὸν ἀρητικόν, ὁ δὲ δευτέρος εἶναι νόθον ἀποκύημα καὶ κρῆμα ἀρχαίου καὶ
 νέου Ἰουδαϊμοῦ, χριστιανισμοῦ καὶ ἀραβικῆς εἰδωλολατρείας.

α. Ὁ ἀρχαῖος Ἰουδαϊσμός, ἦτοί ἡ ἐξ ἀποκαλύψεως ὀρησκέα τῆς παλαιᾶς
 Διαθήκης, ἦτο, ὡς θέλομεν ἰδῆ κατωτέρω, αὐτὸς ὁ χριστιανισμός, διερχόμενος
 εἰσέτι τὸ πτάδιον τῆς προπαιδείας καὶ προπαρασκευῆς. Ἄλλ' οἱ Ἰουδαῖοι ὅμως,
 ἀρνηθέντες τὸν Ἰησοῦν Χριστόν, ἐλθόντα εἰς τὸν κόσμον, καὶ τελέσαντα τὸ
 κοσμοσωτήριον ἔργον, τὸν Ι. Χ., ὅστις ἦτο ὁ παρωγανιστὴς λίθος, ἡ ἀρχὴ καὶ
 τὸ τέλος, τῆς ἐξ ἀποκαλύψεως ὀρησκέας ἐν γένει, ἀπηνήθησαν, ὡς εἶκος, αὐ-
 τὴν τὴν ἐξ ἀποκαλύψεως ὀρησκειάν τῆς παλ. Διαθήκης, εἰ καὶ φαντάζονται ὅτι
 πρεσβεύουσι καὶ διακρατοῦσιν αὐτὴν μέχρι σήμερον. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ὁ
 σημερινὸς Ἰουδαϊσμός τῆς μὲν παλαιᾶς Διαθήκης ἀπέξενώθη πράγματι, περιω-
 ρίσθη δὲ εἰς δύο ἱερὰ, κατὰ τοὺς νῦν Ἰουδαίους, βιβλία, τὴν Κ α β ἄ λ α ν καὶ
 τὸ Τ α λ μ ο ῦ ῥ, ἐν οἷς περιέχονται μὲν ἀληθεῖαι τινες ὀρησκευτικά, παραληφθεῖ-
 σαι ἐκ τῆς παλ. Διαθήκης, ἀλλὰ περικεκαλυμμένα ἐν ὅσῳ ζόφῳ πυκνοῦ καὶ ἀ-
 διοράτου παραλαγισμῶν καὶ δεισιδαιμονιῶν. Τὰ βιβλία ταῦτα διδάσκουσι πολλὰ
 παράλογα καὶ μυθώδη περὶ Θεοῦ, περὶ δημιουργίας, περὶ Μεσσίας, περὶ ἀνα-
 στάσεως νεκρῶν, κτλ. Τὴν πρὸς τὸν πλησίον ἀγάπην περιορίζουσιν ἀποκλει-
 στικῶς τὰ βιβλία ταῦτα εἰς τὸ ἔθνος τῶν Ἰουδαίων, πρὸς δὲ τοὺς ξένους καὶ
 ἄλλοθινοὺς αὐτὲς κηρύττουσι μικροῦς καὶ ἐχθροῦς τοῦ Θεοῦ, διδάσκουσι μίσος,
 ἔχθραν καὶ πόλεμον διὰ παντός ἀεμίτου καὶ ἀθεμίτου μέσου, καὶ αὐτῆς τῆς ἐπορ-
 κείας. Ἀληθεὺς ἠθικῆς διδασκαλίας οὐδὲ ἴχνος σχεδὸν ἐν αὐτοῖς· περιορίζεται
 ἐν ἡ ἀγιότητι τοῦ πιστοῦ εἰς τὴν τήρησιν τύπων τινῶν, νεκρῶν καὶ γυμνῶν
 πάσης ἐννοίας, ὡς οἱ πλείστοι ἀναφέρονται εἰς τὴν ἀργίαν τῶν Σαδδουκαίων, καὶ
 εἰς τὴν διακρίσιν τῶν καθάρων καὶ ἀκαθάρτων τροφῶν, σκευῶν, κτλ. *Πρόβλ.*
Maesire Introduction à la théologie orthodoxe, §. 28.

β. Τοῦ δὲ Ἰσλαμισμού θεμελιωτὴς ὑπῆρξεν ὁ κατὰ τὴν ζ'. μ. Χ. ἑκα-
 τονταετηρίδα ἀκμάσας Ἀραβ Μωάμεθ, κηρύξας ἐαυτὸν προφήτην καὶ ἀπό-
 στολον τοῦ Θεοῦ, καὶ ἐπιβαλὼν εἰς πολλοὺς τὸ ὀρησκευμά του. Ἐξέβηκε δὲ
 οὗτος καὶ ὀρησκευτικὴν διδασκαλίαν του ἐν τῷ Κορανίῳ, τὸ ὅποιον οἱ Μωα-
 μεθανοὶ θεωροῦσιν ὡς βιβλίον ἱερὸν καὶ θεόπνευστον, καὶ εἰς τὰ ὅποια συμπε-
 ρισμῶνθησαν πολλὰ ἐκ τῆς παλαιᾶς καὶ ἐκ τῆς καινῆς Διαθήκης, ἀλλοιωθέντα
 ὅμως τὰ πλείστα (ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἐξῆς· οἶον ὅτι ὁ Ἀβραάμ καὶ ὁ Ἰσαὰκ
 ἔκτισαν νόον ἐν Μείκκ, διὸ ὁ Ἀβραάμ ἐπρόσφερεν εἰς θυσίαν τὸν Ἰσαὰκ, ὅτι
 ἡ παρθένος διαρῖα ἦτο ἀδελφὴ τοῦ Ἀαρῶν, κτλ. κτλ.). Ἡ πολυγαμία, τὰ πε-
 πρωμένον, ἔχον τὸ δόγμα τοῦ θεοῦ ἐν ἀπολύτῳ προσηρισμῷ (ἐπὶ τῇ) πατριαρ-
 χικαί τινες ἀρεταί, ἡ αὐστηρὰ τήρησις ἐξωτερικῶν τινῶν τύπων, ὅποῃ εἶναι μά-

§. 4.

Εἶνε τὰ ἀληθῆ ὁρησκέυματα ταῦτα ἢ ὄχι, καὶ διὰ τί;

Τὰ ἀνωτέρω ὁρησκέυματα, ὡς καὶ πάντα τὰ ὅμοια μὲ αὐτά, εἶνε ψευδῆ καὶ ἐσφαλμένα, διότι ἀποδίδουσι τὴν θεότητα ὄχι εἰς τὸ ὑπέρτατον Ὄν, ἀλλ' εἰς ὄντα μερικὰ καὶ πεπερασμένα, κτίσματα καὶ δημιουργήματα τοῦ ὑπερτάτου Ὄντος.¹⁾

§. 5.

Ποία καὶ τίς ἡ ἀληθὴς καὶ τελεία ὁρησκεία;

Ἀληθὴς καὶ τελεία ὁρησκεία εἶνε ἐκείνη, ἣτις ἀποδίδει τὴν θεότητα εἰς αὐτὸ τὸ ὑπέρτατον Ὄν, ὅπερ εἶνε ὁ εἷς καὶ μόνος ἀληθινὸς Θεός, ὁ ποιητὴς καὶ δημιουργὸς σύμπαντος τοῦ κόσμου. Τοιαύτη δὲ ἀληθὴς καὶ τελεία ὁρησκεία εἶνε μία καὶ μόνη, ὁ Χριστιανισμός.

§. 6.

Πῶς ἄλλως διακρίνεται ὁ Χριστιανισμός, ὡς ἐκ τῆς ἀρχῆς καὶ κατὰγωγῆς αὐτοῦ;

Ὁ Χριστιανισμός, ἥτοι ἡ χριστιανικὴ ὁρησκεία, διαφέρει καὶ διακρίνεται οὐσιωδῶς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ψευδῶν καὶ ἀτελῶν ὁρησκειμάτων καὶ ὡς ἐκ τῆς θείας αὐτοῦ ἀρχῆς καὶ κατὰγωγῆς, διότι αὐτὸς ὁ Θεὸς ἀποκαλύψας ἑαυτὸν εἰς τὸν ἄνθρωπον, ἀπεκάλυψεν¹⁾ ἥτοι ἐφάνερωσεν²⁾ εἰς αὐτόν καὶ τὰς

λίστα αἱ πολλάκις τῆς ἡμέρας ἐπαναλαμβάνόμεναι ἀπονίφεις καὶ καθαρμοί, ἡ ἀπαγόρευσις τῆς ἐρέυνας εἰς τὰ τῆς ὁρησκείας, καὶ ἡ δι' ὀλικῶν ἀπολαύσεων ἀνταμοιβὴ ἐν τῇ μελλούσῃ ζωῇ, διακρίνουσιν ἐν γένει τὸν ἰσλαμισμόν καὶ τὸ περιεχόμενον τοῦ Κορανίου. (Maccaire αὐτόθι, §. 29).

1) «Καὶ ἠλλαξαν τὴν δόξαν τοῦ ἀφθάρτου Θεοῦ ἐν ὁμοιώματι εἰκόνος φθορὰς ἀνθρώπου, καὶ πετεινῶν καὶ τετραπόδων καὶ ἐρπετῶν . . . καὶ ἐλάτρευσαν τῇ κτίσει παρὰ τὸν κτίσαντα.» Ῥωμ. ἀ. 23—25. Πρβλ. Δευτερονόμ. δ'. 15. εἷς, 6'. Βασιλειῶν ιζ'. 29, Ψαλμ. ρς'. 20, Ἡσαΐ. μ'. 18, Ἱερεμ. β'. 11, Πρᾶξ. Ἀποστολ. ιζ'. 29.

1) Ματθ. ια'. 27, ις'. 17, ἀ. Κορινθ. β'. 10, ιδ'. 30, Φιλιπητ. γ'. 15, κλπ.

2) Ῥωμ. ἀ. 19, Κολοσσ. ἀ. 26, 27, ἀ. Τιμόθ. γ'. 16, κλπ.

θείας ἐκείνας ἀληθείας καὶ διδασκαλίας, οἵτινες συναποτελοῦσι τὸ περιεχόμενον τοῦ Χριστιανισμοῦ, καὶ αἵτινες οὐδαμῶς ἄλλως θὰ ἦτο δυνατόν ν' ἀποκαλυφθῶσιν εἰς αὐτόν.³⁾ Διὰ τοῦτο καὶ ὁ Χριστιανισμὸς λέγεται θρησκεία ἐξ ἀποκαλύψεως.

§. 7.

Πόθεν προήλθε τὸ πλῆθος τῶν ψευδῶν θρησκευμάτων καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν ἀπὸ τῆς χριστιανικῆς θρησκείας καὶ ἀπ' ἀλλήλων;

Κατ' ἀρχὰς δὲν ὑπῆρχεν εἰμὴ μία καὶ μόνη θρησκεία, ἡ χριστιανική, ἀποκαλυφθεῖσα εἰς τὸν πρωτόπλαστον Ἀδὰμ ἀμέσως ὑπ' αὐτοῦ τοῦ Θεοῦ, καὶ ὑπὸ τοῦ Ἀδὰμ μεταδοθεῖσα κατὰ διαδοχὴν καὶ κληρονομίαν εἰς τοὺς ἀπογόνους του. Ἀλλὰ προίοντος τοῦ χρόνου ὁ μὲν νοῦς τῶν ἀνθρώπων ἐπεσκοτίσθη, ἡ δὲ καρδιά αὐτῶν ἐπωρώθη, ἐντεῦθεν δὲ καὶ ἡ πατροπαράδοτος ἀληθὴς θρησκεία ἐξηφανίσθη ἔτι μᾶλλον, μέχρις οὗ ἐπὶ τέλους τὸν τόπον αὐτῆς κατέλαβον ἄλλα νέα, ψευδῆ, θρησκευματα, γεννήματα τῆς ἀνθρωπίνης ταύτης ἀποτυφλώσεως καὶ πωρώσεως. Τούτου ἕνεκα καὶ ἡ μὲν ἐξ ἀποκαλύψεως θρησκεία ἦτο πάντοτε μίς, διότι εἷς ὑπῆρξεν ὁ πατήρ αὐτῆς καὶ διδάσκαλος, ὁ Θεός· τὰ δὲ λοιπὰ θρησκευματα εἶνε πολλὰ καὶ διάφορα, διότι πολλὴ καὶ διάφορος ὑπῆρξε κατὰ καιροὺς καὶ τόπους καὶ ἡ διανοητικὴ καὶ ἠθικὴ διαφθορὰ τῶν ἀνθρώπων, ἐκ τῆς ὁποίας ἐγεννήθησαν. Ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὰ ψευδῆ ταῦτα θρησκευματα παρετηρήθῃ ἀνέκαθεν ἀμυδρά τις ὁμοιότης ἐν τισι πρὸς τὴν ἐξ ἀποκαλύψεως θρησκειαν, ἡ ὁμοιότης αὕτη προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι καὶ ἐν αὐτοῖς διεσώθησαν κατὰ παράδοσιν, εἰ καὶ ἄλλοιωθέντα, λείψανά τινα ἐλάχιστα τῆς ἀληθοῦς θρησκείας. Διότι καὶ τούτων ἀπάντων τῶν ἐθνικῶν θρησκευμάτων βᾶσις ὑπῆρξαν, ὡς ἐκ τῶν προειρημένων γίνεται δῆλον, αἱ πρῶται ἐκεῖναι ἐξ ἀποκαλύψεως θεῖαι παραδόσεις, αἵτινες διερχόμεναι ἀπὸ

3) Lac ant. Institutionum divinarum lib III. 25.

στόματος εἰς στόμον, ὑπὸ γενεᾶς εἰς γενεάν, καὶ ἀπὸ χώρας εἰς χώραν, ἡμαυρώθησαν βαθμηδόν, καὶ ἀλλοιωθεῖσαι ἐξέπεσον εἰς παντοίαν παραφθοράν καὶ δεισιδαιμονίαν¹⁾

§. 8.

Πῶς ἄλλως ὀνομάζεται ἡ ἐξ ἀποκαλύψεως θρησκεία, πόσαι καὶ ποῖαι αἱ διάφοροι αὐτῆς φάσεις ἢ περίοδοι, καὶ κατὰ τί διαφέρουσι;

Ἡ ἐξ ἀποκαλύψεως θρησκεία, ἐν γένει μὲν σύγχρονος μετὰ αὐτὴν τὴν πλάσιν τοῦ ἀνθρώπου, ἀναπτυχθεῖσα δὲ ἰδίως ἀφ’ οὗ τοῦ ὁ Θεὸς ἔδωκεν εἰς τὸν πεπτωκότα Ἀδὰμ τὴν περὶ τῆς μελλούσης σωτηρίας ἐπαγγελίαν¹⁾, καὶ μέλλουσα νὰ καταλήξῃ εἰς αὐτὴν τὴν συντέλειαν τοῦ κόσμου, ὀνομάζεται καὶ χριστιανικὴ πίστις, κατὰ τὴν εὐρυτέραν σημασίαν τῆς λέξεως, καὶ χριστιανισμός, ὡς προεῖρήθη. Ἐχει δὲ ὁ χριστιανισμὸς τρεῖς μεγάλας περιόδους ἢ φάσεις, α) τὴν ἀπὸ Ἀδὰμ μέχρι Μωϋσέως, β) τὴν ἀπὸ Μωϋσέως μέχρι Χριστοῦ, καὶ γ) τὴν ἀπὸ Χριστοῦ μέχρι συντελείας τοῦ κόσμου.

Καθ’ ἑαυτὴν, ἦτοι κατ’ οὐσίαν, ἡ χριστιανικὴ θρησκεία ἦτο ἀπ’ ἀρχῆς μέχρι σήμερον καὶ θὰ μείνῃ μέχρι τέλους μία, ἡ αὐτὴ καὶ ἀναλλοίωτος· διὰ τοῦτο καὶ ὁ ἀπόστολος Παῦλος λέγει· Ἰησοῦς Χριστὸς χθὲς καὶ σήμερον ὁ αὐτὸς καὶ εἰς τοὺς αἰῶνας²⁾. Ἀλλ’ αἱ μὲν δύο πρῶται περίοδοι ἦσαν χρόνοι προπαρασκευῆς καὶ πίστεως εἰς τὸν Ἰησοῦν Χριστόν, μέλλοντα νὰ ἔλθῃ καὶ σώσῃ τὴν ἀνθρωπότητα ἀπὸ τῆς ἁμαρτίας³⁾, ἡ δὲ τρίτη περίοδος εἶνε χρόνοι σωτηρίας καὶ πίστεως εἰς τὸν Ἰησοῦν Χριστόν, ἔλθόντα ἢ ἤδη καὶ τελέσαντα τὸ ἔργον τοῦτο τῆς σωτηρίας. Κατὰ τὴν πρώτην περίοδον ἡ χριστιανικὴ θρησκεία ἀπεκαλύφθη ἀμέσως ὑπ’ αὐτοῦ τοῦ Θεοῦ εἰς τὸν Ἀδὰμ μετὰ τὴν πτώσιν αὐτοῦ, ὑπὸ δὲ τοῦ Ἀδὰμ μετεδόθη κατὰ πα-

1) Tertullian Apologetic, VII, XXV, XXVI, XLVII, Εὐσεβίου, Εὐαγγελικῆς προπαρασκευῆς β, 1, καὶ ἄλλ. πολλ.

1) Γενεσ. γ'. 15. 2) Κορ. ι. 3, 4 3) Ἑβρ. ιβ'.

ράδοσιν καὶ διαδοχὴν εἰς τοὺς ἀπογόνους τοῦ'). Ἐπειδὴ ὁμοίως, ὡς προεῖρήθη, ἡ θρησκεία αὕτη, ἀθετηθεῖσα ὑπ' αὐτῶν⁵⁾, διασώθη εἰς ὀλίγους μόνον ἀπογόνους τοῦ Σηθ μέχρι τοῦ Νῶε, ἡθετήθη δὲ πάλιν καὶ ὑπὸ τῶν ἀπογόνων τούτου μετὰ τὸν κατακλυσμόν⁶⁾, ὁ Θεὸς ἠδδόκησε νὰ ἀνανεώσῃ τὴν ἀποκάλυψιν αὐτοῦ πρὸς τοὺς πατριάρχας Ἀβραάμ, Ἰσαάκ καὶ Ἰακώβ μέχρι Μωυσέως. Οἱ κατὰ τὴν πρώτην λοιπὸν περίοδον ταύτην ἔζων ἐν τῇ ἀναμνήσει τῶν θείων τούτων ἀποκαλύψεων, ὅσαι ἔγειναν πρὸς τοὺς πατριάρχας, ὅτε μὲν πρὸς δῆλωσιν τῆς θείας ὀργῆς διὰ τὴν ἁμαρτίαν, ὅτε δὲ πρὸς παραμυθίαν διὰ διαφορῶν ἐπαγγελιῶν περὶ τῆς μελλούσης σωτηρίας⁷⁾. Ἀλλ' ὁ κύκλος τῶν τε θείων ἐπαγγελιῶν τούτων καὶ τῆς ἐξωτερικῆς λατρείας ἦτο κατὰ τὴν περίοδον ταύτην περιωρισμένος ἀκόμη.

Κατὰ τὴν δευτέραν περίοδον ἡ θεία ἀποκάλυψις ἔγεινεν ὅχι πλέον προφορικῶς μόνον, ἀλλὰ καὶ γραπτῇ, καὶ τοιουτοτρόπως προήλθεν ὁ μὴ σὰν νόμος, ὅστις ἐδόθη ἐπὶ τοῦ ὄρους Σινά. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἀπὸ τὸν γραπτὸν νόμον τῆς ἐξ ἀποκαλύψεως θρησκείας ἐξέκλιναν πάλιν οἱ ἄνθρωποι, καὶ ἀφέθησαν ἀχαλίνωτοι εἰς πᾶσαν ἀσέβειαν καὶ κακίαν, καὶ αὐτὴν ἀκόμη τὴν εἰδωλολατρείαν, ὁ Θεὸς ἐξείλε τοὺς προφήτας, οἱ ὅποιοι ἀμέσως ὑπ' αὐτοῦ τοῦ πνεύματος τοῦ Θεοῦ κινούμενοι καὶ ὁδηγούμενοι ἐδίδασκον τοὺς ἀνθρώπους, ζητοῦντες νὰ τοὺς ἀναχαιτίσωσιν ἀπὸ τὰ κακὰ ἔργα, καὶ νὰ τοὺς ἐπιστρέψωσιν εἰς τὴν ἀληθινὴν θρησκείαν τοῦ Θεοῦ⁸⁾, ἅμα δὲ καὶ ἐπροφήτευσον τὴν ἔλευσιν ἐκείνου, ὅστις ἐμελλε νὰ σώσῃ τὸν κόσμον⁹⁾. Τοιουτοτρόπως δὲ ὁ μὲν κύκλος τῶν θείων ἐπαγγελιῶν καὶ ἀποκα-

1) Ἐβραϊ. α. 2. 5) Γενέσ. ς. 44 6) Ἰησοῦ τοῦ Ναοὺ κδ', 2.

7) Ἐβρ. α. 2.—8). Ἰησοῦ. κδ'. 8, νδ'. Ἰερερ. ς'. 17, Ἰεζεκιλ γ' 17, κλπ.

9) Αἱ περὶ τῆς ἐλεύσεως τοῦ Μεσσίας προφητικαὶ προφῆσεις τῆς παλ. Διαθήκης περιέχονται ἐν τοῖς ἑξῆς· μάλιστα χωρίοις· Γεν. κδ'. 10, Ψαλμ. οά. 6, Ἰησ. 6'. α, γγ', ζ', Ἰερερ. κγ'. 6, λδ. 31, Ἰεζεκ. λδ'. 21, Δαν. 9'. 24, Ἰησ. 6'. 48, Ἰωήλ 6'. 28, Ἀμώ· 9'. 11, Ὀβδιού 17, Ἰωνά α. 17, Μιχαί. ε. 2, Ναούμ α. 15, Ἀδοκούμ γ'. 2, Σοφον. γ'. 14, Ἀγγαί. 6'. 8, Ζαχαρ. 6'. 40, ιδ'. 8, Μαλαχί, γ'. 1.

λύψεων ἔγεινεν εὐρύτερος καὶ καθαρώτερος, ἢ ἐξωτερικὴ λα-
τρεία ἀναπτύχθη καὶ ἔφθασεν εἰς τὴν ἀνωτάτην αὐτῆς προπα-
ρασκευαστικὴν ἀκμὴν, ὃ δὲ περιούσιος λαὸς τοῦ Θεοῦ χωρι-
σθεὶς ἀπὸ τῶν λοιπῶν συναπετέλεσε μίαν θ ε ο κ ρ α τ ί α ν¹⁰⁾,
ἣτις προεἰκόνιζε τὴν αἰώνιον τοῦ Θεοῦ βασιλείαν, τὴν μέλλου-
σαν νὰ κατεργασθῇ μετὰ τὴν ἔλευσιν τοῦ Σωτῆρος. Δι' ὧτων
δὲ τούτων τῶν μέσων ὁ ἄνθρωπος προπαρασκευάζεται, καὶ μά-
λιστα καθ' ὅσον μὴ δυνάμενος νὰ ἐκπληρώσῃ καθ' ἑαυτοῦ ἀποκληρίαν
τὸν νόμον¹¹⁾, ἤρχετο εἰς βαθυτέραν δαημέραι τῆς ἁμαρτίας
συναίσθησιν καὶ ζωηροτέραν τῆς σωτηρίας ἐπιθυμίαν.

Κατὰ τὴν τρίτην καὶ τελευταίαν περίοδον τέλος, τὴν ἀνω-
τάτην καὶ λαμπροτάτην πασῶν, διὰ τῆς ἐνανθρωπήσεως τοῦ
Θείου ἡμῶν Λυτρωτοῦ καὶ Σωτῆρος γίνονται τὰ πάντα καινά.
"Ὅ,τι τῶς προκατήγγελλον μόνον οἱ προφῆται, ἤδη πληροῦ-
ται καὶ γίνεται πρᾶγμα: ὅ,τι ὁ νόμος δὲν ἠδύνατο νὰ κατορ-
θώσῃ, κατορθώνει ἤδη ἡ χάρις τοῦ Θεοῦ¹²⁾: τὸ κοσμοσωτή-
ριον ἔργον τῆς ἀπολυτρώσεως τελεῖται, ἡ χριστιανικὴ θρη-
σκία ἀποκαλύπτεται πλήρης καὶ τελεία, καὶ τὸ εὐαγγέλιον
αὐτῆς κηρύττεται ὄχι μόνον εἰς τοὺς Ἰσραηλίτας, ἀλλὰ καὶ
εἰς ὅλα τὰ ἔθνη, εἰς ὅλον τὸν κόσμον.

§. 9.

Κατὰ τί λοιπὸν διαφέρει τὸ Εὐαγγέλιον ἀπὸ τῆς παλαιᾶς Διαθήκης, ἥτοι ὁ
καθ' αὐτὸ Χριστιανισμὸς ἀπὸ τοῦ Ἰουδαϊσμοῦ;

Ἡ καινὴ Διαθήκη, ἡ τὸ Εὐαγγέλιον, διαφέρει ἀπὸ τῆς πα-
λαιᾶς Διαθήκης, ἥ, ὅπερ ταύτόν, ὁ καθ' αὐτὸ καὶ ἰδίως Χρι-
στιανισμὸς διαφέρει ἀπὸ τοῦ Ἰουδαϊσμοῦ, ὅπως καὶ ἡ τρίτη

40) Θεοκρατία λέγεται τὸ πολίτευμα ἐκεῖνο, κατὰ τὸ ὁποῖον ὁ μὲν Θεὸς εἶ-
νε ὁ ἄμσος βασιλεὺς καὶ κυβερνήτης τοῦ λαοῦ, ὃ δὲ οἰοσδήποτε ὁρατὸς ἡγε-
μὼν ἢ πρῶτος ἀμσος αὐτοῦ εἶνε ἄπλος ἀντιπρόσωπος καὶ ὄργανον τοῦ κυβερ-
νῶντος Θεοῦ. (1) Ῥωμ. γ'. 23 Γαλατ. γ'. 41.

12) «Ὁὐ γάρ ἐστε ὑπὸ νόμον, ἀλλ' ὑπὸ χάριν» Ῥωμ. 5, 14.

περίοδος τῆς· ἐξ ἀποκαλύψεως θρησκείας, ἡ καθ' αὐτὸ χριστιανική, ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων προηγουμένων, τουτέστι τὸ Εὐαγγέλιον ἐπισφραγίζει καὶ συμπληροῖ ἅπαξ καὶ διὰ παντὸς τὸν μωσαϊκὸν νόμον, καὶ τὴν παλαιὰν Διαθήκην ἐν γένει. Ἡ παλαιὰ Διαθήκη ὡς προπαιδαγωγική, ἦτο καὶ προσωρινή, μέλλουσα ποτε νὰ ἀντικατασταθῇ, ἐν ᾧ ἡ νέα Διαθήκη εἶνε ὀριστική, ὡς μέλλουσα νὰ ἰσχύῃ διὰ παντὸς μέχρι τῆς συντελείας τοῦ αἰῶνος¹⁾. Τὸ Εὐαγγέλιον, χωρὶς νὰ ἀντιφάσκη καὶ ἀντιμάχεται πρὸς τὴν παλαιὰν Διαθήκην, εἶνε πολὺ αὐτῆς πληρέστερον, τελειότερον καὶ ὑψηλότερον.

α.) Ἐν πρώτοις ἀλήθειαι τινες τῆς ἐξ ἀποκαλύψεως θρησκείας ἀναπτύσσονται πληρέστατα ἐν τῷ Εὐαγγελίῳ, ἐν ᾧ ἀτελῶς μόνον ὑποδεικνύονται ἐν τῇ παλαιᾷ Διαθήκῃ, ὅπως συμβαίνει π. χ. εἰς τὸ περὶ τῆς ἁγίας Τριάδος μυστήριον, εἰς τὸ περὶ τῆς θείας ἐνανθρωπήσεως τῆς ἀπολυτρώσεως, καὶ ἄλλα τινά.

β.) Ἡ κατὰ τὸν μωσαϊκὸν νόμον λατρεία τῆς παλαιᾶς Διαθήκης ἦτο πλήρης τύπων, οἵτινες εἶχον ἀξίαν μόνον ὡς ἀναφερόμενοι εἰς τὴν μέλλουσαν τοῦ θείου ἡμῶν Λυτρωτοῦ θυσίαν²⁾, διὸ καὶ παρῆλθον ὡς σκιά. Ἡ θεία λατρεία κατὰ τὸ Εὐαγγέλιον εἶνε ἀπ' ἐναντίας ὅλως πνευματική. Καὶ αἱ μὲν τελεταὶ τῆς παλαιᾶς Διαθήκης δὲν ἠδύναντο νὰ μεταδώσωσιν ἀφ' ἑαυτῶν εἰς τὸν ἄνθρωπον τὴν σωτήριον χάριν, μηδὲ νὰ καθαρίσωσιν αὐτὸν ἀπὸ τῆς ἁμαρτίας³⁾. τὰ δὲ μυστήρια τῆς νέας Διαθήκης ἐξ ἐναντίας μεταδίδουσιν οἶκθεν εἰς τοὺς πι-

1) Λουκ. ις'. 46, Γαλάτ. γ'. 24—25, Ἑβρ. ζ. 12, ιγ'. 8. 20, Ματθ. ις'. 48, ἀ. Κορ. ιε'. 25. 2) Ἑβρ. θ'. 11—24, Λευϊτ. ε. 5, 7, Πράξ. ιε'. 41.

3) Γαλάτ. γ'. 11, Ἑβρ. ι. 4. Ὁ Ἰσραηλίτης π. χ. συνθηθάνετο ἐνδομύχως, ὅτι διὰ τοῦ αἵματος ταύρων καὶ μόσχων ἡ ἁμαρτία δὲν ἠδύνατο νὰ ἐξαλειφθῇ (Ἑβρ. ι. 4), μηδὲ νὰ δικαιοῦσθῃ, τελειώσῃ καὶ ἀγάσῃ αὐτὸν ἡ ἅπαξ τοῦ ἐνταυτοῦ ὑπὸ τοῦ μεγάλου ἀρχιερέως προσφερομένη ἱλαστήριος θυσία (Ἑβρ. ι. 11), καὶ προσεδόκα λοιπὸν νὰ προσενεχθῇ ὑπὲρ αὐτοῦ τελειότερα τις θυσία ἐξαλειφούσα διὰ παντὸς τὴν ἁμαρτίαν (Ἑβρ. ι. 12—14).

στοὺς τὴν θεϊὰν χάριν, ἀναγεννῶντα, ἀγιάζοντα καὶ ἐνισχύοντα αὐτοὺς πρὸς πᾶν ἔργον ἀγαθόν⁴⁾.

γ'.) Ὁ νόμος τῆς παλαιᾶς Διαθήκης ἦτο παιδαγωγὸς αἰσθηρὸς καὶ δεσποτικὸς, μεταχειριζόμενος τὸν ἄνθρωπον ὡς ἀνήλικον, ἐν ᾧ ἐξ ἐναντίας ὁ νόμος τοῦ Εὐαγγελίου μεταχειρίζεται τὸν πιστὸν ὡς ἐνήλικον, ὅχι πλέον ὡς «υἱὸν παιδείας», ἀλλ' ὡς «υἱὸν ἐλευθέρου»⁵⁾. Διὰ τοῦτο καί, ἐν ᾧ ὁ μωσαϊκὸς νόμος ἐπέβαλλε ποινὰς ἐγκοσμίους εἰς τὸν παραβάτην, ὁ εὐαγγελικὸς δὲν ἐπιβάλλει, ἀναφέρεται δὲ μᾶλλον πρὸς αὐτὴν τὴν θέλησιν τοῦ πιστοῦ, καὶ ταύτην πρὸ παντὸς ἄλλου προσπαθεῖ νὰ καθαρίσῃ καὶ νὰ στρέψῃ πρὸς τὸ ἀγαθόν. Διὰ τοῦτο καὶ ἡ ἠθικὴ τοῦ Εὐαγγελίου εἶνε ἀσυγκρίτως τῷ λόγῳ πληρεστέρα, τελειότερα καὶ ὑψηλότερα. Ὁ μωσαϊκὸς νόμος π. γ. ἀπαγορεύει καὶ τιμωρεῖ τὸν φόνον, ἀλλὰ τὸ Εὐαγγέλιον ἀπαγορεύει ὅχι μόνον τὸν φόνον, ἀλλὰ καὶ τὴν ὀργὴν καὶ τὴν ὕβριν καὶ πᾶσαν ἐν γένει αἰτίαν καὶ ἀφορμὴν φόνου. Ὁ μωσαϊκὸς νόμος ἀπαγορεύει καὶ τιμωρεῖ ἐν γένει τὴν αἰσχρὰν πρᾶξιν, ἐν ᾧ τὸ Εὐαγγέλιον ἀπαγορεύει καὶ τιμωρεῖ καὶ αὐτὴν τὴν ἀπώλειαν ἐπιθυμίαν τοῦ αἰσχροῦ. Ὁ μωσαϊκὸς νόμος ἐπιτρέπει τὴν ἀνταπόδοσιν τοῦ κακοῦ, λέγων «ὀφθαλμὸν ἀντὶ ὀφθαλμοῦ καὶ ὀδόντα ἀντὶ ὀδόντος»⁶⁾. τὸ Εὐαγγέλιον ἐξ ἐναντίας ὅχι μόνον ἀπαγορεύει τὴν ἀνταπόδοσιν τοῦ κακοῦ, ἀλλὰ καὶ λέγει «ὅστις σὲ ῥαπίσει ἐπὶ τὴν δεξιάν σου σιαγὼνα, στρέφον αὐτῷ καὶ τὴν ἑτέραν, καὶ τῷ θέλοντί σοι κρῖναι καὶ τὸν χιτῶνά σου λαβεῖν, ἀφες αὐτῷ καὶ τὸ ἱμάτιον»⁷⁾. Ὁ μω-

4) Πράξ. β'. 38, πρὸς Τίτ. γ'. 5, 6, κτλ. — «Alia sunt sacramenta dantia salutem, alia promittentia salutem; sacramenta novi Testamenti dant salutem, sacramenta veteris Testamenti promittebant salutem... Mutata sunt sacramenta, facta sunt faciliora, pauciora, salubriora, feliciora, Augustin. in Psalmum LXXIII.

5) «Ἄρα, ἀδελφοί, οὐκ ἐσμέν παιδείας τέκνα, ἀλλὰ τῆς ἐλευθερίας. Τῇ ἐλευθερίᾳ οὖν, ἣ Χριστὸς ἡμᾶς ἠλευθέρωσε, στήκεται, καὶ μὴ πάλιν ζυγῷ δουλείας ἐνέχεσθε.» Γαλάτ. δ'. 31—ε. 4.

6) Ἰεζ. κβ'. 24, Λευίτ. κδ'. 20, Δευτερ. ιθ'. 21.

παῖς νόμος λέγει «ἀγαπήσεις τὸν πλησίον σου καὶ μισήσεις τὸν ἐχθρόν σου»⁸⁾. τὸ Εὐαγγέλιον ἀπ' ἐναντίας μᾶς διδάσκει ὅτι ἀγαπῶμεν ὄχι μόνον τὸν πλησίον, ὄχι μόνον τοὺς ἀγαπῶντας ἡμᾶς, ἀλλὰ καὶ τοὺς ἐχθροὺς ἡμῶν καὶ τοὺς μισοῦντας ἡμᾶς⁹⁾.

§. 10.

Πόσαι καὶ ποταὶ εἶναι αἱ πηγαὶ τῆς ἐξ ἀποκαλύψεως ὁρησκείας, πῶς λέγονται, καὶ διὰ τί;

Πηγή τῆς ἐξ ἀποκαλύψεως ὁρησκείας εἶνε κυρίως εἰπεῖν μία καὶ μόνη, «ὁ λόγος τοῦ Θεοῦ». Διακρίνεται δὲ ἡ πηγή αὕτη εἰς δύο εἶδη, καθ' ὅσον ὁ λόγος τοῦ Θεοῦ διεσώθη τὸ μὲν διὰ ζώσης φωνῆς, τὸ δὲ καὶ διὰ γραφῆς. Καὶ ὁ μὲν διὰ ζώσης καὶ ἀπὸ γενεᾶς εἰς γενεάν ἀγράφως διασωθεὶς ἐν τῇ Ἐκκλησίᾳ λόγος τοῦ Θεοῦ, λέγεται παρὰ ὁμοσιν, ὁ δὲ ἐγγράφως διασωθεὶς ἐν τῇ Ἐκκλησίᾳ λόγος τοῦ Θεοῦ λέγεται ἁγία γραφή, ἡ καὶ ἱερὰ γράμμα τὰ καὶ ἱερὰ βιβλία¹⁾.

Συγκροτεῖται ἡ ἁγία Γραφή ἀπὸ δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν πρῶτον ὀνομάζεται παλαιὰ Διαθήκη, τὸ δὲ δευτέρον καὶ νῆ Διαθήκη. Καὶ ἡ μὲν παλαιὰ Διαθήκη περιέχει τὸ σύνολον τῶν ἐγγράφων ὁρησκευτικῶν ἀληθειῶν καὶ διδασκαλιῶν τοῦ Χριστιανισμοῦ κατὰ τὰς δύο πρώτας αὐτοῦ περιόδους, ἡ δὲ καὶ νῆ περιέχει τὸ σύνολον τῶν ἐγγράφων ὁρησκευτικῶν ἀληθειῶν καὶ διδασκαλιῶν τοῦ Χριστιανισμοῦ κατὰ τὴν τρίτην καὶ τελευταίαν αὐτοῦ περίοδον. Ὄνομάσθησαν δὲ διὰ τὴν καὶ αἱ δύο αὗται γραφαὶ πηγὰς τοῦ Χριστιανισμοῦ, διότι ἀμφότεραι περιέχουσιν τὴν περὶ σωτηρίας τοῦ

7) Ματθ. ε. 30—40. Πρὸς Λουκ. ε'. 29, Ῥωμ. ιδ'. 17, 19, ε. Κορ. ε'. 7, ε. Θεσσαλ. ε. 15, ε. Πέτρ. γ'. 9.—8). Λευκ. ιθ'. 48.

9) Ματθ. ε. 44, Λουκ. ε'. 27, κγ'. 34. Πρὸς ε'. 60, Ῥωμ. ιδ'. 14, 20, ε. Κορ. ε'. 13, ε. Πέτρ. γ'. 9.

1) Καὶ πολλὰ ἄλλα ἐν τῇ Γραφῇ καὶ παρὰ τοῖς ἐκκλησιαστικοῖς συγγραφεύσιν.

ἀνθρώπου ἐπαγγελίαν τοῦ Θεοῦ, συναποτελοῦσιν ἅμα καὶ περὶ αὐτῆς ταύτης τῆς σωτηρίας συνθήκην αὐτοῦ¹).

§. 11.

Πῶς καὶ διὰ τί ἡ μὲν παλαιὰ Διαθήκη λέγεται ἐνίοτε καὶ νόμος, ἡ δὲ καινὴ εὐαγγέλιον;

Συνεκδοχικῶς λέγεται καὶ νόμος μὲν ἡ παλαιὰ Διαθήκη, εὐαγγέλιον δὲ ἡ καινὴ, εἰ καὶ ἡ μὲν λέξις νόμος κυριολεκτεῖται ἐπὶ τῶν νομοθετικῶν ἰδίως βιβλίων καὶ χωρίων τῆς παλαιᾶς Διαθήκης, ἡ δὲ εὐαγγέλιον ἐπὶ τῶν τεσσάρων πρώτων τῆς καινῆς¹). Σημαίνει δὲ ἡ λέξις «εὐαγγέλιον» χαροποιὰν ἀγγελίαν, διότι χαρμόσυτος τῷ ὄντι ἀγγελία ἦτο δὲ τὸ ὑπὸ τὸν ζυγὸν τῆς ἁμαρτίας ἀνθρώπινον γένος τὸ ἔργον τῆς ἀπολυτρώσεως, τὸ ὅποιον ἐξεπλήρωσεν ὁ υἱὸς τοῦ Θεοῦ, ἐνανθρωπήσας καὶ σταυρωθεὶς ὑπὲρ ἡμῶν καὶ παθὼν καὶ ἀναστὰς²).

§. 12.

Διὰ τί ἡ ἁγία Γραφή λέγεται καὶ «λόγος τοῦ Θεοῦ»;

Ἡ ἁγία Γραφή λέγεται καὶ «λόγος τοῦ Θεοῦ»¹), διότι τὸ περιχόμενον αὐτῆς ἐν μέρει μὲν ἐλαλήθη ἀμέσως ὑπ' αὐτοῦ

2) Ταῦτας μάλιστα τὰς δύο σημασίας (συνθήκη μετ' ἐπαγγελίας) πρέπει νὰ διακρητῶμεν ἐξ ὧν ἔχει πολλῶν ἡ λέξις «διαθήκη» ἐν τῇ Γραφῇ σημασίαν. 16. καὶ Schleussner Lexicon in N. Testamentum ἐν τῇ λέξει, καὶ Suiceri Thesaurum ecclesiastic. tom. I. p. 855.

1) Καὶ ὅτι πλατύτερον νόμος μὲν ὁ Ἰουδαϊσμός, εὐαγγέλιον δὲ ὁ Χριστιανισμός. Ἴδε τὰς λέξεις παρὰ Schleussner Lex. in N. Test., καὶ παρὰ Suicer. Thes. eccles.

2) «Εὐαγγέλιον δὲ κεκλήκασι· διότι ἀγαθὸ μὲν ὑμῖν τοῖς ἀνθρώποις, οἷον Θεοῦ ἐνανθρωπήσιν, ἀνθρώπου θείωσιν, δαιμόνων κατάλυσιν, ἁμαρτημάτων λύσιν, ἀναγέννησιν, υἰοθεσίαν καὶ κληρονομίαν τῆς βασιλείας τῶν οὐρανῶν.» Εἰς Ζιγέρην. ἐρμην. εἰς Ματθ. σελ. 4, ἐκδ. Φαρμακίδ. Πρὸς καὶ Χρυσόστομον, Μ. Βασιλείου, Μ. Ἀθανασίου, Θεοδώρητον, Εὐσεβίου καὶ ἄλλους πολλοῦ.

1) Μάρκ. ζ'. 13, Λουκ. ι'. 1, 4, 11, Ἰω. ι'. 35, κλη.

τοῦ Θεοῦ, ἐν μέρει δὲ κατεγράφη οἷα χειρὸς μὲν ἀνθρώπων ἁγίων καὶ ἱερῶν, ἀλλὰ κατ' ἐμπνευσιν τοῦ ἁγίου Πνεύματος τοῦ Θεοῦ, καὶ οὕτως εἰπεῖν κατ' ἄμεσον ὑπαγόρευσιν αὐτοῦ. Ὅθεν καὶ ὁ ἀπόστολος Πέτρος λέγει «οὐ γὰρ θελήματι ἀνθρώπου ἠνέχθη ποτὲ προφητεία, ἀλλ' ὑπὸ Πνεύματος ἁγίου φερόμενοι ἐλάλησαν οἱ ἅγιοι τοῦ Θεοῦ ἄνθρωποι.» 2)

§. 13.

Ποτα εἶνε τὰ βιβλία, ὅσα συγκροτοῦσι τὴν παλαιὰν Διαθήκην;

Τὰ βιβλία τῆς παλαιᾶς Διαθήκης εἶνε τὰ ἑξῆς: 46

- α.) Ἡ Πεντάτευχος, περιλαμβάνουσα τὰ ἑξῆς βιβλία
 1) τὴν Γένεσιν, 2) τὴν Ἑξοδον, 3) τὸ Λευϊτικόν, 4) τοὺς Ἀριθμούς, 5) τὸ Δευτερονόμιον,
 β.) Ἰησοῦς τοῦ Ναυῆ,
 γ.) Κριταί,
 δ.) ἡ Ρούθ,
 ε.) Βασιλεῖαι εἰς βιβλία τέσσαρα,
 ς.) Παραλειπόμενα εἰς βιβλία δύο,
 ζ.) Ἑσδρας εἰς βιβλία δύο,
 η.) Νεεμίας,
 θ.) ἡ Ἑσθήρ,
 ι.) ὁ Ἰώθ,
 ια.) τὸ Ψαλτήριον τοῦ Δαυίδ,
 ιβ.) αἱ Παροιμίαι τοῦ Σολομῶντος,
 ιγ.) ὁ Ἑκκλησιαστής,
 ιδ.) τὸ Ἄσμα ᾠσμάτων,
 ιε.) οἱ τέσσαρες μεγάλοι προφῆται, Ἡσαίας, Ἰερεμίας, Ἰεζεχὴλ καὶ Δανιήλ,
 ις.) οἱ δώδεκα μικρότεροι προφῆται, ἡ τὸ δωδεκαπρόφητον, Ὡσιέ, Ἀμώς, Μιχαίας, Ἰωήλ, Ὁβδιού,

Ἰωάννης, Ναοὺμ, Ἀβραχούμ, Σοφονίας, Ἀγγαῖος,
Ζαχαρίας καὶ Μαλαχίας,

εἰς.) ὁ Τωβίτ,

εἰς.) ἡ Ἰουδαία,

εἰς.) ἡ Σοφία Σολομώντος,

κ.) ἡ Σοφία Σειράχ, καὶ

κά.) οἱ Μακκαβαῖοι εἰς βιβλία τρία.

§. 14.

Πόσα καὶ ποῖα εἶνε τὰ βιβλία τῆς καινῆς Διαθήκης :

Τὰ βιβλία τῆς καινῆς Διαθήκης εἶνε εἰκοσιεπτὰ, τὰ ἐξῆς :

α.) τὰ τέσσαρα Εὐαγγέλια, ἥτοι τὸ τοῦ Ματθαίου,
τὸ τοῦ Μάρκου, τὸ τοῦ Λουκᾶ, καὶ τὸ τοῦ Ἰωάννου,

β.) αἱ Πράξεις τῶν ἀποστόλων, συγγραφεῖσαι
ὑπὸ τοῦ Λουκᾶ,

γ.) αἱ δεκατέσσαρες Ἐπιστολαὶ τοῦ Παύλου, ἥτοι
μία πρὸς Ῥωμαίους, δύο πρὸς Κορινθίους, μία
πρὸς Γαλάτας, μία πρὸς Ἐφεσίους, μία πρὸς
Φιλιππησίους, μία πρὸς Κολοσσαεῖς, δύο πρὸς
Θεσσαλονικεῖς, δύο πρὸς Τιμόθεον, μία πρὸς Τί-
τον, μία πρὸς Φιλίμωνα, καὶ μία πρὸς Ἑβραίους,

δ.) αἱ ἑκθολικαὶ ἐπιστολαὶ τοῦ Ἰακώβου, Πέ-
τρου, Ἰωάννου καὶ Ἰούδα, ἥτοι μία τοῦ Ἰακώβου,
δύο τοῦ Πέτρου, τρεῖς τοῦ Ἰωάννου, μία τοῦ Ἰούδα, καὶ

ε.) ἡ Ἀποκάλυψις τοῦ Ἰωάννου, βιβλίον προφητικόν.

§. 15.

Πόθεν ἔπεται καὶ ποῖα τῆς ἀλήθειας καὶ τελειότητος τῆς χριστιανικῆς θρη-
σκείας :

Ἡ χριστιανικὴ θρησκεία εἶνε ἡ μόνη ἀληθὴς καὶ τελεία, διότι
κατὰ τὰ προειρημένα, ἐφανερώθη εἰς τὸν ἄνθρωπον ὑπ' αὐτοῦ
τοῦ ἐνός καὶ μόνου ἀληθινοῦ Θεοῦ. Ἡ δὲ ἀλήθεια καὶ τελειό-

σμου, ἐτολμήσῃ μεχρι σήμερον νὰ ἀρνήσῃ ἢ νὰ μὴ ὁμολογήσῃ καθαρῶς καὶ ἀπεριφράστως, ὅτι ἡ ἠθικὴ διδασκαλία τοῦ Εὐαγγελίου εἶνε ἄμωμος καὶ ἁγία, ὅτι εἶνε ἀληθὴς καὶ τελεία, ὅπως οὐδὲν οὐδέποτε ἔργον καὶ προῖόν ἀνθρωπίνης σοφίας.

§. 16.

Τί ἐπεται ἐκ τούτου ;

Ἐκ τούτου ἐπεται, ὅτι ἡ ἠθικὴ τοῦλάχιστον διδασκαλία τοῦ Εὐαγγελίου εἶνε ἔργον ὅχι ἀνθρώπινον, ἀλλ' ἀνώτερον ἢ κατ' ἀνθρώπον. Ἄρα εἶνε ἔργον Θεοῦ, ἀφ' οὗ ὁ Θεὸς μόνον εἶνε ὁν ὑπέρτερον τοῦ ἀνθρώπου, κατὰ τοὺς θύραθεν σοφούς.

Ἀλλὰ μὴν ἡ ἠθικὴ αὕτη διδασκαλία εἶνε μέρος σύμφυτον ἐνός ὅλου ὁμογενοῦς καὶ ἁρτίου, τοῦ Εὐαγγελίου. Ἀφ' οὗ καὶ ὁ παιὴρ τοῦ ὅλου τούτου, κατὰ τὰ προβρῆθέντα, εἶνε ὁ Θεός, ἔπεται ὅτι καὶ τὸ ὅλον Εὐαγγέλιον καθ' ὅλα αὐτοῦ τὰ μέρη καὶ κατὰ πάντα λόγον εἶνε θεῖον, εἶνε ἔργον Θεοῦ, καὶ ὅτι, ἂν οἱ ἐχθροὶ τοῦ Χριστιανισμοῦ ἀρνοῦνται τοῦτο, ἡ ἀρνήσις αὕτη προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι οἱ ἄνθρωποι οὗτοι, εἴτε ἐκ παραλογισμοῦ, εἴτε ἐξ ἄλλου τινός ἀνθρωπίνου λόγου, δὲν θέλουσι νὰ προχωρήσωσιν εἰς τὸ λογικὸν συμπέρασμα τῆς ἰδίας αὐτῶν - καθαρᾶς καὶ ἀναντιρρήτου ὁμολογίας.

§. 17.

Τί ἐπεται ἀκολούθως ἐκ τῆς λογικῆς ἀναγκαίας ταύτης θεϊότητος μὲν τοῦ Εὐαγγελίου, θεϊότητος δὲ τοῦ ἀντικειμένου ἐν ἀνθρώποις διδασκάλου καὶ κήρυκτος

ἡ Γραφή γενεῖ, εἶνε ἐργὸν τοῦ ἁγίου Πνεύματος, ἡτοί ἐργὸν Θεοῦ, ἀφ' οὗ αὐτός ὁ υἱὸς τοῦ Θεοῦ, ὁ διδάσκαλος τοῦ Εὐαγγ. γελίου, μαρτυρεῖ διαρρήδη τοῦτο πολλάκις καὶ πολλαχῶς, θεωρῶν τὴν διδασκαλίαν του ὅχι ὡς ξένην οὐδὲ ἀντιμαχομένην πρὸς τὴν παλαιὰν Διαθήκην, ἀλλὰ τελειωτικὴν μόνον καὶ συμπληρωτικὴν αὐτῆς. «Οὐκ ἤλθον, λέγει, καταλῦσαι τὸν νόμον καὶ τοὺς προφῆτας, ἀλλὰ πληρῶσαι» 1).

§. 18.

Ἐκτὸς τῆς ἐσωτερικῆς ταύτης ἀποδείξεως, ποῖα ἔχομεν ἐξωτερικά καὶ ἱστορικὰ τεκμήρια τοῦ ὅτι ἡ ἁγία Γραφή εἶνε ὁ λόγος τοῦ Θεοῦ;

Πρῶτον ἱστορικὸν τεκμήριον εἶνε ἡ ἐκπλήρωσις τῶν ἐν τῇ ἁγίᾳ Γραφῇ προφητειῶν, ἐξ ὧν φέρομεν ὀλίγα μόνον παραδείγματα. Ὁ Ἰακώβ ἐπροφῆτευσεν ὅτι δὲν θὰ λείψῃ τὸ σκῆπτρον ἀπὸ τὴν φυλὴν τοῦ Ἰούδα, ἕως οὗ ἔλθῃ ὁ Μεσσίας. 1) Καὶ τῶνόντι τὸ βασιλικὸν σκῆπτρον, καθὼς μᾶς διδάσκει ἡ ἱστορία, ἔμεινεν εἰς χεῖρας τῶν Ἰουδαίων μέχρι Χριστοῦ, ἡ δὲ πρώτη ξένη βασιλεία, ἡ τοῦ Ἰδομαίου Ἡρώδου, εἶνε σύγχρονος μὲ τὴν ἐνανθρώπησιν τοῦ Σωτῆρος. Ἀφίνομεν πολλὰς ἄλλας προφητείας τῆς παλαιᾶς Διαθήκης, ἐκπληρωθείσας κατὰ γράμμα, ὅσον τοῦ Ἡσαίου, 2) Μαλαχίου, 3) καὶ μάλιστα τοῦ Δανιήλ, ὅστις οὐ μόνον τὴν μέλλουσαν ἐν τῇ ἱστορίᾳ διαδοχὴν τῶν μοναρχιῶν τῶν διαφόρων ἐθνῶν προεῖπε σαφέστατα, 4) ἀλλὰ καὶ τὸν χρόνον τῆς ἐνανθρωπήσεως καὶ τοῦ θανάτου τοῦ Ἰησοῦ Χριστοῦ προεδήλωσεν ἀκριβέστατα, 5) καὶ ἀναφέρομεν ἐκ τῆς καινῆς Διαθήκης μίαν μόνον, τὴν περὶ τῆς προσε-

1) Ματθ. ε. 17. Πρβλ. 6°. Τιμόθ. γ'. 16, 6°. Πέτρ. α. 21. Ἡ λέξις «πληρῶνται» σημαίνει ἐκπλήρωσιν ὁμοῦ καὶ συμπλήρωσιν. «Ὁ μὲν γὰρ (νόμος) πρᾶτλειον ἦν, τὸ δὲ Εὐαγγέλιον τελειότης.» Ἀνάγνω. εἰς Ματθ. εἰς 17, ἐν ὧν μνήμ. ἀρχ. εἰς τὴν Κ. Διαθ. ἐκδ. Φαρμακιδ.

1) Γενέσ. μθ'. 40. 2) 6. 2 3) α. 40, 14.

4) 6'. 31, 4. 8, καὶ ἀλλοιχοι 5) 16. §. 66, σπμ. 5.

χοὺς καταστροφῆς τοῦ ναοῦ καὶ τῆς Ἱερουσαλὴμ ἀκριβεστά-
την καὶ σαφεστάτην πρόρρησιν αὐτοῦ τοῦ Σωτῆρος ⁶⁾.

§. 19.

Ποῖον ἔχομεν δεύτερον περὶ τούτου τεκμήριον ;

Τεκμήριον δεύτερον εἶνε ἡ ταχύτης καὶ εὐκολία, μεθ' ἧς
διεδόθη ὁ χριστιανισμός εἰς ὅλον σχεδὸν τὸν κόσμον ὑπὸ τῶν
ἀποστόλων¹⁾. Πῶς ἦτο δυνατόν ὀλίγοι ἄνθρωποι ἄστροι καὶ
ἀφανεῖς, ἀμαθεῖς καὶ ἄσοφοι, τεχνῖται καὶ ἄλειτουργοι, μεταχειρι-
ζόμενοι ξένας γλώσσας, τὰς ὁποίας δὲν ἐσπούδασαν, νὰ λα-
λῶσιν ἐνώπιον βασιλέων καὶ ἰσχυρῶν, ἐνώπιον τῶν σοφῶν
καὶ πεπαιδευμένων τῶν Ἀθηνῶν καὶ τῆς Ῥώμης, καὶ οἱ βα-
σιλεῖς καὶ ἰσχυροὶ οὗτοι, καὶ οἱ σοφοὶ καὶ πεπαιδευμένοι οὗ-
τοι ὅχι μόνον νὰ τοὺς ἀκούωσιν, ἀλλὰ καὶ νὰ πιστεῦωσιν
εἰς τὸ κήρυγμά των καὶ νὰ βαπτίζωνται ; Πῶς ἄλλως ἦτο
τοῦτο δυνατόν, εἰμὴ διότι ἡ μὲν διδασκαλία τῶν ἀνθρώπων
τούτων εἶχε θεῖαν καὶ ἀκαταμάχητον δύναμιν, οἱ δὲ πιστεύον-
τες ἐκεῖνοι ἐβλεπον θαύματα, τὰ ὁποῖα δὲν ἠδύναντο νὰ ἐξη-
γήσωσιν ἄλλως, εἰμὴ ὅτι αὐτὸς ὁ Θεὸς ἐλάλει διὰ τοῦ στόμα-
τος τῶν ἀποστόλων καὶ ἐνήργει ὅσα ἐνώπιον πάντων ἐποίουν
θαύματα ;

§. 20:

Ποῖον εἶνε τὸ γενικὸν συμπέρασμα τῶν προειρημένων ;

Ἐκ τῶν προειρημένων ἐπεταί, ὅτι ἡ θεϊότης τῆς ἀγίας
Γραφῆς, ὡς καὶ ἡ θεότης τοῦ Σωτῆρος, τοῦ πρώτου διδασκά-
λου καὶ ἰδρυτοῦ τοῦ Εὐαγγελίου, γίνεται καταφανὴς ἐν νέμει

κῆς ἐρευνῆς καὶ συζητήσεως. Ἄλλ' ὁ τρόπος ὁμοῦς οὗτος τῆς ἀποδοχῆς τοῦ λόγου τοῦ Θεοῦ δὲν εἶνε οὔτε πάντοτε οὔτε ἀπολύτως ἀσφαλῆς καὶ βέβαιος διὰ τοὺς ἑξῆς μάλιστα λόγους. Πρῶτον μὲν ὁ ἀνθρώπινος λόγος εἶνε ὡς ἐξ αὐτῆς του τῆς φύσεως ἀτελής, οὐδὲ δύναται πάντοτε νὰ βαδίζῃ ἀπταιστως ἐντὸς τῆς ἀληθείας, χωρὶς νὰ ἐξολισθῇ εἰς πολλὰ σφάλματα ὁσάκις πρόκειται νὰ κατανοήσῃ ἀνευ τῆς θείας χάριτος καὶ διὰ μόνης αὐτοῦ τῆς δυνάμεως¹⁾ τὰ ὑπερβὰ καὶ μυστηριώδη δόγματα τῆς χριστιανικῆς πίστεως²⁾. Δεύτερον δὲ καὶ εἰς αὐτὴν τὴν σχετικὴν καὶ ἐλίγην ὁρθὴν χρῆσιν τοῦ φυσικοῦ των λόγου οὔτε ἐξ ἴσου οὔτε ὅλοι οἱ ἄνθρωποι ἐγυμνάσθησαν, οἱ μὲν δι' ἑλλείψιν δισκολοῦς μαθήσεως, οἱ δὲ δι' ἄλλον καὶ ἄλλον λόγον. Διὰ τοῦτο καὶ ὁ τρόπος οὗτος τῆς ἀποδοχῆς τοῦ λόγου τοῦ Θεοῦ, ὁ διὰ τῆς λογικῆς ἐρεῦνης καὶ συζητήσεως, οὔτε καθ' ἑαυτὸν εἶνε ὁ ἀσφαλέστατος, οὔτε πάντοτε καὶ εἰς πάντας δυνατός.

§ 21.

Ποῦτος εἶνε ὁ πρὸς διδασκαλίαν καὶ ἀποδοχὴν τοῦ λόγου τοῦ Θεοῦ ἄριστος τρόπος, καὶ διὰ τί;

Ὁ ἄριστος τρόπος εἶνε ἐκεῖνος, τὸν ὁποῖον ἐσύστησεν αὐτός ὁ Θεός, ἡ πηγὴ καὶ ἡ ἀρχὴ τῆς ἀγίας Γραφῆς, ὁ διὰ τῆς πίστεως¹⁾. Πίς ις ἐν γένει καὶ ἐπὶ παντός ἀνθρωπίνου πράγ-

1) «Τοῦς ἐρευνῶσι τὰς γραφὰς χρεῖα τῆς ἀνωθεν αἰγλής, ἵνα καὶ εὕρωσι τὸ ζητούμενον καὶ φυλάξωσι τὸ θηρώμενον» Χρυσόστομ. ὁμιλ. εἰς ψαλμ. ριβ'.

2) «ὁμοῦς μάλιστα μὲν ἢ κατὰ τὴν ἀνθρωπίνην φύσιν εἶναι τὴν γνώσιν τοῦ Θεοῦ» Ὁριγένης. εἰς Λουκ. ὁμιλ. γ'. «Ὁ Θεὸς ἀπάντων ἔχων τὸ κράτος, ὅτε τὸ των ἀνθρώπων γένος ἐποίησε, κατεῖδεν πάλιν τὴν ἀσθένειαν τῆς φύσεως αὐτῶν, ὡς οὐχ ἱκανὴ εἶναι ἐξ αὐτῆς γινῶναι τὸν δημιουργόν.» Μ. Ἀθανάσιος. περὶ τῆς ἐνανθρωπήσεως τοῦ Θεοῦ λόγου ιζ'. Πρὸς. καὶ Macaire Introd. à la théol. orth. §. 25, καὶ Théologie dogmat. orthodoxe. II. p. 359

1) Μάρκ. ις'. 41—46, Ἰωάν. ι'. 24, ε'. 47, γ'. 48, δ'. 54, Λουκ. κγ'. 43, Ἰωάν. τ'. 24, Ἑβρ. ε'. 6, δ'. Ἰωάν. γ'. 2

μυτος λέγεται ἡ ἀνευ διαταγμοῦ ἀποδοχή λόγου τινός²⁾. Καὶ πιστεύεται μὲν συνήθως ἐν ἀνθρώποις ὁ ὑπερέχων κατὰ τι, πιστεύει δὲ ὁ ὑποδιέστερος. Πιστεύει π. χ. ὁ μαθητὴς εἰς τὸν διδάσκαλον, ὁ ἀμαθὴς εἰς τὸν σοφόν, τὸ τέκνον εἰς τοὺς γονεῖς, καὶ ὡσαύτως καθεξῆς. Ἀλλ' ἂν ἡ πίστις αὕτη ἰσχύει ἐν ἀνθρώποις καὶ θεωρεῖται εὐλόγως ὡς ὀρθὴ καὶ δικαία, πόσον ὀρθότερον καὶ δικαιοτέρον εἶνε γὰρ πιστεύσωμεν οἱ ἄνθρωποι ἡμεῖς εἰς τὸν λόγον τοῦ Θεοῦ, οἱ μαθηταὶ εἰς τὸν Θεὸν διδάσκαλον, τὰ πεπερασμένα ὄντα εἰς τὸν πάνσοφον Δημιουργόν, τὰ τέκνα εἰς τὸν πατέρα ἡμῶν τὸν ἐν τοῖς οὐρανοῖς³⁾; Ὡς οὖν ἀλλῶς εἰμὴ δια τῆς πίστεως εἶνε δυνατόν νὰ οἰκωθῇ ἡ ἀνθρωπίνη διάνοια μετὰ τὸν Χριστιανισμόν, τοῦ ἔργου καὶ ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ τέλος, καὶ ἡ γένεσις καὶ ἡ ἀνάπτυξις καὶ ἡ συμπληρωσις εἶνε θαῦμα, εἶνε τι ὑπερβαῖνον τὴν δύναμιν τῆς ἀνθρωπίνης διανοίας⁴⁾; Ἰδοὺ διατί ὁ Θεὸς ἡμῶν Σωτὴρ καὶ διδάσκαλος ἐσύνησε καὶ εἰς τοὺς μαθητὰς αὐτοῦ καὶ δι' αὐτῶν εἰς ὅλον τὸν κόσμον τὴν πίσιν, παραγγεῖλας εἰς αὐτοὺς νὰ βαπτίζωσιν, ὅχι τυχόν τοὺς καταλαμβάνοντας τὸν λόγον τοῦ Θεοῦ, ἀλλὰ τοὺς πιστεύοντας εἰς αὐτὸν ἐξ ὅλης ψυχῆς καὶ καρδίας, ἀδιατάκτως καὶ καθ' ὁλοκλήριον⁵⁾.

§. 22.

Τί εἶνε λοιπὸν ἡ γένεσις τῆς πίστεως;

Ἡ πίστις εἶνε ὁ ἀκρογωνιαίος λίθος τοῦ χριστιανικοῦ οἰκοδομήματος, ἡ μεγάλη θύρα, δι' ἧς εἰσέρχονται εἰς τὴν μέαν δραν τῶν ἐκλεκτῶν τοῦ Κυρίου καὶ ἀμαθεῖς καὶ σοφοί, καὶ

2) «Ἡ πίστις ἐξ' ἀκοῆς» Ῥωμ. I. 47.

3) «Πίστις ἐστὶ συγκατάθεσις ἀδίσκητος τῶν ἀκουσθέντων τῇ πληροφορίᾳ τῆς ἀληθείας, τῶν κηρυχθέντων Θεοῦ χάριτι.» Μ. Βασιλ.

4) Περὶ τοῦτου περὶ τὰς καὶ μικρὰν γινώσκων ἔχον τῆς κοσμονομίας σωτηριολογίας καὶ ἐσχατολογίας τοῦ Χριστιανισμοῦ.

5) «Πίστις ἡ γένεσις τῶν περὶ Θεοῦ λόγων, πίστις καὶ μὴ ἀποδείξις, πίστις ἡ ὑπὲρ τῆς λογικῆς μεθόδου τὴν ψυχὴν εἰς συγκατάθεσιν ἑκκρούει.» Μ. Βασ.

μαυνῆται καὶ οἰοασκάλοι, καὶ εὐφρῆεις καὶ ἀμβλυνοῦσι, καὶ μεγάλοι καὶ μικροί. Ἡ πίστις δὲν εἶνε μονομερὴς ἐνέργεια μιᾶς τινος καὶ μόνης δυνάμεως τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, δὲν εἶνε ἐννοιά τις νεκρά καὶ ἀφρημένη, δὲν εἶνε ἰδέα μόνον· ἀλλ' εἶνε αἰσθημα ὁμοῦ καὶ ἰδέα, ἰδέα πλήρης φωτός, καὶ αἰσθημα πλήρες θερμότητος. Ἡ πίστις εἶνε σύνολός τις ἐνέργεια ὁλοκλήρου τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, κυριεύουσα ἀπολύτως ὅλας ὁμοῦ τὰς ἀνωτέρας δυνάμεις τοῦ ἀνθρώπου, τὸν νοῦν καὶ τὴν καρδίαν, τὸ πνεῦμα καὶ τὴν ψυχὴν, καὶ πάσας αὐτὰς ὁμοῦ καὶ καθ' ὁλοκληρίαν «αἰχμαλωτίζουσα εἰς τὴν ὑπακοὴν τοῦ Χριστοῦ»¹⁾. Ἰδοὺ διὰ τί ἡ Χριστιανικὴ θρησκεία λέγεται καὶ «χριστιανικὴ πίστις» κατὰ τὴν πλατυτέραν ἐννοίαν τῆς λέξεως²⁾.

§. 23.

Κατορθώνει ταῦτα ἡ πίστις καθ' ἐξοτὴν καὶ ὡς ἐκ τοῦ ἀνθρώπου μόνον, ἢ συνεργεῖ καὶ ἄλλη τις δύναμις, καὶ τίς αὕτη;

Ἡ πίστις δὲν ἤθελε δυνηθῆ νὰ κατορθώσῃ ταῦτα πάντα, ἐὰν δὲν εἶχε συνεργούσαν ἀνωθεν τὴν θείαν χάριν, ἐξ ἧς καὶ δι' ἧς καὶ ἄρχεται¹⁾ καὶ προκόπτει²⁾ ἐν τῷ ἀνθρώπῳ τὸ ἔργον τῆς πίστεως. Θεία χάρις εἶνε καθόλου πᾶν ὅ,τι ἔχει ἀ-

1) 6'. Κορινθ. 1. 5. 2) Πράξ. 5'. 7, 16. 9'. Ῥωμ. 4. 5, γ'. 22, 31, 1. 8, 15. 26, 6'. Κορ. 4. 24, Γαλ. 4. 23, γ'. 23, 25, 1. 10, Ἑβρ. γ. 17, 4. Τιμ. 4. 2, 4, κτλ.

1) Ἑβρ. 16'. 2, Ἰωάν. 5'. 44, Ματθ. 15'. 17, Ῥωμ. 16'. 3, 4. Κορ. 15'. 35, 6. Κορ. 8'. 6, Ἑβρ. 4. 17, 6. 8, Φιλιπ. 4. 29, 6. 43. Πράξ. 15'. 14—«Αὐτὸς ἐν ἡμῖν τὴν πίστιν ἐνέθηκεν, αὐτὸς τὴν ἀρχὴν εἰθῆκεν.» Χρυσόστ. εἰς τὴν πρὸς Ἑβρ. ὁμιλ. 6'. Κλήμ. Ἀλεξανδρ. στοιχ. 4. 1, Ὁριγένης κ. Κέλσου 5'. 42, Γρηγόρ. Ναζιανζην. λογ. 26. εἰς Πεντηκ. 3, Κυρίλλ. Ἱεροσολ. κατηχήσ. 17. 8.

2) Ἑβρ. γ'. 16, 5, 23, 4. Κορ. 16. 10, Φιλιπ. 4. 29, 6. Κορ. γ'. 5. Μ. Βασιλ. ἐναντὶ τοῦ Θεοφύλακτου 16. Μ. Βασίλ. περὶ τοῦ ἀγίου πνεύματος

γαθὸν σύμπας ὁ κόσμος, ὅ, τε νοητὸς καὶ ὁ ὕλικός, διότι εἶνε χάρισμα καὶ δώρημα³⁾ τῆς ἀγαθότητος τοῦ Θεοῦ, τοῦ ποιητοῦ καὶ κτίστου τῶν πάντων. Ἄλλ' ἰδίως θεία χάρις εἶνε καὶ λέγεται ἡ θεία ἐκείνη δύναμις, ἥτις φωτίζει μὲν τὸν ἄνθρωπον εἰς τὴν ἀποδοχὴν τῶν θείων ἀληθειῶν τῆς πίστεως⁴⁾, ἀποκαθαίρει δὲ αὐτὸν ἀπὸ τοῦ ῥύπου τῆς ἁμαρτίας καὶ ἁγιάζει, συνεργεῖ δὲ καὶ ἐνισχύει αὐτὸν εἰς τὸ ἔργον τῆς κατὰ Χριστὸν ἀρετῆς⁵⁾.

§. 24.

Προεδιόρισον ἀκριβέστερον τὴν ἔννοιαν τῆς θείας χάριτος καὶ τῆς ἀνθρωπίνης πίστεως.

Οὔτε ἡ χάρις τοῦ Θεοῦ πρέπει νὰ νοηθῇ ἀπολύτως, ὡς ἀναιροῦσα δηλονότι τὸ αὐτεξούσιον τοῦ ἀνθρώπου, ὅπως ἔπραξαν οἱ Καλθινισταί, πιστεύοντες καὶ δοξάζοντες, ὅτι ὁ Θεὸς διὰ τῆς χάριτος αὐτοῦ ἄλλους μὲν πρὸωρισεν ἀμετακλήτως εἰς σωτηρίαν, ἄλλους δὲ εἰς ἀπώλειαν¹⁾. οὔτε ἡ πίστις τοῦ ἀνθρώπου νὰ παρεξηγηθῇ ὥς τις ἀπόλυτος καὶ παντοδύναμος ἔννοια, ὅπως ἔπραξαν οἱ διαμαρτυρόμενοι ἐν γένει, διδάσκοντες καὶ πιστεύοντες, ὅτι ἡ πίστις μόνη καὶ ἀπλῶς εἰπεῖν ἀρκεῖ εἰς σωτηρίαν· ὅχι. Ἡ ἀληθὴς πίστις, ἡ ἐκ τῆς θείας χάριτος καὶ δι' αὐτῆς ζωοποιουμένη καὶ καρποφοροῦσα, πρέ-

3) Τοῦτο νοητέον καὶ ἐπὶ τῆς ὕλης χάριτος: «Πάντες γὰρ ἡμαρτον καὶ ὑστεροῦνται τῆς δόξης τοῦ Θεοῦ, ἐκκαθαίρονται ὁμορροῦν τῇ αὐτοῦ χάριτι διὰ τῆς

πει νὰ νοηθῇ ἄ) ὡς πίστις, ἰδίως, β'.) ὡς ἐλπίς, καὶ γ'.) ὡς ἀγάπη, ὅπως μᾶς διδάσκει αὐτὴ ἡ γραφὴ καὶ ἡ Ἐκκλησία.

Διὰ τῆς ἰδίως πίστεως πρῶτον ὁ ἄνθρωπος ἀποδέχεται ἀδικοῦντως τὴν ἀλὴ θείαν τοῦ χριστιανισμοῦ³⁾. Ἀλλὰ μὴν μέρος τῆς ἀληθείας ταύτης εἶνε καὶ ἡ ἐπαγγελία τῶν μελλόντων ἀγαθῶν, ἡ περὶ τῆς μελλούσης μακαρίας καὶ αἰωνίου ζωῆς ὑπόσχεσις. Τί δὲ ἄλλο πράττει ὁ πιστὸς ἀποδεχόμενος τὰ μέλλοντα ταῦτα ἀγαθὰ, παρὰ νὰ ἐλπίζῃ; Ἰδοὺ ἄρα ὅτι ἡ πίστις πρέπει νὰ νοηθῇ δεύτερον καὶ ὡς ἐλπίς⁴⁾. Ἀλλὰ ἡ ἀληθὴς πίστις τρίτον εἶνε ἀχώριστος ἀπὸ τὰ καλὰ ἔργα, διότι πῶς εἶνε δυνατόν ὁ ἀληθῶς πιστεῦσαι εἰς τὸν χριστιανισμόν, νὰ μὴ ἀποδεχθῇ καὶ τὴν θεμελιώδη βάσιν τοῦ χριστιανικοῦ νόμου, τὴν πρὸς τὸν Θεὸν καὶ πρὸς τὸν πλησίον ἀγάπην. Πῶς δὲ ἄλλως εἶνε δυνατόν νὰ πραγματοποιηθῇ ἡ περὶ τῆς ἀγάπης πρώτη αὕτη καὶ μεγίστη χριστιανικὴ ἐντολή, εἰ μὴ διὰ τῶν καλῶν ἔργων;

§. 25.

Ποία τις ἔσται ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε εἰρημένων ὅτι εἶνε ἡ οὐσία καὶ ἡ ἡλικὸς σκοπὸς τοῦ χριστιανισμοῦ, καὶ πῶς κατορθοῦται ὁ σκοπὸς οὗτος;

Ἐὰν οὐσία καὶ σκοπὸς τῆς ἐν γένει θρησκείας, ὡς προεβρίθῃ¹⁾, εἶνε ἡ ὁμοιβαία σχέσις καὶ συγκαινωνία τοῦ Θεοῦ καὶ ἀνθρώπου, ὡς συγκαινωνία τοιαύτη νοεῖται καὶ εἶνε ἐν τῷ χριστιανισμῷ ἡ πρὸς τὸν Θεὸν ἐν Χριστῷ Ἰησοῦ συνδιελλαγή καὶ συνένωσις τοῦ ἀνθρώπου, σωζομένου ἀπὸ τῆς ἁμαρτίας καὶ δικαιουμένου ἐνώπιον τοῦ Θεοῦ ἐπὶ τῇ ἐλπίδι νὰ καταξιώσῃ τῆς μελλούσης μακαρίας καὶ αἰωνίου ζωῆς. Κατορθοῦται.

2) Χρυσόστομ. ὁμιλ. εἰς τὴν πρὸς Ῥωμ. ἡ, θ, Κύριλλ. Ἱεροσολ. κατὰ 5, ε. 7—8, ἡ. 1, Κύριλλ. Ἀλεξανδρ. εἰς Ἰωάν. 1, Θεοδώρ. εἰς Ἑβρ. 1, 12 Ἐφῆσ. γ'. 17, August. Serm. XVI.

3) Μάρκ. 15. 46, Ἰωάν. γ'. 16, Ἑβρ. 11. 6, Γαλ. 6'. 16, Ῥωμ. 1. 1.

4) Ἰωάν. γ'. 2, 3, Ῥωμ. ἡ 21, Ἑβρ. γ'. 6, 11, 12, Ἑβρ. 1. 23.

5) 1. Κορινθ. 1γ'. 2, Γαλάτ. 1. 6, 4, Ἰωάν. γ'. 14. 1) 18 §. 2.

ποιότης συνδιαλλαγῇ καὶ συνένωσις διὰ τῆς χάριτος μὲν ἀπὸ μέρους τοῦ Θεοῦ, διὰ τῆς πίστεως δὲ ἀπὸ μέρους τοῦ ἀνθρώπου. Καὶ ἡ μὲν θεία χάρις ἐπιφοιτᾷ καὶ ἐνεργεῖ μάλιστα ἀπὸ τοῦ βαπτίσματος, ταύτης δὲ καταξοῦται ὁ ἄνθρωπος διὰ τῆς ζωῆς καὶ ἐν ἔργοις ἀγαθοῖς καρποφόρου πίστεως. Διὰ τὴν σωθῇ λοιπὸν καὶ δικαιοθῇ ὁ ἄνθρωπος ὁρεῖται α' νὰ πιστεύσῃ εἰς Χριστὸν ἐξ ὅλης ψυχῆς καὶ καρδίας· β') νὰ βαπτισθῇ· αὐτόν, ἵνα σωθῇ ἀπὸ τῆς ἀμαρτίας διὰ τῆς χάριτος τοῦ Θεοῦ, ἣτις συνεχιζομένη καὶ διὰ τῶν λοιπῶν εἰς σωτηρίαν ἀναγκαίων μυστηρίων, θέλει στηρίξῃ μὲν αὐτόν ἐν τῇ πίστει, συνεργῇ δὲ καὶ ἐνισχύῃ εἰς πᾶν ἔργον ἀγαθόν, καὶ γ') νὰ δεῖξῃ ἐν τῶν ἔργων τὴν πίστιν του, ἥτοι νὰ κανονίσῃ τὰς πράξεις καὶ ὅλον του τὸν βίον ἐν γένει συμφώνως μὲ τὸ θέλημα τοῦ Θεοῦ.

§. 26.

Παλαιὰ πρακτικὴ μέθοδος ἐπεκράτησεν ἀνέκαθεν ἐν τῇ διδασκαλίᾳ τοῦ λόγου τοῦ Θεοῦ πρὸς εὐκολωτέραν διέδοσιν τῆς χριστιανικῆς πίστεως, καὶ διὰ τί;

Ὁ λόγος τοῦ Θεοῦ, ὁλόκληρος καὶ πλήρης, περιέχεται, ὡς ἀπορίκομεν, ἐν τῇ ἀγίᾳ Γραφῇ καὶ ἐν τῇ παραδόσει τῆς Ἐκκλησίας. Τὸ ἄριστον ἄρα μέσον, δι' οὗ καὶ ὁ μὴ πιστεύων εἰς Χριστὸν δύναται νὰ πιστεύσῃ, καὶ ὁ πιστεύων ἤδη νὰ στηριχθῇ ἐν τῇ πίστει, εἶνε ἡ μελέτη τῆς διπλῆς ταύτης πηγῆς τοῦ Χριστιανισμοῦ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ μελέτη αὕτη δὲν εἶνε δυνατὴ ἡ ἐύκολος εἰς ὅλους, ἄλλοτε διὰ ποικίλους βιωτικoὺς περιστάσεως, ἄλλοτε δι' ἑλλειψιν ἐπαρκῶν γνώσεων, καὶ ἄλλοτε διὰ ἄλλον καὶ ἄλλον λόγον¹⁾, ἡ χριστιανικὴ Ἐκκλησία μετεχειρίσθη ἀνέκαθεν πρακτικὴν τινα μέθοδον διδασκαλίας συνοπτικῆς καὶ κεφαλαιώδους τῶν κυριωτέρων τῆς χριστιανικῆς πί-

¹⁾ 12. Ἐπιστολὴν τῶν ἀγιωτάτων Πατερικῶν τῆς καθολ. ἀντιοχ. Ἐκκλησίας περὶ τῆς ὀρθοδόξου πίστεως (ἐκδ. Πατρικίου. 1840) ἐν ἐρωτήσει 4. καὶ 5. σελ. 38—39. Παρ. §. 20.

στεως δογμάτων, μυστηρίων καὶ ἐντολῶν, περὶ ὧν διδάσκει ἑκτενέστερον καὶ λεπτομερέστερον ἡ ἁγία Γραφή καὶ ἡ παράδοσις τῆς Ἐκκλησίας. Ἡ συνοπτικὴ αὕτη καὶ πρακτικὴ διδασκαλία, ἥτις κατ' ἀρχὰς ἐγένετο προφορικῶς καὶ πρὸ τοῦ βαπτίσματος²⁾ εἰς τοὺς μέλλοντας νὰ προσέλθωσιν εἰς τὸν Χριστιανισμόν, ὠνομάσθη κατὰ τὴν ἑλληνικὴν γλῶσσαν (3).

§. 27.

Ἀπὸ πότε ἤρχισεν ὁ τρόπος οὗτος τῆς κατηχήσεως, τίνες ἐλέγοντο πιστοί, τίνες κατηχούμενοι, καὶ ποία τις ἦ ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ θέσις αὐτῶν;

Τὸν τρόπον τοῦτον τῆς κατηχήσεως ἤρχισαν μετὰ τὸν Κύριον ἡμῶν¹⁾ οἱ ἀποστόλοι, οἵτινες οὐδένα ἐβάπτιζον, πρὶν τὸν κατηγήσωσιν²⁾, ὁμοίως δὲ καὶ οἱ διάδοχοι τῶν ἀποστόλων ἐπίσκοποι, καθὼς καὶ οἱ πρεσβύτεροι καὶ διάκονοι. Ὡς κατηχῆται ἰδίως διέπρεψαν πολλοὶ ἐπίσημοι πατέρες τῆς ἐκκλησίας, οἷον ὁ Χρυσόστομος εἰς τὴν Ἀντιόχειαν, ὁ Κύριλλος εἰς τὰ Ἱεροσόλυμα, καὶ ἄλλοι ἄλλοι³⁾. Ἐκεῖνοι ὅσοι δὲν εἶχον βαπτισθῆ ἀκόμη, ἐδιδάσκοντο δὲ τὰ δόγματα καὶ τὰς ἐντολάς τοῦ Χριστιανισμοῦ, ἵνα, πληρωθείσης τῆς πίστεως αὐτῶν, βαπτισθῶσιν, ὠνομάζοντο κατὰ τὴν κοινὴν ὁρμήν, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν πιστευσάντων ἤδη καὶ βαπτισθέντων, οἵτινες ἐλέγοντο πῖς οἱ⁴⁾. Ἄλλ' ἂν οἱ κατηχούμενοι δὲν ἦσαν πῖς οἱ,

2) Ματθ. κη'. 19, Μάρκ. ις'. 15, κδ'. 47.

3) Ἡ λέξις παρὰ τὸ ῥῆμα «κατηγῶ», ὅπερ ἐν τῇ Γραφῇ σημαίνει : διδάσκω διὰ ζωῆς πινά τὰ τῆς θρησκείας (Λουκ. α'. 4, Πράξ. ιη'. 25, α. Κορ. ιδ'. 19, Γαλ. ε'. 6), ἢ ἀπλῶς : διδάσκω τὰ τῆς θρησκείας (Ῥωμ. β'. 18), ἢ καὶ ἀπλῶς πληροφοῦν, ὅθεν τὸ παθητ. κατηχούμαι=ἀκούω (Πράξ. κδ'. 21).

4) Καὶ αὐτὸς ἦδη ὁ Πρόδρομος ἐκατήχει πρὶν βαπτίσαι τοὺς μετανοοῦντας : Ματθ. γ'. 1—12, Λουκ. γ'. 7—18.

2) Πράξ. β'. 14—41, ἡ. 42, 35—38, ις'. 32—33, ις'. 22—34.

3) Κατηχητικαὶ σχολαὶ ἤκμασαν, ἡ μὲν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, συστηθεῖσα ὑπὸ τοῦ ἀποστόλου καὶ εὐαγγελιστοῦ Μάρκου, ἄλλη δὲ ἐν Ῥώμῃ, Καισαρείᾳ, Ἀντιοχείᾳ κλπ. Ἰδ. Κοραὴν ἐν προδιουκίᾳ. εἰ: Κατήχ. Πλάτ. §. 7.

4) Εὐσεβ. Εὐαγγελ. ἀποδείξ. ζ', Κύριλλ. Ἱεροσολ. κατήχ. α'. 4, ε. 1.

δὲν ἦσαν ὁμῶς καὶ ἀπιστοὶ, καὶ διὰ τοῦτο ὄχι μόνον διεκρίνοντο ἀπὸ τῶν ἐθνικῶν, ἀλλὰ καὶ ὠνομάζοντο ἤδη χριστιανοί⁵⁾. Ὡς ἐκ τούτου ἡ θέσις τῶν κατηχομένων ἦτο μεταβατική τις καὶ μεσάζουσα μεταξὺ τῶν ἀπίστων καὶ τῶν πιστῶν. Εἰς τοὺς κατηχομένους ἐπετρέπετο νὰ ἔρχωνται εἰς τὴν ἐκκλησίαν καὶ νὰ συνακροάζωνται μετὰ τῶν πιστῶν τοὺς ὕμνους, τὰς προσευχάς, τὴν διδασχὴν, καὶ τὰ ἀναγνώσματα τῆς ἀγίας Γραφῆς, ἀλλὰ δὲν ἠδύναντο νὰ εἰσέλθωσιν εἰς τὸν καθ' αὐτὸ ναόν, ἵσταντο δὲ εἰς τὸν πρόναον ἢ τὸν νάρθηκα⁶⁾. Ἀπηγορεύετο δὲ αὐστηρότατα εἰς αὐτοὺς ἡ θεωρία καὶ ἀκρόασις τῶν τελετῶν τῶν μυστηρίων καὶ μάλιστα τῆς θείας εὐχαριστίας. Ὅθεν καὶ καθὼς ἤρχιζεν ἡ τέλεσις τοῦ μυστηρίου τούτου ἐν τῇ ἱερᾷ λειτουργίᾳ, οἱ κατηχομένοι ἦσαν ὑποχρεωμένοι ν' ἀναχωρήσωσι, καὶ ὁπισθεν αὐτῶν ἐκλείοντο αἱ θύραι τοῦ ναοῦ μετὰ πολλῆς ἐπιμελείας καὶ προσοχῆς⁷⁾.

§. 28.

Ποία τροποποιήσις ἐπῆλθεν εἰς τὴν περὶ κατηχομένων καὶ βαπτιζομένων διάταξιν, ἡ ὅποια συνεπέφερε τὴν τροποποίησιν καὶ τῆς ἐννοίας τῆς κατηχήσεως;

Εἰς τὴν ἐκκλησίαν εἰσῆχθη διὰ πολλοὺς καὶ σπουδαίους λόγους ἡ συνήθεια νὰ βαπτίζωνται τὰ νήπια¹⁾, τὰ ὅποια φυσικῶς

5) Χρυσόστ. ὁμιλ. γ'. Ἀντιοχ., τῆς β'. Οἰκουμ. Συνόδου καν. ζ'. τῆς ἐν Τροούλι καν. ηέ, August. de Pastor. 13. 6) 18. §. 123, σημ. 4.

7) Μ. Βασίλ. περὶ τοῦ ἁγ. πνεύμ. κζ', Χρυσός. εἰς Ματθ. ὁμ. κγ'. Πρὸς καὶ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ διακόνου «Ὅσοι κατηχομένοι προέλθετε· μή τις τῶν κατηχομένων ὅσοι πιστοί, καὶ «Τὰς θύρας, τὰς θύρας ἐν σοφίᾳ, πρόσχωμεν» ἐν τῇ θεῇ λειτουργίᾳ τοῦ Χρυσοστόμου, καὶ τὰς ὁμοίως ἐν τῇ τοῦ Μ. Βασιλείου καὶ Ἰακώβου. Εἰ δὲ καὶ πρὸ πολλῶν αἰώνων, ὡς ἄνωγας κατατέρως λέγομεν, ἔπαυσεν ἡ προκαταρκτικὴ τάξις τῶν κατηχομένων, ἡ ἐκφώνησις ὁμοίως αὕτη δὲν ἐξηλείφθη ἐκ τῆς ἱερᾶς λειτουργίας, ὅπως οὐδ' αὕτη ἡ λειτουργία μετεποιήθη ὅλως, τῆς ἀνατολικῆς ἐκκλησίας ἐμμενοῦσης μετ' εὐλαδούς ἀφοσιώσεως εἰς πᾶν ὅτι παρέλαθεν ἐκ τῶν ἀποστόλων καὶ ἐκ τῶν πρώτων τοῦ Χριστιανισμοῦ αἰώνων. Πρὸς. §. 423. σὴμ. 8.

1) Πότε ἀκριβῶς εἰσῆχθη εἰς τὴν ἐκκλησίαν ἡ συνήθεια τοῦ βαπτισμοῦ τῶν νηπίων δὲν εἶνε γνωστόν. Μέχρι τοῦ Τερτολλιανοῦ (γεννηθέντος ἐν ἔτει μ. Σ.

τῷ λογῷ ὄντι ἡτο συνάτον ὡς ἐκ τῆς ἡλικίας τῶν νά κατη-
 χῶνται πρὸ τοῦ βαπτίσματος. Ἀλλὰ διὰ τὰ γαίνη τοῦτο ἔ-
 πρεπε νὰ ἀναδεχθῇ τὴν ὑποχρέωσιν καὶ ἐγγύησιν, ὅτι
 τὸ βαπτίζομενον νέπιον, ἀφ' οὗ φθάσῃ εἰς ἡλικίαν κατὰλλη-
 λον, ἐμελλε νὰ κατηχηθῇ δεόντως. Ἡ συνήθεια λοιπὸν αὕτη
 ἐτροποποίησεν, ὡς ἦτο ἐπόμενον, καὶ τὴν ἔννοιαν τῆς κατη-
 χήσεως· διότι, ἐν ᾧ μέχρι τοῦδε κατήχσεις ὠνομάζετο ἡ θρη-
 σκευτικὴ διδασκαλία τοῦ μέλλοντος νὰ βαπτισθῇ, κα-
 τήχσεις ὠνομάσθη ἔπειτα ἡ θρησκευτικὴ διδασκαλία τοῦ βα-
 πτισθέντος ἤδη. Κατ' ἀνάγκην δὲ εὐεξήγητον, ἂν σκοπὸς
 τῆς κατηχήσεως πρότερον ἦτο κυρίως ἡ μετάδοσις τῆς πί-
 στεως εἰς τὸν κατηχούμενον, σκοπὸς τῆς κατηχήσεως ἔπειτα
 ἦτο ἐν γένει ἡ θρησκευτικὴ διδασκαλία τοῦ βαπτισθέντος, καὶ
 ἡ στήριξις ἐν τῇ πίστει τοῦ ἤδη πιστοῦ καὶ μετέχοντος τῶν
 μυστηρίων. Τοιαύτη δὲ παρέμεινεν ἡ ἔννοια τῆς κατηχήσεως
 καὶ μέχρι σήμερον, μὲ τὴν ἐπουσιώδη μόνον διαφορὰν, ὅτι ἡ
 κατήχσεις σήμερον διδάσκεται παρ' ἡμῖν ὡς μάθημα γραπτὸν
 εἰς τοὺς παῖδας τῶν χριστιανῶν, ὅσοι φοιτῶσιν εἰς τὰ σχολεῖα,
 παρημελήθη δὲ δυστυχῶς πρὸ πολλοῦ ἡ προσφορικὴ κατήχη-
 σις τῶν Χριστιανῶν, ὅσοι ἡ ἀπεφοίτησαν ἀπὸ τὰ σχολεῖα, ἢ
 οὐδέποτε ἐφοίτησαν εἰς αὐτά.

460, 220), ὅστις δὲν ἦτο οὐδ' αὐτὸς ὑπὲρ τῆς συνήθειας ταύτης, τὸ βόπτισμα
 τῶν νηπίων δὲν ἦτο ἀκόμη εἰς πάγκοινον χρῆσιν. Ἐπὶ δὲ Κυπριανοῦ (ἐν ἔτει
 245 προσελθόντος εἰς τὸν Χριστιανισμόν, καὶ ἐν ἔτει 258 θανόντος τὸν μαρ-
 τυρικόν θάνατον) ἡ συνήθεια αὕτη ἀπέδη γενικὴ ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ τῆς Ἀφρικῆς.
 Πάντοτε ὕμνη, καὶ τότε, καὶ μετὰ ταῦτα διὰ πολλὸν καιρὸν ἀκόμη, ἐπεκράτει
 καὶ ἡ συνήθεια ὅτι μόνον νὰ βαπτίζωνται εἰς ὄριον ἡλικίαν. Ὅπως δεικνύει
 τὸ παράδειγμα αὐτῶν τῶν μεγάλων διδασκάλων τῆς Ἐκκλησίας, ὡς Ἀμβρο-
 σίου, Ἰερωνύμου, Αὐγουστίνου, Χρυσοστόμου, Γρηγορίου, κλπ., ἀλλὰ καὶ τὸ
 νὰ ἀναδελφῇ τὸ βάπτισμα εἰς τὰ ἔσχατα τοῦ βίου, καὶ ἀναφέρομεν τὸ πασί-
 γνωστον παράδειγμα τοῦ μεγάλου Κωνσταντίνου. Ὅτι δὲ ἐπὶ τῶν ἀποστολι-
 κῶν χρόνων ἐβαπτίζοντο καὶ νήπια φαίνεται λίαν πιθανόν (Μάρκ. ι. 44, Ματθ.
 ιη. 4, 6, Πράξ. β'. 38, 39, 41, ι. 48, 2. Κορ. 4. 16, Κολοσσ. β'. 41, 12),
 ἀλλ' ὅχι καὶ βεβαίον.

2) Διονύτ. Ἀρεοπαγίτ. Οὐραν. Ἱεραρχίας ζ'. 44, τῆς ἐν Τροῦλλῳ οἰκουμ.
 Συνόδου καν. γγ', Βαλαμ. ιε; καν. ς'. τῆς ἐν Νεοκαισαρ. Συνόδου,

§. 29.

Ποῖα εἶνε ὡς ἐκ τῶν προφηθέντων καὶ τὰ μέρη τῆς κατήχησεως

Ἐπειδὴ ἡ κατήχησις, ὡς προείπομεν, εἶνε ἡ κατὰ περίληψιν διδασκαλία τῆς χριστιανικῆς πίστεως ἢ θρησκείας, καὶ ἐπειδὴ τρία εἶνε τὰ κεφάλαια τῶν απαιτουμένων εἰς σωτηρίαν, ἧτις εἶνε ἡ οὐσία καὶ ὁ σκοπὸς τῆς θρησκείας ταύτης, ἔπεται ὅτι τρία εἶνε καὶ τὰ κεφάλαια ἢ μέρη, ὅσα πρέπει νὰ συναπαρτίσῃ καὶ τὴν κατήχησιν, ταῦτα δὲ εἶνε α') τὸ δογματικόν ἢ ἱερώς, β') τὸ ἱεροτελεστικόν, καὶ γ') τὸ ἠθικόν ἢ πρακτικόν.

Τὸ πρῶτον μέρος, τὸ δογματικόν, μᾶς διδάσκει τί πρέπει νὰ δοξάζωμεν περὶ Θεοῦ, καὶ πραγματεύεται περὶ τῶν δογμάτων, ὅσα συναπαρτίζουσι θεωρητικῶς τὴν χριστιανικὴν πίστιν. Τὸ δεύτερον μέρος, τὸ ἱεροτελεστικόν, μᾶς διδάσκει πῶς πρέπει νὰ λατρεύωμεν τὸν Θεόν, ὅπως γινώμεθα ἄξιοι καὶ κοινωνοὶ τῆς θείας χάριτος, καὶ πραγματεύεται περὶ τῶν μυστηρίων, δι' ὧν ἐνεργεῖ ἡ χάρις τοῦ Θεοῦ, καὶ τῶν περὶ ταῦτα ἱερῶν τελετῶν, ἐξ ἀπάντων συναποτελεῖται ἡ χριστιανικὴ λατρεία. Τὸ δὲ τρίτον μέρος, τὸ ἠθικόν, μᾶς διδάσκει ποῖα εἶνε τὰ ἔργα τῆς χριστιανικῆς ἀγάπης, ἧτοι τὰ πρὸς τὸν Θεόν καὶ τὸν πλησίον ἡμῶν καθήκοντα, καὶ πραγματεύεται περὶ τῶν ἐντολῶν, ἧτοι τῶν θείων ἐκεῖνων διαταγῶν καὶ παραγγελιῶν,

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ,

ΔΟΓΜΑΤΙΚΟΝ.

§. 30.

Ποῦ περιέχονται τὰ δόγματα, ἥτοι αἱ σωτηριώδεις ἀλήθειαι τῆς χριστιανικῆς πίστεως;

Τὰ δόγματα τῆς χριστιανικῆς πίστεως περιέχονται κατ' ἔκτασιν μὲν ἐν τῇ ἁγίᾳ Γραφῇ καὶ ἐν τῇ παραδόσει τῆς ἐκκλησίας, περιληπτικῶς δὲ ἐν τῷ σ υ μ β ὀ λ ω, ἥτοι ὁμολογίᾳ, τῆς πίστεως, τὸ ὁποῖον συνέταξε μὲν ἡ πρώτη ἐν Νικαίᾳ οἰκουμενικῇ Σύνοδος, συνεπλήρωσε δὲ ἀπὸ τοῦ ἡ. ἄρ-θρου μέχρι τέλους ἡ δευτέρα ἐν Κωνσταντινουπόλει, καὶ ἐπε-κύρωσαν ἅπασαι αἱ μετὰ ταῦτα.

§. 31.

Πόσαι καὶ ποῖαι εἶνε αἱ οἰκουμενικαὶ Σύνοδοι;

Αἱ οἰκουμενικαὶ Σύνοδοι εἶνε ἑπτά, ἥτοι:

α.) ἡ ἐν Νικαίᾳ τῆς Βιθυνίας συνεληθοῦσα κατὰ Ἀρείου ἐκ 318 πατέρων καὶ ἐν ἔτει 325 μ. Χ. ἐπὶ τοῦ Μ. Κωνσταντίνου.

β.) ἡ ἐν Κωνσταντινουπόλει κατὰ Μακεδονίου, Σαβελλίου καὶ Ἀπολιναρίου, ἐξ 150 πατέρων, ἐν ἔτει 381 ἐπὶ Θεοδοσίου τοῦ μεγάλου.

γ.) ἡ ἐν Ἐφέσῳ κατὰ Νεστορίου ἐκ 200 πατέρων, ἐν ἔτει 431 ἐπὶ Θεοδοσίου τοῦ μικροῦ.

δ.) ἡ ἐν Χαλκηδόνι κατὰ Διοσκόρου καὶ Εὐτυχοῦς, ἐξ 630 πατέρων ἐν ἔτει 451 ἐπὶ Μαρξιανοῦ.

Εἰς τὴν ἐκκλησίαν ἐκλήθη καὶ ἡ ἐν Βερόνῃς.

ε.) ἡ ἐν Κωνσταντινουπόλει τὸ δεύτερον κατὰ Ὁριγένους καὶ Εὐαγγρίου ἐξ 165 πατέρων ἐν ἔτει 553 ἐπὶ Ἰουστινιανοῦ.

ς.) ἡ ἐν Κωνσταντινουπόλει τὸ τρίτον κατὰ μονοθελητῶν ἐκ 289 πατέρων ἐν ἔτει 680 μ. Χ. ἐπὶ Κωνσταντίνου τοῦ Πωγωνάτου.

ζ.) ἡ ἐν Νικαίᾳ τὸ δεύτερον κατὰ τῶν εἰκονομάχων ἐν ἔτει 787 ἐπὶ Εἰρήνης¹⁾.

§. 32.

Τί λέγεται οἰκουμενικὴ σύνοδος καὶ τί ὑπῆρξεν ἡ κορυφαία ἀφορμὴ τῶν οἰκουμενικῶν συνόδων;

Οἰκουμενικὴ Σύνοδος λέγεται ἡ ἑκτακτος συνέλευσις τῆς ἐκκλησίας, εἰς τὴν ὁποίαν συγκαλοῦνται καὶ συνέρχονται οἱ ἐπίσκοποι αὐτῆς, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν τοπικῶν συνόδων¹⁾, αἵτινες εἶνε μερικαὶ κατὰ διαφοροὺς τόπους. Καὶ

4) Εἰς ταύτας προσθετέα καὶ ἡ ἐν ἔτει 879 μ. Χ. ἐπὶ Φωτίου, πατριάρχου Κωνσταντινουπόλεως, συγκαροτηθεῖσα ὀγδοὴ Σύνοδος, συμμετέχοντος διὰ τοποτηρητῶν καὶ συναινούσης καὶ τοῦ Πάπα Ῥώμης Ἰωάννου τοῦ ἰα', ἔχουσα μὲν οἰκουμενικὸν τὸ κῆρος, ἀλλ' ὄχι ἀκόμη καὶ τὸ ὄνομα, πρὶν ἀνακηρύξῃ αὐτὴν ὡς ταύτην, κατὰ τὸ ἐπικρατήσαν ἔθος, ἄλλη διάδοχος οἰκουμενικῇ Σύνοδος. Ἰδ. Νεῖλ. περὶ τῶν ἀγ. Συνόδων ἐν τῇ Συντάγματι τῶν κανόνων, ἐκδ. Παλ. καὶ Πατ. τῶν. α. σελ. 392.

4) Αἱ τοπικαὶ Σύνοδοι, ὅσας ἀνεγνώρισαν καὶ ἐπεκύρωσαν αἱ οἰκουμενικαὶ (τῆς ἐν Τροάδι ἑκτῆς οἰκουμ. Συνόδου καν. θ'), εἶνε αἱ ἐξῆς ἐννέα:

α. ἡ ἐν Κερκηδόνι ἐξ 84 πατέρων περὶ τὸν ἱερομάρτυρα Κυπριανόν, ἐπίσκοπον Κερκηδόνης, ἐν ἔτει 256 μ. Χ., κατὰ τῶν περὶ Νεάπολιν ἢ Νεαυτιονίαν ἐκδοθέντων κανόνων περὶ τοῦ ἐνός ἐν μόνῃ τῇ καθολικῇ ἐκκλησίᾳ βαπτίσματος. Ἰδ. καν. α. τῆς Συνόδ. ταύτης ἐν Συντάγμ. Ῥ. καὶ Πατ. τῶν. γ'. σελ. 3. Μ. Εὐσταθ. αὐτόθ. τόμ. ς'. σελ. 8. Πρὸλ. καὶ Μελέτ. ἐκκλ. ἱερ. τόμ. α. σελ. Εὐδοκ. σελ. 233 ἐξ.

β. ἡ ἐν Ἀγκύρᾳ τῆς Γαλατίας περὶ τοῦ «πῶς ἄρα προσήκειν εἰκονομεῖν τοὺς μετὰ τὴν ἄρνησιν μεταμελουμένους», ἐν ἔτει 314 ἐκ 18 πατέρων, ἐκδοθέντων κανόνων καὶ. Ἰδ. Σύντ. κτλ. τόμ. ς'. σελ. 40, Μελέτ. (Εὐθυμ.) ἐκκλ. ἱερ. τόμ. α. σελ. 317.

γ. ἡ ἐν Νεοκαισαρείᾳ τῇ κατὰ Πόντον, ἐν ἔτει 315 ἐκ πατέρων 23, ἐκδοθέντων κανόνων καὶ εἰς τὴν εὐτασίαν τῆς ἐκκλησίας συντέλλοντες, Σύντ. τόμ. 5 σελ. 11, Μελέτ. αὐτόθ. τόμ. α. σελ. 317.

τὴν μὲν τοπικὴν Συνόδον συγκαλεῖ ὁ προϊστάμενος ἐπίσκοπος εἴτε πατριάρχης, τὰς δὲ οἰκουμενικὰς συνόδους συνεκάλεσεν αἰετοτε τὸ βασιλεῖον κράτος, πάντοτε δὲ τῇ ἐπιμόνῳ αἰτήσῃ καὶ συστάσει τῶν ἀρμοδίων ἐπισκόπων ἢ πατριαρχῶν. Συγκαλοῦνται δὲ αἱ ἐπίσκοποι εἰς σύνοδον κατὰ μίμησιν τῆς πρώτης συνόδου τῆς ἐπὶ τῶν ἀποστόλων²), εἴτινες συνῆλθον διὰ να συζητήσωσι καὶ ἀποφανθῶσιν ἐν ἁγίῳ Πνεύματι περὶ τῆς αἰρέσεως τῶν ἀπαιτούντων τὴν περιτομὴν τῶν χριστιανῶν.

Αἱ ἀποφάσεις τῆς συνόδου, τοπικῆς ἢ οἰκουμενικῆς, ὀνομάζονται τόμοι, ὅροι, ἢ καὶ μερικώτερον κανόνες, μετὰ μικρᾶς παραλλαγῆς τῆς ἐννοίας. Αἱ ἀποφάσεις δὲ τῆς οἰκουμενικῆς συνόδου εἶνε ἀλάθηστοι, ὥς ὑπαγορευόμεναι ὑπὸ τοῦ ἁγίου Πνεύματος, τὸ ὅποιον μένει διὰ παντός ἐν τῇ καθόλου ἐκκλησίᾳ³). Ὅθεν καὶ οἱ ἀθετοῦντες αὐτὰς ἐκπίπτουσι τῆς πίστεως καὶ τῆς ἐλπίδος τῆς ἐν Χριστῷ, ὅστις εἶπεν

δ'. ἡ ἐν Γάγγρᾳ τῶν Παφλαγόνων κατὰ τοῦ κακοδόξου Εὐσταθίου, ἐν ἔτει 330, ἐκδοῦσα κανόνας καὶ (Σύνταγμ. τόμ. 5'. σελ. 14, τόμ. γ'. σελ. 10), Μελετ. Εὐθυμ. αὐτόθι. α. σελ. 345).

ε'. ἡ ἐν Ἀντιοχείᾳ τῆς Συρίας ἐν ἔτει 341, ἐκδοῦσα καὶ κανόνας εἰς κοινὸν ὄφελος τῆς Ἐκκλησίας (Σύνταγμ. τόμ. 5'. σελ. 12, τόμ. γ'. σελ. 123, Μελετ. αὐτ. α. σελ. 347).

ς'. ἡ ἐν Λαοδικείᾳ τῆς Φρυγίας (μεταξὺ τοῦ 357 καὶ 368) ἐκδοῦσα 5'. κανόνας εἰς ὠφέλειαν τῆς Ἐκκλησίας (Σύνταγμ. τόμ. 5'. σελ. 12, τόμ. γ'. σελ. 171, Μελετ. αὐτόθι α. 380).

ζ'. ἡ ἐν Σαρδικίᾳ τῆς Ἰλλυρίας ἐν ἔτει 347 ἐκ 341 πατέρων περὶ τῶν ἐν Νικαίᾳ δογματισθέντων, ἐκδοῦσα καὶ κανόνας εἰς τὴν ἐκκλησιαστικὴν κατάστασιν ἀφορῶντας (Συντ. τόμ. 5'. σελ. 12, τόμ. γ'. σελ. 238, Μελετ. Εὐθυμ. τόμ. α. σελ. 349).

η'. ἡ ἐν Κωνσταντινουπόλει ἐπὶ Νεκταρίου Πατριάρχου Κωνσταντινουπόλεως, περὶ Λιγαπίου καὶ Βαγαθίου, ἀντιποιομένων τῆς ἐπισκοπῆς Βόστρον, ἐν ἔτει 394 (Σύνταγμ. τόμ. γ'. σελ. 623, Μελετ. αὐτ. τόμ. α. σελ. 407 ἐν ὑποσημ. ν5'.

θ'. ἡ ἐν Καρθαγένη τῆς Ἀφρικῆς ἐκ 217 πατέρων κατὰ τῶν περὶ Πελάγιον ἐν ἔτει 418, ἐκδοῦσα κανόνας ρλγ'. (ρμὰ) (Σύνταγμ. 5'. 20, γ'. 285, Μελετ. αὐτ. ἐκδ. Βενδύτη τόμ. δ'. σελ. 30).

2) Πράξ. ιβ'. 3) Ἰωάν. ιβ'. 15, ις'. 13. Πρβλ. § 82.

«ἐάν οὐ τις αὐτὰ τῆς ἐκκλησίας παράκουσῃ, ἐσὼ σοὶ ὡς περὶ οἰθηνικός καὶ ὁ τελώνης»⁴⁾. Συνέρχεται δὲ ἡ σύνοδος ἐν γένει ὅπως συγκεφαλῇ καὶ ἀποφανθῇ περὶ διαφόρων ζητημάτων ἐκκλησιαστικῶν, καὶ μάλιστα δογματικῶν ὅθεν καὶ ὁ κυριώτερος λόγος, ὅστις προεκάλεσε τὴν συγκρότησιν τῶν οἰκουμενικῶν συνόδων, ἦσαν αἱ αἰρέσεις.

§. 33.

Διασάττον ιστορικῶς τὴν ἔννοιαν τῆς αἵρέσεως, ἥτοι ἐξήγησον ποιοὶ ἦσαν οἱ ἐξωτερικοί, καὶ ποιοὶ οἱ ἐσωτερικοὶ διωγμοὶ κατὰ τῆς ἐκκλησίας.

Ἡ ἐκκλησία τοῦ Χριστοῦ ὑπέστη ἀπ' ἀρχῆς τῆς συστάσεως τῆς πολλοῦς διωγμούς, οὐ μόνον ἐξωτερικοὺς ὑπὸ τῆς πολιτικῆς ἐξουσίας τῶν Ῥωμαίων, ἥτις ἐπέδωκε παντοιοτρόπως τὴν ἐξόντωσιν τῶν Χριστιανῶν καὶ τὴν ἐξαφάνισιν τοῦ Χριστιανισμοῦ, ἀλλὰ καὶ ἐσωτερικοὺς ὑπὸ τῶν ἰδίων αὐτῆς μελῶν. Οἱ φοβερώτεροι τῶν ἐξωτερικῶν διωγμῶν εἶνε μάλιστα οἱ ἐφεξῆς δέκα, α) ὁ ἐπὶ Νέρωνος κατὰ τῶν ἐν Ῥώμῃ Χριστιανῶν ἐν ἔτει 64 μετὰ Χριστόν¹⁾, β) ἐπὶ Δομιτιανοῦ 93 — 96 μ.Χ.²⁾, γ) ἐπὶ Τραϊανοῦ, ἐν ἔτει 111 μ.Χ.³⁾, δ) ἐπὶ Ἀδριανοῦ ἐν ἔτει 126 μ.Χ.⁴⁾, ε) ἐπὶ Μάρκου Αὐρηλίου ἐν ἔτει 165 καὶ 177 μ.Χ.⁵⁾, ς) ἐπὶ Σεβήρου ἐν ἔτει 202⁶⁾, ζ) ἐπὶ Μαξιμιανοῦ ἐν ἔτει 235⁷⁾, η) ἐπὶ Δεκίου ἐν ἔτει 250⁸⁾, θ) ἐπὶ Οὐαλεριανοῦ ἐν ἔτει 258⁹⁾, καὶ ι) ἐπὶ Διοκλητιανοῦ, ἐν ἔτει 302¹⁰⁾.

4) Ματθ. ιθ'. 17.

1) Εὐσεβ., ἐκκλ. ιστορ. β', 25, Tacit. Annal. V. 44, Sueton. Nero 16, πρὸς καὶ Μελετ. (Εὐθὺς.) ἐκκλ. ιστορ. τόμ. α. σελ. 424—425.

2) Εὐσεβ., ἐκκλ. ιστορ. γ', 27, Tertull. Apol. V Δίον. Εἰσαρ. μ', Μελετ. αὐτ. α. 147.

3) Κατ' ἄλλους 107 ἢ 408 μ.Χ., Εὐσεβ., ἐκκλ. ιστορ. γ', 33, Tertull. Apol. XI, Μελετ. αὐτ. α. 461. 4) Εὐσεβ., ἐκκλ. ιστορ. δ', Μελετ. α. 169.

5) Εὐσεβ., αὐτ. ε', 1, Μελετ. α. 491.

6) Εὐσεβ., αὐτ. ς', 1, Μελετ. α. 201.

7) Εὐσεβ., αὐτ. ζ', 28, Μελετ. αὐτ. α. 224.

8) Εὐσεβ., αὐτ. ς', 39.

9) Εὐσεβ., αὐτ. ζ', 29, August. de Civit. Dei XII. 23, Μελετ. αὐτ. α. 253.

10) Εὐσεβ., αὐτ. ζ', καὶ η'. Μελετ. αὐτ. 263.

Ἐπὶ τῶν διωγμῶν δὲ μάλιστα τούτων ἤκμασαν οἱ καρτερόφρονες μάρτυρες τῆς πίστεως, οἵτινες ὑπέστησαν φρικτοὺς βασάνους καὶ ἐπὶ τέλους τὸν θάνατον, διότι δὲν ἤθελον ν' ἀρνηθῶσι τὸν Χριστόν. Ἀνεκόπη δὲ ὀριστικῶς σχεδὸν ἡ λύσσα τῶν διωγμῶν τούτων ἐπὶ τοῦ εὐσεβοῦς καὶ φιλοχρίστου αυτοκράτορος Κωνσταντίνου τοῦ μεγάλου (306—337 μ.Χ.), ὅστις αὐτοὺς μὲν διὰ ψυχίσματος ἀπηγόρευσε, τὴν δὲ Χριστιανικὴν ἐκκλησίαν ὅχι μόνον ἀνεγνώρισεν ἐπισήμως, ἀλλὰ καὶ παντοιοτρόπως ἐπροστάτευσεν. Οὐχ ἥττον σκληροὶ καὶ λυσσώδεις ὑπῆρξαν καὶ οἱ ἐσωτερικοὶ διωγμοὶ τῆς ἐκκλησίας, οἱ διὰ τῶν αἱρέσεων. Ὅπως δὲ ἐπὶ τῶν ἐξωτερικῶν διωγμῶν ἤκμαζον οἱ ἅγιοι μάρτυρες, οἱ στηρίζαντες τὴν ἐκκλησίαν τοῦ Χριστοῦ διὰ τοῦ οἴματός των, οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἐσωτερικῶν διωγμῶν ἤκμασαν οἱ θεοφόροι πατέρες, οἵτινες ἐστήριξαν αὐτὴν διὰ τῶν ἱερῶν καὶ σοφῶν αὐτῶν συγγραμμάτων καὶ διὰ τοῦ λόγου των ἐν ταῖς συνόδοις καὶ ἐν τῇ Ἐκκλησίᾳ.

§. 34.

Ποιοὶ τινες λεπτομερέστερον ἦσαν οἱ ἐσωτερικοὶ οὗτοι διωγμοὶ τῆς ἐκκλησίας;

Πολλοὶ τινες, μέλη τῆς ἐκκλησίας λεγόμενοι, ἐδοκίμασαν κατὰ διαφόρους καιροὺς νὰ διαστρέψωσι τὰ χριστιανικὰ δόγματα, καὶ νὰ εἰσαγάγωσιν ἀντ' αὐτῶν ψευδεῖς τινας καὶ ὁμοθυμίας εἰς τὸν χριστιανισμόν δοξασίας. Οἱ ἐνδόμυχοι οὗτοι ἔχθροὶ καὶ διῶχται τῆς χριστιανικῆς πίστεως ἐνέβαλον εἰς πολλοὺς καὶ μεγάλους κινδύνους τὴν ἐκκλησίαν, καὶ ὁ κατ' αὐτῆς πόλεμος αὐτῶν ὑπῆρξε μακρὸς καὶ πεισματώδης. Ἀλλ' ἡ ἐκκλησία ἐξηλθεν ἀείποτε νικήτρια ἐκ τῶν φοβερῶν τούτων ἀγώνων, καὶ οἱ ἐσωτερικοὶ οὗτοι διῶχται αὐτῆς καὶ πολέμιοι ἐκβλήθέντες ἀπὸ τοῦς κόλπους αὐτῆς καὶ ἀποκηρυχθέντες, ὁνομάζονται αἱρετικοί· αἱ δὲ ψυχώλεθροι αὐτῶν δοξασίαι, οἵ τε ἐν εἴτε πλείοτερα δόγματα τῆς χριστιανικῆς πίστεως διαστρέ-

φουσαι, ονομάζονται αἱ ρ ε σ ε ι ς¹⁾). Τοιαῦται δὲ αἰρέσεις ἀνεφάνησαν πολλαὶ καὶ διάφοροι ὅχι μόνον κατὰ τοὺς ἀρχαίους ἀλλὰ καὶ κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους.

§. 35.

Ποταί εἰνε αἱ κυριώτεραι αἰρέσεις κατὰ τοὺς ἀρχαιότερους χρόνους ;

Ἐκ τῶν αἰρέσεων, ὅσαι ἀνεφάνησαν κατὰ τοὺς ἀρχαιοτέρους χρόνους τοῦ χριστιανισμοῦ¹⁾, αἱ κυριώτεραι εἶνε αἱ ἑξῆς :

α.) Μετὰ Σίμων α τὸν μ ᾱ γ ο ν²⁾, τὸν πρῶτον πάντων

4) *Ὅθεν τὰς μὲν αἰρέσεις ὀνόμασαν, τὰ δὲ σχίσματα, τὰς δὲ παρασυναγαγὰς αἱ ρ ε σ ε ι ς μὲν τοὺς παντελῶς ἀπεβληγμένους, καὶ κατ' αὐτὴν τὴν πίστιν ἀπηλλοτριωμένους· σχίσματα δὲ τοὺς δι' αἰτίας τινὰς ἐκκλησιαστικὰς καὶ ζητήματα ἰσχύια πρὸς ἀλλήλους διανεχθέντας· παρὰ συναντηγὰς δὲ τὰς συνάξεις τὰς παρὰ τῶν ἀνοποσάντων πρεσβυτέρων ἢ ἐπισκόπων καὶ παρὰ τῶν ἀπειθεύτων λαῶν γινομένης. Τοῦ μεγ. Βασιλεῖος καν. ἀ.

4) Καὶ ἐπὶ τῶν ἀποστόλων ἤδη ὑπῆρχον σπέρματα αἰρέσεων, ὧν μὲν αἱ γίνονται καὶ ἐν αὐτῇ τῇ καινῇ Διαθήκῃ (π. χ. ἐν τῇ πρὸς Κολοσ. ἐπιστολῇ, ἐν τῇ ὁ. πρὸς Τιμόθ. β'. 17, 18 κλπ.). Περὶ τῶν Νικαλαϊτικῶν, ὧν ἡ αἵρεσις δὲν εἶνε ἀκριδῶς γνωστὴ, λαλεῖ ἡ Ἀποκάλ. β'. 15, ὡς καὶ περὶ τῶν Βαλααμιτικῶν : Ἀποκάλ. β'. 14. Ἰδ. ἐν γένει περὶ αὐτῶν Μελετ. (ΕΒΘΟδ.) Ἰκκλ. ἱγ. τόμ. ἀ. σελ. 132—133.

2) Περὶ τοῦ Σίμωνος τούτου († 408 μ. Χ.), ἀκράσαντος ἐπ' αὐτῶν ἤδη τῶν ἀποστόλων, λαλεῖ ἡ Κ. Διαθήκη ὡς ἑξῆς : *Ἀνὴρ δὲ τις ὀνόματι Σίμων, προὔπηρχεν ἐν τῇ πόλει μαγεύων καὶ ἐξιστῶν τὸ ἔθνος τῆς Σαμαρείας, λέγων εἶναι τινὰ ἐκείνόν μέγαν· ᾧ προσεῖχον πάντες ἀπὸ μικροῦ ἕως μεγάλου, λέγοντες, Οὗτός ἐστιν ἡ δύναμις τοῦ Θεοῦ ἡ μεγάλη (Πράξ. ἡ. 9—10). Ὁ Σίμων πιστεύσας εἰς Χριστὸν ἰδωπείσθη· ἀλλ' ἰδὼν τὰ ἀληθῆ θαύματα, ὅσα ἐνέργουν οἱ ἀπόστολοι διὰ τῆς χάριτος τοῦ ἁγίου Πνεύματος, προσήλθεν εἰς τοὺς ἀποστόλους καὶ δούε αὐτοῖς χρήματα, παρεκάλει κερδοσκοπῶν νὰ τῷ πωλήσῃσι τὴν δωρεάν τοῦ ἁγίου Πνεύματος. Ἀλλ' ὁ Πέτρος κατηράσθη καὶ αὐτὸν καὶ τὰ χρήματά του λέγων, «τὸ ἀργύριόν σου οὐκ σοί· εἴη εἰς ἀνάλειαν, ὅτι τὴν δωρεάν τοῦ Θεοῦ ἐνόμισας διὰ χρημάτων κτεθεῖαι. Οὐκ ἔστι σίμα μερὶς οὐδὲ κληρος ἐν τῇ λόγῳ τούτῳ· ἡ γὰρ καρδία σου οὐκ ἔστιν εὐθέα ἐνώπιον τοῦ Θεοῦ.» (Πράξ. ἡ. 20—21). Ἐντεῦθεν καὶ οἱ ἐπὶ χρήματι χειροτονοῦντες καὶ ἐν γένει ἐμπορευόμενοι τὴν δωρεάν τοῦ ἁγίου Πνεύματος ἐπωνομάσθησαν Σιμωνίαικοι, καὶ τὸ ἔργον αὐτῶν σιμωνία. Ὁ Σίμων καὶ ἄλλα πολλὰ ἔλεγε βλάβον καὶ ἔπραττε μαγικά καὶ ἄν ὁ σιμ. περὶ ὧν, ὡς καὶ περὶ τῶν ἑπαυδῶν αὐτοῦ Σιμωνί-
ΕΒΘΟΔΟΣ

των αἵρετικῶν³⁾, ἀνεφάνησαν κατ' αὐτὴν ἤδη τὴν πρώτην μ.Χ. ἑκατονταετηρίδα οἱ Ἑβειωνῖται⁴⁾, χριστιανοὶ Ἰουδαίζοντες, οἵτινες ἐτίρουν τὰ Σάββατα, τὴν περιτομὴν κ.τ.λ., τὸν δὲ Ἰησοῦν Χριστὸν ἐδέχοντο μὲν ὡς τὸν προσηγγεγμένον Μεσσίαν, ἀλλ' ἤρnouντο τὴν θεότητα αὐτοῦ, καὶ ἐπίστευον αὐτὸν μόνον ὡς τὸν τελειότατον ἄνθρωπον καὶ τὸν τελειότατον ἐκ πληρωτῆν τοῦ μωσαϊκοῦ νόμου.

β.) Κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τοὺς Ἑβειωνίτας ἐσχηματίσθη ἀπὸ αὐτῶν ἡδὴ τῶν ἀποστολικῶν χρόνων⁵⁾ ἡ Ἰνῶσις, ἥτοι αἵρεσις τῶν Γνωστικῶν⁶⁾, οἵτινες ἀπεχώριζον ὁλοτελῶς

νιανων, ἴδ. Εἰρηαινον αὐτ. Haereses II, 14, 26, Ἰουστίν. Ἀπολογ., 4. 26, Ἐπιφάν. αἰρέσ. κ.τ.λ., Εὐσέβ. ἐκκλ. ἱστορ. 6'. 43.

Περὶ δὲ τῶν δύο Σαμαρειτικῶν, Δοσιθέου καὶ Μενανδρου, μαθητῶν τοῦ Σίμωνος, ἴδ. Εὐσέβ. ἐκκλ. ἱστορ. γ'. 26, πρῶτ. καὶ Μελετ. ἐκκλ. ἱστ. τόμ. 4 σελ. 142.

3) Εἰρην. κατὰ αἵρέσεων 4, 23, 24, Ἐπιφάν. αἰρέσ. κ.τ.λ.

4) Οἱ αὐτοὶ καὶ Ἑβειωνεῖς καὶ Ἑβειωνισταί (ἔβρ. Ἑβειωνεῖς μ.Χ. πτωχοί· ἑβραϊκῶς κατὰ Κέλσου 6'). Τὸν Ἰ. Χριστὸν ἄλλοι τῶν Ἑβειωνιτῶν ἐδόξαζον ὡς υἱὸν τοῦ Ἰωσήφ καὶ τῆς Μαρίας, ἄλλοι δὲ ὡς γεννηθέντα ἐκ τῆς παρθένου καὶ δι' ἁγίου Πνεύματος, ἀποδίδοντες εἰς τὸν Σωτῆρα διὰ τῆς δοξασίας ταύτης ὑπερβῶν, ἀλλ' ὅχι καὶ θεῖον φύσιν. Οἱ Ἑβειωνῖται, ἐπικροτήσαντες κατὰ τὴν Παλαιστίνην, καὶ μάλιστα τὴν Συρίαν, ἤρnouσαν νὰ ἐκλείψωσιν ἀπὸ τῆς μ. Χ. ἑκατονταετηρίδος, ἐντελῶς δὲ σχεδὸν ἐξηρανίσθησαν ἀπὸ τῆς 5'. 16. ἐν γένει περὶ αὐτῶν Εἰρην. κατὰ αἵρέσ. 4, 26, Hieronym. in Math. VIII. 9, XIX. 20, Ἐπιφάν. αἰρέσ. κ.τ.λ. 4, Εὐσέβ. ἐκκλ. ἱστ. 6'. 27.

Τῶν Ἑβειωνιτῶν ὀλίγον μόνον διέφερον οἱ Ναζωραῖοι ἢ Ναζαρηνοὶ (σημ. ὅμως, ὅτι καὶ οἱ ὀρθόδοξοι χριστιανοὶ ἐπεκαλοῦντο αὐτῶν, πρὶν ἐκκηλῆσθαι ἐπὶ κλήσεως «Χριστιανοί» §. 21, σημ. 5). Ὁ αὐτός· σχεδὸν λόγος καὶ περὶ τῶν ἐν τῇ γ'. ἑκατοντ. ἀναφανέντων Ἑλκασαῖτων, Σαμαψαῖων, καὶ Οὐαλησίων (Ἐπιφάν. αἰρέσ. νγ', 14, Εὐσέβ. ἐκκλ. ἱστ. 6'. 38, 39, Θεοδώρητ. αἰρέτ. κακομ. 6'. 7, August. de Haeres. XXXVII.).

5) Συγχρόνως σχεδὸν ἀνεφάνησαν καὶ οἱ Δοκηταί, κατὰ τὴν Συρίαν ἰδίως ἐπικρατήσαντες, οἵτινες ἦσαν καὶ αὐτοὶ γνωστικοί, ἐν ὅχι προδρόμοι αὐτῶν. Οἱ Δοκηταὶ ἀνεγνώριζον μὲν τὴν θεότητα τοῦ Ἰ. Χριστοῦ, ἀλλ' ἤρnouντο νὰ ἐσαρκωσιν αὐτοῦ καὶ ἀθροπώτητα, θεωροῦντες τὴν ἐπὶ γῆς παρουσίαν αὐτοῦ ὡς δόκησιν, ἥτοι ὁπαικὴν ἀπάτην. ἴδ. περὶ τούτων Ἰγνατίου ἐν Ἐπιστολῇ πρὸς Ἐφεσίους 5'—ή, καὶ Ἐπιστολ. πρὸς Σμυρναίους 6'—ή.

6) Ἀνοματίσθησαν δὲ οἱ γνωστικοὶ οὕτως, διότι κατ' αὐτοὺς κλεῖς τοῦ χρι-

τὸν χριστιανισμόν ἀπὸ τοῦ Ἰουδαϊσμοῦ καὶ ἀνεμίγνυον αὐτὸν
 μὲ μυθολογήματα ἀνατολικά, καὶ μὲ ἰδέας τῆς νεοπλατωνι-

στιανισμοῦ εἶνε ὅχι ἡ πίστις, ἥτις ἀνήκει εἰς τοὺς ἀγαθοὺς καὶ ἀπαιδεύτους,
 ἀλλ' ἡ γνωσις, ἥτοι ἡ ἐπιστημονικὴ ἐκδηλωσις τοῦ Χριστιανισμοῦ, ἥτις ἀνήκει
 εἰς τοὺς σοφοὺς καὶ μετρημένους· καὶ ἀληθῶς εἰς τὴν αἵρεσιν ταύτην κατατά-
 χθησαν μέλλον οἱ ἐκ τῶν ἀνωτέρων καὶ σφαιρωτέρων τάξεων τῶν ἐθνικῶν
 προσελθόντες εἰς τὸν Χριστιανισμόν. Κατὰ τὴν γνωσιν ταύτην ὁ κόσμος, ὡς καὶ
 ὁ ἄνθρωπος, εἶνε κτίσμα τοῦ δημιουργοῦ, ὅστις εἶνε εἰς ἐκ τῶν αἰώνων· οἱ δὲ
 αἰῶνες αὗτοι, πολυάριθμοι καὶ διαφόρων τάξεων, προέρχονται ἐκ τοῦ Θεοῦ. Ὁ
 ἄνθρωπος, ἐν ὧν ζῇ, εἶνε δοῦλος τῆς ὕλης, τοῦ σκότους, τοῦ ψεύδους, τῆς κα-
 κίας καὶ τοῦ θανάτου, ἀπελευθεροῦται δὲ ἐκ τῶν δεσμῶν τῆς ὕλης ταύτης καὶ
 αἵρεται εἰς τὴν αἰθερίαν καὶ ὅλως πνευματικὴν χώραν τοῦ φωτός διὰ τῶν αἰώ-
 νων, ὧν εἶς εἶνε καὶ ὁ ἐπιφανὲς ἐπὶ γῆς Χριστός.

Οἱ γνωστικοὶ ὑποδιέρεθον εἰς πολλὰς καὶ διαφόρους αἵρέσεις· μερικωτέρως,
 ὅπως καὶ πρακτικῶς διεκρίθησαν εἰς τὰ πλέον διάφορα καὶ ἀντίθετα συστήματα·
 διότι οἱ μὲν αὐτῶν ἤσκαον ἐγκράτειαν καὶ σωφροσύνην, οἱ δὲ ἀπαρτίζοντες πάντα
 χαλινὸν αἰσῶν καὶ ἡθικότητος, ἐξετραχηλίζοντες εἰς βίαν αἰσχροῦ καὶ ἀκόλα-
 στον. Τούτων ἔξ, ὡς καὶ ἄλλων αἱρετικῶν, ὁ αἰσχρὸς καὶ ἐπονεῖδιστος βίος
 συνετέλεσεν εἰς τὴν ἀσφαλισμὴν μεγάλως ἕνεκα αὐτῶν παρὰ τοῖς ἐθνικοῖς· καὶ
 αὐτὸς ὁ Χριστιανισμὸς (Εἰρην. κατὰ αἵρεσ. ἀ. 29, καὶ II, Tertullian. adv.
 Marcionem libr. V, adv. Valentianum, Scorpiace contra Gnosticos, Κλημ.
 Ἀλεξανδρ. στρωματ. πολλαχρῶς, καὶ ἰδίως ἐν βιβλ. β', γ', δ', Εὐσεβ. ἐκκλ.
 ἱστορ. δ'). Τὰς κορυφάρας τῶν μερικωτέρων γνωστικῶν αἱρέσεων συναποτε-
 λούσι α) οἱ περὶ τὸν Ἀντιόχεα Σατταρνίον ἀκμάσαντες ἐπὶ Ἀδριανοῦ (Ἐπιφ.
 αἵρ. κγ', Θεοδώρ. αἵρ. κακομ. ἀ. 13, Μελετ. ἐκκλ. ἱστορ. ἀ. 174)· β) οἱ περὶ
 τὸν Ἀλεξανδρέα Βασίλειον (περὶ τὸ 123 μ. Χ.), προσδύοντες τὸν «ἄρ-
 ρήτον» Θεόν, ἐξ οὗ ἀνεπτύχθησαν 365 οὐρανοί, ἥτοι συστήματα πνευματικῶν
 δυνάμεων· γ) οἱ περὶ τὸν Ἀλεξανδρέα Οὐάλεντινον († 150 μ. Χ.), πολλὰ
 αἰσχρά καὶ βλάσφημα διδάσκοντες καὶ ἀσκούντες, ἰδίως δὲ διδάσκοντες ὅτι ὁ
 Ἰ. Χριστὸς κατέβη φέρων ἄνωθεν τὴν σάρκα, καὶ διήλθε διὰ τῆς παρθένου
 «καθάπερ ὕδωρ διὰ σωλήνος ὁδεύει» (Εἰρην. adv. Haer II, III, Εὐσεβ. ἐκκλ.
 ἱστορ. δ'. 41, Ἐπιφάν. αἵρ. λβ. Θεοδώρ. αἵρ. κακ. ἀ. Μελετ. ἀ. 184)· δ).
 Οἱ Ὀφίται, ἐπικληθέντες οὕτως ἐκ τῶν περὶ τὸν ὕμιν μυθολογημάτων τῆς κατ'
 αὐτοὺς αἱρέσεως (Ἐπιφάν. αἵρ. λζ'. β, Aug. Haer XIV, Tertull. de praxerc.
 XVII, Θεοδώρ. αἵρ. κακ. ἀ. 14, Ὀριγένης. κ. Κέλσ. γ' γ'). ε) οἱ περὶ τὸν
 Ἀλεξανδρέα Καρποκράτην, τὸν υἱὸν αὐτοῦ Ἐπιφάνους, καὶ τὸν διάδοχον
 Πρόδικον· Καρποκρατιανοὶ καὶ Καρποκράται, εἶπεν· τοῦ
 μὲν Ἰ. Χριστοῦ τὴν εἰκόνα ἐστεμμένην ἐπιστρέφοντον ὁμοῦ μετὰ τοῦ Πλάτωνος
 καὶ Πυθαγόρου, ἐδιδάσκον δὲ καὶ ἥσκαον πολλὰ τινὰ ἄλλα, οὐχ ἥττον αἰσχρά ἢ
 βλάσφημα (Εἰρην. αἵρεσ. ἀ. 26, Ἐπιφάν. αἵρ. κζ'. Θεοδώρ. αἵρ. κακ. ἀ.

κῆς φιλοσοφίας, λεγόντες ὅτι ὁ Ἰ. Χριστός εἶνε εἰς ἕκ τῶν
αἰώνων, ὅσοι προσήλθον ἐκ τοῦ Θεοῦ).

γ'.) Οἱ Μονοθεῖς αἰσῶν) ἐκήρυττον ὡς ἀσεβῆ πάντα Χρι-

Εὐσεβ. ἐκκλ. ἱστ. δ', Μελέτ. ἀ. 176—178 γ' ε') οἱ περὶ τὸν Μαρκεῖονα, ἀπο-
κηρύττοντες κατὰ μέγα μέρος τὴν καινὴν καὶ καθ' ὁλοκληρίαν τὴν παλαιὰν Δια-
θήκην (Εἰρην. αἰρ. ἀ. 27, Εὐσεβ. ἐκκλ. ἱστ. δ'. 41, Ἐπιφάν. αἰρ. μδ', Θεοδωρ.
αἰρ. κακ. α) ζ') (ὁ ἐγκρατεῖται, ἢ ἐγκρατίζεται καὶ ἐγκρατεῖται,
ἀποκηρύττοντες τὸν γάμον, ἀπεχόμενοι τοῦ οἴνου καὶ τῶν ἐμφύλων, ἐν δὲ τῇ εὐ-
χαριστίᾳ μεταχειρίζονται ὕδωρ ἀπὸ οἴνου, ὅθεν καὶ ὕδροπρασπασταί
ἐπικληθέντες, ὡν ἀρχηγὸς ὑπῆρξε Τατιανὸς ὁ Σύρος, μαθητὴς Ἰουστίνου τοῦ
μάρτυρος, ἐκπεσὼν διὰ τοῦτο τῆς ὀρθοδοξίας (Εὐσεβ. ἐκκλ. ἱστ. δ'. 29, Θεοδωρ.
αἰρ. κακ. α. Ἐπιφάν. αἰρ. μς', Aug. Haer. XXV).

7) Δικτὴν καὶ μετὰζούσαν μετὰ τῶν Ἑδωνικῶν καὶ γνωστικῶν αἵρεσιν συνα-
πετίλουν αἱ γνωστικαὶ Ἑδωνίται, αἵτινες ἐπρέσβευον αὐστηράν καὶ
ἀπόλοτον μονοθεῖαν, ἀλλ' ἐδοξάζον συγχρόνως καὶ ὅτι ὁ εἰς καὶ μόνος Θεὸς ἔθετον
ἐπὶ τῷ θεοφόρῳ καὶ ἀντιθέτῳ ἀρχῇ τὸν κόσμον, τὸν παρόντα ὑπὸ τὴν τοῦ
Σατανᾶ, καὶ τὸν μέλλοντα ὑπὸ τὴν τοῦ Χριστοῦ, ὅστις καὶ δημιουργὸς τοῦ
κόσμου γενόμενος ἐπαρκύθη πολλάκις, ὅσον ἐν τῷ Μωϋσῇ, ἐν τοῖς πατριάρχαις
καὶ τελευταῖον ἐν τῷ Ἰησοῦ, καθ' ἣν ὥραν ἐδαπίζετο ἐν τῷ Ἰορδάνῃ. Ἦλκουσιν
δὲ οὗτοι μάλιστα τὴν ἐγκράτειαν, καὶ ἐπρέσβευον τὸν χιλιεσμὸν (ἵτοι τὴν
ἐπ' ἐγγυατὴν ἐλεύσει τοῦ Χριστοῦ χιλιετῆ βασιλείαν), ὡν ἄλλως, ἐκ ῥήσεων τι-
νων τοῦ Παύλου καὶ τῆς Ἀποκαλύψεως παραγόμενοι παρέλαβον καὶ ὀρθόδοξοι
τινες πατέρες, ὡς ὁ Παπίας, ὁ Εἰρηναῖος καὶ ἄλλοι. Ὁ ἐπισημότερος τῶν
γνωστικῶν τούτων Ἑδωνικῶν εἶνε μάλιστα ὁ Κήρινθος (ἄλλως καὶ Μή-
ρυνθος καὶ Χήρινθος), ὃν καὶ ὑπανίσταται τὸ Πράξ. εἰ. 24. (Εἰρην. κατὰ
αἰρέσ. ἀ. 26, Ἐπιφάν. αἰρέσ. γ'. 28, Εὐσεβ. ἐκκλ. ἱστορ. γ'. 28. Πρὸβλ. καὶ
Μελέτ. αὐτόθ. τόμ. ἀ. σελ. 150—152).

8) Οὗτοι ὀνομάζοντο καὶ Καταφρύγες καὶ Πεπουζιανοὶ καὶ Πεπορ-
ζίται. Καὶ δογματικῶς μὲν παρεδίδοντο τὴν πίσιν καὶ ἀπεκήρυττον τὴν γνῶ-
σιν τῶν γνωστικῶν καὶ πᾶσαν ἐν γένει ἀνωτέραν μάθησιν καὶ σοφίαν, πρακτι-
κῶς δὲ ἐγκράτουν καὶ ἤσκουν τὴν ἀπονείκρωσιν τοῦ σώματος καὶ τὴν ἀπάρνη-
σιν τῆς ὕλης. Καὶ καταδικασθεῖσα ὑπὸ τῆς ἐκκλησίας ἡ αἵρεσις αὕτη διήρκεσεν
ὅμως ὑπὸ διαφόρους ὀνομασίας μέχρι τῆς σ'. μ. Χ. ἐκατονταετηρίδος, ὅτε καὶ
ἐξηφανίσθη ὁλοτελῶς· σχεδὸν (Εὐσεβ. ἐκκλ. ἱστορ. ε. 18, Ἐπιφάν. αἰρέσ. μή).

Σύμμαχοι τῶν Μοντανιστικῶν τούτων ἀνεμάνησαν κατὰ τὴν γ'. μ. Χ. ἐκατοντα-
ετηρίδα καὶ οἱ Νοβατιανοὶ ἢ Κασαρόι, ἀπὸ τοῦ κατ' ἀρχὰς πρεσβυ-
τέρου καὶ μετὰ ταῦτα ἐπισκόπου Νοβατιανοῦ, ὅστις, ὅπως καὶ οἱ Μοντανι-
σταί, ἐξεδράχυνεν εἰς ὑπέρμετρον καὶ ἀμειλικτον αὐστηρότητα τὴν περὶ ἀσκη-
τικῆς βίης θεωρίαν, καὶ οὐ μόνον δὲν ἐξέλετο μετάνοοντας εἰς τοὺς κόλπους
τῆς ἐκκλησίας τοὺς ὑποπεσόντας εἰς βαρὺ τι ἀμάρτημα, ἀλλ' ἀπῆται καὶ νὰ ἀ-

στεινὸν μὴ παραδεχόμενον τὸν ὑπερβολικόν, ἐν πολλοῖς δὲ καὶ ὀργιαστικόν, ἀσκητικὸν αὐτῶν βίον. Ἀρχηγὸς τῆς οἰρέσεως ταύτης ἦτο ὁ Φρύξ Μοντανός, πρῶν ἱερεὺς τῆς Φρυγίας θεᾶς Κυβέλης⁹⁾, ὅστις καὶ μετὰ τὸν χριστιανισμόν του δὲν ἀρῆκε τὰς παλαιὰς ὀργιαστικὰς του παραφοράς καὶ ἐκστάσεις, ἐκήρυττε δὲ ἑαυτὸν ὡς τὸν «παράκλητον», τὸν μέλλοντα γὰρ συντελέσει τὸ ἔργον τοῦ Χριστοῦ, καὶ ἐθεωρεῖτο ὑπὸ τῶν ὁπαδῶν του ὡς προφήτης Θεόπνευστος (ἀπὸ τοῦ 150 περίπου μ. Χ.).

Παρατίθενται οἱ ἐξ ἄλλης τιναί εἰς τὴν ὑπὸ τὴν διοίκησιν αὐτοῦ ἐκκλησίαν προσερχόμενοι χριστιανοὶ (Εὐσεβ. ἐκκλ. ἱστ. β. 43, Σωζόμεν. ἐκκλ. ἱστ. α. 6, Ψερ. αἰρ. νθ', Θεοδώρητ. αἰρ. γ. 5, Aug. Haer. XXXVIII.)

Ἐν παρομοίῳ ἀρχὸν αὐστηρότητος ὡρμήθη. ἀλλ' αὐστηρότερον χαρακτηρὶ περιεβλήθη ἡ αἵρεσις τῶν Δονατιστῶν, αἵτινες ἐπὶ τὰ ἴχνη τῶν Νοβατιανῶν βαδίζοντες δὲν παρεδέχοντο τὸν διορισθέντα εἰς τὸν ἐπισκοπικὸν θρόνον τῆς Καρχηδόνας Καυκίλιανόν (311 μ. Χ.), ὡς προχειρισθέντα ὑπὸ τοῦ ἐπισκόπου Φήλικος, ὅστις ἐπὶ τοῦ διωγμοῦ τοῦ Διοκλησιανοῦ δὲν ἐνεκαρτέρησεν εἰς τὴν πίστιν, ἀλλὰ παρέδωκεν εἰς τοὺς ἀπίστους τὰς ἱερὰς γραφάς, ἀντέταξεν δὲ κατ' αὐτοῦ τὸν Δόνατον, ὅστις ἀξίων ἦν ἡ νόμιμος τοῦ Χριστοῦ ἐκκλησία πρέπει νὰ εἴνε ἅγια καὶ ἄμωρος, ἀπέβαλεν ἐξ αὐτῆς πάντας ὅσους ἐθεώρησεν ὡς μὴ καθαρούς καὶ ἁγίους, καὶ ἐσχημάτισεν ἰδίαν ἐκκλησίαν ἐκ τῶν ἐκλεκτῶν καὶ «ἁγίων». Ἡ αἵρεσις κατεδικάσθη συνοδικῶς (314), καὶ ἡ αὐτοκρατορικὴ κυβέρνησις κατεδίδωξεν αὐστηρῶς αὐτήν, τοῦ μὲν ναοῦ τῶν Δονατιστῶν ἐμπρήσασα ἢ κατεδαφίσασα, τοὺς δὲ ἐπισκόπους αὐτῶν ἐξορίσασα. Ἀλλὰ τοῦτο μάλιστα ἐξῆψε τὴν φανατικὴν μανίαν τῶν αἰρετικῶν, καὶ σιτῆρ ἄγρια χωρικῶν καὶ νομαδῶν βοσκῶν κατήλθεν ἐκ τῆς Μαυριτανίας καὶ Νουμιδίας, πνέοντες ἐκδικεῖσιν καὶ φόνον κατὰ παντὸς μὴ αἰρετικοῦ. Ἐκτοτε δὲ ἤρχισε πόλεμος ληστρικός, ἀλλὰ συστηματικός καὶ ἀμείλικτος, ἐναντίον τῆς καθολικῆς ἐκκλησίας καὶ τοῦ Ῥωμαϊκοῦ κράτους, ὅστις διήρκεσεν ὁλόκληρον τὴν δ' μ. Χ. ἑκατονταετηρίδα, καὶ ἤρξατο τὰς ἐπαρχίας ἐκείνας τῆς Ἀφρικῆς, μόλις δὲ καὶ μετὰ βίας κατάρθωσις ἡ βωματικὴ κυβέρνησις νὰ καταβάλῃ τὴν αἵρεσιν διὰ τῶν ὁπλιν. Οἱ πάντες δὲ τῶν Δονατιστῶν φανατικώτατοι ἦσαν οἱ Circumcelliones, αἵτινες μετὰ τῶν θρησκευτικῶν συνεπέδωκον καὶ πολιτικούς καὶ κοινωνικούς σκοπούς, ἐντελὴ ἀποχωρισμὸν τῆς ἐκκλησίας ἀπὸ τοῦ κράτους, πλήρη ἐλευθερίαν καὶ ἰσότητα δόξας τῶν πιστῶν, κοινωνικημοσύνην κττ. (Επιφ. αἰρέσ. νθ', Θεοδώρητ. αἰρετ. παρομ. δ' 6, Aug. de Haeres. LXIX, Μελετ. α. 299—302. Εὐσεβ.).

9) Οἱ ἱερεῖς καὶ λάτρες τῆς θεᾶς ταύτης ἔτρεχον λαμπαδηφόροι, φάλλοντες καὶ ὀρχούμενοι ὡς μαινόμενοι καὶ κορὸθαντιῶντες ἀγρίως ἢ ὑποκύπτοντες εἰς ἐκστάσεις καὶ παραφοράς ἰδ. τὴν ἑλλην. καὶ Ῥωμαϊκ. μυθολογίαν.

δ.) Ἡ οἵρεσις τῶν Μανιχαίων¹⁰⁾, ἀκμάσασα ἰδίως κατὰ τὴν δ'. μ. λ. ἑκατονταετηρίδα, καὶ μεταδοθεῖσα ἀπὸ τῆς Ἀνατολῆς εἰς τὴν Ἀφρικὴν καὶ Ἰταλίαν, ἦτο κρᾶμα γνωστῶν κακοδοξιῶν καὶ περσιτικῶν μυθολογημάτων. Κατὰ τὸν Μανιχαίους ὑπῆρχαν δυο ὄρχει καὶ κόσμοι ἀντίμαχοι καὶ ἀντιτίθεται, ὁ κόσμος τοῦ φωτός ὑπὸ τὸ κράτος τοῦ Θεοῦ, καὶ τοῦ σκότους ὑπὸ τὸ κράτος τοῦ δαίμονος. Ὁ Χριστὸς δέ, ἐκ τῶν φωτεινῶν ὄντων, τῶν πρὸς θάνατον ἐκ τοῦ Θεοῦ, ἦλθεν καὶ ἔσωσε τὸν ἀνθρώπον ἐκ τῆς ἐξουσίας τοῦ σκότους ἐν μέλει μενον· καθ' ὁλοκληρίαν δὲ θελεῖ σῶσθαι αὐτόν ὁ «παράκλητος», ὅστις εἶνε αὐτός ὁ αἰρεσιάρχης τῶν Μανιχαίων Μάνης, μάγος ἐξόριστος ἐκ Περσίας¹¹⁾.

ε.) Οἱ μοναρχικαὶ ἢ Σαθελλιανοί¹²⁾, ἀπὸ Σαβελλιανῶν

10) Πρὶν προσελθῇ εἰς τὸ χριστιανισμὸν ὁ ἱερεὺς Λύκουσιτος ἦτο Μανιχαῖος καὶ αὐτός· ἀπ' οὗ δὲ ἀπέπεσε τὰ τῆς αἵρέσεως καὶ ἦλθεν εἰς ἐπίγνωσιν τῆς ἀληθείας, ἔγραψε πολλὰ κατ' αὐτὸν. Ὦθεν καὶ τὰ συγγράμματα τοῦ ἱεροῦ τούτου ἀνδρὸς εἶνε ἄρθρους καὶ πολὺτοις πηγῇ πρὸς ἐξιστόρησιν τῆς αἵρέσεως τῶν Μανιχαίων (ὅπως καὶ τῆς τῶν Παλαγίτων). Ἰδίως Π. De moribus ecclesiae Catholicae et Manichaeae cum libe. II, de Gaudesii contra Manichaeos καὶ Ἐκτός πόρων Ἰδ. καὶ Εὐσέβ. ἐκκλ. ιστορ. ζ'. 31, Σωκράτ. ἐκκλ. ιστορ. α. 28 Ἐπιφαν. αἵρεσ. ζς'. Θεοδώρ. αἵρ. καὶ α. 21).

11) Ἐκ τῆς Περσίας ἐξέωσθη ὁ μάγος οὗτος Μάνης ἐπὶ τῶν Σασσανιδῶν Ἀποτυχῶν δὲ καὶ παρὰ ταῖς χριστιανικὰς, ὑπέστρεψε πρὸς τοὺς Πέρσας, φέρων μεθ' αὐτοῦ εὐαγγέλιον κειροσμημένον μετὰ πολλὰς παραδοξίας· εἰκονογραφίας καὶ κατ' ὀρχαί· μὲν εὐδοκίμει ἐν τῇ οὐλῇ καὶ παρὰ τῇ λαῷ· ἀλλ' ἀκούσθαι καταγορηθεὶς ὡς παραχαράκτης τῆς Περσικῆς θρησκείας, καταδικάσθη ἐπὶ τοῦ βασιλείως τῶν Περσῶν Βαράνου τοῦ α. εἰς θάνατον (275 μ. Χ.). Ἐξεδόρκει πρὸς τὸν ζῶν καὶ τὸ δέσμα του γομφυλὸν ἐκρεμάσθη εἰς τὰς πύλας τῆς πρωτευούσης πρὸς παραδειγματισμὸν. Διηροῦντο δὲ οἱ Μανιχαῖοι (πολλὰ ἔχοντες τὰ κοινὰ καὶ παραπλήσια πρὸς τοὺς γνωστικούς) εἰς ἐκκλησιαστικούς καὶ ἀκροαστικούς (Ῥιφιάν. αἵρεσ. ζς').

12) Οἱ αὐτοὶ καὶ πατροπαράδοτοι ἢ πατροπασσιανοί (patropassiani) ὅπως μάλιστα ἐπικαλοῦντο ἐν τῇ Δύσει. Αἱ ὄρχει καὶ τὰ σπέρματα οὕτως αἰσθάνονται τῆς αἵρέσεως ταύτης ὑπῆρχον ἥδη ὡς καὶ παρὰ ταῖς μοναρχικαῖς Θεωδοσίω καὶ Ἀρτέμιω, οἵτινες ἐπὶ τὸ ἐδωκενικώτερον ἠκούσαντο τὴν ἀνάγκην τοῦ Λόγου, ὅθεν καὶ ἐπαπομάθησαν ἄλλοι οἱ (Ἐπιφαν. αἵρεσ. γά), ὡς καὶ παρὰ τὸν Παύλιν, Νικητῶν καὶ Βαρύλλω, οἵτινες ἀκούοντες τὸ τρισυποστάτικον

πρεσβυτέρου Πτολεμαίδος (250—260 περίπου μ. Χ.) ἐδόξα-
ζον ὅτι ὁ Πατήρ, ὁ Υἱὸς καὶ τὸ ἅγιον Πνεῦμα εἶνε τρία διά-
φορα ὁ ὅματα ἐνός καὶ τοῦ αὐτοῦ προσώπου, τοῦ Θεοῦ.

5.) Οἱ Ἀρειανοί, ἐκ τῶν πρεσβυτέρων Ἀλεξαν-
δρείας, ἐδογματίζον (περὶ τὸ 325 μ. Χ.), ὅτι τὸ δεῦτερον πρό-
σωπον τῆς ἁγίας Τριάδος εἶνε κατώτερον τοῦ πρώτου καὶ
κτίσμα αὐτοῦ¹³).

τῆς θεολογίας ὡς ἀντιπαραθεκτικὰ μᾶλλον χαρακτηρίζονται. Καὶ ὁ μὲν Θεο-
δοσίος ὁ σκυτικός, Βουλάντιος, ἀνεφάνη περὶ τὸ 200 μ. Χ. ἐν Ἰωάννῃ. λέγων
τὸν Χριστὸν ἐκ παρόντος μὲν γεννηθέντα, ἀλλὰ ψλὸν ἄνθρωπον (Εὐσεβ., ἐκκλ.
ιστορ. ε. 28, Θεοδώρ. αἰρ. κακομ. δ'. 3, Ἐπιφάν. αἰρ. νδ'). Ὁ δὲ Πραξιτέλης
ἐκ Μ. Ἀσίας, ἀναστὰς ἐπὶ Μ. Ἀθανασίου ὡς ὁμολογητὴς ἐκτὸς τῆς πατροπα-
θέτης ὑπὸ Τερτυλλιανῶ (ἀδν. Ρουκουμ. libe. II) Ὁ Νοητός ἀνεφάνη ἐν
Σαβόνη περὶ τὸ 230, ἐκτὸς τῆς ἐκείνης καὶ αὐτὸς ὑπὸ τοῦ Ἰππολύτου
(Θεοδώρ. αἰρετ. καλ. γ'. 3, Ἐπιφάν. αἰρ. νδ'). Περὶ δὲ τοῦ Βηρύλλου ἐπι-
σκόπου τῶν ἐν Ἀραβίᾳ Πύστρων (ἢ Πιστραι) ἴδ. Εὐσεβ., ἐκκλ. ιστορ. ε'. 33.
Ἡ δὲ διδασκαλία Παύλου τοῦ Σαμοσατέως προσήγγισε μᾶλλον πρὸς τὴν
τῶν ἀλόγων μοναρχικῶν Ἀρειανιστῶν καὶ Θεοδοῦτος παρὰ πρὸς τὴν τοῦ Σαβελλ-
ίου. Ὁ Παῦλος, ἐπίσκοπος Ἀντιοχείας (261 μ. Χ.) κατεδικάσθη ὑπὸ τῶν
συνόδων ὡς αἰρετικὸς (ἀπὸ τοῦ 264 μ. Χ.) καὶ τέλος (269—272) κἀνη-
μέθη (Ἐπιφάν. νδ', εἰς, εἰ, Εὐσεβ., ἐκκλ. ιστορ. ε'. 27—30, ε. 28, Θεοδώρ.
αἰρετ. κακομ. δ'. 8, καὶ γ'. ἴδ. καὶ Mansi Concil. τομ. α' σελ. 1004 καὶ
ἐφεξ.). Οἱ ὁπαδοὶ τούτου διακρίνονται ἰδίως ὡς Παυλιανοί, Παυλικ(ι)-
στοί, καὶ Σαμοσαταῖοι (Σωκρ. ἐκκλ. ιστορ. δ'. 49).

43) Ἡ αἵρεσις τῶν Ἀρειανῶν ἐσηματίσθη κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τοὺς Σαβελλ-
ιανούς. Ὅτι ἐκείνοι συνεταύτισαν καὶ ἐσύγχυσαν, οὗτοι ἠθέλησαν κἀδιαστεί-
λῃσι καὶ διακρίνωσιν, ὁμφοτέροις τοιοῦτοτρόπως εἰς βλασφημίαις ἐκκλινάντες καὶ
κακοδοξίας (Σωκρ. ἐκκλ. ισ. α. 5, Θεοδώρ. ἐκκλ. ισ. α. 2, αἰρετ. κακομ. δ'.
4, Πρὸλ. καὶ Χρυσόστ. περὶ ἱερ. δ'. 4). Ὁ Ἀρειὸς, πρεσβύτερος ἐν Ἀλε-
ξανδρείᾳ, κηρύττων ἐν τῇ καθ' αὐτὸν ἐνορίᾳ, ἐδογματίσας, προκαίμενος περὶ τῆς
ἁγίας Τριάδος, ὅτι ὁ υἱὸς τοῦ Θεοῦ δὲν ἦτο ἀναρχος, ὅπως ὁ Πατήρ, διότι
ἐπῆρχε μὲν πρὸ πάντων τῶν αἰώνων, ἀλλ' ὅμως ἦν ὅτε οὐκ ἦν, διότι ἐκτίσθη
κατὰ τὸν Πατέρα ἐξ οὐκ ὄντων, ὅπως καὶ τὰ λοιπὰ κτίσματα, μὲ μόνον
τὴν ἀπαρχάν, ὅτι ὁ Υἱὸς αὐτοῦ τοῦ Θεοῦ εἶνε «πρωτότοκος τῆς κτίσεως», το-
πίστων οὐ μόνον ἐκτίσθη πρὸ πάντων τῶν ἄλλων κτισμάτων, ἀλλὰ καὶ δι' αὐ-
τοῦ, τοῦ πρωτότοκου, ὁ Θεὸς ἐκτίσας τὸν ἐπίλοιπον κόσμον. Ἡ κακοδοξία αὐ-
τῆς προσέκλινε μεγάλην ἐρητικὴν διχοστασίαν ἐν τῇ τοῦ Χριστοῦ ἐκκλη-
σίᾳ, ὅθεν καὶ συνεκροτήθη ἡ πρώτη οἰκουμένη Σύνοδος, ἡ ἐν Νικαίᾳ τῆς Βι-
θυνίας (325 μ. Χ.), ἐν ἣ ἐδιέπρεψεν ὁ τότε μὲν διάκονος τοῦ πατριάρχου Ἀλε-
ξανδρείας, Ἀλεξάνδρος, μετὰ δὲ ταῦτα διάδοχος αὐτοῦ ὁ Ἀθανάσιος, ἐπὶ

εἰς τοὺς κολλοῦσας τὴν ἐκκλησίαν· αὐτοὺς καὶ ἀπο τῶν ἀνακτορῶν
 μετέβαιναν ἐν πομπῇ καὶ θυσίᾳ εἰς τὴν ἐκκλησίαν, ὅτε αὐτοὶ καὶ ἀπρὸς αὐ-
 κήτως κατέλαβεν αὐτὸν ὁ θάνατος· (330 μ. Χ.) Ἐν τούτοις ἡ αἵρεσις τοῦ Ἀ-
 ρερίου εἶχε διαδοθῇ πολλὰ καὶ τοῦ βασιλικοῦ κράτους, καὶ αὐτὴ δὲ τὰ τότε ἀπο-
 μη βάρβαρον γερμανικὴν ἔθνη, Γότθοι, Βάνδοι καὶ Λογγοβάρδοι, εἶχον διδάσκει
 τὸν χριστιανισμόν ὑπὸ Ἀρειανῶν, ὅθεν καὶ ἡ ἐξέλευσις τῆς αἵρέσεως· ὑπερβό-
 ῃς χρόνου μακροῦ καὶ ἐξηγοράσθη μὲ μεγάλους θυσίας. Τοῦτο δὲ κατεβλή-
 θη μόλις ἐπὶ Θεοδοσίῳ τοῦ μεγάλου διὰ τῆς β' ἐν ΚΠόλει οἰκουμένης Συνό-
 δου (381 μ. Χ.), ἣτις ἐπικυρώσασα καὶ συμπληρώσασα τὸ σύμβουλον τῆς ἐν
 Νίκαιᾳ Συνόδου, ἀνεκήρυξεν αὐτὸ ὡς τὸ ἐπίσημον σύμβουλον τῆς καθόλου ἐκ-
 κλησίας, καὶ ἀναθεμάτισε τοὺς Ἀρειανούς· πενηντὴ ἑκατὸ ἀποχωρήσας. Λίγα μὲν
 τοῦτο, διότι ἐν ταῖς πολυκυμάντοις ἐκείναις χρόναις τῆς τοῦ Χριστοῦ ἐκκλησίας
 ἰδοὺ καὶ τινες καὶ συνδιαλλάττοντες τὰ ἄνω διατιθέμενα μέρη (ὡς περὶ τὸν ἁ-
 γίον πνεῦμα, Εὐδαιμόνιον, Εὐνομοσίον καὶ Ἀθανάσιον) ἦσαν εἰς ἄκραν Ἀ-
 ρειανότητα, κηρύττοντες τὸν Υἱὸν ἁνομοσίον τῷ Πατρὶ, ὅθεν καὶ ἐπεκλήθησαν ἁ-
 νομοσίοι (Φιλοτοργίγ', 2, Ἐπιφάν. αἰρ. στ'. 10), ἐν ᾧ οἱ περὶ τὸν Μάρ-
 κελλον καὶ Φωταίνον, ὑπερεκνεύσαντες τὸν Ἀθανάσιον, ἐξέκλιναν σχι-
 σμὸν πρὸς τοὺς Σαβιλλιανούς (Κυριλλ. Ἱεροσολύμ. Κατήχ. ιε'. 27, 33, Ἐπιφάν.
 αἰρ. στ', 2, Σωζομέν. ἐκκλ. ιστορ. δ'. 31, δ'. 5, Σωκρ. ἐκκλ. ιστορ. δ'. 30,
 Θεοδώρ. αἰρ. κακομ. δ'. 11), καὶ τοιοῦτοτρόπως προέκυψαν οἱ Εὐσεβίτιοι
 ἢ Ἡμιάρειοι (οἱ καὶ Ὁμοιοῦσι σ' α'), οἵτινες ἰδοὺ καὶ τὸν
 τοῦ ὁμοιοῦσι τοῦ ὁμοιοῦσι τοῦ ὁμοιοῦσι τοῦ ὁμοιοῦσι τοῦ ὁμοιοῦσι τοῦ ὁμοιοῦσι
 τῆς, ἀλλ' ὅμοια αὐταῖς πρὸς τὸν Πατέρα· ἰδ. Μ. Ἀθανάσιον κατὰ Ἀρειανῶν δ'. Ε.

14) Θεοδώρ. αἰρ. κακομ. δ'. 6, Σωζομέν. ἐκκλ. ιστορ. δ'. 27. Ὁ Ἀθανάσιος
 ἦδη, καὶ ἄλλοι πλείους, ὑπέτασαν τὸ πνεῦμα εἰς τὸν Υἱὸν ὅσον καὶ ὅπως τὸν
 Υἱὸν εἰς τὸν Πατέρα. Καὶ ταύτην τὴν πλάνην κατεπολέμησεν ὁ Ἀθανάσιος (Ε-
 πιτολ. δ' πρὸς Σαραπῶν), ὁ Μ. Βασίλειος· ὅστις καὶ προσημασίαν ἰδίαν ἔγρα-

τέρου, ηρινούντο τὴν εἰς τὰ ανθρωπίνων γένος μετὰ δόξαν τοῦ προπατορικοῦ ἁμαρτήματος¹³⁾.

6.) Οἱ Νεστοριανοί, ἀπὸ Νεστορίου πατριάρχου Κωνσταντινουπόλεως (348—431), διεχώριζον¹⁴⁾ ἀποτόμως τὰς

ἐκ τῆς τοῦ ἁγίου πνεύματος· οἱ δὲ Γρηγόριοι, ὁ Νύτσης καὶ ὁ Ναζιανζηνός, καὶ ἡ καθόλου ἐν γένει ἐκκλησία, ἥτις καὶ ἀναθεμάτισεν αὐτὴν διὰ τῆς βί. ἐν ΚΠολεὶ οἰκουμένης Συνόδου. Καὶ ὅμως ἡ ἀρρεσι ἀετηρώθη μέχρι τοῦ ε. μ. Χ, ἑκατοῦ, ἐν Φρυγίᾳ όπου κατεπολέμησαν αὐτὴν ὁ Νεστορίος.

15.) Ὁ Παλάγιος, ὡς καὶ ὁ μαθητὴς καὶ ὁμόφρων αὐτοῦ Κωνσταντῖνος ἦτο ἐκ Βρετανίας καὶ ἀνεφάνη κατ' ἄρχην ἐν Καραχρῶνι (413 μ. Χ.). Ἡ ἀρρεσι αὐτοῦ κατεδικάσθη πολλάκις ἐν τῇ Δύσει, διότι καὶ ἐν τῇ Δύσει κυρίως ἀνερώθη καὶ εἰς τὴν Δύσιν μάλιστα διεδόθη (Ἰταλίαν, Ἰαλλίαν καὶ Ἀφρικὴν). Κατεπολέμησεν δὲ μάλιστα τὴν αἵρεσιν ταύτην ὁ ἱερός Δύγουστος τῶν ε. μ. Χ., ὁ Ἀθανάσιος οὗτος τῆς Δύσεως, συντάξας καὶ πολλὰ κατὰ τῆς αἵρέσεως ταύτης καὶ τῶν ὁπαδῶν αὐτῆς συγγράμματα (de gestis Pelagii contra duas Epistolas Pelagianorum) κτλ.) Τὰ βέβαιον ὅμως εἶναι ὅτι καὶ ὁ Αὔγουστος ἐν ταῖς κατὰ τοῦ Πελαγianiσμοῦ ἰδέαις αὐτοῦ ὑπερέβηκόντις τὸ μέτρον πολλάκις. Ἐὰν οἱ Πελαγιανοὶ ἔλεγον, ὅτι ὁ ἄνθρωπος γεννᾶται ἁλως ἐλεύθερος καὶ ἀμέτοχος τοῦ προπατορικοῦ ἁμαρτήματος καὶ τῶν συνεπειῶν αὐτοῦ, ὅτι δηλ. καὶ ὁ λόγος αὐτοῦ εἶναι φύσει ἀνεπισκλαστός, καὶ ἡ βούλησις αὐτοῦ ἐλεύθερα, ὥστε ἐκ τῆς αὐτεξουσίας βουλήσεως αὐτοῦ ἐξήρτηται νὰ πράξῃ τὸ ἀγαθὸν καὶ νὰ σωθῇ, οὐδ' ἔχει πρὸς τοῦτο ἀνάγκην τῆς θείας χάριτος· ὁ Αὔγουστος ἀπ' ἐναντίας ἐδείκνυσεν ἐπὶ τὸ ἀπολυτότερον τὰς παρὰ τῇ ἀνθρώπῳ συνεπείας τοῦ προπατορικοῦ ἁμαρτήματος, δογματίζας, ὅτι ἡ ἀνθρωπίνη βούλησις εἶναι ἀπλῶς ἀνίκανος νὰ ἐκλέξῃ οἴκοθεν τὸ ἀγαθόν, ἄνευ τῆς ἀνωθεν θείας χάριτος, διότι ἕνεκα τοῦ προπατορικοῦ ἁμαρτήματος ἀπέβαλε τὴν ἐλευθερίαν αὐτῆς, καὶ ὁ ἄνθρωπος γεννώμενος οὕτω δουλὸς τῆς ἁμαρτίας, μόνον τὸ κακὸν δύναται νὰ ἐκλέξῃ καὶ νὰ πράξῃ· ἐξ ἐναντίας δὲ ἡ θεία χάρις, ἡ δὲ τῆς ἐκκλησίας μεταδομένη, ἐμὲν δάλλει εἰς τῶν ἀνθρώπων τὴν ψυχὴν, ἄνευ τῆς ἐλαχίστης πρὸς τοῦτο συμπράξεως αὐτῶν, τὰ ἐνδοξάματα νέου κατὰ Χριστὸν βίου, ὅπως καὶ ἀποδεικνύεται γόνιμος εἰς πᾶν ἔργον ἀγαθόν καὶ σωτηριῶδες· ὥστε ὁ Θεὸς τοὺς μὲν προώρισεν εἰς σωτηρίαν τοὺς δὲ οὐ. Αἱ ἰδέαι αὗται ἀπαντῶσιν ἀπανταχοῦ σχεδὸν τῶν συγγραμμάτων τοῦ Αὔγουστινου, τὰ ὅποια καὶ κυρίως περιστρέφονται εἰς τὰ πρὸς ταῦτα ζητήματα, τὸ περὶ ἀπολύτου μεταδόσεως τοῦ προπατορικοῦ ἁμαρτήματος, τὸ περὶ τῆς θείας χάριτος καὶ τὸ περὶ προορισμοῦ. Τὰς ἀπολύτους ταύτας ἀκρότητας τῶν Πελαγιανῶν καὶ τῶν περὶ τὸν Αὔγουστινον ἐξήτουν νὰ ἀποφύγῃσιν οἱ Ἡμιπελαγιανοί, δογματίζαντες περὶ τῶν τριῶν ζητημάτων οὕτως, ὥστε πλησιάζουσι πολὺ πρὸς τὴν ἀλλόθειαν καὶ τὴν ὀρθοδοξίαν.

δύο ἐν Χριστῷ φύσεις, παραδεχόμενοι ὅχι φύσιν καὶ πλήρη ἑωυτοῦ, ἀλλ' ἀπ' ἣν συνάφειαν αὐτῶν¹⁷⁾.

ι.) Κατ' ἀντιθεσιν πρὸς τοὺτους οἱ μ ο ν ο φ υ α ῖ τ α ι ἡ Εὐ-
τυ χ ι α ν ο ῖ, ἀπὸ Εὐτυχοῦς ἀρχιεπισκόπου Κωνσταντινουπό-
λεως, ἐδίδασκον¹⁸⁾ διὰ ἐκ τοῦ Θεοῦ λόγου σαρκωθέντος καὶ

τὸν Ἀπολόγητον αὐτοῦ (αἰ καὶ Διμερεῖται καὶ Διμιστριῖται) κατὰ τὸν 8^{ον} μ.
Χ. αἰῶνα ἀνταρνεῖται. Ὁ Ἀπολόγητος ἔλεγεν ὅτι ὁ Ἰ. Χριστὸς ἐνανθρωπήσας
προσέλαθε σὰρκα καὶ ψυχὴν, ὅχι δὲ καὶ νοῦν, διότι τὸν τόπον τοῦ ἀνθρώπου
οὐ κατέλαθεν αὐτὸς ὁ Θεός· ὡς «θεὸς νοῦς». Ἐπὶ τυχόμεναι θελόντες καὶ
ὁ Ἀπολόγητος τὸν ἄνθρωπον εἰς σῶμα, ψυχὴν καὶ πνεῦμα (νοῦν), ὅπως καὶ
ἄλλοι πολλοὶ (Πρὸς. §. 52, σημ. 51, καὶ κατὰ τὴν τυχουμένην ταύτην συνε-
κρότει τὸν Ἰ. Χριστὸν κατὰ μὲν τὰ δύο (τὸ σῶμα καὶ τὴν ψυχὴν, ἦτοι τὴν
φυσικωτέραν καὶ ζωικωτέραν μερίδα καὶ φάσιν τῆς ψυχῆς) ἐξ ἀνθρώπου, κατὰ
τὸ ἑν δὲ, τὸ τρίτον (τὸ πνεῦμα ἢ νοῦν) ἐκ τοῦ Θεοῦ λόγου. Καὶ ἡ αἵρεσις αὐ-
τῇ κατεδικάσθη ὑπὸ τῆς 6^{ης} ἐν Κωνσταντινουπόλει οἰκουμένης Συνόδου (381
μ. Χ.). ¹⁸⁾ Ἐπιγράμ. σζ', Σωκράτ. ἐκκλ. Ιστορ. 6^{ος} 45, Σωζόμ. ἐκκλ. Ιστορ.
ς'. 24, Θεοδόρη. αἵρετ. κακομυθ. 2^{ος} § ἐκκλ. Ιστορ. 4. 3.

17) Ὅτι δὲ τὸ πρῶτον ἐγενήθη ὁ Ἰησοῦς ἐκ τῆς παρθένου Μαρίας ὡς ἀν-
θρώπος· κοινός, καὶ ἔπειτα ἐνίκησεν ἐν αὐτῷ ὁ λόγος. Ἀφ' ὧν εἰς τὴν αἵρε-
σιν ταύτην ἔδωκεν ὁ πρεσβύτερος Ἀναστασιος (423 μ. Χ.) ψέξης ἐν τῇ
διδασκίᾳ αὐτοῦ πρὸς κοινὸν σκάνδαλον τὸ ἐπιθετοῦ τῆς θεομήτορος «Θεοτόκος».
Ὁ Νεστόριος (ὅν μάλιστα κατεπολέμησεν ὁ Πατριάρχης Ἀλεξανδρείας Κύριλλ-
λος) ἐπεδοκίμασε τὸν Ἀναστάσιον συναξίων, ὅτι ἡ ὑπεραγία παρθένος εἶνε «Χρι-
στοτοκόκος» ἢ «θεοτόκος» ὅχι ὅμως ποτὲ καὶ «θεοτόκος», ἐπὶ τῷ
λόγῳ διὰ τὸ ἐπιθετοῦ τοῦτο εἶνε ἐθνικὸν καὶ ἐναντίον πρὸς τὸ ἀποστολικόν· Ἐδρ.
ζ'. 3) Σωκρ. ἐκκλ. Ιστ. ζ'. 32). Ἡ αἵρεσις αὕτη προεκάλει τὴν ἐν Ἐφέσῳ (431
μ. Χ.) γ'. οἰκουμένην Σύνοδον, ἥτις καὶ κατέδικασε τοὺς Νεστοριανούς, χω-
ρὶς ὅμως διὰ τοῦτο νὰ παύσῃ καὶ ἡ αἵρεσις. Ἀφ' οὗ ὁ αἵρεσιάρχης ἐξοριθεὶς εἰς
Ἀφρικὴν ἀπέθνευ ἐν μοναστηρίῳ ἐλεεινὸν θάνατον, οἱ ὁπαδοὶ αὐτοῦ κατέφυγον
εἰς Ἀντιοχείαν· εἰς Ἐδέσσαν, ἐκείθεν δὲ εἰς Μεσοποταμίαν καὶ Περσίδα, ὅπου καὶ
σῶζεται μέχρι σήμερον ἡ αἵρεσις, ἐξαπλωθεῖσα καὶ εἰς ἄλλα· πολλάς χώρας τῆς
Ἀσίας ὡς καὶ εἰς τὴν Ἰνδικήν.

18) Ἰδοὺ ἡ διδασκαλία τοῦ Εὐτυχοῦς κατὰ τὰ πρακτικὰ τῆς Συνόδου ταύτης
(Mansi. Conc. VI. p. 694 sq.) «Μετὰ τὴν ἐνανθρώπησιν τοῦ Θεοῦ λόγου, του-
τέστι μετὰ τὴν γέννησιν τοῦ Κυρίου ἡμῶν Ἰησοῦ Χριστοῦ, μίαν φύσιν προ-
κυνεῖν, καὶ ταύτην Θεοῦ σαρκωθέντος καὶ ἐνανθρωπήσαντος.» Ὁ Εὐτυχὴς κατε-
δικάσθη συνοδικῶς ἐν Κωνσταντινουπόλει τῷ 448 μ. Χ. ἐπὶ τοῦ πατριάρχου
Κωνσταντινουπόλεως Φλαυίνου, συνευδοκοῦντος καὶ τοῦ Πάπα Ῥώμης Λέον-
τος τοῦ μεγάλου. Ὁ Ἀλεξανδρεὺς Λεὶὸς καὶ οἱ διδάσκαλοι καὶ ἀδελφοὶ τοῦ

Πουλυόχου, ήλπιε να υπερασπισθῇ τὸν αὐτὸν ἐκ πάντων τρεπόν, αὐτὸν καὶ συναγέ-
 ρας κατήγαγεν ἐκ τῶν ὁρέων ὄχλον βυβαλοφάρων καὶ ρονικῶν ἀνδρῶν, δι' ὧν
 ἐξηγάγετο τὴν ὑπὸ Θεοδορίου τοῦ β' ἐν Ἱερῷ (440 μ. Χ.) συγκροτηθε-
 σαν οἰκουμένην. Δύνασθον νὰ παρασθῇ καὶ καθ' ἑαυτὴ τῇ διδασκαλίᾳ τοῦ
 Εὐτυχῶς (Vε τὰ πρακτικὰ τῆς Συνόδου ταύτης παρὰ Μισαί. V. 1. μ. 80.) Ἀλλ'
 ἡ μετ' ὀλίγον ἐν Καλικθῶνι (451 μ. Χ.) συγκροτηθεῖσα τεταρτὴ οἰκουμένη
 Συνόδος, τῇ μὲν ἐν Εὐφράτῃ συνόδῳ ἀνεδιέφυγεν ὡς καὶ ἡ σ' παρακλήσις, τὴν δὲ
 διδασκαλίαν τοῦ Διοσκορου καὶ Εὐτυχῶς καταδικάσας, ἀνταρξάσασα ταῦτα τὰ ἄλλα
 τῶν αὐτῶν ἀνυπότακτον υἱόν, τὸν Κύριον ἡμῶν Ἰησοῦν Χριστόν, συμπερίε-
 παντες ἐκλιδοσάμεν τέλειον τὸν αὐτὸν ἐν θεότητι, καὶ τέλειον τὸν αὐτὸν ἐν ἀν-
 θρωπότητι, Θεὸν ἀληθῆς καὶ ἀνθρώπον ἀληθῆς τὸν αὐτὸν ἐκ φύσεως λογικῆς
 καὶ σώματος, ἡμεῖς τὸν πατέρα κατὰ τὴν θεότητα, καὶ ὁμοούσιον τὸν αὐ-
 τὸν ἡμῖν κατὰ τὴν ἀνθρωπότητα, κατὰ πάντα ὅμοιον ἡμῖν χωρὶς ἁμαρτίας, πρὸ
 αἰώνων μὲν ἐκ Πατρὸς γεννηθέντα κατὰ τὴν θεότητα, ἐπ' ἐσχάτων δὲ τῶν ἡμε-
 ρῶν τὸν αὐτὸν δι' ἡμᾶς καὶ διὰ τὴν ἡμετέραν σωτηρίαν ἐκ Μαρίας τῆς παρθέ-
 νου τῆς Θεοτόκου κατὰ τὴν ἀνθρωπότητα, ἑνα καὶ τὸν αὐτὸν Χριστόν ἴσον,
 Κύριον, μονογενῆ ἐκ δύο φύσεων ἀσυγχύτως, ἀτρέπτως, ἀδιαιρέτως, ἀχωρίστως
 γνωριζόμενον, οὐδαμῶς τῆς τῶν φύσεων διαφοράς ἀφρημένῃς διὰ τὴν ἑνωσιν,
 σωζόμενης δὲ πολλῶν τῆς ἰδιότητος ἑκατέρας φύσεως καὶ εἰς ἐν πρόσωπον καὶ
 μίαν ὑπόστασιν συντρεχούσης· οὐκ εἰς δύο πρόσωπα μετῴμενον ἢ διατρεμέ-
 νον, ἀλλ' ἑνα καὶ τὸν αὐτὸν ἴσον καὶ μονογενῆ, Θεὸν λόγον, Κύριον Ἰησοῦν
 Χριστόν, καθάπερ ἠνωθεν οἱ προφῆται περὶ αὐτοῦ καὶ αὐτὸς ἡμᾶς Ἰησοῦς Χρι-
 στός ἐξεπαίδευσεν καὶ τὸ πῶν πατέρων ἡμῶν παραδίδωκε σύμβουλον (Mans
 Conc. VII, 108 sq.).

Οἱ μονοφυσῖται ὅμως εἰς ἡσυχασαν διὰ τοῦτο, ἀλλ' ἐκίνησαν πάντα λίθον,
 μηχανεβέρειας ἐν τῇ αὐτῇ, ὀχλαγωγίας μοναχῶν ἐν τῇ πόλει, καὶ ἄλλα πολλά,
 πρὸς ὑπεράσπισιν ἑαυτῶν καὶ ἐπιμνηστικὴν τῆς αἵρεσώς των. Εἰς μάτην ὁ αὐ-
 τοκράτωρ Ζήνων ν. ἐπρυπάθησε νὰ συνδιαλλάξῃ τοὺς αἵρετικούς καὶ ὀρθοδόξους
 διὰ τοῦ «Κωνσταντίνου», ἐν ᾧ διατυπώθη τὸ δόγμα αὐτως ἀόριστος καὶ γενικῶς
 («ὁμοούσιος τῷ πατρὶ κατὰ τὴν θεότητα καὶ ὁμοούσιος ἡμεῖς κατὰ τὴν ἀνθρωπώ-
 τητα», ὡς παραδίδει ὁ Εὐάγγελος: γ'. 14) ὥστε νὰ ἐκχριστήσωσιν ἀμφοτέραι.
 Ἐξ ἐναντίας τὸ Ἐνωτικὸν ἠψήσεν ἔτι πολλὸν τὴν δυσκαίεσιν ἀμφοτέρων καὶ
 τὴν διχάνειν. Ἀφ' οὗ δὲ καὶ ὁ Ἰουστινιανὸς μετὰ τοῦτο δὲν κατώρθωσε νὰ φέ-
 ρῃ τὴν συνδιαλλαγὴν, ἀπεσχίσθησαν οἱ μονοφυσῖται ἀπὸ τῆς καθολικῆς ἐκκλη-
 σίας, καὶ τοιοῦτοτρόπως προύκοντος τοῦ χρόνου ἐκχρηματίσθησαν ἐξ αὐτῶν αἱ
 ἐξῆς ἐκκλησίαι: α) ἡ αἰγυπτιακὴ τῶν Κωνσταντίνου· β) ἡ τῶν Ἀρμενίων,
 καὶ γ) ἡ τῶν Ἰακωβιτῶν ἐν Συρίᾳ καὶ Ἀσσοποταμίᾳ. Αἱ δ' ἐκκλησίαι αὗται
 μένουσι καὶ μέχρι σήμερον ἀπεχισμένοι ἀπὸ τῆς ὀρθοδόξου ἀντολικῆς, δινωθέν-
 τος τοῦ σπλάματος ἐκ πολιτικῶν ἡλλων περιστάσεων καὶ συγκυρίων. Αἵτινες καὶ

12.) Οὐ μόνον ὡς ἡ ταύτη ἐδογματίσθη ἀντι τοῦ μίαν μόνον θεῶν ἐν τῷ Ἰησοῦ Χριστῷ¹³⁾).

παρεκώλυσαν τὴν πολλὰκι θρῆσκείνην, ἀλλ' ἤρπασε διακοπεῖσθαι συνένευσιν καὶ συνένωσιν τῆς ὁρμενικῆς πρὸς τὴν ὀρθόδοξον ἐκκλησίαν (ἴδ. Περὶ ἐνώσεως τῶν Ἀρμενίων μετὰ τῆς ἀνατ. ὀρθ. ἐκκλητ. ὑπὸ Γρηγορίου μητροπολ. Χίου τοῦ Βυζαντίου, σελ. 43—47). Ἡ σπουδαιότερα διαφορὰ τῆς ὁρμενικῆς ἐκκλησίας ἀπὸ τῆς ὀρθοδόξου συνίσταται εἰς τὸ περὶ τῶν δύο φύσεων δόγμα τῆς ὀρθοδόξου, τὸ ὅπου ἐιστήριζεν ἡ δ' οἰκουμένη Σύνοδος, ἡ ἐν Χαλκηδόνι, καὶ τὸ ὅπου παρῆλθον ὡς νεστοριανικόν ὑπὸ τῶν Ἀρμενίων, οἵτινες διὰ λόγους γλωσσικῆς μᾶλλον ἢ δογματικῆς διαφορᾶς, συνέχον τὴν ἐνωσίαν τῆς λέξεως φύσις μετὰ τῆς λέξεως ὁμοῦσι (αὐτῶν, σελ. 18 καὶ ἄλλ.). Ἐκτὸς τούτου οἱ Ἀρμένιοι εἰσέγαγον εἰς τὴν εὐχαριστίαν τὸ ἄζωμα, εἰ καὶ ἡ παρὰ τῶν αἰρετικῶν Σύρων παραληφθεῖσα αὕτη καινοτομία δὲν συνεπέφερεν ὅλας τὰς παραμορφώσεις τῆς λατινικῆς, διότι ὁ ἄζωμα οὗτος ἄριστος τῶν Ἀρμενίων καὶ εὐμεγέθους εἶνε, καὶ εἰς τὸ ἄρην ποτήριον ἐμβαπτόμενος μεταδίδεται ἐξ αὐτοῦ εἰς τοὺς μετασφαιρόντας ἀπέβαλον τὸ ὕδωρ ἀπὸ τοῦ ἁγίου ποτηρίου· εἰσέγαγον εἰς τὸ ἄρην μύρον τὴν χρῆσιν σφαμίνου ἐλαίου· μετέβαλον τὸ τρισάγιον, ἀντικαταστήσαντες τὰς λέξεις «ἐλέησον ἡμᾶς» διὰ τῶν λέξεων «ὁ σταυρωθεὶς δι' ἡμᾶς»· μετέθεσαν τὴν ἑορτὴν τῆς Χριστοῦ γεννήσεως ἀπὸ τῆς κ.ε. Δεκαμβρίου εἰς τὴν σ'. Ἰανουαρίου, καὶ ἐπομένως νηστεύουσι κατὰ τὸ μεσαιόδου δοδεκαήμερον, τῶν ὀρθοδόξων καταλοσύνων (αὐτ. σελ. 63—91). Ἄλλαι ἐπουσιωδέστεραι καινοτομίαι, πηγάζουσαι ἐκ τῆς μετὰ τὴν ὑπὸ τῶν σταυροφόρων ἡλώσιν τῆς Κωνσταντινουπόλεως· παραδικῆ· ἐνώσεως μετὰ τοῦ Λατίνου, εἶνε αἱ πιννοειδεῖς τιάραι, ὁ ἐπισκοπικὸς δακτύλιος, ἡ χειροτονία πολλῶν ἱερέων καὶ διακόνων ἐν τῇ αὐτῇ λειτουργίᾳ, καὶ εἴτι ἄλλο τοιοῦτον. Αἱ δὲ διαφοραὶ τῆς τῶν Κοπτῶν καὶ Πακωδιτῶν ἐκκλησίας ἀπὸ τῆς τῶν Ἀρμενίων εἶνε μικροῦ λόγου ἄξια.

19) Ὁ Αὐτοκράτωρ Ἡράκλειος, ἔχων ἄδυστον καὶ φλογερὰν ἐπιθυμίαν νὰ ἴδῃ τοὺς ὑπηκόους αὐτοῦ σὺμπαντας καὶ ὀρθοσκοτικῶς ἠνωμένους, συνεννοηθεὶς ἐν τῇ κατὰ Περσῶν ἐκαταρατῇ αὐτοῦ μετὰ τοὺς κατὰ τὴν Συρίαν καὶ Ἀρμενίαν ἀρχιερεῖς τῶν μονοφυσιτῶν, ἠθέλησε νὰ συνενώσῃ αὐτοὺς μετὰ τὴν καθολικὴν ἐκκλησίαν. Καὶ δι' ἐνήργησε νὰ ἐπικυρωθῇ ὑπὸ τοῦ πατριάρχου Κωνσταντινουπόλεως Σεργίου ὡς ὅρος δογματικὸς «ἐν ὀλέμα» ἡ ἐνέργεια θεανδρική, ὁ δ' εἰς τὸν θρόνον τῆς Ἀλεξανδρείας ὑπ' αὐτοῦ προεδιδιαθεί· πατριάρχης Κύρος ἀπεφάσισε καὶ συνοδικῶς (633 μ. Χ.) καὶ ἐνέργησε τὴν ἐνωσιν. Ἀλλ' ὁ τότε μοναχὸς καὶ μετὰ ταῦτα πατριάρχης Ἱεροσολύμων (635 μ. Χ.) Σωφρόνιος ἀπέδειξεν ὅτι αἱ δύο θελήσεις ἦσαν ἀνταγκαῖα καὶ ἀναπόφευκτος συνέπεια τῶν δύο φύσεων, ὅπως ἐδογματίσθη ἡ ἐν Χαλκηδόνι οἰκουμένη Σύνοδος. Ἡ εἰρήαις ὑπεβλήθη εἰς τὴν ἐν Κωνσταντινουπόλει (680 μ. Χ.) ἐκτὴν οἰκουμένην Σύνοδον, ἥτις καὶ κατεῖλεσεν αὐτὴν δογματίσασα δύο θελήσεις

ιβ'). Τῶν εἰκονομάχων ἡ εἰκονοκλαστῶν αἰρεσιάρχης ὑπῆρξεν ὁ αὐτοκράτωρ Λέων ὁ γ', ὁ καὶ εἰκονομάχος ἐπικληθεῖς. Οἱ δὲ εἰκονομάχοι οὗτοι ἠθέτουσαν καὶ κατεπολέμουν τὴν προσκύνησιν τῶν ἱερῶν εἰκόνων²⁰).

§. 33.

Βασιτεῖα αἱ κυριώτεραι αἵρέσεις κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους:

Ὅπως αἱ κατὰ τοὺς ἀρχαιότερους χρόνους αἵρέσεις ἀνεφύησαν κυρίως ἐν τῇ Ἀνατολῇ, οὕτω καὶ αἱ κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους ἀνεφύησαν κυρίως ἐν τῇ Δύσει¹), καὶ εἶνα πολλοὶ καὶ διάφοροι, ἐκ τῶν ὁποίων ἀναφέρονται ἐφεξῆς τὰς κυριώτερας.

ἐν τῇ Ἱ. Χριστῷ, μίαν θεὸν καὶ μίαν ἀνθρωπίνην, μὲ τὴν σημείωσιν ὅτι ὁ πᾶσι πρὸς τὴν ὑπετάσσεται εἰς τὴν θεῖον. Ὡς δὲ τὸ σχετικὸν χωρίον τῶν πρακτικῶν τῆς Συνόδου ταύτης: «Δύο φυσικὰ θελήματα ἦσαν θελήματα ἐν Χριστῷ καὶ δύο φυσικὰ ἐνεργείας ἀδιαίρετως, ἀτρέπτως, ἀμερίστως, ἀσυγχύτως κατὰ τὴν τῶν ὁρίων πατέρων διδασκαλίαν κηρύττομεν καὶ δὲ οὐ φυσικὰ θελήματα εὖθις ὡς ἐν ἀντίθετον, καθὼς οἱ ἀσεβεῖς ἔφησαν αἱρετικοί, ἀλλ' ἐπόμενον τὸ ἀνθρώπινον αὐτοῦ θελημα, καὶ μὴ ἀντιπῆκτον ἢ ἀντιπαλατὸν, μάλλον μὲν εὖθις καὶ ὑποτασσόμενον τῷ θεῷ αὐτοῦ καὶ παναθενεῖ θελήματι» (Μαυρί Κορυ. ΧΙ. p. 634.)

Ἄλλ' οὐδὲ κατόπιν πάντων τούτων ἦσαν αἵρέσεις, διότι αἱ μονοθεῖται ἀποβλήθentes ἐκ τῶν κόλπων τῆς ὀρθοδόξου καθολικῆς ἐκκλησίας, καὶ κατασχθέντες ὑπὸ τῶν αὐτοκρατόρων, διειρηθήσαν ὅμως μέχρι τῆς σήμερον ἐπὶ τοῦ Αἰθιόπου καὶ Ἀντιοχίου ὑπὸ τὸ ὄνομα Μαρωνίται, ὡς ἐπεκλήθησαν ἐπὶ τοῦ ἀρχιερέως καὶ αἱρεσιάρχου αὐτῶν Μαρῶν (περὶ τὸ 704 μ. Χ.)

20) Ἡ αἵρεσις αὕτη ἀνακηρυχθεῖσα ἐπισήμως ὑπὸ τοῦ αὐτοκράτορος ἐν ἔτει 726 μ. Χ., προσεκάλεσε σειρὰν ὅλην ἐμφυλίων πολέμων, οἵτινες διήρκεσαν ἐκατονταετηρίδα καὶ ἐπέκεινα, καὶ τῶν ὁποίων ἀποτέλεσμα, ἐκτὸς πολλῶν ἄλλων, ὑπῆρξε καὶ ἡ ἀπώλεια τῆς Ἰταλίας καὶ ἡ κοσμικὴ ἐξουσία τοῦ Πάππα. Οἱ εἰκονομάχοι κατεδικάσθησαν ἐπὶ τῆς αὐτοκρατορίας Εἰρήνης ὑπὸ τῆς ζ'. ἐν Νικαίᾳ (788 μ. Χ.). Οἰκουμένης Συνόδου, ἥτις καὶ ἐδογματίσεν ἐπισήμως τὴν προσκύνησιν τῶν εἰκόνων· ἀλλ' ὀριστικῶς ἡ προσκύνησις αὕτη καθιερώθη ἐπὶ τῆς αὐτοκρατορίας Θεοφύρας ἐν ἔτει 842 μ. Χ.

1) Δὲν ἔμειναν ὅμως οὐδ' ἡ ἀνατολικὴ Ἐκκλησία κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους ὅπως ἀνεπηρέαστος ἀπὸ τῶν αἱρέσεων, διότι ἀπὸ τῶν μέσων τῆς ιζ'. ἐκατονταετηρίδος ἀπεσχίσθησαν ἀπὸ τῆς ἐν Ῥωσίᾳ ὀρθοδόξου ἐκκλησίας οἱ Ῥωσολοί (—σχισματικοί), ἡ, ὅπως αὐτοὶ ἐαυτοὺς καλοῦσι Σαραβίται, (—ὀρθόδοξοι, ἀπορμὴν λαθόντες ἐκ τοῦ ὅτι ὁ δὲ ἐν Μόσχᾳ πατριάρχης

Ἡ οὐτική ἐκκλησία ἦτο πλεονέστερον συννηρωμένη μετὰ τῆς ἀνατολικῆς· εἰς μίαν καθολοῦ ἢ καθολικὴν ἐκκλησίαν· ἀλλ' ἐξοκείλασα εἰς δυοσεβεῖς κοκοδοξίας περὶ ἄλλα τε πολλὰ καὶ περὶ τὸ δόγμα τῆς τοῦ ἁγίου Πνεύματος ἐκπορεύσεως, ἀπεσχίσθη ὀριστικῶς ἀπὸ τῆς ἀνατολικῆς ἐν ἔτει 1054 μ. Χ.

β.) Κατὰ τὴν 15'. ἑκατονταετηρίδα μ. Χ. ἐξεβράβη σχίσμα μεταξὺ τῆς δυτικῆς ἐκκλησίας, κατὰ τὸ ὅποιον ἀπεσχίστησαν ἀπ' αὐτῆς οἱ διαμαρτυρούμενοι, ἰδιαίτεροις ὑποδιακρινομένη.

1) εἰς τοὺς ἰδίως Λαουθηρανοὺς (ἀπὸ τοῦ ἀρχηγοῦ τῆς αἵρέσεως Μαρτίνου Λαουθέρου, μοναχοῦ Γερμανοῦ γεννηθέντος ἐν Ἐισλεβένῃ τῆς Πρωσίας κατὰ τὸ 1183, † 1546 μ. Χ.) ἢ Εὐαγγελικοῦς, καὶ

2) εἰς τοὺς Κολθινίτας (ἀπὸ τοῦ ἀρχηγοῦ τῆς αἵρέσεως Ἰωάννου Κολθίνου, γάλλου γεννηθέντος ἐν Νοβιά-

Νίκων διέφθειρεν ἀναθεωρήσαι τὰς ἀρχαίας οὐκωκινὰς μεταρράσεις τῆς Γραφῆς καὶ τῶν ἐκκλησιαστικῶν βιβλίων. Ἐκ τῶν Ῥασκόλνικων τούτων πάλιν ἀπεσχίσθησαν οἱ Δουχοθέρτοι, οἵτινες οὔτε ναοὺς οὔτε ἱερεῖς ἔχουσιν, εἰ Πόποφτοι, οἵτινες ἔχουσιν ἱερεῖς, καὶ οἱ Φίλιππῶνοι, οἵτινες ἀποκηρύττουσι τὸν γάμον καὶ θεωροῦσι τὸν μοναχικὸν βίον ὡς ἀναπόφευκτον εἰς τὴν σωτηρίαν τοῦ χριστιανοῦ· ὅθεν καὶ ζῶσιν, ἄνδρες καὶ γυναῖκες· ὁλοῦ, μοναχῶς μὲν, ἀλλ' ἐν κτηνώδει κοινωγίᾳ, ἀναβαπτίζουσι δὲ τοὺς ὀρθοδόξους βαπτισθέντας. Οἱ πλείστοι τούτων καταδιωχθέντες κατέφυγον εἰς Πρωσίαν περὶ τὰ τέλη τῆς 15'. ἑκατοντῆς. Ἐν γένει δὲ οἱ Ῥασκόλνικοι, οἱ ἀνανεύοντες ἐν Ῥωσσίᾳ πολλὰς καὶ πολυεθεῖς πλάνας αἰρετικὰς καὶ κακοδοξίας καὶ μανίας καὶ βδελυρίας ἀρχαίων καὶ νεωτέρων χρόνων, εἰ καὶ ὑπέστησαν πολλοὺς πολλὰς διωγμούς, ἐγκατεστάθησαν ὅμως πολλὰ τοῦ Ῥωσσίας, καὶ ἰδίως κατὰ τὴν Πολωνίαν, τὴν μικρὰν Ῥωσίαν καὶ Σιβηρίαν. Οὐσιπῶς δὲ τῇ αἵρεσὶ τῶν συνίσταται εἰς τὴν ἀποκήρυξιν τῆς εὐχαριστίας, τοῦ χρίσματος καὶ τῆς ἱερωσύνης. Τὰ γεννώμενα νήπια βαπτίζει εἰς τὴν πρεσβυτή, καὶ ἡ προσευχὴ τῶν συνίσταται εἰς τὸς λείους τούτους. «Ἀλλήλοιστε, ἀλλήλοιστε, ὁδοῖτε οὐκ ὁδοῖτε.» Ποιοῦσι δὲ τὸ σημεῖον τοῦ σταυροῦ ὅχι μὲν τοῦς τρεῖς, ἀλλὰ μὲν τοῦς δύο δοκίλους, εἰς σημεῖον τῶν δύο φύσεων τοῦ ἱ. Χριστοῦ. (Ὁ ἕτερος δὲ κείσεται τὴν κόρυθα τῆς

πτοντες την παραδοσιν της εκκλησίας, ως ἔργον ἀνυψωπινόν. Καὶ οἱ μὲν ἰδίως Λουθηρανοὶ ἀπορρίπτουσι πᾶν ὅ,τι ἐναντιῶ-
ται κατ' αὐτοὺς πρὸς τὴν Γραφὴν, οἱ δὲ ἰδίως Καλβινισταὶ
ἀπορρίπτουσι πᾶν ὅ,τι κατ' οὐτοὺς δὲν ὀρίζεται ῥητῶς ὑπὸ τῆς
Γραφῆς, καὶ ἰδίως τῆς καινῆς Διαθήκης. Δογματίζουσι δὲ οἱ
μὲν διαμαρτυρούμενοι ἐν γένει ὅτι μόνῃ ἡ πίστις ἀνευ τῶν
ἔργων ἀρκεῖ εἰς σωτηρίαν, οἱ δὲ Καλβινισταὶ ἰδίως θεωροῦσι
τὴν σωτηρίαν ὡς ἔργον ἀποκλειστικόν τῆς χάριτος τοῦ Θεοῦ,
ὅστις πρὸ αἰώνων καὶ ἀμετακλήτως προώρισε τοὺς μὲν εἰς
σωτηρίαν τοὺς δὲ εἰς ἀπώλειαν. Ἀπέρριψαν δὲ οἱ διαμαρτυ-
ρούμενοι καὶ τὰ πλείστα τῶν μυστηρίων, ἐν οἷς καὶ τὴν ἱερω-
σύνην, δογματίσαντες ὅτι ἕκαστος πιστὸς δύναται νὰ ἐκτελῇ
τὰ μυστήρια καὶ νὰ εἶνε ἱερεὺς.

Ἡ διαμαρτύρησις, ἥτις καὶ μετὰ ῥῥύθμισις καὶ ἀνα-
μορφωσις ἐν γένει λέγεται, ἀφ' οὗ προσκάλεσε πολλοὺς καὶ
αἱματηροτάτους πολέμους πολλαχοῦ τῆς δυτικῆς Εὐρώπης,
διεδόθη ἐντὸς ὀλίγου καὶ ἐκτὸς τῆς Γερμανίας καὶ Ἑλβετίας,
εἰς χώρας τινὰς τῆς Γαλλίας, εἰς τὴν Ὁλλανδίαν, Μ. Βρετ-
τανίαν, Δανιμαρκίαν καὶ Σουηδίαν ὥστε ὁ μὲν παπισμὸς πε-
ριωρίσθη εἰς τὰ μεσημβρινώτερα τῆς δυτικῆς Εὐρώπης, ἡ δὲ
διαμαρτύρησις ἐξηπλώθη εἰς τὰ βορειότερα, ἀφ' οὗ ὁμοῦ κα-
τεμελίσθη, ὡς ἦτο ἐπόμενον, καὶ ὑποδιηρέθη εἰς ἀπειραρίθμους
αἱρέσεις καὶ σχίσματα (μάλιστα ἐν Ἀμερικῇ), τῶν ὁποίων καὶ
μόνοι αἱ ὀνομασίαι ἤθελον πληρώσῃ ὀλόκληρον βιβλίον⁴).

2) Noyon. 3) Réformés, Reformite=κατὰ λέξιν ἀναμεμορφωμένοι ἢ
ἀναμόρφωτοι. Ἀναμορφωτὰς εἶπομεν αὐτοὺς διὰ τὸ εὐφρωννόν μᾶλλον, ἄλλως
τε καὶ μὴ ἐλλειπούσης τῆς ὑπὲρ τοῦ τύπου τούτου ἀναλογίας τῶν λέξεων: ἀνα-
μορφωτὴς, καὶ τῶν τοιούτων.

4) Αἱ ἐπιστημότεροι τῶν ἐκ τῆς διαμαρτυρήσεως καὶ ἰδίως ἐκ τοῦ Καλβ-

Καὶ ὁ μὲν καθ' αὐτὸ Λουθηρανισμὸς ἐξηπλώθη ἰδίως εἰς τὰ βορειότερα τῆς Γερμανίας καὶ τὰς δύο σκανδιναβικὰς ἐπικρατείας, ὁ δὲ Καλθινισμὸς ἐκ τῆς Ἑλβετίας ὁρμηθεὶς ἐξηπλώθη εἰς χώρας τινὰς τῆς Γαλλίας, Κάτω χώρας καὶ εἰς τὴν Σκωτίαν, ὅπου ὁμῶς ἐτροποποιήθη εὐτως, ὥστε παρήχθη ἰδίᾳ τις ἐκεῖ ἐκκλησία, ἣ τῶν Σκωτικῶν ἢ Ἡρεσδυτεριανῶν

ισμοῦ προσελθουσῶν αἰρέσεων, οἵτινες ἅπασι σχεδὸν ἀνενέωσαν ἀρχαίας αἱρετικές πλάνας καὶ κακοθεσίας, πρὸ πολλῶν αἰώνων καταδικασθείσας ὑπὸ τῆς καθόλου ἐκκλησίας, εἶνε.

α'. Ἡ τῶν Ἀναβαπτιστῶν ἢ Μενονιτῶν, οἵτινες ἤθελον νὰ ἀναβαπτίσωσι τοὺς πιστοὺς, ὡς ἀπὸ τοῦ ὅτι τοῦ βαπτίσματος τῶν νηπίων, διέτεκναι καὶ ἀποκύντες κοινοκτημονίην καὶ πολυγαμίαν, καὶ οἵτινες διὰ τοῦ ξίφους καὶ τῆς ροβερᾶς καὶ καὶ βελούρας οὕτων τυραννίδας ἠθίλησαν νὰ ἐξαπλώσωσιν ἀπανταχοῦ τὴν αἵρεσιν τῶν Ἰππὶ τέλους ὁ ἐκ τῶν Κάτω Χωρῶν Μενωνιτισμῶν (γεν. 1505, † 1561) ἐδοκίμασε νὰ περιστρέψῃ τὴν ἐπαναστατικὴν μενίαν τῆς αἵρέσεως, καὶ οὕτως ἐπῆλθεν ἡ αἵρεσις τῶν Μενονιτῶν, ὑποδικαρεθέντων εἰς πολλὰ σχίσματα, καὶ ἐπαρρητιόντων μὲν τὸ βάπτισμα τῶν νηπίων, τὴν ὁρκωμοσίαν καὶ τὴν στρατιωτικὴν ὑπηρεσίαν, ἀποκύντων δὲ τὴν ποδολουσίαν.

β. Οἱ Σκωτικῶν, ἀπὸ τοῦ Πάπῶν αἰρεσιάρχου Φαύστο Σκωκίνοῦ (γενν. 1539 † 1604), οἵτινες ὁμολογοῦσι μὲν τὸ θεόπνευστον τῶν γραφῶν, ἀλλ' ἀρνοῦνται τὸ τριουπότανον τοῦ Θεοῦ, καὶ τὴν θεότητα τοῦ Ἰ. Χριστοῦ.

γ'. Οἱ Ἀρμινιανοί, ἀπὸ τοῦ Ὁλλανδοῦ Ἀρμινίου (γενν. 1561, † 1609), ἦσαν, κυρίως εἰπεῖ, Καλθινισταί, ἀποκρούσαντες τὸ ἀπόλυτον παρεχάριτος καὶ προορισμοῦ δόγμα τοῦ Καλθίνου, ἀπεισιτάλησαν, καὶ προτίνας τοῦ χρόνου προήλασαν εἰς κακοθεσίας, ὀλίγον ἀπεχούσας τοῦ ὀρθολογισμοῦ (rationalism).

δ'. Οἱ Κουάκεροι, ἦτοι τρέμοντες (ἀγγλ. quakers), ὅπου ἐπεκλήθησαν σκωπτικῶς οἱ ἐκ τῆς ἐκτετατῆς τῶν Φίλων, καθὼς αὐτοὶ ἐαυτοὺς ἀνόμασαν καὶ ὀνομαζοῦνται. Ἀρχηγὸς τῆς αἵρέσεως ταύτης ὑπῆρξεν ἄγγλος τις σανδαλοποιὸς ἐνθουσιαστῆς Ἰεωργίου Φώξ († 1691). Οἱ Κουάκεροι πολυλοῦς διωγμοὺς ὑποστάσαντες διεσώθησαν ὥστε μέχρι τῆς σήμερον καὶ ἐν Ἀγγλίᾳ καὶ ἀλλοῦ, μάλιστα δὲ ἐν Ἀμερικῇ. Κατὰ τὰ ἄλλα εἶνε σχεδὸν διωκταί, διαφέρουσι δὲ μόνον κατὰ τὸ ἰδιάζον εἰς αὐτοὺς δόγμα τῆς θείας ἐλλάξεως. Κατὰ τὸ δόγμα ταῦτο ἕκαστος Κουάκερος φωτίζεται ἐσωτερικῶς ὑπὸ τοῦ Θεοῦ περὶ πάσης ὁρητικτικῆς ἀληθείας, καὶ ἡ ἐκ τῆς ἐλλάξεως ταύτης ἐμπνευσις εἶνε ἡ πρώτη καὶ κυρία πηγὴ τοῦ κατ' αὐτοὺς χριστιανισμοῦ, ἡ δὲ γραφὴ βοήθημα δεύτερον λόγου ὄντων. Ὅθεν καὶ δὲν ἔχουσιν ἱερεῖς (οὐδὲ κατ' ὄνομα ὅτι), ἀλλ' ἕκαστος ἐμπνεύμενος κηρύττει ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ, ὅτι καὶ ὅπου ἐμπνευσθῇ. Ἐν τῇ πρακτικῇ βίᾳ ὅμως οἱ Κουάκεροι εἶνε ἡθικώτατοι ἐν γένει καὶ ἐνσυνείδητοι.

των καὶ Καθαριστῶν⁵⁾ Ἡ διαμαρτύρησις ἐξηπλώθη καὶ εἰς τὴν Ἀγγλίαν, ἀλλ' ἐνεκα διαφορῶν λόγων ἐτροποποιήθη εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς τόσον πολὺ, ὥστε

3) ἡ ἐν Ἀγγλίᾳ ἐπικρατήσασα ἐκκλησία τῶν Ἐπισκοπιανῶν ἢ Ἀγγλικανῶν εἶνε ἡ μάλιστα ἀπέχουσα ἀπὸ τῆς διαμαρτυρήσεως, καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁ μεσάζων ὁρος μεταξὺ τῶν διαμαρτυρομένων καὶ τῶν καθολικῶν. Προῆλθε δὲ κυρίως τοῦτο ἐκ τοῦ ὅτι οἱ Ἀγγλικανοὶ δὲν ἀπέβριψαν ἐντελῶς τὴν παράδοσιν τῆς ἐκκλησίας, καὶ μάλιστα τῆς ἀρχαίας, ἐτήρησαν δὲ τὴν ἱερωσύνην μετὰ τῶν τριῶν αὐτῆς βαθμῶν, καὶ τὴν ἐντεῦθεν πηγάζουσαν ἐκκλησιαστικὴν ἱεραρχίαν, ἐν μέρει δὲ καὶ τὴν περὶ τὴν τέλεσιν τῆς εὐχαριστίας ἀρχαίαν λειτουργικὴν τάξιν⁶⁾.

§. 37.

Ἐκ πόσων ἄρθρων συναπαρτίζεται τὸ σύμβολον τῆς πίστεως, καὶ ποῖα εἶνε ταῦτα ;

Τὸ σύμβολον τῆς πίστεως συναπαρτίζεται ἐκ δώδεκα ἄρθρων, τὰ ὁποῖα εἶνε τὰ ἑξῆς :

5) Puritani. Οἱ πρεσβυτεριανοὶ ὑπέστησαν πολλοὺς διωγμοὺς καὶ μεταβολὰς καὶ ἐν Σκωτίᾳ μὲν, μάλιστα δὲ ἐν Ἀγγλίᾳ· ὥστε αἱ ἀνωτέρω ὀνομασίαι : Σκωτικανοὶ, Καθαρισταὶ καὶ Πρεσβυτεριανοὶ, δὲν πρέπει νὰ θεωρηθῶσι καὶ ὡς ἀκριβῶς ταυτῶσμοι, ἀλλ' ὡς αἰρέσεις μᾶλλον ἢ ἥττον ἀπέχουσι ἔνθεν μὲν τοῦ Καλθινισμοῦ, ἐξ οὗ ὠρμήθησαν, ἔνθεν δὲ τῆς ἐν Ἀγγλίᾳ ἐπικρατησάσης ἐπισκοπικῆς ἢ Ἀγγλικανικῆς «ὕψλης ἐκκλησίας» (High Church,) ἧτις καὶ τοὺς κατεπολέμησεν. Ὡς ἀντιθετοὶ δὲ πρὸς τὴν ἐκκλησίαν ταύτην, οἱ Πρεσβυτεριανοὶ καὶ οἱ τοῦτοι ὅμοιοι λέγονται καὶ μὴ συμμορφῶμενοι (nonconformists), ἢ διαφωνοῦντες (dissenters).

6) Τὸ ἐπίσημον σύμβολον τῆς ἀγγλικανικῆς ἐκκλησίας εἶνε τὰ «τριάνκοντα ἐννέα ἄρθρα», τὰ ὅπως ἔχουσι καὶ ὁριστικῶς ἐπὶ τῇ: Ἐλισάβετ ἐν ἔτει 1562 κυρωθέντα καὶ ἐκδοθέντα «*Article XXXIX ecclesiae Anglicanae*». Πολλὰ τῶν ἄρθρων τούτων εἶνε ὁρίσματα καὶ εἰς πολλὰς ἀντιφάσεις ἀφορμὴν παρέχοντα. Ὁ αὐτὸς λόγος καὶ περὶ τοῦ ἐν πολλοῖς συμβολικοῦ καὶ λειτουργικοῦ βιβλίου, ὅπερ καλεῖται «κοινὸν Εὐχολόγιον» (Common prayer book), καὶ σῶζει μέρη τινὰ ἡκρωτηριασμένα τῆς ἡλῆ προηκωποιησμένης λατινικῆς λειτουργίας

Ἀ ρ θ ρ ο ν α'. «Πιστεύω εἰς ἓνα Θεόν, Πατέρα, παντοκράτο-
ρα, ποιητὴν οὐρανοῦ καὶ γῆς, ὁρατῶν τε πάντων καὶ ἀοράτων·

Ἀ ρ θ ρ ο ν β'. Καὶ εἰς ἓνα Κύριον Ἰησοῦν Χριστόν, τὸν
Υἱὸν τοῦ Θεοῦ τὸν μονογενῆ, τὸν ἐκ τοῦ Πατρὸς γεννηθέντα
πρὸ πάντων τῶν αἰώνων, ὧς ἐκ φωτός, Θεὸν ἀληθινὸν ἐκ
Θεοῦ ἀληθινοῦ γεννηθέντα, οὐ ποιηθέντα, ὁμοούσιον τῷ Πα-
τρί, δι' οὗ τὰ πάντα ἐγένετο·

Ἀ ρ θ ρ ο ν γ'. Τὸν δι' ἡμᾶς τοὺς ἀνθρώπους καὶ διὰ τὴν ἡ-
μετέραν σωτηρίαν κατελθόντα ἐκ τῶν οὐρανῶν καὶ σαρκω-
θέντα ἐκ Πνεύματος ἁγίου καὶ Μαρίας τῆς παρθένου καὶ ἐ-
νανθρωπήσαντα·

Ἀ ρ θ ρ ο ν δ'. Σταυρωθέντα τε ὑπὲρ ἡμῶν ἐπὶ Ποντίου Πι-
λάτου, καὶ παθόντα καὶ ταφέντα·

Ἀ ρ θ ρ ο ν ε'. Καὶ ἀναστάντα τῇ τρίτῃ ἡμέρᾳ κατὰ τὰς
γραφάς·

Ἀ ρ θ ρ ο ν ς'. Καὶ ἀνελθόντα εἰς τοὺς οὐρανοὺς, καὶ κα-
θεζόμενον ἐκ δεξιῶν τοῦ Πατρὸς·

Ἀ ρ θ ρ ο ν ζ'. Καὶ πάλιν ἐρχόμενον μετὰ δόξης κρῖναι
ζῶντας καὶ νεκρούς, οὗ τῆς βασιλείας οὐκ ἔσται τέλος·

Ἀ ρ θ ρ ο ν η'. Καὶ εἰς τὸ Πνεῦμα τὸ ἅγιον, τὸ κύριον, τὸ
ζωοποιόν, τὸ ἐκ τοῦ Πατρὸς ἐκπορευόμενον, τὸ σὺν Πατρί καὶ
Χρῆσμι συμπροσφυόμενον καὶ συνδοξαζόμενον, τὸ λαλῆσαν διὰ
τῶν Προφητῶν·

Ἀ ρ θ ρ ο ν θ'. Εἰς μίαν ἁγίαν, καθολικὴν, καὶ ἀποστολι-
κὴν ἐκκλησίαν·

Ἀ ρ θ ρ ο ν ι'. Ὁμολογῶ ἓν βάπτισμα εἰς ἄφεσιν ἁμαρτιῶν·

Ἀ ρ θ ρ ο ν ια'. Προσδοκῶ ἀνάστασιν νεκρῶν·

Ἀ ρ θ ρ ο ν ιβ'. Καὶ ζωὴν τοῦ μέλλοντος αἰῶνος. Ἀμήν».

§. 38.

Ποῦτον εἶνε τὸ πρῶτον ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως, καὶ πῶς ἀποδει-
κνύεται ἡ ὑπαρξίς τοῦ Θεοῦ, τῇ ὁποίᾳ μᾶς διδάσκει ;

«Πιστεύω εἰς ἓνα Θεόν, Πατέρα, παντοκράτορα, ποιητὴν
οὐρανοῦ καὶ γῆς, ὁρατῶν τε πάντων καὶ ἀοράτων.»

Τὸ πρῶτον τοῦτο ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως μᾶς διδάσκει εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς, ὅτι ὑπάρχει εἰς Θεός, ποιητὴς σύμπαντος τοῦ ὁρατοῦ καὶ ἀοράτου κόσμου, εἰς τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πιστεῦμεν. Ὅτι δὲ ὁ Θεὸς ὑπάρχει ἀρκεῖ νὰ ῥίψῃ τις ἐν βλέμμα εἰς ἑαυτὸν καὶ εἰς τὸν περικυκλοῦντα ἡμᾶς κόσμον διὰ νὰ πεισθῇ ἀμέσως. Ἐάν δὲν ὑπῆρχε Θεός, ποιητὴς ἡμῶν καὶ σύμπαντος τοῦ κόσμου, οὔτε ἡμεῖς οὔτε ὁ κόσμος οὗτος ἠθέληεν ὑπάρχει. Ἡ ὑπαρξίς ἄρα τοῦ Θεοῦ δὲν ἔχει ἀνάγκην ἀποδείξεως, ὥς πολὺ πλέον αὐταπόδεικτος παρὰ τὰ μαθηματικά ἀξιώματα, μόνον δὲ ὡς ἐκ περισσοῦ καὶ πρὸς ὑποδοχῆσιν τῆς ἀγυμνάστου παιδικῆς διανοίας ἐπισυνάπτομεν ὀλίγας τινάς, καταχρηστικῶς λεγομένας, ἀποδείξεις ἐκ τῶν εὐληπτοτέρων¹⁾.

§. 34.

Ποίαις τινάς τοιαύτας ἀποδείξεις ἔχει;

Ἀπλῇ καὶ μόνῃ παρατήρησις ἡμῶν αὐτῶν καὶ τοῦ περικυκλοῦντος ἡμᾶς κόσμου ἀρκεῖ νὰ μᾶς πείσῃ ὁδιστάκτως περὶ τῆς ὑπάρξεως τοῦ Θεοῦ. Καὶ ἀληθῶς, ἐάν τις ἐπιστήσῃ τὴν προσοχὴν του εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος, μένει ἐκθαμβος διὰ τὸ πλῆθος καὶ τὴν λεπτότητα τῶν διαφόρων μελῶν καὶ ὀργάνων, ὅσα τὸ συναπαρτιζοῦσι, τὴν ἀπειρον τέχνην καὶ σκευεμότητα, μὲ τὴν ὁποίαν εἶνε συνηρμοσσημένα, τὴν ἁρμονίαν, μὲ τὴν ὁποίαν τὰ ἀπειροπληθῆ ταῦτα ὁρ-

1) Ἐκ τῆς φιλοσοφίας, καὶ ἰδίως τῆς σχολαστικῆς, μετεδόθη καὶ εἰς τὴν θεολογίαν ἡ χρῆσις τῶν λεγομένων ἀποδείξεων τῆς ὑπάρξεως τοῦ Θεοῦ, αἵτινες καὶ μετὰ τὰς σφοδράς (ἀλλ' ὅχι καὶ πάντως ὀρθάς) ἐπιτιμίας τοῦ Καντίου) Kritik der reinen Vernunft σελ. 462—483 (ἐκδ. Rosenkranz) ὑπαρχοῦσιν ὅμως ἐτι ἐν χρῆσει κοινῇ. Αἱ δ' ἀποδείξεις αὗται, ἄλλως ὅπ' ἄλλων διαβροῦμαι καὶ ἐπωνομούμεναι εἶνε μάλιστα αἱ εἰσ: ἡ ὀντολογικὴ, ἡ κοσμολογικὴ καὶ ἡ φυσικοθεολογικὴ. Οὔτε τὰς ἀποδείξεις καὶ αὐτὰς ἀκριβῶς, οὔτε τὴν μέθοδον αὐτῶν παρελάβομεν ἐν τῇ κειμένῳ, ἀλλ' ἐλευθέρως ἐξελέξαμεν ἐξ αὐτῶν ὅ,τι χρησιμὸν καὶ συμπαραλαμβάνομεν εἰς ὅ,τι ἐφάνη ἡμῖν σκόπιμον καὶ διδακτικόν ἐν γένει νὰ εἴπωμεν.

γανα ἐργάζονται ἀδιακόπως ἕκαστον πρὸς τὴν ἰδίαν, καὶ ὅλα ὁμοῦ πρὸς τὴν κοινὴν τοῦ ὅλου σώματος συντήρησι* καὶ ἀνάπτυξιν. Καὶ ὁμῶς τὸ θαυμάσιον τοῦτο ἀριστοτέχνημα, τὸ ἀνθρώπινον σῶμα, ἀποδεικνύεται μικρόν τι καὶ μικροῦ θαυμασμοῦ ἄξιον, ὅταν συγκριθῇ πρὸς τὴν ἀνθρωπίνην ψυχὴν, τῆς ὁποίας ἀπειροὶ καὶ ποικίλαι εἶνε αἱ θαυμάσιαι δυνάμεις καὶ ἐνέργειαι. Εὐλόγως λοιπὸν ἐπέρχεται εἰς τὸν νοῦν παντός, ὅστις κόμη μετὰ προσοχῆς τὴν ἐξέτασιν ταύτην, ἡ ἐξῆς ἐρώτησις : Ἐπῆρσεν ἡ δύναται νὰ πλάσῃ ὁ ἄνθρωπος μίαν ἀνθρωπίνην ψυχὴν, ἐν ἀνθρώπινον σῶμα, ἓνα ἄνθρωπον ; Εἰς δὲ τὴν ἐρώτησιν ταύτην ἡ ἀποκρίσις εἶνε πρόχειρος, εὐκόλος καὶ ἀναντιρρήτος : ὁ ἄνθρωπος δὲν δύναται νὰ πλάσῃ ὅχι μόνον ψυχὴν ἢ σῶμα ἀνθρώπου, ἀλλ' οὐδ' ἓνα ὄνυχ, μίαν τρίχα τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος. Τί λοιπὸν ἔπεται ἐκ τούτου ; Ὅτι ὑπάρχει ὢν τι ὑπέρτερον τοῦ ἀνθρώπου καὶ πάνσφον, τὸ ὁποῖον τὸν ἐπέλασε.

§. 40.

Πάλιν ἔχει δευτέραν ἀπόδειξιν τῆς ὑπάρξεως τοῦ Θεοῦ ;

Ἐὰν στρέψωμεν τὸ βλέμμα ἡμῶν ἀπὸ τὸν ἄνθρωπον, ὅς τις εὐλόγως ὑπὸ τῶν φιλοσοφούντων καλεῖται μικροκόσμος διὰ τὸ πλῆθος, τὴν ποικιλίαν καὶ ἀπειρίαν τῶν συναποτελούντων αὐτὸν μερῶν καὶ ὀργάνων, εἰς αὐτὸν τὸν ἀπειρομεγέθη καὶ ἀπειροποικίλον κόσμον, τὸν οὐρανόν, τὴν γῆν, τὴν θάλασσαν καὶ πάντα τὰ ἐν αὐτοῖς, μένομεν εἰ μᾶλλον ἐχθασμοί. Καὶ ἀληθῶς, τί εἶνε ὁ ἄνθρωπος παραβαλλόμενος πρὸς τὸν κόσμον, πρὸς τὸ σύμπαν ; Εἷς κόκκος ἄμμου, μία σταγὼν ὕδατος εἰς τὸν ὠκεανόν ! Καὶ μόνον εἰς τὸ ἀπειρον πλῆθος τῶν οὐρανίων σωμάτων, καὶ τὴν θαυμασίαν ἁρμονίαν καὶ τάξιν τῆς κινήσεως πάντων αὐτῶν ἐὰν ἀποβλέψῃ ὁ ἀνθρώπινος νοῦς, ἱλιγγιᾷ. Ἀλλὰ πόση τέχνη καὶ πόση σοφία κρύπτεται καὶ εἰς τὸ ἐλάχιστον μόριον τοῦ κόσμου ! Πόσαι δὲ θαυμάσιαι δυνάμεις ἐνεργοῦσαι συνέχουσι καὶ κινουσι καὶ διαχοσμοῦσι

τὴν ἀπειρομεγέθη καὶ ἀπειροπληθῆ τοῦτον κόσμον, τὰς ὁποίας
 δίδονατεῖ καὶ νὰ ἐννοήσῃ, καὶ νὰ ἀνεύρῃ μόνον ὁ ἄνθρωπος !
 Καὶ ἐδῶ λοιπὸν εὐλόγως ἐπέρχεται εἰς τὸν ἄνθρωπον ἡ ἐρώ-
 τηση : τίς ἐδημιούργησε τὸν κόσμον τοῦτον ; Βεβαίως τὸν ἐ-
 δημιούργησεν Ὁν τι ἔχον ἀπειρον σοφίαν καὶ δύναμιν. Ἀλλὰ
 μήπως τὸ ὄν τοῦτο εἶνε ὁ ἄνθρωπος, ὅστις εἶνε τὸ τελειότε-
 ρον καὶ σοφώτερον ζῶον τοῦ κόσμου ; Ὁχι βέβαια, διότι ὁ
 ἄνθρωπος μὲ ὅλην τὴν σοφίαν καὶ τελειότητα δὲν δύνα-
 ται νὰ κατασκευάσῃ οὐδὲ ἐν πτερόν μυίας, οὐδὲ ἐν φύλλον
 ξύδρου. Ἐπεταί ἄρα ὅτι ὑπάρχει Ὁν τι ὑπέρτερον τοῦ κό-
 σμου καὶ τοῦ ἀνθρώπου, ἀπείρως σοφὸν καὶ τέλειον, τὸ ὁ-
 ποῖον ἔχαμε καὶ τὸν ἄνθρωπον καὶ τὸν κόσμον.

§. 41.

Ἐκ τίνος ἄλλου τεκμηρίου ἀποδεικνύεται τρίτον ἡ ὑπαρξίς τοῦ Θεοῦ ;

Ὅλα τὰ ἔθνη, καὶ τὰ πλεόν ἄγρια καὶ βάρβαρα, εἶχον καὶ
 ἔχουσι θρησκείαν τινά, ἡ θρησκευτικὴν τινα λατρείαν, ἔσω καὶ
 ἀτελεῖ, ὅπερ σημαίνει ὅτι ὅλα τὰ ἔθνη ἐπίστευαν καὶ πιστεύου-
 σιν εἰς θεότητά τινα, εἴτε μίαν εἴτε πολλὰς. Ἀλλὰ τί ἄλλο
 ἀποδεικνύει τοῦτο, εἰμὴ ὅτι ἡ συναίσθησις τῆς ὑπάρξεως τοῦ
 Θεοῦ εἶνε σύμφυτος καὶ ἀχώριστος ἀπὸ τοῦ ἀνθρώπινον πνεῦ-
 μα ; Πῶς δὲ εἶνε δυνατόν νὰ εἶνε ἐσφαλμένον αἶσθημα τόσον
 ἀπολύτως γενικὸν καὶ παγκόσμιον ;

§. 42.

Ποίαν ἄλλην ἀπόδειξιν τοῦτου ἔχεις τέταρτον ;

Τὴν ὑπαρξίν τοῦ Θεοῦ ἀνομολογεῖ τέταρτον αὐτὴ ἡ συνεί-
 ρσις τοῦ ἀνθρώπου, ὁ ἀκοίμητος οὗτος ὀφθαλμὸς τῆς ἀνθρω-
 πίνης ψυχῆς, ἡ ἀψευδὴς καὶ ἀδέκαστος φωνὴ τῆς ἀνθρωπίνης
 καρδίας. Ὅταν πράττωμεν τὸ ἀγαθόν, αἰσθανόμεθα χοράν,
 εἰοίτι ἡ συνείδησις ἐπιδοκιμάζει τὴν πράξιν μας· ἐξ ἐναντίας
 δὲ, ὅταν πράττωμεν τὸ κακόν, θλιβόμεθα καὶ στενοχωρούμε-
 θα, διότι ἡ συνείδησις ἀποδοκιμάζει τὴν πράξιν ταύτην. Πό-

θιν προέρχεται τοῦτο, εἰμὴ ἐκ τοῦ ὅτι ἡ συνείδησις ἡμῶν συναίσθανται πάντοτε ὅτι ὑπάρχει Ὁν τι ὑπέρτατον, Θεὸς ὁμοῦ καὶ παντοκράτωρ, τοῦ ὁποίου οὔτε τὸ ὄμμα δύναται εἶναι ἀνθρώπος νὰ διαφύγῃ, οὔτε τὴν ἀνταπόδοσιν ;

§. 43.

Τί ἄλλο παρατηρεῖ εἰς τὴν ἀνθρωπίνην συνείδησιν, τεκμήριον καὶ αὐτὸ τοῦ ὑπάρξεως τοῦ Θεοῦ ;

Εἰς τὸν ἀνθρώπον ὑπάρχει ἐμφυτος ἡ ἐπιθυμία ἄκρου τινός ἀγαθοῦ, ἄκρας τινός εὐδαιμονίας, τὴν ὁποίαν οὐδέποτε δύναται νὰ κορέσῃ ἐν τῷ κόσμῳ τούτῳ, ὅσον καὶ ἂν εὐτυχῇ, ὅσον καὶ ἂν εὐδαιμονήσῃ. Σύμφυτος δὲ πρὸς αὐτὴν εἶνε καὶ ἡ ἐπιθυμία ἄκρας τινός δικαιοσύνης, ἣτις καὶ αὕτη δὲν δύναται νὰ ἱκανοποιηθῇ οὐδ' ὁπωσποῦν ἐπαρκῶς ἐν τῷ κόσμῳ τούτῳ. Ἡ ἠθικὴ ἄρα ἡμῶν συνείδησις συναισθάνεται καὶ γνωρίζει μυστηριωδῶς ὡς ἐκ τῆς κατὰγωγῆς αὐτῆς τὴν ὑπαρξίν ἄκρου τινός ἀγαθοῦ, ὅπερ ἐλλεῖπει ἐν τῷ κόσμῳ τούτῳ, καὶ ἄκρας τινός καὶ ἀπολύτου δικαιοσύνης, ἣτις καὶ μόνη θέλει ἱκανοποιήσῃ τὴν ἀνάγκην ἑσχάτης τινός ἰσοσταθμίας τοῦ ἠθικοῦ κόσμου, ἣτις ὑπάρχει τόσον βαθέως ἐρρίζωμένη εἰς τὴν ἀνθρωπίνην συνείδησιν. Ἀλλὰ τί ἄλλο εἶνε τὸ ἄκρον ἀγαθόν, ἡ ἄκρα αὕτη καὶ ἀπόλυτος δικαιοσύνη, εἰμὴ αὐτὸς ὁ Θεός ;

§. 44.

Τί εἶνε ὁ Θεός ;

Ὁ Θεὸς δὲν εἶνε οὔτε ὕλη, διότι ἡ ὕλη ὡς νεκρὰ εἶνε ἀνίκανος νὰ πλάσῃ τὸν κόσμον, οὔτε ἡ φυσικὴ δύναμις, ἡ ἐξουσιοῦσα τὴν ὕλην, διότι καὶ αὕτη εἶνε ἀνίκανος νὰ πλάσῃ τὸν κόσμον, ὡς τυφλὴ καὶ ἐστερημένη νοῦ καὶ θελήσεως. Ὁ Θεὸς εἶνε, ὅ,τι εἶπεν ἡ Γραφή, πνεῦμα καὶ ζωὴ (1), καὶ πνεῦμα καθαρὸν καὶ ἀμικτον πρὸς πᾶν ὅ,τι σῶμα καὶ ὕλη (2).

1) Ἰωάνν. δ'. 24, 6'. Κορ. γ'. 17, Ἑβρ. εἰδ'. 4.

2) Ὑσάκις ἐν τῇ 17 Γραφῇ, προκειμένου λόγου περὶ Θεοῦ, ἀναφύκει

Καὶ αὕτη μὲν εἶνε ἡ φύσις καὶ οὐσία τοῦ Θεοῦ· αἱ δὲ ἰδιότητες αὐτοῦ εἶνε αἱ ἐξῆς : Ὁ Θεὸς εἶνε ἀ.) ἄπειρος ἐν χρόνῳ καὶ τόπῳ, ἤτοι ἄχρονος καὶ αἰώνιος, ἀναλλοίωτος, πανταχοῦ παρὼν καὶ τὰ πάντα πληρῶν· καὶ β.) ἄπειρος κατὰ πᾶσαν ἐννοίαν, ἤτοι ἀπείρως αὐθύπαρτος, αὐτεξούσιος καὶ αὐτοτελής, ἀπειροτέλειος καὶ ἀπειράγαθος, παντὺς δυνάμεις, πάνσοφος καὶ πανάγιος, ἐν μιᾷ λέξει ἀρχὴ καὶ τέλος πάσης τελειότητος καὶ παντός ἀγαθοῦ³⁾.

§. 45.

Τὶ σημαίνουν αἱ λέξεις « ἕνα » καὶ « πατέρας », αἵτινες περιέχονται εἰς τὸ πρῶτον ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως :

Τὸ ἄρθρον τοῦτο λέγει « πιστεύω εἰς ἕνα Θεόν », καὶ ὅχι ἀπλῶς « εἰς Θεόν, » διότι θέλει νὰ διδάξῃ σαφῶς καὶ ἀναντιρρήτως τὸ ἐν ἑαυτῷ τοῦ Θεοῦ, ὅπερ εἶνε ἐν τῶν κυριωτάτων προσόντων αὐτοῦ¹⁾. Εἶνε ἔξ ὃ Θεός εἷς, διότι πᾶν ἄλλο ὄν ἐκτός αὐτοῦ εἶνε κτίσμα, ὡς προεβρέθη, ἀρα οὐδεὶς ἄλλος ἐκτός αὐτοῦ εἶνε δυνατόν νὰ ὑπάρχῃ²⁾.

Ἔτι, ὀφθαλμοί, χεῖρες κτλ. τοῦ Θεοῦ, αἱ λέξεις αὗται πρέπει νὰ ἐκκληφῶσιν ὅχι κοριολεκτικῶς, ἀλλὰ μεταφορικῶς ἢ καὶ ὅλως συμβολικῶς. Διὰ τῶν ὀφθαλμῶν π. χ. τοῦ Θεοῦ ἐννοεῖται τὸ παντέφορον αὐτοῦ, διὰ τῶν χειρῶν τὸ παντοκράτορ καὶ οὕτω καθέστηκε (Χρυσός, εἰς ψαλμ. ζ'. 11, Θεοδώρητ. εἰς ψαλμ. ρθ', 1, Δαμασκην. ἔκθεσ. ὀρθοδόξου πίστεως ἀ. 41.)

3) Πολυαριθμοὺς τοιαύτας ἰδιότητας ἀποδίδει εἰς τὸν Θεόν καὶ ἡ Γραφή, καὶ οἱ ἐκκλησιαστικοὶ συγγραφεῖς, ὡς καὶ οἱ νεώτεροι θεολόγοι. Ἡμεῖς διὰ τὸ εὐσύννοτον συμπεριελάβομεν τὰς κυριωτέρας αὐτῶν ἐν τῇ ἀνωτέρῳ σειρᾷ, ἀποβλέψαντες εἰς λογικὴν καὶ συστηματικὴν τάξιν, ἀλλ' ὅχι καὶ ἀκριβῶς, διὰ νὰ μὴ ἀποχρησιωθῶμεν ὅλως ἀπὸ τῶν ἐπικρατησάντων ἀποξ. ἐν τῇ ὀρθοδόξῳ θεολογίᾳ ὄρων. Χωρὶς τῆς Γραφῆς καὶ τῶν πατέρων δὲν παραθέτομεν, διότι πλήρη αὐτῶν καὶ ἡ Γραφή καὶ ἡ ἐκκλησι. φιλολογία.

1) Δευτερονομ. β'. 35, καὶ πολλ. ἄλλ., Μάρκ. ιβ'. 29, Ἰωάν. ζ'. 3, Γωμ. γ'. 29, κλπ. Ἀθηναγόρ. πρεσβ. περὶ χριστιανῶν δ', ζ', ἡ. Γ. Κλήμ. Ἀλεξανδρ. παιδαγωγ. ἀ. 8, στρωματ. ε. 11, κλπ.

