

Αὐτ. Αθ.

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ΚΡΑΤΙΚΟΥ ΝΟΣΟΚΟΜ. ΒΕΡΟΙΑΣ

ΕΚ ΔΩΡΕΑΣ

ΙΑΤΡΟΥ ΑΝΤΩΝΙΟΥ ΤΣΟΥΓΓΕΛΗ

Ἐν Βεροίᾳ τῇ

24/12/57

1957

244

GRVCR-01295

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

+500

ΒΕΡΟΙΑΣ

Αριθ. εισ.

685

ΔΩΡΕΑ

Άντων. Βαϊώσης

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βερολίνου

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΤΗΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ

ΑΛΓΕΒΡΗΣ

Ἐκ τοῦ Γερμανικοῦ μεταφρασθέντα εἰς τὴν
ἡμετέραν διάλεκτον ὑπότινος Φιλογενοῦς
ὁμογενοῦς χάριν τῶν ὁμογενῶν.



Τέτυπη.

ἐν τῇ Τυπογραφίᾳ τοῦ Φίδλερ.

ἔν τετι 1800. κὴ Βιβλιοθήκη Βεροῦν.

Α. Μ. 197

ΑΝΤΙΜΟΝΗ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ

ΤΩ ΣΟΦΟΛΟΓΙΩΤΑΤΩ

ΚΤΡΙΩ

Μ Ο Ι Κ Τ Ρ Ι Ω

ΛΑΜΠΡΩ ΦΩΤΙΑΔΗ

Πρώτῳ Διδασκάλῳ τῆς ἐν Βουκουρεστίῳ

Αὐθεντικῆς Σχολῆς.

Τῖνι ποτ' ἀν' ἄλλῳ ἢ παρούσα βίβλος, ἢ τὸ κοινὸν ἀφορῶσα ὄφελος, ἀνατεθεῖη δικαιότερον, ἢ Ἄνερ Ἑλλόγιμε! ἢ ΣΟΙ, τῷ διὰ παντὸς τὴν κοινὴν πνέοντι ὠφέλειαν, καὶ Φερωνύμῳ τὴν πάλαι τοῦ γένους λάμπρότητα εἰς τὰ ἴδια παντὶ τρόπῳ ἀποκαταστῆσαι Φιλοτιμουμένῳ. Πολλοὺς γάρ τῇ σῇ ἐκλαμπρύνων διδασκαλία, ἐκ τοῦ σκότους τῆς ἀγνοίας εἰς τὸ φῶς αὐτοὺς ἄγεις τῆς γνώσεως, τοσαῦτα φῶτα δι' αὐτῶν,

εἰς φωτισμὸν τοῦ γένους ἅπτων, τῷ σὺ φωτὶ αὐ-
τοὺς καταφωτιζόμενος. ΣΕ τοίνυν δικάως ἐπικα-
λεῖται καὶ ἡ βίβλος προσάτην, λαμπρὰ μὲν οὕσα καθ'
ἑαυτὴν, (πόνημα γὰρ ἀνδρῶν, ὧν λόγος ἐπὶ σοφίᾳ
πολὺς) λαμπρὰ δὲ καὶ διαμεῖναι βουλομένη, εἴτι
ἐσκοτίσαι τῇ τοῦ μεταφράσαντος ἀμαθείᾳ. Οὐδεὶς
γάρ, εὖ οἶδα, καταπολήσειεν αὐτῆς, ΣΕ προσάτην
σεμνυνομένη. Ἀποδεξάμενος οὖν τὴν βίβλον, ἐνέ-
χυρον τῆς πρὸς ΣΕ εὐγνωμοσύνης μου, ὑπὲρ ὧν πα-
ρὰ σοῦ ἔτυχον εὐεργετημάτων, ἀναπλήρωσον τὰ ἐλ-
λείποντα, τὰ ἡμαρτημένα ἐπανορθῶν, καὶ μὲ τῇ
ΣΑΤΤΟΥ διατηρῶν εὐνοίᾳ, ὅς καὶ εἰμὶ

τῆς Σῆς Σοφολογιότητος

ὑποκλινῆς δοῦλος

ὁ Μεταφραστής.

Τ ῶ

Τῷ Ἐντενυξομένῳ.

Ὅσον τὸ τῆς Μαθηματικῆς χρῆμα τοῖς εἰς τὰ τῆς φύσεως ἄντα εἰσδύναι βουλομένοις ἀναγκαῖον, πείρα μαθῶν ἔγνω, καὶ πᾶς τις, εὖ οἶδω, ἐμοὶ τοῦτα ξυνομολογήσει, ὃ καὶ μικρὸν γοῦν τοῦ πράγματος ἀφάμενος. Αὕτη γὰρ ἡ Συρὶς τυγχάνει, δι' ἧς, καὶ ἧς οὐκ ἄνευ. Πασῶν δ' ἡγεῖται τῶν Μαθηματικῶν Ἐπιστημῶν ἡ Ἀριθμητικὴ, καὶ Ἀλγεβρα, ἥ μὲν ἐν εἶδει, ἡ δ' ἑτέρα ἐν γένει, τὰ τῶν ποσοτήτων προβάλλουσαι πάθη, καὶ ιδιότη-
τας. Ὅσῳ οὖν μᾶλλον τούτων τις ἐγκρατὴς, το-
σούτῳ ῥᾶον, καὶ ἀπονιώτερον καὶ εἰς τὰ λοιπὰ τῆς

Μαθη-

Μαθήσεως εἶδη χωρήσει, ἐκ τῶν εὐληπτοτέρων
ἐπὶ τὰ μᾶλλον προῖων δυσκατανόητα, μετὰ το-
σούτῳ πλείονος ἡδονῆς, καὶ ὠφελείας τὰ φυσικὰ
τῶν συγγραμμάτων ἀναγνώσεται. Μᾶλλον δέ τις
τούτων ἐγκρατὴς γίνεται, βίβλοις ἐντυγχάνων,
σαφῶς καὶ εὐκρινῶς τὸ αὐτῶν ὑποκείμενον παρι-
σώσαις. Ὡν τοῖς μὲν ἄλλοις τῶν γενῶν εὐπορία,
πανταχόθεν ἑαυτοῖς τὸ πρᾶγμα ἐξευμαρίζουσιν.
ἡμῖν δὲ, ὅσαγε καὶ εἰ δέναι, εὐπορία μεγίστη,
τοιούτων βιβλίων σπανίζουσι. Καίτοι γὰρ πολλαὶ
τῶν βιβλίων αἱ περιφερόμεναι τῶν Μαθηματικῶν
καὶ παρ' ἡμῖν, ἀλλὰ τῶν ταύτας συγγραψάντων
τοῖς μὲν, τῶν ἀναγκαιοτάτων μόνον ἐμέλησε, καὶ
σοιχειωδεσάτων· οἱ δὲ, πολλὰ ἐν μικρᾷ βιβλίῳ
περιλαβεῖν ἐθέλησαντες, σκότῳ πολλῷ καὶ ἀχλύϊ
τὸν προβαλλόμενα ἐκάλυψαν, ὥς καὶ διδάξοντος
δεῖσθαι, ὡς τὰ πολλὰ δὲ καὶ οὕτω κατὰ σκότου
ἡλάσκειν. Τοῖς τῆς Μαθήσεως τοίνυν ἐρασταῖς χα-
ρισόμενος, ὧν τὴν ἔφεσιν τὰ ῥηθέντα ναρκαῖν ποιεῖ,
καὶ πολλαῖς περισοιχούμενος φροντίσι τῶν ἀνὰ χεῖ-
ρας μαθημάτων, καὶ μηδεμίαν ἄγων σχολήν, πάντα
τὰ

τὰ ἔμμαντοῦ τῆς τοῦ γένους ὠφελείας δεύτερα ποιη-
 σάμενος, τῇδε τὴν βίβλον ἐκ τοῦ Γερμανικοῦ εἰς
 τὴν ὑμετέραν μεταφράσαι διάλεκτον οὐκ ἀπώκησα,
 πάνυ σαφῇ οὔσαν, καὶ οὐδενὸς ἑτέρου χειραγωγοῦ
 ἐπιδεισμένην, κατατολήσας τοῦ ἔργου οὐκ εἰς ἐπί-
 δεξιν. (τὸ, τε γὰρ ὕψος ἀκαλλῆς, ἀφελές, καὶ
 ἀκόσμητον, καὶ τὰ ἐν τῇ βίβλῳ οὐ τοῦ ἑμοῦ νοός ἐπι-
 γεννήματα) ἀλλ' εἰς ὠφέλειαν τῶν ἐντυγχανόντων.
 Ταῦν γὰρ ἐν αὐτῇ ἕκαστος, οἶμαι, συνήσει, ὁ μετὰ
 προσοχῆς τὰς ἀρχὰς ἀναλεγόμενος, καὶ εἰς τὸ πρό-
 σω μὴδ' ὀλως ἐπειγόμενος, εἰ μὴ τῶν ἡγουμένων ἐν
 συνέσει γένοιτο. Πολλαχοῦ δὲ τῆς βίβλου καὶ
 παλλιλογία τῶν ῥηθέντων οὐκ ὀλιγάκις ἀπαντᾷ,
 Σολοικισμοῖτε τυχόν, καὶ μάλιστα βαρβαρισμοί. (ἀ-
 μάρτημα οὐ τοσοῦτον τῇ τοῦ ἐκδόντος ἀμελείᾳ,
 ὅσον τῇ τοῦ σοιχειοθέτου παρεισδύσαν ἀγνοίᾳ,) Ἀλ-
 λά τὸ μὲν α'. ἐπιτήδες ἐγένετο, ἀναπτύξεως μείζο-
 νος ἕνεκα, τοῦ δὲ β'. ὁ εὐγνώμων τῆς βίβλου ἀνα-
 γνωψης, τὸν καρπὸν αὐτῆς θηρώμενος, οὐκ ἂν πικ-
 ρὸς καθίσειε δικασῆς, μικροπρεπὲς τοῦτο ἡγούμενος,
 καὶ τὸ τοιοῦτο ἀπαιτῶν, αἷς ἐπάγγελμα τὸ κομ-
 ψῶς

ψῶς, καὶ περιττῶς γράφειν. Καὶ ὠφελήθεις μὲν
 χάριτας ἴσω τοῖς Συγγραφεῦσιν, ἀφ' ὧν ταῦτα
 ἐξηράνισαι· προσοχθίζων δὲ τῇ μεταφράσει, καὶ
 τῷ ὕφει ταῖς βίβλου τὸν μεταφράσαντα αἰτιάσθω,
 εἰ καὶ τῷ ὄντι οὐδὲ οὗτος ὑπ' εὐθύνην, τὸ κατὰ
 δύναμιν παρασχών.

ὁ Μεταφραστής

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ, ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΗΣ.

§. 1.

Ποσότης, ἢ Ποσὸν καλεῖται, ὣτιμι προσθεῖναι, ἢ ἀφ' οὗ ἀφελεῖν τι δυνάμεθα. Π. Χ. οἶδε οἱ ὀβολοί· οἶδε οἱ ἵπποι, κτ. οἵτινες, προσεθέντων τούτοις καὶ ἑτέρων ὀβολῶν, ἢ ἵππων, αὖξονται. ἀφαιρεθέντων δὲ ἀπὸ τούτων, μειοῦνται.

§. 2. Μονὰς δὲ, οἰαδήποτεῦν Ποσότης, ἢν ἀντὶ τούτου, ἦτοι ἀντὶ μονάδος παραλαμβάνειν βουλόμεθα. π. χ. μία μνα̃, εἰς ὀβολός. εἰς ἄνθρωπος. καὶ, λ'. ἄνθρωποι. ἡμίσεια μνα̃. εἴκοσι ὀβολοί. κτ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ ὁρισμὸς τῆς μονάδος προξενεῖ περισσοτέραν σύγχυσιν, παρὰ ἀνάπτυξιν τῆς εἰνοίας τῆς μονάδος.

Λ

διότι

διότι ἡ ἔννοια αὐτῆς εἶναι γνωστὴ εἰς καὶ ἑνὰ, καὶ χωρὶς τοῦ ὀρίσμου.

§. 3. Πλείους ὁμοειδεῖς μονάδες ἀποτελοῦσιν Ἀριθμόν. π. χ. εἴαν ἡ μονὰς ἢ ἄνθρωπος, τριάκοντα, ἢ δέκα, ἢ πέντε κτ. ἄνθρωποι, εἰσὶν ἀριθμός. εἴαν ἡ μονὰς ἢ εἰς ἵππος, εἰς κύων, καὶ εἰς λέων, ὑπὸ ταύτην τὴν προσηγορίαν θεωρούμενα ταῦτα τὰ τρία οὐδένα παρέχουσιν ἀριθμόν, οὔτε γὰρ τρεῖς ἵπποι, οὔτε τρεῖς κύνες, οὔτε τρεῖς λέοντες εἰσιν. εἴαν δὲ θῶμεν τὴν μονάδα εἶναι ζῶον. εἰς ἵππος, εἰς κύων, καὶ εἰς λέων ποιοῦσι τρία ζῶα, καὶ ἐπομένως ἀριθμόν. ὥστε ἀριθμός ἐστι σωρεία μονάδων πολλῶν ὁμοειδῶν, ἢ οὕτω τοῦ-λάχιζον.

§. 4. Ἐάν ἐν τῷ ἀριθμεῖν καὶ τὸ ὄνομα τῆς μονάδος ἀπαγγέλληται, ὁ ἀριθμός καλεῖται Συγκεκρι-μένος· οἷον, ἑκοσι δραχμαί· λ' ὀβολοί· ἑκτὼ ζῶα. εἰαὶ δὲ μὴ, ἈΦηρημένος· ὡς τρία, δέκα, εἴκοσι·

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Πολλάκις, πραγμάτων ἀριθμητῶν μὴ προκειμέ-νων, ἀριθμοῦμεν, ἐν, δύο, τρία κτ. λέγοντες· ἢ ἀνατυπούμενοι εἰς τὴν διάνοιάν μας καὶ πράγματα δὲν τὰ ἐκφωνοῦμεν, τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν μόνον ἐκφέροντες.

§. 5. Πᾶς ἀΦηρημένος (§. 4.) ἀριθμός πε-ριλαμβάνει ἐν ἑαυτῷ ἅπαντα συγκεκριμένον, ὅς (συγκ') ἐκ τοσούτων μονάδων σύγκειται, ἐξ ὧν κακείνος· ὡς ὁ ἀριθμός πέντε, (ὁ ἀΦηρ') δύναται σημαίνειν, 5, τι ἂν βούλη, πέντε ἵππους, πέντε λέοντας, πέντε μνᾶς, καὶ ἐν συντόμῳ, οἰασθήποτοῦν πέντε ὁμοειδεῖς μονάδας· (ἀλλὰ μόνον πέντε. οὔτε δὲ πλείους, οὔτ' ἐλάσσους) ὁ ἀΦηρημένος ἀριθμός ἄρα γενικῆς σημασίας
τετύ-

τετύχηκεν· ἔνθεν τοι κατ' αὐτοῦ λεγόμενον, ἄλη-
θεύσει ἀείποτε καὶ καθ' ἑκάστου ὁμοειδοῦς συγκεκριμέ-
νου λεγόμενον, ὅς τοσαύτας μονάδας, ὅσας ἐκεῖνος (ὁ
ἀφ') περιέχει· οἶον, εἰ πέντε, καὶ δύο ποιοῦσιν
ἐπτὰ, καὶ πέντε ἵπποι, καὶ δύο ἵπποι ἐπτὰ ἵππους
ποιήσουσι, κτ.

§. 6. Ἐξω ἀριθμὸς, ἡλικὸς ἂν ᾗ· τούτου
δυνάμεθα ἕτερον μονάδι μείζονα νοῆσαι· αὐξουσιν ἄρα
οἱ ἀριθμοὶ, οἱ ἀείποτε μονάδι ἀλλήλων διαφέροντες,
ἀπὸ τῆς μονάδος ἐπ' ἅπειρον προαγόμενοι.

§. 7. Χαρακτῆρες εἰσὶ σημεῖα, δι' ὧν οἱ
ἀριθμοὶ (ἦτοι τὸ πλῆθος τῶν αὐτῶν πραγμάτων)
παρίστανται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 8. Χαρακτῆρας ἀποδοῦναι, δι' ὧν πάντες οἱ
ἀριθμοὶ, οἱ ἀείποτε μονάδι ἀλλήλων διαφέροντες,
προσφωῶς ἂν παρασταῖεν.

ΛΥΣΙΣ.

Τὸ ἀπλούστατον, ὃ ἂν παντὶ ἐπὶ τοῦ τοιούτου ἐπελ-
θεῖν ἔχοι Προβλήματος, ἐστὶ τὸ εἰς δῆλωσιν τῆς μονά-
δος χαρακτῆρι π. χ. τῷ δε (1) χρήσασθαι, καὶ τοῦ-
τον τοσάκις ἐφεξῆς καταγράψαι, ὅσαι μονάδες ἔνεισι
τῷ ἀριθμῷ τῷ ἐκδηλωθησομένῳ, ἥδε.

I . . .	ἓν		IIII . . .	τέσσαρα
II . . .	δύο		IIII . . .	πέντε
III . . .	τρία		IIIIII . . .	ἕξ κτ.

Ἡ τοιαύτη μέθοδος ἐπίπονος οὐσα, ἥ δὴλον, συν-
επιτηθῆναι θύναται, μείζονας ἀριθμοὺς δηλώσειν
μέλ-

μέλλουσιν, ἰδιαίτερων χαρακτήρων παραλαμβάνουσιν·

οὕτω παρὰ τοῖς Ῥωμαίοις ὁ χαρακτήρ

V	τῷ πέντε		C	ἐκατόν
X	δέκα		D	πεντακόσια, καὶ
L	πεντήκοντα		M	χίλια

Ἰσοδυνάμει, προϋποτιθεμένοις τὸν ὑποδεέστερον ἀριθμὸν προτιθέμενον τοῦ ὑπερτέρου, ὅσαις μονάσιν οὗτος (ὁ ἀνώτερος) τῆς Φυσικῆς σημασίας ἡλάττωται, ἐμφαίνειν, τόνδε τὸν τρόπον·

I.	ἓν		XXX.	τριάκοντα
II.	δύο		XL.	μ'
III.	τρία		L.	ν'
IV.	τέσσαρα		LX.	ξ'
V.	πέντε		LXX.	δ'
VI.	ἕξ		LXXX.	π'
VII.	ἐπτά		XC.	ι'
VIII.	ὀκτώ		C.	ρ'
IX.	ἐννέα		CC.	σ'
X.	δέκα		CCC.	τ'
XI.	ἐνδεκα		CD.	υ'
XII.	δώδεκα		D.	φ'
XIII.	δεκατρία		DC.	χ'
XIV.	δεκατέσσαρα		DCC.	ψ'
XV.	δεκαπέντε		DCCC.	ω'
XVI.	δεκαἕξ		CM.	π
XVII.	δεκαἑπτὰ		M.	α
XVIII.	δεκαοκτώ		MM.	β κτ.
XIX.	δεκαεννέα			
XX.	εἴκοσι			

Ἄμει·

Ἄμεινον δ' ἂν ἐπιτηθεῖη ἡ προτεθείσα μέθοδος τοῦ τοὺς ἀριθμοὺς ἐκφέρειν, εἰ, ἀντὶ τοῦ πλείοσι σημαντικοῖς χαρακτῆρσι χρῆσθαι, τῷδε (1) κατὰ τοὺς διαφοροὺς αὐτοῦ τόπους, ἐφεξῆς γραφομένῳ, διάφορος ἀποδοθῇ καὶ ἡ δύναμις καὶ σημαίνεται π. χ. ἐν μὲν τῷ α' τόπῳ (τῶν τόπων δεξιόθεν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ χωρούμενων) - ἐν δὲ τῷ β' δύω· ἐν δὲ τῷ γ' τέσσαρα· ἐν δὲ τῷ δ' ὀκτώ· ἐν δὲ τῷ ε' δεκαέξ· ἐν δὲ τῷ ς' τριάκοντα δύω, κτ. καὶ ὅλως ἐπὶ παντὸς ἀνωτέρου τόπου διπλάσια τοῦ ἐγγύς κατωτέρου, καὶ κατὰ τοῦτο ἀποδοθήσονται αἱ τῶν τόπων δυνάμεις οὕτως·

α	—
β	—
γ	—
δ	—
ε	—
ς	—
ζ	—

καὶ οἱ χαρακτῆρες οἷδε

1	ἐν		1111	δεκαπέντε
11	τρία		11111	τριάκονταεῖν.
111	ἑπτὰ		111111	ἑξήκοντατρία. κτ.
				σημανοῦσιν·

Ἀλλὰ τούτου τεθέντος, τοὺς μεταξὺ ἀριθμοὺς παρασῆσαι οὐκ ἔχομεν καὶ σημαεῖ μὲν (1) ἐν τῷ β' τόπῳ, δύω· ἐν τῷ γ' τέσσαρα· ἐν τῷ δ' ὀκτώ, κτ. ἀλλ' ὁ β' τόπος οὐκ ἂν συζητῇ ἄνευ τοῦ α' ὡς οὐδ' ὁ γ' ἄνευ τοῦ β' καὶ ἄ. οὐδ' ὁ δ' τοῦ γ' β' καὶ α' χωρὶς. Καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου καὶ ὁ δύω οὐκ ἂν ἐξεχθῇ τοῦ ἐνὸς ἄνευ, οὐδ' ὁ τέσσαρα τοῦ δύω, καὶ ἐνός, οὐδ' ὁ ὀκτώ, τοῦ δ' β' καὶ ἐνός ἄνευ· ἀναγκαῖος τοίνυν καὶ ἕτερος χαρακτῆρ, π. χ. τῷδε (ο) τὸ σημαί-

σημείον, τὸ μηδενικὸν καλούμενον, τὸ τὸν μετὰ τὸν
 δεκινύον· τούτου δὴ παραληφθέντος, αἱ ἐξῆς χα-
 ρακτῆρες σημαίνουνσι,

10	δύω		1000	ὀκτώ
100	τέσσαρα		10000	δεκαεξ. κτ'

Τοὺς δὲ μεταξὺ ἀριθμοὺς δηλώσομεν, τιθέντες.
 ἔνθα ἀναγκαῖόν ἐστιν, αὐτὶ τοῦ μηδενικοῦ αὐθις τὰ (1)
 ὥς

I	ἓν		10001	δεκαεπτά
10	δύω		10010	δεκαοκτώ
11	τρία		10011	δεκαεννέα
100	τέσσαρα		10100	εἴκοσι
101	πεντε		10101	εἴκοσιέν
110	ἕξ		10110	εἴκοσιδύω
111	ἐπτά		10111	εἴκοσιτρία
1000	ὀκτώ		11000	εἴκοσιτέσσαρα
1001	έννέα		11001	εἴκοσιπεντε
1010	δέκα		11010	εἴκοσιεξ
1011	ένδεκα		11011	εἴκοσιεπτά
1100	δώδεκα		11100	εἴκοσιοκτώ
1101	δεκατρία		11101	εἴκοσιεννέα
1110	δεκατέσσαρα		11110	τριακόντα
1111	δεκαπέντε		11111	τριακόνταέν.
10000	δεκαεξ.		100000	τριακόνταδύω κτ'

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοὺς δύν τούτους χαρακτῆρας, I καὶ O τοὺς
 ἐπενόησεν ὁ περικλεῆς Λεῖβνιτῆς εἰς ἑκφράσιν παντός ἀ-
 ριθμοῦ, οἱ ὅποιοι ὀνομάζονται ἡ Δυαδικὴ τοῦ Λεῖβνιτῆ-
 ου (ἦτοι ἀρίθμησις), καὶ εἰς παράστασιν τῆς ἐκ τοῦ
 μηδενὸς παραγωγῆς τῆς κτίσεως μὲ τὸν εἶχον τὸν
 ἐξῆς

omni-

Omnibus ex nichilo Iducendis sufficit
unum.

Εἰς τὸ ἅπαντα ἐκ τοῦ μηδενός παραγαγεῖν ἀρκεῖ ἓν.

Ἐὰν δὲ καὶ ἕτερος ᾖτι σημαντικὸς παραληφθῇ
χαρακτήρ ὅδε (2), τὴν δύναμιν ἀρφοτέρων. (1 καὶ
2) κατὰ τὸ τριπλοῦν ἐπαυξήσομεν, ὥς ἐκάστην μονάδα
τούτων ἐν μὲν τῷ β'· τόπῳ γ'· ἐν δὲ τῷ γ'· 9'· ἐν δὲ
τῷ δ'· κζ'· ἴσα δύνασθαι, καὶ πάντα ἀριθμὸν ᾗτι συν-
τομώτερον τάνδε τὴν τρόπον δηλώσομεν.

1 ἓν	121 δεκαεξ
2 δύο	122 δεκαεπτὰ
10 τρία	200 δεκαοικτώ
11 τέσσαρα	201 δεκαεννέα
12 πέντε	202 εἴκοσι
20 ἕξ	210 εἰκοσιέν
21 ἑπτὰ	211 εἰκοσιδύω
22 ὀκτώ	212 εἰκοσιτρία
100 ἐννέα	220 εἰκοσιτέσσαρα
101 δέκα	221 κε'
102 ἑνδεκα	222 κζ'
110 δώδεκα	1000 κζ'
111 δεκατρία	1001 κη'
112 δεκατέσσαρα	1002 κθ'
120 δεκαπέντε	1010 λ'· κτ'

Παραπλησίως καὶ τέσσαρας χαρακτήρας (1, 2,
3, καὶ 0) παρακαβεῖν ἕξει, τὰς τούτων δυνάμεις
κατὰ τὰ τετραπλαῖν προσαύξοντας, καὶ οὕτω γρά-
φοντας.

1	α'
2	β'
3	γ'
10	δ'
11	ε'
12	ς'
13	ζ'
20	η'
21	θ'
22	ι'
23	ια'
30	ιβ'
31	ιγ'
32	ιδ'
33	ιε'

ὡσαύτως καὶ πέντε (1,
τὸ πενταπλοῦν·

1	α'
2	β'
3	γ'
4	δ'
10	ε'
11	ς'
12	ζ'
13	η'
14	θ'
20	ι'
21	ια'
22	ιβ'
23	ιγ'
24	ιδ'
30	ιε'

310	π'		440	ρκ'
330	υ'		444	ρκδ'
400	ρ'		1000	ρκε'
420	ρί'		1001	ρκς'. κτ.

Ἐκ τούτων ῥάδιον συνιδεῖν, ὅτι καὶ μετὰ ἑξ χαρακτήρων (1, 2, 3, 4, 5, 0.)

- καὶ μεθ' ἑπτὰ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 0.)
καὶ - ὀκτώ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0.)
καὶ - ἐννέα (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0.)
καὶ - δέκα (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.)

Καὶ μετὰ ἔτι πλείονων ὁ βουλούμενος πάντα δυνατόν ἀριθμὸν παραστήσει, εἰ μόνον ἀείποτε ἐν τούτοις τὸ μηδενικὸν παραλαμβάνοιτο, καὶ αἱ τούτων δυνάμεις κατὰ τὸ τοσαπλοῦν ἐπαύξοντο, ὅσοι οἱ παραληφθέντες χαρακτῆρες.

Ἄλλὰ καὶ ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ αἱ τῶν χαρακτήρων δυνάμεις ἐπαύξασθαι δύνανται· τοῦτο γὰρ οὐδεμίαν μεταβολὴν τῷ ἀριθμητικῷ ἐμποιήσῃ συστήματι, εἰ μὴ τὸ ἐφ' ἑκάστου ἀριθμοῦ τοὺς χαρακτῆρας ἐν ἀντιστροφῇ τῇ τάξει ἀποδίδωσθαι.

§. 10. Ὅσω πλείους οἱ παραληφθέντες χαρακτῆρες, τοσούτῳ ἐπιτομώτερον ἐκδηλωθῇ ἂν πᾶς ἀριθμὸς μείζων· οὕτω τὸ (1000) ἐν τῷ ἀριθμητικῷ συστήματι τῷ ἐκ δύο χαρακτήρων, ἰσοδυναμεῖ τῷ ὀκτώ. ἐν δὲ τῷ ἐκ πέντε, τῷ ἑκατὸν εἰκοσιπέντε,

§. 11. Ἐκ πάντων τούτων, καὶ τῶν παραπλησίων συστημάτων, τῶν εἰς λύσιν τοῦ ἡμετέρου τεινόντων προβλήματος, ἐν χρήσει ἐστὶ τὸ ἐκ δέκα χαρακτήρων, ὧν αἱ δυνάμεις ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά κατὰ τὸ δεκαπλοῦν ἐπαύξονται.

§. 12.

§. 12. Τίσι δὲ προσηγορίαις τὰς διαφόρους δυνάμεις τῶν χαρακτήρων ἐν οἰκδηποτοῦν τόπῳ ἐπισημειώσομεν, ἐν ᾗποία τε τῇ τάξει τούτους ἀπαγγελλέον, καὶ γραπτέον, τὸ ἐξῆς διδάσκει ἡμᾶς πινακίδιον.

μονάδες	{	10	ἐκατοντάδες	}	τετραλλιόνια
		7	δεκάδες		
		6	μονάδες		
		5	ἐκατοντάδες		
χιλιάδες	{	4	δεκάδες	}	τριλλιόνια
		3	μονάδες		
		2	ἐκατοντάδες		
		1	δεκάδες		
μονάδες	{	0	μονάδες	}	διλλιόνια
		9	ἐκατοντάδες		
		8	δεκάδες		
		7	μονάδες		
χιλιάδες	{	6	ἐκατοντάδες	}	μιλλιόνια
		5	δεκάδες		
		4	μονάδες		
		3	ἐκατοντάδες		
μονάδες	{	2	δεκάδες	}	μονάδες
		1	μονάδες		
		0	ἐκατοντάδες		
		9	δεκάδες		
χιλιάδες	{	8	μονάδες	}	
		7	ἐκατοντάδες		
		6	δεκάδες		
		5	μονάδες		
μονάδες	{	4	ἐκατοντάδες	}	
		3	δεκάδες		
		2	μονάδες		
		1	ἐκατοντάδες		
μονάδες	{	0	δεκάδες	}	
		9	μονάδες		
		8	ἐκατοντάδες		
		7	δεκάδες		
χιλιάδες	{	6	μονάδες	}	
		5	ἐκατοντάδες		
		4	δεκάδες		
		3	μονάδες		

Ὡς ἐκ τοῦ προκειμένου παραδείγματος ὁ-
λον. οἱ τόποι διατέμνονται δεξιόθεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ
εἰς γενικωτέρας κλάσεις, ὧν ἑκάστη ἐξ τόπων ἐν ἑαυτῇ
περιλαμβάνει καλοῦνται δὲ αὗται, ἀπὸ τῆς κατωτά-
της ἀρχομένοις, μονάδες, μιλλιόνια, διλλιό-
νια, τριλλιόνια, τετραλλιόνια, πενταλ-
λιόνια, κτ'.

Ἐκάστη αὖθις τῶν γενικωτέρων κλάσεων ὑπερ-
μένεται εἰς δύο ἐλάσσους, τρεῖς χαρακτῆρας ἑκατέραν πε-
ριεχούσας, ὧν ἡ μὲν κατωτέρα τῷ ὀνόματι, μονάς,
ἡ μονάδες, ἡ δ' ὑπερτέρα τῷ, χιλιάς, ἡ χιλιά-
δες, ἐπισημαίνεται.

Οἱ τρεῖς τόποι ἑκάστης κατωτέρας κλάσεως κα-
λοῦνται, ἀπὸ τοῦ κατωτάτου τῆς ἀρχῆς γινομένης
Μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες.

Ἡ δὲ τιμὴ, καὶ δύναμις τελευταῖον, ἡ τῷ σχή-
ματι τῶν χαρακτῆρων (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
9) ἀποδιδομένη, ἀπαγγέλλεται διὰ τοῦ, ἐν, δύο,
τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτὰ, ὀκτώ, ἑνέα.

ΣΧΟΛΙΟΝ. α'

Καὶ τὸ μηδενικόν (0) (§. 8.) χρησιμεύει κατὰ
πολλὰ εἰς τὴν ἀρίθμωσιν· διότι μέχρι τῶν ἐνέα ἀριθ-
μοῦντες, ἢ γράφοντες λαμβάνομεν ἕνα ἀπὸ τοὺς ἐννέα
χαρακτῆρας· ὅταν ὁμως θέλωμεν νὰ γράψωμεν δέκα,
ἐπειδὴ καὶ ἕνας ἀπὸ τοὺς ἐννέα χαρακτῆρας, εἰς τὸν
ἀνώτερον τόπον τὸν ἐγγὺς μετατεθεῖς, σημαίνει τὸ δε-
καπλάσιον (§. 11.) ἀπὸ ἐκεῖνο, ὅπου ἐσήμαινεν εἰς
τὸν ἐγγὺς κατώτερον τόπον, μετατίθεμεν τὸ 1 (ὅπου
σημαίνει μόνον ἓν εἰς τὸν α' τόπον· εἰς τὸν β' τόπον,
καὶ οὕτω σημαίνει δεκάκις περισσότερα, ἤτοι δέκα·
ἀλλὰ διὰ νὰ ἰξεύρωμεν, ὅτι ἡ μονάς (1) μετατεθῇ
εἰς

εἰς τὸν ἀνώτερον τόπον, ἐν τῷ α' τόπῳ τίθεται τὸ μη-
δεμικόν, δεικνύον, ὅτι ὁ α' τόπος εἶναι κενός.

ΣΧΟΛΙΟΝ. β'.

Ἐν γένει σημειώτεον, ὅτι τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ τοῦ
εἰς τὸν ἑγγύς ἀνώτερον τόπον μετατεθέντος ἐκάστη
μονὰς δύναται δεκάκις περισσότερον ἀπὸ ἐκάστην μονάδα
τοῦ ἑγγύς κατωτέρου· π'· χ' ὁ 9 σύγκειται ἀπὸ ἐννέα
μονάδας· οὗτος ἐν τῷ α' τόπῳ σημαίνει ἐννέα ἀπλᾶς
μονάδας. Ὡσαύτως καὶ 99, ὁ 9 ἐν τῷ β' τόπῳ σύγ-
κεται ἀπὸ ἐννέα μονάδας· ὅμως καθε μονὰς τοῦ ἐν τῷ
β' τόπῳ 9 ὑπερέχει δεκάκις καθε μονάδα τοῦ ἐν τῷ
α' ὥστε τοῦ β' αἱ μονάδες αἱ ἐννέα εἶναι ἴσαι μὲ ἐννε-
νήκοντα, ἐν ᾧ τοῦ α' εἰσὶν ἴσαι μὲ ἐννέα· οὕτω καὶ
ἐπὶ τῶν ἄλλων.

Περὶ δὲ τῆς τάξεως, καθ' ἣν τὰς διαφόρους τι-
μὰς καὶ δυνάμεις ἀπαγγελλέον, σημειούσθω τὰ
ἑξῆς·

α'. Ἡ λέξις, μονὰς, καὶ ἐν τῷ ἀναγινώσκειν,
καὶ ἐν τῷ ὑπαγορεύειν οὐδέποτε ἀπαγγέλλεται. (ὡς
προκειμένων 158, οὐ λέγομεν, 158 μονάδες, ἀλλὰ
μόνον ἑκατὸν πενήτηκοντα ὀκτώ, ὑπανουμένου τοῦ ὀνό-
ματος, μονὰς.)

β'. Ἐφ' ἐκάστου χαρακτῆρος ἀπαγγέλλομεν τὴν
δύναμιν τοῦ κατ' αὐτὸν σχήματος α'· εἶτα καὶ τὴν τοῦ
τόπου· εὐθετοῖ ἐν τῷ ἀνωτάτῳ τόπῳ τῆς ἐλάσσονος
κλάσεως λέγεται, μία ἑκατοντάς, ἢ ἑκατόν.

Δύω ἑκατοντάδες, ἢ διακόσια.

Τρεῖς ἑκατοντάδες, ἢ τριακόσια.

Τέσσαρες ἑκατοντάδες, ἢ τετρακόσια.

Πεῖτε

Πέντε ἑκατοντάδες, ἢ πεντακόσια.

Ἐξ ἑκατοντάδες, ἢ ἑξακόσια.

Ἑπτὰ ἑκατοντάδες, ἢ ἑπτακόσια.

Ὀκτώ ἑκατοντάδες, ἢ ὀκτακόσια.

Ἐννέα ἑκατοντάδες, ἢ ἑννεακόσια.

Ἐν δὲ τῷ μέσῳ τόπῳ λέγεται,

Δέκα αὐτί τοῦ, μία δεκάς.

Εἴκοσι, αὐτί τοῦ, δύο δεκάδες.

Τριάκοντα ἀντί τοῦ, τρεῖς δεκάδες.

Τεσσαράκοντα, ἀντί τοῦ, δ' δεκάδες.

Πεντήκοντα ἀντί τοῦ, πέντε δεκάδες, κτ.

Ἐπειδὴ ἡ λέξις, Μονάς, οὐδέποτε ἀπαγγέλλεται, ἐν τῷ κατωτάτῳ τόπῳ διορίζομεν μόνον τὴν δύναμιν τοῦ σχήματος (ἦτοι λέγομεν μόνον, ἓν, δύο, τρία, κτ.)

γ'. Ἐφ' ἐκάστης ἐλάσσονος κλάσεως (§. 12.) ἐκφέρομεν α'. τὸν ἀνώτατον χαρακτήρα, εἶτα τὸν μέσον, καὶ τελευταῖον τὸν κατώτατον ὡς

425, τετρακόσια εἰκοσιπέντε, κτ.

δ'. Ἐφ' διασπῶν γενικωτέρας κλάσεις, ἀπαγγέλλεται ἡ κλάσις τῶν χιλιάδων πρὸ τῆς κλάσεως τῶν μονάδων, κακείνη μὲν προσίθεται τὸ ὄνομα, χιλιάς, ταύτη δὲ τὸ ὄνομα μονάς, οὐχί· οἶον

426789 τετρακόσμι εἰκοσιπέντε χιλιάδες, καὶ 789.

ε'. Ἐπίτινος σειρᾶς χαρακτήρων, πρὸ πάντων ἀναγινώσκεται ἡ ὑπερτάτη γενικωτέρα κλάσις, εἶτα ἡ ἐγγὺς ἐλάσσων, καὶ αἱ ἐφεξῆς κατὰ τάξιν μέχρι τέλους, ὧν πᾶσαι, πλὴν τῆς ἐσχάτης, ὀνομάζονται (ἦτοι προσίθεται αὐταῖς τὸ ὄνομα, διλλιόνιον, ἢ μιλλιόνιον, ἢ χιλιάς).

ς'. Οἶο-

ζ'. Οἰοσθήποτοῦν τόπος, ᾧ τινι τὸ μηδενικὸν πρόσκειναι, οὐκ ἀναγινώσκεται· ἐὰν δὲ κλάσει τινὶ μόνον μηδενικὰ ἐνυπάρχωσι, καὶ αὕτη παραλιμπάνεται· ὡς

405 τετρακόσια καὶ πέντε.

600 ἑξακόσια.

4004 τέσσαρες χιλιάδες, καὶ τέσσαρα.

70006 ἑβδομήκοντα χιλιάδες καὶ ἕξ·

Ἵνα δὲ ἐπὶ τινος πλείοσι χαρακτηῖσι συγκειμένου ἀριθμοῦ τὰς κλάσεις ῥᾶσα ἀπ' ἀλλήλων διακρίνωμεν, διασελλέσθωσαν αἱ μὲν ἐλάσσους δι' ἐνὸς σημείου, (·) αἱ δὲ γενικιώτεραι, διὰ γραμμῆς (') οὕτως, ὥς τε τὴν α' γενικιωτέραν κλάσιν διασελλέσθαι ἀπὸ τῆς β' γενικιωτέρας διὰ μιᾶς (') τὴν β' ἀπὸ τῆς γ' διὰ δύο, (") τὴν γ' ἀπὸ τῆς δ' διὰ τριῶν ("") κτ.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς διασαλήσεται, καὶ ἀπαγγελλήσεται οὕτω·

276, 543. 765, 281, 543., 211. 358., 765. 243.

276 τετραλλιόνια, 543 χιλιάδες καὶ 765 τριλλιόνια, 281 χιλιάδες, καὶ 543 διλλιόνια, 211 χιλιάδες, καὶ 398 μιλλιόνια, 765 χιλιάδες, καὶ 243.

Γράφοντας δὲ τοὺς χαρακτηῖρας προσεκτέον τῷ ἐξῆς· ἐὰν μετὰ τὸν ὑπέρτερον τόπον, ἢ τὴν κλάσιν, ὁ ἐγγὺς κατώτερος, ἢ κατωτέρα οὐχ ὑπαγορεύηται, ἐπισημειώσθωσαν τοῖς μηδενικοῖς· οἷον, εἰ δεοὶ ἑκατόν μιλλιόνια, τετρακοσίας πέντε χιλιάδας, καὶ ἑπτακόσια ἐν γράψαι.

Γράψον α', τὴν κλάσιν τῶν μιλλιονίων 100, εἴτα τὴν τῶν χιλιάδων 405, καὶ τελευταῖον τὴν τῶν μονά-

μονάδων 701, ὡς ὑπηγορεύθησαν, ἐφεξῆς, καὶ προ-
κύψει οὗτος ὁ ἀριθμός· 100, 405, 701· ἐνταῦθα
οἱ δύο κατώτεροι τόποι ἐν τῇ κλάσει τῶν μυλλιονίων,
ὁ μέσος ἐν τῇ τῶν χιλιάδων, καὶ μονάδων τῷ (Ο)
ἐπεσημάνθησαν, ὅτι ἐν τῷ ὑπαγορεύειν οὐδεὶς τῶν τό-
πων τούτων κατωνόμαται.

Ἐκ τούτων ῥᾶδιον σινιδεῖν, ὅτι αἱ προσηγοραί,
καὶ τὰ ὀνόματα, δι' ὧν αἱ διαφοροὶ τιμαὶ καὶ δυνάμεις
τῶν χαρακτηρίων ἐν διαφοροῖς τόποις παρίστανται, ὡ-
σαύτως καὶ ἡ τάξις, ἐν ἣ ἀπαγγέλλονται, ἀπὸ βουλῆς
ῥητηνται, καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου, σειράτις ἀριθμῶν ἐκ-
κειμένων τὸ αὐτὸ σημαίνει παρὰ τοῖς Γάλλοις, Γερμα-
νοῖς, κτ. ὁ καὶ παρ' ἡμῖν τοῖς Ἕλλησι.

§. 14. Οὐκ ὀλιγάκις συμβαίνει ἀντὶ πλείονων
ἀριθμῶν ὡς 32451 καὶ 26136 ἓνα μόνον ζητεῖσθαι
ἐκείνοις ἰσοδυναμοῦντα· ὁ Παῦλος ὀφείλει τῷ δεῖναι
32451 ὀβελούς, καὶ ἐτέρῳ αὐθις 26136. Ζητεῖται
οὖν, πόσα ὁ Παῦλος ἐν γένει ὀφείλει· ὅπως οὖν τὰ
τοιαῦτα ἐπιλύονται προβλήματα, ἡ Πρόσθεσις τοῦτο
διδάξει.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ.

§. 15. Πρόσθεσις ἐστὶν ἀριθμοῦ εὗρεσις,
ἴσου τοῖς δοθεῖσιν ἀριθμοῖς.

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καλοῦνται Προσθετέοι,
ὁ δὲ ζητούμενος, τὸ τούτων κεφάλαιον.

§. 16. Σημεῖον τῆς προσθέσεως ὑληπται τὸ
+, ἐμφαίνον τῷ ἡγουμένῳ ἀριθμῷ καὶ τὸν μετὰ τοῦτο
προσθεῖναι δεῖν· ἀπαγγέλλεται δὲ τῇ φωνῇ, πλέον,
οἶον, εἰ δέοι π. χ· 5, 7, 8, ἀλλήλοις προσθεῖναι,
δειχθήσεται οὕτω 5, + 7 + 8. 5, πλέον 7, πλέ-
ον 8 = 20.

β'

β'.

§. 17. Ἐνθα καὶ ἕτερον σημεῖον ὁρῶμεν, τὸ $=$, ὃ περ σημεῖον τῆς ἰσότητος καλεῖται· οἱ γὰρ ἀριθμοὶ $5 + 7 + 8$ ἀποτελοῦσιν 20. ὥς, ἴσοι, ἦτοι $= 20$. ὁθεν καὶ ἀντ' ἐκείνων τεθεῖη ἂν ὁ 20.

§. 18. Πᾶς ἀριθμὸς συνίσταται μόνον ἐξ ὁμοειδῶν μονάδων (§. 3.) ἀλλὰ καὶ τὸ κεφάλαιον ἐξ ἀνάγκης τὰς αὐτὰς μονάδας περιέχει ἐν ἑαυτῷ, ὥς καὶ οἱ δοθέντες ἀριθμοί· ἄλλως γὰρ οὐκ ἂν εἴη ἴσον ἐκείνοις· ἐνθεντοὶ καὶ τὸ κεφάλαιον τὸ ἐξ ἑτερογενῶν ἀριθμῶν ἀποδοθῆναι οὐκ ἔχει· οὕτω τὸ ἐκ 3. ἵππων, καὶ 5. ἀνθρώπων κεφάλαιον οὐκ ἂν εἴη οὔτε ὀκτώ ἵπποι, οὔτε ὀκτὼ ἀνθρώποι.

§. 19. Ἀπλοῦς ἀριθμὸς ἐστὶν ὃ ἐξ ἑνὸς χαρακτῆρος· ὥς 2, 3 κτ. σύνθετος δὲ, ὃ ἐκ δύο, ἢ πλειόνων· ὥς 22, 188, κτ. συνιστάμενος.

§. 20. Τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἀπλῶν ὄντων (§. 11.) ῥαδίως ἂν γένοιτο ἡ τούτων πρόσθεσις· πρόδηλον καὶ γὰρ τῶν 7 ὀβολῶν, καὶ 2 τὸ κεφάλαιον εἶναι 9.

