

ΕΠΙΣΤΑΣ

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΒΕΡΟΙΑΣ

500
μαθ
Αριθ. εισ

2007/5

Δωρεά: Υπουργείου

Τεχνολογίας
Πολιτισμού και Επιστημών



GRVGR 01226



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

^{ΕΚ}
ΠΑΛΑΙΩΝ ἢ ΝΕΩΤΕΡΩΝ

Συνερανθέντων

ΤΠΟ ΤΟΤ ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ

ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ

ΠΡΩΗΝ ΑΣΤΡΑΧΑΝΙΟΥ

ΚΤΡΙΟΥ ΝΙΚΗΦΟΡΟΥ,

Φιλοτίμῳ δὲ δαπάνῃ ἐκδοθέντων,

Ὅπως δωρεὰν διανέμονται τοῖς ἐν τοῖς

Ἑλληνομυσείοις φοιτῶσιν,

ΥΠΟ ΤΩΝ ΤΙΜΙΩΤΑΤΩΝ ἢ ΦΙΛΟΓΕΝΩΝ

ΑΥΤΑΔΕΛΦΩΝ

ΖΩΣΙΜΑ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ,

περιέχων

ΤΑ ΑΡΧΙΜΗΔΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΤΗΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΝ

ΚΑΙ

ΤΑΣ ΤΟΤ ΚΩΝΟΥ ΤΟΜΑΣ.

ΕΝ ΜΟΣΧΑ,

Εν τῇ τοῦ Κονσταντίνου Τυπογραφείῳ

ἐκδοθὲν ὑπὸ Κλαυδίου

Εἰς τὴν 1799.

Αρ. Γραμ. 2007





Съ дозволенія Московской Цензуры.

ἐκ τῆς ὁμοιογενείας γενομένη. ἡ δὲ μέτρος
 ἡ δὲ μέτρος —



ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ, ΟΙΣ ΚΑΙ ΑΛΛΑ ΤΙΝΑ ΠΡΟΣΕΤΕΘΗ.

ΛΗΜΜΑ Α.



ὁ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον κανονικὸν πολυγώνον ἴσον ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ὃ ἡ μὲν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἴση τῇ τῷ κύκλῳ ἡμιδιαμέτρῳ ἡ δὲ, τῇ τῷ πολυγώνῳ περιμέτρῳ.

Ἐστω κανονικὸν πολύγωνον, τὸ ΑΒΓΔΕ περὶ τὸν ΘΛΖΗΙ κύκλον περιγεγραμμένον. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον Θ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΘ. ἔστω δὲ τῷ ΠΡΣ τριγώνῳ, ἡ μὲν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶ ΠΡ, ἴση τῇ ΚΘ. ἡ δὲ ΡΣ, τῇ τῷ πολυγώνῳ περιμέτρῳ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΠΡΣ τριγώνῳ. πίν. Α. ζ. 1.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τε τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ ἐπὶ τὰ τῶν ἐπαφῶν σημεῖα Ζ, Λ, Ι, Η ἐπεζεύχθωσαν αἱ

ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΕ, ἢ αἱ ΚΖ, ΚΛ, ΚΙ, ΚΗ. ἢ τετμήθω
ἡ ΡΣ εἰς ἴσα μέρη δέκα, τὰ ΡΤ, ΤΦ, ΦΜ, κτ. (α).
καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΤ, ΠΦ, ΠΜ, καὶ αἱ ἐξῆς.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ ΚΘΔ, ΚΙΔ, ΚΙΕ, κτ. τριγῶνα ἴσα ἀλλήλοις
εἰσίν. ὡσαύτως καὶ τὰ ΠΡΤ, ΠΤΦ, ΠΦΜ, κτ. (β).
ἀλλὰ τὸ ΚΘΔ = ΠΡΤ. ἔτι γὰρ τὸ μὲν ὕψος ΚΘ =
ΠΡ, ἡ δὲ βάσις ΘΔ = ΡΤ. (γ) ὅλη γὰρ ἡ ΡΣ ἴση
τῇ τῷ πολυγώνῳ περιμέτρῳ, (δ) αἱ δὲ ΘΔ, ΡΤ δεκα-
τημόρια τῶν ὅλων. ἄρα ἕκαστον τῶν ΚΘΔ, ΚΙΔ, ΚΙΕ,
κτ. τριγῶνων ἴσον ἕκάστῳ τῶν ΠΡΤ, ΠΤΦ, ΠΦΜ, κτ.
ὅλον ἄρα τὸ πολυγώνον ΑΒΓΔΕ ἴσον τῷ τριγῶνῳ ΠΡΣ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τέττε Φανερόν, ὅτι τὸ μὲν περὶ τὸν κύκλον
περιγεγραμμένον κανονικὸν πολυγώνον ἴσον ἐστὶ τριγῶνῳ, ὃ
ὕψος μὲν ἡ τῷ κύκλῳ ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ ἐνθεῖα ἴση
τῇ τῷ πολυγώνῳ περιμέτρῳ· τὸ δὲ εἰς τὸν κύκλον ἐγγε-
γραμμένον ἴσον τριγῶνῳ, ὃ ὕψος μὲν ἡ ἀπὸ τῆς κέντρως τῷ
κύκλῳ ἀγομένη κάθετος μιᾷ τῶν τῷ πολυγώνῳ πλευ-
ρῶν, βάσις δὲ ἐνθεῖα ἴση τῇ τῷ πολυγώνῳ περιμέτρῳ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. (ε)

Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγῶνῳ ὁρθογωνίῳ, ὃ
ἡ μὲν ἐκ τῆς κέντρως ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὁρ-
θὴν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μὲν περίμετρος τῷ κανονικῷ πολυγώνῳ τῷ περὶ
τὸν κύκλον περιγεγραμμένῳ εἰς τὴν τῷ κύκλῳ περιφέ-
ρειαν,

- (α) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς ε. τῆς ε'. βιβλ. τῆς Γεωμ. (β) Κατὰ
τὸ Θεώρ. τὸ μετὰ τὴν κγ'. τῆς ε'. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Ὁμοίως.
(ε) Τὸ πρῶτον ἐστὶ τῷ Ἀρχιμ. ἐν τῷ περὶ κύκλου μετρήσεως βιβλ.

ρεαν, αὐτὸ δὲ τὸ πολύγωνον εἰς τὸν κύκλον ἀπολήγει. (ζ)
 ἀλλὰ τὸ εἰρημένον πολύγωνον ἴσον ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, ὃ ἡ μὲν ἐκ τῆς κέντρης ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. (η) ἄρα καὶ ὁ κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, ὃ ἡ μὲν ἐκ τῆς κέντρης ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. (θ)

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ, ὃ ὕψος μὲν ἡ τῆς κύκλου ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ εὐθεῖα ἴση τῇ τῆς κύκλου περιφερείᾳ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Καὶ εἰ μηδέπω ἐφάνη, πάνυ καλῶς φησὶν ὁ Εὐτόκιος ὁ Ἀσκαλωνίτης, (α) δυνατόν, περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ' ὅμως εἶναι τινὰ τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτῇ πρὸς ἑδενός ἐστι ζητούμενον. εἰ γὰρ τοιαύτην ἐνὴν πορίσασθαι εὐθεῖαν, ἐπελύετο αὖν τὸ πολυθρύλῃστον ζήτημα, τετέστιν ἐτετραγωνίζετο ὁ κύκλος. εὐρίσκεται δ' ἐν ὅμως εὐθεῖα, ὡς κατατέτραψαι δευχθήσεται, τοσούτον ἔγγιστα τῇ εἶναι ἴση τῇ τῆς κύκλου περιφερείᾳ, ὥστε ἴσης λογιζομένης, μηδὲν ἐπίσημον ἐν ταῖς καταμετρήσεσι προκύπτειν παράπτωμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. (κ)

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίῳ ἐστὶ, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἐβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἐβδομηκοσημόνοις.

Α 3

ΔΕΙ.

- (ζ) Κατὰ τὸ α'. Λῆμ. τὸ πρὸ τῆς β'. πρὸς τῇ ιβ' βιβλ.
 (η) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ. (θ) Κατὰ τὸ β'. Λῆμ. τὸ πρὸ τῆς β'. πρὸς τῇ ιβ'. (ι) Ἐν τῷ ὑπομν. εἰς τὴν Ἀρχιμ. τῇ κύκλ. μέτρῃ. (κ) Τῇ Ἀρχιμ. γ'. εἶναι ἐν τῇ α'. βιβλ.

Ἡ περίμετρος τῆς πολυγώνου, τῆς ἔχοντος 96 πλευ-
ρας, καὶ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένην τριπλασίον
ἐστὶ τῆς τῆς κύκλου διαμέτρου, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσ-
σони ἢ ἐβδόμῳ μέρει. ἀλλ' ἡ τῆς κύκλου περιφέρεια ἐλάσ-
σων ἐστὶ τῆς τῆς πολυγώνου. πολλῶν ἄρα ἡ τῆς κύκλου
περιφέρεια ἐστὶ τριπλασίον τῆς τῆς κύκλου διαμέτρου,
καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσони ἢ ἐβδόμῳ αὐτῆς μέρει. ἐπεὶ
δὲ ἡ περίμετρος τῆς πολυγώνου, τῆς ἔχοντος 96 πλευ-
ρας, καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένην, τριπλασίον
ἐστὶ τῆς τῆς κύκλου διαμέτρου, καὶ ἔτι ὑπερέχει μείζονι,
ἢ δέκα ἐβδομηκοσημόνοισι (τετέστι $\frac{10}{71}$) ἐστὶ δὲ ἡ τῆς
κύκλου περιφέρεια μείζων τῆς τῆς πολυγώνου περι-
μέτρου πολλῶν ἄρα ἡ τῆς κύκλου περιφέρεια τῆς διαμέ-
τρου ἐστὶ τριπλασίον, καὶ ἔτι ὑπερέχει μείζονι αὐτῆς
μέρει, ἢ δέκα ἐβδομηκοσημόνοισι.

Ὅτι δὲ αἱ τῶν εἰρημένων πολυγώνων περίμετροι πρὸς
τὴν τῆς κύκλου διάμετρον τὴν διαληφθέντας ἔχουσι λό-
γους, δείξομεν ὅτως.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΔΒ, ὃς κέντρον μὲν τὸ Κ, διάμετρος
δὲ ἡ ΑΒ. καὶ ἐγγεγραφθῶ εἰς αὐτὸν πλευρά ἐξαγώ-
νη ἡ ΑΔ. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΚΔ, ἦχθῶ ἀπὸ τῆς
Α ἐφαπτομένη τῆς κύκλου ἡ ΑΕ. καὶ διὰ μὲν τῆς ΚΕ,
τῆς συμπίπτουσης τῇ ἐφαπτομένῃ κατὰ τὸ Ε, διχα-
τετμήθῳ ἡ ΔΚΑ γωνία, διὰ δὲ τῆς ΚΦ ἡ ΣΚΑ, διὰ
δὲ τῆς ΚΖ ἡ ΦΚΑ, διὰ δὲ τῆς ΚΗ ἡ ΖΚΑ, διὰ δὲ
τῆς ΚΓ ἡ ΗΚΑ. καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΕΑ, εἰλήθῳ
ἡ ΑΛ ἴση τῇ ΑΓ. Λέγω Α'. ὅτι ἡ ΑΓ πλευρά ἐστὶ τῆς
περὶ τὸν κύκλον ΑΔΒ περιγεγραφομένης πολυγώνου, πλευ-
ρας ἔχοντος 96. λέγω Β'. ὅτι ἡ ΑΓ λεφθῆσα 96,
εἴτεν ἡ περίμετρος τῆς εἰρημένης πολυγώνου, τριπλασίον
ἐστὶ τῆς διαμέτρου, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσони, ἢ ἐβ-
δόμῳ αὐτῆς μέρει. ἐπεζεύχθῳ γάρ ἡ ΚΔ. & 2.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐπεὶ ἡ $\Lambda\Delta$ πλευρὰ ἐστὶν ἑξαγώνου εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένη, (λ) ἡ μὲν $\Delta\text{ΚΑ}$ γωνία ἴση $\frac{1}{6}$ τεσσάρων ὀρθῶν (μ) ἡ δὲ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ $\Sigma\text{ΚΑ}$ ἴση $\frac{1}{12}$ ἡ δὲ τῆς $\Sigma\text{ΚΑ}$ ἡμίσεια, ἦτοι ἡ $\Phi\text{ΚΑ}$ ἴση $\frac{1}{24}$ ἡ δὲ τῆς $\Phi\text{ΚΑ}$ ἡμίσεια, τετάρτη ἡ ΖΚΑ ἴση $\frac{1}{48}$ ἡ δὲ αὐτῆς ἡμίσεια, ἡ ΗΚΑ ἴση $\frac{1}{96}$ ἡ δὲ αὐτῆς ἡμίσεια, $\Gamma\text{ΚΑ} = \frac{1}{192}$ τεσσάρων ὀρθῶν. Ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς τριγώνοις $\Gamma\text{ΚΑ}, \Lambda\text{ΚΑ}$, ἡ μὲν $\Gamma\text{Α} = \Lambda\text{Α}$, (ν) ἡ δὲ ΑΚ κοινὴ, αἱ δὲ περὶ τὸ Α γωνίαι ἴσαι, (ξ) καὶ γωνία ἄρα ἡ $\Gamma\text{ΚΑ} = \Lambda\text{ΚΑ}$. (ο) ἡ ἄρα $\Lambda\text{Κ}\Gamma$ διπλασία τῆς $\Gamma\text{ΚΑ}$, εἴτεν ἴση τῇ ΗΚΑ . ἐστὶ δὲ ἡ ΗΚΑ ἴση $\frac{1}{96}$ τεσσάρων ὀρθῶν, καὶ ἡ $\Lambda\text{Κ}\Gamma$ ἄρα ἴση $\frac{1}{96}$ τεσσάρων ὀρθῶν. ἡ ἄρα $\Lambda\Gamma$ πλευρὰ ἐστὶ τῇ περὶ τὸν κύκλον $\Lambda\Delta\text{Β}$ περιγεγραφομένῃ πολυγώνῳ, πλευρὰς ἔχοντος 96.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐν τοῖς τριγώνοις $\Delta\text{Κ}\Sigma$, $\Lambda\text{Κ}\Sigma$, ἡ μὲν $\text{ΚΔ} = \text{ΚΑ}$, ἡ δὲ ΚΣ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ $\Delta\text{Κ}\Sigma = \Lambda\text{Κ}\Sigma$. (π) ἄρα καὶ ἡ $\Delta\Sigma = \Sigma\text{Α}$. (ρ) ἡ ἄρα $\Lambda\Delta$ διπλασία τῆς $\Lambda\Sigma$. ἢ καὶ ἡ $\Lambda\Delta = \Lambda\text{Κ}$. (σ) καὶ ἡ ΑΚ ἄρα διπλασία τῆς $\Lambda\Sigma$. Ἐπεὶ δὲ τὰ τρίγωνα ΚΑΕ , ΚΑΣ ὅμοια ἀλλήλοις εἰσὶν, (τ) ὥς ἄρα $\text{ΚΕ} : \text{ΕΑ} :: \text{ΚΑ} : \Lambda\Sigma$. (υ) ἄρα καὶ

Α 4

ἡ

(λ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (μ) Τέσσαρσι γὰρ ὀρθαῖς ἴσων ἑσῶν τῶν περὶ τὸ Κ σημῶν γωνιῶν, (κατὰ τὴν γ'. συνέπ. τὴν μετὰ τὴν γ'. τῇ α.) καὶ εἰς ἑξ. διηρημένων ἴσα μέρη διὰ τὸ ἐγγεγραμμένον ἑξαγώνον, ἡ $\Delta\text{ΚΑ}$ $\frac{1}{12}$ ἐστὶ (ν) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ξ) Κατὰ τὴν ιη'. τῇ γ'. (ο) Κατὰ τὴν θ'. τῇ α'. (π) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. τῇ α'. (σ) Κατὰ τὴν β'. συνέπ. τῆς ιε'. τῇ δ'. (τ) Κατὰ τὴν η'. τῇ ε'. (υ) Κατὰ τὴν αὐτὴν

ἡ ΚΕ διπλασία τῆς ΕΑ. καὶ ἐπεὶ δίχα τέτμηται ἡ ΕΚΑ γωνία ὑπὲρ τῆς ΚΦ, (Φ) ἔστιν ἄρα ὡς ΕΚ : ΚΑ :: ΕΦ : ΦΑ. (Χ) καὶ συντεθέντα ἄρα ὡς ΕΚ + ΚΑ : ΚΑ :: ΕΦ + ΦΑ : ΦΑ. (Ψ) καὶ ἐναλλάξ, ὡς ΕΚ + ΚΑ : ΕΑ :: ΚΑ : ΦΑ. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι ὡς ΦΚ + ΚΑ : ΦΑ :: ΚΑ : ΖΑ, καὶ ὡς ΖΚ + ΚΑ : ΖΑ :: ΚΑ : ΗΑ, καὶ ἔτι ὡς ΚΗ + ΚΑ : ΗΑ :: ΚΑ : ΓΑ.

Κείθω ἡ ΕΚ = 306. ἄρα ἡ ΕΑ = 153. διὸ τὸ μὲν $\overline{ΕΚ}^2 = 93636$, τὸ δὲ $\overline{ΕΑ}^2 = 23409$. ἐπεὶ δὲ $\overline{ΕΚ}^2 = \overline{ΚΑ}^2 + \overline{ΕΑ}^2$, ἔσται $\overline{ΚΑ}^2 = \overline{ΕΚ}^2 - \overline{ΕΑ}^2$, κοινῶς δηλαδὴ ἀφαιρεθέντος τῷ $\overline{ΕΑ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΚΑ}^2 = 93636 - 23409 = 70227$. διὸ ἡ ΚΑ ἴση τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῷ 70227. ἀλλὰ τέττε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, ἐλάσσων δὲ τῆς ἀκριβοῦς, ἐστὶν ὁ 265. ἄρα ἡ ΚΑ ≥ 265 . διὸ ΕΚ + ΚΑ $\geq 306 + 265 = 571$. ἄρα ΕΚ + ΚΑ : ΕΑ $\geq 571 : 153$. ἀλλ' ὡς ΕΚ + ΚΑ : ΕΑ :: ΚΑ : ΦΑ, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ ΚΑ : ΦΑ $\geq 571 : 153$. καὶ ἑκατέρω τῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς πολλοπλασιασθέντος, ΚΑ : ΦΑ $\geq 4568 : 1224$. ἔστω ἔν ἡ ΦΑ = 1224. ἡ ἄρα ΚΑ ≥ 4568 .

Ἐπεὶ ἔν ἡ μὲν ΦΑ = 1224, ἡ δὲ ΚΑ ≥ 4568 , ἔσεται τὸ μὲν $\overline{ΦΑ}^2 = 1498176$, τὸ δὲ $\overline{ΚΑ}^2 \geq 20866624$. ἔστι δὲ τὸ $\overline{ΚΦ}^2 = \overline{ΦΑ}^2 + \overline{ΚΑ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΚΦ}^2 \geq 1498176 + 20866624 = 22364800$. ἀλλὰ τέττε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, ἐλάσσων δὲ τῆς ἀκριβοῦς, ἐστὶν ὁ 4729. ἡ ἄρα ΚΦ ≥ 4729 . διὸ ΦΚ + ΚΑ $\geq 4729 + 4568 = 9297$. ἄρα ΦΚ + ΚΑ : ΦΑ $\geq 9297 : 1224$. ἀλλ' ὡς ΦΚ + ΚΑ : ΦΑ :: ΚΑ : ΖΑ, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ ΚΑ : ΖΑ $\geq 9297 : 1224$. εἰάν ἄρα τεθῇ ἡ ΖΑ = 1224, ἔσεται ἡ ΚΑ ≥ 9297 .

Ὁμοίως

(Φ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (Χ) Κατὰ τὴν γ'. τῇ ε'. (Ψ) Κατὰ τὴν δ'. τῇ ε'. (ω) Κατὰ τὴν ζ'. τῇ αὐτ. βιβλ.

Οὐκὲν τὸ μὲν $\overline{ZA}^2 = 1498176$, τὸ δὲ $\overline{KA}^2 \supset 86434209$. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{KZ}^2 = \overline{ZA}^2 + \overline{KA}^2$, ἔσται ἄρα τὸ $\overline{KZ}^2 \supset 1498176 + 86434209 = 87932385$. ἀλλὰ τέττε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, ἐλάσσων δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 9377. ἡ ἄρα $KZ \supset 9377$. διὸ $ZK + KA \supset 9377 + 9297 = 18674$. ὥστε $ZK + KA : ZA \supset 18674 : 1224$. ἀλλ' ὡς $ZK + KA : ZA :: KA : HA$, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ $KA : HA \supset 18674 : 1224$. καὶ τῇ ἡμίσεως δὲ ἑκατέρῃ τῶν ἀριθμῶν ληφθέντος, ἔσεται ὡς $KA : HA \supset 9337 : 612$. εἰάν ἄρα τεθῇ ἡ $HA = 612$, ἔσται ἡ $KA \supset 9337$.

Τοιγαρὲν τὸ μὲν $\overline{HA}^2 = 374544$, τὸ δὲ $\overline{KA}^2 \supset 87179569$. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{KH}^2 = \overline{HA}^2 + \overline{KA}^2$, ἔσται ἄρα τὸ $\overline{KH}^2 \supset 374544 + 87179569 = 87554113$. ἀλλὰ τέττε τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, ἐλάττων δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 9357. ἡ ἄρα $KH \supset 9357$. διὸ $KH + KA \supset 9357 + 9337 = 18694$. ἄρα $KH + KA : HA \supset 18694 : 612$. ἀλλ' ὡς $KH + KA : HA :: KA : ΓΑ$, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ $KA : ΓΑ \supset 18694 : 612$. καὶ τῇ διπλασίῃ μὲν ἑκατέρας τῶν $KA, ΓΑ$, τῇ ἡμίσεως δὲ ἑκατέρῃ τῶν ἀριθμῶν ληφθέντος, ἔσεται 2. $KA : 2. ΓΑ \supset 9347 : 306$. ἀλλὰ 2 $KA = AB$, καὶ 2 $ΓΑ = ΛΓ$. ἄρα $AB : ΛΓ \supset 9347 : 306$. καὶ ἐναλλαξὶς $AB : 9347 \supset ΛΓ : 306$. καὶ 96 ληφθείσης τῆς τε $ΛΓ$, καὶ τῷ 306, ἔξει $AB : 9347 \supset 96. ΛΓ : 29376$. καὶ ἐναλλαξὶς, $AB : 96. ΛΓ \supset 9347 : 29376$. καὶ ἑκατέρῃ τῶν ἀριθμῶν διὰ τῇ 9347 διαφεθέντος, ἔξει $AB : 96. ΛΓ \supset 1 : 3 + \frac{1}{9347}$. καὶ ἀνάπαλιν 96. $ΛΓ : AB \supset 3 + \frac{1}{9347} : 1$. ἡ ἄρα 96. $ΛΓ$, εἴτην ἡ περίμετρος τῇ περὶ τὸν κύκλον $ΑΒ$ περιγεγραφομένης πολυγώνου, τριπλασίῳ ἐστὶ τῆς AB , καὶ εἴτι

ὑπερέχει ἑλαττον ἢ $\frac{1337}{9347}$ τῆς διαμέτρου. τὸτο δὲ τὸ κλάσμα ἑλαττον ἐστίν, ἢ $\frac{1}{7}$ τῆς διαμέτρου. ἡ περίμετρος ἄρα τῶν πολυγώνων τῶν περὶ τὸν κύκλον ΑΔΒ περιγραφομένων τριπλασίων ἐστὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι ἢ ἐβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου.

Ἔστω πάλιν κύκλος ὁ ΑΔΒ, (χ. 3.) ἔστω κέντρον μὲν τὸ Κ, διάμετρος δὲ ἡ ΑΒ. καὶ ἐγγεγραφθῶ εἰς αὐτὸν πλευρὰ κανονικῶν ἑξαγώνων ἡ ΑΔ. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΔ, τετμήσθω διῆχα ἡ μὲν γωνία ΔΒΑ διὰ τῆς ΒΕ, ἡ δὲ ΕΒΑ διὰ τῆς ΒΦ, ἡ δὲ ΦΒΑ διὰ τῆς ΒΖ, ἡ δὲ ΖΒΑ διὰ τῆς ΒΗ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. λέγω Α'. ὅτι ἡ ΑΗ πλευρὰ ἐστὶ τῶν εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένων πολυγώνων, πλευρὰς ἔχοντος 96. λέγω Β', ὅτι ἡ περίμετρος τῶν εἰρημένων πολυγώνων τριπλασίων ἐστὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ, καὶ ἔτι ὑπερέχει μείζονι, ἢ δέκα ἐβδόμη-κοσημόνοις (ἔστιν $\frac{10}{7}$) τῆς διαμέτρου. ἐπεζεύχθωσαν γάρ αἱ ΑΕ, ΑΦ, ΑΖ, καὶ αἱ ΚΔ, ΚΕ, ΚΦ, ΚΖ, ΚΗ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α.

Ἐπεὶ ἡ ΑΔ πλευρὰ ἑξαγώνων ἐστίν, ἡ ΔΚΑ γωνία ἴση ἐστὶν $\frac{1}{6}$ τεσσάρων ὀρθῶν. διὸ ἡ μὲν ΕΚΑ = $\frac{1}{12}$, ἡ δὲ ΦΚΑ = $\frac{1}{24}$, ἡ δὲ ΖΚΑ = $\frac{1}{48}$, ἡ δὲ ΗΚΑ ἴση $\frac{1}{96}$ τεσσάρων ὀρθῶν. ἡ ἄρα ΑΗ πλευρὰ ἐστὶ τῶν εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένων πολυγώνων, πλευρὰς ἔχοντος 96.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΕΒΑ, ΕΣΑ, ἡ μὲν γωνία ΕΒΑ = ΕΑΣ, (α) ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε κοινὴ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΑΒ = ΕΣΑ. ὡς ἄρα ΑΒ : ΑΣ :: ΒΕ : ΕΑ. (β) καὶ ἐπεὶ διῆχα τέτμηται ἡ ΔΒΑ γωνία ὑπὸ τῆς ΒΕ, ἐστὶν ὡς

(α) Κατὰ τὴν κς. τῆ γ'. (β) Κατὰ τὴν δ. τῆ ε'.

ὡς $\Delta B : B A :: \Delta \Sigma : \Sigma A$. (γ) καὶ συντεθέντα ὡς $\Delta B + B A : B A :: \Delta \Sigma + \Sigma A : \Sigma A$. καὶ ἐναλλάξ $\Delta B + B A : \Delta A :: B A : \Sigma A$. διὸ καὶ ὡς $\Delta B + B A : \Delta A :: B E : E A$. (δ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς $E B + B A : E A :: B \Phi : \Phi A$, καὶ ὡς $\Phi B + B A : \Phi A :: B Z : Z A$, καὶ ἔτι ὡς $Z B + B A : Z A :: E H : H A$.

Ἔστω ἡ $B A = 1560$. ἄρα ἡ $A K = 780$. ἀλλ' ἡ $A \Delta = A K$. (ε) ἄρα καὶ ἡ $A \Delta = 780$. ἔκῃν τὸ μὲν $\overline{B A}^2 = 2433600$, τὸ δὲ $\overline{A \Delta}^2 = 608400$. ἐπεὶ δὲ $\overline{\Delta B}^2 + \overline{\Delta A}^2 = \overline{B A}^2$, (ζ) κοινῶς ἄρα ἀφαιρεθέντος τῷ $\overline{\Delta A}^2$, ἔσεται $\overline{\Delta B}^2 = \overline{B A}^2 - \overline{\Delta A}^2$, εἴτεν $\overline{\Delta B}^2 = 2433600 - 608400 = 1825200$. ἀλλὰ τέττε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς, ἔστιν ὁ 1351. ἡ ἄρα $\Delta B < 1351$. διὸ καὶ $\Delta B + B A < 1351 + 1560 = 2911$. ὁ ἄρα $2911 : 780 > \Delta B + B A : \Delta A$. καὶ ἐκατέρω τῶν ἀριθμῶν διὰ τῷ 100 πολλαπλασιασθέντος, ἔξει ὁ $291100 : 78000 > \Delta B + B A : \Delta A$. ἀλλ' ὡς $\Delta B + B A : \Delta A :: B E : E A$, ὡς δὲ δεικται. ἄρα καὶ ὁ $291100 : 78000 > B E : E A$. εἰάν ἔν τεθῇ ἡ $E A = 78000$, ἔσεται ἡ $B E < 291100$.

Οὐκ ἔν τὸ μὲν $\overline{E A}^2 = 6084000000$, τὸ δὲ $\overline{B E}^2 < 84739210000$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{B A}^2 = \overline{B E}^2 + \overline{E A}^2$, τὸ ἄρα $\overline{B A}^2 < 90823210000$. ἀλλὰ τέττε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς, ἔστιν ὁ 301375. ἡ ἄρα $B A < 301375$. ἄρα καὶ $E B + B A < 291100 + 301375 = 592475$. διὸ ὁ $592475 : 78000 > E B + B A : E A$. καὶ ἐκατέρω μὲν τῶν ἀριθμῶν διὰ τῷ 325 διακεθέντος, ἐκότερω δὲ τῶν προκυπτόντων πηλίκων διὰ τῷ 11 πολλαπλασιασθέντος, ἔξει ὁ $20053 : 2640 > E B + B A : E A$. ἀλλ' ὡς $E B + B A : E A :: E \Phi : \Phi A$,
κα-

(γ) Κατὰ τὴν γ'. τῷ αὐτ. (δ) Κατὰ τὴν δ'. (ε) Κατὰ τὴν β'. συνέπ. τῆς ιε. τῷ δ'. (ζ) Κατὰ τὴν λα. τῷ γ. καὶ μ'. τῷ ε'.

καθάπερ δέδεικται. ἄρα ὁ $20053:2640 > B\Phi: \Phi A$.
 εἰν ἄρα τεθῇ ἡ $\Phi A = 2640$, ἔσται ἡ $B\Phi < 20053$.

Τῶν κεμένων, ἔσται τὸ μὲν $\overline{\Phi A}^2 = 6964000$, τὸ δὲ $\overline{B\Phi}^2 < 401122809$. τὸ ἄρα $\overline{BA}^2$ ἴσον ὃν τοῖς $\overline{B\Phi}^2$, $\overline{\Phi A}^2$, ἔλαττον ἔσται τῷ 409092409 ἀλλὰ τέττε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 20227 . ἡ ἄρα $BA < 20227$. διὸ $B\Phi + BA < 20053 + 20227 = 40280$ ἄρα ὁ $40280:264 > B\Phi + BA: \Phi A$. καὶ ἑκατέρω μὲν τῶν ἀριθμῶν τῶν διὰ τῷ 40 διαιρεθέντος, ἑκατέρω δὲ τῶν προκυπτῶν πηλίκων διὰ τῷ 6 πολλαπλασιασθέντος, ἔξει ὁ $6042:396 > B\Phi + BA: \Phi A$. ἀλλ' ὡς $B\Phi + BA: \Phi A:: BZ: ZA$, ὡς δέδεικται. ἄρα ὁ $6042:39 > BZ: ZA$. εἰν ἔν τεθῇ ἡ $ZA = 396$, ἔσται ἡ $BZ < 6042$. Κεῖθω δὴ τῷτο.

Τοιγαρὲν τὸ μὲν $\overline{ZA}^2 = 156816$, τὸ δὲ $\overline{BZ}^2 < 36505764$. τὸ ἄρα $\overline{BA}^2$ ἴσον ὃν τοῖς $\overline{BZ}^2$, $\overline{ZA}^2$, ἔλαττον ἔσται τῷ 36662580 . ἀλλὰ τέττε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἡ σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 6055 . ἡ ἄρα $BA < 6055$. διὸ καὶ $BZ + BA < 12097$. ἄρα $12097:396 > BZ + BA: ZA$, εἴτεν (ἑκατέρω τῶν ἀριθμῶν διπλασιασθέντος) $24194:792 > BZ + BA: ZA$. ἀλλ' ὡς $BZ + BA: ZA:: BH: HA$, ὡς δέδεικται. ἄρα ὁ $24194:792 > BH: HA$. εἰν ἄρα τεθῇ ἡ $HA = 792$, ἔσται ἡ $BH < 24194$. κεῖθω δὴ τῷτο.

Τὸ ἄρα $\overline{HA}^2 = 627264$, τὸ δὲ $\overline{BH}^2 < 585549636$. τὸ ἄρα $\overline{BA}^2$ ἴσον ὃν τοῖς $\overline{BH}^2$, $\overline{HA}^2$, ἔλαττον ἔσται τῷ 585976900 . ἀλλὰ τέττε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 24207 . ἡ ἄρα $BA < 24207$. ἡ ἄρα $AH:AB > 792:24207$, εἴτεν, ἑκατέρω τῶν ἀριθμῶν διὰ τῷ 3 διαιρεθέντος, ἢ $AH:AB > 264:8069$, εἴτεν, τῶν ἡγεμένων διὰ
 τῷ

τῷ 96 πολλαπλασιασθέντων, ἢ 96. ΑΗ: ΑΒ $\supset$ 25344: 8069 καὶ ἐκατέρω τῶν ἀριθμῶν διὰ τῷ 8069 διαιρεθέντος, ἢ 96. ΑΗ: ΑΒ $\supset$ 3 $+$ $\frac{1137}{8069}$: 1. ἔστι δὲ ἡ μὲν 96. ΑΗ ἡ περίμετρος τῷ εἰς τὸν κύκλον ΑΔΒ ἐγγεγραμμένη πολυγώνη, τῷ ἔχοντος 96 πλευράς, ἡ δὲ ΑΒ, ἡ τῷ κύκλῳ διάμετρος, τὸ δὲ $\frac{1137}{8069}$ μείζον ἔστι τῷ $\frac{10}{71}$. ἡ ἄρα περίμετρος τῷ εἰρημένη πολυγώνῃ τριπλασίῳν ἔστι τῆς διαμέτρου ΑΒ, καὶ ἔτι ὑπερέχει μείζονι μέρει αὐτῆς, ἢ δέκα ἐβδόμηκοσημόνοις.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Ἐκ τούτου δὴ φανερόν, ὅτι ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ διάμετρος παντὸς κύκλου πρὸς τὴν περιφέρειαν, ὁ μὲν ἐγγύς, ἀλλ' ἐλάσσων τῷ ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ 1 πρὸς τὰ 3 $+$ $\frac{1}{7}$, ἔστιν ὁ 7:22. ὁ δὲ ἐγγύς, ἀλλὰ μείζων, ὃν ἔχει ἡ 1 πρὸς τὰ 3 $+$ $\frac{10}{71}$, τέττις ὁ 71:223.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐὰν δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγγραφῇ τε καὶ ἐγγραφῇ πολύγωνα πλευράς ἔχοντα πλείονας ἢ 96, εὐρεθήσεται τῷ αὐτῷ τρόπῳ ὁ ἔτι ἐγγύτερος τῷ ἀκριβοῦς τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος. τὸτο καὶ ποιήσασιν ὁ, τε Μέτιος καὶ ὁ Λαδόλφος, καὶ ἄλλοι. (α) ἔστι δὲ ὁ ὑπὸ Μετίου εὐρεθεὶς ἐγγύτερος τῷ ἀκριβοῦς λόγος, ὃν ἔχει ὁ 113:355. αὐτὸν δὲ τὸν ἀκριβοῦς εὐρεῖν ἀμήχανον. ἀλλὰ γὰρ ἀρκέσιν οἱ προκείμενοι τῇ ἐν ταῖς πράξεσιν ἀπαιτεμένη ἀκριβείᾳ. ἐδὲν γὰρ τῇ αὐτῶν πρακτικῇ χρῆσαι ἐν ταῖς τῷ κύκλῳ μετρήσεσι προκύπτει αἰδητὸν παραπτώμα.

ΠΟ-

(α) Ὅρα τὸ ε'. Θεώρ. τῷ Τακκίτ. τὸ ἐν ταῖς τῷ Ἀρχιμ. Στοιχ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ἐντεῦθεν, δοθείσης τῆς τῷ κύκλῳ Διαμέτρου, τὸ σύνεγγυς τῷ ἀριβῆς μέτρον αὐτῷ εὐρεῖν ῥᾶδιον. ἔστω γὰρ ἡ δοθεῖσα διάμετρος ἴση ποσὶν 6, τὴν δὲ περιφέρειαν ἐμφανέτω τὸ Π. καὶ ἐπεὶ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον ἔχει ὃν ὁ 7 : 22, (α) ἔσται ὡς ὁ 7 : 22 :: 6 : Π. τὸ ἄρα $\Pi = \frac{132}{7}$. (β) ἐπεὶ δὲ πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ, ὃ ὕψος μὲν ἢ τῷ κύκλῳ ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ εὐθεῖα ἴση τῇ τῷ κύκλῳ περιφερείᾳ. (γ) πᾶν δὲ τρίγωνον ἴσον τῷ ἡμίσει τῷ γινομένῳ ἐκ τῷ ὕψους αὐτοῦ καὶ τῆς βάσεως. (δ) ἐστὶ δὲ τὸ μὲν τῷ τριγώνῳ ὕψος, ἔστω ἡ ἡμιδιάμετρος τῷ κύκλῳ, ἴσον 3 ; ἡ δὲ βάσις, τετάρτη ἢ περιφέρεια, ἴση $\frac{132}{7}$. ὁ ἄρα Κύκλος ἴσος $\frac{3 \cdot 132}{2 \cdot 7} = \frac{396}{14} = 28 + \frac{2}{7}$. ὅπερ ἐμφαίνει, ὅτι ὁ Κύκλος ἴσος ἐστὶν εἰκοσι καὶ ὀκτὼ ποδιαίοις τετραγώνοις καὶ δυσὶν ἑβδομημορίοις ἐνὸς ποδιαίου τετραγώνου. ἐκὼν μετρηθήσεται πᾶς κύκλος, τῆς τετάρτης ἀναλόγῃ τῷ 7, καὶ 22, καὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου διὰ τῆς ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιασθείσης, καὶ τῷ γινομένῳ διὰ τῷ 2 διαιρεθέντος ἢ τῆς εἰρημένης τετάρτης ἀναλόγῃ διὰ τῷ τεταρτημορίῳ τῆς διαμέτρου πολλαπλασιασθείσης.

ΛΗΜΜΑ Β'.

Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς κανονικοῦ πρίσματος ἴση ἐστὶ παραλληλογράμῳ, ὃ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως
τῷ

(α) Κατὰ τὸ προλ. πόρ. (β) Κατὰ τὸ δ' πρόβλ. τῷ δ'. τῇ Ἀριθμ. βιβλ. (γ) Κατὰ τὸ α' τῷ δὲ τῷ βιβλ. Θεώρ. (δ) Κατὰ τὸ γ'. πρόβλ. τὸ μετὰ τὸ β'. βιβλ. τῆς Γεωμετρ.

τῷ πρίσματος· ἡ δὲ, τῇ τῷ πρίσματος πλευρᾷ. δὲ δὲ τὴν ὑπὸ τῶν εἰρημένων τῷ παραλληλογράμῳ πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην εἶναι τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τε τῆς τῷ πρίσματος πλευρᾶς, καὶ τῆς πλευρᾶς τῆς αὐτῆς βάσεως.

Ἐξω κανονικὸν πρίσμα τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ, καὶ παραλληλόγραμμον τὸ ΠΟ· ἔῃ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ΠΣ, ἴση ἔξω τῇ τῆς βάσεως τῷ πρίσματος περιμέτρῳ, εἴτεν $ZH + HO + OI + IK + KZ$, ἡ δὲ ΕΠ ἴση τῇ τῷ πρίσματος πλευρᾷ ΑΗ. ἔξω δὲ ἡ γωνία ΑΗΖ ἴση τῇ ΕΠΣ. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῷ πρίσματος ἴση ἐστὶ τῷ παραλληλογράμῳ. πίν. Β. 4.

Ἐξω πρῶτον ἡ ΑΗΖ γωνία ὀρθή. ὀρθὴ ἔν ἔσται καὶ ἡ ΕΠΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ πάσαι αἱ τῷ κανονικῷ πρίσματος πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τὰ ὀρθογώνια ΑΖ, ΑΩ, ΒΙ, ΓΚ, ΔΖ ἴσα ἔσονται τῷ ΑΗ. $ZH + HO + OI + IK + KZ$. ἀλλ' ἡ μὲν ΑΗ = ΕΠ, ἡ δὲ $ZH + HO + OI + IK + KZ = ΠΣ$. (ε) τὰ ἄρα εἰρημένα ὀρθογώνια ἴσα εἰσὶ τῷ ΕΠ. ΠΣ, εἴτεν τῷ ὀρθογώνιῳ ΠΟ. ἀλλὰ τὰ διαληφθέντα ὀρθογώνια εἰσὶν ἡ τῷ πρίσματος ἐπιφάνεια. ἡ ἄρα τῷ πρίσματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ΠΟ ὀρθογώνιῳ.

Ἀλλ' ἔξω ἡ ΑΗΖ γωνία ὀξεῖα, ἴση δὲ αὐτῇ πάλιν ἡ ΕΠΣ. καὶ ἀπὸ μὲν τῷ Α ἡ ΧΘ ἡ ΑΝ κάθετος τῇ ΖΗ, ἀπὸ δὲ τῷ Ε ἡ ΕΡ τῇ ΠΣ. 4. 5.

Ἐπεὶ ἡ ΑΝ κοινὸν ὕψος ἐστὶ πάντων τῶν παραλληλογράμμων ΑΖ, ΑΘ, ΒΙ, ΓΚ, ΕΖ, ἴσα ἄρα εἰσὶ τὰ παραλληλ.

λη.

(*) Ἐξ ὑποθ.

ληλόγημα ταῦτα τῷ ΑΝ. ΖΗ + ΗΘ + ΘΙ + ΙΚ + ΚΖ. (ζ)
 καὶ ἐπεὶ ἐν ταῖς τριγώνοις ΑΗΝ, ΕΠΡ ἡ μὲν γωνία
 ΑΗΝ = ΕΠΡ, (η) ἡ δὲ ΑΗΗ = ΕΡΠ, (θ) ἡ δὲ
 ΑΗ = ΕΠ, (ι) ἄρα καὶ ἡ ΑΝ = ΕΡ. (κ) ἐστὶ δὲ ἡ
 ταῖς ΖΗ + ΗΘ + ΘΙ + ΙΚ + ΚΖ = ΠΣ. τὸ ἄρα
 ΕΡ. ΠΣ, ἔστω τὸ ΠΟ παραλληλόγραμμον ἴσον ΑΝ.
 ΖΗ + ΗΘ + ΘΙ + ΙΚ + ΚΖ. καὶ τὰ διαληφθέντα
 ἄρα παραλληλόγραμμα, ἔστω ἡ τῆς πρίσματος ἐπι-
 φάνεια ἴση τῷ παραλληλογράμῳ ΠΟ.

Λ Η Μ Μ Α Γ'.

Παντὸς κυλίνδρου ἡ ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς
 βάσεως καὶ τῆς ἀπ' ἐναντίας κύκλου, ἴση ἐστὶ
 παραλληλογράμῳ, ὃ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν
 ἴση τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως· ἡ δὲ, τῇ
 πλευρᾷ τῆς κυλίνδρου. δεῖ δὲ τὸ παραλλη-
 λόγραμμον ἴσην περιέχειν γωνίαν τῇ ὑπὸ
 τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως
 τῆς κυλίνδρου περιεχομένην.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Ἡ μὲν ἐπιφάνεια τῆς πρίσματος τῆς εἰς τὸν κύλιν-
 δρον ἐγγεγραμμένης, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς κυλίνδρου
 ἀπολήγει, (λ) ἡ δὲ περίμετρος τῆς βάσεως τῆς πρίσ-
 ματος εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τῆς κυλίνδρου,
 (μ) ἡ δὲ πλευρὰ τῆς πρίσματος εἰς τὴν πλευρὰν τῆς κυ-
 λίν-

- (ζ) Κατὰ τὸ β'. προβλ. τὸ μετὰ τὸ β'. βιβλ. τῆς Γεωμ.
 (η) Ἐξ ὑποθ. (θ) Ἐκατέρα γὰρ ὀρθὴ ἐκ τῆς κατασκευ. (ι) Ἐξ
 ὑποθ. (κ) Κατὰ τὴν κς'. τῆς α'. (λ) Κατὰ τὸ δ'. Αἰμ. τὸ
 μετὰ τὴν δ'. τῆς β'. τῆς Γεωμ. (μ) Κατὰ τὸ ε'. Αἰμ. τὸ
 μετὰ τὴν ε'. τῆς αὐτῆς βιβλ.

λινδρε. ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῆς πρίσματος ἴση ἐστὶ παραλληλογράμῳ, ἢ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἴση τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ἢ δὲ τῇ πλευρᾷ τῆς πρίσματος. ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς κυλίνδρου ἴση ἐστὶ παραλληλογράμῳ, ἢ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἴση τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως, ἢ δὲ τῇ πλευρᾷ τῆς κυλίνδρου.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἐν λόγῳ συγκεκλιμέναι εἰσὶν ἐκ τε τῆς λόγου ὅν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ πλευραὶ, καὶ ἐκ τῆς ὅν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ περιφέρειαι, ἢ αἱ διαμέτροι τῶν ἑαυτῶν βάσεων. εἰς γὰρ αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι, ὡς αἱ διαμέτροι. (ν) Ἐὰν ὅν αἱ τῶν κυλίνδρων πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἀνάλογον ἔσονται ταῖς διαμέτροις τῶν βάσεων· ἐὰν δὲ αἱ διαμέτροι τῶν βάσεων ἴσαι, ἀνάλογον ταῖς πλευραῖς· ἐὰν δὲ αἱ πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ὁμοίως καὶ αἱ διαμέτροι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται καὶ αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι.

Β'. Ἐὰν αἱ τῶν κυλίνδρων πλευραὶ ἐν ἀντιπεπονητότῳ λόγῳ ὦσι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων, ἴσαι ἔσονται αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι· καὶ ἐὰν αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἔσονται αἱ πλευραὶ τῶν κυλίνδρων ἐν ἀντιπεπονητότῳ λόγῳ τῶν διαμέτρων τῶν ἑαυτῶν βάσεων.

Γ'. Αἱ τῶν ὁμοίων κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἐν διπλασίῳ λόγῳ εἰς τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων, εἶτεν λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὅν τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ἐπεὶ γὰρ αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι λόγον ἔχουσι συγκεκλιμένον ἐκ τῆς ὅν ἔχει πλευρὰ πρὸς πλευρὰν, καὶ ἐκ τῆς ὅν ἔχει διάμετρος πρὸς διά-

Β

με·

(ν) Κατὰ τὴν συνίπ. τὴν μετὰ τὴν β'. τῆς β'. βιβλ. τῆς Γεωμ.

μετρον. ἔστι δὲ ἐν τοῖς ὁμοίοις κυλίνδροις ἄξων πρὸς ἄξονα, (ἔτεν πλευρὰ πρὸς πλευράν, ἴσά γὰρ αἱ πλευραὶ τοῖς ἄξουσιν) ἔτω διάμετρος, πρὸς διάμετρον. (ξ) αἱ ἄρα τῶν ὁμοίων κυλίνδρων ἐπιφάνεια διπλάσιονα λόγον ἔχουσιν, ἥπερ αἱ διαμέτροι τῶν βασεων.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Γ'. (ο)

Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἢ ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως καὶ τῆς ἀπ' ἐναντίας κύκλου, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, ὃ ἢ ἐκ τῆς κέντρος μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τῆς κυλίνδρου, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Ἐστω κύλινδρος ὀρθὸς ὁ ΑΓ, καὶ κύκλος ὁ ΔΕΖ, ἢ ἡμιδιάμετρος ΚΖ μέση ἀνάλογον ἔστω τῆς πλευρᾶς ΑΒ, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως ΓΒ, ἔτεν ἔστω ὡς ΑΒ : ΚΖ :: ΚΖ : ΓΒ. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς κυλίνδρου, χωρὶς τῆς βάσεως καὶ τῆς ἀπεναντίας κύκλου, ἴση ἐστὶ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ. χα. ὁ.

Κ Α Τ Α Σ Κ Ε Υ Η.

Συσαθῆτω τρίγωνον τὸ ΗΛΜ, ἔστω τὸ μὲν ὕψος ΗΛ διπλάσιον ἔστω τῆς ΑΒ πλευρᾶς, ἢ δὲ βάσις ΛΜ ἴση τῇ ΓΘΒ περιφερείᾳ τῆς τῆς κυλίνδρου βάσεως. ὁμοίως συσαθῆτω τὸ ΚΖΝ τρίγωνον, ὕψος μὲν ἔχον τὴν ΚΖ ἴσην τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς ΔΕΖ κύκλου, βάσιν δὲ τὴν ΖΝ ἴσην τῇ τῆς κύκλου περιφερείᾳ.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Τὸ τρίγωνον ΗΛΜ, πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΖΝ λόγον ἔχει συγκείμενον, ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΗΛ : ΖΚ, ἐκ τῆς ὅν ἔχει

(ξ) Κατὰ τὸν δ'. ἔρισ. τῇ αὐτ. (ο) Τῇ Ἀρχιμ. ιγ'. ἐν τῇ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρων κ. βιβλ.

ἔχει $\Lambda\text{M} : \text{ZN}$. (π) ἀλλὰ τὸ $\text{H}\Lambda = 2\text{AB}$, (ρ) καὶ
 ὡς $\Lambda\text{M} : \text{ZN} :: \frac{\Gamma\text{B}}{2} : \text{KZ}$. (σ) αἱ γὰρ $\frac{\Gamma\text{B}}{2}$ καὶ KZ ἡμι-
 διάμετροί εἰσι τῶν περιφερειῶν, αἷς ἴσαι εἰσὶν αἱ ΛM ,
 ZN . τὸ ἄρα τρίγ. HAM , πρὸς τὸ τρίγ. KZN λόγον
 ἔχει συγχεόμενον ἐκ τῶ ὃν ἔχει $2\text{AB} : \text{KZ}$, καὶ τῶ ὃν
 ἔχει $\frac{\Gamma\text{B}}{2} : \text{KZ}$, εἴτεν τρίγ. $\text{HAM} : \text{τρίγ. KZN} :: 2\text{AB} \cdot \frac{\Gamma\text{B}}{2} :$
 $\overline{\text{KZ}}^2$, (τ) ἦτοι τρίγ. $\text{HAM} : \text{τρίγ. KZN} :: \text{AB} \cdot \Gamma\text{B} :$
 $\overline{\text{KZ}}^2$. ἀλλὰ τὸ $\text{AB} \cdot \Gamma\text{B} = \overline{\text{KZ}}^2$. (υ) ἔτι γὰρ ὡς $\text{AB} :$
 $\text{KZ} :: \text{KZ} : \Gamma\text{B}$. (φ) ἄρα τὸ $\text{HAM} = \text{KZN}$. ἀλλὰ τὸ
 μὲν HAM τρίγωνον ἴσον τῇ τῶ κυλίνδρῳ AG ἐπιφα-
 νεία· ἴσον γὰρ παραλληλογράμμῳ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ
 τῆς AB καὶ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως, (χ) ᾧ ἡ
 τῶ κυλίνδρῳ AG ἐπιφάνεια ἐστὶν ἴση· (ψ) τὸ δὲ τρί-
 γωνον KZN ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ ΔEZ . (ω) ἡ ἄρα ἐπι-
 φάνεια τῶ AG κυλίνδρῳ ἴση τῷ ΔEZ κύκλῳ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Ἡ ἐπιφάνεια τῶ ὀρθῶ κυλίνδρῳ πρὸς τὴν βάσιν
 λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς
 διαμέτρου τῆς βάσεως, εἴτεν κληθείσης τῆς μὲν ἐπι-
 φανείας τῶ κυλίνδρῳ, E , τῆς δὲ βάσεως, B , ἔσαι
 ὡς $\text{E} : \text{B} :: \text{AB} : \frac{\text{B}\Gamma}{2}$. ἐπεὶ γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τῶ κυ-
 λίνδρῳ AG ἴση ἐστὶ⁴ τῷ ΔEZ κύκλῳ· ἔτι δὲ ὁ κύκλος
 ΔEZ , πρὸς τὴν βάσιν τῶ κυλίνδρῳ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς
 ZK τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς $\text{B}\Gamma$
 τετράγωνον. (α) (ἡμιδιάμετρος γὰρ ἡ τῆς $\text{B}\Gamma$
 ἡμίσεια) ὡς ἄρα $\text{E} : \text{B} :: \overline{\text{KZ}}^2 : \frac{\text{B}\Gamma^2}{4}$. ἀλλὰ $\overline{\text{KZ}}^2 =$
 $\text{B} \quad 2 \qquad 4 \qquad \text{AB}.$

- (π) Κατὰ τὸ Θεώρ. τὸ μετὰ τὴν κγ'. τῶ σ'. τῆς Γεωμ. (ρ) Ἐκ
 τῆς κατασκευ. (σ) Κατὰ τὴν συνέπ. τὴν μετὰ τὴν β'. τῶ ιβ'.
 Βιβλ. τῆς Γεωμ. (τ) Κατὰ τὸν ζ'. ὀρισ. τῶ ε'. (υ) Κατὰ
 τὴν ιζ' τῶ σ'. (φ) Ἐξ ὑποθ. (χ) Ἐκ τῆς μαί. τῶ α'. δηλον.
 (ψ) Κατὰ τὸ προλ. Αἰμ. (ω) Κατὰ τὸ κ. Θεώρ. τῶ δὲ τῶ
 βιβλ. (π) Κατὰ τὴν β'. τῶ ιβ'.

ΑΒ. ΒΓ. (β) ὡς ἄρα $E : B :: AB : BG$. $\overline{BG}^2$. ἀλλ' ἄς
 $AB : BG : \overline{BG}^2 :: AE : \frac{BG}{4}$ (γ) ὡς ἄρα $E : B :: 4 AB : BG$
 (δ) ὅπερ 4 ἐστίν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς κυλίνδρου πρὸς 4
 τὴν βάσιν αὐτῆς, λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ ΑΒ πρὸς τὸ
 τεταρτημόριον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως.

Β'. Η' ἐπιφάνεια τῆς κυλίνδρου ΑΓ, τῆς περὶ τὴν σφαῖ-
 ραν περιγεγραμμένη ἴση ἐστὶ κύκλῳ, ἧς ἡ ἡμιδιάμε-
 τρος ἴση τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ ΦΖ. ἡ γὰρ ἐπι-
 φάνεια τῆς ΑΓ κυλίνδρου ἴση ἐστὶ κύκλῳ ἧς ἡ ἡμιδιά-
 μετρος μέση ἀνάλογον τῶν ΒΓ, ΓΔ. (ε) ἐστὶ δὲ ἡ
 ΦΖ μέση ἀνάλογος τῶν ΒΓ, ΓΔ. ἴσαι γὰρ ἀλλή-
 λαις αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΦΖ. πίν. Γ. χ. 7.

Γ'. Η' ἐπιφάνεια τῆς περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμέ-
 νης κυλίνδρου ΑΓ τετραπλασία ἐστὶ τῆς γεννήτορος τῆς
 σφαίρας κύκλου ΦΕΖ. ἐπεὶ γὰρ ἡ τῆς κυλίνδρου ΑΓ ἐπι-
 φάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ ἡμιδιάμετρον ἔχοντι ἴσην τῇ
 ΦΖ, (ζ) εἴτεν διάμετρον διπλασίαν τῆς ΦΖ, ἡ
 ἐπιφάνεια τῆς ΑΓ κυλίνδρου, πρὸς τὸν ΦΕΖ κύκλον
 λόγον ἔχει, ὃν ὁ κύκλος ὁ ἔχων διάμετρον διπλασίαν
 τῆς ΦΖ, πρὸς τὸν κύκλον ΦΕΖ. ἀλλ' οἱ κύκλοι πρὸς
 ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγω-
 να. (η) ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῆς κυλίνδρου ΑΓ, πρὸς
 τὸν ΦΕΖ κύκλον λόγον ἔχει, ὃν ὁ $4 : 1$. εἰάν γὰρ
 τεθῇ ἡ ΦΖ = 1, ἔσαι ἡ διάμετρος τῆς κύκλου τῆς
 ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς ΑΓ κυλίνδρου ἴση 2. διὸ τὰ
 ἀπ' αὐτῶν τετράγωνά εἰσιν 1, καὶ 4.

Δ'. Η' ἐπιφάνεια τῆς κυλίνδρου ΑΓ σὺν τῇ βάσει ΔΘΓ καὶ
 τῷ ἀπ' ἐναντίας κύκλῳ ΑΗΒ ἑξαπλασία ἐστὶ τῆς
 σφαίρας

(β) Ἐκ τῆς ὑποθ. δῆλον. (γ) Κατὰ τὴν α'. τῇ 5'. (δ) Κατὰ
 τὴν ε'. τῇ 1'. (ε) Κατὰ τὸ γ'. Θεώρ. τῆς δε τῆς βιβλ. (ζ) Κα-
 τὰ τὴν προλ. Σύνεσ. (η) Κατὰ τὴν β'. τῇ 1β'.

σφαίρας γεννήτορος κύκλος ΦΕΖ, ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῷ ΑΓ κυλίνδρῳ τετραπλασία δέδεικται τῷ ΦΕΖ κύκλῳ, ἐκάτερος δὲ τῶν ΔΘΓ, ΑΗΒ κύκλων ἴσος τῷ ΦΕΖ. διὸ ἡ ἐπιφάνεια τῷ ΑΓ κυλίνδρῳ σὺν τῇ βάσει ΔΘΓ ἢ τῷ ἀπ' ἐναντίας κύκλῳ ΑΗΒ ἑξαπλασία τῷ ΦΕΖ κύκλῳ.

Ε'. Ἡ ἐπιφάνεια τῷ ΑΓ κυλίνδρῳ, τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγεγραμμένῳ διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῷ ΖΗ κυλίνδρῳ τῷ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγεγραμμένῳ. ἐπεὶ γὰρ ὅμοιοι εἰσιν οἱ ΑΓ, ΖΗ κύλινδροι, ὡς δὴ-λον, ἡ ἐπιφάνεια τῷ ΑΓ, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῷ ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνου, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ τετραγώνου. (θ) ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνου διπλάσιόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΘΗ τετραγώνῳ. (ι) ἄρα ἢ ἡ ἐπιφάνεια τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγεγραμμένῳ κυλίνδρῳ ΑΓ διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῷ ΖΗ κυλίνδρῳ, τῷ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγεγραμμένῳ. χ. 8.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ' (κ)

Εἰς ἂν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ (λ) πυραμῖς περιγεγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, χωρεῖς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως ὕψος δὲ, τὴν πλευρὰν τῷ κῶνῳ.

Εἶπω κῶνος ὁ ΗΑΒΓ, ἡ βάση ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ πυραμῖς περιγεγραφῶ ἡ ΗΔΕΖ, ὥστε τὴν βάσιν αὐ-

B 3

τῆς,

(θ) Κατὰ τὴν γ'. Συνέπ. τῇ γ'. Αἰμ. (ι) Κατὰ τὴν Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν ζ'. τῇ δ'. τῆς Γεωμ. βιβ. (κ) Τῇ Ἀρχιμ. ἢ ἐν τῷ περὶ σφαῖρ. καὶ κυλίνδρ. α'. βιβλ. (λ) Ἰδέου. ὅτι ἰσοσκελὲς κῶνός ἐστιν ὁ τὴν τῆς βάσεως διάμετρον ἴσην πᾶσι πλευραῖς ἔχων. ὁ αὐτός δὲ καὶ ὀρθός ἐστιν.

τῆς, τῷ τε ἐπὶ τὸ ΔΕΖ πολύγωνον, περιγεγραμμένον πρὸς
εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον εἶναι. καὶ κείθω τρίγωνον τὸ ΘΚΛ
ἴσην ἔχον τὴν μὲν ΘΚ τῇ περιμέτρῳ τῆς ΔΕΖ πολυ-
γώνου, τὴν δὲ ΛΜ κάθετον τῇ ΘΚ ἴσην τῇ ΗΑ πλευ-
ρᾷ τῆς κώνου. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς ΗΔΕΖ πυ-
ραμίδος, χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τῷ ΘΚΛ τρι-
γώνῳ. χ. 9.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἦ' χθω ὁ τῆς κώνου ἄξων ΗΚ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΚΑ.

ΔΒΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὁ ΗΚ ἄξων πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ ΑΒΓ κύκλῳ,
καὶ πάντα ἄρα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ
τῷ ΑΒΓ κύκλῳ. (μ) ἦνται δὲ δι' αὐτῆς τὸ ΗΚΑ τρι-
γωνον. τὸ ἄρα ΗΚΑ τρίγωνον πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ ΑΒΓ
κύκλῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΑ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῇ κοινῇ τῶν
ἐπιπέδων τομῇ ΚΑ, (ν) πρὸς ὀρθὰς ἔσται καὶ τῷ ΗΚΑ
ἐπίπεδῳ. (ξ) πρὸς ὀρθὰς ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ καὶ τῇ ΗΑ,
(ο) εἴτεν ἡ ΗΑ κάθετός ἐστι τῇ ΔΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ
ἡ μὲν ΗΒ κάθετός ἐστι τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΗΓ τῇ ΕΖ. διὰ
τὸ μὲν τρίγωνον ΗΔΕ = $\frac{ΗΑ \cdot ΔΕ}{2}$ τὸ δὲ ΗΔΖ = $\frac{ΗΒ \cdot ΔΖ}{2}$,
τὸ δὲ ΗΖΕ = $\frac{ΗΓ \cdot ΖΕ}{2}$. (π) ταῦτα ἄρα τὰ τρίγωνα, εἴτεν
ἡ τῆς πυραμίδος ΗΔΕΖ (χωρὶς τῆς βάσεως) ἐπιφά-
νεια ἴση ἐστὶ τῷ ΗΑ · ΔΕ + ΗΒ · ΔΖ + ΗΓ · ΖΕ. ἀλλ' αἱ
ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ ἴσαι ἀλλήλαις ² εἰσιν, ἄτε δὴ τῆς ἰσο-
κελῆς κώνου πλευραί. ἄρα ἡ τῆς πυραμίδος ΗΔΕΖ ἐπι-
φάνεια

(μ) Κατὰ τὴν ιη'. τῆς ια'. (ν) Κατὰ τὴν ιη'. τῆς γ'. (ξ) Κατὰ
τὴν δ'. τῆς ια'. (ο) Κατὰ τὸν γ'. ὀρίσ. τῆς ια'. (π) Κατὰ τὸ γ'.
πρόβλ. τὸ μετὰ τὸ β'. βιβλ.

Φάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τῷ HA . $\overline{DE+DZ+ZE}$

ἀλλ' ἡ μὲν $HA=AM$, ἡ δὲ $\overline{DE+DZ+ZE}=\Theta K$.

(ρ) ἡ ὅρα τῆς πυραμίδος $HDEZ$ ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τῷ $\overline{AM \cdot \Theta K}$, εἴτεν τῷ $\Lambda \Theta K$ τριγώνῳ.

ΣΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἡ ἐπιφάνεια τῆ ἰσοσκελεῖς κώνε ἴση ἐστὶ τριγώνῳ, ἔῤῥος μὲν ἡ πλευρὰ, βάσις δὲ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τῆ κώνε. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῆς περὶ τὸν κώνον περιγεγραμμένης πυραμίδος, εἰς τὸν κώνον ἀπολήγει (σ) ἡ δὲ περίμετρος τῆς βάσεως αὐτῆς, εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τῆ κώνε. (τ)

Β'. Αἱ τῶν κώνων ἐπιφάνειαι ἐν λόγῳ συγκεκριμέναι εἰσὶν ἐκ τε τῆ λέγε, ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ πλευραὶ αὐτῶν, καὶ ἐκ τῆ λέγε, ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ περιφέρειαι, ἢ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων. αἱ γὰρ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ διάμετροι. (υ) εἴαν ἔν αἱ τῶν κώνων πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ᾤσιν, αἱ ἐπιφάνειαι εἰσὶν ὡς αἱ διάμετροι· εἴαν δὲ αἱ διάμετροι ἴσαι, εἰσὶν ὡς αἱ πλευραὶ· εἴαν δὲ αἱ πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ᾤσιν, ὁμοίως καὶ αἱ διάμετροι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται καὶ αἱ ἐπιφάνειαι.

Γ'. Εἴαν αἱ τῶν κώνων πλευραὶ ἐν ἀντιπεπονητότι λόγῳ ᾤσι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων, ἴσαι ἔσονται αἱ τῶν κώνων ἐπιφάνειαι· εἴαν δὲ αἱ ἐπιφάνειαι ἴσαι ᾤσιν, αἱ πλευραὶ ἐν ἀντιπεπονητότι λόγῳ ἔσονται τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων.

B 4

Δ'.

(ρ) Ἐξ ὑποθ. (σ) Κατὰ τὸ δ'. Λημ. τὸ πρὸ τῆς ι. τῆ ιβ'. (τ) Κατὰ τὸ α'. Λημ. τὸ πρὸ τῆς β'. τῆ αὐτ. (υ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς β'. τῆ αὐτ.

Δ'. Αἱ τῶν ὁμοίων κῶνων ἐπιφάνεια ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων, ἔτεν λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὅν τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετραγώνια. τῶν γὰρ ὁμοίων κῶνων, αἱ μὲν ἄξονες ἀνάλογόν εἰσι ταῖς διαμέτροις τῶν βάσεων, (Φ) αἱ δὲ πλευραὶ τοῖς ἄξουσιν. ὥστε καὶ αἱ πλευραὶ λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὅν αἱ διαμέτροι τῶν βάσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. (Χ)

Παντὸς κῶνις ἰσοσκελεῖς, χωρὶς τῆς βάσεως, ἢ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, ὃ ἢ ἐκ τῆς κέντρος μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τῆς κῶνις, καὶ τῆς ἐκ τῆς κέντρος τῆς κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τῆς κῶνις.

Ἐξω. ἰσοσκελεῖς κῶνος ὁ ΑΒΓ, καὶ κύκλος ὁ ΔΙΑ, ὃ ἢ ἡμιδιάμετρος ΚΛ μέση ἀνάλογον ἔσω τῆς πλευρᾶς ΑΒ, καὶ τῆς ΖΒ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς βάσεως τῆς κῶνις, ἔτεν ἔσω ὡς ΑΒ : ΚΛ :: ΚΛ : ΖΒ, λέγω, ὅτι ἢ ἐπιφάνεια τῆς κῶνις ΑΒΓ ἴση ἐστὶ τῷ κύκλῳ ΔΙΑ. % 10.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω τρίγωνον τὸ Χ, ὕψος μὲν ἔχον τὴν ΘΒ ἴσην τῇ ΑΒ, βάσιν δὲ τὴν ΒΗ ἴσην τῇ τῷ κύκλῳ ΓΜΒ περιφερείᾳ. ὁμοίως συνεσάτω τρίγωνον τὸ Φ, ὕψος μὲν ἔχον τὴν ΝΟ ἴσην τῇ ΚΛ, βάσιν δὲ τὴν ΟΠ ἴσην τῇ τῷ κύκλῳ ΔΙΑ περιφερείᾳ.

ΔΕΙ-

(Φ) Κατὰ τὸν 4. ὅρισ. τῆς β' - (Χ) Ἀρχιμ. 10. τῆς περισφαιρ. καὶ κυλ. α' βιβλ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τρίγωνον X , πρὸς τὸ τρίγωνον Φ λόγον ἔχει συγ-
κείμενον ἐκ τε τῶ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΘB : NO , καὶ ἐκ
τῶ ὃν ἔχει ἡ BH : OP . (ψ) ἀλλ' ἡ μὲν $\Theta B = AB$,
ἡ δὲ $NO = KL$. (ω) ἔστι δὲ καὶ ὡς BH : $OP :: ZB$:
 KL . (α) αἱ γὰρ BH , OP ἴσαι ταῖς περιφερείαις τῶν
 $ΓMB$, $ΔΙΑ$ κύκλων. (β) τὸ ἄρα X πρὸς τὸ Φ λόγον
ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶ λόγου ὃν ἔχει AB : KL , καὶ
ἐκ τῶ ὃν ἔχει ZB : KL , ἔτεν X : $\Phi :: AB \cdot ZB$:
 KL^2 . (γ) ἀλλ' $AB \cdot ZB = KL^2$. (δ) ἔστι γὰρ AB : $KL ::$
 KL : ZB . (ε) ἄρα καὶ $X = \Phi$. ἀλλὰ τὸ μὲν X ἴσον τῇ
τῶ κώνε $ABΓ$ ἐπιφάνειᾳ, (ζ) τὸ δὲ Φ ἴσον τῶ $ΔΙΑ$
κύκλῳ. (η) ἡ ἄρα τῶ κώνε $ABΓ$ ἐπιφάνεια ἴση τῶ
 $ΔΙΑ$ κύκλῳ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5'. (θ)

Παντὸς κώνε ἰσοσκελεῖς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς
τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευ-
ρὰ τῶ κώνε πρὸς τὴν ἐκ τῶ κέντρου τῆς βά-
σεως τῶ κώνε.

Ἐξω ἰσοσκελεῖς κώνος ὁ $ABΓ$, λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφά-
νεια αὐτῆ πρὸς τὴν βάσιν $ΓMB$ τὸν αὐτὸν ἔχει λό-
γον, ὃν ἡ AB , πρὸς τὴν ZB . χ. 10.

B 5

ΚΑΤΑ-

- (ψ) Κατὰ τὸ Θεώρ. τὸ μετὰ τὴν κγ'. τῶ π'. (ω) Ἐκ τῆς
κατασκ. (α) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς β'. τῶ ιβ'. βιβλ. (β) Ἐκ
τῆς κατασκ. (γ) Κατὰ τὸν ζ'. ὅρισ. τῶ ε'. (δ) Κατὰ τὴν ιζ'.
τῶ ε'. (ε) Ἐξ ὑποθ. (ζ) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τῶ προλαβ-
θεώρ. (η) Κατὰ τὸ α'. Θεώρ. τῶ δε τῶ βιβλ. (θ) Τῶ
Ἀρχιμ. ἰε. τῶ ἀρημ. βιβλ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ευρεθήτω μέση ἀνάλογον τῶν AB , ZB , ἡ KA , ἣ κέντρῳ μὲν τῷ K , διαστήματι δὲ τῷ KA , κύκλος γεγράφθω ὁ $\Delta I\Lambda$,

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἵπερ ἡ τῷ $κῶν$ $ABΓ$ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ $\Delta I\Lambda$ κύκλῳ, (ι) ἔχει ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῷ $ABΓ$ κῶν, πρὸς τὴν βάσιν ΓMB λόγον, ὃν ὁ $\Delta I\Lambda$ κύκλος, πρὸς τὸν ΓMB κύκλον. ἀλλ' ὡς $\Delta I\Lambda : \Gamma MB :: KA^2 : ZB^2$, (κ) ἐστὶ δὲ $KA^2 = AB \cdot ZB$. (λ) ὡς ἄρα $\Delta I\Lambda : \Gamma MB :: AB \cdot ZB : ZB^2$, ἀλλ' ὡς $AB \cdot ZB : ZB^2 :: AB : ZB$. (μ) ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῷ $ABΓ$ κῶν, πρὸς τὴν βάσιν ZMB τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ AB , πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον ZB .

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Η' ἐπιφάνεια τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένην ἰσοπλευρῶ κῶν τετραπλάσια ἐστὶ τῆς τῷ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένῃ ἐπιφανείας. Περιγεγραμμένα γὰρ ἐννοείδωσαν αἱ τῷ περιγεγραμμένῳ κῶν πλευραὶ ED , $\Delta\Phi$, ΦE (χ ιι) περὶ τὸν τῆς σφαίρας γεννητόρα κύκλον $BAΓ$, ἐγγεγραμμένα δὲ αἱ τῷ ἐγγεγραμμένῳ, αἱ AB , $ΒΓ$, ΓA ἕως, ὥστε τὴν μὲν AB τῇ ED παράλληλον εἶναι, τὴν δὲ $ΒΓ$ τῇ $\Delta\Phi$, τὴν δὲ ΓA τῇ ΦE . ἣ τετμήθω δίχα ἑκατέρω τῶν $\Delta E\Phi$, $\Delta\Phi E$ γωνιῶν διὰ τῶν $ΕΛ$, $\Phi Η$. ἣ ἕσται δὴ ἐπὶ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς K τὸ τῷ κύκλῳ κέντρον. (ν) ὡσαύτως δίχα τετμήθωσαν καὶ αἱ $BAΓ$, $ΒΓA$ γωνίαι διὰ τῶν AZ , $\Gamma\Theta$. ἣ ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς ἐστὶ τὸ κέντρον, (ξ) τὸ K δὲ, καὶ ἄκ
ἄλλο

- (ι) Κατὰ τὸ προλ. Θεώρ. (κ) Κατὰ τὴν β'. τῷ ιβ'. (λ) Κατὰ τὴν ιγ'. τῷ ε'. (μ) Κατὰ τὴν κ'. τῷ αὐτ. (ν) Ἀλλοι ἐκ τῆς ε'. τῷ δ'. (ξ) Ὅρα τὴν δ'. τῷ δ'.

ἄλλο σημεῖον ἐστὶ τὸ κέντρον. αἱ ἄρα AZ , $ΓΘ$ κα-
τὰ τὸ αὐτὸ K ἀλλήλας τέμνουσι, καὶ ταῖς $ΕΛ$ $ΦΗ$
παυτίζονται, ἐπεὶ δὲ ἐν ταῖς τριγώνοις $ΖΑΓ$, $ΖΑΒ$,
ἡ μὲν $ΑΓ = ΑΒ$, (ο) ἡ δὲ AZ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ
 $ΓΑΖ = ΒΑΖ$, (π) ἄρα καὶ γωνία ἡ $AZΓ = AZB$,
καὶ ἡ $ΓΖ = ΒΖ$. (ρ) διό ἡ $BΓ$ διπλασία τῆς $ΓΖ$.
εἰς τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $ΔΦ$ διπλασία τῆς $ΦΛ$. καὶ
ἵπεί, ὡς $ΓΑ : ΓΖ :: ΑΚ : ΚΖ$. (σ) ἐστὶ δὲ ἡ $ΑΓ$
διπλασία τῆς $ΓΖ$, ἄρα καὶ ἡ $ΑΚ$ διπλασία τῆς
 $ΚΖ$. ἀλλ' ἡ $ΚΛ$ ἴση τῇ $ΑΚ$, ἄρα καὶ ἡ $ΚΛ$ διπλα-
σία τῆς $ΚΖ$. ἀλλ' ὡς $ΚΛ : ΛΦ :: ΚΖ : ΖΓ$. (τ) ἄρα
καὶ ἡ $ΛΦ$ διπλασία τῆς $ΖΓ$. ὥστε καὶ ἡ $ΔΦ$ διπ-
λασία τῆς $BΓ$. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΦ$ τετραγώνων
τετραπλάσιόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς $BΓ$. ἐστὶ δὲ ἡ ἐπιφά-
νεια τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῃ κώνῃ $ΔΕΦ$,
πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῷ ἐγγεγραμμένῃ $ΒΑΓ$, ὡς τὸ
 $ΔΦ^2 : BΓ^2$. (υ) εἰς γὰρ μενέσης τῆς $ΕΛ$, περιε-
νεχθῇ τὸ $ΔΕΦ$ τρίγωνον σὺν τῷ κύκλῳ καὶ τῷ εἰς
αὐτὸν ἐγγεγραμμένῳ τριγώνῳ, ἀπὸ μὲν τῶν τρι-
γώνων ὅμοιοι κῶνοι γενήσονται, ὧν αἱ τῶν βάσεων
διάμετροι εἰσιν αἱ $ΔΦ$, $BΓ$, ἀπὸ δὲ τῷ κύκλῳ ἡ
 $ΒΑΓ$ σφαῖρα. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῷ περιγεγραμμέ-
νῃ κώνῃ $ΔΕΦ$ τετραπλάσια ἐστὶ τῆς τῷ $ΒΑΓ$ τῷ
ἐγγεγραμμένῃ.

Β'. Ἡ βάσις τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῃ
ἰσοπλεύρῃ κώνῃ τριπλασία ἐστὶ τῷ κύκλῳ τῷ τῆς
σφαῖρας γεννήτορες. Ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΚΓ = ΚΛ$, ἡ δὲ
 $ΚΛ$ διπλασία τῆς $ΚΖ$, καὶ ἡ $ΚΓ$ ἄρα διπλασία
τῆς $ΚΖ$, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΚΖ$ τετραγώνων τεταρ-

τη.

Δημόστειον Κεντρικὴν Βιβλιοθήκην Βελούδος

(ο) Ἐξ ὑποθ. (π) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. τῇ α'.

(σ) Κατὰ τὴν α' τῇ σ'. (τ) Κατὰ τὴν δ' τῇ σ'. (υ) Κα-

τημόριόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΚΓ τετραγώνῳ, εἴτεν τὸ μὲν $\overline{ΖΚ}^2 = 1$, τὸ δὲ $\overline{ΚΓ}^2 = 4$. ἐπεὶ δὲ $\overline{ΚΓ}^2 = \overline{ΚΖ}^2 + \overline{ΖΓ}^2$, (Φ) τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΓ τετραγώνων ἴσον 3 τεταρτημορίοις τῷ ἀπὸ τῆς ΚΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ $\overline{ΛΦ}^2$ τετραπλάσιον τῷ $\overline{ΖΓ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΛΦ}^2 : \overline{ΖΓ}^2 :: 12 : 3$, καὶ ὡς $\overline{ΛΦ}^2 : \overline{ΚΓ}^2 :: 12 : 4$, εἴτεν $\overline{ΛΦ}^2, \overline{ΚΓ}^2 :: 3 : 1$. ἀλλ' ἡ βάσις τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῳ κώνῳ, πρὸς τὸν γεννήτορα κύκλον, ἔτω $\overline{ΛΦ}^2 : \overline{ΚΓ}^2$. (Χ) ἄρα ἡ βάσις τῷ κώνῳ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν γεννήτορα, ἔτω 3 : 1. ὅπερ ἐστίν, ὅτι ἡ βάσις τῷ κώνῳ τριπλασία ἐστὶ τῷ κύκλῳ τῷ γεννήτορος.

Γ'. Τὸ ὕψος τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῳ ἰσοπλεύρῳ κώνῳ τριπλασίον ἐστὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γάρ ἡ ΚΛ διπλασία ἐστὶ τῆς ΚΖ, ὡς δέδεικται, ἐστὶ δὲ ὡς ΚΛ : ΚΖ :: ΚΦ : ΚΓ, καὶ ὡς ΚΦ : ΚΓ :: ΚΕ : ΚΑ, (Ψ) ἄρα καὶ ὡς ΚΛ : ΚΖ :: ΚΕ : ΚΑ. (ω) διὸ καὶ ἡ ΚΕ διπλασία τῆς ΚΑ. ἡ ἄρα ΕΛ τριπλασία τῆς ΚΓ. τὸ ὕψος ἄρα τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῳ κώνῳ τριπλασίον ἐστὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς σφαίρας.

Δ'. Ἡ ἐπιφάνεια τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῳ ἰσοπλεύρῳ κώνῳ ἑξαπλασία ἐστὶ τῷ τῆς σφαίρας γεννήτορος κύκλῳ. ἡ μὲν γὰρ βάσις τῷ κώνῳ πρὸς τὸν γεννήτορα κύκλον λόγον ἔχει ὅν 3 : 1. (α) ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῷ κώνῳ διπλασία ἐστὶ τῆς βάσεως αὐτῆς. (β) ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῷ κώνῳ πρὸς τὸν γεννήτορα κύκλον, ὡς 6 : 1. εἴτεν ἡ ἐπιφάνεια τῷ κώνῳ ἑξαπλασία ἐστὶ τῷ γεννήτορος κύκλῳ.

Ε'.

(Φ) Κατὰ τὴν μζ'. τῷ α'. (Χ) Κατὰ τὴν β'. τῷ ιβ'. (Ψ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (ω) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (μ) Κατὰ τὴν προλ. β'. Συνίπ. (β) Κατὰ τὸ ε'. Θεώρ. τῷ δὲ τῷ βιβλ.

Ε'. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς ΑΓ ὀρθῆς κυλίνδρου, (χ. 12.) πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τοῦ αὐτοῦ ὕψος καὶ βάσιν ἴσην ἔχοντος ΕΖΑ κώνη τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ ΑΒ πλευρὰ τῆς κυλίνδρου, πρὸς τὴν ΕΗ, εἴτεν πρὸς τὸ ἡμῖσι τῆς πλευρᾶς τῆς κώνης. ἡ ² μὲν γὰρ τῆς κυλίνδρου ΑΓ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίᾳ, τῶ ἐκ τῆς ΑΒ πλευρᾶς καὶ τῆς ΒΔΓ περιφερείας, (γ) ἡ δὲ τῆς ΕΖΗ κώνης ἴση τριγώνῳ, ὃ ὕψος μὲν ἡ ΕΗ, βάσις δὲ ἡ περιφέρεια ΖΘΗ. (δ) ὡς ἄρα ἐπιφάν. ² τῆς κυλίνδ. πρὸς ἐπιφάν. τῆς κών. ἔτω ΑΒ. ΒΔΓ: ΕΗ. ΖΗΘ. ἀλλ' ἡ ΒΔΓ=ΖΘΗ. (ε) ὡς ἄρα ἐπιφάν. τῆς ² ΑΓ, πρὸς ἐπιφάν. τῆς ΕΖΗ :: ΑΒ: $\frac{ΕΗ}{2}$.

ΛΗΜΜΑ Δ'.

*Εἰς τριγώνον ὀρθογώνιον τὸ ΒΑΗ, καὶ ἀπο τῆς τυχόντος σημείας Δ τῆς ΒΑ ἤχθω ἡ ΔΖ παράλληλος τῇ ΑΗ. λέγω, ὅτι τὸ ΒΑ. ΑΗ=ΒΔ. ΔΖ+ΔΑ. ΔΖ+ΔΑ. ΑΗ. πίν. Δ'. χ. 13.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πεπληρώσω γὰρ τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΒΑ. ΑΗ ἐστὶ τὸ ΑΓ· τὸ δὲ ΒΔ. ΔΖ, τὸ ΔΚ· τὸ δὲ ΔΑ. ΔΖ, τὸ ΑΖ, εἴτεν τὸ ΖΓ· τὸ δὲ ΔΑ. ΑΗ, τὸ ΑΘ, δῆλον ἄρα ὅτι τὸ ΒΑ. ΑΗ=ΒΔ. ΔΖ+ΔΑ. ΔΖ+ΔΑ. ΑΗ, ἥτοι ΒΑ. ΑΗ=ΒΔ. ΔΖ+ΔΑ. ΔΖ+ΑΗ.

ΘΕΩ.

(γ) Κατὰ τὸ β'. Λημ. τῶ δὲ τῶ βιβλ. (δ) Κατὰ τὴν κ'. Συνίπ. τὴν μετὰ τὸ δ'. Θεώρ. τῶ δὲ τῶ βιβλ. (ε) Ἐξ ὑποθ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. (ζ)

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ πα-
ραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν πα-
ραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ τῶ κῶνος ἴσος
ἐστὶ κύκλος, ὃς ἢ ἐκ τῶ κέντρου μέσον λόγον
ἔχει τῆς τε πλευρᾶς τῶ κῶνος, τῆς μεταξὺ
τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, καὶ τῆς ἴσης
ἀμφοτέραις ταύταις ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκ-
λων, τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις.

Ἐστω κῶνος, ὃς τὸ διὰ τῶ ἀξονος τρίγωνον ἴσον τῷ
ΑΒΓ. καὶ τετμήσθω παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει καὶ
ποιείτω τομὴν τὴν ΔΕ. ἄξων δὲ τῶ κῶνος ἔστω ἡ ΕΗ.
κύκλος δὲ τις ἐκκείσθω ὁ Θ, ὃς ἢ ἐκ τῶ κέντρου ΚΘ
μέση ἀνάλογον ἔστω τῆς τε ΑΔ καὶ τῶν ΔΖ + ΑΗ. λέ-
γω, ὅτι ὁ Θ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῶ κῶνος,
τῇ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ. χ. 14.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκείσθωσαν κύκλοι, οἱ Α, Ι, καὶ τῶ μὲν Ι κύκλῳ ἢ
ἐκ τῶ κέντρου ΚΙ δυνάσθω τὸ ΒΔ. ΔΖ, ἔστω ἔστω τὸ ΚΙ² =
ΒΔ. ΔΖ, τῶ δὲ Α ἢ ἐκ τῶ κέντρου ΚΑ δυνάσθω τὸ ΒΑ.
ΑΗ, ἥτοι ἔστω ΚΑ² = ΒΑ. ΑΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὸ ΒΑ. ΑΗ = ΒΔ. ΔΖ + ΔΑ. ΑΗ + ΔΖ. (η) ἔστι
δὲ τὸ μὲν ΒΑ. ΑΗ = ΚΑ², τὸ δὲ ΒΔ. ΔΖ = ΚΙ², τὸ δὲ
ΔΑ. ΑΗ + ΔΖ = ΚΘ². (θ) ἄρα ΚΑ² = ΚΘ² + ΚΙ². καὶ
ἔπει

(ζ) Τῷ Ἀρχιμ. 15. ἐν τῷ περὶ σφαιρ. καὶ κυλίνδρ. κ. βιβλ.
(η) Κατὰ τὸ προλ. Αἰω. (θ) Ἐξ ὑποθ.

ἐπεὶ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων τετράγωνα, (ι) ἢ ὁ Λ κύκλος ἄρα ἴσος τοῖς Θ ἢ I . ἀλλ' ὁ μὲν Λ κύκλος ἴσος τῇ τῷ $B\Lambda\Gamma$ κώνε ἐπιφανείᾳ, ὁ δὲ I τῇ τῷ $B\Delta E$. (κ) ἢ ὁ Θ ἄρα κύκλος ἴσος τῇ λοιπῇ τῷ κώνε ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν ΔE , $A\Gamma$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Η'. (λ)

Ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ ἀρτιόπλευρόν τε ἢ ἰσόπλευρον, ἢ διαχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπιζευγνύσσαι τὰς πλευρὰς τῷ πολυγώνῳ, αἱ ἐπιζευγνύσσαι πᾶσαι πρὸς τὴν τῷ κύκλῳ διάμετρον τῶτον ἔχουσι τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑποτείνουσα τὰς μίαν ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων, πρὸς τὴν πλευρὰν τῷ πολυγώνῳ.

Ἐξω κύκλος ὁ $A\Gamma E H$, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγραμμένον τὸ $A\Gamma \Delta E Z H \Theta$. ἢ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $E\Theta$, ΓH , ΔZ . λέγω, ὅτι αἱ εἰρημένααι πᾶσαι πρὸς τὴν τῷ κύκλῳ διάμετρον, τὴν $A E$, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τῷ τῆς $B E$ πρὸς $B A$. εἴτεν ὅτι εἰν ὡς $B\Theta + I H + \Delta Z : A E :: B E : B A$. χ . 15.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθωσιν αἱ $\Gamma\Theta$, ΔH .

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις $A\Delta K$, $\Lambda\Theta K$ ἡ μὲν $B K A$ γωνία ἴση τῇ $\Theta K \Lambda$, (μ) ἡ δὲ $K E A = K \Theta \Lambda$. (ν) ἢ λοιπὴ ἄρα ἡ $B A K$ ἴση λοιπῇ τῇ $K \Lambda \Theta$. τὰ τρίγωνα ἄρα $A B K$, $\Lambda \Theta K$ ὅμοια ἀλλήλοις εἰσὶ. (ξ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ διαχθήσεται, ὅτι
ἀπαν-

(ι) Κατὰ τὴν β'. τῷ β'. (κ) Κατὰ τὸ ε'. Θεώρ. (λ) Τῷ Ἀρχιμ. κα. τῷ ἀντι. βιβλ. (μ) Κατὰ τὴν εὐ. τῷ κ'. (ν) Κατὰ τὴν κζ'. τῷ γ'. (ξ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'.

ἅπαντα τὰ τρίγωνα $ABK, K\Theta\Lambda, \Lambda\Gamma M, M\eta\eta N, \eta\Delta O$
 OZE ὅμοια ἀλλήλοις εἰσίν. ὡς ἄρα $BK : KA :: K\Theta : K\Lambda ::$
 $\Gamma M : M\Lambda :: M\eta : M\eta N :: \Delta O : O\eta :: OZ : OE. (o)$
 ἄρα καὶ ὡς $BK : KA :: BK + K\Theta + \Gamma M + M\eta +$
 $\Delta O + OZ : KA + K\Lambda + \Lambda M + M\eta N + \eta O + OE, (\pi)$
 εἴτεν $BK : KA :: B\Theta + \Gamma\eta + \Delta Z : AE$, ἐπεὶ δὲ ἐν
 τοῖς τρίγωνοις BKA, BEA , ἡ μὲν BAE γωνία κοινὴ,
 ἡ δὲ ABK ἴση τῇ BEA , (ρ) ὡς ἄρα $BK : KA :: BE :$
 $BA. (\sigma)$ ἄρα καὶ ὡς $B\Theta + \Gamma\eta + \Delta Z : AE :: BE : BA.$
 (τ) ὁ εἶδει δεῖξαι.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθῆσεται, ὅτι καὶ ὡς $B\Theta +$
 $\Gamma\eta + \Delta O : AO :: BE : BA.$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ἐπιζευγνυσθῶν τὰς πλευρὰς τῶ
 πολυγώνου εὐθειῶν, ὡς ἀπὸ μιᾶς, καὶ τῆς πλευρᾶς τῶ
 πολυγώνου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῶ ὑπὸ τῆς
 διαμέτρου τῶ κύκλου καὶ τῆς ὑποτείνουσας τὰς κατὰ μίαν
 ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων τῶ πολυγώνου πλευρῶν περιε-
 χομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἐπεὶ γὰρ ὡς $B\Theta + \Gamma\eta + \Delta Z : AE ::$
 $BE : BA$, ἄρα καὶ $B\Theta + \Gamma\eta + \Delta Z. BA = AE. BE. (\nu)$
 ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $B\Theta + \Gamma\eta + \Delta O : AO :: BE : BA$. ἄρα
 καὶ $B\Theta + \Gamma\eta + \Delta O. BA = AO. BE.$

ΘΕΩΡΗΜΑ Θ. (φ)

Ἡ τῶ ἐγγραφόμενα σχήματος εἰς τὴν σφαῖ-
 ραν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, ὃ ἡ ἐκ τῶ
 κέν-

(o) Κατὰ τὴν αὐτὴν. (π) Κατὰ τὴν θ'. τῶ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν
 κζ' τῶ γ'. (σ) Κατὰ τὴν δ'. τῶ ε'. (τ) Κατὰ τὴν ε'. τῶ ε'.
 (υ) Κατὰ τὴν ιε'. τῶ ε'. (φ) Τῶ Ἀρχιμ. κδ'. τῶ αὐτ. βιβλ.

κέντρα δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τῆς χήματος, καὶ τῆς ἴσης πάσους ταῖς ἐπιζευγνύσας τὰς πλευρὰς τῆς πολυγώνου.

Ἐξω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΓΗ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγραμμένον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον. καὶ ἀπὸ τῆς πολυγώνου τῆς ἐγγεγραμμένης νοείτω τί εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφὴν χῆμα. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΒΘ, ΓΗ, ΔΖ. κύκλος δὲ τις ἐκκείτω ὁ Ξ, ὃς ἢ ἐκ τῆς κέντρας ΞΙ δυνάτω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΑΒ. καὶ τῆς ἴσης ταῖς ΒΘ, ΓΗ, ΔΖ, εἴτην ἔσω $\Xi I^2 = AB \cdot B\Theta + \Gamma H + \Delta Z$. λέγω, ὅτι ὁ κύκλος ἔστος ἴσος ἐπὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραφομένης χήματος. χ. 16.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐκκείδωσαν κύκλοι οἱ Π, Ρ, Σ, Τ. καὶ τῆς μὲν Π ἢ ἐκ τῆς κέντρας ΚΠ δυνάτω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΘ, εἴτην ἔσω $K\P^2 = AB \cdot B\Theta$. ἢ δὲ ἐκ τῆς κέντρας τῆς Ρ δυνάτω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΒΘ, ΓΗ, ἥτοι ἔσω $\Lambda P^2 = B\Gamma \cdot B\Theta + \Gamma H$. ἢ δὲ ἐκ τῆς κέντρας τῆς Σ δυνάτω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΓΔ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΓΗ, ΔΖ, τετέστι ἔσω τὸ $M\Sigma^2 = \Gamma\Delta \cdot \Gamma H + \Delta Z$. ἢ δὲ ἐκ τῆς κέντρας τῆς Τ δυνάτω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΕΔ καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΔΖ. εἴτην ἔσω $N T^2 = E\Delta \cdot \Delta Z$.

Γ

ΔΕΙ

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ τετράγωνα $\overline{ΚΠ}^2 + \overline{ΑΡ}^2 + \overline{ΜΣ}^2 + \overline{ΝΤ}^2 = \overline{ΑΒ} \cdot \overline{ΒΘ} +$
 $\overline{ΒΓ} \cdot \overline{ΒΘ} + \overline{ΓΗ} + \overline{ΓΔ} \cdot \overline{ΓΗ} + \overline{ΔΖ} + \overline{ΕΔ} \cdot \overline{ΔΖ}$. (χ) ἀλλ' αἱ
 $\overline{ΑΒ}, \overline{ΒΓ}, \overline{ΓΔ}, \overline{ΕΔ}$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν ἰσόπλευρον γὰρ
 τὸ πολύγωνον. (ψ) ἄρα $\overline{ΚΠ}^2 + \overline{ΑΡ}^2 + \overline{ΜΣ}^2 + \overline{ΝΤ}^2 =$
 $\overline{ΑΒ} \cdot \overline{2 ΒΘ} + \overline{2 ΓΗ} + \overline{2 ΔΖ}$, εἴτεν $\overline{ΚΠ}^2 + \overline{ΑΡ}^2 + \overline{ΜΣ}^2 +$
 $\overline{ΝΤ}^2 = \overline{ΑΒ} \cdot \overline{ΒΘ} + \overline{ΓΗ} + \overline{ΔΖ}$. ἀλλὰ καὶ τὸ $\overline{ΞΙ}^2 = \overline{ΑΒ} \cdot$
 $\overline{ΒΘ} + \overline{ΓΗ} + \overline{ΔΖ}$. (ω) ἄρα τὸ $\overline{ΞΙ}^2 = \overline{ΚΠ}^2 + \overline{ΑΡ}^2 +$
 $\overline{ΜΣ}^2 + \overline{ΝΤ}^2$. καὶ ὁ κύκλος ἄρα Ξ ἴσος τοῖς Π, Ρ, Σ,
 Τ κύκλοις. ἀλλ' ὁ μὲν Π κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς
 ΘΑΒ κώνε· (α) ὁ δὲ Ρ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς κώνε τῇ με-
 ταξὺ τῶν ΒΘ, ΓΗ· ὁ δὲ Σ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς κώνε τῇ
 μεταξὺ τῶν ΓΗ, ΔΖ, (β) καὶ ἔτι ὁ Τ ἴσος τῇ ἐπιφα-
 νείᾳ τῆς ΖΕΔ κώνε. καὶ ὁ Ξ ἄρα κύκλος ἴσος ταῖς
 εἰρημέναις κωνικαῖς ἐπιφανείαις, εἴτεν τῇ τῆς ἐγγεγραμ-
 μένης χήματος ἐπιφανείᾳ. ὃ εἶδει δεῖξαι.

ΣΥΝΕΠΕΙΛΑΙ.

Α'. Ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΕ, τῆς ὑποτείνουσας τὰς μίαν
 ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων τῆς πολυγώνου πλευρῶν, ἡ
 εἰρημένη τῆς ἐγγεγραμμένης χήματος ἐπιφάνεια ἴση
 ἔσται κύκλῳ, ὃ ἢ ἐκ τῆς κέντρου ΞΙ δύναται τὸ ὀρ-
 θογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΒΕ περιεχόμενον. ἐπεὶ γὰρ
 $\overline{ΞΙ}^2 = \overline{ΑΕ} \cdot \overline{ΒΕ}$, τὸ δὲ $\overline{ΑΕ} \cdot \overline{ΒΕ} = \overline{ΑΒ} \cdot \overline{ΒΘ} + \overline{ΓΗ} + \overline{ΔΖ}$, (γ)
 ἄρα

(χ) Ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον. (ψ) Ἐξ ὑποθ. (ω) Ἐξ ὑποθ. (α) Κατὰ τὸ ε.
 Θεώρ. (β) Κατὰ τὸ ζ'. Θεώρ. (γ) Κατὰ τὸ πόρ. τῆς ἢ. Θεωρ.

ἄρα τὸ $\overline{EI}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BO} + \overline{ΓΗ} + \overline{ΔΖ}$. ἀλλ' ὁ κύκλος, ὃς ἢ ἐκ τῆς κέντρου δύναται τὸ $\overline{AB} \cdot \overline{BO} + \overline{ΓΗ} + \overline{ΔΖ}$ ἴσος τῇ τῇ ἐγγεγραμμένῃ χήματος ἐπιφανείᾳ. (δ) καὶ ὁ κύκλος ἄρα, ὃς ἢ ἐκ τῆς κέντρου δύναται τὸ $\overline{AE} \cdot \overline{BE}$ ἴσος τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ αἱ ἐν τῷ σφαιρικῷ τμήματι $\overline{ΔΑΖ}$ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶ κύκλῳ, ὃς ἢ ἐκ τῆς κέντρου δύναται τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν $\overline{AO}$, $\overline{BE}$.

Β'. Καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, ὃς ἢ ἐκ τῆς κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς $\overline{AE}$ διαμέτρου τῆς σφαίρας καὶ τῆς $\overline{BE}$ τῆς ὑποτείνουσας τὰς μίαν ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων τῆς εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγεγραμμένῃ πολυγώνῃ πλευρῶν. ἐπεὶ γὰρ τὰ εἰς τὰς κύκλους ἐγγεγραμμένα πολύγωνα εἰς αὐτοὺς ἐναπολήγει, (ε) καὶ αἱ κωνικαὶ ἄρα ἐπιφάνειαι αἱ ἐξ αὐτῶν γινόμεναι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἐναπολήγουσι τῆς σφαίρας, τῆς ἐκ τῆς κύκλου, εἰς ὃν τὰ πολύγωνα ἐγγέγραπται γινομένης. ἀλλ' αἱ εἰρημέναι κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶ τῷ κύκλῳ, ὃς ἢ ἐκ τῆς κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῶν $\overline{AE}$, $\overline{BE}$ περιεχόμενον (ζ) καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἄρα ἐπιφάνεια ἴση τῷ αὐτῷ κύκλῳ. ἴση δὲ ἔσται καὶ κύκλῳ, ὃς ἢ ἐκ τῆς κέντρου δύναται τὸ ἀπὸ τῆς $\overline{AE}$ διαμέτρου τῆς σφαίρας τετραγώνον. ἐναπολήγοντος γὰρ τῆς πολυγώνῃ εἰς τὸν κύκλον, ἡ $\overline{BE}$ τῆς $\overline{AE}$ προσότητι διείσκει πάσης δοθείσης ἐλάσσονι. διὸ τὸ ὑπὸ τῶν $\overline{AE}$, $\overline{BE}$ περιεχόμενον ἴσον τῷ $\overline{AB}^2$ λογίζεται. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ τῆς σφαιρικῆς τμήματος $\overline{ΔΑΖ}$ ἐπιφάνεια ἴση κύκλῳ, ὃς ἢ ἐκ τῆς κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῶν $\overline{AO}$, $\overline{BE}$.

Γ 2

Γ'.

(δ) Κατὰ τὸ 9'. Θεώρ. (ε) Κατὰ τὸ α'. Λῆμ. τὸ μετὰ τὴν α'. πρῶτ. τῇ 16'. βιβλ. (ζ) Κατὰ τὴν προλαβ. Συνέπ.

Γ'. Ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΔ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαιρικῆς τμήματος ΔΑΖ ἴση ἐστὶ κύκλῳ, ἢ ἡ ἐκ τῆς κέντρος ἴση τῇ ΑΔ. ἐπεὶ γάρ ἡ τῆς σφαιρικῆς τμήματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, ἢ ἡ ἐκ τῆς κέντρος δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΒΕ· (η) ἐναποληγεσῶν δὲ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν εἰς τὴν τῆς σφαιρικῆς τμήματος ἐπιφάνειαν, ἡ ΒΕ τῆς ΑΕ ποσότητι διαφέρει πάσης δοθείσης ἐλάσσονι ἴση ἄρα ἡ τῆς σφαιρικῆς τμήματος ἐπιφάνεια κύκλῳ, ἢ ἡ ἐκ τῆς κέντρος δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΑΕ περιεχόμενον, ἔσται ἴση τῷ $\overline{ΑΔ}^2$. ἐστὶ γάρ ΑΕ: ΑΔ:: ΑΔ: ΑΟ. (θ) διὸ ΑΕ. ΑΟ = $\overline{ΑΔ}^2$.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Ι'. (ι)

Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλάσια ἐστὶ τῆς μεγίστης κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ κύκλῳ Ξ, ἢ ἡ ἐκ τῆς κέντρος δύναται τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς μεγίστης κύκλου τετράγωνον $\overline{ΑΕ}^2$. (κ) ἀλλ' ὁ κύκλος Ξ τετραπλάσιός ἐστι τῆς μεγίστης κύκλου ΑΓΕΗ· εἰσὶ γάρ οἱ κύκλοι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· (λ) ἡ τῆς σφαίρας ἄρα ἐπιφάνεια τετραπλάσια ἐστὶ τῆς μεγίστης κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.

Λ Η Μ Μ Α Ε'.

Τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον πολύεδρον, εἰς αὐτὴν ἀπολήγει.

Νε.

(η) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (θ) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τῆς η'. προτ. τῆς ε'. (ι) Τῆς Ἀρχιμ. λ. α'. τῆς αὐτ. βιβλ. (κ) Κατὰ τὴν β'. τῶν προλ. Συνέπ. (λ) Κατὰ τὴν β'. τῆς ιβ'.

Νενοίθω γάρ περὶ τὴν σφαῖραν Σ (χ. 17.) πολυέδρον περιγεγραμμένον τὸ ΑΒΓΔΕ. καὶ τετμήθωσαν αἱ γωνίαι αὐτῆ δι' ἐπιπέδων, τῶν ΖΗ, ΘΙ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ, ἐφαπτομένων τῆς σφαῖρας Σ. ἔκέν προκύψει πολυέδρον περὶ τὴν σφαῖραν Σ περιγεγραμμένον τὸ ΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟ ἐλάττωσι τῆς σφαῖρας διαφέρον ποσότητι, ἥπερ τὸ ΑΒΓΔΕ. εἰάν ἔν αἱ τῶ προκύψαντος δευτέρου πολυέδρου γωνία καθάπερ ἢ αἱ τῶ πρώτου τμηθῶσι, τρίτον προκύψει πολυέδρον περὶ τὴν σφαῖραν Σ περιγεγραμμένον, καὶ διαφέρειν αὐτῆς ἐλάσσονι ποσότητι ἥπερ τὸ δεύτερον. ὡσαύτως εἰάν αἱ τῶ τρίτου πολυέδρου γωνία, ὡς ἔρηται τμηθῶσι, ἢ πάλιν αἱ τῶ προκύπτοντος τετάρτου, καὶ ὁμοίως αἱ τῶ πέμπτου, ἢ ἔτιως ἐφεξῆς ἐπ' ἅπασιν, προκύψει πολυέδρον περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον, καὶ διαφέρειν αὐτῆς ποσότητι πάσης δοθείσης ἐλάσσονι. τὸ ἄρα περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον πολυέδρον εἰς αὐτὴν ἀπολήγει. (μ)

ΛΗΜΜΑ 5'.

Τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον πολυέδρον ἴσον ἐστὶ κώνω, ὃ τινος ὕψος ἢ ἡμιδιάμετρος τῆς σφαῖρας, βάσις δὲ ἴση τῇ τῶ πολυέδρου ἐπιφανείᾳ.

Ἐπεὶ γάρ τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον πολυέδρον εἰς τοσαύτας διαιρεῖται πυραμίδας, ὅσαι αἱ τῶ πολυέδρου βάσεις. ὕψος τὸ αὐτὸ ἔχοντας, τὴν ἡμιδιάμετρον δηλαδὴ τῆς σφαῖρας· πᾶσαι δὲ αἱ πυραμί-

Γ 3

δες

(μ) Κατὰ τὸν 5'. ὅρισμ. τῶ αὐτοῦ.

δες αὐταὶ ἴσαι εἰς πυραμίδι ὕψος ἔχουσα τὴν ἡμιδιάμετρον τῆς σφαίρας, βάσιν δὲ ἴσην ὅλῃ τῇ τῷ πολυέδρῳ ἐπιφανείᾳ· ἢ πυραμὶς ἄρα ἡ ὕψος ἔχουσα τὴν ἡμιδιάμετρον τῆς σφαίρας, καὶ βάσιν ἴσην τῇ τῷ πολυέδρῳ ἐπιφανείᾳ ἴση ἐστὶ τῷ πολυέδρῳ. ἐπεὶ δὲ αἱ πυραμίδες αἱ ἐγγεγραμμέναι τε καὶ περιγεγραμμέναι περὶ τῆς κώνου, εἰς αὐτὰς ἀπολήγουσιν· (ν) ἔχουσι δὲ αἱ τοιαῦται πυραμίδες τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν τοῖς κώνοις, ὡς δῆλον· καὶ ὁ κώνος ἄρα, ὃ τὸ μὲν ὕψος ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἢ δὲ βάσις τῇ τῷ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένῳ πολυέδρῳ ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἐστὶ τῷ πολυέδρῳ.

ΛΗΜΜΑ Ζ'.

Πᾶσα σφαῖρα ἴση ἐστὶ κώνῳ ὕψος μὲν ἔχοντι ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, βάσιν δὲ τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ πολυέδρον τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν ἀπολήγει, (ξ) δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῷ πολυέδρῳ εἰς τὴν τῆς σφαίρας ἀπολήγει ἐπιφάνειαν. καὶ ἐπεὶ τὸ πολυέδρον τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον ἴσον ἐστὶ κώνῳ ὕψος μὲν ἔχοντι ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, βάσιν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τῷ πολυέδρῳ, (ο) καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ἴση ἐστὶ κώνῳ ὕψος μὲν ἔχοντι ἴσον τῇ τῆς σφαίρας ἡμιδιαμέτρῳ, βάσιν δὲ τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ ἴσην.

ΘΕΩ.

(ν) Κατὰ τὸ δ'. Λῆμ. τὸ μετὰ τὴν δ'. προτ. τῷ ιβ'. βιβλ.

(ξ) Κατὰ τὸ ε'. Λῆμ. (ο) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΑ'. (π)

Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνε, βά-
σιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν
ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τῆς κέντρος τῆς
σφαίρας.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφανεία τετραπλασία ἐστὶ τῆς
μεγίστης κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. (ρ) ὁ κώνος ἄρα ὁ ἔχων
βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας καὶ ὕψος τὴν
ἐκ τῆς κέντρος τῆς σφαίρας τετραπλάσιός ἐστι τῆς κώνου
τῆς τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος, καὶ βάσιν ἴσην τῷ μεγί-
στῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων. οἱ γὰρ ἰσοῦψεῖς κῶ-
νοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. (σ) ἀλλ' ὁ κώνος
ὁ ἔχων βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας καὶ ὕψος
τὴν ἐκ τῆς κέντρος τῆς σφαίρας ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. (τ)
καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα τετραπλασία ἐστὶ τῆς κώνου, τῆς βάσιν
μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαί-
ρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τῆς κέντρος τῆς σφαίρας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Πᾶν ἄρα ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι κώνου, τῆς τὸ
αὐτὸ ὕψος καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος τῷ ἡμισ-
φαιρίῳ. τὸ μὲν γὰρ τῆς ἡμισφαίριος ὕψος ἡ ἐκ τῆς κέν-
τρος τῆς σφαίρας ἐστίν, ἡ δὲ βάση ὁ μέγιστος τῶν ἐν
τῇ σφαίρᾳ κύκλων. ἐπεὶ ἔν ἡ σφαῖρα τετραπλασία
ἐστὶ τῆς τοιούτου κώνου, δῆλον ἄρα ὅτι τὸ ἡμισφαίριον
διπλάσιον αὐτῷ ἐστὶ.

(π) Τῆς Ἀρχιμ. λβ'. τῆς αὐτ. βιβλ. (ρ) Κατὰ τὸ προλ. Θεώρ.

(σ) Κατὰ τὴν ια'. τῆς ιβ'. (τ) Κατὰ τὸ προλ. Λήμ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Εντεῦθεν δοθείσης τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς σφαίρας, τήντε ἐπιφάνειαν καὶ αὐτὴν τὴν σφαῖραν καταμετρήσαι πάνυ ῥαδίον. εὐρεθέντος γὰρ τῆ μεγίστη τῶν ἐν αὐτῇ κύκλων, (υ) τὸ τετραπλάσιον αὐτῆ ἴσον ἔσται τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ. ταύτης δὲ διὰ τῆ τρίτης μορῆς τῆς ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιασθείσης, τὸ γινόμενον τὴν σφαῖραν ἐμφαίνει, καθάπερ δὴ καὶ τὸν καὶ νον τὸν αὐτῇ ἴσον, (φ)

ΣΧΟΛΙΟΝ

Ἔστω ἡ τῆς σφαίρας ἡμιδιάμετρος ἴση ποσὶν 6. ἡ ἄρα διάμετρος αὐτῆς ἴση 12, τῶν 7, 22, καὶ 12 ἡ τετάρτη ἀνάλογος ἡ 12. 22 διὰ τῆ ἡμίσεως τῆς ἡμιδιαμέτρου, εἴτεν διὰ τῆ 3 7 πολλαπλασιασθῆτω. ἐκὲν τὸ γινόμενον 12. 22. 3, τὸν μέγιστον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐμφαίνει κύκλον. 7 (χ) ἔτος τετραπλάσιαθῆς, τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν παρίησιν, (ψ) ἴσην 12. 22. 3. 4, εἰάν ἐν ἡ ἐπιφάνειᾳ αὐτῇ διὰ τῆ τρίτης μορῆς τῆς 7 ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιασθῇ, ἦτοι διὰ τῆ 2, τὸ γινόμενον 12. 22. 3. 4. 2, = 6336 = 905 + $\frac{1}{7}$ ἴσον τῇ σφαίρᾳ. ὅπερ 7 δηλοῖ, ὅτι ἡ 7 ζητεμένη σφαῖρα ἴση ἐστὶ κύβοις ποδiciais 905, καὶ ἔτι $\frac{1}{7}$ ποδiciais κύβου.

ΠΟΡΙΣΜΑ

(υ) Κατὰ τὸ β'. πόρ. τὸ μετὰ τὸ β'. Θεώρ. (φ) Κατὰ τὸ πόρ. τῆ Δήμ. τῆ μετὰ τὴν 3'. πρότ. τῆ ιβ'. βιβλ. (χ) Κατὰ τὸ αὐτ. πόρ. (ψ) Κατὰ τὸ ι. Θεώρ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. (ω)

Πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, (περιγεγραμμένος περὶ τὴν σφαῖραν ἐννοῖται ὁ κύλινδρος.) ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. ὁ μὲν γὰρ εἰρημένος κύλινδρος ἑξαπλασίος ἐστὶ τῷ κώνῃ, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τῷ κέντρει. (ὁ γὰρ κύλινδρος ὁ τὴν αὐτὴν ἔχων βάσιν καὶ ὕψος ἴσον τῷ κώνῳ τριπλασίος ἐστὶ τῷ κώνῳ. (α) ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ τὴν αὐτὴν μὲν βάσιν ἔχων τῷ κώνῳ, διπλασίον δὲ ὕψος, ἑξαπλασίος ἐστὶ τῷ κώνῳ.) ἡ δὲ σφαῖρα διδεκται τῷ αὐτῷ κώνῳ τετραπλασία. (β) δῆλον ἂν ὅτι ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας.

Καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῷ εἰρημένῳ κυλίνδρῳ ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τῷ κυλίνδρῳ χωρὶς τῶν βάσεων ἴση δέδεικται (γ) κύκλῳ, ἢ ἡ ἐκ τῷ κέντρει μέση ἀνάλογον ἐστὶ τῆς τῷ κυλίνδρῳ πλευρᾶς, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως· τῷ δὲ εἰρημένῳ κυλίνδρῳ τῷ περὶ τὴν σφαῖραν ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως· ὁ δὲ κύκλος ὁ τὴν ἐκ τῷ κέντρει ἔχων ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τῷ κυλίνδρῳ τετραπλασίος ἐστὶ τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ· ἔσται ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῷ κυλίνδρῳ χωρὶς τῶν βάσεων τετραπλασία τῷ μεγίστῳ κύκλῳ. ὅλη ἄρα μετὰ τῶν βάσεων ἡ ἐπιφάνεια τῷ κυλίνδρῳ ἑξαπλασία ἐστὶ τῷ μεγίστῳ κύκλῳ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία τῷ μεγίστῳ κύκλῳ. (δ) ὅλη ἄρα ἡ

Γ 5

ἐπι-

(ω) Τῷ Ἀρχιμ. μετὰ τὸ λβ'. Θεώρ. τῷ α' βιβλ. κάμ. (α) Κατὰ τὴν ι. τῷ ιβ'. (β) ἐν τῷ ια' Θεώρ. (γ) Κατὰ τὴν γ' Θεώρ. (δ) Κατὰ τὸ ι. Θεώρ.

ἐπιφάνεια τῷ κυλίνδρῳ ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κώνων καὶ τῶν κυλίνδρων τῶν περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένων, ἢ ἡ τῆς σφαίρας εἰς πρὸς ἀλλήλας ἐν λόγῳ συνεχῇ ἡμιολίῳ. ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν τῷ κώνῳ ἐπιφάνεια τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῳ ἑξαπλάσιός ἐστι τῷ μεγίστῳ κύκλῳ, (ε) ἡ δὲ βάσις αὐτῷ τριπλασία· (ζ) ὅλη ἄρα ἡ τῷ κώνῳ ἐπιφάνεια ἑνεαπλάσιος τῷ μεγίστῳ κύκλῳ. ἐστὶ δὲ ὅλη ἡ τῷ κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῳ ἑξαπλάσιος τῷ μεγίστῳ κύκλῳ, (η) ἡ ἄρα τῷ κώνῳ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῷ κυλίνδρῳ λόγον ἔχει, ὃν 9 : 6. ἀλλ' ἡ τῷ κυλίνδρῳ πρὸς τὴν τῆς σφαίρας λόγον ἔχει, ὃν 6 : 4· (θ) αἱ ἄρα ἐπιφάνειαι τῶν κώνων καὶ τῶν κυλίνδρων τῶν περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένων καὶ ἡ τῆς σφαίρας εἰς πρὸς ἀλλήλας ἐν λόγῳ συνεχῇ ἡμιολίῳ, εἴτεν ὡς 9 : 6 :: 6 : 4.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΒ'. (*)

Παντὶ τομῇ σφαίρας, ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὃ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῷ τμήματος τῆς σφαίρας τῷ κατὰ τὸν τομέα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τῷ κέντρους τῆς σφαίρας.

Δεχθήσεται τῷτο, ὡς καὶ τὸ ἐν τῷ Ζ' λήμματι προτεθέν.

ΘΕΩ.

(ε) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῷ ε'. Θεωρ. (ζ) Κατὰ τὴν β'. Συνέπ. τῷ αὐτ. Θεωρ. (η) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῷ γ'. Θεωρ. (θ) Κατὰ τὸ προλ. Πόρ. (*) Τῷ Ἀρχιμ. μβ. τῷ αὐτ. βιβλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΓ'. (*)

Παντὶ τμήματι σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὃ βάσιν μὲν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν, ἥτις πρὸς τὸ ὕψος τῆς τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν συναμφοτέρερα, ἢτε ἐκ τῆς κέντρος τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὕψος τῆς λοιπῆς τμήματος, πρὸς τὸ ὕψος τῆς λοιπῆς τμήματος.

Ἐξω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος, ὃς διάμετρος ἡ ΒΖ. καὶ τετμήθω ἐπιπέδῳ ἡ σφαῖρα τῷ διὰ τῆς ΚΛ πρὸς ὀρθᾶς τῇ ΒΖ. καὶ ἔσω κέντρον τὸ Γ. καὶ πεποιήθω ὡς ΑΟ πρὸς ΒΟ, ἔτω συναμφοτέρερα αἱ ΒΓ, ΖΟ, πρὸς τὴν ΖΟ, εἴτεν ὡς ΑΟ : ΒΟ : ΒΓ + ΖΟ : ΖΟ. καὶ πάλιν πεποιήθω ὡς ΗΟ : ΖΟ : ΖΓ + ΒΟ : ΒΟ. καὶ ἀναγεγραφθῶσαν κῶνοι ἀπὸ τῆς κύκλου τῆς περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ, κορυφὰς ἔχοντες τὰ Α, Η σημεία. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν ΚΑΛ κῶνος τῷ κατὰ τὸ Β τμήματι, εἴτεν τῷ ΚΒΛ· ὁ δὲ ΚΗΛ κῶνος τῷ κατὰ τὸ Ζ, ἦτοι τῷ ΚΖΛ τμήματι. ρ. 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΖ, ΛΒ, ΛΓ, ΛΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΑΟ : ΒΟ :: ΒΓ + ΖΟ : ΖΟ, (ι) καὶ διαιρεθέντα ἄρα ἔσται ὡς ΑΟ - ΒΟ : ΒΟ :: ΒΓ + ΖΟ - ΖΟ : ΖΟ, (κ) εἴτεν ὡς ΑΒ : ΒΟ :: ΒΓ : ΖΟ. καὶ ἐναλλάξ ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΒΟ : ΖΟ. (λ) καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ΖΟ : ΒΟ ::

(*) Τῆς Ἀρχιμ. β'. τῆς β'. βιβλ. (ι) Ἐξ ὑποθ. (κ) Κατὰ τὴν ια'. τῆς ι. (λ) Κατὰ τὴν ζ'. τῆς αὐτ.