2) Τὸ ἕνα τοῦ Θεοῦ συμπεραίνεται καὶ διὰ τοῦ φυσικοῦ λόγου ἐξ αὐτῶν τῶν ἰδιοτήτων αὐτοῦ (Tertull. Apolog. XVII, Arnob. adv. Gentes II, L-

Ἡ δὲ λέξις «πατέρα» ἐκφράζει τὴν προσωπικὴν ιδιότητα τοῦ Θεοῦ, ὅστις εἶνε μὲν εἷς, ἀλλὰ τρισυπόστατος³⁾, ὡς πως μᾶς διδάσκει τὸ ἀ. τοῦτο ἄρθρον, συνδυαζόμενον μετὰ β'. καὶ ἡ αἰ. τρεῖς δὲ αὗται ὑποστάσεις, ἡ τὰ τρία ταῦτα πρόσωπα τοῦ ἐνὸς καὶ μόνου Θεοῦ, εἶνε Θεὸς ὁ πατήρ⁴⁾ Θεὸς ὁ υἱός⁵⁾, Θεὸς τὸ ἅγιον Πνεῦμα⁶⁾. Τὰ τρία δὲ ταῦτα πρόσωπα εἶνε μία οὐσία⁷⁾, μία δύναμις, μία θεότης, καθὼς πάλιν ὁ εἷς Θεὸς εἶνε ἡ ἅγια Τριάς. Καὶ τὸ μὲν πρῶτον πρόσωπον τῆς ἁγίας Τριάδος εἶνε ἀκτιστον καὶ ἀγέννητον⁸⁾, καὶ ὀνομαζέται πατήρ, ὡς γεννήσας τὸν συνάναρχον αὐτοῦ υἱόν προ-

stant. divin. instit. II. 1). Ὑπάρχουσιν αἱ ιδιότητες αὗται, περὶ ὧν γίνεται λόγος ἐν τῷ κειμένῳ, αἰρόνται ὡς ἀπόλυτοι, ἅμα ὡς θελήτη τις ἐκ τῆς οὐσίας τοῦ Θεοῦ, πλείστοντος Θεοῦ, διότι ἡ ὑπαρξὶς καὶ δευτέρου ἢ ἄλλων πολλῶν, περιγράφει τὴν ἔννοιαν τοῦ Θεοῦ καὶ κατὰ χρόνον καὶ κατὰ τόπον καὶ κατὰ πάντα ἐκτεταταί. Εἰς τὴν κατανόησιν τῆς ἀληθείας ταύτης, ἥτις εἶνε ἐν τῶν κυριωτέρων δογμάτων τοῦ χριστιανισμοῦ, εἶχον ἥδη ὑψωθῇ καὶ ἔθνικοι τινες ποιηταὶ καὶ φιλόσοφοι διὰ τοῦ ποικίλου τῶν λόγων (Ἀθηναγόρ. πρεσβ. Χριστ. σ'. καὶ ζ', Ἰουστίν. παρηνετικ. πρὸς Ἕλληνας ιη', ιθ', Tertullian. de testimonio animae κ. κλῆμ. Ἀλεξανδρ. ἐ. 14, Augustin. contra Faust. XX. 10, de Civitat. Dei IV. 31, κλπ.)

3) Γενέσ. ιη'. 1—3. Ψαλμ. λγ'. 6, Ἡσαΐ. σ'. 3, καὶ πολλαχοῦ ἄλλοις παλαιῶν Διαθήκῃς, εἰ καὶ σκιαῶσι, Ματθ. γ'. 16, 17, κή. 19, Μάρκ. ἀ. 10, 41, Λουκ. γ'. 21, 22, Ἰωάνν. ιδ', ιε', ις', β'. Κορ. ιγ'. 13, ἀ. Πέτρ. ἀ. 1, 2, Ἰω. ἐ. 7, πρὸς. καὶ ἅπαντα τὰ σύμβολα τῆς πίστεως, τὰ λειτουργικὰ βιβλία καὶ ἅπαντας σχεδὸν τοὺς πατέρας τῆς ἐκκλησίας, ὧν τὰ σχετικὰ χωρία δὲ πρὸς δισυσχόμιστον πλῆθος παραλείπομεν.

4) Ἰωάνν. γ'. 16, ις'. 3, ια'. 25, Ῥωμ. ἀ. 7, ἀ. Κορ. ἀ. 3, ἡ. 6, Γαλ. ἀ. 3, Ἐφεσ. ἀ. 2, 3, δ'. 6, Φιλ. ἀ. 2, Κολ. ἀ. 3, 12, γ'. 17, β'. Κορ. ἀ. 3, ἀ. Πέτρ. ἀ. 3, κτλ.

5) Ματθ. κβ'. 13, 44, Ἰωάνν. ἀ. 1, 2, ἀ. Τιμ. γ'. 16, ἀ. Κορ. ἡ. 6, 5, 8, ἀ. Ἰω. ἐ. 20, Τιτ. β'. 11, 13, Ῥωμ. θ'. 4, 5, Ἐφισ. δ'. 6, β'. Κορ. ια'. 30, 27, β'. 15, κδ'. 10—12, ιγ'. 2, ἀ. Κορ. β'. 10, 12, Ῥωμ. ἡ. 9, 10.

6) Ψαλμ. πδ. 8. Πράξ. ἐ. 3, 4, ἀ. Κορ. γ'. 16. σ'. 11, β'. Πέτρ. ἀ. 20, σὺν τῷ β'. Τιμ. γ'. 16, κλπ.

7) Ἰωάνν. ἐ. 30 ιδ'. 9, 10, ἡ. 19, σὺν τῷ ιδ'. 7, ις'. 10, ις'. 15, ἐ. 17, 18, 24, 26, ι. 27, 29, ιδ'. 7, ἀ. Ἰωάνν. ζ'. 7, Ἰωάνν. ιβ'. 40, 41, Πράξ. κβ'. 25, 27, β'. 15, κδ'. 10—12, ιγ'. 2, ἀ. Κορ. β'. 10, 12, Ῥωμ. ἡ. 9, 10.

8) Διαταγ. ἀποστολ. ἡ. 41, Ἰουστίν. ἀπολ. ἀ. 49, β'. 6, Κλήμ. Ἀλεξανδρ. σερμ. σ'. 7, Γρηγ. Νύκτα κατὰ Εὐνομ. ἀ. Εὐσεβ. εὐαγγ. ἀποδείξ. ἀ. 5, 2, 3.

πάντων τῶν αἰώνων⁹⁾. τὸ δὲ δεῦτερον πρόσωπον τῆς ἁγίας Τριάδος εἶνε ἄκτιστον¹⁰⁾ καὶ λέγεται υἱός, ὡς γεννηθεὶς ἐκ τοῦ Πατρὸς πρὸ πάντων τῶν αἰώνων¹¹⁾. τὸ δὲ τρίτον πρόσωπον τῆς ἁγίας Τριάδος εἶνε τὸ Πνεῦμα, ἄκτιστον καὶ ἀγέννητον¹²⁾, ἐκπορευόμενον δὲ μόνον ἐκ τοῦ Πατρὸς¹³⁾. Τὰ τρία δὲ ταῦτα πρόσωπα τῆς ἁγίας Τριάδος, Πατήρ, Υἱός, καὶ ἅγιον Πνεῦμα, εἶνε εἷς Θεός, μία Τριάς ὁμοούσιος καὶ ἀχώριστος, συλλατρευόμενα καὶ συμπροσκυνούμενα μὲ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἀμέριστον λατρείαν καὶ προσκύνησιν¹⁴⁾.

§. 46.

Ἐξηγήσαν τὰς ἐπακολουθοῦσας λέξεις τοῦ πρώτου ἄρθρου.

Ἡ λέξεις «παντοκράτωρ» ἐκφράζει τὴν ἐπὶ σύμπαντος τοῦ κόσμου κυριότητα καὶ δεσποτείαν τοῦ Θεοῦ¹⁾. Ἡ δὲ παντοκρατορία αὕτη, σύμφυτος μὲ τὴν παντοδυναμίαν, εἶνε μία τῶν κυριωτάτων ιδιοτήτων τοῦ Θεοῦ, καὶ ὁ ἀπλούστατος καὶ προχειρότατος λόγος διὰ νὰ πιστεύσωμεν εἰς αὐτόν, καὶ νὰ ὑποταχθῶμεν εἰς τὸ ἅγιόν του θέλημα.

Αἱ δὲ ἐπακολουθοῦσαι λέξεις «ποιητὴν οὐρανοῦ καὶ γῆς, ὀρατῶν τε πάντων καὶ ἀοράτων» μᾶς διδάσκουσιν, ὅτι ὁ Θεός εἶνε ὁ ποιήσας ὅλον τὸν κόσμον, τὰ τε ὀρατὰ καὶ τὰ ἀόρατα. Καὶ ὀρατὰ μὲν κτίσματα εἶνε σύμπας ὁ ὕλικός κόσμος, ἀόρατα δὲ ὁ αἰθέριος κόσμος, ἥτοι οἱ ἄγγελοι.

9) Ἰω. ἀ. 18, γ'. 16, ἀ. Ἰω. δ'. 9, Ἀθανασ. κ. Ἀρειαν. β'. 1. Δαμασκην. ἐκθ. ὁρθ. πίστ. ἀ. 8, 12.

10) Ἀθανάσ. κ. Ἀρειαν. β'. 18. 11) Ἀθανασ. αὐτ. γ'. Γρηγόρ. θεολ. λόγ. κθ'. Δαμασκ. αὐτ. ἀ. 8.

12) Γρηγόρ. Ναζ. λόγ. κς', Μ. Βασίλ. περὶ τοῦ ἁγ. Πνεύμ. τῆ. 46.

13) Γρηγ. Ναζ. λόγ. κθ', Ἀθανάσ. ἐκθ. πίστ. δ'.

14) Ἰω. ἀ. 23, Γρηγ. Ναζ. λόγ. λζ', Κύριλλ. Ἱερ. κατηχ. ε'. 16.

1) Θεοφίλ. πρὸς Αὐτολόχον ἀ. Γρηγόρ. Νύκτ. λόγ. ε'. κ. Εὐνούσιος, Κο-

§. 47.

Πῶς καὶ διὰ τί ἔκτισεν ὁ Θεὸς τὸν κόσμον;

Ὁ Θεός¹⁾ ἔκτισε τὸν σύμπαντα κόσμον ἐν χρόνῳ²⁾ καὶ ἐκ τοῦ μηδενός³⁾· τουτέστι πρὸ τῆς δημιουργίας οὐδὲν ὑπῆρχεν ἀπολύτως⁴⁾, ἐκ τοῦ οὐδενός δὲ τούτου καὶ οὐκ ὄντος παρήγαγεν ὁ Θεὸς εἰς τὸ εἶναι τὸν σύμπαντα κόσμον διὰ μόντης τῆς θείας αὐτοῦ δυνάμεως καὶ σοφίας⁵⁾, διὰ μόνου τοῦ θελήματος⁶⁾ καὶ τοῦ λόγου⁷⁾ του. Συνέπραξαν δὲ εἰς τὸ ἔργον

1) Γενέσ. α. 1, ψαλμ. ρμ'. 5, 6, 'Ησαϊ. 6. 5, μέ. 18, 'Ιερει. θ'. 12, Μάρκ. ιγ'. 49, Πράξ. δ'. 24 κ'. 24, 'Αποκαλ. 1. 6, ιθ'. 7, 'Εβρ. γ'. 4, 'Ρωμ. α. 49, α. Κορ. ια. 42, 'Εβρ. γ'. 9, Δαμασκην. εκθ. πίστ. α. 3, August. Confess. XI. 4, de civ. Dei. XI. 4.

2) Γενέσ. α. 1, Παλμ. ιζ' 5, πη. 2, ρα. 26, Μάρκ. α. 6, 'Ιωάνν. α. 1, 'Εφρ. α. 34, Κολ. α. 17, 'Εβρ. α. 2, 'Αθηναγόρ. πρεσβ. ιγ', Κυρίλλ. 'Αλεξανδρείας εἰς 'Ιωάνν. ε', August. de civ. Dei XI. 4, XII. 15, Confess. XI. 10.

3) β'. Μαρκ. ε'. 28, 'Ιωάνν. α. 3, 'Ρωμ. δ'. 47, 'Εβρ. ια. 3, Τατιαν. πρὸς Ἑλλήνας εἰς 'Αθηναγ. πρεσβ. θ, ιε, ιθ', Εἰρην. adv. Haer. II. 10, IV. 20, Tertull. de praescript. haeret. 13, 'Ερραίμ ὁ Σύρ. εἰς Γένεσ. α. 4, Χρυσόστ. εἰς Γένεσ. ὁμ. ε', Lactant. divina instit. II. 9.

4) Οἱ περὶ τὸν Ἑρμογένη ἐδόξαζον, ὅτι ὁ κόσμος ἐκτίσθη ἐκ τῆς ὕλης προϋπαρχούσης αἰώνως (Tertull. adv. Hermogenem II, Εὐσεβ. ἐκκλ. ιστορ. ε. 27.) Σίμων δὲ ὁ Μάγος, Μένανδρος, Βασιλείδης, Κορποκράτης καὶ ἄλλοι ἐδίδασκον ὅτι ἐκ τῆς προαιωνίου ταύτης ὕλης διέπλασαν τὸν κόσμον οἱ ἄγγελοι (Tertull. de praescrip. haeret. 46, Εἰρην. κατὰ εἰρ. α. 24, Εὐσεβ. ἐκκλ. ις. 7), ὁ Κήρινθος δὲ ὅτι ὁ κόσμος ἐπλάσθη ὑπὸ κατωτέρας δυνάμεως ἐν ἀγνοίᾳ τοῦ Θεοῦ (Εἰρην. adv. Haer. III. 14, August. Haer. 8), οἱ Ὁρτίται, Μανιχαῖοι καὶ Πρισκίλλιανοὶ δὲ ἐπλάσθη ὑπὸ τοῦ δαίμονος (πρόβλ. ἀνωτέρω § 35. σημ. 6, δ')· Ὁ Ὁριγένης ἐθεώρει τὸν κόσμον ὥς συνέπειαν ἀναγκαζέων καὶ ἀναπότρεκτον αὐτῆς τῆς παντοδυναμίας τοῦ Θεοῦ, ὅθεν καὶ ἔλεγεν αὐτὸν προαιώνιον. Ἄπασι αὐταὶ αἱ κακοδοξίαι κατεδικάζησιν ἑκαταὶ ὑπὸ τῆς ἐκκλησίας. Ἀλλὰ καὶ κατὰ τοὺς μέσους αἰῶνας ἀνεφάνησαν οἱ Παυλικιστῆς καὶ οἱ Βογόμιτῆς, ἀποδίδοντες τὴν δημιουργίαν τοῦ κόσμου εἰς τὸν δαίμονα ἢ Σατανῆλ (Φώτιος κατὰ Μανιχ. ε'. 5, Εὐδὲμ. Ζιγαδην. πανοπλ. κ').

5) Παλμ. ρλδ'. 3, περαιμ. γ'. 49, η'. 23—30, 'Ιερει. ι. 12, Εἰρην. adv. Haer. II. 2, Ὁριγέν. περὶ ὀρχων α. 2, Εὐσεβ. Εὐαγγ. τροπαρ. ια. 40, Κύριλλ. 'Αλεξ. εἰς 'Ιω. ιγ', Δαμασκ. εκθ. ὁθ. πίστ. α. 9.

6) Παλμ. ργλ' 14, ρλδ'. 6, 'Αποκαλ. ε'. 11, Εἰρ. Β' α. II. 4, Θεοδώρ. ἀπορ. Γενέσ. γ', Δαμασκ. εκθ. ε'. 2.

7) Γεν. α. 3, 6, 7, 9, Παλμ. ρμζ'. 5, 'Αποκ. ε'. 11, 'Ιερει. λθ. 47, Κλην.

τοῦτο τῆς δημιουργίας καὶ τὰ τρία ὁμοῦ πρόσωπα τῆς τρισυποστάτου θεότητος⁸⁾, ὥστε σύμπας ὁ κόσμος ἐδημιουργήθη ὑπὸ τοῦ Θεοῦ καὶ Πατρὸς⁹⁾ διὰ τοῦ Υἱοῦ καὶ Λόγου¹⁰⁾ ἐν τῷ ἁγίῳ Πνεύματι¹¹⁾. Καὶ κατὰ πρῶτον μὲν ἐδημιουργήθη ὁ οὐρανὸς καὶ πνευματικὸς κόσμος, ἦτοι οἱ ἄγγελοι¹²⁾, δεύτερον δὲ ὁ ὕλικός, ὅστις καὶ κόσμος κατ' ἐξοχὴν ὀνομάζεται¹³⁾, καὶ τρίτον καὶ τελευταῖον ὁ ἄνθρωπος, ὅστις λέγεται καὶ μικρὸς κόσμος¹⁴⁾, εἴτε μικρὸς ὁ κόσμος.

Ἐκτίσσε δὲ ὁ Θεὸς τὸν κόσμον, ὅχι διότι εἶχεν ἀνάγκην τινὰ αὐτοῦ¹⁵⁾, ἐπειδὴ ὁ Θεὸς ἀρκεῖ κατὰ πάντα αὐτὸς εἰς ἑαυτὸν ὡς ἀπολύτως αὐτοτελής, ἀλλὰ πρὸς δόξαν ἑαυτοῦ¹⁶⁾, καὶ διότι ὡς πανάγαθος ἠθέλησε νὰ καταστήσῃ αὐτὸν μέτοχον τῆς ἰδίας αὐτοῦ μακαριότητος¹⁷⁾ ἀναλόγως τῆς φύσεως καὶ ἀξίας ἐκάστου μέρους αὐτοῦ. Ὁ σκοπὸς δὲ οὗτος τοῦ Δημιουργοῦ καὶ Κτίστου, ἧ, ὅπερ ταῦτόν, ὁ προσορισμὸς τῆς κτίσεως ἡ τῶν κτισμάτων ἐκπληροῦται, ὥστε τὰ κτίσματα ταῦτα ἐν

παλαιαγ. α. 6, Βασιλ. εἰς Ἑξαήμε. α, Αἰήτος. in Hexaëmer. I. 9, Δεμασκ. αὐτ. α. 2.

8) α. Κορ. ι. 6, β'. Κορ. ε. 48 σὺν Ἰω. α. 3, Ἑβρ. α. 3, Ἑβρ. β'. 48, Ῥωμ. ια. 36, Ἑβραϊκ. εἰς Γεν. α. 4, Κύριλλ. Ἀλεξ. κ. Ἰουλιαν. γ', Ἑπισ. πατρ. ὁρ. δ'.

9) Πράξ. δ'. 24—28, α. Κορ. ι. 6, Ἑβρ. β'. 46, Εἰρην. Παερ. IV. 20, V 47, Ἀθαν. ἐκθ. πίστ. 4.

10) Ἰω. α. 3, Κολ. α. 46, Ἑβρ. α. 3, Ἰουστίν. Παραιν. ιε, Tertull. adv. Herm. 22, Εἰρην. adv. Παερ. IV. 20. V. 48, Χρυσόστ. εἰς Ἑβρ. ὁμ. β', August. in Ps. XXXVII.

11) Γεν. α. 2, ψαλμ. λβ'. 6, ργ'. 30, Ἰωδ. λγ'. 4, Βασιλ. κ. Εὐνομ. ε, Θεόφιλ. Αὐτόλ. α. 7.

12) Ἰωδ. λγ'. 7, Βασιλ. εἰς Ἑξαήμε. α, Γρηγ. θεολ. λόγ. λβ', λγ', Διον. Ἀρσεν. π. θεῖ. ὀνομ. ε. Θεοδώρητ. ἄπορ. γραφ. ἐρώτ. δ'.

13) Μακάρ. ὁμιλ. μέ, Βασιλ. ἀγ. πνεύμ. κβ'.

14) Γρηγ. Ναζ. λόγ. λγ', Δεμασκ. ἐκθ. β'. 12

15) Πράξ. ιζ'. 25—26, Θεοδώρ. ἄπορ. Γένεσ. ἐρώτ. β'.

16) Ψαλμ. ι. ιθ', ργ', ριθ', β', ρλζ'. 5, Ἡσαΐ. μγ'. 7, παροιμ. ιδ'. 4, Σειράχ. ιζ'. 7, λη. 6, Πράξ. ιδ'. 46, Ῥωμ. α. 20.

17) Γρηγ. θεολ. λόγ. μέ, Διον. Ἀρσεν. π. θεῖ. ὀνομ. δ', August. Civit. Dei.

γένει εἶνε «λίαν καλὰ»¹⁸⁾ καὶ τέλει α, ἤτοι ἁρμόδια καὶ ἐπαρκῆ εἰς τὸν ἰδίον αὐτῶν προορισμόν.¹⁹⁾ Ἐκ τούτου ἐπεται ὅτι ὡς ἐκ τοῦ Θεοῦ δὲν ὑπάρχει ἀτέλεις καὶ κακὸν ἐν τῷ κόσμῳ²⁰⁾. Μόνον τὸ ἡθικὸν κακόν, ἤτοι ἡ «ἁμαρτία», ὑπάρχει ἐν τοῖς λογικοῖς καὶ ἐλευθέροις κτίσμασι.²¹⁾ ἀλλὰ τούτου πηγή καὶ αἰτία εἶνε ὁ Θεός, ἀλλ' αὐτὸ τὸ λογικὸν καὶ ἐλευθέρον κτίσμα. Τὸ δὲ φυσικὸν κακόν, ἤτοι αἱ ἐν τῷ φυσικῷ κόσμῳ παρατηρούμεναι μερικαὶ ἀτέλειαι καὶ ἐλλείψεις ἢ παρεκτροπαί, ἡ εἶνε κατὰ τὸ φαινόμενον μόνον πρὸς ἡμᾶς τοὺς ἀνθρώπους, ὡς ἀγνοοῦνται τὸ σύνολον σύστημα τῆς κτίσεως²²⁾, ἡ εἶνε ἀποτελέσματα τοῦ ἡθικοῦ κακοῦ, καὶ συμβαίνουν σιν ἐνεκα τῶν ἡμετέρων ἁμαρτιῶν κατὰ παραχώρησιν Θεοῦ πρὸς τιμωρίαν καὶ πρὸς σωφρονισμόν ἡμῶν²³⁾.

§. 48.

Εἰπέ, τι ἀξιοσημείωτον γνωρίζεις περὶ τοῦ ἄλλου κόσμου.

Οἱ ἄγγελοι ἐπλάσθησαν ὑπὸ τοῦ Θεοῦ πρὸ τοῦ ἀνθρώπου,

18) Γενέσ. ἀ. 4, 10, 12, 48, 21, 25, 31, Ψαλμ. ἡ, 10', ργ', ρη', κλπ. ἀ. Τιμ. δ'. 4.

19) Πολλοί, καὶ πάλαι (οἷον οἱ γνωστικοί, οἱ Μανιχαῖοι, οἱ περὶ τὸν Μαρκίωνα κλπ.) καὶ νῦν, ἐθεώρουν τὸν κόσμον ὡς ἄκρως ἀτελὴ καὶ πλήρῃ ἐλλείψεων καὶ κακῶν, καὶ ἀπέδιδον τὴν αἰτίαν τούτου ἢ εἰς τὸν Θεόν ἢ εἰς ἄλλην τινὰ ἀντίθετον καὶ ἀντίπαλον ἀρχὴν τοῦ κακοῦ· δόξα, ἢν κατεδίχασεν ἀέποτε ἡ Ἐκκλησία. Ἄλλοι πάλιν ἐθεώρησαν καὶ θεωροῦσι τὸν κόσμον τόσον καλὸν καὶ τέλειον, ὥστε λησμονοῦντες καὶ ἀρνούμενοι τὸν Κτίστην, θεοποιοῦσι τὴν κτίσιν, καὶ μάλιστα τὴν ὕλην. Ἀμφότερα τὰ ἀντιθέτα ταῦτα ἄκρα εἶνε ἐσφαλμένα, καὶ ὁ ὀρθόδοξος χριστιανὸς ὀφείλει ν' ἀποτύῃ ἐξ ἑαυτοῦ τὰς βλασημὰς ἀμφοτέρων, τῶν τε ὑλοφρόνων (materialistes) καὶ τῶν ψευδοπνευματοφρόνων (Pseudospiritualistes). Πρὸς. Ἱ. Κροσσ. εἰς τὴν β'. πρὸς Κορ. ὁμ. ιβ.

20) Ἐπιστολ. πατριάρχων ὁρ. δ'.

21) Τουτέστιν ἐν τοῖς δαίμοσι καὶ τοῖς ἀνθρώποις, Ἰω. ἡ. 41, Ῥωμ. ε. 12.

22) August. de Genesi ad litter imperf. c. 5, Civit. Dei XI. 48.

23) Γεν. γ'. 16, 17, 48, Κροσσ. εἰς Γέν. ὁμ. ιζ. 7, 9, Διον. Ἁρ. π. θε'. ὀνομ. δ'. 48, Tertull. ἀγρ. Marc. I. 16, 23, 24, Aug. Civ. Dei XII. 5, 6. Δαρσασκ. ἐκθ. ὁρθ. πίστ. γ'. 20.

καὶ εἶνε πνεύματα¹⁾ ἄλλα καὶ ἄσώματα²⁾, ἄφθαρτα δὲ καὶ ἀθάνατα³⁾, ἀτρεπτα κατ' οὐσίαν, ἀλλ' οὐχὶ κατὰ γνώμην⁴⁾, ὅθεν καὶ διεκρίθησαν ἀνέκαθεν εἰς ἀγαθοὺς καὶ πονηροὺς ἀγγέλους. Οἱ ἀγαθοὶ ἀγγέλαι⁵⁾, ὥς μὴ παραχολουθησαντες τὸν Ἑωσφόρον ἐν τῇ κατὰ τοῦ Ἰψίστου ἀποστασίᾳ, ἔλαχον κατὰ θεϊαν χάριν τὸ ἐμμόνως πρὸς τὸ κακὸν καὶ τὴν ἁμαρτίαν ἀπαρέγκλιτοι⁶⁾. Μεριζόμενοι δὲ εἰς διαφόρους τάξεις κατὰ τὴν πλησιέστερον ἢ ἀπώτερον τοῦ Θεοῦ στάσιν αὐτῶν καὶ τὸν φωτισμόν⁷⁾, ἔργον ἔχουσι νὰ δοξολογῶσι τὸν Θεόν⁸⁾, καὶ νὰ ὑπηρετῶσιν αὐτόν⁹⁾, προνοοῦντα ἐν γένει μὲν ὑπὲρ τοῦ

1) Ματθ. ιδ'. 43, Λουκ. η'. 29, ι'. 20, Ἑβρ. δ'. 2, ε'. 12, Ἑβρ. α'. 14.

2) Λουκ. κδ'. 30, Εὐαγγ. εὐαγγ. εὐαγγ. δ'. Χρυσός, εἰς ψαλμ. με', Θεοδώρ. εἰς ἔμ. φ. 4.

3) Λουκ. κ'. 35, 36, Ἀθηναγόρ. περὶ ἀναστάσεως νεκρῶν ις', Aug. Civ. Dei X. 7, Δαμασκ. ἐκθ. ὁρθ. πιστ. α'. 8.

4) Διον. Ἀρεοπ. περὶ θ. ὀνόμ. δ', Δαμασκ. ἐκθ. δ'. 3, 27.

5) Ἦνιοι τούτων ἔχουσι κύρια ὀνόματα ἐν τῇ Γραφῇ οἷον Μιχαήλ (Δαν. ιδ'. 1), ὑπερ σημαίνει ὁμοίως Θεῷ, Ραφαήλ (Γωβ. γ'. 17)· φάρμακον Θεοῦ, Γαβριήλ (Δαν. η'. 16)· δύναμις Θεοῦ κτλ.

6) Ματθ. κβ'. 31, Ἑβρ. ιδ'. 22, 23, Ἀποκάλ. κδ'. 5, Βασιλ. εἰς ψαλμ. λδ', > Εὐνομ. γ', Ἀθαν. κ. Ἀρειαν. λόγ. α'. 56, Δαμασκ. ἐκθ. δ'. 3.

7) Τὴν εἰς διαφόρους τάξεις διακρίσιν τῶν πολυαριθμῶν (Δαν. ζ'. 10, Ματθ. κς'. 53, Λουκ. β'. 13, Ἑβρ. ιδ'. 22, Ἀποκ. ε'. 11) ἀγγέλων μαρτυρεῖ ἀναπύρρητος ἐκτὸς τῶν πατέρων (Κλήμ. στρωμ. σ'. 7, 16, ζ'. 2, Κυρίλλ. Ἱερ. κατ. σ'. 6, ζ'. 11, ια'. 11, ις'. 23, Γρηγ. Ναζ. λόγ. λδ', Δαμασκ. ἐκθ. δ'. 3, καὶ μάλιστα Διον. Ἀρεοπ. οὐρην. Ἱεραρχ. σ'. καὶ ἄλλ.) αὐτὴ ἡ Γραφή, διακρίνοσα ἀγγέλους (ἀ. Πέτρ. γ'. 22 κλπ.), ἀρχαγγέλους (ἀ. Θεσσα. ι. 45, Ἰούδ. 9), Χερουβίμ (Γεν. γ'. 24, Ἀποκ. δ', ε' ε'), Σεραφεὶμ (Ἠσαΐ. σι'. 2, ες.), Δυναμεις (Ἑβρ. α'. 21, Ῥωμ. η'. 38), Θρόνους, Ἀρχαίς, Ἐξουσίαις καὶ Κυριότητας (Ἑβρ. α'. 21, Κολ. α'. 16, Ῥωμ. η'. 38, Δαν. ι. 13). Ὅθεν καὶ ἡ ἐ. οἰκουμ. Σύνοδος κατεδίκασε τὸν Ὁριγένην, εἰπόντα πλὴν ἄλλων, καὶ ὅτι σύμπαντες οἱ ἀγγελοι ἦσαν τῆς αὐτῆς φύσεως καὶ δυνάμεως, καὶ μόνον ὅτι οἱ τινες ἐξ αὐτῶν ἀπεστάτησαν, διακρίθησαν εἰς τάξεις (τῆς ἐ. οἰκουμ. Συνόδου καν. β'. καὶ ιδ').

8) Ἠσαΐ. σ'. 3, Δαν. ζ'. 10, ψαλμ. ης'. 7, ρδ'. 20, ρμζ'. 2, Ἀποκ. δ'. 8, ι'. 11, 12, Βασιλ. εἰς ψαλμ. κζ'. εἰς Ἠσαΐ. σ', Γρηγόρ. Ναζ. λόγ. λδ', Θεοδ.

προσάγει καὶ φύλακες ἔθνων, ἐπικρατειῶν⁴⁾, ἐκκλησιῶν⁵⁾·
μοῦν, πῶλ, εἰὼν καὶ χαίρειν, μερικῶς ταῖς δὲ ὡς φύλακες γὰρ
ἐκαστοῦ ἀτόλου⁶⁾· οὐ φῦλας δὲ οὗτος, ἔγγ, εἰδ, οὐ, διαμέ-
νει ἀχώριστος μετὰ πάντας Χριστιανοὺς ἀπὸ τῆς σιγαμῆς, τῆς
πνευματικῆς τοῦ ἀναγκασθῆναι, μέχρι τοῦ θανάτου τοῦ, ἐκτός
ἐάν τῶν ἀποδιώξῃ αὐτὸς ὁ ἴδιος, διὰ τῶν ἀσεβῶν καὶ κακῶν,
τοῦ πράξεων⁷⁾· Ἡράτεις δὲ οὗτος δ, εἰ ἐν γένει καὶ ἐν ἀκρί-
προσάγει καὶ φύλακες ἄγγελος⁸⁾ ἥτοι σκέπει καὶ προσυλάτ-
τει⁹⁾ τὸν πιστὸν σωματικῶς καὶ ψυχικῶς ἀπὸ πάσης βλα-
βῆς καὶ τῆς τῆς ἀναφέρει τὰς εὐχὰς καὶ δεήσεις αὐτοῦ
πρὸς τὸν Θεόν¹⁰⁾, καθοδηγεῖ καὶ συμβουλεῖ, βέλτεται καὶ αὐ-
τόν, εἰς τὸ ἔργον τῆς πίστεως καὶ τῆς σωτηρίας¹¹⁾, ἀπο-
θήκοχεντος δὲ παραλαμβάνει καὶ φέρει τὴν ψυχὴν αὐτοῦ εἰς
τὰς αἰωνίους μόνας¹²⁾.

Οἱ λαοὶ ἀγγέλου¹) ἐπλάσθησαν μὲν καὶ αὐτοὶ ἄγαθοι, ἀλλ'

[illegible]

7) Βικτωλ. εις φελλμ. λγ', εις "Παστ. ε, κληρμ. Αλεισ. στρωμ. 354/160/91
Επιθ. Col XIV, Διμεσσην. παραλαβου. 1/1 εκ Οροδ. 1/5 5711/18 76

[illegible]

9) TWS. 6', 13-20, Max: 0. in 10, 'Apox. N. 3, Chlora 2 (Chlorophyll: 10)

1974-75, 1975-76, 1976-77, 1977-78, 1978-79, 1979-80, 1980-81, 1981-82, 1982-83, 1983-84, 1984-85, 1985-86, 1986-87, 1987-88, 1988-89, 1989-90, 1990-91, 1991-92, 1992-93, 1993-94, 1994-95, 1995-96, 1996-97, 1997-98, 1998-99, 1999-00, 2000-01, 2001-02, 2002-03, 2003-04, 2004-05, 2005-06, 2006-07, 2007-08, 2008-09, 2009-10, 2010-11, 2011-12, 2012-13, 2013-14, 2014-15, 2015-16, 2016-17, 2017-18, 2018-19, 2019-20, 2020-21, 2021-22, 2022-23, 2023-24, 2024-25, 2025-26, 2026-27, 2027-28, 2028-29, 2029-30, 2030-31, 2031-32, 2032-33, 2033-34, 2034-35, 2035-36, 2036-37, 2037-38, 2038-39, 2039-40, 2040-41, 2041-42, 2042-43, 2043-44, 2044-45, 2045-46, 2046-47, 2047-48, 2048-49, 2049-50, 2050-51, 2051-52, 2052-53, 2053-54, 2054-55, 2055-56, 2056-57, 2057-58, 2058-59, 2059-60, 2060-61, 2061-62, 2062-63, 2063-64, 2064-65, 2065-66, 2066-67, 2067-68, 2068-69, 2069-70, 2070-71, 2071-72, 2072-73, 2073-74, 2074-75, 2075-76, 2076-77, 2077-78, 2078-79, 2079-80, 2080-81, 2081-82, 2082-83, 2083-84, 2084-85, 2085-86, 2086-87, 2087-88, 2088-89, 2089-90, 2090-91, 2091-92, 2092-93, 2093-94, 2094-95, 2095-96, 2096-97, 2097-98, 2098-99, 2099-00, 2100-01, 2101-02, 2102-03, 2103-04, 2104-05, 2105-06, 2106-07, 2107-08, 2108-09, 2109-10, 2110-11, 2111-12, 2112-13, 2113-14, 2114-15, 2115-16, 2116-17, 2117-18, 2118-19, 2119-20, 2120-21, 2121-22, 2122-23, 2123-24, 2124-25, 2125-26, 2126-27, 2127-28, 2128-29, 2129-30, 2130-31, 2131-32, 2132-33, 2133-34, 2134-35, 2135-36, 2136-37, 2137-38, 2138-39, 2139-40, 2140-41, 2141-42, 2142-43, 2143-44, 2144-45, 2145-46, 2146-47, 2147-48, 2148-49, 2149-50, 2150-51, 2151-52, 2152-53, 2153-54, 2154-55, 2155-56, 2156-57, 2157-58, 2158-59, 2159-60, 2160-61, 2161-62, 2162-63, 2163-64, 2164-65, 2165-66, 2166-67, 2167-68, 2168-69, 2169-70, 2170-71, 2171-72, 2172-73, 2173-74, 2174-75, 2175-76, 2176-77, 2177-78, 2178-79, 2179-80, 2180-81, 2181-82, 2182-83, 2183-84, 2184-85, 2185-86, 2186-87, 2187-88, 2188-89, 2189-90, 2190-91, 2191-92, 2192-93, 2193-94, 2194-95, 2195-96, 2196-97, 2197-98, 2198-99, 2199-00, 2200-01, 2201-02, 2202-03, 2203-04, 2204-05, 2205-06, 2206-07, 2207-08, 2208-09, 2209-10, 2210-11, 2211-12, 2212-13, 2213-14, 2214-15, 2215-16, 2216-17, 2217-18, 2218-19, 2219-20, 2220-21, 2221-22, 2222-23, 2223-24, 2224-25, 2225-26, 2226-27, 2227-28, 2228-29, 2229-30, 2230-31, 2231-32, 2232-33, 2233-34, 2234-35, 2235-36, 2236-37, 2237-38, 2238-39, 2239-40, 2240-41, 2241-42, 2242-43, 2243-44, 2244-45, 2245-46, 2246-47, 2247-48, 2248-49, 2249-50, 2250-51, 2251-52, 2252-53, 2253-54, 2254-55, 2255-56, 2256-57, 2257-58, 2258-59, 2259-60, 2260-61, 2261-62, 2262-63, 2263-64, 2264-65, 2265-66, 2266-67, 2267-68, 2268-69, 2269-70, 2270-71, 2271-72, 2272-73, 2273-74, 2274-75, 2275-76, 2276-77, 2277-78, 2278-79, 2279-80, 2280-81, 2281-82, 2282-83, 2283-84, 2284-85, 2285-86, 2286-87, 2287-88, 2288-89, 2289-90, 2290-91, 2291-92, 2292-93, 2293-94, 2294-95, 2295-96, 2296-97, 2297-98, 2298-99, 2299-00, 2300-01, 2301-02, 2302-03, 2303-04, 2304-05, 2305-06, 2306-07, 2307-08, 2308-09, 2309-10, 2310-11, 2311-12, 2312-13, 2313-14, 2314-15, 2315-16, 2316-17, 2317-18, 2318-19, 2319-20, 2320-21, 2321-22, 2322-23, 2323-24, 2324-25, 2325-26, 2326-27, 2327-28, 2328-29, 2329-30, 2330-31, 2331-32, 2332-33, 2333-34, 2334-35, 2335-36, 2336-37, 2337-38, 2338-39, 2339-40, 2340-41, 2341-42, 2342-43, 2343-44, 2344-45, 2345-46, 2346-47, 2347-48, 2348-49, 2349-50, 2350-51, 2351-52, 2352-53, 2353-54, 2354-55, 2355-56, 2356-57, 2357-58, 2358-59, 2359-60, 2360-61, 2361-62, 2362-63, 2363-64, 2364-65, 2365-66, 2366-67, 2367-68, 2368-69, 2369-70, 2370-71, 2371-72, 2372-73, 2373-74, 2374-75, 2375-76, 2376-77, 2377-78, 2378-79, 2379-80, 2380-81, 2381-82, 2382-83, 2383-84, 2384-85, 2385-86, 2386-87, 2387-88, 2388-89, 2389-90, 2390-91, 2391-92, 2392-93, 2393-94, 2394-95, 2395-96, 2396-97, 2397-98, 2398-99, 2399-00, 2400-01, 2401-02, 2402-03, 2403-04, 2404-05, 2405-06, 2406-07, 2407-08, 2408-09, 2409-10, 2410-11, 2411-12, 2412-13, 2413-14, 2414-15, 2415-16, 2416-17, 2417-18, 2418-19, 2419-20, 2420-21, 2421-22, 2422-23, 2423-24, 2424-25, 2425-26, 2426-27, 2427-28, 2428-29,

in Psalm. CXX. 4. 41) Λουκ. ις', 22, 6.9 Ιεροσολέιμοι (Jerusalem) ἡ πόλις ἡ ἀποκτείνουσα τοὺς προφῆτας καὶ λιθοβολοῦσα τοὺς ἀποστόλους, ἡ ἡγουμένη τῶν ἠεὶ ἐκείνων πόλεων, ἡ ἡγουμένη τῶν ἠεὶ ἐκείνων πόλεων.

4) Τούτου, ἡ Γραφή ἀποκαλεῖται **ἐκκλῆση** (ἐκκλησία) πνευματική (Αβραάμ 49: 22).

ἀποσχιρτήσαντες ἐκ τῆς πρὸς τὸν Θεὸν ὀφειλομένης αὐτῶν ὑποταγῆς καὶ συνταχθέντες μετὰ τὸν ἀρχηγὸν αὐτῶν Ἑωσφάρον, ἀντιποιηθέντα τῆς θείας ἀρχῆς²⁾ ἐξ ὑπερφιάλου οἰήσεως καὶ ὑπερηφανίας, κατεδικάσθησαν μετ' αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ Θεοῦ εἰς τὸ πῦρ τὸ ἐξώτερον καὶ εἰς κόλασιν³⁾, ὅπου καὶ μένουσιν αἰωνίως ὡς ἀμετανόητοι⁴⁾. Οἱ κοκοὶ οὗτοι ἄγγελοι, ἐχθροὶ δυσμενέστατοι τῆς θείας δυνάμεως καὶ μεγαλειότητος⁵⁾, ἔργον ἔχουσι παρεισέρποντες εἰς τὰς ψυχὰς τῶν ἀνθρώπων, νὰ διαστρέψωσιν αὐτοὺς πρὸς τὸ κακὸν καὶ τὴν ἁμαρτίαν⁶⁾. Καὶ βιαίως μὲν οὐδένα δύνανται νὰ ἀναγκάσωσι πρὸς τὸ κακὸν ὡς μὴ ἔχοντες τοιαύτην ἐξουσίαν⁷⁾, καὶ κατὰ τοῦτο ἡ θέλη-

«πνεύματα ἀκάθαρτα» (Ματθ. Ι. 1), «δαίμονες» (Ματθ. ἡ. 31, Μάρκ. ἡ. 42, Λουκ. ἡ. 29, Ἀποκλ. ἡ. 2), «δαίμονια» (Ματθ. ζ'. 21, θ'. 33, ιδ'. 21, Μάρκ. α. 34, Λουκ. ἡ. 2, Ἰω. ζ'. 20, Πράξ. ἡ. 48), «διαδόλους» (Ματθ. δ'. 4, Λουκ. δ'. 2, Ἐφεσ. δ'. 27), «ἀγγέλους τοῦ διαβόλου, τοῦ δράκοντος, τοῦ Σατανᾶ» (Ματθ. κβ'. 41, Ἀποκ. β'. 9). Κατ' ἐξοχὴν δὲ «διάβολος» καλεῖται ὁ ἀρχηγὸς αὐτῶν (ἀ. Πέτρ. ἡ. 8), ὅστις καὶ «πειράζων» (Ματθ. δ'. 3), καὶ «Σετάν» (β'. Κορ. ιδ'. 7), ἢ «Σατανᾶς» (Ματθ. δ'. 10, Μάρκ. α. 13, Λουκ. ι. 8, Ἰω. ιγ'. 27, Ἀποκ. β'. 13), καὶ «Βελζεβούλ» (Λουκ. α. 15), καὶ «Βελιάλ» (β'. Κορ. γ'. 15), καὶ «ἀρχὸν τοῦ κόσμου τούτου» (Ἰω. ιδ'. 31), καὶ «ἀρχὸν τῆς ἐξουσίας τοῦ αἵματος» (Ἐφ. β'. 2), «ἀρχὸν τῶν δεμιονίων» (Ματθ. θ'. 34), «κοσμοκράτωρ τοῦ σκότους, τοῦ αἵματος τούτου» (Ἐφ. γ'. 12, ὅθεν καὶ «ἐξουσίᾳ τοῦ σκότους» Κολ. α. 13), «Θεὸς τοῦ αἵματος τούτου» (β'. Κορ. δ'. 4), «ψεύστης» (Ἰω. ἡ. 44), «ἀνθρωποκτόνος ἀπ' ἀρχῆς» (αὐτόθι), «ὁ Δράκων ὁ μέγας» (Ἀποκ. ιδ'. 9), «Ἀσμοδατος» (Τωβ. γ'. 8, 17) κτλ.

2) Ἡσεί. ιδ'. 13, 14, Κορίλλ. Ἀλεξ. εἰς Ἰω. ἡ. Εὐσεβ. εὐαγγ. προπαρ ζ. 16, August. qu. in V. T. qu. CXIII. de Civit. Dei XIV. 27, in Ep. ad Galat. 24.

3) β'. Πέτρ. β'. 4, Ματθ. κβ' 41.

4) Τατιαν. πρὸς Ἑλλήν. ιδ', ἡ. Ἰουστ. ἀπολ. α. 28, β'. 8, August. Civit. Dei XIV. 27, Δομν. ἀπολ. β'. 3, 30.

5) Ματθ. ιδ'. 23—28, ιγ'. 37—39, Κολοσσ. α. 13, Ἀποκ. β'. 9, 13, 21, α. Τιμ. δ'. 4, β'. Κορ. δ'. 4.

6) Γενεσ. γ'. 1, Σοφ. Σολομ. β'. 24, α. Βασίλ. κβ'. 20—23, Ματθ. ιγ'. 39, Λουκ. ἡ. 42, κβ'. 2, Ἰω. β'. 13, ἡ. 44, ιγ'. 2, 27, Πράξ. ἡ. 9—11, Ῥωμ. ιγ'. 20, β'. Θεσσαλ. β'. 18, γ'. 5, β'. Κορ. β'. 11, δ'. 4, α. 3, α. Τιμ. γ'. α. Πέτρ. ἡ. 5, Ἀπκλ. ιδ'. 9.

7) Ἰωβ α. 12 α. Κορ. α. 12, ι. 13, Κλήμ. στρωμ. γ'. 12, Χρυσόστ. εἰς ψαλμ. ρηζ'. 4, Hieron. in Ecclesiast. II. 9.

σις καὶ προαίρεσις τοῦ ἀνθρώπου μένει ἐλευθέρα καὶ ἀνεπη-
ρέαστος⁸⁾· προσπαθοῦσι δὲ μόνον νὰ παγιδεύσωσι τὸν ἄνθρω-
πον διὰ τοῦ ψεύδους καὶ τῆς ἀπάτης καὶ τοῦ δολοφονήματος τῶν
κακῶν ἐπιθυμιῶν του οὕτως, ὥστε νὰ πράξῃ αὐτός τὸ κακὸν
οἰκεία θελήσει⁹⁾. Συμβαίνει δὲ ὁ ὑπὸ τοῦ διαβόλου πειρα-
σμὸς οὗτος τῶν ἀνθρωπίνων ψυχῶν (ἐνίοτε καὶ σωμάτων¹⁰⁾)
κατὰ παραχώρησιν Θεοῦ¹¹⁾, ὅστις πολυειδῶς καὶ πολυτρόπως
μεταστρέφει πολλάκις εἰς ψυχικὴν ἡμῶν σωτηρίαν καὶ αὐτὴν
τὴν σατανικὴν ἐνέργειαν, μεταχειριζόμενος αὐτὴν εἴτε πρὸς
τιμωρίαν ἡμῶν καὶ σωφρονισμόν, εἴτε πρὸς ἱάσιν τῶν ψυχι-
κῶν ἡμῶν παθημάτων, εἴτε πρὸς δοκιμασίαν καὶ στήριξιν ἡ-
μῶν ἐν τῇ πίστει.

§. 51.

Πῶς ἐπλάσθη ὁ ὕλικός κόσμος;

Λεπτομερῇ περιγραφὴν τῆς δημιουργίας τοῦ ὕλικου κόσμου
μᾶς παρέδωκεν αὐτός ὁ θεόπτης Μωϋσῆς ἐν τῷ πρώτῳ κεφα-
λαίῳ τῆς Γενέσεως. Ἐν ἀρχῇ, λέγει, ἐποίησεν ὁ Θεὸς τὸν οὐ-
ρανόν καὶ τὴν γῆν, ἦτοι τὸ σύμπαν¹⁾. Ἡ δὲ γῆ ἦτο ἀκόμη

8) Ματθ. ε. 29—30, ιβ'. 34, 35, ιε. 19, ιη. 49, κε. 41, Μάρκ. θ'. 28, ις'. 17, Ἑβρ. ζ'. 16, α. Κορ. ιβ'. 5, β'. Κορ. ιβ'. 7, Ῥωμ. ιβ'. 8—9, Γαλάτ. ε. 16, α. Πέτρ. δ'. 23, Ἰακώβ. ε. 13—15, Ἰουστίν. πρὸς Τρύφ. διέλ., Ἀπολόγ. β'. 6, Χρυσόστ. εἰς Γέν. α. ὁμ. ζ'. 3, εἰς Ματθ. νδ'. 47.

9) Τατιαν. πρὸς Ἑλλήν. ις'. Ἀθηναγόρ. πρεσβ. κε. Ἑρμᾶ ποιμ. β'. ἐπιτάγμ. ζ', ιβ', Κλήμ. στρωμ. δ'. 12, β'. 2), Κύριλλ. Ἱερ. κατήχ. β'. 3, ις'. 15, Χρυσόστ. εἰς ψαλμ. ρμζ'. 1, August. Serm. III. in Dom, I. post. Trinit., Δαμασκ. εκθ. β', 4.

10) Ματθ. η. 29, ι. 1, Μάρκ. α. 23, ι. 8, ζ'. 41—42, θ'. 24, 28, ις'. 17, 48, Πράξ. ε. 16, ις'. 18, Ἰουστίν. ἀπολ. β'. 6, Κλήμ. ἀναγνωρ. δ'. 20, 32, Tertull. ad Scap. II. Apol. c. 23, Lactant. Instit. Divin. II. 15, IV. 27, V. 22, Κορίλλ. Ἱεροσ. κατήχ. ις'. 15.

11) Ματθ. η. 31, Tertull. fug. in persec. c. II, Hieron. in Jerem. c. IV, Χρυσόστ. εἰς Φιλιππ. ὁμ. 4, σ'. α. Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βέροιας

1) Ἡ φράσις αὕτη, ἀπαντῶσα καὶ ἀλλαχοῦ τῆς γραφῆς (ψαλμ. ρδ'. 26, ριέ,

ἀόρατος και συγκεχυμένη, ὁσὶ ἀκότος ἐκαλοῦτο τὴν αὐτο-
 σὶν τὸ πνεῦμα τοῦ Θεοῦ ἐπεφύετο ἐπάνω τῶν ὕδατων. Ἀ-
 καλοῦτος ὁ Θεός εἶπε νὰ γείνη φῶς καὶ ἐγένετο τὸ φῶς, τὸ ο-
 ποῖον διεχώρισε, ἀπὸ τοῦ σκοτός, καὶ τὸ μὲν φῶς ἐκάλει
 ἡμέραν, τὸ δὲ σκοτός νύκτα. Ταῦτα ἐγένοντο τὴν πρώτην ἡμέ-
 ραν τῆς δημιουργίας. Τὴν δὲ δευτέραν ὁ Θεός ἐποίησε τὸ στα-
 ρηπῶδες οὐρανόν. Τὴν τρίτην διεχώρισε τὴν ξηρὰν
 ἀπὸ τῶν ὕδατων, καὶ παυθεὶς ἐσχίσθησαν αἱ ὕδατος, καὶ
 ἐγένετο ἡ θάλασσα καὶ ἡ ξηρὰ. Τὴν τέταρτην ὁ Θεός ἐκτίσε τὴν ἡλίαν, τὴν σελή-
 νην καὶ τοὺς ἀστέρας τὴν πέμπτην ἐποίησε τὰ πτηνὰ, καὶ ἐξ-
 ἡμέρας καὶ τοὺς ἔχθρας καὶ τὴν ἕκτην ἐποίησε τὰ τετράποδα
 καὶ ὅλα ἐν γένει τὰ ἐπίλοιπα ζῶα, καὶ ἐπὶ τέλους τὸν ἀνθρώ-
 πον. Τὴν δὲ ἐβδόμην κατέπαυσεν.

Ἐκ τῆς ἱστορίας ταύτης βλέπομεν, ὅτι ἡ δημιουργία τοῦ
 κόσμου διακρίνεται εἰς δύο μέρη (μέρη): Κατὰ πρῶτον ὁ
 Θεός παράγει ἐκ τοῦ μηδενὸς τὴν ἀνόργανον ὕλην διὰ τοῦ Λό-
 γου αὐτοῦ (καὶ αὕτη εἶνε ἡ καὶ πρὸς καὶ κυρίως δημιουργία)
 καὶ ἐπειτα δὲ διακρίνει τὴν ὕλην ταύτην καὶ ἐξ αὐτῆς
 ζωογονεῖ τὰ ζῷα διὰ τοῦ Πνεύματος αὐτοῦ, σχηματίζει ἐν
 τῷ κόσμῳ τὰ ὅλα ἐν ἡμέραις ἀπὸ τῶν ὕλικόν κόσμον, τὸν τε ὄργα-
 νικόν καὶ τὸν ἀνόργανόν, ἐπὶ τέλους δὲ καὶ τὸν ἀνθρώπον.

Ἡσυχ. 18, κλη. 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

1) Ἡσυχ. 18, κλη. 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.
 2) Ἡσυχ. 18, κλη. 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.
 3) Ἡσυχ. 18, κλη. 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.
 4) Ἡσυχ. 18, κλη. 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.
 5) Ἡσυχ. 18, κλη. 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.
 6) Ἡσυχ. 18, κλη. 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

καὶ ἔκτισεν ὁ Θεὸς τὸν ἀνθρώπον, καὶ ποίαν αὐτοῦ κατέχειν ἐν τῇ τάξει τῆς δημιουργίας; Ὁ Θεός, ἀφ' οὗ ἐκτίσας τὸν σὺμπαντα κόσμον, τὸν ὁρατὸν καὶ αὐλὸν πρῶτον, καὶ τὸν ὁρατὸν καὶ ὕλικόν δευτέρον, ἐπλασεν ἐπὶ τέλους καὶ τὸν ἀνθρώπον, λαβὼν γῶμα ἐκ τῆς γῆς, καὶ ἐμφυσήσας εἰς τὸ πρόσωπόν αὐτοῦ πνοὴν ζωῆς, καθὼς ἱστορεῖ ἡ γένεσις¹⁾. Ἀφ' οὗ ῥε εἰσῆγγε τὸν Ἀδὰμ, ἦτοι τὸν πρωτόπλαστον τοῦτον ἀνθρώπον, εἰς τὸν παράδεισον, ἔλαβε μίαν ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ κοίμωμένον, καὶ ἐπλασεν ἐξ αὐτῆς τὴν Εὐάν, ἦτοι τὴν πρώτην γυναῖκα, τὴν ὁποίαν ἔδωκεν εἰς τὸν Ἀδὰμ σύντροφον καὶ συμβοηθόν, παρῶντα δὲ εἰς αὐτοὺς τὴν δεσποτιάν καὶ κυριότητα ὅλης τῆς γῆς, εὐλόγησας αὐτοὺς καὶ εἰπὼν «Αὐξάνεσθε καὶ πληθύνεσθε, καὶ πληρώσατε τὴν γῆν καὶ κατακυριεύσατε αὐτήν²⁾». Τοῦτο δὲ καὶ ἐκείνη, διότι ἐκ τοῦ ζεύγους τῶν πρωτοπλάστων τούτων, τοῦ Ἀδὰμ καὶ τῆς Εὔας, ἐγεννήθη καὶ κατὰ γένος ὅλον τὸ ἀνθρώπινον γένος³⁾.

Ἐπλασε δὲ τὸν ἀνθρώπον ὁ Θεός «κατ' εἰκόνα καὶ ὁμοίωσιν ἑαυτοῦ», ὡς λέγει ἡ Γραφή⁴⁾. Καὶ τὰ μὲν ἐπίλοιπα κτίσματα ὁ Θεός ἐδημιούργησε διὰ μόνου τοῦ λόγου του· τὴν δὲ πλάσιν τοῦ ἀνθρώπου, ὡς τοῦ τιμιωτέρου τῶν ὁρατῶν κτισμάτων, ἐπεχείρησεν αὐτός ὁ Θεός, διότι τὸ μὲν σῶμά του ἔπλασε λαβὼν χοῦν ἐκ τῆς γῆς δι' αὐτῶν ἀμέσως τῶν χειρῶν του, τὴν δὲ ψυχὴν⁵⁾ ἐνεφύσησεν εἰς τὸ πρόσωπόν του ἐξ αὐτοῦ τοῦ

1) Γενεσ. 6'. 7

2) Γενεσ. 4. 28, 6'. 8, 18, 21, 22

3) Γεν. γ'. 21, Τωβ. 4. 8, Σοφ. Σολ. 1. 1, Πράξ. 17. 26.

4) Γεν. 4. 26, 27. Πρέλ. 4. 1. Σοφ. Σολομ. 6'. 23, Κολασσ. γ'. 10. Ἔφεσ. 3'. 24. 4. Κορ. 14. 7, 14. γ'.

5) Δύο εἶνε κατὰ τὸν χριστιανισμὸν τὰ σωματικὰ μέρη τῆς ἀνθρωπίνης φύσεως: α. τὸ ὕλικόν καὶ σαρκοτὸν σῶμα, καὶ β'. ἡ αὐλὸς, ἀσάρκτος καὶ ἀθά-

ιδίου του σιόματος⁶⁾. Σημειωτέον ὅμως, ὅτι διὰ τῶν μεταφορικῶν τούτων ἐκφράσεων⁷⁾ δὲν πρέπει νὰ ἐννοήσωμεν ἄλλο τι⁸⁾, εἰμὴ τὴν περὶ τῆς πλάσεως τοῦ ἀνθρώπου ἰδιαιτέραν φροντίδα τοῦ Θεοῦ, καὶ ὅτι τὸ μὲν σῶμα τοῦ ἀνθρώπου εἶνε ὕλη, ἡ δὲ ψυχὴ αὐτοῦ αὔλος καὶ ἀθάνατος⁹⁾. Ὁ ἀνθρω-

ντος ψυχῇ τοῦτο κηρύττει ἡ Γραφή, τοῦτο μαρτυροῦσιν οἱ Πατέρες, τοῦτο πρεσβεύει καὶ διδάσκει ἡ Ἐκκλησία. Ἄλλ' ἡ Γραφή μεταχειρίζεται καὶ τὴν λέξιν « πνεῦμα », τοῦ μὲν ἀντὶ τῆς λέξεως « ψυχῇ » (Γεν. μέ. 27, ψαλμ. λ'. 6, ρητ. 4, Λουκ. α'. 55, κγ'. 46, Πράξ. ιδ'. 38, κλπ.), τοῦ δὲ καὶ ἐκ παραλλήλου συναμφοτέρας τῆς λέξεως (Σοφ. ις'. 14, ε' 6, 11, ζ'. 2, ἡ 19, θ'. 15 Ἠσαϊ. κς'. 9, Λουκ. α'. 46, 47, κλπ.). Ἐκ τούτου ἐκινήθησάντινες νὰ θεωρήσωσι τὸν ἄνθρωπον ὡς ἐκ τριῶν μερῶν συνεστώτα, α. τοῦ σώματος, β. τῆς ψυχῆς, καὶ γ. τοῦ πνεύματος, ὅπερ οὐ μόνον δογματικῶς ἀλλὰ καὶ κατὰ πάντα ἄλλον λόγον εἶνε ἐσφαλμένον· διότι ἡ μὲν λέξις « ψυχῇ », καὶ παρὶ αὐτοῖς τοῖς φιλοσοφοῦσιν, εἶνε ἡ γενικωτέρα, ἐκφράζουσα τὴν ἀνωτέραν καὶ αὐλον μερίδα τῆς ἀνθρωπίνης φύσεως ὡς τι σύνολον καὶ κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τὸ σῶμα· ἡ δὲ λέξις « πνεῦμα » εἶνε ἡ εἰδικωτέρα, ἐκφράζουσα τὴν ἀνωτέραν ἐν γένει καὶ λογικωτέραν τῆς ψυχῆς φύσιν· τὸ δὲ, ὡς ἐκ τῆς ἀντιθέσεως ταύτης καὶ ἡ λέξις ψυχῇ μεταπίπτει ἀπὸ τῆς γενικῆς ἐννοίας εἰς ἄλλην εἰδικωτέραν, σημαίνουσα τὴν κατωτέραν, θυμικωτέραν, ευστοικωτέραν καὶ ζωτικωτέραν μίτρην ἢ φύσιν τῆς ὕλης ψυχῆς. Ἐννοεῖται δὲ ὅτι εὐκόλως οὐ μόνον τὰ γενικά ἐναλλοσσοῦνται πρὸς τὰ εἰδικά, καὶ τάναντιν, ἀλλὰ καὶ ἐκ παραλλήλου παρατάσσονται. Τοιοῦτόν τι συνέβη καὶ ἐν τῇ Γραφῇ, καὶ μάλιστα τὸ δεῦτερον, διότι τὸ ἐκ παραλλήλου σχῆμα εἶνε, ὡς γνωστόν, συνηθέστατον εἰς τὸ γραφικόν ὕψος. Αὐτὸ δὲ τοῦτο συνέβη καὶ παρὰ τοῖς ἀρχαίοις πατέρας, μέχρις οὗ ἡ ἐκκλησία, ἀφορμὴν λαβοῦσα ἐκ τῶν Μανιχαίων καὶ τῶν περὶ τὸν Ἀπολινάριον (§. 33, σημ. 16), τριχοτομοῦντων τὸν ἄνθρωπον εἰς σῶμα, ψυχὴν καὶ νοῦν, ἡνωμένη νὰ ἀφῇ τὴν περὶ τὴν χρῆσιν τῶν λέξεων τούτων ἐλευθερίαν, καὶ νὰ ἐκφράζεται ἀκριβοτέρον περὶ τῆς εἰς σῶμα καὶ ψυχὴν διχοτομίας τοῦ ἀνθρώπου (Προβλ. καὶ Θεοδώρ. ἐπιστομ. θ. δογμ. α', ἐπιστ. ρμῆ, Νεμέσι. περὶ φύς ἀνθρώπου α', Aug. de du. anim. c. Manich.

6) Γεν. β'. 7, Θεοφίλ. Ἀντιοχ. πρὸς Αὐτόλ. β'. 18, Γρηγ. Θεολ. λόγ. μέ, Δομασκ. ἐκθ. β'. 12

7) Πρβλ. §. 14. σημ. 2.

8) Ὅχι π. χ. ὅτι ἡ ψυχὴ τοῦ ἀνθρώπου εἶνε μέρος ἢ ἀπόρροια τῆς θείας οὐσίας, ὅπως ἐδίδαξαν οἱ περὶ τὸν Κέρωνα καὶ Μαρλίωνα (Χρυσ. εἰς Γέν. ὁμ. ιγ', Θεοδώρ. ἐκθ. παθ. θεορ. ε', θ. δογμ. ἐπ. θ'. ἀπορ. Γεν. ἐρ. ιδ', κγ'.

9) Τὴν ἀθανασίαν τῆς ψυχῆς κηρύττει ἡ Γραφή, τοῦ μὲν ἐμμέσως (Γεν. κβ. 8, ἡ 29, ρητ. 23, ρητ. 4, Ἠσαϊ. α'. 43—16 κλπ.), τοῦ δὲ ἀμέσως (ἐκκλησ. ιδ'. 17, ψαλμ. γ'. 1, δ'. 7, ε' 15, Ματθ. ι. 28, Ἰω. ιδ'. 23, Λουκ. ις', 22,

πος ἄρα εἶνε κτίσμα ἔξοχον ἐν τῇ δημιουργίᾳ, ὃν μετὰ ζῶν με-
ταξὺ τῶν ὁρατῶν καὶ τῶν ἀοράτων κτισμάτων, μεταξὺ τοῦ
ὕλικου καὶ τοῦ αὐλοῦ ἢ νοεροῦ κόσμου¹⁰⁾, ἡ κορωνὶς καὶ ὁ σέ-
φανος τοῦ ὕλικου κόσμου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει διὰ τοῦ σώ-
ματος, καὶ ἡ ἀρχὴ τοῦ νοεροῦ καὶ αὐλοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνή-
κει διὰ τῆς ψυχῆς¹¹⁾. εἶνε ὁ κρίκος ὁ συνδέων τὴν ὁρατὴν κτί-
σιν πρὸς τοὺς ἀγγέλους μὲν ἀμέσως, ἐμμέσως δὲ πρὸς αὐτὸν
τὸν κτίστην καὶ δημιουργόν, τὸν Θεόν.

§. 53.

Τί σημαίνει τὸ ὅτι ὁ Θεὸς ἔπλασε τὸν ἄνθρωπον κατ' εἰκόνα ἐαυτοῦ καὶ
ὁμοίωσιν;

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ ἄνθρωπος ἔλαβεν ἐν γένει παρὰ τοῦ
Πλάστου τοῦ τὰς πνευματικῶν¹⁾ ἐκείνας ἀρετάς, ὅσας ἔχει
καὶ ὁ Θεός, ἀλλ' ὅχι τελείας οὐδὲ κατὰ τὸ αὐτὸ μέτρον, ἀλλὰ
καθ' ὅσον μόνον ἐσυμβιβάζοντο μετὰ τὴν ἀρχὴν καὶ φύσιν αὐτοῦ,
ὥς κτίσματος καὶ ὄντος πεπερασμένου. Π. χ. ὁ Θεός εἶνε
πνεῦμα ἀπείρως καὶ ἀπολύτως λογικόν· ἀλλὰ καὶ ὁ ἄνθρωπος
ἐπροκίσθη μετὰ λόγον, ὅχι ὁμῶς ἀπειρον καὶ ἀπόλυτον, ἀλλὰ
πεπερασμένον καὶ σχετικόν. Ὁ Θεός εἶνε πανάγαθος· ἀλλὰ καὶ
ὁ ἄνθρωπος ἔλαβε σχετικὴν τινα καὶ πεπερασμένην ἀγαθό-

23, κγ'. 43, ε'. Κορ. ιγ'. 1, 'Εβρ. ιγ'. 14, Φιλ. γ'. 20), ὁμοίως δὲ καὶ οἱ πα-
τέρες ('Ιουστίν, ἐπιστ. πρὸς Διογένη. ς', 'Απολ. α. 1, 17, 18, 63, περὶ ἀναρ-
κερ. ιδ. 13, 'Αθηναγόρ. πρεσβ. κζ', Εἰρην. Haer. II, 34, V. 13, Κλήμ.
στρωμ. ε. 14, Εὐσεβ. εὐαγγ. ἀποδ. γ'. 5, προπαρ. α. 4, 'Επιφάν. αἰρέσ. μδ'.
36, Διακ. ἀποστολ. ς'. 11).

40) Δαμασκ. ἔκθ. ὁρθ. πίστ. δ'. 42.

41) 'Ὅθεν καὶ «μικρὸς κόσμος» (Γρηγόρ. Θεολ. λόγ. λή', Δαμασκ. ἔκθ. α'
12) καὶ «ἐπιτομή» τῶν δύο κόσμων, τοῦ ὕλικου καὶ τοῦ αὐλοῦ (Διακ. ἀπο-
στολ. ς'. 34, 'Επιφάν. αἰρέσ. ξδ'. 18, Aug. ad. Oros. II) ἐπεκλήθη.

4) Κλήμ. 'Αλεξ. στρωμ. β'. 19, 'Ωριγένη. κατὰ Κέλσου ς'. 63, ἡ. 49, περὶ
ἀρχῶν δ'. 37, 'Επιφάν. αἰρέσ. η'. Εὐσεβ. εἰς ψαλμ. ἡ. 5, Ambr. in Hexaem.
VI. 8, August. de Trinit. XII. 7, de Civit. Dei XIII. 21, Γρηγόρ. Νύκτ.
εἰς τὸ τῆς Γενεᾶς «ποιήσωμεν ἄνθρωπον».

τητα. Ὁ Θεὸς εἶνε παντοκράτωρ καὶ παντοδύναμος· ἀλλὰ καὶ ὁ ἄνθρωπος ἔλαβε τὴν ἐπὶ τῶν ζώων καὶ τοῦ ὕλικου κόσμου δεσποτείαν καὶ κυριότητα. Ὁ Θεὸς ἐπὶ τέλους εἶνε αἰώνιος· ἀλλὰ καὶ ὁ ἄνθρωπος ἐπροικίσθη μὲ τὴν ἀθανασίαν.

§. 54.

Πῶς ἔβλεπεν ὁ Θεὸς τὸν ἄνθρωπον, ἀρ' οὐ τὸν ἔπλασε, καὶ ποία τις ἦτο ἡ ἐν τῷ παραδείσῳ κατάστασις του ;

Ἀφ' οὗ ὁ Θεὸς ἐπροίκισε τὸν ἄνθρωπον πλουσιοπαρόχως μὲ τόσα πνευματικὰ χαρίσματα, ἔθεσεν αὐτὸν καὶ εἰς τὸν παράδεισον, ὅπου εἶχαν ἀρκουσαν ἀπόλαυσιν καὶ τρυφήν καὶ αἰσθηματικά του αἰσθήσεις, ἡ ὁρασίς του νὰ ἐντριφᾷ εἰς τὴν θάαν τῶν καλλωνῶν τοῦ παραδείσου καὶ τῆς ὁρατῆς κτίσεως, ἡ ἀκοή του εἰς τὰ ἄσματα τῶν πτηνῶν, ἡ ὁσφησίς του εἰς τῶν ἀνθέων τὴν εὐωδίαν, καὶ ἡ γεῦσις του εἰς τοὺς γλυκεῖς χυμοὺς τῶν πολλῶν καὶ ποικίλων καρπῶν¹⁾. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἄνθρωπος εἶχεν ἐξέλθῃ ἐκ τῶν χειρῶν τοῦ Δημιουργοῦ τέλειος ὡς πρὸς τὴν φύσιν καὶ τὸν προορισμὸν αὐτοῦ κατὰ τε τὸ σῶμα καὶ κατὰ τὴν ψυχὴν, αἱ ἐν τῷ παραδείσῳ ἀπολάσεις αὐταὶ ἦσαν ἀμικτοὶ πάσης λύπης καὶ πικρίας μόχθου²⁾, διότι τὰ μὲν ζῶα ὑποτασσόμενα εἰς αὐτὸν τῷ ἦσαν ἀβλαβῆ, ὅπως καὶ τὰ φυτά, καὶ ὁλόκληρος ἐν γένει ἡ φύσις³⁾, ἡ δὲ ἀσθένεια καὶ ὁ θάνατος οὐδεμίαν εἶχαν ἐπ' αὐτοῦ ἐξουσίαν⁴⁾. Ἀλλὰ πολὺ ἀνώτερα τούτων ἦσαν τὰ πνευματικὰ ἀγαθὰ, ὅσα ἀπῆλauen ὁ ἄνθρωπος ἐν τῷ παραδείσῳ, ἑξαρκῶν καὶ ἀναπτύσσων διὰ

1) Τατιαν πρὸς ἑλλήν. βδ', Tertull. adv. Marc II. 2, Κυρίλλ. Ἱερ. κατ. β'. 4, Δαμασκ. ἐκθ. β'. 2.

2) Χρυσόστ. εἰς γένεσ. ὁμ. ιζ', Μακέρ. ὁμιλ. α. 40, 11.

3) Χρυσόστ. εἰς ψαλμ. γ'. εἰς γένεσ. ὁμιλ. γ', Θεοδώρ. εἰς ψαλμ. ιε', 5, August. Civ. Dei XXII, 2, Δαμασκην. ἐκθ. ὁρθ. πίστ. β'. 10.

4) Σοφ. Σόλομ. α. 23, Ῥωμ. ε. 12, Ἰουστίν. πρὸς Τρύφ. διὰλ. ρκδ', Κλήμ. Ἀλ. στρωμ. β'. 19, Ἑρριζμ. εἰς γένεσ. β', Εἰρην. Πιστ. III. 20, Ἀθανασ. περὶ ἐκθ. ὁμ. 9, λόγου β', August. de Civit. Dei XII. 23.

τῆς συνεργούσης θείας χάριτος⁵⁾ τὰς λογικὰς καὶ ἡθικὰς του
δυνάμεις, καί, τὸ πάντων κυριώτατον, εὐρισκόμενος εἰς ἄμε-
σον συγκοινωνίαν πρὸς αὐτὸ τὸ ἄκρον ἀγαθόν, τὸν Θεόν⁶⁾.
Τί ἄλλο ἔμενεν εἰς τὸν ἄνθρωπον, εἰμὴ ἀπολαύων ὅλα ταῦτα
τὰ ἀγαθὰ τοῦ τε αἰσθητοῦ καὶ τοῦ ὑπὲρ αἰσθησιν κόσμου, νὰ
ζῇ εὐτυχὴς καὶ μακάριος, δοξάζων καὶ ὑμνῶν τὸν Θεόν, τὸν
δοτῆρα καὶ χορηγὸν πάντων τούτων, συμφώνως πρὸς τὸν
προορισμὸν του⁷⁾; Δὲν ἔμενεν ἄλλο παρὰ τὴν θέλησίν του).
Καὶ τῶνόντι ὁ Ἀδὰμ ἠθέλησε τὸ καλὸν καὶ τὸ ἀπήλαυσε· καὶ
πάλιν ὁ αὐτὸς Ἀδὰμ ἠθέλησε τὸ κακόν, καὶ τὸ ἀπήλαυσε διὰ
τῆς ἁμαρτίας.

§. 55.

Ποῖα ὑπῆρξεν ἡ ἁμαρτία τοῦ Ἀδὰμ καὶ ποῖα τὰ ἐπικόλουθα αὐτῆς;

Ὁ Θεός, ἀφ' οὗ ἐπροίχισε τὸν ἄνθρωπον μὲ τόσα ὕλικά καὶ
πνευματικὰ ἀγαθὰ, ἔδωκεν εἰς αὐτὸν καὶ μίαν ἐντολήν. Εἶπεν
εἰς τὸν Ἀδὰμ καὶ τὴν Εὐάν, ὅτι ὅλα τὰ δένδρα τοῦ παραδεί-
σου εἶνε εἰς τὴν ἐξουσίαν των, μόνον δὲ ἀπὸ τὸν καρπὸν τοῦ
δένδρου τῆς γνώσεως τοῦ καλοῦ καὶ κακοῦ δὲν πρέπει νὰ φά-
γῃσι, διότι καθ' ἣν ἡμέραν πράξῃσι τοῦτο, θέλουσιν ἀποθά-
νῃ. Ὁ Ἀδὰμ ἠδύνατο νὰ φυλάξῃ τὴν ἐλαχίστην καὶ ἐλαφρο-
τάτην¹⁾ ταύτην ἐντολήν τοῦ Θεοῦ, καὶ νὰ ζήσῃ μακάριος καὶ
ἀθάνατος, ἀλλ' ἐπίσης ἠδύνατο νὰ παραβῇ τὴν ἐντολήν ταύ-

5) Tertull. adv. Marcion. II. 2. August. Civ. Dei XIV. 27, de corrept. et gratia XI. 32, Δαμασκην. ἐκθ. ὁρθ. πιστ. 6'. 30.

6) Σειράχ ιζ'. 6, 10, Βίβλ. Haer. IV. 38. Βασιλ. ὅτι οὐκ εἴτ. τ. κακ. ὁ Θεός, Δαμασκ. ἐκθ. 6'. 30.

7) Γενεσ. 2. 26, Σειράχ, ιζ', 6—10, 2. Κορ. γ'. 20, 1. 31, Ambr. epist. XLIII. 13, 19. Θεοδώρ. ἀπορ. Γεν. ἐρ. ἡ, Lactant. Instit. divin. IV. 28, de falsa Sap. III. 10.

8) Χρυσόστ. εἰς Γέν. ὁμ. ιζ' 4. August. de Civ. Dei XIV. 15.

4) Χρυσόστ. εἰς Γένεσ. ὁμ. ιδ'. 3. August. Civ. Dei XIV. 3, Θεοδώρητ. ἀπορ. Γραφ. Γενεσ. ἐρ. λζ'.

την καὶ νὰ δυστυχῆσῃ καὶ ἀποθάνῃ. Τί λοιπὸν ἐξεῖλεξεν; Ὁ ὄφεις, ἦτοι ὁ διάβολος ὑπὸ τὸ σχῆμα τοῦ ὄφεως²⁾, προσελθὼν εἰς τὴν Εὐαν εἶπε, Διὰ τί δὲν τρώγετε ἀπὸ τὸν ἀπηγορευμένον καρπὸν; Διότι, ἀπεκρίθη ἡ Εὐα, ὁ Θεὸς μᾶς διέταξε νὰ μὴ φάγωμεν ἀπὸ αὐτόν, διότι θὰ ἀποθάνωμεν. Ὅχι, ὑπέλαβεν ὁ ὄφεις, ἐξ ἐναντίας, καθ' ἣν ἡμέραν φάγετε ἀπὸ τὸν καρπὸν τοῦτον, θὰ ἀνοιχθῶσιν οἱ ὀφθαλμοί σας, καὶ θὰ γαίνετε ὡς θεοί, γνωρίζοντες τὸ καλὸν καὶ τὸ κακόν. Ἐπέσθη ἡ Εὐα καὶ ἔφαγε, καὶ ἔδωκε καὶ εἰς τὸν Ἀδὰμ καὶ ἔφαγε καὶ αὐτός. Οἱ ὀφθαλμοὶ τῶν πρωτοπλάστων διηνοιχθήσαν τωρόντι παρευθὺς, ἀλλὰ μόνον διὰ νὰ ἴδωσι τὴν γυμνότητά των. Ἐρχεται ὁ Θεός, καὶ οὗτοι ὑπ' αἰσχύνῃς καὶ φόβου κρύπτονται. Ἐρωτῶνται διατί παρήκουσαν, καὶ ὁ μὲν Ἀδὰμ προφαίζεται τὴν Εὐαν, ἡ δὲ Εὐα τὸν ὄφιν. Τότε ὁ Θεὸς ὀργισθεὶς καταράται τὸν ὄφιν, τὴν Εὐαν, τὸν Ἀδὰμ καὶ τὴν γῆν, καὶ ἀποδιώκει αὐτοὺς ἐκ τοῦ παραδείσου. Ἡ παρακοή καὶ ἡ ἀμαρτία τῶν πρωτοπλάστων ἐπισύρει κατὰ τῆς κεφαλῆς αὐτῶν τὴν δικαίαν ὀργὴν καὶ τιμωρίαν τοῦ Θεοῦ. Ἀπέδλητοι ἐκ τοῦ παραδείσου συναπέβαλον ἅμα καὶ ὅλα τὰ ἀγαθὰ, ὅσα συναπετέλουν μέχρι τοῦδε τὴν ἐν τῷ παραδείσῳ εὐδαιμονίαν των, καὶ κτεδικάσθησαν εἰς τὸν θάνατον καὶ τὴν δυστυχίαν, αὐτοὶ τε καὶ οἱ ἀπόγονοι αὐτῶν, ἦτοι ὅλον τὸ ἀνθρώπινον γένος.

§. 56.

Διὰ τί ὁ Θεός; ἔθεσεν εἰς τὸν ἄνθρωπον τὴν ἐντολὴν ταύτην τοῦ ἀπηγορευμένου καρποῦ, ἢ, ὅπως ταῦτόν, διὰ τί ὁ Θεός; ἐπλασε τὸν ἄνθρωπον δυνάμει ὑποκείμενον εἰς τὴν ἀμαρτίαν, ἦτοι ἐπιδεικτικόν καὶ τοῦ κακοῦ;

Ὁ Θεός; ἐπλασε τὸν ἄνθρωπον, διὰ νὰ καταστήσῃ αὐτὸν ἄ-

2) Σοφ. Σολομ. β'. 24, Ἰω. 4. 44, Ἀποκλ. 16. 9, Κρυπτόστ. εἰς Γέν. 2, θμιλ. 15. 2, Ἰουστίν πρὸς Τρύφων. διάλ. γγ', ριδ'. Εὐσέβ. προσπαρ. ζ'. 10. August. de Genes. ad lit. imperf. XI. 29, Θεοδώρητ. ἀπορ. Γεν. ἐρωτ. 42, Δαμνκτα. ἐκθ. ὁρθ. πρίστ. β'. 30, 134.

ξιον τῆς κατ' αὐτὸν μακαριότητος, τὴν ὁποίαν ἐμελλε νὰ ἀπολαύσῃ διὰ παντός, ἐὰν πειθόμενος εἰς τὸ θεῖον θέλημα, ἀναδείκνυσεν ἑαυτὸν ἄξιον τῆς ἀγάπης τοῦ Θεοῦ. Ἀλλὰ ὁ ἀνθρώπος, ὡς αὐτεξούσιος καὶ ἐλεύθερος, ἔπρεπε καὶ οἶκον νὰ φάνῃ ἄξιος τῆς θείας ταύτης ἀγάπης, καὶ νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὴν ἀκρόπολιν τῆς μακαριότητος, ὡς εἰς ἰδίαν ἐν μέρει κατάρχησιν. Πῶς δὲ ἄλλως ἦτο δυνατόν νὰ γείνη τοῦτο, εἰμὴ διὰ τῆς δοκιμασίας; Ἡ ἐντολὴ ἄρα ἐδόθη εἰς τὸν ἄνθρωπον διὰ νὰ δοκιμασθῇ, καὶ δοκιμασθεὶς ἀπολαύσῃ κατ' ἄξιαν ἢ τὴν θείαν ἀγάπην καὶ μακαριότητα, ἢ τὴν θείαν ὀργὴν καὶ καταδίκην. Ἄνευ τῆς ἐντολῆς ταύτης ὁ ἄνθρωπος ἐνθεν μὲν ἤθελε ταπεινωθῇ ἠθικῶς, διότι τὴν εὐδαιμονίαν αὐτοῦ ἤθελεν ὀφείλῃ κατ' ὁλοκληρίαν εἰς τὸν Θεόν, ὅχι δὲ ἐν μέρει καὶ εἰς ἑαυτόν, ἐνθεν δὲ, ἀπολαύσας ἤδη ἀκόπως καὶ δωρεάν, μέλλων δὲ νὰ ἀπολαύσῃ καὶ ἐν τῷ μέλλοντι τὸσαῦτα ὑλικά καὶ ἡθικά ἀγαθά, ἐὰν δὲν εἶχε τὴν ἐντολὴν ταύτην νὰ τὸν ἐνθυμίζῃ, ὅτι ὑπάρχει ὑπεράνω αὐτοῦ ὃν ὑπέρτατον, εἰς τὸ ὅποιον ὀφείλει ἀπόλυτον ὑποταγὴν, ἐδικόλως ἤθελεν ὑποπέσει εἰς τὴν σῆψιν καὶ τὴν ὑπερηφάνειαν, ἣτις κατέστρεψε τὸν Ἑωσφόρον¹⁾).

§. 57.

Ποῖα ὑπῆρξαν αἱ συνέπειαι τοῦ προπατορικοῦ τοῦτου ἀμαρτήματος, τοῦτέστι ποῖα ὑπῆρξεν ἡ κατάστασις τοῦ ἀνθρώπου πρὸ τῆς ἁμαρτίας καὶ ποῖα μετὰ τὴν ἁμαρτίαν καὶ ἔκπτωσιν;

Ἀφ' οὗ ὁ ἄνθρωπος ἡμαρτε παραβὰς τὴν θείαν ἐντολήν, ἐξέπεσεν ἀπὸ τοῦ «πραδείσου τῆς τρυφῆς» εἰς τὴν φυσικὴν ταλαιπωρίαν καὶ τὸν σωματικὸν θάνατον, μετ' αὐτοῦ δὲ καὶ σύμπασα ἡ περὶ αὐτὸν φύσις¹⁾ συνεξέπεσε καὶ ἠχρειώθη ὑπὸ τὸ βάρος τῆς θείας κατάρτας. Ἡ γῆ, ἀποβλαύσασα τὴν προτέ-

1) Θεοφίλ. Ἀντιοχ. πρὸς Αὐτόλογ. β'. 23, 34, Βασίλ. ὅτι οὐκ αἴτ. τ. κακ. ὁ Θεός, August. tractat. in Ps. LXX, de Civit. Dei XIII, 20, XIV. 12, Χρυσός. εἰς Γεν. ὁμιλ. ις' β', Λαμαρκ ἐκθ. β'. 30.

1) Ῥωμ. γ'. 20, 22, August. c. Iulian. V. 8.

ραν αὐτῆς ἀρετὴν, καὶ φύσσασα «ἀκάνθους καὶ τριβόλους» καὶ πλῆθος φαρμακερῶν καὶ βλαβερῶν φυτῶν²⁾, ἔπρεπε τοῦ λοιποῦ νὰ βραχῇ μὲ τὸν ἰδρωτὰ τοῦ ἀνθρώπου διὰ νὰ βλαστῇ³⁾, τὰ πλείστα ζῶα ἀπέβαλον τὴν προτέραν αὐτῶν χειροῦθειαν ἢ καὶ ὅλως ἀπεθηριώθησαν πρὸς βλάβην καὶ κίνδυνον τοῦ ἀνθρώπου⁴⁾· αὗτος δὲ ἐξασθενήσας σωματικῶς καὶ ἐκπεσὼν ὑπέκυψεν εἰς τὴν νόσον καὶ τὴν ὀδύνην⁵⁾, εἰς τὴν ταλαιπωρίαν ἐν γένει τοῦ σώματος⁶⁾ καὶ εἰς τὸν θάνατον⁷⁾. Ἀλλ' ἡ σωματικὴ καὶ φυσικὴ αὕτη ἐκπτώσις ἦτο μικρὰ ὡς πρὸς τὴν λογικὴν καὶ ἠθικὴν, διότι ὁ ἄνθρωπος ἀπέβαλε τὴν προτέραν αὐτοῦ διανοητικὴν καθαριότητα καὶ ἀκμὴν, καὶ ἐξέπεσεν ἀπὸ τῆς προτέρας αὐτοῦ ἐν τῷ παρὰδεῖσῳ ἀθωότητος καὶ ἀγιότητος, ἀπομακρυνθεὶς δὲ ἀπὸ τὸν Θεὸν ἔγεινε δούλος τῆς ἁμαρτίας, ἥτις εἶνε θάνατος πνευματικὸς.

§. 58.

²⁾ Ἐπεξηγησεν τὴν ἠθικὴν ταύτην ἐκπτώσιν τοῦ ἀνθρώπου.

Ὁ ἄνθρωπος, ὡς ὄν μίκτον ἐκ σώματος καὶ ψυχῆς, ἔχει καὶ ἀντιθέτους κλίσεις. Τὸ μὲν σῶμα, ὡς χοϊκόν καὶ γήινον, σπεύδει πρὸς τὰς ἀπολαύσεις καὶ ἡδονὰς τῆς σαρκὸς καὶ τῶν αἰσθησεων, ἡ δὲ ψυχὴ ἐξ ἐναντίας σπεύδει νὰ πλησιάσῃ καὶ ἐξομωθῇ διὰ τῆς ἀρετῆς ὅσον τὸ δυνατόν πλείότερον πρὸς τὸν Θεόν. Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο αὗται κλίσεις εἶνε ἀντίρροποι καὶ ἀν-

2) Τατιαν. πρὸς Ἑλλήν. ιβ'.

3) Γενεσ. 3. 17, 18. Χρυσόστ. εἰς Γενεσ. ὁμλ. ιζ'. 9.

4) Θεοφίλ. Ἀντ. Αὐτόλ. β'. 17, Θεοδώρητ. εἰς ψαλμ. ιε' 5, Χρυσόστ. εἰς ψαλμ. γ'. εἰς Γεν. ὁμ. γ'. 2, August. de Civit Dei XXII, 22, Δαμασκ. ἐκθ. β'. 12.

5) Γενεσ. γ' 16 Θεοφίλ. Αὐτόλ. β'. 25, Ἐπιστολ. Πατριάρχ. ὁρ. 5'.

6) Γενεσ. ιζ'. 19, Τατιαν. πρὸς Ἑλλήν, ζ' Tertull. adv Marcion I'. 9, V. 25, Χρυσόστ. εἰς Γεν. ὁμ. ιζ'. 7, 9.

7) Γενεσ. γ'. 19, Εἰρην. Haeres. V. 22, Εὐσεβ. ἐκκλησ. ιστορ. α. 2, Θεοδώρ. εἰς ψαλμ. ιε' 5, Lact. Instit. Divin. II. 13, Χρυσόστ. εἰς Γενεσ. ὁμλ. ιζ'. 9, ιζ'. 6, August. de Civ. Dei XIII. 15.

τίθεται, ὁ ἄνθρωπος διὰ τοῦ λόγου, ὅστις εἶνε ὁ ἄκρος αὐτοῦ κυβερνήτης καὶ ὁδηγός, προσπαθεῖ τὰς μὲν σωματικὰς κλίσεις, ὅχι νὰ καταλύσῃ μηδὲ νὰ νεκρώσῃ καθ' ὁλοκληρίαν, σπερ ἀδύνατον ἅμα καὶ ἄσκοπον, ἀλλὰ νὰ περιστείλῃ εἰς τὸ δίκαιον καὶ ἀβλαβὲς αὐτῶν μέτρον οὕτως, ὥστε νὰ μὴ ἀντιμάχωνται μηδὲ νὰ παρακωλύωσι τὴν ψυχὴν σπεύδουσαν πρὸς τὸν Θεόν καὶ τὸ ἀγαθόν, ἀλλὰ καὶ νὰ συμβοηθῶσιν ὑποτασσόμεναι εἰς αὐτήν, καὶ διευκολύνουσαι τὴν ἐπὶ τοῦ σώματος καὶ τῶν αἰσθήσεων ἐναρμόμιον ἡγεμονίαν τῆς λογικῆς καὶ ἠθικῆς τοῦ ἀνθρώπου φύσεως. Ὅταν ὁ ἄνθρωπος κατορθώσῃ τοῦ ο, εἶνε ἅγιος καὶ μακάριος. Τοιαύτη δὲ ἦτο ἡ κατάστασις τοῦ Ἀδάμ πρὸ τῆς ἁμαρτίας καὶ πτώσεως, ἁγία καὶ μακαρία').

Ἀλλὰ ἡ διὰ τῆς παραβάσεως τῆς θείας ἐντολῆς ἁμαρτία ἔθετε πέρας καὶ τέρμα εἰς τὴν κατάστασιν ταύτην. Καθὼς ὁ ἄνθρωπος ἀπεράσισε καὶ ἔπραξε τὸ κακόν, ἔπαυσε παρευθεῖν ἡ ψυχικὴ ἐκείνη γαλήνη, τὴν ὁποίαν ὁ πρωτόπλαστος ἀπῆλκυεν ἐκ τῆς συναισθήσεως τοῦ ὅτι εὐρίσκεται πλησίον τοῦ Θεοῦ καὶ ὅτι ἀγαπᾶται ἀπὸ αὐτοῦ ὡς ἅγιος, ὡς θέλων δηλονότι καὶ πράττων τὸ ἀγαθόν, καὶ ὡς ἀποφεύγων τὸ κακόν. Τὰ π ἄ θ η, ἦτοι αἱ ἀφηνιάσασαι ἐπιθυμίαι καὶ ἡδοναὶ τῶν αἰσθήσεων, ἔρριψαν ἀπὸ τὸν θρόνον τῆς ἡγεμονίας τὸν λόγον, ἦτοι τὸ λογικόν, καὶ ἔλαβον αὐταὶ τὴν ἡγεμονίαν τῆς ψυχῆς καὶ τοῦ σώματος²⁾. Ἀπὸ τότε τὸ μὲν σῶμα καὶ αἱ αἰσθήσεις κυριεύουσι, κυριεύεται δὲ ἡ ψυχὴ, καὶ ἰδίως αἱ ἀνώτεραι αὐτῆς λογικαὶ καὶ ἠθικαὶ δυνάμεις. Τὸ φῶς τῆς διανοίας ἐπισκωτίθη³⁾, καὶ ἡ θέλησις μετέβαλε ῥοπὴν καὶ διάθεσιν, ἀπομακρυνθεῖσα ἀπὸ τὸ ἀγαθόν, καὶ τὴν πηγὴν αὐτοῦ, τὸν Θεόν, καὶ κλίνασα πρὸς τὸ κακόν καὶ τὸν πατέρα τούτου, τὸν διάβολον⁴⁾. Πρὸ τῆς πτώσεως ὁ ἄνθρωπος εὐρίσκετο εἰς ἄμεσον συγκοινωνίαν

1) Πρὸλ. § 51, § 51. 2) Βλ. ὅτι οὐκ αἴτ. τ. κακ. ὁ Θ., Θεοδώρ. ἀπορ. β' Περαιεπομέν. ἐρ. ἀ. 3) Χρυσόστ. εἰς Γένεσ. ὁμιλ. ιε' 2. Μαχαρ. ὁμιλ. ιε'. 4) Εἰρην. ἀν. Παρ. III. 37, Βασίλ. ὅτι οὐκ αἴτ. τ. κακ. ὁ Θ., Ἀθανάσ. κ. Ἀπολιναρ. β'. 6.

μέ τὸν Θεόν, παιδαγωγούμενος ὑπ' αὐτοῦ· τὸ πνεῦμά του εἶχε δύναμιν ἐξαισίαν, διὰ τῆς ὁποίας ὑψούμενον ὑπὲρ τὴν κοινὴν καὶ ταπεινὴν σφαῖραν τῶν αἰσθήσεων, εἰσεδύετο εἰς αὐτὸν τὸν ἀόρατον κόσμον καὶ ἤρχετο εἰς ἄμεσον κοινωνίαν μετ' αὐτόν. Ἐβλεπε τὸν Θεὸν ἐνώπιόν του καὶ ἤκουεν αὐτὸν λαλοῦντα καὶ ἐκφράζοντα ἀμέσως τὸ θεῖόν του θέλημα. Ὁ Θεὸς τότε δὲν ἦτο ἰδέα ἀφηρημένη διὰ τὸν ἄνθρωπον, ἀλλὰ παρίστατο ὡς πρόσωπον ἐνώπιόν του. Μετὰ τὴν ἁμαρτίαν ὅμως ὁ ἄνθρωπος ἀπέβαλε τὴν δύναμιν ταύτην. Ὁ νοῦς του ἐπεσκοτίσθη, καὶ προϊόντος τοῦ χρόνου ἔχασεν ἐκ τῶν ὀφθαλμῶν του τὸν Θεόν, καὶ μόνον ἀμυδρά τις περὶ αὐτοῦ ἰδέα τῷ ἐναπελείφθη. Ἐν δὲ τῇ ἐπισκοτίσει ταύτῃ ἀπεπλανήθη ἐτι μᾶλλον ὁσημέραι καὶ διεφθάρη⁵⁾. Αὕτη εἶνε ἡ κατάστασις τῆς ἁμαρτίας, καὶ αὕτη ὑπῆρξεν ἡ κατάστασις τοῦ Ἀδάμ μετὰ τὴν παρακοὴν καὶ πτώσιν.

§. 59.

Πῶς μετεδόθη ἡ προπατορική αὕτη ἁμαρτία εἰς ὅλον τὸ ἀνθρώπινον γένος ;

Ἡ μεταβολὴ αὕτη, ὡς γίνεται δῆλον ἐξ αὐτοῦ τοῦ πράγματος, εἶνε οὐσιώδης, διότι διεφθάρη αὕτη ἡ φύσις τοῦ ἀνθρώπου, ὅθεν καὶ ἡ κατάστασις αὕτη τῆς ἁμαρτίας μετεδόθη εἰς ὅλους τοὺς ἀπογόνους τοῦ Ἀδάμ ὡς τι μόλυσμα κληρονομικὸν καὶ ἀνιάτον¹⁾. Ἐν τῷ Ἀδάμ καὶ ἡμαρτε καὶ κατεδικάσθη ὁλόκληρον τὸ ἀνθρώπινον γένος, διότι ὁ Ἀδάμ δὲν ἦτο ἄνθρωπός τις ἀπλοῦς, ἀτομόν τι ἀπλοῦν ἐν τῇ σειρᾷ τῶν πολλῶν ἀνθρώπων, ἀλλ' αὐτὸς ὁ πρῶτος, ὁ πρωτόπλαστος ἄνθρωπος,

5) Γεν. 5'. 14, 12.

1) Ῥωμ. 4. 12—19, 4. Κορ. 4. 22. Ῥωμ. 6. 3, Ἰουστίν. πρὸς Τρύφων. διὰλ. πῇ, August. de peccat. merit. et remiss. III. 4. Iulian. II. 2) Εἰρην. Haer. V. 16, Tertull. de testim. anim. c. 3, Χρυσόστ. ὁμ. 1. εἰς Ῥωμ. 4. εἰς Ἡσαΐ. 53, Κλήμ. Ἀλεξ. στρωμ. γ'. 16, Ἀθαν. κατ. Ἀρειαν. λόγ. 4. 51. 64, Διδωμ. Ἀλεξ. εἰς Ἰω. 4. 19, Θεοδώρ. εἰς ψαλμ. ν. 7, Ἐπιστ. Πατριάρχ. ὁρ. 5'.

εξ οὗ ἐμελλόν να γεννηθῶσιν ὅλοι αἱ ἄνθρωποι, ἡτο το σπερμα, ἐξ οὗ ἐμελλε να βλαστήσῃ, ὡς καὶ ἐβλάστησεν, ὁλόκληρον τὸ ἀνθρώπινον γένος²⁾). Φέρομεν ἄρα οἱ ἄνθρωποι ὅλοι ἀνεξαιρέτως τὴν κατάστασιν ταύτην μεθ' ἑαυτῶν ἐκ κοιλίας μητρὸς ἤδη, διὸ λέγει καὶ ὁ προφητάναξ. «Ἰδοὺ γὰρ ἐν ἀνομίαις συνεληφθὴν καὶ ἐν ἁμαρτίαις ἐκίσσυσέ με ἡ μήτηρ μου»³⁾.

§. 60.

Προέβλεπον ὁ Θεὸς, ὅτι ὅτι ἁμαρτήσῃ ὁ ἄνθρωπος, καὶ ἐὰν τὸ προέβλεπε, διατί τὸν ἔπλασε;

Ὁ Θεός, ὡς παντογινώσκας, προγινώσκει τὰ πάντα, ἐπομένως προσεγίνωσκε καὶ τὴν συεργείαν τοῦ διαβόλου ποτακὸν καὶ πτωσιν τοῦ ἀνθρώπου. Ἀλλὰ ἐκ τούτου δὲν ἐπετοὶ καὶ ὅτι

2) Γεν. γ'. 29, ε. 1, 2, Γωδ'. κ' 8, Σοφ. Σολ. ι. 4, Πράξ. ιγ'. 23. Ῥωμ. ε. 12.

3) Παλμ. ν'. 7. — Ὡς πρὸς τὸ δόγμα τοῦτο δύο μάλιστα κακοδοξοῖσι ἀνεργήσαν κατὰ τοὺς ἀρχαίους καὶ νεωτέρους χρόνους, διάφοροι καὶ ἀντίθετοι. Οἱ Πελαγίανοι (πρόλ. § 35, σημ. 15.) ἀπολόγουν ὅτι ἡ κατάστασις αὕτη τῆς ἁμαρτίας βαρύνει ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου γένους, ἀλλ' ἐθεώρουν αὐτὴν ὅχι ὡς συνόπαιον τοῦ προπατορικοῦ ἁμαρτήματος, ἀλλ' ὡς σύμφυτον μετὰ τὸν ἄνθρωπον ἐκ γένε (August. Gest. Pelag. c. 41, c. Julian. II. 64, de natura ei gratia c. 49, κλπ. Κατὰ δὲ τοὺς νεωτέρους χρόνους οἱ διαμαρτυρούμενοι, καὶ ἰδίως οἱ Καλβινισταί, ἐθεώρουν ἐπὶ τοσούτον τὴν κατάστασιν ταύτην, ὥστε νὰ θεωρῶσι τὸν ἄνθρωπον ὡς ἀπολύτως ἑλίκανον νὰ πράξῃ ἀφ' ἑαυτοῦ τὸ ἀγαθόν, καὶ νὰ κηρύττωσιν ὡς εὐλόγημα διατίτῃ πᾶν αὐτοῦ εἴτε διανοήμα, εἴτε αἰσθημα, εἴτε ἔργον (August. Coblentz, c. 48, Calvin. Institut. 41, 1. n. 8, 9, 2, n. 1, Luther. de serv. arbitrii ad Euseb. fol. 178. Melancthon. Loc. commun. de peccat. act. et de peccat. dispensatione). Ὁ ὁρθόδοξος ἐκκλησία ἀπέσχεον ῥεῖποτε ἀπὸ τῶν πληρμείων τούτων ἄκρων, τοὺς μὲν Πελαγιανούς ἐπανειλημμένως καταδικάσασα, πρεσβεύοντα δὲ ἐν γένει καὶ διδάσκοντα, ὅτι ὡς ἐκ τοῦ προπατορικοῦ ἁμαρτήματος ἡ εἰκὼν τοῦ Θεοῦ ἐν τῷ ἀνθρώπῳ ἡμαρτωρὴ καὶ ὑπερβλήθη, ἀλλ' ὅχι ὅτι καὶ τελείως ἐξηφανίσθη, ὅτι ἡ ἀνθρωπίνη φύσις, ὅπως φυσικῶς, ὅπως καὶ ὅπως ἐξηβλήθη καὶ διεστέρη, ἀλλ' ὅχι ὅτι καὶ τελείως ἐνεκρίθη καὶ ἐξηφανίσθη (Γρίγορ. πρὸς Ἐλπίν, γ', 18, λ', Μακάρ. ὁμολ. κα. 2, Ἰουστίν. ἀπολ. α. 24, Ἀθηναγόρ. πρεσβ. κδ', Κλήμ. στρωμ. δ'. 4, γ'. 9, 16, 2, 20, Κριλλ. κωνσ. δ'. 21 Ἐπιστ. αἰεία, α. 3 Ἀποστ. Σιν. π. 1.

δὲν ἔπρεπε νὰ τὸν πλάσῃ ἢ, ἀφ' οὗ ἅπαξ τὸν ἔπλασε, νὰ τὸν ἐμποδίσῃ ἀπὸ τὴν παρακοὴν καὶ πτώσιν, καὶ ἰδοὺ διὰ τί. Ἐάν ὁ Θεός, θέλων νὰ καταστήσῃ τὸν ἄνθρωπον μέτοχον τῆς μακαριότητός του, ἀπεκωλύετο νὰ τὸν πλάσῃ, διότι προεγίνωσκε τὴν διὰ τῆς ἀπάτης τοῦ διαδόλου πτώσιν του, τότε ἤθελε νικῆσθαι τὸ κακὸν καὶ ὁ πατήρ αὐτοῦ ὁ διάβολος, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν θείαν μεγαλειότητα καὶ παντοδυναμίαν. Ἐὰν δέ, ἀφ' οὗ τὸν ἔπλασεν, ἀπεκώλυε τὴν πτώσιν του, ἔπρεπε νὰ ἐπέμβῃ προσδιορίζων οὕτως ἢ ἄλλως τὴν θέλησίν του, καὶ νὰ μὴ τὸν ἀρῇσῃ νὰ ἀπατηθῇ ἀπὸ τὸν διάβολον· ἀλλὰ τότε ἤθελε παραβιασθῇ τὸ αὐτεξούσιον τοῦ ἀνθρώπου. Ὅ,τι ἄρα ἐγείνεν ὀρθῶς καὶ πανσόφως ἐγείνεν. Ὁ Θεὸς πλάττων τὸν ἄνθρωπον προέβλεπε μὲν τὴν δι' ἀπάτης τοῦ διαδόλου πτώσιν καὶ δυστυχίαν του, ἀλλὰ προέβλεπε καὶ τὴν ἐτι μείζονα δόξαν, εἰς τὴν ὁποίαν ἐμελλε δι' αὐτῆς ν' ἀνέλθῃ. Ἡ ἰδέα καὶ ὁ σκοπὸς τῆς θείας μεγαλειότητος ἐν τῇ δημιουργίᾳ τοῦ κόσμου, καὶ ἰδίως τῶν ἀγγέλων καὶ τῶν ἀνθρώπων, ἦτο ἀναμφιβόλως μεγάλη, ὑψηλή, θεία. Ἐπρεπε λοιπὸν νὰ μὴ πραγματοποιήσῃ ὁ Θεὸς τὴν ἰδέαν ταύτην, διότι προέβλεπεν ὅτι ὁ ὑψηλὸς αὐτῆς σκοπὸς δὲν ἐμελλε νὰ πραγματοποιηθῇ ὑπὸ πάντων; Ὅχι βεβαίως. Ἡ ἐπιχείρησις παντός ἀγαθοῦ δὲν πρέπει νὰ θυσιάζεται εἰς τὴν ἰδέαν ὅτι τοῦ ἀγαθοῦ τούτου ἡδύναντό τινες νὰ κάμωσι κακὴν χρῆσιν καὶ νὰ βλάψωσιν ἑαυτούς. Ἀλλως δὲ οὔτε ἐμελλεν οὔτε ἔπρεπε νὰ ὑπερισχύσῃ ἡ κακία τοῦ διαδόλου, ἀλλὰ ἡ ἀγαθότης τοῦ Θεοῦ, ὅστις εἶχεν ἤδη προνοήσῃ ἐν τῇ πανσοφίᾳ Αὐτοῦ περὶ τοῦ πῶς ἐμελλε νὰ ἐγερθῇ ὁ πεισὼν καὶ σωθῇ ἐκ τῆς πτώσεώς του¹). Ὁ Θεὸς λοιπὸν τὰ πάντα πανσόφως καὶ παναγάθως καὶ προέγνω καὶ προωκονόμησε.

§. 61.

Τί καὶ πῶς προενόησεν ὁ Θεὸς ὑπὲρ τῆς σωτηρίας τοῦ ἀνθρώπου; μάλλον δὲ εἰπερ τοῦτο τί ἐστὶ θεία πρόνοια;

Θεία πρόνοια λέγεται ἡ διανεκὴς ἐκείνη ἐνέργεια τοῦ ἐν

1. Χρυσὸς παρὰ Φωτ., Μυριοβ. καὶ σκθ', Ambros. de Paradis. VIII. 41.

Τριάδι Θεοῦ¹⁾, διὰ τῆς ὁποίας Οὗτος συντηρεῖ μὲν τὴν ὑπαρξιν τοῦ κόσμου σύμπαντος, ὃν ἐδημιούργησε²⁾, κατευθύνει³⁾ δὲ αὐτόν, ὅλον ὅμοῦ καὶ ἕκαστον αὐτοῦ μέρος ἰδίᾳ, πρὸς τὸν προορισμόν του, ὅστις εἶνε ἡ κατὰ τὴν φύσιν καὶ ἀξίαν ἐκάστου συμμίθεξις τοῦ ἀγαθοῦ⁴⁾, πρὸς ὃ, τι μὲν συντελεστικὸν εἰς τὸ ἀγαθὸν τοῦτο συνεργῶν, πᾶν δὲ κακὸν καὶ πρόσκομμα ἐκκόπτων ἢ μεταστρέφων καὶ διορθῶν πρὸς τὸ ἀγαθόν⁵⁾.

§. 62.

¹⁾ Ἐκτείνεται ἡ θεῖα Πρόνοια ἐπὶ σύμπαντος τοῦ κόσμου, καὶ πῶς ἰδῶς ἐνεργεῖ ὑπὲρ τοῦ ἀνθρώπου ;

Ἐὰν ὁλος ὁ κόσμος ἀποτελεῖ ἐν ὅλον, τὸ ὁποῖον τείνει νὰ ἐκπληρώσῃ ἓνα ὠρισμένον σκοπόν, ἕκαστον δὲ κτίσμα, ἐκπληροῦν τὸν ἴδιον ἑαυτοῦ σκοπόν, συντελεῖ ἅμα τὸ καθ' ἑαυτὸ καὶ εἰς τὴν προαγωγὴν τοῦ σκοποῦ τούτου, ἐξ ἀνάγκης πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἡ πρόνοια τοῦ Θεοῦ ἐκτείνεται οὐχὶ μόνον ἐπὶ σύμπαντος τοῦ κόσμου, ὡς ὅλου, ἀλλὰ καὶ ἐφ' ἑνὸς ἐκάστου

1) Παλμ. ργ'. 28—30, Ματθ. ε. 45, ς. 26, 28—30, κη. 20, Ἰω. α. 9—13, γ'. 16—17, ε. 17, ι. 16, ις'. 23, Κολ. α. 13, β'. 19, Ἐβρ. α. 20, Ἐφ. α. 22, β'. 20, α. Κορ ιβ', 4, 6, 11, Ἀθανασ. πρὸς Σεραπ. 28, Βασίλ. κ. Εὐνομ. ε. περὶ τ. ἀγ. πν. ις', Aug. de ver. relig. VII. 13, Δαμασκην. ἐκθ. ὁρθ. πιστ. β. 2.

2) Ἰωβ. ιβ'. 9, Ἀριθμ. ις'. 29, Σοφ. Σολ. ια. 26, Παλμ. ρη. Ἰωάν. α. 4, Ἐβρ. α. Κολ. α. 17, Πράξ. ις. 25, Βασίλ. ἀγ. πνεῦμ. ε. η. 19, Hieron ep. ad Ctesiph. Χρυσόστομ. εἰς ψαλμ. ρη. 2, εἰς Γέν. ὁμιλ. ι. 7, August. Genes. litt. imp. V. 20, trinit. VIII. 8.

3) Ἰουδαῖο θ'. 4, Ἰερεμ. θ'. 23, 24, ιη. 17, Εἰρην. Haer. II. 26, III 25, Κλήμ. Ἀλεξ. στρωμ. α. 11, Lactant. Instit. divin. II, Θεοδώρ. εἰς Κόλ. α. 47, August. libr. arbit. I. 17. 4) Πρόβλ. §. 47

5) γ'. Βασίλ. θ'. 9, β'. παραλειπ. λγ'. 12—13, Νεεμ. θ'. 27, Δαν. δ'. 30, Παλμ. ρη. 71, β'. Κορ. α. 9, Παροιμ. ις'. 3, Ῥωμ. γ'. 3, β', Θεσσαλ. α. 4, Ἰακ. α. 2—4, Χρυσόστομ. εἰς ψαλμ. θ'. 4, ρμδ'. 2, August. de Genes. contra Manich. I. 16, mor. Manich. II. 8, epist. CXL. ad Roman. V. 13, de Civit. Dei XI. 18, XXII, de Gen. ad litt. imperf. c. 5, Θεοδώρ. περὶ πρωτοφάσε λόγ. ς'. θ'. εἰς Ῥωμ. θ'. 24, Βασίλ. εἰς ψαλμ. ια. 8, Κλήμ. Ἀλεξ. ὁ

τῶν χτισμάτων, τῶν συγχροτούντων τὸ ὅλον τοῦτο, ἀπὸ τοῦ μεγίστου μέχρι τοῦ ἐλαχίστου¹⁾. Ἐπιμετρεῖται δὲ αὕτη εἰς ἕκαστον χτίσμα ἀναλόγως τῆς φύσεως αὐτοῦ καὶ τῆς ἀξίας καὶ τάξεως, ἣν κατέχει ἐν τῷ σύμπαντι κόσμῳ²⁾. Ἐκ τούτων ἐπεταὶ οἱ μετὰ τὸν αὐλὸν κόσμον ἢ περὶ τῶν ἀνθρώπων, καὶ μάλιστα τῶν εὐσεβῶν καὶ πιστῶν, πρόνοια τοῦ Θεοῦ εἶνε μεγάλη καὶ ἐξαιρετική, καθ' ὅσον ὁ ἀνθρώπος, ὡς προεῖρηθ', εἶνε ὁ στέφανος καὶ ἡ κορωνὶς τοῦ φυσικοῦ κόσμου, ὁ κρίκος ὁ συνδέων τὸν ὁροτὸν καὶ φυσικὸν κόσμον πρὸς τὸν ὁρόετον καὶ πνευματικόν. Ἐν δὲ ἡ πρόνοια τοῦ Θεοῦ, προκειμένου περὶ τῶν ὕλικῶν χτισμάτων, ἀπαθλῆπει ἀπλῶς εἰς τὴν φυσικὴν αὐτῶν συντήρησιν καὶ ἐνέργειαν³⁾, αἰρομένου παντός προσηκόντος, ὅπερ ἡ ἐλθέ ποτε παρεμπέση ἐξ ἐλλείψεως ἢ παρεκτροπῆς⁴⁾, προκειμένου περὶ τοῦ ἀνθρώπου, ἡ θεία Πρόνοια

1) Σοφ. Σολ. σ'. 8, ἡ. 1, ἰδ. 13, ἰδ'. 13, ψαλμ. λγ', ργ', 27—33, ἀ. Παρ. λαοκ. κθ'. 10—12, ἰεζεκ. ἰδ'. 13, Ματθ. σ'. 26, λ. 23—31, Λουκ. ἰδ'. σ', Ῥωμ. ἡ. 28. 2) Λουκ. σ'. ἰδ'.

3) Ἀμώς ἐ 8, ψαλμ. ργ'. 3—4, 10—13, 44, 45, 46, ρλδ'. 4, 7, 8, ρη. 91, ρμή. 8, Χρυσόστ. εἰς Ἰωάν. ὁμιλ. ιη', 2, Lactant. Instit. Divin. II. 5, Ambros. in Hexaëmer. X. 5.

4) Ὡς ἔλλειψις δύνανται νὰ θεωρηθῇ π. χ. ἡ ἀνομβρία, ὁ λιμός, ἡ ἀνυδρία, ἡ ἀκαρπία καὶ εἴ τι ἄλλο τοιούτου· ὡς παρεκτροπή δὲ ὁ σεισμός, ἡ θύελλα, ἡ καταιγὶς, καὶ αἱ παρόμοιαι ἀναστατώσεις τῆς ἀνοργάνου φύσεως. Ἐν δὲ τῇ ὀργανικῇ φύσει ὡς παρεκτροπή κυρίως πρέπει νὰ χαρακτηρισθῇ πᾶν ὅ,τι νοσηρὸν καὶ τερατώδες ἢ ἐκτρωματικόν ἐν τοῖς ζῴοις καὶ τοῖς ἕντοισι. Σημειωτέον ὅμως καὶ ὅτι ταῦτα πάντα, ἰδίως δὲ τὰ ἐξ αὐτῶν, οἷον σεισμοί, ἀνομβρίαι κτ., παρσοῦνται ὡς ἔλλειψις τῆς φύσεως κατὰ τὸ φαινόμενον μόνον καὶ τελεολογικῶς ὡς πρὸς ἡμᾶς τοὺς ἀνθρώπους, ὅχι ὅμως πιθανώτατα καὶ ὡς πρὸς τὸ εἶς στήμας τοῦ σύμπαντος καὶ τὸν σκοπὸν αὐτοῦ. Αἱ δὲ τερατολογικαὶ καὶ ἐκτρωματικαὶ παρεκτροπαὶ τῆς ὀργανικῆς φύσεως ἀποδοῦναι εἰς τὴν περὶ τῆς φύσεως αὐτῆς κακίαν καὶ ἄσχητον χρῆσιν τῆς ἐλευθερίας, εἴ τίς ποτε καὶ ἐπεμετρήθη καὶ εἰς αὐτήν (August. ad. litter. imperf. V, Serm. de div. CX. c. IV, ἐκ Oid. I. 7), Ἄλλ' ἡ ἀπό μέρους τῆς φύσεως κατὰ χρείαν αὕτη τῆς ἐλευθερίας εἶνε σχετικῶς ἐλαχίστη καὶ ἀσχημάντος, εὐκόλως παρερρομένη. Ἄλλως δὲ οὔτε ἡ φύσις καὶ πᾶσα φυσικὴ ἔλλειψις ἢ παρεκτροπή, καὶ ἐν γένει τὸ φυσικὸν γὰρ ὡς πρὸς τὸν ἀνθρώπου ἔχει στενὴν σχέσιν μετὰ τὴν χηρικότητα αὐτοῦ, ἐνθεν μὲν ὡς ἀποτέλεσμα τῆς ἀκαρπίας, ἐνθεν δὲ ὡς μέσον παιδαγωγίας, διδασκαλίας τιμωρίας, ἢ καὶ σωφρονισμοῦ, ἐβίβη καὶ πρότερον (§ 50.)

ἀποβλέπει μᾶλλον εἰς τὴν λογικὴν καὶ ἠθικὴν αὐτοῦ φύσιν, συνεργοῦσα εἰς τὸ ἀγαθὸν καὶ ἀποτρέπουσα ἀπὸ τοῦ κακόν, χωρὶς ποτὶς νὰ παραβλαφθῇ διὰ τοῦτο τὸ αὐτεξούσιον ἢ νὰ περσμειωθῇ ἢ εὐθύνῃ αὐτοῦ.

§. 63.

Ἄλλ' ἰδίως καὶ κυρίως παύειν ἦτο τὸ ἔργον τῆς περὶ τὸν ἀνθρωπίνης Προνοίας :

Εἶδαμεν ὅποια τις ἦτο ἡ κατάστασις τοῦ ἀνθρώπου πρὸ τῆς πτώσεως καὶ μετ' αὐτήν. Διὰ τῆς παρακοῆς του ὁ ἄνθρωπος εἶχε καταστῇ ἀπείρως ἐνοχος ἐνώπιον τοῦ παναγάθου ἀλλὰ καὶ δικαιοκρίτου Θεοῦ, διότι ἄπειρος εἶνε καὶ ἡ θεία μεγαλειότης, εἰς τὴν ἐξήμαρτε Γυμνός τοῦ λοιποῦ τῆς θείας ἀγάπης καὶ χάριτος, ἀπόβλητος ἐκ τοῦ παραδείσου καὶ δοῦλος τῆς ἡμορτίας καὶ τοῦ θανάτου ὁ ἄνθρωπος, εἶχεν ἀποβάλλῃ καὶ τοῦ πνεύματός του τὴν καθαρότητα, ὡς ἐκ τῆς ὀπείας διετέλει εἰς ἄμεσον σχέσιν καὶ συνάφειαν μὲ τὸν Θεόν. Προϊόντος δὲ τοῦ χρόνου ὁ μὲν νοῦς του ἐπεσκοτίσθη ἔτι μᾶλλον, ὅθεν

Ὁ αὐτὸς λόγος καὶ περὶ τῶν ἐλλείψεων τοῦ κατ' ἀνθρώπον ἠθικοῦ κόσμου, οὐκ ὑποπίπτουσιν εἰς τὴν παρατήρησιν καὶ κρίσιν ἡμῶν τῶν ἀνθρώπων, ἢ ἐν τῷ κόσμῳ π. χ. τοῦτο ἄνισος πολλάκις ἢ καὶ ὅλως ἄδικος διανομή τῆς εὐτυχίας καὶ εὐτοχίας. Καὶ ἡ ἔλλειψις αὕτη ἀποδοτέα εἰς τὸ πλημμελές καὶ πεπεισμένον τῆς ἡμετέρας παρατηρήσεως καὶ κρίσεως. Πολλάκις θεωροῦμεν ὡς ἄδικον καὶ ἀσεβῆ τὸν εὐσεβῆ καὶ δίκαιον, καὶ τὴν ἀπὸ πάλιν, λησμονοῦντες ὅτι «εἰς ὅλους πόσας καρδίας ἐτάζει καὶ πᾶν ἐνδύμημα γινώσκει» (ἀ. Παραλειπομ κη. ψ. ὁ Κύριος, καθὼς καὶ κρίνομεν ὡς εὐτυχίαν τὴν δυστυχίαν, καὶ ὡς ταύτην πάλιν τὴν εὐτυχίαν, λησμονοῦντες τὰ ῥήματα ταῦτα τοῦ ἀποστόλου « μὴ βλασφημῆσθαι οὐκ ὡμῶν τὸ ἀγαθόν. Οὐ γὰρ ἐστὶν ἡ βασιλεία τοῦ Θεοῦ βρώσις καὶ πόσις, ἀλλὰ δικαιοσύνη καὶ εἰρήνη καὶ χαρὰ ἐν πνεύματι ἁγίῳ. » (Ῥωμ. ιδ'. 16—17). Καὶ εἶνε μὲν ἀληθές ὅτι ὁ Κύριος ἀνταμείβει πολλάκις τὸν δίκαιον καὶ εὐσεβῆ ἐν τῷ κόσμῳ τοῦτῳ, ὅπως καὶ τιμωρεῖ τὸν ἀσεβῆ καὶ ἄδικον διὰ τὴν μὴ μείνῃ ὅλως ἀμαρτυρήτος ἡ δικαιοσύνη καὶ πρόνοια αὐτοῦ ἐπὶ τῆς γῆς (Ἐκκεκ. εἰς ψαλμ. θ'. 4), ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ἐναντίου οὕτε πᾶσα ἀρετὴ ἀνταμείβεται πάντοτε ἐν τῷ κόσμῳ τοῦτῳ, οὕτε πᾶσα κακία τιμωρεῖται, διὰ τὴν μὴ μείνῃ πάλιν ἀτεκμηριώτος καὶ ἀμαρτυρήτος ἡ μέλλουσα πλήρης καὶ ἀκριβὴς κρίσις καὶ ἀνταπόδοσις (Θεοδώρητ. περὶ προνοίας λόγ. θ'. j).

αὐτοῦ μεταβαλοῦσα ῥοπήν και διαθεσίν, ἐξεκκλίνεν ἐπὶ μακρόν
 πρὸς τὸ κακόν, καὶ τοιοῦτοτρόπως ὁ ἄνθρωπος ἀπεπλανήθη
 εἰ μᾶλλον εἰς τὴν ὁδὸν τῆς ἁμαρτίας καὶ ἐξυγκριώθη. Ἦ ὁ-
 δὸς αὕτη ἔφερεν εἰς τὴν πλήρη ἀπώλειαν, καὶ ὁ ἄνθρωπος, ἦτο,
 τὸ ἀνθρώπινον γένος, ἐμελλεν ἐπὶ τέλους νὰ ἀπολεσθῇ καθ'
 ὁλοκληρίαν, ἐὰν δὲν ἐσώζετο, τοῦτέστιν ἐὰν δὲν ἔπαυεν ἡ ὑπὸ
 τὸ κράτος τῆς ἁμαρτίας κατὰστασίς του αὕτη, καὶ δὲν ἐπανήρ-
 χετο εἰς τὴν προτέραν αὐτοῦ πρὸς τὸν Θεὸν κοινωνίαν. Ἀλλὰ
 διὰ νὰ ἐκτελεσθῇ τὸ διπλοῦν τοῦτο ἔργον, εἰς τὸ ὁποῖον συν-
 στατο ἡ σωτηρία τοῦ ἀνθρώπου, ἦτο ἀνάγκη ἀναπόφευκτος,
 πρῶτον νὰ ἱκανοποιηθῇ καὶ ἐξιλεωθῇ ἡ διὰ τῆς παρακοῆς προσ-
 βληθεῖσα θεία μεγαλειότης καὶ δικαιοσύνη, καὶ δεῦτερον ν'
 ἀναγεννηθῇ καὶ ἀναπλασθῇ ὁλόκληρος ὁ ἄνθρωπος, σωζόμε-
 νος ἀπὸ τῆς ἁμαρτίας διότι, καὶ ἐὰν ἐξιλεοῦτο ἡ θεία δικαιο-
 σύνη, πῶς ἦτο δυνατόν νὰ ἔλθῃ εἰς συγχωροῦσαν πρὸς τὸν
 Θεὸν ὁ ἄνθρωπος, ἄνευ τοιαύτης ἀπολυτρώσεως καὶ καθάρ-
 σεως, ὁ δοῦλος τοῦ σκότους καὶ τῆς ἁμαρτίας πρὸς τὴν πε-
 γὴν τοῦ φωτός καὶ τῆς ἁγιότητος¹⁾; Τοιαύτην ὁμως ἐξίλα-
 στήριον θυσίαν νὰ προσφέρῃ καὶ τοιοῦτον ἔργον ἀπειρομέγεθες
 νὰ ἐκτελέσῃ δὲν ἠδύνατο ἡ ἁμαρτωλὴ καὶ ἀσθενὴς καὶ ταλαί-
 πωρος ἀνθρωπότης. Ὅ,τι ἦτο καὶ ὅ,τι εἶχεν ὁ ἄνθρωπος, ἦτο
 ὄψωρον τοῦ Θεοῦ²⁾. Πόθεν λοιπὸν εἶχε νὰ προσφέρῃ τὸν ἀπει-
 ρον τοῦτον ἐξίλασμόν; Οὐδαμόθεν. Οὐδ' αὐτοὶ οἱ ἅγιοι ἄγγε-
 λοι ἦτο δυνατόν νὰ προσφέρωσι τοιαύτην θυσίαν, διότι καὶ
 οὗτοι ὅ,τι ἦσαν καὶ ὅ,τι εἶχαν, ἦτο θεία δωρεά, διότι, ἐν αἰ-
 λαις λέξεσι καὶ οὗτοι ἦσαν κτίσματα τοῦ Θεοῦ³⁾. Τῇ ἀπειρο-
 ταύτην ἐξίλασθήριον θυσίαν εἰς καὶ μόνος ἠδύνατο νὰ προσ-
 φέρῃ, καὶ τὸ ἀπειρομέγεθες τοῦτο ἔργον τῆς τοῦ ἀνθρώπου

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βέροιας

1) 5^η Κορ. 11—13.

2) Βασιλ. ὁμολ. εἰς ψαλμ. μὴ. Φωτ. Ἀρφαράζ. 1^η 2^η

3) Βασιλ. ὁμολ. εἰς ψαλμ. μὴ. Φωτ. Ἀρφαράζ. 1^η 2^η

ἀπολυτρώσεως καὶ ἀναπλάσεως εἰς καὶ μόνος ἡδύνατο νὰ ἐκ-
 πληρώσῃ, αὐτὸς ὁ Θεός, ἡ ἀένναος πηγὴ ἀπείρου δικαιοσύνης,
 ἀλλὰ καὶ ἀπείρου εὐσπλαγχνίας καὶ ἀγαθότητος⁴). Τοῦτο
 δὲ καὶ ἐγένεεν. Ἀφ' οὗ ὁ ἄνθρωπος, ὅπως εἶχε, δὲν ἡδύνατο
 νὰ θραύσῃ οἰκοθεν τὰ δεσμὰ τῆς ἁμαρτίας, καὶ νὰ ἀνυψωθῇ
 πρὸς τὸν Θεόν, αὐτὸς ὁ φιλόανθρωπος καὶ ἐλεήμων⁵) Θεός, κλί-
 νας τοὺς οὐρανούς, συγκατέβη πρὸς τὸν ἄνθρωπον, καὶ τείνας
 πρὸς αὐτὸν τὴν χεῖρα, τὸν ἔσωσεν ἐκ τῆς ἁμαρτίας καὶ ἀνύ-
 ψωσε πρὸς ἐκείνόν. Naί, ὁ Υἱὸς καὶ Λόγος τοῦ Θεοῦ κατέβη
 ἐπὶ τῆς γῆς, καὶ γενόμενος ἄνθρωπος, προσήνεγκεν ἑαυτὸν
 ἐπὶ τοῦ σταυροῦ θυσίαν ἐξιλαστήριον πρὸς τὸν Θεὸν ὑπὲρ τοῦ
 ἀνθρώπου, ἐξηγόρασεν αὐτὸν ἐκ τῆς κατάρας καὶ τοῦ θανά-
 του, καὶ ἀναπλάσας αὐτὸν ἔσωσεν ἐκ τῆς ἁμαρτίας καὶ ἀπο-
 κατέστησε κοινωνὸν μὲν τῆς θείας ἀγάπης καὶ χάριτος, κλη-
 ρονόμον δὲ τῆς αἰωνίου ζωῆς καὶ μακαριότητος⁶). Ἰδοὺ τὸ ἐκ
 προαιωνίας βουλή⁷) μέγιστον ἔργον τῆς θείας περὶ τὸν ἄν-
 θρωπον προνοίας, ἔργον ὑπερφυὲς καὶ θαυμασιώτατον⁸).

§. 64.

Πότε καὶ πῶς ἔμελλε νὰ γείνη ἡ ὑπὸ τοῦ Θεοῦ σωτηρία τοῦ ἀνθρωπίνου γέ-
 νους;

Ἡ ἐκ τῆς ἁμαρτίας σωτηρία καὶ ἀναγέννησις τοῦ ἀνθρώ-
 που ἤθελεν εἶναι ἀδύνατος ὥς ἐκ τῆς αὐτεξουσίου φύσεως αὐτοῦ,

4) Ἡσαί. μγ'. 25, ψαλμ. ρδ'. 3. Ἀθηναν. κ. Ἀρειαν. λόγ. β'. 67, ια'. 69.
 περὶ ἐνανθρωπ. τοῦ Θ. λόγου ζ'. 43.

5) Ἰωάνν. γ'. 16, ιε'. 43, Ῥωμ. ε. 8—9, γ'. 32, Ἐφεσ. α. 4, β'. 4—8,
 Ἐβρ. ι. 10, Τίτ. β'. 41, γ'. 4—7.

6) Ἰω. γ'. 16, ιε'. 21, ιθ' 46, ιη'. 36, Ῥωμ. γ'. 25, Τίτ. β. 41—42,
 44, Ἐβρ. β'. 14—15, Εἰρην. Ηαer. IV. 44, Ἀθηναν. ἐνανθρ. δ', Χρυσόστομ.
 εἰς γεν. ὁμ. γ', η', κγ'. 6, Βασίλ. ἀγ. πνεύμ. η', ιε', Κορίλλ. Ἱεροσ. κατηχ.
 κδ'. August. Civ Dei X. 29.

7) Ματθ. κς. 34, Ἐφεσ. α. 4, γ'. 41, α. Κορ. β'. 7, β'. Θεσσ. β'. 43, β'.
 Τιμοθ. α. 9, α. Πέτρ. α. 20, Κολ. α. 26, Κορίλλ. Ἀλεξ. εἰς Ἡσαί. γ', Δα-
 μασκ. ἔλθ. γ'. 4. 8) Θεοδώρητ. ἐλλήν. παθημ. θεραπ. δ'.

ἐὰν προήρχετο ὅλως ἔξωθεν καὶ κατηναγκασμένῃ¹). Ὁ ἄνθρωπος ἔπρεπε καὶ οἶκοθεν νὰ αἰσθανθῇ τὴν ἀνάγκην τῆς σωτηρίας, καὶ νὰ ἐπιθυμήσῃ αὐτὴν ἐξ ὅλης ψυχῆς καὶ καρδίας, ὥστε νὰ ἀποδεχθῇ ποτε προθύμῳ αὐτὴν. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν ἦτο δυνατόν νὰ γείνη εὐθὺς μετὰ τὴν πτώσιν. Ὁ ἄνθρωπος ἦτο ἀνάγκη νὰ γνωρίσῃ πρότερον διὰ μακρᾶς καὶ πολυχρονίου πείρας ὅλον τὸ μέγεθος τῆς πτώσεώς του, καὶ νὰ συναισθανθῇ ὅλας τὰς συνεπείας τῆς ἁμαρτίας του, καὶ ὅλην τὴν ἐλεεινότητα τῆς καταστάσεώς του. Ἦτο ἀνάγκη ἡ κατάστασις αὐτῇ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔπακρον τῆς νοσηρᾶς ἀναπτύξεώς της, διὰ νὰ ἐπέλθῃ τότε ἐγκαίρως καὶ ὁ θεὸς τῶν ψυχῶν καὶ τῶν σωμάτων ἱατρός, καὶ θεραπεύσῃ αὐτὴν καθ' ὁλοκληρίαν²). Ἄμα δὲ ἦτο ἀνάγκη νὰ προειδοποιηθῇ ὁ ἄνθρωπος περὶ τῆς ἐλεύσεως τοῦ μέλλοντος τοῦτου ἱατροῦ καὶ σωτῆρος, ἵνα διὰ μακροῦ χρόνου προπαρασκευασθῇ δεόντως πρὸς ἀποδοχὴν αὐτοῦ τε καὶ τῆς σωτηριώδους θεραπείας καὶ διδασκαλίας³). Ἦτο λοιπὸν ἀνάγκη προπαρασκευῆς μακρᾶς καὶ πολυχρονίου, καὶ διὰ τοῦτο ὁ Σωτὴρ ἡμῶν δὲν κατήλθεν ἐπὶ τῆς γῆς, εἰμὴ ἐπ' ἐσχάτων τῶν ἡμερῶν τούτων⁴), καὶ ἀφ' οὗ εἶχε φθάσῃ τὸ «πλήρωμα τοῦ χρόνου»⁵).

§. 65.

Ποία τις ὑπῆρξεν ἡ πρὸς τὴν ὑποδοχὴν τοῦ Σωτῆρος μακρὰ αὕτη προπαρασκευὴ τοῦ ἀνθρώπου γένους;

Εὐθὺς μετὰ τὴν πτώσιν ὁ Θεὸς προεῖπεν, ὡς εἶδομεν, εἰς τὸν ἄνθρωπον τὴν μέλλουσαν σωτηρίαν¹), ἅμα δὲ καὶ ἐκούσθησε τὰς θυσίας ὡς προὑποτύπων τῆς μεγάλης ἐξίλαστη-

1) Γρηγορ. Θεολ. περὶ Θεολογ. 1.

2) Ἰνα, το τοῦ ἀπιστοῦ, ὅπου ἐπέλεόνανεν ἡ ἁμαρτία, ὑπερπερισσεύσῃ ἡ χάρις (Ρωμ. 1. 20). Πρὸς. Θεοδωρ. ἐλλ. παθμ. θεραπ. 5.

3) Βασιλ. ἀγ. πνεῦμ. 15, August. in Ioan. tractat. XXXI. 5.

4) Εἶρ. 4. 1. Γαλατ. 4. 4.

5) Γεν. γ'. 15, Γαλάτ. 4. 4, Εἶρ. β'. 14, Ἰω. γ'. 8.

ρίου θυσίας, ἣν ἔμελλε νὰ προσφέρῃ ἐπὶ τοῦ σταυροῦ ὁ Σω-
τὴρ ὑπὲρ σύμπαντος τοῦ κόσμου²). Καὶ ἀκολούθως δὲ ὁ Θεός,
ἄλλοτε μὲν ἀποκαλυπτόμενος εἰς διάφορα πρόσωπα, ἐπὶ εὐσε-
βεῖα καὶ ἀρετῇ διακρινόμενος³) ἄλλοτε δὲ ἀπειλῶν ἢ τιμωρῶν
ἢ ἐπανοφέρων εἰς τὴν ὁδὸν τῆς εὐσεβείας τοὺς ἀποπλανωμε-
νους διὰ θουμάτων καὶ σημείων⁴), ἐξηκολούθησε νὰ ὁδηγῇ
πάντας πρὸς τὸ ἅγιόν του θέλημα, καὶ νὰ προετοιμάζῃ αὐτοὺς
πρὸς τὴν μέλλουσαν σωτηρίαν. Ἀφ' οὗ ὁμοῦς οὔτε ὁ κατα-
κλυσμός οὔτε ἡ πρὸς τὸν Νῶε ὑπὲρ τοῦ ἀνθρώπου ἀνανεωθείσα
διαθήκη του ἰσχυσαν νὰ ἐπιστρέψωσι τοὺς ἀνθρώπους ἀπὸ τῆς
ὑπερπλεονάσσαν ἀσέβειας καὶ κακίας, τότε ὁ Θεὸς τοὺς μὲν
ἐπιλοίπους ἀνθρώπους ἐγκατέλειπεν, ἐξέλεξε δὲ ἐκ πάντων
τὸν Ἀβραάμ, πρὸς τὸν ὅποιον συνέθετο ἰδίαν διαθήκην, ἥτις
καθίστα αὐτὸν καὶ τοὺς ἀπογόνους του ἀποκλειστικούς φύλα-
κας τῆς εἰς αὐτὸν καὶ τὸν μέλλοντα σωτῆρα πίστεως⁵). Ἐ-
κτοτε τὰ μὲν ἐπιλοιπα ἔθνη ἐβάδισαν τὴν ἰδίαν αὐτῶν ὁδόν⁶),
ἡ δὲ ποτακοταθήκη τῆς εἰς τὸν ἀληθινὸν Θεὸν καὶ μέλλοντα
σωτῆρα πίστεως ἔμεινε διαπεπιστευμένη εἰς χεῖρας τῶν ἀπο-
γόνων τοῦ Ἀβραάμ, τοῦ ἐκλεκτοῦ καὶ περιουσίου λαοῦ τοῦ
Θεοῦ. Ἐκτοτε δὲ καὶ ἡ πρὸς τὴν μέλλουσαν σωτηρίαν προπα-
ρασκευὴ ὑπῆρξεν ἄλλη, ὡς ἦτο ἐπόμενονον, διὰ τοὺς ἐθνικούς,
καὶ ἄλλη διὰ τὸν ἐκλεκτὸν καὶ περιούσιον λαὸν τοῦ Θεοῦ,
τοῦ Ἰσραηλῆος.

§. 6.

Ποία τις ὑπῆρξεν ἡ προπαρσκευὴ τῶν Ἰσραηλιτῶν πρὸς ἀποδοχὴν τοῦ
Σωτῆρος;

Εἰς τὸν περιούσιον λαόν, ὅστις παρήχθη ἐκ τοῦ σπέρματος

2) Γέν. 22, 1. 11—12.

3) Γέν. 8, 0—13, 5. 13—22, 4. 15, 6. 9—12.

4) Τριπλὴ π. χ. ἡ ἀνάληψις τοῦ Ἐνώχ (Γέν. 6, 24), ἡ σύγκλησις τῶν
χωρῶν (Γέν. 12, 1—10), ἡ κατακλυσμὸς (Γέν. 7), κτλ.

5) Γέν. 15, 7—9. 6) Πράξ. 13, 43.

τοῦ εὐσεβοῦς καὶ ἐκλεκτοῦ πατριάρχου Ἀδραάμ, τοὺς Ἰσραηλίτας, ὁ Θεὸς δὲν ἐπαυσε ποτε ἀποστέλλων ἀνδρας, οἵτινες, ὑπὸ τοῦ παναγίου Πνεύματος φωτιζόμενοι, κατήγγελλον τὸ θέλημα τοῦ Θεοῦ καὶ τὴν μέλλουσαν σωτηρίαν¹⁾. Εἰς αὐτὸν δὲ τοῦτον τὸν λαὸν ὁ Θεὸς ἔδωκε διὰ τοῦ Μωϋσῆως καὶ τὸν νόμον, ὅχι ὡς μέσον σωτηρίας, ἀλλὰ ὡς παιδαγωγὸν εἰς Χριστόν²⁾. Καὶ αἰσθητότερον μὲν καὶ ὕλικώτερον προεπαίθετο γαγεῖτο εἰς Χριστόν ὁ Ἰσραηλίτης διὰ τῶν περὶ τὴν λατρείαν τύπων καὶ εἰκόνων, ἐν αἷς προδιετυποῦντο αὐτὸς ὁ Σωτὴρ καὶ τὸ ἔργον του³⁾, ἡθικώτερον δὲ καὶ πνευματικώτερον διὰ τῶν λοιπῶν διατάξεων τοῦ νόμου, τὰς ὁποίας μὴ δυνάμενος νὰ ἐκπληρώσῃ διὰ τὴν ἄκραν ὡς πρὸς τὴν κατάστασίν του αὐστηρότητα, ἐβλεπε καθαρώτερον ὁσμήραι τὴν βάραν τῆς ἡθικῆς καὶ πνευματικῆς ἀδυναμίας καὶ παρακμῆς, εἰς τὸ ὅποιον εἶχε κατακρημνίσῃ αὐτόν ἡ ἁμαρτία, καὶ συνηθάνετο ἐκ μᾶλλον τὴν ἀνάγκην τῆς σωτηρίας, λέγων τὸ τοῦ ἀποστόλου «Οἶδαμεν ὅτι ὁ νόμος πνευματικὸς ἐστὶ· ἐγὼ δὲ σαρκικὸς εἰμι, πεπραμένος ὑπὸ τὴν ἁμαρτίαν... Οὐ γὰρ ὁ θέλω ποιῶ ἀγαθόν, ἀλλ' ὁ οὐ θέλω κακόν, τοῦτο πράσσω. Εἰ δέ, ὁ οὐ θέλω

1) Πρὸλ. §. 8.

2) «Πρὸ τοῦ ἐλθεῖν τὴν πίστιν ὑπὸ νόμον ἐπροουρούμεθα συγκυκλισμένοι εἰς τὴν μέλλουσαν πίστιν ἀποκαλυφθῆναι· ὥστε ὁ νόμος παιδαγωγὸς ἡμῶν γέγονεν εἰς Χριστόν, ἵνα ἐκ πίστεως δικαιοθώμεν· ἐλθοῦσης δὲ τῆς πίστεως, ὥστε ἐπὶ ὑπὸ παιδαγωγόν ἔσμεν». Γαλ. 3—24.

3) Ρωμ. 6'. 28, 8'. 41, Ἐβρ. 9'. 11, 12, 14, 1. 1, Κολοσ. 6'. 17. Πρὸλ. καὶ §. 9. Τοιαύτην προϋποτυπωτικὴν ἔννοιαν εἶχον καὶ γεγονότα τινὰ τῆς παλ. Διαθήκης, εἴτε εἰς τὸν βίον ἐνός προσώπου ἀναφερόμενα, εἴτε εἰς τὴν ἱστορίαν ὁλοκληροῦ τοῦ λαοῦ τῶν Ἰσραηλιτῶν. Ἡ θυσία π. χ. τοῦ Ἰσαὰκ προεικόνιζε τὴν ἐπὶ τοῦ σταυροῦ θυσίαν τοῦ λυτρωτοῦ καὶ τὴν ἀνάστασιν αὐτοῦ (Ἰω. 3. 5, 6) ἡ ἐκείνη τῆς Μελχισεδέκ προϋπαύτου τὴν τοῦ Χριστοῦ (Ἐβρ. 4. 6, 7. 13. καὶ §. 75)· ἡ ἐν τοῖς σπλάγχνοις τοῦ κήτους τριήμερος λιμνὴ τοῦ Ἰωῆ (Ἰω. 4. 17) τὴν τριήμερον ταπὴν αὐτοῦ (Ματθ. 16'. 40). Ὁμοίαν ἔνοιαν εἶχεν ἡ ἐκ τῆς Αἰγύπτου ἔξοδος, ὁ ἀμνὸς τοῦ πάσχα (ἔξοδ. 16'. 46, Ἰω. 16'. 36, 4. Κορ. 1. 7), ἡ διδασκαλία τῆς Βουβαστὶ θαλάσσης, τὸ ἐπομβρίαν μέλαινα, τὸ ἐκ τῆς πέτρας ἐκδύσαν ὕδωρ, ὁ χαλκοῦς ὄφις (Ἰω. 4. 14), κατ.

ἐγώ, τοῦτο ποιῶ, οὐκ εἶ ἐγὼ κατεργάζομαι αὐτό, ἀλλ' ἡ οἰ-
κοῦσα ἐν ἐμοὶ ἁμαρτία... Ταλαίπωρος ἐγὼ ἄνθρωπος! τίς
με ῥύσεται ἐκ τοῦ σώματος τοῦ θανάτου τούτου»⁴⁾; Ὅσω ἐε
μᾶλλον ἐκλήσκει «τὸ πλήρωμα τοῦ χρόνου», τόσω μᾶλλον
καὶ ἡ προπαρασκευὴ αὐτῆ τῶν Ἰσραηλιτῶν ἀπέβαινε συντονω-
τέρα, καὶ μάλιστα ἡ διὰ τῆς π ρ ο φ η τ ε ί α ς, ἐν ᾗ ἡ εἰκὼν
τοῦ Σωτῆρος ἐλάμβανεν ὁσημέραι τύπον καὶ μορφήν μᾶλλον
ὠρισμένην, μέχρις οὗ ἡ μὲν θεόπνευστος γλῶσσα τῶν «βλε-
πόντων» προεικόνισε πιστῶς καὶ λεπτομερῶς τὸν δοκονόμῳ
ἐγγίζοντα Μεσσίαν⁵⁾, ὁ δὲ Ἰωάννης ἐκήρυξε διαρρήθην πλεον
ἀπὸ τῶν ὀχθῶν τοῦ Ἰορδάνου ὅτι προετοιμάζει τὴν ὁδὸν τοῦ
Σωτῆρος, ὅστις ἤδη εἶνε ὀπισθεν αὐτοῦ⁶⁾.

2. 67.

Ποία τις ὑπῆρξεν ἡ προπαρασκευὴ τῶν ἔθνικων πρὸς ἀποδοχὴν τοῦ Σωτῆρος;
Ὅτι καὶ τὰ ἔθνη δὲν ἔμειναν ἀπροπαρασκευάστα ὅλως πρὸς

4) Ῥωμ. ζ'. 14—21, Πρὸλ. γ'. 20. Ὁ μωσαϊκὸς νόμος ἐπέτατε θανατι-
κὴν ποινὴν εἰς ὅλα σχεδὸν τὰ παραπτώματα, μικρὰ καὶ μεγάλα (Ἐξ. δ'. κ'.
15, 23—25, λ'. 14, 26. 19—20, Δευτερον. γ'. 5—10, ε'. 16, ιζ'. 2—5,
ω'. 16—21, κ'. 18—21, κζ', 16, κη.). Καὶ ὁ βαρὺς οὗτος ζυγὸς τοῦ νόμου
καθίστα εἰς τὸν Ἰσραηλίτην εἰ μᾶλλον ἀποδεκτὴν τὴν ἔλευσιν τοῦ προσδοκω-
μένου Σωτῆρος, ἢ διὰ τοῦ νόμου τοῦ πνεύματος τῆς ζωῆς ἐν Χριστῷ Ἰη-
σοῦ, ἐλευθερωθῆ ἀπὸ τοῦ νόμου τῆς ἁμαρτίας καὶ τοῦ θανάτου (Ῥωμ. 4, 2).

5) Κατ' ἀρχὰς καὶ τὸ πρόσωπον καὶ ἡ ἔλευσις τοῦ Μεσσοῦ προειργάζον-
ται ἐν τῇ Π. Δ. ἀμυδρῶς πως καὶ ἀορίστως (οἷον ἐν Γεν. ιδ'. 3, ιθ' 18, κδ',
26—18, κς'. 4, κη. 14, μδ'. 10). Ἀκολουθῶς ἡ ἀοριετία καὶ ἀμυδρότης ἀρ-
χίζει νὰ ἐκλείπῃ, τὰ πράγματα νὰ διευκρινίζωνται, καὶ ἡ μορφή τοῦ Σωτῆρος
νὰ διασαφηνίζεται (Δευτερον. ιθ'. 13—18, ψαλμ. ια', ρθ', Ἠσαϊ. ζ'. 14, ι'. 6,
ιγ'. Ἰερ. κδ'. 23—31, Δανιὴλ θ'. 21—27), μέχρις οὗ βαθμυδὸν ὀρίζεται ὁ
χρόνος τῆς ἐλεύσεώς του (Δαν. θ'. 21—27), Ἀγγαί. δ'. 6—10, Ματθ. γ'. 1),
οἶκος καὶ ἡ πατρίς, ἐξ ἧς μέλλει νὰ γεννηθῇ (δ'. Βασιλ. δ', 16, Ἠσαϊ. ια',
4—3, Ἰερ. κγ'. 5—14, ὁ τόπος (Ματθ. ε. 2) καὶ αἱ λεπτομέρειαι τῆς γεν-
νήσεώς του (ψαλμ. α. 10—11, Ἠσαϊ. ια. 1—3), τοῦ βίου του (Ἠσαϊ. θ.
1—2 κς' 19, λ. 3—6, Ζαχαρ. ι'. 9), τοῦ θανάτου του (ψαλμ. πδ'. 11—12
μ'. 10, κγ'. 21, μθ'. 22, Ζαχαρ. ια. 12—13, ιδ'. 10, Ἠσαϊ. γ'. 7), καὶ
τῆς ἀναστάσεώς του (ψαλμ. θ. 20, Ὀση. ζ'. 3).

6) Ματθ. γ'. 11, Μάρκ. α. 7, Λουκ. γ'. 16, Ἰωάν. α. 27.

τὴν μέλλουσαν σωτηρίαν, μαρτυρεῖ ὅχι μόνον ἡ ἁγία Γραφή, ἀλλὰ καὶ αὐτὴ ἡ ἱστορία. Συνεπτελέσθη δὲ ἡ προπαρασκευὴ τούτων κατὰ διαφόρους τρόπους, καὶ μάλιστα τοὺς ἑξῆς δύο. Ἀφ' οὗ ἡ ἀνθρωπότης, μετὰ τὴν σύγχυσιν τῶν γλωσσῶν, διηρέθη εἰς πολλὰς ομάδας, ἐξ ὧν συναπτετέλεσθησαν τὰ διάφορα ἔθνη, ἕκαστον τούτων ἐβαδισεν ἰδίαν ὁδόν, καὶ ἐμόρφωσεν ἴδιον θρήσκευμα. Ἀλλ' ἐκτός τῶν ψευδῶν τούτων θρησκευμάτων διεσώθησαν, ὡς ὁμυδρά τις ἀρχαίων χρόνων ἀνάμνησις, καὶ λείψανά τινα τῆς ἀρχαίας ἐξ ἀποκαλύψεως θρησκείας, εἰ καὶ πολλογῶς ἡλιokinμένα καὶ διεφθαρμένα²). Ἐκ τούτων δὲ εἶνε καὶ ἡ ἰδέα τῆς πτώσεως τῶν προπατόρων ἡμῶν, καὶ ἡ προσδοκία τοῦ μέλλοντος λυτρωτοῦ καὶ σωτῆρος, ὅστις ἐμελλε νὰ ἀνορθώσῃ ἐκ τῆς πτώσεως ταύτης τὸ ἀνθρώπινον γένος³). Ἐξωγογόνθη δὲ ἡ ἰδέα αὕτη προϊόντος τοῦ χρόνου καὶ ἐκ τῆς πρὸς τοὺς Ἰσραηλίτας κατὰ διαφόρους καιροὺς καὶ τρόπους συνεπιμειξίς τῶν ἐθνῶν⁴), καὶ μάλιστα ἀφ' οὗ μετεφράσθη εἰς τὴν ἐλληνικὴν γλῶσσαν ὑπὸ τῶν ἐβδομήκοντα ἢ παλαιὰ Διαθήκῃ⁵). Ἀλλὰ καὶ διὰ τοῦ φυσικοῦ τῶν λόγου ἔ-

1) Παράδειγμα ἔστω ἡ εὐσέβεια τοῦ Μελχισεδέκ (Γενεσ. 14, 18), τοῦ Ἰωβάρ, πενθεροῦ τοῦ Μωϋσέως (ἐξοδ. 6', 8', 14), ἡ περὶ Μεσσία προφητεία τοῦ Βαλαάμ (ἀριθμ. 23', — 24'), ἡ πίστις Νεμεάν τοῦ Σύρου (2'. Βασίλ. 3), καὶ ἡ μετένοια τῶν κατοικῶν τῆς Νινευὶ μετὰ τὸ κήρυγμα τοῦ Ἰωῆλ (ἰων. 3)

2) Ἰδ. § 7.

3) Tacit. Annal. VI 12, Histor. V. 13, Sueton. Nero 40, Vespasian. 2, 5 August. 94, Ἰωσήφ. Ιουδαϊκ. πόλεμ. γ'. 14, 27, ε'. 5, 31, ζ'. 42, Εὐσεβ. ἐκκλ. ἱστορ. γ' 8

4) Οἶον τῶν Αἰγυπτίων κατὰ τὴν ἐν Αἰγύπτῳ διαμονὴν τῶν Ἰσραηλιτῶν, τῶν διαφόρων περιούτων ἀραβικῶν καὶ σημιτικῶν ἐν γένει φύλων κατὰ τὴν κατὰ τὴν Περσίαν καὶ μετ' αὐτὴν (Ἰητ. Ναυ. 6', 9—11, 1. 1, Ροῦθ 4 16), ἰδίως δὲ τῶν Χαλδαίων, Σύρων, Μήδων, Περσῶν, Ἑλλήνων καὶ Ρωμαίων (γ'. Βασίλ. 6'. 26—28, 1. 22, 6'. Παραλειπ. 1. 17, 18, 6'. 10—11 κλπ.). Ἐπεὶ δὲ μάλλον ἡμίχθη αὕτη ἐπὶ τῆς Ἀσσυριακῆς καὶ Βαβυλωνιακῆς αἰχμαλωσίας καὶ μετ' αὐτὴν. Ποθλ. καὶ Μ. Ἀθελ. Ἐννεήρωι 65.

5) Ἡ μετάφρασις αὕτη ἐγένετο ὑπὸ 72 ἑλληνηστῶν Ἑβραίων ἐπέκρινται 72, ἑκατονταετη (ἴδου πρὸ Χριστοῦ). Ὀνομάζεται δὲ ἡ μετάφρασις αὕτη «τῶν ἐβδομήκοντα» καὶ ὅχι «τῶν ἐβδομήκοντα δύο», διὰ τὸ ἀστρογύλον τοῦ ἀριθμοῦ

φθασαν πολλάκις εἰς τὴν ἰδέαν ταύτην οἱ ἔθνικοί, διότι οἱ ἐπιστημέτατοι τῶν περ' αὐτοῖς φιλοσόφων ἐκήρυξαν πολλάκις, ὅτι ὁ ἄνθρωπος εἶνε ἀνίκανος νὰ γνωρίσῃ οἰκοθεν τὸν Θεόν, καὶ νὰ πράξῃ τὸ ἀγαθόν, καὶ ὅτι ἄρα εἶνε ἀνάγκη νὰ ἔλθῃ αὐτὸς ὁ Θεὸς εἰς ἀντίληψιν αὐτοῦ καὶ βοήθειαν αὐτοῦ.

Καὶ κατ' ἄλλον δὲ λόγον προπαρεσκευάζον τὰ ἔθνη πρὸς τὸν μέλλοντα σωτῆρα τὰ ψευδῆ ταῦτα θρησκευματα καὶ ἡ θύραθεν αὐτῶν σοφία, τὸν ἐξῆς. Καθ' ὅσον ὁ φυσικὸς λόγος τῶν ἔθνων ἀνεπτύσσετο καὶ ὠρίμαζεν ἡ κρίσις αὐτῶν, τὰ θρησκευματα ταῦτα κατέπιπτον τοῦ ἐν κατόπιν τοῦ ἄλλου, καὶ τὸν τόπον αὐτῶν ἐπὶ τέλους κατέλαθεν ἐν μέρει⁶⁾ παρὰ τοῖς Ἕλλησι καὶ Ῥωμαίοις ἡ φιλοσοφία, ἥτις καὶ μάλιστα συνετέλεσεν εἰς τὴν πτώσιν αὐτῶν. Ἀλλὰ καὶ ἡ φιλοσοφία δὲν κατώρθωσε νὰ σώσῃ τὸν ἄνθρωπον ἐκ τῆς ἀγνοίας αὐτοῦ καὶ ἀσεβείας, διότι καὶ τὰ φιλοσοφικά συστήματα εἶχον ἐπὶ τέλους καταπέσῃ δλα σχεδόν, τὸ ἐν κατόπιν τοῦ ἄλλου⁸⁾, καὶ τὰ ἔθνη ἔμειναν τοιοῦ-

6) Μέλισσος ὁ Σάμιος παρὰ Διογέ. Λαερτ. θ'. 4, Σωκράτης παρὰ Ξενοφ. ἀπομνημον. δ'. 43, καὶ παρὰ Πλάτωνι ἐν Ἀλκιβιάδῃ κλπ., Πλάτων ἐν Φαίδωνι, Ἐπιμενίδῃ ἀπολογ. Σωκράτ., Νόμ. θ', κλπ., Senec. de clement. I, 6, Ἰάμβλιχ. ἐν β' ψ. Πυθαγόρ. κή. κλπ.

7) Ἐν μέρει λέγομεν, διότι τοῦτο ἀληθεύει κυρίως περὶ τῶν ἀνωτέρων καὶ πολλῶν ἀνεπτυγμένων τάξεων τῆς Ἑλληνικῆς καὶ Ῥωμαϊκῆς κοινωνίας, καὶ τῶν κατοικῶν τῶν πόλεων. Ὁ δὲ ὅλος καὶ οἱ χωρικοὶ ἐτήρουν καὶ τότε καὶ μετὰ ταῦτα ἐπὶ μακρὸν χρόνον τὴν πατροπαράδοτον πολυθεϊάν ἢ δεισιδαιμονίαν ὡς ἦν καὶ τὸ ὄνομα χωρικός (paganus, γαλλ. païen) ἀπέβη ἐν τῇ Δύσει συνώνυμον τῇ ἑθνικῇ—μὴ χριστιανῇ (κατὰ τὴν εὐρύτεραν ἔννοιαν τοῦ χριστιανισμοῦ, τὴν συμπεριλαμβανούσαν καὶ τὸν πρὸ Χριστοῦ Ἰουδαϊσμόν). Ἀλλ' ἡ δεισιδαιμονία αὕτη, ἀνταξία τῆς ἀδελφῆς αὐτῆς ἀθείας, δὲν ἀφ' ἧς, ὡς οἰκοθεν ἐννοεῖται, τὸ ἐν τῇ κειμένῃ λεγόμενον.

8) Ἡ μόνη τότε ἀκόμη ὀρθῇ μένουσα καὶ ὑπονοητὴν εἶχε λόγου φιλοσοφία ἦτο ἡ τῶν ἐκ τῆς νεωτέρας Στωικῆς σχολῆς. Ἀλλὰ ποῦ ἀπέληξεν ἐπὶ τέλους καὶ ἡ φιλοσοφία αὕτη; Θεωρητικῶς μὲν εἰς οὐσίην καὶ ἀλαζονίαν ἐωσφορικὴν, ἡ μάλιστα εἰπεῖν ἐτι χείρονα, διότι οἱ στωικοὶ οὗτοι ἐπὶ τέλους ἐκήρυξαν ἑαυτοὺς καὶ αὐτοῦ τοῦ Θεοῦ ἀνωτέρους (Senec. de provident. VI, epist. 72), πρακτικῶς δὲ εἰς τί ἄλλο, εἰμὴ εἰς τὴν αὐτοχειρίαν, τὴν ὑποίαν καὶ εἰδωκότων (Senec. Epist. 70, 417 κλπ.), καὶ κατετόλμων πολλοὶ τινες κατὰ τοῦ χρόνου τούτου, ὡς μᾶς διδάσκει ἡ ἱστορία;

τοτρόπως πλανώμενα «ἐν σκότει καὶ σκιᾷ θανάτου.» Τοῦτο δὲ μάλιστα συνέβη ἐπὶ τῶν τελευταίων χρόνων τῆς ῥωμαϊκῆς δημοκρατίας καὶ ἐκορυφώθη ἐπὶ τοῦ αὐτοκράτορος Αὐγούστου καὶ ἐφεξῆς. Ἡ Ῥώμη εἶχε καθυποτάξῃ ὁλόκληρον τὸν τότε γνωστὸν καὶ πολιτισμένον κόσμον, συμπεριλαμβανομένης καὶ αὐτῆς τῆς Παλαιστίνης. Ὅπως δὲ εἶχε συνενώσῃ ὅλα τὰ ἔθνη ὑπὸ τὸ σιδηροῦν τῆς σκῆπτρον, οὕτως εἶχε συγχωνεύσῃ καὶ εἰς τὸ Καπιτώλιον ὅλας σχεδὸν τὰς θεότητας τοῦ κατακτηθέντος κόσμου. Τοιοῦτοτρόπως ἡ Ῥώμη καὶ μετὰ τῆς Ῥώμης ὁ κόσμος ἐπρέσβευεν ὀνόματι ὅλα τὰ θρησκευόμενα, χωρὶς νὰ πρὸςβῃ πρᾶγματι κανέν ἐξ αὐτῶν⁹⁾. Τῆς δὲ τοιαύτης θρησκευτικῆς πολυαρχίας καὶ πολυθείας συνέπεια φυσικὴ καὶ ἀναπόφευκτος ὑπῆρξεν ἡ θρησκευτικὴ ἀναρχία καὶ ἀθεία¹⁰⁾, καὶ ταύτης καρπὸς ἡ ἡθικὴ διαφθορὰ καὶ ἐξαχρείωσις τοῦ ἀνθρώπου γένους, ἥτις καὶ εἶχε τῶνόντι φθάσῃ εἰς τὸ ἐπαχρον¹¹⁾.

9) Macrobi III. 9, Minucius Felix in Octavio, Παυσαν. α. 8, β'. 43, ζ' 21, ι. 32, Στραβ. ιζ', Διον. Ἀλικαρν. Ῥωμ. ἀρχαιολ. β. 3, Tit. Liv. IV. 30, XXV. 4, XXXIX. 10, 41, XXXIX. 16, Cicer. pro Balb. 24, de legib. II. 8, Servius ad Aeneid. VIII. 487, Valer Maxim. I. 23, κλπ.

40) καὶ ἡ δεισιδαιμονία. Ἡ Ῥώμη μάλιστα, ὡς γνωστὸν, ἦτο «ἐπιτομή πάσης δεισιδαιμονίας». Ἐὰν δὲ κατὰ τοὺς χρόνους τούτους εὐδαιμονία ἀνατολικὰ μάλιστα τινὰ θρησκευόμενα, τοῦτο ὀφείλεται μόνον καὶ μόνον εἰς τὴν περὶ αὐτὰ ἀάλαστον καὶ αἰσχροὴν λατρείαν. Μέρους τοῦ λεγομένου ἔστω ἡ λατρεία τῆς Σορίας Θεᾶς, τῆς Ἰσίδος, κτλ. κτλ. Ἐκορυφώθη δὲ ἡ θρησκευτικὴ αὐτὴ ἀθεία ἡ δεισιδαιμονία (ὅστις ἀμφοτέρω εἶνε συμφυῆ καὶ συνάδελφα) εἰς τὴν ἀποθέωσιν τῶν Καيسάρων, ἀποθέωσιν πλήρη καὶ τελείαν, ἀφ' οὗ οὕτως οἱ νοοῦντες ὡς γνωστὸν, οὕτως οἱ ἱερεῖς ἔλειπον ἐκ τῆς περὶ τοῦ Καيسάρως θρησκευτικῆς ταύτης λατρείας.

41) Ἡ ἐθνικὴ διαφθορὰ εἶχε κατακλύσῃ ὁλόκληρον τὸν δημόσιον καὶ ἰδιωτικὸν βίον. Ὁ γὰμος εἶχεν ἀποβῆλῃ πᾶσαν ἱερότητα καὶ νομιμότητα, ἡ δὲ ἀγάμη εἶχε κατακυριεύσῃ τὸσον τὴν κοινωνίαν, ὥστε ἡ πολιτεία ἠναγκάσθη νὰ θεσπίσῃ, εἰ καὶ μεταίως, ὡς ἦτο ἐπόμενον, δρακοντίους νόμους κατ' αὐτῆς. Ἡ γυνή, ἡ σεμνοτάτη ἄλλοτε καὶ αὐστηροτάτων ἡθῶν ῥωμαία δέσποινα (matrona), εἶχεν ἀποπτύσῃ πάντα χαλινὸν αἰδοῦς καὶ σεμνότητος· τὰ θεάτρα παρεῖχον τὴν βίαν ῥικιῶδους ἀνθρωποκτονίας, ἡ ἐχορτίσμευον ὡς καταγνώμην ἀκατονόμαστον αἰσχρότητας· καὶ αὕτη δὲ ἡ καλλιτεχνία εἶχεν ἐξαχρειωθῇ, καὶ ἡ αἰσχρογραφία ἐπ' ἡμέρῃ καὶ αὐτὰς τὰς οἰκίας τῶν ἰδιωτῶν, ὅπως πλὴν ἄλλ.

καὶ οὕτε ὑπῆρχέ που σωτηρία, οὕτε ἠλπίζετο¹²). Μόνον δὲ οἱ ἄνθρωποι ἐκεῖνοι, εἰς ὧν τὰς καρδίας εἶχε διασωθῆ ἔναυσμά-
τι μικρὸν φυσικῆς ἀρετῆς καὶ εὐσεβείας, βλέποντες τὴν ἀν-
θρωπότητα βεβυθισμένην εἰς τὸν βόρβορον πάσης διαφθορᾶς
καὶ ἀκολασίας, συνχυσθάνοντο μετὰ θλίψεως ὅτι ἦτο ἀδύνατον
πλέον νὰ ἐγερθῇ ἡ ἀνθρωπότης ἐκ τοῦ βορβόρου ἐκείνου εἰκο-
θεν καὶ νὰ ἐρθοποδήσῃ, ὅθεν καὶ στρέφοντες ἀηλπισμένα
βλέμματα πρὸς τὸν οὐρανὸν ἐπεκαλοῦντο καὶ προσεδόκων τὴν
ἀρωγὴν καὶ βοήθειαν ἀνωτέρας τινὸς ἀγνώστου δυνάμεως¹³).

Τὸ πλήρωμα τοῦ χρόνου λοιπὸν εἶχε φθάσῃ, ἥτο καιρὸς
πλέον νὰ ἔλθῃ ὁ Σωτὴρ τοῦ κόσμου. Καὶ τῶνόντι, καθ' ὃν χρό-
νον ὁ μὲν ῥωμαϊκὸς κόσμος, γυμνὸς τοῦ φωτὸς τῆς ἀποκαλύ-
ψεως, ἐπεκαλεῖτο ἀπελπίς καὶ ὀρμεμφύτως τὴν ἐξ ὕψους βοή-
θειαν, ὁ δὲ Ἰουδαϊκὸς, προπαρασκευασμένος κάλλιον διὰ τῆς
θείας ἀποκαλύψεως, ἐκράτει εἰς τὴν χεῖρα τὴν δαδα τῆς θεο-
πνεύσου προφητείας, καὶ προσεδόκα ὁσονούπω τὸν Μεσσίαν,
τὸν ἐπηγγελημένον αὐτοῦ σωτῆρα καὶ λυτρωτὴν, εἰς μίαν ἀ-
φανῆ καὶ ἄσημον γωνίαν τοῦ ἀχανοῦς ῥωμαϊκοῦ κράτους, ἐν
τῷ σπηλαίῳ τῆς Βηθλεέμ, ἐπερατοῦτο τὸ ὑπερφυῖς καὶ ἀρρή-
τον μυστήριον τῆς θείας ἐνανθρωπήσεως, καὶ ἐν τῇ φάτνῃ τῶν

ἰων, μαρτοροῦσιν αὐτὰ τὰ ἐκ τῶν ἀνασκαφῶν τῆς Πομποίας τοιχογραφήματα.
Ἡ διαφθορά δὲ αὕτη ἦτο κορία ὅλων τῶν τάξεων τῆς κοινωνίας ἀπὸ τοῦ δού-
λου καὶ ἀπελευθέρου μέχρι τοῦ συγκλητικοῦ καὶ τοῦ αὐτοκράτορος. ¹²δ. περὶ
τούτου ἐν ἐκτάσει πᾶσαν ἐν γένει ἱστορίαν τῶν χρόνων τούτων τῆς Ῥωμαϊκῆς
κοσμοκρατίας.

¹²) Ἡ ἀπελπίσις ἦτο αἶσθημα κοινότατον κατὰ τοὺς χρόνους τούτους (¹²δ.
πλὴν ἄλλων Πλινίου τοῦ νεωτέρου epist. VII, 4, 7, 51, κλπ.), καθὼς καὶ ἡ
ἐπιθυμία τοῦ θανάτου καὶ ἡ αὐτοχειρία (Lucan. Pharsal. VI. Senec. ad Mar-
tium Consol. 22, epist. 2, 30, 70, 77, Tacit. Annal. VI 26, XI 37, XVI
26, Sueton. de Rhetor. VI, Plin. Epist. I 42, VI 24. Πρὸς. καὶ τὸ τοῦ
ἀποστόλου β'. Κορ. ζ'. 10—11, « ἡ γὰρ κατὰ Θεὸν λύπη μετάνοιζεν εἰς σω-
τηρίαν ἀμεταμέλητον κατεργάζεται, ἡ δὲ τοῦ κόσμου λύπη θάνατον κατεργά-
ζεται » ὅπερ βεβαίως δὲν εἶνε οὐδ' ἱστορικῶς ἀσχετον πρὸς τὸν τότε κόσμον.

¹³) Τοῦτο μαρτυροῦσι καὶ αὐτοὶ οἱ ἔθνικοι ποιηταὶ (μέλειτα ὁ Βιργίλιος)
καὶ συγγραφεῖς τῶν χρόνων τούτων. ¹³δ. πλὴν ἄλλων καὶ Τάσιτον, Σοσητῶ-
νιν καὶ Ἰώστηπον ἐνθα ἀνωτέρω (σημ. 3).

ἁλόγων ἐσπαργανοῦτο ὑπὸ χειρῶν ἀνθρωπίνων Ἐκεῖνος, ὅστις
ἐμελλε νὰ σώσῃ τὸν κόσμον.

§. 18.

Ποῦτον εἶπε τὸ δεῦτερον ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως καὶ τί μᾶς δι-
δάσκει;

Τὸ δεῦτερον ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως εἶνε τὸ ἐ-
ξῆς: «καὶ εἰς ἓνα Κύριον Ἰησοῦν Χριστόν, τὸν υἱὸν τοῦ
Θεοῦ, τὸν μονογενῆ, τὸν ἐκ τοῦ Πατρὸς γεννηθέντα πρὸ πάν-
των τῶν αἰώνων, ὧς ἐκ φωτός, Θεὸν ἀληθινόν ἐκ Θεοῦ ἀ-
ληθινοῦ γεννηθέντα, οὐ ποιηθέντα, ὁμοούσιον τῷ Πατρί, δι'
οὗ τὰ πάντα ἐγένετο.»

Μᾶς διδάσκει δὲ τὸ ἄρθρον τοῦτο καὶ τὰ ἐπόμενα μέχρι τοῦ
ζ', περὶ τοῦ Υἱοῦ καὶ λόγου τοῦ Θεοῦ α.) ὡς τοῦ δευτέρου προ-
σώπου τῆς ἁγίας Τριάδος, καὶ β.) ὡς σωτῆρος καὶ λυτρωτοῦ
τῶν ἀνθρώπων, καθ' ὃ προσείπομεν¹⁾. Καὶ τοῦτο μὲν τὸ δεύ-
τερον εἶνε τὸ θέμα τῶν ἐπομένων ἄρθρων, τὸ δὲ παρὲν ἄρθρον
μᾶς διδάσκει ἰδίως περὶ τοῦ Υἱοῦ καὶ Λόγου τοῦ Θεοῦ, ὡς τοῦ
δευτέρου προσώπου τῆς ἁγίας Τριάδος. Ἐπειδὴ δὲ περὶ τῆς
φύσεως καὶ περὶ τῶν ιδιωμάτων τοῦ δευτέρου τούτου
προσώπου τῆς ἁγίας Τριάδος ἐρρήθησαν προλαβόντως τὰ δέ-
οντα²⁾, ἐπισημειοῦμεν ἐνταῦθα τὰ ἐξῆς ἱστορικώτερα καὶ ἐπε-
ξηγηματικώτερα.

Τὸ δεῦτερον δηλονότι τοῦτο ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πί-
στεως προσεκάλεσεν ἡ αἵρεσις τοῦ δυσσεβοῦς Ἀρειοῦ, ἕνεκα τῆς
ὁποίας καὶ συνεκροτήθη ἡ πρώτη ἐν Νικαίᾳ οἰκουμένη ἐκκλησία
δ. 3. Ὁ Ἀρειὸς εἶπεν ὅτι τὸ δεῦτερον πρόσωπον τῆς ἁγίας
τριάδος, ὁ Υἱός, ἐν εἶνῃ ὁμοούσιος, ἦτοι τῆς αὐτῆς οὐσίας
καὶ φύσεως, μετὰ τὸν Πατέρα, ἀλλ' ὅτι ὁ Πατὴρ ἐποίησεν αὐτόν,
ὅπως καὶ τὰ λοιπὰ κτίσματα, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι τὸ
κτίσμα τοῦτο, ὁ Υἱός, ἐποιήθη ὑπὸ τοῦ Πατρὸς «πρὸ τῶν αἰώ-

νων », ἤτοι πρὶν ποιηθῶσιν οἱ αἰῶνες⁴), διὰ τὸ ὅποιον καί, κατ' αὐτόν, ὁ Υἱὸς ὠνομάσθη «πρωτότοκος πάσης κτίσεως»⁵). Ἡ βλάβη αὐτῆς αἵρεσις⁶) κατεδικάσθη ὑπὸ τῆς ἐν Νικαίᾳ οἰκουμένης Συνόδου, καὶ ὁ Ἄρειος αὐτὸς ἀναθεματίσθη ὡς αἵρετικός. Ὅθεν καὶ πρὸς στήριξιν τῆς ὀρθοδόξου πίστεως ἡ Σύνοδος συνέταξε τὸ β'. τοῦτο ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως, ὅποιον τὸ παρελάβομεν, δογματίσασα, ὅτι ὁ Υἱὸς εἶνε «ὁμοούσιος» μὲ τὸν Πατέρα, τουτέστιν ὅτι εἶνε θεὸς καθ' ὅλην τὴν ἑκτασιν τῆς ἐννοίας τῆς λέξεως⁷), ὅτι δὲν ἐποιήθη, ἤτοι δὲν ἐκτίσθη, ὑπὸ τοῦ Πατρὸς πρὸ τῶν αἰώνων, ἀλλ' ὅτι ἐγεννήθη⁸) ἐξ αὐτοῦ πρὸ τῶν αἰώνων, Θεὸς ἀληθινὸς ἐκ Θεοῦ ἀληθινοῦ, οἷα φῶς γεννηθὲν ἐκ φωτός⁹),

4) Ἦται ὁ χρόνος, καὶ οἱ ἐν χρόνῳ ποιηθέντες κόσμοι.

5) Ἡ φράσις αὕτη δὲν ἔχει τὴν ἔννοιαν, ἣν ἀπέδωκεν ὁ Ἄρειος εἰς τὸ χωρίον τῆς γραφῆς, ἐξ ἧς ἐλήφθη (Κολ. α' 15: «ὁ ἐστὶν εἰκὼν τοῦ Θεοῦ τοῦ ἀοράτου, πρωτότοκος πάσης κτίσεως»), διαστρέφων αὐτὸ Πρωτότοκος τῆς κτίσεως λέγεται ὁ Κύριος ἡμῶν Ἰ. Χριστός, ὡς πρωτότοκος γενόμενος ἐν τῇ καινῇ κτίσει, τῇ δὲ αὐτοῦ ἀναπλασθεῖσθαι (§. 79). Ἀποδείξεις δὲ τοῦτου ἀναντιρρήτοι, ὅτι ὁ αὐτὸς Ἀπόστολος ἐν τῇ αὐτῇ χωρίῳ, ὀλίγον κατωτέρω (Κολ. α' 18) λέγει περὶ τοῦ αὐτοῦ Ἰ. Χριστοῦ «πρωτότοκος ἐκ τῶν νεκρῶν». Πρβλ. Γρηγόρ. Νύσσα. κ. Εὐνομ. λόγ. δ', Οἰκουμέν. εἰς τὸ χωρίον, σελ. 263 ἐκδ. Φαρμάκ.

6) Κατ' ἄλλον τρόπον ἤρουντο τὴν θεότητα τοῦ Ι. Χ., ὡς εἶδομεν, θεωροῦντες αὐτόν ὡς φίλον ἄνθρωπον, καθόλου εἶπε, οἱ Ἕθιονται καὶ οἱ περὶ τὸν Κήρινθον (§. 35, σημ. 7), οἱ περὶ τὸν Καρποκράτην, Θεόδοτον, Ἀρτέμωνα (§. 35, σημ. 6, ἐ. κλπ.), καὶ οἱ περὶ τὸν Σαμοσατέα Παῦλον. Οἱ δὲ μοναρχικοί, ἡ πατροπαλιτοί (§. 35, σημ. 12) ἐξέτεινον τὴν ἐνανθρώπησιν καὶ τὸ πάθος τοῦ Υἱοῦ καὶ εἰς τὸν Πατέρα (ὅθεν καὶ ἡ ὀνομασία), καὶ εἰς ὁλόκληρον ἐν γένει τὴν Τριάδα, ἐννοοῦντες ὁμοῦ τὰ τρία πρόσωπα ὡς τρεῖς ὀνομασίαι μόνον ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ τριωνύμου Θεοῦ.

7) «Ἐγὼ καὶ ὁ πατὴρ ἐν ἑμῶν» Ἰω. Ι. 30, Πρβλ. Ἰω. α' Ι. ζ', 58, ιδ' 9, 40.

8) Τὴν ἄχρονον καὶ αἰδίον καὶ ἀμεσίτευτον καὶ παντὸς λόγου καὶ νοῦ κρείττονα πρόσωπον τοῦ Χριστοῦ ἀπὸ πατρὸς γέννησιν καλοῦσιν αἱ γραφαί, οὐχ ἵνα πάθος ὑπογράψωσιν, ἀλλ' ἵνα τὸ ὁμοούσιον στηῶσιν. Ὁμοούσιον γὰρ τῶν τῶν τὰ τιτλούμενα τοῖς τρεῖς αἰῶσι. Ἰσίδωρ Πηλοῦς ἐπιστ. ρη'.

9) «Ἐστὶ γὰρ Κύριος φῶς αἰώνιον» Ἠσαΐ. ξ'. 19 καὶ «ἐγὼ εἰμι τὸ φῶς τοῦ κόσμου» Ἰω. ι'. 12, πρβλ. Ἰω. α' 5, 9, 0', 5, ιδ' 46.

αὶ ὅτι διὰ τοῦ τοῦ τοῦ Υἱοῦ καὶ λόγου τοῦ Θεοῦ ἐκτίσθη
ὑπὸ τοῦ Πατρὸς ὁ κόσμος¹⁰⁾).

§. 69.

Ποίαν ἔννοιαν ἔχουσιν αἱ κατὰ μέρος λέξεις τοῦ β'. ἄρθρου;

Κύριος λέγεται ἐν τῷ ἄρθρῳ τούτῳ ὁ Υἱός, ὡς ἀληθινὸς Θεός, διότι ἐν τῇ ἀγίᾳ Γραφῇ διὰ τούτου συνήθως τοῦ ἐπιθέτου καλεῖται ὁ Θεός διὰ τὴν παντοκρατορικὴν αὐτοῦ κυριαρχίαν. Ἰησοῦς δὲ ὠνομάσθη ὁ Υἱός, ἀφ' οὗ ἐσαρκώθη, μετὰ τὴν περιτομήν, καθ' ἣν προεῖπεν ὁ ἄγγελος¹⁾, καὶ σημαίνει ἡ ἐβραϊκὴ αὐτῇ λέξις σωτήρ, διότι τοῦτο καὶ ἦτο ὁ σκοπὸς τοῦ ἐνανθρωπήσαντος υἱοῦ καὶ Λόγου, νὰ σώσῃ τὸν κόσμον. Ἡ δὲ λέξις Χριστός εἶνε ἐλληνικὴ, καὶ σημαίνει ὁ,τι καὶ ἡ ἐβραϊκὴ Μεσσίας, ἥτοι χρισμένος. Χρισοὶ δὲ ἐλέγοντο κατὰ τὸν παλαιὸν νόμον οἱ ἱερεῖς, οἱ βασιλεῖς καὶ οἱ προφῆται διὰ τὴν θεόθεν αὐτῶν ἐκλογὴν, καὶ διότι χριόμενοι ἐξ ἐλαίου ἐνίσχυνοντο ἄνωθεν εἰς τὸ ἔργον τῆς διακονίας των²⁾. Καὶ ὁ Ἰησοῦς δὲ ἀπεκάλεσεν ἑαυτὸν χριστόν³⁾, διότι ἐχρίσθη ὅχι διὰ τοῦ κοινοῦ χρίσματος τοῦ νόμου, ἀλλ' ἐκ Πνεύματος ἁγίου

10) «Πάντα δι' αὐτοῦ ἐγένετο καὶ χωρὶς αὐτοῦ ἐγένετο οὐδὲ ἓν ὃ γέγονεν». Ἰω. ἀ. 3. Πρβλ. ἐ. 26, ἡ. 12, θ'. 5, ιβ'. 46, γ'. 9, Κολ. ἀ. 17, Ἑβρ. ἀ. 2, ἀ. Ἰω. ἐ. 41.

4) Μαθ. ἀ. 21.

2) Οἱ ἱερεῖς: (Ἐξοδ. κη. 44, Λευιτ. δ'. 3, 5, Ἀριθμ. λθ. 24, ἀ. παραλειπ. κ'. 22, Δαν. θ'. 26, β'. Μακκαβ. ἀ. 19), οἱ προφῆται (γ'. Βασιλ. ιθ'. 16, Ἰσαΐ μβ. 4) οἱ βασιλεῖς: (ἀ. Βασιλ. ι. 4, ια. 15, ις'. 1, 3, β'. Βασιλ. β. 4, γ'. Βασιλ. ἀ. 39, ιθ'. 16, δ'. Βασιλ. θ'. 3, 6, 12, β'. παραλειπ. λς'. 4). Διὰ τοῦτο καὶ οἱ βασιλεῖς ἐπεκαλοῦντο «χριστοὶ» ἢ «χριστοὶ Κυρίου»: (ἀ. Βασιλ. ιβ'. 3, 5, κδ'. 7, κς'. 9, ις'. 23, β'. Βασιλ. ἀ. 16, ιθ'. 22, Σοφ. Σειράχ μς'. 49, Ἠσαΐ μέ. 4).

3) «Ὅτε ἀνοίξας τὴν Π. Δ. καὶ ἀναγνούς: τὸ χωρίον τοῦ Ἠσαΐου (μβ'. 7) «πνεῦμα Κυρίου ἐπ' ἐμέ, οὗ ἔνεκεν ἔχρισέ με κτλ.», καὶ κλείσας τὸ βιβλίον καὶ καθίσας εἶπε πρὸς τοὺς ἀκούοντας: «Σήμερον πεπλήρωται ἡ γραφὴ αὕτη ἐν τοῖς ὠτίν ὑμῶν (Λουκ. δ'. 48).

καὶ ὑπὲρ πάντας τοὺς κατὰ τὸν νόμον χρισθέντας⁴⁾. Ἐλαβε δὲ διὰ τοῦ τοιούτου χρίσματος ὁ Ἰησοῦς κατ' ἐξαίρετον καὶ ὑπέροχον τρόπον τὰ τρία ταῦτα μεγάλα ἀξιώματα τῆς χρίσεως, τὴν προφητείαν, τὴν ἱερωσύνην καὶ τὴν βασιλείαν⁵⁾. Τὴν προφητείαν, διότι αὐτός, ἀνώτερος καὶ ὑπέρτερος παντὸς προφήτου, προεῖπεν οἴκοθεν καὶ ὄχι ἐξ ἀποκαλύψεως τὰ μέλλοντα, ἐπειδὴ τὸ Πνεῦμα τὸ ἅγιον κατελθὼν ἔμεινεν ἐπ' αὐτοῦ⁶⁾, καὶ ἐκήρυξεν εἰς πάντας τὸ εὐαγγέλιον τῆς χάριτος⁷⁾· τὴν ἱερωσύνην, διότι ὡς μέγας ἀρχιερεὺς προσήνεγκεν ἑαυτὸν ἐπὶ τοῦ

4) «Ἠγάπησας δικαιοσύνην καὶ ἐμίσησας ἀνομίαν, διὰ τοῦτο ἔχρισέ σε, ὁ Θεός, ὁ Θεός σου ἔλαιον ἀγαλλιάσεως παρὰ τοὺς μετόχους σου.» (ψαλμ. μδ'. 9). Χριστός καλεῖται ἦδη ἐν τῇ Π. Δ. (ψαλμ. β'. 2, Δαν. θ'. 24—27). Καλεῖται δὲ ὁ Ἰ. Χ. καὶ ἄλλως ἐν τῇ ἀγίᾳ Γραφῇ, ὡς «υἱὸς ἀνθρώπου» (Δαν. ζ'. 13, 14), οὕτω δὲ καλεῖ καὶ αὐτὸς ἑαυτὸν (Ἰω. α. 51, γ'. 14, ε. 27, ς'. 27, 63, Ματθ. ζ. 20, ιδ'. 32, 40, κς'. 63, Λουκ. ε. 24, ς'. 5, 22, κτλ.), «δεύτερος Ἀδάμ» (Ῥωμ. ε. α. Κορ. ιε. 45) «ὁ ἐρχόμενος» (Λουκ. ζ'. 19, Ματθ. ια. 3, Ἰω. ς'. 14), «ἐλπίς τοῦ Ἰσραὴλ» (Πράξ. κη'. 26), «παράκλησις τοῦ Ἰσραὴλ» (Λουκ. β'. 25, 26), «σωτὴρ Ἰσραὴλ» (Λουκ. β'. 10, 11), «βασιλεὺς τοῦ Ἰσραὴλ» (Ἰω. α. 51, ιδ'. 13, Ματθ. κς'. 27), «δόξα λαοῦ Ἰσραὴλ» (Λουκ. β'. 32), «ὁ ῥυόμενος» (Ἡσαϊ. νθ'. 20, Ῥωμ. ια. 26, Ἰωδ. 25), «σωτὴρ» (Λουκ. β'. 11, Πράξ. ε. 31, ιγ'. 23, ς'. Πέτρ. α. 1, ς'. 20, Τιμ. β'. 11, 13), «μεσίτης» (α. Τιμ. β'. 15, Ἑβρ. θ'. 16, ιδ'. 24), «ἀρχηγός τῆς ζωῆς» (Πράξ. γ'. 15), «φῶς» (Ἡσαϊ. μδ'. 6, 7, μθ'. 6, ξ'. 4, Λουκ. β'. 32, Ἰω. α.), «πρωτότοκος πάσης κτίσεως» (Κολ. α. 15, Ἑβρ. α. 9, ψαλμ. πη'. 27), «πρωτότοκος» (Ἑβρ. α. 6, 9, Ῥωμ. ζ. 29, ψαλμ. β'. ρθ', νη'. 27), «υἱὸς Θεοῦ» (ψαλμ. β'. 7, ς'. Βασιλ. ζ'. 44, Ματθ. γ'. 16, ις'. 16, Λουκ. α. 31, δ'. 44, κβ'. 26, 70, Ἰω. α. 50, Ἑβρ. α.) «ἐκλεκτός τοῦ Θεοῦ» (Λουκ. κγ'. 35), «ἀγαπημένος τοῦ Θεοῦ» (Ἑφ. α. 6, Κουλ. α. 13), «ἅγιος τοῦ Θεοῦ» (Μαρκ. α. 24, Ἀποκάλ. γ'. 7), «Βυμνανουήλ» (Ἡσαϊ ζ'. 14, Ματθ. α. 23), «ἐκλεκτός» (Λουκ. α. 78, Ζαχαρ. γ'. 8, ς'. 12), «ἅγιος τῆς δικαιοσύνης» (Ματθ. δ'. 2), «ἀγγελλος τῆς διαθήκης» (Ματθ. γ'. 1), «μεγάλῃς βουλῆς ἀγγελλος» (Ἡσαϊ. θ'. 6), «σωτήριον Θεοῦ» (Λουκ. β'. Ἡσαϊ. ξβ'. κλπ.) 5) Ἐν ἑκάστῳ τῶν τριῶν τούτων ἀξιωμάτων διακρίνεται καὶ ἐπικρατεῖ ἐν ἐν ἑκάστῳ τῶν σταθμῶν, ὅσα διήλθεν ὑπὲρ τῆς τοῦ κόσμου σωτηρίας ὁ Θεάνθρωπος, καὶ ἡ ἐξηγοῦμεν κατωτέρω, ἀλλ' ὅχι καὶ ἀκριβῶς, διότι πάντοτε σχεδὸν ὁ χαρακτηρ ἐνός ἐκαστοῦ τῶν τριῶν ἀξιωμάτων ὑφίσταται ἐκ τῆς ἐννοίας τῶν δύο ἄλλων οὕτως, ὥστε καὶ τὰ τρία ὁμοῦ συναποτελοῦσιν ἀκριβῶς τὴν ἐννοίαν τοῦ Χριστοῦ ἢ Μεσσίας. 6) Ἰω. ια. 32. 7) Δευτερον. ιη. Ματθ. κγ'. 29, Λουκ. κδ'. 19, Κυρίλλ. Ἱεροσ. κατηχ. ς'. 11, Κυρίλλ. Ἀλεξ. εἰς Ἡσαϊ. ἐκάνθρωπος τοῦ Θ. λόγ. ιθ'.

σταυροῦ θυσίαν πρὸς τὸν Θεὸν ὑπὲρ τοῦ κόσμου⁸⁾· τὴν βασιλείαν, διότι αὐτός εἶνε ὁ προκηρυχθεὶς βασιλεὺς τοῦ Ἰσραὴλ τῆς χάριτος, τῆς ἐκκλησίας, καὶ αὐτός, « βασιλεὺς τῶν βασιλευόντων καὶ κύριος τῶν κυριευόντων »⁹⁾, θέλει κρίνει « ζῶντας καὶ νεκροὺς » ἐν τῇ ἀτελευτήτῳ αὐτοῦ βασιλείᾳ¹⁰⁾. Εἶνε δὲ Χριστὸς τὸ κατ' ἐξοχὴν ὄνομα τοῦ ἐνανθρωπήσαντος Σωτῆρος ἡμῶν, ὅθεν καὶ οἱ πιστεύοντες εἰς αὐτὸν ὀνομάζονται χριστιανοί¹¹⁾. « Μονογενὴς » δὲ υἱὸς τοῦ Θεοῦ λέγεται τὸ δευτερον πρόσωπον τῆς ἁγίας Τριάδος, ὡς ὁ μόνος κατ' οὐσίαν καὶ φύσει υἱὸς τοῦ Θεοῦ¹²⁾· διότι, ἐὰν πολλαχοῦ τῆς Γραφῆς ἀποκαλοῦνται καὶ ἄνθρωποι υἱοὶ τοῦ Θεοῦ, ἡ υἰότης αὕτη πρέπει νὰ νοηθῇ ὅχι κατ' οὐσίαν καὶ φύσει, ἀλλὰ θέσει καὶ κατὰ χάριν, διότι ἡ κατὰ χάριν αὕτη υἰοθεσία δίδεται εἰς τοὺς πιστούς, ὅπως καὶ « πατὴρ » τῶν πιστῶν καλεῖται ὁ Θεός, ὅπερ πρέπει νὰ νοηθῇ ὡς ὅχι κατὰ φύσιν, ἀλλὰ κατὰ χάριν¹³⁾.

8) « Ὡμοσε Κύριος καὶ οὐ μεταμεληθήσεται, σὺ ἱερὺς εἰς τὸν αἰῶνα κατὰ τὴν ταῖν Μελχισεδέκ » (ψαλμ. ρθ'. 4), ὅπερ ἀναφέρει εἰς αὐτὸν ὁ Ἱ. Χριστὸς ἐν Ματθ. κς. 46, Μαρκ. ιθ'. 62, Λουκ. κβ'. 69—70. Πρὸς Μάρκ. ις. 9, Πράξ. β'. 33—34, ε. 31, Ῥωμ. η'. 34, α. Κορ. ιε. 24—28, Ἐφεσ. α. 20—23, Κολ. γ'. 12, Ἐβρ. α. 3—13, ε. 6, 7, 10, ζ. 4—21, η. 1, 2, ι. 12, 13, ιθ'. 2, α. Πέτρ. γ' 22, Ἐβρ. γ'. 1, δ'. 14, 15, θ'. 11, Ἰουστίν. πρὸς Τρύφ. διὰ λ. λγ'. 18. Tertull in Marc. IV. 9, Κλήμ. Ἀλεξ. στρωματ. ζ'. 3, Agnobi. adv. gent. II. 25, Θεοδώρ. εἰς Ἐβρ. ε. 4, ζ'. 3, Πολυκάρπ. πρὸς Φιλιππησ. ιθ'. Ἐπιφάν. αἵρεσ. μθ'. 39, νέ. 4. 9) α. Τιμ. ς'. 15.

10) Λουκ. α. 32—33, Δαν. ζ'. 12, Ἠσαΐ. θ'. 6—7, Ματθ. β'. 2, κζ'. 11—37, Μάρκ. ιε. 1—31, Ἰω. ιη'. 37, Ζαχαρ. θ'. 9, Ἰω. ιθ'. 13—15, Ματθ. κá. 5—9, Ματθ. κη. 18, Ἐφ. α. 21, 22, Εἰρ. Αἵρεσ. α. 10, Ἰουστίν. Τρύφ. διὰ λ. 22, August. Tractat. in psalm. CXLIX, Θεοδώρ. εἰς ψ. 6.

11) Ἐρχισε κατὰ πρῶτον ἡ ὀνομασία αὕτη ἐν Ἀντιοχείᾳ (Πράξ. ια. 26).

12) Ψαλμ. β'. 8, ρθ'. 3, Μιχαὴ. ε. 2, Ματθ. β'. 4—6, Ἰω. ζ'. 42, Πράξ. β'. 24—28, ιγ'. 32—34, Ἐβρ. α. 5, ε. 5, Ἰω. γ' 13, 16, 18, Μάρκ. ια. 27, ιθ'. 1—2, Ἰωάν. ε. 16, 33, γ'. 31, 36, ιε. 24, 37, Ματθ. γ'. 17, 39, Ἰω. ι. 39, Μάρκ. ιθ'. 61, Ματθ. κá. 63, Ἰω. ιθ. 7, Μαρκ. α. 10—11, κλπ.—Οἱ ἐν Ἰσπανίᾳ περὶ τὰ τέλη τοῦ 7. αἰῶνος ἀναφανέντες υἰοθετηταὶ (Adoptiani) ἐβλαστήμουν διὰ τὸ Ἱ. Χ. ἦτο υἱὸς Θεοῦ ὅχι φύσει, ἀλλὰ θέσει (Γρηγορ. Νεζ. λόγ. λαί Γρηγορ. Νύτσι κ. Ἀπολιναρι). Ὁ δὲ Ἱ. Χ. ἦτο υἱὸς Θεοῦ καὶ φύσει καὶ κατὰ χάριν.

13) Γαλ. δ'. 4, Ἐβρ. β'. 19, β'. Πέτρ. α. 4.

§. 70.

Ποῦτον εἶνε τὸ τρίτον ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως, καὶ ποῦτον τὸ αἷτιον καὶ ὁ σκοπὸς τῆς σαρκώσεως τοῦ Υἱοῦ καὶ Λόγου τοῦ Θεοῦ, περὶ τῆς ὁποίας μᾶς διδάσκει;

Τὸ τρίτον ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως εἶνε τὸ ἐξῆς : «Καὶ κατελθόντα ἐκ τῶν οὐρανῶν καὶ σαρκωθέντα ἐκ Πνεύματος ἁγίου καὶ Μαρίας τῆς παρθένου καὶ ἐνανθρωπήσαντα». Εἶδομεν ἂνωτέρω¹⁾ ὅτι διὰ νὰ σωθῇ ὁ ἄνθρωπος, ἦτο ἀνάγκη νὰ καταβῇ αὐτὸς ὁ Θεὸς πρὸς τὸν ἄνθρωπον διὰ νὰ ἀπολυτρώσῃ καὶ σῶσῃ αὐτόν. Ἀλλὰ τὸ ἔργον τοῦτο τῆς σωτηρίας ἦτο δυνατόν μόνον ὑπὸ τοὺς ἐξῆς δύο ὁρους: νὰ μὴ παραβιασθῇ τὸ αὐτεξούσιον τοῦ ἀνθρώπου, καὶ νὰ ἐξιλεωθῇ ἡ θεία δικαιοσύνη. Πρὸς ἐκπλήρωσιν τοῦ πρώτου ὁρου ὁ ἄνθρωπος προπαρασκευάσθη, ὅπως εἶδομεν, διὰ μακροῦ χρόνου, καί, ἀφ' οὗ διὰ τῆς διπλῆς ταύτης προπαρασκευῆς αἱ καρδίαι πάντων ἦσαν ἤδη εὐθετοὶ πρὸς ἀποδοχὴν τοῦ εὐαγγελίου τῆς σωτηρίας, ὁ Υἱὸς καὶ Λόγος τοῦ Θεοῦ κατέβη ἐξ οὐρανοῦ, καὶ ἔλαβε σάρκα ἐκ τῆς παρθένου Μαρίας καὶ ἐνηνθρώπησεν. Ἐσαρκώθη δὲ καὶ ἐνηνθρώπησε, διότι ἄλλως ἦτο ἀδύνατον ἔνθεν μὲν νὰ συγκοινωνήσῃ καθ' ὁλοκληρίαν ὁ Θεὸς πρὸς τὸν ἄνθρωπον, καὶ ὡς ἄνθρωπος ἐν ἀνθρώποις ἀναστρεφόμενος νὰ διδάξῃ αὐτόν, ἔνθεν δὲ ἦτο ἀδύνατον εἰς τὸν ἄνθρωπον νὰ διδαχθῇ καὶ ἀποδεχθῇ ἐλευθέρως καὶ ἀβιάστως τὸ εὐαγγέλιον τῆς σωτηρίας. Ἴδου ὁ σκοπὸς τῆς σαρκώσεως καὶ ἐνανθρωπήσεως τοῦ Υἱοῦ καὶ Λόγου τοῦ Θεοῦ, περὶ τῆς ὁποίας μᾶς διδάσκει τὸ τρίτον τοῦτο ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως.

§. 71.

Πῶς ἐσαρκώθη ὁ Υἱὸς καὶ Λόγος τοῦ Θεοῦ ;

Καθὼς ἡ γέννησις τοῦ Ἀδάμ, τοῦ κατὰ σάρκα γενάρχου τῶν ἀνθρώπων εἶχε προέλθῃ ὅχι ἐκ θελήματος ἀνδρός, ἀλλ' ἐκ

1) ἰδ. §. 63.

θελήματος Θεοῦ, οὕτω καὶ ὁ νέος Ἀδὰμ ἔπρεπε νὰ σαρκωθῇ ἀσπόρως καὶ ἐκ θελήματος Θεοῦ'). Ἡ ἀνθρωπότης ἔπρεπε νὰ προσφέρῃ ὅ,τι εἶχε κάλλιστον καὶ ἀγιώτατον, ἡ δὲ θεότης τὸ δημιουργικὸν αὐτῆς Πνεῦμα. Ὅθεν καὶ ἡ μὲν ἀνθρωπότης ἐπρόσφερε τὴν παρθένον Μαριάμ²⁾, ἥτις ἦτο ἐκλελεγμένη ἐκ πασῶν τῶν γενεῶν καὶ εὐλογημένη ἐν γυναιξί, τὸ δὲ Πνεῦμα τὸ ἅγιον ἐπελθὼν ἐπ' αὐτὴν ἐδημιούργησεν ἐξ αὐτῆς τὴν σάρκα, τὴν ὁποίαν ἐνεδύθη ὑπὲρ ἡμῶν ὁ Σωτὴρ. Ἐγεννήθη λοιπὸν ὁ Σωτὴρ σαρκωθείς διὰ τοῦ ἁγίου Πνεύματος ἐκ τῆς παρθένου Μαρίας³⁾, ἥτις καὶ πρὸ τόκου καὶ ἐν τόκῳ καὶ μετὰ τόκον ἦτο καὶ ἔμεινε παρθένος⁴⁾. Τοιοῦτοτρόπως αἱ δύο φύσεις,

1) «Εἰ τοίνυν ὁ πρῶτος Ἀδὰμ ἔσχε πατέρα ἄνθρωπον, καὶ ἐκ σπέρματος ἐγεννήθη, οἰκὸς ἂν ᾦν . . .» Θεοδωρετ. ἐρανιστ. διαλ. ἀ. Πρὸλ. Εἰρην. Haeres. III, 21, August. Civ. Dei XXII. 8. κλπ.

2) Ἡσάβ. ζ'. 14, Ματθ. ἀ. 18—22, Λουκ. ἀ. 24—35, Ἰουστίν. ἀπολ. ἀ. 19, 33, Εἰρην. Haer. III. 19, V. 19, Εὐσεβ. εὐαγγ. ἀποδ. γ'. 2, Κυρίλλ. Ἱεροσολυμ. κατήχ. ιδ', Χρυσόστομ. εἰς Γέν. ὁμ. μθ'. 2, August. de Symb. 5, c. Faust. XXVIII. 4, Δαμασκην. ἐκθ. ὁρθ. πίστ. ἀ. 2,

3) Ἡ ἐκ τῆς παρθένου σάρκωσις τοῦ Σωτῆρος ὑπῆρξε πλήρης καὶ πραγματική, ὅχι δὲ φαντασίᾳ τινὶ κατὰ τοὺς βλασφήμους Δοκητάς (8. 35, σημ. 5), καὶ οὕτε ἄνωθεν ἔφερε τὴν σάρκα ὁ Θεάνθρωπος, ὅπως ἐδόξασαν δυσσεβεῖς τινες καὶ πεπλανημένοι, οὕτε διῆλθε διὰ τῆς παρθένου ἀπλῶς ὡς «διὰ σωτήρος», ὅπως εἶπαν ἄλλοι αἰρετικοί. Ἰδ. Κυρίλλ. Ἱεροσολ. κατήχ. δ'. 9, Δαμασκ. ἐκθ. ὁρθ. πίστ. γ'. 64.

4) Ambros. de Instit. Virg. 8. August. de Virg. 4, Κυρίλλ. Ἱεροσ. κατήχ. ιδ'. 15, ὅθεν καὶ «ἀειπάρθης» καλεῖται παρὰ τοῖς πατέράσι καὶ «ἀσιπάρθηνος» (Ἀθαν. εἰς Λουκ. ἀ. 58, Ἐπιφάν. αἰρ. σή 5, Δαμασκ. ἐκθ. ὁρθ. πίστ. γ'. 2, κλπ.), καὶ ἀπλῶς καὶ κατ' ἐξοχὴν «παρθένος» (Ἐπιφάν. αἰρετ. σή. 8, Κυρίλλ. κατήχ. δ'. 9. i. 19). — Ἐνιοὶ παρέξηγουσιν τὴν γραφὴν ἠρνήθησαν τὸ ἀειπάρθενον τῆς Θεομήτορος, ἀλλὰ κατεδικάσθησαν πάντοτε ὑπὸ τῆς ἐκκλησίας ὡς βλάσφημοι καὶ αἰρετικοί (Ὠριγένης εἰς Λουκ. ὁμ. ζ', Ambros. de Inst. Virg. 5, Ἐπιφάν. αἰρ. σζ'). Τοιοῦτοι δὲ μάλιστα αἰρετικοὶ ὑπῆρξαν οἱ περὶ τὸν Εὐνόμιον (Φιλοστοργ. ἐκκλ. ιστορ. ς'. 2), Ἀπολιναρισταὶ τινες (Ἐπιφάν. αἰρ. σζ'. 26), οἱ περὶ τὸν Ἐλουθίδιον (Hieron. ad Helvid.), καὶ οἱ ἐκ τῆς αἰρέσεως τῶν Ἀντιόχεικων ἀριανιτῶν (Ἐπιφάν. αἰρ. σζ', σή, August. Haeres LVI), τὰ δὲ ὑπὸ τῶν αἰρετικῶν ταύτων παρερμηνευθέντα χωρὶς τῶν εὐαγγελιστῶν εἶνε ἅ) τὰ ἑξῆς ῥήματα τοῦ Ματθαίου (ἀ. 18) «Μηστειθεὶς γὰρ τῆς μητρὸς αὐτοῦ Μαρίας τῇ Ἰωσήφ, πρὶν ἢ συνελθεῖν αὐτούς, εὗρέθη ἐν γα-

φυσικῶς, ἀχωρίστως καὶ ἀδιαιρέτως^{β)} συνενωθεῖσαι, συναπετέλεσαν μὲν μίαν ὑπόστασιν, ἐν πρόσωπον^{β)}, τὸν Θεάν-

στρί ἔχουσα ἐκ Πνεύματος ἁγίου, καὶ τὰ ἐξῆς τοῦ αὐτοῦ (ἀ. 25) «καὶ οὐκ ἐ-
γίνωσκεν (Ἰωσήφ) αὐτήν (τὴν Μαρίαν) ἕως οὗ ἔτεκε τὸν υἱὸν αὐτῆς τὸν πρω-
τότοκον». Ἀλλ' ἐκ τῶν χρονικῶν τούτων ὁρισμῶν «πρὶν ἢ» καὶ «ἕως οὗ»,
παρατηροῦσιν ὀρθῶς οἱ πατέρες, δὲν ἔπεται ὅτι ὁ Ἰωσήφ «συνῆλθε» καὶ «ἔγνω»
τὴν Μαρίαν μετὰ τὰ ὅσα, ὅπως καὶ ἐκ τοῦ χωρίου π. γ. τούτου τῆς Γενέ-
σεως (ἡ 7): «Καὶ ἐξελθὼν (ὁ κόραξ, ὁ ἐκ τῆς θυρίδος τῆς κιβωτοῦ ὑπὸ τοῦ
Νῶε ἐξαποσταλεῖς) οὐκ ἀνέκρυσεν ἕως τοῦ ξηρανοῦ ἵνα τὸ ὕδωρ ἀπὸ τῆς γῆς»,
δὲν ἔπεται, ὅτι μετὰ τὰ ὅσα, ἀφ' οὗ ἐξηράνθη ἡ γῆ, ὁ κόραξ ὑπέστρεψεν, ὅπερ
παράλογον καὶ ἐναντίον πρὸς αὐτὴν τὴν διήγησιν τῆς Γενέσεως (Χρυσόστ. ὁ-
μιλ. εἰς Ματθ. ἐ. 1, Ambros. de Inst. Virg. 5. Ἰσίδ. Πηλοῦς. ἀ. ἐπιστ. ιθ').
Ὁμοίως καὶ ἐκ τοῦ ὅτι ἐν τῇ αὐτῇ χωρίῳ ὁ Ἰησοῦς λέγεται «πρωτότοκος»,
δὲν ἔπεται ὅτι ἐτέχθησαν ὑπὸ τῆς Θεομήτορος καὶ ἄλλοι μετ' αὐτὸν ἀδελφοί. Ἐν
τῇ ἀγίᾳ Γραφῇ ὡς πρωτότοκος χαρακτηρίζεται ἀπλῶς ὁ πρῶτος γεννηθεὶς,
ἦτοι ὁ πρὸ τοῦ ὁποίου δὲν ἐγεννήθη ἄλλος τις, ἀδιάφορον δὲ ἂν μετ' αὐ-
τὸν θὰ γεννηθῶσιν ἢ ὅχι ἄλλοι. Ἐσημειώθη δὲ κατ' ἀνάγκην ὑπὸ τοῦ εὐαγγε-
λιστοῦ ὁ χαρακτηρισμὸς οὗτος, διότι ὁ νόμος (Ἐξοδ. ιγ', λδ', Λευϊτ. κη', Ἀ-
ριθμ. ἡ) διέταττεν, ὁ πρωτότοκος υἱὸς νὰ ἀφιερώνεται εἰς τὸν Θεόν, χωρὶς
μῆτε ὁ νόμος ν' ἀποδίδῃ εἰς τὸ ἂν θὰ γεννηθῶσι καὶ ἄλλοι μετὰ τὸν πρωτότο-
κον, μῆτε οἱ γονεῖς οἱ ὀφείλοντες ν' ἀφιερῶσιν αὐτόν (Hieron. adv. Helvid.).
Β') Οἱ εὐαγγελισταὶ ἀναφέρουσιν «ἀδελφοί» καὶ «ἀδελφὰς» τοῦ Κυρίου (Ματθ.
ιδ'. 46—49, Μάρκ. ζ'. 3, Ἰω. 8'. 47, ζ'. 3, κλπ.). Ἀλλὰ διὰ τῆς ἐκφράσεως
ταύτης ἐννοοῦνται ὅχι ἀδελφοὶ κατὰ γράμμα, ἀλλὰ πλησιέστατοι συγγενεῖς τοῦ
Κυρίου. Παρέμεινε δὲ ὁ τρόπος οὗτος τῆς ἐκφράσεως ἐκ τῆς παλ. Διαθήκης,
ὅπου εἶνε συνήθης. Ὁ Ἀδραῆμ καὶ ὁ Λῶτ ἦτο υἱὸς τοῦ ἀδελφοῦ τοῦ Ἀδραῆμ
(γ'. 8) «ἀδελφοί», ἐν ᾧ πράγματι ὁ Λῶτ ἦτο υἱὸς τοῦ ἀδελφοῦ τοῦ Ἀδραῆμ
(Γεν. ιδ'. 4—5, ιδ'. 14—16). Ὁ Ἰακώβ καὶ ὁ Λάβαν λέγονται ὁμοίως «ἀ-
δελφοί», ἐν ᾧ ὁ Ἰακώβ ἦτο υἱὸς τῆς Ῥεβέκκας, ἀδελφῆς τοῦ Λάβαν (Γεν. κη',
κθ'. λς', λς').

5) Ὅχι δὲ καθ' ἀπλὴν συνάρειαν καὶ ἐνοίκησιν τῆς ἐτέρας αὐτῶν ἐν τῇ ἐτέ-
ρα, ὅπως ἐδιδασκόμεον οἱ Νεστοριανοὶ (§. 35 σημ. 17).

6) Ὅτι αἱ δύο φύσεις, ἡ θεία καὶ ἡ ἀνθρωπίνη, συννηύθησαν εἰς μίαν μόνην
ὑπόστασιν, ἦτοι εἰς ἓν καὶ μόνον πρόσωπον, φαίνεται ἀριθμῶν ἐκ τῆς Γραφῆς,
ἦτοι ἐν καὶ τὸ αὐτὸ πρόσωπον, τὸν Ἰησοῦν Χριστόν, ὀνομάζει ἄλλοτε «υἱὸν
Θεοῦ» καὶ ἄλλοτε «υἱὸν ἀνθρώπου», ἀποδίδουσα οὕτως εἰς αὐτὸν ἄλλοτε ἰδιό-
τητα τῆς θείας καὶ ἄλλοτε ἰδιότητος τῆς ἀνθρωπίνης φύσεως (ἀ. Κορ. β'. 8,
Πράξ. γ'. 15, Ῥωμ. ἐ. 10, Ἑβρ. ἐ. 8, Ἰω. γ'. 13, δ. 5—8, ἀ. Κορ. γ'. 6,
Ἑβρ. δ'. 5—6). Ὁμοίως δὲ καὶ οἱ πατέρες, οἷον Ἰπριγέν. εἰς Ματθ. ὁμιλ.
ἐ. 24, Hilari in ps. LIII. 8, August. Epist. CCXXXVII. 21, Θεοδώρ. ἐραν.
διὰ λ. δ', Ἀθανάσ. κ. Ἀρειαν. λόγ. γ'. 31, 32, 33. Ἄνευ τῆς τοιούτης τῶν

ὁρῶπον Ἰησοῦν, ἦτοι τὸν κατὰ πάντα τέλειον ἄνθρωπον καὶ τέλειον Θεόν⁷⁾, ἀλλὰ δὲν συνεχύθησαν, ὅπως δοξάζουσιν οἱ αἰρετικοὶ Μονοφυσῖται⁸⁾, ἔμειναν δὲ καὶ μετὰ τὴν ἔνωσιν ἄτρεπτοι καὶ ἀσύγχυτοι⁹⁾. Ἐκατέρα τῶν δύο τούτων φύσεων ἐτήρησε τὰ ἑαυτῆς ἰδιώματα¹⁰⁾, ἡ θεία τὰ θεῖα καὶ ἡ ἀνθρω-

δύο φύσεων εἰς μίαν ὑπόστασιν συνενώσεως ἤθελεν εἶνε ἀδύνατον τὸ ἔργον τῆς ἀπολυτρώσεως, διότι πῶς ἤθελε πάθῃ καὶ στυρωθῇ ἡ ἀπαθὴς Θεότης, ἐὰν ἔλειπεν ἡ ἀνθρωπότης, ἢ τίς ἤθελε ὁῶση εἰς τὴν ἐξλασθήριον οὐσίαν τὴν ἀπειρον αὐτῆς ἀζῖαν, ἐὰν ἔλειπεν ἡ Θεότης;

Σημειωτέον δὲ, ὅτι ἡ μία καὶ μόνη ἐν τῷ Ἰ. Χριστῷ ὑπόστασις τῶν δύο φύσεων τούτων εἶνε ὁχι ἀνθρωπίνη, ἀλλὰ θεία, ἦτοι αὐτός ὁ Ἰῶς καὶ Λόγος τοῦ Θεοῦ, ὅστις εὐθύς ἀπὸ τῆς πρώτης στιγμῆς τῆς σαρκώσεώς του ἀνέλαβε συνενώσας εἰς ἑαυτὸν τὴν ἀνθρωπίνην φύσιν, μεθ' ἧς καὶ ἔσται αἰωνίως (Ἰω. ἀ. 1, 14, 17, ε. 20, Φιλίππ. β'. 6, 7, Γαλ. δ'. 4, 5, Ῥωμ. θ'. 5, ἀ. 3, ἀ. Τιμ. γ'. 16, Κολ. β'. 9, Ἰγνατ. πρὸς Ἐφεσ. ζ', Tertull. adv. Praxeam 27, Ἀθαν. κ. Ἀρειανῶν λόγ. γ'. 31, 32, Γρηγόρ. θεολ. κ. Εὐνομ. λόγ. δ', Διδ. Ἀλεξ. περὶ Τριάδ. γ'. 6, κλπ.

7) Περί τῆς πλάνης τῶν Ἀπολιναριστῶν, δοξαζόντων, ὅτι ὁ Ἰ. Χριστός ἐκ τῆς ἀνθρωπίνης φύσεως προσέλαβε μόνον τὴν σάρκα καὶ τὴν ψυχὴν, ἦτοι τὴν κατωτέραν καὶ ζωϊκωτέραν μερίδα τῆς ψυχῆς, ὁχι δὲ καὶ τὸν νοῦν, ἦτοι τὸ πνεῦμα, ἴδ. §. 35. σημ. 16. 8) ἴδ. §. 35 σημ. 18.

9) Περί τῆς ἀτρέπτου καὶ ἀσύγχυτου εἰς μίαν ὑπόστασιν ἐν τῷ Ἰ. Χριστῷ ἐνώσεως τῶν δύο φύσεων ἴδ. Εἰρην. adv. Haeres V. 17, Κλήμ. Ἀλεξ. Προτρέπτ. 1, Ὀριγέν. περὶ ἀρχῶν ἀ. 2, Ἀθαν. εἰς ψαλμ. κβ. 21, κ. Ἀπολιναρ. ἀ. 16, Γρηγόρ. Νύσσ. κ. Εὐνομ. λόγ. δ', Χρυσόστ. εἰς ψαλμ. μδ'. 4 πρὸς Φιλίππ. ὁμ. γ'. 3, Θεοδώρ. ἔραν. διὰ γ'. Διὰ τὴν παραστήσασιν δὲ αἱ πατέρες τῆς ἐκκλησίας τὸ ἀτρέπτου καὶ ἀσύγχυτου τοῦτο τῆς εἰς μίαν ὑπόστασιν συνενώσεως τῶν δύο φύσεων, εἴτε τὴν «ἐν ἀλλήλαις περιχώρησιν αὐτῶν», κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ Δαμασκηνοῦ (ἐκθ. ὀρθοδ. πιστ. γ' 17), μετεχειρίσθησαν διαφόρους εἰκόνας καὶ παρομοιώσεις, οἷον τὸν πεπρωμένον σιδηρὸν, ἐν ᾧ συνενώνται κατὰ περιχώρησιν τὸ πῦρ καὶ ὁ σιδηρός, χωρὶς μὴτε ὁ σιδηρός ν' ἀποδῇ τὴν φύσιν αὐτοῦ μὴτε τὸ πῦρ (Θεοδώρητ. ἔρανιστ. διὰ β'), τὴν συνένωσιν τοῦ ἀέρος καὶ τοῦ φωτός (αὐτόθ., August. Epist. CXXXVII. 41), τὸ καθημαγμένον ἔργον (Λέοντ. Ἱεροσολ. κ. Νεστορ. ἀ. 22), ἔτι δὲ καὶ αὐτὴν τὴν ἔνωσιν τῆς ψυχῆς καὶ τοῦ σώματος ἐν τῷ ἀνθρώπῳ (August. αὐτόθ.).

10) Σημειωτέον καλῶς ὅτι τοῦτο ἀληθεύει, καθ' ὅσον θεωροῦμεν καθ' ἑαυτὴν καὶ ἀφ' ἑαυτῆς ἑκατέραν τῶν δύο τούτων φύσεων, καὶ χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἀχώριστον καὶ ἀδιαίρετον ἀμφοτέρων εἰς μίαν ὑπόστασιν ἐν τῷ Ἰ. Χριστῷ ἔνωσιν. Καθ' ὅσον ὁμως θεωροῦμεν συγκεκριμένως τὰς δύο φύσεις, ὡς ἐνωθείσας ἀχώριστως καὶ ἀδιαίρετως εἰς μίαν ὑπόστασιν ἐν τῷ

πίνη τὰ ἀνθρώπινα¹¹⁾, πλὴν τῆς ἀμαρτίας¹²⁾. Ἐννοεῖται δὲ

συγκεκριμένῳ προσώπῳ τοῦ ἱ. Χριστοῦ, λαμβάνει χώραν ἡ παρά τοις θεολόγοις καλουμένη «ἐντίδοσις» τῶν ἰδιωμάτων κατὰ τὸν Δαμασκην. : ἐκθ. ὀρθ. πίτ. γ'. 6, κατὰ δὲ τὸν Κύριλλον Ἀλεξ. ἐπιτ. Ι : «κοινωνία τῆς εἰς αὐτοῦ ὁμιλίας» = communicatio idiomatum), ἥτις εἶνε συνέπεισ αὐτῆς τῆς εἰς μίαν ὑπόστασιν συνενώσεως τῶν δύο φύσεων. Κατὰ τὴν ἀντίθεσιν ταύτην ἐν τῇ συγκεκριμένῳ προσώπῳ τοῦ ἱ. Χ., ἐκατέρα τῶν δύο φύσεων μεταδίδει τὰ αὐτῆς ἰδιώματα εἰς τὴν ἑτέραν, ἡ ἀνθρωπίνη τὰ αὐτῆς εἰς τὴν θεϊαν, καὶ ἡ θεία τὰ αὐτῆς εἰς τὴν ἀνθρωπίνην. Τοιοῦτοτρόπως ἀποδίδονται εἰς τὸν ἱ. Χριστόν ὡς θεὸν ἀνθρώπινα ἰδιώματα καὶ εἰς τὸν αὐτόν ὡς ἄνθρωπον θεα ὅχι μόνον ὑπὸ τῶν πατέρων (οἷον Κλημ. Ἀλεξ. εἰς ἀ. Κορ. 2, Ἰωάν. πρὸς Ἑλλ. γ', Tertull. κίν. Prax. XXVII, Ἀθανασ. κ' Ἀπολ. καρ. 4, 7, Ἐπιφρ. αἰρέσ. οἷ'. 26, Θεοδώρ. εἰς ψαλμ. πρ'. 5), καὶ τῶν ἀποστόλων. (Ἰω. γ'. 16, Πρξ. γ'. 15, κ'. 23, Ῥωμ. ἀ. 3, ἡ 32, θ'. 5, ἀ. Τιμ. β'. 5, ἀ. Κορ. ἡ. 6, β'. 8, Ἐβρ. ἀ. 4, Φιλ. β'. 7, Γαλ. δ. 4, κλπ.), ἀλλὰ καὶ ὑπ' αὐτοῦ τοῦ ἱ. Χριστοῦ (Ἰω. γ'. 13, ε' 17, 24, ἡ. 40, 58, β. 15, 47). Καὶ τοῦτο δὲ ἐξηγεῖ κάλλιστα, ὡς πάντοτε, ὁ συστηματικώτατος τῶν πατέρων τῆς Ἐκκλησίας, ἱ. Δαμασκηνός ἐν ἐκθ. ὀρθ. π. γ'. 4.

Ἐτέρα συνέπεισ τῆς εἰς μίαν ὑπόστασιν συνενώσεως τῶν δύο φύσεων εἶνε καὶ ἡ ἐν τῇ ἱ. Χ. «θέωσις» τοῦ προσλήμματος τῆς σαρκός, ἥτις τῆς ἀνθρωπίνης φύσεως, ἥτις δὲν πρέπει νὰ νοηθῇ ὡς ἀναιρούσα οὔτε τὸ ἁγωρίτως καὶ ἀδιαρίτως ἐκείνου τῆς ὑποστάσεως, οὔτε τὸ ἀτρέπτως καὶ ἀσυνγύτως διπλοῦν τῶν φύσεων. Κατὰ τὴν θέωσιν ταύτην ἡ ἀνθρωπίνη φύσις συνενωθεῖσα μετὰ τῆς θείας ἐν τῇ ἱ. Χ. εἰς μίαν ὑπόστασιν, δὲν ἐτράπη ἀπὸ ἀνθρωπίνης εἰς θεϊαν, ἀλλ' ἐτελειώθη μόνον εἰς τὸν ὕπατον βαθμόν. «Χρὴ εἰδέναι, λέγει ὁ Δαμασκηνός Ἰωάννης (ἐκθ. ὀρθ. πίτ. γ'. 17), ὡς οὐ κατὰ μεταβολὴν φύσεως ἢ τροπῇ ἢ ἀλλοίωσιν ἢ σύγχυσιν ἢ σὰρξ τοῦ Κυρίου ἐθεωθεῖται λέγεται καὶ ὁμόθεος καὶ θεός γενέσθαι, ὡς φησὶν ὁ θεολόγος Γρηγόριος : ὦν τὸ μὲν ἐθέωσας, τὸ δὲ ἐτελειώθη, καὶ θαρρῶ λέγειν, ὁμόθεος καὶ ἄνθρωπος γενέσθαι τὸ χρίσαν, καὶ θεὸν τὸ χρίσμενον. Ταῦτα γὰρ οὐ κατὰ μεταβολὴν φύσεως, ἀλλὰ κατὰ τὴν οικονομίαν, ἔνωσιν τοῦ καθ' ὑπόστασιν λέγω, καὶ τὴν ἐν ἀλλήλοις τῶν φύσεων περιχώρησιν, ὡς φημεν καὶ τὴν τοῦ σιδήρου πύρωσιν. Ὡς περ γὰρ τὴν ἐνανθρωπήσιν χωρὶς μεταβολῆς καὶ τροπῆς ὁμολογοῦμεν, οὕτω καὶ τὴν θέωσιν γενέσθαι τῆς σαρκὸς δοξάζομεν. Οὔτε γὰρ διότι ὁ λόγος σὰρξ ἐγένετο, τῶν βρῶν ἐξέστη τῆς οἰκείας θεότητος, οὔτε τῶν προσόντων αὐτῇ θεοπροπῶν ἀσχημάτων οὔτε μὲν ἡ σὰρξ θεωθεῖσα τῆς οἰκείας ἐτράπη φύσεως ἢ τῶν αὐτῆς φυσικῶν ἰδιωμάτων. Μεμενῆκας γὰρ καὶ μετὰ τὴν ἔνωσιν αἱ τε φύσεις ἀσύμφορτοι καὶ ἀπερίεστες ἰδιότητες ἀλλόθῃσι : ἡ δὲ τοῦ Κυρίου σὰρξ τὰς θείας ἐνεργείας ἐτελειώσας διὰ τὴν πρὸς τὸν ἄλλοθεν ἀκραιφνεστάτην ἔνωσιν, ἥτις ἐστὶν καὶ ὁ ὕπατος βαθμὸς τῶν κατὰ φύσιν ἰδίων ὑποστάσεως ἐκπτώσεων».

11) Μεθλ. Κυρίλλ. Ἱεροσολ. κατήχ. β'. 9.

12) Τῆς τε προαιρετικῆς (Κυρίλλ. Ἱεροσολ. κατήχ. β'. 6, Δαμασκην. ἐκθ.

ἐκ τούτων οἰκοθεν, ὅτι καὶ θελήσεις καὶ ἐνέργειαι ὑπάρχον ἐν τῇ Θεανθρώπῳ δύο, ὅχι μία, ὅπως ἐδόξασαν πλανηθέντες οἱ μ. ο. ν. ο. θ. ε. λ. η. τ. α. (13), ἡ θεία καὶ ἀνθρωπίνη· ἀλλ' αὐτῇ, ἡ ἀνθρωπίνη (14), ὑπετάσσεται πάντοτε, ὡς ἦτο ἐπόμενον, εἰς τὴν θείαν (15).

§. 72.

Ἐξιστόρησον διὰ βραχείων τὸν βίον τοῦ Θεανθρώπου.

Ὁ Ἰησοῦς Χριστὸς μετέδωκε θεῖαν ζωὴν εἰς τὴν ἀνθρωπότητα διὰ τῆς θείας αὐτοῦ διδασκαλίας καὶ δυνάμεως. Διὰ τῆς διδασκαλίας του ἰδεῖξεν, ὅτι ἡ ἀληθὴς τοῦ ἀνθρώπου εὐδαιμονία συνίσταται ὅχι εἰς τὸν πλοῦτον, ὅχι εἰς τὰ ὕλινά ἀγαθὰ τοῦ φθορτοῦ τούτου κόσμου, καὶ εἰς τὰς προσκαιροὺς καὶ ψευδεῖς ἡδονὰς τῆς σαρκός, ἀλλὰ εἰς τὴν πίστιν, τὴν ἐλπίδα καὶ τὴν ἀγάπην, τὴν ἀγάπην πρὸς τὸν Θεόν, καὶ τὴν ἀγάπην πρὸς τὸν πλησίον. Ἐσηλίτευσε τὰς κακίας τῶν ἀνθρώπων, καὶ μάλιστα τὴν ἀλοχονίαν καὶ τὴν ὑπόκρισιν καὶ τὰς πρωτοκαθεδρίας, καὶ ἐούστησε τὴν ταπείνωσιν, τὴν ὑπομονὴν καὶ τὴν πραότητα. Ἐν γένει δέ, ἀρ' οὗ ἐδίδαξε τοὺς ἀνθρώπους ποία μεγάλη ἀπόστασις ὑπάρχει μεταξὺ Θεοῦ καὶ διαβόλου, μεταξὺ οὐρανοῦ καὶ γῆς, μεταξὺ ἀρετῆς καὶ κακίας, μεταξὺ ἀγιότητος καὶ ἁμαρτίας, ἐκήρυξεν εἰς πάντας τὸ εὐαγγέλιόν του, τὴν χαρμόσυνον δηλονότι ἀγγελίαν, ὅτι καταλύεται τέλος πάντων δι' αὐτοῦ τὸ κράτος τοῦ διαβόλου, ἡ βασιλεία τῆς κακίας

γ'. 2) καὶ τῆς ἐκ προαιρέσεως (Ἰω. 4. 46, 48, 37, 4. Ἰω. γ'. 5, 4. Πέτρ. 6. 22, 6. Κορ. 1. 21, 4. Πέτρ. 4. 18, 19, Ἑβρ. 6. 45, 7. 26, Ἰουστίν. Τροφ. διὰ λ. 61, Περὶν Πιστ. IV. 27, Κλημ. στρυμ. 5. 42, Εὐαγγ. ἀπὸδ. γ'. 2, Ἀθανάτ. ἐνανθρῳ. 15, 16, Χρυστός. εἰς Ἑβρ. 6μ. γ'. 3, Θεοδώρητ. ἔρην. διὰ λ. γ').

13) * δ. §. 35, σημ. 19.

14) Ἰωαν. 7. 7, ρδ'. 4, ψαλμ. 16. 8, καὶ ργ'. 8, Λουκ. κδ'. 42, Ἰω. 1. 31, 7. 38, 7. 29, 1. 17, 18, Ῥωμ. 13. 3, Ἑβρ. 1. 5, 7, 8, Φιλιπ. 6. 8, Ἑβρ. 6. 13, Πρῶτ. 6. 25, Ἀθην. κ. Ἀρειαν. λόγ. γ'. 35, Αὐγουστ. 6. 7, Χρυσός. εἰς Ματθ. 6μ. πγ', Δαρμπακη ἐκθ. 6. 2. πλς. γ'. 14, 15.

15) Λουκ. 16. 12, Ἰω. 4. 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

καὶ ἁμαρτίας, καὶ ἄρχεται ἡ οὐράνιος καὶ ἀτελεύτητος βασιλεία τοῦ Θεοῦ, καὶ ὅτι κληρονόμοι τῆς βασιλείας ταύτης εἶνε πάντες, ὅσοι πιστεῦσωσιν εἰς αὐτόν, καὶ βαπτισθῶσιν εἰς τὸ ὄνομα τοῦ Πατρὸς καὶ τοῦ Υἱοῦ καὶ τοῦ Ἀγίου Πνεύματος. Τὴν δὲ θεῖαν αὐτοῦ ταύτην διδασκαλίαν ἐπεσφράγισε καὶ ἐκύρωσε καὶ ἐπίστωσε διὰ τῆς θείας του δυνάμεως, ἐνεργήσας θαύματα τοιαῦτα, ὥστε οἱ βλέποντες αὐτὰ νὰ ἐκπλήττωνται ὑπὸ θαυμασμοῦ, καὶ νὰ λέγωσιν «οὐδέποτε ἐφάνη οὕτως ἐν τῷ Ἰσραὴλ». Ταῦτα δὲ πάντα ὅχι διότι δὲν ἤρχει καὶ μόνη αὐτοῦ ἡ θεία διδασκαλία εἰς τὸ νὰ ἐλκύσῃ πάντα νονεχῇ εἰς τὴν πρὸς αὐτόν πίστιν, ἀλλὰ διὰ νὰ μὴ μείνῃ καὶ ἡ ἐλαχίστη πρόφασις καὶ δικαιολογία εἰς τοὺς ἀμετανοήτους καὶ ἀπίστους, «τὴν γενεὰν τὴν ἄπιστον καὶ διεσραμμένην». Δι' ὅλου δὲ τοῦ βίου του καθυπέταξε τὸ θέλημα αὐτοῦ εἰς τὸ θέλημα τοῦ Θεοῦ, ἐπλήρωσε πᾶσαν ἀρετὴν καὶ πᾶσαν δικαιοσύνην, καὶ «ὑπήκουσεν γενόμενος μέχρι θανάτου», παρέσχεν ἑαυτὸν τύπον καὶ ὑπογραμμὸν τοῦ τελείου ἀνθρώπου¹).

§. 73.

Ποῖον εἶνε τὸ τέταρτον ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως, καὶ τί μᾶς διδάσκει;

«Σταυρωθέντα τε ὑπὲρ ἡμῶν ἐπὶ Ποντίου Πιλάτου, καὶ παθόντα καὶ ταφέντα». Τὸ ἄρθρον τοῦτο μᾶς διδάσκει τὸν σταυρικὸν θάνατον, μὲ τὸν ὁποῖον ὁ Σωτὴρ ἡμῶν ἐπέρανε τὴν ἀγίαν αὐτοῦ ζωὴν. Οἱ ἀρχιερεῖς τῶν Ἰουδαίων καὶ οἱ πρεσβύτεροι, εἰ γραμματεῖς καὶ οἱ Φαρισαῖοι, βλέποντες ὅτι ὁσημέραι ἐπληθύνετο ὁ ἀριθμὸς τῶν πιστευόντων εἰς τὴν διδασκαλίαν τοῦ Σωτῆρος, ἐξ ἐναντίας δὲ ὅτι ἡ ματαία εἰς τὸ νεκρὸν γράμμα καὶ τοὺς τύπους τοῦ μωσαϊκοῦ νόμου πρωστήλωσις αὐτῶν ἐξηλέγγετο, καὶ ὅτι τὸ προσωπεῖον τῆς ψευδοῦς ἀγιότητος, τὴν ὁποίαν ὑπεκρίνοντο, εἶχεν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ πρόσωπόν των, καὶ ἀποκαλυφθῇ ἡ πνευματικὴ αὐτῶν γύμνωσις καὶ ἐλεεινότης, ἐπληρώθησαν φθόνου καὶ ἐπνεον μῖσος καὶ θάνατον κατ' αὐτοῦ.

1) Ἰδ. λεπτομερῆ ἐξισόρησιν πάντων τούτων ἐν τῇ ἱερᾷ Ἱστορίᾳ §. 185—210.

Ὁ φθόνος δὲ καὶ τὸ μῖσος τοῦτο ἀπετύφλωσαν αὐτοὺς ἐντε-
λῶς, καὶ αὐτοὶ οἱ ἀποστρεφόμενοι τὸν νόμον καὶ τοὺς προφή-
τας, δὲν ἠδυνήθησαν νὰ ἴδωσιν ὑπὸ τὸ ἀνθρώπινον κάλυμμα
τοῦ Ναζαρηνοῦ διδασκάλου ἐκείνον, τὸν ὁποῖον προεῖπαν οἱ
προφῆται, καὶ ὁ ὁποῖος συμβολικῶς εἶχεν ὑποτυπωθῆ εἰς πᾶ-
σαν πρᾶξιν καὶ τελευτὴν ἱερὰν τοῦ παλαιοῦ νόμου. Ἐπαθον ἄρα
ὅ,τι εἶπεν αὐτός ὁ Σωτὴρ¹⁾, ἐφερρόμενον εἰς αὐτοὺς τὸ τοῦ Ἡ-
σαίου²⁾ «ἐπαχύνθη γὰρ ἡ καρδία τοῦ λαοῦ τούτου, καὶ τοῖς ὠτὶ
βαρέως ἤκουσαν, καὶ τοὺς ὀφθαλμοὺς αὐτῶν ἐκόσμησαν, μή-
ποτε ἴδωσι τοῖς ὀφθαλμοῖς, καὶ τοῖς ὠτὶ ἀκούσωσι, καὶ τῇ
καρδίᾳ συνῶσι, καὶ ἐπιστρέψωσι καὶ ἰάσωμαι αὐτούς».

§ 74.

Διηγῆται ἐν συντομίᾳ τὸν κατὰ τοῦ Θεανθρώπου φθόνον τῶν Ἰουδαίων,
τὴν θανατικὴν του καταδικήν, τὰ πάθη, τὴν σταύρωσιν καὶ τὴν ταφὴν.

Ὁ φθόνος καὶ τὸ μῖσος τῶν Ἰουδαίων τούτων ἐξεκαύθη ἐν
μᾶλλον, ὅτε μετὰ τὴν ἐκ νεκρῶν ἀνάστασιν τοῦ Λαζάρου,
πληθος ἀπειρον λαοῦ συρρέοντες ἐκ τε τῆς Ἱερουσαλὴμ καὶ
ἐκ τῶν περιχώρων, συνώδυσαν μετὰ βοῶν καὶ κλάδων τὸν
Ἰησοῦν ἐρχόμενον εἰς Ἱερουσαλὴμ ἐπὶ πώλου ὄνου, καὶ ἐκρα-
ζον «Ὡσαννά τῷ υἱῷ Δαυὶδ, εὐλογημένος ὁ ἐρχόμενος ἐν ὀνό-
ματι Κυρίου». Οἱ ἄρχιερεῖς καὶ οἱ πρεσβύτεροι καὶ οἱ Φαρι-
σαῖοι, μὴ δυνάμενοι νὰ χωνεύσωσι τὸ πάθος τῶν, συνήλθον,
συνεσκέφθησαν καὶ ἀπεφάσισαν τὸν θάνατόν του. Ὁ δὲ Ἰησοῦς
γνωρίζει ὡς Θεὸς πάντα ταῦτα, ἀλλ' ὡς ἄνθρωπος δεῖ μένει
ἀπαθής, ἀναλογιζόμενος δὲ τὸν ἐπονείδιστον καὶ ὀδυνηρότα-
τον ἐπὶ τοῦ σταυροῦ θάνατον, ἄλλοτε μὲν ὀλιγοψυχεῖ καὶ πα-
ρακαλεῖ τὸν ἐπουράνιον Πατέρα νὰ τὸν σώσῃ ἀπὸ τὸν θάνα-
τον τούτου λέγων, «Πάτερ, εἰ δυνατόν, παρελθέτω τὸ ποτή-
ριον τοῦτο ἀπ' ἐμοῦ», ἄλλοτε δὲ κυριεύεται ἀπὸ θλίψιν ἁμα-
τον καὶ ὀδύνης, ἣ ὁποία δὲν δύναται νὰ κατασταλῇ, καὶ ἐξέρ-

χονται ἐκ τῶν χειλέων του αἱ μελαγχολικαὶ καὶ θλιβεραὶ αὐ-
ται λέξεις «Περίλυπός ἐστιν ἡ ψυχὴ μου ἕως θανάτου». Ἀλλ'
ἡ ἀνθρωπίνη φύσις καὶ θελήσεις υποχωρεῖ ἐπὶ τέλους εἰς τὴν
θεῖαν, καὶ ἀποφασίζει ἀριστικῶς καὶ ἀμετακλήτως νὰ πῇ τὸ
πικρὸν ποτήριον τοῦ σταυρικοῦ θανάτου.