§. 21. Συνθέτων δὲ (§. 12.) ὥς ὁ 32451 καὶ 26136, ἀκριβῶς τὸ ἐπιταχθὲν πληρώσομεν, ἀριθμῶν ἐνρόντες τασαύτας μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας, χιλιάδας, κτ' περιέχοντα ἐν ἑαυτῷ, ὅσας οἱ δοθέντες· προσπαροίκομεν αὖν ἀλλήλαις α' τὰς μονάδας τῶν δοθέντων, εἴτα τὰς δεκάδας, μεθ' ὃ τὰς ἑκατοντάδας, κτ' ὅλως δὲ, πάντα τὰ ὁμοειδῆ μέρη τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ κατωτάτου μέχρι τοῦ ἀνωτάτου, συντιθέμεντες ἐκ τῶν προκυψάντων ἐν μέρει κεφαλαίων τῶν μονάδων, δεκάδων, κτ' αὐθις ἀριθμόν, ὅς τὸ ζητούμενον ἔσται κεφάλαιον· ἵνα δὲ τοῦτο
μετά

μετὰ πλείονος εὐχερείας γένηται, οὕτω γραφέσθωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ, ὥστε τὰ ὁμοειδῆ αὐτῶν μέρη ἀκριβῶς ὑπέλληλα εἶναι, καὶ γραμμῆς πλαγίας διαχρείσης, τὸ τῶν ὁμοειδῶν μερῶν κεφάλαιον ἐν τῷ προσήκοντι τόπῳ ἀποτιθέσθω· οἷον.

32451) οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ, ἢ οἱ
26136) προσθετοί

58587 τὸ τούτων κεφάλαιον·

Ὁ δὲ λόγος, ὅτι μόνον τὰ ὁμοειδῆ ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν· ὅθεν δεκάς καὶ μονάς, ἢ μονάς καὶ ἑκατοντάς οὐ προσαθροισθήσονται.

§. 22. Ἐάν ὡς ἐν τῷ προκειμένῳ παραδείγμ· τὰ κεφάλαια τῶν μονάδων, τῶν δεκάδων κτ. ἀπλοῖ ἀριθμοὶ (§. 19.) ᾧσι, παρέξουσιν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐν τῷ αὐτῶν τόπῳ καταγραφέντα αὐτίκα τὸ ζητούμενον γενικὸν κεφάλαιον. Ἐάν δὲ τὰ ἐν μέρει κεφάλαια ἐκ μονάδων, καὶ δεκάδων, ἢ ἐκ μον· δεκ. ἑκατ. κτ. συγκέωνται, ἐν μέρει ταῦτα γράφοντες ζητοῦμεν αὐτῆς τὸ κεφάλαιον τῶν ἐν μέρει κεφαλαίων· ὡς

134589 }
64395 } οἱ δοθ. ἀρ.
674679 }

23 τὸ κεφάλαιον τῶν μονάδων
240 τὸ κεφ. τῶν δεκάδων
1400 τὸ κεφ. τῶν ἑκατοντάδων
12000 - - τῶν χιλιάδων
160000 - - τῶν δεκάδων χιλιάδων
700000 - - τῶν ἑκατοντάδων χιλιάδων

873663 τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ἐν μέρει.

κεφαλαίων, καὶ ἐπομένως τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

§. 23. Ὅσακις τὸ ἐν μέρει κεφάλαιον ἐκ οὐὼ συγγροτεῖται χαρακτηρίων, πάρει καὶ ὁρᾷ, ὅτι ὁ τούτων κατώτερος αἰείποτε ὁμοειδὴς ἐστὶ τοῖς μέρεσι τοῖς ἐνεργείᾳ προσδεμένοις, ὁ δ' ὑπέρτερος ὁμοειδὴς τοῖς ἀμέσως μετὰ τοῦτο προσδεησομένοις· ἀμεινον οὖν τοῦ πόνου Φειδομένοις τοῦ τὰ ἐν μέρει κεφάλαια καταγράφειν, καὶ εἴτα ἀλλήλοις προσδεῖναι, ἐκάστου ἰδιαίτερου κεφαλαίου μόνον τὸν κατώτερον ἀριθμὸν γράφοντας, τὸν ἀνώτερον τοῖς ἀμέσως ἐπομένοις ἀνωτέροις μέρεσι προσαριθμεῖν· ἐνθενται ἐν τῷ προτεθέντι παραδείγματι

$$\begin{array}{r} 134589 \\ 64395 \\ 674679 \\ \hline 873663 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 134589 \\ 64395 \\ 674679 \end{array}} \right\} \text{οἱ δ. ἀρ.}$$

873663 τὸ κεφ.

γράφοντες τὰς 3 μονάδας τοῦ τῶν μονάδων κεφαλαίου 23, προσαριθμοῦμεν τὰς 2 δεκάδας ταῖς δεκάσι τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· ὡσαύτως καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν δεκάδων 260 τὰς 6 δεκάδας γράφοντες, τὰς 2 ἑκατοντάδας ταῖς ἑκατοντάσι τῶν δοθέντων ἀριθμῶν συγκαταλέγομεν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ὥς καὶ τὸ ὑπὸ τὴν γραμμὴν κεφάλαιον προκύψει, ὡς πρότερον.

Σχόλιον.

Ἐὰν τὸ κεφάλαιον τῶν ἀπλῶν ἀριθμῶν ὑπερέχῃ τὸν 9, ἥτοι ἐὰν ᾖ 10, ἃς τεθῇ ἐν τῷ τόπῳ τοῦ κεφαλαίου τῶν μονάδων τὸ 0. ὅτι ἅπασαι αἱ μονάδες δεκάδα ἀπετέλεσαν, ἡ ὁποία πρέπει νὰ γραφῇ εἰς τὸν τόπον τῶν δεκάδων. (§. 23.)

§. 24.

§. 24. Ὡσαύτως χωρήσωμεν, καὶ εἰ συγκε-
κριμένοι ἀριθμοὶ (§. 4.) μετὰ διαφορῶν μερῶν τῆς
μονάδος προσεθῆναι πρόκεινται· π.χ. ὀργυιαί, πόδες,
καὶ δάκτυλοι· ζητοῦμεν ἀρέσει τὸ κεφάλαιον τῶν
δακτύλων, εἴτα τὸ τῶν ποδῶν, καὶ τελευταῖον τῶν
ὀργυιῶν, καὶ ὁ ἐκ τούτων τῶν ἰδιαίτερων κεφαλαίων
συγκεισόμενος ἀριθμὸς ἔσται τὸ κεφάλαιον τῶν δε-
θέντων.

ὀργ. πό. δ.

ἔσωσαν	240	5	9	} οἱ δεθέντες ἀριθμοὶ
	35	3	7	
	4567	2	6	

καὶ 4842 10 22 ἔσται τὸ τούτων κεφα-
λαίον, ἢ 4843, §. 10

ἐπειδὴ γὰρ ἡ ὀργυιά 6 πόδας περιέχει, ὁ δὲ ποὺς 12
δακτύλους, οἱ 22 δάκτυλοι δώσουσιν ἓνα πόδα, καὶ 10
δακτ. οἱ 11 πόδας, 1 ὀργυιάν, καὶ 5 πόδας.

Σχόλιον.

Ἐἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν τοιούτων ἀριθμῶν εἶναι
ἀναγκαῖον νὰ ἱξεύρωμεν, με πόσας μονάδας κατωτέ-
ρας εἶναι ἰσοδύναμος μία ἀνωτέρα· π.χ. ἐνταῦθα μία
ἀνωτ' μονάς, ἥτοι μία ὀργ' εἶναι ἴση με 6 κατωτέρας
μον. ἥτοι με 6 πόδας, καὶ εἰς ποῦς = 12 δακτύλοις·
πλὴν παραδείγματα εὐρίσκονται εἰς τὰ καινὰ ἀριθμη-
τικὰ βιβλία·

§. 25. Βασανίσωμεν δὲ τὴν πρόσθεσιν ἀπται-
σως τῇ ἐπαναλήψει τῆς ἀθροίσεως τῶν ἀριθμῶν κάτω-
θεν εἰς τὰ ἄνω ἰόντες, καὶ ἀνάπαλιν, τὰ λοιπὰ εἶδη

τῶν βασιλέων, ὡς οὐ πᾶν ἀσφαλῆ, παραλείποντες.

§. 26. Δύο ὁμοειδῶν ἀριθμῶν δοθέντων, ὅσον τοῦ 32451, καὶ 26136, εὐρέσθεται, ὡς εἴρηται (§. 21) τὸ τούτων κεφάλαιον 58587· εἰ δὲ τὸ κεφάλαιον 58, 7 δεδομένον ἦ, καὶ ὁ ἕτερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 32451 γνωστὸς ἦ, ὅπως τὸν ἕτερον 26136 εὐρήσομεν, αὐτίκα ῥηθήσεται· π. χ. ὀφείλων τῷ Παύλῳ 58787 ὀβολοὺς ἀπέτισα αὐτῷ 32451. Ζητεῖται οὖν, πόσους ἔτι αὐτῷ ὀφείλω; τοσούτους δῆπου, ὅσοι τῷ 32451 προσεθέντες παρέξουσιν τὸν 58587.

ΠΕΡΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

§. 27. Ἀφαίρεσις ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ δοθέντος κεφαλαίου δύο ἀριθμῶν, καὶ τοῦ ἑτέρου τούτων, τοῦ ἑτέρου ἑύρεσις·

Τὸ κεφάλαιον καλεῖται, Μειωτέος· ὁ ἕτερος τῶν ἀριθμῶν, Ἀφαιρετέος. ὁ δὲ ζητούμενος, διαφορὰ τῶν δοθέντων.

§. 28. Σημεῖον Ἀφαιρέσεώς ἐστὶ τὸ —, δια τοῦ, μείον, ἐκφερόμενον, καὶ τοῦ ἀφαιρετέου προτιθέμενον.

§. 29. Ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον ἀναγκαίως ὁμοειδὲς ἐστὶ τοῖς μέρεσιν, ἐξ ὧν σύγκειται (§. 18.) οἱ ἑτερογενεῖς ἀριθμοὶ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεθῆναι οὐ δύνανται.

Σχόλιον.

Ἡ ποσότης, ἡ ἀπ' ἄλλης τινὸς ἀφαιρετέα, πρέπει νὰ ᾖ ὁμοειδὴς αὐτῇ· διότι ἀπὸ τῶν ὀβολῶν εἶναι αὐ-

ἀδύνατον νὰ ἀφελωμεν π. γ. 4 μῆλα· ἂν ὁμῶς οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀφαιρετέοι, (§. 4.), ἡμποροῦν νὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπ' ἀλλήλων· διότι τότε, καθ' ἀριθμοί, εἶναι ὁμοειδεῖς ὅλοι.

§. 30. Ἐξω ἀφαιρετέος 5 ἀπὸ 12. ὃ ἐστὶ, 12 ἐξὶ τὸ κεφάλαιον δύο ἀριθμῶν, καὶ 5 ὁ ἕτερος τούτων. εὐρεθήτω οὖν ὁ ἕτερος· τοῦτον δὲ οὕτως ἔγειν χρή, ὥς τε τῷ 5 προστεθέντα 12 παρέχουν ἔνθεντοι συνιδεῖν οὐ χαλεπὸν, ὅτι ὁ 6 πᾶν βραχύς ἐστι· (ὁ γὰρ καὶ 5 ἀποτελοῦσιν 11) καὶ ὅτι ὁ 8 πᾶν μέγας. (8 γὰρ καὶ 5 παρέχουσι 13) καὶ ὅτι τελευταῖον 7 ἢ ζητούμενη ἐστὶ διαφορὰ· ὅτι τῶν 7 καὶ 5 τὸ κεφάλαιον ἐστὶ 12.

Σχόλιον.

Ὁ ἀκριβῶς τὴν πρόσθεσιν καταμαθὼν δὲν θέλει εὐρεῖ καμμίαν δυσκολίαν εἰς τὸ νὰ ἀφαιρῇ τοῦλάχιστον τοὺς ἀπλοῦς (§. 19.) ἀριθμούς· διότι εὐθὺς διὰ τῆς προσθέσεως, κατὰ τὸ ἄνωτ, παράδειγμα, θέλει ἰδεῖ, πότερον ὁ ἀριθμὸς ὁ ζητούμενος πᾶν βραχύς, ἢ πᾶν μέγας, ἢ ἴσος τῷ ζητούμενῳ.

§. 31. Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἐκ μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, χιλιάδων κτ' συγκροτῶνται, εὐρήσομεν τὴν διαφορὰν, τὰ αὐτὰ ποιήσαντες, ὥς καὶ ἐπὶ τῆς προσθέσεως, ζητήσαντες ἀμέλει κατὰ τὰξιν τὴν διαφορὰν τῶν μονάδων, τὴν τῶν δεκάδων, κτ. ἔνθεντοι εὐχερείας χάριν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν οὕτως ὑπὸ τὸ δοθὲν καταγράψομεν κεφάλαιον, ὥς τε τὰ ὁμοειδῆ τούτων μέρη κατὰ εἴλην ὑπάλληλα κεῖσθαι, τὰς μονάδας δηλονότι ταῖς μονάσι, κτ' καὶ γραμμῆς ὀχθεΐσης, αἱ ἐν μέρει διαφοραὶ ὑπ' αὐτὴν ἐν τῷ δέοντι τόπῳ ταχθεῖσονται, ἵνα τὴν ζητούμενην ὁλικὴν διαφορὰν παράσχωσιν.

ἔξω

ἔσω 58587 τὸ δοθέν κεφ.

32451 ὁ δοθεὶς ἀρ.

26136 ἡ τούτων διαφορά.

Ἀπαγγέλλομεν δὲ τὸν τρόπον τῆς ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν οὕτω·

1 ἀπὸ 7, ἀφαίρεται 6· 5 ἀπὸ 8, 3. 4 ἀπὸ 5, 1. 2 ἀπὸ 8, 6. 3 ἀπὸ 5, 2. καὶ ἐπειδὴ 6 καὶ 1 = 7, 3 καὶ 5 = 8, 1 καὶ 4 = 5, 6 καὶ 2 = 8, 2 καὶ 3 = 5, δῆλον, ὅτι 26136 τῷ 32451 προσεθέν δίδωσι 58587. (ὅπερ καὶ βάσανός ἐστι τῆς ἀφαιρέσεως) ἔστιν ἄρα 26136 ἡ ζητούμενη διαφορά.

§. 32. Συμβάν δὲ χαρακτῆρα τινὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ μείζονα εἶναι τοῦ ὁμοειδοῦς αὐτῷ χαρακτῆρος τοῦ ἐν τῷ δοθέντι κεφαλαίῳ, ὡς

937082 τὸ δ. κεφ.

462537 ὁ δ. ἀρ.

*Ενθα 7 ἀπὸ 2, 5 ἀπὸ 0, καὶ 6 ἀπὸ 3 ἀφαιρέται εἰσὶν, οἵτινες (7, 5, 6) μείζους εἰσὶ τῶν ὁμοειδῶν, ἧτοι ὁ 7 τοῦ 2, ὁ 5 τοῦ 0, καὶ ὁ 6 τοῦ 3, προστιθέντες τῷ χαρακτῆρι τοῦ κεφαλαίου (ἀφ' οὗ ὁ μείζων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῆσεται) 10, ἀπομειοῦμεν τὸν ἐγγὺς ἀνώτερον τύπον μονάδι, ὅτι ἐκάστη μονάς τοῦ χαρακτῆρος τοῦ ἀνωτέρου τύπου ἀείποτε 10 τοῦ ἐγγὺς κατωτέρου ἰσοδυναμεῖ (§. 11.) παρατήσομεν οὖν τῇ ἡμετέρᾳ διαγραφῇ τὸ ὑπ' ὅψιν παραδειγμα οὕτω,

8	(13)	6	(10)	7	(12)	τὸ δ. κ.
4	6	2	5	3	7	ὁ δ. ἀρ.

4	7	4	5	4	5	ἡ διαφ.
---	---	---	---	---	---	---------

Λέγοντες, 7 ἀπὸ 12, ὑπολείπεται 5. 3 ἀπὸ 7, 4. 5 ἀπὸ 10, 5. 2 ἀπὸ 6, 4. 6 ἀπὸ 13, 7. 4 ἀπὸ 8, 4.

§. 33. Ἐάν τῷ τόπῳ τοῦ κεφαλαίου, ὃν μονάδι ἀπομειώσῃς μέλλον, ἢ ἀφ' οὗ μονάδα λαβεῖν βουλόμεθα 10 μονάσι τοῦ κατωτέρου ἰσοδυναμοῦσαν, τὸ οὐ ἐνυπάρχει, ὡς

4000502 τὸ δ. κ.

2567346 ὁ δ. ἀρ.

Ἀπομειοῦντες τὸν ἐγγὺς τοῦ οὐ ἀνώτερου τόπου μονάδι, τιθέμεν ἐν τῷ ἐγγὺς κατωτέρῳ, τῷ μετὰ τοῦ οὐ ἐπισεσημειωμένῳ, οὐχὶ 10, ἀλλὰ μόνον, 9, κατὰγοντες μίαν μονάδα τοῦ 10, (διὸ καὶ 9 ὑπολείπεται, ἔνθα τὸ οὐ ἐστὶ) ἥτις αὐτῆς δέκα μονάσι τοῦ μετὰ τὸ οὐ χαρακτῆρος ἴση ἐστὶ, καὶ προσιδέντες αὐτὴν τῷ χαρακτῆρι τῷ ἐλάττιον ὄντι τοῦ ἀφαιρετέου χαρακτῆρος, ἀφαιροῦμεν· νοήσομεν δὲ τὰ προτεθέν παραδείγματα οὕτως·

(399	(10)	4	9	(12)	τὸ δ. κ.
256	7	3	4	6	ὁ δ. ἀρ.

143	3	1	5	6	ἡ τούτων διαφ.
-----	---	---	---	---	----------------

Καὶ γὰρ 6 ἀπὸ 12, ὑπολείπεται, 6. 4 ἀπὸ 9, 5. 3 ἀπὸ 4, 1. 7 ἀπὸ 10, 3. 6 ἀπὸ 9, 3. 5 ἀπὸ 9, 4. καὶ 2 ἀπὸ 3, 1. ἡ γὰρ μονάς, ἡ ἐκ τοῦ

τοῦ ζ'· τόπου παραληφθεῖσα ἰσοδυναμεῖ 10 μον. ἐν τῷ ζ'. ἔνθα 9 μόνον καταλείποντες, ἔχομεν αὖθις 1 ἐν τῷ ε'· καὶ ταῦθα πάλιν μένοντος τοῦ 9, ἔχομεν 10 ἐν τῷ δ'. ὥσαύτως μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ γ' τόπου εἰς 10 ἀναλυθείσης, τίθεται 9 ἐν τῷ β'. καὶ 10 ἐν τῷ α'.

παραπλησίως, εἰάν 9000000 τὸ δ. ἢ κεφ.
3456782 ὁ δ. ἀρ.

ἔσαι 5543218 ἢ τούτων διαφορά.

Ἐκ γὰρ τοῦ ζ'· τόπου μονάδος ἐκπεσούσης, ἀντὶ ταύτης θήσομεν ἐν τῷ ζ'. ε'. δ'. γ'. καὶ β'. 9. ἐν δὲ τῷ α' 10, οὕτως ἀφαιροῦντες. 2 ἀπὸ 10 ὑπολ. 8. 8 ἀπὸ 9, 1. 7 ἀπὸ 9, 2. 6 ἀπὸ 9, 3. 5 ἀπὸ 9, 4. 4 ἀπὸ 9, 5. καὶ 3 ἀπὸ 8, 5.

§. 34. Εἰ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ μετὰ διαφορῶν μερῶν τῆς μονάδος εἰς ἀφαιρέσιν ἀπ' ἀλλήλων πρόκεινται, τὸν αὐτὸν προβήσῃ τῷ τῷ, ἀπὸ τῶν ἀνωτέρων μονάδα λαμβάνων, καὶ εἰς τὰς κατωτέρας αὐτὴν ἀναλύων, ὡς

ὀργυαί. πόδ. δάκτ.

10	5	7	τὸ δοθὲν κεφ.
8	6	10	ὁ δοθεὶς ἀριθμός.
1	4	9	ἡ διαφορά.

Ἀντὶ γὰρ 1 πόδος προσίθεμεν τοῖς 7 καὶ 12 δακτύλους, καὶ ἀπὸ τῶν 19. δ. ἀφαιροῦμεν 10. καὶ ἀντὶ 1 ὀργυῖς προσίθεμεν τοῖς 4 π. ἔτι 6 πόδας, καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῶν 10, 6. ὅρα καὶ τὸ σχ. τοῦ §. 24.

§. 35. Μέχρι τοῦδε σιωπῇ ὑποτέθεται τὸ δοθέν κεφαλαίον μείζον εἶναι τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ· εἰ δὲ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς μείζων ἢ τοῦ δοθέντος κεφαλαίου, οἶον, εἰ πρόκειται 12 ἀπὸ 7 ἀφαιρεθῆναι, ἀναγκαῖον πάντως ἀριθμὸν εὐρεῖν, ὃς τῷ 12 προσεθῆς 7 ἂν ἀποτελοίῃ· ἐπεὶ δὲ ὁ 12 τοῦ 7 μείζων, πᾶς ἀριθμὸς τῷ 12 προσεθῆς ἀριθμὸν δῆπου μείζονα τοῦ 7 παρέξει, εἰ μὴ τοιοῦτος εἴη, ὥς τῷ 12 προσεθῆς τοσαύτας μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ 12 ἀναιρήσει, ὅσαις ὁ 12 τὸν 7 ὑπερέχει· τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς ἐπιγνωσόμεθα ἤδη.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΑΤΑΦΑΤΙΚΩΝ. ΚΑΙ ΑΠΟΦΑΤΙΚΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ.

§. 36. Οὕτω καλοῦνται ποσότητες, αἱ ἀμέσως ἀλλήλαις ἀντικείμεναι.

Ὡς χρηματικὴ περιουσία, καὶ ὄφλημα· ἀριστερά οὐδὲς, καὶ δεξιὰ· ἄνω οὐδὲς, καὶ κάτω. κτ. ἐν τῶν οὕτω ἐναντίως ἔχουσῶν ποσοτήτων καταφατικὴν ἔξει παραλαβεῖν, ἣν ἂν βουλόμεθα· ἢ ἑτέρα εἶναι ἀεὶ ποτε ἀποφατικὴ· π. χ. εἰ ἡ περιουσία καταφατικὴ ὑποτίθεται, τὸ ὄφλημα εἶναι ἀποφατικόν· ἢ τοῦτου καταφατικοῦ τεθέντος, ἐκείνην ἀποφατικὴν ἐκδεξόμεθα.

§. 37. Ὁ 100. μναῖς κεντημένος, καὶ 100 ὀφείλων, οὗτος κέντηται οὐδέν· ὁ τρεῖς βαθμίδας τῆς κλίμακος ἀναβάς, καὶ τρεῖς καταβάς, οὗτος οὐδεμίαν ἀναβέβηκεν· αἱ ὀφειλόμεναι ἄρα 100 μναὶ ἀναιροῦσι τὰς 100 μναῖς τῆς περιουσίας, καὶ αἱ τρεῖς βαθμίδες αἱ εἰς τὰ κάτω τὰς τρεῖς τὰς εἰς τὰ ἄνω· ἐν ταύτῃ τῇ ἐννοίᾳ ὁρθῶς λέγεται· Ἰσαι καταφατικά, καὶ ἀποφατικά ποσότητες ἀναίρουσιν ἀλλήλας.

Σχό.

Σχόλιον.

100 μνᾶι περιουσίας, καὶ 100 χρέους εἶναι ποσότητες ὁμοειδεῖς, αἱ ὁποῖαι ὅμως σμικρύνουσιν ἢ μία τὴν ἄλλην, ὅταν συνάπτονται μετ' ἀλλήλων· διότι θέλων νὰ διορίσω τὴν περιουσίαν τινός, πρέπει νὰ ἀφείλω ἐκεῖνα ὅπου χρεωσθεῖ ἀπὸ ἐκεῖνα ὅπου ἔχει· καὶ ἐπομένως ἡ περιουσία σμικρύνεται ὑπὸ τοῦ χρέους· ὅθεν καὶ τὸ, ὃ Πέτρος ἔχει 100 μνᾶς ἀποφατικὴν περιουσίαν, θέλει ἐξηγηθῇ οὕτως· ὁ Πέτρος ἔχει μόνον εἶναι χωρὶς περιουσίας, ἀλλὰ πρὸς τοῦτῳ εἶναι καὶ χρεώσης 100 μνῶν, ἐὰν δηλονότι τὸ χρέος τὸ ἐκλάβωμεν ὡς ἀποφατικόν.

§. 38. Πρὸ τῶν καταφατικῶν τίθεται σημεῖον τὸ +· πρὸ δὲ τῶν ἀποφατικῶν τὸ —· οὕτω τὸ + 7 σημαίνει 7 καταφατικᾶς· τὸ δὲ — 7, 7 ἀποφατικᾶς μονάδας.

Σχόλιον.

Τὸ σημεῖον + ἐν τῇ αἰρχῇ, καὶ αἰμέσως μετὰ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος (=) παραλιμπάνεται· ὥςτε ὅπου δὲν βλέπομεν τὸ —, πρέπει νὰ ἐκλαμβάνωμεν τὴν ποσότητα καταφατικῶς· οὕτως ἀναγινώσκωμεν, καὶ γράφωμεν

$$7 - 4 = 3. \text{ ἀντὶ τοῦ } + 7 - 4 = + 3.$$

$$9 - 5 = 4. \text{ ἀντὶ τοῦ } + 9 - 5 = + 4.$$

§. 39. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον = ἰσότητα δηλοῖ, ὡς ἤλalon (§. 17.) ὡς τῶν ἴσων καταφατικῶν, καὶ ἀποφατικῶν ποσοτήτων ἀλλήλας ἀναιρουσῶν (§. 37.) ἔσαι

$$\begin{array}{r} + 7 - 7 = 0 \\ + 9 - 9 = 0 \end{array}$$

§. 40.

§. 40. Ἐπειδὴ καταφατικαὶ ποσότητες καταφατικὰς οὐκ ἀναιροῦσιν, ἢ παντὶ δῆλον, ὡς οὐδ' ἀποφατικαὶ ἀποφατικὰς π. χ. $7 + 9 = 16$. καὶ $- 7 - 9 = - 16$, πάρεσι καθορᾶν, ὅτι τὰ διὰ τῶν σημείων (+, καὶ -) συναπτόμενα σχήματα ἐπιτέμνουντο, ἐάν ὁ ἐλάττων ἀριθμὸς τῶν μὴ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἔχόντων ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρῆται, καὶ τῆς διαφορᾶς τὸ σημεῖον τοῦ μείζονος προτιθῆται, οἱ δὲ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἔχοντες ἀλλήλοις συνάπτονται, τοῦ κεφαλαίου πρὸ ἑαυτοῦ τὰ τούτων σημεῖαν λαμβάνοντας· ἔνθενται $+ 8 - 5 + 6 - 3 + 4 - 9 = + 1$ * καὶ γὰρ $+ 8 - 5$ δίδωσι $+ 3$. $+ 3$ (ἢ ἡ δὴ προκύψασα διαφορά) καὶ $+ 6$ δίδωσι $+ 9$.

$$\begin{array}{rclclcl} + & 9 & - & 3 & \text{δίδωσι} & + & 6 \\ + & 6 & + & 4 & \text{δίδωσι} & + & 10 \\ + & 10 & - & 9 & \text{δίδωσι} & + & 1 \end{array}$$

Τῶν ἐπιτετμημένων τρόπων, ὡς ἐνταῦθα τὸ $+ 1$, σαφεσέρων ὄντων, ἢ τῶν συνθέτων, ὡς τοῦ $+ 8 - 5 + 6 - 3 + 4 - 9$, χρῆσθαι τῇ ἐπιτομῇ, ἔνθα χώραν ἔχειν δύναται.

Σχόλιον. α*

Χώραν ἡ ἐπιτομὴ ἔχει ἐν τοῖς ἀριθμοῖς πάντοτε· ἐν τοῖς γράμμασιν ὅμως, διὰ τὰ ὑποῖα θέλει μῆθῃ εὐθὺς, οὐχὶ πάντοτε.

β.*

Ὅτι αἱ καταφατικαὶ ποσότητες πρέπει νὰ προσίθωνται ταῖς καταφατικαῖς εἶναι φανερόν· 10 δραχμαὶ περιουσίας, ὅπου ἔχει τις, καὶ ἔτι 6 δραχμαὶ περιουσίας δισφύζουσι τὴν περιουσίαν του, ἢ γαὺν λεγόμεν περὶ τοῦ τοιοῦτου ὅτι ἔχει περιουσίαν 16 δραχμῶν* (ἰδοὺ ἐνταῦθα προσίθεται αἱ καταφατικαὶ ἀλλήλοις) ἀλλὰ

λὰ καὶ αἱ ἀποφατικαὶ ἀποφατικαῖς· ἐκεῖνος ὅπου
 χρεωεῖ 5 δραχμὰς, καὶ ἔτι 4, ἔχει — 5 δρ. καὶ
 ἔτι — 4. ὥστε ὁμοῦ — 9 δραχμὰς· ἥτοι χρεωεῖ
 9 δραχμὰς πρὸς τούτοις καὶ αἱ +, καὶ —, μὲ τὸ
 νὰ ἀφαιρῇται ἀπὸ τὴν μείζονα ποσότητα ἢ διαφορά,
 κατ' ἣν αἱ ἐναντία ποσότητες ἀλλήλων διαφέρουσι· π.
 χ. εἰάν ἔχω 10 δραχμὰς περιουσίας, καὶ 6 ὀφείλω,
 διὰ νὰ μάθω, πόσας ἔχω τῇ ἀληθείᾳ, ἥτοι πόσαι μοι
 ὑπολείπονται, πρέπει νὰ προσθῶ + 10 δρ. καὶ
 — 6 δρ. οὕτω·

$$\begin{array}{rcl}
 + & 10 \text{ δρ.}, & \text{ἥτοι κυρίως πρέπει νὰ ἀφῶ τὸ χρέος} \\
 - & 6 \text{ δ.}, & \text{ἀπὸ τὴν περιουσίαν} \\
 \hline
 + & 4 &
 \end{array}$$

Σχόλιον. γ'.

Τοῦτον τὸν τρόπον τῆς προσθέσεως τὸν μεταχει-
 ριζόμεθα καὶ εἰς τὸν κοινὸν βίον. π. χ. εἰ τὰ λήμμα-
 τὰ τινος εἶναι 3 μναῖ, 5 δραχμαί, 4 ὀβολοί· καὶ
 ἔτι 5 μναῖ, 16 δραχμαί, καὶ 2 ὀβολοί· αἱ δὲ δαπά-
 ναι 7 μναῖ, 8 δρ. 2 ὀβ. καὶ ἔτι 12 δρ. καὶ 5 ὀβ. πό-
 σηεῖναι ἢ περιουσία του; ἐνταῦθα τῶν λημμάτων, ὡς
 καταφατικῶν ληφθέντων, τῶν δὲ δαπανῶν ἀποφατι-
 κῶν, κατὰ τὰ διάφορα σημεῖα τὸ παράδειγμα ἐκκεῖ-
 σεται οὕτω.

$$\begin{array}{rcllcl}
 3 \text{ μν.} & + & 5 \text{ δρ.} & + & 4 \text{ ὀβ.} & \\
 5 \text{ μν.} & + & 16 \text{ δρ.} & + & 2 \text{ ὀβ.} & \\
 - 7 \text{ μν.} & - & 8 \text{ δρ.} & - & 2 \text{ ὀβ.} & \\
 & & - 12 \text{ δρ.} & - & 5 \text{ ὀβ.} & \\
 \hline
 + 1 \text{ μνα} & + & 1 \text{ δρ.} & - & 1 \text{ ὀβ.} &
 \end{array}$$

Ἔχει οὖν ἔτι 1 μναν, 1 δρ. πλὴν ενός ὀβολοῦ·

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΙΚΩΝ ΑΡΙΘ-
ΜΩΝ.

§. 41. Οἱ ἀΦηρημένοι ἀριθμοὶ (§. 4.) ἔχουσι γενικωτέραν σημασίαν, ἢ οἱ συγκεκριμένοι· 5 δραχμαὶ π. χ. μόνον περὶ τῶν δραχμῶν, καὶ περὶ οὐδενὸς ἑτέρου ἂν λέγοντο· τούναντίον δὲ, ὁ ἀΦηρημένος (5) ἀρμόζει ἐκάσταις πέντε ὁμοειδέσι μονάσι π. χ., δραχμαῖς, ὀβολοῖς, ἵπποις, κτ. ἀλλ' οὗτος ὁ 5 οὐ δύναται σημαίνειν καὶ 4, ἢ 6, ἢ 2, ἢ 3, ἢ 10 μονάδας· μᾶλλον δὲ οὐδεμίαν ἑτέραν πληθὺν ὁμοειδῶν μονάδων, ἢ 5 μόνον.

Δίδονται οὖν ἔτι γενικώτεροι ἀριθμοὶ, οἵανούν πληθὺν ὁμοειδῶν μονάδων ἐν ἑαυτοῖς περιλαμβάνοντες, οἵτινες Ἀλγεβραϊκοὶ ἀριθμοὶ καλοῦνται· παρίστανται δὲ διὰ τοῦ α, β, γ, δ, ε, κτ.

Σημαίνει τοίνυν α πάντα ἀριθμόν· ὡσαύτως καὶ β πάντα ἀριθμόν, ὡς τὸ α· α καὶ β δὲ σημαίνουσιν ὁποιοουσὺν δύο· α, β, καὶ γ ὁποιοουσὺν τρεῖς, κτ.

Ὁ λέγων α δραχμὰς ἐκφέρει πᾶσαν πληθὺν δραχμῶν, ἄνευ ἐξαιρέσεως· καὶ ὁ λέγων α δρ. καὶ β δρ. οἵασούν δύο πληθύνες δραχμῶν αὐτῆς ἄνευ ἐξαιρέσεως· ὅ, τι οὖν κατὰ τοῦ α καὶ β λέγεται, λεχθήσεται καὶ κατ' ἐκάστων δύο ὁμοειδῶν ἀριθμῶν· καὶ ὅ, τι ἀληθεύει περὶ τοῦ α, β, γ, καὶ δ, ἀληθεύσει καὶ περὶ οἰωνοῦν τεσσάρων ὁμοειδῶν ἀριθμῶν.

Σχόλιον.

Τὸ α ἢμπορεῖ νὰ σημαίνη 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20, 100, 1000 κτ. ὡσαύτως καὶ τὸ β φανερώνει κάθε δυνατόν ἀριθμόν, 1, 2, 3, 4, κτ. καὶ ὅλως, πάντα ἀριθμόν· ἕνα δηλαδὴ, ὅποιον θέλῃς, ὅχι ὅμως καὶ ὅλους ὁμοῦ εἰς τὸν ἴδιον καιρόν· τί δὲ
τὸ

τὸ ἐν τῷ ἀνωτ. §. 6, τι κατὰ τῶν γραμμάτων λέγεται, λεχθήσεται καὶ κατὰ τῶν δυνατῶν ἀριθμῶν, καὶ ποσοτήτων, ὅπου παρασάινονται διὰ τῶν γραμμάτων, θέλομεν τὸ καταλάβει ἀρκετὰ ἐν τοῖς ἑξῆς.

§. 42. Εἶδισαι τοῖς Μαθηματικοῖς ἐν τῷ διὰ τῶν γραμμάτων ὑπολογισμῷ τὰς ποσότητας, ἢ τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς δοθέντας, ἢ γνωστοὺς διὰ τῶν πρώτων γραμμάτων τοῦ αλφαβήτου, διὰ τοῦ α, β, γ, δ, ε, ζ, κτ. ἐκφαίνει· (ἐνθα ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἕκαστον γράμμα ἑτέραν αἰανοῦν ποσότητα σημαίνει, ἢ τὰ λοιπὰ) τοὺς δὲ ἀγνώστους, ἢ τοὺς ζητούμενους, καὶ διὰ τῶν γνωστῶν εὐρεθησομένους διὰ τῶν ἐσχάτων· υ, φ, χ, ψ, ω.

Σχόλιον.

Τὰ γράμματα ἔχομεν τὴν ἄδειαν νὰ τὰ λαμβάνωμεν ἀντὶ πάσης ποσότητος· ἀφ' οὗ ὅμως τὰ διορίσωμεν, πρέπει νὰ ἐρμηνεύμεν εἰς τὸν διορισμὸν μέχρι τέλους τοῦ ᾧνὰ χεῖρας ὑπολογισμοῦ· π. χ. ἂν ἐκλάβῃς τὸ α ὡς τοῦ 5 σημαντικόν, ἢ 6, ἢ κτ'· τήρει τὴν ἐκδοχὴν τὴν αὐτὴν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν ἐν τῷ αὐτῷ ὑπολογισμῷ· τὰ αὐτὰ ῥητέον καὶ περὶ τῶν ἄλλων γραμμάτων.

§. 43. Ἀποδέδεται τοῖς γράμμασιν ἡ καθόλου αὐτῇ σημασία· ἵνα διὰ τούτου ῥαδίως ὅσας ἐν γένει ἐκδηλῶνται ποσότητες, καὶ τῶν κατ' αὐτὰς ιδιοτήτων θεωρουμένων, γενικαὶ ἀλήθειαι ἐκκαλύπτωνται, ταῖς μερινοτέροις ποσότησιν, ὡς κανόνες ἐφαρμοζούσαι (§. 41. καὶ σχ.)

§. 44. Ποσότης ἀλγεβραϊκὴ, ἢ ἐνὶ γράμματι παρισαμένη, ἀπλῇ ἢ ἀκούει· ὡς α, β, γ. δυσὶ δὲ, ἢ πλείοσι, σύνθετος. οἶον, αβ, βγδδ. ἑκατέρω, μόνῃ τιθεμένη, ἀσύμπλεκτος λέγεται· ὡς α, αβγ.

δε,

δε, γχ. τοῖς δὲ σημείοις (§. 33.) συναπτομένη, συμπεπλεγμένη· ὡς $\alpha\beta + \epsilon\delta$, ἢ $\alpha - \beta$.

§. 45. Οἰουσοῦν ἀριθμοὺς σημαίνωσιν α , καὶ β , τὰ ἐξῆς συμπεπλεγμένα σχήματα, ἐπὶ τὸ συντομώτερον συσταλῆναι ἔχουσιν (§. 40. σχ. β'.)

$$- 5\beta - 6\beta = - 11\beta.$$

$$3\alpha + 2\alpha = 5\alpha.$$

$$5\alpha - 3\alpha = 2\alpha.$$

$$- 9\beta + 4\beta = - 5\beta.$$

$$3\alpha + 7\beta - 8\alpha = 7\beta - 5\alpha.$$

$$17\alpha + 6\beta - 11\alpha - 13\alpha = 4\alpha - 7\beta.$$

Περὶ προσθέσεως τῶν καταφατικῶν, καὶ ἀποφατικῶν ἀριθμῶν.

§. 46. Πρόσθεσις ἐστὶν ἀριθμοῦ [εύρεσις, ἴσου τοῖς δοθεῖσι. (§. 15.)

$$\begin{array}{r} \text{ὅθεν ἔαν} \quad + \alpha \quad) \\ \quad \quad \quad + \beta \quad) \end{array} \quad \text{οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ὡς}$$

$$\text{ἔσαι} \quad + \alpha + \beta \quad \text{τὸ τούτων κεφάλαιον.}$$

$$\begin{array}{r} \text{ἔαν} \quad + \alpha \quad) \\ \quad \quad \quad - \beta \quad) \end{array} \quad \text{οἱ δ. ἀρ.}$$

$$\text{ἔσαι} \quad + \alpha - \beta. \quad \text{τὸ τούτων κεφ.}$$

$$\begin{array}{r} \text{ἔαν} \quad - \alpha \quad) \\ \quad \quad \quad + \beta \quad) \end{array} \quad \text{οἱ δ. ἀρ.}$$

$$\text{ἔσαι} \quad - \alpha + \beta \quad \text{τὸ τούτ. κεφ.}$$

$$\begin{array}{r} \text{ἔαν} \quad - \alpha \quad) \\ \quad \quad \quad - \beta \quad) \end{array} \quad \text{οἱ δ. ἀρ.}$$

$$\text{ἔσαι} \quad - \alpha - \beta \quad \text{τὸ τ. κεφ.}$$

Οἱ γὰρ συμπεπλεγμένοι (§. 44.) ἀριθμοὶ ($+ \alpha + \beta$), καὶ ($+ \alpha - \beta$), καὶ ($- \alpha + \beta$), καὶ ($- \alpha - \beta$) ἀναμφιβόλως ἴσοι εἰσὶ τοῖς ἀπλοῖς, ἐξ ὧν συνίστανται.

Ἐπε-

Ἐπειδὴ τοῖνυν α, καὶ β πάντα δυνατόν ἀριθμὸν (§. 41.) σημαίνουσιν, ἐπιφέρμεν καθόλου, ὅτι τὸ κεφάλαιον δύο ἀριθμῶν εὐρίσκεται, ἐὰν ἐφεξῆς ἀλλήλων ἑκάτερος μετὰ τοῦ κατ' αὐτὸν σημείου καταγράφηται.

$$\begin{array}{r} \text{Ἔξωσαν} \quad + 12 \quad) \\ \quad \quad \quad + 18 \quad) \quad \text{οἱ δοθ. ἀρ.} \end{array}$$

$$\hline 12 + 18 = 30 \quad (\S. 41. \text{σχ. β}'). \text{ ἔσαι τὸ τούτων κεφάλαιον}$$

$$\begin{array}{r} \text{ἔς.} \quad + 8 \quad) \\ \quad \quad - 5 \quad) \quad \text{οἱ δ. ἀρ.} \end{array}$$

$$\hline + 8 - 5 = 3 \quad (\S. \text{αὐτ.}) \text{ ἔσαι τὸ τ. κ.}$$

$$\begin{array}{r} \text{ἔς.} \quad - 9 \quad) \\ \quad \quad + 2 \quad) \quad \text{οἱ δ. ἀρ.} \end{array}$$

$$\hline - 9 + 2 = - 7 \quad (\S. \text{αὐτ.}) \text{ τ. τ. κ.}$$

$$\begin{array}{r} \text{ἔς.} \quad - 10 \quad) \\ \quad \quad - 5 \quad) \quad \text{οἱ δ. ἀρ.} \end{array}$$

$$\hline - 10 - 5 = - 15 \quad (\S. \text{αὐτ.}) \text{ τ. τ. κ.}$$

$$\begin{array}{r} \text{ἔξωσαν} \quad 9\alpha - 5\beta + 7\gamma \quad) \\ \quad \quad - 4\alpha + 7\beta - 12\gamma \quad) \quad \text{οἱ δοθ. ἀρ.} \end{array}$$

$$\hline 9\alpha - 4\alpha - 5\beta + 7\beta + 7\gamma - 12\gamma = 5\alpha + 2\beta - 5\gamma \quad \text{τὸ κεφάλαιον} \quad (\S. \text{αὐτ.})$$

Εἰ, ὡς ἐν τῷ προκειμένῳ παραδείγματι, ἡ ἐπιτομὴ χώραν ἔχειν δύναται, θεωρήσομεν τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, ὡς μέρη τοῦ κεφαλαίου, τῇ ἐπιτομῇ ἀμέσως χρώμενοι, ἵν' ἐφάπαξ ἐν τῷ κεφαλαίῳ τὸ, ὡς οἶόντε, ἐπιτομώτατον προκύψῃ σχῆμα. (§. 40.)

Οὕτως

Οὕτως ἐν τῷ αὐτῷ παραδείγματι

$$\begin{array}{r} 9\alpha - 5\beta + 7\gamma \\ - 4\alpha + 7\beta - 12\gamma \\ \hline 5\alpha + 2\beta - 5\gamma \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{οἰδοθ.ἀρ.} \\ \text{τ. τ. κεΦ.} \end{array}$$

Τῶν δοθέντων ἀριθμῶν μὴ ἐφεξῆς γραφέντων ἐν τῷ κεφαλαίῳ, ὡς ἀνωτέρω, λέγομεν $+ 9\alpha - 4\alpha$ δίδωσι $+ 5\alpha$ (§. 45.) $- 5\beta + 7\beta$ δίδωσι $+ 2\beta$ (§. αὐτ.) καὶ $+ 7\gamma - 12\gamma$ δίδωσι $- 5\gamma$

$$\begin{array}{r} \text{Ὡσαύτως καὶ } 17\alpha - 9\beta + 7\gamma \\ \quad \quad \quad + 3\delta \\ - 5\alpha + 9\beta - 9\gamma \\ \hline 12\alpha - 2\gamma + 3\delta \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{οἰ.δ.ἀ.} \\ \text{τὸ κεΦ.} \end{array}$$

Καὶ γὰρ $+ 17\alpha - 5\alpha = + 12\alpha$, $- 9\beta + 9\beta = 0$ (§. 37.) $+ 7\gamma - 9\gamma = - 2\gamma$.

Σχόλιον α'.

Ἐπειδὴ εἶπομεν (§. 18.) ὅτι μόνον ὁμοειδῆ ἡμποροῦν νὰ προσεθοῦν ἀλλήλοις, καὶ τὰ αὐτὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ἀνθ' οἵασι οὖν ποσότητος παραληφθέντα, σημαίνουν τὸ αὐτὸ ἐν τῷ ἰδίῳ ὑπολογισμῷ (§. 42. ἐντῷ σχ.) διὰ τοῦτο, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ κεφάλαιον, συνάπτονται ἀλλήλοις διὰ τὴν ἐπιτομὴν τὸ α, καὶ α, καὶ τὸ β, καὶ β, κτ' ὅταν ἔχουν τὰ αὐτὰ σημεῖα· ἢ τὸ α ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ α, τὸ β ἀπὸ τοῦ β, κτ. ὅταν ἔχουν ἀνόμοια. (§. 40. σχ. β').

β'.

Ἐὰν τὰ γράμματα, ὅπου ἔχουν νὰ προσεθοῦν ἀλλήλοις, δὲν εἶναι ὁμοειδῆ, προκύψει τὸ κεφάλαιον τούτων, μὲ τὸ νὰ γράφονται ἐφεξῆς ἕκασον μὲ τὸ σημεῖον

C

μειόντου· ὡς, εἰ δέοι προσθεῖναι $+ \alpha + 4\beta + 3\gamma - 4\chi - 4\psi + 3\omega$ · οὐδὲν γὰρ οὐδενὶ ὁμοι-
δές· τὸ ἴδιον θέλομεν κάμει, καὶ εἰ μόνον ἐν γράμμα
πρόκειται προσθετέον ὡς β , ἢ γ . τουτέστι θέλομεν τὸ
γράψαι μὲ τὸ σημειόντου.