$BO :: BG : AB$. (μ) ἄρα καὶ ὡς OZ . $BO : \overline{BO}^2 ::$
 $BG : AB$. (ν) ἀλλ' OZ . $BO = \overline{KO}^2$. (ξ) ἄρα ὡς $\overline{KO}^2 :$
 $\overline{BO}^2 :: BG : AB$, καὶ ἀντίπαλιν δὲ ὡς $\overline{BO}^2 : \overline{KO}^2 :: AB :$
 BG , καὶ συντεθέντα δὲ $\overline{BO}^2 + \overline{KO}^2 : \overline{KO}^2 :: AB + BG : BG$.
 ἀλλὰ $\overline{BO}^2 + \overline{KO}^2 = \overline{KB}^2$, (ο) καὶ $AB + BG = AG$. ἄρα
 ὡς $\overline{KB}^2 : \overline{KO}^2 :: AG : BG$. ἄρα ὁ κῶνος, ὁ ὕψος μὲν
 ἔχων τὴν BG , βάσιν δὲ τὸν κύκλον, ἔῃ ἢ ἐκ τῆς κέν-
 τρες ἢ KB , ἴσος τῷ κώνῳ, τῷ ὕψος μὲν ἔχοντι τὴν
 AG , βάσιν δὲ τὸν κύκλον, ἔῃ ἢ ἐκ τῆς κέντρες ἢ KO .
 ἀντιπεπόνθασιν γὰρ τὰ ὕψη ταῖς βάσεσιν αὐτῶν. (π)
 ἀλλ' ὁ κῶνος, ὁ ὕψος μὲν ἔχων τὴν BG , βάσιν δὲ
 τὸν κύκλον, ἔῃ ἢ ἐκ τῆς κέντρες ἴση τῇ KB , ἴσος τῷ
 $IKBA$ τομεῖ. (ρ) ὁ ἄρα $IKBA$ τομεὺς ἴσος κώνῳ τῷ
 ὕψος μὲν ἔχοντι τὴν AG , βάσιν δὲ κύκλον, ἔῃ ἢ ἐκ
 τῆς κέντρες ἢ KO . κοινὸς προσκείσθω ὁ $K\Gamma A$ κῶνος. ὁ
 κῶνος ἄρα ὁ ὕψος μὲν ἔχων συναμφοτέρας τὰς AG ,
 IO , εἴπεν τὴν AO , βάσιν δὲ κύκλον, ἔῃ ἢ ἐκ τῆς
 κέντρες ἐστὶν ἢ KO , ἦτοι ὁ κῶνος KAL ἴσος τῷ σφαιρικῷ
 τμήματι KBA , διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι ὁ
 κῶνος KHL ἴσος τῷ σφαιρικῷ τμήματι KZL .

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Τὸ σφαιρικὸν τμήμα KBA , πρὸς τὸ KZL τμήμα
 λόγον ἔχει, ὃν ἡ AO πρὸς τὴν HO . τὸ μὲν γὰρ KBA
 ἴσον ἐστὶ τῷ KAL κώνῳ, τὸ δὲ KZL τῷ KHL . ἀλλ' ὁ
 KAL κῶνος, πρὸς τὸν KHL κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἡ AO ,
 πρὸς τὴν HO . (σ) ἄρα καὶ τὸ KBA τμήμα, πρὸς τὸ
 KZL τμήμα λόγον ἔχει, ὃν ἡ AO πρὸς τὴν HO .

ΠΟ-

- (μ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς αὐτ. (ν) Κατὰ τὴν α'. τῆς ε'.
 (ξ) Κατὰ τὴν β' Συνέπ. τῆς η', τῆς ε'. (ο) Κατὰ τὴν μζ'.
 τῆς α' (π) Κατὰ τὴν ιε'. τῆς ιβ'. (ρ) Κατὰ τε τὸ προλ.
 Θεώρ. καὶ τὴν γ'. Συνέπ. τῆς θ'. Θεωρ. (σ) Κατὰ τὴν ιδ'. τῆς ιβ'.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Τὸ ΚΒΛ τμήμα, πρὸς τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον ΚΒΛ κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΒΟ. τὸ γὰρ ΚΒΛ τμήμα, πρὸς τὸν ΚΒΛ κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ὁ ΚΑΛ κῶνος, πρὸς τὸν ΚΒΛ κῶνον. ἀλλ' ὁ ΚΑΛ κῶνος, πρὸς τὸν ΚΒΛ κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΒΟ. (τ) ἄρα καὶ τὸ τμήμα ΚΒΛ, πρὸς τὸν κῶνον ΚΒΛ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΒΟ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΛ τμήμα, πρὸς τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΗΟ πρὸς τὴν ΖΟ.

Τ Ε Λ Ο Σ

ΤΩΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ.

ΤΡΙ.

(τ) Κατὰ τὴν αὐτ.





ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΡΩΤΟΥ



ΟΡΙΣΜΟΙ.

τριγωνομετρία επίπεδος ἐστὶν ἐπισημονικὴ μέθοδος τῇ τὸ μέτρον τῶν πλευρῶν ἢ τῶν γωνιῶν τῶν ἐυθυγράμμων εὐρίσκειν τριγώνων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὸτό ἐστὶ, τριῶν μὲν δοθεισῶν τῇ τριγώνῳ πλευρῶν, τὸ τῶν γωνιῶν εὐρίσκειν μέτρον· δύο δὲ καὶ μιᾶς τῶν γωνιῶν, τὴν λοιπὴν πλευρὰν ἢ τὰς δύο γωνίας· μιᾶς δὲ καὶ τῶν δύο γωνιῶν, τὰς λοιπὰς δύο πλευρὰς ἢ τὴν λοιπὴν γωνίαν. ἐπειδὴν δὲ μόνον αἱ τρεῖς δεδομέναι ὥσι γωνία, τότε τὸν λόγον ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν αἱ πλευραὶ εὐρίσκομεν, ἢ μὴν δὲ καὶ τὸ τέτων μέτρον.

Β'. Ἡ ΕΔ, ἡ ἀπὸ τινος σημείου Ε τῆς τῇ ἡμικυκλίας περιφερείας ΒΕΖΑ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ ὀρθὸν ἡμίτονόν ἐστι τῇ τε τῷξ ΒΕ καὶ τῇ ΕΖΑ τῇ ἀναπληρώματος αὐτῇ πρὸς τὴν τῇ ἡμι-

ἡμικυκλίῃ περιφέρειαν. ἐπιζευχθείσης δὲ ἀπὸ τῆς κέν-
 τρος Κ ἐπὶ τὸ σημεῖον Ε τῆς ΚΕ, ἡ αὐτὴ ΕΔ ὀρ-
 θὸν ἡμίτονόν ἐστι τῆς τε ΕΚΒ γωνίας, τῆς ὑπὸ τῆς
 αὐτῆς τόξε ΕΒ καταμετρεμένης, καὶ τῆς ἀναπλη-
 ρώματος αὐτῆς πρὸς τὰς δύο ὀρθὰς γωνίας, εἴτεν
 τῆς ΕΚΑ γωνίας τῆς καταμετρεμένης ὑπὸ τῆς ΕΖΑ
 τόξε. πίν. Α'. χ. ι.

Γ'. Ἡ μὲν ΕΘ ἡ ἀπὸ τῆς τῆς σημείου Ε περιφερείας πρὸς
 ὀρθὰς ἀγομένη τῇ διαμέτρῳ ΖΓ, ὀρθὸν ἔσται ἡμίτο-
 νον τῆς ΕΖ τόξε, τῆς ἄντος παραπληρώματος τῆς
 τόξε ΕΒ πρὸς τὸ τῆς κύκλου τεταρτημόριον, ἢ τῆς
 ΕΚΖ γωνίας, (α) ἥτις ἐστὶ παραπλήρωμα τῆς ΕΚΒ
 πρὸς μίαν ὀρθήν, **Συνημίτονον** λέγεται τῆς τόξε
 ΕΒ καὶ τῆς γωνίας ΕΚΒ· ἡ δὲ ΒΔ, ἡ ἀπὸ τῆς πέ-
 ρατος τῆς διαμέτρου Β καὶ τῆς τόξης Δ, τῆς ἀπὸ
 τῆς καθεύτε ΕΔ γινομένης, ἀπολαμβάνομένη, **Πλά-
 γιον ἡμίτονον**, ἢ **Παρημίτονον** τῆς τόξε ΕΒ
 καὶ τῆς ΕΚΒ γωνίας.

Δ'. Ἡ τῆς κύκλου ἡμιδιάμετρος ΚΒ, ἢ ΚΖ, **Ὀλό-
 κληρον ἡμίτονον**, ἢ **Ὀλοημίτονον** καλεῖται,
 αἵτε δὴ ὀρθὸν ἔσται ἡμίτονον τῆς τε τεταρτημορίου ΒΕΖ
 τῆς τῆς κύκλου περιφερείας, ἢ τῆς ὑπ' αὐτῆς κατα-
 μετρεμένης ὀρθῆς γωνίας ΖΚΒ. (β)

Ε'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς τῆς διαμέτρου πέρατος Β ἀπτομένη
 ἀχθῇ τῆς κύκλου ἡ ΒΛ, ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κέντρος Κ
 ἐπὶ τι σημεῖον Ε τῆς τῆς κύκλου περιφερείας ἐπιζευ-
 χθῇ ΚΕ προαχθῇ ἕως ἔς τὴν ἀπτομένην τέμνῃ
 κατὰ τὸ Η, ἡ μὲν ΒΗ, ἡ ἀπὸ τῆς τῆς διαμέτρου πέ-
 ρατος ἢ τῆς εἰρημένης τομῆς Η ἀπολαμβάνομένη,
 τῆς.

(α) Κατὰ τὸν προλαβ. ὅρισμ. (β) Κατὰ τὸν αὐτὸν ὅρισμ.

τῆτε τόξω ΒΕ καὶ τῆς ὑπ' αὐτῇ καταμετρεμένης γωνίας ΒΚΕ, Ἐφαπτομένη λέγεται ἡ δὲ ΚΗ, ἡ ὑπὸ τῆς κέντρων Κ καὶ τῆς διατομῆς Η περατμένη, Τέμνωσα τῇ αὐτῇ τόξω καὶ τῆς αὐτῆς γωνίας.

5'. Ἡ μὲν ΖΙ Ἐφαπτομένη ἔσα τῇ τόξω ΖΕ, τῇ παραπληρώματος τῇ ΕΒ τόξω πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς τῇ κύκλου περιφερείας, Συνεφαπτομένη καλεῖται τῇ ΕΒ τόξω· Ἡ δὲ ΚΙ, ἥτις ἐστὶν ἡ τέμνωσα τῇ τόξω ΖΕ, Συνδιατέμνωσα λέγεται τῇ αὐτῇ τόξω ΕΒ.

Ζ'. Ἡ δύο σημεῖα, τὰ Α, Γ, παντὸς τόξω ἐπιζευγνύσα εὐθεῖα ΑΓ, χορδὴ καλεῖται. χ. 2.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὸ τὰ Ἡμίτονα, τὰς Ἐφαπτομένας, καὶ τὰς Τεμνωσας εὐρεῖν δι' ἀριθμῶν ἐμφαινόμενας ἐδὲν ἕτερόν ἐστιν, εἰμὴ τὸν λόγον, ἥτοι τὸν ἀληθῆ, ἢ τὸν τῇ ἀληθεῖς ἐγγύτατον, ὃν ταῦτα ἔχουσι πρὸς τὴν τῇ κύκλου ἡμιδιαμέτρον, ἐπιδηλώσαι. διάτοι τῆτο ἐννοηθείσης τῆς ἡμιδιαμέτρου εἰς 100000, ἢ 1000000 διηρημένης μέρη, εὐρίσκομεν ὅποσα τέτων περιέχει ἕκαστον τῶν Ἡμιτόνων, καὶ Ἐφαπτομένων, καὶ Τεμνωσῶν. τοσούτον δὲ ἀκριβέστερα τὰ εὐρισκόμενα, ὥς ἐκ τῶν κατωτέρω χρηθησομένων δήλον, ὅσον ἂν εἰς πλείονα μέρη διηρημένη νοηθῇ ἡ ἡμιδιαμέτρος. Πρῶτοι δὲ τῶν Ἡμιτόνων εὐρεταὶ ὁ Ὑπαρχος, (γ) καὶ ὁ Μενέλαος. (δ) τὰ δ' ὑπ' αὐτῶν εὐρεθέντα συν-

νέ-

(γ) Ὁ ἐπὶ Πτολεμαίῳ τῇ Φιλομήτορος ἀκμάσας, ἔταν ἔτα πρὸ Χριστοῦ 129. διαφορὰς δὲ περὶ Ἀστρον παρατηρήσεις συνέγραψεν ὁ Ὑπαρχος, ἔτι δὲ καὶ τὸ εἰς τὸν Ἀρατοῦ ὑπόμνημα, τὸ ὑπὸ τῇ Πιστάῳ ἐκλατινισθὲν, καὶ τύποις ἐκδοθέν. (δ) Ὁ ἐπὶ Τρκιανῷ, ὁ τρία περὶ Σφαίρας συνθέμενος βιβλία, ὑπὸ τῇ Μερσεννίᾳ ἐκδοθέντα.

νέτεμέ τε καὶ ἀπῆρτισε Πτολεμαῖος ὁ Κλαύδιος, (ε)
ἐπὶ τὸ τελεώτερον δὲ πρὸς ἡγάγεν ὁ Ῥεγιομοντάνος, ἡ
μετ' αὐτὸν ἄλλοι, πίνακας κατασκευάσαντες, τὰ Ἡμί-
τονα, τὰς Ἐφαπτομένας καὶ τὰς Τεμνέσας περιέχον-
τας, δι' ἀριθμῶν ἐμφαινόμενας, ἐ μὴν ἀλλὰ καὶ τὰς
τέτων λογαρίθμους. τέτων δὲ τῶν πινάκων ἀκριβέστερος
ὁ τῷ Οὐλάκ, ἅτε δὴ τὴν τῷ κύκλῳ ἡμιδιάμετρον εἰς
μέρη 10000000 διηρημένην ἐκλαβόντος, καὶ ἔτω τὸν
ἑαυτῷ κατασκευάσαντος πίνακα. τὸ μὲν ὅν ἕκαστον τῶν
Ἡμιτόνων καὶ τῶν Ἐφαπτομένων καὶ τεμνέσων εὐρεῖν,
πάντη περιττὸν, πινάκων προκειμένων τῶν ταῦτα περι-
εχόντων· τὸ δὲ εἶδέναι τῷ τρόπῳ εὐρηνται, πάνυ γε
χρήσιμον. διὸ δὴ τὰ ἐξῆς προκείμεθω θεωρήματά τε καὶ
Προβλήματα.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Α'.

Τὸ ἡμισυ τῆς ὁποιασὲν χορδῆς ΑΓ, τὸ ὀρ-
θὸν Ἡμίτονόν ἐστὶ τῆς ἡμίσεως τῆς τῆς χορδῆς
τόξου ΑΒΓ, καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ὑπὸ τῆς χορ-
δῆς ὑποτετανομένης, καὶ ἐν τῷ κέντρῳ τῆς κύκ-
λου ἔσης ΑΚΓ γωνίας. χ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῆς κέντρος Κ ἢ ΚΔ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ,
καὶ ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ συνεχὲς ἕως εἰς τῷ τόξῳ συμ-
πέση κατὰ τὸ Β.

Δ

ΔΕΙ-

(ε) Ὁ ἐκ Πηλασίε, ὁ ἐπικληθεὶς θαύματος καὶ σοφώτατος, ὁ
ἐπὶ Ἀδριανῷ ἐν Ἀλεξανδρίᾳ περὶ τὸ ὑπὸ Χρυσῷ 138. ἔτοι-
μάσας, καὶ πολλὰ φιλοπνήσας κρονομικὰ βιβλία. Ὁρα-
τὸ Γαλλικ. Λεξ. τὸ ἐν Ἀμστερδ. κατὰ τὸ 1770. ἔτοι-
θέν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΚΒ δίχα τέμνει τὴν τε ΓΑ κατὰ τὸ Δ, (ζ) καὶ τὸ τόξον ΑΓ κατὰ τὸ Β, (η) καὶ τὴν ΑΚΓ γωνίαν. (θ) ἡ ΓΔ ἄρα τὸ ἥμισυ ἐστὶ τῆς ΓΑ χορδῆς. ἀλλ' ἡ ΓΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ τε τόξῳ ΓΒ καὶ τῆς γωνίας ΓΚΒ. (ι) τὸ ἥμισυ ἄρα τῆς ΑΓ χορδῆς τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ τε ἡμίσεως τῷ τόξῳ ΑΒΓ, καὶ τῷ ἡμίσεως τῆς ΑΚΓ γωνίας, εἴτεν τῆς ΕΚΓ. ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον τῷ 45° μοιρῶν τόξῳ εὐρεῖν.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐστω τὸ ΓΕΒ τεταρτημόριον κύκλου περιφερείας, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΓΒ. καὶ ἀπὸ τῶ κέντρου Κ ἤχθω πρὸς ὀρθῶς τῇ ΒΓ ἡ ΚΔ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπίπτει τῷ τόξῳ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΚΓ. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΓΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ τῶν 45° μοιρῶν τόξῳ, ὅπερ ἴσον ἐστὶ τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῷ ἡμίσεως τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΓ τετραγώνου. χ. 3.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΒΕΓ τεταρτημόριον κύκλου περιφερείας ἐστίν, (κ) εἴτεν μοίραις ἴσον 90° , (λ) ἡ δὲ ΚΕ δίχα τέμνει τὸ ΒΕΓ τόξον, (μ) δῆλον ἄρα ὅτι τὸ ΓΕ τόξον ἴσον ἐστὶ μοίραις 45° . ὁμοίως καὶ ἡ ὑπ' αὐτῷ καταμετρεμένη γωνία ΕΚΓ, τετέστιν ἴση ἡμισείᾳ ὀρθῆς. ἀλλ' ἡ ΓΔ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ τόξῳ ΓΕ, (ν) ἡ ἄρα ΓΔ τὸ

(ζ) Κατὰ τὴν γ'. τῷ γ'. (η) Κατὰ τὴν λ'. τῷ αὐτῷ. (θ) Διήλυν ἐκ τῆς η'. τῷ α'. (ι) Κατὰ τὸν β'. ὅρισμ. (κ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (λ) Πᾶσα γὰρ κύκλου περιφέρεια ὡς μοίρας διακεῖται 360. (μ) Κατὰ τὴν λ'. τῷ γ'. (ν) Κατὰ τὸν β'. ὅρισμ.

τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ 45° μοιρῶν τόξῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΔΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ΔΚΓ ἡμίσεια ὀρθῆς δέδεικται, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ΔΓΚ. (ξ) ἴση ἄρα ἡ ΔΚΓ τῇ ΔΓΚ. διὸ καὶ ἡ ΔΚ = ΔΓ. (ο) ἀλλὰ $\overline{ΚΓ}^2 = \overline{ΚΔ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. (π) ἄρα $\overline{ΚΓ}^2 = 2\overline{ΓΔ}^2$. ἄρα $\overline{ΓΔ}^2 = \frac{\overline{ΚΓ}^2}{2}$. ἄρα $\overline{ΓΔ} = \sqrt{\frac{\overline{ΚΓ}^2}{2}}$, (τὸ $\sqrt{\quad}$ σημῖον τετραγωνικὴν $\frac{1}{2}$ ἐμφαίνει ρίζαν.) $\frac{1}{2}$ ἴση δηλαδή ἡ ΓΔ τῇ τετραγωνικῇ ρίζῃ τῷ ἡμίσεως τῷ τετραγώνῳ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΓ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Νοεῖσθω ἡ ΚΓ τετμημένη εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις 10000000. τὸ ἄρα $\overline{ΚΓ}^2 = 100000000000000$. ἀλλὰ $\overline{ΓΔ}^2 = \frac{\overline{ΚΓ}^2}{2}$, ὡς δέδεικται. ἄρα $\overline{ΓΔ}^2 = 50000000000000$, ἥτοι $\overline{ΓΔ} = 7071068$. ἐστὶ δὲ ὁ ἀριθμὸς ἔτος ἔχῃ ἡ ἀληθείας, ἀλλ' ἡ ἐγγύς τῆς ἀληθείας τετραγωνικὴ ρίζα τῷ 50000000000000. ἐπεὶ γὰρ ὁ ἀριθμὸς 50000000000000 ἐκ ἑστὶ τετράγωνος, διὰ τῆτο τὴν ἐπ' ἀκριβὲς τετραγωνικὴν αὐτῇ ρίζαν εὐρεῖν ἀμύχανον. διὰ τῆτο δὲ ἐν τῇ προλαβέσῃ σημειώσεται εἰρηται, ὅτι εἰς ὅσῳ πλείονα μέρη τετμημένη νοεῖται ἡ ἡμιδιάμετρος, τοσάτω ἀκριβέστερα τὰ Ἡμίτονα εὐρίσκεται. ὁμοίαις γὰρ μεθόδοις, εἴτεν ταῖς τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν ἐξαγωγαῖς, τὰ πλεῖστα τῶν Ἡμιτόνων δι' ἀριθμῶν εὐρίσκεται καὶ ἐμφαίνεται, ὡς γνωστῆς δηλονότι καὶ δεδομένης τῆς ἡμιδιαμέτρου λογιζομένης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον τῷ 60° μοιρῶν τόξῳ εὐρεῖν.

Δ 2

ΚΑ.

(ξ) Κατὰ τὴν θ'. Συνέπ. τῆς λβ'. τῷ α'. (ο) Κατὰ τὴν ε'. τῷ α'. (π) Κατὰ τὴν μζ'. τῷ α'.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἔστω τὸ ΔΖΒ 60° μοιρῶν τόξον. καὶ ἀπὸ μὲν τῆς κέντρου Κ ἐπὶ τὰ Β, Δ σημεῖα ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΔ· ἀπὸ δὲ τῆς Δ ἐπὶ τὸ Β ἢ ΔΒ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τῆς αὐτῆς Δ ἢ ΔΕ κάθετος τῇ ΒΚ. ἔσται δὴ ἔν τῃ ΕΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον τῆς 60° μοιρῶν τόξεως. ὅπερ ἴσον ἐστὶ τῇ τετραγωνικῇ εἰζῇ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ τῆς τετραγώνου τῆς ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΔ, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ἡμιδιαμέτρου ΕΚ.

Χ. 4. ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΕΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῆς ΔΖΒ τόξεως. (ρ) ἀλλὰ τὸ ΔΖΒ ἴσον μοίραις 60°. (σ) τὸ ΕΔ ἄρα τὸ Ἡμίτονόν ἐστι τῆς 60° μοιρῶν τόξεως. ἐπεὶ δὲ ΚΔ = ΚΒ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ΚΔΒ = ΚΒΔ. (τ) ἀλλ' ἡ ΔΚΒ ἴση 60° μοίραις, ὥς ὑπὸ τῆς 60° μοιρῶν τόξεως ΔΖΒ καταμετρεμένη. ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΔΒ, ΚΒΔ ἴση μοίραις 60°. (υ) ἄρα καὶ ἡ ΔΚΒ = ΔΒΚ. ἄρα καὶ ἡ ΒΕ = ΕΚ. (φ) ἄρα ἡ ΕΚ ἴση τῇ ἡμίσει τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΒ. καὶ ἐπεὶ $\overline{ΚΔ}^2 = \overline{ΕΔ}^2 + \overline{ΕΚ}^2$. ἄρα ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῶν ἴσων τῆς $\overline{ΕΚ}^2$, ἔσεται $\overline{ΕΔ}^2 = \overline{ΚΔ}^2 - \overline{ΕΚ}^2$. ἄρα $\overline{ΕΔ} = \sqrt{\overline{ΚΔ}^2 - \overline{ΕΚ}^2}$. τὸ Ἡμίτονον δηλαδὴ τῆς 60° μοιρῶν τόξεως ἴσον τῇ τετραγωνικῇ εἰζῇ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ τῆς τετραγώνου τῆς ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΔ καὶ τῆς ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς ΕΚ. ἐπεὶ δὲ ἡ ἡμιδιάμετρος γνωστὴ, καὶ τὸ εἰρημένον ὀρθὸν Ἡμίτονον γνωστὸν ἔσται.

Λ Η Μ Μ Α.

Εὰν κύκλος ἡμιδιάμετρος ἡ ΚΔ δίχα τμηθῇ κατὰ τὸ Ε, ἀχθῇ δὲ αὐτῇ ἀπὸ τῆς Κ

κέν=

(ρ) Κατὰ τὸν β'. ὀρισμ. (σ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (τ) Κατὰ τὴν ε. τῆς α'. (υ) Ἐκ τῆς λβ. τῆς α'. ὁ δὲ δῆλον. (φ) Ἐκ τῆς κς. τῆς α'. ὁ δὲ δῆλον.

κεντρὸς πρὸς ὁρθὰς ἡ ΚΓ, καὶ ἐπιζευχθείσης
τῆς ΕΓ, ληφθῇ τῇ ΕΓ ἴση ἡ ΕΘ, ἡ ἀπὸ τῆς
Θ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευχθεῖσα ΘΓ, πλευρὰ ἑξαι
κανονικῆς πενταγώνου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον
ΑΒΓΔ ἐγγραφθισομένη. χ. 5.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐνημέρω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΘΓ.
(χ) καὶ ἀχθείσης ἀπὸ τῆς Β τῆς ΒΗ πρὸς ὁρθὰς τῇ
ΑΔ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΘ, ΒΚ, ΒΔ,

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἐν τῷ ΑΒΚ τριγώνῳ ἤχθη ἡ ΒΗ πρὸς ὁρθὰς
τῇ ΑΚ, (ψ) ἄρα $\overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{KB}^2 - 2AK \cdot KH$. (ω)
ἀλλ' $\overline{AB}^2 = \overline{OG}^2$. (α) ἄρα $\overline{OG}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{KB}^2 - 2AK \cdot KH$.
ἀλλὰ $\overline{OG}^2 = \overline{OK}^2 + \overline{KG}^2$. (β) ἄρα $\overline{OK}^2 + \overline{KG}^2 =$
 $\overline{AK}^2 + \overline{KB}^2 - 2AK \cdot KH$, ἀλλὰ $\overline{KB}^2 = \overline{KG}^2$. τῶν ἴσων ἄρα
ἀφαιρεθέντων, ἔσεται $\overline{OK}^2 = \overline{AK}^2 - 2AK \cdot KH$. ἐπεὶ δὲ
ἡ ΑΚ ὡς ἔτυχε τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ἄρα $\overline{AK}^2 =$
 $AK \cdot K\Theta + AK \cdot A\Theta$. (γ) ἀλλ' $AK \cdot A\Theta = \overline{OK}^2$, ὡς κα-
τωτέρω δευχθήσεται. ἄρα $\overline{AK}^2 = AK \cdot K\Theta + \overline{OK}^2$. τῶν
ἴσων δὲ ἐκατέρωθεν ἀφαιρεθέντων, ἔσεται $\overline{AK}^2 - AK \cdot K\Theta =$
 $\overline{OK}^2$. ἀλλὰ $\overline{OK}^2 = \overline{AK}^2 - 2AK \cdot KH$, ὡς δέδεικται. ἄρα
 $\overline{AK}^2 - AK \cdot K\Theta = \overline{AK}^2 - 2AK \cdot KH$. ἀφαιρεθέντων δὲ τῶν
ἴσων, ἔσται $AK \cdot K\Theta = -2AK \cdot KH$, ἥτοι $AK \cdot K\Theta = 2AK \cdot KH$.
ἄρα $2AK : AK :: K\Theta : KH$. (δ) ἀλλὰ $2AK$ διπλα-
σία τῆς ΑΚ. καὶ ἡ ΚΘ ἄρα διπλασία τῆς ΚΗ. διὸ ἡ
 $KH = H\Theta$. ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΒΗΚ, ΒΗΘ αἱ μὲν ΚΗ,

Δ 3

HB

(χ) Κατὰ τὴν α'. τῇ δ'. (ψ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ω) Κατὰ τὴν
ιγ'. τῇ β'. (α) Ἐκ τῆς κατασκευ. ὁλλων. (β) Κατὰ τὴν μζ'.
τῇ ε'. (γ) Κατὰ τὴν β'. τῇ β'. (δ) Κατὰ τὴν ιε', τῇ ε'.

HB ἴσαι ταῖς, ΘΗ, ΗΒ, αἱ δὲ πρὸς τῷ Η γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις. (ε) ἄρα καὶ ἡ ΒΘ = ΒΚ. ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ ΒΘΚ τρίγωνον, καὶ γωνία ἡ ΒΘΚ = ΒΚΘ. (ζ) ἐπεὶ δὲ ὡς ΔΘ : ΔΚ :: ΔΚ : ΘΚ, (κατωτέρω δευχθήσεται) ἄρα καὶ ΔΘ : ΘΒ :: ΘΒ : ΘΚ. δέδεικται γάρ ἡ ΘΒ = ΒΚ = ΔΚ. ὁμοίαι ἄρα τὰ τρίγωνα ΒΘΚ, ΒΘΔ. (η) ἰσοσκελὲς ἄρα καὶ τὸ ΒΘΔ τρίγωνον, γωνία ἄρα ἡ ΔΒΘ = ΔΘΒ. (θ) ἀλλ' ἡ ΒΚΘ διπλασία τῆς ΒΔΘ. (ι) ἄρα καὶ ἡ ΒΘΔ διπλασία τῆς ΒΔΘ. τὸ ἄρα ΔΒΘ τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἐστίν, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. ἑκατέρα ἄρα τῶν ἰσῶν μοίραις 72°, ἡ δὲ λοιπὴ ἡ ΒΔΘ 36°. αἱ τρεῖς γὰρ ὁμοῖαι ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, εἴταν μοίραις 180°. ἄρα καὶ ἡ ΒΚΑ = 72° μοίραις. δέδεικται γάρ διπλασία τῆς ΒΔΘ. τὸ ΑΖΒ ἄρα τόξον πεμπτημέριον ἐστὶ τῆς ὅλης τῆς κύκλου περιφερείας. ἡ ΑΒ ἄρα, πλευρά ἐστὶ κανονικῆς πενταγώνου εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἐγγραφθησομένης. ὃ εἶδει δεῖξαι.

*Οτι δὲ ἡ ΚΑ κατὰ τὸ Θ τέτμηται, ὥστε εἶναι ΑΚ ΑΘ = ΚΘ², δευχθήσεται ἔτω κείδω τὴν ΚΓ δὲν τμῆθῃναι ὥστε εἶναι ΚΓ. ΓΟ = ΚΟ². ἡχθῇ ἔν πρὸς τῇ ΚΓ κάθετος ἡ ΚΔ, ἥτις δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ε ἐπέξενκται δὲ ἡ ΕΓ, καὶ ἐλήφθῃ τῇ ΕΓ ἴση ἡ ΕΘ. εἰ ἔν ληφθῇ ἡ ΚΟ ἴση τῇ ΚΘ, δῆλον ὅτι ἡ ΚΓ τέτμηται κατὰ τὸ Ο, τῷ ἐπιταχθέντι τρόπῳ. (κ) ἀλλ' ΚΓ = ΚΑ. καὶ ἡ ΚΑ ἄρα τέτμηται, ὥστε εἶναι ΑΚ ΑΘ = ΘΚ². ὅτι δὲ καὶ ἡ ΔΘ κατὰ τὸν αὐτὸν τέτμηται λόγον κατὰ τὸ Κ, ὥστε εἶναι ΔΘ. ΘΚ = ΔΚ², δευχθῆσεται ὅτι ἡ ΔΚ εἰς ἴσαι τέτμηται κατὰ τὸ Ε, περικύβηται δὲ αὐτῇ εὐθείᾳ ἐπ' εὐθείας ἡ ΚΘ. ἄρα ΔΘ

Θ

- (ε) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ζ) Κατὰ τὴν ε. τῆ α'. (η) Κατὰ τὴν ε. τῆ σ'. (θ) Κατὰ τὴν ε. τῆ α'. (ι) Κατὰ τὴν κ'. τῆ β'. (κ) Κατὰ τὴν ια'. τῆ β'.

$\Theta K + \overline{KE}^2 = \overline{EO}^2$. (λ) ἀλλ' $\overline{EO}^2 = \overline{EG}^2$. (μ) ἄρα $\overline{EG}^2 = \Delta\Theta$. $\Theta K + \overline{KE}^2$. ἀλλ' $\overline{EG}^2 = \overline{ΓK}^2 + \overline{KE}^2$. (ν) ἄρα $\overline{ΓK}^2 + \overline{KE}^2 = \Delta\Theta$. $\Theta K + \overline{KE}^2$, τῶν ἴσων δὲ ἀφαιρέθιντων, ἔσσι $\overline{ΓK}^2 = \Delta\Theta$. ΘK . ἀλλὰ $\overline{ΓK}^2 = \overline{ΚΔ}^2$. ἄρα $\overline{ΚΔ}^2 = \Delta\Theta$. ΘK . ἐξ ὧ δὴ λεν, ὅτι ὡς $\Delta\Theta : \Delta K :: \Delta K : \Theta K$. (ξ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Τὸ Ἡμίτονον τῷ 36° μοιρῶν τόξῳ εὐρεῖν.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῆς κέντρων K τῆς ἡμικυκλίδος $AB\Gamma\Delta$ ἀνιστάθω ἡ $K\Gamma$ πρὸς ὁρθὰς τῇ διαμέτρῳ $A\Delta$. καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρων $K\Delta$ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ E , καὶ ἀπὸ τῆς E ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευχθείσης τῆς EG , εἰλήφθω ἡ $EH = EG$. καὶ ἀπὸ τῆς H ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευχθείσης τῆς $H\Gamma$, ἐφηερόθω εἰς τὴν τῆς κύκλου περιφέρειαν ἡ $AB = H\Gamma$. καὶ ἀπὸ τῆς κέντρων K ἤχθω ἡ $K\Theta$ πρὸς ὁρθὰς τῇ BA , καὶ ἐκβληθεῖσα συμπίπτει τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ I . λέγω ὅτι ἡ $E\Theta$ τὸ ζητούμενον Ἡμίτονόν ἐστιν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ $K\Gamma$. ς. 6.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν Τοῖς τριγώνοις $BK\Theta$, $AK\Theta$ αἱ μὲν πρὸς τῷ Θ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις, (ο) ἡ δὲ $KB\Theta = KAB$, (π) ἡ δὲ $K\Theta$ κοινή. ἄρα καὶ ἡ $EK\Theta$, ἥτοι ἡ BKI ἴση τῇ ΘKA , εἴταν τῇ IKA . (ρ) ἔστι δὲ ὅλη ἡ BKA ἴση μοίραις 72° . (ἐπεὶ γὰρ ἡ AB πλευρὰ ἐστὶ πενταγώνου κανονικοῦ, εἰς τὴν τῆς κύκλου περιφέρειαν ἐφηερασμένη, (σ) τὸ AIB τόξον πεμπτημέριον τῆς ὅλης περιφερείας ἐστίν.) ἡ ἄρα

Δ 4

BKI

- (λ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ β'. (μ) Ἐκ τῆς κατασκευ. δὴλον. (ν) Κατὰ τὴν μζ'. τῷ α'. (ξ) Κατὰ τὴν ιε'. τῷ ε'. (ο) Ἐκ τῆς κατασκευ. (π) Κατὰ τὴν ε'. τῷ α'. (ρ) Κατὰ τὴν κς'. τῷ α'. (σ) Κατὰ τὸ προβλ. Δημ.

ΒΚΙ γωνία ἡμίσεια ὅσα τῆς ΒΚΑ, ἴση ἐστὶ μοίραις 36° , ἀλλ' ἡ ΒΘ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ ΒΙ τόξῳ. (τ) ἡ ΒΘ ἄρα τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ 36° μοιρῶν τόξῳ.

Ἐπεὶ δὲ $\overline{ΓΕ}^2 = \overline{ΓΚ}^2 + \overline{ΚΕ}^2$, γνωστὴ δὲ αἱ ΓΚ, ΚΕ, γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΕ. ἀλλ' ἡ ΓΕ = ΕΗ, (υ) γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΕΗ. γνωστὴ δὲ καὶ ἡ ΕΚ, ἄρα καὶ ἡ ΚΗ. ἐπεὶ δὲ $\overline{ΓΗ}^2 = \overline{ΓΚ}^2 + \overline{ΚΗ}^2$, γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΗ, εἴτεν ἡ ΒΑ. γνωστὸν ἄρα καὶ τὸ ἡμισυ τῆς ΑΒ, τῷ τῷ ΒΘ Ἡμίτονον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Δοθέντος τῷ Ἡμίτονῳ ΕΔ τῷ ὁποιοδήποτεν τόξῳ ΓΕ, τὸ Ἡμίτονον ΕΖ τῷ παραπληρώματος ΕΒ πρὸς τὸ τῷ κύκλῳ τεταρτημόριον ΓΕΒ εὐρεῖν. χ. 7.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΚΕ. λέγω ὅτι τὸ Ἡμίτονον ΕΖ τῷ παραπληρώματος ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΕ, καὶ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν δοθέντος Ἡμίτονῳ ΕΔ, εἴτεν $\text{ΕΖ} = \sqrt{\text{ΕΚ}^2 - \text{ΕΔ}^2}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

$\overline{ΕΖ}^2 + \overline{ΖΚ}^2 = \overline{ΕΚ}^2$. (φ) ἀφαιρεθέντων ἄρα τῶν ἴσων, ἔσται $\overline{ΕΖ}^2 = \overline{ΕΚ}^2 - \overline{ΖΚ}^2$. ἀλλὰ ΖΚ = ΕΔ. (χ) ἄρα $\overline{ΕΖ}^2 = \overline{ΕΚ}^2 - \overline{ΕΔ}^2$, ἄρα $\text{ΕΖ} = \sqrt{\text{ΕΚ}^2 - \text{ΕΔ}^2}$. ὃ εἶδει δεῖξαι. ἐπεὶ δὲ δεδομένα ἐσὶν αἱ ΕΚ, ΕΔ, γνωστὸν ἄρα τὸ ζητούμενον Ἡμίτονον ΕΖ.

ΠΡΟ-

(τ) Κατὰ τὸν β'. ὅρισμ. (υ) Ἐκ τῆς κατωσ. (φ) Κατὰ τὴν μζ'. τῷ α'. (χ) Κατὰ τὴν λδ'. τῷ α'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

Δοθέντος τῷ Ἡμιτόνῳ ΔΗ τῷ ὁποῖον τόξῳ ΔΓΒ, τὸ Ἡμίτονον τῷ ἡμίσεως τῷ αὐτῷ τόξῳ εὐρεῖν. *χ. 8.*

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἀπὸ μὲν τῷ κέντρῳ Κ ἤχθω πρὸς ὁρθὰς τῇ ΔΒ ἡ ΚΘ, ἥτις ἐκβληθεῖσα συμπίπτει τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Γ· ἀπὸ δὲ τῷ Δ ἤχθω ἡ ΔΖ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΕΚ, λέγω δὴ ὅτι ἡ ΔΘ ἐστὶ τὸ ζητούμενον Ἡμίτονον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ἀπὸ τῷ κέντρῳ ΚΘΓ πρὸς ὁρθὰς ἀχθεῖσα τῇ χορδῇ ΒΔ, αὐτὴν τε καὶ τὸ τόξον ΔΒ δίχα τέμνει, ὡς ῥαδίως δεῖξαι ἐνεσι. τὸ ἄρα ΔΓ τόξον τὸ ἡμισυ ἐστὶ τῷ ΔΓΒ τόξῳ. ἀλλὰ τῷ ΔΓ τόξῳ ὁρθὸν Ἡμιτόνόν-ἐστιν ἡ ΔΘ, (ψ) ἡ ἄρα ΔΘ τῷ ζητούμενον Ἡμιτόνόν-ἐστι. καὶ ἐπεὶ δέδοται τὸ ἡμίτονον ΔΗ, δεδομένον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΖ ἡμίτονον τῷ παραπληρώματος ΔΕ. (ω) ἀλλ' ἡ ΔΖ = ΗΚ. γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΚ. ἐστὶ δὲ ὅλη ἡ ΒΚ γνωστὴ, ὡς ἡμιδιάμετρος, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΗ γνωστὴ. ἀλλὰ τὸ $\overline{ΔΒ}^2 = \overline{ΔΗ}^2 + \overline{ΗΒ}^2$. γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΔΒ. διὸ γνωστὸν καὶ τὸ ἡμισυ αὐτῆς, εἴτεν τὸ ΔΘ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤ΄.

Δοθέντος τῷ Ἡμιτόνῳ ΔΗ τῷ 60° μοιρῶν τόξῳ ΔΒ σὺν τῷ Ἡμιτόνῳ ΕΖ τῷ 36° μοιρῶν τόξῳ ΕΒ, τὸ Ἡμίτονον εὐρεῖν τῷ 12° μοιρῶν τόξῳ. *χ. 9.*

Α 5

ΚΑ.

(ψ) Κατὰ τὸν β'. ὁρισμ., (ω) Κατὰ τὸ προλ. πρόβλ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΕΔ. λέγω δὴ ὅτι τὸ τῆς ΕΔ χορδῆς ἥμισυ τὸ Ἡμίτονόν ἐστι τῷ 12° μοιρῶν τόξῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΔΒ ἐστὶ τόξον μοιρῶν 60° , τὸ δὲ ΕΒ, 36° .
 (α) τὸ ἄρα ΔΛΕ τόξον ἐστὶ μοιρῶν 24° , τὸ ἥμισυ ἄρα τῷ ΔΛΕ τόξῳ, τόξον ἐστὶ μοιρῶν 12° . ἀλλὰ τῷ ἡμίσεως τῷ τόξῳ ΔΛΕ Ἡμίτονόν ἐστι τὸ τῆς χορδῆς ΕΔ ἥμισυ. (β) τὸ ἄρα ἥμισυ τῆς ΕΔ χορδῆς τὸ Ἡμίτονόν ἐστι τῷ 12° μοιρῶν τόξῳ. ο. ε. δ. Ἐπεὶ δὲ τὰ Ἡμίτονα ΔΗ, ΕΖ δεδομένα εἰσὶ, γνωστὰ ἄρα καὶ τὰ τῶν παραπληρωμάτων Ἡμίτονα ΔΙ, ΕΘ. γνωστὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ τῶν ΔΗ, ΕΖ διαφορά ΔΑ, καὶ ἡ τῶν ΔΙ, ΕΘ, ἡ ΕΑ. ἐπεὶ δὲ $\overline{ΕΔ}^2 = \overline{ΕΛ}^2 + \overline{ΑΔ}^2$, γνωστὸν ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΕΔ}^2$, καὶ ἡ τέττε ρίζα ΕΔ, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, ὅπερ ἐστὶ τὸ Ἡμίτονον τῷ 12° μοιρῶν τόξῳ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

Δοθέντων τῶν Ἡμιτόνων ΔΛ, ΖΙ τῶν τόξων ΔΓ, ΖΓ, τῶν διαφερόντων ἀλλήλοις λεπτά 45', τόξῳ τινὸς μέσῳ, οἷον τῷ ΕΓ, τὸ Ἡμίτονον ΕΑ εὐρεῖν. χ. 10.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῷ Ζ ἡ ΖΘ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΛ. καὶ κείθω τὸ ΖΕ τόξον ἴσον εἶναι λεπτοῖς 15'. καὶ γεγόνετω ὡς ΖΔ; ΖΕ :: ΔΘ; ΕΗ. προσκείθω δὲ τῷ ἐλάττει Ἡμιτόνῳ ΖΙ ἡ ΕΗ. καὶ ἔσται δὴ τὸ τέτων ἀθροισμα τὸ ζητούμενον Ἡμίτονον τῷ τόξῳ ΕΓ.

ΔΕΙ-

(α) Ἐξ ὑποθ. (β) Ἐκ τῶ προλ. προβλ. δηλον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ γνωστὰ τὰ ἡμίτονα ΔΛ, ΖΙ, γνωστὰ ἄρα καὶ τὰ τέτων τόξα ΔΓ, ΖΓ. γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ τέτων διαφορὰ ΔΖ. ὡσαύτως γνωστὴ καὶ τῶν ἡμιτόνων ἡ διαφορὰ, εἶπεν ἡ ΔΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕ τόξον γνωστὸν ἐκ τῆς κατασκευῆς. καὶ ἐπεὶ ὡς ΖΔ : ΖΕ :: ΔΘ : ΕΗ, γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΕΗ. (γ) (ὡς εὐθεῖαι λογιζόμεναι διὰ τὴν τέτων σμικρότητα τὰ τόξα ΖΔ, ΖΕ.) προσθεθέντος ἐν τῇ ΕΗ τῷ γνωστῷ Ἠμιτόνῳ ΖΙ, γνωστὸν ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον Ἠμίτονον ΕΑ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Ἐκ τῷ εὐρεθέντος Ἠμιτόνου τῷ 45° μοιρῶν τόξῳ, γνωστὰ γίνεται Ἠμίτονα ἔξ. τετῆσι τὸ Ἠμίτονον τῷ τόξῳ $22^{\circ}. 30'$, τῷ ἡμίσεως ὄντος τῷ 45° τόξῳ, ὁμοίως καὶ τὸ τῷ $11^{\circ}. 15'$ τόξῳ, ὃ ἔστι τὸ τῷ ἡμίσεως ἡμισυ. (δ) ὡσαύτως καὶ τὰ τῶν παραπληρωμάτων αὐτῶν, τῷ $67^{\circ}. 30'$, καὶ τῷ $78^{\circ}. 45'$. (ε) ἔτι δὲ καὶ τὸ τῷ ἡμίσεως τῷ παραπληρώματι, ἦτοι $33^{\circ}. 45'$, καὶ τὸ τῷ παραπληρώματι αὐτῷ, εἶπεν τῷ $56^{\circ}. 15'$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐκ μὲν τῷ Ἠμιτόνῳ τῷ 60° μοιρῶν τόξῳ γνωστὰ γίνεται δέκα καὶ πέντε Ἠμίτονα· ἐκ δὲ τῶν 36° , τριάκοντα καὶ ἓν· ἐκ δὲ τῶν 12° , ἐξήκοντα καὶ τρεῖς· συμποσύνται δὲ πάντα Ἠμίτονα 120, ἅπερ Ἠμίτονα εἰσι τόξων ἀλλήλοις διαφερόντων μόνον λεπτὰ πρῶτα 45'. μεταξύ δὲ τέτων ἄλλα εὐρίσκονται Ἠμίτονα τόξων ἀλλήλοις 15' λεπτὰ διαφερόντων. (ς) καὶ πάλιν μεταξύ τῶν εὐρεθέντων δῆλας γίνονται ἕτερα τόξα, ὧν ἡ διαφορὰ, λεπτὰ πέντε. καὶ αὖθις με-

(γ) Κατὰ τὸ β'. πρόβλ. τῷ δ'. τῇ: Ἀριθμ. διβλ. (δ) Κατὰ τὸ ε'. πρόβλ. (ε) Κατὰ τὸ θ'. πρόβλ. (ς) Κατὰ τὸ ζ'. πρόβλ.

μεταξὺ τέτων ἄλλα τόξων, ὧν ἕτερον τὸ ἕτερον ἐν μόνον λεπτὸν ὑπερέχει.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τῷ εἰρημένῳ τρόπῳ κατεσκευάθησαν οἱ τῶν Ἡμιτόνων πίνακες. ἐπεὶ δὲ ἔστι Ἡμίτονα τόξων περιέχουσι, μοίρας μόνων καὶ λεπτὰ πρῶτα ἐμφαινόντων, ῥητέον τῷ τρόπῳ τὰ Ἡμίτονα εὐρίσκεται τῶν τόξων τῶν λεπτὰ δεύτερα μόνον, ἢ μοίρας, λεπτὰ πρῶτα καὶ δεύτερα περιεχόντων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

Δοθέντος τῷ Ἡμιτόνῳ ΔΕ τῷ ΔΒ τόξῳ, τῷ ἴσῳ ἐνὶ λεπτῷ πρῶτῳ, καὶ τῷ ΓΒ τόξῳ, τῷ ἴσῳ 40" λεπτοῖς δευτέροις, τὸ Ἡμίτονον αὐτῷ ΓΖ εὐρεῖν χ. 11.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Γεγονέτω ὡς 1' λεπτὸν πρῶτον, ἦτοι 60" λεπτὰ δεύτερα, πρὸς τὸ Ἡμίτονον τῷ ἐνὸς λεπτῷ πρῶτῳ, εἶπεν τῷ 2909, (ἐν τοῖς τῶν Ἡμιτόνων πίναξι ὁ ἀριθμὸς ἔτος κατὰ.) ἔτω τὰ 40" λεπτὰ δεύτερα, πρὸς τὸν τέταρτον ὅρον, ὅστις τὸ ζητούμενον Ἡμίτονον ΓΖ εἴη.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς εὐθειῶν τῶν ΔΒ, ΓΒ τόξων διὰ τὴν τέτων σμικρότητα λογιζέντων, ἔσεται διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΒΔΕ, ΒΓΖ ὡς ΔΒ: ΔΕ:: ΓΒ: ΓΖ, ἦτοι ὡς 60": 2909:: 40": ΓΖ. διὸ ἡ $\Gamma\text{Ζ} = \frac{2909 \cdot 40''}{60''}$. (η)

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Παντὸς ἄρα δοθέντος τόξου διὰ λεπτῶν δευτέρων ἐμφαινόμενα τὸ Ἡμίτονον εὐρίσκειται, διελὼν τὸ γνόμενον ἐκ

(η) Κατὰ τὸ β'. πρόβλ. τῷ δ'. τῆς Ἀριθμ. βιβλ.

ἐκ τῆς Ἡμίτονου τῆς ἐνὸς λεπτῆς πρώτης καὶ τῶν δοθέντων λεπτῶν δευτέρων δι' ἐνὸς λεπτῆς πρώτης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

Τὸ Ἡμίτονον ΓΘ εὐρεῖν τῆς ΓΑ τόξου, τῆς ἐκ μοιρῶν 89° , λεπτῶν πρώτων 59', καὶ λεπτῶν δευτέρων 20'' συγκεκλιμέναι. χ. 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω δύο τόξα τὰ ΔΑ, ΒΑ ἐγγύτατα τῆς ΓΑ. καὶ ἔσω τὸ μὲν ΔΑ μικρόν τι μείζον, ἔστω ἴσον μοίραις 90° . τὸ δὲ ΒΑ, μικρόν τι ἑλάττω, ἦτοι ἴσον $89^\circ, 59'$. ληφθήτω δὲ ἀπὸ τῶν πινάκων τὰ τῶν Ἡμίτονου, ἔστω τῆς μὲν ΔΑ τόξου τὸ ΔΚ = 10000000, τῆς δὲ ΒΑ τοῦ ΒΗ = 9999999. καὶ ἀπὸ τῆς Β ἤχθω ἡ ΒΕ πρὸς ὁρθῆς τῇ ΔΚ. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΓΖ σὺν τῇ ΒΗ ἐστὶ τὸ ζητούμενον Ἡμίτονον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΓΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ζητούμενον Ἡμίτονον, ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΖ + ΖΘ. ἀλλὰ ΖΘ = ΒΗ. τὸ ἄρα ζητούμενον Ἡμίτονον ἴσον ΓΖ + ΒΗ. ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν τόξον ΔΑ = 90° , τὸ δὲ ΒΑ = $89^\circ, 59'$. τὸ ἄρα ΔΒ = 1', ἦτοι 60''. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν ΒΑ = $89^\circ, 59'$, τὸ δὲ ΓΑ = $89^\circ, 59', 20''$. τὸ ἄρα ΓΒ = 20''. ἐπεὶ δὲ ἡ ΕΚ = ΒΗ, ἡ δὲ ΒΗ = 9999999, ἄρα καὶ ἡ ΕΚ = 9999999. ἀλλ' ἡ ΔΚ = 10000000. ἄρα ἡ ΔΕ = 1. καὶ ἐπεὶ ὡς ΔΒ : ΔΕ :: ΓΒ : ΓΖ, (θ) ἔστιν ἄρα καὶ ὡς 60'' : 1 :: 20'' : ΓΖ. διὸ ἡ ΓΖ = $\frac{1}{3}$. ἡ ἄρα ΓΖ + ΒΗ, ἔστω ἡ ΓΘ = $9999999 + \frac{1}{3}$. τῷ 3 αὐτῷ δὴ τρόπῳ εὐρεθήσεται πᾶν Ἡμίτονον τόξου 3 ἐκ μοιρῶν καὶ λεπτῶν πρώτων καὶ δευτέρων συγκεκλιμέναι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι΄.

Δοθέντος τῆτε Ἡμιτόνου ΕΒ καὶ τῆ συνημιτόνου ΕΗ τῆ ὁποιοῦν τόξου ΓΕ, τήντε ἐφαπτομένην αὐτῆ ΓΔ καὶ τὴν τέμνουσαν ΚΔ εὐρεῖν. π.ν. Β' χ. 13.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Γεγονέτω ὡς Συνημίτονον, πρὸς Ἡμίτονον, ὅτως ἢ ἡμιδιάμετρος, πρὸς τὴν τετάρτην ἀνάλογον. αὕτη δὴ ἔσται ἡ ζητηθεῖσα ἐφαπτομένη. γεγονέτω δὲ καὶ ὡς Συνημίτονον, πρὸς ἡμιδιάμετρον, ὅτως ἡμιδιάμετρος, πρὸς τὴν τρίτην ἀνάλογον, ἥτις ἡ ζητημένη τέμνουσα ἐστὶ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γάρ τὰ τρίγωνα ΚΒΕ, ΚΓΔ ὅμοια ἀλλήλοις εἰσὶν, ὡς ἄρα ΚΒ : ΒΕ :: ΚΓ : ΓΔ. ἀλλὰ ΚΒ = ΕΗ, ὡς ἄρα ΕΗ : ΒΕ :: ΚΓ : ΓΔ. ἐξ ἧς δὴλον τὸ πρῶτον. ἔστι δὲ καὶ ὡς ΚΒ : ΚΕ :: ΚΓ : ΚΔ, εἴτεν ΕΗ : ΚΕ :: ΚΓ : ΚΔ. ἐκ τῆτε δὲ δὴλον τὸ δεύτερον. καὶ ἐπεὶ τό, τε Ἡμίτονον καὶ τὸ Συνημίτονον καὶ ἡ ἡμιδιάμετρος γνωσάμεσι, γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΓΔ καὶ ἡ τέμνουσα ΚΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΒΑΓ εἰάν ὡς ὀλοημίτονον, εἴτεν ὡς ἡμιδιάμετρος ληφθῇ ἡ ΒΓ πλευρὰ, ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα γωνίαν ΒΑΓ, ἑκατέρω τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τὸ ὀρθὸν Ἡμιτόνον ἐστὶ τῆς ὑπ' αὐτῆς ὑποτεينوμένης ὀξείας γωνίας οἶον

οἷον ἡ μὲν ΓΑ, τῆς ΑΒΓ· ἡ δὲ ΒΑ, τῆς ΒΓΑ.

Χ. 14.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ τεταρτημόριον κύκλος γεγράφθω τὸ ΗΓΔ. πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ ΓΒ κύκλος τεταρτημόριον γεγράφθω τὸ ΖΒΕ. ἢ ἐκβεβλήθωσαν αἱ τῷ τριγώνῳ πλευραὶ ΓΑ, ΒΑ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ τῶν περιφερειῶν σημεῖα Ε, Δ.

Ἐκ τῆς τῷ καταγράμματος θεωρίας καὶ τῷ δευτέρῳ ὁρισμῷ δῆλον ὅτι ἡ μὲν ΓΑ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῆς ΑΒΓ γωνίας· ἡ δὲ ΒΑ, τῆς ΑΓΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.

Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΓΑΒ ὅποτε-
ρασθῇ τῶν πλευρῶν τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν
περιεχουσῶν, οἷον τῆς ΓΑ, ὡς Ὀλοημιτόνῳ
ληφθείσης, ἢ ἑτέρα ἢ ΑΒ ἐφαπτομένη γί-
νεται ἥς ὑποταίνει ὀξείας γωνίας ΑΓΒ· ἡ δὲ
ὑποταίνουσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρὰ ΓΒ,
τέμνουσα τῆς αὐτῆς γωνίας ΑΓΒ. Χ. 15.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΑ κύκλος γε-
γράφθω ὁ ΑΔΕ.

Δῆλον ἔκτε τῷ πέμπτῳ ὁρισμῷ καὶ τῆς τῷ κατα-
γράμματος θεωρίας, ὅτι ἡ μὲν ΑΒ ἢ ἐφαπτομένη ἐστὶ

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰσέον δὲ, ὅτι τῆς ἐτέρας τῆ τριγώνου πλευρᾶς ὡς Ὀλοημιτόνου ληφθείσης, εἰ δὲ καὶ τὴν ἐτέραν τῆ αὐτῆς τριγώνου ὡς Ὀλοημιτόνον ἐκλαμβάνειν. ἔτω μὲν γὰρ ἐπὶ τῆ ἀνισοσκελῆς ὀρθογωνίας τριγώνου τὸ αὐτὸ Ἡμίτονον ἔξῃσι καὶ τὴν αὐτὴν τέμνεσαν αἱ ἀνισοὶ γωνίαι, ὅπερ ἀτοπον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'.

Αἱ πλευραὶ παντὸς ὀξυγωνίας καὶ ἀμβλυγωνίας τριγώνου λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν τὰ Ἡμίτονα τῶν γωνιῶν τῶν ὑπ' αὐτῶν ὑποτεινομένων.

Εἰ μὲν τὸ τρίγωνον ἰσόπλευρόν ἐστι, δῆλον τὸ πρὸς κείμενον. τὸ γὰρ ἰσόπλευρον τρίγωνον, καὶ ἰσογώνιον ἐστι. (1) τῶν δ' ἴσων γωνιῶν ἴσα καὶ τὰ Ἡμίτονα. ἀλλὰ δὴ ἔσω τὸ ΒΓΑ τρίγωνον ὀξυγώνιον, ἀνίστας ἔχον τὰς πλευράς. καὶ ἔσω ἡ ΒΓ μείζων τῆς ΒΑ. κ. 16.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἡ ΓΔ ἴση τῇ ΒΑ. καὶ ἀπὸ τῶν Δ καὶ Β σημείων ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΑ αἱ ΔΕ, ΒΖ.

ΔΒΙΞΙΣ.

Τὰ τρίγωνα ΓΔΕ, ΓΒΖ ὁμοιά εἰσιν. ὡς ἄρα ΓΒ : ΓΔ :: ΒΖ : ΔΕ. ἀλλ' ἡ ΓΔ = ΒΑ. ὡς ἄρα ΓΒ : ΒΑ :: ΒΖ : ΔΕ. ἀλλ' ἡ μὲν ΒΖ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῆς ΒΑΖ γωνίας, ἥτοι τῆς ΒΑΓ· ἡ δὲ ΔΕ, τῆς ΔΓΕ, εἴτεν τῆς ΒΓΑ. (κ) ἡ ἄρα ΓΒ πλευρὰ, πρὸς τὴν ΒΑ πλευρὰν λόγον ἔχει, ὃν τὸ Ἡμίτονον τῆς ΒΑΓ γωνίας, πρὸς τὸ τῆς ΒΓΑ Ἡμί-

(1) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν ε'. τῆ α'. (κ) Κατὰ τὸ β'. Θεώρημα.

Ἡμίτονον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, εἰάν ἡ ΑΓ μείζων ἢ τῆς ΑΒ, λεηφθείσης τῆς ΓΖ ἴσης τῇ ΑΒ, καὶ ἀχθείσων τῶν ΖΗ, ΑΔ πρὸς ὀρθαίς τῇ ΒΓ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΓΑΔ, ΓΖΗ εἰσὶν ὡς ΓΑ : ΓΖ :: ΑΔ : ΖΗ. ἀλλὰ ΓΖ = ΑΒ. ὡς ἄρα ΓΑ : ΑΒ :: ΑΔ : ΖΗ. ἀλλ' ἡ μὲν ΑΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῆς ΑΒΔ, αἶψαν τῆς ΑΒΓ γωνίας, ἡ δὲ ΖΗ τῆς ΖΙΗ, (λ) ἦτοι τῆς ΑΓΒ. ὡς ἄρα ΓΑ, πρὸς ΑΒ, ἔτω τὸ Ἡμίτονον τῆς ΓΒΑ γωνίας, πρὸς τὸ τῆς ΑΓΒ γωνίας Ἡμίτονον. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΓΒ : ΒΑ :: τὸ Ἡμίτ. τῆς ΒΑΓ γων. πρὸς τὸ Ἡμίτ. τῆς ΒΓΑ γων. ὡς δίδεσκται. ἄρα καὶ ὡς ΓΑ, πρὸς ΓΒ, ἔτω τὸ Ἡμίτ. τῆς ΓΒΑ γωνίας πρὸς τὸ Ἡμίτ. τῆς ΒΑΓ. (μ)

Ἔστω δὲ τὸ ΒΓΑ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον, ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ΑΒΓ γωνίαν. καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΑΒ κατὰ τὸ συνεχές, ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Γ καὶ Β σημείων ἡ μὲν ΓΔ κάθετος τῇ ΑΔ, ἡ δὲ ΒΖ τῇ ΑΓ. ς. 17.

Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΖΒ ἔχουσι τὴν μὲν πρὸς τῷ Α γωνίαν κοινήν, τὴν δὲ ΑΔΓ = ΑΖΒ. (ν) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΔ ἴση λοιπῇ τῇ ΑΒΖ. (ξ) ὡς ἄρα ΑΓ : ΑΒ :: ΓΔ : ΒΖ. (ο) ἀλλ' ἡ μὲν ΓΔ ὀρθὸν ἔσται Ἡμίτονον τῆς ΓΒΔ γωνίας, (π) τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι καὶ τῆς ΓΒΑ γωνίας, ἥτις τὸ ἀναπλήρωμα αὐτῆς ἐπὶ πρὸς δύο ὀρθαίς, (ρ) ἡ δὲ ΒΖ τῆς ΒΓΑ, (σ) ὡς ἄρα ΑΓ, πρὸς ΑΒ, ἔτω τὸ Ἡμίτονον τῆς ΓΒΑ γωνίας, πρὸς τὸ Ἡμίτονον τῆς ΒΓΑ. ὃ ἔδει δεῖξαι.

Ε

ΡΙΒ-

- (λ) Κατὰ τὸ αὐτ. Θεώρ. (μ) Κατὰ τὴν ζ'. καὶ τὴν ε. τῇ ε.
 (ν) Ἐκ τῆς κτκκκ. (ξ) Κατὰ τὴν ζ'. Συνέπ. τῆς λβ'. τῇ α.
 (ο) Κατὰ τὴν δ'. τῇ ε'. (π) Κατὰ τὸ β'. Θεώρ. (ρ) Κατὰ τὴν β'. ὀρθομ. (σ) Κατὰ τὸ β'. Θεώρ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ ἐπιλύσεως τῶν περὶ τὰ τρίγωνα
προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Δοθεῖσῶν δύο γωνιῶν τῆς ὀρθογωνίας τριγώνου $ΒΑΓ$, τῆς ὀρθῆς δηλαδή $ΒΑΓ$, καὶ τῆς ὀξείας $ΑΒΓ$, τὸν λόγον εὑρεῖν, ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν αἱ πλευραί. χ . 18.

Ἡ μὲν ὀρθὴ $ΑΒΓ$ γωνία ἴση ἐστὶ 90° . ἔστω δὲ ἡ $ΑΒΓ = 44^\circ. 29'$. ἔστω δὲ ἡ $ΑΓΒ$, παραπλήρωμα ἔστω τῆς $ΑΒΓ$ πρὸς μίαν ὀρθήν, ἴση $45^\circ. 31'$. καὶ τὸ μὲν ὀρθὸν Ἡμίτονον τῆς $ΒΑΓ = 10000000$, τὸ δὲ τῆς $ΑΒΓ = 7007018$, τὸ δὲ τῆς $ΑΓΒ = 7134543$. (τ) ὡς ἄρα $ΑΒ : ΒΓ :: 7134543 : 10000000$. καὶ ὡς $ΑΓ : ΓΒ :: 7007018 : 10000000$. καὶ ὡς $ΑΒ : ΑΓ : 7134543 : 7007018$. (υ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Δοθείσης ὁποτέρᾳ τῶν ὀξείων γωνιῶν τῆς ὀρθογωνίας τριγώνου $ΒΑΓ$, καὶ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν $ΒΑΓ$ ὑποτείνουσας πλευρᾶς $ΒΓ$, ἑκατέραν εὑρεῖν τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσιν πλευρῶν, τὴν τε $ΑΓ$ δηλαδή καὶ τὴν $ΑΒ$ χ . 19.

Ἐστω

(τ) Ἐν ταῖς πίναξι ταῦτα εὐρίσκεται. (υ) Κατὰ τὸ β'.
Θεώρ.

Ἔστω δὴ ἡ μὲν πλευρὰ ΒΓ = 100, ἡ δὲ γωνία ΑΒΓ = 59°. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑΓ = 90°, ὡς ὀρθή, ἔσεται ἄρα ἡ ΑΓΒ = 31°. (Φ) ἔστι δὲ τὸ μὲν ὀρθὸν Ἡμίτονον τῆς ΑΒΓ = 8571673· τὸ δὲ τῆς ΑΓΒ = 5150381· τὸ δὲ τῆς ΒΑΓ = 10000000. Ἐπεὶ δὲ ὡς τὸ Ἡμίτ. τῆς ΒΑΓ, πρὸς τὸ Ἡμίτ. τῆς ΑΒΓ, ἔτω ΒΓ, πρὸς ΑΓ, (Χ) ἔστιν ἄρα ὡς 10000000 : 8571673 :: 100 : ΑΓ. ἡ ἄρα ΑΓ = $85 + \frac{71673}{100000}$ (Ψ) πάλιν ἐπεὶ ὡς Ἡμίτ. τῆς ΒΑΓ γων. πρὸς Ἡμίτ. τῆς ΑΓΒ, ἔτω ΒΓ, πρὸς ΑΒ, ἄρα καὶ ὡς 10000000 : 5150381 :: 100 : ΑΒ. ἡ ἄρα ΑΒ = $51 + \frac{50381}{100000}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Δοθείσης ὁποτερασθὲν τῶν ὀξείων τῶ ὀρθογωνίᾳ τριγώνῳ ΒΑΓ γωνιῶν, καὶ ὁποτερασθὲν τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, τὰς δύο λοιπὰς εὑρεῖν τῶ τριγώνῳ πλευρὰς. χ. 20.

Ἔστω ἡ μὲν γωνία Γ = 39°, 15', ἡ δὲ ΑΒ = 50. καὶ ἐπεὶ ἡ γωνία Α = 90°, ὡς ὀρθή, ἡ ἄρα γωνία Β = 50°, 45'. ἔστι δὲ τὸ μὲν ὀρθὸν Ἡμίτονον τῆς γωνίας Γ, 6327053· τὸ δὲ τῆς Β, 7743927· τὸ δὲ τῆς Α, 10000000. Ἐπεὶ δὲ ὡς Ἡμίτονον τῆς γωνίας Γ, πρὸς Ἡμίτονον τῆς γωνίας Β, ἔτως ΑΒ, πρὸς ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς 6327053 : 7743927 :: 50 : ΑΓ. ἄρα ἡ ΑΓ = $61 + \frac{1246117}{6327053}$ πάλιν ἐπεὶ ὡς Ἡμίτ. τῆς γων.

Ε 2

Γ,

Δημόσια Κεῖται ἐν τῇ Βιβλιοθήκῃ τοῦ Παιδείας

(Φ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς λβ'. τῶ α'. (Χ) Κατὰ τὸ β'. Θεώρ.

(Ψ) Κατὰ τὸ δ' πρὸς τῶ δ' τῆς Ἀριθμ. Βιβλ.

Γ, πρὸς Ἡμίτ. τῆς γων. Α, ἔτως ΑΒ, πρὸς ΒΓ, ἐστὶν ἄρα ἢ ὡς 6327053 : 10000000 :: 50 : ΒΓ. ἢ ἄρα $ΒΓ = 79 + \frac{362813}{6327053}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Δοθείσης τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν τῆς ὀρθογωνίας τριγώνου ΒΑΓ ὑποτεινέσης πλευρᾶς ΓΒ, καὶ ὁποτέρᾳ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, ἑκατέραν τῶν ὀξείων γωνιῶν, καὶ τὴν λοιπὴν πλευρὰν εὐρεῖν. χ. 21.

Ἐστω ἡ μὲν ΓΒ = 1000, ἡ δὲ ΑΒ = 891. καὶ ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία ὀρθή, τὸ Ἡμίτονον αὐτῆς ἐστὶ, 10000000.

Ἐπεὶ δὲ ὡς ΓΒ, πρὸς ΑΒ, ἔτω τὸ Ἡμίτονον τῆς Α γωνίας, πρὸς τὸ τῆς Γ γωνίας Ἡμίτονον, ἐστὶν ἄρα ὡς 1000 : 891 :: 10000000 : Ἡμίτ. τῆς γων. Γ. τὸ ἄρα τῆς Γ γωνίας Ἡμίτονον = 8910000. τῷ ἀριθμῷ τούτῳ ἐγγύτατος ὁ ἐν τοῖς πίναξιν ἀριθμὸς 8910065, ὁ τὸ Ἡμίτονον ἐμφαῖνον τῆς 63° μαιρῶν γωνίας, ὁ ἢ ἀπρσπταίως ἀντὶ τῆς εὐρεθέντος Ἡμιτόνου 8910000 ἐκλαμβάνομενος. ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία = 63°. διὸ ἡ πρὸς τῷ Β = 27°, ἥς Ἡμίτονον, ὁ 4539905. ἐπεὶ δὲ ὡς Ἡμίτονον τῆς γωνίας Γ, πρὸς Ἡμίτονον τῆς Β, ἔτως ΑΒ : ΑΓ, εἶπεν ὡς 8910065 : 4539905 :: 891 : ΑΓ. ἄρα ἡ ΑΓ = $45 + \frac{7638525}{8910065}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

Δοθεισῶν τῶν δύο πλευρῶν, ΑΓ, ΑΒ, τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν Α περιεχουσῶν τῆς ὀρθογωνίας τριγώνου ΒΑΓ, ἑκατέραν εὐρεῖν τῶν ὀξείων

ὀξείων Γ, Β, καὶ τὴν λοιπὴν πλευρὰν ΒΓ, τὴν ὑποτένυσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν. ρ. 22.

Ἐξω ἡ ἢ μὲν $ΑΓ=100$, ἡ δὲ $ΑΒ=79$. καὶ ληφθήτω ἡ ΑΓ ὡς Ὀλομήτονον.

Ἐπεὶ ὡς ΑΓ, πρὸς ΑΒ, ἔτω τὸ Ὀλομήτονον, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς Γ γωνίας, (ω) εἶπεν ὡς $100:79::10000000:ΑΒ$, ἡ ἄρα $ΑΒ=7900000$. τέτε δὲ τῷ ἀριθμῷ ἐγγύτερος ἐν ταῖς πίναξιν ἐστὶν ὁ 7902248, ὁ ἐμφαίνων ἐφαπτομένην τόξον $38^{\circ}, 19'$. ἡ ἄρα γωνία $Γ=38^{\circ}, 19'$. διὸ ἡ γωνία $Β=51^{\circ}, 41'$, ἥς Ἡμίτονον ὁ 7845961 ἀριθμός. ἐπεὶ δὲ ὡς Ἡμίτονον τῆς Β γωνίας, πρὸς Ἡμίτονον τῆς Α, ἔτως ΑΓ, πρὸς ΒΓ, ἦται ὡς $7845961:10000000::100:ΒΓ$, ἡ ἄρα $ΒΓ=127+\frac{3562953}{7845961}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5'.

Δοθεῖσάν πασῶν τῶν τῷ ὀξυγωνίᾳ τριγώνῳ ΒΑΓ γνωσῶν, τὸν λόγον εὐρεῖν, ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν αἱ πλευραί. ρ. 23.

Ἐξω ἡ μὲν γωνία $Α=69^{\circ}$, ἡ δὲ $Β=71^{\circ}$, ἔσαι δὲ ἡ $Γ=40^{\circ}$. καὶ τῆς μὲν γωνίας Α τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον $=9335804$, τὸ δὲ τῆς Β $=9455185$, τὸ δὲ τῆς Γ $=6427876$. ὡς ἄρα $ΒΓ:ΑΓ::9335804:9455185$, εἶπεν ὡς $ΒΓ:ΑΓ::1:1+\frac{119381}{9335804}$ καὶ ὡς $ΒΓ:ΑΒ::9335804:6427876$, ἦται ὡς $ΒΓ:ΑΒ::1+\frac{2907928}{9335804}$. 1. καὶ ὡς $ΑΓ:ΑΒ::9455185:6427876$, τετέστιν ὡς

Ε 3 ΑΓ:

(*) Κατὰ τὸ γ'. Θεώρ. τῷ προλ. βιβλ.

ΑΓ : ΑΒ :: $1 + \frac{3027300}{6427876}$: 1. (α) τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ εὐ-
 ρεθῆσεται ὁ λόγος, ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν αἱ τῆ
 ἀμβλυγωνίε τριγώνῃ πλευραί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

Μίας τῶν τῆ ὀξυγωνίε τριγώνῃ ΑΒΓ πλευ-
 ρῶν δοθείσης, καὶ δύο γωνιῶν, τὰς λοιπὰς
 τῆ τριγώνῃ εὐρεῖν πλευράς. χ. 24.

Ἐξω ἡ δοθεῖσα πλευρὰ ΑΓ = 1000, ἡ μὲν γω-
 νία Β = 39°, ἡ δὲ Γ = 55°, καὶ ἔσται δὴ ἡ γωνία
 Α = 86°. ἔστι δὲ τῆς μὲν Β γωνίας τὸ Ἡμίτονον =
 6293204, τὸ δὲ τῆς Γ = 8191521, τὸ δὲ τῆς Α =
 9975640. Ἐπεὶ δὲ ὡς Ἡμίτονον τῆς γωνίας Β, πρὸς
 Ἡμίτονον τῆς Γ, ἔτως ἡ ΑΓ : ΑΒ, ἔσται καὶ ὡς 6293204 :
 8191521 :: 1000 : ΑΒ. ἡ ἀρα ΑΒ = $1301 + \frac{1015649}{1573301}$.
 πάλιν ἐπεὶ ὡς Ἡμίτ. τῆς γων. Β, πρὸς Ἡμίτ.
 τῆς Α, ἔτως ΑΓ, πρὸς ΒΓ, ἔσται ὡς 6293204 : 9975-
 640 :: 1000 : ΒΓ, ἡ ἀρα ΒΓ = $1585 + \frac{227915}{1573301}$ τὰ
 αὐτὰ δὴ ποιητέον καὶ ἀμβλυγώνιον ἢ τὸ τρίγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

Δοθεισῶν δύο τῶν τῆ ὀξυγωνίε τριγώνῃ
 ΑΒΓ πλευρῶν, καὶ ὁποτερὰς τῶν μὴ ὑπ'
 αὐτῶν περιεχομένων γωνιῶν, τὰς λοιπὰς
 γωνίας καὶ τὴν λοιπὴν πλευρὰν εὐρεῖν. χ. 25.

Ἐξω ἡ μὲν ΑΒ = 150, ἡ δὲ ΒΓ = 100, ἡ δὲ γω-
 νία Γ = 63°, ἥς τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον = 8910065.

Ἐπεὶ

(α) Ὅροι τὴν β'. Συνέπ. τῶ ε'. ἔρισμ. τῶ α'. τῆς Ἀριθμ.
 βιβλ.

Ἐπεὶ ὡς AB , πρὸς $BΓ$, ἔτω τὸ τῆς $Γ$ γωνίας H' -
μίτονον, πρὸς τὸ τῆς A , ἔστω ἄρα ὡς $150 : 100 ::$
 8910065 , πρὸς τὸ τῆς A H' μίτ. τὸ ἄρα τῆς A
γωνίας H' μίτονον $= 5940043 + \frac{1}{2}$. τέττε δὲ τῷ ἀριθ-
μῷ ὁ ἐν τοῖς πῖναξιν ἐγγύτερος, ὁ ³ τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον
ἐμφαίνων τόξε 36° , $27'$, ἐστὶν ὁ 5941211 . διὸ ἡ γω-
νία $A = 36^\circ$, $27'$. ἔστι δὲ καὶ ἡ γωνία $Γ = 63^\circ$. ἡ
ἄρα γωνία $B = 80^\circ$, $33'$, ἥς H' μίτονον ὁ 9864293
ἀριθμός. ἐπεὶ δὲ ὡς H' μίτ. τῆς $Γ$, πρὸς H' μίτ. τῆς B ,
ἔτως $AB : AG$, ἔστω καὶ ὡς $8910065 : 9864293 ::$
 $150 : AG$. ἡ ἄρα $AG = 166 + \frac{573160}{8910065}$. τῷ αὐτῷ δὲ
τρόπῳ τὰ αὐτὰ εὐρεθήσονται καὶ τῷ ἀμβλυγωνίᾳ τρι-
γώνῳ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

Δοθεῖσῶν δύο τῶν τῷ $ABΓ$ ὀξυγωνίᾳ τριγώ-
νῳ πλευρῶν, καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομέ-
νης γωνίας BAG , τὰς λοιπὰς γωνίας καὶ τὴν
λοιπὴν εὐρεῖν πλευράν. πίν. $Γ'$ χ . 26.

Ἐῶ $AG = 16$, ἡ δὲ $AB = 12$, καὶ γωνία
ἡ $A = 63^\circ$, ἥς τὸ ὀρθὸν H' μίτονον $= 8910065$. ἀχ-
θείσης δὲ τῆς BD πρὸς ὀρθὰς τῇ AG , ἔστω ἡ γωνία
 $ABD = 27^\circ$, ἥς τὸ H' μίτονον $= 4539905$.

Ἐπεὶ δὲ ὡς τὸ τῆς ADB γων. H' μίτ. πρὸς τὸ τῆς ABD ,
ἔτως AB , πρὸς AD , ἔστω ὡς $10000000 : 4539905 ::$
 $12 : AD$. ἄρα ἡ $AD = \frac{54478860}{10000000}$. ἀλλ' $AG - AD = DG$.
ἄρα $DG = 16 - \frac{54478860}{10000000} = \frac{105521140}{100000000}$. πάλιν ἐπεὶ ὡς
τὸ τῆς BDA H' μίτ. πρὸς τὸ τῆς A , ἔτως $AB : BD$,
ἦτοι $10000000 : 8910065 :: 12 : BD$. ἡ ἄρα $BD =$

$\frac{106920780}{10000000}$. ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ἔν τριγώνῳ ΒΔΓ ἐστὶν ὡς ΒΔ πρὸς ΔΓ, ἔτω τὸ Ὀλομήτονον, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ΑΒΓ γωνίας, (β) ἔτεν ὡς $\frac{106920780}{10000000}$, $\frac{105521140}{10000000} :: 10000000$, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ΔΒΓ γωνίας. ἡ ἄρα ἐφαπτομένη τῆς ΔΒΓ γωνίας = 98690862. τάττε δὲ τῷ ἀριθμῷ ὁ ἐν τοῖς πίναξιν ἐγγύστερός ἐστιν ὁ 9867079, ὁ ἐμφαίνων ἐφαπτομένην τόξε 44°, 37'. ἡ ἄρα γωνία ΔΒΓ = 44°, 37'. ἀλλ' ἡ ΑΒΔ = 27°, ὡς δέδεικται, ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓ = 71°. 37'. ἐπεὶ ἔν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ γνωσαί εἰσιν αἱ δύο πλευραὶ, ΑΒ, ΑΓ. καὶ ἡ μὴ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία ΑΒΓ, καὶ τὰ λοιπὰ εὐρεθήσεται. (γ) Εἰάν δὲ ἡ ΒΑΓ γωνία ἀμβλεῖα ᾖ, καὶ ἡ ἀγομένη κάθετος ΒΔ ἐκτὸς τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ πίπτῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ ἐκβληθείσης κατὰ τὸ Δ, (χ. 27.) γνωσαί ἔσονται τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἢτε ΒΔΑ γωνία, ὡς ὀρθή, καὶ ἡ ΒΑΔ ὡς ἀναπλήρωμα πρὸς δύο ὀρθὰς τῆς δεδομένης ΒΑΓ, ἔστι δὲ καὶ ἡ πλευρὰ ΒΑ δεδομένη, διὸ γνωσαί ἔσονται καὶ αἱ τῶτε πλευραὶ, ΒΔ, ΔΑ. (δ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΓ δεδομένη ἐστὶ, γνωσὴ ἄρα ὅλη ἡ ΔΓ. ἐπεὶ ἔν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΒΔΓ γνωσαί εἰσιν αἱ δύο πλευραὶ ΒΔ, ΔΓ, αἱ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΔΓ περιέχουσαι, γνωσὴ ἄρα ἔσεται καὶ ἡ ΒΓ πλευρὰ, καὶ ἡ ΒΓΔ γωνία, (ε) ἐξ ὧν καὶ ἡ ΑΒΓ γνωσὴ ἔσται ὥστερ εἰσὶ τὰ ζητούμενα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι΄,

Δοθεσῶν πασῶν τῶν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ πλευρῶν, πάσας εὐρεῖν τὰς τῷ τριγώνῳ γωνίας.
 χ. 28. Ἔστω

(β) Ὅμοιόν τὸ β'. Οἰώμ. τῷ προλ. βιβλ. (γ) Κατὰ τὸ προλ. ἐρίβλ. (δ) Κατὰ τὸ β'. πρόβλ. (ε) Κατὰ τὸ ε. πρόβλ.

Ἐστω ἡ μὲν $AB = 50$, ἡ δὲ $BF = 30$, ἡ δὲ $AF = 64$. καὶ ἡχθῶ ἡ BD πρὸς ὀρθὰς τῇ AF . εἰάν δὲ ἡ κάθετος BD ἐκτὸς τῆς τριγώνου πίπτῃ, ἡχθῶ κάθετος ἦται ἀπὸ τῆς F τῇ AB , ἡ ἀπὸ τῆς A τῇ BF .

Ἡ ἔν ἀχθῆσα κάθετος BD ἦται εἰς ἴσα, ἡ εἰς ἄνισα τέμνει μέρη τὴν AF . τεμνέτω δὴ αὐτὴν εἰς ἴσα κατὰ τὸ Δ . καὶ ἐπεὶ δεδομένη ἡ AF , γνωσὸν ἐστὶ καὶ τὸ ἡμισυ αὐτῆς, εἴτεν ἡ AD . ἐπεὶ δὲ $AB^2 = BD^2 + AD^2$, (ζ) τῶν ἴσων ἄρα ἀφαιρεθέντων, ἔσεται $BD^2 = AB^2 - AD^2$, γνωσῶν δὲ ὄντων τῶν AB^2 , AD^2 , γνωσὸν ἔσται καὶ τὸ BD^2 . διὸ γνωστὴ καὶ ἡ τέττε ρίζα, εἴτεν ἡ BD . τῆς ὀρθογωνίης ἔν τριγώνου ABD γνωστὰί αἱ δύο πλευραὶ AD , DB αἱ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ADB περιέχουσαι, γνωστὰί ἄρα καὶ αἱ γωνίαι BAD , ABD . (η) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ γνωστὰί ἔσονται καὶ αἱ δύο γωνίαι BGD , GBD τῆς ὀρθογωνίης τριγωνίης BGD . διὸ γνωστὴ καὶ ὅλη ἡ ABG γωνία τῆς ABG τριγώνου. γνωστὰί δὲ, ὡς δέδεικται, καὶ αἱ A καὶ F γωνίαι, πᾶσαι ἄρα αἱ τῆς τριγώνου γωνίαι ἔυρηνται.

Εἰάν δὲ ἡ BD εἰς ἄνισα τέμνῃ τὴν AF κατὰ τὸ Δ , τετμήσθω ἡ AF εἰς ἴσα κατὰ τὸ E . εἰάν ἔν ἑυθετῇ ἡ ED , γνωστὴ ἔσται ἥτε AD καὶ ἡ DF . διὸ γνωστὰί ἔσονται καὶ πᾶσαι αἱ τῆς ABG τριγώνου γωνίαι κατὰ τὰ εἰρημένα. (θ. 29.) ἑυθεθήσεται δὲ ἡ ED ἔτω.

Τὸ $AB^2 = BD^2 + AD^2$. ἀλλ' $AD^2 = AE^2 + ED^2 + 2AE \cdot ED$. ED (θ) ἄρα $AB^2 = BD^2 + AE^2 + ED^2 + 2AE \cdot ED$. καὶ τῶν ἴσων ἀφαιρεθέντων, ἔσεται $BD^2 = AB^2 - AE^2 - ED^2 - 2AE \cdot ED$. πάλιν τὸ $BF^2 = BD^2 + DF^2$.
 $\overline{DF}^2$

Ε 5

(ζ) Κατὰ τὴν μδ'. τῆς ε'. (η) Κατὰ τὸ ε'. πρόβλ. (θ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς β'.

$$\begin{aligned}
 \overline{ΔΓ}^2, \text{ ἐπεὶ δὲ } \overline{ΓΔ}^2 + 2ΓΕ. ΕΔ &= \overline{ΕΓ}^2 + \overline{ΕΔ}^2, (1) \\
 \text{τὸ ἄρα } \overline{ΓΔ}^2 &= \overline{ΕΓ}^2 + \overline{ΕΔ}^2 - 2ΓΕ. ΕΔ. \text{ ἄρα } \overline{ΒΓ}^2 = \\
 \overline{ΒΔ}^2 + \overline{ΕΓ}^2 + \overline{ΕΔ}^2 - 2ΓΕ. ΕΔ. \text{ τῶν ἴσων ἄρα ἀφαι-} \\
 \text{ρεθέντων τε καὶ προσεθέντων, ἔσται } \overline{ΒΔ}^2 &= \overline{ΒΓ}^2 - \overline{ΕΓ}^2 - \\
 \overline{ΕΔ}^2 + 2ΓΕ. ΕΔ. \text{ ἀλλὰ δέδοικται } \overline{ΒΔ}^2 &= \overline{ΑΒ}^2 - \overline{ΑΕ}^2 - \\
 \overline{ΕΔ}^2 - 2ΑΕ. ΕΔ. \text{ ἄρα } \overline{ΒΓ}^2 - \overline{ΕΓ}^2 - \overline{ΕΔ}^2 + 2ΓΕ ΕΔ &= \\
 \overline{ΑΒ}^2 - \overline{ΑΕ}^2 - \overline{ΕΔ}^2 - 2ΑΕ. ΕΔ. \text{ τῶν ἴσων δὲ ἀφαιρε-} \\
 \text{θέντων καὶ προσεθέντων, ἔσται } \overline{ΒΓ}^2 + 2. ΓΕ. ΕΔ + & \\
 2ΑΕ. ΕΔ &= \overline{ΑΒ}^2. \text{ ἐπεὶ δὲ ἡ } ΓΕ = ΑΕ, \text{ ἄρα } \overline{ΒΓ}^2 + \\
 4 ΓΕ. ΕΔ &= \overline{ΑΒ}^2. \text{ διὸ } 4. ΓΕ. ΕΔ = \overline{ΑΒ}^2 - \overline{ΒΓ}^2. \text{ ἄρα} \\
 \text{τῶν ἴσων διαιρεθέντων διὰ τῆς αὐτῆς } 4 ΓΕ, \text{ ἔσται } ΕΔ &= \\
 \frac{\overline{ΑΒ}^2 - \overline{ΒΓ}^2}{4 ΓΕ}, \text{ εἴτεν } ΕΔ &= \frac{2500 - 900}{4 \cdot 128} = \frac{1600}{512} = 12 \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



Χρῆσις τῶν προεκτεθέντων Θεωρημάτων τε καὶ Προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Δύω τόπων, τῶν Α καὶ Β, τῶν ἀπότινος τρίτης
Γ προσιτῶν εὑρεῖν τὸ ἀπόστημα ΑΒ. χ. 30.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐν ἐκάστῳ τῶν Α, Β, Γ τόπων βακτηρίαν πῆξας,
καὶ λεπτά ἐπιζεύξας χοινία τὰ ΓΒ, ΓΑ, καὶ ὅσον
οἶόντε αὐτὰ ἐντείνας, ἵνα μὴ ἐπικαμπῇ, ἀλλ' εὐθεῖα
ᾶσι, διὰ μὲν τῆς καλεσμένης Γωνιομέτρου τὴν γωνίαν
Γ, διὰ δὲ τῆς τυχόντος μέτρου τὰ χοινία καταμέτρη-
σον. καὶ ἐπεὶ τῆς ΑΒΓ τριγώνου γνωσαί εἰσιν αἱ δύο
πλευραὶ ΓΒ, ΓΑ, καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γω-
νία

(1) Κατὰ τὴν ζ'. τῆ β'.

νία ΑΓΒ, γνωσὴ ἔσσι καὶ ἡ λοιπὴ τῆ τριγώνου πλευρὰ ΑΒ, (κ) ἥτις ἐστὶ τὸ ζητούμενον ἀπόστημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Τὸ προσιτὲ πύργου ΒΓ τὸ ὕψος εὐρεῖν. χ. 31.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Τόπον εὐρών τὸν Α πρὸς τὸ ὁρᾶν τὴν τῆ πύργου κορυφὴν Β ἐπιτήθειον, βακτηρίαν τὴν ΑΕ πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι πῆξον. ἐπιζεύξας δὲ λεπτόν χοινίον τὸ ΑΔ παραλλήλως τῇ ὁριζοντίῳ ΕΓ, τὸν Γωνιομέτρη τε ἐπὶ τὸ Α σήσας, διὰ τῆς διόπτρας τὸ πέρας τῆς τῆ πύργου κορυφῆς Β ὄρα. καταμέτρησον δὲ τὴν τε ΒΑΔ γωνίαν, τὴν ὑπὸ τῆ χοινίᾳ ΑΔ καὶ τῆς ἀκτίνος τῆ Φωτὸς τῆς ἀπὸ τῆ πέρατος Β ἐπὶ τὸν ὀφθαλμὸν πεμπομένης περιεχομένην, ἔτι δὲ καὶ τὸ ΑΔ χοινίον. καὶ ἐπὶ τῆ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ γνωσαί εἰσι δύο γωνίαι, ἥτε καταμετρηθεῖσα ΒΑΔ καὶ ἡ ὀρθὴ ΑΔΒ, ἔτι δὲ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΔ, γνωσὴ ἄρα καὶ ἡ ΒΔ. (λ) ἄλλὰ καὶ ἡ ΔΓ γνωσὴ, ὡς ἴση τῇ ΑΕ, γνωσὴ ἄρα καὶ ὅλη ἡ ΒΓ, τετέστι τὸ ζητούμενον ὕψος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Τὸ ἀπόστημα ΑΒ εὐρεῖν δύο τόπων τῶν Α καὶ Β, ἃν ὁ ἕτερος μόνον Α προσιτός. χ. 32.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐν τῷ τυχόντι τόπῳ Γ, ἐξ ἧς ὁρατὸς μὲν ὁ Β, προσιτὸς δὲ ὁ Α, βακτηρίαν σήσας, αὐσαύτως καὶ τῷ Α τόπῳ, καὶ λεπτόν χοινίον τὸ ΑΓ ἐπιζεύξας καὶ ἐνταίνας, καὶ ἀπὸ ἑκατέρου τῶν τόπων Α καὶ Γ, τὸν Β θεασάμενος, τὰς ΒΑΓ, ΒΓΑ γωνίας, ἃ ἐν τῷ προλαβόντι
προ-

(κ) Κατὰ τὸ δ'. πρόβλ. (λ) Κατὰ τὸ γ'. πρόβλ.

προβλήματι ἔρηται τρόπῳ καταμέτρησον, ἔμην ἀλλὰ καὶ τὸ ΔΓ χοινίον. καὶ ἐπεὶ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ γνωσά-
εἰσι δύο γωνία αἱ ΑΓΒ, ΓΑΒ, καὶ μία πλευρὰ ἡ ΑΓ,
γνωστὴ ἔσται καὶ ἡ ΑΒ, (μ) τὸ ζητούμενον δηλονότι ἀπό-
σημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Ἑυρεῖν τὸ ΑΒ ἀπόσημα τῶν Α καὶ Β ἀπρὸςί-
των τόπων. χ. 33.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Τρεῖς ἐπ' εὐθείας ἐκλέξας τόπους, ἐξ ὧν ὁρατοὶ οἱ
δύο Α καὶ Β, ἐπιζευξον ἐν αὐτοῖς τὸ λεπτόν χοινίον
ΔΓΕ. καὶ ἀπὸ ἐνὸς ἐκάστου αὐτῶν διὰ τῶν ΕΒ, ΓΒ, ΓΔ,
ΔΑ ἀκτίνων τῶν ἐπὶ τὰς ὀφθαλμὰς πιπτουσῶν, τὰς
Α καὶ Β τόπους θεασάμενος, καταμέτρησον, ὡς ἔρη-
ται, τάς τε γωνίας ΒΕΓ, ΒΓΕ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΑΔΓ, καὶ
τὰ ΓΕ, ΓΔ χοινία. Ἐπεὶ δὲ τῷ τριγώνῳ ΒΓΕ γνωσά-
εἰσι δύο γωνία, ἡ ΒΕΓ καὶ ἡ ΒΓΕ, καὶ μία πλευρὰ
ἡ ΓΕ, γνωστὴ ἄρα ἔσται καὶ ἡ ΓΒ. (ν) διὰ τὰ αὐτὰ
δὴ γνωστὴ καὶ ἡ τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ πλευρὰ ΑΓ. ἐπεὶ
ἐν τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ γνωσά εἰσι δύο πλευραὶ, αἱ ΓΒ,
ΓΑ, καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία ΑΓΒ, γνωστὴ
ἄρα ἔσεται καὶ ἡ ΑΒ πλευρὰ, ἥτις ἐστὶ τὸ ζητούμενον τῶν
δύο ἀπρὸςίτων τόπων ἀπόσημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

Τῷ ἀπρὸςίτε πύργῳ ΑΒ τὸ ὕψος εὑρεῖν. χ.

34.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Δύο τόπους ἑυρὰν τὰς Ε, Ζ, ἐπ' εὐθείας τῇ ὀριζον-
τίῳ ΕΒ κειμένους, καὶ τὰς Γωνιομέτρους ΕΔ, ΖΗ ἐπ' αὐ-
τῶν

(μ) Κατὰ τὸ ζ'. πρόβλ. (ν) Κατὰ τὸ ἐντ. πρόβλ.

τῶν πρὸς ὀρθὰς σήσας, καὶ λεπτόν χοινίον τὸ ΔΗ παράλληλον τῇ ΕΒ ἐπιζεύξας καὶ ἐντείνας, καὶ ἀπὸ τῶν Δ καὶ Η τὸ ἑκατον τῆς κορυφῆς Α πέρας, καὶ τὸ ἑκατον τῆς βάσεως Β θεασάμενος, καταμέτρησον, ὡς εἴρηται, τὰς ΑΔΓ, ΑΗΓ, ΓΗΒ γωνίας, καὶ τὸ ΔΗ χοινίον. καὶ ἐπεὶ τῷ ΔΑΗ τριγώνῳ γνωστὴ μὲν ἡ ΑΔΗ γωνία ὡς καταμετρηθεῖσα, γνωστὴ δὲ καὶ ἡ ΑΗΔ, ὡς παραπλήρωμα πρὸς δύο ὀρθὰς τῆς καταμετρηθείσης ΒΗΓ, γνωστὴ δὲ καὶ ἡ ΗΔ πλευρὰ, γνωστὴ ἄρα ἔσται καὶ ἡ ΑΗ. (ξ) τῷ ὀρθογωνίῳ ἔν τριγώνῳ ΑΗΓ γνωσταὶ αἱ δύο γωνίαι, ἥτε ὀρθὴ ΑΓΗ, καὶ ἡ καταμετρηθεῖσα ΑΗΓ, γνωστὴ δὲ καὶ ἡ ΑΗ πλευρὰ, γνωσταὶ ἄρα ἔσονται καὶ αἱ λοιπαὶ αὐτῷ πλευραὶ, ΑΓ, ΗΓ. (ο) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ γνωστὴ ἔσεται καὶ ἡ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΗΓΒ πλευρὰ ἡ ΓΒ. γνωστὴ δὲ καὶ ἡ ΑΓ, γνωστὴ ἄρα ὅλη ἡ ΑΒ, ἥτις ἐστὶ τὸ ζητούμενον ὕψος ΑΒ. Ὅμοιαις μεθόδοις καὶ ἄλλα τοιαῦτα, καὶ αὐτὰ δὴ τὰ ἀπρονομικά, ἐπιλύεται προβλήματα.

Τ Ε Λ Ο Σ

ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ.

ΚΩ.

(ξ) Κατὰ τὸ αὐτ. πρόβλ. (ο) Κατὰ τὸ β. πρόβλ.





ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΑ ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.



Α'. **Ε**ὰν ἀπότινος σημεῖς Α πρὸς κύκ-
λε περιφέρειαν τὴν ΔΕΒ, ὅς ἐκ
ἔσιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐν ᾧ
τὸ σημεῖον, εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα
ἡ ΔΔ, ἐφ' ἐκάτερα προσεκβληθῇ,
ἢ μένοντος τῷ σημεῖς Α, ἡ εὐθεῖα ΔΔ περὶ τὴν
τῷ κύκλῳ περιφέρειαν περινεχθεῖσα, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν
ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὴν γραφ-
θεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΔ ἐπιφάνειαν, ἡ σύγκει-
ται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν, κατὰ κορυφὴν ἀλλήλας κει-
μένων, ὧν ἑκατέρω εἰς ἄπειρον αὐξεται, τῆς γραφ-
σης εὐθείας εἰς ἄπειρον προσεκβαλλομένης, **Ἐπι-**
Φάνειαν κωνικὴν καλεῖσι. πίν. Α. χ. 1.

ΠΟ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. (*)

Εκ τούτων Φανερόν, ὅτι αἱ ἀπὸ τῆς σημείας Α τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σημεία Β, Η, εἴτεν αἱ ΑΒ, ΑΗ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εἰσὶ. μὴ γάρ. ἐκὼν εἰάν περιεγεχθῇ ἡ ΑΔ, ἡ τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν γεγραφεύσα, καὶ διὰ τῶν σημείων Η καὶ Β ἥξη, δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΖΒ, καὶ αἱ ΑΗ, ΑΘΗ χωρίον περιέξουσιν. ὅπερ ἀδύνατον. χ. 2.

Β'. Κῶνον καλῶσι τὸ περιεχόμενον χῆμα ὑπὸ τε τῆς κύκλου ΔΕΒ, καὶ τῆς μεταξὺ τῆς μεμενηκότες σημείας Α καὶ τῆς κύκλου περιφερείας κωνικῆς ἐπιφανείας. χ. 1.

Γ'. Κορυφὴν δὲ τῆς τε κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς κῶνις αὐτὸ τὸ μεμενηκὸς σημεῖον Α.

Δ'. Ἀΐξονα δὲ τῆς τε κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς Κῶνις τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὸ κέντρον Κ τῆς κύκλου ΔΕΒ ἐπιζευγνυμένην εὐθεῖαν ΑΚ.

Ε'. Βάσιν δὲ τῆς μὲν κωνικῆς ἐπιφανείας, τὴν τῆς κύκλου περιφέρειαν· τῆς δὲ Κῶνις, αὐτὸν τὸν κύκλον ΔΕΒ.

Ζ'. Καὶ ὀρθὸν μὲν Κῶνον, τὸν ΑΔΕΒ, τὸν πρὸς ὀρθαῖς ἔχοντα τῇ βάσει τὸν Αΐξονα ΑΚ· (χ. 1.)

Σκαληνὸν δὲ τὸν ΑΓΕΒ, τὸν μὴ πρὸς ὀρθαῖς ἔχοντα τῇ βάσει ΓΕΒ τὸν Ἀΐξονα ΑΚ. χ. 3.

Ζ'. Πάσης καμπύλης γραμμῆς, οἷον τῆς ΑΒΘ, ἥτις ἐστὶν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ, (ἡ τῆς κυλίνδρου ἑλιξ καὶ τῆς Σφαίρας ἐκ εἶναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.) Διάμετρον μὲν καλῶσιν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, ἥτις ἡγμένη ἀπὸ τῆς καμ-

(*) Η' α. πρότ. ἐστὶ τῆ α. βιβλ. τῆ Ἀπολλωνία.

καμπύλης γραμμῆς $AB\Theta$, πάσας τὰς ἀγομένους ἐν αὐτῇ εὐθείας, $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$ παραλλήλους δίχα τέμνει. χ . 4.

Η'. Ἄξονα δὲ τὴν αὐτὴν Διάμετρον AB , εἰς δὲ δίχα τε καὶ πρὸς ὁρθὰς τέμνη τὰς παραλλήλους IK , ΛM , $NΞ$. χ . 5.

Θ'. Καμπύλων δὲ γραμμῶν τῶν EAZ , $\Theta B\Lambda$ ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ κειμένων, Διάμετρον μὲν πλαγίαν καλλῶσιν εὐθεῖαν τὴν AM , ἢ BH , ἥτις τὰς δύο καμπύλας γραμμὰς τέμνεσα, πάσας τὰς ἀγομένους παραλλήλους $\Gamma\Delta$, EZ , IK , $\Theta\Lambda$ ἐν ἑκατέρᾳ τῶν καμπύλων γραμμῶν δίχα τέμνει. Ἄξονα δὲ, εἰς δὲ δίχα τε καὶ πρὸς ὁρθὰς. χ 6 καὶ 7.

Ι'. Ὀρθίαν δὲ Διάμετρον εὐθεῖαν τὴν PP , ἥτις κειμένη μεταξὺ τῶν δύο καμπύλων EAZ , $\Theta B\Lambda$, πάσας τὰς ἀγομένους εὐθείας EO , ΓI , ΔK , $Z\Lambda$ παραλλήλους τῇ πλαγίᾳ Διαμέτρῳ AM , τὰς ἀπολαμβανόμενας μεταξὺ τῶν καμπύλων γραμμῶν δίχα τέμνει· εἰς δὲ δίχα τε καὶ πρὸς ὁρθὰς, Ἄξονα ὀρθόν.

ΙΑ'. Καὶ συζυγεῖς μὲν Διαμέτρου καμπύλης γραμμῆς τῆς $BA\Theta$, καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, τῶν EAZ , $\Theta B\Lambda$ εὐθείας τὰς AB , PP , ὧν ἑκατέρα Διάμετρος ἔσσι, τὰς τῇ ἑτέρᾳ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ (χ . 4, 6.) εἰ δὲ δίχα τε καὶ πρὸς ὁρθὰς, Ἄξονας συζυγεῖς. χ . 5, καὶ 7.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Πᾶς ἄρα Ἄξων, Διάμετρος ἐστίν, ἐχὼς δὲ καὶ τέναντίον.

ΙΒ'.

- ΙΒ'. Κορυφή μὲν καμπύλης γραμμῆς λέγεται τὸ ἐν αὐτῇ πέρασ Α τῆς Διαμέτρου ΑΒ. (χ. 8.) Κορυφαὶ δὲ καμπύλων γραμμῶν τὰ πρὸς αὐταῖς πέρατα, Α, Β. χ. 4, 5, 6, 7.
- ΙΓ'. Τεταγμένως δὲ κατῆχθαι ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΑΒ, ἡ Τεταγμένη, ἐκάστη τῶν ἐν ταῖς καμπύλαις γραμμαῖς παραλλήλων, ΓΔ, ΕΖ, (χ. 4.) ΙΚ, ΛΜ, (χ. 5.) ΕΖ, ΓΔ, ΙΚ, ΘΔ, (χ. 6, 7.) ΙΚ, ΛΜ. χ. 8.
- ΙΔ'. Ἀποτετμημένη δὲ μέρος, οἷον τὸ ΑΥ, ΑΦ τῆς Διαμέτρου, τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α, καὶ τῆς τεταγμένης ΓΔ, ΙΚ, (χ. 4, 5.) ἢ ΕΖ, ΙΚ, (χ. 6, 7.) ἢ ΛΜ ἀπολαμβάνομενον. (χ. 8. 5.)
- ΙΕ'. Ἐάν ὁ Κῶνος ΑΒΔ ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς Α, ἡ τομὴ τριγώνον ἔσται ἥτοι τὸ ΒΑΔ; εἰάν διὰ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς Ἀξονος (χ. 1.) ἢ τὸ ΑΒΔ, εἰάν διὰ μόνης τῆς κορυφῆς. χ. 2.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Α'.

Ἰστέον, ὅτι ὁ ὀρισμὸς ἔτος ἡ τρίτη πρότασις τῆς ἀριθμολογίας τῆς Ἀπολλωνίου ἐστίν. ἥς ἡ δειξις ἐπίδηλος. ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀπὸ τῆς Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη κοινὴ τομὴ ἐστὶ τῆς τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς τῆς Κῶνος ἐπιφανείας, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΑΔ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΒΔ εὐθεῖα. τρίγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΔ. χ. 1, 2.

ΙΣ'. Ἐάν κῶνος ὁ ΑΒΔ ἐπιπέδῳ τμηθῇ τῷ ΗΙΖ παραλλήλῳ τῇ τῆς κῶνος βάσει ΒΕΔ, τὸ ἀπολαμβάνομενον ἐπίπεδον μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας, ἔσται ἡ γνωμένη τομὴ, κύκλος ἐστὶ, τὸ κέντρον ἔχον ἐπὶ τῆς Ἀξονος ΑΚ. πίν. Β. χ. 1.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Ὁ ὄρισμός ἔτος ἡ τετάρτη πρότασις ἐστὶ τῷ α'. βιβλίῳ τῷ Ἀπολλωνίῳ, ἣτις καὶ ἐκ τῆς τῷ Κώνῃ γενέσεως προφανής, δείκνυται δ' ἐν ὅμως ἔτῳσί· συμβαλλέτω ἐπίπεδον διὰ τῆς ΑΚ, καὶ ἔσται δὴ τρίγωνον τὸ ΑΒΔ. (α) καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ι ἐπὶ τῆς ΗΙΖ γραμμῆς, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΙ, ἐκβεβλήτω. αὕτη δὴ συμπεσῇται τῇ περιφερείᾳ τῷ κύκλῳ ΒΕΔ. (β) καὶ ἀπὸ τῷ σημείῳ Γ, καὶ τὸ τέρνον ἐπίπεδον τῷ ΑΚ Ἀξονι συμβάλλει, ἐπὶ τὸ Ι ἐπεζεύχθω ἡ ΓΙ, ὁμοίως καὶ ἡ ΚΕ. καὶ ἐπεὶ ὡς ΑΚ : ΑΓ :: ΚΔ : ΓΖ, (γ) ἔστι δὲ καὶ ὡς ΑΚ : ΑΓ :: ΚΕ : ΓΙ, ἄρα καὶ ὡς ΚΔ : ΓΖ :: ΚΕ : ΓΙ. (δ) ἀλλ' ἡ ΚΔ = ΚΕ. ἄρα καὶ ἡ ΓΖ = ΓΙ. (ε) ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῷ Γ σημείῳ πρὸς τὴν ΗΙΖ γραμμὴν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. κύκλος ἄρα ἐστὶν ὁ ΗΙΖ, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τῷ Ἀξονί ΑΚ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. (ζ)

Καὶ ἄλλως δὲ τῷ σκαληνῷ Κώνῃ τεμνομένῃ, ἡ τομὴ κύκλος ἐστὶ. τετμήτω γάρ ὁ ΑΒΔ κῶνος (χ. 2.) ἐπίπεδῳ διὰ τῷ Ἀξονί ΑΚ, ὁρθῶς πρὸς τὴν τῷ Κώνῃ βύσιν ΒΕΔ. τεμήτω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπίπεδῳ πρὸς ὁρθὰς ὄντι τῷ ΑΒΔ ἔτῳς ὑπεναντίως ἡγμένῳ, ὥστε τὴν ΑΘΖ γωνίαν ἴσην εἶναι τῇ ΑΒΔ, καὶ ποιέτω τομὴν ἐν τῇ τῷ Κώνῃ ἐπιφανείᾳ τὴν ΖΗΘ. λέγω, ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ ΖΗΘ. ἀπὸ γάρ τῶν τυχόντων σημείων τῆς τε ΖΗΘ γραμμῆς καὶ τῆς ΒΕΔ περιφερείας ἤχθωσαν αἱ ΗΦ, ΕΙ πρὸς ὁρθὰς τῷ ἐπίπεδῳ ΑΒΔ. αἵτινες δὴ καὶ
ταῖς

- (*) Κατὰ τὸν ιε'. ὄρισμ. (β) Κατὰ τὸ α'. Πόρ. (γ) Κατὰ τὴν ιε', τῷ ια'. καὶ τὴν δ'. τῷ ε'. (δ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (ε) Κατὰ τὴν β'. τῷ ε'. (ζ) Ἡ ε'. πρότ. ἐστὶ τῷ α'. βιβλίῳ τῷ Ἀπολλωνίῳ.

ταῖς κοιναῖς τῶν ἐπιπέδων τομαῖς ΖΘ, ΒΛ πρὸς ὁρθὰς ἔσονται. (η) παρὰλληλος ἄρα ἡ ΗΦ τῇ ΕΙ. (θ) καὶ ἀπὸ τῆ Φ, καὶ δ' ὁ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τῷ ΑΚ Ἀξονι συμβάλλει, ἢ ΧΘ ἡ ΔΦΓ παρὰλληλος τῇ ΒΛ. τὸ ἄρα διὰ τῶν ΗΦ, ΔΓ ἐπίπεδον παρὰλληλὸν ἐστὶ τῷ διὰ τῶν ΒΛ, ΕΙ. (ι) ἡ ἄρα ΔΗΓ γραμμὴ κύκλος ἐστὶ. (κ) τὸ ἄρα ΔΦ. ΦΓ = ΦΗ². (λ) ἐστὶ δὲ ὡς ΔΦ: ΘΦ:: ΖΦ: ΦΓ. (μ) ὅμοια γὰρ τὰ ΔΦΖ, ΓΦΘ τρίγωνα. τὸ ἄρα ΔΦ. ΦΓ = ΘΦ. ΦΖ. (ν) τὸ ἄρα ΦΗ² = ΘΦ. ΦΖ. ἡ ἄρα ΖΗΘ γραμμὴ κύκλος ἐστὶ, διάμετρον ἔχων τὴν ΖΦΘ. (ξ)

ΙΖ'. Εἰάν Κῶνος ὁ ΑΒΔ (Χ. 3.) ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῆ Α'ξονος, καὶ ποιήσῃ τομὴν τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν τῆ κώνος βάσιν ΒΜΔ κατ' ἐυθεῖαν τὴν ΖΜ πρὸς ὁρθὰς ἔσαν τῇ βάσει ΒΔ τῆ διὰ τῆ Α'ξονος τριγώνου ΒΑΔ, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ ΝΚ τῆ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ τῆ διὰ τῆ Α'ξονος τριγώνου, ἡ Διάμετρος τῆς τομῆς καλεσμένη, παρὰλληλος ἢ μιᾷ πλευρᾷ, τῇ ΑΒ, τῆ διὰ τῆ Α'ξονος τριγώνου, ἡ γενομένη τομὴ ΜΝΖ Παραβολὴ καλεῖται. (ο)

ΙΗ'. Εἰάν Κῶνος ὁ ΑΒΔ (Χ. 4.) τμηθῇ διὰ τῆ Α'ξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ, τέμνοντι τὴν τῆ κώνος βάσιν ΒΖΔ κατ' ἐυθεῖαν τὴν ΖΜ πρὸς ὁρθὰς ἔσαν τῇ βάσει ΔΒ τῆ διὰ τῆ Α'ξονος τριγώνου ΔΑΒ, καὶ
 Ζ 2 ἡ

(η) Κατὰ τὸν δ' ὅρισ. τῆ ια. (θ) Κατὰ τὴν ε'. τῆ ια. (ι) Κατὰ τὴν ιε. τῆ ια. (κ) Κατὰ τὴν β'. σημ. (λ) Κατὰ τὴν β'. Συνέπ. τῆς η. τῆ ε'. (μ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (ν) Κατὰ τὴν ις. τῆ ε'. (ξ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς η. τῆ ε'. (ο) Τοῦ δὲ τὸν ὅρισ. ἡ ια. πρὸς. τῆ ια. βιβλ. τῆ Ἀπολλων. περιήχα.

ἢ τῆς τομῆς Διάμετρος ΝΦ ἐκβαλλομένη συμπίπτῃ μιᾷ πλευρᾷ, τῇ ΒΑ ἐκβληθείσῃ, τῇ διὰ τῆς Ἀΐζονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς τῆς Κώνος κορυφῆς, οἷον ἐπὶ τὸ Γ, ἡ γενομένη τομὴ ΜΝΖ Ὑπερβολὴ καλεῖται. (π)

ΙΘ'. Ἐὰν Κώνος ὁ ΒΑΔ (χ. 5.) ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῆς Ἀΐζονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπιπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τῇ διὰ τῆς Ἀΐζονος τριγώνου, μήτε δὲ παραλλήλῳ τῇ βάσει τῆς Κώνος, μήτε ὑπεναντίως ἡγμένῳ, ἡ γενομένη τομὴ ΝΖΨΜ Ἐλλειψις λέγεται. (ρ)

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἐκ τῶν Φανερόν, ὅτι εἰ μὲν ἡ κοινὴ τομὴ ΗΖ (χ. 1.) τῇ διὰ τῆς Ἀΐζονος τριγώνου ἢ τῇ τέμνοντος ἐπιπέδῳ παραλλήλος ἢ τῇ βάσει ΕΔ τῆς τριγώνου, ἢ (χ. 2.) ὑπεναντίως ἡγμένη ἐν τῷ σκαληνῷ Κώνῳ, ἡ γενομένη τομὴ Κύκλος ἐστίν· εἰ δὲ τῇ ἑτέρᾳ τῶν τῆς τριγώνου πλευρῶν, οἷον τῇ ΑΒ, (χ. 3.) παραλλήλος, ὡς ἡ ΝΚ, Παραβολή· Ἐὰν δὲ τῇ ἑτέρᾳ συμπιπτῇ, εἰ μὲν ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τῆς Κώνος, οἷον κατὰ τὸ Γ, (χ. 4.) Ὑπερβολή· εἰ δὲ ἐντὸς, οἷον κατὰ τὸ Ψ, Ἐλλειψις. χ. 5.

Κ'. Ἐὰν οἱ κατὰ κορυφὴν Κώνοι ΑΒΔ, ΑΤΨ (χ. 4.) ἐπιπέδῳ τμηθῶσι μὴ διὰ τῆς κορυφῆς, ἔσται ἐν ἑκατέρῳ Κώνῳ τομὴ, ἡ καλεσμένη Ὑπερβολή. καλεῖσθαι δὲ αἱ μὲν τοιαῦται τομαί, Ἀντικείμεναι, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν κορυφῶν Ν, Γ, τῶν τομῶν ΖΝΜ, ΧΓΥ, ἐνθεῖα, ἡ ΝΓ, πλάγια πλευρά. (σ)

ΣΗ.

(π) Τῶτον δὲ ἢ ιβ'. τῇ αὐτ. (ρ) Τῶτον δὲ ἢ ιγ'. τῇ αὐτ.
(σ) Ἡ ιδ'. πρότ. ἐστὶ τῇ προαρχμ. βιβλ.

ΣΗΜΒΕΙΩΣΙΣ Δ΄.

Καὶ ἡ Διάμετρος δὲ τῆς Ἐλλείψεως ΨΝ, ἡ μετα-
ξὺ τῶν κορυφῶν Ν, Ψ πλαγία αὐτῆς πλευρὰ
λέγεται. χ. 5.

ΚΑ΄. Ὁρθία Πλευρὰ, ἡ Παράμετρος λέγεται
τῆς μὲν Παραβολῆς (χ. 3) ἡ τρίτη ἀνάλογος ἀπο-
τετμημένης ὁποιασῶν, ἢ τῆς ἀπολαμβάνεσης αὐτὴν
τεταγμένης, οἷον ἡ ΝΟ, ἡ τρίτη ἀνάλογος τῶν ΝΠ,
ΖΠ· τῆς δὲ Ὑπερβολῆς, (χ. 4.) ἡ τετάρτη ἀνά-
λογος τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἐκ τῆς Διαμέτρου καὶ τῆς
ὁποιασῶν ἀποτετμημένης, τῷ τετραγώνῳ τῆς τε-
ταγμένης τῆς αὐτὴν ἀπολαμβάνεσης, ἢ τῆς πλα-
γίας πλευρᾶς, οἷον ἡ ΝΣ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν
ΓΦ, ΦΝ, ΖΦ², ΓΝ· τῆς δὲ Ἐλλείψεως, (χ. 5.) ἡ
τετάρτη ἀνάλογος τῷ ἐκ τῶν τμημάτων τῆς Δια-
μέτρου ὀρθογωνίῳ, τῷ τετραγώνῳ τῆς τεταγμένης
τῆς τὴν Διάμετρον τεμνέσης, καὶ τῆς πλαγίας
πλευρᾶς, οἷον ἡ ΝΡ, ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν ΨΦ,
ΦΝ, ΖΦ², ἢ ΨΝ.

ΚΒ΄. Τῆς Ὑπερβολῆς καὶ τῆς Ἐλλείψεως ἑκατέρως ἡ
διχοτομία Κ, ἡ Γ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΝΓ, ἡ ΨΝ,
Κέντρον τῆς τομῆς καλεῖσθαι, ὁμοίως ἢ τῶν Ἀντι-
κειμένων ἡ διχοτομία Κ, χ. 4, καὶ 5.

ΚΓ΄. Ἡ δὲ ἀπὸ τῶν κέντρων πρὸς τὴν τομὴν προσπίπ-
τουσα, ἐκ τῶν κέντρων τῆς τομῆς, οἷον ἡ ΓΜ.
(πίν. Θ. χ. 2.)

ΚΔ΄. Ἡ ἀπὸ τῶν κέντρων Γ ἡ γμένη ΒΔ (πίν. Θ. χ. 1.)
παράλληλος τῇ τεταγμένῃ ΜΘ μέσοντε λόγον ἔχει,
σα τῶν τῷ εἶδὲς πλευρῶν, εἶτεν τῆς πλαγίας ΨΑ

καὶ τῆς ὀρθίας, ΑΥ, καὶ διχοτομημένη, ὑπὸ τῆς κέντρως Δευτέρως Διάμετρος καλεῖσθαι.

ΚΕ'. Δευτεραίᾳ δὲ Διάμετρος ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ ΑΦ, (πίν. Δ. χ. 3. καὶ 5.) ἡ ἀπὸ τῆς σημείως τῆς ἀφῆς Μ τῇ πρώτῃ Διαμέτρῳ ΑΑ ἀγομένη παραλλήλος ΜΖ, καὶ δίχα τέμνεσα τὰς τῇ ἐφαπτομένη ΜΤ παραλλήλους, ΕΦ, ΑΧ· ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει ἡ ἀπὸ τῆς κέντρως Γ ἐπὶ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς Μ ἐπιζευγνυμένη τε καὶ ἐκβαλλομένη, ΜΓΣ, πίν. ΚΑ'. χ. 4.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ε'.

Ἐὰν ἡ Διάμετρος αὐτὴ ἢ ἡ κοινὴ τομὴ τῆς τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς διὰ τῆς Ἀΐζωνος τριγώνου, οἷον ἡ ΝΚ, ἢ ΝΦ, ἢ ἡ ΝΨ, Διάμετρος ἐκ τῆς γεννήσεως, ἢ Διάμετρος ἀρχικὴ, ἢ Διάμετρος πρώτη λέγεται. πίν. Β. χ. 3, 4, 5.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Σ'.

Ἡ μὲν Παραβολή, καὶ ἡ Ὑπερβολή, καὶ αἱ Διάμετροι αὐτῶν, αἱ πρώται καὶ αἱ δευτεραίαι, τῶν εἰς ἀπείρον εἰσὶν αὐξανομένων, ἡ δὲ Ἐλλείψις καὶ αἱ Διάμετροι αὐτῆς ἐκ ἐστὶ. πᾶσα γὰρ εἰς αὐτὴν συνένεικε ὁμοίως τῷ Κύκλῳ. ἴστέον γὰρ ὅτι καὶ ἡ Ὑπερβολὴ δευτεραίαν ἔχει Διάμετρον, ἐξαγομένην κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καθ' ὃν καὶ ἡ ἐν τῇ Παραβολῇ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ζ'.

Οἱ παλαιοί, φησὶν ὁ Γεμῖνος, (1) Κῶνον ὀριζόμενοι τὴν τῆς ὀρθογωνίου τριγώνου περιφορὰν, μενέσης μιᾶς τῶν

(1) Παρὰ Ἐυτοκίῳ ἐν τοῖς Πέρουσι, τῆς α'. βιβλ. τῶν Κωνικ. τῆς Ἀπελλωνίης.

τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς, εἰκότως καὶ τὰς Κῶνες πάντας ὀρθὰς ὑπελάμβανον γίνεσθαι, καὶ μίαν τομήν ἐν ἐκάστῳ, ἐν μὲν τῷ ὀρθογωνίῳ τὴν νῦν καλε-
 μένην Παραβολήν, ἐν δὲ τῷ ἀμβλυγωνίῳ τὴν Ὑπερ-
 βολήν, ἐν δὲ τῷ ὀξυγωνίῳ τὴν Ἐλλειψιν. καὶ ἔστι παρ'
 αὐτοῖς εὐρεῖν ὀνομαζομένας ἕτω τὰς τομαίς. ὥσπερ ἔν
 τῶν Ἀρχαίων ἐπὶ ἐνὸς ἐκάστῳ εἶδες τριγώνῳ θεωρησάν-
 των τὰς δύο ὀρθὰς, πρότερον ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ, καὶ
 πάλιν ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ, καὶ ὕστερον ἐν τῷ σκαληνῷ.
 οἱ μετὰγενέτεροι καθολικὸν θεωρήμα ἀπέδειξαν τοῦ-
 τον παντὸς τριγώνῳ αἱ ἐντὸς τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρ-
 θαῖς ἴσαι εἰσὶν ἕτω καὶ ἐπὶ τῶν τῷ Κῶνι τομῶν. τὴν
 μὲν γὰρ λεγομένην ὀρθογωνίᾳ Κῶνι τομήν ἐν ὀρθογω-
 νίῳ μόνον Κῶνι εἰδεώρεν, τεμνομένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς
 μίαν πλευράν τῷ Κῶνι τὴν δὲ τῷ ἀμβλυγωνίᾳ Κῶνι
 τομήν, ἐν ἀμβλυγωνίῳ γενομένην Κῶνι ἀπεδείκνυσαν.
 τὴν δὲ τῷ ὀξυγωνίᾳ, ἐν ὀξυγωνίῳ, ὁμοίως ἐπὶ πάντων
 τῶν Κῶνων ἄγοντες τὰ ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς μίαν πλευ-
 ράν τῷ Κῶνι. δηλοῖ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ἀρχαῖα ὀνόματα
 τῶν γραμμῶν. ὕστερον δὲ Ἀπολλώνιος ὁ Περργαῖος κα-
 θόλῃς τι εἰδεώρησεν ὅτι ἐν παντὶ Κῶνι καὶ ὀρθῷ καὶ
 σκαληνῷ, πᾶσαι αἱ τομαί εἰσι, κατὰ διάφορον τῷ ἐ-
 πιπέδῳ πρὸς τὸν Κῶνον προσβολήν ὃν καὶ θαυμάσαν-
 τες οἱ κατ' αὐτὸν γινόμενοι, διὰ τὸ θαυμάσιον τῶν ὑπ'
 αὐτῷ δεδειγμένων κωνικῶν θεωρημάτων, μέγαν Γεωμέ-
 τρην ἐκάλεν. ταῦτα μὲν ἔν ὃ Γεμῖνος ἐν τῷ ἔκτῳ τῆς
 τῶν μαθημάτων θεωρίας, ὃ δὲ Εὐτόκιος ἀναπτύσσων
 φησὶν.

Ὁ δὲ λέγει σαφὲς ποιήσομεν ἐπὶ τῶν ὑποκειμένων
 καταγραφῶν. ἔστω τὸ διὰ τῷ Ἀΐζονος Κῶνι τρίγωνον τὸ
 ΑΒΓ. (πίν. Β'. χ. 6.) καὶ ἡχθῶ τῇ ΑΒ ἀπὸ τυχόν-
 τος σημείῳ τῷ Ε πρὸς ὀρθάς ἢ ΔΕΖ, καὶ τὸ, τε διὰ

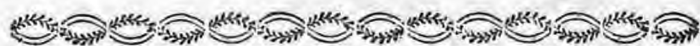
Z +

τῆς

τῆς ΔΖ ἐπίπεδον ἐμβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΒ, τε-
 νέτω τὸν Κῶνον. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ὑπὸ ΑΕΔ,
 ΑΕΖ γωνιῶν, καὶ ὀρθογωνίαι μένοντες τῇ Κῶνι, καὶ ὀρ-
 θῆς δηλονότι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας, ὡς ἐπὶ τῆς πρώ-
 τῆς καταγραφῆς, δύο ὀρθαὶ ἔσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ,
 ΑΕΖ γωνία. ὥστε παρὰλλήλως ἐστὶν ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ, καὶ
 γίνεται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ Κῶνι τομὴ ἡ καλεσμένη
 Παραβολή, ἔτω κληθεῖσα ἀπὸ τῇ παρὰλληλῳ εἶναι
 τὴν ΔΕΖ, ἥτις ἐστὶ κοινὴ τομὴ τῇ τέμνοντος ἐπιπέδου
 καὶ τῇ διὰ τῇ Ἀΐζονος τριγώνου, τῇ ΑΓ πλευρᾷ τῇ
 τριγώνου. Ἐὰν δὲ ἀμβλυγώνιος ᾖ ὁ Κῶνος, ὡς ἐπὶ
 τῆς δευτέρας καταγραφῆς, (χ. 7.) ἀμβλείας δη-
 λονότι ἔσῃς τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, ὀρθῆς δὲ τῆς ὑπὸ ΑΕΖ,
 δύο ὀρθῶν μείζους ἔσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ γωνία,
 ὥστε ὁ συμπεσῇται ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ πλευρᾷ ἐπὶ τὰ
 πρὸς τοῖς Ζ, Γ μέρη, ἀλλὰ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς Α, Ε,
 προσεκβαλλομένης δηλονότι τῆς ΓΑ ἐπὶ τὰ Δ. ποιήσει
 ἐν τῷ τέμνον ἐπίπεδον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ Κῶνι το-
 μὴν ἐπικαλεσμένην Ὑπερβολήν, ἔτω κληθεῖσαν ἀπὸ
 τῇ ὑπερβάλλειν τὰς ἐρημένας, τετέστι τὰς ὑπὸ ΒΑΓ,
 ΑΕΖ δύο ὀρθαῖς, ἡ διὰ τὸ ὑπερβάλλειν τὴν ΔΕΖ τὴν
 κορυφὴν τῇ Κῶνι, καὶ συμπίπτειν τῇ ΓΑ ἐκτός. Ἐὰν
 δὲ ὀξυγώνιος ᾖ ὁ Κῶνος, ὀξείας δηλονότι ἔσῃς τῆς ὑπὸ
 ΕΑΓ, (πίν. Γ. χ. 1.) αἱ ΒΑΓ, ΑΕΖ ἔσονται δύο ὀρ-
 θῶν ἐλάσσονες, καὶ αἱ ΕΖ, ΑΓ ἐκβαλλόμεναι συμπεσῶνται
 ὁπερὸς ποτε προσαυξήσῃ γὰρ δύναμαί τὸν Κῶνον ἔσῃ
 ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὴ, ἥτις καλεῖται Ἐλλειψις,
 ἔτω κληθεῖσα ἡ διὰ τὸ ἐλλεῖπειν δύο ὀρθαῖς τὰς προ-
 σερημένας γωνίας, ἡ διὰ τὸ τὴν Ἐλλειψιν κύκλον εἶναι
 ἐλλειπῇ. ἔτω μὲν ἐν αἱ παλαιοὶ ὑποθέμενοι τὸ τέμνον
 ἐπίπεδον τὸ διὰ τῆς ΔΕΖ πρὸς ὀρθαῖς τῇ ΑΒ πλευρᾷ
 τῇ διὰ τῇ Ἀΐζονος τῇ Κῶνι τριγώνου, καὶ ἔτι διαφέ-

ρε

ρες τὰς Κώνες ἐθεώρησαν, ἢ ἐπὶ ἐκάστῃ ἰδίαν τομήν.
ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ὑποθέμενος Κῶνον καὶ ὀρθὸν ἢ σκα-
ληνόν, τῇ διαφόρῳ τῇ ἐπιπέδῃ κλίσει διαφόρες ἐποίησε
τὰς τομαίς. (υ)



Τ Μ Η Μ Α Π Ρ Ω Τ Ο Ν

Περὶ τῶν τῆς Παραβολῆς συμπτω-
μάτων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Ἐὰν ἐν Παραβολῇ ἀπὸ τῆς τομῆς καταχ-
θῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν Διάμετρον τεταγ-
μένως, ἔσονται ὡς τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα
πρὸς ἄλληλα, ἕτως αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ'
αὐτῶν ἀπὸ τῆς Διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ
τῆς τομῆς.

Ἔστω Παραβολή, ἥς Διάμετρος ἡ ΝΚ. καὶ εἰλήφ-
θω τινὰ σημεῖα ἐπ' αὐτῆς, τὰ Φ, Μ, καὶ ἀπ' αὐ-
τῶν τεταγμένως κατήχθησαν ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΚΝ
αἱ ΦΙ, ΜΚ. λέγω ὅτι ἔσιν ὡς $\overline{ΦΙ}^2 : \overline{ΜΚ}^2 :: ΝΙ : ΝΚ$.
πίν. Γ. χ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω διὰ τῆς Ι ἐν τῷ διὰ τῆς Ἀξονος τριγώνῳ
ΔΑΒ ἡ ΓΙΕ παράλληλος τῇ τῆς βάσεως τῆς Κώνος ΔΑΒ
Διαμέτρῳ ΔΒ, καὶ ἤχθω διὰ τῶν ΦΙ, ΓΕ ἐπίπεδον
τὸ ΓΦΕ.

Ζ 5

ΔΕΙ-

(υ) Ὅρα τὸ γ'. Πέρισμ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ μὲν ΓΕ τῇ ΔΒ, (α) ἡ δὲ ΦΙ τῇ ΜΚ παραλλήλος, (β) καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπίπεδα ΓΦΕ, ΔΜΒ παραλλήλα εἰσιν. (γ) ἡ ἄρα ΓΦΕ γραμμὴ κύκλος ἐστὶ. (δ) καὶ ἐπεὶ ἡ γωνία ΦΙΓ = ΜΚΔ, (ε) ἐστὶ δὲ ἡ ΜΚΔ ὀρθή, (ζ) ἄρα καὶ ἡ ΦΙΓ ὀρθή. τὸ μὲν ἄρα $\overline{ΦΙ}^2 = \overline{ΓΙ} \cdot \overline{ΙΕ}$, τὸ δὲ $\overline{ΜΚ}^2 = \overline{ΔΚ} \cdot \overline{ΚΒ}$. (η) ὡς ἄρα $\overline{ΦΙ}^2 : \overline{ΜΚ}^2 :: \overline{ΓΙ} \cdot \overline{ΙΕ} : \overline{ΔΚ} \cdot \overline{ΚΒ}$. (θ) ἀλλ' ὡς $\overline{ΓΙ} \cdot \overline{ΙΕ} : \overline{ΔΚ} \cdot \overline{ΚΒ} :: \overline{ΓΙ} : \overline{ΔΚ}$. (ι) ἐστὶ γὰρ ἡ $\overline{ΙΕ} = \overline{ΚΒ}$, (κ) ὡς δὲ $\overline{ΓΙ} : \overline{ΔΚ} :: \overline{ΝΙ} : \overline{ΝΚ}$. (λ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΦΙ}^2 : \overline{ΜΚ}^2 :: \overline{ΝΙ} : \overline{ΝΚ}$. (μ) ὁ ἔδει δεῖξαι.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Αἱ τεταγμέναι ΦΙ, ΜΚ ὑποδιπλασίονα λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ἥπερ αἱ ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνόμεναι ΝΙ, ΝΚ· εἴτεν $\overline{ΦΙ} : \overline{ΜΚ} :: \sqrt{\overline{ΝΙ}} : \sqrt{\overline{ΝΚ}}$. ἐπεὶ γὰρ ὡς $\overline{ΦΙ}^2 : \overline{ΜΚ}^2 :: \overline{ΝΙ} : \overline{ΝΚ}$, ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΦΙ} : \overline{ΜΚ} :: \sqrt{\overline{ΝΙ}} : \sqrt{\overline{ΝΚ}}$. (ν)

Β'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α (χ. 3.) τῆς Παραβολῆς ΑΜ παραλλήλος ἀχθῇ ἡ ΑΡ ὅποιαν τῶν ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΑΠ τεταγμένων ΜΠ, μπ, αἱ ἀπὸ τῶν σημείων Μ, μ τεταγμένως καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν ΑΡ λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὅν τὰ ἀπὸ τῶν ἀποτετμημένων ὑπ' αὐτῶν ἀπὸ τῆς ΑΡ πρὸς τῇ κορυφῇ τετραγώνω, εἴτεν ἐστὶν ὡς $\overline{ΜΚ} : \overline{μκ} :: \overline{ΑΚ}^2 :$

- (α) Ἐκ τῆς κατασκευ. (β) Κατὰ τὸν ἰγ'. ὄρισμ. (γ) Κατὰ τὴν ιε. τῆ ια. (δ) Κατὰ τὴν β'. Σημ. (ε) Κατὰ τὴν ι. τῆ ια. (ζ) Ἐκ τῆ ιζ'. ὄρισμ. ὁῦλον. (η) Κατὰ τὴν β'. Σημ. τῆς θ. τῆ ε'. (θ) Ἐκ τῆς α. τῆ ι. ὁῦλον. (ι) Κατὰ τὴν α. τῆ ε'. (κ) Κατὰ τὴν λδ'. τῆ ια. (λ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (μ) Κατὰ τὴν ι. τῆ ι. (ν) Κατὰ τὸ ζ'. τῶν μετὰ τὸ ι. βιβ. Θεωρημ.

$\overline{AK}^2 : \overline{AK}^2$, ἐπεὶ γὰρ $AP : Ap :: \overline{PM}^2 : \overline{pm}^2$, (ξ)
 ἔστι δὲ ἡ μὲν $AP = MK$, ἡ δὲ Ap τῇ mk , ἡ δὲ
 PM τῇ AK , καὶ ἡ pm τῇ AK (ο) ἄρα καὶ ὡς
 $MK : mk :: \overline{AK}^2 : \overline{AK}^2$. Ἐκδὲν ἐντὸς μὲν τῆς Παρα-
 βολῆς, αἱ ἀποτετμημέναι λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλή-
 λας ὅν τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα· ἐκ-
 τὸς δὲ τέναντίον, ἀμέλειται αἱ τεταγμέναι λόγον
 ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὅν τὰ ἀπὸ τῶν ἀποτετμη-
 μένων τετράγωνα.

Γ'. Ἐὰν ἀπὸ τινος τῆς AP σημείῃς τῷ Γ ἀχθῇ ἡ EO
 παράλληλος τῇ Διαμέτρῳ AP , τέμνουσα τὴν μὲν
 Παραβολὴν κατὰ τὸ Φ , τὴν δὲ ἐπιζευχθεῖσαν AM
 κατὰ τὸ I , τὴν δὲ τεταγμένην MP κατὰ τὸ O ,
 ἔσονται αἱ GO , GI , $G\Phi$ συνεχῶς ἀνάλογον. ἡχθω-
 σαν γὰρ ἀπὸ τῶν Φ καὶ I σημείων αἱ $\Phi\Delta$, $ΙΔ$
 παράλληλοι τῇ τεταγμένῃ MP . καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{PM}^2 :$
 $\overline{AI}^2$ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $PM : AI$. (π)
 ἔστι δὲ ὡς $PM : AI :: AP, AL$, (ρ) ἔτεν ὡς
 $GO : GI$. τὸ ἄρα $\overline{PM}^2 : \overline{AI}^2$, ἢ τὸ $\overline{PM}^2 : \overline{\Delta\Phi}^2$ δι-
 πλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $GO : GI$. ἀλλ' ὡς $\overline{PM}^2$
 $\overline{\Delta\Phi}^2 :: AP : AL$, (σ) ἦτοι ὡς $GO : G\Phi$ ἢ ἄρα $GO : G\Phi :$
 διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $GO : GI$, ὅπερ ἐστίν,
 $GO : GI :: GI : G\Phi$. (τ)

Δ'. Ἐὰν αἱ τεταγμέναι $\Phi\Delta$, $μπ$, MP , λόγον ἔχουσι
 πρὸς ἀλλήλας ὅν οἱ ἀριθμοὶ τῆς Φυσικῆς σειρᾶς 1,
 2, 3, αἱ ἀπ' αὐτῶν ἀποτετμημέναι $\Delta\Delta$, $Απ$, $ΑΠ$,
 λόγον ἔξουσιν ὅν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν εἰρη-
 μέ-

(ξ) Κατὰ τὴν προκ. πρῶτ. (ο) Κατὰ τὴν λδ'. τῷ α'. (π) Ἐκ
 τῆς ιθ' τῷ ε'. δηλον. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (σ) Κατὰ
 τὴν προκ. πρῶτ. (τ) Ὅσον τὸ β'. πρὸς τὸ ε'.

μένων ἀριθμῶν, ἔπεν 1, 4, 9. ἔστι γὰρ ὡς ΑΔ:
 ΑΠ: $\overline{\Phi\Delta^2} : \overline{\mu\pi^2}$, καὶ ὡς ΑΠ: ΑΠ:: $\overline{\mu\pi^2} : \overline{ΜΠ^2}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'. (υ)

Τὸ ἀπὸ πάσης ἐν Παραβολῇ τεταγμένης
 τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ἀποτετμη-
 μένης ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς πε-
 ριεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐξω Παραβολῇ ἡ ΑΜ, ἥς Διάμετρος μὲν ἡ ΑΚ,
 ὀρθία δὲ πλευρὰ ἡ ΑΖ, ἡ τρίτη ἀνάλογος τοῖς ἀπο-
 τετμημένῃς ΑΠ, καὶ τῆς τεταγμένης ΜΠ. (Φ) λέγω,
 ὅτι καὶ τὸ $\overline{ΛΙ^2} = \overline{ΑΙ. ΑΖ. Χ. 4}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ὡς ΑΠ: ΜΠ:: ΜΠ: ΑΖ, (Χ) τὸ ἄρα $\overline{ΜΠ^2} =$
 $\overline{ΑΠ. ΑΖ. (Ψ)}$ ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{ΜΠ^2} : \overline{ΛΙ^2} :: ΑΠ : ΑΙ$,
 (ω) ἔστι δὲ ὡς ΑΠ: ΑΙ:: ΑΠ. ΑΖ: ΑΙ. ΑΖ, (α)
 ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΜΠ^2} : \overline{ΛΙ^2} :: ΑΠ. ΑΖ : ΑΙ. ΑΖ. (β)$ ἀλ-
 λά τὸ $\overline{ΜΠ^2} = \overline{ΑΠ. ΑΖ. ἄρα καὶ τὸ \overline{ΛΙ^2} = \overline{ΑΙ. ΑΖ. (γ)}$ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ $\overline{ΨΔ^2} =$
 $\overline{ΑΨ. ΑΖ}$, καὶ τὸ ἀπὸ πάσης ἄλλης τεταγμένης τε-
 τράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ἀποτετμημένης ὑπ' αὐ-
 τῆς καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΖ περιεχομένῳ ὀρθο-
 γωνίῳ.

ΣΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΖ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α πα-
 ρακλήθε ἀχθείσης ταῖς τεταγμέναις, δίχα δὲ τμη-
 θεί-

(υ) Ἡ ια'. ἐστὶ τῷ α'. τῷ Ἀπολλων. (Φ) Ὅρα τὸν κ'. ὄρισμ.
 (Χ) Ἐξ ὑποθ. (Ψ) Κατὰ τὴν ιζ'. τῷ ε'. (ω) Κατὰ τὴν α'.
 (α) Κατὰ τὴν α'. τῷ ε'. (β) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (γ) Κατὰ
 τὴν κ'. τῷ ε'.

θείσης κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Ζ, Γ ἔχθεισῶν τῶν ΖΟ, ΓΡ παραλλήλων τῇ Διαμέτρῳ ΑΚ, ἐκβληθεῶν τε τῶν τεταγμένων ΜΠ, ΛΙ κατὰ τὰ Ο, Η σημεία, τὸ ἀπὸ τῆς ΜΠ τετραγώνον ἴσον μὲν ἔσται τῷ παραλληλογράμῳ ΠΖ, διπλάσιον δὲ τῷ ΠΓ· ὡσαύτως τὸ ἀπὸ τῆς ΛΙ ἴσον μὲν τῷ ΙΖ, διπλάσιον δὲ τῷ ΙΓ. τὸ αὐτὸ δὴ ἔσται καὶ περὶ τὸ ἀπὸ πάσης τεταγμένης τετραγώνον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Τὴν μὲν ΖΟ, Διευθετῶσαν καλεῖν εἰώθασιν τὴν δὲ ΓΡ, Ὑποδιευθετῶσαν. καὶ μήτιγε διὰ τῆτο ἡ τοιαύτη τῷ Κώνῃ τομῇ, Παραβολῇ ἐπεκλήθη, παρὰ τῷ παραβάλλεσθαι δηλαδὴ παρὰ τὴν ὀρθίαν πλευρὰν ΑΖ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετραγώνοις. καὶ γὰρ καὶ ὁ Εὐκλείδης Φησὶ, παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἐυθεῖαν παραλληλόγεμμον παραβαλεῖν. (δ)

Β'. Δοθείσης τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΖ, ῥαδίως ὀρίσασιν ἐνεστὶ, πότερον τὸ δοθεὶς σημεῖον Δ ἐν τῇ Παραβολῇ ἐστὶν ἢ ἔξω. κατῆχθω γὰρ ἀπὸ τῷ Δ ἡ ΔΨ πρὸς ὀρθὰς τῇ Διαμέτρῳ ΑΚ, καὶ ληφθείσης τῆς ΨΚ ἴσης τῇ ὀρθίᾳ ΑΖ, ἡμικύκλιον γεγραφθῶ ἐπὶ τῆς ΑΚ. εἰάν ἐν τῷτο διὰ τῷ Δ ἡ Ξη, ἐν τῇ Παραβολῇ ἐστὶ τὸ Δ σημεῖον. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΨ. ΨΚ = ΨΔ², (ε) ἔστι δὲ ἡ ΨΚ = ΑΖ, ἄρα καὶ τὸ ΑΨ. ΑΖ = ΨΔ². ἐξ ἧς δὴλον, ὅτι τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ Παραβολῇ ΑΜ κεῖται.

Γ'. Καὶ ἡ Παραβολὴ δὲ καταγραφήσεται, ἥς ἡ ὀρθία δέδοται. ἔσω γὰρ ὀρθία πλευρὰ ἡ ΑΚ, (πίν. Δ'.

Χ.

(δ) Ἐν τῇ μὲν. τῷ Α'. (ε) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς ἡ. τῷ Ε'.

Χ. 1.) καὶ κείθω ἐπ' εὐθείας εὐθείᾳ τῇ ΑΧ, τὸν τῆς παραβολῆς Α'ξονα ἐμφανέσῃ. καὶ ἀπὸ τῆ Α ἤχθω τὴς εὐθείας ἡ ΑΨ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΚΧ, καὶ ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ συνεχές. καὶ σημείων συνεχῶν ληφθέντων ἐπὶ τῆς ΑΧ, τῶν Γ, Δ, Μ, Χ, γεγράφθω ἐπὶ τῶν ΚΓ, ΚΔ, ΚΜ, ΚΧ ἡμικύκλια τὴν ΑΨ τέμνοντα κατὰ Η, Ε, Ι, Ψ σημεία, καὶ ἐξ αὐτῶν ἀναστήτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΒ, ΛΔ, ΜΦ, ΧΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΧ. καὶ εἰλήθω ἡ μὲν ΓΒ=ΑΗ, ἡ δὲ ΛΔ=ΑΕ, ἡ δὲ ΜΦ=ΑΙ, ἡ δὲ ΧΖ=ΑΨ. λέγω δὴ ὅτι διὰ τῶν σημείων Β, Δ, Φ, Ζ Παραβολὴ ἦξει, ὅπερ ἐστίν, ἐπιζευχθεῖσάν τῶν ΑΒ, ΒΔ, ΔΦ, ΦΖ, Παραβολὴ συγκροτηθήσεται, ἥς ὀρθία μὲν πλευρὰ ἡ ΑΚ, Α'ξων δὲ ἡ ΑΧ, καὶ κορυφὴ τὸ Α. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{ΑΗ}^2 = ΚΑ \cdot ΑΓ$, (ζ) ἔστι δὲ ἡ ΑΗ=ΓΒ, ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΓΒ}^2 = ΚΑ \cdot ΑΓ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται ὅτι τὸ μὲν $\overline{ΛΔ}^2 = ΚΑ \cdot ΑΛ$, τὸ δὲ $\overline{ΜΦ}^2 = ΚΑ \cdot ΑΜ$, τὸ δὲ $\overline{ΧΖ}^2 = ΚΑ \cdot ΑΧ$. ἡ ἄρα ΑΖ Παραβολὴ ἐστίν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Ὅσον ἐγγύτερον ἀλλήλων ἐκλαμβάνεις τὰ Α, Γ, Δ, Μ, Χ σημεία, τοσῶτον μᾶλλον ἀλλήλοις ἐγγίξεισι καὶ τὰ Α, Β, Δ, Φ, Ζ. διὸ ἀκριβέστερον ἡ Παραβολὴ καταγραφθήσεται. δεῖ δὲ καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τὰ αὐτὰ κατασκευάσαι, ὅπως αὐὰ ἀρτία γραφῇ ἡ Παραβολή.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'. (η)

Ἐν Παραβολῇ τὸ ὑπὸ δύο ὁποιωνῶν τεταγμένων, ὡς ὑπὸ μιᾶς καὶ τῆς ὑπεροχῆς αὐ-

(ζ) Κατὰ τὴν αὐτ. (η) Ἐν τοῖς τῷ Ἀπολλων. ἀρχ. εὐρηται, ὅθεν δὲ συνέπαι τῆς προλαβέσης προτάσεως ἐστίν, ἣν ὁ Πάππος ἐ' Ἀλεξανδρείᾳ ἐσχάτην τῷ δ'. βιβλ. τῶν Συλλογ. ἔταξε.

αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ
ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὑπ'
αὐτῶν ἀποτεμνομένων καὶ τῆς ὀρθίας πλευ-
ρᾶς.

Ἐξω Παραβολὴ ἡ ANE, ἥς ὀρθία μὲν ἡ AG,
Διάμετρος δὲ ἡ AD, τεταγμέναι δὲ ὅποιαιεν αἱ NM,
ED, λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν δύο NM, ED, ἄς ὑπὸ
μιας καὶ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώ-
νιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὑπ' αὐτῶν
ἀποτεμνομένων AM, AD, ἔσται τῷ ὑπὸ τῆς MD καὶ
τῆς ὀρθίας πλευρᾶς AG. πίν. Γ. 5.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθω ἐπὶ τὰ ἕτερα τῆς Παραβολῆς μέρη
ἡ ED. καὶ ἀπὸ τοῦ N ἤχθω ἡ NH παραλλήλος τῇ AD.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν $\overline{ED}^2 = AD \cdot AG$, τὸ δὲ $\overline{NM}^2 = AM \cdot AG$.
(θ) τὸ ἄρα $\overline{ED}^2 - \overline{NM}^2 = AD \cdot AG - AM \cdot AG =$
 $AD - AM \cdot AG = MD \cdot AG$. (ι) ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{ED}^2 = \Phi H \cdot$
 $HE + \overline{DH}^2$, (κ) ἐστὶ δὲ ἡ $DH = NM$, (λ) τὸ ἄρα $\overline{ED}^2 =$
 $\Phi H \cdot HE + \overline{NM}^2$. κοινὸν ἀφαιρεθῶ τὸ $\overline{NM}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ED}^2 -$
 $\overline{NM}^2 = \Phi H \cdot HE$. ἀλλὰ δέδεικται τὸ $\overline{ED}^2 - \overline{NM}^2 = MD \cdot$
 AG . τὸ ἄρα $\Phi H \cdot HE = MD \cdot AG$. ἐστὶ δὲ ἡ μὲν ΦH ἴση ταῖς
δυσὶ τεταγμέναις NM, ED· ἡ μὲν γὰρ $NM = HD$,
(μ) ἡ δὲ $ED = \Phi D$, (ν) ἡ δὲ HE ἡ ὑπεροχὴ αὐ-
τῶν. τὸ ἄρα ὑπὸ δύο τεταγμένων ὡς ὑπὸ μιας, καὶ
τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ
ὑπὸ

(θ) Κατὰ τὴν α'. (ι) Κατὰ τὸ γ'. Α'ξ. τῆ α'. (κ) Κατὰ τὴν
ε' τῆ β'. (λ) Κατὰ τὴν λδ'. τῆ α'. (μ) Κατὰ τὴν αὐτήν.
(ν) Κατὰ τὸν ζ'. ὁρισμ.

ὑπὸ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνομένων καὶ
τῆς ὀρθίας πλευρᾶς.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΔΙ.

Α'. Η' ὀρθία τῆς Παραβολῆς πλευρά πρὸς τὸ ἀθροί-
σμα δύο ὁποίων ἐν τεταγμένων λόγον ἔχει, ὃν ἡ
ὑπεροχὴ αὐτῶν, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ὑπ' αὐτῶν
ἀποτεμνομένων. Επεὶ γὰρ ΜΔ. ΑΓ = ΦΗ. ΗΕ,
ὡς ἄρα ΑΓ : ΦΗ :: ΗΕ : ΜΔ. (ξ)

Β'. Αἱ ἀπὸ τῶν τυχόντων τῆς Παραβολῆς σημείων Τ,
Ν ἀγόμεναι τῇ ΑΔ Διαμέτρῳ παρὰλληλοι ΤΥ, ΝΗ,
καὶ τὴν ΦΕ τεταγμένην τέμνουσαι κατὰ τὰ Υ, Η
σημεῖα, λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν τὰ ὑπὸ
τῶν τμημάτων τῆς ΦΕ περιεχόμενα ὀρθογώνια, εἴ-
τεν ἐσὶν ὡς ΤΥ : ΝΗ :: ΦΥ. ΥΕ : ΦΗ. ΗΕ. τε-
ταγμένως γὰρ καταχθείσης ἀπὸ τῆς Τ τῆς ΤΧ,
ἔσεται τὸ μὲν ΧΔ. ΑΓ, ἦτοι ΤΥ. ΑΓ = ΦΥ. ΥΕ,
τὸ δὲ ΜΔ. ΑΓ, εἶτεν ΝΗ. ΑΓ = ΦΗ. ΗΕ. ὡς
ἄρα ΤΥ. ΑΓ : ΝΗ. ΑΓ :: ΦΥ. ΥΕ : ΦΗ. ΗΕ. (ο)
ἀλλ' ὡς ΤΥ. ΑΓ : ΝΗ. ΑΓ :: ΤΥ : ΝΗ. (π) ὡς
ἄρα ΤΥ : ΝΗ :: ΦΥ. ΥΕ : ΦΗ. ΗΕ.

Γ'. Τὰ ὑπὸ τῶν τεταγμένων ΦΕ, ΣΝ ἀπολαμβάνο-
μενα τῆς ΤΥ μέρη, ΤΥ, ΤΚ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλα ὡς
τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων ΦΥ, ΥΕ, ΣΚ, ΚΝ τῶν τε-
ταγμένων περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἦτοι ἐσὶν ὡς ΤΥ :
ΤΚ :: ΦΥ. ΥΕ : ΣΚ. ΚΝ. τὸ μὲν γὰρ ΦΥ. ΥΕ =
ΤΥ. ΑΓ, τὸ δὲ ΣΚ. ΚΝ = ΜΧ. ΑΓ = ΤΚ, ΑΓ. ὡς
ἄρα ΤΥ. ΑΓ : ΤΚ. ΑΓ :: ΦΥ. ΥΕ : ΣΚ. ΚΝ. ἔστι δὲ
ὡς ΤΥ. ΑΓ : ΤΚ. ΑΓ :: ΤΥ : ΤΚ. (ρ) ἄρα καὶ ὡς
ΤΥ : ΤΚ :: ΦΥ. ΥΕ : ΣΚ. ΚΝ. (σ)

Δ'.

(ξ) Κατὰ τὴν ιε'. τῆ ε'. (ο) Κατὰ τὴν α'. τῆ ε'. (π) Κατὰ
τὴν α'. τῆ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτ. (σ) Κατὰ τὴν ε'. τῆ ε'.

Α'. Ἐάν ἀπὸ ἐκβληθείσης τεταγμένης τῆς ΨΤ ληφ-
θῇ σημεῖα τὰ Ω, Ζ, αἱ ἀπ' αὐτῶν τῇ Διαμέτρῳ
ΑΔ ἀγόμεναι παράλληλοι ΩΝ, ΖΕ, καὶ τῇ Παρα-
βολῇ κατὰ τὰ Ν, Ε σημεῖα συμπίπτουσαι λόγον
ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὅν τὰ ὀρθογώνια τὰ περι-
εχόμενα ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανορένων ὑπὸ τῶν πα-
ραλλήλων τῆς ἐκβληθείσης μερῶν, καὶ τῶν μεταξὺ
αὐτῶν καὶ τῆς Παραβολῆς τμημάτων, εἶπεν εἶναι
ὡς ΩΝ: ΖΕ:: ΨΩ. ΩΤ: ΨΖ. ΖΤ. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν
 $\overline{MN}^2 = \overline{AM}$. ΑΓ, τὸ δὲ $\overline{XT}^2 = \overline{AX}$. ΑΓ, (τ) ἄρα καὶ τὸ
 $\overline{MN}^2 - \overline{XT}^2$, ἦτοι τὸ $\overline{X\Omega}^2 - \overline{XT}^2 = \overline{AM}$. ΑΓ—ΑΧ.
ΑΓ=ΑΜ—ΑΧ. ΑΓ=ΧΜ. ΑΓ=ΩΝ. ΑΓ. ἐπεὶ δὲ τὸ
ΨΩ. ΩΤ+ $\overline{XT}^2 = \overline{X\Omega}^2$, (υ) κοινῶς ἀφαιρεθέντος τῷ
 $\overline{XT}^2$, ἔσεται τὸ ΨΩ. ΩΤ= $\overline{X\Omega}^2 - \overline{XT}^2$. τὸ ἄρα
ΨΩ. ΩΤ=ΩΝ. ΑΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται,
ὅτι καὶ τὸ ΨΖ. ΖΤ=ΖΕ. ΑΓ. ὡς ἄρα ΩΝ. ΑΓ: ΖΕ.
ΑΓ, εἶπεν ὡς ΩΝ: ΖΕ:: ΨΩ. ΩΤ: ΨΖ. ΖΤ.

Ε'. Ἐάν δὲ τις τεταγμένη ἡ ΣΝ ἐκβληθεῖσα τέμνῃ τὴν
ἐκβληθεῖσαν ΖΕ, ἔσεται ὅλη ἡ ΖΕ πρὸς τὸ τμηθεῖν
μέρος ΙΕ, ὡς τὸ προειρημένον ὀρθογώνιον ΨΖ. ΖΤ,
πρὸς τὸ ΣΙ. ΙΝ. τὸ μὲν γὰρ ΨΖ. ΖΤ=ΖΕ. ΑΓ, τὸ
δὲ ΣΙ. ΙΝ=ΙΕ. ΑΓ. (φ) ὡς ἄρα ΖΕ. ΑΓ: ΙΕ. ΑΓ,
ἦτοι ὡς ΖΕ: ΙΕ:: ΨΖ. ΖΤ: ΣΙ. ΙΝ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'. (χ)

Ἀπὸ τῆς δοθέντος σημείῃς τῆς δοθείσης Πα-
ραβολῆς εὐθεῖαν ἀπτομένην ἀγαγεῖν.

Η

Ἐξω

(τ) Κατὰ τὴν β'. (υ) Κατὰ τὴν ε'. τῆ β'. (φ) Κατὰ τὴν
προη. Σημείω. (χ) Ἦτοι ἡ ΖΕ καὶ ἡ ΣΝ. ἐπεὶ τῆς α' β' β' τῆς

Ἐξω πρῶτον τὸ δοθὲν τῆς Παραβολῆς ΦΑΕ σημεῖον ἢ κορυφὴ αὐτῆς Α. ρ. 5.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῆς δοθέντος σημείου Α ἢ ΑΓ παράλληλος ὁποιαῦν τῶν τεταγμένων, οἷον τῇ ΨΤ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ ἐκτὸς τῆς τομῆς πίπτει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ ΑΒ. ἀπὸ τῆς σημείου ἄρα Β τῆς Παραβολῆς ἢ ΒΑ ἤχθη παράλληλος μὲν ταῖς τεταγμέναις, συμπιπτέσα δὲ κατὰ τὸ τῆς Διαμέτρου πέρας Α. ἡ ἄρα ΑΒ τεταγμένη ἐστὶν ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΑΔ, (ψ) καὶ μὴ διχοτομημένη ὑπ' αὐτῆς. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. (ω) ἐκτὸς ἄρα τῆς Παραβολῆς πίπτει ἡ ΑΓ, καὶ ἐφάπτεται αὐτῆς κατὰ τὸ Α σημεῖον.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔξω ἢ κορυφὴ τὸ δοθὲν σημεῖον, ἀλλ' ἄλλο τὶ, οἷον ἐστὶ τὸ Μ. πίν. Δ'. ρ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἀπὸ τῆς Μ τεταγμένως κατήχθω ἐπὶ τὴν Διάμετρον ἡ ΜΠ. καὶ ἀπὸ τῆς ἐκβληθείσης Διαμέτρου ἐκτὸς τῆς τομῆς εἰλήφθω ἡ ΑΤ=ΑΠ. καὶ ἀπὸ τῆς Τ ἐπὶ τὸ Μ ἐπεζεύχθω ἡ ΤΜ. λέγω ὅτι ἡ ΤΜ καὶ ἐν μόνον σημεῖον τὸ Μ ἐφάπτεται τῆς τομῆς. (*)

Ἐφαπτέσθω γὰρ, εἰ δυνατόν, καὶ κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐκθείσης τῆς ὀρθῆς πλευρᾶς ΑΝ παραλλήλῃ τῇ τεταγμένῃ ΜΠ, καὶ τῆς Ὑποδιευθετέσης ΡΖ, τετάχθω ἀπὸ τῆς Δ ἡ ΔΗ, καὶ ἐκβεβλήθω, ὡσαύτως καὶ ἡ ΜΠ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῇ Ὑποδιευθετέσῃ κατὰ τὸ Φ

(ψ) Κατὰ τὸν ἰγ'. ὁρισμ. (ω) Ἐκ τῆς ζ'. ὁρισμ. δηλον. (*) Τὰς μερὲς τῆς λβ. τῆς κ. βιβλ. τῆς Ἀπολλων.

Φ καὶ Ζ σημεῖα. καὶ ἀπὸ τῆς Ζ ἐπὶ τὸ Τ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΤ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΠΤ διπλασία ἐστὶ τῆς ΠΑ. (α) τὸ τρίγωνον ἄρα ΖΠΤ ἴσον ἐστὶ τῷ παραλληλογράμῳ ΡΠ. (β) ἀφηρέσθω ἀπὸ μὲν τῆς τριγώνου ΖΠΤ τὸ τετράπλευρον ΖΛΗΠ, ἀπὸ δὲ τῆς παραλληλογράμμου ΡΠ τὸ παραλληλόγραμμον ΠΦ, τὸ μείζον τῆς τετραπλεύρου ΖΛΗΠ. λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΤΗ τρίγωνον μείζον λοιπῆς τῆς ΡΗ παραλληλογράμμου. καὶ ἐπεὶ ὡς $\overline{ΜΠ}^2 : \overline{ΔΗ}^2 :: ΠΤΜ$ τρίγωνον : ΗΤΔ τρίγων. (γ) ἔστι δὲ ὡς $ΠΤΜ : ΗΤΔ :: ΠΤΖ : ΗΤΛ$. καὶ γὰρ ὡς $ΠΤΜ : ΗΤΔ :: \overline{ΠΤ}^2 : \overline{ΗΤ}^2$, ὁμοίως καὶ ὡς $ΠΤΖ : ΗΤΛ :: \overline{ΠΤ}^2 : \overline{ΗΤ}^2$. (δ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΜΠ}^2 : \overline{ΔΗ}^2 :: ΠΤΖ : ΗΤΛ$. (ε) ἀλλὰ τὸ $\overline{ΜΠ}^2$ διπλασίον ἐστὶ τῆς ΡΠ, (ζ) διπλασίον ἐστὶ καὶ τῆς ἴσης αὐτῷ τριγώνῳ ΠΤΖ. ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΔΗ}^2$ διπλασίον τῆς ΗΤΛ. ἀλλὰ τὸ ΗΤΛ μείζον δέδεικται τῆς ΡΗ. ἄρα τὸ $\overline{ΔΗ}^2$ μείζον τῆς διπλασίας τῆς ΡΗ. ἀλλὰ τὸ αὐτὸ $\overline{ΔΗ}^2$ ἐστὶ διπλασίον καὶ τῆς ΡΗ. (η) τὸ αὐτὸ ἄρα $\overline{ΔΗ}^2$ καὶ μείζον καὶ ἴσον τῷ διπλασίῳ τῆς ΡΗ, ὅπερ ἀδύνατον. ἔκ ἄρα ἡ ΤΜ ἐφάπτεται τῆς τομῆς κατὰ τὸ Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι ἐδὲ κατὰ ἄλλο σημεῖον, πλὴν τῆς Μ ἐφάπτεται. ἡ ΤΜ ἄρα ἐστὶν ἡ ζητούμενη.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Ἐντεῦθεν πολλάκι προκύπτουσι τῆς εὐθείας ἀπτεμένην ἀγειν ἀπὸ τῆς δοθέντος τῆς Παραβολῆς σημείας μέθοδοι. ἐπὶ γὰρ τὸ $\overline{ΜΠ}^2$ διπλασίον ἐστὶν, ὡς

Η 2

δὲ-

(α) Ἐκ τῆς κατασκευ. ἄλλον. (β) Ἐκ τῆς μα'. τῆς α'. ἄλλον.
(γ) Κατὰ τὴν ιδ'. τῆς ε'. (δ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (ε) Κατὰ τὴν ε. τῆς ε. (ζ) Κατὰ τὴν α. συνέπ. τῆς β'. (η) Κατὰ τὴν

δίδεται, τῷ ΠΤΖ τριγώνῳ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΖΠ. ΠΤ. ὡς ἄρα ΖΠ : ΜΠ :: ΜΠ : ΠΤ. ἔκῃν ἂν ἀπὸ τῷ δοθέντος σημείῳ Μ τεταγμένη ἐπὶ τὴν Διάμετρον καταχθῇ ἢ ΜΠ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπέσῃ τῇ Ὑποδιευθετῇ κατὰ τὸ Ζ, ἔυρεθῇ δὲ τρίτῃ ἀνάλογος τῆς τε ΖΠ, τῆς μεταξὺ τῆς Διαμέτρου καὶ τῆς Ὑποδιευθετῆς, καὶ τῆς τεταγμένης ΜΠ, ληφθῇ δὲ ἢ ΠΤ ἴση τῇ ἔυρεθείσῃ τρίτῃ ἀναλόγῳ, καὶ ἀπὸ τῷ Τ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθῇ ἢ ΤΜ, αὕτη ἐφαπτομένη ἐστὶ τῆς Παραβολῆς κατὰ τὸ Μ.

Β'. Ἐὰν ἀπὸ τῷ Μ ἀχθῇ ἢ ΜΒ παράλληλος τῇ Διαμέτρῳ, τὸ ὑπ' αὐτῆς ἐμπεριλαμβανόμενον τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης μέρος, τὸ ΑΒ, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΜΤ κατὰ τὸ Γ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΜΠ : ΓΑ :: ΠΤ : ΑΤ, (θ) ἔστι δὲ ἢ ΠΤ διπλασία τῆς ΑΤ, (ι) ἄρα καὶ ἢ ΜΠ, εἴτεν ἢ ΑΒ διπλασία τῆς ΓΑ. ἢ ἄρα ΑΓ = ΓΒ. ἂν ἔν ἀπὸ τῷ δοθέντος σημείῳ Μ παράλληλος τῇ Διαμέτρῳ ἀχθῇ, συμπίπτουσα τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένη τῆς Παραβολῆς, διχοτομηθῇ δὲ τὸ ὑπ' αὐτῶν ἀπολαμβανόμενον μέρος ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῆς διχοτομίας Γ ἐπὶ τὸ δοθέν σημεῖον Μ ἐπιζευχθῇ ἢ ΓΜ, αὕτη τῆς Παραβολῆς ἐφάψεται.

Γ'. Ἐὰν δὲ ἢ διάμετρος ΑΠ, Ἄζων ᾗ, ληφθῇ δὲ τῇ ΠΖ, εἴτεν τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΝ, ἴση ἢ ΠΥ, καὶ ἀπὸ τῷ Υ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθῇ ἢ ΥΜ, ἔσεται ἢ γωνία ΥΜΤ ὀρθή. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΖΠ, ἦτοι ΥΠ : ΜΠ :: ΜΠ : ΠΤ, (κ) ἢ δὲ ΜΠ

πρὸς

(θ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (ι) Ἐκ τῆς κατασκ. (κ) Ὅρα τὴν προελκβ. α. Συνίπ.

πρὸς ῥθὰς τῇ ΑΥ, (λ) ὀρθὴ ἄρα ἡ ΥΜΤ γωνία. (μ) εἰν ἄρα ἀπὸ τῆ δοθέντος σημείε Μ τεταγμένως καταχθῇ ἐπὶ τὸν Α΄ξονα ἡ ΜΠ, ληφθῇ δὲ τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ἴση ἡ ΠΥ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΥΜ ἀχθῇ ἀπὸ τῆ Μ ἡ ΜΤ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΥΜ, ἔσεται ἡ ΜΤ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἡ μὲν ὑπὸ τῆ σημείε τῆς ἐπαφῆς Μ καὶ τῆς ἐκβεβλημένης Διαμέτρου ΥΤ ἐμπεριλαμβανομένη ΜΤ, **Εφαπτομένη** λέγεται ἡ δὲ ὑπὸ τῆς τεταγμένης ΜΠ καὶ τῆς Εφαπτομένης ΜΤ, τετέστιν ἡ ΠΤ, **Υφαπτομένη** ἡ δὲ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ πρὸς ὀρθὰς τῇ Εφαπτομένη ΜΤ, καὶ ὑπὸ τῆς Διαμέτρου ΑΥ περατωμένη ΜΤ, **Κάθετος** ἡ δὲ ΠΥ ἡ ὑπότε τῆς τεταγμένης ΜΠ καὶ τῆς Κάθετε ΥΜ περατωμένη, **Υποκάθετος**.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Οὐκὲν ἐν Παραβολῇ ἡ μὲν Υφαπτομένη ΠΤ διπλασία ἐστὶ τῆς ἀποτετμημένης ΑΠ, ἡ δὲ Υποκάθετος ΠΥ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΝ.

Δ'. (ν) Τῶν αὐτῶν κειμένων, εἰν ληφθῇ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ε, (χ. 3.) καὶ καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν Διάμετρον δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν, ἡ ΕΥ, παράλληλος ᾗ τῇ Εφαπτομένη ΜΤ, ἡ δὲ ΕΗ, τῇ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Α ἐφαπτομένη ΑΒ, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τριγώνον ΕΗΥ ἴσον ἐστὶ τῷ ΗΒ παραλληλογράμμῳ, τῷ περιεχομένῳ ὑπότε τῆς ἀπὸ τῆς

Η 3

τῆς

(λ) Κατὰ τὸν ἡ. ὅρισμ. (μ) Κατὰ τὴν β'. Συνέπ. τῆς ἡ. τῆ ε'. (ν) Ἡ μβ'. ἐστὶ τῆ κ'. βιβλ. τῆ Ἀπολλων.

τῆς ἀφῆς κατηγμένης ΑΒ, καὶ τῆς ἀπολαμβάνου-
μένης ΑΗ, ὑπὸ τῆς παραλλήλου ΕΗ πρὸς τῇ κο-
ρυφῇ Α. ὡς γὰρ τρίγων. ΠΤΜ: τρίγων. ΗΥΕ ::
 $\overline{ΠΜ}^2: \overline{ΗΕ}^2$. (ξ) ἄλλ' ὡς $\overline{ΠΜ}^2: \overline{ΗΕ}^2 :: ΑΠ: ΑΗ$.
(ο) καὶ ὡς ΑΠ: ΑΗ :: ΠΒ: ΗΒ, (π) ὡς ἄρα
ΠΤΜ: ΗΥΕ :: ΠΒ: ΗΒ. (ρ) ἄλλὰ τὸ ΠΤΜ =
ΠΒ. (σ) ἄρα καὶ τὸ ΗΥΕ = ΗΒ. διὰ τὰ αὐτὰ
δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ΦΝΥ = ΝΒ, καὶ τὸ
ΧΛΑ = ΑΒ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α. (τ)

Εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς Παραβολῆς, καὶ
τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης αὐτῆς εὐ-
θεΐα εἰ παρεμπεσείται.

Ἐξω Παραβολή, ἥς Διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, ὀρθία
δὲ πλευρά, ἡ ΑΖ. καὶ ἐφαπτέσθω αὐτῆς ἡ ΓΑ κατὰ
τὸ Α. Λέγω δ', ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἀπ-
τομένης ΑΓ, καὶ τῆς καμπύλης ΑΗ εὐθεΐα εἰ παρεμ-
πεσείται. χ. 4.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπίπτέτω, ὡς ἡ ΑΔ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τῆ
Δ τεταγμένως κατήχθω ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΑΒ ἡ ΔΕ.
καὶ γεγενέτω ὡς $\overline{ΔΕ}^2: \overline{ΕΑ}^2 :: ΖΑ$ πρὸς τὴν τετάρτην.
καὶ εἰλήφθω ἡ ΘΑ ἴση τῇ εὐρεθείσῃ τετάρτῃ. καὶ
ἀπὸ τῆς Θ ἤχθω τῇ ΕΔ παράλληλος ἡ ΘΚ.

ΔΕΙ.

- (ξ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῇ ε'. (ο) Κατὰ τὴν α'. (π) Κατὰ τὴν α'.
τῇ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν ε'. τῇ ε'. (σ) Κατὰ τὴν μά. τῇ ε'.
(τ) Μέρους ἐστὶ τῆς λβ'. πρῶτ. τῇ α'. βιβλ. τῇ Ἀπολλων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ $\overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 \searrow \overline{ΗΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2$. (υ) ἀλλὰ τὸ $\overline{ΗΕ}^2 =$
 $\overline{ΖΑ} \cdot \overline{ΑΕ}$. (φ) τὸ ἄρα $\overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 \searrow \overline{ΖΑ} \cdot \overline{ΑΕ} : \overline{ΕΑ}^2$. ἔστι
 δὲ ὡς $\overline{ΖΑ} \cdot \overline{ΑΕ} : \overline{ΕΑ}^2 :: \overline{ΖΑ} : \overline{ΕΑ}$. (χ) τὸ ἄρα $\overline{ΔΕ}^2 :$
 $\overline{ΕΑ}^2 \searrow \overline{ΖΑ} : \overline{ΕΑ}$. ἀλλ' ὡς $\overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 :: \overline{ΖΑ} : \overline{ΘΑ}$. (ψ)
 ἄρα ἢ $\overline{ΖΑ} : \overline{ΘΑ} \searrow \overline{ΖΑ} : \overline{ΕΑ}$. ἐξ ἧς δῆλον ὅτι ἢ $\overline{ΕΑ} \searrow$
 $\overline{ΘΑ} : \text{ἐπεὶ δὲ ὡς } \overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 :: \overline{ΖΑ} : \overline{ΘΑ}$, (ω) καὶ ὡς $\overline{ΖΑ} :$
 $\overline{ΘΑ} :: \overline{ΖΑ} \cdot \overline{ΘΑ} : \overline{ΘΑ}^2$, (α) ὡς ἄρα $\overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 :: \overline{ΖΑ} \cdot$
 $\overline{ΘΑ} : \overline{ΘΑ}^2$. ἀλλὰ τὸ $\overline{ΖΑ} \cdot \overline{ΘΑ} = \overline{ΘΛ}^2$. (β) ἄρα ὡς
 $\overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 :: \overline{ΘΛ}^2 : \overline{ΘΑ}^2$. (γ) ἀλλ' ὡς $\overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 :: \overline{ΚΘ}^2 :$
 $\overline{ΘΑ}^2$, (δ) ἄρα ὡς $\overline{ΚΘ}^2 : \overline{ΘΛ}^2 :: \overline{ΘΑ}^2 : \overline{ΘΑ}^2$: τὸ ἄρα
 $\overline{ΚΘ}^2 = \overline{ΘΛ}^2$. καὶ ἢ $\overline{ΚΘ}$ ἄρα ἴση τῇ $\overline{ΘΛ}$. ὅπερ ἄτοπον.
 Ἐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς $\overline{ΑΓ}$ εὐθείας, καὶ τῆς
 $\overline{ΑΗ}$ καμπύλης ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσέται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'. (ε)

Εἰὰν Παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιφασύσσα συμ-
 πίπτῃ τῇ Διαμέτρῳ, ἢ διὰ τῆς ἈΦῆς πα-
 ραλλήλος ἀγομένη τῇ διαμέτρῳ ἐπὶ ταῦτὰ
 τῆς τομῆς, τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ πα-
 ραλλήλῃς τῇ ἐφαπτομένῃ διχα τέμνει· εἰς
 δὲ ὡς τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς ἄλ-
 ληλα, ἕτως αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ' αὐτῶν
 ἀπὸ τῆς παραλλήλῃς τῇ Διαμέτρῳ πρὸς
 τῇ ἈΦῇ.

Η 4

Ε5ω

- (υ) Κατὰ τὴν γ'. τῷ ε'. (φ) Κατὰ τὴν β'. (χ) Κατὰ τὴν α'.
 τῷ ε'. (ψ) Ἐκ τῆς κατὰσκ. (ω) Ἐκ τῆς κατὰσκ. (α) Κα-
 τὰ τὴν α' τῷ ε'. (β) Κατὰ τὴν β'. (γ) Κατὰ τὴν ε', τῷ
 ε'. (δ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (ε) Τὸ μὲν α' μὲρ. ἢ μς'. πρὸς.
 ἐπὶ τῷ α'. βιβλ. τῷ Α' πολλῶν. τὸ δὲ β'. συνέπ. τῆς μδ'. τῷ αὐτ.

Ἐςω Παραβολή, ἥς Διάμετρος ἡ ΑΔ, καὶ ἔφαπ-
τέτω τῆς τομῆς ἡ ΤΜ, συμπιπτεσα τῇ ΑΔ κατα
τὸ Τ. διὰ δὲ τῆς Μ παράλληλος ἤχθω τῇ ΑΔ ἡ ΒΜΚ.
καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Ε,
Α. καὶ ἤχθωσαν τῇ ΤΜ παράλληλοι αἱ ΕΥΙΦ, ΑΡΧ.
λέγω Α'. ὅτι ἡ μὲν ΕΙ = ΙΦ, ἡ δὲ ΑΡ τῇ ΡΧ. Β'.
ὅτι ὡς $\overline{ΕΙ}^2 : \overline{ΑΡ}^2 :: ΜΙ : ΜΡ$. §. 3.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Α' πὸ τῶν Ε, Μ, Φ, Χ σημείων κατήχθωσαν τε-
ταγμένως ἐπὶ τὴν ΑΔ Διάμετρον αἱ ΨΕΗ, ΜΠ, ΦΝ,
ΧΛ. ἤχθω δὲ καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν ἀπτομένη ΑΒ.

ΔΕΙΞΙΣ. ΤΟΤ Α'.

Τὸ μὲν ΦΥΝ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ παραλληλογράμ-
μῳ ΝΒ· τὸ δὲ ΕΥΗ, τῷ ΗΒ. ἀφηρέθω ἀπὸ μὲν τῆς
ΦΥΝ τὸ ΕΥΗ, ἀπὸ δὲ τῆς ΝΒ τὸ ΗΒ. τὸ ἄρα τραπέ-
ζιον ΗΕΦΝ ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΨ. κοινὸν
ἀφηρέθω τὸ ΝΗΕΙΖ τραπέζιον. ἔκβη τὸ ΖΙΦ τρί-
γωνον ἴσον τῷ ΕΙΨ τριγώνῳ. ἔστι δὲ ὡς ΖΙΦ : ΕΙΨ ::
 $\overline{ΦΙ}^2 : \overline{ΙΕ}^2$. (ζ) τὸ ἄρα $\overline{ΦΙ}^2 = \overline{ΙΕ}^2$. διὸ καὶ ἡ ΦΙ =
ΙΕ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ΑΡ = ΡΧ.

Ἐὰν δὲ ἡ τῇ ἔφαπτομένη ΜΤ ἀχθῆσα παράλληλος
ΕΦ (§. 5.) συμπιπτεῖ τῇ Διαμέτρῳ ἐντὸς τῆς τομῆς,
κατὰ τὸ Τ, δευχθήσεται πάλιν ἡ μὲν ΕΙ = ΦΙ, ἡ δὲ
ΑΡ = ΡΧ ἔτω· τὸ τρίγωνον ΥΦΝ ἴσον ἐστὶ τῷ παραλ-
ληλογράμμῳ ΝΒ. κοινὸν ἀφηρέθω τὸ τραπέζιον ΖΙΥΝ.
τὸ ἄρα τρίγωνον ΦΙΖ ἴσον τῷ τραπέζιῳ ΙΒΑΥ, εἴτεν
τῷ ΙΨΗΥ + ΗΒ. ἀλλὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΒ ἴσον,
τῷ τριγώνῳ ΕΥΗ. τὸ ἄρα ΦΙΖ = ΙΨΗΥ + ΕΥΗ,
εἴτεν τῷ ΕΙΨ τριγώνῳ. ἀλλ' ὡς ΦΙΖ : ΕΙΨ :: $\overline{ΦΙ}^2 :$
 $\overline{ΕΙ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΦΙ}^2 = \overline{ΕΙ}^2$. διὸ καὶ ἡ ΦΙ = ΕΙ. ἐπεὶ δὲ

τὸ

(ζ) Κατὰ τὴν 13'. τῆς 5'.

τὸ $\Delta\Lambda\chi = \Delta\beta$, κοινῇ ἀφαιρεθέντος τῷ τραπεζίῳ $\Delta\Lambda\rho\chi$,
 ἔσεται τὸ $\Delta\rho\beta = \chi\rho\chi$. ἀλλ' ὡς $\Delta\rho\beta : \chi\rho\chi :: \overline{\Delta\rho^2} : \overline{\chi\rho^2}$.
 τὸ ἄρα $\overline{\Delta\rho^2} = \overline{\chi\rho^2}$. διὸ $\Delta\rho = \chi\rho$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τῶν $\Delta\Gamma\tau$, $\beta\Gamma\mu$ τριγώνων αἱ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνία (χ. 3 καὶ 5.) ἴσαι, (η) ἡ δὲ πρὸς τῷ Δ ἴση τῇ πρὸς τῷ β , (θ) ἔστι δὲ καὶ ἡ $\Delta\Gamma = \mu\beta$. ἔστι γὰρ ἡ $\mu\beta = \Delta\pi$, ἡ δὲ $\Delta\pi = \Delta\tau$. (ι) ἴσον ἄρα τὸ $\Delta\Gamma\tau$ τρίγωνον τῷ $\beta\Gamma\mu$ τριγώνῳ. (κ) κοινὸν προσκείδω τὸ τραπεζίον $\Delta\Gamma\mu\rho$. τὸ ἄρα $\Delta\rho\mu\tau$ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ $\Delta\rho\beta$ τριγώνῳ. ἀλλὰ τὸ $\Delta\rho\beta = \chi\rho\chi$, ὡς δέδεικται. τὸ ἄρα $\Delta\rho\mu\tau = \chi\rho\chi$. προσκείδω πάλιν τοῖς αὐτοῖς τριγώνοις $\Delta\Gamma\tau$, $\beta\Gamma\mu$ κοινὸν τὸ τραπεζίον $\Delta\Gamma\mu\zeta\eta$. ἐκ-
 ἔν τὸ τετράπλευρον $\tau\mu\zeta\eta$ ἴσον τῷ παραλληλογράμ-
 μῳ $\mu\beta$. ἀλλὰ τὸ $\mu\beta = \eta\phi\tau$, τὸ ἄρα $\tau\mu\zeta\eta = \eta\phi\tau$. κοινὸν ἀφηρεῖδω τὸ τετράπλευρον $\gamma\iota\zeta\eta$ τὸ
 ἄρα παραλληλόγραμμον $\gamma\iota\mu\tau = \iota\zeta\phi$. ὡς ἄρα $\Delta\rho\mu\tau : \gamma\iota\mu\tau :: \chi\rho\chi : \iota\zeta\phi$. ἀλλ' ὡς μὲν $\Delta\rho\mu\tau : \gamma\iota\mu\tau :: \mu\rho : \mu\iota$, (λ) ὡς δὲ $\chi\rho\chi : \iota\zeta\phi :: \overline{\chi\rho^2} : \overline{\phi\iota^2}$. (μ)
 ἄρα καὶ ὡς $\mu\rho : \mu\iota :: \overline{\chi\rho^2} : \overline{\phi\iota^2}$. (ν) ἔστι δὲ ἡ μὲν $\chi\rho = \Delta\rho$, ἡ δὲ $\phi\iota = \epsilon\iota$. (ξ) ἄρα καὶ ὡς $\mu\rho : \mu\iota :: \overline{\Delta\rho^2} : \overline{\epsilon\iota^2}$. καὶ ἀνάπαλιν $\overline{\epsilon\iota^2} : \overline{\Delta\rho^2} :: \mu\iota : \mu\rho$.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Δευτεραία ἄρα Διάμετρος ἐστὶν ἡ $\mu\zeta$, (ο) ἀχ-
 θείσης δὲ τῆς κατὰ κορυφὴν ἀποτομένης $\Delta\beta$, ἔσεται ἡ
 ὕψαποτομένη $\beta\rho$ διπλασία τῆς ἀποτετμημένης $\mu\rho$.

Η 5

ἐπεὶ

- (η) Κατὰ τὴν ιε. τῷ α'. (θ) Κατὰ τὴν κβ'. τῷ α'. (ι) Κατὰ τὸ
 μετὰ τὴν δ'. Πόρις. (κ) Κατὰ τὴν κγ'. τῷ α'. (λ) Κατὰ τὴν
 α'. τῷ ε'. (μ) Κατὰ τὴν ιδ'. τῷ ε'. (ν) Κατὰ τὴν ιε.
 τῷ ε'. (ξ) Κατὰ τὸ α'. μέρ. τῆς προκείμ. προτ. (ο) Κατὰ
 τὸν κβ. ὅρισμα.

ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΠΑ = ΑΤ$. (π) ἔστι δὲ ἡ μὲν $ΠΑ = ΜΒ$,
 ἡ δὲ $ΑΤ = ΜΡ$. (ρ) ἄρα καὶ ἡ $ΜΒ = ΜΡ$. διὸ ἡ ΒΡ
 διπλασία τῆς ΜΡ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Εὐτεῦθεν ἄλλη πρόεισι μέθοδος τῇ ἐφαπτομένην
 αὔγειν ἀπὸ τῇ δοθέντος τῆς Παραβολῆς σημεῖον, οἷον
 τῇ Μ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῇ Μ ἡ Δευτεράια Διάμετρος
 ΒΜΖ τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένη συμπίπτουσα κατὰ
 τὸ Β. καὶ ληφθεῖσης τῆς ΜΡ ἴσης τῇ ΜΒ, ἀπὸ τῆς κο-
 ρυφῆς Α ἐπὶ τὸ Ρ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΡ. ἔσται δὲ ἔν ἡ ἀπὸ
 τῇ Μ τῇ ΡΑ ἀγομένη παράλληλος ΜΤ ἐφαπτομένη
 τῆς Παραβολῆς κατὰ τὸ Μ.

Β'. Εὐρεθείσης τῆς ὀρθίας πλευρᾶς Χ τῆς Δευτεραί-
 ας Διαμέτρου ΜΖ, εἴτεν τῆς τρίτης ἀναλόγου τῆς
 ἀποτετμημένης ΜΙ, καὶ τῆς τεταγμένης ΙΕ, (σ)
 ἔσεται τὸ ἀπὸ πάσης τεταγμένης τετραγώνον, οἷ-
 ον τὸ ἀπὸ τῆς ΡΑ ἴσον τῷ ὀρθογώνιῳ τῷ ὑπὸ τῆς
 ἀποτεμνομένης ὑπ' αὐτῆς ΜΡ καὶ τῆς ὀρθίας πλευ-
 ρᾶς Χ περιεχομένῳ. ἐπεὶ γὰρ ὡς $ΜΙ : ΙΕ :: ΙΕ :$
 $Χ$. ἄρα τὸ $ΜΙ \cdot Χ = ΙΕ^2$. (τ) ἔστι δὲ ὡς $ΜΙ :$
 $ΜΡ :: ΙΕ^2 : ΡΑ^2$, (υ) διὸ καὶ ὡς $ΜΙ : ΜΡ :: ΜΙ$
 $Χ : ΡΑ^2$. τὸ ἄρα $ΜΙ \cdot ΡΑ^2 = ΜΡ \cdot ΜΙ \cdot Χ$. καὶ τῶν
 ἴσων διὰ τῆς ΜΙ διαιρεθέντων, ἔσεται τὸ $ΡΑ^2 =$
 $ΜΡ \cdot Χ$. (φ).

Γ'. Καὶ τὸ ὀρθογώνιον δὲ τὸ ὑπὸ τῇ ἀθροίσματος δύο
 ὁποιωνῶν τεταγμένων καὶ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν πε-
 ριεχόμενον ἴσον δευχθήσεται τῷ ὀρθογώνιῳ τῷ ὑπὸ
 τῆς

(π) Κατὰ τὸ ἄρημ. Πόρις. (ρ) Κατὰ τὴν λδ'. τῇ α'. (σ) Ὅρα
 τὸν καὶ ὁρισμ. (τ) Κατὰ τὴν ις' τῇ ε'. (υ) Κατὰ τὸ β'. μέρ.
 τῆς προκειμ. προτ. (φ) Ἡ μθ'. πρότ. ἐπὶ τῇ ε' βιβλ. τῇ
 Α πολλων.

τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνομένων καὶ τῆς ῥθίας περιεχομένων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐχει ἄρα καὶ ἡ Δευτεράια τῆς Παραβολῆς Διάμετρος τὰ τῆς πρώτης καὶ ἀρχικῆς ιδιώματα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Ἐὰν ληφθῇ μέρος τῆς Ἀξονος τῆς Παραβολῆς πρὸς τῇ κορυφῇ ἴσον τεταρτημορίῳ τῆς ῥθίας αὐτῆς πλευρᾶς, ἀχθῆσα δὲ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς τῷ Ἀξονι συμβάλλῃ, τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀπ' αὐτῆς καὶ τῆς πέρατος τῆς προειρημένῃς μέρους ἀπολαμβάνομένης τμήματος τῆς Ἀξονος ἴσον ἔσται τῇ ῥθίᾳ πλευρᾷ τῆς Δευτεραίας Διαμέτρου.

Ἐστω Παραβολὴ ἡ ΑΜ, ἥς Ἀξων μὲν ἡ ΤΚ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΜΤ, Δευτεράια δὲ Διάμετρος ἡ ΜΡ. καὶ εἰλήφθω ἡ ΑΦ ἴση τεταρτημορίῳ τῆς ῥθίας πλευρᾶς. Λέγω, ὅτι τὸ τετραπλάσιον τῆς ΦΤ ἴσον ἔσται τῇ ῥθίᾳ πλευρᾷ τῆς Δευτεραίας Διαμέτρου ΜΡ. πίν. Ε. χ. 1.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένη ΑΓ, καὶ ἀπὸ μὲν τῆς Α τεταγμένως κατήχθω ἐπὶ τὴν ΜΡ, ἡ ΑΡ, ἀπὸ δὲ τῆς Μ ἐπὶ τὴν ΤΚ ἡ ΜΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΦΓ.

ΔΕΙ-

ΔΕΙΞΙΣ.

Η' ΤΠ διπλασία ἐστὶ τῆς ΑΠ, (χ) εἶπεν τῆς ΑΤ, ἀλλ' ὡς ΤΠ: ΤΑ:: ΤΜ: ΤΓ. ὡσαύτως καὶ ὡς ΤΠ: ΤΑ:: ΠΜ:: ΑΓ. (ψ) ἄρα ἡ μὲν ΤΜ διπλασία τῆς ΤΓ, ἡ δὲ ΠΜ τῆς ΑΓ. ἔκβεν καὶ τὸ $\overline{ΠΜ}^2$ τετραπλάσιον τῷ $\overline{ΑΓ}^2$. ἐπεὶ δὲ ἡ ΑΦ τεταρτημόριόν ἐστι τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, (ω) ἡ ἄρα 4ΑΦ ἴση τῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ. ἐστὶ δὲ τὸ $\overline{ΠΜ}^2 = ΑΠ \cdot 4ΑΦ$. (α) τὸ ἄρα $\overline{ΠΜ}^2$ τετραπλάσιόν ἐστι τῷ ΑΠ. ΑΦ, εἶπεν τῷ ΑΤ. ΑΦ. ἀλλὰ τὸ αὐτὸ $\overline{ΠΜ}^2$ τετραπλάσιον δέδεικται καὶ τῷ $\overline{ΑΓ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΑΓ}^2 = ΤΑ \cdot ΑΦ$. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαί. (β) ἡ ἄρα ΤΓΦ γωνία ὀρθή. (γ) ὡς ἄρα ΑΤ: ΤΓ:: ΤΓ: ΤΦ. (δ) τὸ ἄρα $\overline{ΤΓ}^2 = ΑΤ \cdot ΤΦ$. (ε) ἐστὶ δὲ ἡ ΑΤ = ΜΡ, (ς) τὸ ἄρα $\overline{ΤΓ}^2 = ΜΡ \cdot ΤΦ$. ἀλλὰ τὸ $\overline{ΤΜ}^2$ τετραπλάσιον τῷ $\overline{ΤΓ}^2$. τὸ $\overline{ΤΜ}^2$ ἄρα τετραπλάσιον καὶ τῷ ΜΡ. ΤΦ, εἶπεν τὸ $\overline{ΤΜ}^2 = ΜΡ \cdot 4ΤΦ$. ἀλλὰ ἡ ΤΜ = ΑΡ. (η) τὸ ἄρα $\overline{ΑΡ}^2 = ΜΡ \cdot 4ΤΦ$. ἐπεὶ ἔν ἡ μὲν ΑΡ τεταγμένως κατήχθη ἐπὶ τὴν ΜΡ, ἡ δὲ ΜΡ ἡ ἀποτετμημένη ἐστίν, ἡ ἄρα 4ΤΦ ἴση ἐστὶ τῇ ὀρθίᾳ τῆς Δευτεραίας Διαμέτρου ΜΡ. (θ).

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀπὸ τῷ Φ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθείσης εὐθείας ΦΜ ἴσον ἔσεται τῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ τῆς Δευτεραίας Διαμέτρου ΜΡ. ἐπεὶ γὰρ τῶν τριγώνων ΜΦΓ, ΤΦΓ, ἡ μὲν ΓΜ = ΓΤ, ἡ δὲ

- (χ) Κατὰ τὸ Πέρις. τὸ μετὰ τὴν δ'. (ψ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (ω) Εἰς ὑπόθ. (α) Κατὰ τὴν β'. (β) Κατὰ τὸν ἡ. ὅρισμ. καὶ τὴν δ'. προτ. (γ) Κατὰ τὴν β'. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν ἡ. τῷ ε'. (δ) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τῆς ἡ. τῷ ε'. (ε) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (ς) Κατὰ τὴν λδ'. τῷ α'. (η) Κατὰ τὴν αὐτὴν (θ) Κατὰ τὴν β'. Συνέπ. τῆς ε'.

δὲ ΓΦ κοινὴ, ἔστι δὲ καὶ γωνία ἡ ΦΓΜ = ΦΓΤ.
 (ι) ἑκατέρω γὰρ ὀρθή· ἄρα καὶ ἡ ΦΜ = ΦΤ. (κ)
 ἀλλ' ἡ 4ΦΤ ἴση τῇ τῆς ΜΡ ὀρθίᾳ. ἄρα καὶ ἡ 4ΦΜ
 ἴση τῇ αὐτῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ.

Β'. Εἰάν ἐκτὸς τῆς Παραβολῆς πρὸς τῇ κορυφῇ Α
 ληφθῇ μέρος τῆ Α' ζωνος, τὸ ΑΒ ἴσον τῇ ΑΦ,
 ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τῆ Β τῇ τεταγμένη ΜΠ παράλ-
 ληλος ἡ ΒΔ, συμπίπτουσα τῇ ἐκβληθείσῃ Δευτε-
 ραίᾳ Διατέτρῳ κατὰ τὸ Δ, ἔσεται τὸ τῆς ΔΜ τε-
 τραπλάσιον ἴσον τῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ τῆς ΜΡ. ἐπεὶ
 γὰρ ἡ ΤΦ = ΤΑ + ΑΦ, ἔστι δὲ ἡ μὲν ΤΑ = ΑΠ,
 (λ) ἡ δὲ ΑΦ = ΑΒ, (μ) ἡ ἄρα ΤΦ = ΑΠ + ΑΒ =
 ΒΠ = ΔΜ. ἔστι δὲ ἡ 4 ΤΦ ἴση τῇ ὀρθίᾳ τῆς ΜΡ,
 ἄρα καὶ ἡ 4 ΒΠ, ἡ ἡ 4 ΔΜ ἴση τῇ αὐτῇ ὀρθίᾳ
 πλευρᾷ.

Γ'. Καὶ ἡ ΦΜ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΠ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΦΜ =
 ΦΤ, (ν) ἡ δὲ ΦΤ = ΒΠ, (ξ) ἄρα καὶ ἡ ΦΜ =
 ΒΠ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ ἄλλη ὁ-
 ποιαῖν ἡ ἀπὸ τῆ Φ ἐπὶ τὸ τυχόν τῆς τομῆς ση-
 μεῖον ἐπιζευχθεῖσα Φμ ἴση ἐστὶ τῇ Βπ, τῇ μετα-
 ξὺ τῆ σημείου Β καὶ τῆς ἀπὸ τῆ μ ἀχθείσης τε-
 ταγμένης ἐπὶ τὸν Α' ζωνα ΤΚ.

Δ'. Εἰκ τέττε δῆλον, ὅτι δοθείσης τῆς ὀρθίᾳς πλευ-
 ρᾶς ἔνεστι πορίσασθαι συνεχῇ σημεία, δι' ὧν γραφί-
 σεται ἡ Παραβολή. ἐκκεῖθω γάρ τις εὐθεῖα, ἡ
 ΤΚ, καὶ εἰλήφθω ἀπ' αὐτῆς ἑκατέρω τῶν ΑΦ,
 ΑΒ ἴση τεταρτημορίῳ τῆς δοθείσης ὀρθίᾳς πλευρᾶς·
 ἀπὸ δὲ τῆς ΦΚ τυχόντα συνεχῇ σημεία τὰ Π, π,
 καὶ

(ι) Ὅρα τὴν δαξ. τῆς προκαμ. προτ. (κ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ α'.
 (λ) Ὅρα τὸ Πόρις. τὸ μετὰ τὴν δ'. (μ) Εἰς ὑποθ. (ν) Κα-
 τὰ τὴν προλ. κ. Συνίπ. (ξ) Κατὰ τὴν προλ. Συνίπ.

ἢ ἄλλα ἐφεξῆς. καὶ ἤχθω ἢ μὲν $\Phi\text{M} = \text{B}\Pi$, ἢ δὲ $\Phi\text{m} = \text{B}\pi$, καὶ ἐφεξῆς ἄλλαι ὁμοίως. ἔσται δὲ ἐν ταῖς σημείαις Μ, μ ἐπὶ τῆς τομῆς, ὡσαύτως καὶ ἄλλων συνεχῶν εὐρεθέντων σημείων, γραφήσεται ἡ Παραβολή.

Ε. Γραφήσεται δὲ ἡ Παραβολή καὶ διὰ Κανόνος καὶ Γνώμονος τῆς ὀρθίας αὐτῆς πλευρᾶς δοθείσης. Ἐστω γάρ Κανὼν ὁ ΔΖ, (χ. 2.) ὑψακισμένος μὲν ἐπὶ τὰ Β, Ε μέρη, τῷ δὲ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ δεῖ τὴν Παραβολὴν γράψαι ἐξηρηγμένους, καὶ πρὸς ὀρθῶς τέμνων εὐθεῖαν τὴν ΒΡ, τὸν Ἀΐωνα τῆς γραφθεισμένης ἐμφαίνεσαν Παραβολῆς. ἔστω δὲ εἰσῆχθω εἰς τὴν τῷ Κανόνος ΔΖ αὐλακὰ τὸ πέρας ΖΕ τῷ ΖΕΓ Γνώμονος, ὥτε ἐφηρμοσμένον μένοντα τῇ αὐλακί, ἐξῆναι φέρεσθαι ἐπὶ τὰ Ζ μέρη. καὶ εἰλήφθω ἑκατέρω μὲν τῶν ΑΦ, ΑΒ ἴση τεταρτημορίῳ τῆς δοθείσης ὀρθίας πλευρᾶς, ἡ δὲ ΒΡ, καὶ νῆμα τὸ ΦΜΓ ἴσον τῷ τῷ Γνώμονος μήκει ΕΓ. καὶ τὸ μὲν τῶν περὶ τῶν τῷ νήματος τῷ τῷ Γνώμονος πέρατι Γ περιδεδεδέσθω, τὸ δὲ, ἐπὶ τὸ Φ ἐξηρίχθω. τῷ Γνώμονι δὲ ΖΕΓ ἐγγύτατα τῆς ΒΡ σταθέντι ἥλος ὁ ΗΜ συμπαραντεθείς ἔστω συμφερέσθω παραλλήλως τῇ ΒΡ φερομένῳ ἐπὶ τὰ Ζ μέρη, ὥστε τὸ μὲν τῷ νήματος μέρος ΦΜ, τὸ ἐκ τῷ Γνώμονος ἐκχωριζόμενον, ἐν τεταμένον διαπαντὸς διαμένειν, τὸ δὲ λοιπὸν, τὸ ΜΓ, τῷ Γνώμονι ἐφηρμοσμένον. λέγω δὲ, ὅτι τῇ τοιαύτῃ φορᾷ Παραβολὴν καταγράψει ὁ ἥλος ΗΜ, τὴν ΑΜΨ, ἥς κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, Ἀΐων δὲ ἡ ΒΡ. κατήχθωσαν γάρ τεταγμένως ἀπὸ τῶν Μ καὶ Γ σημείων αἱ ΜΠ, ΨΓΡ. καὶ ἐπεὶ τὸ νῆμα $\Phi\text{M}\Gamma = \text{B}\Pi$, ἔστι δὲ τὸ μέρος $\text{M}\Gamma = \Pi\text{P}$ καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ $\Phi\text{M} = \Pi\text{B}$. ἐκέν τὸ σημεῖον Μ ἐν Παραβολῇ εἶναι, ἥς ἡ

κα-

κορυφή Α, καὶ Ἀξων ἢ ΒΡ. (ο) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ
δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ σημεῖα τῆς ΑΜΨ
γραμμῆς, Παραβολῆς εἰσὶ σημεῖα. ἢ ἄρα ΑΜΨ
Παραβολή ἐστ. *κ. 1.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὸ μὲν σημεῖον Φ, (*κ. 1.*) Ἑξίαν, ἢ Ὀμφα-
λὸν τῆς Παραβολῆς καλεῖν εἰώθασι, τίνος δὲ χάριν,
κατωτέρω εἰρήσεται τὴν δὲ ΦΜ, τὴν ἀπὸ τῆς Ἑξίας
ἐπὶ τὸ τυχόν τῆς τομῆς σημεῖον ἐπιζευχθεῖσαν, Κε-
κλιμένην τὴν δὲ ΒΔ, τὴν ἀπὸ τῆς Β ταῖς τεταγ-
μέναις ἀχθεῖσαν παράλληλον, καὶ τὰς ΜΔ, μδ', τὰς
ἴσας ταῖς ΠΒ, πβ περατῆσαν, Ἐυθεῖαν Μετε-
ωρισμῶ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Ἐὰν ἀπὸ Ἑξίας Παραβολῆς ἐπὶ τὸ τῆς ἑ-
παφῆς σημεῖον ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ
τῆς αὐτῆς σημεῖος ἀχθῇ ἢ Δευτεράία Διά-
μετρος, αἱ ὑπὸ αὐτῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης
περιεχόμενα γωνία ἴσας ἀλλήλους ἔσονται.

Ἐξω Παραβολῇ, ἧς Ἑξία μὲν, τὸ Φ· Ἐφαπτο-
μένη δὲ, ἢ ΜΤ· Δευτεράία δὲ Διάμετρος, ἢ ΜΡ, καὶ
Ἐπαφή, τὸ Μ. καὶ ἀπὸ τῆς Φ ἐπὶ τὸ Μ ἐπεζεύχθω
ἢ ΦΜ. λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΦΜΤ ἴση ἐστὶ τῇ ΡΜΨ.

ΔΕΙ-

(ο) Κατὰ τὴν προλ. γ'. Συνέπ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ $\Phi M = \Phi T$, (π) καὶ γωνία ἄρα ἡ $\Phi M T = \Phi T M$. (ρ) ἄλλ' ἡ $\Phi T M = P M \Psi$. (σ) ἄρα καὶ ἡ $\Phi M T = P M \Psi$.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΔΙ.

Α'. Ἐάν εὐθεῖαί τινες, αἱ $H\Pi$, ΔM , (χ. 3.) πρὸς τὸ κυρτὸν τῆς Παραβολῆς ἔτω προσπίπτωσιν, ὥστε ἐκβληθείσας κατὰ τὴν Ἐσίαν Φ συμβάλλειν ἀπὸ δὲ τῶν τῆς πτώσεως σημείων Π , M ἐφαπτόμεναι μὲν τῆς Παραβολῆς ἀχθῶσιν αἱ $I\Pi T$, $\Upsilon M T$, παράλληλοι δὲ τῷ Ἀξονι $A\Gamma$ αἱ $Z\Pi\Psi$, $\Lambda M P$, ἔσονται αἱ ὑπὸ τῶν προσπιπτουσῶν καὶ τῶν Ἐφαπτομένων περιεχόμεναι γωνίαι ἴσαι ταῖς ὑπὸ τῶν παραλλήλων καὶ τῶν Ἐφαπτομένων, ἔστω ἡ μὲν $H\Pi I$ τῇ $Z\Pi T$, ἡ δὲ $\Delta M \Upsilon$ τῇ $\Lambda M T$. ἡ μὲν γὰρ γωνία $\Phi\Pi T = \Psi\Pi I$, (τ) ἔστι δὲ ἡ μὲν $\Phi\Pi T = H\Pi I$, ἡ δὲ $\Psi\Pi I = Z\Pi T$. (υ) ἄρα καὶ ἡ $H\Pi I = Z\Pi T$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $\Delta M \Upsilon = \Lambda M T$.

Β'. Ἐάν ἀπὸ τῆς Ἐσίας Φ (χ. 4.) τεταγμένως ἐπὶ τὸν Ἀξονα $\Gamma\Delta$ ἀναχθῇ ἡ ΦM , καὶ ἀπὸ τῆς M ἀπτομένη ἀχθῇ ἡ $Z M T$, τῇ μὲν κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένη κατὰ τὸ B , τῷ δὲ Ἀξονι κατὰ τὸ T συμβάλλουσα, ἔσεται ἡ μὲν ΦM ἴση τῇ ΛN , τῇ ἡμισείᾳ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς $A\Upsilon$. ἡ δὲ AB , τεταρτημορίῳ τῆς αὐτῆς αἱ δὲ TA , AB , $A\Phi$ ἴσαι ἀλλήλαις. ἐπεὶ γὰρ ἡ $T\Phi$ διπλασία τῆς $A\Phi$, (φ) ἡ δὲ $A\Phi$ ἴση τεταρτημορίῳ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς $A\Upsilon$, (χ) ἡ ἄρα $T\Phi = \Lambda N$. ἄλλ' ἡ $T\Phi = \Phi M$, (ψ) ἄρα καὶ

- (π) Ἐκ τῆς α'. Συνεπ. τῆς ε'. ὅθεν. (ρ) Κατὰ τὴν ε. τῆς α'.
 (σ) Κατὰ τὴν κβ'. τῆς α'. (τ) Κατὰ τὴν προκαμ. πρότ.
 (υ) Κατὰ τὴν ιε'. τῆς α'. (φ) Κατὰ τὸ Πόρις. τὸ μετὰ τὴν δ'.
 (χ) Κατὰ τὴν ε'. (ψ) Κατὰ τὴν α'. Συνεπ. τῆς ε'.

καὶ ἡ ΦΜ ἴση τῇ τῆς ὀρθίας ΑΥ ἡμισείᾳ ΑΝ.
ἐπεὶ δὲ ὡς ΤΦ : ΤΑ :: ΦΜ : ΑΒ, (ω) καὶ ἡ ΦΤ
διπλασία τῆς ΤΑ, ἄρα καὶ ἡ ΦΜ τῆς ΑΒ. ἡ ἄρα
ΑΒ τεταρτημόριον τῆς ὀρθίας ΑΥ. αἱ δὲ ΤΑ, ΑΒ,
ΑΦ ἴσαι ἀλλήλαις.

Γ'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς Ἐσίας Φ ἐπεὶ τὸ τυχὸν τῆς Πα-
ραβολῆς σημεῖον Π ἐπιζευχθῇ ἡ ΦΠ, ἀπὸ δὲ τῆ
Π τεταγμένως ἐπὶ τὸν Ἀξονα καταχθῇ ἡ ΖΠΔ,
τῇ Ἐφαπτομένῃ συμβάλλουσα κατὰ τὸ Ζ, ἔσεται ἡ
Κεκλιμένη ΦΠ ἴση τῇ ΖΠΔ. ἐστὶ γὰρ ὡς ΤΦ : ΦΜ ::
ΤΔ : ΔΖ. (α) ἀλλ' ἡ ΤΦ = ΦΜ, ἄρα καὶ ἡ ΤΔ =
ΔΖ. ἀλλ' ἡ ΤΔ = ΦΠ, (β) ἄρα καὶ ἡ ΦΠ = ΔΖ.

Δ'. Ἐνεσιν ἄρα, δοθείσης τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, συνε-
χῇ πορίσασθαι σημεῖα, δι' ὧν ἡ Παραβολὴ γραφή-
σεται. συνεχάτω γὰρ τρίγωνον ἰσοσκελές τε καὶ ὀρθο-
γώνιον τὸ ΤΦΜ ἴσας ἔχον τὰς περὶ τὴν ὀρθὴν γω-
νίαν πλευρὰς ΤΦ, ΦΜ ἀλλήλαις, καὶ ἑκατέραν ἴσην
τῷ ἡμίσει τῆς δοθείσης ὀρθίας πλευρᾶς. καὶ ἐκβλη-
θεῖσων κατὰ τὸ συνεχές τῶν ΤΦ, ΤΜ, καὶ ἀχ-
θεῖσων ἀπὸ ληφθέντων σημείων τῶν Δ, δ, καὶ ἄλλων
ἐφεξῆς, τῶν ΔΖ, δζ, καὶ ἐφεξῆς ἄλλων παραλλήλων
τῇ ΦΜ, ἀπὸ τῆς Φ ἐφημερόδωσαν εὐθεῖαι αἱ ΦΠ,
Φπ ἴσαι ταῖς ΔΖ, δζ. δῆλον ἄρα ὅτι τὰ Π, π, ση-
μεῖα τῆς Παραβολῆς ἐστίν, ἥς κορυφὴ μὲν τὸ Α,
τὸ μέσον τῆς ΦΤ, Ἐσία δὲ τὸ Φ, ἐφαπτομένη δὲ
ἡ ΤΜ, καὶ ὀρθία πλευρὰ τὸ διπλάσιον ὁποτέρως
τῶν ΤΦ, ΦΜ.

Ε'. Ἐὰν ἀπὸ μὲν τῆς ἐπαφῆς Μ (πίν. 5. χ. 1.)
κάθετος ἀχθῇ τῇ ἐφαπτομένῃ ΖΜΟ, ἡ ΜΥ, τῇ
τῆς

⊙

(ω) Κατὰ τὴν δ'. τῇ ε'. (α) Κατὰ τὴν αὐτήν. (β) Κατὰ τὴν
γ'. Σωκ. τῆς ε'.

τῆς Παραβολῆς Ἀξονι συμπίπτουσα κατὰ τὸ Υ, ἀπὸ δὲ τῆς Υ τῇ Κεκλιμένῃ ΦΜ κάθετος ἡ ΥΕ, τὸ ἀπ' αὐτῆς καὶ τῆς ἐπαφῆς ἀπολαμβάνοντες τῆς Κεκλιμένης μέρος τὸ ΜΕ ἴσον ἔσται τῷ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ἡμίσει. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῆς Μ ἡ ΜΣ τῷ Ἀξονι ΔΥ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ ἡ γωνία ΣΜΖ = ΦΜΔ, (γ) ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΥΜΖ ἴση ὅλῃ τῇ ΥΜΔ· (δ) ἑκατέρω γὰρ ὀρθή· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΥΜΣ ἴση λοιπῇ τῇ ΥΜΕ. ἔστι δὲ ἡ ΥΜΣ = ΜΥΚ, (ε) ἄρα καὶ ἡ ΥΜΕ = ΜΥΚ. ἔστι δὲ τῶν περιγώνων ΕΜΥ, ΚΜΥ καὶ γωνία ἡ ΥΕΜ = ΥΚΜ· (ς) ἑκατέρω γὰρ ὀρθή· καὶ ἡ ΥΜ πλευρὰ κοινὴ, ἄρα καὶ ἡ ΕΜ = ΚΥ. (η) ἀλλ' ἡ ΚΥ ὑποκάθετος ἔσται, ἴση ἐστὶ τῷ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ἡμίσει, (θ) καὶ ἡ ΕΜ ἄρα ἴση τῷ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ἡμίσει.

5'. Εἰάν ἀπὸ δύο τυχόντων τῆς Παραβολῆς σημείων, τῶν Π, Μ ἐπιζευχθῶσι μὲν ἐπὶ τὴν Ἐξίαν Φ αἱ ΠΦ, ΜΦ, ἀχθῶσι δὲ ἐφαπτόμεναι αἱ ΠΤΓ, ΜΓΟ, τῷ μὲν Ἀξονι κατὰ τὰ Τ καὶ Ο σημεία, ἀλλήλαις δὲ κατὰ τὸ Γ συμβάλλουσαι, ἔσεται ἡ ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν περιεχομένη γωνία ΠΦΜ διπλασία τῆς ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχομένης ΠΓΜ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΠΦ = ΦΤ. (ι) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΦΠΤ = ΦΤΠ. (κ) ἀλλ' ἡ γωνία ΠΦΥ = ΦΠΤ + ΦΤΠ. (λ) ἡ ἄρα ΠΦΥ διπλασία τῆς ΦΤΠ, εἴτεν τῆς ΟΤΓ. (μ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθήσεται καὶ ἡ ΜΦΥ διπλασία τῆς

- (γ) Κατὰ τὴν ζ. (δ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὴν κθ'. τῆς α'.
 (ς) Ἐξ ὑποθ. (η) Κατὰ τὴν κς'. τῆς α'. (θ) Κατὰ τὸ Πόρις τὸ μετὰ τὴν δ. (ι) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τῆς ε'.
 (κ) Κατὰ τὴν ε'. τῆς α'. (λ) Κατὰ τὴν λθ'. τῆς α'. (μ) Κατὰ τὴν ιε'. τῆς α'.

τῆς ΤΟΓ. αἱ ἄρα ΠΦΥ+ΜΦΥ, εἴτεν ἡ ΠΦΜ διπλασία τῆς ΟΤΓ+ΤΟΓ. ἀλλ' ἡ ΟΤΓ+ΤΟΓ=ΠΓΜ. (ν) ἡ ἄρα ΠΦΜ διπλασία τῆς ΠΓΜ.

Ζ'. Εἰάν ἄρα ἀπὸ τῆς Εἰσίας Φ διαχθῇ τις εὐθυσία ἡ ΨΜ τῇ Παραβολῇ κατὰ τὰ Ψ, Μ σημεία συμβάλλουσα, ἀπὸ δὲ τῶν Ψ Μ ἐφαπτόμεναι ἀχθῶσιν αἱ ΨΔ, ΜΔ, κατὰ τὸ Δ συμπίπτουσαι, ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία ΨΔΜ ὀρθὴ ἔσται. αἱ γὰρ ΨΦΥ, ΜΦΥ διπλασίου ἔσται τῆς ΨΔΜ, (ξ) ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. (ο)

Η'. Ἡ αὐτὴ ΨΜ εἰάν παράλληλος ἢ τῇ ΛΧ τῇ κατὰ τὸ Λ τῆς Παραβολῆς ἐφαπτομένη, (χ. 2.) ἴση ἔσεται τῇ ὀρθῇ πλευρᾷ τῆς Δευτεραίας Διαμέτρου ΔΔΓ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΨΝ=ΝΜ, (π) ἡ δὲ γωνία ΨΔΜ ὀρθή, (ρ) ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ Ν, διαστήματι δὲ ὁποτέρᾳ τῶν ΝΨ, ΝΜ γραφόμενος κύκλος διὰ τῆ Δ ἤξει. (σ) αἱ ἄρα ΨΝ, ΝΔ, ΝΜ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ἀλλ' ἡ ΝΔ ἴφαπτομένη ἔσται, διπλασία ἐστὶ τῆς Ἀποτετμημένης ΛΝ. (τ) ἄρα ἡ ΨΜ διπλασία ἔσται τῆς ΝΔ, τετραπλασία ἐστὶ τῆς ΛΝ. ἀλλὰ τῇ ΛΝ ἴση ἡ ΦΧ. (υ) ἡ ἄρα ΨΜ τετραπλασία τῆς ΦΧ, εἴτεν ἴση τῇ ὀρθῇ πλευρᾷ τῆς Δευτεραίας Διαμέτρου ΔΔΓ. (φ)

Θ'. Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἡ ἀπὸ τῆ Φ ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευχθῆσα ΦΔ, πρὸς ὀρθαῖς ἐστὶ τῇ ΨΜ, καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν τμημάτων.

Θ 2

(ν) Κατὰ τὴν λβ'. τῶ α'. (ξ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (ο) Κατὰ τὴν ιγ. τῶ α'. (π) Κατὰ τὴν ε'. (ρ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (σ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν η'. τῶ ε'. (τ) Κατὰ τὸ Πέριο. τὸ μετὰ τὴν δ'. (υ) Κατὰ τὴν λδ'. τῶ α'. (φ) Κατὰ τὴν ε'.

μάτων τῆς ΨΜ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ἔτεν τὸ $\overline{\Phi\Delta^2} = \Psi\Phi$. ΦΜ. ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΦΛ, ἴση ἔσται τῇ ΦΧ. (χ) ἀλλ' ἡ ΦΧ = ΝΛ, (ψ) ἡ δὲ ΝΛ = ΔΔ. (ω) αἱ τρεῖς ἄρα ΝΛ, ΔΦ, ΔΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρω μὲν τῷ Λ, διαστήματι δὲ μιᾷ τῶν εἰρημένων ἴσων εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος διὰ τῷ Φ ἤξει. ἐκὼν ἡ γωνία ΔΦΝ ὀρθή ἐστιν. (α) ἡ ἄρα ΦΔ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΨΜ. ἐπεὶ δὲ καὶ γωνία ἡ ΨΔΜ ὀρθή ἐστι, (β) τὸ ἄρα $\overline{\Phi\Delta^2} = \Psi\Phi$. ΦΜ. (γ)

Ι'. Ἡ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΨΔΜ κορυφὴ ἐν τῇ τῷ Μετεωρισμῷ εὐθείᾳ ΒΥ κείται. ἐστὶ γὰρ ἡ μὲν ΦΛ = ΔΔ, ἡ δὲ ΦΑ = ΑΒ. (δ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Τὸ ὑπὸ τῆς τομῆς καὶ τῆς ὁποιασὲν τεταγμένης καὶ τῆς ὑπ' αὐτῆς ἀποτεμνομένης περιεχόμενον παραβολικὸν χωρίον ἴσον ἐστὶ δυσὶ τριτημορίοις τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς αὐτῆς τεταγμένης, καὶ τῆς ὑπ' αὐτῆς ἀποτεμνομένης περιεχομένῳ.

Ἐστω Παραβολὴ ἡ ΑΖΓ, ἥς Διάμετρος μὲν ἡ ΑΠ, τεταγμένη δὲ ἐπ' αὐτὴν ἡ ΓΠ, καὶ ἡ ὑπ' αὐτῆς ἀποτεμνομένη ἡ ΑΠ. ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΠ, ΑΠ ὀρθογωνίον τὸ ΠΒ. λέγω, ὅτι τὸ παραβολικὸν χωρίον ΑΖΓΠ ἴσον ἐστὶ δυσὶ τριτημορίοις τῷ ΠΒ ὀρθογωνίῳ, ἔτεν τὸ ΑΖΓΠ, πρὸς τὸ ΠΒ λόγον ἔχει, ὃν ὁ 2 : 3. καὶ 3.

ΚΑ.

(χ) Ὅρα τὴν α'. Συνέπ. τῆς ε'. (ψ) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α'. (ω) Ἐκ τῆς α'. Συνέπ. τῆς ε', δηλον. (α) Κατὰ τὴν καὶ τῷ ε'. (β) Κατὰ τὴν προλ. ζ'. Συνέπ. (γ) Κατὰ τὴν αὐτὴν Συνέπ. τῆς η'. τῷ ε'. (δ) Ὅρα τὴν β'. Συνέπ. τῆς ζ'.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπιζευχθείσης ἀπὸ τῆς Α ἐπὶ τὸ Γ τῆς τὴν τομὴν ὑποτείνουσας ΑΓ, ἀνέχθω ἀπὸ τῆς τυχόντος τῆς ἀποτετμημένης σημείω Μ τετεγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον ἢ ΜΖ, ἣτις ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν ΒΓ κατὰ τὸ Ψ. καὶ ἀπὸ τῆς Ζ ἤχθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΠ, ΒΓ παραάλληλος ἢ ΔΖΦ. περιενεχθήτω δὲ τὸ ΠΒ ὀρθογώνιον σὺν τῷ τριγώνῳ ΑΓΒ περὶ τὴν ΑΒ ἕως ἑ ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι. ἐκὼν ἀπὸ μὲν τῆς ὀρθογωνίης ΠΒ κύλινδρος, ἀπὸ δὲ τῆς τριγώνου ΑΓΒ Κώνος γίνεται. (ε)

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς $\overline{ΓΠ}^2 : \overline{ΖΜ}^2 :: ΑΠ : ΑΜ$. (ζ) ἀλλ' ἡ μὲν $ΓΠ = ΑΒ$, ἡ δὲ $ΖΜ = ΑΔ$, ἡ δὲ $ΑΠ = ΔΦ$, ἡ δὲ $ΑΜ = ΔΖ$. (η) ὡς ἄρα $\overline{ΑΒ}^2 : \overline{ΑΔ}^2 :: ΔΦ : ΔΖ$. ἔστι δὲ ὡς $\overline{ΑΒ}^2 : \overline{ΑΔ}^2 :: \overline{ΒΓ}^2 : \overline{ΔΕ}^2$. (θ) ἔστι γὰρ ὡς $ΑΒ : ΑΔ :: ΒΓ : ΔΕ$. (ι) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΒΓ}^2 : \overline{ΔΕ}^2 :: ΔΦ : ΔΖ$, (κ) ἔστιν ὡς $\overline{ΔΦ}^2 : \overline{ΔΕ}^2 :: ΔΦ : ΔΖ$. ἔστι δὲ ὡς $\overline{ΔΦ}^2 : \overline{ΔΕ}^2$ ἕτως ὁ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ κύκλος, ἢ ἡμιδιάμετρος ἢ ΔΦ, πρὸς τὸν ἐν τῷ Κώνῳ κύκλον, ἢ ἡμιδιάμετρος ἢ ΔΕ. (λ) ὡς ἄρα ὁ ῥηθείς ἐν τῷ Κυλίνδρῳ κύκλος, πρὸς τὸν ῥηθέντα ἐν τῷ Κώνῳ κύκλον, ἕτως ἢ ΔΦ : ΔΖ, ἔστιν ἕτως ὅλη ἢ εὐθεῖα, ἢ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ΠΒ, πρὸς τὸ μέρος αὐτῆς τὸ ἐν τῷ μικτογράμμῳ τριγράμμῳ ΑΖΓΒ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ πᾶς κύκλος ὁ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ, πρὸς πάντα κύκλον τὸν ἐν τῷ Κώνῳ λόγον ἔχει, ὃν ὅλη ἢ εὐθεῖα ἢ ἐν τῷ ὀρθο-

Θ 3

90-

- (ε) Κατὰ τὸν β', καὶ γ'. Ὅρισμ. τῆς ιβ'. (ζ) Κατὰ τὴν α'.
 (η) Κατὰ τὴν λδ'. τῆς α'. (θ) Κατὰ τὸ ζ'. Θεώρ. τῶν μετὰ
 τὸ ε'. βιβλ. (ι) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (κ) Κατὰ τὴν ε'.
 τῆς α'. (λ) Κατὰ τὴν β', τῆς ιβ'.

Θογωνίῳ, ἡ καὶ διάμετρος τῆ ἐν τῷ Κυλινδρῷ κύκλου, πρὸς τὸ μέρος τῆς αὐτῆς εὐθείας τὸ ἐν τῷ εἰρημένῳ τριγυράμμῳ. ἄρα καὶ πάντες οἱ ἐν τῷ Κυλινδρῷ κύκλοι, πρὸς πάντας τὰς ἐν τῷ Κῶνῳ κύκλους, ἔτω παῖσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ΠΒ, πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἐν τῷ τριγυράμμῳ ΑΖΓΒ, εἴτεν ὡς ὁ Κύλινδρος, πρὸς τὸν Κῶνον, ἔτω τὸ ΠΒ, πρὸς τὸ ΑΖΓΒ, ἀλλ' ὡς ὁ Κύλινδρος, πρὸς τὸν Κῶνον, ἔτω 3 : 1. (μ) ἄρα καὶ ὡς ΠΒ : ΑΖΓΒ :: 3 : 1. (ν) καὶ κατὰ ἀνατροφήν λόγος ὡς ΠΒ : ΠΒ — ΑΖΓΒ :: 3 : 3 — 1. εἴτεν ὡς ὀρθογών. ΠΒ, πρὸς τὸ παραβολικὸν χωρίον ΑΖΓΠ :: 3 : 2, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΑΖΓΠ : ΠΒ :: 2 : 3.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

- Α'. Τὸ παραβολικὸν χωρίον ΑΖΓΠ, πρὸς τὸ εἰς αὐτὸ τὸ ἐγγεγραμμένον τρίγωνον ΑΓΠ λόγον ἔχει ὃν 4 : 3. ὡς γὰρ ΑΖΓΠ : ΒΠ : 4 : 6. (ξ) ὡς δὲ ΠΒ : ΑΓΠ : 6 : 3. (ο) ὡς ἄρα ΑΖΓΠ : ΑΓΠ : 4 : 3. (π)
- Β'. Τὰ παραβολικὰ χωρία ΑΖΓΠ, ΑΝΖΜ λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα, ὃν οἱ ἀπὸ τῶν τετυγμένων ΓΠ, ΖΜ κύβοι, εἴτεν ἐστὶν ὡς ΑΖΓΠ : ΑΝΖΜ : $\overline{\Gamma\P}^3$: $\overline{Z\text{M}}^3$. ἐπεὶ γὰρ ὡς μὲν ΑΖΓΠ : ΠΒ :: 2 : 3, ὡς δὲ ΑΝΖΜ : ΜΔ :: 2, 3. (ρ) ἄρα καὶ ὡς ΑΖΓΠ : ΠΒ :: ΑΝΖΜ : ΜΔ. (σ) καὶ ἐναλλάξ ὡς ΑΖΓΠ : ΑΝΖΜ :: ΠΒ : ΜΔ. ἀλλὰ ΠΒ : ΜΔ λόγον ἔχει συγκέμενον ἔκτε τῆ λόγος ὃν ἔχει ΓΠ : ΖΜ, καὶ ΑΠ : ΑΜ, (τ)

(μ) Κατὰ τὴν ι'. τῇ ιβ'. (ν) Κατὰ τὴν ι'. τῇ ε'. (ξ) Κατὰ τὴν προκαμ. πρότ. (ο) Κατὰ τὴν μά. τῇ α'. (π) Κατὰ τὴν ιβ'. τῇ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν προκαμ. πρότ. (σ) Κατὰ τὴν ι'. τῇ ε'.

(τ) ἔστι δὲ ὡς $ΑΠ: ΑΜ:: \overline{ΓΠ}^2: \overline{ΜΖ}^2$. (υ) τὰ ἄρα
 $ΠΒ: ΜΔ$ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῷ λόγῳ ὃν
 ἔχει $ΓΠ: ΖΜ$ καὶ $\overline{ΓΠ}^2: \overline{ΖΜ}^2$, ἔπεν ὡς $ΠΒ: ΜΔ::$
 $\overline{ΓΠ}^3: \overline{ΖΜ}^3$. (φ) ἄρα καὶ ὡς $ΑΖΓΠ: ΑΝΖΜ::$
 $\overline{ΓΠ}^3: \overline{ΖΜ}^3$. (χ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Ἐὰν περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον δύο γρα-
 φῶσι Παραβολὰς, ἐυρεθῇ δὲ μέση ἀνάλο-
 γον τῶν ὀρθιῶν αὐτῶν πλευρῶν, τὰ παρα-
 βολικὰ χωρία, τὰ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενα
 λόγον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν τῆς ἐτέρας ἢ
 ὀρθία πλευρὰ, πρὸς τὴν ῥηθεῖσαν μέσην
 ἀνάλογον.

Ἐῴωσαν Παραβολὰς περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον $ΑΠ$,
 ἢ $ΑΔΜ$, ἥς ὀρθία πλευρὰ ἢ $ΑΖ$, καὶ ἢ $ΑΒΕ$, ἥς
 ὀρθία ἢ $ΑΓ$, μέση δὲ ἀνάλογον τῶν $ΑΖ$, $ΑΓ$, ἢ
 $ΑΝ$. καὶ τετάχθω ἀπὸ τῆς $Μ$ ἐπὶ τὴν Διάμετρον
 $ΠΑ$ ἢ $ΜΕΠ$. λέγω ὅτι ὡς $ΑΜΠ: ΑΕΠ:: ΑΖ: ΑΝ$.
 πίν. Γ. χ. 4.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν $\overline{ΜΠ}^2 = ΑΠ \cdot ΑΖ$, τὸ δὲ $\overline{ΕΠ}^2 = ΑΠ \cdot ΑΓ$. (ψ)
 ὡς ἄρα $\overline{ΜΠ}^2: \overline{ΕΠ}^2:: ΑΠ \cdot ΑΖ: ΑΠ \cdot ΑΓ$. ἀλλ' ὡς $ΑΠ \cdot ΑΖ:$
 $ΑΠ \cdot ΑΓ:: ΑΖ: ΑΓ$. (ω) ὡς ἄρα $\overline{ΜΠ}^2: \overline{ΕΠ}^2:: ΑΖ:$
 $ΑΓ$. (α) ἐπεὶ δὲ ὡς $ΑΖ: ΑΝ: ΑΝ: ΑΓ$, (β) ἔστιν ἄρα
 Θ 4 καὶ

(τ) Κατὰ τὴν γ'. τῆς ε'. (υ) Κατὰ τὴν α'. (φ) Κατὰ τὸν ζ'.
 ἔρισμ. τῆς ε'. καὶ τὴν μετὰ τὸν ἦ. τρίτ. Συνέπ. (χ) Κατὰ
 τὴν ε'. τῆς ε'. (ψ) Κατὰ τὴν β'. (ω) Κατὰ τὴν α'. τῆς ε'.
 (κ) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (β) Ἐξ ὑποθ.

καὶ ὡς $AZ : AΓ :: \overline{AZ}^2 : \overline{AN}^2$. (γ) ὡς ἄρα $\overline{MP}^2 : \overline{EP}^2 :: \overline{AZ}^2 : \overline{AN}^2$. (δ) ἔκθ' καὶ ὡς $MP : EP :: AZ : AN$. (ε) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ πᾶσα τεταγμένη ἐν τῷ $AMΠ$ χωρίῳ, πρὸς-πᾶσαν τὴν ἐν τῷ $ΑΕΠ$ καὶ μέρος αὐτῆς ἔσται λόγον ἔχει, ὃν ἡ $AZ : AN$. διὸ καὶ πᾶσαι αἱ τεταγμέναι αἱ ἐν τῷ $AMΠ$, πρὸς πάσας τὰς ἐν τῷ $ΑΕΠ$ καὶ μέρη αὐτῶν ἔσται, λόγον ἔχουσαι, ὃν ἡ $AZ : AN$. καὶ τὸ παραβολικὸν ἄρα χωρίον $AMΠ$, πρὸς τὸ $ΑΕΠ$ λόγον ἔχει ὃν $AZ : AN$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Δοθέντος τῷ λόγῳ ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας δύο παραβολικὰ χωρία, καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς τῆς ἐτέρας τῶν Παραβολῶν, εὐρεθήσεται καὶ τῆς ἐτέρας ἡ ὀρθία πλευρά, δι' ἧς γραφήσεται. ἔσω γὰρ ὁ λόγος ὃν ἔχει τὸ $AMΠ$, πρὸς τὸ $ΑΕΠ$ ὁ αὐτὸς ὃν ἔχει ἡ ὀρθία AZ τῆς Παραβολῆς AM , πρὸς τινὰ εὐθεῖαν τὴν AN . καὶ εὐρεθίτω τῶν AZ, AN τρίτη ἀνάλογον, ἡ $AΓ$. ἔκθ' ἡ $AΓ$ ἡ ὀρθία ἐστὶ, δι' ἧς γραφήσεται ἡ Παραβολή, ἧς τὸ χωρίον $ΑΕΠ$, πρὸς τὸ $AMΠ$ λόγον ἔχει ὃν $AN : AZ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Ἐὰν Παραβολὴ σὺν τῷ περὶ αὐτὴν ὀρθογωνίῳ περὶ τὸν ἑαυτῆς Ἄξονα περιενεχθῇ ἕως ὅτε ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο Φέρεσθαι, ἡ ἀπὸ τῆς Παραβολῆς γενομένη Κωνοῖς ἡμίσεια ἔσται τῷ ἀπὸ τῷ ὀρθογωνίῳ γενομένῳ Κυλίνδρῳ.

Ἐστω

(γ) Κατὰ τὸ β'. πόρισ. τῷ ε'. (δ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (ε) Κατὰ τὸ ζ'. τῶν Θεωρ. τῶν μετὰ τὸ ε' βιβλ.

Εἴτω Παραβολὴ ἡ ΑΖΓ, καὶ περὶ αὐτὴν ὀρθογώνιον τὸ ΠΒ, καὶ σὺν αὐτῷ περιεγεχθῆτω περὶ τὸν ἑαυτῆς Ἀξόνα ΑΠ, καὶ ἀποκατασταθῆτω ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς Παραβολῆς ΑΖΓ Κωνοῖς ἡμίσειά ἐστι τῆ ἀπὸ τῆς ὀρθογωνίας ΠΒ Κυλίνδρου. Πίν. 5. κ. 3.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ὁ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ κύκλος, ἔῃ ἡμιδιάμετρος ἡ ΜΨ, πρὸς τὸν ἐν τῇ Κωνοίδι κύκλον, ἔῃ ἡμιδιάμετρος ἡ ΜΖ, ἔτω $\overline{ΜΨ}^2 : \overline{ΜΖ}^2$, (ζ) ἔτῃν ἔτω $\overline{ΠΓ}^2 : \overline{ΜΖ}^2$. ἐστὶ δὲ ὡς $\overline{ΠΓ}^2 : \overline{ΜΖ}^2 :: ΑΠ : ΑΜ$, (η) καὶ ὡς ΑΠ : ΑΜ :: ΠΓ : ΜΟ, (θ) ἥτοι ἔτω ΜΨ : ΜΟ. ὡς ἄρα ὁ ῥηθεὶς ἐν τῷ Κυλίνδρῳ κύκλος, πρὸς τὸν ῥηθέντα ἐν τῇ Κωνοίδι κύκλον, ἔτω ΜΨ : ΜΟ, ἥτοι ἔτως ἡ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ΠΒ εὐθεῖα, πρὸς τὸ μέρος αὐτῆς, τὸ ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΠΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθῆσεται, ὅτι καὶ πᾶς κύκλος ὁ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ, πρὸς πάντας κύκλον τὸν ἐν τῇ Κωνοίδι λόγον ἔχει, ὃν ἡ εὐθεῖα ἡ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ΠΒ, ἡ κῃ ἡμιδιάμετρος τῆ ἐν τῷ κυλίνδρῳ κύκλου, πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΠΓ, τὴν καὶ μέρος αὐτῆς ἔσαν, καὶ ἡμιδιάμετρον τῆ ἐν τῇ Κωνοίδι κύκλου, διὸ καὶ πάντες οἱ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ κύκλοι, πρὸς πάντας τὰς ἐν τῇ Κωνοίδι λόγον ἔχουσιν, ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ΠΒ, πρὸς πᾶσας τὰς εὐθείας τὰς ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΠΓ. καὶ ὁ Κύλινδρος ἄρα ὁ ἀπὸ τῆς ΠΒ, πρὸς τὴν Κωνοίδα τὴν ἀπὸ τῆς ΑΖΓ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὀρθογώνιον ΠΒ, πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΠΓ. ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΠΑΓ τὸ ἥμισυ ἐστὶ τῆς ΠΒ ὀρθογωνίας. καὶ ἡ Κωνοὶς ἄρα ἡ ἀπὸ τῆς ΑΖΓ Παραβολῆς, ἡμίσειά ἐστι τῆς Κυλίνδρου τῆς ἀπὸ τῆς ΠΒ ὀρθογωνίας.

(ζ) Κατὰ τὴν β' τῆς ιβ'. (η) Κατὰ τὴν α'. (θ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'.

Περὶ τῆς χρησέως τῆς Παραβολῆς.

Α'. Τὰ τῇ ἰδίᾳ βαρύτητι ἐπὶ τὰ κάτω φερόμενα σώματα, διαστήματα διήκουν, ὡς ἡ πείρα δείκνυσι, τοῖς ἀπὸ τῶν ταχυτήτων, ὡς κτῶνται, ἢ τοῖς ἀπὸ τῶν καταναλισκομένων ἐν τῇ Φορᾷ χρόνων τετραγώνοις ἀνάλογα. τὸ σώματος ἐν τῷ διὰ τῆς ΑΠ ἐπὶ τὰ κάτω φερόμενα, τὰς ταχυτήτας καὶ τὰς καταναλωθέντας χρόνους ἐμφαίνουσιν αἱ τῆς γραφείσης Παραβολῆς ΑΜ τεταγμένα ΔΦ, πμ, ΠΜ. ἐστὶ γὰρ ὡς ΑΔ : Απ :: ΔΦ² : πμ². (1) ὅπερ ἐστὶ τὰ διαστήματα ΑΔ, Απ, τοῖς ἀπὸ τῶν ταχυτήτων, ἢ τῶν χρόνων τετραγώνοις ἀνάλογον. εἰν ἢ μὲν ΑΔ = 1, ἢ δὲ Απ = 3, ἢ δὲ ΑΠ = 5, τὸ ἐπὶ τὰ κάτω φερόμενον σῶμα ἐπὶ μὲν τὸ Δ ἤξαν, ταχυτῆτα ἔχει 1, καὶ ὁ καταναλωθεὶς δὲ χρόνος ἐν τῇ Φορᾷ, 1 ἐστίν· ἐπὶ δὲ τὸ π, 9· ἐπὶ δὲ τὸ Π καταντῆσαν, 25. πίν. Γ. Χ. 3.

Β'. Πᾶν σῶμα εἴτε παραλλήλῳ, εἴτε πλαγίᾳ τῷ ὀρίζοντι ῥιπτόμενον Φορᾷ, καμπύλην καταγάφει κινούμενον, οἷον τὸ τῇ ΑΡ ῥιπτόμενον Φορᾷ, ἐδὲ διὰ τῆς ΑΡ, ἐδὲ διὰ τῆς ΑΠ φέρεται ευθείας, ἀλλὰ διὰ τῆς ΑΜ καμπύλης. ἥτις δὴ ἡ Παραβολή ἐστὶ, καὶ γὰρ ἐν τοῖς περὶ κινήσεως τῶν σωμάτων θεωρήμασι δείκνυται, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετραγώνων τῶν ἐν τῇ καμπύλῃ τῇ ὑπὸ τῷ ῥιπτομένῳ σώματος γραφομένων, λόγον ἔχει πρὸς ἀλλήλα, ὃν αἱ ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνόμενα. τῆτο δὲ τῆς Παραβολῆς σύμπτωμα, ὡς δῆλον,

ΣΗ.

(1) Κατὰ τὴν κ'. πρότ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον, ὅτι ἐπὶ τέτρω καὶ ἄλλοις τῆς Παραβολῆς ἰδιώμασι πάντες ἴδρυνται οἱ κανόνες τῆς καλαμένης Σφαιρικῆς, ἔσται τῆς τέχνης τῆ ἐπὶ τὸν σκοπὸν εὐθύνειν τὰς ἐκ τῶν πυροβολῶν ὅπλων ἐξαχθεμένας σφαίρας.

Γ'. Αἱ ταχυτῆτες τῆ ἀπότινος σκέυους ἐκβλύζοντος ρευσῆ ὑποδιπλασίονα λόγον ἔχουσι, κατὰ τὴν ὑψοσῆτικὴν κανόνα, ἥπερ τὰ τῆ ρευσῆ ὕψη. οἷον, εἰάν ἐκ τῆς ὀπῆς Α (πίν. 5. κ. 4) τῆ σκέυους ΒΑΔ ρευσὸν ἐκρέῃ, ἡ ταχυτῆς αὐτῆ, ὅτε ὕψος ἔχει τὸ ΑΠ, πρὸς τὴν ταχυτῆτα αὐτῆ, ὕψος ἔχοντος τὸ Απ λόγον ἔχει ὑποδιπλασίονα ἥπερ ΑΠ: Απ, ἔσται ἐν ὡς $\sqrt{ΑΠ} : \sqrt{Απ}$. γραφείσης ἔν τῆς ΑΜ Παραβολῆς, κορυφὴν μὲν ἔχούσης τὸ Α, Διάμετρον δέ, τὸ τῆ ρευσῆ μέγιστον ὕψος ΑΠ, ἀντεταγμένα ΠΜ, πμ τὰς τῆ ρευσῆ ταχυτῆτας δηλώσασιν. ἔσι γὰρ ὡς ΠΜ: πμ: $:\sqrt{ΑΠ} : \sqrt{Απ}$. (κ)

Δ'. Εἰάν κάτοπτρα μεταλλικά, κηλῶτε καὶ παραβολικά ἀπέναντι τῆ Ἡλίου τεθῇ, ὅσαι τῶν ἀκτίνων αὐτῆ παραλλήλοι τῷ τῆς Παραβολῆς Ἀξονι ΑΚ (πίν. Ε. κ. 1.) προσπίπτουσιν, οἷον αἱ ΡΜ ρμ, ΖΗ, ζη ἀνακλασθεῖσαι, κατὰ τὸ τῆ Ἀξονος σημεῖον Φ ἀλλήλως συμβάλλουσι, τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀπέχον, ἀποστήματι τῷ ΦΑ ἴσῳ τεταρτημορίῳ τῆς ὁρθίας πλευρᾶς, ὡς αἱ ΜΦ, μφ, ΗΦ, ηφ. ἐπεὶ γὰρ ἡ λεγομένη τῆς πτώσεως γωνία, τρεῖς ἐν ἡ ΡΜΨ, ἡ ὑπὸ τῆς προσπίπτουσιν ἀκτίνος ΡΜ καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΤΨ περιεχομένη, ἴση τῇ τῆς ἀνακλάσεως, ἥτοι

(κ) Κατὰ τὴν κ. Συνέπ. τῆς α. προτ.