Ὁ Ἰησοῦς, ἄγων ἤδη τὸ τριακοστὸν τρίτον ἔτος τῆς ἡλι-
κίας του πρῶγει μετὰ τῶν μαθητῶν του τὸ τελευταῖον πᾶσχα,
ὅπου τελεῖται ὁ μυστικὸς δεῖπνος. Ὁ μιᾶρος καὶ ἐγνώμων μα-
θητής, Ἰούδας ὁ Ἰσκαρώτης, προδίδει τὸν ἀνεξίτητον διδά-
σκαλὸν του, ὅστις ἀσάγεται ἐνώπιον τῶν ἀρχιερέων Ἀννα καὶ
Καϊάφα, οἵτινες μὴ ἔχοντες τί νὰ κατηγορήσωσι τὸν ἀνσμεῖ-
τητον, καταφεύγουσιν εἰς ψευδομάρτυρας, καὶ τὸν καταδικά-
ζουσιν εἰς θάνατον. Τὸν φέρουσιν ἔπειτα ἐνώπιον τοῦ ῥωμαίου
ὑπερένδου τῆς Ἰουδαίας Ποντίου Πιλάτου, διὰ νὰ ἐπικυρώσῃ
τὴν θανατικὴν καὶ καταδικὴν καὶ νὰ τὴν ἐκτελέσῃ. Ὁ Πιλά-
τος ἀνακρίνει τὸν ὑπόδικον, καὶ μὴ εὑρίσκων κανὲν πταῖσμα,
μηδὲ τὸ ἐλάχιστον, τὸν κηρύττει ἄθωον. Ἀλλ' αἱ Ἰουδαῖοι ἐ-
πιμένουσι κραυγάζοντες νὰ σταυρωθῇ, καὶ μὴ ἔχοντες πραγ-
ματικὴν τινα κατηγορίαν, καταφεύγουσι πάλιν εἰς τὸ ψεῦδος.
Ὁ Πιλάτος ἐννοεῖ τοῦτο, καὶ προσπαθεῖ μὲ διαφόρους τρόπους
νὰ τὸν ἀπολύσῃ, καὶ τέλος διὰ νὰ καταπραύνη τὴν ὀργὴν τῶν
μαινομένων κατὰ τοῦ ἀθώου Ἰουδαίου, διατάττει ν' ἀτιμασθῇ
ὁ Ἰησοῦς. Ἀρχονται λοιπὸν αἱ σπαρταξικάρβουνοι σκηναὶ τῶν
σκληροτάτων παθῶν, αἱ ἐμπυρσμοί, αἱ κολαφισμοί, αἱ ὕβρεις,
αἱ δεινισμοί, τὰ ραπισματα, ὁ ἀκάνθινος στέφανος. Ἀλλ' εἰς
μάτην αἱ Ἰουδαῖοι, λυσσῶντες ἐκ τοῦ πάθους καὶ ὅλως ἐξη-
γερμένοι, ἐπιμένουσι ζητοῦντες καὶ δ' ἀπειλῶν τὸ αἶμα τοῦ
δικαίου. Ὁ Πιλάτος ἀπελπίζεται, καὶ ἵπται μὲν τὰς χεῖρας
του λέγων, «Ἀθῶός εἰμι ἀπὸ τοῦ αἵματος τοῦ δικαίου τούτου,
ὁμοῖς ὄψεσθε», ἀλλὰ διατάσσει ν' ἀσπλῇ ὁ Ἰησοῦς εἰς τὸν
τόπον τῆς καταδικῆς καὶ νὰ σταυρωθῇ. Ἀπάγεται δὲ τῶντι
εἰς τὸν Γολγοθᾶ, ὅπου καὶ σταυροῦται μετὰ δύο λησίων. Ἀλλ' ὦ
τῆς ἄκρας τοῦ δικαίου ἀνεξίτητικας καὶ μακροθυμίας!

καὶ σταυρούμενος, καὶ ποτιζόμενος ὄξος καὶ χολήν, συγχωρεῖ τοὺς σταυρωτάς του. Ἦκουσε δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ σταυροῦ βλασφημίας πολλὰς καὶ ποικίλας ὁ μακρόθυμος Ἰησοῦς, μέχρις οὗ περὶ τὴν τρίτην ὥραν μετὰ μεσημβρίαν, φωνήσας «τετέλεισται», παρέδωκε τὸ πνεῦμα. Παρευθὺς δὲ ὁ ἡΐος ἐσκοτίσθη, ἡ γῆ ἐσειέθη, καὶ πολλοὶ νεκροὶ ἀναστάντες ἐξῆλθαν ἀπὸ τῶ μνημεῖα, καὶ τὸ καταπέτασμα τοῦ ναοῦ ἐσχίσθη εἰς δύο. Τοιοῦτοτρόπως καὶ αὕτῃ ἡ ἄλογος κτίσις συνεκινήθη καὶ ἡλλοιώθη διὰ τὸ ξένον καὶ ἀνήκουστον τοῦτο καὶ σκληρότατον θέαμα, τὸν Δημιουργὸν κρεμάμενον καὶ ἀποθνήσκοντα ἐπὶ τοῦ σταυροῦ. Πρὸς δὲ τὸ ἐσπέρας ἀποκαθελωθεὶς ὁ ἐσταυρωμένος καὶ καταβιβασθεὶς ἀπὸ τοῦ σταυροῦ ὑπὸ τοῦ Νικοδήμου καὶ Ἰωσὴφ τοῦ ἐξ Ἀριμαθαίας, ἐσαβανώθη καὶ ἐτάφη εἰς μνημεῖον καινόν¹). Τοιοῦτῃ εἶνε ἐν περιλήψει ἡ ἱστορία τῶν παθῶν καὶ τῆς ταφῆς τοῦ Ἰησοῦ Χριστοῦ²).

§. 75.

Διὰ τί ἦτο ἀνάγκη νὰ σταυρωθῇ ὁ Σωτὴρ; Δὲν ἤρκει εἰς τὸ ἔργον τῆς σωτηρίας τοῦ ἀνθρώπου μόνῃ ἡ ἐνανθρώπησις καὶ ἡ διδασκαλία τοῦ;

Εἰς τὴν σωτηρίαν καὶ ἀπολύτρωσιν τοῦ ἀνθρώπου δὲν ἤρκει μόνῃ ἡ ἐνανθρώπησις καὶ ἡ διδασκαλία τοῦ Σωτῆρος, διότι δὲν ἤρκει μόνῃ ἡ ἀπὸ μέρους τοῦ ἀνθρώπου μετάνοια καὶ ἀποδοχὴ τοῦ θεοῦ λόγου, ἀλλ' ἔπρεπε πρὸ παντός ἄλλου νὰ ἰκανοποιηθῇ ἡ θεία δικαιοσύνη. Πῶς δὲ ἦτο δυνατόν νὰ γείνη τοῦτο; Ὁ ἄνθρωπος θανασίμως ἁμαρτῶν ἦτο ἄξιος καὶ θανασίμου τιμωρίας, ἄξιος θανάτου. Ποῖον δὲ ἦτο τὸ μέσον, διὰ τοῦ ὁποίου ὁ Θεὸς ἐξιλεούμενος ἡδύνατο νὰ συγχωρήσῃ εἰς τὸν πταίστην τὸ θανάσιμον πταῖσμά του; Οἱ Ἰσραηλῖται ὡς τοιοῦτον μέσον

1) Σημειωτέον ὅτι ἡ σὰρξ τοῦ ζωοδότου Χριστοῦ δὲν ἔπαθε τὴν ἐλαχίστην διασποράν, ὥπως τὰ σώματα τῶν κοινῶν ἀνθρώπων, οὔτε πρὸ τῆς ταφῆς, οὔτε ἐν τῇ ταφῇ (ψαλμ. 140, Πράξ. 6'. 25—32, γλ'. 35).

2) 13. λεπτομερὴ ἐξισόρησιν πάντων τούτων ἐν τῇ ἱερᾷ ἱστορίᾳ §. 210—240.

εἶχον τὴν θυσίαν. Ἐγίνετο δὲ ἡ νομικὴ αὕτη θυσία ὡς ἐξῆς. Οἱ πρεσβύτεροι ἐπέθετον τὰς χεῖράς των ἐπὶ τὴν κεφαλὴν τοῦ θύματος, πρὶν θυσιασθῆ, καὶ τοῦτο ἐσήμαινεν, ὅτι τὸ θῆμα ἀνελάμβανεν ὅλας τὰς ἁμαρτίας τῶν θυόντων, οἷτινες ἦσαν αὐτοῖς ἄξιοι σφαγῆς δι' αὐτάς, ἀντικαθίστων δὲ ἑαυτοὺς διὰ τοῦ θύματος, καὶ προσφέροντες τοῦτο θυσίαν εἰς τὸν Θεόν, εἰς τὸν ὁποῖον ἥμαρτον, ἐξηγήσαντες καὶ ἐλυτρῶντες ἑαυτοὺς ἀπὸ τοῦ θανάτου. Ἀλλ' ἡ νομικὴ αὕτη θυσία τῶν Ἰσραηλιτῶν ἦτο τύπος ἀληθινός¹⁾. Ἡ ἀνθρωπότης ἁμαρτήσασα εἰς αὐτὴν τὴν ἀπειρὸν μεγαλειότητα τοῦ Θεοῦ, ἐπείκει νὰ προσφέρῃ θυσίαν ἱκανοποιούσαν πρὸς τὴν θείαν δικαιοσύνην. Ἐπειπε νὰ εὐρεθῇ «ἀνὴρ», τοῦτο ἐστὶν ἄνθρωπος α) ὁ ὡμὸς, καὶ β) ἱκανὸς νὰ «ἄρῃ τὰς ἁμαρτίας τοῦ κόσμου»²⁾. Ἀλλὰ τοιαύτην ἄνθρωπον καὶ ἀπειρὸν θυσίαν δὲν ἦτο εἰς κατάστασιν νὰ προσφέρῃ ἡ ἁμαρτωλὴ καὶ ὁσθενὴς καὶ πεπερασμένη ἀνθρωπότης, μόνος δὲ εἰς τὴν δύνατα νὰ προσφέρει, ὡς καὶ ἐπρόσφερεν αὐτὴν, αὐτὸς ὁ μὴ γινὼς ἁμαρτίαν, ὁ θεῖος ἄνθρωπος Ἰησοῦς. Καί, ὁ Σωτὴρ ἡμῶν προσήνεγκεν ἑαυτὸν ἐπὶ τοῦ σταυροῦ θυσίαν³⁾ ἐξῆλαστήριον⁴⁾ πρὸς τὸν Θεὸν ἀντὶ τῶν ἀνθρώπων⁵⁾ καὶ

1) Ἑβρ. α. 4—12

2) Ἰω. 4. 29, Ματθ. 4. 17, Λουκ. κδ'. 37, Πραξ. 9. 32.

3) Ὅτι ὁ σταυρικὸς θάνατος τοῦ Σωτῆρος ἡμῶν ἦτο θυσία, προσέπαν οἱ πατέρες (Ψαλμ. κδ'. Πσάλ. γ'), καὶ μαρτυρεῖ αὐτὸς ὁ Ἰ. Χριστός, χαρακτηρίζων τὸ ἐκχυνόμενον αἷμα του ὡς τὸ τῆς καθ' ἡμᾶς Διαθέσεως (ἐν ἀντιθέσει ἐπὶ πρὸς τὸ αἷμα τὸ ἐν τῶν θυσιῶν τῆς παλ. Διαθέσεως: Ματθ. 26. 28. Πρβλ. Ἰω. 1. 52, κλπ.), καὶ οἱ ἀπόστολοι αὐτοῦ (Ἑβρ. 9. 12, 13, 14, 22, 23, 25, 26, 28, 2. 27, 1. 40, 12. 1. 3, α. Κορ. 1. 10 καὶ γὰρ τὸ πάσχα ὑπὲρ ἡμῶν ἐτύθη Χριστός). Πρβλ. Κλημ. Ῥώμ. 1. 4. πρὸς Κορ. κβ', Εὐαγγ. ἀπὸς εὐαγγ. 12. August. c. Faust. XII. 21. XIII. 47, Θεοδώρ. εἰς Καλ. 1. 20, Ἐφῆσ. 1. 11, περὶ προνοίας λόγ. 1.

4) Ἰω. 4. 29, Κολ. 1. 20—22, Ἐφεσ. 1. 2, 25, α. Κορ. 1. 3, Νίκα. 1. 28, α. Τιμ. 1. 6, Τιτ. 1. 44, Τιμ. 2. 21, 25, Γαλ. 3. 13, α. Κορ. 1. 20, 2. 23, Ἀποκλ. 1. 9, α. Ἰω. 1. 2, Ἑβρ. 9. 14—15, 1. 5—10, 1. 20, Εὐαγγ. ἀπὸς εὐαγγ. 1. 10, 2. 12, Βασίλ. εἰς Ψαλμ. 1. 3, 4, Ἀποκλ. 1. 13, 14, 15, 16, 17, Θεοδώρ. περὶ προνοίας λόγ. 1. Ἐφῆσ. διὰ 1. 7.

5) Ματθ. 20. 28, α. Τιμ. 1. 6, Εἰρήν. Πιστες V. 16, Γρηγόρ. Ναζ. λόγ.

ὕπὲρ τῶν ἀνθρώπων· ἡ δὲ θυσία αὕτη ἱκανοποίησε καὶ ὑπερικανοποίησε τὴν θεϊαν δικαιοσύνην, ἀ) διότι ὁ θυσιασθεὶς ἦτο ἄμωμος καὶ ἡ προσφορά του ὑπῆρξεν ἔργον πλήρους ἐλευθερίας καὶ ἀγάπης, καὶ β') διότι ὡς ἐκ τῆς φύσεως αὐτοῦ ἡ θυσία του εἶχεν ἄπειρον ἀξίαν. Ἐκτὸς δὲ τούτου ἡ θυσία αὕτη, ὡς ἐκ τῆς ὑπὲρ πᾶσαν ἐννοίαν φύσεως καὶ ἀξίας αὐτῆς, ἐμελλε νὰ ἐπενεργήσῃ, ὡς καὶ ἐπενήργησεν, εἰς τὰς ψυχὰς τῶν ἀνθρώπων τόσον ἰσχυρῶς, ὥστε νὰ ἀποφασίσωσι νὰ θανατώσωσι καὶ οἰκοθεν τὴν ἐν αὐτοῖς ἀρχὴν τῆς ἁμαρτίας, νὰ «σταυρώσωσι» καὶ αὐτοὶ «τὴν σάρκα σὺν τοῖς παθήμασι καὶ ταῖς ἐπιθυμίαις»⁶⁾, καὶ νὰ ἀνακαινίσωσιν ἑαυτοὺς, «ἀποθνήσκοντες» μὲν «τῇ ἁμαρτίᾳ, ζῶντες δὲ τῷ Θεῷ»⁷⁾. Ἰδοὺ ὁ λόγος, δι' ὃν ἦτο ἀνάγκη νὰ ἀποθάνῃ ὁ Σωτὴρ ὑπὲρ ἡμῶν ἐπὶ τοῦ σταυροῦ.

Διὰ τῆς θυσίας ταύτης, ἣν προσήνεγκεν ὁ Ἰησοῦς Χριστὸς ὑπὲρ τῆς ἀνθρωπότητος ἐπὶ τοῦ σταυροῦ, συνετέλεσε τὸ μίγα καὶ κοσμοσωτήριο ἐργον τῆς ἐξαγορᾶς καὶ ἀπολυτρώσεως⁸⁾.

γ', μ', Κύριλλ. Ἀλεξ. εἰς Ἰω. ζ'. 30, Εὐσέβ. ἀποδ. Εὐαγγ. ἀ. 10, ι. 4, Κυριλλ. Ἱεροσολ. κατηχ. γ'. 2, Θεοδώρ. εἰς Ἠσαΐ. γλ. 5, Ῥωμ. ἀ. 17, Κολ. β'. 14, περὶ προνοίας λόγ. ι. 6) Γαλ. ε. 24. 7) Ῥωμ. ς'. 10—11.

8) Τὰ κοσμοσωτήρια ἀποτελέσματα τοῦ ἐπὶ τοῦ Σταυροῦ ἐκχυθέντος τιμίου αἵματος τοῦ Λουτρωτοῦ ἡμῶν, ὑποδειχθέντα ἐν τοῖς ἀνωτέρω χωρίοις (σημ. 2—5), εἶνε μάλιστα τὰ ἑξῆς: α) ἐξάγνις ἀπὸ τῆς ἁμαρτίας (ἀ. Ἰω. ἀ. 7, Ἑβρ. θ'. 13, 14, Λουκ. κδ'. 47, Τίτ. β'. 14—14, Ἑβρ. ἀ. 2, Ἀποκάλ. ἀ. 5) β') ἀπελευθέρωσις ἀπ' αὐτῆς (Ῥωμ. ς'. 20), καὶ ἀπὸ τοῦ πατρὸς αὐτῆς τοῦ διαβόλου (β'. Τιμ. β'. 26, Ἰω. ιβ'. 31, Τίτ. β'. 14, Ἑβρ. β'. 14, 15, Κολ. β'. 14, 15, ἀ. Κορ. ιε. 22), γ') ἐξαγορά καὶ ἀπολύτρωσις ἀπὸ τῆς κατάρας (Γαλ. γ'. 13, ἀ. Κορ. ς'. 20, ζ'. 28, Γαλ. ἀ. 4, ἀ. Τιμ. β'. 5, 6, Τίτ. β'. 14), δ') συνδιαλλαγή πρὸς τὸν Θεόν (Κολ. ἀ. 19—22, Ῥωμ. ι. 10, β'. Κορ. ι. 19, Ἑφ. β'. 15), πρὸς τὸν ὁποῖον καὶ ἐ) συνετέθημεν διὰ νέας Διαθήκης (Ἑβρ. θ'. 13, ιβ'. 24, Ἑφ. β. 13—18), ς') ἀπελάθωμεν τὴν «οὐλοσύνην» καὶ «οἰκειότητα» αὐτοῦ (Γαλ. β'. 4, Ἑφ. β'. 19, β'. Πέτρ. ἀ. 4). Διὰ τῆς χάριτος δὲ αὐτοῦ ζ') ἀγιαζόμενοι ἐν τῷ παρόντι βίῳ (ἀ. Πέτρ. β'. 24, Ἑφ. ι. 25—27, Κολ. ἀ. 21—22, Τίτ. β'. 14) γινόμεθα ἡ) κληρονόμοι τῆς αἰωνίου δόξης καὶ μακαριότητος (Ἰω. γ'. 14, 15, Ῥωμ. ε. 10, Ἑβρ. β'. 10).

Ἐκτείνονται δὲ τὰ σωτήρια ταῦτα ἀποτελέσματα ἐπὶ πάντας ἀναβαπτέντας τοὺς ἀνθρώπους (Ἰω. γ'. 16, ἀ. Ἰω. β'. 2, δ'. 44, β'. Κορ. ε. 14, Ἑβρ. β'. 9, Ῥωμ.

Διὰ ταύτης δέ, ἅπαξ καὶ διὰ παντός γενομένης, ἔπαυσαν διὰ παντός φυσικῶ τῷ λόγῳ καὶ αἱ ἀτελεῖς καὶ διηνεκεῖς θυσίαι τοῦ νόμου, ὡς προεικόνισαι καὶ προσηγορεύσαι ταύτης. Διὰ τοῦτο καὶ ὁ Σωτὴρ, ἐκπνέων ἐπὶ τοῦ σταυροῦ, ἐφώνησε τὸ «τετέλεσται», ἥτοι ἐτελείωμε πλέον ἢ ἀτελής θυσία τοῦ νόμου, καὶ ἐτελέσθη ἡ μόνη πραγματικὴ καὶ τελεία, ἡ τῆς ἐξαγορᾶς καὶ ἀπολυτρώσεως. Ἐκτοτε ἐξ ἁπλῆς ὁ Σωτὴρ ἡμῶν ἀπεδείχθη «ὁ μέγας καὶ τέλειος ἀρχιερεὺς, ὁ αἰώνιον λύτρωσιν ἐνδράμενος»⁹⁾, ὅχι ὁμῶς κατὰ τὴν τάξιν Ἀαρών, ἀλλὰ κατὰ τὴν τάξιν Μελχισεδέκ¹⁰⁾, ἥτοι ἀπάντη ἐπὶ γῆς, ἀμήτωρ ἐν οὐρανῷ, ἀγενεαλόγητος, αἰώνιος.¹¹⁾

§. 76.

Ποῦν εἶνε τὸ πέμπτον ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως καὶ τί μᾶς διδάσκει;

«Καὶ ἀναστάντα τῇ τρίτῃ ἡμέρᾳ κατὰ τὰς γραφάς».

Ὁ Ἰησοῦς Χριστός, ἀποθανὼν ἐπὶ τοῦ σταυροῦ καὶ ταφείς

Ε'. 48, ἀ. Τιτ. β'. 8, Κολ. ἀ. 2), Ῥφ. α. 10, Ε'. 13—22), διότι ὁ Χριστὸς ἀπέθανεν ὑπὲρ πάντων, ἀδικῶν καὶ δικαίων, πιστῶν καὶ ἀπιστῶν, καὶ διὰ πάντας ὧν ἐσώθησαν ἢ δὲν θά σωθῶσιν, αἵτιοι εἶνε ἢ θά εἶνε αὐτοί, ὡς μὴ ὁ εὐαγγ. σα ν τ ε ς (13. Χριστὸς. εἰς Ἑβρ. ὁμ. δ'. 2, εἰς ἀ. Τιμ. ὁμ. ζ'. 1, Θεοδώρ. ἀπορ. Ἑβρ. ἐρ. κβ', Ἐπιτομ. 0. δογμ. β'), εἰς πᾶσαν ἐν γένει ἁμαρτίαν, τὴν τε προπατορικὴν (Ῥωμ. ε. 12, ἀ. Κορ. ιε. 45), καὶ τὴν ἐκ προαιρέσεως, παρελθούσαν τε (Ῥωμ. γ'. 23, Ἑβρ. β'. 15, Πράξ. ιγ'. 38, 39), καὶ μέλλουσαν (ἀ. Ἰω. β'. 1, 12, ἀ. 7, 9), καὶ ἐπὶ πᾶσαν ἐν γένει τὴν κτίσιν (τὴν τε ἄβυσσον: Κολ. ἀ. 19—20, Ῥφ. α. 10, 22, 23, Ἑβρ. ιβ'. 22—24, καὶ τὴν ὕλην: Ῥωμ. ιγ. 2^α, 22, 19, 21 β'. Πέτρ. γ'. 10, 13) ἐκτός των δαιμόνων ὡς ἀμετανοήτων (Ἰωδ. β. Ματθ. κβ. 47, Ἰουστίν. ἀπολ. ἀ. 28, β'. 8, Εἰσην. αἰρέσ. ἀ. 10, Νεμέο. περὶ φύσεως ἀνθρ. ἀ. August. Civ. Dei XIV 27, Δαμασκ. ἔκθ. ὁρθ. πίρ. β'. 3, ἀ. 3), τῆς ἐκ Οὐρανοῦ Συνόδου, τῆς κατὰ Ἀριγένοους, καν. ζ').

9) Ἑβρ. β'. 10. 10) Πρὸς Ἑβρ. ζ'. 3.

11) Ἑβρ. ε. 10. Τὸν Μελχισεδέκ ἀναφέρει ἡ Γραφή ὡς βασιλεὺς Σαλῆ καὶ κληρὸς τοῦ Θεοῦ τοῦ Ὑψίστου» (Γενέσ. ιβ'. 18, Πρὸς ψαλμ. ρθ'. 4), ὅστις ἐξελθὼν εἰς ὑπάκουσιν τοῦ Ἀδραάμ, ἐπρόσφερεν εἰς αὐτὸν ἄρτους καὶ εἶνον καὶ εὐλογοῦσεν αὐτόν. Ἡ βασιλεία καὶ κληρονομία αὐτῆς τοῦ Μελχισεδέκ, μὴ ἀνιέσθαι τοῖς εἰς τὴν μετὰ ταῦτα φυλὴν τοῦ Λευὶ, ἐξ ἧς ὁ Ἀαρὼν καὶ οἱ διάδοχοι αὐ-

ὡς ἄνθρωπος, μετὰ μὲν τοῦ σώματος ἔμεινεν ἐν τῷ τάφῳ¹⁾ τὴν πρὸ τοῦ σαββάτου νύκτα, τὸ σάββατον ὁλόκληρον καὶ τὴν μετὰ τὸ σάββατον νύκτα, μετὰ δὲ τῆς ψυχῆς αὐτοῦ καὶ ὡς Θεός²⁾ κατηλθεν εἰς τὸν Ἄδην καὶ ἐκήρυξεν εἰς τὰς ἐκεῖ κρατούμενας ψυχὰς τὸ εὐαγγέλιον τῆς σωτηρίας³⁾, τὸ ὁποῖον δηλοῖ ὅτι ὁ Κύριος ἡμῶν ἦτο σωτὴρ πάσης τῆς ἀνθρωπότητος τῶν τε πρὸ τῆς ἐλευσίως καὶ μετὰ τὴν ἔλευσιν αὐτοῦ γενεῶν, πάντων δηλ. ὅσοι ἦ εἶχον πιστεύτη πρότερον εἰς αὐτόν, ὡς μέλλοντα νὰ ἔλθῃ, ἢ ἐπίστευσαν ἔπειτα εἰς αὐτόν ὡς ἐλθόντα ἤδη. Ἄφ' οὗ δὲ τοιοῦτοτρόπως κατήργησε τὸ κράτος τοῦ Ἄδου καὶ ἡλειθέρωσε τοὺς ἁγίους ἄνδρας τῆς παλαιᾶς Διαθήκης⁴⁾, ἀνέστη ἐκ τοῦ τάφου τὴν τρίτην ἡμέραν, ἦτοι τὴν ἐπαύριον τοῦ σαββάτου, ἢ ἐποῖα καὶ εἰς ἀνάμνησιν τῆς ἀναστάσεως τοῦ Κυρίου ἐπωνομάσθη Κυριακή, καὶ διὰ τῆς ἐναστασεώς του ταύτης ἐνθεν μὲν ἐπεσφράγισα τὴν θείαν ταύ δύναμιν, ἐνθαὶ δὲ ἐδείξεν, ὅτι ὁ θάνατος, εἰς τὸν ὁποῖον εἶχε καταδικασθῇ ἡ ἀνθρωπότης, νικηθεὶς δὲν εἶχε πλέον δύναμιν, ἐφ' ᾧ καὶ προεῖπεν ὁ προφῆτης Ὡση⁵⁾, «Ποῦ σου, θάνατε, τὸ

τοῦ ἱερέως, ἄνευ προγόνων καὶ ἄνευ διαδόχου, προεικόνιζε τὴν ἄνευ προγόνων καὶ διαδόχων καὶ ἀνεκδιόγητον ὅλως βασιλείαν καὶ ἱερωσύνην τοῦ Σωτῆρος, ὅπως ἀναπτύσσεται λεπτομέρως τὴν ἰδίαν ταύτην ὁ Ἀπόστολος ἐν τῇ πρὸς Ἑβραίους ἐπιστολῇ (πλ. ἀνωτέρω σημ. 9, 10, 11).

1) Τὸ σῶμα τοῦ Ι. Χ. ἐν τῷ τάφῳ «οὐκ εἶδε διαφθοράν» (Σ. 74, σημ. 4).

2) Τὴν σωματικὴν ἐν τῷ τάφῳ καὶ σώματον πανταχοῦ παρουσίαν τοῦ Θεανθρώπου φάλλει κἀλλίστα ὁ ἐκ Λαμακηνῶν θεολόγος καὶ ποιητὴς ὡς εἴη: «Ἐν τάφῳ σωματικῶς, ἐν Ἄδου δὲ μετὰ ψυχῆς ὡς Θεός, ἐν παραδείσῳ δὲ μετὰ λητοῦ, καὶ ἐν Ὁρῶν ὑπάρχει, Χριστέ, μετὰ Πατρός καὶ Πνεύματος, πάντα πληρὼν ὁ ἀπερίγραπτος». (Καν. ἀναστάς. τοῦ δ' ἤλου, στίχοι 3 τοῦ α'. Ὡδης).

3) ἡ Πάτερ. γ'. 13, Εἰρημ. Πάτερ. IV. 12, 27, V. 31, Tertull. de anima 55, Κλημ. Ἀλεξ. στρωματ. σ'. 6, 11, 12, Ἐπιφάν. αἰρέσ. 59. 62, σ' 8. Βασίλ. ὁμ. εἰς ψαλμ. μὴ 46, Χρυσόστ. εἰς Ματθ. ὁμ. 6. 1. Ἀθανάσι. κ. Ἀπολινος α'. 13, 14, Σωκρατ. ἐκκλ. ιστορ. β' 37 41.

4) Ζωχαρ. 6. 1, Χρυσόστ. εἰς Ματθ. 6. 1, ἰστέδ. Εὐαγγ. ἀποδ. 1, Εἰρημ. Πάτερ. IV. 12, 27, V. 31, Tertull. de anima 55, Κυρίλλ. Ἱεροσολ. καταρτ. 41, 12 17, Ἐπιφάν. αἰρέσ. 59. 62.

5) Ἠσ. 25, α' Κηρ. 14 55.

πέντρον; ποῦ σου, "Αδὴ, τὸ νίκος;» Ἐδειξε δὲ συγχρόνως καὶ ὅτι, ὅπως αὐτὸς ἀνέστη ἐκ νεκρῶν, οὕτω καὶ ἡμεῖς θέλομεν ἀναστῆ μετ' αὐτὸν «τὸν πρωτότοκον τῆς κτίσεως», ἥτοι τῆς διὰ τοῦ θανάτου καὶ τῆς ἀναστάσεως αὐτοῦ ἀνσκαίνισθαι-σκις νέας πλέον κτίσεως⁶). Ἄλλως δὲ κατελθὼν εἰς τὸν Ἄ-δην καὶ ἀναστὰς ἐκ νεκρῶν ἔδειξε καὶ ὅτι εἶνε κύριος ζώντων καὶ νεκρῶν⁷)

§. 77.

Ἦσαν εἴη τὸ ἔκτον ἄρθρον τοῦ συμπόλου τῆς πίστεως καὶ τί μᾶς διδάσκει;

«Καὶ ἀνελθόντα εἰς τοὺς οὐρανοὺς καὶ καθεζόμενον ἐκ δε-ξιῶν τοῦ πατρός.» Ὁ Σωτὴρ ἡμῶν ἀναστὰς ἐκ τοῦ τάφου ἔ-μεινεν ἐπὶ τῆς γῆς τεσσαράκοντα ἡμέρας, ὅτε καὶ ἐφανερώθη πολλάκις πρὸς τοὺς μαθητάς αὐτοῦ, διαβεβαιώνων αὐτοὺς με-τρίφορα σημεῖα περὶ τῆς πραγματικῆς αὐτοῦ ἀναστάσεως. Ἐξαπέστειλε δὲ αὐτοὺς εἰς τὸν κόσμον ὅλον διὰ νὰ κηρύξωσι τὸ εὐαγγέλιόν του καὶ νὰ βαπτίζωσι τοὺς πιστεύοντας, ὑπο-σχέθεις δὲ νὰ καταπέμψῃ ἐπ' αὐτοὺς τὸ Πνεῦμα τὸ ἅγιον, τοὺς ἔδωκε τὴν ἀδειαν τοῦ δεσμεῖν καὶ λύειν, ἥτοι νὰ συγχωρῶσιν ἢ μὴ ἁμαρτίας. Τέλος δὲ τὴν τεσσαρακοσιτὴν ἡμέραν ἀπὸ τῆς ἀναστάσεως ἀνελήφθη ἔμπροσθεν τῶν μαθητῶν του εἰς τοὺς οὐρανοὺς, ὅπου ἐκάθισεν ἐν δεξιᾷ τοῦ πατρός¹). Ἀναληφθεὶς ἔτι μεθ' ἧς ἔφεριν ἐπὶ γῆς ἀνθρωπίνης, φύσεως, ἔδειξεν ὅτι ἡ εἰσοδος εἰς τὴν βασιλείαν τῶν οὐρανῶν εἶνε ἐλευθέρα τοῦ λοι-ποῦ εἰς τὸν ἄνθρωπον, καὶ ὅτι «τὸ πρόσλημμα τῆς σαρκός», τοσούτῃς ἢ ἀνθρωπίνῃ φύσιν, ἐθεώθη, μεταβληθεῖσα ἀπο φθαρτῆς εἰς ἀφθαρτον, καὶ ἀπὸ θνητῆς εἰς ἀθάνατον²). Διὰ δὲ τῆς ἐκ δεξιῶν καθέδρας ἔδειξε τὴν δύναμιν καὶ δόξαν, ἣν εἶχε πρὸ αἰώνων παρὰ τῷ πατρὶ³), ἥτις ὁμως ἐκρύπτετο μέχρι

6) 4 Κορ. ιβ. 29, 23, Ἰω. ια. 23, 5. 51—55, Ῥωμ. 5. 3, 4, 8, 9.

7) Ῥωμ. ιβ. 9, Λουκ. x. 37—38.

1) Ἰδ. Ἰερ. Ἰεροσ. 8. 216. 2) Ἰδ. §. 71, σημ. 10. 3) Ἰω. ιβ. 4—8.

τοῦδε ὑπὸ τὸ κάλυμμα τῆς ἀνθρωπότητος, καὶ ὅτι αὐτός, ὡς ἄνθρωπος «γενόμενος ὑπῆκος μέχρι θανάτου»⁴⁾, εἶνε καὶ ὁ αἰώνιος⁵⁾ βασιλεὺς.

§. 78.

Ποῖον τὸ ἔδομον ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως, καὶ τί μὲν διδάσκει;

«Καὶ πάλιν ἐρχόμενον μετὰ δόξης κρῖναι ζῶντας καὶ νεκρούς, οὗ τῆς βασιλείας οὐκ ἔσται τέλος». Μᾶς διδάσκει δὲ τὸ ἄρθρον τοῦτο περὶ τῆς δευτέρας παρουσίας¹⁾ τοῦ Ἰησοῦ Χριστοῦ, καὶ περὶ τῆς ἐν τῇ παρουσίᾳ ταύτῃ κρίσεως καὶ ἀνταποδόσεω²⁾. Ἐάν κατὰ τὴν πρώτην παρουσίαν, καθ' ἣν ἐτέλεσε τὸ ἔργον τῆς ἀπολυτρώσεως καὶ σωτηρίας, ὁ Σωτὴρ ἡμῶν ἐφάνη ταπεινός³⁾, ἡ δευτέρα θέλει γείνη πλήρης θείας μεγαλειότητος καὶ δυνάμεως καὶ δόξης⁴⁾. Ἐάν δὲ ἡ πρώτη ἦτο ἔργον φιλανθρώπου πρὸς τοὺς ἁμαρτωλοὺς συγκαταβάσεως καὶ εὐσπλαγγνίας τοῦ Θεοῦ⁵⁾, ἡ δευτέρα θέλει εἶνε φρικώδης διὰ τοὺς ἁμαρτωλοὺς, ὡς ἔργον κρίσεως καὶ ἀνταποδόσεως⁶⁾. Ἡ δὲ δευτέρα οὕτη παρουσία τοῦ Κυρίου ἡμῶν θέλει συνοδευθῇ καὶ μὲ τὴν συντέλειαν τοῦ κόσμου⁷⁾, καί, ἀφ' οὗ

4) Φιλ. β'. 8. 5) Λουκ. α' 33.

1) Ματθ. ιε'. 27—28, καὶ 31, Μάρκ. γ'. 23, Λουκ. καὶ 27, 28, Ἰωάν. ιδ'. 3, 18, ιε'. 16, β'. Κορ. β'. 1—10, β'. Θεσσαλ. α' 7—10, β'. 8, Ματθ. κδ'. 3, 27, 37, 38, α'. Κορ. β'. 23, α'. Θεσσαλ. β'. 19, γ'. 13, δ'. 15, ε' 23, β'. Θεσσ. β'. 1, Ἰάκωβ. β'. 73, β'. Πέτρ. γ'. 4, α' Ἰω. β'. 28.

2) Ματθ. ζ'. 21—23, καὶ 22—23, ιδ'. 35, 41, 42, ιγ'. 37—43, κ'. 1—16, ιδ'. 28—30, κδ'. καὶ κς'. 64, Ἰω. ε' 27—31, Πράξ. ι. 42, ιε'. 31, Ῥωμ. ε. 7—12, 12—16, ιδ'. 10, α'. Κορ. β'. 5, Ἀποκ. κ'. 14—15, Πολυκαρπ. πρὸς Φίλιπ. ζ, Ἰουστίν. διακ. α' 8 52, Τρόφ. διὰ ρζ', ρκ', Ἀθηναγόρ. περὶ ἀνιστ. νεκρ. α', Κυριλλ. Ἱερ. κατηχ. ιε' 1, Χρυσόστ. εἰς ψαλμ. β'. 4, Ἰσ. δ. Πηλ. γ'. ἐπιστ. λζ', Θεοδώρ. εἰς ψαλμ. θ. 9.

3) Φιλιπ. β'. 8, Ματθ. κ'. 28. 4) Ματθ. καὶ 31, Φιλ. β'. 9—11.

5) Ἰω. γ' 17. 6) Πράξ. ιε'. 31, Ματθ. ιε'. 27.

7) Ματθ. κδ'. 6, 11, Μάρκ. γ'. 7, Λουκ. καὶ 9, α'. Κορ. α' 8, καὶ 24, Ματθ. ιγ'. 41, 19, κδ'. 3, Ἰω. β'. 23, α'. Κορ. β'. 11, α'. Ῥωμ. ε' 1, β'. Ῥωμ. β'. 4, Ἰάκ. β'. 3.

παύσῃ ἐπὶ γῆς βασιλεία τῆς χάριτος, θέλει διαδεχθῇ αὐτὴν ἢ ἐν οὐρανοῖς ἀτελείუτητος βασιλεία τῆς δόξης⁸⁾. Τὸν ἐκ προαιωνίας βουλήσας ὀρίσμενοι⁹⁾ χρόνον, καθ' οὗ θε-
λουσι συμβῇ πάντα ταῦτα, δὲν γνωρίζομεν, διότι ὁ Κύριος ἡ-
μῶν δὲν ἠθέλησε νὰ φανερώσῃ τοῦτο εἰς ἡμᾶς¹⁰⁾, διὰ νὰ εἴμε-
θα πάντοτε ἑτοιμοὶ¹¹⁾· μᾶς ἔδωκεν ὁμῶς τηχεῖά τινα καὶ γνω-
ρίσματα, ἐκ τῶν ὁποίων θέλει προεικασθῇ σαφῶς ἡ συντέλεια
τοῦ κόσμου. Ἐνθεν μὲν θέλει διαδοθῇ τὸ εὐαγγελίον τῆς χά-
ριτος εἰς ὅλον τὸν κόσμον¹²⁾, ἐνθεν δὲ εἴλετο πληθυνθῇ ἡ ἀ-
μαρτία, ἡ ἔλλειψις τῆς πίστεως καὶ τῆς ἀγάπης, καὶ ἡ ἐξ αὐ-
τῆς ἀδικία, ἀκολασία καὶ ἐσχάτη ἐξαχρείωσις¹³⁾. Ἡ δὲ κα-
τάστασις αὐτῇ περιωφθεῖσα διὰ τῆς σατανικῆς ἐνεργείας τοῦ
μέλλοντος νὰ βασιλεύσῃ κατὰ τὰς τελευταίας ταύτας ἡμέρας
Ἀντιχρίστου¹⁴⁾, θέλει εἶναι πολὺ χειροτέρα τῆς τῶν Λοδῶ.

8) Ματθ. ιγ'. 43, Λουκ. α' 33, ιγ'. 28, 29, ε'. Τιμ. ε'. 17, 12, ε' 18, Ῥωμ.
ζ. 17, Χρυσόστ. εἰς ἀ. Κορ. ὁμ. 29, Κυρίλλ. Ἱερουσ. κατ' ἡγ. ε'. 26, 27, 29.

9) ἀ. Τιμ. ε'. 15. 10) Ματθ. κδ'. 42, ἀ. Θεσσ. β'. 2, Πράξ. α' 7.

11) Ματθ. κδ'. 41, August. Ep. CXXVII.

12) Ματθ. κδ'. 14, κή. 19, Μάρκ. ιγ'. 13, Ῥωμ. ιβ'. 25—26.

13) ἀ. Τιμ. α'. 1—3, Ματθ. κδ'. Λουκ. ιβ'. 8. Ἰδοὺ ἰδοὺ πῶς ἀπεικονίζει
τὴν ἐξαχρείωσιν τῶν ἀνθρώπων ἐν ταῖς ἐσχάταις ταύταις ἡμέραις ὁ ἀπόστολος
ἐν ε'. Τιμ. γ'. 1—4. «Ἰδοὺ δὲ γίνωσκε, ὅτι ἐν ἐσχάταις ἡμέραις, ἐναστήσου-
νται καιροὶ χαλεποὶ, ἔσονται γὰρ οἱ ἄνθρωποι φιλαυτοὶ, φιλόαργοι, ἀλαζόνοι,
υπερήφανοι, βλάσφημοι, γονεῦσι ἀπειθεῖς, ἀχάριστοι, ἀνύσκι, ἄστυργοι, ἄ-
πειθοι, διεδοχοὶ, ἀκρατεῖς, ἀνήμεροι, φιλόκατοι, προδοταί, προπέτε, τετυ-
ρωμένοι, φιλήδονοι μᾶλλον ἢ φιλόθεοι, ἐνομιεὶς μύσφηται εὐσεβεῖσι, τὴν δὲ δύ-
ναμιν αὐτῆς ἠρημνέουσιν». Πράξ. Εἰρημ. Ἰνσ. es V. 28.

14) ε'. Θεσσαλ. β'. 3—12, ἀ. ἰω. β'. 18, Εἰρημ. Πάτερ. V. 25 Tertull.
ἀποκ. ὁμ. 4, Εὐσεβ. εἰς Λουκ. ιβ'. 24, Ἰδὲ ἰδοὺ. ὁμ. καὶ δὲ LXXXIX, Θεοδώρ.
ἀποκ. ὁμ. 1. ἑρμ. γ'. Iacynth. Ἰνσ. Ἰνσ. VII. 18, Κυρίλλ. Ἱερουσ. κα-
τ' ἡγ. ε'. 14, α'. Λαμακ. 28 ὁμ. πῶς. ε'. 26. — Σημειώσαντες ὅτι, ὥπως οἱ
Νεχλιασταὶ (N° § 35, σημ. 7) ἐπακηλύθησαν περὶ τὸν χρόνον τῆς συντε-
λείας τοῦ κόσμου καὶ τῆς δευτέρας παρουσίας τοῦ Χριστοῦ, οὕτως ἄλλοι ἐπα-
κηλύθησαν περὶ τὸ πρῶτον τοῦ Ἀντιχρίστου, ἐκλαθόντες ὡς τοῦτον οἱ μὲν ἀρ-
χαῖοτεροι τὸν Νέρωνα (August. Civ. Dei XX. 3), οἱ δ' ἐν τῇ Δύσει κατὰ τοὺς
κωλύοντες χρόνους, καὶ μάλιστα περὶ τοὺς διαμορτωμένους, τὸν ἐπίσκοπον
Ῥώμης ἢ Πάπαν (Nicaire Dogmat. orig. ed. II. p. 139).

μων καὶ Γομόρρων, ἀλλὰ καὶ ὁ οὐρανόθεν ὄλεθρος τῶν χωρῶν ἐκείνων¹⁵) εἶνε μικρὸς παραβαλλόμενος πρὸς τὴν αἰωνίαν καὶ ἀτελεύτητον κόλασιν, τὴν ὁποίαν θέλουσι κληρονομήσῃ κατὰ τὴν φοβεράν ἐκείνην ἡμέραν οἱ ἁμαρτωλοὶ¹⁶).

§. 79.

Ποῖα τις λεπτομερέστερον θέλει εἶνε ἡ συντέλεια τοῦ κόσμου, καὶ ἡ κρίσις καὶ ἀνταπόδοσις;

Συντέλειαν τοῦ κόσμου λέγουσα ἡ Γραφή ἐννοεῖ ὅχι τὴν ἀπόλυτον καταστροφὴν τοῦ κόσμου¹), ἀλλὰ τὴν διὰ τοῦ πυρὸς ἀνασσειχέωσιν καὶ μεταμόρφωσιν καὶ ἀφθαρτοποιήσιν αὐτοῦ²). Θέλει δὲ συμβῆ ἡ δευτέρα παρουσία καὶ ἡ συντέλεια τοῦ κόσμου διὰ μιᾶς καὶ ἀπροσδοκήτως³). Διὰ μιᾶς θέλει σεισθῇ μετὰ χρι θεμελίωσιν ἡ γῆ, ὁ ἥλιος καὶ ἡ σελήνη θέλουσι σκοτισθῇ, καὶ αἱ δυνάμεις τῶν οὐρανῶν θέλουσι σαλευθῇ⁴). Τότε θέλει παρευθὺς ἡχῆσθαι ἡ σάλπιγξ τῶν ἀρχαγγέλων, καὶ αἱ μὲν ψυχαὶ τῶν ἀπ' αἰῶνος νεκρῶν θέλουσι διὰ μιᾶς ἐνωθῇ μετὰ τοὺς καὶ τῶν σώματι⁵), ἀφθαρτα τοῦ λοιποῦ καὶ ἀθάνατα, τὰ δὲ σώματα τῶν μέχρι τῆς στιγμῆς ἐκείνης ζώντων θέλουσι λάβῃ διὰ μιᾶς τὴν ἀφθαρσίαν ταύτην⁶). Ἀμφότεροι δέ, καὶ οἱ πρὶν

15) Γενεσ. ιβ'. 16. 46) Ματθ. ι. 15.

1) Τοῦτο λέγοντες οἱ περὶ τὸν Ὀριγένη καταδικάσθησαν ὑπὸ τῆς ἐ. Οἰκουμ. Συνόδου (ἐ. Οἰκ. Συνόδ. καν. ι. ι, ια).

2) Πέτρ. γ'. 10—13. Πρὸς ἀποκάλ. ια'. 1. Εἰρηγ. Περ. V. 36, Κυρίλλ. Ἱεροσολ. κατ' ἐλ. 3, Hieron. in Esai. LXV, Ἰουστίν. ἀπολ. α'. 7, Ἀθηναγ. πρὸς κβ'. 3, Θεόδ. Ἀνατολ. Αὐτόλοχ. β'. 37, 8, August. Cívít. Dei XX. 16.

3) Ματθ. κδ'. 27, Λουκ. ιθ'. 24, β'. Πέτρ. γ'. 10.

4) Ματθ. κδ'. 29, Μάρκ. ιγ'. 24, Λουκ. ια'. 25.

5) Ἰωβ κθ'. 23—26, β'. Ματθαῖ. ζ'. 9, ια'. 14, ιθ'. 43, Ἰωβ ια'. 23, 24, 25, Πράξ. κγ'. κδ'. 5, Ἰωβ ια'. 25, 28, 29, Πράξ. β'. 2, κβ'. 15, ιθ'. 18, 32, κγ'. 6, Ἰβρ. ζ'. 2, α. Κορ. ια'. 12—17. — Περὶ τῆς ἀναστάσεως τῶν νεκρῶν ἐπαρματεύθησαν πολλοὶ πατέρες τῆς ἐκκλησίας, ὡς Ἰουστίνος, Ἀθηναγόρας, Τερτυλλιανός, Εὐρέμης, Μεθόδιος, Εὐστάθιος, Γρηγόριος ὁ Ἀδύσσης, Ἀμβρόσιος, Γρηγόριος ὁ Σύρος κλπ. 6) α. Κορ. ια'. 36, 44, 53.

νεκροὶ καὶ οἱ τέως ζῶντες, εἴτε ἄδικοι εἴτε δίκαιοι⁷⁾, ἀνάρτα-
 σοι γενόμενοι ἐπὶ νεφελῶν, θέλουσι μεταφερθῆ ἑναέριοι εἰς τὸν
 τόπον τῆς κρίσεως⁸⁾. Ἐκεῖ θέλει στηθῆ θρόνος,⁹⁾ καὶ παρου-
 σιασθῇ ἐπὶ τέλους ὁ ὕψος τοῦ Θεοῦ ἐν ὅλῃ τῇ δόξῃ καὶ τῇ με-
 γαλειότητι αὐτοῦ, ἐρχόμενος ἐπὶ τῶν νεφελῶν ὡς ὁρατὴ¹⁰⁾.
 Ὡς δὲ θέλουσι ταχθῇ οἱ μὲν πιστοὶ καὶ δίκαιοι ἐκ δεξιῶν, οἱ
 δὲ ἀσεβεῖς καὶ ἄδικοι ἐξ ἁριστερῶν τοῦ Θεοῦ, καὶ ἐπὶ τέλους
 θὰ ἀρχίσῃ ἡ κρίσις. Οὔτε μάρτυρες καὶ ἀπαδείξεις, οὔτε δικη-
 γόροι καὶ ἀπολογίαι, ἀλλ' οὔτε μετάνοια πλεον ἐκεῖ καὶ συγ-
 χώρησις. Ὁ παντογνώστης καὶ καρδιογνώστης Θεὸς γνωρίζει
 ἐνὸς ἐκάστου ὅχι μόνον τὰ ἔργα, ἀλλὰ καὶ αὐτοῦ τοῦ πλεον
 ἀποκρύφους στοχασμούς, ἐπομένως δὲν ἔχει ἀνάγκην οὔτε νὰ
 ἐξετάσῃ οὔτε νὰ ἀνακρίνῃ τινά. Θέλει δὲ μόνον ἀκριθμήτην
 πρὸς τοὺς ἐκ δεξιῶν τὰ ἔργα τῆς πίστεως καὶ τῆς ἀγάπης,
 ὅσα ἐπραξαν, καὶ εἰς ἀμοιβὴν θέλει πέμψῃ αὐτοὺς ἐκεῖ, ὅπου
 ἡ αἰωνία¹¹⁾ χαρὰ καὶ ἀτελεύτητος μοκαριότης διὰ τὴν ἀπολαύ-
 σαι τὰ ἀγαθὰ ἐκεῖνα, «ὃ ὀφθαλμός οὐκ οἶδε, καὶ οὖς οὐκ ἤ-
 κκουσε, καὶ ἐπὶ καρδίαν ἀνθρώπου οὐκ ἀνέβη¹²⁾». Ἐπειτα δὲ
 θέλει στραφῇ πρὸς τοὺς ἐξ ἁριστερῶν, καί, ἂν' οὐ ἀκριθμήτην
 καὶ πρὸς αὐτοὺς τὰ ἔργα τῆς ἀσεβείας καὶ ἀνομίας των, θέλει
 τοὺς ἀποπέμψῃ εἰς τὸν τόπον τῆς αἰωνίου¹³⁾ κολάσεως καὶ
 καταδίκης, ἐκεῖ ὅπου ὁ κλαυθμὸς καὶ ὁ βρυγμὸς τῶν δδόντων,
 εἰς τὸ πῦρ τὸ ἐξώτερον, τὸ ἡτοιμασμένον τῷ διαβόλῳ καὶ τοῖς

7) Πράξ. κβ'. 15, ἰω. ε'. 28, 29. Κλήμ. Ῥώμης πρὸς Κορινθ. κβ'. Που-
 σιμ. ἀπολ. α'. 18, 32, Ἄθανασ. ἐκκλ. ἀπολ. 1, Κορινθ. Κατ' ἁ. δ'. 30, Χρυ-
 σόστ. εἰς Ἐβρ. ἀμ. ιθ' 1. 8) α' Θεσσ. δ'. 17.

9) Ματθ. κβ'. 31, Δανιὴλ γ'. 7, 10. 40) Πιστ. κβ'. 27.

11) ἰω. γ'. 28 γ'. 16, Ματθ. κβ'. 46 α' Πιστ. ε' 40, Ἐβρ. ε'. 8, 9, δ'
 Κορ. δ'. 7, 8, κλη. Θεοφίλ. Ἀντισχ. πρὸς Αὐτολ. α' 14, Κλήμ. Ἀλεξ.
 στρωμ. ε'. 14, August. de Civit. Dei XXII. 30, Δοκτωρ. ἐκθ. ὁρθ. πίστ.
 δ'. 27. 12) α' Κορ. β'. 9.

13) Ματθ. γ'. 12, ἰω. 8, κβ'. 41, 46, Ἀποκάλ. β'. 41, γ'. 10, Μάρκ. β'.
 14, Πουστίν. ἀπολ. α'. 28, Εἰρη. Πιστ. IV. 23, V. 27, Κορινθ. Ἱεροσ.
 κατ' ἁ. ιθ' 19, Θεοφίλ. Ἀντισχ. Αὐτολ. α' 14, Κορινθ. Ἀλεξ. εἰς Ἠσαΐ. ξβ'
 11, Θεοδώρ. εἰς Ψαλμ. ην', August. Civ. Dei XXI. 17, 21, 26.

ἐγγέλοις¹⁴⁾ αὐτοῦ. Ὅπως δὲ οἱ δίκαιοι θίλουσιν ἀπολάβῃ ἀνάλογον πρὸς τὴν πίστιν καὶ ἀρετὴν αὐτῶν τὴν ἀμοιβήν¹⁵⁾, οὕτω καὶ τῶν ἀμαρτωλῶν ἡ κόλασις θέλει εἶναι ἀνάλογος μετὰ τὴν κακίαν καὶ ἀπιστίαν των¹⁶⁾.

§. 80.

Πατρὶς εἶναι τὸ ὄργανον ἄρθρον τοῦ συμφύλου τῆς πίστεως καὶ τί μᾶς διδάσκει ; « καὶ εἰς τὸ Πνεῦμα τὸ ἅγιον, τὸ κύριον, τὸ ζωοποιόν, τὸ ἐκ τοῦ Πατρὸς ἐκπορευόμενον, τὸ σὺν Πατρὶ καὶ Υἱῷ συμπροσκυνούμενον καὶ συνδοξαζόμενον, τὸ λαλῆσαν διὰ τῶν προφητῶν ». Τὸ ἄρθρον τοῦτο μᾶς διδάσκει περὶ τοῦ ἁγίου Π. εὐματοῦ, ἐν τῇ διπλῇ αὐτοῦ σχέσει πρὸς τὴν ἁγίαν Τριάδα καὶ πρὸς τὸν κόσμον.

Κατὰ τὸν πρῶτον λόγον εἶδαμεν ἀνωτέρω¹⁾, ὅτι τὸ ἅγιον Πνεῦμα²⁾ εἶναι τὸ τρίτον πρόσωπον τῆς ἁγίας Τριάδος, ὁμοούσιον τῷ Πατρὶ, ὅθεν καὶ « κύριον » καὶ « ἅγιον » λέγεται διὰ τὴν θεϊαν κυριαρχίαν καὶ ἀγιότητα, ὅπως κύριος καὶ ἅγιος ὁ Πατήρ, ὅπως κύριος καὶ ἅγιος ὁ Υἱός· ὅτι ἐπομένως ὡς τοιοῦτον « συμπροσκυνεῖται καὶ συνδοξάζεται » μετὰ τὸν Πατέρα καὶ τὸν Υἱόν· καὶ ὅτι οὕτε ἐκτίσθη, ὅπως τὰ κτίσματα, οὕτε ἐγεννήθη ἐκ τοῦ Πατρὸς, ὅπως ὁ Υἱός, ἀλλ' « ἐκπορεύεται » μόνον

14) Ματθ. κβ'. 31.

15) Λουκ. ιβ'. 17, 20, ἁ. Κορ. γ'. 8, 6. Κορ. θ'. 6, Εἰσην. Παρ. III. 49, Κλημ. Ἀλεξ. στρώμ. γ'. 43, Θεοδώρ. εἰς ἁ. Κορ. ιβ'. 41, August. Civ. Dei XXII. 30, Βασίλ. εἰς Ἡσαΐ ιβ'. 40, Χρυσόστ. εἰς ἁ. Κορ. ρζ'. 3.

16) Λουκ. ιβ'. 47, 48. κ'. 47, Ῥωμ. ε'. 6, Χρυσόστ. εἰς Ῥωμ. ἑμ. ε. Hieron. in Matth. X, August. de Baptismo IV. 49.

1) § 45.

2) Τὸ ἅγιον πνεῦμα ἐπονομάζεται ἐν τῇ ἁγίᾳ Γραφῇ καὶ παρὰ κλητοῖς (Ἰω. ιδ'. 26, ις'. 7, = συνήγορος καὶ παρήγορος; Ἰδ. Suicer. Thes. eccles. ἐν τῇ λαζείᾳ· δ' ὡρ εἰς (Ἰω. β'. 10, κλημ.)· ἐπαγγελία (Λουκ. κβ'. 49, κλημ.)· δύνάμεις (Λουκ. ιζ'. 35, κλημ.)· χρίσμα (Ἰω. β'. 20, 31)· σφραγίς (Ἐφεσ. α'. 13, κλημ.) καὶ δάκτυλος Θεοῦ (Ματθ. ιδ'. 28, κλημ.).

«ἐκ τοῦ Πατρὸς,» ὅχι δὲ «καὶ ἐκ τοῦ Υἱοῦ», ὅπως βλασφημοῦσιν οἱ Λατῖνοι, κατ' αὐτοὺς δὲ καὶ οἱ διαμαρτυρόμενοι³).

Τὴν δὲ δευτέραν, τὴν πρὸς τὸν κόσμον, σχέσιν τοῦ ἁγίου Πνεύματος, μᾶς ἐξηγεῖ ἡ λέξις «ζωοποιὸν καὶ ἅγιον» (ἐν τῇ ἰδιαιτέρᾳ αὐτῆς πρὸς τὸν κόσμον ἀναφορᾷ) καὶ αἱ λέξεις «λαλήσαν διὰ τῶν προφητῶν.» Διὰ τοῦ ἁγίου Πνεύματος ὁ Θεὸς ἀπενεργεῖ εἰς σύμπασαν ἐν γένει τὴν κτίσιν, τὴν τε αὐλὸν⁴) καὶ τὴν ὕλικήν⁵), διαμορφῶν καὶ ζωογονῶν αὐτήν, καὶ διὰ τοῦτο τὸ τρίτον πρόσωπον τῆς ἁγίας Τριάδος λέγεται ἐν γένει «ζωοποιόν»⁶). Ἰδίως ὁμοῦ τὸ ἅγιον Πνεῦμα ἐμπνέει καὶ ἐπισχύει τὴν πνευματικὴν ζωὴν εἰς τοὺς ἀνθρώπους, ὅσοι διὰ τῆς πίστεως καὶ τῶν ἔργων αὐτῶν ἀποδείξωσιν ἑαυτοὺς καὶ εἰκοθεν ἁγίους τῆς θείας ταύτης χάριτος⁷), φωτίζον αὐτῶν τὸν νοῦν καὶ ἁγιάζον τὴν καρδίαν· ὅθεν οὐ μόνον «ζωοποιόν» καὶ κατὰ τὴν ἀναφορὰν ταύτην, ἀλλὰ καὶ «ἅγιον» ἰδιαιτάτα προσωπομεῖται⁸). Ὁ ἁγιωθεὶς τῆς θείας ταύτης χάριτος τοῦ ἁγίου Πνεύματος ὑψοῦται ὑπεράνω τῆς κοινῆς σφαίρας καὶ βλέπει διὰ τοῦ νοῦς πράγματα, τὰ ὅποια οὔτε ἄλλος ἄνθρωπος δύναται νὰ ἰδῇ καὶ κατανοήσῃ, οὔτε αὐτὸς ὁ ἴδιος ἄνευ τῆς ἁνωθεν ταύτης διὰ τοῦ ἁγίου Πνεύματος ἐλλάμψεως.

3) Ἰδ. § 36.

4) Ἦτοι τοὺς ἀγγέλους, Ἰερ. 31. ὁμο. εἰς τὴν αἰρ. Νοητοῦ ἰδ'. Ἀθην. πρὸς Τερπ. 8. 11. 5) Γεν. 1. ψαλμ. 136. 30, ἁγ'. 6. Δαμασκ. ἐκθ. 4. 101.

6) Χρυσόστ. εἰς Πρᾶξ. ὁμοι. 8. 9, Διδ. 1. Ἀλ. περὶ τριάδος 8. 7.

7) Πρᾶξ. § 21 § 36.

8) Ὅπως καὶ τὰ τρία πρόσωπα τῆς θεότητος εἶνε ἅγια, οὕτω καὶ ὁ ἁγιασμένος τοῦ κόσμου καὶ τῶν ἀνθρώπων εἶνε κοινὸν ἔργον αὐτῶν (Ἰω. 17. 11—17. 6. Θεσσαλ. 5. 13, 4 Πέτρ. 2. 2). Ἀλλ' ἰδίως ὁ μὲν Πατὴρ εἶνε οὕτως εἰσὶν, ἡ πηγὴ τοῦ ἁγιασμοῦ (Ἰω. 17. 16, Βασίλ. ἀγ. πνεύμ. 17. 1), ὁ δὲ Υἱὸς, ὁ δὲ τὸ ἔργον τῆς σωτηρίας καὶ ἀπολυτρώσεως καταξιώσας αὐτοῦ τὸν ἔνδοξον (Ἰω. 17. 16, 26, 30, 4. Κορ. 4. 4, κλπ.), καὶ τὸ ἅγιον Πνεῦμα ἰδίως καὶ κατὰ μέρος μετὰ τὸ ἅγιον καὶ σὺν τῇ ἐξ αὐτοῦ (6. Κορ. 17. 13, 4. Κορ. 17. 4, 11, Πρᾶξ. 8. 3, 4, 2. Πέτρ. 4. 2, 4. Κορ. 5. 11, Ἰω. 7. 5, 6, 7).

Τινες ἐγρημάτισαν δογμα ἐκλεκτά τῆς θείας χάριτος καὶ ὄργανα ἡμεῖς τοῦ ἁγίου Πνεύματος ;

Τοῦ κατὰ θεῖαν χάριν διὰ τοῦ ἁγίου Πνεύματος φωτισμοῦ καὶ ἁγιασμοῦ ἡξιώθη καὶ ἀξιοῦται, καθόλου μὲν εἶπεῖν, ἡ τοῦ Χριστοῦ ἐκκλησία¹⁾, ἰδίως ὁμῶς καὶ κατ' ἐξαιρετον τρόπον ἡ ξιωθησαν αὐτῆς οἱ ἱεροὶ συγγραφεῖς τῆς παλαιᾶς καὶ νέας Διαθήκης, οἱ προφῆται καὶ οἱ μαθηταὶ καὶ ἀποστόλοι τοῦ Κυρίου, κατὰ τὴν πεντηκοστὴν μάλιστα ἡμέραν μετὰ τὴν ἀνάστασιν αὐτοῦ, ὅτε τὸ Πνεῦμα τὸ ἅγιον κατέβη ἐπ' αὐτοὺς ἐν πυρίναις γλώσσαις²⁾. Διὰ τοῦτο καὶ οἱ ἅγιοι οὗτοι ἄνδρες εἶναι καὶ λέγονται θεοπνευσταί, καὶ αὐτοὶ καὶ πᾶν ὅ, τι συνέγραψαν ἡ ἐλάλησαν περὶ Θεοῦ καὶ περὶ παντός πράγματος ἀναφερομένου ἐμμέσως ἢ ἀμέσως εἰς αὐτόν, ὡς ἐμπνευσθέντες φωτισθέντες καὶ καθοδηγηθέντες εἰς τοῦτο ὑπ' αὐτοῦ ἀμέσως τοῦ ἁγίου Πνεύματος, καὶ ἀπλῶς εἰπεῖν, ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι καὶ λέγεται λόγος Θεοῦ³⁾. Ἐὰν δὲ ἐν τῷ ὁγδόῳ ἀρθρῷ τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως ἀναφέρεται ὅτι τὸ ἅγιον Πνεῦμα «ἐλάλησε» μόνον «διὰ τῶν προφητῶν», ὅχι καὶ διὰ τῶν ἀποστόλων, τοῦτο προῆλθεν ἐκ τούτου, ὅτι ἡ συντόξασα τὸ ἄρθρον τοῦτο ἐκ οἰκουμένης Σύνοδος ἠθέλησε τὰ προφυλάξαι αὐτοῦ τοὺς ὀρθοδόξους Χριστιανούς ἀπὸ τῆς κατ' ἐκείνου τοὺς χρόνους ἀναρτίσεως παρὰ τισι κακοδοξίας, ὅτι τὰ διδλὰ τῆς παλαιᾶς Διαθήκης δὲν ἦσαν θεοπνευστα, παρεσιώπησε δὲ το περὶ θεοπνευστίας τῶν ἀποστόλων καὶ τῶν διδλων τῆς καινῆς Διαθήκης, ἐπειδὴ τὸ το σὺδεῖς ἡρνεῖτο τότε οὐδὲ διημφισθῆται. Ἐπειδὴ δὲ, ὡς προεῖπομεν, δύο εἶνε τὰ εἶδη τοῦ λόγου τοῦ Θεοῦ, ὁ ἐγγραφός, ὃς ἡ ἁγία Γραφή, καὶ ὁ ἁποφορικός καὶ ἁγραφός, ἥτοι ἡ παράδοσις, ἐπεται ὅτι ἀμφότεραι οὗτοι αἱ πηγαὶ τοῦ Χριστιανισμοῦ, ἡ τε γραφή⁴⁾ καὶ

1) ἴδ. κατωτέρω §. 82. 2) ἱερ. ἀ. 2, γ'. 1. 3) ἴδ. §. 12.

4) ἱερ. ἀ. 1, γ'. 18, 21, 23, καὶ 26, ἱερ. ἀ. 1, γ'. 7, 8. 3, 4.

παράδοσις), εἶνε θεόπνευστοι. Οὐτε δὲ ἡ ἀγία καὶ πολύτιμος αὐτῇ τῆς ἐκκλησίας παρακαταθήκη, ἡ παράδοσις, (ἥτις πηγάζει μὲν καὶ ἐκ προτέρων τῆς χάριτος χρόνων, ἐκ τῆς παλαιᾶς δηλ. διαθήκης, ἀλλ' ἰδίως ἀρχὴν καὶ οὐσίαν λαβοῦσα ἀπὸ τοῦ Σωτῆρος ἡμῶν, μετεδόθη διὰ τῶν ἀποστόλων αὐτοῦ εἰς τὴν ἐκκλησίαν), ἀντίκειται πρὸς τὴν ἀγίαν γραφὴν, οὔτε αὐτῇ πρὸς τὴν παράδοσιν, μόνον δὲ συμπληροῖ ἀμοιβαίως ἡ μία τὴν ἄλλην, διότι τὸ μὲν γράμμα τῶν γραφῶν ζωοποιεῖται διὰ τῆς παραδόσεως, ἡ δὲ γνησιότης τῆς παραδόσεως δοκιμάζεται πρὸς τὴν ἀγίαν γραφὴν.

Ἐντεῦθεν γίνεται κατάδηλον ὅτι πλανῶνται καὶ βλασφημοῦσιν οἱ διαμαρτυρόμενοι, ἀρνούμενοι τὴν θεοπνευστίαν τῆς παραδόσεως καὶ δεχόμενοι ὡς λόγον Θεοῦ μόνον τὴν ἀγίαν Γραφὴν. Ἡ δυσσεβὴς αὕτη αἵρεσις ἐξελεγχεται οὐ μόνον ἐξ αὐτῆς τῆς παραδόσεως, ἥτις ὑπάρχει ἀνέκαθεν ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ καὶ ἀναγνωρίζεται ὡς λόγος Θεοῦ ἀνέκαθεν ὑπ' αὐτῆς⁶⁾, ἀλλὰ καὶ ἐξ αὐτῆς τῆς ἀγίας Γραφῆς, ἐν ᾗ ὁ ἀπόστολος Παῦλος οὐ

8, 1. 15, 10, Ματθ. 1. 19, κς'. 51, Λουκ. ιγ'. 31, κδ'. 26, 44, 'ιω. ιγ'. 18, Ματθ. κδ'. 42, Μάρκ. ιδ'. 36, ε'. Τιμ. γ'. 15, 16, ε'. Πέτρ. 1. 19, 20, 24, ε'. Βασίλ. κγ'. 2, ψαλμ. μγ'. 2, ἱερ. 2'. 12, ιζ'. 14, κδ'. 7, λδ'. 27, Ἀριθμ. λγ'. 4, 2, Δευτερον. κη'. 58, λδ'. 19, ἱερ. λ'. 2, λς'. 2, Ματθ. 1. 19, 20, κη'. 48, α. Κορ. ε'. 13, ζ'. 40, Μάρκ. ιγ'. 11, Λουκ. ιδ'. 11, 12, Κλημ. Ῥώμης. α. Κορινθ. με', Ἰουστίν. Τρύφων. διάλ. κθ'. 16, λγ', ρθ', Εἰρην. Haeres. V. 20, Τάτιαν. Ἑλλήν. ιδ', Θεόφιλ. Ἀντισχ. Αὐτόλοκ. ε'. 9, 14, γ'. 14, 13, 11, Tertull. adv. Marcion. III. 3, Κλημ. Ἀλεξανδρ. στρωματ. ε'. 2, προτρεπτ. 0', Ὀριγέν. περὶ ἀρχ. ε'. 1, 6, κατὰ Κέλσ. 1. 9, 2, 7, 17, Ἰππόλ. εἰρ. Νουτ. 14, Lactant. Institut. divin. V. 2, VI. 21, VII. 1, V. 1, 2, IV. 20, Εὐσεβ. ἐκκλ. ιστορ. 1. 28, 5. 13, εἰς ψαλμ. 1. 3, ε', 9, Βασίλ. εἰς ψαλμ. κθ'. 2, Ἀθανάσ. εἰς ψαλμ. προσημακ, Χρυσόστ. εἰς ε'. Τιμόθ. ὁμιλ. 6'. 1, εἰς Γαλ. 1. 7, (Ber. in Boeth. XI. 2, in Zaccar. IV, August. de Civit. Dei XI. 3, Κυρίλλ. Ἀλεξ. κ. Νεστορ. ε'. 7, Θεοδώρ. Ἑλλήν. παθημ. θεραπ. γ'.

5) 12. §. 10, Πρὸς καὶ Πολύκαρπ. Φιλίππ. 0', Εἰρην. Haer. III. 4, Κλημ. Ἀλεξ. στρωμ. ζ'. 17, 18, Tertull. de Coron. milit. III, praescr. XV, Βασίλ. εἰς πνεύμ. κθ'. 1, Γρηγόρ. Ναζ. ὁμ. λδ', Χρυσόστ. εἰς ε'. Θεσσαλ. ὁμ. δ'. 12, α. ε'. Τιμ. ὁμ. γ'. 4, Εἰρην. εἰρ. οδ'. 3, 54, 6, August. c. Iulian. VI. 5.

6) Εἰρην. Haeres. III. 4.

μόνον ὁμολογεῖ τὴν ὕπρξιν αὐτῆς ῥητῶς, ἀλλὰ καὶ συνιστᾷ τὴν ἀπαράσάλευτον τέρησιν αὐτῇ, 7).

5. 82.

Τίνας μετὰ τοῦ προφήτου καὶ ἀποστόλου ἐχρημάτισεν ὁργάνον τοῦ ἁγίου Πνεύματος;

Ὁ Κύριος ἡμῶν εἶπεν, ὅτι τὸ Πνεῦμα αὐτοῦ θέλει μένη εἰς τὸν αἰῶνα ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ αὐτοῦ, ὁδηγοῦν αὐτὴν εἰς πᾶσαν τὴν ἀλήθειαν.¹⁾ Ἐπεταί ἄρα ὅτι ἡ καθόλου ἐκκλησία, ἡ φύλαξ τῶν γραφῶν καὶ τῆς παραδόσεως, δὲν λαμβάνεται ὡς τοιαύτη.²⁾

καὶ εἶνε θεοφώτιστος, ὡς αὖτις ὁλόκληρος συνερχομένη διὰ τῶν ἐπισκόπων αὐτῆς, ἀποφαίνεται περὶ τῶν θείων ἀληθειῶν. Τοῦτο δὲ μάλιστα γίνεται ἐν ταῖς οἰκουμενικαῖς Συνόδοις, ὅπου ἡ καθόλου ἐκκλησία δὲν εἶνε δυνατόν νὰ πλανηθῇ ἐκλέγουσα τὸν ἑαυτοῦ ἀντὶ τῆς ἀληθείας, διότι τὸ ἐν αὐτῇ παρόν καὶ ἐνεργεῖν ἅγιον Πνεῦμα φωτίζει καὶ καθοδηγεῖ αὐτὴν ἀπαλλάττον πάσης πλάνης³⁾.

Ἄλλ' ἐκτὸς τῆς διὰ τῶν Συνόδων περὶ τῶν θείων ἀληθειῶν αποφαινομένης καθόλου Ἐκκλησίας, ὅργανα τοῦ ἁγίου Πνεύματος ἐχρημάτισαν κατὰ δεύτερον λόγον ἐν τῇ ὀρθοτομήσει τοῦ λόγου τῆς ἀληθείας καὶ οἱ πατέρες τῆς ἐκκλησίας⁴⁾, οἱ ἅγιοι ἐκεῖνοι ἄνδρες, ὅσοι, κατὰ τοὺς πρώτους μάλιστα τοῦ χριστιανισμοῦ αἰῶνας, οὐ μόνον διὰ τοῦ εὐσεβοῦς παραδείγματος τῶν καὶ τῆς θεαρέστου αὐτῶν πολιτείας συνετέλεσαν ἐν τῇ προόδῳ τῆς ἐκκλησίας, ἀλλὰ καὶ διὰ τῶν σοφῶν καὶ ἐργῶν αὐτῶν συγγραφῶν ἐπρομάχησαν ὑπὲρ τῆς ἐρθότητος τῶν δογμάτων, ὑπὲρ τῆς ὁρθῆς ἐξηγήσεως καὶ διδασκαλίας τοῦ θείου λόγου. Διακρίνονται δὲ οἱ πατέρες οὗτοι τῆς τοῦ Χριστοῦ ἐκκλησίας εἰς τρεῖς μάλιστα τάξεις. Πρῶτοι εἶνε οἱ λεγόμενοι ἀποστολικοὶ πατέρες, οἱ σύγχρονοι τῶν ἀποστόλων, ἤτοι Κλήμης ὁ Ῥώμης, Βαρνάβας, Ἑρμᾶς, Ἰγνάτιος, Πολύκαρπος, Παπίας καὶ Διονύσιος ὁ Ἀρεοπαγίτης. Δεύτεροι ἔρχονται οἱ ἀπολογισταί, ὀνομασθέντες οὕτως, διότι ἐν τοῖς συγγράμμασιν αὐτῶν ὑπερασπίσθησαν τὴν ἀλήθειαν τῶν θείων δογμάτων τοῦ χριστιανισμοῦ κατὰ τῶν Ἰου-

3) ἡμ. 98. 4) Ἐπιφάν. αἰρέσ. σθ. 14. Κορίλλ. κ. Νεστοριαν. γ'. 1, Ἰσίδωρ. Πάρισις. ἐπιστολ. σλγ.

5) Ματθ. κγ'. 20, ιθ'. 23, Ἰω. ιθ'. 6, ιθ'. 13, Ἄποστολ. Πατριάρχ. ὁρ. ιθ', Ἰερών. Ναξ. λόγ. κβ', ἐπιστολ. σθ. σθ', πδ', ρλγ', Βασιλ. ἐπιστ. ρδ', Αὐγ. ἐπιστ. LIV, ad Jon. 1, ιθ; ὁ οἰκουμέν. Συνόδου καν. ζ, Amiros. 1861. XXXII, Νικηφόρ. Πατριάρχ. Κ/πόλ. παρὰ Fabrice. Bibl. Græc. vol. I. p. 466.

6) Εἰρήν. Πατρ. III. 3, Θεοδόρ. ἱστορ. ἐκκλ. ε. 9, τῆς δ', ε' καὶ ζ'. οἰκουμέν. Συνόδ. καν. August. ad Gal.

δαίων καὶ κατὰ τῶν ἐθνικῶν, ἦτοι τῶν εἰδωλολατρῶν. Οἱ
 τέρες οὗτοι εἰ εἰ οἱ ἐξῆς : Ἰουστίνος, Ἀθηναγόρας, Θεόφιλος,
 Ἀντιοχεύς, Εἰρηνοῖος καὶ ἄλλοι. Ἀκολουθοῦσι τρίτον οἱ
 ἡσυχασταὶ πατέρες καὶ διδάσκαλοι τῆς ἐκκλησίας, ὁ μέγας Ἀθ
 νάσιος, ὁ μέγας Βασίλειος, ὁ Γρηγόριος, Ἰωάννης ὁ Χρυσ
 στομος, Κρίλλος, Ἀμβρόσιος, Ἰερώνυμος, Αὐγουστίνος, καὶ
 ἄλλοι. Τὰ συγγράμματα τῶν ἁγίων καὶ ἱερῶν τούτων ἀνδρ
 ῶν ἔχουσι τὸ κοινὸν εἰς ἴσον βαθμὸν πρὸς ὅσα ἐδογματίσθησαν
 καὶ ἐκινόνισαν αἱ ἐκκλησίαι, διότι καὶ τῆς χάριτος τοῦ ἁγίου
 Πνεύματος δὲν ἡξιώθησαν εἰς ἴσον βαθμὸν, εἶχαν ὁμοίως τὴν
 χάριν τὴν αὐτὴν οἱ ἅγιοι οὗτοι ἄνδρες εἰς βαθμὸν ὑπέρτερον πρὸς
 τὸν ἀλλοῦ ἀτόμου. Ὅθεν μετὰ τὰς συνόδους, αἵτινες ἀντιπρ
 σωπεύουσιν ὁλόκληρον τὴν ἐκκλησίαν, οἱ ἅγιοι οὗτοι ἄνδρ
 εῖνε τὰ κατ' ἐξοχὴν ὄργανα τοῦ ἁγίου Πνεύματος, ὅθεν καὶ
 θεοφόροι πατέρες κατ' ἐξοχὴν ὀνομάζονται.

Β) Ταῦτα λέγοντες δὲν πρέπει νὰ λησμονήσωμεν ὅτι ὡς θεοφόροι νοοῦν
 οἱ πατέρες τῆς ἐκκλησίας ὅχι ἀπλῶς εἰπεῖν ἐν παντί ὅτι συνέγραψαν, διότι
 αὐτῶν πολλοὶ συνέγραψαν καὶ περὶ ἀντικειμένων ἀλλοτρίων πρὸς τὸν χριστι
 ανισμόν καὶ τὰς θείας αὐτοῦ ἀληθείας, ὅταν περὶ γραμματικῆς, φιλοσοφίας, ἀσ
 τρονομίας, ποιήσεως, ἱστορίας, μουσικῆς κτλ., ἀλλ' ἐν οἷς μόνον συνέγραψαν περὶ
 χριστιανισμοῦ καὶ τῶν κατ' αὐτὸν ἀληθειῶν. Καὶ ταῦτα δὲ τὰ συγγράμματα
 δὲν πρέπει νὰ ἐκλαμβάνωνται ὡς ἀλάθιστα πάντα καὶ ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τέλους
 ἀλλὰ μόνον ὅσα καὶ καθ' ὅσον συμφωνοῦσι πρὸς τὴν ἀλήθειαν τὴν διδαχθεῖσαν
 ὑπὸ τῶν προφητῶν καὶ ἀποστόλων, πρεσβευομένην δὲ καὶ διδασκομένην ὑπὸ
 τῆς καθόλου ἐκκλησίας, διότι οὗτοι καὶ μόνον οὗτοι, ἦτοι οἱ προφῆται, οἱ ἀπο
 στολοι, καὶ ἡ καθόλου ἐκκλησία, εἶνε ἀλάθιστα κατὰ τὴν αὐστηράν καὶ ἀκ
 ῶδη ἐκκέντησιν τῆς λέξεως. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον καὶ πατέρες μὲν τινες τῆς ἐκκ
 λησίας ἐληθίσθησαν ἄντικρυς ἐν πολλοῖς τῶν συγγραμμάτων αὐτῶν, ὅθεν καὶ συ
 νεδικασθῆσαν ὑπὸ τῆς ἐκκλησίας (ὡς π. γ. ὁ Ὀριγένης, βλ. § 3
 ἄλλοι δὲ ἐξέφρασαν ἰδίᾳ ἀτομικὰς μὴ ἀναγνωρισθείσας ὑπὸ τῆς ἐκκλησίας
 ἀληθείας τῆς πίστεως. Οὗτα λοιπὸν αἱ ἀτομικαὶ αὖται ἰδέαι πολλῶν πατέρ
 ῶν πρέπει νὰ ἐκληρωθῇ ὡς καὶ τῆς ὀρθοδόξου ἐν γένει, οὗτε πάλιν ὅτι περὶ
 γὰρ ἐν τοῖς συγγράμμασι τῶν ἐκπεσόντων τῆς ὀρθοδοξίας ἐκκλησιαστικῶν συ
 γγραφέων ἔτι συλλήβδην καὶ ἀπλῶς εἰπεῖν ἐφαρμμένον καὶ καθόδον. Παράδει
 γμα ἔστω αὐτῶν πάλιν ὁ Ὀριγένης, περὶ οὗ ὀρθότατα εἴρηται τὸ τοῦ Κασσιδι
 οῦ «Ubi bene, n. ubi melius, ubi male, nemo perit.» (Fabric. Bibliotheca
 Graecae, vol. V, p. 214). Πρὸς ἐν γένει August. epist. CXLVII ad Pertu

§. 83.

Κατὰ τίνα λόγον ἐνεργεῖ ἡ θεία χάρις διὰ τοῦ ἁγίου Πνεύματος καὶ εἰς τὰ μέλη τῆς ἐκκλησίας, καὶ ποῦ εἶνε τὰ χαρίσματα καὶ οἱ καρποὶ τοῦ ἁγίου Πνεύματος ;

(1) κατὰ θεϊαν χάριν διὰ τοῦ ἁγίου Πνεύματος φωτισμός καὶ ἁγιασμός ἐπενεργεῖ πολυειδῶς καὶ πολυτρόπως καὶ εἰς τὰ κατὰ μέρος μέλη τῆς τοῦ Χριστοῦ ἐκκλησίας. Ἐπειδὴ δὲ τὰ μέλη ταῦτα εἶνε πολλὰ καὶ διάφορα, πολλὰ καὶ διάφορα εἶνε καὶ τὰ εἶδη τῆς εἰς αὐτὰ ἐνεργουμένης θείας χάριτος καὶ τὰ ἀποτέλεσματα· ἢ, ἐν ἄλλαις λέξεσι, πολλὰ καὶ διάφορα εἶνε τὰ χαρίσματα καὶ οἱ καρποὶ τοῦ ἁγίου Πνεύματος. Ἐὰν δὲ ἕκαστος ἡμῶν δὲν δύναται φυσικῶ τῷ λόγῳ νὰ ἔχῃ παρὰ τοῦ ἁγίου Πνεύματος ὅλα τὰ χαρίσματα, ὅσα ἔχει ἡ ὁλομέλεια τῆς ἐκκλησίας, ἐὰν δὲν δυνάμεθα ὅλοι νὰ γεινώμεν ἀπεσπῶσι καὶ προφῇται, οὐδὲ Ἀθανάσιοι καὶ Χρυσόστομοι ἐν τῇ κατανοήσει καὶ ἐξηγήσει τοῦ θείου λόγου, ὅχι τόσον διότι δὲν ἔχομεν τὴν σοφίαν ἐκείνων, ἀλλὰ διότι στερούμεθα ὁρὴν πίστειν καὶ ὁπὸν ζήλον εἶχαν οἱ ἅγιοι ἐκεῖνοι ἄνδρες, δὲν ἔπεται καὶ ὅτι μένομεν ὅλως ἀπόκληροι τῆς χάριτος τοῦ ἁγίου Πνεύματος, ἐὰν μόνον ἔχωμεν ἀπλῶς πίστιν ἐνεργουμένην δι' ἀγάπης. Ὅχι. Τὴν χάριν τοῦ ἁγίου Πνεύματος ὑπεσχέθη ὁ Κύριος ἡμῶν Ἰησοῦς Χριστὸς εἰς πάντας ἐν γένει τοὺς πιστοὺς¹⁾, ὥστε ὅλοι ἀνεξαιρέτως, ὅσοι ἐπιστεύσαμεν καὶ ἐβαπτίσθημεν εἰς Χριστὸν, δυνάμεθα νὰ γεινώμεν κοινωνοὶ τοῦ ἁγίου Πνεύματος, ὅταν ἔχωμεν πίστιν ἀληθὴ καὶ μεταληφθάνωμεν ἐν πίστι καὶ ευλαβείᾳ τῶν ἱερῶν μυστηρίων τῆς ἐκκλησίας, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μέγιστον καὶ ἀναγκαιότατον εἰς σωτηρίαν μετὰ τὸ βάπτισμα εἶνε ἡ θεία εὐχαριστία. Ἀλλὰ ἡ χάρις οὗ ἡ ἐνεργεῖ κατὰ δι-

(1) c. Faust. VII, Ambros. Epist. XLVII, καὶ Μιχαὴλ Introd. α τοῦ θεοῦ

πρὸς §. 141.

1) ἀ. Κορ. γ'. 16, ε'. 12, δ. Κορ ε'. 16, Ἑβρ. 6'. 21 Ἑβρ γ'. 6,

1. Πέτρ. 6'. 5

φορον τρόπον εἰς ἓνα ἕκαστον, ἐκλέγουσα τὸ ἕκαστῳ ἄρμοδιώτερον καὶ σωτηριωδέστερον²⁾. Ὅθεν καὶ τὰ εἶδη τῶν χαρισμάτων, τὰ ὅποια ἢ δωροῦνται ἢ δωρηθέντα ἀπαξ ἐνισχύονται καὶ κρατύνονται παρὰ τοῖς πιστοῖς ὑπὸ τοῦ ἁγίου Πνεύματος, εἶνε διάφορα, καθὼς καὶ ὁ βαθμὸς, εἰς τὸν ὅποιον δωροῦνται. Καὶ ὁ μὲν προφήτης Ἰσαΐας³⁾ ἀπαριθμεῖ ἐπτά τὰ χαρίσματα τοῦ ἁγίου Πνεύματος, α) πνεῦμα φόβου Θεοῦ, β) πνεῦμα γνώσεως, γ) πνεῦμα ἰσχύος, δ) πνεῦμα βουλῆς, ε) πνεῦμα συνέσεως, ς) πνεῦμα σοφίας, καὶ ζ) πνεῦμα Κυρίου. Ὁ δὲ ἀπόστολος Παῦλος λέγει ὅτι τὰ ἐξῆς εἶνε οἱ καρπὸι τοῦ ἁγίου Πνεύματος, «ἀγάπη, χαρά, εἰρήνη, μακροθυμία, χρηστοτης, ἀγαθοσύνη, πίστις, πραότης, ἐγκράτεια».

§. 81.

Ποῖον εἶνε τὸ ἔννατον ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως, καὶ ποῖα τις εἶνε ἔννοια τῆς ἐκκλησίας, περὶ τῶν προσόντων τῆς ὁποίας μᾶς διδάσκει;

Τὸ ἔννατον ἄρθρον λέγει «εἰς μίαν, ἁγίαν, καθολικὴν καὶ ἀποστολικὴν ἐκκλησίαν», καὶ μᾶς διδάσκει ποῖα εἶνε τὰ προσόντα τῆς ἐκκλησίας, εἰς τὴν ὁποίαν ὀφείλομεν νὰ πιστεῦωμεν. Ἀλλὰ πρὶν εἰπῶμεν περὶ τῶν προσόντων τούτων, ἀνάγκη ὁμιλήσωμεν περὶ αὐτῆς τῆς ἐκκλησίας.

Ὅτι εἶνε ὁ Χριστιανισμὸς⁴⁾ ὡς ἀφηρημένη ἔννοια, τοῦτο εἶνε ἡ ἐκκλησία ὡς πρᾶγμα συγκεκριμένον. Ἡ ἀπ' ἀρχῆς βουλή τοῦ Θεοῦ ἦτο νὰ καταστήσῃ μίαν πνευματικὴν βασιλείαν⁵⁾, τῆς ὁποίας βασιλεὺς μὲν νὰ εἶνε αὐτός, μέλη δὲ

2) Καὶ οὕτως μὲν εὐχέτο ὁ Θεὸς ἐν τῇ Ἐκκλησίᾳ πρῶτον ἀποστόλους, δεύτερον προφῆτας, τρίτον διδασκάλους, ἔπειτα δυνάμεις· εἰτα χαρίσματα ἰαμάτων, ἀντιλήψεις, κυβερνήσεις, γίνη γλωσσῶν. Μὴ πάντες ἀπόστολοι, μὴ πάντες προφῆται, μὴ πάντες διδασκαλοὶ, μὴ πάντες δυνάμεις, μὴ πάντες χαρίσματα ἰαμάτων; μὴ πάντες γλώσσαις λαλοῦσι; μὴ πάντες διερμηνεύουσιν; Κορ. ιδ'. 28. 3) ἰδ'. 1, 2, 3.

4) ἰδ' § 8, § 9, καὶ ἰδίως § 25.

5) Ἡ βασιλεία αὕτη ἐν τῇ Κ. Διαθήκῃ λέγεται παρὰ μὲν τῷ Ματθαίῳ

στεύσαντας εἰς αὐτόν πρὸ τῆς σαρκώσεως⁵), εἴτε ὑπὸ νόμον, εἴτε πρὸ τοῦ νόμου. Διαιρεῖται δὲ ἡ ἐκκλησία αὕτη εἰς τὴν ἐπὶ γῆς καὶ εἰς τὴν ἐν οὐρανοῖς· καὶ ἡ μὲν πρώτη λέγεται βασιλεία τῆς χάριτος ἡ ἐκκλησία στρατευομένη, καθότι σπεύδουσα πρὸς τὴν σωτηρίαν, καὶ πολεμοῦσα ἐστὶ πρὸς τὴν ἁμαρτίαν, εὐρίσκεται τρόπον τινὰ ἐν στρατείᾳ· ἡ δὲ δευτέρα, ἡ ἐν οὐρανοῖς, λέγεται καὶ βασιλεία τῆς δόξης ἡ ἐκκλησία θριαμβεύουσα καὶ ἐκκλησία ἁπρωτοτόκων ἐν οὐρανοῖς ἀπογεγραμμένων⁶). Αἱ δύο οὗτοι ἐκκλησίαι εἰχουσι πολλὰ τὰ κοινὰ πρὸς ἀλλήλας· ἀλλὰ διὰ τοῦτο δὲν τρέπει καὶ ἅ συγγέμεν αὐτάς, ἀλλὰ νὰ διακρίνωμεν ἀπ' ἀλλήλων ἀκριβῶς, ὡς οὐσιωδῶς διαφόρους⁷).

Κατ' ἄλλην μερικωτέραν ἔννοιαν, ἣτις εἶνε καὶ ἡ ἐπικρατεστέρα, ἐκκλησία λέγεται ἡ μετὰ τὴν σάρκωσιν καὶ στρατευομένη, ἥτοι τὸ σύνολον τῶν ἰδίως χριστιανῶν, ὅσοι ζῶσι ἐπὶ τῆς γῆς ταύτης ἀγωνιζόμενοι ὑπὲρ τῆς σωτηρίας. Περὶ ταύτης δὲ τῆς ἐκκλησίας λαλοῦμεν καὶ ἡμεῖς ἐνταῦθα.

§. 85.

Ποία τις λεπτομερέστερον εἶνε ἡ ἐκκλησία αὕτη, ποία τις ἡ ἀρχὴ καὶ ὁ ἀποπὸς αὐτῆς, καὶ πῶς ἐκτελεῖται;

Ἡ ἐκκλησία αὕτη ἐθεμελιώθη ὑπ' αὐτοῦ τοῦ Κυρίου καὶ

ὁ κληρὸς (Ματθ. ιη. 15—19 μετὰ τῶν εἰς τὸ χωρίον τοῦτο ὑπομνημάτων τοῦ Χρυσόστ., Αὐγουστίνου, Κυπριανοῦ καὶ Θεοφύλακτου· Πρὸβ. καὶ Εὐθ. Ζαχαρίην· εἰς τὸ χωρ. σελ. 366, ἐκδ. Φαρμάκ.), τελευταῖον δὲ κατὰ μετανομήν καὶ αὐτὸς ὁ ναὸς (Suicer. Thes. eccles. I. 1053).

5) Ἑβρ. α. 2, 33. Χρυσόστ. εἰς Ἑφεσ. ὁμιλ. ι. 4, August. in Psalm. XIII, XXXVI, XXXVII. Ἑφραίμ αἰρέσ. α. 5, Εὐσεβ. ἐστ. ἀκκλ. α. 4.

6) Ἑβρ. ιδ'. 24. Τῆς θριαμβεύουσας ἐκκλησίας μέλη δὲν εἶνε φυσικῶς τῶν λόγων ἅπαντες οὗτοι ζῶντες· ἐλογίζοντο μέλη καὶ τῆς στρατευομένης, ἀλλ' ὅσοι ἐκ τῆς πίστεως καὶ τῶν ἔργων αὐτῶν ἐκρήθησαν ἀξιοὶ τούτου, καὶ καθ' ὅσον μόνον ἐκρήθησαν. Πρὸβ. §. 89.

7) Ὑποστολ. πατριαρχ. ὁρ. ι.

Θεοῦ καὶ Σωτῆρος ἡμῶν Ἰησοῦ Χριστοῦ¹⁾, ὅστις, ἄρ' οὐ κατ' ἀρχὰς συνεκρότησεν αὐτὴν ἐκ τῶν μωθητῶν αὐτοῦ καὶ ἀποστόλων²⁾, ἐξαπέστειλεν ἔπειτα αὐτοὺς εἰς τὸν κόσμον νὰ ἐξακολουθήσωσι τὸ ἔργον τῶν, διδάσκοντες τὸν λόγον οὗτοῦ, καὶ βαπτίζοντες τοὺς πιστεύοντας εἰς αὐτόν³⁾. Τοιοῦτοτρόπως οἱ ἀπόστολοι, διασκορπισθέντες τῇδε κακεῖσε, συνέστησαν πολλὰς ἐκκλησιαστικὰς ἐκκλησίας⁴⁾, οἱ δὲ διαδεχθέντες παρὰ τῶν ἀποστόλων τὴν ἐντολὴν ἐξακολούθησαν τὸ ἔργον τοῦτο μέχρι τῆς σήμερον. Οὕτω δὲ ἐσχηματίσθη βαθμηδὸν ἡ καθόλου ἐκκλησία, περιλαμβάνουσα ἀπάσας τὰς κατὰ μέρος. Ἡ ἐκκλησία αὕτη λέγεται καὶ σῶμα Χριστοῦ⁵⁾, τοῦ δὲ σώματος τούτου κεφαλὴ ἡ μὲν εἶνε αὐτὸς ὁ Χριστός, εἷς δὲ ἕκαστος τῶν πιστῶν μέλος αὐτοῦ. Ἡ ἐκκλησία αὕτη προῶριται μὲν καὶ μέλλει νὰ συμπεριλάβῃ ὅχι μόνον ἓνα λαόν, ὅπως ἡ νομικὴ ἐκκλησία τῆς παλαιᾶς Διαθήκης, ἀλλὰ πᾶσαν φυλὴν καὶ γλῶσσαν ἀντιφύρετως, σύμπαν τὸ ἀνθρώπινον γένος⁶⁾ πρόκειται δὲ σήμερον περιλαμβάνει πάντας καὶ μένους⁷⁾ τοὺς ὁρθῶς πιστεύοντας καὶ βαπτισθέντας εἰς Χριστὸν, ἅντις διακρίσεως φυλῆς καὶ γλώσσης⁸⁾, εἴτε δικαίους, εἴτε ἀδίκους⁹⁾, ἀποκλείει δὲ καὶ ἐκ

1) ἁ. Κορ. γ'. 11, Ματθ. ιε'. 18, Ἰω. ι. 11, 16, ιε'. 21.

2) Ἰω. ιε'. 13, Ματθ. ιε'. 17, Πράξ. κ'. 28.

3) Ματθ. κη', 18—20.

4) ἁ. Κορ. α' 2, ιε'. 19.

5) ἁ. Κορ. ιε'. 13, 14, 27, Ἑβρ. β'. 4, ε' 22, 23, ς' 13—16, γ' 6, δ. 42, 45, ι'. 25—30, ἁ. Κορ. β. 17, Κολ. α' 49, 24, γ'. 15.

6) Ματθ. ιε'. 13, Ματθ. κη'. 19. 7) Ἰω. γ'. 5.

8) ἁ. Κορ. ιε'. 13, Πράξ. δ'. 41.

9) Ματθ. ιε'. 24, 47, κη'. 2, κί. ι. 37, ιε'. 13, δ. 13, 6. Τιμ. α' 10, α. Ἰω. α' 8. Ἀπον. β'. γ'. Cyprianus Episc. ad U. N. m, Ambros. Resurrectio II. 118, Hieron. in Ps. XXXIX. 13, Θεοδώρητος ἐκ φιλμ. λ'. 13. Διὰ τοῦτο καὶ κατεδικάσθησαν ὑπὸ τῆς Ἐκκλησίας οἱ ἀδυνατισταὶ καὶ οἱ Νουνοσταίανοι, οἱ ἀκούοντες, ὅτι ἡ ἐκκλησία πρέπει νὰ συγκροτηθῇ ὅτι ἐξ ἁγίων (10. β. 35, σημ. 8). Τὴν καθολοῦσαν ταύτην ἀποτελοῦν καὶ σήμερον ἐν μέρει τῶν ἑσχατορμένων τινες. Ἀλλ' ἦσαν τὸ πλῆρωμα τῆς ἐκκλησίας οἱ ἐξ ἁγίων, τότε πρὸς τὴν ἐκκλησίαν, πρὸς τὴν ἁγιασμόν, τὸ μακάριον, ἡ σωτηρία;

βαλλει ἐκ τῶν κόλπων αὐτῆς μόνον τοὺς ἐξωμότας¹⁰⁾, τοὺς αἰρετικοὺς¹¹⁾, καὶ τοὺς σχισματικοὺς¹²⁾.

Ἡ ἐκκλησία ἄρα εἶνε ὅλον τι ἐνιαῖον καὶ οὕτως εἶεῖν ὁ ρυανικόν. Ἡ κεφαλὴ συγκοινωνεῖ πρὸς ὅλον τὸ σῶμα καὶ πρὸς ἐν ἑκάστων μίλος αὐτοῦ, συγκρατοῦσα καὶ πληροῦσα χάριτος καὶ ἰσχύος πάντα τὰ μέλη, ταῦτα δὲ ἀνταποδίδουσιν εἰς αὐτὴν πιστὴν καὶ ἀφροσύνην, συνδεόμενα πρὸς ἀλλήλα καὶ διὰ τῆς ἀγάπης. Ἐν τῇ ἀμοιβαίᾳ δὲ ταύτῃ σχέσει καὶ δι' αὐτῆς ἐκπληροῦται ὁ σκοπὸς τῆς ἐκκλησίας, ὅστις εἶνε ἡ διὰ τοῦ εὐαγγελίου τῆς χάριτος συντήρησις καὶ προαγωγή τοῦ ἔργου τῆς σωτηρίας. Ὁ δὲ σκοπὸς οὗτος τῆς σωτηρίας δὲν ἐκπληροῦται ἐκτὸς τῆς ἐκκλησίας, καὶ ἄνευ αὐτῆς, ἀλλ' ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ καὶ δι' αὐτῆς¹³⁾. Τὰ μέσα δέ, δι' ὧν ἐνεργεῖται ἡ ἀμοιβαία αὕτη σχέσηις, καὶ πραγματοποιεῖται ὁ σκοπὸς τῆς ἐκκλησίας, εἶνε τρία, α) ἡ διδασκαλία τοῦ λόγου τοῦ Θεοῦ¹⁴⁾, β) ἡ τέλεσις καὶ κοινωνία τῶν μυστηρίων¹⁵⁾, καὶ γ) ἡ κυβέρνησις τῆς ἐκκλησίας¹⁶⁾. Ὡς ὅργανα δὲ τῆς σχέσεως ταύτης, ἡται

10) Καν. ἀποστόλ. 55', τῆς δ. οἰκουμ. Συνόδ. 14, τῆς ἐν Ἀγκύρᾳ δ', β', γ', 15, Μ. Βασιλ. μέ, ογ'.

11) Γαλατ. 4, 7, 8, Τιτ. γ'. 10, 11, 4, Ἰω. β'. 49, Ἰωαννίν. ἀπολ. 4, 35, πρὸς Γρόρ. διὰλ. 12, 13, π'. Ambros. in Luc. IV. 9, Tertull. praescr. 37, Ἀθανάσι. καὶ Ἀρειαν. λόγ. 4, 2, Χρυστόστ. εἰς πρᾶξ. ὁμ. λγ'. 4, Βασιλ. ἐν πρᾶξ. μὴ 7, August. de v. relig. V. 9, Tertull. de Carn. Christ. 15.

12) Ματθ. ιη' 17, Εὐα. τῆς ἐν Αποθίκ. λγ'. Μ. Βασιλ. Ἀμφιλόχ. 4, 1, Cyprian. Epist. LXIX. 8, Χρυστόστ. πρὸς Ἑβρα. ὁμ. θ'. 3, August. de peccat. orig. 0 — Ἐν γένει δὲ ἡ καθόλου ἐκκλησία δυνάμει τῆς ἐξουσίας τοῦ Θεοῦ καὶ λόγῳ (Ματθ. ιη' 17, 18) δύναται νὰ ἀποβάλλῃ καὶ πάντας ἐν γένει, ὅσοις νομίσῃ ἐπὶ ἀναγκῇ νὰ ἐκκόψῃ ἐκ τῆς ὁλομελείας τῶν πιστῶν (καν. ἀποστόλ. β', 1, καὶ 5, τῆς ἐν Ἀγκύρᾳ δ', ε, σ', 4, 0, τῆς ἐν Ἀντιοχ. β'. Γρηγορ. τοῦ Νεοκαρσ. 4, 0, 1, τοῦ μ. Βασιλ. πρ', π', κτλ. δ. Κορ. ε. 6, Ματθ. γ'. 12.

13) Εἰρηγ. Huer. III. 24, V. 20, 4, 43, Cyprian. Epist. LXXIII, Πιστοί in Isai. III. 1, in Ezech. VII. 5, in Amos IV. 7, Θεοδώρ. ἀπορ. ἱερ. Νεοκ. ἐρωτ. β', Κυρίλλ. Ἱεροσ. κατ' ἑλ. ιη' 23.

14) 4 Τιμ. σ'. 20, Τιτ. β'. 13.

15) 2 Κορ. β'. 12—16, 4, Τιμ. β'. 1—2.

16) Πρᾶξ. 14, 28, 4, Πέτρ. ε. (—2).

λειτουργοὺς τῆς τριπλῆς ταύτης διακονίας, ἐγκατέ-
 ρησεν ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ ὁ Ἰ. Χριστός¹⁷⁾ τοὺς πρεσβυτάς τῃ
 ἀρχοντας αὐτῆς· τοιοῦτοι δὲ ἦσαν κατ' ἀρχαί· μὲν εἰ ἀπόστο-
 λοι, κατόπιν δὲ μέχρι σήμερον οἱ διαδεχόμενοι, τοὺς ἀποστό-
 λους ἐπίσκοποι, καὶ οἱ ἐκαστοὶ ἀντιπροσωπεύοντες αὐτοὺς
 πρεσβυτεροί. Κατὰ τὸν λόγον δὲ τοῦτον καὶ τὸ πληρω-
 μα τῆς ἐκκλησίας διακρίνεται εἰς τὸν κληρὸν ἢ τοὺς κλη-
 ρικοὺς¹⁸⁾, καὶ εἰς τοὺς ἐπιλοίπους ἐκτὸς αὐτῶν λαϊκοὺς.

17) Λουκ. ε'. 13, Ἰω. ε'. 16, Ματθ. κη'. 19—20, Λουκ. κβ'. 19, Ματθ.
 η'. 18, Μάρκ. ιε'. 15, Ἑβρ. ε'. 11, Λουκ. ι. 16. Πράξ. ιγ'. 2, θ'. 15, 6'.
 Τιμ. β'. 2, Τιτ. α'. 15, Κλήμ. Ρώμης· Κορινθ. μδ', μδ', Ἰγνάτ. Μαγνησ. γ'.
 ε', ε', Εἰρην. Haer. III. 3, (I. 4, 5, IV. 26, Euphras. Epist. XXV, XXVII, Εὐ-
 σεβ. ἱστορ. ἐκκλ. γ'. 4, εἰς ψαλμ. πλ'. 35, εἰς Παύλ. α'. 27, θ'. 44, ια. 6, 7,
 Χρυσόστομ. εἰς 6'. Τιμ. ὁμολ. 6'. 2, εἰς 6'. Κορ. ὁμ. ιθ'. 4, ιθ'. 2, Ambros. Com-
 ment. in Ep. 1. ad Cor., de Offic. ministr. II. 24, Hieron. Dial. c. Iulio-
 ler. 4, August. c. Epist. Parmen. I. 3.

18) Κληρὸς εἶτε κληρὸν ὀμὶα ἐκαλεῖτο μεταφυσικῶς ὁ Ἰσραηλιτικὸς λαὸς
 (Δευτερον. 2'. 20, 6'. 29, ψαλμ. λδ', ιδ', καὶ Θεοδώρ. εἰς τὸ χωρίον τοῦτο·
 «Ἐκλεκτὸς λαὸς κληρονομία Θεοῦ προσαγορευόμενος· παλαιὴ μὲν ὁ Ἰουδαϊκός,
 μετὰ δὲ ταῦτα ὁ ἐκ τῶν ἐθνῶν ἐκλεγείς καὶ τῆς πίστεως τὰς ἀκτίνας δεχομέ-
 νος»). Κληρὸς ἐκάλει καὶ ὁ Πέτρος τὸς κατὰ μέρος χριστιανικοὺς ἐκ κλη-
 σίας ἡ κοινότητος (4. Πέτρ. ε'. 3). Ἡ λοιπὴν κληρὸς ὀνομάσθη ἔπειτα κατὰ
 συνεκδοχὴν ἢ διδάσκουσα καὶ τελούσα τὰ μυστήρια καὶ κυβερνῶσα μέρος τῆς
 ἐκκλησίας (ὁποῖον περίπου συνέβη καὶ εἰς αὐτὴν τὴν λέξιν· ἐκκλησία)· ἢ, ὅπερ
 καὶ πιθανώτερον, ἀπ' οὗ διὰ κληρὸς ἐξελέχθη ὑπὸ τοῦ ἁγίου Πνεύματος,
 προσευχαμένων τῶν ἀποστόλων, ὁ ἀπὸστολος Ματθαίος (Πράξ. α'. 23, 26), τὸ
 ἔργον τῶν κληρικῶν ἐθεωρήθη ἔπειτα ὡς τοιοῦτος· ἐξ ἁγίου Πνεύματος· «κλη-
 ρὸς διακονίας» (Πράξ. α'. 25), καὶ κληρικοὶ οἱ ἐξ ἁγίου Πνεύματος λαχόν-
 τες τὸν κληρὸν τοῦτον τῆς ἀποστολικῆς διακονίας (Ἠρόδ. καὶ Sacerd. thes.
 eccles. I. σελ. 114). Καὶ καθ' ὅσον μὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν μᾶλλον τὸ πρῶ-
 τον, τὸν πρῶτον ἔκδοκον τῆς ἀποστολικῆς διακονίας· ὁ δὲ δεύτερος, οἱ εἰς

§. 86.

Ποῦτα εἶνε τὰ προσόντα τῆς ἐκκλησίας κατὰ τὸ ἑννατον ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως;

Τὰ προσόντα τῆς ἐκκλησίας κατὰ τὸ ἄρθρον τοῦτο εἶνε τέσσαρα: «μία, ἁγία, καθολικὴ καὶ ἀποστολική».

α) Ἡ ἐκκλησία τοῦ Χριστοῦ εἶνε **μ**ία, διότι συναποτελεῖ ἐν σῶμα, τὸ ὁποῖον ἔχει **μ**ίαν κεφαλὴν, τὸν Χριστόν, καὶ συνέχεται διὰ **μ**ίαν πίστιν, τῆς εἰς Χριστόν Ἰησοῦν¹⁾.

β) Ἡ ἐκκλησία τοῦ Χριστοῦ εἶνε **ἁγία** ὡς ἐκ τῆς ἀρχῆς καὶ καταγωγῆς αὐτῆς, ὡς ἐκ τοῦ σκοποῦ αὐτῆς, καὶ ὡς ἐκ τῶν μέσων, δι' ὧν ἐπιδιώκει τὸν σκοπὸν τοῦτον· ἐν ἄλλαις λέξεσιν ἡ ἐκκλησία εἶνε ἁγία, διότι ἡγιάσθη καὶ ἁγιάζεται διὰ τῆς σωτηρίου διδασκαλίας, καὶ διὰ τοῦ αἵματος τοῦ Χριστοῦ, διὰ τοῦ βαπτίσματος καὶ τῶν λοιπῶν μυστηρίων²⁾. Δὲν αἴρε-

Παρελπι. ια' 2, (ζ') 6, Μιχα. ι. 2, ψαλμ. 6', 9, κδ'. ι, Ματθ. 6'. 6, Πράξ. κ'. 24, κτ'. 31, Ἰω. ι. 7, 15, 16, κ'. 16, 17, Πράξ. η'. 23, α'. Πέτρ. 6'. 28, ε' 2, καὶ κατ' ὅν λόγον ἐκκλησία «ποιεμένη» αὐτός ὁ Σωτὴρ ἡμῶν· Ματθ. κγ'. 31, Ἰω. ι. 11, 14, κ'. 28, 29, α'. Πέτρ. κ'. 2), «ποιεμένη» εἰς ὅμοιαν εἰς ἅλους ἐκκλησίαν (κατὰ τὰ Λουκ. ιβ'. 32, Πράξ. α' 28, 29, α'. Πέτρ. ε' 2).

1) Ματθ. ις'. 18, κγ'. Ἰω. ι. 16, ιε'. Ἐφεσ. ε'. 23, 26, 27, 32, α'. Κορ. ιβ'. 12, α'. 9, Ἐφεσ. 6'. 6, ε'. 23, Εὐλ. α'. 18, 24, γ'. 13, Ἐφ. 6'. 21, 22, α'. Τιμ. γ'. 15, Κλ'ημ. Ἀλεξ. παιδαγ. α'. 6, στρωμ. ζ'. 17, Tertull Praeser. XX. Cyprian. Epist. XI. Κλ'ημ. Ρομ. Κορινθ. α'. 19, Εἰρηγ. αἰρέσ. α'. 40, Ἰγνώστ. Συμφ. α'. Ἰουστίν. Τρωαν. διὰλ. μδ', εγ', ρς', Εὐδ. εἰς ψαλμ. λδ'. 13, Βίβλ. τῶν πατ. CXXI. 5, Τρίτη. VII. 4, VIII. 7, 13, Ἐπιστ. αἰρέσ. λβ'. 31, August. civ. dei XXVI. Θεολόγ. εἰς ψαλμ. ις'. 8. Ἀπὸ πλάνης εἰς πλάνην μεταπίπτοντες οἱ διαμαρτυρούμενοι ἐδίχσαν καὶ τὴν μίαν ἐκκλησίαν εἰς δύο, εἰς ἀόρατον καὶ ὁρατὴν (ecclesia visibilis καὶ eocl. invisibilis), κατὰ συνέπειαν ἐν αὐτῇ εἶναι πλάνη, ὅτι ἡ ἐκκλησία ποικροτεῖται ἐκ μόνων τῶν ἐκλεκτῶν καὶ ἁγίων. Τὴν διαίρεσιν ταύτην ἀσπάζονται οἱ ἀναμάρτητοί (Confess. H. IV. II. c. 17, Confess. Scot. art. 18, Catech. Genev. p. 484, Calvin. Instit. IV. 1, 7), ἐν ᾧ οἱ μὲν Λουθηρανοὶ παρέρχονται ὡς ἐπὶ τὸ ποῦ αὐτὴν ἐν ποίπῃ (Ζ. π. γ. Melancthi. Luc. I. p. 233), οἱ δὲ ἀγγλικανοὶ ὡς ἐπὶ ἀποκρούουσιν αὐτήν, κηρύττοντες τὴν ἐκκλησίαν ὁρατὴν (Articul. Anglic. XIX. **Ἡ ὁσία Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βεροῖος**

2) Ἐφ. 6'. 19—22, ε'. 23—27, Τιμ. 6'. 14, Κολ. α'. 23, Ἐφ. ζ'. 26,

ται δὲ ἐν ἀριότητι τῆς ἐκκλησίας ἐκ τοῦ ὅτι μίλην τινὰ αὐτῆς
ἐν εἶνε ἀρτα, ὅπως πρεσβεύουσι τῶν δαμαρτυρομένων τι-
νέ, 3), διότι ἐπ' αὐτῶ τούτῳ συνεστήθη καὶ ἡ ἐκκλησία, νὰ ἀ-
γιάζη τοὺς ἔχοντας χρεῖαν ἀγιασμοῦ, ἦτοι τοὺς μὴ ἁγίους,
ἐπ' αὐτῶ δὲ τούτῳ κατέβη ἐπὶ τῆς γῆς καὶ αὐτός ὁ Κύριος ἡ-
μῶν, ἵνα τοὺς μὴ ἁγίους ἀγιάσῃ⁴⁾).

γ') Ἡ ἐκκλησία τοῦ Χριστοῦ εἶνε καθολικὴ ὡς ἐκ τῆς
φύσεως καὶ τοῦ προορισμοῦ αὐτῆς, ὅστις εἶνε νὰ περιλάβῃ
εἰς τοὺς κόλπους τῆς πάντας τοὺς ἀνθρώπους, ἀνευ διακρί-
σεως τόπου καὶ χρόνου, φυλῆς καὶ γλώσσης, ἢ τάξεως καὶ
καταστάσεως, ἦτοι πάντας τοὺς ὁπεδῆποτε καὶ ὁπουδῆποτε
πιστούς⁵⁾.

Παμ. ἡ. 14—17, Ὑφρ. σ. 12, Ἰω. 15. 17—19, Ἑρμ. ἐ. 25, Γαλ. 3. 6
—9, ἀ. Κορ. 12. 20—22, γ. 11, Ἐφ. 1. 13, Πρξ. ἡ. 32, ἀ. Κορ. γ. 19,
Παμ. ἀ. 7, ἀ. Πέτρ. ἀ. 15—16, Ἑρμ. ποιμ. ἀ. ὁρ. ἀ. 3, Θεοφ. λ. Ἀντ.
Αὐτ. λ. 14, Εὐαγγ. εἰς Ἡσα. 55. 5, Ἐπιρ. αἰρ. 16. 4, August. de ba-
ptism. c. Donat. V. 17, Κορ. λ. κατ. γ. 17, 52, Κορ. λ. Ἀλεξ. 16. 1.

δ) Οἱ πρεσβεύοντες τὸν εἰς ὁρατὸν καὶ ἀόρατον διχασμὸν τῆς ἐκκλησίας (ὁ
ὡς, σημ. 1). ἀνανεοῦντες οὕτω τὴν ἀρχαίαν αἵρεσιν τῶν Νοβατιανῶν καὶ Δο-
κετιστῶν (§ 35, σημ. 8) "Οἱ δὲ καὶ πρακτικῶς ἐν τῇ βίῳ αὐτῶν οἱ αἱρετικοί
οὗτοι ἀνενέωσαν τὰ αἵματι ἐκείνων, τῶν ἀρχαιοτέρων (οἷον οἱ Ἀναστασι-
οί καὶ ἄλλοι), μαρτυρεῖ ἡ ἐκκλησιαστικὴ καὶ ἡ γενικὴ ἱστορία.

ε) Ὅτι ἡ τοιαύτη πλάνη ἀντιμάχεται ἀντικρὺ πρὸς αὐτὸ τὸ πνεῦμα τοῦ χρι-
στου, μαρτυρεῖ αὐτὸς ὁ θεμελιωτής αὐτοῦ ἐν οἷς λέγει «οὐκ ἔλθον καλε-
σεῖ δικαίους, ἀλλὰ ἁμαρτωλοὺς εἰς μετάνοιαν» (Ματθ. 9. 13, Πρξ. ἀ. Τίτ. ἀ.
15, Μάρκ. 6. 17, Λουκ. ἐ. 31, 32, ἀ. Ἰω. γ. 15), καὶ ἐν ταῖς παραβολαῖς
ἐν ὧν παρομοιάζει τὴν ἐκκλησίαν ἵδον μὲν πρὸς ἀγρόν πλήρη σίτου καὶ ζιζανίων
(Ματθ. 13. 22—30), ἵδον δὲ πρὸς τὸν γάμον τοῦ βασιλέως, εἰς ὃν προσκελήθησαν
ποικίλοι τε καὶ ἀγαθοὶ (Ματθ. 22. 9—14), ἄλλοτε πρὸς τὰς δέκα παρθένους,
ἐν αἷς μὲν πάντες ἦσαν φρόνιμοι, αἱ δὲ πάντες «μωροὶ» (Ματθ. 25. 1—13), καὶ
ἄλλοτε πρὸς τὴν πόλιν τῶν «προσβάτων» καὶ «ἐρίφων» (Ματθ. 23. 31—33).
Πρξ. Θεοδώρητ. εἰς ψαλμ. 137. 13, Hieron. in Ezech. II. 7, August. Epist.
CVIII. 6, Civ. Dei. 1. 35, Reuel. II. 18, 12 καὶ ἀνωτέρω § 85, σημ. 9.
Ἀφαιρεῖ δὲ ἡ περίπτωσις, περὶ ἧς ὁ λόγος ἐν §. 85 σημ. 10, 11, 12

ς) «Οὐκ ἐν Ἰουδαίᾳ οὐδὲ Ἑλληνί, οὐκ ἐν βασιλείᾳ οὐδὲ ἐλευθερίᾳ· πάντες γὰρ
ὄψεσθε εἰς Ἰησοῦν Χριστὸν Ἰησοῦ». Γαλ. γ. 23, Πρξ. Κολ. γ. 11, Ἐφ. 6. 14
—16, Μάρκ. 15. 15, 18, Ματθ. 23. 19, 20, Πρξ. ἀ. 8, Ἰω. 16. 16, ἀ.
Κορ. 12. 26, Ἰω. 17. 36. Πολυκαρπ. Σμάρν. ἡ. Εἰρήν. αἰρ. ἀ. 10, IV. 49,

β') Ἡ ἐκκλησία = ὁ Χριστοῦ εἶνε ἀποστολική, διότι φυλάττει ἀμετατρέπτως, ὅσα παρὰ τῶν ἀποστόλων παρέλαβε, τὴν διδασκαλίαν καὶ τὰς παραδόσεις αὐτῶν καὶ τὴν κατὰ διαδοχὴν μετέδοσιν τῶν ἱερωσύνης διὰ τῆς ἐπιθέσεως τῶν χειρῶν, ἧτις εἶνε ἡ εἰς τῆς ἐκκλησιαστικῆς ἱεραρχίας⁶⁾.

§. 87.

Τίς ἐκ τῶν λεγομένων ἐκκλησιῶν εἶνε ἡ ἀληθής;

Ἐκ τῶν λεγομένων ἐκκλησιῶν ἡ ἀληθὴς τοῦ Χριστοῦ ἐκκλησία εἶνε, ὡς ἐκ τῶν προειρημένων ἐξάγεται¹⁾, ἐκείνη, ἧτις α') τηρεῖ ἀλώβητον τὴν διδασκαλίαν, β') τελεῖ προσηκόντως τὰ μυστήρια, καὶ γ') διοικεῖται κατὰ τὰς διατάξεις τῶν ἀποστόλων καὶ τῶν συνόδων²⁾. Τοιαύτη δὲ ὅν εἶνε οὕτως ἡ ὥν

Κορίνθ. ναυχ. γ'. 23. Θεοδώρ. εἰς ψ. μζ'. 4, August. Epist. LII, Χρυσόστ. Ἐρ. ὁμ. γ'. 2, Ἰδρ. ἄμ. κα. 3, Anstros. in Luc. VII 91.

6) Εἰς τὸν 2^{ον} 11, 6^{ον} Θεοδώρ. 1, 15. Ἰερην. Haer. III. 3, IV. 83, Tertull. de Corin. ml II, P. 16, XXXII, Κλήμ. Ἀλεξ. στρωμ. ζ'. 17 Hilat. Trinit. VII. 7, Χρυσόστ. π. φιλ. μζ'. 13.

4) Ἐν τῷ 7^ῳ §. 65, σημ. 44, 45, 16.

2) Ἡ ἀπόστολική ἀσκήσις εἰς τὴν ἐρώτησιν ταύτην ἔδωκεν εἶναι νὰ εἰπωμεν, οὐκ ἐκείνη, ἡ ἐκείνη εἶνε ἡ μία καὶ ἀληθής, ἧτις ἔχει τὰ ὑπὸ τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως ὁρισθέντα προσόντα, «μία, ἀγία, καθολικὴ καὶ ἀποστολική». Ἀλλὰ τὰ προσόντα ταῦτα ἰσχυρίζονται ἐν μέρει ἡ καθόλου ἅπασαι σχεδὸν αἱ ὑπάρχουσαι ἐκκλησίαι, καὶ τότε τίς ἐκ τῶν ἐκκλησιῶν ταύτων ἀληθεύει καὶ ἰσχυροῦται αὐτὰ ἐν λόγῳ καὶ δικαίῳ;

Ὁ διόσκοπος Γάλλος θεολόγος Μακέρσιος, ἀποβάλλων (Introduc. à la Théol. orthod. σελ. 505 ἑξ.) τὸ κριτήριον τῶν ἐν τῷ συμβόλῳ προσόντων, ὑπερπανήθως μεταχειρίζεται αἱ δοτικὲς θεολόγοι, ὡς μὴ γενικὸν καὶ παρὰ πᾶσιν ἀναγκαστικὸν ἀπαιτούμενον, καθὼς καὶ τὸ εὐνηθὲς κριτήριον τῶν διαρρακτορῶν, ὅτι «ἡ ἀληθὴς ἐκκλησία εἶνε ἐκείνη, ἧτις διατηρεῖ τὸ ἀκρεφὲς κήρυγμα τοῦ ἁγίου τοῦ Θεοῦ καὶ τοῦτο ὁμολογεῖ τὰ μυστήρια διὰ τῶν αὐτῶν λόγων, προβάλλει τὸν κριτικὸν τὸν εἶναι ἡ ἐκκλησία εἶναι ἐκείνη, ἧτις διατηρεῖ πρᾶγματι τὴν ἀλάθευστον διδασκαλίαν τῆς ἀρχ. καὶ λειτουργικῆς ἐκκλησίας ἀναληθῶν, καὶ αὐτὴν πρὸς αἰσθετήν κατὰ πάντα. Θεωρεῖ δὲ τὸ κριτήριον τοῦτο ὡς ἀνάγκη πρὸς τὴν ἀντίληψιν καὶ κατ' ἀντίληψιν ἀποδείκνυται πρὸς πάντας χριστιανούς, εἴτε ὁρθοδόξους, εἴτε ἑτεροδόξους. Ἀλλὰ, νομίζομεν, οὐδὲ τὸ κριτήριον τοῦτο εἶναι τὴν ἐπιβεβαιωτικὴν ταύτην νεικότητα καὶ ἀναγκαιότητα, διότι ἰδὼς ἑ-

μαϊκή οὔτε ἡ διαμαρτυρομένη, διότι καὶ αἱ δύο δὲν ἐτήρησαν

χονταὶ εὐθὺς οἱ διαμαρτυρόμενοι, οἵτινες, ὡς γνωστόν, δὲν ἀποδέχονται τοιαύτην οἰκουμένην ἐκκλησίαν, στηριζομένην ἐπὶ τῇ παραδόσει καὶ τῶν οἰκουμένων Συνόδων, ὅπερ ἀποδεικνύεται καὶ ἐξ ὅσων αὐτὸς οὗτος ἀναγκάζεται νὰ εἰπῇ κατωτέρω (σελ. 571), εἰ καὶ πλαγίως πως. Ὡς τεκμήριον καὶ γνώρισμα τῆς μίας καὶ μόνης ἀληθοῦς ἐκκλησίας ἐθέσαμεν τοὺς ἐν τῷ κειμένῳ τραί ἥρους συνιδᾷ πρὸς ὅσα προκνεπτόχθησαν, διότι οὗτοι εἶνε καὶ οἱ ἀναποτελοῦντες αὐτὸ τὸ ἔργον, τὸν σκοπὸν καὶ τὴν οὐσίαν τῆς ἐκκλησίας, ἴσται τοῦ ἐνεργεῖα καὶ συγκεκριμένου χριστιανισμοῦ, ὡς προείπαμεν.

Ἀλλὰ τὸ ζήτημα τοῦτο δύναται νὰ ἀνακριθῇ καὶ ἐπὶ τὸ ἱστορικώτερον διὰ τῶν ἐξῆς ἀπλουστάτων σκέψεων, τὰς ὁποίας, ὡς στηριζομένας ἐπ' αὐτῶν τῶν ἱστορικῶν γεγονότων, θέλει εὐκόλως παραδεχθῇ πᾶς ἀπαθὴς καὶ ἀμερόλητος χριστιανός, εἴτε ὀρθόδοξος εἴτε ἐτερόδοξος. Αὐτὴ ἡδὴ ἡ ἀγία Γραφὴ μᾶς διδάσκει, ὅτι οἱ ἀπόστολοι τοῦ Χριστοῦ ἐοῦσθησαν διαφόρους ἐκκλησίας ἢ χριστιανικὰς κοινότητας εἰς τὴν Παλαιστίνην, τὴν Μ. Ἀσίαν, τὴν Μακεδονίαν, τὴν Ἑλλάδα καὶ τὴν Ῥώμην, εἰς τὰς ὁποίας ἐδίδασκαν τὴν χριστιανικὴν πίστιν διὰ λόγου καὶ διὰ γραφῆς, θέζαντες αὐτὰς ὑπὸ τὴν ἐπισκοπικὴν καὶ κυβέρνησιν τῶν ἐπισκόπων καὶ πρεσβυτέρων. Μετὰ τοὺς ἀποστόλους τὸ ἔργον τῆς διαδόσεως τοῦ χριστιανισμοῦ ἐξηκολούθησεν ὄχι μόνον ἐντὸς ἀλλὰ καὶ ἐκτὸς τοῦ Ῥωμαίου κράτους. Αἱ κατὰ μέρος χριστιανικαὶ ἐκκλησίαι ἢ κοινότητες ἐπληθύνθησαν ἔτι μᾶλλον, καὶ διὰ νὰ ἀκριζώνεται πᾶσα ἀφορμὴ διχασμοῦ καὶ αἵρέσεως, οἱ ἐπίσκοποι τῶν γειτονεουσῶν ἐκκλησιῶν συνήρχοντο εἰς σύνοδον, ὅπως καὶ οἱ ἀπόστολοι, διὰ νὰ ἀποκρούσῃ πᾶσαν ἀναρρομένην ψευδοδιδασκαλίαν καὶ νὰ ἀποφαίνωνται ἐν γένει περὶ τῆς χριστιανικῆς πίστεως καὶ περὶ τῆς ἐκκλησιαστικῆς διοικήσεως. Τοιουτοτρόπως διὰ τῶν τοπικῶν τοῦτων συνόδων διατηρήθη ἡ ἐνότης τῆς χριστιανικῆς πίστεως, αἱ δὲ κατὰ μέρος ὑπάρχουσαι πολλαὶ ἐκκλησίαι συναπετέλουν μίαν κοινὴν καὶ καθολικὴν καὶ οὐλικὴν ἐκκλησίαν. Μετὰ τὰς τοπικὰς συνόδους ταύτας ἐπῆλθαν αἱ οἰκουμένης τῶν ὁσίων τὸ ἔργον καὶ ὁ σκοπὸς ἦτο κατ' οὐσίαν ὁ αὐτός, ἀλλὰ γενικώτερος καὶ καθολικώτερος, δι' αὐτῶν δὲ ἐκφατύνθη ἔτι μᾶλλον ἡ μία καθολικὴ ἐκκλησία. Τοιουτοτρόπως διατηρήθη ἡ ἐνότης καὶ καθολικότης τῆς χριστιανικῆς ἐκκλησίας μέχρι τοῦ 1054 μ. Χ., ὅτε ἡ μία αὕτη καθόλου ἐκκλησία ἐδιχάσθη εἰς τὴν ἀνατολικὴν καὶ δυτικὴν. Ταῦτα πάντα εἶνε γεγονότα, τὰ ὅποια κηρύττει ἡ ἱστορία, καὶ οὐδεὶς ἀρνεῖται αὐτά, εἴτε παπιστὴς εἴτε διαμαρτυρόμενος εἴτε ὀρθόδοξος.

Μετὰ τὸν διχασμὸν ὁμῶς τοῦτον διχάζονται καὶ αἱ γνώμαι. Ὅτι καὶ μετὰ τὸ 1054 μ. Χριστὸν ἡ ἀληθὴς τοῦ Χριστοῦ ἐκκλησία εἶνε μία καὶ μόνη, ὅχι δύο ἢ πλείοτε, τοῦτο ὁμολογοῦσι πάντες. Ἀλλὰ τίς αὕτη; ἡ δυτικὴ ἢ ἡ ἀνατολική; Ἐδῶ ἀρχίζει ἡ διχογνωμία, καὶ οἱ μὲν δυτικοὶ ὡς τοιαύτην θεωροῦσι τὴν δυτικὴν Ῥωμαϊκὴν ἐκκλησίαν, κηρύττοντες ὡς σχισματικὸν τοὺς ἀνατολικούς· οἱ δὲ ἀνατολικοὶ ὡς τοιαύτην θεωροῦσι τὴν ἀνατολικὴν ὀρθόδοξον ἐκκλησίαν, κηρύττοντες ὡς αἰρετικὸν τοὺς δυτικούς. Τίς ἐκ τῶν δύο

ἀλώδητον τὴν διδασκαλίαν, καινοτομήσασαι περὶ ἄλλα τε

ἀληθεύει; καὶ τίς πλανᾶται; Καὶ τοῦτο ἃ διδάξῃ ἡμεῖς αὐτὴ πολὺν ἢ ἀπαυθῇ, καὶ ἀμερόληπτος ἱστορίᾳ, ὅπερ καὶ εὐκολώτατον.

Ἡ ἀνατολικὴ ἐκκλησία καυχᾶται, ὅτι ἐτήρησε μὲν ἡμεῖς τὴν σήμερον θρυλεῖν καὶ ἀπαράλλακτον τὴν χριστιανικὴν πίστιν, ὅποιαν παρέλαβεν αὐτὴν παρὰ τῶν ἀποστόλων καὶ τῶν ἐπὶ ἐκουμενικῶν Συνόδων, χωρὶς νὰ ἐκκλίνη ποτὲ μέχρι σήμερον κατὰ ἐν ᾧ τὰ ἢ μίαν κεραίαν ἀπὸ τῆς ἀρχαίας καὶ πατροπαράδοτου ταύτης πίστεως. Τὴν ἀληθειαν ταύτην μαρτυρεῖ ἡ ἱστορία καὶ οὐδεὶς ἀρνέται αὐτήν, οὔτε διαμαρτυρόμενος, οὔτε δυτικός, οὔτε ἀνατολικός· ἡ δὲ ἀνατολικὴ ἐκκλησία προκαλεῖ πάντοτε νὰ ἐξελέγξῃ αὐτήν, ἐὰν ἐξέλθῃ καὶ κατ' ἐλπίαν χριστον. Δίδονται νὰ εἴπῃ τοῦτο καὶ ἡ δυτικὴ ῥωματικὴ ἐκκλησία; Βεβαίως ὄχι. Ἡ ἱστορία μαρτυρεῖ καὶ ὁ ὅλος ὁ κόσμος γνωρίζει ὅτι ἡ ῥωματικὴ ἐκκλησία ἐνόθευσε πολλὰ καὶ πολλὰ τὴν χριστιανικὴν πίστιν, καὶ διὰ νὰ παραλίπωμεν τὰ μικρότερα καὶ ἐλαφρότερα, ἀναφέρομεν τὰς νοθεύσεις καὶ καινοτομίας αὐτῆς, ὅσαι ἠλλοίωσαν αὐτὴν τὴν αὐτίαν τῆς πίστεως ταύτης, ὅσων τὴν παραχάραξιν τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως διὰ τῆς προσθήκης· «καὶ ἐκ τοῦ οὐνοῦ», τὴν νόθευσιν τοῦ βαπτίσματος διὰ τῆς ἐπιχύσεως, τῆς εὐχαριστίας διὰ τῶν ἀξόμων, κτλ. κτλ. κτλ., περὶ ὧν ἐκάστων ἔγεινεν ἢ οἶμαι γέινει λόγος, εἰ καὶ ἀκριβέως, ἐν τῇ παρουσίᾳ καταγγέλλῃ. Πολλὰς δὲ τῶν νοθεύσεων τούτων καὶ παραχαράξεων ἡ δυτικὴ ἐκκλησία κατετόλμησεν ἐν γνώσει καὶ χάριν ἐγκοσμίων λόγων καὶ συμφερόντων, ὅπως διδάσκει ἡ ἀφευδῆς ἱστορία. Ἐκαινοτόμηται δὲ καὶ περὶ τὰ τῆς δικηέσεως ἡ ἐκκλησία αὕτη συγκέντρώσασα ὅλην αὐτῆς τὴν ἐξουσίαν εἰς ἓν καὶ μόνον πρόσωπον, τὸν ἐπίσκοπον Ῥώμης ἢ Πάπαν, τὸν ὁποῖον ἀνεκήρυξε καὶ κερὰ λὴν ὁρατὴν τῆς ἐκκλησίας, ἐσχάτως δὲ καὶ ἀλάστον. Ὅπως δὲ καταπεπληθῇ ἔτι μάλλον τὸ εὐαγγέλιον καὶ ἀπειρηθῇ καθ' ὁλοκληρίαν αὐτὸ τὸ πνεῦμα τοῦ χριστιανισμοῦ, ἡ κεφαλὴ αὕτη τῆς Ῥωματικῆς ἐκκλησίας ἔγεινεν καὶ κεφαλὴ πολιτικοῦ κράτους, καὶ περιβλήθη κοσμητὴν ἐξουσίαν! Ἡ δυτικὴ ἐκκλησία δὲν ἀρνέται ὅτι ἡ ἀληθὴς ἐκκλησία τοῦ Χριστοῦ ἦτο μέχρι τοῦ 405 μ. Χ. μὴ καὶ καθόλου. Ἀλλὰ τότε τίς ἐξῆκολουθεῖ καὶ μετὰ τὸ 4014 ἔτος νὰ εἶνε μία καὶ καθόλου, ἐπομένως καὶ ἡ ἀληθὴς ἐκκλησία τοῦ Χριστοῦ, αὕτη ἡ δυτικὴ, ἡ πολλὰς μετὰ τὸ 4051 καινοτομήσασα, ἢ ἡ ἀνατολικὴ, ἡ οὐδεὶς κατὰ ἐν ᾧ τὰ ἀλλοιώτατα ἔλαττο μέχρι σήμερον τὴν παρακαταθήκην τῆς πίστεως; Ἡ ἀπάντησις εἶνε εὐκολος.

Ἐἶχεν ἥδη ἐκκλίνη ἀπὸ τῆς ἐν τῇ μῆς καὶ καθόλου ἐκκλησίας ἀρχαίας καὶ πατροπαράδοτου πίστεως; ἡ ῥωματικὴ ἐκκλησία, ὅτε ἀρχομένου τοῦ 15. αἰῶνος ἀπεσκόρπησαν ἀπ' αὐτῆς οἱ διαμαρτυρόμενοι, διχασθέντες ἔπειτα καὶ αὐτοὶ εἰς Λουθηρανούς; ἢ Εὐαγγελικούς; καὶ ἀναμορφωτάς; ἢ Καλδινιστάς, αἰνίς καὶ αὐτοὶ μετέπειτα ὑποβιάσθησαν καὶ ὑποδηρέθησαν πολλὰς καὶ ἐπανειλημμένως. Μήπως λοιπὸν ἡ μία καὶ μόνη, ἡ ἀληθὴς τοῦ Χριστοῦ ἐκκλησία εἶνε ἡ τῶν διαμαρτυρομένων τούτων; Βεβαίως ὄχι, καὶ ἰδοὺ διατ. Δὲν ἀναφέρομεν τὰς πολλὰς καὶ πολυεθεῖς καινοτομίας, ὅσαι καταπολέμησαν οἱ διαμαρτυροί.

πολλά, καὶ περὶ τὴν διδασκαλίαν τῆς ἐκπαρέυσεως τοῦ ἁγίου

νοικοῦτοι, ἀρ' οὐ μάλιστα περιλαβὼν καὶ δεῖα· εἶχεν ἤδη τολμήσει ἡ Ῥωμικὴ
σχεδὸν πάσαι, ὅτι ἀπέρρουσαν ἑαδῶς καὶ αὐθαρέτως τὰ πλεῖστα τῶν ρωμηίων,
καὶ ὅτι κατήργησαν τὴν τάξιν τῶν ἀρχόντων τῆς ἐκκλησίας, ἀπονείμαντες τὸ
ἀδίκωμα τοῦ ἱερέως εἰς ὅλον τὸν λαόν. Δὲν ἀναφέρομεν ὅτι ὡς πηγὴν τοῦ χρι-
στιανισμοῦ ἀποδεχόμενοι μόνον τὴν Γραφὴν, ἀπρηύθησαν τὴν παράδοσιν τῆς
ἐκκλησίας, ἀπολακτίσαντες τοιοῦτοτρόπως αὐτὴν τὴν χεῖρα, ἐξ ἧς περιέλαβον
τὴν Γραφὴν, καὶ ἀπειθοῦντες πρὸς αὐτὴν τὴν Γραφὴν, ἦναι συνιστᾷ ὅτι ὡς
πηγὴν τῆς πίστεως τὴν παράδοσιν. Παραλείπομεν πάντα ταῦτα καὶ ἀναφέρομεν
τὸ ἔκτε· καὶ μόνον ἱστορικὸν γεγονός. Τῆς ἐκκλησίας ταύτης ἡ ὑπαρξίς χρονο-
λογεῖται ἀπὸ τῆς ἐπιστήμης οὐ α μ α ρ τ υ ρ ῆ σ ε ω ς, ἧς ἐλαβε χώραν τῇ 19 Ἀ-
πριλίου, 1529. Πρέπει λοιπόν, ἀρ' οὐ, ὡς προείπομεν, ἡ ἀληθὴς τοῦ Χριστοῦ
ἐκκλησία εἶναι μία κατὰ τὴν ὁμολογίαν ὁμολογίαν ὅλου τοῦ κόσμου, καὶ αὐτῶν
τῶν διαμαρτυρομένων, πρέπει, λέγω, νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἡ μία καὶ μόνη ἀληθὴς
τοῦ Χριστοῦ ἐκκλησία πρὸ μὲν τῆς 19 Ἀπριλίου 1529 οὐδ' ὑπῆρξεν ὅλως,
ἤρχισε δὲ ἀπὸ τῆς κοσμοσωτηρίου ἐκείνης ἡμέρας καὶ ἐφεξῆς, καὶ ὅτι ἄρα ὁ
βίος καὶ ἡ διδασκαλία, τὰ πάθη καὶ ὁ σταυρικὸς θάνατος τοῦ Σωτῆρος, τὸ κή-
ρυγμα καὶ οἱ ἀγῶνες τῶν ἀποστόλων, τὰ σῆματα καὶ οἱ ἄλλοι τόπων μαρτύρων,
ὁμολογητῶν, πατέρων καὶ διδασκάλων, ἔμειναν νεκρὰ καὶ ἀκαρπα θαναπέντε
ἡλως αἰῶνας, καὶ ἔμελλον νὰ καρποφορήσωσι διὰ τὴν ἀνθρωπότητα τὸν ἀρ-
γὲ, ἀπὸ τῆς 19 Ἀπριλίου 1529, διὰ τοῦ Γερμανοῦ Λουθήρου καὶ τοῦ Γάλ-
λου Καλδίνου· Ὁ Ἰ. Χριστὸς ἄρα ἐξαποστέλλων τοὺς μαθητάς του πρὸς τὸ κήρυγ-
μα ἐψεύσθη ὑποσχθεὶς πρὸς αὐτοὺς ὅτι θέλει μετὰ τῆς ἐκκλησίας αὐτοῦ
«πάσαι τὰς ἡμέρας μέχρι τῆς συντελείας τοῦ αἵωνος», ἀρ' οὐ κατὰ τοὺς δια-
μαρτυρομένους ἡ χριστιανικὴ ἐκκλησία μόνον ἐπὶ τοῦ Χριστοῦ καὶ τῶν ἀπο-
στόλων ὑπῆρξεν ἀληθὴς καὶ γνηστία, μετὰ δὲ ταῦτα ἐνοθεύθη καὶ ἐξέλιπεν, ἀ-
νεγεννήθη δὲ πάλιν αἵφνης καὶ διὰ μιᾶς ἐπὶ Λουθήρου καὶ Καλδίνου καὶ ἐν' αὐ-
τῶν· Ἐῖνε βλασφημία εἰς τὸν Σωτῆρα καὶ Λυτρωτὴν ἡμῶν, βλασφημία εἰς αὐ-
τὴν τὴν Θεὸν Πρόνοισιν, τὸ νὰ φρονῇ τις καὶ νὰ λέγῃ ταῦτα!

Ἄλλ' ὅχι καὶ μυρϊκίς ὅχι! Ἡ μία καὶ μόνη ἀληθὴς τοῦ Χριστοῦ ἐκκλη-
σία ὑπάρχει διηνεκῶς καὶ ἀδιακόπως ἀπὸ τῶν Ἀποστόλων μέχρι τῆς σήμερον,
καὶ ἡ ἐκκλησία αὕτη εἶναι ἡ ὀρθόδοξος ἀνατολική, διότι αὕτη καὶ μόνη ἐτήρη-
σεν ἀλώθετον καὶ ἀπαράχαρακτον μέχρι σήμερον τὴν ἱερὰν παρακαταθήκην τῆς
χριστιανικῆς πίστεως, ὅπου ἐν περιέλαβεν αὐτὴν παρὰ τῶν ἀποστόλων καὶ τῶν
ἐνδόξων, καὶ θέλει διατηρήσῃ αὐτὴν ἀλώθετον καὶ ἀπαράχαρακτον μέχρι τῆς
συντελείας τοῦ αἵωνος, καθὼς ὑποσχέθη τὸ ἀψευδὲς στόμα τοῦ Σωτῆρος. Ὅτι
δὲ ἡ ἐκκλησία αὕτη ἐπαξίως ἔλαχε θεοθεν τὴν κοπιώδη καὶ πολέμουχθον ἀλλά
καὶ ὑψηλὴν καὶ μεγάλην καὶ τρισέξοδον ταύτην ἀποστολήν, μαρτυρεῖ ὁλόκλη-
ρος αὐτῆς ἡ ἱστορία. Πρῶτη ἡ ἐκκλησία αὕτη ἐτάχθη ὑπὸ τὴν κοσμοσωτήριον
τοῦ Σταυροῦ σημαίν· αὕτη ἦνοιξε πρώτη τὰς πόλεις καὶ τὰς κῆμεις τῆς εἰς
τοὺς πτωχοὺς ἀποστόλους τοῦ ἐσταυρωμένου· αὕτη προσήνεγκεν εἰς τὸν Χρι-

Πνεῦματος ἐναντίον τῆς ἁγίας Γραφῆς, καθὼς εἶδομεν³⁾). Καὶ αἱ δύο δὲν ἐκτελοῦσι τὰ μυστήρια προσηκόντως (ἡ διαμαρτυρομένη μάλιστα καὶ ἀπέβαλέ τινα ἐξ αὐτῶν), διότι καὶ αἱ δύο π. χ. ἀντὶ τοῦ ἀληθοῦς βαπτίσματος εἰσήγαγον τὴν δι' ὕδατος ἐπίχυσιν καὶ τὸ ῥάντισμα, ἐν τῷ μυστηρίῳ δὲ τῆς εὐχαριστίας μεταχειρίζονται ἄζυμον ἀντὶ ἐνζύμου ἄρτου, καὶ ἡ μὲν ῥωμαϊκὴ ἀπείργει τοὺς λαϊκοὺς ἀπὸ τῆς κοινωνίας τοῦ αἵματος τοῦ Χριστοῦ, ἐναντίον τῆς ἁγίας Γραφῆς, ἥτις διαβρῆδὸν λέγει «Πιετε ἐξ αὐτοῦ π ἄ ν τ ε ς»⁴⁾, ἡ δὲ διαμαρτυρομένη κατήργησεν ὁλοτελῶς τὴν τέλεσιν τῆς εὐχαριστίας ὡς ἀναιμάκτου θυσίας, ἐπομένως καὶ τὴν λειτουργίαν. Καὶ αἱ δύο ἐκαινοτόμησαν περὶ τὴν διοίκησιν τῆς ἐκκλησίας, καθ' ὅσον ἡ μὲν ῥωμαϊκὴ παρεξηγοῦσα τοὺς πρὸς τὸν Πέτρον λόγους τοῦ Σωτῆρος, περιώρισεν ὅλην τὴν δύναμιν εἰς ἓν πρόσωπον, τὸν ἐπίσκοπον Ῥώμης ἢ Πάπαν, τὸν ὁποῖον ἀνεγνώρισε καὶ ὡς ὁρατὴν κ ε φ α λ ῆ ν τῆς ἐκκλησίας, ἐσχάτως δὲ ἀνεκήρυξε καὶ ἁ λ ἄ ν θ α σ τ ο ν, ἐν ᾧ ἀλάνθαστος εἶνε μόνον ἡ καθόλου ἐκκλησία, ἐκπροσωπούμενη δι' οἰκουμενικῆς Συνόδου. Ἡ δὲ διαμαρτυρομένη παρερμηνεύουσα ὁμοίως ὅσα περὶ τῆς κοινῆς ἱερωσύνης ἀναφέρει ὁ Πέτρος⁵⁾ καὶ ὁ Ἰωάννης⁶⁾ ἐν τῇ ἀποκαλύψει, κατήργησε τὴν τάξιν τῶν ἀρχόντων τῆς ἐκκλησίας, τῶν διαδόχων τῶν ἀποστόλων, καὶ ἔδωκε τὸ ἀξίωμα τοῦτο εἰς

ἐκτὸν καὶ τὸ Εὐαγγέλιον διὰ τοῦ πολυτημότατον, τὸν νοῦν καὶ τὴν καρδίαν τῆς πῆν γλῶσσης καὶ τὸν διάπικρον ζῆλόν τῆς Αὐτῆς· οἱ ἄλλοι καὶ οἱ ἄγῳνες, αὐτῆς τὰ αἵματα καὶ οἱ στέφανοι, αὐτῆς οἱ μάρτυρες καὶ οἱ ἀπολογεταί, αὐτῆς οἱ διδάσκαλοι καὶ οἱ ποιμένες. Αὐτὴ κατέβαλε τὸ φρόνημα τῶν αἰρέσεων διὰ τῶν συνόδων τῆς, αὐτὴ ἐστήριξε καὶ ἐκραταίωσε τὴν πίστιν ! Αὐτὴ ὑπέμεινε καὶ ὑπομένει ἄχρι τῆς ὥρας ταύτης ὅσα καὶ ὅποια οὐδεμία ἄλλη ἐκκλησία ὑπὲρ τοῦ Χριστοῦ χωρὶς νὰ θυσιάζῃ ποτὲ εἰς τὸν κόσμον καὶ εἰς τοὺς ἀρχοντας τοῦ κόσμου ἐν ὧτα ἢ μίαν κεφαλήν ἐκ τῆς ἀρχαίας αὐτῆς πατροπαράδοτου ἀποστολικῆς καὶ θείας διδασκαλίας. Εἰς αὐτὴν ἄρα καὶ μόνον ἐπαρμόζονται τὰ προσόντα τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως, καὶ αὐτὴ εἶνε ἡ ἀληθὴς, ἡ «μία ἁγία, καθολικὴ καὶ ἀποστολικὴ Ἐκκλησία».

3) § 36, § 80. 4) Ματθ. κς'. 27, Μάρκ. ις' 24, Ἰω γ'. 53, Ματθ ις'. 16. κ. Κορ. ε. 23.

5) ε. Πέτρ. β'. 5, 9. 6) Ἀποκάλ. ε. 6, 4, 19, κ'. 6.

ὅλον τὸν λαόν. Μόνη ἄρα ἀληθὴς ἐκκλησία εἶνε ἡ «μία, ἁγία, καθολικὴ καὶ ἀποστολική» ἐκκλησία τῶν ἀνατολικῶν Χριστιανῶν, διότι ἐν αὐτῇ μόνη ἐτηρήθησαν τὰ πάντα ἅγνα καὶ ἀναλλοίωτα, ὅπως παρεδόθησαν παρὰ τῶν ἀποστόλων καὶ τῶν ἐπὶ τὰ οἰκουμενικῶν συνόδων, ὅθεν καὶ δικαίως ἡ ἐκκλησία αὕτη ἐπικαλεῖται ὁ ρ θ ό δ ο ξ ο ς.

§. 88.

Ποῦτον εἶνε τὸ δέκατον ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως, καὶ τί μᾶς διδάσκει ;

«Ὁμολογῶ ἐν βάπτισμα εἰς ἄφεσιν ἁμαρτιῶν».

Τὸ βάπτισμα εἶνε τὸ κυριώτατον τῶν μυστηρίων, καὶ εἰς τῶν κυριωτάτων ὄρων τῆς σωτηρίας τῶν χριστιανῶν. Ἐπειδὴ δὲ περὶ τούτου, ὡς καὶ περὶ τῶν λοιπῶν μυστηρίων θέλει γείνη λόγος ἐν τῷ δευτέρῳ μέρει τῆς παρούσης Κατηχήσεως, ἐνταῦθα λέγομεν μόνον, ὅτι τὸ ἄρθρον τοῦτο προσετέθη εἰς τὸ σύμβολον οὐ μόνον χάριν τῶν βαπτιζομένων, οἵτινες μέλλοντες νὰ βαπτισθῶσιν ὡφείλουν ν' ἀπαγγεῖλωσι τὸ σύμβολον τῆς πίστεως, ἀλλὰ καὶ διότι ἕκαστον μέλος τῆς ἐκκλησίας ἔπρεπε κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τὰ τῶν αἰρετικῶν βαπτίσματα νὰ «ὁμολογῇ ἐν βάπτισμα», τὸ μόνον ἀληθὲς καὶ κύριον, ὅπως καὶ κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τὰς αἱρέσεις ἀπεδέχετο «μίαν, ἁγίαν, καθολικὴν καὶ ἀποστολικὴν ἐκκλησίαν».

§. 89.

Ποῦτον εἶνε τὸ ἐνδέκατον ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως, καὶ τί ἔχει νὰ προσθήσῃ εἰς τὸ περὶ ἀναστάσεως τῶν νεκρῶν ;

Τὸ ἐνδέκατον ἄρθρον ἔχει ὡς ἐξῆς : «Προσδοκῶ ἀνάστασιν νεκρῶν», καὶ μετὰ τοῦ δωδεκάτου ἁρθρου συναποτελεῖ τὴν ἐλπίδα τοῦ χριστιανοῦ, διὰ τοῦτο καὶ ἀντὶ τοῦ ἐν τοῖς λοιποῖς ἁρθροῖς πιστεύω, ἔγεινεν ἐδῶ χρῆσις τοῦ ῥήματος προσδοκῶ. Ἡ ἀνάστασις δὲ τῶν νεκρῶν, περὶ ἧς ὁμιλεῖ τὸ ἄρθρον τοῦτο, θέλει λάβῃ χώραν¹⁾, κατὰ τὴν ἐσχάτην ἡμέραν τῆς κρίσεως, ὅτε καὶ μόνον θέλουσιν ἀπολάβῃ πλήρη τὸν μισθὸν αὐτῶν καὶ οἱ δίκαιοι καὶ οἱ ἁμαρτωλοί, ἐφ' ᾧ καὶ

θέλει γείνη ἡ συνένωσις τῶν ψυχῶν μετὰ τῶν οἰκείων σωμάτων, ὅπως καὶ αὐτά, ὡς συναγωνισθέντα μετὰ τῆς ψυχῆς ἐν τῷ ἐπὶ γῆς βίῳ, συναπολάβωσι τὴν ἀγαθὴν ἢ κακὴν μισθοποδοσίαν¹⁾. Ἀλλὰ πρὸ τῆς ἐσχάτης ταύτης ὀριστικῆς, πλήρους καὶ γενικῆς, λαμβάνει χώραν ἐκάστοτε καὶ μερική τις κρίσις καὶ ἀνταπόδοσις, ἐπαρχομένη μετὰ τὸν θάνατον ἐκάστου ἀτόμου, ἥτοι μετὰ τὸν ἐκάστοτε ἀποχωρισμὸν μιᾶς ἐκάστης ψυχῆς ἀπὸ τοῦ οἰκείου σώματος. Ἡ ψυχὴ μεταφερομένη ἀπὸ τοῦ ὕλικου εἰς τὸν αὐλὸν κόσμον ἀνακρίνεται ὑπὸ τῶν αὐλῶν πνευμάτων, ἀγαθῶν τε καὶ πονηρῶν, καὶ ὡς ἐκ τῶν ἀγαθῶν αὐτῆς ἢ κακῶν πράξεων ἡ μεταφέρεται ὑπὸ τῶν ἀγγέλων εἰς τοὺς οὐρανοὺς, ὅπου ἀπολαμβάνει κατὰ τὸ μέτρον τῆς οἰκείας ἀρετῆς τὰ προίμια, οὕτως εἰπεῖν, τῆς μελλούσης μακαριότητος, ἡ μεταφέρεται ὑπὸ τῶν δαιμόνων εἰς τὸν Ἄδην, ὅπου ἀναλόγως τῆς ἐπιβαρυνούσης αὐτὴν ἁμαρτίας ἀπολαμβάνει τὰ προίμια τῆς μελλούσης ἀτελευτήτου κολάσεως. Δύνανται δὲ νὰ συντελέσωσι μεγάλως εἰς ἐλάφρυνσιν τῆς προοιμιώδους ταύτης κολάσεως τῶν ἁμαρτωλῶν, ὅσοι μετενόησαν μὲν ζῶντες, ἀλλὰ δὲν ἐπρόφθασαν καὶ ἕνεκα τοῦ ἐπελθόντος θανάτου νὰ ἐπιδείξωσι καρποὺς ἀξίους τῆς μετανοίας των, αἱ ὑπὲρ αὐτῶν δεήσεις τῶν ζώντων, καὶ μάλιστα ὅταν συνδέωνται μὲ τὴν προσφορὰν τῆς ἀναιμάκτου θυσίας τοῦ σώματος καὶ αἵματος τοῦ Χριστοῦ²⁾, καθὼς καὶ αἱ ἀγαθοεργίαι αἱ γινόμεναι εἰς μνημόσυνον αὐτῶν³⁾.

1) Ἀθηναγόρ. ἀναστ. νεκρ. εἰς, ιθ', κ', Tertull. Resurrect. XIV, Apolog. c. XLVIII, Test. animi. c. IV, Κυρίλλ. καταγ. ιθ'. 10, Γρηγόρ. Νύκτ. εἰς ἀνάστ. Χριστ. λόγ. γ'. Ἐπιφάν. αἰρέσ. 53'. 72, Ambros. prius ser. II. 52, Εἰρην. Haer. II. 29, V. 32, Γρηγόρ. Νύκτ. λόγ. ε', Διονύσι. Ἀρεσπ. ἱερ. ἐκκλ. 5'. 3, August. Gen. lit. imp. XII. 35.

2) Ἰάκ. ε'. 16, δ. Τίμ. β'. 4, Ἑβρ. ζ'. 18, 19. Πρὸς καὶ πάσαις τὰς λειτουργίαις, καὶ Κυρίλλ. Ἱερουσ. μυσταγ. ε'. 10, Χρυσόστ. πρὸς Φιλ. ὁμ. γ'. 4, Πρὸς ὁμ. κδ'. 3, August. CLXXII, Ἐπιφάν. αἰρ. ὁ 3, κλπ.

3) Μητροφάν. Κριτοπούλι. ὁμολογ. κτλ. κ'. σελ. 147, Δοσθ. πατριάρχ. ὁμολογ. κτλ. κεφ. ιθ' — Ἡ Ῥωμαϊκὴ ἐκκλησίαι διδάσκει τὴν ἐν Ἄδου ὑπαρξίν αὐτῶν ἀποκαθάρσιν (ignis purgatorius), ἐν ᾧ κολάζονται αἱ ψυχαὶ τῶν

§. 90.

Ποῦτον εἶνε τὸ θαυμάσιον ἄρθρον τοῦ συμβόλου τῆς πίστεως καὶ τί μᾶλλον διδάσκει;

«Καὶ ζωὴν τοῦ μέλλοντος αἰῶνος. Ἀμήν».

Τὸ ἄρθρον τοῦτο μᾶλλον διδάσκει τὴν προσδοκίαν τῆς μελλούσης ζωῆς, ἣτις θέλει εἶνε πλήρης μακαριότητος διὰ τοὺς δικαίους, πλήρης δὲ βασάνων καὶ κολάσεων διὰ τοὺς ἁμαρτωλοὺς. Ἀμφότεροι δέ, καὶ οἱ δίκαιοι καὶ οἱ ἁμαρτωλοί, θέλουσιν ἀπολάβῃ κατὰ διαφόρους βαθμοὺς τὴν μακαριότητα ταύτην καὶ τὴν κόλασιν, ἀναλόγως τῆς πίστεως ἢ ἀπιστίας, καὶ τῶν καλῶν ἢ κακῶν αὐτῶν ἔργων. Καὶ οἱ μὲν δίκαιοι πλήρεις φωτός καὶ χαρᾶς ἀτενίζοντες κατὰ πρόσωπον τὴν θείαν μεγαλειότητα θέλουσιν ἀπολάβῃ μετὰ πάντων τῶν δικαίων καὶ τῶν ἀγγέλων ἀνεκκλήτητον εὐφροσύνην¹⁾, οἱ δὲ ἁμαρτωλοί θέλουσι διάγῃ μετὰ τῶν λοιπῶν ἁμαρτωλῶν καὶ τῶν διαβόλων μακρὰν τῆς θείας μεγαλειότητος καὶ τοῦ φωτός, εἰς τὸ σκότος καὶ τὸ πῦρ τὸ ἐξώτερον, πλήρεις θλίψεως καὶ ὀδύνης²⁾.

διὰ τοῦ θανάτου ἀποκαλυφθέντων καὶ ἐπιδείξωσιν ἐν τῇ βίῃ τούτῃ καρποὺς ἁγίου τῆς ἐκυτῶν μετανοίας, ἵνα ἱκανοποιησάντες διὰ τῆς κολάσεως ταύτης τὴν ἐκ τῶν ἁμαρτιῶν αὐτῶν προσβληθεὶσαν θείαν δικαιοσύνην, ἀποκαθαρθῶσιν ἀπὸ τῆς ἁμαρτίας, καὶ ἀπαλλαγθέντες τῆς κολάσεως εἰσελθῶσιν εἰς τὴν βασιλείαν τῶν οὐρανῶν. Ἡ διδασκαλία αὕτη (Concil. Trident. Sess. VI, justificat. can. 30, Sess. XXV, purgat., Catech. Rom. I. 6, 3), ἀναστέοντα αὐτὰς τὰς βᾶσαι τοῦ περὶ ἀπολυτρώσεως δόγματος, εἶνε ὅπως ἐσφαλμένη, ὅπως θέλομεν ἰδὲ κατωτέρω § 109). Πρὸς κ. Μητροπ. Κρίτοπούλ. ὁμολ. κερ. ἡ. σελ. 149.

1) ἁ. Κορ. γ'. 12, εἰ 41, 49, ἁ. Ἰω. γ'. 2 κλπ.

2) Ματθ. κ'. 41, Ἀποκλ. κ'. 13, Μάρκ. θ'. 47, κλπ.

ΙΕΡΑΣ ΚΑΤΗΧΗΣΕΩΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ,

ΙΕΡΟΤΕΛΕΣΤΙΚΟΝ.

§. 91.

Πρῶτον εἶνε τὸ ἀντικείμενον τοῦ δευτέρου μέρους τῆς ἱερᾶς κατηχήσεως ;

Τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἱερᾶς κατηχήσεως μᾶς διδάσκει περὶ τῶν ἱερῶν τελετῶν, ὅσαι συγχροτοῦσι τὴν χριστιανικὴν λατρείαν, καὶ τῶν ὁποίων κέντρον οὐσιῶδες καὶ σπουδαιότατον εἶνε τὰ μυστήρια, δι' ὧν μεταδίδεται καὶ ἐνεργεῖ εἰς τοὺς πιστοὺς ἡ θεία χάρις.

§. 92.

Τί λέγεται μυστήριον, καὶ ποῖα τις ἡ ἔννοια καὶ ὁ σκοπὸς αὐτοῦ ;

Μυστήριον¹⁾ λέγεται πρᾶξις ἱερά, ἐνεργουμένη δι' ὀλικῶν μέσων καὶ ὑποπίπτουσα εἰς τὰς αἰσθήσεις, διὰ τῆς ὁποίας

1) Ἡ λέξις παρὰ τὸ μύω—μύεω, ὅθεν μύστης, μυστικός κτλ. Μυστήριον λέγεται ἐν γένει τὸ ἀπόρρητον καὶ ἀπόκρυφον, μάλιστα δὲ ἡ ἀπόρρητος ὁρησκευτικὴ διδασκαλία ἢ τέλεσις. Κατὰ τὴν τελευταίαν ταύτην ἔννοιαν παρελήφθη ἐκ τῆς κοινῆς ἑλληνικῆς εἰς τὴν γραφικὴν καὶ ἐκκλησιαστικὴν γλῶσσαν ἡ λέξις, καὶ σημαίνει καθόλου μὲν πᾶσαν ἐν γένει διδασκαλίαν ἢ δόγμα χριστιανικόν, ὡς ἀπόρρητον μὲν καὶ ἀπόκρυφον διὰ τὸν ἀμύητον, ἀκατάληπτον δὲ καὶ ὑπερφύε· καὶ ἀπίστευτον διὰ τὸν μὴ πιστεύοντα μηδὲ ὑπὸ τῆς θείας χάριτος φωτιζόμενον. Οὕτω λέγεται μυστήριον π. χ. ἡ σάρκωσις καὶ ἐνανθρώπησις τοῦ θείου Λόγου (ἀ. Τιμὸθ γ'. 16, κλπ.), καὶ πᾶν ἄλλο ὑπερφύε· δόγμα τοῦ χριστιανισμοῦ. Εἰδικώτερον ὅμως λέγονται τὰ ἐπὶ μυστήρια, καὶ εἰδικώτατα μυστήρια (καὶ μάλιστα πληθυντικῶς μυστήρια) λέγεται ἡ θεία εὐχαριστία, καὶ ἐπὶ μᾶλλον αὐτὰ τὰ ἁγία ὄψα, ἧτοι τὸ ἄχραντον σῶμα, καὶ τὸ τίμιον αἷμα τοῦ Χριστοῦ. Πρβλ. καὶ Schleussner ἐν τῇ λ., καὶ Suicer. The-saur. ecclesiast. II, p. 381 sq.

ἑκτείνων αὐτῆς μετὰ πίστεως ἀξιούται τῆς χάριτος τοῦ Θεοῦ, ἀγιάζεται διὰ τοῦ ἁγίου Πνεύματος, καὶ γίνεται ζῶν καὶ ἐνεργὸν μέλος τῆς τοῦ Χριστοῦ ἐκκλησίας. Τὸ μυστήριον ἄρα εἶνε ἀναγκαιότατον εἰς τὴν πνευματικὴν ζωὴν καὶ συντήρησιν τῆς τε ἐκκλησίας καθόλου καὶ ἐνὸς ἐκάστου τῶν μελῶν αὐτῆς ἰδίᾳ. Ὅπως δὲ ὁ ἄνθρωπος, ὡς ὃν σύνθετον ἐκ ψυχῆς καὶ σώματος, ζῇ καὶ ὑπάρχει ἐν τῷ κόσμῳ τούτῳ κατ' ἀμφοτέρας, καὶ οὔτε ἡ ὑπαρξὶς καὶ συντήρησις τῆς ψυχῆς εἶνε δυνατὴ ἐν ταῦθα ἄνευ τῆς ὑπάρξεως καὶ συντηρήσεως τοῦ σώματος, οὔτε πάλιν· οὕτω καὶ ἡ ἐν τῇ στρατευομένη ἐκκλησίᾳ καὶ τοῖς ζῶσιν αὐτῆς μέλεσι πραγματικὴ ἐνέργεια τῆς ζωῆς πίστεως εἶνε ἀδύνατος ἄνευ τελετῶν τινῶν ἱερῶν, ὕλικῶν τε ἁπλῶς καὶ πνευματικῶν, ὅποια μάλιστα εἶνε τὰ μυστήρια.

§. 93.

Τί εἶνε ἡ θεία χάρις, τῆς ὁποίας μετέχει διὰ τῶν μυστηρίων ὁ πιστός, καὶ ποῦ ταῦτα εἶνε σωτηριώδη;

Θεία χάρις εἶνε καὶ λέγεται ἡ διὰ τοῦ ἁγίου Πνεύματος θεία εἰς τὸν ἄνθρωπον ἐπενέργεια, διὰ τῆς ὁποίας ἐπέρχεται ἰσχυρὰ καὶ ριζικὴ τις ἐπὶ τὸ βέλτιον μεταβολὴ τῆς ψυχῆς. Διὰ τῆς ἐπενεργείας ταύτης παύει ὁ βίος τῆς ἁμαρτίας, καὶ ἄρχεται ὁ κατὰ Θεὸν βίος, νεκροῦται καὶ θάπτεται ὁ παλαιὸς ἄνθρωπος, καὶ ἐγείρεται ὁ νέος, ὁ ἐν Χριστῷ Ἰησοῦ. Ὁ ἄνθρωπος τοῦ λοιποῦ δὲν ἀνήκει εἰς ἑαυτόν, ἀλλ' εἰς τὸν Σωτῆρα, εἰς τὸν ὁποῖον ἐπίστευσε, καὶ διὰ τοῦ Σωτῆρος κοινωνεῖ πρὸς αὐτὸν τὸν Θεόν, ἀπὸ τὸν ὁποῖον τὸν εἶχε χωρὶς ἡ ἁμαρτία.

Ἐπειδὴ δὲ ἄνευ τῆς θείας ταύτης χάριτος, ὅπως εἶδομεν, ἀποβαίνει ἀδύνατον εἰς τὸν ἄνθρωπον τὸ ἔργον τῆς σωτηρίας, οὕτω δὲ ἐνεργεῖ διὰ τῶν μυστηρίων, ἔπεται ὅτι ταῦτα εἶνε ἀποκαταστατικὰ εἰς τὴν σωτηρίαν τοῦ ἀνθρώπου. Καὶ ἐλθέτω πρὸς

άνθρωπος καὶ συνδιαλλαχθεὶς νὰ συγκοινωνήσῃ μὲ τὸν Θεόν, ἀνευ τοῦ βαπτίσματος²⁾, ἀνευ τῆς εὐχαριστίας³⁾ καὶ ἀνευ τῶν λοιπῶν μυστηρίων, τὰ ἐπειτὰ τὰ μὲν οὕτως τὰ δὲ ἄλλως συντελοῦσιν, ὅπως θέλομεν ἰδεῖν, καὶ εἶνε ἀπαραίτητα εἰς σωτηρίαν;

§. 94.

Ἐνεργεῖ ἡ θεία χάρις ἀνευ τῆς συμμετοχῆς τοῦ ἀνθρώπου, ὅπως ὁλοκαυτῶς αἱ Καλθινισταί;

Ἡ μεταβολὴ αὕτη δὲν εἶνε ἀποκλειστικῶς ἔργοι τῆς χάριτος τοῦ Θεοῦ, ἥτις συνεργεῖ μόνον ἐνισχύουσα τὴν θέλησιν τοῦ ἀνθρώπου. Ὁ ἀνθρώπος δὴλονότι, ἐξησθενημένος ἕνεκα τῆς ἁμαρτίας, ἀφ' οὗ λήβη τὴν χάριν τοῦ Θεοῦ, ἐνισχύεται καὶ ἐνισχυόμενος προάγεται εἰς τὴν πίστιν οἰκοθεν, δέχεται τὸ εὐαγγέλιον τῆς σωτηρίας, καὶ ἀπορραϊζει νὰ μεταβάλῃ ζωὴν. Διὰ τοῦτο εἶνε βλάσφημος ἡ δόξα τῶν Καλθινιστῶν, ὅτι ἡ σωτηρία τοῦ ἀνθρώπου εἶνε μόνον καὶ ἀποκλειστικὸν ἔργον τῆς θείας χάριτος⁴⁾. Ἐάν ἡ δόξα αὕτη ἠλγίσθαιεν, ἐπρεπε νὰ ὑποθέσωμεν τὸν ἀνθρώπον ὡς ὅχι μόνον ἀπλῶς ἐξησθενημένον ἠθικῶς καὶ πνευματικῶς ἕνεκα τῆς ἁμαρτίας, ἀλλὰ καὶ ὡς ὅλως νεκρόν. Τοιαύτη ὁμως ὑπόθεσις ἤθελε φέρῃ εἰς ἀσέβητον ἐτι μεγαλύτερον, διότι τότε ἤθελεν ἀναρῆναι τὸ ζήτημα, διατί ὁ Θεός δὲν ἐπενεργεῖ εἰς πάντας ἐπ' ἰσῆς τοὺς ἀνθρώπους σωτηριωδῶς διὰ τῆς χάριτος αὐτοῦ; Πρέπει λοιπὸν νὰ δεχθῶμεν ὅτι ὁ Θεός ἄλλους μὲν προώρισεν εἰς σωτηρίαν, ἄλλους δὲ εἰς ἀπώλειαν; Τοῦτο διεξάγουσι τῶν οἱ Καλθινιστοί, ὡς εἶδωμεν, διὰ τοῦ περὶ προσρισμοῦ ἀπολύτου αὐτῶν δόγματος. Ἀλλ' οὐδὲν τούτου ψευδέστερον²⁾ καὶ μᾶλλον ἀντικείμενον εἰς τὴν

2) Ἴδ. § 96. 3) Ἴδ. § 103

4) Ἴδ. § 21, §. 35.

2) «Τοῦτο γὰρ καλὸν καὶ ἀπόδεκτον ἐνόμιον τοῦ Σωτῆρος ἡμῶν Θεοῦ, ὅτι πάντας ἀνθρώπους θέλει σωθῆναι καὶ εἰς ἐπίγνωσιν ἀληθείας ἐλθεῖν». Π. 2, 8. Ἡμεῖς δὲ Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βεροῦνης

ἡμαιοσύνην καὶ ἀγαθότητα τοῦ Θεοῦ. Ἡ δόξα λοιπὸν αὕτη καὶ διὰ τὸν λόγον τοῦτον, καὶ διότι τὸν μὲν Θεὸν καθιστᾷ αἴ-
τιον τοῦ κακοῦ, ἀναιρεῖ δὲ ὅλως τὸ αὐτεξούσιον τοῦ ἀνθρώπου,
εἶνε βλάσφημος καὶ ἀξιοκατάκριτος³⁾.

§. 95.

Πῶτα εἶνε τὰ μυστήρια, καὶ εἶνε τῶν ἑτεροδόξων διαφωνοῦσιν ὡς πρὸς τὸν
ἀριθμὸν αὐτῶν;

Τὰ μυστήρια εἶνε ἑπτὰ, ἥτοι α) τὸ βάπτισμα· β) τὸ
χρῖσμα ἢ ἁγίον μύρον· γ) ἡ εὐχαριστία· δ) ἡ
μετάνοια ἢ ἐξομολόγησις· ε) ἡ ἱερωσύνη
ζ) ὁ γάμος, καὶ ζ) τὸ εὐχέλαιον.

Ὅτι τὰ μυστήρια εἶνε ἑπτὰ, καὶ οὔτε πλείότερα οὔτε ὀλι-
γώτερα, μαρτυρεῖ αὕτη ἡ Γραφή, ἥτις δὲν λέγει μὲν ῥητῶς
τὸν ἀριθμὸν ἑπτὰ, ἀλλ' ἀναφέρει ὁμῶς ῥητῶς αὐτὰ καθ' ἑκα-
στα τῆδε κἀκεῖσε, καὶ μόνον αὐτά, οὔτε δὲ πλείότερα οὔτε ὀ-
λιγώτερα¹⁾. Περὶ τούτου μαρτυρεῖ ὁμοίως καὶ αὕτη ἡ ἀρχαιο-
τάτη καὶ σεβαστὴ παράδοσις, καθὼς καὶ οἱ πατέρες τῆς ἐκκλη-
σίας²⁾, καὶ αὐταὶ δὲ αἱ κατὰ τὴν Ἀνατολὴν ἀπὸ τῆς καθόλου
ἐκκληλίας, ὡς εἶδομεν, ἀποσχισθεῖσαι ἐκκλησίαι, ἡ τῶν Ἀρμε-
νίων³⁾, π. χ. καὶ ἡ τῶν Κοπτιῶν⁴⁾, οἵτινες ὁμολογοῦσι καὶ τε-
λεῖσαι μέχρι σήμερον ἑπτὰ τὰ μυστήρια, καὶ οἵτινες βεβαίως
δὲν ᾔθελον μιμηθῆ τὴν καθόλου ἐκκλησίαν, ἐὰν αὕτη ἐνόθευε
τὸν ἀριθμὸν τῶν μυστηρίων, ἅτινα παρέδωκαν καὶ ἐνεπιστεύ-
θησαν εἰς αὐτὴν οἱ ἀπόστολοι τοῦ Ἰησοῦ Χριστοῦ. Ἐκ τῶν
ἀναντιρρήτων τούτων καὶ ἱστορικῶν γεγονότων γίνεται πασι-

1) 13. §. 24, §. 33, καὶ ἐπιστολ. πατρ. ὁρ. γ'.

2) 13. κατωτέρω τὰ εἰς τὴν ἐκκεκτον τῶν μυστηρίων παραπομπὰς.

3) Ὁμοίως.

4) Concil. Armeniorum ἐν ἔτει 1342, καὶ Conc. Armen. cum. Rom. tom.
2. p. 439.

5) Dissert. de Coptis, Jacobitis Sect. III. n. 486 in Boll. Jun. Tom.
3. p. 140, Renaudot. Perpetuité, tom. V. p. I. c. IX.

τὸν Σατανᾶν, συντάσσεται δὲ μὲ τὸν Χριστόν· καὶ ἄφ' οὗ οὗτος ἀποκριθεὶς καταρατικῶς ἀπαγγεῖλη τὸ σύμβολον τῆς πίστεως, ἀγιάζει τὸ ἐν τῇ ἱερᾷ κολυμβήθρᾳ ὕδωρ²⁾, λέγων τὰς ἐπὶ τούτῳ εὐχάς. Ἀφ' οὗ δὲ ὁ μέλλων νὰ βαπτισθῇ γυμνωθῇ εἰς σημεῖον τοῦ ὅτι ἐξεδύθη τὸν παλαιὸν ἄνθρωπον, καὶ χριστῇ ὑπὸ τοῦ ἀναδόχου μὲ ἔλαιον³⁾, βαπτίζει αὐτὸν ὁλόκληρον ὁ ἱερεὺς⁴⁾ τρίς κατ' ἐπανάληψιν⁵⁾ ἐντὸς τοῦ ὕδατος⁶⁾, ἄφ' οὗ εἴτη πρὸ μὲν τῆς πρώτης καταδύσεως τὸ «Βαπτίζεται ὁ δοῦλος τοῦ Θεοῦ δεῖνα εἰς τὸ ὄνομα τοῦ Πατρὸς. Ἀμήν».

2) Ἰω. γ'. 5, ἡ 36, 38, ι 47, 48, Ἰουτίν. ἀπολ. α' 73, Κορίλλ. κατηχ. γ'. 2, Βασιλ. ἀγ. πνεύμ. ιε, Aug. in Ioan. Tract. XV. 4, Δεμασκην. ἐκθ. ὀρθ. πίστ. 2'. 9. Δὲν πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναμιχθῇ ἄλλη τις ὕλη εἰς τὸ βάπτισμα, ὅπως διατείνονται δυτικοί τινες, ἢ νὰ χρησιμεύσῃ καὶ πᾶν ἄλλο ρευστὸν κατὰ τὸν Λουθήρον (Macaire Dogmat. I'. p. 385). 3) Ἀποστολ. διατ. ζ'. 22.

4) Τὸ μυστήριον τοῦ βαπτίσματος δύνатаι νὰ τελέσῃ μόνον ὁ ἱερεὺς ἢ ὁ ἐπίσκοπος (ὅπως καταδεηλοῦται ἐκ τῶν ἀποστολ. κανόνων μζ', μθ', ν', ἀποστολ. διατ. γ'. 11, Ἰγνατ. πρὸς Σμυρν. ἡ, Tertull. de baptism. XVIII, Διονύς, Ἀρσεν. ἐκκλ. ἱεραρχ. 6'. 41, Ἐπιφαν. αἰρέσ. ζ'. 34, οθ'. 3, 7, Hilar. in Ps. LXVII. 32, August. de Civ. Dei XXII. 18), ὅχι δὲ διάκονος (ἀποστολ. διατ. ἡ, 28, Ἐπιφαν. αἰρ. πθ'. 4), εἰμὴ ἐν ἀνάγκῃ (Tertull. bapt. XVIII. Κυρίλλ. κατήχ. ιζ'. 3, Θεοδώρ. ἄπορ 6'. παραλ. ἐρ. α'), ὅπως καὶ ἐν ἐσχάτῃ ἀνάγκῃ δύνатаι νὰ βαπτίσῃ καὶ κοσμικός, ἀνὴρ ἢ γυνή (Tertull. bapt. XVIII. Hier. adv. Lucifer. c. 4, Ἐπιστολ. πατριάρχ. ὁρ. ις'. Δοσιθέ. πατριάρχ. ὁμολ. ις', Μητροφάν. Κριτοπούλ. ὁμολ. σελ. 87). Ἐὰν δὲ τὸ εὖτῳ βαπτισθὲν νήπιον ἐπιζήσῃ, θέλει ἀναγνώστῃ ἀκολουθῶς ὁ ἱερεὺς τὰς εὐχάς τοῦ βαπτίσματος.

5) Εἰς ἀνάμνησιν τοῦ θανάτου, τῆς ταφῆς καὶ τῆς ἀναστάσεως τοῦ Κυρίου ἡμῶν (ἀποστολ. καν. ν'. Κυρίλλ. μεταγωγ. 6'. 4, Γρηγόρ. Νύκτ. κατηχ. λογ. λε').

6) Μόνον τοῦτο εἶνε τὸ ἀληθὲς ὅλκιμ. Οὕτως ἐβαπτίσθη αὐτὸς ὁ Σωτὴρ ἡμῶν ὑπὸ τοῦ Προδρόμου (Ματθ γ'. 46, Μάρκ α. 5, Ἰω. γ'. 83), οὕτως ἐβάπτισαν οἱ ἀπόστολοι (Πράξ. ἡ. 37, 38). Μόνον δὲ τοιοῦτον ὂν τὸ ἀληθὲς βάπτισμα ἡδύνата νὰ θεωρηθῇ ὑπὸ τῶν ἀποστόλων ὡς «ἐνέκλυτον» τοῦ κατεκλύσματος (2. Πέτρ. γ' 49, 21), ὡς «λουτρὸν ὕδατος» καθαρτικόν (Ἐφ. 26, Τίτ. γ'. 5), ὡς τάραξ, εἰς τὸν ὁποῖον «συνετέφημεν» τῷ Χριστῷ «διὰ τοῦ βαπτίσματος εἰς τὸν θάνατον» (Ῥωμ. 5'. 6. Κολ. 2'. 42). 13. καὶ Διον. Ἀρσεν. ἐκκλ. ἱεραρχ. 6'. 7, Tertull. adv. Prax. XXVI, de Coron. milit. III, Γρηγόρ. Νύκτ. λόγ. κατηχ. λδ, Εὐσεβ. ἐκκλ. ἱστορ. 5'. 13, August. in Ioan. tract. LXXX.

πρὸ δὲ τῆς δευτέρας καταδύσεως «Καὶ τοῦ Υἱοῦ. Ἀμήν»· πρὸ
 δὲ τῆς τρίτης «Κοὶ τοῦ ἁγίου Πνεύματος. Ἀμήν»⁷). Μετὰ
 τοῦτο ὁ νεοφώτιστος χρίεται μὲ ἅγιον μύρον ὑπὸ τοῦ ἱερέως,
 ἐκδύεται λευκὸν σταυροφόρον χιτῶνα, ὅστις δεικνύει τὴν κα-
 θαρπὴν τῆς ψυχῆς τοῦ ἀποκαθαρθέντος ἐκ τοῦ ῥύπου τῆς ἁ-
 μαρτίας, καὶ περιάγεται κύκλῳ τῆς ἱερᾶς κολυμβήθρας κρα-
 τῶν ἁμίσως ἢ διὰ τοῦ ἀναδόχου λαμπρόδα ἀντημμένη⁸, εἰς ση-
 μείον τῆς πνευματικῆς χαρᾶς καὶ τοῦ πνευματικοῦ φωτισμοῦ,
 ὅθεν καὶ ὁ νεοφώτιστος βαπτισθεὶς καλεῖται νεοφώτιστος.

§. 98.

Εἶνε σωτηριῶδες τὸ βάπτισμα τῶν νηπίων, ἀρ' οὕτως ἐκ τῆς ἱστορίας ἀραι-
 οῦσι καὶ τῆς κατηχήσεως καὶ τῆς πίστεως;

Ὅτι τὸ βάπτισμα τῶν νηπίων εἶνε σωτηριῶδες¹, ἀποδει-
 κνύεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ περιτομὴ τῆς παλαιᾶς Διαθήκης, ἣν
 ἀντικατεστάθη ἐν τῇ Καινῇ διὰ τοῦ βαπτίσματος², ἐπέλειτο
 τὴν ὁγδόην ἀπὸ τῆς γεννήσεως ἡμέρην³, ἐκ τοῦ ὅτι οἱ ἀπό-
 στολοι ἐβάπτισον ἐνίοτε καὶ ὁλοκλήρους οἰκογενείας, ἐντός
 τῶν ὁποίων κατὰ πάντα πιθανότητα ὑπῆρχον καὶ μικρὰ παι-
 δια⁴, καὶ τελευταῖον ἐκ τοῦ ὅτι τὸ βάπτισμα ἐν ἐνεργεῖ μόν-
 ον ὡς ἐκ τῆς πίστεως τοῦ βαπτιζομένου, ἀλλὰ καὶ ἀρ' ἑαυ-
 τοῦ. Ἀλλως δὲ τὴν ἑλλειψιν πίστεως παρὰ τῷ νηπίῳ ἀνα-
 πληροῖ ἡ τῶν γονέων καὶ τοῦ ἀναδόχου, ὅστις καὶ ὠρίσθη ἐπὶ
 τούτῳ ὑπὸ τῆς ἐκκλησίας, ἵνα παρέχῃ αὐτὸς ἀντὶ τοῦ βαпти-

7) Ἀποστολ. καν. ν', Tertull. adv. Prax. XXVI, Κρυστός. εἰς Ἰω. ἐμ. κ. 2, Ambros. de sacram. II 7, Hieron. ad Luc. 4, Basil. ἀγ. πνεύμ. εἰς κ'.

1) Ὅπως ῥητῶ: ἀποβαίνονται καὶ οἱ πατέρες τῆς ἐκκλησίας: Εἰρήν. Haeres. V. 15, Cyprian Epist. LIX ad Fid., τῆς ἐν Καρθαγίνῃ Συνόδου καν. ρι (ρηδ'), August. de Genes. ad littor. inpr. X. 23, Κλήμ. Ἀλεξ. παιδαγ. γ'. 11, καὶ Βηλ. Πηλ. γ'. ἐπιστ. ρηγ' Πρὸς ἀποστ. διατ. ς' 15.

2) Κολ. 2'. 11.

3) Γενέσ. εἰς. 12, Λευκ. 16. 3, Λουκ. 6'. 21, Ἰω. 3'. 22, Φιλιπ. γ'. 36, Κολ. 2'. 11, (2) Γαλ. γ' 27, 29. 4) Πρὸς. ις'. 14—15. 4. Κορ. 4. 16.

ζομένου νηπίου τὴν ὁμολογίαν τῆς πίστεως, καὶ ἀναλαμβάνει τὴν περὶ κατηχήσεως αὐτοῦ καὶ στηρίξεως εἰς τὴν πίστιν ἐγγύησιν καὶ εὐθύνην⁵⁾.

§. 99.

Πῶς λέγεται ἐν τῷ συμβόλῳ τῆς πίστεως «ἐν» τὸ βάπτισμα;

Ἐν λέγεται ἐν τῷ συμβόλῳ τῆς πίστεως τὸ βάπτισμα¹⁾ κατ' ἀντιθεσιν πρὸς τὰ τῶν αἰρετικῶν καὶ σχισματικῶν, καθ' ὃν λόγον μία λέγεται ἐν τῷ αὐτῷ συμβόλῳ καὶ ἡ τοῦ Χριστοῦ ἐκκλησία· λέγει δὲ καὶ ὁ ἀπόστολος «εἰς Κύριος, μία πίστις, ἐν βάπτισμα»²⁾. Ἡ διὰ τοῦ ἁγίου βαπτίσματος «σφραγίς» μένει διὰ παντός ἀνεξίτηλος ἀπὸ τοῦ βαπτισθέντος καὶ «ἄθραυστος»³⁾, καὶ ἐὰν ᾔθελεν ἐξοκεῖλη οὗτος μετὰ τὸ βάπτισμα καὶ εἰς τὰ μέγιστα τῶν ἁμαρτημάτων, καὶ αὐτὴν τὴν ἐξωμωσίαν⁴⁾. Ὅπως δὲ ὁ ἄνθρωπος ἀπαξ μόνον γεννᾶται φυσικῶς, οὕτω καὶ ἀπαξ μόνον ἀναγεννᾶται πνευματικῶς ἐν τῷ «λουτρῷ τῆς καλιγγενεσίας», διὸ καὶ τὸ μὲν βάπτισμα οὐδέποτε ἐπαναλαμβάνεται, ἡ δὲ ἐκκλησία συνωδᾷ πρὸς τὸν λόγον τοῦ Θεοῦ καὶ τὰς διατάξεις τῶν ἀποστόλων καὶ τῶν Συνόδων κατεδίκασε μὲν καὶ καταδικάζει τοὺς ἀναβαπτιστάς παντός τόπου καὶ χρόνου ὡς αἰρετικούς, ἀνεγνώρισε δὲ καὶ

5) Διονύσι. Ἀρεοπ. ἐκκλ. Ισραὴλ. τ'. 3, Tertull. de baptism. XVIII. August. de lib. arbitr. III. 23, Χρυσόστ. εἰς ψαλμ. ιδ'.

1) Μόνον τὸ «βάπτισμα τοῦ αἵματος», ἥτοι ὁ ὑπὲρ τῆς χριστιανικῆς πίστεως μαρτυρικός θάνατος· δύναται νὰ σώσῃ τὸν ἄνθρωπον καὶ ἄνευ τοῦ βαπτίσματος κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς ἐκκλησίας, στηριζομένην ἐπὶ τῶν: Ματθ. ι. 32, 36, ι. 30, ιδ. 25, ε. 16, Ἰω. ιδ. 13—14, κλπ. Ἰδ. καὶ Cyr. epist. LXXVIII Κορινθ. κατηχ. γ'. β', Μ. Βασίλ. ἀγ. πνεύμ. ιε, Tertull. baptism. XVI Ambros. in Ps. CXVIII. 44, Χρυσόστ. εἰς Λουκιαν. μάρτ. 6', Διδόμ. Τριπλ. ια', ιδ', August. Civit Dei XVI. 7, Δαμασκ. ἐκθ. δ'. 9.

2) Ἐφεσ. ε'. 5.

3) Παρ. Ἀποστόλ. διαταγ. γ'. 16, Ἑρμ. ποιμ. γ'. παραβ. 0', 16.

4) Ἐπιστ. πατρ. 22. ιγ', Χρυσόστ. εἰς 2. Κορ. 6. γ'. 7, Hieron. in Epist. I. 13, Θεοδώρητ. εἰς Ἑβρ. ε'. 6, Δαμασκ. ἐκθ. ὁρθ. πίστ. δ'. 7.

αναγνωρίζει πάντοτε τὸ βάπτισμα καὶ αὐτῶν τῶν ἄλλως αἰ-
 σιολογικῶν καὶ σχισματικῶν, ἐὰν ἐτελέσθη μόνον κατὰ τὰς δια-
 τάξεις τῶν ἀποστόλων καὶ τῶν Συνόδων, αἵτινες ῥητῶς καὶ
 ἀπὸ ὅπως ὀρίζουσιν αὐτὸ ὡς γινόμενον διὰ τριῶν καταδύσεων καὶ
 ἐναδύσεων εἰς τὸ ὄνομα τοῦ Πατρὸς καὶ τοῦ Υἱοῦ καὶ τοῦ ἁ-
 γίου Πνεύματος⁵). Πᾶσαν δὲ ἀντὶ βαπτίσματος ἀληθοῦς οἰ-
 κουμενικὴν καὶ εἰκονικὴν ἀπόπλυσιν ἢ ἀπόνψιν ἢ ῥάντισιν οὐ-
 δε ἀναγνωρίσασκε ποτε οὔτε ἀναγνωρίζει ἡ ἐκκλησία ὡς βάπτι-
 σμα, μένουσα πιστὴ εἰς τοὺς θείους καὶ ἱεροὺς κανόνας. Διὰ
 αὐτὸ καὶ τοὺς προσερχομένους ἐξώθεν εἰς τοὺς κόλπους αὐ-
 τῆς, ἐὰν μὲν ἐδέχθησαν ἁπλῶς τὸ ὕδωρ καὶ μόνον ἀληθὲς βάπτι-
 σμα, δὲν ἀναβαπτίζει, χρίει δὲ μόνον μὲ ἅγιον μύρον⁶), εἰ δὲ
 αὐτὴν βαπτίζει ὡς μὴ βαπτιθέντας⁷).

§. 100.

Κατὰ τί διαφέρουσιν ὡς πρὸς τὸ βάπτισμα αἱ ἑτερόδοξοι ἐκκλησίαι ;
 Ἐν ᾧ τὸ βάπτισμα εἶνε ἓν, οὕτινος τὴν τέλεισιν σαφέστατα
 ὥρισε καὶ ἡ Γραφή καὶ ἡ παράδοσις καὶ αἱ σύνοδοι καὶ οἱ πα-
 τέρες τῆς ἐκκλησίας, ὡς εἴδομεν, ἡ δυτικὴ ἐκκλησία κατήρ-
 γησεν τὸ διὰ τριπλῆς καταδύσεως βάπτισμα, ὅπερ διετῆρει με-
 χρὲ τοῦ 13^{ου} αἰῶνος, καὶ εἰσήγαγεν ἕκτοτε ἀντὶ τοῦ βαπτίσμα-
 τος τὴν ἐπίχυσιν ὕδατος ἐπὶ τὴν κεφαλὴν τοῦ παιδίου⁴). Ὅτι

5) Τῆς α'. οἰκοῦμεν. Συν. καν. ἡ, τῆς β'. οἰκοῦμ. καν. ζ', τῆς δ'. οἰκοῦμ.
 καὶ τοῦ Μ. Βασιλ. καν. α'.

6) Τῆς δ'. οἰκοῦμ. Συνόδ. καν. ζ', τῆς ἐν Λαοδικ. καν. ζ'.

7) Τῆς ἐν Λαοδικ. Συνόδ. καν. ἡ, τῆς β'. οἰκοῦμεν. καν. ζ', τῆς δ'. οἰκοῦμ.
 καὶ, Δαμασκ. ἐκθ. δ'. 9.

4) Ἀντὶ τοῦ βαπτίσματος ἐπετρέπη πάλαι ἡ ἐπίχυσις αὕτη κατ' ἐξαιρέσειν
 καὶ ἐν ἐσχάτῃ ἀνάγκῃ διὰ τοῦτο ἐκ νότου κληήρεις μόνον (Tertull. de baptis-
 m. VI, Εὐσεβ., ἐκκλ. ἱστ. γ'. 43, August. in Ioa. Tractat. LXXXI), καὶ τοῦτο δὲ
 ὡς ἀνευ δυσκολιῶν πολλῶν καὶ διαταγῶν (Cyprian. Epist. LXXV). Παρε-
 ρχόμενος ὁ Kier, εἰς τῶν ἐπισκευαστέων δυτικῶν θεολόγων, ἀναγνωρίζει τὸ διὰ
 καταδύσεων βάπτισμα ὡς μόνον ὡς τὸ ἀρχαῖον, ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ σύμφορον μὲ
 τὴν ἀγίαν Γραφὴν (Dogmatik ἐκθ. γ'. τόμ. γ'. σελ. 129), τὴν δὲ ἐπίχυσιν ὡς
 (ΙΕΡΑ ΚΑΤΗΧΗΣΙΣ)

δε τοῦτο εἶνε καινοτομία μεταγενεστέρα τῆς δυτικῆς ἐκκλησίας, δὲν ἀρνοῦνται παραδόξως οὐδ' αὐτοὶ οἱ θεολόγοι τῆς Δύσεως²). Οἱ δὲ διαμαρτυρούμενοι ἀπεμακρύνθησαν ἐν μᾶλλον ἀπο τοῦ ἑνός, καὶ μόνου ἀληθοῦς βαπτίσματος, εἰσαγαγόντες τὸ ῥάντισμα³). Μόνη ἡ ἀγγλικανικὴ ἐκκλησία ἐτήρησε τὸ διὰ καταδύσεως, ἀν καὶ μίας, βάπτισμα εἰς τὰ νήπια, ἐπιτρέπουσα τὴν ἐπὶ τῆς κεφαλῆς ἐπίχυσιν ὕδατος κατὰ τοὺς Λατίνους μόνον εἰς τοὺς ἐφήβους. Ἡ ἀγγλικανικὴ ἄρα ἐκκλησία εἶνε ἡ μᾶλλον τῶν λοιπῶν πλησιάζουσα πρὸς τὴν ὀρθόδοξον ἐκκλησίαν, ἥτις μόνη ἐτήρησεν ἀπὸ τοῦ ἱ. κ. καὶ τῶν ἀκαστόλων μέχρι σήμερον τὸ ἐν καὶ μόνον ἀληθὲς βάπτισμα.

§. 101.

Τί εἶνε τὸ χρίσμα ἢ ἅγιον μύρον;

Τὸ χρίσμα¹) εἶνε μυστήριον, διὰ τοῦ ὁποίου χρισμένων μετὰ τὸ βάπτισμα τῶν κυριωτέρων μελῶν καὶ αἰσθητηρίων τοῦ βαπτισθέντος μετ' ἅγιον μύρον ὑπὸ τοῦ ἱερέως, μεταδίδεται εἰς αὐτόν τὸ πνευματικὸν μύρον, ἥτοι τὰ χαρίσματα τοῦ ἁγίου Πνεύματος, δι' ὧν ἐνισχύεται καὶ προκόπτει ἡ πνευματικὴ ζωὴ. Ὅπως μετα τὸ ἐν Ἱερδάνῃ βάπτισμα τοῦ Ἰησοῦ κατῆλθεν ἐα

εἰσχυθεῖσαν κατόπιν διὰ τὴν ἀνάγκην τῶν μεταδιδόντων (ἐκ) χρόνων (αὐτοῦ. σελ. 133). Καὶ αὐτὸς δὲ ὁ Δέων Ἀλλάτις ἀγνωρίζει ὡς γνήσιον καὶ ἔγκυρον μύρον τὸ διὰ καταδύσεως βάπτισμα (H. K. cons. III. 42).

2, 13 σημ. 1. 3) Winer Symbolik σελ. 433, Anm. 2, ἐκδ. 6'.

1) Χρίσμα κυρίως εἶνε αὐτὸ τὸ μυστήριον ὡς τελετὴ ἱερὰ, «ἅγιον μύρον» δὲ ἡ ὕλη, ἥς γίνεται χρῆσις ἐν τῇ τελετῇ λέγεται δὲ τὸ αὐτὸ καὶ «σφράγις» καὶ «σφραγίς» (Κλήμ. Ἀλέξ. στρωματ. β'. 3, Κυρίλλ. κατηχ. ιδ'. 33), πρὸς «ἐμπεδῶν» ἢ «δοῦναι τοῦ ἁγίου Πνεύματος» (Ἰσαὶ Πηλουτ. ἀ. ἐπιστ. σν') τῶν καὶ ὁ ἱερεὺς χρίων τὰ διάφορα μέρη τοῦ βαπτισθέντος λέγει «σφραγίζω ἐμπεδῶν πνεύματος ἁγίου. Ἀμήν». Τὸ αὐτὸ δὲ καὶ «βεβαίωσις» (Ἀποστολ. διακ. γ'. 47) = confirmatio (Ambrus. de Inill. c. VII, κλπ.). Καὶ τοῦς τρεῖς ποῦντες ἔρως μεταχειρίζεται ὁ ἀποστολὸς ἐν β'. Κορ. ἀ. 21—22: «ὁ δὲ βεβαίωσεν ἑμὲ, οὗν ὅστις εἰς Χριστὸν, καὶ χρίσας ἑμὲ: Θεός, ὁ καὶ σφραγισθεῖς μεν ὡς ἐν τῷ τοῦ ἐξουσίας τοῦ πνεύματος ἐν τῇ καρδίᾳ ἡμῶν».

αὐτὸν τὸ Πνεῦμα τὸ ἅγιον, οὕτω καὶ οἱ ἀπόστολοι, ἀφ' οὗ ἐ-
βάπτισον, ἐπέθετον ἐπὶ τοῦ νεοφωτίστου τὰς χεῖρας, καὶ διὰ
τῆς ἐπιθέσεως ταύτης ἐξεχέοντο ἐπὶ τὸν πιστὸν τὰ χαρίσματα
τοῦ ἁγίου Πνεύματος²⁾. Οἱ δὲ διάδοχοι τῶν ἀποστόλων εἰσή-
γαγον ἐπὶ τοῦ βαπτίσματος ἀντὶ τῆς ἐπιθέσεως τῶν χειρῶν
τῶν χρίσιν τοῦ ἁγίου μύρου³⁾, κατασκευαζομένου ἐκ ποικίλων
καὶ εὐδωδῶν ὕλων, εἰς σημεῖον τῆς ποικιλίας καὶ τῆς πνευμα-
τικῆς εὐωδίας τῶν χαρισμάτων τοῦ ἁγίου Πνεύματος. Ἀγιά-
ζει δὲ καὶ διανέμει τὸ μύρον εἰς τὰς διαφόρους ἐκκλησίας ὁ
κορυφαῖος τῶν ἱεραρχῶν. Ὅπως δὲ τὸ βάπτισμα, οὕτω καὶ τὸ
χρίσμα ὁ Χριστιανὸς λαμβάνει ἅπαξ μόνον⁴⁾.

§. 102.

Κατὰ τί διαφέρουσιν ὡς πρὸς τὸ μυστήριον τοῦ χρίσματος αἱ ἑτεροδοξαὶ ἐκ-
κλησιαί;

Μέχρι τῆς ιγ'. ἑκατονταετηρίδος ἡ ῥωμαϊκὴ ἐκκλησία ἐτέ-
λει τὸ χρίσμα, ὅπως καὶ ἡ ἀνατολική, εὐθὺς μετὰ τὸ βάπτι-
σμα. Ἀλλ' ἔκτοτε ἐκαινοτόμησεν αὐθαιρέτως καὶ ἐναντίον
τῆς Γρεφῆς καὶ τῆς παραδόσεως, ἐπὶ τῆς ὁποίας στήριζεται
ἡ ἀνατολικὴ ἐκκλησία, καὶ ἀποχωρίσασα τὸ χρίσμα ἀπὸ τοῦ
βαπτίσματος τελεῖ μετὰ ταῦτα, ἀφ' οὗ τὸ παιδίον φθάσῃ εἰς
ἡλικίαν 7—12 ἐτῶν, διὰ τοῦ ἐπισκόπου μόνον, ὅχι καὶ τοῦ
ἐρέως, ὀνομάζουσα αὐτὸ ἰδιαίτερος β ε β α ί ω σ ι ν¹⁾. Τὴν και-
νοτομίαν ταύτην προσπαθεῖ νὰ δικαιολογήσῃ ἡ ῥωμαϊκὴ ἐκ-
κλησία μὲ τὸ ὅτι ὁ διὰ τοῦ χρίσματος λαμβάνων τὴν δωρεάν
τοῦ ἁγίου Πνεύματος πρέπει νὰ εἶνε ἐνηλιξ διὰ νὰ ἐννοῇ²⁾.

2) Πρὸξ. σ. 14—16.

3) Τῆς β'. οἰκουμένης, Συνόδ. καν. ζ', τῆς γ'. οἰκουμένης, καν. ηέ, τῆς ἐν Λαο-
δικ. καν. ζ', μή, Διονυσ. Ἀρεοπαγ. ἱεραρχ. ἐκκλησ. δ'. 4, Cyprian. Epist. ad
Ez. LXX, Κορίλλ. Ἱεροσολ. κατήχ. σ. 33

4) Ἐκτὸς διὰν ὁ βαπτισθεὶς ἱερόδοξος προσέλθῃ πάλιν εἰς τὴν ἐκκλησίαν
ἀποστὰς. c. Lit. Petil. II. 43, Ornat. Sch. Donator. VII. 4, Φωτίου ἐπιστ.
ἐπ. β'.

1) Τῆς ἐνωτέρω §. 101 σημ. 4. 2) Catech. Rom. II. 3, 48.

Ἄλλ' ἐὰν τοῦτο, ἀποκρινόμεθα, ἡγήθευσεν, ἔπρεπε κατὰ μέλλου-
να λόγον νὰ ἀναβάλῃ εἰς τὴν ἡλικίαν ταύτην καὶ τὸ βάπτισμα,
ὅπερ ὁμῶς δὲν πράττει.

Ἡ ἀγγλικανικὴ ἐκκλησία διετήρησεν, ἐναντίον τῶν λοιπῶν
δισμαρτυρομένων³⁾, τὸ μυστήριον τῆς βεβαίωσης, ἀλλὰ κατὰ
τὴν καινοτομίαν τῆς λατινικῆς ἐκκλησίας, ἥτοι ἀποχωρε-
σμένον ἀπὸ τοῦ βάπτισμα καὶ τελοῦμενον μόνον διὰ τοῦ ἐπι-
σκόπου· ἀντικατέστησε δὲ μόνον τὴν χρῆσιν διὰ τῆς ἐπιθέσεως
τῶν χειρῶν.

§. 103.

Τί εἶνε τὸ μυστήριον τῆς εὐχαριστίας, καὶ ποία τις ἡ ἔννοια αὐτοῦ ;

Ἡ εὐχαριστία εἶνε μυστήριον, διὰ τοῦ ὁποίου ὑπὸ τὸ αἶ-
σθητὸν εἶδος τοῦ ἄρτου καὶ οἴνου μεταλαμβάνομεν αὐτὸ το
σῶμα καὶ αἷμα τοῦ Χριστοῦ.

Τὸ μυστήριον τοῦτο ἐρύστησεν αὐτὸς ὁ Κύριος ἡμῶν Ἰη-
σοῦς Χριστὸς καθ' ἣν παρεδόθη νύκτα ἐν τῷ μυστικῷ δείπνῳ,
ὅτε συνέφαγε τὸ τελευταῖον μὲ τοὺς μαθητάς του. Ἰδοὺ δε-
πῶς διηγείται τὸν μυστικὸν τοῦτον δείπνον ἐκτὸς τῶν εὐαγ-
γελιστῶν¹⁾ ὁ ἀπόστολος Παῦλος²⁾: «Ὁ Κύριος Ἰησοῦς ἐν τῇ
νυκτὶ, ἣν παρεδίδοτο, ἔλαβεν ἄρτον καὶ εὐχαριστήσας ἔκλασεν
καὶ εἶπε, Λάβετε, φάγετε, τοῦτό μου ἐστὶ τὸ σῶμα τὸ ὑπὲρ ὑ-
μῶν κλῶμενον· τοῦτο ποιεῖτε εἰς τὴν ἐμὴν ἀνάμνησιν· ὡσαύ-
τως καὶ τὸ ποτήριον μετὰ τὸ δεῖπνῆσαι λέγων, Τοῦτο το κα-
τὴριον ἡ καινὴ Διαθήκη ἐστὶν ἐν τῷ ἐμῷ αἵματι· τοῦτο ποιεῖτε
ὡσάκις ἂν πίνετε, εἰς τὴν ἐμὴν ἀνάμνησιν. Ὅσάκις γὰρ ἂν ἐ-
σθίητε τὸν ἄρτον τοῦτον καὶ τὸ ποτήριον τοῦτο πίνετε, τὸ
θάνατον τοῦ Κυρίου καταγγέλλετε ἕως οὗ ἂν ἔλθῃ». Ὁμοίως

3) Ἀπὸ τῶν μέσων τῆς ἐξ' ἐκατονταετηρίδος καὶ ἐφεξῆς ἡ βεβαίωσις εἰσῆ-
λθῃ καὶ εἰς τὰς ἐκκλησιαστικὰς διαμαρτυρομένας. ὁμοίως ὡς μυστήριον, ἀλλὰ
ὡς ἀπλήρη καὶ ὁμοίως ἀναγκαῖα τελετὴ (Winer. Symbol., σελ. 161).

1) Ματθ. κς'. 26, Μάρκ. ιθ'. 22, Λουκ. κς'. 19. 2) 1. Κορ. ια' 26.

παρέλαβον εἰ ἀπόστολοι παρὰ τοῦ Κυρίου τὴν εὐχαριστίαν³⁾, παρὰ δὲ τῶν ἀποστόλων παρέλαβεν ἡ τοῦ Χριστοῦ ἐκκλησία καὶ διακρατεῖ μέχρι σήμερον.

Το μυστήριον τοῦτο εἶνε τὸ πάντων μέγιστον καὶ ἱερώτατον κατὰ τοῦ ἐξῆς μάλιστα δύο λόγου· α) ὡς μυστήριον ἡ εὐχαριστία περιέχει πάντων τῶν /οικῶν, καθ' ὅσον δι' αὐτοῦ μεταλαμβάνοντες αὐτὸ τὸ πανάχραντον σῶμα τοῦ Σωτῆρος Χριστοῦ, συνεννούμεθα καὶ συγκοινωνοῦμεν θμεσως με αὐτόν, ὅπως, μᾶς διεβεβαίωσεν αὐτὸς ἐκεῖνος λέγων, «Ὁ τρώγων μου τὴν σάρκα καὶ πίνων μου τὸ αἶμα ἐν ἐμοὶ μένει καὶ ἐγὼ ἐν αὐτῷ⁴⁾, καὶ καθ' ὅσον ἀνευ τῆς θείας ταύτης μετὰ τὸν Χριστὸν κοινωνίας εἶνε ἀδύνατον νὰ σωθῇ ὁ Χριστιανὸς καὶ νὰ τύχῃ τῆς αἰωνίου ζωῆς, ὅπως ῥητῶς μᾶς ἐδίδαξε περὶ τοῦτου αὐτοῦ πάλιν ὁ Κύριος ἡμῶν λέγων, «Ἐὰν μὴ φάγητε τὴν σάρκα τοῦ υἱοῦ τοῦ ἀνθρώπου καὶ πίνετε αὐτοῦ τὸ αἶμα, οὐκ ἔχετε ζωὴν ἐν ἑαυτοῖς⁵⁾. Ἀλλὰ τὸ μυστήριον τοῦτο β) εἶνε συγχρόνως καὶ θυσία ἐξιλαστήριος πρὸς τὸν Θεόν, τελευτούμενη εἰς ἀνάμνησιν τῆς πραγματικῶς ἐπὶ τοῦ σταυροῦ τελεσθείσης, μᾶλλον δὲ εἰσεῖν, αὐτὴ ἐκεῖνη ἡ ἐπὶ τοῦ σταυροῦ θυσία τοῦ σωτῆρος ἡμῶν, ἐπαναλαμβανομένη ἐν τῇ εὐχαριστίᾳ ἀναίμακτως διὰ τοῦ ἱερέως⁶⁾· διότι καὶ ὁ ἐπὶ τοῦ Σταυροῦ ὁρατὸς

3) Ὡς ἐν τῶν ἀνωτέρω πᾶσι τοῖς ἐνοεῖ, τὸ μυστήριον τοῦτο λέγεται εὐχαριστία μὲν διὰ τὴν ἐν τῇ μυστικῇ δειπνῇ εὐχαριστίᾳ τοῦ Σωτῆρος, μετὰ δὲ τὴν μετὰ δόσεις καὶ κοινωνίας, διότι ἐν τῇ μυστικῇ τούτῳ μεταβάλλει ὁ ἱερεὺς καὶ μεταλαμβάνουσιν ἡ κοινωνοῦσιν πάντες αὐτοῦ τοῦ σώματος καὶ αἵματος τοῦ Χριστοῦ. Ἐπὶ ἐξ καὶ «δειπνῶν Κυριακόν» (Χρυσόστ. εἰς ἀ Κορ. β' κβ.) «δειπνῶν μυστικόν» καὶ «θεῖον» (Ἰππολύτ. εἰς Περσικ. θ', 4), «τράπεζα θεοποτικῇ» (Θεοδώρ. εἰς ἀ Κορ. ιβ' 2) ὁμοίως καὶ «ἄρτος Κυριακός» — ἐπουράνιος — ἐπιούσιος, ποτήριον εὐλογίας, σῶμα Χριστοῦ — Κυριακόν — θετήριον, αἶμα Χριστοῦ — τίμιον, ποτήριον ζωῆς — σωτήριον, κτλ.

4) Ἰω. γ'. 56. 5) Ἰω. γ'. 53.

6) ἀ Κορ. ι. 18—21, Ἑβρ. γ'. 10. Ἰγν. πρὸς Φιλ. β'. 2, πρὸς Μαγνηθ. β'. πρὸς Ἄρσ. ἐ Εὐαγγ. β' μαθ. 14, 17. Χρυσόστ. εἰς Ἑβρ. β' κβ' 3, εἰς ἀ Κορ. β' κβ'. 4, Ἰερων. γ'. 4, γ'. 4, Tertull. de sc. XIV, Εὐσεβ. ἀποδ. Εὐαγγ. α'. 10, ε' 3, Ἰστορ. ἐκκλ. ι. 8, August. de Civit. Dei XXII. 8, XVI.

ἀπαξ διὰ παντός τυθείς καὶ ὁ ἐν τῇ ἀναιμάκτῳ θυσίᾳ ἀοράτως ἐκίστευε θυόμενος εἶνε εἰς καὶ ὁ αὐτός, ὁ Κύριος ἡμῶν (1. Χριστός⁷). Καὶ ἀμέσως μὲν ἐπενεργεῖ ἡ θεία χάρις ἡ ἐκ τῆς εὐχαριστίας ὡς μυστηρίου εἰς τοὺς μεταλαμβάνοντα, ἐμμέσως δὲ ἡ ἐκ τῆς ἀναιμάκτου θυσίας ὑπὲρ ὧν αὕτη τελεῖται μερικῶς, τῶν μετὰ πίστεως καὶ εὐλαθείας συμπαραστώτων ἐν τῇ θείᾳ καὶ ἱερᾷ μυσταγωγίᾳ, καὶ ἐν γένει ὑπὲρ πάντων τῶν εὐσεβῶν καὶ ὀρθοδόξων Χριστιανῶν, ζώντων τε καὶ τεθνεώτων⁸).

Ἐορῶ λοιπόν τὸ βόπτισμα εἶνε ἡ πνευματικὴ ἡμῶν ἀναγέννησις, ἡ εὐχαριστία εἶνε ἡ πνευματικὴ ἡμῶν τροφή καὶ συντήρησις. Ὅπως δὲ ὁ ἄνθρωπος δὲν ἀρκεῖ μόνον νὰ γεννηθῇ ἀλλὰ καὶ νὰ τραφῇ καὶ νὰ συντηρηθῇ φυσικῶς, οὕτω καὶ εἰς τὸν Χριστιανόν δὲν ἀρκεῖ ἡ διὰ τοῦ λουτροῦ τῆς παλιγγενεσίας ἀναγέννησις, ἀλλ' ἀνάγκη νὰ τρέφεται καὶ συντηρῇται πνευματικῶς διὰ τῆς εὐχαριστίας⁹), οὐ μόνον μεταλαμβάνων τῶν ἀχράντων μυστηρίων τετράκις τοῦλάχιστον κατ' ἔτος, ἀλλὰ καὶ παρευρισκόμενος πάντοτε μετὰ πίστεως καὶ εὐλοβείας εἰς τὴν θείαν καὶ ἱερὰν λειτουργίαν, ἐν ᾗ τελεῖται ἡ ἀναιμάκτος θυσία:

§. 104.

Ἐπὶ ποίους ὅρους ἐνεργεῖ σωτηριώδης ἡ ἐκ τοῦ μυστηρίου τῆς εὐχαριστίας θεία χάρις;

Ὅσον ἐξαιρετικὴ εἶνε ἡ ἐκ τοῦ μυστηρίου τῆς εὐχαριστίας σωτηριώδης χάρις, ὅταν ὁ πιστὸς μεταλσμβάνῃ αὐτοῦ ἀξίως,

22, XVIII. 20, Κλημ. Ἀλεξ. στρωμ. δ'. 25, Ἀθαν. κ. Ἀρειαν. 14, Θεοδώρ. δ. Μαλαχ. α. 11, εἰς ψαλμ. 90' 4.

7) αα brios, in Ps. XXVIII. 25, August. Civ. Dei X. 20, Χρυσόστ. εἰς 2. Τιμ. ὁμ. 3'. 4, Γρηγόρ. Νύκτ. εἰς ἀνάστ. Χριστ. λόγ. α, Θεοδώρ. ἡ. 5.

8) Anítoros, de Civ. rom. III, monogami. IX, Κυρίλλ. Ἱεροσ. κατήχ. β. 8. 10, Χρυσόστ. εἰς 2. Κορ. 12, 5.

9) Ἰω. 5'. 56, 58, Χρυσόστ. εἰς Ματθ. ὁμ. 3'. 9, Δομασκ. ἐκθ. ὁρθ. πίστ. δ'. 13, Ἰουστίν. ἀπολ. α. 65.

ἄλλο τόσον φοβερά καὶ φρικώδης εἶνε ἡ ψυχικὴ ζημία τοῦ Χριστιανοῦ, ὅταν κοινωνήσῃ αὐτοῦ ἀναξίως. Ὁ γὰρ ἐσθίων καὶ πίνων ἀναξίως, λέγει ὁ ἀπόστολος Παῦλος, κρίμα ἐκυτῷ ἐσθίει, καὶ πίνει, μὴ διακρίνων τὸ σῶμα τοῦ Κυρίου¹⁾. Πρὶν λοιπὸν προσέλθῃ τις εἰς τὴν ἁγίαν κοινωνίαν, πρέπει νὰ δοκιμάσῃ ἐκυτὸν κατὰ τὴν παραγγελίαν τοῦ ἀποστόλου: «δοκιμαζέτω δὲ ἄνθρωπος ἑαυτὸν καὶ οὕτως ἐκ τοῦ ἁγίου ἐσθιέτω καὶ ἐκ τοῦ ποτηρίου πινέτω»²⁾, οὐτέστι νὰ ἐξετάσῃ καὶ ἀνέκρινῃ ποῖα τις εἶνε ἡ πνευματικὴ του κατάστασις, ἐὰν ὡς ἐστὶ ἐν αὐτῷ ζῶσα καὶ ἀκριβεία ἡ πίστις, τὴν ὁποίαν ὡμολόγησε καὶ ἐπεσχέθῃ ἐν τῷ μυστηρίῳ τοῦ βαπτίσματος, ἢ ἐχαλωρόθῃ καὶ ἡφανίσθῃ, ἐὰν ἐπομένως ἐκαρποφόρησῃ τὴν καρποφορίαν τῶν καλῶν ἔργων, ἢ τουναντίον ἔμεινῃ νεκρά καὶ ἀκαρπία. Ἐὰν ἐκ τῆς ἐξετάσεως ταύτης ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ πίστις ἡμῶν ἐνεκρώθῃ ὀλοτελῶς καὶ ἐξηφανίσθῃ, ἡ δὲ καρδιά ἡμῶν ἐπωρώθῃ καὶ εἶνε ἀνεπίδεκτος μετανόιας, μακρὰν ἀπὸ τὰ μυστήρια. Ἐὰν ὅμως ἐκ τῆς ἐξετάσεως ταύτης ἀποδειχθῇ ὅτι ἡμάρτομεν μὲν, ὅτι παρέβημεν εἰς πολλὰ τὸς θεὸς ἐντολάς, καὶ ὅτι εἴμεθα ἀξιοὶ τῆς δικαίας ὀργῆς καὶ τιμωρίας τοῦ Θεοῦ, εἰλ' ὅτι τὰς ἁμαρτίας ἡμῶν ταύτας συναισθανόμεθα μετὰ λύπης εἰλικρινοῦς καὶ ἀδόλου, καὶ ὅτι ἔχομεν σφεαὶν καὶ ἀκλόνητον ἀπόρασιν νὰ μεταβάλλωμεν ἑαυτοὺς, νὰ ἐκκλίνωμεν ἀπὸ τὸν ὁδὸν τῆς ἁμαρτίας, καὶ νὰ ἐπιστρέψωμεν εἰς τὸν σωτήριον ὁδὸν τῆς πίστεως καὶ τῆς ἀγάπης, τότε ὀφείλομεν νὰ ἐξομολογηθῶμεν τὰς ἁμαρτίας ἡμῶν πάσας καὶ ὀλοκλήρους εἰς τὸν ἱερέα, νὰ ἐπικαλεσθῶμεν δι' αὐτοῦ τὴν θεῖαν ἐσπλαγχνίαν, ὃ δὲ ἱερεὺς σταθμιζὼν τὰ ἁμαρτήματα, καθὼς καὶ τὴν συντριβὴν καὶ μετάνοιαν ἡμῶν, ἢ θέλει μᾶς ἐπιτρέψῃ τὴν ἁγίαν κοινωνίαν, ἢ θέλει παρατείνει τὸν χρόνον τῆς μετανόιας καὶ δοκιμασίας, μέχρις οὗ ἐπὶ τέλος συμπληρωθέντος τοῦ ἔργου τῆς ἡμετέρας μετανόιας καὶ κριθέντες ἀξιοὶ, προσέλθω-

1) 2 Κορ. ιβ' 29.

2) 1 Κορ. ιβ' 29.

μεν καὶ κοινωνήσωμεν τῶν μυστηρίων μετὰ φόβου Θεοῦ, ἀφ' οὗ πρότερον εἶπωμεν ἐκ βάθους καρδίας τὸ «Πιστεύω, Κύριε, καὶ ὁμολογῶ, ὅτι οὐ εἰ ἀληθῶς ὁ Χριστός, ὁ Υἱὸς τοῦ Θεοῦ, ὁ ἐλθὼν εἰς τὸν κόσμον ἁμαρτωλοὺς σῶσαι, ὃν πρῶτός εἰμι ἐγώ». Τότε οὐμόνον αἱ ἁμαρτίαι ἡμῶν συγχωροῦνται διὰ τοῦ οἵματος τοῦ Χριστοῦ, ἀλλὰ καὶ συνενωθέντες μετ' αὐτοῦ διὰ τοῦ ἱεροῦ μυστηρίου, ἐνισχυόμεθα μὲν εἰς τὰ ἔργα τῆς πίστεως, τῆς ἐλπίδος καὶ τῆς ἀγάπης, θωρακιζόμεθα δὲ κατὰ τῶν πειρασμῶν τοῦ ἀρχεκάκου πατρὸς τῆς ἁμαρτίας καὶ τοῦ θανάτου.

§. 105.

Ὑπὸ τίνος καὶ πῶς τελεῖται ἡ εὐχαριστία ;

Τὸ μυστήριον τῆς εὐχαριστίας οὐδεὶς ἄλλος ἐκτὸς τοῦ ἱερέως ἢ τοῦ ἐπισκόπου¹⁾ δύναται νὰ ἐπιτελέσῃ, καὶ οὐδαμοῦ ἀλλαχοῦ ἢ ἐπὶ τῆς ἁγίας τραπέζης τῆς ἐκκλησίας, ἥτις διὰ τοῦτο λέγεται καὶ «βωμός» καὶ «θυσιαστήριον», διότι ἡ εὐχαριστία εἶνε μυστήριον ἅμα καὶ θυσία, ἡ δὲ τέλεσις τῆς ἀναιμάκτου ταύτης θυσίας εἶνε τὸ κέντρον καὶ ὁ σκοπὸς τῆς ἱερουργίας ἢ λειτουργίας, ἥτις εἶνε καὶ ἡ κυριωτάτη τελετὴ τῆς ἐκκλησίας. Μόνον δὲ ἐν ἀνάγκῃ δύναται νὰ τελεσθῇ ἡ θεία εὐχαριστία καὶ ἐπὶ τοῦ ἱεροῦ «ἀντιμνησίου», ἐὰν τοῦτο εἶνε καθιερωμένον δι' ἐγκαινίων. Πρὸς τέλεσιν δὲ τοῦ μυστηρίου τούτου ὁ ἱερεὺς μεταχειρίζεται οἶνον²⁾ ἐρυθρόν καὶ καθαρόν, ὃν ἐγχέει μετὰ ὕδατος³⁾ εἰς τὸ ἅγιον ποτήριον, καὶ ἄρον

4) Διον. Ἀρεοπ. ἐκκλ. ἱερ. γ'. 3, Ἰουστίν. ἀπολ. ἀ. 65, Βασιλ. ἐπιστ. πρὸς Χρυσόστ. Ἱερωσύν. γ'. 4, 5, Ἐπιφάν. αἰρ. αθ', τῆς ἐν Νικαίᾳ ἀ. Συνόδ. καν. αἱ, τῆς ἐν Ἀγκύρᾳ καν. ἀ, τῆς ἐν Νεοκαισ. καν. θ', τῆς ἐν Γόγγρ. καν. δ', τῆς ἐν Λαοδικ. καν. νή.

2) Ὅχι ὕδωρ, ὅπως ἔπραττον οἱ Ἑβραῖοι καὶ Ἐγκρατίζται (Βιβλ. Περὶ V. 4, Κλημ. παιδηγ. β'. 2).

3) Ἀποστ. διατ. ἡ, 12, Ἰουστίν. ἀπολ. ἀ. 66, Βιβλ. Περὶ V. 2, Γρηγ. Νύκτ. λόγ. κατηχ. 25', τῆς ἐν Κερύθρῳ συνόδ. καν. μς', τῆς ἐν Τροάδι καν. 18,

ἐκ σίτου⁴⁾ ἐνζύμον, ἀφ' οὗ δὲ ἐν τῇ λειτουργίᾳ ἐπικαλεσθεῖς τὸ ἅγιον Πνεῦμα, εὐλογήσῃ τὰ ἅγια δῶρα, μεταβάλλεται ὁ μὲν ἄρτος εἰς τὸ ἄχραντον σῶμα, ὁ δὲ οἶνος μετὰ τοῦ ὕδατος εἰς τὸ τίμιον αἷμα τοῦ Κυρίου ἡμῶν Ἰησοῦ Χριστοῦ. Εἶνε δὲ ἡ μεταβολὴ αὐτῆ πραγματικὴ μετουσιώσις, εἰ καὶ οἱ μεταλαμβάνοντες αἰσθανόμεθα διὰ τῆς γεύσεως ἄρτον καὶ οἶνον, κατὰ θεϊαν οἰκονομίαν, ἐπειδὴ ἤθελεν εἶνε δύσκολος εἰς ἡμᾶς ἡ κατ' αἰσθησιν γεῦσις σαρκὸς καὶ αἵματος⁵⁾).

§ 106.

Κατὰ τί διαφέρουσιν αἱ ἑτερόδοξοι ἐκκλησίαι ὡς πρὸς τὸ μυστήριον τῆς εὐχαριστίας :

Καὶ τὸ μέγιστον τοῦτο καὶ ἀγιώτατον τῶν μυστηρίων ἡ λατινικὴ ἐκκλησίᾳ δὲν ἀφῆκεν ἀκαινοτόμητον, διότι ἀπὸ τοῦ 1. αἰῶνος εἰσῆγαγεν ἀντὶ τοῦ ἐνζύμου ἄρτου τὸν ἄζυμον, ὅστις βαθμυδὸν καὶ αὐτὸς μετεβλήθη καὶ μετεσχηματίσθη εἰς ὕλην ἀξίαν νὰ ὀνομάζεται πᾶν ἄλλο ἢ ἄρτος. Ὅτι ἡ χρῆσις τοῦ ἄζυμου εἶνε καινοτομία μεταγενεστέρα, τοῦτο ὁμολογοῦσι πολλοὶ τινες καὶ ἐξ αὐτῶν τῶν ἐστικῶν θεολόγων¹⁾· ὅτι δὲ εἶνε ἐναντία τῆς Γραφῆς, τοῦτο μαρτυρεῖ αὐτῇ οὕτῃ ἡ Γραφή, ἥτις προκειμένου περὶ τῆς εὐχαριστίας, οὕτως ἀναφέρει ἄζυμα, ἀλλὰ ἄρτους²⁾. Δὲν ἦτο δὲ δυνατόν καὶ νὰ ἀναφέρῃ ἡ νὰ ἐννοῇ ἄζυμα, διότι ὁ Κύριος ἡμῶν ἐτέλεσε μετὰ τῶν μαθητῶν αὐτοῦ τὴν εὐχαριστίαν, ὡς γνωστόν, πρὸ τοῦ ἑβραϊκοῦ πά-

4) Εἰρη. Haer. V. 3, καὶ ἐν Καρθαγ. Συνόδ. καν. 15', Cyprian. Epist. LXIII, Χρυσόστ. εἰς Ματθ. ὁμ. πδ'. 2.

5) Ἰω. ε'. 27—68, Ματθ. κς'. 26, Μάρκ. ιδ'. 22, Λουκ. κδ'. 19, Κορ. βλ. 12', Ambros. de Fid. IV. 10, Δαμασκ. ἐκθ. τῶν βιβλ. πίστε. δ', 13, Θεοφύλακτ. εἰς Ἰω. ε', εἰς Μάρκ. ιδ', Εὐθ. Ζυγὰδ. εἰς Ματθ. κς'. 28.

1) nemond. Disquisit. de azymo. 1651, Colanderius Monum. eccles. Graecae II. 108, 138, Bingham. origia. Eccles. XV. 2, Klein. Hist. eccles. I. p. 430, κλπ.

2) Ματθ. κς'. 26, Μάρκ. ιδ'. 22, κδ'. 30, 33, Ἰω. ε'. 35, 41, 48, 51, 53, κἀ. 13, κλπ.

σχα³⁾, ὅτε καὶ μόνον ἤρχιζεν ἡ χρῆσις τῶν ἀζύμων⁴⁾. Δι' ἄρτου δέ, καὶ ὅχι δι' ἀζύμου, ἐτέλουν τὴν εὐχαριστίαν καὶ οἱ ἀπόστολοι⁵⁾, καὶ ἐξ αὐτῶν παρέλαβε τὴν χρῆσιν τοῦ ἄρτου καὶ ἡ καθόλου ὀρθόδοξος ἐκκλησία καὶ διατήρησε μέχρι σήμερο⁶⁾. Ἄλλη καινοτομία τῆς λατινικῆς ἐκκλησίας περὶ τὸ μυστήριον τοῦτο εἶνε, ὅτι ἐν τῇ ἱερουργίᾳ ὁ ἱερεὺς δὲν ἐπικαλεῖται τὸν Θεὸν νὰ ἀγιάσῃ τὸν ἄρτον καὶ τὸν οἶνον, οὐδ' εὐλογεῖ αὐτά, ὅπως παρέλαβε καὶ πράττει ἀνέκαθεν ἡ καθόλου ἐκκλησία, ἀλλ' ἀναφέρει μόνον ἀπλῶς καὶ οὕτως εἰπεῖν ἱστορικῶς τὰ ἐν τοῖς εὐαγγελίοις δεσποτικὰ ῥήματα: «Τοῦτό ἐστι τὸ σῶμά μου», καὶ «τοῦτό ἐστι τὸ αἷμά μου», καὶ πιστεύει ὅτι δι' αὐτῶν καὶ δεῖκνυόμενα μόνον τὰ ἁγία δῶρα ἡγιασθησαν καὶ ἐμετουσιώθησαν. Τὸ μέγεθος τῆς πλάνης ταύτης ἐννοεῖ τις ἅμα ὡς ἀναλογισθῇ, ὅτι ὁ τρόπος οὗτος τοῦ ἁγιασμοῦ οὐ μόνον εἰς τὴν ἀρχαίαν καὶ διηνεκή παράδοσιν καὶ πράξιν τῆς καθόλου ἐκκλησίας⁷⁾ ἀντίκειται, ὡς προείπαμεν, ἀλλὰ καὶ εἰς αὐτὸν τὸν οὐσιώδη καὶ κύριον ὄρον τῆς τελέσεως παντός ἐν γένει μυστηρίου, ὅτι ὁ ἱερεὺς ὀφείλει νὰ εὐχηθῇ ἐπικαλούμενος ἀνωθεν τὴν θείαν χάριν καὶ εὐλογῶν τὴν ἐν τῷ μυστηρίῳ ὄλην. Ἄλλ' ἐκτός τούτων ἡ λατινικὴ ἐκκλησία ἐκαινοτόμησε καὶ κατ' ἄλλω, οὐ μόνον ἀποκωλύουσα τὰ μικρὰ παιδία ἀπὸ τῆς ἁγίας κοινο-

3) Ἰω. ιγ'. 4, 14, 28, κλπ. Πρβλ. καὶ αὐτοὺς τοὺς παπιστὰς Maldonat. in Matth. XXIV. 2, Petav. de doctrin. tempor. XI. 15, Natalis Alex. Diss. XI. in Saec. XI. et XII.

4) Ἐξοδ. ιδ'. 8, Λευϊτ. κγ'. 5—5.

5) Πράξ. β'. 22, 42—46, κ'. 7, ἀ. Κορ. ι. 16, κ'. 21.

6) Ἰουστίν. ἀπολ. ἀ. 66, Εἰρημ. Πατρ. IV. 18, Κυριλλ. μυσταγ. δ'. 1—6, Ambros. de Sacr. IV. 4.

7) Ἰδ. τὴν λειτουργίαν αὐτοῦ τοῦ Ἰακώβου, καὶ ἐν γένει ἀπάσας τὰς λειτουργίας ὅχι μόνον τῆς ὀρθοδόξου ἐκκλησίας, ἀλλὰ καὶ τῶν ἐν ἀρχαιότητι χρόνοις ἀποσχισθεισῶν ἀπ' αὐτῆς κατὰ τὴν ἀνατολήν. Πρβλ. καὶ Εἰρημ. Πατρ. IV. 24, Ἰριγίν. κ. Κέλσου ἐ, Κυριλλ. μυσταγ. ἀ. 7, γ'. 3, ἐ. 7, Βασίλ. ἀγ. πνεύμ. πρὸς Ἀμφιλ. κ'. August. de Trinit. III. 4, Epist. CXLIX. ad Paulin. II. 16, Γρηγόρ. Νύκτα. κατὰ τὴν λόγος λζ'. κ' π.

νίας⁸⁾, ἣν ἐπετρέπετο ἀνέκαθεν ἐν τῇ καθόλου ἐκκλησίᾳ⁹⁾, καὶ ἐν αὐτῇ τῇ λατινικῇ μέχρι τοῦ 16. αἰῶνος¹⁰⁾, ἀλλὰ, ὅπερ ἐστὶ σπουδαιότερον, ἀπὸ τοῦ 16. τούτου αἰῶνος καὶ ἐφεξῆς ἀπεχώλυσεν διὰ παντός τοὺς λαϊκοὺς ἀπὸ τῆς κοινωνίας τοῦ τιμίου αἵματος τοῦ Χριστοῦ, ἐναντίον τῆς ῥητῆς ἐντολῆς τοῦ Κυρίου ἡμῶν λέγοντος, «*Πίετε ἐξ αὐτοῦ πάντες*»¹¹⁾, προβάλλουσα λόγους γελοίους καὶ ἀναξίους πάσης προσοχῆς¹²⁾. Τὴν καινοτομίαν ταύτην δὲν ἀρνοῦνται οὐδ' αὐτοὶ οἱ παπισταί¹³⁾, ἡ δὲ δικαιολόγησις αὐτῆς, ὅτι καὶ ἐν τῇ ἀρχαίᾳ ἐκκλησίᾳ οἱ πιστοὶ ἔφερον οἷα καὶ ἡ πρὸς ἀποδημίας ἅγιον ἄρτον μόνον, ἡ ὅτι μετὰ ἀμβλῶν τοῦτου οἱ ἀσθενεῖς, εἶνε ἐσφαλμένῃ, διότι ὁ ἅγιος αὗτος ἄρτος ἦτο διάβροχος καὶ ἐκ τοῦ τιμίου αἵματος¹⁴⁾, ὅπως τοῦτο γίνεται, ὡς γνωστόν, καὶ σήμερον ἐστὶ ἐν τῇ ὀρθοδόξῳ ἐκκλησίᾳ¹⁵⁾.

8) Concil. Trident. Sess. XXI. can. IV. 9) Ἀποστολ. διατ. ἡ. 13. Διογ. Ἁρσ. ἐκκλ. ἱερ. 3. 14, Cyrilian. testim. III. 23, August. de peccat. merit. I. 20, Εὐαγγ. ἐκκλ. ἱερ. 6. 36.

10) Κατὰ τὴν μαρτυρίαν αὐτοῦ τοῦ καρδινάλιου Bonae. Rer. liturg. II. 49, §. 2. 11) Ματθ. 26. 27. Μάρκ. 16. 23.

12) Ὅσον ὅτι εἶνε κίνδυνος νὰ ἐκχυθῇ τὸ τίμιον αἷμα (ὡς νὰ μὴ ὑπῆρχεν ὁ αὗτος κίνδυνος καὶ διὰ τὸ ἄρξαντον σῶμα), ὅτι πολλὰ τοῦ εἶνε θυσιάζομαι ὁ οἶκος, ὅτι εἰς τινὰς ἀπορέσκει ἡ γαστήρ τοῦ οἴνου, κττ.

13) Bonae Rer. liturg. II. c. 8. §. 4, c. 19, §. 3.

14) Baronius. Annales eccl. tom. V. ad. a. m. CCCCLV.

15) Ἐν τῇ οὕτῃ ὁ μεταδιδόμενος εἰς τοὺς ἀσθενεῖς προηγιασμένος αὗτος ἄρτος εἶνε διάβροχος ἐκ τοῦ τιμίου αἵματος, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ ἁγίου ποτηρίου ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ μετέδοσις τοῦ τιμίου αἵματος εἶνε ἅνευ τοῦ ἄρξάντου σώματος.