§. 47. Ὁ ἀριθμὸς, ὅς τῳ γράμματι προσ-
εῖ, καλεῖται συνεργός, δεικνύων, πόσας ληπτέα ἢ
μετ' αὐτοῦ ποσότης, ἢ διὰ τίνος πολλαπλασιαστέα· π.
χ. 14 γ. ἐνταῦθα ὁ 14 λέγεται συνεργὸς τοῦ γ·
ἐὰν δὲ τὸ γράμμα οὐδένα ἀριθμὸν πρὸ ἑαυτοῦ ἔχῃ, ὡς
τοῦτου συνεργὸς ἢ μονὰς ὑπονοεῖται· ὡς γ' ἐνθα
συνεργὸς τοῦ γ εἰναι ἢ μονὰς, καίτοι ἐνεργεῖα μὴ πα-
ροῦσα· τοιοῦτοι συνεργοὶ ἔνεισι τοῖς γράμμασιν ἐν ᾧ-
πασι τοῖς εἶδεσι τῶν ὑπολογισμῶν (προσθέσει, ἀφαι-
ρέσει, κτ')

Σχόλιον.

Ὅταν τὰ αὐτὰ γράμματα, ὧν τὰ σημεῖα εἶναι ἐ-
ναντία, ἔχουν ἀνίσους συνεργούς, τὸ ἔχον τὸν μικρό-
τερον συνεργὸν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ τὸν μείζονα ἔχοντος,
καὶ τὸ λείψανόν εἶναι τὸ κεφάλαιον· ὡς $+ 4\alpha -$
 $3\alpha = + 1\alpha = + \alpha$ (§. ἀνωτ.)· ὅταν δὲ καὶ
οἱ συνεργοὶ ᾖναι ἴσοι ἀλλήλοις, τότε ἀφαιρούμενον τὸ
ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου οὐδὲν ὑπολείπει· ὡς $+ 4\alpha$
 $- 4\alpha = 0$ (§. 37.)

§. 48. Προκείμεθωσαν ἤδη καίτινα ἀξιώματα,
οὐ μικρὰν ἡμῖν ἐν τοῖς ἐξῆς οἰσόντα τὴν ὄνησιν.

α'. Ἐὰν δύο ποσότητες ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσι, καὶ
ταύταις ἕτεραι δύο ἴσαι ἀλλήλαις ποσότητες προσεθῶσι,
τὰ προκύπτοντα κεφάλαια ἔσονται ἴσα· π. χ. $4 = 4$,
αἱ δύο αὗται ποσότητες εἰσὶν ἴσαι· $6 = 6$ · καὶ αὗται
ἴσαι ἀλλήλαις· ἔσαι οὖν

$$4 = 4$$

$$\begin{array}{r} 4 = 4 \\ 6 = 6 \\ \hline 10 = 10 \end{array}$$

καὶ τὰ κεφάλαια $10 = 10$ ἴσα ἀλλήλοις· καὶ ἐν
γράμμασιν ἐν γένει·

$$\begin{array}{r} \alpha = \alpha \\ \beta = \beta \\ \hline \alpha + \beta = \alpha + \beta. \end{array}$$

τοῦτο δὲ ἀληθεύσει, καὶ ἐὰν τὸ β ἴσον 4 π. χ. τεθῇ.

$$\begin{array}{r} \alpha = \alpha \\ \beta = 4 \\ \hline \alpha + \beta = \alpha + 4. \end{array} \quad \text{ὁ ῥᾶδιον συνιδεῖν.}$$

β· Ἐὰν δύο ποσότητες ᾄνισοι ὡς, καὶ τῇ μεί-
ζονι τὸ αὐτὸ προσεθῇ, ὅ καὶ τῇ ἐλάσσονι, ἔσαι τὸ
πρῶτον κεφάλαιον μείζον τοῦ δευτέρου. π. χ.

$$\begin{array}{r} 5 \text{ μείζον } 3 \\ 6 = 6 \\ \hline 5 + 6 \text{ μείζον τοῦ } 3 + 6. \text{ ἢ ἐν γράμμασιν.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \alpha \text{ μείζον τοῦ } \beta \\ \gamma = \gamma \\ \hline \alpha + \gamma \text{ μείζον τοῦ } \beta + \gamma. \end{array}$$

Σχόλιον.

Οἱ Μαθηματικοὶ μεταχειρίζονται τὸ σημεῖον $>$,
θέλοντες νὰ δείξουν, ὅτι ἡ πρὸ τούτου ποσότης εἶναι
μείζων τῆς μετὰ τοῦτο, καὶ τὸ $<$, τὸ ὁποῖον δεικνύει
ἐλάττωνα τὴν πρὸ αὐτοῦ τῆς μετ' αὐτό· π. χ. ἐπεὶ
δὴ ὁ 5 μείζων τοῦ 3, γράψαν οὕτω $5 > 3$ · καὶ ὁ
3 ἐλάττων τοῦ 6 οὕτω $3 < 6$. $\alpha > \beta$. καὶ α
 $< \epsilon$.

γ'. Ἐὰν δύο ποσότητες ἄνισοι ὦσι, καὶ τῇ μείζονι μείζων ποσότης προσεθῇ, τῇ δ' ἐλάσσονι ἐλάσσων, τὸ τῆς μείζονος κεφάλαιον ἔσαι πολλῷ μείζον τοῦ τῆς ἐλάσσονος π. χ.

$$5 > 4$$

$$4 > 3$$

$$4 + 5 > 4 + 3. \quad \text{καὶ ἐν γραμμασί}$$

$$\alpha > \beta$$

$$\gamma > \delta$$

$$\alpha + \gamma > \beta + \delta.$$

δ'. Τὰ τῶ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα· $\alpha = \gamma$ $\beta = \gamma$ ἄρα $\alpha = \beta$. $4 = 2 + 2$ $3 + 1 = 2 + 2$. ὥς τε καὶ $4 = 3 + 1$.

Περὶ ἀφαιρέσεως τῶν καταφατικῶν, καὶ ἀποφατικῶν ἀριθμῶν.

§. 49. Ἀφαιρέσεις ἐστὶν ἐκ τοῦ δοθέντος κεφαλαίου δύο ἀριθμῶν, καὶ τοῦ ἑτέρου τούτων τὸν ἕτερον εὐρεῖν (§. 27.) τὸν δ' ἕτερον, ἥτοι τὸν εὐρεθέντα οὕτως ἔχειν χορῇ, ὥς τε τῷ δοθέντι ἀριθμῷ προσεθέντα τὸ δοθέν κεφάλαιον ἀποτελεῖν

$$\begin{array}{rcl} \text{εὐρεντοι ἐὰν} & + \alpha &) \quad \text{τὸ δοθὲν κεφ. ἢ} \\ & + \beta &) \quad \text{ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς} \end{array}$$

$$\text{ἔσαι} \quad + \alpha - \beta \quad \text{ἢ τούτων διαφορά.}$$

Καὶ γὰρ $+ \alpha - \beta$ τῷ $+ \beta$ προσεθὲν δώσει $+ \alpha - \beta + \beta = + \alpha$ (§. 37.)

$$\text{καὶ} \quad + \alpha$$

$$- \beta$$

$$\text{ἢ διαφ.} \quad + \alpha + \beta.$$

$$\text{ὅτι} \quad + \alpha + \beta \text{ τῷ} - \beta \text{ προσεθὲν}$$

$$\text{παρέξει} \quad + \alpha + \beta - \beta = + \alpha \quad (\S. \text{αὐτ.})$$

κα

$$\begin{array}{r} \text{καὶ} \quad - \quad \alpha \\ \quad \quad + \quad \beta \\ \hline - \quad \alpha - \beta \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{ὅτι τοῦ} - \alpha - \beta \text{ τῷ} + \beta \\ \text{προσεθέντος, ἔσαι} - \alpha - \beta \\ + \beta = - \alpha (\S. \text{αὐτ.}) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{καὶ} \quad - \quad \alpha \\ \quad \quad - \quad \beta \\ \hline - \quad \alpha + \beta \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{ὅτι} - \alpha + \beta \text{ τῷ} - \beta \text{ προ-} \\ \text{σεθὲν δώσει} - \alpha + \beta - \beta = \\ - \alpha (\S. \text{αὐτ.}) \end{array}$$

Εὐρίσκομεν τοίνυν τὴν διαφορὰν, εἰὰν τὸ δοθὲν κεφάλαιον μετὰ τοῦ κατ' αὐτὸ σημείου, τὸν δὲ δοθέντα ἀριθμὸν μετ' ἐναντίως ἔχοντος ἐκείνῳ σημείου ἐφεξῆς γράφωμεν.

$$\begin{array}{r} \text{ἔσω} \quad 7 \quad \text{τὸ δοθὲν κεφ.} \\ \quad \quad 12 \quad \text{ὁ δ. ἀρ.} \end{array}$$

$$\text{καὶ} \quad 7 - 12 = - 5 \quad \text{ἔσαι ἡ τούτων διαφορά.}$$

$$\text{Ὅτι} - 5 \text{ τῷ} + 12 \text{ προσεθὲν δώσει} 12 - 5 = + 7 (\S. 40. \text{σχ. β'.})$$

Σχόλιον.

Οὕτω συμβαίνει καὶ εἰς τὰ λοιπὰ τρία παραδείγματα τὰ διὰ γραμμάτων, ἂν ἀντὶ τῶν γραμμάτων λάβωμεν ἀριθμούς.

Ἔτερον παράδειγμα.

$$\begin{array}{r} 5 \alpha + 2 \beta - 5 \gamma \quad \text{τὸ δοθὲν κεφ.} \\ 9 \alpha - 5 \beta + 7 \gamma \quad \text{ὁ δ. ἀρ.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \alpha - 9 \alpha + 2 \beta + 5 \beta - 5 \gamma - 7 \gamma = \\ - 4 \alpha + 7 \beta - 12 \gamma (\S. 45.) \quad \text{ἡ τοῦτων διαφορά.} \end{array}$$

§. 49.

§. 50. Ἐπειδὴ ἡ ἀφαίρεσις ἢ διὰ γραμμάτων ἐν τούτῳ μόνον συνίσταται, ἐν τῷ τὸ μὲν δοθέν κεφάλαιον μετὰ τοῦ κατ' αὐτὸ σημείου, τὸν δὲ δοθέντα ἀριθμὸν τῷ ἐναντίῳ σημείῳ καταγράφειν (§. ἀνωτ.) ῥᾷδιον συνιδεῖν, ὅτι πάνταυθα, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς προσθέσεως, ἐπιτεμεῖν οὐνάμεθα, εἰ μόνον τὰ σημεία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εἰς τὰ ἐναντία τρέψαιμεν· οὕτως ἐν τῷ προτέρῳ παραδείγματι

$$\begin{array}{r} 5\alpha + 2\beta - 5\gamma \quad \text{τὸ δ. κ.} \\ 9\alpha - 5\beta + 7\gamma \quad \text{ὁ δ. ἀρ.} \\ \hline -4\alpha + 7\beta - 12\gamma \quad \text{ἢ διαφ.} \end{array}$$

Ἀυτίκα ἐν τῇ διαφορᾷ τὸ ἐπιτομώτατον ἀναφανήσεται σχῆμα, λέγουσι $+ 5\alpha - 9\alpha$ δίδωσι $- 4\alpha$ $+ 2\beta + 5\beta$ δίδωσι $+ 7\beta$ καὶ $- 5\gamma - 7\gamma$, δ. $- 12\gamma$.

$$\begin{array}{r} \text{ἔσω} \quad 12\alpha - 3\beta + 7\gamma - 13\delta - 5\varepsilon \quad \text{τὸ δ. κ.} \\ -4\alpha - 7\beta + 3\gamma - 8\delta + 9\varepsilon \quad \text{ὁ δ. ἀρ.} \\ \hline 16\alpha + 4\beta + 4\gamma - 5\delta - 14\varepsilon \quad \text{ἢ δ.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Ὅτι } 12\alpha + 4\alpha = 16\alpha \quad - 3\beta + 7\beta = \\ 4\beta \quad + 7\gamma - 3\gamma = 4\gamma \quad - 13\delta + 8\delta = \\ - 5\delta \quad \text{καὶ } - 5\varepsilon - 9\varepsilon = - 14\varepsilon. \end{array}$$

Σχόλιον.

Ὅταν ἀπὸ τινος μέρους τοῦ Μειωτέου δὲν ἔχωμεν νὰ ἀφέλωμεν μέρος τι τοῦ Ἀφαιρετέου, προσαριθμεῖται καὶ ἐκεῖνο ἀμετάβλητον ὑπὸ τὴν γραμμὴν τῇ διαφορᾷ μὲ τὸ σημεῖόν του ὡς

$$\begin{array}{r} 4\alpha \quad + \quad 2\beta \quad + \quad 5\gamma \\ 3\alpha \quad + \quad \beta \\ \hline +\alpha \quad + \quad \beta \quad + \quad 5\gamma \end{array}$$

§. 51.

§. 51. Συμβαίνει ὅ' ἐνίοτε ταῖς ἀπλαῖς ποσό-
τησιν, ὡς καὶ ταῖς συνθέτοις διὰ γραμμάτων παρισα-
μέναις τὸ μὴ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεῖσθαι ἔχειν διὰ τὸ ἀ-
νόμοιοι εἶδές· ἢ ἀφαιρέσεις τούτων δείκνυται μόνον, ἐ-
π' ἐκείνων μὲν, μεταβαλλομένου τοῦ σημείου τῆς ἀφαιρε-
θησομένης ποσότητος εἰς τὸ ἐναντίον, ὡς

$$\begin{array}{r} + \beta \\ + \epsilon \\ \hline \beta - \epsilon \end{array}$$

ἐπὶ τούτων δὲ, ἐν παρενθέσει ἐναπολαμβανομένων τοῦ-
τε μειωτέου, καὶ ἀφαιρετέου χωρὶς, καὶ τοῦ τῆς ἀ-
φαιρέσεως σημείου παρεντιθεμένου· ὡς εἰ δέοι ἀπὸ τοῦ
 $4\alpha - 3\beta + 2\gamma$ ἀφαιρεθῆναι τὸ $7\zeta + \chi - \psi$, ἔσται $(4\alpha - 3\beta + 2\gamma) - (7\zeta + \chi - \psi)$.

Σχόλιον. α'.

Τὰς ποσότητας, ὅπου εἶναι κεκλεισμένοι ἐν τῇ
παρενθέσει πρῶτον τὰς προσέθεμεν ἀλλήλαις ἐν ἑκατέρῳ
σχήματι χωρὶς, καὶ εἶτα τὰς ἀφαιροῦμεν· τὸ ὅποιον
γίνεται τότε, ὅταν αἱ ποσότητες ᾖναι ἀριθμοὶ, ἢ ὅταν
τὰ γράμματα διορισθῶσι· π. χ. ἔστω $\alpha = 3$, $\beta = 2$,
 $\gamma = 5$, $\zeta = 6$, $\chi = 7$, $\psi = 1$. ἔσται οὖν
 $4\alpha = 12$ (§. 47.) $3\beta = 6$, κτ. ὥς $(4\alpha - 3\beta + 2\gamma) - (7\zeta + \chi - \psi) = (12 - 6 + 10) - (42 + 7 - 1) = 16 - 48 = - 32$. (§. 40. σχ. β'.)

Σχόλιον β'

Ἡ βάσανος ἐν τῇ τῶν γραμμάτων ἀφαιρέσει γί-
νεται παραπλησίως, ὡς καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς· ἦτοι μὲ
τὸ νὰ προσεθῇται ἢ διαφορὰ τῷ ἀφαιρετέῳ (§. 31.)
διότι αἷτω προκύπτει πάλιν ὁ Μειωτέος.

§. 52.

Ἐὼν ἀπότινος ἀριθμοῦ, π. χ. ἀπὸ τοῦ 6 διηνε-
κῶς ἢ 1 ἀφαιρῆται, αἱ διαφοραὶ ἀποδοθῆσονται κατὰ
τὸ (§. 49.) οὕτω·

$$1 \text{ ἀπὸ τοῦ } 6 \text{ ὑπολείπει } 6 - 1 = 5 \quad (\S. 40. \text{σχ. } \beta')$$

$$1 \text{ ἀπὸ τοῦ } 5 \quad - \quad - \quad 5 - 1 = 4$$

$$1 \text{ ἀπὸ τοῦ } 4 \quad - \quad - \quad 4 - 1 = 3$$

$$1 \text{ ἀπὸ τοῦ } 3 \quad - \quad - \quad 3 - 1 = 2$$

$$1 \text{ ἀπὸ τοῦ } 2 \quad - \quad - \quad 2 - 1 = 1$$

$$1 \text{ ἀπὸ τοῦ } 1 \quad - \quad - \quad 1 - 1 = 0$$

$$1 \text{ ἀπὸ τοῦ } 0 \quad - \quad - \quad 0 - 1 = - 1$$

$$1 \text{ ἀπὸ τοῦ } - 1 \quad - \quad - \quad - 1 - 1 = - 2$$

$$1 \text{ ἀπὸ τοῦ } - 2 \quad - \quad - \quad - 2 - 1 = - 3$$

$$1 \text{ ἀπὸ τοῦ } - 3 \quad - \quad - \quad - 3 - 1 = - 4$$

$$1 \text{ ἀπὸ τοῦ } - 4 \quad - \quad - \quad - 4 - 1 = - 5$$

Ἐὰν οὖν ἀφ' οὐτινοσοῦν ἀριθμοῦ, ὡς ἐνιαῦθα
ἀπὸ τοῦ 6, διηνεκῶς 1 ἀφαιρῶμεν, ὁ ἀριθμὸς ἀπομει-
οῦται διηνεκῶς· καὶ ἀφαιρεθῆσων τοσοῦτων μονά-
δων, ὅσας αὐτὸς περιέχει, ἐξισωθῆσεται τῇ 0. προ-
αγομένης δὲ τῆς ἀφαιρέσεως τῆς 1, γενήσεται ἴσος —
1, — 2, — 3, — 4, — 5, — 6 κτ.

Ὁ ἀποφατικὸς ἄρα ἀριθμὸς ἐστὶν ἐλάτ-
των τοῦ μηδενὸς, καὶ τοσοῦτω ἐλάττων,
ὅσῳ πλείους ἀποφατικὰς μονάδας εἰ ἐαυ-
τῷ περιέχει.

Σχόλιον. α'.

Ἡ αἰτία, δι' ἣν αἱ ἀποφατικαὶ ποσότητες εἶναι
ἐλάττους τοῦ μηδενὸς εἶναι προφανής· ἐάν τις οὐδε-
μίαν περιουσίαν ἔχη, καὶ πρὸς τούτοις εἶναι καὶ χρεώ-
σης π. χ. 100. δραχμῶν, οὕτως τῷ ὄντι ἔχα ὀλιγώ-
τερον ἀπὸ ἐκεῖνον ὅπου δὲν ἔχει μὲν τίποτε, δὲν εἶναι
ὅμως χρεώσης· ὅθεν τὸ, ἐλάττων τοῦ μηδεὶός, λαμ-
βάνε-

βάνεται σχετικῶς· διότι ἂν αἱ ἀποφατικαὶ ποσότητες δὲν ἀναφέρωνται εἰς τὰς θετικάς, εἶναι μείζονες τοῦ μηδενός, καὶ τῷ ὄντι ποσότητες, ὡς καὶ αἱ θετικάι.

β'.

Κάθε μείζων ἀριθμὸς, καθ' ἑαυτὸν θεωρούμενος, ὑπερέχει τὸν ἐγγὺς ἐλάττονα· ὡς ὁ 5 τὸν 4, ὁ 4 τὸν 3, κτ' ἀποβλέποντες ὅμως εἰς τὸ πρὸ αὐτοῦ ἀποφατικὸν σημεῖον —, τόσον μικρότερον θέλομεν τὸν ὀνομάσει, ὅσω μεγαλύτερος εἶναι φυσικά· ὡς ὁ $-2 < -1$ · $-5 < -4$ · τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα διὰ τῶν δραχμῶν σαφηνίζει ἱκανῶς τὸ λεγόμενον·

Ἀξιώματα.

§. 53. α'. Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ κατελειπόμενα ἔσαι ἴσα.

$$\begin{array}{rcl} 8 & = & 8 \\ 2 & = & 2 \\ \hline 6 & = & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ἀφαιρ.} \\ \text{τὰ λείψανα ἴσα ἢ } 8 - 2 \\ = 8 - 2. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{ἐν γράμμασι } \alpha & = & \rho \\ \gamma & = & \delta \\ \hline \alpha - \gamma & = & \rho - \delta \end{array}$$

β'. Ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφέλῃς, τὸ λείψανον τῆς μείζονος ποσότητος ἔσαι μείζον τοῦ λειψάνου τῆς ἐλάττονος·

$$\begin{array}{rcl} 10 > 8 & \text{καὶ } \alpha > \beta & \text{ἢ } \alpha > \beta \\ 5 = 5 \text{ ἀφ.} & \gamma = \gamma & \text{ἢ } \gamma = \delta \\ \hline 10 - 5 > 8 - 5 & \alpha - \gamma > \beta - \gamma & \alpha - \gamma > \beta - \delta \end{array}$$

γ'. Ἐὰν δύο ποσότητες ἴσαι ᾦσι, καὶ ἀπὸ τῆς α' ἀφέλῃς ποσότητά τινα μείζονα, ἢ ἀπὸ τῆς β' τὸ τῆς

τῆς α' λείψανον ἔσαι ἔλαττον τοῦ λείψανου
τῆς β'.

$$\begin{array}{rcl}
 12 & = & 12 \\
 \gamma & > & 3 \\
 \hline
 12 - \gamma & < & 12 - 3 \text{ ἢ } 7 < 9
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 \alpha & = & \alpha \\
 \beta & > & \gamma \\
 \hline
 \alpha - \beta & < & \alpha - \gamma
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{ἢ} & & \alpha = \beta \\
 & & \gamma > \delta \\
 \hline
 \alpha - \gamma & < & \beta - \delta.
 \end{array}$$

§. 54. "Όσα περί τῆς προσθέσεως (§. 21. κτ.) εἰρηται. κρατοῦσι διὰ παντός, εἴτε ἴσοι, εἴτε ἄνισοι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶεν· ἐὰν ὦσιν ἴσοι, ὡς ἐν τῷδε τῷ παραδείγμ.

$$\begin{array}{rcl}
 3 & 2 & 1 & 2 \\
 3 & 2 & 1 & 2 \\
 3 & 2 & 1 & 2 \\
 3 & 2 & 1 & 2 \\
 \hline
 1 & 2 & 8 & 4 & 8
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} \text{οἱ δ. ἀρ.} \\ \text{τὸ τούτων κεφάλ.} \end{array}$$

συντομώτερον τὴν πράξιν ποιήσομεν, ἐὰν τοῦ ἀριθμοῦ 3 2 1 2 ἀπαξ καταγραφέντος, αἱ τούτου μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες, καὶ ὅλως ἅπαντα τὰ τούτου μέρη τούτως λαμβάνωνται, ὅσας τούτον γράψαι ἔδει, λέγουσι·

$$\begin{array}{rcl}
 4: \text{ κίς } 2 & = & 8 \\
 4: \text{ κίς } 1 & = & 4
 \end{array}
 \quad \parallel \quad
 \begin{array}{rcl}
 4: \text{ κίς } 2 & = & 8 \\
 4: \text{ κίς } 3 & = & 12
 \end{array}$$

"Όπως οὖν ἐπὶ τῶν τοιούτων εἰς ἔργον χωρητέον, μαθησάμεθα ἤδη·

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

§. 55. Πολλαπλασιασμός ἐστὶ τὸ ἀριθμὸν τινα ποσάκις λαμβάνειν, ἢ ποσάκις τῷ 0 προσιθέναι, ἢ ἐαυτῷ, ὅσάκις ἑτέρος τις δείκνυται, ἢ ὅσάκις ἡ μονὰς περιέχεται ἐν τῷ ἑτέρῳ.

Σχόλιον.

Πολλαπλασιάσαι 32 μὲ 12 ἐστὶ 32 λαβεῖν ποσάκις, ὅσάκις ὁ 12 τὴν μονάδα περιέχει· οὗτος δὲ περιέχει δωδεκάκις τὴν μονάδα· ἄρα 32 μὲ 12 πολλαπλασιάσαι ἐστὶ 32 δωδεκάκις λαβεῖν.

§. 56. Τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ μὲν καλεῖται πολλαπλασιαστέος, ὁ δ' ἕτερος, πολλαπλασιαστής· ἄμφω δὲ παράγοντες· τὸ δὲ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτον, παραγόμενον, ἢ τὸ τούτων πολλαπλοῦν.

§. 57. Πολλαπλασιασμοῦ σημεῖον ἐτέθη τὸ Χ, μεταξὺ τῶν παραγόντων ἀριθμητικῶν χαρακτήρων ἐγγραφόμενον, ἢ τὸ (.) παρενσιζόμενον· ἀπαγγέλλονται δὲ ταῦτα (3 Χ 4, ἢ 3, 4 = 12,) ἐν φωναῖς οὕτως· 3 πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 4 παράγει 12, ἢ ἴσος 12.

Σχόλιον.

Τὸ Χ, ἢ (.) τὸ μεταχειριζόμεθα εἰς ἀποφυγὴν συγχύσεως· διότι εἰ θέλοντες νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓνα ἀριθμὸν, εἶναι τὸν 5 δι' ἄλλου, εἶναι τοῦ 4, γράψομεν αὐτοὺς χωρὶς τοῦ παρεγκειμένου σημείου Χ, ἢ (.) ὡς 54· θέλομεν ἐκλάβει τοὺς παράγοντας, ὡς σημαίνοντας 54, καὶ οὐχὶ ὡς πολλαπλασιασθῆναι προκειμένους·

§. 58. Ἐξω πολλαπλασιασμοῦ ὁ 3212 μετὰ τοῦ

$$\begin{array}{r} 3212 \\ 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 3212 \\ 4 \end{array}} \right) \text{οἱ παράγ. ὡς}$$

8 τὸ τετραπλοῦν τῶν μονάδων

40 τὸ τῶν δεκάδων

800 τὸ τῶν ἑκατοντάδων

12000 τὸ τῶν χιλιάδων

12848 τὸ κεφάλαιον τῶν ἰδιαιτέρων

τετραπλῶν ἀπάντων τῶν μεριῶν τοῦ ἀριθμοῦ 3212, καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου τὸ τετραπλοῦν τοῦ ὅλικου ἀριθμοῦ.

$$\begin{array}{r} \text{ἐὰν} \quad 3897 \\ 6 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 3897 \\ 6 \end{array}} \right) \text{οἱ παράγ. ὡς}$$

ἔξαι 42 τὸ ἑξαπλοῦν τῶν μονάδων

540 τὸ τῶν δεκάδων

4800 τὸ τῶν ἑκατ.

18000 τὸ τῶν χιλ.

23382 τὸ 6: πλοῦν τοῦ ὅλικου ἀριθμοῦ

3897.

§. 61. Τῶν ἐν μέρει παραγομένων τῶν μονάδων, δεκάδων, κτ. ἐξ ἑνὸς μόνου χαρακτήρος συνισαμένων, ὡς ἐν τῷ α' παραδ. συντομωτέρα γενήσεται ἡ πράξις, ἐὰν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ταῦτα ἐν τῷ προσήκοντι τόπῳ γράφονται· ὡς

$$\begin{array}{r} 3212 \\ 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 3212 \\ 4 \end{array}} \right) \text{οἱ παράγ.}$$

12848 τὸ παραγ. λέγουσι

$$\begin{array}{r} 4 \times 2 = 8 \\ 4 \times 1 = 4 \end{array} \parallel \begin{array}{r} 4 \times 2 = 8 \\ 4 \times 3 = 12 \end{array}$$

Ἡ αὐτὴ ἐπιτομὴ ἔχει χώραν, καὶ τῶν ἐν μέρει παραγομένων τῶν μονάδων, δεκάδων κτ' ἐκ δύο χαρακτήρων συγκροτούμενων, ὡς ἐν τῷ β' παραδ. καὶ μόνον, ὡς ἐπὶ τῇ προσθέσει, τοῦ κατωτέρου

ρου τούτων χαρακτηῆρος καταγραφόμενου, ὁ ἀνώτερος τῷ παραγομένῳ τῶν ὁμοειδῶν ὑπετέρων μερῶν προσαριθμαῖτο·

$$\begin{array}{r} 3897 \text{)} \\ 6 \text{)} \\ \hline 23382 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{οἱ παράγ.} \\ \\ \text{τὸ παραγόμεν.} \end{array}$$

καὶ γὰρ $6 \times 7 = 42$
 $6 \times 9 = 54$, καὶ $4 = 58$.
 $6 \times 8 = 48$, καὶ $5 = 53$.
 $6 \times 3 = 18$, καὶ $5 = 23$.

§. 62. Ἐκ τῆς φύσεως τοῦ παραληφθέντος συστήματος (§. 11.) γνωστὸν ἔστιν ἕκαστον χαρακτηῆρα δεξιόθεν πρὸς ἀριστερὰ ἐν τῷ τόπῳ μεταβιβασθέντα, 10: πλήν, δύοσιν, 100: πλήν, τρισὶ, 1000: πλήν, κτ' δύναμιν ἔχειν τῆς, ἢ ἐν τῷ α' τόπῳ εἶχεν· οὕτως ἐν τῷδε τῷ ἀριθμῷ (333333), ὁ 3, ἐν τῷ δ' τόπῳ σημαίνει τὸ δεκαπλάσιον τοῦ, ὁ ἐν τῷ γ' σημαίνει τὸ 100: πλάσιον τοῦ, ὁ ἐν τῷ β' καὶ τὸ 1000: πλάσιον τοῦ, ὁ ἐν τῷ α' εἰ τοίνυν πρόκειται ὁποῖονοῦν ἀριθμικis κis κis κis μόν 10: 100: 1000: 10000:, κτ' λαβεῖν, ἀρκεῖ ἕκαστον χαρακτηῆρα αὐτοῦ ἐν, δύοσι, τρισὶ, τέσσαρσιν, ἢ πέντε τόποις, κτ' ἐκ δεξιῶν πρὸς ἀριστερὰ προσβιβάξεν, τουτέστιν ἓν, δύο, τρία, τέσσαρα, ἢ πέντε ο κτ' μετ' αὐτὸν γράφειν ἔνθεντοι

$$\begin{array}{rclcl} 354 & \times & 10 & = & 3540 \\ 354 & \times & 100 & = & 35400 \\ 354 & \times & 1000 & = & 354000 \\ 354 & \times & 10000 & = & 3540000 \text{ κτ.} \end{array}$$

§. 63. Ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ παραγόμενον προκύπτει οὐτινοσοῦν παράγοντος ἐπὶ τὸν ἕτερον πᾶλλαπλασιασμένου, (§. 58.) ἔστιν ἄρα

$$9 \times 20$$

9	X	20	=	20	X	9	=	180
9	X	30	=	30	X	9	=	270
9	X	40	=	40	X	9	=	360
9	X	50	=	50	X	9	=	450 κτ.

Προκύπτει ἄρα τὸ 20, 30, 40, ἢ 50: πλοῦν ἀριθμοῦ τινὸς, οἷον τοῦ 9, ἐὰν τὸ τούτου 2, 3, 4, ἢ 5: πλοῦν 10: κίς λαμβάνηται.

§. 64. Εἰ δέοι τὸν ἀριθμὸν 34589 λαβεῖν 354: κίς, λαμβάνοντες τὸ 4: πλοῦν· εἴτα τὸ 50: πλοῦν· καὶ τελευταῖον τὸ 300: πλοῦν αὐτοῦ προσέ-
θεμεν ἀλλήλοισι τὰ ἐν μέρει πολλαπλᾶ, καὶ οὕτω τὸ ἀνακῦψαν κεφάλαιον ἔσαι τὸ 354: πλοῦν αὐτοῦ·
ὥς

34589	)	οἱ παράγ.
354	)	
138356		τὸ τετραπλοῦν
1729450		τὸ 50: πλοῦν·
10376700		τὸ 300: πλοῦν.
12244506		τὸ 354: πλοῦν·

Ἐπειδὴ τὸ 50: πλοῦν ἐστὶ τὸ 5: πλοῦν 10: κίς ληφθὲν, ἐν μηδενικὸν τιθέντες γράφομεν τὸ 5: πλοῦν πρὸ αὐτοῦ· καὶ ἐπεὶ αὖθις τὸ 300: πλοῦν ἐστὶ τὸ 3: πλοῦν· 100: κίς ληφθὲν, γράφοντες οὕτω μηδενικά τιθέαμεν τὸ 3: πλοῦν πρὸ αὐτῶν.

§. 65. Ἐπειδὴ τὰ ἐν τέλει κείμενα ο τῶν ἰδια-
τέρων πολλαπλῶν (§. 5η.) τὸ τούτων κεφάλαιον οὐ-
τ' αὖξουσιν, οὐτ' ἐλαττοῦσι, (§. 8.) συντομίας χάριν
παραλειφθῆναι δύνανται· ἀλλ' ἐπιτηρητέον, ἵνα τὸ
πολλαπλοῦν τοῦ β'· χαρακτῆρος ἐν τῷ β'· τόπῳ,
τὸ τοῦ γ'· ἐν τῷ γ'· τὸ τοῦ δ'· ἐν τῷ δ', κτ'· γρά-
φηται· ἐνθεντοὶ τὸ προηγηθὲν παράδειγμα οὕτως
ἀποδοθῇσεται·

34589

$$\begin{array}{r}
 34589 \quad) \\
 354 \quad) \quad \text{οἱ παράγ.} \\
 \hline
 138356 \\
 172945 \\
 103767 \\
 \hline
 12244506 \quad \text{τὸ παραγόμεν.}
 \end{array}$$

§. 66. Κατὰ τὸ (§. 63.)

$$\begin{array}{l}
 30 \times 20 = 60 \times 10 = 600 \\
 400 \times 20 = 800 \times 10 = 8000 \text{ κτ.}
 \end{array}$$

Ἐὰν οὖν ἀμφοῖν τοῖς παράγουσι μηδενικὰ ἐν τέλει προσῇ, ληφθῇ τὸ ἐκ τῶν παραγόντων παραγόμενον, ἀμελουμένων τῶν 0, καὶ ἐν τέλει ἐκείνου τοσαῦτα μηδενικὰ γραφῇ τωσαν, ὅσα ἀμφοῖν τοῖς παράγουσιν ἔνιαισι* ἔνθεν τοι τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα εἰς τόδε τραπήσεται.

$$\begin{array}{l}
 30 \times 20 = 600 \\
 400 \times 20 = 8000 \text{ κτ.}
 \end{array}$$

Ὅτι $2 \times 3 = 6$ καὶ τῶν δύο μηδενικῶν ἐν τέλει τεθέντων, ἔσαι = 600.

$$2 \times 4 = 8, \text{ καὶ τῶν τριῶν 0 = 8000.}$$

Ὡσαύτως καὶ οἱ μᾶλλον σύνθετοι παράγοντες, οἷς πλείω μηδενικὰ ἔνιαισι, ῥᾶον ἂν πολλαπλασιασθεῖεν, χωρὶς τῶν μηδενικῶν. ὡς

$$\begin{array}{r}
 3045600 \\
 30200 \\
 \hline
 60912 \\
 91368 \\
 \hline
 91977120000
 \end{array}$$

§. 67. Τοὺς δὲ συγκεκριμένους ἀριθμοὺς, τοὺς ἐκ διαφορῶν μερῶν τῆς μονάδος συγκεκριμένους πολλαπλα-

D

για-

σιάσομεν, ἐὰν ὑπὸ τὴν κατωτάτην μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστέου ἢ πολλαπλασιασῆς γραφῆς ἐπάγῃται ἐπὶ πάντα τὰ μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἀπὸ τοῦ κατωτάτου ἀρξαμένοις. ὡς

πόδ. δάκτ. γραμ.

42

7

8

40

καὶ ἐπειδὴ 12 γραμμαὶ ἀποτελοῦσιν ἓνα δάκτυ-

λον, ἐν τῷ κεφαλαίῳ τῶν γραμμῶν 320, περιέχονται 26. δάκτυλοι, καὶ 8 γραμμαί. οἱ οὖν 26 δάκτυλοι προσεθήτωσαν τῷ κεφαλαίῳ τῶν δακτύλων 280, καὶ ἔσται = 306· γραμμῶν 8 μόνον ὑπὸ τὰς γραμμάς μενουσῶν· ἐπειδὴ δὲ 12 δάκτ. ποιοῦσιν ἓνα πόδα, τὸ δὲ 306 κεφάλ. τῶν δακτ. περιέχει 25 πόδας, προσεθέντων τῶν 25 τῷ κεφαλαίῳ τῶν ποδῶν, μενοῦσιν ἐν τῷ κεφ. τῶν δακτ. μόνου 6 δάκτ. ὥς τὸ ὅλικόν παραγόμενον ἔσονται 1705 πόδ. 6 δάκτ. καὶ 8 γραμμαί· οὕτω ποιεῖ καὶ ἐπὶ ἄλλων παραδ.

§. 68. Πολλαπλασιάζονται μετ' ἀλλήλων καὶ ποσότητες, αἵτινες τοῖς σημείοις + καὶ — εἰσι συνημμένοι, τῷ ἐν παρενθέσει α' ἐναπολαμβάνεσθαι, καὶ εἶτα ἀλλήλαις προσίσεσθαι, καὶ τελευτᾶον τὰ ἐξ ἑκατέρων κεφάλαια πολλαπλασιάζεσθαι ὡς $(4 + 5 - 4 - 1)$. $(3 + 9 + 1 - 2 - 4) = 4$. $7 = 28$.

§. 69. Ὁ ἀριθμὸς, ὁ διὰ τῆς μονάδος πολλαπλασιαζόμενος οὐδεμίαν μεταβολὴν ὑφίσταται, ἢ ἡ μονάς οὐ πολλαπλασιάζει καὶ γὰρ ἀπαξ 30 ἐς 30. ἀπαξ 100 ἐς 100 κτ' ὁμοίως καὶ ὁ ἀριθμὸς, ὁ μετὰ τοῦ 0 πολλαπλασιαζόμενος γίνεται μηδέν, ἢ = 0· ὅσάκις γὰρ ἂν ληφθῇ τὸ μηδενικόν, δίδωσι μηδέν· 6: κίς 0 ἐς 0· ἀλλὰ καὶ 0: κίς 6 ἐς μηδέν· ἐκίση γὰρ ποσότης, ἡλίκη ἂν ἦ, ἐὰν 0: κίς

κῆς λαμβάνηται, δώσει παραγόμενον μηδὲν, ἢ
= 0.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

μετὰ γραμμάτων, ἢ μετὰ ἀλγεβραϊκῶν
ἀριθμῶν.

§. 70. Γράμματα ἐφεξῆς ἀλλήλων προσγραφόμενα, δέχα παρεμπιπτόσεως σημείου τινός, τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον σημαίνει ὑποτεθείται.

αβ ἄρα μῆτε α μόνον σημαίνει, μῆτε β, ἀλλὰ τὸν ἀριθμὸν τὸν προσερχόμενον τῷ πολλαπλασιασμῷ τοῦ α διὰ τοῦ β, ἢ τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον.

Ὡσαύτως καὶ αβδ ἐστὶ τὸ παραγόμενον ἐξ ὁποιονοῦν τριῶν ἀριθμῶν, α, β, καὶ δ. καὶ αβδε τὸ ἐξ ὁποιονοῦν τεσσάρων α, β, δ, ε.

Τεθῆτω $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\delta = 4$, $\epsilon = 5$, καὶ ἔσται $\alpha\beta = 2 \times 3 = 6$, $\alpha\beta\delta = 2 \times 3 \times 4 = 24$, $\alpha\beta\delta\epsilon = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

§. 71. Εἰ καὶ τὸ αὐτὸ ἐστὶν ἀδιαφόρως γράφειν τὰ γράμματα ἕτερον πρὸ τοῦ ἑτέρου, ὡς αβ, ἢ βα, αβδ, ἢ βδα, ἢ δαβ, ὅτι τοῦ τούτων τύπου μεταβληθέντος, παραγόμενον προκύπτει τὸ αὐτὸ, ὡς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς εἶδομεν (§. 58.) Φιλοῦσι μὲντοι τὰ πρῶτα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου τῶν ἐπομένων προτιθέναι, ὡς αβδ, αβδε, κτ.

§. 72. Εἰ δέοι τὸ α. π. χ. ἄπαξ, δις, τρις, ἢ 4: κῆς λαβεῖν, ἔσται

$$\begin{array}{l} \alpha \times 1 = \alpha \\ \alpha \times 2 = 2\alpha \end{array} \parallel \begin{array}{l} \alpha \times 3 = 3\alpha \\ \alpha \times 4 = 4\alpha \end{array} \text{ κτ.}$$

D 2

Ὅθεν

Ὁθεν σημαίνει 4α τὸ παραγόμενον ἐκ τοῦ 4 καὶ α
 3α τὸ — ἐκ τοῦ 3 καὶ α
 2α τὸ — ἐκ τοῦ 2 καὶ α
καὶ α τὸ — ἐκ τῆς 1 καὶ α

Ἐὰν οὖν οἱ παράγοντες, ἦτοι τὰ γράμματα ἔχῃσι συνεργοὺς, (§. 47.) τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον προκύψει, εἰ τοῦ παραγομένου τοῦ ἐκ τῶν γραμμάτων τὸ ἐκ τῶν συνεργῶν παραγόμενον προγράφεται· ὡς

$$\begin{array}{l} 3\alpha \times 9\beta = 72\alpha\beta \\ 7\alpha \times 3\beta \times 4\gamma = 84\alpha\beta\gamma \end{array}$$

Σχόλιον.

Καὶ ὅταν τὰ γράμματα ἔχῃσι πρὸ ἑαυτῶν συνεργοὺς, εἶναι δυνατόν νὰ δεῖξωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τούτων μετ' ἀλλήλων, μὲ τὸ νὰ γράψωμεν τὰ γράμματα, καὶ τοὺς συνεργοὺς ἐφεξῆς, χωρὶς σημείου. (§. 70.) ἀλλ' ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν ἡμπορεῖ νὰ συμβῇ ταραχὴ, (§. 57. σχ.) τίθεται μεταξὺ τῶν ἀριθμητικῶν χαρακτήρων τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§. 57.) οἷον εἰ δύο πολλαπλασιάσαι 4α μὲ 5β , καὶ ἔτι μὲ 6γ , γράψωμεν οὕτω· 4. 5. 6. $\alpha\beta\gamma$ · ἀλλὰ μήτε τοῦτο εἶναι ἐν χρήσει· εὐχρηστότερον εἶναι ἵνα πολλαπλασιάζωνται οἱ ἀριθμοὶ ὁμοῦ, καὶ νὰ προτιθῶνται τῶν γραμμάτων· ἂν ὅμως οἱ συνεργοὶ ἦναι συγκεῖμενοι ἐκ πολλῶν χαρακτήρων, συνάπτονται ἀλλήλοις μόνον μὲ τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλ· ὡς προκειμένου τοῦ 720γ νὰ πολλαπλασιασῇ μὲ τὸ $84\alpha\beta$, φέλομεν δεῖξει τὸν πολλαπλασιασμὸν οὕτω· ($720. 84.$) $\alpha\beta\gamma$.

§. 73. Ὅσάκις τὸ ἐκ διαφόρων μερῶν συμπεπλεγμένον σχῆμα (§. 44.) (ὡς $3\alpha + \beta$) ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων γενέσθαι ὀφείλει, (ἦτοι πολλαπλασιασέος, ἢ πολλαπλασιασῆς) ἐναποληπτέον τοῦτο ἐν παρενθέσει οὕτω ($3\alpha + \beta$).

Ὁθεν

"Οθεν γ $(3\alpha + \beta)$, ἢ $(3\alpha + \beta)$ γ σημαίνει τὸ παραγόμενον, οὗ γ ὁ ἕτερος, καὶ $3\alpha + \beta$ ὁ ἕτερος ἐξὶ τῶν παραγόντων· ὡσαύτως καὶ $(3\alpha + \beta)$ $(4\gamma + \delta)$.

Σχόλιον.

"Οταν καὶ οἱ δύο παράγοντες ἦναι συμπεπλεγμένοι, κλείονται ἐνᾶτερως χωρὶς ἐν παρενθέσει· ὅταν δὲ ὁ ἓνας ἦναι ἀπλοῦς, μόνον ὁ σύνθετος (§. ὠνωτ.)

§. 74. Ἐξω πολλαπλασιαστέον $3\alpha + \beta$ ἐνεργεῖα μετὰ τοῦ γ.

Ἐνταῦθα ἀναμφιβόλως ληφθήσεται ὁ πολλαπλασιαστέος $(3\alpha + \beta)$ γ: κίς, (ὃ ἐξὶ τοσάνικς, κατὰ τὸν διορισμὸν, ὅν ἂν τὸ γ λάβῃ) ἐὰν ἐνᾶτερον μέρος τούτου τοῦ πολλαπλασιαστέου γ: κίς λάβωμεν· ὅθεν $(3\alpha + \beta)$ γ = $3\alpha\gamma + \beta\gamma$.

Σχόλιον.

Προσεκτέον, νὰ μὴ λαμβάνωμεν εἰς τὸ ἐξῆς τὰ α: κίς, β: κίς, γ: κίς, δ: κίς κτ' διορισμένως, ἀντὶ τοῦ ἀπαξ, δίς, τρίς, τετράκις, κτ' ἀλλ' ἀορίστως, ἕως νὰ διορισθῇ, ἀντὶ τίνος ἀριθμοῦ λαμβάνεται καθεὶ ἐν ἀπὸ αὐτά·

β'.

Πῶς πολλαπλασιάζονται αἱ ἀπλαῖ ποσότητες, ἦτοι τὰ γράμματα. τὰ μὴ διὰ τῶν σημείων (+, καὶ —) συμπεπλεγμένα, (§. 44.) εἶπομεν. (§. 70.) αἱ συμπεπλεγμένα ὅμως ποσότητες (§. 44.) πολλαπλασιάζονται οὕτως· ἐπειδὴ ἐκ τῶν δύο παραγόντων ὁ ἓνας ὀνομάζεται πολλαπλασιαστέος, ὁ δὲ ἄλλος πολλαπλασιαστής, (§. 56.) ἃς γραφοῦν α'· ὡς καὶ οἱ ἀριθμοὶ, οἱ μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιαζόμενοι (§. 60.) εἶτα ἃς πολλαπλασιασθῇ καθεὶ μέρος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ,

σιαστού, ἂν ᾖναι σύνθετος καὶ αὐτός, ἢ ὁ πολλαπλασιασ-
 τῆς μόνος, ἂν ᾖναι ἀπλοῦς, μετὰ καθε μέρους τοῦ πολ-
 λαπλασιαστέου· καὶ τῶν ἐν μέρει παραγομένων ὑπὸ τὴν
 γραμμὴν τεθέντων, θέλομεν ἔχει τὸ ὅλκον παραγό-
 μενον· οἷον

$$\begin{array}{rcl} 3\alpha + \beta & \text{ὁ πολλαπλασιαστέος} \\ \gamma & \text{ὁ πολλαπλασιαστής} \\ \hline \end{array}$$

$$3\alpha\gamma + \beta\gamma.$$

τὸ γ πολλαπλασιασθέν μετὰ β δίδωσι + βγ.
 τὸ γ πολλαπλασ. μετὰ 3 α διδ. + 3αγ.