- ἦτοι τῇ ὑπὸ τῆς ἀνακλαθείσης ΜΦ καὶ τῆς αὐ-
τῆς ἐφαπτομένης ΤΨ περιεχομένη ΤΜΦ, ὥς ἐν ταῖς
ὀπτικοῖς διὰ πείρας δεικνύται· ἴση δὲ ἡ ΡΜΨ τῇ
ΤΜΦ γίνεταί, ἐὰν ἡ ΦΜ ἀνακλαθεῖσα κατὰ τὸ
Φ τῷ Ἀξονι συμβαλλῇ (λ) ἢ ἄρα ΡΜ ἀνακλασ-
θεῖσα κατὰ τὸ Φ συμπίπτει. τὸ αὐτὸ δὲ ῥητέον
καὶ περὶ πάσης ἀκτίνος πρὸς τὸ κατόπτρον προσ-
πίπτέσης παράλληλῃ τῷ Ἀξονι. δῆλον ἄρα ὅτι πᾶ-
σαι αἱ τῇ Ἠλίᾳ ἀκτίνες αἱ τῷ παραβολικῷ κατόπ-
τρῳ προσπίπτουσαι παράλληλοι τῷ Ἀξονι, κατὰ τὸ
Φ ἀλλήλαις συμβάλλουσι μετὰ τὴν ἀνάκλασιν. ἐ-
πεὶ δὲ ἡ ἐπὶ τὸ Φ τῶν ἀκτίνων σύμπτωσις τοσού-
τον τὴν τῆς θερμότητος ἐπιτείνει δύναμιν, ὥστε ταῖ
ἐν αὐτῷ τιθέμενα σώματα φλέγεσθαι καὶ κατα-
πύμπρασθαι, διὰ τῆς τοῦ σημείου Φ ἐξίσια ἐκλήθη.
- Ε'. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἐὰν ἐν τῇ Ε'σίᾳ Φ λαμ-
παὺς τεθῇ, αἱ ἐξ αὐτῆς ἐκπεμπόμεναι, καὶ τῷ
παραβολικῷ κατόπτρῳ προσπίπτουσαι τῇ Φωτὸς ἀκ-
τίνες, οἷον αἱ ΦΜ, Φμ, ΦΗ, Φη, ἀνακλαθεῖσαι,
παράλληλοι τῷ ΑΚ Ἀξονι γίνονται, ὥς αἱ ΜΡ,
μρ, ΗΖ, ηζ. ὅτως ἐν ἐνεστὶ τὸ τῆς λαμπρόδος Φῶς
ἀπαραμείωτον ἐπιμνηκίσει παρατείνει διαστήμασιν.
ἐπεὶ γὰρ αἱ φωτιστικαὶ αὐτίνες μετὰ τὴν ἀνάκλα-
σιν ἐκ ἀπ' ἀλλήλων ἀφιστάμεναι, ἀλλὰ παράλληλοι
τῷ Ἀξονι καὶ ἀλλήλαις φερόμεναι ἐπεκτείνονται,
τὴν αὐτὴν πυκνότητα πανταχῶς διατηρεῖσαι, ἔδει
μὴν τῆς ἐαυτῶν πάχους δυνάμεως μείωσιν.
- Σ'. Οὐ μόνον δὲ τὸ Φῶς, ἀλλὰ καὶ ἡ καυσικὴ δύνα-
μις διὰ τῶν παραβολικῶν ἐπεκτείνεται κατόπτρων.
ἐὰν γὰρ δύο παραβολικὰς σίφωνας, Α καὶ Β,
(πίν.

(λ) Ἐκ τῆς ζ'. δῆλον προτ.

(πίν. 5. ρ. 5.) ὡν ὁ Α πολλὰ μείζων τῷ Β, ἔτω κορυφῆς, ὥς ἐκτὸς αὐτῶν τὰς αὐτῶν πίπτειν Ἑσίας, τάξης δὲ αὐτῆς, ὥς τῆς μὲν Ἀξονας ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι, τὰς δὲ Ἑσίας αὐτῶν συμβάλλειν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ, αἱ πρὸς τὸν μείζονα τὸν Α προσπίπτουσαι ἡλιακαὶ ἀκτῖνες Η, Η παράλληλοι τῷ Ἀξονι ΑΔ, ἀνακλαθεῖσαι συμβαλῶσι μὲν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ, ἐκεῖθεν δὲ ὡς ἐκ λαμπάδος προῖσσαι, καὶ ἐντὸς τῷ Β σίφωνος προσπεσῶσαι, παράλληλοί τε μετὰ τὴν ἀνάκλασιν τῷ Ἀξονι αὐτῷ ΔΒ γενόμεναι, ἐπὶ τὰ Ε, Ε μέρη ἐνεχθήσονται. διὰ δὲ τὸ πάνυ πεπυκνωμέναις εἰς τὸν Β σίφωνα εἰσίναι, καὶ μὴ ἀπ' ἀλλήλων ἀφισαμέναις, ἀλλὰ παραλλήλως ἐξίεναι, τὴν φλεκτικὴν ἔχουσι δύναμιν.

Ζ'. Ἐάν δὲ ἡ τῷ τόπῳ θέσις, ἐν ᾧ τὸ καυθησόμενον κεῖται σῶμα, τὸ ἐπ' εὐθείας τῆς τῶν παραβολικῶν σιφῶνων Ἀξονας κεῖσθαι ἀπείρη, μικρὸν παραβολικὸν κυρτὸν κατόπτρον, τὸ ΔΒ ἔτω τάξιν μεταξὺ τῷ παραβολικῷ σίφωνος Α (πίν. Ζ. ρ. 1.) καὶ τῆς Ἑσίας αὐτῆς, ὥς ταυτίζεσθαι μὲν τὰς ἐκατέρων Ἑσίας, περιάγεσθαι δὲ περὶ τὴν κοινὴν Ἑσίαν, ἀνάγεσθαι τε καὶ κατὰγεσθαι. ἔτω γάρ ὅπερ ἂν βέλη τὴν πυρώδη διευθυνοῦς δύναμιν. ἔτω μὲν γάρ ὁ τόπος ἐν ᾧ τὸ καταφλεχθησόμενον σῶμα ὁ Π, καὶ περιενεχθήτω τὸ ΔΒ κατόπτρον, ὥς ἔο' ὁ Ἀξων αὐτῷ ἐπ' εὐθείας ἢ τῷ Π. ἐκὲν αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες αἱ πρὸς τὸ κοῖλον τῷ παραβολικῷ σίφωνος Α προσπεσῶσαι τῷ ἑαυτῷ Ἀξονι παράλληλοι, ἐπὶ τὴν κοινὴν Ἑσίαν μετὰ τὴν ἀνάκλασιν συμπεσεῖν σπένδουσι πίπτουσι δ' ἐν ὅμοις πρὶν ἢ ἀλλήλαις συμβαλῶν ἐπὶ τὸ κυρτὸν τῷ μεταξύ κατόπτρῳ ΔΒ. διὸ ἀνακλαθεῖσαι, καὶ παράλληλοι τῷ τῷ ΔΒ κατόπτρῳ Ἀξονι

Ἄξονι γενόμεναί, (μ) ἐπὶ τὸ Π πεπυκνωμέναί φέρονται καὶ καυσικαί.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Πειθανὸν ἔν ἔοικεν τὸ παρὰ τινων (*) καθιστορῆδὲν ἀξιοπίσαν ἀμέλειται τὸν μὲν Ἀρχιμήδην τὰς τῶν Ῥωμαίων ναῦς ἐγγύς τῆς Συρακῆσης, τὸν δὲ Πρῶκλον τὸν τῷ Οὐίταλιανῷ φίλον πλησίον τῷ Βυζαντίῳ κατακαῦσαι. καὶ γὰρ ἐν τῇ Ἑσΐᾳ, ἣ ἀλλήλαις συμβάλλουσιν αἱ ἀκτῖνες, τὴν μεγίστην ἔχουσι καταφλεκτικὴν δύναμιν, καὶ ἐν ταῖς μετὰ τὴν ἀνάκλασιν μέντοιγε παραλλήλοις τηλικαύτῃ ἐνυπάρχει ἰχὺς, ὥστε καταφλέγειν μὲν τὰ ἔμψυχα, ἀναλύειν δὲ τὰ ἄψυχα, καὶ τῶν σφραγῶν ἐκείνων, ὧν τὰ μέρη εἰ σφόδρα ἐγκρατῶς συνεχόνται.

Η'. Καὶ σάλπιγγας δὲ παραβολικὰς κατασκευάζουσι, στεντορίους (**) καλεσμένας, δι' ὧν λίαν παρεκτείνεται ὁ ἦχος. τιθεμένη γὰρ τῷ σώματι ἐν τῇ Ἑσΐᾳ Γ (χ. 2.) τῆς ΝΜΚΛ παραβολικῆς σάλπιγγος, αἱ φωνητικαὶ ἀκτῖνες (εἴτεν τὰ ὑπὸ τῷ σώματι κινεμένα τε καὶ κυματιζόμενα τῷ αἵετος μόρια) ΓΚ, ΓΛ, ΓΜ, ΓΝ, αἱ πρὸς τὰς τῆς σάλπιγγος πλευρὰς προσπίπτουσαι, παραλλήλοι μετὰ τὴν ἀνάκλασιν τῷ Ἄξονι ΓΒ φέρονται, οἷον αἱ ΚΟ, ΑΠ, ΜΡ, ΝΣ, ἐνθεντοὶ καὶ μὴ ἀπ' ἀλλήλων ἀφιστάμεναι, μηδὲ διασκεδαζόμεναι, ἀλλὰ ἐγγύς ἀλλήλων καὶ πεπυκνωμένα προϊῶσαι, μεγάλῳ παραπέμπουσι τὴν τῆς φωνῆς τάσιν ἀποσήμετι.

©.

(μ) Ὅρα τὴν α'. Συνέπ. τῆς ζ'.

(*) Ὅρα τὴν τῷ Οὐόλφ. Ὅπτι. (**) Ἀπὸ τῶν στεντορίων τυχόν τῶν αἰς τὸν τῆς Τρωάδος πόλεμον ἀφικομένων, καὶ τοσούτον βωῶντος ὅσον ὁμᾶ ἄνδρες πεντήκοντι. περὶ τῆς ἔρα τὸν Ὅμηρ.

- Θ'. Τὸ μπάλιν δὲ συμβαίνει, εἰάν τὸ μὲν ἔσ. ἐν τῇ Ἑσίᾳ Γ τεθῇ, ὃ δὲ βοῶν ἀπεναντίας εἴη τῆς σάλπιγγος. αἱ γὰρ φωνητικαὶ αὐτῆς ἀκτῖνες αἱ εἰς τὴν σάλπιγγα παράλληλοι τῷ Ἀξονι εἰσιῶσαι, καὶ πρὸς τὰς πλευραῖς αὐτῆς προσπίπτουσαι, ὅσον αἱ ΠΛ, ΟΚ, ΣΝ, ΡΜ μετὰ τὴν ἀνάκλασιν κατὰ τὸ Γ συμπίπτουσαι, γεγονωτέραν τὴν φωνὴν καθιστῶσιν. ὁθεν ἔμῳνον τῆ πόρῳ βοῶντος, ἀλλὰ καὶ τῆ λαλῆντος τῶν φωνῶν ἀκέειν ἐνεσιν.
- Ι'. Ὡστερ ἔν τοῖς μύμφι τε καὶ πρεσβύμφι καὶ γεγηρακόσι χρήσιμα τὰ κατασκευαζόμενα Διοπτῆρια, ἔτω δὴ καὶ τοῖς ὑποκώφοις τὰ Ἀκτισηρία· οἷός-εἰν ὁ κερατοειδὴς παραβολικὸς σίφων ΔΑΔΔ, (χ. 3.) ὁ πλατύτερος μὲν κατὰ τὰ ΑΑ, ἥπερ κατὰ τὰ ΔΔ μέση, ἔῃ ἡ Ἑσία ἐν τῷ Γ. ἐφαρμόζεται δὲ τέτω τὸ κεκυρτωμένον σιφώνιον ΒΔΔ πολλῷ αὐτῆς σενώτερον, καὶ ὁπῆν μικροτάτην ἔχον ἐπὶ τῷ Β. τὸ γὰρ τῆ σιφωνίᾳ πέρας Β ἐν τῷ τῆς ἀκοῆς πόρῳ, ὃ δὲ σίφων ἀπέναντι τῆ λαλῆντος τίθεται. καὶ ἐπεὶ αἱ φωνητικαὶ αὐτῆς ἀκτῖνες, αἱ παράλληλοι τῷ Ἀξονι ταῖς τῆ σιφωνος ἔσω πλευραῖς προσπίπτουσαι, κατὰ τὴν Ἑσίαν Γ μετὰ τὴν ἀνάκλασιν ἀλλήλαις συμβάλλουσιν, ἐκείθεν τε πεπυκνωμένα διὰ τῆ σιφωνίᾳ ΔΔΒ διῶσαι εἰς τὸν τῆς ἀκοῆς εἰσδύσει πόρον, καθαρώτερον ὁ ὑπόκωφος τῆς τῆ λαλῆντος φωνῆς ἀκέει.



ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τῶν τῆς Ὑπερβολῆς συμπτωμάτων.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'. (*)

Ἐάν ἐν Ὑπερβολῇ εὐθεΐα ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον, ἔσονται αὐτῶν τετράγωνα ὡς τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας πλευρᾶς τῆς Ὑπερβολῆς.

Ἐστω Ὑπερβολὴ ἡ ZNM, ἥς πλαγία πλευρὰ ἡ ΓΝ, καὶ τετάχθωσαν ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΝΦ εὐθεΐαι ΖΦ, ΕΠ. λέγω ὅτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα εἰσὶν ὡς τὰ ὀρθογώνια ΝΦ. ΦΓ, ΝΠ. ΠΓ. εἴτεν ὅτι ἐστὶν ὡς $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2 :: ΝΦ. ΦΓ : ΝΠ. ΠΓ.$ πίν. Β. χ. 4.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τοῦ Π, καὶ ὁ ἡ τεταγμένη τὴν Διάμετρον τέμνει εὐθεΐα ἡ ΡΠΗ τῇ τῆς βάσεως τῆς Κῶνυς Διαμέτρῳ ΔΒ παράλληλος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ μὲν ΡΗ παράλληλος ἐστὶ τῇ ΔΒ, (α) ἡ δὲ ΕΙ τῇ ΖΜ, (β) καὶ τὸ ἐπίπεδον ἄρα, τὸ διὰ τῶν ΡΗ,

(*) Τὸ β' μέρος ἐστὶ τῆς κα'. τῆς α'. βιβλ. τῆς Ἀποδιδωμένης.

(α) Ἐκ τῆς κατωσῆς. (β) Κατὰ τὸν γ'. ὅρισμ.

ΡΗ, ΕΙ παράλληλόν ἐστὶ τῷ διὰ τῶν ΔΒ, ΖΜ, εἴτεν
 τῇ τῷ Κώνε βασι δΖΒΜ. (γ) τὸ ἄρα διὰ τῶν ΡΗ,
 ΕΙ ἐπίπεδον, κύκλος ἐστίν, ὃ Διάμετρος ἡ ΡΗ. (δ)
 ἐπεὶ δὲ ἡ ΕΙ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Π, (ε) πρὸς ὀρ-
 θὰς ἄρα ἐστὶ τῇ ΡΗ. (ζ) ἔκθεν τὸ μὲν $\overline{ΖΦ}^2 = \Delta\Phi$.
 $\Phi\text{Β}$, τὸ δὲ $\overline{ΕΠ}^2 = \text{ΡΠ} \cdot \text{ΠΗ}$. (η) ὡς ἄρα $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2 ::$
 $\Delta\Phi \cdot \Phi\text{Β} : \text{ΡΠ} \cdot \text{ΠΗ}$. (θ) ἀλλὰ τὸ $\Delta\Phi \cdot \Phi\text{Β} : \text{ΡΠ} \cdot \text{ΠΗ}$
 λόγον ἔχει συγκείμενον (ι) ἕκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει $\Delta\Phi :$
 ΡΠ , ἥτοι $\text{ΝΦ} : \text{ΝΠ}$, (κ) καὶ ἐκ τῷ ὃν ἔχει $\Phi\text{Β} :$
 ΠΗ , εἴτεν $\Phi\Gamma : \text{ΠΓ}$. (λ) ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2$ λό-
 γον ἔχει συγκείμενον ἕκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει $\text{ΝΦ} : \text{ΝΠ}$,
 καὶ $\Phi\Gamma : \text{ΠΓ}$. ὡς ἄρα $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2 :: \text{ΝΦ} \cdot \Phi\Gamma : \text{ΝΠ} \cdot$
 ΠΓ . (μ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι καὶ ἐν
 τῇ ἀντικειμένη τομῇ ΧΓΥ, ἐστὶν ὡς $\overline{ΥΟ}^2 : \overline{ΘΠ}^2 :: \text{ΙΟ} \cdot$
 $\text{ΟΝ} : \text{ΓΠ} \cdot \text{ΠΝ}$.

ΣΤΝΕΠΕΙΑ. (ν)

Ἐὰν ὀρθία τῆς Ὑπερβολῆς πλευρὰ ἦ ἡ ΝΣ, εἴτεν
 ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῷ ὀρθογωνίῳ ΝΦ. ΦΓ, τῷ τε-
 τραγώνῳ $\overline{ΖΦ}^2$, καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΙΝ, (ξ)
 ἔσεται καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ὀρθογωνίον, οἷον τὸ ΝΠ.
 ΠΓ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Τετραγμένης ΕΠ τετραγώνον,
 ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΙΝ, πρὸς τὴν ὀρθίαν ΝΣ. ἐπεὶ
 γὰρ ὡς $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2 :: \text{ΝΦ} \cdot \Phi\Gamma : \text{ΝΠ} \cdot \text{ΠΓ}$, εἴτεν ὡς $\text{ΝΦ} \cdot$
 $\Phi\Gamma : \text{ΝΠ} \cdot \text{ΠΓ} :: \overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2$, ἄρα καὶ ἐναλλάξ ὡς $\text{ΝΦ} \cdot$
 $\Phi\Gamma : \overline{ΖΦ}^2 :: \text{ΝΠ} \cdot \text{ΠΓ} : \overline{ΕΠ}^2$. ἀλλ' ὡς $\text{ΝΦ} \cdot \Phi\Gamma : \overline{ΖΦ}^2 ::$
 I ΓΝ:

- (γ) Κατὰ τὴν ιε'. τῷ ια'. (δ) Κατὰ τὸν ις'. ὄρισμ. (ε) Κατὰ
 τὸν ζ'. ὄρισμ. (ζ) Κατὰ τὴν γ'. τῷ γ'. (η) Κατὰ τὴν β'.
 Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν ἡ. τῷ ε'. (θ) Κατὰ τὴν α'. τῷ ε'.
 (ι) Κατὰ τὸ Θεώρ τὸ μετὰ τὴν κγ'. τῷ ε'. (κ) Κατὰ τὴν
 δ'. τῷ ε'. (λ) Κατὰ τὴν αὐτ. (μ) Κατὰ τὸν ζ'. ὄρισμ.
 τῷ ε'. (ν) Τὸ α'. μέρ. ἐστὶ τῆς κα. τῷ α'. β'. τῷ Ἀπολλων.
 (ξ) Ὅρα τὸν κά. ὄρισμ.

ΓΝ: ΝΣ. (ο) ἄρα καὶ ὡς ΝΠ. ΠΓ: ΕΠ²:: ΓΝ: ΝΣ.
(π)

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ ἐν τῇ ἀντικειμένη
τομῇ ἐστὶν ὡς ΓΟ. ΝΟ: ΤΟ²:: ΓΝ: ΝΣ, καὶ ὡς ΓΠ.
ΠΝ: ΘΠ²:: ΓΝ: ΝΣ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐστω δὴ ἐν ἄραι καὶ ὡς ΝΦ. ΦΓ: ΖΦ²:: ΓΟ. ΟΝ: ΤΟ².
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐὰν ἡ πλαγία πλευρὰ ΝΓ ἴση ᾖ τῇ ὀρθίᾳ ΝΣ,
Ἰσοσκελὴς ἡ Ὑπερβολὴ καλεῖται· ἐστὶ δὲ ἐν αὐτῇ
τὸ μὲν ΝΦ. ΦΓ=ΖΦ², τὸ δὲ ΝΠ. ΠΓ=ΕΠ², ὁμοίως
καὶ τὸ ΓΟ. ΟΝ=ΤΟ², καὶ τὸ ΓΠ. ΠΝ=ΘΠ². εἰ
δὲ ἀνισος, Σκαληνή.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Ἐν Ὑπερβολῇ τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης τε-
τράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ περιε-
χομένῳ ὑπὸ τῆς ὑπ' αὐτῆς ἀποτεμνομένης,
καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγου τῆς πλαγίας
πλευρᾶς, τῆς ὀρθίας, καὶ τῆς συγκαμένης
ἐκτε τῆς πλαγίας καὶ τῆς ἀποτετμημένης.

Ἐστω Ὑπερβολὴ ἡ ΥΝΜ, (πίν. Ζ. χ. 4.) ἥς πλα-
γία μὲν πλευρὰ ἡ ΨΝ, ὀρθία δὲ ἡ ΝΑ, Τεταγμέ-
νη δὲ ἐπὶ τὴν Διάμετρον ἡ ΜΚ. λέγω, ὅτι τὸ ΜΚ²
ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἐκ τῆς ἀποτεμνομένης ΝΚ,
καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγου, τῶν ΨΝ, ΝΑ, ΨΚ.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΨΑ, καὶ ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ συ-
νεχὲς, καὶ ἤχθω ἀπὸ τῆς Κ ἡ ΚΓ τῇ ΝΑ παράλλη-
λος.

ΔΕΙ-

(ο) Ἐξ ἰσοθ. (π) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς τὸ ΝΚ. ΚΨ: $\overline{ΜΚ}^2$:: ΨΝ: ΝΑ. (ρ) ἀλλ' ὡς ΨΝ: ΝΑ:: ΨΚ: ΚΓ. (σ) ὡς δὲ ΨΚ: ΚΓ:: ΨΚ. ΝΚ: ΚΓ. ΝΚ. (τ) ὡς ἄρα ΝΚ. ΚΨ: $\overline{ΜΚ}^2$:: ΨΚ. ΝΚ: ΚΓ. ΝΚ. (υ) ἀλλὰ τὸ ΝΚ. ΚΨ=ΨΚ. ΚΝ. ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΜΚ}^2$ =ΚΓ. ΚΝ. (φ) ἔστι δὲ ἡ ΚΓ τετάρτη ἀναλόγος τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, τῆς ὀρθίας ΝΑ, καὶ τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς πλαγίας καὶ τῆς Ἀποτετμημένης, εἶτεν τῆς ΨΚ. ἔστι γὰρ ὡς ΨΝ: ΝΑ:: ΨΚ: ΚΓ. (χ) οἶα τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $\overline{ΠΙ}^2$ =ΝΠ. ΠΒ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Τὸ ἀπὸ τῆς ὁποιασὲν Τεταγμένης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ σὺν τῷ ὑπὸ τῆς αὐτῆς Ἀποτετμημένης καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγῃ τῆς πλαγίας πλευρᾶς, τῆς ὀρθίας, καὶ τῆς αὐτῆς Ἀποτετμημένης. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Β, Γ σημείων αἱ ΑΗ, ΒΔ, ΓΖ τῇ Διαμέτρῳ ΨΚ παράλληλοι, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΝΑ συμβαλλέτω αὐταῖς. ἐπεὶ ἔν τὸ $\overline{ΜΚ}^2$ =ΝΚ. ΚΓ, ἔστι δὲ τὸ ΝΚ. ΚΓ=ΚΑ+ΗΖ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΚΑ τὸ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΝΚ καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΑ, τὸ δὲ ΗΖ, τὸ ὑπὸ τῆς ΗΑ, εἶτεν τῇ αὐτῆς ΝΚ, καὶ τῆς ΑΖ, τῆς τετάρτης ἀναλόγῃ τῶν ΨΝ, ΝΑ, ΖΓ, ἥτοι ΝΚ. (ἔστι γὰρ ὡς ΨΝ: ΝΑ:: ΖΓ: ΑΖ.) τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετράγωνον $\overline{ΜΚ}^2$ ἴσον τῷ ΚΑ, τῷ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΝΚ, καὶ τῆς ὀρθίας ΝΑ σὺν τῷ ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτετμημένης ΝΚ, καὶ τῆς ῥηθείσης τετάρτης ἀναλόγῃ ΑΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $\overline{ΠΙ}^2$ =ΠΑ+ΦΔ.

I 2

B'.

(ρ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς προλ. προτ. (σ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (τ) Κατὰ τὴν α. τῆ ε'. (υ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε'. (φ) Κατὰ τὴν κ. τῆ ε'. (χ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'.

Β'. Ἀχθείσης ἀπὸ τῆς Ψ τῆς ΨΛ παραλλήλου τῇ ΝΑ, καὶ ἐκβληθείσης ἕως ἔς συμπίσῃ τῇ ἐκβληθείσῃ ΗΛ, δῆλον ὅτι τὰ ὀρθογώνια ΚΖ, ΠΔ, τὰ ἴσα τοῖς τετραγώνοις $\overline{MK}^2$, $\overline{IP}^2$ ὑπερέχουσι τὰ ὀρθογώνια ΚΑ, ΠΑ τὰ ὑπὸ τῶν Ἀποτετμημένων ΝΚ, ΝΠ καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΑ τοῖς ὀρθογωνίοις ΗΖ, ΦΔ, τοῖς ὁμοίοις ἀλλήλοις τε καὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΝΛ, τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, καὶ τῆς ὀρθίας ΝΑ περιεχομένῳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Μήτι γε δὲ ἐκ τέττε ἡ τομὴ Ὑπερβολὴ ἐκλήθη, τετέστιν ἐκ τῆς τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετραγώνων ὑπερέχεν τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς περιεχόμενα.

Γ'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ν ἐπὶ τὰ τῶν εἰρημένων τετάρτων ἀναλόγων ΚΓ, ΠΒ σημεῖα Γ, Β ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΝΓ, ΝΒ, ἔσεται τὸ μὲν $\overline{MK}^2$ διπλάσιον τῆς ΝΚΓ τριγώνου, τὸ δὲ $\overline{IP}^2$, τῆς ΠΝΒ. τὸ μὲν γὰρ $\overline{MK}^2 = ΚΖ$, τὸ δὲ $\overline{IP}^2 = ΠΔ$. ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΖ διπλάσιον τῆς ΝΚΓ, τὸ δὲ ΠΔ τῆς ΠΝΒ. (ψ) ἄρα καὶ τὸ $\overline{MK}^2$ διπλάσιον τῆς ΝΚΓ, ὡσαύτως καὶ τὸ $\overline{IP}^2$ τῆς ΠΝΒ.

Δ'. Δεθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, καὶ τῆς ὀρθίας ΑΝ, γραφήσεται ἡ Ὑπερβολὴ συνεχῶν ὀριζόντων σημείων. (χ. 5.) κείδω γὰρ πρὸς ὀρθίας τῇ ΨΝ ἢ ΑΝ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΨΑ, ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ συνεχές, ὡσαύτως καὶ ἡ ΨΝ. εἰλήφθω δὲ τινα σημεῖα ἀπὸ τῆς ΨΦ τὰ Δ, Φ. καὶ ἔχθωσαν αἱ ΔΜ, ΦΘ τῇ ΑΝ παραλλήλοι. καὶ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΜ εἰλήφθω ἡ ΒΓ = ΒΝ· ἀπὸ δὲ τῆς ΦΘ, ἡ ΖΛ = ΖΝ. καὶ ἐπὶ τῶν ΔΓ, ΦΛ ἡμικύκλια ἀνα-

(ψ) Κατὰ τὴν λδ. τῆς α.

ἀναγεγράφθω τὰ ΔΚΓ, ΦΙΛ. καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν $BE=BK$, ἡ δὲ $ZH=ZI$. λέγω ὅτι, ἡ Ὑπερβολὴ διὰ τῶν Ε, Η σημείων ἥξει, καὶ διὰ τῶν ἐξῆς ὁμοίως ποριζομένων. ἐπεὶ γὰρ τὸ $BK^2=\Delta B \cdot B\Gamma$, (ω) εἰλήφθη δὲ ἡ μὲν $BE=BK$, ἡ δὲ $B\Gamma^2=BN$, τὸ ἄρα $BE^2=\Delta B \cdot BN$, εἴτεν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ τεταγμένης τετράγωνον ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΝΒ, καὶ τῆς ΕΔ, τῆς τετάρτης ἀναλόγου τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, τῆς ὀρθίας ΝΑ, καὶ τῆς ΨΒ τῆς συγκαμένης ἔκτε τῆς πλαγίας καὶ τῆς Ἀποτετμημένης. ὁμοίως δὲ δεχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ $HZ^2=NZ \cdot Z\Phi$. δῆλον ἔν, ὅτι διὰ τῶν Ε, Η σημείων ἡ Ὑπερβολὴ ἥξει.

Ε'. Ἐστὶ δὲ καὶ διὰ κινήσεως κανόνων τινῶν τὰ αὐτὰ πορίσασθαι τῆς Ὑπερβολῆς σημεία. ἐφηρμόδωσαν γὰρ ἐπὶ τὰ τῆς πλαγίας πλευρᾶς πέρατα Ψ, Ν οἱ ΨΩ, ΝΧ (χ. 6.) Κανόνες περὶ αὐτὰ κινητοί. καὶ ἀχθείσης ἀπὸ τῆς ὀρθίας πέρατος Α τῆς ΑΗ παραλλήλου τῇ ΨΚ, ἔτω κινέσθωσαν οἱ Κανόνες, ὥστε τὸ ΝΑ μέρος τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, τὸ ὑπὸ τῆς ΨΩ Κανόνος ἀποτεμνόμενον ἴσον εἶναι τῷ ΑΥ, τῷ ὑπὸ τῆς ΝΧ ἀποτεμνόμενῳ. λέγω δὲ ὅτι διὰ τῶν σημείων, καθ' αὐτὰ ἀλλήλους τέμνεσιν οἱ Κανόνες ἔτω κινέμενοι, ἡ Ὑπερβολὴ ἥξει. ἤχθω γὰρ ἀφ' ἐνὸς τοιούτου σημείου τῆς Μ, ἡ ΜΚ παράλληλος τῇ ΝΑ. καὶ ἐπεὶ τὸ MK^2 , πρὸς τὸ ΨΚ. ΚΝ λόγον ἔχει συγείμενον ἔκτε τῆς λόγου ὃν ἔχει ΜΚ : ΚΝ, καὶ ἐκ τῆς ὃν ἔχει ΜΚ : ΨΚ. (α) ἔστι δὲ ὡς μὲν $MK : ΚΝ :: NA : AY$, (β) ὡς δὲ $MK : ΨΚ ::$

I 3 ΝΛ :

(ω) Κατὰ τὴν β'. Συνέπ. τῆς ἡ. τῆς ε'. (α) Κατὰ τὴν Θεώρ. τὸ μετὰ τὴν κγ'. τῆς ε'. (β) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'.

ΝΑ : ΝΨ· (γ) τὸ ἄρα $\overline{MK}^2$ πρὸς τὸ ΨΚ. ΚΝ λό-
 γον ἔχει συγκείμενον ἕκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ΝΑ :
 ΑΥ, εἶπεν ΝΑ : ΝΛ, (ἢ γὰρ ΑΥ = ΝΛ. (δ)) καὶ
 ἐκ τῷ ὃν ἔχει ΝΑ : ΝΨ, εἶπεν ὡς $\overline{MK}^2$: ΨΚ. ΚΝ :
 ΝΑ. ΝΛ : ΝΛ. ΝΨ. (ε) αἰσθ' ὡς ΝΑ. ΝΛ : ΝΛ
 ΝΨ :: ΝΑ : ΝΨ. (ζ) ὡς ἄρα $\overline{MK}^2$: ΨΚ. ΚΝ :
 ΗΛ : ΝΨ. ὅπερ ἐστίν, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης
 ΜΚ τετράγωνον, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς
 Ἀποτετμημένης ΝΚ καὶ τῆς ΨΚ τῆς συγκειμένης
 ἐκ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς Ἀποτετμημένης
 λόγον ἔχει ὃν ἡ ὀρθία πλευρὰ ΝΑ, πρὸς τὴν πλα-
 γίαν ΝΨ. δῆλον ἄρα, ὅτι διὰ τῷ Μ ἡ Ὑπερβο-
 λὴ ἦξει. (η) ὡσαύτως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ δια-
 πάντων τῶν σημείων τῶν ὁμοίως τῷ Μ πορισθέντων
 ἡ Ὑπερβολὴ διελεύσεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, εἰ ἤτε πλαγία πλευ-
 ρὰ καὶ ἡ ὀρθία δίχα τμηθῶσι, διαχθῇ δέ-
 τις εὐθεία διὰ τῶν διχοτομιῶν, Τεταγμέ-
 νην τέμνῃσα, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς τμηθείσης
 Τεταγμένης τετράγωνον διπλάσιον τῷ τε-
 τραπλεύρῳ τῷ περαττεμένῳ ὑπὸ τῆς ἐξηθεί-
 σης εὐθείας, τῷ ἡμίσεος τῆς ὀρθίας πλευ-
 ρᾶς, τῷ τμήματος τῆς Τεταγμένης, καὶ τῆς
 ὑπ' αὐτῆς Ἀποτεμνομένης.

Τετμή

(γ) Κατὰ τὴν αὐτ. (δ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ε) Κατὰ τὸν ζ'
 ὀρισμ. τῷ ε'. (ζ) Κατὰ τὴν α'. τῷ ε'. (η) Ὅρα τὴν Συνέπ.
 τὴν μετὰ τὴν α'. τῷ ε' τῷ τμήμ.

Τετμήθω δίχα ἥτε πλαγία πλευρά ΨΝ, καὶ ἡ ὀρθία ΝΑ, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΓΕ εὐθεῖα διὰ τῶν Γ καὶ Ε διχοτομιῶν, τεμνέτω τὴν ΚΒ τεταγμένην κατὰ τὸ Δ. λέγω, ὅτι τὸ $\overline{ΒΚ}^2$ διπλάσιόν ἐστι τῷ ΔΕΝΚ τετραπλεύρῳ. πίν. Η. ρ. 1.

Δ Β Ι Ε Σ.

Ἐπεὶ ὡς ΝΓ : ΓΨ :: ΝΕ : ΕΑ, (θ) ἡ ἄρα ΔΓ παράλληλος τῇ ΨΡ. (ι) ὡς ἄρα ΝΓ : ΓΨ :: ΝΦ : ΦΡ. (κ) ἀλλ' ἡ ΝΓ = ΓΨ, (λ) καὶ ἡ ΝΦ ἄρα ἴση τῇ ΦΡ. (μ) ἔχουσι δὲ τὰ τρίγωνα ΦΕΝ, ΦΡΔ καὶ τὰς πρὸς τῷ Φ γωνίας ἴσας, (ν) καὶ τὰς λοιπὰς, (ξ) ἑκατέραν ἑκατέρῳ, ἴσα ἄρα εἰσί. (ο) κοινὸν αὐτοῖς προσκείθω τὸ ΝΦΔΚ τετράπλευρον, τὸ ἄρα ΝΕΔΚ τετράπλευρον ἴσον τῷ ΝΡΚ τριγώνῳ. ἀλλὰ τῷ $\overline{ΒΚ}^2$ διπλάσιόν ἐστι τῷ ΝΡΚ τριγώνῳ, (π) διπλάσιον ἄρα ἐστὶ καὶ τῷ ΝΕΔΚ τετραπλεύρῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $\overline{ΠΔ}^2$ διπλάσιον τῷ ΝΕΤΛ.

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ.

Ἡ μὲν ΨΑ ἡ τὸ πέρας τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ καὶ τὸ τῆς ὀρθίας ΝΑ ἐπιζευγνῦσα, Διευθετῆσα καλεῖται ἡ δὲ ΓΕ, ἡ διὰ τῶν διχοτομιῶν αὐτῶν διηγμένη, Ὑποδιευθετῆσα.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Δ'. (ρ)

Ἀπὸ τῶν δοθέντος σημείων τῆς δοθείσης Ὑπερβολῆς εὐθεῖαν ἀπτομένην ἀγαγῆν.

I 4

Ἔστω

(θ) Ἐκ τῆς ὑποθ. εὐθείας. (ι) Κατὰ τὴν β', τῷ ε'. (κ) Κατὰ τὴν αὐτ. (λ) Ἐξ ὑποθ. (μ) Κατὰ τὴν η'. τῷ ε'. (ν) Κατὰ τὴν ιε'. τῷ α'. (ξ) Κατὰ τὴν κθ'. τῷ α'. (ο) Κατὰ τὴν κς'. τῷ α'. (π) Κατὰ τὴν γ'. συνέπ τῆς προλαβ. προτ. (ρ) Ἡ λβ', καὶ λδ', εἰσι τῷ α'. βιβλ. τῷ Ἀπολλωνίου.

Ἐξω πρῶτον δοθὲν σημεῖον τῆς ΑΜ Ὑπερβολῆς τὸ κατὰ κορυφὴν Α. χ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῆ Α ἡ ΑΩ παράλληλός τινι τῶν τεταγμένων, οἷον τῇ εη. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΑΩ ἐκτὸς τῆς τομῆς πίπτει. δεχθῆσεται δὲ τῆτο καθάπερ ἢ ἐν τῇ Παραβολῇ δέδεικται. (σ)

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔσω ἐπὶ τῆς κορυφῆς τὸ δοθὲν σημεῖον, οἷον ἐς τὸ Μ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῆ Μ τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΨΥ ἡ ΜΠ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπίπτει τῇ Ὑποδιευθετέσῃ ΓΘ κατὰ τὸ Ζ. καὶ τρίτῃ ἀναλόγῳ τῶν ΖΠ, ΠΜ εὐρεθείσῃ ἴσῃ εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ΠΨ ἡ ΠΤ. ἢ ἐπεξεύχθω ἡ ΤΜ. λέγω, ὅτι ἡ ΤΜ καθ' ἐν μόνον σημεῖον ἐφάπτεται τῆς τομῆς. ἐφαπτέσθω γάρ, εἰ δυνατόν, καὶ κατὰ τὸ Δ. ἐπεξεύχθω δὲ ἡ ΤΖ, καὶ ἀπὸ τῆ Δ ἡχθω ἡ ΔΗΦ παράλληλος τῇ ΜΠ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΖΠ: ΠΜ:: ΠΜ: ΠΤ, (τ) τὸ ἄρα $\overline{ΠΜ}^2 = ΖΠ \cdot ΠΤ$. (φ) ἀλλὰ τὸ ΖΠ. ΠΤ διπλάσιόν ἐστι τῆ ΖΠΤ τριγώνου. (χ) καὶ τὸ $\overline{ΠΜ}^2$ ἄρα διπλάσιόν ἐστι τῆ ΖΠΤ. ἀλλὰ τὸ $\overline{ΠΜ}^2$ καὶ τῆ ΑΡΖΠ τετραπλεύρου διπλάσιόν ἐστι. (ψ) τὸ ἄρα ΖΠΤ = ΑΡΖΠ. ἀφηρέθω ἀπὸ μὲν τῆ ΖΠΤ τὸ ΖΛΗΠ τετραπλευρον, ἀπὸ δὲ τῆ ΑΡΖΠ τὸ ΖΦΗΠ, τὸ μᾶλλον τῆ ΖΛΗΠ. λοιπὸν ἄρα τρίγωνον τὸ ΛΤΗ μᾶλλον λοιπὸν τετραπλεύρου τῆ ΑΡΦΗ.

(σ) Ὅρα τὴν δ'. πρότ. τῆ α'. τμήμ. (τ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (φ) Κατὰ τὴν ιζ'. τῆ ε'. (χ) Κατὰ τὴν μα'. τῆ α'. (ψ) Κατὰ τὴν προλμβ. πρότ.

ΑΡΦΗ. ἐπεὶ δὲ ὡς $PTM : HT\Delta :: \overline{PT}^2 : \overline{HT}^2$, ὡσαύτως, ὡς $PTZ : HT\Lambda :: \overline{PT}^2 : \overline{HT}^2$, (ω) ἄρα καὶ ὡς $PTM : HT\Delta :: PTZ : HT\Lambda$. (α) ἄλλ' ὡς $PTM : HT\Delta :: \overline{PM}^2 : \overline{HA}^2$. (β) ἄρα καὶ ὡς $\overline{PM}^2 : \overline{HA}^2 :: PTZ : HT\Lambda$. (γ) ἄλλὰ τὸ $\overline{PM}^2$ διπλασίον διέδεικται τῷ PTZ . ἄρα καὶ τὸ $\overline{HA}^2$ διπλασίον ἐστὶ τῷ $HT\Lambda$. ἀλλὰ τὸ $HT\Lambda$ μείζον τῷ ΑΡΦΗ, ὡς δέδεικται, τὸ ἄρα $\overline{HA}^2$ μείζον τῷ διπλασίῳ τῷ ΑΡΦΗ. ἀλλὰ τὸ αὐτὸ $\overline{HA}^2$ καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ διπλασίῳ τῷ ΑΡΦΗ. (δ) μείζον ἄρα καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον. ἔκ ἄρα ἡ TM ἐφάπτεται τῆς τομῆς κατὰ τὸ Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι ἐδὲ κατὰ ἄλλο σημεῖον ἐφάπτεται, πλὴν τῷ Μ.

ΣΗΝΕΠΕΙΑΙ

Α'. Ἐντεῦθεν πολλάι πορίζονται μέθοδοι τῷ ἐφαπτομένην ἀγεῖν ἀπὸ τῷ δοθέντος τῆς Ὑπερβολῆς σημείω. εἰάν γὰρ ἀπὸ τῷ Ἀξονος ΨT ληφθῇ ἡ PT ἴση τῇ PZ , ἔσεται καὶ ὡς $TP : PM :: PM : PT$. ἔκθ' ἡ YMT γωνία ὀρθή ἐστὶ. (ε) ἀχθήσεται ἄρα ἐφαπτομένη τῆς Ὑπερβολῆς, εἰάν ἀπὸ τῷ δοθέντος σημείω Μ ταχθεῖσα ἐπὶ τὸν Ἀξονα ἡ MP , ἐκβληθεῖσα συμπίσῃ τῇ Ὑποδιευθετάσῃ κατὰ τὸ Ζ· ληφθῇ δὲ τῇ ZP ἴση ἡ PT , καὶ τῇ ἐπιζευχθεῖσῃ TM πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ ἐυθεῖα ἡ MT . αὕτη γὰρ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Β'. Συμπεσέσσης τῆς MZ τῇ Διευθετάσῃ ΨN ἐκβληθεῖσῃ, κατὰ τὸ Ο, ἔσεται τὸ $\overline{MP}^2 = AP \cdot PO$. (ζ) ἀλλὰ τὸ $\overline{MP}^2 = ZP \cdot PT$. (η) ἄρα καὶ τὸ $AP \cdot PO$

I 5

PO

(ω) Κατὰ τὴν εἴδ. τῇ ε'. (α) Κατὰ τὴν ε'. τῇ ε'. (β) Κατὰ τὴν εἴδ. τῇ ε'. (γ) Κατὰ τὴν εἰρημ. ε'. (δ) Κατὰ τὴν προλαβ. πρότ. (ε) Κατὰ τὴν γ'. Συνέπ. τῆς ἡ τῇ ε'. (ζ) Κατὰ τὴν β'. τῷδε τῇ τμήμ. (η) Ἐκ τῆς κατασκευ.

ΠΟ = ΖΠ. ΠΤ. ὡς ἄρα ΖΠ :: ΠΟ :: ΑΠ : ΠΤ.
 (θ) ἄξις ἄρα τῆς τομῆς ἐφαπτομένην, εἰάν ἀπὸ τῆ
 δοθέντος σημείου Μ, ἀγαγῶν τεταγμένην τὴν ΜΠ,
 καὶ ἐκβαλὼν αὐτὴν κατὰ τὸ συνεχὲς, καὶ εὐρῶν
 τετάρτην ἀνάλογον τῶν ΖΠ, ΠΟ, τῶν μεταξὺ τῆς
 Ὑποδιευθετέσης ἢ Διευθετέσης καὶ Διαμέτρου, ἢ
 τῆς Ἀποτετμημένης ΑΠ, ἴσην αὐτῇ τῇ εὐρεθείσῃ
 λάβῃς τὴν ΠΤ, καὶ ἀπὸ τῆς Τ ἐπὶ τὸ δοθὲν ση-
 μεῖον Μ ἐπιζευξῇς τὴν ΜΤ. ἢ γὰρ ἡ ΜΤ ἔσεται
 ἡ ἐφαπτομένη.

Γ'. Ἐπεὶ δὲ ὡς ΖΠ : ΠΟ :: ΑΠ : ΠΤ, ἄρα ἢ ἀνά-
 παλιν ὡς ΠΟ : ΖΠ :: ΠΤ : ΑΠ, καὶ διαιρεθέντα
 ὡς ΖΟ : ΖΠ :: ΤΑ : ΑΠ, ἢ ἀνάπαλιν ὡς ΖΠ :
 ΖΟ :: ΑΠ : ΤΑ. εἰάν ἄρα τῆς εἰρημένης ΖΠ, καὶ
 τῆς ἡμίσεως τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΖΟ, (ἢ ΖΟ =
 ΝΡ. (ι)) καὶ τῆς Ἀποτετμημένης ΑΠ τετάρτη
 ἀνάλογος εὐρεθῇ, καὶ ληφθῇ αὐτῇ ἴση ἡ ΑΤ, ἢ
 ἀπὸ τῆς Τ ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπιζευγνυμένη
 εὐθεῖα ΤΜ ἐφάψεται τῆς εἰδους.

Δ'. Ἐπεὶ ἡ ΖΟ = ΝΡ = ΡΑ, ἐστὶν ἄρα ὡς ΖΠ : ΡΑ ::
 ΑΠ : ΑΤ. ἀλλ' ὡς ΖΠ : ΡΑ :: ΓΠ : ΓΑ, (κ) ἄρα
 καὶ ὡς ΓΠ : ΓΑ :: ΑΠ : ΑΤ. (λ) καὶ ἐναλλάξ
 ὡς ΓΠ : ΑΠ :: ΓΑ : ΑΤ. ἢ κατὰ ἀναστροφὴν λό-
 γος, ὡς ΓΠ : ΓΑ :: ΓΑ : ΓΤ. τὸ ἄρα $\overline{ΓΑ}^2 = ΠΓ \cdot$
 ΓΤ. (μ) εἰάν ὅν εὐρεθῇ τρίτη ἀνάλογος τῆς ΠΓ, τῆς
 ἐκ τῆς ἡμίσεως ΓΑ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς
 Ἀποτετμημένης ΑΠ συγκειμένης, ἢ αὐτῆς τῆς ἡμί-
 σεως ΓΑ τῆς πλαγίας ΨΑ, καὶ ἴση τῇ εὐρεθείσῃ
 ληφ.

(θ) Κατὰ τὴν ις'. τῆς ε'. (ι) Κατὰ τὴν λδ'. τῆς α'. (κ) Κατὰ
 τὴν δ'. τῆς ε'. (λ) Κατὰ τὴν ε' τῆς ε'. (μ) Κατὰ τὴν ις'.
 τῆς ε'.

ληφθῇ ἡ ΓΤ, ἡ ἀπὸ τῆς Τ ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπιζευγνυμένη ἐφάπεται τῆς τομῆς.

Ε'. Τὸ $\overline{ΓΑ}^2 = ΠΓ \cdot ΓΤ$. (ν) εἰν ἔν τεττων ἐκάτερον ἀπὸ τῆς $\overline{ΓΠ}^2$ ἀφέλῃς, τὰ λοιπὰ ἴσα ἔσονται, εἴτεν τὸ $\overline{ΨΠ} \cdot ΠΑ = \overline{ΓΠ} \cdot ΠΤ$. (ξ) ὡς ἄρα $\overline{ΓΠ} : \overline{ΨΠ} :: ΠΑ : ΠΤ$. ἔκῃν εἰν τετάρτη ἀνάλογος εὐρεθῇ τῆς $\overline{ΓΠ}$, τῆς ἐκ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἡμίσεως ΓΑ καὶ τῆς Ἀποτετμημένης ΑΠ συγκεκλιμένης, καὶ τῆς $\overline{ΨΠ}$ τῆς ἐκ τῆς πλαγίας ΨΑ καὶ τῆς αὐτῆς Ἀποτετμημένης συγκεκλιμένης, καὶ τῆς ΑΠ Ἀποτετμημένης, καὶ ἴση τῇ εὐρεθείᾳ ληφθῇ ἡ ΠΤ, ἡ ἀπὸ τῆς Τ ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπιζευγνυμένη, τῆς Ὑπερβολῆς ἐφάπεται.

Σ'. Ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ ΠΤ πρὸς τὴν ΤΑ σύγκειται ἐκ τῆς λόγου ὃν ἔχει ἡ ΠΨ : ΨΑ, καὶ ἐκ τῆς διπλασίᾳ, εἴτεν ἐκ τῆς ὃν ἔχει ὁ 2 : 1. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΠΟ : ΠΖ :: ΠΤ : ΠΑ, (ο) ἄρα καὶ κατὰ ἀναστροφὴν λόγος ὡς ΠΟ : ΖΟ :: ΠΤ : ΤΑ, ἥτοι ὡς ΠΟ : ΡΑ :: ΠΤ : ΤΑ. ἀλλ' ἡ ΠΟ πρὸς τὴν ΡΑ λόγον ἔχει συγκεκλιμένον ἔντε τῆς λόγου ὃν ἔχει ΠΟ : ΑΝ, καὶ ΑΝ : ΡΑ. (π) ἔστι δὲ ὡς μὲν ΠΟ : ΑΝ :: ΠΨ : ΨΑ, (ρ) ὡς δὲ ΑΝ : ΡΑ :: 2 : 1. ἄρα καὶ ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ ΠΤ : ΤΑ σύγκειται ἐκ τῆς λόγου ὃν ἔχει ἡ ΠΨ : ΨΑ, καὶ τῆς ὃν ἔχει ὁ 2 : 1. εἴτεν ὡς ΠΤ : ΤΑ :: 2ΠΨ : ΤΑ. (σ)

Ζ'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α τῆς Ὑπερβολῆς ἐφαπτομένη ἀχθῇ ἡ ΑΧΩ, ἀπὸ δὲ τῆς σημείας τῆς ἀφῆς Μ

(ν) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (ξ) Ἐκ τῆς ε', καὶ β'. τῆς β'. δῆλον. (ο) Ὅρα τὴν προλ. γ'. Συνέπ. (π) Κατὰ τὸ κ. πόρισ. τὸ μετὰ τὴν ἡ. τῆς ε'. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (σ) Κατὰ τὴν ζ'. πόρισ. τῆς ε'.

Μ ἐπὶ τὸ πέρας Ψ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἐπιζευχθῇ ἢ ΜΨ, τὸ ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβάνομενον μέρος ΑΩ τῆς κατὰ κορυφὴν ἀπτομένης δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Χ ὑπὸ τῆς μὴ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης ΜΤ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΠΜ: ΑΧ :: ΠΤ: ΤΑ· (τ) ἢ δὲ ΠΤ: ΤΑ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ἢ ΠΨ: ΨΑ, καὶ ἐκ τῆ 2: 1· (υ) ἄρα καὶ ἢ ΠΜ: ΑΧ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῷ ὃν ἔχει ἢ ΠΨ: ΨΑ, καὶ ἐκ τῆ 2: 1. ἀλλ' ἢ ΠΜ: ΑΧ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶ ὃν ἔχει ἢ ΠΜ: ΑΩ, καὶ ἢ ΑΩ: ΑΧ. (φ) ἔστι δὲ ὁ εἰς τῶν συντιθέμενων λόγων ἴσος τῷ ἐνὶ ἔστι γὰρ ὡς ΠΨ: ΨΑ :: ΠΜ: ΑΩ· (χ) καὶ ὁ ἕτερος ἄρα ἴσος τῷ ἑτέρῳ, εἶπεν ὡς ΑΩ: ΑΧ :: 2: 1. ἔκθ' ἢ ΑΩ διπλασία τῆς ΑΧ. ἢ ἄρα ΑΩ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Χ ὑπὸ τῆς ΜΤ. ἄξεις ἐν ἐφαπτομένην ἀπὸ τῆ δοθέντος σημείῳ Μ, εἰάν ἀπ' αὐτῆς ἐπὶ τὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς πέρας Ψ ἐπιζεύξαι τὴν ΨΜ, δίχα τέμῃς τὸ ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβάνομενον τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης μέρος ΑΩ κατὰ τὸ Χ, καὶ ἀπὸ τῆ Χ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζεύξῃς τὴν ΧΜ.

Η'. Τὸ σημεῖον Τ, καθ' ὃ ἢ ἐφαπτομένη ΜΤ τὴν πλαγίαν πλευρὰν ΨΑ τέμνει, μεταξὺ κείται τῆ κέντρος Γ, καὶ τῆς Α κορυφῆς. ἐκβεβλήθω γὰρ ἢ ἐφαπτομένη ΜΤ, καὶ συμπίπτέτω κατὰ τὸ Β τῇ ΨΚ, τῇ ἀπὸ τῆ Ψ ἀχθείσῃ τῇ ΑΩ παραλλήλῳ. καὶ καὶ ἐπεὶ ὡς ΨΤ: ΤΑ :: ΨΒ: ΑΧ, (ψ) ἔστι δὲ ἢ ΑΧ

(τ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ 5'. (υ) Κατὰ τὴν προηλ. Συνέπ. (φ) Κατὰ τὸ ἄρημ. πόρισ. (χ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ 5'. (ψ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ 5'.

$\Lambda\chi = \chi\Omega$. ἐκέν καὶ ὡς $\Psi\tau : \tau\alpha :: \psi\beta : \chi\Omega$. ἀλλ' ὡς μὲν $\psi\beta : \chi\Omega :: \psi\mu : \mu\omega$, ὡς δὲ $\psi\mu : \mu\omega :: \psi\pi : \pi\alpha$. (ω) ἄρα καὶ ὡς $\Psi\tau : \tau\alpha :: \psi\pi : \pi\alpha$. (α) ἀλλ' ἢ $\Psi\pi$ μείζων τῆς $\pi\alpha$, ἄρα ἢ ἢ $\Psi\tau$ μείζων τῆς $\tau\alpha$. τὸ ἄρα τ σημεῖον μεταξὺ τῆς κέντρως Γ καὶ τῆς κορυφῆς Λ κείται.

Θ'. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς $\psi\beta : \Lambda\chi :: \psi\pi : \pi\alpha$. ἐπεὶ γάρ ὡς $\Psi\tau : \tau\alpha :: \psi\beta : \Lambda\chi$, ἢ ὡς $\Psi\tau : \tau\alpha :: \psi\pi : \pi\alpha$, (β) ἄρα ἢ ὡς $\psi\beta : \Lambda\chi :: \psi\pi : \pi\alpha$. (γ)

Ι'. Ἐάν ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς M ἐπὶ τῆς κορυφῆς Λ ἐπιζευχθῇ ἡ MA , καὶ ἐκβληθεῖσα συμπέσῃ τῇ ΨK , τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένῃ τῆς ἀντικειμένης τομῆς, (ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τῆς Ψ ἡ $\chi\theta\eta$ ἢ ΨK παράλληλος τῇ $\Lambda\Omega$, (δ) εἴτεν ταῖς τεταγμέναις MP , EH , ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ ΨK κατὰ κορυφὴν τῆς ἀντικειμένης τομῆς. (ε)) τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς ΨK μέρος δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης MT κατὰ τὸ B . ἐπεὶ γὰρ ὡς $B\Psi : \chi\Omega :: BM : MX$, (ζ) ἢ ὡς $BM : MX :: KB : \Lambda\chi$, (η) ἄρα καὶ ὡς $B\Psi : \chi\Omega :: KB : \Lambda\chi$. (θ) ἀλλ' ἢ $\chi\Omega = \Lambda\chi$. (ι) ἄρα καὶ ἢ $B\Psi = KB$. (κ) ἢ ἄρα $K\Psi$ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ B .

ΙΑ'. Τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὑπὸ τῶν κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένων ΨK , $\Lambda\Omega$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨA , ἢ τῆς ὀρθίας ΛN περιχρμένῳ ὀρθογωνίῳ. εἴτεν τὸ ΨK . $\Lambda\Omega = \Psi A$. ΛN . ἐπεὶ γὰρ ὡς

ΟΠ:

(μ) Κατὰ τὴν αὐτ. (κ) Κατὰ τὴν ε' τῆς ε'. (β) Ὅρα τὴν προλ. Συνέπ. (γ) Κατὰ τὴν ἀρ. μ. ε'. (δ) Ὅρα τὴν προλ. ἢ Συνέπ. (ε) Ὅρα τὸ α' μέρος τῆς προλ. μ. προλ. (ζ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (η) Κατὰ τὴν αὐτ. (θ) Κατὰ τὴν ἀρ. μ. ε'. (ι) Κατὰ τὴν προλ. ζ'. Συνέπ. (κ) Κατὰ τὴν κ'. τῆς ε'.

ΟΠ : ΠΜ :: ΠΜ : ΑΠ, (λ) ἔστι δὲ ὡς μὲν ΟΠ : ΠΜ :: ΑΝ : ΑΩ, ὡς δὲ ΠΜ : ΑΠ :: ΚΨ : ΨΑ, (μ) ἄρα καὶ ὡς ΨΚ : ΨΑ :: ΑΝ : ΑΩ. (ν) τὸ ἄρα ΨΚ. ΑΩ = ΨΑ. ΑΝ. (ξ) δῆλον δὲ ἐκ τούτου ὅτι τὸ ΨΒ. ΑΧ, εἶπεν τὸ ὑπὸ τῶν ἡμίσεων τῶν κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένων τῶν ἀντικειμένων τομῶν ἴσον ἐστὶ τεταρτημορίῳ τῆς ὑπὸ τῆς πλαγίας ΨΑ, καὶ τῆς ὀρθίας ΑΝ περιεχομένῃς ὀρθογωνίᾳ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α. (ο)

Εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς Ὑπερβολῆς, καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης αὐτῆς ἑτέρας εὐθεΐας ὁ παρεμπεσῆται.

Ἐφαπτέσθω ἡ ΑΓ τῆς ΗΑΙ Ὑπερβολῆς κατὰ κορυφὴν. λέγω, ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθεΐας καὶ τῆς τομῆς ΗΔ ἑτέρα εὐθεΐα ὁ παρεμπεσῆται. παρεμπίπτει γάρ, εἰ δυνατόν, ἡ ΑΔ. 3.

Κ Α Τ Α Σ Κ Ε Ξ Η.

Ἀπὸ τῆς τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΑΒ πέρατος Β ἐπὶ τὸ τῆς ὀρθίας Ζ, τῆς παραλλήλου ταῖς τεταγμέναις κειμένης, ἐπεζεύχθω ἡ ΒΖ, καὶ ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ συνεχές. καὶ ἀπότινος σημείον Δ τῆς ΑΔ τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον καταχθῆσθαι ἡ ΔΕ, ὁμοίως ἐκβεβλήθω. καὶ τρίτη ἀναλόγῃ τῶν ΑΕ, ΔΕ εὐρεθείσῃ εἰλήθῃ ἡ ΕΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΝ τὴν ΒΖ τέμνεσθαι κατὰ τὸ Ξ. καὶ ἀπὸ τῆς Ξ ἤχθῃ ἡ ΞΘΚ παραλλήλος τῇ ΑΖ.

ΔΕΙ-

- (λ) Κατὰ τὴν β'. τὰ δὲ τῆς τμήμ. (μ) Κατὰ τὴν δ'. τὰ ε'.
(ν) Κατὰ τὴν εἰρημ. ε'. (ξ) Κατὰ τὴν ιε'. τὰ ε'. (ο) Μέρους ἐστὶ τῆς λβ'. πρῶτ. πᾶ 1. βιβλ. τὰ Ἀπολλων.

ΔΕΙΞΙΣ

Ἐπεὶ ὡς $NE: ΔΕ:: ΔΕ: ΑΕ$, (π) ἄρα καὶ ὡς $NE: ΑΕ: ΔΕ^2: ΑΕ^2$. (ρ) ἄλλ' ὡς $NE: ΑΕ:: ΞΘ: ΑΘ$. (σ) ὡς ἄρα $ΞΘ: ΑΘ:: ΔΕ^2: ΑΕ^2$. (τ) ἔπει δὲ ἔστιν ὡς $ΔΕ: ΑΕ:: ΚΘ: ΑΘ$, (υ) ἔστιν ἄρα καὶ ὡς $ΔΕ^2: ΑΕ^2:: ΚΘ^2: ΑΘ^2$. (φ) διὸ δὴ καὶ ὡς $ΞΘ: ΑΘ:: ΚΘ^2: ΑΘ^2$. (χ) ὡς ἄρα $ΞΘ: ΚΘ:: ΚΘ: ΘΑ$. (ψ) ἔκθεν τὸ $ΚΘ^2 = ΞΘ \cdot ΘΑ$. (ω) ἀλλὰ καὶ τὸ $ΑΘ^2 = ΞΘ \cdot ΑΘ$. (α) τὸ ἄρα $ΚΘ^2 = ΑΘ^2$. ὅπερ ἄτοπον. Ἐκ ἄρα ὡς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς ΑΗ Ὑπερβολῆς εὐθεῖά τις παρεμπεσάται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον ὅτι καμπύλην μὲν γραμμὴν ἐδὲν ἄτοπον ἐμπίπτειν μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τομῆς· εὐθεῖαν δὲ, ἀμήχανον. τεμνὴ γὰρ αὐτὴ τὴν τομὴν, καὶ ἐκ ἐφάπτεται. τῷτο δὲ καὶ περὶ τῆς Παραβολῆς καὶ τῆς Ἐλλείψεως, ὁ μὲν ἀλλὰ καὶ περὶ τῆς κύκλου ἑητέον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'. (β)

Ἐὰν ἐν Ἀντικειμέναις εὐθεῖαι ἀχθῇ ἐφ' ἐκάτερα τὰ κέντρα συμπίπτουσα τῇ τομῇ, διχα τμηθήσεται κατὰ τὸ κέντρον αἱ δὲ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἀχθῆσαι ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς, καὶ τῇ Διαμέτρῳ συμπίπτουσαι

- (π) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ρ) Κατὰ τὸ β'. πόρις. τὸ μετὰ τὴν ἡ. τῇ ε'. (σ) Κατὰ τὴν δ' τῇ ε'. (τ) Κατὰ τὴν ε'. τῇ ε'. (υ) Κατὰ τὴν δ'. τῇ ε'. (φ) Κατὰ τὸ ζ'. Θεώρημ. τῶν μετὰ τὸ ε'. (χ) Κατὰ τὴν ἀρῆμ. ε'. (ψ) Ἐκ τῆς ἀρῆμ. πόρις. δῆλον. (ω) Κατὰ τὴν ιζ'. τῇ ε'. (α) Κατὰ τὴν β'. τῷδε τῇ τριτ. (β) Τὸ α. μέρος. τῆς λ'. πρώτ. ἐστὶ τῇ α. βιβλ. τῇ Ἀπολ.

σαι ἴσαι τε ἀλλήλους καὶ παράλληλοι ἔσονται.

Ἐξωσαν Ἀντικείμεναι Τ'περβολαὶ αἱ ΑΜ, ΨΝ, καὶ ἀχθῆσα ἡ ΜΝ ἐφ' ἐκάτερα τῶ κέντρων Γ, συμπίπτει τῶ ταῖς τομαῖς κατὰ τὰ Μ καὶ Ν σημεία. ἤχθωσαν δὲ ἀπὸ τῶν Μ καὶ Ν σημείων ἐφαπτόμεναι αἱ ΜΤ, ΝΗ, τῇ Διαμέτρῳ συμπίπτουσαι κατὰ τὰ Τ καὶ Η σημεία. λέγω δὴ Α', ὅτι ἡ ΓΜ = ΓΝ. Β'. ὅτι ἡ ΜΤ ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ ΝΗ. πίν. Θ. χ. 1.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῶν Μ καὶ Ν σημείων ἤχθωσαν τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον αἱ ΜΠ, ΝΦ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ὡς ΨΠ. ΠΑ : ΜΠ² :: ΑΦ. ΦΨ : ΝΦ². (γ) καὶ ἐναλλάξ ὡς ΨΠ. ΠΑ : ΑΦ. ΦΨ :: ΜΠ² : ΝΦ². ἀλλ' ὡς ΜΠ² : ΝΦ² :: ΠΓ² : ΦΓ². (δ) ἔστι γὰρ ὡς ΜΠ : ΝΦ :: ΠΓ : ΦΓ. (ε) ὡς ἄρα ΨΠ. ΠΑ : ΑΦ. ΦΨ :: ΠΓ² : ΦΓ². (ζ) καὶ ἐναλλάξ ὡς ΨΠ. ΠΑ : ΠΓ² :: ΑΦ. ΦΨ : ΦΓ². καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΠΓ² : ΨΠ. ΠΑ :: ΦΓ² : ΑΦ. ΦΨ. καὶ κατ' ἀνατροφήν λόγῳ ὡς ΠΓ² : ΠΓ² - ΨΠ. ΠΑ :: ΦΓ² : ΦΓ² - ΑΦ. ΦΨ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΠΓ² - ΨΠ. ΠΑ = ΓΑ², τὸ δὲ ΦΓ² - ΑΦ. ΦΨ = ΓΨ². (η) ὡς ἄρα ΠΓ² : ΓΑ² :: ΦΓ² : ΓΨ². ἀλλὰ τὸ ΓΑ² = ΓΨ². ἄρα καὶ τὸ ΠΓ² = ΦΓ². (θ) διὸ καὶ ἡ ΠΓ = ΦΓ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἔχουσι τὰ ΜΓΠ, ΝΓΦ
τερί-

(γ) Κατὰ τὸ Πόρις. τὸ μετὰ τὴν α', τῶδε τῶ τμήμ. (δ) Κατὰ τὸ ζ'. τῶν μετὰ τὸ ε'. Θεωρημ (ε) Κατὰ τὴν δ'. τῶ ε'. (ζ) Κατὰ τὴν ε'. τῶ ε'. (η) Κατὰ τὴν ε'. τῶ β'. (θ) Κατὰ τὴν κ'. τῶ ε'.

τρίγωνα ἑκατέραν ἑκατέρα, ἔστιν ἄρα καὶ ἡ $ΓΜ = ΓΝ$. (ι)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Β'.

Τὸ μὲν $ΠΓ. ΓΤ. = ΓΑ^2$, τὸ δὲ $ΦΓ. ΓΗ = ΓΨ^2$.
(κ) ἀλλὰ τὸ $ΓΑ^2 = ΓΨ^2$. ἄρα καὶ τὸ $ΠΓ. ΓΤ = ΦΓ. ΓΗ$. ἔστι δὲ ἡ $ΠΓ = ΦΓ$. ἄρα καὶ ἡ $ΓΤ = ΓΗ$. τῶν
τριγώνων ἔν $ΓΜΤ$, $ΓΝΗ$ αἱ μὲν $ΓΜ$, $ΓΤ$ ἴσαι ταῖς
 $ΓΝ$, $ΓΗ$ ἑκατέρα ἑκατέρα, αἱ δὲ πρὸς τῷ $Γ$ γωνίαι
ἴσαι. ἄρα καὶ ἡ $ΜΤ = ΝΗ$, καὶ γωνία ἡ $ΝΜΤ =$
 $ΜΝΗ$. (λ) ἡ ἄρα $ΜΤ$ ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ $ΝΗ$.

ΣΤΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐὰν ἀχθῆσαι ἡ δευτέρα Διάμετρος $ΒΔ$, ἐκβλη-
θῇ ἐφ' ἑκάτερα, δίχα τεμεῖ τὰς $ΖΜ$, $ΟΙ$, τὰς
ἐπιζευγνύσας τὰς ἐν ταῖς ἀντικειμέναις τομαῖς ἴσας
τεταγμένας $ΜΠ$, $ΖΦ$, $ΙΣ$, $ΟΞ$. ἐπεὶ γὰρ αἱ $ΜΠ$,
 $ΖΦ$ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι, καὶ ἡ $ΜΖ$ ἄρα ἴση-
τε καὶ παράλληλος τῇ $ΠΦ$. (μ) ἐκέν παραλληλό-
γγραμμὸν ἔστι τὸ $ΜΦ$. ἔστι δὲ καὶ ἡ $ΒΔ$ ἑκατέρα τῶν
 $ΜΘ$, $ΖΝ$ παράλληλος, (ν) παραλληλόγραμμα ἄρα
εἰσὶ τὰ $ΜΓ$, $ΕΦ$. διὸ ἡ μὲν $ΜΕ = ΠΓ$, ἡ δὲ $ΕΖ =$
 $ΓΦ$. (ξ) ἀλλ' ἡ $ΓΠ = ΓΦ$, (ο) ἄρα καὶ ἡ $ΜΕ = ΕΖ$.
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ $ΙΡ = ΡΟ$,
καὶ ἡ $ΘΣ = ΣΝ$.

Β'. Αἱ ἄρα $ΖΜ$, $ΟΙ$, $ΝΘ$ τεταγμένα εἰσὶν ἐκτὸς τῶν
ἀντικειμένων τομῶν, δίχα τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς Δευτέ-
ρας Διαμέτρου $ΒΔ$, τῆς καὶ τὰ παραλληλόγραμμα $ΜΦ$,
 $ΙΞ$, $ΠΝ$ δίχα τεμνέσθης.

Κ

Γ'.

(ι) Κατὰ τὴν κς'. τῆ α'. (κ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς προλαβ.
προτ. (λ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ α'. (μ) Κατὰ τὴν λγ'. τῆ α'.
(ν) Κατὰ τὸν κδ'. ὄρισμ. (ξ) Κατὰ τὴν λδ'. τῆ α'. (ο) Κατὰ
τὸ α' μέρ. τῆς προκαμ. προτ.

Γ'. Ἡ τρίτη ἀνάλογος τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΒΔ, καὶ τῆς πλαγίας ΨΑ, οἷον ἡ ΒΛ, ὁρθία πλευρά ἐστιν ὡς πρὸς τὴν ΒΔ. ὥστερ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου τετράγωνον ἴσον τῷ ὁρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ καὶ τῆς ὁρθίας αὐτῆς ΑΥ, εἶπεν τὸ $\overline{ΒΔ}^2 = \Psi\Lambda \cdot \Lambda\Upsilon$, (π) ἔτω δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον τῷ ὁρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΒΔ καὶ τῆς ὁρθίας πλευρᾶς αὐτῆς ΒΛ, ἦτοι τὸ $\overline{\Psi\Lambda}^2 = \overline{ΒΔ} \cdot \overline{ΒΛ}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Αἱ πλαγίαὶ μὲν πλευραὶ τῇ ΒΔ, ὁρθία δὲ τῇ ΒΛ γραφόμεναι δύο Ὑπερβολαί, αἱ ΚΒΧ, ΩΔΖ, Συζυγαῖς Ἀντικείμεναι, ἡ κατὰ Συζυγίαν Ἀντικείμεναι καλῶνται, τῶν ΙΑΘ, ΟΨΔ· τέμπαλιν δὲ, αὐταὶ Συζυγαῖς Ἀντικείμεναι ἐκείνων, ἡ δὲ πλαγία αὐτῶν πλευρὰ ΨΑ δευτέρα Διάμετρος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Τὰ τετράγωνα, τὰ ἀπὸ τῶν ἐκτὸς τῶν ἀντικειμένων τομῶν Τεταγμένων λόγον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὅν τὰ ἀπὸ τῶν ὑπ' αὐτῶν καὶ τῶν κέντρων ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν τετράγωνα, προσκειμένα αὐτοῖς καὶ τὰ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας Διαμέτρου τετράγωνα.

Ἔστω.

(π) Ἐκ τῆς κδ', ὁρίσμ. δῆλον.

Ἐξωσάν Ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ ΑΙ, ΨΟ, ἐκτὸς δὲ ἐπὶ τὴν δευτέραν Διάμετρον τεταγμέναι αἱ ΜΕ, ΙΡ, ὑπ' αὐτῶν δὲ ἀποτεμνόμεναι ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου πρὸς τῷ κέντρῳ Γ εὐθεῖαι, αἱ ΙΕ, ΓΡ. λέγω δὴ ὅτι ὡς $ΜΕ^2 : ΙΡ^2 :: ΓΕ^2 + ΓΒ^2 : ΓΡ^2 + ΓΒ^2$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ΨΠ. ΠΑ : $\overline{ΜΠ}^2 :: ΨΑ : ΑΥ$. (ρ) ἀλλ' ὡς ΨΑ : ΑΥ :: $\overline{ΨΑ}^2 : \overline{ΒΔ}^2$, (σ) ὡς δὲ $\overline{ΨΑ}^2 : \overline{ΒΔ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$. (τ) ὡς ἄρα ΨΠ. ΠΑ : $\overline{ΜΠ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$. (υ) διὸ καὶ ὡς ΨΠ. ΠΑ + $\overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΜΠ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$. (φ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΨΠ. ΠΑ + $\overline{ΓΑ}^2 = \overline{ΓΠ}^2$, (χ) εἴτεν $ΜΕ^2$. (ψ) τὸ δὲ $\overline{ΜΠ}^2 = \overline{ΓΕ}^2$, (ω) ὡς ἄρα $ΜΕ^2 : \overline{ΓΕ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς $ΙΡ^2 : \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$. ἔτι δὴ ἐν καὶ ὡς $ΜΕ^2 : \overline{ΓΕ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 :: ΙΡ^2 : \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΒ}^2$, (α) καὶ ἐναλλάξ ὡς $ΜΕ^2 : ΙΡ^2 :: \overline{ΓΕ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 : \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΒ}^2$.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΗ.

Α'. Τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΙΡ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΓΡ προσκειμένον αὐτῷ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμετέρας ΓΒ τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΒΔ λόγον ἔχει, ἐν ἣ ὀρθία πλευρὰ ΒΛ, πρὸς τὴν δευτέραν Διάμετρον ΒΔ. εἴτεν ἐστὶν ὡς $ΙΡ^2 : \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 :: ΒΛ : ΒΔ$. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΒΔ : ΑΨ :: ΑΨ : ΒΛ, (β) ὡς ἄρα $\overline{ΒΔ}^2 : \overline{ΑΨ}^2 :: ΒΔ : ΒΛ$, (γ) καὶ ἀνάπαλιν ὡς $\overline{ΑΨ}^2 : \overline{ΒΔ}^2 :: ΒΛ : ΒΔ$. ἀλλ' ὡς

Κ 2

 $\overline{ΑΨ}^2 :$

- (ρ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α'. τῇ δὲ τῇ τμήμα. (σ) Ἐκ τῇ κδ'. ἔρισμ. δῆλον. (τ) Κατὰ τὴν ἡ. τῇ ε'. (υ) Κατὰ τὴν ε'. τῇ ε'. (φ) Κατὰ τὴν ε'. τῇ ε'. (χ) Κατὰ τὴν ε'. τῇ β'. (ψ) Κατὰ τὴν λδ'. τῇ α'. (ω) Ἐκ τῆς αὐτ. δῆλον. (α) Κατὰ τὴν ἔρισμ. ε'. (β) Κατὰ τὴν προλ. γ'. Συνέπ. (γ) Κατὰ τὴν β'. Πόρις. τὸ μετὰ τὴν ἡ. τῇ ε'.

$\overline{ΑΨ}^2 : \overline{ΒΔ}^2 : \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$. (δ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2 ::$
 $\overline{ΒΛ} : \overline{ΒΔ}$. (ε) ἔστι δὲ ὡς $\overline{ΙΡ}^2 : \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$.
 (ζ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΙΡ}^2 : \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 :: \overline{ΒΛ} : \overline{ΒΔ}$. (η)

Ἐὰν γραφῆσαι αἱ κατὰ Συζυγίαν Ἀντικείμεναι το-
 μαὶ ΚΒΧ, ΩΔΓ, τὰς ἐκτὸς τῶν Ἀντικειμένων το-
 μῶν τεταγμένας τέμνωσιν, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν τμη-
 μάτων, ΙΚ, ΚΟ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ δις
 τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ΓΑ τῆς πλα-
 γίαις πλευρᾶς ΨΑ, εἴτεν ἔσεται τὸ ΙΚ. ΚΟ = $2\overline{ΓΑ}^2$ ·
 ἐπεὶ γὰρ ὡς $\overline{ΚΡ}^2 : \Delta Ρ. ΡΒ :: \overline{ΒΛ} : \overline{ΒΔ}$. (θ) ὡς δὲ
 $\overline{ΒΛ} : \overline{ΒΔ} :: \overline{ΙΡ}^2 : \overline{ΓΡ} + \overline{ΓΒ}^2$. (ι) ὡς ἄρα $\overline{ΙΡ}^2 : \overline{ΓΡ} +$
 $\overline{ΓΒ}^2 :: \overline{ΚΡ}^2 : \Delta Ρ. ΡΒ$, (κ) καὶ ἐναλλάξ ὡς $\overline{ΙΡ}^2 : \overline{ΚΡ}^2 ::$
 $\overline{ΓΡ} + \overline{ΓΒ}^2 : \Delta Ρ. ΡΒ$, καὶ διαιρεθέντα ὡς $\overline{ΙΡ}^2 - \overline{ΚΡ}^2 :$
 $\overline{ΚΡ}^2 :: \overline{ΓΒ}^2 + \overline{ΓΡ}^2 - \Delta Ρ. ΡΒ : \Delta Ρ. ΡΒ$. ἀλλὰ τὸ μὲν
 $\overline{ΙΡ}^2 - \overline{ΚΡ}^2 = ΙΚ. ΚΟ$, τὸ δὲ $\overline{ΓΡ}^2 - \Delta Ρ. ΡΒ =$
 $\overline{ΓΒ}^2$. (λ) ὡς ἄρα ΙΚ. ΚΟ : $\overline{ΚΡ}^2 :: 2\overline{ΓΒ}^2 : \Delta Ρ. ΡΒ$ ·
 καὶ ἐναλλάξ, ὡς ΙΚ. ΚΟ : $2\overline{ΓΒ}^2 :: \overline{ΚΡ}^2 : \Delta Ρ. ΡΒ$ ·
 ἀλλ' ὡς $\overline{ΚΡ}^2 : \Delta Ρ. ΡΒ :: \overline{ΒΛ} : \overline{ΒΔ}$, (μ) ὡς δὲ $\overline{ΒΛ} :$
 $\overline{ΒΔ} :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$, (ν) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΒΛ} : \overline{ΒΔ} :: 2\overline{ΓΑ}^2 :$
 $2\overline{ΓΒ}^2$. (ξ) ἄρα καὶ ὡς ΙΚ. ΚΟ : $2\overline{ΓΒ}^2 :: 2\overline{ΓΑ}^2 :$
 $2\overline{ΓΒ}^2$. (ο) τὸ ἄρα ΙΚ. ΚΟ = $2\overline{ΓΑ}^2$. (π)

Τῆς ΙΟ ἐπὶ τὰ Β μέρη φερομένης, καὶ παραλ-
 λήλης τῇ ΨΑ διαμενέσης, καὶ ἐπὶ τὸ Β ἡκίσσης, τὸ
 ΙΚ. ΚΟ ὀρθογώνιον εἰς τετράγωνον μεταβάλλεται,
 τὸ

Κατὰ τὴν ἡ. τῆ ε. (ε) Κατὰ τὴν ἀρῆμ. ε. (ζ) Ὅρα τὴν
 διὰ τῆς προσημ. προτ. (η) Κατὰ τὴν ἀρῆμ. ε. (θ) Κατὰ
 τὴν Συνεκ τῆς α. τῆ δε τῆ τμήτ. (ι) Κατὰ τὴν προλ. Συ-
 νέπ. (κ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (λ) Κατὰ τὴν ε. τῆ β'.
 (μ) Κατὰ τὴν ἀρῆμ. τῆς α. Συνέπ. (ν) Ὅρα τὴν προλ. Συ-
 νέπ. (ξ) Κατὰ τὴν ἡ. τῆ ε. (ο) Κατὰ τὴν ἀρῆμ. ε. (π) Κα-
 τὰ τὴν β'. τῆ ε.

τὸ ἀπὸ ὁποτέρας δῆθεν τῶν IP, PO , καὶ ἴσον ἐπὶ τῷ $2\Gamma A^2$. ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν $IP=PO$, (ρ) ἡ δὲ $KP=PX$, (σ) καὶ ἡ IK ἄρα ἴση τῇ KO . καὶ ἐπὶ φε-
ρομένης μὲν τῆς IO ἐπὶ τὰ B μέρη, ἡ KX συνε-
χῶς ἐλαττεύεται, ἡξιάσης δὲ ἐπὶ τὸ B , καὶ ἐφαπ-
τομένης κατὰ κορυφὴν γεγονούας, τὰ μὲν σημεῖα
 K, X ταυτίζονται, ἡ δὲ IK ἴση τῇ IP γίνεται, ὁμοί-
ως ἡ OX τῇ OP , δῆλον ἄρα ὅτι τὸ $IK \cdot KO$ εἰς τὸ
 IP^2 , ἢ εἰς τὸ PO^2 μεταβάλλεται. ἴση δὲ ὄντος τῆς
 $IK \cdot KO$ τῷ $2\Gamma A^2$, ἴσον ἔσεται καὶ τὸ IP^2 , ἢ τὸ
 PO^2 τῷ αὐτῷ $2\Gamma A^2$.

Λ Η Μ Μ Λ. (τ)

Ἐὰν ὑπερβολῆς τῆς AE εὐθεῖα ἐπιψάυσ-
σα ἡ MT συμπίπτῃ τῇ ἀρχικῇ διαμέτρῳ
 ΨN κατὰ τὸ T , καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς M κα-
ταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμε-
τρον ἡ MP , καὶ ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς πα-
ράλληλος ἀχθῇ ἡ AD συμπίπτουσα τῇ μὲν
 MT τῇ διὰ τῆς ἀφῆς κατὰ τὸ O , τῇ δὲ διὰ
τῆς κέντρος Γ καὶ τῆς ἀφῆς M ἡγμένη GM
κατὰ τὸ Δ , ληφθέντος δὲ τινος σημείου ἐπὶ
τῆς τομῆς, οἷον τῆς Φ ἀχθώσι δύο εὐθεῖαι,
αἱ $\Phi H, \Phi T$, ἡ μὲν τῇ ἐφαπτομένῃ MT πα-
ράλληλος, ἡ δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγ-

Κ 3

μέ-

μένη, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον ΦΗΥ ἴσον ἔσται τῷ τετραπλεύρῳ ΒΔΑΥ, τῷ ὑπὸ τῆς διὰ τῆς κέντρως καὶ τῆς ἀφῆς ΓΜΒ ἀποτεμνομένῳ, χ. 2.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς τρίγων. ΜΓΠ: τρίγων. ΔΓΑ:: $\overline{ΓΠ}^2$: $\overline{ΓΑ}^2$,
 (υ) ἀλλ' ὡς $\overline{ΓΠ}^2$: $\overline{ΓΑ}^2$:: $\overline{ΓΠ}$: $\overline{ΓΤ}$. (φ) ἔστι γὰρ ὡς
 $\overline{ΓΠ}$: $\overline{ΓΑ}$:: $\overline{ΓΑ}$: $\overline{ΓΤ}$. (χ) καὶ ὡς $\overline{ΓΠ}$: $\overline{ΓΤ}$:: τρίγων. ΜΓΠ:
 τρίγων. ΜΓΤ. (ψ) ὡς ἄρα ΜΓΠ: ΔΓΑ: ΜΓΠ:
 ΜΓΤ. (ω) τὸ ἄρα ΔΓΑ = ΜΓΤ. (α) τέτων ἐκάτε-
 ρον ἀφηρέθω ἀπὸ τῆς ΜΓΠ τριγώνου. ἐκέν τὸ ΜΠ
 τρίγωνον ἴσον τῷ τετραπλεύρῳ ΜΔΑΠ. ἐπεὶ δὲ ὡς
 $\overline{ΦΥ}^2$: $\overline{ΜΠ}^2$: $\overline{ΨΥ}$. $\overline{ΥΑ}$: $\overline{ΨΠ}$. $\overline{ΠΑ}$. (β) ἔστι δὲ τὸ μὲν
 $\overline{ΨΥ}$. $\overline{ΥΑ}$ = $\overline{ΓΤ}^2$ - $\overline{ΓΑ}^2$, τὸ δὲ $\overline{ΨΠ}$. $\overline{ΠΑ}$ = $\overline{ΓΠ}^2$ - $\overline{ΓΑ}^2$.
 (γ) ὡς ἄρα $\overline{ΦΥ}^2$: $\overline{ΜΠ}^2$:: $\overline{ΓΤ}^2$ - $\overline{ΓΑ}^2$: $\overline{ΓΠ}^2$ - $\overline{ΓΑ}^2$,
 ἀλλ' ὡς $\overline{ΦΥ}^2$: $\overline{ΜΠ}^2$:: τρίγ. ΦΗΥ: τρίγ. ΜΠΠ, (δ)
 ὡς ἄρα ΦΗΥ: ΜΠΠ:: $\overline{ΓΤ}^2$ - $\overline{ΓΑ}^2$: $\overline{ΓΠ}^2$ - $\overline{ΓΑ}^2$. (ε)
 ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{ΓΤ}^2$: $\overline{ΓΑ}^2$:: τρίγ. ΓΒΥ: τρίγ. ΓΔΑ, (ς)
 καὶ διαιρεθέντα $\overline{ΓΤ}^2$ - $\overline{ΓΑ}^2$: $\overline{ΓΑ}^2$:: $\overline{ΓΒΥ}$ - $\overline{ΓΔΑ}$: $\overline{ΓΔΑ}$,
 εἴπεν $\overline{ΓΤ}^2$ - $\overline{ΓΑ}^2$: $\overline{ΓΑ}^2$:: ΒΔΑΥ: ΓΔΑ, καὶ ἐναλ-
 λαξ ὡς $\overline{ΓΤ}^2$ - $\overline{ΓΑ}^2$: ΒΔΑΥ:: $\overline{ΓΑ}^2$: ΓΔΑ. καὶ διὰ τὰ
 αὐτὰ δὴ ἔστι καὶ ὡς $\overline{ΓΠ}^2$ - $\overline{ΓΑ}^2$: ΜΔΑΠ:: $\overline{ΓΑ}^2$: ΓΔΑ.
 ἔσται δὴ ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΓΤ}^2$ - $\overline{ΓΑ}^2$: ΒΔΑΥ:: $\overline{ΓΠ}^2$ -
 $\overline{ΓΑ}^2$: ΜΔΑΠ. (η) καὶ ἐναλλάξ ὡς $\overline{ΓΤ}^2$ - $\overline{ΓΑ}^2$: $\overline{ΓΠ}^2$: -
 $\overline{ΓΑ}^2$

- (υ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῆς σ'. (φ) Κατὰ τὸ β'. Πόρις. τὸ μετὰ
 τὴν η'. τῆς σ'. (χ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς δ'. τῆς δε τῆς τμήμ.
 (ψ) Κατὰ τὴν κ'. τῆς σ'. (ω) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (α) Κατὰ
 τὴν β'. τῆς ε'. (β) Κατὰ τὴν α'. τῆς δε τῆς τμήμ. (γ) Κατὰ τὴν
 σ'. τῆς β'. (δ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῆς σ'. (ε) Κατὰ τὴν ἀρχμ. ε'.
 (ς) Κατὰ τὴν αὐτ. ιθ'. (η) Κατὰ τὴν ἀρχμ. ε'.

$\overline{\Gamma\Lambda}^2 :: \text{ΒΔΑΥ} : \text{ΜΔΑΠ}$, ἄρα καὶ ὡς $\Phi\text{ΗΥ} : \text{ΜΤΠ} :: \text{ΒΔΑΥ} : \text{ΜΔΑΠ}$. (θ) ἀλλὰ τὸ $\text{ΜΤΠ} = \text{ΜΔΑΠ}$, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ τὸ $\Phi\text{ΗΥ} = \text{ΒΔΑΥ}$. (ι)

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Ἀχθείσης ἀπὸ τῆς Κ σημείας, τῆς μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς ἐπαφῆς, τῆς τεταγμένης ΚΙ, συμπίπτει τῇ διὰ τῆς κέντρων καὶ τῆς ἀφῆς ΓΜ κατὰ τὸ Ρ, ἔσεται τὸ τρίγωνον ΔΓΑ, ὁ ἀποτεμέναι ἢ διὰ τῆς κέντρων καὶ τῆς ἀφῆς ΓΜ, ἴσον τῷ τετραπλεύρῳ ΡΓΗΚ τῷ ὑπὸ τῆς αὐτῆς ΓΜ ἀποτεμνομένῳ. ἐπεὶ γάρ τὸ ΚΗΙ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΡΔΑΙ τετραπλεύρῳ, (κ) ἑκατέρω τέτων ἀφαίρεθέντως ἀπὸ τῆς ΡΓΙ τριγώνου, τὰ λοιπὰ ἴσα ἔσονται, ἔσταν τὸ ΡΓΗΚ τετράπλευρον τῷ ΔΓΑ τριγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'. (λ)

Ἐὰν μιᾶς τῶν Ἀντικειμένων εὐθεία ἐπιψάυσῃ συμπίπτῃ τῇ Διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς κέντρων εὐθεία ἐκβληθεῖσα τεμῇ τὴν ἑτέραν τομὴν, ἥτις ἂν ἀχθῇ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐκβληθείσης· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ἔτω διχοτομηθέντων τετράγωνων ἔσονται πρὸς ἀλλήλα ὡς τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐ-

Κ 4

ΤΩΝ

(θ) Κατὰ τὴν αὐτ. (ι) Κατὰ τὴν κ'. τῆς ε'. (κ) Κατὰ τὸ Λημ.

(λ) Τὸ μὲν α'. μέρ. ἢ μή. ἴσιν, τὸ δὲ β'. ὁμοίον τῷ γ'. τῆς κ'. βιβλ. τῆς Ἀπολλων.

τῶν ἐυθειῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς ἐκβληθείσης.

Ἐξωσαν Ἀντικείμενα αἱ ΑΕ, ΨΣ, ὧν Διάμετρος μὲν ἡ ΘΝ, κέντρον δὲ τὸ Γ. καὶ ἐφαπτέσθω τῆς ΑΕ τομῆς ἡ ΜΤ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Γ συμπίπτουσα, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς Μ καὶ τῆς κέντρου Γ ἐυθείας ἡ ΓΜ ἐκβληθεῖσα τεμέντω τὴν ἐτέραν τομὴν κατὰ τὸ Σ. καὶ ἀπὸ τῶν Φ καὶ Ε σημείων τῆς τομῆς ἡχθώσαν αἱ ΦΛΚ, ΕΩΛ τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ παράλληλοι. λέγω δὴ Α'. ὅτι ἡ μὲν ΦΛ = ΚΛ, ἡ δὲ ΕΩ = ΑΩ. β'. ὅτι ὡς $\overline{ΚΛ}^2$: $\overline{ΑΩ}^2$:: $\overline{ΣΛ}$, $\overline{ΛΜ}$: $\overline{ΣΩ}$, $\overline{ΩΜ}$.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῶν Φ καὶ Ε σημείων τετάχθωσαν αἱ ΦΥ, ΕΝ, ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ μὲν τρίγ. ΦΗΥ = τετραπ. ΒΔΑΥ, τὸ δὲ ΚΗΙ = ΡΔΑΙ. (μ) ἀφηρήθω ἀπὸ μὲν τῆς ΦΗΥ τὸ ΚΗΙ, ἀπὸ δὲ τῆς ΒΔΑΥ τὸ ΡΔΑΙ. ἔκέν τὸ ΦΚΙΥ = ΒΡΙΥ. ἀφηρήθω κοινὸν τὸ τραπέζιον ΒΛΚΙΥ. τὸ ἄρα ΦΛΒ = ΚΛΡ. ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{ΦΛ}^2$: $\overline{ΚΛ}^2$:: $\overline{ΦΛΒ}$: $\overline{ΚΛΡ}$, (ν) ἔστιν ἄρα τὸ $\overline{ΦΛ}^2 = \overline{ΚΛ}^2$. διὸ καὶ ἡ ΦΛ = ΚΛ. ἐπεὶ δὲ τὸ ΕΑΝ = ΞΔΑΝ, (ξ) κοινὸν ἀφαιρεθέντος τῆς τετραπλεύρου ΞΩΑΝ, ἔσεται τὸ ΞΩΕ = ΩΑΔ. ἔστι δὲ ὡς $\overline{ΞΩΕ}$: $\overline{ΩΑΔ}$: $\overline{ΕΩ}^2$: $\overline{ΑΩ}^2$. διὸ τὸ $\overline{ΕΩ}^2 = \overline{ΑΩ}^2$. ἔκέν καὶ ἡ ΕΩ = ΑΩ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ ΓΔΑ = ΓΜΤ. (ο) τέτων ἐκάτερον ἀφηρήθω ἀπὸ τῆς ΩΓΑ. ἔκέν τὸ ΩΔΑ = ΩΜΤΑ. πάλιν τὸ ΓΜΤ ἴσον ὃν τῷ ΓΔΑ, ἴσον ἐστὶ καὶ τῷ ΡΓΗΚ. (π) ἀφ-

(μ) Κατὰ τὸ Λῆμ. (ν) Κατὰ τὴν 13. τῆς 5'. (ξ) Κατὰ τὸ Λῆμ.

(ο) Ὅρα τὴν δαξ. τῆς Λῆμ. (π) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς Λῆμ.

ἐμφερήσθω ἐκάτερον ἀπὸ τῆς ΛΓΗ τριγώνου. τὸ ἄρα ΔΡΚ =
 ΛΜΤΗ. ὡς ἄρα ΩΔΑ : ΔΡΚ :: ΩΜΤΑ : ΛΜΤΗ. ἀλ-
 λά τὸ μὲν ΩΜΤΑ = ΩΓΑ - ΜΓΤ, τὸ δὲ ΛΜΤΗ =
 ΛΓΗ - ΜΓΤ. ὡς ἄρα ΩΔΑ : ΔΡΚ :: ΩΓΑ - ΜΓΤ :
 ΛΓΗ - ΜΓΤ. ἔστι δὲ ὡς ΩΓΑ : ΜΓΤ : ΩΓ² : ΜΓ²,
 (ρ) καὶ διαιρεθέντα ὡς ΩΓΑ - ΜΓΤ : ΜΓΤ :: ΩΓ² -
 ΜΓ² : ΜΓ², καὶ ἐναλλάξ ὡς ΩΓΑ - ΜΓΤ : ΩΓ² -
 ΜΓ² :: ΜΓΤ : ΜΓ², καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ὡς ΛΓΗ - ΜΓΤ :
 ΛΓ² - ΜΓ² :: ΜΓΤ : ΜΓ². διὸ δὴ καὶ ὡς ΩΓΑ - ΜΓΤ :
 ΩΓ² - ΜΓ² :: ΛΓΗ - ΜΓΤ : ΛΓ² - ΜΓ², (σ) καὶ
 ἐναλλάξ ὡς ΩΓΑ - ΜΓΤ : ΛΓΗ - ΜΓΤ :: ΩΓ² - ΜΓ² :
 ΛΓ² - ΜΓ². ἄρα καὶ ὡς ΩΔΑ : ΔΡΚ :: ΩΓ² - ΜΓ² :
 ΛΓ² - ΜΓ². (τ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΩΓ² - ΜΓ² = ΣΩ. ΩΜ, τὸ
 δὲ ΛΓ² - ΜΓ² = ΣΔ. ΛΜ. (υ) (εἰς ἴσα γὰρ τέτμηται ἡ ΣΜ
 κατὰ τὸ Γ. (φ)) ἔστι δὲ καὶ ὡς ΩΔΑ : ΔΡΚ :: ΑΩ² : ΚΛ².
 (χ) ὡς ἄρα ΑΩ² : ΚΛ² :: ΣΩ. ΩΜ : ΣΔ. ΑΜ. καὶ
 ἀνάπαλιν, ὡς ΚΛ² : ΑΩ² :: ΣΔ. ΑΜ : ΣΩ. ΩΜ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΔΙ.

Α'. Αἱ ἐυθεῖαι ΓΩ, ΓΜ, ΓΔ συνεχῶς ἀνάλογόν εἰσιν.
 ἐπεὶ γὰρ ὡς ΠΓ : ΓΑ :: ΓΑ : ΓΤ, (ψ) ἔστι δὲ ὡς
 μὲν ΠΓ : ΓΑ :: ΓΜ : ΓΔ, ὡς δὲ ΓΑ : ΓΤ :: ΓΩ :
 ΓΜ, (ω) ἄρα καὶ ὡς ΓΩ : ΓΜ :: ΓΜ : ΓΔ. (α)
 τὸ ἄρα ΓΜ² = ΓΩ. ΓΔ. (β)

Β'. Ἐὰν ἐμβληθεῖσα ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ τῇ ἀπὸ τῆς Σ
 ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευθείῃ συμπέσῃ κατὰ τὸ Χ, τὸ ἀ-
 πολαμβανόμενον μέρος ΜΧ τῆς ἐφαπτομένης δι' ἑκά-

Κ 5

τμη-

(ρ) Κατὰ τὴν εἰ. τῇ ε'. (σ) Κατὰ τὴν ε. τῇ ε'. (τ) Κατὰ
 τὴν αὐτ. (υ) Κατὰ τὴν ε'. τῇ β'. (φ) Ἐκ τῆς ε. τῇ δὲ
 τῇ τμήμ. ὅπλον. (χ) Κατὰ τὴν εἰ. τῇ ε'. (ψ) Κατὰ τὴν
 ε'. Συνεπ. τῆς δ. τῇ δὲ τῇ τμήμ. (ω) Κατὰ τὴν δ. τῇ ε'. (α)
 Κατὰ τὴν ε. τῇ ε'. (β) Κατὰ τὴν εἰ. τῇ ε'.

τμηθήσεται κατὰ τὸ Ο ὑπὸ τῆς κατὰ κορυφὴν ἀπ. τομένης ΑΔ. ἢ γὰρ ΔΩ : ΔΜ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ἢ ζΩ : ΣΜ, καὶ ἐκ τῷ ὃν ἔχει ὁ 2 : 1. (γ) ἔστι δὲ ὡς ΔΩ : ΔΜ :: ΩΑ : ΜΟ. (δ) ἄρα καὶ ἡ ΩΑ : ΜΟ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ἢ ζΩ : ΣΜ, καὶ ὁ 2 : 1. ἀλλ' ἡ αὐτὴ ΩΑ : ΜΟ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ΩΑ : ΜΧ καὶ ΜΧ : ΜΟ. (ε) ἔστι δὲ ὡς ΩΑ : ΜΧ :: ζΩ : ΣΜ. (ζ) ἄρα καὶ ὡς ΜΧ : ΜΟ :: 2 : 1. ἢ ἄρα ΜΧ διπλασία τῆς ΜΟ. διχα ἄρα τέτμηται ἡ ΜΧ κατὰ τὸ Ο.

Γ. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἀήλον, ὅτι ἡ Δευτεραία Διάμετρος ΣΜΩ (η) εἰ μόνον δίχα τέμνει τὰς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένας ΚΦ, ΑΕ, τὰς τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ παραλλήλους, ἀλλ' ἔστι καὶ ὡς ΚΑ² : ΑΩ² :: ζΔ. ΛΜ : ζΔ. ΩΜ. καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν δὲ ἀπτομένη αὐτὴν μὲν ἔτω τέμνει, ὥστε τὰς ΓΩ, ΓΜ, ΓΔ συνεχῶς ἀνάλογον εἶναι, τὴν δὲ ἐφαπτομένην ΜΧ δίχα. καὶ πάντα δὲ τὰ συμπτώμετα τὰ ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς Διαμέτρου δεχθέντα, καὶ ἐπὶ τῆς Δευτεραίας δεχθήσεται ἐκβληθείσης ἐπὶ τὴν ΨΣ Ἀντικείμενην τομήν. διὸ δὴ ὀρίσθεται καὶ ἡ τῆς Δευτεραίας ΣΜ ὀρθία πλευρά, εἰάν τῶν ζΩ. ΩΜ, ΩΑ², καὶ ΣΜ τετάρτη ἀνάλογος εὐρεθῇ. ὡσαύτως καὶ ἡ Δευτέρα αὐτῆς, εἴτεν ἡ μέση ἀνάλογον τῆς τε Δευτεραίας ΣΜ καὶ τῆς εὐρεθείσης αὐτῆς ὀρθίας, καὶ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΧ καὶ δίχα κατὰ τὸ Γ κέντρον τεμνομένη, οἷον ἡ σμ. (θ)

Δ'.

(γ) Κατὰ τὴν ε'. Συνέπ. τῆς δ. τὰ δὲ τὰ τμήμ. (δ) Κατὰ τὴν δ'. τὰ ε'. (ε) Κατὰ τὸ α'. Πόρις. τὸ μετὰ τὴν ἡ. τὰ ε'. (ζ) Κατὰ τὴν δ'. τὰ ε'. (η) Ὅρα τὴν κέ. ὀρίσμ. (θ) Ὅρα

Δ'. εἰάν ἀπὸ σημείου Ω, καθ' ὃ ἡ τεταγμένη ΑΕ
 τὴν Δευτεραίαν τέμνει Διάμετρον ΖΩ, ἀχθῇ εὐθεΐα
 ἡ ΩΖ τῇ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν
 Διάμετρον ΨΝ τεταγμένη ΜΠ παράλληλος, τῇ αὐ-
 τῇ Διαμέτρῳ συμπίπτουσα κατὰ τὸ Ζ, ἔσονται ἦτε
 ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβάνομένη πρὸς τῷ κέντρῳ Γ, εἴτεν
 ἡ ΖΓ, καὶ ἡ ὑπὸ τῆς ἐπαφῆς τεταγμένως ἀχθῇ-
 σα ΜΠ ἀπολαμβάνομένη ΓΠ, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς
 πλαιγίας πλευρᾶς ΓΑ συνεχῶς ἀνάλογον, εἴτεν ἐσε-
 ται ὡς ΓΖ: ΓΠ:: ΓΠ: ΓΑ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΑΕ: ΑΩ::
 ΕΝ: ΩΖ, καὶ ὡς ΑΕ: ΑΩ:: ΑΝ: ΑΖ, (ι) ἔσι
 δὲ τῆς ΑΩ διπλασία ἡ ΑΕ, (κ) ἄρα καὶ ἡ ΕΝ
 διπλασία τῆς ΩΖ, καὶ ἡ ΑΝ τῆς ΑΖ. προσκείσθω
 τῇ μὲν ΑΝ ἡ ΨΑ, τῇ δὲ ΑΖ ἡ ΓΑ. ἡ ἄρα ΨΝ
 διπλασία τῆς ΓΖ. διὸ τὸ ΨΝ. ΝΑ τετραπλάσιον
 τῷ ΓΖ. ΖΑ. ἔσι δὲ καὶ τὸ ΕΝ² τετραπλάσιον τῷ
 ΩΖ². ὡς ἄρα ΩΖ²: ΕΝ²:: ΓΖ. ΖΑ: ΨΝ. ΝΑ. ἔσι
 δὲ καὶ ὡς ΕΝ²: ΜΠ²:: ΨΝ. ΝΑ: ΨΠ. ΠΑ. (λ)
 ἄρα καὶ δι' ἴσιν ὡς ΩΖ²: ΜΠ²:: ΓΖ. ΖΑ: ΨΠ.
 ΠΑ. ἀλλ' ὡς ΩΖ²: ΜΠ²:: ΓΖ²: ΓΠ². (μ) ἔσι γὰρ
 ὡς ΩΖ: ΜΠ:: ΓΖ: ΓΠ. (ν) ἄρα καὶ ὡς ΓΖ²:
 ΓΠ²:: ΓΖ. ΖΑ: ΨΠ. ΠΑ. (ξ) καὶ ἐναλλάξ ὡς ΓΖ²:
 ΓΖ. ΖΑ:: ΓΠ²: ΨΠ. ΠΑ. καὶ κατ' ἀνατροφὴν ὡς
 ΓΖ²: ΓΖ² - ΓΖ. ΖΑ:: ΓΠ²: ΓΠ² - ΨΠ. ΠΑ. ἀλλὰ τὸ
 μὲν ΓΖ² - ΓΖ. ΖΑ = ΓΖ. ΓΑ, (ο) τὸ δὲ ΓΠ² - ΨΠ.
 ΠΑ = ΓΑ². (π) ὡς ἄρα ΓΖ²: ΓΖ. ΓΑ:: ΓΠ²: ΓΑ²,
 καὶ ἐναλλάξ, ὡς ΓΖ²: ΓΠ²:: ΓΖ. ΓΑ: ΓΑ². ἀλλ' ὡς
 ΓΖ.

- (ι) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (κ) Ἐκ τῆς προκ. προτ. δῆλον.
 (λ) Κατὰ τὴν α'. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (μ) Κατὰ τὸ ε'. Θεώρ.
 τῶν μετὰ τὸ ε'. (ν) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (ξ) Κατὰ τὴν ε'.
 τῷ ε'. (ο) Κατὰ τὴν β'. τῷ β'. (π) Κατὰ τὴν ε'. τῷ β'.

ΓΖ. ΓΑ: ΓΑ² :: ΓΖ: ΓΑ. (ρ) ὡς ἄρα ΓΖ²: ΓΠ² ::
 ΓΖ: ΓΑ, εἴτεν ἡ ΓΖ: ΓΑ διπλασίονα λόγον ἔχει
 ἢ περ ἡ ΓΖ: ΓΠ, (σ) ἦτοι ὡς ΓΖ: ΓΠ :: ΓΠ:
 ΓΑ. ἔσται δὴ ἔν καὶ τὸ ΓΠ² = ΓΖ. ΓΑ. (τ)

Ε'. Τὰ τρίγωνα τὰ ὑπὸ τῆς Δευτεράιας Διαμέτρου
 ἀποτεμνόμενα, εἴτεν τὰ ΩΓΑ, ΜΓΠ ἴσα ἀλλήλοις
 εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΩΓ: ΜΓ :: ΖΓ: ΠΓ, (υ) ἔστι
 δὲ ὡς ΖΓ: ΠΓ :: ΠΓ: ΓΑ, (φ) ἄρα καὶ ὡς ΩΓ:
 ΜΓ :: ΠΓ: ΓΑ. (χ) τὸ ἄρα ΩΓΑ = ΜΓΠ. (ψ)

Σ'. Ἐὰν δύο ἀχθῶσι δευτέραι Διαμέτροι ἥτε ψα τῆς
 ἀρχικῆς καὶ πρώτης ΨΑ, καὶ ἡ σμ τῆς Δευτεράιας
 ΣΜ, λόγον ἔξωσι πρὸς ἀλλήλας ὃν αἱ τεταγμέναι ἐπι-
 τετὴν πρώτην καὶ Δευτεραίαν Διάμετρον, εἴτεν ἴσεται
 ὡς ψα: σμ :: ΜΠ: ΑΩ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΩΓ: ΜΓ ::
 ΠΓ: ΑΓ, (ω) καὶ κατ' ἀνατροπὴν, ὡς ΩΓ: ΩΜ ::
 ΠΓ: ΠΑ, καὶ διαιρεθέντα ὡς ΜΓ: ΩΜ :: ΑΓ:
 ΠΑ, ἄρα καὶ ὡς ΣΜ: ΩΜ :: ΨΑ: ΠΑ, (α) καὶ ἀνάπα-
 λιν ὡς ΩΜ: ΣΜ :: ΠΑ: ΨΑ, καὶ συντεθέντα ὡς
 ΣΩ: ΣΜ :: ΨΠ: ΨΑ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΣΜ: ΣΩ ::
 ΨΑ: ΨΠ. ἔστι δὲ ὡς μὲν ΣΜ: ΩΜ :: ΨΑ: ΠΑ,
 καθάπερ δέδεικται. ἄρα καὶ ὡς ΣΜ²: ΣΩ. ΩΜ ::
 ΨΑ²: ΨΠ. ΠΑ. (β) ἀλλ' ὡς ΨΠ. ΠΑ: ΜΠ² ::
 ΨΑ

(ρ) Κατὰ τὴν α'. τῷ σ'. (σ) Ὅρα τὴν δ'. Σημ. τὴν ἐν τοῖς ὁρίσμ.
 τῷ ε'. (τ) Κατὰ τὴν ιζ'. τῷ σ'. (υ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ σ'.
 (φ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέκ. (χ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (ψ) Κα-
 τὰ τὴν ιε'. τῷ σ'. (ω) Ὅρα τὴν προλ. Συνέκ. (α) Κατὰ τὴν
 ιε'. τῷ ε'. (β) Κατὰ τὴν αὐτ.

ΨA , πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευρὰν, οἷον τὴν $\Lambda \Sigma$, (γ) ὥς δὲ
 $\Psi A : \Lambda \Sigma :: \overline{\Psi A}^2 : \overline{\Psi A}^2$. (δ) ἔστι γὰρ ὡς $\Psi A : \psi \alpha ::$
 $\psi \alpha : \Lambda \Sigma$. (ε) ὡς ἄρα $\Psi \Pi$. $\Pi A : \overline{M \Pi}^2 :: \overline{\Psi A}^2 :$
 $\overline{\psi \alpha}^2$. (ζ) καὶ ἐναλλαξ ὡς $\overline{\Psi A}^2 : \psi \Pi$. $\Pi A :: \overline{\psi \alpha}^2 :$
 $\overline{M \Pi}^2$. ἀλλὰ δέδεικται καὶ ὡς $\zeta M^2 : \zeta \Omega$. $\Omega M :: \overline{\Psi A}^2 :$
 $\Psi \Pi$. ΠA . ἄρα καὶ ὡς $\zeta M^2 : \zeta \Omega$. $\Omega M :: \overline{\psi \alpha}^2 : \overline{M \Pi}^2$.
 διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται ὡς $\zeta M^2 : \zeta \Omega$. $\Omega M ::$
 $\overline{\zeta M}^2 : \overline{\Lambda \Omega}^2$. ἐπεὶ δὲ ἀνωτέρω δέδεικται ὡς $\zeta M^2 :$
 $\zeta \Omega$. $\Omega M :: \overline{\Psi A}^2 : \Psi \Pi$. ΠA , ἔσται δὴ ἄρα καὶ ὡς
 $\overline{\psi \alpha}^2 : \overline{M \Pi}^2 :: \overline{\zeta M}^2 : \overline{\Lambda \Omega}^2$. (η) ἄρα καὶ ὡς $\psi \alpha : M \Pi ::$
 $\zeta M : \Lambda \Omega$, (θ) καὶ ἐναλλαξ ὡς $\psi \alpha : \zeta M :: M \Pi :$
 $\Lambda \Omega$. δῆλον δὲ ὅτι καὶ ὡς $\psi \Gamma : \mu \gamma :: M \Pi : \Lambda \Omega$.

Ζ'. Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἔσονται τὰ πέρατα μ , ϵ
 (πίν. I. χ. ι.) τῆς δευτέρας διαμέτρου $\mu \epsilon$ ἐν ταῖς γρα-
 φείσαις συζυγείαις τομαῖς $B \mu$, $\Delta \epsilon$. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῆς
 πέρατος ϵ ἡ μὲν ζE παραέλληλος τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ
 ΨA , ἡ δὲ ζZ τῇ δευτερείᾳ Διαμέτρῳ ζM , συμ-
 πίπτουσαι τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ $B \Delta$ κατὰ E καὶ Z
 σημεία. ἔσω δὲ κατὰ κορυφὴν μὲν ἀπτομένη ἡ $A \eta$,
 τεταγμένα δὲ αἱ $M \Pi$, $A I$. καὶ ἐπεὶ ἡ $\Gamma Z : \Gamma \Delta$ λό-
 γον ἔχει συγκέμενον ἔκτε τῶν λόγων ὃν ἔχει $\Gamma Z : \Gamma \epsilon$
 καὶ $\Gamma \epsilon : \Gamma \Delta$. (ι) ἔστι δὲ ὡς μὲν $\Gamma Z : \Gamma \epsilon :: A \eta : A I$. (κ)
 (ὅμοιοι γὰρ τὰ $\Gamma Z \epsilon$, $A \eta I$ τρίγωνα. ἔστι γὰρ ἡ μὲν
 γωνία $\Gamma Z \epsilon = B \Gamma \eta$, εἴτεν τῇ $A \eta I$, ἡ δὲ $\Gamma \epsilon Z = \epsilon \Gamma I$,
 ἦτοι τῇ $\Gamma I \Delta$. (λ)) ὡς δὲ $\Gamma \epsilon : \Gamma \Delta :: A I : M \Pi$. (μ) ἡ
 ἄρα

(γ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α. τῶν δὲ τῶν τμήμ. (δ) Κατὰ τὸ β' Πόρ. τὸ μετὰ τὴν ἡ. τῶν ε. (ε) Κατὰ τὸν κθ'. ὅρισμ. (ζ) Κα-
 τὰ τὴν ε. τῶν ε. (η) Κατὰ τὴν αὐτ. (θ) Κατὰ τὸ ζ'. τῶν με-
 τὰ τὸ ε. Θεώρημ. (ι) Κατὰ τὸ α. Πόρ. τὸ μετὰ τὴν ἡ τῶν
 ε. (κ) Κατὰ τὴν β'. τῶν ε'. (λ) Κατὰ τὴν κθ'. τῶν α. (μ) Κα-
 τὰ τὴν προλ. Συνέπ.

ἄρα ΓΖ: ΓΔ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῷ λβ γε ὃν ἔχει ΑΗ: ΑΙ, καὶ ΑΙ: ΜΠ, εἴτεν ἐστὶν ὡς ΓΖ: ΓΔ:: ΑΗ. ΑΙ: ΑΙ. ΜΠ. (ν) ἀλλ' ὡς ΑΗ. ΑΙ: ΑΙ. ΜΠ:: ΑΗ: ΜΠ, (ξ) ὡς δὲ ΑΗ: ΜΠ:: ΓΑ: ΓΠ, (ο) καὶ ὡς ΓΑ: ΓΠ:: ΓΜ: ΓΙ, (π) ὡς δὲ ΓΜ: ΓΙ:: ΜΤ: ΙΑ. (ρ) ἄρα καὶ ὡς ΓΖ: ΓΔ:: ΜΤ: ΙΑ. (σ) ἀλλ' ἢ ΜΤ: ΙΑ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ΜΤ: ΜΠ, καὶ ΜΠ: ΙΑ. (τ) ἐστὶ δὲ ὡς μὲν ΜΤ: ΜΠ:: Γς: ΓΕ, (υ) ὁμοία γὰρ τὰ ΜΤΠ, ΕΓΕ τρίγωνα. (ἐστὶ γὰρ ἡ μὲν γωνία ἢ πρὸς τῷ Π ἴση τῇ πρὸς τῷ Ε, ἢ δὲ ΠΤΜ = ΠΓς, ἦτοι τῇ ΓςΕ.) (φ) ὡς δὲ ΜΠ: ΙΑ:: ΓΔ: Γς. (χ) ἄρα καὶ ἢ ΓΖ: ΓΔ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῷ ὃν ἔχει Γς: ΓΕ, καὶ ΓΔ: Γς, εἴτεν ἐστὶν ὡς ΓΖ: ΓΔ:: Γς. ΓΔ: ΓΕ. Γς. (ψ) ἀλλ' ὡς Γς. ΓΔ: ΓΕ. Γς:: ΓΔ: ΓΕ. (ω) ἄρα καὶ ὡς ΓΖ: ΓΔ:: ΓΔ: ΓΕ. (α) τὸ ἄρα $\overline{ΓΔ}^2 = \overline{ΓΖ} \cdot \overline{ΓΕ}$. (β) τετῶν ἐκάτερον ἀφηρέσθαι ἀπὸ τῷ $\overline{ΓΕ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΒΕ} \cdot \overline{ΕΔ} = \overline{ΓΕ} \cdot \overline{ΕΖ}$. (γ) ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ $\overline{ΨΠ} \cdot \overline{ΠΑ} = \overline{ΤΠ} \cdot \overline{ΠΓ}$, (δ) ἔκῃν ἐστὶν ὡς $\overline{ΤΠ} \cdot \overline{ΠΓ}: \overline{ΜΠ}^2:: \overline{ΨΠ} \cdot \overline{ΠΑ}: \overline{ΜΠ}^2$. (ε) ἀλλ' ὡς $\overline{ΨΠ} \cdot \overline{ΠΑ}: \overline{ΠΜ}^2:: \overline{ΨΑ}: \overline{ΑΣ}$, (ς) καὶ ὡς $\overline{ΨΑ}: \overline{ΑΣ}:: \overline{ΨΑ}^2: \overline{ΒΔ}^2$. (η) ὡς ἄρα $\overline{ΤΠ} \cdot \overline{ΠΓ}: \overline{ΜΠ}^2:: \overline{ΨΑ}^2: \overline{ΒΔ}^2$

- (ν) Κατὰ τὸν ζ'. ὄρισμ. τῷ ε'. (ξ) Κατὰ τὴν κ. τῷ ε'. (ο) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (π) Ὅρα τὴν προλ. ε'. Συνέπ. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (σ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (τ) Κατὰ τὸ ἀριθμ. Πέρισσ. (υ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (φ) Κατὰ τὴν κδ'. τῷ α'. (χ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (ψ) Κατὰ τὸν ζ'. ὄρισμ. τῷ ε'. (ω) Κατὰ τὴν α. τῷ ε'. (α) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (β) Κατὰ τὴν ιζ'. τῷ ε'. (γ) Κατὰ τὴν ε'. καὶ β. τῷ β'. (δ) Κατὰ τὴν ε'. Συνέπ. τῆς δ'. προτ. τῷ δε τῷ τμήμ. (ε) Κατὰ τὸν κ. τῷ ε'. (ς) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς κ. τῷ δε τμήμ. (η) ὅτι

$\overline{BA}^2$. ἀλλὰ τὸ ΤΠ. ΠΓ : $\overline{MP}^2$ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῶ ὃν ἔχει ΤΠ : ΜΠ, καὶ ΠΓ : ΜΠ. (θ) ἔστι δὲ ὡς μὲν ΤΠ : ΜΠ :: $\overline{CE} : \overline{GE}$, ὡς δὲ ΠΓ : ΜΠ :: $\overline{CE} : \overline{ZE}$. (ι) ὡς ἄρα $\overline{PA}^2 : \overline{BA}^2 :: \overline{CE}^2 : \overline{GE} \cdot \overline{ZE}$. ἀλλὰ τὸ ΓΕ. ΖΕ = ΒΕ. ΕΔ, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. ὡς ἄρα $\overline{PA}^2 : \overline{BA}^2 :: \overline{CE}^2 : \overline{BE} \cdot \overline{ED}$, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΒΕ. ΕΔ : $\overline{CE}^2 :: \overline{BA}^2 : \overline{PA}^2$. καμίνε δὲ τὴν ΒΛ ὀρθίαν πλευρὰν εἶναι τῆς ΒΔ, ἐστὶν ὡς $\overline{BA}^2 : \overline{PA}^2 :: \overline{BD} : \overline{BL}$. (κ) ὡς ἄρα ΒΕ. ΕΔ : $\overline{CE}^2 :: \overline{BD} : \overline{BL}$. τὸ σημεῖον ἄρα ϵ ἐπὶ τῆς Δς τομῆς κείται. (λ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ μ ἐπὶ τῆς Βμ τομῆς ἐστὶ.