Συντομίαι χάρι· παραβέβημεν ἐν τῇ κειμένῃ τὸ ὅτι ἡ ῥωμαϊκὴ ἐκκλησία ἐπιτρέπει ἐντὸς μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐκκλησίας πολλὰς ἱεροουργίας, οὐ μόνον ἀθυμαρὸν ἀπὸ πρῶτης μέχρι μεσημβρίας, καὶ συγχρόνως ἐν μιᾷ καὶ τῇ αὐτῇ ἐκκλησίᾳ, ἐπ' ᾧ καὶ ἐν ταῖς λατινικαῖς ἐκκλησίαις ὑπάρχουσι σχεδὸν πάντοτε πολλὰ θυσιαστήρια, ἀλλὰ καὶ κατ' ἐπανόληψιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ θυσιαστηρίου (Schmiedt Liturg. I. σελ. 263 ἐξ) «*Ἡ ἀνατολικὴ ἐκκλησία δὲν ἐπιτρέπει τὰς τοιαύτας, ὅπως ἀσχυρίζονται πρὸς τὴν φρικτὴν ἐξέστητα τῆς θείας μυσταγωγίας ἀσχυρίας*» ὅθεν καὶ ἐν ἐκαστῇ ἐκκλησίᾳ ὑπάρχει συνήθως ἐν καὶ μόνον θυσιαστήριον. «*Ἡ Ἱωαννιτικὴ ἐκκλησία ἀπαγορεύει πρὸς τοὺς αὐτοὺς καὶ τὴν ἐν τῇ ἱεροουργίᾳ χρῆσιν ἄλλης γλώσσης παρὰ τὴν λατινικὴν*» Concil. Trident. Sess. XXII. c. 8). «*Ἡ ἀνατολικὴ ἐκκλησία ἀπ' ἐναντίας, εἰ καὶ ἡ ἑλληνικὴ γλώσσα εἶχε καὶ ἔχει*

ἱερωσύνην, ἣτις ἀληθῶς ἀποβαίνει περιττὴ ὁλῶς μετὰ τοιαύ-
την φρικτὴ καίνοτομίαν, ἀνατρέψασαν αὐτὰ τὰ θεμέλια τῆς
χριστιανικῆς λατρείας.

§. 107.

Ποῖον εἶνε τὸ τέταρτον μυστήριον :

Τὸ τέταρτον μυστήριον εἶνε ἡ μετάνοια ἢ ἐξομολόγησις,
διὰ τῆς ὁποίας ὁ μετανοήσας ἐκ θάθους ψυχῆς καὶ καρδίας
καὶ ἐξομολογηθεὶς ἐνώπιον τοῦ ἱερέως¹⁾ τὰς ἁμαρτίας του, ἐ-
πικαλεῖται τὴν θείαν εὐσπλαγχνίαν καὶ λαμβάνει διὰ τοῦ ἱε-
ρέως παρὰ τοῦ Θεοῦ τὴν ἄφεσιν τῶν ἁμαρτιῶν, ἐπανερχόμε-
νος οὕτως εἰς τὴν προτέραν ἀμέσως μετὰ τὸ βάπτισμα κατὰ-
στασίν του²⁾. Αἰδοῦσι δὲ τὴν ἄφεσιν ταύτην οἱ ἱερεῖς ἐντολῇ
καὶ ἀδείᾳ τῶν προϊσταμένων ἐπισκόπων, διότι μόνον οὗτοι,
ὡς διάδοχοι τῶν ἀποστόλων, ἔλαβον τὴν ἐξουσίαν τοῦ συγ-
χωρεῖν ἁμαρτίας ἐν τῷ ὀνόματι τοῦ Κυρίου.

Ἡ ἐξομολόγησις καὶ ἐν τῇ παλαιᾷ Διαθήκῃ ἦτο συνήθης³⁾,
καὶ ἐν τῇ καινῇ διατάσσεται παρὰ τοῦ ἀποστόλου λέγοντος⁴⁾,
«Ἐξομολογεῖσθε ἀλλήλοις τὰ παραπτώματα καὶ εὐχεσθε ὑπὲρ
ἀλλήλων, ὅπως ἰαθῇτε». «Ὅθεν καὶ οἱ ἀπόστολοι ἐτέλουν τὸ
μυστήριον τοῦτο⁵⁾ καθ' ἣν εἶχον λάβῃ ἀδειάν παρὰ τοῦ Ἰ. Χρι-
στοῦ νὰ συγχωρῶσιν ἁμαρτίας⁶⁾». Ἐκ τούτου δ' ἐπεταὶ ὅτι
μόνον ὁ ἱερεὺς, καὶ ἱερεὺς ὀρθόδοξος, ἔχων τὴν περὶ τούτου
κανονικὴν ἀδειάν τοῦ ἐπισκόπου, ἔχει τὴν ἐξουσίαν νὰ συγ-
χωρῇ ἁμαρτίας.

1) Ἐν τῇ ἀρχαίᾳ ἐκκλησίᾳ ὑπῆρχον δύο τρόποι ἐξομολογήσεως, ὁ δημοσιᾶς
ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ, εἰ καὶ ἀκριβὲς εἶπεν ὁ τρόπος· οὗτος οὐδέποτε ὑπῆρξεν ὑπο-
χρεωτικός, καὶ ὁ ἕτερος πρὸς τὸν πνευματικὸν πατέρα. Ἡ δ' ἐκκλησία κατὰ συγ-
κατάστασιν προέβλεψε τὸν πόρον. Ἰδίως ἀπὸ τῆς δ' αἰῶνος καὶ ἐκείνου ἀπὸ τοῦ
ἀποστόλου λέγοντος ὅτι ὁ ἱερεὺς ἔχει τὴν ἐξουσίαν νὰ συγχωρῇ ἁμαρτίας.

§. 108.

Ποία εἶνε ἡ σημασία τοῦ μυστηρίου τούτου, καὶ πῶς πρέπει νὰ προσερχο-
μεθα εἰς αὐτό;

Τὸ μυστήριον τοῦτο εἶνε ψυχωφελέστατον καὶ σωτηριωδι-
στατον, συστηθὲν ὑπ' αὐτοῦ τοῦ Κυρίου ἡμῶν¹⁾, καὶ ἐξακολου-
θεῖ τελευτῶμενον ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ ἀπὸ τῶν ἀποστολικῶν χρόνων
μέχρι σήμερον²⁾. ἀλλ' ὁ μετέχων αὐτοῦ ὀφείλει νὰ μετανοή-
σῃ εἰλικρινῶς καὶ μετὰ συντριβῆς καρδίας³⁾, νὰ ἀποφασίσῃ ὁ-
ρισταθερῶς καὶ ἀμεταθέτως νὰ μὴ ἐπανεέλθῃ ἐπὶ τὸ αὐτό, ὡς
κύων ἐπὶ τὸ ἴδιον ἐξέραμα⁴⁾, καὶ τότε ἐπικαλούμενος μετ'
πίστεως τὸ Θεῖον ἔλεος⁵⁾, λαμβάνει πραγματικὴν καὶ παρ'
τοῦ Θεοῦ τὴν συγχώρησιν. Δὲν πρέπει δὲ νὰ ἐντραπῶμεν τὸ
ιερέα, ἀφ' οὗ ἀμαρτάνοντες δὲν ἐφοβήθημεν τὸν Θεόν, ὅστις
βλέπει καὶ γνωρίζει ὅχι μόνον τὰς φανεράς πράξεις, ἀλλὰ καὶ
αὐτοὺς τοὺς κρυφίους διαλογισμοὺς ἡμῶν, ὡς «ἐτάζων καρ-
δίας καὶ νεφρούς», ἀλλ' ὀφείλομεν νὰ ἐκθέσωμεν εἰς τὸν πνευ-
ματικὸν πατέρα ὁλόκληρον καὶ ἀπροκάλυπτον τὴν ἀλήθειαν
διὰ νὰ γνωρίσῃ οὗτος ὡς πνευματικὸς ἰατρὸς τὸν χαρακτήρα
καὶ τὸ εἶδος τοῦ ψυχικοῦ νοσήματος, καὶ μεταχειρισθῇ τὰ κα-
τάλληλα θεραπευτικὰ φάρμακα⁶⁾, δίδων εἰς ἡμᾶς τὰς ἀναγ-
καίαις συμβουλας καὶ ὁδηγίας, ἧς ἐπιβάλλων τοὺς ἀναγκαίους
πνευματικοὺς «λανόνας» ἢ «ἐπιτίμια»⁷⁾. Ὀφείλομεν δὲ νὰ ἐ-

1) Ἰω. κ' 24—25, Ματθ. γ' 15, ε' 47, 48.

2) Ἀποστ. διατ. β' 41—42, Ἀποστ. καν. γ', Cyrilian. de laps. II 29, Χρυσόστ. ἱερμ. γ' 4, 5 Tertull. de penit. 12, Lactant. divin. inst. IV. 30, August. Civ. Dei. XX. 9, Κυρίλλ. Ἀλεξ. εἰς Ἰω. κ' 23.

3) Λουκ. ιβ' 48, 49, ε' 13, β'. Κορ. ζ' 10, Λουκ. ζ' 48, 4. Πέτρ. β'. Cyrilian. de laps. XXV, Βασίλ. εἰς Ἡσα. ιθ, Χρυσός. εἰς β'. Τιμ. ὁρίλ. ζ'.

4) Ματθ. γ' 7, 8, Πράξ. γ' 19. Ἀποκάλ. β' 3, Βασίλ. εἰς Ἡσα. 4. 4. Ambros. penit. II 3.

5) Πράξ. ι. 43, β'. 12, Ἐδρ. ζ'. 25.

6) Tertull. penit. X, Cyrilian. de laps. XXVIII, XXXI.

7) Ὁνομαζομένης νηστείας, πρόσευχῆς, γογγυσίας, ἐλεημοσύνας, ἀποχ-
απὸ τῆς ἁγίας κοινωνίας ἐπὶ μακρότερον ἢ βραχύτερον χρόνον, κτ. (Ἀποστ.

ογώμεθα, ὅχι μόνον ὁσάκις ἁμαρτήσαντες μετανοήσωμεν
χωμεν ἀνάγκην νὰ ἐπικαλεσθῶμεν τὴν εὐσπλαγχνίαν τοῦ
, διὰ νὰ μᾶς ἐλεήσῃ, ἀλλὰ καὶ ὁσάκις μέλλομεν νὰ κοι-
σωμεν τῶν ἀχράντων μυστηρίων, διὰ νὰ μάθωμεν παρὰ
πνευματικοῦ πατρὸς, ἐὰν ἡ πνευματικὴ ἡμῶν κατάστασις
ἐπιτρέπει νὰ προσέλθωμεν εἰς αὐτὰ ἢ ὄχι.

§. 109.

τί διαφέρουσιν αἱ ἑτερόδοξοι ἐκκλησίαι ὡς πρός τὸ μυστήριον τῆς με-
τάνοιας ἢ ἐξομολογήσεως;
ῥωμαϊκὴ ἐκκλησία ἐξέκλινε τῆς εὐθείας ὡς πρός τὴν ἐν-
τοῦ μυστηρίου τούτου, καὶ ἔτι μᾶλλον ἐν τῇ ἐφ' ἑαυτὴν
ἐξ αὐτῆς συνεπειῶν. Ἡ ἐκκλησία αὕτη ὑποδιαίρουσα εἰς
τὸ ἐν καὶ μόνον τοῦτο μυστήριον τῆς μετανοίας ἢ ἐξο-
μολογήσεως¹), καὶ παρεξηγοῦσα τοὺς πνευματικούς «κανό-
νῃ ἐπιτίμια», ὅσα ἡ καθόλου ἐκκλησία συμφώνως πρὸς
γραφὴν καὶ τὴν παράδοσιν ἐπέβαλεν ἀνέκαθεν εἰς τοὺς με-
οῦντας πρὸς σωφρονισμόν καὶ ψυχικὴν ὠφέλειαν αὐτῶν,
ἀλλεὶ αὐτὰ ὡς αὐτὸ τοῦτο ποινὰς καὶ τιμωρίας²)
εἰς ἁνοποίησιν τῆς ἐκ τῶν πράξεων τοῦ ἁμαρτήσαντος
βληθείσης θείας δικαιοσύνης³). Ἡ βλάσφημος αὕτη

δ'. 16, 18, 41, Εἰρην. ἀρτέμ. δ. 43, III. 4, Tertull. poenit. VI. 7, 40,
an. Ep'ist. VII, LII), πρὸς σωφρονισμόν καὶ ψυχικὴν ὠφέλειαν τοῦ με-
ντος (δ. Κερ. δ. 15, δ'. Κορ. δ'. 7, Χρυσόστ. εἰς δ'. Κορ. ὁμ. δ', τῆς
κοσμ. Σονόδ. καν. ρδ', τῆς δ. οἰκομ. καν. εδ', τῆς ἐν Ἀγκύρᾳ καν. ε.
Καρλαγένης καν. νδ', τοῦ μ. Βασιλεῖος καν. γ'), ὅχι ὅμως καὶ τιμω-
ν ποινὰς, ὅπως διδάσκει ἡ ῥωμαϊκὴ ἐκκλησία (Sess. Trident. Sess.
c. 8), πρὸς ἁνοποίησιν (!) τῆς προσβληθείσης θείας δικαιοσύνης. Πρβλ.
9.

Εἰς ἀντιρρῖν, ἐξομολόγησιν καὶ ἁνοποίησιν (contritionem, confessio-
et satisfactionem): Concil. Trident. Sess. XIV. poenit. c. 3, αὐτόθι
4, Catech. Roman. II. 5, 21

Εἰ καὶ τηρεῖ κατὰ τὸν μόνον τὸ ὄνομα μετάνοια (poenitentia), ὅ-
ς εἶδος, προσέλαβε τὴν ἐννοίαν τῆς τιμωρίας.

Consil. Trident. Sess. XIV. c. 8.

διδασκαλία ἀνατρέπει οὐτὰς τὰς θάσεις τοῦ χριστιανισμοῦ κατὰ τὴν ὁπεῖον οὐδεμία ἀνθρωπίνη πράξις εἶνε δυνατόν ἱκανοποιήσῃ τὴν θεῖαν δικαιοσύνην, τὴν ὁποίαν ἱκανοποιᾷ καὶ ὑπερικανοποιήσῃ ἁπαξ καὶ διὰ παντός ὑπὲρ σύμπα- τοῦ κόσμου εἰς καὶ μένος, ὁ Κύριος ἡμῶν Ἰησοῦς Χριστὸς ἐπὶ τοῦ σταυροῦ⁴⁾.

Ἐκ τοῦ ἐναντίου ἡ αὐτὴ ἐκκλησία ἐκδίδει διὰ τοῦ ἐπισκο- που Γρόμερς ἀφ' ἑσέως συγχωρητήριους τῶν ἐπιτιμίων καὶ νόμων, ἔσους, καθ' ὃν προείπαμεν, ἐπέβαλεν, ἀρυσμένη τὴν ξουσίαν ταύτην ἐνθεν μὲν ἐκ τοῦ ἀδεσμεῖν καὶ λύειν, θεόθεν δοθέντος αὐτῇ, ἐνθεν δὲ ἐκ τοῦ θησαυροῦ τῶν ὑπε- ρικάνων ἀξιωματικῶν⁵⁾ τοῦ Ἰησοῦ Χριστοῦ καὶ τῶν γίων, ὃν αὐτὴ διακατέχει. Ἐὰν δὲ ὁ μετανοῶν ἀποθάνῃ ὑπὸ βάρος τῶν ἐπιτιμίων τούτων, αἱ συγχωρητήριοι αὗται ἀφ' ἐκ- τοῦ πάπα ἀπελευθεροῦσιν⁶⁾ αὐτὸν καὶ ἀπὸ τῶν ἐν τῷ καθ' ἡμῶν πυρὶ κολάσεων⁷⁾. Πάντα ταῦτα εἶνε ἐσφαλμένα καὶ τευχιστιανικά. Ἐν πρώτοις, παρατηροῦμεν, ἡ ἀξιωμαθία τῶν ἁγίων ἢ ἐκ τῶν ἔργων αὐτῶν, ὅσον μεγάλη καὶ ἂν εἶνε, ἐ- ὅλως ξένη πρὸς τὴν ἐκ τῆς ἐξουσιαστικῆς θεοῦ τοῦ Ἰ. Χ. στοῦ παγκόσμιον καὶ ὑπερίκανον ἀξιωμαθίαν, τὴν μόνην γῆν, ἐξ ἧς πᾶσαι ἄραις καὶ ἄρεσις ἀμαρτιῶν. Ἀλλ' ἡ ἐκ ἀξιωμαθίας ταύτης δυνάμει τοῦ «δεσμεῖν» καὶ «λύειν» ἐξου- σία τῆς ἐκκλησίας ἐνεργεῖ διὰ τοῦ μυστηρίου τῆς μετανο- αῖας καὶ ὑπὸ τοῦ ἐν αὐτῷ τηρητέου ὁροῦ, ὡς τοὺς μόνους σω- ριῶδεις, καθ' ὃν εἶδαμεν, ἦτοι τὴν ἐν συντριβῇ καρδίας μετὰ ζώσης πίστεως μετάνοιαν καὶ ἰξομολόγησιν⁸⁾. Ἀλ- λ' ἡμῶν ταῦτα πάντα εἶνε πράγματα ἄγνωστα μὲν εἰς τὸν

4) 12. § 73. Ἠρῶλ. καὶ τὴν πρὸς τοὺς διαμαρτυρομένους ἀπάντησιν πατριάρχου Ἱερουσολ. ἐν Act. theol. Wirttemberg. p. 87, 89. sq.

5) Theasaurus meritum est thes. superfluentium satisfactionum 12. Bellarmin. de Indulgent. I. 1, 2, κτλ.

6) Et collationem per modum satisfagii (Bellarmin. de Indulgent. I. 1, 2, κτλ.)

7) Concil. Trident. Sess. XXV. de Indulg., Bellarmin. ibid. ἀνωτέρω.

8) 12. §. 107, § 108.

των, τὸν ἐκδίδοντα τὰς ἀφέσεις, ἄχρηστα δὲ εἰς τοὺς διὰ χρημάτων ἢ ἄλλου ἀνταλλάγματος λαμβάνοντας αὐτὰς ἀμαρτωλοῖς. Ἐκτὸς δὲ τούτου ἢ εἶνε ὁ ἐπιβληθεὶς κανὼν τῆς μεταποιῆς προσωρινός, μὴ ἔχων συνεπείας μετὰ θάνατον, καὶ τότε ἢ ἄφεςις εἶνε ματαία καὶ ἄχρηστος· ἢ ἰσχύει καὶ μετὰ θάνατον, καὶ τότε πῶς εἶνε δυνατόν νὰ ἀπαλλάξῃ καθ' ὁλοκληρίαν ἀπὸ τῆς ἐξ αὐτοῦ κολάσεως τὸν ἀμαρτωλὸν ἢ ἄφεςις τοῦ Πάπα, ὅς' οὐ ἐν τῷ ἄδη οὐκ ἔστι μετάνεισ, μόνον δ' ἐκ τῆς μεταποιῆς καὶ διὰ τῆς μετανοίας ἢ ἄφεςις τῶν ἀμαρτιῶν⁹⁾;

Αἱ περὶ τὴν πώλησιν τῶν παπικῶν τούτων ἀφάσεων ἀναίτιος καταχρήσεις τοῦ ῥωμαικοῦ κλήρου ὑπῆρξιν, ὡς μᾶς διδάσκει ἡ ἱστορία, ἡ κυριώτερα ἀφορμὴ εἰς τὴν ἀπὸ τῆς ῥωμικῆς ἐκκλησίας ἀποσκίρτησιν τῶν διαμαρτυρομένων, οἵτινες ἐξ ἀντιδράσεως, ἀπὸ τοῦ ἐν ἄκρον μεταπίπτοντες εἰς τὸ ἄλλο, ἐκιδρύσαν ἐντελῶς τὴν μετάνειαν ὡς μυστήριον, ἐπῆρσαν δὲ αὐτὴν οἱ μὲν Καθολικισταὶ ὡς ἀπλοῦν ψυχωφελές ἔργον¹⁰⁾, οἱ δὲ Λουθηρανοὶ ὡς τελετὴν ὑποχρεωτικὴν πρὸ τῆς μεταλήψεως¹¹⁾.

§. 110.

Πότεν εἶνε τὸ πέμπτον μυστήριον;

Τὸ πέμπτον μυστήριον εἶνε ἡ ἱερωσύνη. Ἐν τῷ μυστηρίῳ τούτῳ ὁ ἐπίσκοπος ἐπιθέτων τὰς χεῖρας ἐπὶ τὸν ἐκλεχθέντα ἐπισφύριον, καὶ ἐπικαλούμενος τὸ ἅγιον Πνεῦμα, μεταδίδει ὡς ὄργανον αὐτοῦ εἰς αὐτὸν τὸ χάρισμα τῆς ἱερωσύνης, τῆς ὁ-

9) Ἐκτὸς δὲ τούτων ὁ σχολαστικὸς ἅμα καὶ τυραννικὸς τρόπος τῆς ἐξομολογήσεως, καὶ ἡ ἐν τῇ πράξει ἐφαρμογὴ τῆς συμπτωτικῆς (casualistique) θεωρησιῶν, ἥτις ἔθεν μὲν ὑπερβίβησε τὰ θανάσιμα ἀμαρτήματα κατ' ἀρχαίαν, ἔθεν δὲ μεταβάλλει αὐτὰ ἐν τῇ πράξει κατὰ βούλησιν εἰς ἐλαφρότατα περὶσπασμα, εὐλόγως δ' ἀξιωμασιῶν τινῶν ἔργων (opera meritoria) συνηγορούμενα, εἰώκων ἀφορμὴν καὶ εὐλόγως, εἰς πολλὰ κατὰ τοῦ ῥωμαικοῦ ἀπολογητήριου κατακραυγὰς, καὶ εἰς τὴν ριζοσπαστικὴν ἐν τῷ περὶ τῶν ἔργων δόγματι ἀντίρρῳ τῶν διαμαρτυρομένων.

9) Aug. Conf. p. 12, 27, κλπ. 11) Conf. Helv. II. 14, κλπ.

ποιᾶς ἡ διακοιὰ εἶνε τριπλῆ: τὸ κήρυγμα τοῦ θεοῦ λόγου, ἡ τέλειαις τῶν μυστηρίων, καὶ ἡ κυβέρνησις τῆς ἐκκλησίας.

Τὸ χάρισμα τῆς ἱερωσύνης εἶνε ἔν, ἀλλ' εἰ βαθμοὶ αὐτοῦ ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ εἶνε τρεῖς, ὁ τοῦ ἐπισκόπου, ὁ τοῦ πρεσβυτέρου καὶ ὁ τοῦ διακόνου. Τὸ χάρισμα τοῦτο λαβόντες παρὰ τοῦ Χριστοῦ οἱ ἀποστόλοι μετέδωκαν ἀλλήλοδιαδόχως διὰ τῆς ἐπιθέσεως τῶν χειρῶν¹⁾, εἰς τοὺς μέχρι σήμερον ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ ἐπισκόπους, πρεσβυτέρους καὶ διακόνους. Καὶ πλήρες μὲν τὸ ἀξίωμα τῆς ἱερωσύνης ἔχουσιν ἀμφότεροι, ὅτε ἐπίσκοπος καὶ ὁ πρεσβύτερος· ἀλλὰ μόνον ὁ ἐπίσκοπος δύναται νὰ μεταδώσῃ τὸ χάρισμα τῆς ἱερωσύνης εἰς τὸν πρεσβύτερον καὶ διάκονον²⁾, ἐν ᾧ ὁ πρεσβύτερος δὲν δύναται νὰ μεταδώσῃ περαιτέρω αὐτό. Ὁμοίως διαφεύγει τὸν κύκλον τῆς ἐνεργείας τοῦ πρεσβυτέρου καὶ ἡ κατασκευὴ τοῦ ἁγίου μύρου, ἡ ἐγκαινίσαις ναῶν, ἡ ψῆφος ἐν ταῖς οἰκουμενικαῖς Συνάδοις, ἡ ἐξέλεγχσις καὶ κρίσις τῶν πρεσβυτέρων καὶ διακόνων, ἡ διοίκησις τῆς ὅλης τοπικῆς ἐκκλησίας κτλ. Ὅχι πλήρες ἔχει τὸ χάρισμα τῆς ἱερωσύνης ὁ διάκονος, ὁ ὁποῖος δὲν δύναται μὲν νὰ τελέσῃ τὰ μυστήρια, βοηθεῖ ἡμᾶς καὶ ὑπερετεῖ τὸν ἱερέα καὶ τὸν ἐπίσκοπον εἰς τὸ νὰ τελεῇ αὐτὰ, καθὼς δεικνύει καὶ αὐτὴ ἡ λέξις διὰ κωνορ. Τοιοῦτος δὲ ὑπῆρχεν ὁ διάκονος ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ καὶ ἐπ' αὐτῶν ἡδὴ τῶν ἀποστολικῶν χρόνων. Ὅπως δὲ τὸ θάπτισμα εἶνε ἔν, οὐδ' ἐπαναλαμβάνεται, οὕτω καὶ ἡ ἱερωσύνη εἶνε μία, καὶ ἅπαξ μεταδοθεῖσα μένει ἀνεξάλειπτος ἀπὸ τοῦ εἰς ὃν μεταδόθη, ὅπως καὶ ἡ χειροτονία ἡ προχειρίσις, γενομένη ἀπὸ

1) ἀ. Τιμ. δ. 11, ε. 22, β'. Τιμ. α. 5, Πρῆξ. γ'. 6, Ἀποστολ. διατ. γ. 18, τῆς α' οἰκουμ. Συνόδ. καν. β', 10, τῆς ἐν Ἀγκυρᾷ καν. γ'. τῆς ἐν Ἀντιοχείᾳ καν. 1, τῆς ἐν Χαλκηδὼν καν. γ', τῆς ἐν Κωνσταντίνῳ καν. 10, β'. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

2) β'. Τιμ. α. 6, Πρῆξ. ιδ'. 23, 24, γ'. 1, Τιμ. α. 5, α. Τιμ. ε. 22, διατ. ἀποστολ. γ'. 20, γ. 23, 46, τῆς ἐν Κωνσταντίνῳ καν. β', τῆς α' οἰκουμ. καν. 4, τῆς ἐν Ἀντιοχείᾳ καν. 6, τῆς ἐν Χαλκηδὼν καν. β', Νηυσόφ. εἰς ἀ. Τιμ. β. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

ἢ ἀναλαμβάνεται, ἀρκεῖ μόνον γὰρ ἔχειν κανονικῶς, ἕστω καὶ ὑπὸ ἑτεροδόξων³⁾.

§. 111.

Ὡς τις εἶνε ἡ σημασία τῆς ἱερωσύνης :

Τὸ ἀξίωμα τῆς ἱερωσύνης εἶνε τὸ τιμιώτατον ἅμα καὶ ὕψι-
λότετον ἐν τῇ χριστιανικῇ ἐκκλησίᾳ, ὅθεν ἡ ἐκλογή καὶ προ-
χίρισις τοῦ ὑποψηφίου εἶνε ἔργον πολλῆς προσοχῆς καὶ πε-
ρισκοφῆς, ὅτι ἡ χριστιανικὴ ἐκκλησία ἐμπιστεύεται εἰς τὰς
χεῖρας τοῦ σεμνοῦ τούτου ἀρχοντος καὶ ἐκλεκτοῦ αὐτῆς, ὅ,τι
ἔχει ἀνεκτίμητον ἀγαθόν, αὐτὰς τὰς ψυχὰς τῶν λογικῶν τῆς
προσώτων, τὰ ὅποια ὁ ἱερεὺς μέλλει νὰ ὁδηγήσῃ εἰς νομὰς
σωτηρίου διὰ τῆς ἱερᾶς αὐτοῦ πνευματικῆς διακονίας. Ὅθεν
καὶ ἡ ἐκκλησία ἀπαιτεῖ ἀπαντας μὲν ἐν γένει τοὺς λειτουρ-
γοῦντες αὐτῆς, ἀλλὰ μάλιστα τοὺς ἐπισκόπους καὶ πρεσβυτέ-
ρους, ὕγιεις καὶ ἀρτίους κατὰ τὸ σῶμα καὶ κατὰ τὴν ψυχὴν,
ἀμέμπτους κατὰ πάντα καὶ ἀνεπιλήπτους, σώφρονες, ὑπερέ-
χοντες τῶν ἄλλων κατὰ τὰ χαρίσματα τοῦ πνεύματος, πλή-
ρεις φόβου Θεοῦ, ἀόκνους δὲ καὶ ἀγρύπνους περὶ τὴν φυλα-
κὴν καὶ τήρησιν τῆς ἱερᾶς παρακαταθήκης, ἥτις ἐνεπιστεύθη
αὐτοῖς. Ἀπαιτεῖ ἐν ἐνὶ λόγῳ νὰ εἶνε κατὰ τὸν ἀπόστολον¹⁾
εὐτύπος τῶν πιστῶν ἐν λόγῳ, ἐν ἀναστροφῇ, ἐν ἀγάπῃ, ἐν πνεύ-
ματι, ἐν πίστει, ἐν ἀγνείᾳ. Ἄλλ' ἂν ἡ ἐκκλησία ἀπαιτεῖ παρὰ
τῶν λειτουργῶν τοῦ ὕψιστου τούτων πλήρη συναίσθησιν τοῦ
θεοῦ ἔργου, ὅπερ ἀνετέθη εἰς αὐτοὺς, εὐλόγως δεφίλουντι
καὶ τὰ μέλη τῆς ἐκκλησίας νὰ συναισθάνωνται τοῦτο καὶ νὰ
προσφέρωσι τὴν ἀνήκουσαν μετὰ σεβασμοῦ τιμὴν εἰς τὰ πρό-
σωπα ταῦτα. Δὲν δικαιολογεῖ ὁμῶς οὔτε ἡ ἑλλειψὶς τοῦ ἀνή-
κουτος σεβασμοῦ ἀπὸ μέρους τῶν πιστῶν τὴν ὁποιανδήποτε
ἐπὶ τὰ καθήκοντα αὐτῶν ἑλλειψιν τῶν προϊσταμένων τῆς ἐκ-

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθηκὴ Βεροῦνης

³⁾ Τῆς αὐτοῦ Συνόδ. καν. ἡ. Optat. I. 44. Βασιλ. ἐπιστολ. Θεοδώ. λ

κλησίας· οὐτε τ'ανάπαλιν ἡ ἑλλειψις τούτων δικαιολογεῖ τὴν ἑλλειψιν σεβασμοῦ, ὅν ὀφείλει πᾶς εὐσεβὴς εἰς τὸ δόγμα τῆς ἱερωσύνης καὶ τὸν ἱερὸν χαρακτήρα, ὃν φέρει πᾶς λειτουργὸς τῆς ἐκκλησίας.

§. 112.

Κατὰ τί διαφέρουσιν αἱ ἑτερόδοξοι ἐκκλησίαι ὡς πρὸς τὸ μυστήριον τῆς ἱερωσύνης;

Οἱ μὲν διαμαρτυρόμενοι ἀπὲρ ὅρων τὴν ἱερωσύνην ὡς μυστήριον, καὶ ἀνέθεταν τὴν τέλει τῶν μυστηρίων εἰς τοὺς ἱερεῖς, οἵτινες ἀναλαμβάνουσιν ἐπαγγελματικῶς τὸ ἔργον τοῦτο, ὡς καὶ τὴν ὀρησκειτικὴν διδασκαλίαν, καὶ ὁμιλοῦνται ἱερεῖς, ἀλλὰ καταχρηστικῶς, διότι οὐδ' ἐνόθεν πορεύεσθαι τὸ χάρισμα τῆς ἱερωσύνης. Ἡ δὲ ἀγγλικανικὴ ἐκκλησία, καὶ δογματικῶς ἀπεπλανήθη, ὡς καὶ οἱ λοιποὶ διαμαρτυρόμενοι, ἀποκλείσασα τὴν ἱερωσύνην ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μυστηρίων, ἐν τῇ πράξει ὅμως ἐτήρησε τὴν κανονικὴν διὰ τῆς ἐκθέσεως τῶν χειρῶν προχείρισιν καὶ τὴν ἐξ αὐτῆς πηγύζουσαν ἐκκλησιαστικὴν ἱεραρχίαν.

Ἡ δὲ ῥωμανικὴ ἐκκλησία δὲν ἀφῆκεν οὐδὲ τὸ μυστήριον τοῦτο ἀκαيناتόμητον, διότι, ἐν ᾧ ἡ καθόλου ἐκκλησία ὡμιλοῖ τὴν ἀγαμίαν ὡς ὑποχρεωτικὴν μόνον διὰ τὸν ἐπίσκοπον, (ὡς ἀπὸ τοῦ ζ'. αἰῶνος,¹⁾ τοὺς δὲ ἱερεῖς καὶ διακόνους ἀφῆκεν ἐ-

1) Εἰς τὸ ἐπισκοπικὸν δόγμα προεχρίστο το τέως κατὰ προτίμην αἱρετικοί, ἀλλὰ ἐν ἀπεκλείοντο ὡς τοῦτο καὶ αἱ ἑγγαμίαι (ἀ. Τιμ. γ'. 2, 4, τῆς ἐκ Κωνσταντίνου Συνόδου καν. γ'. 8^η, κλπ.). Ἀλλ' ἐπειδὴ οὗτοι εἶχον τὴν ἀδελφὴν καὶ ἀδελφιστῶν ἀπὸ τῆς συζύγου τῶν, ἐν λόγῳ τοῦ χωρισμοῦ τοῦτου ἦτο ἡ ἐμφύλιος, καὶ ὅχι βδελυγμὸς πρὸς τὸν γάμον (ἀποστόλ. καν. 14^η), ὃν ἐδιδόσαντο πλάστοι τινὲς καὶ ψευδοδιδασκαλοὶ (ἀ. Τιμ. δ'. 1—3, Πίρην. αἰρ. ἀ. 27, 28, Κλήμ. Ἀλεξ. στρωμ. ζ'. 12, κλπ.), καὶ ἔφατον τοῦτο συνήθως ἐκόντες (Σα. κρῖν. ἐκκλ. ιστορ. β'. 22). πρὸς ἀποφυγὴν τῶν ἐκ τούτου ἀνάπων ἡ ἐν Ἱερουσαλὴμ οἰκουμένη ἐνόησε ὥρτισεν ὑποχρεωτικὴν τὴν ἀγαμίαν τῶν ἐπισκόπων· οὐκ ἐπ' ἀθέτησιν ἢ ἀνατροπῇ τῶν ἀποστολικῶς νενομοθετημένων, ἀλλὰ πρὸς σωτηρίαν καὶ τῆς ἐπὶ τὸ κρεῖττον προκοπῇ τῶν λαῶν προμηθευμένη (καν. 17^{ος}).

νέκαθεν μέχρι σήμερον ἐλευθέρους τῆς ὑποχρεώσεως ταύτης²⁾, ἡ δυτικὴ ἐκκλησία ὑπέβαλεν εἰς αὐτὴν ἅπαντας ἐν γένει τοὺς κληρικούς, καὶ αὐτοὺς ἀκόμη τοὺς ὑποδιακόνους³⁾.

§. 113.

Ποῦτον εἶνε τὸ ἕκτον μυστήριον, καὶ ποία τις ἡ σημασία αὐτοῦ ;

Τὸ ἕκτον μυστήριον εἶνε ὁ γάμος. Ἐν τῷ μυστηρίῳ τούτῳ, ἀφ' οὗ οἱ δύο μελλόνυμφοι ὁμολογήσωσιν ἐνώπιον τοῦ ἱερέως καὶ τῆς ἐκκλησίας τὴν ἀμοιβαίαν ἀγάπην καὶ ἀπόφασιν ἵνα συζευχθῶσι, πρὸς τὴν ἀμοιβαίαν τὴν συζυγικὴν πίσιν, ἐλλογαῖ τὸν δεσμόν τοῦ γάμου ὁ ἱερεὺς, καὶ παρακαλεῖ τὸν Θεόν ἵνα χάρισις εἰς αὐτοὺς εἰσέλθῃ, ἀγάπην καὶ εὐτεχνίαν, ἐπὶ τῇ ἐλπίδι τῆς ἐν φόβῳ καὶ νοουθεσίᾳ Κυρίου ἀνατροφῆς τῶν τέκνων τῶν μελλόντων μελῶν τῆς ἐκκλησίας.

«Τὸ μυστήριον τοῦτο μέγα ἐστίν, ἐγὼ δὲ λέγω εἰς Χριστὸν καὶ εἰς τὴν ἐκκλησίαν,» λέγει ὁ ἀπόστολος Παῦλος⁴⁾. Τὸ μέγεθος δὲ καὶ ἡ ἱερότης τοῦ μυστηρίου τούτου γίνεται καταληπτὴ, εὐθὺς ὡς ἀναλογισθῶμεν ἔνθεν μὲν ὅτι, ὅπως ἄνευ τῆς ἱεροσύνης, οὕτω καὶ ἄνευ τοῦ γάμου ἡ ὕπαρξις τῆς ἐκκλησίας εἶνε ἀδύνατος· ἔνθεν δέ, ὅτι ὁ γαμικὸς δεσμός, ὁ ἐν τῇ παλαιᾷ Διαθήκῃ καθιερωθεὶς ὑπ' αὐτοῦ τοῦ Θεοῦ διὰ τῆς συνάψεως τοῦ Ἀδάμ καὶ τῆς Εὕας, πρὸς οὗς εἶπεν «Αὐξάνεσθε καὶ πληθύνεσθε καὶ πληρώσατε τὴν γῆν καὶ κατακυριεύσατε αὐτῆς»⁵⁾, ἐνυψώθη ἐν τῇ Καινῇ καὶ ὁλως πνευματικὸν μυστήριον, συσχε-

2) οὗ μόνον ἐπ' αὐτὴν λόγῳ ἐπιτρέψασα τὸν ἀπὸ τῆς συζύγου αὐτῶν μετὰ τὴν προχέρισιν χωριταῖν (ἀποστολ. καν. κς', τῆς ἐν Νεοκαισάρ. καν. 4, τῆς οἰκουμ. καν. γ', τῆς 5', οἰκουμ. καν. γ', καὶ 5'), ἀλλὰ καὶ αὐστηρῶς καταδικάζου τοὺς ὅσους τῶν λαϊκῶν ἡγοῦντο ἵνα μεταλάβωσι τῆς θαλάς κοινωνίας ἐκ τῶν χειρῶν τῶν ἐγγάμων ἱερέων (τῆς ἐν Γ' ἀγγρ. καν. 8, κλπ.).

3) Council. Rom. (ἐν ἔτει 743) can. 1, 2, Council. August (952) can. 1, 11, 16, 17, 19, Conc. Later. 1. (1123) can. 40.

4) Ἑβρ. ε. 32.

5) Γεν. 4. 28. Ποβλ. καὶ Γεν. 6', 21. Ματθ. 16'. 5, Μάρκ. 1. 7, 4. Κορ.

τισθεὶς πρὸς αὐτὸν τὸν ὄλῳ πνευματικὸν καὶ μυστικὸν σύν-
δεσμον τοῦ Χριστοῦ ὡς νυμφίου καὶ τῆς ἐκκλησίας ὡς νύμ-
φης. Ὁ γάμος ἄρα εἶνε δεσμός θεοσύστατος³⁾ καὶ ἱερώτατος,
ἀνιρχόμενος εἰς αὐτὴν τὴν πλάσιν τοῦ ἀνθρώπου, ἀποτελειω-
θεὶς δὲ πνευματικῶς καὶ μυστικῶς ὑπὸ τοῦ Ἰ. Χριστοῦ εἰς μυσ-
τήριον μέγα καὶ ἱερώτατον, ὅθεν καὶ ἀδιάλυτος⁴⁾ μὲν ἐν ὄντι
ἐκάτερος τῶν συζύγων τηρεῖ αὐτὴν κοίτην ἀμίαντον⁵⁾, ἀπο-
κλείων δὲ πᾶσαν πολυγαμίαν⁶⁾. Οὕτως ἁγιασθεὶς ὁ γάμος καὶ
καθιερωθεὶς ὑπάρχει ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ ἀπὸ τῶν ἀποστόλων⁷⁾
μέχρι τῆς σήμερον.

§. 114.

Ποιοὶ εἶναι οἱ ὅροι, ἐφ' οἷς συνέρχονται ὁ ἀνὴρ καὶ ἡ γυνὴ εἰς γάμου κοι-
νωνίαν, καὶ ποτὰ τὰ ἀμοιβαία αὐτῶν καθήκοντα ;

Οἱ συνερχόμενοι εἰς γάμου κοινωνίαν πρέπει νὰ εἶνε χρι-
στιανοὶ ὁρθόδοξοι καὶ μὴ συγγενεῖς, πρὸς ἀποφυγὴν τῆς αἰμο-
μιξίας· ὁρίζουσι δὲ οἱ κανόνες τῆς ἐκκλησίας λεπτομερῶς τὸν
βαθμὸν τῆς συγγενείας μέχρι τοῦ ὁποίου δὲν ἐπιτρέπεται ὁ
γάμος¹⁾. Ἀρ' οὗ δὲ συνέλθωσιν εἰς γάμου κοινωνίαν ὀφείλου

3) Ἰδ. ἑνωτέρω σημ. 2, καὶ Λευϊτ. κ'. 10, Δευτερ. ζ'. 14, κβ'. 29, κθ'.
11, α'. Κορ. ιβ'. 9, 11, 12, α'. Τιμ. δ'. 1—2, Εἰρην. αἰρ. α'. 28, Κλημ. Ἀ-
λεξ. στρωμ. γ'. 6, Χρυσ. εἰς Γεν. ὁμ. κβ'. 4.

4) Ματθ. ιθ'. 3—8, Μάρκ. ι. 2—12, Λουκ. ιη' 18, α'. Κορ. ζ'. 10—11,
Ῥωμ. ζ'. 2—3, Ἰουστίν. ἀπολ. α'. 6, Κλημ. Ἀλεξ. στρωμ. β'. 23, γ'. 41,
Βασίλ. Ἐξέθεμ. ζ'. 5, Ἐπιφαν. αἰρ. ιθ'. 4, 6, Κυρίλλ. Ἀλεξ. εἰς Μαλαχ.
κθ. Θεοδώρ. εἰς α' Κορ. ζ'. 14.

5) Ματθ. ιθ'. 9, ε'. 32, τῆς ἐν Νεοκαισ. καν. η', τῆς ἐν Καρθαγ. ριέ, Βα-
σίλ. θ'. κβ', μθ', ρη', τῆς ε'. οἰκουμ. πζ'.

6) Γεν. β'. 22—24, Ματθ. ιθ'. 4—6, α'. Κορ. ζ'. 2—4, Ἐφεσ. ε' 23,
Ἑρμ. ποιμ. β'. ἐπιστ. δ'. 4, Χρυσόστ. εἰς Τίτ. ὁμ. ι', Ἐπιφαν. αἰρ. ρη'. 9.

7) Ἐφεσ. ε' 22, 24, 25, 31, 33, α'. Κορ. ζ'. 39, Ἰγνατ. ἐπιστ. Πολυκάρπ.
ε', Βασίλ. ὁμιλ. εἰς Ἐξέθεμ. ζ'. Ambros. Epist. ad Vig. XIX, XXIII 7,
Tertull. ad uxor. 11. 9, praescr. 40, adv. Marcion. V. 18, Κλημ. παιδαγ-
γ'. 2, στρωμ. γ'. 21, Χρυσόστ. εἰς Γενεσ. ὁμ. ρη'. 6, August. de Gen. ad
lit. imp. IX. 7.

4) Τῆς ε'. οἰκουμ. Συνόδου καν. λβ', νδ', τῆς ἐν Νεοκαισαρ. καν. β', Βασίλ.

σιν ἀμοιβαίαν πίστιν, διὰ τὴν τηρηθῇ «τίμιος» ὁ γάμος αὐτῶν καὶ ἡ «κοίτη ἀμίαντος» κατὰ τὸν ἀπόστολον²⁾. Καὶ ὁ μὲν ἀνὴρ ὀφείλει νὰ ἀγαπᾷ τὴν γυναῖκα ὡς τὸ ἴδιον σῶμα³⁾, συγκαταβαίνων καὶ οἰκονομῶν φρονίμως τὰς ἀδυναμίας τῆς⁴⁾. ἡ δὲ γυναῖς νὰ ἀναγνωρίζῃ τὸν ἄνδρα ὡς κεφαλὴν⁵⁾, νὰ βοηθῇ αὐτὸν εἰς ὅ, τι δύναται⁶⁾, φρονιζούσα ἰδίως περὶ τῆς συντηρήσεως τῆς οἰκίας, να συμμορφώνεται ἐκ πάντοτε πρὸς τὰς ὁρέξεις τοῦ ἀνδρός καὶ νὰ ὑπομένῃ μετὰ πραότητος τὰς παρὰ φέρους του, ἐάν ὀργίζεται⁷⁾. Ἀλλὰ προ πάντων ἡ γυναῖς ὀφείλει ὄχι μόνον νὰ θηλάσῃ τὰ τέκνα τῆς, ἀλλὰ καὶ ὁμοῦ μετὰ τὸ φυσικὸν γάλα νὰ τὰ ποτίσῃ ἐξ ἀπαλῶν ὀνύχων τὴν εὐσεβειαν καὶ νὰ τὰ ἀναθρέψῃ ἐν παιδείᾳ καὶ νοθεσίᾳ Κυρίου. Οὐδὲν δὲ ἄλλο προπαρασκευάζει εἰς τὸν μέλλοντα βίον τὴν εὐσεβειαν τὸσον, ὅσον ἡ ἐκ παιδὸς ἀνατροφὴ φιλοστοργικοῦ καὶ εὐσεβοῦς μητρός.

§. 113.

Κατὰ τί διαφέρουσιν εἰς ἐπερόδοτον ἐκκλησίαι ὡς πρὸς τὸ μυστήριον τοῦ γάμου;
Ἡ ῥωμαϊκὴ ἐκκλησία θεωρεῖ τὸν γάμον ὡς ἀπολύτως ἀδιάλυτον, ὅθεν καὶ ἐκ' οὐδενὶ λόγῳ ἐπιτρέπει διαζύγιον πληρεξ¹⁾, ἐναντίον τῆς ῥητῆς ἐντολῆς τοῦ Κυρίου²⁾, τὴν ὁποίαν πορεύηται. Οἱ δὲ διαμαρτυρόμενοι θεωροῦσι μὲν τὸν γάμον ὡς θεοσύστατον, ἀλλ' ὄχι καὶ ὡς μυστήριον³⁾. τὴν δὲ ἐκκλησιαστικὴν τοῦ γάμου εὐλογίαν θεωροῦσιν ὡς ἔθιμον ἀξιολόγητον μὲν ἀλλ' ὄχι καὶ ἀναγκαῖον.

καὶ γ', σή. κ'. 2) Ἐφεσ. γ'. 4. 3) Ἐφεσ. ε'. 21. 4) ἡ Πέτρ. γ'. 7

5) Ἐφ. ε'. 22. 6) Γεν. β'. 18, ἡ Κορ. α'. 9, α. Τιμ. β'. 13.

7) Ἐφεσ. ε'. 33, ἡ Πέτρ. γ'. 2.

1) Concil. Trident. Sess. XXIV. can. 7, Catech. Rom. II. 8, 20, Beilarmin de sac. matrimonio c. 11—17.

2) 18 ἀνωτέρ. §. 113 σημ. 5.

3) Conf. August. p. 31, ἡ Catech. Rom. p. 455, Conf. Melanct. II. art. 27, II. c. 29.

§. 116.

Ποῦτον εἶνε τὸ ἔβδομον μυστήριον ;

Τὸ ἔβδομον μυστήριον εἶνε τὸ εὐχέλαιον. Ἐν τῷ μυστηρίῳ τούτῳ, χριστομένου τοῦ ἀσθενοῦς με' ἔλαιον, ἐπικαλεῖται ὁ ἱερεὺς τὴν θείαν χάριν, ἥτις θεραπεύει τὰς ψυχικὰς καὶ σωματικὰς ἀσθενείας.

Καὶ τὸ μυστήριον τοῦτο ἐτέλουν οἱ ἀπόστολοι, οἵτινες λαβόντες τὴν ἐξουσίαν παρὰ τοῦ Ἰ. Χριστοῦ, ἤλειπον ἔλαιον πολλοὺς ὁρρώσους καὶ ἐθεράπευον¹⁾. Ὅθεν καὶ συνιστᾶται λεπτομερῶς εἰς τὴν ἐκκλησίαν ὑπὸ τοῦ ἀποστόλου Ἰακώβου²⁾.

§. 117.

Κατὰ τί διαφέρουσιν αἱ ἑτερόδοξοι ἐκκλησίαι ὡς πρὸς τὸ μυστήριον τοῦ εὐχελαίου;

Καὶ περὶ τὸ μυστήριον τοῦτο ἡ ῥωμικὴ ἐκκλησία ἐκαινοτόμησε, διότι ἐναντίον τῶν ῥητῶν καὶ σαφῶν λέξεων τοῦ ἀποστόλου¹⁾, τελεῖ τὸ εὐχέλαιον παρὰ τοῖς Λατίνοις ὁ ἱερεὺς ὅχι ὡς εὐχέλαιον ἀλλ' ὡς ἑσχατον χρῖσμα²⁾. Ὅχι ὑπὲρ οὐτινοςδὴποτε ἀσθενοῦς, ἀλλὰ μόνον ὑπὲρ τοῦ πνέοντος τὰ λοιπὰ ὡς ἐφόδιον πρὸς τὴν μέλλουσαν ζωὴν³⁾. Ἡ κοινωτομία αὕτη εἰσῆχθη εἰς τὴν δυτικὴν ἐκκλησίαν ἀπὸ τοῦ δωδεκάτου αἰῶνος, ὅπως μαρτυροῦσιν αὐτοὶ οἱ καθολικοὶ θεολόγοι καὶ συγγραφεῖς⁴⁾, ἐναντίον τῆς Γραφῆς, τῆς παραδόσεως καὶ τῶν

1) Μάρκ. γ'. 13.

2) « Ἀσθενεῖ τις ἐν ὑμῖν ; προσκαλεσάσθω τοὺς πρεσβυτέρους τῆς ἐκκλησίας καὶ προευχάσθωσαν ἐπ' αὐτόν, ἀλείψαντες αὐτόν ἐλαίῳ ἐν τῷ ὀνόματι τοῦ Κυρίου καὶ ἡ εὐχὴ τῆς πίστεως σώσει τὸν κάμνοντα, καὶ ἐγερεῖ αὐτόν ὁ Κύριος καὶ ἁμάρτιας ἧ πεποιηκώς, ἀφιεθήσεται αὐτῷ : Ἰάκ. ἐ. 14—15. Πρὸς Χρυσόστο. ἱερως γ'. 6, Κυρίλλ. Ἀλεξ. εἰς Μάρκ. γ'. 13.

1) Ἦν, ἀνωτέρω § 116, σημ. 2. 2) Extrema unctio.

3) Concil. Trident. Sess. XIV. c. 1, 2, 3, Catech. Roman. II 6, 9, 11.

4) Chancelou de Curs. Theol. compl. Tom. XX, Walker canon. Recht. § 319.

πατέρων τῆς ἐκκλησίας. Οἱ δὲ διαμαρτυρόμενοι ἀπεῤῥιψαν ὀ-
λοτελῶς καὶ τοῦτο τὸ μυστήριον⁵⁾.

§. 118.

Ποιοὶ τινες εἶνε οἱ καθόλου ὅροι τῆς τελείσεως τῶν μυστηρίων ;

Ὁ τρόπος, καθ' ὃν πρέπει νὰ τελῶνται τὰ μυστήρια, συμ-
περαίνεται ἐξ αὐτῆς τῆς ἐννοίας καὶ τῆς φύσεως αὐτῶν. Τὰ
μυστήρια, καθὼς εἶδομεν, εἶνε φύσεως μικτῆς, ὕλικα καὶ αὔλα,
ὁρατὰ καὶ ἀόρατα, σωματικὰ καὶ πνευματικὰ· αὔλα μὲν καὶ ἀό-
ρατα καὶ πνευματικὰ ὡς ἐκ τῆς ἐν αὐτοῖς ἐνεργούσης θείας
χάριτος, καὶ τῆς πίστεως καὶ εὐλαβείας τῶν κοινωνῶν· ὕλικα
δὲ καὶ ὁρατὰ καὶ σωματικὰ ὡς ἐκ τῆς ὕλικότητος τῶν μέσων
καὶ τῶν πράξεων, δι' ὧν ἐπενεργεῖ ἡ θεία χάρις εἰς αὐτοὺς. Ἡ
τέλεισις ἄρα τῶν μυστηρίων, ἐκτὸς τῆς πίστεως ἐν γένει καὶ
εὐλαβείας τῶν τελούντων καὶ μετεχόντων, ἥτις εἶνε ὁ ὑπὲρ
πάντας ἀναγκαῖος καὶ ἀπαραίτητος ὅρος, ἀπαιτεῖ καὶ τόπον
τινὰ ἀρμόδιον καὶ ἐπίτηδες πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον καθιερω-
μένον, καὶ χρόνον τινὰ ὠρισμένον, καθ' ὃν νὰ συνέλθωσιν ἐ-
κεῖ οἱ μέλλων νὰ τελήσῃ τὰ μυστήρια, καὶ μάλιστα τὴν θείαν
ἱερουργίαν, ἱερεὺς, καὶ οἱ μέλλοντες νὰ κοινωνήσωσιν αὐτῶν
ἁμέσως ἢ ἐμμέσως. Ἀνευ δὲ τόπου καὶ χρόνου ἀρμοδίου καὶ
ὠρισμένου πᾶσα μυσταγωγία ἀποβαίνει ἀδύνατος. Καὶ ὡς τό-
πος μὲν τοιοῦτος ὠρίσθη ἀνέκαθεν¹⁾ ὁ ἱερεὺς ν α δ ς, ὡς χρόνος
δὲ ὧραί τινες ὠρισμέναι πάσης ἡμέρας ἐν γένει, ἀλλ' ἰδίως
τῆς Κυριακῆς, ἥτις διὰ τοῦτο καὶ φέρει, ἀπ' αὐτῶν ἤδη τῶν
ἀποστολικῶν χρόνων²⁾, τὸ ὄνομα τοῦτο, ὡς ἰδίως ἀφιερωμέ-

5) Apol. Aug. Conf'e s. p. 271, Conf. Helv. II. c. 49, Conf. Wilemb.
p. 421 sq.

1) Ἀπ' αὐτῶν ἤδη τῶν ἀποστολικῶν χρόνων: ἡ Κορ. ιζ. 48, ιβ'. 19, 28,
33, 34, 35, γ'. Ἰω. 6, Χρυσόστ. εἰς ἁ. Κορ. ὁμ. 25'. Εὐδ. μ. Ῥωμ. ἁ. πρὸς
Κορινθ., Ἰγν. αὐτ. πρὸς Μαγνησ., πρὸς Φιλαδέλφ., Εὐσεβ. ἐκκλ. ιστορ. γ'. 22,
ζ'. 40, Ὀριγ. εἰς Γεν. ὁμ. 6, εἰς Λευίτ. ὁμ. 9', Cyrilian. ep. 1. 7, III. 43.
Πρὸς καὶ τῆς ἐν Γάγγραι καν. ε. καὶ ς'.

2) Ἀποκάλ. ἁ. 10.

ἦν εἰς τὴν λατρείαν τοῦ Κυρίου, εἰς ἀνάμνησιν καὶ τιμὴν αἰωνίαν τῆς κατὰ τὴν ἡμέραν ταύτην ἐκ νεκρῶν αὐτοῦ ἀναστάσεως³⁾, ὅθεν καὶ αὐτὸς ὁ ναὸς ὠνομάζετο τὸ πάλαι συνωνύμως σχεδὸν κυριακόν⁴⁾.

§. 119.

Ἀπαιτεῖται ἡ προσευχή καὶ ἡ δέησις καθ' ὃν χρόνον τελοῦνται τὰ μυστήρια ; Ἀφ' οὗ ὁ ἱερεὺς καὶ οἱ πρεσβύτεροι συνέλθωσιν εἰς τὸν ναόν, πρέπει νὰ προσευχηθῶσι πρὸς τὸν Θεόν, πρῶτον μὲν εὐχαριστοῦντες καὶ δοξολογοῦντες οὐδὲν δι' ὅσα ἀγαθὰ τοὺς ἐπεδαψίλευσεν, ἔπειτα δὲ παρακαλοῦντες νὰ συγχωρήσῃ τὰς ἁμαρτίας των καὶ νὰ καταξιώσει αὐτοὺς τῆς θείας τοῦ χάριτος. Ὅτι δὲ πρέπει νὰ προσευχώμεθα, μᾶς τὸ ἐδίδαξεν αὐτὸς ὁ Κύριος ἡμῶν καὶ οἱ ἀπόστολοι αὐτοῦ διὰ τοῦ λόγου καὶ διὰ τοῦ παραδείγματός των εἰς πολλὰς καὶ διαφόρους περιστάσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν μίαν καὶ μόνην. Τὴν ἑσπέραν, καθ' ἣν ἐμελλε νὰ παραδοθῇ ὁ Σωτὴρ ἡμῶν, πρὶν τελέσῃ τὸν μυστικὸν δεῖπνον, ἐτέλεσεν εὐχαριστίαν, ἔπειτα δέ, ἀφ' οὗ ἐδίδαξε τοὺς μαθητάς του, ἐξηλθεν εἰς τὸ ὄρος τῶν ἐλαιῶν, ὅπου ἐπὶ πολλὰς ὥρας προσήχετο καὶ αὐτὸς, παρεκίνει δὲ εἰς τοῦτο καὶ τοὺς μαθητάς του, λέγων, « Ἀγρυπνεῖτε καὶ προσεύχεσθε »¹⁾. Δεύτερον παράδειγμα ἔστω αὕτη ἡ πρώτη ἐν Ἱεροσολύμοις χριστιανικῇ ἐκκλησίᾳ, ἡ συγκροτούμενη ἀκόμη ἐκ τῶν ἀπο-

3) « Τὴν δὲ Κυριακὴν καλούμενην ἡμέραν, ἣν Ἑβραῖοι πρῶτην τῆς ἐβδομάδος ὀνομάζουσιν, Ἕλληνας δὲ ἑλ' ἡμ' ἀναθέτασι, καὶ τὴν πρὸ τῆς ἐβδομάδος ἐνομοθέτησε (Κωνσταντῖνος ὁ μέγας) δικαστηρίων καὶ τῶν ἄλλων πραγμάτων σχολὴν ἄγειν πάντα, καὶ ἐν εὐχαίᾳ καὶ λιταῖς τὸ θεῖον θεραπεύειν. » Σωζόμενα ἐκκλ. ιστορ. ἡ.

4) Τῆς ἐν Νεοκαισαρίᾳ καὶ ἐκείνῃ, τῆς ἐν Αποδ. καί, τῆς ἐν Τρούλλῳ οὗ. Ἴδε καὶ Βαλ. σ. 11. εἰς τοῦτον, καὶ Ζωναρᾶν λέγοντα « Πολλὰ καὶ τὸ παλαιὸν ὄνομα εὐχεται ἐν ταῖς καὶ οὖν ἐπὶ τῆς ἐκκλησίας λαμβανόμενον κατὰ Κυριακὸν ὀνομάζεται καὶ μέχρι σήμερον ἡ ἐκκλησία γράφεται καὶ οὕτως, ὡς γνωστὸν.

1) Ματθ. 26. 33

στόλων, τῆς μητρὸς τοῦ Σωτῆρος καὶ τῶν λοιπῶν γυναικῶν καὶ συγγενῶν. Τί ἐπραττον οὗτοι, ἀφ' οὗ ἀνελήφθη ὁ Θεάνθρωπος εἰς τοὺς οὐρανοὺς, ὑποσχεθεὶς νὰ καταπέμψῃ ἐπ' αὐτοὺς τὸ ἅγιον Πνεῦμα μετ' ὀλίγον; Συνελθόντες οὗτοι πάντες ἦσαν προσκαρτεροῦντες ὁμοθυμαδὸν τῇ προσευχῇ καὶ τῇ δεήσει»²). Ἐὰν λοιπὸν ὁ Σωτὴρ μέλλων ἐντὸς ὀλίγου νὰ τελέσῃ ἐπὶ τοῦ σταυροῦ τὴν ἐξιλαστήριον θυσίαν, τῆς ὁποίας μυστικὴ καὶ ἀναίμακτος προῦποτύπωσις ἦτο ὁ μυστικὸς δεῖπνος, προσευχήθη, ἐὰν αὐτοὶ οἱ ἀπόστολοι, μέλλοντες μετ' οὐ πολὺ νὰ λάβωσι τὸ πανάγιον Πνεῦμα, προσεκαρτέρουν τῇ προσευχῇ καὶ τῇ δεήσει, πόσω μᾶλλον ὀφείλομεν νὰ προσευχώμεθα ἡμεῖς οἱ ὅλως ἀπέχοντες τῆς ἁγιότητος ἐκείνων, οὐκ οὐκ συνερχόμεθα καὶ συναποτελοῦμεν τὴν ἐκκλησίαν, ἐν τῷ μέσῳ τῆς ὁποίας πρόκειται νὰ τελεσθῶσι τὰ ἄχραντα μυστήρια, δι' ὧν ἀπεκδεχόμεθα τὴν θεῖαν χάριν; Ἡ προσευχὴ λοιπὸν καὶ ἡ δεήσις εἶνε ὅρος ἀπαραίτητος καὶ οὐσιώδης τῆς ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ τελέσεως τῶν μυστηρίων³).

§. 120.

Συναδὶ πρὸς τὸν πνευματικὸν χαρακτῆρα καὶ τὴν εὐπρέπειαν τῆς ἐκκλησίας ἡ σύγχρονος καὶ ὁμοθυμαδὸν ἔκφωνος προσευχή, καὶ τί λέγεται ἀκολουθία, τελετή, λειτουργία καὶ λατρεία;

Ἡ προσευχὴ καὶ ἡ δεήσις πολλῶν ὁμοῦ, γεγωνυῖα τῇ φωνῇ προσευχομένων καὶ δεομένων ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ καὶ χρόνῳ, πολλῶν ὁμοῦ ἢ αἰνούντων καὶ δοξολογούντων τὸν Θεόν, ἢ ἐπικαλουμένων ἐκφώνως τὴν θεῖαν αὐτοῦ χάριν καὶ ἀντίληψιν, ὅπως γίνεται εἰς πολλὰς συναγωγὰς καὶ νοοὺς ἀπίστων ἢ αἵρετικῶν, εἶνε τι ἄκασμος καὶ ἀσυμβίβαστος πρὸς τὸν πνευματικὸν χαρακτῆρα τῆς χριστιανικῆς λατρείας, ἀμα δὲ καὶ παρακωλύει τὴν εἰς τὸν Θεὸν προσήλωσιν τοῦ νοοῦ καὶ τῆς

καρδίας τῶν ἐκκλησιαζομένων¹⁾· ἄνευ δὲ τῆς προσηλώσεως ταύτης ὄχι μόνον ἔν ὠφελεῖ ἡ προσευχή, ἀλλὰ καὶ ψυχικῆς βλάβης πρόξενος γίνεται²⁾. Ἀνάγκη ἄρα νὰ κανονισθῇ καὶ ρυθμισθῇ δεόντως καὶ σκοπίμως ἡ σχέσις τῆς προφορικῆς καὶ νοερᾶς προσευχῆς, νὰ ἐριθῇ δὲ καὶ τὸ ἀντικείμενον τῶν προσευχῶν καὶ δεήσεων, καὶ τὰ πρόσωπα, ἀτινα θὰ ἐκτελῶσι νοερώς ἢ ἐκφώνως καὶ ἀπὸ μέρους πάντων τὴν δοξολογίαν καὶ τὸν αἶνον, ἢ τὴν εὐχαριστίαν καὶ τὴν δέξιν.

Ταῦτα πάντα ἐκἀνένισε καὶ ἐρρύθμισεν ἀνέκοθεν λεπτομερώς καὶ ὡς ἄριστα ἡ τοῦ Χριστοῦ ἐκκλησία μετὰ τῆς ἁρμοδιωτάτης καὶ ἱεροπρεπεστάτης εὐταξίας. Ὅθεν καὶ τὸ σύνολον μὲν τῶν εὐχῶν καὶ ὕμνων, ὅσοι χρησιμεύουσιν εἰς τὸ τριπλοῦν ἔργον τῆς χριστιανικῆς προσευχῆς, ἦτοι τὴν δοξολογίαν, τὴν εὐχαριστήσιν καὶ τὴν δέξιν, ὀνομάζεται ἱερὰ ἀκολουθία, ὥς ἐκ τῆς ἀσυγχύτου ταύτης καὶ συνάκτο-
 λού τοῦ εὐταξίας· τὸ δὲ σύνολον τῶν ἱερῶν πράξεων, καὶ ἰδίως τῶν περὶ τὴν τέλεσιν τῶν μυστηρίων, ἱεροτελεσία, ἢ ἱεροπραξία, ἢ λειτουργία³⁾. Ἀλλὰ ἰδίως ἱερουργία, ἢ θεία μυσταγωγία, καὶ μάλιστα ἱερὰ λειτουργία, λέγεται τὸ σύνολον τῶν εὐχῶν καὶ δεήσεων καὶ ὕμνων, ὡς καὶ τῶν ἱεροπραξιῶν, ὅσοι συνοδεύουσιν ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τέλους τὴν ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ τέλεσιν τοῦ μυστηρίου τῆς εὐχαριστίας. Τὸ δὲ σύνολον ἐν γένει τῶν ἐκκλησιαστικῶν ἀκολουθιῶν ἅμα καὶ τελετῶν λέγεται λατρεία.

1) «Αἱ τοῦ Θεοῦ ἐκκλησίαι οἷοι προσευχῶν λέγονται, ὅθεν καὶ οἱ προσευχόμενοι παρακαλεῖν τὸν Θεὸν ὀφείλουσι μετὰ θαυμάτων καὶ ταπεινώσεως, οὐ μὴν μετὰ ἀτάκτου καὶ ἀνιδρύου σχήματος» Βαλαμ, εἰς τὸν σέ. τῆς ἐν Τρούλλῳ.

2) «Ἐγγίζει μοι ὁ λαὸς οὗτος τῇ στόματι αὐτοῦ, καὶ τοῖς χεῖρεσσι με τιμᾷ· ἡ δὲ καρδία αὐτῶν πόρρου ἀπ' ἐμοῦ. Νύκτιν δὲ σίβονταί με.» Ἠσαίας παρὰ Μιθ. εἰ. 8. Πρὸς. Ἰερωνύμ. λγ'. 31, Μάρκ. ζ'. 6, 7.

3) Οἱ ὅροι οὗτοι ἐν τῇ ἐκκλησιαστικῇ γλώσσῃ ἐναλλάσσονται πολλάκις καὶ πολλαχῶς κατὰ μετανομήν καὶ συνᾶρτον φυσικὴν καὶ εὐληπτον. Ἐπροσέ-
 θήσαμεν νὰ διακρίνωμεν καὶ ὀρίσωμεν αὐτοὺς κατὰ τὸ ἐν γένει ἐπικρατέστερον τῶν σηματομένων.

§. 121.

Κατὰ τί ἐν γένει διακρίνεται ἡ χριστιανικὴ λατρεία :

Ἡ χριστιανικὴ λατρεία, ὅπως καὶ ἡ πίστις, τῆς ὁποίας εἶνε ἡ ἐξωτερικὴ ἔκφρασις, εἶνε ὅλως πνευματικὴ, καὶ ὡς οἶόν τε καθαρὰ ἀπὸ πάσης ὑλικότητος. Δὲν ἔχει θυσίας ζώων, αἵμα-
τα ταύρων καὶ μόσχων, ὅπως εἶχον οἱ ἐθνικοί, καὶ αὐτοὶ οἱ Ἰουδαῖοι, ἡ μία δὲ καὶ μόνη θυσία αὐτῆς εἶνε ὅλως ἀναίμακτος καὶ ὑπερφύης. Ἡ χριστιανικὴ λατρεία ἔχει εἰκόνας τοῦ Σωτῆρος, τῆς Θεοτόκου καὶ τῶν λοιπῶν ἁγίων, ἀλλ' εἰς τὰς εἰκόνας ταύτας ἀπονέμεται ὄχι λατρεία, ἀλλὰ προσκύνησις μόνον καὶ τιμὴ, ἥτις καὶ αὐτῇ ἀποδίδεται ὄχι εἰς τὴν ἐνυλὸν εἰκόνα, ἀλλ' εἰς τὸ πρωτότυπον αὐτῆς, χρησιμεύουσι δὲ μόνον αἱ εἰκόνες εἰς πρόχειρον ἀνάμνησιν τῶν εἰκονιζομένων ἁγίων. Ἐν γένει δὲ εἴ τι ὑπάρχει ἐν τῇ λατρείᾳ ταύτῃ ὑλικόν, ἔχει τὴν ἱερότητα ὄχι οἰκοθεν, ἀλλ' ἐκ τινος θρησκευτικῆς ἐννοίας, τῆς ὁποίας εἶνε σύμβολον, καὶ ἡ ὁποία καθ' ἑαυτὴν εἰνέ τι ὅλως πνευματικόν. Ὅλα ἀνεξαιρέτως τὰ ἱερατικὰ ἄμφια καὶ τὰ ἱερὰ σκεύη ἔχουσι τοιαύτην πνευματικὴν σημασίαν. Διὰ τοῦτο ἡ χριστιανικὴ ἐν γένει λατρεία ὀνομάζεται λογικὴ καὶ πνευματικὴ, κατὰ τὴν διδασκαλίαν αὐτοῦ τοῦ Σωτῆρος, ὅστις εἶπεν εἰς τὴν Σαμαρείτιν, ὅτι «πνεῦμα ὁ Θεὸς καὶ τοὺς προσκυνοῦντας αὐτὸν ἐν πνεύματι καὶ ἀληθείᾳ διτ' προσκυνεῖν»¹⁾. Καὶ αὐτὸς δὲ ὁ ναὸς τῶν Χριστιανῶν δὲν θεωρεῖται ὡς ἡ καθ' αὐτὸ καὶ μένιμος κατοικία τοῦ Θεοῦ, ὅπως παρὰ τοῖς ἐθνικοῖς καὶ πολλοῖς τῶν Ἰουδαίων, ἀλλ' ἀπλῶς ὡς τόπος ἱερὸς ἀφιερωμένος εἰς τὴν συνάθροισιν τῶν πιστῶν, εἰς τὴν ἀπὸ κοινοῦ προσευχὴν καὶ τὴν τέλεσιν τῶν ἀχρόντων μυστηρίων· ὁ δὲ Θεὸς δὲν κατοικεῖ ἐντὸς ναῶν χειροποιήτων²⁾, ἀλλ' εἶνε πανταχοῦ παρῶν καὶ τὰ πάντα πληρῶν³⁾. Ἰδίως δὲ κατοικεῖ εἰς

1) Ἰω. δ'. 24. 2) Ὁ Θεὸς οὐκ ἐν χειροποιήτοις ναοῖς κατοικεῖ. Πράξ. κ'. 24. 3) Ὁ Κύ ποιήσον ἐκκλησίαν τὰ ὁσμάτιόν σου. Ἐνθα γὰρ ψαλμός

τὴν καρδίαν τῶν ἀληθῶν αὐτοῦ προσκυνητῶν», ὅσοι προσκυνοῦσιν αὐτὸν ἐν πνεύματι καὶ ἀληθείᾳ. Ὁ καθ' αὐτὸ λοιπὸν ναὸς τοῦ Θεοῦ ἐν τῇ χριστιανικῇ πίστει εἶνε αὐτὸς ὁ πιστός, καὶ αὐτὴ ἡ ἐκκλησία, ἥτοι ἡ ὁλομέλεια τῶν πιστῶν. Ὅθεν καὶ ὁ Παῦλος ἀποτρέπων τοὺς Κορινθίους ἀπὸ τῶν ἐθνικῶν ναῶν, λέγει πρὸς αὐτοὺς, «Ἵμεῖς ναὸς Θεοῦ ἐστε ζῶντος». Ἰδοὺ ὁ καθ' αὐτὸ λόγος, διὰ τὸν ὅποιον ἐν τῇ χριστιανικῇ λατρείᾳ ὁ «εὐκτήριος οἶκος» ὀνομάζεται ἐκκλησία. Καὶ τωρόντι ὁ ναὸς τῶν χριστιανῶν εἶνε αὐτὴ ἡ ἐκκλησία, ἥτοι ἡ ὁλομέλεια αὐτῶν.

§. 122.

Ἐκ τῆς πνευματικότητος τῆς χριστιανικῆς λατρείας ἔπεται καὶ ὅτι οἱ χριστιανοὶ δὲν πρέπει νὰ ἔχωσι ναοὺς;

Ἐκ τοῦ ὅτι ἡ χριστιανικὴ λατρεία εἶνε πνευματικὴ δὲν ἔπεται καὶ ὅτι δὲν ὑπάρχουσιν ἢ δὲν πρέπει νὰ ὑπάρχωσιν ἐν τῇ χριστιανικῇ λατρείᾳ καὶ ναοί. Σκοπὸς τῶν προρρήθέντων εἶνε μόνον νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ οὐσιώδης καὶ καθ' αὐτὸ χαρακτήρ τῆς χριστιανικῆς λατρείας, ὅπως καὶ τοῦ ναοῦ τῶν χριστιανῶν, εἶνε πνευματικός. Ἀλλὰ ἡ λατρεία, ὅσον πνευματικὴ καὶ ἂν εἶνε, ἀποδαίνει ἀδύνατος ὡς τοιαύτη ἐν τῷ ἐνύλῳ καὶ σωματικῷ τούτῳ κόσμῳ ἄνευ περιβλήματος ὑλικοῦ καὶ αἰσθητοῦ, ὡς προεῤῥέθη. Αὐτὰ τὰ μυστήρια, τὰ ὅποια, ὡς εἶδμεν, εἶνε ὁ πυρὴν τῆς χριστιανικῆς λατρείας, ἔχουσιν ἀναπόφευκτον ἀνάγκην τοῦ ὑλικοῦ καὶ αἰσθητοῦ τούτου μέρους. Ὅθεν καὶ ὁ ναὸς, ὡς ὁ τόπος ὁ καθιερωμένος εἰς τὴν τέλει τῶν μυστηρίων καὶ ὡς τὸ ὁρατὸν κέντρον τῆς ὅλης λατρείας, καὶ αὐτῆς ἐν γένει τῆς ἐκκλησίας, εἶνε ἀναγκαῖος καὶ ἀναπόφευκτος. Καὶ τὰ μὲν μυστήρια, καὶ μάλιστα ἡ εὐχαριστία, δὲν δύνανται

καὶ εὐχὴ καὶ προφητικῶν χάρις καὶ διάνοια τῶν ἁγίων θεοφιλῆς, οὐκ ἂν τις ἀνίσταται τῇ συνείδει τούτῃ προσηύπων ἐκκλησίαν. Χρυσόστ. εἰς ψαλμ. ρδ'. Πρὸβλ. Θεοφίλακτ. εἰς Ῥωμ. ιγ'. β', καὶ Θεοδώρητ. εἰς Κορ. ιγ'. 19. «Οἶκος ἐκκλησία ἐστὶ μικρὰ»: Χρυσόστ. εἰς Ἑφ. δμλ. α'.

α τελεσθῶσι προσηκόντως ἀλλαχού ἢ ἐν τόπῳ καθιερωμένῳ
πρὸς τοῦτο, ἦτοι ἐν τῷ ναῷ. Καὶ ἄλλα δὲ τοῦ χριστιανικοῦ
βίου καθήκοντα, δυνάμενα νὰ ἐκπληρωθῶσι κατ' οἶκον ἢ ἀλλα-
χοῦ, ἐκπληροῦνται τελειότερον καὶ τελεσφορώτερον ἐν τῇ ἐκ-
κλησίᾳ. Παντοῦ π. χ. καὶ πάντοτε ὁ χριστιανὸς δύναται καὶ
ὑπάρχει νὰ προσευχηθῇ, ἀλλὰ καθὼς εἶνε συνήθως περισπα-
σμένος εἰς μυρίας βιωτικὰς φροντίδας καὶ διαλογισμούς, ποῦ
ἄλλοῦ δύναται νὰ εὕρῃ τόπον ὅλως ἀπερίσπαστον καὶ κατὰ-
λήλῳ εἰς τὸ νὰ ἀνυψώσῃ καὶ προσηλώσῃ νοῦν καὶ καρδίαν
πρὸς τὸν Θεόν, παρὰ εἰς τὸν ἱερὸν ναόν; Παντοῦ καὶ πάντοτε
ὁ χριστιανὸς ὀφείλει ν' ἀκούῃ τὸν λόγον τοῦ Θεοῦ, ἀλλὰ διὰ
τοῦς αὐτοὺς καὶ ἄλλους ἀκόμη λόγους, ποῦ ἄλλοῦ δύναται νὰ
ἔχῃ ἀφθονον, πλήρη καὶ ἐωρεὰν τὴν πνευματικὴν ταύτην τρο-
φήν εἰμὴ ἐν τῷ ναῷ; Τοῦ δὲ κυριώτατον, ποῦ ἄλλοῦ δύναται
ἢ νὰ κοινωνήσῃ τῶν ἀχραντῶν μυστηρίων, ἢ κωλυόμενος νὰ
ἀκούσῃ καὶ τὰς λοιπὰς μὲν ἀκολουθίας, μάλιστα δὲ τὴν θείαν
καὶ ἱερὰν λειτουργίαν ἐν ὅλῃ αὐτῆς τῇ ἱερᾷ μεγαλοπρεπείᾳ
καὶ λαμπρότητι, ἣτις εἶνε ἀδύνατον νὰ μὴ κατατύξῃ βαθέως
καὶ τὴν πλέον πεπωρωμένην καρδίαν τοῦ χριστιανοῦ, νὰ ἀνυ-
ψώσῃ αὐτὴν πρὸς τὸν Θεόν, καὶ νὰ πληρώσῃ αὐτὴν εὐωδίας
πνευματικῆς καὶ θείας χάριτος; Ὁ αὐτὸς λόγος καὶ περὶ πάν-
των τῶν λοιπῶν καθηκόντων καὶ ἀναγκῶν τοῦ Χριστιανοῦ. Ὁ
ναὸς εἶνε τὸ κέντρον καὶ ἡ ἐστία, ἐξ ἧς μεταδίδεται τὸ φῶς τῆς
πίστεως εἰς ἅπασαν τὴν χριστιανικὴν ἐκκλησίαν, εἶνε ἡ καρ-
δία, ἐξ ἧς κυκλοφορεῖται εἰς τὰ μέλη αὐτῆς ἡ ζωὴ ἡ θερμαί-
νουσα καὶ ζωογονοῦσα πρὸς ἔργα ἀγαθὰ καὶ βίον θεοφιλῆ καὶ
βίαιον. Ὁ ναὸς δὲν εἶνε ὁ μόνος, ὁ κατ' αὐτὸ οἶκος τοῦ
Θεοῦ, ὅπως προανεπιύχθη ἀλλ' ὅπου ὅπως ὁ ναὸς, ὁ ὕλικός
καὶ χειροποίητος, εἶνε ἔρημος καὶ ἄ-ωνος, ἐκεῖ ἔστο βέβαιος
ὅτι καὶ ἡ ἀχειροποίητος καρδία τοῦ ἀνθρώπου πρὸ πολλοῦ ἔ-
παυσε νὰ εἶνε ναὸς τοῦ Θεοῦ.

Εἰς πόσα μέρη διαιρεῖται ὁ Χριστιανικὸς ναός, πῶς τοῦ ναοῦ τελεῖται ἡ λειτουργία, καὶ εἰς πόσα μέρη διαιρεῖται αὕτη;

Ὁ χριστιανικὸς ναός, ὅστις κατὰ μετωνυμίαν, ὡς εἶδον λέγεται καὶ ἐκκλησίαι, ἐγκαινιζόμενος ὑπὸ ἐπισκόπου ἰδιαίτερας ἐπὶ τούτῳ τελετῆς, διαιρεῖται ἄλλως ὑπ' ἄλλοις κατὰ δὲ τοὺς ἀρχαιότερους χρόνους ἡ κατασκευὴ καὶ διακοσμήσεις αὐτοῦ ἦτο διάφορος, ὀλίγον τῆς σημερινῆς. Καθόλου εἰς τὸν ναὸν διαιρεῖται εἰς τρία μέρη, τὸν πρόναον ἢ νάρθηκα τὸν καθ' αὐτό ναόν¹⁾, ὅπου ὁ ἁμβων²⁾, καὶ τὸ ἄγιον βῆμα, τὸ καὶ κυρίως ἱερόν³⁾, ὅν ἐν τῷ μέσῳ ἵσταται ἡ γίατρα⁴⁾ ἐφ' ἧς καὶ τελεσιουργεῖται ἡ ἀναίμακτος θυσία, αὕτη δὲ εἶνε, ὡς προείπαμεν, τὸ περιεχόμενον κα-

1) Ἄλλοτε προηγεῖτο τοῦ νάρθηκος καὶ τέταρτον μέρος, τὸ προπύλαιον ὅπου καὶ προσαυλίον καὶ προθύρον ἐλέγετο, ἐνίοτε δὲ καὶ αὐτὸ τοῦτο πρὸς τὸν ναόν· σήμερον δὲ κοινῶς ὀνομαζέται νάρθηξ αὐτὸ τὸ προπύλαιον. Εἰς τὸν ναόν ἵσταντο τὸ πάλαι οἱ κατηχούμενοι. Ὑπερένω δὲ τοῦ νάρθηκος εἶνε ὁ ναοκωλύτης, ὅπου ἵστανται αἱ γυναῖκες, ἀποκεχωριζόμεναι ἀπὸ τῶν ἀνδρῶν.

2) Ὁ καθ' αὐτό ναὸς ἔχει ἑκατέρωθεν τὸ βόρειον καὶ νότιον κλίτος. Ὁ κοινῶν δὲ ἡ μὲλλον συνεκοινωνεῖ· ὁ καθ' αὐτό ναὸς μὲ τὸν νάρθηκα διὰ τῶν ὡραίων πύλων, ὁ δὲ νάρθηξ μὲ τὸ προπύλαιον διὰ τῆς μεγάλης πύλης.

3) Ἀπὸ τοῦ ὀπίσθου ἀναγιγνώσκεται ὑπὸ τοῦ διακόνου τὸ εὐαγγέλιον, καὶ ρυτίττει ὁ λόγος τοῦ Θεοῦ.

4) Ὅπως ἐπὶ ἅγια τῶν ἁγίων· ἐν τῷ ναῷ τοῦ Σολομῶντος ἀπεχωρίσθη διὰ τοῦ παραπετάματος, οὕτω καὶ τὸ ἀνάλογον μέρος τοῦ χριστιανικοῦ ναοῦ ἔσται τὸ ἱερὸν ἢ ἕγιον βῆμα, διαχωρίζεται ἀπὸ τοῦ καθ' αὐτό ναοῦ διὰ τοῦ κρονοστασίου. Ἐχει δὲ τὸ ἱερὸν τρεῖς ἁγίας πύλας, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ σάβανον, ἡ συγκοινωνοῦσα μὲ τὸν καθ' αὐτό ναόν, εἶνε καὶ ἡ μεγαλοπρεπὴς αἰθὺς ἑκατέρωθεν πρὸς τὸ βόρειον καὶ νότιον κλίτος συγκοινωνοῦσαι λέγει πλάγιαί. Ἄλλοτε ὅμως καὶ αἱ τρεῖς πύλαι τοῦ ἁγίου βήματος ἔφειρον τὸν καθ' αὐτό ναόν. Εἰς τὸ ἕγιον βῆμα προσέρχονται μόνον οἱ κληρικοὶ καὶ οἱ χρησιμοῦσους εἰς τὴν ἱερὰν ὑπηρεσίαν· ἐν δὲ τῷ κατ' αὐτό ναῷ ἵσταται λαός, χοροστατοῦσιν οἱ ψάλλται, καὶ ἵσταται ὁ ἐπίσκοπος, ἐν ὑπάρχει, εἰς ἐπὶ τούτῳ θρόνον δεξιά.

5) Πῶς, ὡς ἔλεγον, λέγεται καὶ βωμὸς καὶ θυσιαστήριον. Εἰς τὸ πρὸς βορρᾶν μέρος τοῦ ἱεροῦ εἶνε ἡ πρόθεσις, τὸ δὲ πρὸς νότον εἶνε τὸ κοινικὸν ἢ μέγα τέριον. Καὶ ἐν μὲν τῇ προθείᾳ πεστοιμάζεται, ἐπὶ τῆς ἁγίας τραπέζης τελεσιουργεῖται ἡ ἀναίμακτος θυσία.

σκοπός τῆς λειτουργίας, ἥτις εἶνε ἡ ἐπισημευτάτη καὶ κυριωτάτη τέλει τῆς ἐκκλησίας, τὸ κέντρον ἐν ᾧ γένηται τῆς χριστιανικῆς λατρείας.

Ἡ λειτουργία διαιρεῖται εἰς τρία μέρη, α) τὴν προσκομιδὴν⁶⁾, ἐν ᾗ προπαρασκευάζεται τὸ μυστήριον τῆς εὐχαριστίας, καὶ ἥτις ἀπεικονίζει τὸν ἐν τῇ παλαιᾷ διαθήκῃ προσδοκώμενον Μεσσίαν· β) τὴν λειτουργίαν τῶν κατηχομένων⁷⁾, ἥτις ἀρχεται ἀπὸ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ ἱερέως «Εὐλογημένη ἡ βασιλεία τοῦ Πατρὸς, καὶ τοῦ Υἱοῦ καὶ τοῦ ἁγίου Πνεύματος. Ἀμήν», καὶ ἥτις ἀπεικονίζει τὸν ἐκ τῆς γῆς βίον τοῦ Ἰησοῦ Χριστοῦ, ὀνομασθεῖσα οὕτως, ἐπειδὴ ἄλλοτε ἐπετρέπετο ἡ ἐν τῷ ναῷ παρουσία καὶ τῶν κατηχομένων ἐν τῷ μέρει τούτῳ τῆς λειτουργίας· καὶ γ) τὴν λειτουργίαν τῶν πιστῶν, ἥτις εἶνε καὶ ἡ καθ' αὐτὴν λειτουργία, τῆς ὁποίας ἡ ἀκρόασις καὶ θεωρία δὲν ἐπετρέπετο ἄλλοτε εἰς τοὺς κατηχομένους, οἵτινες καὶ ἐξήρχοντο, ἀλλὰ τοῦ διακόνου ἐκφωνήσαντος τὰς λέξεις: «Ὅσοι κατηχούμενοι προέλθετε· μή τις τῶν κατηχομένων ὅσοι πιστοί⁸⁾. Ἐν τῇ λειτουργίᾳ δὲ

β) Οὕτως ὀνομασθεῖσαν, διότι κατ' αὐτὴν συνίθις οἱ Χριστιανοὶ προσκομιζοῦσιν εἰς τὴν ἐκκλησίαν τὸν ἄρτον καὶ τὸν οἶνον μέλλοντα νὰ χρησιμεύσῃ εἰς τὸ ἱερὸν μυστήριον τῆς εὐχαριστίας· ὅθεν καὶ ὁ προσφερόμενος αὐτός ἄρτος λέγεται ἐν γένει προσφορά. Ἐν τῇ προσκομιᾷ ὁ ἱερεὺς, ἀφ' οὗ μνημονεύσῃ τὰς προφητείας καὶ προτυπώσεις, ἐν αἷ, προσκυνῶντο ὁ Μεσσίας καὶ τὸ ἔργον αὐτοῦ, ἐν μέρει δὲ καὶ τὰ κατὰ τὴν γέννησιν καὶ τὸ πάθος τοῦ Χριστοῦ, λαμβάνει ἐκ τοῦ μέσου τῆς προσφοράς τὴν μερίδα, ὅση εἶνε ἀναγκαία εἰς τέλειαν τοῦ μυστηρίου, καὶ ἀποτίθει ἐπὶ τοῦ ἱεροῦ θύλακος λαμβάνει καὶ ὅσον μέρος τοῦ οἴνου χρηρίζεται, τὸ ὅποσον ἐγγίζει εἰς τὸ θύειν πικρὴν οὐν, ἀφ' οὗ ἀναμίξῃ εἰς αὐτὸ καὶ ὕδωρ, πρὸς ἀνάμνησιν τοῦ αἵματος καὶ ὕδατος, ὅπερ ἐξεχύθη ἐκ τῆς ἀρχαίας πλευρᾶς τοῦ Σωτῆρος ἐπὶ τὸν αἰῶνα, καὶ διότι ὁ οἶνος, ὅν μεταχειρίσθη ὁ Ἰ. Χριστὸς ἐν τῇ μυστικῇ δείπνῳ, ἦτο κραιμῶς. Συγχρόνως δὲ ὁ λειτουργὸν μνημονεῖ τὴν τὴν ἐκκλησίαν, δοῦλῳ τοῦ ἐκτεθειμένου ἁγίου, εὐχεται ὑπὲρ τῶν πιστῶν, ζώντων καὶ τεθνάντων, καὶ ὑπὲρ τῶν τραπεζομένων τὰς τροφὰς μετὰ πίστεως καὶ φόβου. Ὁμολογεῖται δὲ ὁ ἄρτος καὶ ἡ μὲν ὁ διότι εἰκονίζει τὸν θεοικονεῖτα Ἰ. Χριστόν, οὕτως προσκυνῶν αὐτὸν ἐν τῇ Παλαιᾷ διαθήκῃ ὁ ἄνθρωπος τοῦ πάσχα.

7) Ἐν τῇ λειτουργίᾳ τοῦ ἱεροῦ ἐκφωνεῖται αὕτη προσηγορία τῆς εὐχολογίας:

ταύτη, παρ στώση αὐτὸ τὸ κοσμοσωτήριον ἔργον τῆς ἑξαγε-
ρας καὶ ἀπολυτρώσεως, τελειουργεῖται ἐπὶ τῆς ἁγίας τραπέ-
ζης, κακαλιμμένης μὲ τὸ εἰλητόν ἢ ἀντιμήνσιον, αὐτὴ ἡ ἀνά-
μακτος θυσία, εἰς τῆς ὑπερφυῆς καὶ ὀβρῆτης τελειοῦται καὶ ἐ-
πισπραγίζεται ἰδίως μὲν ἡ ὅλη λειτουργία, καθόλου δὲ τὸ αὐ-
τόν τῶν ἀκολουθιῶν, καὶ ὁ ὅλος διάκασμος τῆς χριστιανικῆς
ἱατρείας⁸.

§. 124.

Ποτα εἶνε αἱ καθημεριναὶ ἀκολουθίαι, καὶ ποτα τὰ συστατικὰ αὐτῶν μέρη;
Αἱ καθημεριναὶ ἀκολουθίαι, καθόλου εἰπεῖν, εἶνε ἑπτὰ, ὅτι

«τὰ θύρας, τὰς θύρας, ἐν σφερί προσχωμεν», ἔρ' αἱ, ἐξεληθόντων τῶν κατε-
χωμένων, ἐκλείοντο αἱ θύραι.

§; Λειτουργία σημαίνει προσέει ὅχι μόνον γενικῶς τὴν καθόλου ἐκκλησια-
στικὴν ἢ ἱερατικὴν διακονίαν καὶ ὑπηρεσίαν, ἀλλὰ μερικῶς καὶ κατὰ μετωνομίαν
τὴ σύναλον τῶν εὐχῶν καὶ δεήσεων καὶ αἰτήσεων τοῦ ἱερέως· μετὰ τοῦ διακόνου
ἢ ἄλλου αὐτοῦ, καὶ μετὰ τῶν ὁμῶν τῶν χοροστατούντων ψαλτῶν ἢ ἄλλο αὐτῶν
ὅσοι συνοδεύουσι τὴν λειτουργίαν ὡς ἱεροτελεσίαν. Ἐν τῇ καθόλου ἐκκλησίᾳ ἱ-
πῆξεν ἀνάκαθεν ἐν χρήσει ἡ πρώτη καὶ ἀρχαιοτάτη λειτουργία, ἡ τοῦ ἀποστό-
λου Ἰακώβου· μετ' αὐτὴν δὲ ἐπακράτησεν ἡ τοῦ μεγάλου Βασίλειου, καὶ
μέλιστα ἡ τοῦ Ἰωάννου τοῦ Χρυσοστόμου. Αἱ δύο οὗτοι ἐν χρήσει μέχρι
σήμερον λειτουργίαι ἐν διαφέρουσιν εἰμὴ ἐπουσιωτῶς καὶ ἐν τοῖς καθ' ἑκάστην
ἀπὸ τοῦ ἀλλήλων καὶ ἀπὸ τῆς ἀρχαιοτάτης καὶ σεβασμιωτάτης, τῆς τοῦ Ἰακώ-
βου. Ἄλλ' ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ τελεῖται καὶ ἄλλη λειτουργία «ἡ τῶν προηγμενέ-
ων» διαφέρουσα ἀπὸ τῆς καθ' αὐτὴν λειτουργίας κατὰ τὸ οὐ ἐλλείπει ἀπ' αὐτῆς
ἡ ἀνάμακτος θυσία, γίνεται δὲ ὑπὸ τοῦ ἱερέως χρήσις τοῦ ἀρχαίου οὐμῆτος
καὶ τοῦ τιμίου αἵματος, τοῦ ἐν προηγουμένη πιν καὶ κυρίως λειτουργίᾳ πρ
«χρισθῆντος». Ἡ λειτουργία αὕτη τελεῖται κατὰ πᾶσαν τετάρτην καὶ πεμ-
τεκὴν τῆς ἁγίας καὶ μεγάλης τεσσαρακοστῆς, κατὰ τὴν «λειτουργίαν τῶν προ-
ηγμένων», ἥτις φέρει μὲν τὸ ὄνομα Γρηγορίου τοῦ Διαλόγου, ἀλλ' εἶνε ἄγασ-
τον ἀντιφρόντι εἶνε ἔργον αὐτοῦ. Ποιαὺτην λειτουργίαν λέγεται ὅτι εἶχε συνά-
ξῃ καὶ ὁ ἀπόστολος Μάρκος (12. Γαβριὴλ μητροπολ. Νοβογκροδ. Τελεουργ-
§. 217 ἐφεξῆς.)

Ἡ λατινικὴ ἐκκλησία, ὅπως ἐκαινοτόμησεν αὐθαίρετως περὶ τὸ μυστήρι-
ον τῆς εὐχαριστίας, οὕτως ἐκλαδοῦσε καὶ ἡρωτηρίαν καὶ τὴν βαλὰ μυσταγωγίαν
ὥστε μολὶς πλέον δυνατόν τις καὶ ἀναγνωρίσῃ αὐτήν. Ἡ λατινικὴ λειτουργία
ἀπὸ βαλὲ κατὰ μέγα μέρος τὴν εἰκονικὴν καὶ συμβολικὴν ἐννοίαν, ἥτις ὑπό-
καταίει εἰς τὴν ἑκαστον τῶν τριῶν μερῶν τῆς ὀρθόδοξου λειτουργίας καὶ εἰς τὸ
ὅσον αὐτῆς, ἅμα δὲ καὶ τὸ ἱεροπρεπὲς ὕψος καὶ κάλλος, ὅπερ αὐτὴ διακρίνει
ἀπὸ αὐτῶν

οπερινός, τὸ ἀπόδειπνον, τὸ μεσονυκτικόν,
ὁ ὄρθρος, ἡ πρώτη ῥα, ἡ τρίτη, ἡ ἑκτη καὶ ἡ ἑν-
κάτη. Ἐκ τούτων δὲ αἱ κυριώτεροι ἀκολουθίαι, εἰς τὰς ὁποί-
ας συνέρχονται καὶ οἱ λαϊκοὶ τακτικῶς, εἴτε ὁ ἑσπερινός, ψαλ-
λόμενος πρὸς τὸ ἑσπέρας, καὶ ὁ ὄρθρος, ψαλλόμενος τὸ πρωΐ,
αἱ προηγουμένοις ἀμέσως τῆς ἱερᾶς λειτουργίας. Ἄλλῃ ἔκτος
τῶν κυρίων τούτων καὶ τακτικῶν ἀκολουθιῶν καὶ τελειῶν,
καθὼς καὶ τῶν περὶ τὴν τέλει τῶν ἱερῶν μυστηρίων, ὑπάρ-
χουσι καὶ ἄλλαι ἑκταχοί, οἷον ἡ περὶ τῆς κλεινῆς νεκρώσε-
ως ἀκολουθία καὶ τελειή, ἡ κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ ἀρχιερέως ἐγ-
κενίασιν τοῦ ναοῦ, κτλ.

Εἶνε δὲ τρία κυρίως τὰ μέρη, ὅσα συγκροτοῦσιν ἐν γένει
ἐκαστὴν ἀκολουθίαν: α') ἀναγνώσματα, ἢτοι περιχοπαὶ ἐκ
τῆς ἁγίας Γραφῆς β') εὐχαί, δεήσεις καὶ αἰτήσεις
ἐπαγγελλόμεναι μυστικῶς ἢ καὶ ἐκφώνως αἱ μὲν εὐχαὶ συν-
ήθως ὑπὸ τοῦ ἱερέως, αἱ δὲ δεήσεις καὶ αἰτήσεις συνήθως ὑπὸ
τοῦ διακόνου γ') διάφοροι ὕμνοι ψαλλόμενοι ὑπὸ τοῦ χο-
ροῦ τῶν ψαλτῶν, οἵτινες ἴστανται: ἑκατέρωθεν καὶ κατὰ τὸ
ἔτος, πρὸ τοῦ εἰκοναστασίου, μέρος τοῦ καθ' αὐτὸ ναοῦ. Καὶ
αἱ μὲν εὐχαί, ὡς καὶ αἱ δεήσεις καὶ αἰτήσεις, περιέχονται ἐν
τῷ Εὐχολογίῳ, καὶ εἶνε αἱ πλεῖστοι αἱ αὐταὶ κατὰ πᾶσαν
ἀκολουθίαν ποικίλλουσι δὲ τὰ ἀναγνώσματα καὶ οἱ ὕμνοι.¹⁾

α) Οἱ ὕμνοι ψαλλόμενοι ὑπὸ τοῦ διπλοῦ χοροῦ τῶν ψαλτῶν, εἶνε ποικί-
λοι καὶ ἔχουσι διαφόρους ὀνομασίας, αἱ ὅσαι χαρακτηρίζονται ἢ τὸ περιχο-
ρεῖον ἢ τὸ μυστικὸν εἶδος αὐτῶν, ἢ ἄλλα εἶδη περιστασιακά. Καὶ γενικῶς μὲν
αἱ εἶναι αὗτοι λέγονται τροπάρια ὡς πρὸς τὸν εἰ μὴ τρεπόμενον καὶ
τῇ ἀναφορᾷ τοῦ μέλους πρὸς ἐκείνους ποικίλμενα (Ἰωάν. εἰς τοὺς ἀναγνώ-
στους τοῦ Δαμασκηνού), ἰδίως δὲ καλεῖται τὸν ἀποστόλῃς οἱ ὕμνοι ἐκείνοι,
οἵτις παρακολουθοῦσι τὸ μέλος ἰδίου τινος ὕμνου, ὅστις διὰ τοῦτο καλεῖται
ἑξῆς ἐμελόν, ἢ εἰρμός, ὅταν ὁ ἱερεὺς αὐτοῦ ὕμνος προεστίει τὴν ῥαβδί-
αὶ μίαν ἐνάστιν ἐκ τῶν ὥδων, αἷτις εἰς αὐτὴν ἀντίθεται τὸν κανόνον, ψαλλόν-
τες ἐν τῷ ὄρθρῳ. Ὡς ἐκ τοῦ περιχορεῖου δὲ αὐτῶν τὰ προπρῶτα ἀναγίνω-
νται τρία διὰ τὸ μὲν ὅτι ὕμνοισι τὴν ἀρχὴν τῆς εὐχῆς, ὅτι αὐτὰ καὶ ὅτι αὐ-
τοῖς οὖτοι τὸν Κύριον ἡμῶν ἰ. Χριστόν, ἀνασπασίμα ὅσα ἐξυμνοῦσι τὸν
τρίτον αὐτοῦ ἐκ νεκρῶν ἐγείνασθαι θεοτοκίαν, ὅσα ἐξυμνοῦσι τὸν ἱερεῖα

Τὰ ἐκ τῆς παλαιᾶς Διαθήκης ἀναγνώσματα εἶνε σπανιώτερα, καὶ συνήθη μὲν τὰ τῶν ψαλμῶν, οἵτινες εἶνε ἀχώριστοι ἀπὸ πᾶσαν σχεδὸν μεγάλην ἀκολουθίαν, σπανιώτερα δὲ τὰ ἐκ τῶν προφητῶν καὶ ἄλλων βιβλίων τῆς παλαιᾶς Διαθήκης, τὰ ὁποῖα ἀναγινώσκονται συνήθως ἐν τῷ ἑσπερινῷ. Τὰ δὲ ἐκ τῆς καινῆς Διαθήκης ἀναγνώσματα εἶνε ἀχώριστα ἀπὸ τὰς πλείους ἀκολουθίας· καὶ ἐν μὲν τῷ ὄρθρῳ ἀναγινώσκεται περι-

κον κτλ. Περιέχονται δὲ οἱ ὕμνοι εἰς τέσσαρας μάλιστα συλλογὰς, τὴν Περικλητικὴν, τὸ Τριψύδιον, τὸ Πεντηκαστάριον καὶ τὰ Μηναια. α') Ἡ Ὁκτώηχος, ἥτις συμπληρωμένη λέγεται παρακλητικὴ, περιέχει κυρίως ὕμνους εἰς τὴν ἀνάστασιν τοῦ Χριστοῦ μετὰ κανόνων τριαδικῶν. Εἶνε δὲ θρηνημένη εἰς ὅκτω ἤχους μουσικῶς, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος ἀναλογεῖ εἰς μίαν ἐκάστην ἑβδομάδα· δ' ἐν καὶ ἡ παρακλητικὴ ἐπαναλαμβάνεται περιοδικῶς ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ, ὅφ' οὗ συμπληρωθῇ ὁ κύκλος τῶν ὅκτω ἤχων ἢ ἑβδομάδων. β') Τὸ Τριψύδιον ψάλλεται ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ ἀπὸ τοῦ ἑσπερινοῦ τοῦ πρὶ τῆς Ευρακῆς τοῦ Τελώνου καὶ Φαρισαίου μέχρι τοῦ ἁγίου καὶ μεγάλου σαββάτου, οὕτως ὀνομασθὲν ὡς ἐκ τῶν τριῶν ψάδων τῶν ἐν αὐτῷ Κανόνων κατὰ Νικηφόρον τὸν Κάλιστον (ἐν τῷ α'. Συνοδαρίῳ τοῦ Τριψύδου)· τὸ δὲ περιεχόμενον τοῦ Τριψύδου ἀναφέρεται καὶ εἰς ἄλλα μὲν γεγονότα τῆς παλαιᾶς καὶ νέας Διαθήκης, κυρίως δὲ εἰς τὰ πάθη τοῦ Σωτῆρος ἡμῶν. γ') Τὸ Πεντηκαστάριον ψάλλεται ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ ἀπὸ τῆς Κυριακῆς τοῦ Πάσχα μέχρι τῆς Κυριακῆς τῶν ἁγίων Πάντων, καὶ τὸ περιεχόμενον τοῦ ἀναφέρεται κυρίως μὲν εἰς τὴν ἀνάστασιν τοῦ ἱ. Χριστοῦ, ὡς καὶ εἰς τὰ κατὰ πᾶσαν μετὰ τὸ Πάσχα Κυριακὴν καὶ ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ μνημονεύμενα γεγονότα τῆς Καινῆς Διαθήκης. δ') Τὰ μηναια εἶναι δώδεκα, κατὰ τοὺς δώδεκα μῆνας τοῦ ἐνιαυτοῦ· ἐκάστη δὲ ἡμέρα ἐκάστου μηνὸς ἔχει ἰδιαιτέραν ἀκολουθίαν ἑσπερινοῦ καὶ ὄρθρου, ὁμοιοῦσαν ὡς καὶ τὴν ἡμέραν ἐκείνην ἐορταζόμενον ἔθιον. Τοιοῦτοτρόπως τὸ μὲν εὐχολόγιον, ἔχον ὡς κέντρον ἱερωτάτων τὰς ἀκολουθίας τῶν ἱερῶν ρωτηρίων καὶ τελετῶν εἰσὶν τι στερεόν καὶ μόνιμον, καὶ ἀνήκει κυρίως εἰς τοὺς ἱερεῖς καὶ τὸ ἱερόν· περὶ δὲ τοῦ εὐχολογίου ἐτάχθη ἡ κινητὴ τετρακτίς τῆς παρακλητικῆς, τοῦ τριψύδου, τοῦ πεντηκασταρίου καὶ τῶν μηναιῶν, ἥτις ἀνήκει κυρίως εἰς τοὺς ψάλτας· καὶ εἰς τὴν ἐκτὸς τοῦ ἁγίου βήματος ἐκκλησίαν. Ποτὶς δὲ μέρη ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων ἑρμηνευτικῶν βιβλίων ψάλλονται εἰς τὸν ἑσπερινόν καὶ τὸν ὄρθρον ἐκάστης ἡμέρας, ταῦτα ἐξηγήσεται μὲν ἐκ τῆς συμπερίληψης τῆς ἡμέρας καὶ τῆς ἐορτῆς, κανονίζει δὲ ἴδιον βιβλίον τῆς ἐκκλησίας τὸ λεγόμενον τυπικόν. — Ἰδιαιτέρας συλλογὰς παρὰ ταύτας εἶνε τὸ Θεοτοκίον, περιέχον τὰ θεοτοκία· τὸ εἰρμολόγιον, περιέχον τοὺς εἰρμολογίους τοῦ ἐκαστοῦ τοὺς ἐκαστοπαρμολογίας τῆς κακίης τῶν ἀνωτέρων προφητῶν· εἰσὼν τεσσάρων συλλογῶν, καὶ τὸ ἁγίασμα τῶν ἁγίων. Ἄλλαν

κοπή τις τοῦ εὐαγγελίου, ἥ τις καὶ λέγεται ἑωθενὸν εὐαγγέλιον, ἐν δὲ τῇ λειτουργίᾳ τῶν κατηχομένων ἀναγινώσκειται μετὰ τὸ τρισάγιον πρῶτον μὲν περικοπή τις τῶν πράξεων, ἡ τῶν ἀποστολικῶν ἐπιστολῶν ὑπὸ τοῦ ἀναγνώστου, ἡ καὶ οὐτινοσδήποτε λαϊκοῦ, ἔπειτα δὲ ὑπὸ τοῦ διακόνου ἀπὸ τοῦ ἁμβωνος ἡ ὑπὸ τοῦ ἱερέως ἐκ τῶν βημοθύρων περικοπή τις ἐξ ἑνὸς τῶν τεσσάρων Εὐαγγελίων.

§. 125.

Ἐκτὸς τῶν εἰρημένων ἱεροπραξιῶν δὲν ὑπάρχουσι καὶ ἄλλα τινὰ συστατικὰ τῆς χριστιανικῆς λατρείας:

Ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ τοῦ Χριστοῦ σώζονται κατὰ παράδοσιν ἐξ αὐτῶν τῶν ἀποστολικῶν χρόνων καὶ ἐθιμὰ τινὰ ἡ συνήθειαι ἀχώριστοι ἀπὸ τῆς χριστιανικῆς λατρείας. Αἱ συνήθειαι αὗται, εἰ καὶ δὲν ἔχουσιν ἄμεσον σχέσιν καὶ συνάφειαν πρὸς τὰ δόγματα τῆς πίστεως, εἰ καὶ πολλῶν ἐξ αὐτῶν τὸν λόγον εἶνε δύσκολον νὰ ἀνεύρωμεν σήμερον, διότι πηγάζουσι κυρίως ἐκ τῆς ἀγράφου παραδόσεως τῆς ἐκκλησίας, συνεδέθησαν ὁμῶς καὶ συνεφύησαν πρὸς τὸν ὅλον διάκροσμον τῆς χριστιανικῆς λατρείας τοιουτοτρόπως, ὥστε εἶνε ἀδύνατον ν' ἀποχωρισθῶσιν ἐξ αὐτοῦ. Αἱ συνήθειαι ἄρα αὗται καθερῶθησαν κατὰ γράμμα, καὶ εἶνε πάσης τιμῆς καὶ σεβασμοῦ ἄξια. Τοιαύτη κατὰ παράδοσιν συνήθεια π. χ. εἶνε ἡ ἐν καιρῷ τῆς θείας λατρείας διὰ λυχνιῶν καὶ λαμπάδων φωταΐφια εἰς σημεῖον τῆς θερμῆς ἡμῶν πρὸς τὸν Θεὸν πίστεως καὶ ἀγάπης· ἡ διὰ λιθὰ.

προορισμὸν κοινότερον ἔχει τὸ ὡρολόγιον, τὸ ὅποσον κυρίως περιέχει τὰς εὐχάς, τοὺς ψαλμοὺς καὶ τοὺς ὕμνους, ὅσοι συναπερτίζουσι τὴν ἀκολουθίαν τῶν ὡρῶν (1^η ἀνωτέρω §. 121), ὅπως πρέπει νὰ λέγῃ ἡ ψάλλῃ αὐτάς κατ' ἴδιον ἕκαστος Χριστιανός, ὡς καὶ τὸ κανὼν τῶν καὶ ἀπολυτίκιον τῶν ἁγίων καὶ τῶν δεσποτικῶν καὶ θεομητορικῶν ἑορτῶν τῶν καθ' ὕλον τὸν ἐκαστόν, μετὰ τοῦ οἰκείου ἑορτολογίου καὶ μηνολογίου, ἔτι δὲ καὶ τὸν κανὼν καὶ τὰς εὐχάς, ἃς ὀρεῖται νὰ λέγῃ κατ' ἴδιον ἕκαστος Χριστιανός, μέλλων νὰ προσέλθῃ εἰς τὴν ἁγίαν μετάληψιν, καὶ ἄλλα: τινὰς εὐχάς καὶ κανόνας ψυχωφελεῖς. Ἐπιτομή δὲ τοῦ Ὁρολογίου εἶνε ἡ ἑρμ. Σύνοψις.

νου θυμίας εἰς ὁσμὴν εὐωδίας πνευματικῆς, καὶ εἰς σημεῖον
τῆς πρὸς τὸν Θεὸν ἀναφερομένης προσευχῆς· τὸ νὰ στρεφώ-
μεθα προσευχόμενοι πρὸς ἀνατολὰς· τὸ νὰ κατασημαινώμεθα
διὰ τοῦ σημείου τοῦ σταυροῦ· τὸ νὰ φέρωσιν οἱ ἱερεῖς ἰδιαιτέ-
ραν στολὴν, καὶ μάλιστα ὅταν τελῶσι τὰ μυστήρια, καὶ πάν-
τα ἐν γένει, ὅσα παρέλαβεν ἀνέκαθεν καὶ διαφυλάττει μετὰ
σεβασμοῦ ἡ ἀγία τοῦ Χριστοῦ Ἐκκλησία.

ΕΒΡΑΙΩΝ ΚΑΤΗΧΗΣΕΩΣ

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ,

ΗΘΙΚΟΝ.

§. 126.

Ποῖον εἶνε τὸ ἀντικείμενον τοῦ τρίτου μέρους τῆς ἱερᾶς κατηχήσεως ;

Τὸ τρίτον μέρος τῆς ἱερᾶς κατηχήσεως μᾶζ διδάσκει ποῖα εἶνε τὰ καθήκοντα ἡμῶν πρὸς τὸν Θεὸν καὶ πρὸς τὸν πλησίον, καὶ διὰ τοῦτο καλεῖται ἡ *θικόν*. Τὸ ἀντικείμενον ἄρα τοῦ τρίτου μέρους τῆς κατηχήσεως δὲν εἶνε οὔτε ἡ *πίστις* τοῦ χριστιανοῦ, οὔτε ἡ περὶ τὸν Θεὸν *λατρεία*, διὰ τῆς ὁποίας φανερώνεται ἡ *πίστις* αὐτῇ, ἀλλὰ ὁ *θεῖος νόμος*, πρὸς τὸν ὅποιον ὀφείλομεν νὰ κανονίσωμεν τὰς πράξεις ἡμῶν καὶ ὁλόκληρον τὸν βίον· ἤτοι ἡ διπλῇ πρὸς τὸν Θεὸν καὶ τὸν πλησίον ἀγάπη, εἰς τὴν ὁποίαν κυρίως συγκεφαλαιοῦται ὁ θεῖος νόμος, καὶ τὰ ἐκ τῆς ἀγάπης ταύτης ἐκπηγάζοντα καθήκοντα.

§. 127.

Ἀρκεῖ εἰς τὴν σωτηρίαν τοῦ Χριστιανοῦ τὸ ἐκ τῆς συνειδήσεως ἠθικὸν κριτήριον τῶν καλῶν καὶ κακῶν πράξεων ;

Ποῖα εἶνε τὰ καλὰ καὶ ποῖα τὰ κακὰ ἔργα, τοῦτο διδάσκει ἐν μέρει καὶ αὐτὸ τὸ φυσικὸν αἶσθημα, τὸ ὅποιον εἶνε βαθέως ἐγκεχααραγμένον εἰς τὴν καρδίαν παντὸς ἀνθρώπου, καὶ τοῦ πλείον ἀπίστου ἢ ἀμαθοῦς. Τὸ ἔμφυτον δὲ τοῦτο εἰς τὸν ἄνθρωπον ἠθικὸν αἶσθημα λέγεται *συμείδησις*¹⁾ Πᾶσα πράξις,

1) Ῥωμ. 6'. 14.

ἥ τις ἀρέσκει καὶ προξενεῖ χαρὰν εἰς τὴν συνείδησιν, λέγεται ἀγαθὴ, ὁ δὲ θέλων καὶ πράττων τὸ ἀγαθὸν ἐν ἀρετῇ, ὅπως καὶ ἡ ἐμπρακτος αὐτοῦ προαίρεσις ἀρετὴ Ἀπ' ἐναντίας δὲ πᾶσα πράξις, ἡ ὁποία προξενεῖ δυσαρέσκειαν καὶ λύπην εἰς τὴν ψυχὴν, λέγεται κακὴ, ὁ δὲ θέλων καὶ πράττων τὸ κακὸν κακός, καὶ ἡ ἐμπρακτος αὐτοῦ προαίρεσις κακία. Ἀλλὰ τὸ διὰ τῆς φυσικῆς ταύτης συνειδήσεως τοῦ ἀνθρώπου ἠθικὸν κριτήριον εἶνε φύσει ἀτελές, ὅθεν ὁ ἄνθρωπος δὲν δύναται νὰ ἐλπίσῃ ἐκ τοῦ κριτηρίου τούτου τὴν σωτηρίαν του.

§. 128.

Ἀρκεῖ εἰς τὴν σωτηρίαν τοῦ Χριστιανοῦ ὁ πολιτικὸς νόμος τῶν ἐθνῶν, καὶ κατὰ τὸν λόγον διαφέρει καὶ ὑπερέχει ἡ ἠθικὴ τοῦ θεοῦ νόμου ὑπὲρ τὴν τοῦ πολιτικοῦ ;

Ἐκ τῆς ἀνθρωπίνης συνειδήσεως, περὶ ἧς ἀνωτέρω ὁ λόγος πηγάζει καὶ ὁ πολιτικὸς νόμος τῶν διαφόρων ἐθνῶν, ἀρχαιοτέρων τε καὶ νεωτέρων. Ἀλλὰ καὶ ὁ νόμος οὗτος εἶνε ἔτι μᾶλλον ἀνεπαρκὴς εἰς τὴν σωτηρίαν τοῦ ἀνθρώπου διὰ τοὺς ἑξῆς μάλιστα λόγους. Πρῶτον μὲν οἱ πολιτικοὶ οὗτοι νόμοι δὲν ἀνταποκρίνονται οὐδ' εἰς αὐτὰς τὰς ἀνάγκας τῆς φυσικῆς συνειδήσεως ὅλας, ἀλλὰ μᾶλλον εἰς ἐκείνας, ὅσαι ἐχρῶσι σχέσιν πρὸς τὸ δίκαιον· τὸ δὲ δίκαιον τοῦτο εἶνε τι ὀλιγώτερον καὶ κατώτερον, παρ' ὅ,τι ἀπαιτεῖ ὅλη τοῦ ἀνθρώπου ἡ ἠθικὴ συνείδησις. Ὁ πολιτικὸς νόμος ἀπαγορεύει νὰ βλάβῃ τις τὸν πλησίον του, καὶ τιμωρεῖ τὸν ὅστις βλάβῃ ἐμπράκτως αὐτόν. Ἀλλὰ δὲν ἐπιβάλλει ὁμοῦ καὶ τὴν ὑποχρέωσιν νὰ μὴ μισῇ ἢ νὰ ἀγαπᾷ τις τὸν πλησίον του, καὶ ἔτι ὀλιγώτερον νὰ ἀγαπᾷ τὸν ἐχθρόν του. Ἐν γένει δὲ ὁ πολιτικὸς νόμος ἀπαγορεύει μόνον τὴν κακίαν, καὶ ταύτην ὅχι εἰς ὅλην τῆς τὴν ἔκτασιν, οὐδ' εἰς ὅλα τὰ εἶδη. Τὸ μεγαλύτερον κατόρθωμα τοῦ πολιτικοῦ νόμου εἶνε νὰ κάμῃ μόνον τὸν ἄνθρωπον νὰ φείνεται δίκαιος ἐν ὅ,τι ὡς ἄνθρωπος, δὲν δύναται ὁμοῦ καὶ νὰ σώσῃ αὐτόν ἀπὸ τὴν ἁμαρτίαν,

ἢ τὰ κάμη αὐτὸν ἅγιον. Ὅπως δὲ διαφέρει ἡ ἁμαρτία καὶ ὁ ἁμαρτωλὸς ἀπὸ τοῦ κακοῦ καὶ τῆς κακίας, οὕτω διαφέρει καὶ ἡ ἁγιότης καὶ ὁ ἅγιος ὅχι μόνον ἀπὸ τῆς δικαιοσύνης καὶ τοῦ δικαίου, ἀλλὰ καὶ ἀπ' αὐτῆς τῆς ὑπερεχούσης ἀρετῆς καὶ τοῦ ἠναρέτου. Διαφέρει δέ, διότι κακὸς μὲν εἶνε ὁ κατὰ τὴν ἀνθρωπίνην συνειδήσιν ἢ τὸν πολιτικὸν νόμον ὧν ἡ φαινόμενος ἐνώπιον τῶν ἀνθρώπων τοιοῦτος, ἁμαρτωλὸς δὲ ὁ ἐνώπιον τοῦ Θεοῦ ὅχι φαινόμενος ἀλλὰ ὧν κακός. Ὅμοίως δὲ καὶ ἑνάρετος εἶνε ὁ κατὰ τὴν ἀνθρωπίνην συνειδήσιν ὧν ἡ φαινόμενος τοιοῦτος ἐνώπιον τῶν ἀνθρώπων, ἐν' ᾧ ἅγιος εἶνε ὁ ἐνώπιον τοῦ Θεοῦ ὧν ἠνάρετος. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον διαφέρει καὶ ἡ κακία ἡ ἀρετὴ ἀπὸ τῆς ἁμαρτίας ἡ ἁγιότητος. Ἐκ τούτου ἄρ' γίνεται καταφανὲς πόσον ὁ θεῖος νόμος ὑπερέχει πάσης ἀνθρωπίνης συνειδήσεως καὶ παντός ἀνθρωπίνου νόμου.

§. 129.

Πῶς περιέχεται ὁ θεῖος νόμος, καὶ κατὰ τί διαφέρει ὁ εὐαγγελικὸς ἰδίως νόμος ἀπὸ τοῦ Μωσαϊκοῦ ;

Ὁ θεῖος νόμος περιέχεται ἐκεῖ ὅπου περιέχεται καὶ ὁ θεῖος λόγος, ἀπανταχοῦ τῆς ἀγίας Γραφῆς. Ἀλλ' ἰδίως καὶ κεφαλαιωδέστερον περιέχει τὸν θεῖον νόμον ἡ μὲν παλαιὰ Διαθήκη ἐν τῇ Δεκαλόγῳ, ἥτοι ἐν ταῖς δέκα ἐντολαῖς, τὰς ὁποίας ἔδωκεν ὁ Θεὸς εἰς τὸν Μωϋσῆν ἐπὶ τοῦ ὄρους Σινᾶ¹⁾, ἡ δὲ Καινὴ Διαθήκη ἐν τοῖς λεγομένοις Μακαρίσμασι, τοῖς ἐν τῇ διδασκαλίᾳ τοῦ Σωτῆρος ἐπὶ τοῦ ὄρους²⁾. Ἀλλὰ πρὶν ἐξεπάσωμεν λεπτομερέστερον τὰς δύο ταύτας πηγὰς τοῦ θείου νόμου, ἀναγκαῖον εἶνε νὰ σημειώσωμεν ὀλίγα τινὰ περὶ τοῦ χαρακτῆρος καὶ τοῦ σκοποῦ τῶν δύο τούτων πηγῶν αὐτοῦ.

Ὁ Μωσαϊκὸς νόμος εἶνε τριπλοῦς, ἱερουργικὸς, πολιτικὸς καὶ ἠθικὸς. Ὁ ἱερουργικὸς νόμος, κανονίζων τοὺς περὶ

1) Ἰδ. ἱερ. ἱστορ. § 61.

2) Ματθ. ε. 9—11.

τὴν Ἰουδαϊκὴν τελεσιουργίαν τύπους, οἵτινες προεικονίζον μὲν τὴν μέλλουσαν ἐν Χριστῷ Ἰησοῦ πνευματικὴν λατρείαν καθὼς καὶ ὁ πολιτικός, κανονίζων τὴν πολιτικὴν κυβέρνησιν τοῦ Ἰουδαϊκοῦ κράτους, κατηργήθησαν φυσικῶς τῷ λόγῳ διὰ τοὺς Χριστιανούς, οἵτινες διὰ τῆς χάριτος τοῦ Κυρίου ἡμῶν ἔχομεν αὐτὴν τὴν πνευματικὴν καὶ λογικὴν τοῦ Θεοῦ λατρείαν, τὰ δὲ τῆς ἐγκοσμίου κυβερνήσεως ἀφέθησαν ὅλως εἰς τὰ πολιτικὰς ἐξουσίας, κατὰ τὸ λόγιον αὐτοῦ τοῦ Ἰησοῦ Χριστοῦ «Ἀπόδοτε τὰ τοῦ Καίσαρος Καίσαρι καὶ τὰ τοῦ Θεοῦ Θεῷ»³⁾. Ἀλλ' ὁ ἠθικός ὅμως νόμος τῆς παλαιᾶς Διαθήκης ἔχει αἰώνιον καὶ ἀπαρασμεύτον κύρος, εἰ καὶ δὲν εἶνε πλήρως καὶ τέλειος, ὅπως ὁ εὐαγγελικός. Διὰ τοῦτο καὶ οἱ μακαρισμοὶ διαφέρουσιν ἀπὸ τῆς Δεκαλόγου, ὅπως τὸ Εὐαγγέλιον ἐν γένει ἀπὸ τῆς Πεντατεύχου⁴⁾. Ὁ Μωσαϊκὸς νόμος ἐδόθη διὰ νὰ προπαρασκευάσῃ τὸν ἄνθρωπον εἰς τὸ εὐαγγέλιον, ὥστε παλαιὸς νόμος ἀπολείπεται πολὺ ἀπὸ τοῦ εὐαγγελικοῦ. ὁ παλαιὸς νόμος π. χ. ὁρίζει τιμωρίαν διὰ τὸν παραβάτην τῶν ἐντολῶν, ἐν ᾧ ὁ εὐαγγελικὸς οὐδεμίαν ἐπιβάλλει σωματικὴν ἐγκόσμιον τιμωρίαν. Ὁ Μωσαϊκὸς λοιπὸν νόμος θεωρεῖ, οὕτως εἰπεῖν, τὸν ἄνθρωπον ὡς παιδίον, τὸ ὁποῖον πράττει τὸ ἀγαθόν, διότι κυρίως φοβεῖται τὴν τιμωρίαν, τὴν ὁποίαν ὁ νόμος ἐπιβάλλει εἰς τὸν πράττοντα τὸ κακόν· ἐν ᾧ ὁ εὐαγγελικὸς νόμος θέλει τὸν Χριστιανὸν ἐνήλικα, ἔχοντα καὶ ἐξασκοῦντα ἐλευθέρως ὅλα τὰ δικαιώματα τῆς αὐτεξουσίας του ἐλευθερίας.

Ἀλλ' ἂν διὰ τοὺς Χριστιανούς ἡμᾶς κατηργήθησαν αἱ ἐγκόσμοι τιμωρίαι τοῦ μωσαϊκοῦ νόμου, ἡ Δεκάλογος ὅμως καθὼς καὶ ὅλον τὸ ἠθικὸν μέρος τῆς Π. Διαθήκης, ἔχει πάντοτε τὴν αὐτὴν θεῖαν ἀξίαν καὶ τὸ αὐτὸ θεῖον κύρος. Διὰ τοῦτο καὶ ὁ Σωτὴρ ἡμῶν εἶπεν, «Οὐκ ἔλθω καταλῦσαι τὸν νόμον ἀλλὰ πληρῶσαι». Ἡ πληρῶσις δὲ αὕτη συνίσταται κυρίως ἐν

τοῦτο, ὅτι ὁ ἀληθὴς Χριστιανός, ὁ διὰ τοῦ βαπτίσματος καὶ τῶν μυστηρίων ἀποτινάξας μὲν τὸν βαρὺν τῆς ἁμαρτίας ζυγόν, πλήρης δὲ γενόμενος τῆς θείας χάριτος, πράττει τὸ ἀγαθόν, ὅχι ὅπως ὁ Ἰουδαῖος, ἐκ φόβου μὴ τιμωρηθῇ (τὸ ὁποῖον συμβαίνει ὁμοίως καὶ εἰς τοὺς πολιτικούς νόμους), ἀλλ' αὐτοπροαιρέτως καὶ ἐνισχυόμενος ἐκ τῆς θείας ἐκείνης χάριτος καὶ δυνάμεως, ἣτις ὅχι μόνον δὲν τὸν ἀφίνει νὰ πράττῃ τὸ κακόν, ἀλλὰ καὶ τὰς αἰτίας τοῦ κακοῦ ἐκρίζώνει ἀπὸ τῆς καρδίας του. Ταιαύτην δὲ τελείου Χριστιανοῦ εἰκόνα διέγραψεν αὐτὸς ὁ Σωτὴρ ἡμῶν καὶ ἀλλαχοῦ μὲν τοῦ Εὐαγγελίου, μάλιστα δὲ ἐν τοῖς Μακαρισμοῖς.

§. 130.

Εἰπὲ κατὰ σειρὰν τὸν Δεκάλογον.

Πρώτη ἐντολή. «Εγώ εἰμι Κύριος ὁ Θεός σου, ὅστις ἐξήγαγόν σε ἐκ γῆς Αἰγύπτου, ἐξ οἴκου δουλείας. Οὐκ ἔσονται σοι θεοὶ ἕτεροι πλην ἐμοῦ».

Δεύτερη ἐντολή. «Οὐ ποιήσεις σεαυτῷ εἰδωλον οὔτε παντὸς ὁμοιώμα, ὅσα ἐν τῷ οὐρανῷ ἄνω, καὶ ὅσα ἐν τῇ γῇ κάτω, καὶ ὅσα ἐν τοῖς ὕδασι ἐποκάτω τῆς γῆς· οὐ προσκυνήσεις αὐτοῖς, οὐδὲ μὴ λατρεύσεις αὐτοῖς.»

Τρίτη ἐντολή. «Οὐ λήψῃ τὸ ὄνομα κυρίου τοῦ Θεοῦ σου ἐπὶ ματαίῳ».

Τετάρτη ἐντολή. «Μνήσθητι τὴν ἡμέραν τῶν σαββάτων ἁγιάζειν αὐτήν. Ἐξ ἡμέρας ἑργᾶ, καὶ ποιήσεις πάντα τὰ ἔργα σου, τῇ δὲ ἡμέρᾳ τῇ ἐβδόμῃ Σάββατα Κυρίῳ τῷ Θεῷ σου».

Πέμπτη ἐντολή. «Τίμα τὸν πατέρα σου καὶ τὴν μητέρα σου ἵνα εὖ σοι γένηται, καὶ ἵνα μακροχρόνιος γένη ἐπὶ τῆς γῆς.»

Ἑκτὴ ἐντολή. «Οὐ φονεύσεις».

Ἑβδόμη ἐντολή. «Οὐ μοιχεύσεις».

Ὀγδόη ἐντολή. «Οὐ κλέψεις».

Ἐννάτη ἐντολή. Οὐ ψευδομαρτυρήσεις κατὰ τοῦ πλησίον σου μαρτυρίαν ψευδῆ.»

Δεκάτη ἐντολή. «Οὐκ ἐπιθυμήσεις τὴν γυναῖκα τοῦ πλησίον σου· οὐκ ἐπιθυμήσεις τὴν οἰκίαν τοῦ πλησίον σου, οὔτε τὸν ἀγρὸν αὐτοῦ, οὔτε τὸν παῖδα αὐτοῦ, οὔτε τὴν παιδικὴν αὐτοῦ, οὔτε τοῦ βοῦς αὐτοῦ, οὔτε τοῦ ὑποζυγίου αὐτοῦ, οὔτε παντὸς κτήνους αὐτοῦ, οὔτε ὅσα τῷ πλησίον σου ἐστί.»

Πόσα εἶνε τὰ μέρη τῆς Δεκαλόγου, καὶ ποῖον τὸ περιεχόμενον αὐτῶν;

Ἡ Δεκαλόγος ὠνομάσθη οὕτω, διότι συγκροτεῖται ἐκ ὀκτώ ἐντολῶν, καθὰ βλέπει τις ἀνωτέρω. Ὅπως δὲ ἔτο γεγραμμένη ἐπάνω εἰς δύο πλάκας λιθίνας, οὕτω καὶ τὸ περιεχόμενον αὐτῆς διαιρεῖται εἰς δύο μέρη. Τὸ πρῶτον μέρος μᾶς διδάσκει τὰ πρὸς τὸν Θεὸν καθήκοντα, καὶ τὸ δεύτερον τὰ πρὸς τὸν πλησίον. Διὰ τοῦτο καὶ ὁ θεὸς ἡμῶν διδάσκαλος τὸ ἡθικόν περιεχόμενον ὅλου τοῦ παλαιοῦ νόμου καὶ ὅλων τῶν προφητειῶν συνεκεραλαίωσεν εἰς τὴν διπλὴν ἀγάπην, τὴν πρὸς τὸν Θεὸν καὶ τὴν πρὸς τὸν πλησίον, εἰπὼν ὅτι «ἐν ταῖς δυαδέσσι ταύταις ἐντολαῖς ὅλος ὁ νόμος καὶ οἱ προφῆται κρέμονται»¹⁾. Καὶ ἀληθῶς ὅστις φυλάττει τὰ χρέη τῆς διπλῆς ταύτης πρὸς τὸν Θεὸν καὶ πρὸς τὸν πλησίον ἀγάπης, ἐξεπλήρωσεν ὅλον τὸν νόμον. Ἡ μὲν πρὸς τὸν Θεὸν ἐξ ὅλης ψυχῆς καὶ καρδίας ἀγάπη συνεπάγεται τὴν ὀρθὴν περὶ Θεοῦ πίστιν, καὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ «ἐν πνεύματι καὶ ἀληθείᾳ» λατρείαν. Αὕτη δὲ ἀγάπη συνηνωμένη μετὰ τὴν πρὸς τὸν πλησίον ἐξ ἑαυτοῦ καὶ πρὸς ἑαυτὸν ἀγάπην, ἀποτρέπει μὲν τὸν ἄνθρωπον ἀπὸ τοῦ κακοῦ πράξεω κακόν τι, καὶ τὸ ἐλάχιστον, εἰς τὸν πλησίον, προτρέπει δὲ αὐτὸν εἰς τὸ νὰ πράξῃ εἰς αὐτὸν πᾶν ὅ,τι καλόν.

§. 132.

Τί ποιητέον, ὅταν συμβῇ διαμάχη καὶ ἐναντιότης μεταξύ τῶν πρὸς τὸν Θεὸν καὶ τῶν πρὸς τὸν πλησίον καθηκόντων ;

Πολλάκις εἰς τὸν βίον τοῦ Χριστιανοῦ ἐπέρχεται διαμάχη καὶ ἐναντιότης μεταξύ τῶν πρὸς τὸν Θεὸν καὶ τῶν πρὸς τὸν πλησίον καθηκόντων. Κατὰ τὴν πέμπτην ἐντολὴν π. χ. ὁ χριστιανὸς ὀφείλει ἀγάπην, τιμὴν καὶ ὑπακοὴν εἰς τοὺς γονεῖς του· ἀλλ' ἐὰν οἱ γονεῖς βιάσωσι π. χ. τὸ τέκνον νὰ ἐξομώσῃ, τὸ τέκνον ὀφείλει νὰ μὴ ὑπακούσῃ εἰς τοὺς γονεῖς του, ἀλλ' εἰς τὸν Θεόν, καὶ νὰ μὴ ἐκτελέσῃ τὰ κακὰ θελήματα τῶν γονέων του, ἀλλὰ τὰς ἐντολὰς τοῦ Θεοῦ. Ἐν γένει δὲ μᾶς ἐδίδαξεν ὁ Ἰησοῦς Χριστὸς, ὅτι τὰ πρὸς τὸν Θεὸν καθήκοντα εἰς ἀνώτερα πάσης ἄλλης ἀγάπης πρὸς συγγενεῖς, πρὸς φίλους, πρὸς οἰκείους, πάσης ἄλλης ἐγκοσμίου κλίσεως, παντὶ ἄλλου ἐγκοσμίου συμφέροντος¹⁾.

§. 133.

Τί ποιητέον, ὅταν ἐπέλθῃ διαμάχη μεταξύ αὐτῶν τῶν πρὸς τὸν πλησίον καθηκόντων ;

Ἡ διαμάχη δύναται νὰ ἐπέλθῃ καὶ μεταξύ αὐτῶν τῶν πρὸς τὸν πλησίον καθηκόντων, διότι ὀφείλομεν μὲν κατὰ τὸν θεῖον νόμον νὰ ἀγαπῶμεν τὸν πλησίον ὡς τὸν ἑαυτὸν μας, ἀλλ' ἄλλος ἄλλου πλησιέστερος πρὸς ἑμᾶς, ὥστε κατ' ἀνάγκην καὶ ἡ πρὸς τὸν πλησίον ἀγάπη ὑπάρχουσι διάφοροι βαθμοί. Οἱ γονεῖς καὶ τὰ τέκνα εἶνε πλησιέστεροι παρὰ τοὺς ἄλλους συγγενεῖς, οἱ ἄλλοι συγγενεῖς πλησιέστεροι παρὰ τοὺς μὴ συγγενεῖς, οἱ φίλοι παρὰ τοὺς μὴ φίλους· οἱ ὀρθόδοξοι παρὰ τοὺς ἑτεροδόξους, οἱ ὁμοεθνεῖς παρὰ τοὺς ἀλλοεθνεῖς, καὶ οὕτω κα-

¹⁾ Αὕτη εἶνε ἡ ἑνωσις τῆς πρὸς τοὺς συγγενεῖς ἔχθρας καὶ τοῦ μίσους, παρὰ λέγει ὁ Σωτὴρ, καὶ τὸ ὅποσον δὲν πρέπει νὰ παραηγήσῃ τις ἄλλως (Ματθ. 7. Λουκ. 16. 26)

οεξης. Κατὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ Εὐαγγελίου ὀφείλομεν νὰ ἀγαπῶμεν πάντας ἀνεξαιρέτως· ἀλλ' ὅταν δὲν δυνάμεθα, κατ' ἀπόλυτον ἀνάγκην, νὰ πράξωμεν τὸ ἀγαθὸν εἰς ὅλους, καὶ εἶνε ἀνάγκη νὰ ἐκλέξωμεν καὶ προτιμήσωμεν, τότε φυσικῶς τῷ λόγῳ πρέπει νὰ προτιμηθῇ ὁ πλησιέστερος, ἥτοι οἱ γονεῖς καὶ τὸ τέκνα, παρὰ τοὺς ἄλλους συγγενεῖς, οὗτοι παρὰ τοὺς μὴ συγγενεῖς, οἱ ὁμόδοξοι παρὰ τοὺς ἑτεροδόξους, οἱ ὁμογενεῖς παρὰ τοὺς ἄλλογενεῖς, κτλ. Ὅθεν καὶ ὁ ἀπόστολος λέγει «Ἐργαζώμεθα τὸ ἀγαθὸν πρὸς πάντας, μάλιστα δὲ πρὸς τοὺς οἰκείους τῆς πίστεως»¹⁾.

§. 134.

¹⁾ Ἀνάπτουον ἀκόμη τὸν περὶ προτιμήσεως καὶ ἐκλογῆς ἐν τῇ πρὸς τὸν πλησίον ἀγάπῃ κανόνα, πρὸς ἀποφυγὴν παρεξηγήσεως.

Καὶ ὁ περὶ ἐκλογῆς καὶ προτιμήσεως οὗτος κανὼν δὲν πρέπει νὰ ἐκληφθῇ ὡς γράμμα νεκρὸν καὶ νὰ παρεξηγηθῇ· ἀλλὰ πᾶς τις ὀφείλει ν' ἀποβλέπῃ εἰς αὐτὸ τὸ πνεῦμα τοῦ Εὐαγγελίου, τὸ ὁποῖον εἶνε ἡ ἀρνήσις ἐν γένει τοῦ ἐγωϊσμοῦ, πρῶτον ὑπὲρ τοῦ Θεοῦ καὶ ἔπειτα ὑπὲρ τοῦ πλησίον. Ὅταν πρόκειται π. γ. δοῦν θάτερον ὡς ἀνάγκη σιδηρὰ καὶ ἀναπόφευκτος, ἢ νὰ σώσῃ τις τὴν οἰκογενεῖάν τοῦ μόνην, ἢ νὰ θυσιάσῃ μὲν αὐτήν, νὰ σώσῃ δὲ ὁλόκληρον κοινότητα, ἢ πόλιν ἢ ἔθνος ὁμοθρήσκων, δὲν ὑπάρχει καμμία ἀμφιβολία ὅτι πρέπει νὰ προτιμήσῃ τὴν σωτηρίαν τῶν πολλῶν παρὰ τὴν τῶν ὀλίγων, ἔστω καὶ πλησιεστέρων. Γίνεται δὲ φανερόν τοῦτο ἐκ τῶν ἐξῆς μάλιστα δύο λόγων. Ὅταν τὸ Εὐαγγέλιον διδάσκη «Ἀγάπα τὸν πλησίον σου ὡς σεαυτόν», ἐννοεῖ ἴσῃν τὴν πρὸς τὸν πλησίον μὲ τὴν πρὸς ἑαυτὸν ἀγάπην, ὅταν ὁ πλησίον αὐτοῦ εἶνε εἷς, ὅχι ὅμως καὶ ὅταν οἱ πλησίον εἶνε πολλοί. Τότε εἶνε φανερόν, ὅτι ὅστις θεωρήσῃ τὴν πρὸς τοὺς

— ~~Δημόσια~~ Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βεροῦνης

αγαπῶν τούτην ἰσὺν μὲ τὴν ἀγάπην πρὸς ἓνα καὶ
 ἕνα, τὸν ἑαυτὸν του, οὗτος δὲν εἶνε μαθητὴς τοῦ Εὐαγγελ-
 ῆ, ἀλλ' ὁπαδὸς τοῦ πλείον σατανικοῦ ἐγωϊσμοῦ. Ὁ αὐτὸς
 γὰρ καὶ περὶ τῆς πρὸς τοὺς γονεῖς, συγγενεῖς, οἰκείους,
 καὶ τοὺς κληρ. ὡς πλησιεστέρους ὀφειλομένης προτιμήσεως. Ὁ
 ἀπαρτίζων τὸ συμφέρον καὶ τὸ ἀγαθὸν τῶν πολλῶν εἰς τὸ τῶν
 ἑνῶν, οὗτος πράττει ἀντίχριστα καὶ ἀντιευαγγελικά.
 Ἐν γένει δὲ ἔστω ἐν τῷ ζητήματι τούτῳ ὁ ἐξῆς βαθμολο-
 γικὸς κανὼν : Ὁ Χριστιανὸς ὀφείλει νὰ προτιμήσῃ τὴν πρὸς
 τὸν Θεὸν ἀγάπην ὑπὲρ πᾶσαν ἄλλην· δεῦτερον ὀφείλει νὰ
 προτιμήσῃ τὴν πρὸς τοὺς πολλοὺς ἀγάπην ὑπὲρ τὴν τῶν ὀ-
 κειῶν, ἥτοι νὰ προτιμήσῃ τὸ γενικὸν συμφέρον καὶ ἀγαθὸν
 ὁ τὸ μερικόν· τρίτον ἐν ἰσῷ λόγῳ τοῦ ἀριθμοῦ ὀφείλει νὰ
 προτιμήσῃ τὸ ἀγαθὸν καὶ συμφέρον τῶν πλησιεστέρων ἀπὸ
 τῶν μὴ τοιούτων, καθὼς καὶ ἀπὸ τὸ συμφέρον καὶ ἀγαθὸν
 τοῦ αὐτοῦ. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν ὑπεριάτη πασῶν καὶ ἀνωτάτη ἀ-
 γάπη εἶνε ἡ πρὸς τὸν Θεόν, δευτέρα ἡ πρὸς τὸ γενικὸν ἀγα-
 θόν, τρίτη ἡ πρὸς τὸ μερικόν, τετάρτη ἡ πρὸς τὴν οἰκογένειαν,
 καὶ τελευταία καὶ κατωτάτη πασῶν ἡ πρὸς ἑαυτὸν. Τοῦτο μᾶς
 διδάσκει αὐτὸς ὁ Σωτὴρ ὅχι μόνον διὰ τοῦ λόγου του, ἀλλὰ
 καὶ δι' αὐτοῦ τοῦ βίου καὶ τοῦ θανάτου του.

§ 135.

Τὸ σημειωτέον πρὸς τούτοις περὶ τοῦ Θεοῦ νόμου πρὸς ἀποφυγὴν παρεξη-
 γήσεως :

Σημειωτέον πρὸς τούτοις καὶ τὸ ἐξῆς. Ἡ δεκάλογος, ὡς
 ἐφ' ἡμετέρας σύνοψις τοῦ Θεοῦ νόμου, εἶνε σύντομος καὶ βρα-
 χυλογική, ὅθεν εὐκόλως δύναται νὰ παρεξηγηθῇ ἀπὸ πάν-
 τος, ὅστις ἀποβλέψῃ εἰς τὸ γράμμα μόνον, χωρὶς συγχρόνως
 νὰ γνωρίζῃ καὶ τὸ πνεῦμα αὐτῆς, τὸ ὁποῖον ἐκτίθεται κατα-
 λήτως καὶ ἐρμηνεύεται εἰς ἄλλα μέρη τῆς Γραφῆς. Ὁ νόμος
 γὰρ ἕνεκα τῆς βραχυλογίας καὶ συντομίας ταύτης δὲν λέγει
 μὴ τὰ κυριώτατα, ἀρκεῖ δὲ ὡς ὑπονοούμενας καὶ οἰκοθεν

καὶ ἐκ τῶν λοιπῶν χωρίων τῆς Γραφῆς τὰς λεπτομερείας καὶ μερικότητας. Ὅμοίως δὲ καὶ ὅταν διατάσῃ ἀρετὴν τινα, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ὅτι ἀπαγορεύει καὶ τὴν ἐναντίαν αὐτῆς κακίαν, καθὼς καὶ ὅταν ἀπαγορεύῃ κακίαν τινά, ἐπιβάλλει καὶ τὴν ἀντίθετον αὐτῆς ἀρετὴν. Ὅταν π. χ. ἀπαγορεύῃ τὸ ψεῦδος, ἐννοεῖται ὅτι διατάσσει τὴν ἀλήθειαν, καὶ ὅταν διατάσῃ νὰ τιμῶμεν τοὺς γονεῖς ἡμῶν, ἀπαγορεύει ουχὶ χρόνως καὶ τὸ νὰ ἀτιμάζωμεν αὐτούς, ἢ νὰ πράττωμεν ὅποιονδήποτε εἰς αὐτοὺς σχετικὸν ἁμάρτημα. Διὰ τοῦτο καὶ ἡ ἀπλὴ καὶ κατὰ γράμμα ἐκθεσις τῆς Δικαλόγου εἶνε ἀνωφελής, ἐάν δὲν συνοδεύεται καὶ μὲ τὴν προσήκουσαν ἐρμηνείαν τοῦ πνεύματος, ἥ τις λαμβάνεται, ὡς προσεβρέθη, ἐξ αὐτῆς πάλιν τῆς Γραφῆς.

§. 136.

Ἡ ἀγαθὴ πράξις μένει τοιαύτη, ἐάν ᾖ αἰτίαν ἢ σκοπὸν κακόν, ἢ δὲ καὶ παύει νὰ εἶνε τοιαύτη, ἐάν ᾖ πρὸς καλὸν σκοπόν ;

Ἡ εἰς τὸ πνεῦμα τοῦ Θεοῦ νόμου προσοχή, καὶ ὅχι ἡ εἰς τὸ γράμμα αὐτοῦ Φαρισαϊκὴ προσήλωσις, θέλει μᾶς ἐλευθερώσῃ ἀπὸ πολλὰς ἄλλας ὁμοίας φύσεως παρεξηγήσεις, τὰς ὁποίας τοσάκις καὶ τόσον θαυμασίως ἐσηλίτευσεν αὐτὸς ὁ θεάνθρωπος Ἰησοῦς. Ἡ ἐλεημοσύνη π. χ. εἶνε ἔργον ἀγαθόν, καὶ ὡς τοιοῦτον ἐπιβάλλεται ἀπὸ τὸν Θεῖον νόμον πολλαχοῦ τῆς Γραφῆς ἐμμέσως καὶ ὁμέσως· ἀλλὰ τὸ ἀγαθὸν τοῦτο ἔργον χάνει τὴν ἠθικὴν ὡς πρὸς τὸν πράττοντα ἄξιαν, ὅταν ἡ προαίρεσις αὐτοῦ ὅτε εἶνε ἁγνή καὶ καθαρὰ, ἢ καὶ μεταβάλλεται εἰς κακίαν, ὅταν ἡ κατ' ἐαυτὴν ἀγαθὴ αὕτη πράξις συνοδευθῇ ἢ καὶ ὅλως ὑπαγορευθῇ ἀπὸ σκοπὸν ἄλλότριον τῆς ἐλεημοσύνης, ὅταν π. χ. ὁ ἐλεῶν πράττῃ τοῦτο «πρὸς τὸ θεαθῆναι»· ὅπως οἱ ὑποκριταί¹⁾. Ἡ ἀγαθὴ πράξις πρέπει νὰ προέλθῃ ἐκ προαιρέσεως ἁγνῆς καὶ καθαρᾶς, νὰ μὴ μολυνθῇ δὲ ἀπὸ ξένον τινα καὶ ἄλλότριον πρὸς αὐτὴν σκοπόν.

1) Ματθ. γ'. 5, ς'. 1, 2, 5, 16.

Ἄλλ' ὁμοίως πρέπει ν' ἀποφύγη καὶ τὴν ἐναντίαν παρεξήγησιν ὁ Χριστιανός, ὅτι δηλαδὴ ἡ κακὴ πράξις δύναται νὰ μεταβληθῇ εἰς καλὴν, διότι ἔγεινε πρὸς καλὸν σκοπόν. Ἡ κλοπὴ π. χ. δὲν δύναται νὰ μεταβάλλῃ φύσιν, ἐὰν ὁ κλέπτης δώσῃ τὰ κέρδη τῆς κλοπῆς εἰς ἐλεημοσύνην, ἢ συνδράμῃ ἐξ αὐτῶν εἰς νοσοκομεῖα, ἐκκλησίας καὶ σχολεῖα. Ἄλλ' ἐκτὸς τούτων ὑπάρχουσι καὶ ἔργα, καθ' ἑαυτὰ μὲν ἀδιάφορα ἠθικῶς, ἀλλ' ὡς ἐκ τῆς προαιρέσεως καὶ τοῦ σκοποῦ τοῦ πράττοντος δυνάμενα νὰ προσλάβωσιν ἠθικὸν χρῶμα καὶ νὰ γείνωσι καλὰ ἢ κακὰ τοιοῦτοτρόπως δὲ καὶ ἡ πλέον οὐδαμινῇ καὶ ἀδιάφορος καθ' ἑαυτὴν πράξις δύναται νὰ μεταβληθῇ εἰς πράξιν ἐναρετωτάτην ἢ εἰς θανάσιμον ἁμάρτημα. Τὸ νὰ χειρονομήσῃ τις π. χ. ἢ νὰ βῇ ἢ νὰ νεύσῃ οὕτως ἢ ἄλλως εἶνε καθ' ἑαυτὴν πράξις ὅλως ἀδ' ἀφορος καὶ ἀσήμαντος. Ἀλλὰ καθ' ἣν στιγμὴν ὀργίλος τις ἢ ἄλλοθεν ἐξηγριωμένος ἐχθρὸς ζητεῖ νὰ φονεύσῃ τινὰ καὶ οὗτος κρυφθῇ, τὸ νὰ χειρονομήσῃ τις ἢ νὰ νεύσῃ κτλ. ἐπίτηδες οὕτως, ὥστε ὁ ἐχθρὸς νὰ ἀνακαλύψῃ τὸν διωκόμενον ἀδίκως καὶ νὰ τὸν φονεύσῃ, τοῦτο εἶνε θανάσιμον ἁμάρτημα. Ὁ αὐτὸς λόγος καὶ περὶ πλείστων ἄλλων ὁμοίων περιστάσεων.

§. 137.

Ποτὸν λοιπὸν εἶνε τὸ κριτήριον καὶ ἡ πηγὴ τῆς ἀρετῆς καὶ κακίας, τῆς ἀγιότητος καὶ τῆς ἁμαρτίας;

Ἐκ τῶν ὀλίγων τούτων βλέπει τις, ὅτι ἡ καθ' αὐτὸ πηγὴ τῆς ἀρετῆς καὶ κακίας, τῆς ἀγιότητος καὶ τῆς ἁμαρτίας, εἶνε ἡ αὐτεξουσίος προαίρεσις καὶ βούλησις τοῦ ἀνθρώπου, καὶ ὅτι ἀγαθὴ μὲν πράξις εἶνε ἐκείνη, ἡ ὁποία προέρχεται ἀπὸ προαίρεσιν θέλουσαν καὶ προσπαθοῦσαν νὰ ἐκπληρώσῃ τὸ ἀγαθόν, ἢ τοι τὴν διπλὴν πρὸς τὸν Θεὸν καὶ πρὸς τὸν πλησίον ἀγάπην· κακὴ δὲ πράξις εἶνε ἐκείνη, ἡ ὁποία προέρχεται ἀπὸ προαίρεσιν θέλουσαν καὶ προσπαθοῦσαν νὰ ἐκπληρώσῃ τὸ κακόν. Ὅπως δὲ ἡ ἀγιότης τοῦ προσπαθοῦντος ὅλαις δυνάμεσι νὰ ἐκ-

πληρώση τὸ ἀγαθὸν δὲν αἵρεται, ἐὰν ὁ ἀγαθὸς τοῦ σκοποῦ δὲν ἐξεπληρώθη ἕνεκα αἰτίων καὶ περιστατικῶν ἀλλοτριῶν πρὸς τὴν προαίρεσίν του, οὕτω καὶ ἡ ἀμαρτία τοῦ προσπαθοῦντος νὰ πράξη τὸ κακὸν δὲν ἐλαττώνεται, ἐὰν δι' αἷμα καὶ περιστατικά ξένα πρὸς τὴν προαίρεσιν καὶ τὸν σκοπὸν του δὲν ἐξεπληρώθη ἡ θέλησίς του. Τοῦτο μάλιστα ἐπροσπάθησε διὰ πολλῶν παραδειγμάτων νὰ διδάξῃ ὁ Ἰ. Χριστὸς καὶ νὰ δείξῃ ὅτι ἐκ τῶν καλῶν ἔργων καθ' ἑαυτὰ οὐδὲν ὄφελος, ἐὰν δὲν προέρχονται ἐξ ἀγαθῆς προαιρέσεως, καὶ τὰνάπαλιν ἡμὴ πρᾶξις τῆς ἀμαρτίας δὲν ὠφελεῖ, ἐὰν ὑπάρχῃ ἤδη ἡ πρὸς αὐτὴν προαίρεσις. Τὴν δὲ ὁρθὴν περὶ τῶν πραγμάτων τούτων διάκρισιν θεωρεῖ ὡς εἷς τῶν κυριωτέρων δρων, δι' ὧν συνεπλήρωσε καὶ ἐτελείωσε τὸν παλαιὸν νόμον ¹⁾.

§. 138.

Ποία εἶνε ἡ πρώτη ἐντολή, καὶ τί μᾶς διδάσκει;

Ἡ πρώτη ἐντολή εἶνε αὕτη «Ἐγὼ εἰμι Κύριος ὁ Θεὸς σου, ὅστις ἐξήγαγόν σε ἐκ γῆς Αἰγύπτου, ἐξ οἴκου δουλείας».

Μᾶς διδάσκει δὲ ἡ πρώτη αὕτη ἐντολή πρῶτον ὅτι οἱ ἄνθρωποι ἔχομεν κύριον ἡμῶν καὶ Θεὸν αὐτὸν τὸν ἐν ταῖς παρούσαις δέκα ἐντολαῖς ἀμέσως πρὸς τὸν Ἰσραὴλ καὶ τοὺς ἀνθρώπους ἐν γένει λαλοῦντα καὶ διατάσσοντα, καὶ δεῦτερον ὅτι δὲν πρέπει νὰ ἔχωμεν θεοὺς ἄλλους ἐκτὸς αὐτοῦ.

§. 139.

Ποῖον καθῆκον πηγάζει ἐκ τῆς ἐντολῆς ταύτης, καὶ ποῖα αἰσθημάτων πρὸς τὸν Θεὸν θέλουσι κυριεύει τὴν καρδίαν μας;

Ἐκ τῆς ἐντολῆς ταύτης πηγάζει τὸ καθῆκον νὰ ἀναγνωρίσωμεν τὴν ὑπαρξίν τοῦ ἐνός καὶ μόνου ἀληθινοῦ Θεοῦ, καὶ νὰ διδαχθῶμεν τὴν εὐσίαν καὶ τὰς ιδιότητας αὐτοῦ. Ποία δὲ ἡ

τρισυπόστατος αὕτη οὐσία τοῦ Θεοῦ καὶ αἱ ιδιότητες αὐτοῦ
 μᾶς τὸ διδάσκει ὁ Θεὸς αὐτὸς διὰ τοῦ λόγου του, ὅστις ἐμπε-
 ριέχεται εἰς τὴν ἁγίαν γραφὴν, καὶ ἐξηγήθη ἀρχοῦντως εἰς
 τὸ πρῶτον μέρος τῆς παρούσης κατηχήσεως¹⁾.

Ἀναλογιζόμενοι δὲ καλῶς τὰς ιδιότητας ταύτας τοῦ ὑπερ-
 τάτου ὄντος, θέλομεν κυριευθῆ ἀπὸ φόβον καὶ ἀγάπην πρὸς
 αὐτόν, θέλομεν ἀναθέσθ ἅπασαν τὴν πίστιν καὶ τὴν ἐλπίδα
 ἡμῶν εἰς αὐτόν, καὶ πλήρεις ὑπακοῆς καὶ ὑποταγῆς εἰς τὸν
 λόγον καὶ τὰς ἐντολὰς αὐτοῦ, θέλομεν προσπαθήσθ νὰ ρυθμί-
 σωμεν ὁλόκληρον τὸν βίον, τουτέστι καὶ τὰ ἔργα καὶ τοὺς
 λόγους καὶ τὰ διανοήματα καὶ τὰς ἐπιθυμίας ἡμῶν, συμφῶ-
 νως μὲ τὸ ἅγιόν του θέλημα.

Ὁ φόβος τοῦ Θεοῦ θέλει πληρώσῃ τὴν καρδίαν ἡμῶν, ὅταν
 ἀναλογισθῶμεν, ὅτι αὐτὸς ὡς παντοκράτωρ καὶ παντοδύνα-
 μος, ὡς κύριος ζώντων καὶ νεκρῶν, εἶνε ὁ ἀπόλυτος ἡμῶν δε-
 σπότης καὶ ἐξουσιαστής καὶ ἐν τῇ παρούσῃ ζωῇ καὶ μετὰ θά-
 νατον. Ὁ δὲ φόβος οὗτος θέλει παύσῃ νὰ εἶνε δουλικὸς καὶ
 θέλει μεταβληθῇ εἰς σέβας καὶ ἀγάπην θερμὴν, ὅταν ἀναλογι-
 σθῶμεν, ὅτι αὐτὸς οὗτος ὁ μέγας καὶ παντοδύναμος Θεός, ὡς
 πανάγαθος, μᾶς ἐπλάσε κατ' εἰκόνα ἑαυτοῦ καὶ ὁμοίωσιν, καὶ
 μᾶς ἐπλούτισε μὲ φυσικὰ καὶ πνευματικὰ χαρίσματα, ἐκ τῶν
 ὁποίων καὶ τὸ ελάχιστον ἀρκεῖ νὰ πληρώσῃ τὴν καρδίαν ἡμῶν
 αἰωνίας καὶ βαθυτάτης εὐγνωμοσύνης. Ἀφ' οὗ δὲ μᾶς ἐπλά-
 σε, δὲν μᾶς ἐγκατέλιπεν, ἀλλὰ πάντοτε προνοεῖ ὑπὲρ ἡμῶν
 ὡς εὐσπλαγχνος καὶ φιλάνθρωπος, ὅχι μόνον ὑπὲρ τῆς φυσι-
 κῆς ἡμῶν ὑπάρξεως καὶ συντηρήσεως, ἀλλὰ καὶ ὑπὲρ τῆς ψυ-
 χικῆς ἡμῶν σωτηρίας. Δεῖγμα δὲ ἐξαίρετον καὶ πάσης εὐγνω-
 μοσύνης καὶ χάριτος ἀνώτερον εἶνε ἡ ὑπὲρ ἡμῶν θυσία αὐτοῦ
 τοῦ μονογενοῦς τοῦ Υἱοῦ καὶ σωτῆρος ἡμῶν.

Ἐκ τοῦ φόβου δὲ καὶ τῆς ἀγάπης ταύτης τοῦ Θεοῦ θέλει
 ἐκπάσῃ ἡ ἄκρα εἰς αὐτόν πίστις ἡμῶν καὶ ἀποσίωσις, καὶ ἡ

1) Ἰδ. §. 41 ἐπεξ.

ἀμεταθέτος καὶ ἀκλονήτος ἡμῶν ἀποφασίς νὰ ὑποταξώμεν
ἐαυτοὺς καθ' ὁλοκληρίαν εἰς τὸ ἁγίον τοῦ θέλημα. Τοιοῦτα-
τρόπως δὲ θέλει συναφθῇ μετὰ ἡμῶν καὶ τοῦ Θεοῦ σχέσις
τις ὁποία ἡ τῶν τέκνων πρὸς τὸν πατέρα, ἀλλ' ἀπείρως δια-
φέρει καὶ ὑπερέχουσα, ὅπως ἀπείρως διαφέρει ὁ οὐράνιος
πατὴρ ἡμῶν ἀπὸ τὸν ἐπίγειον καὶ σωματικόν.

§. 140.

Ποτα ἄλλα καθήκοντα πηγάζουσιν ἐκ τῆς πρώτης ταύτης ἐντολῆς;

Ἀφ' οὗ ἀναθέσωμεν ὅλην ἡμῶν τὴν πίστιν, τὴν ἐλπίδα καὶ
τὴν ἀγάπην εἰς τὸν Θεόν, ἀποφασίσωμεν δὲ νὰ ὑποταχθῶμεν
καὶ ἀφοσιωθῶμεν ὅλως εἰς αὐτόν, ἔπεται, ὅτι ὀφείλομεν νὰ
δισυκρινήσωμεν τὴν εἰς τὸν Θεόν πίστιν ἡμῶν ταύτην καὶ ἐλ-
πίδα καὶ ἀγάπην. Τοῦτο δὲ γίνεται διὰ τῆς μελέτης τοῦ θείου
τοῦ λόγου, πρῶτον μὲν καὶ κυρίως τῶν ἐντολῶν καὶ τοῦ συμ-
βόλου τῆς πίστεως, ἔπειτα δὲ τῆς ἁγίας Γραφῆς, καὶ μετὰ
ταύτην παντὸς σοφοῦ καὶ θεοφόρου πατρὸς τῆς ἐκκλησίας.
Ἐὰν δι' οἷονδῆποτε λόγον εἴμεθα ἀνίκανοι νὰ πράξωμεν τοῦτο
οἰκοθεν, ὀφείλομεν νὰ προσφεύγωμεν εἰς πάντα, ὅστις εἶνε ἱ-
κανὸς νὰ πράξῃ τοῦτο καὶ μάλιστα εἰς τοὺς διδασκάλους τῆς

Εχόμεν τὴν κυριακὴν προσευχὴν ἣ ἀποκαλεῖται οὕτως,
διότι μᾶς ἐδόθη ἀπὸ αὐτὸν τὸν κύριον ἡμῶν Ἰησοῦν Χριστόν¹⁾.
Εἶπε δὲ ἡ προσευχὴ αὕτη ἡ ἐξῆς :

« Πάτερ ἡμῶν ὁ ἐν τοῖς οὐρανοῖς,
ἁγιασθήτω τὸ ὄνομά σου·
ἐλθέτω ἡ βασιλεία σου·
γιννηθῆτω τὸ θέλημά σου ὡς ἐν οὐρανῷ καὶ ἐπὶ τῆς γῆς·
τὸν ἄρτον ἡμῶν τὸν ἐπιούσιον δός ἡμῖν σήμερον·
καὶ ἄφες ἡμῖν τὰ ὀφειλήματα ἡμῶν, ὡς καὶ ἡμεῖς ἀφίεμεν
τοῖς ὀφειλέταις ἡμῶν·
καὶ μὴ εἰσενέγκῃς ἡμᾶς εἰς πειρασμόν, ἀλλὰ ῥῦσαι ἡμᾶς
ἀπὸ τοῦ πονηροῦ.

Ὅτι σοῦ ἐστιν ἡ βασιλεία καὶ ἡ δύναμις καὶ ἡ δόξα εἰς
τοὺς αἰῶνας, Ἀμήν ».

§. 142.

Ποία εἶνε ἡ ἔννοια τῆς Κυριακῆς Προσευχῆς ;

Διὰ τῆς κυριακῆς προσευχῆς παρουσιαζόμεθα ὡς τέκνα πρὸς
τὸν ἐν οὐρανοῖς πατέρα ἡμῶν, καὶ τοῦτο σημαίνει ἡ προσφώ-
νησις « Πάτερ ἡμῶν.

Καὶ πρῶτον μὲν ὡς μέλη τῆς ἐκκλησίας τὸν παρακαλοῦμεν
ὕπὲρ τῶν ἀδελφῶν ἡμῶν καὶ ὕπὲρ τῆς ἐκκλησίας. Καὶ ὕπὲρ
μὲν τῶν ἀδελφῶν ἡμῶν τὸν παρακαλοῦμεν εὐχόμενοι νὰ ἁ-
γιασθῇ τὸ ὄνομά του, τὸ ὅποion θὰ γείνη, ὅταν οἱ ἄνθρωποι
τὸν γνωρίσωσι, διότι τότε θὰ δοξάσῃ καὶ θὰ ἁγιασῇ τὸ
ὄνομά του, εὐχαριστοῦντές τον δι' ὅσα ἀγαθὰ παρ' αὐτοῦ ἀπή-
λασαν· ὕπὲρ δὲ τῆς ἐκκλησίας τὸν παρακαλοῦμεν εὐχόμενοι
νὰ ἐλθῇ ἡ βασιλεία του, διότι ἡ βασιλεία τοῦ Θεοῦ εἶνε αὕτη
ἡ ἐκκλησία, καὶ ἡ ἐπὶ γῆς καὶ ἡ ἐν οὐρανοῖς.

1) Ματθ. 5'. Λουκ. 12'.

Δεύτερον δὲ ὡς ἄτομα τὸν παρακαλοῦμεν πρῶτον νὰ μᾶς
 δώσῃ τὸν καθημερινόν μας ἄρτον, ἥτοι ὅσα εἶνε ἀναγκαῖα εἰς
 τὴν σωματικὴν μας συντήρησιν· δεύτερον νὰ συγχωρήσῃ τὰς
 ἁμαρτίας μας, ὑποσχόμενοι καὶ ἡμεῖς νὰ συγχωρήσωμεν τοὺς
 ὅσοι ἡμαρτον εἰς ἡμᾶς· καὶ τρίτον νὰ μᾶς σώσῃ ἀπὸ τὸν πει-
 ρασμὸν τῆς ἁμαρτίας καὶ ἀπὸ τὸ κακόν. Ἐπὶ τέλους δὲ δοξο-
 λογοῦμεν τὴν αἰωνίαν του βασιλείαν καὶ δύναμιν καὶ δόξαν.

§. 113.

Ποῖται ἁμαρτίαι πηγάζουσιν ἐκ τῆς πρώτης ἐντολῆς :

Εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην ἁμαρτάνει πᾶς ὅστις ἢ ἀρνείται
 τὸν Θεόν, ἢ θεοποιεῖ οἰονδήποτε ἄλλο ὢν ἐκτός τοῦ ἑνὸς καὶ
 μόνοι ἀληθινοῦ Θεοῦ, εἴτε κτίσμα αὐλόν, ἄγγελον ἢ δαίμονα,
 εἴτε ἄνθρωπον, εἴτε κτίσμα ὕλικόν, οἷον ἥλιον, σελήνην, ἄ-
 στρον, δένδρον, λίθον, κττ., εἴτε ἀνθρωπίνην τινὰ ἐξουσίαν,
 δύναμιν, ἀρετὴν σωματικὴν ἢ πνευματικὴν.

Ἄμαρτάνουσιν ἄρα εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην α) οἱ ἄθεοι, ἥτοι
 οἱ «ἄφρονες» ἐκεῖνοι τοῦ προφητάνακτος¹⁾, ὅσοι νομίζουσιν ὅτι
 δὲν ὑπάρχει Θεός, β') ὅσοι πιστεύουσι πολλοὺς καὶ ψευδεῖς
 Θεοὺς, ὅπως οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες καὶ ἄλλοι εἰδωλολάτραι, γ')
 οἱ αἵρετικοὶ καὶ κακόδοξοι, δ') ὅσοι ἀρνοῦνται τὴν θεῖαν Πρό-
 νοιαν εἴτε κατὰ θεωρίαν εἴτε κατὰ πράξιν, εἴτε κατ' ἀμφοτέ-
 ρα, ε) οἱ γόητες καὶ οἱ παντὸς εἰδους μάντιες, ὅσοι ὑπόσχον-
 ται θαύματα ἐξ ἐνεργείας καὶ δυνάμεως τοῦ διαβόλου, ἢ οἱ αἰσ-
 δήποτε ἄλλης παρὰ τὴν θεῖαν, ς') οἱ δεισιδαίμονες, ὅσοι ἀπο-
 θιδουσι πίσιν θεῖαν καὶ σεβασμὸν καὶ εὐλάβειαν εἰς πράγματα
 τυχαῖα καὶ ὅλως ἀμοῖρα θείας δυνάμεως· τοιοῦτοι δὲ εἶνε π. χ.
 οἱ ὄνειροκρίται καὶ παντὸς εἰδους προληπτικοί, οἷον οἱ πιστεύον-
 τες οἰωνοὺς, ἀποφράδας καὶ μὴ ἡμέρας, καὶ οἱ τοιοῦτοι. Δει-
 σιδαίμονες δὲ εἶνε καὶ ὅσοι λατρεύουσι τὸν Θεὸν ὄχι «ἐν πνεύ-
 ματι καὶ ἀληθείᾳ», ἀλλὰ μηχανικῶς καὶ κατὰ τύπον.

1) Ψαλμ. cγ' 1.

§. 144.

Ποιοι ἄλλοι ἀμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην;

Ὅμοίως ἀμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην οἱ παντός
 (ἴδους ἀνθρωπάρεσκοι, ἥτοι α') ὅσοι θεοποιοῦσι τὸν ἀνθρώπον
 δι' οἵανδήποτε ἐξουσίαν καὶ δύναμιν, τὴν ὁποίαν ἔχει, οἷον ὁ-
 σοι θεοποιοῦσι τὸν βασιλέα, τὸν κυριάρχην, ἡγεμόνα, ἄρχον-
 τα, προεστώτα, προϊστάμενον κττ. β') ὅσοι θεοποιοῦσιν ἑαυ-
 τοὺς δι' ὃν ἔχουσι πλοῦτον, ἢ τὸν ὅστις ἔχει τὸν πλοῦτον·
 γ') ὅσοι θεοποιοῦσιν ἐξαίρετόν τινα ἀρετὴν ἢ πλεονέκτημα φυ-
 σικὸν ἢ πνευματικόν, τὸ ὁποῖον ἔχουσιν αὐτοὶ ἢ ἄλλοι· δ') τὸ
 ἐκτελιεῖσθαι καὶ χειρίσθαι καὶ μυσαρῶτατον πάντων, οἱ ἐγώ·
 εἰς ταῦτα, ὅσοι θεοποιοῦσι τὸ ἐγώ, ἥτοι ἑαυτοὺς.

Θεοποιούμεν δὲ τὸν ἀνθρώπον, τὸν πλοῦτον ἢ τὸ ἐγώ, ὅχι
 ὅταν π. χ. ἀπονέμωμεν εἰς τοὺς ἄρχοντας κλπ. τὴν ὀφειλομέ-
 νην εἰς αὐτοὺς τιμὴν, ὅπως θέλομεν ἴδῃ κατωτέρω, ὅχι ὅταν
 ἐκτιμῶντες τὰ φυσικὰ ἢ πνευματικὰ πλεονεκτήματα ὡς χαρί-
 σματα τοῦ Θεοῦ, πασχίζωμεν νὰ τὰ βελτιώσωμεν ἢ νὰ τὰ αὐ-
 γήσωμεν, κατὰ τὸ παράδειγμα τοῦ πιστοῦ δούλου τοῦ Εὐαγ-
 γελίου, τοῦ ἐμπιστευθέντος τὰ τάλαντα ¹⁾. ὅχι ὅταν φροντί-
 ζωμεν περὶ τοῦ ἐγώ ὅσον καὶ ὅπως πρέπει κατὰ τὸ φυσικόν
 καὶ κατὰ τὸν θεῖον νόμον· ἀλλ' ὅταν ἀποδίδωμεν εἰς τοὺς
 ἄρχοντας, εἰς τὸν πλοῦτον ἢ τὸ ἐγώ φόβον, πίστιν, ἐλπίδα
 καὶ ἀγάπην, ὅσην καὶ ὁποίαν ὀφείλομεν εἰς μόνον τὸν Θεόν·
 ὅταν ἀφοσιωθῶμεν εἰς αὐτά, ὅπως ὀφείλομεν ν' ἀφοσιωθῶμεν
 μόνον εἰς τὸν Θεόν, καὶ ὅταν ἀναθέσωμεν ὅλας μας τὰς ἐλ-
 πίδας, ὅλην ἡμῶν τὴν καρδίαν καὶ τὴν διάνοιαν εἰς αὐτά.
 Τότε ὅχι μόνον ἀμαρτάνομεν εἰς τὴν πρώτην ταύτην καὶ με-
 γίστην τῶν ἐντολῶν, ἀλλ' ὑβρίζομεν αὐτὴν τὴν μεγαλειότη-
 τα καὶ παντοδυναμίαν τοῦ Θεοῦ, ἐμπίπτοντες δὲ εἰς τὸ πλεον-
 παχυλὸν καὶ βδελυρὸν εἶδος τῆς εἰδωλολατρείας, καταισχύ-
 νομεν καὶ ἡν φέρομεν εἰκόνα τοῦ παναγίου καὶ παντοδυνάμου
 ἡμῶν δημιουργοῦ, τοῦ Θεοῦ.

1) Ματθ. κβ'. 20—23. Λουκ. ιθ'. 15—19.

Καθ' ὅμοιον λόγον ἀμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην καὶ οἱ ἀπεγνωσμένοι, διότι καὶ ἡ ἀπελπισία τούτων δὲν εἶνε κατ' οὐσίαν ἄλλο τι εἰμὴ καθαρά ἀθεία, διότι, ἐπειδὴ οἱ ἄνθρωποι οὗτοι ὄλην των τὴν ἐλπίδα εἶχον ὅχι εἰς τὸν Θεόν, ἀλλ' ἢ εἰς ἑαυτοὺς ἢ εἰς τοὺς ἄλλους ἀνθρώπους, ἢ εἰς κτῆσιν τινα προσωρινὴν καὶ ἐγκόσμιον, τὰ ὅποια ἐθεοποιοῦν, ἀφ' οὗ ἀπέβαλον τὴν ψευδῆ καὶ ἄθεον ταύτην ἐλπίδα των, ἔμειναν «καθὼς καὶ οἱ λοιποὶ» ἐθνικαὶ καὶ εἰδωλολάτραι «οἱ μὴ ἔχοντες ἐλπίδα¹⁾». Ὁ ἀληθῶς πιστεύων εἰς τὸν Θεόν ἐξ αὐτοῦ μόνον ἐλπίζει καὶ προσδοκᾷ τὰ πάντα, ἡ δὲ πρὸς τὸν Θεόν αὕτη ἐλπίς οὐδέποτε ἀπόλλυται.

§. 145.

Ποῖα εἶνε ἡ δευτέρα ἐντολὴ καὶ τί μᾶς διδάσκει;

«Ὁὐ ποιήσεις σεαυτῷ εἰδωλον, οὐδὲ παντὸς ὁμοίωμα, ὅσα ἐν τῷ οὐρανῷ ἄνω, καὶ ὅσα ἐν τῇ γῇ κάτω, καὶ ὅσα ἐν τοῖς ὕδασιν ὑποκάτω τῆς γῆς· οὐ προσκυνήσεις αὐτοῖς οὐδὲ μὴ λατρεύσεις αὐτοῖς.»

Ἡ ἐντολὴ αὕτη ἀπαγορεύει πᾶσαν παντὸς εἶδους εἰδωλολατρείαν· ἐνδιατρίβει δὲ λεπτομερῶς εἰς τὴν ἀπαγόρευσιν παντὸς εἶδους ὁμοιώματος, διότι ὁ Θεὸς ἠθέλησεν πρὸ πάντων ν' ἀποτρέψῃ ἀπὸ τῆς εἰδωλολατρείας τοὺς Ἰουδαίους, οἱ ὅποιοι εἶχον διαφθαρῇ ἐκ τῆς συμβιώσεώς των μὲ τοὺς Αἰγυπτίους, λατρεύοντας τὴν αἰσχίστην πασῶν εἰδωλολατρείαν. Ἐφαρμόζονται δὲ ἐν μέρει καὶ ἐνταῦθα ὅσα ἐν γένει ἐρρήθησαν καὶ περὶ τῆς πρώτης ἐντολῆς²⁾, διότι ἡ ὀρθὴ λατρεία εἶνε συνδεδεμένη μὲ τὴν ὀρθὴν περὶ Θεοῦ πίστιν, καὶ τὰν ἀπάλιν.

§. 146.

Ποῖα καθήκοντα καὶ ποῖαι ἀμαρτίαι πηγάζουσιν ἐκ τῆς ἐντολῆς ταύτης;

Τὸν Θεὸν ὀφείλομεν νὰ λατρεύωμεν καθὼς μᾶς ἐδίδαξεν ὁ

~~Δημόσια Κεκτητικὴ Βιβλιοθήκη Βεγγόλης~~

Σωτῆρ ἡμῶν εἰπών, ὅτι «πνεῦμα δ Θεός καὶ τοὺς προσκυνοῦν-
τας αὐτὸν ἐν πνεύματι καὶ ἀληθείᾳ δεῖ προσκυνεῖν»¹⁾. Ἡ λα-
τρεία ἄρα, τὴν ὁποῖαν ἀποδίδομεν εἰς τὸν Θεόν, πρέπει νὰ
εἴνε ἀληθοῦς καὶ πνευματικῆ, ἡ δὲ λατρεία αὕτη ἐκτελεῖται
μάλιστα καὶ κυριώτατα διὰ τῆς προσευχῆς, ὡς προείπαμεν.

Ἀμαρτάνουσιν ἄρᾳ εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην ὄχι μόνον οἱ
καθ' αὐτὸ εἰδωλολάτραι παντός εἴδους, ἀλλὰ καὶ ὅσοι ἐκτε-
λοῦσι τὰ τῆς λατρείας ὄχι ἐν πνεύματι καὶ ἀληθείᾳ, ἀλλὰ ἢ
α) ὕλικῶς καὶ μηχανικῶς, ἢ β) καθ' ὑπόκρισιν.

α) Λατρεύουσι μηχανικῶς τὸν Θεόν, ὅσοι ἀπονέμουσι τὴν
λατρείαν αὐτῶν καὶ προσκύνησιν ὄχι εἰς τὸν Θεόν, ἀλλὰ εἰς
τὰ οἰαδήποτε ὑλικά ἀντικείμενα, ὅσα ὅπωςδήποτε συνδέονται
μὲ τὴν λατρείαν.

1. Τοιοῦτοι εἴνε π. χ. ὅσοι προσεύχονται μὲ τὰ χεῖλη μό-
νον, ὄχι καὶ μὲ τὴν καρδίαν, νομίζοντες ὅτι αὕτη καὶ μόνη ἡ
ἀπαγγελία ἢ ἡ ἀκρόασις τῆς προσευχῆς ἀρκεῖ εἰς τὸ νὰ ἐκ-
πληρωθῇ καὶ ὁ καθ' αὐτὸ σκοπὸς αὐτῆς.

2. Τοιοῦτοι εἴνε ὅσοι ἀπονέμουσιν εἰς τὰς εἰκόνας ὄχι τιμὴν
καὶ προσκύνησιν ἑμμεσον, ἤτοι ὅσοι δὲν θεωροῦσιν αὐτὰς ὡς
μέσα μόνον ἀναμνηστικὰ τῶν πρωτοτύπων τοῦ Σωτῆρος καὶ
τῶν ἁγίων, ἀλλ' ἀπονέμουσιν εἰς αὐτὰς λατρείαν ἀνήκουσαν
μόνον εἰς τὸν Θεόν. Τοιοῦτοι δὲ εἴνε καὶ ὅσοι προσάπτουσιν
ἀδιασπάστως τὴν χάριν τοῦ Θεοῦ εἰς ἓνα καὶ μόνον τόπον, ἢ
εἰς μίαν καὶ μόνην εἰκόνα, καὶ ἐν γένει ὅσοι πρεσβεύουσι ταύ-
τας καὶ ὁμοίας ἄλλας δεισιδαιμονίας καὶ εἰδωλολατρείας.

3. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀμαρτάνουσι καὶ ὅσοι νομίζουσιν, ὅτι
ἀρκεῖ νὰ νηστεύσωσι διὰ νὰ σωθῶσιν ἀπὸ πάσαν ἁμαρτίαν, ἀ-
γνοοῦντες ὅτι ἡ ἀληθοῦς νηστεία δὲν συνίσταται μόνον εἰς τὴν
ἀποχὴν μερικῶν φαγητῶν ἢ εἰς τὴν ἀνταλλαγὴν αὐτῶν μό-
νον, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν συντριβὴν τῆς καρδίας, καὶ ὅτι ἡ νη-
στεία οὐδόλως ὠφελεῖ, ὅταν αἰτία καὶ σκοπὸς αὐτῆς δὲν εἴνε
ἡ νέκρωσις τῶν παθῶν καὶ ἡ ἐγκράτεια, χάριν τῆς ὁποίας καὶ

1) 1ω. δ'. 24.

διετάχθη ὑπὸ τῆς ἐκκλησίας. Τί δὲ νὰ εἶπῃ τις περὶ ἐκείνων, οἵτινες νομίζοντες, ὅτι δύνανται νὰ διαφύγῃσι δολιευόμενοι τὸν θεῖον νόμον, ὅπως διαφεύγῃσι καὶ τοὺς ἀνθρωπίνους, ἐπέχουσι μὲν ἀπὸ κρέας καὶ τὰ λοιπὰ πασχαλινὰ φαγητά, καὶ νηστεύουσι κατὰ τὸ γράμμα τῆς ἐκκλησιαστικῆς διατάξεως, ἀλλὰ μεταβάλλουσιν ὅμως διὰ τῆς ποικιλίας καὶ ἀφθονίας τῶν φαγητῶν καὶ ποτῶν τὴν νηστείαν των εἰς κραιπάλην, μετέρα καὶ τροφὴν πάσης σαρκικῆς ἀκολασίας.

Ἐν γένει δὲ ἁμαρτάνουσιν εἰς τὴν δευτέραν ἐντολὴν πάντες ὅσοι προσηλῶνται οὐχ εἰς τὸ πνεῦμα, ἀλλ' εἰς τὸ γράμμα τοῦ θεοῦ νόμου, τὸ ὅποιον διασρέφουσι καὶ παρεξηγοῦσι κατὰ τὰς πλάνας τῆς φαντασίας των, ἢ κατὰ τὰς ἐπιθυμίας τῆς καρδίας των. Οἱ τοιοῦτοι ὁμοιάζουσι τοὺς Φαρισαίους, οἱ ὅποιοι ἤλπιζον νὰ σωθῶσι διὰ τῆς τοιαύτης εἰς τὸ γράμμα καὶ τοὺς ἐξωτερικοὺς τύπους τοῦ νόμου προσηλῶσέως των, οἱ ὅποιοι ἐφρόντιζον νὰ νίπτωσι τὰς χεῖράς των πρὶν φάγωσι, νὰ μὴ ἐγγίσωσι φαγητὸν ἀκάθαρτον, καὶ ἐν γένει περιώριζον τὴν εὐσέβειάν των εἰς ἐξωτερικοὺς τύπους, γυμνοὺς παντὸς πνεύματος καὶ πάσης ἀληθείας, εἰς «τὸ ἀνηθον καὶ τὸ χύμινον», κατὰ τὴν ἐκφράσιν τοῦ Σωτῆρος, ἀλλὰ παρημέλουν «τὰ βερότερε τοῦ νόμου, τὴν κρίσιν καὶ τὸν ἔλεον καὶ τὴν πίστιν». Διὰ τοῦτο καὶ ὅσα εἶπε κατὰ τῶν Φαρισαίων ἐκείνων ὁ Κύριος ἡμῶν¹⁾, ἐφαρμόζονται καὶ εἰς τοὺς σημερινοὺς τούτους μηχανικοὺς καὶ τυπικοὺς λατρευτάς, ἢ μᾶλλον εἰπεῖν εἰδωολάτραις.

§. 147.

Ποῖοι εἶνε οἱ καθ' ὑπόκρισιν λατρευταί ;

β'.) Κατ' ἄλλον καὶ χειρότερον τρόπον ἁμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην ὅσοι τελοῦσι τὰ τῆς λατρείας τοῦ Θεοῦ καθ' ὑπόκρισιν. Τοιοῦτοι εἶνε π. χ. ὅσοι προσεύχονται, ἢ αὐχναζοῦσιν εἰς τὴν ἐκκλησίαν ἢ ἐκτελοῦσι τὴν θείαν ἐν γένει λατρείαν καὶ τὰς ἐκκλησιαστικὰς διατάξεις, ὅχι «ἐν πνεύματι

1) Ματθ. κγ', 23 κτλ.

καὶ ἀληθείᾳ», ὅχι διὰ νὰ ταπεινώσωσιν ἑαυτοὺς ἐνώπιον τοῦ
 οὐρανίου Πατρὸς, ὅχι διὰ νὰ ἀφιερῶσιν τὸν νοῦν καὶ τὴν
 καρδίαν των εἰς τὸν Θεόν, καὶ νὰ τὸν παρακαλέσωσι νὰ τοὺς
 ἐνισχύσῃ μὲν εἰς τὴν πίστιν καὶ τὰ καλὰ ἔργα, νὰ τοὺς σώσῃ
 δὲ ἀπὸ τὴν ἁμαρτίαν, ἀλλὰ ψευδῶς καὶ καθ' ὑπόκρισιν, διὰ νὰ
 «θεαθῶσιν» ἀπὸ τοὺς ἀνθρώπους, διὰ νὰ τοὺς ἀπατήσωσι καὶ
 ἀποκτήσωσι παρ' αὐτοῖς ὑπόληψιν εὐσεβῶν καὶ ἁγίων. Οἱ
 τοιοῦτοι εἶνε χειρότεροι καὶ ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς ἀθέους, διότι ὅχι
 μόνον τοὺς ἀνθρώπους ἀπατῶσιν, ἀλλὰ καὶ τὸν Θεόν ἐμπαί-
 ζουσι, χωρὶς ποσῶς νὰ τὸν φοβῶνται. Ἀλλὰ διὰ τοῦτο καὶ
 θέλουσιν ὑποστῆ φρικτὴν τὴν τιμωρίαν τῆς μυσαρᾶς ἀσεβείας
 τῶν, διότι εἰς αὐτοὺς ἐφαρμόζονται ὅσα εἶπεν ὁ Ἰησοῦς Χρι-
 στός κατὰ τῶν ὑποκριτῶν ἐκείνων Ἰουδαίων, οἱ ὅποιοι ἐπλά-
 τνον τὰ φυλακτήριά των καὶ προσήυχοντο δημοσίως καὶ ἡ-
 γάνιζον τὰ πρόσωπά των, διὰ νὰ φανῶσιν εἰς τοὺς ἀνθρώπους
 ὑποστεύοντες καὶ εὐσεβεῖς καὶ ἅγιοι¹⁾.

§. 148.

Ποτε ἄλλοι ἁμαρτάνουσιν εἰς τὴν δευτέραν ἐντολήν;

Εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην ἁμαρτάνουσιν, ὅπως καὶ εἰς τὴν
 πρώτην, ὅσοι ἀποδίδουσι θεῖαν τιμὴν καὶ λατρείαν ᾧ εἰς τὸν
 χρυσόν καὶ τὸν ἄργυρον¹⁾ γινόμενοι δοῦλοι τῆς πλεονε-
 ξίας²⁾, ὅς) εἰς τὴν ἀνθρωπίνην ἀρχὴν καὶ ἐξουσίαν, ἢ εἰς ἄλλα
 φυσικὰ ἢ πνευματικὰ πλεονεκτήματα· ἔτι δὲ μᾶλλον ὅσοι ἀ-
 ποδίδουσι θεῖαν τιμὴν καὶ λατρείαν ὅχι εἰς τὸν Θεόν, ἀλλ'
 ἢ γ') εἰς τὰς σαρκικὰς αὐτῶν ἐπιθυμίας καὶ ἡδονάς, ὅποιοι εἶ-
 νε π. χ. οἱ κοιλιοδουλοί³⁾, ἢ δ') εἰς ἐγκοσμίους τιμὰς καὶ
 ἀπολούσεις, τῶν ὁποίων πηγὴ εἶνε ἡ ἐωσφορικὴ ἰπερφιλau-
 τία καὶ ὑπερηφάνεια⁴⁾. Ἐξοκέλλουσι δὲ εἰς τὴν εἰδωλο-

1) Ματθ. γ', 21.

2) «Πολλοὶ πλεονέκτης ὅς) εἰσιν εἰδωλολάτρης κτλ.» Ἑφ. β'. 5.

3) «Πολλοὶ γάρ, οἱ τὸ τέτατον ἀπώλειαν, ὧν ὁ Θεὸς κοίλα, οὐκ ἔστιν ἡμεῖς» 1^ο Κορ. γ' 39.

4) «Ἐν τῇ ὑπερηφανείᾳ ἀπώλειαν» Ἰωβ. 8', 43.—Σοφ. Εἰρ. 1'. 42.

λατρείαν ταύτην ὅσοι θεοποιῶσι καὶ λατρεύουσιν ἑαυτούς, ἀποδίδοντες εἰς τὸ ἐγὼ τμήν, λατρείαν, ὑποταγήν, πίστιν καὶ ἀφοσίωσιν, ὅση καὶ ὅποια ὀφείλεται εἰς μόνον τὸν Θεόν, ἥ καὶ ἀνωτέραν ἀκόμη. Ἡ δὲ ὑπερφιλανθία αὕτη καὶ ὑπερηράνεια εἶνε μήτηρ καὶ ῥίζα πάντων τῶν κακῶν.

Πάντες οἱ κατὰ τὴν ἔννοιαν ταύτην εἰδωλολάτραι εἶνε ἀποστάται τοῦ Θεοῦ, ὅπως ὁ Ἑωσφόρος, διὰ τῆς ὑπερφιλανθίας καὶ ὑπερηράνειας, λάτραι τοῦ Βαμμωνᾶ διὰ τῆς πλεονεξίας, καὶ δοῦλοι τῶν σαρκικῶν ὀρεξίων καὶ ἐπιθυμιῶν, ὡς τὰ κτήνη. Ὁ νοῦς καὶ τὴ καρδίαν τῶν εἰδωλολατρῶν τούτων προσκολλᾶται εἰς τὴν σάρκα ἑαυτῶν καὶ εἰς τὴν ὕλην τοῦ κόσμου, καὶ διὰ τοῦτο εἶνε ὅλως μακρὸν τοῦ Θεοῦ, ὅστις εἶνε πνεῦμα. Ἀλλὰ διὰ τοῦτο οἱ εἰδωλολάτραι οὗτοι θέλουσι γείνη υἱοὶ καὶ κληρονόμοι ὅχι τοῦ φωτός καὶ τῆς ζωῆς, ἀλλὰ τοῦ σκοτός καὶ τοῦ θανάτου. «Οἱ γὰρ κατὰ σάρκα ὄντες τὰ τῆς σαρκὸς φρονοῦσιν, οἱ δὲ κατὰ πνεῦμα τὰ τοῦ πνεύματος. Τὸ γὰρ φρόνημα τῆς σαρκὸς θάνατος, τὸ δὲ φρόνημα τοῦ πνεύματος ζωὴ καὶ εἰρήνη... Οἱ δὲ ἐν σαρκὶ ὄντες θεῷ ἀρέσαι οὐ δύνανται»⁵⁾.

§. 149.

Ἀντιβαίνει εἰς τὴν δευτέραν ἐντολὴν ἡ προσκύνησις τῶν εἰκόνων :

Ἡ προσκύνησις τῶν εἰκόνων δὲν ἀντιβαίνει εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην, διότι ὁ Θεὸς ἀπαγορεύει δι' αὐτῆς νὰ κάμνωμεν εἰδωλα ἢτοι ὁμοιώματα ψευδῶν Θεῶν γλυπτὰ κυρίως, τὰ ὅποια θεοποιοῦντες νὰ λατρεύωμεν, ὅπως οἱ ἔθνικοι καὶ εἰδωλολάτραι. Ἡμεῖς δὲ ἀπεικονίζομεν ὅχι διὰ τῆς γλυπτικῆς, ἀλλὰ διὰ τῆς ζωγραφικῆς, τοὺς εἰκόνας τοῦ Σωτῆρος, τῆς Θεοτέκευ καὶ τῶν ἁγίων, ὅχι διὰ νὰ τὰς θεοποιήσωμεν καὶ λατρεύσωμεν, ὅπως οἱ ἔθνικοι καὶ εἰδωλολάτραι, ἀλλὰ μόνον διὰ νὰ μᾶς βοηθῶσιν εἰς τὸ νὰ μεταφέρωμεν τὸν νοῦν καὶ τὴν καρδίαν ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν καὶ ὁρατῶν τούτων ἀπεικονισμάτων

Δημιῶτα Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Ἑρεσίας

εἰς αὐτὰ τὰ πρωτότυπα. Ὅθεν καὶ ἡ τιμὴ καὶ προσκύνησις, ἡ ὁποία ἀποδίδεται διὰ τοῦ ἀσπασμοῦ εἰς τὰς εἰκόνας ταύτας, οὔτε λατρεία εἶνε, οὔτε εἰς τὰ ὑλικά ταῦτα ἀντικείμενα καθ' ἑαυτὰ ἀποδίδεται, ἀλλὰ μεταφέρεται ἀπ' αὐτῶν εἰς τὰ πρωτό-
τυπα. Δωρεάν λοιπὸν ὑβρίζουσιν ἡμᾶς ὡς εἰδωλολάτραις οἱ σημερινοὶ διαμαρτυρόμενοι, κατὰ μίμησιν τῶν ἀρχαίων εἰκονο-
μάχων ἢ εἰκονοκλαστῶν, ἐπὶ τῷ λόγῳ ὅτι λατρεύομεν τὰς εἰκόνας, τὸ ὁποῖον, ὡς εἶδομεν, εἶνε ψευδέστατον. Ὅχι λα-
τρείον, ἀλλὰ τιμὴν μόνον καὶ προσκύνειν ἀποδίδομεν διὰ
τῶν εἰκόνων τῶν ἀρίων εἰς τὰ πρωτότυπα αὐτῶν

§. 150.

Πρὸς εἶνε ἡ τρίτη ἐντολή, καὶ τὴν μᾶς διδάσκει :

« Οὐ λήψῃ τὸ ὄνομα Κυρίου τοῦ Θεοῦ σου ἐπὶ ματαίῳ ».

Ἡ τρίτη ἐντολὴ μᾶς διδάσκει, ὅτι δὲν πρέπει νὰ μεταχει-
ριζώμεθα τὸ ὄνομα τοῦ Θεοῦ διὰ ματαίαν ἀφορμὴν καὶ αἰτίαν,
ἀλλὰ μόνον ὅταν πρέπη ἢ εἶνε ἀνάγκη, καὶ τότε δὲ νὰ τὸ με-
ταχειριζώμεθα μὲ ὅλην τὴν εὐσέβειαν καὶ τὴν σεβασμὸν, ὅστις
ὀφείλεται εἰς αὐτό. Τοῦτο δὲ γίνεται π. χ. ὁσάκις προσφεύγο-
μεν πρὸς τὸν Θεὸν ἐν συντριβῇ καὶ κατανύξει καρδίας, διὰ νὰ
ζητήσωμεν περ' αὐτοῦ βοήθειαν εἰς τὰς ἀνάγκας καὶ λίψεις
καὶ στενοχωρίας ἡμῶν, ἢ διὰ νὰ τὸν παρακαλέσωμεν νὰ μᾶς
σώσῃ ἀπὸ πάντων σατανικῶν πειρασμῶν, ἀπὸ πάσαν φυγώλεθρον
ἐπιθυμίαν ἢ ἐννοίαν, ἢ ὁσάκις δοξολογοῦμεν αὐτὸν εὐγνωμα-
νοῦντες διὰ τὰς πρὸς ἡμᾶς εὐεργεσίας του ἰδίᾳ ἢ δημοσίᾳ.

§. 151.

Ποτε ἀμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην :

Εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην ἀμαρτάνουσιν οἱ βλάσφημοι. Βλά-
σφημος δὲ εἶνε ἐκεῖνος, ὅστις ἐξ ὀργῆς, ἢ μωρίας, ἢ ἄλλου
παρομοίου λόγου, προφέρει λέξεις ὑβριστικὰς, ἢ ἐξευτελιστι-
κὰς, ἢ ἀρνητικὰς τοῦ Θεοῦ, ἢ μιᾶς ἢ πλειοτέρων ἀπὸ τὰς ἱ-

διότητας αὐτοῦ, ἢ καὶ λέξεις ἀπρεπεῖς καὶ ἀναρμόστους εἰς τὸν Θεόν ἢ εἰς τὰς ιδιότητας αὐτοῦ. Βλασφημεῖ δὲ καὶ ὅστις προσφέρει τοιαύτας λέξεις κατὰ τῶν ἱερῶν προσώπων ἢ ἀντικειμένων, ὡς τοιούτων, ὡς μετεχόντων δηλ. ἀμέσως ἢ ἐμμέσως τῆς θείας χάριτος, ἢ ὡς σχετιζομένων πρὸς αὐτήν.

Ἀμαρτάνουσι λοιπὸν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην ὅσοι π. χ. κατακρίνουσιν ἢ ἐπικρίνουσιν ἢ μέμφονται δι' οἷονδῆποτε μωρὸν τῶν λόγων τὸν Θεόν ἢ τὴν θείαν πρόνοιαν, ἢ γογγύζουσι κατ' αὐτοῦ ὡς οἰοῦντο κακῶν, διότι ὁ μὲν Θεὸς οὐδέποτε εἶναι αἴτιος τοῦ κακοῦ, ὅσα δὲ οἱ βλασφημοῦντες προσποιῶνται ὡς κακὰ ἢ πρὸς ἔρχονται ἐξ αὐτῶν, διότι ὑπετάχθησαν εἰς τὸν Σατανᾶν, ὅστις εἶναι ἡ ἀρχὴ καὶ αἰτία παντός κακοῦ, καὶ ἔγειναν δοῦλοι τῶν κακῶν αὐτῶν ὀρέξεων καὶ ἐπιθυμιῶν, ἡ δὲν εἶναι καθ' ἑαυτὰ τοιαῦτα, ἀλλ' ὀνομάζονται ὑπὸ τῶν βλασφημῶν οὕτω, διότι δὲν εἶναι σύμφωνα μὲ τὰς κακὰς καὶ αἰσχροὺς τῶν ἐπιθυμίας.

§ 152.

Ποιοὶ ἄλλοι εἶνε βλάστημοι ;

Βλάστημοι εἶνε προσέτι καὶ ὅσοι μεταχειρίζονται τὸ ὄνομα τοῦ Θεοῦ εἴτε διὰ νὰ κατασραστῶσιν ἑαυτὸν ἢ τὸν πλησίον, εἴτε διὰ νὰ ὁμώσωσιν ἐπὶ πραγμάτων οὐτιδανῶν καὶ ἀσημάντων. Τὸ εἶδος δὲ τοῦτο τῆς βλασφημίας ἀποβαίνει δυστυχῶς συνήθεια δυσεξελειπτος, καὶ τοιουτοτρόπως ἀκούσμεν καθ' ἑκάστην πολλοὺς ἀνθρώπους, οἱ ὅποιοι χωρὶς φόβον Θεοῦ ἢ κατάρωνται ἑαυτοὺς καὶ τὸν πλησίον τῶν δι' οὐ μιδανὰς αἰτίας καὶ ἀφορμὰς, ἢ ὀρκίζονται λέγοντες « μὰ τὸν Θεόν, μὰ τὴν πίστιν μου, μὰ τὸν Χριστόν » κτλ., ἢ ὅπως ἂνεν ἀνάγκης καὶ κατ' ἀνέρον καὶ ἀσεβεστάτην συνήθειαν, ἢ δι' αἰτίαν μικρὰν καὶ οὐδαμίνην. Τὸ δὲ χερίστον καὶ πάντων ἀσεδέστατον εἶνε, ὅτι πολλοί, χυδαῖοι μάλιστα καὶ ὅπως ἀκατήχητοι, κατατολμῶσι νὰ προσφέρωσιν ὕδρεις αἰσχροὺς καὶ ἀνοσίους ὄχι μόνον εἰς πρόσωπα καὶ πράγματα ἱερά, ἀλλὰ καὶ εἰς αὐτὸ τὸ πανάγιον ὄνομα τοῦ Θεοῦ. Εἰς τοὺς τοιούτους δὲν μένει πλέον ἄλ-

βαθμὸς ἀνοσιότητος καὶ ἀσεθείας, διότι ὑπερεπλήρωσαν
έτρον τοῦ φρικώδους καὶ θανασίμου αὐτῶν ἁμαρτήματος.

§. 153.

τοὶ ἄλλοι εἶνε βλάσφημοι ;

ἔρχεται καὶ ἄλλο εἶδος βλασφημίας, ἀκίμη δυστυχῶς
θέστερον, τὸ ἐξῆς· Οἱ βλάσφημοι οὗτοι μεταχειρίζονται
τὸ ὄνομα τοῦ Θεοῦ εἰς τὰς συνήθεις αὐτῶν παραφοράς, ὀρ-
καὶ δυσαρρεσκείας, ἀλλὰ τοῦ διαβολοῦ, εἰς τὸν ὅποιον καὶ
διατάζουσι νὰ παραδώσωσι χιλιάκις τῆς ἡμέρας ἢ ἑαυτοὺς
ὡς ἀδελφούς των. Οἱ τοιοῦτοι δὲν ἁμαρτάνουσι μὲν ἀμέ-
εις τὴν ἐντολὴν ταύτην, ἁμαρτάνουσιν ὅμως εἰς ὅλον τὸν
νόμον, διότι ἀπαρνοῦνται τὸν Θεόν, εἰς τὸν ὅποιον ὀφεί-
ει διὰ παντός πίστιν καὶ ὑποταγὴν, παραδίδοντες ἑκουσίως
τοὺς ἢ τοὺς ἄλλους εἰς τὸν Σατανᾶν, ἀπὸ τὸν ὅποιον ἀπε-
θήσαν διὰ τοῦ ἁγίου βαπτίσματος. Οἱ τοιοῦτοι βλάσφημοι
ἐνοχοὶ μεγίστης ἁμαρτίας, διότι παραδίδοντες ἑαυτοὺς ἢ
πλησίον εἰς τὸν Σατανᾶν, ἀποδεικνύουσιν ὅτι ἡ ψυχὴ
εἶνε πλήρης ὀργῆς καὶ μίσους φρικώδους. Ὅπως δὲ ἡ
ἰδοσις εἰς τὸν Σατανᾶν εἶνε ἀπάρνησις τοῦ Χριστοῦ, τοι-
τρόπως καὶ τὸ μῖσος τοῦτο εἶνε ἄρνησις τῆς πρὸς τὸν
σίον ἀγάπης. Διὸ καὶ ὁ βλάσφημος ἁμαρτάνει εἰς αὐτὸν
θεῖον νόμον, ὅστις στηρίζεται εἰς τὴν ἀγάπην ταύτην,
τε πρὸς τὸν Θεόν καὶ τὴν πρὸς τὸν πλησίον. Ὅθεν καὶ
ρόστολος λέγει, « Πᾶς ὁ μισῶν τὸν ἀδελφὸν αὐτοῦ ἄνθρω-
τόντος ἐστὶ· καὶ οἴδατε, ὅτι πᾶς ἄνθρωπος ἀκτόνος οὐκ ἔχει
αἰώνιον ἐν αὐτῷ μένουσαν »¹).

§. 154.

τοὶ ἄλλοι ἁμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην ;

ἰδομεν ἀνωτέρω πόσον ἁμαρτάνουσιν οἱ μεταχειριζόμενοι

ἀνευ ἀνάγκης τὸ ὄνομα τοῦ Θεοῦ εἰς ὄρκους περὶ οὐδαμινῶν πραγμάτων. Ἄλλ' ὅταν ὑπάρχῃ ἀνάγκη μεγάλη καὶ φανερά, ὅταν π. χ. ἀπαιτῇται ὀρκωμοσία ὑπὸ τῆς δικαστικῆς ἐξουσίας, ὅπως φανερωθῇ ἡ ἀλήθειαι ἐνώπιον Θεοῦ καὶ ἀνθρώπων, διὰ νὰ σωθῇ ἐκ μεγάλου κινδύνου ἡ ἀθωότης καὶ ἡ δικαιοσύνη, τότε ἡ χρῆσις τοῦ ὀνόματος τοῦ Θεοῦ, ἣτοι ὁ ὄρκος, ἐπιτρέπεται. Εἶνε δὲ ὄρκος ἡ ἐξ ὅλης ψυχῆς καὶ καρδίας μετ' ἀκρου σεβασμοῦ καὶ φόβου ἐπίκλησις τοῦ ὀνόματος τοῦ Θεοῦ, ὡς μάρτυρος μὲν, ὅτι ὁ ὀμνύων λέγει τὴν ἀλήθειαν, ὡς τιμωροῦ δὲ, ἐὰν ὁ ὀμνύων δὲν λέγῃ τὴν ἀλήθειαν, ἡ ἀθετήσις ἐπειτα ὅ,τι διὰ τοῦ ὀρκου ὑπεσχέθη ἢ ὑπεχρεώθη. Ὁ ὄρκος εἶνε μία ἀπὸ τὰς πλέον σοβαρὰς καὶ ἐπισημοῦς πράξεις τοῦ Χριστιανοῦ, ὅθεν καὶ πρὶν οὗτος ἀποφασίσῃ νὰ προβῇ εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως ταύτης, ὀρεῖται νὰ σταθμίσῃ ὠρίμως καὶ ἐμβριθῶς ὅλην τὴν σπουδαιότητα καὶ αὐτῆς τῆς πράξεως καὶ τῶν συνεπειῶν αὐτῆς. Ἐὰν ὁ ὀμνύων εἰς τὸ φοβερόν καὶ πανάγιον ὄνομα τοῦ Θεοῦ ἢ ὁμώσῃ ψευδῇ, ἡ ἀθετήσις τὸν ὄρκον του, τοῦτο σημαίνει ὅτι εἶνε ἄθλιος, ὅτι ἡ δὲν ἔχει ἡ ἀρνεῖται τὴν πίστιν του εἰς τὸν Θεόν, ὅστις εἶνε πανταχοῦ παρὼν, ὅστις ἀκούει καὶ γνωρίζει τὰ πάντα, καὶ οὐ τινος ἡ παντοδυναμία εἶνε ἴση μετ' τὴν δικαιοσύνην του¹). Διὰ τοῦτο καὶ ὁ Θεὸς λέγει διὰ τοῦ προφήτου τοῦ Ζαχαρίου ταῦτα «Καὶ εἰσελεύσεται (τὸ δρέπανον) εἰς τὸν οἶκον τοῦ ὀμνύοντος τῷ ὀνόματί μου ἐπὶ ψεύδει, καὶ καταλύσει ἐν μέσῳ τοῦ οἴκου αὐτοῦ καὶ συντελέσει αὐτόν²).

Ὁμοίως δὲ ἁμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην καὶ οἱ μεταχειριζόμενοι μηχανικῶς ἢ καθ' ὑπερηφάνειαν τὸ ὄνομα τοῦ Θεοῦ εἰς τὰς προσευχὰς καὶ δεήσεις των, ὡς καὶ οἱ ψευδοπροφηταὶ καὶ ψευδομάντιες, καὶ πάντες οἱ τοιοῦτοι, ὅσοι μεταχειρίζονται τὸ ὄνομα τοῦ Θεοῦ ὡς μέσον ψεύδους καὶ ἀπάτης· ὁμοίως δὲ καὶ ὅσοι ἐπικαλοῦνται τὸ ὄνομα τοῦ Θεοῦ διὰ νὰ συνεργήσῃ εἰς τὰς ἀνοσίδους αὐτῶν ἐπιθυμίας καὶ πράξεις.

1) Ἐβρ. γ'. 16, Ἑβρ. κδ'. 10.

2) Ζαχαρ. ε'. 4.

§. 155.

Ποῖα εἶνε ἡ τετάρτη ἐντολή, καὶ ποῖα καθήκοντα πηγάουσι ἐξ αὐτῆς ;

« Μνήσθητι τὴν ἡμέραν τῶν σαββάτων ἁγιάζειν αὐτήν. Ἐξ ἡμέρας ἑργῶ καὶ ποιήσεις πάντα τὰ ἔργα σου, τῇ δὲ ἡμέρᾳ τῇ ἐβδόμῃ σάββατα Κυρίῳ τῷ Θεῷ σου ».

Κατὰ τὴν ἐντολὴν λοιπὸν ταύτην ὀφείλομεν νὰ ἐργαζώμεθα ἐξ ἡμέρας, τὴν δὲ ἐβδόμην νὰ μὴ ἐργαζώμεθα, ἀλλὰ νὰ τὴν ἁγιάζωμεν. Εἶνε δὲ ἐβδόμη ἡμέρα κατὰ τὴν ἐντολὴν ταύτην τὸ σάββατον, καὶ τοῦτο ἐώρταζον οἱ Ἑβραῖοι εἰς ἀνάμνησιν καὶ τιμὴν τοῦ ὅτι ὁ Θεός, ἀφ' οὗ εἰς ἐξ ἡμέρας ἐδημιούργησεν ὅλον τὸν κόσμον, τὴν ἐβδόμην κατέπαυσε¹⁾. Οἱ Χριστιανοὶ ὁμῶς ἀπὸ τῶν ἀποστολικῶν ἤδη χρόνων²⁾ ἐορτάζουσιν ὄχι τὸ σάββατον, ἀλλὰ τὴν Κυριακὴν, εἰς ἀνάμνησιν καὶ τιμὴν τῆς κατὰ τὴν ἡμέραν ταύτην ἀναστάσεως τοῦ Κυρίου ἡμῶν Ἰ. Χριστοῦ, τοῦ καταπαύσαντος ἐν τῇ ἡμέρᾳ ταύτῃ ἀπὸ τοῦ ἔργου τῆς ἀπολυτρώσεως, δι' οὗ ἀνέπλασε τὴν καταφθαρθεῖσαν ἡμῶν λογικὴν κτίσιν. Διὰ τοῦτο ὀφείλομεν νὰ ἁγιάζωμεν τὴν Κυριακὴν. Ἀγιάζομεν δὲ τὴν ἡμέραν ταύτην,

α) καταπαύοντες πάσας τὰς ἐργασίας ἡμῶν καὶ τῆς περὶ ἡμᾶς οἰκογενείας, καὶ τῶν δούλων, καὶ αὐτῶν τῶν ζώων καὶ ὑποζυγίων³⁾. Ἡ ἀπαγόρευσις ὁμῶς αὕτη τῆς ἐργασίας δὲν πρέπει καὶ νὰ ἐξηγηθῇ ἰουδαϊκῶς, διότι, ὅταν εἶνε ἀνάγκη ἀπόλυτος ἔργου σπουδαιοτάτου, μὴ ἐπιδεχομένου ἀναβολῆς, συγχωρεῖται ἡ ἐργασία, καὶ μάλιστα ὅταν πρόκειται περὶ κοινωφελούς ἔργου καὶ σκοποῦ. Εἰς τοῦτο δὲ ἔχομεν τὸ παράδειγμα καὶ τὴν διδασκαλίαν αὐτοῦ τοῦ Σωτῆρος ἡμῶν, ὅστις κατέκρινε τὴν τυπικὴν καὶ Φαρισαϊκὴν σαββατοφοβίαν λέγων, ὅτι τὸ σάββατον διὰ τὸν ἄνθρωπον ἐγένετο, οὐχ' ὁ ἄνθρωπος διὰ τὸ σάββατον⁴⁾. Δὲν πρέπει ὁμῶς πάλιν καὶ νὰ μετα-

1) Γεν. 6'. 2) Παρ. κ'. 7, 4. Κορινθ. ιε'. 2.

3) Ἐξου. κ'. 9, 4) Ματθ. 6'. 27.

χειριζώμεθα τὸν λόγον τοῦτον ὡς πρόβασιν ψευδῆ καὶ ὡς πρόσχημα.

β') Ὁφείλομεν νὰ συνέλθωμεν τὴν Κυριακὴν εἰς τὴν ἐκκλησίαν⁵⁾, διὰ νὰ προσευχηθῶμεν πρὸς τὸν Θεὸν διὰ τοῦ ἱερέως⁶⁾ καὶ ἀπὸ κοινοῦ μετὰ τῶν ἄλλων ἀδελφῶν ἡμῶν Χριστιανῶν, δοξάζοντες «ἐν ψαλμοῖς καὶ ὕμνοις καὶ ᾠδαῖς πνευματικαῖς⁷⁾ τὸν Θεόν, εὐχαριστοῦντες αὐτὸν διὰ τὰς πρὸς ἡμᾶς εὐεργεσίας του, αἰτούμενοι συγχώρησιν τῶν ἁμαρτιῶν ἡμῶν καὶ πάντων τῶν Χριστιανῶν, καὶ ἐπικαλούμενοι τὴν θείαν αὐτοῦ εἰς πάντας ἀρωγὴν καὶ βοήθειαν⁸⁾ διὰ νὰ οἰκοδομηθῶμεν ἀκούοντες τὸν λόγον τοῦ Θεοῦ⁹⁾, καὶ διὰ νὰ γείνωμεν κοινωνοὶ τῆς θείας του χάριτος, ἀκροώμενοι μετ' εὐλαθείας καὶ κατανύξεως τῇ ἱερᾷ λειτουργίᾳ¹⁰⁾. Μόνον δὲ ἐσχάτη καὶ ἀπόλυτος ἀνάγκη δύναται νὰ μᾶς ἀπαλλάξῃ ἀπὸ τοῦ χρέους τούτου, ἀλλὰ καὶ τότε πρέπει ὅπως δὴ ποτε νὰ ἀναπληρώσωμεν τὴν ἑλλειψιν διὰ τῆς κατ' οἶκον προσευχῆς καὶ διδασκαλίας.

γ') Δὲν ἀρκεῖ νὰ ὑπάγωμεν μόνον εἰς τὴν ἐκκλησίαν, ἀλλ' ὀφείλομεν ὅλην τὴν ἡμέραν ταύτην νὰ τὴν ἀφιερῶσωμεν εἰς δοξολογίαν τοῦ Θεοῦ, εἰς μελέτην τοῦ θείου του λόγου, καὶ εἰς ἔργα ἐξαιρέτως καὶ οὐσιαστικῶς Χριστιανικά¹¹⁾. Ταῦτα οὐ εἶνε μέλιστα τὰ κοινωνικῆ, οἷον ἡ συνδρομὴ εἰς οἰκοδομὴν καὶ συντήρησιν ἐκκλησιῶν, νοσοκομείων, σχολείων, εἰς βοήθειαν ἀπόρων καὶ ἐνδεῶν οἰκογενειῶν, γηρῶν, ἀρρώστων κτλ.

§. 156.

Ποιοὶ ἀπορτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην;

Ἐξ ἐναντίας ἀπορτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην

α) ὅσοι ἐργάζονται τὴν Κυριακὴν ὅχι δι' ἀνάγκην ἀπόλυτον ἢ χάριν κοινωνικῶς τινος¹²⁾ Χριστιανικοῦ σκοποῦ, ἀλλὰ ἀπὸ πλεονεξίας καὶ αἰσχροκέρδειαν.

β') Ὅσοι ἀποφεύγουσιν ἄνευ ἀπροσάριστου ἀνάγκης ἢ παρμελοῦσι¹⁾ νὰ ὑπάγωσιν εἰς τὴν ἐκκλησίαν, καὶ μένουσι μὲν ἄργοι, ἀλλὰ ὄχι μόνον δὲν καταγίνονται εἰς ψυχωφελεῖς μελέτας καὶ ἀναγνώσεις ἢ ἀκροάσεις²⁾, ἀλλὰ καὶ δαπανῶσι τὸν καιρὸν τῶν εἰς ἀδδθησαγίαν καὶ μεθῆν, εἰς κώμους καὶ κραιπάλας, ἢ εἰς ψυχοβλαβῆ καὶ αἰσχροὺς θεάματα, ἢ ἄσματα, ἀκούσματα, ἀναγνώσματα, κττ.

γ') Ὅσοι ὑπάγουσι μὲν εἰς τὴν ἐκκλησίαν, ἀλλὰ πορευόμενοι ἐκεῖ μόνον μὲ τὸ σῶμα, ὄχι δὲ καὶ μὲ τὸν νοῦν καὶ τὴν καρδίαν, ἢ ὅποια εἶνε προσηλωμένη εἰς ἄλλας βιωτικὰς καὶ ἐγκοσμίους, ἢ καὶ ὅπως ἀνοήτους καὶ αἰσχροὺς, μερίμνας καὶ στοχασμούς.

δ') Ἀμαρτάνουσι δὲ μάλιστα εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην οἱ μικροὶ καὶ μεγάλοι ποιμένες τῆς ἐκκλησίας, οἵτινες δὲν διδάσκουσι κατὰ τὴν ἡμέραν ταύτην τὸν λόγον τοῦ Θεοῦ, ἢ τελοῦσι τὰ μυστήρια ἄνευ φόβου Θεοῦ, καὶ ἀπαγγέλλουσι τὰς πρὸς τὸν Θεὸν εὐχὰς καὶ δεήσεις μὲ τὰ χεῖλη μόνον καὶ μηχανικῶς. Καὶ ἐκ τούτου μὲν ἐν ἀποκωλύεται ἡ θεία χάρις εἰς τοὺς εὐσεβεῖς καὶ πιστοὺς Χριστιανοὺς, διότι ἡ εὐσέβεια ἢ ἀσείβεια τοῦ ἱερέως ἀνέκει εἰς τὸ ἄτομον αὐτοῦ, ἐν ᾧ ἡ θεία χάρις ἐνεργεῖ ἐκ τῆς ἱερωσύνης καὶ ὄχι ἐκ τοῦ ἱερέως· ἀλλὰ εἰ τοιοῦτοι ὁμῶς ἱερεῖς καὶ ποιμένες ὑποπίπτουσιν εἰς μέγα καὶ βαρύτερον ἁμάρτημα ἐνώπιον τοῦ Θεοῦ.

ε') Ἀμαρτάνουσιν ὁμοίως καὶ ὅσοι δυνάμενοι νὰ συνδράμωσιν εἰς ἀγαθοιργίας καὶ ἄλλα χριστιανικά καὶ κοινωφελῆ ἔργα, ἀποφεύγουσιν ἢ παρμελοῦσι τοῦτο ἐκ πλεονεξίας, ἐν ᾧ πολλοὶ αὐτῶν σπαταλῶσι καὶ κατὰ τὴν ἡμέραν ταύτην ὑπέρογκα ποσὰ χάριν τῶν σαρκικῶν τῶν ἀπολαύσεων καὶ ἐπιθυμιῶν.

ς') Εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην ἀμαρτάνουσι τελευταῖον καὶ ὅσοι δὲν ἐργάζονται τὰς ἐργασίμους ἡμέρας, ἀλλ' ἄργοισιν. Ἡ ἀργία εἶνε μὴ-τηρ πολλῶν καὶ ἀναριθμητῶν ἁμαρτιῶν, καὶ

ἀσκήσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βερούης

1) Λουκ. ι. 16, ε. Θεσσαλ. ε'. 43.

2) Ὡτῆς δ', 6.

ὁ ἄνθρωπος, ὅστις μένει ἄργος ἁμαρτάνει οὐχ ἥτιον παρὰ τὸν καταλύοντα τὴν ἀργίαν τῆς Κυριακῆς καὶ τῶν λοιπῶν ἑορτῶν.

Ὅ,τι δὲ εἶπομεν περὶ τῆς Κυριακῆς, τοῦτο ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὰς λοιπὰς ἑορτάς, ὅσας ἐθέσπισεν ἡ ἀγία τοῦ Χριστοῦ ἐκκλησία εἰς τιμὴν καὶ μνήμην οὐ μόνον τοῦ Σωτῆρος, ἀλλὰ καὶ τῆς ἁγίας αὐτοῦ μητρός, τῶν ἁγίων ἀποστόλων, τῶν ἁγίων μαρτύρων, καὶ τῶν δούλων πατέρων τῆς Ἐκκλησίας, ὡς καὶ ἄλλων ἐπὶ ἀγιότητι διακρεφάντων καὶ δοξασιέντων ἀνδρῶν.

§. 157.

Ποία εἶνε ἡ πέμπτη ἐντολή καὶ τί παρατηρούμεν εἰς αὐτήν ;

«Τίμα τὸν πατέρα σου καὶ τὴν μητέρα σου, ἵνα εὖ σοι γίνηται, καὶ ἵνα μακροχρόνιος γένῃ ἐπὶ τῆς γῆς».

Ἀφ' οὗ ἐτελείωσε τὸ πρῶτον μέρος τῆς Δεκαλόγου, τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται εἰς τὴν πρὸς τὸν Θεὸν ἀγάπην, ἀρχίζει τὸ δεύτερον, τὸ ὁποῖον πραγματεύεται περὶ τῆς ἀγάπης πρὸς τὸν πλησίον. Ἀρχίζει δὲ τὸ μέρος τοῦτο ἀπὸ τὴν πρὸς τοὺς γονεῖς ἀγάπην καὶ τιμὴν, διότι ὁ γονεὺς ἐπέχει οὕτως εἰπεῖν δι' ἡμᾶς τόπον Θεοῦ ἐπὶ γῆς, καὶ διότι αὐτὸς εἶνε ὁ ἐγγύτατος πρὸς ἡμᾶς πλησίον.

§. 158.

Ποία καθήκοντα πηγάζουσιν ἐκ τῆς ἐντολῆς ταύτης ;

Εἰς τοὺς γονεῖς, τουτέστιν εἰς τὸν πατέρα καὶ τὴν μητέρα ἡμῶν ὀφείλομεν εὐγνωμοσύνην διηνεκῶς, διότι αὐτοὶ μᾶς ἐγέννησαν καὶ μᾶς ἀνέθρεψαν, καὶ μᾶς ἐπροίκισαν μετὰ πάντων ὅ,τι ἡδυνήθησαν φυσικὸν ἢ ἠθικὸν ἀγαθόν. Ἡ δὲ εὐγνωμοσύνη ἡμῶν αὕτη δὲν πρέπει νὰ μείνῃ νεκρά, ἀλλὰ νὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἀνταποδώσωμεν τὴν χάριν ταύτην παντοιοτρόπως κατὰ τὸ δυνατόν¹⁾. Ὅταν μάλιστα οἱ γονεῖς ἔχωσιν ἀνάγκην τῆς

βοηθείας ἡμῶν ἢ διὰ πτωχείαν, ἢ δι' ἀσθένειαν ἢ διὰ γῆρας, ἢ δι' ἄλλην οἰανδήποτε περίσασιν καὶ ἀνάγκην, τὸ χρέος ἡμῶν τοῦτο ἀποβαίνει ἱερὸν καὶ ἀπαραίτητον. Ὅφειλομεν λοιπὸν νὰ τοὺς τρέφωμεν καὶ περιθάλλωμεν καὶ γηροκομῶμεν, ὅχι ἀδημονοῦντες καὶ γογγύζοντες, ἀλλὰ μετὰ χαρᾶς καὶ υἱικῆς στοργῆς καὶ ἀγάπης. Ὅφειλομεν δὲ νὰ παραβλέπωμεν μετ' ἀγάπης τὰς οἰαζόμενους γεροντικὰς ἢ ἄλλας αὐτῶν ἀδυναμίας²⁾, καθὼς αὐτοὶ παρέβλεψαν τὰς χειροτέρας καὶ ἐπικινδυνότερας ἡμῶν νηπιακὰς καὶ παιδικὰς ἀδυναμίας³⁾. Ὅφειλομεν πρὸς τοῦτοις διὰ παντὸς τοῦ βίου νὰ ὑποτασσώμεθα καὶ ὑπακούωμεν εἰς αὐτούς⁴⁾, εἰς πᾶσαν δὲ ἡπουδαίαν ἡμῶν πρᾶξιν καὶ ἐπιχείρησιν νὰ ἐπικαλόμεθα τὸς πατρικὰς αὐτῶν εὐχὰς καὶ εὐλογίας⁵⁾, καὶ ἐν γένει νὰ παρέχωμεν εἰς αὐτοὺς πᾶσαν ἐμπιστοσύνην, ὡς τοὺς ὀρίστους καὶ εὐλοκρινεστάτους ἡμῶν συμβούλους. Καὶ ταῦτα μὲν ὀφείλομεν εἰς αὐτοὺς ἐν ὧ ζωσιν· ἀφ' αὐτῶν δὲ ἀποθνήσκουσιν, ὀφείλομεν νὰ σώζωμεν εὐσεβῆ τὴν μνήμην αὐτῶν, καὶ νὰ προσευχώμεθα ὑπὲρ τῆς σωτηρίας τῶν ψυχῶν αὐτῶν. Μόνον δὲ τότε εἶνε συγχωρημένον νὰ μὴ ὑπακούσωμεν εἰς τὰς διαταγὰς ἢ συμβουλὰς αὐτῶν, ὅταν προφανῶς ἀντίκεινται εἰς τὸ θέλημα τοῦ Θεοῦ⁶⁾.

§. 159.

Δὲν ἔχουσι καὶ οἱ γονεῖς χρέη πρὸς τὰ τέκνα των;

Καὶ οἱ γονεῖς ἔχουσιν ἐκ τῆς ἐντολῆς ταύτης καθήκοντα ἱερὰ καὶ ἀπαραίτητα πρὸς τὰ τέκνα αὐτῶν, διότι ὀφείλουσι νὰ θρέψωσιν αὐτά, καὶ ἐν γένει νὰ παράσχωσιν εἰς αὐτὰ πᾶσαν δυνατὴν προστασίαν καὶ περιθάλψιν, ἕως οὗ φθάσωσιν εἰς ἡλικίαν ὥριμον. Ἐπὶ δὲ μᾶλλον ὀφείλουσι νὰ προνοήσωσι περὶ τῆς θρησκευτικῆς καὶ ἠθικῆς των ἀνατροφῆς, διδάσκοντες

2) Σοφ. Σειρ. γ', 12, Παροιμ. κγ', 22.

3) Σοφ. Σειρ. ζ', 29.

4) Παροιμ. α', 8, ἱε. β', Κολ. γ', 20.

5) Γεν. κζ', 27, Σοφ. Σειρ. γ', 9.

6) Γεν. κζ', 14, Πραξ. β', 19, Ματθ. ε' 37.

καὶ συμβουλευόντες αὐτὰ ὅχι μόνον διὰ τοῦ λόγου, ἀλλ' ἐτι μᾶλλον καὶ τελεσφορώτερον διὰ τοῦ ἰδίου αὐτῶν παραδείγματος. Οἱ γονεῖς ὀφείλουσι πρὸς τούτοις νὰ μὴ φέρωνται πρὸς τὰ τέκνα μὲ ἄκραν αὐστηρότητα¹⁾, οὔτε πάλιν μὲ ἄκραν καὶ τυφλὴν πρὸς τὰ πταίσματα αὐτῶν συγκατάθεσιν, ἀλλὰ νὰ συγκιρνώσιν ἀμφοτέρω κατὰ τὰς περιστάσεις καὶ πρὸς τὸ συμφέρον τῆς θρησκευτικῆς καὶ ἠθικῆς αὐτῶν προκοπῆς καὶ βελτιώσεως. Ἀλλὰ καὶ ἂν οἱ γονεῖς παραλείψωσι τὰ πρὸς τὰ τέκνα καθήκοντά των ταῦτα, εἴτε μὴ δυνάμενοι εἴτε καὶ ἐκουσίως δι' οἰονδήποτε λόγον, δὲν ἀπαλλάττονται διὰ τοῦτο τὰ τέκνα ἀπὸ τὰ πρὸς τοὺς γονεῖς ἱερὰ καὶ ἀπαραίτητα αὐτῶν χρέη.

§ 160.

Ποιοὶ ἄλλοι ἐπέχουσι τόπον γονέων ἐν τῷ κόσμῳ, τί ὀφείλομεν πρὸς αὐτοὺς καὶ τί ὀφείλουσιν αὐτοὶ πρὸς ἡμᾶς;

Τόπον γονέων ἐπέχουσι δι' ἡμᾶς καὶ ἄλλα πρόσωπα ἐν τῷ κόσμῳ τούτῳ, ὅθεν καὶ εἰς αὐτοὺς ὀφείλομεν ἴσην καὶ ὁμοίαν τιμὴν, σεβασμόν, εὐπειθειαν καὶ ἀγάπην. Τόπον δὲ γονέων ἐπέχουσιν ἐν μὲν τῇ πολιτείᾳ πρῶτιστα καὶ κυριώτατα ἡ πατρίς, ἔπειτα ὁ βασιλεὺς¹⁾, ὑπὲρ ὧν ὀφείλομεν καὶ τὴν ζωὴν ἡμῶν νὰ θυσιάσωμεν ἐν ἀνάγκῃ²⁾, κατόπιν δὲ οἱ διάφοροι ἄρχοντες καὶ προϊστάμενοι ἐν τῇ ὑπηρεσίᾳ τῆς πατρίδος καὶ τοῦ βασιλέως³⁾. Ἐν δὲ τῇ ἐκκλησίᾳ τόπον γονέων ἐπέχουσιν οἱ πνευματικοὶ ἡμῶν ποιμένες καὶ διδάσκαλοι⁴⁾. ἐν τοῖς σχολαίσις οἱ καθηγηταὶ καὶ διδάσκαλοι, καὶ ἐν τῇ κοινωνίᾳ εὐεργέται ἡμῶν καὶ προστάται καὶ κηδεμόνες, καθὼς καὶ πάντες οἱ κατὰ τὴν ἡλικίαν πρεσβύτεροι ἡμῶν⁵⁾. Εἰς πάντας τοὺς ὀφείλομεν εὐγνωμοσύνην, σεβας, εὐπειθειαν, τιμὴν καὶ ἀγάπην. Ἀλλ' ὅπως οἱ φυσικοὶ, οὕτω καὶ οἱ θεοὶ οὗτοι γονεῖς

1) Κολοσ. γ'. 21.

1) Γωμ. γ'. 1. 3. Ματθ. κβ'. 21, 4. Πέτρ. β'. 17. 2) Ίω. ε. 43.

3) Γωμ. γ'. 7. 4) Εβρ. γ'. 17. 5) 4. Τιμοθ. ε. 4, Λευκ. ιθ'. 3.

οφείλουσι νὰ ἐκπληρῶσι τὰ ἴδια ἕκαστος καθέκοντα πρὸς τὰ θέσει αὐτῶν τέκνα, παρέχοντες οἱ μὲν τὴν ἀσφάλειαν καὶ τὴν κατὰ νόμους δικαιοσύνην καὶ προστασίαν, οἱ δὲ τὴν παιδείαν καὶ νοουθεσίαν Κυρίου, οἱ δὲ πᾶσιν δυνατὴν συμβουλὴν καὶ προστασίαν καὶ εὐποιάν.

§. 161.

Ποία εἶνε ἡ ἔκτε ἐντολὴ καὶ τί μᾶρ διδάσκει;

«Οὐ φονεύσεις».

Μετὰ τοὺς γονεῖς, εἰς τοὺς ὁποίους ὀφείλομεν αἰδᾶσθαι, τιμῇ καὶ ἐγάπη, ἔρχονται οἱ ἀδελφοί μας κατὰ τὴν πλοσυτέραν καὶ χριστιανικὴν σημασίαν τῆς λέξεως, ἥτοι ὁ πλησίον, τὸν ὁποῖον ὀφείλει νὰ ἀγαπᾷ πᾶς χριστιανὸς ὡς ἴδιον ἑαυτόν. Ἀλλὰ τί ἄλλο πρᾶγμα εἶνε πολυτιμότερον διὰ τὸν πλησίον παρὰ τὴν ζωὴν αὐτοῦ; Ὅθεν καὶ ἡ ἐκ παντὸς τρόπου τήρησις καὶ προφύλαξις τῆς ζωῆς τοῦ πλησίον εἶνε τὸ μέγιστον ἔργον τῆς πρὸς τὸν πλησίον ἀγάπης, ὁ ρόλος δὲ, ἥτοι ἡ αὐθαίρετος καὶ βίαια ἀφαιρέσις τῆς ζωῆς τοῦ πλησίον, τὸ μέγιστον ἀμάρτημα εἰς τὴν ἀγάπην ταύτην, τὸ φρικτωδέστατον ἐν ἀνθρώποις ἔγκλημα καὶ κακούργημα.

Τὸ δικαίωμα τῆς ἀφαιρέσεως τῆς ζωῆς ἔχει μόνον ὁ Θεός, ὁ κύριος τῆς ζωῆς καὶ τοῦ θανάτου¹⁾. Αὐτὸς ἔδωκεν, αὐτὸς ἄρα καὶ δύναται νὰ λάβῃ ὀπίσω τὴν ζωὴν. Ἐπὶ γῆς δὲ τὸ δικαίωμα τῆς ἀμέσου ἢ ἐμμέσου ἀφαιρέσεως τῆς ζωῆς τοῦ ἀνθρώπου ἔχει, λαβοῦσα παρ' αὐτοῦ τοῦ Θεοῦ, μόνον ἡ πολιτικὴ ἐξουσία, ἥτις καὶ ἐξασκεῖ τὸ δικαίωμα τῆς τοῦτο, ἢ διὰ νὰ ἀποδώσῃ δικαιοσύνην καὶ ἐξασφαλίσῃ τὴν πολιτείαν ἀπὸ τῶν κακούργων, ἢ διὰ νὰ ἐξασφαλίσῃ τὴν πολιτείαν ἀπὸ τῶν ἐξωθεν ἐχθρῶν. Πᾶσα δὲ καθεστῶσα ἐξουσία κατὰ τὴν ἁγίαν Γραφὴν εἶνε «τεταγμένη ὑπὸ τοῦ Θεοῦ», καὶ «ὁ ἀντιτασσόμενος τῇ ἐξουσίᾳ τῇ τοῦ Θεοῦ διαταγῇ ἀνθέστηκεν»²⁾.

1) Δευτερονόμ. λδ'. 39. 2) Ρωμ. ιγ' 1-2

§. 162.

Ποιοὶ λοιπὸν ἀμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην ;

Ἀμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην ὅχι μόνον ὅσοι διὰ τῆς ἰδίας χειρὸς των φανερά ἢ κρυφίως, δι' ὀπλου, ἢ διὰ φαρμάκων, ἢ καθ' ὅποιονδήποτε ἄλλον τρόπον, ἀφαιρέσωσι τὴν ζωὴν τοῦ πλησίον, ἀλλὰ καὶ ὅσοι ὅπωςδήποτε συνεργήσωσιν εἰς τοῦτο, εἴτε ἀμέσως εἴτε ἐμμέσως καὶ πλαγίως. Ἐπειδὴ δὲ τὰ συνηθέστερα αἷτια τοῦ φόνου εἶνε ἡ κατὰ τοῦ πλησίον ὀργή, τὸ μῖσος καὶ ὁ φθόνος, ἔπεται ὅτι τὰ τρία ταῦτα ἀμαρτήματα εἶνε μέγιστα, καὶ ὅτι ὅστις ἡ ὑποπέσῃ ὁ ἴδιος εἰς τὰ πάθη ταῦτα, ἢ τὰ προκαλέσῃ μεταξὺ ἄλλων, ἢ ὑπάρχοντα καὶ λανθάνοντα τὰ ἀναρρίπισῃ καὶ τὰ ἐξάψῃ, ὁ τοιοῦτος ἀμαρτάνει θανασίμως εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην, διότι «πᾶς ὁ μισῶν τὸν ἀδελφὸν αὐτοῦ ἀνθρωποκτόνος ἐστίν»¹).

Ὅμοίως ἀμαρτάνει εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην καὶ ὅστις δυνάμενος ἢ νὰ ἐμποδίσῃ καὶ προλάβῃ τὰ ἄμμεσα ἢ ἔμμεσα αἷτια τοῦ φόνου, καὶ μάλιστα τὰς προσβολάς, τοὺς ὀνειδισμούς, τὰς ὕβρεις, τὴν ὀργὴν, τὸν φθόνον, τὸ μῖσος καὶ τὴν διχόνοιαν, δὲν πράξῃ τοῦτο.

Κατὰ τὸν λόγον δὲ τοῦτον ἀμαρτάνουσι καὶ ὅσοι δυνάμενοι νὰ σώσωσιν ἀπὸ προφανῆ θάνατον τὸν κινδυνεύοντα νὰ ἀποθάνῃ καθ' οἷονδήποτε τρόπον ἢ ἀπὸ πείναν, ἔνδειαν, γυμνότητα, ψύχος, ἢ ἀπὸ οἷονδήποτε ἄλλο αἷτιον, δὲν τὸ πράξωσιν²). Διότι ὁ χριστιανὸς ὀφείλει νὰ ἔχῃ παντοῦ καὶ πάντοτε ὡς κανόνα τῶν πράξεων καὶ τῆς διαγωγῆς του τὴν πρὸς τὸν πλησίον ἀγάπην· ὅτι διὰ ἐπιθυμεῖ νὰ ἐγίνετο εἰς αὐτόν, ἐὰν ἐκινε δύναμις καθ' οἷονδήποτε τρόπον καὶ λόγον, τοῦτο πρέπει καὶ αὐτὸς νὰ πράξῃ παντὶ σθένει εἰς τὸν πλησίον. Μὴ πράττων δὲ τοῦτο ἀμαρτάνει θανασίμως εἰς τὰς ἐντολάς τοῦ Θεοῦ.

1) Ματθ. γ'. 19.

2) Γεν. δ'. 9. Λουκ. ι. 31, Σειρ. λδ'. 25.

§. 163.