Καὶ

$$\begin{array}{rcl} 3\alpha + \beta & & \\ 4\gamma + \delta & & \\ \hline 3\alpha\delta + \beta\delta & & \\ 12\alpha\gamma + 4\beta\gamma & & \\ \hline 12\alpha\gamma + 3\alpha\delta + \beta\delta + 4\beta\gamma & & \end{array}$$

τὸ δ πολλαπλασια-
 σθέν μετὰ β διδ. +
 βδ· τὸ δ πολλαπλ.
 μετὰ 3 α διδ. + 3αδ
 τὸ 4 γ. πολλα-
 πλασ. μετὰ β δίδω-
 σι + 4 βγ· καὶ 4 γ πολλ. μετὰ
 3 α διδ. + 12αγ. (§. 72).

Σχόλιον.

Ἡ ἀρχὴ τοῦ διὰ γραμμάτων πολλαπλασιασμοῦ
 εἶναι ἀδιαφόρος· διότι τὸ ἴδιον προκύπτει, ἢ τοι ἀπὸ
 τοῦ 4 γ ἀρχόμεθα, ἢ ἀπὸ τοῦ δ· ὁμοίως ἀδιαφόρος
 εἶναι καὶ ὁ ὑπὸ τὴν γραμμὴν τόπος καθε παρα-
 γομένου·

§. 75. Ἐὰν πρόκειται $3\alpha + \beta$ μετὰ τοῦ $4\gamma + \delta$ πολλαπλασιάσαι,

ληφθήσεται τὸ $3\alpha + \beta$, $4\gamma + \delta$ · κίς·
 εἰς α' τὸ $3\alpha + \beta$ λάβωμεν 4γ · κίς, καὶ εἰς δ'· κίς.
 καὶ

καὶ τὰ ἐν μέρει παραγόμενα ἀλλήλοις συνάψωμεν
ὅθεν

$$(3\alpha + \beta) \cdot (4\gamma + \delta) = 12\alpha\gamma + 4\beta\gamma + 3\alpha\delta + \beta\delta.$$

$$\begin{array}{r} \text{ἔξωσαν} \quad 3\alpha + 2\beta + \delta \\ \quad \quad \quad 2\alpha + 3\gamma \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 3\alpha + 2\beta + \delta \\ 2\alpha + 3\gamma \end{array}} \right\} \text{ αἱ παράγ.}$$

$$\begin{array}{r} 6\alpha\alpha + 4\alpha\beta + 2\alpha\delta \text{ τὸ παραγ. τὸ ἐκ τοῦ } 2\alpha \\ \text{καὶ} \quad 9\alpha\gamma + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta \text{ τὸ ἐκ τοῦ } 3\gamma \\ \hline \text{ἄρα} \quad 6\alpha\alpha + 4\alpha\beta + 2\alpha\delta + \\ \quad \quad 9\alpha\gamma + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta \text{ τὰ} \\ \quad \quad \text{ἐκ τοῦ } 2\alpha + 3\gamma. \end{array}$$

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

μετὰ καταφατικῶν, καὶ ἀποφατικῶν
ἀριθμῶν.

§. 76. Μέχρι τοῦδε παρελαμβάνοντο καταφα-
τικοὶ ἄμφω οἱ παράγοντες, ὧν τὸ παραγόμενον πάν-
τως καταφατικὸν προέκυπτε.

Ζητεῖται ἤδη, πότερον τὰ παραγόμενον καταφα-
τικὸν, ἢ ἀποφατικὸν ἔσοιτο.

α'. Ἐὰν τῶν παραγόντων ὁ μὲν καταφατικὸς,
ὁ δ' ἕτερος ἀποφατικὸς ἢ καὶ

β'. Ἐὰν ἄμφω οἱ παράγοντες ἀποφατικοὶ ᾖσιν

Ἐκτοῦ (§ 52.) δῆλον, ὅτι καταφατικὸς τις
ἀριθμὸς, διηρηκὴς μονάδι ἀπομειούμενος, τελευταῖον
γίνεται 0, καὶ μετὰ τοῦτο ἀποφατικὸς· εἰ οὖν ὁ ἕτερος
τῶν δύο καταφατικῶν παραγόντων διηρηκὴς μονάδι ἑ-
λαττονοῖτο, κατὰ τῖνα νόμον τὸ ἐκ τούτων παραγόμε-
νον μεταβάλλεται, ἐπιτηροῦντες, ἀπταισῶς ἐκκαλύψο-
μεν, πότερον καταφατικὸν τοῦτο σῴζεται, ἢ γίνεται
ἀπο-

ἀποφατικὸν, τοῦ μειουμένου παράγοντος ἐκ τοῦ κατα-
φατικοῦ διὰ τοῦ 0 εἰς τὸ ἀποφατικὸν διαβαίνοντος·

$$\begin{array}{rcl} \text{ἀλλὰ} & 3 \times 4 = 12 & || & 3 \times 1 = 3 \\ & 3 \times 3 = 9 & || & 3 \times 0 = 0 (\S. 69). \\ & 3 \times 2 = 6 & || & \end{array}$$

Ὅσάκις ἄρα ὁ μεταβλητὸς παράγων μονάδι μειοῦ-
ται, τοσάκις τὸ παραγόμενον ἐλαττοῦται κατὰ τὸν ἑ-
τερον παράγοντα. (ἢτοι ἀναιροῦνται τοσαῦται μονάδες
τοῦ παραγομένου, ὅσας ἔχει ὁ ἕτερος παράγων) καί
κεῖνου (τοῦ παράγοντος) ἴσου τοῦ 0 γεγονότος, ἔσαι
καὶ τοῦτο = 0· ἐνθεντοι, ἐὰν ὁ μεταβλητὸς παρά-
γων ἐλαττωθῇ μονάδι τοῦ 0, ἢτοι — 1 γένηται, ἀ-
νάγκη πᾶσα καὶ τὸ παραγόμενον κατὰ 3 ἐλαττον τοῦ
0, ἢ — 3 γενέσθαι· καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου ἔσαι

$$\begin{array}{rcl} 3 \times -1 = -3 & || & 3 \times -3 = -9 \\ 3 \times -2 = -6 & || & 3 \times -4 = -12 \end{array}$$

ὡσαύτως καὶ ἐὰν τεθῇ ὁ ἕτερος παράγων 3 διηλεκτῶς
μονάδι ἀπομειούμενος, ἔσαι

$$\begin{array}{rcl} 3 \times 4 = 12 & || & 1 \times 4 = 4 \\ 2 \times 4 = 8 & || & 0 \times 4 = 0 \end{array}$$

Γίνεται ἄρα τὸ παραγόμενον ἐλαττον κατὰ τὸν
παραγόντα 4, ὅσάκις ὁ ἕτερος παράγων μονάδι ἀπο-
μειοῦται, καὶ αὖθις μετὰ τούτου ἴσον 0· καὶ ἐπομέ-
νως κατὰ 4 ἐλαττον τοῦ 0, ἢ — 4, ὅσάκις ἐκεῖνος ὁ
παραγών μονάδι ἐλάττων, ἢ — 1 γίνεται· ἐνθεν-
τοι ἔσαι

$$\begin{array}{rcl} -1 \times 4 = -4 & || & -3 \times 4 = -12. \\ -2 \times 4 = -8 & || & -4 \times 4 = -16. \end{array}$$

Καὶ ἐπειδὴ καθόλου πᾶν παραγόμενον αβ αἰετὸ
κεφάλαιον τοσούτων β ἔσιν, ὅσας μονάδας περιέχει
τὸ

τὸ α, (§. 55.) γενήσεται αβ κατὰ β, 2β, 3β, 4β ἑλαττον, εἰ τὸ α μονάδι, δυάδι, τριάδι, τετράδι κτ' ἑλαττονοῖτο· ἄρα μετὰ τοῦ α ἴσον 0, καὶ κατὰ β, 2β, 3β, 4β ἑλαττον τοῦ 0, ἢ — β — 2β — 3β — 4β, τοῦ α γεγονότος ἐλάττονος τοῦ 0, ἢ — 1, — 2, — 3, — 4· ἐντεῦθεν ἔπεται ὁ κανὼν.

Τῶν παραγόντων τοῦ μὲν καταφατικοῦ, τοῦ δ' ἀποφατικοῦ ὄντων, τὸ παραγόμενον αἰεὶ ἀποφατικὸν ἔσται·

Ἐὰν τεθῇ ὁ μὲν τῶν παραγόντων ἀποφατικὸς, ὁ δ' ἕτερος καταφατικὸς, καὶ οὗτος (ὁ καταφ.) μονάδι ἀπομειῖνται, ἔσται

$$\begin{array}{l} -4 \times 5 = -20 \\ -4 \times 4 = -16 \\ -4 \times 3 = -12 \end{array} \quad \parallel \quad \begin{array}{l} -4 \times 2 = -8 \\ -4 \times 1 = -4 \\ -4 \times 0 = 0 \end{array}$$

Καὶ τούτου κειμένου, τὸ παραγόμενον αὖξαι ἄρα (§. 52.) κατὰ 4, ὅσας τις ὁ καταφατικὸς παράγων μονάδι ἀπομειοῦται· καὶ τούτου ἴσου τῷ 0 γεγονότος, ἔσται καὶ τὸ παραγόμενον ἴσον 0· εἰδ' οὗτος μονάδι ἐλάττων τοῦ 0 γένοιτο, ἢ — 1, τὸ παραγόμενον γενήσεται κατὰ 4 μείζον τοῦ 0, ἢ + 4.

ἐνθεντοι ἔσται

$$\begin{array}{l} -4 \times -1 = + 4 \\ -4 \times -2 = + 8 \\ -4 \times -3 = + 12 \end{array} \quad \parallel \quad \begin{array}{l} -4 \times -4 = + 16 \\ -4 \times -5 = + 20 \\ -4 \times -6 = + 24 \end{array}$$

Καὶ ἐπεὶ ἐν γένει ἕκαστον ἀποφατικὸν παραγόμενον — αβ, αἰεὶ τὸ κεφάλαιον τοσούτων ἀποφατικῶν β ἔσιν, ὅσας μονάδας περιέχει τὸ α· (§. 55.) τὸ παραγόμενον — αβ γενήσεται μείζον κατὰ β, 2β, 3β, 4β, ὅσας τις τὸ α κατὰ 1, 2, 3, 4 μειοῦται

ται· καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου μετὰ τοῦ α ἴσον 0, καὶ
κατὰ β, 2β, 3β, 4β μείζον τοῦ 0, ἢ + β, +
2β, + 3β, + 4β, τοῦ α ἐλάττωτος γεγονότος
τοῦ 0, ἦτοι ἴσου — 1, — 2, — 3, — 4· ἐκ
τούτου ἐπιφέρομεν τὸν κανόνα·

Δύω ἀποφατικοὶ παράγοντες αἰεί κα-
ταφατικὸν παράγουσι παραγόμενον.

§. 77. Εὐχερέστερον δὲ τῆς τοιαύτης ἂν ἐπι-
κοιμεθα ἀληθείας, τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀποφατικοῦ ἀριθ-
μοῦ τῇ ἐννοίᾳ τοῦ παράγοντος συνάπτοντες, ὡς
ἔπεται·

Ὁ ἀποφατικὸς ἀριθμὸς σημαίνει αἰεί τὸ ἐναντίον
τοῦ, ὃ ὡς καταφατικὸς σημαίνει· (§. 36.) ἀλλ' ὁ κα-
ταφατικὸς παράγων ἐμφαίνει, ποσάκις ὁ ἕτερος παρά-
γων τῷ 0 προσθετός (§. 55.), ἵνα τὸ παραγόμενον
τὸ ἐκ τούτων προέλθῃ·

Ὁ ἀποφατικὸς ἄρα παράγων δείξει, ποσάκις ὁ
ἕτερος παράγων ἀπὸ τοῦ 0 ἀφαιρετέος, ὡς τὸ ἐκ τού-
των προκύψαι παραγόμενον.

Ὁθεν α' + 4 X + 3 σημαίνει ὅτι + 4 τρίς
τῷ 0 προσθετέον· ὡς + 4 X + 3 = 0 + 4 + 4
+ 4 = 12·

καὶ — 4 X + 3 σημαίνει, ὅτι — 4 τρίς τῷ 0 προσθ·
ὡς — 4 X + 3 = 0 — 4 — 4 — 4 = — 12.

β' + 4 X — 3 + 4 τρίς ἀπὸ τοῦ 0 ἀ-
φαιρετέον· ὡς + 4 X — 3 = 0 — 4 — 4 — 4 =
— 12.

καὶ — 4 X — 3 — 4 τρίς ἀπὸ τοῦ 0
ἀφαιρετέον· ὡς — 4 X — 3 = 0 + 4 + 4 + 4
= + 12.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ οὖν τοῦτο ἐκάσθις δύο παράγουσιν, ὡς ἐν-
ταῦθα τῷ 4 καὶ 3 ἐφαρμόζει, ἐποίησμεν καθόλου,
ὅτι δύο παράγοντες τοῖς αὐτοῖς ἐπιση-
μειούμενοι σημείοις (+ καὶ +) ἢ (- καὶ -),
καταφατικὸν, ἐναντίως δὲ ἔχουσι τοῖς
σημείοις (+ καὶ -) ἢ (- καὶ +) ἀποφατι-
κὸν παρέχουσι παραγόμενον·

$$\begin{aligned} \text{Ὅθεν } (3\alpha - \beta) \times 4\gamma &= 12\alpha\gamma - 4\beta\gamma \\ (3\alpha - 5\beta) \times -2\gamma &= -6\alpha\gamma + 10\beta\gamma \end{aligned}$$

Καὶ

$$\begin{array}{r} 3\alpha - 2\beta \quad) \\ 5\alpha - 6\beta \quad) \end{array} \quad \text{οἱ παράγ.}$$

$$\begin{array}{r} 15\alpha\alpha - 10\alpha\beta \quad \text{τὸ παραγόμεν. ἐκ τοῦ } + 5\alpha \\ - 18\alpha\beta + 12\beta\beta \quad \text{τὸ ἐκ τοῦ } - 6\beta \end{array}$$

$$\text{ὥς } 15\alpha\alpha - 28\alpha\beta + 12\beta\beta \quad \text{τὸ ἐκ τοῦ } + 5\alpha - 6\beta$$

$$\begin{array}{r} \text{Καὶ } 3\alpha + 4\beta \quad) \\ 2\alpha - 7\beta \quad) \end{array} \quad \text{οἱ παράγ.}$$

$$\begin{array}{r} 6\alpha\alpha + 8\alpha\beta \\ - 21\alpha\beta - 28\beta\beta \end{array}$$

$$6\alpha\alpha - 13\alpha\beta - 28\beta\beta \quad \text{τὸ παραγόμεν.}$$

Τελευταῖον·

$$\begin{array}{r} 3\alpha + 2\beta - 4\delta \quad) \\ 3\alpha - 2\beta + 4\delta \quad) \end{array} \quad \text{οἱ παράγοντ.}$$

$$\begin{array}{r} 9\alpha\alpha + 6\alpha\beta - 12\alpha\delta \\ - 6\alpha\beta - 4\beta\beta + 8\beta\delta \\ 12\alpha\delta + 8\beta\delta - 16\delta\delta \end{array}$$

$$9\alpha\alpha - 4\beta\beta + 16\beta\delta - 16\delta\delta. \quad \text{τὸ παραγόμεν.}$$

Σχόλ.

Σχόλιον εἰς μείζω ἀνάπτυξιν τῶν δύο κανόνων τοῦ §. 76.

δ'. τρόποι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀπαντῶσι μὲ σημεῖα. ἦτοι $+$ μὲ $+$, ἢ $+$ μὲ $-$, ἢ $-$ μὲ $+$, ἢ $-$ μὲ $-$.

α'. $+$ μὲ $+$ δίδει ἀναμφιβόλως παραγόμενον $+$. εἰ δέοι $+$ 4 μὲ $+$ 4 πολλαπλασιάσαι, τοῦτο ἐξ ἀνάγκης δώσει $+$ 16. διότι τοῦτο σημαίνει τὸ $+$ 4 νὰ ληφθῇ τετράκις θετικῶς· ὥςτε καὶ $+$ α μὲ $+$ β δίδει αβ, ἢ $+$ αβ· (§. 38. σχ.)

β'. $+$ μὲ $-$ δώσει παραγόμενον $-$. διότι ἡ ποσότης τότε πρέπει νὰ ληφθῇ οὐχὶ θετικῶς, ἀλλὰ τὸ ἐναντίον, ἦτοι ἀποφατικῶς τοσάκις, ὅσάκις ζητεῖ ὁ ἕτερος παράγων· τοῦτο δὲ πάντη εὐδὴλον· οἶον $+$ 5 μὲ $-$ 2 πολλαπλασιάσαι δηλοῖ τὸ, πρέπει νὰ ληφθῇ τὸ $+$ 5 οὐχὶ δις θετικῶς, ἀλλ' ἐν ἀντικειμένῃ ἐννοίᾳ, ἦτοι δις ἀποφατικῶς.

γ'. Καὶ $-$ μὲ $+$ παραγόμενον παρέχει $-$. ὡς $-$ α μὲ $+$ 3 πολλαπλ. $=$ $-$ 3 α'. διότι ἂν θεωρηθῇ τὸ $-$ α, ὡς χρέος, (§. 36.) εἶναι φανερόν, ὅτι, ἂν τοῦτο τὸ χρέος ληφθῇ τρίς, ἀναγκαίως πρέπει νὰ αἰξηθῇ κατὰ τὸ τριπλοῦν· ὥςτε τὸ ζητούμενον παραγόμενον ἔσαι $-$ 3 α' ἐντεῦθεν ὁ κανὼν (§. 76.)

δ'. $-$ μὲ $-$ δίδει παραγόμενον $+$. τὸ παραγόμενον πρέπει νὰ ἔχῃ πρὸ ἑαυτοῦ ἢ τὸ $+$, ἢ τὸ $-$. τὸ $-$ δὲν ἔμπορεῖ νὰ τὸ ἔχῃ· ὅτι $-$ α μετὰ τοῦ β πολλαπλ. δίδωσιν $-$ αβ· (γ'.) ὥςτε $-$ α μὲ $-$ β πολλαπλασιασθὲν δὲν εἶναι δυνατόν νὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ, ἦτοι τὸ $-$. ἄρα τὸ παραγόμενον ἔσαι $+$ αβ· ὅθεν ὁ λόγος τοῦ β' κανόνος ἡ ἀληθεια (§. 76.) ἐν παραδείγματι σαφηνίσαι τὸ λεγόμενον· ἰάν τις χρεωσῇ 10 δραχμάς, τὸ χρέος θεωρηθῇτω ὡς ἀποφατικόν, καὶ ἔσαι $=$ $-$ 10· ταύτας τὰς $-$ 10 πολλαπλασιάσαι μὲ $-$ 4 δὲν δηλοῖ τὸ, τετράκις αὐτὰς αὔξῃ·

αὐξῆσαι, (διότι τοῦτο ἔπρεπε νὰ γένη μὲ τὸ + 4)
ἀλλὰ τὸ, τὸ χρέος νὰ μὴ πληρωθῇ τετράκις ὥστε
ἐκ τούτου ἔξει + 40.

§. 78. Φιλοῦσιν οἱ Μαθηματικοὶ τὰ παραγόμενα,
εἴπερ ἐγγχωρεῖ, ἐπιτομώτερον γράφειν· ὡς ἐπὶ τὸ πο-
λὺ γὰρ, εἰ θεοὶ τὰς καθόλου ποσότητας (τὰ γράμμα-
τα) εἰς ἀριθμοὺς μεταβαλεῖν, οὐ μικρὰν τοῦτο τὴν ὀ-
νησιν παρέχεται· τοῦτο δὲ γίνεται, ἔάν πᾶσιν, ἢ ἐν-
τισι μόνον μέλεσιν ἐν, ἢ πλείω τὰ αὐτὰ γράμματα, ἢ
παράγοντες ἐνυπάρχωσι· τότε γὰρ λαμβάνεται τοῦ-
το τὸ γράμμα, ἢ οἱ παράγοντες οἱ κοινοὶ ὄντες ταῖς
ποσότησιν, εἰς γενικὸν παράγοντα, τῶν ποσοτήτων
τῶν διὰ τούτου πολλαπλασιασθησομένων ἐν παρενθέ-
σει ἐναπολαμβανομένων, αὐτοῦ δὲ πρὸ, ἢ μετὰ τὸ
τῆς παρενθέσεως σημεῖον τιθεμένου· π. χ.

αα — 3 αβ γραφείη ἀν καὶ οὕτως (α — 3
β) α· πολλαπλασιάσας γὰρ τὸν κοινὸν παράγοντα α με-
τὰ τοῦ α — 3 β, ἔξεις αα — 3 αβ. (§. 74.)

Ὡσαύτως καὶ τὸ ααβδ + 2 ααββ — 5 αβδ οὕ-
τως ἐπιτομώτερον ἐκδηλώσομεν (αδ + 2 αβ — 5
δ, αβ· τὸ γὰρ α καὶ β εἰσὶ κοινοὶ παράγοντες καὶ τῶν
τριῶν ὄρων ὥστε ἔάν ἐνεργεῖα πολλαπλασιασθῶσι, (§.
74.) προκύψει αὖθις τὸ ααβδ + 2 ααββ — 5 αβδ.

Σχόλιον.

Τὰς τοιαύτας ἐπιτομὰς τὰς μανθάνομεν δι' ἐπιμε-
λοὺς ἀσκήσεως, καὶ ἀναγνώσεως Ἀλγεβραϊκῶν βιβλίων.

Ἀξιώματα

§. 79. α'. Αἱ ἴσαι ποσότητες δι' ἴσων
πολλαπλασιασθεῖσαι παράγουσιν ἴσα παραγόμε-
να· π. χ. α = β· τῶ ν πολλαπλασ. ἀμφοῖν ἴσονται
αν = βν ἢ 3 X 4 = 2 X 6· ὥς καὶ 3 X
4 X 5 = 2 X 6 X 5.

β'.

β'. Ἰσαι ποσότητες δι' ἀνίσων πολλαπλασιασθεῖσαι παράγουσιν ἕνισα παραγόμενα· καὶ ὁ μείζων πολλαπλασιασθῆς παρέξει μείζον παραγόμενον, ἢ ὁ ἐλάττων·
ὡς $\alpha = \beta$ · $\nu > \mu$ · $\alpha\nu > \beta\mu$ · $3 \times 4 = 2$
 $\times 6$ · $4 > 3$ · $3 \times 4 \times 4 > 2 \times 6 \times 3$.

γ'. Ἐὰν δύο ἀνίσων ποσοτήτων ἢ μείζων μείζονι ἀριθμῷ πολλαπλασιασθῇ, ἢ ἡ ἐλάττω, ἐκείνη πολλῷ μείζον ταύτης γενήσεται· οἷον $\alpha > \beta$ · $\gamma > \delta$ · $\alpha\gamma > \beta\delta$ · $5 > 4$ · $6 > 5$ · $5 \times 6 > 4 \times 5$.

§. 80. Δύο παραγόντων ὁποιοῦν δοθέντων, ὡς τοῦ 3212, καὶ 4, τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον 12848 εὐρεθήσεται κατὰ τὰ ἥδη ῥηθέντα· οὐκ ὀλιγάκις δὲ συμβαίνει τὸ παραγόμενον μετὰ τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων γνωστὰ εἶναι· οἷον τὸ, 12848 καὶ 3212, τὸν δ' ἕτερον παράγοντα 4 ζητεῖσθαι·

Γραφήτωσαν αὖθις 5 σημεῖα τρεῖς, καὶ 7 σημεῖα τετρακτὶς ὑπάλλληλα οὕτω·

.....		τὰ μὲν οὖν 15 ση-
.....		μεῖα τὸ ἐκ τοῦ 3 καὶ
.....		5 παρισώσι παραγόμε-
		μενον· τὰ δὲ 28 τὸ

ἐκ τοῦ 4 καὶ 7.

Ἐστὶ δὲ ἐν τῷ παραγομένῳ 15 προφανῶς ὁ παράγων 5 τρεῖς, ὁ δὲ 3 πέντακις περιεχόμενος· ἢ ὁ παράγων 5 ἐστὶ τὸ τρίτον, ὁ δὲ 3 τὸ πέμπτον μέρος αὐτοῦ· ὡσαύτως καὶ ἐν τῷ παραγομένῳ 28 ὁ παράγων 7 περιέχεται τετρακτὶς, ὁ δὲ 4 ἐπτάκις· ἢ ὁ 7 ἐστὶ τὸ τέταρτον μέρος, ὁ δὲ 4 τὸ ζ' αὐτοῦ·

Καὶ ἐὰν 3212 σημεῖα τετρακτὶς ὑπάλλληλα ταχθῶσι, 12848 σημεῖα τὸ ἐκ τοῦ 3212 καὶ 4 ἀηλώσουσι παραγόμενον· ὡς αὖθις ἐν τῷ παραγομένῳ 12848 ὁ παράγων 3212 περιέχεται τετρακτὶς, ὁ δὲ 4, 3212· κίς.

ὁ ἕτερος ἄρα τῶν παραγόντων τοσάνκις περιέχεται ἐν τῷ παραγομένῳ, ὅσάνκις ὁ ἕτερος δεικνύει·

Ἐὰν οὖν τὸ παραγόμενον, καὶ ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων δεδομένοι ᾖσιν, ὁ δ' ἕτερος ζητηθῆναι προκίηται, εὐρεθῆτω ἀριθμὸς, ὁ τοσάνκις ἐν τῷ παραγομένῳ περιεχόμενος, ὅσάνκις ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων δεικνύει, ἢ διορισθῆτω οἱ ἀριθμοὶ, ποσάνκις τὸ δοθὲν παραγόμενον τὸν δοθέντα περιέχει παράγοντα· τοῦτο δὲ γενήσεται· ἀφαιρουμένου τοῦ δοθέντος παράγοντος ἀπὸ τοῦ δοθέντος παραγομένου, μέχρις ἂν τοῦτο ἐκκνωθῇ.

Ἔσιν οὖν ἐν τῷ προτεθέντι παραδείγματι

α'	12848	)	τὸ δοθὲν κεφάλαιον
	<u>3212</u>	)	ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς
	9636		ἢ διαφορὰ
β'	9636	)	τὸ δ. κ.
	<u>3212</u>	)	ὁ δ. ἀρ.
	6424		ἢ διαφ.
γ'	6424	)	τὸ δ. κ.
	<u>3212</u>	)	ὁ δ. ἀρ.
	3212		ἢ διαφ.
δ'	3212	)	τὸ δ. κ.
	<u>3212</u>	)	ὁ δ. ἀρ.
	0000		ἢ διαφ.

Ἐπεὶ οὖν ὁ δοθεὶς παράγων 3212, 4: κίς ἀφαιρέσῃς ἀπὸ τοῦ δοθέντος παραγομένου 12848 παντάπασι τοῦτο ἐξεκένωσεν, ἔστι τὸ δ' μέρος τούτου, ἢ ἐμπεριέχεται τούτῳ τετραάνκις· ὥστε 4 ἔστιν ὁ ζητούμενος παράγων, ὅς ὡσαύτως 3212: κίς ἐν τῷ παραγομένῳ 12848 περιέχεται· ἔστιν ἄρα ἡ διαίρεσις, περὶ ἧς αὐτίκα εἰρήσεται, ἐπανειλημμένη ἀφαιρέσις, ὡς

καὶ

καὶ ὁ πολλαπλασιασμός ἐπανειλημμένη πρόσθεσις.
(§. 54.)

§. 81. Τῆς (§. ἀνωτ.) μεθόδου διεξοδικωτάτης οὐσης, ὅτε ὁ δοθεὶς παράγων πολλάκις τῷ παραγομένῳ ἐμπεριέχεται, ὅπως αὕτη ἐπιτέμνεται, ὁψόμεθα ἤδη.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

§. 82. Διαίρεσις ἐστὶν ἐκ τοῦ δοθέντος παραγομένου δύο παραγόντων, καὶ τοῦ ἑτέρου τούτων τῶν παραγόντων, τὸν ἕτερον εὐρεῖν.

Ἐξω διαιρετέος ὁ 12 διὰ τοῦ 4· τοῦτο δ' ἐστίν, ἔξω ὁ 12 τὸ παραγόμενον δύο παραγόντων, καὶ ὁ 4 ὁ ἕτερος τούτων· ὁ δ' ἕτερος πρόκειται εἰς εὔρεσιν· ζητεῖται οὖν, ποσάκις ὁ 12 περιέχει τὸν 4· ἢ, ὁ ταύτῃ ἐστι, τίς τῶν ἀριθμῶν περιέχεται ἐν τῷ 12 τετρακις· δῆλον, ὅτι ὁ ἀριθμὸς, 3· ὅτι $4 \times 3 = 12$.

Τὸ δοθὲν παραγόμενον 12 καλεῖται διαιρετέος· ὁ δοθεὶς παράγων 4, διαιρέτης· ὁ δὲ ζητούμενος παράγων 3, πηλίκον.

§. 83. Ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος δι' ἑτέρου δείκνυται τῷ σημείῳ (:), τῷ μεταξὺ τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιρέτου παρεντιθεμένῳ· ὡς $12 : 4 = 3$. ἀπαγγέλλεται δὲ οὕτω· 12 διαιρεθὲν διὰ 4 ἐστὶν ἴσον 3· ἢ 4 περιέχεται ἐν τῷ 12, τρίς.

§. 84. Ἐὰν ὁ διαιρετέος τὸ παραγόμενον ἢ ἐκ δύο ἀπλῶν παραγόντων, ῥαδίως ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων εὐρεθήσεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρου πίνακος, (§. 59.), τοῦ ἑτέρου δοθέντος.

Οὕτω ῥάδιον συνιδεῖν, ὅτι

$$12 : 4$$

$$\begin{array}{lcl} 12: 4 = 3 & || & 63: 9 = 7 \\ 27: 9 = 3 & || & 49: 7 = 7 \\ 45: 9 = 5 & || & 56: 8 = 7 \end{array}$$

Σχόλιον.

Ἐάν διαιρετέος, καὶ διαιρέτης ἢ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ἢ ἐὰν ἀριθμὸς τις διαιρῇται δι' ἑαυτοῦ, τὸ πηλίκον ἔσται 1. εὐληπτον γάρ, ὅτι κάθε ἀριθμὸς περιέχεται εἰς τὸν ἑαυτοῦ αὐτῷ ἅπαξ· οὕτω π. χ. ἔσται $\frac{63}{9} = 7$. $\frac{49}{7} = 7$. κτ'· ἀλλὰ καὶ τὸ μηδὲν διαιρεθὲν διὰ τοῦ μηδενὸς, ἢ $\frac{0}{0}$ εἶναι = 1· τὸ γὰρ μηδὲν περιέχει τὸ μηδὲν ἅπαξ· καὶ ἐὰν ὁ ἕτερος παράγων ἦναι = 0, ἔσται καὶ τὸ παραγόμενον = 0· ὅθεν τὸ 0 ἂν διαιρεθῇ δι' ὅποιου οὖν ἀριθμοῦ δίδωσι πάλιν πηλίκον 0· ὡς

$$\begin{array}{lcl} 0: 4 = 0 & || & 0: 100 = 0 \\ 0: 8 = 0 & || & 0: 1000 = 0 \text{ κτ'} \end{array}$$

§. 85. Εἰ δέοι 3 διὰ 4 διελεῖν, ἢ 1 ἐν τῷ πηλίκῳ ἐξίνῳς μεγίστη. (ἢ τοι τὸ πηλίκον οὐκ ἂν εἴη μονάς)· ὅτι $4 \times 1 = 4$ · καὶ 0 ἐστὶ πάνυ βραχύ· ὅτι $4 \times 0 = 0$ (§. 69.) τὸ οὖν πηλίκον, ὃ 4: κίς ληφθὲν 3 δώσει, ἐστὶ μείζον τοῦ 0, καὶ ἑλαττον τῆς 1.

Ἀλλὰ χαρακτηῖρες, δι' ὧν τοὺς μεταξὺ 0 καὶ 1 κειμένους ἀριθμοὺς ἐκδηλώσομεν, ἡμῖν οὐχ ὑπάρχουσιν· ἀναγκαῖον ἄρα πάντα ἑτέρους χαρακτηῖρας ἐπινοῆσαι εἰς παράστασιν τῶν τοιούτων πηλίκων, ἢ διορίσαι, ὅπως ταῦτα τοῖς παραληφθεῖσι, καὶ ἐν χρήσει οὖσι χαρακτηῖρσιν ἐξενεχθῇσονται· ἔδοξεν οὖν τοῖς Μαθηματικοῖς, ὥς τε τὰ τοιαῦτα τῶν πηλίκων ἐμφαίνειν, τὸν διαιρέτην ὑπὸ τὸν διαιρετέον γράφοντα διὰ γραμμῆς ἀλλήλων διασέλλειν· ὡς ($\frac{3}{4}$). τὸ οὖν $\frac{3}{4}$ σημαίνει τὸ προκύπτον πηλίκον, ἐὰν ὁ 3 διαιρεθῇ διὰ τοῦ 4, ἢ τοι τὸν ἀριθμόν, ὅς 4: κίς ληφθεῖς τὸν 3 παράξει·

$$\begin{array}{lcl}
 \text{ὡσαύτως καὶ} & 5:6 = \frac{5}{6} & \parallel & 9:11 = \frac{9}{11} \\
 & 7:10 = \frac{7}{10} & \parallel & 9:13 = \frac{9}{13} \\
 \text{ὅθεν αὐθις καὶ} & \frac{5}{6} \times 6 = 5 & & \\
 & \frac{7}{10} \times 10 = 7 & & \\
 & \frac{11}{11} \times 11 = 9 & & \\
 & \frac{13}{13} \times 13 = 9, \text{ κτ.} & &
 \end{array}$$

Σχόλιον.

Τὰ τέτοια πηλικά ὀνομάζονται κλάσματα, ἢ ἀριθμοὶ κεκλασμένοι, (περὶ ὧν κατωτέρω) καὶ ἀπαγγέλλονται οὕτω

$\frac{3}{4}$ τρία τεταρτημόρια, ἢ τρία τέταρτα· ἢ 3 διαιρεθ. διὰ 4·

$\frac{5}{6}$ πέντε ἑκτημόρια, ἢ πέντε ἑκτα, ἢ 5 διαιρεθ. διὰ 6. κτ.

§. 86. Προκειμένου τοῦ 8 διὰ τοῦ 3 διαιρεθῆναι, ἔσαι αὐθις τὸ πηλίκον μεῖζον τοῦ 2, καὶ ἔλαττον τοῦ 3· ὅτι $3 \times 2 = 6$ · καὶ $3 \times 3 = 9$ · ὅθεν λέγεται· 3 περιέχεται ἐν τῷ 8 δις, ὑπολειπομένον καὶ 2· ἢ 3 ἔστιν ἐν τῷ 8 (2 καὶ $\frac{2}{3}$): 15 περιεχόμενον· ἢ

$$\begin{array}{lcl}
 8:3 = 2 \frac{2}{3} & \parallel & 3:2 = 1 \frac{1}{2} \\
 9:4 = 2 \frac{1}{4} & \parallel & 29:6 = 4 \frac{5}{6} \\
 11:4 = 2 \frac{3}{4} & \parallel & 38:7 = 5 \frac{3}{7}
 \end{array}$$

ὅτι $\frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{3} = 2$ · καὶ $2 \times 3 = 6$ · ὥστε $2\frac{2}{3} \times 3 = 8$ ·

$$\begin{array}{lcl}
 \text{ὡσαύτως καὶ} & 2 \frac{1}{4} \times 4 = 9 & \\
 & 2 \frac{3}{4} \times 4 = 11 & \\
 & 1 \frac{1}{2} \times 2 = 3 & \\
 & 4 \frac{5}{6} \times 6 = 29 & \\
 & 5 \frac{3}{7} \times 7 = 38 &
 \end{array}$$

Σχόλιον.

Ἐὰν συμμά εἰς τὸ πηλίκον ὑπολείπηται καὶ λείψανον,

ψακνον, γίνεται τοῦτο διαιρετέος, καὶ ὁ διαιρέτης ὑπογράφεται εἰς τὴν γραμμὴν, καὶ προσαρτᾶται τῷ πηλίκῳ· ἐν τῷ περὶ κλασμάτων θέλουσιν ἀναπτυχθῇ ταῦτα σαφέστερον·

§. 87.

$$\begin{array}{rclcl} \alpha\upsilon\theta\iota\varsigma & 8000:2=4000. & \text{ἔστι γὰρ} & 4000 \times 2=8000 \\ & 600:2=300 & - & 300 \times 2=600 \\ & 40:2=20 & - & 20 \times 2=40 \\ & 8:2=4 & - & 4 \times 2=8 \end{array}$$

Ἐὰν ἄρα χιλιάδες, ἑκατοντάδες, δεκάδες, ἢ μονάδες δι' ἀπλῶν ἀριθμῶν διαιρῶνται, προκύψουσι καὶ ἐν τῷ πηλίκῳ χιλιάδες, ἑκατοντάδες, δεκάδες, ἢ μονάδες·

$$\text{Ἐνθεντοὶ ἔσται } 8648:2=4324.$$

Ἐπειδὴ γὰρ 2 ἐν 8000, 4000: κίς, ἐν 600, 300: κίς· ἐν 40, 20: κίς· καὶ ἐν 8, 4: κίς περιέχεται, ἔσται καὶ 2 ἐν 8648, 4324: κίς περιεχόμενον· ἄρα 4324 ἐστὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον· ἐὰν οὖν ὁ διαιρετέος ἐκ μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, κτ' συγκροτῇται, ὁ δὲ διαιρέτης ἀπλούς ἀριθμός ἢ, εὐρήσομεν τὸ πηλίκον, ζητοῦντες α' τὸ ἐν μέρει πηλίκου τοῦ ἀνωτάτου χαρακτῆρος, εἶτα τοῦ ἐγγύς κατωτέρου, καὶ μετ' αὐτὸ τοῦ ἐπομένου, κτ'· τοῦτα δὲ οὕτως ἐκδηλώσομεν συντόμως·

$$\begin{array}{rclcl} 8:2 & \text{δίδωσι} & 4 & || & 4:2 & \text{δίδωσι} & 2 \\ 6:2 & - & 3 & || & 8:2 & - & 4 \end{array}$$

$$\text{ὡσαύτως καὶ } 864:2=432$$

$$2644:2=1322 \text{ κτ'}$$

§. 88. Ἐὰν τόποις τισὶ τοῦ διαιρετέου μηδενὶ καὶ προσῇ, ἐπεὶ οὐδὲν διαιρετέον ἐν τοῦτοις πάρεσι, τοὺς ὁμοειδέϊς τόπους τοῦ πηλίκου αὐθις τῷ 0 ἐπισημειώσομεν·

Ε 2

αἷς

Ἐπειδὴ γὰρ τὸ πηλικόν (9:2) οἱ οὐδενὸς ὁλο-
σχεροῦς ἀριθμοῦ ἐκδηλώσαι ἔχομεν, διαιροῦμεν μόνον
8, τινέντες, ἀντὶ τῆς ὑπολειψείσης 1, καὶ μὴ διαιρε-
θείσης, εἰς τὸν ἐγγὺς ὑποδεέστερον τόπον 10 μονάδας,
ὥς ἐν τῷ ἐπομένῳ τόπῳ ἀντὶ 8, 18 ἢ ὅη μονάδας εἰς
διαίρεσιν προκείσθαι· καὶ ἐπειδὴ ὁ 5 διὰ 2 οὐ διαιρέ-
σιμος, διαιρεθέντος μόνον τοῦ 4, γράφονται ἀντὶ ὁ,
τοῦ ἐν τῷ ἐπομένῳ τόπῳ, 16·

ὅτι 5:2 δίδωσι 4, καὶ 1 εἰς λείψανον·
18:2 - 9,
5:2 - 2, καὶ 1 εἰς λ.
καὶ 16:2 - 8.

Ὅσακις ἄρα ἔντινι τόπῳ τοῦ διαιρετέου λείψανον
ὑπολείπεται, τὸ 10: πλοῦν τούτου προσαριθμητέον τῷ
ἐγγὺς κατωτέρῳ τόπῳ· καὶ ἐὰν ἔντινι τόπῳ ὁ διαιρε-
τέος ἀριθμὸς ἐλάττων ἢ τοῦ διαιρέτου, ὁ ἡμοειδὴς τό-
πος τοῦ πηλικίου σημειωθήσεται μετὰ τοῦ 0, καὶ τὸ
10: πλοῦν τούτου τοῦ ἀριθμοῦ αὐθις τῷ ἐγγὺς ὑπο-
δεετέρῳ τόπῳ προσαριθμηθήσεται· οὕτως 8401218:6
= 1400203·

ὅτι 8:6 δίδωσιν 1, καὶ 2 εἰς λείψανον·
24:6 - 4
0:6 - 0
1:6 - 0, καὶ 1 εἰς λείψ.

$$12:6 - 2$$

$$1:6 - 0, \text{ καὶ } 1 \text{ εἰς λείψ.}$$

$$\text{καὶ } 18:6 - 3, \text{ ἄνευ λειψάνου.}$$

§. 90. Ἐὰν ὁ ἀνώτατος χαρακτήρ τοῦ διαιρετέου ἐλάττων ἢ τοῦ διαιρέτου, οὐκ ἀναγκαῖον τὸ τιθεῖναι εἰς τὸ πηλίκον τὸ 0· τοῦτο γὰρ πρὸ τῶν χαρακτήρων τεθὲν οὔτε τὸν τόπον, οὔτε τὴν δύναμιν αὐτῶν μεταβάλλει· ὅθεν συνάπτοντες αὐτὸν τῷ ἐγγύς κατωτέρῳ ἀριθμῷ διαιρούμεν διὰ τοῦ διαιρέτου·

$$3489561:9 = 387729$$

$$\text{ὅτι } 34:9 \text{ δίδωσι } 3, \text{ καὶ } 7 \text{ εἰς λείψ. κτ'}$$

§. 91. Ἐξω 149 διὰ 42 διαιρετέον· καὶ ἐπειδὴ 42 μῆτε ἐν τῇ 1, μῆτε ἐν τῷ 14, ἀλλ' ἐν τῷ 149 περιέχεται, τὸ πηλίκον οὐτ' ἐξ ἑκατοντάδων, οὐτ' ἐκ δεκάδων, ἀλλ' ἐκ μονάδων συστήσεται· Ζητεῖται οὖν, ποσάνις ὁ 42 περιέχεται ἐν 149· ὅπερ δῆλον ἡμῖν γενήσεται, εἰ τῶν κατωτάτων χαρακτήρων τοῦ διαιρέτου, καὶ διαιρετέου μηδὲνα λόγον ποιούμενοι ἐρευνῶμεν, ποσάνις 40 περιέχεται ἐν 140, ἢ αἱ 4 δεκάδες ἐν 14 δεκάσιν, ἢ 4 ἐν 14 ἀπλῶς· προφανές οὖν, ὅτι ὁ 4 ἐν 14· ἀλλὰ καὶ αἱ 4 δεκάδες ἐν 14 δ' ἢ 40 ἐν 140 περιέχεται τρίς· τοῦ 3 τοίνυν εἰς τὸ πηλίκον τεθέντος, καὶ τοῦ διαιρέτου 42, τρίς ληφθέντος = 126 ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 149 ἀφαιρεθέντος, εὐρήσομεν 23 εἰς λείψανον, ὅ ἐστι διὰ 42 διαιρεθὲν δώσει πηλίκον $3\frac{23}{42}$ ὡς

$$149:42 = 3\frac{23}{42}$$

$$126$$

$$23$$

Λέγουσι 4 ἐν 14 περιέχεται τρίς· $3 \times 4 = 12$ · 6 ἀφαιρεθὲν ἀπὸ 9 ὑπολείπει 3· 2 ἀπὸ 4 ὑπολ. 2· καὶ 1 ἀπὸ 1 οὐδὲν ὑπολείπει· ὅθεν τὸ ζητούμενον πηλίκον $3\frac{23}{42}$ ·

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ οὖν 149 μονάδες, διὰ 42 διαιρεθεῖσαι, παρέσχον 3 μονάδας ἐν τῷ πηλίκῳ, καὶ 23 μονάδας εἰς λείψανον, καὶ 149 δεκάδες, διὰ 42 διαιρεθεῖσαι, δώσουσιν ἐν τῷ πηλίκῳ 3 δεκάδας, καὶ 23 δεκάδας εἰς λείψ. καὶ 149 ἑκατοντάδες, διὰ 42 διαιρ. 3 ἑκατ. ἐν τῷ π. καὶ 23 ἑκ. εἰς λ. καὶ 149 χιλ. διὰ 42 διαιρ. 3 χιλ. ἐν τῷ π. καὶ 23 χ. εἰς λείψ. κτ. εἴτε γὰρ μονάδας, εἴτε δεκάδας, εἴτε ἑκατοντ. εἴτε χιλ. σημαίνει ὁ 149, αἰὶ τὸ πηλίκον 3 $\frac{23}{42}$ εἶναι τὸ 42: οὐ μέρος τούτου, καὶ σημαίνει ἄρα ἥτοι μονάδας, ἢ δ. ἢ ἑκ. ἢ χ.

Ἔστω αὖθις $7108608 : 832 = 8544.$

	6656
ἑκατοντ.	4526
	4160
δεκάδες	3660
	3328
μονάδες	3328
	3328
	0

α' γὰρ 7108 χιλιάδες διὰ 832 διαιρεθεῖσαι διδοῦσιν 8 χιλιάδας ἐν τῷ πηλίκῳ, καὶ 452 χιλιάδας, ἢ 4520 ἑκατοντάδας εἰς λείψ.

β' 4526 ἑκατοντ. διὰ 832 διαιρ. διδοῦσι 5 ἑκατ. ἐν τῷ πηλ. καὶ 366 ἑκατ. ἢ 3660 δεκάδας εἰς λείψ.

γ' 3660 δεκ. διὰ 832 διαιρ. διδ. 4 δεκ. ἐν τῷ π. καὶ 332 δεκ. ἢ 3320 μονάδας εἰς λείψ. καὶ

δ' 3328 μον. διὰ 832 διαιρ. δ. 4 μον. ἐν τῷ π. ἄνευ λειψανού.