ΛΗΜΜΑ.

Εὰν ἐν ταῖς Ἀντικειμέναις τομαῖς ὁ ΤΚ Α' ξων ἔτω τμηθῇ πρὸς ταῖς κορυφαῖς, Ψ, Α, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΤ, ἢ ΨΦ καὶ ἑκατέρω τῶν τμημάτων ΨΤ, ἢ ΑΦ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τεταρτιμορίῳ τῶ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ καὶ τῆς ὀρθίας ΑΛ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, ἔσται εἰάν ἢ ΑΤ. ΨΤ = $\frac{\Psi A \cdot A \Lambda}{4}$, ἢ ΨΦ. ΑΦ = $\frac{\Psi A \cdot A \Lambda}{4}$. ἀπὸ δὲ τῶν Τ καὶ Φ σημείων ἐπὶ τὰ Β καὶ Χ, καὶ θ' αὖ ἡ ἐφαπτομένη ΜΒ τὰς κατὰ κορυφὴν ἀπτομένας ΑΧ, ΨΒ τέμνει, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΤΒ,

(θ) Κατὰ τὴν κγ'. τῶ ε'. (ι) Κατὰ τὴν δ'. τῶ ε'. (κ) Ἐκ τῆς γ'. Συνεκ. τῆς ε'. πρὸς. τῶ δὲ τῶ τμήμ. δηλον. (λ) Ἐκ τῆς Συνεκ. τῆς ε'. πρὸς. τῶ δὲ τῶ τμήμ. δηλον.

ΤΒ, ΤΧ, καὶ αἱ ΦΧ, ΦΒ, λέγω Α' ὅτι αἱ ὑπὸ αὐτῶν περιεχόμεναι γωνίαι, αἱ μὲν πρὸς τοῖς Τ καὶ Φ σημείοις, εἴτεν αἱ ΒΤΧ, ΒΦΧ, ὁρθαῖ-
 εῖσιν· αἱ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΦΧ ὑποτενόμεναι
 ἴσαι ἀλλήλαις, τρεῖςιν ἢ μὲν ΒΧΤ = ΒΦΤ,
 ἢ δὲ ΦΤΧ = ΦΒΧ. Β'. ὅτι εἰν δύω ἐκ τῶν ἐ-
 πιζευχθεῖσων εὐθειῶν αἱ ΤΧ, ΒΦ ἐκβληθεῖ-
 σαι συμπέσωσιν, ἢ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως
 αὐτῶν Η ἐπὶ τῆς ἐπαφῆς Μ ἐπιζευχθεῖσα
 εὐθεῖα ΗΜ τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΒ πρὸς ὁρθὰς
 ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ ΒΨ. ΑΧ = $\frac{\Psi\Lambda \cdot \Lambda\Lambda}{4}$. (μ) ἀλλὰ καὶ τὸ ΑΥ. $\psi\gamma = \frac{\psi\Lambda \cdot \Lambda\Lambda}{4}$. (ν) τὸ ἄρα ΒΨ. ΑΧ = ΑΥ. ΨΥ. ὡς ἄρα ΒΨ : ΨΥ :: ΑΥ : ΑΧ. (ξ) ἔστι δὲ καὶ γωνία ἡ ΒΨΥ = ΥΑΧ, ἰσογώνια ἄρα εἰσὶ τὰ ΒΨΥ, ΥΑΧ τρίγωνα, καὶ γωνία ἡ ΥΒΨ = ΑΥΧ. (π) κοινὴ προσκείμεναι ἡ ΒΥΨ, ἡ ἄρα ΥΒΨ + ΒΥΨ = ΑΥΧ + ΒΥΨ. ἀλλ' ἡ ΥΒΨ + ΒΥΨ μιᾷ ὀρθῇ ἴση. (ρ) ἄρα καὶ ἡ ΑΥΧ + ΒΥΨ, εἴτεν ἡ ΒΥΧ ἴση μιᾷ ὀρθῇ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ΒΦΧ ὀρθὴ ἔστιν. ὁ ἔν διαμέτρῳ τῇ ΒΧ γραφόμενος κύκλος διὰ τῶν Β, Υ, Χ, Φ σημείων ἵξει. (σ) αἱ

(μ) Κατὰ τὴν ια'. Συνέπ. τῆς δ. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Κατὰ τὴν ις'. τῷ ε'. (ο) Ὁρθὴ γὰρ ἑκατέρα διὰ τὸν ΤΚ Ἀξονα. (π) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν δ'. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν λβ'. τῷ α'. (σ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν η'. τῷ ε'.

αἱ ἄρα ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῆ κύκλου γωνία ΒΧΥ, ΒΦΥ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὡσαύτως αἱ ΦΥΧ, ΦΒΧ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Β.

Εἰ γὰρ μὴ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΜΒ ἢ ΗΜ, ἤχθω ἀπὸ τῆ Η ἢ ΗΙ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΜΒ. καὶ ταχθεὶς ἀπὸ τῆ Μ ἐπὶ τῆ Α' ἕξονος ΥΚ τῆς ΜΚ, ἐπεξεύχθω ἢ ΚΙ. καὶ ἐπεὶ τῶν τριγώνων ΒΨΥ, ΒΙΗ ἢ μὲν γωνία ΒΨΥ = ΒΙΗ (ἐκατέρα γὰρ ὁρθή.) ἢ δὲ ΥΒΨ = ΙΒΗ· ἐκατέρα γὰρ ἴση δέδεικται τῇ ΦΥΧ· ὡς ἄρα ΙΒ : ΒΨ :: ΒΗ : ΒΥ. (τ) ἀλλ' ὡς ΒΗ : ΒΥ :: ΗΧ : ΧΦ, (υ) ὡς δὲ ΗΧ : ΧΦ :: ΙΧ : ΑΧ· ὁμοία γὰρ τὰ ΗΧΙ, ΦΧΑ τρίγωνα (ἢ μὲν γὰρ γωνία ΗΙΧ = ΦΑΧ· ἐκατέρα γὰρ ὁρθή· ἢ δὲ ΗΧΙ = ΑΧΦ· ἐκατέρα γὰρ ἴση τῇ ΒΦΥ· ἢ γὰρ ΗΧΙ = ΒΧΥ, (φ) ἢ δὲ ΒΧΥ = ΒΦΥ. (χ) ὡσπερ δὲ δέδεικται ἢ ΥΒΨ = ΑΥΧ, ἔτω δευχθήσεται καὶ ἢ ΑΧΦ = ΒΦΥ.) ὡς ἄρα ΙΒ : ΒΨ :: ΙΧ : ΑΧ, (ψ) καὶ ἐναλλαξ ὡς ΙΒ : ΙΧ :: ΒΨ : ΑΧ. ἔστι δὲ ὡς ΒΨ : ΑΧ :: ΨΚ : ΚΑ. (ω) ὡς ἄρα ΙΒ : ΙΧ :: ΨΚ : ΚΑ, (α) καὶ διαιρεθέντα, ὡς ΒΧ : ΙΧ :: ΨΑ : ΚΑ. ἀλλ' ὡς ΨΑ : ΚΑ :: ΠΧ : ΧΡ. (ἔστι γὰρ ὡς ΥΚ : ΥΨ :: ΥΡ : ΥΠ, (β) καὶ κατὰ ἀναεσοφὴν, ὡς ΥΚ : ΨΚ :: ΥΡ : ΠΡ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΨΚ : ΥΚ :: ΠΡ : ΥΡ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔστιν ὡς ΥΚ : ΚΑ :: ΥΡ : ΧΡ. διὸ καὶ δι' ἴσιν ὡς ΨΚ : ΚΑ :: ΠΡ : ΧΡ, καὶ διαιρεθέντα, ὡς ΨΑ : ΚΑ :: ΠΧ : ΧΡ.) καὶ ὡς ΠΧ : ΧΡ :: ΒΧ : ΧΜ. (γ) ὡς ἄρα ΒΧ : ΙΧ :: ΒΧ : ΧΜ. (δ) ἢ ἄρα ΧΜ =

Λ

ΙΧ.

- (τ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (υ) Κατὰ τὴν αὐτ. (φ) Κατὰ τὴν ε'. τῆ α'. (χ) Κατὰ τὸ προλ. μέρος (ψ) Κατὰ τὴν ε'. τῆ ε'. (ω) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς δ'. τῆ δὲ τῆ τμήμ. (α) Κατὰ τὴν ἐκθεσσαν ε'. (β) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (γ) Κατὰ τὴν αὐτ. (δ) Κατὰ τὴν ἀρῆμ. ε'.

ΙΧ. (ε) τὸ ὅλον ἴσον τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ αἴτιας ἢ ΗΙ κάθετος τῇ ΕΜ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι ἐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΗΜ. ἢ αἴτια ΗΜ τῇ ΕΜ πρὸς ὁρθῶς ἐστίν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, εἰὰν ἀπὸ τῶν εἰρημένων τῷ Α'ξονος σημείων ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, αἱ ὑπ' αὐτῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιεχόμεναι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἀπὸ τῶν εἰρημένων τῷ Α'ξονος σημείων Υ, Φ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπεζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΥΜ, ΦΜ. λέγω, ὅτι αἱ ὑπ' αὐτῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΜΒ περιεχόμεναι γωνίαι αἱ ΥΜΒ, ΦΜΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρω τῶν ΕΜΗ, ΕΥΗ γωνιῶν ὁρθαὶ εἰσιν, (ζ) ὁ αἴτια διαμέτρῳ τῇ ΒΗ γραφόμενος κύκλος διὰ τῶν Η, Μ, Υ, Β σημείων ἥξει. ὡσαύτως ἐπεὶ ἑκατέρω τῶν ΧΜΗ, ΧΦΗ ὁρθαί, ὁ διαμέτρῳ τῇ ΧΗ γραφόμενος κύκλος διὰ τῶν Χ, Μ, Η, Φ ἥξει σημείων. (η) ἔκ᾽ ἐν ἢ μὲν ΒΗΥ γωνία ἴση τῇ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι ΥΜΒ, ἢ δὲ ΦΜΧ ἴση τῇ αὐτῇ ΒΗΥ, εἴτεν τῇ ΦΗΧ. (θ) ἢ αἴτια $ΥΜΒ = ΦΜΧ$.

ΣΥΝΕΠΕΙΛΑΙ.

Α'. Τὰ εἰρημένα Υ , Φ σημεία ἐριθίσονται, εἰάν ἀπὸ τῆς κέντρος Γ πρὸς ἑκάστων τῶν $\Upsilon\text{Κ}$ Ἀΐξονι ἀχθῇ ἡ $\Gamma\text{Ν}$ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς δευτέρας Διαμέτρου, καὶ τῇ ἐπιζευχθείσῃ $\Psi\text{Ν}$ ἴση ληφθῇ ἐκατέρωθεν τῶν $\Gamma\Upsilon$, $\Gamma\Phi$. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\text{ΑΥ} \cdot \Upsilon\Psi + \overline{\Gamma\Psi}^2 = \overline{\Gamma\Upsilon}^2$, (ι) ἔστι δὲ ἡ $\Gamma\Upsilon = \Psi\text{Ν}$, (κ) τὸ ἄρα $\text{ΑΥ} \cdot \Upsilon\Psi + \overline{\Gamma\Psi}^2 = \overline{\Psi\text{Ν}}^2$. ἀλλὰ τὸ $\overline{\Psi\text{Ν}}^2 = \overline{\Gamma\Psi}^2 + \overline{\Gamma\text{Ν}}^2$. (λ) τὸ ἄρα $\text{ΑΥ} \cdot \Upsilon\Psi + \overline{\Gamma\Psi}^2 = \overline{\Gamma\Psi}^2 + \overline{\Gamma\text{Ν}}^2$. ἀφαιρεθῶν κοινὸν τὸ $\overline{\Gamma\Psi}^2$. τὸ ἄρα $\text{ΑΥ} \cdot \Upsilon\Psi = \overline{\Gamma\text{Ν}}^2$. ἀλλὰ τὸ $\overline{\Gamma\text{Ν}}^2 = \overline{\Psi\text{Α}} \cdot \text{ΑΛ}$. (ἔστι γὰρ ἡ $\Gamma\text{Ν}$ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς δευτέρας διαμέτρου 4 τῆς μέσης ἀναλόγου τῶν $\Psi\text{Α}$, ΑΛ .) ἄρα καὶ τὸ $\text{ΑΥ} \cdot \Upsilon\Psi = \overline{\Psi\text{Α}} \cdot \text{ΑΛ}$. Τὸ ἄρα Υ σημεῖον τὸ ἕτερον τῶν προεξημένων + ἐστὶ. (μ) διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΝ , δευχθήσεται ὅτι τὸ Φ τὸ ἕτερον τῶν σημείων ἐστίν.

Β'. Ἐκ τούτου δὲ καὶ ἐφαπτομένην ἀπὸ τῆς δοθέντος σημείου Μ τῆς δευτέρας Ὑπερβολῆς ῥαδίως εἰς ἀγαγεῖν. εἰάν γὰρ ἀπὸ τῶν εὐρεθέντων σημείων Υ , Φ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ $\Upsilon\text{Μ}$, $\Phi\text{Μ}$, καὶ ἀχθῇ ἡ ΜΒ δίχα τέμνουσα τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν $\Upsilon\text{ΜΒ}$, ἡ ΜΒ ἐφαπτομένη ἔσται τῆς Ὑπερβολῆς κατὰ τὸ Μ .

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὰ Υ καὶ Φ σημεία, Ἐξίστοι ἢ ὀμφαλοὶ τῆς Ὑπερβολῆς καλεῖνται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Εἰάν ἀπὸ τυχόντος τῆς Ὑπερβολῆς σημείου ἐπὶ τὰς Ἐξίστας εὐθεῖαι ἐπιζευχθῶσιν, ἡ ὕ-

Λ 2

ΠΕ-

(ι) Κατὰ τὴν ε'. τῇ β'. (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὴν μζ' καὶ α'. (μ) Κατὰ τὸ προλ. Δῆμι.

περοχή αὐτῶν ἴση ἔσεται τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ.

Ἀπὸ τῆς τυχόντος τῆς Ὑπερβολῆς σημεία M ἐπὶ τὰς Ἑσίας Υ , Φ ἐπεξεύχθωσαν αἱ MY , $M\Phi$. λέγω ὅτι ἡ ὑπεροχή αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ ΨA , ἔσται ὅτι ἡ $TM - \Phi M = \Psi A$. πίν. IA' . χ . 1.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ μὲν τῆς M ἢ MT , ἀπὸ δὲ τῶν A καὶ Ψ αἱ AX , ΨB ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς. καὶ ἀπὸ τῆς Γ κέντρου καὶ τῆς ἐτέρας τῶν Ἑσίων Υ αἱ $T\Gamma N$, $\Upsilon\Pi$ παράλληλοι τῇ ΦM . καὶ ἀπὸ μὲν τῆς T , καὶ ὁ ἢ διὰ τῆς κέντρου τῇ ἐφαπτομένῃ $M\Pi$ συμπίπτει ἐπὶ τὰ Υ , Ψ , A σημεία ἐπεξεύχθωσαν αἱ $T\Upsilon$, $T\Psi$, TA ἀπὸ δὲ τῆς Υ , ἐπὶ τὰ B , X , καὶ τὴν αὐτὴν $M\Pi$ αἱ καὶ τὰ κορυφὴν ἀπτόμεναι τέμνουσιν, αἱ TB , TX .

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία $TM\Pi = \Phi M\Pi$. (ν) ἀλλ' ἡ $\Phi M\Pi = M\Pi\Upsilon$. (ξ) ἄρα καὶ ἡ $TM\Pi = M\Pi\Upsilon$. ἡ ἄρα $TM = T\Pi$. (ο) ἐπεὶ δὲ ὡς $\Pi T : TM :: \Upsilon N : NM$, (π) καὶ ὡς $\Upsilon N : NM :: \Upsilon\Gamma : \Gamma\Phi$, (ρ) ἄρα καὶ ὡς $\Pi T : TM :: \Upsilon\Gamma : \Gamma\Phi$. (σ) ἀλλ' ἡ $\Upsilon\Gamma = \Gamma\Phi$. (τ) ἄρα καὶ ἡ $\Pi T = TM$. ἐπεὶ ἔν τῶν $\Pi\Upsilon T$, $M\Upsilon T$ τριγώνων ἡ μὲν $\Upsilon\Pi = TM$, ἡ δὲ $\Pi T = TM$, ἡ δὲ ΥT κοινὴ, καὶ γωνία ἄρα ἡ $\Upsilon T\Pi = \Upsilon TM$. (υ) ὁρθὴ ἄρα ἑκατέρα αὐτῶν. (φ) ἔστι δὲ ὁρθὴ καὶ ἡ $B\Psi\Upsilon$. (χ) ὁ ἄρα διαμέτρου τῇ

(ν) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (ξ) Κατὰ τὴν χθ'. τῆς α'. (ο) Κατὰ τὴν ε'. τῆς α'. (π) Κατὰ τὴν β'. τῆς ε'. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτ. (σ) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (τ) Ἐκ τῆς προλ. Λήμ. δηλον (υ) Κατὰ τὴν η'. τῆς α'. (φ) Κατὰ τὴν αὐτ. τῆς α'. (χ) Κατὰ τὴν αὐτ. τῆς α'.

τῇ ΥΒ γραφόμενος κύκλος, διὰ τῶν Β, Τ, Ψ, Υ σημείων ἤξει. (ψ) ἔσονται δὲ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνία ΥΒΨ, ΥΤΨ ἴσαι ἀλλήλαις. (ω) ὡσαύτως ἐπεσθῇ ἐξῆς ἑκατέρω τῶν ΥΤΧ, ΥΑΧ, ὁ διαμέτρω τῇ ΤΧ γραφόμενος κύκλος, διὰ τῶν Υ, Τ, Α, Χ σημείων ἤξει. καὶ αἱ γωνία ΑΥΧ, ΑΤΧ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ἔστι δὲ ἡ ΑΥΧ=ΥΒΨ, (α) ἄρα καὶ ἡ ΥΤΨ=ΑΤΧ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΨΤΧ. ἡ ἄρα ΥΤΧ=ΨΤΑ. ἀλλ' ἡ ΥΤΧ ὀρθὴ ἐστίν, ὡς δέδεικται, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΨΤΑ. ὁ ἄρα κέντρω μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ ὁποτέρω τῶν ΓΨ, ΓΑ γραφόμενος κύκλος, διὰ τῶ Τ ἤξει. ἐκὲν αἱ ΓΨ, ΓΤ, ΓΑ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. καὶ ἐπεὶ ὡς ΜΠ : ΜΤ :: ΠΥ : ΤΝ· (β) ἔστι δὲ ἡ ΜΠ διπλασία τῆς ΜΤ· ἄρα καὶ ἡ ΠΥ, εἴτεν ἡ ΥΜ διπλασία τῆς ΤΝ. ὡσαύτως ἐπεὶ ὡς ΥΦ : ΥΓ :: ΦΜ : ΓΝ, (γ) ἡ δὲ ΥΦ διπλασία τῆς ΥΓ, καὶ ἡ ΦΜ ἄρα διπλασία τῆς ΓΝ. ἄρα ἡ ΥΜ — ΦΜ διπλασία τῆς ΤΝ—ΓΝ, ἥτοι τῆς ΤΓ, ἢ τῆς ΓΑ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΨΑ διπλασία τῆς ΓΑ. ἡ ἄρα ΥΜ—ΦΜ=ΨΑ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Ἐσιν ἄρα συνεχῇ πορίσασθαι σημεία, δι' ὧν, δοθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΒΑ (χ. 2.) καὶ τῶ τῶν Ἐσιῶν ἀποσήματος ΥΦ, ἡ Ὑπερβολὴ γραφῆσεται. ἤχθω γάρ ἀπὸ τῶ Υ εὐθεῖα ἡ ΥΜ τῆς ΒΑ μείζων. καὶ ληφθείσης τῆς ΥΔ ἴσης τῇ ΒΑ, κέντρῳ μὲν τῷ Υ, διαστήματι δὲ τῷ ΥΕ μείζονι τῆς ΥΔ τόξον γεγράφθω τὸ ΘΕΟ, κέντρῳ δὲ τῷ Φ, διαστήματι δὲ τῷ ΕΔ τόξον γεγράφθω τὸ ΗΠ, τέ-

Λ 3

μνον

- (ψ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν ἡ. τῇ ε'. (ω) Κατὰ τὴν κα', τῇ γ'. (κ) Ὅρα τὴν δαζ τῇ α. μέρ. τῇ προλ. Λήμ.
(β) Κατὰ τὴν δ'. τῇ κ'. (γ) Κατὰ τὴν αὐτ.

μνον τὸ ἤδη γραφὲν κατὰ τὸ Ζ. ὡσαύτως κέντρῳ μὲν τῷ Υ, διασημάτι δὲ τῷ ΥΓ μείζονι τῆς ΥΕ τόξον γεγραφθῶ τὸ ΚΓΛ, κέντρῳ δὲ τῷ Φ, καὶ διασημάτι τῷ ΔΓ τόξον γεγραφθῶ τὸ ΝΡ τέμνον τὸ ΚΛ κατὰ τὸ Ι. λέγω δὴ ὅτι διὰ τῶν σημείων Ζ, Ι, καὶ τῶν ἐφεξῆς ὁμοίως ὁριζομένων ἡ Ὑπερβολὴ ἦξει. ἐπεξεύχθωσαν γάρ αἱ ΥΖ, ΥΙ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΥΖ = ΥΕ, ἡ δὲ ΦΖ = ΕΔ. ἡ ἄρα ΥΖ - ΦΖ = ΥΕ - ΕΔ. ἀλλ' ἡ ΥΕ - ΕΔ, εἶπεν ἡ ΥΔ = ΒΑ ἡ ἄρα ΥΖ - ΦΖ = ΒΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΙ - ΦΙ = ΒΑ. ὁῖον ἄρα ὅτι τὰ Ζ, Ι σημεῖα ἐν τῇ Ὑπερβολῇ εἰσὶ.

Β'. Τῶν αὐτῶν δοθέντων, γραφθήσεται καὶ διὰ κινήσεως κανόνος ἡ Ὑπερβολή. ἔσω γάρ πλαγίᾳ μὲν πλευρᾷ ἡ ΒΑ, (χ. 3.) ἀπόστημα δὲ τῶν Ἐστιῶν ἡ ΥΦ. ἦλκε δὲ ἐν τοῖς Φ καὶ Υ σημείοις πῆξον, τὰς ΔΦ, ΚΥ. καὶ τῷ μὲν ΔΦ σύμπηξον τὸ πέρας Φ τῆ νήματος ΦΜΓ τῆ ἐν τῷ κανόνι ΥΓ ἐνηρμοσμένῃ· ὁ δὲ ΚΥ διὰ τῆς ὁπῆς τῆ περὶ αὐτὴ κινήτῃ κανόνος ΥΓ διερχέσθω. κείσθω δὲ τὴν τῆ μήκους τῆ κανόνος ΥΓ καὶ τῆ νήματος ΦΜΓ ὑπεροχὴν ἴσην εἶναι τῇ ΒΑ. καὶ τῆ ἑτέρας πέρατος Γ τῆ νήματος τῇ τῆ κανόνος πέρατι ἐφαρμοσθέντος, ἦλος ὁ ΗΜ μεταξὺ αὐτῆ τε καὶ τῆς εὐθείας ΥΦ ἐντεθεῖς, ἔτω τῷ κανόνι ΥΓ συμφερέσθω, ὥστε τὸ μὲν ΦΜ μέρος τῆ νήματος ἐντεταμένον διαμένειν, τὸ δὲ λοιπὸν τῷ κανόνι ἐφηρμοσμένον. λέγω δὴ, ὅτι ὁ ΗΜ ἦλος τῇ τοιαύτῃ κινήσει τὴν ΑΜ Ὑπερβολὴν γράψει. ὅπερ γὰρ εἰν σῆ ὁ κανὼν ΥΓ, ἡ ὑπεροχὴ αὐτῆ τε καὶ τῆ νήματος ΦΜΓ ἴση ἔσεται τῇ ΒΑ. ὅσον γὰρ μέρος τῆ νήματος ἀπὸ τῆ κανόνος ἀποχωριζόμενον ἀφαιρεῖται, τοσούτον τῷ ΦΜ προσήθεται. διὸ ἡ ΥΜ - ΦΜ = ΒΑ.

Γ. Ἐάν ἀπὸ τῆς Ἑξίας Φ (χ. 1.) πρὸς ὀρθάς τῇ ἐφαπτομένη ΜΠ ἀχθῇ ἡ ΦΚ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπίπτῃ τῇ ἀπὸ τῆς ἐτέρας Ἑξίας Υ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπιζευχθεῖσα ΥΜ κατὰ τὸ Ι, τὸ ἀπολαμβανόμενον ἀπ' αὐτῆς μέρος ΥΙ ἴσον ἔσται τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ ΨΑ. ἐπεὶ γάρ τῶν τριγώνων ΜΦΚ, ΜΙΚ αἱ μὲν πρὸς τῷ Κ γωνίαι ἴσαι, ἡ δὲ ΦΜΚ = ΙΜΚ, (δ) ἡ δὲ ΜΚ κοινή, καὶ ἡ ΦΜ ἄρα ἴση τῇ ΜΙ. (ε) ἔστι δὲ ΥΜ - ΦΜ = ΨΑ, (ζ) ἄρα καὶ ΥΜ - ΙΜ, ἔσται ΥΙ = ΨΑ. δῆλον δὲ ὅτι ἡ ΥΙ ἡ ὑπεροχή ἐστὶ τῶν ΥΜ, ΦΜ, τῶν ἀπὸ τῶν Ἑξιῶν Υ, Φ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπιζευχθεῖσων.

Δ. Ἐάν ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ πρὸς ὀρθάς ἀχθῇ τῇ ἐφαπτομένη ΜΠ ἡ ΜΕ τῷ Ἀξονι κατὰ τὸ Ε συμπίπτουσα, ἔσται ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΨΑ, πρὸς τὸ τῶν Ἑξιῶν ἀπόστημα ΥΦ, ὅπως ἡ ΥΜ, πρὸς τὸ μέρος ΥΕ τῷ Ἀξονος, τὸ μεταξὺ τῆς Ἑξίας Υ καὶ τῆς καθέτης ΜΕ. ἐπεὶ γάρ ὡς ΥΙ: ΥΦ:: ΥΜ: ΥΕ, (η) ἔστι δὲ ἡ ΥΙ = ΨΑ, (θ) ἄρα καὶ ὡς ΨΑ: ΥΦ:: ΥΜ: ΥΕ.

Ε. Ἡ ΦΜ, (πίν. ΙΒ'. χ. 1.) ἡ ἀπὸ τῆς Ἑξίας Φ τεταγμένης ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΒΗ ἀναχθεῖσα ἴση ἐστὶ τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾷς ΨΑ. ἔστι μὲν γάρ ὡς ΒΦ. ΦΑ: ΜΦ²:: ΒΑ: ΑΨ. (ι) ἀλλ' ὡς ΒΑ: ΑΨ:: ΒΑ. ΑΨ: ΑΨ². (κ) ὡς ἄρα ΒΦ. ΦΑ: ΜΦ²:: ΒΑ. ΑΨ: ΑΨ². (λ) ἀλλὰ τὸ ΒΦ. ΦΑ ἴσον τεταρτημορίῳ τῷ ΒΑ. ΑΨ. (μ) ἄρα καὶ τὸ ΜΦ²

Λ 4

ἴσον

(δ) Κατὰ τὴν η'. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (ε) Κατὰ τὴν κς'. τῷ α'. (ζ) κατὰ τὴν προκ. πρίτ. (η) Κατὰ τὴν δ' τῷ ε'. (θ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (ι) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α' τῷ δὲ τῷ τμήμ. (κ) Κατὰ τὴν α'. τῷ ε'. (λ) Κατὰ τὴν β', τῷ β'. (μ) Ὅρα τὸ προλαβ. Λήμ.

ἴσον τεταρτημορίῳ τῷ $\overline{A\Psi^2}$. ἡ ἄρα ΦΜ ἡμίσεια ἐστὶ τῆς ΨΑ.

Ζ'. Τὸ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης ΑΛ μέρος ΑΙ, τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΜΤ ἀπολαμβάνόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ τῆς Ἑξίας Φ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἀποσήμετι ΑΦ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΒΦ. $\Phi\Lambda = \text{ΒΑ}$. ΑΨ. (ν) ἐστὶ δὲ τὸ μὲν ΒΦ. $\Phi\Lambda = \Gamma\Phi$. ΦΤ, (ξ) τὸ + δὲ ΒΑ ΑΨ = ΓΑ. ΦΜ. (ἡ μὲν γὰρ ΓΑ ἡμίσεια τῆς ΒΑ, + ἡ δὲ ΦΜ τῆς ΑΨ. (ο)) τὸ ἄρα ΓΦ. $\Phi\Gamma = \Gamma\Lambda$. ΦΜ. ὡς ἄρα $\Gamma\Phi : \Gamma\Lambda :: \Phi\Gamma : \Phi\Gamma$. (π) ἐπεὶ δὲ ὡς $\Gamma\Phi : \Gamma\Lambda :: \Gamma\Lambda : \Gamma\Gamma$, (ρ) καὶ διαιρεθέντα ὡς ΑΦ : ΓΑ :: ΑΤ : ΓΤ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ΑΦ : ΑΤ :: ΓΑ : ΓΤ. ἐστὶ δὲ ὡς ΓΑ : ΓΤ :: ΓΦ : ΓΑ. (σ) ὡς ἄρα ΑΦ : ΑΤ :: ΓΦ : ΓΑ, (τ) διὰ δὴ καὶ ὡς ΑΦ : ΑΤ :: ΦΜ : ΦΤ. (υ) δέδεικται γὰρ ὡς $\Gamma\Phi : \Gamma\Lambda :: \Phi\Gamma : \Phi\Gamma$. ἀλλ' ὡς ΦΜ : ΦΤ :: ΑΙ : ΑΤ. (φ) ὡς ἄρα ΑΦ : ΑΤ :: ΑΙ : ΑΤ. (χ) ἡ ἄρα ΑΙ = ΑΦ. (ψ)

Ζ'. Τῷ ΤΦΜ τριγώνῳ ἡ ΦΜ πλευρὰ μείζων τῆς ΦΤ, ἐστὶ γὰρ ὡς ΑΦ : ΑΤ :: ΦΒ : ΒΤ. (ω) ἀλλ' ἡ ΑΙ = ΑΦ. (α) ὡς ἄρα ΑΙ : ΑΤ :: ΦΒ : ΒΤ. ἀλλ' ὡς ΑΙ : ΑΤ :: ΦΜ : ΦΤ. (β) ὡς ἄρα ΦΒ : ΒΤ :: ΦΜ : ΦΤ. (γ) ἀλλ' ἡ ΦΒ μείζων τῆς ΒΤ. ἄρα καὶ ἡ ΦΜ μείζων τῆς ΦΤ.

Η'.

(ν) Ὅρα τὸ αὐτό. (ξ) Κατὰ τὴν ε. Συνέπ. τῆς δ'. τῷ δὲ τῷ τμήμα. (ο) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (π) Κατὰ τὴν ις'. τῷ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς δ' τῷ δὲ τῷ τμήμα. (σ) Κατὰ τὴν αὐτ. Συνέπ. (τ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε'. (υ) Κατὰ τὴν αὐτ. (φ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (χ) Κατὰ τὴν αὐτ. ε'. (ψ) Κατὰ τὴν β'. τῷ ε'. (ω) Ὅρα τὴν η'. Συνέπ. τῆς δ'. τῷ δὲ τῷ τμήμα. (α) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (β) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (γ) Κατὰ τὴν ἀρχημ. ε.

Η'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς τυχόντος τῆς Ἀξονος σημείῃς Η τε ταγμένως ἀναχθῇ ἢ ΗΕ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπέσῃ τῇ ἐφαπτομένῃ ΤΜ κατὰ τὸ Δ, ἢ ἀπὸ τῆς Ἑστίας Φ ἐπὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς Ε ἐπιζευχθεῖσα ΦΕ ἴση ἔσται τῇ ΗΔ. ἢ χθῶ γὰρ ἀπὸ τῆς Ε ἢ ΕΝ παρὰλληλος τῇ ΤΔ. καὶ ἀπὸ τῆς κέντρου Γ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπιζευχθεῖσα ἢ ΓΜ, ἐκβεβλήθω κατὰ συνεχές· ὁμοίως δὲ καὶ ἢ ΑΙ ἐκβεβλήθω. τοῦτον ΦΤΜ=ΦΑΛΜ. (δ) κοινὸν ἀφηρεῖθω τὸ ΦΑΙΜ. τὸ ἄρα ΑΤΙ=ΙΑΜ. κοινὸν προσκείθω τὸ ΗΑΙΜΟ. τὸ ἄρα ΗΤΜΟ=ΗΑΛΟ. ἀλλὰ τὸ ΗΑΛΟ=ΗΝΕ. (ε) τὸ ἄρα ΗΤΜΟ=ΗΝΕ. κοινὸν ἀφηρεῖθω τοῦτον ΗΝΠΟ. τὸ ἄρα ΝΤΜΠ=ΟΠΕ. κοινὸν προσκείθω τὸ ΕΠΜΔ. τὸ ἄρα ΝΤΔΕ=ΟΜΔ. ἀλλὰ τὸ ΝΤΔΕ=ΤΗΔ-ΝΗΕ. τὸ ἄρα ΟΜΔ=ΤΗΔ-ΝΗΕ. ἐπεὶ δὲ ὡς ΤΗΔ : ΝΗΕ :: $\overline{ΗΔ}^2$: $\overline{ΗΕ}^2$, (ζ) καὶ διαφερόντα, ΤΗΔ-ΝΗΕ : ΝΗΕ :: $\overline{ΗΔ}^2 - \overline{ΗΕ}^2$: $\overline{ΗΕ}^2$, ὡς ἄρα ΟΜΔ : ΝΗΕ :: $\overline{ΗΔ}^2 - \overline{ΗΕ}^2$: $\overline{ΗΕ}^2$. ἀλλὰ τῆς ΕΗ ἐπὶ τὸ Κ ἐκβληθείσης, ἐστὶ τὸ $\overline{ΗΔ}^2 - \overline{ΗΕ}^2 = ΚΔ. ΔΕ$. (η) ὡς ἄρα ΟΜΔ : ΝΗΕ :: ΚΔ. ΔΕ : $\overline{ΗΕ}^2$. ἀλλὰ καὶ ὡς ΝΗΕ : ΑΤΙ :: $\overline{ΗΕ}^2$: $\overline{ΑΙ}^2$. (θ) ἄρα καὶ δι' ἴσιν ὡς ΚΔ. ΔΕ : $\overline{ΑΙ}^2$:: ΟΜΔ : ΑΤΙ, ἔστιν ΙΑΜ. ἀλλ' ὡς ΟΜΔ : ΙΑΜ :: $\overline{ΟΜ}^2$: $\overline{ΜΑ}^2$, (ι) καὶ ὡς $\overline{ΟΜ}^2$: $\overline{ΜΑ}^2$:: $\overline{ΗΦ}^2$: $\overline{ΦΑ}^2$. (κ) ἐστὶ γὰρ ὡς ΟΜ : ΜΑ :: ΗΦ : ΦΑ. (λ) ὡς ἄρα ΚΔ. ΔΕ : $\overline{ΑΙ}^2$:: $\overline{ΗΦ}^2$: $\overline{ΦΑ}^2$. (μ) ἀλλὰ τὸ $\overline{ΦΑ}^2 = \overline{ΑΙ}^2$. (ν) ἄρα καὶ τὸ ΚΔ. ΔΕ = $\overline{ΗΦ}^2$.

Λ 5

κοι-

- (δ) Κατὰ τὸ Λῆμ. τὸ πρὸ τῆς ζ'. τῶδε τῶς τμήμ. (ε) Κατὰ τὸ αὐτ. Λῆμ. (ζ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῶς ε'. (η) Κατὰ τὴν ε'. τῶς β'. (θ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῶς ε'. (ι) Κατὰ τὴν αὐτ. (κ) Κατὰ τὸ ζ'. τῶν μετὰ τὸ ε'. Θεώρημα. (λ) Ἐκ τῆς β'. ε'. ὅλῃ. (μ) Κατὰ τὴν ε'. τῶς ε'. (ν) Ἐκ τῆς προλ. ε'. Συνεπ. ὅλῃ.

κοινὸν προσκείθω τὸ $\overline{HE}^2$. τὸ ἄρα $\overline{KD} \cdot \overline{DE} + \overline{HE}^2 = \overline{HF}^2 + \overline{HE}^2$. ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{KD} \cdot \overline{DE} + \overline{HE}^2 = \overline{HD}^2$, (ξ) τὸ δὲ $\overline{HF}^2 + \overline{HE}^2 = \overline{FE}^2$. (ο) τὸ ἄρα $\overline{HD}^2 = \overline{FE}^2$, ἢ ἄρα $\overline{HD} = \overline{FE}$.

Θ'. Ἐνεσιν ἄρα συνεχῇ πορίσασθαι σημεῖα δι' ὧν ἡ Ὑπερβολὴ ἥξει. εἰάν γάρ τριγώνον συσταθῇ ὀρθογώνιον τὸ $\overline{TFM}$, ὀρθὴν μὲν ἔχον τὴν $\overline{TFM}$ γωνίαν, τὴν δὲ ἑτέραν τῶν τὴν ὀρθὴν περιεχουσῶν πλευράν, τὴν $\overline{FM}$ μείζονα τῆς ἑτέρας $\overline{TF}$, ἐκβληθῶσι δὲ κατὰ τὸ συνεχές ἢ τε ἐλάσσων $\overline{TF}$ καὶ ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτένυσσιν $\overline{TM}$, καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῆς $\overline{TH}$ τινῶν σημείων τῶν η , H , ἀχθῶσιν αἱ $\eta\delta$, $H\Delta$ παράλληλοι τῇ $\overline{FM}$ καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Φ , διαστήματι δὲ τῷ $\eta\delta$, ὡσαύτως κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ τῷ $H\Delta$ τόξα γραφῇ τέμνοντα τὰς $\eta\delta$, $H\Delta$ κατὰ τὰ ϵ , E σημεῖα, ἥξει δι' αὐτῶν Ὑπερβολή. ἐπιζευχθεῖσιν γάρ τῶν $\overline{Fe}$, $\overline{FE}$, ἔσται ἡ μὲν $\eta\delta = \overline{Fe}$, ἡ δὲ $H\Delta = \overline{FE}$. ἐξ ὧν ὅλην τὸ προκείμενον.

Ι'. Ἐάν ἀπὸ μὲν τῆς ἐπαφῆς P (πίν. ΙΓ'. κ. 1.) κἀθετος τῇ ἐφαπτομένῃ $\overline{PH}$ ἀχθῇ ἡ $\overline{PP}$, τῷ Ἀξονι συμπίπτουσα κατὰ τὸ Π , ἀπὸ δὲ τῷ Π ἡ $\overline{PE}$ τῇ $\overline{PR}$, τῇ ἀπὸ τῆς Ἐστίας Φ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν P ἐπιζευχθείσῃ, ἡ ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβάνομένη $\overline{EP}$ ἴση ἔσται τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς $\overline{NO}$. ἡχθωσαν γάρ ἀπὸ τε ἑκατέρας τῶν Ἐσιῶν Υ , Φ , καὶ τῷ κέντρῳ Γ ἐυθῶσαι αἱ $\overline{YH}$, $\overline{\Phi\Omega}$, $\overline{\Gamma M}$ πρὸς ὀρθαῖς τῇ ἐφαπτομένῃ $\overline{PH}$. καὶ ἀπὸ τῶν Υ , Φ ἐπὶ τὰ P , H σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\overline{YP}$, $\overline{\Phi H}$. ἐκβεβλήθωσαν δὲ αἱ $\overline{\Phi\Omega}$, $\overline{\Gamma M}$, καὶ συμπίπτέτωσαν κατὰ τὰ Δ , Σ σημεῖα. καὶ διήχθω ἡ δευτέρα Διάμετρος $\overline{BK}$.

(ξ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ β'. (ο) Κατὰ τὴν μζ'. τῷ δ'.

$\kappa\upsilon$ ἀπὸ τῆς P τετάχθωσαν ἐφ' ἐκάτερον τῶν Ἀξόνων
 $ΥΠ$, KX αἱ $ΡΟ$, PX . $\kappa\upsilon$ ἐπεὶ τὸ τρίγωνον $\Omega\Phi P$ ὁμοιον
 $\tau\tilde{\omega}$ $ΥΡΗ$, (π) (ἡ μὲν γὰρ γωνία $\Phi\Omega P = ΥΗΡ$,
 (ρ) ἡ δὲ $\Phi P\Omega = ΥΡΗ$. (σ)) τὸ δὲ $\Omega\Phi P$ ὁμοιον τῷ
 $EΠP$, (ἡ μὲν γὰρ γωνία $\Phi\Omega P = ΠΕP$, ἡ δὲ $P\Phi\Omega =$
 $EΠΠ$, ὡς ἐναλλάξ.) τὸ ἄρα $ΥΡΗ$ ὁμοιον τῷ $ΠΕP$.
 (τ) ὡς ἄρα $PY : ΥΗ :: ΠP : PE$, καὶ ὡς $\Phi P :$
 $\Phi\Omega :: ΠP : PE$. (υ) τὸ ἄρα $PY \cdot PE = ΥΗ \cdot ΠP$,
καὶ τὸ $\Phi P \cdot PE = \Phi\Omega \cdot ΠP$. (ϕ) αἰφρηθήσω ἀπὸ μὲν
τῆς $PY \cdot PE$ τὸ $\Phi P \cdot PE$, ἀπὸ δὲ τῆς $ΥΗ \cdot ΠP$ τὸ $\Phi\Omega$.
 $ΠP$. τὸ ἄρα $PY \cdot PE - \Phi P \cdot PE = ΥΗ \cdot ΠP - \Phi\Omega \cdot ΠP$,
εἴτεν τὸ $PY - \Phi P \cdot PE = ΥΗ - \Phi\Omega \cdot ΠP$. ἀλλ' ἡ $PY -$
 $\Phi P = \Psi N$, (χ) τὸ ἄρα $\Psi N \cdot PE = ΥΗ - \Phi\Omega \cdot ΠP$.
ἐπεὶ δὲ ὡς $\Phi Y : \Phi Γ :: ΥΗ : Γς$, (ψ) ἔστι δὲ ἡ
 ΦY διπλασία τῆς $\Phi Γ$, ἄρα καὶ ἡ $ΥΗ$ διπλασία
τῆς $Γς$. πάλιν ἐπεὶ ὡς $\Phi Y : \Phi Γ :: \Phi Η : \Phiς$, $\kappa\upsilon$
ὡς $\Phi Η : \Phiς :: \Phi\Omega : \varsigma M$, $\kappa\upsilon$ ἡ $\Phi\Omega$ ἄρα διπλα-
σία τῆς ςM . ἐκὼν ἡ $ΥΗ - \Phi\Omega$ διπλασία τῆς $Γς -$
 ςM , εἴτεν τῆς $Γ M$. διὸ τὸ $\Psi N \cdot PE = 2 Γ M \cdot ΠP$.
 $\kappa\upsilon$ ἐπεὶ ἡ γωνία $ZPO = OΠP$, (ω) ἔστι δὲ ἡ $ZPO =$
 ZIG , ὡς ἐναλλάξ, ἄρα $\kappa\upsilon$ ἡ $OΠP = ZIG$. ἔστι δὲ $\kappa\upsilon$
ἡ $ΠOP = IGZ$. ὁμοια ἄρα εἰσὶ τὰ $ΠPO$, $MIΓ$ τρι-
γωνα. ὡς ἄρα $ΠP : PO :: ΓI : ΓM$. ἀλλ' ἡ $PO =$
 $ΓX$. ἄρα ὡς $ΠP : ΓX :: ΓI : ΓM$. τὸ ἄρα $ΠP \cdot$
 $ΓM = ΓX \cdot ΓI$. (α) ἐπεὶ δὲ ὡς $\Psi O \cdot ON : \overline{OP}^2 ::$
 $\Psi N : N\Theta$, (β) καὶ ὡς $\Psi N : N\Theta :: \overline{\Psi N}^2 : BK^2$.
(γ)

- (π) Κατὰ τὴν δ', τῆς ε'. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (σ) Κατὰ τὴν
ἡ. τῆς δὲ τῆς τμήμα. (τ) Κατὰ τὴν κα'. τῆς ε'. (υ) Κατὰ τὴν
δ'. τῆς ε'. (ϕ) Κατὰ τὴν ιε'. τῆς ε'. (χ) Κατὰ τὴν προκείμεν.
Πρότ. (ψ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (ω) Ὅρα τὴν ἡ. τῆς ε'. (α) Κατὰ
τὴν ιε'. τῆς ε'. (β) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α'. τῆς δὲ τῆς τμήμα.

(γ) ἔστι γὰρ ὡς $\Psi\text{N} : \text{BK} :: \text{BK} : \text{N}\Theta$. (δ) ἄρα ὡς $\Psi\text{O} . \text{ON} : \overline{\text{OP}}^2 :: \overline{\Psi\text{N}}^2 : \overline{\text{BK}}^2$, (ε) εἴτεν ὡς $\Psi\text{O} . \text{ON} : \overline{\Gamma\text{X}}^2 :: \overline{\Gamma\text{N}}^2 : \overline{\Gamma\text{K}}^2$. ἀλλὰ τὸ μὲν $\Psi\text{O} . \text{ON} = \text{O}\Gamma . \text{OZ}$, (ζ) τὸ δὲ $\overline{\Gamma\text{N}}^2 = \text{O}\Gamma . \Gamma\text{Z}$. (η) ὡς ἄρα $\text{O}\Gamma . \text{OZ} : \overline{\Gamma\text{X}}^2 :: \text{O}\Gamma . \Gamma\text{Z} : \overline{\Gamma\text{K}}^2$, καὶ ἐναλλάξ $\text{O}\Gamma . \text{OZ} : \text{O}\Gamma . \Gamma\text{Z} :: \overline{\Gamma\text{X}}^2 : \overline{\Gamma\text{K}}^2$. ἀλλ' ὡς $\text{O}\Gamma . \text{OZ} : \text{O}\Gamma . \Gamma\text{Z} :: \text{OZ} : \Gamma\text{Z}$. (θ) ὡς ἄρα $\text{OZ} : \Gamma\text{Z} :: \overline{\Gamma\text{X}}^2 : \overline{\Gamma\text{K}}^2$. ἀλλ' ὡς $\text{OZ} : \Gamma\text{Z} :: \text{O}\Gamma : \Gamma\text{X}$. (ι) ὡς ἄρα $\Gamma\text{X} : \text{I}\Gamma :: \overline{\Gamma\text{X}}^2 : \overline{\Gamma\text{K}}^2$, καὶ ἐναλλάξ ὡς $\Gamma\text{X} : \overline{\Gamma\text{X}}^2 :: \text{I}\Gamma : \overline{\Gamma\text{K}}^2$. ἔστι δὲ ὡς $\Gamma\text{X} : \overline{\Gamma\text{X}}^2 :: \text{I} : \Gamma$. (κ) ὡς ἄρα $\text{I} : \Gamma\text{X} :: \text{I}\Gamma : \overline{\Gamma\text{K}}^2$. τὸ ἄρα $\Gamma\text{X} . \text{I}\Gamma = \overline{\Gamma\text{K}}^2$. (λ) ἀλλὰ τὸ $\Gamma\text{X} . \Gamma\text{I} = \text{P}\Gamma . \Gamma\text{M}$, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. τὸ ἄρα $\text{P}\Gamma . \Gamma\text{M} = \overline{\Gamma\text{K}}^2$. διὸ καὶ $2\Gamma\text{M} . \text{P}\Gamma = 2\overline{\Gamma\text{K}}^2$. δέδεικται δὲ ἀνωτέρω $2\Gamma\text{M} . \text{P}\Gamma = \Psi\text{N} . \text{P}\Gamma$. τὸ ἄρα $\Psi\text{N} . \text{P}\Gamma = 2\overline{\Gamma\text{K}}^2$. ἐπεὶ ὡς $\Psi\text{N} : \text{BK} :: \text{BK} : \text{N}\Theta$, ὡς εἴρηται, τὸ ἄρα $\Psi\text{N} . \text{N}\Theta = \overline{\text{BK}}^2$. ἐκὼν τὸ $\Psi\text{N} . \text{H}\Theta$ τετραπλάσιον τῷ $\overline{\Gamma\text{K}}^2$, εἴτε διπλάσιον τῷ $2\overline{\Gamma\text{K}}^2$. ἄρα καὶ τῷ $\Psi\text{N} . \text{P}\Gamma$ διπλάσιον τὸ $\Psi\text{N} . \text{N}\Theta$. ἡ ἄρα $\text{N}\Theta$ διπλασία τῆς $\text{P}\Gamma$, ὅπου ἐστὶν ἡ $\text{P}\Gamma$ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς $\text{N}\Theta$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον, ὅτι ἐν συνεχεῖ μὲν ἀρμονικῶι λόγῳ μεγέθη εἶναι λέγεται, ὅταν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον λόγος ἔχῃ, ὃν ἡ ὑπεροχὴ τῷ πρώτῳ καὶ τῷ δευτέρῳ, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ τρίτῳ ἐν διακεκομμένῳ δὲ, ὅταν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον λόγον ἔχῃ.

(γ) Κατὰ τὸ β'. Πόρ. τὸ μετὰ τὴν ἡ. τῷ ε'. (δ) Κατὰ τὸ γ'. καὶ ὁρισμ. (ε) Κατὰ τὴν ε' τῷ ε'. (ζ) Ὅρα τὴν ε'. Σημειώματα. τῆς δ'. τῷ δὲ τῷ ε' μέρει. (η) Ὅρα τὴν δ'. τῆς αὐτ. πρὸς τὴν ε'. (θ) Κατὰ τὴν α' τῷ ε'. (ι) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (κ) Κατὰ τὴν α' τῷ ε'. (λ) Κατὰ τὴν ιζ'. τῷ ε'.

ὅν ἡ ὑπεροχὴ τῷ πρώτῳ καὶ τῷ δευτέρῳ, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῷ τρίτῳ καὶ τῷ τετάρτῳ.

ΙΑ'. Αἱ ΠΦ, ΠΖ, ΠΥ συνεχῇ ἀρμονικὸν λόγον πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν, εἴτεν ἐστὶν ὡς ΠΦ : ΠΥ :: ΦΖ : ΖΥ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΦΩ : ΥΗ :: ΩΡ : ΗΡ. ἔστι δὲ ὡς μὲν ΦΩ : ΥΗ :: ΦΖ : ΖΥ, ὡς δὲ ΩΡ : ΗΡ :: ΡΔ : ΡΥ, (μ) καὶ ὡς ΡΔ : ΡΥ :: ΠΦ : ΠΥ. (ν) ἄρα καὶ ὡς ΠΦ : ΠΥ :: ΦΖ : ΖΥ. (ξ)

ΙΒ'. Ἐὰν ἀπὸ δύο τυχόντων τῆς ὑπερβολῆς σημείων τῶν Ρ, καὶ Η (πίν. ΙΔ'. χ. 1.) ἐπιζευχθῶσιν ἐπὶ τὰς ἑξίας Φ, Υ εὐθεῖαι αἱ ΡΦ, ΗΦ, καὶ ΡΥ, ΗΥ, ἔσονται αἱ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμεναι γωνίαι ΡΦΗ, ΡΥΗ διπλάσιαι τῆς ΡΝΗ, τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ΡΝ, ΗΝ τῶν ἀχθείσων ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων Ρ, Η. ἐπεὶ γὰρ ἡ γωνία ΡΦΠ = ΦΥΡ + ΥΡΦ, (ο) καινῆς προσκειμένης τῆς ΦΥΡ, ἔσεται ἡ ΡΦΠ + ΦΥΡ = 2ΦΥΡ + ΥΡΦ. ἀλλ' ἡ ΥΡΦ = ΥΡΖ + ΖΡΦ, ἔστι δὲ ἡ ΥΡΖ = ΖΡΦ, (π) ἡ ἄρα ΡΦΠ + ΦΥΡ = 2ΦΥΡ + 2ΥΡΖ. ἀλλ' ἡ 2ΦΥΡ, εἴτεν ἡ 2ΖΥΡ + 2ΥΡΖ = 2ΡΖΦ, (ρ) ἡ ἄρα ΡΦΠ + ΦΥΡ = 2ΡΖΦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθήσεται, ὅτι ἡ ΗΦΠ + ΦΥΗ = 2ΗΤΦ = 2ΖΤΝ. ἡ ἄρα ΡΦΠ + ΦΥΡ + ΗΦΠ + ΦΥΗ = 2ΡΖΦ + 2ΖΤΝ, εἴτεν ἡ ΡΦΗ + ΡΥΗ = 2ΡΖΦ + 2ΖΤΝ. ἀλλ' ἡ 2ΡΖΦ + 2ΖΤΝ = 2ΡΝΗ. (σ) ἡ ἄρα ΡΦΗ + ΡΥΗ = 2ΡΝΗ.

ΙΓ'. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῷ Φ διαχθῇ εὐθεῖα ἡ ΕΦΗ, ἡ γωνία ΕΛΗ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ΕΛ,

(μ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (ν) Κατὰ τὴν β'. τῷ ε'. (ξ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (ο) Κατὰ τὴν λβ'. τῷ α'. (π) Κατὰ τὴν ἡ. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (ρ) Ἐκ τῆς λβ'. τῷ α'. δῆλον. (σ) Κατὰ τὴν αὐτ.

ΕΛ, ΗΛ, τῶν ἐπὶ τῶν σημείων Ε, Η ἀχθεσῶν ἀμβλεῖα ἔσαι. ἡ γὰρ ΕΛΗ ἴση ἐστὶ τῷ ἡμίσει τῶν ΕΦΠ, ΗΦΠ, ΡΥΗ. (τ) τὸ δὲ τέτων ἡμισυ μείζων ὀρθῆς. διὸ δὴ καὶ ἡ ΕΛΗ μείζων ὀρθῆς, εἶπεν ἀμβλεῖά ἐστι.

ΙΔ'. Τὸ τῶν Ἐξισῶν ἀπόστημα ΥΦ (χ. 2.) μέση ἀνάλογόν-
ἐστι τῆς τε πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ καὶ τῆς ΨΖ, τῆς
συγκειμένης ἔκτε τῆς πλαγίας ΨΑ καὶ τῆς ὀρθίας
πλευρᾶς ΑΖ. ἐστὶ γὰρ τὸ ΨΦ. $\Psi\Lambda = \Psi\Lambda \cdot \Lambda\text{Z}$. (υ)
κοινὸν δὲ προσκειμένον τῷ $\overline{\Gamma\Lambda}^2$, ἔσεται τὸ ΨΦ. $4 \cdot \overline{\Gamma\Lambda} +$
 $\overline{\Gamma\Lambda}^2$, (φ) ἦτοι τὸ $\overline{\Gamma\Phi}^2 = \Psi\Lambda \cdot \Lambda\text{Z} + \overline{\Gamma\Lambda}^2$. ἀλλὰ τὸ
μὲν $\overline{\Gamma\Phi}^2$ τετράπλάσιον τὸ $4 \cdot \overline{\Gamma\Phi}^2$. τῷ δὲ $\Psi\Lambda \cdot \Lambda\text{Z} +$
 $\overline{\Gamma\Lambda}^2$, τὸ $\Psi\Lambda \cdot \Lambda\text{Z} + \overline{\Psi\Lambda}^2$. τὸ ἄρα $\overline{\Gamma\Phi}^2 = \Psi\Lambda \cdot 4$
 $\Lambda\text{Z} + \overline{\Psi\Lambda}^2$. ἀλλὰ τὸ $\Psi\Lambda \cdot \Lambda\text{Z} + \overline{\Psi\Lambda}^2 = \Lambda\Psi \cdot \Psi\text{Z}$. (χ)
τὸ ἄρα $\overline{\Gamma\Phi}^2 = \Lambda\Psi \cdot \Psi\text{Z}$. ὡς ἄρα $\Psi\Lambda : \Upsilon\Phi :: \Upsilon\Phi :$
 ΨZ . (ψ)

ΙΕ'. Ἐὰν ἀπὸ τῶν Ἐξισῶν Φ, Υ (χ. 3.) ἐπὶ τὸ τυ-
χόν τῆς Ὑπερβολῆς σημεῖον Μ ἐπιζευχθῶσιν ἐυ-
θῆαι αἱ ΦΜ, ΥΜ, τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρ-
θογώνιον ἴσον ἔσαι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετραγώνῳ, τῆς
ἡμισείας τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΤΗ τῆς Δευτεραί-
ας ΣΜ, εἶπεν τὸ ΦΜ. ΥΜ = $\overline{\Gamma\text{H}}^2$. ἤχθω γὰρ ἀπὸ
τῷ Μ ἡ ἐφαπτομένη ΜΝ, τὴν μὲν ἀρχικὴν Διάμετρον
κατὰ τὸ Ζ, τὴν δὲ δευτέραν κατὰ τὸ Κ τέμνεσα.
καὶ ἀπὸ μὲν τῷ κέντρῳ Γ ἤχθω ἡ ΓΝ τῇ ΥΜ παράλλη-
λος, καὶ τῇ ἐφαπτομένῃ κατὰ τὸ Ν συμπέπτεσσα. ἀπὸ
δὲ τῆς Ἐξίας Φ ἐπὶ τὰ Ν καὶ Κ σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν αἱ
ΦΝ, ΦΚ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρω τῶν ΦΝΚ, ΦΓΚ γωνιῶν ὀρθή-
εσιν, (ω) ὁ ἄρα διάμετρον τῇ ΦΚ γραφόμενος κύκλος διὰ
τῶν

(τ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (υ) Κατὰ τὴν προλ. Λῆμ (φ) Κα-
τὰ τὴν ε'. τῇ β'. (χ) Κατὰ τὴν γ'. τῇ β'. (ψ) Κατὰ τὴν
ιζ'. τῇ ε'. (ω) Ὁρα τὴν δ' α'. τῇ ε'. τῇ δὲ τῇ τμήμ.

τῶν Φ, Ν, Κ, Γ σημείων ἦζα. (α) διὸ τὸ ΦΖ.
 $ZΓ = ΝΖ$. $ZΚ$. (β) ὡς ἄρα $ΦΖ : ΖΚ :: ΝΖ : ΖΓ$.
 (γ) ἄλλ' ὡς $ΝΖ : ΖΓ :: ΖΜ : ΖΥ$. (δ) ὡς ἄρα $ΦΖ :$
 $ZΚ :: ΖΜ : ΖΥ$. (ε) εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ
 γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις. (ζ) ὅμοια ἄρα εἰσὶ τὰ $ΦΖΚ$,
 $ΥΖΜ$ τρίγωνα, (η) καὶ ἡ γωνία $ΦΚΖ = ΖΥΜ$. ἔστι
 δὲ καὶ ἡ $ΚΜΦ = ΖΜΥ$, (θ) ὡς ἄρα $ΦΜ : ΜΚ ::$
 $ZΜ : ΜΥ$. (ι) τὸ ἄρα $ΦΜ$. $ΜΥ = ΖΜ$. $ΜΚ$. (κ)
 τέτων κειμένων, γεγραφθῶσαν συνεξευγμέναι τεταί
 αἱ ΒΥ, ΠΗ, (πίν. ΙΕ. χ. ι.) αἷς συμβαλλέτω
 κατὰ τὰ Υ, Η σημεῖα ἡ ΗΥ ἡ δευτέρα Διάμε-
 τρος τῆς Δευτεραίας ΣΜ. καὶ ἀπὸ τῆς Η ἡχθῶ ἡ τε
 ἐφαπτομένη ΗΤ, τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ ΒΟ κατὰ
 τὸ Τ συμβαλλέτω, καὶ αἱ τεταγμέναι ΗΕ, ΗΘ ἐπὶ
 τὴν ἀρχικὴν ΑΝ, καὶ ἐπὶ τὴν δευτέραν ΒΟ Διά-
 μετρον. καὶ ἀπὸ μὲν τῆς κορυφῆς Π τετάχθωσαν
 αἱ ΠΩ, ΠΡ, ἐπὶ τε τὴν Δευτεραίαν ΣΜ, καὶ ἐπὶ
 τὴν δευτέραν αὐτῆς ΥΡ. ἀπὸ δὲ τῆς ἐπαφῆς Μ
 τετάχθωσαν αἱ ΜΝ, ΜΙ, ἐπὶ τε τὴν ἀρχικὴν καὶ
 τὴν δευτέραν αὐτῆς Διάμετρον. καὶ ἐπεὶ ὡς ΓΗ :
 ΓΡ :: ΓΤ : ΓΠ, (λ) ἔστι δὲ ὡς ΓΤ : ΓΠ :: ΓΠ :
 ΓΟ, (μ) ἄρα καὶ ὡς ΓΗ : ΓΡ :: ΓΠ : ΓΟ. (ν)
 τὸ ἄρα τρίγωνον ΓΡΠ = ΓΗΘ. (ξ) ἄλλὰ τὸ μὲν
 $ΓΡΠ = ΓΠΩ$, τὸ δὲ $ΓΗΘ = ΓΕΗ$. (ο) τὸ ἄρα
 ΓΠΩ

- (α) Ἐκ τῆς δ'. Συνεπ. τῆς μετὰ τὴν ἡ τῆς ε'. ὁλῶ. (β) Κατὰ
 α'. Συνεπ. τὴν μετὰ τὴν λδ'. τῆς γ'. (γ) Κατὰ τὴν ιε' τῆς
 ε'. (δ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (ε) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (ζ) Κα-
 τὰ τὴν αε'. τῆς α'. (η) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (θ) Κατὰ τὴν
 ἡ. τῆς δε τῆς τμήμ. (ι) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (κ) Κατὰ τὴν
 ιε'. τῆς ε'. (λ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (μ) Κατὰ τὴν δ'. Συνεπ.
 τῆς δ'. τῆς δε τῆς τμήμ. (ν) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (ξ) Κατὰ τὴν
 ε'. τῆς ε'. (ο) Κατὰ τὴν λδ'. τῆς α'.

$\Gamma\Pi\Omega = \Gamma\epsilon\eta$. πάλιν ἐπεὶ ὡς $M\Gamma : \Gamma\Omega :: K\Gamma :$
 $\Gamma\Pi$, (π) ὡς δὲ $K\Gamma : \Gamma\Pi :: \Gamma\Pi : \Gamma I$, (ἐστὶ γὰρ
ὡς $\Lambda\Gamma.N\Psi : \overline{NM}^2 :: \overline{\Psi A}^2 : \overline{B\Pi}^2$, (ρ) ἐστὶ δὲ τὸ
 $N\Gamma.NZ = \Lambda\Gamma.N\Psi$, (σ) τὸ δὲ $\overline{NM}^2 = \overline{\Gamma I}^2$, καὶ ὡς
 $\overline{\Psi A}^2 : \overline{B\Pi}^2 :: \overline{\Gamma\Psi}^2 : \overline{\Gamma\Pi}^2$, ἄρα καὶ ὡς $N\Gamma.NZ :$
 $\overline{\Gamma I}^2 :: \overline{\Gamma\Psi}^2 : \overline{\Gamma\Pi}^2$. ἐστὶ δὲ τὸ $\overline{\Gamma\Psi}^2 = N\Gamma.\Gamma Z$,
(τ) καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἔσται ὡς $N\Gamma.NZ : N\Gamma.\Gamma Z$,
εἴτεν (υ ὡς $NZ : \Gamma Z :: \overline{\Gamma I}^2 : \overline{\Gamma\Pi}^2$. ἐστὶ δὲ ὡς $NZ :$
 $Z\Gamma :: \overline{NM} : K\Gamma$. (φ) διὸ δὴ καὶ ὡς NM , ἦτοι $\Gamma I :$
 $K\Gamma :: \overline{\Gamma I}^2 : \overline{\Gamma\Pi}^2$. καὶ ἀνάπαλιν ὡς $K\Gamma : \Gamma I :: \overline{\Gamma\Pi}^2 :$
 $\overline{\Gamma I}^2$. ἐκὼν ὡς $K\Gamma : \Gamma\Pi :: \Gamma\Pi : \Gamma I$. (χ) ὡς ἄρα
 $M\Gamma : \Gamma\Omega :: \Gamma\Pi : \Gamma I$. (ψ) ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς
 $M\Pi$, ἐστὶν ὡς μὲν $M\Gamma : \Gamma\Omega :: M\Pi : \Gamma\Pi\Omega$, ὡς
δὲ $\Gamma\Pi : \Gamma I :: M\Pi : \Gamma M I$. (ω) ὡς ἄρα $M\Pi :$
 $\Gamma\Pi\Omega :: M\Pi : \Gamma M I$. (α) τὸ ἄρα $\Gamma\Pi\Omega = \Gamma M I$.
(β) ἀλλὰ δέδεκται τὸ μὲν $\Gamma\Pi\Omega = \Gamma\epsilon\eta$, τὸ δὲ
 $\Gamma M I = \Gamma\eta\eta$. τὰ ἄρα $\Gamma\Pi\Omega$, $\Gamma\eta\eta$, $\Gamma\epsilon\eta$ ἴσα
ἀλλήλοις. ἐπεὶ δὲ ὡς $\Gamma M N : Z M N :: \Gamma N : Z N$,
(γ) ἐστὶ δὲ ὡς $\Gamma N : Z N :: K I : \Gamma I$. (γ) (κ γὰρ
ὡς $\Gamma Z : Z N :: K Z : Z M$, (δ) καὶ συντεθέντα ὡς $\Gamma N :$
 $Z N :: K M :: Z M$. καὶ ὡς $K M : Z M :: K I : \Gamma I$.
(ε) ὡς ἄρα $\Gamma M N : Z M N :: K I : \Gamma I$. (ζ) ἐστὶ δὲ
ὡς $K I : \Gamma I :: K M I : \Gamma M I$, (η) ἄρα καὶ ὡς $\Gamma M N :$
 $Z M N ::$

- (π) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν α'. τῷ δε τῷ τμήμ. καὶ τὸν
δ'. ὅρισμ. καὶ τὸ β'. Πόρις. τὸ μετὰ τὴν η'. τῷ ε' (σ) Ὅρα
τὴν ε'. Συνέπ. τῆς δ' τῷ δε τῷ τμήμ. (τ) Κατὰ τὴν δ' Συ-
νέπ. τῆς αὐτ. (υ) Κατὰ τὴν α'. τῷ ε'. (φ) Κατὰ τὴν δ'.
τῷ ε'. (χ) Κατὰ τὸ β'. Πόρις τὸ μετὰ τὴν η'. τῷ ε'. (ψ) Κα-
τὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (ω) Κατὰ τὴν α'. τῷ ε'. (α) Κατὰ τὴν
εἰρηθ. ε'. (β) Κατὰ τὴν β'. τῷ ε'. (γ) Κατὰ τὴν α'. τῷ ε'.
(δ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (ε) Ἐκ τῆς β'. τῷ ε'. δῆλον. (ζ)
Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (η) Κατὰ τὴν α'. τῷ ε'.

$ZMN :: KMI : ΓMI$, (θ) καὶ ἀνάπαλιν ὡς $ZMN : ΓMN :: ΓMI : KMI$. ἀλλ' ἐκάτερον τῶν $ΓMN, ΓMI$ ἴσον δέδεικται τῷ $ΓΕΗ$. ἄρα ὡς $ZMN : ΓΕΗ :: ΓΕΗ : KMI$. ἐκὲν καὶ ὡς $ZM^2 : ΓH^2 :: ΓH^2 : MK^2$. (ι) διὸ δὴ καὶ ὡς $ZM : ΓH :: ΓH : MK$. (κ) τὸ ἄρα $ZM \cdot MK = ΓH^2$. (λ) ἀλλὰ τὸ $ZM \cdot MK = YM \cdot ΦM$, ὡς προδεδεικται. τὸ ἄρα $YM \cdot ΦM = ΓH^2$.

15'. Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἡ ὑπεροχὴ τῆς τετραγώνου, τῆς ἀπὸ τῆς ἡμισείας $ΓP$ (πίν. ΙΔ. χ. 2.) τῆς δευτεράδας Διαμέτρου, καὶ τῆς ὀρθογωνίας $ΥP$. $PΦ$, τῆς ἀπὸ τῶν ἑυθειῶν τῶν ἐπεξευγμένων ἀπὸ τῶν Ἐσιῶν $Υ, Φ$ ἐπὶ τῆς ἐπαφῆς P , ἴση ἐστὶ τῇ ὑπεροχῇ, καὶ ἢ τὸ ἡμισυ τῆς ἀπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς $ΨA$ τετραγώνου, εἴτεν τὸ $2ΓA^2$ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς ἀποσήμεatos τῆς κέντρος $Γ$ καὶ τῆς ἐτέρας τῶν Ἐσιῶν $Φ$ τετραγώνου, εἴτεν τὸ $ΓΦ^2$, τετέστι τὸ $ΓP^2 - ΥP \cdot PΦ = 2ΓA^2 - ΓΦ^2$. κείθω γάρ τις εὐθεῖα ἡ $ΥP = ΥP + PΦ$. καὶ ἀπὸ τῆς P ἦχθω ἡ PA πρὸς ὀρθὰς τῇ $ΥZ$. καὶ ἐπεὶ τὸ $ΥP^2 + ΦP^2 = 2ΥP \cdot PΦ + ΓP^2$, (μ) κοινῶς ἀφαιρεθέντος τῆς $2ΥP \cdot PΦ$, ἔσεται τὸ $ΥP^2 + ΦP^2 - 2ΥP \cdot PΦ = ΓP^2$. ἀλλ' ἡ $ΥΦ = ΨA$. ἔστι γὰρ $ΥP - PΦ = ΨA$, (ν) καὶ $ΥP - PΦ = ΥΦ$. τὸ ἄρα $ΥP^2 + ΦP^2 - 2ΥP \cdot PΦ = ΨA^2$, ἔστι δὲ τὸ μὲν $ΥP^2 = ΥΓ^2 + PΓ^2 + 2ΥΓ \cdot ΓA$, (ξ) τὸ δὲ $ΦP^2 = PΓ^2 + ΓΦ^2 - 2ΓA \cdot ΓΦ$, (ο) εἴτεν τὸ $ΦP^2 = PΓ^2 + ΥΓ^2 - 2ΓA \cdot ΥΓ$. διὸ τὸ $ΥP^2 + ΦP^2 =$

M
 $2PP^2$

(θ) Κατὰ τὴν ἀρχήν. ε. (ι) Κατὰ τὴν 15'. τῆς 5'. (κ) Κατὰ τὸ 5'. Θεώρημα τῶν μετὰ τὸ ε. (λ) Κατὰ τὴν 15'. τῆς 5'. (μ) Κατὰ τὴν 5'. τῆς β'. (ν) Κατὰ τὴν 5'. τῆς δε τῆς 5'. (ξ) Κατὰ τὴν 15'. τῆς β'. (ο) Κατὰ τὴν 15'. τῆς 5'.

$2\overline{PR}^2 + 2\overline{TR}^2$ · τὸ ἄρα $2\overline{PR}^2 + 2\overline{TR}^2 = 2\overline{YP} \cdot \overline{P\Phi} = \overline{\Psi A}^2$ · ἔκθ' ἢν $\overline{PR}^2 + \overline{TR}^2 = \overline{YP} \cdot \overline{P\Phi} = \overline{\Gamma A}^2$ · καὶ κοινῶς ἀφαιρεθέντος τῷ $\overline{TR}^2$, ἔσται τὸ $\overline{PR}^2 = \overline{YP} \cdot \overline{P\Phi} = \overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma\Phi}^2$.

ΙΖ'. Ἡ ὑπεροχὴ τῶν τετραγώνων τῷ τε ἀπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς $\overline{\Psi A}$, καὶ τῆς δευτέρας Διαμέτρου $\overline{\Delta E}$ ἴσον ἐστὶ τῇ ὑπεροχῇ, καθ' ἣν τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας Διαμέτρου $\overline{BP}$ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας αὐτῆς $\overline{OH}$ τετράγωνον, ἔσται τὸ $\overline{\Psi A}^2 - \overline{\Delta E}^2 = \overline{BP}^2 - \overline{OH}^2$ · ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{PR}^2 = \overline{YP} \cdot \overline{P\Phi} = \overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma\Phi}^2$, (π) ἐστὶ δὲ τὸ μὲν $\overline{YP} \cdot \overline{P\Phi} = \overline{\Gamma H}^2$, (ρ) τὸ δὲ $\overline{\Gamma A}^2 = \overline{\Gamma\Phi}^2 + \overline{\Psi\Phi} \cdot \overline{\Phi A}$ · (σ) τὸ ἄρα $\overline{PR}^2 - \overline{\Gamma H}^2 = \overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma\Phi}^2 - \overline{\Psi\Phi} \cdot \overline{\Phi A} = \overline{\Gamma\Phi}^2$, ἥτοι τὸ $\overline{PR}^2 - \overline{\Gamma H}^2 = \overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Psi\Phi} \cdot \overline{\Phi A}$ · ἀλλὰ τὸ $\overline{\Psi\Phi} \cdot \overline{\Phi A} = \overline{\Gamma E}^2$ · (ἐστὶ γὰρ τό, τε $\overline{\Psi\Phi} \cdot \overline{\Phi A}$ τεταρτημόριον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς $\overline{\Psi A}$, καὶ τῆς ὀρθίας περιεχομένῳ, (τ) τεταρτημορίῳ δὲ τῷ αὐτῷ ὀρθογωνίῳ ἴσον καὶ τὸ $\overline{\Gamma E}^2$ · (υ)) τὸ ἄρα $\overline{PR}^2 - \overline{\Gamma H}^2 = \overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma E}^2$, διὸ δὴ καὶ τὸ $\overline{BP}^2 - \overline{OH}^2 = \overline{\Psi A}^2 - \overline{\Delta E}^2$.

ΙΗ'. Εἰάν ἔν ἡ Ὑπερβολὴ ἰσόπλευρος ᾖ, τὴν πλαγίαν πλευράν δὴθεν ἴσην ἔχουσα τῇ ὀρθίᾳ, καὶ αἱ λοιπαὶ αὐτῆς Διαμέτροι ἴσαι ἔσονται· ἐδεμίᾳ γὰρ ἡ αὐτῶν διαφορὰ· (Φ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'. (Χ)

Εἰάν Ὑπερβολῆς κατὰ κορυφὴν εὐθῆα ἐφάπτηται, καὶ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη αὐτῆς ληφ·

(π) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (ρ) Κατὰ τὴν προλ. ε'. Συνέπ. (σ) Ἐκ τῆς ε'. τῷ β'. δὴλ. (τ) Κατὰ τὴν προλ. Δημ. (υ) Ἐκ τῶν ὀρίσ. δὴλ. (Φ) Ἐκ τῆς προλ. Συνέπ. δὴλ. (Χ) Ἡ α', ἐστὶ τῷ β'. βιβλ. τῷ Απολ.

ληφθῶσιν εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις, ὥστε τὴν ὅλην ἴσην εἶναι τῇ δευτέρᾳ συνεζευγμένη διαμέτρῳ, αἱ ἀπὸ τῆς κέντρως τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ληφθέντα πέρατα τῆς ἐφαπτομένης ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἔσονται συμπεσύνταί τῇ τομῇ.

Ἐξω Ὑπερβολῇ, ἥς Διάμετρος μὲν ἀρχικὴ ἡ ΨΚ, κέντρον δὲ τὸ Γ. καὶ ἐφαπτέσθω αὐτῆς κατὰ τὸ Α ἢ ΔΕ, ἴσαι δὲ εἰλήφθωσαν αἱ ΑΕ, ΔΕ ἀλλήλαις, ὅλη δὲ ἡ ΔΕ ἴση τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ ΒΠ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΓΔ, ΓΕ, ἐκβεβλήθωσαν. λέγω δὴ, ὅτι ἔσονται συμπεσύνταί τῇ τομῇ. πίν. 15. κ. 1.

Εἰ γὰρ δυνατόν συμπιπτέτω ἡ ΓΕ ἐκβληθεῖσα τῇ τομῇ κατὰ τὸ Λ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετάρχθω ἀπὸ τῆς σημείως Λ ἡ ΔΚ ἐπὶ τὴν Ψκ Διάμετρον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΨΚ. ΚΑ : ΚΛ² :: ΨΑ, πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευράν, (ψ) ἔστι δὲ ὡς ΨΑ, πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευράν, ἔτω ΨΑ² : ΒΠ², (ω) ἢ ΨΑ² : ΔΕ², ἡ γὰρ ΔΕ = ΒΠ. (α) ὡς ἄρα ΨΚ. ΚΑ : ΚΛ² :: ΨΑ² : ΔΕ². (β) ἀλλ' ὡς ΨΑ² : ΔΕ² :: ΓΑ² : ΑΕ², καὶ ὡς ΓΑ² : ΑΕ² :: ΓΚ² : ΚΛ². (γ) εὐθεῖα γὰρ ἡ ΓΕΛ. (δ) ὡς ἄρα ΨΚ. ΚΑ : ΚΛ² :: ΓΚ² : ΚΛ². (ε) τὸ ἄρα ΨΚ. ΚΑ = ΓΚ². Μ 2 (ζ)

- (ψ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α. τῆς δὲ τῆς τμήμ. (ω) Ἐκ τῆς δ. ὀρίσμ. καὶ τῆς β'. Πόρισμα. τῆς μετὰ τὴν ἡ. δηλον. (α) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὴν ε. τῆς ε. (γ) Κατὰ τὴν δ. τῆς ε', καὶ τὸ ἀρημ. Πόρισμα. (δ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὴν ἀρημ. ε.

(ζ) ἀλλὰ τὸ $\Psi\text{Κ. ΚΑ} + \overline{\Gamma\text{Α}}^2 = \overline{\Gamma\text{Κ}}^2$. (η) τὸ ἄρα $\Psi\text{Κ. ΚΑ}$ ἴσον τῷ $\overline{\Gamma\text{Κ}}^2$ καὶ ἑλάττων, ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα ἡ $\Gamma\text{Ε}$ ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τομῇ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι ἐδὲ ἡ $\Gamma\Delta$ ἐκβαλλομένη συμπίπτει. αἱ ἄρα $\Gamma\text{Ε}$, $\Gamma\Delta$ Ἀσύμπτωτοι εἰσι καὶ λέγονται.

ΣΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Δ'. (θ) Αἱ Ἀσύμπτωτοι $\Gamma\Delta$, $\Gamma\text{Ε}$ καὶ ἡ τομὴ ΙΑ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόντε προσάγουσιν ἑαυτάς, καὶ παντὸς δοθέντος διαστήματος εἰς ἑλάττων ἀφικνέονται διάστημα, καὶ ἐδέποτε συμπίπτωσιν. ἐκβεβλήθω γὰρ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἡ $\Delta\text{Κ}$, καὶ συμβαλλέτω τῇ μὲν τομῇ κατὰ τὸ Ι , ταῖς δὲ Ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ Η , Μ σημεῖα. καὶ ἐπεὶ ὡς $\Psi\text{Κ. ΚΑ} : \overline{\text{ΚΛ}}^2 :: \overline{\Gamma\text{Α}}^2 : \overline{\text{ΑΕ}}^2$, (ι) ἔστι δὲ ὡς $\overline{\Gamma\text{Α}}^2 : \overline{\text{ΑΕ}}^2 :: \overline{\Gamma\text{Κ}}^2 : \overline{\text{ΚΜ}}^2$, (ii) ὡς ἄρα $\overline{\Gamma\text{Κ}}^2 : \overline{\text{ΚΜ}}^2 :: \Psi\text{Κ. ΚΑ} : \overline{\text{ΚΛ}}^2$, (λ) καὶ ἐναλλάξ ὡς $\overline{\Gamma\text{Κ}}^2 : \Psi\text{Κ. ΚΑ} :: \overline{\text{ΚΜ}}^2 : \overline{\text{ΚΛ}}^2$, καὶ διαιρεθέντα ὡς $\overline{\Gamma\text{Κ}}^2 - \Psi\text{Κ. ΚΑ} : \Psi\text{Κ. ΚΑ} :: \overline{\text{ΚΜ}}^2 - \overline{\text{ΚΛ}}^2 : \overline{\text{ΚΛ}}^2$. ἔστι δὲ τὸ μὲν $\overline{\Gamma\text{Κ}}^2 - \Psi\text{Κ. ΚΑ} = \overline{\Gamma\text{Α}}^2$, τὸ δὲ $\overline{\text{ΚΜ}}^2 - \overline{\text{ΚΛ}}^2 = \text{ΗΛ. ΛΜ.}$ (μ) ὡς ἄρα $\overline{\Gamma\text{Α}}^2 : \Psi\text{Κ. ΚΑ} :: \text{ΗΛ. ΛΜ.} : \overline{\text{ΚΛ}}^2$, καὶ ἐναλλάξ ὡς $\overline{\Gamma\text{Α}}^2 : \text{ΗΛ. ΛΜ.} :: \Psi\text{Κ. ΚΑ} : \overline{\text{ΚΛ}}^2$. ἀλλ' ὡς μὲν $\Psi\text{Κ. ΚΑ} : \overline{\text{ΚΛ}}^2 :: \overline{\Gamma\text{Κ}}^2 : \overline{\text{ΚΜ}}^2$, ὡς δὲ $\overline{\Gamma\text{Κ}}^2 : \overline{\text{ΚΜ}}^2 :: \overline{\Gamma\text{Α}}^2 : \overline{\text{ΑΕ}}^2$, καθάπερ δέδεικται. ἄρα καὶ ὡς $\overline{\Gamma\text{Α}}^2 : \text{ΗΛ. ΛΜ.} :: \overline{\Gamma\text{Α}}^2 : \overline{\text{ΑΕ}}^2$. (ν) τὸ ἄρα $\overline{\text{ΑΕ}}^2 = \text{ΗΛ. ΛΜ.}$ (ξ) ἐκὼν τὸ ΗΛ. ΛΜ. ἴσον ὃν τῷ $\overline{\text{ΑΕ}}^2$, ὠρισμένη ποσό-

της

(ζ) Κατὰ τὴν β'. τῆ ε'. (η) Κατὰ τὴν ε'. τῆ β'. (θ) Ἡ ιδ'. εἰς τῆ β'. βιβλ. τῆ Ἀπολλων. (ι) Ὅρα τὴν δὲ τῆς προκείμε. (ii) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. καὶ τὸ β'. Πόρισμα. τὸ μετὰ τὴν ἡ. τῆ αὐτ. (λ) Κατὰ τὴν ε'. τῆ ε'. (μ) Κατὰ τὴν ε'. τῆ β'. (ν) Κατὰ τὴν ἀρχήν. τῆ ε'. (ξ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'.

της εἶναι. ἐπεὶ δὲ ὅσον ἡ ΗΜ τῆς κορυφῆς Α α-
φίσταται, τοσῶτον ἡ ΙΑ αὖξει, ἐξ ἧ καὶ ἡ ΗΛ,
ἀνάγκη ἄρα αὐξανομένης τῆς ΗΛ, ἐλαττωθῆαι τὴν
ΛΜ. ἐκ τούτου δὲ δῆλον ὅτι ἦτε ΓΕ καὶ ἡ τομὴ ἐπὶ
ἀπειρον ἐκβαλλόμεναί ἐγγιον ἑαυτάς προσάγει. διὰ
τὰ αὐτὰ δὲ, καὶ ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη ἐγγιον ἑαυ-
τὴν προσάγει.

Β'. Αἱ ΓΔ, ΓΕ Ἀσύμπτωτοι ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκ-
βληθεῖσαι, τὴν κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένην ΦΟ τῆς
ἀντικειμένης τομῆς ἔτω τέμνουσιν, ὥστε τὰ μεταξὺ
αὐτῶν καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς μέρη ΨΦ, ΨΟ
ἴσα ἀλλήλοις εἶναι, ὅλην δὲ τὴν ΦΟ ἴσην τῇ ΔΕ.
ἐπεὶ γὰρ ὡς ΓΑ : ΑΔ :: ΓΨ : ΨΟ, (α) ἔστι δὲ
ἡ ΓΑ = ΓΨ, ἄρα καὶ ἡ ΑΔ = ΨΟ. (π) διὰ τὰ
αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΔΕ = ΨΦ. ἔστι δὲ ἡ ΑΔ = ΔΕ.
(ρ) ἄρα καὶ ἡ ΨΦ = ΨΟ. διὸ δὲ καὶ ἡ ΦΟ = ΔΕ.

Γ'. (σ) Ἑτέρα Ἀσύμπτωτος ἐκ ἑσῶ τέμνουσα τὴν ὑπὸ
τῶν Ἀσυμπτῶτων περιεχομένην γωνίαν ΔΓΕ. ἡχθῶ
γὰρ ἀπὸ τῆ Γ ἡ ΠΙ. καὶ ἀπὸ τῆ τυχόντος τῆς ΓΑ
σημεῖο Θ ἡχθῶ ἡ ΘΞ τῇ ΓΔ Ἀσυμπτῶτι πα-
ράλληλος. καὶ ἐπεὶ ἡ ΠΙ τῇ ΘΞ συμπύπτει ἐκβλη-
θεῖσα, μετὰ δὲ τὴν σύμπτωσιν ὅσον ἐκβάλλεται
τοσῶτον ἀπ' αὐτῆς καὶ τῆς ΓΔ ἀφίσταται, ἡ δὲ το-
μὴ ΑΙ ἐκβαλλομένη ἐγγιον τῇ ΓΔ προσελαύζει, συμ-
πεσῆται ἄρα τῇ τομῇ ἡ ΠΙ, καὶ Ἀσύμπτωτος ἐκ
ἑσῶ.

Δ'. Τὰ ἐκατέρωθεν τῆς ἐκβληθείσης Τεταγμένης ΑΙ
μέρη ΛΜ, ΙΗ τὰ μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῶν Ἀσυμ-
πτῶτων ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΓΚ : ΓΑ ::

Μ 3

ΚΗ :

(α) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (π) Κατὰ τὴν κ'. τῆ ε'. (ρ) Ἐξ ὑπερ.

(σ) Ἡ β'. πρὸτ. ἐστὶ τῆ β'. βιβλ. τῆ Ἀπελλων.

ΚΗ : ΑΔ, καὶ ὡς ΓΚ : ΓΑ :: ΚΜ : ΑΕ, (τ) ἄρα καὶ ὡς ΚΗ : ΑΔ :: ΚΜ : ΑΕ. (υ) ἀλλ' ἡ ΑΔ = ΑΕ. ἄρα καὶ ἡ ΚΗ = ΚΜ. (φ) ἀφηρέθω ἀπὸ μὲν τῆς ΚΜ ἡ ΚΛ, ἀπὸ δὲ τῆς ΚΗ ἡ ΙΚ. ἔκιν ἡ ΔΜ = ΙΗ. καὶ γὰρ ἡ ΚΛ = ΙΚ. (χ)

Ε'. Καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΗΛ. ΔΜ = ΜΙ. ΙΗ. κοινὴ γὰρ προσκείθω ἐκατέρω τῶν ΗΙ, ΜΛ ἡ ΙΛ. ἔκιν ἡ ΗΛ = ΜΙ, ἔτι δὲ καὶ ἡ ΔΜ = ΙΗ, (ψ) τὸ ἄρα ΗΛ. ΔΜ = ΜΙ. ΙΗ.

Ζ'. Ἀπαντα τὰ τοιαῦτα ὀρθογώνια, ἔτεν ΗΛ. ΔΜ. ΜΙ. ΙΗ, ηλ. λμ, μι. ιη ἀλλήλοις τε ἴσα ἔσονται καὶ τῶ τεταρτημορίῳ τῷ ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΒΠ τετραγώνε. ἕκαστον γὰρ ἴσον τῷ $\overline{ΑΕ}^2$, (ω) τῷ ἴσῳ ὄντι τῷ $\overline{ΓΠ}^2$, (α)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'. (β)

Ἐὰν εὐθείᾳ τις τέμνῃσα τὴν τομὴν συμπύπτῃ ἐκατέρω τῶν Ἀσυμπτῶτων, τὰ περιεχόμενα ὀρθογώνια ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανόμενων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Ἀσυμπτῶτων καὶ τῆς τομῆς ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ' αὐτῆς τῆς εὐθείας ὑπὸ τῆς τομῆς πρὸς ταῖς Ἀσυμπτῶτοις ἴσαι ἔσονται.

Τεμ.

(τ) Κατὰ τὴν δ'. τῇ ε'. (υ) Κατὰ τὴν ε'. τῇ ε'. (φ) Κατὰ τὴν η'. τῇ ε'. (χ) Κατὰ τὸν θ'. ὀρισμ. (ψ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (ω) Ὅρα τὴν προλ. α'. Συνέπ. (α) Ἐκ τῆς ὑποθ. δῶλ. (β) Τὸ μὲν α'. μέρος ἡ ε'. εἰσὶ. τὸ δὲ β'. ἡ η'. τῇ β'. βιβλ. τῇ Ἀπολλων.

Τεμνέτω ευθεία ἡ ΧΩ τὴν Ὑπερβολὴν ΙΑΛ κατὰ τὰ Ι, Λ σημεῖα, καὶ συμπιπτέτω ἐκατέρω τῶν Ἀσυμπτῶτων ΓΔ, ΓΕ κατὰ τὰ Χ, Ω σημεῖα. λέγω Α' ὅτι τὸ ΩΛ. ΛΧ = Χι. ιΩ. Β'. ὅτι ἡ ΩΛ = Χι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθωσαν διὰ τῶν Λ καὶ Ι σημείων τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένῃ ΔΕ παράλληλοι αἱ ΗΛΜ, ηλμ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ ΗΛ. ΛΜ πρὸς τὸ ηι. ιμ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῶ λόγῳ ὃν ἔχει ΗΛ: ηι, καὶ ἐκ τῶ ὃν ἔχει ΛΜ: ιμ. (γ) ἀλλ' ὡς μὲν ΗΛ: ηι:: ΛΧ: Χι, ὡς δὲ ΛΜ: ιμ:: ΩΛ: ιΩ. (δ) τὸ ἄρα ΗΛ. ΛΜ, πρὸς τὸ ηι. ιμ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῶ λόγῳ ὃν ἔχει ΛΧ: Χι, καὶ τῶ ὃν ἔχει ΩΛ: ιΩ. ἔστιν ὡς ΗΛ. ΛΜ: ηι. ιμ:: ΩΛ. ΛΧ: Χι. ιΩ. (ε) ἀλλὰ τὸ ΗΛ. ΛΜ = ηι. ιμ, (ζ) ἄρα καὶ τὸ ΩΛ. ΛΧ = Χι. ιΩ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐπεὶ τὸ ΩΛ. ΛΧ = Χι. ιΩ, ἄρα ὡς ΛΧ: Χι:: ιΩ: ΩΛ, (η) καὶ διαιρεθέντα, ὡς ιΛ: Χι:: ιΛ: ΩΛ. ἢ ἄρα ΩΛ = Χι. (θ)

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐὰν ευθεία ἡ ΤΥ τῆς Ὑπερβολῆς ἐφάπτηται κατὰ τὸ Ι, ἐκατέρω τῶν Ἀσυμπτῶτων συμβάλλουσα κατὰ τὰ Υ, Τ σημεῖα, ἴσα ἔσονται τὰ μέρη αὐτῆς ΙΥ, ΙΤ τὰ μεταξὺ τῆς ἐπαφῆς Ι καὶ τῶν Ἀσυμπτῶτων. διήχθω γὰρ ἀπὸ τῶ τυχόντος σημείου Λ ἡ ΩΛΧ τῇ ἐφαπτομένῃ ΤΥ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ

Μ 4

η

(γ) Κατὰ τὴν κγ'. τῆ σ'. (δ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ σ'. (ε) Κατὰ τὸν ζ'. ὅρισμ. τῆ ε'. (ζ) Κατὰ τὴν εἰς προλ. προτ. σ'. Συνίπ. (η) Κατὰ τὴν ιγ'. τῆ σ'. (θ) Κατὰ τὴν β'. τῆ ε'.

ἡ $\Omega\Lambda = \chi\iota$ (ι) καὶ φερομένης μὲν τῆς $\Omega\chi$ ἐπὶ τὰ I μέρη, τὰ μὲν Λ, ι σημεῖα ἀλλήλοις προσελάττωσιν, ἡκέσθης δὲ ἐπὶ τὸ I , ἀλλήλοις συμπίπτουσι, καὶ αἱ $\Omega\Lambda, \chi\iota$ ταῖς IY, IT ταυτίζονται, ὁδὸν ἄρα ὅτι αἱ IY, IT ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

Β'. (κ) Δύω δοθεισῶν ἐυθειῶν τῶν $\Gamma\Psi, \Gamma\Omega$ (πίν. 12'. $\chi. 1.$) γωνίαν τυχεύσαν περιχεύσων, τὴν $\Psi\Gamma\Omega$, καὶ σημεῖα τῶν Λ ἐντὸς τῆς γωνίας, ἐνεσι σημεῖα συνεχῇ πορίσασθαι, δι' ὧν Ὑπερβολὴ γραφήσεται, διὰ τῶν Λ ἡξέσας. διήχθω γὰρ ἐυθεῖα τις διὰ τῶν Λ ἡ $M\Lambda\Omega$, ταῖς Ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ M καὶ Ω συμβάλλουσα σημεῖα, καὶ δίχα κατὰ τὸ Λ τεμνομένη, καὶ διήχθωσαν διὰ τῶν Λ ἐυθεῖαι αἱ $NK, \Pi I, \Psi H$, καὶ ἄλλαι ἐφεξῆς ὁμοίως. καὶ εἰλήφθω ἀπὸ μὲν τῆς NK , ἡ $NP = K\Lambda$, ἀπὸ δὲ τῆς ΠI ἡ $PZ = \Lambda I$, ἀπὸ δὲ τῆς ΨH , ἡ $\Psi\Phi = \Lambda H$. ἐκὲν διὰ τῶν P, Z, Φ σημείων Ὑπερβολὴ ἡξεί, ἥς ἡ $M\Omega$ κατὰ τὸ Λ ἐφάπτεται.

Γ'. Ἐὰν διὰ τῶν κέντρων Γ καὶ τῆς ἐπαφῆς I (πίν. 13'. $\chi. 1.$) διαχθῇ δευτέρα Διάμετρος ἡ ΓP , ἔσεται ἡ ἐφαπτομένη TY ἡ δευτέρα συνεζευγμένη αὐτῇ Διάμετρος. εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι μείζων ἔσας ἡ TY , ἢ ἐλάσσων. ἔστι δὲ τῶν ἐκείνων ἀδύνατον, (καὶν τε γὰρ ἐντὸς τῆς $\Delta\Gamma E$ γωνίας, καὶν τε ἐκτὸς ὥσιν τὰ τῆς TY πέρατα, αἱ ἀπὸ τῶν κέντρων Γ ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνύμεναι ἐυθεῖαι, Ἀσύμπτωτοι ἔσονται, (λ) ὅπερ ἀδύνατον, (μ)) ἴση ἄρα ἡ TY τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ τῆς Δευτεράτης ΓP .

Δ'.

(ι) Κατὰ τὸ β'. μέρ. τῆς προκαμ. προτ. (κ) Ἡ δ'. πρότ. ἐστὶ τὰ β'. βιβλ. τῶν Ἀπολλων. (λ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. καὶ τὴν προλ. Συνέπ. (μ) Κατὰ τὴν γ'. Συνέπ. τῆς αὐτ.

Δ'. Δηλον δὲ, ὅτι καὶ ἐκάτερον τῷ ΩΛ. ΑΧ, Χι. Ω
ἴσον τεταρτημορίῳ τῷ ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρως
τῆς Δευτεράιας ΓΡ τετραγώνῳ, εἶπεν τῷ $\overline{\Gamma\Gamma^2}$. (ν)
καὶ ὅτι πλὴν δύο Ἀσυμπτότων, Ἀσύμπτωτοι ἄλλαι
ἐ συσταθήσονται. (ξ)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰσέον, ὅτι τὰς τῶν Ὑπερβολῶν καὶ τῶν ἄλλων
καμπύλων Ἀσυμπτότας, ὡς ἐφαπτομένας ἐκλαμβά-
νεσιν οἱ Γεωμέτραι κατὰ σημεία ἀπείροις ἀπὸ τῆς κο-
ρυφῆς ἀφεστηκότα ἀποσήμασιν. ὅτι δὲ ἐ πόρρω τῆς
ἀληθείας ἀπέχει ἡ ἔννοια, δεικνύουσιν ἔτιως ἐφαπτέσ-
θω τῆς Ὑπερβολῆς ἡ μὲν ΜΤ (πίν. Η'. χ. 2.) κα-
τὰ τὸ Μ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Τ συμβάλλουσα,
ἡ δὲ ΑΩ κατὰ κορυφήν. καὶ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ τε-
τάχθω μὲν ἡ ΜΠ, ἐπεξεύχθω δὲ ἐπὶ τὸ τῆς πλαγίας
πλευρᾶς πέρας Ψ ἡ ΜΨ, καὶ ἦχθω ἥτε ὀρθία πλευ-
ρὰ ΝΑ, καὶ ἡ δευτέρα Διάμετρος ΞΣ. ἐκὼν ὡς ΓΠ:
ΓΑ:: ΓΑ: ΓΤ. (ο) διὸ δὴ τῷ Μ σημείῳ ἐπ' ἀπει-
ρον τῆς κορυφῆς Α ἀφισαμένῃ, ἐπ' ἀπειρόν τε αὐξε-
μένης τῆς ΓΠ, διὰ τὴν ἀναλογίαν ἐξ ἀνάγκης ἡ ΓΤ
ἐπ' ἀπειρον ἐλαττεύεται, καὶ τὸ σημεῖον Τ μικρὸν δὲν
τῷ Γ ταυτίζεται. τὴν ἄρα ΤΜ ὡς ἀπὸ τῷ Γ διηγ-
μένην ἐκλαμβάνειν ἔξεσιν. ἐπεὶ δὲ ὡς ΨΠ. ΠΑ: $\overline{ΜΠ^2}$::
ΨΑ: ΝΑ, (π) καὶ ὡς ΨΑ: ΝΑ:: $\overline{ΨΑ^2}$: $\overline{ΞΣ^2}$, (ρ)
ἔστι γὰρ ὡς ΨΑ: ΞΣ:: ΞΣ: ΝΑ, (σ) ὡς ἄρα ΨΠ.
ΠΑ: $\overline{ΜΠ^2}$:: $\overline{ΨΑ^2}$: $\overline{ΞΣ^2}$, εἶπεν ὡς ΨΠ. ΠΑ: $\overline{ΜΠ^2}$::
Μ 5 $\overline{ΓΑ^2}$:

- (ν) Ἐκ τῶν ἔρημ. ἐν τῇ προλ. α'. Συνεπ. (ξ) Ὅρα τὴν γ'.
Συνέπ. τῆς προλ. προτ. (ο) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς δ'. προτ.
τῶν δὲ τῶν τμήμ. (π) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α'. τῶν δὲ τῶν τμήμ.
(ρ) Κατὰ τὸ β'. Πάρ. τὸ μετὰ τὴν ἡ. τῶν δ'. (σ) Κατὰ τὸν
πρῶτον ὅρον.

$\overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΞ}^2$. τῷ δὲ Μ ἐπ' ἀπειρον τῆς Α κορυφῆς ἀφισταμένον, ἡ ΨΑ ἀπειράκις ἐλάσσων τῆς ΠΑ γίνεται. διὸ δὴ τὸ ΨΠ. ΠΑ, ὡς ἴσον τῷ $\overline{ΓΠ}^2$ ἐκλαμβάνεται. ἐκὼν ἔσται ὡς $\overline{ΓΠ}^2 : \overline{ΜΠ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΞ}^2$. ἐπεὶ δὲ ὡς ἐκ τῷ Γ διηγμένη ἡ ΤΜ ἐκλαμβάνεται, ἔστιν ἄρα ὡς $\overline{ΓΠ}^2 : \overline{ΜΠ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΑΧ}^2$. (τ) ἡ ἄρα $ΑΧ = ΓΞ$. ἐπεὶ ἔν ἡ ΤΜ ὡς ἐκ τῷ Γ διηγμένη ἐκλαμβάνεται, καὶ ἡ ΑΧ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς Δευτέρας Διαμέτρου ΣΞ, εἴτεν τῇ ΓΞ γίνεται, δῆλον ἄρα ὅτι τὴν ΤΜ, ὡς Ἀσύμπτωτον ἐκλαμβάνειν ἐξεστὶ. (υ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'. (φ)

Ἐὰν ἐν Ἀντικειμένους ἀχθῇ τις εὐθεία, τέμνουσα ἐκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῶν περιεχουσῶν τὰς τομὰς, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν καὶ τῆς τομῆς ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τῷ ἀπὸ τῆς ἡγμένης Διαμέτρου παρὰ τὴν τέμνουσαν εὐθείαν καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν τομῶν πρὸς ταύς Ἀσύμπτωτοις ἴσαι ἔσονται.

Ἐσώσαν Ἀντικείμεναι αἱ ΑΛ, ΨΝ, (πίν. ΙΣ', χ. ι.) ὧν κέντρον μὲν τὸ Γ, Ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΕ, ΓΔ. καὶ ἡχθῶ τις εὐθεῖα ἡ ΝΔ, τέμνουσα ἐκατέραν τῶν ΕΓ, ΓΖ τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν ΕΓΖ τῶν ΔΓΕ, ΖΓΦ,

- (τ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ δὲ ε', καὶ τὸ ε'. Θεώρ. τῶν μετὰ τὸ ε'.
(υ) Ὡς τῆς ι'. τῷ δὲ τῇ στήμ. δῆλον (φ) Τὸ μὲν α'. μέρ. ἡ ικ'. ἐστὶ. τὸ δὲ β'. ἡ ιε'. τῷ β'. βιβλ. τῷ Ἀπολλων.

ΖΓΦ γωνιών, τῶν περιεχουσῶν τὰς τομὰς ΑΛ, ΨΝ.
 καὶ ἤχθω διὰ τῆς Γ ἢ ΨΑ Διάμετρος παράλληλος τῇ
 ΝΛ. λέγω Α', ὅτι τὸ ΖΛ, Λς = ΓΑ², Β', ὅτι ἡ ΝΖ =
 Λς.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω κατὰ κορυφὴν Α ἐφαπτομένη ἡ ΔΑΕ, καὶ
 παράλληλος αὐτῇ ἀπὸ τῆς Λ ἡ ΗΛΜ, ταῖς Ἀσυμ-
 πτώταις συμπιπτεύσαι κατὰ τὰ Δ, Ε, Η, Μ σημεία.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ ΖΛ. Λς πρὸς τὸ ΗΛ. ΛΜ λόγον ἔχει συγνέ-
 μενον ἕκτε τῆς λόγῳ ὃν ἔχει ἡ ΖΛ : ΗΛ, καὶ ἐκ τῆς
 ὃν ἔχει ἡ Λς : ΛΜ. (χ) ἀλλ' ὡς μὲν ΖΛ : ΗΛ ::
 ΓΑ : ΑΔ, εἴτεν ἔτω ΓΑ : ΑΕ, (ἡ γὰρ ΑΔ = ΑΕ.
 (ψ)) ὡς δὲ Λς : ΛΜ :: ΓΑ : ΑΕ. (ω) ὡς ἄρα ΖΛ.
 Λς : ΗΛ. ΛΜ :: ΓΑ² : ΑΕ². (α) ἀλλὰ τὸ ΗΛ.
 ΛΜ = ΑΕ². (β) ἄρα καὶ τὸ ΖΛ. Λς = ΓΑ². (γ) διὰ
 τὰ αὐτὰ δὲ δευχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ΨΝ. ΝΖ = ΓΑ².

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ ΖΛ. Λς = ΨΝ. ΝΖ· ἐκάτερον γὰρ ἴσον τῷ ΓΑ².
 (δ) ὡς ἄρα ΖΛ : ΝΖ :: ΨΝ : Λς, (ε) καὶ συντεθέν.
 τα, ὡς ΑΝ : ΝΖ :: ΑΝ : Λς. ἡ ἄρα ΝΖ = Λς. (ς)

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Ἐάν τις εὐθεΐα ἡ νλ παράλληλος ἀχθῇ τῇ ΝΛ,
 ἔσονται καὶ τὰ ὀρθογώνια ζλ. λς, εν. νζ, ἴσα ἀλλή-
 λοις. ἐκάτερον γὰρ τῷ ΓΑ² ἴσον δευχθήσεται. (η)
 Β'.

- (χ) Κατὰ τὴν κγ'. τῆς ε'. (ψ) Κατὰ τὴν ι'. τῆς δε τῆς πρώτης.
 (ω) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (α) Κατὰ τὸν ζ'. ὀρίσιν. τῆς ε'.
 (β) Ὅρα τὴν α'. Συνέπ. τῆς ι'. τῆς δε τῆς πρώτης. (γ) Κατὰ
 τὴν κ'. τῆς ε'. (δ) Κατὰ τὴν α'. μέρ. (ε) Κατὰ τὴν ι'. τῆς
 ε'. (ς) Κατὰ τὴν β'. τῆς ε'. (η) Ὅρα τὴν δαξ. τῆς προσημ.
 πρῆς.

Β'. Καὶ τὰ ὀρθογώνια δὲ ΝΣ. ΣΛ, ΛΖ. ΖΝ, vs. σλ, λζ. ζν ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΝΖ=ΛΣ, κοινῆς προσκειμένης τῆς ΖΣ, ἔσται ἡ ΝΣ=ΖΛ. διὸ δὴ καὶ ΝΣ. ΣΛ=ΖΛ. ΛΣ. ἀλλὰ τὸ ΖΛ. ΛΣ=ΓΑ². (9) ἄρα καὶ τὸ ΝΣ. ΣΛ=ΓΑ². διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται ἢ ἐκάτερον τῶν vs. σλ, λζ. ζν ἴσον τῷ ΓΑ². δῆλον ἄρα τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'. (1)

Ἐὰν ἐπὶ τὰς Ἀσύμπτωτας ἀπὸ τίνος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐν τυχέσαις γωνίαις, καὶ ταύταις παράλληλοι ἀχθῶσιν ἀπὸ τίνος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς, τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔσται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν αἰς αἱ παράλληλοι ἤχθησαν.

Ἔστω Ὑπερβολή, ἥς Ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΔ, ΓΖ. καὶ εἰλήφθω τὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς, τὸ Λ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰς ΓΔ, ΓΖ κατήχθωσαν αἱ ΛΦ, ΛΒ. εἰλήφθω δὲ τι σημεῖον ἕτερον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ρ, καὶ διὰ τοῦ Ρ ταῖς ΛΦ, ΛΒ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΡΕ, ΡΚ. λέγω, ὅτι τὸ ΛΦ. ΛΒ=ΡΕ. ΡΚ. πίν. ΙΖ'. χ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΛΡ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμβαλλέτω ταῖς Ἀσύμπτωτοις κατὰ τὰ Ζ, Δ σημεία.

ΔΕΙ.

(9) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῆς προκ. προτ. (1) Ἡ α'. ἐστὶ τῷ β'. βιβλ. τῷ Ἀπολλωνίου.

ΔΕΙΞΙΣ.

Η° ΔΡ = ΖΛ. (κ) κοινή προσκείθω ἡ ΡΛ. ἡ ἄρα
 ΔΛ = ΖΡ. ὡς ἄρα ΖΡ : ΖΛ :: ΔΛ : ΔΡ. (λ) ἀλλ' ὡς
 μὲν ΖΡ : ΖΛ :: ΡΚ : ΛΒ, ὡς δὲ ΔΛ : ΔΡ :: ΛΦ : ΡΕ.
 (μ) ὡς ἄρα ΡΚ : ΛΒ :: ΛΦ : ΡΕ. (ν) τὸ ἄρα ΛΦ.
 ΛΒ = ΡΕ. ΡΚ. (ξ)

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

- Α'. Εἰάν τῶν εἰρημένων σημείων τὸ ἕτερον, οἷον τὸ ι,
 ἐπὶ τῆς ἀντικειμένης ληφθῇ τομῆς, ἀχθῶσι δὲ ἀπ'
 αὐτῆ ταῖς ΡΕ, ΡΚ παράλληλοι αἱ ιΦ, ιβ, ἔσεται
 καὶ τὸ ιΦ. ιβ = ΡΕ. ΡΚ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ιζ = Ρδ, (ο)
 κοινῆς προσκειμένης τῆς ζδ, ἔσεται ιδ = Ρζ. διὸ ὡς
 ιδ : Ρδ :: Ρζ. ιζ. (π) ἀλλ' ὡς μὲν ιδ : Ρδ :: ιΦ :
 ΕΡ, ὡς δὲ Ρζ : ιζ :: ΡΚ : ιβ. (ρ) ἄρα καὶ ὡς ιΦ :
 ΕΡ :: ΡΚ : ιβ. (σ) τὸ ἄρα ιΦ. ιβ = ΕΡ. ΡΚ. (τ)
 Β'. Εἰάν δὲ αἱ ἀπὸ τῶν σημείων Λ, Ρ (χ. 3.) ἀχθῶ-
 σαι ΛΦ, ΛΒ ἑ μόνον ταῖς ΡΕ, ΡΚ ὥσι παράλληλοι,
 ἀλλὰ καὶ ταῖς Ἀσυμπτότοις ΓΒ, ΓΕ, ἴσα ἀλλή-
 λους ἔσονται τὰ ΛΦΓΒ, ΡΕΓΚ ὑπ' αὐτῶν περιεχό-
 μενα παραλλήλόγραμμα. ἔστι γὰρ ὡς ΛΒ : ΡΚ ::
 ΡΕ : ΛΦ, (υ) εἴτεν ὡς ΓΦ : ΓΕ :: ΓΚ : ΓΒ. τὸ
 ἄρα ΛΦΓΒ = ΡΕΓΚ. (φ)
 Γ'. Εἰάν ἄρα ἀπὸ τῆς κέντρως Γ ἐπὶ τὰ σημεία Λ, Ρ
 ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΓΛ, ΓΡ, τὰ ὑπ' αὐτῶν περιεχό-
 μενα

- (κ) Κατὰ τὴν ια'. τῆ δὲ τῆ τμήμ. (λ) Κατὰ τὴν β' τῆ ε'.
 (μ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (ν) Κατὰ τὴν ε'. τῆ ε'. (ξ) Κατὰ
 τὴν ιε'. τῆ ε'. (ο) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (π) Κατὰ τὴν
 β'. τῆ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (σ) Κατὰ τὴν ἑρμ. εἰ
 (τ) Κατὰ τὴν ιε'. τῆ ε'. (υ) Κατὰ τὴν προκαμ. πρότ.
 (φ) Κατὰ τὴν ιδ'. τῆ ε'.

μενα τρίγωνα ΓΛΦ, ΓΒΛ, ΓΡΚ, ΓΡΕ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. (Χ)

Δ'. Εἰάν δὲ αἱ ἀπὸ τῶν Λ καὶ Ρ ἀχθῆσαι πρὸς ὀρθὰς ὥσι ταῖς Ἀσυμπτώτοις, λόγον ἔξωσι πρὸς ἀληθείας τὸν ἀντιπεπονθότα τῶν ἑαυτῶν ἀπὸ τῆς κέντρης Γ ἀποσημάτων. ἐπεὶ γὰρ ὡς $AB:PK::PE:ΛΦ$, εἶπεν ὡς $AB:PK::ΓΚ:ΓΒ$ ἔστι δὲ ἡ μὲν ΓΚ τὸ τῆς ΚΡ ἀπὸ τῆς κέντρης Γ ἀπόσημα, ἡ δὲ ΓΒ τὸ τῆς ΒΛ (Ψ) αἱ ἄρα ΑΒ, ΡΚ ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἑαυτῶν ἀπὸ τῆς κέντρης Γ ἀποσημάτων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς $PE:ΛΦ::ΓΦ:ΓΕ$.

Ε'. Εἰάν ἀπὸ τῶν Λ καὶ Ρ σημείων ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς ἀχθῶσιν αἱ ΝΜ, ΠΨ ταῖς Ἀσυμπτώτοις συμβάλλουσαι, τὰ ὑπ' αὐτῶν τε, καὶ τῶν Ἀσυμπτῶτων γινόμενα τρίγωνα ΝΙΜ, ΠΓΨ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. ἐπεὶ γὰρ ὡς $NΛ:ΛΜ::NB:ΒΓ$, (ω) ἔστι δὲ ἡ $NΛ=ΛΜ$, (α) ἄρα καὶ ἡ $NB=ΒΓ$. τὸ ἄρα ΝΑΒ τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΑΒ. (β) ἀλλὰ τὸ $ΓΑΒ=ΓΛΦ$. (γ) τὰ τρία ἄρα τρίγωνα ΝΑΒ, ΓΑΒ, ΓΛΦ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $NM:NL::MG:ΛΒ$, (δ) ἔστι δὲ ἡ ΝΜ διπλασία τῆς ΝΛ, (ε) ἄρα καὶ ἡ ΜΓ διπλασία τῆς ΛΒ, εἶπεν τῆς ΓΦ. ἔκθεν τὸ $ΓΛΦ=ΜΛΦ$. τὰ ἄρα ΝΑΒ, ΓΑΒ, ΓΛΦ, ΜΛΦ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. τὸ ἄρα ΝΙΜ τετραπλάσιον τῷ ΓΛΦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται τὸ ΠΓΨ

ΤΕ"

(Χ) Ἐκ τῆς λδ'. καὶ α'. δῆλον. (Ψ) Ὅρα τὸν ἡ. ὁρισμ. τῆς α'. (ω) Κατὰ τὴν β'. τῆς ε'. (α) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τῆς ια'. καὶ δὲ τῆς τμήμ. (β) Κατὰ τὴν λη' τῆς α'. (γ) Κατὰ τὴν λδ'. τῆς α'. (δ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε' (ε) Ἐκ τῆς εἰρημ. Συνέπ. δῆλ.

τετραπλάσιον τῆ ΓΡΚ. ἔστι δὲ τὸ ΓΛΦ = ΓΡΚ. (ζ)
διὸ καὶ τὸ ΝΓΜ = ΠΓΨ.

Λ Η Μ Μ Λ. (η)

Τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμενων κοινὰ-
εἰσιν αἱ Ἀσύμπτωτοι

Ἐξωσαν συζυγεῖς ἀντικείμεναι αἱ ΑΡ, ΨΛ, ΒΖ,
ΔΗ, ὧν Διάμετροι συζυγεῖς αἱ ΨΑ, ΒΔ, κέντρον δὲ
τὸ Γ. λέγω, ὅτι κοιναὶ αὐτῶν εἰσὶν αἱ Ἀσύμπτωτοι.
πίν. ΙΗ. χ. ι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθωσαν ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν διὰ τῶν Α, Ψ,
Β, Δ σημείων ἀλλήλους συμπιπτεσαι κατὰ τὰ Ι, Κ,
Ο, Μ σημεία καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὸ κέντρον Γ ἐ-
πεζεύχθωσαν αἱ ΙΓ, ΟΓ, ΚΓ, ΜΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΙΚΟΜ παραλληλόγραμμον ἔστιν. (θ) ἐπεὶ δὲ ἡ
μὲν ΒΔ παράλληλος τῇ ΚΙ, (ι) ἡ δὲ ΨΑ ἑκατέρω
τῶν ΟΚ, ΜΙ, (κ) ἄρα ἡ μὲν ΑΓ = ΚΒ, ἡ δὲ ΓΨ
τῇ ΜΔ. ἀλλ' ἡ ΑΓ = ΓΨ. ἄρα καὶ ἡ ΚΒ = ΜΔ. τῶν
τετγώνων ἔν ΚΒΓ, ΜΓΔ ἡ μὲν πλευρὰ ΓΒ = ΙΔ,
ἡ δὲ ΒΚ = ΜΔ, καὶ γωνία ἡ ΓΕΚ = ΓΔΜ. (λ) καὶ
γωνία ἄρα ἡ ΒΓΚ = ΜΓΔ. (μ) ἀλλ' ἡ ΒΓΚ σὺν τῇ
ΚΓΔ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. (ν) ἄρα καὶ ἡ ΜΓΔ σὺν
τῇ ΚΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. αἱ ἄρα ΚΓ, ΜΓ ἐπ' ἐυ-
θείας εἰσὶ (ξ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ
ἡ

(ζ) Κατὰ τὴν προλ. γ'. Συνέπ. (η) Ἡ ιζ'. ἐπὶ τῇ β'. βιβλ. τῇ
Ἀπολλων. (θ) Ἐκ' τῆς δ'. τῇ δε τῇ τμήμ. δὴλ. (ι) Κατὰ τὸν κδ'.
ὄρισμ. (κ) Κατὰ τὴν δ'. τῇ δε τμήμ. (λ) Κατὰ τὴν κδ'.
τῇ κ'. (μ) Κατὰ τὴν δ'. τῇ κ'. (ν) Κατὰ τὴν ιγ'. τῇ α'. (ξ) Κα-
τὰ ιδ'. τῇ α'.

ἡ ΙΓ ἐπ' εὐθείας ἐς τὴν ΟΓ. ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρω τῶν ΚΙ, ΟΜ, ἴση τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ ΒΔ, (ο) αἱ ἄρα ΜΓΚ, ΟΓΙ Ἀσύμπτωτοι εἰσι τῶν ΑΡ, ΨΛ τομῶν. διὰ τα αὐτὰ δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῶν ΒΖ, ΔΗ τομῶν αἱ αὐταὶ εἰσιν Ἀσύμπτωτοι. κοινὰ ἄρα τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων τομῶν εἰσιν Ἀσύμπτωτοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τέτε δὴ Φανερόν, ὅτι ἐὰν διὰ τῶν περάτων Δ, Ρ, Η, Ζ δύο ἐτέρων συζυγῶν Διαμέτρων, τῶν ΑΡ, ΗΖ ἐφαπτόμεναι ἀχθῶσι τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων τομῶν αἱ ΠΣ, ΦΝ, ΝΠ, ΞΦ, ἐπὶ ταῖς Ἀσυμπτώτοις ἀλλήλαις συμπεσῶντα. εἰ γὰρ μὴ, αἱ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν ἐπὶ τὸ κέντρον Γ ἐπιζευχθεῖσαι εὐθεῖαι Ἀσύμπτωτοι ἔσοντα, ὅπερ ἀδύνατον. (π)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων τομῶν, τῶν ἀπὸ τῶν περάτων τῶν συζυγῶν Διαμέτρων ἀχθεισῶν γινόμενα παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, φημὶ ὅτι τὸ ΜΟΚΙ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΠΝΦ παραλληλογράμμῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΜΓΙ τρίγωνον ἴσον τῷ ΠΓΣ τριγώνῳ, το δὲ ΙΓΚ=ΓΠΝ. (ε) ἄρα καὶ τὸ ΜΙΚ=ΝΠΣ. διὸ δὴ καὶ τὸ ΜΟΚΙ=ΣΠΝΦ. (σ)

ΣΤ.