Ποιοι ἄλλοι ἁμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην;

Ὅμοιως ἁμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην καὶ οἱ προκαλοῦντες εἰς μονομαχίαν καὶ οἱ ἀποδυόμενοι εἰς αὐτήν, εἴτε προκύβη ἐξ αὐτῆς φόνος, εἴτε ὄχι. Διότι ἐνοχος φόνου ἐνώπιον τοῦ Θεοῦ εἶνε ὄχι μόνον ὅστις φονεύσῃ πράγματι, ἀλλὰ καὶ ὅστις ἀποφασίσας τὸν φόνον δὲν τὸν ἐξετέλεσε πράγματι, εἴτε διότι ἀπέτυχεν εἰς τὴν ἐκτέλεσιν, εἴτε διότι ἐμποδίσθη ἀπὸ περιστατικῶν ἐκτὸς τῆς θελήσεώς του. Τανάπαλιν δὲ ὁ φονεύων ἀκουσίως δὲν ἁμαρτάνει εἰς τὴν ἐντολὴν, τιμωρεῖται δὲ μόνον ἐκκλησιαστικῶς ὡς ἐνοχος ἀπρονοησίας καὶ ἀπερισκεψίας, εἰς τὴν ταῦτα εἶνε συνήθως τὰ αἷτια τοῦ ἀκουσίου φόνου.

Εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην ἁμαρτάνουσι καὶ οἱ αὐτόχειρες, διότι, ὅπως δὲν συγχωρεῖται ν' ἀφαιρέσῃ τις τὴν ζωὴν ἄλλου, οὕτω δὲν συγχωρεῖται καὶ ν' ἀφαιρέσῃ τις, τὴν ἰδίαν ἑαυτοῦ ζωὴν, σφετεριζόμενος θεῖον δικαίωμα, καὶ ἐπομένως ἀποστατῶν κατ' αὐτῆς τῆς θείας μεγαλειότητος καὶ παντοδυναμίας.

Ἀμαρτάνουσιν ὁμοίως εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην καὶ ὑπὲρ τοὺς φονεῖς αὐτοὺς οἱ δικασταὶ ἐκεῖνοι, ὅσοι ἐκ δωροδοκίας ἢ φόβου ἢ προσωποληψίας, ἢ ἐκ συμπαθείας ἢ ἀντιπαθείας, ἢ ἐξ οἰουδήποτε ἄλλου λόγου, καταδικάζουσι τὸν ἀθῶον ἢ ἀπολύουσι τὸν ἐνοχον.

Κατ' ἀντίστροφον δὲ λόγον ἁμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην καὶ οἱ χλιαροὶ ἐκεῖνοι καὶ φοφοδεεῖς χριστιανοί, οἵτινες δὲν πράττουσι μὲν τὸ κακόν, οὐδὲ συνεργοῦσιν ὅπως δὴ ποτε εἰς αὐτὸ ἀμέσως, ἀλλὰ συνεργοῦσιν ὅμως ἐμμέσως, διότι τὸ ἀνέχονται, καὶ ἢ τὸ ἀποκρύπτουσι ἢ τὸ ἀποσιωπῶσι. Συμβαίνει δὲ πολλάκις οἱ τοιοῦτοι νὰ γίνωνται πληγὴ τοῦ κοινωνικοῦ καὶ πολιτικοῦ σώματος τῶν χριστιανῶν πολὺ πλέον ὀλεθρία παρὰ τοὺς καθ' αὐτὸ φονεῖς. Τοιοῦτοι δὲ εἶνε ὄχι μόνον ὅσοι προσκληθέντες ἢ ζητηθέντες καὶ ἀνακριθέντες ὑπὸ τῆς δικαιοσύνης, ἐξ οἰουδήποτε λόγου δὲν μαρτυρήσωσι τὴν ἀλή-

θειαν, ἀλλὰ καὶ ὅσοι γνωρίζοντες δὲν δράμωσιν οἰκοθεν εἰς τὴν μαρτυρίαν ταύτην, καὶ δὲν συνεργήσωσι τὸ καθ' ἑαυτοῦ εἰς τὴν ἀνακάλυψιν αὐτῆς. Οὐδὲ πρέπει ἐν γένει παρεξηγοῦντες τὴν θείαν ἐντολὴν τῆς πρὸς τὸν πλησίον ἀγάπης ν' ἀνεχώμεθα τὰ κακουργήματα. Τὸ νὰ ἀνεχώμεθα καὶ νὰ συγχωρῶμεν τοὺς κακοὺς βλάπτοντας ἡμᾶς μόνον ἀτομικῶς, καὶ νὰ τοὺς εὐεργετῶμεν μάλισα, εἰ εἰς χριστιανικὴ ἀρετὴ, ἀλλὰ τὸ νὰ ἀνεχώμεθα τοὺς κακοὺς βλάπτοντας καὶ λυμαινομένους ὅχι πλεον ἡμᾶς μόνον, ἀλλὰ πολλοὺς ἄλλους, ὁλόκληρον κοινωσίαν, καὶ ὁλόκληρον ἐνίοτε ἔθνος, τοῦτο εἶνε ἁμαρτία ἀσυγχώρητος καὶ ἐνώπιον τοῦ Θεοῦ καὶ ἐνώπιον τῶν ἀνθρώπων.

§. 164.

Ποία εἶνε ἡ ἐσδόμη ἐντολὴ καὶ ποία ἡ ἐννοία αὐτῆς;

«Οὐ μοιχεύσεις».

Ἐξ ἰσοῦ μέ τὴν ζωὴν] πολύτιμον πρᾶγμα διὰ τὸν ἄνθρωπον εἶνε καὶ ἡ τιμὴ τοῦ γάμου. Ὅθεν πᾶσα ἀφαίρεσις ἢ ἐκμυστήρισις ἢ προβολὴ κατὰ τῆς τιμῆς τοῦ πλησίον εἶνε μέγιστος ἁμάρτημα.

Γάμος ὀνομάζεται τὸ ἱερὸν ἐκεῖνα μυστήριον, διὰ τοῦ ὁποῦ συναπτόμενοι ὑπ' αὐτοῦ τοῦ Θεοῦ¹⁾ εἰς ἐν ἀδιαχώριστον καὶ ἀναπόσπαστον ζεῦγος εἰς ἄνδρα καὶ μίαν γυναῖκα, ἔχοντες ἁμαρτίαν πρὸς ἀλλήλους ἀγάπην, συζῶσιν ἐν εἰρήνῃ συμβαλλόντες καὶ συναναπληροῦντες ἀλλήλους, τεκνοποιοῦσι καὶ ἀνατρέφουσι τὰ τέκνα των ἐν παιδείᾳ καὶ νοουθεσίᾳ Κυρίου. Μετὰ τὴν ὑπὸ τῆς ἐκκλησίας τέλεσιν τοῦ μυστηρίου, ὁ σύνδεσμος ὁ συγκατατῶν εἰς τὴν γαμικὴν ταύτην συνάφειαν τὸ ἀνδρόγαμον εἶνε τὸ «ἁμίαντον τῆς κοίτης». Ὅταν δὲ ἀρθῇ τοῦτο, ἀφαιρῆται ὁμοῦ καὶ ἡ «τιμιότης τοῦ γάμου», καὶ ἡ τιμὴ ἐν γένει ἀμφοτέρων, τοῦ ἀνδρός καὶ τῆς γυναίκος²⁾. Ὁ αἶρων δὲ

1) Ματθ. ιθ'. 6.

2) Ἑβρ. γ'. 4.

ἀμίαντον τοῦτο τῆς κοίτης καὶ τὴν τιμιότητα τοῦ γάμου ὀνομάζεται μοιχός, καὶ ἡ πράξις αὐτοῦ μοιχεία.

Ἄλλ' ἡ λέξις μοιχεία δὲν περιορίζεται ἐνταῦθα εἰς μόνην τὴν ἐννοίαν ταύτην, ἀλλὰ καὶ συνυπονοεῖται πᾶσα ἐν γένει καὶ καθ' ὅσονδήποτε ἄλλον τρόπον σαρκική μίξις ἐκτός καὶ ἔνευ τοῦ γάμου, ἐκτός δηλ. γυναικὸς καὶ ἀνδρός, συνενωθέντων ὑπὸ τῆς ἐκκλησίας εἰς γάμου κοινωνίαν. Συνυπονοεῖται λοιπὸν πᾶν εἶδος ἀθεμίτου ἔρωτος, καὶ πᾶν εἶδος ἀκατονόμαστον³⁾ αἰσχρουρίας καὶ ἀσελγείας, ἥτις μεταβάλλει τὸ σῶμα τοῦ ἀνθρώπου ἀπὸ ναοῦ Θεοῦ⁴⁾ εἰς αἶσχος καὶ βδέλυγμα.

§. 165.

Ποιοὶ λοιπὸν ἀμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην;

Ἀμαρτάνει εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην ὄχι μόνον ὁ ἐγγαμὸς, ἀνὴρ ἢ γυνή, ὅστις ἀθετήσῃ τὴν συζυγικὴν πίστιν, καὶ μιάνῃ τὴν ἰδίαν αὐτοῦ ἢ ἐτέρων ἐγγάμων κοίτην, ἀλλὰ καὶ ὁ ἄγαμος, ὅστις πράξῃ τοῦτο. Ὁμοίως δὲ ἀμαρτάνει καὶ πᾶς ἐγγαμὸς ἢ ἄγαμος μολύνων ἑαυτὸν δι' ὅποιουδήποτε ἄλλου τρόπου ἀσελγείας ἢ αἰσχρουργίας.

Ἀμαρτάνουσι δὲ εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην, ὅπως καὶ εἰς τὴν δεκάτην, ὄχι μόνον ὅσοι πράξωσι τὸ ἀμάρτημα, ἀλλὰ καὶ ὅσοι ἔχουσι μὲν τὴν πρὸς τοῦτο προαίρεσιν καὶ ἀπόφασιν, ἀλλ' ἐμποδισθῶσιν ἀπὸ αἵτια ἐκτός τῆς θελήσεώς των, διό καὶ ὁ Σωτὴρ ἡμῶν εἶπεν, ὅτι «πᾶς ὁ βλέπων γυναῖκα πρὸς τὸ ἐπιθυμῆσαι αὐτῆς, ἥδη ἐμοίχευσεν αὐτήν ἐν τῇ καρδίᾳ αὐτοῦ»¹⁾· ὁθεν καὶ παρήγγειλεν ὅτι, ἐὰν ὁ ὀφθαλμός σου σέ σκανδαλίξῃ, προτιμότερον εἶνε νὰ τὸν ἐκβάλῃς καὶ νὰ στερηθῇς τὸν ὀφθαλμόν σου, παρὰ νὰ ῥιφθῇς μὲ αὐτόν εἰς τὴν γέενναν τοῦ πυρός²⁾.

§. 166.

Ποτα καθήκοντα περᾶνουσιν ἐκ τῆς ἐντολῆς ταύτης;

Ὁ ἐγγαμὸς ὀφείλει νὰ ἀγαπᾷ τὴν ἰδίαν γυναῖκα ὡς ἑαυ-

3) Ἐφεσ. β. 3.

4) ἄ. Κορ. γ'. 18.

1) Ματθ. β. 28.

2) Ματθ. β. 27.

τόν, ἡ δὲ γυνὴ νὰ ἀγαπᾷ τὸν ἄνδρα καὶ νὰ ὑποτάσσεται εἰς αὐτόν, ἀμφότεροι δὲ νὰ συζῶσιν ἐν εἰρήνῃ καὶ ὁμονοίᾳ, καὶ ὁ μὲν ἄνθρωπος νὰ οἰκονομῇ τὰς ἀδυναμίας τῆς γυναικὸς, αὕτη δὲ νὰ ὑπομένῃ τὰς τυχοῦσας παραφορὰς ἢ ἰδιοτροπίας τοῦ ἀνδρός· ν' ἀποφεύγωσι δὲ ἀμφότεροι πᾶν ὅ,τι δύναται νὰ ταραξῇ τὴν συζυγικὴν ἁρμονίαν, εἰρήνην καὶ ἀγάπην. Πρὸ πάντων δὲ ἀφείλουσι νὰ τηρῶσιν ὡς κόρην ὀφθαλμοῦ τὴν συζυγικὴν πρὸς ἀλλήλους πίστιν, καὶ ν' ἀποφεύγωσι πᾶν ὅ,τι δύναται καὶ μακρόθεν νὰ προκαλέσῃ τὴν ἀθέτησιν οὗτης, ἥτις οὐ μόνον συνεπιφέρει αἰσχύνην, ὄνειδος καὶ ἀτιμίαν, ἀλλὰ καὶ τιμωρεῖται αὐστηρῶς ὑπὸ τοῦ Θεοῦ καὶ ὑπο τῶν ἀνθρωπίνων νόμων. Οἱ δὲ ἀγαμοὶ ἀφείλουσι νὰ φυλάττωσιν ἑαυτοὺς ἀπὸ πάσης ἀσελγείας ἢ αἰσχροεργίας, καὶ νὰ ἀποφεύγωσι πᾶν αἰτίον καὶ πᾶσαν κακὴν ἀφορμὴν. Τοιαύτην δὲ ἀφορμὴν δίδουσι μάλιστα αἱ συναναστροφαὶ καὶ συνομιλίαι μετ' ἀνθρώπους κακοήθεις καὶ διεφθαρμένους, αἱ αἰσχρολογίαι¹⁾, ἡ μέθη καὶ ἡ κραιπάλη, τὰ συμπόσια, οἱ ἄσεμνοι χοροὶ²⁾, τὰ ἄσεμνα θεάματα, τὰ κακοῖθη βιβλία, αἱ αἰσχραὶ εἰκόνες καὶ πάντα τὰ τοιαῦτα. Οἱ νέοι ἅς ἀποφεύγωσι μάλιστα τὴν ἐργίαν, ἥτις εἶναι συνήθως ἡ μήτηρ καὶ ταύτης καὶ πολλῶν ἄλλων ἁμαρτιῶν ψυχοφθόρων καὶ καταστρεπτικῶν. Ἄλλ' ὅ,τι πρὸ πάντων σῶμα ζεῖ τὸν ἄνθρωπον ἀπὸ τοῦ ὀλέθρου ταύτης καὶ πάσης ἐν γένει ἁμαρτίας, εἴνε ἡ πρὸς τὸν ἐν οὐρανοῖς πατέρα ἡμῶν καταφυγὴ καὶ ἡ πρὸς αὐτὸν θερμὴ καὶ ὀλοψυχος δέησις, ὅπως σώσῃ ἡμᾶς ἀπὸ παντὸς σατανικοῦ καὶ ὀλεθρίου πειρασμοῦ.

§. 167.

Ποία εἶνε ἡ ὁριζή ἐντολή, καὶ ποτε ἁμαρτάνουσιν εἰς αὐτήν;

« Οὐ κλέψεις ».

Μετὰ τὴν ζωὴν καὶ τιμὴν ἀκολουθεῖ ἡ περιουσία τοῦ πλησίον, τὴν ὁποίαν ἀφείλομεν νὰ σεβώμεθα, πᾶσα δὲ μικρὰ ἢ με-

γάλη ἀφαίρεισις τῆς περιουσίας τοῦ πλησίον ὀνομάζεται κλοπή, καὶ συνπάγεται εἰς τὴν ἀπαγόρευσιν τῆς ἐντολῆς ταύτης.

Ἀμαρτάνουσι λοιπὸν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην ὄχι μόνον οἱ λησταί, οἵτινες διὰ τῆς βίας ἀρπάζουσι τὴν ξένην περιουσίαν, καὶ οἱ κλέπται, οἵτινες ἀρπάζουσι κρυφίως τὰ ξένα, ἀλλὰ καὶ ὅσοι δι' οἰασδὴποτε ἀπάτης σφετερίζονται τὰ ξένα πράγματα. Πολλοὶ μάλιστα ἐκ τούτων καὶ ἐπικαλύπτουσι τὸ ἔργον των μὲ τὸ χρῶμα τῆς νομιμότητος, ἢ κατορθώσαντες νὰ διιστρέψωσι στρεφodίως ἐνώπιον τῶν ἀνθρώπων τὴν ἐννοίαν τοῦ νόμου, ἢ καὶ ἐκμεταλλευόμενοι πρὸς τὸν ἀδικὸν τῶν σκοπὸν τὰς ἐλλείψεις αὐτοῦ.

Τῆς τοιαύτης ἀπάτης ὑπάρχουσι πλεῖστα ὅσα εἶη καὶ διαφορὰι τρόποι, ἐκ τῶν ὁποίων ἀνατέρομεν τὰ κυριώτερα. Τοιοῦτο εἶναι οἱ δικασταί, ὅσοι δωροδοκοῦντες¹⁾ ἢ καὶ δι' ἄλλους λόγους καταδικάζουσι τοὺς πτωχοὺς καὶ ἀπροσκατεύτους, καὶ δικαιῶνουσι τοὺς ἰσχυροὺς καὶ πλουσίους, καὶ ἐν γένει οἱ ἄρχοντες, ὅσοι καταχρῶνται τὴν πολιτικὴν ἐξουσίαν, τὴν ὁποίαν ἐνεπιστεύθησαν παρὰ τοῦ Θεοῦ, πρὸς οἰονδὴποτε σκοπὸν ἰδιοτελῆ²⁾· οἱ ἄρχοντες καὶ παντὸς εἶδους προϊστάμενοι, ὅσοι καταπιέζουσι τοὺς ὑποδεεστέρους των μὲ ἀγγαστείας, ἢ ἀρνοῦνται εἰς αὐτοὺς τὸν μισθὸν των ἢ καὶ τὸν περικοπτοῦσιν³⁾· οἱ τοκογλύφοι, οἵτινες πρὸς ἐξόφλησιν τῶν ἀδικῶν ἀπαιτήσεων των δημοπρατοῦσι τὰ κτήματα, τὴν οἰκίαν, καὶ αὐτὰ τὰ τῆς ἀπολύτου ἀνάγκης σκεύη τῶν ὀικητῶν των⁴⁾· οἱ μεταχειριζόμενοι ψευδῇ σταθμᾷ καὶ μέτρῳ εἰς τὰς ἀγορὰς καὶ πωλήσεις των· οἱ κιβδηλοποιοί· οἱ νοθεύοντες τὰ ἐμπορεύματα, καὶ οἱ ὑκερτιμῶντες αὐτά⁵⁾, μάλιστα δὲ οἱ κοίροφυλακτοῦντες νὰ πωλήσωσιν ἐν καιρῷ πείνας εἰς ὑπερόγκτους τιμὰς τὰ σιτηρὰ· οἱ δανείζοντες καὶ ἐμπορευόμενοι μὲ ὄρους ἐπιβλαβεῖς πρὸς

1) Δευτερον. ις'. 49, Ἱησ. α. 23.

2) ἡ Βασιλ. κβ'. 8, Λουκ. γ'. 12.

3) Γεν. λδ', 7, Λευιτ. ιθ', 13, Ἰακ. ε. 6. 4) Παροιμ. ιδ', 26.

5) Λευιτ. κδ'. 14, α. Θεσσαλ. δ'. 6.

τὸν πλησίον, ἕνεκα τῆς μεγάλης ἀνάγκης, εἰς τὴν ὁποίαν εὐρέθη· οἱ μὲ παιδαριώδη παίγνια καὶ ἐμπορεύματα ἐξαπατῶντες τοὺς ἀπλουστέρους, διὰ νὰ ἄρπάξωσι τὰ χρήματά των, οἱ ζωοκλόποι, οἱ ἱερόσυλοι, οἱ ἄρπάζοντες τὰ πράγματα τῶν παθόντων ἐκ τῆς πυρκαϊᾶς, οἱ εὐρόντες τι, τοῦ ὁποίου εἶνε γνωστός ὁ κύριος, καὶ μὴ ἀποδίδοντές το εἰς αὐτόν, καθὼς καὶ οἱ ὑποκλέπτοντες τοὺς νομίμους τῆς κυβερνήσεως φόρους⁶⁾, ἢ πᾶν ὅ,τι ἄλλο ἀνήκει εἰς τὸ δημόσιον.

§. 168.

Ποιοὶ ἄλλοι ἀμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην;

Ὁμοίως ἀμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην καὶ ὅσοι γνωρίζοντες τὸν ληστήν ἢ κλέπτην δὲν μαρτυροῦσι περὶ τῆς ἀληθείας ἐρωτώμενοι, ἢ ὅπωςδῆποτε δὲν συντρέχουσι δυνάμιν εἰς τὴν ἀνακάλυψιν αὐτοῦ· ὅσοι ἀποκρύπτουσιν ἢ φυγαδεύουσιν ἢ προστατεύουσιν αὐτόν· οἱ λησταποδόχοι καὶ κλεπταποδόχοι· οἱ παντὸς εἶδους δημόσιοι ἄρχοντες καὶ ὑπάλληλοι, ὅσοι ὀφείλοντες νὰ καταδιώξωσι καὶ νὰ τιμωρήσωσι τοὺς ληστὰς καὶ κλέπτας, ἀποφεύγουσιν ἢ παραμελοῦσι τοῦτο ἐξ οἴουδῆποτε λόγου, καθὼς καὶ ὅλοι οἱ δημόσιοι ὑπάλληλοι, ὅσοι λαμβάνουσι μισθὸν ὀργίας.

Τίς τῆς κλοπῆς εἶνε μάλιστα ἡ πλεονεξία, ἡ ἰδιοτέλεια καὶ ὁ φθόνος, τὰ ὀλέθρια ταῦτα τέκνα τῆς φιλαυτίας καὶ τοῦ ἐγωϊσμοῦ, τὰ ὁποῖα κάμνουσι τὸν ἄνθρωπον ὅχι μόνον νὰ μὴ εὐχαριστῇται εἰς ὅσα ἔχει¹⁾, ἀλλὰ νὰ ζητῇ πάντοτε πλεονέκτηρα, καὶ λυπούμενος δι' ὅσα ἔχει ὁ πλησίον, νὰ τὸν φθονῇ καὶ νὰ μὴ ἡσυχάζῃ, ἐν ὧσιν βλέπει αὐτόν ἴσον ἢ ὑπερέχοντα κατὰ τὸν πλοῦτον²⁾, καὶ νὰ εὐχεταὶ ἢ καὶ νὰ προσπαθῇ νὰ ἐλαττωθῇ ἡ περιουσία του διὰ κλοπῆς ἢ ὅπως ἄλλως, εἴτε πρὸς ὠφελειαν ἑαυτοῦ, εἴτε καὶ ἄνευ τούτου, ἀλλὰ μόνον πρὸς κορε-

6) Ματθ. κβ'. 24. Ῥωμ. ιγ'. 5.

1) 2. Τιμοθ. ε'. 6. 2) Παροιμ. κβ'. 10.

σμόν τοῦ πάθους τοῦ φθόνου³). "Οθεν πάντες ὅσοι ἔχουσι τὰ πάθη ταῦτα ἁμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐβδόμην ἐντολήν.

§. 169.

Ποιοὶ ἄλλοι ἁμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολήν ταύτην;

Ὁμοίως ἁμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολήν ταύτην καὶ ὅσοι ὑπόκεινται εἰς τὸ αἰσχροὺν καὶ βδελυρότατον πάθος τῆς φιλαργυρίας, ἥτις μεταβάλλει τὸν ἄνθρωπον εἰς αὐτόχρημα εἰδωλολάτριν, ὡς εἶδομεν, διότι ὁ φιλάργυρος ἀποφύγει πᾶσαν χρῆσιν τοῦ πλεούτου, προτιμών νὰ σιερῇ ὅχι μόνον τὸν πλησίον του, ἀλλὰ καὶ τὴν οἰκογένειάν του καὶ ἐαυτὸν παντός ἀγαθοῦ, πάσης ἀπολαύσεως, καὶ αὐτῶν τῶν ἀπολύτως ἀναγκαίων μᾶλλον, παρὰ νὰ κάμῃ καὶ ὀλίγου μόνον ἀργυρίου δαπάνην¹). Ἡ φιλαργυρία εἶνε ρίζα πάσης κακίας, ὅθεν ὀφείλομεν νὰ προφυλάττωμεν ἑαυτοὺς ἀπὸ τῆς ψυχοφθόρου τούτης ἁμαρτίας παντὶ σθένει. Κατ' ἀντίστροφον δὲ λόγον ἀλλ' ἐξ ἴσου ἁμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολήν ταύτην καὶ οἱ ἄσωτοι, οἱ ὁποῖοι εὐρίσκοντες πλοῦτον ἄφθονον (συνήθως ἐκ κληρονομίας φιλαργύρων γονέων) κατασπαταλῶσιν αὐτὴν εἰς τὰς σαρκικὰς ἀπολαύσεις καὶ ἡδονάς, πρόξενoi τοιοῦτοτρόπως γινόμενοι ὀλέθρου καὶ καταστροφῆς ὅχι μόνον εἰς ἑαυτοὺς ἀλλὰ καὶ εἰς πολλοὺς ἄλλους. Καὶ οὗτοι, ὅπως καὶ οἱ φιλάργυροι λησμονοῦσιν ὅτι ὁ πλοῦτος, καθὼς καὶ ὅλα τὰ ἐγκόσμια ἀγαθὰ, εἶνε δῶρα τοῦ Θεοῦ, τὰ ὁποῖα μένουσιν εἰς τὰς χεῖρας αὐτῶν ἐπὶ τινα μόνον χρόνον ὡς ἀπλή παρακαταθήκη²), καὶ ὅτι ἄρα δὲν συγχωρεῖται μήτε νὰ καταστήσωσιν αὐτὰ ἄχρηστα εἰς ἑαυτοὺς καὶ εἰς τὸν πλησίον, μήτε νὰ τα καταχρησθῶσι σπαταλῶντες εἰς τὰς κτηνώδεις ὀρέξεις καὶ ἐπιθυμίας των³).

Ὅφειλομεν λοιπὸν ν' ἀποφεύγωμεν ἐξ ἴσου καὶ τοὺς δύο

3) Ματθ. ζ' 21. Δημόσιο Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βερόιας

1) Σερ. β'. 5, κ' 13. 2) Λευκ. ιε'. 1, α. Πέτρ. β'. 10.

3) Παροιμ. κγ'. 20, δ. Κορ. ζ' 30.

τούτους σκοπέλους. Τοῦτο δὲ σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ ἐργαζώμεθα διὰ νὰ κερδήσωμεν τὰ πρὸς τὸ ζῆν δι' ἡμᾶς αὐτοὺς καὶ διὰ τοὺς ἄλλους, πρῶτον μὲν τὴν περὶ ἡμᾶς οἰκογένειαν, ἔπειτα δὲ καὶ τὸν πλησίον, εἰ δυνατόν. Ἐὰν δὲ κερδήσωμεν ἱκανά, ὥστε νὰ περιστεύσωσι, τότε μῆτε τὴν ψυχὴν ἡμῶν νὰ προσκολληώμεν ἐπάνω εἰς τὸ χρυσίον, ὡς εἰδωλολάτραι, μῆτε πάλιν νὰ κατασπεύσωμεν τὴν περιουσίαν μας ἀσκόπως ἢ ἐπιδολαφῶς, ἀλλὰ νὰ οἰκονομήσωμεν αὐτὴν κατὰ τὸ πρέπον μέτρον, ἵνα ἔχωμεν μέσα βοηθείας καὶ ὑπὲρ τῆς οἰκογενείας ἡμῶν καὶ ὑπὲρ τοῦ πλησίον.

§. 170.

Ποτα καθήκοντα ἔπονται ἐκ τῆς ἐντολῆς ταύτης :

Ὅφειλομεν ὅχι μόνον νὰ μὴ κλέψωμεν μηδὲ τὸ ἐλάχιστον ἐξ ὧν ἔχει ὁ πλησίον¹⁾, εἴτε ἔχομεν ἡμεῖς εἴτε ὅχι, ὀφείλομεν ὅχι μόνον νὰ μὴ ὑποπέσωμεν εἰς κανέν εἶδος κλοπῆς, ἐξ ὧν προεῖρήθησαν, ἀλλὰ καὶ νὰ εἴμεθα αὐτάρκεις, ἀρκούμενοι εἰς ὅ,τι ἔχομεν, ἔστω καὶ ὀλίγον, ν' ἀποφεύγωμεν δὲ τὴν πλεονεξίαν, τὴν ἰδιοτέλειαν καὶ τὸν φθόνον, ὡς κακίας ὀλεθρίας καὶ εἰς ἡμᾶς αὐτοὺς καὶ εἰς τὸν πλησίον. Ἐξ ἐναντίας δὲ ὀφείλομεν νὰ εἴμεθα ἐλεήμονες καὶ νὰ μεταδίδωμεν εἰς τὸν πλησίον ἐξ ὧν ἔχομεν. Ἀλλ' ἡ ἐλεημοσύνη αὕτη πρέπει νὰ γίνεται ὅχι πρὸς δόξαν ἢ ἐπὶ προσδοκίᾳ εὐγνωμοσύνης ἢ ἄλλης ἀμοιβῆς, διότι τότε ἡ εὐεργεσία ἡμῶν οὐδεμίαν ἔχει ἀξίαν²⁾, καθὼς καὶ τάνάπαλιν ὁ εὐεργετούμενος καὶ ἐλεούμενος ὀφείλει εὐγνωμοσύνην εἰς τὸν εὐεργετήσαντα καὶ ἐλεήσαντα, ἀδιάφορον ἂν οὗτος ἔεν ἔπραξε τὸ ἀγαθὸν μὲ πρόθεσιν ἀγνῆν οὐδ' ὅπως πρέπει. Ἐπ' ἴσης ὁμῶς ὀφείλομεν νὰ ἐκλέγωμεν καλῶς καὶ τὰ πρόσωπα τὰ ὁποῖα ἐλεοῦμεν καὶ εὐεργετοῦμεν, προσέχοντες ἂν εἴνε ἀξία τῆς τοιαύτης εὐε-

1) Λουκ. γ'. 10. 2) Ματθ. ε'. 42, σ'. 4, Λουκ. γ'. 14, ε'. Κορ. θ'. 44, καλ.

σίας, διότι πολλάκις κινδυνεύομεν διὰ τῆς ἐλεημοσύνης
αὐτῆς νὰ προστατεύωμεν τὴν ἀργίαν καὶ ἄλλας τοιαύτας
κίας, καὶ τοιουτοτρόπως γινόμεθα πρόξενοι βλάβης μᾶλλον
ρὰ ὠφελείας τοῦ πλησίον³).

§. 171.

Ποία εἶνε ἡ ἐνάτη ἐντολὴ καὶ ποία ἡ ἐννοια αὐτῆς ;

« Οὐ ψευδομαρτυρήσεις κατὰ τοῦ πλησίον σου μαρτυρίαν
οὐδὴ ».

Ἡ ἀγάπη τοῦ πλησίον μᾶς ἐπιτάττει ἀκολούθως νὰ σεβώ-
θῃ ὅπως τὴν ζωὴν καὶ τὴν περιουσίαν, οὕτω καὶ τὴν ὑπό-
ψιν καὶ τιμὴν τοῦ πλησίον· ὅθεν ἡ ἐντολὴ αὕτη ἀπαγορεύει
γένην νὰ ἐκφράσωμεν ψευδῆ μαρτυρίαν περὶ τοῦ πλησίον.
Ἡ ἀλήθεια εἶνε φῶς καὶ ζωὴ, τὸ δὲ ψεῦδος εἶνε σκότος καὶ
θανάτος. Πατὴρ τῆς ἀληθείας εἶνε ὁ Θεός, πατὴρ δὲ τοῦ ψεύ-
δους ὁ διάβολος· Ἐκ τοῦ Θεοῦ καὶ ἐκ τῆς ἀληθείας ἐπήγαγεν
ζωή, ἐκ δὲ τοῦ διαβόλου προῆλθε τὸ ψεῦδος, καὶ ἐκ τοῦ ψεύ-
δους πηγάζει ἡ ἁμαρτία, ἣτις γεννᾷ θάνατον¹). Ἄνευ τῆς ἀ-
ληθείας εἶνε ἀδύνατον νὰ ὑπάρξῃ κοινωνία, ἀσφάλεια ζωῆς,
μῆς ἡ περιουσίας. Ὅπου βασιλεύει τὸ ψεῦδος, ἐκεῖ βασιλεύει
ἁμαρτία καὶ ὁ διάβολος· διότι ὁ διάβολος οὐδὲν ἄλλο εἶνε
τ' οὐσίαν εἰμὴ ἡ ἁμαρτία, ἀπὸ τῆς ὁποίας μᾶς ἀποτρέπει ἡ
πολὴ αὕτη, τὸ κατὰ τοῦ πλησίον ψεῦδος, τουτέστιν ἡ δια-
λὴ καὶ ἡ συκοφαντία. Ἀλλὰ διὰ τοῦτο καὶ ὁ συκοφάντης, ὁ
ῖσλος, ὁ ψεύστις, κληρονομεῖ ὅ,τι ἐπεθύμησεν, ὅχι τὸ φῶς
τὴν ἀληθειαν καὶ τὴν ζωὴν, ἀλλὰ τὸ σκότος τὸ ἡτοιμα-
ένον τῷ ὁ ἀβόλῳ καὶ τοῖς ἀγγέλοις αὐτοῦ²).

§. 172.

Ποιοὶ ἁμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην ;

Ἅμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην πάντες ὅσοι προσ-

3) Σειρ. ιε' 4.

1) Ἰω. ι' 44. 2) Ἀποκλ. κἀ, 8.

καλούμενοι ὡς μάρτυρες εἰς τὸ δικαστήριον¹⁾ μαρτυροῦσι ψευδῆ, γινόμενοι τοιοῦτοτρόπως οἷτιοι ἢ νὰ φονευθῇ ὁ ἀθῶος ἢ νὰ πάθῃ ἡ τιμὴ ἢ ἡ περιουσία του, νὰ σωθῇ δὲ καὶ τιμηθῇ καὶ πλουτήσῃ ὁ ἐνοχος ἢ ὁ ἀδικήσας²⁾. Ἀμαρτάνουσιν ὁμοίως καὶ ὅσοι καταγγέλλουσι ψευδῶς καὶ ἀδίκως τινὰ εἰς τὸ δικαστήριον, ἀποδίδοντες εἰς αὐτόν ψευδῆ ἐγκλήματα ἢ ἀδικίας³⁾ καὶ ὅσοι ἐναγόμενοι ἐν ὁμολογοῦσι τὸ ἐγκλημα ἢ ἀδικημά των, ἀλλ' ἢ τὸ ἀπεκρύπτουσιν ἢ λέγουσιν ἄλλα ψευδῆ⁴⁾. Ὅμοίως δὲ ἀμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην καὶ οἱ δικασταί, ὅσοι δωροδοκοῦντες ἢ ἐκ φόβου ἢ προσωποληψίας, ἢ ἐκ πάθους ἢ ἀλλου τινὸς σίτυβηποτε λόγου, δικαστρέφουσι τὴν ἀλήθειαν καὶ καταδικάζουσι μὲν τὸν ἀθῶον ἀπολύουσι δὲ τὸν ἐνοχόν.

Ἄλλ' ὁμοίως ἀμαρτάνουσιν εἰς τὴν ἐντολὴν ταύτην καὶ ὅσοι συκοφαντοῦσι τὸν πλησίον, καὶ δυσφημίζουσιν αὐτόν ἐκ φθόνου ἢ ἐχθρας κατ' αὐτοῦ⁵⁾. Οἱ τοιοῦτοι διὰ τῆς καταλαλιάς καὶ συκοφαντίας των βλάβπτουσιν αὐτόν πολὺ πλειότερον παρὰ τοὺς φονεῖς καὶ κλέπτας⁶⁾, διότι τὸν κλέπτουσι τὴν ὑπόληψίν του, τὸ καλὸν του ὄνομα, τὸ ὅποιον εἶνε πολυτιμότερον ἀπὸ τὸν πλοῦτον⁷⁾ καὶ ἀπὸ αὐτὴν τὴν ζωὴν. Ὅμοίως ἀμαρτάνουσιν καὶ ὅσοι διασβύρουν ὅ,τι εἶδαν ἢ ἤκουσαν πρὸς δυσφημίαν ἢ καὶ πρὸς χλευασμόν⁸⁾, ὅσοι προδίδουσι τὸ μυστικὸν ἀνευ ἀνάγκης πρὸς δυσαρέσκειαν τοῦ ἐμπιστευθέντος ἢ καὶ πρὸς βλάβην του⁹⁾. ὅσοι διαδίδουσι ἀδεσπότους φήμας κατὰ τινος, ἢ πιστεύοντες αὐτὸς ἐκ κουφονοίας, ἢ καὶ χωρὶς νὰ τὸς πιστεύωσιν, ἐκ μοχθηρίας διὰ νὰ βλάψωσι, δυσφημίσωσιν, ἢ χλευάσωσι τὸν ἄλλον¹⁰⁾, καὶ ὅσοι ἐν γένει διὰ τῆς

1) Ἐξοδ. κγ'. 4, Δευτερον. ιβ'. 16, Μάρκ. γς'. 59.

2) Ἐξοδ. κγ'. 4, Ἰσααϊ. 1. 3) Λευιτ. κγ'. 2, Πράξ. κβ'. 7.

4) Ἰησαϊ. 19. 5) Σειρ. ε'. 16. 6) Λευιτ. ιβ'. 16, Παροιμ. ιθ'. 8.

7) Σειρ. γ'. 1. 8) Ψαλμ. κβ'. 7, Λευιτ. ιβ'. 53.

9) Παροιμ. ιβ'. 13, κ'. 19.

10) Ἐξοδ. κγ'. 4, Παροιμ. ιζ'. 4, Σειρ. ιθ'. 6.

γλωσσολογίας διεγείρουσι μεταξύ τῶν ἀνθρώπων ἢ καὶ ὁλοκλήρου κοινωνίας σκάνδαλα καὶ διχονοίας¹¹⁾, τῶν ὁποίων συνήθως τὸ τέλος εἶνε χάκιστον καὶ ὀλεθριώτατον. Ἐτι δὲ μᾶλλον ἁμαρτάνουσιν ὅσοι πράττουσιν αὐτὸ τοῦτο τὸ ἔργον τῆς συκοφαντίας καὶ καταλαλιᾶς, ἀλλὰ καλύπτουσιν αὐτὸ ὑπόβως μὲ τὸ πρόσχημα¹²⁾ τῆς πρὸς τὸν συκοφαντούμενον φιλίας ἢ εὐνοίας.

Τοιοῦτοι εἶνε ὅσοι π. χ. ὑποκρινόμενοι ὅτι ἐπαινοῦσιν τινὰ τὸν διαβάλλουσι καὶ συκοφαντοῦσι ἢ προσπαθοῦσι νὰ παραστήσωσι τὸν ἔπαινον τοῦ τοιοῦτοτρόπως, ὥστε νὰ γεννήσωσιν εἰς τὸν ἄλλον τὰς χειρίστας ὑπονοίας· ἢ σιωπῶσι μὲν, ἀλλὰ ἀνασηκώνουσι τοὺς ὤμους, ἢ μειδιῶσι¹³⁾, ἢ προσπαθοῦσι νὰ δικαιολογήσωσι τὸν δυσφημιζόμενον καὶ συκοφαντούμενον τοιοῦτοτρόπως, ὥστε ἡ δικαιολογία καὶ ὑπεράσπισις των ἀποβαίνει χειροτέρα ἀπὸ πᾶσαν συκοφαντίαν καὶ κατάκρισιν. Οἱ τοιοῦτοι εἶνε « υἱοὶ τῆς γεέννης » καὶ τοῦ διαβόλου « διπλότεροι »¹⁴⁾, διότι εἰς τὸ ψεῦδος προσθέτουσιν ἄλλο ψεῦδος, καὶ τὴν μοχθηρίαν καὶ κακεντρέχειάν των διπλασιάζουσι διὰ τῆς ὑποκρισίας.

§. 173.

Ποία δὲ τὰ ἐκ τῆς ἐντολῆς ταύτης καθήκοντά μας;

Τοὺς τοιοῦτους διαβολικούς καὶ κακεντρεχεῖς συκοφάντας ὀφείλομεν νὰ ἀποφεύγωμεν ὡς ἰοδόλους ὄφεις. Ὀφείλομεν νὰ μὴ δίδωμεν ἐτοιμῶς καὶ προθύμως πίστιν εἰς πᾶσαν δυσφημίαν καὶ καταλαλίαν, ἅμα ἀκούσαντες αὐτήν, καὶ νὰ μὴ τὴν παραδεχώμεθα, εἰμὴ ἀφ' οὗ ἐξετάσωμεν καὶ πληροφορηθῶμεν ἀκριβῶς καὶ ἀσφαλῶς¹⁾. Καὶ τότε δὲ πάλιν ὀφείλομεν νὰ μὴ ἐπαυλασθῶμεν τὴν δυσφημίαν ἢ καταλαλίαν, ν' ἀποτρέπωμεν

11) Σειρ. ζ'. 43, κή. 15, Ματθ. 16'. 36. (2) Σειρ. κζ'. 25.

13) Ψαλμ. ε'. 7, Δουκ. 15'. 1. 14) Ματθ. κγ'. 15.

1) Σειρ. 10'. 13.

δὲ καὶ τοὺς ἄλλους ἀπὸ τοῦτο, ὅχι ὑποκριτικῶς ἀλλ' ἐξ εἰλικρινοῦς καὶ ἀδόλου πρὸς τὸν πλησίον ἀγάπης. Ἐὰν δὲ δὲν ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια, καὶ ἡ κατηγορία μένη ἀμφίβολος, ὀφείλομεν νὰ εἴμεθα ὅχι καχύποπτοι, ἀλλὰ νὰ πιστεύωμεν καὶ νὰ λέγωμεν μᾶλλον τὸ καλὸν παρὰ τὸ κακόν²⁾. Καὶ ὅταν δὲ ἡ συκοφαντία ἀποδειχθῇ ἀσφαλῶς καὶ βεβαίως ὡς ἀληθὴς κατηγορία, ὀφείλομεν νὰ μὴ ἐπαναλωρῶμεν αὐτὴν περαιτέρω, ἀλλ' ἔαν μὲν δυνάμεθα, νὰ προσπαθῶμεν νὰ διορθώσωμεν τὸν ἁμαρτωλὸν καὶ κακόν³⁾ εἴτε διὰ τῆς πειθοῦς εἴτε, ἔαν τὸ καλὴν ἡ ἀγάπη τοῦ κοινῶ καλοῦ κινδυνεύοντος, καὶ διὰ τῆς νομίμου τιωρίας.

Διὰ τοῦτο, ὅπως ὀφείλομεν νὰ μὴ λέγωμεν ψεύδη κατὰ τοῦ ἀθώου, ὁμοίως ὀφείλομεν νὰ μὴ λέγωμεν ψεύδη οὐδὲ περὶ τοῦ κακοῦ καὶ ἁμαρτωλοῦ, ἀποκρύπτοντες τὴν κακίαν τοῦ⁴⁾, ἀλλ', ὡς προεβρέθη, ὀφείλομεν νὰ πηγάττωμεν τοῦτο, ὅταν εἶνε ἀνάγκη, ἢ πρὸς σωφρονισμόν καὶ διόρθωσιν αὐτοῦ, ἢ πρὸς ἐξασφάλισιν τῆς κοινωνίας⁵⁾. Διότι καὶ ἐνταῦθα πρέπει νὰ ἐθυμώμεθα ὅτι ἡ ἀνεξικακία εἶνε χριστιανικὴ ἀρετὴ, ὅταν ἐκ τοῦ κακοῦ πάσχωμεν ἡμεῖς μόνον ἀτομικῶς, ὅχι ὁμοῦ καὶ ὅταν πάσχη ἡ κινδυνεύῃ νὰ πάθῃ ὁλόκληρος κοινωνία. Πρὸς μόνους πάσχοντες ἀτομικῶς ἐκ τῆς συκοφαντίας καὶ καταλαληδίας τῶν φθονούντων καὶ μισούντων ἡμᾶς, ὀφείλομεν νὰ ὑπομένωμεν τὰ πάντα, καὶ νὰ χαίρωμεν μάλιστα ἐνθυμούμενοι ποίων ἐπαγγελιῶν ἡξίωσεν ὁ Σωτὴρ ἡμῶν τὸν ἀδίκως καὶ ψευδῶς συκοφαντούμενον⁶⁾. Ἐν γένει δὲ καὶ ἐνταῦθα ὀφείλομεν νὰ καθάρισωμεν τὴν καρδίαν ἡμῶν ἀπὸ παντὸς φθόνου καὶ παντος μίσους κατὰ τοῦ πλησίον, καὶ ὅταν κατορθώωμεν τοῦτο, τότε οἶκόν ἐν θελὲι μᾶς διδάξῃ αὐτὴ ἡ συνειδήσις ἡμῶν ποίαν διαγωγὴν πρέπει νὰ τηρήσωμεν ἐκάστοτε, ὅσκις ἀναρῶνται οὗτον ζητήμα σχετικὸν πρὸς τὰ καθήκοντα τὰ ἐκ τῆς ἐγγάτης

2) Παροιμ. ι' 12

3) Παροιμ. κβ'. 24, Λευκ. ιβ'. 47, Γαλατ. ε'. 1.

4) Παροιμ. ιβ'. 17

5) Εβρ. κγ'. 3. Λευκ. ι. 11

6) Ματθ. 5. 10

ταύτης ἐντολῆς. Ἡ καθαρὰ καρδίς, ἡ πλήρης ἀδόλου καὶ εὐ-
λίκρινους ἀγάπης πρὸς τε τὸν πλησίον καὶ πρὸς τὴν ἀλήθειαν,
θέλει ὑπαγορεύσῃ ἐκάστοτε τὴν ἀληθῆ ἐρμηνείαν τῆς ἐννάτης
ταύτης ἐντολῆς.

§. 174.

Γίνε συγχωρημένον τὸ ψεῦδος ἐν ἀνάγκῃ :

Τὸ ψεῦδος οὐδέποτε εἶνε συγχωρημένον καὶ ἐπ' οὐδενὶ λόγῳ
ἀνάγκης, τόσῳ μᾶλλον, ὅσον ὁ ἄνθρωπος ἁμαρτάνων ἔχει
πάντοτε ἐτοίμους τὰς «προφάσεις ἐν ἁμαρτίαις». Τὸ νὰ πα-
ραιωπήσῃ τις, ἢ νὰ μὴ εἴπῃ ὅλην τὴν ἀλήθειαν, τοῦτο εἶνε
πολλάκις ἔργον φρονήσεως¹⁾· ἀλλὰ ψεῦδος ὅμως οὐδέποτε
εἶνε συγχωρημένον νὰ εἴπῃ. Εἶνε ἀληθὲς ὅτι σπανίως μὲν, ἀλ-
λὰ συμπίπτουσιν ὅμως περιστάσεις τινές, κατὰ τὰς ὁποίας ὁ
ἄνθρωπος νομίζει, ὅτι λέγων τὸ ψεῦδος ὀχι μόνον ἑαυτὸν ὠφε-
λεῖ ἀλλὰ καὶ τὸν πλησίον του, ἢ τοῦλάχιστον δὲν τὸν βλάπτει.
Ἀλλ' ἂν ὁ πεπερασμένος νοῦς τοῦ ἀνθρώπου δὲν δύναται νὰ
εἴῃ ὅλην τὴν μακρὰν σειρὰν τῶν συνεπειῶν ἐκ τοῦ ἐλοχίστου
ἐκείνου καὶ ἀβλαβοῦς νομιζομένου ψεύδους, βλέπει ὅμως αὐ-
τὴν ὁ πάνσορος καὶ ἀπειροτέλειος Θεός, ὅστις ἀπηγόρευσεν
ἀπολύτως τὸ ψεῦδος. Τὸ ψεῦδος εἶνε καὶ μένει ἀμόρημα φο-
βερόν καὶ ἀσυμβίβαστον μετὰ τὴν ὁποίαν φέρομεν εἰκόνα τοῦ
Θεοῦ, ὅστις εἶνε αὐτὴ ἡ ἀλήθεια. Δὲν πρέπει λοιπὸν νὰ θυσιά-
ζωμεν τὴν ἀλήθειαν εἰς τὸ ψεῦδος, τουτέστι νὰ προδίδωμεν
τὸν Θεὸν χάριν τοῦ διαβόλου, διὰ τοῦ· διότι ἡ ἐλεεινὴ φιλαυ-
τία καὶ ἰδιοτέλεια ἡμῶν ἔχει συμμέρον εἰς τὸ νὰ πιστευθῇ τὸ
ψεῦδος τοῦτο. Κοί' ἐλάχιστον δὲ ἂν εἴη τὸ ψεῦδος τοῦτο καὶ
ἀνευ αὐτοῦ κινδυνεύομεν τὸν ἑσχατὸν κίνδυνον, δὲν πρέπει νὰ
παραβῶμεν τὴν ἐντολὴν τοῦ Θεοῦ, ἀλλὰ νὰ παρακαλέσωμεν
αὐτὸν νὰ μᾶς σώσῃ ἀπὸ τῶν κινδύνων²⁾. Ἐάν δὲ τοῦναντίον

εἰπωμεν τὸ ψεῦδος, παραβαίνομεν μὲν τὴν ἐντολὴν τοῦ Θεοῦ, καὶ τοῦτο εἶνε βέβαιον, ἀλλὰ τίς γνωρίζει τὸ μέλλον, διὰ τὰ μᾶς βεβαιώσῃ ὅτι καὶ ὁ σκοπός, διὰ τὸν ὁποῖον ἐψεύσθημεν, θὰ ἐκπληρωθῇ; ἢ τίς μᾶς βεβαιώνει ὅτι ἄλλο μέσον πρὸς ἀπαλλαγὴν τοῦ κινδύνου δὲν ἔμεινε παρὰ ἐν καὶ μόνον, τὸ ψεῦδος; ἢ καὶ ὅτι ὁ ἐπαπειλούμενος οὗτος κίνδυνος δὲν εἶνε τιμωρία ἀξία τῶν πράξεών μας; Τὸ ψεῦδος λοιπὸν εἶνε παντοῦ καὶ πάντοτε ψεῦδος. Ὡπως δὲ ὁ καλὸς σκοπὸς δὲν δύναται νὰ μεταβάλλῃ εἰς καλὸν τὸ κακόν, διότι χρησιμεύει ὡς μέσον πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον, οὕτω καὶ οὐδεὶς σκοπὸς δύναται νὰ μεταβάλλῃ τὸ ψεῦδος εἰς ἀλήθειαν, ὅπως πρεσβεύουσι δυσσεβεῖς τινες καὶ ἀντίχριστοι, δογματίζοντες ἐν γένει, ὅτι ὁ σκοπὸς ἁγιάζει τὰ μέσα.

§. 175.

Ποία εἶνε ἡ δεκάτη ἐντολὴ καὶ ποία ἡ ἔννοια αὐτῆς;

«Οὐκ ἐπιθυμήσεις τὴν γυναῖκα τοῦ πλησίον σου· οὐκ ἐπιθυμήσεις τὴν οἰκίαν τοῦ πλησίον σου, οὐδὲ τὸν ἀγρόν αὐτοῦ, οὐδὲ τὸν παῖδα αὐτοῦ, οὐδὲ τὴν παιδείακην αὐτοῦ, οὔτε τοῦ βοῦς αὐτοῦ, οὔτε τοῦ ὑποζυγίου αὐτοῦ, οὔτε παντὸς κτήνους αὐτοῦ, οὔτε ὅσα τῷ πλησίον σου ἐστί».

Ἡ δεκάτη ἐντολὴ εἶνε ἐπισφράγισις καὶ συμπλήρωσις τῶν προηγουμένων ἐντολῶν, ὅσαι ἀναφέρονται εἰς τὴν πρὸς τὸν πλησίον ἀγάπην. Ἐὰν αἱ λοιπαὶ ἐντολαὶ ἀπαγορεύουσι τὴν ἀφαίρεσιν τῆς ζωῆς, τῆς τιμῆς καὶ τῆς περιουσίας τοῦ πλησίον, ἡ ἐντολὴ αὕτη ἀπαγορεύει καὶ αὐτὴν τὴν ἐπιθυμίαν πρὸς ὅ,τι ἀνήκει εἰς τὸν πλησίον, καὶ αὐτὸν τὸν στοχασμὸν τοῦ νὰ προσβάλλῃ εἰς ἢ νὰ ἀφαιρέσῃ τὴν τιμὴν καὶ τὴν περιουσίαν τοῦ πλησίον. Ἡ ἐντολὴ λοιπὸν ἀνασπᾷ πρόρριζον αὐτὴν τὴν αἰτίαν τῆς ἁμαρτίας, τῆς ὁποίας κέντρον εἶνε ἡ καρδιά τοῦ ἀνθρώπου, διότι «ἐκ τῆς καρδίας ἐξέρχονται, κατὰ τὸν θεῖον ἡμῶν διδάσκαλον, λόγισμοί καὶ πονηροί, φόνοι, μοιχεύαι, πορνεύαι,

κλοπαί, ψευδομαρτυρίαι, βλασφημίαι. 1). Ἡ ἐντολὴ λοιπὸν αὕτη μᾶς ἐπιβάλλει τὸ καθήκον, καθὼς αἰσθανθῶμεν ἐν τῇ καρδίᾳ ἡμῶν αἰσχροὺς τινας ἢ κακὴν ἐπιθυμίαν, νὰ μὴ τὴν ἀφῆσωμεν νὰ μᾶς κυριεύσῃ, ἀλλὰ νὰ τὴν καταπολεμήσωμεν μὲ πάντα τρόπον. Ἡ δὲ ἐκ τῆς καρδίας ἡμῶν ἐξάλειψις αὕτη τῶν κακῶν ἐπιθυμιῶν, ὅχι μόνον εἶνε τὸ πλέον δραστήριον ἀντιφάρμακον τῆς ἁμαρτίας, ἀλλὰ καὶ ἐξαγνίζει ἡμᾶς καθιστῶσα εὐθετετέρους πρὸς τὴν ἀποδοχὴν τῆς θείας χάριτος, καὶ ἀξίους τῶν ἐπηγγελημένων ἀγαθῶν ἐν τῇ βασιλείᾳ τῶν οὐρανῶν.

1) Ματθ. ιε. 19.

§. 176.

ποία εἶνε ἡ ἔννοια τῶν μακαρισμῶν;

Ἀφ' οὗ συνεπληρώσαμεν τὴν ἑρμηνείαν τοῦ δεκαλόγου, ἡ-
τοι τῶν δέκα ἐντολῶν τῆς παλαιᾶς Διαθήκης, μεταβαίνομεν
εἰς σύντομον ἐξήγησιν τῶν ἐννέα μακαρισμῶν τοῦ εὐαγγελίου.
διὰ τῶν ὁποίων ὁ Κύριος ἡμῶν Ἰησοῦς Χριστὸς συνεπλήρωσε
καὶ ἐτελειοποίησε τὸν παλαιὸν νόμον, δείξας ὅποια τις πρέπει
νὰ εἶνε κυρίως ἡ διάθεσις τοῦ χριστιανοῦ ἐκείνου, ὅστις κρίνε-
ται ἄξιος μακαρισμοῦ, ὡς μέλλων νὰ κληρονομήσῃ τὴν ἀληθῆ
μακαριότητα τῆς αἰωνίου ζωῆς. Τὸ περιεχόμενον τῶν μακα-
ρισμῶν τούτων, οἵτινες κατ' οὐσίαν εἶνε ἐντολαί, διαφέρει καὶ
ὑπερέχει τῶν ἐντολῶν τῆς παλαιᾶς Διαθήκης, ὅσον καὶ ὅπως
διαφέρει καὶ ὑπερέχει τὸ Εὐαγγέλιον τῆς χάριτος ἀπὸ τὴν Πεν-
τάτευχον τοῦ μωσαϊκοῦ νόμου, καὶ ὁ Χριστιανὸς ἀπὸ τὸν Ἰου-
δαῖον. Ἰδοὺ οἱ μακαρισμοὶ οὗτοι ὅπως κεῖνται ἐν τῷ κατὰ
Ματθαῖον εὐαγγελίῳ, κεφ. ε'.

1) «Μακάριοι οἱ πτωχοὶ τῷ πνεύματι· ὅτι αὐτῶν ἐστὶν ἡ
βασιλεία τῶν οὐρανῶν.

2) Μακάριοι οἱ πενθοῦντες· ὅτι αὐτοὶ παρακληθήσονται.

3) Μακάριοι οἱ πραεῖς· ὅτι αὐτοὶ κληρονομήσουσι τὴν γῆν.

4) Μακάριοι οἱ πεινῶντες καὶ διψῶντες τὴν δικαιοσύνην·
ὅτι αὐτοὶ χορτασθήσονται.

5) Μακάριοι οἱ ἐλεήμονες· ὅτι αὐτοὶ ἐλεηθήσονται.

6) Μακάριοι οἱ καθαροὶ τῇ καρδίᾳ· ὅτι αὐτοὶ τὸν Θεὸν ὁ-
ρῶνται.

7) Μακάριοι οἱ εἰρηνοποιοί· ὅτι αὐτοὶ υἱοὶ Θεοῦ κληθή-
σονται.

8) Μακάριοι οἱ δεδιωγμένοι ἕνεκεν δικαιοσύνης· ὅτι αὐτῶν
ἐστὶν ἡ βασιλεία τῶν οὐρανῶν.

9) Μακάριοι ἔστε, ὅταν ὀνειδίσωσιν ὑμᾶς καὶ διώξωσι, εἰπωσι πᾶν πονηρὸν ῥῆμα καθ' ὑμῶν ψευδόμενοι ἕνεκεν ἐμοῦ. Χαίrete καὶ ἀγαλλιᾶσθε· ὅτι ὁ μισθὸς ὑμῶν πολὺς ἐν τοῖς οὐρανοῖς».

§. 177.

Ποῖος εἶνε ὁ πρῶτος μακαρισμός· καὶ ἡ ἐννοία αὐτοῦ;

«Μακάριοι οἱ πτωχοὶ τῷ πνεύματι· ὅτι αὐτῶν ἐστὶν ἡ βασιλεία τῶν οὐρανῶν». Μακαρίους καὶ κληρονόμους τῆς οὐρανίου βασιλείας κηρύττει ἐν τῷ μακαρισμῷ τούτῳ ὁ Σωτὴρ ἡμῶν τοὺς πτωχοὺς τῷ πνεύματι, ἥτοι τοὺς ταπεινοὺς κατὰ τὸ φρόνημα, τοὺς ταπεινόφρονας. Ἡ ὑψηλοφροσύνη καὶ ἡ ὑπερηφάνεια εἶνε ἡ πρώτη ἁμαρτία τοῦ ἀνθρώπου, διότι εἶνε ὁ πρῶτος καρπὸς τῆς ἐμψύτου εἰς τὸν ἄνθρωπον φιλαυτίας καὶ τοῦ ἐγωϊσμοῦ, καρποφοροῦσα καὶ αὐτὴ ἄλλας ἀξίας ἐαυτῆς ἁμαρτίας, τὴν φιλαρχίαν καὶ φιλοπρωτίαν, τὴν πλεονεξίαν, τὸν φθόνον, τὴν συκοφαντίαν, τὸ ψεῦδος, καὶ πλεῖστα ὅσα ἄλλα κακά. Ἡ ὑψηλοφροσύνη ἐκρήμνισεν ἀπὸ τὰς τάξεις τῶν ἀγγέλων εἰς τὸ σκότος τοῦ Ἄδου τὸν Ἐωσφόρον· ἡ σατανικὴ αὐτῇ κακία μετεδόθη καὶ εἰς τὸν Ἀδὰμ, ὅστις μὴ ἀρκούμενος εἰς τὴν ἐν τῷ παραδείσῳ ἀθάνατον εὐτυχίαν, ἠθέλησε νὰ γείνη θεός, καὶ ἔλαβεν, αὐτός τε καὶ οἱ ἀπόγονοί του ἡμεῖς, τὰ ἐπιχειρὰ τῆς ἀγνώμονος ταύτης ὑψηλοφροσύνης, ἐκπεσὼν ἀπὸ τῆς εὐτυχίας καὶ ἀθανασίας εἰς τὴν δυστυχίαν καὶ τὸν θάνατον. Διὰ τοῦτο καὶ ὁ Σωτὴρ μέλλων νὰ ἀναπλάσῃ πνευματικῶς τὸν Ἀδὰμ ἀπὸ ταύτης τῆς ἐωσφορικῆς καὶ πατροπαραδότου ἁμαρτίας ἠθέλησε πρὸ πάντων νὰ καθαρίσῃ τὸν ἄνθρωπον, καὶ νὰ ἐμπνεύσῃ εἰς αὐτὸν τὴν ἐναντίαν τῆς ἁμαρτίας ταύτης ὁρετὴν, τὴν ταπεινοφροσύνην, διότι μόνον τοιοῦτοτρόπως ἦτο δυνατόν νὰ ἀνακτηθῇ ὅσα ἀπώλεσεν ἀγαθὰ, τὴν ἐν τῇ βασιλείᾳ τῶν οὐρανῶν μακαριότητα καὶ ἀθανασίαν.

§ 178.

ὁ δεύτερος μακαρισμός· καὶ ποία ἡ ἔννοια αὐτοῦ ;
 « Μακάριοι οἱ πενθοῦντες· ὅτι αὐτοὶ παρακληθήσονται. »
 Εὐτυχεῖς ἐνόμιζε καὶ νομίζει ὁ ἐπτετημένος τῆς θείας χ
 ριτος κόσμος τοὺς ἐν χαρᾷ, καὶ δυστυχεῖς τοὺς ἐν θλίψει κ
 πένθει. Διὰ τῆς διδωκαλίας τοῦ ὁ Σωτὴρ ἡμῶν ἀνασπᾷ πρό
 ριζον τὴν γενικὴν ταύτην τοῦ κόσμου πρόληψιν. Χαίρουσιν
 μὴ συναισθανόμενοι τὰς ἁμαρτίας των καὶ ἀμετανόητοι, λ
 ποῦνται δὲ καὶ πενθοῦσιν οἱ συναισθανόμενοι αὐτὰς καὶ ἐν συ
 τριβῇ καρδίας θλιβόμενοι καὶ πενθοῦντες τὴν ἀληθῆ χαρὰ
 ἣν ἐστερήθησαν, τὴν πρό τῆς ἁμαρτίας ἀγιότητα καὶ ἀθαν
 σίαν. Τούτους λοιπὸν ὁ Σωτὴρ μακαρίζει διαβεβαιῶν, ὅτι
 λουσιν παρηγορηθῆ, διότι ἡ θλίψις καὶ ἡ μετάνοια θέλει ἀπ
 δώσῃ εἰς αὐτοὺς ὅ, τι ἀπώλεσαν.

§. 179.

Ποιὸς εἶνε ὁ τρίτος μακαρισμός· καὶ ποία ἡ ἔννοια αὐτοῦ ;

« Μακάριοι οἱ πρᾶεῖς, ὅτι αὐτοὶ κληρονομήσουσι τὴν γῆν »

Ἡ ἁμαρτία καὶ τὰ τέκνα αὐτῆς, τὰ πάθη, κυριεύουσι τ
 νοῦν καὶ τὴν καρδίαν τοῦ ἀνθρώπου, καὶ παρασύρουσιν αὐτ
 ἀκατάσχετον εἰς πράξεις ἀγρίας καὶ θηριώδεις, μέχρις οὗ ἐ
 τέλους τὸν ῥιψωσιν εἰς τὸ βάραθρον τῆς ἀπωλείας. Τοιοῦτο
 εἶνε καὶ σήμερον, τοιοῦτος ἦτο καὶ ἐπὶ τοῦ Σωτῆρος ὁ ἁμα
 τωλὴς καὶ ἀνοήθητος πρὸς τὴν κατάστασιν αὐτοῦ καὶ ἀμ
 τανόητος κόσμος. Οἱ Ῥωμαῖοι διέδραμον τὴν γῆν ἀπ' ἀκρ
 ἔως ἄκρου ξιφῆρεις, ἄγριοι καὶ θηριώδεις, καὶ διὰ τὴν κλη
 ρονομήσασιν ἐκύλισαν πρῶτον τὰ τέκνα τῆς εἰς τὸ εἶμά το
 Ἄλλ' ὁ ἀρχὸν τοῦ κόσμου τούτου εἶχε κριθῆ ἤδη καὶ ἐκβληθῆ
 καὶ ὅ, τι δὲν κατώρθωσαν οἱ ἄγριοι καὶ αἰμοχαρεῖς Ῥωμαῖ
 να κληρονομήσασιν τὴν γῆν, τούτο προλέγει ὁ Σωτὴρ ὅτι
 κατορθώσωσιν οἱ μαθηταὶ τοῦ, ὅ, τι με εἶπες καὶ ὅπλῃ, ὅχι

θηριώδη καὶ ἀνήμερον πόλεμον, ὅχι διὰ τῆς ὀργῆς καὶ τῆς
 ἰσχύος, ἀλλὰ διὰ τῆς πραότητος καὶ ἡμερότητας, διὰ τῆς εἰρή-
 νης καὶ μετριοπαθείας. Καὶ τῷ ὄντι οἱ εἰρηνικοὶ ἀπόστολοι,
 ὡρὶς ξίφος, καὶ μὲ μόνον τὸ εὐαγγέλιον τῆς πραότητος καὶ
 τῆς εἰρήνης ἐκυρίευσαν τὴν γῆν. Ἐκ τούτου δὲ διδασκόμεθα
 καὶ ἡμεῖς νὰ ἀποφεύγωμεν τὰ ἄγρια καὶ θηριώδη πάθη μας,
 τὴν ἐργὴν καὶ τὸ μῖσος, τὸν φθόνον καὶ τὴν ἐχθραν, καὶ νὰ
 μεθὰ πρᾶοι καὶ ἡμεροὶ, εἰρηνικοὶ καὶ γαλήνιοι, μετρίοφρο-
 νες καὶ μετριοπαθεῖς.

§. 180.

Ποῖος εἶνε ὁ τέταρτος μακαρισμός καὶ ποία ἡ ἔννοια αὐτοῦ;

«Μακάριοι οἱ πεινῶντες καὶ διψῶντες τὴν δικαιοσύνην, ὅτι
 ἔτι χορτασθήσονται».

Ὁ συνήθης καρπὸς τῆς φιλαυτίας καὶ τοῦ ἐγωϊσμοῦ εἶνε ἡ
 κεογεξία, ἀδελφὴ γνησιὰ καὶ ἀμφιθαλὴς τῆς ὑπερηφανίας,
 ἡ δὲ αὐτῆς εἶνε ἡ ἄρπαγὴ καὶ ἡ ἀδικία. Χαίρουσιν οἱ πλεο-
 νεῖς καὶ οἱ ἄρπαγες, οἱ πλούσιοι καὶ οἱ ἰσχυροί, ὅτι ἡδίκη-
 κεν τὸν πτωχὸν τῶν, λυποῦνται δὲ τοῦναντίον ἀπαρηγόρητα
 οἱ πτωχοὶ καὶ οἱ ἀπροστάτευτοι, αἱ χῆραι καὶ τὰ ὀρφανὰ, ὅτι
 ἡδίκηθησαν. Ὁ Σωτὴρ ἡμῶν ἀνατρέπει τὰ ἀνέκαθεν ἐμφυτα
 ἐν τῷ ἁμαρτωλῷ ἀνθρώπῳ αἰσθήματα ταῦτα καὶ ἀναβιβά-
 σκει τοὺς μαθητὰς του διὰ τῆς θείας του χάριτος καὶ δυνάμεως
 ἐν ὧς ὕψος ἠθικῆς, εἰς τὸ ὅποιον ἦτο ἀδύνατον εἰς ἡμᾶς ν' ἀνα-
 βῶμεν οἴκοθεν. Ὅχι, λέγει, δὲν εἶνε μακάριοι ὅσοι κατεβρόχθι-
 σαν τὸ δίκαιον τοῦ πτωχοῦ καὶ τοῦ πένητος, τοῦ ὀρφανοῦ καὶ
 τῆς χήρας, μακάριοι εἶνε οἱ ἀσθενεῖς καὶ ἀπροστάτευτοι, οἱ τι-
 νες ἡδίκηθησαν, οἱ χῆραι, αἵτινες ἐστερήθησαν τὸν ἄρτον τῶν
 ὀρφανῶν τῶν, πάντες ὅσοι πεινῶσι καὶ διψῶσι τὴν δικαιοσύ-
 νην. Εἶνε δὲ μακάριοι, διότι οὗτοι θέλουσιν ἀπολαύσῃ κατὰ
 ἔκτατον ἀγαθὰ πολὺ ἀνώτερα τῶν μικρῶν καὶ προσκαίρων τοῦ
 κόσμου τούτου, ἐν ᾧ οἱ ἀδίκησαντες θέλουσι κράζῃ ὅτι «ἡμῶν
 ἐπὶ πλύνονται».

§. 181.

Ποιός εἶνε ὁ πέμπτος μακαρισμός καὶ ποία τις ἡ ἔννοια αὐτοῦ ;

« Μακάριοι οἱ ἐλεήμονες, ὅτι αὐτοὶ ἐλεηθήσονται ».

Ἔσσης καταχρίσεως καὶ ταλανισμού ἄξιοι εἶνε οἱ πλεονέκτα καὶ ἄρπαγες, τόσοῦ μακαρισμοῦ ἀπ' ἐναντίας ἄξιοι εἶνε οἱ ἐλεήμονες, οἱ ἀντίποδες οὗτοι τῶν πλεονεκτῶν, οἵτινες δὲν ἀρκοῦνται μόνον εἰς τὴν ἀρνητικὴν ὁρετὴν νὰ μὴ ἀρπάσωσι καὶ ἀδικήσωσιν, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῶν ἰδίων μεταδίδουσιν εἰς τοὺς ἐνδεεῖς μετὰ χαρᾶς καὶ προθυμίας. Οὗτοι εἶνε οἱ ἄξιοι μαθηταὶ τοῦ Χριστοῦ, οἵτινες ἀναδεικνύουσιν ὅχι νεκρὰν ἀλλὰ ζῶσαν καὶ καρποφόρον τὴν πρὸς τὸν πλησίον ἀγάπην, ὅθεν καὶ μακαρίζονται ὑπὸ τοῦ Σωτῆρος διὸ θέλουσιν ἀπολύβῃ τὸν μισθὸν τῆς ἐλεημοσύνης τῶν ἀνώτερον καὶ πολυτιμότερον.

Εἶνε δὲ τὰ ἔργα τῆς ἐλεημοσύνης, τὰ ὅποια συνυπονοοῦνται ἐν τῷ μακαρισμῷ τούτῳ, τὰ μὲν σωματικὰ τὰ δὲ πνευματικὰ. Καὶ τὰ μὲν σωματικὰ εἶνε νὰ τρέφῃ τις τοὺς πεινῶντας νὰ ἐνδύῃ τοὺς γυμνητεύοντας, νὰ ἐπισκέπτεται τοὺς νοσούντας καὶ τοὺς φυλακισμένους, νὰ ὑποδέχεται ἀσμένως καὶ περιποιῇται τοὺς ξένους, νὰ ἐνταφιάζῃ τοὺς πτωχοὺς ἀποθανόντας, ἐγγίνει δὲ νὰ μὴ προξενῇ ποτὲ κακὸν εἰς τὸν πλησίον, ἀλλὰ πάντοτε καλόν¹⁾. Πνευματικὴ δὲ ἐλεημοσύνη εἶνε τὸ νὰ ἐλευθερώσῃ τις διὰ τῶν συμβουλῶν τοῦ τινα ἀπὸ τὴν ἁμαρτίαν καὶ νὰ τὸν ἐπαναφέρῃ εἰς τὴν ὁδὸν τῆς σωτηρίας, τὸ νὰ διδάξῃ τοὺς ἁμαθεῖς τὸν νόμον καὶ τὰς ἐντολάς τοῦ Θεοῦ²⁾, νὰ δώσῃ συμβουλὴν σωτήριον εἰς τὸν πλησίον ἀμνηχανοῦντα κινδυνεύοντα, ἢ νὰ προσεύχεται πρὸς τὸν Θεὸν ὑπὲρ αὐτοῦ καὶ νὰ παρηγορῇ τοὺς τεθλιμμένους³⁾.

1) Ματθ. κε. 35.

2) Μαρκ. ιγ. 15, Ρωμ. ιβ. 4, Θεσσαλ. ε. 11.

3) 1 ακ. ε. 20.

§. 182.

Ποιός εἶνε ὁ ἔκτος μακαρισμός, καὶ ποῖα τις ἡ ἔννοια αὐτοῦ;

«Μακάριοι οἱ καθαροὶ τῇ καρδίᾳ, ὅτι αὐτοὶ τὸν Θεὸν ὁ-
ψονται».

Εἰς τὸν τέλειον χριστιανόν, εἰς τὸν ἅγιον μαθητὴν καὶ μι-
μητὴν τοῦ Χριστοῦ, εἰς ἐκείνον τέλος, ὅστις ὁμοίως εἰς αὐτὸν
ὅτι μάλιστα πρὸς τὸν Θεόν, θέλει πλησιάσῃ καὶ πρὸς αὐτὸν
ὡς πρὸ πάντας τοὺς ἄλλους οὕτως, ὥστε νὰ ἀξιωθῇ τῆς θείας
ἐκείνου, εἰς τοῦτον δὲν ἄρκοιτο μόνον αἱ καλὰ καὶ ἅγιαι πρά-
ξεις, ἀλλ' ὀφείλει νὰ καθάρισῃ καὶ τὴν καρδίαν αὐτοῦ ἀπὸ
παντὸς διαλογισμοῦ πονηροῦ καὶ ἀπὸ πάσης ἐπιθυμίας κακῆς
καὶ αἰσχροῦ. Ἡ καρδία εἶνε πηγὴ καὶ τῆς ἀγιότητος καὶ τῆς
αμαρτίας· ταύτην λοιπὸν ὀφείλουσι νὰ ἀγιάσωσιν οἱ ἅγιοι οἱ
μέλλοντες νὰ ἀξιωθῶσι τῆς ὁψέως τοῦ πατρὸς Θεοῦ.

§. 183.

Ποιός εἶνε ὁ ἕβδομος μακαρισμός, καὶ ποῖα τις ἡ ἔννοια αὐτοῦ;

«Μακάριοι οἱ εἰρηνοποιοί, ὅτι αὐτοὶ υἱοὶ Θεοῦ κληθήσονται».

Ἡ διαβολή, ἡ συκοφαντία, ἡ καταλαλιά, τὸ μῖσος, ἡ διχό-
νοια καὶ ὁ πόλεμος εἶνε τὰ ἔργα τοῦ σαταῆ, ἀφ' ἧς ἡμέρας
ἐπεμβὰς μετὰ Θεοῦ καὶ ἀνθρώπου, ἐρρίψεν ὡς ὄφις τὸν ψυ-
χοβόρον ἐν τῇ διαβολῇ καὶ τῇ κατα Θεοῦ ἀνταρσίᾳ, μέ-
χρι σήμερον. Τὸ ἐναντίον δέ, ἦτοι ἡ συνδιαλλαγή καὶ ἡ εἰρη-
νοποίησις εἶνε τὸ ἔργον τοῦ Θεοῦ, ὅστις καὶ αὐτὸν τοῦ τὸν
μοναγενῆ υἱὸν ἐστελεῖν εἰς τὸν κόσμον διὰ νὰ συνδιαλλάξῃ
τὸν ἄνθρωπον μὲ τὸν Θεόν. Ἀλλὰ τοῦτο εἶνε καὶ τὸ ἔργον
παντὸς ἀληθοῦς καὶ γνησίου μαθητοῦ καὶ ὁπαδοῦ τοῦ Χριστοῦ,
ἡ συνδιαλλαγή καὶ ἡ εἰρηνοποίησις. Διὰ τοῦτο καὶ ὅσοι πράτ-
τουν τὸ ἔργον τοῦτο δὲν εἶνε πλέον υἱοὶ τοῦ διαβόλου, τοῦ
πατρὸς τῆς διχονοίας καὶ τοῦ πολέμου, ἀλλὰ θέλουσιν ὀνομα-
σθῇ κατὰ χάριν υἱοὶ τοῦ Θεοῦ, τοῦ πατρὸς τῆς ἀγάπης καὶ τῆς

ειρήνης, ὅπως υἱὸς Θεοῦ κατὰ φύσιν εἶνε ὁ Σωτὴρ, τοῦ ὁποῖο
τὰ ἔργα μιμοῦνται καὶ οὗτοι κατὰ δύναμιν.

§. 184.

Ποῦτος εἶνε ὁ ὑγῆος μακαρισμὸς καὶ πόλα τις ἡ ἔννοια αὐτοῦ;

«Μακάριοι οἱ δεδιωγμένοι ἕνεκεν δικαιοσύνης· ὅτι αὐτῶν ἡ βασιλεία τῶν οὐρανῶν».

Ὁ κόσμος ὁμῶς θὰ μισησῇ καὶ θὰ καταδιώξῃ τοὺς ἐργά-
τας τούτους τῆς ἀρετῆς καὶ τῆς δικαιοσύνης, τοὺς μαθητὰς
καὶ ὁπαδοὺς τῆς νέας ταύτης διδασκαλίας, διότι πρὸ αὐτῶν
ἐμίσησε καὶ κατεδιώξεν αὐτόν τὸν ἀρχηγόν αὐτῶν καὶ διδά-
σκαλον¹⁾. Ἀλλὰ διὰ τοῦτο μάλιστα εἶνε μακάριοι οἱ κληρο-
νόμοι οὗτοι τῆς βασιλείας τῶν οὐρανῶν, διότι κακοπαθοῦσι
καὶ ἐν κακοποιοῦσι, διότι ἀδικοῦνται καὶ δὲν ἀδικοῦσι, διότι
διώκονται ὑπὲρ τῆς δικαιοσύνης καὶ δὲν διώκουσιν. Αὕτη εἶνε
ἡ τελεία ἀρετὴ, τοῦτο εἶνε τὸ βάπτισμα τοῦ ἁγίου Πνεύματος
τὸ οὐράνιον χρίσμα τοῦ χριστιανοῦ, ὅστις ἀναπλαττόμενος
διὰ πυρὸς καὶ ὕδατος ἀναγεννᾶται εἰς νέον ἠθικόν κόσμον, ὃ
ποῦ ἐξανοίγει διὰ τῶν νοερῶν αὐτοῦ ὀφθαλμῶν νέον καὶ εὐ-
ρύτερον ἠθικῆς ἀρετῆς καὶ τελειότητος ὀρίζοντα, καὶ ὅπου δὲ
ἀρκεῖ πλέον ἢ παλαιὰ καὶ περιορισμένη ἐντολὴ καὶ ἔννοια τῆς
πρὸς τὸν Θεὸν καὶ τὸν πλησίον ἀγάπης. Ὅχι πλέον²⁾ «ὁδόν
τὰ ἀντὶ ὁδόντος» καὶ «ὀφθαλμὸν ἀντὶ ὀφθαλμοῦ», ὅχι ἴσα κα-
ὅμοια ἀντὶ τῶν ἴσων καὶ τῶν ὁμοίων, ἀλλὰ πᾶν τοῦναντίον
εἰρήνην ἀντὶ τοῦ πολέμου, δικαιοσύνην ἀντὶ τῆς ἀδικίας, ἀ-
γάπην ἀντὶ τοῦ μίσους.

§. 185.

Ποῦτος εἶνε ὁ ἔννατος μακαρισμὸς καὶ πόλα τις ἡ ἔννοια αὐτοῦ;

«Μακάριοί ἐστε, ὅταν ὀνειδίσωσιν ὑμᾶς καὶ διώξωσι, καὶ
εἰπωσιν πᾶν πονηρὸν ῥῆμα κατ' ὑμῶν ψευδόμενοι ἕνεκεν ἐμοῦ

1) «Εἰ ὁ κόσμος ὑμᾶς μισεῖ, γινώσκετε ὅτι ἐμὲ πρῶτον ὑμῶν μεμίσηκεν.
Εἰ ἐμὲ ἐδιώξαν καὶ ὑμᾶς διώξουσιν». Ἰω. ιβ', 18.

2) Ματθ. ε', 38.

Χαίρετε καὶ ἀγαλλιᾶσθε ὅτι ὁ μισθὸς ὑμῶν πολὺς ἐν τοῖς οὐ-
ρανοῖς.*

Ἄλλὰ πῶς εἶνε δυνατόν οἱ ὁπαδοὶ τῆς ὑψηλῆς καὶ ὑπεραν-
θρώπου ταύτης διδασκαλίας, ἄνθρωποι ὄντες ἁμαρτωλοὶ, καὶ
ἀναστρεφόμενοι ἐν μέσῳ τῆς ἀνθρωπίνης κοινωνίας, ὅπου βα-
σιλεύει ἡ ἁμαρτία, ὅπου τὰ πάθη φρυάττουσι καὶ λυσσοῦσιν,
ὅπου ἡ διαβολὴ καὶ ἡ συκοφαντία, ἡ ὀργὴ καὶ τὸ μῖσος, ὁ δι-
ωγμὸς καὶ ὁ πόλεμος κατασπαράττουσι τὰς ψυχὰς καὶ τὰ
σώματα τῶν ἀνθρώπων, πῶς εἶνε, λέγω, δυνατόν οἱ μαθηταὶ
τῆς διδασκαλίας ταύτης, ὅχι μόνον νὰ μὴ πράξωσι το κακόν,
ὅχι μόνον νὰ μὴ βλάψωσι τὸν πλησίον, ὅχι μόνον νὰ εἶνε
πρᾶοι καὶ εἰρηνοποιοί, ἀλλὰ καὶ νὰ τηρήσωσι καθαρὰν οὐτῶν
τὴν καρδίαν ἀπὸ πάσης ἔχθρας καὶ μίσους, ἀπὸ παντὸς πά-
θους; Πῶς νὰ μὴ ὀργισθῶσι τοῦλάχιστον κατὰ τῶν φθονε-
ρῶν καὶ κακεντρεχῶν, κατὰ τῶν συκοφαντούντων καὶ καταλα-
λοούντων αὐτούς, κατὰ τῶν μισούντων αὐτούς καὶ καταδιω-
κόντων; Ὁ Σωτὴρ οὐδὲ τοῦτο ἐπιτρέπει εἰς τοὺς μαθητάς καὶ
ὁπαδοὺς του. Ἀνατρέπει καὶ ἐνταῦθα διὰ λόγου ὑπερανθρώ-
που καὶ θεοῦ τὰ ἔμφυτα εἰς τὴν ἁμαρτωλὴν καρδίαν τοῦ ἀν-
θρωπίνου γένους αἰσθήματα, καὶ ἀναρκάζων οἴφνης διὰ τῆς
θείας αὐτοῦ δυνάμεως αἶρει καὶ ἀναφέρει τὴν διάνοιαν καὶ τὴν
καρδίαν τῆς ἀνθρωπότητος εἰς ὕψος ἡθικῆς ἀρετῆς καὶ διδα-
σκαλίας ἀγνωστον καὶ ἀνῆκοστον μέχρι τοῦδε εἰς αὐτὴν. Ὁ-
χι, λέγει, καὶ καταδιωκόμενοι καὶ κατασυκοφαντούμενοι ὑπὲρ
ἐμοῦ, τοῦτέστιν ὑπὲρ τῆς ἀληθείας καὶ ὑπὲρ τῆς ἀρετῆς, ἐν-
τρέπει νὰ ἀγανακτῆτε καὶ νὰ ὑψηλοῦσε, ὅχι, τοῦ ἐντίμου πρέπει
νὰ χαίρετε καὶ νὰ ἀγαλλιᾶσθε, διότι ὑψίστετε ὑπεράνω τῆς ἁ-
μαρτίας καὶ τῶν ἀνθρώπων, διότι ἐφθάσατε εἰς τὴν κορυφὴν
τῆς ἡθικῆς ἀρετῆς καὶ τελειότητος, διότι ὠφρατωθῆτε με ἐμέ,
ὅστις «ὡς πρόβατον ἐπὶ σφαγὴν ἤχθην, καὶ ὡς ἀμώμος ἐναν-
τίον τοῦ κείροντος αὐτὸν ἀφωγος»¹⁾, διότι με μίαν λέξιν εἰ-
σεθε μακάριοι.

1) Ἠσαΐας ἐν Πράξ. 8, 32

Ποῖον εἶνε ἐν γένει τὸ συμπέρασμα τῶν μακαρισμῶν;

Τοιαύτη ἐν βραχυτάτῃ συντομίᾳ ἡ εἰκὼν τοῦ ἀληθοῦς χριστιανοῦ, ὁποῖαν διέγραψεν αὐτὴν μικρογραφικῶς ὁ Σωτὴρ ἐν τοῖς μακαρισμοῖς, καὶ τοιαῦτα τὰ καθήκοντα αὐτοῦ. Τὰ καθήκοντα ταῦτα περιέχονται ἐρμηνευόμενα λεπτομερέστερον ἀπανταχοῦ τῆς καινῆς Διαθήκης, τὴν ὁποῖαν ὀφείλει πᾶς χριστιανὸς νὰ μελετᾷ ἢ νὰ ἀκροάζεται ὅσον τὸ δυνατόν συχνότερα. Ὅμοίως δὲ καὶ τὰ εἰς τοὺς μακαρισμοὺς ἐπακολουθοῦντα κεφάλαια τοῦ Ματθαίου, καθὼς καὶ ὁλόκληρος ἐν γένει ἡ καινὴ Διαθήκη, περιέχει πλήρη τὴν εἰκόνα τοῦ ἀληθοῦς καὶ τελείου χριστιανοῦ, τὸν ὁποῖον ὁ Σωτὴρ ἡμῶν ἐκήρυξε μακάριον.

Πρὸς ταύτης λοιπὸν τῆς εἰκόνης τὴν μέμνησιν ὀφείλομεν νὰ σπεύδωμεν καὶ ἡμεῖς παντὶ σθένει, πρὸς αὐτὴν ῥυθμίζοντες ὄχι μόνον τὰς πράξεις, τὴν διαγωγὴν καὶ τὸν βίον ἡμῶν, ἀλλὰ καὶ αὐτὰ τὰ διανοήματα καὶ τὰς ἐπιθυμίας. Τοιοῦτον δὲ καταρτίσαντες τὸν ἡμέτερον βίον, καὶ οὕτω τελειωθέντες ἠθικῶς διὰ τῆς χάριτος τοῦ Κυρίου ἡμῶν Ἰησοῦ Χριστοῦ, θελωμεν ἀξιοῦσθαι καὶ ἡμεῖς τῆς ἐν τῇ βασιλείᾳ τῶν αἰσθητῶν αἰωνίας

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΕΝ ΤΟΙΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΙΣ ΜΑΘΗΤΕΥΟΝΤΩΝ

ΥΠΟ

ΑΝΤΩΝΙΟΥ Β. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ
Ἐπεξεργασμένη.

Τριτάται. 20

Αρ. 66 8030

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,

ΤΥΠΟΙΣ ΤΗΣ «ΠΡΟΟΔΟΥ».

1880.

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΔΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ

ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ

ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΝ

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΝ

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΝ

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΝ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Ω.

ΣΕΒΑΣΤΩ ΜΟΙ ΚΥΡΙΩ

ΙΩΑΝΝΗ ΠΑΠΑΔΑΚΗ,

ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

ΚΤΛ. ΚΤΛ. ΚΤΛ.

ΤΗΝΔΕ ΤΗΝ ΣΥΓΓΡΑΦΗΝ

ΕΙΣ ΕΛΛΗΧΙΣΤΟΝ ΤΕΚΜΗΡΙΟΝ

ΙΣΟΒΙΟΥ ΜΑΘΗΤΙΚΗΣ ΕΥΓΝΩΜΟΣΥΝΗΣ

ΑΝΑΤΙΘΗΜΙ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΡΕΥΝΑ ΕΚΤΕΛΟΥΜΕΝΗ

ΕΝ ΤΗ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΡΕΥΝΑ ΕΚΤΕΛΟΥΜΕΝΗ

ΕΡΕΥΝΑ ΕΚΤΕΛΟΥΜΕΝΗ

ΕΡΕΥΝΑ ΕΚΤΕΛΟΥΜΕΝΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

Ἡ παρούσα ἔκδοσις συνετάχθη μὲν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προηγουμένης καὶ πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπὸν, ἵνα δηλ. κατασταθῇ δι' αὐτῆς ἔσων ἐνεστὶν εὐχερεστέρα καὶ τελειότερα ἢ ἐκμάθησις τῆς Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς εἰς τοὺς ἐν τοῖς ἡμετέροις Γυμνασίοις διδασκαμένους τὰ Μαθηματικά, διαφέρει ὁμως οὐσιωδῶς τῆς πρώτης κατὰ τινα ἄλλα, πρὸ πάντων δὲ κατὰ τὴν ἐκθεσιν τῶν καθέκαστα.

Διδάξαντες ἐπὶ πενταετίαν ὅλην εἰς ἰδίους μαθητὰς τὴν πρώτην τοῦ παρόντος ἔργου ἔκδοσιν, ἐτύχωμεν καταλλήλου εὐκαιρίας, ἵνα ἴδωμεν εἰς ποῖα μέρη τοῦ κειμένου ἀπαντῶσι συνήθως δυσκολίας αἱ μαθηταί, καὶ ἐξεθέσαμεν ἐν τῇ παρούσῃ αὐτὰ οὕτως, ὥπως ἐκ πείρας ἐπέσθηνμεν ὅτι διδασκόμενα καθίσταντο εὐνοητότερα καὶ εὐκολώτερα πρὸς ἐκμάθησιν· αὕτη δὲ εἶναι ἡ κυριώτερα καὶ οὐσιωδέστερα τελειοποιήσις τοῦ ἔργου ἡμῶν τούτου, περὶ ᾧ ἐνομίσμεν ἀναγκαῖον νὰ κάμωμεν ἰδιαίτερος λόγον ἐνταῦθα. Καθόσον δ' ἀφορᾷ τὰς λοιπὰς τοῦ κειμένου μεταβολάς, ἀπλὴ παραβολὴ τῶν δύο ἐκδόσεων ἀρκεῖ νὰ καταστήσῃ αὐτὰς γνωστὰς εἰς τοὺς ἀξιολύμους ἡμῶν συναδέλφους, πρὸς οὓς σπεύδομεν, δραττόμενοι εὐχαρίστως τῆς παρούσης εὐκαιρίας, νὰ ἐκφράσωμεν τὰς εὐχαιρῶντες ἡμῶν εὐχαριστίας δι' ἣν παρέσχον καὶ παρέχουσιν ἡμῖν πρόθυμον καὶ ἐνθαρρυντικὴν ὑποστήριξιν πρὸς αἰσίαν ἀποπεράτωσιν τοῦ δυσχεροῦς καὶ πολυδαπάνου ἔργου τῆς ἐκδόσεως πλήρους καὶ εὐλήπτου Μαθηματικοῦ συστήματος, εἰς ᾧ ἀπὸ τινων ἐτῶν ἀνενδύτως καταγιγνώμεθα καὶ ὅπερ ἐλπίζομεν νὰ φέρωμεν εἰς πέρας προσεχῶς.

Ἐν Ἀθήναις, τῇ 3 Μαΐου 1873.

Α. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΣ.

Σ Σ. Μετὰ πλείστης ὁσῆς εὐχαριστήσεως εἶδομεν, ὅτι αἱ εἰς τὴν πρώτην ἔκδοσιν ἐπενεχθεῖσαι τροποποιήσεις, περὶ ὧν ἀνωτέρω ἐν τῷ προλόγῳ λόγον ποιούμεθα, ἐτυχον τῆς γενικῆς ἐπιδουκίμασις πάντων ἡμῶν τῶν συναδέλφων, καὶ ἀποδείξεις τούτου εἶναι ὅτι αὕτη ἐξηντλήθη ὁλοσχερῶς ἐντὸς δύο ἐτῶν, ἐνῶ διὰ τὴν πρώτην ἐχρειάσθησαν πρὸς τοῦτο πέντε ὅλα ἔτη. Τούτοις ὁ ἔνεκεν ἡ παρούσα τρίτη ἔκδοσις ἀφῆθη, ἐκτὸς μικρῶν τινῶν βελτιώσεων, ἐντελὲς δὲ μοίᾳ τῇ προηγουμένῃ, εὐελπιζόμεθα δὲ ὅτι οὕτως ἔχουσα θέλει τυγχάνει παρὰ τῶν ἀξιολύμων συναδέλφων ἡμῶν τῆς αὐτῆς πάντοτε ὑποστηρίξεως.

ΠΙΝΑΞ

ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Ἀριθμησις.—Προκαταρκτικαὶ γνώσεις.—Ἀπαγγελία τῶν ἀριθμῶν.
—Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.—Κανόνες πρὸς ἀπαγγελίαν ἀριθμοῦ τινος
γεγραμμένου διὰ ψηφίων.—Κανὼν πρὸς γραφὴν ἀπαγγελλομένου
ἀριθμοῦ.—Ἀσκήσεις. Σελ. 1—8

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Πρόσθεσις καὶ ἀφαιρέσις.—Περὶ προσθέσεως.—Ἀπλᾷ τῆς προσθέ-
σεως περιπτώσεις.—Γενικὴ τῆς προσθέσεως περίπτωσις.—Βῆσα-
νος τῆς προσθέσεως.—Περὶ ἀφαιρέσεως.—Ἀπλῇ τῆς ἀφαιρέσεως
περίπτωσις.—Ἀφαιρέσεις δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν ἐν τινι μερικῇ
περίπτωσει.—Γενικὴ τῆς ἀφαιρέσεως περίπτωσις.—Βῆσανος τῆς
ἀφαιρέσεως.—Ἀσκήσεις. Σελ. 9—18

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Πολλαπλασιασμός.—Περὶ πολλαπλασιασμοῦ.—Ὅρισμοί τινες καὶ
χρῆσις σημείων τινῶν.—Πίναξ πολλαπλασιασμοῦ.—Πολλαπλα-
σιασμός πολυψηφίου ἐπὶ μονοψηφίον.—Πολλαπλασιασμός ἀριθμοῦ
τινος ἐπὶ ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ἐξ ἑνὸς σημαντικοῦ ψηφίου ἀπο-
λουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν.—Γενικὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πε-
ρίπτωσις.—Περίπτωσις καθ' ἣν ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολ-
πλασιαστέος ἀκολουθοῦνται ὑπὸ μηδενικῶν.—Ἀριθμός τῶν ψη-
φίων τοῦ γινομένου.—Βῆσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.—Γινόμε-
να πλειοτέρων παραγόντων.—Περὶ δυνάμεων.—Πολλαπλασιασμός
ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ τινὰ διαφοράν.—Ἀσκήσεις. . . . Σελ. 19—36

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Διαίρεσις.—Περὶ διαίρεσεως.—Μερικὴ περίπτωσις, καθ' ἣν τὸ πη-
λίχον εἶναι μονοψηφίον.—Γενικὴ τῆς διαίρεσεως περίπτωσις.—
Βῆσανος τῆς διαίρεσεως.—Διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος διὰ τοῦ γινο-
μένου πολλῶν παραγόντων.—Ἀσκήσεις. Σελ. 37—48

Δημόσιον ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε' Ἀποθήκη Βεροῖος

Διαιρετότης.—Πολλαπλάσια καὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν.—Ὑπό-
λοιπα τῆς διαίρεσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 2 ἢ διὰ 5.—Ὑπόλοιπα

τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 9 καὶ 3.—Υπόλοιπον διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 11.—* Βάσανος διὰ τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 11 τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.—* Ἀσκήσεις. Σελ. 49—60

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

Περὶ πρώτων ἀριθμῶν κτλ.—Ἀριθμοὶ πρώτοι.—Περὶ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.—Θεωρήματα ἐρ' ὧν στηρίζεται ἡ ἀναζήτησις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν.—* Ἀποσύνθεσις ἀριθμοῦ τινος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.—Περὶ κοινοῦ πολλαπλασίου καὶ ἐλάχιστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν.—* Ἀσκήσεις. Σελ. 61—79

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

Κλάσματα.—Προκκταρχτικαὶ γνώσεις.—Περὶ κλασμάτων.—* Ἀναγωγή κλάσματος τινος εἰς τὴν ἀπλουστέραν αὐτοῦ μορφήν.—* Ἀναγωγή δύο ἢ πλειοτέρων κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.—* Ἀναγωγή πλειοτέρων κλασμάτων εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν.—* Ἀσκήσεις. Σελ. 80—91

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

Πράξεις ἐπὶ τῶν κλασμάτων.—Πρόσθεσις.—* Ἀφαίρεσις.—Πολλαπλασιασμός.—Διαιρέσις.—* Ἀσκήσεις. Σελ. 92—102

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'.

Συμμιγείς.—* Ὁρισμοί.—Κανὼν δι' οὗ τρέπομεν δοθέντα συμμιγῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν μιᾶς ὑποιασθήποτε μονάδος αὐτοῦ.—Πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν.—* Ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν.—Πολλαπλασιασμός συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκεραίων.—Διαιρέσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.—Πολλαπλασιασμός συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῇ.—Διαιρέσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς.—Πολλαπλασιασμός συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκεραίων ἢ συμμιγῇ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.—* Ἀσκήσεις. Σελ. 103—131

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι'.

Δεκαδικοί.—* Ὁρισμός τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.—Πῶς ἀπαγγέλλεται δεκαδικὸς ἀριθμός καὶ πῶς γράφεται ἀπαγγελλόμενος.—Παράστασις δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ διὰ κοινοῦ κλάσματος.—Πρόσθεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.—* Ἀφαίρεσις τῶν δεκαδικῶν ἀ-

πῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.—Τροπὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικά.—Περὶ δεκαδικῶν περιοδικῶν κλασμάτων.—*Ανεύρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος τοῦ παραγαγόντος δεδομένον δεκαδικόν περιοδικόν.—*Ἀσκήσεις. Σελ. 132—157

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ΄.

Τετραγωνικὴ ρίζα.—Περὶ τετραγώνου καὶ τετραγωνικῆς ρίζης.—Σύνθεσις τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄθροίσματος δύο ἀριθμῶν.—Ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.—Περὶ τῶν ὄντων τέλεια τετράγωνα ἀριθμῶν.—Ορισμὸς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ δεδομένην προσέγγισιν.—Ἐκτίμησις τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν δεκαδικοῦ τινος πολλοστοῦ τῆς μονάδος.—*Ἀσκήσεις. Σελ. 158—182

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ΄.

Κυβικὴ ρίζα.—Περὶ κύβου καὶ κυβικῆς ρίζης.—Σύνθεσις τοῦ κύβου τοῦ ἄθροίσματος δύο ἀριθμῶν.—Ἐξαγωγή τῆς κυβικῆς ρίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.—*Ἀσκήσεις. Σελ. 183—191

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ΄.

Περὶ λόγων καὶ ἀναλογιῶν.—Περὶ λόγων.—Περὶ ἀναλογιῶν καὶ τῶν ιδιοτήτων αὐτῶν.—*Ἀσκήσεις. Σελ. 192—204

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ΄.

Ἐφαρμογαὶ τῶν ἀναλογιῶν.—Περὶ ἀνελύγων ποσῶν.—Τρόπος δι' οὗ, δοθέντων δύο ποσῶν, ἀναγνωρίζομεν ἐν ταῦτα ἦναι ἀνάλογα.—Ἀπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν.—Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.—Γενικὸς τύπος τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.—Μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.—Ὅδηγίαι τινὲς περὶ κατὰτάξεως τῶν προβλημάτων πρὸς λύσιν. Σελ. 205—236

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ΄.

Ἀδσεῖς προβλημάτων τινῶν.—Προβλήματα τόκου.—Προβλήματα ὑφαιρέσεως.—Μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα.—Προβλήματα ἐταιρίας.—Προβλήματα ἀιμιζέως.—Συνεξευγαλὲν μέθοδος.—Συλλογὴ πρὸς ἄσκησιν ζητημάτων. Σελ. 236—264

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΣ.

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ.

1. "Όταν παρατηρῶμεν ἀντικείμενα φαινόμενα ὅμοια καὶ ἡ πρᾶσοχὴ ἡμῶν φέρεται κατὰ πρῶτον ἐπὶ ἐκάστου τούτων κατὰ μέρος, ἔπειτα ἐπὶ τοῦ συνόλου αὐτῶν, σχηματίζομεν τὴν ἰδέαν ἐνὸς πράγματος καὶ πολλῶν πραγμάτων. Μεταχειρίζομεθα τὴν λέξιν *μονὰς* πρὸς παρὰστασιν ἐνὸς ὁποιοῦδήποτε ἐκ τῶν ὁμοίων ἡμῖν φαινομένων ἀντικειμένων, παραβλεπομένων οὕτω τῶν μερικῶν ιδιοτήτων αὐτοῦ, διὰ δὲ τῆς γενικῆς λέξεως *ἀριθμὸς* παριστῶμεν τὸ ἄθροισμα πλειότερων ὁμοίων μονάδων ἢ καὶ μόνην τὴν μονάδα.

Παραδείγματος χάριν, τὰ ἐν τινι κήπῳ περιεχόμενα δένδρα ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν τινα καὶ ἕκαστον δένδρον εἶναι μία μονάς. Ἐὰν τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος δένδρα ᾖναι διατεθειμένα καθ' ὁμοίας σειράς, αἱ σειραὶ αὗται θέλουσιν ἀποτελέσει ὡσαύτως ἀριθμὸν τινα, λαμβανομένης ἐκάστης ὁμοίας σειρᾶς ὡς μονάδος.

Ἐν τῇ τοιαύτῃ ἀριθμῆσει παρεβλέψαμεν ὅλας τὰς μερικὰς ιδιοτήτας τῶν ἀντικειμένων, (διότι τὰ δένδρα ἡδύναντο νὰ ᾖναι διαφορὰ ἢ αἱ σειραὶ νὰ σύγκηνται ἐκ διαφορῶν δένδρων), καὶ ἐλάβομεν ἀπλῶς ὡς μονάδα τὸ δένδρον ἢ τὴν ταῖς ἄλλαις σειραῖς ὅμοιαν σειράν, ὅμοιαν κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀποτελούντων αὐτὴν δένδρων.

Ἐὰν προσθέσωμεν μίαν μονάδα εἰς τινὰ ἀριθμὸν, σχηματίζομεν τὴν ἀκόλουθον αὐτοῦ, ὅστις καλεῖται καὶ διαδοχικὸς τοῦ πρώτου. Ἐπεταὶ δὲ ἐντεῦθεν ὅτι ἡ σειρά τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀτελεύτητος.

Ἀριθμητικὴ λέγεται ἡ ἐπιστήμη, ἡ περὶ τῶν ἀριθμῶν πραγματευομένη. Κύριον αὐτῆς ἀντικείμενον εἶναι αἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν δι-

νόμενοι να ἐκτελεσθῶσι διάφοροι πράξεις. Τὸ σύνολον τῶν διαφορῶν τούτων πράξεων ἀποτελεῖ τὸν καλούμενον *πολογισμόν*.

Τῆς ἀριθμώσεως ἀντικείμενον εἶναι ἡ *ἀπαγγελία* καὶ ἡ *γραφὴ* τῶν ἀριθμῶν.

ΑΠΑΓΓΕΛΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

2. Εἰς τοὺς ἑννέα ἀρχικοὺς ἀριθμοὺς ἐδόθησαν ὀνόματα ἀνεξάρτητα ἀλλήλων, εἶναι δὲ τὰ ἐξῆς:

ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτὰ, ὀκτώ, ἑννέα.

Ἐκαστος τῶν διαύτων παριστωμένων ἀριθμῶν εἶναι ὁ ἀκόλουθος τοῦ διὰ τοῦ προηγουμένου παριστωμένου. Οὕτως ὁ δύο εἶναι ὁ ἀκόλουθος τοῦ ἑνός, ὁ τρία τοῦ δύο, ὁ ἕξ τοῦ πέντε, ὁ ἑπτὰ τοῦ ἕξ κτλ. Ὁ ἀκόλουθος τοῦ ἑννέα, ὅστις ἔχει μεγίστην σημασίαν εἰς τὴν ἐν γρήσει ἀριθμησὶν ὀνομάσθη

δέκα ἢ μία δεκάς.

Ὁ σχηματιζόμενος ἀριθμὸς ἐκ τῆς ἐνώσεως δέκα δεκάδων ὀνομάσθη ἑκατὸν ἢ μία ἑκατοντάς.

Ὁ ἐκ τῆς ἐνώσεως δέκα ἑκατοντάδων ἀποτελούμενος ὀνομάσθη χίλια ἢ μία χιλιάς.

Τὰ ὀνόματα τῶν οὕτω σχηματιζομένων ἀριθμῶν περιέχονται ἐν τῷ ἐξῆς πίνακι.

ἐκ τῆς ἐνώσεως

δέκα χιλιάδες ἢ μία δεκάς χιλιάδων.	δέκα μονάδων χιλιάδων
ἑκατὸν χιλιάδες ἢ μία ἑκατοντάς χιλιάδων.	δέκα δεκάδων χιλιάδων
ἐν ἑκατομμύριον ἢ μία μονὰς ἑκατομμυρίων	δέκα ἑκατοντάδων χιλιάδων
δέκα ἑκατομμύρια ἢ μία δεκάς ἑκατομμυρίων	δέκα μονάδων ἑκατομμυρίων
ἑκατὸν ἑκατομμ. ἢ μία ἑκατοντάς ἑκατομμ.	δέκα δεκάδων ἑκατομμυρίων
ἐν δισεκατομμύριον ἢ μία μονὰς δισεκατομμυρίων	δέκα ἑκατοντάδων ἑκατομμ.
δέκα δισεκατομμύρια ἢ μία δεκάς δισεκατομμ.	δέκα μονάδων δισεκατομμυρίων
ἑκατὸν δισεκατομμ. ἢ μία ἑκατοντάς δισεκατ.	δέκα δεκάδων δισεκατομμυρίων
ἐν τρισεκατομμ. ἢ μία μονὰς τρισεκατομμυρίων	δέκα ἑκατοντάδων δισεκατ.
κτλ. κτλ.	κτλ. κτλ.

Οἱ ἀριθμοὶ

δέκα, ἑκατὸν, χίλια, δέκα χιλιάδες, ἑκατὸν χιλιάδες, ἐν ἑκατομμύριον κτλ. ὀνομάζονται συνήθως *μονάδες δευτέρας, τρίτης, τετάρτης, πέμπτης, ἑκτης, ἑβδόμης κτλ. τάξεως*. Ὁ ἀριθμὸς ἕν, ἢ ἡ *μονὰς*, ὀνομάζεται ὡσαύτως *μονὰς* πρώτης τάξεως, ἢ *ἀπλῇ μονάδι*.

3. Διὰ τῶν μονάδων τῶν διαφορῶν τούτων τάξεων *δυνάμεθα* εὐκολώτατα ν' ἀπαγγείλωμεν πάντα ἀριθμόν.

Ἐστω π. χ. ἀριθμὸς τις ὑποτισθήποτε *μεγαλειτερος τοῦ ἑννέα*.

"Ας λάβωμεν ἀνὰ δέκα ἐκ τῶν μονάδων αὐτοῦ τοσάκις, ὅσας τούτο εἶναι δυνατόν. Θέλομεν οὕτω σχηματίσει ἐν ἡ πλείονα μέρη ἐκ δέκα μονάδων ἑκάστον, καὶ ἂν ἔμειναν καὶ μονάδες τινὲς ἐκ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, μὴ δυνάμεναι ν' ἀποτελείσωσιν ἕτερον μέρος, ὁ ἀριθμὸς τούτων θέλει εἶναι προφανῶς μικρότερος τοῦ δέκα. Ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος λοιπὸν ἀριθμὸς θέλει σύγκεισθαι ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων. Ὡσαύτως, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων ὑπερβαίῃ τὰς ἑννέα, καὶ λάβωμεν ἀνὰ δέκα δεκάδας τοσάκις, ὅσας τούτο εἶναι δυνατόν, θέλομεν οὕτω σχηματίσει ἐν ἡ πλείονα μέρη ἐκ δέκα δεκάδων ἑκάστον, καὶ ἂν ἔμειναν καὶ δεκάδες τινὲς, μὴ δυνάμεναι ν' ἀποτελείσωσιν ἕτερον μέρος, ὁ ἀριθμὸς τούτων θέλει εἶναι προφανῶς μικρότερος τοῦ δέκα. Ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος λοιπὸν ἀριθμὸς θέλει σύγκεισθαι ἐξ ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ μονάδων. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω βλέπομεν ὅτι

Πᾶς ἀριθμὸς δύναται τὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελούμενος ἐκ τῆς ἐνώσεως πλειοτέρων μερῶν, διαφόρων τάξεων μονάδων, ὧν ὁ ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ δέκα.

Ἐπεὶ λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι πρὸς ἀπαγγελίαν ἀριθμοῦ τινος ἀρκεῖ νὰ ἐκφράσωμεν πόσας μονάδας ἐκάστης τάξεως περιέχει οὗτος. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι δεδομένος τις ἀριθμὸς περιέχει πέντε χιλιάδας, ὀκτὼ δεκάδας καὶ τρεῖς μονάδας, ὁ ἀριθμὸς οὗτος θέλει μᾶς εἶναι ἐντελῶς γνωστός.

Τὸ σύνολον τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τούτων τάξεων ἀποτελεῖ τὸ σύστημα τῆς ἡμετέρας ἀριθμήσεως. Ὁ ἀριθμὸς δέκα, ὁ ἐκφράζων πόσαι μονάδες τάξεώς τινος ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ὡνομάσθη βᾶσις τοῦ συστήματος, τὸ δὲ περὶ οὗ ὁ λόγος σύστημα ἐκλήθη δεκαδικόν.

ΠΗΜ. Ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ δέκα ἡδυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς βᾶσιν ὅποιονδῆποτε ἄλλον ἀριθμόν, π. χ. τὸν ὀκτώ, καὶ τότε ὀκτὼ μονάδες τάξεώς τινος ἤθελον ἀποτελεῖ μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, πᾶς δὲ ἀριθμὸς ἤθελε θεωρεῖσθαι ὡς ἀποτελούμενος ἐκ τῆς ἐνώσεως πλειοτέρων μερῶν, διαφόρων τάξεων μονάδων, ὧν ὁ ἀριθμὸς ἤθελεν εἶναι μικρότερος τοῦ ὀκτώ.

4. Κύριον σκοπὸν ἐν τοῖς προηγουμένοις εἶχομεν νὰ καταστήσωμεν φανεράν τὴν ἐφ' ἧς στηρίζεται ἡ ἀριθμῆσις θεμελιώδη ἀρχήν, μᾶς μένει δὲ τώρα νὰ προσθέσωμεν μερικώτεράς τινας πρὸς συμπλήρωσιν τῆς ἐκθέσεως τῶν περὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν.

Τὰ ὀνόματα τῶν διαδοχικῶν δεκάδων ἀπὸ δύο μέχρις ἑννέα δεκάδων εἶναι τὰ ἑξῆς·

εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πενήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἑννενήκοντα,

σχηματίζονται δέ, ἐκτὸς τοῦ εἴκοσιν, ἐκ τῶν ὀνομάτων τρία, τέσσαρα, πέντε, κτλ. διὰ τῆς προσθέσεως τῆς καταλήξεως κοινὰ, ἐκτὸς τινῶν μικρῶν ἐξαιρέσεων.

Πρὸς ἀπαγγελίαν τῶν μεταξὺ τοῦ δέκα καὶ τοῦ ἑκατὸν περιεχομένων ἀριθμῶν, ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων αὐτῶν, ἔπειτα τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀπλῶν μονάδων, τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς αὐτούς. Οὕτω λέγοντες δέκα ἑπτὰ, εἴκοσι τρία, ἑννενήκοντα πέντε, ἐκφράζομεν ἀμοιβαίως τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ἀποτελουμένους ἐκ μιᾶς δεκάδος καὶ ἑπτὰ μονάδων, ἐκ δύο δεκάδων καὶ τριῶν μονάδων, ἐξ ἑννέα δεκάδων καὶ πέντε μονάδων.

Ὑπάρχει μικρά τις ἐξαιρέσις· οἱ ἀριθμοί, οἱ συγκείμενοι ἐκ μιᾶς δεκάδος καὶ μιᾶς μονάδος, ἢ ἐκ μιᾶς δεκάδος καὶ δύο μονάδων, ἀντὶ τῆς ἀπαγγέλλωνται

δέκα ἓν, δέκα δύο,

λέγονται

ἑνδεκα, δώδεκα.

Πρὸς ἀπαγγελίαν τῶν μεταξὺ τοῦ ἑκατὸν καὶ τοῦ χίλια περιεχομένων ἀριθμῶν ἀπαγγέλλομεν ἐν πρώτοις τὸν ἀριθμὸν τῶν περιεχομένων εἰς αὐτοὺς ἑκατοντάδων, ἔπειτα τὸν μικρότερον τοῦ ἑκατὸν ἀριθμὸν, τὸν συμπληροῦντα τούτους. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς, ὁ συγκείμενος ἐκ τεσσάρων ἑκατοντάδων, πέντε δεκάδων καὶ τριῶν μονάδων, ἀπαγγέλλεται τετρακόσια πενήκοντα τρία.

Οἱ μεταξὺ τοῦ χίλια καὶ τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυρίου περιεχόμενοι ἀριθμοί δύνανται νὰ σύγκηνται ἐξ ἑκατοντάδων χιλιάδων, δεκάδων χιλιάδων, μονάδων χιλιάδων, ἔπειτα καὶ ἐξ ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ μονάδων. Ἀπαγγέλλονται δὲ οὗτοι ἀπαγγελλομένου ἐν πρώτοις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς αὐτοὺς χιλιάδων, ἔπειτα τοῦ μικροτέρου τοῦ χίλια ἀριθμοῦ, τοῦ συμπληροῦντος τούτους. Οὕτως ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς ἀπὸ πέντε ἑκατοντάδας χιλιάδων, δύο δεκάδας χιλιάδων, ἑπτὰ μονάδας χιλιάδων, τρεῖς ἑκατοντάδας, πέντε δεκάδας καὶ ὀκτὼ μονάδας, ἀπαγγέλλεται πεντακόσια εἴκοσι ἑπτὰ χιλιάδες καὶ τριακόσια πενήκοντα ὀκτὼ μονάδες.

Ὡσαύτως ἀπαγγέλλομεν ἅπαντας τοὺς μεταξὺ τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυρίου καὶ τοῦ ἑνὸς δισεκατομμυρίου περιεχομένους ἀριθμούς, ἀπαγ-

γέλλοντες κατὰ πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν περιεχομένων εἰς αὐτοὺς ἑκατομμυρίων, ἔπειτα τὸν μικρότερον τοῦ ἑκατομμυρίου ἀριθμὸν, τὸν συμπληροῦντα τούτους. Παρὰδείγματος χάριν ὁ ἀριθμὸς, ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ἑκατοσιτάδων ἑκατομμυρίων, τριῶν δεκάδων ἑκατομμυρίων, πέτε μονάδων ἑκατομμυρίων καὶ πρὸς τούτοις ἀπὸ πεντακοσίας εἰκοσι δύο χιλιάδας καὶ τριακοσίας τεσσαράκοιτα πέτε μονάδας, ἀπαγγέλλεται διακόσια τριάκοιτα πέτε ἑκατομμύρια, πεντακόσιαι εἰκοσι δύο χιλιάδες καὶ τριακόσιαι τεσσαράκοιτα πέτε μονάδες.

Εἶναι φανερόν ὅτι δι' ὁμοίου τρόπου ἠθέλομεν ἀπαγγεῖλαι ἅπαντας τοὺς μεταξὺ τοῦ ἐνὸς δισεκατομμυρίου καὶ ἐνὸς τρισεκατομμυρίου κτλ. περιεχομένους ἀριθμούς.

Ἐκ τοῦ προεκτεθέντος περὶ ἀπαγγελίας τῶν διαφόρων ἀριθμῶν τρόπου πᾶς τις βλέπει εὐκόλως ὅτι ἐννοοῦμεν τούτους ἀποσυντεθειμένους εἰς μέρη, ἀποτελούμενα τὸ μὲν ἐξ ἀπλῶν μονάδων ἢ μονάδων πρώτης τάξεως, τὸ δὲ ἐκ χιλιάδων ἢ μονάδων τετάρτης τάξεως, τὸ δὲ ἐξ ἑκατομμυρίων ἢ μονάδων ἐξ' ὁδοῦς τάξεως, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Αἱ μονάδες αὗται,

ἓν, χίλια, ἓν ἑκατομμύριον, ἓν δισεκατομμύριον, κτλ.

καλοῦνται ἀρχικαὶ μονάδες. Ἐκάστη δὲ τούτων εἶναι χιλιάκις μεγαλύτερα τῆς προηγουμένης.

Ἐν μὲν τῇ ἀπαγγελίᾳ τῶν ἀριθμῶν αἱ ἀρχικαὶ αὗται μονάδες εἶναι αἱ μόναι λαμβανόμεναι ὑπ' ὄψιν, ἀλλ' ἐν τῇ γραφῇ, ἐφ' ἧς οἱ κανόνες τοῦ ὑπολογισμοῦ στηρίζονται, ἡ σημασία τούτων εἶναι ὅπως δευτερεύουσα.

ΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

5. Ἐπειδὴ κατὰ τὰ λεγθέντα ἐν τῇ § 3 ἑκάστον τῶν μερῶν ἀριθμοῦ τινος ἀποτελεῖται ἐκ μονάδων τάξεως τινος, ὧν ὁ ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ δέκα, ἔπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἅπαντας τοὺς ἀριθμούς διὰ δέκα μόνον χαρακτῆρων. Οἱ χαρακτῆρες οὗτοι καλοῦνται ψηφία. Ἐννέα τούτων, τὰ παριστῶντα τοὺς ἐννέα ἀρχικούς ἀριθμούς, καλοῦνται σηματικὰ ψηφία, καὶ εἶναι τὰ ἐξῆς:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

ἓν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἐπτά, ὀκτώ, ἐννέα.

Τὸ δέκατον ψηφίον εἶναι τὸ ἐξῆς 0, ὃπερ καλεῖται μηδὲν καὶ χρησιμεύει πρὸς παράστασιν τῶν ἑλλειπουσῶν μονάδων τάξεως τινος.

ἵνα δὲ παρυστήσωμεν διὰ ψηφίων ἀριθμὸν τινα μεγαλείτερον τοῦ θ, φανταζόμεθα αὐτὸν ἀποσυντεθειμένον εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων, καὶ γράφομεν πρῶτον τὸ ψηφίον, τὸ παριστῶν τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως, ἔπειτα πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ γράφομεν τὸ παριστῶν τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἐὰν ὁ περὶ οὗ πρόκειται ἀριθμὸς περιέχῃ τοιαύτας· ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει γράφομεν ἐν μηδενικόν. Πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δευτέρου ψηφίου γράφομεν τὸ παριστῶν τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας αὐτοῦ τάξεως, ἐὰν ὑπάρχωσιν, εἰ δὲ μὴ, γράφομεν ἐν μηδενικόν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ὁ τρόπος, καθ' ὃν διὰ τῶν ἀνωτέρω δέκα ψηφίων ἐκτελεῖται ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν, συνίσταται εἰς τὸ νὰ γράφωμεν διαδοχικῶς ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τὰ ψηφία, τὰ παριστῶντα τὰς μονάδας τῶν διαφόρων ἐν τῷ ἀριθμῷ περιεχομένων τάξεων, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ἀνωτέρας καὶ θέτοντες ἐν μηδενικόν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑλλειπουσῶν μονάδων τάξεώς τινος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.—Ιcy. Αἱ μονάδες τῆς δευτέρας, τρίτης, τετάρτης, πέμπτης κτλ. τάξεως γράφονται ὡς ἐξῆς· 10, 100, 1000, 10000, κτλ.

Ζαν. Ὁ ἀριθμὸς, ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τριῶν ἑκατοσάδων, ἐπὶ δεκάδων καὶ ὀκτὼ μονάδων, γράφεται οὕτω 378. Ἐγράψαμεν πρῶτον τὰ ψηφία 8, τὸ παριστῶν τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως, ἦτοι τὰς ἐκατοντάδας· πρὸς τὰ δεξιὰ τούτου ἐγράψαμεν 7, ψηφίον παριστῶν τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἦτοι τὰς δεκάδας, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δευτέρου τὸ 8, ὑπερ παριστῶν τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἐπομένης τῶν δεκάδων τάξεως, ἦτοι ἀπλῶς μονάδας. Ἄν δὲν ὑπῆρχον δεκάδες, τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐκατοντάδων καὶ μονάδων ὑποτιθεμένων τῶν αὐτῶν, ἠθέλομεν γράψαι 308, ἦτοι θ μετὰ τὸ ψηφίον τῶν ἐκατοντάδων εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων.

Ἡ γραφὴ λοιπὸν τῶν ἀριθμῶν στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεμελιώδους ἀρχῆς τῆς § 3 καὶ ἐπὶ τῆς ἐξῆς συνθήκης·

Πᾶν ψηφίον γεγραμμένον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου τινὸς παριστᾷ μονάδας τάξεως, ἀμέσως ἀνωτέρας ἐκείνης, ἢ τὸ πρὸ αὐτοῦ παριστᾷ, τοῦ πρώτου πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίου παριστῶντος πάντοτε ἀπλᾶς μονάδας.

Ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν συγκεφαλαιούται διὰ τῶν ἐπομένων κανόνων, δι' ὧν δυνάμεθα ἢ ἀπαργεῖλαι ἢ ἀπαρτεῖλαι πάντα διὰ ψηφίων παριστῶμενον ἀριθμὸν, καὶ ἀντιστρόφως, νὰ παραστήσωμεν διὰ ψηφίων πάντα

ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον κατὰ τὰ περὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν λεχθέντα.

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΡΟΣ ΑΠΑΓΓΕΛΙΑΝ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΙΝΟΣ ΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΔΙΑ ΨΗΦΙΩΝ.

6. ΚΑΝΩΝ 1ος.—Πρὸς ἀπαγγελίαν ἀριθμοῦ τινος μὴ περιέχοντος περισσότερα τῶν τριῶν ψηφίων, ἀπαγγέλλομεν διαδοχικῶς ἕκαστον σηματικὸν αὐτοῦ ψηφίον, ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν, μετὰ τοῦ ὀνόματος τῶν ὑπ' αὐτοῦ παριστωμένων μονάδων.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 437 ἀπαγγέλλεται τετρακόσια (ἦτοι τέσσαρες ἑκατοντάδες) τριάκοντα (τρεις δεκάδες) ἑπτὰ (ἦτοι ἑπτὰ μονάδες).

ΚΑΝΩΝ 2ος.—Πρὸς ἀπαγγελίαν ἀριθμοῦ τινος, παριστωμένου διὰ περισσότερων τῶν τριῶν ψηφίων, ἀποσυνθέτομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα, ἀρχόμενοι ἐκ τῶν δεξιῶν. (τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήμα δυνατὸν τὰ περιέχει ὅσα ἢ καὶ ἑν μόνον ψηφία), καὶ ἔπειτα ἀπαγγέλλομεν ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν ἕκαστον τμήμα ὡς εἰ ἦτο μόνον, προσφέροντες μετὰ τοῦτο καὶ τὸ ὄνομα τῆς τάξεως τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου.

Παραδείγματος χάριν ὁ ἀριθμὸς 37043025 ἀπαγγέλλεται τριάκοντα ἑπτὰ ἑκατομμύρια, τεσσαράκοντα τρεις χιλιάδες καὶ ἑκοσι πέντε μονάδες.

Βλέπομεν δὲ ὅτι ἕκαστον τῶν τμημάτων τῶν κατὰ τὸν 2ον κανόνα ἀποσυντεθειμένων ἀριθμῶν παριστᾷ μονάδας ἀρχικῆς τινος τάξεως. Τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ τμήμα παριστᾷ ἀπλῶς μονάδας, τὸ δεῦτερον χιλιάδας, τὸ τρίτον ἑκατομμύρια κτλ.

ΚΑΝΩΝ ΠΡΟΣ ΓΡΑΦΗΝ ΑΠΑΓΓΕΛΛΟΜΕΝΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ.

7. Πρὸς γραφὴν ἀριθμοῦ, ἀπαγγελλομένου κατὰ τὰ περὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν λεχθέντα, γράφομεν διαδοχικῶς τὸν ἕνα κατὰ τὸν αἰλον καὶ ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἀπαγγελλομένων ἀρχικῶν μονάδων.

Ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τούτων πρέπει νὰ περιέχῃ μονάδας τριῶν τάξεων, πρέπει νὰ γράφωμεν ἐν μηδενικὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἐκείνων, οἵτινες γράφονται διὰ δύο ψηφίων, καὶ δύο μηδενικά πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν δι' ἐνὸς ψηφίου γρῆφομένων, ἐάν δέο περι αὐτολόγος ἀριθμὸς δὲν περιέχῃ ἀρχικὰς μονάδας τάξεως τινος, τότε γράφομεν

τρία μηδενικά πρὶν ἢ μεταβῶμεν εἰς τὴν παράστασιν τῶν ἀρχικῶν μονάδων τῆς ἀκολουθοῦς τάξεως.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς *τριακότα* δισεκατομμύρια, εἴκοσι πέντε χιλιάδες καὶ ἑπτὰ μονάδες γράφεται 30 000 025 007. Ἐθέσαμεν τρία μηδενικά εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατομμυρίων, διότι ὁ ἀπαγγελλεὶς ἀριθμὸς δὲν περιέχει τοιαῦτα· ἐν μηδενικὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 25, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν χιλιάδων τῶν ἐμπεριεχομένων ἐν τῷ ἀπαγγελλθέντι ἀριθμῷ γράφεται διὰ δύο ψηφίων, καὶ δύο μηδενικά πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 7, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τοῦ ἀπαγγελλθέντος ἀριθμοῦ παρίσταται δι' ἐνὸς ψηφίου.

ΣΗΜ. Ἄν ἀντὶ τοῦ δέκα ἐλαμβάνετο ὡς βάσις ἕτερός τις ἀριθμὸς, ὁ ὀκτώ π. χ., οἱ ἄνωτέρω περὶ γραφῆς καὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν δοθέντες κανόνες ἤθελον εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ μόνην τὴν διαφοράν ὅτι μόνον ὀκτὼ ψηφία ἤθελον τότε ἀρκεῖ πρὸς γραφὴν παντὸς ἀριθμοῦ, καὶ ὅτι κατὰ τὸ νέον τοῦτο σύστημα ὁ ἀριθμὸς 10 ἤθελεν εἶναι ἴσος μὲ 8 μονάδας τοῦ πρώτου συστήματος, ὁ 100 ἤθελεν εἶναι ἴσος μὲ 64 τοῦ πρώτου, ὁ 1000 μὲ 512, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐλήφθη φαίνεται: ὡς βάσις ὁ ἀριθμὸς δέκα, διότι κατ' ἀρχὰς οἱ ἄνθρωποι ἐμέτρουν ἐπὶ τῶν δακτύλων αὐτῶν, ὧν ὁ ἀριθμὸς εἶναι δέκα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

- I. Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμὸς 23 000 586 307;
- II. Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμὸς 2 000 000 050 008;
- III. Νὰ γραφῇ διὰ ψηφίων ὁ ἀριθμὸς ἑπτὰ τρισεκατομμύρια εἴκοσι ὀκτὼ χιλιάδες καὶ δέκα ἑπτὰ μονάδες.
- IV. Νὰ γραφῇ διὰ ψηφίων ὁ ἀριθμὸς πέντε ἑπτάκις ἑκατομμύρια καὶ τρεῖς μονάδες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ.

8. Ἡ πρόσθεσις εἶναι προᾶξις, δι' ἣν εὐρίσκουμεν ἀριθμὸν περιέχοντα τόσας μονάδας ὅσαι περιέχονται εἰς δύο ἢ περισσότερους δεδομένους ἀριθμούς.

Οἱ μὲν δεδομένοι ἀριθμοὶ καλοῦνται προσθετέοι, ὁ δὲ ζητούμενος ἄθροισμα ἢ κεφάλαιον.

Ἡ πρόσθεσις παρίσταται διὰ τοῦ σημείου +, ὅπερ τίθεται μετὰ τῶν προσθετέων ἀριθμῶν καὶ ἀπαγγέλλεται πλέον ἢ σύν. Οὕτως $8 + 3$ παρίστανται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 3, ἀπαγγέλλεται δὲ ὁκτώ πλέον τρία ἢ ὁκτώ σύν τρία.

ΑΠΑΔΙ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ.

9. Ὡς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν δύο μονοψήφious ἀριθμούς, 8 καὶ 4 παραδείγματος χάριν. Εἶναι φανερόν ὅτι θέλομεν εὑρεῖν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, ἐάν προσθέσωμεν διαδοχικῶς εἰς τὸν 8 τοσάκις τὴν μονάδα, ὅσάκις αὕτη περιέχεται εἰς τὸν 4· θέλομεν λοιπὸν εἶπει, κατὰ τὰ περὶ ἀριθμῆσεως λεχθέντα, 8 καὶ 1...9, 9 καὶ 1...10, 10 καὶ 1...11, 11 καὶ 1...12. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα εἶναι 12, διότι 12 εὕρομεν ἀφοῦ προσεθέσαμεν εἰς τὸν 8 τετράκις τὴν μονάδα, ἥτοι ὅσάκις αὕτη περιέχεται εἰς τὸν προσθετέον ἀριθμὸν 4.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου προσθέτομεν εἰς πολυψήφιον ἀριθμὸν δεδομένον μονοψήφιον. Π. χ., ἂν εἶχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμούς 85 καὶ 3, ἠθέλομεν εἶπει 85 καὶ 1...86, 86 καὶ 1...87, 87 καὶ 1...88. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 88.

Εὐκόλως ἀποκτᾷ τις ἀρκετὴν ἀσκήσιν, ὥστε νὰ δύνῃται νὰ ἐκτελῇ ἀμέσως τὰς τοιούτου εἶδους προσθέσεις καὶ νὰ εὕρῃσῃ ἐν τῇ νῷ αὐτοῦ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, λέγων 8 καὶ 4...12, 85 καὶ 3...88.

10. Τέλος, ἂν εἶχομεν νὰ προσθέσωμεν τρεῖς, τέσσαρες κτλ. μι-

νοητρίους ἀριθμούς, ἤθελον εὑρεῖν τὸ ζητούμενον αὐτῶν ἄθροισμα προσθέτοντες πρῶτον τοὺς δύο πρώτους, ἔπειτα εἰς τὸ εὐρεθησόμενον ἄθροισμα αὐτῶν τὸν τρίτον, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι μὲς ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν μονητρίων ἀριθμῶν 8, 4, 9, 5 καὶ 7. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι 12, ἔπειτα λέγομεν 12 καὶ 9...21, 21 καὶ 5...26, 26 καὶ 7...33. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 33.

ΓΕΝΙΚΗ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ.

11. Ἡ γενικὴ τῆς προσθέσεως περίπτωσις, ἥτοι ἡ πρόσθεσις ὁσωνδῆποτε πολυητρίων ἀριθμῶν, ἀνάγεται εἰς τὴν μερικὴν τῆς προηγουμένης § 10 διὰ τῆς ἑξῆς ἀρχῆς.

Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδῆποτε καὶ ὁποιοῦνδῆποτε ἀριθμῶν εὐρίσκεται προστιθεμένων διαδοχικῶς τῶν ἀπλῶν αὐτῶν μονάδων, τῶν δεκάδων, τῶν ἑκατοντάδων, κτλ. καὶ ζητουμένου ἔπειτα τοῦ ἄθροισματός τῶν οὕτως εὐρεθησομένων μερικῶν ἄθροισμάτων. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, εἰς ἔχωμεν πλειότερους ἀριθμούς, ἀποσυνθέσωμεν αὐτοὺς εἰς ὁμοειδῆ μέρη καὶ εὐρωμεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοειδῶν αὐτῶν μερῶν, ἔπειτα τὸ ἄθροισμα τῶν οὕτως εὐρεθησομένων μερικῶν ἄθροισμάτων, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ τελευταῖον εὐρεθησόμενον ἄθροισμα θέλει εἶναι ἴσον τῷ ἄθροισματι τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Ἐστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ

9507, 939, 6028,

ὧν ζητεῖται τὸ ἄθροισμα. Πρὸς τοῦτα ἀποσυνθέτομεν αὐτοὺς εἰς μονάδας δεκάδας, ἑκατοντάδας κτλ. προσθέτομεν ἔπειτα πρῶτον τὰς μονάδας αὐτῶν, ἔπειτα τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας, κτλ. καὶ ζητοῦμεν ἀκλούθως τὸ ἄθροισμα τῶν εὐρεθέντων ἄθροισμάτων τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, κτλ. Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι τὸ τελευταῖον εὐρεθησόμενον ἄθροισμα θέλει εἶναι ἴσον τῷ ἄθροισματι τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Καθ' ὃν τρόπον ἐκτελοῦμεν συνήθως τὴν πρόσθεσιν τῶν πολυητρίων ἀριθμῶν συγχωνεύομεν, οὕτως εἰπεῖν, τὰς δύο πρῆξεις εἰς μίαν, καὶ ἐνῷ ἀπ' ἐνὸς εὐρίσκομεν ἐν μερικῶν ἄθροισμα, συγχρόνως προσθέτομεν τοῦτο εἰς τὸ εὐρεθησόμενον μερικὸν ἄθροισμα τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Π.χ., ἂν ἤθελον ἐκκρυστάλλωμεν κατὰ γράμμα εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀριθμῶν

9507, 939, 6028 τὴν ἀνωτέρω ἀρχὴν, ἔπρεπε νὰ εὐρωμεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων αὐτῶν 24, δεύτερον τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων αὐτῶν 5, τρίτον τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκχτοντάδων αὐτῶν 14, τέταρτον τὸ ἄθροισμα τῶν χιλιάδων αὐτῶν 15, καὶ τελευταῖον νὰ προσθέσωμεν 24 μονάδας, 5 δεκάδας, 14 ἐκχτοντάδας καὶ 15 χιλιάδας. Ἵνα δὲ ἐκτελέσωμεν τὴν δευτέραν ταύτην πρόσθεσιν, ἐπειδὴ τὰ εὐρεθέντα μερικὰ ἄθροίσματα περιέχουσι καὶ πολυψηφίους ἀριθμούς, ἔπρεπε καὶ ἐπὶ τούτων νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν αὐτὴν ἀρχήν, καὶ οὕτω καθεξῆς, τοῦθ' ὅπερ καθιστᾷ λίαν ἐπίπονον τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως. Συντομεύομεν λοιπὸν τὴν πρόσθεσιν τῶν δεδομένων πολυψηφίων ἀριθμῶν προσθέτοντες ἀμέσως ἕκαστον τῶν ἐκάστοτε εὐρισκομένων μερικῶν ἄθροισμάτων εἰς τὸ μερικὸν ἄθροισμα τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ὡς ἐξῆς·

9507

939

6028

16474

Γράφομεν τοὺς δεδομένους ἀριθμούς οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὐρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου στήλης, ἀγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν τελευταῖον προσθετέον ἀριθμὸν καὶ ὑπ' αὐτὴν γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ ζητουμένου ἄθροίσματος καθόσον εὐρίσκομεν αὐτά. Πρὸς τοῦτο δὲ προσθέτομεν πρῶτον τὰς ἀπλᾶς μονάδας κατὰ τὰ περὶ προσθέσεως τῶν μονοψηφίων λεχθέντα, λέγοντες 7 καὶ 9...16 καὶ 8...24. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν μονάδων εἶναι 24 μονάδες. Ἀλλ' ἐπειδὴ 24 μονάδες περιέχουσι 2 δεκάδας καὶ 4 μονάδας, γράφομεν 4 μονάδας ὑπὸ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων καὶ κρατοῦμεν τὰς 2 δεκάδας, ἵνα προσθέσωμεν αὐτάς εἰς τὰς δεκάδας τῶν δεδομένων ἀριθμῶν· εἰς τοῦτο δὲ συνίσταται ἡ σύγχρονος εὐρεσις τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων καὶ ἡ προσθήκη ἑκάστου τούτων εἰς τὸ ἀμέσως ἐπόμενον μερικὸν ἄθροισμα πρὸς ἕμμεσον εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου ὅλικοῦ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν ἄθροίσματος.

Λέγομεν λοιπὸν μεταβαίνοντες εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων· 2 αἱ κρατούμεναι καὶ 3...5 καὶ 2...7. Τὸ ψηφίον λοιπὸν τῶν δεκάδων τοῦ ζητουμένου ἄθροίσματος εἶναι 7, ὅπερ γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων.

Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν ἐκχτοντάδων καὶ λέ-

τομεν 5 καὶ 9...14 καὶ 0...14. Ἀλλ' ἐπειδὴ 14 ἐκκτοντάδες περιέχουσι 1 χιλιάδα καὶ 4 ἐκκτοντάδες, γράφομεν 4 εἰς τὴν στήλην τῶν ἐκκτοντάδων τοῦ ζητουμένου ἀθροίσματος καὶ κρατοῦμεν 1 χιλιάδα, ἵνα προσθέσωμεν αὐτὴν εἰς τὰς χιλιάδας τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες λοιπὸν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων λέγομεν 1 ἢ κρατουμένη καὶ 9...10 καὶ 6...16. Ἐπειδὴ δὲ αἱ 16 αὐτῆς χιλιάδες σύγκεινται ἐξ 6 χιλιάδων καὶ 1 δεκάδος χιλιάδων, γράφομεν 6 εἰς τὴν θέσιν τῶν χιλιάδων τοῦ ζητουμένου ἀθροίσματος καὶ 1 πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 6, καὶ οὕτως εὐρίσκομεν ὡς ἀθροισμα τῶν δεδομένων ἀριθμῶν τὸν ἀριθμὸν 16474.

Ἐν τῇ ἐκτελέσει τῆς πράξεως ἡ πρόσθεσις ἐκτίθεται συντομώτατα ὡς ἐξῆς· λέγομεν 7 καὶ 9...16 καὶ 8...24, γράφομεν 4 καὶ κρατοῦμεν 2· 2 τὰ κρατούμενα καὶ 3...5 καὶ 2...7, γράφομεν 7· 5 καὶ 9...14, γράφομεν 4 καὶ κρατοῦμεν 1· 1 τὸ κρατούμενον καὶ 9...10 καὶ 6...16, γράφομεν 16.

12. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξάγομεν εὐκλῶς τὴν ἐξῆς τῆς προσθέσεως γενικὸν κανόνα·

Ἴνα προσθέσωμεν πλείστον ἀριθμοὺς, γράφομεν τοὺς μὲν ὑπὸ τοὺς δὲ οὕτως, ὥστε αἱ μονάδαι τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὐρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου στήλης, καὶ ἄγουεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν τελευταῖον ἀριθμὸν. Προσθέτομεν τὰ ψηφία τῆς πρώτης πρὸς τὰ δεξιὰ στήλης, καὶ ἔαν τὸ εὐρεθὲν ἀθροισμα ᾖ μικρότερον τοῦ 10, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐν τῇ πρώτῃ στήλῃ, ἔαν δὲ ᾖ μὲγαλότερον τοῦ 9, γράφομεν μόνον τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος, τὰς δὲ δεκάδας αὐτοῦ προσθέτομεν εἰς τὰς δεκάδας τῆς δευτέρας στήλης. Ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρι τῆς τελευταίας στήλης καὶ γράφομεν τὸν ἀριθμὸν, τὸν παριστώοντα τὸ ἀθροισμα τῶν ψηφίων τῆς στήλης ταύτης καὶ τῶν κρατουμένων τῆς προηγουμένης, οὕτως, ὥστε αἱ μονάδαι τοῦ ἀθροίσματος νὰ εὐρίσκωνται ἐπὶ τῆς τελευταίας καθέτου στήλης. Ὁ οὕτως ὑπὸ τὴν γραμμὴν εὐρεθεὶς ἀριθμὸς θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον ἀθροισμα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἡδυνάμεθα, ἀντὶ ν' ἀρχίζωμεν τὴν πρόσθεσιν ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ, νὰ προσθέτωμεν πρῶτον τὰ ἐν τῇ πρώτῃ πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλῃ ὑπάρχοντα ψηφία, ἔπειτα τὰ ἐν τῇ ἀκολουθῷ κτλ., ἀλλ' οὕτως ἠθέλωμεν ἵνα οἱ ἀναγκάζονται ἕνεκα τῶν κρατουμένων τῶν ἀκολουθῶν στηλῶν νὰ μεταβάλλωμεν τὸ προγρα-

εἰν ψηφίον, προσθέτοντες εἰς τοῦτο τὰ εὐρεθέντα χραιτούμενα, τοῦθ' ἵπερ εἶναι λίαν ἐπίπονον. Τότε μόνον εἶναι ἀδιάφορος ἡ κατὰ τοῦτον ἢ ἐκεῖνον τὸν τρόπον ἐκτέλεσις τῆς πράξεως, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῶν διαφόρων τάξεων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν δὲν ὑπερβαίνει τὸν 9, ὡς π. χ. ὅταν ἔχωμεν πρὸς πρόσθεσιν τοὺς ἐξῆς ἀριθμούς· 32021, 54324, 10532.

ΒΑΣΑΝΟΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ.

13. Βάσανος πράξεώς τινος καλεῖται ἑτέρα τις πράξις, δι' ἧς βεβαιούμεθα περὶ τῆς ἀληθείας τῶν ἐξαγομένων τῆς πρώτης.

Κατὰ δύο τρόπους ἐκτελοῦμεν τὴν βάσανον τῆς προσθέσεως· ἢ χρῶμεν τοὺς προσθετέους ἀριθμούς καὶ κατ' ἄλλην τινὰ τάξιν καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πράξιν, ἢ, ἂν εὕρομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτοντες τὰ ψηφία τῶν διαφόρων στηλῶν ἀρχόμενοι ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρόσθεσιν τῶν αὐτῶν ψηφίων ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἐξῆς.

Πολλάκις συμβαίνει προσθέτοντες δύο μονοψηφίους ἀριθμούς ἢ εἰς τινὰ ἀριθμὸν ἕτερον μονοψήφιον νὰ ἀπατώμεθα εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἐκ τινος ἀπροσεξίας· νὰ λέγωμεν π. χ. 5 καὶ 8...11, καὶ νὰ κῆνωμεν τὸ αὐτὸ λάθος κατ' ἐπανάληψιν ἐν τῇ αὐτῇ πράξει. Μεταβάλλοντες τώρα ἢ τὴν τάξιν τῶν προσθετέων ἀριθμῶν ἢ τὸν τρόπον τῆς εὐρέσεως τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων, δὲν θέλομεν ἔχει τοὺς αὐτοὺς πρὸς πρόσθεσιν ἀριθμούς, ἐφ' ὧν ἐξ ἀπροσεξίας ἐσφάλαμεν, ἱπομένως πολὺ πιθανὸν νὰ μὴ ὑποπέσωμεν εἰς τὸ αὐτὸ λάθος, καὶ οὕτω θέλομεν παρατηρήσει ἐκεῖνο, εἰς ὃ προηγουμένως ὑπεπέσαμεν. Π. χ. ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ προσθέτων λέγει 5 καὶ 8...11, καὶ ὅτι εἶχε πρὸς πρόσθεσιν τοὺς ἐξῆς ἀριθμούς·

23565

56078

39576

119217

οὓς προσθέτει ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Τὸ πρῶτον λοιπὸν ψηφίον 7 ἤθελεν εἶναι λαμβασμένον. Τώρα, ἂν ἐπαναλάβῃ τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, θέλει εἶπει 6 καὶ 8...14 καὶ 5...19. Ἦθελε λοιπὸν ἀμέσως παρατηρήσει τὸ λάθος του, καὶ ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι καὶ κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον τοῦ προσθέτειν ἤθελε

σφάλει, εἶναι πολὺ πιθανόν τὸ γενόμενον λάθος νὰ ᾔηται διάφορον οὐ πρῶτου, ὅπερ ἔρει εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, εἰς τὸ νὰ καταδείξῃ δηλαδὴ ὅτι τὸ γραφέν ψηφίον 7 δὲν εἶναι ὀρθόν, καὶ ἐπομένως νὰ ἐπιστήσῃ τὴν προσοχὴν τοῦ προσθέτοντος εἰς τοῦτο.

ΠΕΡΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

14. Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πράξις, δι' ἧς ἐλαττούμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας περιέχει ἕτερός τις ἐπίσης δεδομένος ἀριθμὸς.

Ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ὁ ἐλαττούμενος, καλεῖται μειωτέος· ὁ δεύτερος, ὁ δεικνύων πόσαι μονάδες πρέπει νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ πρώτου, ἀφαιρετέος, καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ὑπόλοιπον, ἢ διαφορὰ ἢ ὑπεροχή.

Ἡ ἀφαίρεσις παρίσταται διὰ τοῦ σημείου —, ὅπερ ἀπαγγέλλεται μείον ἢ π.λὴν καὶ τίθεται μετὰ τὸν μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου, προτασσομένου τοῦ πρώτου. Π. χ. ἵνα περυστήσωμεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 5, γράζομεν 12—5, ὅπερ ἀναγινώσκομεν δώδεκα π.λὴν πέντε, ἢ δώδεκα μείον πέντε.

Εἶναι φανερόν ὅτι ὁ μειωτέος εἶναι ἴσος τῷ ἀθροίσματι τῶν μονάδων τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου· ἐπομένως, ἐὰν θεωρήσωμεν τοῦτον οὕτως, ὡς ἀθροισμα δηλαδὴ δύο μερῶν, δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ὡς ἐξῆς·

Ὅτι εἶναι πράξις δι' ἧς, δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν καὶ ἑνὸς τούτων, ἐδρίσκομεν τὸν ἕτερον.

ΑΠΑΝ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ.

15. Ἄς θεωρήσωμεν ἐν πρώτοις τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μονοψήφιος, τοῦ μειωτέου ὅντος μονοψηφίου, ὥς υποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται ν' ἀφαιρέσωμεν 3 ἀπὸ 9. Πρὸς εὔρεσιν τοῦ ζητούμενου ὑπολοίπου πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς ἀπὸ τοῦ μειωτέου 9 τοσάκις τὴν μονάδα, ὡσάκις αὕτη ἐμπεριέχεται εἰς τὸν ἀφαιρετέον 3· θέλομεν λοιπὸν εἶπει κατὰ τὰ περὶ ἀριθμήσεως 1 ἀπὸ 9...8, 1 ἀπὸ 8...7, 1 ἀπὸ 7...6. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ὑπόλοιπον εἶναι 6.

Ὁσαύτως, ἂν εἴγομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν 4 ἀπὸ 23, ἠθέλομεν εἶπει 1 ἀπὸ 23...22, 1 ἀπὸ 22...21, 1 ἀπὸ 21...20, 1 ἀπὸ 20...19. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ὑπόλοιπον εἶναι 19.

Ἀποκτῇ τις εὐκόλως τὴν ἀπαιτουμένην ἄσκησιν, ὥστε νὰ ἐκτε-
λῇ ἀμέσως τὰς τοιοῦτου εἶδους ἀφαιρέσεις καὶ νὰ εὕρῃ ἀμέσως
τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον χωρὶς ν' ἀφαιρῇ διαδοχικῶς ἀπὸ τοῦ μειω-
τέου ἀνὰ μίαν ἀπάσας τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΔΥΟ ΠΟΛΥΨΗΦΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΝ ΤΙΝΙ ΜΕΡΙΚῇ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ.

16. Ἡ ἀφαιρέσις δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν ἀνάγεται ἀμέσως εἰς
τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ ᾔναι τοιοῦτοι, ὥστε πᾶν
ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου νὰ ᾔναι μικρότερον τοῦ ψηφίου τῆς αὐτῆς
τάξεως τοῦ μειωτέου. Τότε, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὰς μονάδας τοῦ ἀ-
φαιρετέου ἀπὸ τῶν τοῦ μειωτέου, τὰς δεκάδας τοῦ πρώτου ἀπὸ τῶν
δεκάδων τοῦ δευτέρου, τὰς ἑκατοντάδας ἀπὸ τῶν ἑκατοντάδων,
κτλ. καὶ προσθέσωμεν τὰς οὕτως εὑρεθησομένας μερικὰς ταύτας
διαφορὰς, θέλομεν προφανῶς εὑρεῖ τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον. Ἐστω
π. χ. ν' ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 2074 ἀπὸ τοῦ 16097. Διατάσσομεν
τὰ τῆς πράξεως ὡς ἐξῆς·

$$\begin{array}{r} 16097 \\ - 2074 \\ \hline 14023 \end{array}$$

Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ τῆς
αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὕρισκωνται ἐν τῇ αὐτῇ, καθέτῳ στήλῃ,
ἄγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν ἀφαιρετέον, καὶ ὑπὸ τὴν γραμμὴν γράφο-
μεν τὰ ψηφία τῆς διαφορᾶς καθόσον εὕρισκομεν αὐτά.

Ἀφαιροῦμεν ἐν πρώτοις τὰς ἀπλᾶς μονάδας, ἤτοι 4 ἀπὸ 7, καὶ
εὕρισκομεν ὑπόλοιπον 3, ὅπερ γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν μονά-
δων. Ἐπειτα μεταβαίνομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, καὶ ἀφαι-
ροῦντες ἀπὸ 9 δεκάδων 7 δεκάδας εὕρισκομεν διαφορὰν 2, ἣν
γράφομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 3, εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων.
Ἐπειδὴ δὲ οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ δὲν περιέχουσιν ἑκατοντάδας, ἡ
διαφορὰ τούτων εἶναι μηδέν. Γράφομεν λοιπὸν 0 εἰς τὴν στήλην
τῶν ἑκατοντάδων καὶ μεταβαίνομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων.
Ἡ διαφορὰ τούτων εἶναι 4, ὅπερ γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χι-
λιάδων, καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀφαιρετέος δὲν περιέχει δεκάδας χιλιάδων καὶ
ὁ μειωτέος περιέχει 1, γράφομεν 1 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων χι-
λιάδων τοῦ ζητουμένου ὑπολοίπου, ὅπερ εἶναι 14023.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος τοῦ ἐκτελεῖν τὴν ἀφαίρεσιν στήριζεται ὡς προεῖπομεν ἐπὶ τῆς ἐξῆς ἀρχῆς·

Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εὐρίσκεται, ἂν ἀφαιρεθῶσι αἱ μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες, κτ.λ. τοῦ μικροτέρου ἀπὸ τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, κτ.λ. τοῦ μεγαλειτέρου, καὶ προστεθῶσι. Ἔπειτα αἱ οὕτως εὐρεθῆσαι μερικαὶ διαφοραί.

ΓΕΝΙΚΗ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ.

17. Ἡ ἀφαίρεσις δύο ὁποιωνδήποτε πολυψηφίων ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνωτέρω μερικὴν περίπτωσιν διὰ τῆς ἐξῆς φανερώς ἀρχῆς·

Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ἀνταγομέγων ἀμφοτέρων κατὰ τὸν αὐτὸν τρίτον ἀριθμὸν.

Παραδείγματος χάριν, ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 5 εἶναι 7. Ἐάν δὲ αὐξήσωμεν ἀμφοτέρους κατὰ τὸν αὐτὸν τρίτον ἀριθμὸν, κατὰ 8 π. χ., ἡ διαφορὰ τῶν οὕτως ἀποτελουμένων ἀριθμῶν 20 καὶ 13 θέλει εἶναι πάλιν ἡ αὐτή, τουτέστιν 7.

18. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἔχομεν ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 176382 ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 205634.

$$205634$$

$$176382$$

$$29252$$

Γράφομεν αὐτοὺς ὡς ἀνωτέρω καὶ εὐρίσκομεν ἀμέσως τὴν διαφορὰν τῶν μονάδων, ἥτις εἶναι 2. Γράφομεν λοιπὸν 2 εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων καὶ μεταβαίνομεν εἰς τὴν ἐπομένην στήλην τῶν δεκάδων, ἐπεὶ δὲ αἱ 8 δεκάδες τοῦ ἀφαιρετέου δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῶν 3 τοῦ μειωτέου, ἵνα ἡ ἀφαίρεσις κατασταθῇ δυνατὴ, προσθέτομεν 10 δεκάδας εἰς τὰς 3 δεκάδας, καὶ τότε εὐρίσκομεν ἄθροισμα 13 δεκάδας, ἀρ' οὗ ἀφαιροῦντες 8 λαμβάνομεν διαφορὰν 5 δεκάδας, ἧς γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων. Ἀλλὰ προσθέσαντες 10 δεκάδας εἰς τὰς 3, αὐξήσαμεν οὕτω τὸν μειωτέον κατὰ ἑκατοντάδα· ἵνα μὴ λοιπὸν μεταβληθῇ ἡ ζητούμενη διαφορὰ, πρέπει ν' αὐξήσωμεν καὶ τὸν ἀφαιρετέον κατὰ μίαν ἑκατοντάδα. Διὰ τοῦτο ἀντὶ ν' ἀφαιρέσωμεν, μεταβαίνοντες εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, 3 ἑκατοντάδας ἀπὸ 6, ἀφαιρούμεν 4 ἀπὸ 6 καὶ εὐρίσκομεν διαφορὰν 2, ἣν γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων.

Προχωροῦντες εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων βλέπομεν ὅτι δὲν

δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν 6 χιλιάδας ἀπὸ 5. Προσθέτομεν λοιπὸν 10 χιλιάδας εἰς τὰς 5, καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ ἄθροισμα τούτων 6, εὐρίσκομεν διαφορὰν 9, ἣν γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων. Ἐπειδὴ δὲ πάλιν πύξῃσαμεν τὸν μειωτέον κατὰ 10 χιλιάδας ἢ κατὰ 1 δεκάδα χιλιάδων, πρέπει, ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ ζητούμενη διαφορὰ, ν' αὐξήσωμεν καὶ τὸν ἀφαιρετέον κατὰ μίαν δεκάδα χιλιάδων. Ἀντὶ λοιπὸν ν' ἀφαιρέσωμεν, μεταβαίνοντες εἰς τὴν ἀκόλουθον στήλην, 7 δεκάδας χιλιάδων ἀπὸ τῶν 0 τοῦ μειωτέου, πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν 8. Ἀλλ' ἐπειδὴ πάλιν 8 δεκάδες χιλιάδων δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ 0 δεκάδων χιλιάδων, προσθέτομεν 10 δεκάδας χιλιάδας εἰς τὸν μειωτέον, ἥτοι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, καὶ τότε ἡ ἀφαίρεσις καθίσταται δυνατὴ. Εὐρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 2, ἣν γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων χιλιάδων. Ἵνα δὲ πάλιν μὴ μεταβληθῇ ἡ ζητούμενη διαφορὰ, πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10 δεκάδας χιλιάδων, ἥτοι μίαν ἑκατοντάδα χιλιάδων. Ἀντὶ λοιπὸν ν' ἀφαιρέσωμεν μεταβαίνοντες εἰς τὴν ἀμέσως ἐπομένην στήλην 1 ἀπὸ 2, πρέπει νὰ προσθέσωμεν 1 εἰς τὸ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τὸ εὐρεθσόμενον ἄθροισμα ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ 2. Εὐρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 0, ὅπερ καὶ δὲν γράφομεν, μὴ ὑπερχόντων ἄλλων πρὸς ἀφαίρεσιν ψηφίων. Ἡ ζητούμενη λοιπὸν διαφορὰ εἶναι 29252.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ὅσάκις ἡ ἀφαίρεσις ψηφίου τινὸς τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ μειωτέου δὲν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ, ἀρκεῖ νὰ αὐξήσωμεν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ψηφίον τοῦ μειωτέου κατὰ 10 καὶ νὰ προσθέσωμεν 1 μονάδα εἰς τὸ ἀμέσως ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου. Οὕτως ἡ ἀφαίρεσις καθίσταται δυνατὴ καὶ ἡ ζητούμενη διαφορὰ, κατὰ τὴν ἀνωτέραν ἀρχήν, δὲν μεταβάλλεται.

19. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορίζομεθα τὸν ἐξῆς τῆς ἀφαιρέσεως γενικὸν κανόνα.

Πρὸς εὐρεσιν τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ ἐδρῶσιν ἐν τῇ αὐτῇ καθετῇ στήλῃ, καὶ ἄρομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν ἀφαιρετέον. Μετὰ ταῦτα ἀφαιροῦμεν ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν ἑκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ μειωτέου, καὶ γράφομεν τὴν εὐρεθισμένην διαφορὰν ἐν τῇ τῶν ἀφαιρουμένων ψηφίων στήλῃ. Ὅσάκις δὲ τὸ πρὸς ἀφαιρεσιν

αὐξάνομεν τοῦτο κατὰ 10 καὶ ἀπὸ τοῦ εὑρεθσομένου ἀθροίσματος, ὅπερ θέλει εἶναι πάντοτε μεγαλειότερον τοῦ ψηφίου τοῦ ἀφαιρετέου, ἀφαιροῦμεν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ψήφιος τοῦ ἀφαιρετέου. 'Αλλ' ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ ζητούμενη διαφορὰ, πρέπει, μεταβαίνοντες εἰς τὴν ἀμέσως ἀκόλουθον στήλην, γ' αὐξάνομεν κατὰ 1 τὸ ὑπάρχον ψήφιος τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. — Ἀρχόμεθα τῆς πράξεως ἀπὸ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ ὅχι ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ διότι τότε ἡθέλομεν ἀναγκάζεσθαι νὰ μεταβάλλωμεν εὐρεθὲν τι ψήφιος τῆς διαφορᾶς, ὅσάκις τὸ πρὸς ἀφαιρέσιν ἀκόλουθον ψήφιος τοῦ ἀφαιρετέου ἡθέλει εἶναι μεγαλειότερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου. Ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρου λ. χ. παραδείγματος, ἂν ἤρχόμεθα τῆς πράξεως ἐξ ἀριστερῶν, ἔπρεπε νὰ γράψωμεν 1 ὡς πρῶτον ψήφιος τῆς ζητούμενης διαφορᾶς, καὶ ἐπειδὴ τὸ ἀκόλουθον ψήφιος 7 τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλειότερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου 0 τοῦ μειωτέου καὶ ἡ ἀφαίρεσις δὲν ἐκτελεῖται, πρέπει νὰ μεταβάλλωμεν τὸ εὐρεθὲν ψήφιος 1 τῆς διαφορᾶς, ἵνα ἡ ἀφαίρεσις κατασταθῇ δυνατὴ. Ἡθέλομεν λοιπὸν ἀναγκάζεσθαι νὰ ἐκτελῶμεν δις ἐπὶ τῶν τῆς αὐτῆς στήλης ψηφίων τὴν πράξιν, ὅπερ ἐπίμοχθον. Μόνον ὅταν τὰ ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου ᾖναι μικρότερα τῶν ἀντιστοίχων ψηφίων τοῦ μειωτέου, δυνατόν ἐστι ν' ἀρχίζωμεν ἀδιαιρέτως τὴν πράξιν.

ΒΑΣΑΝΟΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

20. Ἡ τῆς ἀφαιρέσεως βάσανος γίνεται διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ υπολοίπου εἰς τὸν ἀφαιρετέον. Ἐὰν οὕτως εὐρωμεν ὡς ἄθροισμα τὸν μειωτέον, τότε ἡ ἀφαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 8543, 962004, 578000, 83002, 21, 1305.

II. Ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀνωτέρω δύο πρώτων ἀριθμῶν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τελευταίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

21. Ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πράξις, δι' ἣς δεδομένων δύο ἀριθμῶν σχηματίζομεν ἕκ του πρώτου τρίτον, ὅπως ὁ δεύτερος σχηματίσθῃ ἐκ τῆς μονάδος, ἐν αἰσiais λέξεσιν.

Ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πράξις, δι' ἣς εὐρίσκομεν ἀριθμόν, γινόμενον ἐκ τοσούτων μερῶν ἴσων δεδομένῳ τιρὶ ἀριθμῷ, ὅσας μονάδας ἔχει ἕτερός τις ἐπίσης δεδομένος ἀριθμός.

Ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν καλεῖται πολλαπλασιαστής, δεύτερος πολλαπλασιαστῆς καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ἢ ὁ γινόμενος τρίτος γινόμενον. Ὁ πολλαπλασιαστής καὶ ὁ πολλαπλασιαστής καλοῦνται καὶ παράγοντες τοῦ γινομένου.

Νὰ πολλαπλασιάσωμεν 5 ἐπὶ 3 σηκώνει νὰ εὐρωμεν τρίτον ἀριθμόν, περιέχοντα τοσάκις τὸν 5, ὅσάκις ὁ 3 περιέχει τὴν μονάδα, ἢ ἐπειδὴ ὁ 3 περιέχει τρεῖς τὴν μονάδα, πρέπει πρὸς εὐρεσιν τοῦ γινομένου τρίτου ἀριθμοῦ νὰ προσθέσωμεν τὸν 5 τρεῖς. Εὐρίσκομεν ὡς ἀθροισμα 15, ὅπερ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 3. Ἐν τῷ παραδείγματι τούτῳ 5 εἶναι ὁ πολλαπλασιαστής, 3 ὁ πολλαπλασιαστής καὶ 15 τὸ γινόμενον.

Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής ᾖ ἴσος τῇ μονάδι, τὸ γινόμενον εἶναι προφανῶς ἴσον τῷ πολλαπλασιαστῇ. Τὸ γινόμενον τὸν παρτὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ 1 εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός.

Ὁ πολλαπλασιαστής παρίσταται διὰ τοῦ σημείου $\times$, ὅπερ καλεῖται ἐπὶ καὶ τίθεται μεταξύ τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ, προτασσομένου πάντοτε τοῦ πολλαπλασιαστέου. Οὕτως ἐκφράσις 5×3 ἀπαγγέλλεται 5 νὰ πολλαπλασιασθῇ [ἐπὶ 3, ὡς 5 ἐπὶ 3, τοῦ 5 παριστῶντος τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ τὸν πολλαπλασιαστήν.

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΙΝΕΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΙΝΩΝ.

+ 22. Θεώρημα λέγεται ἀλήθεια καθισταμένη φανερά διὰ τινος συλλογισμού, καλουμένου ἀπόδειξις.

* Πρόβλημα καλεῖται ἡ ἐκ τινος ἀποδειχθέντος θεωρήματος προκείμενου συνένειξ.

* Πρόβλημα λέγεται ζήτημα, ἐν ᾧ ζητεῖται τι ἀγνωστον, ὡς σμάνας ἔχον σχέσεις πρὸς γνωστοὺς καὶ δεδομένους ἀριθμούς.

Τὸ σημεῖον $=$ ἀπαγγέλλεται ἴσον, καὶ σημαίνει ὅτι αἱ ἐκατέρωθεν αὐτοῦ ὑπάρχουσαι παραστάσεις εἶναι ἴσαι. Π. χ. ἀντὶ νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 17 καὶ 8 εἶναι ἴση μὲν 9 ἐκφράζομεν αὐτὸ τοῦτο γράφοντες $17-8=9$.

Τὰ διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος συνδεόμενα μέρη καλοῦνται μέλη τῆς ἰσότητος. Τὸ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καλεῖται πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος, τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ δευτέρον μέλος αὐτῆς.

Ὅσακις θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν ὅτι πρᾶξις τις πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ ἐπὶ ἀριθμῶν, οἵτινές εἶναι τὰ ἐξαγόμενα ἄλλων πράξεων ἃς δὲν ἐξετελέσαμεν, γράφομεν τὰς παραστάσεις τῶν ἐκτελεσθεισῶν πράξεων ἐντὸς παρενθέσεων. Π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 9 ἐπὶ τὴν διαφορὰν $8-3$ χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, γράφομεν τὴν διαφορὰν $8-3$ ἐντὸς παρενθέσεων οὕτως $(8-3)$, καὶ τότε τὸ ζητούμενον γινόμενον παρίσταται ἐξῆς $(8-3) \times 7$. Ὁσαύτως, ἐὰν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $5+2$ ἐπὶ τὴν διαφορὰν $8-3$ χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς σεσημειωμένας ταύτας πράξεις, θέλωμεν γράφει $(5+2) \times (8-3)$.

Μεταχειριζόμεθα καὶ τὸ σημεῖον $>$ ἢ $<$ ὅπερ καλεῖται σημεῖον ἀνισότητος, ὅσακις θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν ὅτι ποσότης τις εἶναι μεγαλειτέρα ἢ μικροτέρα ἄλλης τινός. Οὕτως, ἐὰν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν ὅτι τὸ 7 εἶναι μεγαλιότερον τοῦ 5, ἢ τὸ 8 μικροτέρα τοῦ 9, θέλωμεν γράφει $7 > 5$, ἢ $8 < 9$. θέτομεν δηλαδὴ μεταξὺ τῶν δύο ποσοτήτων τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος καὶ τὴν μεγαλιτέραν ποσότητα εἰς τὸ ἀνωτέρω καὶ τὴν μικροτέραν εἰς τὸ κάτω.

ΠΙΝΑΞ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

23. Ἐπειδὴ κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἡ ἐκτέλεσις αὐτοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν πολλῶν ἰσότητων. Ἰδυνάμεθα νὰ εὐρίσκωμεν τὸ ζητούμενον γινόμενον ἀ-

λουθῶντες τὸν ἐν τῇ § 21 περί προσθέσεως δοθέντα γενικὸν κανόνα. Ὁ τρόπος οὗτος τοῦ πολλαπλασιάζειν δύο δεδομένους ἀριθμούς, ὥστις ἤθελεν εἶναι σχεδὸν ἀκκτόρθωτος προκειμένου περὶ ἀριθμῶν ἀρκούντως μεγάλων, εἶναι πράγματι ἐκείνος, ὃν μεταχειρίζονται πρὸς εὐρεσιν τοῦ γινομένου δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, καὶ ἀνάγουσιν ἔπειτα, ὡς θέλομεν ἰδεῖ παρακκτιόντες, τὰς λοιπὰς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ περιπτώσεις εἰς ταύτην.

Ἐκαστος ἐννοεῖ τώρα πόσον εἶναι ἀνγκαιὸν, πρὸς ταχείαν τῆς πράξεως ἐκτέλεσιν, νὰ γνωρίζωμεν ἐκ στήθους ὅλα τὰ γινόμενα, ἅτινα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν πολλαπλασιάζοντες ἀνὰ δύο καθ' ἅπαντας τοὺς δυνατοὺς τρόπους τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς. Τὰ γινόμενα ταῦτα εὐρίσκονται ἐν τῷ ἐξῆς τοῦ Ποθαγόρου πίνακι, ὃν κατὰσκευάζομεν ὡς ἐξῆς·

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Γράφομεν ἐπὶ τῆς πρώτης ὀριζοντίου σειρᾶς τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς ἀριθμούς. Ἡ σειρὰ αὕτη κατὰ τὰ ἐν τῷ τέλει τῆς § 21 λεχθέντα θέλει παριστᾷ τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 1.

Πρὸς σχηματισμὸν τῆς δευτέρας ὀριζοντίου σειρᾶς προσθέτομεν ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης εἰς ἑαυτόν, καὶ γράφομεν τὸ ἐξαγόμενον ὑπ' αὐτόν. Ἡ δευτέρα λοιπὴν σειρὰ περιέχει τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 2.

Πρὸς σχηματισμὸν τῆς τρίτης σειρᾶς προσθέτομεν εἰς ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς δευτέρας τὸν ἀντίστοιχον αὐτοῦ τῆς πρώτης, καὶ γράφομεν τὰ εὐρεθησόμενα ἀθροίσματα ὑπ' αὐτοῦς, ἕκαστον ἐν τῇ καθέτῃ στήλῃ τῶν παρασχόντων αὐτὸ ἀριθμῶν. Οὕτως ἡ τρίτη ὀριζόντια

Ὡσαύτως, πρὸς σχηματισμὸν τῆς τετάρτης προσθέτομεν εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τῆς τρίτης τὸν ἀντιστοιχον αὐτοῦ τῆς πρώτης, καὶ γράφομεν τὰ εὑρεθησόμενα ἀθροίσματα ὑπ' αὐτοῦς, ἕκαστον ἐν τῇ καθέτῳ στήλῃ τῶν παρὰσχόντων αὐτὰ ἀριθμῶν. Ἡ τετάρτη λοιπὸν σειρὰ θέλει περιέχει τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 4.

Παρομοίως, ἐκάστη τῶν ἐπομένων ὀριζοντίων σειρῶν σχηματίζεται προστιθεμένων τῶν ἀριθμῶν τῆς προηγουμένης σειρᾶς μετὰ τῶν ἀντιστοιχῶν τῆς πρώτης καὶ γραφομένων ἀμοιβαίως τῶν εὑρισκόμενων ἀθροισμάτων ὑπ' αὐτοῦς ἐν τῇ καθέτῳ στήλῃ, ἐν ᾗ εὑρίσκονται οἱ προστεθέντες ἀριθμοί. Ἐπεταὶ λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι ἐννέα ὀριζόντιοι σειραὶ περιέχουσι ἀμοιβαίως τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 1, 2, 3, 4... 9.

Διὰ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος δυνάμεθα λίαν εὐκόλως νὰ εὑρίσκωμεν τὸ γινόμενον δύο ὁποιαυνδήποτε μονοψήφιων ἀριθμῶν ὡς ἐξῆς. Ἀς υποθέσωμεν π. χ. ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τῶν μονοψήφιων ἀριθμῶν 5 καὶ 7. Καθ' ὃν τρόπον ἐσχηματίσθη ὁ ἀνωτέρω πίναξ, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον πρέπει νὰ εὑρίσκηται ἐν τῇ πέμπτῃ καθέτῳ στήλῃ, ἥτις περιέχει ὅλα τὰ γινόμενα τοῦ 5 ἐπὶ τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς ἀριθμοὺς, καὶ ἐν τῇ ἑβδόμῃ ὀριζοντίῳ, ἥτις περιέχει τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 7. Θέλει λοιπὸν εἶναι ὁ ἀριθμὸς 35, ὅστις μόνος εἶναι κοινὸς καὶ εἰς τὰς δύο ταύτας στήλας. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 7 εἶναι ὁ οὕτως εὑρεθεὶς ἀριθμὸς 35.

✦ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΨΗΦΙΟΥ ΕΠΙ ΜΟΝΟΨΗΦΙΟΝ.

24. Ἀς υποθέσωμεν ὅτι προτιθέμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολυψήφιον ἀριθμὸν 2096 ἐπὶ τὸν μονοψήφιον 7. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 2096, ὡπὼς ὁ πολλαπλασιαστὴς 7 παρήχθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλ' ὁ πολλαπλασιαστὴς 7 παρήχθη ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ αὕτη ἐπανελήφθη ἐπτάκις. Λοιπὸν καὶ τὸ ζητούμενον γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 2096, ἀφοῦ οὗτος ἐπαναληφθῇ ἐπτάκις. Ἐάν τῶρα γράψωμεν τὸν 2096 ἐπτάκις κατὰ τὸ ἑκτελέσειν τὴν πρόσθεσιν τῶν οὕτω γεγραμμένων ἀριθμῶν, θέλομεν ἰδεῖ ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εὑρίσκεται ἐπταπλασιαζομένου ἐνὸς ἐκείνου τῶν ψηφίων τοῦ 2096,

ἢ ἐνὸς ἐκάστου τῶν μερῶν αὐτοῦ, θεωρουμένου ὡς ἴσου τῷ ἀθροίσματι $2000 + 000 + 90 + 6$.

Ἀντὶ νὰ γράψωμεν ἐπτάκις τὸν πολλαπλασιαστέον 2096, συντομεύομεν τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως διατάσσοντες αὐτὴν ὡς ἐξῆς·

$$\begin{array}{r} 2096 \\ 7 \\ \hline 14672 \end{array}$$

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστήν ὑπὸ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ἄγομεν ὑπ' αὐτὸν ὀριζόντιον γραμμὴν, ὑπὸ τὴν ὑποῖαν γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ γινομένου καθόσον εὐρίσκομεν αὐτά.

Πολλαπλασιάζομεν ἐν πρώτοις τὰς μονάδας 6 τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν 7, καὶ εὐρίσκομεν γινόμενον 42 μονάδας, ἥτοι 2 μονάδας καὶ 4 δεκάδας. Γράφομεν τὰς 2 μονάδας ὑπὸ τὰ ψηφία τῶν μονάδων καὶ κρατοῦμεν τὰς 4 δεκάδας, ἵνα προσθέσωμεν αὐτὰς εἰς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν 7.

Τὸ νέον τοῦτο γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ 63 δεκάδας, εἰς 2ς προσθέτοντες καὶ τὰς κρατούμενας 4 εὐρίσκομεν ἄθροισμα 67 δεκάδας, ἥτοι 7 δεκάδας καὶ 6 ἑκατοντάδας. Γράφομεν λοιπὸν 7 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων τοῦ γινομένου καὶ κρατοῦμεν τὰς 6 ἑκατοντάδας, ἵνα προσθέσωμεν αὐτὰς εἰς τὸ γινόμενον τῶν 0 ἑκατοντάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν.

Ἀλλὰ 0 ἑκατοντάδες ἐπὶ 7 πολλαπλασιασθεῖσαι δίδουσι γινόμενον 0 ἑκατοντάδας. Εἰς ταύτας προσθέτοντες καὶ τὰς κρατούμενας 6 εὐρίσκομεν ἄθροισμα 6 ἑκατοντάδας, 2ς γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ γινομένου.

Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἥτοι εἰς τὰς χιλιάδας αὐτοῦ, καὶ πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς ἐπὶ 7 εὐρίσκομεν γινόμενον 14 χιλιάδας, ἥτοι 4 χιλιάδας καὶ 1 δεκάδα χιλιάδων. Γράφομεν λοιπὸν 4 εἰς τὴν θέσιν τῶν χιλιάδων τοῦ γινομένου καὶ 1 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων χιλιάδων αὐτοῦ. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν γινόμενον εἶναι ὁ ἀριθμὸς 14672.

Ἡ πρᾶξις συνήθως ἐκτελεῖται ὡς ἐξῆς· λέγομεν 6 ἐπὶ 7...42, γράφομεν 2 καὶ κρατοῦμεν 4· 9 ἐπὶ 7...63 καὶ 4 τὰ κρατούμενα 67, γράφομεν 7 καὶ κρατοῦμεν 6· 0 ἐπὶ 7...0 καὶ 6...6, γράφομεν 6· 2 ἐπὶ 7...14, γράφομεν 14.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—“Ἄν ᾔθελομεν νῦν παραστήσωμεν τοὺς ἄνωτέρω πρὸς εὐρεσιν τοῦ γινόμενου συλλογισμοὺς διὰ τῶν γνωστῶν σημείων, ᾔθελομεν γράψαι

$$2096 \times 7 = (2000 + 000 + 90 + 6) \times 7.$$

Ἀλλὰ $(2000 + 000 + 90 + 6) \times 7 = 1400 + 000 + 630 + 42$ (α)

καὶ $14000 + 000 + 630 + 42 = 14672.$

Ἄρα $2096 \times 7 = 14672.$

Ἡ ἰσότης (α) δεικνύει ὅτι, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος ᾖ αἰθροῖσμα πολλῶν μερῶν, τὸ γινόμενον εὐρίσκεται πολλαπλασιαζόμενον ἐνὸς ἑκάστου τῶν μερῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν καὶ προστιθεμένῳ τῶν μερικῶν γινόμενων.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νῦν πολλαπλασιάσωμεν τὸ αἰθροῖσμα $3+5+6$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 4, ᾔθελομεν εὐρεῖ γινόμενον τὸ αἰθροῖσμα $3 \times 4 + 5 \times 4 + 6 \times 4$, ἥτοι ᾔθελομεν ἔχει τὴν ἰσότητά·

$$(3+5+6) \times 4 = 3 \times 4 + 5 \times 4 + 6 \times 4.$$

Εὐκολώτατα δύναται τις, ἐπαναλαμβάνων τοὺς ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς παρούσης παραγράφου ἐκτεθέντας συλλογισμοὺς, ν' ἀποδείξῃ τὴν ἄνωτέρω ἰσότητά, ἂν νομίζῃ ὅτι ἔχει ἀνάγκην ἰδιαιτέρας τινὸς ἀποδείξεως.

25. Ἐκ τῶν ἄνωτέρω λεχθέντων ποριζόμεθα τὸν ἐξῆς κανὼν·

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, γράφομεν τὸν μονοψήφιον πολλαπλασιαστήν ὑπὸ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς ἑκάστον τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν ἄφ' ἑαυτοῦ ἀπὸ τῶν δεξιῶν. Γράφομεν τὸ ψήφιον τῶν μονάδων τοῦ εὐρεθησομένου πρώτον γινόμενον ἐν τῇ στήλῃ τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ κρατοῦμεν τὰς δεκάδας αὐτοῦ, ἂν ὑπάρχωσι, ἵνα προσθέσωμεν αὐτὰς εἰς τὸ ἀμέσως ἀκόλουθον μερικὸν γινόμενον. Τοῦ οὕτως εὐρεθησομένου αἰθροίσματος γράφομεν τὰς μὲν μονάδας πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ προγραφέντος πρώτου ψηφίου τοῦ γινόμενου, τὰς δὲ δεκάδας, ἂν ὑπάρχωσι, προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, καὶ οὕτως καθέξης.

26. 1ον. Ἀριθμός τις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1000 κ.τ.λ., ἔαν γραφῶσιν 1, 2, 3, κ.τ.λ. μηδενικά πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ.

Διότι κατὰ τὰ περὶ ἀριθμῆσεως λεχθέντα ἕκαστον τῶν ψηφίων αὐτοῦ θέλει παριστᾷ τότε μονάδας 10κis, 100κis, 1000κis, κτλ. μεγαλύτερας ἐκείνων, ἃς παρίστα πρότερον. Ἐκαστον λοιπὸν τῶν μερῶν αὐτοῦ θέλει γίνεαι οὕτω 10κis, 100κis, 1000κis, κτλ. μεγαλύτερον, ἐπομένως καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός.

Παραδείγματος χάριν, ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 237 ἐπὶ 100. Ἐὰν γράψωμεν δύο μηδενικά πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, οὗτος γίνεται 23700, τότε δὲ τὸ ψηφίον αὐτοῦ 7, ὕπερ παρίστα πρότερον ἀπλῆς μονάδας, θέλει παριστᾷ ἑκατοντάδας. Ἄρα ἑκατονταπλασιόσθη. Ὡσαύτως τὸ ψηφίον αὐτοῦ 3, ὕπερ παρίστα πρότερον δεκάδας, παριστᾷ τῶρα χιλιάδας. Ἄρα ἑκατονταπλασιόσθη. Παρομοίως καὶ τὸ ψηφίον αὐτοῦ 2 παριστᾷ μονάδας ἑκατοντάκis μεγαλύτερας ἐκείνων, ἃς πρότερον παρίστα. Ἀφοῦ λοιπὸν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ ἀριθμοῦ 237 ἑκατονταπλασιόσθη, ἔπεται ὅτι καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός ἐγένετο ἑκατοντάκis μεγαλύτερος.

2ον. Ἀριθμός τις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἀποτελούμενον ὑφ' ἑνὸς σημαντικοῦ ψηφίου ἀκολουθουμένων ὑπὸ μηδενικῶν, ἔαν πολλαπλασιασθῇ πρῶτον ἐπὶ μόνον τὸ σημαντικὸν ψηφίον καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινόμενου γραφῶσι τόσα μηδενικά, ὅσα ὅσων ἀκολουθεῖται τὸ σημαντικὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 3564 ἐπὶ 300. Κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον πρέπει νὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 3564, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστῆς 300 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλὰ ὁ 300 σχηματίζεται προφανῶς ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ αὕτη ἐπαναληφθῇ πρῶτον πρὸς καὶ τὸ τριπλάσιον αὐτῆς 3 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 100. Ἄρα καὶ τὸ ζητούμενον γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀφοῦ οὗτος ἐπαναληφθῇ πρῶτον τρίς, ἥτοι πολλαπλασιασθῇ πρῶτον ἐπὶ 3, καὶ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ, ὅπερ εἶναι 10692, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 100, τοῦθ' ὅπερ γίνεται γραφόμενων 2 μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ. Λοιπὸν ἀπειδείχθη ὅτι ἀριθμός τις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ

ἀριθμὸν, ἀποτελούμενον ὑπ' ἐνὸς σημαντικῶν ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν, ἔνν' ἀπολλυμένησθ' ἡ πρώτη ἐπὶ μόνον τὸ σημαντικὸν αὐτοῦ ψηφίον κτλ.



ΓΕΝΙΚΗ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ.

27. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται εὐκόλως εἰς τὰς μερικὰς περιπτώσεις, περὶ ὧν προηγουμένως ἐπραγματεύθημεν, εὐρίσκωμεν δὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν κατὰ τὸν ἐξῆς κανόνα.

Ἐὰν εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν γράφωμεν τὸν πολλαπλασιαστήν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστὴν οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, καὶ ὄγομεν γραμμὴν ὑπ' αὐτοὺς. Ἐπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ἐφ' ἕκαστον τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ γράφωμεν τὰ εὐρεθνόμενα μερικὰ γινόμενα οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον ἕκαστον νὰ εὐρίσκηται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἐν ἣ καὶ τὸ παρασχόν αὐτὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Προσθέτομεν ἀκολουθῶς τὰ οὕτω διατεταγμένα μερικὰ γινόμενα θέλομεν εὑρεῖν τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν.

Ἄν εἴωμεν π. χ. νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 2096 ἐπὶ 347, ἠθέλομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα γράψαι τὸν πολλαπλασιαστήν 347 ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστὴν 2096 οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ὡς φαίνεται κάτωθεν,

$$\begin{array}{r}
 2096 \\
 347 \\
 \hline
 14672 \\
 8384 \\
 6288 \\
 \hline
 727312
 \end{array}$$

Ἐπειτα πολλαπλασιάζει τὸν πολλαπλασιαστὴν 2096 ἐφ' ἕκαστον τῶν σημαντικῶν ψηφίων 7, 4, 3 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 347, καὶ γράφει τὰ εὐρεθνόμενα μερικὰ γινόμενα 14672, 8384, 6288 οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες 2 τοῦ πρώτου νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἐν ἣ καὶ τὸ παρασχόν τὸ γινόμενον 14672 ψηφίον 7 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 347· αἱ μονάδες 4 τοῦ δευτέρου γινόμενου 838

νά εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ, ἐν ᾗ καὶ τὸ παρασχόν τὸ γινόμενον τοῦτο ψῆφρον 4 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 347, καὶ αἱ μονάδες 8 τοῦ τρίτου γινομένου 6288 ἐν τῇ καθεύτῳ στήλῃ, ἐν ᾗ καὶ τὸ παρασχόν τὸ γινόμενον τοῦτο ψῆφρον 3 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Προσθέτοντες ἀκολουθῶς τὰ οὕτω διαταχθέντα μερικὰ γινόμενα, θέλομεν εὑρεῖ ἄθροισμα τὸν ἀριθμὸν 727312, ὅστις θέλει παρίστω τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν δεδομένων.

28. Πρὸς ἀποδείξιν τοῦ ἀνωτέρου κανόνος σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς·

Κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 2096, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστής 347 ἐσχηματίσθῃ ἐκ τῆς μονάδος. Ἄλλ' ὁ 347 σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ αὕτη ἐπαναληφθῇ $7^{κι}$, $40^{κις}$ καὶ $300^{κις}$, καὶ εἰς τὸ ἐπταπλάσιον αὐτῆς προστεθῇ τὸ τεσσαρακονταπλάσιον καὶ τὸ τριακοσιαπλάσιον. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστὸν 2096 ἐπτάκις, τεσσαρακοντάκις καὶ τριακοσιακίς, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ εὑρεθησόμενα μερικὰ γινόμενα. Ἀλλὰ τὸ μὲν ἐπταπλάσιον τοῦ 2096 παρίσταται διὰ τοῦ γινομένου 2096×7 καὶ εἶναι 14672, τὸ δὲ τεσσαρακονταπλάσιον αὐτοῦ παρίσταται διὰ τοῦ γινομένου 2096×40 καὶ εἶναι 83840, εὑρίσκεται δὲ κατὰ τὰ ἐν τῇ § 26 λεχθέντα πολλαπλασιαζομένου τοῦ 2096 ἐπὶ 4 καὶ γραφομένου ἐνός μηδενικοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου 8384· καὶ τελευταῖον τὸ τριακοσιαπλάσιον αὐτοῦ παρίσταται διὰ τοῦ γινομένου 2096×300 καὶ εἶναι 628800, εὑρίσκεται δὲ πολλαπλασιαζομένου τοῦ 2096 ἐπὶ 3 καὶ γραφομένων δύο μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου 6288. Πρέπει λοιπὸν πρὸς εὑρεσιν τοῦ γινομένου 2096×347 νὰ προσθέσωμεν τὰ εὑρεθέντα μερικὰ γινόμενα 14672, 83840, 628800. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τούτων 727312 εὑρίσκεται γραφομένων αὐτῶν ὡς ἐξῆς

$$\begin{array}{r} 14672 \\ 83840 \\ 628800 \\ \hline 727312 \end{array}$$

καὶ προστιθεμένων κατὰ τὸν περὶ προσθέσεως δοθέντα γενικὸν κανόνα. Βλέπομεν λοιπὸν, παραβῆλλοντες τὰ ἐνταῦθα προστεθέντα μερικὰ γινόμενα μὲ τὰ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι κατὰ τὸν περὶ πολλαπλασιασμοῦ δοθέντα κανόνα γραφέντα, ὅτι ταῦτα εἶναι τὰ αὐτά, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ κληθεὶς τοῦ κανόνος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—"Αν ὁ πολλαπλασιαστής περιεῖχε ψηφία τινὰ ἴσα τῷ μηδενί, ἄν π. χ. ἦτο 30047, ἠθέλομεν διχτάζει ἐπίσης ὡς

$$\begin{array}{r} 2096 \\ 30047 \\ \hline 14672 \\ 8384 \\ \hline 6288 \\ \hline 62978512 \end{array}$$

ἀνωτέρω τὴν πρᾶξιν, ἀλλὰ μετὰ τὸν ἐπὶ 7 καὶ 4 πολλαπλασιασμὸν τοῦ πολλαπλασιαστέου ἠθέλομεν μεταβῆ ἀμέσως εἰς τὸν ἐπὶ 3 πολλαπλασιασμὸν αὐτοῦ καὶ γράψαι κατὰ τὸν δοθέντα κανόνα τὸ εὔρεθισόμενον γινόμενον 6288 οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες αὐτοῦ 8 νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἐν ᾗ καὶ τὸ παρασχὸν αὐτὸ ψηφίον 3 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὡς φαίνεται ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2.—"Αν ἠθέλομεν νὰ παραστήσωμεν δι' ἰσοτήτων τὰ ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς § 27 λεχθέντα, ἠθέλομεν ἔχει

$$2096 \times 347 = 2096 \times (300 + 40 + 7).$$

Ἀλλὰ $2096 \times (300 + 40 + 7) = 2096 \times 300 + 2096 \times 40 + 2096 \times 7. (α)$

Ἄρα $2096 \times 347 = 2096 \times 300 + 2096 \times 40 + 2096 \times 7.$

Ἡ ἰσότης (α) δεικνύει ὅτι, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής 347 ᾖται ἄθροισμα πολλῶν μερῶν 300, 40 καὶ 7, τὸ γινόμενον 2096×347 εὐρίσκεται πολλαπλασιαζόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου 2096 ἐφ' ἑκάστον τῶν μερῶν 300, 40 καὶ 7 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ προστιθεμένων τῶν εὐρεθησομένων μερικῶν γινόμενων. Οὕτως, ὡς εἶχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 5 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $3+4+6$, ἠθελομεν ἔχει

$$5 \times (3+4+6) = 5 \times 3 + 5 \times 4 + 5 \times 6.$$

Εὐκολώτετα δὲ δύναται τις νὰ ἀποδείξῃ ἀπ' εὐθείας τοῦτο ἐφαρμοζὼν τὸν περὶ πολλαπλασιασμοῦ ὁρισμὸν, ἐὰν νομίζῃ ὅτι ἔχει ἀνάγκην ἰδιαιτέρως τινὸς ἀποδείξεως.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΚΑΘ' ἩΝ Ο ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΟΣ ΚΑΙ Ο ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝΤΑΙ ΥΠΟ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ.

29. Ὅταν οἱ παράγοντες τοῦ γινόμενου ἀκολουθῶνται ἐπὶ

μηδενικῶν, πρὸς εὑρεσιν αὐτοῦ ἀποκόπτομεν τὰ μηδενικά καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς οὕτω προκύπτοντας ἀριθμούς, ἔπειτα γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου αὐτῶν τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχονσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες.

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 27000, 4300. Πρὸς εὑρεσιν τοῦ γινομένου αὐτῶν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 27 ἐπὶ 43 καὶ νὰ γράψωμεν 5 μηδενικά πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου.

Τῷ ὄντι, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ § 26, πρὸς εὑρεσιν τοῦ γινομένου τοῦ 27000 ἐπὶ 4300 πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 27000 ἐπὶ 43 καὶ νὰ γράψωμεν δύο μηδενικά πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ οὕτως εὑρεθησομένου γινομένου. Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ ὁ 27000 εἶναι ἴσος μὲ 27 μονάδας χιλιάδων, τὸ γινόμενον τοῦ 27000 ἐπὶ 43 θέλει εἶναι ἴσον μὲ 43 φορές 27 μονάδας χιλιάδων, ἐν ἄλλαις λέξεσι, θέλει περιέχει τόσας χιλιάδας, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ γινόμενον τοῦ 27 ἐπὶ 43. Λοιπὸν, ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 27000 ἐπὶ 43, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 27 ἐπὶ 43 καὶ νὰ γράψωμεν 3 μηδενικά πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν. Ἀλ' εἵπομεν προηγουμένως ὅτι, ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 27000 ἐπὶ 4300, πρέπει νὰ γράψωμεν 2 μηδενικά πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τοῦ 27000 ἐπὶ 43. Ἀρα βλέπομεν ὅτι εὐρίσκομεν τὸ γινόμενον 27000×4300 , ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν 27 ἐπὶ 43 καὶ γράψωμεν ἐν ὅλῳ 5 μηδενικά πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου αὐτῶν.

— ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΨΗΦΙΩΝ ΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ.

30. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος τῷ ἀθροίσματι τῶν ψηφίων αὐτῶν ἢ τῷ αὐτῷ ἀθροίσματι ἡλαττωμένῳ κατὰ μονάδα.

Ἀς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν τετραψήφιον ἀριθμὸν 2096 ἐπὶ τινὰ τριψήφιον. Ἐπειδὴ πᾶς τριψήπιος ἀριθμὸς εἶναι τοῦλάχιστον ἴσος τῷ 100, ὅστις εἶναι ὁ μικρότερος τῶν τριψηφίων ἀριθμῶν, καὶ μικρότερος τοῦ 1000, ὅστις εἶναι ὁ πρῶτος τετραψήπιος μετὰ τὸν μεγαλειότερον τριψήφιον, τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου 2096 ἐπὶ τὸν δεδομένον τριψήφιον πολλαπλασιαστὴν θέλει εἶναι τοῦλάχιστον ἴσον τῷ γινομένῳ αὐτοῦ ἐπὶ 100 καὶ μικρότερον τοῦ γινομένου αὐτοῦ ἐπὶ 1000, ἥτοι θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 209600 καὶ 2096000. Ἀλλ' ὁ μὲν 209600 ἔχει προφανῶς τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ πολλαπλασιαστέος 2096 καὶ

ὁ τριψήφιος πολλαπλασιαστικὴς πλὴν ἑνός, ὁ δὲ 2096000 ὅσα ἔχουσιν ἀμφοτέρω. Λοιπὸν ἀπεδείχθη ὅτι τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσιν καὶ οἱ δύο αὐτοῦ παράγοντες ἢ τόσα πλὴν ἑνός.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ὅταν τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐπὶ τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἦναι ἀριθμὸς διψήφιος, τότε τὸ γινόμενον αὐτῶν θέλει ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ἀμφοτέροι. Παραδείγματός χάριν, ἂν εἰχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 4568 ἐπὶ 359, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 12 τῶν πρώτων πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίων αὐτῶν 4 καὶ 3 εἶναι ἀριθμὸς διψήφιος, τὸ γινόμενον αὐτῶν θέλει ἔχει προφανῶς τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ἀμφοτέροι οἱ παράγοντες αὐτοῦ, ἥτοι 7. Ὅταν δὲ τὸ γινόμενον τῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ πρώτων ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ πολλαπλασιαστοῦ ἦναι ἀριθμὸς μονοψήφιος, τότε δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν μετὰ τινος βεβαιότητος, ἂν τὸ ζητούμενον γινόμενον αὐτῶν θέλει ἔχει τόσα ψηφία ὅσα ἔχουσιν ἀμφοτέροι πλὴν ἑνός, ἢ ὅσα ἔχουσιν ἀμφοτέροι· διότι, πιθανόν τὰ κρατούμενα τῶν προηγουμένων μερικῶν γινομένων προστιθέμενα εἰς τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος γινόμενον νὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διψήφιον. Παραδείγματός χάριν, ἂν εἰχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2964 ἐπὶ 435, δὲν δυνάμεθα νὰ εἰπωμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 2×4 τῶν πρώτων πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίων αὐτῶν 2 καὶ 4 εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος, τὸ γινόμενον αὐτῶν θέλει ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ἀμφοτέροι πλὴν ἑνός· διότι τὸ μετὰ τὸ πρῶτον ψηφίον 2 δεύτερον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶναι 9, ὅπερ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 4 δίδει γινόμενον 36, καὶ ἠθέλομεν ἔχει ἐν τῇ ἐκτελέσει τοῦ πολλαπλασιασμοῦ 3 τὰ κρατούμενα, ἅτινα προτιθέμενα εἰς τὸ γινόμενον τοῦ 2 ἐπὶ 4 δίδουσιν ἄθροισμα 11, ἥτοι ἀριθμὸν διψήφιον, ὅτε κατὰ τὰ προλεχθέντα τὸ γινόμενον αὐτῶν ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ἀμφοτέροι οἱ παράγοντες αὐτοῦ.

ΒΑΣΑΝΟΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

31. Ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται ἐπαναληψιμὴς τῆς πράξεως λαμβανομένου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὡς πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἀντιστρόφως. Ἐὰν αὕτως εὐρεθῇ τὸ αὐτὸ γινόμενον, εἶναι βέβαιον ὅτι ἡ πράξις ἐγένετο ἀνευ λάθους.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι σχεδὸν κατὰ πάντα ὁμοιος ἐκείνῳ, ὃν ἐδώ-

σαμεν καὶ διὰ τὴν βάσιν τῆς πρόσθεσεως. Ἀλλὰ πρὸς τοῦτο πρέπει ν' ἀποδείξωμεν καὶ τὸ ἐξῆς θεώρημα.

32. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων δὲν μεταβάλλεται μεταβαλλομένης τῆς τάξεως τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Λέγω π. χ. ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 4 εἶναι ἴσον τῷ γινόμενῳ τοῦ 4 ἐπὶ 5. Διότι, ἐὰν γράψωμεν ἐπὶ τινος ὀριζοντίου γραμμῆς τόσας μονάδας, ὅσας περιέχει ὁ 5, καὶ ἐπαναλάβωμεν τόσας τοιαύτας γραμμὰς, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ 4, θέλομεν σχηματίσει τὸν ἐξῆς πίνακα·

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

ὅστις, καθ' ὃν τρόπον κατασκευάσθη, περιέχει τόσας μονάδας, ὅσας καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 4. Ἀλλ' ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν τὰς ἐν ἐκάστῃ καθετῇ αὐτοῦ στήλῃ περιεχομένας μονάδας, βλέπομεν ὅτι ὑπάρχουσι 4 μονάδες, καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι 5 τοιαῦται ὁμοίαι στήλαι, ἔπεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν αὐτῶν μονάδων εἶναι ἴσος τῷ γινόμενῳ τοῦ 4 ἐπὶ 5. Τὰ δύο λοιπὸν γινόμενα 5×4 καὶ 4×5 εἶναι ἴσα, ὥς παριστῶντα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν τῷ αὐτῷ πίνακι περιεχομένων μονάδων. Τὸ γινόμενον λοιπὸν δύο παραγόντων δὲν μεταβάλλεται μεταβαλλομένης τῆς τάξεως τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ.

33. *Γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν ἢ πολλῶν παραγόντων καλεῖται τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ εὐρίσκωμεν πολλαπλασιάζοντας τὸν πρῶτον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ οὕτω καθεξῆς. Π. χ. τὸ γινόμενον $7 \times 4 \times 5 \times 6$ παριστᾷ τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ εὐρίσκωμεν πολλαπλασιάζοντας τὸν 7 ἐπὶ 4, τὸ γινόμενον 28 ἐπὶ 5, τὸ δεύτερον τοῦτο γινόμενον 140 ἐπὶ 6.*

34. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται ὅπωςδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἀνωτέρω γινόμενον $7 \times 4 \times 5 \times 6$ εἶναι ἴσον τῷ $5 \times 7 \times 6 \times 4$, ὅπερ περιέχει τοὺς αὐτοὺς, οὗς καὶ τὸ πρῶτον, παράγοντας, ἀλλὰ κατ' ἄλλην τινὰ τάξιν.

Ἵνα ἀποδείξωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα θέλομεν ἀποδείξει τρία τινά.

1ον. Τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται ἐναλλασσομένης τῆς τάξεως τῶν δύο τελευταίων.

Λέγω π. γ. ὅτι τὰ δύο γινόμενα $6 \times 5 \times 4$ καὶ $6 \times 4 \times 5$, ἅτινα δὲν διαφέρουσι εἰμὴ κατὰ τὴν τάξιν τῶν δύο τελευταίων αὐτῶν παραγόντων 5 καὶ 4, εἶναι ἴσα.

Τῷ ὄντι, ἐὰν γράψωμεν ἐπὶ τινος ὀριζοντίου γραμμῆς πεντάκις τὸν πρῶτον παράγοντα 6 τοῦ γινομένου $6 \times 5 \times 4$ καὶ ἐπαναλάβωμεν 4 τοιαύτας γραμμάς, θέλομεν σχηματίσει τὸν ἐξῆς πίνακα:

6	6	6	6	6
6	6	6	6	6
6	6	6	6	6
6	6	6	6	6

Ἐπειδὴ δὲ ἡ πρώτη τοῦ πίνακος τούτου ὀριζόντιος σειρὰ περιέχει πεντάκις τὸν 6, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν αὐτῇ περιεχομένων ἀριθμῶν θέλει κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ἴσον τῷ γινόμενῳ 6×5 , καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι 4 ὅμοιαι σειραί, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θέλει εἶναι ἴσον τῷ γινόμενῳ τοῦ 6×5 ἐπὶ 4, ἥτοι θέλει εἶναι $6 \times 5 \times 4$. Ἄλλ' ἐὰν θεωρήσωμεν τὸν αὐτὸν πίνακα ὡς ἀποτελούμενον ἐξ ὁμοίων καθέτων στηλῶν, βλέπομεν ὅτι ἐκάστη κάθετος στήλη περιέχει τετράκις τὸν 6, ἥτοι εἶναι ἴση τῷ γινόμενῳ 6×4 , καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι 5 τοιαῦται, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν αὐταῖς ἀριθμῶν θέλει εἶναι ἴσον τῷ γινόμενῳ τοῦ 6×4 ἐπὶ 5, ἥτοι θέλει εἶναι $6 \times 4 \times 5$. Τὰ δύο λοιπὸν γινόμενα $6 \times 5 \times 4$, $6 \times 4 \times 5$ εἶναι ἴσα, ὡς παριστῶντα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν τῷ αὐτῷ πίνακι περιεχομένων ἀριθμῶν. τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ἐν πρώτοις ν' ἀποδείξωμεν.

2ον. Τὸ γινόμενον πλειοτέρων παραγόντων δὲν μεταβάλλεται ἐναλλασσομένης τῆς τάξεως δύο διαδοχικῶν αὐτοῦ παραγόντων.

Λέγω, παραδείγ. χάριν, ὅτι τὰ δύο γινόμενα $5 \times 3 \times 7 \times 6 \times 9$, $5 \times 3 \times 6 \times 7 \times 9$, ἅτινα δὲν διαφέρουσιν εἰμὴ κατὰ τὴν τάξιν τῶν δύο διαδοχικῶν παραγόντων 7 καὶ 6, εἶναι ἴσα.

Τῷ ὄντι, πρὸς εὔρεσιν τῶν ἴσων μὲ τὰ ἀνωτέρω γινόμενα ἀριθμῶν πρέπει διὰ μὲν τὸ πρῶτον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 5 ἐπὶ 3, τὸ γινόμενον αὐτῶν 15 ἐπὶ 7, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ 6, καὶ τὸ ἐντεῦθεν προκύπτον γινόμενον ἐπὶ 9, διὰ δὲ τὸ δεύτερον θέλομεν πολλαπλασιάσαι τὸν 5 ἐπὶ 3, τὸ γινόμενον αὐτῶν 15 ἐπὶ 6, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ 7 καὶ τὸ ἐντεῦθεν προκύπτον ἐπὶ 9. Ἀλλὰ κατὰ τὰ προαποδείχθέντα τὰ γινόμενα $15 \times 7 \times 6$ καὶ $15 \times 6 \times 7$, ἅτινα ἔχουσι τοῦς

αυτοὺς τρεῖς παράγοντας καὶ δὲν διαφέρουσιν εἰμὴ κατὰ τὴν τάξιν τῶν δύο τελευταίων, εἶναι ἴσα. Ἄρα καὶ τὰ γινόμενα τούτων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 9 θέλουσιν εἶναι ἴσα. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητά,

$$15 \times 7 \times 6 \times 9 = 15 \times 6 \times 7 \times 9,$$

ἢ τὴν ἐξῆς $5 \times 3 \times 7 \times 6 \times 9 = 5 \times 3 \times 6 \times 7 \times 9,$

δι' ἧς ἀποδεικνύεται τὸ ἀνωτέρω 2^{ον} θεώρημα.

3^{ον} Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται μεταβαλλομένης ὁποσδήποτε τῆς τάξεως τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι τὰ γινόμενα $5 \times 2 \times 3 \times 7 \times 6$ καὶ $7 \times 3 \times 6 \times 5 \times 2$, ἅτινα ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς παράγοντας, ἀλλὰ κατ' ἄλλην τινὰ ὁλως αὐθαίρετον τάξιν, εἶναι ἴσα.

Διότι ἐν τῷ δευτέρῳ γινομένῳ $7 \times 3 \times 6 \times 5 \times 2$ δυνάμεθα κατὰ τὸ προκποδειχθέν θεώρημα νὰ μεταβάλωμεν τὴν τάξιν τῶν δύο διαδοχικῶν αὐτοῦ παραγόντων 6 καὶ 5, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία αὐτοῦ. Οὕτως ὁ 5 θέλει προχωρήσει μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ θέλει γίνῃ διαδοχικὸς τοῦ 3, οὔτινος τὴν θέσιν δύναται νὰ καταλάβῃ ἐναλλασσόμενος μετ' αὐτοῦ, ὅτε γίνεται διαδοχικὸς τοῦ 7, οὔτινος πάλιν τὴν θέσιν δύναται νὰ καταλάβῃ ἐναλλασσόμενος μετ' αὐτοῦ, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ γινόμενον. Τὸ νέον λοιπὸν γινόμενον $5 \times 7 \times 3 \times 6 \times 2$ θέλει εἶναι ἴσον τῷ $7 \times 3 \times 6 \times 5 \times 2$. Ἀλλ' ὅπως ἐδώσαμεν εἰς τὸν παράγοντα 5 τοῦ δευτέρου γινομένου $7 \times 3 \times 6 \times 5 \times 2$ τὴν πρώτην θέσιν, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ, δυνάμεθα ὁμοιοτρόπως νὰ δώσωμεν εἰς τὸν παράγοντα αὐτοῦ 2 τὴν δευτέραν, εἰς τὸν 3 τὴν τρίτην, εἰς τὸν 7 τὴν τετάρτην κτλ., ἐν ἄλλαις λέξεσι, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τοὺς παράγοντας τοῦ δευτέρου γινομένου $7 \times 3 \times 6 \times 5 \times 2$ τὴν αὐτὴν θέσιν, ἣν ἔχουσι καὶ ἐν τῷ πρώτῳ $5 \times 2 \times 3 \times 7 \times 6$, καὶ τὸ προκύπτον τελικὸν γινόμενον νὰ ᾖ ἴσον αὐτῷ. Τὰ δύο λοιπὸν γινόμενα $5 \times 2 \times 3 \times 7 \times 6$ καὶ $7 \times 3 \times 6 \times 5 \times 2$, ἅτινα δὲν διαφέρουσιν εἰμὴ κατὰ τὴν τάξιν τῶν παραγόντων αὐτῶν, εἶναι ἴσα.

35. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἀριθμὸς τὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ἢ ἂν πολλαπλασιασθῇ διαδοχικῶς ἐφ' ἑκάστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου.

Λέγω π. χ. ὅτι ὁ ἀριθμὸς 3 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ γινόμενον $2 \times 5 \times 6$, ἥτοι ἐπὶ 60, ἢ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν πρῶτον αὐτοῦ παράγοντα 2, τὸ ἐντεῦθεν προκύπτον γινόμενον ἐπὶ τὸν δεύτερον

5 καὶ τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα 6. Διότι τὸ γινόμενον 3×60 εἶναι ἴσον τῷ 60×3 . Ἀλλ' ἐὰν ἀντὶ 60 θέσωμεν τὸ ἴσον αὐτῷ $2 \times 5 \times 6$, θέλομεν ἔχει $60 \times 3 = 2 \times 5 \times 6 \times 3$, ἢ, δίδοντες εἰς τὸν 3 τὴν πρώτην θέσιν, $60 \times 3 = 3 \times 2 \times 5 \times 6$, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ ἀνωτέρω θεώρημα.

36. Ἐκ τῶν ἐν ταῖς §§ 34 καὶ 35 ἀποδειχθέντων θεωρημάτων περιζόμεθα διαφόρους συνεπείας μεταξύ τῶν ὑποίων ἀναφέρομεν τὰς ἐξῆς δύο, ὧν γίνεται συχνότερα χρῆσις.

1^{ον}. *Εἰς γινόμενον πολλῶν παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ὅσουςδήποτε παράγοντας διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν.*

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ γινόμενον $2 \times 5 \times 7 \times 4 \times 6 \times 9$ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν κατ' ἀρέσκειαν τοὺς παράγοντας αὐτοῦ 2, 7 καὶ 6 διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν 84, καὶ τὸ οὕτω προκύπτον νέον γινόμενον $5 \times 4 \times 9 \times 84$ θέλει εἶναι ἴσον τῷ δεδομένῳ $2 \times 5 \times 7 \times 4 \times 6 \times 9$.

Διότι δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν οὕτω τὴν θέσιν τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου $2 \times 5 \times 7 \times 4 \times 6 \times 9$, ὥστε οἱ παράγοντες αὐτοῦ 2, 7 καὶ 6 νὰ ᾔναι πρῶτοι, καὶ θέλομεν ἔχει

$$2 \times 5 \times 7 \times 4 \times 6 \times 9 = 2 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 9,$$

$$\text{ἢ} \quad 2 \times 5 \times 7 \times 4 \times 6 \times 9 = 84 \times 5 \times 4 \times 9,$$

$$\text{ἢ} \quad 2 \times 5 \times 7 \times 4 \times 6 \times 9 = 5 \times 4 \times 9 \times 84,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

2^{ον}. *Γινόμενον πολλῶν παραγόντων πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τινὰ ἀριθμὸν, ἐὰν εἰς ὅποιονδήποτε τῶν παραγόντων αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον $2 \times 3 \times 7 \times 6 \times 4$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 5, ἐὰν ὅποιονδήποτε τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ὁ 3 καθ' ὑπόθεσιν, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5.

Διότι τὸ γινόμενον $2 \times 3 \times 7 \times 6 \times 4$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 5, ἐὰν συγκαταριθμηθῇ καὶ ὁ 5 μεταξύ τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ὅτε ἔχομεν τὸ γινόμενον $2 \times 3 \times 7 \times 6 \times 4 \times 5$. Ἀλλὰ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα προηγουμένως δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῷ γινόμενῳ $2 \times 3 \times 7 \times 6 \times 4 \times 5$ τοὺς παράγοντας 5 καὶ 3 αὐτοῦ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 15, καὶ θέλομεν ἔχει $2 \times 15 \times 7 \times 6 \times 4$. Ὡς βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ γινόμενον $2 \times 3 \times 7 \times 6 \times 4$ πολλαπλασι-

ἄζεται ἐπὶ 5, ἐνῶ εἰς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ὁ 3 καθ' ὑπόθεσιν, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5.

ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ.

37. Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἴσων ἀριθμῶ τινι καλεῖται *δύναμις* αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων παραγόντων ἀποτελεῖ τὸν βαθμὸν τῆς δυνάμεως καὶ καλεῖται *ἐκθέτης*. Π. χ. τὸ γινόμενον $3 \times 3 \times 3 \times 3$ καλεῖται δύναμις τοῦ 3. ὁ δὲ ἀριθμὸς 4 τῶν ἴσων αὐτοῦ παραγόντων παριστᾷ τὸν βαθμὸν τῆς δυνάμεως.

Πρὸς παράστασιν δυνάμεως τινος δεδομένου ἀριθμοῦ γράφομεν ἀπ᾽ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνωθεν τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως αὐτοῦ. Οὕτως 7^2 , 5^7 , 6^3 παριστῶσι τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ 7, τὴν ἐβδόμην τοῦ 5, τὴν τρίτην τοῦ 6. Ἡ πρώτη δύναμις ἀριθμοῦ τινος γράφεται ἄνευ ἐκθέτου, οἷον 5, 3, ἀντὶ 5^1 , 3^1 . Ὀνομασθῇ δὲ ὁ 3, ὁ 5 πρώτη δύναμις τοῦ 5, τοῦ 3 ἐξ ἀναλογίας, διότι πρᾶγματι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι δὲν εἶναι δυνάμεις, ὡς μὴ ὄντες γινόμενα πολλῶν παραγόντων ἴσων τῷ 5, τῷ 3.

Ἔγνωνται εἰς δυνάμεις καλεῖται ἡ πράξις, δι' ἧς σχηματίζομεν τὰς δυνάμεις ἀριθμοῦ τινος.

38. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων ἀριθμοῦ τινος εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν δύο παραγόντων.

Ἐστω τὸ γινόμενον $5^3 \times 5^4$. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ § 35 τὸ γινόμενον $5^3 \times 5^4$ εἶναι ἴσον τῷ $5^3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$, καὶ τοῦτο πάλιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα τῆς δυνάμεως ὁρισμὸν ἴσον τῷ 5^7 , ἦτοι 5^{3+4} .

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι τὸ γινόμενον πλειοτέρων δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων.

Ἐστω π. χ. τὸ γινόμενον $3^2 \times 3^3 \times 3^5 \times 3^7$. Θέλομεν ἔχει διαδοχικῶς $3^2 \times 3^3 \times 3^5 \times 3^7 = 3^5 \times 3^5 \times 3^7 = 3^{10} \times 3^7 = 3^{17} = 3^{2+3+5+7}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐπειδὴ $10 = 10^1$, θέλομεν ἔχει $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, ..., τοιούστιν ὁ ἀριθμὸς, ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ ὡσωνδήποτε μηδενικῶν, εἶναι ἴσος μὲ δύναμιν τινὰ τοῦ 10, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκολουθούντων τῇ μονάδᾳ μηδενικῶν. Οὕτως, ἐὰν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν τὸν ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ 8 μηδενικῶν ἀποτελούμενον

ἀριθμόν, θέλομεν γράψῃ 10⁸, ἐάν δὲ τὸν ὑπὸ n , θέλομεν γράψῃ 10 n .

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΙΝΟΣ ΕΠΙ ΤΙΝΑ ΔΙΑΦΟΡΑΝ.

39. Ἐστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 8 ἐπὶ τὴν διαφοράν 5—3, ἥτοι νὰ εὐρεθῇ τὸ γινόμενον $8 \times (5-3)$ χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ ἀφαιρέσις. Λέγομεν ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον εὐρίσκεται, ἐάν πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος 8 ἐπὶ τὸν μειωτέον 5 καὶ ἀφαιρετέον 3 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 5—3, καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου 8×5 ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον γινόμενον 8×3 , ἥτοι ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$8 \times (5-3) = 8 \times 5 - 8 \times 3.$$

Διότι, κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 8, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστής 5—3 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλὰ προφανῶς ὁ πολλαπλασιαστής 5—3 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ ἐπανελήφθη αὕτη πρῶτον πεντάκις, ἔπειτα τρίς, καὶ ἀφαιρέθη ἀπὸ τοῦ πενταπλασίου τὸ τριπλάσιον αὐτῆς. Λοιπὸν καὶ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 8 ἀφοῦ ἐπαναληφθῇ οὗτος πρῶτον πεντάκις, ἥτοι 8×5 , ἔπειτα τρίς, ἥτοι 8×3 , καὶ ἀπὸ τοῦ πενταπλασίου αὐτοῦ 8×5 ἀφαιρεθῇ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ 8×3 . Θέλομεν λοιπὸν ἐν ἄλλαις λέξεσιν ἔχει τὴν ἰσότητα $8 \times (5-3) = 8 \times 5 - 8 \times 3$, ἧς τὸ ἀληθές ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

- I. Τὰ δύο γινόμενα $2 \times 3 \times 7 \times 5$, $3 \times 14 \times 5$, εἶναι ἴσα;
- II. Τὰ τρία γινόμενα $3 \times 5 \times 2 \times 7 \times 9$, $5 \times 9 \times 7 \times 6$, $9 \times 30 \times 7$ εἶναι ἴσα;
- III. Πῶς παρίσταται τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς 11—5 ἐπὶ 7 χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις;
- IV. Πῶς παρίσταται τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 3 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $2 \times 5 + 4 \times 7$ χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις;
- V. Πῶς παρίσταται τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $2 \times 5 + 4 \times 7$ ἐπὶ τὴν διαφοράν 8—4 χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις;
- VI. Ποῖον εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο γινομένων $2 \times 3^2 \times 7$, $5 \times 7^2 \times 8$, καὶ πῶς σημειώνεται ἀπλούστερον;
- VII. Τὰ δύο γινόμενα $2 \times 3^2 \times 7 \times 5 \times 7^2$, $2 \times 3^3 \times 7^3 \times 5$ εἶναι ἴσα;

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

40. Ἡ διαίρεσις εἶναι πράξις, δι' ἧς δεδομένων δύο ἀριθμῶν εὐρίσκομεν τρίτον, δείκνόντα ποσάκις ὁ δεύτερος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν ἐμπεριέχεται ἐν τῷ πρώτῳ.

Ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν καλεῖται διαιρετέος, ὁ δευτέρος διαιρετης καὶ ὁ ζητούμενος τρίτος πηλίκον.

Ἡ διαιρέσις παρίσταται διὰ τοῦ σημείου $:$, ὅπερ ἀπαγγέλλεται νὰ διαιρεθῇ διὰ ἢ ἀπλῶς ὁ α. Οὕτως ἡ παράστασις $8:2$ ἀπαγγέλλεται 8 νὰ διαιρεθῇ διὰ 2 ἢ ἀπλῶς 8 διὰ 2.

41. Ἴνα εὐρωμεν ποσάκις ἀριθμὸς τις ἐμπεριέχεται ἐν ἄλλῳ τινί, ἀρκεῖ νὰ ἴδωμεν ποσάκις ὁ πρῶτος δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ δευτέρου. Ἐὰν θέλωμεν π. χ. νὰ εὐρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 14 διὰ 4, ἀφαιροῦμεν τὸν 4 ἀπὸ τοῦ 14 καὶ εὐρίσκομεν διαφορὰν 10· ἀπὸ τῆς εὐρεθείσης διαφορᾶς 10 ἀφαιροῦμεν πάλιν τὸν 4, καὶ εὐρίσκομεν νέαν διαφορὰν 6· ἀπὸ ταύτης ἀφαιροῦμεν πάλιν τὸν 4, καὶ εὐρίσκομεν διαφορὰν 2, ἀφ' ἧς ὁ διαιρέτης 4 δὲν δύναται ν' ἀφαιρεθῇ. Ἡ μὲν διαφορὰ 2, ἀφ' ἧς δὲν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν διαιρέτην 4, καλεῖται ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, ὁ δὲ ἀριθμὸς 3, ὅστις δείκνυει ποσάκις ὁ διαιρέτης 4 ἀφηρέθη ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 14, εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ὅταν τὸ ὑπόλοιπον ᾖ ἴσος μηδέν, τότε λέγομεν ὅτι ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται ἀκριβῶς.

Ὁ διὰ διαδοχικῶν τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρέσεων πρὸς εὐρεσιν τοῦ πηλίκου τρόπος, ὃν πορίζομεθα ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὀρισμοῦ τῆς διαιρέσεως, ἤθελεν εἶναι σχεδὸν ἀκατόρθωτος, ὅταν οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ καὶ τὸ πηλίκον αὐτῶν ᾖναι ἀρκούντως μεγάλαι, ὅπως, προκειμένου καὶ περὶ πολλαπλασιασμοῦ, ἡ διαδοχικὴ τοῦ πολλαπλασιαστέου εἰς ἑαυτὸν πρὸς εὐρεσιν τοῦ γινομένου πρόσθεσις ἤθελεν εἶναι λίαν ἐπίπονος, ὅταν οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου ᾖναι

ἀρκούντως μεγάλοι. Ἀλλὰ καθὼς τότε εὐρομεν τρόπον, δι' οὗ εὐρίσκομεν εὐκόλως τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν, θέλομεν, ἀκολουθοῦντες ὁμοίαν τινὰ ὁδόν, πορισθῇ μετ' ὀλίγον καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν κανόνα, δι' οὗ εὐρίσκομεν λίαν εὐκόλως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν.

42. Κατὰ τὸν περὶ διαιρέσεως ὁρισμὸν, ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος τῷ γινόμενῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον· σὺν τῷ ὑπολοίπῳ. Ὁ διαιρετέος 14, παραδείγματος χάριν, εἶναι ἴσος τῷ γινόμενῳ τοῦ διαιρέτου 4 ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν πηλίκον 3 σὺν τῷ εὐρεθέντι ὑπολοίπῳ 2, τοῦθ' ὅπερ παρίσταται διὰ τῆς ἰσότητος $14 = 4 \times 3 + 2$.

Ὅταν τὸ ὑπόλοιπον ἦναι μηδέν, τότε ὁ διαιρετέος θέλει εἶναι ἴσος τῷ γινόμενῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἢ, ἔπερ ταυτό, ἴσος τῷ γινόμενῳ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην (32). Ἐπομένως ἐν τῇ μερικῇ ταύτῃ περιπτώσει δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὴν διαίρεσιν ὡς πρᾶξιν, δι' ἣν δοθέντα ἀριθμὸν (τὸν διαιρετέον) διαιροῦμεν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει δεύτερός τις δεδομένος ἀριθμὸς (ὁ διαιρέτης). Τότε τὸ πηλίκον θέλει εἶναι τὸ ἐν τῶν ἴσων τούτων μερῶν.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου παρήχθησαν αἱ ὀνομασίαι διαιρέσεις, διαιρέτες καὶ διαιρέτης.

ΜΕΡΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ, ΚΑΘ' ἣΝ ΤΟ ΠΗΛΙΚΟΝ ΕἶΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΟΝΟΨΗΦΙΟΣ.

43. Τὸ πηλίκον διαιρέσεως τινος εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος, ὅταν ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς γραφομένου ἐνὸς μηδενικοῦ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ διαιρέτου ἦναι μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου· διότι τότε ὁ διαιρέτης δὲν περιέχει δεκάκις τὸν διαιρέτην, ὡς μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ.

*Ἡ περίπτωσις αὕτη περιλαμβάνει τὰς ἐξῆς δύο· ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι ἀριθμὸς μονοψήφιος, καὶ ὅταν οὗτος ἦναι ἀριθμὸς πολυψήφιος.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις τὸν διαιρέτην μονοψήφιον. Εἶναι φανερόν ὅτι τότε, ἵνα τὸ πηλίκον ἦ ἀριθμὸς μονοψήφιος, ὁ διαιρετέος δὲν δύναται νὰ ἔχῃ περισσότερα τῶν δύο ψηφίων. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εὐρίσκομεν τὸ πηλίκον διὰ τοῦ πίνακος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἐξῆς. Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι προτιθέμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν 59 διὰ 8. Μεταβαίνομεν εἰς τὴν ὀρθὴν κάθετον τοῦ πίνακος στήλην, καὶ ζητοῦμεν τὸν ἐν αὐτῷ μεγαλύτερον ἀριθμὸν, τὸν ἐμπεριεχόμενον εἰς τὸν δεδομένον διαιρέτην 8. Οὗτος εἶναι ὁ 56, ὅςτις

εἶναι γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ 7. Αἰτιᾶν ὁ ἀριθμὸς 7 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἢ δὲ μεταξύ τοῦ 59 καὶ 56 διαφορὰ 3 τὸ ὑπολοίπον τῆς διαιρέσεως. Πράγματι, ἐπειδὴ γνωρίζομεν ἐκ στήθους τὸν πίνακα τοῦ Πυθαγόρου, δὲν καταφεύγομεν εἰς αὐτόν, ἀλλὰ σχηματίζομεν ἐν τῇ τῇ ἡμῶν τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς ἀριθμούς, καὶ βλέπομεν συνάμα, ὅτι ὁ διαιρετέος ἦναι ἴσος μὲν τι τούτων ἢ περιέχεται μεταξύ δύο διχοδικῶν γινομένων. Τότε τὸ πηλίκον θέλει εἶναι ὁ ἀριθμὸς, ἐν ᾧ πολλὰ πλῆκταισθῆις ὁ διαιρετέος δίδει τὸν διαιρέτον, ἢ τὸ μικρότερον τῶν δύο διχοδικῶν γινομένων, μεταξύ τῶν ὁποίων εὐρέθη περιεχόμενος οὗτος.

44. Ὡς ὑποθέσωμεν τώρα τὸν διαιρέτην πολυψήριον. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εὐρίσκομεν τὸ πηλίκον διὰ τινων δοκιμῶν, ὡς ἐξῆς.

Ἐστω π.χ. νὰ διαιρεθῇ ὁ 5905 διὰ τοῦ 859. Ἐάν ἀντὶ τοῦ διαιρέτου 859 λάβωμεν ὡς τοιοῦτον τὸν 800, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 5905 διὰ 800 θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου 5905 διὰ τοῦ δεδομένου διαιρέτου 859. Ἄλλ', ἵνα ἴδωμεν ποσάκις ὁ διαιρέτης 800 περιέχεται εἰς τὸν διαιρέτον 5905, ἀρκεῖ προφανῶς νὰ ἴδωμεν ποσάκις αἱ 8 ἑκατοντάδες αὐτοῦ περιέχονται εἰς τὰς 59 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρέτου, ἥτοι ποσάκις ὁ 8 περιέχεται εἰς τὸν 59. Εὐρίσκομεν δὲ οὕτω πηλίκον 7, ὅπερ, ὡς προείπομεν, θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ ζητούμενου. Ἰνα βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου, δοκιμάζομεν τὸ εὐρεθὲν πηλίκον 7 πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην 859 ἐπὶ τοῦτο καὶ πρὸς ἄλλους τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον αὐτῶν 6013 πρὸς τὸν δεδομένον διαιρέτον 5905. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 6013 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου 5905, τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 7. Τοῦτου ἕνεκα δοκιμάζομεν τὸν ἀμέσως μικρότερον τοῦ 7 ἀριθμὸν 6, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ 859 ἐπὶ 6 εἶναι 5154, τοιούστιν ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρέτου 5905, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 6 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

45. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορίζομεθα εὐκλῶς τὸν ἐξῆς κανόνα.

Ἵνα διαιρέσωμεν δύο ὁποιοσδήποτε ἀριθμούς, ὅταν τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς μονοψήριος, διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψήριον τοῦ διαιρέτου τὸν ἀριθμὸν, τὸν ἀποτελούμενον ὑπὸ τῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψήριων τοῦ διαιρέτου, τῶν παριστάντων μοᾶδας τῆς αὐτῆς τῇ πρώτῃ ψήρῳ τοῦ διαιρέτου τάξεως. Τὸ οὕτω εὐρεθησόμενον πηλίκον αὐτῶν θέλει εἶναι

ἢ ἴσον ἢ μείζον τοῦ ζητουμένου. Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν πηλίκον, καὶ ἐὰν τὸ εὐρεθισόμενον γινόμενον ᾖ μὴ μικρότερον τοῦ διαιρετέου, τὸ εὐρεθὲν πηλίκον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον, εἰ δὲ μὴ δοκιμάζομεν τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον ἀριθμὸν, καὶ οὕτω καθέξης, μέχρις οὐ εὐρωμεν ἀριθμὸν, ἐφ' ὃν πολλαπλασιασθεὶς ὁ διαιρέτης τὰ διδῶν γινόμενον μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν πηλίκον.

Διακτάσσομεν συνήθως τὰ τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως ὡς ἐξῆς:

$$\begin{array}{r|l} 5905 & 859 \\ 5154 & 6 \\ \hline 751 & \end{array}$$

Γράφομεν τὸν διαιρέτην πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ καθέτου γραμμῆς. Γράφομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ ὑπὸ τὴν γραμμὴν ταύτην τὰ ἀκριβεῖς ψηφίον τοῦ πηλίκου, ὅταν εὐρωμεν αὐτό. Ὑπὸ τὸν διαιρετέον γράφομεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ ἀκριβεῖς ψηφίον τοῦ πηλίκου, ἀγομεν γραμμὴν ὑποκάτω, καὶ ὑπ' αὐτὴν γράφομεν τὴν μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ ὑπ' αὐτὸν γραφέντος γενομένου διαφορὰν, ἥτις θέλει εἶναι, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

46. Ὡς ἐπὶ τὸ πλείστον ἀποφεύγομεν τοῦ νὰ γράψωμεν ὑπὸ τὸν διαιρετέον τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ ἀκριβεῖς ψηφίον τοῦ πηλίκου. Τότε πρὸς εὐρεσιν τοῦ ὑπολοίπου ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς τὰ γινόμενα τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, κτλ. τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸ πηλίκον ἀπὸ τῶν τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, κτλ. τοῦ διαιρετέου, καθόσον εὐρίσκομεν αὐτά. Ἴνα δὲ καταστήσωμεν τὰς διαφόρους ταύτας ἀφαιρέσεις δυνατάς, ποιούμεν χρῆσιν τῆς ἐν τῇ § 17 ἐκτεθείσης ἀρχῆς, ἐφ' ἧς στηρίζεται καὶ ὁ γενικὸς τῆς ἀφαιρέσεως κανὼν. Κατὰ τὴν περὶ ἧς ὁ λόγος ἀρχὴν προσθέτομεν εἰς ἕκαστον ψηφίον τοῦ διαιρετέου ἀναγκαῖον καὶ ἐπαρκοῦντα ἀριθμὸν δεκάδων, ἵνα ἡ πρὸς ἐκτέλεσιν προκειμένη ἀφαίρεσις κατασταθῇ δυνατὴ, προσθέτομεν δὲ ἀκολουθῶς, ἵνα μὴ ἡ ζητούμενη διαφορὰ μεταβληθῇ, ἴσον ἀριθμὸν μονάδων εἰς τὸ πρὸς ἀφαιρέσιν ἐπόμενον γινόμενον.

"Ἀς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 5905 διὰ τοῦ 859. Ἀφοῦ εὐρωμεν ὡς προεξέθεσamen τὸ ἀληθές ψη-

φρίον θ τοῦ ζητουμένου πηλίκου, γράφομεν αὐτό ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ ἔπειτα λέγομεν 9 ἐπὶ 6...54 ἀπὸ 55...1· γράφομεν 1 ὑπὸ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ διαιρέτου καὶ κρατοῦμεν 5· 5 ἐπὶ 6...30 καὶ 5 τὰ κρατούμενα 35 ἀπὸ 40...5· γράφομεν 5 ὑπὸ τὸ ψηφίον θ τῶν δεκάδων τοῦ διαιρέτου καὶ κρατοῦμεν 4· 8 ἐπὶ 6...48 καὶ 4 τὰ κρατούμενα 52 ἀπὸ 59...7· γράφομεν 7 ὑπὸ τὸ ψηφίον θ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ διαιρέτου, ὁ δὲ αὐτῷ γραφεὶς ἀριθμὸς 751 θέλει παριστᾷ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Πᾶς τις βλέπει εὐκόλως ὅτι, ἵνα καταστήσωμεν δυνατὴν τὴν πρῶτην ἀφαίρεσιν, προσεθέσαμεν 5 δεκάδας εἰς τὰς 5 μονάδας τοῦ διαιρέτου· διὰ τὴν δευτέραν προσεθέσαμεν 4 δεκάδας, καὶ διὰ τὴν τρίτην ἐδανείσθημεν τὰς 5 δεκάδας τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου τοῦ διαιρέτου· ἵνα δὲ μὴ μεταβληθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως προσθέσαμεν εἰς τὸ δεύτερον γινόμενον τόσας μονάδας, ὅσας δεκάδας εἶχομεν προσθέσει εἰς τὰς μονάδας τοῦ διαιρέτου, ἦτοι 5, καὶ εἰς τὸ τρίτον γινόμενον, ὅσας δεκάδας εἶχομεν προσθέσει εἰς τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου, ἦτοι 4.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. — Διὰ τοῦ ἀνωτέρω τοῦ ἐκτελεῖν τὴν διαίρεσιν τρόπου δυνάμεθα νὰ δοκιμάζωμεν ψηφίον τι χωρὶς νὰ γράφωμεν τὸ ὑπὸ τὸν διαιρέτην. Συνήθως αἱ δοκιμαὶ αὗται γίνονται ἐν τῇ πράξει ἐξ ὄψεως, ἀρκεὶ δὲ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον, καὶ νὰ συγκρίνωμεν τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον πρὸς τὰς τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδας τοῦ διαιρέτου.

ΓΕΝΙΚΗ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ.

47. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν δύο ἀριθμῶν, ὧν τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς πολυψήφιος. Πρὸς εὐρεσιν αὐτοῦ ἀκολουθοῦμεν τὸν ἐξῆς κανόνα.

Ἵνα διαιρέσωμεν δύο ἀριθμούς, ὡς τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς πολυψήφιος, γράφομεν τὸν διαιρέτην πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ καθέτου γραμμῆς. Ἄγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ ὑπ' αὐτὴν γράφομεν τὰ διάφορα ψηφία τοῦ πηλίκου, καθόσον εὐρίσκομεν αὐτά.

Πρὸς τοῦτο χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρέτου τόσα ψηφία, ὅσα ἀπαιτοῦνται, ἵνα σχηματισθῇ ἀριθμὸς μεγαλύτερος μὲν τοῦ διαιρέτου, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ. (ΑΡΙΘΜ. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΥ).

οὕτως ἀποτελοῦμενος ἀριθμὸς καλεῖται πρῶτος μερικὸς διαιρετέος, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ διαιρετοῦ θέλει εἶναι τὸ πρῶτον ῥηθὶον τοῦ ζητουμένου πηλίκου, καὶ θέλει παρίσταναι τῇ αὐτῇ τάξει, ἢ καὶ τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ῥηθὶον τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου. Ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸ εἰρηθὲν ῥηθὶον τοῦ πηλίκου ἀπὸ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εἰρηθισομένης διαφορᾶς καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον τῶν λοιπῶν ῥηθίων τοῦ δεδομένου διαιρετέου, ἤτοι τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν πρὸς σχηματισμὸν τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου ἀποκοπέντων.

Διαροῦμεν ἔπειτα τὸν οὕτω σχηματισθέντα ἀριθμὸν, ὅστις καλεῖται δεῦτερος μερικὸς διαιρετέος, διὰ τοῦ διαιρετοῦ καὶ εἰρηθισκομεν τὸ δεύτερον ῥηθὶον τοῦ πηλίκου. Γράφομεν αὐτὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τοῦτο, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ εἰρηθισόμενον γινόμενον ἀπὸ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου.

Πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εἰρηθισομένης διαφορᾶς γράφομεν τὸ δεύτερον τῶν ἀποκοπέντων ῥηθίων τοῦ διαιρετέου. Σχηματίζομεν οὕτω τὸν καλοῦμενον τρίτον μερικὸν διαιρετέον, ὃν διαροῦμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρετοῦ, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ καταβιβάζωμεν καὶ τὸ τελευταῖον ῥηθὶον τοῦ διαιρετέου καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀποτελεσθησομένου μερικοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρετοῦ ἐπὶ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ εἰρηθισόμενον ῥηθὶον τοῦ πηλίκου. Ὁ οὕτως ὑπὸ τὸν διαιρέτην γραφείς ἀριθμὸς θέλει παρίσταναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἢ δὲ τελευταία διαφορὰ τὸ ἐπὶ λοιπὸν τῆς πράξεως.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχρωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν πολυῤῥηθιον ἀριθμὸν 590649 διὰ τοῦ 859. Ἐκτελοῦμεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τὴν πράξιν ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l} 590649 & 859 \\ 5154 & 687 \\ \hline 7524 & \\ 6872 & \\ \hline 6529 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 590649 & 859 \\ 7524 & 687 \\ \hline 6529 & \\ 516 & \end{array}$$

Χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τὸν ἀριθμὸν 5906 ὅστις εἶναι μεγαλύτερος μὲν τοῦ διαιρέτου 859, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ 8590, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ διαιρέτου 859. Εὐρίσκομεν οὕτω τὸ πρῶτον ψηφίον 6 τοῦ ζητουμένου πηλίκου, ὅπερ θέλει παριστᾶ μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, ἣν καὶ τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον 6 τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου 5906. Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸν διαιρέτην 859 ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 6 καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον 5154 ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου 5906. Εὐρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 752, πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποίας καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον μετὰ τὸ τελευταῖον ψηφίον 6 τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου 5906 ψηφίον 4 τοῦ δεδομένου διαιρετέου 590649, καὶ διαιροῦμεν πάλιν τὸν οὕτω σχηματιζόμενον δευτέρου μερικὸν διαιρετέον 7524 διὰ τοῦ διαιρέτου 859. Εὐρίσκομεν οὕτω τὸ δεύτερον τοῦ ζητουμένου πηλίκου ψηφίον 8, ὅπερ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου 6 καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπ' αὐτό. Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου 7524 τὸ εὑρεθὲν γινόμενον 6872 εὐρίσκομεν διαφορὰν 652, πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποίας καταβιβάζομεν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 9 τοῦ διαιρετέου. Σχηματίζομεν οὕτω τὸν τρίτον μερικὸν διαιρετέον 6529, ὃν διαιροῦντες πάλιν διὰ τοῦ διαιρέτου εὐρίσκομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον 7 τοῦ ζητουμένου πηλίκου 687. Γράφομεν τοῦτο πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν δύο πρώτων, καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ τρίτου μερικοῦ διαιρετέου 6529 τὸ γινόμενον 6013 τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 7 τοῦ πηλίκου εὐρίσκομεν διαφορὰν 516, ἣτις θέλει παριστᾶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Συνήθως, ἀντὶ νὰ διατάττωμεν τὰ τῆς πράξεως ὡς ἀνωτέρω ἐξέθεσamen, γράφομεν μόνον ὑπὸ τὸν δεδομένον διαιρετέον τοὺς διαφορὰς μερικοὺς διαιρετέους ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς. Τότε ἐκτελοῦμεν τὰς πρὸς εὑρεσιν τῶν διαφορῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου μερικὰς διαιρέσεις ὡς εἶπομεν ἐν τῇ § 46, καὶ διατάσσομεν τὰ τῆς πράξεως ὡς φαίνεται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀνωτέρω ἐκτεθέντος παραδείγματος.