Τούτω

Τούτω τῷ τρόπῳ ἀΦηρέθησαν ἀπὸ τοῦ διαιρε-
τέου 7108608.

$$\alpha'. \quad 832 \times 8000 = 6656000$$

$$\beta'. \quad 832 \times 500 = 416000$$

$$\gamma'. \quad 832 \times 40 = 33280$$

$$\delta'. \quad 832 \times 4 = 3328 \quad \omega\varsigma\epsilon$$

ἐν γένει $832 \times 8544 = 7108608$. ὅπερ τὸν
διαιρετέον ἐκκενοῖ· καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου 8544 ἐστὶ τὸ
ζητούμενον πηλίκον.

§. 92. Ἐὰν ἄρα ἐξ ὁποιοῦν δοθέντος διαι-
ρετέου τοσοῦτοι τῶν ἀνωτάτων χαρακτήρων αὐτοῦ
λαμβάνωνται, ὅσοι ἀναγκαῖοι εἰς τὸ τὸν διαιρέτην πε-
ριέχειν, ἔξομεν τὸν α' ἐν μέρει διαιρετέον, ὃς διὰ τοῦ
διαιρέτου διαιρεθεὶς παρέξει ἐν τῷ πηλίκῳ τὸν ἀνώτα-
τον χαρακτήρα, ὁμοειδῆ ἀεὶ ὄντα τῷ κατωτάτῳ χα-
ρακτήρι τοῦ ἐν μέρει διαιρετέου.

Καταχθέντος δ' εἴτα μετὰ τὸ λείψανον καὶ τοῦ
ἐγγύς κατωτέρου χαρακτήρος τοῦ ὀλικοῦ διαιρετέου,
ἀναφανήσεται ὁ β' ἐν μέρει διαιρετέος, ὃς διαιρεθεὶς
αὐθις ἐν τῷ πηλίκῳ χαρακτήρα δώσει, ὁμοειδῆ τῷ ἐ-
σχάτῳ χαρακτήρι αὐτοῦ, εἰς τὸν ἐγγύς κατώτερον
τέκνον τοῦ ἤδη εὑρεθέντος χαρακτήρος τοῦ πηλίκου ἀ-
νέχοντα· καὶ οὕτως εὑρεθήσονται οἱ χαρακτήρες τοῦ
πηλίκου μετ' εὐχερείας ἐφεξῆς ἀπὸ τοῦ ἀνωτάτου μέ-
χρι τοῦ κατωτάτου, καταρχὰς μόνου εἰς τὸν ἀνώτατον
χαρακτήρα τοῦ διαιρετέου βλέπουσιν· οὕτω καὶ

$$2879793546 : 8029 = 358674$$

$$\begin{array}{r} 24087 \\ \hline \end{array}$$

$$\beta'. \text{ διαιρετ. } \begin{array}{r} 47109 \\ 40145 \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma'. \text{ διαιρετέος } \begin{array}{r} 69443 \\ 64222 \\ \hline \end{array}$$

$$\delta'. \text{ διαιρετέος } \begin{array}{r} 54115 \\ 48174 \\ \hline \end{array}$$

$$\epsilon'. \text{ διαιρετέος } \begin{array}{r} 59414 \\ 56203 \\ \hline \end{array}$$

$$\zeta'. \text{ διαιρετέος } \begin{array}{r} 32116 \\ 32116 \\ \hline \end{array}$$

0

§. 93. Ἐάντις τῶν ἐν μέρει διαιρετέων ἐλάττων ἤ, ἢ ὁ διαιρετέος, ὡς τούτου ἐκείνῳ μὴ ἐμπεριεχομένου, ὁ ὁμοειδὴς τόπος τοῦ πηλίκου τῷ 0 σημειωθῇτω, καὶ τοῦ ἐπομένου χαρακτήρος τοῦ ὀλικοῦ διαιρετέου καταχθέντος, γενέσθω ἡ πράξις, ὡς σύνηθες.

$$\text{oίον} \quad 170594208 : 8402 = 20304$$

$$\begin{array}{r} 16804 \\ \hline \end{array}$$

$$25542$$

$$25206$$

$$33608$$

$$33600$$

0

§. 94. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις τῶν χαρακτήρων ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά κατὰ τὸ δεκαπλοῦν αὐξοῦνται, ἕκαστος χαρακτήρ ἀριστερόθεν πρὸς τὰ δεξιά ἐνὶ τόπῳ καταβιβασθεὶς σημαίνει μόνον τὸ 10 : τον, δυοὶ τόποις μόνον τὸ 100 : ζὸν, τρισὶ μόνον τὸ 1000 : ζὸν μέρος τῆς τιμῆς, καὶ δυνάμειος, ἣν ἐν τῷ προηγούμενῳ

μένω τόπω σημαίνει π. χ. ἐν τῷ δε τῷ ἀριθμῷ (333333) ὁ 3 ἐν τῷ γ' τόπῳ σημαίνει μόνον τὸ 10: τον μέρος τοῦ, ὃ ἐν τῷ δ' δηλοῖ, μόνον τὸ 100: ζὸν τοῦ, ὃ ἐν τῷ ε' μόνον τὸ 1000: ζὸν τοῦ, ὃ ἐν τῷ ς'.

Ἐὰν ἄρα οἴσοῦν ἀριθμὸς διὰ 10, 100, 1000 κτ' διαιρεθῇναι προκείμεται, ἕκαστος χαρακτήρ τούτου τοῦ ἀριθμοῦ καταβιβασθήτω κατὰ ἓνα, δύο, τρεῖς κτ. τόπους ἀριστερόθεν πρὸς τὰ δεξιά, καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου, ἐν τῷ διαιρετέῳ τοσοῦτοι τῶν κατωτάτων τόπων ἀποβληθήτωσαν, ὅσα μηδενικὰ ὁ διαιρέτης περιέχει, οἱ δὲ χαρακτῆρες οἱ ἐν τοῖς ἀποβληθεῖσι τόποις θεωρηθήτωσαν ὡς λείψανον.

$$\begin{aligned}
 \text{ἐνθεντοι} \quad 3450 : 10 &= 345 \\
 34500 : 100 &= 345 \\
 345000 : 1000 &= 345 \\
 3450000 : 10000 &= 345 \\
 345 : 10 &= 34\frac{5}{10} \\
 8256 : 100 &= 82\frac{56}{100} \\
 34567 : 1000 &= 34\frac{567}{1000} \\
 34567 : 10000 &= 3\frac{4567}{10000} \text{ κτ.}
 \end{aligned}$$

§. 95. Ἐὰν τὸ 10: τον μέρος ἀριθμοῦ τινος διὰ 2, 3, 4, 5, ἢ 6 διαιρῶμεν, προκύπτει τὸ 20, 30, 40, 50, ἢ 60: ζὸν μέρος αὐτοῦ.

$$\begin{aligned}
 \text{ὡς} \quad 120 : 20 &= 12 : 2 = 6 \\
 120 : 30 &= 12 : 3 = 4 \\
 120 : 40 &= 12 : 4 = 3 \\
 120 : 50 &= 12 : 5 = 2\frac{2}{5} \\
 120 : 60 &= 12 : 6 = 2 \\
 120 : 70 &= 12 : 7 = 1\frac{5}{7}
 \end{aligned}$$

Διαι-

Διαιρεθέντος δὲ τοῦ 100 : τοῦ μέρους ἀριθμοῦ τινος διὰ 2, 3, 4, 5, ἢ 6, προελεύσεται τὸ 200, 300, 400, 500, ἢ 600 : εὐν μέρος αὐτοῦ. οἶον

$$1200 : 200 = 12 : 2 = 6$$

$$1200 : 300 = 12 : 3 = 4$$

$$1200 : 400 = 12 : 4 = 3$$

$$1200 : 500 = 12 : 5 = 2\frac{2}{5}$$

$$1200 : 600 = 12 : 6 = 2$$

$$1200 : 700 = 12 : 7 = 1\frac{5}{7}$$

Ὡσαύτως ἀνακύψει τὸ 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, ἢ 6000 : εὐν μέρος ἀριθμοῦ τινος, εἰ τὸ 1000 : εὐν μέρος αὐτοῦ διὰ 2, 3, 4, 5, 6 διαιροῦμεν·

$$\text{ὡς } 24000 : 2000 = 24 : 2 = 12$$

$$24000 : 3000 = 24 : 3 = 8$$

$$24000 : 4000 = 24 : 4 = 6$$

$$24000 : 5000 = 24 : 5 = 4\frac{4}{5}$$

$$24000 : 6000 = 24 : 6 = 4$$

Ἐὰν οὖν τοῖς τελευταίοις τόποις τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιρέτου μηδενικὰ προσῇ, τοσοῦτους τόπους ἐν ἀμφοτέροις παριδόντες, ὡς ἔθος, διαιρήσομεν. ὡς

$$70452 \quad (000 : 342 \quad (000 = 206$$

$$684$$

$$2052$$

$$2052$$

$$0$$

§. 96. Ἐὰν τοῖς τελευταίοις τόποις τοῦ διαιρετέου μηδενικὰ μὴ παρῇ, τοσοῦτοι τόποι ἐν τούτῳ παροφθίσονται, ὅσα μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου ἀποβάλλονται· ἄλλ·

ἀλλ' ἐν τῷ διορισμῷ τοῦ κλάσματος ἀμφοῖν αὖθις λόγον ποιησόμεθα·

$$\begin{array}{r} \text{ὡς} \quad 128592 \quad (34 : 282 \quad (00 = 456 \frac{34}{282} \\ \quad \quad 1128 \end{array}$$

$$\underline{1579}$$

$$1410$$

$$\underline{1692}$$

$$1692$$

$$0$$

Σχόλιον.

Ἡ μονὰς δὲν διαιρεῖ· διότι ἂν ζητῶμεν, ποσά-
σις ἢ 1 περιέχεται ἐν τῷ διαιρετέῳ, φέλομεν εὖρει,
ὅτι εἰς κάθε διαιρετέον ἢ 1 περιέχεται τοσάνις, ὅσας
μονάδας ἔχει ἐκεῖνος· ὥς τὸ πηλίκον δὲν διαφέρει παν-
τελῶς ἀπὸ τὸν διαιρετέον· ὡς $\frac{6}{1} = 6 \cdot \frac{12}{1} = 12$

$$\frac{54326}{1} = 54326 \cdot \text{κτ.}$$

§. 97. Αἱ δὲ συγκεκριμέναι (§. 4.) ποσότητες
διαιροῦνται αὕτως·

ὑπογραφέντος τοῦ διαιρέτου τῇ μεγίστῃ τῶν μο-
νάδων, ζητηθῆτω τὸ πηλίκον· τὸ δὲ λείψανον, εἰ ὑ-
πολειφθῇ, μεταβληθῆτω εἰς τὰς ἐγγύς κατωτέρας μο-
νάδας, καὶ προσεθῆτω ταύταις, καὶ διαιρεθῆτωσαν
καὶ αὗται διὰ τοῦ διαιρέτου· ὧν αὖθις τὸ λείψανον με-
ταχειρισθῆτω ἐπίσης· οἷον· 19 πόδες, 8 δάκτ. καὶ 6
γραμμαι διαιρεθῆτωσαν διὰ 6,

πόδ.

			πόδ.	δάκτ.	γρ.
19,	8,	6	3	3	5
(6)	12	24			
(18)	20	30			
I	(6)	(6)			
	18	30			
	2	0			

§. 98. Βάσανος δὲ τῆς διαιρέσεως ἐστίν, ἐὰν τὸ πηλίκον μετὰ τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιασθῇ (προσθεμένου ἐν τῷ παραγομένῳ καὶ τοῦ λειψάνου, εἴτι ὑπολέλειπται) ἀκριβῶς τὸν διαιρετέον ἀποδῶ, ἢ τὰ παραδείγματα τοῦτο δηλοῖ· διὰ τῆς διαιρέσεως βασανίζεται καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς (§. 60, κτ.) εἰ ἀκριβής· τοῦ γὰρ παραγομένου διὰ τοῦ ἐτέρου τῶν παραγόντων διαιρεθέντος, προκύψει ἐν τῷ πηλίκῳ ὁ ἕτερος·

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

μετὰ γραμμάτων, ἢ Ἀλγεβραϊκῶν ἀριθμῶν.

§. 99. Ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως ἀριθμὸς ζητεῖται, ὅς μετὰ τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιασθεὶς τὸν διαιρετέον παρέξει, (§. ἀν.) ῥᾶδιον συνιδεῖν, ὅτι

$$\begin{aligned} \alpha\beta : \beta &= \alpha. \text{ ὅτι } \alpha \times \beta = \alpha\beta. \\ \alpha\beta\gamma : \alpha &= \beta\gamma. \text{ ὅτι } \beta\gamma \times \alpha = \alpha\beta\gamma. \\ \alpha\beta\gamma : \alpha\beta &= \gamma. \text{ ὅτι } \gamma \times \alpha\beta = \alpha\beta\gamma. \\ 6\alpha\beta : 3\alpha &= 2\beta. \text{ ὅτι } 2\beta \times 3\alpha = 6\alpha\beta. \\ 10\alpha\beta\gamma : 5\gamma &= 2\alpha\beta. \text{ ὅτι } 2\alpha\beta \times 5\gamma = 10\alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

Σχόλιον.

Ἡ διαίρεσις, ὡς δῆλον, εἶναι πρᾶξις ἐναντία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· ὅταν θέλωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν π. χ. α μὲ β, ἢ νὰ λάβωμεν τὸ α, β : ις (§. 70), τοῦτο

τοῦτο γίνεται οὕτως $= \alpha\beta$ · διὰ νὰ κάμωμεν τὸ ἐναντίον τούτου, ἦτοι νὰ ἐλαττώσωμεν τὸ $\alpha\beta$, β : α , πρέπει νὰ ἀφέλωμεν ἀπὸ τοῦ $\alpha\beta$ τὸ β · τὸ ὅποιον εἰς τὴν διαίρεσιν ἀποδίδεται οὕτως· $\alpha\beta$ διαιρούμενον διὰ τοῦ β εἰδῶσι πηλίκον τὸ α · εὐκολώτερον θέλομεν καταλάβει τὸ λεγόμενον, ἂν διορίσωμεν τὸ α καὶ β · ἔστω $\alpha = 2$ · καὶ $\beta = 3$ · καὶ ἔσται $\alpha\beta = 2 \times 3$, ἢ 2 ἐλήφθη τρίς· εἰ δέοι οὖν τὴν ποσότητα 2×3 διὰ 3 διελεῖν, ἀποβλητέον 3 ἀπ' αὐτῆς, διὰ νὰ ὑπολειφθῇ μόνον 2· διότι διὰ τούτου, τὸ 2×3 ἐλαττοῦται τρίς· ὑπόλείπεται λοιπὸν 2, ὃ παρίσταται διὰ τοῦ α · ὥστε τοῦτον τὸν τρόπον θέλομεν μεταχειρισθῇ εἰς τὰ γράμματα· ὅθεν $\alpha\beta : \beta = \alpha$ καὶ $\alpha\beta : \alpha = \beta$ καὶ $\alpha\alpha\beta : \alpha\alpha = \beta$.

β'.

Ἐπὶ τῆς διαιρέσεως τῶν γραμμάτων, πηλίκον εἶναι τὸ γράμμα, ἢ τὰ γράμματα, ὅπου δὲν εὐρίσκονται εἰς τὸν διαιρέτην· ὅταν δὲ καὶ ὁ διαιρετέος, καὶ ὁ διαιρέτης ἔχωσι καὶ συνεργοὺς (§. 47.), τότε διαιρεῖται ὁ συνεργὸς τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συνεργοῦ τοῦ διαιρέτου, καὶ μετὰ τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν γράφονται ἀμέσως τὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου, ὅπου δὲν περιέχει ὁ διαιρέτης· ὡς

$$\begin{array}{l|l} \alpha\beta\gamma : \beta = \alpha \gamma \text{ καὶ} & \alpha\beta\gamma : \delta\alpha\beta = \frac{1}{\delta} \gamma \\ 12 \alpha\beta\delta : 4 \alpha\delta = 3 \beta & (\S. 47. \text{ καὶ } 85.) \\ 24 \alpha\beta\delta\epsilon : 8 \beta\epsilon = 3 \alpha\delta & 5 \alpha\beta\gamma : \delta\beta\gamma = \frac{5}{\delta} \alpha. \end{array}$$

§. 100. Ἐὰν μηδὲν, ἢ μὴ πάντα τὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου τῷ διαιρέτῳ ἐμπεριέχωνται, τὴν διαίρεσιν διὰ τοῦ κειλασμένου ἐκδηλώσομεν πηλίκου (§. 85.)

$$\text{Οὕτως } \alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ καὶ } \alpha\beta : \delta\epsilon\zeta = \frac{\alpha\beta}{\delta\epsilon\zeta}, \text{ εἰ}$$

δότες μόνον περὶ τῶν τοιούτων πηλίκων, ὅτι μετὰ τοῦ διαι.

διαίρετόν πολλαπλασιασθέντα τὸν διαιρετέον πάλιν πα-
ράγουσιν : ἢ ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta} \times \beta = \alpha \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} \times \beta = \alpha\beta.$$

Σχόλιον.

Δείχνομεν τὴν διαίρεσιν ὅχι μόνον μὲ τὸ νὰ πα-
ρενδίζωμεν τὰ δύο σημεῖα, (§. 83.) ἀλλὰ καὶ οὕτω :

$\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ ἐν ἀριθμοῖς $\frac{6}{3}$. τὰ ὅποια σχήματα παρι-
σῶσι τὸ μὲν, τὸ πηλίκον τὸ προκύπτον, διαίρεθέντος
τοῦ α διὰ τοῦ β · τὸ δὲ, τὸ τοῦ β διαίρ. διὰ 3, ἦτοι
τὸ 2· ὥστε εἰς παράστασιν τῆς διαίρεσεως μεταχειρίζο-
μεθα ἢ τὰ δύο σημεῖα· ὡς $\alpha\beta + \gamma + \chi$ διαίρ. διὰ
τοῦ $\mu + \nu$, ἀποδοθήσεται $\alpha\beta + \gamma + \chi : \mu + \nu$,
ἢ τὸν νῦν ἐκθέντα τρόπον· τὸν μάλιστα τότε, ὅτε
(κατὰ τὸ ἀνωτ.) ὁ ἕτερος τρόπος χώραν οὐκ ἔχει.

§. 101. Ὅσακις ὁ διαιρετέος, ἢ ὁ διαιρέτης
συμπεπλεγμένος (§. 44.) ἢ, ἐναπολαμβάνεται ἐν πα-
ρενθέσει· ὅθεν τὸ $(6\alpha\beta + 12\alpha\delta + 30\alpha\gamma\delta) : 3\alpha$
σημαίνει τὸ, ὁ συμπεπλεγμένος διαιρετέος $6\alpha\beta + 12\alpha\delta$
 $+ 30\alpha\gamma\delta$ διαιρεθῇ τῷ διὰ 3α · ὃ περανοῦμεν,
ζητοῦντες, ποσάκις 3α ἐκάστω μέρει τοῦ συνθέτου διαι-
ρετέου ἐμπεριέχεται·

$$\begin{array}{rcl} \xi\iota\delta\epsilon & 3\alpha & \text{ἐν} \quad 6\alpha\beta, \quad 2\beta : 15 \quad (\S 99. \text{σχ. } \beta') \\ & & \text{ἐν} \quad 12\alpha\delta, \quad 4\delta : 15 \\ & \text{καὶ} & \text{ἐν} \quad 30\alpha\gamma\delta, \quad 10\gamma\delta : 15 \quad \text{περιέχεται· ἄρα} \end{array}$$

ἐν $(6\alpha\beta + 12\alpha\delta + 30\alpha\gamma\delta) : (2\beta + 4\delta + 10\gamma\delta) : 15$
περιεχόμενον.

$$\eta \quad (6\alpha\beta + 12\alpha\delta + 30\alpha\gamma\delta) : 3\alpha \\ = 2\beta + 4\delta + 10\gamma\delta.$$

ὡσαύ-

$$\text{ὡσαύτως καὶ } (14\alpha\beta\delta + 21\alpha\beta\gamma + 35\alpha\beta\delta\epsilon): 7\alpha\beta \\ = 2\delta + 3\gamma + 5\delta\epsilon.$$

$$\text{καὶ } 10\alpha\beta + 25\alpha\beta\delta + 30\beta\delta\epsilon + 45\delta): 5\beta \\ = 2\alpha + 5\alpha\delta + 6\delta\epsilon + 9\frac{\delta}{\beta}.$$

Σχόλιον.

Ἐάν τι μέλος, ἢ ὅρος τοῦ διαιρέτου δὲν ἡμπο-
ρῇ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ διαιρέτου, τὸ ἐντεῦθεν ἀναφύο-
μενον πηλίκον παραφαίνεται κεκλασμένως· ὥς, εἰ δέοι
 $\alpha + \beta$ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ α , ἔσται τὸ πηλίκον $1 +$
 $\frac{\beta}{\alpha}$. ὅτι $\alpha: \alpha = 1$ (§. 84. σχ.) καὶ ἐπειδὴ τὸ α ὡς ἀό-
ριστον διελεῖν τὸ ἀόριστον β οὐ δύναται, ἐκφέρεται οὕ-
τω· $\frac{\beta}{\alpha}$ ὡσαύτως καὶ $45\delta: 5\beta = 9\frac{\delta}{\beta}$.

§. 102. Ἐάν δε ἄμφοι συμπεπλεγμένοι ᾶσι,
χωρήσωμεν αὐτοὺς εἰς ἔργον, ὡς καὶ ἐν ταῖς ἀριθμοῖς,
καταργῶν μόνον εἰς τὸ α' μέρος τοῦ διαιρέτου ἀπο-
ρῶντες· οὕτως εὐρίσκομεν τὸ πηλίκον τοῦ

$$= 5\gamma + 6\delta.$$

$$15\alpha\gamma + 18\alpha\delta + 20\beta\gamma + 24\beta\delta): (3\alpha + 4\beta)$$

15αγ	20βγ	
+ 18αδ +	24βδ.	
+ 18αδ +	24βδ.	
0	λέγοντες·	

α' 3α περιέχεται ἐν $15\alpha\gamma$, $5\gamma: 15$ ὅτι $(3\alpha + 4\beta) \times 5\gamma$ (§. 74. σχ. 13.) $= 15\alpha\gamma + 20\beta\gamma$, ὃ
ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $15\alpha\gamma + 18\alpha\delta + 20\beta\gamma + 24\beta\delta$
διαιρέτου ὑπολείπει $18\alpha\delta + 24\beta\delta$ λε-
ψαιον· καὶ

β'. 3α

β'. 3α ἐν $18\alpha\delta$ περιέχεται 6δ : ἵς· ὅτι $(3\alpha + 4\beta) \times 6\delta = 18\alpha\delta + 24\beta\delta$.

ὁ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $18\alpha\delta + 24\beta\delta$ οὐδὲν ὑπολείπει· ὡσαύτως εὐρεθήσεται καὶ

$$= 3\alpha + 2\beta + \delta$$

$$(6\alpha\alpha + 4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 9\alpha\gamma + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta) : (2\alpha + 3\gamma)$$

$6\alpha\alpha$	$9\alpha\gamma$	
$4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta$		
$4\alpha\beta$	$+ 6\beta\gamma$	
$2\alpha\delta$	$+$	$3\gamma\delta$
$2\alpha\delta$	$+$	$3\gamma\delta$
0		

λέγουσι·

α'. 2α ἐν $6\alpha\alpha$ περιέχεται 3α : ἵς· ὅτι $(2 + 3\gamma) \times 3\alpha = 6\alpha\alpha + 9\alpha\gamma$. ὁ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $6\alpha\alpha + 4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 9\alpha\gamma + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta$ δίδωσι $4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta$ λείψ.

β'. 2α ἐν $4\alpha\beta$ περιέχεται 2β : ἵς· ὅτι $(2\alpha + 3\gamma) \times 2\beta = 4\alpha\beta + 6\beta\gamma$. ὁ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta$ δίδωσι λείψ. $2\alpha\delta + 3\gamma\delta$.

γ'. 2α ἐν $2\alpha\delta$ περιέχεται δ : ἵς· ὅτι $(2\alpha + 3\gamma) \times \delta = 2\alpha\delta + 3\gamma\delta$. ὁ ἀπὸ τοῦ $(2\alpha\delta + 3\gamma\delta)$ ἀφαιρεθὲν αὐθις οὐδὲν ὑπολείπει.

§. 103. Ἐὰν ἡ διαίρεσις τοῦτον τὸν τρόπον περανθῇ οὐκ ἔχῃ, ἀγαπητέον τῇ κεκλασμένῃ πηλίκῃ (§. 85. καὶ §. 100.) ὡς $(3\alpha + 6\beta)$:
 $(\mu + 3\rho) = \frac{3\alpha + 6\beta}{\mu + 3\rho}$, περὶ οὗ μόνον αἰδᾶμεν, ὅτι

$$\left(\frac{3\alpha + 6\beta}{\mu + 3\rho} \right) \times (\mu + 3\rho) = 3\alpha + 6\beta.$$

ΠΕΡΙ

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

μετὰ καταφατικῶν, καὶ ἀποφατικῶν
ἀριθμῶν, καὶ γραμμάτων.

§. 104. Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος τὸ παραγόμενόν ἐστὶν ἐκ τοῦ
ἐτέρου τῶν παραγόντων τοῦ γνωστοῦ, ἦτοι τοῦ διαιρέ-
του, καὶ τοῦ ἐτέρου τοῦ ἀγνώστου, ἦτοι τοῦ πηλίκου·
(§. 98.) καὶ τὸ καταφατικὸν παραγόμενον αἰείποτε
ἀνήκει δυσὶ παράγουσι τὰ αὐτὰ σημεῖα, τὸ δ' ἀ-
ποφατικὸν δυσὶ τὰ ἐναντία ἔχουσιν· (§. 77.) ὁ διαι-
ρέτης ἄρα, καὶ τὸ πηλίκον τοῖς αὐτοῖς σημείοις σημειω-
θήσονται, τοῦ διαιρετέου καταφατικοῦ, τοῖς δ' ἐναν-
τίοις, ἀποφατικοῦ ὄντος·

$$\begin{array}{ll} \text{ὅθεν} & \alpha' \quad (+ \alpha\beta : + \beta = \alpha \\ & \quad (+ \alpha\beta : - \beta = - \alpha \\ & \beta' \quad (- \alpha\beta : + \beta = - \alpha \\ & \quad (- \alpha\beta : - \beta = + \alpha \end{array}$$

ἐντεῦθεν ἐπεταὶ ὁ γενικὸς κανὼν.

Τὸ πηλίκον ἔσται καταφατικόν, τοῦ
διαιρετέου, καὶ διαιρέτου τὰ αὐτὰ σημεῖα
ἔχόντων· (+ καὶ +, ἢ — καὶ —) ἀπο-
φατικὸν [δὲ, τὰ ἐναντία (+ καὶ —, ἢ —
καὶ +).

$$\begin{array}{l} \text{ὡς} \quad 12 : 4 = 3 \quad \parallel \quad 15\alpha\beta : -3\alpha = -5\beta \\ \quad 12 : -4 = -3 \quad \parallel \quad -26\alpha\beta\delta : -13\alpha\delta = 2\beta \\ \quad -12 : 4 = -3 \quad \parallel \quad \alpha\alpha + 2\alpha\beta - 3\alpha\delta : 2\alpha \\ \quad -12 : -4 = 3 \quad \parallel \quad = \frac{1}{2}\alpha + \beta - 15\delta \\ \quad \parallel \quad \alpha\alpha + 6\alpha\beta - 21\alpha\delta : -7\alpha \\ \quad \parallel \quad = -\frac{1}{7}\alpha - \frac{6}{7}\beta + 3\delta \end{array}$$

Σχόλιον.

Τὸ αα: 2α = $\frac{\alpha\alpha}{2\alpha}$ (§. 100. σχ.). καὶ ἐπειδὴ τὸ
α τοῦ διαιρέτου ἀναιρεῖ ἐν α τοῦ διαιρετέου, ἔσται

F

αα

$$\frac{\alpha\alpha}{\Omega\alpha} = \frac{\alpha}{2}. \quad \text{ἀντὶ τοῦ } \frac{\alpha}{2} \text{ ἢμπορεῖ νὰ τεθῇ τὸ } \frac{1}{2}\alpha.$$

$$\text{ὅτι } \frac{1}{2}\alpha \text{ ἰσοδυναμεῖ τῷ } \frac{\alpha}{2}. \quad \text{δι' ἀριθμῶν ἐστὶν εὐ-}$$

$$\lambda\eta\pi\tau\acute{o}\tau\epsilon\rho\omicron\nu\cdot \text{ ἔστω } \alpha = 6. \quad \text{ὅθεν } \frac{\alpha}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \cdot 6. \quad \text{τοῦτο δὲ} = 3. \quad \text{ἄρα } 3 = 3. \quad \text{ἄρα}$$

$$\frac{1}{2}6 = \frac{6}{2} \text{ καὶ } \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\alpha. \quad \text{ὡσαύτως καὶ αἱ}$$

$$:-7\alpha = \frac{\alpha\alpha}{-7\alpha} = \frac{\alpha}{-7} = -\frac{1}{7}\alpha.$$

κτ.

Ἀὖθις εὐρέθῃσεται, ὅτι $(\alpha\alpha - \beta\beta) : (\alpha - \beta) = \alpha + \beta$

$$\begin{array}{r} \alpha\alpha - \alpha\beta \\ \alpha\beta - \beta\beta \\ \hline \alpha\beta - \beta\beta \\ \hline 0 \end{array} \quad (\S. 49.) \quad \text{ὅτι}$$

α'. $+ \alpha \text{ ἐν } + \alpha\alpha \text{ περιέχεται } + \alpha : \text{ἵς} \text{ καὶ}$
 $\gamma\alpha\rho (\alpha - \beta) \times + \alpha = + \alpha\alpha - \alpha\beta. \text{ τοῦ-}$
 $\text{το ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ } + \alpha\alpha - \beta\beta \text{ δώσει } + \alpha\beta$
 $- \beta\beta \text{ λείψ.}$

β'. $+ \alpha \text{ ἐν } + \alpha\beta \text{ (τῷ λειψ.) περιέχεται}$
 $+ \beta : \text{ἵς} \text{ ὅτι } (\alpha - \beta) \times + \beta = + \alpha\beta - \beta\beta.$
 $\text{ὁ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ } + \alpha\beta - \beta\beta \text{ οὐδὲν ὑπολείπει.}$

ὡσαύ.

ὡσαύτως καὶ $(\alpha\alpha - \beta\beta) : (\alpha + \beta) = \alpha - \beta$

$$\begin{array}{r} \alpha\alpha + \alpha\beta \\ \hline - \alpha\beta - \beta\beta \quad (\S. 49.) \\ \hline - \alpha\beta - \beta\beta \\ \hline 0 \end{array}$$

ὅτι $\alpha' + \alpha$ ἐν $+\alpha\alpha$ περιέχεται $+\alpha$: ἵς· καὶ γὰρ $(+\alpha + \beta) \times \alpha = \alpha\alpha + \alpha\beta$. ὁ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $\alpha\alpha - \beta\beta$ δίδωσι $-\alpha\beta - \beta\beta$ λείψ.

$\beta' + \alpha$ ἐν $-\alpha\beta$ περιέχεται $-\beta$: ἵς· ὅτι $(\alpha + \beta) \times -\beta = -\alpha\beta - \beta\beta$. τοῦτο ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $-\alpha\beta - \beta\beta$ οὐδὲν ὑπολείπει·

αὖθις $(\alpha\alpha - 1) : (\alpha + 1) = \alpha - 1$.

$$\begin{array}{r} \alpha\alpha + \alpha \\ \hline - \alpha - 1 \\ \hline - \alpha - 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ὅτι } \alpha\alpha : \alpha = \alpha' \text{ πολ-} \\ \text{λαπλασιασθὲν τὸ πηλίκον} \\ \alpha \text{ ἐφ' ὅλον τὸν διαιρέτην} \end{array}$$

$(\alpha + 1)$ δώσει $\alpha\alpha + \alpha'$ ὅτι $\alpha \times \alpha = \alpha\alpha$ καὶ $1 \times \alpha = \alpha'$. τὸ σὺν $\alpha\alpha$ ἀναιρεῖ τὸ $\alpha\alpha$ τοῦ διαιρετέου· τὰ γὰρ σημεῖα τούτων ἐναντία (§. 37. §. 49.) τὸ $+\alpha$, τὸ παραχθὲν διὰ τοῦ $+1$ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον α , οὐκ ἔχει ἀφαιρεθῆναι ἀπότινος· ὅθεν τίθεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν τῷ ἐναντίῳ σημείῳ· ὡσαύτως τίθεται καὶ τὸ -1 τοῦ διαιρετέου· ὅθεν τὸ α τοῦ διαιρέτου διελὼν τὸ $-\alpha$ τοῦ λειψάνου δώσει -1 (§. 84 σχ. §. 76.) κτ.

$$\text{καὶ } \frac{(αα - 2αβ + ββ) : (α - β) = α - β}{αα - αβ}$$

$$\begin{array}{r} - αβ + ββ \\ - αβ + ββ \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ὅτι τὸ } -αβ \text{ τοῦ} \\ \text{ἀφαιρετέου, ὡς τῶ} \\ \text{ἐναντίου σημ. ἴσ., ἢ} \end{array}$$

τοῖ τῶ + σημειωθῆναι ὀφείλον, ἀναιρεῖ ἐκ τῶν
 $-2αβ$ τὸ $-1αβ$, ὅθεν ὑπολείπεται ὑπὸ τὴν γραμ-
 μὴν $-1αβ = -αβ$ (§. 69.)

$$\text{καὶ } \frac{(9αα - 12αβ + 4ββ) : (3α - 2β)}{9αα - 6αβ} = 3α - 2β$$

$$\begin{array}{r} - 6αβ + 4ββ \\ - 6αβ + 4ββ \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{καὶ } \frac{(6αα - 13αβ - 28ββ) : (3α + 4β)}{6αα + 8αβ} = 2α - 7β$$

$$\begin{array}{r} - 21αβ - 28ββ \\ - 21αβ - 28ββ \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{καὶ } \frac{(9αα - 4ββ + 16βδ - 16δδ) : (3α + 2β - 4δ) = 3α - 2β + 4δ}{9αα + 6αβ - 12αδ}$$

$$\begin{array}{r} - 6αβ + 12αδ - 4ββ + 16βδ - 16δδ \\ - 6αβ - 4ββ + 8βδ \\ \hline 12αδ + 8βδ - 16δδ \\ 12αδ + 8βδ - 16δδ \\ \hline 0 \end{array}$$

Σχόλιον.

Καὶ ὁ πολλαπλασιασμός, καὶ ἡ διαίρεσις ἢ διὰ
 γραμμάτων δὲν ἔχουν καμμίαν δυσχέρειαν, εἰς ἐκεῖνον
 ὅπου

ὅπου μὲ ἐπιστάσιαν ἤθελε μελετήσῃ τοὺς περὶ τῶν σημείων κανόνας, καὶ τοὺς περὶ ἀφαιρέσεως, καὶ τὰ λοιπὰ, ὅσα προηγουμένως ἐρῶν ἐθέλῃσαν· οἱ ἴδιοι κανόνες, οἱ ἀνήκοντες τοῖς γράμμασιν, ἀρμόζουσιν καὶ εἰς τοὺς ἀριθμούς, ὡς ἂν ὅπου οἱ ἀριθμοὶ διαφέρουσιν ἀπὸ τὰ γράμματα μόνον κατὰ τὸ εἰδικόν, τούτων ἐν γενεῇ, ὡς εἴρηται, πάντα ἀριθμὸν σημαίνοντων.

§. 105. Τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιρέτου δύο ὁποιονοῦν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν ὄντων, τὸ τούτων πηλίκον προκύψει, εἴτε ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, εἴτε κεκλασμένος, εἴτε ἐξ ὁλοσχεροῦς, καὶ κεκλασμένου συγκείμενος· οὕτω

$$12 : 3 = 4 \text{ ὁλοσχ. ἀρ.}$$

$$12 : 17 = \frac{12}{17} \text{ (§. 85. καὶ σχ.) κεκλασμ. ἀρ.}$$

$$12 : 5 = 2\frac{2}{5} \text{ ἐκ τοῦ ὁλοσχεροῦς 2, καὶ τοῦ κεκλ. } \frac{2}{5} \text{ συγκείμεν.}$$

Εἰ δὲ τὸ πηλίκον αἰεὶ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς εἶναι ὀφείλει, οὐδέποτε ἀριθμὸν ἐλάττωνα διὰ μείζονος διαιρετέον· οὕτω γὰρ τὸ πηλίκον ἔσαι πάντως κλασματικόν· ἀλλ' ἐπεὶ πᾶς ἀριθμὸς $\alpha = 1 \times \alpha$ (§. 72.) καὶ πᾶς ἀριθμὸς διαιρεθήσεται διὰ τῆς 1, καὶ δι' ἑαυτοῦ.

Αὕτις ἐπεὶ $\alpha\gamma : \gamma = \alpha$, καὶ $\nu\alpha\gamma : \gamma = \nu\alpha$ (§. 99, καὶ σχ. β').

Πᾶς ἀριθμὸς γ , ὁ οἰονοῦν ἀριθμὸν $\alpha\gamma$ διαιρῶν, διαιρήσει αἰεὶ καὶ πᾶν πολλαπλοῦν τοῦ $\alpha\gamma$ π. χ' ἐπεὶ ὁ 3 διαιρεῖ τὸν ἀριθμὸν 6, ἔστι καὶ $2 \times 6 = 12$, $3 \times 6 = 18$, $4 \times 6 = 24$, καὶ $\nu \times 6 = 6\nu$ διὰ 3 διαιρέσιμον.

$$\text{Καὶ ἐπεὶ δὴ } (\alpha\gamma + \beta\gamma) : \gamma = \alpha + \beta \text{ καὶ } (\alpha\gamma - \beta\gamma) : \gamma = \alpha - \beta.$$

Πᾶς ἀριθμὸς γ , δι' οὗ δύο ὁποιοῦν ἀριθμοὶ $\alpha\gamma$, καὶ $\beta\gamma$ διαιροῦνται, διαιρήσει αἰεὶ καὶ τὸ τούτων κεθά-

κεφάλαιον αγ + βγ, καὶ τὴν τούτων διαφορὰν
αγ — βγ.

Οἷον, ἐπεὶ 4 διαιρεῖ καὶ τὸν 24, καὶ 16, διαι-
ρεθῆσονται δι' αὐτοῦ καὶ $24 + 16 = 40$, καὶ 24
 $- 16 = 8$.

Οἱ ἀριθμοὶ, οἱ μόνον διὰ τῆς μονάδος, καὶ δι'
ἑαυτῶν διαιρούμενοι, καλοῦνται ἀπλοῖ, ἢ πρῶ-
τοι· εἰσὶ δὲ οὗτοι

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,
31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73,
79, 83, 89, 97. κτ.

Οἱ δὲ μὴ μόνον διὰ τῆς 1, καὶ δι' ἑαυτῶν, ἀλλὰ
καὶ δι' ἑτέρων ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν, σύνθετοι,
ἢ παραγόμενα· ὡς

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20,
21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30. κτ.

ἐπεὶ δὲ	$12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3$
	$18 = 2 \times 9 = 2 \times 3 \times 3$
	$30 = 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 5$
	$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Οὐ χαλεπὸν συνιδεῖν, ὅτι πᾶς σύνθετος ἀριθ-
μὸς τὸ παραγόμενόν ἐστιν ἐκ μόνων πρῶτων ἀριθμῶν·
ὥς ἐπὶ πρόκειται παραγόμενόντι, ἀπὸ τούτου τεθῆναι
ἔχουσιν οἱ τοῦτο παράγοντες· ζητεῖται οὖν,

Ὅπως εὐρίσκονται παντὸς ἀριθμοῦ
οἱ ἀπλοῖ παράγοντες.

§. 106. Τότε μόνον ὁ πρῶτος ἀριθμὸς λέγεται
παράγων τὸν σύνθετον, ὅτε οὗτος δι' ἐκείνου ἀκριβῶς
καταμετρεῖται, ἥτοι ἄνευ λειψάνου διαιρεῖται· ἀναγ-
καῖον οὖν διορίσαι, διὰ τίνων πρῶτων ἀριθμῶν πᾶς
σύνθετος εἶη ἂν διαιρέσιμος.

Ἐπει-

Ἐπειδὴ ὁ 10 διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, ἔσαι καὶ πᾶν πολλαπλοῦν τοῦ 10, (§. 56.) ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς χωρὶς τῶν κατ' αὐτὸν μονάδων θεωρούμενος ὡς ὁ 100, ὁ 1000, κτ' οἱ μὴ ἔχοντες μονάδας ἐν τῷ τόπῳ τῶν μονάδων, ἀλλὰ μόνον μηδενικά) διὰ τοῦ 2 διαιρέσιμος· ἔνθεντοι καὶ πάντες οἱ ἀριθμοὶ διαιρεθῆσονται διὰ 2, ὧν αἱ μονάδες διὰ 2 διαιρέσιμοι, ἢ ὧν τὸν κατώτατον τόπον 0, 2, 4, 6, ἢ 8 κατελήφασιν· οὗτοι καλοῦνται ἀριθμοὶ ἄρτιοι, οἵτινες οἷδε εἰσὶ· 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 κτ' οἱ δὲ λοιποὶ ἀκούουσι περιττοί· ὡς 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, κτ'.

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ὁ 10 διαιρεθῆναι διὰ 5 ἔχει, ἔσαι καὶ πᾶς ἀριθμὸς διὰ 5 διαιρέσιμος, οὗ αἱ μονάδες διὰ 5 διαιροῦνται, ἢ οὗ ὁ κατώτατος τόπος τῷ 0, ἢ 5 κατελήφεται·

Ἐκάστη δεκάς διὰ 3 διαιρεθεῖσα δίδωσιν 1 εἰς λείψανον· ὥς 2 δεκάδες διδοῦσι 2, 3 δεκάδες 0, 4 δεκ' 1, 5 δεκ. 2, 6 δεκ. 0, 7 δεκ. 1, 8 δεκ. 2, 9 δεκ. 0, καὶ 10 δεκ. ἢ ἐκάστη ἐκατοντάς δώσουσι τὴν 1 εἰς λείψ.

Ὡς 2 ἐκατοντ. διδοῦσι 2, 3 ἐκατ' 0, 4 ἐκατ' 1, 5 ἐκατ' 2, 6 ἐκατ' 0, 7 ἐκατ. 1, 8 ἐκατ' 2, 9 ἐκατ. 0, καὶ 10 ἐκατ' ἢ ἐκάστη χιλιάς 1 εἰς λείψ.

Ὡς 2 χιλιάδες διδοῦσι 2, 3 χιλ' 0, 4 χιλ. 1, 5 χιλ' 2, 6 χιλ. 0, 7 χιλ. 1, 8 χιλ' 2, 9 χιλ. 0, καὶ 10 χιλ. ἢ ἐκάστη δεκάς χιλιάδων 1 εἰς λείψ. κτ'.

Αἱ δεκάδες ἄρα, ἐκατοντ. χιλιάδες, ἢ δεκάδες χιλιάδων ἀριθμοῦ τινος διὰ 3 διαιρεθεῖσαι δώσουσι τὸ λείψανον, ὃ προκύπτει, ἐὰν τοσαῦται μονάδες διὰ 3 διαιρεθῶσι.

Πᾶς ἀριθμὸς ἄρα διαιρέσιμος ἔσται διὰ 3, οὗ τὰ λείψανα τῶν κατ' αὐτὸν χαρακτηρῶν προσαφροισθέντα κεφάλαιον δώσουσι διὰ 3 διαιρεθῆναι δυνάμενον.

Οὕτως ὁ ἀριθμὸς 54672 εἰν ἂν διὰ 3 διαιρέσιμος, ὅτι τὸ λείψανον τοῦ 5 (διαιρεθέντος διὰ τοῦ 3) $= 2$. τοῦ 4 (διαίρ. διὰ 3) $= 1$. τοῦ 6 $= 0$. τοῦ 7 $= 1$. τοῦ 2 $= 2$. τὸ κεφάλαιον τῶν λειψάνων $2 + 1 + 0 + 1 + 2 = 6$. καὶ $6 : 3 = 2$ ἄνευ λειψάνου.

84557 δὲ οὐκ ἂν διαιρεθεῖ διὰ 3· ὅτι τὸ λείψανον τοῦ 8 $= 2$. τοῦ 4 $= 1$. τοῦ 5 $= 2$. τοῦ 7 $= 1$. τὸ κεφάλαιον τῶν λειψάνων $2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 8$. καὶ $8 : 3 = 2 \frac{2}{3}$.

§. 107. Ρᾶδιον οὖν ἐκ τούτων ἐπιγνωσόμεθα, εἰ ὁ προκειμένος ἀριθμὸς, διὰ 2, 3, ἢ 5 διαιρέσιμος· πότερον δὲ, ὁ αὐτὸς καὶ διὰ 7, 11, 13, 17, 19, ἢ διά τινος ἀνωτέρου πρώτου ἀριθμοῦ διαιρεῖται, ἢ οὐχί, τοῦτο ἡ πείρα διδάξει.

Ἐνθεντοι οὐδεμία μέθοδος ἡμῖν πάρεσι τοῦ πάντας τοὺς ἀπλοῦς παράγοντας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εὐρίσκειν, ἢ τὸ διαιρεῖν αὐτὸν διὰ τῶν κατωτάτων πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7 κτ. ἕως ἂν τὸ πηλίκον πρώτος ἀριθμὸς ᾖ, καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου μετὰ τῶν προηγηθέντων διαιρετῶν πάντας τοὺς ἀπλοῦς παράγοντας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀποτελῇ.