(ο) Κατὰ τὴν λδ'. τῷ α'. (π) Κατὰ τε τὸ προκείμεν. Λημ., καὶ τὴν γ'. Συνέπ. τῆς ι'. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (ρ) Κατὰ τὴν ε'. Συνέπ. τῆς προλ. προτ. (σ) Ἐκ τῆς λδ'. τῷ α'. δηλ.

ΣΤΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Αἱ τὰ πέρατα Ψ , B , A , Δ , καὶ Λ , Z , P , H τῶν συζυγῶν διαμέτρων ἐπιζευγῦσαι εὐθεῖαι ΨB , $A\Delta$, ΛZ , $P H$ παράλληλοι εἰσι τῇ ἑτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτῶτων MK . ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν $M\Psi = \Psi O$, ἡ δὲ $KB = BO$, (τ) ὥς ὅρα $M\Psi : \Psi O :: KB : BO$. παράλληλος ἄρα τῇ MK ἡ ΨB . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν $A\Delta$, ΛZ , $P H$ τῇ MK παράλληλος.

Β'. Ἐάν ἄρα πάντα τὰ τῶν εἰρημένων Διαμέτρων πέρατα δι' εὐθειῶν ἐπιζευχθῶσι, τὰ ὑπ' αὐτῶν γινόμενα παραλληλόγραμμα $\Psi B A \Delta$, $\Lambda Z P H$ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. καὶ γὰρ τὰ ἡμίση εἰσὶ τῶν ἴσων $MOKI$, $SPN\Phi$.

Γ'. Αἱ τῶν παραλληλογράμμων $\Psi O B \Gamma$, $\Lambda \Sigma Z P$ διαγώνιοι $B\Psi$, $Z\Lambda$ δίχα τέμνονται ὑπὸ τῆς Ἀσυμπτῶτος $I\Gamma$. ἡ μὲν κατὰ τὸ Υ , ἡ δὲ κατὰ τὸ Θ . ἐπεὶ γὰρ αἱ μὲν $B\Psi$, ΓO διαγώνιοι εἰσι τῷ $\Gamma \Psi O B$ παραλληλογράμμῳ, αἱ δὲ $Z\Lambda$, $I\Gamma$ τῷ $\Gamma \Lambda \Sigma Z$, ὅλον ἄρα ὅτι δίχα τέμνονται κατὰ τὰ Υ , Θ σημεία.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Ἐάν τῇ αὐτῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ δύο γραφαῖς ὦσιν Ὑπερβολαί, ὧν ἡ ὀρθία ἔχῃ ἡ αὐτὴ, τὰ ὑπ' αὐτῶν, τῆς τεταγμένης, καὶ τῆς Διαμέτρου περιεχόμενα χωρία λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα, ὃν ἡ ὀρθία τῆς ἑτέρας πρὸς τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο ὀρθιῶν πλευρῶν.

Πλαγία μὲν πλευρᾷ τῇ ΨN , ὀρθία δὲ τῇ NA γεγραφθῶ Ὑπερβολὴ ἡ NZ . πλαγία δὲ τῇ αὐτῇ καὶ ὀρθία

N

ὀρθία

(*) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τῆς ια'. τῇ δὲ τῇ τμήσει.

ὀρθία τῇ NE, γεγραφθῶ ἢ NO. καὶ ἀπὸ τινος τῆς τομῆς σημείε Z τετραγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΨΚ κατήχθῶ ἢ ΖΚ, μέση δὲ ἀνάλογον τῶν ΝΑ, ΝΕ ἔσω ἢ ΝΧ. λέγω δὴ ὅτι τὸ χωρίον ΝΖΚ, πρὸς τὸ χωρίον ΝΟΚ λόγον ἔχει ὃν ἢ ΝΑ: ΝΧ. πίν. Η'. ς. ι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς $\overline{ΖΚ}^2$: ΨΚ. ΚΝ :: ΝΑ: ΝΨ. καὶ ὡς ΨΚ. ΚΝ: $\overline{ΟΚ}^2$:: ΝΨ: ΝΕ. (υ) ἄρα καὶ δι' ἴσιν, ὡς $\overline{ΖΚ}^2$: $\overline{ΟΚ}^2$:: ΝΑ: ΝΕ. ἔστι δὲ ὡς ΝΑ: ΝΕ :: $\overline{ΝΑ}^2$: $\overline{ΝΧ}^2$. (φ) καὶ γὰρ ὡς ΝΑ: ΝΧ :: ΝΧ: ΝΕ. (χ) ὡς ἄρα $\overline{ΖΚ}^2$: $\overline{ΟΚ}^2$:: $\overline{ΝΑ}^2$: $\overline{ΝΧ}^2$. (ψ) διὰ δὴ καὶ ὡς ΖΚ: ΟΚ :: ΝΑ: ΝΧ. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς ΠΛ: ΣΛ, καὶ ὡς πᾶσα τοιαύτη εὐθεῖα ἐν τῷ ΝΖΚ χωρίῳ ἔσα, πρὸς πᾶσαν τὴν ἐν τῷ ΝΟΚ λόγον ἔχει ὃν ΝΑ: ΝΧ. καὶ τὸ χωρίον ἄρα ΝΖΚ, πρὸς τὸ χωρίον ΝΟΚ λόγον ἔχει, ὃν ἢ ΝΑ: ΝΧ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι δοθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, καὶ τῆς ὀρθίας ΝΑ, καὶ τῆς λόγου, ὃν πρὸς ἄλληλα ἔχουσι δύο τῶν εἰρημένων χωρίων, γραφήσεται Ὑπερβολή, ἥς πλαγία μὲν πλευρὰ ἢ αὐτὴ ΨΝ, ὀρθία δὲ ἑτέρα. ἔσω γὰρ ὁ λόγος, ὃν ἔχει τὸ ΝΖΚ: ΝΟΚ ἴσος ᾧ ἔχει ἢ ΝΑ: ΝΧ. καὶ γεγονέτω ὡς ΝΑ: ΝΧ :: ΝΧ: ΝΕ. ἢ ἔν πλαγία μὲν πλευρᾷ τῇ ΨΝ, ὀρθία δὲ τῇ ΝΕ γραφομένη Ὑπερβολὴ ΝΣΟ, (α) ἢ ζητημένη ἔσα.

ΠΡΟ-

- (υ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α' τῆς δε τῆς τμήμ. (φ) Κατὰ τὸ β'. Πόρ. τὸ μετὰ τὴν ἢ. τῆς ε'. (χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (ω) Κατὰ τὸ ζ'. τῶν μετὰ τὸ ε'. Θεωρ. (κ) Ὅσον τὴν δ'. Συνέπ. τῆς β'. τῆς δε τῆς τμήμ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ'.

Ἐὰν ἀπὸ ὁποτερὰς τῶν Ἀσυμπτῶτων
ληφθῶσι πρὸς τῷ κέντρῳ εὐθεῖαι συνεχῶς
ἀνάλογον, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῶν τῇ
ἐτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτῶτων ἄχθῶσι παράλ-
ληλοι, τὰ ὑπ' αὐτῶν τε καὶ τῆς τομῆς ἀπο-
λαμβανόμενα ἐκτὸς χωρία ἴσα ἀλλήλοις
ἔσονται.

Ἐωσαν αἱ ΓΔ, ΓΛ Ἀσύμπτωτοι τῆς ΜΚΗ Ὑπερβο-
λῆς, ἥς κέντρον τὸ Γ. καὶ εἰληφθῶσαν ἀπὸ ὁποτερὰς-
ἐν, οἷον τῆς ΓΔ εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ, ΓΔ συνεχῶς
ἀνάλογον. καὶ ἀπὸ τῶν περάτων Α, Β, Δ ἤχθῶσαν
τῇ ἐτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτῶτων ΓΛ παράλληλοι αἱ ΑΜ,
ΒΚ, ΔΗ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΜΚΒ χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ΒΚΗΔ.
πίν. ΙΗ. ς. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῶν Η, Κ, Μ σημείων ἤχθῶσαν τῇ ἐτέρᾳ
τῶν Ἀσυμπτῶτων ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΕ, ΚΙ, ΜΛ τῇ
ἐτέρᾳ Ἀσυμπτῶτι ΓΛ συμβάλλεσθαι. καὶ πληρωθέν-
τος τῷ ΓΛΝΔ παραλληλογράμμου, ἐπεξεύχθῶσαν αἱ
ΓΦ, ΦΚ, ΚΝ, ΓΜ, ΓΗ, ΜΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ παραλληλόγραμμα ΓΑΜΛ, ΓΙΚΒ ἴσα ἀλλήλοις
εἰσι, (β) καὶ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν Γ, ὡς ἄρα ΓΑ:
ΓΙ :: ΓΒ : ΓΑ. (γ) ἔστι δὲ ὡς ΓΒ : ΓΑ :: ΓΔ : ΓΒ,
(δ) ἄρα καὶ ὡς ΓΑ : ΓΙ :: ΓΔ : ΓΒ. (ε) τὰ ἄρα
N 2 παραλ-

(β) Κατὰ τὴν β'. Συνέπ. τῆς γ'. τῷ δὲ τῷ τμήμ (γ) Κατὰ
τὴν ιδ'. τῷ ε'. (δ) Ἐκ τῆς ὑποθ. δῆλον. (ε) Κατὰ ε'.
τῷ ε'.

παραλληλόγραμμα ΓΛΝΔ, ΓΙΚΒ περί τὴν αὐτὴν εἰσὶ διάμετρον, τὴν ΓΚΝ. πάλιν ἐπειδὴ τὰ ΓΛΜΑ, ΓΕΗΔ παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, (2) καὶ κοινὴν ἔχει γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς ΓΛ : ΓΕ :: ΓΔ : ΓΑ. τὰ ἄρα ΓΛΝΔ, ΓΕΦΑ παραλληλόγραμμα περί τὴν αὐτὴν εἰσὶ διάμετρον, τὴν ΓΦΝ. ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ΓΦ, ΦΚ, ΚΝ. ἡ ἄρα ΜΗ καὶ πᾶσαι αἱ παράλληλοι αὐτῇ εὐθεΐᾳ, αἱ ὑπὸ τῆς τομῆς ΜΚΗ περατέμεναι, διχα τέμνονται ὑπὸ τῆς ΓΝ. (η) ἔκιν τὸ μὲν τρίγωνον ΜΓΠ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΗΓΠ, τὸ δὲ μικτόγραμμον ΜΚΠ ἴσον τῷ μικτογράμμῳ ΗΚΠ. ἀφ' ἡρηθῶ ἀπὸ μὲν τῆς ΜΓΠ τὸ ΜΚΠ, ἀπὸ δὲ τῆς ΗΓΠ τὸ ΗΚΠ. καὶ λοιπὸν ἄρα μικτόγραμμον τὸ ΓΚΜ ἴσον λοιπῷ τῷ ΓΚΗ. ἐπεὶ δὲ καὶ τρίγωνον τὸ ΓΚΒ ἴσον τριγώνῳ τῷ ΓΗΔ, κοινῇ ἀφαιρεθέντος τῆς ΓΟΒ τριγώνου, ἴσεται τὸ ΓΚΟ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΟΗΔ τετραπλεύρῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ μικτόγραμμον ΚΟΗ, τὸ ἄρα ΓΚΗ μικτόγραμμον ἴσον τῷ ΒΚΗΔ χωρίῳ. διὰ τὰ αὐτὰ τὰ δὴ δευχθήσεται καὶ τὸ ΓΚΜ μικτόγραμμον ἴσον τῷ ΑΜΚΒ χωρίῳ. ἐπεὶ δὲ τὸ ΓΚΗ = ΓΚΜ, ὡς δὲ δεικται, καὶ τὸ χωρίον ἄρα ΑΜΚΒ ἴσον τῷ ΒΚΗΔ χωρίῳ.

ΣΤ Ν Ε Π Ε Ι Α Ι.

Α'. Τῆς δεθέντος ὑπερβολικῆς χωρίου ΙΑΒΜ (πίν. ΙΖ. χ. 4) τὸ ἀπειροπλάσιον εὐρεῖν ἔξεσι. κείσθω γάρ θ' εἰν εὐρεῖν τὸ τέττε τετραπλάσιον. προαχθήτω δὴ ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΒ κατὰ τὸ συνεχές διὰ τριῶν ὄρων, τῶν ΓΔ, ΓΕ, ΓΗ, ὥστε εἶναι ὡς ΓΑ : ΓΒ :: ΓΒ : ΓΔ :: ΓΔ : ΓΕ :: ΓΕ : ΓΗ.

ΑΠΟΛΟΓΟΣ ΚΕΥΤΡΙΚῆΣ ΣΙΒΛΗΘΡΑΚΗΣ ΒΕΛΟΠΟΛΕΩΣ καὶ

(2) Κατὰ τὴν θ'. Συνίσκ. τῆς ΙΥ'. τῆς δὲ τῆς τμήμ. (η) Κατὰ τὴν

καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Δ, Η σημείων τῇ Ἀσυμπτῳτῳ ΓΕ παράλληλοι, αὐ ΑΚ, ΔΝ, ΗΟ, καὶ ἐπεὶ τὰ ΙΑΒΜ, ΜΒΑΚ, ΚΛΔΝ, ΝΔΗΟ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, (Ζ) δὴλον ὅτι τὸ ΙΑΗΟ τετραπλάσιόν ἐστι τῷ ΙΑΒΜ. ἐπεὶ δὲ ὁ λόγος τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΓΒ ἐπ' ἄπειρον περραχθῆναι δύναται, ἡ δὲ ΓΥ καὶ ἡ τομὴ ΚΟ ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι, εἰ συμπίπτουσι, δὴλον ἄρα ὅτι καὶ τὸ ἀπειροπλάσιον τῷ ΙΑΒΜ χωρὶς εὐρεθῆσεται μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς Ἀσυμπτῳτῳ.

Β'. Ἐάν τῇ ἑτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτῳτῳ ΓΥ ληφθῶσιν εὐθεῖαι αὐ ΓΑ, ΓΒ, ΓΔ, ΓΗ διακεκριμένον ἔχουσαι λόγον, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι αὐ ΑΙ, ΕΜ, ΔΝ, ΗΟ τῇ ΓΕ παράλληλαι, τὰ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενα ὑπερβολικὰ χωρία ΙΑΒΜ, ΝΔΗΟ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. γεγομένω γάρ ὡς ΓΒ: ΓΑ:: ΓΛ: ΓΔ. ἔκθεν τὸ $\overline{ΓΛ}^2 = ΓΒ. ΓΔ$. (ι) ἀλλὰ τὸ ΓΒ. ΓΔ = ΓΑ. ΓΗ. (κ) τὸ ἄρα $\overline{ΓΛ}^2 = ΓΑ. ΓΗ$. ὡς ἄρα ΓΑ: ΓΛ:: ΓΛ: ΓΗ. (λ) ἔκθεν τὸ μὲν ΙΑΔΚ = ΚΛΗΟ, τὸ δὲ ΜΒΑΚ = ΚΛΔΝ. (μ) ἄρα καὶ τὸ ΙΑΒΜ = ΝΔΗΟ.

Γ'. Τὸ ἔν δοθέν ὑπερβολικὸν μικτόγραμμον χωρίον, οἷον τὸ ΙΑΗΟ διὰ μὲν μιᾶς μέσης ἀναλόγου τῶν ΓΑ, ΓΗ, οἷον τῆς ΓΛ, εἰς δύο ἴσα μέρη τέμνεται διὰ δὲ δύο, εἰς τρεῖς διὰ δὲ τριῶν, εἰς τέσσαρας διὰ δὲ τεσσάρων, εἰς πέντε, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

Δ'. Ἐπιζευχθεῖσιν ἀπὸ τῶν κέντρων Γ ἐπὶ τὰ σημεῖα Ι, Μ Κ, Ν, Ο τῶν ΓΙ, ΓΜ, ΓΚ, ΓΝ, ΓΟ, τὰ αὐτὰ ἔχουσιν ἰδιώματα τοῖς εἰρημένοις ὑπερβολικοῖς χωρίοις.

καὶ οἱ ὑπερβολικοὶ τομεῖς ΙΓΜ, ΜΓΚ, ΚΓΝ, ΝΓΟ.
ἴσοι γάρ εἰσιν ἐκείνοις. (ν)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

"Αγνωστον τοῖς Ἀρχαίοις τὸτο τῆς Ὑπερβολῆς τὸ
ιδίωμα. (ξ) ἐξ αὐτῆ δὲ δήλον, ὅτι ἡ Ὑπερβολή, περὶ
ἧς διαλαμβάνει ὁ Ἀπολλώνιος, ἡ καλεσμένη Λογα-
ριθμική ἐστίν, ἐν ἣ δῆθεν ἦτε συνεχῆς Γεωμετρική
Σειρὰ συνίσταται καὶ ἡ Ἀριθμητική. εἰάν γὰρ ἐν τῇ
Ἀσυμπτώτῳ ΓΥ εὐθεῖαι ληφθῶσιν αἱ ΓΑ, ΓΒ, ΓΛ,
ΓΔ, καὶ ἄλλαι ἐφεξῆς λόγον συνεχῆ ἐλάσσενος ἀνισό-
τητος ἔχουσαι, τὰ ὑπ' αὐτῶν τεμνόμενα ὑπερβολικὰ
χωρία ΙΑΒΜ, ΙΑΛΚ, ΙΑΔΝ, καὶ τὰ ἐξῆς λόγον ἀριθ-
μητικὸν ἔξουσι πρὸς ἄλληλα. οἷον, τῆς ΓΑ ὡς μονάδος
ληφθείσης, τῶν δὲ ΓΒ, ΓΛ, ΓΔ, ΓΗ, καὶ ἐξῆς ἄλλων
ἀριθμοὺς ἐμφανισῶν τέσδε· 10, 100, 1000, 10000,
καὶ ἐφεξῆς ἄλλων κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἔσεται τῷ
μὲν 10 λογάριθμος τὸ ΙΑΒΜ χωρίον, εἴταν τὸ 1
τῷ δε 100, τὸ ΙΑΛΚ, ἦτοι τὸ 2· τῷ δε 1000, τὸ
ΙΑΔΝ, τετέστι τὸ 3· τῷ δε 10000, τὸ ΙΑΗΟ, δη-
λονότι τὸ 4, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως. τῆς δε μονάδος ὁ λο-
γάριθμός ἐστι τὸ 0. καὶ γὰρ εἰδέν χωρίον ὑπὸ τῆς ΓΑ
τέμνεται, τῆς ὡς μονάδος ληφθείσης. ὥστε εἰάν τὸ ΙΑΒΜ
χωρίον ἐπικληθῇ μ, ἔσεται ἡ Σειρὰ τῶν Λογαριθμῶν
τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν, ἥδε· 0, μ, 2μ, 3μ, 4μ, καὶ
ἐφεξῆς ὁμοίως.

ΠΡΟ-

(ν) "Ὅρα τὴν τῆς προκ. πρὸτ. δῶξ. (ξ) Ἑυερέτης τάττει ὅ
Ἰησιῦτης Γρηγόριος. διαλαμβάνει δὲ περὶ αὐτῆ ἐν τῇ ἐαυτῆ πο-
νήκτι τῷ καλεσμένῳ. opus Geometricum quadraturae cir-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Ἐὰν Ὑπερβολῆς ἡ πλαγία πλευρὰ τετρα-
 πλασία ἢ τῆς ὀρθίας, καὶ πρὸς τῇ κορυφῇ
 καὶ τῷ Ἀξονι αὐτῆς Παραβολὴ γεγραφῇ, ἥς
 ἡ ὀρθία ἴση τῷ ἡμίσει τῆς ἐρημένης πλα-
 γίας· ἀπὸ δὲ τῶν κέντρων πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ
 ἀνασθῇ τις εὐθεΐα, καὶ ἀπὸ τῶν τυχόντος
 αὐτῆς σημεῖα αὐτῇ τῇ πλαγίᾳ παράλλη-
 λος ἀχθῇ τῇτε Ὑπερβολῇ καὶ τῇ Παραβο-
 λῇ συμβάλλουσα, τὸ ὑπὲρ αὐτῆς τεμνόμενον
 ὑπερβολικὸν χωρίον ἴσον ἔσται ὀρθογωνίῳ
 τῷ ὑπὸ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς τῆς Παραβο-
 λῆς καὶ εὐθείας ἴσης τῇ Παραβολῇ, τῇ ὑπὸ
 τῆς ἐρημένης παραλλήλῃ πρὸς τῇ κορυφῇ
 ἀπολαμβάνομένη περιεχομένη.

Ἐστω Ὑπερβολὴ ἡ NM, ἥς ἡ πλαγία πλευρὰ ΨN
 τετραπλασία τῆς ὀρθῆς ΨΔ. (πίν. ΙΘ'. κ. 1.) καὶ πρὸς
 τῇ κορυφῇ N καὶ τῷ Ἀξονι ΨΠ Παραβολὴ γεγραφ-
 θω ἡ NB, ἥς ἡ ὀρθία πλευρὰ ἡμίσεια τῆς ΨN,
 εἴτεν ἴση τῇ ΓN. καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων Γ ἢ ΧΘω πρὸς
 ὀρθὰς τῇ ΨN ἢ ΓΤ. καὶ ἀπὸ τῶν τυχόντος αὐτῆς
 σημεῖα Δ ἢ ΧΘω ἢ ΔΒ τῇ ΨN παράλληλος, τῷ μὲν
 Ὑπερβολῇ κατὰ τὸ Μ, τῇ δὲ Παραβολῇ κατὰ τὸ
 Β συμβάλλουσα λέγου. ὅτι τὸ ὑπερβολικὸν χωρίον ΓΔΜΝ

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετάρχθωσαν ἀπὸ τῶν Μ καὶ Β σημείων ἐπὶ τὸν ΨΠ Ἄξονα αἱ ΜΧ, ΒΑ. καὶ ἀχθείσθης ἀπὸ τῆς Β τῆς ἐφαπτομένης ΒΖ τῆς Παραβολῆς ΝΒ, ἤχθω αὐτῇ πρὸς ὀρθῶς ἡ ΒΠ, ἥτις κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβεβλήσθω. καὶ ληφθείσθης τῆς ΠΚ ἴσης τῇ ΒΠ, ἤχθω ἀπὸ τῆς Κ ἡ ΚΡ παράλληλος τῇ ΨΠ, τῇ ΒΑ ἐκβληθείσθῃ κατὰ τὸ Ρ συμβάλλουσα. καὶ εἰλήφθω μέρος τῆς Παραβολῆς τὸ ΒΙ πάσης δοθείσης καμπύλης ἐλαττον. καὶ ἀπὸ τῆς Ι ἤχθω ἡ ΕΙΘ τῇ ΔΒ παράλληλος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ΒΚ : ΒΠ :: ΒΡ : ΒΑ, καὶ ὡς ΒΚ : ΒΠ :: ΚΡ : ΠΑ (ο) ἔστι δὲ ἡ ΒΚ διπλασία τῆς ΒΠ, (π) ἄρα καὶ ἡ ΒΡ διπλασία τῆς ΒΑ, καὶ ἡ ΚΡ τῆς ΠΑ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὀρθὴ πλευρὰ τῆς Παραβολῆς, εἴτεν ἡ ΓΝ διπλασία τῆς ΠΑ. (ρ) ἄρα ἡ ΚΡ = ΓΝ. ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{ΒΚ}^2 = \overline{ΒΡ}^2 + \overline{ΚΡ}^2$, (σ) ἔστιν ἄρα τὸ $\overline{ΒΚ}^2 = 4\overline{ΒΑ}^2 + \overline{ΓΝ}^2$, εἴτεν τὸ $\overline{ΒΚ}^2 = 4\overline{ΜΧ}^2 + \overline{ΓΝ}^2$. καὶ ἐπεὶ ὡς ΨΧ. ΧΝ : ΜΧ² :: ΨΝ : ΨΛ, (τ) ἔστι δὲ ἡ ΨΝ τετραπλάσιον τῆς ΨΛ, (υ) ἄρα καὶ τὸ ΨΧ. ΧΝ τετραπλάσιον τῆς ΜΧ². τὸ ἄρα $\overline{ΒΚ}^2 = \Psi\chi. \chi\Nu + \overline{ΓΝ}^2$. ἀλλὰ τὸ $\Psi\chi. \chi\Nu + \overline{ΓΝ}^2 = \overline{ΓΧ}^2$. (φ) τὸ ἄρα $\overline{ΒΚ}^2 = \overline{ΓΧ}^2$. ἔκκιν ἡ ΒΚ = ΓΧ, εἴτεν ἡ ΒΚ = ΔΜ. ἔστι δὲ ὡς ΒΚ : ΚΡ :: ΒΙ : ΒΗ, (χ) (ὅμοιον γὰρ τὰ ΒΙΗ τῷ ΒΗΘ, (ψ) τὸ δὲ ΒΗΘ τῷ ΒΡΚ.) διὰ δὴ καὶ ὡς ΔΜ : ΓΝ ::

(ο) Κατὰ τὴν δ. τῆς σ'. (π) Ἐκ τῆς Κατασκ. (ρ) Κατὰ τὴν δ. Συνέπ. τῆς δ'. πρὸς τῆς α. τμήμ. (σ) Κατὰ τὴν μζ' τῆς α. (τ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α. τῆς δε τῆς τμήμ. (υ) Ἐξ ὑποθ. (φ) Κατὰ τὴν σ' τῆς β'. (χ) Κατὰ τὴν δ. τῆς ε'. (ψ) Κατὰ τὴν η. τῆς ε'. ἡ γὰρ ΒΙ καμπύλη πάσης δοθείσης ἐλάσσων ἔσται, ὥς εὐθὺς ἐκλαμβάνεται. πᾶσα γὰρ καμπύλη οἷον πολὺγωνή-
στιν, ἀπάραι μὲν τῷ ἀριθμῷ, ἐλαχίστας δὲ τῷ μεγίστα πλευ-
ρὰς ἔχον' ἂν ἐκείνη ἐκβληθῇ, ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης
γίνεται.

ΓΝ:: ΒΙ: ΒΗ, ἥτοι ὡς ΔΜ: ΓΝ:: ΒΙ: ΜΙ. τὸ ἄρα ΔΜ. ΜΙ = ΓΝ. ΒΙ. ἔστι δὲ τὸ ΔΜ. ΜΙ τὸ ὀρθογώνιον ΔΜΙΕ, ὅπερ ὡς ἴσον τῷ ΔΜμΕ χωρίῳ ἐκλαμβάνεται, ὀλιγωρευμένῃ τῇ ΜμΙ τριγωνιδίῃ διὰ τὴν σμικρότητα. τῆς γὰρ ΒΙ ἐλάσσονος ἔσης πάσης δοθείσης καμπύλης, τὰ Μ, μ, Ι σημεῖα ἐγγύτατά εἰσιν ἀλλήλων. ἔκδεν τὸ ΔΜμΕ ὑπερβολικὸν χωρίον ἴσον τῷ ὀρθογώνιῳ ΓΝ. ΒΙ, διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δεχθήσεται, ὅτι ἕκαστον τοῦτον ὑπερβολικὸν χωρίον τῶν ὑπὸ τῇ ΔΜΝΓ χωρίῳ περιεχομένων ἴσον εἶναι ὀρθογώνιῳ τῷ ὑπὸ τῆς ΓΝ καὶ μέρεος τῆς Παραβολῆς ΝΒ ὁμοίῳ τῷ ΒΙ. καὶ ὅλον ἄρα τὸ ὑπερβολικὸν χωρίον ΓΔΜΝ ἴσον ὀρθογώνιῳ τῷ ὑπὸ τῆς ΓΝ, εἶπεν τῆς ὀρθίας πλευραῖς τῆς Παραβολῆς, καὶ εὐθείας ἴσης τῇ ΝΒ Παραβολῇ περιεχομένῳ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Εἰς τέττε δῆλον, ὅτι ἐκ εὐθυσθήσεται ἡ Παραβολή, εἶπεν ἐκ εὐρεθήσεται εὐθεῖα ἴση αὐτῇ, εἰάν μὴ τετραγωνισθῇ τὸ εἰρημένον ὑπερβολικὸν χωρίον.

Β'. Εἰάν ἡ Ὑπερβολὴ ἰσόπλευρος ᾗ, ἥτοι εἰάν ἡ ΨΝ = ΨΛ, καὶ τῇ αὐτῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ ΨΛ, ἡ ΨΝ γραφῇ ἡ Παραβολὴ ΝΒ, ἔσεται τὸ ὑπερβολικὸν χωρίον ΓΔΜΝ ἴσον τῷ ὀρθογώνιῳ τῷ ὑπὸ τῇ ἡμίσει τῆς ὀρθίας, εἶπεν τῆς ΓΝ, καὶ εὐθείας ἴσης τῇ Παραβολῇ ΝΒ περιεχομένῳ. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{ΒΠ}^2 = \overline{ΒΛ}^2 + \overline{ΑΠ}^2$, (ω) ἔστι δὲ τὸ $\overline{ΒΛ}^2 = \overline{ΜΧ}^2$, τὸ δὲ $\overline{ΜΧ}^2 = ΨΧ. ΧΝ$, (α) τὸ δὲ $\overline{ΑΠ}^2 = \overline{ΓΝ}^4$, (β) τὸ ἄρα $\overline{ΒΠ}^2 = ΨΧ. ΧΝ + \overline{ΓΝ}^2 = \overline{ΓΧ}^2 = \overline{ΔΜ}^2$. διὸ

N 5

δὴ

(α) Κατὰ τὴν μζ'. τῇ α'. (α) Εἰς τῆς Συνεπ. τῆς α' τῇ δε τῇ τμήμ. δῆλον. (β) Κατὰ τὴν δ'. Συνεπ. τῆς δ'. τῇ α'. τμήμ.

ση ἡ ΠΙ = ΔΜ. ἐπεὶ δὲ ὡς ΒΠ : ΠΑ :: ΒΙ : ΒΗ,
 (γ) ἔσται δὴ καὶ ὡς ΔΜ : ΓΝ :: ΒΙ : ΜΙ. ἔκθεν τὸ
 ΔΜ. ΜΙ = ΓΝ. ΒΙ. δῆλον ἄρα ἐκ τῶν εἰρημένων,
 (ε) ὅτι τὸ ὑπερβολικὸν χωρίον ΓΔΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ
 ὑπὸ τῆς ἡμίσεως τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, εἴτεν τῆς
 ΓΝ, καὶ εὐθείας ἴσης τῇ ΝΒ Παραβολῇ περιεχο-
 μένῳ ὀρθογωνίῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Ἐὰν Ὑπερβολῆς ἡ κατὰ κορυφὴν ἀπτομέ-
 νη τῇ Ἀσυμπτῶτι συμπίπτῃ, ἀπὸ δὲ τῆς
 συμπτώσεως εὐθεῖα ἀχθῇ τῷ Ἀξονι πα-
 ράλληλος, ταχθῇ δὲ τις εὐθεῖα τὴν τε ἀχ-
 θῆσαν παράλληλον καὶ τὴν Ὑπερβολὴν καὶ
 τὴν Ἀσύμπτωτον τέμνῃσα, καὶ περιενεχθῇ
 περὶ τὸν Ἀξονα τὸ ὑπὸ τῆς Ἀσυμπτῶτος
 περατῶμενον τετράπλευρον σὺν τῷ τριγώνῳ
 καὶ τῇ Ὑπερβολῇ καὶ τῷ ὀρθογωνίῳ, τοῖς ὑπ'
 αὐτῶ περιεχομένοις, ἕως ἃ ἀποκατασταθῇ
 ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ μὲν ἐκ τῆς Ὑπερ-
 βολῆς γινομένη Κωνοῖς ἴση ἔσται τῷ δακτυ-
 λιδίῳ τῷ ἐκ τῆς τριγώνου γινομένῳ· τὸ δὲ σε-
 ρεὸν τὸ ἐκ τῆς χωρίου μεταξὺ τῆς Ὑπερ-
 βολῆς καὶ τῆς Ἀσυμπτῶτος ἴσον τῷ ἐκ τῆς
 ὀρθογωνίου Κυλίνδρῳ.

Εἴφαπ-

(γ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'.

Ἐφαπτέσθω τῆς Ὑπερβολῆς ΑΡ ἡ ΑΔ, (χ. 2.) καὶ συμβαλλέτω αὐτῇ κατὰ Τὸ Δ ἡ ΔΙ Ἀσύμπτωτος. καὶ ἀπὸ τῆς Δ ἤχθω τῷ Ἀξονι ΑΠ παρὰλληλος ἡ ΔΗ. καὶ τετάχθω τὶς εὐθεία ἡ ΠΡΙ τέμνεσα τήν τε ΔΗ καὶ τὴν ΑΡ καὶ τὴν ΔΙ. καὶ περιενεχθήτω τὸ τετράπλευρον ΑΠΙΔ περὶ τὸν ΑΠ Ἀξονα σὺν τῷ ΔΗΙ τριγώνῳ καὶ τῇ ΑΡ Ὑπερβολῇ καὶ τῷ ΑΠΗΔ ὀρθογωνίῳ. λέγω Α, ὅτι ἡ ἐκ τῆς ΑΡ Ὑπερβολῆς γινομένη Κωνοῖς ἴση ἐστὶ τῷ Δακτυλιδίῳ τῷ ἐκ τῆς ΔΗΙ τριγώνου. Β', ὅτι τὸ φερέον τὸ ἐκ τῆς μικτογράφου χωρίου ΑΔΙΡ ἴσον τῷ ἐκ τῆς ὀρθογωνίου ΑΠΗΔ Κυλίνδρου.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐκβεβλήθω ἡ ΙΠ ἐπὶ τὰ ἕτερα τῆς Ὑπερβολῆς μέρη.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ $\overline{ΠΙ}^2 = \overline{ΠΡ}^2 + \Phi\Gamma \cdot \GammaΡ$. (δ) ἀλλὰ τὸ $\Phi\Gamma \cdot \GammaΡ = \overline{ΑΔ}^2$, (ε) τὸ δὲ $\overline{ΑΔ}^2 = \overline{ΠΗ}^2$. (ζ) τὸ ἄρα $\overline{ΠΙ}^2 = \overline{ΠΡ}^2 + \overline{ΠΗ}^2$. ἀφηρέθω κοινὸν τὸ $\overline{ΠΗ}^2$. ἔκέν τὸ $\overline{ΠΙ}^2 - \overline{ΠΗ}^2 = \overline{ΠΡ}^2$. καὶ ὁ κύκλος ἄρα ἔῃ ἡμιδιάμετρος ἡ ΠΙ, ἀφαιρεθέντος ἀπ' αὐτῆς τῆς κύκλου, τῆς ἡμιδιάμετρον ἔχοντος τὴν ΠΗ, εἴπεν τὸ βραχυμένιον τὸ ἐκ τῆς ΗΙ εὐθείας γινόμενον, ἴσον τῷ κύκλῳ ἔῃ ἡμιδιάμετρος ἡ ΠΡ. (η) ἐμοίως δὲ δεχθήσεται, ὅτι πᾶς κύκλος ὁ ἐν τῇ Κωνοίδι τῇ ἐκ τῆς ΑΡ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐπ' εὐθείας αὐτῷ βραχυονίῳ τῷ ἐν τῷ Δακτυλιδίῳ, τῷ ἐκ τῆς ΔΗΙ τριγώνου. διὸ δὴ καὶ ἡ Κωνοῖς ἡ ἐκ τῆς ΑΡ ἴση τῷ ἐκ τῆς ΔΗΙ Δακτυλιδίῳ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ φερέον τὸ ἐκ τῆς τετραπλεύρου ΑΠΙΔ ἴσον ἐστὶ τῇ ἐκ τῆς ΑΡ Κωνοίδι καὶ τῷ φερέῳ τῷ ἐκ τῆς μικτογράφου

με

(δ) Κατὰ τὴν ε'. τῆς β'. (ε) Ὅρα τὴν α'. Συνέπ. τῆς ε'. τῆς δὲ τῆς τριγώνου. (ζ) Ἐκ τῆς λδ. τῆς α'. δηλ. (η) Ἐκ τῆς ε'. τῆς β'. δηλ.

μα ΑΔΙΡ. ἔστι δὲ τὸ αὐτὸ σφαιρὸν τὸ ἐκ τῆ τετραπλεύρου ἴσον τῷ τε Κυλίνδρῳ τῷ ἐκ τῆ ΑΠΗΔ ὀρθογωνίᾳ, καὶ τῷ δακτυλιδίῳ τῷ ἐκ τῆ ΔΗΙ τριγώνῳ. ἡ ἄρα ἐκ τῆς ΑΡ Κωνοῖς σὺν τῷ ἐκ τῆ μικτογράφου σφαιρῷ ἴσα εἰσὶ τῷ Κυλίνδρῳ καὶ τῷ Δακτυλιδίῳ. δεδεικται δὲ ἡ Κωνοῖς ἴση τῷ Δακτυλιδίῳ, καὶ τὸ σφαιρὸν ἄρα τὸ ἐκ τῆ μικτογράφου ΑΔΙΡ ἴσον τῷ ἐκ τῆ ὀρθογωνίᾳ ΑΠΗΔ Κυλίνδρῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'

Τῶν αὐτῶν κειμένων, εὐθείας τινὸς ἀχθείσης τῷ τῆς Ὑπερβολῆς Ἀΐξονι παραλλήλῃ, τὴν δευτέραν διάμετρον, καὶ τὴν Ἀσύμπτωτον, καὶ τὴν κατὰ κορυφὴν ἀπτομένην, καὶ τὴν Ὑπερβολὴν τεμνέσης, καὶ τῆ ὑπ' αὐτῆς τεμνομένης μικτογράφου τετραπλεύρου σὺν τοῖς ὑπ' αὐτῆς περιεχομένοις χήμασι περὶ τὴν δευτέραν περιεχθέντος διαμέτρον, τὸ μὲν σφαιρὸν τὸ ἐκ τῆ μικτογράφου ἴσον ἔσται τῷ ἐκ τῆ ὀρθογωνίᾳ Κυλίνδρῳ, τὸ δὲ ἐκ τῆ μικτογράφου τριγώνου Δακτυλιδίου ἴσον τῷ ἐκ τῆ τριγώνου Κώνῳ.

Διήχθω τῷ τῆς Ὑπερβολῆς Ἀΐξονι παράλληλος ἡ ΠΡ, (κ. 3.) τὴν δευτέραν διάμετρον ΓΠ, καὶ τὴν Ἀσύμπτωτον ΓΙ, καὶ τὴν κατὰ κορυφὴν ἀπτομένην ΑΕ, καὶ τὴν Ὑπερβολὴν ΑΡ τέμνῃσα, καὶ περιεχθήτω περὶ τὴν ΓΠ τὸ μικτόγραμμον τετράπλευρον ΓΠΡΑ σὺν τοῖς ὑπ' αὐτῆς περιεχομένοις χήμασιν, ἕως ἃ ἀποκατασταῖ ὅσον ἡρξάτε φέρεσθαι. λέγω Α', ὅτι τὸ σφαιρὸν, τὲ

τὸ ἐκ τῆ ΓΙΡΑ μικτογράμμη ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τῆ ὀρθογωνίᾳ ΓΠΕΑ Κυλίνδρῳ· Β', ὅτι τὸ ἐκ τῆ μικτογράμμη τριγράμμη ΑΕΡ Δακτυλίδιον ἴσον τῷ ἐκ τῆ ΓΠΙ τριγώνῳ Κώνῳ.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐκβληθεῖσα ἡ ΡΠ, συμπίπτει τῇ Ἀντικείμενῃ Ὑπερβολῇ κατὰ τὸ Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Α'.

Τὸ $\overline{ΠΡ}^2 = ΖΙ \cdot ΙΡ + \overline{ΠΙ}^2$. (θ) ἀλλὰ τὸ $ΖΙ \cdot ΙΡ = \overline{ΓΑ}^2$,
(*) τὸ ἄρα $\overline{ΠΡ}^2 = \overline{ΓΑ}^2 + \overline{ΠΙ}^2$. κοινὸν ἀφαιρεθῶν τὸ $\overline{ΠΙ}^2$, ἔκδεν τὸ $\overline{ΠΡ}^2 - \overline{ΠΙ}^2 = \overline{ΓΑ}^2$, εἴτεν $\overline{ΠΕ}^2$. καὶ ὁ κύκλος ἄρα ἔστι ἡμιδιάμετρος ἡ ΠΡ ἀφαιρεθέντος ἀπ' αὐτῆς τῆ κύκλου ἔστι ἡμιδιάμετρος ἡ ΠΙ, ἥτοι τὸ βραχύνιον τὸ ἐκ τῆς ΙΡ ἴσον τῷ κύκλῳ, τῇ ἡμιδιάμετρον ἔχοντι τὴν ΠΕ.
(κ) ὁμοίως δὴ δευχθήσεται, ὅτι πᾶν βραχύνιον τῷ ἐν τῷ σφερεῶ, τῷ ἐκ τῆ ΓΙΡΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐπ' εὐθείας αὐτῷ κύκλῳ, τῷ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ, τῷ ἐκ τῆ ΓΠΕΑ ὀρθογωνίᾳ. ἔκδεν καὶ τὸ σφερόν, τὸ ἐκ τῆ τετραπλεύρου ΓΙΡΑ ἴσον τῷ ἐκ τῆ ὀρθογωνίᾳ ΓΠΕΑ Κυλίνδρῳ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Β'.

Τὸ ἐκ τῆ ΓΠΡΑ σφερόν ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἐκ τῆ ΓΙΡΑ σφερεῶ, καὶ τῷ ἐκ τῆ ΓΠΙ Κώνῳ. ἀλλὰ τῷ αὐτῷ σφερεῶ τῷ ἐκ τῆ ΓΠΡΑ ἴσος ὁ ἐκ τῆ ΓΠΕΑ Κυλίνδρος σὺν τῷ ἐκ τῆ ΑΕΡ Δακτυλιδίῳ. τὸ ἄρα ἐκ τῆ ΓΙΡΑ σφερόν σὺν τῷ ἐκ τῆ ΓΠΙ Κώνῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τῆ ΓΠΕΑ Κυλίνδρῳ σὺν τῷ ἐκ τῆ ΑΕΡ Δακτυλιδίῳ. δεικνύται δὲ τὸ ἐκ τῆ ΓΙΡΑ σφερόν ἴσον τῷ Κυλίνδρῳ. ἄρα καὶ τὸ ἐκ τῆ ΑΕΡ Δακτυλιδίου ἴσον τῷ ἐκ τῆ ΓΠΙ Κώνῳ.

Ἐάν ἀπότινος σημεία ἰσοπλευρῶν ὁμοίων
 εὐθεία ἀχθῇ, τῇ μὲν ἑτέρα τῶν Ἀσυμπτώ-
 των παράλληλος, τῇ δὲ ἑτέρα συμβάλλου-
 σα· ὁμοίως δὲ καὶ ἑτέρα ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων
 ἀχθῇ εὐθεία, καὶ περιενεχθῇ τὸ ὑπὸ αὐτῶν
 τε καὶ τῶν Ἀσυμπτῶτων περιεχόμενον ὀρθο-
 γώνιον σὺν τῇ Ὑπερβολῇ περὶ ὁποτέραν τῶν
 Ἀσυμπτῶτων ἕως ὅτε ἀποκατασταθῇ ὅθεν
 ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ ἐκ τῶν ἀπειρομήκους χω-
 ρείων, τῶ μεταξὺ τῆς Ἀσυμπτῶτος καὶ τῆς
 Ὑπερβολῆς γινόμενον ἀπειρομήκους σερεὸν ἴ-
 σον ἔσται τῷ ἐκ τῶν ἀρημένων ὀρθογωνίῳ Κυ-
 λίνδρῳ.

Ἐῶν ἰσοπλευρῶν (λ) Ὑπερβολὴ ἢ ΠΓ, (πίν. Κ. χ. ι.)
 καὶ ἀπότινος αὐτῆς σημεία Γ ἢ ΧΘῶ ἢ ΓΔ, τῇ μὲν ΑΖ Ἀ-
 συμπτῶτι παράλληλος, τῇ δὲ ΑΨ συμβάλλουσα. ὁμοί-
 ως δὲ ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων Γ ἢ ΧΘῶ ἢ ΓΕ. καὶ πε-
 ριενεχθῇτω περὶ τὴν ΨΑ τὸ ΓΔΑΕ ὀρθογώνιον σὺν τῇ
 Ὑπερβολῇ ΓΠ ἕως ὅτε ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέ-
 ρεσθαι. λέγω ὅτι τὸ ἀπειρομήκους σερεὸν τὸ γινόμενον ἐκ
 τῶ

(λ) Ἰσοπλευρον δὲ ἵνα τὴν Ὑπερβολὴν, ἵνα ὀρθὴ ἢ καὶ ἡ ὑπὸ
 τῶν Ἀσυμπτῶτων περιεχόμενη γωνία ΨΑΖ. τῆς γὰρ ἰσοπλευροῦ
 ἴση ἔσται ἡ πλαγία πλευρὰ τῇ ὀρθῇ, ἴση ἐκατέρω αὐτῶν ἐστὶ
 καὶ ἡ δευτέρα Διάμετρος. διὸ δὴ καὶ ἡ ΔΕ (Ὅρα χ. ι. τῇ
 ΙΖ. πίν.) ἴση τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ Βπ, ἴση ἐστὶ καὶ τῇ ΨΑ.
 ἡ δὲ ΨΑ τῇ ΕΟ. ἐξ ὧν δὴλον ὅτι τὸ ΦΔΕΟ τετράγωνόν ἐστι,
 ὃ ἐκαστὸς τῶν ΕΒΟ, ΕΙΑ συνιστᾷ ὀρθῶν.

τῷ ἀπειρομήκεις χωρίῳ ΨΔΓΠ ἴσον ἐπὶ τῷ ἐκ τῷ ὀρθογωνίῳ ΓΔΑΕ Κυλίνδρῳ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῷ ὁμοειδῆ σημείῳ Β τῆς ΓΠ Ὑπερβολῆς ἤχθωσαν αἱ ΓΡ, ΒΛ ταῖς ΓΔ, ΓΕ παράλληλοι. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ διαγώνιος ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ΒΛ : ΓΕ :: ΑΕ : ΑΛ. (μ) ἀλλ' ὡς ΑΕ : ΑΛ ἔστω ἡ περιφέρεια τῷ κύκλῳ, ἢ ἡμιδιάμετρος ἡ ΑΕ, (ἥτις καλεῖσθαι χ) πρὸς τὴν περιφέρειαν τῷ κύκλῳ, ἢ ἡμιδιάμετρος ἡ ΑΛ. (καλεῖσθαι δὲ αὕτη γ) (ν) ὡς ἄρα ΒΛ : ΓΕ :: χ : γ. τὸ ἄρα ΒΛ. γ = ΓΕ. χ. (ξ) ἐπὶ δὲ τὸ μὲν ΒΛ. γ ἡ ἐπιφάνεια τῷ Κυλίνδρῳ, τῷ ἐκ τῷ ὀρθογωνίῳ ΡΛ· τὸ δὲ ΓΕ. χ ἡ ἐπιφάνεια τῷ ἐκ τῷ ΔΕ. ὁμοίως καὶ τὸ ΙΛ. γ ἡ ἐπιφάνεια τῷ ἐκ τῷ ΔΛ Κυλίνδρῳ. (ο) ὡς ἄρα ΒΛ. γ : ΙΛ. γ :: ΓΕ. χ : ΙΛ. γ. (π) ἀλλ' ὡς μὲν ΓΕ. χ : ΙΛ. γ :: χ : γ, (ρ) ὡς δὲ χ : γ :: ΑΕ : ΑΛ, (σ) καὶ ὡς ΑΕ : ΑΛ :: ΓΕ : ΛΟ, ἦτοι ΙΛ : ΛΟ. ὡς ἄρα ΒΛ. γ : ΙΛ. γ :: ΙΛ : ΛΟ. ἐπεὶ δὲ τὸτο αὐτὸ δαίκεται ὅπερ περ ἀν' ἀληθείᾳ τὸ τῆς Ὑπερβολῆς σημεῖον Β, πᾶσαι ἄρα αἱ ἐπιφάνειαι αἱ ἐν τῷ στερεῷ, τῷ ἐκ τῷ χωρίῳ ΨΑΕΓΠ, πρὸς πάσας τὰς ἐπιφανείας τὰς ἐν τῷ Κυλίνδρῳ, τῷ ἐκ τῷ ὀρθογωνίῳ ΔΕ λόγον ἔχουσιν ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐν τῷ αὐτῷ ὀρθογωνίῳ ΔΕ, πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΓΕ, ἦτοι ὃν 2 : 1. καὶ τὸ στερεὸν ἄρα τὸ ἐκ τῷ χωρίῳ ΨΑΕΓΠ, πρὸς τὸν Κύλινδρον τὸν ἐκ τῷ ΔΕ :: 2. 1.

καὶ

- (μ) Κατὰ τὴν δ'. Συνίπ. τῆς ιγ'. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (ν) Κατὰ τὴν Συνίπ. τὴν μετὰ τὴν β'. τῷ ιβ'. (ξ) Κατὰ τὴν ις'. τῷ ε'. (ο) Κατὰ τὸ γ'. Αἰμ. τὸ ἐν τοῖς τῷ Ἀρχιμ. θεωρ. (π) Κατὰ τὴν α', τῷ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν α', τῷ ε'. (σ) Κατὰ τὴν Συνίπ. τὴν μετὰ τὴν β'. τῷ ιβ'.

καὶ διαμεθύνται, ὡς τὸ σφαιρὸν, τὸ ἐκ τῷ ΨΔΓΠ χω-
ρίαι, πρὸς τὸν ἐκ τῷ ΔΕ ὀρθογωνίαι Κυλίνδρον, ἕτως ἵ. 1.
ὅπερ εἶναι, ὅτι τὸ ἐκ τῷ ΨΔΓΠ χωρίαι σφαιρὸν ἴσον τῷ
ἐκ τῷ ΔΕ ὀρθογωνίαι Κυλίνδρῳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ὅντως θαυμαστὸν τῆτο τῆς Ὑπερβολῆς τὸ ἰδίωμα,
(τ) ἔχει ἥττον ἥτινα τῶν τῷ κύκλῳ συμπτωμάτων
οἶον, τὸ ὅλην τὴν ἀπὸ τῷ κέντρῳ περιφέρειαν, τῷ
ἐκαστῷ αὐτῆς πέρατος, τῷ ἐν τῷ κέντρῳ ἡρεμῆντος
τὸ τὴν αὐτὴν γραμμὴν, εἶπεν τὴν περιφέρειαν καὶ
κυρτήν καὶ καμπύλην εἶναι· τὸ ὑπὸ μηδεμίαν εὐθεί-
αν τὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ τῆς περιφερείας καὶ τῆς ἀπ-
τομένης περιεχομένην τέμνεσθαι. καὶ ἀναγκάζει μὲν ἡ
δεξις πείθεσθαι, ἐναντίον δ' ἐν ὅμοις δοκεῖ τῷ λόγῳ,
τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπειρόμηκες σφαιρὸν τῷ πεπεραστωμέ-
νῳ Κυλίνδρῳ. ἔ μόνον δὲ τὴν Ὑπερβολὴν, ἀλλὰ καὶ
ἄλλας, διὰ τῷ καλεμένῃ τῆς Ὀλοκληρίαις λογισμῷ,
εὗρον οἱ Γεωμέτραι καμπύλας, ἐν αἷς τὸ μεταξὺ
αὐτῶν τε καὶ τῶν Ἀσυμπτῶτων περιεχόμενον ἐπ'
ἀπειρον ἐκτεινόμενον χωρίον, ἴσον εἶσι χωρίῳ πεπερα-
στωμένῳ, καὶ τὸ ἐκ τῷ τοιούτῳ ἀπείρῳ σφαιρὸν ἴσον σφ-
εῶ πεπερασμένῳ. κἀντεῦθεν δὲ ἐξελέγχοντα οἱ ἀπι-
στοί, οἱ τῶν θείων τῆς πίσεως Μυσηρίων ὀλιγοῤῥεντες,
διὰ τὸ δοκεῖν ἐναντιῶσθαι τῷ λόγῳ, διὰ τὸν ὑπὲρ κα-
τάληψιν αὐτῶν λόγον. ἰδὲ γὰρ ἓνια, ἐναντία μὲν δο-
κῆντα τῷ λόγῳ, διὰ δὲ τῆς ἀπταΐσε ἀποδεικνύμενα
γεωμετρικῆς ἐπιστήμης.

Περὶ

(τ) Τῆς ἐνστάσεως ὅ ἐκ Φαίνεσης Τορικήλλιος, ὁ 7ῃ Γαλιλαίᾳ ἀπο-
κρίσας, ὁ κατὰ τὸ 1647. ἕτος τὸν βίον ἐκμνήσκει.

ἥς ἐν τοῖς Ὀπτικοῖς χρήσεως
τῆς Ὑπερβολῆς.

ἐκ μετάλλου Ὑπερβολῆς ἔχοντα εἶδος κα-
σιν, ἐν οἷς πᾶσαι αἱ ἐκ λαμπάδος, ἐπὶ
τῶν Ἐξισῶν τεθείσης, ἐκπεριπτόμεναι ἀν-
τὼ κυρτῶ τῆς Ὑπερβολῆς προσπίπτει
ἀνακλῶνται, ὥστε μετὰ τὴν ἀνάκλασιν
ἐξ ἑστέρας μέρη ἐμβαλλομένους, ἐπὶ τῆς ἐτέρας
ἀλλήλαις συμβάλλειν. οἷον ἡ παρὰ τῆς
Ἐξισῆς (πίν. Γ. κ. 2.) λαμπάδος περπο-
ΥΜ, καὶ τῶ κυρτῶ τῆς Ὑπερβολῆς ΑΜ
σα, ὥτως ἀνακλᾶται τὴν ΜΩ φερομένη
ἐκβληθεῖσαν τὴν ΜΩ ἐπὶ τὰ ἕτερα
τὴν ἐτέραν τῶν Ἐξισῶν Φ συμπίπτειν.
ἡ γωνία τῆς πτώσεως ΥΜΒ ἴση ἐστὶ τῇ
λάσεως ΩΜΣ, ὥς ἡ πείρα δεικνύσι· γί-
νεται αὐτὰ ἀλλήλαις ἴσαι, εἰάν ἡ ΩΜ ἐπὶ τὰ
ληθεῖσα μέρη, κατὰ τὸ Φ συμπέσῃ· ἴση
τῆς ΦΜΒ ἑκατέρω τῶν ΥΜΒ, (υ) ΩΜΣ,
ἐπὶ καὶ ἡ ΥΜΒ τῇ ΩΜΣ· ἡ ἄρα ἀνάκλα-
Ω ἐμβαλλομένη, διὰ τῆ Φ ἦκει. διὰ τὸν
ον εἰάν ἡ λαμπὰς ἐπὶ τῆ Φ τεθῇ, πᾶ-
καίλω φθὺ ὑπερβολοῦδός κατόπτρου προσ-
μετὰ τὴν ἀνάκλασιν ἐπὶ τὰ ἕτερα μέ-
εῖσαι, κατὰ τὴν ἐτέραν τῶν Ἐξισῶν Υ ἀλ-
μπίπτουσιν. οἷον ἡ ΦΜ μετὰ τὴν ἀνάκλα-
Ζ φορὰν φέρεται· ἥτις ἐπὶ τὰ ἕτερα ἐκ-
μέρη, διὰ τῆ Υ ἦκει. ἔτω μὲν γάρ ἡ κα-
γωνία ΦΜΒ τῇ κατὰ ἀνάκλασιν ΖΜΣ
ἴση

Ξ

ἴση

ἴση γίνεται. ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΥΜΒ = ΦΜΒ$, ἡ αὐτὴ δὲ $ΥΜΒ = ΖΜ'$, καὶ ἡ $ΦΜΒ$ ἄρα ἴση τῇ $ΖΜ'$. εἰάν
 ἔν ἐπὶ θατέρας τῶν Ἑσίων λαμπαὶς τεθῇ, ἐπὶ τῆς
 ἐτέρας τὸ ἐαυτῆς ὀφθῆσεται εἶδωλον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Γινέον, ὅτι αἱ τοιαῦται Ἑσίαί, Φαντασικαὶ ἐν-
 λόγως καλεῖνται. ἔδὲ γὰρ πραγματικῶς εἰς τὰ ἕτε-
 ρα μέρη εἰσίσαι αἱ ἀνακλαθεῖσαι φωτισμαὶ αὐτίνες,
 ἔδὲ ἀλλήλαις πραγματικῶς συμβάλλουσι. κατασκευάζου-
 νται δὲ ὑέλιναι φακαὶ Ὑπερβολῆς εἶδος ἔχουσαι, πᾶσαι
 δὲ αἱ πρὸς αὐτάς προσπίπτουσαι τῷ φωτὸς αὐτίνες
 παρὰλληλοι τῇ Διαμέτρῳ, δι' αὐτῶν διῆσαι, ἀληθῶς-
 τε καὶ πραγματικῶς κατὰ τὴν ἐτέραν τῶν Ἑσίων συμ-
 βάλλουσι ἀλλήλαις. ὅπως δὲ αἱ τοιαῦται φιλοτεχνῶν-
 ται φακαί, καὶ δι' αὐτῶν αἱ αὐτίνες διῆσαι ἀλλήλαις
 συμπίπτουσι, ρητέον.

Β'. Εἰάν μὲν ἡ ἀπὸ θατέρου εἰς ἕτερον σῶμα εἰσιῶσα
 αὐκτίς, οἷον ἡ ἀπὸ τῆς ὑέλης εἰς τὸν αἶρα, ἢ τῆρ-
 παλιν, πρὸς ὁρθὰς προσβάλλῃ τῇ τῷ σώματος
 ἐπιφανείᾳ, ὥσπερ ἡ $ΛΜ$ τῇ $ΑΜ$, (πλν. ΙΑ'. ς. ι.)
 ἀθλασος διήσῃ τὴν ἐπ' ἐυθείας φερομένην φορᾶν, κα-
 θάπερ ἡ $ΛΜΟ$. εἰάν δὲ πλαγίως, θλάται ἐν τῷ
 διένει, ἐτέραν φερομένην φορᾶν, οἷον τὴν $ΜΥ$.

Γ'. Εἰάν ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας σημεῖον $Μ$, καθ' ὃ
 ἢ μὴ πρὸς ὁρθὰς $ΛΜ$ αὐτὴς προσβάλλῃ, ἀχθῇ ἡ
 $ΕΜΡ$ κάθετος ἥτοι τῇ ἐπιφανείᾳ $ΑΜ$, εἰάν ἐπί-
 πεδός αὐτῇ ἢ, ἢ τῇ ἐφαπτομένη αὐτῆς $ΜΖ$, εἰάν
 καμπύλῃ, ἢ μὲν $ΛΜΕ$, ἢ περιεχομένη ὑπὸ τῆς
 προσπίπτουσης $ΛΜ$, καὶ τῆς καθέτης $ΕΜΡ$, Γωνία
 πτωσεως λέγεται· ἢ δὲ $ΥΜΡ$ ἢ ὑπὸ τῆς θλασ-
 θείσης $ΥΜ$, καὶ τῆς αὐτῆς καθέτης $ΜΡ$ περιεχο-
 μένη, Γωνία θλάσεως. Δ'.

Δ'. Ο λόγος ὃν ἔχει τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς πτώσεως, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς θλάσεως ὁ αὐτός ἐστι, καὶ ὅποια ᾗ ἢ τῆς ἀκτίνος πτώσις, ἢ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ. ἐστὶ δὲ ὁ λόγος ἕτος, τῆς μὲν ἀπὸ τῆς ἀέρος εἰς τὴν ὕλην εἰσερχομένης ἀκτίνος, ὁ λόγος ὃν ἔχει ὁ 3 : 2, ἔστιν $\frac{3}{2}$: 1. τῆς δὲ ἀπὸ τῆς ὕλης εἰς τὸν αέρα, ὁ λόγος ὃν ἔχει ὁ 2 : 3, ἦτοι $\frac{2}{3}$: 1. τῶν δὲ πάντων ἡ πᾶρα διδάσκαλος.

Ε'. Ἐὰν ἡ προσπεσῶσα ἀκτὶς ΑΜ συμβάλλῃ μετὰ τὴν θλάσιν τῇ τῆς Ὑπερβολῆς Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Υ, ὡς ἡ ΜΥ, ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τῆς πτώσεως Μ ἢ ΜΕ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΑΜ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Ε συμπίπτουσα, τὸ ἡμίτονον τῆς πτώσεως ΑΜΕ, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς θλάσεως ΥΜΡ λόγον ἔχει, ὃν ἡ θλασθεῖσα ΥΜ, πρὸς τὴν ΥΕ τὴν ἀπαραμεινόμενὴν ἀπὸ τῆς καθέτης πρὸς τῷ Υ σημείῳ. ἐπεὶ γάρ ἡ μὲν ΑΜΕ = ΜΕΥ, (χ) ἡ δὲ ΥΜΡ τὸ αὐτὸ ἔχει ἡμίτονον, ὅπερ καὶ ἡ ΥΜΕ, (ψ) τὸ αὐτὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς πτώσεως ΕΜΑ, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς θλάσεως ΥΜΡ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας ΜΕΥ, πρὸς τὸ τῆς ΥΜΕ, ἀλλὰ τὸ τῆς ΜΕΥ ἡμίτονον, πρὸς τὸ τῆς ΥΜΕ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΥΜ πρὸς τὴν ΥΕ. (ω) τὸ αὐτὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς πτώσεως ΑΜΕ, πρὸς τὸ τῆς θλάσεως ΥΜΡ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΥΜ : ΥΕ. εἰν ἔν ἡ ΑΜ ἀκτὶς ἀπὸ τῆς ὕλης εἰς τὸν αέρα εἰσελθῇ, ἔσται ὡς ΥΜ : ΥΕ :: 2 : 3. (α)

Ξ 2

Σ.

(χ) Κατὰ τὴν κθ'. τῷ α'. (ψ) Κατὰ τὸν β'. ὁρισμ. τῆς Τριγωνομετρ. (ω) Κατὰ τὸ δ'. Θεώρ. τῆς Τριγωνομετρ. (α) Ἐκ τῶν ἐνωτέρ. ἀρχῶν. δηλ.

5'. Ἐὰν ἄρα Ὑπερβολὴ γραφῇ, ἥς ἡ πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν λόγον ἔχει, ὃν ὁ $2 : 2 + \frac{1}{2}$, ἀπὸ δὲ τυχόντος σημείου, τῷ Μ τεταγμένως ἀχθῇ² ἐπὶ τὴν Διάμετρον ἢ ΜΗ, καὶ περιενεχθῇ περὶ τὴν ΑΗ, ἕως ἔ' ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ ΑΜΗ χωρίον, ἢ καθ' ὁμοίωσιν τῷ ἐξ αὐτῷ γινομένῃ τερεῷ τορνευθεῖσα ὑελίνη φακὴ, ἢ ζητεμένη ἔσαι πρὸς ἣν δῆθεν πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι ἀκτῖνες τῶν Ἀξονι παρὰλληλοι, μετὰ τὴν ἐν τῷ ἀέρι θλαῖσιν, κατὰ τι σημεῖον τὸ Υ, ἀλλήλαις συμπεσῶνται. κείσθω γὰρ τὸ Φ τὴν ἐτέραν εἶναι τῶν Ἑσιῶν. καὶ ἐπεὶ ὡς ΨΑ : ΥΦ :: ΥΦ πρὸς τὴν συγκεκλιμένην ἐκ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς ὀρθίας, (β) ἔσαι δὴ ὡς 2 : ΥΦ :: ΥΦ : $4 + \frac{1}{2}$. τὸ ἄρα $\overline{\text{ΥΦ}}^2 = 9$. (γ) ἢ ἄρα ΥΦ = 3. ἐκέν ὡς² ΨΑ : ΥΦ :: 2 : 3. ἀλλ' ὡς ΨΑ : ΥΦ :: ΥΜ : ΥΕ. (δ) ὡς ἄρα ΥΜ : ΥΕ :: 2 : 3. ἐξ ἧς δῆλον τὸ προκείμενον.

ΤΜΗ.

- (6) Κατὰ τῆς ιδ'. Συνέπ. τῆς 5'. τῷ β'. τμήμ. (γ) Κατὰ τῆς ιζ'. τῷ ε'. (δ) Κατὰ τὴν 5'. Συνέπ. τῆς 5'. τῷ β'. τμήμ.



ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ

Περὶ τῶν τῆς Ἑλλείψεως συμπτωμάτων.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'. (α)

Ἐὰν ἐν Ἑλλείψει εὐθεῖαι ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον, ἔσονται τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ὡς τὰ ὀρθογώνια τὰ ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας πλευρᾶς.

Ἐστω Ἑλλειψις ἡ ZNMΨ, καὶ τετάχθωσιν ἐπὶ τὴν ΝΨ Διάμετρον αἱ ΖΦ, ΕΠ. λέγω, ὅτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα εἰσιν ὡς τὰ ὀρθογώνια ΝΦ. ΦΨ, ΝΠ. ΠΨ, εἴτεν ὅτι ἐστὶν, ὡς $Z\Phi^2 : EP^2 :: N\Phi. \Phi\Psi : N\Pi. \Pi\Psi$. πίν. Β. χ. 5.

Ὅρα τὴν τῆς πρώτης προτάσεως τῷ προλαβόντος τμήματος δεῖξιν. εἰπὼν δὲ ἐκ τε τῶν λόγων ὃν ἔχει, πρόσθεσ τὰδε ἀντὶ τῶν ἐκεῖ ἐξῆς· ἡ ΔΦ : ΠΗ, ἥτοι ἡ ΝΦ : ΝΠ, καὶ ἐκ τῶν ὃν ἔχει ἡ ΦΒ : ΡΠ, εἴτεν ἡ ΨΦ : ΨΠ. ἄρα καὶ τὸ $Z\Phi^2 : EP^2$ λόγον ἔχει συγ-
κεῖ-

Ξ 3

(α) Μέρει ἐστὶ τῆς καὶ τῆς κ'. βιβλ. τῆς Α' πολλων.

κείμενον ἔκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ἡ ΝΦ : ΝΠ, καὶ ἐν τῷ ὃν ἔχει ἡ ΦΨ : ΠΨ, ὡς ἄρα $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2 :: ΝΦ. ΦΨ : ΝΠ. ΠΨ.$ (β)

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐάν ὀρθία τῆς Ἐλλείψεως πλευρὰ ἢ ἡ ΝΡ, εἴτεν ἢ τετάρτη ἀνάλογος τῷ ΝΦ. ΦΨ, τῷ $\overline{ΖΦ}^2$, καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΝΨ, (γ) ἔσεται καὶ πᾶν ἕτερον ὀρθογώνιον, οἷον τὸ ΝΠ. ΠΨ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης ΕΠ τετράγωνον, ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΨΝ, πρὸς τὴν ὀρθίαν ΝΡ, ἐπεὶ γὰρ ὡς ΝΦ. ΦΨ : ΝΠ. ΠΨ : $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2$, καὶ ἐναλλάξ ὡς ΝΦ. ΦΨ : $\overline{ΖΦ}^2 :: ΝΠ. ΠΨ : \overline{ΕΠ}^2$, ἔστι δὲ ὡς ΝΦ. ΦΨ : $\overline{ΖΦ}^2 :: ΝΨ : ΝΡ$, ἄρα ΝΠ. ΠΨ : $\overline{ΕΠ}^2 :: ΝΨ : ΝΡ$.

Β'. Τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΡ ἴσης τῇ πλαγίᾳ ΨΝ ἕσης, ἡ Ἐλλειψις εἰς κύκλον μεταβάλλεται. τὸ γὰρ $\overline{ΖΦ}^2$ ἴσον ἔσεται τῷ ΝΦ. ΦΨ. διὸ ἡ ΨΖΝΜ κύκλος ἐστὶ. (δ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Ἐν Ἐλλείψει τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ὑπ' αὐτῆς ἀποτεμνομένης καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγου τῆς πλαγίας πλευρᾶς, τῆς ὀρθίας, καὶ τῷ λοιπῷ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τμήματος, περιεχομένῳ.

Ἐστω

(Α) Μεγίστην ἔχει τὰ τῆς Ὑπερβολῆς πάντα τοῖς τῆς Ἐλλείψεως τὴν ὁμοιότητα διὰ δὴ καὶ ὁ Ἀπολλώνιος συνημμένας προτίθησι τὰς τε προτάσεις καὶ τὰς ἀποδείξεις, σαφηνέας δὲ χάριν αἱ μὲν προτάσεις διήρηται, τὰς δὲ δάξεις ζητητέον ἐν τοῖς περὶ τῆς Ὑπερβολῆς, μικρόν τι ἐνίοτε τῶν ἀποδείξεων μεταβαλλομένων. (γ) Ὅρα τὸν καὶ ὁρισμ. (δ) Ἐκ τῆς γ', καὶ δ'. Συνεπ. τῆς η'. καὶ ε'. δῆλον.

Ἐξω Ἐλλειψις ἡ ΥΝΜΨ, ἥς Διάμετρος μὲν ἡ ΨΝ, τεταγμένης δὲ ἐπ' αὐτὴν κατεγμένη ἡ ΜΚ, Ἀποτετμημένη δὲ ἡ ΝΚ, λοιπὸν δὲ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τμήμα ἡ ΨΚ, ὀρθία δὲ ἡ ΝΑ. λέγω, ὅτι τὸ $\overline{ΜΚ}^2$ ἴσον ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ΝΚ, ἢ τῆς τετάρτης ἀναλόγῃ τῶν ΨΝ, ΝΑ, ΨΚ περιεχομένῳ. πίν. Κ. χ. 2.

Ἐχεις τὴν δεῖξιν ἐν τῇ δευτέρᾳ τῷ προλαβόντος τμήματος προτάσει.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΜΚ τετράγωνον ἔλαττον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΝΚ καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΑ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτετμημένης ΝΚ ἢ τῆς τετάρτης ἀναλόγῃ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, τῆς ὀρθίας ΝΑ, καὶ τῆς βηθείσης Ἀποτετμημένης ΝΚ. πρὸς ὀρθίαν γὰρ ἔσω τῇ ΨΝ ἢ ΝΑ, ἢ κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμβληθείσης τῆς ΚΓ, ἥχθωσαν ἀπὸ τῶν Α καὶ Γ σημείων αἱ ΑΛ, ΓΖ τῇ ΨΝ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ ὡς ΨΝ : ΝΑ :: ΖΓ : ΖΑ, (ε) εἴπεν ὡς ΨΝ : ΝΑ :: ΝΚ : ΖΑ, ἡ ἄρα ΖΑ τετάρτη ἀνάλογός ἐστι τῆς πλαγίας πλευρᾶς, τῆς ὀρθίας, ἢ τῆς ἀποτετμημένης ΝΚ. ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{ΜΚ}^2 = ΝΚ \cdot ΚΓ$, (ζ) ἦτοι τῷ ΝΓ· τὸ δὲ ΝΓ = ΝΗ — ΖΗ· τὸ ἄρα $\overline{ΜΚ}^2 = ΝΗ — ΖΗ$, τετέστι τὸ $\overline{ΜΚ}^2 = ΝΚ \cdot ΝΑ — ΝΚ \cdot ΖΑ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $\overline{ΠΠ}^2 = ΝΠ \cdot ΝΑ — ΝΠ \cdot ΔΑ$.

Β'. Ταῦτα ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἄρα ΜΚ, ΙΠ τετράγωνα ἴσα εἰσὶν ὀρθογωνίοις τοῖς ΝΓ, ΝΒ, παρὰ τὴν ὀρθίαν πλευράν ΝΑ παραβεβλημένοις, καὶ ἐλλείπουσιν ὀρθογωνίοις τοῖς ΖΗ, ΔΦ ὁμοίοις καὶ ὁμοίως κειμένους τῷ ΝΛ τῷ ὑπὸ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΑ

≡ 4

καὶ

(ε) Κατὰ τὴν δ'. τῇ ε'. (ζ) Κατὰ τὴν προκριν. πρότ.

ἢ τῆς πλαγίας περιεχομένην. καὶ τέττε τυχὸν τῇ
προσηγορίαν εἶληφε τὸ χῆμα.

Γ'. Ἐπιζευχθεῖσων τῶν ΝΓ, ΝΒ, ἔσεται τὸ μὲν $\overline{MK}^2$
διπλάσιον τῷ ΝΚΓ τριγώνῳ, τὸ δὲ $\overline{ΠB}^2$ τῷ ΝΠΒ.

Δ'. Δοθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, (πίν. Κ'.
χ. 3.) ἢ τῆς ὀρθίας ΝΑ, ἐνεσι συνεχῇ πορίσασθαι
σημεῖα, δι' ὧν γραφῆσεται ἡ Ἐλλειψις. ἔσω γὰρ ἡ
ΝΑ πρὸς ὀρθιάς τῇ ΨΝ, ἢ εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ἐπι-
ζευχθείσης ΨΑ σημεῖά τινά τὰ Δ, Φ, καὶ ἄλλα
ἐφεξῆς. καὶ ἤχθωσαν ἀπ' αὐτῶν αἱ ΔΜ, ΦΟ, τῇ
ΑΝ παράλληλοι. καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν ΒΓ = ΒΝ, ἡ
δὲ ΖΗ = ΖΝ. καὶ ἀναγεγράφθω ἐπὶ τῶν ΔΓ, ΦΗ
ἡμικύκλια τὴν ΨΝ κατὰ τὰ Κ, Ι σημεῖα τέμνον-
τα. εἰλήφθω δὲ ἡ μὲν ΒΕ = ΒΚ, ἡ δὲ ΖΛ = ΖΙ.
λέγω, ὅτι διὰ τῶν σημείων Ε, Λ, καὶ τῶν ἐφεξῆς
ὁμοίως ποριζέντων Ἐλλειψις ἦξει, ἥς πλαγία μὲν
πλευρά ἡ ΨΝ, ὀρθία δὲ ἡ ΝΑ. Ὅρα τὴν δεξιὴν
τῆς Δ'. Συνεπ. τῆς Β. προτ. τῷ προλαβ. Τμήμῳ
ἀντὶ δὲ τῷ, τῆς ΨΒ τῆς συγκεκριμένης, κτ. εἰπέ,
τῆς ΨΒ τῆς Ἀποτετμημένης.

Ε'. Ἐνεσι δὲ καὶ διὰ κινήσεως Κανόνων τὰ αὐτὰ τῆς
Ἐλλείψεως πορίσασθαι σημεῖα. (χ. 4.) Ὅρα τὰ ἐν
τῇ Ε'. Συνεπ. τῆς προειρημ. προτ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Ἐὰν ᾖτε πλαγία πλευρὰ τῆς Ἐλλείψεως
καὶ ἡ ὀρθία δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν δι-
χοτομιῶν διαχθῇ τις εὐθεῖα Τεταγμένην τι-
νὰ τέμνῃσα, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμέ-
νης τετράγωνον διπλάσιον τῷ τετραπλεύ-

ρα

ρα τῷ ὑπ αὐτῆς τε καὶ τῆς διαχθείσης πε-
ρατῶμεν.

Τετμήθω δίχα ἡτε πλαγία πλευρὰ ΨΝ, καὶ ἡ
ὀρθία ΝΑ κατὰ Γ, Ε σημεία, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΓΕ,
τεμνέτω τὴν ἐκβληθεῖσαν Τεταγμένην ΒΚ κατὰ τὸ Δ.
λέγω, ὅτι τὸ $\overline{ΒΚ}^2$ διπλάσιόν ἐστι τῷ ΕΝΚΔ τετρα-
πλεύρῳ. ἧ. 5.

Ἐπίζευξον τὰς ΨΑ, ΝΡ, καὶ ὄρα τὴν δεῖξιν τῆς Γ.
προτ. τῷ προλαβ. Τμήμ. καὶ τὴν μετ' αὐτὴν Σημεί-
ωσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'. (η)

Ἀπὸ τῷ δοθέντος σημείῳ τῆς δοθείσης Ἐλ-
λείψεως εὐθεῖαν ἀπτομένην ἀγαγεῖν.

Ὅρα τὰ ἐν τῇ Δ'. προτ. τῷ προλαβ. τμήμ. εἰρημέναι.
ἀντὶ δὲ τῷ εἰπεῖν, ἐν τῇ κατασκευῇ, εἰλήφθω ἀπὸ
τῆς ΠΨ (πίν. ΚΑ'. ἧ. 1.) εἰπέ, εἰλήφθω ἀπὸ τῆς
ΨΠ ἐκβληθείσης. ὅτι δὲ ἡ εὐρεθεῖσα τρίτη ἀνάλογος
τῶν ΖΠ, ΠΜ, εἴτεν ἡ ΠΤ μείζων ἐστὶ τῷ λοιπῷ τῆς
πλαγίας πλευρᾶς τμήματος ΠΑ, δείξας ἔτως· εἰ γὰρ
μὴ μείζων, ἔσω ἐλάσσων, ὡς ἡ ΠΤ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ
ΖΤ. καὶ ἐπεὶ ὡς ΖΠ : ΠΜ :: ΠΜ : ΠΤ, τὸ ἄρα $\overline{ΠΜ}^2 =$
ΖΠ. ΠΤ. (θ) ἐστὶ δὲ τὸ ΖΠ. ΠΤ διπλάσιον τῷ ΖΠΤ
τρίγωνῳ, (ι) καὶ τὸ $\overline{ΠΜ}^2$ ἄρα διπλάσιον τῷ ΖΠΤ,
ἀλλὰ τὸ $\overline{ΠΜ}^2$ διπλάσιον καὶ τῷ τετραπλεύρῳ ΖΠΑΡ.
(κ) τὸ ἄρα ΖΠΤ = ΖΠΑΡ. τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ
ἐξ ἀνάγκης. ἔκ ἄρα ἡ ΠΤ ἐλάσσων τῆς ΠΑ.

Ξ 5

ΣΥ-

(η) Ἡ λδ'. ἐστὶ τῷ α'. βιβλ. τῷ Ἀπολλων. (θ) Κατὰ τὴν 15'.
τῷ ε'. (ι) Κατὰ τὴν μα'. τῷ α'. (κ) Κατὰ τὴν προλ.
πρίν.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Ἐντεῦθεν πολλάς πορίζομεθα μεθόδους τῷ ἔφαπτομένην ἄγειν ἀπὸ τῷ δοθέντος τῆς Ἐκλείφους σημείου, ἔχεις δὲ αὐταῖς ἐν ταῖς Συνεπείαις τῆς εἰρημένης Δ'. προτ. ὧν ἡ Α' ἐδεμιάς προσθήκης χεῖζει, ἡ ἀφαιρέσεως.

Ἐν δὲ τῇ Β'. ἀντὶ τῷ εἰπεῖν τῇ Διευθετήσει ΨΝ ἐκβληθείση, εἰπὲ τῇ Διευθετήσει ΨΝ ἐπιζευχθείση.

Η' δὲ Γ'. ἀναλλοίωτος διαμενέτω.

Ἐν δὲ τῇ Δ. εἰπὼν, ὡς ΠΓ : ΠΑ :: ΓΑ : ΑΤ, πρόδες, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΠΑ : ΠΓ :: ΑΤ : ΓΑ, καὶ συντεθέντα, ὡς ΓΑ : ΠΓ :: ΓΤ : ΓΑ, τὸ ἄρα $\overline{ΓΑ}^2 = ΠΓ \cdot ΓΤ$. ἀντὶ δὲ τῷ εἰπεῖν, τῆς ΠΓ τῆς ἐκ τῷ ἡμίσεως ΓΑ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς ἀποτετμημένης ΑΠ συγχειμένης, εἰπὲ τῆς τετμημένης ΠΓ τῆς ἀπολαμβανομένης ἀπὸ τῷ κέντρῳ Γ καὶ τῆς τεταγμένης ΜΠ.

Ἐν δὲ τῇ Ε'. ἀντὶ τῷ εἰπεῖν, εἰάν ἄρα ἐκάτερον τέτων εἰπὲ, εἰάν ἀπὸ τέτῳ κοινὸν ἀφέλῃς τὸ $\overline{ΓΠ}^2$, κτ.

Η' δὲ Ζ'. μεταβολῆς εἰ δέεται.

Ἐν δὲ τῇ Ζ'. μετὰ τὸ εἰπεῖν, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΜΨ, πρόδες, ἥτις ἐκβληθεῖσα, συμπέσῃ τῇ ΑΩ κατὰ τὸ Ω.

Ἐν δὲ τῇ Η'. προκείμενῳ δεῖξαι, ὅτι ὡς ΨΤ : ΤΑ :: ΨΠ : ΠΑ, μετὰ δὲ τὴν ἐκείνῃ τέτῃ δεῖξιν πρόδες κατ'αὐτὰ. Ὅσον μὲν ἡ ΠΜ τῷ κέντρῳ Γ προσπελάζει, τοσούτον ἡ ΓΠ ἐλαττεύεται· ἐπειδὴν δ' ἐγγίῃα ἐγγίση, πάσης δοθείσης ποσότητος ἐλάσσων γίνεται. διὸ ὡς ἐδὲν ἐκλαμβάνεται τῇ ΓΑ παραβαλλομένη, καὶ ἐπεὶ ὡς ΓΠ : ΓΑ ::

ΓΑ:: ΓΑ: ΓΤ, (λ) καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΤ συγκρινομένη, ὡς ἔδεν λογίζεται. ἐπεὶ δὲ ἡ ΓΑ μέγεθος ἐστὶν ὠρισμένον, ἄπειρον ἄρα ἡ ΓΤ. διὸ δὴ παράλληλος αὐτῇ γίνεται ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{ΓΑ}^2 = \overline{ΓΠ} \cdot \overline{ΓΤ}$, ἔσεται ἡ $\overline{ΓΤ} = \frac{\overline{ΓΑ}^2}{\overline{ΓΠ}}$. (μ) ἐὰν ᾖ ἡ $\overline{ΓΠ} = 0$, ἔσται ἡ $\overline{ΓΤ} = \frac{\overline{ΓΑ}^2}{0}$. ἐκ τούτου δὴλον, ὅτι πᾶν ὠρισμένον μέγεθος διὰ τῶ μηδενικοῦ σημείου διαιρέμενον, ἄπειρον ἐμφαίνεται μέγεθος· καὶ ὅτι τὸ 0 πρὸς τι ὠρισμένον μέγεθος λόγον ἔχει, ὃν τὸ αὐτὸ ὠρισμένον μέγεθος πρὸς τι ἄπειρον. τὸ δὲ μηδὲν ἐκ ἀπολύτως νοητέον, ἀλλὰ σχετικῶς, ὡς πρὸς τι μέγεθος ἀναφερόμενον.

Τὴν δὲ Θ'. ἐν ἣ πρόκειται δεῖξαι, ὅτι ὡς $\Psi B : \Lambda X :: \Psi \Pi : \Pi A$, δεῖξεις ἔτιω· ὡς $\Psi T : T A :: \Psi B : \Lambda X$. (ν) ἀλλ' ἡ $\Lambda X = \chi \Omega$. (ξ) ὡς ἄρα $\Psi T : T A :: \Psi B : \chi \Omega$. ἀλλ' ὡς $\Psi B : \chi \Omega :: \Psi M : M \Omega$, καὶ ὡς $\Psi M : M \Omega :: \Psi \Pi : \Pi A$, ἄρα ὡς $\Psi B : \Lambda X :: \Psi \Pi : \Pi A$. (ο) Ἐν δὲ τῇ Γ'. εἰπὼν, συμπέση τῇ ΨK , πρὸς δὲ, τῇ ἀπὸ τῶ πέρατος Ψ ἀχθείσῃ ταῖς τεταγμέναις παραλλήλῳ.

Ἡ δὲ ΙΑ', ὡς ἔχει, ἔτιω ἀναγνωθήτω.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α. (π)

Εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς Ἐλλείψεως ΗΑΒ καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης αὐτῆς ΓΑ, ἐτέρω εὐθείᾳ εἰ παρεμπεσεῖται. χ. 2.

ἔχεις

(λ) Κατὰ τὴν προλ. δ'. Συνέπ. (μ) Κατὰ τὸ η'. ἀξίωμα. τῷ ε'. βιβλ. (ν) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (ξ) Κατὰ τὴν προλ. ζ'. Συνέπ. (ο) Κατὰ τὴν ε' τῷ ε'. (π) Μέρος ἐστὶ τῆς λβ'. τῷ α'.

Ἔχεις τὴν δεξιὴν ἐν τῷ Θεωρήματι τῷ μετὰ τὴν προδιαληφθεῖσαν Δ'. πρῶτ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'. (ρ)

Ἐὰν ἐν Ἐκλάψει εὐθεῖα ἀχθῇ, ἐφ' ἐκάτε-
ρα τῶ κέντρων συμπίπτουσα τῇ τομῇ, δίχα
τμηθήσεται κατὰ τὸ κέντρον· αἱ δὲ ἀπὸ τῶν
σημείων τῆς συμπτώσεως ἀχθεῖσαι ἐφαπ-
τόμεναι τῆς τομῆς, καὶ τῇ Διαμέτρῳ συμ-
πίπτουσαι ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ παράλλη-
λοι ἔσονται.

Ἡ δεξις ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ τῆς Ε'. πρῶτ. τῶ προλαβ-
τμήμ. χ. 3.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Ἡ διὰ τῶ κέντρων Γ ταῖς Τεταγμέναις ΖΝ, ΜΘ
ἀγομένη παράλληλος ΒΔ δίχα τέμνει πάσας τὰς
τῇ ἀρχικῇ Διαμέτρῳ ΗΤ ἀγομένας παραλλήλους
ΖΜ, ΟΙ ἐντὸς τῆς τομῆς. ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμ-
μά εἰσι τὰ ΠΕ, ΓΖ, ἔστιν ἄρα ἡ μὲν ΓΠ = ΕΜ,
ἡ δὲ ΓΦ = ΕΖ. (σ) ἀλλ' ἡ ΓΠ = ΓΦ. (τ) ἄρα καὶ
ἡ ΜΕ = ΕΖ. ἡ ἄρα ΖΜ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ
Ε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ΟΙ καὶ
πᾶσα παράλληλος τῇ ΗΤ ἐντὸς τῆς τομῆς ὑπὸ τῆς
ΒΔ δίχα τέμνεται.

Β'. Ἡ εἰρημένη ΒΔ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τε πλεγμαίας
πλευρᾶς ΨΑ, καὶ τῆς ὀρθίας ΑΥ. ἔστι μὲν γὰρ ὡς
ΨΓ.

(ρ) Τὸ α'. μίρ. ἢ λ'. ἐστὶ τῶ αὐτ. βιβλ. (σ) Κατὰ τὴν λθ'.
τῶ α'. (τ) Ὅρα τὴν δεξί. τῆς Προκ. πρῶτ.

$\Psi\Gamma.\Gamma\Lambda : \overline{\Gamma\beta}^2 :: \Psi\Lambda : \Lambda\Upsilon$, (υ) ἔτεν ὡς $\overline{\Gamma\alpha}^2 : \overline{\Gamma\beta}^2 :: \Psi\Lambda : \Lambda\Upsilon$. ἔστι γὰρ $\Psi\Gamma.\Gamma\Lambda = \overline{\Gamma\alpha}^2$, καὶ ὡς μὲν $\overline{\Gamma\alpha}^2 : \overline{\Gamma\beta}^2 :: \overline{\Psi\alpha}^2 : \overline{\beta\Delta}^2$, ὡς δὲ $\Psi\Lambda : \Lambda\Upsilon :: \overline{\Psi\alpha}^2 : \Psi\Lambda.\Lambda\Upsilon$, (φ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{\Psi\alpha}^2 : \overline{\beta\Delta}^2 :: \overline{\Psi\alpha}^2 : \Psi\Lambda.\Lambda\Upsilon$. (χ) τὸ ἄρα $\overline{\beta\Delta}^2 = \Psi\Lambda.\Lambda\Upsilon$. (ψ) ἔκθ' ὡς $\Psi\Lambda : \beta\Delta :: \beta\Lambda : \Lambda\Upsilon$. (ω) ἐπεὶ ἔν ἡ $\beta\Delta$ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς πλαγίας πλευρᾶς $\Psi\Lambda$ καὶ τῆς ὀρθίας $\Lambda\Upsilon$ ὡς δέδεικται, διχα τε τέμνεται κατὰ τὸ Γ , (α) καὶ παράλληλός ἐστι ταῖς ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν Διάμετρον τεταγμέναις, (β) δευτέρα ἄρα Διάμετρος ἐστι, (γ) διχα τέμνουσα τὰς ὑπ' αὐτὴν Τεταγμένας $Z\mathcal{M}$, $O\mathcal{I}$.

Γ'. Ἡ $\beta\Lambda$ ἡ τρίτη ἀνάλογος τῆς δευτέρας Διαμέτρου $\beta\Delta$ καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς $\Psi\Lambda$ ἡ ὀρθία πλευρὰ ἐστὶν ὡς πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. καὶ ὥσπερ τὸ $\Psi\Lambda.\Lambda\Upsilon = \overline{\beta\Delta}^2$, ἔτω καὶ τὸ $\beta\Lambda.\beta\Lambda = \overline{\Psi\alpha}^2$.

Δ'. Τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἐπὶ τὴν $\beta\Delta$ τετεγμένων λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα, ὃν τὰ ὀρθογώνια τὰ ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς $\beta\Delta$, ἔτεν ἐστὶν ὡς $\overline{Z\epsilon}^2 : \overline{O\varsigma}^2 :: \beta\epsilon.\epsilon\Delta : \beta\varsigma.\zeta\Delta$. ἔστι μὲν γὰρ ὡς $\overline{\beta\Gamma}^2 : \overline{Z\Phi}^2 :: \Lambda\Gamma.\Gamma\Psi : \Lambda\Phi.\Phi\Psi$, (δ) ἦτοι ὡς $\overline{\beta\Gamma}^2 : \overline{\epsilon\Gamma}^2 :: \overline{\Psi\Gamma}^2 : \Lambda\Phi.\Phi\Psi$. καὶ κατὰ ἀνατροφὴν, ὡς $\overline{\beta\Gamma}^2 : \overline{\beta\Gamma}^2 - \overline{\epsilon\Gamma}^2 :: \overline{\Psi\Gamma}^2 : \overline{\Psi\Gamma}^2 - \Lambda\Phi.\Phi\Psi$. ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{\beta\Gamma}^2 - \overline{\epsilon\Gamma}^2 = \beta\epsilon.\epsilon\Delta$, τὸ δὲ $\overline{\Psi\Gamma}^2 - \Lambda\Phi.\Phi\Psi = \overline{\Gamma\Phi}^2 = \overline{Z\epsilon}^2$. (ε) ὡς ἄρα $\overline{\beta\Gamma}^2 : \beta\epsilon.\epsilon\Delta :: \overline{\Psi\Gamma}^2 : \overline{Z\epsilon}^2$. καὶ ἐναλλάξ, ὡς $\overline{\Psi\Gamma}^2 : \overline{\beta\Gamma}^2 :: \overline{Z\epsilon}^2 : \beta\epsilon.\epsilon\Delta$.
διὰ

(υ) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τῆς α'. τῆ δὲ τμήμ. (φ) Κατὰ τὴν κ'. τῆ ε'. (χ) Κατὰ τὴν ε'. τῆ ε'. (ψ) Κατὰ τὴν κ'. τῆ ε'. (ω) Κατὰ τὴν ιζ'. τῆ ε'. (α) Κατὰ τὸν ζ'. ὀρισμ. (β) Ὅρα τὴν προλ. Συνέπ. (γ) Κατὰ τὸν κδ'. ὀρισμ. (δ) Κατὰ τὴν α'. τῆ δὲ τῆ τμήμ. (ε) Κατὰ τὴν ε'. τῆ β'. καὶ τὴν λδ'. τῆ κ'.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς $\overline{\Psi\Gamma^2}$
 $\overline{B\Gamma^2} :: \overline{O\varsigma^2} : B\varsigma. \varsigma\Delta.$ διὰ δὴ καὶ ὡς $\overline{Z\Xi^2} : B\Xi. E\Delta :: \overline{O\varsigma^2}$
 $B\varsigma. \varsigma\Delta. (\zeta)$ καὶ ἐναλλάξ ὡς $\overline{Z\Xi^2} : \overline{O\varsigma^2} :: B\Xi. E\Delta : B\varsigma. \varsigma\Delta.$

Ε'. Τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης ΖΕ τετραγώνον πρὸς τὴν
 ΒΕ. ΕΔ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ὀρθία ΒΛ πρὸς τὴν δε
 τέραν Διάμετρον ΒΔ. ἐπεὶ γὰρ ὡς $B\Delta : A\Psi :: A\Psi$
 $B\Lambda, (\eta)$ ἄρα καὶ ὡς $\overline{B\Delta^2} : \overline{A\Psi^2} :: B\Delta : B\Lambda. (\theta)$
 ἔστι δὲ ὡς $\overline{B\Delta^2} : \overline{A\Psi^2} :: \overline{B\Gamma^2} : \overline{\Gamma\Psi^2}.$ ἔκθεν καὶ α
 $\overline{B\Gamma^2} : \overline{\Gamma\Psi^2} :: B\Delta : B\Lambda,$ καὶ ἀνάπαλιν ὡς $\overline{\Gamma\Psi^2} : \overline{B\Gamma^2}$
 $B\Lambda : B\Delta.$ ἀλλ' ὡς $\overline{\Gamma\Psi^2} : \overline{B\Gamma^2} :: \overline{Z\Xi^2} : B\Xi. E\Delta. (\iota)$
 ἄρα καὶ ὡς $\overline{Z\Xi^2} : B\Xi. E\Delta :: B\Lambda : B\Delta. (\kappa)$

Λ Η Μ Μ Α. (λ)

Ἐὰν Ἐκλείψως τῆς ΨΕΑΣ εὐθεῖα ἐπιψάυ
 ῃσα ἡ ΜΤ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Τ συμ
 πίπτῃ, καὶ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ κατὰ χθ
 εὐθεῖα ἡ ΜΠ τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετ
 ρον, τῇ δὲ ΜΠ διὰ τῆς κορυφῆς παράλλη
 λος ἀχθῇ ἡ ΑΔ, τῇ μὲν ἐφαπτομένη Μ
 κατὰ τὸ (), τῇ δὲ ΣΜ τῇ διὰ τῆς κέντρ
 ος καὶ τῆς ἀφῆς Μ κατὰ τὸ Δ συμβάλλουσα
 ληφθέντος δὲ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς
 οἷον τῆς Φ, δύο ἀχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΦΗ, ΦΙ
 ἡ μὲν τῇ ἐφαπτομένη ΜΤ, ἡ δὲ τῇ Τεταγ

μ.

(ζ) Κατὰ τὴν ε' τῆς ε' (η) Κατὰ τὴν προλ. γ'. Συνέπ. (θ) Κα
 τὰ τὸ β'. Πόρις. τὸ μετὰ τὴν η'. τῆς ε'. (ι) Ὅρα τὴν προλ. Συν
 (κ) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (λ) Ἡ μγ'. πρότ. ἐστὶ τῆς α'. βιβ
 τῆς Ἀπολλων.

μένη ΜΠ παράλληλος, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐ-
τῶν τριγῶνον ΦΗΥ ἴσον ἔσται τῷ τετραπ-
λεύρῳ ΒΔΑΥ τῷ ὑπὸ τῆς ΕΜ, τῆς διὰ τῆς
κέντρου καὶ τῆς ἀφῆς ἀποτεμνομένῳ. χ. 4.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς τριγ. ΜΠ : τριγ. ΔΓΑ :: $\overline{ΓΠ}^2 : \overline{ΓΑ}^2$. (μ)
ἐπεὶ δὲ ὡς ΓΠ : ΓΑ :: ΓΑ : ΓΤ, (ν) ἔσται καὶ ὡς
 $\overline{ΓΠ}^2 : \overline{ΓΑ}^2 :: ΓΠ : ΓΤ$. (ξ) ἔστι δὲ ὡς ΓΠ : ΓΤ ::
ΜΠ : ΜΓΤ. (ο) ὡς ἄρα ΜΠ : ΔΓΑ :: ΜΠ : ΜΓΤ.
(π) τὸ ἄρα ΔΓΑ = ΜΓΤ. (ρ) κοινὸν ἀφηρήδω τὸ
ΜΠ. τὸ ἄρα ΜΠ τριγῶνον ἴσον τῷ ΜΔΑΠ τετρα-
πλεύρῳ. ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{ΦΤ}^2 : \overline{ΜΠ}^2 :: ΑΥ. ΥΨ. ΑΠ. ΠΨ$.
(σ) ἔστι δὲ τὸ μὲν ΑΥ. ΥΨ = $\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΓΤ}^2$, τὸ δὲ ΑΠ.
ΠΨ = $\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΓΠ}^2$. (τ) ὡς ἄρα $\overline{ΦΤ}^2 : \overline{ΜΠ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 -$
 $\overline{ΓΤ}^2 : \overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΓΠ}^2$. ἀλλ' ὡς $\overline{ΦΤ}^2 : \overline{ΜΠ}^2 :: ΦΗΥ : ΜΠ$.
(υ) ὡς ἄρα ΦΗΥ : ΜΠ :: $\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΓΤ}^2 : \overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΓΠ}^2$.
(φ) καὶ ἐπεὶ ὡς $\overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΤ}^2 :: ΓΔΑ : ΓΒΥ$, (χ) καὶ
διαιρεθέντα ὡς $\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΓΤ}^2 : \overline{ΓΤ}^2 :: ΓΔΑ - ΓΒΥ : ΓΒΥ$,
ἄρα καὶ ἐναλλάξ ἔσται ὡς $\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΓΤ}^2 : ΓΔΑ - ΓΒΥ ::$
 $\overline{ΓΤ}^2 : ΓΒΥ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἐστὶ, καὶ ὡς $\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΓΠ}^2 :$
 $ΓΔΑ - ΓΜΠ :: \overline{ΓΠ}^2 : ΓΜΠ$. ἔστι δὲ ὡς $\overline{ΓΠ}^2 : ΓΜΠ ::$
 $\overline{ΓΤ}^2 : ΓΒΥ$, (ψ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΓΤ}^2 : ΓΔΑ - ΓΒΥ ::$
 $\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΓΠ}^2 : ΓΔΑ - ΓΜΠ$, (ω) καὶ ἐναλλάξ ὡς $\overline{ΓΑ}^2 -$
 $\overline{ΓΤ}^2 : \overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΓΠ}^2 :: ΓΔΑ - ΓΒΥ : ΓΔΑ - ΓΜΠ$. ἄρα

καὶ

- (μ) Κατὰ τὴν ΙΘ'. τῆς ε'. (ν) Κατὰ τὴν Θ'. Συνέπ. τῆς δ'. τῆς δε τῆς
τμήμ. (ξ) Κατὰ τὸ β'. Πόρ. τὸ μετὰ τὴν η'. τῆς ε'. (ο) Κα-
τὰ τὴν α'. τῆς ε'. (π) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (ρ) Κατὰ τὴν
β'. τῆς ε'. (σ) Κατὰ τὴν α'. τῆς δε τῆς τμήμ. (τ) Ἐκ τῆς
ε'. τῆς β'. δῆλ. (υ) Κατὰ τὴν ΙΘ'. τῆς ε'. (φ) Κατὰ τὴν ἀρχμ. ε'.
(χ) Κατὰ τὴν ΙΘ'. τῆς τῆς ε'. (ψ) Κατὰ τὴν αὐτ. (ω) Κα-
τὰ τὴν ἀρχμ. ε'.

καὶ ὡς ΦΗΥ : ΜΤΠ :: ΓΔΑ—ΓΒΥ :: ΓΔΑ—ΓΜΠ.
 (α) ἀλλὰ τὸ μὲν ΓΔΑ—ΓΒΥ=ΒΔΑΥ, τὸ δὲ ΓΔΑ—
 ΓΜΠ=ΜΔΑΠ. ὡς ἄρα ΦΗΥ : ΜΤΠ :: ΒΔΑΥ :
 ΜΔΑΠ. ἀλλὰ τὸ ΜΤΠ ἴσον δέδεικται τῷ ΜΔΑΠ. ἄρα
 καὶ τὸ ΦΗΥ=ΒΔΑΥ. (β)

ΣΗΝΕΠΕΙΑ.

Ἐὰν μεταξὺ τῶν Μ καὶ Α σημείων ληφθῇ τι ἐπὶ
 τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι
 ἀχθῶσιν αἱ ΙΡ, ΦΗ, ἡ μὲν τῇ Τεταγμένη ΜΠ, ἡ δὲ
 τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ παράλληλος, ἔσεται τὸ ὑπ' αὐ-
 τῶν περαττέμενον τετράπλευρον ΡΚΗΓ ἴσον τῷ ΓΜΤ
 τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΚΗΙ=ΑΙΡΔ, (γ) προσκείσθω
 ἐκάτερον τῷ ΓΡΙ τριγώνῳ, ἔκθ' ἔσεται τὸ ΔΓΑ=ΡΚ-
 ΗΓ. ἀλλὰ τὸ ΔΓΑ=ΓΜΤ. ἄρα καὶ τὸ ΡΚΗΓ=ΓΜΤ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. (δ)

Ἐὰν Ἐλλείψεως εὐθεῖα ἐπιψάυσσα συμπι-
 πτῇ τῇ Διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τὰ
 κέντρα εὐθεῖα ἀχθῇ ἐπὶ ταῦτά τῆς τομῆς,
 δίχα τεμεῖται τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ πα-
 ρὰ τὴν ἐφαπτομένην· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν διχο-
 τομημένων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχουσι
 πρὸς ἀλλήλα, ὃν τὰ ὀρθογώνια τὰ ὑπὸ τῶν
 ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τοῖς πέρασι
 τῆς διὰ τὰ κέντρα καὶ τῆς ἀφῆς ἀχθείσης.

Ἐπι-

(α) Κατὰ τὴν αὐτ. (β) Κατὰ τὴν β'. τῆς ε'. (γ) Κατὰ τὸ προ-
 κείμεν. Αἴμα (δ) Τὸ μὲν α'. μέρ. ἡ μζ' ἐστὶ τῆς α'. β. βλ. τὴν
 Ἀπολλων. τὸ δὲ β'. ὅμοιον τῇ γ'. τῆς αὐτῆς.

Ἐπιφανέτω Ἐλλειψεως τῆς ΑΦΨΣ ἡ ΜΤ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Τ συμπίπτουσα, καὶ διὰ τῆς ἐπαφῆς Μ καὶ τῆς κέντρος Γ διήχθω ἡ ΜΓΣ. καὶ ἀπὸ τῶν Φ καὶ Ε σημείων ἡχθωσαν αἱ ΦΗ, ΕΑ τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ παράλληλοι. λέγω Α'. ὅτι ἡ μὲν $\Phi\Lambda = \Lambda\text{Κ}$, ἡ δὲ $\text{Ε}\Omega = \Omega\Lambda$. Β'. ὅτι ὡς $\overline{\text{Κ}\Lambda^2} : \overline{\text{Α}\Omega^2} :: \zeta\Lambda : \Lambda\text{Μ} : \zeta\Omega : \Omega\text{Μ}$.

Ἡ μὲν τῇ Α'. μέρος δείξας ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ τῇ Α'. μέρος. τῆς Ζ'. προτ. τῇ προλαβ. τμήμ. ἀντὶ δὲ τῇ εἰπεῖν, κοινῇ ἀφαιρεθέντος τῇ τετραπλεύρῃ $\Xi\Omega\Lambda\text{Ν}$, ὡπὲρ, τῇ τριγώνῳ $\Omega\Lambda\Gamma$. Τὸ δὲ Β'. μέρος δείξας ἔσται

Τὸ $\Delta\Gamma\Lambda = \Gamma\text{ΜΤ}$. (ε) κοινὸν ἀφηρέθω τὸ $\Omega\Gamma\Lambda$. τὸ ἄρα $\Omega\Delta\Lambda = \Omega\text{ΜΤΑ}$. πάλιν τὸ $\Gamma\text{ΜΤ} = \Gamma\text{ΚΑΓ}$. (ζ) ἀφηρέθω κοινὸν τὸ $\Lambda\text{ΗΓ}$. τὸ ἄρα $\Lambda\text{ΡΚ} = \Lambda\text{ΜΤΗ}$. ὡς ἄρα $\Omega\Delta\Lambda : \Lambda\text{ΡΚ} :: \Omega\text{ΜΤΑ} : \Lambda\text{ΜΤΗ}$. ἀλλὰ τὸ μὲν $\Omega\text{ΜΤΑ} = \Gamma\text{ΜΤ} - \Gamma\Omega\Lambda$, τὸ δὲ $\Lambda\text{ΜΤΗ} = \Gamma\text{ΜΤ} - \Gamma\Lambda\text{Η}$. ὡς ἄρα $\Omega\Delta\Lambda : \Lambda\text{ΡΚ} :: \Gamma\text{ΜΤ} - \Gamma\Omega\Lambda : \Gamma\text{ΜΤ} - \Gamma\Lambda\text{Η}$. ἐποῖ δὲ ὡς $\Gamma\text{ΜΤ} : \Gamma\Omega\Lambda :: \overline{\text{Μ}\Gamma^2} : \overline{\Omega\Gamma^2}$, (η) καὶ διαιρεθέντος ὡς $\Gamma\text{ΜΤ} - \Gamma\Omega\Lambda : \Gamma\Omega\Lambda :: \overline{\text{Μ}\Gamma^2} - \overline{\Omega\Gamma^2} : \overline{\Omega\Gamma^2}$, καὶ ἐναλλάξ ὡς $\Gamma\text{ΜΤ} - \Gamma\Omega\Lambda : \overline{\text{Μ}\Gamma^2} - \overline{\Omega\Gamma^2} :: \Gamma\Omega\Lambda : \overline{\Omega\Gamma^2}$. ἐστὶ δὲ ὡς $\Gamma\Omega\Lambda : \overline{\Omega\Gamma^2} :: \Gamma\Lambda\text{Η} : \overline{\Gamma\Lambda^2}$. (θ) ἄρα καὶ ὡς $\Gamma\text{ΜΤ} - \Gamma\Omega\Lambda : \overline{\text{Μ}\Gamma^2} - \overline{\Omega\Gamma^2} :: \Gamma\Lambda\text{Η} : \overline{\Gamma\Lambda^2}$. (ι) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ διεχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς $\Gamma\text{ΜΤ} - \Gamma\Lambda\text{Η} : \overline{\text{Μ}\Gamma^2} - \overline{\Gamma\Lambda^2} :: \Gamma\Lambda\text{Η} : \overline{\Gamma\Lambda^2}$. διὸ δὴ καὶ ὡς $\Gamma\text{ΜΤ} - \Gamma\Omega\Lambda : \overline{\text{Μ}\Gamma^2} - \overline{\Omega\Gamma^2} :: \Gamma\text{ΜΤ} - \Gamma\Lambda\text{Η} : \overline{\text{Μ}\Gamma^2} - \overline{\Gamma\Lambda^2}$. (κ) καὶ ἐναλλάξ ὡς $\Gamma\text{ΜΤ} - \Gamma\Omega\Lambda : \Gamma\text{ΜΤ} - \Gamma\Lambda\text{Η} :: \overline{\text{Μ}\Gamma^2} - \overline{\Omega\Gamma^2} : \overline{\text{Μ}\Gamma^2} - \overline{\Gamma\Lambda^2}$. ἔκθῃ καὶ ὡς $\Omega\Delta\Lambda : \Lambda\text{ΡΚ} :: \overline{\text{Μ}\Gamma^2} - \overline{\Omega\Gamma^2} : \overline{\text{Μ}\Gamma^2} - \overline{\Gamma\Lambda^2}$. (λ) ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{\text{Μ}\Gamma^2} - \overline{\Omega\Gamma^2} = \zeta\Omega, \Omega\text{Μ}$, τὸ δὲ $\overline{\text{Μ}\Gamma^2} - \overline{\Gamma\Lambda^2} =$

Ο

 $\overline{\Gamma\Lambda^2} =$

(ε) Ὅρα τῇ Α' μ. τὴν δειξίν. (ζ) Κατὰ τὴν προλαβ. Σ > π.

(η) Κατὰ τὴν 19. τῇ 5'. (θ) Κατὰ τὴν 20. (ι) Κατὰ τὴν 1. καὶ 2. (κ) Κατὰ τὴν αὐτ. (λ) Κατὰ τὴν αὐτ.

$ΓΛ^2 = ζΛ \cdot ΛΜ$, (μ) ἔστι δὲ καὶ ὡς $ΩΔΑ : ΔΡΚ ::$
 $\overline{ΑΩ}^2 : \overline{ΚΛ}^2$, (ν) ὡς ἄρα $\overline{ΑΩ}^2 : \overline{ΚΛ}^2 :: ζΩ \cdot ΩΜ : ζΛ \cdot$
 $ΛΜ$, καὶ ἀνάπαλιν, ὡς $\overline{ΚΛ}^2 : \overline{ΑΩ}^2 :: ζΛ \cdot ΛΜ : ζΩ \cdot$
 $ΩΜ$.

ΣΤΑΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Αἱ $ΓΩ, ΓΜ, ΓΔ$ συνεχῶς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ τὸ
 $\overline{ΓΜ}^2 = ΓΩ \cdot ΓΔ$. ἔχεις τὴν δεῖξιν ἐν τῇ Α'. Συνεπ.
 τῆς εἰρημ. Ζ'. προτ.

Β'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς πέρατος $Σ$ ἐπὶ τῆς κορυφῆς $Α$ ἐπιζευ-
 χθῇ ἡ $ΣΑ$, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπέσῃ τῇ ἐφαπτο-
 μένῃ $ΜΤ$ κατὰ τὸ $Χ$, τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτῆς
 μέρος $ΜΧ$ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ $Ο$ ὑπὸ τῆς
 κατὰ κορυφὴν ἀπτομένης $ΑΔ$. ὅρα τὴν δεῖξ. τῆς
 Β'. Συνεπ. τῆς αὐτ. προτ.

Γ'. Ἡ ἄρα $ΣΜΔ$ Δευτεραία Διάμετρος ἔστι. καὶ γὰρ δι-
 χα τέμνει τὰς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένας $ΚΦ, ΑΕ$. καὶ
 ἔστιν ὡς $\overline{ΚΛ}^2 : \overline{ΑΩ}^2 :: ζΛ \cdot ΛΜ : ζΩ \cdot ΩΜ$. καὶ ἡ κα-
 τὰ κορυφὴν δὲ ἀπτομένη $ΑΔ$ αὐτὴν μὲν ἔτι τέμ-
 νει, ὥστε τὰς $ΓΩ, ΓΜ, ΓΔ$ συνεχῶς ἀνάλογον εἶναι,
 τὸ δὲ τῆς ἐφαπτομένης μέρος $ΜΧ$ δίχα κατὰ τὸ
 $Ο$ καὶ τοῖς λοιποῖς δὲ συμπτώμασι τῆς ἀρχικῆς Δια-
 μέτρως ὑπόκειται. διὸ δὴ καὶ ἡ ἄρθια αὐτῆς πλευ-
 ρὰ ἢ τετάρτη ἀνάλογός ἐστι τῶν $ζΩ \cdot ΩΜ, \overline{ΑΩ}^2$,
 καὶ $ΣΜ$.

Δ'. Ἡ διὰ τῆς κέντρου $Γ$ τῇ Τεταγμένῃ $ΕΩ$ διαχθεῖ-
 σα παράλληλος $σμ$, ἡ δευτέρα Διάμετρος ἔστι τῆς
 Δευτεραίας $ΣΜ$. κείθω γὰρ τὴν τῆς $ΣΜ$ ὀρθίαν
 πλευρὰν εἶναι τὴν $ΡΜ$. καὶ ἐπεὶ ὡς $ζΓ \cdot ΓΜ : \overline{εΓ}^2 ::$
 $ζΜ : ΡΜ$, (ξ) εἴπεν ὡς $\overline{εΓ}^2 : \overline{εΓ}^2 :: ζΜ : ΡΜ$.

ἔστι

(μ) Ἐκ τῆς ε'. τῆς Β'. δὴλ. (ν) Κατὰ τὴν ιδ'. τῆς ε'. (ξ) Ὅρα
 προτ., Συνέπ.

ἔστι δὲ ὡς μὲν $\overline{ST}^2 : \overline{ST}^2 :: \overline{SM}^2 : \overline{SM}^2$, καὶ ὡς $SM : PM :: \overline{SM}^2 : SM \cdot PM$, (ο) ἄρα καὶ ὡς $\overline{SM}^2 : \overline{SM}^2 :: \overline{SM}^2 : SM \cdot PM$. (π) τὸ ἄρα $\overline{SM}^2 = SM \cdot PM$. (ρ) ὡς ἄρα $SM : SM :: SM : PM$. (σ) ἢ ἄρα SM παραλλήλός ἐστι ταῖς Τεταγμέναις, (τ) καὶ δίχα κατὰ τὸ Γ τεμνομένη, (υ) καὶ μέσον λόγον ἔχουσα τῆς τε SM καὶ τῆς PM . διὸ δὴ δῆλον, ὅτι δευτέρα Διάμετρος ἐστι τῆς SM . (φ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Ἐὰν ἀπὸ τῶν περάτων τῶν συζυγῶν Διαμέτρων ἑφαπτόμεναί τῆς Ἑλλείψεως ἀχῶσι, τὰ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενα παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται.

Ἐωσαν συζυγεῖς Διάμετροι τῆς $IAK\psi$ Ἑλλείψεως αἱ IK , $A\psi$, καὶ SZ , ΔH . καὶ ἀπὸ τῶν περάτων αὐτῶν ἤχθωσαν ἑφαπτόμεναί τῆς τομῆς αἱ $Z\P$, $E\Omega$, $\Omega\P$, EZ , XO , ΦB , $X\Phi$, OB . λέγω, ὅτι τὸ $\Pi\Omega EZ$ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ $XO\Phi B$ παραλληλογράμμῳ πῖν. KB . χ . 1.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ SA . καὶ ἀπὸ μὲν τῆς S ἐπὶ τὴν IK τετάχθω ἡ $ΥΣ\Lambda$, ἀπὸ δὲ τῆς A ἐπὶ τὴν ΔH ἡ NAM . καὶ ἐκβληθεῖσαι αἱ KI , ΦX , ΔH συμβαλέτωσαν κατὰ τὰ Θ , Ω σημεία.

Ο 2

ΔΕΙ-

- (ο) Κατὰ τὴν $\alpha\delta$ $\tau\epsilon$ ϵ' . (π) Κατὰ τὴν ϵ $\tau\epsilon$ ϵ' . (ρ) Κατὰ τὴν β' $\tau\epsilon$ ϵ' . (σ) Κατὰ τὴν $\iota\zeta'$. $\tau\epsilon$ ϵ' . (τ) Ἐξ ὑποθ. (υ) Κατὰ τὸν ζ' . ὁρισμ. (φ) Ἐκ $\tau\epsilon$ $\kappa\delta'$. ὁρισμ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΓΩ : ΓΗ :: ΓΗ : ΓΜ, (χ) ὡς μὲν
 ΓΩ : ΓΗ :: ΓΩΤΡ : ΓΗΘΣ, ὡς δὲ ΓΗ : ΓΜ :: ΓΗΘΣ :
 ΓΜΝΣ, (ψ) ὡς ἄρα ΓΩΤΡ : ΓΗΘΣ : ΓΗΘΣ : ΓΜΝΣ.
 (ω) τὸ ἄρα ΓΩΤΡ, πρὸς τὸ ΓΜΝΣ διπλασίονα λό-
 γον ἔχει, ἥπερ τὸ ΓΩΤΡ, πρὸς τὸ ΓΗΘΣ. (α) διὰ
 τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ ὡς ΓΡ : ΓΙ :: ΓΙ : ΓΛ, καὶ τὸ
 ΓΩΤΡ πρὸς τὸ ΓΛΥΑ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ
 τὸ ΓΩΤΡ, πρὸς τὸ ΓΗΠΑ· ἔστι δὲ ὡς ΓΩΤΡ : ΓΜΝΣ ::
 ΓΩΤΡ : ΓΛΥΑ· (β) ἔστι γάρ τὸ ΓΜΝΣ = ΓΛΥΑ·
 ἐκότερον γὰρ διπλασίον τῷ αὐτῷ ΓΣΑ τριγώνῳ· (γ)
 ἄρα καὶ ὡς ΓΩΤΡ : ΓΗΘΣ :: ΓΩΤΡ : ΓΗΠΑ. (δ)
 ἔκῃν τὸ ΓΗΘΣ = ΓΗΠΑ. (ε) ἀλλὰ τὸ μὲν ΓΗΘΣ
 τεταρτημόριόν ἐστι τῷ ΧΟΒΦ, τὸ δὲ ΓΗΠΑ τῷ ΠΩΕΖ.
 τὸ ἄρα ΠΩΕΖ = ΧΟΒΦ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δὴ δῆλον, ὅτι καὶ αἱ τὰ πέρατα τῶν
 συζυγῶν Διαμέτρων ΙΚ, ΑΨ, καὶ ΣΞ, ΔΗ ἐπιζευγνύ-
 σαι ἐυθεῖαι ἴσα συνιστῶσι παραλληλόγραμμα τὰ ΙΑΚΨ,
 ΣΗΞΔ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει σύμπτωμα καὶ ταῖς συνεζευγ-
 μέναις Ὑπερβολαῖς, ταῖς ἐν ταῖς Ἀσυμπτώτοις, ὡς
 δῆλον ἐκ τῆς ΙΔ'. προτ. τῷ προλ. τμήμ.

ΛΗΜ.

(χ) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τῆς προλ. προτ. (ψ) Κατὰ τὴν α'.
 τῷ ε'. (ω) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (α) Κατὰ τὸ β' Πόρ. τὸ
 μετὰ τὸ ε'. (β) Κατὰ τὴν α'. τῷ ε'. (γ) Κατὰ τὴν α'.
 τῷ α'. (δ) Κατὰ τὸ ζ'. τῶν Θεωρημ. τῶν μετὰ τὸ ε'. (ε) Κα-
 τὰ τὴν β'. τῷ ε'.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν ἀπο τῶ ΨA Ἀξονος τῆς ΨNAM (χ. 2.)
 ἡ λλείψεως μέρος ληφθῇ πρὸς ταῖς κορυ-
 φαῖς Ψ, A , τὰ $\Psi T, A\Phi$, ὥσε το ὑπὸ ἐκατέ-
 ρα καὶ τῶ λοιπῶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τμή-
 ματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τε-
 ταρτημορίῳ τῶ ἐκ τῆς πλαγίας πλευρᾶς
 ΨA καὶ τῆς ὀρθίας $A\Lambda$ γινομένης ὀρθογωνίᾳ,
 εἴταν ἐὰν ᾖ τὸ $\Psi T \cdot TA = \frac{\Psi A \cdot A\Lambda}{4}$, καὶ τὸ $A\Phi \cdot \Phi\Psi =$
 $\frac{\Psi A \cdot A\Lambda}{4}$. ἀπὸ δὲ τῶν σημείων T, Φ ἐπὶ τὰ B, X ,
 καὶ ᾗ ἡ ἐφαπτομένη BMX ταῖς κατὰ κο-
 ρυφὴν ἐφαπτομέναις $\Psi B, AX$ συμβάλλει,
 εὐθεῖαν ἐπιζευχθῶσιν αἱ $TB, TX, \Phi X, \Phi B$.
 λέγω A' ὅτι αἱ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμεναι γω-
 νίαι, αἱ μὲν πρὸς τοῖς T, Φ σημείοις, εἴταν αἱ
 $BTX, B\Phi X$ ὀρθαί εἰσιν, αἱ δὲ ὑπὸ τῶν $B\Gamma, \Phi X$
 ὑποτεινόμεναι ἴσαι ἀλλήλαις, εἴταν ἡ μὲν
 BXT τῇ $\Gamma\Phi T$, ἡ δὲ ΦTX τῇ ΦBX . β'. ὅτι ἡ
 ἀπὸ τῆς συμπτώσεως H ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν M
 ἐπιζευχθεῖσα HM πρὸς ὀρθάς ἐστὶ τῇ ἐφαπ-
 τομένη BMX .