48. Ἵνα ἀποδείξωμεν τὸ ἀληθές τοῦ ἀνωτέρω κανόνος, συλλογίζομεθα ὡς ἐξῆς·

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην 859 διαδοχικῶς ἐπὶ 10, 100, 1000, κτλ. μέχρις οὗ εὐρωμεν δύο διαδοχικά γινόμενα 85900, 859000, μεταξὺ τῶν ὁποίων νὰ περιέχεται ὁ δεδομένος διαιρετέος 590649, θέλομεν συμπεράνει ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον τῆς διαι-

ρείσεως τοῦ 590649 διὰ τοῦ 859 πρέπει νὰ περιέχεται μεταξύ τοῦ 100 καὶ τοῦ 1000· διότι ὁ διαιρέτεος 590649 εὐρέθη μεγαλύτερος μὲν τοῦ 85900, τουτέστι τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου 859 ἐπὶ 100, μικρότερος δὲ τοῦ 859000, τουτέστι τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου 859 ἐπὶ 1000. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν πηλίκον, ὡς περιεχόμενον μεταξύ τοῦ 100 καὶ 1000, θέλει σύγκαισθαι ἐξ ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ μονάδων, καὶ εὐρίσκεται προφανῶς, ἐὰν εὐρεθῶσι τὰ ψηφίων τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ, τὰ τῶν δεκάδων καὶ τὰ τῶν μονάδων.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ὁ διαιρέτεος 590649 θέλει εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου 859 ἐπὶ τὰς ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας τοῦ πηλίκου σὺν τῷ εὐρεθησομένῳ υπολοίπῳ, ἐὰν ὑπάρχῃ (42), τὸ δὲ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 859 ἐπὶ ἑκατοντάδας εἶναι ἑκατοντάδες, πρέπει προφανῶς πρὸς εὐρεσιν τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου νὰ ἴδωμεν ποσάκις αἱ 859 ἑκατοντάδες περιέχονται εἰς τὰς ἑκατοντάδας 5906 τοῦ διαιρέτου, ἥτοι ποσάκις ὁ 859 περιέχεται ἐν τῷ ἀριθμῷ 5906, ὅστις ὡς βλέπομεν εἶναι μεγαλύτερος μὲν τοῦ διαιρέτου 859, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλάσιου αὐτοῦ. Διαιροῦντες λοιπὸν τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον 5906 διὰ τοῦ διαιρέτου 859 θέλομεν εὐρεῖ τὸ πρῶτον ψηφίον 6 τοῦ πηλίκου, ὅπερ ἔχει παριστᾷ ἑκατοντάδας, ἥτοι μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, ἣν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 6 τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου 5906.

Πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην 859 ἐπὶ τὰς εὐρεθείσας 6 ἑκατοντάδας καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ δεδομένου διαιρετέου 590649 τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον 515400, θέλομεν εὐρεῖ διαφορὰν 75240, ἥτις ἔχει εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὰς δεκάδας καὶ μονάδας τοῦ πηλίκου σὺν τῷ υπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως, ἐὰν ὑπάρχῃ. Ἀλλὰ πάλιν, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 859 ἐπὶ δεκάδας εἶναι δεκάδες, πρέπει προφανῶς πρὸς εὐρεσιν τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου νὰ ἴδωμεν ποσάκις αἱ 859 δεκάδες περιέχονται εἰς τὰς 7524 δεκάδας τῆς εὐρεθείσης διαφορᾶς 75240, ἥτοι ποσάκις ὁ 859 περιέχεται ἐν τῷ ἀριθμῷ 7524, ὃν ἐκάλεσαμεν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον, καὶ ὅστις, ὡς εὐκόλως παρατηρεῖ τις, εὐρίσκεται γραμμικοῦ τοῦ ψηφίου 4 τοῦ διαιρέτου πρὸς τὰ δεξιά τῆς διαφορᾶς 752, ἣν εὐρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου 5906 τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 859 ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν ψηφίον 6 τοῦ πηλίκου. Διαιροῦντες λοιπὸν τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 7524 διὰ τοῦ διαιρέτου 859 θέλομεν εὐρεῖ τὸ δεύτερον ψηφίον 8 τοῦ πηλί-

ὅπερ πρέπει νὰ γράψωμεν, ἐπειδὴ παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τοῦ προηγούμενου τάξεως, πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου. Πολλαπλασιάζοντες πάλιν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὰς εὐρεθείσας 8 αἰκὰς καὶ ἀφαιροῦντες τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον 68720 ἀπὸ πρώτης διαφορᾶς 75249, θέλομεν εὐρεῖ διαφορὰν 6529, ἥτις εἶναι ἴση τῷ γινόμενῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τῆς μονάδας τοῦ πληρώσιν τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως, ἐὰν ὑπάρχῃ. Διαιροῦντες πάλιν τὸν τρίτον μερικὸν διαιρετέον 6529, ὅστις σχηματίζεται ἐκ τοῦ προμένου τοῦ ψηφίου 9 τοῦ διαιρετέου πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς διαφορᾶς 652, ἣν εὐρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου 7524 τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 859 ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν ψηφίον τοῦ ζητουμένου πηλίκου, διὰ τοῦ διαιρέτου 859 θέλομεν εὐρεῖ τὸ ὑπόλοιπον 7 τοῦ πηλίκου, ὅπερ πρέπει νὰ γράψωμεν, ἐπειδὴ παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τῆς τοῦ προηγούμενου τάξεως, πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ προγραφέντος 8.

Πολλαπλασιάζοντες τέλος τὸν διαιρέτην 859 ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν ψηφίον 7 καὶ ἀφαιροῦντες τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον 6013 ἀπὸ τοῦ τρίτου μερικοῦ διαιρετέου 6529 εὐρίσκομεν διαφορὰν 516, ἥτις θέλει εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι καθ' ὃν τρόπον εὐρίσκομεν τὸ πηλίκον, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τοσάκις τὸν διαιρέτην, ὅσας μονάδας περιέχει τοῦτο, τοιούτεστιν ἐφαρμόζομεν κατὰ γράμμα τὸν ὅριον τῆς διαιρέσεως, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ ἀληθὲς τοῦ ἀνωτέρω ἔργου κανὼν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—Ἐπειδὴ τὸ εὐρισκόμενον ἐκάστης μερικῆς διαιρέσεως ὑπόλοιπον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου, ὁ σχηματιζόμενος ἐκ τῆς καταβιβάσεως ἐκάστου ἐκ τῶν ἀποκοπέντων ψηφίων τοῦ διαιρετέου μερικὸς διαιρετέος θέλει εἶναι προφανῶς μικρότερος τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πολλαπλάσιου τοῦ διαιρέτου. Συμβαίνει ὅμως ἐνίοτε μερικὸς τις διαιρετέος νὰ ᾖ μικρότερος πάλιν τοῦ διαιρέτου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἀντιστοιχοῦν ψηφίων τοῦ πηλίκου εἶναι 0. Γράφομεν λοιπὸν τότε 0 πρὸς τὸ πηλίκον, καὶ καταβιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ μερικοῦ τούτου διαιρετέου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2.—Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου εἶναι ἴσος τῇ διαφορᾷ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου, ἢ τῇ διαφορᾷ ταύτῃ αὐξηθείσῃ κατὰ τὴν μονάδα. Εἶναι δὲ ἴσος τῇ περὶ ἧς ὁ λόγος διαφορᾷ, ὅταν ὁ πρώτος

μερικὸς διαιρετέος ἔχῃ ἐν ψηφίον περισσώτερον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ διαιρετοῦ, καὶ ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ ταύτῃ ἀντιθέσθαι κατὰ νάδα, ὅταν ὁ πρῶτος μερικὸς διαιρετέος ἔχῃ ὅσα καὶ ὁ διαιρέτης ψηφίων.

49. Ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖ μονοψήφιος, τότε συνήθως διενεργούμεν οὕτῃ τοὺς μερικοὺς διαιρετέους. Ἐστω π. χ. νὰ διαιρεθῇ ἀριθμὸς 54802 διὰ 7. Διατάσσομεν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡμετελοῦμεν τὴν πράξιν ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 54802 & 7 \\ 6 & 7828 \end{array}$$

Λέγομεν· ὁ 7 εἰς τὸ 54 εἰσέρχεται 7κις· 7 ἐπὶ 7..49 ἀπὸ 54
ὁ 7 εἰς τὸ 58 εἰσέρχεται 8κις· 7 ἐπὶ 8..56 ἀπὸ 58
ὁ 7 εἰς τὸ 20 εἰσέρχεται 2κις· 7 ἐπὶ 2..14 ἀπὸ 20
ὁ 7 εἰς τὸ 62 εἰσέρχεται 8κις· 7 ἐπὶ 8..56 ἀπὸ 62
γράφομεν δὲ μόρον τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον 6.

ΒΑΣΑΝΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

50. Ἡ βάσανος τῆς διαιρέσεως γίνεται πολλαπλασιαζομένην διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ προστιθεμένου τοῦ υπολοίπου εἰς τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον. Ἐὰν τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον ᾖ ἴσον τῷ διαιρετέῳ, ἡ πράξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΙΝΟΣ ΔΙΑ ΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ.

51. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἀριθμὸς τις διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου τῶν παραγόντων, εἴη διαιρεθῇ πρῶτον διὰ τινος τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου, τὸ εὑρεθησόμενον πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου τινος πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου καὶ οὕτω καθέξης, μέχρις οὗ λαβὼν οὕτως ὡς διαιρεῖται ἅπαρτες οἱ παράγοντες τοῦ δεδομένου γινομένου.

Τῷ ὄντι, ἔστω ὁ 192 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 24, ὅστις εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων 2, 3 καὶ 4. Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 192 διὰ 24 εἶναι 8, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς πηλίκον 192=24×8. Ἐὰν δὲ ἐν αὐτῇ ἀντὶ τοῦ 24 θέσωμεν τὸ αὐτῷ γινόμενον 2×3×4, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς 192=2×3×4×8 ἥτις γράφεται καὶ οὕτως 192=8×2×3×4. Διαιροῦντες τὰ δύο πηλίκων τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος διὰ 4 εὑρίσκομεν τὴν ἐπομένην

2: $4=8 \times 2 \times 3$, (διότι τὸ γινόμενον τοῦ $8 \times 2 \times 3$ ἐπὶ 4 εἶναι $2 \times 3 \times 4$). Διαιροῦντες πάλιν τὰ δύο μέλη τῆς εὐρεθείσης ισότη-
 διὰ 3 θέλομεν ἔχει $(192:4):3=8 \times 2$. Καὶ διαιροῦντες ἐκ
 διὰ 2 τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας εὐρίσκομεν $(192:4:3):$
 $=8$. Εὕρομεν λοιπὸν πάλιν τὸ αὐτὸ πηλίκον 8. Ἄρα ἀριθμὸς τις
 μερίζεται διὰ τοῦ γινομένου κτλ.

Παρατηρητέον ὅτι ὁ ἀνωτέρω συλλογισμὸς καθὼς καὶ τὸ θεώρημα
 θέτει ὅτι ὁ διααιρετός 192 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ γινομέ-
 $2 \times 3 \times 4$. Οὐχ ἥττον ὅμως ἡ ἀνωτέρω πρότασις ὑπάρχει καὶ καθ'
 περιπτώσιν ἡ διαίρεσις δὲν ἐκτελεῖται ἀκριβῶς, ρθάνει μόνον ἐν
 περιπτώσει ταύτῃ νὰ παραλείπωμεν τὰ ὑπολοίπα τῶν διαφύσεων
 κρίσεων, ὁ δὲ σκοπὸς, ὃν προτιθέμεθα, νὰ ᾖναι ἡ εὕρεσις ἀπλῶς
 πηλίκου.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον
 διαίρεσεως τοῦ 257 διὰ 24, ὅστις εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ
 3×4 . Διαιροῦντες τὸν 257 διὰ 24 εὕρισκομεν πηλίκον 10 καὶ
 λοιπὸν 17. Τὸ αὐτὸ πηλίκον 10 ἡθέλομεν εὐρεῖν ἂν διηροῦμεν τὸν
 257 διὰ τοῦ παράγοντος 4, τὸ οὕτως εὐρεθισόμενον πηλίκον 64,
 παραβλεπομένου τοῦ υπολοίπου 1 τῆς πρώτης διαίρεσεως, διὰ τοῦ
 παράγοντος 3, καὶ τὸ νέον πηλίκον 21 διὰ τοῦ παράγοντος 2.

Διότι, ἐπειδὴ $257=24 \times 10 + 17$, ὁ 257 εἶναι μικρότερος τοῦ
 γινομένου 24×11 . Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν 257 περιέχεται μεταξύ τῶν
 γινομένων 24×10 καὶ 24×11 , ἢ, ὅπερ ταῦτό, μεταξύ τῶν
 γινομένων $10 \times 2 \times 3 \times 4$ καὶ $11 \times 2 \times 3 \times 4$. Ἐπεταὶ λοιπὸν ὅτι τὸ
 πηλίκον τῆς διαίρεσεως τοῦ τοιούτου ἀριθμοῦ πρῶτον διὰ 4, ἔπειτα
 διὰ 3, ἔπειτα διὰ 2, παραβλεπομένων τῶν υπολοίπων ἐκάστης
 κρίσεως, ἀφ' ἑνὸς μὲν δὲν θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ 10, καὶ ἀφ'
 ἑτέρου θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ 11. Θέλει λοιπὸν εἶναι ἀκριβῶς
 τὸ 10.

§2. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποριζόμεθα ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαίρεσεως
 τῶν ἀνάμεσων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ἔχων
 τὴν τὸν ἀριθμὸν, τὸν παριστῶντα τὴν ἐπεροχὴν τοῦ ἐκθέτου
 διααιρετοῦ ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι προτιθέμεθα νὰ διαιρέσωμεν 5⁷ διὰ 5³.
 τὰ τὰ προκποδειχθέντα ἀρκεῖ πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου νὰ δια-
 ιροῦμεν τὸν 5⁷ διαδοχικῶς τρίς διὰ 5. Θέλομεν λοιπὸν εὐρεῖν οὕτω
 πηλίκον 5⁴, ἢ, ὅπερ ταῦτό, 5^{7-3} .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου 2×7 διὰ 5 ;

II. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου 5×7 διὰ 10 ;

III. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $\times 7$ διὰ 2^3 ;

IV. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $\times 7$ διὰ $2^3 \times 7$;

V. Πόσα ψηφία θέλει ἔχει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\mu\omicron\upsilon$ 5832546 διὰ τοῦ 432 ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε.

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΤΑΙ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

3. Όταν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος δι' ἑτέρον μηδέν, τότε ὁ μὲν πρῶτος καλεῖται *διαίρετός* διὰ τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ δεύτερος λέγεται ὅτι *διαίρει* τὸν πρῶτον ἢ καὶ *διαίρετής* τοῦ πρῶτου. Παραδείγματός χάριν, ὁ 12 διαιρούμενος διὰ 4 δίδει ὑπόλοιπον μηδέν. Λοιπὸν κατὰ τὰ ἄνωτέρω ὁ μὲν 12 εἶναι *διαίρετός* τοῦ 4, ὁ δὲ τέσσαρα *διαίρει* τὸν 12 ἢ εἶναι *διαίρετής* τοῦ 12.

Πολλαπλάσιον ἀριθμοῦ τινος καλεῖται τὸ γινόμενον αὐτοῦ τοῦ μὲν ἐφ' ὁποιοῦνδήποτε ἄλλον. Οὕτως ὁ 12 εἶναι *πολλαπλάσιον* τοῦ 4, ὡς γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3. Βλέπομεν δὲ ὅτι πᾶν *πολλαπλάσιον* 12, 20 ἀριθμοῦ τινος 4 εἶναι *διαίρετόν* διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ ἀντιστρόφως, πᾶς ἀριθμὸς 12, 20, *διαίρετός* διὰ τοῦ 4, εἶναι ἐν τῶν *πολλαπλασίων* αὐτοῦ.

Υποπολλαπλάσιον ἢ *παράγων* ἀριθμοῦ τινος καλεῖται πᾶς ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ὁ πρῶτος εἶναι *πολλαπλάσιον*. Π. χ. ὁ 4 εἶναι *υποπολλαπλάσιον* ἢ *παράγων* τοῦ 12, διότι ὁ 12 εἶναι *πολλαπλάσιον* τοῦ 4. Ὡσαύτως ὁ 3 εἶναι *υποπολλαπλάσιον* ἢ *παράγων* τοῦ 12, διότι ὁ 12 εἶναι *πολλαπλάσιον* τοῦ 3. Αἱ λέξεις *λοιπὸν υποπολλαπλάσιον*, *παράγων* καὶ *διαίρετής* ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, καὶ σημαίνουσιν ὅτι διαίρουσιν ἄνευ ὑπολοίπου τὸν πρῶτον ὃν εἰρόνται ἀριθμὸν.

4. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Πᾶς *διαίρετής* πολλῶν ἀριθμῶν εἶναι *διαίρετής* τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Ἐστωσαν π. χ. ὅσοιδήποτε ἀριθμοὶ 20, 24, 32, κτλ. *διαίρετοί* τοῦ 4.

4. Ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν 20, 24, 32, κτλ. εἶναι *διαίρετός* τοῦ 4, ἐπεὶ δὲ ὁ 4 εἶναι *διαίρετής* αὐτῶν 20+24+32 κτλ. θέλει ἀποτελεῖσθαι ἐκ μερῶν ἴσων τῶν 4. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν 20+24+32 κτλ. θέλει εἶναι *πολλαπλάσιον* τοῦ 4, ἢ ὁ 4 *διαίρετής* τοῦ ἄθροισματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Πᾶς διαιρετός ἀριθμὸς τινος εἶναι διαιρετὸς καὶ τοῦ πολλαπλασίου αὐτοῦ.

Ἐστω π. γ. ὁ 6 διαιρετὸς τοῦ 18. Ἐπειδὴ πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ 18 σύγκειται ἐκ μερῶν ἴσων ἀπάντων τῷ 18, τουτέστι διαιρετῶν διὰ 6, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, τοι τὸ πολλαπλάσιον τοῦ 18, θέλει εἶναι διαιρετὸν διὰ 6. Παράδειγματος χάριν, τὸ γινόμενον 18×5 , ὅπερ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 18, εἶναι ἴσον τῷ ἄθροισματι $18 + 18 + 18 + 18 + 18$, ὅπερ σύγκειται μερῶν διαιρετῶν ἀπάντων διὰ 6.

55. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν δύο ἄλλους διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Ἐστῶσαν π. γ. δύο ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 5. Ἐπειδὴ ἐκάστη τούτων σύγκειται ἐκ μερῶν ἴσων ἀπάντων τῷ 5, ἔπεται ὅτι καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν θέλει ἀποτελεῖσθαι ἐκ μερῶν ἴσων ἀπάντων τῷ 5 καὶ θέλει ἐπομένως εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5. Ὁ 5 λοιπὸν, ὁ διαιρετὸς τούτων, ἐπεὶ ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν, θέλει διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Ἐπειδὴ ὁ μειωτέος πάσης ἀφαιρέσεως ἰσοῦται τῷ ἄθροισματι ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς, τὸ αὐτὸ θεώρημα ἐκτίθεται καὶ ὡς ἑξῆς.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων καὶ ἓνα τούτων διαιρεῖ ἀναγκαίως καὶ τὸν ἕτερον.

56. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος ἐτέρου δὲν μεταβάλλεται, ὅταν εἰς τὸν πρῶτον προστεθῇ ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ πολλαπλάσιόν τι τοῦ δευτέρου.

Διότι πρὸς εὔρεσιν τοῦ ὑπολοίπου πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ διαιρετέου τοσάκις τὸν διαιρέτην, ὡσάκις ἡ τοιαύτη ἀφαιρέσις δυνατὴ ἐπομένως, ἔαν προσθέσωμεν εἰς τὸν πρῶτον ἢ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτοῦ πολλαπλάσιόν τι τοῦ δευτέρου, τὸ ὑπόλοιπον θέλει ὡς πρὶν μένει τὸ αὐτό. Διότι οὕτω μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν πρὸς εὔρεσιν τοῦ πηλίκου γενησομένων ἀφαιρέσεων τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ διαιρετέου μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον θέλει μένει ἀμετάβλητον.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δύναται νὰ ἐκφωνηθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν ἦναι πολλαπλάσιον τρίτου καὶ διαιρεθῶσιν οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ δι' αὐτοῦ τοῦ τρίτου, τὸ ὑπόλοιπον τῶν διαιρέσεων θέλουσι εἶναι ἴσα ἢ, ὅπερ ταῦτά.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαιροῦμενοι διὰ τρίτου τινὸς, δώσωσιν ἴσα ὑπόλοιπα, ἡ διαφορὰ αὐτῶν θέλει εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ τρίτου.

Γ. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου παραγόντων διὰ τρίτου τινὸς ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται αὐ-
μένου ἢ ἐλαττωμένου ἐνὸς ὁποιοδήποτε τῶν παραγόντων
κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ὑπόλοιπον 4 τοῦ γινομένου 13×8 τῶν
παραγόντων 13 καὶ 8 διὰ τοῦ τρίτου 5 μένει τὸ αὐτό, ἐὰν εἰς
ὅποιοδήποτε τῶν παραγόντων 13 καὶ 8 ἀυξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ κατὰ
πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 5...

Ἰδίᾳ, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὅταν ὁ εἰς τῶν
παραγόντων τοῦ γινομένου ἀυξάνεται ἢ ἐλαττωταὶ κατὰ τι πολλα-
πλῶν τρίτου τινὸς ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον ἀυξάνεται ἢ ἐλαττω-
ταὶ κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ αὐτοῦ τρίτου, ἐπομένως, κατὰ τὸ
παραινχθέν θεώρημα, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ νέου γι-
νομένου διὰ τοῦ αὐτοῦ τρίτου ἀριθμοῦ θέλει μένει τὸ αὐτό.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν τὸν παράγοντα 8 τοῦ γινομένου 13×8
ἐλαττωσμεν κατὰ 5 ἢ ἐλαττωσόμεν κατὰ 5, τὸ γινόμενον 13×8
ἐλαττωταὶ κατὰ 13×5 ἢ ἐλαττωταὶ κατὰ 13×5 , ἥτοι κατὰ πο-
λλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου 5, ἐπομένως τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέ-
σεως αὐτοῦ διὰ 5 θέλει μένει τὸ αὐτό, ἥτοι θέλει εἶναι πάλιν 4.

ΠΡΟΣΗΛΥΤΗΜΑ. Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον δὲν μεταβάλλεται ἀυξανόμενον
τοῦ γινομένου τοῦ ἐνὸς τῶν παραγόντων κατὰ πολλαπλάσιόν τι
τοῦ διαιρέτου, ἔπεται ὅτι μένει πάλιν τὸ αὐτό, ἐὰν καὶ οἱ δύο με-
μνησθέντες κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου. Εὐκόλως δὲ πα-
ραδειχθῇ ὅτι ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἀληθὴς ἐξ ὅσωνδήποτε παρα-
γόντων καὶ ἂν σύγκηται γινόμενόν τι. Παραδείγματος χάριν, τὸ ὑπό-
λοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $13 \times 9 \times 17 \times 28$ διὰ 5 εἶναι
τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπὸν τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $3 \times 4 \times 2 \times 3$
διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου 5· διότι, ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν παραγόντων
τοῦ γινομένου $3 \times 4 \times 2 \times 3$ διαφέρει κατὰ πολλαπλά-
σιον τοῦ διαιρέτου 5, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν θέλει διαφέρει
κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 5.

ΥΠΟΛΟΙΠΑ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΙΝΟΣ ΔΙΑ 2 ἢ 5,

ΔΙΑ 4 ἢ 25 ΚΑΙ ΔΙΑ 8 ἢ 125.

Συνθῆκαι διαιρετότητος διὰ τῶν ἠνωτέρω διαιρετῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινὸς διὰ
5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου
ἐν ἑξῆς αὐτοῦ διὰ 2 ἢ διὰ 5.

Ἐστω π. γ. ὁ ἀριθμὸς 73469, ὃν παριστῶμεν πρὸς συντομίαν διὰ τοῦ γράμματος Α. λέγω ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 2 ἢ διὰ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ φήριον 9 τῶν μονάδων αὐτοῦ διὰ 2 ἢ διὰ 5. Διότι θέλομεν ἔχει φανῶς τὴν ἰσότητα

$$A=73460+9,$$

ἢ, ὡς περ ταῦτό,

$$A=7346 \times 10 + 9.$$

Ἀλλὰ, ἐπειδὴ ὁ 10 εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον 2×5 , ἐὰν εἰς ἀνωτέρω ἰσότητα ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ 10 τὸ ἴσον αὐτοῦ γινόμενον 2×5 , θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς·

$$A=7346 \times 2 \times 5 + 9.$$

Ἀφαιροῦντες δὲ ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος τὸ γινόμενον $7346 \times 2 \times 5$, θέλομεν ἔχει τὴν νέαν ἰσότητα $A - 7346 \times 2 \times 5 = 9$. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $7346 \times 2 \times 5$ εἶναι φανῶς πολλαπλάσιον ἑκατέρου τῶν παραγόντων αὐτοῦ 2 καὶ 5. γινώσκωμεν ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τινος ἀριθμοῦ Α ἀφαιρέσωμεν πολλαπλάσιον τι $7346 \times 2 \times 5$ τοῦ διαιρέτου 2 ἢ 5, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τῶν διαιρετῶν 2 ἢ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τῆς εὐρεθησομένης διαφορᾶς $7346 \times 2 \times 5$ διὰ 2 ἢ 5. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι ἴση τῷ φήριον 9 τῶν μονάδων τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμοῦ 73469. Ἀρα τὸ ὑπόλοιπον κτλ.

59. Ἀριθμὸς τις λέγεται ἄρτιος, ὅταν ᾖ διαιρετὸς διὰ 2 καὶ περιττὸς ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει. Ἐπομένως, κατὰ τὰς παραρτηθείσας

Ἀριθμὸς τις εἶναι ἄρτιος ἢ περιττὸς καθόσον τὸ ψηφίον μονάδων αὐτοῦ εἶναι ἄρτιον ἢ περιττόν. Τὸ 0 θεωρεῖται ὡς ἄρτιον, διότι διαιρούμενον διὰ 2 δίδει πηλίκον 0 καὶ ὑπόλοιπον 0.

Πάντες οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ περιλαμβάνονται ἐν τῇ παραστάσει τοῦ μ. παριστῶντος ὅποιονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμόν, ἄρτιον ἢ περιττόν, οἱ δὲ περιττοὶ ἐν τῇ ἐξῆς· $2 \times \mu + 1$. Διότι, ὅποιονδήποτε ᾖ ᾖναι τὸ μ, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ $2 \times \mu + 1$ διὰ 2 εἶναι 1.

Ἐπειδὴ τὰ μόνα διαιρετὰ διὰ 5 ψηφία εἶναι τὸ 5 καὶ τὸ 0, εἶναι ὅτι, εἴνα ἀριθμὸς τις ἢ διαιρετὸς διὰ 5, πρέπει καὶ ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων αὐτοῦ νὰ ᾖναι ἢ 0 ἢ 5.

60. Δὲ ὁμοίου τινὸς τρόπου ἠθέλομεν ἀποδείξει καὶ τὸ ἐξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 4 ἢ 25 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 4 ἢ 25 τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ σχηματιζομένου ἐπὶ τῶν δύο πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ.

Ἄς λάβωμεν π. χ. τὸν ἀριθμὸν 34568, ὃν περιστῶμεν διὰ Α. Θέλομεν ἔχει προφανῶς

$$A = 34500 + 68,$$

$$\text{ἢ, ὅπερ ταῦτό,} \quad A = 345 \times 100 + 68.$$

Ἄλλ' ἐπειδὴ ὁ 100 εἶναι ἴσος τῷ γινόμενῳ 4×25 , ἐὰν εἰς τὴν ἄνωτέρω ἰσότητά ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ 100 τὸ ἴσον αὐτῷ γινόμενον 4×25 , θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς

$$A = 345 \times 4 \times 25 + 68.$$

Ἀγχιροῦντες δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος τὸ γινόμενον $345 \times 4 \times 25$, ὅπερ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4 καὶ 25, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς

$$A - 345 \times 4 \times 25 = 68,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα σκεπτόμενοι ὡς ἄνωτέρω ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ Α διὰ 4 ἢ 25 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τῆς διαφορᾶς 68 διὰ 4 ἢ 25, τουτέστι τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ αποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων τοῦ Α.

Συμπεραίνομεν πρὸς τούτοις ὅτι,

Ἐὰν ἀριθμὸς τις ᾗ διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων αὐτοῦ ψηφίων ἀποτελούμενος ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25.

61. Ὁ ἐννοήσας καλῶς τὰ ἄνωτέρω δύναται εὐκόλως ν' ἀποδείξῃ ὅτι

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 8 ἢ 125, ὡς τὸ γινόμενον εἶναι 1000, εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 8 ἢ 125 τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ αποτελουμένου ἐπὶ τῶν τριῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ, καὶ θέλει συμπεράνει ἀμέσως ὅτι

Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 ἢ 125, ἐὰν τὰ τρία τελευταία πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8 ἢ 125.

Συνθήκαι διαιρετότητας διὰ τῶν ἀνωτέρω διαιρετῶν.

62. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν διὰ 9 τὴν διαίρεσιν ἀριθμοῦ τινος 1000..., ἀποτελουμένου ἐκ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑφ' ὅσωνδ' ἂν μηδενικῶν, βλέπομεν εὐκολώτατα ὅτι θέλομεν εὑρίσκει εἰς ἐκάστην μερικὴν διαίρεσιν ὑπόλοιπον τὴν μονάδα.

$$\begin{array}{r} 10000... \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 1 \\ \cdot \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{r} 9 \\ \hline 1111... \end{array} \right.$$

Ἐπεὶ λοιπὸν ἐντεῦθεν κατὰ τὰ ἐν τῇ παρατηρήσει τῆς § 38 λεγθέντα ὅτι ὁ ἀριθμὸς, ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑφ' ἑνὸς ἢ πλειοτέρων μηδενικῶν, εἶναι πολλαπλασίον τι τοῦ 9 ἢ ἐξημέροισι κατὰ μονάδα, τοῦτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει πάντοτε τὴν ἐξῆς ἰσότητα

$$10^n = \text{πολ. } 9 + 1,$$

τοῦ n παριστῶντος ὅποιονδ' ἂν ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ τῆς συντεταγμένης παραστάσεως πολ. 9 ἐκφραζούσης πολλαπλασίον τι τοῦ 9.

Ἐστω τώρα ἀριθμὸς τις, π. χ. ὁ 7000..., ἀποτελούμενος ἐξ ἑνὸς σημαντικοῦ ψηφίου 7 ἀκολουθουμένου ὑφ' ὅσωνδ' ἂν μηδενικῶν· λέγω ὅτι οὗτος θέλει εἶναι ἴσος πολλαπλασίῳ τι τοῦ 9, ἢ ἐξημέροισι κατὰ τὸ σημαντικὸν αὐτοῦ ψηφίον, τοῦτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς ἰσότητα·

$$7000... = \text{πολ. } 9 + 7.$$

Διότι ἔχομεν προφανῶς

$$7000... = 7 \times 1000... \quad (1)$$

Ἀλλὰ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἔχομεν

$$1000... = \text{πολ. } 9 + 1,$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (1) ἀντὶ τοῦ 1000... τὸ ἴσον αὐτῷ πολ. 9 + 1, θέλομεν ἔχει

$$7000... = 7 \times (\text{πολ. } 9 + 1).$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ σεσημειωμένου πολλαπλασιασμοῦ εὐ-
ρίσκομεν

$$7000 \dots = \text{πολ. } 9 + 7,$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

63. Τούτων τεθέντων, λέγω ὅτι πᾶς ἀριθμὸς, ὁ ἀριθμὸς 34768
π.χ., εἶναι ἴσος πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 9, ἠὲξημένῳ κατὰ τὸ ἄθροι-
σμα $3+4+7+6+8$ τῶν σημαντικῶν αὐτοῦ ψηφίων 3, 4, 7, 6, 8.

Διότι ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμὸς 34768 ἀποσυντίθεται προφανῶς
εἰς 30000, 4000, 700, 60 καὶ 8. Ἀλλὰ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα
ἔχομεν

$$30000 = \text{πολ. } 9 + 3,$$

$$4000 = \text{πολ. } 9 + 4,$$

$$700 = \text{πολ. } 9 + 7,$$

$$60 = \text{πολ. } 9 + 7,$$

$$8 = 8$$

Προσθέτοντες δὲ κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας καὶ παρατη-
ροῦντες ὅτι τὸ ἄθροισμα πολλαπλασίων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι
πάλιν πολλαπλάσιόν τι αὐτοῦ, θέλομεν ἔχει

$$34768 = \text{πολ. } 9 + 3 + 4 + 7 + 6 + 8, \quad (5)$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

64. Ἐπειδὴ ὁ 3 εἶναι διαιρέτης τοῦ 9, πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ
9 εἶναι καὶ πολλαπλάσιον τοῦ 3, ἐπομένως δυνάμεθα νὰ εἰπωμεν
ὡσχύτως ὅτι

Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλασίον τι τοῦ 3, ἠὲξημένον κατὰ τὸ
ἄθροισμα τῶν σημαντικῶν ψηφίων αὐτοῦ.

65. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποριζόμεθα εὐκόλως

1ον. Ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος 34768
διὰ 9 ἢ διὰ 3 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 9 ἢ
διὰ 3 τοῦ ἄθροισματος $3+4+7+6+8$ τῶν σημαντικῶν ψηφίων
αὐτοῦ.

Διότι, ἐάν λῶμεν ὡς διαιρέτην τὸν 9 καὶ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν
μελῶν τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος (2) ἀραιώσωμεν τὸ πολλαπλάσιον
αὐτοῦ, τὸ διὰ 9 ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 34768 δὲν
δὲν θέλει μεταβληθῆ, τοῦτέστιν ἡ διαφορά $3+4+7+6+8$ διαιρε-
θεῖσα διὰ 9 θέλει δώσει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ καὶ ὁ ἀριθμὸς 34768.

•Ο,τι δὲ εἰπομεν περὶ τοῦ 9 ἐφαρμόζεται καὶ διὰ τὸ 3, διότι πᾶν πολ. 9 εἶναι καὶ πολ. 3. Ἐντεῦθεν ἔπεται προσέτι ὅτι

2^{ον}. Ἴρα ἀριθμός τις, ὁ 34768 π. χ., ἡ διαιρετὸς διὰ 9 ἢ διὰ 3, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα $3+4+7+6+8$ τῶν σημαντικῶν ψηφίων αὐτοῦ γὰρ ἦναι διαιρετὸν διὰ 9 ἢ διὰ 3.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ὅσάκις ποιοῦμεν χρῆσιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος πρὸς εὐρεσιν τοῦ ὑπολοίπου τῆς διὰ 9 δικιρέσεως ἀριθμοῦ τινος, ἐφαρμόζομεν τὸ αὐτὸ θεώρημα καὶ ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ σχηματιζομένου ἐκ τοῦ ἄθροισματος τῶν σημαντικῶν ψηφίων αὐτοῦ, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ 9, ὅπερ θέλει παριστᾶ προφανῶς τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον. Π. χ. ἔστω ὁ ἀριθμός 3489763580432. Τὸ ἄθροισμα τῶν σημαντικῶν ψηφίων αὐτοῦ ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν 62, τὸ ἄθροισμα τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ 62 εἶναι 8. Ἀρ 8 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς δικιρέσεως τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ διὰ 9. Ἐνίοτε δέ, ὅπερ προτιμότερον, ἐνῶ σχηματιζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ἀφαιροῦμεν τὸν 9 ὅσάκις εὐρίσκομεν μερικὸν ἄθροισμα μεγαλύτερον τοῦ 9. Οὕτως ἠθέλομεν εἶπει ἐπὶ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 3 καὶ 4....7 καὶ 8....15· ἀφαιροῦντες 9....6 καὶ 9....15· ἀφαιροῦντες 9....6 καὶ 7....13· ἀφαιροῦντες 9....4 καὶ 6....10· 1 καὶ 3....4 καὶ 5....9· 0 καὶ 8....8 καὶ 4....12· 3 καὶ 3....6 καὶ 2....8 ὅπερ θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

• ΥΠΟΛΟΙΠΟΝ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΙΝΟΣ ΔΙΑ 11.

66. Ἐὰν διαίρῃσωμεν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑφ' ὅσωνδ' ἂν ποτε μηδενικῶν διὰ 11

$$\begin{array}{r|l} 1000000.... & 11 \\ 100 & 90909.... \\ 100 & \\ 1 & \end{array}$$

εὐρίσκομεν ἐναλλάξ ὡς ὑπόλοιπα τῶν γενομένων μερικῶν διαίρεσεων ἡ 1 ἢ 10, καὶ παρατηροῦμεν εὐκόλως ὅτι εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον 1, ὅσάκις τὰ ληφθέντα τοῦ διαιρετέου μηδενικά εἶναι ἄρτια τὸν ἀριθμὸν, καὶ 10, ὅσάκις τὰ ληφθέντα τοῦ διαιρετέου μηδενικά εἶναι περιττά τὸν ἀριθμὸν.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐντεῦθεν σκεπτόμενοι ὅπως καὶ ἐν τῇ § 62
 1^{ον}. Ὅτι ὁ ἀριθμὸς, ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τῆς μοράδος ἀκολου-
 θουμένης ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μηδενικῶν, εἶναι πολλαπλασίον τι
 τοῦ 11 ἢ ἡξημέρον κατὰ 1, τοῦθ' ὅπερ παρίσταται διὰ τῆς ἰσότητος
 $10^{2n} = \text{πολ. } 11 + 1$.

2^{ον}. Ὅτι ὁ ἀριθμὸς, ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τῆς μοράδος ἀκολου-
 θουμένης ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μηδενικῶν, εἶναι πολλαπλασίον τι
 τοῦ 11 ἢ ἡξημέρον κατὰ 10, τοῦθ' ὅπερ παρίσταται διὰ τῆς ἰσότη-
 τος $10^{2n+1} = \text{πολ. } 11 + 10$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $10 = 11 - 1$, ἡ τελευ-
 ταία αὕτη ἰσότης γράφεται καὶ οὕτως $10^{2n+1} = \text{πολ. } 11 + 11 - 1$,
 ἢ ἀπλούστερον $10^{2n+1} = \text{πολ. } 11 - 1$. Ἡ δευτέρα λοιπὸν αὕτη
 συνέπεις ἐκφράζεται προτιμότερον οὕτως·

Ὁ ἀριθμὸς, ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τῆς μοράδος ἀκολουθουμένης
 ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μηδενικῶν, εἶναι πολλαπλασίον τι τοῦ 11
 ἢ λαττωμένον κατὰ μοράδα.

67. Ἐπεὶτι δὲ πάλιν ἐκ τῶν προηγουμένων ὅτι πᾶς ἀριθμὸς
 ἀποτελούμενος ὑφ' ἐνὸς σηματικῶν ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπὸ
 μηδενικῶν, εἶναι πολλαπλασίον τι τοῦ 11 ἢ ἡξημέρον ἢ ἡλαττω-
 μένον κατὰ τὸ σηματικὸν τοῦ ἀριθμοῦ ψηφίου, καθόσον ὁ ἀριθ-
 μὸς τῶν ὑφ' ὧν ἀκολουθεῖται μηδενικῶν εἶναι ἄρτιος ἢ περιττός.
 Τῷ ὄντι, ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 800 καὶ 8000. Ὁ 800 ἰσοῦται
 τῷ γινομένῳ 8×100 . Ἐπειδὴ δὲ $100 = \text{πολ. } 11 + 1$. Ἄρα $800 =$
 $8 \times 100 = 8 \times (\text{πολ. } 11 + 1) = \text{πολ. } 11 + 8$, διότι τὸ γινόμενον $8 \times \text{πολ.}$
 11 εἶναι πάλιν πολ. 11.

Ὁσαύτως ὁ 8000 ἰσοῦται τῷ γινομένῳ 8×1000 . Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ
 1000 $= \text{πολ. } 11 - 1$. Ἄρα $8000 = 8 \times 1000 = 8 \times (\text{πολ. } 11 - 1) =$
 πολ. 11 $- 8$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ὁ μὲν 800, ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ τινος ση-
 मानτικοῦ ψηφίου 8 ἀκολουθουμένου ὑπ' ἀρτίου ἀριθμοῦ μηδενικῶν,
 εἰρήθῃ ἴσος πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11, ἢ ἡξημένῳ κατὰ τὸ σημα-
 τικὸν αὐτοῦ ψηφίου 8, ὁ δὲ 8000, ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ τινος ση-
 मानτικοῦ ψηφίου 8 ἀκολουθουμένου ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μηδενικῶν,
 εἰρήθῃ ἴσος πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11, ἢ λαττωμένῳ κατὰ τὸ ση-
 मानτικὸν αὐτοῦ ψηφίου.

68. ΘΕΩΡΗΜΑ. Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ πολλαπλασίον τι
 τοῦ 11 ἢ ἡξημέρον κατὰ τὸ ἀθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ, τῶν τα-
 τεχόντων τάξιν περιττῆν ἐκ δεξιῶν, καὶ ἡλαττωμένον κατὰ τὸ
 (ΑΡΙΘΜ. ΔΙΑΜΕΣΚΗΝΟΥ).

ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ, τῶν κατεχόντων τάξιν ἄρτιαν.

Παραδείγματος χάριν, λέγω ὅτι ὁ ἀριθμὸς 74852 εἶναι ἴσος μὲ πολλὰπλάσιόν τι τοῦ 11 κῆρυμένον κατὰ τὸ ἄθροισμα $2+8+7$ τῶν ψηφίων αὐτοῦ 2, 8 καὶ 7, ἅτινα κατέχουσι τῆξιν περιττήν, καὶ ἑλαττωμένον κατὰ τὸ ἄθροισμα $5+4$ τῶν ψηφίων αὐτοῦ 5 καὶ 4, ἅτινα κατέχουσι τῆξιν ἄρτιαν.

Τῷ ὄντι, ὁ περὶ τοῦ 5 λόγος ἀριθμὸς 74852 εἶναι προφανῶς ἴσος τῷ ἄθροισματι $70000+4000+800+50+2$. Ἀλλὰ κατὰ τὰς προ-
αποδειχθέντας ἐχρήμεν

$$70000 = \text{πολ.} 11 + 7.$$

$$4000 = \text{πολ.} 11 - 4.$$

$$800 = \text{πολ.} 11 + 8.$$

$$50 = \text{πολ.} 11 - 5.$$

$$2 = 2.$$

λοιπὸν τὸ ἄθροισμα $70000+4000+800+50+2$ τῶν πρώτων μελῶν τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων, ἦτοι ὁ ἀριθμὸς 74852, θέλει εἶναι ἴσος τῷ ἄθροισματι τῶν δευτέρων μελῶν τῶν αὐτῶν ἰσοτήτων.

Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$74852 = \text{πολ.} 11 + 2 + 8 + 7 - 4 - 5,$$

δι' ἧς ἀποδεικνύεται τὸ ἀνωτέρω θεώρημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1^{ον}. Τὸ ἐπὶ λοιπὸν τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 11 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 11 τῆς διαφορᾶς, ἥρ' ἐδρίσκαμεν ἀραιροῦντες ἀπὸ τοῦ ἄθροισματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ, τῶν κατεχόντων τάξιν ὡς πρὸς τὰ δεξιὰ περιττήν, τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῶν κατεχόντων τάξιν ἄρτιαν.

Διότι γνωρίζομεν (56) ὅτι ἐκὼν ἀπὸ τοῦ διαιρέτου 74852 ἀραιροῦθ' πολλὰπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου 11, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τῆς διαφορᾶς $2+8+7-4-5$ διὰ 11 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ διαιρέτου 74852 διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου 11.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἐκὼν τὸ ἄθροισμα τῶν τῆξως περιττῆς ψηφίων εἶναι μικρότερον τοῦ ἄθροισματος τῶν τῆξως ἄρτιας, ἢ ἀνωτέρω ἀραιρέσεως δὲν εἶναι δυνατὴ. Τότε προσθέτομεν εἰς τὸ πρῶτον ἄθροισμα τοσάκις τὸν 11, ὅσάκις εἶναι ἀναγκασίον, ὅπως ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ἀραιρέσεως κατασταθῇ δυνατὴ. Εἶναι δὲ φανερόν (56) ὅτι οὕτω τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 11 δὲν μεταβάλλεται.

Παραδείγματος χάριν, ἔστω ὁ ἀριθμὸς 728192. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $2+1+2$, ἔχει 5, εἶναι μικρότερον τοῦ ἄθροισματος $9+8+7$, ἔτσι τοῦ 24, ἡ ἀφαίρεσις τοῦ 24 ἀπὸ 5 εἶναι ἀδύνατος. Προσθέτομεν τότε εἰς τὸν 5 δις τὸν 11, ἔτσι 22, καὶ ἀπὸ τοῦ ἄθροισματος αὐτῶν 27 ἀφαιρούμεν τὸν 24. Εὐρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 3, ἥτις θέλει παριστᾷ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 11 διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 728192.

ΠΟΡΙΣΜΑ. 2^ο. Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, ἐὰν ἡ περιῆς αὐτοῦ ὁ λόγος διαφορὰ ᾗται ἢ 0 ἢ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11.

ΒΑΣΑΝΟΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΔΙΑ ΤΟΥ 9 ΚΑΙ 11.

69. Ἐπειδὴ εὐρίσκομεν εὐκολώτατα τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 9 καὶ διὰ 11, πορίζομεθα ἐντεῦθεν ἀπλοῦστα τὸν τινα τρόπον, δι' οὗ ἐκτελοῦμεν τὴν βάσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν.

Πολλαπλασιασμός. ἵνα ὀρίσωμέν πως τὰς ιδέας, ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2096 ἐπὶ 347 καὶ ὅτι ἐκτελέσαντες τὸν πολλαπλασιασμόν εὑρομεν γινόμενον 727312.

Ἐπειδὴ $2096 = \text{πολ. } 9 + 8$ καὶ $347 = \text{πολ. } 9 + 5$, τὸ γινόμενον 2096×347 θέλει εἶναι ἴσον τῷ γινόμενῳ $(\text{πολ. } 9 + 8) \times (\text{πολ. } 9 + 5)$. Ἀλλὰ γνωρίζομεν (57) ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τινος παράγοντος ἢ καὶ ἀπὸ τῶν δύο γινομένου τινὸς ἀφαιρέσωμεν πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τῶν νέων παραγόντων διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου μένει τὸ αὐτό. Λοιπὸν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ παράγοντος 2096 ἀφαιρέσωμεν πολ. 9 καὶ ἀπὸ τοῦ παράγοντος 347 ἐπίσης πολ. 9, τὸ γινόμενον 8×5 τῶν ὑπολοίπων 8 καὶ 5 διαιρούμενον διὰ τοῦ 9 θέλει δώσει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ καὶ τὸ γινόμενον 2096×347 . Ἀλλὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 9 τοῦ γινομένου 8×5 εὐρίσκεται εὐκόλως καὶ εἶναι 4. Λοιπὸν 4 πρέπει νὰ ᾖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 9 τοῦ εὑρεθέντος γινομένου 727312, ἂν ἡ πράξις ἐγένετο ἄνευ λάθους, ἢ ἐὰν τὸ λάθος ᾖναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου 9, διότι γνωρίζομεν ὅτι τότε δὲν μεταβάλλεται τὸ ὑπόλοιπον (56). Λοιπὸν

Ἡ διὰ τοῦ 9 βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκτελεῖται ὡς ἐξῆς. Εὐρίσκομεν τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως διὰ 9 τῶν παραγόντων, σχηματίζομεν ἔπειτα τὸ γινόμενον αὐτῶν καὶ ζητοῦμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 9 διαιρέσεως τοῦ γινομένου τούτου. Ἐὰν

τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο δὲν διαφέρει τοῦ διὰ 9 ὑπολοίπου τοῦ εὐρεθέντος γινομένου τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ πράξις ἐγένετο ἄνευ λάθους, ἢ, ἐὰν ὑπάρχῃ λάθος, ὅτι τοῦτο εἶναι πολλαπλασίον τι τοῦ διαιρέτου 9.

Διαιρέσις. Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέας εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ εὐρεθέντι ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως, ἔπεται ὅτι, ἐὰν ἀραιρώσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ εὐρεθὲν ὑπόλοιπον, ἡ προκύπτουσα διαφορά θέλει εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον. Ἐπομένως ἡ διὰ τοῦ 9 βύσανος τῆς διαιρέσεως ἀνάγεται εἰς τὴν διὰ τοῦ 9 βύσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.

70. Ὅτι εἵπομεν περὶ τοῦ 9 διὰ τὴν βύσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως, τὸ αὐτὸ ἐφαρμόζεται καὶ ἐπὶ παντὸς διαιρέτου καὶ μερικώτερον ἐπὶ τοῦ 11, οὕτινος τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως εὐρίσκονται εὐκολώτατα, ὥς προσέλεχθη. Κρίνομεν λοιπὸν περιττὸν νὰ ἐπαναλάβωμεν περὶ τοῦ διαιρέτου τούτου τοὺς πύτους συλλογισμούς, διότι καὶ οἱ ἐκ τούτων εὐρεθησόμενοι κανόνες θέλουσιν εἶναι ἀπαραλλάκτως οἱ αὐτοί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

- I. Τὸ ἄθροισμα $321+132+213$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 3;
- II. Ἡ διαφορά $76511-25672$ εἶναι διαιρετὴ διὰ 9;
- III. Τὰ δύο γινόμενα 33×17 καὶ 23×17 διαιρούμενα διὰ 5 θὰ δώσωσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον;
- IV. Τὰ δύο γινόμενα 55×27 καὶ 37×18 διαιρούμενα διὰ 9 θὰ δώσωσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

ΠΕΡΙ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ
ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ.

ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΡΩΤΟΙ.

71. Ἀριθμός τις λέγεται *πρῶτος*, ὅταν δὲν ἔχῃ ἄλλον τινὰ διαιρέτην εἰμὴ τὸν ἑαυτοῦ καὶ τὴν μονάδα. Π. χ. ὁ 7 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, διότι δὲν διαιρεῖται εἰμὴ μόνον διὰ τῆς μονάδος καὶ διὰ τοῦ ἑαυτοῦ τοῦ 7. Ὡσαύτως καὶ ὁ 11. Ὁ 8 δὲν εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, διότι διαιρεῖται ὅχι μόνον διὰ τῆς μονάδος καὶ διὰ τοῦ 8, ἀλλὰ καὶ διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 4.

72. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς ἔχει τοῦ ἐλάχιστου ἐν αὐτῷ διαιρέτην ἀριθμὸν πρῶτον.

Διότι, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς ἔχει καὶ ἄλλους τινὰς διαιρέτας ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ τοῦ καὶ τῆς μονάδος. Ἐστω τῶρα A ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμὸς καὶ δ ὁ μικρότερος τῶν ἄλλων διαιρετῶν αὐτοῦ· λέγω ὅτι ὁ δ θέλει εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος. Διότι, ἂν ὁ δ δὲν ἦτο ἀριθμὸς πρῶτος, ἤθελεν ἔχει διαιρέτην τινὰ δ' μικρότερον αὐτοῦ, ὅστις ἤθελεν εἶναι καὶ διαιρέτης τοῦ A (54, πόρ). Ὁ μικρότερος λοιπὸν τῶν διαιρετῶν τοῦ A δὲν ἤθελεν εἶναι ὁ δ , ἀλλὰ τις μικρότερος αὐτοῦ δ' , ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν κτλ.

73. Πολλάκις εἶναι χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν ἂν δεδομένος τις ἀριθμὸς ἦναι ἢ μὴ πρῶτος, πρέπει δὲ πρὸς τοῦτο νὰ βεβαιωθῶμεν διὰ τῆς διαιρέσεως, νὰ ἴδωμεν δηλαδὴ ἂν δὲν διαιρῇται δι' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ ἀπαιτούμεναι δοκιμαὶ εἶναι πολλάκις λίαν ἐκτεταμέναι, μάχιστα ὅταν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ἦναι ὅπου σὺν μέγας, κατεσκευάσαν πίνακας τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι οἷοῦ τινός. Οἱ πίνακες τοῦ Burckhardt ἐκτείνονται μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ 3036000, καὶ κατασκευάζομεν αὐτοὺς ὡς ἐξῆς. Γράφομεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι

ορίου τινός κατ' ἀρέσκειαν, π. χ. μέχρι 3036000. Ἐπειδὴ οἱ τρεῖς πρῶτοι τῆς σειρᾶς ἀριθμοὶ 1, 2, 3 εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι, δὲν διαγράφωμεν αὐτούς. Ἐπειτα ἀρχίζομεν νὰ διαγράφωμεν πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2, εἶναι δὲ φανερόν ὅτι πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαγράφωμεν μετὰ τὸν 2 ἕκαστον δεύτερον· οἷον τὸν 4, ὅστις εἶναι δεύτερος μετὰ τὸν 2· τὸν 6, ὅστις εἶναι δεύτερος μετὰ τὸν διαγραφέντα 4· τὸν 8, ὅστις εἶναι δεύτερος μετὰ τὸν διαγραφέντα 6, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Διαγράφαντες οὕτω πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 μεταβαίνομεν εἰς τὴν διαγραφὴν τῶν πολλαπλασίων τοῦ ἀμέσως μετὰ τὸν 2 ἐπομένου πρώτου ἀριθμοῦ, ἥτοι τοῦ 3. Αὕτη δὲ γίνεται διὰ τῆς διαγραφῆς ἑκάστου τρίτου μετὰ τὸν 3.

Μετὰ τὴν διαγραφὴν τῶν πολλαπλασίων τοῦ 3 ὁ πρῶτος τῶν μὴ διαγραφέντων ἀριθμῶν, ὁ 5, θέλει εἶναι ἀναγκασίως ἀριθμὸς πρῶτος, ὡς μὴ ὢν πολλαπλάσιον οὐδενὸς τῶν προηγουμένων, ἄλλως ἤθελε διαγραφῆ.

Διαγράφωμεν ἔπειτα μετὰ τὸν 5 ἕκαστον πέμπτον, καὶ ὁ πρῶτος τῶν μὴ διαγραφέντων ἀριθμῶν, ὁ 7, θέλει εἶναι ἐπίσης ἀριθμὸς πρῶτος. Διαγράφωμεν, ἔπειτα μετὰ τὸν 7 ἕκαστον ἑβδομον, ἔπειτα δὲ ἕκαστον κατέχοντα τὴν αὐτὴν τάξιν τῶ πρώτῳ μὴ διαγραφέντι ἀριθμῷ κτλ. Οὕτω θέλομεν διαγράψαι πάντας τοὺς μὴ πρώτους ἀριθμούς, καὶ οἱ μὴ διαγραφέντες θέλουσιν εἶναι οἱ ζητούμενοι πρῶτοι ἀριθμοί.

Οἱ ἑκάστοτε διαγραφόμενοι ἀριθμοὶ θεωροῦνται ὡς κατέχοντες τὴν φυσικὴν αὐτῶν τάξιν ἐν τῇ πρὸς διαγραφὴν ἀριθμῆσει· τουτέστιν, ἵνα διαγράφωμεν τὰ πολλαπλάσια πρώτου τινός ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ 5, λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν ἐν τῇ πρὸς διαγραφὴν ἀριθμῆσει καὶ τοὺς μετὰ τὸν 5 προδιαγραφέντας ἀριθμούς 6, 8, 7, κτλ.

Ὡσαύτως διαγραφεῖς τις ἀριθμὸς δύναται νὰ διαγραφῇ καὶ πάλιν, ὡς ὁ 15, ὅστις διεγράφη ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 3, διαγράφεται δὲ καὶ πάλιν ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 5.

74. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι διεγράψαμεν πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 13· λέγω ὅτι πᾶς μὴ διαγραφεῖς ἀριθμὸς 107, 211, 227, κτλ., μικρότερος τοῦ τετραγώνου 289 τοῦ ἀμέσως ἐπομένου πρώτου ἀριθμοῦ 17, θέλει εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Διότι, ἂν ὁ 227 π. χ. δὲν ἦτο ἀριθμὸς πρῶτος, ἤθελεν ἔχει διαιρέτην τινὰ ἀριθμὸν πρῶτον. Ὁ πρῶτος οὗτος διαιρέτης τοῦ 227 δὲν

δύναται νά ἦναι μικρότερος τοῦ 17· διότι, ἂν ἦτο μικρότερος, ὁ 227 ἤθελεν ὑπάρχει διαγεγραμμένος ἐν τινι τῶν προηγουμένων γενομένων διαγραφῶν. Ἄλλ' οὔτε τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 227 διὰ τοῦ πρώτου τούτου διαιρέτου δύναται νά ἦναι μικρότερον τοῦ 17, διότι καί τούτο θέλει εἶναι ἀναγκαιῶς εἰς τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ. Λοιπὸν ὁ 227 πρέπει νά ἦναι τοῦλάχιστον ἴσος τῷ γινόμενῳ 17×17 . Ἄλλ' εἶναι μικρότερος αὐτοῦ. Ἀρα εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Ἐπειτα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι, ἵνα ἴδωμεν ἂν ἀριθμὸς τις A ἦναι ἢ μὴ πρῶτος, ἀρκεῖ νά δοκιμάσωμεν διαδοχικῶς πάντας τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς 2, 3, 5, 7..., μέχρις ἐκείνου τοῦ πρώτου, οὗτινος τὸ τετράγωνον εἶναι μεγαλειότερον τοῦ A . Ἐάν δὲν διαιρῇται δι' οὐδενὸς τούτων, ὁ ἀριθμὸς A θέλει εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Δὲν εἶναι δὲ καὶ ἀνάγκη νά σχηματίσωμεν προηγουμένως τὰ τετράγωνα τῶν πρώτων διαιρετῶν 2, 3, 5, 7..., ἵνα ἴδωμεν ἂν ταῦτα ἦναι ἢ μὴ μικρότερα τοῦ A . Ἐάν τὸ πηλίκον, ὅπερ εὐρίσκομεν δοκιμάζοντες διαιρέτην τινὰ, ἦναι μικρότερον τοῦ δοκιμαζομένου διαιρέτου, ἔπεται ὅτι ὁ δοκιμαζόμενος ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ τετράγωνου τοῦ διαιρέτου.

Παραδείγματός χάριν, ἔστω 463 ἀριθμὸς τις. Ἴνα ἴδωμεν ἂν ᾖ ἢ μὴ πρῶτος, δοκιμάζομεν τοὺς διαιρέτας, 2, 3, 5, 7 ... μέχρι τοῦ διαιρέτου, οὗτινος τὸ τετράγωνον εἶναι μεγαλειότερον τοῦ 463. Ἐπειδὴ τὰ πηλικά τῆς διαιρέσεως τοῦ 463 διὰ τῶν διαιρετῶν 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 εἶναι μεγαλιότερα τοῦ εἰς ἕκαστον τούτων ἀντιστοιχοῦντος διαιρέτου, ἔπεται ὅτι τὰ τετράγωνα τοῦ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 εἶναι μικρότερα τοῦ 463. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 463 διὰ τοῦ ἀκολουθοῦ πρώτου, ἦτο, τοῦ 23, εὐρίσκεται μικρότερον τοῦ 23, ἔπεται ἐκ τούτου, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 463 εἶναι μικρότερος τοῦ τετράγωνου τοῦ διαιρέτου 23, καὶ ἐπειδὴ δὲν διαιρῇται δι' οὐδενός τῶν προηγουμένων πρώτων ἀριθμῶν, οὗτος θέλει εἶναι ἀναγκαιῶς ἀριθμὸς πρῶτος.

75. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἡπερὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἀτελείητος.

Πρὸς ἀποδείξιν τούτου ἀρκεῖ προφανῶς ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ὑπάρχει πάντοτε πρῶτος ἀριθμὸς μεγαλειότερος τοῦ ὑποθεθέντος μεγαλιότερου πρώτου.

Ἐστω π. χ. N ὁ καὶ ὑπόθεσιν μεγαλιότερος τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Ἀς σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $2 \times 3 \times 5 \times 7 \dots \times N$ πάντων νῶτ' πρὸ τοῦ N πρώτων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ τελευταίου N , συμπερι-

λαμβανομένου καὶ τούτου, καὶ ἄς προσθέσωμεν εἰς τοῦτο καὶ μίαν μονάδα. Καλοῦντες A τὸ προκύπτον ἄθροισμα, θέλομεν ἔχει

$$A = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times N + 1.$$

Τώρα ὁ A ἢ εἶναι ἢ δὲν εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος. Ἐάν ὁ A ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος, θέλει εἶναι προφανῶς μεγαλύτερος τοῦ N , ἐπομένως ὁ καθ' ὑπόθεσιν μεγαλύτερος πάντων τῶν πρώτων ἀριθμῶν N θέλει εἶναι μικρότερος τοῦ A . Ἄρα N δὲν εἶναι ὁ μεγαλύτερος πάντων.

Ἐάν ὁ A δὲν ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος, θέλει κατὰ προκποδειχθέν θεώρημα ἔχει διαιρέτην τινὰ ἀριθμὸν πρῶτον. Ἄλλ' ὁ πρῶτος οὗτος διαιρέτης δὲν δύναται νὰ ἦναι ἴσος οὐδενὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν, τῶν ἐν τῷ γινομένῳ $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times N$ περιεχομένων. Διότι, ἂν ἦτο ἴσος μέν τινι τούτων, ἤθελεν ἀναγκασίως διαιρεῖ τὸ γινόμενον $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times N$, ὡς παράγων αὐτοῦ, καὶ ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν διαιρεῖ καὶ τὸ A , ἔπρεπε κατὰ τὸ θεώρημα 55 νὰ διαιρῇ ἀναγκασίως καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ἥτοι τὴν μονάδα, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐπεταί λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι ὁ πρῶτος διαιρέτης τοῦ A θέλει εἶναι διάφορος τῶν ἐν τῷ γινομένῳ $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times N$ ἐμπεριεχομένων πρώτων ἀριθμῶν. Θέλει λοιπὸν εἶναι ἀναγκασίως μεγαλύτερος τοῦ N . Ἄρα N δὲν δύναται νὰ ἦναι κατὰ τὴν γενομένην ὑπόθεσιν ὁ μεγαλύτερος τῶν ὑπαρχόντων πρώτων ἀριθμῶν. Ἡ σειρὰ λοιπὸν τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἀτελεύτητος.

ΠΕΡΙ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ.

76. Κοινοὶ διαιρέται δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν καλοῦνται οἱ ἀριθμοί, οἱ διαιροῦντες ἀκριβῶς ἕκαστον τούτων. Π. χ., ὁ 2 καὶ ὁ 3 εἶναι κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 30 καὶ 18, διότι καὶ ὁ 2 καὶ ὁ 3 διαιροῦσι καὶ τὸν 30 καὶ τὸν 18. Οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 5 εἶναι κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 10, 50, 120, διότι ἕκαστος τούτων διαιρεῖται καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 5.

Δύο ἢ πλείτεροι ἀριθμοὶ καλοῦνται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅταν δὲν ἔχωσι κανένα κοινὸν διαιρέτην εἰμὴ μόνον τὴν μονάδα. Π. χ. ὁ 8 καὶ 15 εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διότι δὲν ὑπάρχει οὐδεὶς ἀριθμὸς ἐκτὸς τῆς μονάδος, ὅστις νὰ διαιρῇ ἀμφοτέρους. Οἱ ἀριθμοὶ 8, 24 καὶ 35 εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διότι δὲν ἔχουσιν οὐδένα ἄλλον κοινὸν διαιρέτην ἐκτὸς τῆς μονάδος.

Μεταξὺ τῶν κοινῶν διαιρετῶν δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν ὑπάρχει

ἀναγκαιῶς εἰς μεγαλειότερος πάντων τῶν ἄλλων. Οὗτος καλεῖται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Εἶναι δὲ πολλάκις χρησίμον νὰ γνωρίζω-
μεν πῶς εὐρίσκεται οὗτος, καὶ περὶ τούτου πραγματευόμεθα ἁμέσως.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΦ' ὍΝ ΣΤΗΡΙΖΕΤΑΙ Ἡ ΑΝΑΖΗΤΗΣΙΣ ΤΟΥ
ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ.

77. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν δὲν
ἀφαιρείται νὰ ᾖται μεγαλειότερος τοῦ μικροτέρου τούτων· ἐν ἄλλαις
λέξεσιν, εἴαν ὁ μικρότερος τούτων διαιρῇ τὸν μεγαλειότερον, οὗτος
θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

*Ἐστῶσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 54 καὶ 9, διαίρετοὶ ὁ πρῶτος διὰ
τοῦ δευτέρου. Ὁ 9 εἶναι προφανῶς εἰς τῶν κοινῶν διαιρετῶν αὐτῶν,
καὶ ὁ μέγιστος πάντων, διότι ἀριθμὸς τις μεγαλειότερος τοῦ 9 δὲν
δύναται νὰ διαιρῇ τὸν 9, ἐπομένως δὲν θέλει εἶναι κοινὸς διαιρέ-
της αὐτῶν. Λοιπὸν ὁ μικρότερος 9 τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν 54
καὶ 9, ὁ διαίρων τὸν μεγαλειότερον 54, θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοι-
νὸς διαιρέτης αὐτῶν.

78. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἐὰν ὁ μικρότερος τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν
δὲν διαιρῇ τὸν μεγαλειότερον, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν
εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ μεγίστῳ κοινῷ διαιρέτῃ τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ
εὐρεθησομένου ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλειότερου διὰ
τοῦ μικροτέρου.

*Ἐστῶσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 7524 καὶ 918. Ἐπειδὴ ὁ μικρότερος
918 δὲν διαιρεῖ τὸν μεγαλειότερον 7524, λέγω ὅτι ὁ μέγιστος κοι-
νὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 7524 καὶ 918 εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ μεγί-
στῳ κοινῷ διαιρέτῃ τοῦ μικροτέρου 918 καὶ τοῦ ὑπολοίπου 180
τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλειότερου 7524 διὰ τοῦ μικροτέρου. Διότι,
εἴαν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ 7524 διὰ τοῦ 918, θέλομεν
ἐκ ταύτης πορισθῇ τὴν ἰσότητά

$$7524 = 918 \times 8 + 180,$$

ἐξ ἧς ἔπεται ὅτι

1^{ον}. Πᾶς κοινὸς διαιρέτης τοῦ 7524 καὶ 918, εἶναι διαιρέτης
καὶ τοῦ εὐρεθέντος ὑπολοίπου 180. Διότι πᾶς ἀριθμὸς διαίρων τὸν
918 διαιρεῖ καὶ τὸ γινόμενον 918×8 , εἴαν δὲ διαιρῇ καὶ τὸν 7524,
θέλει διαιρεῖ καὶ τὴν διαφοράν αὐτῶν $7524 - 918 \times 8$, ἧτοι τὸ ὑ-
πόλοιπον 180.

2^{ον}. Πᾶς κοινὸς διαιρέτης τοῦ 918 καὶ τοῦ ὑπολοίπου 180 εἶναι

διαίρετης καὶ τοῦ διαιρετέου 7524. Διότι πᾶς ἀριθμὸς διαίρων τὸν 918 διαίρει καὶ τὸ γινόμενον 918×8, ἔσιν δὲ διαίρη καὶ τὸ ὑπολοίπον 180, θέλει ἀναγκασίως διαίρει καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 918×8+180, ἥτοι τὸν διαιρετέον 7524.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐκ τούτων ὅτι

Πάντες οἱ κοινοὶ διαίρεται τῶν δεδομένων ἀριθμῶν 7524 καὶ 918 εἶναι διαίρεται καὶ τοῦ ὑπολοίπου 180, ἐπομένως εἶναι κοινὸς διαίρεται τῶν ἀριθμῶν 918 καὶ 180, προσέτι δὲ ὅτι

Πάντες οἱ κοινοὶ διαίρεται τῶν ἀριθμῶν 918 καὶ 180 εἶναι διαίρεται καὶ τοῦ 7524, ἐπομένως εἶναι κοινοὶ διαίρεται τῶν ἀριθμῶν 7524 καὶ 918.

Ἐπεὶ λοιπὸν ἐκ τούτων ὅτι οἱ κοινοὶ διαίρεται τῶν ἀριθμῶν 7524 καὶ 918 εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς κοινούς διαίρετας τῶν ἀριθμῶν 918 καὶ 180, καὶ ἀντιστρόφως. Λοιπὸν ὁ μέγιστος κοινὸς διαίρετης τῶν δύο τελευταίων εἶναι ἀναγκασίως ὁ αὐτὸς τῷ μεγίστῳ κοινῷ διαίρετῇ τῶν δύο πρώτων 7524 καὶ 918, τοῦ ὅ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΑΝΑΖΗΤΗΣΙΣ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ.

79. Πρὸς εὑρεσιν λοιπὸν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαίρετον δύο ἀριθμῶν διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου. Ἐὰν εὑρωμεν ὑπόλοιπον 0, ὁ μικρότερος θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαίρετης αὐτῶν. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον ἦναι διάφορον τοῦ 0, ἐπειδὴ ἀπεδείχθη ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαίρετης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ μεγίστῳ κοινῷ διαίρετῇ τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ εὑρεθέντος υπολοίπου. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς δευτέρας ταύτης διαιρέσεως ἦναι 0, τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον, ἥτοι ὁ διαίρετης ταύτης, θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαίρετης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν. Ἐὰν δὲ καὶ τῆς διαιρέσεως ταύτης τὸ ὑπόλοιπον δὲν ἦναι 0, διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον διὰ τοῦ εὑρεθέντος δευτέρου υπολοίπου, καὶ οὕτω καθέξηται, μέχρις οὗ μία τῶν διαιρέσεων μᾶς δώσῃ ὑπόλοιπον 0. Τότε ὁ διαίρετης ταύτης θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαίρετης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Εἶναι ὀραρὸν ὅτι ἐξακολουθοῦντες ὡς προείπομεν τὴν πρᾶξιν θέλομεν ἀναγκασίως εὑρεῖν ὑπόλοιπον τι διαιροῦν ἀκριβῶς τὸ ἀμέσως προηγούμενον αὐτοῦ· διότι τὰ ὑπολοιπα εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ

βαίνουνσιν ἐλαττωμέναι, ἐπομένως ὁ ἀριθμὸς τούτων δὲν δύναται νὰ ᾖναι ἀτελεύτητος.

80. Διατάσσομεν συνήθως ὡς ἑξῆς τὰ καθέκαστα τῶν πρὸς εὔρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν ἐκτελουμένων πράξεων.

Γράφομεν τὸν μικρότερον 918 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ μεγαλύτερου 7524, καὶ τὸ μὲν εὑρεθισόμενον πηλίκον 8 τῆς διαίρεσεως αὐτῶν

	8	5	10
7524	918	180	18
180	18	0	

ὑπεράνω τοῦ διαιρέτου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 180 ὑπὸ τὸν διαιρέτεον. Ἐπειτα γράφομεν τὰ πρῶτον ὑπόλοιπον 180, ὅπερ λαμβάνομεν ὡς διαιρέτην, ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὀριζοντίου σειρᾶς καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου διαιρέτου 918, ὃν λαμβάνομεν ὡς διαιρέτεον, καὶ τὸ μὲν πηλίκον 5 τῆς νέας ταύτης διαίρεσεως γράφομεν πάλιν ὑπεράνω τοῦ νέου διαιρέτου 180, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 18 ὑπὸ τὸν νέον διαιρέτεον 918, καὶ οὕτω καθεξῆς, ὡς φαίνεται ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι, κτλ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐκ τῶν προηγουμένων ἔπεται ὅτι δύο διαδοχικὰ ὑπολοίπων ἔχουσι τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην, ὃν καὶ οἱ δεδομένοι ἀριθμοί. Ἐάν λοιπὸν συμβῇ νὰ παρατηρήσωμεν ὡς ἐκ τῆς πρὸς τὸ ὑπολογίζειν κτηθείσης ἡμῶν ἀσκήσεως τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο διαδοχικῶν υπολοίπων, εἶναι περιττὸν νὰ παρατείνωμεν τὴν πράξιν, διότι οὗτος θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν. Πρὸς τούτοις, ἐὰν ἐν τῶν εὑρισκομένων υπολοίπων ᾖναι ἀριθμὸς πρῶτος, ὅστις δὲν διαίρει τὸ ἀμέσως προηγούμενον ὑπόλοιπον, θέλομεν συμπεράνει ἀμέσως ὅτι οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τουτέστι θέλουσιν ἔχει μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν τὴν μονάδα.

Παραδείγματος χάριν, ἂς υποθέσωμεν ὅτι μᾶς ἐδόθησαν οἱ ἀριθμοὶ 756 καὶ 535. Διατάσσοντες τὰ τῆς πράξεως ὡς προηγούμενης

	1	2	2	2
756	535	224	93	35
224	93	35	23	

εὑρίσκωμεν μεταξύ τῶν υπολοίπων τὸν πρῶτον ἀριθμὸν 23 ὅστις εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ προηγούμενον ὑπόλοιπον 35. Ὁ μέγιστος λοι

πάν κοινός διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν θέλει εἶναι ἡ μονάς, ἥτοι οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ θέλουσιν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς 23 δὲν ἔχει ἄλλον τινὰ διαιρέτην εἰμὴ τὸν ἑαυτὸν τοῦ καὶ τὴν μονάδα, αὐτὸς δὲ εὐρέθη μὴ διαιρῶν τὸ προηγούμενον ὑπολοίπον, ἔπεται ὅτι δὲν μένει ἢ ἡ μονάς, ἣτις δύναται νὰ διαιρῇ ἀμφοτέρους.

81. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Πᾶς ἀριθμὸς, διαιρῶν δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν.

*Ἀς θεωρήσωμεν π. χ. τοὺς ἀριθμοὺς 7524 καὶ 918. Ἀπεδείχθη ὅτι οἱ κοινοὶ διαιρέται αὐτῶν εἶναι διαιρέται καὶ τοῦ υπολοίπου 180. Ὡσαύτως οἱ κοινοὶ διαιρέται τοῦ 918 καὶ τοῦ υπολοίπου 180 θέλουσιν εἶναι καὶ διαιρέται τοῦ ἐπομένου υπολοίπου 18, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἀλλ' ἐν τῶν υπολοίπων τούτων εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινός διαιρέτης. Ἄρα πᾶς ἀριθμὸς, διαιρῶν δύο ἄλλους, διαιρεῖ ἀναγκαστικῶς καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν.

82. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν διὰ τοῦ μέγιστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἄλλους.

*Ἐστώσαν Α καὶ Β δύο ἀριθμοί, Μ ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης αὐτῶν, Π δὲ καὶ Ρ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ Μ. Θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας (42)

$$A=M \times \Pi, \quad B=M \times P. \quad (1)$$

Ἀέγω τώρα ὅτι τὰ πηλίκα Π καὶ Ρ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἄλλήλους. Διότι, ἂν δὲν ἦσαν ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἤθελον ἔχει κοινὸν τινὰ διαιρέτην Δ. Καλοῦντες τότε Π' καὶ Ρ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ Δ, θέλομεν ἔχει ὡσαύτως καὶ τὰς ἐξῆς ἰσότητας

$$\Pi=\Delta \times \Pi', \quad P=\Delta \times P' \quad (2)$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἰσότητας (1) ἀντὶ τοῦ Π καὶ Ρ τὰ ἴσα πῶτοίς Δ×Π' καὶ Δ×Ρ', θέλομεν ἔχει

$$A=M \times \Delta \times \Pi', \quad B=M \times \Delta \times P'. \quad (3)$$

Εἶναι τώρα φανερόν ἐκ τῶν ἰσοτήτων (3) ὅτι τὸ Α καὶ Β διαιροῦνται διὰ τοῦ γινομένου Μ×Δ, ἐπομένως Μ δὲν εἶναι μέγιστος κοινός διαιρέτης αὐτῶν, ἀλλὰ τις ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ Μ, ὑπερέχων τὴν τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν, ἐὰν Μ ᾖ ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης

τοῦ Α καὶ τοῦ Β, τὰ πηλίκων Π καὶ Ρ τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ Μ πρέπει νὰ ᾖναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

83. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀριθμοὺς ἐπὶ τινὰ τρίτον, τὰ προκύπτοντα γινόμενα θέλουσιν ἔχει μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ γινόμενον τοῦ μέγιστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν τρίτον.

Ἐστώσαν Α καὶ Β δύο ἀριθμοὶ καὶ Μ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Λέγω ὅτι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τινὰ ἀριθμὸν Δ, τὰ γινόμενα αὐτῶν Α×Δ καὶ Β×Δ θέλουσιν ἔχει μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ γινόμενον Μ×Δ.

Διότι, ἐὰν καλέσωμεν Π καὶ Ρ τὰ πηλίκων τῆς διαιρέσεως τοῦ Α καὶ Β διὰ Μ, θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας

$$A=M \times \Pi, \quad B=M \times P. \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) ἐπὶ Δ θέλομεν ἔχει τὰς ἐπομένους

$$A \times \Delta = M \times \Delta \times \Pi, \quad B \times \Delta = M \times \Delta \times P. \quad (2)$$

Ἐπειδὴ τῶρα κατὰ τὸ προαποδειχθέν θεώρημα τὰ πηλίκων Π καὶ Ρ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ τὰ γινόμενα Μ×Δ×Π καὶ Μ×Δ×Ρ διαιροῦνται προφανῶς διὰ τοῦ γινομένου Μ×Δ, ἔπεται ὅτι Μ×Δ θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο γινομένων Α×Δ καὶ Β×Δ, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.—Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ Α καὶ Β ᾖναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τινὰ τρίτον ἀριθμὸν Δ, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν γινομένων Α×Δ καὶ Β×Δ θέλει εἶναι ὁ τρίτος οὗτος ἀριθμὸς Δ.

Διότι, ἐπειδὴ Α καὶ Β εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶναι ἡ μονάς, ἐπομένως κατὰ τὸ προαποδειχθέν θεώρημα, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν γινομένων Α×Δ καὶ Β×Δ θέλει εἶναι τὸ γινόμενον τῆς μονάδος ἐπὶ Δ, ἥτοι Δ.

84. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἐὰν ἀριθμὸς τις Π διαιρῇ τὸ γινόμενον Α×Β δύο ἄλλων Α καὶ Β καὶ ᾖναι πρῶτος πρὸς τὸν ἓνα τούτων, πρὸς τὸν Α λόγον χάρις, πρέπει ἀναγκάτως νὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον Β.

Διότι, ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Π εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν τὴν μονάδα. Ἐὰν τῶρα πολλαπλασιάσωμεν αὐτοὺς ἐπὶ Β, τὰ γινόμενα Α×Β, καὶ Π×Β

θέλουσιν ἔχει κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν τὸν Β. Ἀλλ' ὁ Π διαιρεῖ καὶ ὑπόθεσιν τὸ γινόμενον $A \times B$, διαιρεῖ δὲ προφανῶς καὶ τὸ γινόμενον $\Pi \times B$, ὡς παράγων αὐτοῦ, θέλει λοιπὸν διαιρεῖ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα (81) καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν ὅστις εἶναι ὁ Β. Λοιπὸν ὁ Π, ὁ καὶ ὑπόθεσιν διαιρῶν τὸ γινόμενον $A \times B$ καὶ πρῶτος ὑποτεθεὶς πρὸς τὸν Α, εὐρέθη διαιρέτης τοῦ Β.

ΑΠΟΣΤΥΘΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΙΝΟΣ ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΑΥΤΟΥ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ.

85. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι γινόμενος παραγόντων πρώτων· ἐν ἄλλαις λέξεσι, πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς ἀποσυντίθεται εἰς παράγοντας πρώτους.

Ἐστω Α ἀριθμὸς τις μὴ πρῶτος. Ἐπειδὴ ὁ Α δὲν εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, ὁ μικρότερος τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ Δ θέλει εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος (72), ἐν δὲ παρυστήσωμεν διὰ Π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ Δ, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$A = \Delta \times \Pi \quad (1)$$

Τώρα, ἐν ὃ Π ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη· διότι ὁ Α εἶναι τὸ γινόμενον δύο πρώτων ἀριθμῶν Δ καὶ Π. Ἐν δ' ὁ Π δὲν ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος, ὁ μικρότερος τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ Δ' θέλει εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, καὶ παριστῶντες διὰ Π' τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Π διὰ Δ' θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\Pi = \Delta' \times \Pi'.$$

Ἀντικαθιστῶντες τώρα εἰς τὴν ἰσότητα (1) ἀντὶ τοῦ Π τὸ ἴσον αὐτῷ $\Delta' \times \Pi'$, θέλομεν ἔχει

$$A = \Delta \times \Delta' \times \Pi'. \quad (2)$$

Πάλιν, ἐν τῷ Π' ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη, τοῦ Α ὄντος τότε γινομένου τριῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἐν δὲ μὴ, ὁ μικρότερος τῶν διαιρετῶν Δ'' τοῦ Π' θέλει εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, καὶ παριστῶντες διὰ Π'' τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Π' διὰ Δ'', θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\Pi' = \Delta'' \times \Pi''.$$

Ἀντικαθιστῶντες πάλιν εἰς τὴν ἰσότητα (2) ἀντὶ τοῦ Π' τὸ ἴσον αὐτῷ $\Delta'' \times \Pi''$, θέλομεν ἔχει

$$A = \Delta \times \Delta' \times \Delta'' \times \Pi'$$

Περὶ τοῦ Π' δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν ὅ,τι εἵπομεν προηγουμένως περὶ τοῦ Π' , καὶ θέλομεν ἐξακολουθήσει αὐτῷ μέχρις οὗ εὗρωμεν ἐν τῶν μερικῶν πηλίκων Π , Π' , Π'' , κτλ. ἀριθμὸν πρῶτον. Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι θέλομεν ρθᾶσαι εἰς ἓν τοιοῦτο πηλίκον μετὰ τινος ἀριθμοῦ διαιρέσεων, διότι τὰ πηλικά Π , Π' , Π'' , κτλ. εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι καὶ βρῖνκουσιν ἐλαττούμεναι, ἄλλως ἢ θέλον σχηματίσει σειράν ἀτελεύτητον, ὅπερ ἀδύνατον.

Λοιπὸν πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς A εἶναι γινόμενον παραγόντων πρῶτων, ἢ ἀποσυντίθεται εἰς πρῶτους παράγοντας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει οἱ διὰ Δ , Δ' , Δ'' , κτλ. παρυσταθέντες διαιρέται ὑπετέθησαν ἀπλῶς οἱ μικρότεροί τῶν διαιρετῶν τοῦ A , Π , Π' , κτλ., οὐχὶ δὲ καὶ διάφοροι, διότι ὁ αὐτὸς πρῶτος παράγων δύνατον νὰ ἐπαναλαμβανῆται πολλάκις ἐν τῷ γινόμενῳ. Παραδείγματος χάριν, ἂν ἐπυκνέτο ν' ἀποσυνθέσωμεν τὸν 60 εἰς τοὺς πρῶτους αὐτοῦ παράγοντας, ἢ θέλομεν εὗρει συλλογίζόμενοι ὡς ἄνωτέρω,

$$60 = 2 \times 30$$

$$\text{* Ἀλλὰ } 30 = 2 \times 15. \text{* Ἀρχ}$$

$$60 = 2 \times 2 \times 15,$$

$$\text{καὶ ἐπειδὴ } 15 = 3 \times 5, \text{ ἔρχ}$$

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5.$$

Ἐπειδὴ ὁ 5 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, ὁ 60 εὕρεσκαται οὕτως ἀποσυντιθεμένος εἰς πρῶτους παράγοντας, καὶ βλέπομεν ὅτι ὁ διαιρετὴς 2 ἐπαναλαμβάνεται δις ἐν τῷ παριστῶντι αὐτὸν γινόμενῳ $2^2 \times 3 \times 5$.

86. ΘΕΩΡΗΜΑ. Καθ' ἓνα μόνον τρόπον ἀριθμὸς τις μὴ πρῶτος ἀποσυντίθεται εἰς πρῶτους παράγοντας· ἐν ἄλλαις λέξεσι, δύο γινόμενα πρῶτων παραγόντων δὲν δύναται νὰ ἴηαι ἴσα χωρὶς νὰ περιέχωσι τοὺς αὐτοὺς πρῶτους παράγοντας μὲ τοὺς αὐτοὺς ἀμοιβαίως ἐκθέτας.

Εἶναι φανερόν ὅτι, ἂν ἀποσυνθέτωμεν πάντοτε ἀριθμὸν τινος εἰς πρῶτους παράγοντας ὡς εἵπομεν ἄνωτέρω, ζητοῦντες δηλαδὴ τὸν μικρότερον τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ τε καὶ ἐκάστου τῶν εὕρισκομένων διαιρητῶν πηλίκων, θέλομεν εὕρισκεν πάντοτε τοὺς αὐτοὺς διαιρέτας καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, ἐπομένως τὸ θεώρημα, εὐτοῦ θεωρηματικοῦ, ὑπάρχει ἤδη ἀποδεδειγμένον.

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἀκολουθοῦντες ἄλλον τινὰ τρόπον ἀποσυνθέσεως δυνάμεθα νὰ εὑρωμεν γινόμενον πρώτων παραγόντων ἴσον τῷ A καὶ διάφορον τοῦ διὰ τοῦ πρώτου τῆς ἀποσυνθέσεως τρόπου εὑρισκομένου. Ὅτι δὲ ὑπάρχει καὶ ἄλλος τρόπος ἀποσυνθέσεως εὐκάλως δύναται τις νὰ πεισθῇ περὶ τούτου, ἀρκεῖ, ἀντὶ νὰ ὑποθέσῃ τὸν Δ ὡς τὸν μικρότερον τῶν διαιρετῶν τοῦ A , νὰ ὑποθέσῃ τοῦτον ὡς τινὰ τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ, τοῦτ' αὐτὸ δὲ καὶ διὰ τούς διαιρετάς Δ' , Δ'' , κτλ.

Ἐστω λοιπὸν A ὁ δεδομένος ἀριθμός, καὶ ἄς ὑποθέσωμεν, ἵνα ὀρίσωμέν πως τὰς ἰδέας, ὅτι οὗτος, ἀποσυντεθείς κατὰ δύο διαφόρους τρόπους εἰς πρώτους παράγοντας, εὑρέθη ἀμοιβαίως ἴσος μὲ τὰ γινόμενα $2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11 \times 13$, $11^2 \times 2^2 \times 5 \times 13 \times 3$. Θέλωμεν ἔχει τότε τὰς ἐξῆς δύο ἰσότητας·

$$A = 2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \text{ καὶ } A = 11^2 \times 2^2 \times 5 \times 13 \times 3,$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα ἀμέσως, ἐπειδὴ $A=A$, τὴν ἐπομένην

$$2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11 \times 13 = 11^2 \times 2^2 \times 5 \times 13 \times 3.$$

Ἐὰν τώρα ἀπὸ τῶν δύο τελευταίων ἴσων γινομένων ἐξαλείψωμεν τοὺς κοινούς παράγοντας 2^2 , 3 , 11 , 13 , τὰ γινόμενα τῶν μενόντων παραγόντων θέλουσιν εἶναι ἴσα, καὶ θέλωμεν ἔχει

$$2 \times 7^2 = 11 \times 5,$$

τούτεστιν ὅτι τὰ δύο διάφορα γινόμενα 2×7^2 καὶ 11×5 παριστῶσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τοῦθ' ὅπερ εἶναι ἀδύνατον. Διότι, ἐπειδὴ ὁ παράγων 2 τοῦ πρώτου γινομένου 2×7^2 διαιρεῖ προφανῶς αὐτὸ τὸ γινόμενον, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον αὐτῷ 11×5 . Ἀλλ' εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 5 , ὡς διάφορος αὐτοῦ. Ἄρα πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν 11 (84). Ἀλλὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸν 11 , ὡς διάφορος αὐτοῦ. Ἄρα δὲν δύναται νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον 11×5 , ὅπερ ἄτοπον, διότι τὸ γινόμενον 11×5 εὑρέθη ἴσον τῷ 2×7^2 . Τὸ ἄτοπον τοῦτο πρᾶγχεταί ἐκ τῆς ὑποθέσεως ὅτι δύο διάφορα γινόμενα πρώτων παραγόντων δύνανται νὰ ἦναι ἴσα χωρὶς νὰ περιέχωσι τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας καὶ μὲ τοὺς αὐτοὺς ἀμοιβαίως ἐκθέτας.

Ὅτι εἴπομεν περὶ τοῦ παράγοντος 2 τὸ αὐτὸ θέλωμεν ἐπαναλῆσαι καὶ περὶ παντὸς παράγοντος τοῦ πρώτου γινομένου, μὴ ἐμπεριλαμβανομένου ἐν τῷ δευτέρῳ.

Λοιπὸν δύο γινόμενα πρώτων παραγόντων δὲν δύνανται νὰ ᾔναι ἴσα χωρὶς νὰ περιέχωσι κτλ.

87. Ἡ πρᾶξις τῆς ἀποσυνθέσεως ἀριθμοῦ τινὸς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας διατάσσεται συνήθως ὡς ἐξῆς·

12936	2	
6468	2	
3234	2	
1617	3	$12936=2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11$
539	7	
77	7	
11	11	

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλωμεν νὰ ἀποσυνθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 12936 εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας. Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ ἄγομεν κάθετον γραμμὴν. Δοκιμάζομεν ἔπειτα τὸν μικρότερον τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2, καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 12936 διαιρεῖται διὰ 2, γράφομεν 2 πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὑπ' αὐτὸν τὸ πηλίκον 6468 τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 2.

Ἐπειδὴ καὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 6468 διαιρεῖται πάλιν διὰ 2, γράφομεν 2 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πηλίκου τούτου καὶ ὑπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον 3234 τῆς διὰ 2 διαιρέσεως αὐτοῦ. Ἐξκολουθοῦμεν δὲ δοκιμάζοντες τὸν 2 μέχρις οὗ εὑρωμεν πηλίκον τι 1617 μὴ διαιρετὸν διὰ 2.

Δοκιμάζομεν τότε τὸν ἑμέσως μετὰ τὸν 2 ἐπόμενον πρῶτον ἀριθμὸν 3, καὶ ἐπειδὴ ὁ 1617 διαιρεῖται διὰ 3, γράφομεν 3 πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὑπ' αὐτὸν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 539.

Ἐπειδὴ ὁ 539 δὲν διαιρεῖται διὰ 3 δοκιμάζομεν τὸν ἑμέσως μεγαλύτερον τοῦ 3 πρῶτον ἀριθμὸν 5. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 539 δὲν διαιρεῖται διὰ 5, δοκιμάζομεν τὸν ἑμέσως ἐπόμενον αὐτῷ πρῶτον ἀριθμὸν 7, καὶ ἐπειδὴ διαιρεῖται διὰ τούτου, γράφομεν 7 πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὑπ' αὐτὸν τὸ πηλίκον 77 τῆς διαιρέσεως. Δοκιμάζοντες πάλιν τὸν 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 11, ὅπερ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Εὐκόλως βλέπει τις ὅτι, καθ' ὃν τρόπον ἐξετελέσθη ἡ πρᾶξις, ὁ πρὸς ἀποσύνθεσιν δεδομένος ἀριθμὸς 12936 θέλει εἶναι ἴσος τῷ γινόμενῳ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11$ τῶν ἐν τῇ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καθεστῶ στήλῃ γεγραμμένων πρώτων ἀριθμῶν. Θέλωμεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητά

$$12936 = 2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—Εἵπομεν ἀνωτέρω ὅτι δοκιμαζόμεν τοσάκις διαιρετέον τινά, ὅσας ἢ δι' αὐτοῦ διαίρεσις τῶν διαδοχικῶς εὑρισκόμενων πηλίκων εἶναι δυνατή. Ἀλλ' ἄρα εὐρωμεν πηλίκον τι μὴ διαιρετὸν διὰ τοῦ δοκιμαζομένου πρώτου ἀριθμοῦ, πρέπει νὰ παύσωμεν εἰς τὸ μετὰ ταῦτα τὴν δι' αὐτοῦ πρὸς διαίρεσιν δοκιμὴν τῶν ἀκολουθῶν πηλίκων. Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν εὑρισκόμενων πηλίκων εἶναι προφανῶς πολλαπλάσιόν τι τῶν πρὸ αὐτοῦ γεγραμμένων, ἂν πρῶτος τις ἀριθμὸς δὲν διαίρη πηλίκον τι τῶν πρὸ αὐτοῦ, οὔτε τὰ ὑποπολλαπλάσια αὐτοῦ δύναται νὰ διαίρῃ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2.—Ἡ ἀποσύνθεσις ἀριθμοῦ τινος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας ἐκτελεῖται ταχύτερον, ὅταν δυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν ἀμέσως αὐτὸν εἰς γινόμενον δύο παραγόντων. Διότι τότε, ἀποσυνθέτοντες ἑκάτερον τῶν παραγόντων τούτων ὡς ἀνωτέρω ἐφάρθη εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας καὶ σχηματίζοντες τὸ γινόμενον τῶν εὑρεθησομένων παραγόντων, θέλομεν εἶδει τὸ ἴσον τῷ δεδομένῳ ἀριθμῷ γινόμενον τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων.

Παραδείγματός χάριν, ἂν εἴχομεν ν' ἀποσυνθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2400 εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, ἐπειδὴ ὁ 2400 εἶναι προφανῶς ἴσος τῷ γινόμενῳ 24×100 , καὶ ὁ μὲν 24, ἀποσυνθεῖς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, εὑρίσκεται ἴσος τῷ γινόμενῳ $2^3 \times 3$, ὁ δὲ 100 ἴσος τῷ $2^2 \times 5^2$, ὁ 2400 θέλει προφανῶς εἶναι ἴσος τῷ γινόμενῳ τῶν εὑρεθέντων δύο γινόμενων $2^3 \times 3$ καὶ $2^2 \times 5^2$, συνεπὶς θέλομεν ἔχει

$$2400 = 2^3 \times 3 \times 2^2 \times 5^2 = 2^5 \times 3 \times 5^2.$$

88. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἀριθμὸς τῶν A εἶναι διαίρετός δι' ἑτέρου τινὸς B , ὅταν οἱ πρώτοι παράγοντες τοῦ B εὑρίσκωνται μετὰ τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ A καὶ ἔχωσιν ἐκθέτας μικροτέρας ἢ τὰς πολὺ ἴσους μὲ τοὺς ἀντιστοιχοῦντες ἐκθέτας τῶν αὐτῶν παραγόντων τοῦ A .

Παραδείγματός χάριν, ὁ ἀριθμὸς A , ὁ παριστώμενος διὰ τοῦ γινόμενου $2^3 \times 3 + 5^4 \times 7$, θέλει εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ B , τοῦ διὰ τοῦ γινόμενου $2^2 \times 5^2 \times 7$ παριστωμένου, ἂν οἱ πρῶτοι τοῦ B παράγοντες 2, 5, 7 εὑρίσκωνται μετὰ τῶν πρώτων παραγόντων 2, 3, 5, 7 τοῦ A καὶ οἱ ἐκθέται αὐτῶν 2, 2, 1 ᾖναι μικρότεροι ἢ

τὸ πολὺ ἴσαι, μὲ τοὺς ἀντιστοιχοὺς ἐκθέτας 3, 4, 1 τῶν αὐτῶν παραγόντων τοῦ Α.

Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν διαίρεσιν ἐκτελεσθεῖσαν καὶ καλέσωμεν Π τὸ πηλίκον, θέλωμεν ἔχει

$$A = B \times \Pi.$$

Τώρα, ὁποιουδήποτε καὶ ᾗν ὑποτεθῇ τὸ Π , ἐὰν τὸ Β περιέχῃ παράγοντά τινα μὴ περιεχόμενον ἐν τῷ Α, ἢ ἀνωτέρω ἰσότητος εἶναι ἀδύνατος κατὰ τὰ ἐν τῇ § 86 ἀποδειχθέντα· ἐὰν δὲ πάλιν παράγων τις τοῦ Α ὑπάρχῃ καὶ ἐν τῷ Β, ἄλλ' ἔχει ἐκθέτην μεγαλειτέρον ἐν τῷ Β ἢ ἐν τῷ Α, εἶναι ἐπίσης φανερόν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἰσότης εἶναι ἀδύνατος διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ὅταν δὲ οἱ παράγοντες τοῦ Β εὑρίσκωνται μετὰξὺ τῶν παραγόντων τοῦ Α καὶ ἔχωσιν ἐκθέτας μικροτέρους ἢ τὸ πολὺ ἴσους μὲ τοὺς ἀντιστοιχοὺς ἐκθέτας τῶν αὐτῶν παραγόντων τοῦ Α, εἶναι καταφανές ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι πάντοτε δυνατή. Διότι τότε δυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων τοῦ Α εἰς δύο μερικὰ γινόμενα, ὧν τὸ ἕτερον νὰ ἦναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων τοῦ Β, τὸ δὲ ἕτερον θέλει παριστᾷ προφανῶς τὸ διὰ Π παρασταθὲν πηλίκον τῆς διαίρεσεως τοῦ Α διὰ Β.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $A = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$ καὶ $B = 2^2 \times 5^2 \times 7$, δυνάμεθα νὰ ἀποσυνθέσωμεν τὸ Α εἰς δύο μέρη $2^2 \times 5^2 \times 7$ καὶ 2×3 , ὧν τὸ πρῶτον $2^2 \times 5^2 \times 7$ νὰ ἦναι ἴσον τῷ Β. Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ ἕτερον 2×3 θέλει εἶναι ἴσον τῷ ζητούμενῳ πηλίκῳ Π , διότι τὸ γινόμενον $B \times \Pi$, ἦτοι τὸ $(2^2 \times 5^2 \times 7) \times (2 \times 3)$, εἶναι ἴσον τῷ Α, ἦτοι $2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$.

*89. Ἐπὶ τοῦ παραποδειχθέντος θεωρήματος στηριζόμενοι δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν ἅπαντας τοὺς διαιρέτας ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἀποσυνθετιμένου εἰς τοὺς πρῶτους αὐτοῦ παράγοντας. Ἐστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 504, ὅστις ἀποσυνθετίζεται εἰς τοὺς πρῶτους αὐτοῦ παράγοντας εὑρίσκεται ἴσος τῷ γινόμενῳ $2^3 \times 3^2 \times 7$. Ἀς σχηματίσωμεν τὸν ἐξῆς πίνακα

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 2^2, & 2^3, \\ 1, & 3, & 3^2, & \\ 1, & 7, & & \end{array} \quad (1)$$

ὅστις περιέχει τὴν ὅλην ὀρίζαντίαν σειρὰν, ὅσοι εἶναι οἱ διαιρέσοι παράγοντες τοῦ γινόμενου $2^3 \times 3^2 \times 7$, καὶ ἐκάστη τῶν ὑποίων ἀοπτέ-

λείπει ἐκ τῆς 1 ἀκολουθομένης ὑπὸ πλῶν τῶν δυνάμεων ἑκάστου
τῶν παραγόντων αὐτοῦ ἀπὸ τῆς πρώτης δυνάμεως μέχρι τῆς ἐν τῷ
γινομένῳ $2^3 \times 3^2 \times 7$ περιεχομένης. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἑκάστον
τῶν ὄρων τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἑκάστον τῶν τῆς δευτέρας, ἔπειτα
ἑκάστον τῶν ὄρων τῶν εὐρεθησομένων γινομένων

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 2^2, & 2^3 \\ 3, & 2 \times 3, & 2^2 \times 3, & 2^3 \times 3 \\ 3^2, & 2 \times 3^2, & 2^2 \times 3^2, & 2^3 \times 3^2 \end{array} \quad (2)$$

ἐφ' ἑκάστον τῶν ὄρων τῆς τρίτης σειρᾶς, εἵναι φανερόν α) ὅτι ἑκά-
στον τῶν οὕτως εὐρεθησομένων γινομένων

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 2^2, & 2^3 \\ 3, & 2 \times 3, & 2^2 \times 3, & 2^3 \times 3 \\ 3^2, & 2 \times 3^2, & 2^2 \times 3^2, & 2^3 \times 3^2 \\ 7, & 2 \times 7, & 2^2 \times 7, & 2^3 \times 7 \\ 3 \times 7, & 2 \times 3 \times 7, & 2^2 \times 3 \times 7, & 2^3 \times 3 \times 7 \\ 3^2 \times 7, & 2 \times 3^2 \times 7, & 2^2 \times 3^2 \times 7, & 2^3 \times 3^2 \times 7, \end{array} \quad (3)$$

θέλει εἶναι διαιρέτης τοῦ γινομένου $2^3 \times 3^2 \times 7$, τοῦ περισσώτερου τῶν
δεδομένων ἀριθμῶν 504, καὶ β') ὅτι πᾶς διαιρέτης τοῦ 504 θέλει
εἶναι ἴσος τινὶ τῶν ἀνωτέρω γινομένων διότι πρέπει οἱ πρῶτοι πα-
ράγοντες αὐτοῦ νὰ περιέχωνται μεταξὺ τῶν πρώτων παραγόντων
τοῦ γινομένου $2^3 \times 3^2 \times 7$ καὶ νὰ ἔχωσιν ἐκθέτας ἀμειψαίως μικρο-
τέρους ἢ τὸ πολὺ ἴσους, καθ' ὃν δὲ τρόπον εὐρέθησαν τὰ ἀνωτέρω γι-
νόμενα, ὁ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελούμενος πίναξ (3) περιέχει πάντα τὰ
δυνατὰ γινόμενα τῶν ἐν τῷ πίνακι (1) ἀριθμῶν, συνδυαζομένων ἀνὰ
τρεις καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

90. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἐὰν ἔχωμεν δύο ἢ πλεονέστερους ἀριθμοὺς ἀπο-
σπριττειμένους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ σχημα-
τίσωμεν γινόμενον ἐκ τῶν κοιτῶν εἰς αὐτοὺς παραγόντων, δάδοι-
ται εἰς ἑκάστον τούτων ἐκθέτην τὸν μικρότερον τῶν ἐν τοῖς δεδο-
μένοις γινόμενοις ἐκθετῶν αὐτῶν, τὸ οὕτω σχηματισθησόμενον
γινόμενον θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων
ἀριθμῶν.

Ἄς υποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν

$$A = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7,$$

$$B = 2^2 \times 3^3 \times 7^2 \times 11,$$

$$F = 2 \times 3^3 \times 7^5 \times 13.$$

Ἐάν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν παρχόντων 2, 3 καὶ 7, δίδοντες εἰς ἕκαστον τὸν μικρότερον τῶν ἐν αὐτοῖς ἐκθέτων, τὸ αὐτῷ σχηματισθησόμενον γινόμενον $2 \times 3^2 \times 7$ θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν Α, Β καὶ Γ. Διότι

1^η. Τὸ γινόμενον $2 \times 3^2 \times 7$ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν. Διότι καθ' ὃν τρόπον ἐσχηματίσθη, οἱ παρχόντες αὐτοῦ περιέχονται μεταξύ τῶν πρώτων παρχόντων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν καὶ ἔχουσιν ἐκθέτας μικροτέρους ἢ τὸ πολὺ ἴσους με τοὺς τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

2^η. Εἶναι ὁ μέγιστος πάντων. Διότι πρῶτον δὲν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ παριστῶν αὐτὸν γινόμενον $2 \times 3^2 \times 7$ οὐδέν τι ἄλλον μὴ κοινόν παρχόντα· διότι τότε δὲν ἤθελε διαίρει τὸν ἀριθμὸν ἢ τοὺς ἀριθμοὺς, οἵτινες δὲν ἤθελον ἔχει τὸν προστεθέντα εἰς τὸ γινόμενον $2 \times 3^2 \times 7$ μὴ κοινόν παρχόντα. δεύτερον δὲν δυνάμεθα οὔτε ν' αὐξήσωμεν τὸν ἐκθέτην κοινοῦ τινος παρχόντος τοῦ γινομένου $2 \times 3^2 \times 7$, διότι τότε ὁ ἀριθμὸς, ὁ ἔχων τὸν αὐτὸν παρχόντα μὲ ἐκθέτην μικρότερον, δὲν ἤθελε διαίρεσθαι διὰ τοῦ νέου γινομένου, ἐπομένως τὸ νέον γινόμενον δὲν ἤθελεν εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Λοιπὸν τὸ ὡς προείπομεν σχηματιζόμενον γινόμενον $2 \times 3^2 \times 7$ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν Α, Β καὶ Γ.

Δὲν δυνάμεθα, λόγου χάριν, νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ ἀνωτέρω γινόμενον $2 \times 3^2 \times 7$ τὸν παρχόντα 5· διότι τότε τὸ προκύπτον γινόμενον $2 \times 3^2 \times 7 \times 5$ δὲν ἤθελε διαίρει τοὺς ἀριθμοὺς Β καὶ Γ, τοὺς μὴ περιέχοντας τὸν παρχόντα τοῦτον. Δὲν δυνάμεθα οὔτε ν' αὐξήσωμεν τὸν ἐκθέτην τινὸς τούτων, λόγου χάριν τοῦ 7· διότι τότε τὸ νέον γινόμενον $2 \times 3^2 \times 7^2$ δὲν ἤθελε διαίρει τὸν ἀριθμὸν Α, ἐν ᾧ ὁ 7 ἔχει ἐκθέτην μικρότερον.

ΠΕΡΙ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ ΔΥΟ ἢ ΠΛΕΙΟΤΕΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

91. Ἀριθμὸς τις λέγεται κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ πλεοτέρων ἄλλων, ὅταν ἦναι διαιρετὸς δι' ἑκάστου τούτων. Παραδείγματι· χάριν, ὁ 60 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ 4 καὶ 5, διότι διαίρεται ἀκριβῶς διὰ 4 καὶ διὰ 5. Ὁ 30 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 5, διότι διαίρεται δι' ἑνὸς ἑκάστου αὐτῶν.

Εἶναι φανερόν ὅτι τὰ κοινὰ πολλαπλάσια δύο ἢ πλεοτέρων ἀρι-

θμῶν εἶναι ἄπειρα. Διότι πᾶν γινόμενον κοινού τινος πολλαπλάσιον ἐπὶ τινι ἀριθμῶν θέλει εἶναι νέον κοινόν πολλαπλάσιον τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, ὧν ἦτο κοινόν πολλαπλάσιον (54). Μεταξὺ ὅμως τῶν κοινῶν πολλαπλάσιων ὑπάρχει ἓν μικρότερον πάντων, ὅπερ καλεῖται ἐλάχιστος κοινὸν πολλαπλάσιον.

Εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἡ εὕρεσις τοῦ ἐλάχιστου κοινοῦ πολλαπλάσιου δεδομένων ἀριθμῶν εὐκολύνει μάλλων τὴν ταχείαν ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν τινων πράξεων, εὐρίσκεται δὲ τοῦτο διὰ τοῦ ἐξῆς θεωρήματος ἡ κανόνος.

92. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἐὰν ἔχωμεν δύο ἢ περισσότερους ἀριθμοὺς ἀποσυνθετιμένους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εὐρίσκεται σχηματιζομένου τοῦ γινόμενου πάντων τῶν κοινῶν τε καὶ μὴ εἰς τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς παραγόντων, λαμβανομένου ἐκάστου κοινοῦ τε καὶ μὴ τὸν μεγαλύτερον τῶν ἐν τοῖς δεδομένοις ἀριθμοῖς ἐκθετῶν αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἐλάχιστον κοινόν πολλαπλάσιον τῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας ἀποσυνθετιμένων ἀριθμῶν

$$A=2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7.$$

$$B=2^2 \times 3^3 \times 7^2 \times 11^2.$$

$$\Gamma=2 \times 3^5 \times 7^3 \times 13$$

εἶναι τὸ γινόμενον $2^3 \times 3^5 \times 5 \times 7^3 \times 11^2 \times 13$, ὅπερ σχηματίζομεν λαμβάνοντες ὅλους τοὺς κοινούς τε καὶ μὴ παράγοντας τῶν δεδομένων ἀριθμῶν A, B, Γ, καὶ διδόντες εἰς ἕκαστον κοινόν τε καὶ μὴ παράγοντα τὸν μεγαλύτερον τῶν ἐν αὐτοῖς ἐκθετῶν αὐτοῦ. Εἰς τὸν 2 λόγου χάριν ἐδώσαμεν τὸν ἐκθέτην 3, διότι εἶναι ὁ μεγαλύτερος πάντων τῶν ἐκθετῶν 1, 2, 3 αὐτοῦ εἰς τὸν 3 τὸν ἐκθέτην 5, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἰς τὸν 11 τὸν ἐκθέτην 2 κτλ.

Πρὸς ἀποδείξιν τοῦ ἀνωτέρου θεωρήματος ἡ κανόνος πρέπει ν' ἀποδείξωμεν δύο πινά.

1^{ον}. Ὅτι τὸ σχηματιζόμενον γινόμενον $2^3 \times 3^5 \times 5 \times 7^3 \times 11^2 \times 13$ εἶναι κοινόν πολλαπλάσιον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, καὶ

2^{ον}. Ὅτι εἶναι τὸ ἐλάχιστον πάντων.

1^{ον}. Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος γινόμενον εἶναι κοινόν πολλαπλάσιον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν A, B καὶ Γ, διότι περιέχει ὅλους τοὺς παράγοντας ἑκάστου τούτων μὲ τὸν μεγαλύτερον τῶν ἐν αὐτοῖς ἐκθετῶν. Ἐπομένως διαιρεῖται δι' ἑκάστου αὐτῶν (88).

2ον. Εἵναι τὸ ἐλάχιστον πάντων. Διότι δὲν δυνάμεθα οὔτε ν' ἀφαιρέσωμεν μὴ κοινόν τινα παράγοντα, (διότι τότε δὲν ἤθελε διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἢ διὰ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐμπεριεχόντων τὸν ἐξαλειφθέντα παράγοντα), οὔτε νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν ἐκθέτην παράγοντός τινος, (διότι τότε δὲν ἤθελε διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ἔχοντος τὸν παράγοντα τοῦτον εἰς ἀνωτέρην δύναμιν). Λοιπὸν τὸ οὕτω σχηματιζόμενον γινόμενον θέλει εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινόν^{ον} πολλαπλάσιον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Λόγου χάριν, δὲν ἠδυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ γινομένου $2^3 \times 3^5 \times 5 \times 7^3 \times 11^2 \times 13$ τὸν μὴ κοινόν παράγοντα 11^2 , διότι τότε τὸ γινόμενον $2^3 \times 3^5 \times 5 \times 7^3 \times 13$ δὲν ἤθελε διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ Β, τοῦ περιέχοντος τὸν ἐξαλειφθέντα παράγοντα 11^2 . Δὲν δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν ἐκθέτην κοινοῦ τινος παράγοντος, τοῦ 3 λόγου χάριν, διότι τότε τὸ νέον γινόμενον $2^3 \times 3^4 \times 5 \times 7^3 \times 11^2 \times 13$ δὲν ἤθελε διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ Γ, τοῦ ἔχοντος τὸν παράγοντα 3 μὲ ἀνωτέρον ἐκθέτην.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Διὰ πόσων πρώτων ἀριθμῶν, ἀρχόμενοι τῆς διαιρέσεως ἀπὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ 2, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4111, ὥπως ἀποφανθῶμεν μετὰ βεβαιότητος ἐν ἦναι ἢ μὴ πρῶτος;

II. Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 308 καὶ 280;

III. Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 1540 καὶ 3643;

IV. Νὰ ἀποσυντεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 630, 650 καὶ 924 εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.

V. Νὰ εὑρεθῇ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν 630, 650 καὶ 924 ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινόν πολλαπλάσιον.

VI. Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 10, 25, 27, καὶ ποῖον τὸ ἐλάχιστον κοινόν πολλαπλάσιον αὐτῶν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

ΚΛΑΣΜΑΤΑ.

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ.

93. Μέγεθος καλεῖται πᾶν τὸ ἐπιδεκτικὸν αὐξήσεως ἢ ἐλάττωσεως. Παραδείγματος χάριν, τὰ μήκη, αἱ ἐπιφάνειαι, τὰ βάρη τῶν σωμάτων εἶναι μεγέθη.

Ὅταν μέγεθός τι περιέχῃ ἀκριβῶς δευτέρον τι μέγεθος τοῦ αὐτοῦ εἶδους δις, τρίς, τετράκις, κτλ., τὸ πρῶτον λέγεται τότε *πολλὰ πλάσιον* τοῦ δευτέρου. Ἀντιστρόφως τὸ δευτερον μέγεθος καλεῖται ὑποπολλὰ πλάσιον ἢ πολλοστόν μέρος τοῦ πρώτου.

Μονὰς καλεῖται μέγεθός τι κατ' ἀρέσκειαν ληθέν, ἀλλ' ἐντελῶς ὀρισμένον, δι' οὗ μετροῦμεν τὰ τοῦ αὐτοῦ εἶδους μεγέθη. Μετροῦμεν δὲ μέγεθός τι, ὅταν προσδιορίζωμεν πόσας μονάδας καὶ πόσα πολλοστὰ μέρη τῆς μονάδος περιέχει τοῦτο.

Πρὸς τὸ παρὸν δὲν θέλωμεν θεωρήσει εἰμὴ τὰς δύο ἀπλουστέρας τῆς καταμετρήσεως τῶν μεγεθῶν περιπτώσεις· τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ πρὸς καταμέτρησιν μέγεθος εἶναι πολλαπλάσιόν τι τῆς μονάδος, καὶ ἐκείνην, καθ' ἣν εἶναι πολλαπλάσιον πολλοστοῦ τινος μέρους αὐτῆς.

1ον. Ὅταν τὸ πρὸς καταμέτρησιν μέγεθος ᾗται πολλὰ πλάσιόν τ' τῆς μονάδος. Ἐὰν υποθέσωμεν, π. χ., ὅτι πρόκειται περὶ μήκους, περιέχοντος τετράκις τὴν ὀρισθεῖσαν μονάδα, τότε ὁ ἀριθμὸς 4 θέλει ἐκφράζει τὸ μέτρον τοῦ μήκους τούτου· ἐν ἄλλαις λέξεσι, τὸ μήκος θέλει παρίστασθαι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 4.

2ον. Ὅταν τὸ πρὸς καταμέτρησιν μέγεθος ᾗται πολλὰ πλάσιόν τι πολλοστοῦ τινος μέρους τῆς μονάδος. Ἄς λάβωμεν ὡς προηγουμένως μῆκός τι, καὶ ἄς υποθέσωμεν ὅτι, τῆς μονάδος διαιρεθείσης εἰς 7 ἴσα μέρη, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος μῆκος περιέχει 5 ἐκ τῶν ἴσων τούτων μερῶν. Λέγομεν τότε ὅτι τὸ μῆκος περιέχει κλάσμα τ' τῆς μονάδος ἴσον μὲ τὰ 5 εἶδοςμα αὐτῆς, ἢ ὅτι μέτρον αὐ-

τοῦ εἶναι τὸ κλάσμα 5 ἑβδομα. Ἀς θεωρήσωμεν πρὸς τούτοις χρονικόν τι διάστημα, καὶ ἂς υποθέσωμεν ὅτι, τῆς χρονικῆς μονάδος διαιρεθείσης εἰς 12 ἴσα μέρη, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος χρονικὸν διάστημα περιέχει 35 τοιαῦτα. Τότε μέτρον τοῦ ληφθέντος χρονικοῦ διαστήματος θέλει εἶναι τὸ κλάσμα 35 δωδέκατα.

Καθ' ὅλας τὰς περιπτώσεις τὸ ἐξαγόμενον τῆς καταμετρήσεως μεγέθους τινὸς καλεῖται ἀριθμός.

Ὅταν μέγεθός τι ἦναι πολλαπλάσιον τῆς μονάδος, ὁ ἐκπράζων τὸ μέτρον αὐτοῦ ἀριθμὸς λέγεται ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ ἀπλῶς ἀκέραιος. Μέχρι τοῦδε ἐγένετο ἀποκλειστικῶς λόγος περὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, οὓς ἐθεωρήσαμεν ὡς ἐκπράζοντας συλλογὴν ὁμοίων καὶ διακεκριμένων ἀντικειμένων.

Ὅταν μέγεθός τι ἦναι πολλαπλάσιόν τι πολλοστοῦ τινος μέρους τῆς μονάδος, ὁ τὸ μέτρον αὐτοῦ ἐκπράζων ἀριθμὸς καλεῖται κλασματικός ἀριθμὸς ἢ ἀπλῶς κλάσμα.

Ὅταν τὰ μεγέθη παρίστανται δι' ἀριθμῶν, τότε καλοῦνται μερικώτερον ποσότητες. Ἡ λέξις λοιπὸν ποσότης υποθέτει καταμετρητὴν μέγεθος, ἢ ὡς τοιοῦτο θεωρούμενον.

Οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀφηρημένοι ἢ συγκεκριμένοι. Ἀφηρημένος ἀριθμὸς καλεῖται ὁ τὸ μέτρον μεγέθους τινὸς ἢ ποσοῦ τινος παριστῶν χωρὶς νὰ ἐκπράξῃ καὶ τὸ εἶδος τοῦ ὑπ' αὐτοῦ παριστωμένου μεγέθους ἢ ποσοῦ ὡς ὅταν λέγωμεν π. χ. ὁ ἀριθμὸς 5, ὁ ἀριθμὸς 12, χωρὶς νὰ ἐκπράζωμεν καὶ τί 5 καὶ τί 12. Συγκεκριμένος δὲ λέγεται ὁ ἀριθμὸς, ὁ ἐκπράζων συνάμα καὶ τὸ εἶδος τοῦ μεγέθους ἢ τοῦ ποσοῦ, οὗτινος παριστᾷ τὸ μέτρον. Π. χ. ὅταν λέγωμεν 5 πῆλεις, 8 ὥραι, 3 ἄνθρωποι.

Αἱ μαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι, ὧν τὸ πρῶτον μέρος ἀπετελεῖ ἡ ἀριθμητικὴ, ἀντικείμενον ἔχουσι τὰ μεγέθη.

ΠΕΡΙ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

94. Κατὰ τὰ προλεχθέντα πρὸς σχηματισμὸν κλάσματός τινος διαιροῦμεν τὴν μονάδα εἰς ἀριθμὸν τινα ἴσων μερῶν καὶ λαμβάνομεν ἐν ἡ πλείοτερα τῶν μερῶν τούτων. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων μερῶν, εἰς 2 διηρέσαμεν τὴν μονάδα, καλεῖται παρονομαστής τοῦ κλάσματος, ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ ἐκπράζων πόσα τῶν ἴσων τούτων μερῶν ἐλάβομεν, ἀριθμητής. Ὁ ἀριθμητής καὶ παρονομαστής, ὁμοῦ λαμβανόμενοι, καλοῦνται ὅροι τοῦ κλάσματος. Τοῦ κλάσματος λοιπὸν 5 ἑβδομα

παρονομαστής εἶναι ὁ 7, ἀριθμητὴς ὁ 5, καὶ οἱ δύο ὁμοῦ, 5 καὶ 7, ὅροι αὐτοῦ.

Πρὸς γραφὴν κλάσματός τινος γράφομεν τὸν παρονομαστήν ὑπὸ τὸν ἀριθμητὴν καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς δι' ὀριζοντίου γραμμῆς. Οὕτω $\frac{5}{7}$ παριστᾷ τὸ κλάσμα, τὸ ἔχον παρονομαστήν 7 καὶ ἀριθμητὴν 5.

Πρὸς ἀπαγγελίαν κλάσματός τινος ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ, ἔπειτα τὸν παρονομαστήν αὐτοῦ ὡς τακτικὸν ἀριθμὸν. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ ἀπαγγέλλεται πέντε ἑβδόμα· τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ ἀπαγγέλλεται ὅκτω ἐκδοκατα. Μία μόνη ἐξαίρεσις ὑπάρχει· τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ λέγεται καὶ ἓν δευτερον καὶ ἡμισυ.

95. Κατὰ τὸν ὅρισμόν τῶν κλασμάτων εἶναι φανερόν ὅτι κλάσμα τι εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ᾖ μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ· εἶναι ἴσον τῇ μονάδι, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ᾖ ἴσος τῷ παρονομαστῇ, καὶ μεγαλύτερον τῆς μονάδος, ὅταν ὁ μὲν ᾖ ἴσος καὶ ὁ μὲν ᾖ μεγαλύτερος τοῦ δέ. Ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιπτώσει εἶναι ἀναγκάσιον πολλῶς νὰ ἐξαγάγωμεν τὰ ἐν τῷ κλάσματι περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας, ἢ ὡς λέγουσιν ἀπλοῦστερον, τὸν ἐν τῷ κλάσματι περιεχόμενον ἀκεραῖον.

*Ἐστὼ π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{33}{7}$. Ἐπειδὴ ἡ μονὰς περιέχει 7 ἑβδόμα, πρέπει πρὸς εἴρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ κλάσματι $\frac{33}{7}$, νὰ ζητήσωμεν πόσῳ τὰ 33 ἑβδόμα περιέχουσιν 7 ἑβδόμα, ἢ, ὅπερ ταύτῃ, πόσῳ ὁ 33 περιέχει τὸν 7. Διακρούοντες πρὸς τοῦτο τὸν 33 διὰ τοῦ 7 εὐρίσκωμεν πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 5. Λοιπὸν τὰ 33 ἑβδόμα τῆς μονάδος περιέχουσι τετράκις 7 ἑβδόμα καὶ 5 ἑβδόμα ἀκόμη, τοῦθ' ὅπερ παριστῶμεν διὰ τῆς ἑξῆς ἰσότητος

$$\frac{33}{7} = 4 + \frac{5}{7}.$$

Ἐξαγάγωμεν ἀπλῶς 4, διότι ὑπεννοεῖται ἡ λέξις μονὰς, ἥτις ὡς προεῖπόμεν εἶναι ἴση μὲ 7 ἑβδόμα.

Τὸ ἄριστον $4 + \frac{5}{7}$ καλεῖται καὶ μικτὸς ἀριθμὸς, ὡς συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος.

Λοιπὸν, πρὸς εἴρεσιν τοῦ ἐν τῷ κλάσματι περιεχομένου ἀκεραίου ἀρκεῖ νὰ ζητήσωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαίρεσεως τοῦ ἀριθμοῦ

μητοῦ αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ. Προσθέτορτες δὲ εἰς τὸ εὐρεθισόμενον πληκτικόν κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως καὶ παρονομαστὴν τὸν τοῦ δεδομένου κλάσματος, θέλομεν ἔχει ἄθροισμα ἴσον τῷ περὶ οὗ ὁ λόγος κλάσματι ἐν ἁλλαῖς λέξεσιν, ἀναπαριστῶμεν οὕτω τὴν ἀξίαν τοῦ αὐτοῦ κλάσματος.

96. Ἀντιστρόφως, ὅταν ἔχωμεν μικτόν τινα ἀριθμόν, πολλάκις εἶναι ἀναγκαῖον νὰ τρέψωμεν αὐτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν.

Ἐστω π. χ. ὁ μικτός $4 + \frac{5}{7}$. Ἐπειδὴ ἐκάστη μονὰς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς περιέχουσα 7 ἑβδομα, αἱ 4 μονάδες θέλουσι περιέχει τετράκις 7 ἑβδομα, ἢ 4×7 ἑβδομα. Λοιπὸν ὑπάρχουσιν ἐν τῷ δεδομένῳ μικτῷ $4 + \frac{5}{7}$ τετράκις 7 ἑβδομα, ἥτοι 28 ἑβδομα, καὶ 5 ἑβδομα ἀκόμη, τὸ ὅλον 33 ἑβδομα. Θέλομεν ἔχει λοιπὸν τὴν ἰσότητά

$$4 + \frac{5}{7} = \frac{33}{7},$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα τὸν ἐξῆς κανόνα·

Πρὸς τροπὴν δεδομένου μικτοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος του, εἰς τὸ εὐρεθισόμενον γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ αὐτοῦ κλάσματος, καὶ ἑπὶ τὸ εὐρεθισόμενον ἄθροισμα γράφομεν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ὁ κανὼν, δι' οὗ ἐξάγομεν τὸν ἐν τινι κλάσματι περιεχόμενον ἀκέραιον, παρέχει τὴν ἐξῆς οὐσιώδη συνέπειαν. Διὰ τὰ διττά κλάσμα τι νὰ ἀναχθῇ εἰς ἀκέραιον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ νὰ ᾖ διαιρετὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ. Εὐρίσκομεν π. χ. ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{28}{7}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀκέραιον 4, διότι ὁ ἀκέραιος ἀριθμητὴς αὐτοῦ 28 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ 7.

97. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος τινος γίνῃται δις, τρίς, τετράκις, κτ.λ. μεγαλειότερος ἢ μικρότερος, τὸ κλάσμα γίνῃται δις, τρίς, τετράκις, κτ.λ. μεγαλειότερον ἢ μικρότερον.

Ἐστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{7}{3}$. Πολλαπλασιάζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ ἐπὶ 3, τὸ κλάσμα γίνῃται $\frac{21}{3}$. λέγω δὲ ὅτι τὸ νέον τοῦτο κλάσμα εἶναι τρίς μεγαλειότερον τοῦ πρώτου. Διότι τὰ περὶ ὧν ὁ

λόγος δύο κλάσματι συντίθενται ἀμρότερα ἐξ ἐνάτων τῆς μονάδος, ἀλλὰ τὸ μὲν πρῶτον περιέχει 7 τοιαῦτα, τὸ δὲ δεύτερον 7×3 , ἑαυτέστι τρίς περισσώτερα τοῦ πρώτου. Λοιπὸν τὸ δεύτερον κλάσμα εἶναι προφανῶς τριπλάσιον τοῦ πρώτου.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ γίνεται τρίς μεγαλείτερον τριπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ, ἔπεται ὅτι καὶ ἀντιστρόφως, τὸ οὕτω προκύπτον κλάσμα $\frac{3}{2}$ γίνεται τρίς μικρότερον διαιρουμένου τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ 7×3 διὰ 3.

98. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Διπλασιαζόμενον, τριπλασιαζόμενον, κτ.λ. τοῦ παρονομαστοῦ κλάσματός τινος, τὸ κλάσμα γίνεται δις, τρίς, κτ.λ. μικρότερον, καὶ ἀντιστρόφως διαιρουμένου τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ διὰ 2, 3, 4, κτ.λ. τὸ κλάσμα γίνεται δις, τρίς, τετράκις, κτ.λ. μεγαλείτερον.

Ἐστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$. Πολλαπλασιαζόμενον τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ ἐπὶ 3, τὸ κλάσμα γίνεται $\frac{5}{21}$ · λέγω δὲ ὅτι τὸ νέον τοῦτο κλάσμα εἶναι τρίς μικρότερον τοῦ πρώτου. Διότι προφανῶς, ἵνα διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς 7×3 ἴσα μέρη, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὴν πρῶτον εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα ἕν ἕκαστον τῶν 7 τούτων ἴσων μερῶν εἰς 3 ἴσα μέρη· ἔπεται λοιπὸν ὅτι τὸ $\frac{5}{7}$ τῆς μονάδος περιέχει τρίς τὸ $\frac{5}{21}$ αὐτῆς. Λοιπὸν ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς μονάδος θέλουσι περιέχει τρίς τὰ $\frac{5}{21}$ αὐτῆς. Ἐν ἄλλαις λοιπὸν λέξεσι τὸ νέον κλάσμα $\frac{5}{21}$ θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{5}{7}$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ γίνεται τρίς μικρότερον τριπλασιαζόμενον τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ, ἔπεται ὅτι καὶ ἀντιστρόφως, τὸ οὕτω προκύπτον κλάσμα $\frac{7}{5}$ γίνεται τρίς μεγαλείτερον διαιρουμένου τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ διὰ 3.

99. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Κλάσμα τι δὲν μεταβάλλεται πολλαπλασιαζόμενον ἢ διαιρουμένον καὶ τῶν δύο αὐτοῦ ὅρων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$. Πολλαπλασιαζόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ ἐπὶ 3, τὸ νέον κλάσμα $\frac{15}{7}$ εἶναι τρίς μεγαλείτερον τοῦ $\frac{5}{7}$, πολλαπλασιαζόμενον δὲ ἀρ' ἑτέρου τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δευτέρου

τούτου κλάσματος $\frac{5X^3}{7}$ ἐπὶ 3, τὸ νέον κλάσμα $\frac{5X^3}{7 \times 3}$ γίνεται τρίς μικρότερον τοῦ $\frac{5X^3}{7}$. Ἄρα τὸ νέον κλάσμα $\frac{5X^3}{7 \times 3}$ εἶναι ἴσον τῷ πρώτῳ $\frac{5}{7}$, ὅπερ εἶναι ἐπίσης τὸ τρίτον τοῦ αὐτοῦ κλάσματος $\frac{5X^3}{7}$.

Λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ δὲν μεταβάλλεται πολλαπλασιαζομένων καὶ τῶν δύο αὐτοῦ ὅρων ἐπὶ 3. Καὶ ἀντιστρόφως τὸ κλάσμα $\frac{5X^3}{7 \times 3}$ μένει τὸ αὐτὸ διαιρουμένων καὶ τῶν δύο αὐτοῦ ὅρων διὰ 3.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΤΙΝΟΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΠΛΟΤΕΣΤΑΤΗΝ ΑΥΤΟΥ ΜΟΡΦΗΝ.

100. Κλάσμα τι λέγεται ἀνάγωγον, ὅταν δὲν δύναται νὰ ᾖναι ἴσον ἑτέρῳ τινὶ κλάσματι, ἔχοντι ὅρους μικροτέρους.

Ἀνάγωμεν κλάσμα τι εἰς τὴν ἀπλοτεστάτην αὐτοῦ μορφήν, ὅταν εὐρίσκωμεν τὸ ἴσον αὐτῷ ἀνάγωγον κλάσμα.

101. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἐὰν κλάσμα τι, οὔτενος οἱ ὅροι εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἦναι ἴσον δευτέρῳ τινὶ κλάσματι, οἱ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου τοῦτου κλάσματος θέλουσιν εἶναι τὰ αὐτὰ πολλαπλάσια τῶν δύο ὅρων τοῦ πρώτου.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$, οὔτενος οἱ δύο ὅροι εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι ἴσον ἑτέρῳ τινὶ κλάσματι, ἔχοντι ἀριθμητὴν ἀκεραῖον τινα ἀριθμὸν N καὶ παρονομαστὴν ἕτερον Δ. Λέγω ὅτι οἱ ὅροι N καὶ Δ τοῦ δευτέρου τούτου κλάσματος θέλουσιν εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὅρων 7 καὶ 8 τοῦ πρώτου.

Διότι πολλαπλασιάζοντες τοὺς ἀριθμητὰς 7 καὶ N τῶν δύο ἴσων κλασμάτων $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{N}{\Delta}$ ἐπὶ Δ, θέλωμεν ἔχει δύο νέα ἴσα κλάσματα $\frac{7 \times \Delta}{8}$ καὶ $\frac{N \times \Delta}{\Delta}$. Ἀλλ' ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος $\frac{N \times \Delta}{\Delta}$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ Δ καὶ δίδει πηλίκον N. Λοιπὸν τὸ νέον κλάσμα $\frac{7 \times \Delta}{8}$ εἶναι ἴσον τῷ ἀκεραίῳ ἀριθμῷ N. Θέλωμεν λοιπὸν γνῆναι τὴν ἰσότητα

$$N = \frac{7 \times \Delta}{8}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ N εἶναι ἀριθμὸς ἀκεραῖος, ὁ ἀριθμητὴς $7 \times \Delta$ τοῦ κλάσματος $\frac{7 \times \Delta}{8}$ πρέπει νὰ διαιρῇται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ 8.

Ἀλλ' ὁ 8 εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν παράγοντα 7 τοῦ γινομένου

7×Δ. Ἄρα πρέπει νά διαιρῇ τόν Δ (84). Ἐάν τώρα υποθέσωμεν ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ Δ διὰ 8 εἶναι 13, θέλομεν ἔχει $\Delta = 8 \times 13$, καὶ ἐπομένως, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητά (1) ἀντὶ τοῦ Δ τὸ ἴσον αὐτῷ 8×13 , θέλομεν ἔχει

$$N = 7 \times \Delta = 7 \times 8 \times 13 = 7 \times 104.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι οἱ ὅροι N καὶ Δ τοῦ κλάσματος $\frac{N}{\Delta}$, ὑπετέθη ἴσον τῷ $\frac{8}{8}$, τῷ ἔχοντι τοὺς ὅρους αὐτοῦ πρώτους πρὸς ἀλλήλους, εἶναι ἀμοιβαίως τὰ γινόμενα τοῦ 7 καὶ 8 ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 13, τοῦθ' ὅπερ ἐκφράζομεν συντομώτερον λέγοντες ὅτι N καὶ Δ εἶναι ἰσοπαλάσια τοῦ 7 καὶ 8.

102. Ἐκ τοῦ προαποδειχθέντος θεωρήματος ἔπεται ὅτι

Τὸ κλάσμα, τὸ ἔχον τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ πρώτους πρὸς ἀλλήλους, εἶναι ἀνάγωγον.

Διότι, κατὰ τὰ προηγουμένα, ὅταν κλάσμα τι ᾖ ἴσον ἑτέρῳ κλάσματι, ἔχοντι τοὺς ὅρους αὐτοῦ πρώτους πρὸς ἀλλήλους, οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι ἀριθμοὶ ἀμοιβαίως μεγαλειότεροι τῶν ὅρων τοῦ ἑτέρου κλάσματος. Λοιπὸν τὸ κλάσμα, τὸ ἔχον τοὺς ὅρους αὐτοῦ πρώτους πρὸς ἀλλήλους, εἶναι τὸ ἀπλούστερον πάντων τῶν ἴσων αὐτῷ ἥτις εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον.

Ἀντιστρόφως, οἱ δύο ὅροι ἀναγώγου τινὸς κλάσματος εἶναι ἀριθμοὶ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἂν οἱ δύο ὅροι τοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν ἦσαν πρώτοι πρὸς ἀλλήλους, διαιροῦντες αὐτοὺς διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, ἤθελομεν εὑρεῖ οὕτω κλάσμα ἴσον τῷ πρώτῳ καὶ ἀπλούστερον αὐτοῦ, ὅπερ ἐναντίον τῆς υποθέσεως.

Βλέπομεν ἐντεῦθεν ὅτι, ἵνα ἀναγάγωμεν κλάσμα τι εἰς τὴν ἀπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν, ἀρκεῖ νά διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Διότι οὕτω θέλομεν εὑρεῖ κλάσμα ἴσον τῷ δεδομένῳ καὶ ἔχον ὅρους ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους, ἐπομένως ἀνάγωγον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.—Ἐστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{252}{396}$. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ὅρων αὐτοῦ 252 καὶ 396 εἶναι ὁ 36. Διαιροῦντες διὰ τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ 252 καὶ 396 διὰ 36 εὐρίσκομεν ἀμοιβαίως πηλίκα 7 καὶ 11, ἅτινα εἶναι ἀριθμοὶ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους. Τὸ

δεδομένον λοιπόν κλάσμα $\frac{2\frac{2}{3}}{3\frac{2}{3}}$ θέλει εἶναι ἴσον τῷ ἀναγνώγῳ $\frac{2}{11}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—Ἐνίοτε ἐν τῇ πράξει καθιστῶμεν κλάσμα τι ἀνάγωγον ἀπαλείφοντες διαδοχικῶς ἀπὸ τῶν ὕψων αὐτοῦ τοὺς κοινούς παράγοντας, οὓς ἐκ πρώτης ὕψεως δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν. Ὅταν διὰ τῶν διαδοχικῶν τούτων ἀπαλείψεων φθάσωμεν εἰς κλάσμα, ἔχον ὅρους ἀρρήτους πρώτους πρὸς ἀλλήλους, τότε τὸ κλάσμα τοῦτο θέλει εἶναι τὸ ἴσον τῷ δεδομένῳ ἀνάγωγον κλάσμα.

Ἐστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{2\frac{2}{3}}{3\frac{2}{3}}$. Βλέπομεν ἀμέσως ὅτι οἱ δύο αὐτοῦ ὅροι ὡς ἀρτιοὶ διαιροῦνται διὰ τοῦ 2. Διαιρούμεν λοιπόν ἀμέσως διὰ 2 καὶ εὐρίσκωμεν τὸ ἴσον αὐτῷ νέον κλάσμα $\frac{1\frac{1}{3}}{1\frac{1}{3}}$. Ἐπειδὴ καὶ τοῦ δευτέρου τούτου κλάσματος οἱ ὅροι διαιροῦνται πάλιν διὰ 2, διαιρούμεν αὐτοὺς ἐκ νέου διὰ 2 καὶ εὐρίσκωμεν τὸ νέον κλάσμα $\frac{5}{9}$. Ἔτις, ἐπειδὴ τοῦ εὑρεθέντος τρίτου κλάσματος $\frac{5}{9}$ οἱ ὅροι διαιροῦνται διὰ 3, ἐκτελοῦμεν καὶ τὴν διαίρεσιν ταύτην καὶ εὐρίσκωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ὅροι 7 καὶ 11 τοῦ εὑρεθέντος κλάσματος $\frac{2}{3}$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ δεῦν κλάσμα $\frac{2\frac{2}{3}}{3\frac{2}{3}}$ ἀνήκει οὕτως εἰς τὴν ἀπλουστεύτην αὐτοῦ μορφήν, ἥτις εἶναι $\frac{2}{11}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2.—Ὅταν ἀνάγοντες κλάσμα τι εἰς τὴν ἀπλουστεύτην αὐτοῦ μορφήν εὐρωμεν διὰ παρονομαστήν αὐτοῦ τὴν μονάδα, εἶναι περιττόν νὰ γράψωμεν αὐτήν. Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{2\frac{2}{3}}{3\frac{2}{3}}$ ἀναγόμενον εἰς τὴν ἀπλουστεύτην αὐτοῦ μορφήν γίνεται $\frac{4}{4}$, ὅπερ παριστῶμεν ἀπλῶς διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ 4.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΔΥΟ ἢ ΠΛΕΙΟΤΕΡΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ Εἰς Τὸν Αὐτὸν Παρονομαστήν.

103. *Ἀνάγωμεν κλάσματά τινα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ὅταν εὐρίσκωμεν ἄλλα κλάσματα ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ πρῶτα καὶ ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.*

1^η. *Δύο κλάσματα ἀνάγονται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, εἰὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι ἑκατέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ ἑτέρου.*

Διότι τὰ οὕτω σχηματιζόμενα νέα κλάσματα θέλουσιν εἶναι ἀμοιβαίως ἴσα μὲ τὰ πρῶτα (99), καὶ θέλουσιν ἔχει παρονομαστήν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν πρῶτων.

Ἐστωσαν π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{3}{4}$. Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν παρονομαστήν 4 τοῦ δευτέρου, καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστήν 7 τοῦ πρώτου, εὐρίσκομεν τὰ κλάσματα

$$\frac{5 \times 4}{7 \times 4} \text{ καὶ } \frac{3 \times 7}{4 \times 7},$$

ἅτινα εἶναι ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ δεδομένα καὶ ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν 4×7 , ἥτοι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 7 καὶ 4 αὐτῶν.

2ον. Τρία ἢ πλείοτερα κλάσματα ἀνάγονται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν πολλαπλασιαζομένων τῶν ὁρῶν ἐκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν λοιπῶν κλασμάτων.

Διότι τὰ οὕτως εὐρισκόμενα νέα κλάσματα εἶναι ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ τὰ δεδομένα καὶ ἐκάστων τοῦτον ἔχει παρονομαστήν τὸ γινόμενον ἀπάντων τῶν παρονομαστῶν τῶν δεδομένων κλασμάτων.

Ἐὰν π. χ. ἐφαρμόσωμεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα εἰς τὰ τρία κλάσματα

$$\frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{1}{14}$$

θελωμεν εὑρεῖν τὰ ἐξῆς.

$$\frac{5 \times 4 \times 14}{7 \times 4 \times 14}, \quad \frac{3 \times 7 \times 14}{4 \times 7 \times 14}, \quad \frac{1 \times 7 \times 4}{14 \times 7 \times 4},$$

ἅτινα εἶναι ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ δεδομένα καὶ ἔχουσι κοινὸν παρονομαστήν τὸ γινόμενον $7 \times 4 \times 14$ τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἵνα συγκρίνωμεν πρὸς ἄλληλα δύο κλάσματα, πρέπει νὰ ἀναγῶμεν αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τουτέστι νὰ τὰ ἀναφέρωμεν εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα. Πρακτεῖντος χάριν, ἐὰν θελωμεν νὰ ἴδωμεν ποῖον τῶν δύο κλασμάτων $\frac{3}{10}$ καὶ $\frac{5}{12}$ εἶναι μεγχλείτερον, φέρομεν αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν καὶ εὐρίσκομεν τὰ νέα κλάσματα $\frac{3 \times 6}{10 \times 6}$ καὶ $\frac{5 \times 5}{12 \times 5}$, ὧν τὸ δεύτερον εἶναι προφανῶς μεγχλείτερον τοῦ πρώτου, ὡς ἔχον μεγχλείτερον ἀριθμητήν.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΠΛΕΙΟΤΕΡΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΤΟΝ ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΚΟΙΝΟΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΝ.

104. Ὅταν, προκειμένου νὰ ἀναγῶμεν δύο ἢ πλείοτερα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἐφαρμόζωμεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα, τὰ εὐρισκόμενα νέα κλάσματα δὲν ἔχουσιν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον

τὸν ἀπλούστερον κοινὸν παρονομαστήν. Ἄλλ' ὑπάρχει τρόπος τις, δι' οὗ δύο ἢ πλείοτερα κλάσματα ἀνάγονται εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν, τοῦτον δ' εὐρίσκωμεν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ δεδομένα κλάσματα εἶναι ἀνάγωγα, ἢ, ἐν ἐναντίῳ περιπτώσει, ὅτι λαμβάνομεν ἀντὶ τῶν δεδομένων τὰ ἴσα αὐτοῖς ἀνάγωγα. Πᾶν κλάσμα, ἴσον τινὶ τῶν δεδομένων, εὐρίσκεται· πολλὰπλασιαζομένων τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ ἐπὶ τινὰ ἀκέραιον ἀριθμὸν. Λοιπὸν πᾶς κοινὸς παρονομαστής, εἰς ὃν δύναμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὰ δεδομένα κλάσματα, εἶναι κοινὸν τι πολλὰπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν δεδομένων κλασμάτων. Ἀρ' ἑτέρου, πᾶν κοινὸν πολλὰπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν δεδομένων κλασμάτων δύναται νὰ γείνη κοινὸς παρονομαστής αὐτῶν, ἀρκεῖ νὰ πολλὰπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἐκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κοινοῦ τούτου πολλὰπλάσιου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πολλὰπλασιασθησμένου κλάσματος. Ἐπειτα ἐντεῦθεν ὅτι, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλὰπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν δεδομένων κλασμάτων δι' ἐνὸς ἐκάστου αὐτῶν καὶ μὲ τὸ εἰς ἐκάστην μερικὴν διαιρέσιν εὐρισκόμενον πηλίκον πολλὰπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ ἀντιστοίχου κλάσματος, θέλομεν οὕτως εὑρεῖν κλάσματα ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ δεδομένα καὶ ἔχοντα κοινὸν παρονομαστήν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλὰπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι προτιθέμεθα νὰ ἀναγάγωμεν εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν τὰ ἑξῆς κλάσματα

$$\frac{113}{360}, \quad \frac{347}{540}, \quad \frac{229}{648}.$$

ἵνα, ἂν δὲν ᾔσαν ἀνάγωγα, ἔπρεπε πρῶτον νὰ καταστήσωμεν ἀνάγωγα.

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλὰπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 360, 540 καὶ 648 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3240. Διαφοῦμεν τοῦτον δι' ἐνὸς ἐκάστου τῶν παρονομαστῶν 360, 540 καὶ 648 τῶν δεδομένων κλασμάτων, καὶ εὐρίσκωμεν τὰ πηλίκα 9, 6 καὶ 5. Ἐπειτα μὲ τὸ πηλίκον 9 πολλὰπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἐκείνου τοῦ κλάσματος, μὲ τὴν παρονομαστήν τοῦ ὁποίου διαίρεσαντες τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλὰπλάσιον 3240 εὐρομεν πηλίκον τὸν ἐφ' ὃν πολλὰπλασιάζομεν ἀριθμὸν 9. Οὐσώτως μὲ τὸ πηλίκον 6 πολλὰπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἀντιστοίχου δευτέρου κλάσματος, καὶ μὲ τὸ πηλίκον 5 τοὺς ὅρους τοῦ ἀντιστοίχου τρίτου κλάσματος, καὶ οὕτως εὐρίσκωμεν τὰ νέα κλάσματα

$$\frac{1012}{3240}, \quad \frac{1902}{3240}, \quad \frac{1145}{3240}.$$

ἄτινα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν καὶ τὸν ἐλάχιστον πέντων.

105. Ἐντεῦθεν πορίζομεθα τὸν ἑξῆς κανόνα·

Ἴνα ἀναγάγωμεν δύο ἢ πλείοτερα κλάσματα εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν, καθιστώμεν πρῶτον αὐτὰ ἀνάγωγα, ἔπειτα εὑρίσκουμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν εὑρεθέντων ἀναγῶγων κλασμάτων, καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἐκάστου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν, τὸν δεικνύοντα πᾶσάκις ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ ἐμπεριέχεται εἰς τὸ εὑρεθὲν ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν κατασταθέντων ἀναγῶγων κλασμάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.—Ἐστώσαν π. γ. τὰ τρία ἀνέγωγα κλάσματα

$$\frac{15}{28}, \quad \frac{77}{120}, \quad \frac{56}{495}.$$

Ἀναλύνοντες τοὺς παρονομαστὰς αὐτῶν εἰς τοὺς πρῶτους αὐτῶν παρὰχόντας εὑρίσκουμεν

$$28=2^2 \times 7,$$

$$120=2^3 \times 3 \times 5.$$

$$495=3^2 \times 5 \times 11.$$

Τὸ ἐλάχιστον δι' κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶναι κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 92

$$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \quad \text{ἢ} \quad 27720.$$

Διαιροῦντες αὐτὸ δι' ἐκάστου τῶν παρονομαστῶν

$$2^2 \times 7, \quad 2^3 \times 3 \times 5, \quad 3^2 \times 5 \times 11$$

εὑρίσκουμεν τὰ πηλίκα

$$2 \times 3^2 \times 5 \times 11, \quad 3 \times 7 \times 11, \quad 2^3 \times 7,$$

$$\text{ἢ} \quad 990, \quad 231, \quad 56,$$

ἐφ' ᾧ ὁ πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τῶν ἀντιστοιχούντων κλασματικῶν εὑρίσκουμεν τὰ ἑξῆς κλάσματα

$$\frac{15 \times 2 \times 3^2 \times 5 \times 11}{27720}, \quad \frac{77 \times 3 \times 7 \times 11}{27720}, \quad \frac{56 \times 2^3 \times 7}{27720},$$

ἢ διὰ τῆς ἐκτελέσεως τῶν στήγειωμένων πολλαπλασιασμῶν, τὰ ἑξῆς

$$\frac{15850}{27720}, \quad \frac{17767}{27720}, \quad \frac{3136}{27720}.$$

ατινα εἶναι ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ δεδομένα καὶ ἔχουσι τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν.

*Εστῶσαν πρὸς τούτοις τὰ ἀνάγωγα κλάσματα

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{12}, \frac{7}{24}.$$

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν εἶναι 24, καὶ ἀκολουθοῦντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὐρίσκομεν τὰ νέα κλάσματα

$$\frac{16}{24}, \frac{18}{24}, \frac{10}{24}, \frac{7}{24}.$$

ατινα εἶναι ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ δεδομένα καὶ ἔχουσι κοινὸν παρονομαστήν τὸν ἀπλούστερον πάντων τῶν δυνατῶν κοινῶν παρονομαστῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Ποῖος εἶναι ὁ ἐν τῷ κλάσματι $\frac{37}{9}$ περιεχόμενος ἀκέραιος ;

II. Ποῖον εἶναι τὸ ἀνάγωγον κλάσμα, τὸ ἰσοδύναμον τῷ κλάσματι $\frac{630}{934}$;

III. Ποῖος εἶναι ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής τῶν κλασμάτων $\frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{7}{18}$;

IV. Ποῖος εἶναι ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής τῶν κλασμάτων $\frac{8}{9}, \frac{8}{21}, \frac{14}{39}, \frac{11}{24}$;

V. Ποῖος εἶναι ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής τῶν κλασμάτων $\frac{5}{7}, \frac{8}{9}, \frac{13}{11}, \frac{17}{29}, \frac{35}{41}$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'.

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

123. Εἶδομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις ὅτι πρὸς καταμέτρησιν δεδομένου τινὸς ποσού ἢ μεγέθους λαμβάνομεν ὠρισμένον τι ποσὸν ἢ μέγεθος ὡς μονάδα καὶ πρὸς τοῦτο συγκρίνομεν τὸ πρὸς καταμέτρησιν δεδομένον, καὶ ὅτι, ἐὰν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ποσὸν ἢ μέγεθος περιέχῃ ἅπαζ ἢ πολλάκις τὴν μονάδα ἄνευ τινὸς ὑπολοίπου, τὸ ἐξαχόμενον τῆς συγκρίσεως εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος· ἐὰν δὲ περιέχῃ ἅπαζ ἢ πολλάκις πολλοστὸν τι ταύτης, τότε ὁ προκύπτων ἀριθμὸς καλεῖται κλασματικός.

Διὰ τὰς ἀνάγκας ὅμως τοῦ κοινωνικοῦ βίου ἡ ἐκτίμησις τῶν ποσῶν γίνεται κατὰ τινα τρόπον διαφέροντά πως τοῦ ἀνωτέρω. Εἶναι μὲν ἀληθές ὅτι ἡ κατ' ἀρχὰς ληθθεῖσα μονὰς εἶναι ὅλως αὐθαίρετος, ἀλλ' ἀφοῦ ἅπαζ ληθθῇ, μένει ἡ αὐτὴ πάντοτε διὰ τὰ τοῦ αὐτοῦ εἶδους ποσά. Ἐπειτα, ἐὰν τὸ πρὸς καταμέτρησιν ποσὸν ἢ μέγεθος περιέχῃ πολλάκις τὴν μονάδα, λαμβάνουσιν ὡς νέαν μονάδα πολλαπλάσιόν τι τῆς ἀρχικῆς, κατ' ἀρέσκειαν καὶ τοῦτο, ἀλλὰ πάντοτε τὸ αὐτό. Τρίτον, ἐὰν τὸ πρὸς καταμέτρησιν ποσὸν περιέχῃ ἅπαζ ἢ πολλάκις τὴν μονάδα μετὰ τινος ὑπολοίπου, πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ὑπολοίπου τούτου δὲν λαμβάνουσιν ὡς νέαν μονάδα ὅτι μὲν τοῦτο, ὅτι δὲ ἄλλο πολλοστὸν τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἀλλὰ πάντοτε τὸ αὐτό. Τελευταῖον, ἐὰν πάλιν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον περιέχῃ ἅπαζ ἢ πολλάκις τὸ ὠρισμένον τοῦτο καὶ πάντοτε τὸ αὐτὸ μένον πολλοστὸν τῆς ἀρχικῆς μονάδος μετὰ τινος ὑπολοίπου, πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ὑπολοίπου τούτου λαμβάνουσιν ὡς νέαν μονάδα πολλοστὸν τι, πάντοτε τὸ αὐτό, τῆς προηγουμένης, πρὸς ὃ συγκρίνουσι τὸ νέον ὑπόλοιπον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ ἡ τελευταία μονὰς κατασταθῇ τόσῳ μικρά, ὥστε τὸ παραλειπόμενον ὑπόλοιπον νὰ ᾔηται ποσὸν ἢ μέγεθος ὅλως ἀπὸ μακρόν.

Ἴνα προσθέσωμεν κλάσματα διαφόρων παρονομαστώων, ἀνάγο-
μεν πρῶτον αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν καὶ ἐκτελοῦμεν
ἔπειτα τὴν πρόσθεσιν τῶν εὑρεθησομένων γένων κλασμάτων ὡς
προελέχθη.

108. Πρόσθεσις μικτῶν. Ἐστῶσαν πρὸς πρόσθεσιν οἱ τρεῖς μι-
κτοὶ ἀριθμοὶ $4 + \frac{3}{5}$, $3 + \frac{7}{10}$ καὶ $8 + \frac{2}{3}$. Τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ἐν αὐτοῖς
κλασματικῶν $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{3}$ εὐρίσκεται κατὰ τὰ προηγούμενα καὶ εἶναι
 $\frac{53}{30}$ ἢ $1 + \frac{23}{30}$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐν αὐτοῖς ἀκεραίων εἶναι $4 + 3 + 8$
ἢ 15, ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων μικτῶν θέλει εἶναι ὁ
μικτός $15 + \frac{53}{30}$, ἢ $16 + \frac{23}{30}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι,

Ἴνα προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμοὺς, προσθέτομεν πρῶτον τὰ
κλασματικὰ αὐτῶν μέρη, ἔπειτα τοὺς ἐν αὐτοῖς ἀκεραίους καὶ τε-
λευταίον προσθέτομεν τὰ οὕτως εὑρεθησόμενα δύο ἄθροισματα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἠδυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν
μικτῶν τρέποντες πρῶτον αὐτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς
καὶ προσθέτοντες ἔπειτα τὰ οὕτως εὑρεθησόμενα κλάσματα κατὰ
τὴν περὶ πρόσθεσεως τῶν κλασμάτων ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα,
ἀλλ' ὁ προηγούμενος τρόπος εἶναι προτιμητέος ὡς ἀπλούστερος.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ.

109. Ἀφαίρεσις ἐν γένει καλεῖται ἐκείνη ἡ πράξις, δι' ἧς ἐλατ-
τοῦμεν δοθέντα τιὰ ἀριθμῶν κατὰ τόσας μονάδας καὶ μέρη μονά-
δος, ὅσα περιέχει ἕτερός τις ἐπίσης δεδομένου ἀριθμοῦ.

Καὶ ὅταν τὰς δυνατάς περιπτώσεις ὁ ἐλαττούμενος ἀριθμὸς κα-
λεῖται μειωτέος, ὁ δεικνύων κατὰ πόσον ὁ πρῶτος πρέπει νὰ ἐλατ-
τωθῇ ἀφαιρετέος, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ἐπὶ λοιπὸν, διπε-
ρογὴ ἢ διαφορά.

Ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὅρισμοῦ τῆς ἀφαιρέσεως, ὡς παρετηρήσαμεν καὶ
ὅτι ἐπρόκειτο περὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἔπεται ὅτι ὁ μειωτέος θέλει
εἶναι ἴσος τῷ ἄθροισματι τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ εὑρεθησομένου
ὑπολοίπου. Διὰ τοῦτο ὀρίζουσιν ἐνίοτε τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ὡς

Πηῶξις, δι' ἧς δοθέντος τοῦ ἄθροίσματος δύο μερῶν καὶ ἐνός
τοῦτων εὐρίσκεται τὸ ἕτερον.

110. Ἀφαίρεσις δύο κλασμάτων. Ἄς ὑποθέσωμεν ἐν πρῶτοις
ὅτι τὰ πρὸς ἀφαιρέσιν δεδομένα κλάσματα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρο-

νομαστήν, καὶ ἔστω π. χ. ν' ἀφαιρεθῇ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{8}{12}$. Πρέπει κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν μειωτέον 8 δέκατα τρίτα κατὰ 3 δέκατα τρίτα. Θέλομεν δὲ προφανῶς εὑρεῖ διαφορὰν $8 - 3$ δέκατα τρίτα, ἢ $\frac{8-3}{12}$, ἢ $\frac{5}{12}$. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι

Ἡ ἀφαίρεσις δύο κλασμάτων ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρονομαστήν ἐκτελεῖται ἀφαιρουμένου ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου κλάσματος τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἀφαιρετέου καὶ γραφομένου τοῦ κοινοῦ αὐτῶν παρονομαστοῦ ὑπὸ τῇ εὑρεθησομένῃ διαφορᾷ.

Ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ δεύτερον λόγον ὅτι τὰ πρὸς ἀφαιρέσειν κλάσματα $\frac{11}{10}$, $\frac{3}{4}$ ἔχουσι διαφόρους παρονομαστές. Ἀνάγοντες τὰ κλάσματα εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν αὐτῶν παρονομαστήν, ὅστις ἐνταῦθα εἶναι ὁ 20, εὐρίσκομεν ἀντὶ τῶν δεδομένων κλασμάτων τὰ ἀμοιβαίως ἰσοδύναμα τούτοις $\frac{22}{20}$ καὶ $\frac{15}{20}$. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν διαφορὰ αὐτῶν θέλει εἶναι κατὰ τὰ πρότερον ἡ $\frac{22-15}{20}$, ἢ $\frac{7}{20}$. Λοιπὸν

Ἡ ἀφαίρεσις δύο κλασμάτων ἐχόντων διαφόρους παρονομαστές ἐκτελεῖται ἀναγομένων πρῶτον αὐτῶν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν καὶ ἀφαιρουμένων τῶν οὕτως εὑρεθησομένων κλασμάτων ὡς προεῖρήθη.

111. Ἀφαίρεσις δύο μικτῶν. Ἐστω ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $11 + \frac{2}{10}$ ὁ μικτὸς $5 + \frac{3}{4}$. Ἀφαιροῦμεν πρῶτον ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου 11 τὸν ἀκεραῖον 5 καὶ εὐρίσκομεν διαφορὰν 6, ἔπειτα ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{10}$ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ καὶ εὐρίσκομεν διαφορὰν $\frac{3}{20}$. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν διαφορὰ τῶν δεδομένων μικτῶν θέλει εἶναι προφανῶς ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν εὑρεθεισῶν μερικῶν διαφορῶν 6 καὶ $\frac{3}{20}$, ἥτοι $6 + \frac{3}{20}$. Ἐντεῦθεν δὲ ἔπεται ὅτι

Μικτὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ μικτοῦ ἀφαιρουμένων πρῶτον κατὰ μέρος τῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν αὐτῶν μερῶν καὶ προσθετομένων τῶν οὕτως εὑρεθησομένων μερικῶν διαφορῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Δυνατὸν νὰ συμβῇ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου μικτοῦ νὰ ᾖ μεγαλειότερον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου καὶ οὕτως ἡ δευτέρα μερική ἀφαίρεσις νὰ ᾖ ἀδύνατος. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου τοῦ μειωτέου

μικτοῦ καὶ προσθέτομεν αὐτὴν εἰς τὸ κλάσμα αὐτοῦ, καὶ οὕτως ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ προκύπτοντος κλάσματος ἀφαιρέσεις τοῦ κλάσματος τοῦ ἀφαιρετέου καθίσταται δυνατή, ἡ δὲ τελικὴ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.

Ἐστω π. γ. ν' ἀφαιρεθῇ ὁ μικτός $6 + \frac{5}{7}$ ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $12 + \frac{2}{13}$. Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου $\frac{5}{7}$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κλάσματος $\frac{2}{13}$ τοῦ μειωτέου καὶ δὲν δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ, λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου 12 τοῦ μειωτέου καὶ τὴν τρέπομεν εἰς δέκατα τρίτα, ἅπερ προσθέτομεν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{2}{13}$ αὐτοῦ, ὅστις οὕτω γίνεται $11 + \frac{13}{13}$. Τώρα, ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{13}{13}$, ἡ ἀφαίρεσις αὐτῶν εἶναι δυνατή, εὐρίσκομεν δὲ, ἐκτελοῦντες αὐτὴν ὡς προελέχθη, διαφορὰν $5 + \frac{40}{91}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἡδυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν μικτῶν τρέποντες πρῶτον αὐτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς καὶ ἀφαιροῦντες ἔπειτα κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα ἀπὸ τοῦ κλασματικοῦ τοῦ μειωτέου τὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀλλ' ὁ ἀνωτέρω ἐκτελεῖς τρόπος εἶναι προτιμητέος ὡς ἀπλούστερος.

ΠΟΛΥΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ.

112. Ἐπομέν ὅτι ὁ πολυπλασιασμός εἶναι πρᾶξις, δι' ἣς δοθέντων δύο ἀριθμῶν σχηματίζομεν ἓκ τοῦ πρώτου τρίτον, ὅπως ὁ δεύτερος ἐσχηματίσθῃ ἐκ τῆς μονάδος, καὶ ἐκκλέσκειν τὸν πρῶτον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν πολυπλασιαστέον, τὸν δεύτερον πολυπλασιαστήν καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως γινόμενον. Ἐφαρμόζοντες τώρα τὸν αὐτὸν ὁρισμὸν ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἔλπομεν εὐκόλως εὑρεῖ κατὰ ποίους κανόνας εὐρίσκεται τὸ γινόμενον αὐτῶν καθ' ἀπᾶσας τὰς δυνατὰς περιπτώσεις. Καὶ ἐν πρώτοις

113. Πολυπλασιασμός κλάσματός τινας ἐπὶ ἀκεραίου. Ἄς υποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{2}{3}$ ἐπὶ 4. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολυπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ

πολλαπλασιαστέου $\frac{5}{7}$, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς 4 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλ' ὁ 4 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος ἀφοῦ ἐπανελήφθη αὕτη τετράκις. Λοιπὸν καὶ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῆ ἐκ τοῦ $\frac{5}{7}$ ἀφοῦ ἐπαναληφθῇ τοῦτο τετράκις. Ὁ πολλαπλασιαστέος $\frac{5}{7}$ τετράκις ἐπαναλαμβανόμενος γίνεται $\frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7}$, ἢ $\frac{5+5+5+5}{7}$, ἢ $\frac{20}{7}$. Ἐπεὶται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι

Κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον, ἔαν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ὑπὸ τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον γραφῇ ὡς παρονομαστής ὁ τοῦ δεδομένου κλάσματος παρονομαστής.

144. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα. Ἀς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ $\frac{5}{7}$. Κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῆ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 4, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς $\frac{5}{7}$ ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλὰ τὰ $\frac{5}{7}$ σχηματίζονται ἐκ τῆς μονάδος ἀφοῦ διαιρεθῇ αὕτη εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν 5 τοιαῦτα. Λοιπὸν καὶ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῆ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 4, ἔαν λάβωμεν πεντάκις τὸ ἐξδομον αὐτοῦ. Ἀλλὰ τὸ ἐξδομον τοῦ 4 ἢ τοῦ $\frac{4}{1}$ εἶναι $\frac{4}{7}$ (98), καὶ πεντάκις τὸ $\frac{4}{7}$ ληρθὲν διδίδι κατὰ τὰ προλεχθέντα ἄθροισμα $\frac{4 \times 5}{7}$. Λοιπὸν

Ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, ἔαν πολλαπλασιασθῇ οὗτος ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον γραφῇ ὡς παρονομαστής ὁ τοῦ κλάσματος παρονομαστής.

145. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα. Ἐστω νῦν πολλαπλασιασθῇ $\frac{5}{7}$ ἐπὶ $\frac{4}{9}$. Πρέπει κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ νῦν λάβωμεν τὰ τέσσαρα ἑνὰτα τοῦ $\frac{4}{9}$. Ἀλλὰ τὰ ἑνὰτα τοῦ $\frac{4}{9}$ εἶναι $\frac{4}{9 \times 9}$ (98), ἐπομένως τὰ τέσσαρα ἑνὰτα τοῦ $\frac{4}{9}$ θέλουσιν εἶναι $\frac{4 \times 4}{9}$. Ἐντεῦθεν λοιπὸν παρίσθμεθα ὅτι

Κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιαζόμενων τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστῶν αὐτῶν καὶ ἐπὶ τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν γραφομένου ὡς παρονομαστοῦ τοῦ εὐρεθησόμενου γινομένου τῶν παρονομαστῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐπεταὶ ὅτι πρὸς εὐρεσιν τοῦ γινομένου πλειοτέρων κλασμάτων πρέπει νὰ πολλαπλασιασώμεν τὰ κλάσματα ταῦτα ὅσον ἐπ' ὅσον ἐν ἄλλαις λέξεσι, νὰ σχηματίσωμεν πρῶτον τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, ἔπειτα τὸ τῶν παρονομαστῶν καὶ ὑπὸ τὸ πρῶτον νὰ γράψωμεν ὡς παρονομαστὴν τὸ δεύτερον. Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{8}{9}, \frac{11}{13}$ εἶναι $\frac{2 \times 5 \times 8 \times 11}{3 \times 7 \times 9 \times 13}$, ἀπαγγέλλεται δὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$ τῶν $\frac{8}{9}$ τοῦ $\frac{11}{13}$ ἢ τὰ $\frac{11}{13}$ τῶν $\frac{8}{9}$ τῶν $\frac{5}{7}$ τοῦ $\frac{2}{3}$. Διότι, ἵνα σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{8}{9} \times \frac{11}{13}$, πρέπει κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ γινομένου πλειοτέρων παραγόντων (33) νὰ πολλαπλασιασώμεν πρῶτον τὸ $\frac{2}{3}$ ἐπὶ $\frac{5}{7}$, ἔπειτα τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον αὐτῶν $\frac{2 \times 5}{3 \times 7}$ ἐπὶ $\frac{8}{9}$, ἔπειτα τὸ νέον γινόμενον $\frac{2 \times 5 \times 8}{3 \times 7 \times 9}$ ἐπὶ $\frac{11}{13}$.

Ἐπειδὴ τὸ εὐρεθὲν γινόμενον $\frac{2 \times 5 \times 8 \times 11}{3 \times 7 \times 9 \times 13}$ δὲν μεταβάλλεται, ὡς πωσδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων τοῦ ἀριθμοῦ καὶ παρονομαστοῦ αὐτοῦ, ἐπεταὶ ὅτι τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων μένει τὸ αὐτό, ὡς πωσδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις, καθ' ἣν ταῦτα πολλαπλασιάζονται. Παραδείγματος χάριν τὰ τρία γινόμενα $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{8}{9} \times \frac{11}{13}$, $\frac{5}{7} \times \frac{11}{13} \times \frac{2}{3} \times \frac{8}{9}$, $\frac{11}{13} \times \frac{8}{9} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$ εἶναι ἴσα, διότι τὰ γινόμενα τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστῶν αὐτῶν διὰ τῶν γινόμενων μεταθέσεων τῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλονται.

116. Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ μικτόν. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον τῶν δύο μικτῶν $4 + \frac{3}{7}$ καὶ $8 + \frac{4}{9}$. Τρέποντες τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς εὐρίσκομεν τὰ κλάσματα $\frac{31}{7}$ καὶ $\frac{76}{9}$, ὧν τὸ γινόμενον εἶναι $\frac{31 \times 76}{7 \times 9}$. Λοιπὸν

Μικτὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μικτόν τρεπομένων τῶν μικτῶν εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς καὶ πολλαπλασιαζομένων τῶν οὕτως εὐρεθησομένων κλασμάτων ὡς προελέχθη.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ.

117. Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἣς καθένας τοῦ γινομένου δύο παραγόντων καὶ ἐνὸς τούτων εὐρίσκομεν τὸν ἕτερον ἢ εἶναι

πρῶτος, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, τοῦ ὁποῦν τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν δεύτερον καὶ παράγῃ τὸν πρῶτον.

Τὸ δεδομένον γινόμενον καλεῖται διαιρετέος, ὁ δεδομένος παρὰ-
γων διαιρέτης καὶ ὁ ζητούμενος πηλίκον.

Ἡ διαιρέσις σημειοῦται διὰ σημείου $:$, ὑπερτίθεται μετὰ τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου, προτασσομένου τοῦ πρῶτου, ἀπαγγέλλεται δὲ ὡς εἴπομεν καὶ ἐν τῇ § 40 διὰ.

118. *Διαιρέσις τῶν ἀκεραίων.* Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως διὰφορὸς ἐκείνου, ὃν ἐδώσαμεν ἐν τῷ IV Κεφαλαίῳ. Εἶναι λοιπὸν ἀναγκαῖον νὰ ἴδωμεν ἂν οὗτοι διαφέρωσι καὶ, ἐὰν ὑπάρχῃ διαφορὰ τις, εἰς τί αὕτη συνίσταται. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιπτώσεως τοὺς φαινομένους διαφοροὺς δύο τούτους τῆς διαιρέσεως ὁρισμοὺς καὶ νὰ παραβάλλωμεν πρὸς ἄλληλα τὰ εὐρεθησόμενα κατ' ἐκάτερον τούτων ἐξαγόμενα. Ὡς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν δύο ἀκεραίους ἀριθμοὺς, τὸν 33 διὰ τοῦ 7, παρὰδείγματος χάριν.

Λέγω ἐν πρώτοις ὅτι κατὰ τὸν νέον τῆς διαιρέσεως ὁρισμὸν

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν δύο τούτων ἀκεραίων θέλει εἶναι ἴσον μὲ κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον 33 καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην 7.

Διότι τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου $\frac{33}{7}$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 7 πρέπει νὰ δώσῃ τὸν διαιρετέον 33· καὶ τῷ ὄντι, τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{33}{7}$ ἐπὶ 7 κατὰ τὰ περὶ πολλαπλασιασμοῦ λεγθέντα εἶναι $\frac{33 \times 7}{7}$, ἢ, ἐξαλειφόμενου τοῦ κοινοῦ παρὰγοντος 7, ὁ διαιρετέος 33. Λοιπὸν ἔχομεν

$$33 : 7 = \frac{33}{7}.$$

Ἐὰν τῶρα ἐξαγάγωμεν τὸν ἐν τῷ $\frac{33}{7}$ περιεχόμενον ἀκέραιον, εὐρίσκομεν ὅτι ὁ 7 ἐμπεριέχεται τετράκις εἰς τὸν 33 μετὰ τινος ὑπολοίπου 5, παριστῶντος τὴν διαφορὰν τοῦ γινομένου 7×4 ἀπὸ τοῦ 33. Ἐπομένως ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράσσεται καὶ οὕτω

$$33 : 7 = 4 + \frac{5}{7}.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ 33 διὰ 7 κατὰ τὸν νέον τῆς διαιρέσεως ὁρισμὸν σύγκειται ἐκ δύο μερῶν· ἐκ τοῦ ἀκεραίου 4,

ὅστις διαικνύει πρῶτακις ὁ 7 ἐμπεριέχεται ἐν τῷ διαιρετέῳ 33, καὶ ἔκ τινος κλάσματος $\frac{3}{7}$ μικροτέρου τῆς μονάδος.

Ἄλλ' εἰν πρῶτα ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν αὐτῶν κατὰ τὸ ἐν τῇ § 38 δοθέντι ὀρισμῶν, θέλωμεν ἐπίσης εὑρεῖ πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 5, καὶ θέλωμεν εἶπει ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι 4 καὶ μένει καὶ ὑπόλοιπόν τι 5. Λοιπὸν οἱ δύο ὀρισμοὶ δὲν διαφέρουσιν οὐ δόλως, εἰμὴ μόνον καθότι ἐν τῷ Κεφαλαιῷ IV ἐζητοῦμεν ἀπλῶς τὰ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου, καὶ ὁ περὶ διαίρεσεως γνωστὸς κανὼν τότε μόνον ἤθελε δώσει τὸ πλῆρες πηλίκον, ὅταν ὁ διαιρετέος ἦτο πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ἂν τότε εἰς τὸ εὑρεθὲν πηλίκον προσθετομεν καὶ συμπληρωτικόν τι κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸ εὑρεθὲν ὑπόλοιπον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην, ἠθέλωμεν καὶ διὰ τοῦ πρώτου ὀρισμοῦ εὑρεῖ τὸ πλῆρες πηλίκον. Λοιπὸν οἱ δύο ὀρισμοὶ εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ μόνην τὴν μικρὰν ὑποδειχθεῖσαν παράλειψιν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐπειδὴ αἱ δύο παραστάσεις 33: 7 καὶ $\frac{33}{7}$ εὑρέθησαν παριστώσαι τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ἔπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταχειριζώμεθα ἀδιαφόρως τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην.

Ἐπεται πρὸς τούτοις ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαίρεσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 1 εἶναι ἴσον αὐτῷ τῷ ἀριθμῷ· διότι τὸ γινόμενον τοῦ 1 ἐπὶ τὸν παριστῶντα τὸ πηλίκον ἀριθμὸν θέλει εἶναι προφανῶς ἴσον τῷ δεδομένῳ διαιρετέῳ. Λοιπὸν ἐξ ἀναλογίας δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν πάντα ἀκέραιον ἀριθμὸν ὡς κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν αὐτὸν τοῦτον τὸν ἀριθμὸν καὶ παρονομαστὴν τὴν μονάδα. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ παριστᾷ ὅ,τι καὶ ὁ 5.

119. Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκέραιον. Ἄς υποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαίρῃσωμεν $\frac{3}{7}$ διὰ 4. Πρέπει νὰ εὑρωμεν ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ 4 νὰ ἦναι ἴσον τῷ διαιρετέῳ $\frac{3}{7}$. Τὸ τετραπλάσιον λοιπὸν τοῦ ζητουμένου πηλίκου πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ $\frac{3}{7}$. Ἀρα τὸ πηλίκον αὐτὸ θέλει εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ διαιρετέου $\frac{3}{7}$. Ἀλλὰ τὸ $\frac{3}{4}$ τοῦ $\frac{3}{7}$ εἶναι $\frac{3}{28}$ (98). Λοιπὸν

Κλάσμα διαιρεῖται δι' ἀκέραιον ἐν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἄν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πρὸς διαιρέσιν κλάσματος ᾗτω πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, ἤθελομεν ἐπίσης εὑρεῖ τὸ ζητούμενον πηλίκον, διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ διαιρέτου.

Παραδείγματος χάριν, τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{12}{4}$ διὰ 4 εἶναι κατὰ τὰ ἄνωτέρω $\frac{12}{4 \times 4}$, διαιροῦντες δὲ τοὺς δύο ὅρους τοῦ εὐρεθέντος κλάσματος $\frac{12}{4 \times 4}$ διὰ 4 εὐρίσκομεν $\frac{3}{4}$, ὅπερ εὐρίσκεται διαιρουμένου τοῦ ἀριθμητοῦ 12 τοῦ διαιρετέου $\frac{12}{4}$ διὰ τοῦ διαιρέτου 4.

Οἱ ἄνωτέρω συλλογισμοί, δι' ὧν ἐφθάσαμεν εἰς τὸν εὐρεθέντα κανόνα, καθίστανται καταφανέστεροι ἐὰν παρασταθῶσι δι' ἰσοτήτων. Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ διὰ 4, καὶ ἄς παραστήσωμεν διὰ Π τὸ ζητούμενον πηλίκον. Κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς διαιρέσεως πρέπει τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 4 ἐπὶ τὸ πηλίκον Π νὰ ᾖναι ἴσον τῷ διαιρετέῳ $\frac{5}{7}$, ἐν ἄλλαις λέξεσι, πρέπει ἡ ἐξῆς νὰ ὑπάρχῃ ἰσότης

$$4 \times \Pi = \frac{5}{7}.$$

Κατὰ τὴν ἰσότητα ταύτην, ἐπειδὴ τὸ τετραπλάσιον τοῦ Π πρέπει νὰ ᾖναι ἴσον μὲ $\frac{5}{7}$, ἔπεται ὅτι αὐτὸ τὸ Π θέλει εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ $\frac{5}{7}$, ἥτοι ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\Pi = \frac{1}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{28}.$$

Ἦδυνάμεθα καὶ ἀπλούστερον νὰ ἀποδείξωμεν τὸν ἄνωτέρω κανόνα λέγοντες, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κλάσματος $\frac{5}{7}$ διὰ 4 εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{5}{28}$, ὅπερ εὐρίσκομεν ὡς προείπομεν· διότι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4 εἶναι $\frac{5 \times 4}{28}$ ἢ $\frac{5}{7}$, τουτέστιν ἴσον τῷ δεδομένῳ διαιρετέῳ.

150. *Διαιρέσει ἀκεραίου διὰ κλάσματος.* Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 5 διὰ $\frac{3}{4}$. Τὸ γινόμενον τοῦ ζητουμένου πηλίκου ἐπὶ $\frac{3}{4}$ πρέπει νὰ ᾖναι ἴσον τῷ διαιρετέῳ 5. Τὰ

$\frac{3}{4}$ λοιπόν τοῦ πηλίκου θέλουσιν εἶναι ἴσα με 5. Ἀρα τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ πηλίκου θέλει εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 5, ἥτοι $\frac{5}{3}$, καὶ ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ πηλίκου εἶναι ἴσον τῷ $\frac{5}{3}$, ἐπετι ὅτι αὐτὸ τὸ πηλίκον θέλει εἶναι τετραπλάσιον τοῦ $\frac{5}{3}$, ἥτοι $\frac{5 \times 4}{3}$. Βλέπομεν λοιπόν ὅτι

Ἀκέραιος διαιρεῖται διὰ κλάσματος ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀρτεστραμμένοι.

Ἐὰν παρυστήσωμεν τὸ ζητούμενον πηλίκον διὰ Π, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{3}{4} \times \Pi = 5.$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἰσότητα ταύτην τὸ $\frac{3}{4}$ τοῦ Π εἶναι ἴσα με 5, ἐπετι ὅτι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ Π θέλει εἶναι ἴσον με τὸ τρίτον τοῦ 5, ἥτοι ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\frac{1}{4} \times \Pi = \frac{5}{3}.$$

Καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὴν τελευταίαν ἰσότητα τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ Π εἶναι ἴσον με $\frac{5}{3}$, ἐπετι ὅτι αὐτὸ τὸ Π θέλει εἶναι ἴσον με τὸ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{5}{3}$, ἥτοι ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\Pi = \frac{5}{3} \times 4 = \frac{5 \times 4}{3},$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα.

Τὸν αὐτὸν κανόνα ἡδυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν εὐκολώτερον λέγοντες ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου 5 διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{5 \times 4}{3}$, ὅπερ εὐρίσκομεν ὡς προείπομεν. Διότι τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου $\frac{5 \times 4}{3}$, ἐπὶ τὴν διαιρέτην, $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 4}$, ἥτοι αὐτὸς ὁ διαιρέτης 5.

122. Διαίρεσις δύο κλάσμάτων. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{5}{7}$ διὰ $\frac{3}{4}$. Καλοῦντες τὸ ζητούμενον πηλίκον Π θέλομεν ἔχει κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως

$$\frac{3}{4} \times \Pi = \frac{5}{7}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πηλίκου Π ἰσοῦνται μὲ $\frac{5}{7}$, ἔπεται ὅτι

$$\frac{1}{4} \times \Pi = \frac{5}{7 \times 3}$$

τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ Π θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$, ἥτοι μὲ $\frac{5}{7 \times 3}$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ Π εἶναι ἴσον μὲ $\frac{5}{7 \times 3}$, ἔπεται ὅτι αὐτὸ τὸ

$$\Pi = \frac{5 \times 4}{7 \times 3}$$

Π θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{5}{7 \times 3}$ ἥτοι $\frac{5 \times 4}{7 \times 3}$. Λοιπὸν

Κλάσμα διαιρεῖται διὰ κλάσματος ἐν πολλπλασιασθῇ τὸ πρὸς διαίρεσιν κλάσμα ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντεστραμμένον.

122. Διαίρεσις μικτοῦ διὰ μικτοῦ. Ἡ διαίρεσις μικτοῦ διὰ μικτοῦ ἀνάγεται ἀμέσως εἰς τὴν διαίρεσιν κλάσματος διὰ κλάσματος, τρεπομένων τῶν μικτῶν εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἶχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν μικτὸν ἀριθμὸν $24 + \frac{3}{8}$ διὰ τοῦ μικτοῦ $5 + \frac{7}{2}$, ἡθέλομεν τρέψει αὐτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς $\frac{195}{8}$, $\frac{67}{2}$, καὶ διαιρέσει τὸ κλάσμα τοῦ διαιρετέου $\frac{195}{8}$ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{67}{2}$ τοῦ διαιρέτου κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

- I. Ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{9}$;
- II. Ποῖα εἶναι ἡ διαφορά τοῦ κλάσματος $\frac{5}{7}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{7}{6}$;
- III. Ποῖον εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{5}{11}$ ἐπὶ 3;
- IV. Ποῖα εἶναι τὰ γινόμενα τοῦ $\frac{5}{11}$ ἐπὶ $\frac{7}{9}$ καὶ $4 + \frac{2}{5}$;
- V. Πῶς παρίστανται τὰ πέντε ἕκτα τῶν τριῶν ἐβδόμων;
- VI. Πῶς παρίστανται τὰ δύο τρίτα τῶν ἑπτὰ ἐνάτων τοῦ δώδεκα;
- VII. Ποῖον τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{5}{7}$ διὰ 3;
- VIII. Ποῖα τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{11}{12}$ διὰ 5, 7 καὶ $\frac{2}{3}$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ.

106. Πρόσθεσις ἐν γένει καλεῖται ἐκείνη ἡ πράξις, δι' ἧς εὐρίσκωμεν ἀριθμὸν περιέχοντα ὑπάσας τὰς μοιάδας καὶ τὰ μέρη τῆς μοιάδος, τὰ ἐμπεριεχόμενα εἰς πλειοτέρας δεδομένους ἀριθμούς.

Οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ καλοῦνται προσθετέοι. τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ἄθροισμα ἢ κεφάλαιον.

107. Πρόσθεσις πλειοτέρων κλάσμάτων. Ἄς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὰ προσθετέα κλάσματα $\frac{3}{13}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{8}{13}$ ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν. Τὸ ζητούμενον ἄθροισμα θέλει προφανῶς περιέχει τόσα δέκατα τρίτα, ὅσα ἐμπεριέχοντα εἰς ἅπαντα τὰ δεδομένα κλάσματα ὁμοῦ. Θέλει λοιπὸν περιέχει $3+7+8$ δέκατα τρίτα· ἐν ἄλλαις λέξεσι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα θέλει εἶναι $1+\frac{7+8}{13}$, ἢ $1+\frac{15}{13}$, ἢ $1+\frac{5}{13}$, ἐξαγόμενου τοῦ ἐν τῷ κλάσματι $\frac{15}{13}$ περιεχομένου ἀκεραίου. Ποριζόμεθα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι,

Ἢρα προσθέσωμεν κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ ὑπὸ τὸ εὑρεθησόμενον ἄθροισμα γράφομεν τὸν αὐτὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ δεύτερον λόγον ὅτι τὰ προσθετέα κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{3}$ ἔχουσι διαφόρους παρονομαστές. Ἀνάγοντες αὐτὰ εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν αὐτῶν παρονομαστήν, ὅστις εἶναι 30, εὐρίσκωμεν ἀντὶ τῶν δεδομένων κλασμάτων τὰ ἴσα ἀμοιβαίως τούτοις $\frac{18}{30}$, $\frac{21}{30}$, $\frac{20}{30}$. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα αὐτῶν κατὰ τὰ προλεχθέντα θέλει εἶναι $\frac{18+21+20}{30}$, ἢ $\frac{59}{30}$, ἢ $1+\frac{29}{30}$, ἐξαγόμενου τοῦ ἐν τῷ κλάσματι περιεχομένου ἀκεραίου. Ἐπεταὶ λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι,

Εἰς τὰ ὠρισμένα ταῦτα πολλαπλᾶσια καὶ ὑποπολλαπλᾶσια τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἔδωσαν νέα ὀνόματα, καὶ τοὺς οὕτως εὐρισκομένους ὡς μέτρον τῶν πρὸς καταμέτρησιν δεδομένων ποσῶν ἢ μεγεθῶν ἀριθμούς ἐκάλεσαν *συμμιγῆς*, ὡς συγκειμένους ἐκ διαφόρων ἀκεραίων ἀριθμῶν διαφόρων μονάδων, ἔχουσιν ὠρισμένην τινὰ σχέσιν πρὸς τὴν ἀρχικὴν.

124. *Συμμιγῆς λοιπὸν ἀριθμὸς καλεῖται ὁ συγκείμενος ἐκ διαφόρων ἀκεραίων ἀριθμῶν διαφόρων μονάδων, αἵτινες εἶναι ὠρισμένα πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς.*

Προαδείκνυται χάριν, ἥτις ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νέαν προσδιορίσωμεν μῆκος τι. Λαμβάνομεν πρὸς καταμέτρησιν τῶν μηκῶν ὡς μονάδα ἑτερόν τι μῆκος κατ' ἀρέσκειαν, ἀλλὰ ἀπὸ ἀπαξ ὀρίσθῃ πάντοτε τὸ αὐτό. Ἡ μονὰς αὕτη ὀνομάσθη *ὄργυια*. Ὡς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τὸ προσδιοριστέον μῆκος περιέχει τετράκις τὴν ὄργυιαν μετὰ τινος ὑπολοίπου. Διὰ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο λαμβάνομεν πάντοτε ὡς νέαν μονάδα τὸ ἕκτον τῆς ὄργυιας, ὅπερ ἐκλήθη *πόδος*, καὶ πρὸς ταῦτα συγκρίνομεν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ὑπόλοιπον. Ἐάν ἡ νέαν μονάδα περιέχεται καθ' ὑπόθεσιν πεντάκις εἰς τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο καὶ μένη καὶ ὑπόλοιπὸν τι μικρότερον τοῦ ποδός, πρὸς καταμέτρησιν τοῦ ὑπολοίπου τοῦτου λαμβάνομεν πάντοτε ὡς νέαν μονάδα τὸ δωδέκατον τῆς προηγουμένης, ἥτοι τοῦ ποδός, ὅπερ ἐκλήθη *δακτύλος*, καὶ πρὸς τοῦτο συγκρίνομεν τὸ νέον ὑπόλοιπον. Ἐάν τὸ νέον ὑπόλοιπον περιέχῃ λόγου χάριν ἑπτάκις τὸν δακτύλον μετὰ τινος ὑπολοίπου μικροτέρου τοῦ δακτύλου, πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ὑπολοίπου τοῦτου λαμβάνομεν ὡς νέαν μονάδα πάντοτε τὸ δωδέκατον τοῦ δακτύλου, ὅπερ ἐκλήθη *γραμμὴ*, καὶ πρὸς τοῦτο συγκρίνομεν αὐτό. Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦτο περιέχεται ἀκριβῶς ἐννεακις εἰς τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον, τὸ πρὸς καταμέτρησιν δοθέν μῆκος θέλει περιέχει

4 ὄργυιας, 5 πόδας, 7 δακτύλους καὶ 9 γραμμάς, καὶ τότε λέγομεν ὅτι τὸ μέτρον τοῦ δεδομένου μῆκους εἶναι ὁ συμμιγῆς ἀριθμὸς

4 ὄργυιαί, 5 πόδες, 7 δακτύλοι καὶ 9 γραμμαί, ὅστις, ὡς βλέπομεν, σύγκειται ἐκ διαφόρων ἀκεραίων ἀριθμῶν 4, 5, 7, 9, διαφόρων μονάδων, ὄργυιας, ποδός, δακτύλου, γραμμῆς, αἵτινες εἶναι ὠρισμένα ὑποπολλαπλᾶσια τῆς ἀρχικῆς, ἥτις ἐν ταῦτα εἶναι ἡ ὄργυια.

Όταν λαμβάνεται ἡ ὀργάνη ὡς ἀρχικὴ μονάδα, ὃ ποὺς εἶναι τῷ $\frac{1}{6}$ αὐτῆς· ὁ δάκτυλος τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ποδὸς, ἐπομένως τὸ $\frac{1}{72}$ τῆς ὀργάνης· ἡ γραμμὴ τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου, ἐπομένως τὸ $\frac{1}{864}$ τῆς ὀργάνης.

125. Ὁ ἀνωτέρω συμμιγῆς γράφεται πρὸς συντομίαν καὶ ὡς ἑξῆς

4ὅρ. 5πόδ. 7δακ. 9γραμ.

Ἐὰν δὲ θέλωμεν ν' ἀναφέρωμεν ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ πρὸς τὴν ὀργάνην ὡς μονάδα, πρέπει νὰ γράψωμεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς

$(4 + \frac{5}{6} + \frac{7}{12} + \frac{9}{864})$ τῆς ὀργάνης·

ἢ, ἐκτελουμένης τῆς προσθέσεως τῶν διαφόρων αὐτοῦ μερῶν, ὡς ἑξῆς

$\frac{4263}{864}$ τῆς ὀργάνης.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ αὐτὸ μῆκος ἔχει ὡς μέτρον ἢ τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν

4ὅρ. 5πόδ. 7δακ. 9γραμ.,

ἢ τὸν ἰσοδύναμον αὐτῷ κλασματικόν

$\frac{4263}{864}$ τῆς ὀργάνης.

126. Εἶναι πολλάκις χρήσιμον, ἐνίοτε δὲ καὶ ἀναγκαῖον, πρὸς ἐκτέλεσιν διαφορῶν ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμητικῶν πράξεων δοθέντα συμμιγῆ ν' ἀντικαθιστῶμεν δι' ἰσοδυνάμου κλασματικοῦ μᾶλλον ὅποιασδήποτε μονάδος αὐτοῦ, ὡς ἀνωτέρω ἐτρέψαμεν τὸν εὐρεθέντα συμμιγῆ 4ὅρ. 5πόδ. 7δακ. 9γραμ. εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν $\frac{4263}{864}$ τῆς ὀργάνης καὶ ἀντιστρόφως, κλασματικόν τινα ἀριθμὸν μονάδος τινὸς ν' ἀντικαθιστῶμεν διὰ τοῦ ἰσοδυνάμου αὐτῷ συμμιγῶς. Πρὸς τοῦτο ὑπάρχουσιν ἀπλούστατοί τινες κανόνες, οὓς περιζόμεθα ἐξ αὐτοῦ τοῦ τρόπου τῆς συνθέσεως τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ πρὸς ἐφαρμογὴν αὐτῶν πρέπει ἀναγκαστικῶς νὰ γνωρίζωμεν τὰς πρὸς ἄλληλα σχέσεις τῶν διαφορῶν μερῶν τῶν διαφορῶν συμμιγῶν· ἐν ἄλλαις λέξεσι, ποῖον πολλαπλάσιον ἢ ὑποπολλαπλάσιον τῆς ἀρχικῆς μονάδος εἶναι ἕκαστον τῶν διαφορῶν μερῶν τῆς δεδομένου συμμιγῶς.

Ἐπειδὴ κύριον σκοπὸν ἐν τῷ κεφαλαίῳ τούτῳ προτιθέμεθα νὰ δεῖξωμεν ἀπλῶς πῶς ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν αἱ διαφοροὶ ἀριθμητικαὶ πράξεις καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν θεωρίαν ἐκείνην εἰς τινὰ μόνον παραδείγματα, νομίζομεν ὅλως ἀπὸ σκοποῦ καὶ

ἐκθέσωμεν ἐνταῦθα κατ'ἀλογον διαφόρων μονάδων καὶ τῶν πρὸς ἀλλήλας σχέσεων ἐκάστου ἔθνους, οὔτε τῆς σχέσεις τῶν διαφόρων μονάδων, ἅς τὸ αὐτὸ ἔθνος κατὰ διαφόρους καιροὺς παρεδέχθη. Θέλωμεν μόνον περιορισθῆ εἰς τινὰς τούτων, τὰς μάλιστα παρ' ἡμῶν ἐν χρήσει.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΒΑΡΟΥΣ.

Ὅκαρ, ἀρχικὴ μονάς. Στατήρ = 44 ὀκάσι. Δράμιον = $\frac{1}{40}$ τῆς ὀκάδος. Ἐπομένως θέλωμεν ἔχει

$$1 \text{ στατ.} = 44 \text{ ὀκ.} = 17600 \text{ δρ.}$$

$$1 = 400.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ ΧΡΟΝΟΥ.

Ἡμέρα, ἀρχικὴ μονάς. Ὡρα = $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας. Λεπτὸν πρῶτον $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας. Λεπτὸν δευτέρον = $\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτου. Ἐπομένως θέλωμεν ἔχει

$$1 \text{ ἡμ.} = 24 \text{ ὥρ.} = 1440 \text{ λ. π.} = 86400 \text{ λ. δ.}$$

$$1 = 60 = 3600$$

$$1 = 60$$

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΗΚΟΥΣ.

Ὀργυιά, ἀρχικὴ μονάς. Πῶς = $\frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς. Δάκτυλος = $\frac{1}{12}$ τοῦ πῶδός. Γραμμὴ = $\frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου. Ἐπομένως θέλωμεν ἔχει

$$1 \text{ ὀρ.} = 6 \text{ πῶδ.} = 72 \text{ δακ.} = 864 \text{ γραμ.}$$

$$1 = 12 = 144.$$

$$1 = 12.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ.

Δραχμή, ἀρχικὴ μονάς. Πεντάδραχμον = 5 δραχμαίς. Ὀθω-
ρειον = 4 πεντάδραχμοις. Λεπτὸν = $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς. Λοιπὸν ἔχομεν

$$1 \text{ ὀθ.} = 4 \text{ πεντ.} = 20 \text{ δραχμ.} = 2000 \text{ λεπ.}$$

$$1 = 5 = 500.$$

$$1 = 100.$$

Πρὸς καταμέτρησιν τῶν τόξων διαίρουσι τὴν περιφέρειαν τοῦ εἰς ὃν ταῦτα ἀνήκουσι κύκλου εἰς 360 ἴσα μέρη, ἅτινα καλοῦσι μοίρας· τὴν μοῖραν εἰς 60 λεπτά πρῶτα (ἐννοεῖται τῆς μοίρας), καὶ τὰ πρῶ-

τον λεπτόν εἰς 60 δεύτερα λεπτά. Τὰς μοίρας, λεπτά πρῶτα καὶ λεπτὰ δεύτερα σημειοῦσι διὰ τῶν σημείων °, ', ", ἅτινα θέτουσι πρὸς τὰ δεξιά καὶ ὀλίγον ἄνωθεν τῶν ἀριθμῶν. Οὕτως ἔχομεν

$$360^{\circ}=21600'=1296000''$$

$$1 = 60 = 3600$$

$$1 = 60.$$

ΚΑΝΩΝ ΔΙ' ΟΥ ΤΡΕΠΟΜΕΝ ΔΟΘΕΝΤΑ ΣΥΜΜΙΓΗ ΕΙΣ ΙΣΟ-
ΔΥΝΑΜΟΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΝ ΜΙΑΣ ΟΠΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ
ΜΟΝΑΔΟΣ ΑΥΤΟΥ.

127. Ἴνα τρέψωμεν δοθέντα συμμιγῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασμα-
τικὸν μὲν ὑποδιασθήποτε μονάδος αὐτοῦ, τρέπομεν τὸν συμμιγῇ
ἀριθμὸν εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ τῷ συμμιγῇ περιεχομένης κα-
τωτάτης ὑποδιαρέσεως καὶ ἐπὶ τὸν εὐρεθέντα ἀριθμὸν, ληφθέν-
τα ὡς ἀριθμοπῆλιν, γράφομεν παρονομαστήν τὸν ἀριθμὸν, ὅστις
δεικνύει πόσας μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτάτης ὑποδιαρέσεως πε-
ριέχει ἐκείνη ἡ μονάς, τῇ ὁποίᾳ κλασματικὸν ἀριθμὸν θέλομεν
να ᾖται ὁ δεδομένος συμμιγῆς.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα τρέψωμεν τὸν συμμιγῇ

$$4\bar{6}r. \quad 5\bar{6}d. \quad 7\bar{8}z. \quad 9\text{γραμ.}$$

εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὀργυῖας, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν
εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαρέσεως, ἥτοι εἰς γραμ-
μὰς, καὶ ὑπὸ τὸν εὐρεθησόμενον ἀριθμὸν 4269 τῶν ἐν αὐτῷ περι-
εχομένων γραμμῶν γράφομεν παρονομαστήν τὸν ἀριθμὸν 864, ὅστις
δεικνύει πόσας μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτάτης ὑποδιαρέσεως, ἥτοι
πόσας γραμμὰς, περιέχει ἐκείνη ἡ μονάς, ἥτοι ἡ ὀργυιά, τῆς ὁποίας
κλασματικὸς ἀριθμὸς θέλομεν νὰ ᾖται ὁ δοθείς συμμιγῆς.

Ὡσαύτως, ἂν εἶχομεν νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῇ

$$3\bar{4}\mu. \quad 5\bar{6}r. \quad 18\lambda. \pi.$$

εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὥρας, ἠθέλομεν τρέψει πρῶτον αὐ-
τὸν εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαρέσεως, ἥτοι εἰς λε-
πτὰ πρῶτα, καὶ ὑπὸ τὸν εὐρεθησόμενον ἀριθμὸν 4638 τῶν ἐν αὐτῷ
περιεχομένων πρῶτων λεπτῶν ἠθέλομεν γράφει παρονομαστήν τὸν
ἀριθμὸν 1440, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτάτης
ὑποδιαρέσεως, ἥτοι πόσα λεπτὰ πρῶτα, περιέχει ἐκείνη ἡ μονάς,
ἥτοι ἡ ὥρα, τῆς ὁποίας κλασματικὸς ἀριθμὸς θέλομεν νὰ ᾖται ὁ
δεδομένος συμμιγῆς.

128. Καθόσον δ' ἀφορᾷ τὴν εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως τροπὴν συμμιγοῦς, αὕτη γίνεται ὡς ἑξῆς·

469. 5πόδ. 7δᾶκ. 9γραμ.

6

24 πόδ.

5

29

12

58

29

348 δᾶκ.

7

355

12

710

355

4260 γραμ.

9

4269

Γράφομεν τὸν δεδομένον συμμιγῆ ὡς συνήθως, καὶ τρέπομεν πρῶτον τὰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ ἀνωτάτης ὑποδιαίρεσεως, ἥτοι τὰς ὀργυιᾶς, εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας, ἥτοι εἰς πόδας, πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 6, ὅστις δεικνύει πόσους πόδας περιέχει μία ὀργυιά. Εἰς τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον γινόμενον 24, ὑπερ παριστᾷ πόδας, προσθέτομεν καὶ τοὺς ἐν τῷ δεδομένῳ συμμιγῇ περιεχομένους 5 πόδας, καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 29 πόδας, οὓς τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαίρεσεως, ἥτοι εἰς δακτύλους, πολλαπλασιάζοντες αὐτοὺς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 12, ὅστις δεικνύει ἐκ πόσων δακτύλων σύγκαιται εἰς πούς. Εὑρίσκομεν οὕτω γινόμενον 348 δακτύλους, εἰς οὓς προσθέτομεν καὶ τοὺς ἐν τῷ συμμιγῇ περιεχομένους 7, καὶ ἔχομεν οὕτως ἄθροισμα 355 δακτύλους, οὓς τρέπομεν εἰς γραμμὰς πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 12, ὅστις δεικνύει πόσας γραμμὰς περιέχει εἰς δάκτυλος. Εἰς τὴν οὕτως εὑρεθησόμενον γινόμενον τῶν 4260 γραμμῶν προσθέτομεν καὶ τὰς ἐν τῷ δεδομένῳ συμμιγῇ περιεχομένας 9, καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 4269, ὅπερ προφανῶς δεικνύει ἐκ πόσων γραμμῶν σύγκαιται ὁ δεδομένος συμμιγῆς.

Τούτῳ δὲ γενομένου, ἐὰν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν δοθέντα συμμιγῆ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὀργυιᾶς, ἐπειδὴ μία ὀργυιά περιέχει ὡς ἀνωτέρω εἶδομεν, ἢ ὡς διὰ τοῦ ἀνωτέρω ἐκτεθέντος τρόπου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, 864 γραμμὰς, ἔπεται ὅτι ὁ δοθεὶς συμμιγῆς θέλει περιέχει τοσάκις τὴν ὀργυιάν, ὅσκις αἱ ἐν αὐτῷ περιέχονται 4269 γραμμαὶ περιέχουσι τὰς ἐν τῇ μιᾷ ὀργυιᾷ περιεχομένας 864 γραμμάς· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὁ δοθεὶς συμμιγῆς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὰ $\frac{4269}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς.

Ἄν ἠθέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν αὐτὸν συμμιγῆ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ ποδός, ἔπρεπε νὰ γράψωμεν ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν

4269 τῶν ἐν αὐτῷ περιεχομένων γραμμῶν παρονομαστήν 144· διό-
τι εἰς πούς περιέχει 144 γραμμάς.

Ἄν δὲ ἤθελομεν νὰ τρέψωμεν αὐτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν
τοῦ δακτύλου ἔπρεπε νὰ γράψωμεν παρονομαστήν 12· διότι εἰς δά-
κτυλος περιέχει 12 γραμμάς.

Ἄν ἀντὶ τοῦ ἀνωτέρω συμμιγῶς μᾶς ἐδίδετο ὁ συμμιγῆς

$$4\delta\rho. \quad 5\pi\delta. \quad 7\delta\chi.,$$

καὶ ἐπρόκειτο νὰ τρέψωμεν αὐτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς
ἡμέρας, ἤθελομεν κατὰ τὸν δεδομένον κανόνα τρέψαι τὸν αὐτὸν
συμμιγῆ εἰς δακτύλους, διότι αἱ μονάδες τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης
ὑποδιαίρεσεως εἶναι δάκτυλοι, καὶ ὑπὸ τοὺς εὑρεθησομένους 355
δακτύλους γράψαι παρονομαστήν 72, διότι μία ὀργυία περιέχει 72
δακτύλους. Ἄν δὲ ἤθελομεν νὰ τρέψωμεν τὸν αὐτὸν συμμιγῆ εἰς ἰ-
σοδύναμον κλασματικὸν τοῦ ποδός, ἤθελομεν γράψαι ὑπὸ τοὺς εὑρε-
θησομένους 355 δακτύλους παρονομαστήν 12, διότι εἰς πούς πε-
ριέχει 12 δακτύλους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Ἄν εἴχομεν νὰ τρέψωμεν τοὺς ἑξῆς συμμιγῆς

$$\begin{array}{rclcl} 5\eta\mu. & 3\omega\rho. & 0\lambda. \pi. & 8\lambda. \delta. & \\ 3^{\circ} & 0' & 28'' & & \\ 3\tau\acute{\alpha}\lambda. & 2\delta\rho. & 25\lambda\epsilon\pi., & & \\ 28\sigma\tau\alpha\tau. & 5\delta\chi., & & & \end{array}$$

τὸν μὲν πρῶτον εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὥρας, τὸν δεύτε-
ρον εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ πρώτου λεπτοῦ, τὸν τρίτον εἰς
ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ ὀθωνείου καὶ τὸν τέταρτον εἰς ἰσοδύ-
ναμον κλασματικὸν τοῦ στατήρος, ἤθελομεν εὑρεῖ ἀκολουθοῦντες
κατὰ γράμμα τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα

$$\begin{array}{rclcl} 5\eta\mu & 3\omega\rho. & 0\lambda. \pi. & 8\lambda. \delta. & = \frac{442803}{3600} \text{ τῆς ὥρας.} \\ 3^{\circ} & 0' & 28'' & & = \frac{10828}{60} \text{ τοῦ πρώτου λεπτοῦ.} \\ 3\tau\acute{\alpha}\lambda. & 2\delta\rho. & 25\lambda. \pi. & & = \frac{1725}{2000} \text{ τοῦ ὀθωνείου.} \\ & 28\sigma\tau. & 5\delta\chi. & & = \frac{1232}{44} \text{ τοῦ στατήρος.} \end{array}$$

**ΤΡΟΠΗ ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ
ΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΝ ΣΥΜΜΙΓΗ.**

129. Ἄς υποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν κλασματικὸν

ἀριθμὸν $\frac{23}{9}$ τῆς ἡμέρας εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ. Ἐπειδὴ ὁ κλασμα-
τικός ἀριθμὸς $\frac{23}{9}$ εἶναι μεγαλείτερος τῆς μονάδος, αἱ ἐν αὐτῷ πε-
ριεχόμεναι ἀκέραιαι μονάδες θέλουσι παριστᾶ ἡμέρας, ἐξάγοντες δὲ
ταύτας θέλομεν ἔχει

$$\frac{23}{9} \text{ τῆς ἡμέρας} = 2 \text{ ἡμ.} + \frac{5}{9} \text{ τῆς ἡμέρας.}$$

Μᾶς μένει τῶρα πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου νὰ τρέψωμεν τὸν
μικρότερον τῆς ἡμέρας κλασματικὸν $\frac{5}{9}$ εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ. Πρὸς
τοῦτο δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ μία ἡμέρα περιέχει 24 ὥρας, τὰ $\frac{5}{9}$ τῆς ἡμέρας θέλουσι
περιέχει $\frac{5}{9} \times 24$ ὥρας, ἥτοι τὰ $\frac{5}{9}$ τῆς ἡμέρας θέλουσιν ἰσοδυναμεῖ
μὲ τὰ $\frac{40}{3}$ τῆς ὥρας. Ἀλλὰ τὰ $\frac{40}{3}$ τῆς ὥρας, περιέχουσι 13 ὥρας
καὶ $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν
ἀνωτέρω ἰσότητα ἀντὶ τῶν $\frac{5}{9}$ τῆς ἡμέρας τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ 13
ὥρας καὶ $\frac{2}{3}$ ἢ $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας, τὴν ἰσότητα

$$\frac{23}{9} \text{ τῆς ἡμέρας} = 2 \text{ ἡμ.} \cdot 13 \text{ ὥρ.} + \frac{1}{3} \text{ τῆς ὥρας.}$$

Ὅπως ἐτρέψαμεν τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν $\frac{5}{9}$ τῆς ἡμέρας εἰς ἰ-
σοδύναμον κλασματικὸν ἀριθμὸν τῆς ὥρας, πολλαπλασιάσαντες
αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 24, ὅστις δεικνύει πόσας ὥρας περιέχει μία
ἡμέρα, οὕτω θέλομεν τρέψει τὸ κλάσμα $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας εἰς ἰσοδύναμον
κλασματικὸν ἀριθμὸν τῆς ἀμέσως ἐπομένης ὑποδιαίρέσεως πολλα-
πλασιάζοντες αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 60, ὅστις δεικνύει πόσα πρῶτα
λεπτὰ περιέχει μία ὥρα. Θέλομεν οὕτως ἔχει

$$\frac{1}{3} \text{ τῆς ὥρας} = \frac{20}{3} \text{ τοῦ πρώτου λεπτοῦ} = 20 \text{ πρῶτα λεπτά.}$$

Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα ἀντὶ τοῦ
 $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας τὸ ἴσον αὐτῷ 20 πρῶτα λεπτά, θέλομεν ἔχει

$$\frac{23}{9} \text{ τῆς ἡμέρας} = 2 \text{ ἡμ.} \cdot 13 \text{ ὥρ.} \cdot 20 \text{ λ.π.}$$

Δημοσία Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βεροῦνης

Οὕτως ἐτράπη ὁ δεδομένος κλασματικός $\frac{23}{9}$ τῆς ἡμέρας εἰς ἰσο-

δύναμον συμμιγῆ 2 ἡμ. 13 ὥρ. 20 λ. π., πορίζομεθα δὲ εὐκόλως ἐκ τοῦ τρόπου, δι' οὗ ἐφθάσαμεν εἰς τὸν σκοπόν, τὸν ἐξῆς γενικὸν κανόνα.

130. Ἴνα τρέψωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν μονάδος τιτὸς εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῇ, ἐξάγομεν πρῶτον τὰς ἐν τῷ κλασματικῷ περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας, ἂν ἐπάρχωσιν. Ἄσται θέλουσι παριστῆ μονάδας τοῦ αὐτοῦ ἡδυνε μὲ τὰς μονάδας τοῦ δοθέντος κλασματικοῦ. Τρέπομεν ἔπειτα τὸ μέρος μικρότερον τῆς μονάδος κλάσμα εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν τῆς ἀρέσως κατωτέρας ἐποδιαίρεσιν πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς ὑποδιαίρεσιν ταύτης περιέχει ἡ μονὰς τοῦ κλασματικοῦ. Ἐξάγομεν ἀκαλοῦθως τὰς ἐν τῷ εἰρησομένῳ οὐτῷ κλασματικῷ περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας, ἂν ἐπάρχωσιν. Αἱ μονάδες αὗται θέλουσιν εἶναι μονάδες τοῦ αὐτοῦ εἶδους μὲ τὰς τοῦ κλασματικοῦ. Τρέπομεν πάλιν τὸ μέρος μικρότερον τῆς μονάδος κλάσμα, ἂν μείνῃ τοιοῦτον, εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν τῆς ἀρέσως κατωτέρας ἐποδιαίρεσιν, καὶ ἐξακαλοῦθόμεν τὴν πρῶτην ὥς ἀνωτέρω μέχρι οὗ ἡ εἰρωμεν ὥς ἐπὶ λοιπὸν διαιρέσειν τινος μηδέν, ἢ φθάσωμεν εἰς τὴν κατωτάτην τοῦ συμμιγῶς ἐποδιαίρεσιν μετὰ τινος ἐπολοίπου. Λίθομεν τότε εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο ἐπὶ λοιπὸν τὸν παρονομαστὴν τοῦ τελευταίου κλάσματος, καὶ προσθέτομεν τὸ προκύπτον κλάσμα εἰς τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως τοῦ εἰρηθέντος συμμιγῶς.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐκτελεσθὲν παράδειγμα εὑρομεν ὑπόλοιπον 0 φθάσαντες μόνον μέχρι τῶν πρώτων λεπτῶν. Ἄν δὲ εἶχομεν καὶ τρέψωμεν τὴν $\frac{2}{7}$ τῆς ἡμέρας εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῇ, ἠθέλομεν εὐρεῖ διὰδοχικῶς ἀκολουθοῦντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα

$$\frac{2}{7} \text{ τῆς ἡμέρας} = 0 \text{ ἡμ.} + \frac{22}{7} \text{ τῆς ὥρας.}$$

$$\frac{22}{7} \text{ τῆς ὥρας} = 10 \text{ ὥρ.} + \frac{420}{7} \text{ τοῦ πρώτου λεπτοῦ.}$$

$$\frac{420}{7} \text{ τοῦ πρώτου λεπτοῦ} = 17 \text{ λ. π.} + \frac{60}{7} \text{ τοῦ δευτέρου λεπτοῦ.}$$

$$\frac{60}{7} \text{ τοῦ δευτέρου λεπτοῦ} = 8 \text{ λ. δ.} + \frac{4}{7} \text{ τοῦ δευτέρου λεπτοῦ.}$$

Ἐπομένως

$$\frac{2}{7} \text{ τῆς ἡμέρας} = 10 \text{ ὥρ.} 17 \text{ λ. π.} 8 \text{ λ. δ.} + \frac{4}{7} \text{ τοῦ δευτέρου λεπτοῦ.}$$

Ἄρα ἐφθάσαμεν μέχρι τῆς τελευταίας τοῦ συμμιγῶς ὑποδιαί-

έσεως χωρὶς νὰ εὐρωμεν ὑπόλοιπον 0, ἔνα ἔχωμεν ἀκριβῶς τὴν ἀξίαν τῶν $\frac{3}{7}$ τῆς ἡμέρας προσεθέσαμεν εἰς τὰ εὐρεθέντα δευτέρα λεπτά καὶ τὰ μείναντα $\frac{4}{7}$ τοῦ δευτέρου λεπτοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.—“Ἄν εἶχομεν νὰ τρέψωμεν εἰς ἰσοδυνάμους συμμιγείς τοὺς ἐξῆς κλασματικούς ἀριθμούς

$\frac{1}{2}$ τῆς ὀργανῆς, $\frac{5}{7}$ τοῦ ὀθωρείου, $\frac{1}{17}$ τῆς μοίρας, $\frac{1}{11}$ τοῦ στατηῖρου, ἠθέλομεν εὐρεῖ

$\frac{1}{2}$ τῆς ὀργανῆς = 2 ὄρ. 0 πόδ. 9 δάκ.

$\frac{5}{7}$ τοῦ ὀθωρείου = 2 πλ. 4 ὄρ. 28 λεπ. + $\frac{5}{7}$ τοῦ λεπτοῦ,

$\frac{1}{17}$ τῆς μοίρας = 40' 35" + $\frac{5}{17}$ τοῦ δευτερολεπτοῦ,

$\frac{1}{11}$ τοῦ στατηῖρου = 1 στατ. 4 ὄκ.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ.

131. Ἐπειδὴ οἱ συμμιγείς ἀριθμοὶ εἶναι ἀριθμοὶ συγκεκριμένοι πρέπει ἀνγκυκλίως οἱ προσθετέοι νὰ ᾖναι ὁμοειδεῖς, ἥτοι νὰ παριστῶσι μονάδας τοῦ αὐτοῦ εἶδους. Ἴνα δὲ εὐρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοειδέσων καὶ ἂν ᾖναι,

Γράφωμεν αὐτοὺς τοὺς μὲν ὑπὸ τοὺς δὲ οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς ὑποδιαίρεσεως νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθετῷ στήλῃ. ἄγωμεν ὑποκάτω γραμμὴν καὶ προσθέτομεν πρῶτον τὰς μονάδας τῆς κατωτάτης τῶν συμμιγῶν ὑποδιαίρεσεως. Ἐὰν εὐρωμεν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δείκνυει πόσας μονάδας τῆς ὑποδιαίρεσεως ταύτης περιέχει ἡ μοῖρα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαίρεσεως, γράφωμεν τοῦτο ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Ἐὰν δὲ τὸ εὐρεθὲν ἄθροισμα ᾖναι μεγαλύτερον τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμοῦ, ἐξάγωμεν τὰς ἐν αὐτῷ περιλαμβανόμενας μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαίρεσεως, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφωμεν ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ, τὰς δὲ ἐξαχθείσας μονάδας προσθέτομεν εἰς τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαίρεσεως, καὶ οὕτω καθέλκῃς μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὴν πρῶτην πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλῃ τῶν προσθετέων συμμιγῶν, ἥς τὸ ἄθροισμα γράφωμεν ἀλλοῦ ὅπου ἐπ' αὐτῇ.

Ἡ ὀρθότης τοῦ ἀνωτέρω κανόνος εἶναι προφανής. Ἐστῶσαν π. χ. πρὸς πρόσθεσιν οἱ ἐξῆς συμμιγείς.

23ήμ. 17ώρ. 25λ.π. 36λ.δ.

5 0 53 28

21 20 3

29 20 39 7

Ἀκολουθοῦντες τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα εὐρομεν ὡς ἄθροισμα τῶν δευτέρων λεπτῶν 67, καὶ ἐπειδὴ ὁ 67 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ 60, ὅστις δεικνύει πόσα λεπτά δεύτερα αποτελοῦσιν ἐν λεπτὸν πρῶτον, ἐγράψαμεν 7 ἐν τῇ στήλῃ τῶν δευτερολέπτων καὶ ἐκρατήσαμεν 1 πρῶτον λεπτόν, ὅπερ προσθέσαμεν εἰς τὴν στήλην τῶν πρώτων λεπτῶν, ἥς τὸ ἄθροισμα εἶναι τότε 99 πρώτα λεπτά. Ἐπειδὴ πάλιν 99 πρώτα λεπτά περιέχουσι μίαν ὥραν καὶ 39 λεπτά πρώτα, ἐγράψαμεν 39 ὑπὸ τὰ πρώτα λεπτά καὶ ἐκρατήσαμεν τὴν μίαν ὥραν, ἣν προσθέσαμεν εἰς τὴν στήλην τῶν ὥρῶν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΑΡΑΤΥΡΗΣΙΣ.—Ἐὰν οἱ συμμιγεῖς ἦναι μὲν ὁμοειδεῖς, ἀλλ' οὐχὶ καὶ ὁμοιοτρόπως, οὕτως εἰπεῖν, ἐκπερασμένοι, ὡς ἔχωμεν π. χ. νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀργάνης τὸν συμμιγῆ 3 πόδ. 8 δακ. 11 γρ., πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου ἄθροισματος πρέπει ἢ νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς αὐτῆς μονάδος, ἢ τῆς ὀργάνης, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ τῆς αὐτῆς μονάδος κλάσματα, ἢ, ὅπερ προτιμώτερον, νὰ τρέψωμεν τὸν κλασματικὸν εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ, καὶ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν συμμιγῶν ὡς ἀνωτέρω ἐρρήθη.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ.

132. Καὶ οἱ πρὸς ἀφαίρεσιν συμμιγεῖς πρέπει νὰ ἦναι ὁμοειδεῖς, ἵνα δὲ εὐρωμεν τὴν διαφορὰν αὐτῶν,

Γράφωμεν τὸν ἀφαιρετέον συμμιγῆ ὑπὸ τοῖς μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθεστῇ στήλῃ, ἄγομεν ὀριζόντιον γραμμὴν ὑποκάτω καὶ ἀρχόμεθα τῆς ἀφαίρεσιν ἀπὸ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά. Ἐὰν συμβῇ αἱ μονάδες τάξεως τινος τοῦ ἀφαιρετέου νὰ ἦναι περισσότεραι τῶν τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ μειωτέου, λαμβάνομεν πλεονάζοντα ἀπὸ τῶν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως τοῦ μειωτέου καὶ τρέπομεν αὐτὴν ἐν μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ὥς προσθέτομεν εἰς τὰς παρχοῦσας τοῦ μειωτέου καὶ ἀπὸ τοῦ ἐκτελεσμένου ἄθροισματος, ὅπερ προφανῶς θέλει εἶναι μεγαλύτερον τῶν ἀντιστοιχῶν

μονάδων τοῦ ἀφαιρετέου, ἀφαιροῦμεν τὰς μονάδας τούτου. Ἰνα δὲ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορὰ, αὐξάνομεν κατὰ μίαν μονάδα τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τὸ εὐρησόμενον ἄθροισμα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς ὑποδιαιρέσεως τοῦ μειωτέου, καὶ οὕτω καθέξης.

Καὶ ὁ κανὼν οὗτος εἶναι φανερός. Ἐστω π. γ. ν' ἀφαιρεθῇ ὁ συμμιγῆς 36ρ. 0πὸδ. 5δξκ. 9γρ. ἀπὸ τοῦ συμμιγοῦς 46ρ. 2πὸδ. 4δξκ. 7γρ.

Ἀροῦ γράψωμεν αὐτοὺς ὡς προείπομεν, ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν ὡς ἐξῆς·

46ρ.	2πὸδ.	4δξκ.	7γρμ.
3	0	5	9
1	1	10	10

Ἐπειδὴ 9 γραμμὰὶ δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ 7 γραμμῶν, λαμβάνομεν ἓνα δάκτυλον, ὃν τρέπομεν εἰς 12 γραμμὰς καὶ προσθέτομεν αὐτὰς εἰς τὰς ὑπάρχουσας 7· εὐρίσκομεν οὕτως ἄθροισμα 19, ἀρ' αὐτὸ ἀφαιροῦμεν 9 καὶ εὐρίσκομεν διαφορὰν 10, ἣν γράφομεν ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Ἰνα δὲ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορὰ τῶν συμμιγῶν, προσθέτομεν ἓνα δάκτυλον εἰς τοὺς 5 τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῶν 4 τοῦ μειωτέου. Ἀλλ' ἔπειδὴ καὶ ἡ ἀφαίρεσις αὐτῇ δὲν εἶναι δυνατὴ, πράττομεν ὡς ἀνωτέρω κλπ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐὰν οἱ πρὸς ἀφαίρεσιν συμμιγεῖς δὲν ἦναι ὁμοιότροπως ἐκπερασμένοι, ἂν εἶχομεν π. γ. ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ συμμιγοῦς 23στατ. 30άκ. 250δρ. τὸν συμμιγῆ 3στατ. καὶ $\frac{5}{7}$ τοῦ στατηῆρος, ἔπρεπεν ἢ νὰ τρέψωμεν καὶ τοὺς δύο εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς τῆς αὐτῆς μονάδας, ἢ νὰ τρέψωμεν τὸ κλασματικὸν μέρος τοῦ δευτέρου εἰς συμμιγῆ καὶ ἐκτελέσωμεν ἔπειτα ὡς ἀνωτέρω τὴν ἀφαίρεσιν. Ὁ δεῦτερος οὗτος τρόπος εἶναι πάντοτε προτιμότερος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.—Εὐκόλως παρατηρεῖ τις τὴν μεγίστην ἀναλογίαν, ἥτις ὑπάρχει εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀνωτέρω πράξεων ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων. Καὶ τῷ ὄντι, οὐδεμίᾳ διαφορὰ πρακτικῇ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχει· ἡ μόνη φαινομένη, οὕτως εἶπειν, διαφορὰ προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι, εἰς μὲν τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς αἱ μονάδες τάξεώς τινος ὑποαισθητῶς εἶναι δεκαπλάσιαι τῶν τῆς ἀμέσως ἐπομένης, ἐνῶ εἰς τοὺς συμμιγεῖς ἡ μεταξὺ αὐτῶν σχέσης μεταβάλλεται αὐθαίρετως ἀπὸ τάξεως εἰς τάξιν, ἢ ἀπὸ ὑποδιαιρέσεως εἰς ὑποδιαιρέσιν, καὶ πρὸς τοῦτοις· εἰς τὴν γραμμὴν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἡ τάξις τῶν διαφορῶν μονάδων δεικνύεται ἀμέσως ἐκ τῆς

πρὸς ἄλληλα θέσεως τῶν διαφορῶν ψηφίων αὐτῶν, ἐνθ' εἰς τοὺς συμμιγείς, διὰ τὸν ἀνωτέρω λόγον, πρέπει ἀναγκαίως νὰ τίθηται πρὸς τὰ δεξιά καὶ ὀλίγον ἠνωθεν καὶ τὸ ὄνομα τούτων.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΠΙ ΑΚΕΡΑΙΟΝ.

133. Ἐστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγής 5ῶρ. 4πόδ. 8δάκ. 10γρ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 8. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι φανερόν ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον θέλει εὑρεθῇ ὀκταπλασιαζομένου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 5ῶρ. 4πόδ. 8δάκ. 10γρ. Ὀκταπλασιάζεται δὲ αὗτος, ἔαν ὀκταπλασιασθῇ ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ. Διὰ τοῦτο ἡ πρῆξις ἐκτελεῖται ὡς ἐξῆς

5ῶρ. 4πόδ. 8δάκ. 10γρ.
8

46 1 10 8

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τῆς μονάδας τῆς κατωτέρας τάξεως τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ ἄγομεν ὑποκάτω ὀριζόντιον γραμμὴν. Πολλαπλασιάζομεν ἐν πρώτοις τὰς μονάδας 10 τῆς κατωτάτης τοῦ συμμιγοῦς ὑποδιαίρεσεως ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 8, καὶ εὐρίσκομεν οὕτω γινόμενον 80 γραμμῆς. Ἐπειδὴ δὲ 80 γραμμαὶ περιέχουσιν 6 δακτύλους καὶ 8 γραμμῆς, γράφομεν 8 ἐν τῇ καθεύτῃ στήλῃ τῶν γραμμῶν, καὶ κρατοῦμεν τοὺς 6 δακτύλους, ἵνα προσθέσωμεν αὐτοὺς εἰς τὸ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν γινόμενον τῶν δακτύλων τοῦ συμμιγοῦς. Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι 64 δακτύλοι καὶ 6 οἱ κρατούμενοι γίνονται 70. Ἐπειδὴ πάλιν 70 δακτύλοι περιέχουσι 5 πόδας καὶ 10 δακτύλους, γράφομεν τοὺς 10 δακτύλους εἰς τὴν στήλην τῶν δακτύλων καὶ κρατοῦμεν τοὺς 5 πόδας, ἵνα προσθέσωμεν αὐτοὺς εἰς τὸ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν γινόμενον τῶν ποδῶν τοῦ συμμιγοῦς. Εὐρίσκομεν οὕτως ἄθροισμα 37 πόδας, αἵτινες περιέχουσιν 6 ὀργυιάς καὶ 1 πόδα. Γράφομεν λοιπὸν 1 εἰς τὴν στήλην τῶν ποδῶν καὶ προσθέτομεν τὰς 6 ὀργυιάς εἰς τὸ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν γινόμενον τῶν ὀργυιῶν τοῦ συμμιγοῦς. Εὐρίσκομεν οὕτως ἄθροισμα 46 ὀργυιάς, ἃς γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ὀργυιῶν. Οὕτως ὀκταπλασιάζαντες ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς εὗρομεν τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 8, ὅπερ εἶναι ὁ ὑπὸ τὴν γραμμὴν γραφείς συμμιγής 46ῶρ. 1πούς. 10 δάκ. 8γρ.

134. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποριζόμεθα εὐκόλως τὸν ἐξῆς κανόνα.

"Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν συμμιγὴ ἐπὶ ἀκέραιον. πολλαπλα-

συνάγομεν πρῶτον ἐπὶ τῶν ἀκέραιον τὰς ἐν τῷ συμμιγῇ μονάδας τῆς κατωτάτης αὐτοῦ ὑποδιαίρεσεως. ἐξάγομεν ἔπειτα τὰς ἐν τῷ εὐρεθησομένῳ γινόμενῳ περιεχομέναις μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαίρεσεως, ἂν ὑπάρχωσι, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν ὑποκάτω εἰς τὴν αὐτὴν στήλην· εἰς ἣν καὶ αἱ παρασχοῦσαι αὐτὸ μονάδες τοῦ συμμιγνύοντος, τὰς δὲ ἐξαχθείσας μονάδας προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐπὶ τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς ὑποδιαίρεσεως τοῦ πολλαπλασιαστοῦ συμμιγνύοντος. Ἐπὶ τοῦ οὕτως εὐρεθέντος γινόμενον πράττομεν ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου, καὶ οὕτω καθέλθῃ, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τοῦ δεδομένου συμμιγνύοντος ὑποδιαίρεσεως, ὅπερ μετὰ τῶν χρησιμοποιούμενων τοῦ προηγουμένου γράφομεν ὁλόκληρον εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Ὁ οὕτως ἐκ τῆς γραμμῆς γραφὴν συμμιγῆς ἀριθμὸς θέλει παριστῇ τὸ γινόμενον τοῦ δεδομένου συμμιγνύοντος ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΔΙ' ΑΚΕΡΑΙΟΥ.

133. Ἐστω νῦν διαιρεθῇ ὁ συμμιγῆς 25 ἡμ. 21 ὥρ. 27 λ. π. 36 λ. δ. διὰ τοῦ ἀκέραιου 6. Ἴνα λάβωμεν τὸ ἕκτον τοῦ διαιρετέου, διατίσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς·

	25 ἡμ. 21 ὥρ. 27 λ. π. 36 λ. δ.	6	4 ἡμ. 7 ὥρ. 34 λ. π. 36 λ. δ.
1			
24			
24 ὥρ.			
21			
45			
3			
60			
180 λ. π.			
27			
207			
27			
3			
60			
180 λ. δ.			
36			
216			
36			
0			

Γράφομεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν καὶ εἰς τὰ διζὰ αὐτοῦ τὸν ἀκέραιον χωρίζοντες αὐτοὺς διὰ καθεῖτου γραμμῆς κτλ., ἀρχόμεθα δὲ τῆς διαιρέσεως ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τοῦ δεδομένου συμμιγνύοντος ὑποδιαίρεσεως. Διαιροῦντες τὰς 25 ἡμέρας τοῦ συμμιγνύοντος διὰ 6 εὐρίσκομεν πηλίκον 4 ἡμέρας. ἅς γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην, καὶ ὑπόλοιπον 1 ἡμέραν. Τρέπομεν ταύτην εἰς ὥρας πολλὰ πλῆσιζόντες αὐτὴν ἐπὶ 24, καὶ εἰς τὸ γινόμενον 24 ὥρας προσθέτομεν καὶ τὰς 21 ὥρας τοῦ συμμιγνύοντος. Εὐρίσκομεν οὕτως ἄθροισμα 45 ὥρας, ὧν τὸ ἕκτον εἶναι 7 ὥραι μετὰ τοῦ υπολοίπου 3. Γράφομεν 7 ὥρας ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ τρέπομεν τὰς 3 ὥρας τοῦ υπολοίπου εἰς λεπτὰ πρῶτα. Εὐρίσκομεν οὕτω γινόμενον 180 λεπτὰ πρῶτα, εἰς ἃ προσθέτομεν καὶ τὰ ἐν τῷ δεδομένῳ

συμμιγνεί υπάρχοντα 27 λεπτά πρώτα. Αχμδάνομεν επίσης τὸ ἔκτον τοῦ ἀθροίσματος 207 καὶ εὐρίσκομεν πηλίκον 34 λεπτά πρώτα καὶ ὑπόλοιπον 3. Γράφομεν τὰ 34λ.π. ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ τρίπομεν τὰ μείναντα 3 εἰς λεπτά δεύτερα, κτλ.

Ἡ ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος ἐκθεσις τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως, γενικῶς λαμβανομένη, ἀποτελεῖ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου, ὥστε νομιζομεν ὅλως περιττὸν νὰ ἐπαναλάβωμεν γενικῶς τὰ αὐτά.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΠΙ ΣΥΜΜΙΓῃ.

136. Τρεῖς περιπτώσεις δυνατόν νὰ περυσιασθῶσιν εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

1ον. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος ᾖται συμμιγῆς καὶ ὁ πολλαπλασιαστής ἀκεραῖος.

2ον. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος ᾖται συμμιγῆς καὶ ὁ πολλαπλασιαστής κλασματικός, ἢ μικτός.

3ον. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής ᾖται ἀμφοτέρω συμμιγεῖς.

Ἐἶδομεν προηγουμένως πῶς ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμός ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει.

Καθόσον δ' ἀφορᾷ τὴν δευτέραν, εἶναι φανερόν ὅτι συμμιγῆς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλασματικόν, ὅπως καὶ ἀκεραῖος ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιαζομένου δηλ. τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ διαιρουμένου τοῦ οὕτως εὑρεθησομένου γινομένου διὰ τοῦ περνομαστοῦ αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν πῶς πολλαπλασιάζεται συμμιγῆς ἐπὶ ἀκεραῖον καὶ πῶς διαιρεῖται συμμιγῆς δι' ἀκεραίου, ἢ κατὰ τὴν δευτέραν ταύτην περίπτωσιν εὑρεσις τοῦ γινομένου δὲν μᾶς περιέχει οὐδεμίαν δυσκολίαν.

Ἄν ὁ πολλαπλασιαστέος ᾖται μικτός, ἠθέλομεν τρέψει αὐτὸν εἰς ἀσύνθετον κλασματικόν καὶ ἐκτελέσει τὴν πρᾶξιν ὡς προεθεσμεύμεν.

137. Μᾶς μένει λοιπὸν νὰ ἴδωμεν πῶς πολλαπλασιάζεται συμμιγῆς ἐπὶ συμμιγῇ.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 3ῶρ. 5λ.π. 8λ.δ. ἐπὶ τὸν συμμιγῆ 5ῶρ. 4πὸδ. 0δᾶκ. 3γραμ.

Κατὰ τὸν ὁρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ ζητούμενον γινόμενον πρέπει νὰ περιέχῃ τοσάκις τὸν πολλαπλασιαστέον 3ῶρ. 5λ.π. 8λ.δ., ὥσκις ὁ πολλαπλασιαστής 5ῶρ. 4πὸδ. 0δᾶκ. 3γραμ. περιέχῃ

τὴν μονάδα, πρὸς ἣν ὁ πολλαπλασιαστέος ἀναφέρεται. Ἄν π. χ. ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα·

Κινητὸν τι ἰσοσταθῶς κινούμενον διατρέχει εἰς 3 ὥρ. 5 λ. π. 8 λ. δ. μίαν ὀργυιάν, εἰς πόσον χρόνον θέλει διατρέξει 5 ὥρ. 4 πόδ. 0 δάκ. 3 γρ.; πρὸς εὑρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει προφανῶς νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον 3 ὥρ. 5 λ. π. 8 λ. δ. τοσάκις, ὡσάκις ἡ μὴνὰς μία ὀργυιά, πρὸς ἣν οὗτος ἀναφέρεται, περιέχεται ἐν τῷ πολλαπλασιαστῇ 5 ὥρ. 4 πόδ. 0 δάκ. 3 γρμ. Ἀλλ' εἶναι φανερόν ὅτι 1 ὥρ. περιέχεται τοσάκις ἐν τῷ συμμιγῇ 5 ὥρ. 4 πόδ. 0 δάκ. 3 γρμ., ὡσάκις αἱ 864 γραμμαί, ἅς μία ὀργυιά περιέχει, περιέχονται ἐν ταῖς 4899 γραμμαῖς, ἅς εὐρίσκομεν τρέποντες τὸν συμμιγῇ 5 ὥρ. 4 πόδ. 0 δάκ. 3 γρμ. εἰς γραμμάς, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὡσάκις ὁ 864 περιέχεται ἐν τῷ 4899, ἥ, ὅπερ ταυτὸ, ὡσάκις ἡ μονὰς περιέχεται ἐν τῷ κλάσματι $\frac{4899}{864}$. Πρέπει λοιπὸν πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῇ 3 ὥρ. 5 λ. π. 8 λ. δ. ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{4899}{864}$, ὅπερ παριστᾷ τὸν συμμιγῇ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τραπέντα εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἐκείνης αὐτοῦ τῆς μονάδος, πρὸς ἣν ὁ πολλαπλασιαστέος ἀναφέρεται.

Ἄν εἰχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα,

Κινητὸν τι ἰσοσταθῶς κινούμενον διατρέχει εἰς 3 ὥρ. 5 λ. π. 8 λ. δ. ἓνα πόδα· εἰς πόσον χρόνον θέλει διατρέξει 5 ὥρ. 4 πόδ. 0 δάκ. 3 γρμ.; ἔπρεπε πρὸς εὑρεσιν τοῦ ζητουμένου νὰ ἐπαναλάβωμεν τοσάκις τὸν πολλαπλασιαστέον 3 ὥρ. 5 λ. π. 8 λ. δ., ὡσάκις ὁ πολλαπλασιαστὴς 5 ὥρ. 4 πόδ. 0 δάκ. 3 γρμ. περιέχει τὴν μονάδα 1 πόδ., πρὸς ἣν ὁ πολλαπλασιαστέος ἀναφέρεται· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἔπρεπε νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῇ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ ποδὸς καὶ ἐπὶ τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον κλάσμα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον. Ἐντεῦθεν πορίζομεθα εὐκόλως τὸν ἐξῆς τῆς περὶ τῆς ὁ λόγος περιπτώσεως γενικὸν κανόνα.