Ἐξω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 2310. ἔσιν οὖν (διὰ τὰ ἀνωτ.)

$$\begin{array}{rcl} 2310 : 2 = 1155 & || & 385 : 5 = 77 \\ 1155 : 3 = 385 & || & 77 : 7 = 11 \end{array}$$

$$\text{ἄρα } 2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11.$$

ἔστι

ἔξω ὁ δοθεὶς ἀριθ. 360. καὶ ἔσαι

$$360 : 2 = 180 \quad || \quad 45 : 3 = 15$$

$$180 : 2 = 90 \quad || \quad 15 : 3 = 5$$

$$90 : 2 = 45$$

$$\text{ἄρα } 360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5.$$

ἔξω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 37800· καὶ ἔσαι

$$37800 : 2 = 18900 \quad || \quad 1575 : 3 = 525$$

$$18900 : 2 = 9450 \quad || \quad 575 : 3 = 175$$

$$9450 : 2 = 4725 \quad || \quad 175 : 5 = 35$$

$$4725 : 3 = 1575 \quad || \quad 35 : 5 = 7$$

$$\text{ἄρα } 37800 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7.$$

ἔξω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 2717· καὶ ἔσαι

$$2717 : 11 = 247 \quad \text{καὶ } 247 : 13 = 19.$$

$$\text{ἄρα } 2717 = 11 \times 13 \times 19.$$

Ἐξω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 311· ἐπειδὴ 311 διὰ 2, 3, ἢ 5 οὐκ ἂν διαιρεθῇ, πειρασώμεθα τῆς διαιρέσεως τούτου διὰ τῶν ἐγγύς ἀνωτέρων πρώτων ἀριθμῶν.

$$\text{ἔσ. δὲ } \alpha' \quad 311 : 7 = 44 \frac{3}{7}$$

$$\beta' \quad 311 : 11 = 28 \frac{1}{11}$$

$$22$$

$$91$$

$$88$$

$$3$$

$$\gamma' \quad 311 : 13 = 23 \frac{12}{13}$$

$$26$$

$$51$$

$$39$$

$$12$$

$$\delta' \quad 311:$$

$$\delta' \quad 311 : 17 = 18 \frac{5}{17}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \hline 141 \\ 136 \\ \hline 5 \end{array}$$

Ἐπειδὴ οὖν 19 μείζων τοῦ πληλικοῦ 18 $\frac{5}{17}$,
 ὁ 19 ἄρα οὐκ ἂν περιέχοιτο 17: κίς ἐν 311. ἔνθεν-
 τοι τὸ πληλίκον τοῦ (311: 19) ἔστιν ἑλάττω τοῦ 17.
 ἄρα οὐχ ὁλοσχερῆς ἀριθμός· οὐδεὶς γὰρ τῶν πρώτων
 ἀριθμῶν, τῶν ἐλαττόνων τοῦ 17, παράγων τοῦ 311
 εὐρεται· ὅπερ ἐγένετο, εἰ ὁ (311: 19) ὁλοσχερῆ
 ἀριθμὸν ἐν τῷ πληλίκῳ ἐδίδου, ἐλάττωνα τοῦ 17· ὥστε
 ὁ 311 δι' οὐδενὸς ἀριθμοῦ διαιρεθήσεται, εἰ μὴ διὰ
 τῆς 1, καὶ δι' ἑαυτοῦ, ἢ ὁ 311 ἐστὶ πρῶτος ἀριθμός.

Ὡσαύτως ῥητέον, ὡς περὶ τοῦ 311, καὶ περὶ
 παντὸς ἀριθμοῦ, ὅτι πρῶτος ἀριθμός ἐστιν, εἰ προάγον-
 τες τὴν διαίρεσιν, ἀνευ τοῦ διαιρέτην τινὰ εὐρεῖν, ἀ-
 ριθμῷ τινι ἀπαντήσομεν, ὡς τῷ 19, μείζονι ὄντι
 τοῦ προηγηθέντος πληλικοῦ, ὡς ὁ 19 τοῦ 18 $\frac{5}{17}$.

§. 108. Ἐν τοῖς τῶν παραγόντων πίναξιν, τοῖς
 τοῦς ἀριθμοῦς, τοῦς μὴ διὰ 2, 3, ἢ 5 διαιρεσίμους,
 περιέχουσιν, ἐκτίθενται οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ, ἐνθα δεί-
 κνυνται καὶ οἱ ἀπλοὶ παράγοντες ἐκάστου παραγο-
 μένου·

Σχόλιον.

Πίνακες τῶν παραγόντων εὐρίσκονται διάφοροι·
 ἀξιολογώτεροι ὅμως εἶναι Φέλκελ τινός, οὕτως ἐπιγρα-
 φόμενοι· Πίνακες πάντων τῶν ἀπλῶν πα-
 ραγόντων τῶν ἀριθμῶν, τῶν διὰ 2, 3, καὶ
 5 μὴ διαιρουμένων ἀπὸ 1 μέχρι 408000.

§. 109. Προκειμένου οὖν ἀριθμοῦ τινος, διαι-
 ρήσομεν αὐτόν, ὅσάκις ἂν ἐγγχωρῇ, διὰ 2, 3, καὶ
 5· τὸ

5. τὸ δ' ἔσχατον πηλίκον, ἐὰν τὸν ἀριθμὸν 408000 μὴ ὑπερβαίνειν, εὐρήσομεν ἐν τοῖς πίναξιν, εἰ πρῶτος ἀριθμὸς, ἢ τὸ πολλαπλοῦν, ἦτοι τὸ παραγόμενόν ἐστιν ἐκ διαφόρων παραγόντων.

ἔστι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 120765· ἔσται οὖν

$$120765 : 3 = 40255$$

$$40255 : 5 = 8051. \text{ καὶ διὰ τῶν πινάκων}$$

$$8051 = 83 \times 97$$

$$\text{ὥς} \quad 120765 = 3 \times 5 \times 83 \times 97.$$

ἕτερον παράδειγμα·

$$693132 : 2 = 346566$$

$$346566 : 2 = 173283$$

$$173283 : 3 = 57761 \text{ καὶ διὰ τῶν πινάκων}$$

$$57761 = 11 \times 59 \times 89.$$

$$\text{ὥς} \quad 693132 = 2 \times 2 \times 3 \times 11 \times 59 \times 89.$$

Σχόλιον.

Ταύτην τὴν μέθοδον τοῦ εὐρίσκειν τοὺς παράγοντας ἡμπορεῖ νὰ τὴν μεταχειρισθῇ κάθε ἓνας, ὁποῦ ἔχει τοιοῦτους πίνακας· ἡ κτήσις τούτων εἶναι εὐκόλος, καὶ οἱ πίνακες εὐκολοκατάληπτοι καὶ εἰς ἓνα, ὁποῦ δὲν ἱεῖται καὶ ἡμιαν Εὐρωπαϊκὴν διάλεκτον, ὡσαύτῃ ὁποῦ δὲν χρειάζονται καὶ ἡμιαν ἀνάπτυξιν περαιτέρω.

§. 110. Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἢ ἀλγεβραϊκὸν ἀπλοῦν σχῆμα (§. 44.). ἕκαστον γράμμα ἔσται εἰς παράγων τοῦ σχήματος· ὡς $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon = \alpha \times \beta \times \gamma \times \delta \times \epsilon$.

Εἰ δὲ σύνθετον, (§. αὐτ.) καὶ πολλαπλοῦν, ἢ παραγόμενον ἐξ ἀπλοῦ, καὶ συνθέτου παράγοντος, ὡς $\alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\delta$, ὁ μὲν ἀπλοῦς παράγων α ἐπιγνωσθήσεται ἐκ τοῦ πᾶσι τοῖς μέλεσιν, ἢ ὅροις τοῦ σχήματος ἐμφιλοχωρεῖν, ὁ δὲ σύνθετος προκύψει.

κῶψει, ἐὰν τὸ παραγόμενον διὰ τοῦ ἀπλοῦ διαιρῇται
ὅθεν συνοραῖν πάρεσιν, ὅτι π. χ.

$$\alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\delta = \alpha(\beta + \gamma - \delta)$$

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta - \alpha\beta\epsilon = \alpha\beta(\gamma + \delta - \epsilon)$$

$$\alpha\beta\gamma - \alpha\gamma\delta - \beta\gamma\delta = \gamma(\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\delta)$$

$$\alpha\alpha - \alpha\beta + \alpha = (\alpha - \beta + 1)$$

$$\alpha\alpha - 7\alpha + \alpha\beta = \alpha(\alpha - 7 + \beta)$$

$$\alpha\beta\delta - \alpha\gamma\delta + \alpha\delta = \alpha\delta(\beta - \gamma + 1)$$

$$6\alpha\beta - 12\beta\gamma - 3\beta = 3\beta(2\alpha - 4\gamma - 1)$$

$$\alpha\beta - \beta\beta = \beta(\alpha - \beta)$$

$$\gamma\gamma - \gamma = \gamma(\gamma - 1)$$

Ἐὰν δὲ τὸ σύνθετον σχῆμα τὸ παραγόμενον ἢ
ἐκ πλειόνων συνθέτων παραγόντων, μαθησόμεθα τὴν
εἰς τοὺς παράγοντας τούτου ἀνάλυσιν δι' ἐπιμελοῦς μέ-
νης ἀσκήσεως·

$$\omega\varsigma \alpha\alpha + 2\alpha\beta + \beta\beta = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$$

$$\alpha\alpha - 2\alpha\beta + \beta\beta = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)$$

$$\alpha\alpha - \beta\beta = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$$\alpha\alpha + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)(\alpha + 1)$$

$$\alpha\alpha - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)(\alpha - 1)$$

$$\alpha\alpha - 1 = (\alpha + 1)(\alpha - 1)$$

$$\alpha\alpha - \beta\beta + 2\beta\gamma - \gamma\gamma = (\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)$$

Σχόλιον.

Ὁ φιλόπονος ἀναγνώστης παρατηρῶν τοὺς κανό-
νας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τῆς προσθέσεως, καὶ τῶν
σημείων, ἂν πολλαπλασιάσῃ τὰ ἐν παρενθέσει σχήμα-
τα, ἵτοι τοὺς παράγοντας μετ' ἀλλήλων, θίλει εὖρει
ἀλη-

ἀληθῶς παραγόμενα τὰ πρὸς ἀρισερᾶν κείμενα σχήματα.

§. 111. Ἐπειδὴ πᾶν παραγόμενον αβγδε οὐ μόνον δι' ἐκάστου ἀπλοῦ παράγοντος, ἀλλὰ καὶ δι' ἐκάστου παραγομένου, προκύπτοντος ἐκ τῶν παραγόντων, ἀνὰ 2, ἀνὰ 3, ἀνὰ 4, κτ' λαμβανομένων, ἄνευ λειψάνου διαιρεθῆναι ἔχει, εὐρήσομεν ἐκάστου ἀριθμοῦ πάντας τοὺς διαιρέτας, εἰ πρῶτον πάντας τοὺς ἀπλοὺς παράγοντας, εἶτα δὲ πάντα τὰ παραγόμενα, τὰ προκύπτοντα, ἀνὰ 2, ἀνὰ 3, κτ' ἐκείνων λαμβανομένων, ζητοῦμεν ἔνθεντοι.

Ἐπεὶ αβγδε = α Χ β Χ γ Χ δ Χ ε· οἱ διαιρέται ἔσονται,

α' α, β, γ, δ, ε.

α' αβ, αγ, αδ, αε, βγ, βδ, βε, γδ, γε, δε.

γ' αβγ, αβδ, αβε, αγδ, αγε, αδε, βγδ, βγε, βδε, γδε.

δ' αβγδ, αβγε, αβδε, αγδε, βγδε.

ε' αβγδε, καὶ 1 (§. 105.)

Ἐπειδὴ ααβγδ = α Χ α Χ β Χ γ Χ δ· ἔσονται οἱ διαιρέται,

α' α, β, γ, δ.

β' αα, αβ, αγ, αδ, βγ, βδ, γδ.

γ' ααβ, ααγ, ααδ, αβγ, αβδ, αγδ, βγδ.

δ' ααβγ, ααβδ, ααγδ, αβγδ.

ε' ααβγδ, καὶ 1.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ $\alpha\alpha\alpha\beta\gamma = \alpha \times \alpha \times \alpha \times \beta \times \gamma$ ἔσονται οἱ
διαίρεται.

α' α, β, γ .

β' $\alpha\alpha, \alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma$.

γ' $\alpha\alpha\alpha, \alpha\alpha\beta, \alpha\alpha\gamma, \alpha\beta\gamma$.

δ' $\alpha\alpha\alpha\beta, \alpha\alpha\alpha\gamma, \alpha\alpha\beta\gamma$.

ε' $\alpha\alpha\alpha\beta\gamma$ καὶ 1.

Ὡσαύτως ἐπειδὴ $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$.
ἔσονται οἱ διαίρεται·

α. 2, 3, 5, 7, 11

$$\beta. \left\{ \begin{array}{l} 2 \times 3 = 6 \\ 2 \times 5 = 10 \\ 2 \times 7 = 14 \\ 2 \times 11 = 22 \\ 3 \times 5 = 15 \end{array} \right. \quad \left\| \begin{array}{l} 3 \times 7 = 21 \\ 3 \times 11 = 33 \\ 5 \times 7 = 35 \\ 5 \times 11 = 55 \\ 7 \times 11 = 77 \end{array} \right.$$

$$\gamma. \left\{ \begin{array}{l} 2 \times 3 \times 5 = 30 \\ 2 \times 3 \times 7 = 42 \\ 2 \times 3 \times 11 = 66 \\ 2 \times 5 \times 7 = 70 \\ 2 \times 5 \times 11 = 110 \end{array} \right. \quad \left\| \begin{array}{l} 2 \times 7 \times 11 = 154 \\ 3 \times 5 \times 7 = 105 \\ 3 \times 5 \times 11 = 165 \\ 3 \times 7 \times 11 = 231 \\ 5 \times 7 \times 11 = 385 \end{array} \right.$$

$$\delta. \left\{ \begin{array}{l} 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210 \\ 2 \times 3 \times 5 \times 11 = 230 \\ 2 \times 3 \times 7 \times 11 = 462 \\ 2 \times 5 \times 7 \times 11 = 770 \\ 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 1155 \end{array} \right.$$

ε' 1, καὶ 2310.

Ἐπειδὴ

Ἐπειδὴ $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ ἔσονται οἱ διαιρέται·

$$\alpha' \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 5 \end{cases}$$

$$\beta' \begin{cases} 2 \times 2 = 4 \\ 2 \times 3 = 6 \\ 2 \times 5 = 10 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 3 \times 5 = 15 \end{cases}$$

$$\gamma' \begin{cases} 2 \times 2 \times 2 = 8 \\ 2 \times 2 \times 3 = 12 \\ 2 \times 2 \times 5 = 20 \\ 2 \times 3 \times 3 = 18 \\ 2 \times 3 \times 5 = 30 \\ 3 \times 3 \times 5 = 45 \end{cases}$$

$$\delta' \begin{cases} 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24 \\ 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40 \\ 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36 \\ 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60 \\ 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90 \end{cases}$$

$$\epsilon' \begin{cases} 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72 \\ 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120 \\ 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180 \end{cases}$$

$$\zeta' \begin{cases} 1 \text{ καὶ } 360 \end{cases}$$

Τελευταῖον, ἐπειδὴ $2717 = 11 \times 13 \times 19$ ἔσονται οἱ διαιρέται·

$$\alpha' \begin{cases} 11 \\ 13 \\ 19 \end{cases}$$

$$\beta' \begin{cases} 11 \times 13 = 143 \\ 11 \times 19 = 209 \\ 13 \times 19 = 247 \end{cases}$$

$$\gamma' \begin{cases} 1 \text{ καὶ } 2717 \end{cases}$$

§. 112. Ἐὰν οὖν δύο ἀριθμῶν προκειμένων ἐκάτερον εἰς τοὺς κατ' αὐτὸν ἀπλοῦς παράγοντας διατέμνωμεν, ἔσονται γνωστοὶ καὶ οἱ ἀριθμοὶ, οἱ ἀμφοῖν κοινοί· ζητοῦντες δὲ καὶ τὰ παραγόμενα ἐκ τούτων τῶν παραγόντων ἀνὰ 2, ἀνὰ 3, ἀνὰ 4, κτ. εἰλημμένων, εὐρήσο.

ρήσασμεν καὶ πάντας τοὺς κοινοὺς αὐτῶν διαιρέτας, ἐν οἷς τὸ παραγόμενον ἐκ πάντων τῶν κοινῶν ἀπλῶν παραγόντων αἰετοτε τὸ μέγιστον ἔσται.

ἐπεὶ δὴ τούτων τοῦ $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$ · καὶ
 $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ ·

οἱ κοινοὶ ἀπλοὶ παράγοντες εἰσὶ 2, 3, 5. ἄρα καὶ οἱ κοινοὶ αὐτῶν διαιρέται.

$$\alpha' \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 5 \end{cases}$$

$$\beta' \begin{cases} 2 \times 3 = 6 \\ 2 \times 5 = 10 \\ 3 \times 5 = 15 \end{cases}$$

$$\gamma' \begin{cases} 1 \text{ καὶ} \\ 30 \end{cases}$$

καὶ ὁ μέγιστος τούτων κοινὸς διαιρέτης $2 \times 3 \times 5 = 30$.

Ἐπεὶ δὴ πολλάκις ἀναγκαῖα ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν, καὶ ἡ μέθοδος τοῦ πάντα ἀριθμὸν εἰς τοὺς κατ' αὐτὸν ἀπλοὺς παράγοντας λύειν, μάλιστα τῷ μὴ τοὺς τῶν παραγόντων πίνακας ἀνὰ χεῖρας ἔχοντι, ζητήτεον ἑτέραν τινὰ ἰδιαιτέραν μέθοδον ἐκκαλύψαι τοῦ

Ὅποιωνοῦν δύο ἀριθμῶν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην εὐρίσκειν·

§. 113. Ἐξω ὁ μείζων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν α , ὁ ἐλάττω β , καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης χ · ἐπεὶ δὴ τὸ χ διαιρεῖ τὸ β , οὐκ ἔχει μείζον εἶναι τοῦ β , ἴσον δὲ καὶ μάλα, εἰ τὸ α διὰ τοῦ β διαιρέσιμον· διαιρούσ.ν οὖν τὸ α διὰ τοῦ β τεθήτω τὸ πηλίκον εἶναι μ · καὶ τὸ λείψανόν ἔσται $\alpha - \mu\beta = \sigma$ · καὶ ἐκτοῦ ἐπομένου $\chi = \beta$ · ἢ τὸ λείψανόν $\alpha - \mu\beta = \gamma$ ἔσται ἐλάττω τοῦ διαιρέτου β . καὶ τηλικαῦτα ἀνάγκη πᾶσα τὸ χ διελεῖν καὶ γ · τὸ γὰρ χ διαιρεῖ τὸ

τὸ β'. ἄρα καὶ τὸ μβ. καὶ εἰ τὸ χ διαιρεῖ τὸ α, ἄρα
τὸ χ διαιρεῖ καὶ τὴν τούτων διαφορὰν $\alpha - \mu\beta = \gamma$

Ἐὰν οὖν α: β οὐδὲν ὑπολείπει, ἔσαι $\chi = \beta$
ἔαν δ' ὑπολείπει τὸ λείψ. γ, ἔσαι τὸ χ καὶ ὁ μέγιστος
κοινὸς διαιρέτης τοῦ β καὶ γ

Εἰ οὖν β: γ οὐδὲν ὑπολείπει, ἔσαι $\chi = \gamma$ εἰδὲ
β: γ ὑπολείπει λείψ. τὸ δ, ἔσαι χ καὶ ὁ μέγιστος
κοινὸς διαιρέτης τοῦ γ καὶ δ

Εἰ οὖν γ: δ οὐδὲν ὑπολείπει, ἔσαι $\chi = \delta$ εἰ-
δὲ γ: δ ὑπολείπει ε, ἔσαι χ καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαι-
ρέτης τοῦ δ καὶ ε

Εἰ οὖν δ: ε οὐδὲν ὑπολείπει, ἔσαι $\chi = \varepsilon$ εἰδὲ
δ: ε ὑπολείπει ζ, ἔσαι χ καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέ-
της τοῦ ε καὶ ζ ὥς αὐτοὶς χ ἴσον τῷ ζ, εἰ τὸ ε: ζ οὐ-
δὲν ὑπολείπει

Ἐὰν οὖν ὁ μείζων ἀριθμὸς διὰ τοῦ ἐλάττονος διαι-
ρῇται, ὁ ἐλάττων διὰ τοῦ λειψάνου, τὸ α' λείψ.
διὰ τοῦ β' τὸ β' διὰ τοῦ γ' τὸ γ' διὰ τοῦ δ'. κτ'
μέχοις ἂν τὸ λείψ. ἴσον τῷ ὁ γένηται, ὁ ἔσχατος διαιρέ-
της ἔσαι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθ-
μῶν ἢ

Ἐὰν α': α: β = μ καὶ $\alpha - \beta\mu = \gamma$

β': β: $\frac{\beta\mu}{\gamma} = \nu$ καὶ $\beta - \gamma\nu = \delta$

γ': γ: $\frac{\gamma\nu}{\delta} = \pi$ καὶ $\gamma - \delta\pi = \varepsilon$

δ': δ: $\frac{\delta\pi}{\varepsilon} = \rho$ καὶ $\delta - \varepsilon\rho = \zeta$

ε': ε: $\frac{\varepsilon\rho}{\zeta} = \sigma$ καὶ $\varepsilon - \zeta\sigma = \theta$

ἔσαι οὖν $\chi = \zeta$

G

Σχόλ.

Σχόλιον.

Διορισθήτωσαν τὰ γράμματα δι' ἀριθμῶν, οἱ ὅποιοι ἂς ἀντικαταστῶν ἀντὶ τούτων, καὶ ἔξαι δῆλα τὰ διὰ γραμμάτων λεγόμενα.

Παράδ.

Ἐξωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ 2310, καὶ 360.

$$\begin{array}{r} 2310 : 360 = 6 \\ 2160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 360 : 150 = 2 \\ 300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 150 : 60 = 2 \\ 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 : 30 = 2 \\ 60 \end{array}$$

0

ὁ 30 ἄρα ἐστὶν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 2310, καὶ 360.

Διαιρεθήτω ἔτι 58604 καὶ 4665, καὶ οὐδεὶς κοινὸς εὐρεθήσεται διαιρέτης, εἰμὴ ἡ μονάς.

Ἀξιώματα

§. 114. α'. Ἐὰν δύο, ἢ πλείους ἴσαι ποσότητες διὰ δύο, ἢ πλείονων ἴσων ποσοτήτων, ἢ, ὃ ταυτόν ἐστι, διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου διαιρεθῶσιν, ἔξαι καὶ τὰ τούτων πηλικά ἴσα.

$$\alpha = \beta = \gamma \quad \chi = \psi = \omega.$$

$$\text{ἔξαι οὖν} \quad \frac{\alpha}{\chi} = \frac{\beta}{\psi} = \frac{\gamma}{\omega} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\chi} = \frac{\beta}{\chi} = \frac{\gamma}{\chi}$$

ἐν

ἐν ἀριθμοῖς*

$$24 = 6 \cdot 4 = 3 \cdot 8. \quad \text{καὶ} \quad 3 = 3 = 3. \quad \text{ἄρα}$$

$$\frac{24}{3} = \frac{6 \cdot 4}{3} = \frac{3 \cdot 8}{3}. \quad \text{τὸ γὰρ πηλίκον ἐστὶν 8.} \quad \text{τὸ}$$

αὐτὸ κρατεῖ, καὶ συμπεπλεγμένων οὐσῶν τῶν ποσοτήτων.

β'. Ἰσαι ποσότητες, δι' ἀνίσων διαιρεθεῖσαι, παρέχουσι πηλικά ἄνισα· ἐνθα τὸ πηλίκον μείζον ἔσται τοῦ ἑτέρου, εἰ ὁ διαιρέτης ἐλάττων εἴη τοῦ ἑτέρου·

$$\alpha = \beta. \quad \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\delta}. \quad 3 = 2 \cdot 4. \quad \frac{3}{4} < \frac{2 \cdot 4}{2} \\ \gamma > \delta. \quad \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\delta}. \quad 4 > 2. \quad \frac{3}{4} < \frac{2 \cdot 4}{2}$$

γ'. Ἄνισαι ποσότητες, δι' ἴσων διαιρεθεῖσαι, δώσουσι καὶ πηλικά ἄνισα· τούτων δὲ μείζον ἔσται τὸ ἐκ τῆς μείζονος διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου προκύπτον·

$$\alpha > \beta. \quad \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}. \quad 8 > 6. \quad \frac{8}{2} > \frac{6}{2} \\ \gamma = \delta. \quad \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}. \quad 2 = 2. \quad \frac{8}{2} > \frac{6}{2}$$

δ'. Ἐὰν ποσότης τις μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθῇ, καὶ διαιρεθῇ, οὐδεμίαν τροπὴν ὑφίσταται· ὁ ἐστὶν, ἢ ποσότης μένει ἢ αὐτὴ· ὅσων γὰρ τῶ πολλαπλασιασμῷ αὐξεται, τοσοῦτω μειοῦται διὰ τῆς διαιρέσεως· μένει ἄρα ἢ αὐτὴ, ἣτις πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τῆς διαιρέσεως ἦν· ὡς

$$6 \times 10 : 10 = 6. \quad \text{καὶ} \quad \alpha \times \beta : \beta = \alpha. \quad \eta \\ \frac{\alpha\beta}{\beta} = \alpha$$

ε'. Ἐὰν ὁ διαιρετέος, καὶ ὁ διαιρέτης ἅμα διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος ἦτοι πολλαπλασιασθῶσι, ἢ διαιρεθῶσι, τὸ πηλίκον μένει ἀμετάβλητον·

Ἐξω 20 ὁ διαιρετέος, καὶ 4 ὁ διαιρέτης, ὧν τὸ πηλίκον 5·

$$20 \times 8 = 160 \cdot \text{καὶ } 4 \times 8 = 32 \cdot \frac{160}{32} = 5 \cdot$$

ὡσαύτ, $20 : 2 = 10 \cdot$ καὶ $4 : 2 = 2 \cdot$

$$\frac{10}{2} = 5 \cdot$$

Καὶ ἐν γένει·

Ἐξω α ὁ διαιρετέος, καὶ β ὁ διαιρέτης· καὶ τὸ τούτων πηλίκον Κ· ἥτοι $\frac{\alpha}{\beta} = K \cdot$ πολλαπλασιασθήτω α καὶ β ἄμφω ἐπὶ τὸ ν· καὶ τὸ πηλίκον μένει αὐθις Κ· ὡς $\frac{\alpha \cdot \nu}{\beta \cdot \nu} = K \cdot$ τὸ γὰρ ν τοῦ διαιρετέου

ἀναιρούμενον ὑπὸ τοῦ ν τοῦ διαιρέτου ὑπολείπει αὐθις $\frac{\alpha}{\beta}$ διαιρεθήτωσαν ἄμφω διὰ τοῦ ν· καὶ τὸ πηλίκον ἔσαι αὐθις Κ· οἷον $\frac{\alpha : \nu}{\beta : \nu} = \frac{\alpha}{\beta} = K \cdot$

Ὁ δὲ λόγος προφανής· ἄμφω γὰρ μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθέντες αὐξάνονται ἐπίσης, καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρεθέντες μειοῦνται ἐπίσης· ὁ διαιρέτης ἄρα περιέχεται ἐν τῷ διαιρετέῳ, ὅσκις καὶ πρότερον· ἄρα καὶ πηλίκον τὸ αὐτό·

ζ· Ἐάντις πληθὺς ποσοτήτων, διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως (§. 16.) συνημμένη, διαιρεθῇ δι' οἴαν σουν ποσότητος, τὸ πηλίκον ἔσαι τὸ αὐτὸ τῇ ποσότητι τῇ προκύπτουσῃ, εἰ ἐκάστης τῶν ποσοτήτων ἐν μέρει διὰ τοῦ δεθέντος διαιρέτου διαιρεθείσης, τὰ ἐν μέρει πηλίκια προσαθροισθῇ·

Ἐξωσαν ποσότητες α, β, γ, δ κτ· τὰ ἐν μέρει
πηλί-

πηλίκᾳ τοῦ $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\delta}{\nu}$ ἄμα λη-
φθέντα ἔσαι ἴσα τῷ πηλίκῳ τοῦ $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{\nu}$.

ἢ ἐν ἀριθμοῖς·

$$\left[+ \frac{4}{2} + \frac{6}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} = \frac{4+6+8+12}{2} \right. \\ \left. = \frac{30}{2} = 15 \right]$$

Χάριν τῶν πρωτοπειρῶν δευχθήσεται τοῦτο σα-
φέστερον οὕτως· Ἐξω τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ἐν
μέρει πηλίκων, εἰ ἐνάση ποσότης ἐν μέρει διαιρεῖται,

$$= K \cdot \text{ ἥτοι } \frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\delta}{\nu} = K \cdot$$

αἱ δὲ αὗται ποσότητες εἰσὶ πάντα ἴσαι ἀλλήλαις, ἢ δῆ-
λον· ἀλλὰ διὰ τὸ (§. 79. α.) ἔσονται ἴσαι, καὶ εἰ μετὰ τῆς
αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιασθήσονται· κληθήτω

αὕτη $= \nu$ · πολλαπλασιασθήτω οὖν $\frac{\alpha}{\nu}$ μετὰ τοῦ ν ,

καὶ $\frac{\beta}{\nu}$ μετὰ τοῦ ν , καὶ $\frac{\gamma}{\nu}$ μετὰ τοῦ ν , καὶ

$\frac{\delta}{\nu}$ μετὰ τοῦ ν · καὶ τελευταῖον καὶ K μετὰ

τοῦ ν · κατὰ τὸ δ' τοῦδε τοῦ §. ἔσαι $\frac{\alpha}{\nu} \times \nu$

$$+ \frac{\beta}{\nu} \times \nu + \frac{\gamma}{\nu} \times \nu + \frac{\delta}{\nu} \times \nu$$

$$= \alpha + \beta + \gamma + \delta \cdot \text{ καὶ } K \times \nu = K \nu \cdot \text{ ὥστε }$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = K \nu \cdot \text{ ἢ }$$

$(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = K\nu$ κατὰ τὸ α' · τοῦδε ἔσαι καὶ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = K\nu$ ἀλλὰ διὰ τὸ

$$\delta' \cdot \frac{K\nu}{\nu} = K \cdot \overset{\nu}{\text{ἄρα}} \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{\nu} = K$$

ἢν δὲ, ὡς ἐν ἀρχῇ τῆς δεΐξεως ὑποτίθεται,

$$\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\delta}{\nu} = K \cdot \text{ἔσι δὲ καὶ}$$

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{\nu} = K \cdot \text{ἄρα καὶ}$$

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\delta}{\nu}$$

(§. 48. δ'.)

Συντομώτερον δὲ οὕτως ἡ δεΐξις ἐπα-
χθίσεται.

$$\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\delta}{\nu} = K, \quad \nu, \text{ ἦτοι πολλαπλ.}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = K\nu \quad \text{ἐπὶ τὸ } \nu'$$

$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)}{\nu} = K, \quad \nu, \text{ ἦτοι διαιρ. διὰ τοῦ } \nu'$$

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\delta}{\nu}.$$

Ταῦτα ὡς καθόλου ἀρμόζει πᾶσι τοῖς ἀριθμοῖς·

ζ'. Ἐάν ὁ διαιρετέος ἢ διαφορὰ δυοῖν ποσοτήτων, ὡς $\alpha - \beta$, ὁ δὲ διαιρέτης ὁμοιοῦν ἀριθμὸς ἢ, αἶον ν , ἔσαι

ἔσαι $\alpha - \beta = \frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}$. τούτῃ, τὸ αὐτὸ ἔστι, τὸ

τὰς ποσότητας τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεῖσθαι ἀπ' ἀλλήλων, καὶ τὴν διαφορὰν διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ διαθέντος διαιρετέου, τῷ, ἑκατέραν ποσότητα ἐν μέρει διαιρεῖσθαι, καὶ τὰ πηλίκα ἀφαιρεῖσθαι ἀπ' ἀλλήλων. π. χ.

$$\frac{15}{3} - \frac{6}{3} = \frac{15}{3} - \frac{6}{3}. \quad \text{ἔστι γὰρ } 15 - 6 = 9.$$

$$\text{καὶ } 9 : 3 = 3. \quad \text{ἔστι δὲ καὶ } \frac{15}{3} = 5. \quad \text{καὶ } \frac{6}{3}$$

$$= 2. \quad \text{ὥστε } 5 - 2 = 3. \quad \text{δεικτέον τοῦτο καὶ ἐν γένει.}$$

$$\frac{\alpha - \beta}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}. \quad \text{ἡ διαφορὰ τοῦ } \alpha - \beta$$

κληθήτω δ' ὥστε $\alpha - \beta = \delta$. διὰ τὸ α' τοῦ-
δε τοῦ §. ἔσαι $\frac{\alpha - \beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$. θεωρηθήτωσαν ἡ-

δη τὰ δύο ἴσα ποσά ἀνὺ τοῦ διαιρετέου ν , ἥτοι μόνον
 $\alpha - \beta = \delta$. εἰν ἀμφοῖν $+ \beta$ προσεθῇ, μενοῦσιν
αἰθις ἴσα (§. 48. α'). ἥτοι $\alpha - \beta + \beta = \delta + \beta$.
ἀλλὰ $\alpha - \beta + \beta = \alpha$. (§. 37.) ἄρα $\alpha = \delta$
 $+ \beta$. καὶ διὰ τὸ α' τοῦδε τοῦ §. $\frac{\alpha}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$

$+ \frac{\beta}{\nu}$. εἰν ἴσον ἀπὸ ἴσου ἀφαιρεθῇ, αἱ διαφοραὶ ἔ-
σονται ἴσαι (§. 53. α'). ἔσω $\frac{\beta}{\nu} = \frac{\beta}{\nu}$. καὶ ἀφαι-

ρεθήτω ἀπ' ἀμφοῖν $\frac{\beta}{\nu}$. ἔσαι οὖν $\frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}$ (§. 49.)

$$= \frac{\delta}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}. \quad \text{ὅ ἐστιν } \frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$$

(§. 37.)

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ $\frac{\alpha - \beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$. ἐν ἀρχῇ, καὶ $\frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}$
 $= \frac{\delta}{\nu}$, ὡς ἤδη δέδεικται· ἔσται ἄρα καὶ $\frac{\alpha - \beta}{\nu}$
 $= \frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}$: (§. 48, δ'.)

Συντομώτερον.

$$\frac{\alpha - \beta}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}.$$

Δειξις.

Ἐξω $\frac{\alpha - \beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$: ν. διαιρ. διὰ ν
 $\frac{\alpha - \beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$

Ἀὔθις $\frac{\alpha - \beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$
 $+ \beta = + \beta$ πρὸς : + β.
 $\frac{\alpha - \beta + \beta}{\nu} = \frac{\delta + \beta}{\nu}$, ἤτοι
 $\frac{\alpha}{\nu} = \frac{\delta + \beta}{\nu}$: ν. διαιρ. διὰ ν
 $\frac{\alpha}{\nu} = \frac{\delta}{\nu} + \frac{\beta}{\nu}$

$\frac{\beta}{\nu} = \frac{\beta}{\nu}$, ἀφαιρ. $\frac{\beta}{\nu}$

$\frac{\alpha - \beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}$, ταυτέσιν

$\frac{\alpha - \beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$

Ἐπειδὴ οὖν $\frac{\alpha - \beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$ ἐν ἀρχῇ.

Ἦδη δὲ $\frac{\alpha - \beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$. ἔσται (§. αὐτ.) καὶ $\frac{\alpha - \beta}{\nu}$
 $= \frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}$.

Περὶ

Περὶ τῶν κλασμάτων

§. 115. Ἐπὶ τῆς διαιρέσεως, ὁ διαιρέτης ἢ ἐλάσσων τοῦ διαιρετέου, περιεχόμενος ἐν τούτῳ ἅπαξ, ἢ πολλάκις, ὃ διὰ τοῦ πηλίκου γνωσθὲν ἡμῖν ἐγίνετο· ἐνίσταται δὲ καὶ λείψανον ὑπελείπεται· ἀλλὰ ληφθήτω ἢ ὅ ὁ διαιρέτης μείζων τοῦ διαιρετέου· καὶ α' ἐπὶ τῆς μονάδος· ἢτοι διαιρεθῇτω ἢ μονὰς διὰ 2, 3, 4, κτ' ὅπερ γραφόμενον οὕτως ἀποδοθήσεται (§. 85.) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, κτ' ἐνταῦθα ὁ διαιρέτης οὐδ' ἅπαξ τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχεται· δύναται μὲντοι μονὰς τις ἢτοι ἐνεργεία, ἢ γοῦν ἐπινοία αἰέποτε εἰς 2, 3, καὶ πλείων μέρη διαιρεθῆναι· ταῦτα δὲ, (τὰ μέρη) ἢ δῆλον, οὐχ ὅλα, ἀλλὰ μέρη εἰσὶ τοῦ ὅλου, **Κ λ α σ μ α τ α** καλούμενα·

Οὕτω τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{1}{2}$ ἐστὶν ἢ ἡμίσεια μονὰς, καὶ καλεῖται ἡμισυ· τοῦ $\frac{1}{3}$, τὸ γ' μέρος τῆς μον'· τριτημόριον λεγόμενον· τοῦ $\frac{1}{4}$, τὸ δ' μέρος τῆς μον'· τεταρτημόριον λεγόμεν. κτ' ὅλως δὲ, ταῦτα τὰ κλάσματα, ἅπερ ἅμα καὶ τὸ πηλίκον παριζῶσι, (§. αὐτ. σχ.) τὴν προσηγορίαν εἰλήφασιν ἐκ τοῦ πλήθους τῶν μερῶν, εἰς α' ἢ μονὰς διήρηται, ὡς καὶ κατωτέρω ρηθήσεται.

Σχόλιον.

Ἐὰν ἀριθμὸς τις διάτινος ἄλλου, ὡς ὁ 7 διὰ 3, δὲν διαιρῇται, τοῦτο νοητέον οὕτως· ὅτι ὁμοίᾳ τὸ πηλίκον δὲν ἢμπορεῖ νὰ παρασταθῇ δι' ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, ὅχι ὅμως, ὅτι εἶναι ἀπολύτως ἀδύνατον νὰ λάβωμεν ἰδέαν τοῦ πηλίκου· νῆει μοι μίαν γραμμὴν 7 ποδιαίαν· ἢ ὅποιαν χωρὶς ἀμβολίαν εἶναι δυνατόν νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἴσα μέρη, τῶν ὁποίων μερῶν τοῦ μεγέθους λαμβάνομεν καὶ πάνυ τὴν ἰδέαν.

§. 116. Ἀλλὰ καὶ εἰς ὅσα ἂν βούλῃ μέρη, τὴν μονάδα διαιρεθῇναι ἔχειν οὐ χαλεπὸν συνιδεῖν· εἰς 5 γὰρ, 6, 10, 30, 80, 1000, καὶ εἰς ἔτι πλείω, ἢ ἐλάττω μέρη ταύτην διελὼν οὕτω ταῦτα δηλώσεις $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{30}, \frac{1}{80}, \frac{1}{1000}$ κτ'· τοῦτο ὃ ἂν εἴη τῆς μονάδος τὸ ε' 5' 1' λ' π' καὶ ἀξὸν μέρος.

§. 117. Ἐὰν οὖν τῆς μονάδος εἰς ὅσαδηποτοῦν μέρη διαιρεθῇσης, π. χ. εἰς 3, ἢ 4, ἢ κτ' ἐν τούτων ληϞθῇ, ὡς $\frac{1}{3}$, ἐξεῖ σοι βουλομένῳ καὶ ἔτι ἐν μέρος ἐκείνῳ προσθεῖναι· καὶ οὕτως ἔξεις $\frac{1}{3}$, καὶ ἔτι $\frac{1}{3}$. ἢ τοι δύο τριτημόρια, ἢ τρίτα, οὕτω ταῦτα γράψας ($\frac{2}{3}$)· καὶ ἔτι ἐν δὲ προσθεῖς ἔξεις $\frac{3}{3}$. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον χωροῦντός σου, καὶ ἀεὶ ἐν ἴσῳ μέρος τοῖς προληϞθεῖσι προσαφροίζοντος, προκύψουσι ($\frac{4}{3}$)· δ'· τρίτα· ($\frac{5}{3}$)· ε'· τρίτα, κτ' ἅπερ πάντα κλάσματα καλοῦνται· ὡς $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1000}{4}$, κτ'· εἰσι κλάσματα, ὡσαύτως ἀναφνεύτα, εἴτουν τῷ $\frac{1}{4}$ διηνεκῶς καὶ ἑτέρου ἴσου μέρους προσθεμένου· τὰ οὖν κλάσματα, ὅποια ἂν ᾖσι, τῷ εἰρημένῳ τρόπῳ ἀνακίπτουσι· π. χ. $\frac{7}{25}$. ἐνταῦθα δηγήται ἡ μονὰς εἰς 25 ἴσα μέρη· καὶ ἀεὶ ἐνός τούτων λαμβανομένου, συμπεπλήρωται τὰ 7 μέρη, τουτέστιν $\frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{7}{25}$. καὶ τοῦτο γίνε-
ται ἐπὶ πάντων, ἡλικὸς ἂν ἢ ὁ διαιρετής.

§. 118. Ἐὰν ὁ διαιρετής ἴσος ἢ τῷ διαιρετέῳ, τὸ πηλίκον ἔσαι = 1· (§. 84. σχ.) ἐλάττονος δὲ ὄντος, ἢ ὁ διαιρετέος, τὸ πηλ. ἔσαι μείζον τῆς 1· τότε γὰρ περιέχεται ὁ διαιρετής τῷ διαιρετέῳ ἅπαξ, ἢ τοσάκις· μείζονος δὲ, ἢ ὁ διαιρετέος, τὸ πηλίκον ἐξ ἀνάγκης ἐλάττωθήσεται τῆς 1· (ἐὰν ὁ ἐλάττων ἀριθμὸς διὰ τοῦ μείζονος διαιρῇται, προκύπτει πηλίκον ἐλάττον τῆς 1· π. χ. εἰ γραμμὴ δύο παδῶν εἰς 3· ἴσα μέρη διατμηθῇ, ἕκασον τούτων προφανῶς ἐλάττον ἔσαι

τοῦ

τοῦ πολὸς) τὰ κλάσματα, ὧν ὁ διαιρέτης μείζων τοῦ διαιρετέου, ὃ ἐστὶ τὰ ἐλάττωνα τῆς 1, καλοῦνται γνήσια· ὡς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, κτ'. ὧν] δὲ ὁ διαιρέτης ἐλάσσων τοῦ διαιρετέου, νόθα· οἷον $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{2}$, κτ'. τὰ τοιαῦτα ἀμεινον ἂν διὰ δύο μελῶν, ἢ ὅρων παρασῶν, τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου διαιρεθέντος, καὶ τῷ ὁλοσχερεῖ πηλίκῳ τοῦ λειψάνου παραρτηθέντος, ὑπογραφομένου τῷ λειψάνῳ καὶ τοῦ διαιρέτου· ὡς $\frac{13}{7}$ εἴη ἂν $= 1 + \frac{6}{7}$ καὶ $\frac{8}{3} = 1 + \frac{5}{3}$. (§. 86. σχ.) τὰ δὲ ἴσον τὸν διαιρετέον τῷ διαιρέτῃ ἔχοντα εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις· ὡς $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{2}{3} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{100}{100} = 1$ · ἐν πᾶσι γὰρ τούτοις ὁ διαιρέτης ἀπαξ τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχεται.

§. 119. Ὁ μὲν ἐπὶ τὴν γραμμὴν ἀριθμὸς, ἢ ὁ διαιρετέος, ἀκούει Ἀριθμητῆς, ὡς τὰ παραληφθέντα μέρη τῆς εἰς ἴσα μέρη διαιρεθείσης μονάδας ἀριθμῶν, ἢ ὡς δεικνύων, ὅποσα μέρη τῆς μονάδος ἐπὶ τοῦδε τοῦ κλάσματος παρείληπται· ὁ δ' ὑπ' αὐτὴν, ἢ τοι ὁ διαιρέτης, Παρανομασίης κέκληται, ὡς, εἰς ὅσα μέρη ἴσα ἢ μονὰς διήρηται, ἐκφέρων· ἄμφω δὲ κοινῷ ὀνόματι, ὅροι τοῦ κλάσματος.

§. 120. Ἐπειδὴ διὰ τῶν γραμμάτων πᾶσα ποσότης, ἢ ἀριθμὸς δηλοῦται· καὶ κλάσματα, ὡς ὁῦλον, ταῦτα διασημάναι ἔχουσι· π. χ. $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\nu}{\nu}$. ἔνθα ὡσαύτως τὸ μὲν ἄνω ἀριθμητῆς, τὸ δὲ κάτω παρανομασίης καλεῖται, ἀπαγγελλόμενα διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$, α β μόριον· $\frac{\gamma}{\delta}$, γ δ μόριον· εἰ δὲ καὶ τούτων ὁ ἀριθμητῆς ἢ ὁ αὐτὸς τῷ παρανομασίῃ, ἔσαι $= 1$ · τότε γὰρ ὁ διαιρέτης ἀπαξ τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχεται.