Ἡ δὲ αἵτις τῶ A' , μέρος ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ τῶ A' , μέρος τῶ
 Λήμματος τῶ πρὸ τῆς H' , προτ. τῶ προλ. τμήμ. εἰπόν
 δὲ, ἄρα καὶ ἡ $A'TX + B'T\Psi$, πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἴση μὲν
 ὅς τῃ.

ὁρθῇ. ἐκὼν καὶ ἡ ΒΥΧ ἴση μιᾷ ὁρθῇ. (ζ) διὰ τὰ αὐτὰ, κτ. Ἐν δὲ τῇ τῆ Β'. μέρεσ ἀποδείξει μετὰ τὸ εἰπεῖν, ὡς ἄρα $IB : IX :: \Psi K : KA$, εἰπέ, καὶ συντεθέντα, ὡς $BX : XI :: \Psi A : KA$. ἔστι δὲ ὡς $\Psi A : KA :: \Psi X : \Delta X$, καὶ ὡς $\Psi X : \Delta X :: BX : MX$. (η) ἄρα καὶ ὡς $BX : XI :: BX : MX$. ἡ ἄρα $XI = MX$. τὸ ὅλον τῷ μέρει, κτ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, εἰὰν ἀπὸ τῶν ληφθέντων τῆ Ἀξονος σημείων ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν ἐπιζευχθῶσι δύο εὐθεῖαι, αἱ ὑπ' αὐτῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιεχόμεναι γωνία ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐσὼ τὰ ληφθέντα τῆ Ἀξονος σημεία τὰ Υ, Φ καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΜ, ΦΜ. λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΒΜΥ ἴση ἐστὶ τῇ ΧΜΦ.

Ὅρα τὴν δεξιὴν τῆς Η'. προτ. τῆ προλ. τμήμ. μὲν τὰ δὲ τὸ εἰπεῖν, ἡ δὲ ΦΜΧ, πρόωδες, ἴση τῇ ΦΗΧ. ἔστι δὲ ἡ ΦΗΧ = ΒΗΥ. ἄρα καὶ ἡ ΒΜΥ = ΧΜΦ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ὅρισθήσονται τὰ Υ καὶ Φ σημεία, εἰὰν πρὸς ὁθῶς τῷ Ἀξονι διαχθῇ ἡ δευτέρα Διάμετρος ΓΝ καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ν, διαστήματι δὲ ἴσῳ τῇ Γ κύκλος γρασθῇ, διατέμνον τὴν ΨΑ κατὰ τὰ Υ καὶ Φ σημεία. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΝΥ. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{NT}^2 = \overline{NG}^2 + \overline{ΓΥ}^2$, (θ) ἔστι δὲ τὸ $\overline{NT}^2 = \overline{Γ\Psi}^2$, τὸ αὖ $\overline{Γ\Psi}^2 = \overline{NG}^2 + \overline{ΓΥ}^2$. ἀλλὰ τὸ $\overline{Γ\Psi}^2 = \overline{ΓΥ}^2 + A$
Υ

(ζ) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν ιγ'. τῇ α'. (η) Ἐκ θ'. τῇ ε'. δηλ. (θ) Κατὰ τὴν μζ'. τῇ α'.

ΥΨ. (ι) τὸ ἄρα $\overline{NG}^2 + \overline{GY}^2 = \overline{GY}^2 + \Lambda\Upsilon$. ΥΨ. κοινὸν ἀφηρέθω τὸ $\overline{GY}^2$. τὸ ἄρα $\overline{NG}^2 = \Lambda\Upsilon$. ΥΨ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπιζευχθείσης τῆς ΝΦ, δειχθήσεται τὸ $\overline{NG}^2 = \Psi\Phi$. ΦΑ. ἐστὶ δὲ τὸ $\overline{NG}^2$ ἴσον τεταρτημορίῳ τῷ ΨΑ. ΑΛ, (κ) ἐκάτερον ἄρα τῶν ΛΥ. ΥΨ, ΨΦ. ΦΑ ἴσον τεταρτημορίῳ τῷ ΨΑ. ΑΛ. τὰ ἄρα Φ, Υ σημεῖά εἰσι τὰ ζητούμενα. (λ)

Β'. Ἀχθήσεται δὲ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐν αὐτῇ σημείῳ Μ, εἰάν ἐπὶ τὰ Υ, Φ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΜΥ, ΜΦ. τῆς δὲ ἐτέρας αὐτῶν ἐπὶ τὸ Ζ ἐκβληθείσης, ἡ ΦΜΖ γωνία δίχα τμηθῇ ὑπὸ τινος εὐθείας, οἷον τῆς ΧΜΒ. αὕτη μὲν γὰρ ἐφάπτεται τῆς τομῆς. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΧΜΖ = ΧΜΦ, τῇ δὲ ΧΜΖ = ΒΜΥ. ἄρα καὶ ἡ ΧΜΦ = ΒΜΥ. ἡ ἄρα ΧΜΒ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὰ Υ, Φ σημεῖα Ἑξίας, ἢ Ὀμφαλοὶ τῆς Ἑλλείψεως λέγονται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Αἱ ἀπὸ τοῦ τυχόντος τῆς Ἑλλείψεως σημείας ἐπὶ τὰς Ἑξίας ἐπιζευγνύμεναι δύο εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶ τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ.

Ἐστω τυχόν μὲν σημεῖον τῆς Ἑλλείψεως τὸ Μ, Ἑξίαι δὲ αἱ Υ, Φ. καὶ ἐπεζευχθῶσαν αἱ ΥΜ, ΦΜ. λέγω, ὅτι ἡ ΥΜ + ΦΜ = ΨΑ. χ. β.

Ἡ δεῖξις ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ τῆς Θ'. προτ. τῷ προλ. τμήμ. ἀρχόμενος δὲ αὐτῆς εἰπὲν, ἐπεὶ ἡ ΥΜΠ = ΦΜΧ,

Ο 4

ἡ

(ι) Κατὰ τὴν ε. τῷ β'. (κ) Ἐκ τῶν κδ'. ἔρισμ. δὴλ. (λ) Ἐκ τῆς προλ. ζ'. προτ. δὴλ.

ἡ δὲ ΦΜΧ = ΜΠΥ, ἡ ἄρα κτ. ἀντὶ δὲ τῆς, κοινῇ προσκείδω ἡ ΨΤΧ, λέγε, ἡ ΥΤΑ. ἢ κατωτέρω δὲ, ἀντὶ τῆς, ἄρα ἡ ΥΜ = ΦΜ, εἰπὲ, ἡ ΥΜ + ΦΜ διπλασία τῆς ΤΝ + ΝΓ, εἶπεν τῆς ΤΓ. διπλασία δὲ τῆς ΤΓ καὶ ἡ ΨΑ. ἄρα ἡ ΥΜ + ΦΜ = ΨΑ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐντεῦθεν περίκειται μέθεδος τῆς γράφειν τὴν Ἑλλησπιν, δοθείσης τῆς πλαγίας αὐτῆς πλευρᾶς καὶ τῶν Ἑσιῶν ἀπόσηματος. Ἐσὼ μὲν γὰρ πλαγία πλευρὰ τῆς γραφεισομένης Ἑλλείψεως ἡ ΒΑ, (χ. 4.) ἀπόσημα δὲ τῶν Ἑσιῶν ἡ ΦΥ. καὶ τῆς νήματος ΦΜΥ, ἴσῃ τῇ ΒΑ, τὸ μὲν τῶν περάτων ἐπὶ τῷ Φ, τὸ δὲ ἐπὶ τῷ Υ πεπήχθω. ἥλος δὲ ὁ ΜΔ ἐν δοθέν τὸ νῆμα τείνον, ὁρθὸς πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπὶ πεδον περιεγέδω. λέγω δὴ ὅτι ὁ ἥλος ΜΔ τὴν Ἑλλησπιν καταγράφει. ἐν παντὶ γὰρ σημείῳ τῷ ὑπ' αὐτῆς γραφεμένῳ ἡ ΦΜ + ΜΥ = ΨΑ. ἐξ ὧν δῆλον τὸ προκείμενον.

Β'. Τῶν αὐτῶν δοθέντων ἢ συνεχῇ ἔξει περισσάδα σημεῖα, δι' ὧν ἡ Ἑλλείψις ἔξει. τμηθείσης γὰρ αὐτῇ εὐτυχῇ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΒΑ κατὰ τὸ Π, κέντρῳ μὲν θατέρω τῶν Ἑσιῶν, εἶπεν τῷ Φ, διαστήματι δὲ τῷ ἑτέρῳ τῶν τμημάτων τῷ ΒΠ κύκλον γεγράφθαι ὡσαύτως κέντρῳ μὲν τῇ ἑτέρῳ τῶν Ἑσιῶν Υ, διαστήματι δὲ τῷ λοιπῷ μέρει ΠΑ ἕτερος γεγράφθαι κύκλος, τὸν πρῶτον διατέμνον κατὰ τὸ σημεῖον, ὅτεν τὸ Μ. λέγω δὴ, ὅτι διὰ τῆς Μ ἡ Ἑλλείψις ἔξει. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΥΜ, ΦΜ. καὶ εἰπὲ ἡ μὲν ΦΜ = ΒΠ, ἡ δὲ ΥΜ = ΑΠ. ἡ ἄρα ΦΜ + ΥΜ = ΒΠ + ΠΑ = ΨΑ. ἐκέν τὸ Μ Ἑλλείψεως σημεῖον ἐστὶ, τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ καὶ ἄλλα τοιαῦτα περιδιήκοντα σημεῖα.

Γ

Γ'. Ἐάν ἀπὸ τῆς ἐτέρας τῶν Ἑσίων Φ (χ. 3.) καθέτος τῇ ἐφαπτομένῃ ΧΠ ἀχθῇ ἢ ΦΙ, τῇ ἀπὸ τῆς ἐτέρας Ἑσίας Υ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπεζευγμένη καὶ ἐκβεβλημένη ΥΙ κατὰ τὸ Ι συμβάλλουσα, ἔσεται ἡ ΥΙ ἢ ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπολαμβανόμενη ἴση τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ ΨΑ. χρῶ τῇ δειξῇ τῆς Γ'. συνεπ. τῆς εἰρημ. Θ'. προτ. ἀντὶ δὲ τῆς, ἀλλὰ ἡ ΥΜ-ΦΜ, εἰπέ, ἀλλ' ἡ ΥΜ+ΦΜ=ΨΑ, ἄρα ἡ ΥΜ+ΜΙ, εἴτεν ἡ ΥΙ=ΨΑ.

Δ'. Ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ Δ'. τῆς εἰρημ. Θ'.

Ε'. Ἐάν διὰ τῆς κέντρος Γ (πίν. ΚΓ'. χ. 1.) εὐθεῖα ἀχθῇ ἡ ΣΠ τῇ μὲν ἐφαπτομένῃ ΡΚ παράλληλος, τῇ δὲ ἀπὸ τῆς Ἑσίας Φ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπεζευγμένη ΦΜ κατὰ τὸ Τ συμβάλλουσα, ἔσεται τὸ ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβανόμενον μέρος ΜΤ ἴσον τῷ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἡμίσει ΓΑ. ἀπὸ γὰρ τῆς ἐτέρας Ἑσίας Υ ἐπεζεύχθω μὲν ἡ ΥΜ, ἡχθῶ δὲ ἡ ΤΗ ὁποτέρᾳ τῶν ΡΚ, ΣΠ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ ἡ γωνία ΥΜΚ=ΦΜΡ, (μ) ἐστὶ δὲ ἡ μὲν ΥΜΚ=ΗΥΜ, ἡ δὲ ΦΜΡ=ΜΗΥ, (ν) ἄρα καὶ ἡ ΗΥΜ=ΜΗΥ. διὸ καὶ ἡ ΜΥ=ΜΗ. (ξ) ἐπεὶ δὲ ὡς ΦΥ:ΦΓ::ΦΗ:ΦΤ, (ο) ἐστὶ δὲ ἡ ΦΥ διπλασία τῆς ΦΓ, ἄρα καὶ ἡ ΦΗ διπλασία τῆς ΦΤ, εἴτεν τῆς ΤΗ. ἐστὶ δὲ ἡ ΦΜ+ΜΥ=ΦΗ+ΗΜ+ΜΥ=ΦΗ+2ΗΜ. ἡ ἄρα ΦΜ+ΜΥ διπλασία τῆς ΤΗ+ΗΜ, ἥτοι τῆς ΤΜ. ἀλλ' ἡ ΦΜ+ΜΥ=ΨΑ, (π) ἄρα καὶ ἡ ΨΑ διπλασία τῆς ΜΤ. ἀλλ' ἡ ΨΑ διπλασία καὶ τῆς ΓΑ, ἡ ἄρα ΜΤ=ΓΑ.

Ἡ μὲν Ζ'. ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ Ε'. τῆς εἰρημ. Θ'. προτ.

Ἡ δὲ Ζ'. ἡ αὐτὴ τῇ Ζ'. τῆς αὐτῆς. ἀντὶ δὲ τῆς καὶ διαρεθόντα, εἰπέ, καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ΓΑ:ΓΦ::

Ο 5

ΓΤ:

(μ) Κατὰ τὴν η'. τῆς δὲ τῆς τμήμ. (ν) Κατὰ τὴν κβ'. τῆς α'. (ξ) Κατὰ τὴν ε'. τῆς α'. (ο) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (π) Κατὰ τὴν προκ. προτ.

ΓΤ: ΓΑ, ἢ κατὰ ἀνατροφὴν λόγῳ ὡς ΓΑ: ΑΦ::
 ΓΤ: ΑΤ. καὶ ἐναλλάξ ὡς ΓΑ: ΓΤ:: ΑΦ: ΑΤ,
 ἔστι δὲ κτ. χ. 2.

Η'. Τῷ ΤΜΦ τριγώνῳ ἢ ΤΦ πλευρὰ μείζων ἐστὶ τῆς
 ΦΜ. ἐπεὶ μὲν γὰρ ὡς ΦΑ: ΑΤ:: ΒΦ: ΒΤ, (ρ)
 ἔστι δὲ ἢ ΦΑ=ΑΙ, (σ) ὡς ἄρα ΑΙ: ΑΤ:: ΒΦ:
 ΒΤ. ἀλλ' ἢ ΒΤ > ΒΦ. ἄρα ἢ ἡ ΑΤ μείζων τῆς
 ΑΙ. ἔστι δὲ ὡς ΑΤ: ΑΙ:: ΤΦ: ΦΜ. (τ) ἄρα καὶ
 ἡ ΤΦ μείζων τῆς ΦΜ.

Ἡ μὲν Θ'. ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ Η'. τῆς Θ'. προτ. τῷ
 προλ. τμήμ.

Ἡ δὲ Ι'. τῇ Θ'. τῆς αὐτῆς, ἀντὶ δὲ τῷ εἰπεῖν, τὴν ΦΜ
 μείζονα τῆς ΤΦ, λέγε τὴν ΤΦ μείζονα τῆς ΦΜ.
 καὶ πάλιν ἀντὶ τῷ, ἥτε ἐλάσσων ΤΦ, εἰπὲ, ἥτε
 μείζων ΤΦ.

Ἡ δὲ ΙΑ'. τῇ Ι'. τῆς αὐτῆς. ἀντὶ δὲ τῷ, ἐκβεβλή-
 θωσαν αἱ ΦΩ, ΓΜ, (χ. 3.) εἰπὲ αἱ ΦΩ, ΥΡ, καὶ
 συμβαλλέτωσαν κατὰ τὸ Δ. μετὰ δὲ τὸ εἰπεῖν, καὶ
 ΦΡ. ΡΕ=ΦΩ. ΠΡ, εἰπὲ, προσκείθω τῷ μὲν ΡΥ. ΡΕ
 τὸ ΦΡ. ΡΕ, τῷ δὲ ΥΗ. ΠΡ τὸ ΦΩ. ΠΡ. ἐκθὲν τὸ ΡΥ.
 ΡΕ+ΦΡ. ΡΕ=ΥΗ. ΠΡ+ΦΩ. ΠΡ, εἴτεν τὸ ΡΥ+ΦΡ.
 ΡΕ=ΥΗ+ΦΩ. ΠΡ. ἀλλὰ ΡΥ+ΦΡ=ΨΝ. (υ) τὸ ἄρα
 ΨΝ. ΡΕ=ΥΗ+ΦΩ. ΠΡ. ἐπεὶ δὲ, κτ. ἀντὶ δὲ τῷ
 ἐκθὲν ἢ ΥΗ-ΦΩ, λέγε, ἢ ΥΗ+ΦΩ διπλασία
 τῆς ΓΣ+ΣΜ, εἴτεν κτ. καὶ ἀντὶ τῷ ὡς ἐναλλάξ,
 εἰπὲ ὡς ἐκτὸς τῇ ἐντός. ἀντὶ δὲ τῷ ἔστι δὲ ἡ ΠΟΡ=
 ΙΓΖ, εἰπὲ, ἔστι δὲ ἡ ΠΟΡ=ΙΜΓ.

ΙΒ'.

(ρ) Κατὰ τὴν ἡ. Συνέπ. τῆς δ'. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (σ) Κατὰ τὴν
 προλ. ε'. Συνέπ. (τ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (υ) Κατὰ τὴν
 προκ. πρότ.

ΙΒ'. Αἱ ΖΦ, ΖΠ, ΖΥ συνεχῇ ἀρμονικὸν λόγον πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν, εἴτεν ἐσὶν, ὡς ΠΦ : ΠΥ : ΖΦ : ΖΥ. ἔχεις τὴν δεῖξιν ἐν τῇ ΙΑ' : Συνεπ. τῆς εἰρημ. Θ'. προτ.

ΙΓ'. Ἐὰν ἀπὸ δύο τῆς ΨΡΑΗ ἑλλείψεως σημείων τῶν Ρ, Η ἐπὶ τὰς Ἐσίας Υ, Φ (πίν. ΚΔ'. χ. 1.) εὐθεῖαν ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΡΦ, ΡΥ, καὶ ΗΦ, ΗΥ, ἀχθῶσι δὲ δι' αὐτῶν καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΡΝ, ΗΤ, ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ν συμβάλλεσθαι, ἢ ὑπεροχὴ τῶν ὑπὸ τῶν εἰρημένων εὐθειῶν περιεχομένων γωνιῶν ΡΦΗ, ΡΥΗ διπλασία ἐσται τῆς ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχομένης ΡΝΗ γωνίας. εἴτεν ἔσται ἡ ΡΦΗ-ΡΥΗ = 2ΡΝΗ. ἐπεὶ γὰρ ἡ γωνία ΥΡΚ = ΡΥΖ + ΡΖΥ, (φ) ἔστι δὲ ἡ ΥΡΚ = ΦΡΖ, (χ) ἡ ἄρα ΦΡΖ = ΡΥΖ + ΡΖΥ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΡΖΥ. ἐκὲν ἡ ΦΡΖ + ΡΖΥ = ΡΥΖ + 2ΡΖΥ. ἀλλ' ἡ μὲν ΦΡΖ + ΡΖΥ = ΡΦΥ, (ψ) ἡ δὲ ΡΖΥ = ΤΖΝ. (ω) ἡ ἄρα ΡΦΥ = ΡΥΖ + 2ΤΖΝ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ΗΦΥ = ΗΥΦ + 2ΤΖΝ. ἡ ἄρα ΡΦΥ + ΗΦΥ, ἥτοι ἡ ΡΦΗ = ΡΥΖ + ΗΥΦ + 2ΤΖΝ + 2ΤΖΝ. ἀλλ' ἡ μὲν ΡΥΖ + ΗΥΦ = ΡΥΗ, ἡ δὲ 2ΤΖΝ + 2ΤΖΝ = 2ΡΝΗ. (α) ἡ ἄρα ΡΦΗ = ΡΥΗ + 2ΡΝΗ. κοινὴ ἀφηρεῖσθω ἡ ΡΥΗ. ἡ ἄρα ΡΦΗ - ΡΥΗ = 2ΡΝΗ.

ΙΔ'. Ἐὰν ἄρα διὰ τῆς Ἐσίας Φ διαχθῇ τις εὐθεῖα ἡ ΕΗ, τῇ Ε'λλείψει κατὰ τὰ Ε καὶ Η σημεία συμβάλλεσθαι, ἀφ' ἑκατέρου δὲ αὐτῶν ἐφαπτομένη ἀχθῇ ἥτε ΕΛ καὶ ἡ ΗΛ, ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία ΕΛΗ ὀξεία ἔσται. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΕΦΥ, ΗΦΥ ἴσαι δυ-

σιν

(φ) Κατὰ τὴν λβ'. τξ α'. (χ) Κατὰ τὴν η'. τξ δε τξ τμήμα.
(ψ) Κατὰ τὴν ρηθ. λβ'. (ω) Κατὰ τὴν ιε. τξ α'. (κ) Κατὰ τὴν λβ'. τξ κ'.

σὺν ὀρθαῖς, (β) ἀφαιρεθείσης ἀπ' αὐτῶν τῆς ΕΥΗ, τὸ λοιπὸν ἔλαττον ἔσται δύο ὀρθῶν. διὸ καὶ τὸ τε λοιπὸν ἡμισυ ἔλαττον ὀρθῆς. ἀλλὰ τῷ τε λοιπῷ ἡμίσει, ὅπερ ἐστὶ τῇ ὑπεροχῇ, ἴση ἡ ΕΛΗ. (γ) ἢ ἄρα ΕΛΗ ἐλάσσων ὀρθῆς, ὅτεν ὀξεία.

ΙΕ'. Τὸ τῶν Ἑσιῶν ἀπόστημα ΦΥ (πίν. ΚΓ'. χ. 4.) μίσησον λόγον ἔχει τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ, καὶ τῆς ὑπεροχῆς ΨΖ, καθ' ἣν ἡ πλαγία ΨΑ τὴν ὀρθίαν ΑΖ ὑπερέχει, ὅτεν ἐστὶν ὡς ΨΑ: ΦΥ :: ΦΥ: ΨΖ. ἐπεὶ γάρ τὸ ΨΦ. ΦΑ = ΨΑ. ΑΖ, (δ) ἐκατέρω ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῆς ΓΑ², ἔσται $4 \overline{ΓΑ}^2 - \Psi\Phi. \Phi\Lambda = \overline{ΓΑ}^2 - \Psi\Lambda. \Lambda\Lambda$. ἀλλὰ τὸ $\overline{ΓΑ}^2 - \Psi\Phi. \Phi\Lambda = \overline{Γ\Phi}^2$. (ε) τοῦ ἄρα $4 \overline{Γ\Phi}^2 = \overline{ΓΑ}^2 - \Psi\Lambda. \Lambda\Lambda$. διὸ δὴ καὶ τὸ $\overline{Γ\Phi}^2 = \overline{\Psi\Lambda}^2 - \Psi\Lambda. \Lambda\Lambda$. ἀλλὰ τὸ $\overline{\Psi\Lambda}^2 - \Psi\Lambda. \Lambda\Lambda = \overline{\Lambda\Phi}^2$. (ζ) τὸ ἄρα $\overline{Γ\Phi}^2 = \Psi\Lambda. \Psi\Lambda$. ὡς ἄρα ΨΑ: ΓΦ :: ΓΦ: ΨΖ (η)

ΙΣ'. Τὸ ἀπὸ τῆς ἀποσήμετος τῶν Ἑσιῶν τετραγώνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου λόγον ἔχει, ὃν ἡ ῥηθείσα ὑπεροχὴ ΨΖ, πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευρὰ ΑΖ, ὅτεν ἐστὶν ὡς $\overline{Γ\Phi}^2: \overline{ΕΒ}^2:: \Psi\Lambda: \Lambda\Lambda$. ἐπεὶ γάρ τὸ μὲν $\overline{Γ\Phi}^2 = \Psi\Lambda. \Psi\Lambda$, (θ) τὸ δὲ $\overline{ΕΒ}^2 = \Psi\Lambda. \Lambda\Lambda$, (ι) ἔστιν ἄρα ὡς $\overline{Γ\Phi}^2: \overline{ΕΒ}^2:: \Psi\Lambda: \Psi\Lambda$. ΑΖ, ἀλλ' ὡς ΨΑ. ΨΖ: ΨΑ. ΑΖ :: ΨΖ: ΑΖ. (κ) ὡς ἄρα $\overline{Γ\Phi}^2: \overline{ΕΒ}^2:: \Psi\Lambda: \Lambda\Lambda$.

ΙΖ'. Ἐὰν ἀπὸ τῶν Ἑσιῶν Φ, Υ (πίν. ΚΔ'. χ. 2.) ἐπὶ τὸ τυχὸν τῆς Ἐκείψεως σημεῖον Μ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΦΜ, ΥΜ, τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθο-

(β) Κατὰ τὴν ιγ'. τῆ α'. (γ) Ἐκ τῆς προλ. Συνεκ. δὴλ. (δ) Κατὰ τὸ Λημ. τὸ πρὸ τῆς ἡ. τῆ δὲ τῆ τμήμ. (ε) Ἐκ τῆς ε'. τῆ β'. δὴλ. (ζ) Ἐκ τῆς β'. τῆ β'. δὴλ. (η) Κατὰ τὴν ιε'. τῆ ε'. (θ) Κατὰ τὴν προλ. Συνεκ. (ι) Κατὰ τὸν κδ'. ὀρισμ. (κ) Κατὰ τὴν α'. τῆ ε'.

ὁρθογώνιον ἴσον ἔσται τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς
 ἡμιδιαμέτρου ΓΗ τῆς δευτέρας Διαμέτρου τῆς Δευ-
 τεραίας ΜΓ, τῆς ἀπὸ τῆς Μ διὰ τῆς κέντρου Γ ἀχ-
 θείσης. ὅρα τὴν δοξὴν τῆς ΙΕ'. Συνεπ. τῆς προσηρημ.
 Θ'. προτ. μετὰ δὲ τὸ εἰπεῖν τὸ, τάτων κειμένων,
 πρόδωκε τὰ δὲ ἡχθῶ ἀπὸ τῆς Η ἐφαπτομένη τῆς
 Ἐλλείψεως ἡ ΗΡ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Η, Β, Μ
 τεταχθῶσαν αἱ ΗΙ, ΗΠ, ΒΛ, ΒΔ, ΜΟ, ΜΕ. καὶ
 ἐπεὶ ὡς ΓΗ : ΓΛ :: ΓΡ : ΓΒ' (λ) παραλλήλους γὰρ
 ἡ ΒΛ τῇ ΗΡ' (μ) καὶ ὡς ΓΡ : ΓΒ :: ΓΠ : ΓΗ,
 (ν) ἄρα καὶ ὡς ΓΗ : ΓΛ :: ΓΒ : ΓΠ, τὸ ἄρα ΓΗΠ
 τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΛΒ τριγώνῳ. (ξ) ἀλλὰ τὸ μὲν
 ΓΗΠ = ΓΙΗ, τὸ δὲ ΓΛΒ = ΓΔΒ. (ο) τὸ ἄρα ΓΙΗ =
 ΓΔΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ ὡς ΓΜ : ΓΔ :: ΓΚ :
 ΓΒ, καὶ ὡς ΓΚ : ΓΒ :: ΓΒ : ΓΕ, ἔσεται καὶ ὡς
 ΓΜ : ΓΔ :: ΓΒ : ΓΕ. διὸ τὸ ΓΜΕ = ΓΔΒ. ἀλλὰ
 τὸ ΓΔΒ = ΓΙΗ, ὡς δέδεικται. τὸ ἄρα ΓΜΕ =
 ΓΙΗ. ἔστι δὲ ὡς ΖΜΟ : ΟΜΓ :: ΖΟ : ΟΓ. (π) ὡς
 δὲ ΖΟ : ΟΓ :: ΖΜ : ΜΚ, καὶ ὡς ΖΜ : ΜΚ :: ΓΕ :
 ΕΚ, (ρ) καὶ ὡς ΓΕ : ΕΚ :: ΓΜΕ : ΕΜΚ. (σ) ὡς
 ἄρα ΖΜΟ : ΟΜΓ :: ΓΜΕ : ΕΜΚ. (τ) ἀλλὰ τὸ
 ΓΜΕ = ΓΜΟ = ΓΙΗ. ὡς ἄρα ΖΜΟ : ΓΙΗ :: ΓΙΗ :
 ΕΜΚ. ἔστι δὲ τὸ ΖΜΟ ὅμοιον τῷ τε ΓΙΗ, (ἡ γὰρ
 ΟΖΜ = ΓΙΗ, διὰ τὰς παραλλήλους ΖΚ, ΓΗ· ἡ δὲ
 ΜΟΖ = ΗΙΓ, διὰ τὰς παραλλήλους ΜΟ, ΗΙ.) καὶ τῷ
 ΕΜΚ. διὸ δὴ καὶ τὰ ΓΙΗ, ΕΜΚ καὶ ἀλλήλοις ὅμοια. (υ)
 ὡς

- (λ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (μ) Ὅρα τὴν δ'. Συνεπ. τῆς ε'. τῆς
 δευτέρας τμήματος. (ν) Κατὰ τὴν δ'. Συνεπ. τῆς ε'. τῆς δευτέρας τμήματος.
 (ξ) Κατὰ τὴν ιε'. τῆς ε'. (ο) Κατὰ τὴν λδ'. τῆς α'. (π) Κα-
 τὰ τὴν α'. τῆς ε'. (ρ) Κατὰ τὴν β'. τῆς ε'. (σ) Κατὰ τὴν α'.
 τῆς ε'. (τ) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (υ) Κατὰ τὴν κα'. τῆς ε'.

ὡς ἄρα $ZMO : ΓΗ :: \overline{ZM}^2 : \overline{ΓΗ}^2$, καὶ ὡς $ΓΗ : ΕΜΚ :: \overline{ΓΗ}^2 : \overline{ΜΚ}^2$. (φ) ἔκθεν καὶ ὡς $\overline{ZM}^2 : \overline{ΓΗ}^2 :: \overline{ΓΗ}^2 : \overline{ΜΚ}^2$. (χ) ἄρα καὶ ὡς $ZM : ΓΗ :: ΓΗ : ΜΚ$. (ψ) Τὸ ἄρα $ZM \cdot ΜΚ = \overline{ΓΗ}^2$. (ω) ἄλλα τὸ $ZM \cdot ΜΚ = ΦΜ \cdot ΥΜ$, ὡς δέδεικται. τὸ ἄρα $ΦΜ \cdot ΥΜ = \overline{ΓΗ}^2$.

ΙΗ'. Τὸ ὑπὸ τῶν ΥΡ, ΡΦ, τῶν ἀπὸ τῶν Ἑξιδῶν Υ, Φ (πίν. ΚΓ'. χ. 4.) ἐπὶ τὸ τυχὸν σημεῖον Ρ ἐπερ-
 ζευγμένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον σὺν τῷ τετρα-
 γώνῳ $\overline{ΓΡ}^2$, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτεραίας
 Διαμέτρου ΡΘ, τῆς ἀπὸ τῆς Ρ διὰ τῆς κέντρου Γ
 ἀχθείσης, ἴσον ἐστὶ τῇ ὑπερχῇ καθ' ἣν τὸ διπλα-
 σιον τῆς τετραγώνου, τῆς ἀπὸ τῆς ΓΑ, τῆς ἡμισείας
 τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ, ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς
 ἡμίσεως τῆς ἀποσήματος ΥΦ τῶν Ἑξιδῶν τετραγώ-
 νων. ἔτεν τὸ $ΥΡ \cdot ΡΦ + \overline{ΓΡ}^2 = 2\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΤΓ}^2$. ἐπεὶ
 γὰρ $ΥΡ + ΡΦ = ΨΑ$, (α) τῶν ΥΡ, ΡΦ ἐπ' ἐυθείας
 κεμένων, ἔσεται τὸ $\overline{ΥΡ}^2 + \overline{ΡΦ}^2 + 2ΥΡ \cdot ΡΦ = \overline{ΨΑ}^2$.
 (β) ἀχθείσης δὲ ἀπὸ τῆς Ρ τῆς ΡΚ πρὸς ὀρθάν
 τῇ ΨΑ, τὸ μὲν $\overline{ΥΡ}^2 = \overline{ΤΓ}^2 + \overline{ΓΡ}^2 + 2ΥΓ \cdot ΓΚ$,
 (γ) τὸ δὲ $\overline{ΡΦ}^2 = \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΦ}^2 - 2ΓΦ \cdot ΓΚ$. (δ) τὸ
 ἄρα $\overline{ΥΡ}^2 + \overline{ΡΦ}^2 = 2\overline{ΓΡ}^2 + 2\overline{ΤΓ}^2$. ἔκθεν τὸ $2\overline{ΓΡ}^2 +$
 $2\overline{ΤΓ}^2 + 2ΥΡ \cdot ΡΦ = \overline{ΨΑ}^2$. διὸ καὶ τὸ $\overline{ΥΡ}^2 + \overline{ΤΓ}^2 +$
 $ΥΡ \cdot ΡΦ = 2\overline{ΓΑ}^2$. καὶ κοινῶς ἀφαιρεθέντος τῆς $\overline{ΤΓ}^2$,
 ἔσεται τὸ $ΥΡ \cdot ΡΦ + \overline{ΓΡ}^2 = 2\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΤΓ}^2$.

ΙΘ'. Ταῦ τετράγωνα τὰ ἀπὸ δύο συζυγῶν Διαμέτρων
 ὁμῶς ληφθέντα ἴσα εἰσὶ τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ
 δύο συζυγῶν Διαμέτρων ὁμῶς ληφθεῖσιν, ἔτεν τὸ
 $\overline{ΨΑ}^2 +$

(φ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῆς ε'. (χ) Κατὰ τὴν ιηθ. ε'. (ψ) Κατὰ τὴν
 ζ'. τῶν τῆς ε' θεωρ. (ω) Κατὰ τὴν ιζ'. τῆς ε'. (α) Κατὰ τὴν
 θ'. τῆς δε τῆς τμήμα. (β) Κατὰ τὴν δ'. τῆς β'. (γ) Κατὰ τὴν
 ιβ'. τῆς β'. (δ) Κατὰ τὴν ιγ'. τῆς β'.

$$\begin{aligned} \overline{\Psi A}^2 + \overline{EB}^2 &= \overline{PO}^2 + \overline{HD}^2. \text{ ἐπεὶ γὰρ τὸ } \overline{ΓΡ}^2 + \\ \overline{ΥΡ} \cdot \overline{ΡΦ} &= 2\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΤΓ}^2, \text{ (ε) ἔστι δὲ τὸ μὲν } \overline{ΥΡ} \cdot \overline{ΡΦ} = \\ \overline{ΤΗ}^2, \text{ (ζ) τὸ δὲ } \overline{ΓΑ}^2 &= \overline{ΓΦ}^2 + \Psi\Phi \cdot \Phi\Lambda, \text{ (η) τὸ ἄρα} \\ \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΗ}^2 &= \overline{ΓΑ}^2 + \overline{ΓΦ}^2 + \Psi\Phi \cdot \Phi\Lambda - \overline{ΥΓ}^2. \text{ ἀλ-} \\ \text{λὰ τὸ μὲν } \overline{ΓΦ}^2 &= \overline{ΤΓ}^2, \text{ τὸ δὲ } \Psi\Phi \cdot \Phi\Lambda = \overline{ΓΕ}^2. \text{ (θ)} \\ \text{τὸ ἄρα } \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΗ}^2 &= \overline{ΓΑ}^2 + \overline{ΓΕ}^2. \text{ διὸ δὴ καὶ τὸ} \\ \overline{\Psi A}^2 + \overline{EB}^2 &= \overline{PO}^2 + \overline{HD}^2. \end{aligned}$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

Ἐὰν τῇ αὐτῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ δύο γρα-
φῶσιν ἑλλείψεις, ὧν ἕχῃ ἡ αὐτὴ ὀρθία, ἑλ-
λειψις, πρὸς ἑλλειψιν λόγον ἔχει, ὃν ἡ ὀρ-
θία πλευρὰ τῆς ἐτέρας, πρὸς τὴν μέσην
ἀνάλογον τῶν δύο ὀρθιῶν.

Πλαγίᾳ μὲν πλευρᾷ τῇ ΨΝ, ὀρθία δὲ τῇ ΝΕ
ἑλλειψις γεγραφθῶ ἡ ΝΠΨ· πλαγίᾳ δὲ τῇ αὐτῇ,
καὶ ὀρθία τῇ ΝΑ, ἡ ΝΒΨ. καὶ κείῳ ὡς ΝΕ: ΡΚ::
ΡΚ: ΝΑ. λέγω, ὅτι ὡς ἑλλειψ. ΝΠΨ, πρὸς ἑλλειψ.
ΝΒΨ, ὅτω ΝΕ: ΡΚ πίν. Κ'. χ. 5.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΨΝ καταχθείσης
τῆς ΒΖΚ, ἔσεται ὡς $\overline{ΖΚ}^2 : \PsiΚ \cdot ΚΝ :: ΗΕ : \PsiΝ$. ἔστι
δὲ καὶ ὡς $\PsiΚ \cdot ΚΝ : \overline{ΒΚ}^2 :: \PsiΝ : ΝΑ$. (ι) ἄρα καὶ δι-
ίστα, ὡς $\overline{ΖΚ}^2 : \overline{ΒΚ}^2 :: ΝΕ : ΝΑ$. ἀλλ' ὡς ΝΕ: ΝΑ :: ΝΕ² :
 $\overline{ΡΚ}^2$. (κ) ἔστι γὰρ ὡς ΝΕ: ΡΚ:: ΡΚ: ΝΑ. (λ) ὡς ἄρα
 $\overline{ΖΚ}^2 :$

- (ε) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (ζ) Κατὰ τὴν προλ. 15. Συνέπ.
(η) Κατὰ τὴν ε'. τῆ β'. (θ) Ἐκ τῆς Λήμ. τῆς πρὸ τῆς η'.
Πρότ. τῆς δὲ τῆς τμήμ. καὶ τῆς κδ'. ὅρισ. δὴλ. (ι) Κατὰ τὴν
α'. Συνέπ. τῆς κ'. τῆς δὲ τῆς τμήμ. (κ) Κατὰ τὸ β'. πρό-
τ. κ'. (λ) Ἐξ ὑπόθ.

$\overline{ZK}^2 : \overline{BK}^2 :: \overline{NE}^2 : \overline{PK}^2$. (μ) διὸ δὴ καὶ ὡς $ZK : BK :: NE : PK$. (ν) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι πᾶσα Τεταγμένη ἢ ἐν τῇ Ἐλλείψει ΝΠΨ, πρὸς πᾶσαν Τεταγμένην ἐν τῇ ΝΒΨ, καὶ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ κεκμένην, λόγον ἔχει, ὃν ἡ $NE : PK$. καὶ ἡ Ἐλλείψις ἄρα ΝΠΨ, πρὸς τὴν Ἐλλείψιν ΝΒΨ :: $NE : PK$.

ΣΤΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι τὸ ἑλλειπτικὸν τμήμα ΝΥΛ, πρὸς τὸ ΝΠΛ λόγον ἔχει, ὃν ἡ $ΛΥ : ΛΠ$.

Β'. Ἐὰν ἡ ΝΒΨ τομὴ κύκλος ἢ, ἡ Ἐλλείψις ΝΠΨ, πρὸς τὸν κύκλον ΝΒΨ λόγον ἔχει, ὃν ἡ δευτέρα Διάμετρος ΘΜ, πρὸς τὴν πλαγίαν ΨΝ. ἔστι γὰρ ὡς $\overline{ZK}^2 : \overline{MG}^2 :: \overline{ΨK} : \overline{KN} :: \overline{ΨΓ} : \overline{ΓN}$. (ξ) ἄλλα τὸ μὲν $\overline{ΨK} : \overline{KN} = \overline{BK}^2$, τὸ δὲ $\overline{ΨΓ} : \overline{ΓN} = \overline{HG}^2$. (ο) ὡς ἄρα $\overline{ZK}^2 : \overline{MG}^2 :: \overline{BK}^2 : \overline{HG}^2$. (π) διὸ δὴ καὶ ὡς $ZK : MG :: BK : HG$, (ρ) καὶ ἑναλλαξ ὡς $ZK : BK :: MG : HG$, ἔστι δὲ ὡς $MG : HG :: ΘΜ : ΨΝ$. διὸ καὶ ὡς $ZK : BK :: ΘΜ : ΨΝ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι πᾶσα Τεταγμένη ἐν τῇ Ἐλλείψει ΝΠΨ, πρὸς πᾶσαν Τεταγμένην τὴν ἐν τῷ κύκλῳ ΝΒΨ, καὶ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ κεκμένην λόγον ἔχει, ὃν ἡ $ΘΜ : ΨΝ$. ἄρα καὶ ὡς Ἐλ. ΝΠΨ : Κύκλ. ΝΒΨ :: $ΘΜ : ΨΝ$.

Γ'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς κέντρος Γ ἐπὶ τὰ Π, Υ σημεῖα ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΓΠ, ΓΥ, ἔσεται ὁ ἑλλειπτικὸς τομεὺς ΓΝΠ, πρὸς τὸν κυκλικὸν τομέα ΓΝΥ, ἔστω ΓΜ : ΓΗ. ἐπεὶ γὰρ ὡς $ΛΝΠ : ΛΝΥ :: ΛΠ : ΛΥ$, (σ)

καὶ

- (μ) Κατὰ τὴν ε', τῇ ε' (ν) Κατὰ τὸ ζ', τῶν τῇ ε'. Θεωρημ.
(ξ) Κατὰ τὴν α'. τῇ τῇδε τῇ τμήμ. (ο) Κατὰ τὴν β'. Συνέπ.
τῆς ἡ. τῇ ε'. (π) Κατὰ τὴν ε', τῇ ε' (ρ) Κατὰ τὸ ζ', τῶν τῇ ε'. θεωρ. (σ) Κατὰ τὴν προλ. α'. Συνέπ.

ὡς ΓΛΠ: ΓΛΥ:: ΛΠ: ΛΥ. (τ) ἄρα καὶ ὡς ΛΝΠ+
ΓΛΠ: ΛΝΥ+ΓΛΥ:: ΛΠ: ΛΥ, (υ) ἔστιν ὡς ΓΝΠ:
ΓΝΥ:: ΛΠ: ΛΥ. ἄλλ' ὡς ΛΠ: ΛΥ:: ΓΜ: ΓΗ. (δειχ-
θήσεται τῷτο καθάπερ δίδεικται ἐν τῇ προλ. συνεπ.
ὅτι ὡς ΖΚ: ΒΚ:: ΜΓ: ΗΓ.) ἄρα καὶ ὡς ΓΝΠ:
ΓΝΥ:: ΓΜ: ΓΗ. (Φ)

Δ'. Ἐάν τό, τε ἡμικύκλιον ΝΗΨ καὶ ἡ ἡμιέλλειψις ΝΜΨ
περὶ τὸν Ἀξονα ΨΝ περιερχθῇ, ἕως ὅτε ἀποκα-
τασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ σφαιροειδὲς τὸ
ἐκ τῆς ἡμιέλλειψως, πρὸς τὴν σφαῖραν τὴν ἐκ τῆ
ἡμικυκλίας γινομένην λόγον ἔχει, ὃν τὸ τετράγωνον
τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΘΜ, πρὸς τὸ ἀπὸ
τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ τετράγωνον. ἐπεὶ γὰρ
ὡς ΘΜ: ΨΝ:: ΖΚ: ΒΚ, (Χ) ἔσεται καὶ ὡς $\overline{ΘΜ}^2$:
 $\overline{ΨΝ}^2$:: $\overline{ΖΚ}^2$: $\overline{ΒΚ}^2$. (Ψ) ἄλλ' ὡς $\overline{ΖΚ}^2$: $\overline{ΒΚ}^2$, ἔτω κύκ-
λος, ὃ ἡμιδιάμετρος ἡ ΖΚ, πρὸς κύκλον, ὃ ἡμιδιά-
μετρος ἡ ΒΚ. ἄρα καὶ $\overline{ΘΜ}^2$: $\overline{ΨΝ}^2$, ἔτω κύκλος ὃ
ἔχων ἡμιδιάμετρον τὴν ΖΚ, πρὸς κύκλον τὸν ἡμιδι-
άμετρον ἔχοντα τὴν ΒΚ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθή-
σεται, ὅτι πᾶς κύκλος ὃ ἐν τῷ σφαιροειδεῖ, τῷ
ἐκ τῆς ἡμιέλλειψως, πρὸς πάντα κύκλον τὸν ἐν
τῇ σφαίρᾳ, τῇ ἐκ τῆς ἡμικυκλίας, καὶ ἐπ' εὐθείας
αὐτῷ κείμενον, λόγον ἔχει, ὃν $\overline{ΘΜ}^2$: $\overline{ΨΝ}^2$. καὶ τὸ
σφαιροειδὲς ἄρα τὸ ἐκ τῆς ἡμιέλλειψως, πρὸς τὴν
σφαῖραν τὴν ἐκ τῆς ἡμικυκλίας λόγον ἔχει, ὃν τὶ $\overline{ΘΜ}^2$:
 $\overline{ΨΝ}^2$, ἢ ὃν τὸ $\overline{ΜΓ}^2$: $\overline{ΗΓ}^2$.

Ε'. Αἱ Ἐλλείψεις λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν τὰ
ὀρθογώνια τὰ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς
Π δευ-

(τ) Κατὰ τὴν α'. τῆ ε'. (υ) Ἐκ τῆς αδ'. τῆ ε'. δηλον. (Φ) Κα-
τὰ τὴν ἀρῆμ. ε'. (Χ) Ὅρα τὴν προλαβ. β'. Συνέπ. (Ψ) Κα-
τὰ τὸ ἀρῆμ. ζ'. Θεώρ.

δευτέρως Διαμέτρων περιεχόμενα. ἔωσαν γὰρ Ἑλλείψεις αἱ $AB\psi$, $\alpha\beta\psi$, (πίν. ΚΔ'. χ . 3, 4.) ὧν πλαγίαι μὲν πλευραὶ αἱ $A\psi$, $\alpha\psi$, δεύτεραι δὲ Διαμέτροι αἱ ΔB , $\delta\beta$. λέγω, ὅτι ὡς $AB\psi : \alpha\beta\psi :: A\psi : \Delta B : \alpha\psi$. $\delta\beta$. γεγραφέθωσαν γὰρ ἐπεὶ τῶν $A\psi$, $\alpha\psi$, ἡμικύκλια τὰ $AK\psi$, $\alpha\kappa\psi$ καὶ ἐκβληθεῖσθαι αἱ ΔB , $\delta\beta$, συμβαλλέτωσαν ταῖς περιφερείαις κατὰ τὰ K , κ σημεῖα. καὶ ἐπεὶ ὡς $AB\psi : AK\psi :: \Delta B : A\psi$, (ω) καὶ ὡς $\Delta B : A\psi :: \Delta B \cdot A\psi : \overline{A\psi}^2$, (α) ὡς ἄρα $AB\psi : AK\psi :: \Delta B \cdot A\psi : \overline{A\psi}^2$, (β) καὶ ἐναλλάξ ὡς $AB\psi : \Delta B \cdot A\psi :: AK\psi : \overline{A\psi}^2$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δεχθήσεται, ὅτι ὡς $\alpha\beta\psi : \delta\beta \cdot \alpha\psi :: \alpha\kappa\psi : \overline{\alpha\psi}^2$. ἀλλ' ὡς $AK\psi : \overline{A\psi}^2 :: \alpha\kappa\psi : \overline{\alpha\psi}^2$. (γ) ἄρα καὶ ὡς $AB\psi : \Delta B \cdot A\psi :: \alpha\beta\psi : \delta\beta \cdot \alpha\psi$, (δ) καὶ ἐναλλάξ, ὡς $AB\psi : \alpha\beta\psi :: \Delta B \cdot A\psi : \delta\beta \cdot \alpha\psi$.

Περὶ τῆς ἐν τοῖς ὀπτικοῖς χρήσεως τῶν τῆς Ἑλλείψεως συμπτωμάτων.

Α'. Ἐὰν ἐκ μετάλλου κατασκευασθῇ σφαιρὸν ἐξ Ἑλλείψεως γινόμενον, καὶ μέρη μὲν αὐτῆς ἀποτμηθέντος, τὸ λοιπὸν γλυφέν, κοῖλον γένηται, αἱ τῆς φωτὸς ἀκτῖνες τῆς ἐπὶ τῆς ἐτέρας τῶν Ἑσιῶν Γ (πίν. ΚΒ'. χ . 2.) τεθέντος, αἱ τῇ κοίλῃ ἐλλειπτικῇ ἐπιφανείᾳ προσπίπτουσαι, μετὰ τὴν ἀνάκλασιν τῇ ἐτέρᾳ τῶν Ἑσιῶν Φ συμβαλέσθαι συλλεχθήσονται. προσπιπέτω γὰρ ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Γ φωτὸς πρὸς τὴν ἐλλειπτικὴν κοίλην ἐπιφάνειαν AM ἡ ἀκτὶς ΓM . καὶ ἡχθῶ

(ω) Κατὰ τὴν προλ. ε'. Συνέπ. (α) Κατὰ τὴν α'. τῆς (β) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (γ) Κατὰ τὴν β'. τῆς β'. (δ) Κατὰ τὴν ἀρχμ. ε'.

ἡ ἐφαπτομένη ΒΜΧ. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς πτώσεως γωνία ἴση τῇ τῆς ἀνακλάσεως, ὡς ἐκ τῆς πείρας δηλον· ἔστι δὲ γωνία τῆς πτώσεως ἡ ΥΜΒ, ἴση δὲ αὐτῇ ἡ τῆς ἀνακλάσεως ΦΜΧ, (ε) ἡ ἄρα ΥΜ ἀνακλαθεῖσα, τὴν τῆς ΜΦ Φορὰν φερομένη ἐπὶ τὸ Φ πίπτει. εἰ γὰρ ἄλλοθίπερ πέσῃ, ἡ τῆς πτώσεως γωνία ΥΜΒ, ἐκ αὐτῆς ἴση γένοιτο τῇ τῆς ἀνακλάσεως ΦΜΧ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι παῖσαι αἱ ἀκτῖνες, αἱ ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Υ φωτὸς τῇ κοίλῃ ἐλλειπτικῇ ἐπιφανείᾳ προσπίπτουσαι, κατὰ τὸ Φ μετὰ τὴν ἀνάκλασιν συμπεσόνται. τῆς παλιν δὲ, εἰάν τὸ Φῶς ἐπὶ τὸ Φ τεθῇ, αἱ προσπεσόνσαι καὶ ἀνακλαθεῖσαι ἀκτῖνες ἐν τῷ Υ συλλεχθήσονται. ἐκ τούτων δὲ δηλον, ὅτι ἐν τοῖς Φ, καὶ Υ σημείοις μεγίστη τῆς τῆς φωτὸς δυνάμεως ἡ ἐπίτασις.

Β'. Εἰάν δὲ τὸ ἐξ Ἐλλείψεως γινόμενον σφαιρὸν ὑέλινον ᾗ, ὅσαι τῆς φωτὸς ἀκτῖνες τῇ κυρτῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ ἔτω προσπίπτουσιν, ὥστε μετὰ τὴν ἀνάκλασιν Φορὰν φέρεσθαι τὴν ἐπὶ τὴν ἐτέραν τῶν Ἐσιῶν Φ, διὰ τῆς ἐλλειπτικῆς ὑέλῃς διῆσθαι, κατὰ τὴν ἐτέραν Ἐσίαν Υ ἀλλήλαις συμπίπτουσι. προσπιπτέτω γὰρ τῷ ἐλλειπτικῷ κυρτῷ ἡ ΖΜ ἔτως, ὥστε μετὰ τὴν ἀνάκλασιν τὴν ΣΜΦ Φορὰν φέρεσθαι. λέγω δὲ, ὅτι ἡ ΖΜ διὰ τῆς ὑέλῃς διῆσθαι, ἐπὶ τὸ Υ πίπτει. ἐπεὶ γὰρ δεῖ τὴν κατὰ πᾶσιν γωνίαν ΖΜΧ τῇ κατὰ ἀνάκλασιν ΣΜΒ ἴσην εἶναι· ἴση δὲ γίνεται, εἰάν ἡ ΖΜ ἐκβληθεῖσα ἐπὶ τὸ Υ πέσῃ (ἐπεὶ γὰρ ἡ ΦΜΧ = ΥΜΒ, ἔστι δὲ ἡ μὲν ΦΜΧ = ΣΜΒ, ἡ δὲ ΥΜΒ = ΖΜΧ, ἄρα καὶ ἡ ΖΜΧ = ΣΜΒ) ἡ ἄρα ΖΜ διὰ τῆς ὑέλῃς διελθεῖσα ἐπὶ τὸ Υ πίπτει. τὸ αὐτὸ δὲ

Π 2

ἐν.

(ε) Κατὰ τὴν κ'. τῆς δὲ τῆς τμήματος.

ζητέον καὶ περὶ τῶν ἄλλων ἀκτίνων τῶν ὁμοίως τῇ
 ΖΜ τῷ ἐλλειπτικῷ προσπιπτοσῶν κυρτῶ.

Γ'. Ἐὰν ἡ προσπεσῶσα ἀκτὶς ΛΜ (χ. 3.) παρὰ τὸ
 λος ἢ τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ ΨΑ τῆς ἐλλειπτικῆς ὑελίνης
 Φακῆς, ἔνδον δὲ εἰσιῶσα μετὰ τὴν Θλαῶσιν ἐπὶ τῇ
 ἐτέρᾳ τῷ Ἐσιῶν Υ περὶ, ὡς ἡ ΜΥ, καὶ ἀχθῶς
 ἀπὸ τῆς Μ ἢ ΡΜΕ πρὸς ὁρθὰς μὲν τῇ ΛΜ, συμ-
 βάλλουσα δὲ τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ κατὰ τὸ Ε, τὴν
 ἡμίτονον τῆς κατὰ πτωσιν γωνίας ΡΜΛ, πρὸς τὴν
 ἡμίτονον τῆς κατὰ Θλαῶσιν ΥΜΕ λόγον ἔχει ὅν
 ΥΜ, πρὸς τὴν ΥΕ, εἶτεν ὅν ἡ Θλαδεῖσα ἀκτὶς
 πρὸς τὸ ἀπολαμβανόμενον ἀπὸ τῆς καθέτης μέ-
 τῆς ΨΑ πρὸς τῇ Ἐσίᾳ Υ. ἐστὶ μὲν γὰρ ἡ μὲν ΡΜΛ =
 ΡΕΑ. (ζ) ἑκατέρωθεν δὲ τῶν ΡΕΑ, ΡΕΥ τὸ αὐτὸ ἔχει
 ἡμίτονον. (η) τὸ δὲ ἡμίτονον τῆς ΜΕΥ, πρὸς τὴν
 ἡμίτονον τῆς ΥΜΕ λόγον ἔχει ὅν ΥΜ : ΥΕ. (θ)
 διὸ δὴ τὸ ἡμίτονον τῆς κατὰ πτωσιν γωνίας, πρὸς
 τὸ ἡμίτονον τῆς κατὰ Θλαῶσιν λόγον ἔχει, ὅν ΥΜ
 ΥΕ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὸ ἡμίτονον τῆς κατὰ πτωσιν γωνίας, πρὸς τὸ
 ἡμίτονον τῆς κατὰ Θλαῶσιν τῆς ἀκτίνος τῆς ἀπὸ τῆς
 αἰέρος εἰς τὴν ὑελὸν εἰσιέσεως λόγον ἔχει, ὅν ὁ 3
 2, ὡς ἡ πείρα δείκνυσι. διὸ ὑελίνης ἔσσης τῆς ἐλλει-
 πτικῆς Φακῆς, καὶ τῆς ἀκτίνος ἀπὸ τῆς αἰέρος εἰς
 αὐτὴν εἰσιέσεως, ἐστὶν ὡς ΥΜ : ΥΕ :: 3 : 2. ἐπεὶ δὲ αὐ-
 τὴν ΥΜ : ΥΕ, ἔτῳς ἡ πλαγίᾳ πλευρᾷ ΨΑ, πρὸς τὴν
 τῶν Ἐσιῶν ἀπόσθημα ΥΦ, (ι) ἔσεται καὶ ὡς ΨΑ : ΥΦ
 3 : 2.

(ζ) Κατὰ τὴν κθ'. τῆς α'. (η) Κατὰ τὸν β'. ὅριον. τῆς Τριγωνο-
 (θ) Κατὰ τὸ δ'. Θεώρ. τῆς αὐτ. Τριγωνομ. (ι) Κατὰ τὴν
 δ'. Συνέπ. τῆς θ'. τῇ δὲ τῇ τμήμα.

Δ'. Δοθέντος τῆς λόγος ὃν ἔχει ἡ πλαγία πλευρὰ τῆς Ἐλλείψεως πρὸς τὸ τῶν Ἐσίων αὐτῆς ἀπόστημα, καὶ κειμένῃς τῆς λόγος τέττε ἕναί, ὡς 3: 2, κατασκευαδθήσεται ἑλλειπτική ὑελίνη φακὴ, πρὸς ἣν πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι τῆς φωτὸς ἀκτῖνες παράλληλοι τῇ Α' ἔξονι αὐτῆς, ἐπὶ τὴν ἑτέραν τῶν Ἐσίων μετὰ τὴν ἑνδὸν θλαῶσιν συμπεσῶνται. ἐπεὶ γὰρ ὡς $\Psi\Lambda:\Upsilon\Phi::3:2$, ἔστι δὲ ὡς $\Psi\Lambda:\Upsilon\Phi::\Upsilon\Phi$, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, καὶ ἣν ἡ πλαγία πλευρὰ $\Psi\Lambda$ τὴν ὀρθίαν ὑπερέχει, (κ) ἔσεται ἄρα ἡ ῥηθῆσα ὑπεροχὴ ἴση $\frac{4}{3}$. ἔκδεν κειμένῃς τὴν $\Psi\Lambda=3$, ἔσεται ἡ ὀρθία πλευρὰ ἴση $3-\frac{4}{3}$, εἴτεν ἴση $\frac{5}{3}$. εἰάν ὃν πλαγίᾳ μὲν πλευρᾷ τῇ $\Psi\Lambda=3$, ὀρθίᾳ δὲ ἴση $\frac{5}{3}$, Ἐλλειψις γραφῇ ἢ $\Psi\Lambda$, περὶ δὲ τὸν $\Psi\Lambda$ Ἀξονα περιεγεχθεῖσα, ἕως ὅτε ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, σφαιρὸν ποιήσῃ, ἡ ὁμοία καὶ ἴση αὐτῷ κατασκευαδθεῖσα ὑελίνη φακὴ ἔσται ἡ ζητούμενη.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

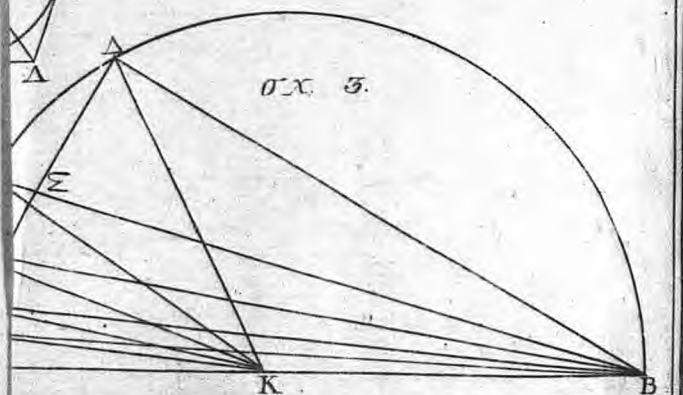
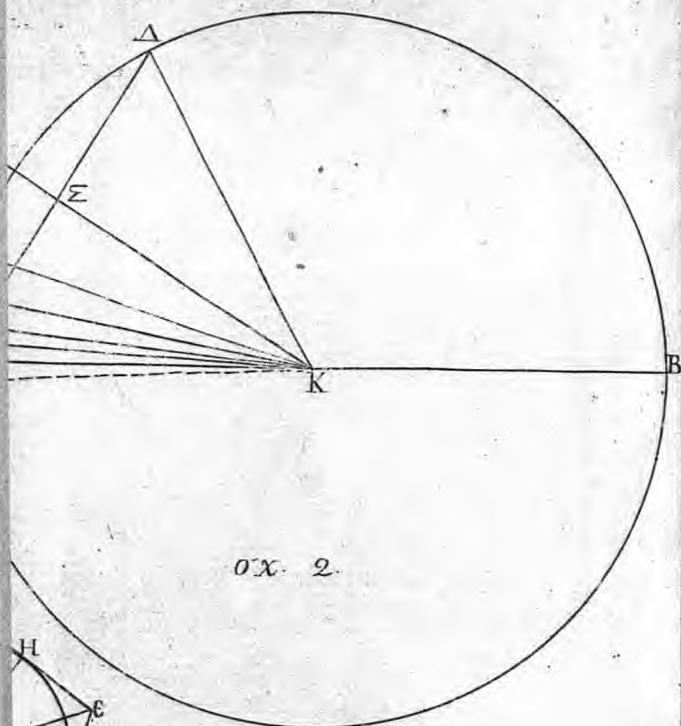
Ἰστέον ὅτι, εἰάν αἱ τῆς φωτὸς ἀκτῖνες μετὰ τὴν ἐν τῷ Μ θλαῶσιν τῆς ὑέλης ἐξέλθωσιν, ἐκέτι ἐπὶ τὴν Ἐσίαν Υ φέρονται. θλαῶνται γὰρ πάλιν ἀπὸ τῆς ὑέλης εἰς τὸν αἶρα εἰσιῦσαι. ἵνα ὃν μὴ αὐθις θλαδῶσι, σφαιρικόκοilon ὑελινον σφαιρὸν ὑπὸ τὸ κυρτὸν ΜΑ τῆς ἑλλει-
πτι-

(κ) Κατὰ τὴν 16. Συνέπ. τῆς αὐτ.

πτικῆς φακῆς ἐφαρμόζουσι, κέντρον ἔχον αὐτὸ τὸ
 ἔτω μὲν γὰρ αἱ μετὰ τὴν ἐν ταῖς Μ θλαῖσιν αὐτῶν
 ἐπὶ τὸ Υ φερόμεναι, πρὸς ὁρθὰς τῇ σφαιρικοῦ
 ἐπιφανείᾳ προσβάλλουσαι, ἐδερμίαν παχυσταύτην θλαῖσιν

Τ Ε Λ Ο Σ.

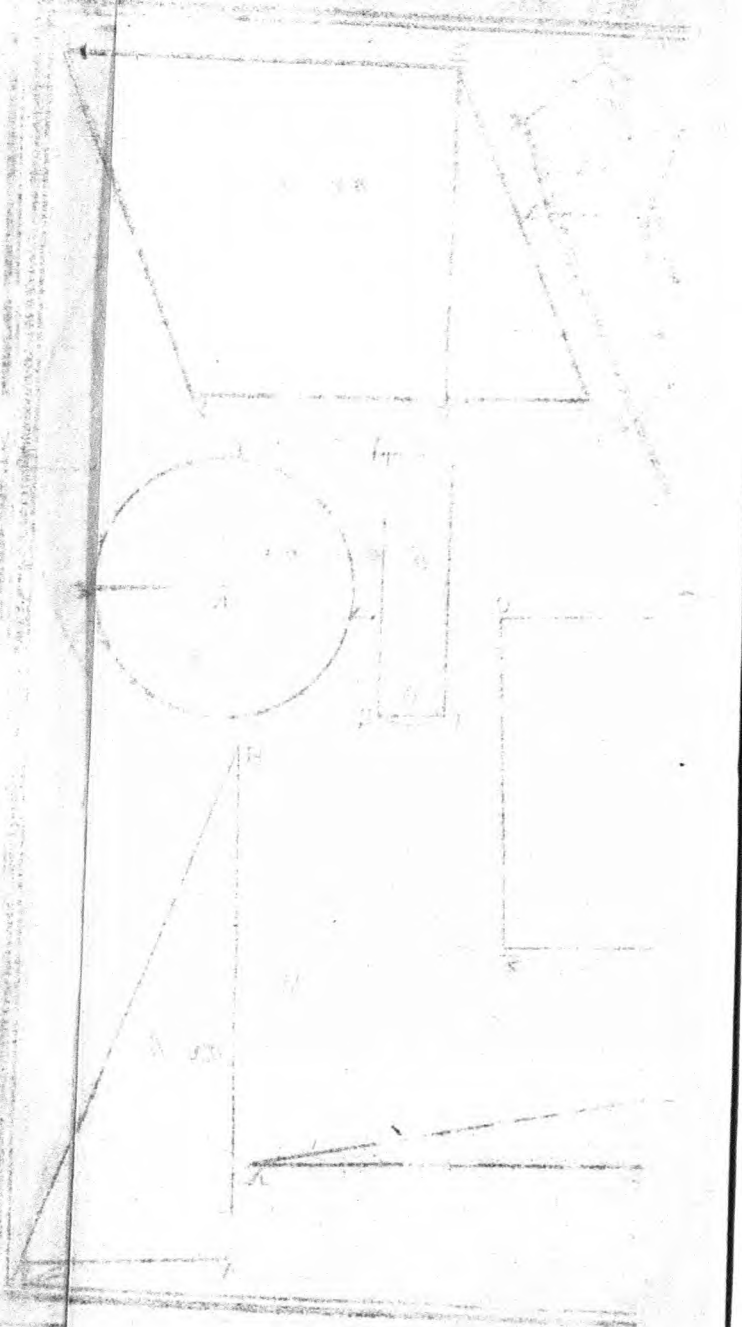


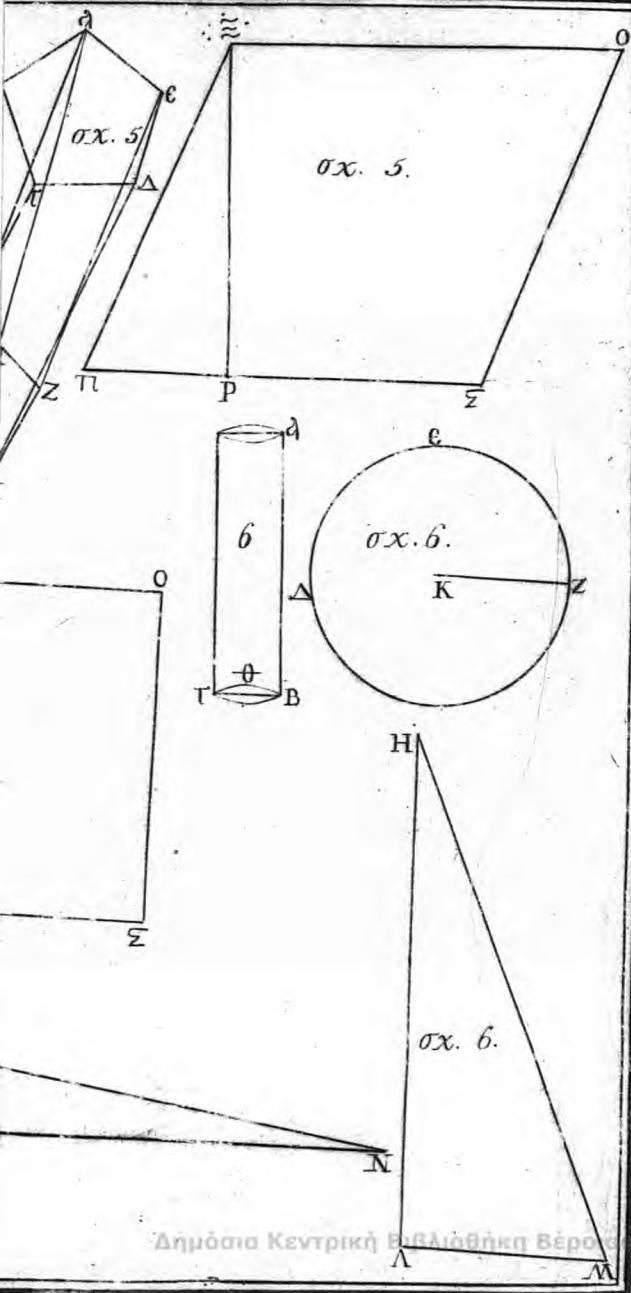


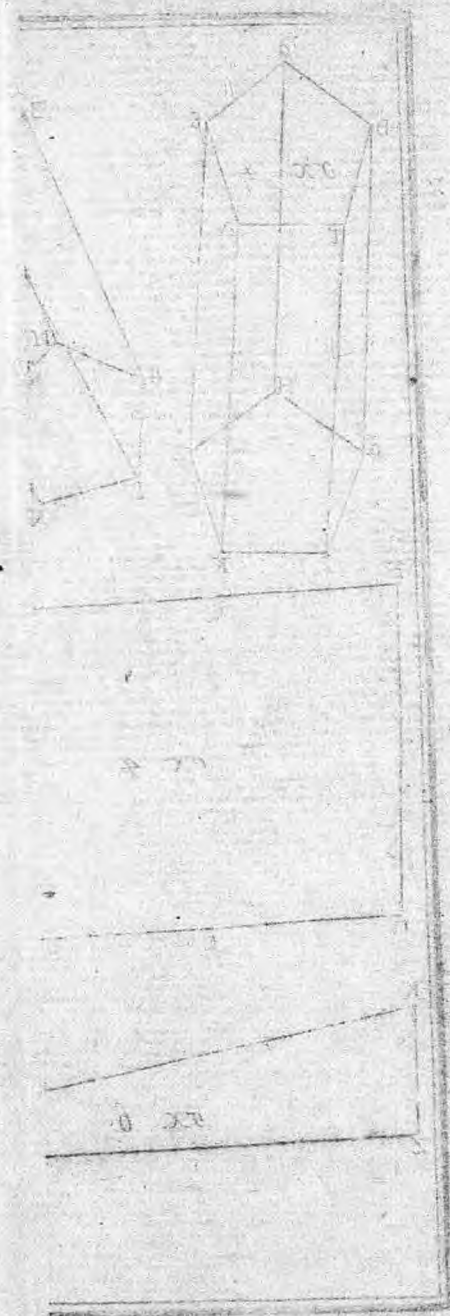
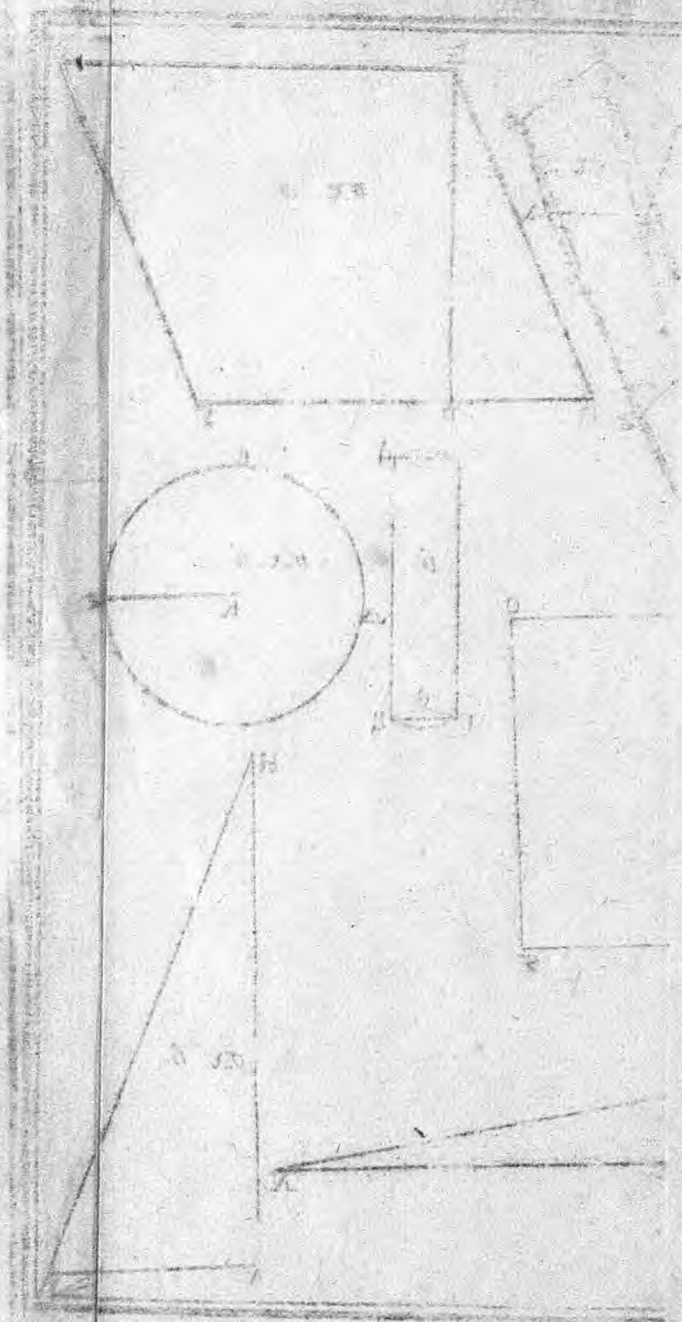
πτικῆς φακῆς ἐφαρμόζουσι, κέντρον ἔχον αὐτὸ τὸ γ
 ἔτω μὲν γὰρ αἱ μετὰ τὴν ἐν τῇ Μ θλαῖσιν αὐτῇ
 ἐπὶ τὸ Υ φερόμεναι, πρὸς ὁρθὰς τῇ σφαιρικοκέντρῳ
 ἐπιφανείᾳ προσβάλλουσαι, ἐδεμίαν παχυσί θλαῖσιν.

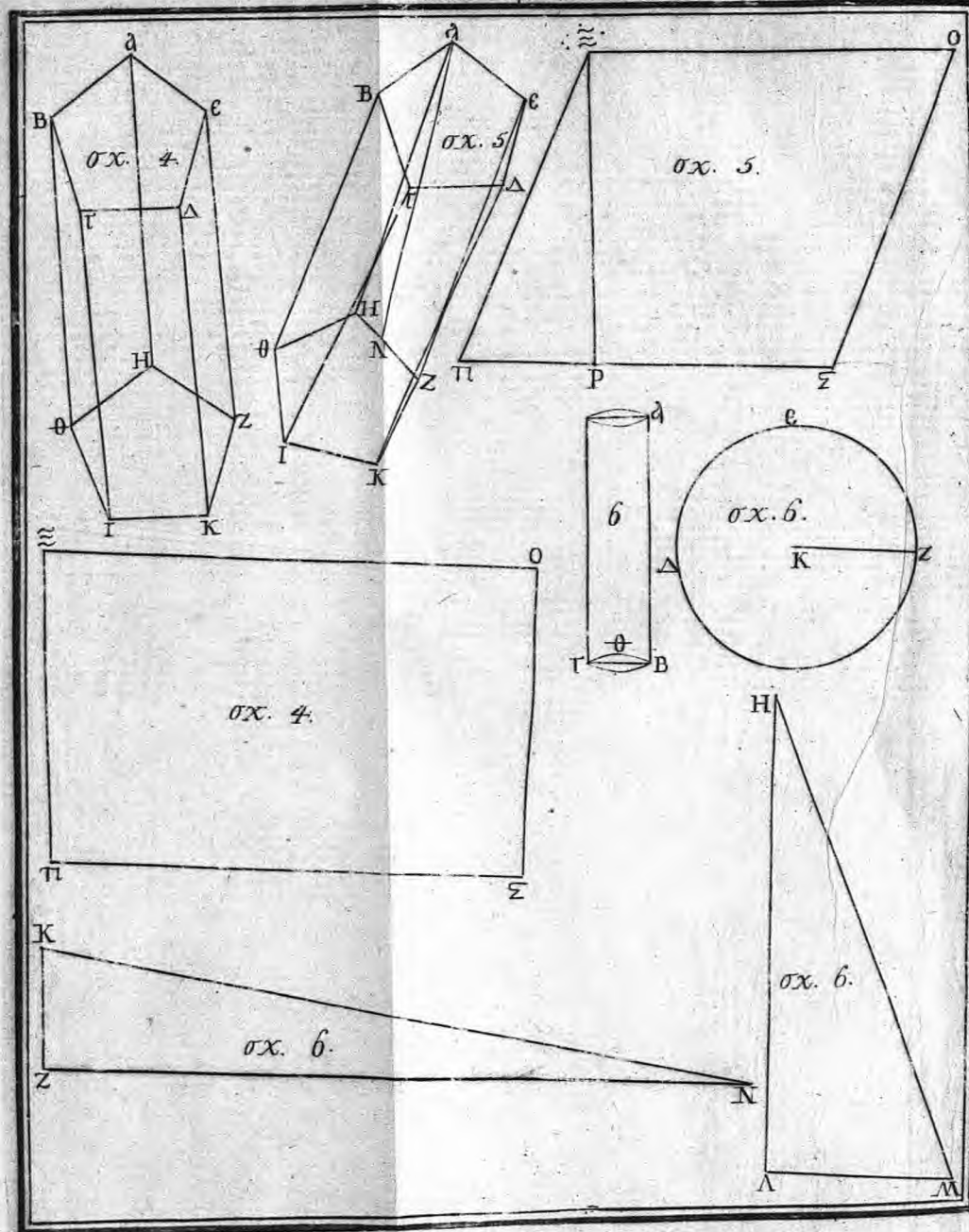
Τ Ε Λ Ο Σ.



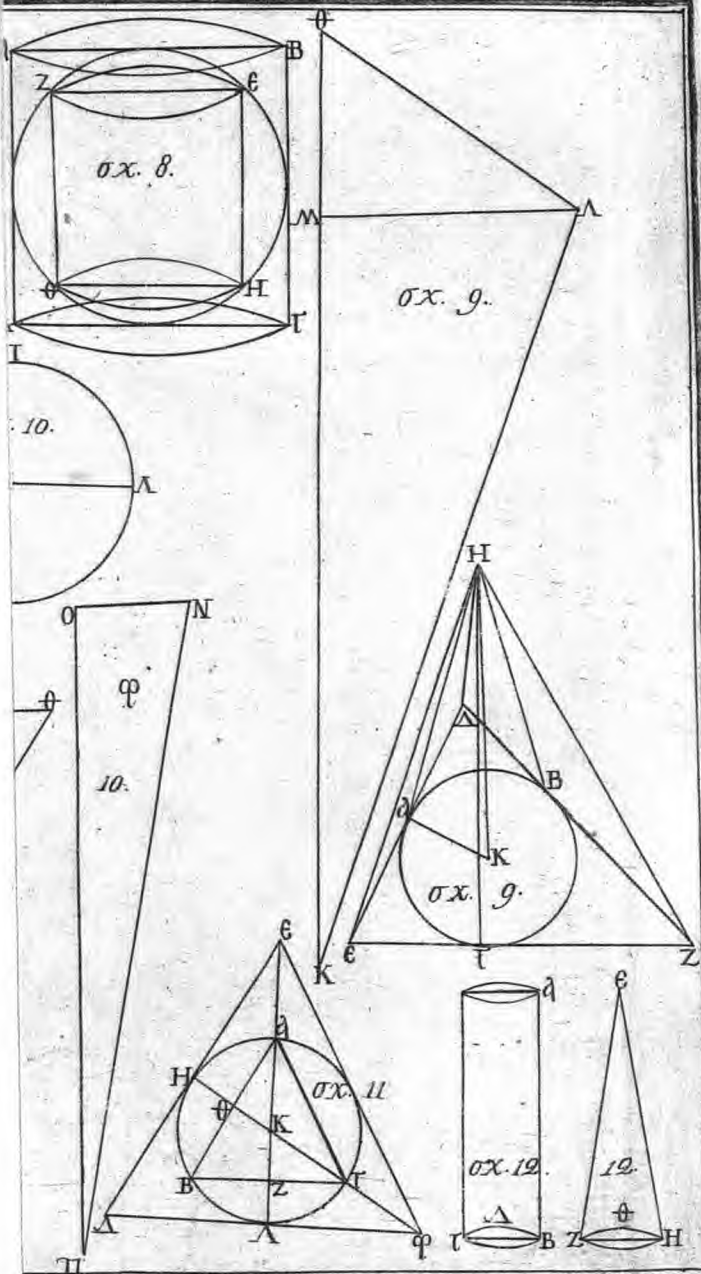


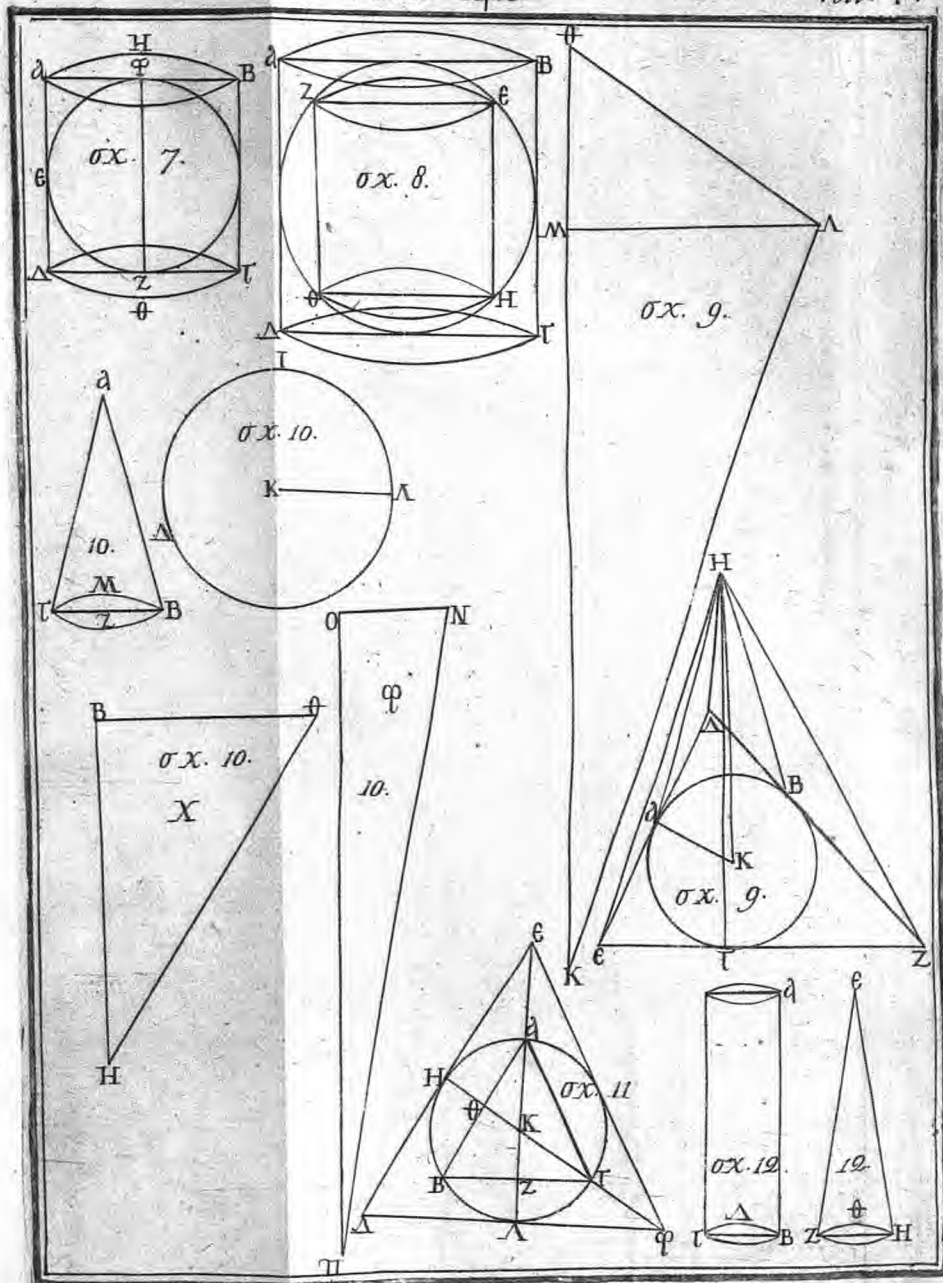




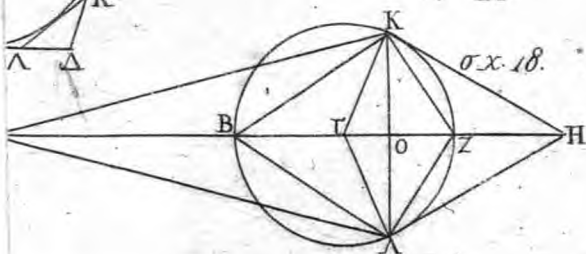
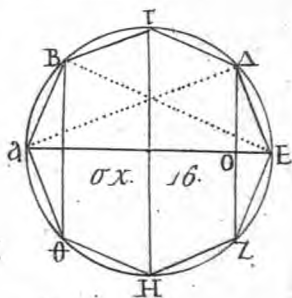
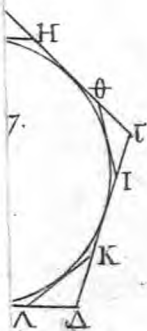
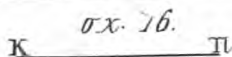
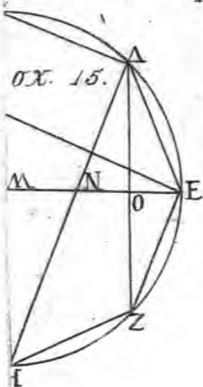
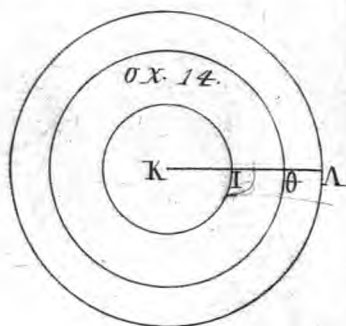
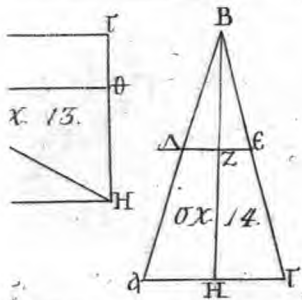


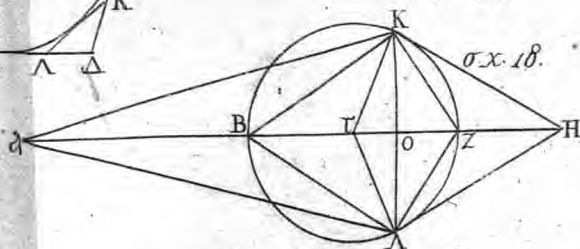
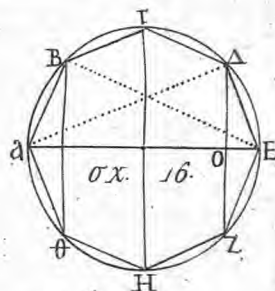
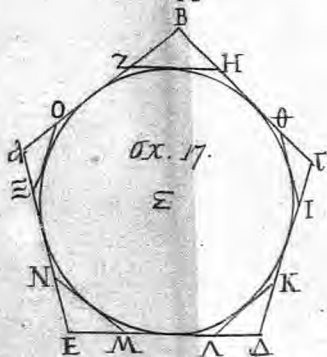
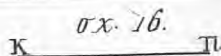
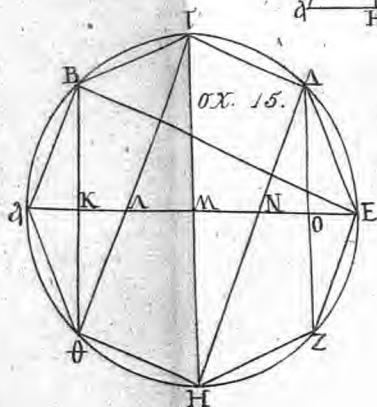
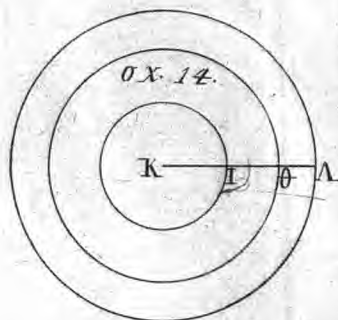
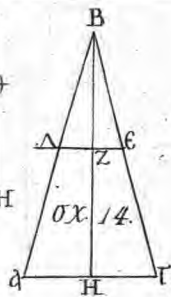
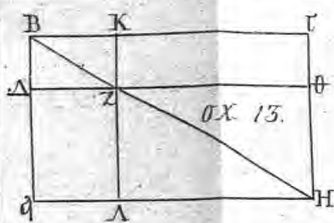
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

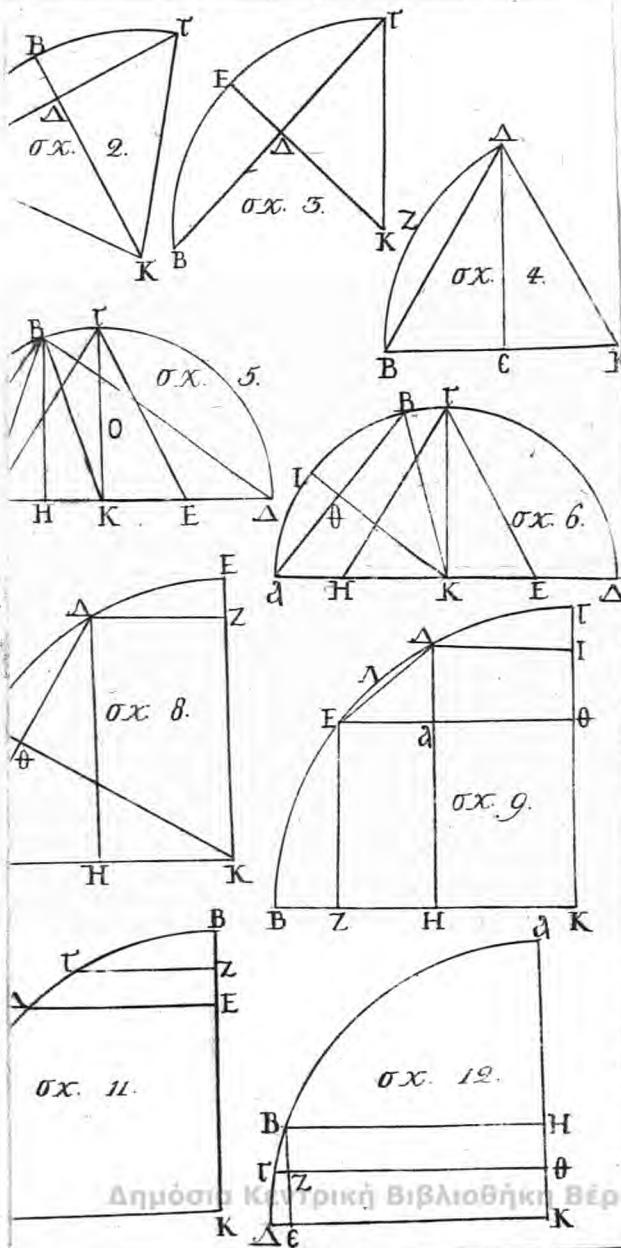


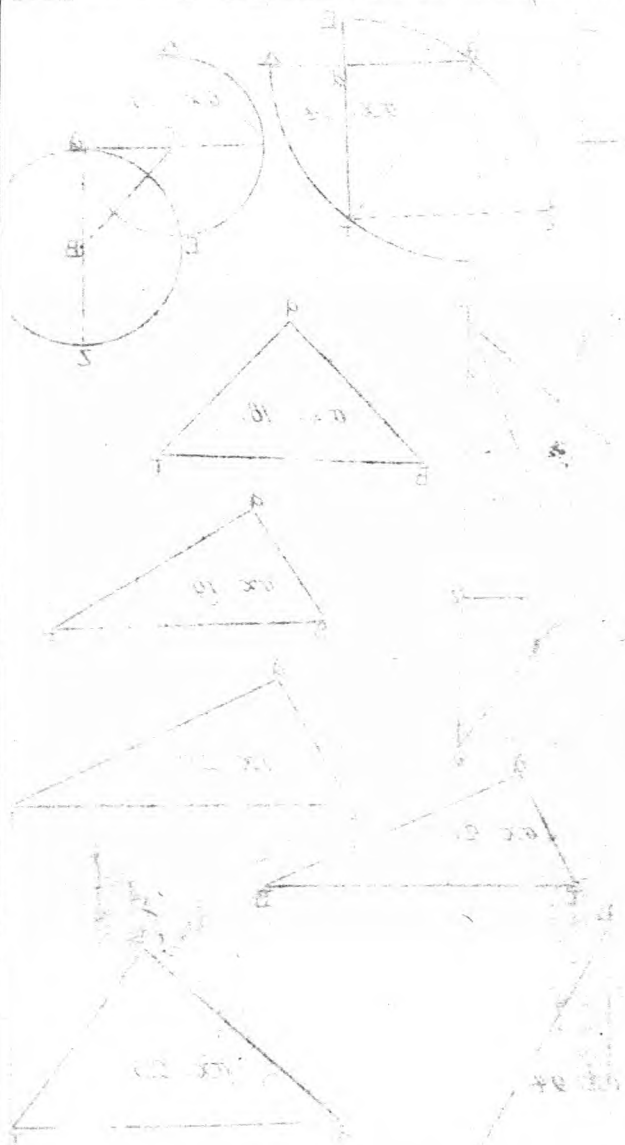


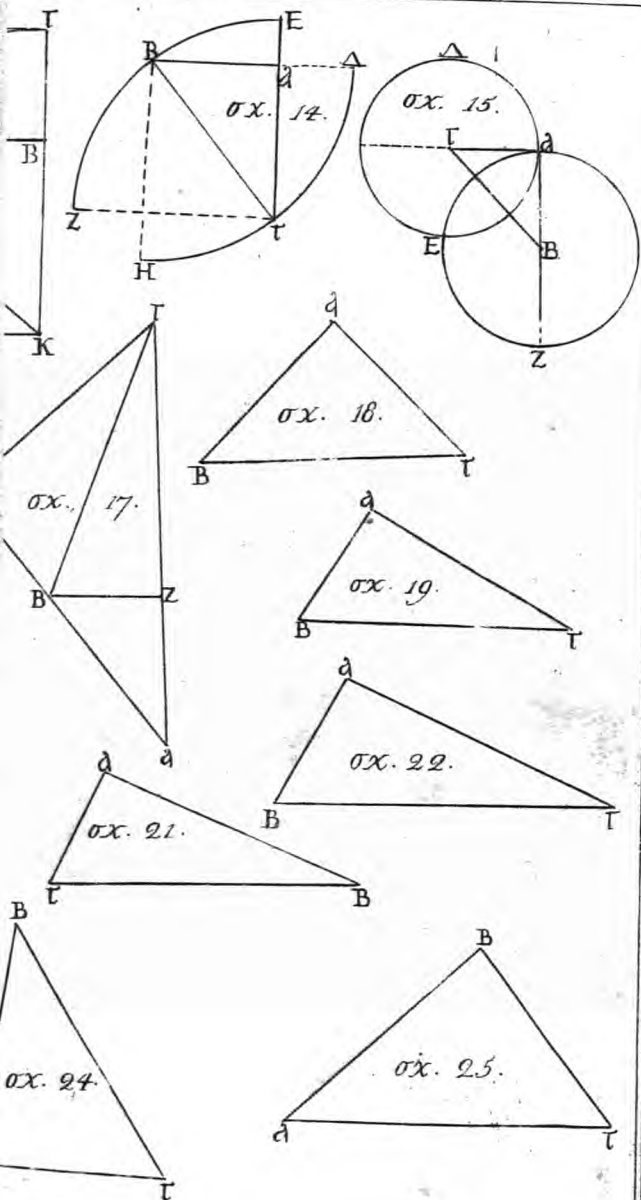
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

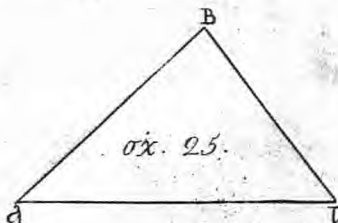
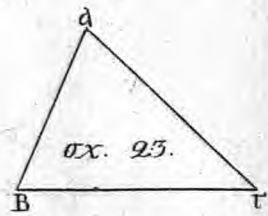
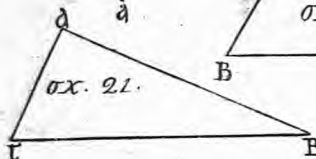
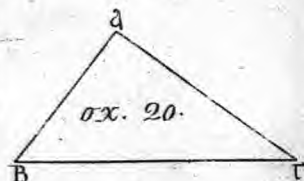
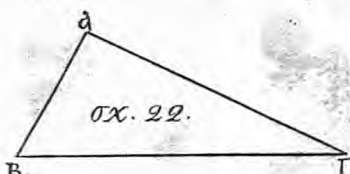
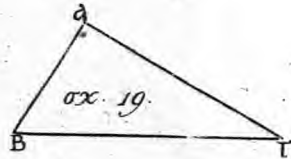
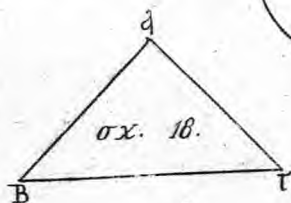
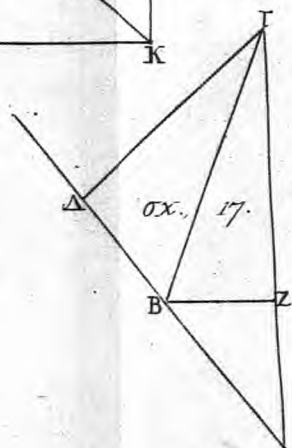
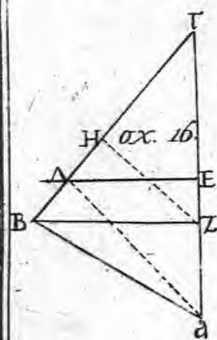
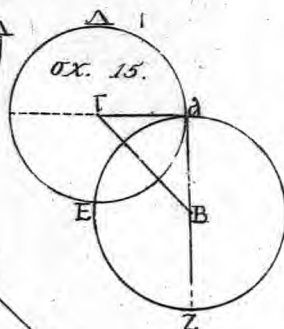
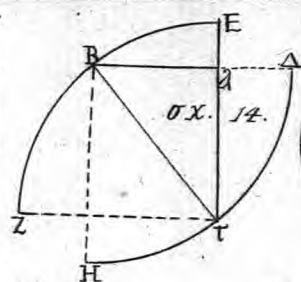
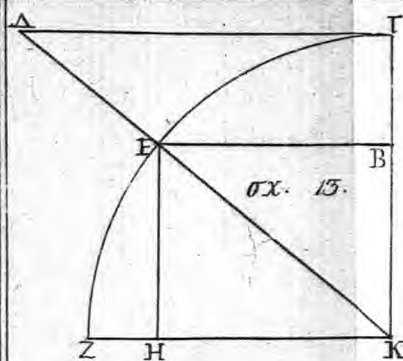


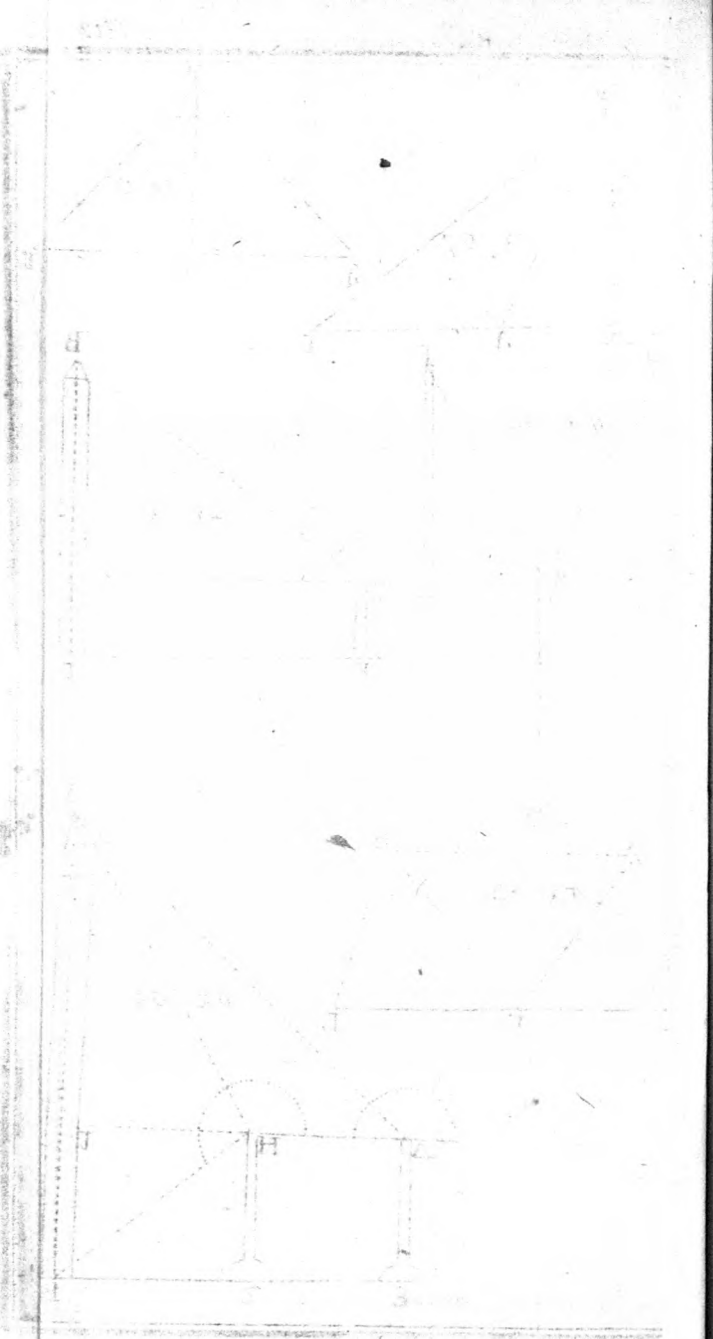


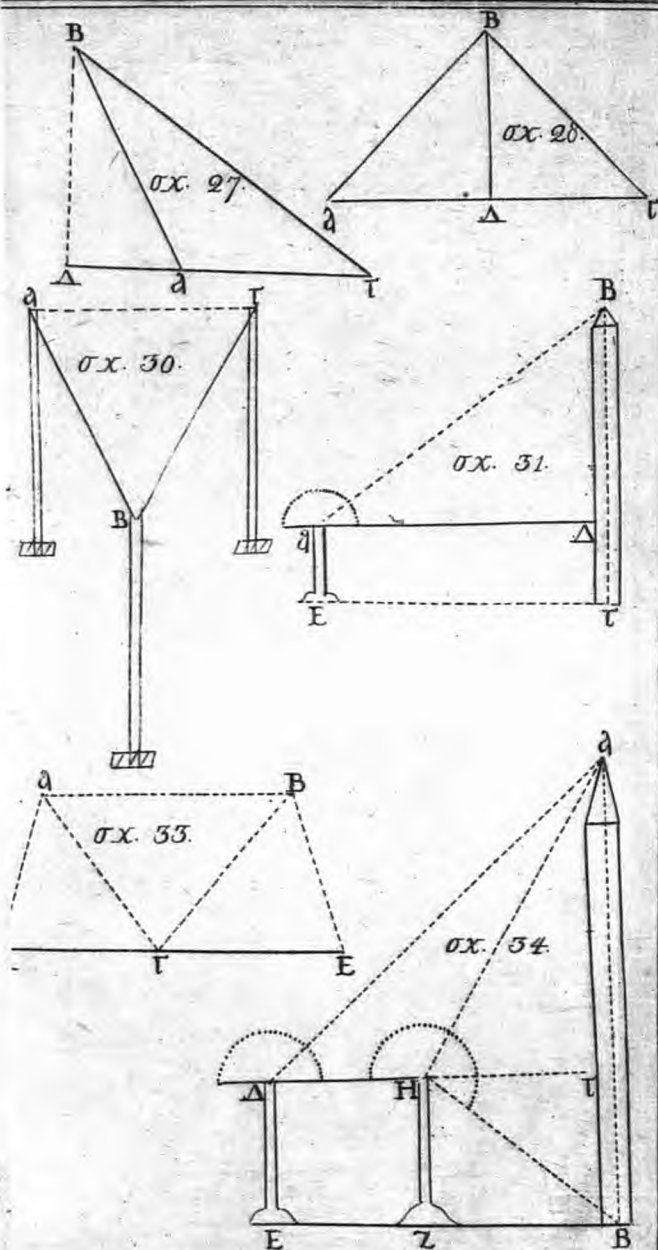


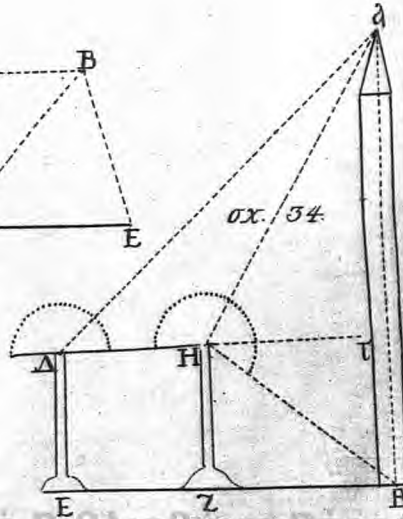
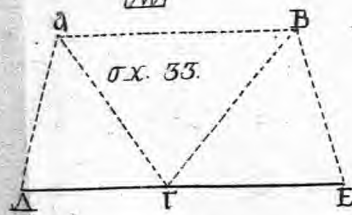
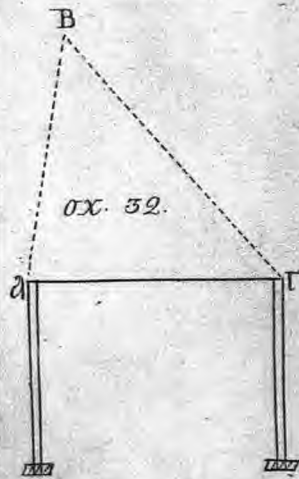
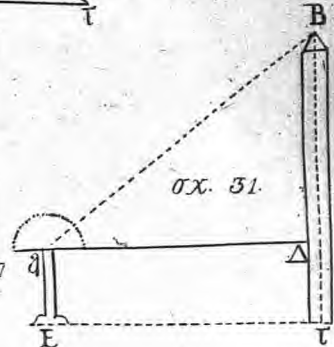
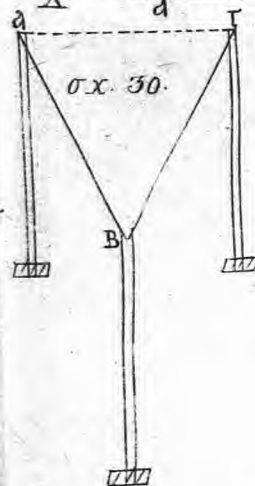
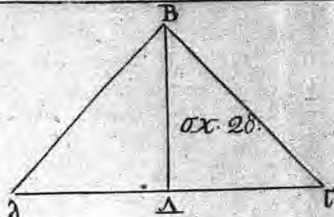
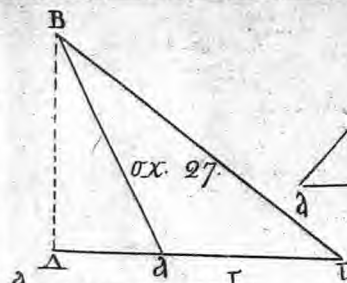
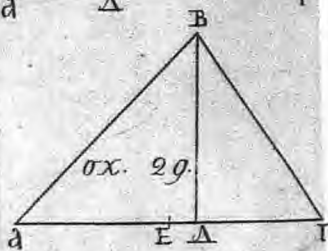
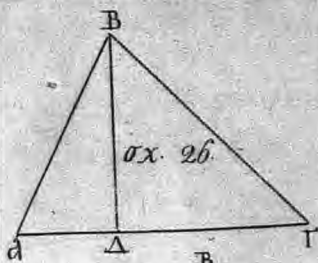




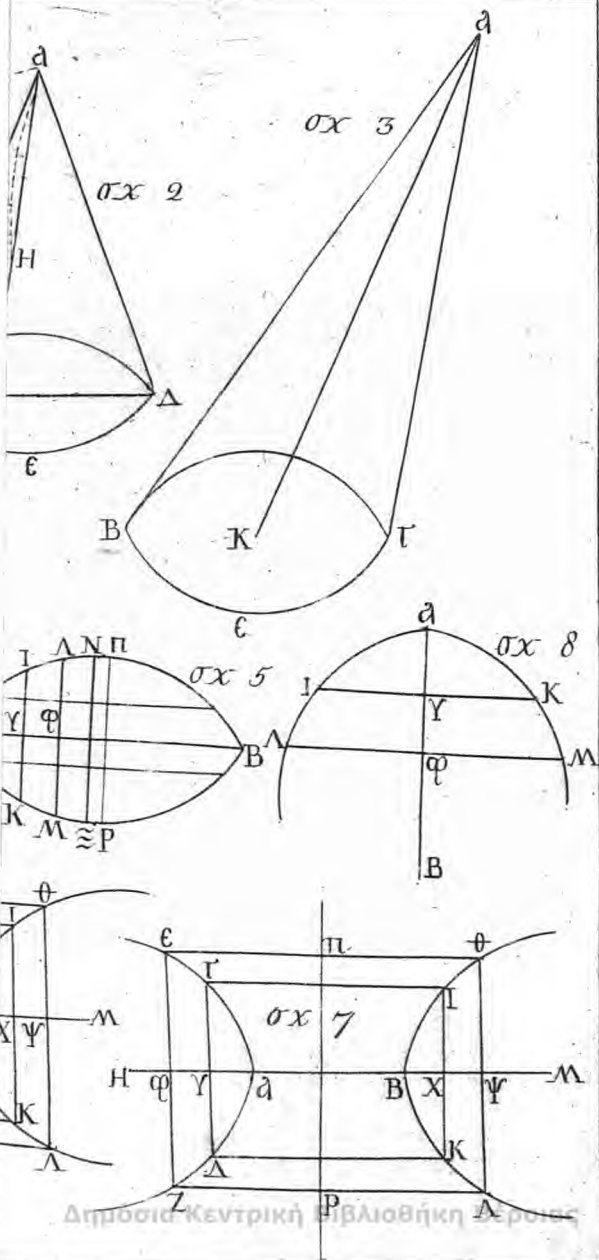


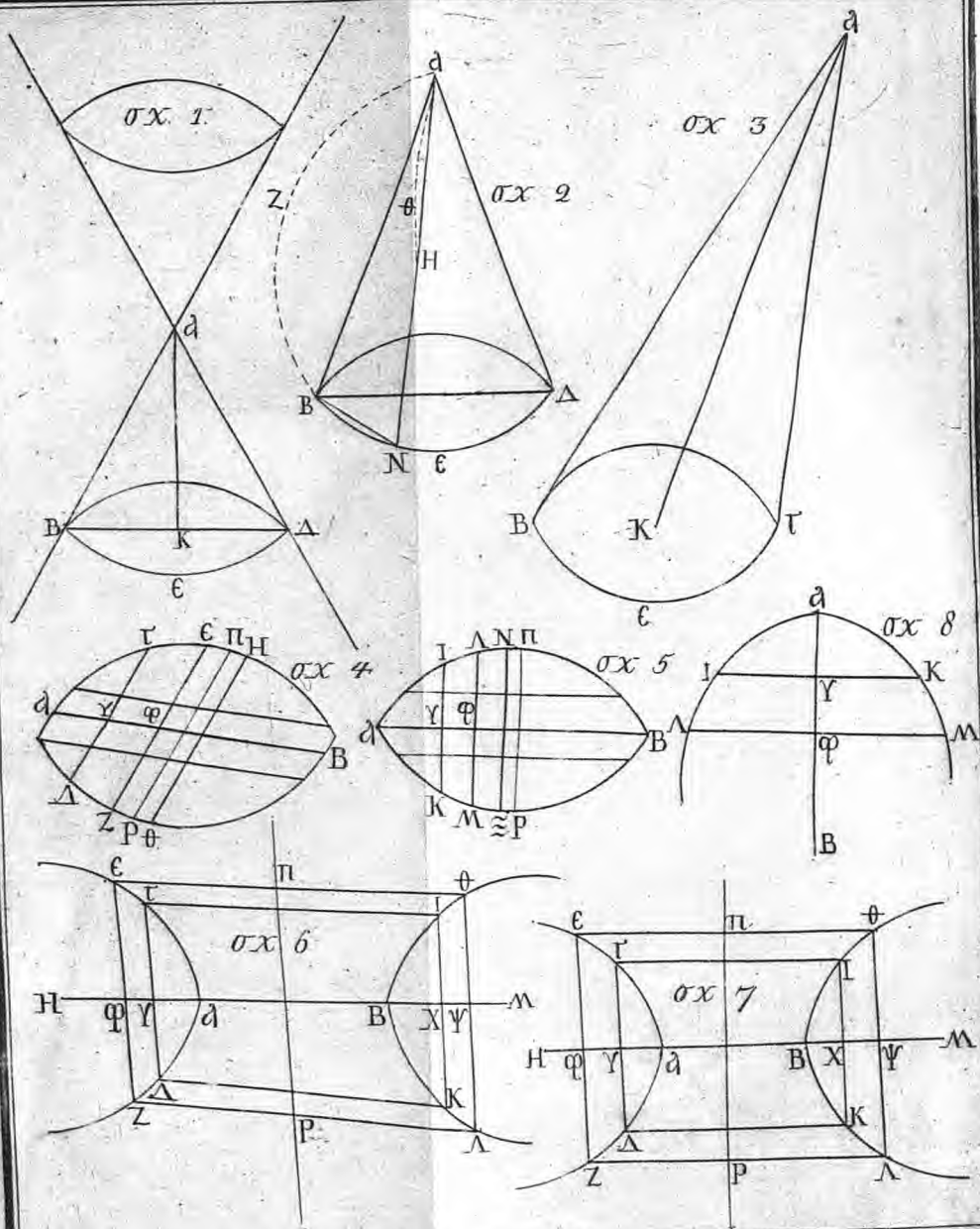


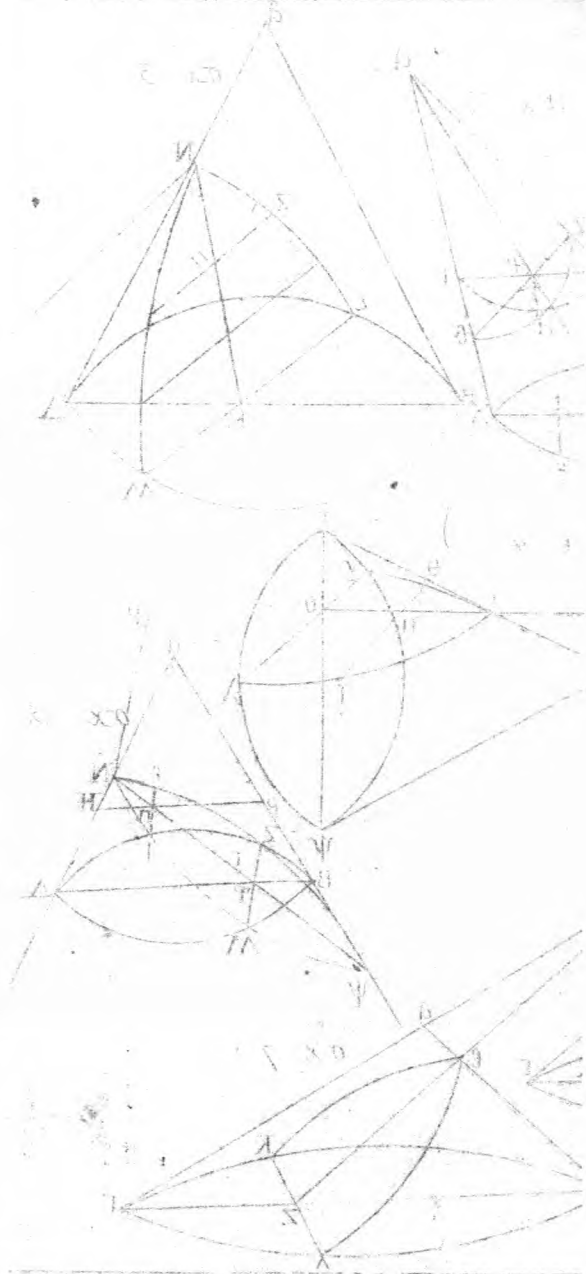


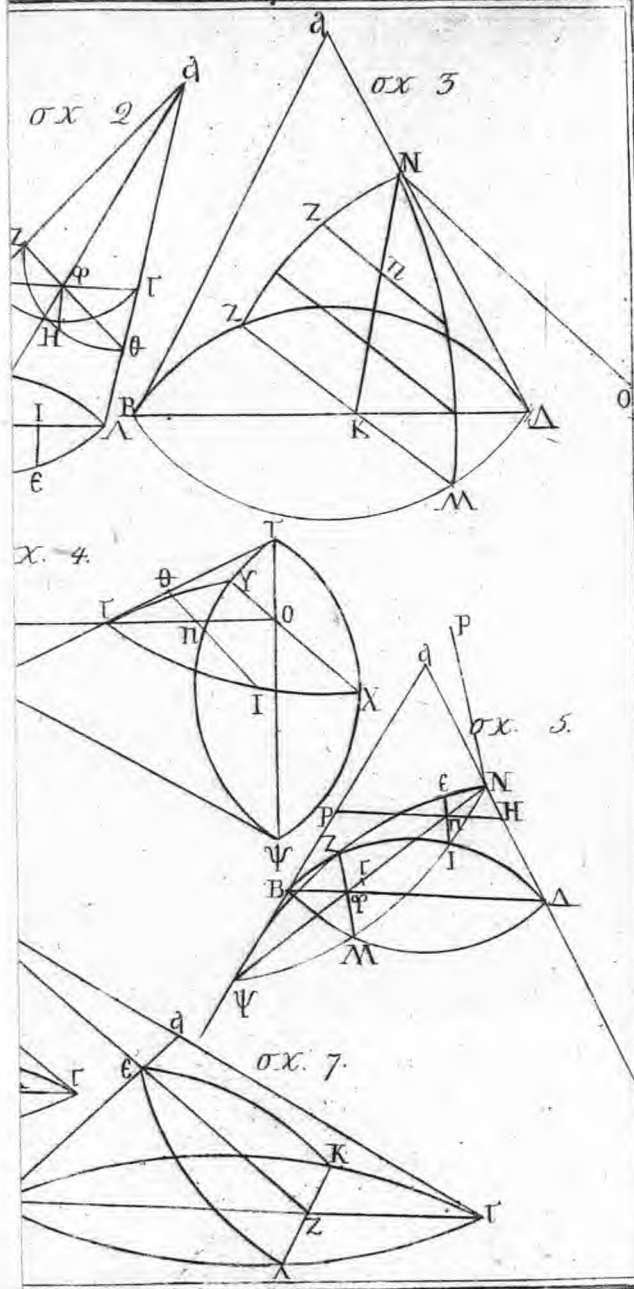


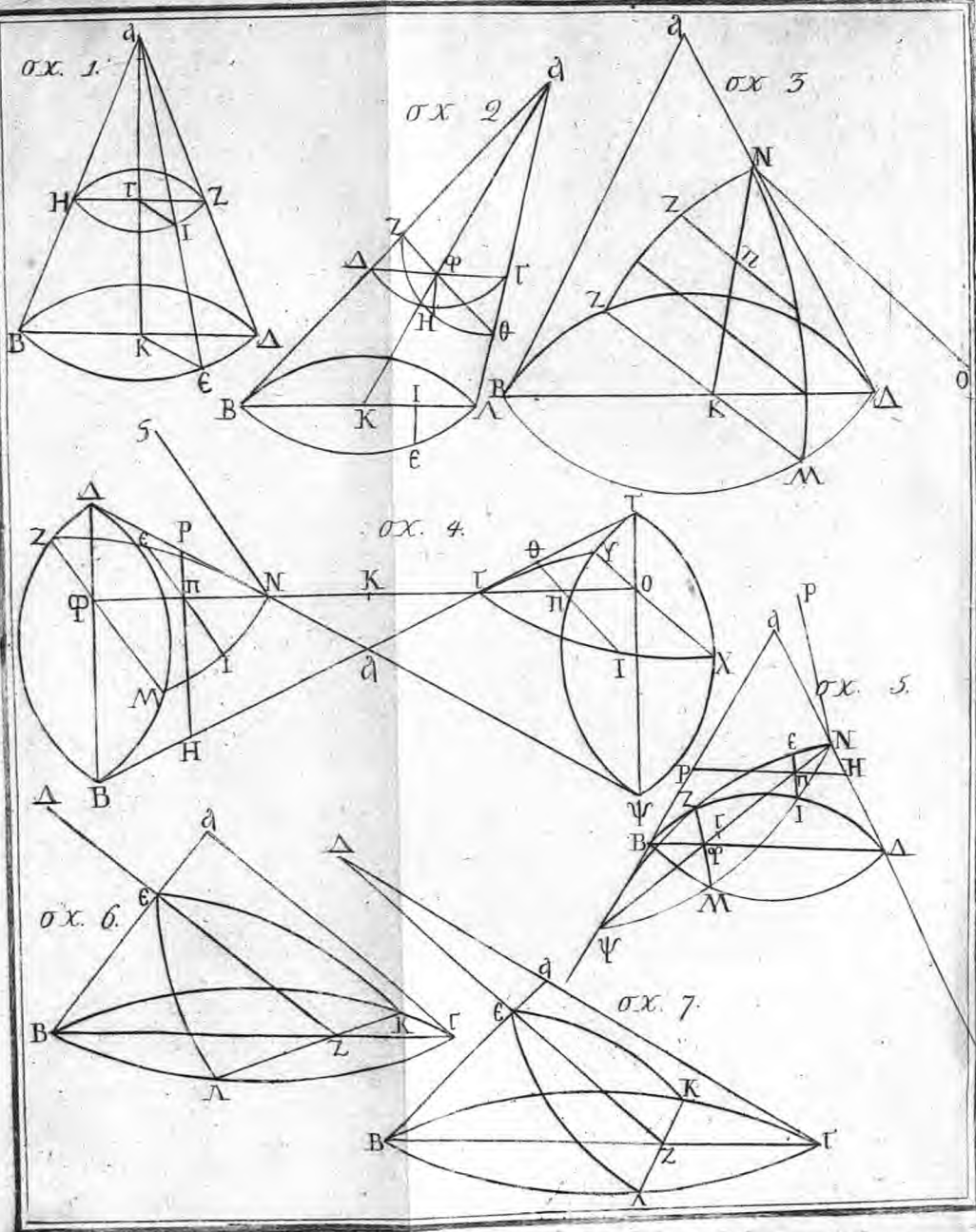
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

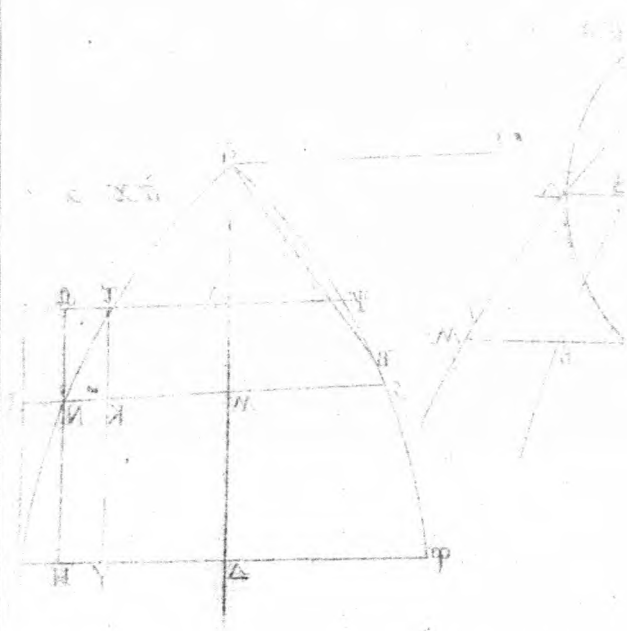
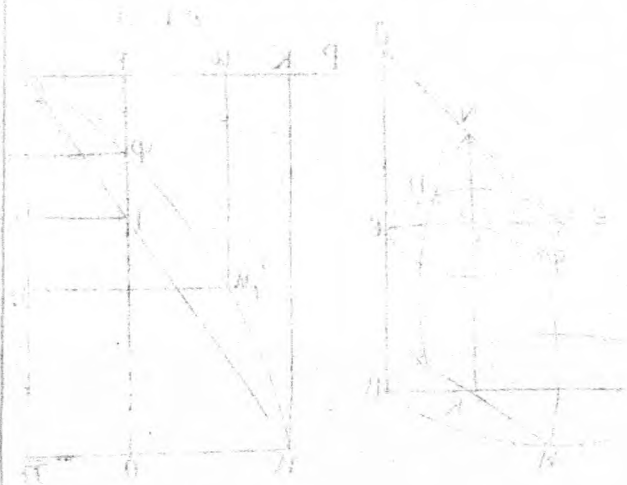


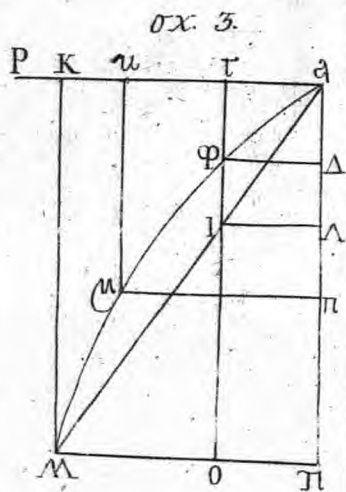
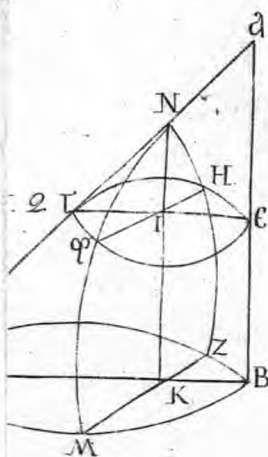




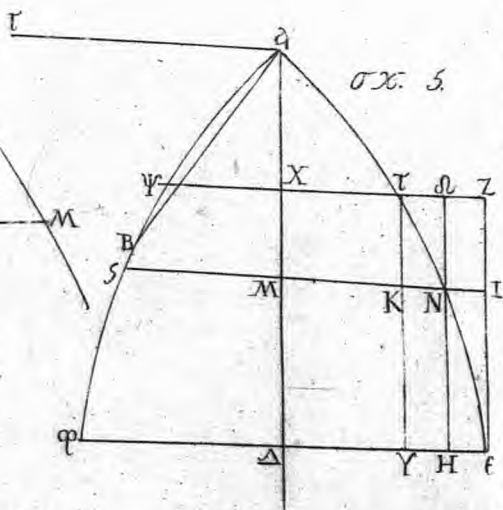
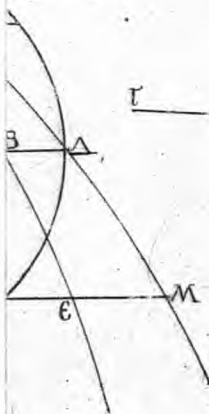


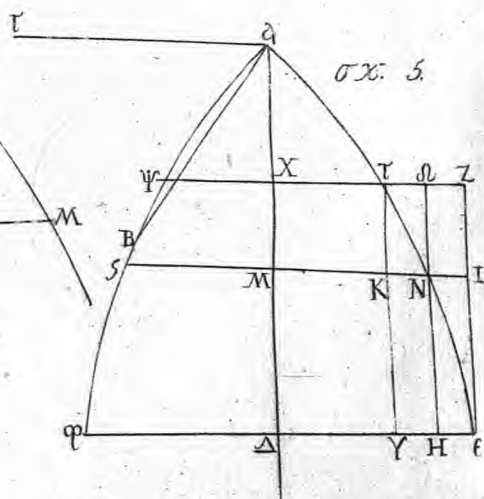
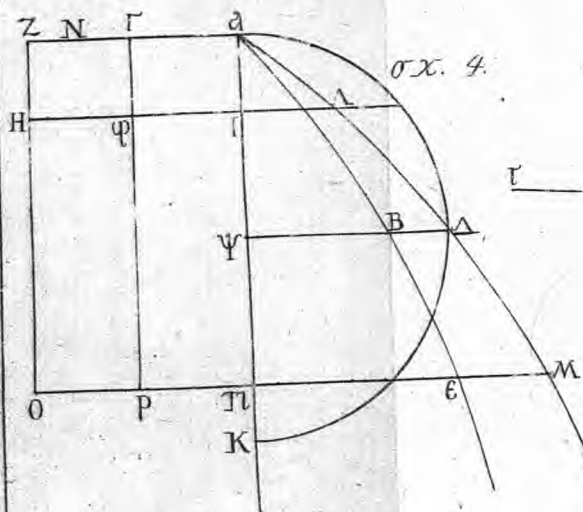
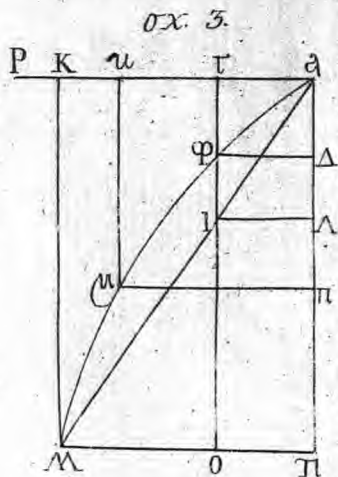
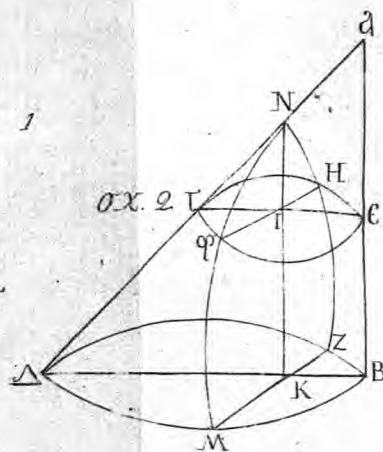
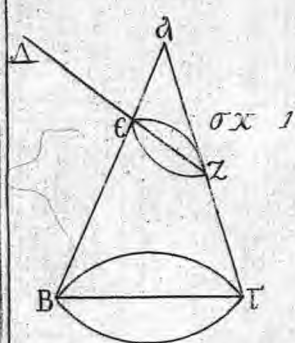


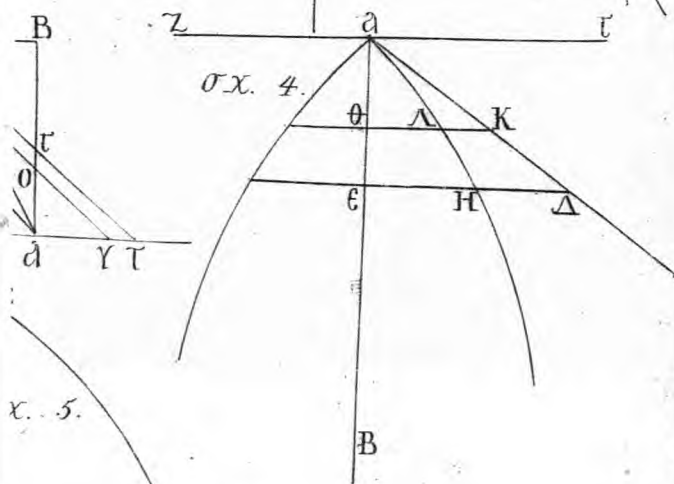
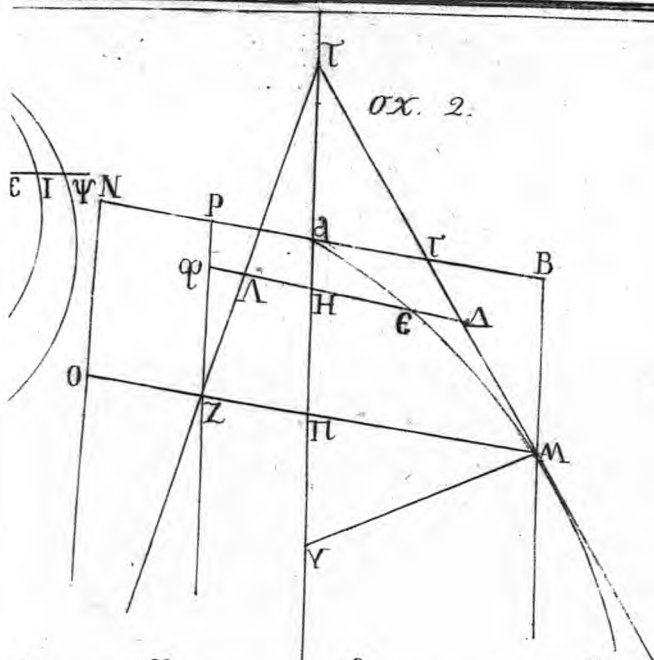




σχ. 4.