Συμμιγῆς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ συμμιγῇ, εἰς τραπὴ ὁ συμμιγῆς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἐκείνης αὐτοῦ τῆς υποδιαίρεσεως, πρὸς τὴν μονάδα τῆς ὑποίας ἀναφέρεται ὁ πολλαπλασιαστέος, καὶ πολλαπλασιασθῇ οὗτος ἐπὶ τὸ εὑρεθησόμενον κλάσμα ὡς πολλαπλασιάζεται συμμιγῆς ἐπὶ κλάσμα.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον, ἂν εἰχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα,

Κινητὸν τι ἰσοσταθῶς κινούμενον διατρέχει 1 δάκ. εἰς 3 ὥρ. 5 λ.

8λ.δ.· εἰ πόσον χρόνον θέλει διατρέξει ὁρ. 4πόδ. 0δκκ. 3γγραμ.; ἔπρεπε νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ δακτύλου καὶ ἐπὶ τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον κλάσμα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστὸν. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι διὰ τὴν λύσιν ἐκάστου τῶν ἀνωτέρω τριῶν προβλημάτων ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς αὐτοὺς συμμιγείς, ἀλλ' ὅτι διὰ μὲν τὴν λύσιν τοῦ πρώτου ἔπρεπε νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὀργάνου, διὰ δὲ τὴν τοῦ δευτέρου εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ ποδός, καὶ διὰ τὴν τοῦ τρίτου εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ δακτύλου.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΔΙΑ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ.

138. Καὶ ἐν τῇ διαιρέσει τῶν συμμιγῶν τρεῖς διακρίνονται περιπτώσεις. Τοῦ διαιρετέου ὄντος πάντοτε συμμιγοῦς, ὁ διαιρέτης δυνατόν νὰ ᾖ· ἢ ἀκέραιος, ἢ κλασματικός, ἢ συμμιγής.

1ον. Ἰδόμεν πῶς διαιρεῖται συμμιγὴς δι' ἀκεραίου.

2ον. Ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖ καὶ κλάσμα, ἡ διαίρεσις προφανῶς ἐκτελεῖται πολλαπλασιάζομένου τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντιστραφέντον. Ἐάν δὲ ὁ διαιρέτης ᾖ μικτός, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἐλέγθη ἀνωτέρω.

3ον. Μᾶλλον μένει λοιπὸν νὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν, καὶ ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγής.

139. Ἡ περίπτωση αὕτη υποδιαιρεῖται εἰς τὰς ἐξῆς δύο·

1ον. Ὅταν ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος ᾖται συμμιγεῖς ὁμοειδεῖς, καὶ

2ον. Ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖται συμμιγής ἑτεροειδής πρὸς τὸν συμμιγῆ τοῦ διαιρετέου.

1ον. Ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖται ὁμοειδής μὲ τὸν διαιρετέον, τότε τὸ πηλίκον θέλει εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸ ζητούμενον· ἐν ἑλλειψι λέγειται, τὸ ζήτημα, διὰ τὴν λύσιν τοῦ ὁποίου ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, θέλει προσδιορίσει τὸ εἶδος τοῦ ζητουμένου πηλίκου. Παράδειγματος χάριν, ἂν εἶχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα·

Διὰ 3 ὁρ. 5πόδ. 4δκκ. 9γγραμ. ὑψώματός τινος ἐπληρώσαμεν 1 τάλ., πόσον ἠθέλομεν πληρώσει, ἂν ἠγοράζομεν 125 ὁργ. 4πόδ. ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑψώματος;

εἶναι φανερόν ὅτι ἠθέλομεν πληρώσει τοσάκις ἐν τάληρον, ὅσας

ἡ συμμιγῆς ἀριθμὸς 35ῶρ. 5πόδ. 4δᾶκ. 9γραμ. ἐμπεριέχεται ἐν τῷ συμμιγῇ 125ῶρ. 4πόδ. Πρὸς εὗρεσιν λοιπὸν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῇ 125ῶρ. 4πόδ. διὰ τοῦ ὁμοειδοῦς αὐτῷ 35ῶρ. 5πόδ. 4δᾶκ. 9γραμ. καὶ τὸ πηλίκον θέλει παριστᾷ τὰ λήρα, δῶτι τὸ ζητούμενον εἶναι τὰ λήρα. Ἄν δὲ εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ εἰς τῆς ζήτημα,

Ἴνα διατρέξῃ κινητὸν τι ἰσοταχῶς κινούμενον 35ῶρ. 5πόδ. 4δᾶκ. 9γραμ. χρειάζεται 1ῶρ., πόσας ὥρας θέλει χρειασθῇ, ἵνα διατρέξῃ 125ῶρ. 4πόδ.;

εἶναι φανερόν ὅτι πρὸς εὗρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῇ 125ῶρ. 4πόδ. διὰ τοῦ συμμιγοῦς 35ῶρ. 5πόδ. 4δᾶκ. 9γρ. ἠθέλομεν λοιπὸν ἔχει πρὸς διαιρέσιν καὶ διὰ τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου τούτου προβλήματος τοὺς αὐτοὺς συμμιγεις, ἀλλὰ τὸ πηλίκον ἐνταῦθα θέλει εἶναι συμμιγῆς ἀριθμὸς ὥρων, ἐνῷ τὸ πηλίκον τῶν αὐτῶν συμμιγῶν ἀνωτέρω ἔπρεπε νὰ παριστᾷ τὰ λήρα.

140. Τούτων δὲ τεθέντων, εἶναι φανερόν ὅτι ὁ διαιρετέος θέλει περιέχει τοσάκις τὸν διαιρέτην, ὅσαςκις αἱ παριστώσαι τὴν ἄξιαν τοῦ διαιρετέου μονάδας τῆς αὐτῆς περιέχουσι τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, τὰς παριστώσας τὴν ἄξιαν τοῦ διαιρέτου. Ἐντεῦθεν ὁ κανὼν.

Ἴνα διαιρέσωμεν συμμιγῇ διὰ συμμιγοῦς ὁμοειδοῦς, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτοῖς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως, καὶ διαιροῦμεν τὰς μονάδας τοῦ διαιρετέου διὰ τῶν μονάδων τοῦ διαιρέτου. Τὸ οὕτως εὑρεθῆσόμενον πηλίκον θέλει εἶναι κλασματικὸς ἀριθμὸς ὁμοειδῆς τῷ ζητουμένῳ.

Παραδείγματος χάριν, πρὸς εὗρεσιν τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς 125ῶρ. 4πόδ. διὰ τοῦ συμμιγοῦς 35ῶρ. 5πόδ. 4δᾶκ. 9γραμ., τρέπομεν αὐτοὺς εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτοῖς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως, ἥτοι εἰς γραμμὰς, καὶ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 108576 τῶν γραμμῶν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ 31017 τῶν γραμμῶν τοῦ διαιρέτου, ἀλλὰ τὸ οὕτως εὑρεθῆσόμενον πηλίκον $\frac{108576}{31017}$ θέλει παριστᾷ τὰ λήρα, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ πρῶτον ζήτημα, καὶ ὥρας, ἂν τὸ δεύτερον ἐν ἄλλαις λέξεσι, τὸ κλάσμα $\frac{108576}{31017}$ θέλει εἶναι κλασματικὸς ἀριθμὸς τοῦ ζητουμένου. Οὕτως ἠθέλομεν εὑρεῖν διὰ τὴν λύσιν τοῦ πρώτου προβλήματος

$\frac{108576}{31017}$ τοῦ ταλήρου = 3τᾶλ. 2δρ. 40λεπ. + $\frac{6140}{10339}$ τοῦ λεπτοῦ, καὶ διὰ τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου

$\frac{108526}{91017}$ τῆς ὥρας = 3 ὥρ. 30 λ. π. 1 λ. δ. + $\frac{9461}{10339}$ τοῦ δευτερολέπτου.

141. 2ον. Ὅταν οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ ἦναι ἑτεροειδείς, τότε τὸ πηλίκον πρέπει ἀναγκαιῶς νὰ ἦναι ὁμοειδές μετὰ τὸν διαιρέτεον.

Διότι πρέπει τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον νὰ ἦναι ὁμοειδές καὶ ἴσον τῷ διαιρετέῳ, καὶ ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης εἶναι ἑτεροειδής πρὸς τὸν διαιρετέον, ἀναγκαιῶς τὸ πηλίκον πρέπει νὰ ἦναι ὁμοειδές αὐτῷ.

Ἵνα δὲ ἴδωμεν πῶς θέλομεν εὑρεῖ πάντοτε τὸ πηλίκον, ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς ζήτημα·

Κυητόν τι ἰσοταχῶς κινούμενον διέτρεξεν 125 ὥρ. 5 πὸδ. 8 δακ. 9 γραμ. εἰς 5 ὥρ. 8 λ. π. 13 λ. δ., πάσας ὁρμηῖαν κτ.λ. διέτρεχεν εἰς ἐκάστην ὥραν;

Πρὸς εὑρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει προφανῶς νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῆ 125 ὥρ. 5 πὸδ. 8 δακ. 9 γραμ. διὰ τοῦ συμμιγοῦς 5 ὥρ. 8 λ. π. 13 λ. δ. Ἀλλὰ τίνι τρόπῳ θέλομεν ἐκτελέσει τὴν τοιαύτην διαίρεσιν;

Ἄς παραστήσωμεν διὰ Δ τὸν δεδομένον διαιρετέον, διὰ Α τὸν διαιρέτην καὶ διὰ Π τὸ ζητούμενον πηλίκον. Ἐπειδὴ κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς διαιρέσεως πρέπει νὰ εὕρωμεν τρίτον ἀριθμόν, τοῦ ὁποῦ τοῦ γινόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς ἰσότητα

$$\Delta = A \times \Pi,$$

ἥτις πρέπει νὰ γραφῇ ὡς ἐξῆς

$$\Delta = \Pi \times A, \quad (1)$$

διότι ἀπεδείξαμεν ἀνωτέρω ὅτι τὸ πηλίκον Π πρέπει νὰ ἦναι ὁμοειδές μετὰ τὸν διαιρετέον Δ, ἐπομένως πρέπει νὰ κατέχῃ τὴν θέσιν τοῦ πολλαπλασιαστέου, πρὸς ὃν τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδές. Λοιπὸν ὁ συμμιγῆς τοῦ ζητουμένου πηλίκου Π πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν συμμιγῆ Α τοῦ διαιρέτου πρέπει νὰ δώσῃ γινόμενον τὸν διαιρετέον Δ. Ἄλλ' εἵπομεν ὅτι συμμιγῆς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ συμμιγῆ, ἐὰν τραπῇ ὁ συμμιγῆς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὑπὸ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ ζητήματος προσδιοριζομένης μονάδος, καὶ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγῆς τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον κλάσμα, κατὰ τὰ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν συμμιγῶν ἐπὶ τῆς περιπτώσεως ταύτης λεχθέντα.

Πρέπει λοιπὸν πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω ζητήματος νὰ τρέψωμεν τὸν διαιρέτην Α εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὥρας, διότι πρὸς τὴν ὥραν ὡς μονάδα ἀναφέρεται ὁ πολλαπλασιαστέος Π, καὶ τὸ

γινόμενον τοῦ πηλίκου Π ἐπὶ τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ θέλει εἶναι ὁμοειδὲς καὶ ἴσον τῷ διαιρετέῳ· ἐν ἄλλαις λέξεσι, θέλομεν ἔχει ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (1) ἀντὶ τοῦ A τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{\alpha}{\beta}$, τὴν ἐξῆς ἰσότητα

$$\Delta = \Pi \cdot \frac{\alpha}{\beta}, \quad (2)$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως διαιροῦντες τὰ δύο αὐτῆς μέλη διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$,

$$\Delta : \frac{\alpha}{\beta} = \Pi, \quad \gamma \Pi = \Delta : \frac{\alpha}{\beta}.$$

Λοιπὸν τὸ πηλίκον Π εὑρίσκεται, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ διαιρετέος διὰ τοῦ διαιρέτου A τραπέντος εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὥρας. Θέλομεν ἔχει λοιπὸν πρὸς διείρεσιν τὸν συμμιγῆ 125ὀρ. 5πόδ. 8δακ. 9γραμ. διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{1 \frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{6}}{1}$, προῖξιν ἀναγομένην εἰς τὴν δευτέραν τῆς διαιρέσεως τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν περίπτωσιν.

"Αν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς ζήτημα·

Κινητὸν τι ἰσοταχῶς κινούμενον διέτρεξεν 125ὀρ. 5πόδ. 8δακ. 9γραμ. εἰς 5ὀρ. 8λ.π. 13λ.δ., πόσας ὥρνιθας κτ.λ. διέτρεχεν εἰς ἕκαστον λεπτόν;

ἠθέλομεν εὑρεῖ ἀκολουθοῦντες κατὰ γράμμα τὸν ἀνωτέρω τρόπον τοῦ σκέπτεσθαι, ὅτι, ἵνα εὐρωμεν τὸ ζητούμενον πηλίκον, πρέπει καὶ ἐνταῦθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῆ 125ὀρ. 5πόδ. 8δακ. 9γραμ. διὰ τοῦ συμμ. γοῦς 5ὀρ. 8λ.π. 13λ.δ., τραπέντος εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν οὐχὶ πλέον τῆς ὥρας, ὡς προηγουμένως, ἀλλὰ τοῦ πρώτου λεπτοῦ.

Ψαυδύτως, ἐὰν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα

Κινητὸν τι ἰσοταχῶς κινούμενον διέτρεξεν 125ὀρ. 5πόδ. 8δακ. 9γραμ. εἰς 5ὀρ. 8λ.π. 13λ.δ., πόσας ὥρνιθας κτ.λ. διατρέχει εἰς 1ῆμ; ἠθέλομεν εὑρεῖ· σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω ὅτι, ἵνα εὐρωμεν τὸ ζητούμενον πηλίκον, πρέπει καὶ ἐνταῦθα νὰ διαιρέσωμεν τοὺς αὐτοὺς συμμιγείς, ἀλλὰ πρὸς τοῦτο, ὁ συμμιγῆς τοῦ διαιρέτου πρέπει νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν οὐχὶ τῆς ὥρας, οὔτε τοῦ πρώτου λεπτοῦ, ἀλλὰ τῆς ἡμέρας.

142. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορίζομεθα εὐκόλως τὸν ἐξῆς περὶ τῆς διαιρέσεως τῶν συμμιγῶν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ γενικὸν κανόνα.

Συμμιγῆς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ συμμιγοῦς ἑτεροειδοῦς, εἰν

τραπῇ ὁ συμμιγῆς τοῦ διαιρέτου εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἐκείνης αὐτοῦ τῆς ὑποδιαίρεσεως, πρὸς τὴν μονάδα τῆς ὁποίας ἀναφέρεται τὸ ζητούμενον πηλίκον, καὶ διαιρεθῇ ὁ συμμιγῆς τοῦ διαιρέτου διὰ τοῦ οὕτως ἐδρεθησομένου κλάσματος κατὰ τὰ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ περὶ διαίρεσεως τῶν συμμιγῶν λεχθέντα.

Οὕτω, διὰ τὴν λύσιν τοῦ πρώτου ζητήματος εἶπομεν ὅτι πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ τοῦ διαιρέτου 5 ὥρ. 8 λ. π. 13 λ. δ. εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὥρας, διότι πρὸς τὴν μονάδα τῆς ὥρας ἀνεφέρετο τὸ ζητούμενον πηλίκον. Διὰ τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου εὗρέθη ὅτι ὁ αὐτὸς συμμιγῆς ἔπρεπε νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ πρώτου λεπτοῦ, διότι πρὸς τὸ πρῶτον λεπτόν, ὡς μονάδα, ἀνεφέρετο τὸ ζητούμενον πηλίκον. Καὶ τέλος διὰ τὴν λύσιν τοῦ τελευταίου, εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ἡμέρας, διότι πρὸς τὴν ἡμέραν, ὡς μονάδα, ἀνεφέρετο τὸ ζητούμενον πηλίκον.

**ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΠΙ ΑΚΕΡΑΙΟΝ ἢ ΣΥΜΜΙΓΗ
ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟΝ ΤΩΝ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΩΝ.**

143. Ὁ πολλαπλασιασμός συμμιγούς ἐπὶ συμμιγῇ ἢ ἐπὶ ἀκέραιον, ὅταν οὗτος ᾖναι ἀριθμὸς ὑποσούν μέγας, ἐκτελεῖται καὶ κατ' ἄλλον τινὰ τρόπον· κατὰ τὴν καλουμένην μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασιῶν. Ἵνα ἴδωμεν εἰς τί αὕτη συνίσταται, δεῖ ἐφαρμόσωμεν αὐτὴν ἐπὶ τινων παραδειγμάτων· καὶ ἐν πρώτοις δεῖ ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγῆς ἀριθμὸς 35 ὥρ. 4 πὺδ. 10 δάκ. 7 γράμ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 284. Ἡ πρῆξις διατάσσεται ὡς ἐξῆς·

	35 ὥρ.	4 πὺδ.	10 δάκ.	7 γράμ.	
	284				
	140				
	280				
	70				
3 πὺδ....	142				
1	47	2			
6 δάκ ...	23	4			
3	11	5			
1	3	5	8		
4 γρ.	1	1	10	8	
3	0	5	11		
	10171	0	5	8	

καὶ ἐκτελεῖται οὕτω·

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τοῦ

δεδομένου συμμιγούς υποδιαίρεσεως, ἐνταῦθα τὰς 35 ὁρ., ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν 284, καὶ γράφομεν τὰ μερικὰ γινόμενα 140, 280, 70 οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθετῷ στήλῃ. Εἶναι φανερόν ὅτι, ἐπειδὴ τὸ γινόμενόν τῶν 35 ὁρ. ἐπὶ 284 θέλει παριστᾶ ὀργυιάς, πρέπει νὰ γραφῇ ὡς φαίνεται ἐν τῷ ὑποσθεν ἢ ἐν τῷ κατωτέρῳ ἐπαναλαμβανομένῳ πηραδείγματι, ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὀργυιῶν.

35 ὁρ.	4 πόδ.	10 δάκ.	7 γραμ.
284			
140			
280			
70			
3 πόδ... 142			
1 47	2		
0 δάκ... 23	4		
3 11	5		
1 3	5	8	
4 γρ... .. 1	1	10	8
3 0	5	11	
10171	0	5	8

Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὰς μονάδας 4 πόδ. τῆς ἀμέσως κατωτέρας υποδιαίρεσεως τοῦ δεδομένου συμμιγούς, καὶ ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν 284, ἀποσυνθέτομεν αὐτοὺς εἰς 3 πόδ. καὶ 1 πόδ., ἥτοι εἰς μέρη, ὧν τὸ πρῶτον νὰ ᾖται πολλοστὸν τι μέρος τῆς μονάδος τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, τὰ δὲ ἐπόμενα πολλοστὰ ἢ τῆς αὐτῆς μονάδος ἢ τινος τῶν προηγουμένων μερῶν. Ἐνταῦθα ἀποσυνθέσαμεν τοὺς 4 πόδας εἰς 3 πόδ., διότι 3 πόδες εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὀργυιᾶς, καὶ 1 πόδ., ὅστις εἶναι τὸ τρίτον τῶν 3 πόδων. Μετὰ ταῦτα λέγομεν·

"Ἄν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 1 ὁρ. ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν 284, ἢ θέλομεν εὕρει γινόμενον 284 ὀργυιάς, τώρα, ὅτε ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 3 πόδ., ἥτοι $\frac{1}{2}$ τῆς ὀργυιᾶς, ἐπὶ 284, θέλομεν προφανῶς εὕρει γινόμενον τὸ ἥμισυ τῶν 284 ὀργυιῶν, ἥτοι 142 ὀργυιάς. Γράφομεν λοιπὸν 3 πόδ. καὶ ἀπέναντι τούτων ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὀργυιῶν 142.

Πρέπει πρὸς τούτοις νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν 1 πόδ. ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν 284. Ἐπειδὴ δὲ 1 πούς εἶναι τὸ τρίτον τῶν 3

ποδῶν, τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 284 θέλει εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ γινομένου αὐτοῦ ἐπὶ 3 πόδας. Πρέπει λοιπὸν νὰ λάβωμεν τὸ τρίτον τῶν 142 ὄργυιων, ὅπερ εἶναι 47 ὄργυιαι καὶ 2 πόδες. Γράφομεν λοιπὸν ὡς προελέχθη 1 πόδ. ὑπὸ τοὺς 3 πόδ. καὶ ἀπέναντι τούτων τὸν ἀριθμὸν 47 ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὄργυιων καὶ τὸν ἀριθμὸν 2 ἐν τῇ στήλῃ τῶν ποδῶν.

Μεταβαίνομεν ἀκολουθῶς εἰς τὰς μονάδας 10 δακ. τῆς ἀμέσως κατωτέρως ὑποδιαίρεσεως τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς καί, ἵνα εὐρωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 284, ἀποσυνθέτομεν τοὺς 10 δακ. εἰς 6 δακ., οὔτινες εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ποδός, 3 δακ., οὔτινες εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν 6 δακ., καὶ 1 δάκ., ὅστις εἶναι τὸ τρίτον τῶν 3 δακ. Γράφομεν λοιπὸν, ὡς φαίνεται ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι, 6 δακ., 3, 1 ἐν τῇ στήλῃ, ἐν ᾗ ὑπάρχουσι καὶ 3 πόδ., 1, καὶ ἀπέναντι τούτων τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν, ἅτινα εὐρίσκομεν σκεπτόμενοι πάλιν ὡς ἐξῆς·

Ἐπειδὴ 6 δάκ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 12 δακ., ἥτοι τοῦ 1 ποδός, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν θέλει εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ 1 ποδός ἐπὶ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιαστὴν, ὅπερ γινόμενον εὐρέθη προηγουμένως καὶ εἶναι 47 ὀρ. 2 πόδ. Λαμβάνομεν λοιπὸν τὸ ἥμισυ τῶν 47 ὀρ. 2 πόδ. καὶ εὐρίσκομεν 23 ὀρ. 4 πόδ., ὅπερ γράφομεν οὕτως, ὥστε αἱ 23 ὄργυιαι νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὄργυιων καὶ οἱ 4 πόδες ἐν τῇ στήλῃ τῶν ποδῶν.

Ἐπειδὴ πάλιν 3 δάκ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 6 δακ., τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 284 θέλει εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν 6 δακ. ἐπ' αὐτόν, ἥτοι τὸ ἥμισυ τῶν 23 ὀρ. 4 πόδ. Λαμβάνομεν λοιπὸν τὸ ἥμισυ τῶν 23 ὀρ. 4 πόδ. καὶ εὐρίσκομεν τὸν συμμιγὴ 11 ὀρ. 5 πόδ., ὃν γράφομεν καταλλήλως, ὡς ὑπάρχει ἐν τῇ διατάξει τῆς πράξεως.

Μᾶς μένει νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ 1 δάκ. ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν. Ἐπειδὴ δὲ 1 δάκ. εἶναι τὸ τρίτον τῶν 3 δακ., πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τρίτον τοῦ προηγουμένου γινομένου, ὅπερ εἶναι 3 ὀρ. 5 πόδ. 8 δάκ. Γράφομεν τοῦτο ἀπέναντι τοῦ 1 δακ. ὡς ὑπάρχει γεγραμμένον καὶ μεταβαίνομεν εἰς τὴν εὐρέσιν τοῦ γινομένου τῶν ἐπομένων 7 γρ. τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν δεδομένον πολλαπλασιαστήν.

Πρὸς τοῦτο ἀποσυνθέτομεν τὰς 7 γραμμ. εἰς 4 γραμμ., αἵτινες εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ δακτύλου, καὶ 3 γραμμ., αἵτινες εἶναι τὸ τρίτον τοῦ δακτύλου.

Ἴνα λοιπὸν εὐρωμεν τὰ ἀντίστοιχα μερικὰ γινόμενα, πρέπει νὰ λῶμεν τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον τοῦ εὐρεθέντος γινομένου τοῦ 1δακ. ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν. Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ἴσον τῷ συμμιγεί 3ὀρ. 5πόδ. 8δᾶκ., οὕτως τὸ μὲν τρίτον εἶναι 1ὀρ. 1πούς 10δᾶκ. 8γραμ., τὸ δὲ τέταρτον ὁ συμμιγῆς 0ὀρ. 5πόδ. 11δᾶκ. Γράφομεν ταῦτα ὡς ὑπάρχουσι γεγραμμένα, καὶ ἐπειδὴ ἐπολλαπλασιάζομεν οὕτως ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου 35ὀρ. 4πόδ. 10δᾶκ. 7γραμ. ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν 284, ἐὰν ἀθροίσωμεν τὰ εὐρεθέντα μερικὰ γινόμενα, θέλομεν εὑρεῖ τὸ ζητούμενον. Ἡ πρόσθεσις τῶν μερικῶν τούτων γινομένων ἐκτελεῖται ἀμέσως, διότι ταῦτα εἶναι γεγραμμένα ὡς ἀπαιτεῖ ὁ περὶ προσθέσεως τῶν συμμιγῶν κανὼν, εὐρίσκομεν δὲ οὕτως ἀθροισμα 10171ὀρ. 0πόδ. 5δακ. 8γραμμ., ὕπερ παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον, εὐρεθὲν κατὰ τὴν λεγομένην μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

144. Ἡ ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρου παραδείγματος λεπτομερὴς ἐκθεσις τοῦ τρόπου τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως, γενικῶς λαμβανομένη, δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς γενικὸς κανὼν τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων. Ἀλλ' ἀντὶ νὰ ἐκθέσωμεν ἐναυθὰ τὸν κανόνα τοῦτον, νομίζομεν προτιμότερον διὰ τοὺς μαθητὰς νὰ ἐκτελέσωμεν συντόμως τὴν πράξιν ἐπὶ ἑτέρου τινὸς ὁμοίου παραδείγματος, τοῦ ἐξῆς·

		24ήμ.	19ὀρ.	48λ.π.	40λ.δ.
		56			
		144			
		120			
12ὀρ.		28			
6		14			
1		2	8		
30λ.π.		1	4		
15		0	14		
3		0	2	24	
30λ.δ.		0	0	24	
10		0	0	8	
		1390	4	56	

*Ἀς υποθέσωμεν π. χ. ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγῆς ἀριθμοῦ 24ήμ. 19ὀρ. 48λ.π. 40λ.δ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 56.

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰς 24ήμ. τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ

56, καὶ ἀποσυνθέτομεν ἔπαυτα τὰς 10ῶρ. αὐτοῦ εἰς 12, 6, καὶ 1 ὥρας. Ἐπειδὴ 12ῶρ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἡμέρας, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ 28 τοῦ πολλαπλασιασμοῦ 56, ὅπερ γράφομεν ἐν τῇ στήλῃ τῶν ἡμερῶν. Ἐπειδὴ δὲ 6ῶρ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 12ῶρ., λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ 14 τοῦ 28, ὅπερ ὑπάρχει γεγραμμένον ἀπέναντι τῶν 12ῶρ., καὶ γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω ἐν τῇ στήλῃ τῶν ἡμερῶν. Ὁμοίως, ἐπειδὴ 1ῶρ. εἶναι τὸ ἕκτον τῶν 6ῶρ., λαμβάνομεν τὸ ἕκτον τοῦ 14, ὅπερ ὑπάρχει γεγραμμένον ἀπέναντι τῶν 6ῶρ., καὶ εὐρίσκομεν 2ῆμ. καὶ 8ῶρ., καὶ τὰς μὲν 2ῆμ. γράφομεν ὑπὸ τὰς ἡμέρας, τὰς δὲ 8ῶρ. ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὥρῶν.

Τὰ 48 λεπτὰ πρῶτα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀποσυντίθενται εἰς 30, 15 καὶ 3 λεπτὰ πρῶτα. Ἐπειδὴ δὲ τὰ 30λ.π. εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὥρας, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τῶν 2ῆμ. 8ῶρ., ὅπερ εἶναι 1ῆμ. 4ῶρ., καὶ γράφομεν αὐτὸ ἀπέναντι τῶν 30λ.π. Ἐπειδὴ δὲ τὰ 15λ.π. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 30λ.π., λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τῶν 1ῆμ. 4ῶρ., ὅπερ εἶναι 0ῆμ. 14ῶρ., καὶ γράφομεν αὐτὸ ἀπέναντι τῶν 15λ.π., ὡς φαίνεται ἐν τῷ ἀπέναντι παραδείγματι. Καὶ πάλιν, ἐπειδὴ τὰ 3λ.π. εἶναι τὸ πέμπτον τῶν 15λ.π. λαμβάνομεν τὸ πέμπτον τῶν 0ῆμ. 14ῶρ. ὅπερ εἶναι 0ῆμ. 2ῶρ. 24λ.π., καὶ γράφομεν αὐτὸ ὅπως ὑπάρχει γεγραμμένον ἀντικρῶ.

Μεταβαίνομεν εἰς τὰ 40λ.δ. τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἅτινα ἀποσυνθέτομεν εἰς 30λ.δ. καὶ 10λ.δ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ 30λ.δ. εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ 1λ.π., ἥ, ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει γεγραμμένον τὸ γινόμενον τοῦ 1λ.π. ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, τὸ ἕκτον τῶν 3λ.π., οὕτως τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν εὐρέθη προηγουμένως, λαμβάνομεν τὸ ἕκτον τοῦ γινομένου τούτου, ἥτοι τοῦ 0ῆμ. 2ῶρ. 24λ.π., ὅπερ εἶναι 0ῆμ. 0ῶρ. 24λ.π., καὶ γράφομεν αὐτὸ καταλλήλως. Ἐπειδὴ τέλος τὰ μένοντα 10λ.δ. εἶναι τὸ τρίτον τῶν 30λ.π. πρέπει νὰ λαβώμεν τὸ τρίτον τοῦ προηγουμένου γινομένου ὅπερ εἶναι 0ῆμ. 0ῶρ. 8λ.π.

Τὸ ἄθροισμα 1390ῆμ. 4ῶρ. 56λ.π. τῶν οὕτως εὐρεθέντων καὶ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον διαταχθέντων μερικῶν γινομένων θέλει πικρῶς τὸ ζητούμενον γινόμενον, εὐρεθὲν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν υποπολλαπλασίων.

145. Ἀς υποθέσωμεν δεύτερον ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς 5ῶρ. 5πὸδ. 8δᾶκ. 9γρμ. ἐπὶ τὸν συμμιγῆ 1ῆμ. 1ῶρ. 25λ.π. κατὰ τὴν μέθοδον τῶν υποπολλαπλασίων.

Ἐν πρώτοις τὸ ζητούμενον γινόμενον, ὡς ὁμοειδὲς τῷ πολλὰ πλῃσιαστέῳ, θέλει εἶναι ὀργυαί, πόδες, δάκτυλοι κτλ. Ἐάν τῶρα ἡ μονάς, πρὸς ἣν ἀναφέρεται ὁ συμμιγῆς τοῦ πολλαπλῆσιαστέου, ἦναι ἡ ἡμέρα, εἶναι φανερόν ὅτι πρὸς εὐρεσιν τοῦ γινομένου τούτου πρέπει νὰ λάβωμεν τισάκις τὸν πολλαπλῆσιαστέον, ὅσας ἀκεραίας μονάδας περιέχει ὁ πολλαπλῆσιαστής, ἤτοι ἐπτάκις, καὶ νὰ λάβωμεν ἔπειτα τοσοῦτο μέρος τοῦ πολλαπλῆσιαστέου, ὅσον πολλοστὸν μέρος τῆς μιᾶς ἡμέρας εἶναι αἱ 7 ὥραι καὶ τὰ 25 λεπτά πρῶτα τοῦ πολλαπλῆσιαστοῦ.

	5ὥρ.	5πόδ.	8δάκ.	9γραμ.
	7ἡμ.	7ῶρ.	25λ.π.	
	35			
3πόδ. . . .	3	3		
2	2	2		
6δάκ. . . .	0	3	6	
2	0	1	2	
6γραμ. . . .	0	0	3	6
3	0	0	1	9
6ῶρ. . . .	1	2	11	$2 + \frac{1}{4}$
1	0	1	5	$10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$
20λ.π. . . .	0	0	5	$11 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{72}$
5	0	0	1	$5 + \frac{5}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + 2\frac{1}{8}$
	43	3	1	$7 + \frac{83}{96}$

Πολλαπλῆσιάζομεν λοιπὸν ἐν πρώτοις τὸν πολλαπλῆσιαστέον ἐπὶ 7 κατὰ τὴν προεκτεθεῖσαν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλῆσιων, ἔπειτα ἵνα λάβωμεν τοσοῦτο μέρος τοῦ πολλαπλῆσιαστέου, ὅσον πολλοστὸν τῆς 1 ἡμέρας εἶναι αἱ 7 ὥραι καὶ τὰ 25 λεπτά πρῶτα τοῦ πολλαπλῆσιαστοῦ, πράττομεν καὶ σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς.

Ἀναλύομεν τὰς 7ῶρ. τοῦ πολλαπλῆσιαστοῦ εἰς 6ῶρ. καὶ 1ῶρ. καὶ λέγομεν ὅτι, ἐπειδὴ 6ῶρ. εἶναι τὸ τέταρτον τῆς 1ῆμ., τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλῆσιαστέου ἐπὶ 6ῶρ. θέλει εἶναι τὸ τέταρτον αὐτοῦ, διότι πρὸς τὴν ἡμέραν ὡς μονάδα ὑπεθέσαμεν ὅτι ἀναφέρεται οὗτος. Λαμβάνομεν λοιπὸν τὸ τέταρτον τοῦ πολλαπλῆσιαστέου 5ὥρ. 5πόδ. 8δάκ. 9γραμ., καὶ εὐρίσκομεν 1ὥρ. 2πόδ. 11δάκ. 2γραμ. $+ \frac{1}{4}$ τῆς γραμμῆς,

ὅπερ γράφομεν ὡς ὑπάρχει γεγραμμένον ἐν τῷ ἀντικρὺ παραδείγματι.

Πάλιν, ἐπειδὴ 1 ὥρ. εἶναι τὸ ἕκτον τῶν ὥρ., πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ ἕκτον τοῦ γινομένου τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ ὥρ., ἥτοι τὸ ἕκτον τοῦ ἀπέναντι τῶν ὥρ. γεγραμμένου συμμιγούς. Εὐρίσκομεν δ' οὕτως ὡς γινόμενον 0 ὥρ. 1 πύδ. 5 δακ. 10 γραμ. + $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$ τῆς γραμμῆς, ὅπερ γράφομεν ὡς ὑπάρχει γεγραμμένον.

Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὰ 25 λ.π. τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὅπερ ἀπυσυνθέτομεν εἰς 20 λ.π. καὶ 5 λ.π. Λέγομεν δέ, ἐπειδὴ τὰ 20 λ.π. εἶναι τὸ τρίτον τῆς ὥρας, τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 20 λ.π. θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου αὐτοῦ ἐπὶ 1 ὥρ. Πρὸς εὐρεσιν λοιπὸν τούτου πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τρίτον τοῦ συμμιγούς 0 ὥρ. 1 πύδ. 5 δακ. 10 γραμ. + $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$ τῆς γραμμῆς, ὅπερ εἶναι 0 ὥρ. 0 πύδ. 5 δακ. 11 γραμ. + $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{72}$ τῆς γραμμῆς.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ μένοντα 5 λ.π. εἶναι τὸ τέταρτον τῶν 20 λ.π., πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τέταρτον τοῦ ἀντισταίχου γινομένου, ὅπερ εἶναι 0 ὥρ. 0 πύδ. 1 δακ. 5 γραμ. + $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{288}$ τῆς γραμμῆς. Γράφομεν τοῦτο ὡς ὑπάρχει γεγραμμένον, ἄγομεν γραμμὴν ὑποκάτω καὶ προσθέτομεν πρῶτον τὰ κλασματικὰ μέρη τῆς γραμμῆς, ἔπειτα τοὺς συμμιγεῖς κατὰ τὰ περὶ προσθέσεως αὐτῶν λεγθέντα. Εὐρίσκομεν οὕτως ἄθροισμα 43 ὥρ. 3 πύδ. 1 δακ. 7 γραμ. + $\frac{5}{96}$ τῆς γραμμῆς, ὅπερ παριστᾷ τὸ γινόμενον τῶν δύο συμμιγῶν, εὐρεθὲν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

"Αν ἡ μονάς, πρὸς ἣν ἀνεφέρετο ὁ πολλαπλασιαστής, ἦτο ἡ ὥρα, ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς προηγούμενως οὐχὶ ἐπὶ τὸν συμμιγὴ 7 ἡμ. 1 ὥρ. 25 λ.π., ἀλλ' ἐπὶ τὸν ἰσοδύναμον αὐτῷ 175 ὥρ. καὶ 25 λ.π. Ἦθέλομεν λοιπὸν πρῶτον εὐρεῖν τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 175, καὶ ἔπειτα λάβειν τοσοῦτο μέρος αὐτοῦ, ὅσον πολλοστὸν μέρος τῆς μιᾶς ὥρας εἶναι τὰ 25 πρῶτα λεπτά.

146. Ἡ ἀνωτέρω ἐκθεσις, γενικῶς λαμβανομένη, ἀποτελεῖ τὸν κανόνα τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ συμμιγούς ἐπὶ συμμιγῇ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων, νομίζομεν δὲ προτιμότερον, ἀντὶ νὰ ἐπαναλάβωμεν γενικῶς τὰ αὐτά, νὰ ἐκθέσωμεν συντόμως τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως ἐπὶ ἑτέρου τινὸς παραδείγματος.

Ἔστω π. γ. τὰ πολλαπλασιασθῆ ὁ συμμιγῆς 25στατ. 37ὀκ. 220δρ. ἐπὶ τὸν συμμιγῆ 3τάλ. 2δραχ. 30λεπ., καὶ ἄς υποθέσωμεν ὅτι ἡ μονάς, πρὸς ἣν ἀναφέρεται ὁ συμμιγῆς τοῦ πολλαπλασιαστέου, εἶναι τὸ ὀθωνεῖον. Πρὸς εὐρεσιν τοῦ γινομένου πρέπει νὰ λάβωμεν τοσούτο μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅσον πολλοσὶν μέρος τοῦ ἐνὸς ὀθωνεῖου εἶναι ὁ συμμιγῆς 3τάλ. 2δραχ. 30λεπ. Θέλομεν δὲ εὐρεῖν τὸ ζητούμενον πρᾶττοντες καὶ σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς·

	25στατ.	37ὀκ.	220δράμ.
	3τάλ.	2δρ.	30λεπ.
2τάλ.	12	40	310
1	6	20	155
1δραχ.	1	12	351
1	1	12	351
25λεπ.	0	14	$87 + \frac{3}{4}$
5	0	2	$337 + \frac{2}{5} + \frac{1}{20}$
	22	15	$92 + \frac{3}{10}$

Ἀποσυνθέτομεν τὰ 3τάλ. εἰς 2τάλ. καὶ 1τάλ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ 2τάλ. εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀθωνεῖου λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ εὐρίσκομεν 12στατ. 40ὀκ. 310δράμ., ὅπερ γράζομεν ἀπέναντι τοῦ 2τάλ. Ἐπειδὴ δὲ πάλιν τὸ 1τάλ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 2ταλ., λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀντιστοίχου γινομένου, ὅπερ εἶναι 6στατ. 20ὀκ. 155δράμ., καὶ γράζομεν αὐτὸ ὡς ὑπάρχει γεγραμμένον.

Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὰς 2δραχ. τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἃς ἀποσυνθέτομεν εἰς 1δραχ. καὶ 1δραχ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ 1δραχ. εἶναι τὸ πέμπτον τοῦ ἐνὸς ταλήρου, λαμβάνομεν τὸ πέμπτον τοῦ ἀντιστοίχου γινομένου, ὅπερ εἶναι 1στατ. 12ὀκ. 351δράμ. Γράζομεν αὐτὸ ἀπέναντι τῆς 1δραχ. καὶ ὑπ' αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν τὸ αὐτὸ γινόμενον διὰ τὴν ἑτέραν δραχμὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Τελευταῖον ἀποσυνθέτομεν τὰ 30λεπ. τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς 25λεπ. καὶ 5λεπ., καὶ σκεπτόμενοι ὡς προηγουμένως εὐρίσκομεν τὰ ἀντίστοιχα γινόμενα 0στατ. 14ὀκ. 87δράμ. + $\frac{3}{4}$, 0στατ. 2ὀκ. 337δράμ. + $\frac{2}{5}$ + $\frac{1}{20}$, ἃπερ γράζομεν ὡς ὑπάρχουσι γεγραμμένα. Ἀγομεν γραμμὴν ὑποκάτω, καὶ προσθέτοντες τὰ αὐτὰ διατεταγμένα μερικὰ γινόμενα εὐρίσκομεν ἄθροισμα 22στατ. 15ὀκ. 92δράμ. + $\frac{3}{10}$

τοῦ δραχμίου, ὅπερ παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον, εὑρεθὲν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Νὰ προστεθῇ εἰς τὰ $\frac{5}{11}$ τῆς ἡμέρας ὁ συμμιγῆς ἀριθμὸς 5ήμ. 8ῶρ. 3λ.π. 8λ.δ.

II. Νὰ προσθέσωμεν τὰ $\frac{2}{7}$ τῆς ὀργυιάς, τὰ $\frac{8}{9}$ τοῦ δακτύλου καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ποδός.

III. Ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῶν $\frac{15}{9}$ τοῦ ὀθωνείου ὁ συμμιγῆς 3τάλ. 4δρ. 28λεπ.

IV. Ν' ἀφαιρεθῶσι τὰ $\frac{12}{7}$ τῆς ἡμέρας ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν συμμιγῶν 6ήμ. 5ῶρ. 7λ.π., 3ῶρ. 0λ.π. 5λ.δ.

V. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς 3ῶρ. 4πόδ. 5δακ. 3γρ. ἐπὶ τὸν ἀκέραϊον 25 κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

VI. Ποῖον εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς 5ῶρ. 7λ.π. 37λ.δ. ἐπὶ τὸν συμμιγῇ 4ῶρ. 5πόδ. 7δακ. 9 γραμ., ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ μονάς, πρὸς ἣν ἀναφέρεται ὁ πολλαπλασιαστέος, εἶναι ἡ ὀργυιά;

VII. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν αὐτῶν συμμιγῶν ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ μονάς, πρὸς ἣν ἀναφέρεται ὁ πολλαπλασιαστέος, εἶναι ὁ δάκτυλος.

VIII. Νὰ εὑρεθῶσι καὶ κατὰ τάς δύο περιπτώσεις τὰ γινόμενα τῶν αὐτῶν συμμιγῶν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

IX. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς 3ῶρ. 2τάλ. 2δραχ. 27λεπ. διὰ 35;

X. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς 7ήμ. 5ῶρ. 27λ.π. 28λ.δ. διὰ τοῦ ὁμοειδοῦς αὐτῷ 15ῶρ. 0λ.π. 8λ.δ., ὑποτιθεμένου ὅτι τοῦτο θέλει παριστᾷ ὀθώνεια κτλ., ἢ ὀργυιάς, κτλ..

XI. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ συμμιγοῦς 5ῶρ. 4πόδ. διὰ τοῦ συμμιγοῦς 3πόδ. 0δακ. 9 γραμ., ὑποτιθεμένου ὅτι θέλει παριστᾷ ἡμέρας κτλ.;

XII. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς 45στκτ. 8όκ. 55δράμ. διὰ τοῦ συμμιγοῦς 5ῶρ. 3τάλ. 0δραχ. 8λεπ., ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ μονάς, πρὸς ἣν τοῦτο ἀναφέρεται, εἶναι τὸ ὀθώνειον;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι'.

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

147. Περί τριῶν διαφορῶν, οὕτως εἶπεν, εἰδὼν ἀριθμῶν μέχρι τοῦδε ἐγένετο λόγος· περὶ τῶν ἀκεραίων, τῶν κλασματικῶν καὶ τῶν συμμιγῶν. Εἶδομεν δὲ κατὰ ποίους κανόνας ἐκτελοῦνται αἱ διάφοροι ἀριθμητικαὶ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, κατὰ ποίους αἱ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν καὶ κατὰ ποίους αἱ ἐπὶ τῶν συμμιγῶν.

Δὲν διέφυγε βεβαίως τὴν προσοχὴν οὐδενός, ὅτι αἱ μὲν ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἐκτελοῦμεναι πράξεις καὶ ταχύτερον καὶ καθ' ἁπλουστέρους κανόνας ἐκτελοῦνται, αἱ δὲ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ὅτι εἶναι συνθετώτεραι τῶν πρώτων, καὶ τελευταῖον αἱ ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν ὅχι μόνον πολυπλοκώτεραι τῶν πρώτων εἶναι, ἀλλὰ καὶ πρὸς ἐκτέλεσιν αὐτῶν πρέπει νὰ γνωρίζομεν ἐκ στήθους τὰς διαφορὰς πρὸς ἀλλήλας σχέσεις τῶν διαφορῶν αὐτῶν μονάδων.

Ἐὰν τῶρα θέλῃσῃ τις νὰ ζητήσῃ τὸν λόγον τούτου, θέλει ἀμέσως παρατηρήσῃ ὅτι οἱ κανόνες τῆς ἐκτέλεσεως τῶν διαφορῶν ἀριθμητικῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἀπλούστεροι τῶν ἐπὶ τῶν κλασματικῶν καὶ συμμιγῶν ἕνεκα τοῦ τρόπου τῆς γραφῆς αὐτῶν καὶ τῆς σταθερᾶς σχέσεως, ἣτις ὑπάρχει μεταξὺ μονάδος τινὸς υποκασιδήποτε αὐτῶν τάξεως καὶ τῆς μονάδος τῆς ἀμέσως προηγούμενης ἢ ἐπομένης, ἐνῶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὅχι μόνον αἱ μονάδες αὐτῶν εἶναι συνήθως διάφοροι, ἀλλὰ καὶ διὰ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν ἕκαστος τούτων γράφεται. Καθόσον δ' ἀφορᾷ τοὺς συμμιγείς ἡ δυσκολία εἶναι μεγαλειτέρα, διότι αἱ μονάδες τῶν διαφορῶν υποδιαίρεσεων τῆς ἀρχικῆς ὅχι μόνον εἶναι ὅλως ἀυθαίρετα καὶ διάφορα πολλαπλάσια ἢ υποπολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς, ἀλλὰ φέρουσι καὶ ἴδιον ὄνομα, καὶ πρὸς τούτοις γράφονται καὶ κατὰ μέρη.

Ἄλλ' ἔαν πρὸς καταμέτρησιν τῶν ποσῶν, ἀντὶ νὰ διακρίνωμεν τὴν μονάδα ὡς εἶπομεν ἐν τοῖς περὶ κλασματικῶν καὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν

Κεφαλαίοις, λαμβάνωμεν διὰ ποσά μικρότερα τῆς μονάδος ὡς νέαν μονάδα τὸ δέκατον τῆς πρώτης, καὶ διὰ ποσά μικρότερα τοῦ δεκάτου τὸ δέκατον αὐτοῦ, ἦτοι τὸ ἑκατοστὸν τῆς μονάδος, δι' ἔτι δὲ μικρότερα ποσά τὸ δέκατον τοῦ ἑκατοστοῦ, ἦτοι τὸ χιλιοστὸν τῆς ἀρχικῆς, καὶ οὕτω καθεξῆς, τὰ διάφορα μέρη, ἐξ ὧν ἤθελε σύγκεισθαι ἀριθμὸς τις οὕτως εὐρεθεὶς ὡς μέτρον ποσοῦ τινος ἢ μεγέθους, θέλουσιν ἔχει πρὸς ἄλληλα τὴν αὐτὴν σχέσιν, ἣν καὶ τὰ διάφορα ψηφία ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἐκάστη μονὰς τῆς αὐτῆς θέλει εἶναι τὸ δέκατον τῆς προηγουμένης καὶ δεκαπλασία τῆς ἐπομένης. Ἐπομένως ὁ ἐκφράζων τὸ μέτρον ποσοῦ τινος ἢ μεγέθους ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ κατ' ὃν τρόπον καὶ οἱ ἀκεραιοὶ ἀριθμοί.

148. Τὰ δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά, κτλ. τῆς μονάδος καλοῦνται δεκαδικὰ αὐτῆς μέρη, ὁ δὲ ἐκ τοιούτων ἀποτελούμενος ἀριθμὸς, εἴτε περιέχει εἴτε μὴ ἀκεραίας μονάδας, καλεῖται δεκαδικὸς ἀριθμὸς.

Παραδείγματός χάριν, ὁ ἀριθμὸς 35 μονάδες καὶ 5 δέκατα, 4 ἑκατοστά, 7 χιλιοστά, εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμὸς, διότι περιέχει δεκαδικὰ μέρη τῆς μονάδος, θέλει δὲ γραφῇ οὕτω

35,547.

Ἐτέθη πρῶτον ὑποδιαστολή μετὰ τῆς 35 ἀκεραίας μονάδας πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἀπὸ τῶν δεκαδικῶν τοῦ ἀριθμοῦ μερῶν. Μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ἐγράφη ἔπειτα ὁ ἀριθμὸς 5, ὅστις παριστᾷ δέκατα· διότι ἐν δέκατον εἶναι τὸ δέκατον τῆς μονάδος, καὶ οὕτως ἡ τάξις τῶν μονάδων, ἅς παριστᾷ, εἶναι τὸ δέκατον τῆς προηγουμένης. Μετὰ τὰ 5 δέκατα ἐγράφησαν τὰ 4 ἑκατοστά καὶ μετὰ τὰ ἑκατοστά τὰ 7 χιλιοστά· διότι τὸ μὲν χιλιοστὸν εἶναι τὸ δέκατον τοῦ ἑκατοστοῦ, τὸ δὲ ἑκατοστὸν τὸ δέκατον τοῦ δεκάτου.

Ἄν ὁ ἀνωτέρω δεκαδικὸς δὲν περιεῖχεν ἑκατοστά, ἠθέλομεν γράψαι 0 εἰς τὴν θέσιν τοῦ 4, οὕτω 35,507. Ἄν δὲ δὲν περιεῖχεν οὔτε ἀκεραίας μονάδας, ἠθέλομεν γράψαι 0 πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων, οὕτω 0,507.

Τὰ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν γεγραμμένα ψηφία καλοῦνται δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ.

ΠΩΣ ΑΠΑΓΓΕΛΛΕΤΑΙ ΔΕΔΟΜΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΑΙ ΠΩΣ ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΑΠΑΓΓΕΛΛΟΜΕΝΟΣ.

149. Κατὰ τέσσαρας διαφόρους τρόπους δύναται ν' ἀπαγγελθῇ γεγραμμένος δεκαδικὸς ἀριθμὸς.

1ον. Απαγγέλλεται πρῶτον ὁ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς ἀκέραιος ἀριθμός, ἔπειτα ἐν ἑκαστῶν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων αὐτοῦ μετὰ τοῦ ὀνόματος τῆς τάξεως τῶν μονάδων, ὡς παριστᾷ.

Παράδειγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

357,52064

ἀπαγγέλλεται τριακόσιοι πενήκοντα ἑπτὰ μονάδες, 5 δέκατα, 2 ἑκατοστά, 0 χιλιοστά, 6 δεκάκις χιλιοστὰ καὶ 4 ἑκατοτάκις χιλιοστὰ.

Γράσσεται δ' ὁ οὕτως ἀπαγγελλόμενος δεκαδικὸς ἀριθμὸς, γραφόμενον πρῶτον τοῦ ἀκέραιου αὐτοῦ μέρος, ἔπειτα τῆς ὑποδιαστολῆς καὶ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ἐνὸς ἑκάστου τῶν ἀπαγγελλομένων κατὰ τὰς ἑνῶν οὕτως, ὥστε τὰ κατέχη ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν τὴν θέσιν τῶν μονάδων, ὡς παριστᾷ.

Παράδειγματος χάριν, ἔν ἔχομεν νὰ γράψωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 3 δέκατα, 6 χιλιοστὰ καὶ 8 ἑκατομμυριοστὰ, ἠθέλωμεν γράψαι:

0,306008.

Ἐγράψαμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἀκεραίων μονάδων, ἔπειτα ὑποδιαστολὴν, καὶ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν 3, ὅπερ παριστᾷ δέκατα μετὰ τοῦτο 0, διότι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν περιέχει ἑκατοστά μετὰ τὸ 0 ἐγράψαμεν 6, διότι οὕτω γραφέν τὸ 6 παριστᾷ ὡς ἐκ τῆς θέσεως αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν χιλιοστὰ. ἔπειτα δύο 0, διότι ὁ ἀπαγγελλόμενος δεκαδικὸς δὲν περιέχεν οὔτε δεκάκις χιλιοστὰ, οὔτε ἑκατοτάκις χιλιοστὰ καὶ μετὰ τὰ τελευταῖα δύο μηδενικά 8 πρὸς παρῆστασιν τῶν ἑκατομμυριοστών τοῦ δεδομένου δεκαδικοῦ.

2ον. Απαγγέλλονται πρῶτον αἱ ἀκέραιαι μονάδες τοῦ δεκαδικοῦ, ἔπειτα ὁλόκληρος ὁ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν αὐτοῦ ψηφίων ἀποτελούμενος ἀριθμὸς μετὰ τοῦ ὀνόματος τῶν μονάδων τῆς τάξεως τοῦ τελευταίου πρὸς τὰ δεξιὰ δεκαδικῶν αὐτοῦ ψηφίων.

Παράδειγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

3,00567

ἀπαγγέλλεται τρεῖς μονάδες, καὶ πεντακόσια ἑξήκοντα ἑπτὰ ἑκατοντάκις χιλιοστὰ. Διότι ἔχομεν πρῶτον 3 ἑκατοτάκις χιλιοστὰ, ἔπειτα 6 δεκάκις χιλιοστὰ ἢ 60 ἑκατοτάκις χιλιοστὰ, καὶ τελευταῖον 5 χιλιοστὰ ἢ 50 δεκάκις χιλιοστὰ ἢ 500 ἑκατοτάκις χιλιοστὰ. Τὸ ὅλον λοιπὸν τῶν ἑκατοτάκις χιλιοστών τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πεντακόσια ἑξήκοντα ἑπτὰ.

Γράζεται δὲ ὁ οὕτως ἀπαγγελλόμενος δεκαδικὸς ἀριθμὸς, γραφομένου πρῶτον τοῦ ἀκεραίου αὐτοῦ μέρους, ἔπειτα τῆς ὑποδιαστολῆς καὶ μετὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δεκαδικοῦ αὐτοῦ μέρους οὕτως, ὥστε ἡ θέσις τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου νὰ παριστῇ μονάδας τῆς ἀπαγγελλομένης δεκαδικῆς τάξεως.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἶχομεν νὰ γράψωμεν τὸν δεκαδικὸν 73 μονάδες καὶ 306 ἑκατομμυριοστά, ἠθέλομεν γράψαι

73,000306.

Ἐγράψαμεν τρία μηδενικά πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ 306, ἵνα τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ 6 λάβῃ τὴν ἑκτὴν θέσιν μετὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ ἐπομένως παραστήσῃ οὕτως ἑκατομμυριοστά.

3ον. Ἀπαγγέλλεται ὁλόκληρος ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς ὡς ἀπλοῦς ἀκεραῖος, καὶ εἰς τὸ τέλος συναπαγγέλλεται καὶ τὸ ὄρομα τῆς τάξεως τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου αὐτοῦ δεκαδικοῦ ψηφίου.

Παραδείγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

76,22

ἀπαγγέλλεται 7622 ἑκατοστά. Διότι καὶ μὲν 76 ἀκέραια αὐτοῦ μονάδες ἰσούνται προφανῶς μὲ 7600 ἑκατοστά· ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν ἄρ' ἑτέρου καὶ 22 τοιαῦτα, θέλομεν ἔχει ἐν ὅλῳ 7622 ἑκατοστά.

Γράζεται δὲ ὁ οὕτως ἀπαγγελλόμενος δεκαδικὸς ἀριθμὸς, γραφομένου τοῦ ἀπαγγελλέντος ἀριθμοῦ ὡς ἀπλοῦς ἀκεραῖος καὶ τιθεμένης ἔπειτα τῆς ὑποδιαστολῆς οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ νὰ παριστῇ μονάδας τῆς ἀπαγγελλομένης δεκαδικῆς τάξεως.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἶχομεν νὰ γράψωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 352 ἑκατομμυριοστά, ἠθέλομεν γράψαι

0,000352.

Ἐγράψαμεν πρῶτον 352, καὶ ἵνα τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ 2 παριστῇ ἑκατομμυριοστά, ἔπρεπε νὰ κατέγῃ τὴν ἑκτὴν ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν θέσιν. Τούτου δ' ἐνεκα ἐγράψαμεν 4 μηδενικά πρὸ τοῦ 352 καὶ ἐχωρίσαμεν διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τὸ πρῶτον.

Ἄν εἶχομεν νὰ γράψωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 47 τρισεκατομμύρια 200 χιλιάδες καὶ 73 ἑκατοστάκις χιλιοστά, ἠθέλομεν γράψαι

470000002,00073.

Ἐγράψαμεν πρῶτον ἀπλῶς τὸν ἀριθμὸν 47 τρισεκατομμύρια 200 χιλιάδες καὶ 73 μονάδες ἔπειτα, ἐθέσαμεν τὴν ὑποδιαστολὴν οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον 3 νὰ παριστῇ ἑκατοστάκις χιλιοστά.

409. Τελευταίον, ὅταν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ περιέχῃ πολλὰ ψηφία, χωρίζομεν αὐτὰ εἰς τμήματα τριψήφια ἀρχόμενοι ὑπὸ τῆς ἐποδιαστολῆς καὶ προχωροῦντες πρὸς τὰ δεξιά, (τὸ τελευταίον τμήμα δυνατόν νὰ περιέχῃ 2 ἢ καὶ 1 μόνον ψηφίον). Ἀπαγγέλλομεν ἔπειτα πρῶτον τὴν ἀκεραίαν αὐτοῦ μονάδας, ἔπειτα ἐν ἑκάστῳ τῶν τμημάτων μετὰ τοῦ ὀνόματος τῆς τάξεως τῶν μονάδων, τῆς παριστωμένης ὑπὸ τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου.

Παραδείγματα χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

237,306 873 254 639 251 08

ἀπαγγέλλεται 237 μονάδες, 306 χιλιοστά, 873 ἑκατομμυριοστά, 254 δισεκατομμυριοστά, 639 τρισεκατομμυριοστά, 254 τετράκις ἑκατομμυριοστά καὶ 8 ἑκατοστά τοῦ τετράκις ἑκατομμυριοστοῦ.

Γράφεται δὲ ὁ οὕτως ἀπαγγελλόμενος δεκαδικὸς ἀριθμὸς, γραφομένων πρῶτον τῶν ἀκεραίων αὐτοῦ μονάδων, ἔπειτα ἐνὸς ἑκάστου τριψηφίου τμήματος οὕτως, ὥστε τὸ τελευταίον αὐτοῦ ψηφίον νὰ κατέχῃ τὴν θέσιν τῶν ἐν αὐτῷ ἀπαγγελλομένων δεκαδικῶν μονάδων.

Παραδείγματα χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3 μονάδες, 53 χιλιοστά, 207 τρισεκατομμυριοστά καὶ 37 ἑκατοστά τοῦ πεντάκις ἑκατομμυριοστοῦ, γράφεται

2,053 000 000 207 000 000 37.

Ἐγράψαμεν δύο τριψήφια τμήματα μηδενικῶν μετὰ τὰ χιλιοστά, διότι ὁ ἀπαγγελλόμενος δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν περιέχει οὔτε ἑκατομμυριοστά οὔτε δισεκατομμυριοστά, ἔπειτα ἕτερα δύο τριψήφια τμήματα μηδενικῶν μετὰ τὰ τρισεκατομμυριοστά, διότι ἐλλείπουσι τὰ τετράκις καὶ πεντάκις ἑκατομμυριοστά.

150. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται γραφομένου ἐνὸς ἢ πλείοτέρων μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ.

Παραδείγματα χάριν, οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ

3,56, 3,560, 3,560000, κτλ.

εἶναι ἰσοδύναμοι. Διότι ἡ τάξις τῶν μονάδων, τῶν ὑπὸ τινος ψηφίου παριστωμένων, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ὥς πρὸς τὴν υποδιαστολὴν θέσεως αὐτοῦ, αὕτη δὲ δὲν μεταβάλλεται προφανῶς ὅσαδήποτε μηδενικά καὶ ἂν γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ.

Δυνάμεθα οὕτω νὰ θεωρήσωμεν πάντα ἀκέραιον ἀριθμὸν ὡς δεκαδικόν, οὕτινος τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι 0. Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 31 γράφεται καὶ ὡς δεκαδικὸς 31,0 ἢ 31,00, κτλ.

151. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Δεκαδικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1000, κτλ. ἐὰν μετατιθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ αὐτοῦ 1, 2, 3, κτλ. θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ, διαρρίπται δὲ διὰ 10, 100, 1000, κτλ., ἐὰν αὐτὴ μετατιθῇ 1, 2, 3, κτλ. θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ.

Ἐστω π. χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

3567,1023.

Ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιὰ, ἕκαστον τῶν ψηφίων αὐτοῦ θέλει παριστᾷ μονάδας δεκάκις μεγαλειότερας ἢ πρότερον, (ἦτοι τὰ δέκατα θέλουσι παριστᾷ μονάδας, τὰ ἑκατοστὰ θέλουσι γίνεαι δέκατα, κτλ.), ἐπομένως καὶ ὁλοῦς ὁ ἀριθμὸς θέλει γίνεαι δεκάκις μεγαλειότερος. Ἐὰν μεταθέσωμεν αὐτὴν δύο, τρεῖς, κτλ. θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ, ἕκαστον τῶν ψηφίων αὐτοῦ θέλει παριστᾷ μονάδας 100κις, 1000κις κτλ. μεγαλειότερας, ἐπομένως καὶ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς θέλει γίνεαι ἑκατοστάκις, χιλιάκις, κτλ. μεγαλειότερος.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν, δύο, τρεῖς, κτλ. θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, ἕκαστον τῶν ψηφίων αὐτοῦ θέλει παριστᾷ μονάδας 10κις, 100κις, 1000κις, κτλ. μικρότερας, ἐπομένως καὶ ὁλόκληρος ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς θέλει γίνεαι δεκάκις, ἑκατοστάκις, χιλιάκις, κτλ. μικρότερος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Δυνατὸν νὰ συμβῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον προτιθέμεθα ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ νὰ διαιρέσωμεν διὰ 10, 100, 1000, κτλ. νὰ μὴ περιέχῃ ἀρκετὰ ψηφία εἰς τὸ δεκαδικὸν ἢ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος, ὥστε ἢ πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ μεταθέσεις τῆς ὑποδιαστολῆς νὰ ἦναι ἀδύνατος. Τότε, ἐὰν ἐλλείπωσι ψηφία ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ αὐτοῦ μέρους, προσθέτομεν πρὸς τὰ δεξιὰ ἱκανὴν ἀριθμὸν μηδενικῶν, ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ἀκέραιου, γράφομεν τοιαῦτα πρὸς τὰ ἀριστερά τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ τόσα, ὅσα ἀπαιτοῦνται πρὸς τὸν σκοπὸν. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 35,23 ἐπὶ 10000, ἔπρεπε νὰ μεταθέσωμεν 4 θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὴν ὑποδιαστολὴν, ἐπειδὴ δὲ ὁ δεδομένος δεκαδικὸς 35,23 δὲν ἔχει εἰμὴ δύο μόνον δεκαδικὰ ψηφία, γράφομεν πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ 2 μηδενικά, ἔπειτα μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ οὕτω προκύπτοντος ἀριθμοῦ

35,2300 τέσσαρες θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, καὶ εὐρίσκομεν ὡς γινόμενον τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 352300. Ἄν εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10000, ἔπρεπε νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ 4 θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, ἐπειδὴ δὲ ὁ δεδομένος δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχει εἰμὴ δύο μόνον ψηφία πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερά αὐτοῦ 3 μηδενικά, καὶ μεταθέτοντες ἔπειτα τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ οὕτω προκύπτοντος ἀριθμοῦ 00035,23 τέσσαρες θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, εὐρίσκομεν ὡς πηλίκον τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,003523.

ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΔΙΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ.

152. Ἐστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 37,563, οὕτινος τὸ τελευταῖον ψηφίον παριστᾷ *χιλιοστά*. Ἐπειδὴ ὁ δεκαδικὸς οὗτος ἀριθμὸς σύγκειται ἐκ 37563 *χιλιοστών* (149, 3ον), θέλει προφανῶς εἶναι ἴσος κλάσματι, ἔχοντι ἀριθμητὴν 37563 καὶ παρονομαστὴν 1000. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει $37,563 = \frac{37563}{1000}$. Λοιπὸν ἐν γένει

ἴνα παραστήσωμεν διὰ κοινοῦ κλάσματος δεδομένον δεκαδικὸν ἀριθμὸν, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ καὶ ἐπὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν, ὡς ἀριθμητὴν, νὰ γράψωμεν παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθομένην ἐπὶ τόσων μηδενικῶν, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει εἰς τὸ δεκαδικὸν αὐτοῦ μέρος.

Καὶ ἀντιστρόφως.

ἴνα παραστήσωμεν διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κλάσμα, ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθομένην ἐπὶ μηδενικῶν, ἀρκεῖ νὰ χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος τόσα ψηφία ὡς δεκαδικὰ, ἢ γ' ὅσων μηδενικῶν ἀκολουθεῖται ἡ μονὰς τοῦ παρονομαστοῦ.

Διὰ τὸν ἀνωτέρω λόγον εἰ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ καλοῦνται συνήθως καὶ δεκαδικὰ κλάσματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ

0,0056, 3,25801, 847,689

παρίστανται κατὰ τὰ ἀνωτέρω διὰ τῶν κλασμάτων

$$\frac{56}{10000}, \quad \frac{325801}{100000}, \quad \frac{847689}{1000}$$

καὶ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα

$$\frac{3}{100000}, \quad \frac{3257}{100}, \quad \frac{8765}{100000000}$$

διὰ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

0,00003 18,97, 0,00008765.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

153. Ἐπειδὴ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ γράφονται ὡς καὶ οἱ ἀκέραιοι μὲ μόνην ἀπλῶς τὴν προσθήκην τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ τοῦτο ὡς προείπομεν πρὸς διάκρισιν τῶν ἀκεραίων μονάδων ἀπὸ τῶν δεκαδικῶν αὐτῆς μερῶν, ἡ πρόσθεσις αὐτῶν ἐκτελεῖται ἀπαράλλαχτως ὅπως καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων, τουτέστι

Γράφομεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἢ, ὡπερ ταυτὸ, αἱ ὑποδιαστολαὶ αὐτῶν νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, καὶ προσθέτομεν αὐτοὺς ὡς εἰ ἦσαν ἀκέραιοι. Θέτομεν μετὰ ταῦτα ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ εὐρεθισόμενον ἄθροισμα ἐν τῇ καθέτῳ τῶν ὑποδιαστολῶν τῶν προσθετέων δεκαδικῶν ἀριθμῶν στήλῃ καὶ ὁ οὕτω προκύπτων δεκαδικὸς ἀριθμὸς θέλει παριστᾶ τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων.

Παραδείγματός χάριν, ἐν εἵχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς δεκαδικούς ἀριθμούς 31415, 98,69 καὶ 3,183, ἠθέλομεν γράψαι αὐτοὺς ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{r} 31,415 \\ 98,69 \\ 3,183 \\ \hline 133,288 \end{array}$$

καὶ εἰς τὸ εὐρεθισόμενον ἄθροισμα 133288 θέσει τὴν ὑποδιαστολὴν ἐν τῇ καθέτῳ τῶν ὑποδιαστολῶν στήλῃ. Ὁ οὕτω δὲ προκύπτων δεκαδικὸς ἀριθμὸς 133,288 θέλει προφανῶς παριστᾶ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν δεδομένων.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

154. Δι' ὃν προεξέθεσamen ἀνωτέρω λόγον καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἐκτελεῖται ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων, τουτέστι

Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως ὥστε αἱ ὑποδιαστολαὶ αὐτῶν νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἀφαιροῦμεν τοὺς οὕτω γεγραμμένους ἀριθμοὺς ὡς εἰ ἦσαν ἀκέραιοι, καὶ θέτομεν εἰς τὴν εὐρεθισομένην διαφορὰν ὑποδιαστολὴν ἐν τῇ καθέτῳ τῶν ὑποδιαστολῶν στήλῃ.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἶχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 376,235 ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ 2897,483, ἠθέλομεν διατάξει τὰ τῆς πράξεως ὡς ἑξῆς,

$$\begin{array}{r} 2897,483 \\ 376,235 \\ \hline 2521,248 \end{array}$$

ἐκτελέσει τὴν ἀφαίρεσιν ὡς εἰ ἦσαν ἀκέραιοι, καὶ εἰς τὴν εὐρέτησιν αὐτὴν διαφοράν 2521,248 θέσει τὴν υποδικαστολὴν ἐν τῇ καθεύου τῶν υποδικαστολῶν στήλῃ, ὁ οὕτω δὲ προκύπτων δεκαδικὸς ἀριθμὸς 2521,248 θέλει προφανῶς παριστᾶ τὴν τῶν δεδομένων δεκαδικῶν διαφοράν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐὰν οἱ πρὸς ἀφαίρεσιν δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶχον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, ἀναπληροῦμεν τὰ ἐλλείποντα τοῦ ἐνὸς διὰ μηδενικῶν. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἶχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 35,0236 ἀπὸ τοῦ 3768,37, ἠθέλομεν γράψαι

$$\begin{array}{r} 3768,3700 \\ 35,0236 \\ \hline 3733,3464 \end{array}$$

ἀντὶ τοῦ 3798,37 τὸν ἴσον αὐτῷ 3768,3700, καὶ ἐκτελέσει μετὰ τοῦτο τὴν ἀφαίρεσιν ὡς προεῖπομεν.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

155. Πολλαπλασιασμὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀκέραιον. Ἐστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,141 ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 25. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστέος σύγκειται ἐκ 3141 χιλιοστών, ἔπεται ὅτι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 25 θέλει περιέχει 25 χιλιοστά τὸν πολλαπλασιαστέον 3141 χιλιοστά. Πρέπει λοιπὸν πρὸς εὐρεσίν τοῦ γινομένου τούτου νὰ πολλαπλασιάσωμεν 3141 ἐπὶ 25, καὶ νὰ γράψωμεν τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον οὕτως, ὥστε νὰ παριστᾶται χιλιοστά, τοῦθ' ὑπερ κατορθοῦται χωρίζομένων δι' υποδικαστολῆς πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τριῶν ψηφίων ὡς δεκαδικῶν. Ἡ πράξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{r} 3,141 \\ 25 \\ \hline 15,705 \end{array}$$

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βεροῦνης
78.525

ποριζόμεθα δὲ ἀμέσως τὸν ἐπόμενον κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀκέραιον.

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον, ἂν ὑφαι-
ρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ ἡ ὑποδιαστολή καὶ πολλαπλασιασθῇ ὁ οὕτω γε-
γραμμένος ἀκέραιος ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, πρὸς δὲ
τὰ δεξιά τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου χωρισθῶσι τόσα ψηφία ὡς
δεκαδικά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία περιέχει ὁ δεδομένος δεκαδικὸς
ἀριθμὸς.

Οὕτω τὰ γινόμενα τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

$$0,0005, \quad 0,00103, \quad 83,001080$$

ἐπὶ 25 θέλουσιν εὑρεθῇ, ἂν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί,

$$5, \quad 103, \quad 83,001080$$

ἐπὶ 25 καὶ πρὸς τὰ δεξιά τῶν εὑρεθησομένων γινομένων

$$125, \quad 2575, \quad 2075027000$$

χωρισθῶσι 4, 5, 6 ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅτε θέλομεν εὑρεῖ τοὺς ἐξῆς
δεκαδικοὺς ἀριθμούς, παριστῶντας τὰ ζητούμενα γινόμενα

$$0,0125, \quad 0,02575, \quad 2075,027000.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Τὸν ἀνωτέρω κανόνα δυνάμεθα ὡσπύτως νὰ ἀπο-
δεῖξωμεν, ἂν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ πολλαπλασιαστέου τὸ ἰσοδύναμον
αὐτῷ δεκαδικὸν κλάσμα, πολλαπλασιάζωμεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἀκέρ-
αιον πολλαπλασιαστήν, καὶ παραστήσωμεν τὸ εὑρεθησόμενον γινό-
μενον διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. Παραδείγματος χάριν, ὁ πολλαπλα-
σιαστέος 3,141 εἶναι $= \frac{3141}{1000}$, καὶ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 25 εἶναι
 $\frac{3141 \times 25}{1000} = \frac{78525}{1000} = 78,525$.

156. Πολλαπλασιασμὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ δεκαδικόν. Ἄς
ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν
3,141 ἐπὶ τὸν 9,86. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστής εἶναι ἴσος τῷ
κλάσματι $\frac{986}{100}$, θέλομεν εὑρεῖ τὸ ζητούμενον γινόμενον, ἂν πολλα-
πλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον 3,141 ἐπὶ τὸν ἀριθμητήν 986
τοῦ κλάσματος καὶ διαιρέσωμεν τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον διὰ τοῦ
παρονομαστοῦ αὐτοῦ 100. Τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου
3,141 ἐπὶ 986 εὐρίσκεται κατὰ τὸ ἀνωτέρω λεχθέντα καὶ εἶναι
3097,026, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 100 εὐρίσκει-
ται μετατιθεμένης τῆς ὑποδιαστολῆς αὐτοῦ δύο θέσεις πρὸς τὰ ἀρι-

στερά. Βλέπομεν λοιπόν ὅτι πρὸς εὗρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον 3141 ἐπὶ τὸν 986 καὶ νὰ χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ εὐρεθησομένου γινομένου 3097026 τὸ ὅλον 5 ψηφία ὡς δεκαδικά, τουτέστιν ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες 3,141 καὶ 9,86. Ἐντεῦθεν ὁ ἐξῆς γενικὸς κανὼν.

$$\begin{array}{r} 3,141 \\ 9,86 \\ \hline 18\ 846 \\ 251\ 28 \\ \hline 2826\ 9 \\ \hline 30,97026. \end{array}$$

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ δεκαδικόν, ἔνν πολλαπλασιασθῶν οὔτοι ὡς εἰ ἦσαν ἀκέραιοι, καὶ χωρισθῶσι πρὸς τὰ δεξιά τοῦ εὐρεθησομένου γινομένου αὐτῶν τόσα ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. — Ὁ ἄνωτέρω κανὼν ἀποδεικνύεται ὡσαύτως λαμβανομένων ἀντὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν τῶν ἴσων αὐτοῖς δεκαδικῶν κλασμάτων, ἐκτελουμένου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τούτων κατὰ τὸν περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων δοθέντα κανόνα, καὶ παριστωμένου τοῦ εὐρεθησομένου γινομένου διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. Παράδειγματος χάριν, πρὸς εὗρεσιν τοῦ γινομένου τοῦ 3,141 ἐπὶ τὸν 9,86 ἠθέλομεν πολλαπλασιάσει τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $\frac{3141}{1000}$ ἐπὶ τὸ $\frac{986}{1000}$ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν $\frac{3141 \times 986}{1000000}$ ἢ τὸ $\frac{3097026}{1000000}$ παρστήσει διὰ τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 30,97026, ὅστις βλέπομεν ὅτι ἔχει τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα μηδενικά ἔχει ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος $\frac{3097026}{1000000}$, ἥτοι ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχουσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες 3,141 καὶ 9,86.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

157. Διαιρεῖται δεκαδικὸς ἀριθμὸς δι' ἀκεραίου. Ἄς υποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 31,415 διὰ τοῦ ἀκεραίου 12. Πρέπει πρὸς εὗρεσιν τοῦ πηλίκου νὰ λάβωμεν τὸ δωδέκατον τῶν 31415 χιλιοστών. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον πηλίκον, ὡς ὁμοειδὲς τῷ διαιρετέῳ, πρέπει νὰ παριστᾷ χιλιοστά, θέλομεν προφανῶς εὑρεῖ τὸ αὐτὸ πηλίκον, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀκεραῖον

415 διὰ τοῦ 12 καὶ γράψωμεν τὸ εὑρεθισόμενον πηλίκον αὐτῶν
 τως, ὥστε νὰ παριστᾷ *χιλιοστά*. Ἡ μὲν ἐκτέλεσις τῆς πράξεως
 κατὰσσεται ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{r} 31,415 \\ 74 \overline{) 2,617} \\ 21 \\ 95 \\ 11 \end{array}$$

δὲ ζητούμενον πηλίκον εὑρίσκεται ἴσον μὲ 2617 *χιλιοστά*, ἢ
 δεκαδικῷ ἀριθμῷ 2,617, ἠϋξημένῳ κατὰ $\frac{1}{1000}$ τοῦ *χιλιοστοῦ*,
 λέπομεν δὲ ὅτι εὑρίσκεται διαιρουμένου τοῦ ἀκεραίου 31415 διὰ
 2 καὶ γραφομένου τοῦ εὑρισκομένου ἀκεραίου μέρους τοῦ πηλίκου
 617 οὕτως, ὥστε νὰ παριστᾷ *χιλιοστά*.

Ἐὰν παραβλέψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{1}{1000}$ τοῦ *χιλιοστοῦ*, τὸ πλῆρες
 πηλίκον ἐλαττοῦται κατ' ἀριθμὸν μικρότερον ἐνὸς *χιλιοστοῦ*, ἢτοι
 μικρότερον τοῦ 0,001, καὶ τότε λέγομεν, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ 31,415
 διὰ 12 εἶναι 2,617 κατὰ προσέγγισιν ἐνὸς *χιλιοστοῦ*. Ἐὰν ἀντὶ
 τοῦ παραβλέψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{1}{1000}$ τοῦ *χιλιοστοῦ*, ἀντικαταστήσωμεν
 αὐτὸ διὰ 0,001, τὸ σφάλμα θέλει εἶναι καὶ τότε μικρότερον ἐνὸς
χιλιοστοῦ, ὃ δὲ ἀριθμὸς 2,618, ὃν θέλομεν τότε εὑρεῖ, θέλει παριστᾷ
 ἄλλιν τὸ ζητούμενον πηλίκον κατὰ προσέγγισιν ἐνὸς *χιλιοστοῦ*.
 Ὁ μὲν ἀριθμὸς 2,617 παριστᾷ τὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ ζη-
 τουμένου πηλίκου κατ' ἐλλείψιν, ὃ δὲ 2,618 τὴν καθ' ὑπεραρχήν.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἀκεραίου, ἔὰν θεωρηθῇ οὗτος
 ἀκέραιος, εὑρεθῇ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως
 τοῦ διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ χωρισθῶσι πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ τόσα
 ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅσα ἔχει ὁ δεδομένος διαιρετέος. Τὸ οὕτως εὑ-
 ρηθόμενον πηλίκον θέλει παριστᾷ τὴν ἀξίαν τοῦ ζητουμένου
 κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς τάξεως τοῦ τελευταίου δεκα-
 δικοῦ ψηφίου τοῦ διαιρέτου κατ' ἐλλείψιν ἢ καθ' ὑπεραρχήν, καθό-
 τι λαμβάνομεν αὐτὸ παραβλέποντες τὸ κλασματικὸν μέρος, ἔὰν
 ἔσῃ ἀρχή, ἢ ἀντικαθιστῶντες τοῦτο διὰ μιᾶς μονάδος τῆς τάξεως
 τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ πηλίκου.

158. Ἐπειδὴ ἡ ἀξία δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται

γραφομένων ὡςωνδήποτε μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ δι' ἀκεραίου μεθ' ὅσης θέλωμεν προσεγγίσειω, γράφοντες πρὸς τὰ δεξιά τοῦ διαιρετέου κατάλληλον ἀριθμὸν μηδενικῶν καὶ ἐκτελοῦντες τὴν διείρεσιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὐρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 32,9 διὰ 12 κατὰ προσέγγισιν ἐνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ, γράψομεν πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ 3 μηδενικά καὶ διαιροῦμεν ὡς προεξέθεσκαμεν τὸν οὕτω προκύπτοντα δεκαδικὸν ἀριθμὸν 32,9000, ὅστις εἶναι ἴσος τῷ δεδομένῳ 32,9, διὰ 12. Εὐρίσκομεν οὕτω πηλίκον 2,7416, ὅπερ θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον κατὰ προσέγγισιν ἐνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ.

Συνήθως διατάσσομεν τὰ τῆς πράξεως ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 32,9 & 12 \\ 89 & \hline & 2,7416 \\ 50 & \\ 20 & \\ 80 & \\ 8 & \end{array}$$

Γράφομεν τὸν διαιρετέον 32,9 ὡς μὲς ἐδόθη, καὶ ἔπειτα ἀνὰ τὰ τρία μηδενικά πρὸς τὰ δεξιά τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 5 καὶ τὰ δύο ἀκολουθίων 2 καὶ 8, ὅταν δὲν ἔχωμεν ἔλλα ψηφία τοῦ διαιρετέου νὰ γράψωμεν ἢ καταβιβάζωμεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ τελευταίου ὑπολοίπου 5 τοῦ διαιρετέου 32,9 διὰ τοῦ διαιρετοῦ 12.

159. Διαιρέσεις δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ διὰ δεκαδικοῦ. Ἐστω διαιρετῆρ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,14159 διὰ τοῦ 9,86. Ὁ διαιρετέος 9,86 εἶναι ἴσος τῷ δεκαδικῷ κλάσματι $\frac{986}{100}$, καὶ ἵνα διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον 3,14159 διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{986}{100}$, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{100}{986}$ · ἐν ἄλλαις λέξεσι, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 3,14159 ἐπὶ 100, καὶ τὸ εὐρεθησόμενον αὐτῶν γινόμενον 314,159 νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀκεραίου 986. Θέλωμεν γὰρ πὺν ἔχει οὕτω πρὸς διαιρέσιν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 314,159 τοῦ ἀκεραίου 986, πράξιν, ἣν ἐκτελοῦμεν κατὰ τὸν προηγουμένως καθόριστον κανόνα καὶ εὐρίσκωμεν πηλίκον 0,318 κατὰ προσέγγισιν ἐνὸς χιλιοστοῦ.

$$\begin{array}{r|l}
 314,159 & 986 \\
 18\ 35 & \hline
 8\ 499 & 0,318 \\
 611 &
 \end{array}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ δεκαδικοῦ παραβ.λεπομένου τῶν ὑποδιαστολῶν αὐτῶν καὶ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ πηλίκου τῶν οὕτω προκύπτόντων ἀριθμῶν χωριζομένων τόσων ψηφίων ὡς δεκαδικῶν, καθ' ὅσα ὁ διαιρετέος ὑπερέχει τὸν διαιρέτην.

Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ὁ διαιρετέος εἶχε 5 δεκαδικὰ ψηφία καὶ ὁ διαιρέτης 2, τὸ δὲ πηλίκον τὴν διαφοράν αὐτῶν 3. Ἄν ὁ διαιρετέος εἶχεν ὀλιγώτερά δεκαδικὰ ψηφία ἢ ὁ διαιρέτης, τότε φαίνεται ὅτι ὁ ἀνωτέρω κανὼν δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ. Ἀλλὰ τότε

Γράφομεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ διαιρέτου τόσα μηδενικά, ὅσα ἀπαρτίζονται, ἵνα οὗτος ἔχη ἰσάριθμα μὲ τὸν διαιρέτην δεκαδικὰ ψηφία, καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν, παραβ.λεπομένην τῆς ὑποδιαστολῆς, διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου θεωρουμένου ὡς ἀκεραίου. Π. χ. ἂν εἶχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 9,86 διὰ τοῦ 31,15679, ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ $\frac{100000}{3115679}$, ἢ ἄλλως λέξεσι, νὰ μεταθέσωμεν 5 θέσεις πρὸς τὰ δεξιά τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν 986000 νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 3115679, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα.

ΤΡΟΠΗ ΤΩΝ ΚΟΙΝΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΑ.

160. Εἶδομεν ὅτι αἱ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν διαφοραὶ ἀριθμητικαὶ πράξεις ἐκτελοῦνται ὡς καὶ αἱ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων, καὶ δὲν διαφέρουσι τούτων εἰμὴ κατὰ τοῦτο, ὅτι μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῶν πρέπει νὰ διακρίνωμεν δι' ὑποδιαστολῆς ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ἐξαγομένου, πρὸς ὃ ἔχομεν ἀπλουστάτους καὶ γενικοὺς κανόνας, οὓς ἐφαρμόζομεν καθ' ὅλας τὰς δυνατὰς περιπτώσεις. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἐπὶ τῶν κλασμάτων ὑπολογισμὸς εἶναι πολὺ τοῦ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν πολυπλοκώτερος, διὰ τοῦτο εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς, ὅταν παρουσιάζωνται καὶ καινὰ κλάσματα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ἰσοδυνάμους δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ἢ ἀκριβῶς, ἂν τοῦτο ᾖ δυνατόν, ἢ κατὰ προσέγγισιν.

Ἡ τροπὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ καὶ ἡ διαίρεσις

τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, περὶ ἧς ἐπραγματεύθημεν προηγουμένως, εἶναι ἐν καὶ τὸ αὐτὸ πρόβλημα. Διότι κοινόν τι κλάσμα παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ, ἐπομένως, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην κατὰ τὸν ἐν τῇ § 158 ἐκτεθέντα τρόπον, ἡ τροπὴ αὐτοῦ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐγένετο ἤδη διὰ ταύτης.

161. Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται περὶ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{7}$ καὶ ὅτι θέλομεν νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν ἐνδὸς δεκάτου, ἢ ἐνδὸς ἑκατοστοῦ, ἢ ἐνδὸς χιλιοστοῦ, ἢ κτλ. Πρέπει κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 158 νὰ διαιρέσωμεν κατὰ τὰς διαίρεσους ταύτας ὑποθέσεις διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 7 τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 2,0, ἢ τὸν 2,00, ἢ τὸν 2,000, ἢ κτλ.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 7 \\ 60 & 0,2857 \\ 40 & \\ 50 & \\ 1 & \end{array}$$

καὶ θέλομεν εὔρει ὅτι ἡ ἀξία αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1, ἢ 0,01, ἢ 0,001, ἢ κτλ. κτλ. εἶναι

$$0,2, \text{ ἢ } 0,28, \text{ ἢ } 0,285, \text{ ἢ κτλ.}$$

Ἐκτελοῦντες ὡς προσέβηθ' τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος εὐρίσκομεν ἐνίοτε μετὰ τινα ἀριθμῶν μερικῶν διαιρέσεων ὑπόλοιπον μηδέν· ἡ πρῆξις τότε περατοῦται ἀπ' ἐαυτῆς καὶ τὸ κλάσμα λέγεται ὅτι τρέπεται ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν. Ἀλλ' ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον δὲν εὐρίσκομεν, ὅσα καὶ ἂν παρατείνωμεν τὴν τοιαύτην διαίρεσιν, ὑπόλοιπον μηδέν, καὶ τότε τὸ κλάσμα δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, εὐρίσκομεν δὲ μόνον οὕτω διὰ δεκαδικῶν ἀριθμῶν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν, ἥτις ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γενομένων μερικῶν διαιρέσεων. Δυνάμεθα ὅμως πάντοτε νὰ προῖδωμεν διὰ τοῦ ἐπομένου θεωρήματος, ἐὰν κοινόν τι κλάσμα δύναται νὰ τραπῇ ἢ μὴ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀριθμὸν, καὶ ἐκ πύσων δεκαδικῶν ψαύδων θέλει σύγκεισθαι οὗτος, ὅταν ἡ τροπὴ αὕτη ᾖναι δυνατὴ.

162. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἐὰν ὁ παρονομαστής κοινοῦ τινοῦ ἀναγώγων κλάσματος, ἀποσυντεθεῖς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας δὲν περιέχῃ εἰμὴ μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5, ἢ καὶ μόνον τὸν

α τούτων, μεθ' ὁποιοῦνδήποτε ἐκθετῶν, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος κλά-
α τρέπεται ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικῶν ἀριθμῶν, οὗτινος
ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων θέλει εἶναι ἴσος τῷ μεγαλειτέρῳ
ἐκθετῶν τῶν παραγόντων αὐτοῦ 2 καὶ 5.

Ἔστω π. χ. τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{2}{40}$, οὗτινος ὁ παρονομαστής
0, ἀποσυντεθείς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, εἶναι ἴσος
ᾧ γινομένῳ $2^3 \times 5$, ὅπερ δὲν περιέχει εἰμὴ μόνον τοὺς παράγοντας
καὶ 5 καὶ οὐδένα ἄλλον. Λέγω ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{2}{40}$ τρέπεται ἀ-
κριβῶς εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικῶν ἀριθμῶν, καὶ πρὸς τούτοις ὅτι
ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν αὐτοῦ ψηφίων θέλει εἶναι ἴσος τῷ με-
γαλειτέρῳ 3 τῶν ἐκθετῶν 3 καὶ 1 τῶν παραγόντων αὐτοῦ 2
καὶ 5.

Διότι, ἰὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος
ἐπὶ 1000, ὅπερ εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ $2^3 \times 5^3$, τὸ κλάσμα $\frac{2}{40}$ θέ-
λει γίνεαι $\frac{7 \times 2^3 \times 5^3}{2^3 \times 5}$, καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸς
αὐτοῦ παρονομαστοῦ (88), θέλομεν εὑρεῖ πηλίκον τὸ γινόμενον
 7×5^2 , ἢ 175, ὅπερ διαιροῦντες διὰ 1000, ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ
τιμὴ τοῦ δεδομένου κλάσματος $\frac{2}{40}$, θέλομεν ἔχει 0,175. Εὐρο-
ν λοιπόν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{2}{40}$ εἶναι ἴσον τῷ δεκαδικῷ ἀριθμῷ
0,175, καὶ βλέπομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν αὐτοῦ ψηφίων
καὶ ἴσος τῷ μεγαλειτέρῳ τῶν ἐκθετῶν 3 τῶν παραγόντων 2 καὶ
αὐτοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ 40.

Ἦντοι, ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{7}{2^3 \times 5}$ ὑπετέθη ἀνάγωγον, ὁ 7, ὅστις
καὶ ἀριθμὸς πρώτος, εἶναι διάφορος τῶν παραγόντων τοῦ παρο-
νομαστοῦ αὐτοῦ, ἐπομένως, ἂν ἐπολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ δύ-
ναμιν τινὰ τοῦ 10 μικροτέραν τῆς τρίτης, ἐπὶ 100 π. χ., ὁ παρο-
νομαστής $2^3 \times 5$ δὲν ἤθελε διαίρει τὸ γινόμενον $7 \times 2^2 \times 5^2$ τοῦ ἀριθ-
μοῦ 7 ἐπὶ 100, διότι ὁ παράγων 2 ἔχει μεγαλειότερον ἐκθέτην
τὸν παρονομαστήν $2^3 \times 5$ ἢ εἰς τὸν ἀριθμητὴν $7 \times 2^2 \times 5^2$. Ἀρ-
γοῦ ἡ διαίρεσις ἤθελεν εἶναι ἀδύνατος, ἂν ὁ παρονομαστής 40
μείγε πρώτῳ τινὰ παράγοντα διάφορον τοῦ 2 καὶ 5· διότι ὁ
πρῶτος οὗτος παράγων δὲν ἤθελεν εἰσαχθῇ ἐν τῷ γινομένῳ τοῦ
ἀριθμοῦ 7 ἐφ' ὁποιοῦνδήποτε δύναμιν τοῦ 10 καὶ ἂν ἐπολλαπλα-
σάωμεν αὐτόν. Πρὸς τούτοις βλέπομεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιά-
σῃ τὸν ἀριθμητὴν 7 ἐπὶ δύναμιν τινὰ τοῦ 10, ἔχουσαν ἐκθέτην
μεγαλειότερον τῶν ἐκθετῶν τῶν πρώτων παραγόντων 2 καὶ 5

τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται ἀμέσως. Λοιπὸν, ἵνα ἀνάγωγόν τι τραπῇ ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀριθμὸν, πρέπει ὁ παρονομαστής αὐτοῦ, ἀποσυντεθεὶς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, νὰ μὴ περιέχῃ ἄλλους ἐκτὸς τοῦ 2 καὶ 5, καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν αὐτοῦ ψηφίων θέλει εἶναι ἴσος τῷ μεγαλειτέρῳ τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων αὐτοῦ 2 καὶ 5, ἢ μόνον τοῦ 2 ἢ μόνον τοῦ 5, ἐὰν δὲν περιέχῃ εἰμὴ τῶν ἑνα τούτων.

Ἀπεδείξαμεν κατὰ πρῶτον τὸ ἀνωτέρω θεώρημα μερικῶς ποὺ ἐπὶ τινος παραδείγματος πρὸς εὐκολωτέραν καταλήψιν τῆς γενικῆς αὐτοῦ ἀποδείξεως, ἥτις γίνεται ὡς ἐξῆς.

Ἐστω $\frac{a}{b}$ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα καὶ Δ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς, ἰσοδύναμος αὐτῷ. Θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\Delta = \frac{a}{b}.$$

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Δ ἔχει ν δεκαδικὰ ψηφία, καὶ ἄς πάλιν πλασιάζωμεν τὰ δύο μέλη τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἐπὶ 10^n , θέλομεν ἔχει

$$\Delta \times 10^n = \frac{a \times 10^n}{b}.$$

Τώρα, κατὰ τὰ ἐν ταῖς §§ 39 καὶ 151 λεχθέντα, τὸ γινόμενον $\Delta \times 10^n$ παριστᾷ ἀκέραιον ἀριθμὸν. Ἄρα ὁ ἀριθμητὴς $a \times 10^n$ τοῦ κλάσματος $\frac{a \times 10^n}{b}$ θέλει εἶναι διαίρετός διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ β. Ἄλλ' ὁ β ὑπετέθη πρῶτος πρὸς τὸν α. Ἄρα πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν παράγοντα 10^n (84). Ἄλλ' οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ 10^n εἰναι οἱ πρῶτοι παράγοντες 2 καὶ 5 τοῦ 10, διότι ἔχομεν $10 = 2 \times 5$ καὶ ἐπομένως $10^n = 2^n \times 5^n$ (37). Ἄρα οἱ πρῶτοι παράγοντες τῶν δὲν δύνανται νὰ ᾖναι διάφοροι τοῦ 2 καὶ 5 (88). Πρὸς τούτοις, ὁ 10^n ἢ διαίρετός διὰ β, ἀρκεῖ ὁ ν νὰ ᾖναι ἴσος τῷ μεγαλειτέρῳ τῶν ἐκθετῶν τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ (88). Ἄλλ' ὁ ν παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ὑποθεθέντος ἴσου τῷ ἀναγώγῳ κλάσματι $\frac{a}{b}$. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων εἶναι ἴσος τῷ μεγαλειτέρῳ τῶν ἐκθετῶν τῶν πρώτων παραγόντων 2 καὶ 5 τοῦ β.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ὅταν ὁ παρονομαστής τοῦ δεδομένου ἀναγώγου κλάσματος περιέχῃ καὶ πρῶτόν τινα παράγοντα διάφορον τοῦ 2 καὶ 5, τὸ κλάσμα δὲν δύναται κατὰ τὰ ἀνωτέρω νὰ τραπῇ ἀκριβῶς

εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐφ' ὅποιανδήποτε δύνανται τοῦ 10 καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητικὸς αὐτοῦ ἢ, ὅπερ ταῦτό, ἰσονδή-
ποτε καὶ ἂν παρταθῇ ἢ πρὸς τροπὴν αὐτοῦ εἰς ἰσοδύναμον δεκα-
δικὸν γινομένην διαίρεσιν (158). Ἐν ταύτῃ περιπτώσει λέγουσι συν-
ήθως ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν
ἀπροσδιορίστον ἢ ἀτελευτήτου ἀριθμοῦ ψηφίων, ἢ κἄλλον, εἰς συν-
εχῆς δεκαδικόν.

Ἐάν λάβωμεν ἓν δεκαδικὸν ψηφίον, δύο, τρία, κτλ. ἐκ τοῦ ἀτε-
λευτήτου τούτου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, θέλομεν ἔχει ἀριθμούς παρι-
στῶντας τὴν ἀξίαν τοῦ κοινοῦ κλάσματος μετὰ προσεγγίσεως ἐπὶ
μᾶλλον καὶ μᾶλλον μεγαλειτέρας· ἐν ἄλλαις λέξεσι, τὸ ἐλλείπον
πρὸς συμπλήρωσιν τῆς πραγματικῆς ἀξίας αὐτοῦ εἶναι ἀριθμὸς βαί-
νων ἐκτετούμενος ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον, καθόσον λαμβάνομεν ἐπὶ
μᾶλλον καὶ μᾶλλον πλείωτερα δεκαδικὰ ψηφία ἐκ τοῦ συνεχοῦς δε-
καδικοῦ, τοῦ παριστῶντος τὴν πραγματικὴν ἀξίαν αὐτοῦ. Ἐκφρά-
ζουσι συνήθως τοῦτο λέγοντες, ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα εἶναι τὸ ὄριον,
πρὸς ὃ τείνει τὸ συνεχῆς δεκαδικόν, καθόσον ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμβά-
νομένων ψηφίων αὐτοῦ βαίνει ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον αὐξανόμενος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.— Ἐστῶσαν τὰ ἀνάγωγα κλάσματα

$$\frac{3}{8}, \frac{41}{64}, \frac{7}{45}, \frac{113}{360}.$$

ἵνα προτιθέμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς ἰσοδύναμα δεκαδικά. Ἀποσυν-
θέτομεν πρὸς τοῦτο τοὺς παρονομαστές αὐτῶν

$$8, 50, 45, 30$$

εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ εὐρίσκομεν

$$2^3, 2 \times 5^2, 3^2 \times 5, 2 \times 3 \times 5.$$

Ἐπειδὴ τῶν δύο πρώτων κλασμάτων οἱ παρονομαστοὶ 8 καὶ 50
περιέχουσι μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5, ἔπεται, κατὰ τὰ ἀνω-
τέρω, ὅτι ταῦτα δύνανται νὰ τραπῶσιν ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμα δε-
καδικά, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων θέλει εἶναι διὰ μὲν τὸ
πρῶτον 3, διὰ δὲ τὸ δεύτερον 2. Καὶ τῷ ὄντι, ἐκτελοῦντες τὴν
ἐκκίνησιν κατὰ τὰ λεχθέντα ἐν τῇ § 158 εὐρίσκομεν

$$\frac{3}{8} = 0,375, \frac{41}{64} = 0,22.$$

Ἐπειδὴ δὲ τῶν δύο τελευταίων κλασμάτων οἱ παρονομαστοὶ 45
καὶ 30 περιέχουσιν, ἐκτὸς τῶν παραγόντων 2 καὶ 5, καὶ τὸν παρά-
γοντα 3, ὁποῦντις ἔχουσιν ἐν αὐτοῖς τὸν ἀριθμὸν 3, ἔπεται, κατὰ τὰ ἀνω-
τέρω, ὅτι οὗτοι οὐ δύνανται νὰ τραπῶσιν ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμα δεκα-
δικά, ἀλλὰ ὅτι οὗτοι δύνανται νὰ τραπῶσιν εἰς ἰσοδύναμα δεκαδικὰ, ὧν ὁ
ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων θέλει εἶναι διὰ μὲν τὸν πρῶτον 2, διὰ δὲ
τὸν δεύτερον 3. Καὶ τῷ ὄντι, ἐκτελοῦντες τὴν ἐκκίνησιν κατὰ τὰ λεχθέντα
ἐν τῇ § 158 εὐρίσκομεν

γοντα 3, ἔπεται ὅτι ταῦτα δὲν δύνανται νὰ τραπῶσιν ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμα δεκαδικά. Ἐάν λοιπὸν ἐφαρμόσωμεν καὶ ἐπ' αὐτῶν τὸν πρὸς εὐρεσιν τῶν ἰσοδυνάμων αὐτοῖς δεκαδικῶν δοθέντα κανόνα, θέλομεν εὐρεῖ σειρὰν ἀτελεύτητον,

$$\frac{7}{45} = 0,15555....., \quad \frac{143}{30} = 3,76666.....$$

ΠΕΡΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

163. Δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα καλεῖται τὸ συνεχὲς δεκαδικόν, οὗτινος τὰ δεκαδικὰ ψηφία ἐπαναλαμβάνονται περιοδικῶς τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἀπὸ τινος ψηφίου τῆξεώς τινος μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν. Παραδείγματος χάριν, τὸ δεκαδικὸν κλάσμα

$$0,256256256.....$$

εἶναι δεκαδικὸν περιοδικόν, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι ἀτελεύτητος καὶ τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ 2, 5 καὶ 6 ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Τὸ σύνολον τῶν περιοδικῶς ἐπαναλαμβανομένων ψηφίων καλεῖται περίοδος. Οὕτως, ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι, 256 εἶναι ἡ περίοδος τοῦ περιοδικοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος $0,256\ 256\ 256...$

Τὸ δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα καλεῖται ἀπλοῦν περιοδικόν, ὅταν ἡ περίοδος αὐτοῦ ἄρχηται ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν, καὶ μικτὸν περιοδικόν, ὅταν ἡ περίοδος αὐτοῦ ἄρχηται μετὰ τινα ψηφία ἀπ' αὐτῆς. Τὸ προηγούμενον δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι ἀπλοῦν περιοδικόν, διότι ἡ περίοδος αὐτοῦ 256 ἄρχεται ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν, ἐνῶ τὸ

$$0,354\ 278\ 627862786.....$$

εἶναι μικτὸν περιοδικόν, διότι ἡ περίοδος αὐτοῦ 2786 δὲν ἄρχεται ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν.

Τὰ πρὸ τῆς περιόδου δεκαδικὰ ψηφία τοῦ μικτοῦ περιοδικοῦ ἀπὸ τελοῦσι τὸ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος. Ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι τοῦ μικτοῦ περιοδικοῦ ὁ ἀριθμὸς 354 ἀποτελεῖ τὸ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος.

164. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ὅταν κοινόν τι κλάσμα τρέπηται εἰς συνεχὲς δεκαδικόν, τὸ συνεχὲς τοῦτο εἶναι ἀναγκαίως περιοδικόν.

Ἐστω τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{p}{q}$. Ἴνα τρέψωμεν αὐτὸ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, πρᾶττομεν ὡς ἐξῆς.

Διαιρούμεν τὸν 5 διὰ 7, καὶ εὐρίσκομεν πηλίκον 0 καὶ ὑπόλοιπον 5. Γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ ὑποδιαστολήν, ἔπειτα 0 πρὸς τὰ δεξιά τοῦ πρώτου υπολοίπου 5, καὶ διαιρούμεν τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν 50 πάλιν διὰ 7. Εὐρίσκομεν πηλίκον 7, ὅπερ γράφομεν μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, καὶ ὑπόλοιπον 1, πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ὁποῖου γράφομεν πάλιν 0. Διαιρούμεν ὡσαύτως τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 10 πάλιν διὰ 7, καὶ εὐρίσκομεν πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 3. Γράφομεν 1 εἰς τὸ πηλίκον μετὰ τὸ 7 καὶ ἐν μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ υπολοίπου 3, καὶ οὕτω καθέξῃς, ὡς φαίνεται κάτωθι.

$$\begin{array}{r}
 50 \\
 10 \\
 30 \\
 20 \\
 60 \\
 40 \\
 50 \\
 10 \\
 3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 7 \\
 \hline
 0,71428571\dots
 \end{array}$$

Καθ' ὃν λοιπὸν τρόπον ἐκτελεῖται ἡ πρὸς τροπὴν κοινοῦ τινος κλάσματος εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν πρᾶξις, βλέπομεν ὅτι ἔχομεν ἄρ' ἐνὸς τὸν αὐτὸν πλὴν τοτε διαιρέτην 7, καὶ ἄρ' ἑτέρου ἢ δι' αὐτοῦ ἐκάστοτε διαιρούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι ἐκείνοι, οὓς εὐρίσκομεν γράφοντες πρὸς τὰ δεξιά τοῦ υπολοίπου ἐκάστης μερικῆς διαιρέσεως 0. Γνωρίζομεν τώρα, ὅτι, ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ δίδει συνεχεῖς δεκαδικόν, ἡ διείρασις ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον, καὶ πρὸς τοῦτοις ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν διαφορῶν υπολοίπων, ἅτινα κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως εὐρίσκομεν, δὲν δύναται νὰ ᾖναι μεγαλειότερος τοῦ 6. Διότι ἐκαστον ὑπόλοιπον ὡς μικρότερον τοῦ διαιρέτου 7 θέλει εἶναι ἀναγκασίως εἰς τῶν ἐξ ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6. Λοιπὸν μετὰ 7 τὸ πολὺ διαιρέσεις: θέλομεν εὑρεῖ ἐν τῶν προηγούμενων υπολοίπων, καὶ θέλομεν οὕτως ἀναχωρήσει ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ, οὕτως εἰπεῖν, σημείου, ἄρ' οὐ καὶ ὅταν κατ' ἀρχῆς εὔρομεν αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπον. Λοιπὸν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου θέλουσιν ἐπανεγχεσθαι ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Λοιπὸν τὸ συνεχές δεκαδικόν, εἰς ὃ τρέπεται τὸ κοινόν $\frac{5}{7}$, θέλει εἶναι ἀναγκασίως περιοδικόν.

ἈΝΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ, ΤΟΥ ΠΑΡΑΓΑΓΟΝΤΟΣ
ΔΕΔΟΜΕΝΟΝ ΔΕΚΑΔΙΚΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ.

165. Θέλομεν ἐν τοῖς ἐπομένοις ζητῆσαι τὸ κοινὸν κλάσμα, ὅ-
περ τραπέν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, δίδει δεδομένον περιοδικόν,
καὶ δὲν θέλομεν θεωρήσει εἰμὴ τὰ περιοδικὰ δεκαδικά, τὰ μὴ ἔχοντα
ἀκέραιον μέρος. Διότι, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸ κοινὸν κλάσμα, τὸ
παρὰγαγόν τὸ δεδομένον περιοδικόν θεωρούμενον ἄνευ τοῦ ἀκεραίου
αὐτοῦ μέρους, τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ ἐντε-
θεν προκύπτον κλάσμα, τραπέν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, θέλει δώ-
σει τὸ δεδομένον περιοδικόν μετὰ τοῦ ἀκεραίου αὐτοῦ μέρους.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν εὕρωμεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ δίδει τὸ πε-
ριοδικόν δεκαδικόν

$$0,714285714285....,$$

εἶναι φανερόν ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα, ὅπερ τραπέν εἰς ἰσοδύναμον δε-
καδικόν θέλει δώσει τὸ περιοδικόν

$$38,714285714285....,$$

εὐρίσκεται, ἐὰν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ προστεθῇ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 38.

Ἄς λάβωμεν λοιπὸν ἐν πρώτοις ἀπλοῦν δεκαδικὸν περιοδικόν
ἄνευ ἀκεραίου μέρους, παραδείγματος χάριν, τὸ ἐξῆς.

$$0,267267267267....., \quad (1)$$

τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἔχει τρία ψηφία.

Πρὸς εὐρεσιν τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ὅπερ, τραπέν εἰς ἰσοδύναμον
δεκαδικόν, ἤθελε δώσει τὸ περιοδικόν (1) πράττομεν ὡς ἐξῆς.

Λαμβάνομεν ἐν πρώτοις τὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ περιοδι-
κοῦ (1), τὴν ἀποτελουμένην ἐξ ὠρισμένου τινὸς ἀριθμοῦ περιόδων,
ἐκ τριῶν λόγου χάριν. Ἡ προσεγγίζουσα αὕτη τιμὴ θέλει εἶναι

$$0,267267267. \quad (2)$$

Μεταθέτομεν ἀκολουθῶς τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ δεξιά τὴν ὑποδια-
στολὴν τοῦ δεκαδικοῦ (2) καὶ θέλομεν ἔχει τὸν νέον δεκαδικὸν ἀριθμὸν

$$267,267267, \quad (3)$$

ὅστις θέλει εἶναι χιλιάκις μεγαλειότερος τοῦ (2).

Ἐπειδὴ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς (3) εἶναι χιλιάκις μεγαλειότερος τοῦ
(2), ἐὰν ἀπὸ τοῦ (3) ἀφαιρέσωμεν τὸν (2), ἡ εὐρεθησομένη διαφορὰ

$$267-0,000\ 000\ 267$$

θέλει προφανῶς περιέχει 999κις τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν (2). Θέλο-
μεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητά

$$0,267267267 \times 999 = 267 - 0,000000267,$$

ἥτις γράφεται καὶ ὡς ἐξῆς

$$267 = 0,267267267 \times 999 + 0,000000267.$$

Δικαιοῦντες τὴν ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης διὰ
999 λαμβάνομεν

$$\frac{267}{999} = 0,267267267 + \frac{267}{999} \text{ τῆς 9ης δεκαδικῆς τάξεως.}$$

Ἐπεταὶ λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς (2) παριστᾷ
τὴν τιμὴν τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{267}{999}$ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονά-
δος τῆς 9ης δεκαδικῆς τάξεως.

Ἄλλ' ἐάν, ἀντὶ νὰ λάβωμεν τὴν ἐκ τριῶν περιόδων ἀποτελουμέ-
νην κατὰ προσέγγισιν τιμὴν τοῦ περιοδικοῦ (1), ἐλαμβάνομεν τὴν
ἐκ τεσσάρων, πέντε, ἕξ, κτλ., ἡθέλομεν εὐρεῖ συλλογιζόμενοι ὡς
ἄνωτέρω, ὅτι αἱ ἐκ τῶν περιόδων τούτων ἀποτελούμενοι δεκαδικοί
ἀριθμοὶ θέλουσι παριστᾷ τὴν τιμὴν τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ κλάσματος
 $\frac{267}{999}$ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς 12ης, 15ης, 18ης, κτλ.
δεκαδικῆς τάξεως.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{267}{999}$, ἡ τὸ
ἴσον αὐτῷ ἀνάγωγον, εἶναι τὸ παρασχόν τὸ δεδομένον περιοδικόν
διότι ἡ ἀξία τούτου διαφέρει ὅσῳ ὀλίγον θέλομεν τῶν δεκαδικῶν
ἀριθμῶν (2), οὓς σχηματίζομεν λαμβάνοντες ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλ-
λον πλείοτέρας περιόδους ἐκ τοῦ δεδομένου περιοδικοῦ (1).

Ἐντεῦθεν ὁ ἐξῆς κανὼν

Πρὸς εὐρεσιν τοῦ κοινοῦ κλάσματος, τοῦ παραγῶντος δεδο-
μένου ἀπλοῦν περιοδικὸν ἀνευ ἀκεραίου μέρους, ἀρκεῖ νὰ σχημα-
τίσωμεν κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸν ὑπὸ μᾶς αὐτοῦ περιόδου
ἀποτελούμενον ἀριθμὸν καὶ παρονομαστὴν ἀριθμὸν συγκείμενον
ἐκ τόσων ἡγηρίων ἴσων ἀπάρτων τῷ 9, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν
ἡγηρίων τῆς περιόδου.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον τὰ ἴσα τοῖς περιοδικοῖς

$$0,253253253..., 0,1212121212..., 0,704570457045...$$

κοινὰ κλάσματα εἶναι ἀμοιβαίως τὰ ἐξῆς

$$\frac{253}{999}, \frac{12}{99}, \frac{4}{33}, \frac{7645}{9999}.$$

166. Ἔστω τώρα τὸ μικτὸν περιοδικόν

$$0,38\ 562\ 562\ 562\ 562\ldots\ldots\quad (1)$$

ἄνευ ἀκεραίου μέρους. Ἵνα εὐρώμεν τὸ παραγαγόν αὐτὸ κοινὸν κλάσμα, πράττομεν ὡς ἐξῆς·

Λημβάνομεν ἐν πρώτοις τὴν ἐκ τινος ὁρισμένου ἀριθμοῦ περιόδου ἐκ 2, παραδείγματος χάριν, ἀποτελουμένην κατὰ προσέγγισιν τιμὴν αὐτοῦ, ἥτις εἶναι ἡ ἐξῆς

$$0,38\ 562\ 562\ldots\quad (2)$$

Μεταθέτομεν ἀκολουθῶς πρῶτον δύο καὶ ἔπειτα πέντε θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ, καὶ ἔχομεν τοὺς δύο δεκαδικούς ἀριθμούς

$$38,562\ 562\ldots\quad (3)$$

$$38562,562\ldots\quad (4)$$

ἐξ ὧν ὁ μὲν πρῶτος θέλει εἶναι 100κις, ὁ δὲ δεύτερος 100000κις μεγαλύτερος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ (2). Ἡ διαφορὰ λοιπὸν (4)—(3) θέλει περιέχει 100000κις—100κις, ἥτοι 99900 τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν (2)· ἐν ἄλλαις λέξεσι, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητά

$$38562,562—38,562\ 562=0,38\ 562\ 562\times 99900,$$

ἢ ἐκτελουμένης τῆς ἀφαιρέσεως κατὰ μέρη, τὴν ἐξῆς

$$38562—38—0,000\ 562=0,38\ 562\ 562\times 99900,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν ἀκόλουθον

$$38562—38=0,38\ 562\ 562\times 99900+0,000\ 562.$$

Διαιρὺντες τώρα ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος διὰ 99900 θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς

$$\frac{38562-38}{99900}=0,38562562+\frac{562}{99900} \text{ τῆς 6ης δεκαδικῆς τάξεως.}$$

ἐξ ἧς ἔπεται ὅτι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς (2) εἶναι ἴσος τῷ κοινῷ κλάσματι $\frac{38562-38}{99900}+\frac{562}{99900}$ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς 6ης δεκαδικῆς τάξεως.

Ἄλλ' ἐκν, ἀντὶ νὰ λάβωμεν ἐκ τοῦ περιοδικοῦ (1) δύο μόνον περιόδους, ἐλμβάνομεν πρεῖς, τέσσαρες, πέντε, κτλ., ἢ θέλομεν εὐρεῖ συλλογιζόμενοι ὡς ἄνωτέρω ὅτι αἱ ἐκ τῶν περιόδων τούτων ἀποτελούμενοι δεκαδικοί ἀριθμοὶ θέλουσι παριστᾶν τὴν τιμὴν τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{38562-38}{99900}+\frac{562}{99900}$ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς 6ης,

12ης, 15ης, κτλ. δεκαδικῆς τάξεως. Ἐπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{38562}{99900} = \frac{38}{999}$, ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ ἀνάγωγον, τραπὲν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, θέλει δώσει τὸ δεδομένον μικτὸν περιοδικόν (1), διότι διαφέρει ὅσῳ ὀλίγον θέλομεν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν (2), οὕς σχηματίζομεν λαμβάνοντες ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον περισσοτέρας περιόδους ἐκ τοῦ δεδομένου μικτοῦ περιοδικοῦ (1).

Ποριζόμεθα λοιπὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω τὸν ἐξῆς κανόνα.

Ἴνα εὕρωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα, ὅπερ τραπὲν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀναπαράγει δεδομένον μικτὸν περιοδικόν, ἀρκεῖ τὰ σχηματίζομεν κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν διαφορὰν, ἣν εὕρισκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τοῦ μὴ περιοδικοῦ αὐτοῦ μέρους μετὰ μιᾶς περιόδου τὸν ἀριθμὸν, τὸν ἀποτελουμένον ἐκ τοῦ μὴ περιοδικοῦ αὐτοῦ μέρους, παρονομαστὴν δὲ ἀριθμὸν ἀρχόμενον ἐκ τῶσων ψηφίων ἴσων τῷ 9, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς περιόδου, καὶ ἀκολουθοῦμενον ἐπὶ τῶσων μηδενικῶν, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ μὴ περιοδικοῦ αὐτοῦ μέρους.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θέλομεν εὑρεῖ διὰ τὰ μικτὰ περιοδικὰ 0,35 264726472647..., 0,468231562315623156....

τὰ κοινὰ κλάσματα

$$\frac{352647}{99900} = \frac{35}{999}, \quad \frac{46823156}{9999900} = \frac{468}{999}.$$

167. Εἶδομεν ὅτι, ὅταν τὰ δεδομένον περιοδικὸν ᾖναι ἀπλοῦν, ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἰσοδύναμου αὐτῷ κοινῷ κλάσματος ἀποτελεῖται ἐκ ψηφίων ἴσων ἀπάντων τῷ 9. Ἐπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι οὗτος δὲν θέλει διαιρεῖσθαι οὔτε διὰ τοῦ 2, διότι δὲν εἶναι ἄρτιος, οὔτε διὰ τοῦ 5, διότι δὲν λήγει εἰς 0 ἢ 5, ἐπομένως κατ' ἰσχυρότερον λόγον τὸ ἴσον αὐτῷ ἀνάγωγον κλάσμα δὲν θέλει περιέχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5. Λοιπὸν

Ὅταν ὁ παρονομαστὴς κοινὸς τῶν ἀναγώγων κλάσματος δὲν περιέχῃ οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5, τὸ κλάσμα τοῦτο τραπὲν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν παρέχει ἀπλοῦν περιοδικόν.

Γνωρίζομεν πρὸς τοῦτοις, ὅτι, ὅταν τὸ δεδομένον περιοδικὸν ᾖναι μικτὸν, ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἰσοδύναμου αὐτῷ κοινῷ κλάσματος περατοῦται ὑπὸ τῶσων μηδενικῶν, ὅσα ψηφία περιέχει τὸ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος, ἐπομένως περιέχει τὸςάκις τοὺς παράγοντας 2 καὶ

5, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικά αὐτοῦ. Ἀφ' ἑτέρου ὁ ἀριθμητὴς τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος κλάσματος δὲν δύναται νὰ περιέχῃ ἅπαξ ἢ πολλακίς ἢ ἓνα μόνον τῶν παραγόντων 2 καὶ 5. Διότι ἂν περιέχῃ, λόγου χάριν, συγχρόνως καὶ τὸν 2 καὶ τὸν 5, ἤθελε διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 10, ἥτοι ἤθελε λήγει εἰς μηδέν. Τὸ τελευταῖον τότε ψηφίον τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους ἤθελεν εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ τελευταίῳ ψηφίῳ τῆς περιόδου, ἄλλως ἢ διαφορὰ τοῦ ἀριθμητοῦ δὲν ἤθελε λήγει εἰς μηδέν. Ἡ περίοδος λοιπὸν ἤθελεν ἄρχεσθαι πρὸ μιᾶς τάξεως, ὑπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν ἔπεται ἐκ τῶν προηγουμένων ὅτι, ἐὰν ἀνagάγωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα, τὸ ἰσοδύναμον τῷ μικτῷ περιοδικῷ, εἰς τὴν ἀπλουσιτάτην αὐτοῦ μορφήν, εἰς μόνον τῶν δύο παραγόντων 2 καὶ 5 τοῦ παρονομαστοῦ δυνατόν νὰ ἐκλείψῃ ἅπαξ ἢ πολλακίς, οὐδέποτε δὲ καὶ οἱ δύο ὁμοῦ. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι,

Τὸ κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα, τὸ ἰσοδύναμον δεδομένῳ μικτῷ περιοδικῷ, περιέχει εἰς τὸν παρονομαστήν αὐτοῦ τοσάκις τὸν ἓνα τοῦλάχιστον τῶν παραγόντων 2 καὶ 5, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους τοῦ δεδομένου μικτοῦ περιοδικοῦ, ἐν ἑλλείψει.

Ἐν τῷ παρονομαστῇ κοινῷ τινος ἀναγώγον κλάσματος περιέχῃ μετὰ καὶ ἄλλων παραγόντων ἅπαξ ἢ πολλακίς ἓνα τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 ἢ καὶ ἀμφοτέροισι, τὸ κοινὸν τοῦτο κλάσμα, τραπὲρ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, θέλει δώσει μικτὸν περιοδικόν, ἔχον τόσα ψηφία εἰς τὸ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ μεγαλύτερος τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.

Παράδειγματος χάριν, τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{11}{25 \times 3 \times 5}$ ἐὰν τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, θέλει δώσει μικτὸν περιοδικόν, ἔχον 3 ψηφία εἰς τὸ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος, διότι 3 εἶναι ὁ μεγαλύτερος τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.

Τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{25}{2 \times 7 \times 11}$ θέλει δώσει μικτὸν περιοδικόν, ἔχον 7 ψηφία εἰς τὸ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος.

Τὰ ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{2}{3 \times 7}$, $\frac{5}{3^2 \times 11}$ θέλουσι δώσει ἅπλᾳ περιοδικὰ, διότι οὐδεὶς τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν 3×7 , $3^2 \times 11$ περιέχει τὸν παράγοντα 2 ἢ 5.

I. Νὰ ἀπαγγεῖλθῃ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 37,0250046008 κατὰ τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

II. Νὰ γραφῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς τριάκοιτα ὀκτὼ ἑκατομύρια καὶ ὀκτὼ δεκάκις χιλιοστὰ.

III. Νὰ προστεθῶσιν οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ 3,0025, 8,9000263 καὶ 386,01.

IV. Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ 87,6254 ὁ 3,27.

V. Νὰ τραπῶσιν εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς τὰ κοινὰ κλάσματα $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{8}{17}$ κατὰ προσέγγισιν ἐνὸς δεκάτου τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ.

VI. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ 0,01325 ἐπὶ 0,00013.

VII. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 35,0008 διὰ 17 κατὰ προσέγγισιν ἐνὸς χιλιοστοῦ;

VIII. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ 37,80006 διὰ τοῦ 3,002 κατὰ προσέγγισιν ἐνὸς ἑκατοιτάκις χιλιοστοῦ;

IX. Τὰ κλάσματα $\frac{5}{12}$, $\frac{8}{18}$, $\frac{11}{23}$ τρέπονται ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμα δεκαδικὰ;

X. Τὰ ἀνωτέρω κλάσματα, ἐὰν τραπῶσιν εἰς περιοδικὰ, ποῖα θέλουσι δώσει ἀπ.λᾶ περιοδικὰ καὶ ποῖα μικτά, καὶ ἐκ πόσων ψηφίων θέλει σύγκεισθαι τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος ἐκάστου;

XI. Νὰ εὑρεθῶσιν τὰ κοινὰ κλάσματα, τὰ ἰσοδύναμα τοῖς περιοδικοῖς 37,002002002002....., 253,34012012012.....

XII. Τὰ κοινὰ κλάσματα $\frac{3}{9}$, $\frac{323}{999}$ τραπέντα εἰς περιοδικὰ θέλουσι δώσει τὰ αὐτὰ ἢ διάφορα περιοδικὰ;

XIII. Τὰ κλάσματα $\frac{13}{89}$, $\frac{1313}{9999}$, τραπέντα εἰς δεκαδικὰ, θέλουσι δώσει τὰ αὐτὰ ἢ διάφορα περιοδικὰ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ'.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ.

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ.

168. Τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος καλεῖται ἡ δευτέρα αὐτοῦ δύναμις ἢ τὸ γινόμενον δύο ἴσων αὐτῷ παραγόντων (37). Π. χ. τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶναι τὸ γινόμενον 5×5 ἢ 25.

Τὸ τετράγωνον κλάσματός τινος $\frac{2}{3}$ κατὰ τὰ ἀνωτέρω θέλει εἶναι τὸ γινόμενον $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$, ἢ $\frac{4}{9}$. Ἐν ἄλλαις λέξεσι, τὸ τετράγωνον κλάσματός τινος ἐδρίσκεται ἐὰν ὑψωθῶσιν οἱ ὅροι αὐτοῦ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ διαιρεθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ.

Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος παρίσταται γραφομένου τοῦ ἐκθέτου 2 πρὸς τὰ δεξιά καὶ ὀλίγον ἀνωθεν αὐτοῦ (37). Οὕτως αἱ παραστάσεις 5^2 , $(\frac{2}{3})^2$ ἐκφράζουσι τὰ τετράγωνα τοῦ 5 καὶ $\frac{2}{3}$.

Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ τινος καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον παράγει τὸν πρῶτον. Π. χ., τοῦ 25 ὄντος τοῦ τετραγώνου τοῦ 5, ὁ 5 θέλει εἶναι ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ρίζα. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ $\frac{4}{9}$ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{2}{3}$, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{4}{9}$ θέλει εἶναι $\frac{2}{3}$.

Πρὸς παράστασιν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀριθμοῦ τινος γράφεται τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὑπὸ τὸ σημεῖον $\sqrt{\quad}$, ὅπερ καλεῖται ρίζη κόρ. Π. χ. αἱ παραστάσεις $\sqrt{25}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$ ἐκφράζουσιν ἀκριβαίως τὰς τετραγωνικὰς ρίζας τοῦ 25 καὶ $\frac{4}{9}$.

Ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὐρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ τινος, καλεῖται ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

169. Τὸ τετράγωνον γινόμενου τινὸς εὐρίσκεται κατὰ τὸν ἀνωτέρω τοῦ τετραγώνου ὁρισμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ αὐτὸ ἐφ' ἑαυτὸ· ἢ ἐὰν διπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων αὐτοῦ. Οὕτω, τὸ τετράγωνον τοῦ $2 \times 3^2 \times 5$ εἶναι τὸ γινόμενον

$$2 \times 3^2 \times 5 \times 2 \times 3^2 \times 5, \text{ ἢ τὸ } 2^2 \times 3^4 \times 5^2.$$

Ἐπίσης τὸ τετράγωνον τοῦ γινόμενου $2^2 \times 3^5 \times 7$ εἶναι τὸ γινόμενον $2^2 \times 3^5 \times 7 \times 2^2 \times 3^5 \times 7$, ἢ τὸ $2^4 \times 3^{10} \times 7^2$,

καὶ βλέπομεν ὅτι ταῦτα εὐρίσκονται ἐκ τῶν γινόμενων $2 \times 3^2 \times 5$, $2^2 \times 3^5 \times 7$ διπλασιαζομένων τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων 2, 3, 5 ἢ 2, 3, 7 αὐτῶν. Ἐπεὶ ἐντεῦθεν ὅτι,

1ον. Ἐὰν οἱ παράγοντες γινόμενου τινὸς ᾖσιν ἀριθμοὶ πρῶτοι, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ θέλει περιέχει τοὺς αὐτοὺς πρῶτους παράγοντας· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, οὐδεὶς νέος πρῶτος παράγων εἰσάγεται ἐν τῷ τετραγώνῳ τοῦ γινόμενου. Τὸ τετράγωνον π. χ. τοῦ $2 \times 3 \times 5$ εἶναι τὸ $2^2 \times 3^2 \times 5^2$, ὅπερ περιέχει τοὺς πρῶτους παράγοντας 2, 3, 5 τοῦ πρώτου γινόμενου $2 \times 3 \times 5$ καὶ οὐδέν τι ἄλλον.

2ον. Ἵνα γινόμενον πρώτων παραγόντων ἢ τετράγωνον ἑτέρου τινὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ, πρέπει οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ νὰ ᾖσιν ἄρτιοι. Διότι τότε, ἐὰν λάβωμεν τὸ γινόμενον τῶν αὐτῶν πρώτων παραγόντων μὲ ἀμοιβαίους ἐκθέτας τὸ ἡμῖς τῶν ἐκθετῶν τοῦ πρώτου γινόμενου, θέλομεν κατὰ τὰ προλεχθέντα σχηματίσει ἀριθμόν, οὗτινος τὸ τετράγωνον θέλει εἶναι ἴσον τῷ δεδομένῳ γινόμενῳ, οὐδεὶς δὲ ἕτερος ἀκεραῖος ἀριθμὸς, ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον, δύναται νὰ παραχῇ τὸ δεδομένον γινόμενον· διότι εἴπομεν ἐν τῇ § 86 ὅτι καθ' ἓνα μόνον τρόπον δεδομένος τις ἀριθμὸς ἀποσυντίθεται εἰς τοὺς πρῶτους παράγοντας.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ.

170. Ἐστώ νὰ ὑψώθῃ τὸ ἄθροισμα $7+5$ εἰς τὸ τετράγωνον. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιασῶμεν $7+5$ ἐπὶ $7+5$, ἥτοι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πρέπει πρῶτον νὰ λάβωμεν 7 ἀριθμοὺς ἴσους τῷ ἄθροισματι $7+5$, ἔπειτα 5 τοιοῦτους καὶ νὰ προσθῶμεν τὰ δύο ταῦτα ἐξαγόμενα· διότι ὁ πολλαπλασιαστικὸς $7+5$ ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος, ἀρὸς ἐκπενελήρηται αὕτη πρῶτον ἑκάς, ἔπειτα ὅκας, καὶ εἰς τὸ ἐκπενπλασίον αὐτῆς προστεθὲν τὸ πενταπλάσιον. Ἀλλὰ τὸ μὲν ἄθροισμα 7 ἀριθμῶν ἴσων τῷ $7+5$ εἶναι $7 \times 7 + 5 \times 7$, τὸ δὲ ἄθροισμα 5 ἀριθμῶν ἴσων τῷ $7+5$ εἶναι

$7 \times 5 + 5 \times 5$. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν δύο τούτων ἄθροισμάτων θέλει εἶναι

$$7 \times 7 + 5 \times 7 + 7 \times 5 + 5 \times 5,$$

ἢ, ἐπειδὴ $5 \times 7 = 7 \times 5$, τὸ ἐξῆς

$$7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2.$$

Λοιπὸν θέλομεν ἔχει

$$(7+5)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2, \quad (1)$$

τουτέστι, τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος $7+5$ δύο ἀριθμῶν 7 καὶ 5 σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου, ἐκ τοῦ διπλασίου γινόμενου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δευτέρον, καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου.

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητά (1) θέσωμεν a ἀντὶ τοῦ 7 καὶ b ἀντὶ τοῦ 5, θέλομεν ἔχει

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2. \quad (2)$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ a παριστᾷ τὰς δεκάδας ἀριθμοῦ τινος καὶ τὸ b τὰς μονάδας αὐτοῦ, ἡ ἰσότης (2) δεικνύει ὅτι,

Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος συγκειμένου ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, πλεον τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλεον τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων.

171. Ἐὰν τὸ b τῆς ἰσότητος (2) ὑποτεθῇ ἴσον τῇ μονάδι, αὕτη γίνεται

$$(a+1)^2 = a^2 + 2 \times a \times 1 + 1^2,$$

ἢ, ὑπερ ταύτο,

$$(a+1)^2 = a^2 + 2 \times a + 1.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι,

Ἐὰν ἀριθμὸς τις a ἀνέξηθῇ κατὰ μονάδα, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ a^2 ἀυξάνεται κατὰ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ $2 \times a$ καὶ κατὰ μίαν μονάδα ἀκόμῃ. Ἐν ἄλλαις λέξεσι

Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ διπλασίῳ τοῦ μικροτέρου, πλεον μίᾳ κατὰ μονάδα.

Ἐὰν θέλωμεν νῦν εὗρωμεν τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος, πρέπει ἐν τῇ ἰσότητι (2) νῦν θέσωμεν $\frac{1}{2}$ ἀντὶ τοῦ b , καὶ θέλωμεν ἔχει

$$(a+\frac{1}{2})^2 = a^2 + 2 \times a \times \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2,$$

ἢ, ἐκτελουμένων τῶν πράξεων,

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = a^2 + a + \frac{1}{4}$$

Βλέπομεν λοιπόν ὅτι, τοῦ a ἀνελθέντος κατὰ $\frac{1}{2}$, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ a^2 ἠνέχθη κατὰ τὸ ἄθροισμα $a + \frac{1}{4}$ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ a καὶ τοῦ $\frac{1}{4}$.

ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

172. Ἐάν γράψωμεν κατὰ σειρὰν τοὺς δέκα ἀρχικοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (1) καὶ ὅπ' αὐτοὺς τὰ τετράγωνα αὐτῶν

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, (2) οἱ ἀριθμοὶ τῆς πρώτης σειρᾶς θέλουσιν εἶναι κατὰ τὰ προλεχθέντα καὶ τετραγωνικὰ ῥίζαι τῶν ἀντιστοιχῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας. Οὕτω τοῦ 81 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι ὁ ἀντίστοιχος αὐτοῦ 9, τοῦ 36 εἶναι ὁ 6, τοῦ 64 ὁ 8, κτλ.

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 1, 4, 9, κτλ., οἱ ὄντες τετράγωνα ἄλλων ἀκεραίων, καλοῦνται τέλεια τετράγωνα ἢ μερικώτερον ἑκέραια τετράγωνα, βλέπομεν δὲ ὅτι πάντες οἱ μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 100 περιεχόμενοι ἀκέραιοι δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα. Π. χ. ὁ 53, ὁ μεταξὺ τοῦ 49 καὶ 64 περιεχόμενος, δὲν εἶναι ἀκέραιον τετράγωνον διότι ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα εἶναι προφανῶς μεγαλειτέρα τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 49, ἥτοι τοῦ 7, καὶ μικροτέρα τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 64, ἥτοι τοῦ 8, καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 8 διαφέρουσι κατὰ μονάδα, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 53 θέλει διαφέρει τοῦ 7 ἢ 8 ὀλιγώτερον μιᾶς μονάδος, ἐπομένως δὲν δύναται νὰ ᾖναι ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐάν λάβωμεν, ἀντὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 53, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν 7 τοῦ 49, ὅστις εἶναι τὸ μεγαλειότερον ἀκέραιον τετράγωνον, τὸ ἐμπεριεχόμενον ἐν τῷ ἀριθμῷ 53, θέλομεν ἔχει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 53 κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ἄν ἐλαχμώνομεν καὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν 8 τοῦ 64, ἠθέλομεν ἐπίσης ἔχει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 53 κατὰ προσέγγισιν μονάδος. Πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἡ μὲν πρώτη καλεῖται τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος κατ' ἐλλείψιν, ἡ δὲ δευτέρα τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος καθ' ὑπεροχὴν. Συνήθως λέγοντες ἀπλῶς τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν

μονάδος ἐννοούμεν τὴν κατ' ἑλλειψιν μονάδος τετραγωνικὴν αὐτοῦ
ρίζαν. Καὶ ἐν γένει

Τετραγωνικὴ ρίζα ὅποιοιδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος καλεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ ἐμπεριχομένου ἐν αὐτῷ. Παράδειγματος χάριν, ὁ 11 εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 130, διότι εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου 121, τοῦ ἐμπεριχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 130.

173. "Ας ἴδωμεν τώρα πῶς θέλομεν προσδιορίσει τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ὅποιοιδήποτε ἀριθμοῦ, ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅταν οὗτος δὲν ᾖ τῶν τελείων τετραγώνων.

Ἐάν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ᾖ μικρότερος τοῦ 100, εὐρίσκωμεν ἀμέσως τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ρίζαν ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος διὰ τῶν σειρῶν (1) καὶ (2), ἃς εὐκόλως θυνάμεθα νὰ ἐνθυμώμεθα. Βλέπομεν δὲ ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα παντὸς ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 100, ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, θέλει εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 10. ἐπομένως μονοψήφιος, καὶ ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, παντὸς ἀριθμοῦ μεγαλειτέρου τοῦ 100, θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 10, ἐπομένως σύγκεισθαι ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων.

174. "Ας ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ὁ ἀριθμὸς A , τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, εἶναι μεγαλειτέρου τοῦ 100. Ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ρίζα θέλει σύγκεισθαι ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων, καὶ ἐπομένως εὐρίσκεται, ἐάν εὐρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων αὐτῆς. Ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων αὐτῆς εὐρίσκεται διὰ τοῦ ἐξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀριθμοῦ τινοῦ A μεγαλειτέρου τοῦ 100 εὐρίσκεται, εἰν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ.

Ἐάν π. χ. ὁ A ᾖ ἴσος τῷ 8763, πρὸς εὑρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 8763 πρέπει νὰ εὐρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν 9 τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου 81, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 87 τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς παραστήσωμεν διὰ Δ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ A καὶ διὰ M τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων αὐτῆς. Ἐπειδὴ M μονάδες εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος μιᾶς

δεκάδος, ἢ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ A θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ Δ δεκάδων καὶ $\Delta+1$ δεκάδων, ἢ, ὕπερ ταῦτό, μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\Delta \times 10 \text{ καὶ } (\Delta+1) \times 10.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ A περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\Delta \times 10$ καὶ $(\Delta+1) \times 10$, ὁ A αὐτὸς θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ τῶν τετραγῶνων αὐτῶν, ἅτινα εἶναι

$$\Delta^2 \times 100 \text{ καὶ } (\Delta+1)^2 \times 100.$$

Ἐν τοῖς ἀνωτέρω γινομένοις οἱ παράγοντες Δ^2 καὶ $(\Delta+1)^2$ παριστῶσιν ἑκατοντάδας ὡς πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ 100. Λοιπὸν, ἐπειδὴ ὁ A περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\Delta^2 \times 100 \text{ καὶ } (\Delta+1)^2 \times 100,$$

ἐπεταὶ ὅτι αἱ ἑκατοντάδες τοῦ A θέλουσι περιέχεσθαι μεταξὺ τῶν ἑκατοντάδων αὐτῶν, ἧτοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\Delta^2 \text{ καὶ } (\Delta+1)^2,$$

ἐν ἄλλαις λέξεσι, Δ^2 εἶναι τὸ μεγαλειότερον ἀκέραιον τετράγωνον, τὸ ἐμπεριεχόμενον εἰς τὰς ἑκατοντάδας τοῦ A . Ἐπομένως ὁ ἀριθμὸς Δ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ A εἶναι ἴσος τῇ τετραγωνικῇ ρίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκέραιου τετραγῶνου Δ^2 , τοῦ ἐμπεριεχομένου εἰς τὰς ἑκατοντάδας αὐτοῦ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδειχθῇ.

175. Εὐρεθέντος τοῦ ἀριθμοῦ Δ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ A , μᾶς μένει νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν M τῶν μονάδων αὐτῆς. Εὐρίσκεται δὲ οὗτος διὰ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν ἀπὸ τινος ἀριθμοῦ A ἀφαιρεθῇ τὸ τετράγωνον Δ^2 τῶν εὐρεθεισῶν δεκάδων Δ τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ρίζης, πρὸς εὑρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων αὐτῆς M ἀρκεῖ τὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς εὐρεθείσης διαφορᾶς διὰ τοῦ διπλασίου $2 \times \Delta$ τῶν εὐρεθεισῶν δεκάδων Δ . Τὸ οὕτως εὐρεθησόμενον πηλίκον θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μείζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ρίζης.

Διότι, παρασταθέντος διὰ Δ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ A καὶ διὰ M τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων αὐτῆς, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ, ἀκριβῶς, ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, θέλει εἶναι ἴση τῷ ἀριθμῷ ἢ τῷ ἀθροίσματι

$$\Delta \times 10 + M.$$

Ἐπεταὶ λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι ὁ A θέλει εἶναι ἢ ἴσος ἢ μεγαλειότερος τοῦ τετραγῶνου τοῦ $\Delta \times 10 + M$, ἧτοι τοῦ

$$(\Delta \times 10 + M)^2,$$

ἢ τοῦ ἴσου αὐτῷ (170)

$$\Delta^2 \times 100 + 2 \times \Delta \times M \times 10 + M^2,$$

τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς ἰσότητα ἢ ἀνισότητα

$$A = \eta > \Delta^2 \times 100 + 2 \times \Delta \times M \times 10 + M^2,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως ὅτι, ἐάν ἀπὸ τοῦ A ἀφαιρεθῇ $\Delta^2 \times 100$, ἦτοι τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης, ἢ εὐρεθησομένη διαφορὰ $A - \Delta^2 \times 100$ θέλει εἶναι ἴση ἢ μεγαλειτέρα τοῦ ἀθροίσματος

$$2 \times \Delta \times M \times 10 + M^2.$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $2 \times \Delta \times M$, ἐπειδὴ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, πικρὸν δεκάδας, καὶ ἄρ' ἐτέρου καὶ τὸ τετράγωνον M^2 τῶν μονάδων M διπλατὸν νὰ περιέχῃ τοιαύτας. Λοιπὸν ὁ ἐν τῇ εὐρεθησομένῃ διαφορᾷ $A - \Delta^2 \times 100$ περιεχόμενος ἀριθμὸς δεκάδων θέλει εἶναι τοῦλάχιστον ἴσος τῷ ἀριθμῷ

$$2 \times \Delta \times M,$$

ἐπομένως, ἐάν ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς εὐρεθείσης ῥίζης διαيرهθῇ διὰ τοῦ διπλασίου $2 \times \Delta$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, τὸ εὐρεθησόμενον πηλίκον θέλει εἶναι ἢ M ἢ ἀριθμὸς μεγαλείτερος τοῦ M , τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Ἵνα δὲ βεβαιωθῶμεν, ἂν τὸ οὕτως εὐρεθὲν πηλίκον M ᾖ ἢ ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ A , ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον τὸν ἀριθμὸν $\Delta \times 10 + M$, καὶ ἐάν εὐρωμεν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ A , M θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν μονάδων· ἐάν δὲ εὐρωμεν ἀριθμὸν μεγαλειότερον τοῦ A , ἐλαττοῦμέν τὸν M κατὰ μίαν, δύο, κτλ. μονάδας, μέχρις οὗ εὐρωμεν ἀριθμὸν, οὗτινος τὸ τετράγωνον νὰ ᾖ μικρότερον τοῦ A . Ὁ οὕτως εὐρεθεὶς ἀριθμὸς θέλει παριστᾶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ A , ἐάν εὐρωμεν διαφορὰν 0, ἐν ἐναντίῳ δὲ περιπτώσει, τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

176. Ἐφαρμόσωμεν τῶρα τὰ ἀνωτέρω ἐπὶ τινος παραδείγματος. Ἐς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 8763. Λέγομεν πρὸς τοῦτο ὅτι

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 8763 εἶναι μεγαλειότερος τοῦ 100, ἢ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 10, ἐπομένως περιέχει δεκάδας καὶ μονάδας. Τώρα κατὰ τὸ θεωρημα τῆς § 174 πρὸς εὐρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης πρέπει νὰ

ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 87 τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ.

Τὸ μεγαλύτερον ἀκεραῖον τετράγωνον, τὸ ἐμπεριεχόμενον ἐν τῷ 87, εἶναι 81 καὶ ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα 9. Λοιπὸν 9 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς ζητούμενης τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 8763.

Μᾶς μένει νὰ εὑρῶμεν τὰς μονάδας αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀραιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 8763 τὸ τετράγωνον 8100 τῶν εὐρεθειῶν 9 δεκάδων, ἥτοι τοῦ 90, καὶ τὰς δεκάδας 66 τῆς εὐρεθείσης διαφοράς 663 διακρούμεν διὰ τοῦ διπλασίου 18 τῶν εὐρεθειῶν δεκάδων 9. Εὐρίσκομεν οὕτω πηλίκον 3, ὅπερ κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 175 θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μείζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ζητούμενης τετραγωνικῆς ῥίζης. Ἵνα δὲ βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου, ὑψοῦμεν τὸν ἀριθμὸν 93 εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὐρίσκομεν 8649, ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ δεδομένου 8763. Λοιπὸν 93 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ἡ μεταξὺ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 8763 καὶ τοῦ τετραγώνου 8649 τῆς εὐρεθείσης τετραγωνικῆς ῥίζης 93 διαφορά 114 καλεῖται ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

177. Συνήθως, ὅταν δοκιμάζωμεν εὑρετέν τι ψηφίον ἂν ᾖ ἢ μὴ τὸ τῆς ζητούμενης τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ἀντὶ τῆς ὑπόθεσεως ἐκλύκληρον τὸν ἀριθμὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εἰς τὸ τετράγωνον καὶ παραβάλλωμεν τοῦτο πρὸς τὸν δεδομένον ἀριθμὸν, συντομεύομεν τὴν δοκιμὴν ἐκτελοῦντες αὐτὴν διὰ τινος ἰδιαιτέρου τρόπου. Ἵνα δὲ ἴδωμεν εἰς τί οὗτος συνίσταται καὶ πορισθῶμεν μετὰ περισσοτέρας εὐκολίας τὸν περὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης γενικὸν κανόνα, ὃς λάθωμεν παραδειγματῆς τι, καὶ ὃς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 77387.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 77387 εἶναι μείζων τοῦ 100, ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης εἶναι ἴσος τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 773 τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ ἀριθμὸς 773 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ 77387 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα θέλει εἶναι μεγαλύτερα τοῦ 10, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων αὐτῆς ἰσοῦται τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 7 τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ.

Τὸ μεγαλύτερον ἀκέραιον τετράγωνον, τὸ ἐμπεριεχόμενον ἐν τῷ 7, εἶναι τὸ 4, οὗτινος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι 2. Λοιπὸν 2 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 773.

Πρὸς εὗρεσιν τῶν μονάδων αὐτῆς ἀραιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 773 τὸ τετράγωνον 400 τῶν 2' δεκάδων, ἥτοι τοῦ 20, καὶ τὰς δεκάδας 37 τῆς εὐρεθησομένης διαφορᾶς 373 διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου 4 τοῦ ψηφίου 2 τῶν εὐρεθεισῶν δεκάδων αὐτῆς. Εὐρίσκομεν οὕτω πηλίκον 9, ὅπερ θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μείζον τοῦ ζητούμενου ψηφίου τῶν μονάδων.

Εἴπομεν δὲ ὅτι, ἵνα πεισθῶμεν περὶ τούτου, πρέπει νὰ ὑψώσωμεν τὸν ἀριθμὸν 29 εἰς τὸ τετράγωνον, καὶ ἐὰν μὲν εὗρωμεν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ 773, τότε 9 θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον ψηφίον, ἐὰν δὲ εὗρωμεν ἀριθμὸν μεγαλύτερον, ὅτι πρέπει νὰ δοκιμάσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου τὰ ψηφία 8, 7, κτλ., μέχρις οὗ εὗρωμεν ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ᾔηται μικρότερον τοῦ 773. Ἰδοὺ τῶρα εἰς τί συνίσταται ἡ περὶ τῆς ὁ λόγος συντόμευσις τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως.

Ἀποσυνθέτομεν τὸν ἀριθμὸν 29, ὃν προτιθέμεθα νὰ ὑψώσωμεν εἰς τετράγωνον, εἰς 20 καὶ 9, καὶ σχηματίζομεν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος $20+9$, ὅπερ εἶναι

$$20^2 + 2 \times 20 \times 9 + 9^2. \quad (1)$$

Πρέπει λοιπὸν τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα νὰ παραβάλλωμεν πρὸς τὸν ἀριθμὸν 773, ἵνα ἴδωμεν ἂν τὸ 9 ᾔηται τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης αὐτοῦ. Τῶρα ἂν, ἀντὶ νὰ ἐκτελέσωμεν τοὺς ἐν τῷ ἀθροίσματι (1) σεσημαιωμένους πολλαπλασιασμοὺς, εὗρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν οὕτως εὐρεθησομένων ἀριθμῶν καὶ παραβάλλωμεν τοῦτο πρὸς τὸν ἀριθμὸν 773, θέλομεν ρηθῆσαι προφανῶς εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ἐὰν ἀραιρέσωμεν πρῶτον ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 773 τὸ τετράγωνον τοῦ 20, ὅπερ εἶναι 400. καὶ πρὸς τὴν οὕτως εὐρεθησομένην διαφορὰν 373 παραβάλλωμεν τὸ μένον ἄθροισμα $2 \times 20 \times 9 + 9^2$, ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ $40 \times 9 + 9^2$, ἢ, ἐξαγόμενου ἐκτὸς παρενθέσεων τοῦ κοινοῦ παρὰγοντος 9 τῶν δύο μερῶν 40×9 καὶ 9^2 , τὸ $(40+9) \times 9$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον 49×9 εἶναι ἀριθμὸς 441 μεγαλύτερος τοῦ 373, ἐπαίται ὅτι τὸ 9 δὲν εἶναι τὸ ζητούμενον ψηφίον τῶν μονάδων, ἀλλὰ ἢ τὸ 8, ἢ τὸ 7, ἢ κτλ. Τῶρα, ἵνα δοκιμάσωμεν τὸ 8, εἶναι περιστὸν νὰ ὑψώσωμεν τὸν 28 εἰς τὸ τετράγωνον· βλέπομεν σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω, ὅτι ἀρκεῖ νὰ παραβάλλωμεν πρὸς τὴν διαφορὰν 373 τὸ γινόμε-

μενον 48×8 , πουτέστιν ἐκεῖνο, ὅπερ ἠθέλομεν εὑρεῖ, ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα (1) ἐθέτομεν ἀντὶ τοῦ δοκιμασθέντος ψηφίου 9 τὸ δοκιμαζόμενον 8 καὶ μετετρέπομεν τὸ ἄθροισμα $2 \times 20 \times 8 + 8^2$ εἰς τὸ ἴσον αὐτῷ γινόμενον 48×8 .

Ἐπειδὴ πάλιν τὸ γινόμενον 48×8 εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῆς διαφορᾶς 373, δοκιμάζομεν τὸ ψηφίον 7 σχηματίζοντες διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ γινόμενον 47×7 καὶ παραβῆλλοντες τοῦτο πρὸς τὴν διαφορὰν 373. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 47×7 εἶναι 329, ἀριθμὸς μικρότερος τῆς διαφορᾶς 373 κατὰ 44, ἔπεται ὅτι 7 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 773.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι πρὸς δοκιμὴν ψηφίου τινὸς 9, 8, 7, κτλ. ἄρκει νὰ γράψωμεν τοῦτο πρὸς τὰ δεξιὰ 4 τοῦ διπλασίου τῶν εὑρεθεῖσων δεκάδων 2 τῆς ρίζης καὶ τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν 49, 48, 47 κτλ. νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' αὐτὸ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 9, 8, 7, κτλ., καὶ ἂν μὲν τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον γινόμενον ᾖναι μικρότερον τῆς διαφορᾶς, ἢ εὐρίσκομεν ἀκριβοῦντες ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, οὕτως ζητοῦμεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης, τὸ τετράγωνον τῶν εὑρεθεῖσων δεκάδων αὐτῆς, τότε τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι τὸ ζητούμενον· ἂν δὲ μεγαλύτερον, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, καὶ οὕτω καθέξης.

Ὡς ἐπικλέθωμεν μετὰ ταῦτα εἰς τὸν δεδομένον ἀριθμὸν 77387. Ἐορῶμεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ μεγίστου ἀκέραιου τετραγώνου, τοῦ ἐμπεριεχομένου εἰς τὰς ἑκατοντάδας 773 αὐτοῦ, εἶναι 27. Λοιπὸν 27 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 77387. Μᾶς μένει δὲ τώρα νὰ εὕρωμεν τὰς μονάδας αὐτῆς.

Πρὸς τοῦτο κατὰ τὸ θεωρημα τῆς § 176 πρέπει νὰ ἀκριβεσώμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 77387 τὸ τετράγωνον τῶν 27 δεκάδων, καὶ τὰς δεκάδας τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς νὰ διαίρεσωμεν κτλ.

Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῶν 27 δεκάδων, ἦτοι τοῦ 27×10 , περιέχει 27^2 ἑκατοντάδας, ἦτοι εἶναι $27^2 \times 100$, εὐρίσκομεν τὴν ζητούμενην διαφορὰν, ἂν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 773 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ἀκριβεσώμεν τὸ τετράγωνον τοῦ 27. Ἄλλ' ἀκριβεσάντες προηγουμένως ἀπὸ τοῦ 773 πρῶτον τὸ τετράγωνον τοῦ 20, ἔπειτα ἀπὸ τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς 373 τὸ γινόμενον 27×7 , ἀφαιρέσαμεν οὕτως αὐτὸ τὸ τετράγωνον τοῦ 27. Λοιπὸν ἡ εὑρεθεῖσα τότε διαφορὰ 44 θέλει παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοντάδων τῆς με-

ταξὺ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 77387 καὶ τοῦ τετραγώνου τῶν εὐρεθεισῶν 27 δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης διαφορὰν, ἐπομένως ἡ διαφορὰ αὕτη θέλει εἶναι 4487, τουτέστιν εὐρίσκεται, ἐὰν πρὸς τὰ δεξιά τῆς προηγουμένης εὐρεθείσης διαφορᾶς 44 καταβιβασθῶσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία 87 τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ. Δευτέρα ἀπλοποιήσις αὕτη.

Διαιροῦντες τώρα τὰς δεκάδας 448 τῆς εὐρεθείσης διαφορᾶς 4487 διὰ τοῦ διπλασίου 54 τῶν εὐρεθεισῶν δεκάδων 27 τῆς τετραγωνικῆς ρίζης, εὐρίσκομεν πηλίκον 8, ὑπερ θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μείζον τοῦ ζητούμενου ψηφίου τῶν μονάδων αὐτῆς. Ἀντὶ πάλιν πρὸς δοκιμὴν αὐτοῦ νὰ ὑψώσωμεν τὸν ἀριθμὸν 278 εἰς τὸ τετράγωνον καὶ παραβάλλωμεν τὸν οὕτως εὐρεθησόμενον ἀριθμὸν πρὸς τὸν δεδομένον 77387, ἀποσυνθέτομεν αὐτὸν εἰς 270 καὶ 8 καὶ ὑψοῦμεν τὸ ἄθροισμα $270+8$ εἰς τὸ τετράγωνον.

Εὐρίσκομεν οὕτω κατὰ τὰ λεχθέντα ἐν τῇ § 170

$$270^2 + 2 \times 270 \times 8 + 8^2,$$

$$\eta \quad 270^2 + 540 \times 8 + 8^2,$$

$$\eta \quad 270^2 + (540 + 8) \times 8,$$

$$\eta \quad 270^2 + 548 \times 8,$$

καὶ παραβάλλομεν τὸ τελευταῖον ἄθροισμα $270^2 + 548 \times 8$ πρὸς τὸν δεδομένον ἀριθμὸν 77387. Ἀλλ' ἀφαιρέσαντες προηγουμένως ἀπ' αὐτοῦ 270^2 , εὐρομεν διαφορὰν 4487. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ παραβάλλωμεν τὸ γινόμενον 548×8 πρὸς τὴν διαφορὰν 4487, ἐν ἄλλαις λέξεσι, νὰ γράψωμεν ὡς προηγουμένως πρὸς τὰ δεξιά τοῦ διπλασίου 54 τοῦ εὐρεθέντος ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων 27 τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 8, τὸν οὕτω σχηματιζόμενον ἀριθμὸν 548 νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' αὐτὸ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον καὶ νὰ παραβάλλωμεν τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον 4384 πρὸς τὴν διαφορὰν 4487.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον 4384 εἶναι μικρότερον τῆς διαφορᾶς 4487, τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ θέλει εἶναι 8. Ἐπομένως ὁ μὲν ἀριθμὸς 278 παριστᾷ τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἡ δὲ μετὰξὺ τοῦ 4487 καὶ τοῦ γινομένου 4384 διαφορὰ 103 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Τὰ ἀκθέαστα τῆς πράξεως διατάσσονται καθ' ἓνα τῶν δύο ἐπομένων τρόπων.

$$\begin{array}{r|l}
 77387 & 278 \\
 4 & 47 \mid 548 \\
 \hline
 373 & 7 \mid 8 \\
 329 & \\
 \hline
 4487 & \\
 4384 & \\
 \hline
 103 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 77387 & 278 \\
 373 & 47 \mid 548 \\
 4487 & 7 \mid 8 \\
 103 &
 \end{array}$$

ἐξ ὧν ὁ δεύτερος δὲν διαφέρει τοῦ πρώτου εἰμὴ κατὰ τοῦτο, ὅτι ἐκτελοῦμεν τὰς ἀφαιρέσεις ἀφαιροῦντες τὸ τετράγωνον τοῦ 2 καὶ τὰ γινόμενα 47×7 καὶ 548×8 χωρὶς νὰ γράψωμεν αὐτὰ.

178. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορίζομεθα τὴν εὐκόλως τὸν ἐξῆς γενικὸν κανόνα·

Ἴνα εξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα διψήφια ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν. Ὁ ἀριθμὸς τῶν τμημάτων τούτων, ὡς τὸ πρῶτον δευτέρων ἢ ἔχῃ ἔν μόνον ψηφίων, θέλει εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν ψηφίων τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης.

Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ ἐμπεριεχομένου ἐν τῷ πρώτῳ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματι, καὶ εἰκόσκομεν οὕτω τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ρίζης.

Ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου ἀπὸ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς γράφομεν τὸ ἀπολούθον διψήφιον τμήμα. Χωρίζομεν τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον αὐτοῦ, καὶ διαιροῦμεν τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἐκ τῶν λοιπῶν ψηφίων ἀποτελούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης. Τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον ἀκεραῖον πηλίκον θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μείζον τοῦ δευτέρου ψηφίου τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης. Ἴνα δοκιμάσωμεν τὸ ψηφίον τοῦτο, γράφομεν αὐτὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν ἐπ' αὐτὸ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον. Ἐὰν τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον γινόμενον ἀφαιρῇται ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ σχηματιζομένου ἐκ τοῦ πρώτου ἡπολοίπου μετὰ τοῦ δευτέρου πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ γραφέντος τμήματος, τότε τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης. Ἐὰν δὲν ἀφαιρῇται, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μορὰδα μικρότερον, μέχρις οὗ εὕρωμεν γε-

νόμιμον μικρότερον τοῦ προϋφθέντος ἀριθμοῦ. Ἀγαιρούμεν τοῦτο ἀπ' αὐτοῦ, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εὐρεθησομένης διαφορᾶς γράφομεν τὸ τρίτον διψήφιον τμήμα.

Χωρίζομεν πάλιν τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων τοῦ οὕτως ἀποτελούμενου ἀριθμοῦ, διπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀποτελούμενον ἐπὶ τῶν δύο εὐρεθείτωσαν ψηφίων τῆς ρίζης, καὶ διαιρούμεν διὰ τοῦ διπλασίου αὐτοῦ τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ χωρισθέντος ψηφίου γεγραμμένον ἀριθμὸν. Τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μείζον τοῦ τρίτου ψηφίου τῆς ρίζης. Δυναμιζόμενοι αὐτὸ γράφοντες τοῦτο πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τῶν δύο πρώτων ψηφίων τῆς ρίζης, πολλαπλασιάζοντες τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν ἐπ' αὐτὸ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον, καὶ παραβάλλοντες τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον πρὸς τὸν ἀριθμὸν, τὸν σχηματισθέντα ἐκ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὁποίου ἐγράψαμεν τὸ τρίτον διψήφιον τμήμα. Ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦτο ἀγαθῇται ἀπ' αὐτοῦ, γράφομεν τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον ὡς τρίτον ψηφίον τῆς ρίζης, εἰ δὲ μὴ, δοκιμάζομεν τότε διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον ἀριθμὸν.

Ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις οὗ καταβιδάσωμεν ὅλα τὰ διψήφια τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ τμήματα. Τὸ τελευταῖον εὐρεθὲν ὑπολοιπὸν θέλει εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος συνάγεται ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ τίνος σύγκειται ἐκ τῶσων ψηφίων, εἰς ὅσας τμήματα ἀποσυντίθεται οὗτος. Ἐπομένως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἀριθμῶν, τῶν ἐχόντων 1 ἢ 2, 3 ἢ 4, 5 ἢ 6, 7 ἢ 8, ..., 2r—1 ἢ 2r ψηφία, θέλει ἔχει 1, 2, 3, 4, ..., r ψηφία.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2.—Ἐνίοτε αἱ δεκάδες ὑπολοίπου τινός, ἢ μερικῶς τινος οὕτως εἰπεῖν διακρετέου, διακρούμεναι διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐρεθέντων ψηφίων τῆς ρίζης, δίδουσι πηλίκον 0. Ἐν τῇ τοιαύτῃ περιπτώσει τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ρίζης εἶναι 0. Γράφομεν λοιπὸν 0 εἰς τὴν ρίζαν, καὶ καταβιδάζομεν καὶ τὸ ἀκολουθὸν τμήμα πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ προηγούμενου ὑπολοίπου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 3.—Δυνατὸν νὰ συμβῇ τὸ πηλίκον τῆς διακρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων ὑπολοίπου τινός διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐρεθέντων ψηφίων τῆς ρίζης νὰ ἦναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 9. Τότε, ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι ψηφίον τι ἀριθμοῦ τινος

δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίῃ τὸν 9, ἀρχόμεθα τῶν δοκιμῶν ἀπ' αὐ-
τοῦ τοῦ 9. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἶχομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν
τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 381, ἠθέλομεν, διαιροῦντες τῆς δεκάδας
28 τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 281 διὰ τοῦ διπλασίου 2 τοῦ εὐρεθέν-
τος ψηφίου 1 τῆς ρίζης, εὖρει πηλίκον 14, ὅπερ εἶναι ἀριθμὸς με-
γαλειότερος τοῦ 9. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἀρχόμεθα τῶν δοκιμῶν
ἀπ' αὐτοῦ τοῦ 9 καὶ εὐρίσκομεν ὅτι 9 εἶναι τὸ ζητούμενον ψηφίον.

179. Ἀπαντᾷ τὰ ψηφία τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀριθμὸς τινος,
ἐκτός τοῦ πρώτου ψηφίου αὐτῆς, εὐρίσκονται διὰ τινος διαιρέσεως,
ἥτις συνήθως δίδει ψηφία μεγαλειτέρα τῶν ἀληθῶν. Ἐλαττοῦντες
διαδοχικῶς κατὰ μονάδα τὸ δοκιμαζόμενον μεγαλειότερον τοῦ ἀλη-
θοῦς ψηφίον, θέλομεν βεβαίως εὖρει αὐτὸ τὸ ἀληθές. Ἀλλὰ συνήθως,
πρὸς συντομίαν, ἐλαττοῦμεν ἀμέσως αὐτὸ κατὰ πλειοτέρας μονάδας,
καὶ οὕτω δύνατον νὰ γράψωμεν ὡς ψηφίον τῆς ρίζης ἀριθμὸν μικρό-
τερον τοῦ ἀληθοῦς. Δυνάμεθα τότε εὐκόλως νὰ βεβαιωθῶμεν ἂν τοι-
ούτῳ τι συνέβη παραβάλλοντες τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως πρὸς τὸν
ὑπὸ τῶν ψηφίων τῆς ρίζης ἀποτελούμενον ἀριθμὸν. Ἐὰν τοῦτο ἦναι
μικρότερον τοῦ διπλασίου τῆς εὐρεθείσης ρίζης, ἡῤῥημένον κατὰ μο-
νάδα, τὰ ψηφία τῆς ρίζης εἶναι ἀκριβῆ. ἂν τοῦναντίον ἦναι μεγα-
λειότερον, τότε ἡ ζητούμενη ρίζα εἶναι μεγαλειτέρα τῆς εὐρεθείσης (171).

Τῷ ὄντι, γνωρίζομεν ὅτι ἡ διαφορά τῶν τετραγώνων δύο διαδο-
χικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴση μετὰ τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου, ἡῤῥημέ-
νον κατὰ μονάδα, καὶ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως περιστᾷ τὴν
διαφορὰν μεταξὺ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς
εὐρεθείσης ρίζης. Τώρα, ἂν ἡ διαφορά αὕτη εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ
διπλασίου τῆς ρίζης, ἡῤῥημένον κατὰ μονάδα, ἔπεται ὅτι καὶ τὸ
τετράγωνον τοῦ κατὰ μονάδα μεγαλειτέρου τῆς εὐρεθείσης ρίζης ἀ-
ριθμοῦ θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ δεδομένου, οὗ ζητεῖται ἡ ρίζα. ἐν
ἄλλαις λέξεσιν, ἡ εὐρεθείσα ρίζα δὲν εἶναι ἡ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου
τετραγώνου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ δεδομένῳ ἀριθμῷ.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εὕρομεν 563 διὰ τὴν
τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ περιε-
χομένου ἐν τινι δεδομένῳ ἀριθμῷ καὶ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως ἀριθ-
μὸν ἴσον ἢ μεγαλειότερον τοῦ ἀθροίσματος $2 \times 563 + 1$. Τότε ὁ δεδο-
μένος ἀριθμὸς ἔθελεν εἶναι ἴσος ἢ μεγαλειότερος τοῦ ἀθροίσματος
 $563^2 + 2 \times 563 + 1$,

ὅπερ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος $563 + 1$, ἥτοι τοῦ 564

Λοιπὸν τοῦλάχιστον 564 θέλει εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ρίζα καὶ ὅχι 563, ὡς ὑπέθετε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.—Ἐξάγοντες κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τὰς τετραγωνικὰς ρίζας τῶν ἀριθμῶν 650426, 3976254, καὶ δικτάσσοντες τὰ τῶν πράξεων κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, θελομέν εὑρεῖ τῶν ἀριθμῶν 806 καὶ 1994, ὑπολοιπα δὲ 790 καὶ 218.

$$\begin{array}{r|rr}
 65,04,26 & 806 & 3,9\ 7,62,54 \\
 1\ 0,426 & 16 & 1606\ 2\ 9,7 \\
 7\ 90 & 6 & 3\ 6\ 6,2 \\
 & & 1\ 6\ 15,4 \\
 & & 21\ 8
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rr}
 1994 & & \\
 29 & 389 & 3984 \\
 9 & 9 & 4
 \end{array}$$

Ἐπειδὴ ἐν τῷ πρώτῳ παραδείγματι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων 10 τοῦ 104 ἦτο μικρότερος τοῦ διπλασίου 16 τοῦ εὐρεθέντος ψηφίου 8 τῆς ρίζης, ἐγράψαμεν 0 εἰς τὴν ρίζαν καὶ κατεβιβάσαμεν ἀμέσως πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ 104 καὶ τὸ ἐπόμενον τμήμα 26. Ὡσπότε, εἰς τὸ δεῦτερον παράδειγμα, ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τῶν 29 δεκάδων τοῦ υπολοίπου 297 διὰ τοῦ διπλασίου 2 τοῦ ψηφίου 1 τῆς ρίζης ὑπερέβαινε τὸν 9, ἤρχισαμεν δοκιμάζοντες ἀμέσως τὸν 9.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΟΝΤΩΝ ΤΕΛΕΙΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΑΡΙΘΜΩΝ.

180. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἐὰν ὑψώσωμεν ἀνάγωγον κλάσμα εἰς τὸ τετράγωνον, τὸ εὐρεθησόμενον νέον κλάσμα θέλει εἶναι ἀνάγωγον.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ δεδομένου ἀναγώγου κλάσματος εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ, οἱ πρῶτοι παράγοντες αὐτοῦ θέλουσιν εἶναι διάφοροι τῶν πρῶτων παραγόντων τοῦ παρονομαστοῦ, ἐπομένως καὶ οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμητοῦ θέλουσιν εἶναι διάφοροι τῶν πρῶτων παραγόντων τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ· διότι κατὰ τὰ ἐν τῇ § 169 λεχθέντα τὰ τετράγωνα ταῦτα περιέχουσι τοὺς αὐτοὺς πρῶτους παράγοντας μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι οὗτοι ἔχουσι ἐκθέτας διπλασίους. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμητοῦ θέλει εἶναι ἐπίσης πρῶτον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ ἐπομένως τὸ νέον κλάσμα θέλει εἶναι ἀνάγωγον.

Ἐντεῦθεν ἐπεταὶ ὅτι

1^η. Ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἂν δὲν ᾖται τετράγωνοι ἑτέρου ἀκεραίου, δὲν δύναται νὰ ᾖται τετράγωνοι οὔτε κλασματικοῦ. Διότι τὸ τετράγωνον ὅποιουδήποτε κλάσματος, ὑπερ πάντοτε δυνάμεθα

νὰ ὑποθέσωμεν ἀνάγωγον, θέλει εἶναι καὶ αὐτὸ κλάσμα ἀνάγωγον.

2ον. *Κλάσμα τι ἀνάγωγον δὲν θύεται τὰ ἦναι τετράγωνον* ἑτέρου κλάσματος, εἴη οἱ ὅροι αὐτοῦ δὲν ἦναι ἀκέραια τετράγωνα. Διότι τὸ τετράγωνον τοῦ νέου κλάσματος, τοῦ παριστῶντος καθ' ὑπόθεσιν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου, ἢ θέλει εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον ἢ δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς κλάσμα ἀνάγωγον ἔχον ὅρους ἀκέραια τετράγωνα, ἐπειδὴ δὲ θέλει εἶναι ἴσον τῷ δεδομένῳ ἀνάγωγῳ, ἔπεται ὅτι οἱ ὅροι αὐτῶν πρέπει ἀναγκασίως νὰ ἦναι ἴσοι.

Τέλεια τετράγωνα καλοῦνται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὄντες τετράγωνοι ἄλλων ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν ἀριθμῶν. Παραδείγματός χάριν, ὁ 16, ὁ $\frac{4}{9}$, ὁ $\frac{49}{16}$ εἶναι τέλεια τετράγωνα, ὡς τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 4, $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{7}{4}$.

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τελείου τινὸς τετραγώνου εὐρίσκεται, εἴν τούτο ἦναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, διὰ τοῦ κανόνος τῆς § 178· εἴν δὲ κλασματικός, καθιστῶμεν πρῶτον αὐτὸν ἀνάγωγον, ἐξάγωμεν ἔπειτα τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν δύο ὁρῶν αὐτοῦ, οἵτινες κατὰ τὰ προλεχθέντα πρέπει νὰ ἦναι τέλεια τετράγωνα, διὰ τοῦ κανόνος τῆς § 178 καὶ διαιροῦντες τὴν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τῆς τοῦ παρονομαστοῦ, θέλομεν ἔχει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΤΩΝ ΜΗ ΤΕΛΕΙΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ.

181. Εἵπομεν προηγουμένως ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν μὴ ὄντων τέλεια τετράγωνα ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ παρστυθῇ οὔτε δι' ἀκεραίου οὔτε διὰ κλασματικοῦ· προτιθέμεθα δὲ ἐνταῦθα νὰ δώσωμεν τὸν ἀκριβῆ ὅρισμόν τῆς τετραγωνικῆς αὐτῶν ῥίζης.

Πρὸς τοῦτο ἄς λάβωμεν ἀκεραῖόν τινα ἀριθμὸν μὴ τέλειον τετράγωνον, τὸν 7 παραδείγματός χάριν. Λέγω ὅτι *δυναμένα τὰ εἶρωμεν δύο κλάσματα, ἔχοντα κοινὸν παρονομαστήν· δεδομένον τινὰ ἀριθμὸν r , ἀριθμητὰς δὲ δύο διαδοχικοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς μ καὶ $\mu+1$, μεταξὺ των ὁποίων τὰ περιέχεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 7.*

Τῷ ὄντι, εἴν πολλὰπλασιάζωμεν καὶ διαίρῃσωμεν τὸν 7 διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ν^2 , θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητά

$$7 = \frac{7 \times \nu^2}{\nu^2}.$$

Ἡ τετραγωνικὴ λοιπὸν ῥίζα τοῦ 7 θέλει εἶναι ἴση τῇ τετραγω-

νικῇ ρίζῃ τοῦ ἴσου αὐτῷ κλάσματος $\frac{7 \times v^2}{v^2}$. Ἀλλ' ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{7 \times v^2}{v^2}$ εὐρίσκεται, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ αὐτοῦ $7 \times v^2$ καὶ διαιρεθῇ αὕτη διὰ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης v τοῦ παρονομαστοῦ v^2 . Ἐπειδὴ τῶρα τὸ γινόμενον $7 \times v^2$ δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον (169, 2ον), ἡ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ θέλει περιέχεσθαι μεταξύ δύο διδοχικῶν ἀριθμῶν μ καὶ $\mu+1$, τοῦ μ παριστῶντος τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ γινόμενῳ $7 \times v^2$.

Λοιπὸν ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{7 \times v^2}{v^2}$, ἤτοι τοῦ 7, θέλει περιέχεσθαι μεταξύ τῶν δύο κλασματικῶν ἀριθμῶν

$$\frac{\mu}{v} \text{ καὶ } \frac{\mu+1}{v},$$

οἵτινες σχηματίζονται ὡς προείπομεν.

Τούτου δὲ ἀποδειχθέντος, ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι πολλαπλασιάζομεν καὶ διαιροῦμεν τὸν 7 διὰ τῶν τετραγώνων $v^2, v'^2, v''^2, v'''^2, \dots$ τῶν ἀριθμῶν $v, v', v'', v''', \dots$ οἵτινες καθ' ὑπόθεσιν βαίνουνσιν ἀεξανόμενοι. Ἐξάγοντες ὡς ἀνωτέρω τὰς τετραγωνικὰς ρίζας τῶν εὐρεθησομένων ἴσων τῷ 7 κλασμάτων

$$\frac{7 \times v^2}{v^2}, \quad \frac{7 \times v'^2}{v'^2}, \quad \frac{7 \times v''^2}{v''^2}, \quad \frac{7 \times v'''^2}{v'''^2}, \dots$$

θέλομεν εὐρεῖ τὰς ἐξῆς δύο σειρὰς

$$\frac{\mu}{v}, \quad \frac{\mu'}{v'}, \quad \frac{\mu''}{v''}, \quad \frac{\mu'''}{v'''}, \dots \quad (1)$$

$$\frac{\mu+1}{v}, \quad \frac{\mu'+1}{v'}, \quad \frac{\mu''+1}{v''}, \quad \frac{\mu''' + 1}{v'''}, \dots \quad (2)$$

μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν τῶν ὁποίων θέλει περιέχεσθαι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 7. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ τῆς πρώτης σειρᾶς (1) διαφέρουσι τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν τῆς (2) κατὰ τὰ κλάσματα $\frac{1}{v}, \frac{1}{v'}, \frac{1}{v''}, \frac{1}{v'''}, \dots$, ὧν οἱ παρονομαστικοὶ $v, v', v'', v''', \dots$ ὑπετέθησαν βαίνοντες ἀεξανόμενοι, ἐπεταὶ ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 7 θέλει διαφέρει τῶν ἀριθμῶν μιᾶς ὁποιασδήποτε τῶν σειρῶν (1) καὶ (2) ὀλιγώτερον ἢ τὰ κλάσματα $\frac{1}{v}, \frac{1}{v'}, \frac{1}{v''}, \frac{1}{v'''}, \dots$, ἅτινα καθ' ὑπόθεσιν βαίνουνσιν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐλαττούμενα. Ἡ πρώτη λοιπὸν σειρὰ (1) καὶ ἡ δευτέρα (2) θέλουσι βαίνειν προσεγγίζουσαι

ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον καὶ περιέχει πάντοτε μεταξὺ αὐτῶν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 7.

Τὸ ὅριον τῶρα, πρὸς ὃ ἐκατέρω τῶν ἀνωτέρω σειρῶν τείνει, εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 7.

182. Ὁ πό ὅριον τοῦτο παριστῶν ἀριθμὸς, ἐπειδὴ ὡς προείπομεν ἐν τῇ § 180 δὲν δύναται νὰ παρῇσθῇ οὔτε δι' ἀκεραίου οὔτε διὰ κλασματικοῦ, καλεῖται ἀσύμμετρος ἀριθμὸς. Λοιπὸν αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν μὴ τελείων τετραγώνων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι, οἵτινες ὡς προείπομεν εἶναι τὰ ὅρια, πρὸς ἃ τείνουσιν αἱ σειραὶ (1) καὶ (2), μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχονται πάντοτε αὗται. Ἐν ἑλλείψει λέξουσιν, ἐὰν θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν σειρῶν (1) καὶ (2) ὡς παριστῶντας μεγέθη, μήκη π. χ., τὰ μήκη ταῦτα, μετρούμενα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, θέλουσι εἶναι ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρὸς τι μῆκος, ὅπερ θέλει εἶναι κοινὸν ὅριον τούτων. Τὸ ὅριον τοῦτο εἶναι μῆκος μετρούμενον ἀκριδῶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt{7}$. Ὁ ἀριθμὸς δὲ $\sqrt{7}$ καλεῖται ἀσύμμετρος, διότι τὸ μῆκος, οὔτινος εἶναι μέτρον, δὲν εἶναι οὔτε πολλαπλάσιον τῆς μονάδος, οὔτε πολλοστοῦ τινος μέρους αὐτῆς, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν ἐπιτεθῇ τοῦτο.

ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΟΠΟΙΟΥΔΗΠΟΤΕ ΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ.

183. Εἶδομεν μέχρι τοῦδε πῶς ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ τινος ἀκεραίου κατὰ προσέγγισιν μονάδος, κατ' ἐλλείψιν ἢ κατ' ὑπεροχὴν. Ἄν εἶχομεν ἀντὶ ἀκεραίου κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, εἴη φανερόν, ὅτι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ θέλει εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικῇ ρίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ δεδομένῳ κλασματικῷ.

Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ἵνα ὁρίσωμέν πως τῆς ιδέας, ὅτι ὁ δεδομένος κλασματικὸς εἶναι ὁ $\frac{49}{4}$ ἢ ὁ ἴσος αὐτῷ ἀριθμὸς $60 + \frac{1}{4}$, εἶναι φανερόν, ὅτι οὗτος θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἀκεραίων τετραγώνων 49 καὶ 64, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται καὶ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 60, ὅστις θέλει διαιρέσει κατὰ μίαν τοὺς ἐλάχιστον μοῖρα τοῦ ἐνὸς τῶν δύο τετραγώνων 49 καὶ 64. Λοιπὸν, ἐπειδὴ ὁ $60 + \frac{1}{4}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἀκεραίων τετραγώνων, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ μέγιστος ἐν αὐτῷ περιεχόμενος ἀκέραιος 60, ἐπε-

ται ὅτι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα θελεῖ εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ 60, τοῦθ' ὡς ἐπρόκειτο γὰρ ἀποδείξωμεν.

184. Ἐστω τῶρα νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ὁποιοῦδήποτε ἀριθμοῦ καθ' οἷανδήποτε προσέγγισιν. Δυνάμεθα εὐκόλως διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου, δι' οὗ ἐπορίσθημεν τὸν ὁρισμὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν μὴ τελείων τετραγώνων ἀριθμῶν, νὰ περιλάβωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ μεταξὺ δύο κλάσμάτων, ὧν ἡ διαφορά νὰ ᾔηται ὅσῳ θέλωμεν μικρά. Παραδείγματος χάριν, ἂς λάβωμεν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 7. Εἰδομεν ἐν τῇ § 181 ὅτι ἐκ τοῦ ν παριστῶντος ὁποιοῦνδήποτε ἀκέραιον, παρὰστῆσωμεν διὰ μὴ τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου $7 \times n^2$, ἥτοι τὴν τιμὴν $\sqrt{7 \times n^2}$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τὰ κλάσματα $\frac{n}{\sqrt{7}}$ καὶ $\frac{n+1}{\sqrt{7}}$ θέλουσι περιέχει μετὰξὺ αὐτῶν τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμὸν $\sqrt{7}$, ἐπομένως παριστῶσι τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 7 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\sqrt{7}}$, ὡς διαφέροντα ἀλλήλων κατὰ $\frac{1}{\sqrt{7}}$. Λοιπὸν,

Πρὸς ἐξαγωγήν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκέραιον τιτὸς ἡ κλάσματικὸν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\sqrt{7}}$, ἀρκεῖ νὰ ἐξαγάγωμεν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ἐπὶ n^2 καὶ νὰ διαιρέσωμεν ταύτην διὰ n .

Παραδείγματος χάριν, νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 7 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$, πολλαπλασιάζομεν τὸν 7 ἐπὶ 12^2 , ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν 21 τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου 7×12^2 , ἡ τοῦ 1008, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ διαιρούμεν ταύτην διὰ 12. Τὰ κλάσματα λοιπὸν $\frac{31}{12}$ καὶ $\frac{32}{12}$ θέλουσι παρὰστῆ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 7 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$, τὸ μὲν πρῶτον τὴν κατ' ἑλλειψιν, τὸ δὲ δευτέρον τὴν κατ' ὑπερβολὴν.

Ἄν εἴχομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ κλάσματος $\frac{23}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$, ἡθέλωμεν πολλαπλασιάσαι τὸ κλάσμα $\frac{23}{7}$ ἐπὶ 12^2 , ἐξαγάγει τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου $\frac{22 \times 12^2}{7}$, ἡ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου 452 τοῦ περιεχομένου ἐν αὐτῷ, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν 21 κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ ταύτην διαιρέσει διὰ 12. Ἡθέλωμεν οὕτως εὑρεῖ τὰ κλάσματα $\frac{31}{12}$ καὶ $\frac{32}{12}$, ἅτινα παρὰστῶ

τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{22}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$, τὸ μὲν πρῶτον τὴν κατ' ἑλλειψιν, τὸ δὲ δεύτερον τὴν καθ' ὑπεροχὴν.

185. Ὁ προηγούμενος κανὼν καθίσταται ἀπλούστερος, ὅταν πρόκηται νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κλάσματός τινος, οὔτινος ὁ παρονομαστής εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ παρονομαστῇ τοῦ παριστῶντος τὴν ζητούμενην προσέγγισιν κλάσματος. "Αν εἴχομεν π. χ. νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{47}{11}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{11}$, ἡ-θέλομεν πολλαπλασιάσει κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα $\frac{47}{11}$ ἐπὶ 11^2 , τοῦ εὐρεθησομένου γινομένου $\frac{17 \times 11^2}{41}$, ἢ τοῦ 17×11 , ἐξαγάγει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν 13 κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ ταύτην, ἡ τὴν κατὰ μονάδα μεγαλειτέραν αὐτῆς 14, διακίρρει διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δεδομένου κλάσματος 11.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι

Πρὸς ἐξαγωγήν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης κλασματικοῦ τινος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν πολλαστοῦ τινος τῆς μονάδος, ἔχοντος παρονομαστὴν τὸν τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ, πολλαπλασιάζομεν ἐπ' ἀλλήλους τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ, ἐξάγομεν τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ εὐρεθησομένου γινομένου καὶ ταύτην διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐάν συμβῇ τὸ κλάσμα, ἐφ' οὗ ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα, νὰ ᾖναι τέλειον τετράγωνον, θέλομεν οὕτως εὑρεῖ ἀκριβῶς τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν. Λοιπὸν,

"Ἴνα ἡ κλάσμα τι τέλειον τετράγωνον, πρέπει καὶ ἄρκει τὸ γινόμενον τῶν δύο ὁρῶν αὐτοῦ νὰ ᾖναι τέλειον τετράγωνον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.—Ἐφαρμόζοντες καταλλήλως τοὺς ἀνωτέρω εὐ-ρέντας κανόνας θέλομεν εὑρεῖ τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ἀριθμῶν

$$213, \frac{456}{12}, \frac{123}{9}, \frac{23}{15},$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{9}$ ἢ $\frac{1}{15}$, ζητοῦντες τὰς κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ἀκεραίων

$$10437, 1045, 669, 75,$$

τῶν

$$47952, 4800, 3075, 347,$$

καὶ διαιροῦντες τὰς μὲν πρῶτας διὰ 7, τὰς δὲ δευτέρας διὰ 15.

186. Πολλάκις, ὅταν ἐξάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος, εἶναι ἀναγκασίον νὰ ἔχωμεν τὴν τιμὴν αὐτῆς διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ παριστωμένην· τότε τὸ κλάσμα, ὅπερ παριστᾷ τὸν βαθμὸν, οὕτως εἰπεῖν, τῆς ζητουμένης προσεγγίσεως, εἶναι δεκαδικόν τι πολ-
λοστόν τῆς μονάδος. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει καὶ ὁ προηγούμενος γενικὸς κανὼν τῆς § 184 δύναται νὰ ἐκφωνηθῇ ἀπλούστερον καὶ οἱ πρὸς εὐρεσιν αὐτῆς ἀναγκαῖοι ὑπολογισμοὶ ἐκτελοῦνται συντομώτερον.

Ἄς υποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι πρόκειται περὶ ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ. Ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος κανὼν δύναται τότε νὰ ἐκφωνηθῇ ὡς ἑξῆς:

Πρὸς ἐξαγωγήν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου τινὸς κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, ἢ $\frac{1}{100}$, ἢ $\frac{1}{1000}$, ἢ κτλ. γράφομεν δύο, ἢ τέσσαρα, ἢ ἑξ, ἢ κτλ. μηδενικά· πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ, ἐξάγομεν κατὰ προσέγγισιν μονάδας τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ οὕτως ἀποτελεσθη-
σομένου ἀριθμοῦ, καὶ γωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιά αὐτῆς ἑν, ἢ δύο, ἢ τρεῖς, ἢ κτλ., ψηφία ὡς δεκαδικά.

Διότι γνωρίζομεν ὅτι δεδομένος ἀκεραῖος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10^2 , ἢ ἐπὶ 100^2 , ἢ ἐπὶ 1000^2 , ἢ κτλ., ἐν γὰρ πρώτῃ 2, ἢ 4, ἢ 6, ἢ κτλ. μηδενικά· πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ, διακρίνεται δὲ διὰ 10, ἢ 100, ἢ 1000 ἢ κτλ., ἐν γὰρ χωρισθῶσι πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ, 1, ἢ 2, ἢ 3, ἢ κτλ. ψηφία ὡς δεκαδικά.

Ὅταν ἐφαρμόζωμεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα, ἀντὶ νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ τὸν κατ'ἀλλήλην ἀριθμὸν μηδενικῶν καὶ ἐξαγάγωμεν τοῦ οὕτως ἀποτελεσθησομένου ἀριθμοῦ τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδας τετραγωνικὴν ῥίζαν κτλ., ἐξάγομεν πρῶτον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδας αὐτοῦ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, μετὰ ταῦτα γράφομεν δύο μηδενικά· πρὸς τὰ δεξιά τοῦ τελευταίου ὑπολοίπου, ὑποδιαστολὴν μετὰ τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς εὐρεθείσης ῥίζης, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν προσθέ-
τοντες πάλιν δύο μηδενικά· πρὸς τὰ δεξιά ἐκάστου ὑπολοίπου, μέχρις οὗ ὁ ἀριθμὸς τῶν γραφέντων εἰς τὴν ῥίζαν δεκαδικῶν ψηφίων καταστῇ ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν μηδενικῶν, ὅρ' ὧν ἀκολου-
θεῖται ἡ μονάς τοῦ παρονομαστοῦ, τοῦ παριστῶντος τὴν ζητουμέ-
νην προσέγγισιν δεκαδικοῦ κλάσματος.

"Ας υποθέσωμεν π. χ. ὅτι ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 7 κατὰ προσέγγισιν δεκαδικοῦ τινος πολλοστοῦ τῆς μονάδος. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

7	2,6457 ...				
300	46	524	5285	52907	...
2400	6	4	5	7	
30400					
397500					
27151					

Ἀροῦ εὐρομεν τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴν ρίζαν 2 τοῦ δεδομένου ἀκεραίου 7 καὶ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως 3, ἐγράψαμεν δύο μηδενικά πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ, καὶ ὑποδιαστολὴν μετὰ τὸ ψηφίον 2 τῆς εὐρεθείσης ρίζης, καὶ ἐξηκολουθήσαμεν τὴν πρᾶξιν γράζοντες πρὸς μὲν τὰ δεξιά τῶν ἀκολουθίων ὑπολοίπων 24, 304, 3975, ... δύο μηδενικά, τὰ δὲ εὐρισκόμενα ψηφία τῆς ρίζης πρὸς τὰ δεξιά τῶν ἤδη εὐρεθέντων.

Πρακτικητέον πρὸς τούτοις ὅτι ἡ πρᾶξις εἶναι ἀτελεῦτητος, ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τῆς ρίζης δὲν δύναται νὰ ᾔηται περιοδικόν· ὥστε τότε ἡ τετραγωνικὴ ρίζα θὰ ἠδύνατο νὰ ἐκφρασθῇ διὰ κοινοῦ κλάσματος (165), ὑπερ ἄτοπον· διότι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 7 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, καὶ γνωρίζομεν ὅτι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅσος δὲν εἶναι τετράγωνον ἑτέρου ἀκεραίου, δὲν δύναται νὰ ᾔηται κλασματικοῦ.

187. Ἐστω τώρα νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ $\frac{22}{7}$ π. χ., κατὰ προσέγγισιν δεκαδικοῦ τινος πολλοστοῦ τῆς μονάδος, κατὰ προσέγγισιν 0,001 παραδείγματος χάριν. Κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 186 πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον τὸ κλάσμα $\frac{22}{7}$ ἐπὶ 1000000, νὰ ἐξαγάγωμεν ἔπειτα τὸν τῷ γινομένῳ $\frac{22 \times 1000000}{7}$ περιεχόμενον ἀκέραιον ἀριθμόν, νὰ εὐρίσκωμεν ἀκολουθῶς τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴν ρίζαν τούτου, καὶ ταύτην νὰ διαιρέσωμεν διὰ 1000. Ἀλλὰ πρὸς εὐ-
 ρίσκωσιν τοῦ ἐν τῷ γινομένῳ $\frac{22 \times 1000000}{7}$ περιεχομένου ἀκεραίου, ἀρκεῖ

προφανώς νὰ τρέψωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{2}{7}$ εἰς δεκαδικόν, περιέ-
χον ἐξ δεκαδικῶν ψηφία, καὶ νὰ ἐξαλείψωμεν μετὰ ταῦτα τὴν ὑπερ-
διαστολήν. Λοιπὸν ὁ κανὼν τῆς § 186 ἐν τῇ παρούσῃ περιπτώσει
δύναται νὰ ἀπκρυφθῇ ἀπλούστερον ὡς ἑξῆς.

Πρὸς ἐξαγωγήν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης κλασματικοῦ τινοῦ ἀ-
ριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μοιᾶδος τινοῦ δεδομένης δεκαδικῆς τῆ-
ξεως, τρέπομεν τὸν δεδομένον κλασματικὸν εἰς δεκαδικὸν ἀριθ-
μὸν διπλασίου ἀριθμοῦ δεκαδικῶν ψηφίων, ἐξαλείφομεν ἔπειτα τὴν
ὑποδιαστολήν, ἐξάγομεν ἀκολουθῶς κατὰ προσέγγισιν μοιᾶδος
τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ οὕτως ἀποτελεσθисομένου ἀκεραίου
καὶ γωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ ταύτης τόσα ψηφία ὡς δεκαδικὰ, ὅσα
ἀπαιτοῦνται, ἵνα τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον αὐτῆς παρ-
στῇ μοιᾶδας τῆς δεκαδικῆς τάξεως τῆς ζητουμένης προσεγγίσεως.

Οὕτως, ἐν τῷ περὶ οὗ ἀνωτέρω ὁ λόγος παραδείγματι εὐρίσκουμεν
 $\frac{2}{7} = 3,142857$ καὶ ἡ μὲν τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μοι-
ᾶδος τοῦ ἀκεραίου 3142857 εἶναι 1772, ἡ δὲ τετραγωνικὴ ρίζα
τοῦ $\frac{2}{7}$ κατὰ προσέγγισιν 0,001 θέλει εἶναι 1,772.

II πρᾶξις συνήθως διατάσσεται ὡς ἑξῆς,

22	7	3,142857	1,772		
10	3,142857	2 14	27	347	3542
30		2528	7	7	2
20		9957			
60		2873			
40					
50					
1					

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Δυνάτὸν νὰ συμβῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς, εἰς
τρέπομεν τὸν δεδομένον κλασματικόν, νὰ μὴ περιέχῃ δις τόσα δε-
καδικὰ ψηφία, ὅσα πρέπει κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα νὰ ἔχῃ ἡ κατὰ
προσέγγισιν ζητουμένη τετραγωνικὴ ρίζα. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ
ἀναπληροῦμεν τὰ ἐλλείποντα διὰ μηδενικῶν. Παραδείγματός χεῖρ
ἂν εἶχομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 2,718 κατὰ
προσέγγισιν 0,001, ἡθέλομεν ἐφαρμόσει τὸν ἀνωτέρω κανόνα
τοῦ ἀριθμοῦ 2,718000, ὅστις ἔχει ἐξ δεκαδικῶν ψηφίων, τουτέστι

λίσια τῶν τριῶν, ἔτινα ζητοῦνται διὰ τὴν κατὰ προσέγγισιν
0,001 τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν, καὶ εὖρει

$$\begin{array}{r|l} 2,718 & 1,648 \\ 171 & \hline 1580 & 26 \quad 324 \quad 3288 \\ & 6 \quad 4 \quad 8 \\ & 28400 \\ & 2096 \end{array}$$

,648 διὰ τὴν ζητούμενην κατὰ προσέγγισιν 0,001 ῥίζαν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.—Ἄν ᾔθελομεν νὰ εὕρωμεν τῆς τετραγωνικῆς
ρίζας τῶν ἀριθμῶν

$$37,23, \quad 0,0026, \quad 0,0000000027$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, ἢ $\frac{1}{100}$, ἢ $\frac{1}{1000}$, ἔπρεπε κατὰ τοὺς ἀνωτέρω
δοθέντας κανόνους νὰ ἐξαγάγωμεν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τῆς τε-
τραγωνικῆς ῥίζας τῶν ἀριθμῶν

$$3723, \quad 0,26, \quad 0,00000027,$$

τῶν ἀριθμῶν

$$372300, \quad 26, \quad 0,000027,$$

τῶν ἀριθμῶν

$$37230000, \quad 2600, \quad 0,0027,$$

καὶ ταύτας νὰ διαιρέσωμεν διὰ 10, ἢ 100, ἢ 1000. Ἦθελομεν δὲ
εὖρει διὰ μὲν τὰς κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, κατ' ἑλλειψιν ἢ καθ' ὑπερ-
οχλήν,

$$6,1 \text{ ἢ } 6,2 \quad 0 \text{ ἢ } 0,1, \quad 0 \text{ ἢ } 0,1,$$

διὰ δὲ τὰς κατὰ προσέγγισιν 0,01 κατ' ἑλλειψιν ἢ καθ' ὑπεροχλήν

$$6,10 \text{ ἢ } 6,11, \quad 0,05 \text{ ἢ } 0,06, \quad 0 \text{ ἢ } 0,01,$$

καὶ διὰ τὰς κατὰ προσέγγισιν 0,001 κατ' ἑλλειψιν ἢ καθ' ὑπεροχλήν,

$$6,101 \text{ ἢ } 6,102 \quad 0,050 \text{ ἢ } 0,051, \quad 0 \text{ ἢ } 0,001.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Ποῖαι εἰναι αἱ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικαὶ ῥίζαι
τῶν ἀριθμῶν 12345, 4893297, 25678932 ;

II. Νὰ εὕρεθῶσιν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀριθμῶν 19, $\frac{27}{5}$,
 $\frac{1}{11}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$.

III. Νὰ εὐρεθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀθροίσματος $5 + \frac{3}{8} + \frac{2}{7} + \frac{4}{9}$.

IV. Ποία ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῆς διαφορᾶς $\frac{2}{7} - \frac{3}{11}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{111}$;

V. Νὰ εὐρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ γινομένου $(5 + \frac{2}{3}) \times 17$ κατὰ προσέγγισιν 0,001.

VI. Νὰ εὐρεθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πηλίκου $(2 + \frac{3}{7}) : (5 + \frac{2}{11})$.

VII. Νὰ εὐρεθῶσιν αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ἀριθμῶν 0,003, 0,056, 3,0025 κατὰ προσέγγισιν 0,00001.

VIII. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 5 ὄρ. 0 πῶδ. 3 δάκ. κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{13}$ τῆς γραμμῆς.

IX. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν 5 ἡμ. 2 ὥρ. 0 λ. π. 8 λ. δ. κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{5}$ τοῦ 1 λ. π.

X. Νὰ εὐρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν $38^{\circ} 2' 37''$ κατὰ προσέγγισιν 0,01 τῆς μοίρας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ'.

ΚΥΒΙΚΗ ΡΙΖΑ.

ΠΕΡΙ ΚΥΒΟΥ ΚΑΙ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ.

188. Κύβος καλεῖται ἡ τρίτη δύναμις ἀριθμοῦ τινος, ἢ τὸ γινόμενον τριῶν ἴσων αὐτῷ παραγόντων (38). Π. γ. ὁ κύβος τοῦ 5 εἶναι τὸ γινόμενον $5 \times 5 \times 5$ ἢ ὁ 125· ὁ κύβος τοῦ κλάσματος $\frac{3}{7}$ εἶναι τὸ γινόμενον $\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}$, ἢ τὸ κλάσμα $\frac{27}{343}$. Λοιπὸν

Πρὸς σχηματισμὸν τοῦ κύβου κλάσματός τινος πρέπει νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὸν κύβον καὶ τοὺς δύο αὐτοῦ ὅρους.

Ὁ κύβος ἀριθμοῦ τινος παρίσταται γραφομένου τοῦ ἐκθέτου 3 πρὸς τὰ δεξιά καὶ ὀλίγον ἀνωθεν αὐτοῦ. Οὕτω 5³ καὶ $\left(\frac{3}{7}\right)^3$ παρίστωσι τοὺς κύβους τοῦ 5 καὶ $\frac{3}{7}$.

Κυβικὴ ρίζα ἀριθμοῦ τινος καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὸν κύβον παράγει τὸν δεδομένον. Οὕτω, τοῦ κύβου τοῦ 5 ὄντος 125, ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 125 θέλει εἶναι 5. Ὡσαύτως, ἐπεὶ δὴ τὸ κλάσμα $\frac{27}{343}$ εἶναι ὁ κύβος τοῦ $\frac{3}{7}$, τὸ $\frac{3}{7}$ εἶναι ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ρίζα.

Πρὸς παράστασιν τῆς κυβικῆς ρίζης ἀριθμοῦ τινος γράφομεν αὐτὸν ὑπὸ τὸ ριζικὸν καὶ εἰς τὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας αὐτοῦ τὸν ἀριθμὸν 3, ὅστις καλεῖται δείκτης τῆς ρίζης. Οὕτως αἱ παραστάσεις $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{\frac{27}{343}}$ παρίστωσιν ἀμοιβαίως τὰς κυβικὰς ρίζας τοῦ 125 καὶ $\frac{27}{343}$.

Ἡ πρῆξις, δι' ἧς εὐρίσκομεν τὴν κυβικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ τινος καλεῖται ἐξαγωγή τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ρίζης.

189. Πρὸς σχηματισμὸν τοῦ κύβου γινόμενου τινὸς πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐφ' ἑαυτὸ τρίς, ἢ ὑπερ ταῦτό, νὰ τριπλασιάσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων αὐτοῦ. Οὕτως, ὁ κύβος τοῦ γινόμενου $2 \times 3 \times 5$ εἶναι τὸ γινόμενον

$$(2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 3 \times 5),$$

$\bar{\eta}$, τὸ ἴσον αὐτῷ $2^3 \times 3^3 \times 5^3$. ὁ τοῦ γινομένου $2^2 + 5^3 \times 7$ κύβος θέλει εἶναι τὸ γινόμενον $2^6 \times 5^9 \times 7^3$, καὶ βλέπομεν ὅτι σχηματίζονται ἐκ τῶν γινομένων $2 \times 3 \times 5$, $2^2 \times 5^3 \times 7$ τριπλασιαζομένων τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων 2, 3, 5 καὶ 2, 5, 7 αὐτῶν.

Ἐντεῦθεν ἐπεται ὅτι, ἐὰν οἱ παράγοντες γινομένου τινός ᾖναι ἀριθμοὶ πρῶτοι, ὁ κύβος αὐτοῦ θέλει περιέχει τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας καὶ οὐδένα ἄλλον· ἐπομένως, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ A καὶ B ᾖναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ οἱ κύβοι αὐτῶν A^3 καὶ B^3 θέλουσιν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐπειδὴ οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ A εἶναι διάφοροι τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ B, οἱ κύβοι αὐτῶν A^3 καὶ B^3 , ὡς περιέχοντες τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας, θέλουσι σύγκεισθαι ἐκ πρώτων παραγόντων διαφόρων.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ.

190. Ἐστω νὰ ὑψωθῇ τὸ ἄθροισμα $7+5$ εἰς τὸν κύβον. Πρέπει πρὸς τοῦτο νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $(7+5) \times (7+5) \times (7+5)$. ᾗτοι νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ $7+5$ ἐπὶ $7+5$. Ἐνωρίζομεν τώρα ἐκ τῶν προηγουμένων ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ $7+5$ εἶναι

$$7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2,$$

τὸ δὲ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ $7+5$ θέλει εὐρεθῇ, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ πρῶτον ἐπὶ 7, ἔπειτα ἐπὶ 5, καὶ προστεθῶσι τὰ δύο εὐρεθισόμενα μερικὰ γινόμενα. Τὸ μὲν γινόμενον τοῦ τετραγώνου $7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2$ ἐπὶ 7 εἶναι

$$7^3 + 2 \times 7^2 \times 5 + 5^2 \times 7,$$

τὸ δὲ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 5 εἶναι

$$7^2 \times 5 + 2 \times 7 \times 5^2 + 5^3,$$

ἐπομένως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θέλει εἶναι

$$7^3 + 2 \times 7^2 \times 5 + 5^2 \times 7 + 7^2 \times 5 + 2 \times 7 \times 5^2 + 5^3,$$

ἢ, ἐπειδὴ $2 \times 7^2 \times 5 + 7^2 \times 5 = 3 \times 7^2 \times 5$ καὶ $5^2 \times 7 + 2 \times 7 \times 5^2 = 3 \times 7 \times 5^2$,

$$7^3 + 3 \times 7^2 \times 5 + 3 \times 7 \times 5^2 + 5^3.$$

Λοιπὸν θέλομεν ἔχει

$$(7+5)^3 = 7^3 + 3 \times 7^2 \times 5 + 3 \times 7 \times 5^2 + 5^3,$$

τουτέστιν, ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος $7+5$ δύο ἀριθμῶν 7 καὶ 5

γίνεται ἐκ τοῦ κύβου 7^3 τοῦ πρώτου 7, ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου καὶ ἐκ τοῦ κύβου 5^3 τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ 5.

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητά (1) θέσωμεν a ἀντὶ τοῦ 7 καὶ b ἀντὶ τοῦ 5, αὕτη γίνεται

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times b + 3 \times a \times b^2 + b^3. \quad (2)$$

Ἐὰν τῶρα ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ a παριστᾷ τὰς δεκάδας ἀριθμοῦ ἑνὸς καὶ τὸ b τὰς μονάδας αὐτοῦ, ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (2) δεικνύει ὅτι,

Ὁ κύβος ἀριθμοῦ τινος, συγκειμένου ἐκ δεκάδων a καὶ μονάδων b , συγκείται ἐκ τοῦ κύβου a^3 τῶν δεκάδων αὐτοῦ a , ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας $3 \times a^2 \times b$, ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων $3 \times a \times b^2$, καὶ ἐκ τοῦ κύβου b^3 τῶν μονάδων αὐτοῦ b .

ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

191. Ἐὰν γράψωμεν κατὰ σειρὰν τοὺς δέκα ἀρχικοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, καὶ ὑπ' αὐτοὺς τοὺς κύβους αὐτῶν

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, οἱ ἀριθμοὶ τῆς πρώτης σειρᾶς θέλουσιν εἶναι κατὰ τὰ προλεχθέντα καὶ κυβικαὶ ρίζαι τῶν ἀντιστοιχῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας. Οὕτω τοῦ 125 ἡ κυβικὴ ρίζα εἶναι ὁ ἀντίστοιχος αὐτοῦ 5· τοῦ 512 εἶναι ὁ ἀντίστοιχος αὐτοῦ 8, κτλ.

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 1, 8, 216 κτλ., οἱ ὄντες κύβου ἄλλων ἀκεραίων, καλοῦνται τέλειοι κύβοι ἢ μερικώτερον ἀκέραιοι κύβοι· βλέπομεν δὲ ὅτι πάντες οἱ μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 1000 περιεχόμενοι ἀκέραιοι δὲν εἶναι ἀκέραιοι κύβοι. Π. γ. ὁ 352, ὁ μεταξὺ τοῦ 343 καὶ 512 περιεχόμενος δὲν εἶναι ἀκέραιος κύβος· διότι ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ρίζα εἶναι μικροτέρα τῆς κυβικῆς ρίζης 8 τοῦ 512 καὶ μεγαλειτέρα τῆς κυβικῆς ρίζης 7 τοῦ 343, καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 7 διαφέρουσι κατὰ μονάδα, ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 352 θέλει διαφέρει τοῦ 7 ἢ 8 ὀλιγώτερον μιᾶς μονάδας, ἐπομένως δὲν δύναται νὰ ᾔηται ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐὰν λάβωμεν ἀντὶ τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ 352 τὴν κυβικὴν ρίζαν 7 τοῦ 343, ὅστις εἶναι ὁ μεγαλειτέρος ἀκέραιος κύβος, ὁ ἐμπεριεχόμενος

νος ἐν αὐτῷ, ὁ 7 καλεῖται κυβικὴ ρίζα τοῦ 352 κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ἀν ἐλαμβάνομεν καὶ τὴν κυβικὴν ρίζαν 8 τοῦ 512, ἠθέλομεν ἐπίσης ἔχει τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ 352 κατὰ προσέγγισιν μονάδος. Πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἡ μὲν πρώτη καλεῖται κυβικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος κατ' ἑλλειψιν, ἡ δὲ δευτέρα κατ' ὑπερεξήγησιν. Συνήθως, λέγοντες ἀπλῶς κυβικὴ ρίζα ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἐννοοῦμεν τὴν κατ' ἑλλειψιν μονάδος κυβικὴν αὐτοῦ ρίζαν. Καὶ ἐν γένει.

Κυβικὴ ρίζα ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν μονάδος καλεῖται ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κῆθου, τοῦ ἐμπεριεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ.

Ἐπειδὴ ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 1000 εἶναι 10, ἐπεταὶ ὅτι ἡ κυβικὴ ρίζα παντὸς ἀριθμοῦ μεγαλύτερου τοῦ 1000 θέλει εἶναι μεγαλύτερα τοῦ 10· ἐν ἄλλαις λέξεσι, θέλει σύγκεισθαι ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων. Πρὸς εὐρεσιν λοιπὸν ταύτης πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων αὐτῆς.

192. Ἐστω τῶρα ἀκέραιός τις ἀριθμὸς A , οὗτινος ζητεῖται ἡ κυβικὴ ρίζα, ἐὰν ἦναι ἀκέραιος κύβος, ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἐὰν δὲν ἦναι τέλειος κύβος.

Ἐὰν ὁ A ἦναι μακρότερος τοῦ 1000, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ρίζα θέλει εἶναι μικροτέρα τοῦ 10, ἐπομένως παραβάλλοντες τὸν ἀριθμὸν A πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς δευτέρας τῶν ἀνωτέρω σειρῶν, θέλομεν εὐκόλως προσδιορίσει ταύτην ἀκριβῶς, ἐὰν ὁ A ἦναι εἰς ἐκ τῶν ἐν τῇ δευτέρᾳ σειρᾷ περιεχομένων, ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅταν περιέχῃται μεταξὺ δύο ἐκ τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σειρᾷ γεγραμμένων.

193. Ὅταν ὁ A ἦναι μεγαλύτερος τοῦ 1000, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ρίζα, ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, θέλει εἶναι μεγαλύτερα τοῦ 10, καὶ θέλει σύγκεισθαι ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων. Τῆς δεκάδας ταύτης εὐρίσκομεν διὰ τοῦ ἐξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς ρίζης ἀριθμοῦ τοῦ A μεγαλύτερου τοῦ 1000 ἰσοῦται τῇ κυβικῇ ρίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κῆθου, τοῦ ἐμπεριεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ τῶν δεκάδων αὐτοῦ.

Τῷ ὄντι, ἔστω n ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων καὶ m ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῆς ζητούμενης κυβικῆς ρίζης τοῦ A . Ἐπειδὴ 1 δεκάς εἶναι πάντοτε μεγαλύτερα τῶν m μονάδων, ἐπεταὶ ὅτι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ

Α θέλει περιέχεσθαι μεταξύ δ καὶ $\delta+1$ δεκάδων, ἤτοι μεταξύ τῶν ἀριθμῶν

$$\delta \times 10 \text{ καὶ } (\delta+1) \times 10.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ Α περιέχεται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\delta \times 10$ καὶ $(\delta+1) \times 10$, ἔπεται ὅτι ὁ Α θέλει περιέχεσθαι μεταξύ τῶν κύβων αὐτῶν

$$\delta^3 \times 1000 \text{ καὶ } (\delta+1)^3 \times 1000.$$

Ἐπειδὴ τὸ δ^3 καὶ $(\delta+1)^3$ πολλαπλασιάζονται ἐπὶ 1000, ἔπεται ὅτι παριστῶσι χιλιάδας, καὶ ἔπειδὴ τὸ Α περιέχεται μεταξύ τοῦ $\delta^3 \times 1000$ καὶ $(\delta+1)^3 \times 1000$, ἔπεται ὅτι αἱ χιλιάδες τοῦ Α θέλουσι περιέχεσθαι μεταξύ τῶν ἀριθμῶν δ^3 καὶ $(\delta+1)^3$ ἐν ἄλλαις λέξεσι, δ^3 θέλει εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκεραῖος κύβος, ὁ περιεχόμενος ἐν τῷ ἀριθμῷ τῶν χιλιάδων τοῦ Α, ἐπομένως δ , τουτέστιν ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ρίζης, θέλει εἶναι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου δ^3 , τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ τῶν χιλιάδων τοῦ Α, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

194. Μᾶλλον μένει τώρα νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ Α. Αὗται εὐρίσκονται διὰ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν ἀπὸ τινος ἀριθμοῦ Α ἀφαιρεθῇ ὁ κύβος τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ρίζης καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑκατοτηδάδων τοῦ ὑπολοίπου διαιρεθῇ διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων αὐτῆς, τὸ εὑρεθὲν σόμενον πηλίκον θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μείζον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ρίζης.

Τῷ ὄντι, ἔστω δ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ Α καὶ μ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων αὐτῆς. Τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ Α θέλει εἶναι $\delta \times 10 + \mu$, ἐπομένως ὁ Α θέλει εἶναι ἀριθμὸς ἢ ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ κύβου τοῦ $\delta \times 10 + \mu$, ἤτοι τοῦ

$$\delta^3 \times 1000 + 3 \times \delta^2 \times \mu \times 100 + 3 \times \delta \times \mu^2 \times 10 + \mu^3,$$

κατὰ τὰ ἐν τῇ § 190 λεχθέντα.

Τώρα, ἐὰν ἀπὸ τοῦ Α ἀφαιρεθῇ $\delta^3 \times 1000$, ἤτοι ὁ κύβος τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ρίζης, ἡ διαφορὰ $A - \delta^3 \times 1000$ θέλει εἶναι ἢ ἴση ἢ μεγαλύτερα τοῦ ἀθροίσματος

$$3 \times \delta^2 \times \mu \times 100 + 3 \times \delta \times \mu^2 \times 10 + \mu^3.$$

Ἐν τῷ ἀθροίσματι τούτῳ τὸ γινόμενον $3 \times \delta^2 \times \mu$, ἔπειδὴ πολ-

λαπλασιάζεται ἐπὶ 100, παριστᾷ ἑκατοντάδας, ἀρ' ἑτέρου τὰ γινόμενα $3 \times d \times y^2 \times 10$ καὶ μ^3 δυνατόν νά παρὰσχωσιν ἑκατοντάδας. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων τῆς διαφορᾶς $A - d^3 \times 1000$ εἶναι ἢ ἴσος ἢ μείζων τοῦ $3 \times d^2 \times \mu$. Ἐπομένως, ἐὰν διακριθῇ ὁ ὅτος διὰ τοῦ $3 \times d^2$, τὸ πηλίκον θέλει εἶναι ἢ μ ἢ ἀριθμὸς μείζων τοῦ μ , τοῦ δ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ ἄνωτέρω θεώρημα.

195. Ἄς ἐπαρμολύσωμεν τώρα τὰ ἄνωτέρω ἐπὶ τινος παραδείγματος. καὶ ἔστω νά ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 72627.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 72627 εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 1000, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ρίζα θέλει περιέχει δεκάδας καὶ μονάδας, καὶ γνωρίζομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων αὐτῆς ἰσοῦται τῇ κυβικῇ ρίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκέραιου κύβου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 72 τῶν χιλιάδων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 72627. Ἐπειδὴ τώρα ὁ 72 εἶναι μικρότερος τοῦ 1000, ἐν μὲν τῇ δευτέρᾳ τῶν δύο σειρῶν τῆς § 191 βλέπομεν ὅτι ὁ μέγιστος ἀκέραιος κύβος, ὁ περιεχόμενος ἐν αὐτῷ, εἶναι 64, ἐν δὲ τῇ πρώτῃ σειρᾷ ὅτι 4 εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος κυβικὴ αὐτοῦ ρίζα. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ 72627 εἶναι 4.

Μᾶς μένει τώρα νά εὐρωμεν τὰς μονάδας αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο ἀραιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 72627 τὸν κύβον 64000 τῶν 4 δεκάδων, ἥτοι τοῦ 40, καὶ διακροῦμεν τὰς ἑκατοντάδας 86 τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς 8627 διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων 4, ἥτοι διὰ τοῦ 48, καὶ τὸ πηλίκον 1, ὅπερ εὐρίσκομεν θέλει εἶναι ἢ ἴσος ἢ μείζων τοῦ ψηφίου τῶν ζητουμένων μονάδων. Ἵνα βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου, ὑψοῦμεν τὸν ἀριθμὸν 41 εἰς κύβον, καὶ παραβάλλομεν αὐτὸν πρὸς τὸν δεδομένον ἀριθμὸν. Ἐπειδὴ ὁ περὶ αὐτοῦ λόγος κύβος εἶναι 68921, ἀριθμὸς δηλ. μικρότερος τοῦ δεδομένου 72627, ἡ μονάς εἶναι τὸ ἀληθὲς ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ζητουμένης κυβικῆς αὐτοῦ ρίζης, ἥτις ἐπομένως εἶναι 41.

Ἡ διαφορὰ 3706, ἡ ὑπάρχουσα μετὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 72627 καὶ τοῦ κύβου 68921 τῆς εὑρεθείσης κατὰ προσέγγισιν μονάδος κυβικῆς ρίζης, καλεῖται ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

196. Ἵνα πορισθῶμεν μετὰ περισσοτέρας εὐκολίας τὸν γενικὸν περὶ ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ρίζης κανόνα, ὥς λάβωμεν καὶ δεύτερον παράδειγμα. Ἐστω π. γ. νά εὐρεθῇ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ ἀριθμοῦ 51254673.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 51254673 εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 1000, ἡ κυ-

κυβική αὐτοῦ ρίζα εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 10 καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων αὐτῆς ἰσοῦται τῇ κυβικῇ ρίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου, τοῦ ἐμπεριεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 51254 τῶν χιλιάδων αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ πάλιν ὁ ἀριθμὸς 51254 εἶναι μεγαλιέτερος τοῦ 1000, ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ρίζης εἶναι ἴσος τῇ κυβικῇ ρίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 51 τῶν χιλιάδων αὐτοῦ.

Ὁ μέγιστος ἀκεραῖος κύβος, ὁ περιεχόμενος ἐν τῷ 51, εἶναι 27, ἐπομένως ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος κυβικὴ αὐτοῦ ρίζα θέλει εἶναι 3. Λοιπὸν 3 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ 51254.

Ἀφαιρούμεν τὸν κύβον 27000 τῶν 3 δεκάδων, ἥτοι τοῦ 30, καὶ διακρούμεν τὰς ἑκατοντάδας 242 τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς 24254 διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν τριῶν δεκάδων, ἥτοι διὰ τοῦ 27. Εὐρίσκομεν οὕτω πηλίκον 8, ὅπερ εἶναι ἡ ἴσον ἢ μείζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ 51254. Δοκιμάζομεν τοῦτο ὑψοῦντες τὸν ἀριθμὸν 38 εἰς τὸν κύβον. Ἐπειδὴ ὁ κύβος τοῦ 38 εἶναι 54872, ἀριθμὸς δηλαδὴ μεγαλιέτερος τοῦ 51254, δοκιμάζομεν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου τὸν 37, καὶ ἐπειδὴ ὁ κύβος αὐτοῦ 50653 εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ 51254, ἐπεταὶ ὅτι 37 εἶναι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου 50653, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 51254 τῶν χιλιάδων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 51254673.

Εὐρομεν λοιπὸν μέχρι τοῦδε τὸν ἀριθμὸν 37 τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 51254673.

Πρὸς εὑρεσιν τῶν μονάδων αὐτῆς ἀφαιρούμεν ἀπ' αὐτοῦ τὸν κύβον 50653000 τῶν εὑρεθεισῶν 37 δεκάδων, ἥτοι τοῦ 370, καὶ διακρούμεν τὰς ἑκατοντάδας 6016 τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς 601673 διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν εὑρεθεισῶν 37 δεκάδων, ἥτοι διὰ τοῦ 4107. Εὐρίσκομεν οὕτω πηλίκον 1, ὅπερ εἶναι ἡ ἴσον ἢ μείζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ζητούμενης κυβικῆς ρίζης.

Ἐπειδὴ ὁ κύβος τοῦ 371 εἶναι 51064811, δηλ. μικρότερος τοῦ δεδομένου 51254673, ἡ μονάς εἶναι τὸ ζητούμενον ψηφίον τῶν μονάδων, καὶ 371 ἡ ζητούμενη κυβικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βεραίας

Τὰ καθέκαστα τῶν ὑπολογισμῶν διατάσσονται ὡς ἑξῆς·

51254673	371	37	371
27	$27=3 \times 3^2$	37	371
242	$4107=3 \times 37^2$	259	371
		111	2597
		1369	1113
51254		37	137641
50653		9583	371
60004		4107	137641
		50653	963587
51254673			412923
51064811			51064811
189862			

197. Ἐντεῦθεν πορίζομεθα τὸν ἐξῆς γενικὸν κανόνα.

"Ἴνα ἐξαγάγωμεν τὴν κυβικὴν ρίζαν ἀκεραίου τυπὸς ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν αὐτὸν εἰς τμήματα τριψήφια, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν. Τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματα δυνατὸν γὰρ περιέχει δύο ἢ καὶ ἕν μόνον ψηφίον. Ὁ ἀριθμὸς τῶν οὕτως ἀποτελουμένων τμημάτων θέλει εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν ψηφίων τῆς ζητουμένης ρίζης.

- 1) Εξαγομεν τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου, τοῦ ἐμπεριεχομένου ἐν τῷ πρώτῳ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματι. Εὑρίσκομεν οὕτω τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ. 2) Ἀφαιροῦμεν τὸν κύβον τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου ἀπὸ τοῦ πρώτου τμήματος καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς 3) καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ δευτέρου τριψήφιου τμήματος. 4) Διαιροῦμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου 5) γραφομεν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης καὶ ὑψοῦμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν εἰς τὸν κύβον. Ἐὰν εὑρωμεν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύο πρώτων τμημάτων, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶναι τὸ δεῦτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης κυβικῆς ρίζης. Ἐὰν ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς ᾖ μείζων τοῦ ὑπὸ τῶν δύο πρώτων τμημάτων ἀποτελουμένου, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μορὰν μικρότερον ψηφίον καὶ οὕτω καθέξῃς, μέχρις οὗ εὑρωμεν τὸ ἀκριβὲς ψηφίον. Εὑρεθέντος οὕτω καὶ τοῦ δευτέρου ψηφίου τῆς ρίζης 6) ὑψοῦμεν

μεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ἀποτελούμενου ἐπὶ τῶν δύο πρώτων τμημάτων, τὸν κύβον τοῦ ἐπὶ τῶν δύο ψηφίων τῆς ρίζης ἀποτελούμενου ἀριθμοῦ, ⁵²⁶⁵⁹καταδιβάλλομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εὐρεθησομένης διαφύλας τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τρίτου τμήματος, καὶ διαιρούμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐπὶ τῶν δύο ψηφίων τῆς ρίζης ἀποτελούμενου ἀριθμοῦ. Γράφομεν τὸ εὐρεθησόμηνον πηλίκον πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν εὐρεθέντων δύο ψηφίων τῆς ρίζης καὶ ἐψοῦμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν εἰς τὸν κύβον. Ἐὰν εἴρωμεν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ ἐπὶ τῶν τριῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμημάτων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ἀποτελούμενον, τὸ γράφειν ὡς τρίτον ψηφίον τῆς ρίζης εἶναι ἀκρίβες, εἰ δὲ μὴ, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μοῖνὰ μικρότερον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εἴρωμεν τὸ ἀληθὲς ψηφίον.

Ἐξακολουθοῦμεν δὲ οὕτω μέχρις οὗ κάμωμεν χρῆσιν ὅλων τῶν τμημάτων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ.

Ἡ μεταξὺ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ κύβου τῆς εὐρεθείσης ρίζης διαφορά θέλει παριστῇ τὸ ἐπόμενον τῆς πράξεως.

ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ὅτι εἵπομεν προκειμένου περὶ τετραγωνικῆς ρίζης ἀπὸ τῆς § 179 μέχρι τῆς 189, ταῦτά σχεθόν ἡδυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν καὶ ἐνταῦθα προκειμένου περὶ κυβικῆς ρίζης. Νομίζομεν ὅμως περιττόν νὰ χρονοτριβήσωμεν ἐπὶ τούτων, καθόσον ὁ ἐνιστάσας καλῶς τὰ ἐκεῖ λεχθέντα δύναται ἀφ' ἑαυτοῦ ν' ἀναπληρώσῃ ἄνευ οὐδεμιᾶς δυσκολίας τὴν ἐκουσίαν ἡμῶν ταύτην παράλειψιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

- I. Νὰ εὐρεθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τῶν ἀριθμῶν 3546257, 246286254.
- II. Νὰ εὐρεθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τῶν ἀριθμῶν 251, $\frac{36}{11}$, $\frac{4}{12}$, κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{3}$.
- III. Ποία εἶναι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ ἀθροίσματος $7 + \frac{2}{3} + \frac{5}{9}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{9}$;
- IV. Ποία εἶναι ἡ κυβικὴ ρίζα τῆς διαφορᾶς $3 - \frac{4}{11}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{11}$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ'.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΩΝ.

198. Εἴπομεν ὅτι πρὸς καταμέτρησιν μεγέθους τινὸς συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἕτερόν τι μέγεθος τοῦ αὐτοῦ εἶδους, καὶ ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως, τὸ παριστῶν τὸ μέτρον τοῦ πρὸς καταμέτρησιν μεγέθους, καλεῖται ἀριθμός, ἀκέραιος μὲν, ὅταν τὸ συγκρινόμενον μέγεθος περιέχῃ ἀκριβῶς ἅπαξ ἢ πολλακίς τὸ ὡς μονάδα ληφθέν μέγεθος, κλασματικός δέ, ὅταν περιέχῃ ἅπαξ ἢ πολλακίς πολλοστόν τι μέρος τούτου.

Ἐάν τῶρα λάβωμεν δύο ὁποιαδήποτε ὁμοειδῆ μεγέθη Α καὶ Β, καὶ συγκρίνωμεν τὸ πρῶτον Α πρὸς τὸ δεύτερον Β, τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως θέλει εἶναι ἐπίσης ἀριθμός, ἀκέραιος ἢ κλασματικός, ὅστις θέλει παριστᾷ τὸ μέτρον τοῦ πρώτου Α, ὅταν τὸ μέγεθος Β λαμβάνηται ὡς μονάς. Ὁ ἀριθμός οὗτος ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ καλεῖται μερικώτερον λόγος τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β. Λοιπὸν

Λόγος ποσῶν τινος ἢ μεγέθους πρὸς ἕτερον ὁμοειδὲς ποσὸν ἢ μέγεθος καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὁ ἐκφράζων τὸ μέτρον τοῦ πρώτου, ὅταν τὸ δεύτερον λαμβάνηται ὡς μονάς.

Παραδείγματος χάριν, ἐάν τὸ μέγεθος Α περιέχῃ τετράκις τὸ μέγεθος Β, ὁ 4 θέλει παριστᾷ τὸν λόγον τοῦ Α πρὸς τὸ Β· ἐάν δὲ τὸ μέγεθος Α περιέχῃ ἐπτάκις τὸ ἐνδέκατον τοῦ Β, ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β θέλει εἶναι $\frac{7}{11}$, καὶ βλέπομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 4, $\frac{7}{11}$ παριστῶσι τὸ μέτρον τοῦ Α, ὅταν τὸ Β λαμβάνηται ὡς μονάς.

Κατ' ἀναλογίαν καλεῖται λόγος δύο ἀριθμῶν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου· διότι τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου τούτου ἐπὶ τὸν δεύτερον παράγει τὸν πρῶτον, τουτέστι, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πηλίκον παριστᾷ τὸ μέτρον τοῦ πρώτου, ὅταν ὁ δεύτερος λαμβάνηται ὡς μονάς.

Παραδείγματος χάριν, ὁ $\frac{2}{11}$ παριστᾷ τὸν λόγον τοῦ 7 πρὸς τὸν 11, διότι τὸ γινόμενον $11 \times \frac{2}{11}$ δίδει τὸν πρῶτον ἀριθμὸν 7.

199. Πολλὰκις ἀντὶ νὰ συγκρίνωσιν ἀπ' εὐθείας τὸ μέγεθος A πρὸς τὸ B, συγκρίνουσι πρῶτον ταῦτα πρὸς τὸ ὡς μονάδα ληφθέν μέγεθος, καὶ εὐρίσκουσιν ἔπειτα τὸν λόγον τοῦ A πρὸς τὸ B διαιρούντες τὸν ἀριθμὸν, τὸν παριστῶντα τὸ μέτρον τοῦ A, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ παριστῶντος τὸ μέτρον τοῦ B, ἐν ἄλλαις λέξεσιν.

Ὁ λόγος δύο μεγεθῶν A καὶ B ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, τῶν παριστῶντων τὰ μέτρα αὐτῶν, συγκρινομένων πρὸς τὴν ὡς μονάδα ληφθέν μέγεθος μ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ A περιέχει α φορὰς τὴν μονάδα μ καὶ τὸ B περιέχει β φορὰς τὴν αὐτὴν μονάδα μ, θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας

$$A = \alpha \times \mu,$$

$$B = \beta \times \mu.$$

Διαιρούντες αὐτὰς κατὰ μέλη, θέλομεν ἔχει τὴν ἐπομένην

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha \times \mu}{\beta \times \mu},$$

ἢ, ἐξαιρουμένου ἐκ τῶν ὁρῶν τοῦ κλάσματος τοῦ κοινοῦ παράγοντος μ, τὴν ἑξῆς

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta},$$

τουτέστιν, ὁ λόγος τοῦ A πρὸς τὸ B εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τοῦ ἀριθμοῦ α, τοῦ παριστῶντος τὸ μέτρον τοῦ A πρὸς τὴν μονάδα μ, πρὸς τὸν ἀριθμὸν β, τὸν παριστῶντα τὸ μέτρον τοῦ B πρὸς τὴν αὐτὴν μονάδα μ.

Ὁ εὐρεθεὶς λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν ποσῶν A καὶ B δυνατόν νὰ ᾖ ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς, καθόσον ὁ α εἶναι πολλαπλάσιόν τι ἢ μὴ τοῦ β.

Ἐπειδὴ οἱ λόγοι δύο ποσῶν ἢ μεγεθῶν εἶναι οἱ αὐτοὶ με τοὺς λόγους τῶν παριστῶντων τὰ ποσὰ ταῦτα ἢ μεγέθη ἀριθμῶν, τοῦ λοιποῦ πρὸς εὐρεσιν τοῦ λόγου τῶν ποσῶν ἢ μεγεθῶν θέλομεν θεωρεῖ ἀντὶ τούτων τοὺς ἐκφράζοντας τὰ μέτρα αὐτῶν ἀριθμούς.

200. Ἐάν ὁ λόγος τοῦ A πρὸς τὸ B εἶναι $\frac{2}{11}$, τουτέστιν, ἐάν τὸ μέγεθος A περιέχῃ 7^{15} τὸ $\frac{2}{11}$ τοῦ B, ἔπεται ὅτι τὸ B θέλει περιέχει 11 καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ A· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὁ λόγος τοῦ B πρὸς τὸ A θέλει εἶναι $\frac{11}{2}$.

Οἱ δύο λόγοι $\frac{2}{11}$ καὶ $\frac{1}{7}$, οἱ ἐκ τῶν αὐτῶν ὁρῶν 7 καὶ 11, ἀλλ' ἀντιστρόφως γεγραμμένων, συγκείμενοι, καλοῦνται ἀντίστροφοι. Βλέπομεν δὲ πρὸς τούτοις ὅτι τὸ γινόμενον $\frac{2}{11} \times \frac{1}{7}$ δύο ἀντιστρόφων λόγων $\frac{2}{11}$ καὶ $\frac{1}{7}$ εἶναι ἴσον τῇ μονάδι. Ἐνεκκ τῆς ιδιότητος αὐτῶν ταύτης λέγουσιν ἐνίοτε ὅτι ἀντίστροφοι λόγοι εἶναι ἐκείνοι, ὧν τὸ γινόμενον ἰσοῦται τῇ μονάδι.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΙΣΟΤΗΤΩΝ ΑΥΤΩΝ.

201. Ἐστῶσαν δύο ὁμοειδῆ μεγέθη Α καὶ Β, περιστώμενα διὰ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, Γ καὶ Δ δύο ἑτερὰ μεγέθη ἐπίσης ὁμοειδῆ, περιστώμενα διὰ τῶν ἀριθμῶν γ καὶ δ· ἐάν ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ τοῦ α πρὸς τὸν β ᾖ ἵσος τῷ λόγῳ $\frac{\gamma}{\delta}$ τοῦ γ πρὸς τὸν δ, τὰ τέσσαρα μεγέθη Α, Β, Γ, Δ λέγεται ὅτι ἀποτελοῦσιν ἀναλογία. Τουτέστι

Τέσσαρα μεγέθη ἀποτελοῦν ἀναλογία, ὅταν ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων ᾖ ἵσος τῷ λόγῳ τῶν δύο τελευταίων, ἢ ὅταν ὁ λόγος τῶν ἀριθμῶν, τῶν παριστάντων τὰ δύο πρώτα, ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ἀριθμῶν, τῶν παριστάντων τὰ δύο τελευταία.

202. Ὅταν τέσσαρες ἀριθμοὶ α, β, γ, δ ἀποτελῶσιν ἀναλογία, περιστώσι τοῦτο καθ' ἓνα τῶν ἐξῆς δύο τρόπων

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \alpha : \beta = \gamma : \delta.$$

Ὅταν ἡ ἀναλογία ᾖ γεγραμμένη κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον, ἀπαγγέλλεται ὡς ἐξῆς·

$$\alpha \text{ πρὸς } \beta \text{ ὡς } \gamma \text{ πρὸς } \delta,$$

ὅπερ ἐκφράζει συντόμως ὅτι, ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τοῦ γ πρὸς τὸν δ.

Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ καλοῦνται ὅροι τῆς ἀναλογίας. Οἱ μὲν δύο πρώτοι α καὶ β καλοῦνται ὅροι τοῦ πρώτου λόγου, οἱ δὲ δύο τελευταῖοι γ καὶ δ, ὅροι τοῦ δευτέρου λόγου. Ὁ α καὶ γ λέγονται ἡγούμενοι, καὶ ὁ μὲν α ἡγούμενος τοῦ πρώτου λόγου, ὁ δὲ γ ἡγούμενος τοῦ δευτέρου. Ὁ β καὶ δ ἐπόμενοι, καὶ ὁ μὲν β ἐπόμενος τοῦ πρώτου λόγου, ὁ δὲ δ ἐπόμενος τοῦ δευτέρου. Πρὸς τούτοις οἱ μὲν α καὶ δ καλοῦνται ἄκροι τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ β καὶ γ μέσοι.

Ὅταν ἀναλογία τινὸς οἱ δύο μέσοι ᾖναι οἱ αὐτοί, τότε ἡ ἀναλογία λέγεται συνεκχῆς καὶ οἱ ἴσοι μέσοι καλοῦνται μέσοι ἀνάλογοι τῶν δύο ἄκρων.

Παραδείγματος χάριν, ἐν τῇ συνεχῇ ἀναλογίᾳ

$$9 : 6 = 6 : 4$$

ὁ 6 εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄκρων 9 καὶ 4.

203. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ὅταν δύο ἀναλογίαι ἔχωσιν ἓνα λόγον κοινόν, οἱ δύο ἄλλοι λόγοι σχηματίζουν ἀναλογία.

Ἐστῶσαν αἱ δύο ἀναλογίαι

$$a : b = \gamma : \delta \text{ καὶ } a : b = \epsilon : \zeta.$$

Ἐπειδὴ $\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta}$ καὶ $\frac{a}{b} = \frac{\epsilon}{\zeta}$, ἔπεται ὅτι $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\epsilon}{\zeta}$, τουτέστι

$$\gamma : \delta = \epsilon : \zeta,$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχωμεν τὰς δύο ἀναλογίας

$$5 : 9 = 15 : 27, \quad 5 : 9 = 35 : 63$$

θέλομεν πορίσθῃ, ἐνεκὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν λόγου 5 : 9, τὴν ἐξῆς

$$15 : 27 = 35 : 63.$$

204. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Εἰς πᾶσαν ἀναλογία τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν δύο μέσων.

Ἐστω ἡ ἀναλογία

$$a : b = \gamma : \delta.$$

Αὕτη γράφεται καὶ οὕτω

$$\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ δευτέρου δ, καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ πρώτου β, θέλομεν ἔχει τὴν νέαν ἰσότητα

$$\frac{a \times \delta}{b \times \delta} = \frac{b \times \gamma}{b \times \delta},$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἁμέσως ὅτι $a \times \delta = b \times \gamma$, διότι τὰ κλάσματα

$\frac{a \times \delta}{b \times \delta}, \frac{b \times \gamma}{b \times \delta}$ εὐρέθησαν ἴσα καὶ ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν. Λοιπὸν ἀπεδείχθη ὅτι τὸ γινόμενον $a \times \delta$ τῶν δύο ἄκρων a καὶ δ εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ $b \times \gamma$ τῶν δύο μέσων b καὶ γ .

205. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Τέσσαρες ἀριθμοὶ a, b, γ, δ ἀποτελοῦσιν, ὅπως εὐρίσκονται γεγραμμένοι, ἀναλογία, ὅταν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων a καὶ δ ᾖ ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν δύο μέσων b καὶ γ .