ριέχεται· ἀλλὰ καὶ ἀλλή-
 ἑκάστων γὰρ τούτων = 1

$$= \frac{\delta}{\delta} = 1.$$

§. 121. Ἐπὶ τῆς
 πηλίκᾳ διαφόρων παραδείγ-
 καί τοι τοῦ διαιρέτου, καὶ
 σων ὄντων· τοῦτο μόνον π-
 φόροις παραδείγμ· ὁ δια-
 τοσάκις περιέχει· ὡς π. γ.
 4 διαιρεθέντος, καὶ τοῦ 1
 λοις. ἄμφω = 2· ἐπεὶ οὖν
 ριθμ. ὡς διαιρετέος, ὁ δὲ π-
 ρεῖται, καί τοι τῆς διαιρέσε-
 δυνατούσης, δῆλον, ὅτι
 ἀλλήλοις ἔσονται, τῶν ἀρ-
 διαφορῶν ὄντων· αἷς $\frac{1}{2} =$
 χθήσεται. Καὶ ὥσπερ ἐπὶ
 ἐν οἷς ὁ διαιρετέος διάφορος
 εἰσὶ μείζω, ἢ ἐλάττω πρὸς
 ἢ περ ὁ διαιρέτης τῷ διαιρετέ-
 κῆς ἐμπεριέχοιτο, οὕτως ἐρ-
 των· καὶ ταῦτα γὰρ, ἐν οἷς
 παρονομασίαις, θάτερον θάτε-
 ρον· ὅπερ διὰ τῆς διαιρέσε-
 ρει· ὅπως οὖν τὸ μείζον,
 πρὸς ἀλλήλα παρεξεταζομέ-
 κτέον ἢ ὄν, τὴν ἐν χρήσει
 καὶ ἑτέραν τινὰ ἐν οἷς τῶν

§. 122. Καὶ δὴ ἀ-
 δύο κλασμάτων προκειμένων
 παραβαλεῖν ἐθέλουσι, θεωρ-

μή, παρονομασάς ἔχουσι· καὶ Εἰ μὲν τὸ α' ἢ τοῦ-
των παράθεσις καθ' ἑαυτὴν δῆλη· μείζον γὰρ ἔσται, ὡς
μείζον ὁ ἀριθμητής· ὡς $\frac{2}{3}$, καὶ $\frac{8}{9}$ · ἔνθα καταφα-
νές τὸ $\frac{2}{3}$ μείζον εἶναι τοῦ $\frac{8}{9}$ · ἐκεῖνο γὰρ μείζονα ἔ-
χει τὸν ἀριθμητήν· ὁ ἔστιν, ἐπ' ἀμφοῖν τῆς μονάδος
εἰς 6 ἴσα μέρη διαιρεθείσης, ἐν μὲν τῷ $\frac{2}{3}$ ἐληλύθησαν 21,
ἐν δὲ τῷ $\frac{8}{9}$, 5 τούτων τῶν μερῶν· τὸ δὲ $2 < 5$ ·
ἄρα, κατ' ὡσαύτως καὶ τῶν $\frac{12}{33}$ καὶ $\frac{22}{33}$ τὸ β' ἐστὶ
μείζον τοῦ α'· Εἰ δὲ τὸ β'· πειρατέον, εἰ οἶόντε,
τὰ κλάσματα αὐτῷ μεταβαλεῖν, ὥς τοῦ αὐτοῦ ἀμ-
φω παρονομαστοῦ μετασφύοντα, τὴν προτέραν αὐτῶν
δύναμιν πάντῃ ἀμετάβλητον διατηρῆσαι· ἥτοι γὰρ ἐκ
τούτου πρὸς ἀλλήλα παραβληθήσονται· ἡ δὲ πράξις
καλεῖται, κλάσματα ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονο-
μασὴν ἀνάγειν· ἐν τῷ (§. 114. δ'). δέδεικται,
ποσούτητα οἰانوῦν, μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλα-
σιαζομένην, καὶ διαιρουμένην, μηδεμίαν τροπὴν ὑφίστα-
σθαι· ὅσω γὰρ αὖξεται, τοσούτῃ καὶ μειοῦται· ἀλλ' ἐ-
πὶ τοῦ κλάσματος ὁ μὲν ἀριθμ. θεωρεῖται ὡς διαιρε-
τέος, ὁ δὲ παρονομ. ὡς διαιρέτης· ἐὰν οὖν
ἀμφω (ἀριθμ. καὶ παρ.) διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολ-
λαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσιν, τὸ αὐτὸ ἐστίν, ὥσπερ
ἂν εἰ ἡ ποσότης οὐδόλως μεταβάλλοιτο· οἷον εἰ τοῦ $\frac{4}{5}$
τοῦ ἀριθμητὴν 4 τῷ 7 πολλαπλασιάσωμεν, τοῦτέστι
7· τις αὖξήσωμεν, ὡσαύτως καὶ τὸν παρονομ. οὐ
τρέπει τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ · ὁ πολλαπλασιασθὲν οὕτως ἀ-
ποδοθήσεται $\frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{28}{35}$. ἀληθεύσει δὲ τοῦτο, καὶ εἰ
διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀμφω διαιρήσωμεν· τοσούτῃ
γὰρ ὁ διαιρετέος, ἥτοι ὁ ἀριθμ. μειωθήσεται, ὅσω
καὶ ὁ διαιρέτης, ἥτοι ὁ παρον· καὶ τὸ πηλίκον ἄρα
μενεῖ τὸ αὐτό (§. 114. ε'.) οἷον $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$. τοῦτο ῥη-
τέον καὶ περὶ τῶν γραμμάτων· ἐπεὶ γὰρ α πᾶν

β
κλάσμα

κλάσμα παρὶς α, καὶ $\frac{\mu}{\mu} = 1$ (§. 84. σχ.) ἄρα καὶ

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\beta \cdot \mu} \text{ τοῦ } \frac{\alpha}{\beta} \text{ οὐ διάφορον. ἔστι γὰρ } \frac{\alpha \cdot \mu}{\beta \cdot \mu} = \frac{\alpha \cdot 1}{\beta \cdot 1}$$

$$(\S. \text{ αὐτ. }) = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\S. 65.). \text{ διὰ τὰ αὐτὰ καὶ}$$

$$\text{τὸ } \frac{\alpha : \mu}{\alpha : \mu} \text{ οὐδόλως διαφέρει τοῦ } \frac{\alpha}{\beta}, \text{ ὅτι } \frac{\alpha : \mu}{\alpha : \mu}$$

$$= \frac{\alpha : 1}{\beta : 1} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ἐξ οὗ ὁ κανὼν.}$$

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς, καὶ παρονομ. ἐκά-
στου κλάσματος μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ
ἀμφοῖν πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι,
τὸ κλάσμα οὐδόλως μεταβάλλεται.

§. 123. Οὐδὲν οὖν δυσχερὲς, τοῦτο εἰδῶσι, δύο
δοθέντα κλάσματα ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομασίην ἀνά-
γειν, ἥτοι τὸν αὐτὸν παρονομασίην ἐκατέρῳ διδόναι.
ἔσαι δὲ τοῦτο τῷ πολλαπλασιασμῷ τοῦ ἀριθμητοῦ,
καὶ παρονομαστοῦ ἐκατέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονο-
μασίην τοῦ ἑτέρου* ὡς $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{5}{6}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρο-
νομασίην ἀναχθέντα ἔσαι $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 6}$ καὶ $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5}$. ἔν-
θα ὁράς, ὅτι καὶ ὁ ἀριθμ. καὶ ὁ παρ. ἐκατέρου κλάσμ.
τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἐπολλαπλασιάσθησαν, τοῦ μὲν α'·
κλ. τῷ 6, τοῦ δὲ β'· τῷ 5· οὐ μεταβέβληνται ἄρα
(§. ἀνωτ.). ὡςτε $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{5}{6} = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 6}$ καὶ $\frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{24}{30}$,
καὶ $\frac{25}{30}$ · καὶ ὅτι ἀμφοῖν τοῖς κλάσμασι παρονομασίης
ὁ αὐτὸς προσεγένετο· τὸ δ' ἐν ἀντιστροφῇ τῇ τάξει
τοὺς παράγοντας εἶναι τοῦ παρονομαστοῦ, οὐδὲν πρὸς
ἕπος· τοῦτο γὰρ οὐδεμίαν ἐμποιεῖ διαφοράν.
(§. 58.)

Προκείσθω ἤδη καὶ ἕτερα παραδείγ-
ματα·

$$\frac{3}{8} \text{ καὶ } \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{8 \cdot 7} \text{ καὶ } \frac{5 \cdot 8}{7 \cdot 8} = \frac{21}{56} \text{ καὶ } \frac{40}{56}.$$

$$\text{ὡσαύτως } \frac{1}{4} \text{ καὶ } \frac{1}{7} = \frac{1 \cdot 7}{4 \cdot 7} \text{ καὶ } \frac{1 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{7}{28} \text{ καὶ } \frac{4}{28}.$$

$$\frac{3}{4} \text{ καὶ } \frac{7}{12} = \frac{3 \cdot 12}{4 \cdot 12} \text{ καὶ } \frac{7 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{36}{48} \text{ καὶ } \frac{28}{48}.$$

Τούτων οὖν πεφέντων, πότερον τούτων μείζον, ῥαδίως γνωσόμεθα· μείζον γὰρ ἔσαι τὸ μείζονα ἔχον ἀριθμητὴν· τούτῳ τῷ τρόπῳ τοῦ κλάσματα δύο ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀνάγειν παρονομ. καὶ ἐπὶ τῶν τοῖς γραμμασι παρισταμένων κλασμάτων χρῆσόμεθα, ὡς καὶ τούτων πο-
σότητας καὶ ἀριθμοὺς σημεινόντων, καὶ ἐν ὑπολογι-
σμῷ τῷ αὐτῷ τῶν αὐτῶν γραμμάτων τὴν αὐτὴν πο-
σότητα· (§. 42. σχ.).

Εἰ δέαι $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ὑπὸ τὴν αὐτὴν παρονομασίαν
ἀγαγεῖν, ἔσαι $= \frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \delta}$ καὶ $\frac{\gamma \times \beta}{\delta \times \beta} = \frac{\alpha \delta}{\beta \delta}$
καὶ $\frac{\gamma \beta}{\delta \beta}$.

Αὔθις $\frac{\nu}{\mu}$ καὶ $\frac{\rho}{\sigma} = \frac{\nu \cdot \sigma}{\mu \cdot \sigma}$ καὶ $\frac{\rho \cdot \mu}{\sigma \cdot \mu} = \frac{\nu \sigma}{\mu \sigma}$ καὶ $\frac{\rho \mu}{\sigma \mu}$
καὶ $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{\rho}{\mu} = \frac{1 \cdot \mu}{2 \cdot \mu}$ καὶ $\frac{2 \cdot \rho}{2 \cdot \mu} = \frac{\mu}{2 \mu}$ καὶ $\frac{2 \rho}{2 \mu}$.

§. 124. Ἄλλα καὶ πλείω κλάσματα παραβα-
λεῖν θέλοντες τὸν αὐτὸν χωρήσομεν τρόπον, τουτέστι, πάν-
των τῶν κλασμάτων, ὅσα ἂν παρῇ, ἐκάστου τὸν ἀριθ-
μητὴν, καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ τοὺς παρονομαστὰς τῶν
ἐτέρων πολλαπλασιάσομεν.

Ὅτι

Ἐπεὶ οὖν πάντα τὸν αὐτὸν λαμβάνουσι παρονομασίην, δῆλον ἐκ τοῦ τὸν παρονομασίην ἐκάστου τῷ πολλαπλασιασiasmῶ ἴσων παραγόντων ἀναφύεσθαι, ὡς μετὰ τῶν λοιπῶν ἀπάντων παρονομασιῶν πολλαπλασιαζόμενον· ὅτι δὲ οὔτε τὴν δύναμιν αὐτῶν μεταβάλλει, φανερόν ἐκ τοῦ ἐφ' ἐκάστου τούτων, πλὴν τοῦ ἰδίου ἀριθμητοῦ, καὶ παρον· τῷ ἀριθμ. καὶ παρον. ἴσους παράγοντας προσεῖναι· τοῦτο δ' ἐστὶ ταῦτ' ἐν, ὥστε εἰ ποσότης τις ἐν τῷ διαιρετέῳ, καὶ διαιρέτῃ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ πεπολλαπλασιασάσαι·

Παραδείγματα·

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2} \text{ καὶ } \frac{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2} \text{ καὶ } \frac{5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2}{6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2}$$

$$\text{καὶ } \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{60}{144} \text{ καὶ } \frac{108}{144} \text{ καὶ } \frac{120}{144}, \text{ καὶ } \frac{72}{144}.$$

ἤδη τοίνυν παραβληθήτωσαν·

$$\text{Αὐθις } \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$\text{καὶ } \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \text{ καὶ } \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \text{ καὶ } \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}{5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$\text{καὶ } \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}{6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}, \text{ καὶ } \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{2520}{5040} \text{ καὶ }$$

$$\frac{1680}{5040} \text{ καὶ } \frac{1260}{5040} \text{ καὶ } \frac{1008}{5040} \text{ καὶ } \frac{840}{5040} \text{ καὶ } \frac{720}{5040}.$$

§. 125. Ὡσαύτως ἀνάξομεν ὑπὸ τὴν αὐτὴν παρονομασίαν καὶ κλάσματα πλείω ἀλγεβραϊκὰ διὰ λόγον τὸν αὐτόν· ὡς $\alpha, \gamma, \varepsilon = \frac{\alpha \delta \zeta}{\beta \delta \zeta}$, καὶ

$$\frac{\gamma \beta \zeta}{\delta \beta \zeta}, \text{ καὶ } \frac{\varepsilon \beta \delta}{\zeta \beta \delta}.$$

$$\text{Αὐθις } \frac{\nu}{\mu}, \frac{\rho}{\sigma}, \frac{\chi}{\upsilon}, \frac{\iota}{\chi} = \frac{\nu \sigma \upsilon \chi}{\mu \sigma \upsilon \chi}, \frac{\rho \mu \upsilon \chi}{\sigma \mu \upsilon \chi},$$

$$\frac{\chi \mu \sigma \chi}{\upsilon \mu \sigma \chi}, \frac{\mu \sigma \upsilon}{\chi \mu \sigma \upsilon}.$$

Σχόλ.

Σχόλιον.

Τὰ δὲ ἀριθμῶν κλάσματα, ὅπου ἔχουν τὰ ἀνα-
χθῶν εἰς κοινὸν παρονομασθῆν, ἢμποροῦν ἐνίοτε τὰ πα-
ρασταθῶν ἐπιτομώτερον· λόγος δὲ ὁ ἐν (S. 122. καν.) ἐνί-
τε δηλονότι διὰ τὰ μὴ προκύπτει πάνυ μέγα τὸ παραγόμε-
νον, (ὅταν δὲ γὰ ἀνάξωμεν πολλὰ κλάσμ. εἰς τὸν αὐτὸν
παρον.) εἶναι ἀναγκαῖον εἰς μερικὰ κλάσματα τὰ πολ-
λαπλασιάζωμεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομασθῆν με τοῦ-
τον τὸν ἀριθμὸν, εἰς ἄλλα δὲ μὲ ἐκείνον, καὶ εἰς ἄλ-
λα τὰ διαιρῶμεν μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν ἀριθμ. καὶ πα-
ρον. μάλιστα δὲ συμβαίνει τοῦτο, ὅν οἱ παρονομασαὶ
τῶν διαφόρων κλασμάτων οὕτως ἔχωσιν, ὥς, ἐὰν οἱ
μείζονες παρονομασαὶ ἐν τοῖς διαφόροις κλάσμασι κα-
τοτμηθῶσιν εἰς παράγοντας, οἱ ἐλάττους παρονομασαί,
ἐν μέρει δὲ καὶ ἀριθμηταί, περιέχονται ἐν τοῖς μείζο-
σι παράγουσι· π. χ. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$. ἐνταῦθα ἐν τοῖς
παράγουσι τῶν μειζόνων παρονομασῶν, τοῦ 12, καὶ
12, (ὧν ὁ μὲν ἐκ τοῦ 4 X 4· ὁ δὲ ἐκ τοῦ 3 X 4
προκύπτει) περιέχονται καὶ οἱ ἐλάττους παρον. 2, καὶ
4· ὁ οὖν μικρὸν διασκεπτόμενος εὐρήσει, ὅτι ὁ 4 ἢμ-
πορεῖ τὰ γένῃ ὁ τούτων κοινὸς παρονομασθῆς. ὥς πολ-
λαπλασιασθῇ τὸ ἐν τῷ α' κλάσματι ὁ ἀριθμ. καὶ πα-
ρον. μετὰ τοῦ 2, καὶ προκύψει $\frac{2}{4}$. τὸ β' κλάσμα
μένει ἀμετάβλητον, ὥς ἔχον παρονομασθῆν τὸν 4· ἦτοι
 $\frac{3}{4}$. ἐν τῷ γ' κλ. διαιρεθέντων τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ
παρονομ. διὰ 4, ἔξομεν τὸ $\frac{1}{4}$. καὶ ἐν τῷ δ' τελευ-
ταῖον διὰ 3, αὐσαύτως $\frac{1}{4}$. ἔσιν οὖν $\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4 \cdot 4}{16 \cdot 4}$,
 $\frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$. ἡ τοιαύτη μέσσηντομίαν παρά-
στασις μανθάνεται διὰ τῆς συγχῆς ἀσκήσεως· ἀλλὰ
χάρην τῶν πρωτοπειρῶν προκείσθω καὶ ὁ ἐξῆς κανὼν·

Ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς, ὁ δὲ ἐκάστου πα-
ρονομαστοῦ τῶν δοθέντων κλασμάτων διαι-
ρέσιμος, προκύψει, ἐὰν πάντες οἱ ἐλάτ-
τους παρονομασαί, καὶ πάντες οἱ παρά-

H

γόντες

γοντες τῶν ἐλασσόνων παρονομασῶν, οἱ τοῖς μείζοσι παρονομ. ἐμπεριεχόμενοι, παραλείπωνται, οἱ δ' ὑπολειφθέντες παρονομασαι, καὶ παράγοντες τῶν παρονομασῶν μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιάζονται.

Ἐξωσαν τὰ δοθέντα κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$. Ἐν ἄρα 2 ἐν 4, 3 ἐν 6, καὶ ὁ ἕτερος παράγων τοῦ 4, ἦτοι ὁ 2, ὁμοίως ἐν 6 περιεχόμενος· ὥς 2 X 5 X 6 = 60, τῷ ἐλαχίστῳ κοινῷ παρονομασῇ, ὃν τὰ κλάσματα ταῦτα ἔξουσιν· ἀναχθέντα τοίνυν ὑπὸ κοινὸν παρονομασὴν ἔσαι $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} = \frac{30}{60}, \frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}, \frac{50}{60}$.

Ἐξωσαν δοθέντα κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}$. ὁ αὖν 2 περιέχεται ἐν τῷ 4, ὁ 3 ἐν τῷ 6, ὁ 4 ἐν 8, ὁ 6 ἐν 12, καὶ ὁ ἕτερος παράγων τοῦ 8, ἦτοι ὁ 4, ὡσαύτως ἐν 12. ὥς 2 X 12 = 24, τῷ ἐλαχίστῳ κοινῷ παρονομασῇ αὐτῶν· ἐνθεντοι, εἰ ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομασὴν ταῦτα ἀνάξομεν, ἔσαι

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12} = \frac{12}{24}, \frac{16}{24}, \frac{18}{24}, \frac{20}{24}, \frac{21}{24}, \frac{22}{24}.$$

Ἐξωσαν δοθέντα κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{3}{10}$. Ἐνταῦθα ὁ 2 περιέχεται ἐν 6, ὁ 3 ἐν 6, ὁ 5 ἐν 10, ὁ ἕτερος παράγων τοῦ 6, ὁ 3, ἐν 15, ὁ δ' ἕτερος, ἦτοι ὁ 2, ἐν 10· καὶ τελευταῖον τοῦ 10 ὁ ἕτερος παράγων 5 ἐν 15· ὥς 2 X 15 = 30, τῷ ἐλαχίστῳ κοινῷ παρονομασῇ αὐτῶν·

$$\text{Ἐνθεντοι, } \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{3}{10} = \frac{15}{30}, \frac{20}{30}, \frac{6}{30}, \frac{25}{30}, \frac{9}{30} \text{ ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρὸν. ἀνάχ.}$$

Τελευταῖον ἔξωσαν $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{7}$ ἐνταῦθα οὐδεὶς τῶν παρονομασῶν περιέχει ἕτερόν τινα· ὥς 2 X 3 X 5 X 7 = 210· τῷ ἐλ. κ. παρ' ὥς $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{7} = \frac{105}{210}, \frac{70}{210}, \frac{168}{210}, \frac{90}{210}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρ' ἀν'

§. 125. Ἐν τῷ §. 122. καν. ἐδέεινται, ὅτι, ἐὰν
 πολλαπλασιάζωμεν, ἢ διαιρῶμεν τὸν ἀριθμητὴν, καὶ πα-
 ρονομασίην διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα οὐ με-
 ταβάλλεται. Καὶ ἔσονται ἄρα πλείων τῶν κλασμάτων
 ἰσοδύναμα, καίτοι διάφορα τῷ σχήματι δοκούντα·
 π. χ. $\frac{2}{3} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{24}{36} = \frac{80}{120}$, κτ. τὰ
 πάντα προέκυψε τῷ τὸν ἀριθμητὴν, καὶ παρονομα-
 σίην τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$ νῦν μὲν, τῷ 5, νῦν δὲ, τῷ 6,
 εἴτα, τῷ 12, καὶ τέλος, τῷ 40 πολλαπλασιασθῆναι·
 τοῦτο δὲ εἰσεν ἀτρέπτου τὸ κλάσμα. (§. αὐτ.) ἀλ-
 λ' ἐπειδὴ πᾶν κλάσμα ῥᾶον τῇ διανοίᾳ ἀνατυπούμεθα, εἰ
 οἱ τούτου ὅροι, ὁ ἀριθμ. καὶ παρονομασίης. ἐλάσσο-
 νές εἰσιν, ὡς δυνατόν, ἢ εἰ μείζους εἶεν, ὡς τῶν $\frac{2}{3}$, καὶ
 $\frac{10}{15}$ τὸ α'· μᾶλλον εὐξύνετον· οὐκ ὀλίγα δὲ κλά-
 σματα ἅπαντῶσιν, ὧν οἱ ὅροι μέγιστοι, εὐρήσομεν τοὺς
 ἐλαχίστους ὅρους, εἰ τὸν ἀριθμητὴν, καὶ παρονομ. διὰ
 τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρήσομεν, τῆς τοῦ κλάσματος
 δυνάμεως ἀτρέπτου διὰ τοῦτο διαμενούσης· (§. αὐτ.)
 ἐπὶ οὖν τῶν ὀλιγαρίσμων κλασμάτων ἀποπειρωμένοις
 παρέσαι ἡμῖν ἀριθμὸν ἀνιχνεύσαι, δι' οὗ ὁ ἀριθμ. καὶ
 παρ. διαιρεθέντες τοὺς ἐλαχίστους ὅρους παράξουσιν·
 ἐν κλάσμασι δὲ, ὧν ὁ ἀριθ. καὶ παρ. ἐκ πολλῶν σύγ-
 κενται χαρακτήρων, οὐκ ἂν τοῦτο ῥαδίως γένοιτο·
 ἔθεντο, κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα (§. 113.) τρόπον
 ζητήσομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν,
 (διαιροῦντες τὸν μείζονα διὰ τοῦ ἐλάσσονος) οὗ εὐρε-
 θέντος, ποιήσομεν τοῦτον εἰς διαιρέτην τοῦ ἀριθμ. καὶ
 παρον. καὶ οὕτω προκύψει τὸ κλάσμα ἐν τῷ ἐλαχίστῳ
 σχήματι· ὡς τοῦ $\frac{384}{812}$ ὁ μέγ. κοινὸς διαιρέτης ἀμφοῖν
 (§. αὐτ.) ἐστὶ 4· ὥστε $\frac{384:4}{812:4} = \frac{96}{203}$. τὸ οὖν $\frac{96}{203}$
 οὐκ ἔτι ἂν εἰς ἐλάσσονας ὅρους ἀναχθῇ· ἐὰν δὲ οὐδὲν
 μέγιστον κοινὸν μέτρον εὐρεῖν ἔχωμεν ἕτερον, εἰ μὴ τὴν
 1· ἐπειδὴ αὕτη οὐ διαιρεῖ, (§. 96. σχ.) καὶ τὸ τοῦ

πρόκειμένου κλάσματος ἰσχύμα, ἡλικὸν ἂν ἦ, εἰς ἑλαττον ἀνάξει οὐχ οἶόντε· ὡς τὸ $\frac{53}{120}$, κτ.

Σχόλιον.

"Αν ἡ μὲν ἀς, ἀπὸ τῆν ὁποῖαν ἐλάβομεν τὸ κλάσμα, ἦναι πολλὰ μικρά, ὥς ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ἐν μόριον τοῦ παρονομαστοῦ δὲν σημαίνει πολὺ τίποτε, συνηθίζουσι νὰ προσθέτουσι εἰς τὸν ἀριθμητὴν, ἢ παρονομαστὴν ἀκόμη ἐν μόριον, ἂν διὰ τούτου ἡμποροῦν νὰ ἀναχθοῦν εὐκολώτερα εἰς ἐλάσσονας ὅρους. π. χ. ἐν τῷ ἀνωτ. $\frac{53}{120}$ ἡθελαν ἦναι μόρια ἐνὸς δακτύλου, ἦτοι, ὁ δακτύλος διηρημένος εἰς 120 μόρια, ἐξ ὧν ἐλάβομεν τὰ 53, καὶ ὁ ὑπολογισμὸς ὕεν ζητῇ μεγάλην ἀκρίβειαν, εἶναι δυνατόν τὸ $\frac{53}{120}$ νὰ γένη $\frac{54}{120}$, οὗ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 6· ὥς $\frac{54}{120} = \frac{54:6}{120:6} = \frac{9}{20}$.

§. 126. Εἰ πρόκεινται νόθα κλάσματα εἰς ἐλαχίστους ὅρους ἀναχθῆναι, γενέσθω α'· τὸ (§. 118.) περὶ αὐτῶν ῥηθέν· ὅτε καὶ τὰ παρηρητημένον κλάσμα ῥῶσιν μεταχειρισθεῖν, τῆς μεθόδου (§. ἀνωτ.) μὴ δεομένοις· οἷον $\frac{26}{4} = 6\frac{2}{4} = 6\frac{2:2}{4:2} = 6\frac{1}{2}$.

§. 127. Τὰ διὰ γραμμάτων κλάσματα, εἰν τούτοις καὶ συνεργοὶ (§. 47.) ἐνυπάρχουσιν, ἀναχθεῖν ἂν εἰς ἐλάσσονας ὅρους, α'· εἰ συνεργοὺς ἀμφοὶ οἱ ὅροι (§. 119.) ἔχουσιν, ὧν τὸ κοινὸν μέτρον, ἢ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εὐρεθῆναι ἔχει· β'· εἰ ἀμφοῖν τοῖς ὅροις τὰ αὐτὰ ἔνισι γράμματα, ἢ γ'· εἰ ἐνάτερον αὐτοῖς πάρεσι· τότε γὰρ κρατεῖ ὡσαύτως τὰ ἐν (§. 125.) π. χ. τὸ $\frac{4\alpha\beta}{12\gamma}$ ἀνάξομεν εἰς ἐλαχίστους ὅρους,

$\frac{12\gamma}{12\gamma}$
 διαιροῦντες τῷ 4· ὡς κοινῷ μέτρῳ ὄντι (§. 113.)
 τοῦ 4, καὶ 12, ἔσαι οὖν $\frac{4\alpha\beta:4}{12\gamma:4} = \frac{1\alpha\beta}{3\gamma} = \frac{\alpha\beta}{3\gamma}$

(§. 69.)

$$(\S. 69.) \text{ ὡσαύτως } \frac{αβγ}{αδγ} = \frac{αβγ:αγ}{αδγ:αγ} = \frac{β}{δ} \quad (\S. 114. ε')$$

ἄλλως δὲ οὐκ ἔνι· Τὰ γὰρ γράμματα, ὡς καὶ ὅλου ποσότη-
τες, θεωρούμενα, ἀδιόριζα εἰσιν· ὥστε οὐδὲ μεγιστος κοινὸς
διαίρετης τούτων ζητηθήσεται· ὡς τοῦ $\frac{αγ}{δβ}$, ἢ $\frac{3αβ}{5γδ}$.

ἢ $\frac{χ}{ψδ}$ ἢ ἐπ' ἐλάχισον ἀναγωγῇ ἀμήχανος·

§. 128. Ἐπειδὴ ἡ 1 οὐ διαίρει· (§. 96. σχ.) πᾶς ὁλοσχε-
ρῆς ἀριθμὸς εἰς κλάσμα γενέσθαι δύναται, οὗ παρονομα-
στής ἡ 1. οἷον $6 = \frac{6}{1}$ · $12 = \frac{12}{1}$ · $116 = \frac{116}{1}$. Καὶ
ἐν γράμμασιν· $α = \frac{α}{1}$ · $χψ = \frac{χψ}{1}$ · ὅπερ αὐτά-

θεν δῆλον· τὴν δὲ ταύτου χρῆσιν κατωτέρω μαθη-
σόμεθα·

§. 129. Μετὰ ταύτας τὰς περὶ τῶν κλασμά-
των γνώσεις, ῥητέον ἤδη καὶ περὶ προσθέσεως, ἀφαιρέσε-
ως, πολλαπλῆς καὶ διαρέσεως αὐτῶν·

Περὶ Προσθέσεως τῶν κλασμάτων·

§. 130. Ἐὰν τὰ κλάσματα ἔχῃ τοὺς αὐτοὺς
παρονομαστές, ἢ κῖσα δυσχερῆς ἢ τούτων πρόσθεσις, ὡς
ἡμιόιδων ὄντων· τότε γὰρ, προσαφροισθεῖσαι
τοῖς ἀριθμηταῖς ὑπογραφήτω ὁ κοινὸς
παρονομαστής· ὡς $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$ · οὕτω ποιού-
μεν, καὶ πλείονων τῶν κλασμάτων ὄντων· οἷον $\frac{1}{4}$
 $+ \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{8}{4}$ · τοῦτο δὲ κατανοῆσαι
καὶ πανυ ῥάδιον· μέρη γὰρ μονάδων ἀλλήλοις προ-
σεσθῆναι πρόκεινται, τῆς μονάδος εἰς ἴσα μέρη διαίρε-
σεως· οὕτω καὶ μετὰ τῶν γραμμάτων· $\frac{α}{β} + \frac{γ}{β}$

+ γ

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \frac{\gamma + \nu}{\beta} \quad \text{Καὶ} \quad \frac{2\alpha}{\delta} + \frac{\chi}{\delta} + \frac{\varrho}{\delta} \\ = \frac{2\alpha + \chi + \varrho}{\delta} \quad \text{ὁ δὲ λόγος ὁ αὐτός.}$$

Σχόλιον.

Ἐς ληφθῶσιν $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{5}{8}$ ἐνὸς πήχεως π.χ. ὑφάσματος τινος· τουτ. τεθήτω ὁ πήχυς εἰς 8 ἴσα μέρη διηρημένος, ἐξ ὧν ἐλήφθη 1 μέρος, καὶ ἔτι 2, καὶ τελευταῖον 5. εἰς τοῦτο δὲν εἶναι καμμία ἀμφιβολία, ὅτι ὅλα τὰ μέρη τὰ ληφθέντα ὁμοῦ εἶναι ἴσα μὲ 8, καὶ ἴσα ἀλλήλοις· ἐπειδὴ ἡ μονὰς, ἥτοι ὁ πήχυς εἰς 8 ἴσα μέρη διηρέσθῃ· ὥστε $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1$. (§. 84. σχ.)

§. 131. Ἐάν δὲ τὰ κλάσματα μὴ ὡσι τῆς αὐτῆς παρονομασίας, ἀναγκαῖον α' εἰς τὸν αὐτὸν ἀναχθῆναι παρονομασίην, τουτ· ὁμοσιδῇ γενέσθαι, καὶ οὕτως εἶτα προσεθῆναι· (§. ἀνωτ.)

$$\begin{aligned} \text{Ὡς} \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8}{5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8} \\ + \frac{1 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} & \quad (\S. 124.) \\ = \frac{48}{240} + \frac{80}{240} + \frac{120}{240} + \frac{30}{240} &= \frac{48+80+120+30}{240} \\ = \frac{278}{240} = 1 \frac{38}{240} & \quad (\S. 118.) = 1 \frac{19}{120} \quad (\S. 125.) \\ \text{σχεδὸν} = 1 \frac{20}{110} & \quad (\S. \text{αὐτ. σχ.}) = 1 \frac{1}{5}. \quad (\S. 125.) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Καὶ ἐν γράμμασιν} \quad \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\nu}{\mu} + \frac{\chi}{\upsilon} \\ = \frac{\alpha\delta\mu\upsilon}{\beta\delta\mu\upsilon} + \frac{\gamma\beta\mu\upsilon}{\delta\beta\mu\upsilon} + \frac{\nu\beta\delta\upsilon}{\mu\beta\delta\upsilon} + \frac{\chi\beta\delta\mu}{\upsilon\beta\delta\mu} \\ = \frac{\alpha\delta\mu\upsilon + \gamma\beta\mu\upsilon + \nu\beta\delta\upsilon + \chi\beta\delta\mu}{\beta\delta\mu\upsilon} \quad \text{ἐνθα καὶ} \end{aligned}$$

οὐδεμία ἀναγωγὴ εἰς ἐλάσσονας ὄρους χώραν ἔχει·

§. 132.

§. 132. Τὸν αὐτὸν τρόπον προσθήσομεν ἀλλήλοις καὶ τὰ νόθα τῶν κλάσμάτων, (§. 113. $\frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 2}{4 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{30 \cdot 13618}{24} = \frac{74}{24} = 3 \frac{2}{24}$ (§. αὐτ.) $= 3 \frac{1}{12}$.

§. 133. Ἀλλὰ καὶ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς τοῖς κλάσμασι προσθεῖναι ἔχομεν. (ὡς οὐκ ὀλίγαις ἡμῶν χρήσιμον τοῦτο ὂν) ὡς κλάσματα αὐταὺς θεωροῦντες, (§. 128.), ὧν παρον. ἢ 1· καὶ μετὰ τοῦ κλάσματος εἰς τὸν αὐτὸν παρον· αὐτοὺς ἀνάξαντες τελεστομεν τὸ (§. 130.) οἷον $4 + \frac{3}{4} = \frac{4}{1} + \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 1} = \frac{16}{4} + \frac{3}{4} = \frac{19}{4} = 4 \frac{3}{4}$.

Σχόλιον.

Κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον θέλει προκύψει τὸ κεφάλαιον τοῦ $4 + \frac{3}{4}$, ἥτοι τὸ $\frac{19}{4}$, κτ· πολὺ συντομώτερον· πολλαπλασιάσον τὸν ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν μετὰ τοῦ παρον· τοῦ κλάσμ. καὶ προσθεῖς εἰς τὸ παραγόμενον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, ποιήσον τὸ κεφάλ. ἀριθμητὴν, παρονομαστοῦ μέγοντος τοῦ προτέρου· διότι οὐδεὶς ἕτερος παρονομασῆς εἶναι δυνατός, ὥσπιν ὁποῦ ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς ἔχει παρον· τὴν 1. ὁ δὲ καινὸς παρον· ἀνακύπτει διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν προτέρων παρονομ. εἰς ἀλλήλους· ἀλλ' ἡ μονὰς οὐ πολλαπλασιάζει.

Οἷον $4 + \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{19}{4}$. Καὶ $2 \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$. κατὰ δὲ τὸν α' τρόπον $2 + \frac{3}{4} = \frac{2}{1} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 1} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$. Ὁμοίως καὶ ἐν γράμμασιν $\alpha + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{1} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \delta}{1 \cdot \delta} + \frac{\gamma}{\delta}$.

$$+ \frac{\gamma \cdot 1}{\delta \cdot 1} = \frac{\alpha \delta}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \delta + \gamma}{\delta} \quad \eta \quad \alpha + \frac{\gamma}{\delta}$$

$$= \frac{\alpha \delta + \gamma}{\delta} \text{ κατὰ τὸν } \beta' \text{ τρόπον.}$$

§. 134. Εἰ δὲ πλείους ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ παύ-
 ρεισιν, ἕκαστος καὶ κλάσμα παρηρητημένον ἔχων, προ-
 σεθέντων α'. ἐκείνων ἐν μέρει, προσεθροισθήτωσαν εἴ-
 τα ἀλλήλοις τὰ κλάσματα. (§. 130.) τὸ δ' ἐκ τού-
 των ἴαναφρὲν καινὸν κλάσμα, γνήσιον ὂν. (§. 118.)
 προσαρτηθήτω τῷ κεφαλαίῳ τῶν ὁλοσχερῶν· νόθου
 δὲ ὄντος, γενέσθω τὸ (§. αὐτ.) ἔνθα ἡ προκύψασα
 διὰ τῆς διαιρέσεως 1, (ἢ μονάδες) προσεθήτω τῷ κε-
 φαλαίῳ τῶν ὁλοσχερῶν εἰς ἓν κεφάλαιον· παραδείγ-
 ματα· $1\frac{2}{3} + 4\frac{1}{2} + 2\frac{1}{8} + 3\frac{5}{8} = 1 + 4$
 $+ 2 + 3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} = 10$
 $+ 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 6 + 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8$
 $3 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 6$

$$(\S. 124.) = 10 + 192 + 144 + 36 + 240$$

$$= 10 + \frac{612}{288} = 10 + 2\frac{36}{288} = 10 + 2\frac{1}{8}$$

$$= 12\frac{1}{8} \text{ κατὰ δὲ τὸ ἐν (§. 133. καὶ σχολ.) ἔσαι}$$

$$1\frac{2}{3} + 4\frac{1}{2} + 2\frac{1}{8} + 3\frac{5}{8} = \frac{5}{3} + \frac{9}{2} + \frac{17}{8}$$

$$+ \frac{3}{1} + \frac{5}{8} = 480 + 1296 + 612 + 864 + 250$$

$$(\S. 124. \S. 130.) = \frac{3102}{288} = 12\frac{36}{288} = 12\frac{1}{8}$$

Περὶ τῆς τῶν κλασμάτων ἀφαιρέσεως·

§. 135. Ἦτοι κλάσματα ἐνταῦθα ἀφαιροῦν-
 ται ἀπὸ κλασμάτων, ἢ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ ἀπὸ κλα-
 σμάτων, ἢ κλάσματα ἀφ' ὁλοσχερῶν, ἢ ὁλοσχερεῖς
 μετὰ κλασμάτων ἀφ' ὁλοσχερῶν καὶ κλασμάτων, ἢ
 ὁλοσχερεῖς μόνον ἀφ' ὁλοσχ. καὶ κλ. ἢ ἀνάπαλιν·

Τὸ

Τὸ α' τούτων ἐνταῦθα οἱ παρονομασαι ἦτοι οἱ αὐτοὶ, ἢ οὐχί· ἐπεὶ τοίνυν μόνα τὰ ὁμοειδῆ ἀφαιρεῖται ἀπ' ἀλλήλων, (§. 29.) εἰ μὲν ἐκεῖνο, εὐχερὲς ἔσαι ἢ τούτων ἀφαιρέσεις· Τοῦτο δ' ἐστίν, ἀπότινος προκειμένου πλήθους μερῶν, ὧν ἡ μονὰς εἰς ἴσα μέρη διήρηται, ἑτέραν τινα πληθύν ἰσομεγεθῶν, καὶ τοῖς προτέροις ὁμοειδῶν μερῶν, ἀφαιρεῖν· ὅταν δεῇσαν ἀφαιρεθῇναι ἀπὸ $\frac{2}{3}$ τὰ $\frac{1}{3}$, ὅ ἐστιν ἀπὸ 5 μερῶν τῆς μονάδος, εἰς 6 ἴσα μέρη διαιρεθείσης, 3 μέρη τῆς μονάδος, ὁμοίως εἰς 6 ἴσα μέρη διαιρεθείσης, ὧν ἕκαστον ἰσομέγεθες ἑκάστω τοῦ προτέρου. ἀφαιρεθέντων, ὑπολειφθήσονται καὶ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (§. 125.) ἐντεῦθεν ὁ κανὼν· Κλάσματα, οἷς ὁ αὐτὸς παρὼν. ὑπάρχει, ἀφαιροῦνται ἀπ' ἀλλήλων, ἐὰν ὁ ἀριθμητῆς τοῦ ἀφαιρετέου κλάσματος ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου ἀφαιρῇται, καὶ παρονομασῆς ὁ αὐτὸς τηρῇται· τὰ δὲ κλάσματα καλοῦνται, ὡς καὶ οἱ ἀριθμοί, ὡσαύτως καὶ τὸ ὑπολειπόμενον. (§. 27.) σημεῖον δὲ, τὸ σύνθηες τῆς ἀφαιρέσεως (§. 28.) Παράδειγματα· ἀφαιρεθῇτω ἀπὸ τοῦ $\frac{2}{3}$ τὸ $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Ἀπὸ τοῦ } \frac{11}{12} \text{ τὸ } \frac{3}{12} = \frac{11-3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Καὶ ἐν γραμμασιν ὡσαύτως· εἰ μὴ ὅτι ἐνταῦθα ἡ ἀφαιρέσεις δεικνύται μόνον τῷ —, οὐ γίνεται δὲ καὶ ἐνεργεία, ὡς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς· ὅτι τὰ γράμματα εἰσὶν ἀόριστα· Ἀφελε ἀπὸ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$

$$- \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}$$

$$\text{Ἀπὸ τοῦ } \frac{\chi\upsilon}{\mu} \text{ τὸ } \frac{\eta}{\mu} = \frac{\chi\upsilon - \eta}{\mu}$$

Εἰ δὲ τὸ β', ἀνακτέον αὐτὰ ἐπὶ κοινὸν παρονομασίην, (§. 123.) ἵνα ὁμοειδῇ γένωνται, καὶ ἀφαιρετέον ἀπ' ἀλλήλων· εἶον ἄφελε ἀπὸ τοῦ $\frac{3}{4}$ τὸ $\frac{2}{9} = \frac{3}{4}$
 $-\frac{2}{9} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9} - \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{27-8}{36} = \frac{19}{36}$ Καὶ ἐν γράμμ.

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} - \frac{\gamma\beta}{\delta\beta} = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\beta\delta}.$$

Τὸ β' καὶ γ' π. χ. ἄφελε ἀπὸ τῆς 1 τὸ $\frac{3}{4}$.
 ἔσται οὖν $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$ (§. 128.) $= \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 1}$
 $= \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}.$

Ἄφελε ἀπὸ τοῦ $\frac{3}{4}$ τὴν 1 $= \frac{3}{4} - 1 = \frac{3}{4}$
 $-\frac{1}{1}$ (§. αὐτ.) $= \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 1} - \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4} - \frac{4}{4} = \frac{3-4}{4}$
 $= -\frac{1}{4}.$

Καὶ ἐν γράμμασιν· $\alpha - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{1} - \frac{\gamma}{\delta}$
 $= \frac{\alpha \cdot \delta}{1 \cdot \delta} - \frac{\gamma \cdot 1}{\delta \cdot 1} = \frac{\alpha\delta - \gamma}{\delta}.$

Καὶ $\zeta + \eta - \frac{\nu}{\mu} = \zeta + \eta - \frac{\nu}{\mu} = (\zeta + \eta) \frac{\mu}{\mu}$
 $-\frac{\nu \cdot 1}{\mu \cdot 1} = \frac{\zeta\mu + \eta\mu}{\mu} - \frac{\nu}{\mu} = \frac{\zeta\mu + \eta\mu - \nu}{\mu}.$
 ἢ καὶ $\frac{(\zeta + \eta) \cdot \mu - \nu}{\mu}$ (§. 78.) Παραπλησίως $\frac{\alpha}{\beta}$
 $-\frac{\delta}{1} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\delta}{1} = \frac{\alpha \cdot 1}{\beta \cdot 1} - \frac{\delta \cdot \beta}{1 \cdot \beta} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\delta\beta}{\beta}$
 $= \frac{\alpha - \delta\beta}{\beta}.$

Σχόλιον. α'.

"Οτε ὁ μειωτέος εἶναι ἐλάττων τῆς 1, ἦτοι κλάσμα

σμα γνήσιον, (§. 118.) ὁ δὲ ἀφαιρετέος εἶναι ἢ 1, ἢ ἕτερος ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, προκύψει ἢ διαφορὰ ἀποφατικῇ, ἢτοι —· διότι τότε ἀφαιρεῖται ἀπ' ἐκείνου πλεον, ἢ οὐτὸς δύναται· ὥς τὸ λείψανον διαβήσεται εἰς τὸ ἀποφατικόν (§. 35. καὶ 52.) Ἐπὶ τῶν τοιούτων ἃς γίνηται ἡ ἀφαίρεσις ἀνάπαλιν, ἢτοι ἃς ἀφαιρῆται ὁ μειωτέος ἀπὸ τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ ἃς γράφηται ἡ διαφορὰ μὲ τὸ σημεῖον —·

Σχόλιον β'.