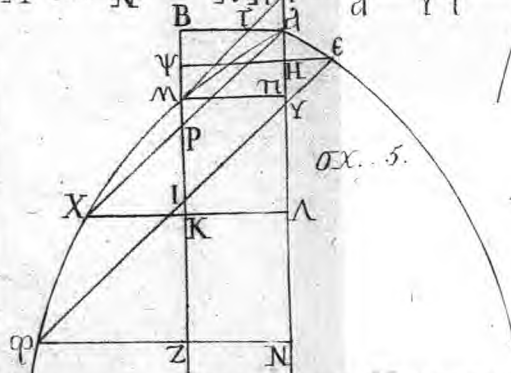
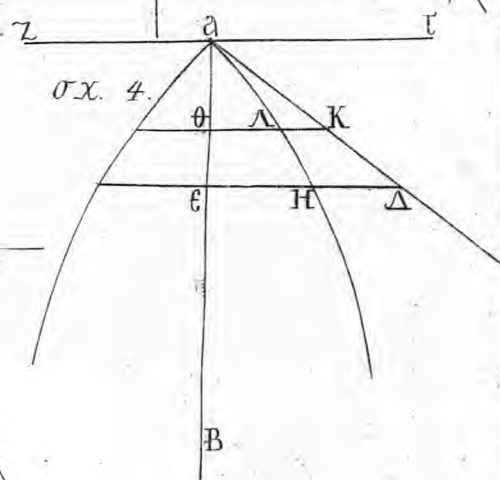
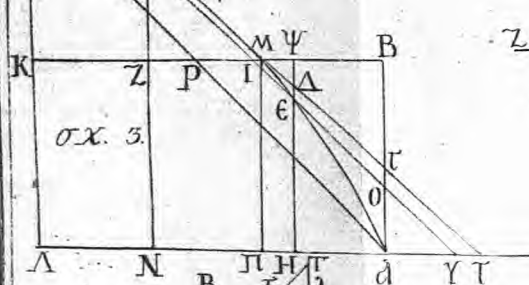
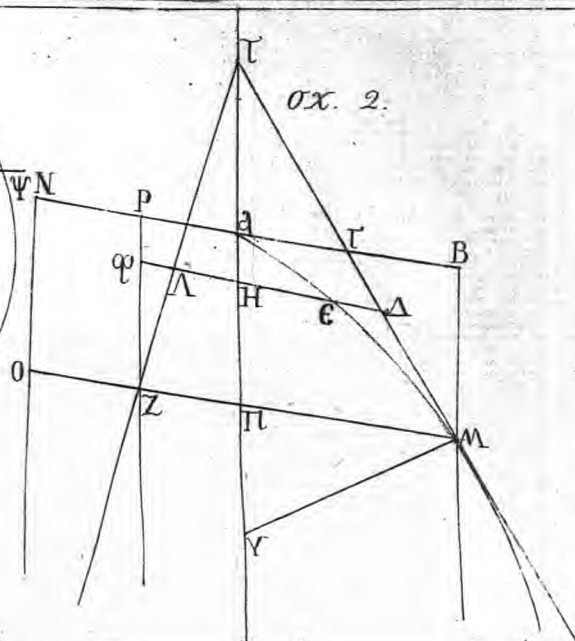
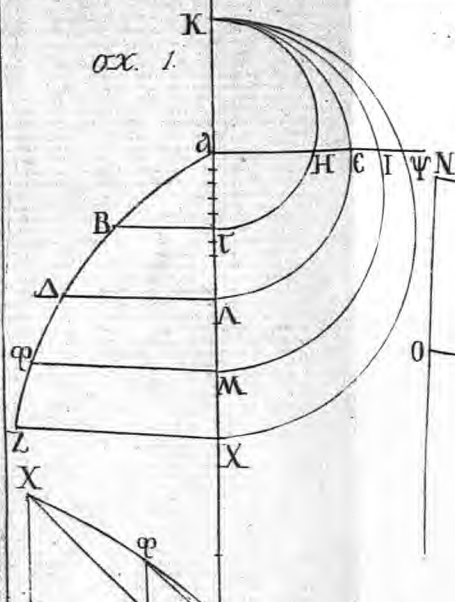




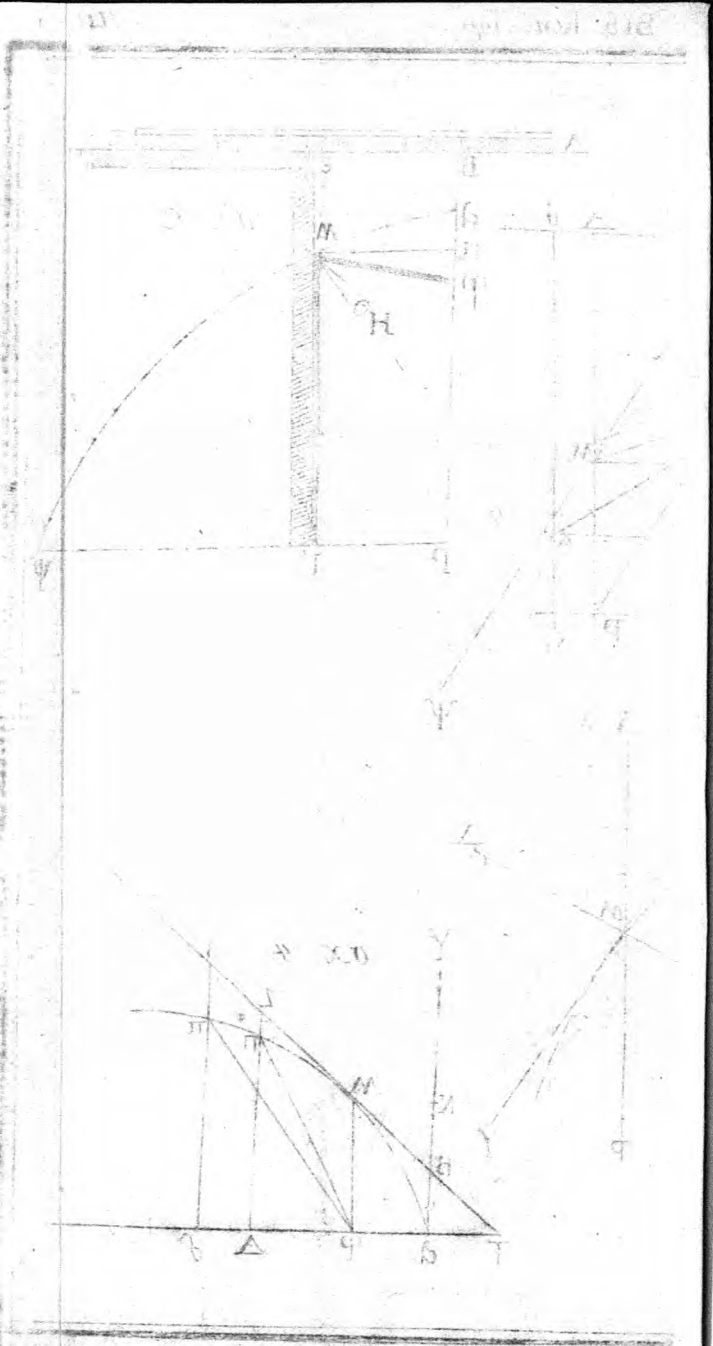
σχ. 5.

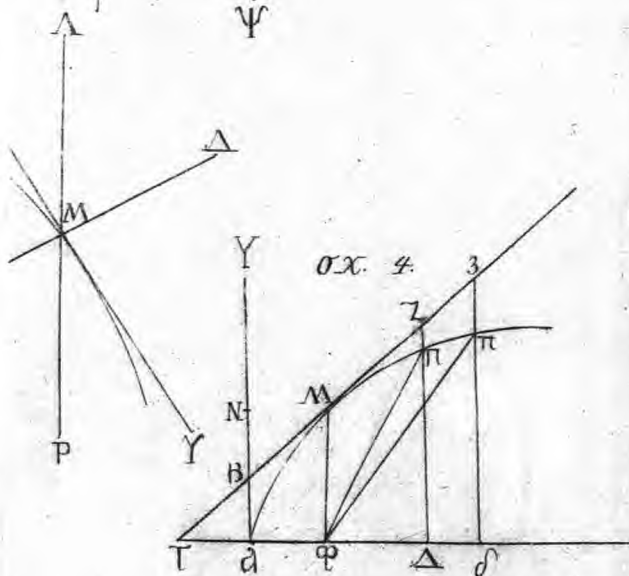
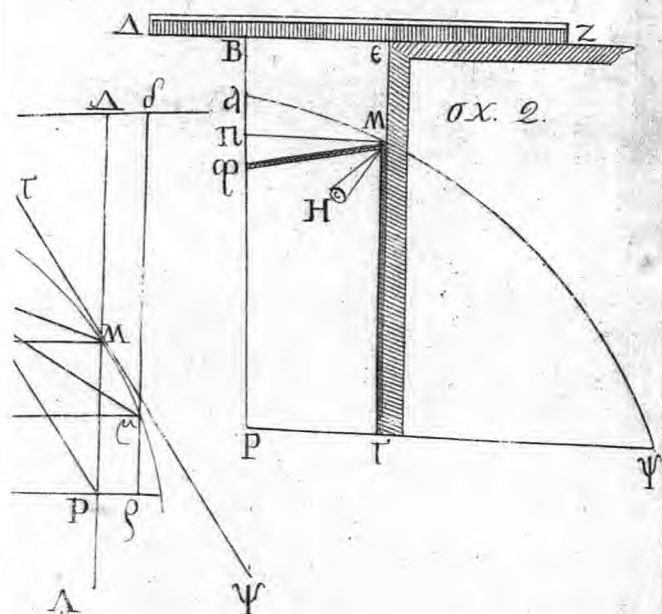
σχ 5

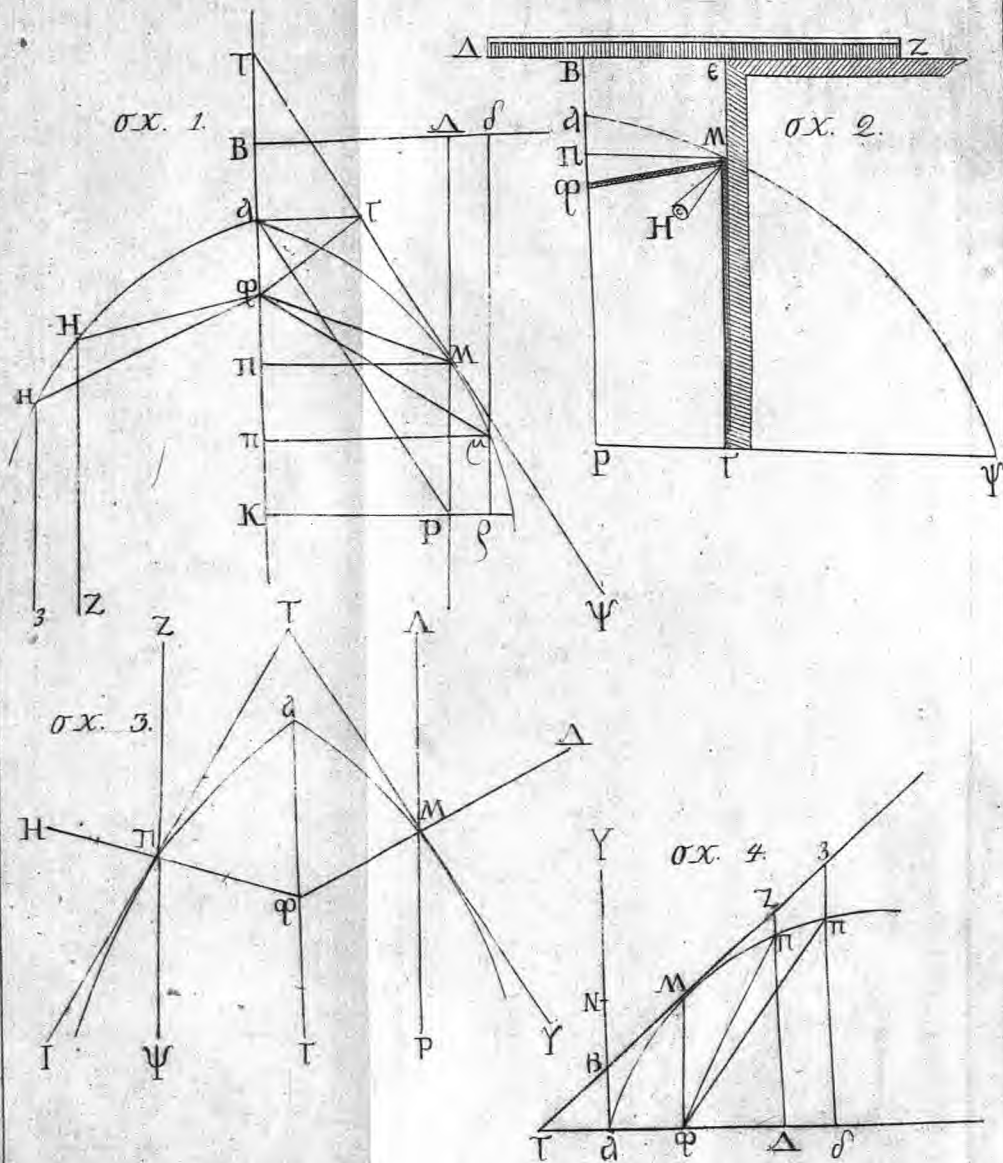
χ



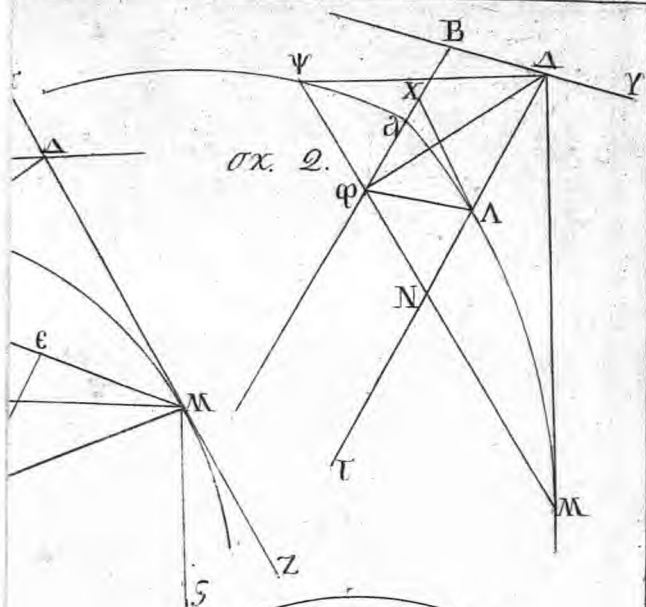
σχ. 5
—
x



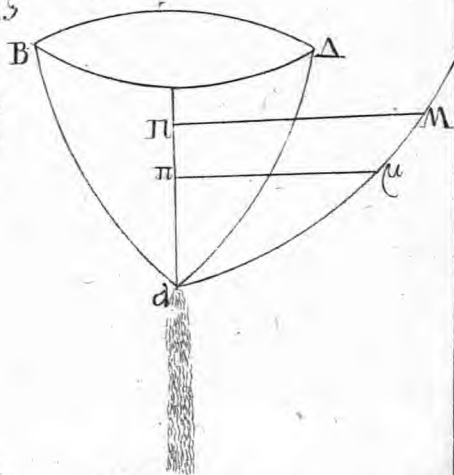




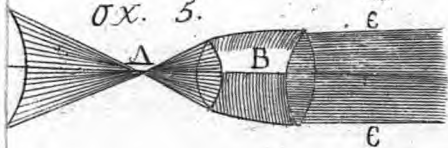


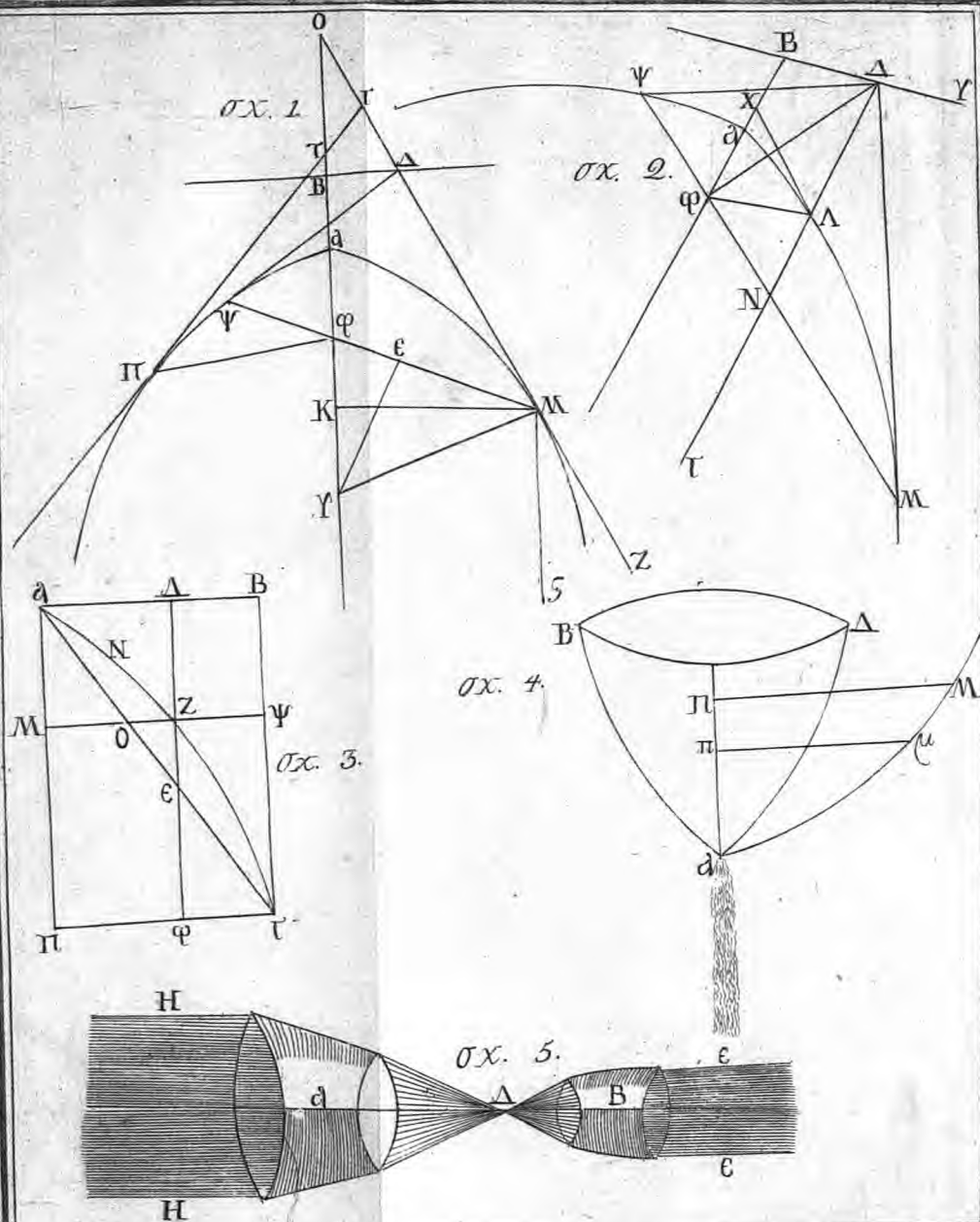


σx. 4.



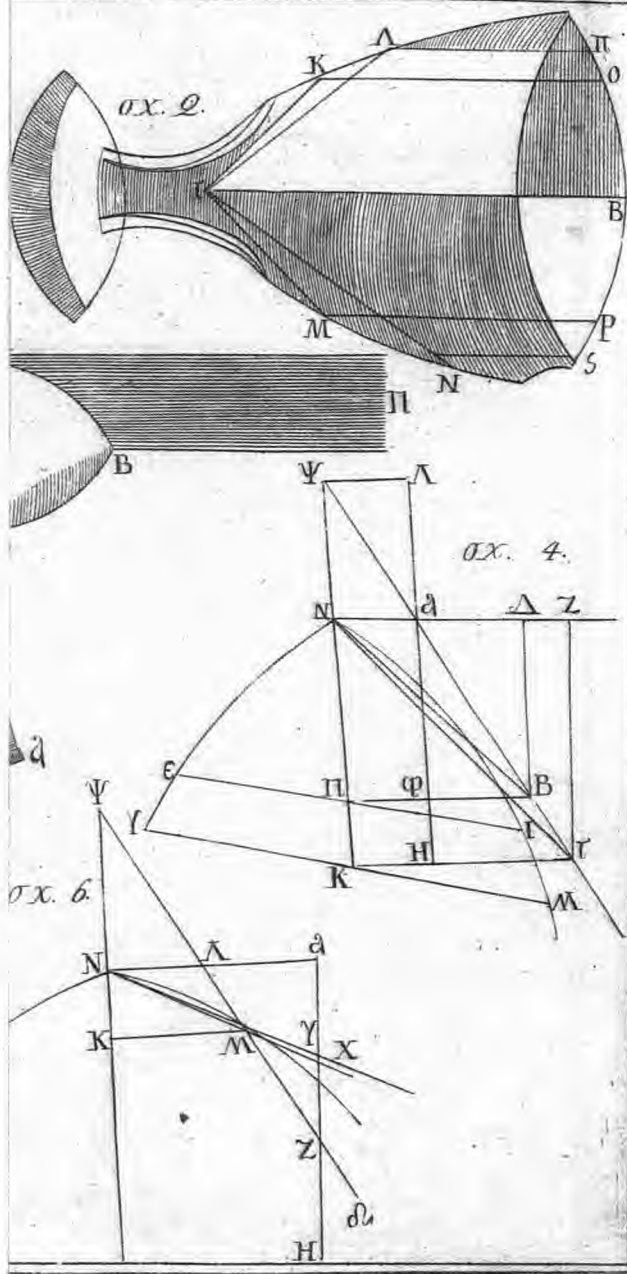
σx. 5.



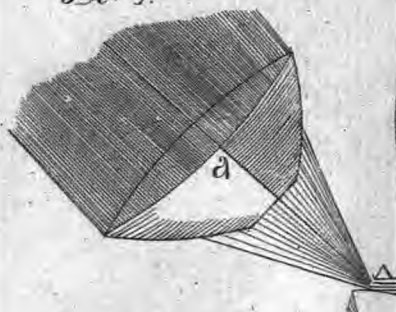




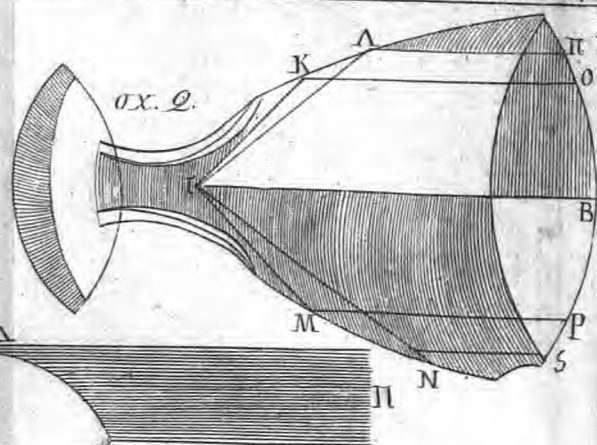
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



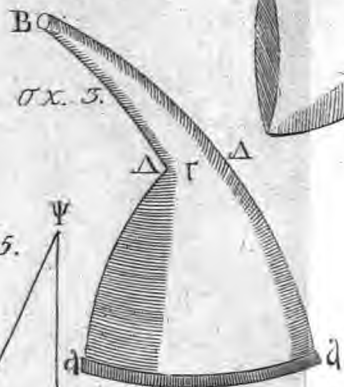
σχ. 1.



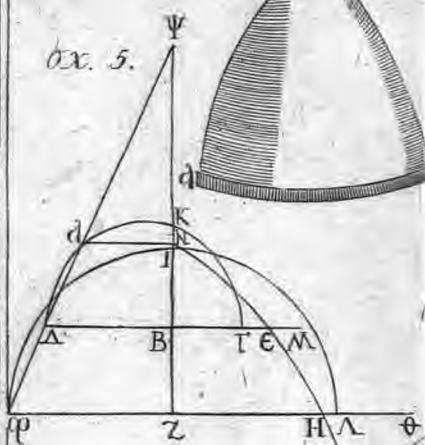
σχ. 2.



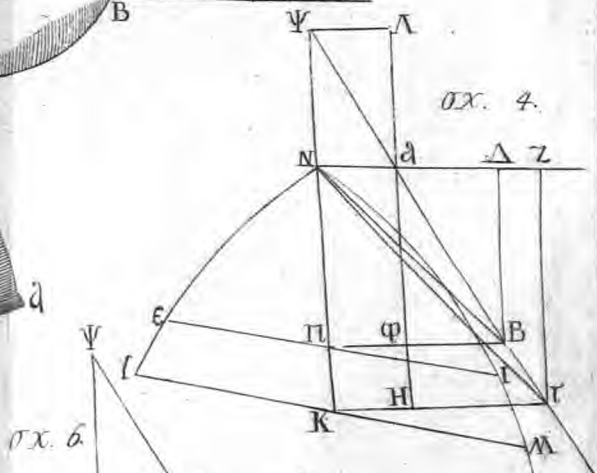
σχ. 3.



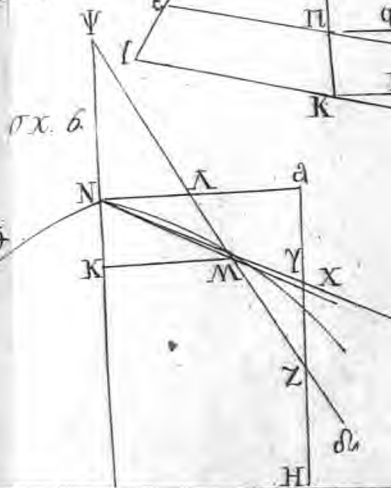
σχ. 5.



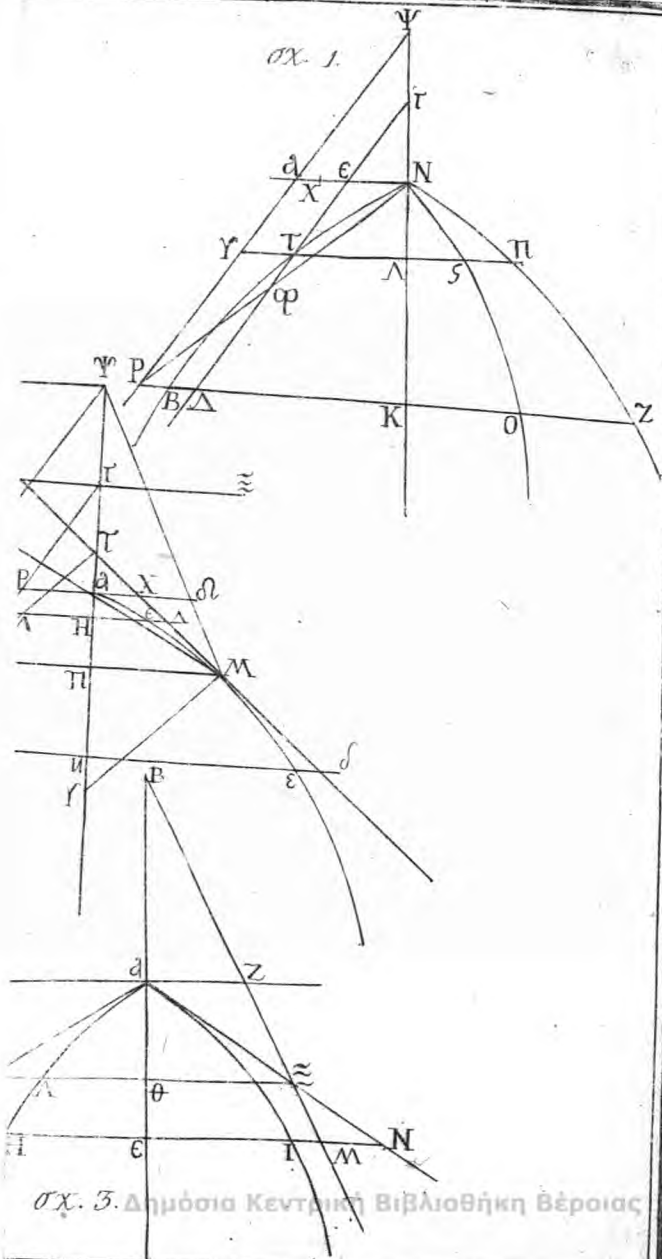
σχ. 4.

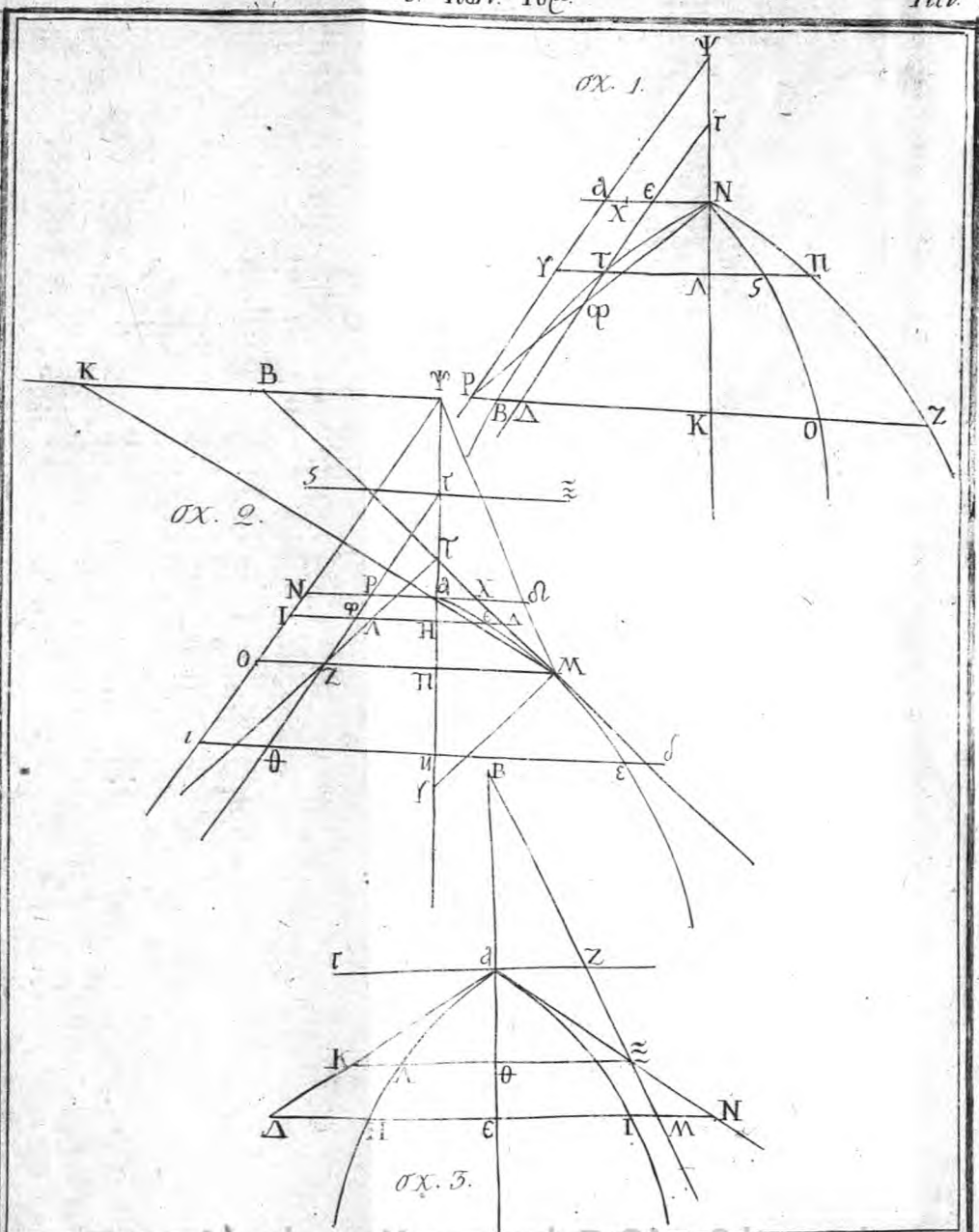


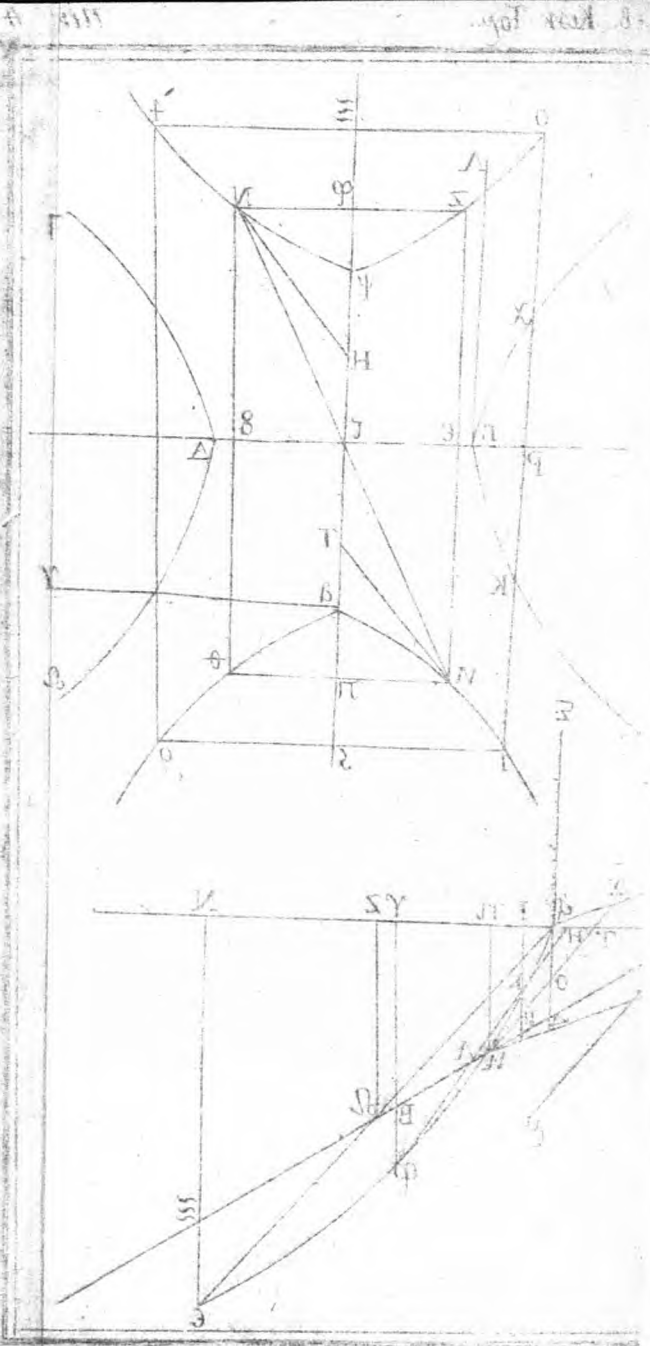
σχ. 6.

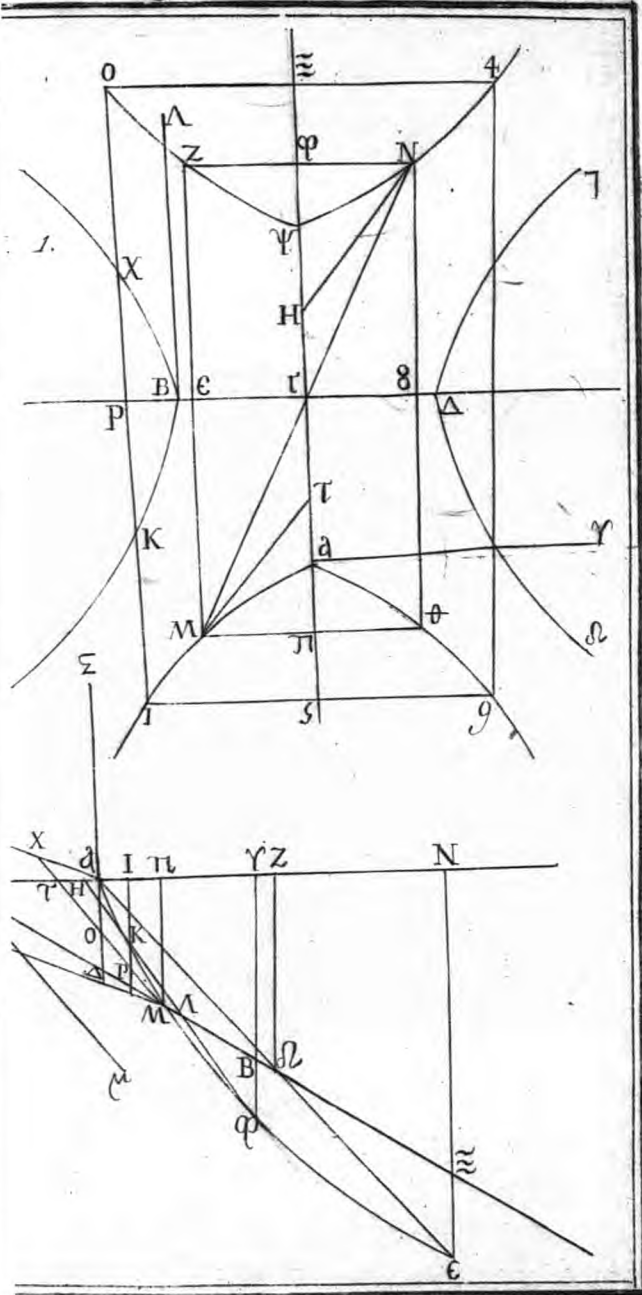




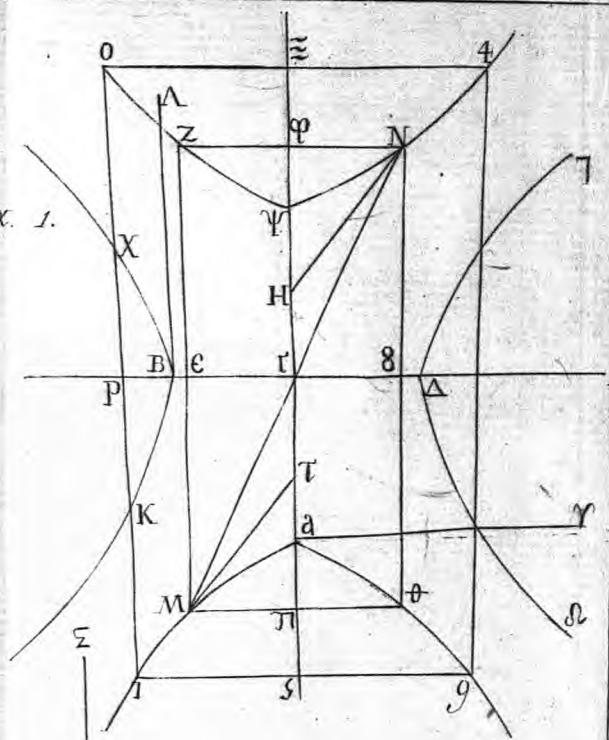




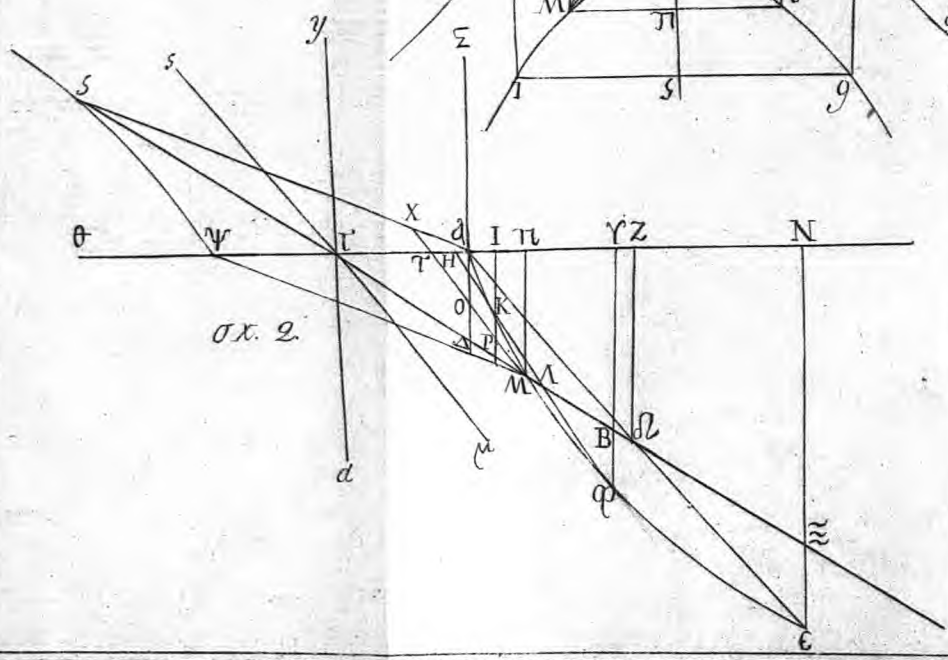


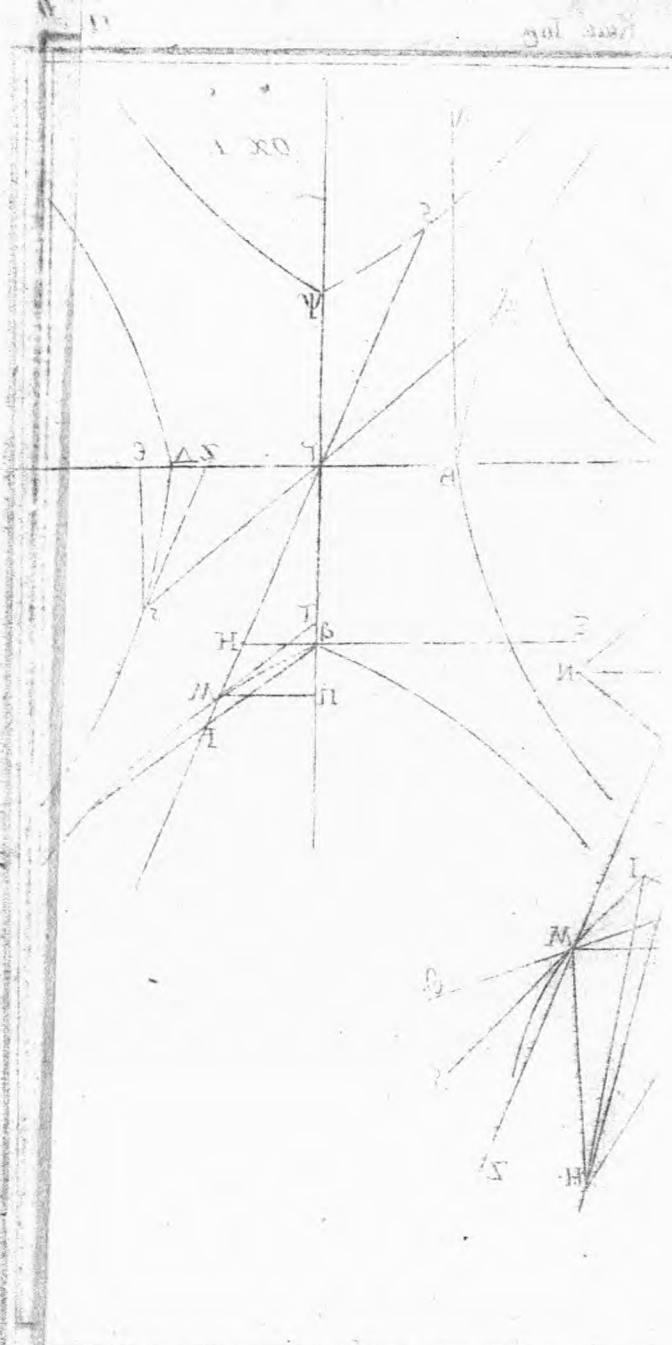


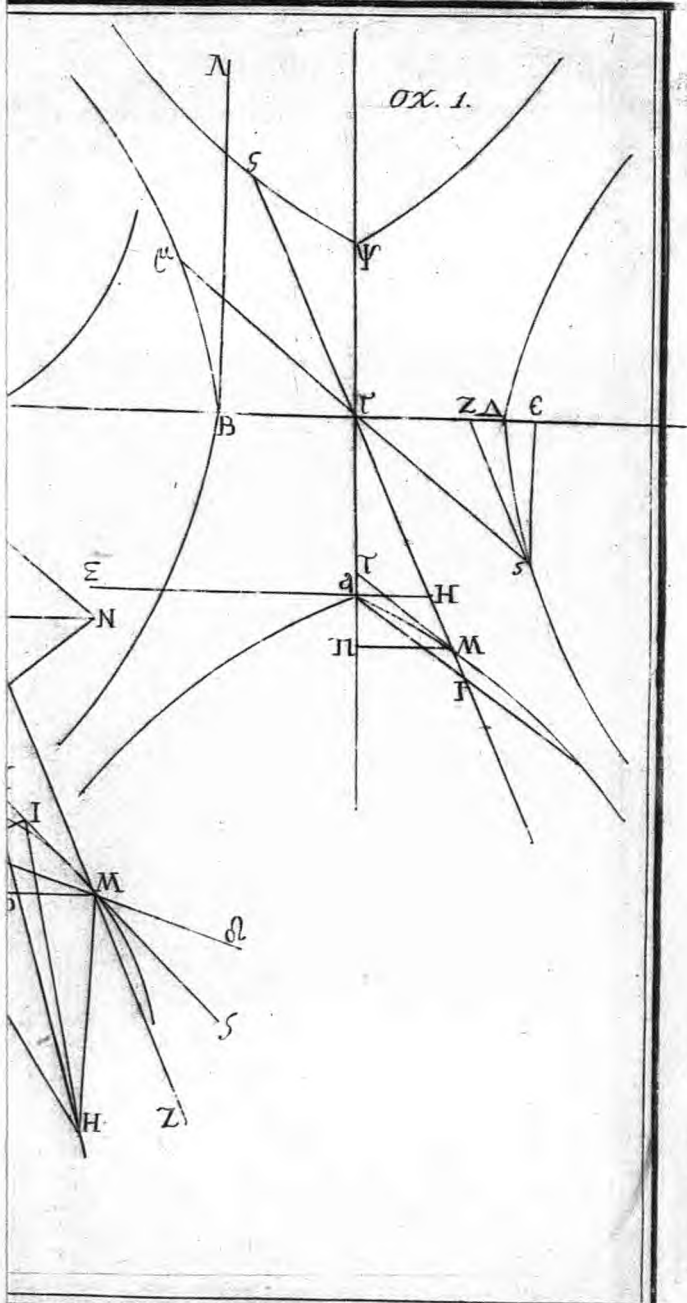
σχ. 1.

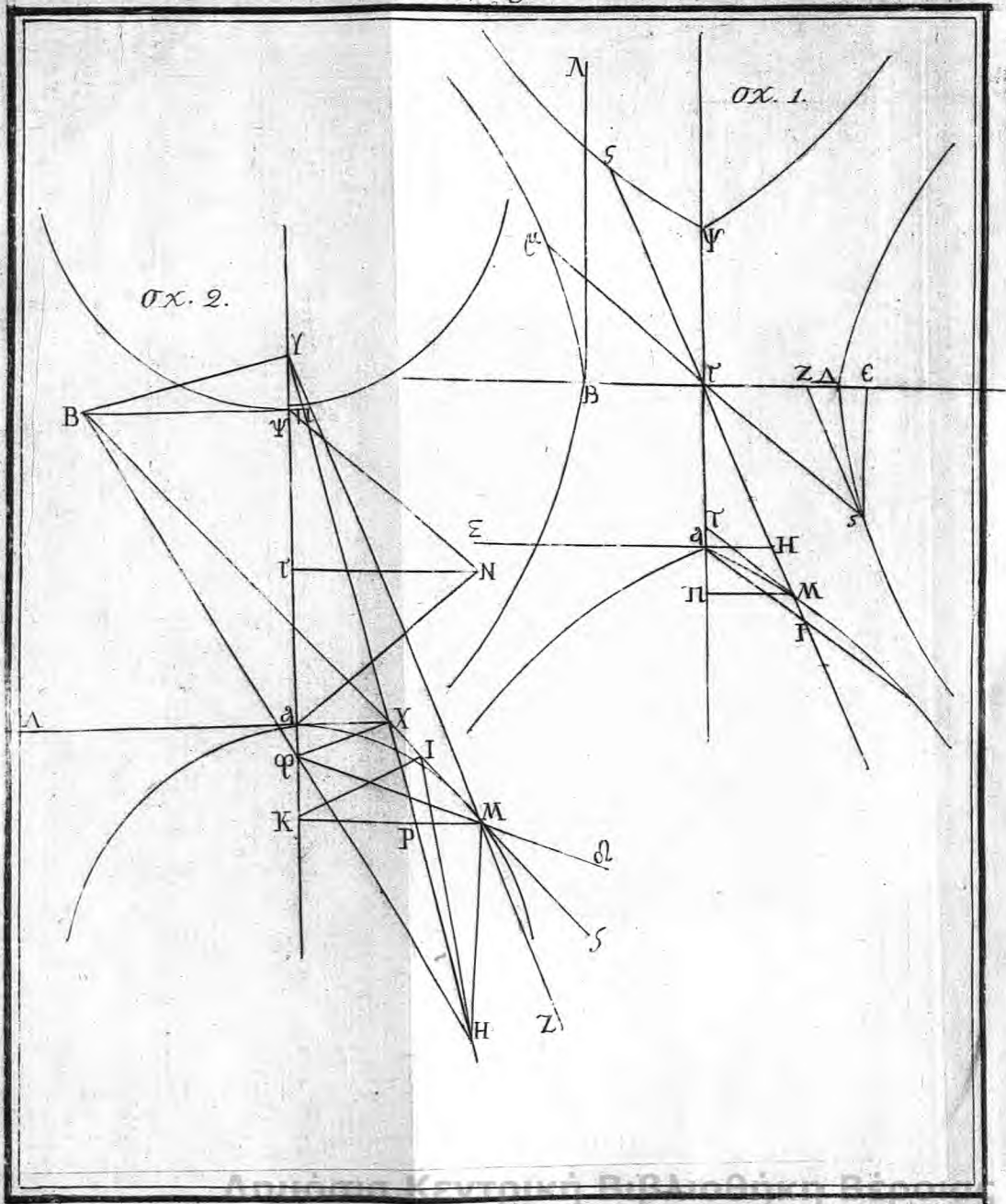


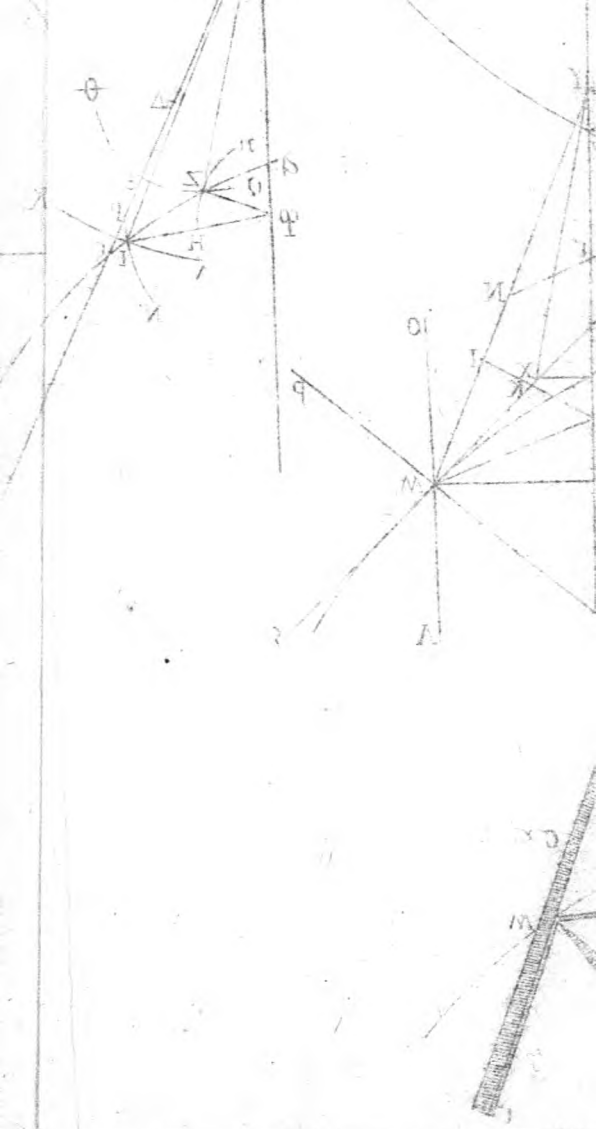
σχ. 2.

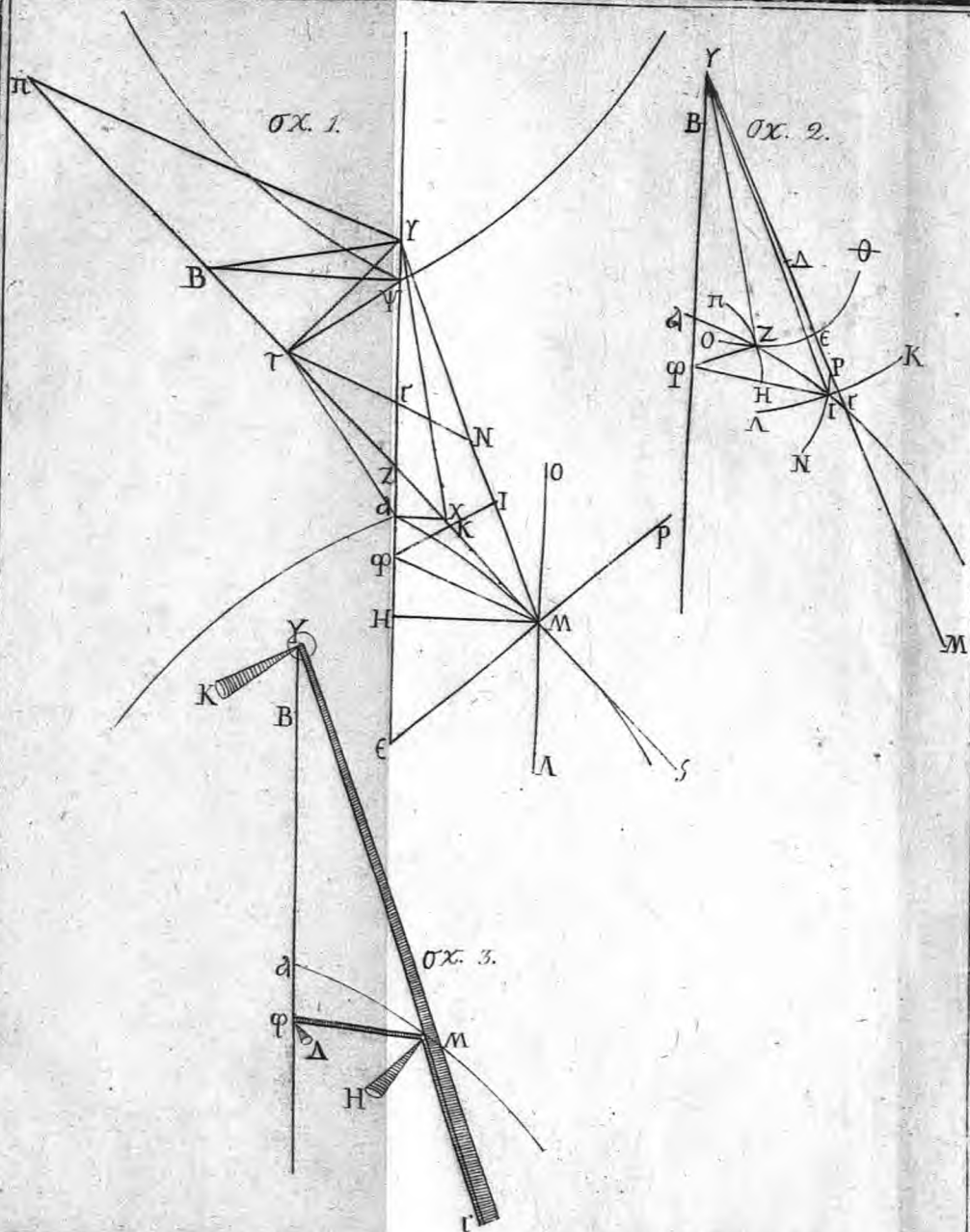


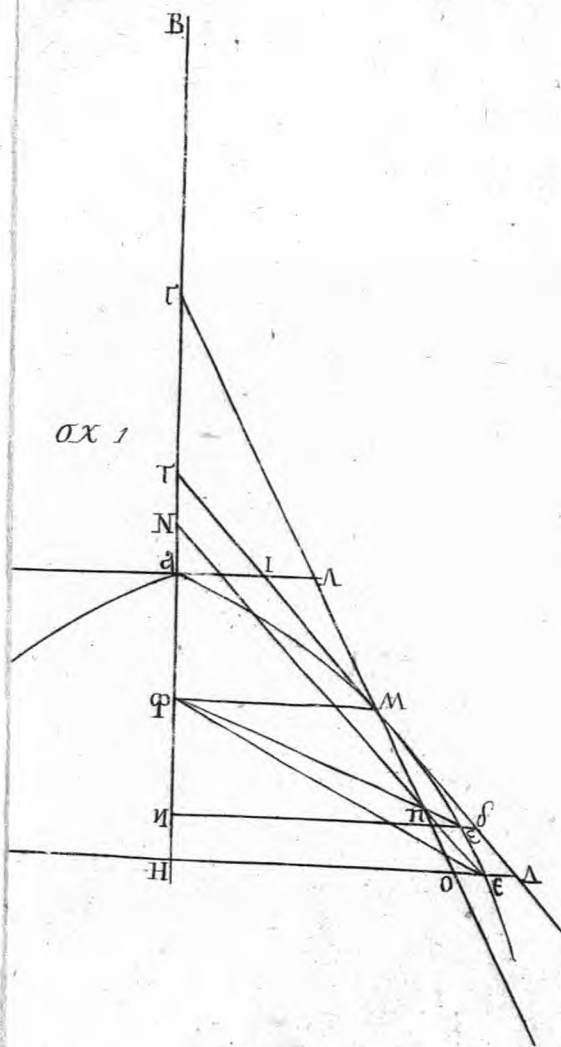


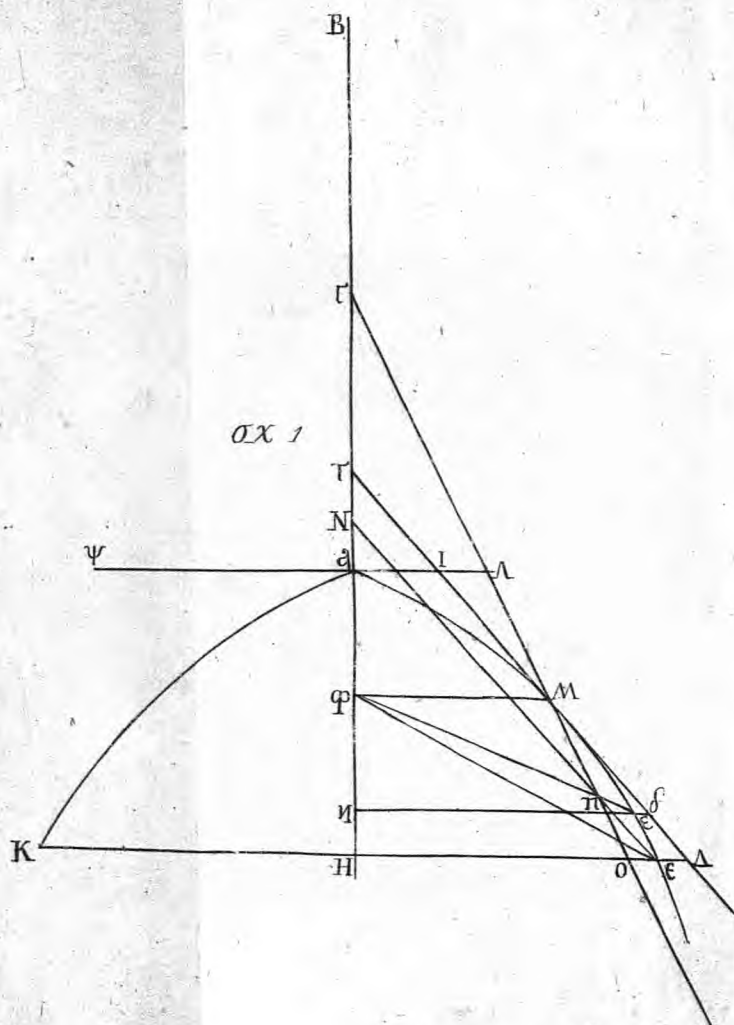




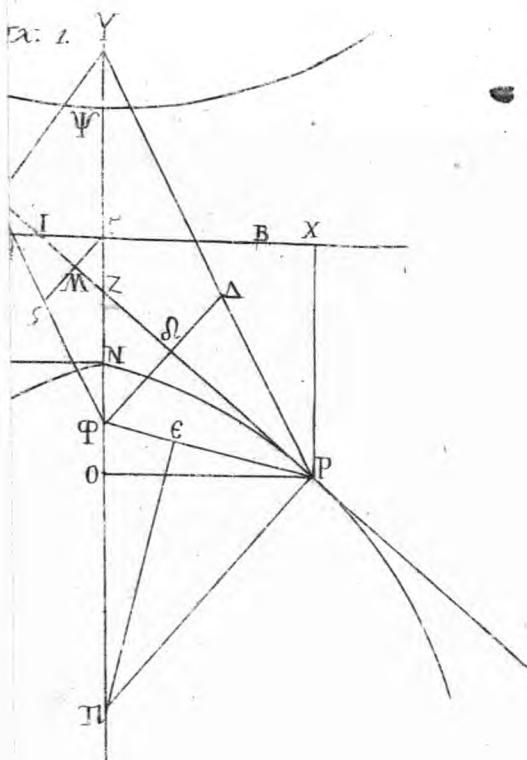




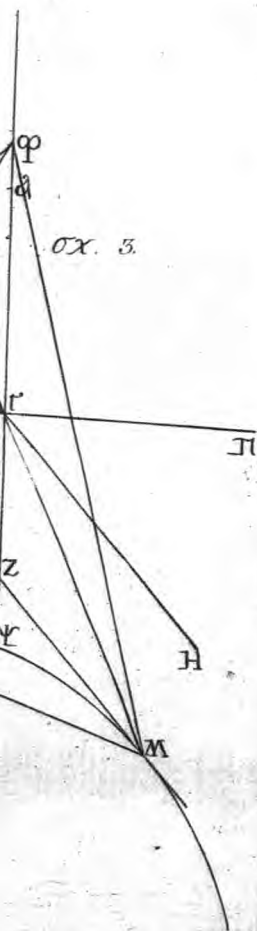




Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

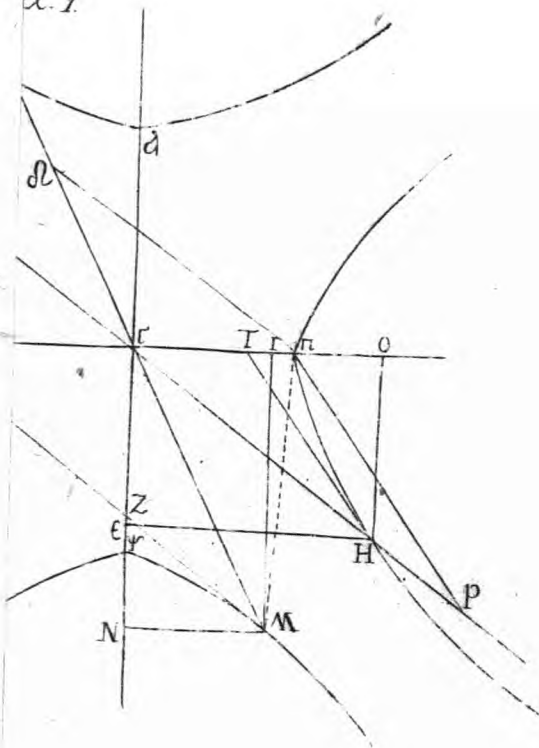


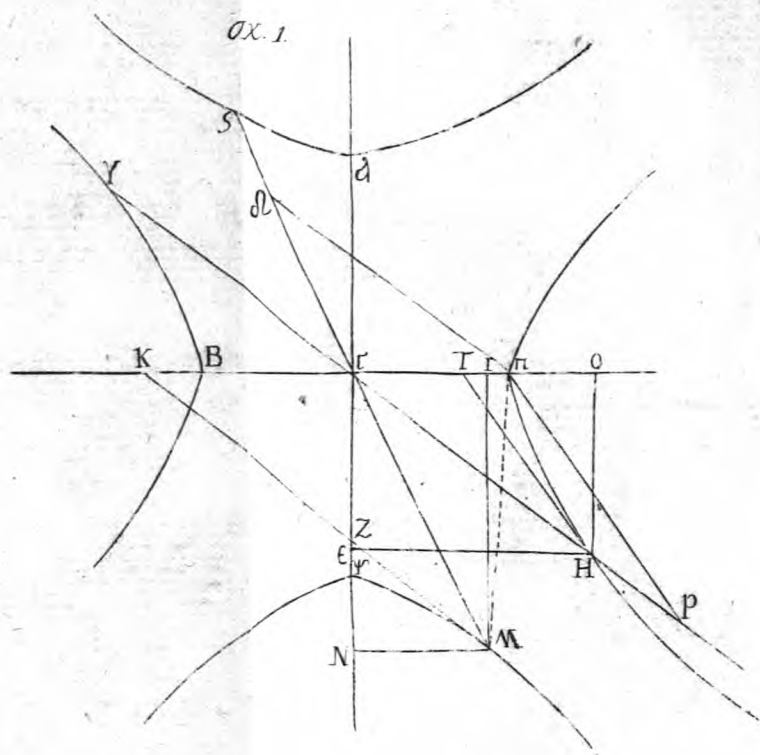
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

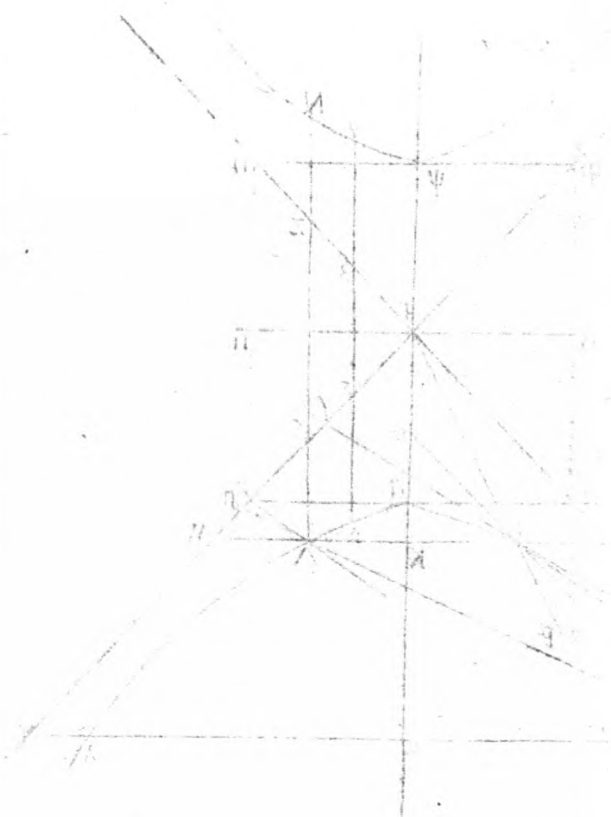


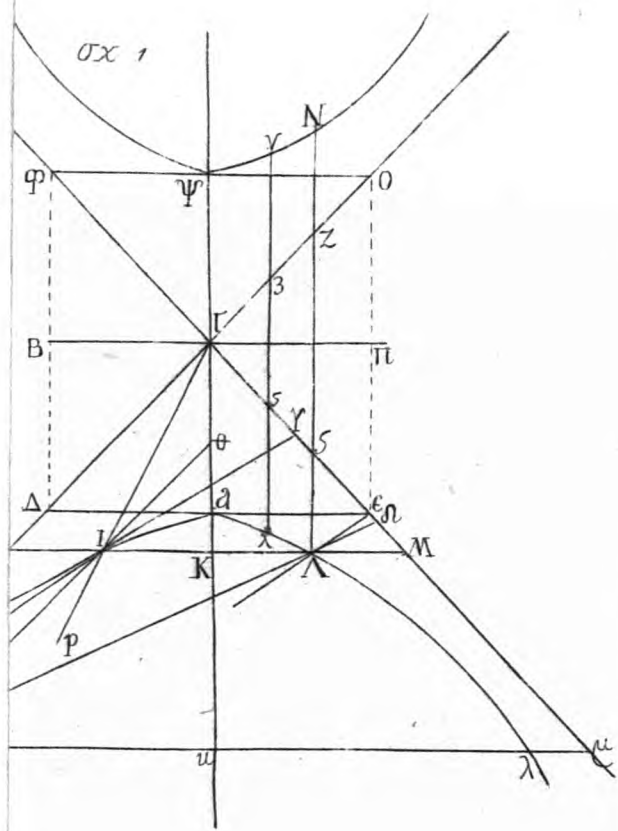


α. 1.

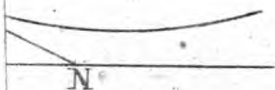
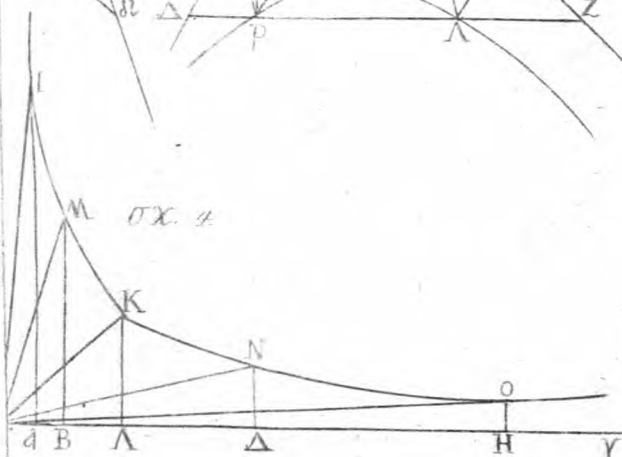
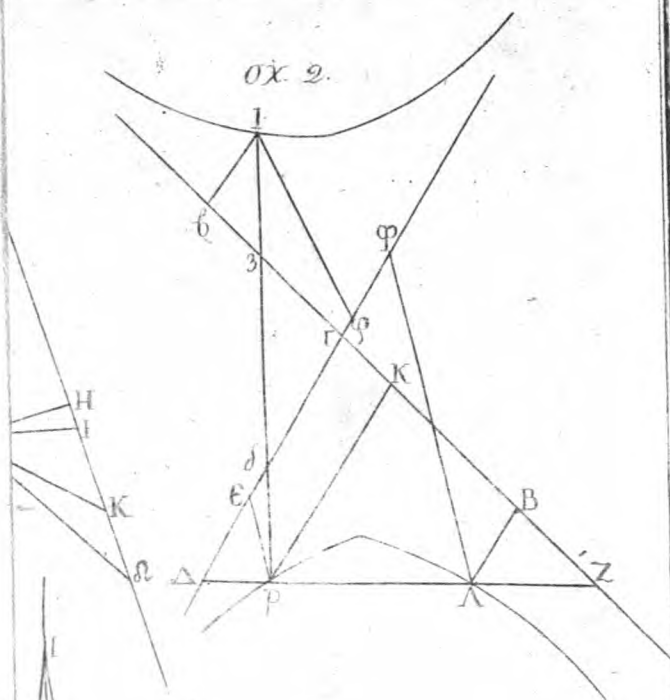


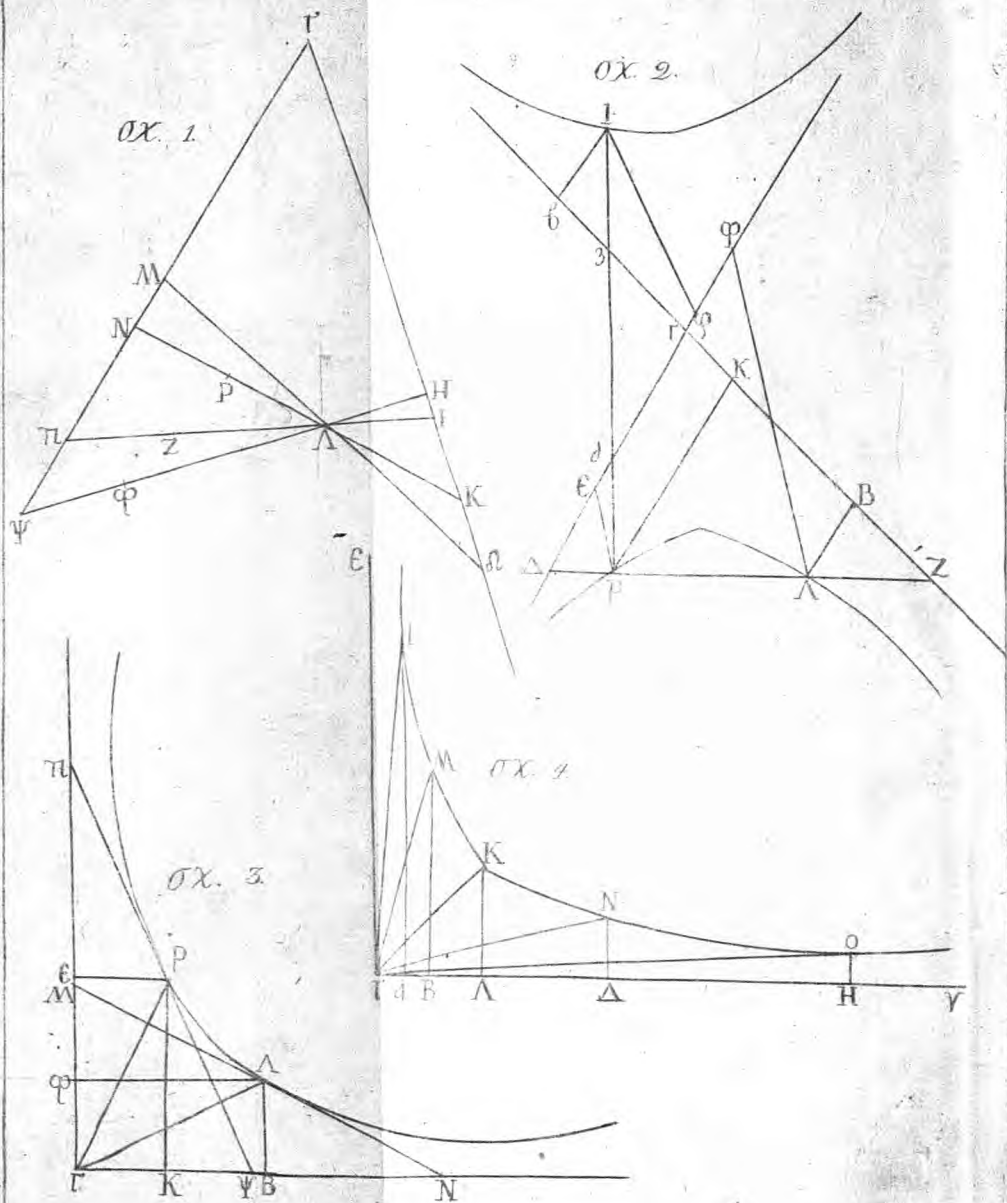






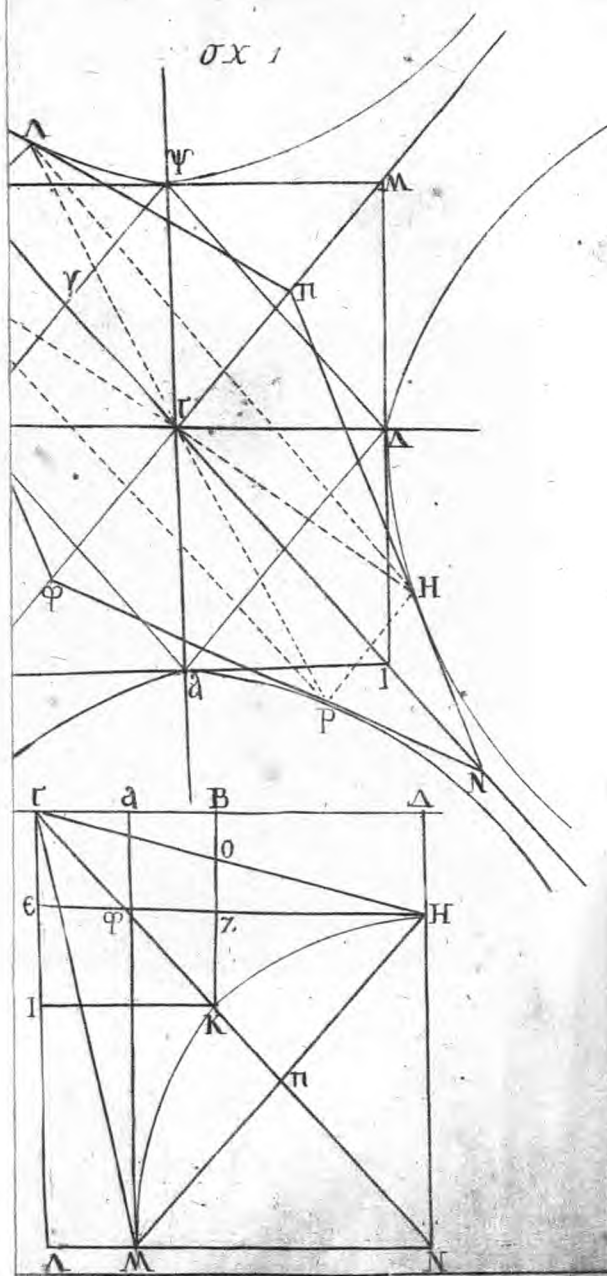
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

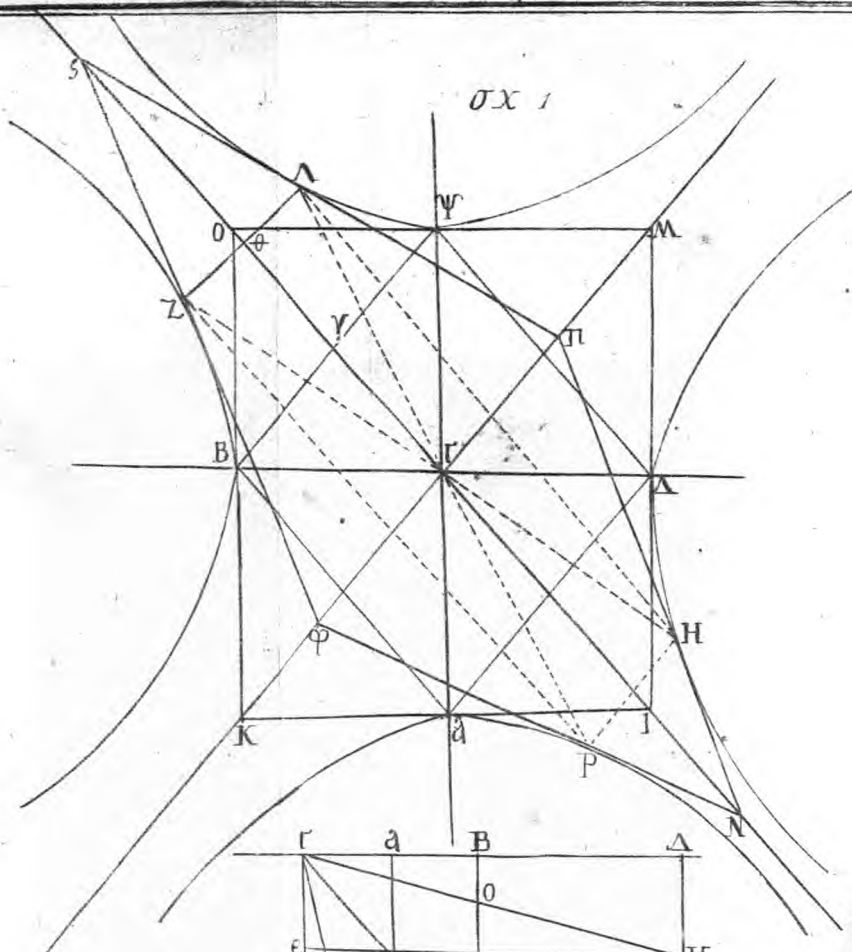




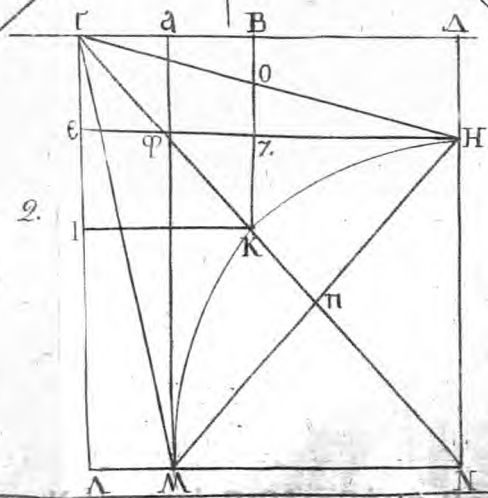
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

σχ 1

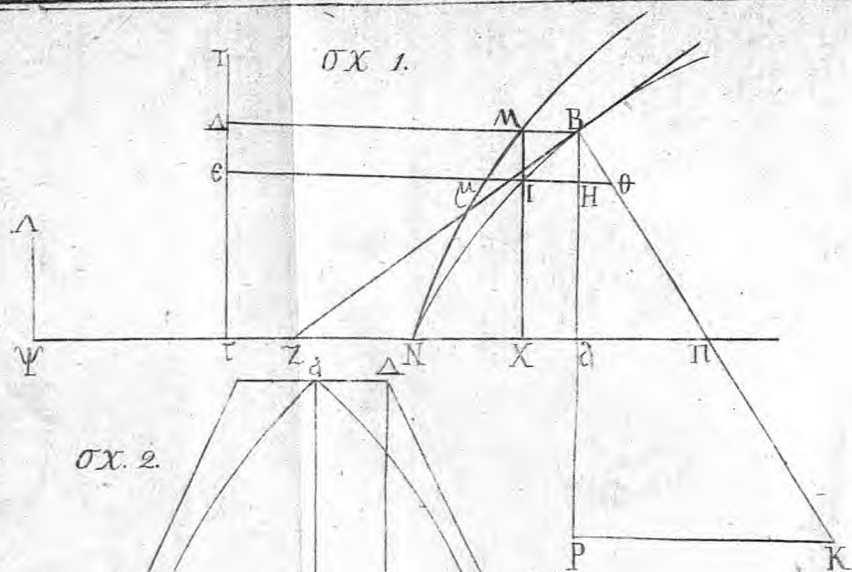




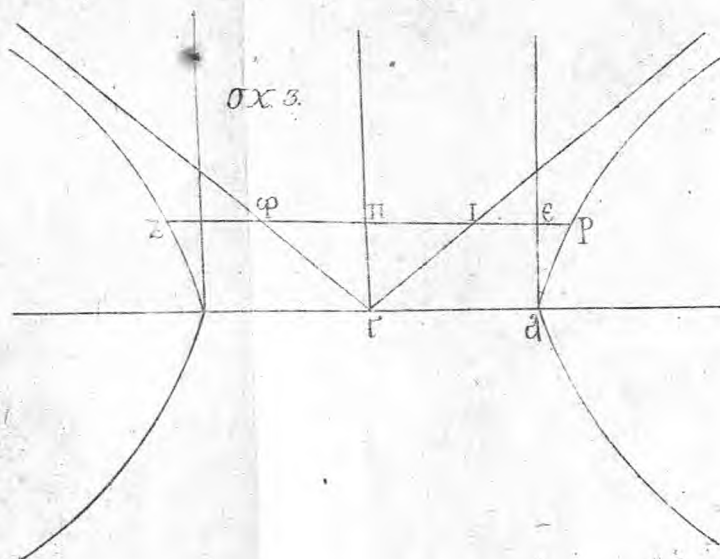
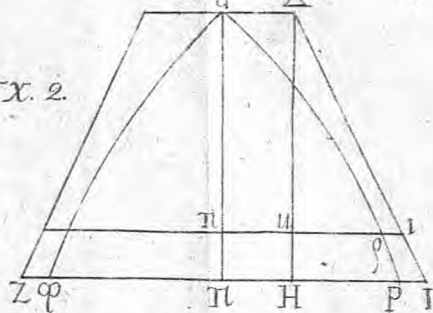
σχ 2.



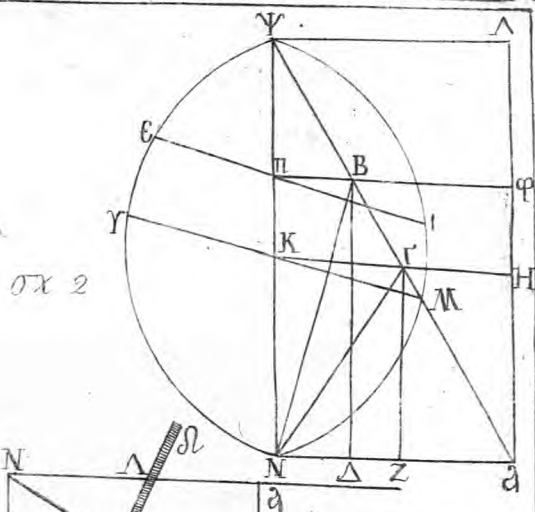
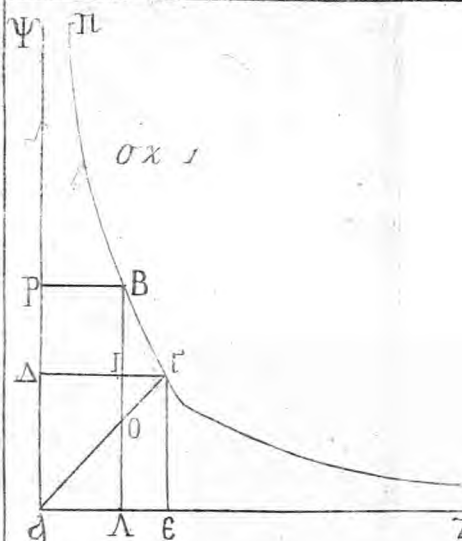
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



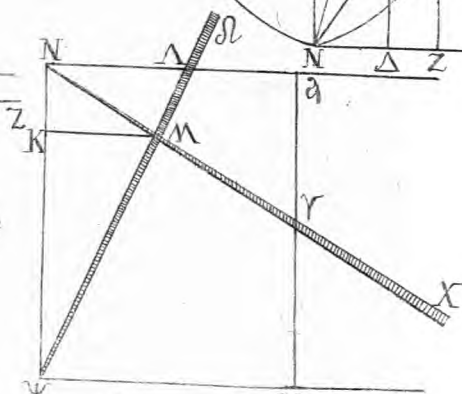
σχ. 2.



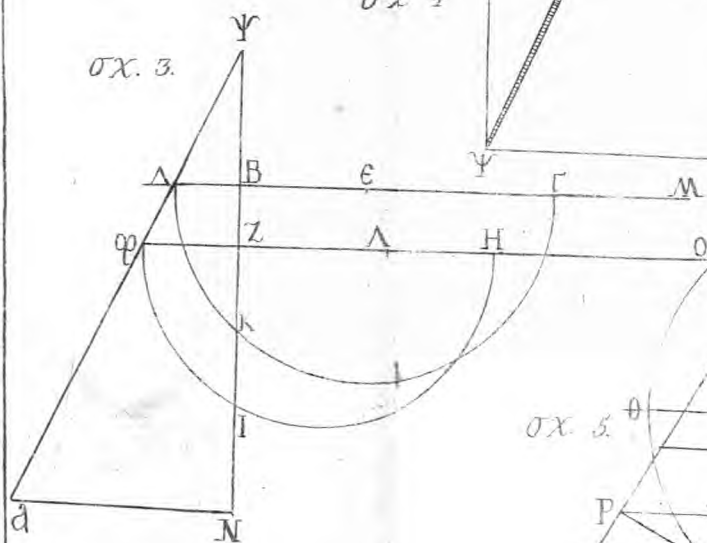
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



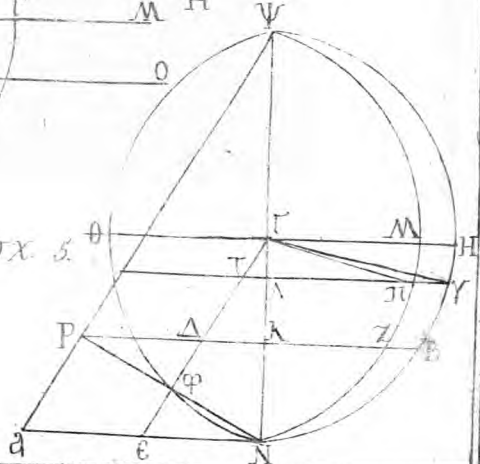
σχ 4



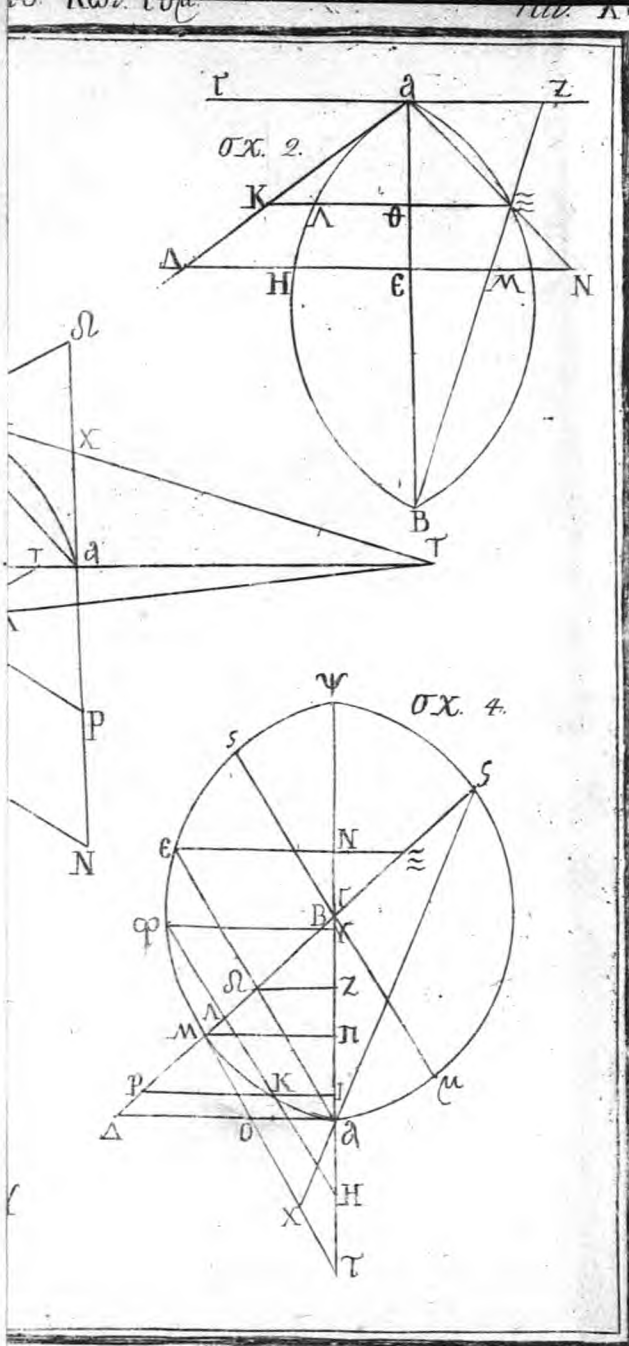
σχ. 3.

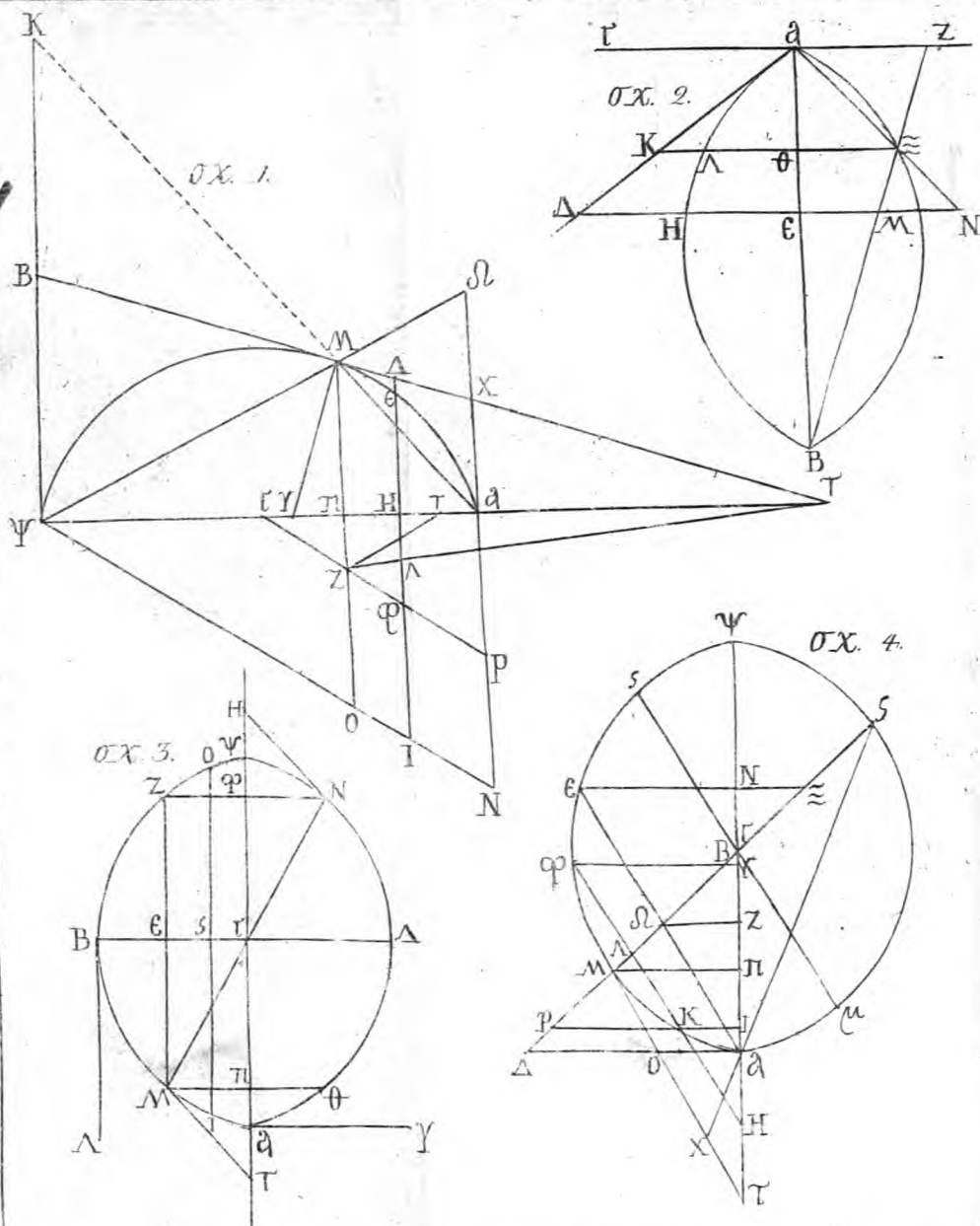


σχ 5.



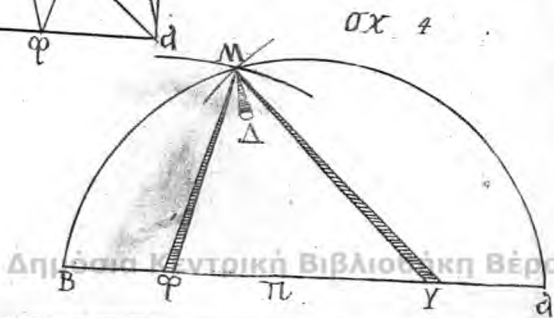
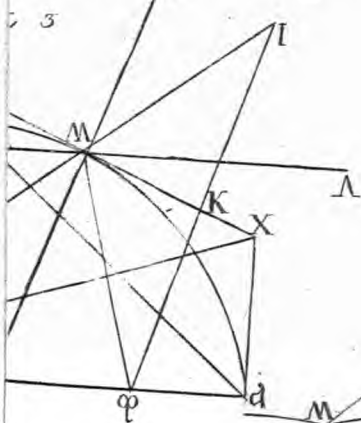
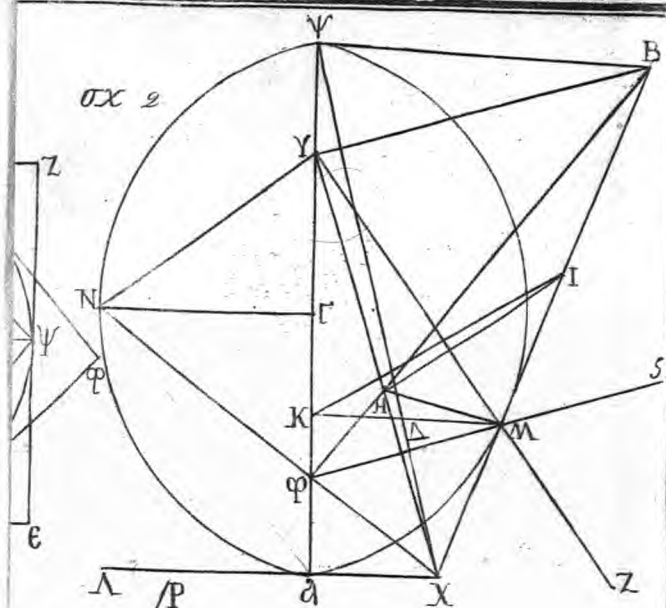
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

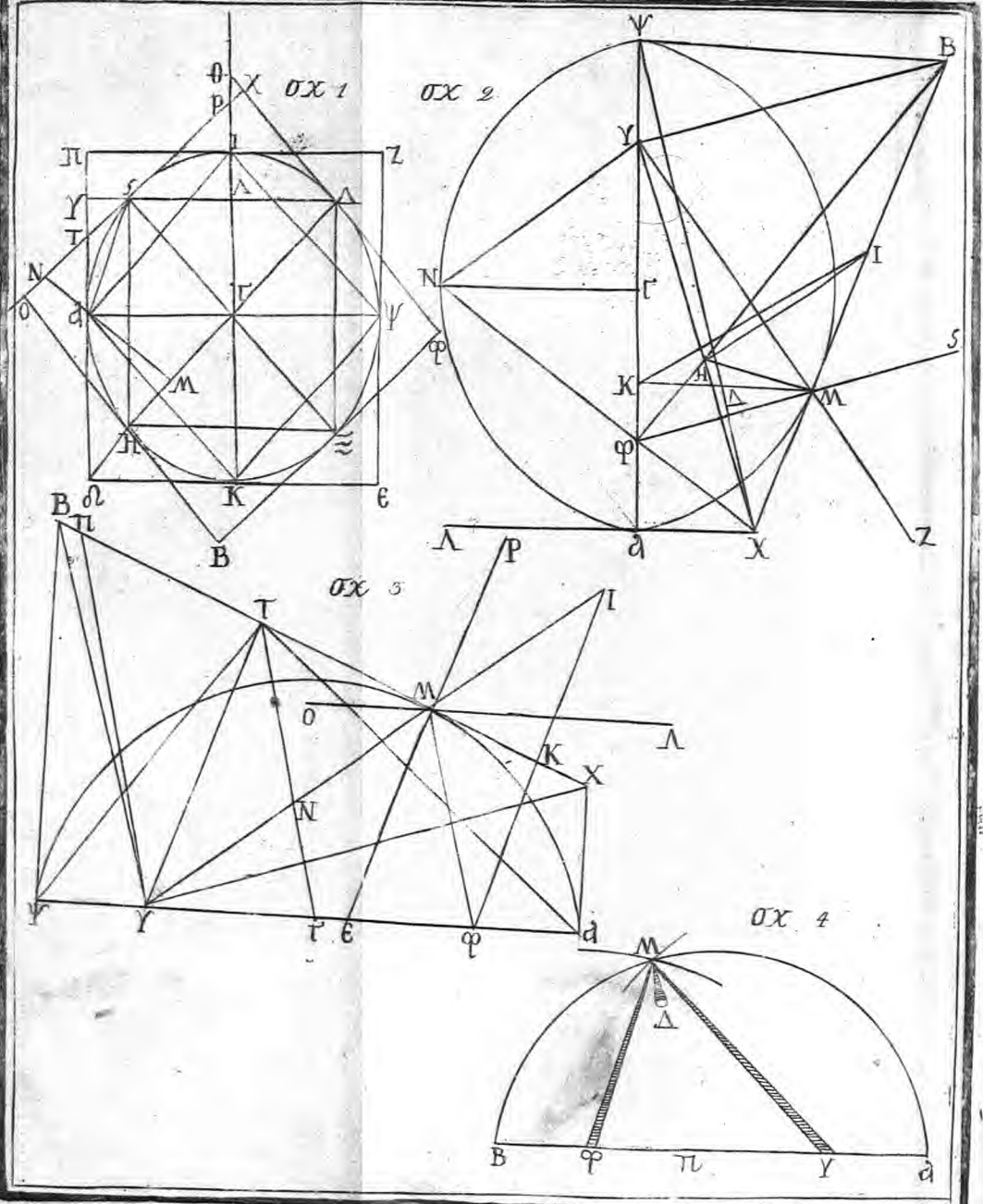




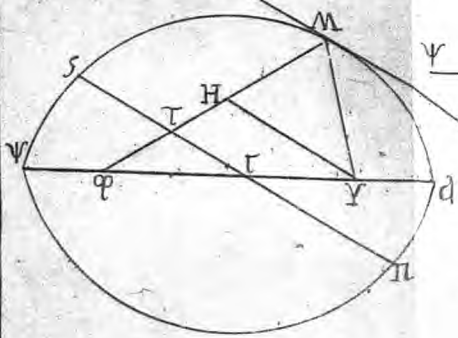


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

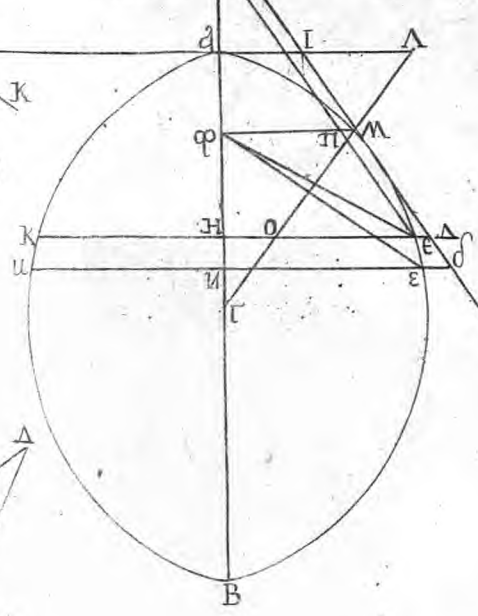




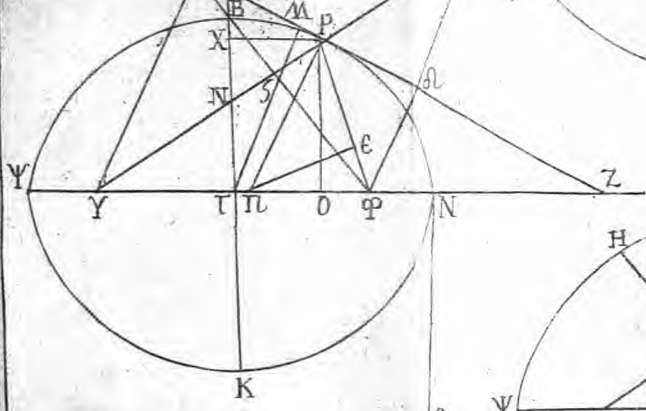
σχ. 1.



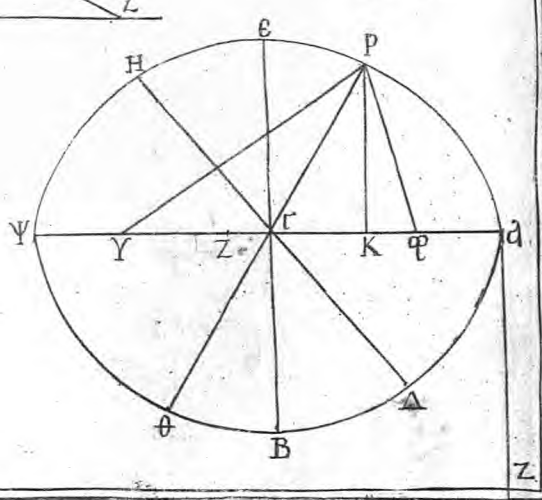
σχ. 2.



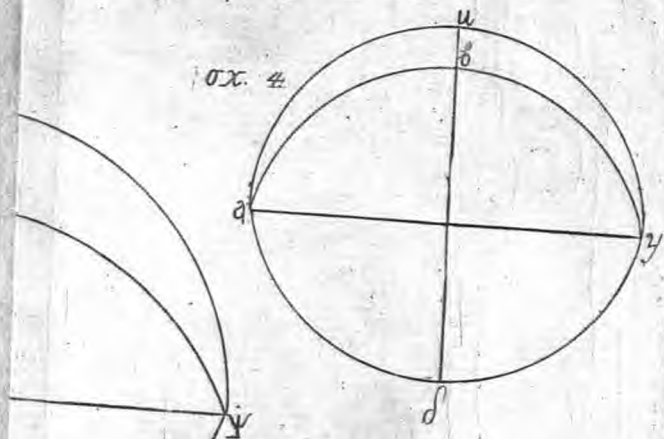
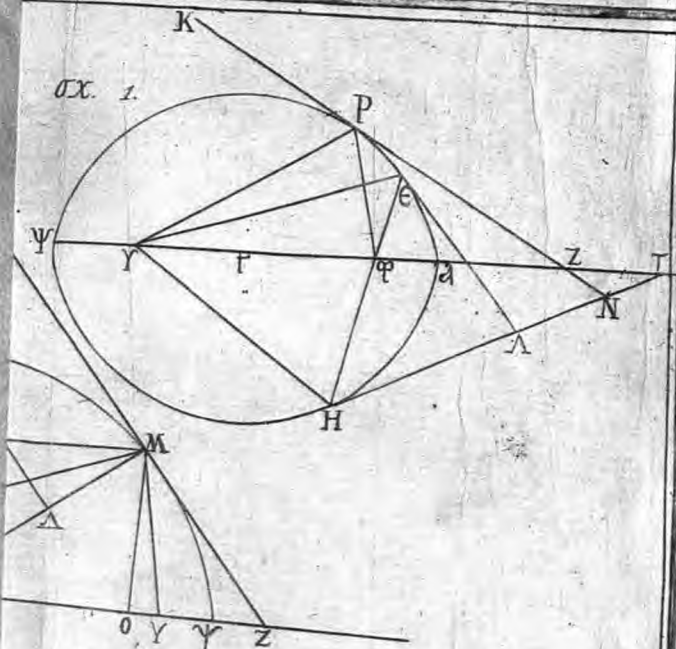
σχ. 3.



σχ. 4.



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Κ

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