Διότι, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς δεδομένης ἰσότητος

$$a \times \delta = b \times \gamma$$

διὰ τοῦ γινομένου $\beta \times \delta$, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \delta} = \frac{\beta \times \gamma}{\beta \times \delta}$$

ἢ, ἐξαλειφόμενων τῶν κοινῶν παρχόντων δ καὶ β , τὴν ἰσότητα

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta},$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα, διότι αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἐξῆς

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπειδὴ, ὅταν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων ἦναι ἴσον πρὸς γινόμενον τῶν δύο μέσων, οἱ τέσσαρες οὔτοι ἀριθμοί, ὅπως ὑπάρχουσι γεγραμμένοι, ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, ἐπεταὶ ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν ὅπωςδὴποτε τὴν τάξιν τῶν ὅρων ἀναλογίας τινός, φθάνει μόνον νὰ διατηρῶμεν τοὺς αὐτοὺς ἄκρους καὶ τοὺς αὐτοὺς μέσους, ἢ νὰ θέτωμεν τοὺς ἄκρους μέσους καὶ τοὺς μέσους ἄκρους, καὶ θέλομεν ἔχει πάντοτε νέας διατάξεις, ἀποτελούσας ἀναλογίας. Πράττοντες οὕτω βλέπομεν ὅτι οἱ ὅροι ἀναλογίας τινός δύναται νὰ γραφῶσι κατὰ τοὺς ἐξῆς ὀκτὼ διαφόρους τρόπους, καὶ νὰ ἀποτελῶσι πάντοτε ἀναλογίαν.

$$\begin{array}{ll} \alpha : \beta = \gamma : \delta, & \beta : \alpha = \delta : \gamma, \\ \alpha : \gamma = \beta : \delta, & \beta : \delta = \alpha : \gamma, \\ \delta : \beta = \gamma : \alpha, & \gamma : \alpha = \delta : \beta, \\ \delta : \gamma = \beta : \alpha, & \gamma : \delta = \alpha : \beta. \end{array}$$

Διότι οὕτως ἡ ἀναγκαία καὶ ἐπαρκὴς συνθήκη τῆς ἰσότητος τῶν γινομένων τῶν ἄκρων καὶ μέσων ὑπάρχει δι' ἐκάστην τούτων.

206. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Γνωστῶν ὅττων τῶν τριῶν ὅρων ἀναλογίας τινός νὰ εὑρεθῇ ὁ τέταρτος.

Δύο περιπτώσεις δυνάτουν νὰ συμβῶσιν· ὁ ζητούμενος τέταρτος δυνάτουν νὰ ἦναι ἢ ἄκρος ἢ μέσος.

Ἐάν ἦναι εἰς τῶν ἄκρων, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο μέσους καὶ διαίρομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου. Ἐάν ἦναι εἰς τῶν μέσων, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ἄκρους καὶ διαίρομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου. Παράδειγματος χάριν, ἐάν ἔχωμεν τὰς δύο ἀναλογίας

$$\alpha : \beta = \gamma : \chi \text{ καὶ } \alpha : \beta = \gamma : \delta,$$

θέλομεν πορισθῇ ἐκ μὲν τῆς πρώτης $\chi = \frac{\beta \times \gamma}{\alpha}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας

$\chi = \frac{a \times \delta}{\beta}$, διότι κατὰ τὸ παραδεχθέν θεώρημα ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο ἀναλογιῶν πορίζομεθα τὰς ἰσότητας

$$a \times \chi = \beta \times \gamma \text{ καὶ } a \times \delta = \beta \times \chi,$$

ἐξ ὧν εὐρίσκομεν τὰς ἀνωτέρω δύο τιμὰς τοῦ ἀγνώστου ὅρου χ διακίρουντες τὰ δύο μέλη τῆς πρώτης διὰ a καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δευτέρας διὰ β .

ΣΥΜΠΕΡΑΣΙΣ.—Ἄν ἡ ἀναλογία ᾗτο συνεχὴς καὶ ὁ ζητούμενος ἀγνώστος γ ᾗναι ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄκρων, ἠθέλομεν ἔχει

$$a : \chi = \chi : \delta,$$

ἐξ ἧς $\chi^2 = a \times \delta$, καὶ ἐξάγοντες τὰς τετραγωνικὰς ρίζας τῶν δύο μεγάλων αὐτῆς θέλομεν ἔχει $\chi = \sqrt{a \times \delta}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ὅταν ἡ ἀναλογία ᾗναι συνεχὴς, ὁ μέσος ἀνάλογος ἰσοῦται τῇ τετραγωνικῇ ρίζῃ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄκρων.

207. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἑκατὼ τῶν ἄκρων καὶ ἑκατὼ τῶν μέσων ἀναλογίας τινὸς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, θέλομεν ἔχει νέαν ἀναλογίαν.

Ἐστω ἡ ἀναλογία

$$a : b = \gamma : \delta.$$

Ἐξ αὐτῆς πορίζομεθα τὴν ἰσότητα

$$a \times \delta = b \times \gamma.$$

Τώρα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς τελευταιᾶς ταύτης ἰσότητος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μ , ἡ ἰσότης αὕτη δὲν μεταβάλλεται. Οὕτω θέλομεν ἔχει πάλιν τὰς ἰσότητας

$$\mu \times a \times \delta = \mu \times b \times \gamma, \text{ ἢ } \frac{a \times \delta}{\mu} = \frac{b \times \gamma}{\mu}.$$

Ἐξ ὧν δυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν τὰς ἀναλογίας

$$a \times \mu : b \times \mu = \gamma : \delta, \quad a : b = \gamma \times \mu : \delta \times \mu,$$

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu} = \gamma : \delta, \quad a : b = \frac{\gamma}{\mu} : \frac{\delta}{\mu}.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι πολλαπλασιάζομένου ἐνὸς τῶν ἄκρων a ἢ δ καὶ ἐνὸς τῶν μέσων b ἢ γ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μ , τὰ γινόμενα τῶν νέων ἄκρων καὶ μέσων τῆς πρώτης ἀναλογίας θέλουσιν εἶναι πάλιν ἴσα. Ἀρα οἱ νέοι αὐτῆς ὅροι ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν. Ὡσαύτως καὶ διαιρουμένου ἐνὸς τῶν ἄκρων a ἢ δ καὶ ἐνὸς τῶν μέσων b ἢ γ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μ , ἡ ἰσότης τῶν γινομένων τῶν νέων ἄκρων καὶ μέσων δὲν μεταβάλλεται, ἐπομένως οἱ νέοι ὅροι τῆς προηγουμένης ἀναλογίας ἀποτελοῦσι καὶ πάλιν νέαν ἀναλογίαν.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν εἶχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$8 : 10 = 16 : 20$$

καὶ ἐπολλαπλασιάζομεν τὸν 8 καὶ 16 ἐπὶ 3 ἢ διηροῦμεν τὸν 10 καὶ 20 διὰ 2, ἡθέλομεν ἔχει τὰς νέας ἀναλογίας

$$24 : 10 = 48 : 20, \text{ καὶ } 8 : 5 = 16 : 10.$$

Διότι τὰ γινόμενα τῶν ἄκρων καὶ μέσων τῶν νέων ἀναλογιῶν εἶναι καὶ πάλιν ἴσα.

298. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὄρων ἔχει λόγον πρὸς τὸν δευτέρον, ὃν λόγον ἔχει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον.*

Ἐστω ἡ ἀναλογία

$$a : b = \gamma : \delta.$$

Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$a+b : b = \gamma+\delta : \delta.$$

Διότι ὁ λόγος $\frac{a+b}{b}$ τῶν δύο πρώτων αὐτῆς ὄρων εἶναι προφανῶς κατὰ μονάδα μεγαλειότερος τοῦ λόγου $\frac{\gamma}{\delta}$ τῆς δεδομένης ἀναλογίας, διότι ἔχομεν $\frac{a+b}{b} = \frac{\gamma}{\delta} + 1$. Ὡσαύτως ὁ λόγος $\frac{\gamma+\delta}{\delta}$ τῶν δύο τελευταίων αὐτῆς ὄρων εἶναι κατὰ μονάδα μεγαλειότερος τοῦ λόγου $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν δύο τελευταίων τῆς δεδομένης ἀναλογίας, διότι πάλιν ἔχομεν $\frac{\gamma+\delta}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} + 1$. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ λόγοι $\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$ τῆς ἀναλογίας $a : b = \gamma : \delta$ εἶναι ἴσοι, ἐπεὶ καὶ οἱ κατὰ μονάδα μεγαλειότεροι αὐτῶν λόγοι $\frac{a+b}{b}, \frac{\gamma+\delta}{\delta}$ θέλουσιν εἶναι ἴσοι, ἥτοι ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$a+b : b = \gamma+\delta : \delta,$$

δι' ἧς ἀποδεικνύεται τὸ περὶ οὗ ἀνωτέρω ὁ λόγος θεωρημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.—Ἐστω ἡ ἀναλογία

$$6 : 8 = 18 : 24.$$

Θέλομεν ἔχει ἐφαρμοζόντες ἐπὶ ταύτης τὸ προαποδειχθέν θεωρημα τὴν ἐξῆς·

$$6+8 : 8 = 18+24 : 24,$$

$$14 : 8 = 42 : 24.$$

209. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ἔχει λόγον πρὸς τὸν δευτέρον, ὃν λόγον ἔχει καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον.*

Ἐστω ἡ ἀναλογία

$$a : b = \gamma : \delta.$$

Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ὡσαύτως

$$a - b : b = \gamma - \delta : \delta.$$

Διότι ὁ λόγος $\frac{a}{b}$, ὅστις εἶναι ἴσος τῷ $\frac{a}{b} - 1$, εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ $\frac{a}{b}$, καὶ ὁ λόγος $\frac{\gamma}{\delta}$, ὅστις εἶναι ἴσος τῷ $\frac{\gamma}{\delta} - 1$, εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ λόγοι $\frac{a}{b}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ τῆς δεδομένης ἀναλογίας $a : b = \gamma : \delta$ εἶναι ἴσοι, ἐπεὶ καὶ οἱ κατὰ μονάδα μικρότεροι αὐτῶν λόγοι $\frac{a}{b} - 1$, $\frac{\gamma}{\delta} - 1$ θέλουσιν εἶναι ἴσοι, τούτῃσιν ὅτι ἡ ἀναλογία

$$a - b : b = \gamma - \delta : \delta$$

εἶναι ἀληθής, τοῦθ' ὑπερ' ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.—Ἐστω ἡ ἀναλογία

$$35 : 7 = 15 : 3.$$

Θέλομεν ἔχει ἐφαρμόζοντες ἐπὶ ταύτης τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα τὴν ἐξῆς·

$$35 - 7 : 7 = 15 - 3 : 3.$$

$$28 : 7 = 12 : 3.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα ὑποτίθεται ὅτι ὁ a εἶναι μεγαλύτερος τοῦ b , καὶ ἐπομένως ὁ γ μεγαλύτερος τοῦ δ . Ἄν εἶχεν ἄλλως, τότε ἡθέλομεν γράψαι ἀντὶ τῆς δεδομένης ἀναλογίας τὴν ἐξῆς

$$b : a = \delta : \gamma,$$

ὣν πορίζομεθα ἐκ τῆς δεδομένης διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν ὅρων, καὶ ἐν ᾗ θέλομεν ἔχει $b > a$ καὶ $\delta > \gamma$. Τὸ προηγούμενον λοιπὸν θεώρημα ἐφαρμόζεται εἰς ταύτην ἄνευ τινὸς δυσκολίας.

210. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὰ ἐν ταῖς §§ 208 καὶ 209 ἀποδειχθέντα θεωρήματα εἰς ἐκάστην τῶν ὀκτὼ ἀναλογιῶν (205), ἃς πορίζομεθα ἐκ τινος δεδομένης ἀναλογίας διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν ὁρῶν αὐτῆς, θέλομεν πορισθῇ πλείστα θεωρήματα, μεταξὺ τῶν ὁποίων θέλομεν ἀναφέρει μόνον τὰ ἐξῆς·

1ον. Ἐὰν ἀντὶ τῆς ἀναλογίας

$$a : b = \gamma : \delta$$

λάβωμεν τὴν ἐξῆς, ἣν εὐρίσκομεν μεταθέτοντες τοὺς μέσους τῆς δεδομένης,

$$a : \gamma = \beta : \delta.$$

καὶ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ ταύτης τὰ προαποδειχθέντα θεωρήματα 208 καὶ 209, θέλομεν ἔχει

$$a + \gamma : \gamma = \beta + \delta : \delta \text{ καὶ } a - \gamma : \gamma = \beta - \delta : \delta,$$

ἐξ ὧν, διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων, πορίζομεθα

$$a + \gamma : \beta + \delta = \gamma : \delta \text{ καὶ } a - \gamma : \beta - \delta = \gamma : \delta$$

τυτεύσιν ὅτι εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα $a + \gamma$, ἢ ἡ διαφορὰ $a - \gamma$ τῶν δύο ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα $\beta + \delta$ ἢ τὴν διαφορὰν $\beta - \delta$ τῶν δύο ἐπομένων, ὡς εἰς ἡγουμένος γ πρὸς τὸν ἐπόμενον αὐτοῦ δ .

II ἀναλογία

$$a - \gamma : \beta - \delta = \gamma : \delta$$

ὑποθέτει ὅτι $a > \gamma$, καὶ ἐπομένως $\beta > \delta$. Ἄν εἶχεν ἄλλως, ἢ θέλομεν ἀντὶ τῆς ἀναλογίας

$$a : \gamma = \beta : \delta$$

λάβει τὴν ἐκ ταύτης προκύπτουσαν

$$\gamma : \delta = a : \beta,$$

ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ ὡς προηγουμένως

$$\gamma - a : \delta - \beta = \gamma : \delta.$$

2^ο. Ἀπεδείξαμεν προηγουμένως ὅτι δοθείσης τῆς ἀναλογίας

$$a : \beta = \gamma : \delta$$

πορίζομεθα ἐκ ταύτης τὰς ἐξῆς

$$a + \beta : \beta = \gamma + \delta : \delta \text{ καὶ } a - \beta : \beta = \gamma - \delta : \delta.$$

Μεταθέτοντες τώρα τοὺς μέσους τῶν δύο τελευταίων τούτων ἀναλογιών, θέλομεν ἔχει

$$a + \beta : \gamma + \delta = \beta : \delta \text{ καὶ } a - \beta : \gamma - \delta = \beta : \delta.$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο τελευταῖαι ἀναλογίαι ἔχουσιν ἓνα λόγον $\beta : \delta$ κοινόν, οἱ δύο ἄλλοι αὐτῶν λόγοι $a + \beta : \gamma + \delta$ καὶ $a - \beta : \gamma - \delta$ θέλουσιν ἀποτελεῖ ἀναλογίαν (203), ἥτοι θέλομεν ἔχει

$$a + \beta : \gamma + \delta = a - \beta : \gamma - \delta$$

αὕτη δὲ διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων γράσσεται καὶ οὕτω

$$a + \beta : a - \beta = \gamma + \delta : \gamma - \delta.$$

τουτέστιν, εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν $a : b = \gamma : \delta$ τὸ ἄθροισμα $a + b$
 ὧν δύο πρώτων ὄρων εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν $a - b$, ὥς
 ὃ ἄθροισμα $\gamma + \delta$ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν
 $\gamma - \delta$.

3ον. Ὡσαύτως ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο ἀναλογιῶν

$$a + \gamma : b + \delta = \gamma : \delta \text{ καὶ } a - \gamma : b - \delta = \gamma : \delta$$

παριζόμεθα τὴν ἐξῆς

$$a + \gamma : b + \delta = a - \gamma : b - \delta,$$

ἥτις διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων γράσσεται καὶ οὕτω

$$a + \gamma : a - \gamma = b + \delta : b - \delta.$$

τουτέστιν, εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν $a : b = \gamma : \delta$ τὸ ἄθροισμα $a + \gamma$
 τῶν ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν $a - \gamma$, ὥς τὸ ἄ-
 θροισμα $b + \delta$ τῶν ἐπομένων πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν $b - \delta$.

211. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν ἔχωμεν πλείοτερας ἀναλογίας γηγραμ-
 μέτας οὕτως, ὥστε οἱ τῆς αὐτῆς τάξεως ὄροι τὰ εὐρίσκονται ἐν τῇ
 αὐτῇ καθεύτῳ στήλῃ, τὰ γινόμενα τῶν ὁμοταγῶν αὐτῶν ὄρων θέ-
 λουσιν ἀποτελέσει νέαν ἀναλογίαν.

Ἐστωσαν π. γ. αἱ ἀναλογίαι

$$a : b = \gamma : \delta,$$

$$a' : b' = \gamma' : \delta',$$

$$a'' : b'' = \gamma'' : \delta'',$$

γεγραμμένοι ὡς προεβρέθη· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$a \times a' \times a'' : b \times b' \times b'' = \gamma \times \gamma' \times \gamma'' : \delta \times \delta' \times \delta''.$$

Διότι αἱ δεδομένοι ἀναλογίαι γράσσονται καὶ ὡς ἐξῆς

$$\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta},$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\gamma'}{\delta'},$$

$$\frac{a''}{b''} = \frac{\gamma''}{\delta''},$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων εἶναι ἴσα μὲ τὰ
 δευτέρω, ἀναγκαίως τὸ γινόμενον τῶν πρώτων μελῶν θέλει εἶναι ἴσον
 τῷ γινόμενῳ τῶν δευτέρων, τουτέστι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{a \times a' \times a''}{b \times b' \times b''} = \frac{\gamma \times \gamma' \times \gamma''}{\delta \times \delta' \times \delta''}$$

ἢ τὴν

$$\frac{a \times a' \times a''}{b \times b' \times b''} = \frac{\gamma \times \gamma' \times \gamma''}{\delta \times \delta' \times \delta''}$$

ἥτις γράσσεται καὶ ὡς ἐξῆς

$$\alpha \times \alpha' \times \alpha'' : \beta \times \beta' \times \beta'' = \gamma \times \gamma' \times \gamma'' : \delta \times \delta' \times \delta'',$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.—Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν.

$$8 : 3 = 24 : 9$$

$$7 : 5 = 14 : 10$$

$$2 : 1 = 16 : 8$$

ποριζόμεθα κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὴν ἐξῆς·

$$8 \times 7 \times 2 : 3 \times 5 \times 1 = 24 \times 14 \times 16 : 9 \times 10 \times 8,$$

ἥτοι

$$112 : 15 = 5376 : 720.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐάν υποθέσωμεν ὅτι αἱ δεδομέναι ἀναλογίαι εἶναι αἱ αὐταί, τότε τὰ γινόμενα τῶν ὁμοταγῶν αὐτῶν ὄρων θέλουσιν εἶναι αἱ αὐταὶ δυνάμεις τῶν ὄρων τῆς πρώτης. Λοιπόν,

Ἐὰν ἐψώσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δόξαμιν τοὺς ὄρους ἀναλογίας τινὸς θέλομεν σχηματίζειν νέαν ἀναλογίαν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.—Ἐκ τῆς ἀναλογίας

$$2 : 3 = 8 : 12$$

ποριζόμεθα τὴν ἐξῆς

$$2^{\circ} : 3^{\circ} = 8^{\circ} : 12^{\circ},$$

τοῦ n ποριστῶντος ἀκέραιόν τινα ἀριθμόν. Π. χ., ἐάν τὸ n υποτεθῇ ἴσον μὲ 2, θέλομεν ἔχει

$$4 : 9 = 64 : 144.$$

212. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Εἰς πᾶσας σειρὰς ἴσων λόγων τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπομένων, ὡς εἰς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἐπόμενον αὐτοῦ.

Ἔστω π. χ. ἡ σειρὰ τῶν ἴσων λόγων

$$a : b = \gamma : \delta = \epsilon : \zeta = \eta : \theta,$$

λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$a + \gamma + \epsilon + \eta : b + \delta + \zeta + \theta = a : b, \text{ ἢ } \gamma : \delta, \text{ ἢ } \epsilon : \zeta, \text{ ἢ } \eta : \theta.$$

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν δύο λόγων $a : b$ καὶ $\gamma : \delta$ ποριζόμεθα τὴν ἀναλογίαν

$$a : b = \gamma : \delta,$$

ἐξ ἧς κατὰ τὰ ἐν τῇ § 210, 1ον λεχθέντι ποριζόμεθα

$$a + \gamma : b + \delta = a : b.$$

Ἀλλὰ $a : b = \epsilon : \zeta$. Ἀρξ, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τελευταίαν

ἀναλογίαν ἀντὶ τοῦ λόγου $a : b$ τὸν ἴσον αὐτῷ $\varepsilon : \zeta$, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς·

$$a + \gamma : b + \delta = \varepsilon : \zeta,$$

ἐξ ἧς κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα πορίζομεθα

$$a + \gamma + \varepsilon : b + \delta + \zeta = \varepsilon : \zeta.$$

Ἀλλὰ $\varepsilon : \zeta = \eta : \theta$. Ἄρα καὶ

$$a + \gamma + \varepsilon : b + \delta + \zeta = \eta : \theta,$$

ἐξ ἧς

$$a + \gamma + \varepsilon + \eta : b + \delta + \zeta + \theta = \eta : \theta.$$

Ἀλλὰ $\eta : \theta = a : b = \varepsilon : \zeta = \gamma : \delta$. Ἄρα καὶ

$a + \gamma + \varepsilon + \eta : b + \delta + \zeta + \theta = a : b$, ἥ $= \gamma : \delta$, ἥ $= \varepsilon : \zeta$, ἥ $= \eta : \theta$, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ ἀνωτέρω θεώρημα.

213. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Αἱ τετραγωνικαὶ καὶ κυβικαὶ ῥίζαι τῶν ὁρῶν ἀναλογίας τιτὸς σχηματίζουσιν ἀναλογίαν.

Ἐστω ἡ ἀναλογία

$$a : b = \gamma : \delta,$$

λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ὡσαύτως

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\gamma} : \sqrt{\delta} \text{ καὶ } \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{\gamma} : \sqrt[3]{\delta}.$$

Διότι, ἐπειδὴ $\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta}$, αἱ τετραγωνικαὶ καὶ κυβικαὶ ῥίζαι τοῦ κλάσματος $\frac{a}{b}$ θέλουσιν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τετραγωνικὰς καὶ κυβικὰς ῥίζας τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$, τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}} \text{ καὶ } \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\delta}}$$

καὶ κατὰ τοὺς περὶ ἐξαγωγῆς τῶν τετραγωνικῶν καὶ κυβικῶν τῶν κλασμάτων ῥιζῶν κανόνας, θέλομεν ἔχει

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\delta}} \text{ καὶ } \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{\gamma}}{\sqrt[3]{\delta}},$$

ἢ, ὅπερ ταῦτό,

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\gamma} : \sqrt{\delta} \text{ καὶ } \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{\gamma} : \sqrt[3]{\delta},$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐὰν τὰ κλάσματα $\frac{a}{b}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ δὲν ἦναι τέλεια τετράγωνα ἢ τέλειαι κύβοι, αἱ τετραγωνικαὶ ἢ κυβικαὶ αὐτῶν ῥίζαι θέλουσιν εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τέσσαρες ἀσύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, ὅταν

ὁ λόγος τῶν δύο εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν ἄλλων δύο. Τώρα ὁ λόγος δύο ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν θέλει εἶναι ἀσύμμετρος ἢ σύμμετρος, καθόσον τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν εἶναι ἢ μὴ ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Παραδείγματός χάριν, ἐν εἶχόμεν τὴν ἀναλογίαν,

$$3 : 12 = 6 : 24,$$

ἐξάγοντες τὰς τετραγωνικάς τῶν ὁρῶν αὐτῆς ρίζας, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\sqrt{3} : \sqrt{12} = \sqrt{6} : \sqrt{24},$$

ἧς οἱ ὅροι $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{24}$ εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι,

ἀλλ' ὁ λόγος αὐτῶν $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ ἢ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ εἶναι ἀριθμὸς σύμμετρος.

Ἐξάγοντες τὰς κυβικάς ρίζας τῆς προηγουμένης ἀναλογίας θέλομεν ἔχει

$$\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{24}$$

καὶ βλέπομεν ὅτι ὅχι μόνον οἱ ὅροι αὐτῆς εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι,

ἀλλὰ καὶ ὁ λόγος αὐτῶν $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{12}}$ ἢ $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ 2, 5, 6, 15, ὅπως εἶναι γεγραμμένοι, ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν;

II. Πῶς πρέπει νὰ γράψωμεν τοὺς τέσσαρας παράγοντας 3, 4, 2, 6 τῆς ἰσότητος $3 \times 4 = 2 \times 6$, ἵνα σχηματίσωμεν ἀναλογίαν;

III. Ἐκ τῆς ἰσότητος $8 = 2 \times 4$ ποία ἀναλογία προκύπτει;

IV. Οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{15}{8}$, ὅπως εἶναι γεγραμμένοι, δύνανται νὰ σχηματίσωσιν ἀναλογίαν;

V. Ποῖος ἀριθμὸς μετὰ τῶν τριῶν δεδομένων $\frac{5}{12}$, $1 + \frac{2}{3}$, $7 + \frac{2}{3}$, σχηματίζει ἀναλογίαν, ἧς οἱ ἡγούμενοι νὰ ᾖναι ὁ δεύτερος καὶ τρίτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν;

VI. Ποῖος ὁρος ληρθεὶς ὡς μέσος ἀνάλγος ἀποτελεῖ ἀναλογίαν, ἧς ἄκροι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 11;

VII. Ἐκ τῆς ἀναλογίας $2 : 7 = 6 : 21$ δυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν τὴν ἐξῆς $8 : 28 = 4 : 14$, καὶ πῶς;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΠΟΣΩΝ.

214. Ἐάν ἔχωμεν δύο ὁμοειδῆ ἢ ἑτεροειδῆ ποσὰ ἢ μεγέθη, καὶ ἐπιθέσωμεν ὅτι ταῦτα εἶναι οὕτω πως συνδεδεμένα πρὸς ἄλληλα, ὥστε, ὅταν τὸ πρῶτον λάβῃ δύο ὁποιασδήποτε τιμὰς A' , A'' , τὸ δεύτερον νὰ λαμβάνῃ δύο ἄλλας B' , B'' ἀντιστοιχοῦς καὶ τοιαύτας, ὥστε ὁ λόγος $\frac{A'}{A''}$ τῶν δύο ὁποιοῦνδήποτε τιμῶν A' , A'' τοῦ πρώτου νὰ ᾔναι ἴσος τῷ λόγῳ $\frac{B'}{B''}$ ἢ τῷ $\frac{B''}{B'}$ τῶν δύο ἀντιστοιχῶν τιμῶν B' , B'' τοῦ δευτέρου, τότε τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος ποσὰ λέγονται *ἀνάλογα*. Καὶ ὅταν μὲν ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$\frac{A'}{A''} = \frac{B'}{B''}$$

τὰ ποσὰ καλοῦνται κατ' εὐθείαν ἀνάλογα. Ὅταν δ' ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$\frac{A'}{A''} = \frac{B''}{B'}$$

τὰ ποσὰ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Λοιπὸν,

Δύο ὁποιαδήποτε ποσὰ ἢ μεγέθη εἶναι ἀνάλογα, ὅταν ᾔναι οὕτω πως συνδεδεμένα πρὸς ἄλληλα, ὥστε δύο ὁποιοῦνδήποτε τιμαὶ τοῦ ἑνὸς νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν ἢ ἀντίστροφον λόγον μὲ τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τοῦ ἑτέρου.

Παραδείγματος χάριν, ἐάν τὸ πληρονόμενον χρηματικὸν ποσὸν διὰ τι ὑγρῶμα ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ οὕτως, ὥστε δύο ὁποιοῦνδήποτε τιμαὶ τοῦ πρώτου νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ δευτέρου, τὰ ποσὰ, πληρονομένη τιμή καὶ λαμβανόμενον μήκος ὑγρῶματος, θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα κατ' εὐθείαν.

Ὡσαύτως, δι' ἀριθμὸν τινα ἐργατῶν πληρονομεν εἰς μίαν ἡμέραν

χρηματικόν τι ποσόν. Ἐάν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν γείνη διπλάσιος ἢ τριπλάσιος, ἢ κτλ. καὶ τὸ διὰ τὴν αὐτὴν ἡμέραν πληρωθησόμενον χρηματικὸν ποσὸν γίνεται διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, ἢ κτλ., τότε ὁ λόγος δύο ὅποιονδήποτε τιμῶν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν θέλει εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν ἀντιστοιχοῦσων τιμῶν τοῦ πληρονομένου χρηματικοῦ ποσοῦ, καὶ τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος ποσά, ἀριθμοὶ ἐργατῶν καὶ πληρονομενοὶ ἡμερομίσθιοι, θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα καὶ κατ' εὐθεΐαν.

Ἄν εἶχαμεν ποσότητά τινα τροφῶν πρὸς τροφοδότους ἀριθμοῦ τινος στρατιωτῶν διὰ τινα χρόνον, καὶ ὁ χρόνος τῆς διαρκείας τῶν τροφῶν ἐξηρτᾶτο ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τρεφομένων στρατιωτῶν οὕτως, ὥστε, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν γείνη διπλάσιος, ἢ τριπλάσιος, ἢ κτλ., ὁ χρόνος τῆς διαρκείας τῶν τροφῶν νὰ γίνηται τὸ ἡμισυ, ἢ τὸ τρίτον, ἢ κτλ., τότε ὁ λόγος δύο ὅποιονδήποτε τιμῶν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στρατιωτῶν θέλει εἶναι ἴσος τῷ ἀντιστρόφῳ λόγῳ τῶν ἀντιστοιχοῦσων τιμῶν τῆς τῶν τροφῶν διαρκείας, καὶ τὰ δύο ποσά, ἀριθμοὶ στρατιωτῶν καὶ χρόνοι διαρκείας τῶν τροφῶν, θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα καὶ ἀντιστρόφως.

215. Σπανίως μέγεθός τι ἐξαρτᾶται μόνον ἐξ ἐνὸς ἄλλου· ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἡ τιμὴ ποσοῦ τινος ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν διαφόρων ἄλλων. Παραδείγματος χάριν, ἡ ἀξία ὑφάσματος τινος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ, ἐκ τοῦ πλάτους καὶ ἐκ τῆς ποιότητος αὐτοῦ. Ὡσαύτως, ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς ἐργατῶν πρὸς ἀποπεράτωσιν ἔργου τινὸς ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργασίμων καθ' ἐκάστην ὥραν καὶ ἐκ τοῦ ὁρισθησομένου χρόνου πρὸς ἀποπεράτωσιν αὐτοῦ. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει

Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ποσὸν λέγεται ἀνάλογον πρὸς τὰ ἐξ ὧν ἐξαρτᾶται, ὅταν μεταβάλλομένης μόνον τῆς τιμῆς ἐνὸς ὁποιοῦνδήποτε τούτων καὶ τῶν τιμῶν τῶν λοιπῶν μενουσῶν τῶν αὐτῶν, δύο ὁποιαδήποτε τιμαὶ τοῦ πρώτου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοιχοῦσων τιμῶν τοῦ μεταβαλλομένου.

Παραδείγματος χάριν, ἡ ἀξία ὑφάσματος τινος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ, τοῦ πλάτους καὶ τῆς ποιότητός του. Λοιπὸν κατὰ τὰ προλεχθέντα ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος θέλει εἶναι ἀνάλογος τοῦ μήκους, ἐάν, μεταβαλλομένῳ τοῦ μήκους, τοῦ πλάτους δὲ καὶ τῆς ποιότητος ὑποτιθεμένων τῶν αὐτῶν, δύο ὁποιαδήποτε τιμαὶ τῆς ἀξίας αὐτοῦ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τοῦ μήκους.

Ἡσαύτως ἡ ἀξία τοῦ ὁράσματος θέλει εἶναι ἀνάλογος τοῦ πλάτους, ἔαν μεταβαλλομένου τοῦ πλάτους, τοῦ μήκους δὲ καὶ τῆς ποιότητος ὑποτιθεμένων τῶν αὐτῶν, δύο ὅποιαδήποτε τιμὰι τῆς ἀξίας αὐτοῦ ἦναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τοῦ πλάτους αὐτοῦ. Καὶ τελευταῖον ἡ ἀξία τοῦ ὁράσματος θέλει εἶναι ἀνάλογος τῆς ποιότητος αὐτοῦ, ἔαν μεταβαλλομένης μόνον ταύτης, τοῦ μήκους δὲ καὶ τοῦ πλάτους ὑποτιθεμένων τῶν αὐτῶν, δύο ὅποιαδήποτε τιμὰι τῆς ἀξίας αὐτοῦ ἦναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τῆς ποιότητος αὐτοῦ.

Ὅταν ποσόν τι ἐξαρτᾶται ἐκ πολλῶν ἄλλων καὶ ἦναι ἀνάλογον πρὸς ταῦτα, ἡ τιμὴ αὐτοῦ δυνατόν νὰ ἦναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογος πρὸς τινὰ τούτων καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς ἕτερα. Ἐν τοῖς ἐπομένοις θελομεν ἐκθέσαι τρόπον, δι' οὗ θελομεν ἀναγνωρίζει πότε δύο ποσὰ εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα καὶ πότε ἀντιστρόφως.

ΤΡΟΠΟΣ ΔΙ ΟΥ ΑΝΑΓΝΩΡΙΖΟΜΕΝ ΑΝ ΔΥΟ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

ΠΟΣΑ ΗΝΑΙ ΑΝΑΛΟΓΑ.

216. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ὥρισamen μόνον πότε δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, δὲν ἀποδείξαμεν δὲ καὶ ὅτι τοῦτο ἢ ἐκεῖνο τὸ ποσὸν εἶναι ἀνάλογον πρὸς τοῦτο ἢ ἐκεῖνο. Ἡ ἀποδείξις τούτου εἶναι κυρίως ἀντικείμενον ἐκείνης τῆς ἐπιστήμης, ἥτις ἰδίᾳ περὶ τῶν συγκρινόμενων ποσῶν πραγματεύεται. Ἡμεῖς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ οὐδέποτε εἰμεθα ἠναγκασμένοι νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι δύο ὅποιαδήποτε ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, παραδεχόμεθα ἀπλῶς τοῦτο ὡς ὑπάρχον, καὶ τοῦτο πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων, τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰ ποσὰ ταῦτα.

Ἄλλ' ὑπάρχουσι καὶ ποσὰ τινὰ, περὶ ὧν οὐδεμίᾳ ἰδιαιτέρως ἐπιστήμῃ πραγματεύεται, καὶ τοιαῦτα εἶναι ἐκεῖνα, περὶ ὧν ἐπραγματεύθημεν εἰς τὰ προηγουμένως δοθέντα παραδείγματα. Περὶ τῶν ποσῶν τούτων, ὅσας τις ταῦτα περιέχονται εἰς τὰ πρὸς λύσιν προτεινόμενα προβλήματα, πρέπει ἢ οὕτως ἢ ἄλλως νὰ ἀπορανθῶμεν κατὰ τινὰ τρόπον, ἂν ἦναι ἢ μὴ ἀνάλογα· διότι ἄλλως ἢ λύσις τῶν ἐξ αὐτῶν ἐξαρτωμένων ζητημάτων ἀποβαίνει ἀδύνατος. Πρὸς τοῦτο δὲ μεταχειρίζομεθα τὸν ἐξῆς τρόπον τοῦ σκέπτεσθαι.

Ἐστώσαν Α καὶ Β δύο ὅποιαδήποτε ἐξαρτώμενα ἀπ' ἀλλήλων ποσὰ. Ἴνα ἰδῶμεν ἂν ταῦτα ἦναι ἢ μὴ ἀνάλογα, θεωροῦμεν μίαν τινὰ

τιμήν Α' τοῦ πρώτου Α καὶ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμήν Β' τοῦ δευτέρου Β, ἔπειτα ὑποθέτομεν ὅτι ἡ τιμὴ Α' γίνεται διπλασία, τριπλασία, τετραπλασία, κτλ., ἢ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον, κτλ. αὐτῆς, καὶ παρατηροῦμεν ἂν ἡ μεταξὺ τῶν ποσῶν Α καὶ Β ὑπάρχουσα ἐξάρτησις ἦναι τοιαύτη, ὥστε ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ Β' τοῦ Β νὰ γίνηται διπλασία, τριπλασία, τετραπλασία, κτλ., ἢ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον, κτλ. αὐτῆς. Ἐὰν τοῦτο ὑπάρχῃ, παραδεχόμεθα καὶ δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ ποσὰ Α καὶ Β εἶναι ἀνάλογα, τουτέστιν, ὅτι δύο ὁποιαδήποτε τιμαὶ τοῦ Α ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἢ ἀντίστροφον λόγον πρὸς τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τοῦ Β.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι διπλασιαζομένου, τριπλασιαζομένου, κτλ., ἡ γινομένου δὲς, τρεῖς, τετράκις κτλ. μικροτέρου τοῦ Α, τὸ Β διπλασιαζεται, τριπλασιαζεται, κτλ., ἢ γίνεται δὲς, τρεῖς, τετράκις, κτλ. μικρότερον· λέγω ὅτι τότε

Δύο ὁποιαδήποτε τιμαὶ τοῦ Α θέλουσιν ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὅν καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ Β, καὶ ἐπομένως ὅτι τὰ ποσὰ Α καὶ Β θέλουσιν εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ἔνא ὁρίσωμέν πως τὰς ιδέας, ὅτι τὸ Α ἔλαβεν τὰς τιμὰς Α' καὶ $\frac{2}{3}$ Α'. Λέγω ὅτι κατὰ τὰ προϋποθεθέντα καὶ τὸ Β θέλει λάβει τὰς τιμὰς Β' καὶ $\frac{2}{3}$ Β', εἰς τὸν αὐτὸν ὥστε ὁ λόγος τοῦ $\frac{2}{3}$ Α' πρὸς τὸ Α' νὰ ᾖ ὅσον τῷ λόγῳ τοῦ $\frac{2}{3}$ Β' πρὸς τὸ Β'.

Διότι δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ Α' ἔγεινε πρῶτον 3Α'. ἦτοι ἐτριπλασιασθῇ, καὶ ἔπειτα τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ 3Α' ἔγεινε τὸ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ, ἦτοι $\frac{2}{3}$ Α'. Ὅταν τριπλασιασθῇ τὸ Α' καὶ τὸ Β' θέλει καὶ ὑπόθεσιν τριπλασιασθῇ καὶ γίνῃ 3Β'. Ἐπειδὴ πάλιν τὰ 3Α' ἔγεινε τὸ πέμπτον αὐτοῦ, ἦτοι $\frac{2}{3}$ Α', καὶ τὸ 3Β' θέλει γίνῃ τὸ πέμπτον αὐτοῦ, ἦτοι $\frac{2}{3}$ Β'. Λοιπὸν $\frac{2}{3}$ Β' θέλει εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ Β' εἰς τὴν τιμήν $\frac{2}{3}$ Α' τοῦ Α', ἐπομένως ὁ λόγος $\frac{2}{3}$ τῶν δύο τιμῶν $\frac{2}{3}$ Α' Α' τοῦ πρώτου ποσοῦ Α θέλει εἶναι ὅσον τῷ λόγῳ $\frac{2}{3}$ τῶν δύο ἀντιστοιχοῦσων τιμῶν $\frac{2}{3}$ Β', Β' τοῦ δευτέρου ποσοῦ Β. Τὰ ποσὰ λοιπὸν Α καὶ Β εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα, τοῦθ' ὕπερ ἀποδεικνύει τὸ ζήτοῦμενον.

Ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ δεύτερον λόγον ὅτι διπλασιαζομένου, τριπλασιαζομένου, κτλ. τοῦ Α', τὸ Β' γίνεται τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, κτλ.

καὶ ἀντιστρόφως γινόμενου τοῦ Α' τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, κτλ., τὸ Β' γίνεται διπλάσιον, τριπλάσιον, κτλ. λέγω ὅτι τότε

Δύο ὅποιαδήποτε τιμαὶ τοῦ Α' θέλουσι ἔχει λόγον ἀντίστροφον πρὸς τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τοῦ Β, ἐπομένως ὅτι τὰ ποσὰ Α καὶ Β θέλουσι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ἄς υποθέσωμεν, ἵνα ὀρίσωμεν πάλιν τὰς ἰδέας, ὅτι τὸ Α' ἔλαβε τὴν τιμὴν $\frac{2}{3}A'$. Λέγω ὅτι κατὰ τὰ προϋποτεθέντα καὶ τὸ Β' θέλει λάβει τὴν τιμὴν $\frac{3}{2}B'$, εἰς τρόπον ὥστε ὁ λόγος τοῦ $\frac{2}{3}A'$ πρὸς τὸ Α' νὰ ᾖναι ἀντίστροφος τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοιχοῦσων τιμῶν $\frac{3}{2}B'$ καὶ Β'.

Διότι δυνάμεθα νὰ υποθέσωμεν ὅτι τὸ Α' ἔγινε πρῶτον $3A'$, ἥτοι ἐτριπλασιάσθη, καὶ ἔπειτα τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ $3A'$ ἔγινε τὸ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ, ἥτοι $\frac{2}{3}A'$. Ὄταν τριπλασιασθῇ τὸ Α', τὸ Β' θέλει γείναι κατὰ τὴν προηγουμένην ὑπόθεσιν $\frac{3}{2}B'$, ὅταν δὲ τὸ $3A'$ γείνη $\frac{2}{3}A'$, ἡ ἀντιστοιχος αὐτῷ τιμὴ $\frac{3}{2}B'$ θέλει γείναι κατὰ τὴν αὐτὴν ὑπόθεσιν $\frac{2}{3}B'$. Λοιπὸν $\frac{2}{3}B'$ θέλει εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ Β' εἰς τὴν τιμὴν $\frac{2}{3}A'$ τοῦ Α'. Ὁ λόγος λοιπὸν τῶν δύο τιμῶν $\frac{2}{3}A'$ καὶ Α' τοῦ πρώτου εἶναι ἀντίστροφος τοῦ λόγου τῶν δύο ἀντιστοιχοῦσων τιμῶν $\frac{2}{3}B'$ καὶ Β' τοῦ δευτέρου. Τὰ ποσὰ λοιπὸν Α καὶ Β εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Παραδείγματος χάριν, εἰὰν παραδεχθῶμεν ὅτι χρειζόμεθα πρὸς τροφὴν διπλασίον, τριπλάσιον..., ἢ δίς, τρίς... μικροτέρου ἀριθμοῦ στρατιωτῶν, διπλασίαν, τριπλασίαν... ἢ δίς, τρίς... ὀλιγωτέραν ποσότητα ἄρτου, θέλομεν συμπεράνει ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν εἶναι ἀνάλογος τῆς ποσότητος τοῦ ἀπαιτουμένου πρὸς τροφὴν αὐτῶν ἄρτου.

Ὡσαύτως, εἰὰν παραδεχθῶμεν ὅτι πρὸς ἀγορὰν διπλασίον, τριπλάσιον..., ἢ δίς, τρίς... ὀλιγωτέρου ἀριθμοῦ πῆχεων, χρειζόμεθα διπλασίαν, τριπλασίαν... ἢ δίς, τρίς... μικροτέραν ποσότητα χρημάτων, θέλομεν συμπεράνει ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν πῆχεων ὑφάσματός τινος εἶναι ἀνάλογος τῆς πρὸς ἀγορὰν αὐτοῦ ἀπαιτουμένης ποσότητος χρημάτων.

Παρομοίως, εἰὰν παραδεχθῶμεν ὅτι χρειζόμεθα διπλάσιον, τρι-

πλάσιον..., ἢ δις, τρίς... ὀλιγώτερον ἀριθμὸν ἐργατῶν, ἵνα ἀποπε-
ρατώσωσιν οὗτοι ἔργον πῖ εἰς δις, τρίς... ὀλιγώτερον ἀριθμὸν ἡμε-
ρῶν, ἢ εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον..., θέλομεν συμπεράναι ὅτι ὁ ἀριθ-
μὸς τῶν ἐργατῶν εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἀπαιτουμένου πρὸς ἀποπερά-
τωσιν τοῦ ἔργου ἀριθμοῦ ἡμερῶν.

Τὰ τῶν δύο πρώτων παραδειγμάτων πρὸς εἶναι κατ' εὐθείαν
ἀνάλογα, τὰ δὲ τοῦ τρίτου ἀντιστρόφως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἡ μεταξὺ τῶν θεωρουμένων ποσῶν ὑπάρχουσα
σχέσις εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον τοιαύτης φύσεως, ὥστε δὲν διστά-
ζομεν νὰ παραδεχθῶμεν ἁμέσως ὅτι ὑπάρχει μεταξὺ αὐτῶν ἡ ἀπαι-
τουμένη συνθήκη, ἵνα ταῦτα ὦσιν ἀνάλογα. Εἰς τινὰς ὅμως περι-
πτώσεις χρειάζεται οὐκ ὀλίγη προσοχή πρὸς τοῦτο, καθότι εἶναι
εὐκόλον νὰ ἀπατηθῶμεν, καὶ ἐπομένως νὰ εὐρωμεν λίαν ἐσφαλμένα
ἐξαγόμενα ὡς ἐκ τούτου.

Παραδείγματις χάριν, εἵπομεν προηγουμένως ὅτι ἡ ἀξία ὑφάσμα-
τός τινος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους, τοῦ πλάτους καὶ τῆς ποιότη-
τος αὐτοῦ. Τώρα θυνάμεθα μετ' εὐκολίας νὰ πεισθῶμεν ὅτι αὕτη
εἶναι ἀνάλογος τοῦ μήκους καὶ τοῦ πλάτους αὐτοῦ, ἀλλ' ἐννὰ πα-
ραδεχθῶμεν ὅτι εἶναι ἀνάλογος καὶ τῆς ποιότητος αὐτοῦ, θέλομεν
σφάλλει, ἂν καὶ μετὰ τινος δυσκολίας θυνάμεθα νὰ πεισθῶμεν περὶ
τοῦ σφάλματος μας τούτου. Ἴνα θὲ γείνωμεν καταληπτότεροι, ἄς
μερικεύσωμεν τὸ ζήτημα. Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι 3 πήγεις ὑ-
φάσματος τινος ὡρισμένης ποιότητος τιμῶνται ἀντὶ 15 δραχμῶν,
καὶ ὅτι ἔχομεν 3 πήγεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ἀλλὰ διπλάσιαι,
ἐὰν μᾶς ἐπιτρέπεται χάριν συντομίας νὰ ἐκφρασθῶμεν αὐτῶν, ποιό-
τητος. Ἐὰν παραδεχθῶμεν ὅτι αὗται πρέπει νὰ τιμῶνται ἀντὶ
30 δραχμῶν, θέλομεν σφάλλει, καὶ ἰδοὺ διατί.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀξία τῆς ὕλης, ἐξ ἧς κατασκευάσθησαν οἱ 3
πήγεις τοῦ πρώτου ὑφάσματος, ἦτο 5 δραχμῶν καὶ τὰ πρὸς κατα-
σκευὴν αὐτῶν ἐξοδα 10, ὥστε τὸ ὅλον τῆς ἀξίας τῶν 3 πήγειων εἶ-
ναι δραχμαὶ 15. Ἴνα κατασκευάσωμεν τὰς 3 πήγεις τῆς διπλάσιας
οὕτως εἰπεῖν, ποιότητος, πρέπει προφανῶς νὰ πληρώσωμεν 10 δραχ-
μὰς διὰ τὴν ἀναγκαζίαν ὕλην, τὴν ἔχουσαν κατ' ὑπόθεσιν διπλάσιον
ἀξίαν, καὶ ἄλλας 10 διὰ τὴν κατασκευὴν αὐτῶν, ἥτις εἶναι ἡ αὐτή.
Θέλομεν λοιπὸν ἐξοδεύσει εἰς τὴν δευτέραν ταύτην περίπτωσιν δραχ-
μὰς μόνον 20 καὶ οὐχὶ 30. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι διπλασιασθεὶς
οὕτως εἰπεῖν, τῆς ποιότητος τοῦ ὑφάσματος, ἡ ἀξία αὐτοῦ πραγμα-

τικῶς δὲν διπλασιάζεται, ἐπομένως ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος ἐξαργα-
ται μὲν ἐκ τῆς ποιότητος αὐτοῦ, ἀλλὰ καὶ δὲν εἶναι ἀνάλογος ταύ-
της, ὥστε ἡθέλομεν σφάλει πολὺ ἂν ἐλύομεν πρόβλημα τι στήρι-
ζόμενοι ἐπὶ τῆς ἐσφαλμένης ταύτης ὑποθέσεως.

ΑΠΑΝ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ.

217. Διὰ τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν λύνονται ἐκεῖνα τὰ ζη-
τήματα, ἐν οἷς μὲς δίδεται ἡ τιμὴ ποσοῦ τινος καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦ-
σα τιμὴ ἑτέρου τινὸς ποσοῦ, πρὸς ὃ τὸ πρῶτον ὑποτίθεται ἀνάλογον
καὶ μὲς ζητεῖται ποία θέλει εἶναι ἡ νέα τιμὴ τοῦ δευτέρου ποσοῦ,
ὅταν τὸ πρῶτον λάβῃ ἑτέραν τιμὰ δεδομένην τιμὴν.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Διὰ 5 πήχεις ὑφάσματος τινοῦ ἐπ.ληρώθησαν 20 δραχμαί· πόσαι
δραχμαὶ ἡθέλου π.ληρωθῇ διὰ 7 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;
ἐν ᾧ τὰ δύο δεδομένα ποσὰ εἶναι ἀριθμὸς πήχεων καὶ δραχμαί,
καὶ μὲς ἐδόθη μία τιμὴ 5 τοῦ πρώτου καὶ ἑτέρα τις τιμὴ 20 τοῦ
δευτέρου, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τοῦ πρώτου, καὶ μὲς ζητεῖται ἡ
νέα τιμὴ τοῦ δευτέρου, ἥτοι τῶν δραχμῶν, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς
τὴν δευτέραν τιμὴν 7 τοῦ πρώτου, τὸ ἀνωτέρω, λέγομεν, ζήτημα
εἶναι πρόβλημα τῆς καλουμένης ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Πρὸς λύσιν αὐτοῦ ὡς παραστήσωμεν διὰ χ τὴν νέαν τιμὴν τοῦ
δευτέρου ποσοῦ, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν τιμὴν 7 τοῦ πρώτου.
Ἐπειδὴ τὰ δεδομένα ποσὰ ὑποτίθεται ἀνάλογα, εἶναι δὲ προφανῶς
κατ' εὐθείαν ἀνάλογα, διότι, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων,
ἡ ποσότης τῶν δραχμῶν αὐξάνει, ὁ λόγος $\frac{5}{7}$ τῶν δύο τιμῶν 5 καὶ 7
τοῦ πρώτου θέλει εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ $\frac{20}{\chi}$ τῶν δύο ἀντιστοιχοῦσων
τιμῶν 20 καὶ χ τοῦ δευτέρου, ταυτέστι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{5}{7} = \frac{20}{\chi}$$

ἢ τὴν ἀναλογίαν $5 : 7 = 20 : \chi$.

ἢ ἡς πορίζομεθα (206)

$$\chi = \frac{7 \times 20}{5} = 28.$$

Λοιπὸν 28 εἶναι ἡ νέα τιμὴ τῶν δραχμῶν, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς
τὴν νέαν τιμὴν 7 τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.—Πρὸς ἐνδυμασίαν 25 στρατιωτῶν ἐχρειάσθη-
σαν 53 πήχεις ὑφάσματος· τίτος· πόσοι πήχεις θέλουσιν ἐπαρκέσει
διὰ 40 στρατιώτας;

Ἐνταῦθα τὰ δύο δεδομένα ποσὰ εἶναι ἀριθμὸς στρατιωτῶν καὶ ἀριθμὸς πῆχεων, μᾶς ἐδόθη δὲ ἡ τιμὴ 25 τοῦ πρώτου καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ταύτην τιμὴ 53 τοῦ δευτέρου, καὶ μᾶς ζητεῖται ποία θέλει εἶναι ἡ νέα τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πῆχεων, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν ὑποτεθῇ 40.

Ἐστω x ἡ ζητούμενη αὕτη νέα τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πῆχεων. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ ὑποτίθενται ἀνάλογα καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πῆχεων πρὸς ἐνδυμασίαν περισσοτέρου ἀριθμοῦ στρατιωτῶν πρέπει νὰ ᾖ καὶ μεγαλειότερος, τὰ ποσὰ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα. Ὁ λόγος λοιπὸν $\frac{25}{40}$ τῶν δύο τιμῶν 25 καὶ 40 τοῦ πρώτου θέλει εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ $\frac{53}{x}$ τῶν ἀντιστοιχοῦσων τιμῶν τοῦ δευτέρου, τουτέστι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητά

$$\frac{25}{40} = \frac{53}{x},$$

ἢ τὴν ἀναλογίαν

$$25 : 40 = 53 : x,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα (206)

$$x = \frac{53 \times 40}{25} = 84 + \frac{4}{5}.$$

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν ἀπαιτουμένων πῆχεων εἶναι 84 καὶ $\frac{4}{5}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.—28 ἐργάζεται ἐτελείωσαν ἔργον τι εἰς 15 ἡμέρας· πόσοι ἐργάται ἤθελον τελειώσει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 10 ἡμέρας;

Ἐνταῦθα τὰ δύο δεδομένα ποσὰ εἶναι ἀριθμὸς ἡμερῶν καὶ ἀριθμὸς ἐργατῶν, μᾶς ἐδόθη δὲ ἡ τιμὴ 28 τοῦ δευτέρου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν 15 τοῦ πρώτου, καὶ μᾶς ζητεῖται ποία θέλει εἶναι ἡ νέα τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν λάβῃ τὴν νέαν τιμὴν 10.

Ἐστω x ἡ νέα τιμὴ τοῦ δευτέρου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν νέαν τιμὴν 10 τοῦ πρώτου. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ ὑποτίθενται ἀνάλογα καὶ αὐξανόμενου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν πρέπει προφανῶς νὰ ἐλαττωθῇ, τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ὁ λόγος λοιπὸν $\frac{15}{10}$ τῶν δύο τιμῶν 15 καὶ 10 τοῦ πρώτου εἶναι ἴσος τῷ ἀντιστρόφῳ λόγῳ $\frac{x}{28}$ τῶν ἀντιστοιχοῦσων τιμῶν 28 καὶ x τοῦ δευτέρου. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητά

$$\frac{15}{10} = \frac{x}{28},$$

ἢ τὴν ἀναλογίαν

$$15 : 10 = x : 28,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα

$$x = \frac{15 \times 28}{10} = 42.$$

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν ἀναγκαζίων ἐργατῶν πρὸς ἀποπεράτωσιν τοῦ αὐτοῦ ἔργου εἰς 10 ἡμέρας εἶναι 42.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.—Ποσότης τις τροφῶν ἐπὶήρκεσεν εἰς 50 στρατιώτας 27 ἡμέρας· πόσος πρέπει νὰ ᾖναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν, ἵνα ἡ αὐτὴ τῶν τροφῶν ποσότης ἐπαρκέσῃ 35 ἡμέρας;

Ἐνταῦθα τὰ δύο δεδομένα καὶ ὑποτιθέμενα ἀνάλογα ποσὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, μὲς ἐδόθη δὲ ἡ τιμὴ 50 τοῦ πρώτου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν 27 τοῦ δευτέρου, καὶ μὲς ζητεῖται ποία θέλει εἶναι ἡ νέα τιμὴ τοῦ πρώτου, ὅταν τὸ δευτερον λάβῃ τὴν τιμὴν 35.

Ἐστω x ἡ νέα τιμὴ τοῦ πρώτου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν νέαν τιμὴν 35 τοῦ δευτέρου. Ἐπειδὴ, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στρατιωτῶν, ὁ ἀναγκαζίας πρὸς κατανάλωσιν ποσοῦ τινος τροφῶν ἀριθμὸς ἡμερῶν προφανῶς ἐλαττοῦται, τὰ ὑποτεθέντα ἀνάλογα ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ὁ λόγος λοιπὸν $\frac{27}{35}$ τῶν δύο τιμῶν 27 καὶ 35 τοῦ δευτέρου εἶναι ἴσος τῷ ἀντιστρόφῳ λόγῳ $\frac{x}{50}$ τῶν ἀντιστοιχοῦσων τιμῶν 50 καὶ x τοῦ πρώτου. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητά

$$\frac{27}{35} = \frac{x}{50}.$$

ἢ τὴν ἀναλογίαν

$$27 : 35 = x : 50,$$

ἐξ ἧς

$$x = \frac{50 \times 27}{35} = 38 + \frac{4}{7}.$$

Ὁ ἀπαιτούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν εἶναι $38 + \frac{4}{7}$ τοῦ στρατιώτου· τουτέστι, διὰ μὲν 38 στρατιώτας περισσεύει καὶ τι εἰς τῶν τροφῶν, διὰ δὲ 39 ἐλλείπει τι ἐξ αὐτῶν.

218. Συνήθως πρὸς λύσιν τῶν ἀναγομένων εἰς τὴν ἀπλὴν μέθοδον τῶν τριῶν ζητημάτων πράττομεν ὡς ἐξῆς.

Γράφομεν ἐπὶ κοθέτον στήλης τὴν μίαν ὑπὸ τὴν ἄλλην τὰς

δύο τιμὰς τοῦ ἐνὸς τῶν δεδομένων ποσῶν καὶ ἐπὶ τῆς κορυφῆς αὐτῆς τὸ εἶδος τοῦ ποσοῦ τοῦτου. Ὡσαύτως ἐπὶ δευτέρας καθέτου στήλης γράφομεν τὰς δύο τιμὰς τοῦ ἑτέρου τῶν δεδομένων ποσῶν οὕτως, ὥστε αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τὰ εὐρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὀριζουμένης γραμμῆς, καὶ ἐπὶ τῆς κορυφῆς αὐτῆς τὸ εἶδος τοῦ δευτέρου ποσοῦ. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ ὑποτίθενται ἀνάλογα, παρατηροῦμεν ἑὰ ταῦτα ἦναι κατ' εὐθείαν ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, καὶ, ἂν μὲν ἦναι κατ' εὐθείαν, σχηματίζομεν ἀμέσως τὴν ἀναλογίαν, ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ τὴν ζητουμένην τιμὴν τῆς ἀγνώστου, γράφοντες ἡγουμένους ἢ ἐπομένους αὐτῆς τὴν τιμὴν τοῦ ἐνὸς ποσοῦ καὶ τὴν ἀντίστοιχον αὐτῷ τιμὴν τοῦ ἑτέρου· ἂν δὲ ἀντιστρόφως, τότε σχηματίζομεν τὴν ἀπαιτουμένην πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου ἀναλογίαν γράφοντες τὴν μίαν τιμὴν τοῦ ἐνὸς καὶ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τοῦ ἑτέρου ἄκρους ἢ μέσους.

Παραδείγματος χάριν, διὰ τὴν λύσιν τοῦ πρώτου ζητήματος ἠθέλομεν, κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, διατάξει τὰ δεδομένα οὕτω·

πῆχαις	δραχμαὶ
5	20
7	χ

καὶ ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα, σχηματίζομεν τὴν ἀναλογίαν

$$5 : 7 = 20 : χ$$

γράφοντες τὰς δύο ἀντιστοίχους τιμὰς 5 καὶ 20 τῶν δύο δεδομένων ποσῶν, πῆχεων καὶ δραχμῶν, ἡγουμένους αὐτῆς, ἢ ἐπομένους οὕτω

$$7 : 5 = χ : 20,$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα διὰ τὴν ἀγνώστην χ τὴν αὐτὴν τιμὴν

$$χ = \frac{7 \times 20}{5} = 28.$$

Ὡσαύτως διὰ τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου παραδείγματος ἠθέλομεν γράψαι

στρατιῶται	πῆχαις
25	53
40	χ

καὶ ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα, ἠθέλομεν σχηματίσει ἀμέσως τὴν ἀναλογίαν

$$25 : 40 = 53 : χ,$$

ἐν ᾗ αἱ δύο ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ 25 καὶ 53 ἐτέθησαν ἡγούμενοι,
ἢ τὴν ἐξῆς

$$40 : 25 = \chi : 53,$$

ἐν ᾗ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ 25 καὶ 53 ἐτέθησαν ἐπόμενοι.

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ τρίτου ἠθέλωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα γράψαι

ἡμέραι	ἐργάται
15	28
10	χ

καὶ ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἠθέλωμεν σχηματίσει τὴν ἀναλογίαν

$$10 : 15 = 28 : \chi,$$

ἐν ᾗ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ 15 καὶ 28 ἐτέθησαν μέσοι.

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ τετάρτου προβλήματος ἠθέλωμεν γράψαι

ἡμέραι	στρατιῶται
27	50
35	χ

καὶ ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἠθέλωμεν σχηματίσει τὴν ἀναλογίαν

$$27 : 35 = \chi : 50,$$

ἐν ᾗ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ 27 καὶ 50 ἐτέθησαν ἄκροι, ἢ τὴν

$$35 : 27 = 50 : \chi,$$

ἐν ᾗ αἱ αὐταὶ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ ἐτέθησαν μέσοι.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.— Ἐπειδὴ διὰ τὴν λύσιν τῶν τοιούτου εἶδους προβλημάτων ὑπάρχει γενικὸς τις τρόπος πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀγνώστου χ , καὶ αὕτη προσδιορίζεται πάντοτε διὰ τῶν τριῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ὁ γενικὸς οὗτος τρόπος ὠνομάσθη μέθοδος τῶν τριῶν, καὶ προσετέθη καὶ ἡ λέξις ἀπ. / ἢ πρὸς διάκρισιν τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, περὶ ἧς θέλωμεν ἀμέσως πραγματευθῆ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2.— Ἀφοῦ σχηματίζωμεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον τὴν ἀναλογίαν, δι' ἧς εὐρίσκωμεν τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώστου χ , συνήθως ἀντὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἀμέσως τοὺς δύο μέσους ἢ τοὺς δύο ἄκρους καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ διαιρῶμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου ἢ μέσου, ἀποποιούμεν τὴν ἀναλογίαν καθιστώντες τοὺς δύο μέσους αὐτῆς ὅρους πρῶτους πρὸς τὸν γνωστὸν ἄκρον, ἢ τοὺς δύο ἄκρους πρῶτους πρὸς τὸν γνωστὸν μέσον. Ὡς δὲ ἡ ἀναλογία ἔχη καὶ κλασματικούς ὅρους, ἐξαλείφο-

μεν πρῶτον τοὺς παρονομαστὰς αὐτῶν πολλαπλασιάζοντες καταλήλως ἓνα ἄκρον καὶ ἓνα μέσον τῆς ἀναλογίας, καὶ ἔπειτα καθιστῶμεν τοὺς ἄκρους αὐτῆς πρῶτους πρὸς τοὺς μέσους.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἶχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$15 : 24 = 35 : \chi, \quad (1)$$

ἀντὶ νὰ πορισθῶμεν ἀμέσως ἐξ αὐτῆς τὴν τιμὴν τῆς χ

$$\chi = \frac{24 \times 35}{15}$$

ἀπολοποιῶμεν αὐτὴν καθιστῶντες τοὺς μέσους αὐτῆς 24 καὶ 35 πρῶτους πρὸς τὸν γνωστὸν ἄκρον 15 διὰ τῆς ἐξαλείψεως τῶν κοινῶν εἰς αὐτοὺς παραγόντων. Οὕτως, ἐπειδὴ ὁ 24 καὶ 15 ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸν 3, διαιροῦντες αὐτοὺς διὰ 3 θέλομεν ἔχει ἀντὶ τῆς ἀναλογίας (1) τὴν ἐξῆς

$$5 : 8 = 35 : \chi, \quad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ πάλιν ὁ ἄκρος 5 καὶ ὁ μέσος 35 ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸν 5, ἐξαλείφομεν αὐτὸν διαιροῦντες αὐτοὺς διὰ 5, καὶ εὐρίσκουμεν τὴν ἀναλογίαν

$$1 : 8 = 7 : \chi, \quad (3)$$

ἥτις θίδει διὰ χ τὴν αὐτὴν τιμὴν 56, ἣν καὶ ἡ ἀναλογία (1)· διότι ἀπεδείξαμεν προηγουμένως ὅτι διαιροῦντες ἓνα τῶν ἄκρων καὶ ἓνα τῶν μέσων ἀναλογίας τινὸς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ θέλομεν ἔχει νέαν ἀναλογίαν (207).

Ὡσαύτως, ἂν εἶχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{12}{5} : 3 = 14 : \chi, \quad (1)$$

ἠθέλομεν ἐξ αὐτῆς πορισθῇ διαδοχικῶς τὰς ἐξῆς

$$12 : 3 \times 5 = 14 : \chi,$$

$$4 : 5 = 14 : \chi,$$

$$2 : 5 = 7 : \chi,$$

πολλαπλασιάζοντες πρῶτον τὸν ἄκρον $\frac{12}{5}$ καὶ τὸν μέσον 3 ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 5 καὶ διαιροῦντες ἀκολουθῶς τὸν ἄκρον 12 καὶ τὸν μέσον 3×5 τῆς νέας ἀναλογίας $12 : 3 \times 5 = 14 : \chi$ διὰ 3, ἔπειτα τὸν νέον ἄκρον 4 καὶ τὸν ἕτερον μέσον 14 τῆς προκυπτούσης ἀναλογίας $4 : 5 = 14 : \chi$ διὰ 2, καὶ ἐπειδὴ οἱ μέσοι 5 καὶ 7 τῆς τελευταίας ἀναλογίας $2 : 5 = 7 : \chi$ εἶναι πρῶτοι πρὸς τὸν 2, ἡ ἀναλογία

(1) ἔλαβε τὴν ἀπλουστέραν αὐτῆς μορφήν, ἐξ ἧς περιζήμεθα εὐκολώτερον καὶ συντομώτερον τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώστου x .

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ.

219. Διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν λύνονται ἐκείνα τὰ ζητήματα ἐν οἷς μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ ποσῶν τινος καθὼς καὶ αἱ τιμαὶ πολλῶν ἄλλων, ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται τὸ πρῶτον καὶ πρὸς ᾧ ὑποτίθεται ἀνάλογον, καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ νέα τιμὴ αὐτοῦ, ὅταν ἅπαντα τὰ ἄλλα λάβωσι νέας τιμὰς.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἶχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα· 25 ἐργάται ἐργαζόμενοι 11 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 18 ἡμέρας κατασκευάσασαι τείχος 5 μέτρων τὸ ὕψος, 125 τὸ μῆκος καὶ 3 τὸ πλάτος· πόσοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 20 ἡμέρας θέλουσι κατασκευάσαι τείχος 9 μέτρων τὸ ὕψος, 75 τὸ μῆκος καὶ 4 τὸ πλάτος;

ἐν ᾧ μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ 25 τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, καθὼς καὶ αἱ τιμαὶ 11, 18, 5, 125, 3 τῶν ἐργασίμων ὥρῶν, τῶν ἡμερῶν, τοῦ ὕψους, τοῦ μήκους καὶ τοῦ πλάτους τοῦ ὑπ' αὐτῶν κατασκευασθέντος τείχους, ἀφ' ὧν ποσῶν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν ἐξαρτᾶται καὶ πρὸς ᾧ ὑποτίθεται ἀνάλογος, καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ νέα τιμὴ τῶν ἐργατῶν, ὅταν πάντα τὰ ἄλλα λάβωσιν ἀμοιβαίως τὰς νέας τιμὰς 10, 20, 9, 75, 4, ἂν εἶχομεν, λέγομεν, πρὸς λύσιν τὸ ἀνωτέρω ζήτημα, ὁ γενικὸς τρόπος, δι' οὗ εὐρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν, καλεῖται σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν. Καὶ ἰδοὺ διατί.

Εἶναι φανερόν ὅτι, ἂν υποθέσωμεν ὅτι τὰ ποσὰ ὥραι, ἡμέραι, ὕψος, μῆκος καὶ πλάτος, πρὸς ᾧ τὸ δεδομένον ἐργάται ὑποτίθεται ἀνάλογον, μεταβάλλονται πρῶτον τὸ ἐν, ἔπειτα καὶ τὸ δεύτερον, εἴτα καὶ τὸ τρίτον, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι καὶ τοῦ τελευταίου, λαμβάνοντα τὰς νέας αὐτῶν τιμὰς, καὶ εὐρωμεν τὰς εἰς ἑκάστην νέαν μεταβολὴν τῶν δεδομένων ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ ζητουμένου, ἢ εὑρεθησομένην τελευταίον τιμὴν αὐτοῦ μετὰ τὴν μεταβολὴν ἁπάντων τῶν ἀφ' ὧν τοῦτο ἐξαρτᾶται ποσῶν θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη.

Πρὸς εὐρασίαν τῶν διαφορῶν διαδοχικῶν τιμῶν τοῦ ζητουμένου διατάσσομεν τὰ δεδομένα τοῦ ζητήματος ὡς ἐξῆς·

ἐργάται	ὥραι	ἡμέραι	ὕψος	μῆκος	πλάτος
25	11	18	5	125	3
x	10	20	9	75	4

παριστῶντες διὰ x τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν.

"Ας υποθέσωμεν ἐν πρώτοις κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα ὅτι μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργασίμων ὥρων ἀπὸ 11 γίνεται 10, αἱ δὲ ἡμέραι, τὸ μήκος, πλάτος καὶ ὕψος μένουσιν ἀμετάβλητα. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν 25 θεῖται μεταβλητῇ ἀναλόγως, καὶ ἐὰν καλέσωμεν ν τὴν νέαν αὐτοῦ τιμὴν, θέλομεν εὑρεῖν αὐτὴν διὰ τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν λύοντες τὸ ἐξῆς ζήτημα·

1ον.—25 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 11 ὥρας τῇ ἡμέρᾳ, κατασκευάσαν τὸ τεῖχος εἰς 18 ἡμέρας· πόσοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τῇ ἡμέρᾳ, ἤθελον κατασκευάσει τὸ αὐτὸ τεῖχος εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἡμερῶν;

ἐργάται	ὥραι
25	11
ν	10

δι' οὗ εὐρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν ν τῶν ἐργατῶν.

Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ν, ἂν υποθέσωμεν ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς 18 τῶν κατ' ἂν ἐργάσθησαν ἡμερῶν ἔγεινεν 20, ἐνῶ τὸ ὕψος, μήκος καὶ πλάτος ἔμειναν τὰ αὐτὰ, καὶ ἂν ζητήσωμεν ποῖαν μεταβολὴν θείει λάβει ὁ εὐρεθεὶς ἀριθμὸς ν τῶν ἐργατῶν. Εἶναι φανερόν ὅτι πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ λύσωμεν διὰ τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν τὸ ἐξῆς ζήτημα·

2ον.—ν ἐργάται, ἐργαζόμενοι 18 ἡμέρας, κατασκευάσαν τὸ τεῖχος· πόσοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι 20 ἡμέρας, θέλουσι κατασκευάσει τὸ αὐτὸ τεῖχος;

ἐργάται	ἡμέραι
ν	18
φ	20

δι' οὗ εὐρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν φ τῶν ἐργατῶν.

Τοῦ φ ὄντος ἀριθμοῦ γνωστοῦ, ἂν υποθέσωμεν πάλιν ὅτι καὶ τὸ ὕψος δ τοῦ τεύχους ἔγεινεν 6, τοῦ μήκους καὶ πλάτους μείνεντων τῶν αὐτῶν, καὶ ἂν ζητήσωμεν ποῖαν μεταβολὴν ὡς ἐκ τούτου θείει λάβει ὁ ἀριθμὸς φ τῶν ἀπαιτουμένων ἐργατῶν. Πρὸς τοῦτο εἶναι φανερόν ὅτι πρέπει νὰ λύσωμεν διὰ τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν τὸ ἐξῆς ζήτημα·

3ον.—φ ἐργάται χρειάζονται πρὸς κατασκευὴν τεύχους ἔχοντος 5 μέτρων ὕψος· πόσοι θέλουσι χρειασθῇ πρὸς κατασκευὴν τοῦ αὐτοῦ τεύχους, ἀλλ' ἔχοντος 9 μέτρων ὕψος;

ἐργάται	ὕψος
φ	5
ψ	9

δι' οὗ εὐρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν ψ τῶν ἀπαιτουμένων ἐργατῶν.

Τοῦ ψ ὄντος ἀριθμοῦ γνωστοῦ, ἃς ὑποθέσωμεν πρὸς τούτοις ὅτι καὶ τὸ μῆκος 125 τοῦ τείχους ἔγεινεν 75, τοῦ πλάτους μείναντος ἀμεταβλήτου, καὶ ἃς ζητήσωμεν ποίαν μεταβολὴν ὡς ἐκ τούτου θέλει λάβει ὁ ἀριθμὸς ψ τῶν ἀπαιτουμένων ἐργατῶν. Εἶναι φανερόν ὅτι πρέπει πρὸς τοῦτο νὰ λύσωμεν διὰ τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν τὸ ἐξῆς ζήτημα·

Ἰον.— ψ ἐργάζεται ἀπαιτοῦνται, ἵνα κατασκευάσῃ τείχος ἔχον 125 μέτρων μῆκος· πόσοι ἐργάται θέλουσι χρειασθῇ, ἵνα κατασκευάσωσι τείχος 75 μέτρων τὸ μῆκος;

ἐργάται	μῆκη
ψ	125
ω	75

δι' οὗ εὐρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν ω τῶν ἀναγκαίων ἐργατῶν.

Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ω , ἃς ὑποθέσωμεν τέλος ὅτι καὶ τὸ πλάτος 3 τοῦ τείχους ἔγεινεν 4, καὶ ἃς ζητήσωμεν ποίαν μεταβολὴν θέλει λάβει ὁ ἀριθμὸς ω τῶν ἀπαιτουμένων πρὸς κατασκευὴν αὐτοῦ ἐργατῶν. Εἶναι φανερόν ὅτι, ἐὰν παραστήσωμεν ὡς προείπομεν διὰ χ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν, πρέπει πρὸς εὐρεσιν αὐτοῦ νὰ λύσωμεν πάλιν διὰ τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν τὸ ἐξῆς ζήτημα·

Ἰον.— ω ἐργάται κατασκευάσαι τείχος 3 μέτρων τὸ πλάτος· πόσοι ἐργάται θέλουσι κατασκευάσει τὸ αὐτὸ τείχος, ἀλλ' ἔχον πλάτος 4 μέτρων;

ἐργάται	πλάτη
ω	3
χ	4

δι' οὗ εὐρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν χ τῶν ἐργατῶν.

Ὁ εὐρεθεὶς λοιπὸν ἀριθμὸς χ θέλει προφανῶς παριστᾶν τὴν μεταβολὴν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν 25 ἐργατῶν, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν σύγχρονον μεταβολὴν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργασίμων ὥρων, τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, τοῦ ὕψους, τοῦ μήκους καὶ πλάτους τοῦ τείχους. Θέλει λοιπὸν εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἐπειδὴ τώρα οὗτος εὐρίσκεται διὰ τῶν ἀριθμῶν ν , θ , ψ , ω , οὓς εὐρίσκομεν διὰ τῆς λύσεως ζητημάτων ἀναγομένων εἰς τὴν ἀπλὴν μέθοδον τῶν τριῶν, ὁ τρόπος τῆς εὐρέσεως αὐτοῦ ἐκλήθη σινητορ μέθοδος τῶν τριῶν.

220. Ἐν τῇ πράξει δὲν εὐρίσκουσι πραγματικῶς τὰς τιμὰς τῶν $v, \phi, \psi, \omega, \delta$ ὧν φθάνομεν εἰς τὴν ζητούμενην τιμὴν χ , ἀλλὰ διατάττουσι τὰς δι' ὧν αὐταὶ προσδιορίζονται ἀναλογίας οὕτως, ὥστε αἱ μὲν ἀγνωστοὶ v, ϕ, ψ, ω νὰ ἐξαλείφωνται ἀπ' αὐτῶν, ἡ δὲ ζητούμενη τιμὴ τῆς χ νὰ εὐρίσκηται ἀμέσως. Παραδείγματος χάριν, ἰδοὺ πῶς ἠθέλομεν διατάξει διὰ τὴν λύσιν τοῦ προηγουμένου ζητήματος ἐκάστην τῶν μερικῶν ἀναλογιῶν, ἃς εὐρίσκομεν λύοντες ἐκαστον τῶν μερικῶν ζητημάτων 1ον, 2ον, 3ον, 4ον, 5ον, εἰς ἃ τὸ δευδόμενον ἀναλύεται,

$$10 : 11 = 25 : v \quad (\text{ἀναλογία τοῦ 1ου ζητήματος}).$$

$$20 : 18 = v : \phi \quad (\text{ἀναλογία τοῦ 2ου ζητήματος}).$$

$$5 : 9 = \phi : \psi \quad (\text{ἀναλογία τοῦ 3ου ζητήματος}).$$

$$125 : 75 = \psi : \omega \quad (\text{ἀναλογία τοῦ 4ου ζητήματος}).$$

$$3 : 4 = \omega : \chi \quad (\text{ἀναλογία τοῦ 5ου ζητήματος}).$$

Ἐπειδὴ τῶρα κατὰ τὰ ἐν τῇ § 211 λεχθέντα τὰ γινόμενα τῶν ὁμοπαγῶν ὄρων δύο ἢ πλειοτέρων ἀναλογιῶν ἀποτελοῦσι νέαν ἀναλογίαν, θέλομεν ἔχει ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀναλογιῶν τὴν ἐξῆς·

$$10 \times 20 \times 5 \times 125 \times 3 : 11 \times 18 \times 9 \times 75 \times 4$$

$$=$$

$$25 \times v \times \phi \times \psi \times \omega : v \times \phi \times \psi \times \omega \times \chi,$$

ἥς διαιροῦντες τοὺς δύο ὄρους τοῦ τελευταίου λόγου διὰ τοῦ κοινοῦ γινομένου $v \times \phi \times \psi \times \omega$, εὐρίσκομεν τὴν ἐπομένην·

$$10 \times 20 \times 5 \times 125 \times 3 : 11 \times 18 \times 9 \times 75 \times 4 = 25 : \chi,$$

ἐξ ἧς προσδιορίζομεν ἀμέσως τὴν τιμὴν τῆς χ , καὶ βλέπομεν ὅτι αὕτη εὐρίσκεται χωρὶς νὰ προϋπολογισθῶσιν αἱ τιμαὶ τοῦ v, ϕ, ψ , καὶ ω, δ ὧν εἰχομεν φθάσει εἰς αὐτήν. Ἐν ἄλλαις λέξεσι,

221. Πρὸς συντομωτέραν λύσιν τῶν ζητημάτων, τῶν λυομένων διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, παραλείπομεν ὅλους τοὺς διὰ μέσου συλλογισμούς, καὶ διατάττομεν τὰ τῆς πράξεως σκεπτόμεναι ὡς ἐξῆς·

$$\left. \begin{array}{l} 10 : 11 \\ 20 : 18 \\ 5 : 9 \\ 125 : 75 \end{array} \right\} = 25 : \chi.$$

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βέροιας

Γράφομεν τὸν χ τέταρτον ὅρον καὶ τὸν σύστοιχον αὐτοῦ 25 τρί-

τον καὶ πρὸ τοῦτου τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος, καὶ μετὰ τοῦτο τὸ
 σημεῖον } ἔπειτα λέγομεν· ἐπειδὴ αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν
 ὥρων, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν ἐλαττοῦται, ἔπεται ὅτι τὰ ποσὰ
 ἐργάται καὶ ἐργάσιμοι ὥραι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἐπομένως
 ὁ ὅρος x καὶ ὁ ἀντίστοιχος αὐτοῦ 10 πρέπει νὰ ᾔναι ἄκροι. Ἐπειδὴ,
 αὐξανομένου καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν
 ἐλαττοῦται, ἔπεται ὅτι τὰ ποσὰ ἐργάται καὶ ἐργάσιμοι ἡμέραι
 εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἐπομένως ὁ x καὶ ὁ ἀντίστοιχος αὐτοῦ
 20 πρέπει νὰ ᾔναι ἄκροι. Ἐπειδὴ πάλιν, αὐξανομένου καὶ τοῦ ὕψους
 τοῦ τεύχους, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν αὐξάνει, ἔπεται ὅτι τὰ ποσὰ
 ἐργάται καὶ ὕψη εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα, ἐπομένως ὁ x καὶ ὁ
 ἀντίστοιχος αὐτοῦ 9 πρέπει νὰ ᾔναι ἐπόμενοι. Ἐπειδὴ τέλος, αὐ-
 ξανομένου τοῦ μήκους καὶ τοῦ πλάτους, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν
 αὐξάνει, ὁ x καὶ οἱ ἀντίστοιχοι αὐτοῦ 75 καὶ 4 πρέπει νὰ ᾔναι
 ἐπόμενοι. Οὕτω γράφομεν ἀμέσως τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον τοὺς
 λόγους $10 : 11, 20 : 18, 5 : 9, 125 : 75, 3 : 4$, καὶ πολλαπλα-
 σιάζοντες αὐτοὺς κατὰ τάξιν πορίζομεθα τὴν ἀνάλογον

$$10 \times 20 \times 5 \times 125 \times 3 : 11 \times 18 \times 9 \times 75 \times 4 = 25 : x,$$

ἐξ ἧς προσδιορίζομεν ἀμέσως τὴν ζητούμενην τιμὴν τῆς x .

222. Πρὸς περισσοτέρων τῶν ἀνωτέρω κατελήψιν ὡς λύσωμεν
 ὁμοιοτρόπως καὶ τὸ ἐπόμενον πρόβλημα.

Εἰς 20 ἡμέρας 8 βόες ἔφαγον 1000 μνᾶς χόρτον, 3 ὥρας βο-
 σκοῦντες καθ' ἑκάστην· εἰς πόσας ἡμέρας 12 βόες θέλουσι φάγει
 450 μνᾶς χόρτον, 2 ὥρας βόσκοῦντες καθ' ἑκάστην;

Διατάσσομεν πρῶτον τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος κατὰ τὸν
 συνήθη τρόπον

ἡμέραι	βόες	μναῖ	ὥραι
20	8	1000	3
x	12	450	2

παριστῶντες διὰ x τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν.

Ἐνταῦθα μᾶς ἐδόθη ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ ἡμέραι καθὼς καὶ αἱ τι-
 μαὶ 8, 1000 καὶ 3 τῶν βοῶν, μνῶν καὶ ὥρων τῆς βοσκῆς, ἀφ' ὧν
 ἡ τιμὴ αὐτοῦ 20 ἐξαρτᾶται, καὶ πρὸς ᾧ ὑποτίθεται ἀνάλογος, καὶ
 μᾶς ζητεῖται ποία θέλει εἶναι ἡ νέα αὐτοῦ τιμὴ x , ὅταν τὰ ἀφ' ἧν
 ἐξαρτᾶται ποσὰ λάβωσιν ὁμοιόμοιως τὰς νέας τιμὰς 12, 450 καὶ 2.

Ὑποθέτομεν κατ' ἀρχὰς ὅτι μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν βοῶν γίνεται
 12 ἀπὸ 8, καὶ εὐρίσκομεν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν x τῶν ἀπαιτου-

μένων ἡμερῶν, λύοντες διὰ τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν τὸ ἐξῆς ζήτημα.

8 βόες ἐχρειάσθησαν 20 ἡμέρας, 12 βόες πόσας ἡμέρας θέλουσι χρειασθῇ;

βόες	ἡμέραι
8	20
12	ν

Εὐρεθέντος τοῦ ν , ὑποθέτομεν ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς 1000 τῶν μῶν τοῦ χόρτου ἔγεινε 450, καὶ ζητοῦμεν τὴν νέαν τιμὴν φ τοῦ εὐρεθέντος ἀριθμοῦ ν τῶν ἡμερῶν, λέγοντες

Ἐχρειάσθησαν ν ἡμέρας, ἵνα φάγωσι 1000 μῶας, πόσας ἡμέρας θέλουσι χρειασθῇ, ἵνα φάγωσι 450;

μῶας	ἡμέραι
1000	ν
450	φ

Εὐρεθέντος καὶ τοῦ φ , ὑποθέτομεν τελευταῖον ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς 3 τῶν ὥρῶν τῆς βοσκῆς ἔγεινε 2, καὶ ζητοῦμεν τὴν ζητουμένην νέαν τιμὴν χ τοῦ εὐρεθέντος ἀριθμοῦ φ τῶν ἡμερῶν λέγοντες

Ἐχρειάσθησαν φ ἡμέρας 3 ὥρας βοσκοῦντες καθ' ἑκάστην, πόσας ἡμέρας ἤθελον χρειασθῇ, ἂν ἔβοσκοι 2 ὥρας;

ὥραι	ἡμέραι
3	φ
2	χ

Διατάσσοντες τώρα τὰς τρεῖς μερικὰς ἀναλογίας, τὰς διὰ τὴν λύσιν τῶν ἀνωτέρω τριῶν προβλημάτων τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν κατασκευαζομένας, κατὰ τὸν ἐν τῇ § 220 ἐκτεθέντα τρόπον, θέλομεν ἔχει

$$\begin{aligned} 12 : 8 &= 20 : \nu \\ 1000 : 450 &= \nu : \varphi \\ 2 : 3 &= \varphi : \chi \end{aligned}$$

Ἀπλοποιοῦντες ταύτας διὰ τῆς ἐξαλείψεως τῶν βοηθητικῶν ἀγνώστων ν καὶ φ καὶ τῶν κοινῶν εἰς τοὺς γνωστοὺς ἄκρους καὶ μέσους παραγόντων, καὶ πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὁμοταγεῖς αὐτῶν ἔκρους, θέλομεν ἔχει τὴν τελικὴν ἀναλογίαν

$$1 : 9 = 1 : \chi,$$

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν ἀμέσως $\chi = 9$.

Ἄν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς ζήτημα,

Πρὸς ἡματισμὸν 225 στρατιωτῶν ἐχρειάσθησαν 1000 πῆχεις

τσόχας $1 + \frac{1}{2}$ πήγες τὸ πλάτος· πόσον πλάτος πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ τσόχα, ἵνα 900 πήγεις ἐπαρκέσωσι διὰ τὸν ἱματισμὸν 200 στρατιωτῶν;

ἡθέλομεν διατάξει τὰ δεδομένα αὐτοῦ ὡς ἑξῆς:

στρατιῶται	πήγεις	πλάτη
225	1000	$1 + \frac{1}{2}$
200	900	x

καὶ εὖρει σκεπόμενοι ὡς ἐξεθέσαμεν ἀνωτέρω τὰς ἑξῆς μερικὰς ἀναλογίας

$$225 : 200 = 1 + \frac{1}{2} : x,$$

$$900 : 1000 = x : 1 + \frac{1}{2},$$

ἔξ ὧν ἡθέλομεν πορισθῇ τὴν τελικὴν

$$27 : 40 = 1 : x$$

ἔξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως

$$x = \frac{40}{27} = 1 + \frac{14}{27}.$$

ΓΕΝΙΚΗ ΤΙΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐπαναλαμβάνομεν διὰ τελευταίαν φερὰν ὅτι τὰ ποσά, ἐξ ὧν ἡ τιμὴ τοῦ ζητουμένου ἐξαρτᾶται, ἀποτίθεται ἀνάλογα. Ὡς ἐπὶ τὸ πλείστον τοῦτο δὲν ὑπάρχει. Παραδείγματός χάριν, ἐκ τοῦ ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν ἐκ 300 ἔγινε 5, ἦτοι τὸ $\frac{1}{60}$, δὲν ἐπεται ὅτι καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν ἐκτελεσθησομένη ἐργασία θέλει γείνει τὸ $\frac{1}{60}$, διότι πολὺ πιθανόν ὅχι μόνον τοῦτο νὰ μὴ ὑπάρχῃ, ἀλλὰ καὶ οἱ 5 ἐργάται νὰ μὴ δύνανται ἄνευ τῆς βοήθειας ἄλλων, ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ἔργου, νὰ παραγῇ ὅσις τι ἀποτελέσῃ. Ὡσαύτως δὲν ἐπεται ὅτι, ἐὰν οἱ βόες βοσκῇσιν διπλάσιον ἀριθμὸν ὥρων, θέλουσι φάγει καὶ διπλάσιαν ποσότητα χόρτου, διότι προφανῶς οἱ βόσκοντες βόες δὲν καταναλίσκουσι διχακτὴν τὴν αὐτὴν ποσότητα χόρτου.

ΓΕΝΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ.

223. "Ας ὑποθέσωμεν ὅτι ποσὸν τι M ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ποσῶν $A, B, \Gamma, \dots$, πρὸς ἃ εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογον, καὶ ἐκ τῶν ποσῶν $\Pi, K, P, \dots$ πρὸς ἃ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον, καὶ ὅτι μᾶλλον δίδεται ἡ τιμὴ μ τοῦ M , ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὰς τιμὰς $\alpha, \beta, \gamma, \dots$,

$\pi, \kappa, \rho, \dots$ τῶν ἀφ' ὧν τοῦτο ἐξαρτᾶται ποσῶν $A, B, \Gamma, \dots, \Pi, K, P, \dots$, καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ ρέα αὐτοῦ τιμὴ χ , ὅταν τὰ ποσὰ $A, B, \Gamma, \dots, \Pi, K, P, \dots$ λάβωσι τὰς ρέας τιμὰς $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \pi, \kappa, \rho, \dots$.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω γενικὸν ζήτημα, εἰς ὃ ἀνάγεται πᾶν ζήτημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, εἴ τινα γενικῶς διάφορα διακρίνομεν.

1ον. Τὴν δεδομένην τιμὴν μ τοῦ ποσοῦ M .

2ον. Τὰς τιμὰς $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ τῶν ποσῶν $A, B, \Gamma, \dots$, πρὸς ἃ τὸ M ὑποτίθεται κατ' εὐθείαν ἀνάλογον, τὰς ἀντιστοιχοῦσας εἰς τὴν τιμὴν αὐτοῦ μ .

3ον. Τὰς τιμὰς $\pi, \kappa, \rho, \dots$ τῶν ποσῶν $\Pi, K, P, \dots$, πρὸς ἃ τὸ M ὑποτίθεται ἀντιστρόφως ἀνάλογον, τὰς ἀντιστοιχοῦσας εἰς τὴν αὐτὴν τιμὴν αὐτοῦ μ .

4ον. Τὰς ρέας τιμὰς $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ τῶν κατ' εὐθείαν ἀναλόγων ποσῶν $A, B, \Gamma, \dots$.

5ον. Τὰς ρέας τιμὰς $\pi, \kappa, \rho, \dots$ τῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων ποσῶν $\Pi, K, P, \dots$.

6ον. Τὴν ζητούμενην τιμὴν χ τοῦ ποσοῦ M , τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὰς ρέας τιμὰς $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \pi, \kappa, \rho, \dots$ τῶν ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται ποσῶν $A, B, \Gamma, \dots, \Pi, K, P, \dots$.

Εἶναι τῶρα φανερόν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ χ θέλει ἐξεργᾶσθαι κατὰ τινὰ τρόπον ἐκ τῶν τιμῶν $\mu, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \pi, \kappa, \rho, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \pi, \kappa, \rho, \dots$ καὶ οὕτως ὥστε, ἐὰν ἀντὶ τοῦ $\mu, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \pi, \kappa, \rho, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \pi, \kappa, \rho, \dots$ θέσωμεν τὰς ἀναφερομένας εἰς τὸ ζήτημα τιμὰς αὐτῶν, θελωμεν εὑρεῖ τὴν ἀναφερομένην εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο τιμὴν τοῦ ζητουμένου.

Ἡ γενικὴ αὕτη σχέσις, ἡ μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω ποσοτήτων ὑπάρχουσα, δι' ἧς εὐρίσκομεν τὴν ζητούμενην τιμὴν παντὸς ζητήματος, ἀναγομένου εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν, καλεῖται γενικὸς τύπος τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

224. Ἄς ἴδωμεν τῶρα πῶς θέλωμεν εὑρεῖ τοῦτον, καὶ πρὸς τοῦτο ὡς διατάξωμεν τὰ δεδομένα τοῦ ζητήματος κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τρόπον,

M	A	B	$\Gamma \dots \Pi$	K	$P \dots$
μ	α	β	$\gamma \dots \pi$	κ	$\rho \dots$

Ἄς ἐκτεθέντα ἀναγῶμεν τὴν ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῶν ποσῶν $A, B, \Gamma, \dots$ καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῶν $\Pi, K, P, \dots$.

Ἐπειδὴ ὑποτίθεται ὅτι τὸ ποσὸν M εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογον τῶν ποσῶν $A, B, \Gamma, \dots$ καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῶν $\Pi, K, P, \dots$.

κατὰ τὰ λεγθέντα ἐν τῇ § 221 θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω γενικοῦ ζητήματος διάταξιν·

$$\left. \begin{array}{l} \alpha : \alpha' \\ \beta : \beta' \\ \gamma : \gamma' \\ . : . \\ . : . \\ \pi' : \pi \\ \kappa' : \kappa \\ \rho' : \rho \\ . : . \end{array} \right\} = \mu : \chi$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως

$$\chi = \frac{\mu \times \alpha \times \beta' \times \gamma' \times \dots \times \pi \times \kappa \times \rho \times \dots}{\alpha \times \beta \times \gamma \times \dots \times \pi' \times \kappa' \times \rho' \times \dots} \quad (21)$$

Λοιπὸν βλέπομεν ὅτι ἡ γενικὴ τιμὴ τοῦ ζητουμένου χ εὑρίσκει-
ται, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἡ πρώτη αὐτοῦ τιμὴ μ ἐπὶ τὸ γινόμε-
νον $\alpha' \times \beta' \times \gamma' \times \dots$ τῶν νέων τιμῶν τῶν ποσῶν $A, B, \Gamma, \dots$,
πρὸς ἃ τοῦτο ὑποτίθεται κατ' εὐθείαν ἀνάλογον, καὶ ἐπὶ τὸ γινό-
μενον $\pi \times \kappa \times \rho \times \dots$ τῶν πρώτων τιμῶν τῶν ποσῶν $\Pi, K, P, \dots$,
πρὸς ἃ ὑποτίθεται ἀντιστρόφως ἀνάλογον, καὶ τὸ οὕτως εὑρεθησά-
μενον γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ γινουμένου $\alpha \times \beta \times \gamma \times \dots$ τῶν
πρώτων τιμῶν τῶν ποσῶν $A, B, \Gamma, \dots$, πρὸς ἃ εἶναι κατ' εὐθείαν
ἀνάλογον, ἐπὶ τὸ γινόμενον $\pi' \times \kappa' \times \rho' \times \dots$ τῶν νέων τιμῶν τῶν
ποσῶν $\Pi, K, P, \dots$, πρὸς ἃ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον.

Παραδείγματος χάριν, διὰ τὸ ἐν τῇ § 219 πρόβλημα ἠθέλομεν
εὑρεῖ θέτοντες 25 ἀντὶ τοῦ μ , 9 ἀντὶ τοῦ α' , 75 ἀντὶ τοῦ β' , 4
ἀντὶ τοῦ γ' , 11 ἀντὶ τοῦ π , 18 ἀντὶ τοῦ κ , 5 ἀντὶ τοῦ α , 125
ἀντὶ τοῦ β , 3 ἀντὶ τοῦ γ , 10 ἀντὶ τοῦ π' , καὶ 20 ἀντὶ τοῦ κ' ,
διὰ τιμὴν τῆς χ

$$\chi = \frac{25 \times 9 \times 75 \times 4 \times 11 \times 18}{5 \times 125 \times 3 \times 10 \times 20}$$

ὅπως καὶ ἐν τῇ § 221.

Ὡσαύτως, διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου (1) ἠθέλομεν εὑρεῖ

$$\chi = \frac{20 \times 8 \times 450 \times 3}{12 \times 1000 \times 2}$$

διὰ τὰς ζητούμενας ἡμέρας τοῦ προβλήματος τῆς § 222.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΟΝΑΔΑ.

225. Πολλάκις ἀντὶ τῆς εὐρωμεν ἀπ' εὐθείας, ὡς προείπομεν, διὰ τῆς ἀπλῆς ἢ συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν τὰς λύσεις τῶν εἰς αὐτάς ἀναγομένων ζητημάτων, μεταχειρίζομεθα ὡς ἀπλουστέραν τὴν καλουμένην μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Ἰνα δειξώμεν καταληπτότερον εἰς τί αὕτη συνίσταται, θέλομεν ἁμέσως ἐφαρμόσει αὐτὴν εἰς τινὰ τῶν προηγουμένων ζητημάτων, ἢ εἰς τινὰ ὅμοια τούτοις. Ἄς ὑποθέσωμεν δὲ ἐν πρώτοις ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

1ον. Εἰς 15 ἡμέρας 25 ἐργάται κατεσκευάσαν ἔργον τι· εἰς πόσας ἡμέρας 17 ἐργάται θέλουσι κατασκευάσαι τὸ αὐτὸ ἔργον;

ἐργάται	ἡμέραι
25	15
17	x

Πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου λέγομεν· ἐπειδὴ 25 ἐργάται ἐχρεώσθησαν 15 ἡμέρας πρὸς κατασκευὴν τοῦ ἔργου, ἵνα κατασκευάσῃ αὐτὸ 1 ἐργάτης, θέλει χρειασθῇ 25^{αι} περισσότερον χρόνον, ἥτοι 15×25 ἡμέρας. Ἐπειδὴ δὲ 1 ἐργάτης χρειάζεται 15×25 ἡμέρας, οἱ 17 ἐργάται θέλουσι χρειασθῇ 17^{αι} ὀλιγώτερον χρόνον, ἥτοι $\frac{15 \times 25}{17}$ ἡμέρας. Λοιπὸν $x = \frac{15 \times 25}{17}$ ἡμέραι, τοῦθ' ὅπερ ἠθέλομεν εὐρεῖ καὶ διὰ τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

2ον. Διὰ 17 πῆχεις ἀφάσματος ἐπληρώσαμεν 29 δραχμάς· πόσους πῆχεις ἠθέλομεν ἀγοράσαι ἀντὶ 53 δραχμῶν;

Πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου λέγομεν, ἐπειδὴ ἀντὶ 29 δραχμῶν ἠγοράσαμεν 17 πῆχεις, ἀντὶ 1 δραχμῆς ἠθέλομεν ἀγοράσαι $\frac{17}{29}$ τοῦ πῆχεις, ἐπομένως ἀντὶ 53 δραχμῶν ἠθέλομεν ἀγοράσαι $\frac{17 \times 53}{29}$ πῆχεις. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγορασθησομένων πῆχειν x εἶναι $\frac{17 \times 53}{29}$, ὅπερ ἠθέλομεν εὐρεῖ καὶ διὰ τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Βλέπομεν δὲ ὅτι ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα συνίσταται εἰς τὴν εὐρεσιν πρώτον τῆς τιμῆς τοῦ ζητουμένου, ὅταν τὸ ἐξ οὗ ἐξαρτᾶται ποσὸν ὑποτεθῇ ἴσον τῇ μονάδι, καὶ ἔπειτα ἐκ τῆς ἐκρεθείσης τιμῆς καὶ πορισθῶσι τὴν ζητουμένην τοῦ ζητήματος.

226. Ἐστω τώρα πρὸς λύσιν καὶ τὸ ἐξῆς ζήτημα·

Εἰς 18 ἡμέρας 25 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 11 ὥρας τὴν ἡμέραν,

κατεσκεύασαν τείχος 5 μέτρων τὸ ὕψος, 125 τὸ μῆκος καὶ 3 τὸ πλάτος· πόσοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 20 ἡμέρας, θέλουσι κατασκευάσει τείχος 9 μέτρων τὸ ὕψος, 75 τὸ μῆκος καὶ 4 τὸ πλάτος;

ἐργάται	ὥραι	ἡμέραι	ὕψη	μῆκη	πλάτη
25	11	18	5	125	3
χ	10	20	9	75	4

Ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω ζητήματος συνίσταται εἰς τὴν εὑρεσιν πρῶτον τοῦ ἀπαιτουμένου ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, ὅταν τὰ δεδομένα ὥραι, ἡμέραι, ὕψος, μῆκος, καὶ πλάτος, ἐξ ὧν οὗτος ἐξαχθῇ, ὑποθεθῶσιν ἴσα τῇ μονάδι, τουτέστιν εἰς τὸ νᾶ εὐρωμεν πρῶτον πόσοι ἐργάται θέλουσι χρειασθῇ, ἵνα κατασκευάσωσιν εἰς μίαν ἡμέραν, 1 ὥραν ἐργαζόμενοι καθ' ἑκάστην, τείχος 1 μέτρου τὸ ὕψος, 1 μέτρου τὸ μῆκος καὶ 1 μέτρου τὸ πλάτος, καὶ ἐκ τοῦ οὕτως εὑρεθησομένου ἀριθμοῦ νᾶ πορισθῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀπαιτουμένου ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, ὅταν αἱ ὥραι ἀντὶ 1 γείνωσι 10, αἱ ἡμέραι ἀντὶ 1 γείνωσιν 20, τὸ ὕψος ἀντὶ 1 γείνη 9, τὸ μῆκος ἀντὶ 1 γείνη 75 καὶ τὸ πλάτος ἀντὶ 1 γείνη 4.

Πρὸς τοῦτο δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς·

25 εἶναι ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν, ὅταν οὗτοι ἐργαζονται 11 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἂν ἐργαζόντο 1 ὥραν καθ' ἑκάστην, ἠθέλομεν προφανῶς χρειασθῇ 25×11 ἐργάτας.

25×11 ἐργάται εἶναι ἀναγκαῖοι, ἵνα κατασκευάσωσι τὸ ἔργον εἰς 18 ἡμέρας· πρὸς κατασκευὴν αὐτοῦ εἰς 1 μόνην ἡμέραν ἠθέλομεν χρειασθῇ $25 \times 11 \times 18$ ἐργάτας.

$25 \times 11 \times 18$ ἐργάτας ἠθέλομεν χρειασθῇ, ὅταν τὸ ὕψος τοῦ τείχους ἦναι 5 μέτρων, ἂν τὸ ὕψος ἦτο 1 μέτρου, ἠθέλομεν χρειασθῇ 5κις ὀλιγωτέρους ἐργάτας, ἥτοι $\frac{25 \times 11 \times 18}{5}$.

$\frac{25 \times 11 \times 18}{5}$ ἐργάτας ἠθέλομεν χρειασθῇ, ὅταν τὸ μῆκος ἦναι 125 μέτρων, ἂν ἦτο 1 μέτρου, ἠθέλομεν χρειασθῇ 125κις ὀλιγωτέρους, ἥτοι $\frac{25 \times 11 \times 18}{5 \times 125}$.

$\frac{25 \times 11 \times 18}{5 \times 125}$ ἐργάτας ἠθέλομεν χρειασθῇ, ὅταν τὸ πλάτος ἦναι 3 μέτρων, ἂν ἦτο 1 μέτρου, ἠθέλομεν χρειασθῇ 3κις ὀλιγωτέρους, ἥτοι $\frac{25 \times 11 \times 18}{5 \times 125 \times 3}$.

Λοιπὸν $\frac{25 \times 11 \times 18}{5 \times 12 \times 3}$ εἶναι ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν ὅταν ἐργάζωνται 1 ὥραν τὴν ἡμέραν πρὸς κατασκευὴν εἰς μίαν ἡμέραν τείχους 1 μέτρου ὕψους, 1 μέτρου μήκους καὶ 1 μέτρου πλάτους.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τώρα τὰς ἐργασίμους ὥρας 10, ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν θέλει εἶναι 10κις μικρότερος, ἥτοι

$$\frac{25 \times 11 \times 18}{5 \times 12 \times 3 \times 10}.$$

Ἐὰν αἱ ἐργάται ἀντὶ 1 ἡμέρας ἐργασθῶσιν 20, ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς αὐτῶν θέλει εἶναι 20κις μικρότερος, ἥτοι

$$\frac{25 \times 11 \times 18}{5 \times 12 \times 3 \times 20}.$$

Ἐὰν τὸ ὕψος ἀντὶ 1 μέτρου ὑποτεθῇ 9 μέτρων ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν θέλει εἶναι 9κις μεγαλύτερος, ἥτοι

$$\frac{25 \times 11 \times 18 \times 9}{5 \times 12 \times 3 \times 10 \times 20}.$$

Ἐὰν τέλος τὸ μήκος καὶ πλάτος, ἀντὶ νὰ ὦσιν 1 καὶ 1 μέτρων, ὑποτεθῶσιν 75 καὶ 4, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων ἐργατῶν θέλει εἶναι

$$\frac{25 \times 11 \times 18 \times 9 \times 75 \times 4}{5 \times 12 \times 3 \times 10 \times 20}.$$

Βλέπομεν δ' ὅτι εὗρομεν οὕτω τὴν αὐτὴν τιμὴν, ἣν καὶ ἐν τῇ § 221 διὰ τὴν λύσιν τοῦ αὐτοῦ ζητήματος.

227. Ἐν γένει, ἂν μᾶς ἐδίδετο ἡ τιμὴ μ ποσοῦ τινος M καθὼς καὶ αἱ τιμαὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \dots$ τῶν ποσῶν $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, \dots$ ἀφ' ὧν τὸ M ἐξαρτᾶται, καὶ μᾶς ἐζητεῖτο ἡ νέα τιμὴ τοῦ M , ὅταν τὰ ποσὰ $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, \dots$ γείνωσιν $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \epsilon', \zeta', \dots$, ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα συνίσταται εἰς τὸ νὰ εὗρωμεν πρῶτον τὴν τιμὴν φ τοῦ M , ὅταν τὰ ποσὰ $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, \dots$ ὑποτεθῶσιν ὅλα ἴσα τῇ 1, καὶ ἔπειτα ἐκ ταύτης τὴν τιμὴν αὐτοῦ χ , ὅταν ταῦτα γείνωσιν $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \epsilon', \zeta', \dots$, τουτέστιν εἰς τὸ νὰ λύσωμεν πρῶτον τὸ ἐξῆς ζήτημα.

M	A	B	Γ	Δ	E	$Z \dots$
μ	α	β	γ	δ	ϵ	$\zeta \dots$
φ	1	1	1	1	1	1 \dots

καὶ μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ φ τὸ ἀκόλουθον

M	A	B	Γ	Δ	E	$Z \dots$
φ	1	1	1	1	1	1 \dots
χ	α'	β'	γ'	δ'	ϵ'	ζ'

Πλέπομεν λοιπόν ὅτι δι' αὐτῆς, ἀνθ' ἑνὸς ἔχομεν νὰ λύσωμεν δύο ἁμοειδῆ, αὐτως εἶπαι, ζητήματα. Ἀλλὰ συντομεύεται ἐπασινητῶς ἡ ἐκτέλεσις τῶν πράξεων, διότι εὐρίσκομεν ἁμέσως τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τοῦ ζητουμένου δι' ἐκάστην νέαν μεταβολὴν τῶν δεδομένων, χωρὶς νὰ ἤμεθα ἠναγκασμένοι νὰ σχηματίσωμεν οὐδεμίαν πρὸς τοῦτα ἀνalogίαν.

ΟΛΗΓΙΑΙ ΤΙΝΕΣ ΠΕΡΙ ΚΑΤΑΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ.

228. Εἴπομεν ὅτι πρὸς λύσιν τῶν ἀναγκασμένων εἰς τὴν ἀπλήν ἡ σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν προβλημάτων γράφομεν ἐπὶ τινὰς ὁρί-
ζοντος σειρὰς τὰ ὑνύματα τῶν διαφύρων εἰδῶν τῶν ποσῶν, τῶν πε-
ρισχομένων εἰς τὴν ἐκφωνήσιν τοῦ ζητήματος, ἐπειτα ὑπὸ τὴν πρῶ-
την σειρὰν γράφομεν τὴν δεδομένην τιμὴν τοῦ ζητουμένου καθὼς
καὶ τὰς ἀντιστοιχοῦσας εἰς αὐτὴν τιμὰς τῶν ἄλλων ποσῶν, ἐκάστην
ὑπὸ τῷ τῆς αὐτῆς οὐσῶς ποσόν, καὶ τελευταίαν ὑπὸ τὴν δεδομένην
τιμὴν τοῦ ζητουμένου γράφομεν γ' πρὸς παράστασιν τῆς ζητουμένης
αὐτοῦ τιμῆς, καὶ ὑπὸ τῇ λοιπῇ ποσῇ τῆς δεδομένης τιμῆς αὐτῶν,
τῆς ἀντιστοιχοῦσας εἰς τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ πρώτου γ'. Τοῦτου
δὲ γενομένου, ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εὐρίσκατο ἁμέσως κατὰ τὰ
ἐκείσε λεγθέντα.

Ἡ τοιαύτη τῶν δεδομένων καὶ ζητουμένων κατὰ τάξιν καλεῖται
κατάταξις τοῦ ζητήματος πρὸς λύσιν.

Εἰς τὰ προηγούμενα ζητήματα οὐδεμίαν ἐδοκιμάσαμεν δυσκολίαν
πρὸς τὴν τοιαύτην τῶν προβλημάτων κατὰ τάξιν, καὶ τοῦτο ἔνεκα
τοῦ ἀπλουστάτου καὶ ρυθικωτάτου τρόπου τῆς ἐκφωνήσεως αὐτῶν.
Ἀλλ' ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ αἱ ἐκφωνήσεις τῶν εἰς τὰς ἀνωτέρω μεθόδους
ἀναφερομένων ζητημάτων δὲν εἶναι τόσον ἀπλᾶι· πολλὰκις ἀντὶ τῶν
δεδομένων, τόσῳ τῶν ἀντιστοιχοῦντων εἰς δεδομένην τιμὴν τοῦ
ζητουμένου, ὅσῳ καὶ τῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν τοῦ ζητουμένου, μᾶς
δίδονται ἀπλῶς συνθήκαι τινες κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἥττον ἀπλᾶι, ὥς
πρέπει τινὰ τούτων νὰ ἐκπληρώσιν, ἢ, ἀντὶ τῆς τιμῆς τοῦ ζητουμέ-
νου, μᾶς ζητεῖται ἔμμεσός τις συνθήκη, πρὸς ἣν αὕτη νὰ ἀναφέρη-
ται, κτλ. Ἐν τῇ τοιαύτῃ περιπτώσει θέλωμεν δώσῃ ἐνταῦθα γενικᾶς
τινας ὁδηγίας, (διότι τοῦτο μόνον εἶναι δυνατόν), δι' ὧν ὁ μαθητής,
ὁ ἐπιχειρῶν τὴν λύσιν τοιούτου τινὸς ζητήματος, νὰ δύνηται νὰ χα-
ράξῃ δρόμον τινὰ, δι' οὗ θέλει φθάσῃ εἰς τὴν ἀπαιτουμένην πρὸς ἁμέ-
σον λύσιν τοῦ προβλήματος κατὰ τάξιν. Αὗται δὲ εἶναι αἱ ἐξῆς τρεῖς.

1ον. Πρέπει διὰ τῆς ἐπαρειλημμένης καὶ μετ' ἐπιστάσεως ἀναγνώσεως τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ ζητήματος νὰ ζητήσῃ νὰ διακρίνῃ τὰ διάφορα εἶδη τῶν ἐν αὐτῇ περιεχομένων ἀναλόγων ποσῶν, ἄντι διακρίσεως τῶν δεδομένων καὶ ζητουμένων, καὶ τὰ ὀνόματα τούτων νὰ γράψῃ ἐπὶ τινος ὁριζοτίου γραμμῆς.

2ον. Νὰ ζητήσῃ νὰ διακρίνῃ ποῶν εἶναι τὸ ποσόν, πρὸς ὃ ἀναγέρεται τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος καὶ ἐπ' αὐτὸ νὰ θέσῃ τὸ γράμμα x ἐπὶ τὴν δεδομένην τιμὴν αὐτοῦ, ἔστω αὕτη ἐπάρχη ἡμέσως δεδομένη ἐπὶ τῆς ἐκφωνήσεως.

3ον. Ἐὰν ἡ τιμὴ αὐτοῦ, ὡς καὶ αἱ τῶν ἄλλων ποσῶν, πρὸς ἃς αὕτη καθὼς καὶ ἡ ζητούμενη ἀντιστοιχοῦσι, δὲν διδῶνται ἡμέσως ἐπὶ τῆς ἐκφωνήσεως, ἀλλὰ συνθήκαι τινες, ἃς αὗται πρέπει νὰ ἐκπληρώσῃ, τότε πρέπει νὰ ζητήσῃ τὰς εἰς τὰς συνθήκας ταύτας ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τῶν δεδομένων καὶ ταύτας νὰ γράψῃ κατὰ τὸν συνθήκας τρόπον.

Τούτων γινομένων, ἡ λύσις τοῦ ζητήματος ἀνάγεται εἰς τὰ προλεχθέντα καὶ δὲν παρουσιάζει οὐδεμίαν δυσκολίαν.

229. Πρὸς περισσοτέρην τῶν ἀνωτέρω ὑδατηγῶν κατὰλήψιν ἃς ἐφαρμόσωμεν ταύτας εἰς τὰς ἐκφωνήσεις προβλημάτων τινῶν.

1ον. Ὁρολόγιον καθυστερεῖ 3 πρῶτα λεπτὰ εἰς 4 ὥρας καὶ δεῖκνύει ἀκριβῶς μεσημβρίαν μετὰ πόσον χρόνον θέλει δείξῃ πάλιν τὸν ἀληθῆ χρόνον;

Ἐνταῦθα διακρίνομεν δύο τινὰ ὁμοειδῆ μὲν, ἀλλὰ διαφόρου σημασίας ποσά, ὥρας καὶ χρόνον καθυστέρησεως. Βλέπομεν δὲ ὅτι μὲς ἐδόθη τιμὴ τις 4 ὥραι τοῦ πρώτου καὶ ἑτέρα τις τιμὴ 3 πρῶτα λεπτὰ τοῦ δευτέρου, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τοῦ πρώτου, καὶ ἀντὶ νὰ μὲς ζητηθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου, ἥτις ἤθελεν ἀντιστοιχεῖ εἰς δεδομένην τινὰ τιμὴν τοῦ δευτέρου, μὲς ζητεῖται ποῖαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ πρῶτον, ἵνα ἡ ἐξῆς δεδομένη συνθήκη ὑπάρχῃ· τὸ ὁρολόγιον νὰ δείκνῃ πάλιν τὸν ἀληθῆ χρόνον.

Πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ζητήματος ποῖα πρέπει νὰ ἦναι ἡ καθυστέρησις, ἡ ἐκπληροῦσα τὴν δεδομένην συνθήκην. Πρὸς τοῦτο δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς.

Ἐπειδὴ, ἔστω εἰς τινὰ στιγμὴν στρέψωμεν ἐν ἀκρεῖ τοὺς ὠροδείκτας 12 ὥρας, τὸ ὁρολόγιον θέλει δείκνῃ πάλιν τὸν ἀληθῆ χρόνον, ἂν ὅτε ἔρχισαμεν τὴν στροφὴν εἰδείκνυε τοῦτον, ἐπεὶ οὕτως ἡ τιμὴ τῆς καθυστέρησεως, ἡ ἐκπληροῦσα τὴν δεδομένην συνθήκην,

τοῦ νὰ δεικνύῃ δηλαδὴ τὸ ὠρολόγιον πάλιν τὸν ἀληθὲς χρόνον, εἶναι
12 ὥραι· ἐν ἑλλείψει λέξεσι, θέλομεν γράψαι τὴν ἐπομένην διάταξιν·

ὥραι	καθυστερήσεις
4	3λ.π.
χ	12 ὥρ.

ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐξῆς ἐκφώνησιν·

Ὁρολόγιον, δεικνύον ἀκριβῶς μεσημβρίαν, καθυστερεῖ 3λ.π. εἰς
4 ὥρας· μετὰ πόσον ὥρας θέλει καθυστερήσει 12 ὥρας;

2ον. Πεζὸς διαρτῆς 10 στάδια τὴν ὥραν καὶ προτίθεται νὰ δια-
τρέξῃ ἀπόστασιν τινα εἰς 13 ὥρας. Μετὰ 5 ὥρῶν ἰδοιπορίαν πα-
ρετήρησεν ὅτι εἶχε διαρτῆσι τὸ $\frac{2}{7}$ τῆς ἀποστάσεως, ζητεῖ δὲ νὰ
πεισθῇ ὅτι βαδιῶν μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα θέλει δυνηθῇ νὰ δια-
τρέξῃ τὸ λοιπὸν τῆς ἀποστάσεως ἐντὸς τῶν λοιπῶν 8 ὥρῶν καί,
ἐὰν τοῦτο δὲν ἦναι δυνατόν, κατὰ πόσον πρέπει νὰ αἰξήσῃ τὴν
ταχύτητα αὐτοῦ πρὸς τοῦτο.

Τὸ ζήτημα ἐνταῦθα εἶναι διπλοῦν. Πρέπει πρῶτον νὰ ἴδωμεν, ἐν
ἡ μετ' ἧς βαδιῇ ταχύτης ἦναι ἐπαρκές, ἵνα φθάσῃ εἰς τὸν σκοπὸν
αὐτοῦ ἐντὸς τῶν λοιπῶν 8 ὥρῶν, αὐτίνες τῶ μένουσι πρὸς συμπλή-
ρωσιν τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν 13, καὶ δεύτερον, ἐὰν εὗρωμεν ὅτι αὕτη
εἶναι ἀνεπαρκής, νὰ ζητήσωμεν κατὰ πόσον ἀκριβῶς αὕτη πρέπει
νὰ αὐξήθῃ πρὸς τοῦτο.

Ἵνα ἴδωμεν, ἐν ἡ ταχύτης τῶν 10 σταδίων ἦναι ἐπαρκής, ὅπως
ἐντὸς 8 ὥρῶν διατρέξῃ τὸ λοιπὸν τῆς ἀποστάσεως, ἀρκεῖ νὰ ζητή-
σωμεν πόσον μέρος τῆς ἀποστάσεως θέλει διατρέξῃ ἐντὸς 8 ὥρῶν,
γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐντὸς 5 ὥρῶν διήνυσε τὰ $\frac{2}{7}$ αὐτῆς, ἢ εἰς πόσον
χρόνον θὰ διανύσῃ τὰ μένοντα $\frac{5}{7}$ τῆς ἀποστάσεως, ἀφοῦ διήνυσε
τὰ $\frac{2}{7}$ αὐτῆς εἰς 5 ὥρας, τουτέστι νὰ λύσωμεν ἐν τῶν δύο ζητημάτων,

ὥραι	ἀποστάσεις	ὥραι	ἀποστάσεις
5	$\frac{2}{7}$	5	$\frac{2}{7}$
8	χ	χ	$\frac{5}{7}$

καὶ ἐὰν εὗρωμεν ἢ ὅτι ἡ τιμὴ τῆς χ τοῦ πρώτου ζητήματος εἶναι
μικροτέρα τῶν $\frac{5}{7}$, ἢ ὅτι ἡ τιμὴ τῆς χ τοῦ δευτέρου εἶναι μεγαλει-
τέρα τοῦ 8, θέλομεν συμπεράνειν ὅτι ἡ μετ' ἧς βαδιῇ ταχύτης τῶν
10 σταδίων εἶναι ἀνεπαρκής.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων εὐρίσκουμεν διὰ τὴν x τὰς τιμὰς $\frac{16}{3}$ καὶ $\frac{25}{2}$, ἐξ ὧν ἡ μὲν $\frac{16}{3}$ εἶναι μικρότερα τοῦ $\frac{5}{2}$, ἡ δὲ $\frac{25}{2}$ εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 8, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ μεθ' ἧς ὁ πεζὸς ὁδεύει ταχύτης εἶναι ἀνεπαρκής.

Ἵνα λύσωμεν τὸ δεύτερον μέρος τοῦ προβλήματος, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ταχύτης ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τῶν ὑπολοίπων 8 ὥρων καὶ ἐκ τῆς μεινάσης πρὸς διάνυσιν ἀποστάσεως $\frac{5}{2}$. Γράφομεν λοιπὸν

ταχύτητες	ὥραι	ἀποστάσεις
10	5	$\frac{5}{2}$
x	8	$\frac{5}{2}$

ἐπειδὴ μᾶς ἐδόθη ὅτι μὲ ταχύτητα 10 σταδίων ὁδεύων διήνυσε τὰ $\frac{5}{2}$ τῆς ὁδοῦ εἰς 5 ὥρας, καὶ ἡ ζητούμενη ταχύτης πρέπει νὰ ᾖται τοιαύτη, ὥστε εἰς τὰς λοιπὰς 8 ὥρας νὰ διανύσῃ τὰ λοιπὰ $\frac{5}{2}$ τῆς ἀποστάσεως.

Λύοντες τῶρα τὸ ἀνωτέρω ζήτημα εὐρίσκουμεν

$$x = 15 + \frac{5}{8}.$$

Λοιπὸν ἡ ταχύτης 10 τοῦ πεζοῦ πρέπει νὰ αὐξηθῇ κατὰ 5 στάδια καὶ $\frac{5}{8}$ τοῦ σταδίου, ἵνα θυνθῇ οὕτως νὰ διανύσῃ τὰ λοιπὰ $\frac{5}{2}$ τῆς ἀποστάσεως εἰς τὸ τέλος τῶν λοιπῶν 8 ὥρων.

Πᾶς τις βλέπει εὐκόλως ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι πρὸς λύσιν τοῦ 2ου ζητήματος ἀντικατεστήσαμεν τὰς δεδομένας συνθήκας καὶ τὰ ζητούμενα τοῦ προβλήματος δι' ἄλλων, ὅτινα ἐξ αὐτῆς τῆς φύσεως τοῦ ζητήματος καὶ ἐκ τῶν ὑπεννοουμένων σχέσεων ἔπρεπε νὰ ὑπάρχωσιν εἰς ἐκπλήρωσιν αὐτῶν. Π. χ. ἵνα ἴδωμεν, ἂν ἡ ταχύτης αὐτοῦ ᾖται ἐπαρκής, ἵνα ρθᾷ πρὸς τὸν σκοπὸν ἐντὸς τῶν λοιπῶν 8 ὥρων, ἐζητήσαμεν εἰς πόσας ὥρας ἤθελε διανύσει τὰ λοιπὰ $\frac{5}{2}$ τῆς ἀποστάσεως, ἢ εἰς 8 ὥρας τί μέρος τῆς ἀποστάσεως ἤθελε διανύσει, ἀφοῦ εἰς 5 ὥρας διήνυσε τὰ $\frac{5}{2}$. Πρὸς τοῦτοις ἀντὶ νὰ ζητήσωμεν κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ἡ ταχύτης αὐτοῦ, ἐζητήσαμεν πόση πρέπει νὰ ᾖται ἡ ταχύτης αὐτοῦ, ἵνα εἰς 8 ὥρας διανύσῃ τὰ λοιπὰ $\frac{5}{2}$ τῆς ἀποστάσεως, ἀφοῦ μὲ ταχύτητα 10 σταδίων διήνυσε τὰ $\frac{5}{2}$ αὐτῆς ἐντὸς 5 ὥρων.

3ον. Φρουρὰ 400 στρατιωτῶν πολιορκουμένη εἶχε τὴν 2' Ἀπριλίου τροφὰς δι' ὅλον τὸν μῆνα τοῦτο. Τὴν 9ην Ἀπριλίου ἐφθάσεν εἰς αὐτὴν ἐπικουρὰ 120 στρατιωτῶν ἔχουσα τροφὰς διὰ 5 ἡμέ-

ρας. Ἐὰν ἐρώσωσιν οὗτοι τὰς τροφὰς αὐτῶν μετὰ τῶν τροφῶν τῶν πρώτων στρατιωτῶν, πόσον μέρος τοῦ ὠρισμένου σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος στρατιώτης, ἵνα αἱ ὑπάρχουσαι τροφαὶ ἐπαρκέσωσιν εἰς αὐτοὺς μέχρι τέλους τοῦ μηνός;

Σιτηρεσίον δὲ καλεῖται τὸ ποσὸν τῶν τροφῶν, ἧς λαμβάνει ἕκαστος στρατιώτης διὰ μίαν ἡμέραν, τοῦτο δὲ παριστώσι συνήθως διὰ τῆς μονάδος.

Ἐκ τῆς ἐπομένης ἐκθέσεως τῆς λύσεως τοῦ προκειμένου προβλήματος ἕκαστος θέλει ἰδεῖ πῶς ἐκφραζόμεν τὰς ἀνωτέρω δοθείσας ὁδηγίας.

Ἐπειδὴ οἱ 400 στρατιῶται εἶχον τροφὰς τὴν 2 Ἀπριλίου μέχρι τέλους τοῦ μηνός καὶ τὴν 9ην Ἀπριλίου ἔφθασεν εἰς αὐτοὺς ἡ ἐπικουρία τῶν 120 στρατιωτῶν, ἔπεται ὅτι τὴν 9ην Ἀπριλίου οἱ 400 στρατιῶται εἶχον τροφὰς διὰ 21 ἡμέρας.

Ὅταν ἔφθασεν εἰς αὐτοὺς ἡ ἐξ 120 στρατιωτῶν ἐπικουρία, ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν ἔγινε 520. Ἄν οἱ 120 δὲν εἶχον διόλου τροφὰς καὶ τὸ σιτηρεσίον ἔμενε τὸ αὐτό, ἵνα εὐρωμεν ἐπὶ πόσας ἡμέρας ἤθελον ἐπαρκέσει εἰς αὐτοὺς αἱ τροφαὶ τῶν 400 στρατιωτῶν, πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ ἐξῆς ζήτημα.

Ἐὰν 400 στρατιῶται εἶχον τροφὰς διὰ 21 ἡμέρας, αἱ τροφαὶ αὗται ἐπὶ πόσας ἡμέρας ἤθελον διαρκέσει εἰς 520 στρατιώτας;

στρατιῶται	ἡμέραι
400	21
520	λ'

ἐξ οὗ παριζόμεθα

$$\lambda' = \frac{21 \cdot 0}{13} = 16 + \frac{2}{13}.$$

Λοιπὸν ἐπὶ 16 ἡμέρας καὶ $\frac{2}{13}$ τῆς ἡμέρας ἤθελον ἐπαρκέσει εἰς τοὺς 520 στρατιώτας αἱ ἐπὶ 21 ἡμέρας τροφαὶ τῶν 400 στρατιωτῶν, ἐὰν οἱ προστεθέντες 120 δὲν εἶχον διόλου τροφὰς. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἔφερον καὶ αὐτοὶ τροφὰς διὰ 5 ἡμέρας, πρέπει νὰ εὐρωμεν ἐπὶ πόσας ἡμέρας ἤθελον διαρκέσει αὐταὶ εἰς τοὺς 520 στρατιώτας, τοῦ σιτηρεσίου ὑποτιθεμένου πάντοτε 1. Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει προφανῶς νὰ λύσωμεν τὸ ἐξῆς ζήτημα.

Ἐὰν 120 στρατιῶται εἶχον τροφὰς διὰ 5 ἡμέρας, ἐπὶ πόσας

ἡμέρας θέλουσιν ἐπαρκέσει αἱ τροφαὶ αὐτῶν εἰς 520 στρατιώτας ;

στρατιῶται	ἡμέραι
120	5
520	χ

ἔξ οὗ πορίζομεθα

$$\chi = \frac{15}{13} = 1 + \frac{2}{13}.$$

Λοιπὸν αἱ ὑπάρχουσαι τροφαί, ἂν τὸ σιτηρέσιον ἔμενον 1, ἤθελον ἐπαρκέσει εἰς τοὺς 520 στρατιώτας ($16 + \frac{2}{13} + 1 + \frac{2}{13}$) ἡμέρας, ἥτοι 17 ἡμέρας καὶ $\frac{4}{13}$ τῆς ἡμέρας. Ἵνα τῶρα ἴδωμεν πόσον μέρος τοῦ ὠρισμένου σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνη ἕκαστος, ἵνα αἱ ὑπάρχουσαι τροφαὶ ἐπαρκέσωσι μέχρι τέλους τοῦ μηνός, ἥτοι ἐπὶ 21 ἡμέρας, πρέπει προφανῶς νὰ λύσωμεν τὸ ἐξῆς ζήτημα.

Ἐὰν 520 στρατιῶται λαμβάνοντες 1 σιτηρέσιον, εἶχον τροφὰς διὰ $17 + \frac{4}{13}$ ἡμέρας· οἱ αὐτοὶ στρατιῶται πόσον σιτηρέσιον πρέπει νὰ λαμβάνωσι, ἵνα αἱ τροφαὶ αὐτῶν ἐπαρκέσωσι ἐπὶ 21 ἡμέρας;

ἡμέραι	σιτηρέσιον
$17 + \frac{4}{13}$	1
21	χ

ἔξ οὗ πορίζομεθα

$$\chi = \frac{25}{93}.$$

Τὰ $\frac{25}{93}$ λοιπὸν τοῦ ὠρισμένου σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνη ἕκαστος ἀπὸ τῆς 9ης Ἀπριλίου ἵνα αἱ ὑπάρχουσαι τροφαὶ ἐπαρκέσωσι μέχρι τέλους τοῦ μηνός.

229. Νομίζομεν ὅτι τὰ προηγούμενα τρία παραδείγματα ἀρκοῦσι νὰ δείξωσι τὴν ὠφέλειαν τῆς εφαρμογῆς τῶν ἀνωτέρω δοθεισῶν ὁδηγίων πρὸς λύσιν τῶν ἀναγομένων εἰς τὴν ἀπλὴν καὶ σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν ζητημάτων, ἀλλ' οὐχ ἦττον οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ ἐφαρμόσωσι ταύτας εἰς οὐκ ὀλίγα ζητήματα, ἵνα δύνανται νὰ κἀμωσιν εὐκολώτερον καὶ καταλλήλως χρῆσιν αὐτῶν. Πρὸς τὴν τοιαύτην ἄσκησιν θέλουσιν εὑρεῖ καταλλήλως προβλήματα ἐν τῷ τέλει τοῦ παρόντος συγγράμματος, ἐν τῇ συλλογῇ τῶν πρὸς ἄσκησιν ζητημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ'.

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΙΝΩΝ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ.

230. Ἄς ἐφαρμόσωμεν τὰς προηγουμένας περὶ ἀναλόγων ποσῶν θεωρίας εἰς τὴν λύσιν μερικῶν τινῶν προβλημάτων, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν τοῦ τόκου.

Ἐπιτόκιον καλεῖται τὸ κέρδος, ὅπερ λαμβάνει ὁ δανειζὼν 100 δραχμὰς μετὰ ἓν ἔτος. Ἐάν ὑποτεθῇ ὅτι λαμβάνει 4 δραχμὰς, τοῦτο παρίσταται πρὸς συντομίαν ὡς εἰς $4\frac{0}{100}$, καὶ ἀπαγγέλλεται τέσσαρα ταῖς ἑκατόν.

Τόκος καλεῖται τὸ κέρδος, ὅπερ λαμβάνει ὁ δανειζὼν ἐπὶ τινὰ χρόνον ὅποιονδήποτε χρηματικὸν ποσόν, καλούμενον κεφάλαιον, πρὸς ὁρισμένον τι ἐπιτόκιον.

Ὁ τόκος προφανῶς ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ποσοῦ τοῦ δανειζομένου κεφαλαίου, ἐκ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν τοῦτο ἐμείνεν εἰς τόκον, καὶ ἐκ τοῦ συμφωνηθέντος μεταξὺ τοῦ δανειστοῦ καὶ δανειζομένου ἐπιτοκίου, εἶναι δὲ ἀπλοῦς καὶ σύνθετος.

Ὁ τόκος λέγεται ἀπλοῦς, ὅταν τὸ δανειζόμενον κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος τοῦ κεφαλαίου, τοῦ χρόνου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου.

Σύνθετος λέγεται ὁ τόκος, ὅταν εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους, ἢ εἰς τὸ τέλος ὅποιανδήποτε ἄλλης συμφωνηθείσης ἐποχῆς, προστίθενται εἰς τὰ κεφάλαια οἱ μὴ πληρωθέντες τόκοι αὐτῶν, ἵνα ἀποτελέσωσι νέον κεφάλαιον, ἀποφέρον νέον τόκον.

Παραδείγματος χάριν, ἐάν ἔχωμεν τοκίσει 200 δραχμὰς, αἵτινες καθ' ὑπόθεσιν εἰς ἓν ἔτος φέρουσι τόκον 20, καὶ προσθέσωμεν τὸν μὴ πληρωθέντα τόκον 20 εἰς τὸ κεφάλαιον 200, ὥστε νὰ λάβωμεν εἰς τὸ ἐπόμενον ἔτος τόκον ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν 220 δραχμῶν, καὶ οὕτω καθεξῆς, τότε ὁ τόκος καλεῖται σύνθετος, ὡς συγκείμενος ἐκ τοῦ πραγματικοῦ τόκου καὶ ἐκ τοῦ τόκου τῶν τόκων.

Ἡμεῖς ἐνταῦθα θέλομεν παραγματοῦθῃ μόνον περὶ τοῦ ἀπλοῦ τόκου.

231. Εἰς πᾶν πρόβλημα τόκου τέσσαρά τινα διακρίνομεν· τὸ κεφάλαιον, ἥτοι τὸ δανειζόμενον ποσόν, τὸν τόκον, ἥτοι τὸ ληφθέν κέρδος, τὸν χρόνον, ἐφ' ᾧ τὸ κεφάλαιον ἔμεινεν εἰς τόκον, καὶ τὸ ἐπιτόκιον, ἥτοι τὸ ἐπὶ πόσον ταῖς 100 ἐδανείσθη τὸ κεφάλαιον. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τέσσαρα ταῦτα εἶναι οὕτω πως συνδεδεμένα πρὸς ἀλλήλα, ὥσπερ, δοθέντων τῶν τριῶν, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν δι' αὐτῶν τὴν τιμὴν τοῦ τετάρτου, ἔπεται ὅτι πᾶν πρόβλημα τόκου ἀνάγεται εἰς ἓν τῶν ἐξῆς τεσσάρων γενικῶν προβλημάτων.

1ον. Δοθέντος κεφαλαίου τινὸς x , τοῦ χρόνου μ , ἐφ' ᾧ τούτο ἔμεινεν εἰς τόκον, καὶ τοῦ ἐπιτοκίου ϵ , νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος τ .

2ον. Δοθέντος κεφαλαίου τινὸς x , τοῦ χρόνου μ , ἐφ' ᾧ τούτο ἔμεινεν εἰς τόκον καὶ τοῦ τόκου τ , νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον ϵ .

3ον. Δοθέντος κεφαλαίου τινὸς x , τοῦ τόκου αὐτοῦ τ καὶ τοῦ ἐπιτοκίου ϵ , νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος μ , ἐφ' ᾧ τούτο ἔμεινεν εἰς τόκον.

4ον. Δοθέντος τοῦ τόκου τ κεφαλαίου τινὸς x , τοῦ χρόνου μ , ἐφ' ᾧ τούτο ἔμεινεν εἰς τόκον, καὶ τοῦ ἐπιτοκίου ϵ , νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον x .

Κατατάσσοντες τὰ δεδομένα κατὰ τὸν ἐν τῇ συνθέτῳ μεθόδῳ τῶν τριῶν ἐκτεθέντα τρόπον καὶ παριστῶντες τὸ ζητούμενον διὰ τοῦ παράμικτος χ , θέλομεν ἔχει διὰ τὴν λύσιν τοῦ πρώτου προβλήματος

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
100	1	ϵ
x	μ	χ

τούτέστιν, 100 δραχμαὶ εἰς ἓν ἔτος φέρουσι τόκον ϵ , x δραχμαὶ εἰς μ χρόνον πόσον τόκον θέλουσι φέρει;

Ἐπειδὴ δὲ ὁ τόκος χ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τοῦ κεφαλαίου x καὶ τοῦ χρόνου μ , θέλομεν ἔχει, σκεπτόμενοι ὡς εἶπομεν ἐν τῇ συνθέτῳ μεθόδῳ τῶν τριῶν, τὰς ἐξῆς μερικὰς ἀναλογίας

$$\begin{array}{l} 100 : x = \epsilon : v \\ 1 : \mu = v : \chi, \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{l} 100 : x \\ 1 : \mu \end{array} = \epsilon : \chi,$$

αἵτινες μᾶς δίδουσι τὴν τιμὴν τοῦ χ , ἥτοι τοῦ ζητουμένου τόκου τ

$$\tau = \frac{x \times \mu \times \epsilon}{100} \quad (1)$$

Ὡσαύτως διὰ τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου, ἐν ᾧ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον, θέλομεν ἔχει

κεφάλαια ἔτη τόκοι

$$\begin{array}{ccc} \kappa & \mu & \tau \\ 100 & 1 & \chi \end{array}$$

τουτέστι, κ δραχμαὶ εἰς μ ἔτη φέρουσι τόκον τ , 100 δραχμαὶ εἰς 1 ἔτος πόσον τόκον θέλουσι φέρει;

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐπιτόκιον, ὡς τόκος θεωρούμενον, εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον τοῦ κεφαλαίου 100 καὶ τοῦ χρόνου 1, θέλομεν ἔχει τῆς μερικῆς ἀναλογίας

$$\begin{array}{l} \kappa : 100 = \tau : \nu \\ \mu : 1 = \nu : \chi, \end{array} \quad \eta \quad \begin{array}{l} \kappa : 100 \\ \mu : 1 \end{array} \left\{ = \tau : \chi, \right.$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα διὰ τὴν τιμὴν χ , ἥτοι τοῦ ζητουμένου ἐπιτοκίου ε

$$\varepsilon = \frac{100 \times \tau}{\kappa \times \mu} \quad (2)$$

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ τρίτου θέλομεν κατατάξει τὰ δεδομένα ὡς ἑξῆς, παριστῶντες διὰ χ τὸν ζητούμενον χρόνον μ

κεφάλαια ἔτη τόκοι

$$\begin{array}{ccc} 100 & 1 & \varepsilon \\ \kappa & \chi & \tau \end{array}$$

τουτέστιν, 100 δραχμαὶ εἰς 1 ἔτος φέρουσι τόκον ε , κ δραχμαὶ εἰς πόσα ἔτη θέλουσι φέρει τόκον τ ;

Ἐπειδὴ δὲ ὁ χρόνος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ κεφαλαίου κ καὶ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τοῦ τόκου τ , θέλομεν ἔχει τῆς ἑξῆς μερικῆς ἀναλογίας

$$\begin{array}{l} \kappa : 100 = 1 : \nu \\ \varepsilon : \tau = \nu : \chi, \end{array} \quad \eta \quad \begin{array}{l} \kappa : 100 \\ \varepsilon : \tau \end{array} \left\{ = 1 : \chi, \right.$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα διὰ τὴν τιμὴν τοῦ χ , ἥτοι τοῦ ζητουμένου χρόνου μ

$$\mu = \frac{100 \times \tau}{\kappa \times \varepsilon} \quad (3)$$

Καὶ τελευταῖον διὰ τὴν λύσιν τοῦ τετάρτου θέλομεν ἔχει

κεφάλαια ἔτη τόκοι

$$\begin{array}{ccc} 100 & 1 & \varepsilon \\ \chi & \mu & \tau \end{array}$$

τουτέστιν, 100 δραχμαὶ εἰς 1 ἔτος φέρουσι τόκον ε , πόσαι δραχμαὶ εἰς μ ἔτη θέλουσι φέρει τόκον τ ;

Ποὺς εὗρεσιν δὲ τοῦ ζητουμένου κεφαλαίου, ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι

ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ χρόνου μ καὶ κατ' εὐθείαν ἀνάλογον τοῦ τόκου τ , θέλομεν σχηματίσει τὰς ἀναλογίας

$$\begin{array}{l} \mu : 1 = 100 : \nu \\ \varepsilon : \tau = \nu : \chi, \end{array} \quad \eta \quad \begin{array}{l} \mu : 1 \\ \varepsilon : \tau \end{array} \left\{ = 100 : \chi, \right.$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα διὰ τὴν τιμὴν τοῦ ζητουμένου κεφαλαίου κ

$$\kappa = \frac{100 \times \tau}{\mu \times \varepsilon} \quad (4).$$

232. Αἱ ἰσότητες (1), (2), (3), (4) καλοῦνται τύποι. Δι' αὐτῶν εὐρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν ζητουμένων θέτοντες ἀντὶ τριῶν τῶν τεσσάρων γραμμάτων κ , τ , μ , ε τὰς δεδομένας τιμὰς αὐτῶν. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς ζήτημα·

Πόσον τόκον θέλουσι φέρει 1500 δραχμαὶ εἰς 3 ἔτη τοκίζόμεναι πρὸς 5 %; ἠθέλομεν θέσει ἐν τῷ τύπῳ (1)

$$\tau = \frac{\kappa \times \mu \times \varepsilon}{100}$$

1500 ἀντὶ τοῦ κ , 3 ἀντὶ τοῦ μ καὶ 5 ἀντὶ τοῦ ε , καὶ ἠθέλομεν εἶχει

$$\tau = \frac{1500 \times 3 \times 5}{100} = 225,$$

τουτέστιν ὁ ζητούμενος τόκος εἶναι 225 δραχμαί.

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς ζήτημα·

Πρὸς πόσον ἐπιτόκιον 1500 τοκίζομεναι ἐπὶ 3 ἔτη θέλουσι φέρει τόκον 225 δραχμάς; ἠθέλομεν θέσει εἰς τὸν τύπον (2)

$$\varepsilon = \frac{100 \times \tau}{\kappa \times \mu}$$

225 ἀντὶ τοῦ τ , 1500 ἀντὶ τοῦ κ καὶ 3 ἀντὶ τοῦ μ , καὶ ἠθέλομεν εὑρεῖ

$$\varepsilon = \frac{100 \times 225}{1500 \times 3} = 5,$$

τουτέστι τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον εἶναι 5.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐὰν ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς ἐκάστης τῶν ἰσοτήτων (1), (2), (3), (4), θέλομεν εὑρεῖ τὴν αὐτὴν ἰσότητα

$$\kappa \times \mu \times \varepsilon = 100 \times \tau, \quad (2)$$

τοῦτο δὲ ἠδύνατό τις νὰ προῖδῃ. Διότι ἐκάστη τῶν ἰσοτήτων (1), (2), (3), (4) παριστᾷ τὴν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεταξύ τοῦ δανειζομένου κεφαλαίου, τοῦ χρόνου ἐφ' ὃν μένει τοῦτο πρὸς τόκον.

τοῦ τόκου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου, καὶ εἶναι φανερόν ὅτι ἡ συνδέουσα τὰ ποσὰ ταῦτα σχέσις πρέπει νὰ ᾖ καὶ ἡ αὐτῇ.

Ἀντιστρόφως ἐκ τῆς ἰσότητος (α) πορίζομεθα ἐκάστην τῶν τεσσάρων (1), (2), (3), (4) θεωρῶντες διαδοχικῶς ὡς ἄγνωστον ἢ τὸ τ , ἢ τὸ ϵ , ἢ τὸ μ , ἢ τὸ χ καὶ διαιροῦντες ἀμφοτέρω τὰ μέλη αὐτῆς διὰ 100, ἢ διὰ $\chi\mu$, ἢ διὰ $\chi\epsilon$, ἢ διὰ $\mu\chi\epsilon$. Ἐν ἄλλαις λέξεσι, διὰ τῆς ἰσότητος (α) δυνάμεθα νὰ λύσωμεν πᾶν ζήτημα τόκου θέτοντες ἀντὶ τριῶν ἐκ τῶν τεσσάρων γραμμάτων χ , μ , ϵ , τ τὰς δεδομένας τιμὰς αὐτῶν καὶ ζητοῦντες τὴν τιμὴν τοῦ τετάρτου, τὴν αὐτοποιοῦσαν τὴν ἰσότητα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.—Ἐπειδὴ πᾶν ζήτημα τόκου ἀνάγεται εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν, ἐνομίσαμεν περιττόν νὰ ἐπαναλάβωμεν ἐν ταῦθα τὰ καθέκαστα τῶν συλλογισμῶν, δι' ὧν σχηματίζομεν τὰς μερικὰς ἀναλογίας, ἐξ ὧν πορίζομεθα τὴν τελικὴν, τὴν δίδουσαν τὴν τιμὴν τοῦ ζητούμενου. Τοῦτου δ' ἕνεκα καὶ ἐγράψαμεν ἀπλῶς τὰς μερικὰς ταύτας ἀναλογίας. Νομίζομεν ὅμως ἀναγκασιὸν νὰ συμβουλεύσωμεν τοὺς μαθητὰς νὰ ἐφαρμόσωσι τὰ γενικῶς ἐνταῦθα λεχθέντα ἐπὶ τῶν ἐξῆς ζητημάτων πρὸς ἀπόκτησιν ἀσκήσεως καὶ ἄμεστον ἐφαρμογὴν τῶν ἐν τῇ συνθέτῳ μεθόδῳ τῶν τριῶν ἐκτεθέντων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.—Ἐδώρισέ τις 2500 δραχμὰς πρὸς 5 $\frac{0}{10}$ ἐπὶ 3 ἔτη καὶ 7 μῆνας· πόσον τόκον ἔλαβε;

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
100	1	5
2500	$3 + \frac{7}{12}$	χ .

$$\chi = 447,91$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.—Δανείσας τις 3500 δραχμὰς ἔλαβε τόκον μετὰ 17 μῆνας 225· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔδανεισε;

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
3500	$\frac{17}{12}$	225
100	1	χ

$$\chi = 4,53.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.—Δανείσας τις κεφάλαιον τι πρὸς 5 $\frac{0}{10}$ μετὰ 8 μῆνας ἔλαβε τόκον 173 δραχμὰς· ἐκ πόσων δραχμῶν συνέκειτο τὸ κεφάλαιον;

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
100	1	5
χ	$\frac{8}{12}$	175
$\chi = 5250.$		

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. — Δανείσας τις 4000 δραχμὰς πρὸς 7,43 % ἔλαβε τόκον μετὰ τινα χρόνον 150· ἐπὶ πόσον χρόνον ἔμεινε τὸ κεφάλαιον αὐτοῦ εἰς τόκον;

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
100	1	7,43
4000	χ	150
$\chi = \frac{375}{7,43}$ τοῦ ἔτους.		

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

234. Πολλὰκις οἱ κάτοχοι γραμματίων ἢ συναλλαγματικῶν, πληρωτέων μετὰ τινα ὁρισμένον χρόνον, ὅταν λαμβάνωσιν ἀνάγκη χρημάτων πωλοῦσι ταῦτα πρὸς ἄλλους. Ἡ τοιαύτη πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας αὐτῶν πώλησις καλεῖται *προεξόφλησις*, καὶ οἱ ἀγορᾶζοντες ταῦτα *προεξοφλῆται*.

Οἱ προεξοφληταὶ ζητοῦσι κέρδος τι, ὕπερ ὑπολογίζουσι πρὸς ὁρισμένον τι ἐκ συμφώνου μετὰ τοῦ προεξοφλουμένου τὸ γραμμάτιον ἐπιτόκιον, καὶ τὸ ὑποῖον ἐξαρτᾶται προσηκῶς ἐκ τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου καὶ ἐκ τοῦ χρόνου, ὅστις θέλει παρέλθῃ, ἀφ' ἧς ἡμέρας προεξοφλεῖται μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας αὐτοῦ. Τὸ ποσὸν τοῦτο ἀφαιροῦσιν ἀπὸ τοῦ πληρωτέου ἐν τῇ λήξει τῆς προθεσμίας κεφαλαίου, καὶ πληρῶνουσιν εἰς τοὺς πωλητὰς τὸ ὑπόλοιπον αὐτοῦ. Τοῦτου ἕνεκα τὸ ποσὸν τοῦτο, καθ' ὃ ἐλαττοῦται ἢ ἀξία τοῦ γραμματίου ἢ τοῦ συναλλάγματος, καλεῖται *ὕφαιρσις*.

235. Ἡ ὕφαιρσις ὑπολογίζεται συνήθως κατὰ δύο διαφόρους τρόπους· ἢ ἐπὶ τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου, τουτέστι ζητοῦσι πόσον τόκον θέλει φέρει τὸ πληρωτέον κεφάλαιον, τοιζόμενον πρὸς τὸ συμφωνηθέν ἐπιτόκιον, ἀφ' ἧς ἡμέρας προεξοφλεῖται τὸ γραμμάτιον μέχρι τῆς λήξεως τῆς ἐν αὐτῷ ὁριζομένης προθεσμίας, ἢ ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου ἐκείνου, ὅπερ ἂν ὁ πωλὼν τὸ γραμμάτιον ἐτόκιζεν ἀμέσως πρὸς τὸ συμφωνηθέν ἐπιτόκιον, ἥθελε λάβῃ μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας τόσον τόκον, ὅσον πρὸς προεξόφλησιν αὐτοῦ κέρδος ἔλαβεν ὁ προεξοφλητής· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἢ δευτέρᾳ αὕτῃ ὕφαιρσις εἰ-

ναι ὁ τόκος, ὃν ἤθελε φέρει ἡ πρὸς προεξόφλησιν τοῦ γραμματίου πληρωνομένη ποσότης, ἀρ' ἥς ἡμέρας πληρόνεται αὕτη μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας τοῦ γραμματίου.

Ἡ μὲν πρώτη ὑφαίρεσις καλεῖται ἐξωτερική, ἡ δὲ δευτέρα ἐσωτερική.

Ἐπειδὴ ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου πρὸς ὠρισμένον ἐπιτόκιον καὶ εἰς ὠρισμένον χρόνον, ἡ εὐρεσις ταύτης εἶναι ἀπλοῦν ζήτημα τόκου, περὶ οὗ ἐπραγματεύθημεν προηγουμένως.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἶχομεν πρὸς προεξόφλησιν γραμματίων τι 1000 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 1 ἔτος, καὶ ὁ προεξοφλητὴς μᾶς ἐξήτει τόκον 12 $\frac{0}{10}$, ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις ἤθελεν εἶναι ὁ τόκος τῶν 1000 δραχμῶν εἰς 1 ἔτος πρὸς 12 $\frac{0}{10}$, ἥτοι δραχμαὶ 120.

23δ. Πρὸς εὐρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαίρεσεως πρέπει, ὡς προεῖπομεν, νὰ εὐρώμεν τὸ κεφάλαιον, ὑπερ τοκισθὲν πρὸς τὸ ὀρισθὲν ἐπιτόκιον θέλει φέρει τόκον, ἀρ' ἥς ἡμέρας προεξοφλεῖται τὸ γραμματίον μέχρι τῆς λήξεως τῆς ἐν αὐτῷ προθεσμίας, ὅσον κέρδος ἔλαβεν ὁ προεξοφλητὴς, καὶ τοῦτο ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ κεφαλαίου. Ἡ εὐρεθησομένη διαφορὰ θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.

Ἰνα δειξώμεν πῶς εὐρίσκεται αὕτη, ἄς λάβωμεν παράδειγμα τινα. Ἀς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν γραμματίον 1000 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ 1 ἔτος καὶ ζητοῦμεν τὴν γενησομένην ἐπ' αὐτοῦ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 10 $\frac{0}{10}$.

Πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς. Λέγομεν, ἂν εἶχομεν γραμματίον 110 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ ἐν ἔτος, ὁ προεξοφλητὴς ἔπρεπε νὰ μᾶς πληρώσῃ τώρα 100 δραχμάς, (διότι 100 δραχμαὶ μετὰ 1 ἔτος πρὸς 10 $\frac{0}{10}$ τοκισζόμεναι θέλουσι γεῖναι 110, τουτέστιν, ὅση εἶναι ἡ ἀξία τοῦ προεξοφληθέντος γραμματίου). διὰ γραμματίον ἀξίας 1000 δραχμῶν πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν; Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει προφανῶς νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν

$$110 : 1000 = 100 : x,$$

ἐξ ἥς εὐρίσκομεν

$$x = \frac{1000 \times 100}{110} = 909,09 \text{ ὡς ἐγγιστα.}$$

Ἀφαιροῦντες τὴν εὐρεθεῖσαν τιμὴν τῆς x ἀπὸ τοῦ 1000 εὐρίσκομεν διαφορὰν 90,91 περίπου, ἥτις παριστᾷ τὴν ζητουμένην ἐσωτε-

ρίκην υφαιρέσειν. Καὶ τῷ ὄντι, ἔάν τοκίσωμεν τὰς 909,09 δραχμὰς πρὸς 10 $\frac{0}{10}$, θελομεν εὑρεῖ τόκον δι' ἕν ἔτος 90,91 περίπου.

Ἦδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας τὴν ἐσωτερικὴν υφαίρεσιν λέγοντες· ἐπὶ γραμματίου ἀξίας 110 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 1 ἔτος, ἡ γενησομένη πρὸς 10 $\frac{0}{10}$ ἐσωτερικὴ αὐτοῦ υφαιρέσις εἶναι 10 δραχμαί· ἐπὶ γραμματίου ἀξίας 1000 δραχμῶν, πληρωτέων ὡσαύτως μετὰ ἕν ἔτος, πόση θέλει εἶναι αὕτη; Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει προφανῶς νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν

$$110 : 1000 = 10 : \chi,$$

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν $\chi = 90,91$ περίπου.

Ἄς υποθέσωμεν τώρα ὅτι ἔχομεν γραμματίον ἀξίας 1000 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 16 μῆνας, καὶ ζητοῦμεν τὴν πρὸς προεξόρλησιν αὐτοῦ γενησομένην ἐσωτερικὴν υφαιρέσιν πρὸς 9 $\frac{0}{10}$.

Πρὸς τοῦτο εὐρίσκομεν πρῶτον τὸν τόκον 12 τῶν 100 δραχμῶν πρὸς 9 $\frac{0}{10}$ μετὰ 16 μῆνας, καὶ προσθέτομεν τοῦτον εἰς τὰς 100 δραχμὰς, ἐπειτα λέγομεν·

Διὰ 112 δραχμὰς, πληρωτέας μετὰ 16 μῆνας, πρέπει νὰ λάβωμεν 100, (διότι αἱ 100 δραχμαὶ τοκίζόμεναι πρὸς 9 $\frac{0}{10}$ μετὰ 16 μῆνας θέλουσι γείναι 112)· πόσας πρέπει νὰ λάβωμεν διὰ 1000 δραχμὰς πληρωτέας ὡσαύτως μετὰ 16 μῆνας πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον 9 $\frac{0}{10}$; ἡ διὰ γραμματίον ἀξίας 112 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 16 μῆνας, ἡ ἐσωτερικὴ υφαιρέσις εἶναι 12 δραχμαί, πόση θέλει εἶναι αὕτη διὰ γραμματίον ἀξίας 1000 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 16 ὡσαύτως μῆνας; Πρὸς εὑρεσιν δὲ τῶν ζητουμένων θελομεν σχηματίσει τὰς ἐξῆς δύο ἀναλογίας

$$112 : 1000 = 100 : \chi,$$

$$112 : 1000 = 12 : \chi',$$

ὧν ἡ μὲν πρώτη δίδει διὰ χ τὸ ὑπὸ τοῦ προεξοφλητοῦ πληρωθῆσέμενον κεφάλαιον, ἡ δὲ δευτέρα διὰ χ' τὸ ὑπ' αὐτοῦ κρατηθῆσόμενον κέρδος. Βλέπομεν δὲ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τιμῶν

$$\chi = \frac{1000 \times 100}{112} \text{ καὶ } \chi' = \frac{1000 \times 12}{112}$$

$$\text{εἶναι} \quad \frac{1000 \times 100 + 1000 \times 12}{112} = \frac{1000 \times 112}{112} = 1000,$$

τουτέστιν αὐτὴ ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου ὡς ἦτο τοῦτο ἐπόμενον.

236. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορίζομεθα εὐκόλως τὸν ἐξῆς πρὸς εὑρε-

ρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως πρὸς ὠρισμένον ἐπιτόκιον κανόνα·

Ζητοῦμεν πρῶτον τὸν τόκον, ὃν φέρουσιν 100 δραχμαὶ τοκο-
ζόμεναι πρὸς τὸ ὀρισθὲν ἐπιτόκιον, ἀφ' ἧς ἡμέρας γίνεται ἡ προε-
ξόφλησις τοῦ γραμματίου μέχρι τῆς ἀφ' ἧς τῆς προθεσμίας αὐ-
τοῦ, καὶ προσθέτομεν τοῦτον εἰς τὰς 100 δραχμὰς. Σχηματίζο-
μεν ἔπειτα ἀναλογίαν, ἥς οἱ μὲν δύο πρῶτοι ὅροι γὰρ ἵκται τὸ εἰ-
ρηθεσόμενον ἄθροισμα καὶ ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου, οἱ δὲ δύο τε-
λευταῖοι ὁ εὑρεθεὶς τόκος τῶν 100 δραχμῶν καὶ ἡ ζητούμενη ἐσω-
τερικὴ ὑφαίρεσις χ .

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἐπρόκειτο νὰ εὗρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν
ὑφαίρεσιν γραμματίου 4000 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 27 μῆνας,
πρὸς 8 $\frac{0}{10}$, ἠθέλομεν πρῶτον εὖρει τὸν τόκον 18 τῶν 100 δραχμῶν
πρὸς 8 $\frac{0}{10}$ εἰς 27 μῆνας, ἔπειτα σχηματίζει τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν

$$118 : 4000 = 18 : \chi, \quad (1)$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν ζητούμενην τιμὴν τῆς χ , ἥτις θέλει παριστᾷ
τὴν ἐπὶ τοῦ γραμματίου τῶν 4000 δραχμῶν πρὸς 8 $\frac{0}{10}$ γεννησομέ-
νην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—Ἐὰν ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι ὑποθέσω-
μεν ὅτι ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου 4000 διπλασιασθῇ καὶ ὅτι τὰ λοι-
πὰ ἔμειναν τὰ αὐτά, θέλομεν εὖρει ἀντὶ τῆς ἀναλογίας (1) τὴν ἐξῆς

$$118 : 8000 = 18 : \chi, \quad (2)$$

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν διὰ τιμὴν τῆς χ ἀριθμὸν διπλάσιον. Λοιπὸν ἡ ἐσω-
τερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τῆς ἀξίας τοῦ γραμ-
ματίου, ἢ τοῦ εἰς τὴν λῆξιν αὐτοῦ πληρωτέου κεφαλαίου.

Ἄν εἴχομεν ὑποθέσει ὅτι ὁ χρόνος 27 μῆνες διπλασιασθῇ καὶ
ὅτι τὰ λοιπὰ ἔμειναν ἀμετάβλητα, ἠθέλομεν σχηματίσει πρὸς εὐ-
ρεσιν τῆς ζητούμενης ἐσωτερικῆς ὑφαίρεσεως, ἀντὶ τῆς ἀναλογίας
(1) τὴν ἀναλογίαν

$$136 : 4000 = 36 : \chi. \quad (3)$$

Τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν (3) ἠθέλομεν εὖρει καὶ ἂν ὑποθέτομεν ὅτι
τὸ ἐπιτόκιον μόνον εἶχε διπλασιασθῇ καὶ ὅτι τὰ λοιπὰ τοῦ προ-
βλήματος ἔμειναν ἀμετάβλητα.

Βλέπομεν λοιπὸν ἐκ τῆς ἀναλογίας (3) ὅτι, διπλασιαζομένου τοῦ
χρόνου ἢ τοῦ ἐπιτοκίου, ἡ τιμὴ τῆς χ αὐξάνει μέν, ἀλλὰ δὲν διπλα-
σιάζεται. Διότι ἔπρεπεν ὁ πρῶτος ὅρος 118 τῆς ἀναλογίας (1) νὰ
μείνῃ ἀμετάβλητος, ἵνα ἡ τιμὴ τῆς χ τῆς ἀναλογίας (3) γείνη

διπλασία τῆς ἐν τῇ ἀναλογίᾳ (1), ὅπερ δὲν συνέβη, διότι ἔγινε κα κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις 136.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογος τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου, καὶ ὅτι ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρόνου τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας καθὼς καὶ ἐκ τοῦ ἐπιτοκίου οὕτως, ὥστε συναυξάνεται μὲν καὶ συνελαττοῦται μετ' αὐτῶν, ἀλλ' οὐχὶ καὶ ἀναλόγως.

Ἰδοὺ λοιπὸν ἐν παραδείγμα συμμεταβαλλομένων ποσῶν, ἀλλ' οὐχὶ καὶ ἀναλόγως, ὡς ἴσως τις ἐκ πρώτης ὄψεως ἤθελεν ὑποθέσει. Διὰ τοῦτο ἐλέγομεν ἐν τῇ παρατηρήσει τῆς 216 παραγράφου, ὅτι χρειάζεται μεγάλη προσοχή, ὅπως ἀποφανθῶμεν μετὰ βεβαιότητος, ἂν δύο ποσὰ ἦναι ἢ μὴ ἀνάλογα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2. — Τὰ τέσσαρα ποσά: πληρωτέον κεφάλαιον, χρόνος τῆς λήξεως, ἐπιτόκιον καὶ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις, ἂν καὶ δὲν εἶναι ἅπαντα ἀνάλογα πρὸς ἄλληλα, ἐξαρτῶνται ὅμως οὕτως ἀπ' ἀλλήλων, ὥστε, ἐάν ὑποτεθῶσι τρία τούτων ὑποαδήποτε ὡς γνωστὰ, ἡ τιμὴ τοῦ τετάρτου εἶναι ἐντελῶς ὀρισμένη. Ἐπεταὶ ἐντεῦθεν ὅτι πᾶν πρόβλημα ἐσωτερικῆς ὑφαίρεσεως θέλει ἀνάγεσθαι εἰς ἐν τῶν ἐξῆς τεσσάρων γενικῶν.

1ον. Δοθέντος τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου, τοῦ χρόνου τῆς λήξεως καὶ τοῦ ἐπιτοκίου, νὰ εὑρεθῇ ἡ γενησομένη ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.

2ον. Δοθέντος τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου, τοῦ χρόνου τῆς λήξεως καὶ τῆς γενομένης ἐσωτερικῆς ὑφαίρεσεως, νὰ εὑρεθῇ τὸ πρὸς ὃ αὕτη ἐγένετο ἐπιτόκιον.

3ον. Δοθέντος τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου, τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τῆς γενομένης ἐσωτερικῆς ὑφαίρεσεως, νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος τῆς λήξεως.

4ον. Δοθέντος τοῦ χρόνου τῆς λήξεως, τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τῆς γενομένης ἐσωτερικῆς ὑφαίρεσεως, νὰ εὑρεθῇ τὸ πληρωτέον κεφάλαιον.

Εἰδομεν δὲ προηγουμένως πῶς λύεται τὸ 1ον ζήτημα. Ἀς ζητήσωμεν ἐνταῦθα χάριν ἀσκήσεως τὸν τρόπον τῆς λύσεως ἐκάστου τῶν λοιπῶν λαμβάνοντες πρὸς τοῦτο μερικὰ τινα παραδείγματα.

2ον. Διὰ κεφάλαιον 5000 δραχμῶν πληρωτέον μετὰ 10 μῆνας ἐγένετο ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις 600 δραχμῶν, πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ὑπελογίσθη αὕτη;

Ἐπειδὴ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι 600 δραχμαὶ καὶ ἡ ἀξία τοῦ γραμματείου 5000, ἔπεται ὅτι τὸ πρὸς προεξόρλησιν αὐτοῦ ὑπό-

τοῦ προεξοφλητοῦ πληρωθὲν κεφάλαιον εἶναι 4,400 δραχμῶν, καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαίρεσεως, τοῦτο, τοκισθὲν πρὸς τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον, πρέπει νὰ φέρῃ τόκον μετὰ 18 μῆνας 600 δραχμῶν· ἐν ἄλλαις λέξεσι, πρέπει πρὸς εὔρεσιν τοῦ ζητουμένου νὰ λύσωμεν τὸ ἐξῆς πρόβλημα τοῦ τόκου.

Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκίζεται 4,400 δραχμαὶ μετὰ 18 μῆνας θέλουσι φέρει τόκον 600 δραχμῶν;

κεφάλαια	ἔτη	τόκος
4400	$\frac{18}{12}$	600
100	1	X

ὅπερ δὲν παρέχει οὐδεμίαν δυσκολίαν.

3. Διὰ κεφάλαιον 4,500 δραχμῶν ἐγένετο πρὸς 10 % ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις 700 δραχμῶν· μετὰ πόσον χρόνον ἔπρεπε αὐτὰ νὰ πληρωθῶσιν;

Ἐπειδὴ ἡ γενομένη ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι 700 δραχμῶν, τὸ πληρωθὲν πρὸς προεξόφλησιν τοῦ γραμματίου ὑπὸ τοῦ προεξοφλητοῦ ποσὸν εἶναι 3,800. Πρὸς εὔρεσιν λοιπὸν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ λύσωμεν προφανῶς τὸ ἐξῆς ζήτημα τοῦ τόκου.

Μετὰ πόσον χρόνον 3,800 δραχμαὶ, τοκίζονται πρὸς 10 % θέλουσι φέρει τόκον 700 δραχμῶν;

κεφάλαια	ἔτη	τόκος
100	1	10
3800	X	700

4.—Διὰ κεφάλαιον τι, πληρωτέον μετὰ 15 μῆνας, ἐγένετο ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις 500 δραχμῶν πρὸς 8 %· ἐκ πόσων δραχμῶν συνέκειτο τοῦτο;

Εὐρίσκομεν πρῶτον τὸν τόκον 10 τῶν 100 δραχμῶν εἰς 15 μῆνας πρὸς τὸ ὁρισμένον ἐπιτόκιον 8, ἔπειτα λέγομεν·

10 δραχμαὶ εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις κεφαλαίου 110 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ 15 μῆνας· ὅταν ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις ᾖ 500 δραχμῶν, ἐκ πόσων δραχμῶν θέλει σύγκεισθαι τὸ πληρωτέον μετὰ τὸν αὐτὸν χρόνον κεφάλαιον;

Καὶ ἐπειδὴ τὰ ποσὰ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ κεφάλαιον εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα, σχηματίζομεν πρὸς εὔρεσιν τοῦ ζητουμένου τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν

$$10:500=110:X,$$

ἐξ ἧς परिζώμεθα τὴν ζητούμενην τιμὴν τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου χ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.—Οἱ ἔμποροι πρὸς εὐκολίαν ὑπολογίζουσι συνήθως τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν, ὅταν προεξοφλῶσι τὰ γραμμάτια αὐτῶν ἢ τὰ τῶν ἄλλων, ἐπειδὴ δέ, ὡς εἶδομεν, αὕτη εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ τόκου, ὃν ἤθελε φέρεи τὸ ληθὲν πρὸς ἐξόφλησιν ποσόν, τοκισθὲν πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας, λέγουσί τινες ὅτι αὕτη εἶναι ἀδίκος. Ἡμεῖς νομίζομεν ὅτι δὲν γίνεται οὐδεμίαν ἀδικίαν, διότι τοῦτο εἶναι ἐν γνώσει ἀμφοτέρων τῶν συμβαλλομένων, καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐπιτόκιον ὀρίζεται ἐκ συμφώνου ὑπ' αὐτῶν, δύναται νὰ τὸ ὀρίσωσιν οὕτως, ὥστε ἡ παραγομένη διαφορὰ νὰ ἐκλείψῃ. Παραδείγματος χάριν, ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις τῶν 1000 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ ἓν ἔτος, πρὸς 10 % εἶναι 100 δραχμαὶ, καὶ ὄχι 90, 09 ὡς εὐρομεν ζητοῦντες τὴν ἐσωτερικὴν αὐτῶν ὑφαίρεσιν. Ἀλλ' ἐὰν συμφωνηθῇ τὸ ἐπιτόκιον πρὸς 9 %, ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις τῶν 1000 δραχμῶν θέλει εἶναι μόνον 90, περίπου ὅση καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις πρὸς 10 %. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ὅσάκις ὑπολογίζουσιν ἐξωτερικῶς τὴν ὑφαίρεσιν, ἀρκεῖ νὰ ἐλαττώσωσι καταλλήλως τὸ ἐπιτόκιον καὶ θέλουσιν εὑρεῖν τὸ αὐτὸ περίπου ἐξαγόμενον.

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΠΟΣΟΥ ΤΙΝΟΣ ΕἰΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ.

237. Ἄς παραστήσωμεν διὰ A δεδομένον τι ποσὸν ἢ μέγεθος. Ἐὰν υποθέσωμεν ὅτι τοῦτο ἐμερίσθη εἰς ἀριθμὸν τινὰ μερῶν, π. χ. εἰς τέσσαρα μέρη

$$x, y, v, \varphi$$

τοιαῦτα, ὥστε ὁ λόγος ὁποῦνδ' ἄποτε ἐξ αὐτῶν νὰ ἦται ἴσος τῷ λόγῳ τῶν ἀντιστοίχων ποσῶν

$$a, b, \gamma, \delta,$$

τότε λέγεται ὅτι τὸ ποσὸν A ἐμερίσθη εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δεδομένων ποσῶν a, b, γ, δ .

Ἐπειδὴ δὲ ἀπεδείξαμεν, ὅτι ὁ λόγος δύο ποσῶν εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν παριστάντων αὐτὰ ἀριθμῶν, ἐν τοῖς ἐπομένοις θέλωμεν διὰ τῶν γραμμάτων $A, a, b, \gamma, \delta, x, y, v, \varphi$ παριστᾶ ἀδιαφόρως ἢ αὐτὰ τὰ ποσὰ ἢ τοὺς ἀριθμούς, τοὺς παριστάντας τὰ μέτρα αὐτῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—Νὰ μερισθῇ τὸ δεδομένον ποσὸν A εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δεδομένων ἀριθμῶν a, b, γ, δ .

Ἐστῶσαν x, y, v, φ τὰ ζητούμετα μέρη τοῦ A . Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τοῦ μερισμοῦ ποσοῦ τινος εἰς μέρη ἀνάλογα θέλομεν ἔχει,

συνδυάζοντες καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους τοὺς ἴσους λόγους,
τὰς ἐξῆς ἐξ ἀναλογίας

$$\begin{aligned} \chi : \psi &= a : \beta, & \chi : v &= a : \gamma, & \chi : \varphi &= a : \delta, \\ \psi : v &= \beta : \gamma, & \psi : \varphi &= \beta : \delta, & v : \varphi &= \gamma : \delta. \end{aligned}$$

Ἐάν δὲ μεταθέσωμεν τοὺς μέσους τῶν ἐξ τούτων ἀναλογιῶν, θέ-
λομεν ἔχει τὰς ἀναλογίας

$$\begin{aligned} \chi : a &= \psi : \beta, & \chi : a &= v : \gamma, & \chi : a &= \varphi : \delta, \\ \psi : \beta &= v : \gamma, & \psi : \beta &= \varphi : \delta, & v : \gamma &= \varphi : \delta, \end{aligned}$$

αἵτινες παριστῶσι τὴν πρὸς ἀλλήλους ἰσότητα τῶν ἐξῆς τεσσά-
ρων λόγων $\chi : a$, $\psi : \beta$, $v : \gamma$, $\varphi : \delta$, συνδυαζομένων ἀνά δύο καθ'
ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἐξῆς σειρὰν
τῶν ἴσων λόγων

$$\chi : a = \psi : \beta = v : \gamma = \varphi : \delta. \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ εἰς πᾶσαν σειρὰν ἴσων λόγων τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγου-
μένων εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπομένων, ὥς τις ἡγούμενος πρὸς
τὸν ἐπόμενον αὐτοῦ, παριζόμεθα ἐκ τῆς σειρᾶς (1) τὰς ἐξῆς τέσσα-
ρας ἀναλογίας

$$\begin{aligned} \chi + \psi + v + \varphi &\tilde{=} A : a + \beta + \gamma + \delta = \chi : a, \\ \chi + \psi + v + \varphi &\tilde{=} A : a + \beta + \gamma + \delta = \psi : \beta, \\ \chi + \psi + v + \varphi &\tilde{=} A : a + \beta + \gamma + \delta = v : \gamma, \\ \chi + \psi + v + \varphi &\tilde{=} A : a + \beta + \gamma + \delta = \varphi : \delta. \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς πρώτης τούτων εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ

$$A = \frac{A \times a}{a + \beta + \gamma + \delta}$$

καὶ ἐξ ἐκάστης τῶν τριῶν ἄλλων τὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν μερῶν
 ψ , v , φ ,

$$\psi = \frac{A \times \beta}{a + \beta + \gamma + \delta}, \quad v = \frac{A \times \gamma}{a + \beta + \gamma + \delta}, \quad \varphi = \frac{A \times \delta}{a + \beta + \gamma + \delta}.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι

"Ἐὰν εὐρωμεν ἕκαστον τῶν μερῶν χ , ψ , v , φ τοῦ εἰς μέρη ἀνά-
λογα τῶν ἀριθμῶν a , β , γ , δ μεριστέον ποσοῦ A , πρέπει νὰ πο.λ-
λαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐφ' ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν a , β , γ , δ , καὶ νὰ
διαίρῃσωμεν ἕκαστον τῶν εὐρεθησομένων γινομένων διὰ τοῦ
ἀθροίσματος $a + \beta + \gamma + \delta$. Ἐκαστον τῶν οὕτως εὐρεθησομένων πη-
λίκων θέλει παριστᾶ τὸ μέρος, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν ἀριθμὸν,
ἐφ' ὃν πο.λ.λαπλασιάσαμεν τὸ δεδομένον A .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—'Αν τὸ δεδομένον ποσὸν A ἐπρόκειτο νὰ μερισθῇ εἰς ὁσάδ' ἴσους μέρη, ἀνάλογα ἰσαριθμῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ἤθελομεν εὑρεῖ ἀκολουθοῦντες κατὰ γράμματα τοὺς ἀνωτέρω συλλογισμοὺς ὅτι ὁ προηγούμενος κανὼν εἶναι γενικῆς.

Παράδειγματος χάριν, ἂν ἐζητεῖτο νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 1000 εἰς πέντε μέρη $\chi, \psi, v, \rho, \omega$ ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 5, 7, 11 καὶ 13, ἤθελομεν εὑρεῖ σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω ὅτι

$$\chi = \frac{1000 \times 2}{2+5+7+11+13}, \quad \psi = \frac{1000 \times 5}{2+5+7+11+13},$$

$$v = \frac{1000 \times 7}{2+5+7+11+13}, \quad \rho = \frac{1000 \times 11}{2+5+7+11+13},$$

καὶ

$$\omega = \frac{1000 \times 13}{2+5+7+11+13}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2.—'Εὰν διακρίσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς $a, b, \gamma, \delta, \dots$ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, οἱ μεταξὺ αὐτῶν λόγοι δὲν θέλουσι μεταβληθῇ. Ὅσάκις λοιπὸν ἔχομεν νὰ μερίσωμεν ποσὸν τι A εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $a, b, \gamma, \delta, \dots$, ἔσιν οἱ ἀριθμοὶ $a, b, \gamma, \delta, \dots$ δὲν ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἄντ' αὐτῶν τὰ πηλίκα $a', b', \gamma', \delta', \dots$ τῆς διακρίσεως αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διακρίτου αὐτῶν καὶ ἀναλόγως πρὸς ταῦτα νὰ μερίσωμεν ἀκολούθως τὸ δεδομένον ποσὸν A .

238. Ἐστω ποσὸν τι M καὶ A καὶ B δύο ἕτερα ποσά, πρὸς ἃ τὸ M ὑποτίθεται κατ' εὐθείαν ἀνάλογον, καὶ ἃς περσστήσωμεν διὰ χ, ψ, ω , κατλ. τὰς τιμὰς τοῦ M , τὰς ἀντιστοιχοῦσας εἰς τὰς τιμὰς a καὶ b, a' καὶ b', a'' καὶ $b'',$ κατλ. τῶν ποσῶν A καὶ B . Ἐὰν ζητήσωμεν νὰ προσδιορίσωμεν διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, ἢ διὰ τοῦ ἐν τῇ § 221 δοθέντος κανόνος, ἐκάστην τῶν τιμῶν χ, ψ, ω , κατλ. διὰ τίνος τούτων, ὡς γνωστῆς λαμβανομένης, θέλομεν ἔχει τὰς ἐξῆς ἰσότητας

$$\psi = \frac{\chi \times a' \times b'}{a \times b}, \quad \omega = \frac{\chi \times a'' \times b''}{a \times b}, \quad \chi = \frac{\omega \times a' \times b'}{a'' \times b''},$$

$$\omega = \frac{\psi \times a'' \times b''}{a' \times b'}, \quad \chi = \frac{\psi \times a \times b}{a' \times b'}, \quad \chi = \frac{\omega \times a \times b}{a'' \times b''}, \text{ κατλ.}$$

ἐξ ὧν परिζόμεθα διακρίουντες τὰ δύο μέλη τῆς μὲν 1ης καὶ 3ης διὰ τοῦ γινομένου $a' \times b'$, τῆς δὲ 2ας καὶ 4ης διὰ τοῦ γινομένου $a'' \times b''$ καὶ τῆς 5ης καὶ 6ης διὰ τοῦ γινομένου $a \times b$, κατλ. τὴν ἰσότητα τῶν ἐξῆς λόγων

$$\frac{\chi}{\alpha \times \beta},$$

$$\frac{\psi}{\alpha' \times \beta'},$$

$$\frac{\omega}{\alpha'' \times \beta''}, \text{ κτλ.}$$

ἢ τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$\chi : \alpha \times \beta = \psi : \alpha' \times \beta' = \omega : \alpha'' \times \beta'' = \kappa\tau\lambda.$$

Ἐκ τῆς σειρᾶς ταύτης τῶν ἴσων λόγων πορίζομεθα τὰς ἐξῆς ἀναλογίας (212)

$$\chi + \psi + \omega + \kappa\tau\lambda. : \alpha \times \beta + \alpha' \times \beta' + \alpha'' \times \beta'' + \kappa\tau\lambda. = \chi : \alpha \times \beta,$$

$$\chi + \psi + \omega + \kappa\tau\lambda. : \alpha \times \beta + \alpha' \times \beta' + \alpha'' \times \beta'' + \kappa\tau\lambda. = \psi : \alpha' \times \beta',$$

$$\chi + \psi + \omega + \kappa\tau\lambda. : \alpha \times \beta + \alpha' \times \beta' + \alpha'' \times \beta'' + \kappa\tau\lambda. = \omega : \alpha'' \times \beta'',$$

$$. : = : .$$

Ἐάν τῶρα ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\chi + \psi + \omega + \kappa\tau\lambda.$ εἶναι γνωστὸν τι ποσὸν Π , αἱ ἀνωτέρω ἀναλογίαι γράφονται καὶ οὕτω

$$\Pi : \alpha \times \beta + \alpha' \times \beta' + \alpha'' \times \beta'' + \kappa\tau\lambda. = \chi : \alpha \times \beta,$$

$$\Pi : \alpha \times \beta + \alpha' \times \beta' + \alpha'' \times \beta'' + \kappa\tau\lambda. = \psi : \alpha' \times \beta',$$

$$\Pi : \alpha \times \beta + \alpha' \times \beta' + \alpha'' \times \beta'' + \kappa\tau\lambda. = \omega : \alpha'' \times \beta'',$$

$$. + \kappa\tau\lambda. = : .$$

Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν τούτων, τῶν περιεχουσῶν μίαν μόνην ἄγνωστον, θέλομεν πορισθῇ τὰς τιμὰς τοῦ χ , ψ , ω , κτλ., ἐάν ὑποθέσωμεν γνωστὰς τὰς τιμὰς τοῦ Π , α καὶ β , α' καὶ β' , α'' καὶ β'' , κτλ., πρὸς ἕκαστον ζευγὸς τῶν ὁποίων ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς ἄγνωστου εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογος ἐν ἄλλαις λέξεσιν

"Ἄν εἶχομεν νὰ μερίσωμεν ποσὸν τι Π εἰς μέρη χ , ψ , ω , κτλ. κατ' εὐθείαν ἀνάλογα συγχρόνως δύο διαφορῶν τιμῶν α καὶ β , α' καὶ β' , α'' καὶ β'' , κτλ. δύο δεδομένων ποσῶν A καὶ B , πρέπει πρὸς τοῦτο νὰ μερίσωμεν τὸ δεδομένον ποσὸν Π ἀναλόγως τῶν γινομένων $\alpha \times \beta$, $\alpha' \times \beta'$, $\alpha'' \times \beta''$, κτλ. τῶν ἀντιστοιχοῦντων ζευγῶν κατὰ τὸν προηγουμένως δοθέντα κανόνα.

Παραδείγματός χάριν, ἂν ἐπρόκειτο νὰ μερίσωμεν τὸ Π εἰς τρία μέρη χ , ψ , ω , [ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ᾖναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογον τῶν δύο ἀριθμῶν 2 καὶ 3, 5 καὶ 7, 6 καὶ 9, ἔπρεπε πρὸς εὐρεσιν ἀντιστοιχοῦντων μερῶν νὰ μερίσωμεν τὸ Π εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν γινομένων 2×3 , 5×7 , 6×9 κατὰ τὸν ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ δοθέντα κανόνα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΙΑΣ.

239. Ἐπειδὴ πολλῶν τὰ κεφάλαια, ἅτινα δύναται νὰ διαθέσῃ εἰς τοὺς ἐταίρους τις διὰ τινος ἐπιχείρησιν, ἣ δὲν εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἐπαρκὴ πρὸς (ΑΡΙΘΜ. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΥ).

ἐπιτυχίαν τοῦ τῆς ἐπιχειρήσεως σκοποῦ, ἢ δὲν θέλει νὰ κινδυνεύσῃ μόνος αὐτός ἐν περιπτώσει ἀποτυχίας, προσκαλεῖ καὶ ἄλλους, ἵνα συμμετάσχῃ τῆς ἐπιχειρήσεως καταβάλλοντες ἕκαστος ὠρισμένον χρηματικὸν ποσὸν ἢ ἅπαξ καὶ συγχρόνως ἢ κατὰ διαφόρους ἐποχάς. Μετὰ τὸ πέρασ τῆς ἐπιχειρήσεως, ἢ πολλὰκις καὶ ἐν τῷ μεταξύ, ὅταν αὕτη ἦναι διαρκής, πρέπει νὰ συμμετάσχῃ πάντες οἱ καταβάλοντες τῶν ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως προκυψάντων κερδῶν ἢ νὰ πληρώσωσι τὴν προκύψασαν ἐξ αὐτῆς ζημίαν.

Ἐντεῦθεν δυνατόν νὰ προκύψωσι διάφορα πρὸς λύσιν ζητήματα, ἅτινα καλοῦνται προβλήματα τῆς εταιρίας. Ἡμεῖς ἐνταῦθα θέλομεν ἐξετάσει μόνον τὰς ἐξῆς δύο ἀπλῆς περιπτώσεις.

1ον. Ὅταν οἱ συνέταιροι κατέβαλον ἅπαξ καὶ συγχρόνως ὠρισμένον ἕκαστος κεφάλαιον, καὶ πρόκειται μετὰ τινα χρόνον νὰ μερίσωσιν ἀναλόγως τοῦ ὅφ' ἑκάστον καταβληθέντος ποσοῦ κέρδος τι ἢ ζημίαν τινα *A*.

2ον. Ὅταν οἱ συνέταιροι κατέβαλον ἅπαξ μὲν, ἀλλ' εἰς διαφόρους ἕκαστος ἐποχάς, διάφορα κεφάλαια καὶ μετὰ παρέλευσιν χρόνου τιτὸς ζητοῦσι τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἕκαστον κέρδος ἢ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν ζημίαν, ἀναλόγως τοῦ ὅφ' ἑκάστον καταβληθέντος χρηματικοῦ ποσοῦ καὶ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν τοῦτο εἶχε μείνει κατατεθειμένον.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι

Τρεῖς συνέταιροι κατέβαλον ὁ μὲν 10000 δραχμάς, ὁ δὲ 15000 καὶ ὁ τρίτος 25000, καὶ προέκυψε κέρδος ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως αὐτῶν δραχμαὶ 19000. Ζητεῖται πόσον θέλει λάβει ἕκαστος.

Εἶναι φανερόν ὅτι πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ μερισθῇ τὸ κέρδος 19000 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 10000, 15000, 25000, ἢ ὅπερ ταύτῃ, ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 5, τῶν παριστάντων τὰ πηλίκια τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 5000. Θέλομεν εὐρεῖ λοιπὸν παριστάντες διὰ *a* τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου, διὰ *b* δὲ καὶ *γ* τὸ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου (237)

$$a = \frac{10000 \times 2}{2+3+5} = 3800, \quad b = \frac{15000 \times 3}{2+3+5} = 5700, \quad \gamma = \frac{25000 \times 5}{2+3+5} = 9500.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.—Τέσσαρες ἔμποροι ἠγόρασαν πορτεῖον τι σίτον καταβαλόντες ὁ μὲν 2000 δραχμάς, ὁ δὲ 5000, ὁ τρίτος 7000 καὶ ὁ τέταρτος 12000, ἐκέρδισαν δὲ ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ

δραχμῶν 1650 πόσον κέρδος θέλει λάβει ἕκαστος ἀναλόγως τοῦ ὅπ' αὐτοῦ κατατεθέντος κεφαλαίου;

Ἐν παραστήσωμεν διὰ x, y, v, p τὰ μερίδια ἐνὸς ἑκάστου, θέλομεν εὑρεῖ μερίζοντες τὸ κέρδος 1560 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν κεφαλαίων 2000, 5000, 7000 καὶ 12000 ἢ τῶν ἀριθμῶν 2, 5, 7 καὶ 12 (237 Παρατήρησις 2)

$$\begin{aligned} x &= \frac{1560 \times 2}{2+5+7+12}, & y &= \frac{1560 \times 5}{2+5+7+12}, \\ v &= \frac{1560 \times 7}{2+5+7+12}, & p &= \frac{1560 \times 12}{2+5+7+12}. \end{aligned}$$

240. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι μᾶς ἐδόθη πρὸς λύσιν καὶ τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν ὁ μὲν 10000 δραχμᾶς, ὁ δὲ 20000 καὶ ὁ τρίτος 50000 διὰ τινα ἐπιχείρησιν, καὶ πρὸς ταῦτα, ὅτι τὰ κεφάλαια τοῦ πρώτου ἔμειναν 13 ἔτη, τὰ τοῦ δευτέρου 7 καὶ τὰ τοῦ τρίτου 3, προέκυψε δὲ κέρδος ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως 42000 δραχμῶν. Ζητεῖται τί μέρος τοῦ κέρδους θέλει λάβει ἕκαστος ἀναλόγως τοῦ ὅπ' αὐτοῦ καταβληθέντος κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου, ἐφ' ὃν τοῦτο ἔμεινεν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει.

Ἐντάθῃ ἕκαστον τῶν ζητουμένων μερῶν x, y, ω εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον τῶν τιμῶν 10000 καὶ 13, 20000 καὶ 7, 50000 καὶ 3. Πρέπει λοιπὸν κατὰ τὰ λεγθέντα ἐν τῇ § 238 νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος 42000 ἀναλόγως τῶν γινομένων $10000 \times 13, 20000 \times 7, 50000 \times 3$ ἢ, ὅπερ ταῦτό, τῶν ἀριθμῶν 13, 14 καὶ 15. Θέλομεν δὲ οὕτως εὑρεῖ

$$\begin{aligned} x &= \frac{42000 \times 13}{13+14+15}, & y &= \frac{42000 \times 14}{13+14+15}, & \omega &= \frac{42000 \times 15}{13+14+15}, \\ \text{ἢ } x &= 13000, & y &= 14000, & \omega &= 15000. \end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΙΞΕΩΣ.

241. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—Ἐμπορὸς τις ἔχει τριῶν ποιοτήτων σίτου. Λαμβάνει ἐκ τῆς πρώτης, ἥς ἡ ἀξία τοῦ κοιλῶν εἶναι 5 δραχμῶν, 100 κοιλὰ, ἐκ τῆς δευτέρας, ἥς ἡ ἀξία εἶναι 6 δραχμῶν, 150 κοιλὰ, καὶ ἐκ τῆς τρίτης, ἥς ἡ ἀξία εἶναι 8 δραχμῶν, 200 κοιλὰ, καὶ σχηματίζει ἐκ τούτων ἓν μίγμα. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ τιμήσῃ ἕκαστος κοιλὸς τοῦ μίγματος, ἵνα λάβῃ τὴν αὐτὴν ποσότητα χρημάτων, ἥν ἤθελε λάβει, ἂν ἐπώλει τὰ 100 κοιλὰ πρὸς 5 δραχμᾶς, τὰ 150 πρὸς 6 δραχμᾶς, καὶ τὰ 200 πρὸς 8 δραχμᾶς.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν κοιλῶν τοῦ μίγματος θέλει εἶναι ἴσος τῷ ἀθροισματι $100+150+200$, ἥτοι 450. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ χ τὴν ζητουμένην ἀξίαν τοῦ κοιλοῦ τοῦ μίγματος, ὁ ἔμπορος θέλει λάβει ἐκ τῆς πωλήσεως τῶν 150 κοιλῶν πρὸς χ δραχμὰς ἕκαστον $150 \times \chi$ δραχμὰς. Ἀλλ' ἐὰν ἐπώλῃ τὰ 100 πρὸς 5 δραχμὰς, ἤθελε λάβει 500 δραχμὰς. Ὡσαύτως ἐκ τῆς πωλήσεως τῶν 150 καὶ 200 πρὸς 6 καὶ 8 δραχμὰς ἤθελε λάβει 900 καὶ 1600 δραχμὰς. Ἦθελε λάβει λοιπὸν τὸ ὅλον $500+900+1600$, ἥτοι 3000.

Κατὰ τὰ ζητούμενα τοῦ προβλήματος θελομένην ἔχει λοιπὸν τὴν ἐξῆς ἰσότητα $450 \times \chi = 3000$, ἐξ ἧς, διαιροῦντες τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ 450, परिζόμεθα

$$\chi = \frac{3000}{450} = 6,66\dots$$

Λοιπὸν πρὸς 6 δραχμὰς καὶ 66 σχεδὸν λεπτά ἔπρεπε νὰ πωλήσῃ ἕκαστον κοιλὸν τοῦ μίγματος, ἵνα λάβῃ τὴν αὐτὴν ποσότητα χρημάτων, ἣν ἤθελε λάβει καὶ ἂν ἐπώλῃ χωριστὰ τὰς διαφόρους ποσότητας τῶν κοιλῶν πρὸς τὰς ἀντιστοιχοῦσας εἰς ἕκαστον εἶδος τιμὰς αὐτῶν.

Ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι μᾶς ἐδόθησαν αἱ ποσότητες διαφόρων ποιότητων πράγματός τινος, καθὼς καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἕκαστην ποιότητα τιμὴ μονάδος τινός, καὶ μᾶς ἐζητήθη νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς αὐτῆς μονάδος τοῦ μίγματος τῶν δοθεισῶν ποσοτήτων οὕτως, ὥστε ἡ ὅλική ἀξία αὐτοῦ νὰ ἦναι ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν τιμῶν τῶν ὁλικῶν ποσοτήτων ἐκάστης ποιότητος. Εἶδομεν δὲ ὅτι πρὸς εὐρεσιν τῆς ζητουμένης τιμῆς

Πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἐκάστης ποιότητος ἐπὶ τὴν ὀριθεύσαν τιμὴν αὐτῆς, νὰ προσθέσωμεν ἄφ' ἑνὸς μὲν τὰ οὕτως εὐρεθησόμενα γινόμενα, καὶ ἄφ' ἑτέρου τοῦν ἀριθμοὺς τῶν μονάδων τῶν διαφόρων ποιότητων, καὶ νὰ διαιρέσωμεν ἔπειτα τὸ ἀθροισμα τῶν γινόμενων διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν τῶν μονάδων τῶν διαφόρων ποιότητων. Τὸ οὕτως εὐρεθησόμενον πηλλικὸν θέλει παραστῇ τὴν ζητουμένην τιμὴν τῆς μονάδος τοῦ μίγματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.— Ἐχομεν οἶνον τριῶν ποιότητων 100 ὀκάδας τῆς πρώτης ποιότητος πρὸς 60 λεπτά τὴν ὀκάδα, 75 ὀκάδας τῆς δευτέρας ποιότητος πρὸς 50 λεπτά τὴν ὀκάδα, καὶ 125 ὀκάδας τῆς τρίτης ποιότητος πρὸς 90 λεπτά τὴν ὀκάδα. Ἐὰν ἐπώσωμεν

πάσας ταύτας τὰς ποσότητας, ποία θέλει εἶναι ἡ ἀξία μιᾶς ὀκάδος τοῦ κράματος;

Τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων 100×60 , 75×50 καὶ 125×90 εἶναι 21000, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δεδομένων ποσοτήτων 100, 75 καὶ 125 εἶναι 300. Λοιπὸν ἡ τιμὴ x τῆς μιᾶς ὀκάδος τοῦ κράματος θέλει εἶναι

$$x = \frac{21000}{300} = 70$$

ἢτοι 70 λεπτά.

242. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—Ἐμπορὸς τις ἔχει δύο ποιοτήτων σταφίδας. Ἡ μὲν πρώτη ποιότης εἶναι ἀξίας 33 ταλῆρων ἡ χιλιὰς, ἡ δὲ δευτέρα 45 ταλῆρων, καὶ θέλει νὰ σχηματίσῃ μίγμα 600 χιλιῶν λιτρῶν ἀξίας 38 ταλῆρων ἡ χιλιὰς. Πόσας χιλιᾶδας ἐξ ἑκατέρας ποιότητος πρέπει νὰ λάβῃ πρὸς τοῦτο;

Ἐστώσαν x καὶ y ὁ ἀριθμὸς τῶν χιλιᾶδων, ἃς πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρας ποιότητος. Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $x+y$ πρέπει νὰ ᾔναι ἴσον τῷ 600. Ἵνα δὲ εὐρωμεν ποῖα μέρη τοῦ 600 θέλουσιν εἶναι τὰ x καὶ y , σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ὁ ἔμπορος, πωλὼν ἐκάστην χιλιᾶδα τοῦ μίγματος πρὸς 38 τάληρα, κερδίζει ἀπ' ἐνὸς 5 τάληρα τὴν χιλιᾶδα διὰ τὴν ἔχουσαν ἀξίαν 33 ταλῆρων, καὶ ζημιοῦται ἀπ' ἑτέρου 7 τάληρα τὴν χιλιᾶδα διὰ τὴν ἔχουσαν ἀξίαν 45 ταλῆρων. Ἐπειδὴ δὲ λαμβάνει x χιλιᾶδας ἀπὸ τῶν τῆς πρώτης ποιότητος καὶ y ἀπὸ τῶν τῆς δευτέρας, θέλει προφανῶς κερδίσει $5 \times x$ τάληρα καὶ ζημιωθῇ $7 \times y$. Ἵνα λοιπὸν μὴ ζημιωθῇ μήτε ὠφελῇ τι πλέον, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν γινομένων $5 \times x$ καὶ $7 \times y$, τῶν παριστάντων τὸ κέρδος καὶ τὴν ζημίαν, ἡ ἐξῆς ἰσότης

$$5 \times x = 7 \times y.$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος πορίζομεθα τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν (205)

$$x : y = 7 : 5,$$

ἐν ᾗ βλέπομεν ὅτι πρὸς εὐρεσιν τῶν μερῶν x καὶ y πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸν 600 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 5. Εὐρίσκομεν δὲ οὕτω (237)

$$x = \frac{600 \times 7}{7+5} = 350 \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{600 \times 5}{7+5} = 250$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ λάβῃ 350 χιλιᾶδας ἀπὸ τῶν τιμωμένων 33 τάληρα ἡ χιλιὰς καὶ 250 ἀπὸ τῶν τιμωμένων 45.

Ἐν τῷ ἀνωτέρῳ προβλήματι μᾶς ἐδόθησαν αἱ τιμαὶ δύο ποιότη-
των πράγματός τινος καὶ μᾶς ἐζητήθη πόσον μέρος ἔπρεπε νὰ λά-
βωμεν ἀφ' ἐκατέρας ποιότητος, ἵνα ἀποτελέσωμεν ὀρισμένον μίγμα
δεδομένης τιμῆς. Εἶδομεν δ' ὅτι πρὸς λύσιν τοῦ ζητήματος τούτου

Πρέπει νὰ μερίσωμεν τὴν ὀρισθεῖσαν ποσότητα τοῦ μίγματος
εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι τὰς διαφορὰς
τῶν δύο δεδομένων τιμῶν καὶ τῆς τιμῆς τοῦ μίγματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.—Ἐχομεν δύο ποιότητων αἶνονες. Ἡ τιμὴ τῆς ὀκ-
ταεῖς τῆς πρώτης ποιότητος εἶναι 80 λεπτῶν, ἡ δὲ τῆς δευτέρας 40
λεπτῶν. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἀφ' ἐκατέρας ποιότη-
τος, ἵνα σχηματίσωμεν κράμα 400 ὀκάδων, ἀξίας 65 λεπτῶν ἡ ὀκά;

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 400
εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 15 καὶ 25, οἵτινες παριστῶσι
τὰς διαφορὰς 80—65, 65—40 τῶν δύο δεδομένων τιμῶν 80 καὶ
40 καὶ τῆς τιμῆς 65 τοῦ κράματος. Εὐρίσκομεν δὲ οὕτω

$$x = \frac{400 \times 15}{15 + 25} = 150 \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{400 \times 25}{15 + 25} = 250$$

243. Τὰ προβλήματα, ἐν οἷς μᾶς δίδονται αἱ ποσότητες πράγ-
ματός τινος καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῶν διαφόρων αὐτοῦ ποιο-
τήτων καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ μίγματος, καλοῦνται προβλή-
ματα ἀναμίξεως τοῦ πρώτου εἶδους. Ἐκεῖνα δέ, ἐν οἷς μᾶς ζητεῖται
πόσας ποσότητας πρέπει νὰ λάβωμεν ἀφ' ἐκάστης ποιότητος δεδο-
μένης ἀξίας πράγματός τινος, ἵνα σχηματίσωμεν δεδομένην ποσό-
τητα ὀρισμένης ἀξίας, καλοῦνται προβλήματα ἀναμίξεως τοῦ δευ-
τέρου εἶδους.

Ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τοῦ πρώτου εἶδους εἶναι δυνατὴ διὰ
τῆς Ἀριθμητικῆς ὁποσδήποτε καὶ ἂν ᾖ ὁ ἀριθμὸς τῶν διαφόρων
ποιότητων τοῦ πρὸς ἀνάμιξιν πράγματος, ἀλλ' ἡ λύσις τῶν τοῦ δευ-
τέρου εἶδους δὲν εἶναι δυνατὴ, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πρὸς ἀνάμιξιν
ποιότητων ᾖ μεγαλύτερος τοῦ 2.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἄν εἰς τὰ προβλήματα τοῦ δευτέρου εἶδους δὲν
μᾶς ἐδίδετο ἡ ποσότης τοῦ ζητουμένου μίγματος, ἀλλὰ μᾶς ἐζητεῖ-
το ἀπλῶς νὰ κατασκευάσωμεν μίγμα ὁποσδήποτε δεδομένων ποιο-
τήτων, ἔχον δεδομένην ἀξίαν, δυνάμεθα τότε διὰ τῆς Ἀριθμητικῆς
νὰ λύσωμεν τὸ ζήτημα τοῦτο κατ' ἀπείρους τρόπους.

Παραδείγματός γάρ, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ
ἑξῆς ζήτημα.

Ἐμπορος ἔχει πέντε εἰδῶν οἶνους. Ἡ ὁκὰ τοῦ πρώτου εἶδους τιμᾶται 220 λεπτά, ἡ τοῦ δευτέρου 180, ἡ τοῦ τρίτου 150, ἡ τοῦ τετάρτου 100 καὶ ἡ τοῦ πέμπτου 70. Ζητεῖ δὲ ῥ' ἀποτελέσῃ κραμὰ τι, οὐτίνος ἡ ὁκὰ ῥὰ ἦναι ἀξίας 130 λεπτῶν· πόσας ὁκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀρ' ἐκάστης ποιότητος;

Δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν πρῶτον πόσας ὁκάδας ἐκ τῶν τιμωμένων 200 καὶ 110 λεπτῶν, τῶν περιλαμβανόντων τὴν τιμὴν 130 τοῦ ζητουμένου κραμάτος, πρέπει νὰ λάβωμεν, ἵνα ἀποτελέσωμεν κραμὰ τι ἀξίας 130 λεπτῶν, ἔπειτα πόσας ἐκ τῶν τιμωμένων 180 καὶ 110, καὶ τρίτον πόσας ἐκ τῶν τιμωμένων 150 καὶ 70, πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπὸν. Ἐάν τῶρα ἐνώσωμεν τὰ τρία ταῦτα μερικὰ κραμάτα, θέλομεν ἔχει κραμὰ τι ἀξίας 130 λεπτῶν καὶ περιέχον πάντα τὰ εἶδη τῶν οἶνων.

Ἄλλ' ἀντὶ νὰ συνδυάσωμεν, ἀνὰ δύο ὡς ἀνωτέρω, τὰ εἶδη τῶν δεδομένων οἶνων, δυνάμεθα προφανῶς νὰ συνδυάσωμεν αὐτὰ καὶ ἄλλως. Π. γ. νὰ ζητήσωμεν πρῶτον πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ τῶν τιμωμένων 200 καὶ 70, πόσον ἐκ τῶν 200 καὶ 110, πόσον ἐκ τῶν 180 καὶ 110, ἢ πόσον ἐκ τῶν 150 καὶ 70, κτλ. διὰ νὰ ἀποτελέσωμεν μερικὰ κραμάτα ἀξίας 130 λεπτῶν. Ἐάν τῶρα ἐνώσωμεν τὰ μερικὰ ταῦτα κραμάτα, θέλομεν σχηματίσει κραμὰ τι ἐκ πάντων τῶν εἰδῶν τῆς ζητουμένης ἀξίας 130.

Πάλιν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐξ ἐκάστου μερικοῦ κραμάτος τῆς ζητουμένης ἀξίας 130 ταύτην ἢ ἐκείνην τὴν ποσότητα χωρὶς ἢ ἀξία τοῦ ὀλικοῦ κραμάτος νὰ μεταβληθῇ, κτλ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν πᾶς τις βλέπει, ὅτι τὸ ζήτημα ἐν ταύτῃ περιπτώσει λύεται κατ' ἀπείρους τρόπους, ἢ, ὡς λέγουσιν οἱ Μαθηματικοί, εἶναι ἀπροσδιόριστον.

ΣΥΝΕΖΕΥΓΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ.

244. Πολλάκις μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ ποσοῦ τινος καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ ἑτέρου τινὸς ποσοῦ καί, ἀντὶ νὰ μᾶς δοθῇ τιμὴ τις τοῦ πρώτου ἀντιστοιχοῦσα εἰς δεδομένην τινὰ τιμὴν τοῦ δευτέρου, μᾶς δίδεται τιμὴ τις αὐτοῦ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τινὰ τιμὴν ἄλλου τινὸς ποσοῦ, ἔπειτα τιμὴ τις τούτου ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τινὰ τιμὴν τετάρτου τινὸς, κτλ. καὶ τελευταίον τιμὴ τις τοῦ τελευταίου ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τινὰ δεδομένην τιμὴν τοῦ ζητουμένου. Παραδείγματος χάριν.

Μὲ πόσας δραχμὰς ἰσοδυναμοῦσιν 85 λίραι ἀγγλικά, δοθέν-
τος ὅτι 20 λίραι ἰσοδυναμοῦσι μὲ 95 δίστηλα, 58 δίστηλα μὲ 60
γερμανικὰ τάληρα καὶ 5 γερμανικὰ τάληρα μὲ 29 δραχμὰς ;

Ἐνταῦθα μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ 85 τῶν ἀγγλικῶν λιρῶν καὶ μᾶς
ζητεῖται ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ταύτας τιμὴ τῶν δραχμῶν καί, ἀντί-
νὰ μᾶς δοθῇ τιμὴ τις τῶν λιρῶν ἀντιστοιχοῦσα εἰς τινὰ τιμὴν τῶν
δραχμῶν, μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ 20 τῶν λιρῶν, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς
τὴν τιμὴν 95 τῶν διστήλων, ἔπειτα ἡ τιμὴ 58 τῶν διστήλων, ἡ
ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν 60 τῶν γερμανικῶν τάληρων, καὶ τε-
λευταῖον ἡ τιμὴ 5 τῶν γερμανικῶν τάληρων, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς
τὴν δεδομένην τιμὴν 29 τῶν δραχμῶν.

Πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω ζητήματος διατάσσομεν τὰ δεδομένα
ὡς ἑξῆς :

$$20 \text{ λίραι} = 95 \text{ δίστηλα} \quad (1)$$

$$58 \text{ δίστηλα} = 60 \text{ γερ. τάλ.} \quad (2)$$

$$5 \text{ γερ. τάλ.} = 29 \text{ δραχμὰς,} \quad (3)$$

τουτέστιν οὕτως, ὥστε τὸ εἶδος τῶν μονάδων, ἧς τὸ δεύτερον μέ-
λος ἰσότητός τινος παριστᾷ, νὰ εὑρίσκηται ἐν τῇ πρώτῃ μέλει τῆς
ἀμέσως ἐπομένης.

Ἐὰν τώρα εὐρωμεν μὲ πόσας δραχμὰς ἰσοδυναμοῦσιν 20 λίραι,
θέλομεν ἔχει μίαν τιμὴν τοῦ δεδομένου λίραι καὶ τὴν ἀντιστοιχοῦ-
σαν τοῦ ζητούμενου δραχμαί, ἐπομένως πρὸς λύσιν τοῦ ζητήματος
ἠθέλομεν σχηματίσει, ὑποθέτοντες ὅτι εὐρωμεν ὅτι 20 λίραι ἰσοδυ-
ναμοῦσι μὲ A δραχμὰς, τὴν ἀναλογίαν

$$20:85=A:x, \quad (\alpha)$$

ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν

$$x = \frac{85 \times A}{20}.$$

Εὐκόλως τώρα διὰ τῶν ἰσοτήτων (1), (2), (3) θυνάμεθα νὰ εὐ-
ρωμεν τὴν ποσότητα A τῶν δραχμῶν, τὴν παριστῶσαν τὸ ἰσοδυ-
ναμον τῆς τιμῆς τῶν 20 λιρῶν. Διότι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ
δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 58 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ 95,
θέλομεν ἔχει

$$20 \times 58 \text{ λίραι} = 95 \times 58 \text{ δίστηλα,}$$

$$58 \times 95 \text{ δίστηλα} = 60 \times 95 \text{ γερμ. τάληρα,}$$

καὶ ἐπειδὴ $58 \times 95 \text{ δίστηλα} = 58 \times 95 \text{ δίστηλα}$, θέλομεν ἐκ τού-
των πορισθῇ τὴν ἰσότητα

$$20 \times 58 \text{ λίραι} = 60 \times 95 \text{ γερμ. τάληρα.} \quad (4)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη ταύτης ἐπὶ 5 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (3) ἐπὶ τὸ γινόμενον 60×95 , θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας

$$20 \times 58 \times 5 \text{ λίραι} = 60 \times 95 \times 5 \text{ γερμ. τάληρα,}$$

$5 \times 60 \times 95 \text{ γερμ. τάληρα} = 29 \times 60 \times 95 \text{ δραχμαί,}$
 ἐξ ὧν πορίζομεθα σκεπτόμενοι ὡς ἄνωτέρω

$$20 \times 58 \times 5 \text{ λίραι} = 29 \times 60 \times 95 \text{ δραχμαί.}$$

Ἐκ ταύτης δὲ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν 20 λιρῶν εἰς δραχμαί καὶ διὰ τῆς ἀνάλογίας (α) τὴν ζητουμένην τιμὴν τῶν 85 λιρῶν.

Αἱ ἰσότητες (1), (2), (3) καλοῦνται ζεύγη, ἡ δὲ τοιαύτη αὐτῶν διὰταξις, ὥστε τὸ εἶδος τοῦ δευτέρου μέλους μιᾶς ὁποιασδήποτε ἐξ αὐτῶν νὰ εὐρίσκηται ἐν τῷ πρώτῳ μέλει τῆς ἐπομένης, καλεῖται σέξενξις.

245. Ὅταν διατάσσωμεν τὰ δεδομένα τοῦ ζητήματος ὡς ἄνωτέρω ἑρρέθη, καὶ προσθέσωμεν ἐν τῷ τέλει καὶ ἕτερον ζεύγος, περιέχον τὴν δεδομένην τιμὴν 85 τῶν λιρῶν καὶ τὴν ζητουμένην τιμὴν x τῶν ἀντιστοιχοῦσων δραχμῶν, ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς ἀγνώστου εὐρίσκεται ἀμέσως ὡς ἐξῆς. Ἔστωσαν π. χ. τὰ ζεύγη

$$20 \text{ λίραι} = 95 \text{ δίστηλα,}$$

$$58 \text{ δίστηλα} = 60 \text{ γερμ. τάληρα,}$$

$$5 \text{ γερμ. τάλ.} = 29 \text{ δραχμαί,}$$

$$x \text{ δραχμαί} = 85 \text{ λίρας,}$$

καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐξετιμήσαμεν διὰ τινος νομίσματος τὴν ἀξίαν τῆς λίρας, τοῦ διστήλου, τοῦ γερμανικοῦ ταλήρου καὶ τῶν δραχμῶν, καὶ εὕρομεν ὅτι ἡ λίρα περιέχει a μονάδας τοῦ γένους νομίσματος, τὸ δίστηλον b , τὸ γερμανικὸν τάληρον γ καὶ ἡ δραχμὴ δ . Τὰ ἄνωτέρω ζεύγη γράφονται τότε ὡς ἐξῆς:

$$20 \times a = 95 \times b,$$

$$58 \times b = 60 \times \gamma,$$

$$5 \times \gamma = 29 \times \delta,$$

$$x \times \delta = 85 \times a.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰ νέα ταῦτα ζεύγη, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$20 \times 58 \times 5 \times x \times a \times b \times \gamma \times \delta = 95 \times 60 \times 29 \times 85 \times a \times b \times \gamma \times \delta,$$

ἥς διαιροῦντες τὰ δύο μέλη διὰ τοῦ γινομένου $\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta$, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς·

$$20 \times 58 \times 5 \times \chi = 95 \times 60 \times 29 \times 85,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως

$$\chi = \frac{95 \times 60 \times 29 \times 85}{20 \times 58 \times 5} = 2422,50.$$

Βλέπομεν λοιπόν ὅτι, ἀρῶν διατάξωμεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζήτη-
τούμενον τοῦ προβλήματος, ὡς ἀνωτέρω ἐβρέθη,

Ἡ τιμὴ χ τοῦ ζητουμένου εὐρίσκεται, ἔαν σχηματίσωμεν τὸ γι-
νόμενον $95 \times 60 \times 29 \times 85$ τῶν ἀριθμῶν τῶν δευτέρων μελῶν καὶ
ζευγῶν καὶ διαίρῶμεν αὐτὸ διὰ τοῦ γινομένου $20 \times 58 \times 5$ τῶν
γινωστῶν πρώτων μελῶν αὐτῶν.

Ὁ τρόπος, δι' οὗ λύομεν ἀμέσως τὰ τοῦ τοιοῦτου εἶδους προβλή-
ματα, καλεῖται συνεζευγμένη μέθοδος, καὶ τὰ προβλήματα αὐτὰ
προβλήματα τῆς συνεζευγμένης μεθόδου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. — Μὲ πόσας δραχμὰς ἰσοδυναμοῦσιν 97 ρούβλια,
δοθέντος ὅτι 34 δίστηλα ἰσοδυναμοῦσι μὲ 100 ρούβλια, 25 δι-
στηλα μὲ 26 γερμ. τάληρα, 48 γερμ. τάληρα μὲ 10 λίρας καὶ 1
λίρα μὲ 28,12 δραχμὰς;

Διαιτάσσοντες τὰ ζεύγη κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον θέλομεν ἔχει

$$100 \text{ ρούβλια} = 34 \text{ δίστηλα}$$

$$25 \text{ δίστηλα} = 26 \text{ γερμ. τάληρα}$$

$$48 \text{ γερμ. τάλ.} = 10 \text{ λίρας}$$

$$1 \text{ λίρα} = 28,12 \text{ δραχμὰς}$$

$$\chi \text{ δραχμὰς} = 97 \text{ ρούβλια,}$$

ἐπομένως

$$\chi = \frac{34 \times 26 \times 10 \times 28,12 \times 97}{100 \times 25 \times 48} = 200,95.$$

246. Εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα τῆς συνεζευγμένης μεθόδου
καὶ τὰ ζεύγη καθὼς καὶ ~~ἡ~~ ἡ ζεύξεις αὐτῶν ἦτο, οὕτως εἰπεῖν, φανε-
ρὰ. Ἀλλὰ πολλάκις αἱ συνθῆκαι τῆς ἐκφωνήσεως τῶν διὰ τῆς με-
θόδου τυχύτης λυομένων προβλημάτων δὲν εἶναι τόσῳ ἀπλάει, ὥστε
νὰ δυνάμεθα νὰ σχηματίζωμεν καὶ συζευγνύωμεν ἀμέσως τὰ ὑπάρ-
χοντα ζεύγη. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει χρειάζεται ἰδιαιτέρα τις πρὸς
τοῦτο ἄσκησης, ἥτις ἀποκτᾶται διὰ τῆς λύσεως διαφόρων προβλη-
μάτων τοιαύτης φύσεως. Πρὸς τὸν σκοπὸν δὲ τοῦτον ἐκθέτομεν τὰς
λύσεις τῶν ἐπομένων δύο προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.—*Ἡγόρασέ τις ἐν Πάτραις κορινθιακὴν σταφίδα πρὸς 180 δραχμὰς τὰς 1000 ἐνετικὰς λίτρας καὶ ἀπέστειλεν αὐτὴν πρὸς πώλησιν εἰς Τεργέστην πληρώσας πρὸς τοὺτους ἐν Ἑλλάδι μὲν 20% διὰ δασμὸν καὶ ναῦλον, ἐν Τεργέστη δὲ εἰς τὸν παραγγελιοδόχον αὐτοῦ 2% . Ζητεῖται ἀντὶ πόσων φορινίων πρέπει τὰ ὑπολογίσῃ ἐν Τεργέστη τὴν ἀξίαν τοῦ 1 στατῆρος, γνωστοῦ ὅτιος ἀφ' ἐνὸς μὲν ὅτι 1000 ἐνετικαὶ λίτραι ἰσοδυναμοῦσι μὲ 375 ὀκάδας καὶ 44 ὀκάδες μὲ 1 στατῆρα, ἀφ' ἑτέρου δέ, ὅτι κατὰ τὸ τρέχον συνάλλαγμα 38 φορινία ἰσοδυναμοῦσι μὲ 18 γερμανικὰ τάληρα, καὶ 1 γερμανικὸν τάληρον μὲ 5,78 δραχμὰς.*

Πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος εὐρίσκομεν εἰς δραχμὰς ἐν πρώτοις τὴν ἐν Τεργέστη ἀξίαν τῶν 1000 ἐνετικῶν λιτρῶν, προσθέτοντες εἰς τὰς 180 δραχμὰς 20% , καὶ εἰς τὸ εὑρεθησόμενον ἐξαγόμενον τῶν 216 δραχμῶν προσέτι 2% , καὶ ἔχομεν 220,32 δραχμὰς. Ἐπειτα σχηματίζομεν εὐκύλως κατὰ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος τὴν ἐξῆς ἄλυσιν.

$$1 \text{ στατῆρ} = 44 \text{ ὀκάδας}$$

$$375 \text{ ὀκάδες} = 1000 \text{ ἐνετικὰς λίτρας}$$

$$1000 \text{ ἐνετ. λίτραι} = 220,32 \text{ δραχμὰς}$$

$$5,78 \text{ δραχμαὶ} = 1 \text{ γερμανικὸν τάληρον}$$

$$18 \text{ γερ. τάληρα} = 38 \text{ φορινία,}$$

$$x \text{ φορινία} = 1 \text{ στατῆρα,}$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν ζητούμενην τιμὴν x τῶν φορινίων

$$x = \frac{44 \times 375 \times 1000 \times 220,32 \times 38}{375 \times 1000 \times 5,78 \times 18} = 9,45 \text{ περίπου.}$$

Ἦδυνάμεθα, ἀντὶ νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὴν ἐν Τεργέστη ἀξίαν τῶν 1000 ἐνετικῶν λιτρῶν καὶ ἔπειτα νὰ σχηματίσωμεν πρὸς εὑρεσιν τοῦ ζητουμένου τὴν ἀνωτέρω ἄλυσιν, νὰ σχηματίσωμεν μίαν μόνην ἄλυσιν καλοῦντες ἀπλῶς δραχμὰς τὰς κατ' ἀρχὰς πληρωθείσας, βεβαρημένας τὴν ἀξίαν αὐτῶν μετὰ τὴν πληρωμὴν τῶν 20% διὰ δασμὸν καὶ ναῦλον, καὶ ἐπιβεβαρημένας τὴν ἀξίαν τῶν βεβαρημένων μετὰ τὴν πληρωμὴν τῶν 2% εἰς τὸν ἐν Τεργέστη παραγγελιοδόχον. Διότι τότε προφανῶς 100 ἐπιβεβαρημέναι δραχμαὶ θέλουσιν ἰσοδυναμεῖ μὲ 102 βεβαρημένας, καὶ 100 βεβαρημέναι μὲ 120 ἀπλᾶς, ἐπομένως θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς ἄλυσιν.

1 στατήρ=44 οκάδας

375 οκάδας=1000 ενετικές λίτρας

1000 ενετ. λίτραι=180 επιβεβαρημέναις δραχμαῖς

100 επιβεβαρ. δραχμαὶ=102 βεβαρημέναις

100 βεβαρ. δραχμαὶ=120 ἀπλᾶς

5,78 ἀπλᾶι δραχ.=1 γερμανικὸν τέτληρον

18 γερ. τέτληρα=38 φιορίνια

χ φιορίνια=1 στατήρ,

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως τὴν ζητουμένην τιμὴν χ τῶν φιορινίων

$$x = \frac{4 \times 1000 \times 180 \times 102 \times 120 \times 38}{375 \times 1000 \times 100 \times 100 \times 5.78 \times 18} = 9,45 \text{ περίπου.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.—Ἐμπορὸς ἐκ Καλαμῶν ἀποστέλλει εἰς ἔμπορον τῆς πόλεως Ἀνῶρος μέταξαν ἀγορασθεῖσαν κατὰ παραγγελίαν τοῦ δευτέρου ἐν Καλάμῃς πρὸς 50 δραχμὰς τὴν οκάδα. Ὁ ἐν Καλάμῃς ἔμπορος ἐπλήρωσε πρὸς τοὺτοις ἐν Ἑλλάδι μὲν 45% διὰ διάφορα ἐξόδα, ἐν Γαλλίᾳ δὲ 3%, μέχρις οὗ παραδώσῃ αὐτῇ τῇ ἐν Ἀνῶνι παραγγελιοδότῃ αὐτοῦ. Οὗτος δὲ γράφει εἰς τὸν ἐν Τεργέστῃ ἀνταποκριτὴν αὐτοῦ ὅτι ἐμβάσῃ διὰ συναλλαγματικῆς εἰς τὸν ἐν Καλάμῃς ἔμπορον τὸ ἀντίτιμον τοῦ πρὸς αὐτὸν χρέος αὐτοῦ καὶ πληρῶναι καὶ εἰς τὸν δευτέρου 1% διὰ προμήθειαν τοῦ συναλλάγματος. Ζητεῖται πρὸς πόσα φράγκα ἀναλογεῖ ἐν Ἀνῶνι ἡ ἀξία τοῦ ἐνὸς χιλιογράμμου τῆς μετάξης, γινώσκοντες ὅτις ἀφ' ἐνὸς μὲν ὅτι ἐν Ἀνῶνι τὸ φράγκον ἐπωλείτο τότε πρὸς 1,12 δραχμὰς, καὶ ἐν Τεργέστῃ τὸ μὲν φράγκον πρὸς 21 καραντάνια, τὸ δὲ φιορίνιον, ὅπερ ἰσοῦται μὲ 60 καραντάνια, πρὸς 3,10 δραχμὰς, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι 1 χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ μὲ 319 + $\frac{1}{6}$ δράμια.

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου θέλομεν σχηματίσει κατὰ τάς δεδομένας συνθήκας αὐτοῦ τὴν ἐξῆς ἄλυσιν, καλοῦντες ἀπλᾶς μὲν δραχμὰς τὰς τῆς ἀγορᾶς τῆς μετάξης, βεβαρημέναις δὲ τὰς μετὰ τὴν αὔξησιν τῶν 15%, ἐπιβεβαρημέναις τὰς μετὰ τὴν αὔξησιν τῶν 3% καὶ βεβαρημένα φιορίνια τὰ μετὰ τὴν πληρωμὴν τοῦ 1%,

1 φράγκον=21 καραντάνια

60 καραντάνια=1 ἀπλοῦν φιορίνιον

101 ἀπλᾶ φιορίνια=100 βεβαρημένα φιορίνια

1 βεβαρ. φιορίνιον=3,10 ἀπλᾶς δραχμὰς

$$115 \text{ ἀπλὰι δραχ.} = 100 \text{ βεβαρημέναις}$$

$$103 \text{ βεβαρ. δραχ.} = 100 \text{ ἐπιβεβαρημέναις}$$

$$50 \text{ ἐπιβεβαρ. δρ.} = 1 \text{ ὀκτ. μετὰξῃς}$$

$$1 \text{ ὀκτ.} = 400 \text{ δράμια}$$

$$319 \times \frac{1}{6} \text{ δράμια} = 1 \text{ χιλιόγραμμον}$$

$$1 \text{ χιλιόγραμμον} = \chi \text{ φράγκα,}$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα

$$\chi = \frac{(319 + \frac{1}{6}) \times 50 \times 103 \times 115 \times 101 \times 60}{400 \times 100 \times 100 \times 3,10 \times 100 \times 24}$$

ΣΥΛΛΟΓΗ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ.

1. Δοθέντων ἑσωνδήποτε ἀριθμῶν, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὅλικόν ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτῶν ὑπερέχει κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9 τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

2. Νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι, ἐάν προσθέσωμεν 11 εἰς τινὰ ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ μεταξύ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ, τῶν κατεχόντων τάξιν περιττὴν, καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων, τῶν κατεχόντων τάξιν ἀρτίαν, δὲν δύναται νὰ μεταβληθῇ εἰ μὴ κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11.

3. Ἐκ τίνος κρουνοῦ ρέουσι 53 ὀκάδες ὕδατος ἀνὰ πᾶν πρῶτον λεπτόν· πόσαι θέλουσι ρεύσει εἰς 3 ὥρ. 25 λ. π.; (10865).

4. Ἐμπορὸς τις ἠγόρασε τεμάχιον τσόχας 60 πήχεων τὸ μήκος πρὸς 23 δραχμάς τὸν πήχυν. Ἐξ αὐτοῦ ἐπώλησε 42 πήχεις πρὸς 16 δραχμάς τὸν πήχυν, ἀλλ' ἠναγκάσθη νὰ πωλῇσῃ τοὺς λοιποὺς πρὸς 9. Πόσας δραχμάς ἐκέρδησε; (54).

5. Νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ γινόμενον δύο μὴ διαδοχικῶν περαγόντων αὐξάνει, ὅταν αὐξάνωμεν τὸν μικρότερον καὶ ἐλαττοῦμεν τὸν μεγαλειότερον κατὰ μίαν μονάδα.

6. Δοθέντος ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ Ποσειδῶνος ἀπὸ τοῦ Ἥλιου εἶναι 30 κίς μεγαλειτέρα τῆς ἀπὸ τοῦ Ἥλιου ἀποστάσεως τῆς Γῆς, ὅτι ἡ τελευταία αὕτη εἶναι ἴση μὲ 24000 ἀκτῖνας τῆς Γῆς καὶ ὅτι ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς περιέχει 6370 χιλιόμετρα, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπὸ τοῦ Ἥλιου ἀπόστασις τοῦ Ποσειδῶνος. (4586400000 χιλιόμετρα).

7. Ἀτμάμαξά τις διατρέχει 850 μέτρα ἀνὰ πᾶν πρῶτον λεπτόν· πόσα μέτρα θέλει διατρέξει εἰς 2 ὥρ. 17 λ. π.; (116450).

8. Τὸ φῶς χρειάζεται 8 λεπτά πρῶτα καὶ 13 δεύτερα, ἵνα φθάσῃ ἀπὸ τοῦ Ἥλιου εἰς τὴν Γῆν. Πόσα μέτρα διατρέχει ἀνὰ πᾶν δευτε-

ρόλεπτον, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ἥλιου ἀπόστασις τῆς Γῆς εἶναι ἴση μὲ 24000 γήινους ἀκτῖνας καὶ ὅτι ἐκάστη γήινος ἀκτίς περιέχει 6370 χιλιόμετρα; (310101000).

9. Δύο ἀτμύμαξαι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἀπὸ δύο διαφόρους σταθμοὺς ἀπέχοντας ἀλλήλων 270000 μέτρα, καὶ διευθύνονται ἡ μία ἐναντίον τῆς ἄλλης. Ἡ πρώτη διατρέχει 730 μέτρα ἀνὰ πᾶν πρῶτον λεπτὸν καὶ ἡ δευτέρα 470. Ζητεῖται μετὰ πόσον χρόνον θέλουσι συναντηθῇ καὶ πόσα μέτρα ἤθελε διατρέξει ἐκάτερα;

(Ἡ συνάντησις θέλει γίνῃ μετὰ 3 ὥρας καὶ 45 λεπτά πρῶτα, καὶ ἡ μὲν πρώτη διέτρεξεν 164250, ἡ δὲ δευτέρα 105750 μέτρα).

10. Νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων αὐτοῦ καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἀποτελῇ ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4.

11. Πῶς ἀναγνωρίζομεν ὅτι τὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν ἀναχθέντα κλάσματα ἔχουσι τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν;

12. Ἐν ποίᾳ περιπτώσει δεδομένον κλάσμα δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα, ἔχον δεδομένον παρονομαστήν; Παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα, ἔχον παρονομαστήν 441;

13. Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς τὴν πρώτην αὐτῆς ἀνύψωσιν εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ὕψους, ἀπ' οὗ ἀρέθῃ, εἰς δὲ τὰς λοιπὰς εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἐξ οὗ κατὰπίπτει. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὴν τρίτην αὐτῆς ἀναπηδήσιν ὑψώθῃ εἰς ὕψος 5 μέτρων, ἐκ πόσων μέτρων ὕψους ἀρέθῃ κατ' ἀρχάς; (135 μέτρα.)

14. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον μεταξὺ τῆς περιμετρίας καὶ τοῦ τόξου $35^{\circ} 33' 52''$. (32").

15. Ἐμπορὸς ἡγόρασεν 35στατ. 27ὀκ. καὶ 352δράμ. μετὰξὺς ἀντὶ 2112 ὀθ. 3τάλ. καὶ 4δραχ. Ζητεῖται πρὸς πόσον ὑπελογισθῇ ἡ ὀκιά;

(1ὀθ. 1τάλ. 1δραχ. 95λεπ. ὡς ἔγγιστα).

16. Ἀντὶ 15,53 δραχμῶν ἡγοράσαμεν $2+\frac{3}{8}$ πήχεις ὑψίσματός τινος· πρὸς πόσον ἡγοράσαμεν τὸν πῆχυν; (6,54 περίπου).

17. Ἐκ τῆς ἀναλογίας $a:b::c:d$ πῶς θέλομεν πορισθῇ τὴν ἐξῆς;

$$a:b::c:d \Rightarrow (a+b)^2:(c+d)^2.$$

18. Ἐν ποίᾳ περιπτώσει προσθέτοντες τοὺς ἀντιστοιχοῦς ὅρους δύο ἀναλογιῶν πορίζομεθα νέαν ἀναλογίαν;

19. Πῶς ἐκ τῆς ἀναλογίας $a : b :: γ : δ$ δυνάμεθα νὰ πορίσθωμεν τὴν ἐξῆς

$$μ \times a + ν \times γ : μ \times b + ν \times δ :: α : β ;$$

20. Φρουρά 700 στρατιωτῶν πολιορκουμένη εἶχε τροφάς τὴν 1ην Ἀπριλίου μέχρι 15 Ἰουνίου, ἥτοι διὰ 75 ἡμέρας. Τὴν 12ην Ἀπριλίου ἔκαμιν ἐξοδον, ἐν ᾗ ἀπώλεσε 241 ἄνδρας. Ζητεῖται ἐπὶ πόσον χρόνον θέλουσιν ἐπαρκέσει κί υπάρχουσαι τροφαί; (95 ἡμέρας).

21. Φρουρά 1200 στρατιωτῶν πολιορκουμένη εἶχε τροφάς τὴν 17ην Ἰανουαρίου μέχρι τέλους Μαρτίου, ἥτοι διὰ 73 ἡμέρας. Τὴν 1ην Φεβρουαρίου ἔκαμιν ἐξοδον, ἐν ᾗ ἀπώλεσε 550 ἄνδρας καὶ τὴν 2 Μαρτίου ἦλθεν αὐτῇ ἐπικουρία 500 στρατιωτῶν. Ἐπὶ πόσον χρόνον θέλουσιν ἐπαρκέσει αἱ υπάρχουσαι τροφαί; (25 ἡμ. περίπου).

22. Ἀνέλαβον τὴν οἰκοδομὴν οἰκίας τινός 50 ἐργάται εἰς 45 ἡμέρας, οἵτινες καὶ ἔκτισαν τὰ $\frac{5}{9}$ εἰς 33 ἡμέρας. Ζητεῖται κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν, ἵνα τελειώσῃ τὴν οἰκίαν ἐντὸς τῆς ὁρισθείσης προθεσμίας. (Κατὰ 60 ἐργάτας).

23. Εἰς 15 ἡμέρας 27 ἐργάται, 10 ὥρας ἐργαζόμενοι τὴν ἡμέραν, ἐσκαψαν τάφρον 25 μέτρων τὸ μήκος, 5 τὸ βῆθος καὶ 8 τὸ πλάτος. Ἴνα 20 ἐργάται, 12 ὥρας ἐργαζόμενοι τὴν ἡμέραν, εἰς 18 ἡμέρας σκάψωσι τάφρον 25 μέτρων τὸ μήκος καὶ 9 τὸ πλάτος, πόσων μέτρων βῆθος πρέπει νὰ ἔχῃ αὕτη; (11,85 περίπου).

24. Ὑπογράσαμεν ἀντὶ 250 δραχμῶν 5 μέτρα ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος 1,50. Μετὰ 5 μῆνας ὁ αὐτὸς ἔμπορος μᾶς ἐπώλησε ἀντὶ 500 δραχμῶν 18 μέτρα τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος, ἀλλ' ἔχοντος πλάτος 1,25. Ζητεῖται πότε μᾶς ἐπώλησε εὐθηνότερον τὸ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ κατὰ πόσον;

(Ὁ ἔμπορος μᾶς ἐπώλησε τὴν δευτέραν ζυρὰν εὐθηνότερον καὶ κατὰ 11 δραχμάς καὶ 11 σχεδὸν λεπτά.)

25. Ἐκάστη σελὶς βιβλίου τινός, συγκειμένου ἐκ 40 τυπογραφικῶν φύλλων, περιέχει 36 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος 53 γράμματα. Ζητεῖται ἐκ πόσων τυπογραφικῶν φύλλων θὰ συνέκειτο τὸ βιβλίον, ἂν ἐκάστη σελὶς αὐτοῦ περιεῖχε 38 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος 56 γράμματα; (Ἐκ 35 τυπ. φύλλων, 13 σέλ., 31 στίχ. καὶ 40 γραμ.).

26. Ἐτόκισέ τις 2500 δραχμάς πρὸς 5,25 % πόσον τόκον θέλει λάβει μετὰ 2 ἔτη καὶ 8 μῆνας; (350 δραχμάς).

26. Ἐμπορος ἡγόρασε 400 κοιλὰ σίτου πρὸς 6,25 τὸ κοιλόν. Με-

τὰ 5 δὲ μῆνας ἐπώλησεν ἑκάστον κοιλὸν πρὸς 6,50· πόσον ταῖς
% ὠφελήθη; (9 δραχμὰς καὶ 60 λεπτά).

27. Συνάλλαγμα 8000 δραχμῶν προεξοφλήθη ἀντὶ 7000, τοῦ
ἐπιτοκίου συμφωνηθέντος πρὸς 5 %· μετὰ πόσον χρόνον ἔπρεπε νὰ
πληρωθῇ εἰς τὴν ἀληθῆ αὐτοῦ ἀξίαν; (Μετὰ 2 ἔτ. 10 μῆν. καὶ 3 η.)

28. Διὰ γραμματίων 4525 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 2 ἔτη καὶ
3 μῆνας, ἐγένετο ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις 477, 85· πρὸς ποῖον ἐπιτό-
κιον ὑπελογίσθη αὕτη;

29. Δύο ἔμποροι δι' ἐπιχειρήσιν τινα κατέβαλον ὁ μὲν 1000
δραχμὰς, ὁ δὲ 1500· τὰ 6 μῆνας παρέλαβον καὶ τρίτον συνέταιρον
καταβαλόντα 200 καὶ μετὰ 17 μῆνας καὶ τέταρτον καταβαλόντα
3000. Μετὰ 5 ἔτη ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως προέκυψε
κέρδος 1800. Πόσον θέλει λάβει ἑκάστος ἀναλόγως τοῦ ὑπ' αὐτοῦ
κατατεθέντος κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου, ἐφ' ὃν ἔμεινεν ἐν τῇ ἐπι-
χειρήσει;

(Ὁ καταβαλὼν τὰς 1000 δραχμὰς θέλει λάβει 270,08, ὁ τὰς
1500 θέλει λάβει 418,60, ὁ τρίτος 502,32 καὶ ὁ τέταρτος 600).

30. Ἔχομεν τριῶν ποιότητων σίτους. Ἡ ἀξία τῆς πρώτης ποιό-
τητος εἶναι 8,75 δραχμὰς τὸ κοιλόν, ἡ τῆς δευτέρας 7,25 καὶ ἡ
τῆς τρίτης 5,45. Ἐὰν ἀποτελέσωμεν μίγμα λαμβάνοντες 100 κοι-
λὰ ἀπὸ τῆς πρώτης ποιότητος, 150 ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ 200 ἀπὸ
τῆς τρίτης, ποία θέλει εἶναι ἡ ἀξία τοῦ κοιλοῦ τοῦ μίγματος; (6,25).

31. Ἔχομεν δύο μίγματα ἀργύρου. Εἰς τὰ 1000 δράμια τοῦ
πρώτου περιέχονται 875 δράμια καθαροῦ ἀργύρου, εἰς δὲ τὰ 1000
τοῦ δευτέρου 945. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἀφ' ἑκατέρου,
ἵνα ἀποτελέσωμεν 300 ὀκάδων μίγμα οὐτινος τὰ χίλια δράμια νὰ
περιέχωσιν 900 δράμια καθαροῦ ἀργύρου;

(Ἀπὸ τοῦ ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,875 πρέπει νὰ λάβω-
μεν 192 ὀκάδας καὶ 343 δράμια, ἀπὸ δὲ τοῦ ἔχοντος 0,945 βαθ-
μὸν καθαρότητος 107 ὀκάδας καὶ 57 δράμια).



ΒΣ Βερναρδάκης, Δ. Ν.ΠΕΡΑ ΚΑΤΕΒΗΣΙΣἀριθ. χρ. 3090Ημερομηνία
ἐπιστροφῆς

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟΝ



ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
80