Ὅταν ἔχωμεν ἀφείλωμεν κλάσμα ἀπὸ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, ἢμποροῦμεν νὰ μεταχειρισθῶμεν καὶ τὸν ἐξῆς τρόπον, ἢτοι λαμβάνομεν μίαν μονάδα τοῦ ὁλοσχεροῦς, καὶ τὴν μεταφέρομεν εἰς κλάσμα, τὸ ὅποιον ἔχει καὶ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομασίην, τὴν παρονομασίην τοῦ κλάσματος, καὶ οὕτως ἀφαιροῦμεν ὅσον $1 - \frac{5}{12} = \frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ · ὡσαύτως $2 - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ · καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ τοῦ ὁλοσχεροῦς 2 ἐλήφθη μόνον 1 μονάς, ὑπελείφθη καὶ 1· ὥς τὸ λείψανον εἶναι 1, καὶ $\frac{1}{4}$ ·

$$\begin{aligned} \text{Τὸ δ'· ε' καὶ ζ' ἀπὸ τοῦ } 4\frac{3}{4} \text{ ἀφείλε } 2 &= 4\frac{3}{4} - 2 = \frac{19}{4} - 2 \quad (\S. 133. \sigma\chi.) = \frac{19}{4} - \frac{2}{1} = \frac{19 \cdot 1}{4 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{19}{4} - \frac{8}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ἀπὸ τοῦ } 4\frac{3}{4} \text{ ἀφείλε τὸ } 3\frac{1}{8} &= 4\frac{3}{4} - 3\frac{1}{8} \\ &= \frac{19}{4} - \frac{25}{8} = \frac{19 \cdot 2}{4 \cdot 2} - \frac{25 \cdot 1}{8 \cdot 1} = \frac{38}{8} - \frac{25}{8} \\ &= \frac{38 - 25}{8} = \frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ἀπὸ τοῦ } 4\frac{3}{4} \text{ ἀφείλε } 5\frac{1}{8} &= 4\frac{3}{4} - 5\frac{1}{8} = \frac{17}{4} - \frac{41}{8} \\ &= \frac{41}{8} = \frac{19 \cdot 2}{4 \cdot 2} - \frac{41 \cdot 1}{8 \cdot 1} = \frac{38}{8} - \frac{41}{8} \\ &= \frac{38 - 41}{8} = -\frac{3}{8} \quad (\S. 35. \text{ καὶ } 52.) = -\frac{3}{8} \\ (\S. 125.) \end{aligned}$$

Ἀπὸ

$$\begin{aligned} \text{Ἀπὸ τοῦ } 5 \frac{3}{8} \text{ ἄφελε } \frac{3}{8} &= \frac{33}{8} - \frac{3}{8} = \frac{30}{8} \\ &= \frac{3 \cdot 7}{8 \cdot 7} = \frac{304}{56} - \frac{21}{56} = \frac{283}{56} = 5 \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ἀπὸ τοῦ } \frac{3}{8} \text{ ἄφ. } 1 \frac{3}{4} &= \frac{3}{8} - \frac{7}{4} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 4} - \frac{7 \cdot 8}{4 \cdot 8} \\ &= \frac{12}{32} - \frac{56}{32} = -\frac{44}{32} = -1 \frac{11}{8} \end{aligned}$$

Καὶ ἐν γράμμασιν ἄφελε ἀπὸ τοῦ $\alpha + \frac{\gamma}{\delta}$

$$\begin{aligned} \tau\acute{o}\beta. &= \frac{\alpha\delta + \gamma}{\delta} - \beta (\S. 133. \sigma\chi.) = \frac{\alpha\delta + \gamma}{\delta} - \frac{\beta\delta}{1} \\ &= \frac{\alpha\delta + \gamma}{\delta} - \frac{\beta\delta}{\delta} = \frac{\alpha\delta + \gamma - \beta\delta}{\delta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ἀπὸ τοῦ } \alpha + \frac{\gamma}{\delta} \text{ ἄφελε } \tau\acute{o}\beta + \frac{\nu}{\mu} &= \frac{\alpha\delta + \gamma}{\delta} - \frac{\beta\mu + \nu}{\mu} \\ &= \frac{(\alpha\delta + \gamma)\mu}{\delta\mu} - \frac{(\beta\mu + \nu)\delta}{\mu\delta} \\ &= \frac{\alpha\delta\mu + \gamma\mu - \beta\mu\delta - \nu\delta}{\delta\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ἀπὸ τοῦ } \mu + \frac{\nu}{\beta} \text{ ἄφ. } \tau\acute{o}\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\mu\mu + \nu}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{(\mu\mu + \nu)\beta}{\beta\mu} - \frac{\alpha \cdot \mu}{\beta \cdot \mu} = \frac{(\mu\mu + \nu)\beta - \alpha\mu}{\beta\mu} \\ &= \frac{\mu\mu\beta + \nu\beta - \alpha\mu}{\beta\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ἀπὸ τοῦ } \chi + \frac{\nu}{\sigma} \text{ ἄφ. } \tau\acute{o}\frac{\chi}{\sigma} &= \frac{\chi\mu + \nu}{\sigma} - \frac{\chi\sigma + \nu}{\sigma\mu} \\ &= \frac{(\chi\mu + \nu)\sigma}{\sigma\mu} - \frac{(\chi\sigma + \nu)\mu}{\sigma\mu} \\ &= (\chi\mu + \nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\chi\mu + \nu)\sigma - (\chi\sigma + \rho)\mu = \chi\mu\sigma + \nu\sigma - \chi\mu\sigma - \rho\mu \\
 &= \frac{\nu\sigma - \rho\mu}{\mu\sigma}
 \end{aligned}$$

§. 136. Καὶ κλάσματα δὲ ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς συνημμένα ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεῖν οἶοντε, τὸ — πρὸ αὐτῶν ἔχοντα· ἔνθα παντὶ τῷ τὸν νοῦν ἐπισησαντι δῆλον, ὅτι α'· ἀπὸ τοῦ Μειωτέου ἀφαιρεθῆναι τὸ πρὸς αὐτῷ κλάσμα χρη, ὁμοίως καὶ ἀπὸ τοῦ Ἀφαιρετέου τὸ οἰκείον, εἴτα δὲ καὶ τὰ λείψανα ἀπ' ἀλλήλων·

$$\begin{aligned}
 &{}^{\text{A}}\Phi\epsilon\lambda\epsilon \text{ ἀπὸ τοῦ } 4 - \frac{3}{4} \text{ τὸ } 3 \frac{1}{8} = \frac{4}{1} - \frac{3}{4} \\
 &= \frac{4 \cdot 4}{1 \cdot 4} - \frac{3}{4} = \frac{16}{4} - \frac{3}{4} = \frac{16-3}{4} = \frac{13}{4} \cdot \text{ Ἡδη} \\
 &\text{ἀπὸ τοῦ } \frac{13}{4} \text{ ἀφαιρεθὲν τὸ } 3 \frac{1}{8}, \text{ ἔσαι } \frac{13}{4} - 3 \frac{1}{8} = \\
 &\frac{13}{4} - \frac{25}{8} = \frac{13 \cdot 2}{4 \cdot 2} - \frac{25 \cdot 1}{8 \cdot 1} = \frac{26}{8} - \frac{25}{8} = \frac{26-25}{8} = \frac{1}{8} \cdot \\
 &= \frac{104-100}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &{}^{\text{A}}\Phi\epsilon\lambda\epsilon \text{ ἀπὸ τοῦ } 4 - \frac{3}{4} \text{ τὸ } 2 - \frac{1}{8} \cdot \alpha' \cdot 4 \\
 &- \frac{3}{4} = \frac{4}{1} - \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 4}{1 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 1} = \frac{16-3}{4} = \frac{13}{4} \cdot \\
 &\beta' \cdot 2 - \frac{1}{8} = \frac{2}{1} - \frac{1}{8} = \frac{2 \cdot 6}{1 \cdot 6} - \frac{1}{8 \cdot 1} = \frac{12}{6} - \frac{1}{8} = \frac{12-1}{6} = \frac{11}{6} \cdot \\
 &= \frac{11}{6} \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Καὶ } \frac{13}{4} - \frac{11}{6} = \frac{13 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{11 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{39}{12} - \frac{22}{12} = \frac{39-22}{12} = \frac{17}{12} = 1 \frac{5}{12} \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &{}^{\text{H}} \beta\rho\alpha\chi\upsilon\tau\epsilon\rho\omicron\nu (4 - \frac{3}{4}) - 2 - \frac{1}{8} = \frac{13}{4} \\
 &- 11 = \frac{78-44}{24} = \frac{34}{24} = \frac{17}{12} = 1 \frac{5}{12} \cdot
 \end{aligned}$$

§. 137. Ἐν τῷ περὶ ἀφαιρέσεως τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν (§. 49. κτ.) δέδεικται, ὅπως ἀφαιρετέοι εἰσὶν οἱ ἀριθμοὶ μετ' ἀντιθέτων σημείων· τοῦτο δ' αὖ-

τὸ

τὸ καὶ τοῖς κλάσμασιν ἀρμόζει· καὶ ταῦτα γὰρ (οὕτως ἔχοντα) ἀφαιρεῖσθαι ἀπ' ἀλλήλων δύνανται· καὶ τὰ μὲν μέχρι τοῦδε παραδείγμ. ἦν $+$ · Εἰ γὰρ ἀπὸ $\frac{3}{2}$ ἀφαιρεῖται $\frac{1}{2}$, ἔμφω εἰσὶν, ἢ δῆλον, καταφατικά· ἢ δ' ἐκκείσονται κλάσματα, ὧν θάτερον ἀποφατικόν, ἐν οἷς τὰ ἐκεῖ ὁροσθηθέντα (ἑ. αὐτ.) κρατεῖ· τουτέστι μεταβαλὼν τὴ σημείον τοῦ ἀφαιρετέου εἰς τὸ ἀντικείμενον, τρέψον τὴν ἀφαίρεσιν εἰς πρόσθεσιν· οἷον, εἰ ἀφελεῖν ὅσαι ἀπὸ $+$ $\frac{3}{4}$ οὐχὶ $+$ $\frac{3}{8}$, ἀλλὰ $-\frac{3}{8}$, ἔσαι $+$ $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 8} + \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{24}{32} + \frac{12}{32} = \frac{36}{32} = 1 \frac{4}{32} = 1 \frac{1}{8}$.

Ἄφελε ἀπὸ τοῦ $-\frac{3}{4}$ τὸ $+\frac{1}{2} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{4}{4}$ (§. 135.) $= -1$. Καὶ ἐν γράμμασιν·

Ἀπὸ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἀφαιρεθὲν τὸ $-\frac{\gamma}{\delta}$, ἔσαι $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta}$.

§. 138. Ἐνίοτε ἀπαντῶσι καὶ ὁλόκληροι σειραὶ κλασμάτων, αἷς τὰ σημεία $+$ καὶ $-$ ἐναλλάξ πρόσθεσιν, ἅτινα εἰς μίαν ποσότητα ἀναγαγεῖν βουλούμεθα· οἷον εἰ ἦδε ἡ σειρά εἴη $\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}$ · ἐπὶ τῶν τοιούτων συναψὼν ἐν μέρει τὰς τῶ $+$, ὡσαύτως καὶ τὰς τῶ $-$ σημειούμενας, καὶ ἄφελε αὐτάς ἀπ' ἀλλήλων· ἐν τῇ προκειμένῃ παραδείγμ. ποσότητες ἀποφατικά εἰσιν αἱ $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, καταφατικά δὲ αἱ $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$. Ἀναχθεῖσαι αἱ α' εἰς τὸν αὐτὸν παρονομ. ἔσονται $= \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6}$ καὶ $\frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{18}{24}$ καὶ $\frac{4}{24} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}$. Αἱ δὲ β' $= \frac{1 \cdot 8 \cdot 2}{4 \cdot 8 \cdot 2}$ καὶ $\frac{3 \cdot 4 \cdot 2}{8 \cdot 4 \cdot 2}$, καὶ $\frac{1 \cdot 4 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{16}{64}$ καὶ $\frac{24}{64}$, καὶ $\frac{32}{64} = \frac{72}{64} = \frac{9}{8}$.

Ἦγε

Ὡς ἀπὸ $\frac{9}{8}$ ἀφαιρετέον, ἢ μᾶλλον τῷ ἀντικειμένῳ
σημείῳ προσθετέον τὸ $\frac{11}{12}$. τοῦτο δ' ἂν εἴη $\frac{9}{8} -$

$$\frac{11}{12} = \frac{9 \cdot 12}{8 \cdot 12} - \frac{11 \cdot 8}{12 \cdot 8} = \frac{108}{96} - \frac{88}{96} = \frac{20}{96} = \frac{5}{24}$$

Καὶ ἐν γραμμασιν ὡσαύτως· οἶον, εἰ πρόκειται ἡ ἐ-
ξῆς σειρά, ἣν εἰς μίαν ποσότητα ἐπιτεμεῖν βουλόμεθα·

$$\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} + \alpha - \frac{\zeta}{\eta} \quad \text{καταφατικά εἰσὶν αἱ} \quad \frac{\gamma}{\delta} + \alpha$$

$$= \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\alpha}{1} = \frac{\gamma + \alpha\delta}{\delta} \quad \text{ἀποφατικά δὲ αἱ} \quad \frac{\beta}{\delta}$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{\zeta}{\eta} = \frac{\beta\eta + \zeta\delta}{\delta\eta} \quad \text{τὸ οὖν παράδειγμα ἔσαι}$$

$$\frac{\gamma + \alpha\delta}{\delta} - \frac{(\beta\eta + \zeta\delta)}{\delta\eta} \quad \text{δῆλον δὲ, ὅτι, ἐὰν μό-}$$

νον ἐπὶ τοῦ α' κλάσμ. ἄμφω οἱ ὅροι πολλαπλασια-
σθῶσι μετὰ τοῦ η, ἄμφω τὰ κλάσματα ἔξουσιν τὸν
αὐτὸν παρονομασὴν· ὥς $\frac{\gamma\eta + \alpha\delta\eta - (\beta\eta + \zeta\delta)}{\delta\eta}$

$$= \frac{\gamma\eta + \alpha\delta\eta - \beta\eta - \zeta\delta}{\delta\eta}$$

§. 139. Ἐντεῦθεν ῥᾶσα ἄντις συνῖδοι, ὅπως
ἂν τὰ τῆς πράξεως χωρήσαι, τοῦ ἐξῆς παραδείγμ.
τῆς ἀφαιρέσεως δοθέντος· $(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{3}{8})$
 $- (\frac{1}{8} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{5}{2} - \frac{1}{8})$ Ἀμελεῖ
ὁ μειωτέος ἀχθῆσεται α' εἰς μίαν ποσότη-
τα, εἶτα καὶ ὁ ἀφαιρετέος, καὶ τελευταῖον ἄμφω
ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομασὴν, καὶ τότε ἀφαιρεθῶσονται
ἀπ' ἀλλήλων.

Αἱ καταφατικά ποσότητες τοῦ μειωτέου εἰσὶ

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{6}{8} + \frac{4}{8} = \frac{10}{8}$$

$$= \frac{5}{4}$$

Αἱ

$$\text{Αἱ ἀποφαιτικαὶ ποσότητες τοῦ αὐτοῦ } \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \\ = \frac{4}{32} \text{ καὶ } \frac{2 \cdot 1}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}.$$

$$\text{Αἱ καταφ. καὶ ἀποφ. ποσ. τοῦ μειωτέου ἅμα} \\ \frac{5}{4} - \frac{7}{8} = \frac{5 \cdot 8}{4 \cdot 8} - \frac{7 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{40}{32} - \frac{28}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \\ = \text{ὅλῳ τῷ μειωτέῳ}.$$

$$\text{Αἱ τοῦ ἀφαιρετέου καταφ. ποσότη. } \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \\ + \frac{1}{4} = \frac{2}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Αἱ τοῦ ἀφαιρετέου ἀποφ. } 1, \frac{1}{8}, = \frac{1}{1}, \frac{1}{8} \\ = \frac{8}{8} \text{ καὶ } \frac{1}{8} = \frac{9}{8}.$$

$$\text{Τοῦ ἀφαιρετέου αἱ καταφ. καὶ ἀποφ. ποσότη.} \\ \text{ὁμοῦ } \frac{5}{4} - \frac{9}{8} = \frac{5 \cdot 8}{4 \cdot 8} - \frac{9 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{40 - 36}{32} = \frac{4}{32} \\ = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Τοῦ Μειωτέου, καὶ ἀφαιρετέου αἱ ποσότητες} \\ \text{ὁμοῦ } \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \text{ὅλῳ τῷ παραδ.}$$

Περὶ τοῦ τῶν κλασμάτων πολλαπλα-
σιασμοῦ.

§. 140. Ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν κλασμάτων, πολλαπλασιάζονται κλάσματα (εἴτε γνήσια, εἴτε νόθα) ἐπὶ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς, ἢ κλάσματα ἐπὶ κλάσματα* (εἴτε γνήσια ἅμῃ, ἢ νόθα, ἢ θάτερον μόνον) περὶ παντὸς τρόπου ἐπάζομεν γενικὸν κανόνα, βραχέα τινα ἐν μέρει θεωρήσαντες* παραληφθήτω α' ὁμὸν ἕτερος παράγων, κλάσμα, ὃ δ' ἕτερος, ὁλοσχερής· οἷον ἔσω πολλαπλασιασέον $\frac{3}{4}$ μετὰ τοῦ 5, ἢ, ὃ ταῦ- τόν, 5 μετὰ τοῦ $\frac{3}{4}$. (§. 58.) τοῦτο δ' ἐστὶν ὁ πολλαπλα-

λαπλασιασέος $\frac{3}{4}$ προσεθήσεται ἑαυτῷ τοσάνκις, ὡσάνκις ἢ 1 τῷ 5 ἐμπεριέχεται (§. 55.), ἥτοι πεντάκις· οἷον $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$. (§. 130.) ταῦτό δὲ προκύψει, καὶ εἰ ὁ ὀλοσχερὴς ἀριθμὸς τῷ ἀριθμητῇ τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται· ἐνθεν „συνάγεται ὁ κανὼν· κλάσματα πολλαπλασιασθή-
 „σονται μεθ' ὀλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς ἐκεί-
 „νων τῷ δοθέντι ὀλοσχερεῖ πολλαπλασιάζεται ὡς $\frac{3}{4} \cdot 5$
 $= \frac{3 \cdot 5}{4} = 1\frac{3}{4}$. τῷ αὐτῷ τρόπῳ χρῆσθαι, καὶ εἰ
 νόθον κλάσμα μεθ' ὀλοσχεροῦς ἀριθμοῦ πολλαπλασιά-
 „σαι πρόκειται· ἐντεῦθεν δῆλον, καὶ ὅπως ὀλοσχερῇ
 ἀριθμὸν, μετὰ κλάσματος συνημμένον, μεθ' ἑτέρου ὀλο-
 „σχεροῦς πολλαπλασιάσομεν· οἷον $1\frac{3}{4}$ μετὰ 4· τοῦ γὰρ
 ὀλοσχεροῦς μετὰ τοῦ κλάσματος εἰς νόθον κλάσμα τρα-
 „πέντος, (§. 133. καὶ σχ.) ὁ τοῦ καινοῦ κλάσματος
 ἀριθμητὴς τῷ ὀλοσχερεῖ πολλαπλασιασθήσεται $1\frac{3}{4} \cdot 4$
 $= \frac{7}{4} \cdot 4 = 28 = 7$.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν κλασμάτων ἐν γραμμα-
 „σι μετὰ γραμμάτων, ὀλοσχερεῖς παριστώντων, τελε-
 „σθήσεται ὡσαύτως· π. χ. $\frac{a}{\beta} \cdot \delta = \frac{a\delta}{\beta}$. ὅτι
 δὲ οὕτως ἔχειν ἀνάγκη, αὐτόθεν δῆλον· πρόκειται
 γὰρ ἡ ποσότης $\frac{a}{\beta}$, δ: ις (§. 55.) ληφθῆναι, ἢ

δ: ις ἑαυτῇ προσεθῆναι (§. αὐτ.) ὅπερ, ὡς ἀνωτ.
 δέδεικται, διὰ τοῦ πολλαπλ. τοῦ ἀριθμητοῦ γίνεται·
 Καὶ τὰς τοιάσδε τῶν ποσοτήτων, οἷα ἢ $a + \frac{\beta}{\gamma}$
 πολλαπλασιάσομεν μεθ' ἑτέρας, οἷον μετὰ τῆς δ, μετα-
 „χειρίζομενοι αὐτὰς τὸν ὅμοιον τρόπον, ὡς καὶ τοὺς ἀριθ-
 „μοὺς· καὶ γὰρ $a + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a}{1} + \frac{\beta}{\gamma}$ (§. 128.)

$$= \frac{\alpha\gamma}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma + \beta}{\gamma} \quad (\S. 130.)$$

“Ο πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ δ ἔσται $= \frac{\alpha\gamma + \beta}{\gamma} \cdot \delta$

$$= \frac{(\alpha\gamma + \beta) \delta}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma\delta + \beta\delta}{\gamma} \quad \text{Ἐξω } \alpha = 1.$$

$\beta = 2. \quad \gamma = 3. \quad \delta = 4.$ Ἐὰν οὖν οἱ ἀριθμοὶ ἀντικαταστῶσι τῶν γραμμάτων ἔσται $\frac{\alpha\gamma\delta + \beta\delta}{\gamma}$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4}{3} = \frac{12 + 8}{3} = \frac{20}{3}.$$

Τὸ αὐτὸ δ' ἂν προέκυψε, καὶ εἰ ἐν ἀρχῇ τὰ γράμματα διωρίζοντο· ἦν γὰρ $\alpha + \frac{\beta}{\gamma} \cdot \delta =$

$$1 + \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{5}{3} \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4}{3} = \frac{20}{3} = 6 \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Αὐθις } \frac{\alpha}{\beta} \cdot \delta + \gamma &= \frac{\alpha \cdot (\delta + \gamma)}{\beta} \\ &= \frac{\alpha\delta + \alpha\gamma}{\beta}. \quad \text{Καὶ } \alpha\gamma - \frac{\nu}{\mu} \cdot \zeta = \frac{(\alpha\gamma\mu - \nu)\zeta}{\mu} \\ &= \frac{\alpha\gamma\mu\zeta - \nu\zeta}{\mu}. \end{aligned}$$

§, 141. Ὁ κλάσματιν μετὰ κλάσματιν πολλαπλασιασμοῦ, ὡς τοῦ $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8}$, οὐδὲν δυσχερὲς ἔχει· κατὰ τὸ (§. ἀνωτ.), εἰ κλάσμα ὁλοσχερεῖ ἀριθμῷ πολλαπλασιάσειν ἐμέλλομεν, ἐπολλαπλασιάζετο ὁ ἀριθμητὴς μόνον· Εἰ οὖν καὶ ἐπὶ τούτων οὕτω χωρήσομεν, τοῦτ'· εἰ μόνον τὸν ἀριθμ. τοῦ ἑτέρου κλάσμι μετὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἑτέρου πολλαπλασιάσομεν, ὁ δὲ παρονομαστής

νομασῆς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὁ αὐτὸς τηρηθεῖη, τὸ παραγόμενον πάνυ ἂν μέγα προκύψει· πρόκειται γὰρ ὁ πολλαπλασιασμοῦ πολλαπλασιασθῆναι οὐχὶ μετὰ τηλικούτου ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, ἡλικὸς ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἀλλὰ μετ' ἀριθμοῦ διηρημένου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· πολλαπλασιασθέντων τοίνυν τῶν ἀριθμητῶν ἀμφοῖν τῶν κλασμάτων μετ' ἀλλήλων, τοσοῦτῳ ἡϋξῆται τὸ παραγόμενον, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ παρονομασῆς τοῦ ἑτέρου κλάσματος· ἀναγκαῖον ἄρα τοσοῦτῳ καὶ μειωθῆναι· τὸ δὲ γενήσεται, εἰ τὸν διαιρέτην, τοῦτ'· τὸν παρονομαστὴν, τοσάνκις αὐξήσομεν· ἔσαι δὲ τοῦτο, εἰ καὶ τοὺς παρονομαστὰς τῶν κλασμάτων μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιάσωμεν· ὥς κλάσματα πολλαπλασιάζονται μετὰ κλασμάτων, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν μετ' ἀλλήλων τοὺς ἀριθμητὰς, ὡσαύτως καὶ τοὺς παρονομαστὰς. ἢ ἐὰν τὸ ἐκ τῶν ἀριθμητῶν παραγόμενον εἰς καινὸν ἀριθμητὴν, τὸ δ' ἐκ τῶν παρονομαστῶν εἰς καινὸν παρονομαστὴν γίνηται· π. χ. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8}$

$$= \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 8} = \frac{15}{32}.$$

Δειχθήσεται δὲ ὁ κανὼν ἄμεινον διὰ γραμμάτων.

Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$ πολλαπλασιασμοῦ μετὰ τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$ ταῦ-

τα παριζῶσι πᾶν κλάσμα· Ὁ, τι οὖν κατὰ τούτων δειχθήσεται, κρατήσῃ καὶ κατὰ παντὸς κλάσματος· καὶ τὸ μὲν πηλίκον, ὃ τὸ α δίδωσι, (διατεθέν γὰρ α

$$\beta$$

διὰ τοῦ β δώσει πάντως πηλίκον τι) ῥηθῆτω ν· ὥς $\frac{\alpha}{\beta} = \nu$ · Ὁ δὲ τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$, μ'· τουτέστι $\frac{\gamma}{\delta}$

$$= \mu^* \frac{\alpha_{\rho\alpha}}{\beta} \frac{\alpha \cdot \gamma}{\delta} = \nu \cdot \mu^* \text{ ἰδωμεν οὖν,}$$

ὅπως τοῦτο ἀνακύψειν·

$\frac{\alpha = \nu}{\beta} \quad \frac{\gamma = \mu}{\delta}$
 πολλαπλ.β. $\frac{\alpha \cdot \beta}{\beta} = \beta \nu$ καὶ $\frac{\gamma \cdot \delta}{\delta} = \delta \mu$ • δ πολ-
 μετά τοῦ β. $\frac{\alpha \cdot \beta}{\beta} = \beta \nu$ καὶ $\frac{\gamma \cdot \delta}{\delta} = \delta \mu$ λαπλ.
 μετά τοῦ δ.

$$\alpha = \beta v \cdot \text{ και } \gamma = \delta \mu \text{ (}\S. 114, \delta' \text{.)}$$

Ἐπεὶ δὲ $\alpha = \beta\gamma$, καὶ
 $\gamma = \delta\mu$

"Ἐσται καὶ $\alpha \cdot \gamma = \beta \nu \cdot \delta \mu$ (§. 79. α'")
: $\beta \delta$ *

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \frac{\beta\nu \cdot \delta\mu}{\beta\delta} = \nu\mu.$$

⁵Εἴν δὲ καὶ $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \nu\mu$, ὡς εἶδομεν ἐν ἀ' χη'.

"Ἐστὶ ἀρα καὶ $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ (§. 48. δ'.)

*Επὶ δευτοῦ αγ ὁρῶμεν τοὺς ἀριθμητάς τῶν κλα-
βδ

σμάτων μετ' ἀλλήλων πεπολλαπλασιασμένους, ὡσαύτως
καὶ τοὺς παρονομαζάς, διὰ δὲ τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$

παρίσταται οἰονδηποτοῦν κλάσμα· δηλὸς ἄρα ὁ ἀνωτέρω
καγών·

Προκείσθω ἤδη καὶ παραδείγματα.

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{35} \quad \text{Καὶ} \quad \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\epsilon}{\zeta} \cdot \frac{\nu}{\mu} = \frac{\alpha\gamma\epsilon\nu}{\beta\delta\zeta\mu}$$

§. 142. Ἐάν δὲ καὶ ἓν, ἢ πλεον, ἢ καὶ πάντα τὰ κλάσματα, τὰ μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθήσόμενα, νόθα ἢ κλάσματα, τοῦτ μείζω τῆς 1 (§. 148.), ὁ τούτων πολλαπλασιασμός γενήσεται κατὰ τὰ αὐτά, ὡς τῆς ἀνωτέρω διὰ τῶν γραμμάτων οὐκ ἔχουσιν κατὰ τὰν τῶν κλασμάτων κρατουσῆς· ὡς $\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{35}{56}$. Εἰ δ' οἱ παράγοντες (§. 6.) ὁλοσχερεῖς εἰσιν ἀριθμοὶ μετὰ κλασμάτων, ὥσπερ $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$, εἰς νόθα κλάσματα τραπέντες κατὰ τὸν δοθέντα κανόνα μεταχειρισθήσονται· $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ (§. 133. σχ.) καὶ $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ὥς $\frac{7}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$.

Καὶ ἐπειδὴ πᾶς ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς ὡς κλάσμα θεωρηθῆναι ἔχει, οὗ παρονομαστής ἢ 1, (§. 138.) ἐν ἑν τοῖς παράγουσι καὶ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ ἐννοεῖται, γραφῆσονται ὡς κλάσματα, καὶ πολλαπλασιασθήσονται· $\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{96}{84} = 1\frac{12}{84} = 1\frac{1}{7}$.

Σχόλιον.

Τὸ παραγόμενον, ὅπου προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γνησίων κλασμάτων, εἶναι πάντοτε ἔλαττον τοῦ ἐνὸς τῶν παραγόντων· αἶον $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ ὡς ὁρᾷς, τὸ $\frac{3}{7} <$ τοῦ $\frac{3}{5}$, ὡσαύτως καὶ τοῦ $\frac{5}{7}$. ὅτι ἐν τῷ $\frac{3}{5}$ διηρέσθῃ ἡ μονὰς μόνον εἰς 5 μέρη, ἐν δὲ τῷ παραγόμενῳ εἰς 7, ἐξ ὧν (5, καὶ 7) ἐληφθῆσαι 3 εἰς τὸν ἀριθμητήν· ἢ δ' αἰτία, ὅτι τὸ γνήσιον κλάσμα ἔλαττον τῆς 1. Ὅτε λοιπὸν πολλαπλασιάζεται γνήσιον κλάσμα διὰ γνησίου, ἀναγκαίως τὸ παραγόμε-

γόμενον ἔλαττον ἔσαι τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων· ὁ γὰρ ἕτερος παράγων ἐλήφθη ἔλαττον, ἢ ἅπαζ. τῶν δὲ νόθων πολλαπλασιαζομένων, τὸ παραγόμενον μείζον τοῦ ἑτέρου, ἢ τοῦ ἐνὸς τῶν παραγόντων· ὅτι τὸ νόθον κλάσμα μείζον τῆς 1.

§. 143. Περί δὲ τῶν σημείων + καὶ —, χάραν ἔχει ἐνταῦθα τὰ ῥηθέντα (§. 77. καν.)· ὅτι καὶ τὰ κλάσματα ποσότητες εἰσι· π. χ. $+\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$. Καὶ $-\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{15}{8}$.

Καὶ $-\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = -\frac{15}{8}$ καὶ $+\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$. Καὶ ἐν γράμμασιν.

$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ Καὶ $-\frac{\alpha}{\beta} \times -\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$
 $= \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ Καὶ $\frac{\alpha}{\beta} \times -\frac{\gamma}{\delta} = -\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$

Καὶ $-\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} = -\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ Ὡσαύτως καὶ εἰ ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων ὁλοσχερῆς ἀριθμὸς εἴη, ἢ νόθον κλάσμα, ἢ ἑκάτεροι νόθα κλάσματα.

Περί τῆς τῶν κλασμάτων διαιρέσεως·

§. 144. Ἐν τῇ τῶν κλασμάτων διαιρέσει ἀριθμὸν ζητεῖν πρόκειται, πᾶσις ὁ διαιρέτης τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχεται, ἐμφαίνοντα, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως τῶν ὁλοσχερῶν (§. 82.) ὁ δὲ ζητούμενος τὸ πηλίκον ἐστίν· οἷον ἔσω διαιρετέον $\frac{3}{4}$ διὰ τοῦ $\frac{2}{3}$, ὃ ἐστὶ, ζητητέον, πᾶσις ὁ $\frac{3}{4}$ περιέχει τὸν $\frac{2}{3}$ · ἐνταῦθα ἀπαντῶσι διάφοροι τρόποι.

1) Ὁ διαιρέτης ἐστὶν ὁλοσχερῆς ἀριθμὸς, ὁ δὲ διαιρετέος κλάσμα, γνήσιον, ἢ νόθον· ἢ τὸ ἀνάπαλι

2) Ὁ

2) Ὁ διαιρέτης, καὶ διαιρετέος, ἀμφω κλάσματα, ἦτοι γνήσια, ἢ νόθα· ἢ ὁμὴν, γνήσιον, ὃ δὲ, νόθον·

§. 145. Ῥητέον οὖν α'· περὶ τοῦ α'· προτεθείσθω τὸ κλάσμα $\frac{8}{9}$ διὰ 2 διαιρεθῆναι· ἐκ τοῦ §. 117. ἔηλον, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{8}{9}$ ἀναφύεται, ἐάν, τῆς μονάδος εἰς 9 μέρη διαιρεθείσης, 8 τούτων λάβωμεν· ὅτι $\frac{8}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$. Εἰ οὖν $\frac{8}{9}$ διὰ 2 διελθὲν δέοι, ζητεῖται, ποσάκις οὕτω μέρη (ὧν ἐκάτερον ἴσον) τῷ $\frac{8}{9}$ ἔνεσι· προφανὲς οὖν, ὅτι 4 τοιαῦτα μέρη τῷ $\frac{8}{9}$ ἔνεσιν· ὥς ἀνάγκη πᾶσα τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{4}{9}$. Ἐνθεντοί $\frac{8}{9} : 2 = \frac{4}{9}$. ταῦτα δὲ προκύπτει καὶ εἰ ὁ ἀριθμητῆς διὰ τοῦ θετέου ὁλοσχεροῦς διαιρέτου διαιρεθῇ, τοῦ παρονομαστοῦ ἀμεταβλήτου τηρουμένου. οὕτως ἂν εἴη καὶ $\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9} = \frac{2}{9}$. Καὶ $\frac{6}{10} : 3 = \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$. καὶ ἐπειδὴ τὰ γράμματα πάντα ἐκδηλοῦσιν ἀριθμὸν, εἴη ἂν $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\delta}{\beta} = \frac{\alpha}{\delta}$.

Τὰ αὐτὰ δὲ κρατούσι, καὶ τοῦ διαιρετέου νόθου ἔντος κλάσματος· ὥς $\frac{16}{13} : 2 = \frac{8}{13} = \frac{8}{13}$. Ὅτι δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει, αὐτόθεν δῆλον· εἰδέναι γὰρ βουλόμεθα, ποσάκις τοσαῦτα μέρη, ὅσα ὁ διαιρέτης δεικνύει, τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχονται.

§. 146. Ἐφ' ὅσον τοίνυν ὁ ἀριθμητῆς διὰ τοῦ διαιρέτου διαιρέσιμος ἢ, ἔχει χώραν τὸ ῥηθέν (§. ἀν.) Ἐάν δὲ τοῦτο οὐκ ἐγχωρῇ, ὅλον εἰ ξ διὰ 2 διαιρεθῆναι δέοι, τὸ προκείμενον κλάσμα εἰς ἕτερον μεταβολοῦμεν ἰσοδύναμον, (§. 125.) τῷ πολλαπλασιασμῷ ἀμφοῖν τῶν ὁρῶν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὥς τὸν ἀριθμητὴν τῷ θετέντι ὁλοσχερεῖ διαιρέτῃ ἐνεργείᾳ διαιρεῖσθαι δύνασθαι· προσφύεζεν δ' εἰς τοῦτο ὁ ἀριθμὸς αὐτοῦ τοῦ διαιρέτου· οὕτω $\xi : 2$ εἴη ἂν $= \frac{\xi \cdot 2}{2}$.

$\frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 2} : 2$. Ἐάν οὖν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ δευτέρου

διαιρέτου διέλωμεν, ὁ μὲν 2, μεθ' οὗ πεπολλαπλασιάσαι,
ἐκπίπτει πάλιν, ἀναιρούμενος ὑπὸ τοῦ 2 διαιρέτου,
καὶ μένει μόνον ὁ 5. ἐν δὲ τῷ παρονομασῇ τηρεῖται ὁ
2 οὕτως. $\frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 2} : 2 = \frac{5}{7 \cdot 2} = \frac{5}{14}$.

Θεωρησῆτω τοῦτο καὶ ἐν γένει. Ἐξω διαιρετέον
τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ τοῦ γ οὕτως $\frac{\alpha}{\beta} : \gamma$. πολλαπλασία-

σον ἤδη ἄμφω τοὺς ὄρους διὰ γ , $\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \gamma} : \gamma$. διέλε
μόνον τὸν ἀριθμὸν διὰ τοῦ $\gamma = \frac{\alpha \cdot \gamma : \gamma}{\beta \cdot \gamma} = \frac{\alpha}{\beta \gamma}$.

(§. 99. σχ. β') Ἐπειδὴ οὖν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ παριστᾷ πᾶν

κλάσμα, εἴτε γνήσιον, εἴτε νόθον, τὸ δὲ γ πάντα ὁ-
λοσχερῇ ἀριθμὸν, ἔπεται ὁ κανὼν ἐντεῦθεν· κλά-
σματα διαιρουῦνται ἰδιόλοσχερῶν ἀριθμῶν,
ἐάν μόνον ὁ τούτων παρονομαστὴς μετὰ
τῶν ὀλοσχερῶν πολλαπλασιάζεται διὰ
ταύτης τῆς πράξεως προκύπτει τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ
ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ ὀλοσχεροῦς ἀριθμοῦ διαιρουμένου·
ὥς τὸ $\frac{8}{9} : 2$ κατὰ τὸν α' τρόπον $= \frac{8 : 2}{9} = \frac{4}{9}$.

κατὰ δὲ τὸν δεύτερον $\frac{8}{9} : 2 = \frac{8}{9 \cdot 2} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$
= τῷ πηλίκῳ τῷ α'.

§. 147. Τὸ δ' ἀντίπαλιον τοῦ ἐν (§. 145.) ἐστὶ
 $3 : \frac{3}{4}$. κατὰ τὸ (§. 128.) $3 = \frac{3}{1}$. ὥς $3 : \frac{3}{4}$
εἴη ἂν καὶ $\frac{3}{1} : \frac{3}{4}$. τὸν δ' ἐστὶ ταῦτ', ὡς εἰ κλάσμα διὰ
κλάσματος διαιρεθῆναι προῦκειται· γνωστὸς δὲ καὶ ὁ
τρόπος

τρόπος τῶν κλάσματα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀνάγειν παρονομασίην. (§. 123.) καὶ $\frac{3}{1} : \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 8}{1 \cdot 8} : \frac{5}{1} = \frac{24}{8} : 5$
 $= \frac{24}{8} : 5$. Ἐπειδὴ οὖν ἂν φω ἐγένοντο κλάσματα, καὶ ἐφ' ἑκατέρων ἡ μονὰς εἰς ἴσα μέρη διήρηται, ἥπερ ὁρᾷν πάρεσι, θεωρητέον μόνον τοὺς ἀριθμητάς, ὡς ὁλοσχερεῖς, ὡς τῶν παρονομασιῶν οὐκέτι ἐνταῦθα τεινόντων, (ἕκασον γὰρ μέρος τοῦ 24 τηλικούτον ἐστίν, ἡλικόν καὶ ἕκασον τοῦ 5) καὶ διαιρετέον ἐνεργεῖα 24 διὰ τοῦ 5· διαιροῦμεν οὖν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ διαιρέτου· ὥςτε $\frac{24}{8} : 5 = \frac{24}{5}$.

Παραδείγματα· $3 : \frac{2}{5} = \frac{3}{1} : \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 5} : \frac{2}{1} = \frac{15}{5} : 2 = \frac{15}{2}$.

Καὶ ἐν γράμμασι·

$$\gamma : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{1} : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma \cdot \beta}{\beta} : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma \beta}{\alpha}$$

§. 148. Ὅπως οὖν ἡ διαίρεσις τελεῖται, εἴαν ὁ διαιρετέος ὁλοσχερὴς ἢ ἀριθμὸς, ὁ δὲ διαιρέτης κλάσμα, ἥδη εἴρηται· τὸ δ' αὐτὸ ἂν ἐποιήσαμεν, καὶ εἰ τὸ ἀνάπαλιν εἴη, εἰ μὴ συντομωτέραν μέθοδον εὑρεῖν ἠδυνήθημεν. (§. 145.) ἐκ τούτου μανθάνομεν καὶ τὴν τῶν κλασματίων μεταχειρίσιν, εἰ ἄμφω, διαιρετέος, καὶ διαιρέτης, εἰσὶ κλάσματα ὁποιαοῦν· καὶ ἀνωτ. γὰρ ἄμφω ἐγένοντο κλάσματα· τουτέστιν, εἴαν „ὁ διαιρετέος, καὶ διαιρέτης, κλάσματα ὦσιν, ἀναγαγὼν ἄμφω εἰς τὸν αὐτὸν παρονομασίην διέλθῃ τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ·

Παραδείγματα· $\frac{3}{5} : \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} : \frac{5 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{24}{40} : \frac{25}{40} = \frac{24}{25}$. Καὶ ἐν γενεῇ·

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \delta} : \frac{\gamma \cdot \beta}{\delta \cdot \beta} = \frac{\alpha \delta}{\gamma \beta}$$

$$\frac{\nu}{\mu}$$

$$\frac{\nu}{\mu} : \frac{\rho + \sigma}{\tau} = \frac{\nu\tau}{\mu\tau} : \frac{(\rho + \sigma)\mu}{\tau\mu}$$

$$= \frac{\nu\tau}{(\rho + \sigma)\mu} = \frac{\nu\tau}{\rho\mu + \sigma\mu}$$

Ἵνα δὲ γενικὸν κανόνα ἐπάξωμεν, πᾶσι τοῖς τρόποις ἐφαρμόζοντα· Ἐξω $\frac{\nu}{\mu}$ διαιρετέον διὰ τοῦ $\frac{\rho}{\sigma}$.

δι' οὗ πᾶν κλάσμα παρίσταται, εἴτε γνήσιον, εἴτε νόθον· ἀλλὰ καὶ ὁλοσχερῇ ἀριθμὸν τὸ ἕτερον τούτων σημαίνει δύναται, ἦτοι τοῦ μ τοῦ παρονομαστοῦ, ἢ τοῦ σ ἀντὶ μονάδος παραλαμβανομένου· διελεῖν οὖν τὸ παρὸν παράδειγμα βουλομένοις ἀνακτεόνεσιν εἰς τὸν κοινὸν παρονομασὴν $\frac{\nu}{\mu} : \frac{\rho}{\sigma} = \frac{\nu \cdot \sigma}{\mu \cdot \sigma} : \frac{\rho \cdot \mu}{\sigma \cdot \mu}$, καὶ

οὕτω τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ διαιρετέον $= \frac{\nu\sigma}{\rho\mu}$.

Ἀλλὰ τούτου ἀκριβῶς θεωρουμένου, εὐδὴλον, ὅτι τὸ αὐτὸ ἂν προκύψει, καὶ εἰ τὸν διαιρέτην ἀναξρέψας ἀντὶ τοῦ $\frac{\rho}{\sigma}$ γράψῃς $\frac{\sigma}{\rho}$, καὶ τὴν διαίρεσιν

εἰς πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων μεταβάλλῃς, ἔνθα ὁ ἀριθμητὴς μετὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ ὁ παρονομασὴς μετὰ τοῦ παρονομαστοῦ πολλαπλασιάζονται· ὅτι $\frac{\nu\sigma}{\rho\mu}$, ἢ $\frac{\nu \cdot \sigma}{\mu \cdot \rho}$ τὸ αὐτὸ ἔστιν· ἐντεῦθεν ὁ

κανὼν·

Κλασμάτων διὰ κλασμάτων διαιρέσθῃναι προκειμένων, ἀναξρέψας τὸν διαιρέτην (τοῦτ'· τὸν ἀριθμ. παρον. καὶ τοῦτον ἀριθμητ. ποιήσας) μετάβαλε τὴν διαίρεσιν εἰς πολλαπλασιασμὸν·

Σχόλ.

Σχόλιον.

Ἐὰν ὁ διαιρετός ἢ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, ἃς μεταβληθῇ εἰς κλάσμα, καὶ εἴτα ἃς ἀναστροφῇ ὁμοίως καὶ εἰ ὁ διαιρετέος ὁλοσχερὴς ἔσῃ.

Παραδείγματα. $\frac{1}{8} : 3 = \frac{1}{8} \div \frac{3}{1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$.

$$2 : \frac{3}{8} = \frac{2}{1} : \frac{3}{8} = \frac{2}{1} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

$$1\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{3}{2} : \frac{3}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{24}{2} = 12.$$

$$\frac{3}{5} : 2\frac{1}{2} = \frac{3}{5} : \frac{5}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}.$$

$$\frac{10}{10} : \frac{7}{10} = \frac{10}{10} \cdot \frac{10}{7} = \frac{100}{70} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}.$$

Ὡσαύτως καὶ ἐν κλάσμασι διὰ γραμμάτων, ἔξ ὧν ἂν συγκένωνται ὅρων π. χ. $\frac{\rho + \chi}{\alpha - \beta}$:

$$\frac{\nu - \mu}{\gamma} = \frac{\rho + \chi}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\gamma}{\nu - \mu} = \frac{(\rho + \chi)\gamma}{(\alpha - \beta)(\nu - \mu)}$$

$$= \frac{\gamma\rho + \gamma\chi}{\alpha\nu - \alpha\mu + \beta\mu - \beta\nu}$$

§. 149. Ἐνίοτε δ' εὐρίσκομεν καὶ κλάσματα, ἢ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς μετὰ κλασμάτων ἰδιαιτέρῳ τινὶ τρόπῳ ἐκφερόμενα· ἀλλ' ὡς ἐπὶ τοὺς ῥηθέντας καὶ ταῦτα κανόνας ἀναγόμενα ῥαδίως διαγνωσθήσονται. π. χ.

$$\frac{3}{4} \text{ ἐστὶ } \frac{3}{8} : \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}. \text{ Καὶ } 1\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$$

$$= 1\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{7}{4} : \frac{5}{7} = \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{49}{20} = 2\frac{9}{20}.$$

Ἀλλὰ καὶ τὰς τοῦ σχήματος $\frac{2}{3}$ εἰς κατανόησιν εὐχερές, α'· $\frac{1}{1 \cdot \frac{5}{8}}$ γὰρ διαιρετέον τὴν 1 διὰ τοῦ $\frac{5}{8}$, καὶ εἴτα διὰ τοῦ πηλίκου τὸ $\frac{2}{3}$ οὕτως.

$$\frac{\frac{12}{8}}{1 : \frac{5}{8}} = \frac{\frac{3}{2}}{1 \cdot 8} = \frac{2}{24} = \frac{2}{3} : \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

$$= \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

§. 150. Εἰ πρόκειται κλάσμα δι' ἑαυτοῦ διαιρεθῆναι, τὸ πηλίκον εἶναι (* (§. 84. σχ.) π. χ. $\frac{3}{4} : \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$
 $= \frac{12}{12} = 1.$ Καὶ $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}$
 $= \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = 1.$

Σχόλιον.

Εἰς τὴν ἐρώτησιν, τί τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{3}{4}$, ἀπαντητέον, τὸ παραγόμενον ἐκ τοῦ $\frac{3}{4}$ μετὰ τοῦ $\frac{1}{2}$ πολλαπλασιασθέντος· ὡσαύτως καὶ τί τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{8}$, τὸ παραγόμενον ἐκ τοῦ $\frac{5}{8}$ πολλαπλασιασθέντος μετὰ τοῦ $\frac{2}{3}$, κτ'.

§. 151. Περί δὲ τῶν σημείων κρατοῦσι καὶ ἐν τοῖς κλάσμασι τὰ ὁροθετηθέντα· (§. 77. καν.) ὡς $+\frac{5}{8} : +\frac{3}{4}$
 $= +\frac{5}{8} \cdot +\frac{4}{3} = +\frac{20}{24} = +1\frac{1}{6}.$ Καὶ
 $-\frac{5}{8} : -\frac{3}{4} = +1\frac{1}{6}.$ Τὸ δὲ $-\frac{5}{8} : +\frac{3}{4}$
 $= -1\frac{1}{6}.$ Ὡσαύτως καὶ $+\frac{5}{8} : -\frac{3}{4} =$
 $= -1\frac{1}{6}.$

§. 152. Ἡ μέθοδος τῆς βασάνου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν (§. 98.) χώρανέχει καὶ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ, καὶ διαιρέσει τῶν κλασμάτων.

Βάσανος τοῦ πολλαπλ. τῶν κλασμάτων·

$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ Διέλε ταῦτα τὸ παραγόμενον διὰ τοῦ ἐτέρου τῶν παραγόντων, π. χ. διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$

α , καὶ τὸ πηλίκον ἔσται $\frac{\gamma}{\delta}$ ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων·
 $\frac{\alpha}{\beta}$
 ὥστε $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha\gamma\beta}{\beta\delta\alpha}$ Ἐνθα τὸ α
 καὶ β τοῦ παρονομαστοῦ ἀναιρεῖ τὸ α καὶ β τοῦ ἀριθμη-
 τοῦ, καὶ ὑπολείπεται $\frac{\gamma}{\delta}$, ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων.

Καὶ ἐν ἀριθμοῖς· $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$. Διέλε τὸ παραγόμενον
 τῶν ἑτέρων τῶν παραγόντων, π. χ. τῷ $\frac{5}{8}$, καὶ προκύψει
 πηλίκον τὸ $\frac{3}{4}$. ὥς $\frac{15}{32} : \frac{5}{8} = \frac{15}{32} \cdot \frac{8}{5} = \frac{120}{160}$
 $= \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

Βάσανος τῆς διαιρέσεως τῶν κλασμάτων·

Ἐςω $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$, ὃ τὸ πηλίκον ἐστὶ. πολ-

λαπλασίασον τὸ πηλίκον μετὰ τοῦ διαιρέτου $\frac{\gamma}{\delta}$, καὶ

προκύψει σοι ὁ διαιρετέος $\frac{\alpha}{\beta}$. ὥς $\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta\gamma}{\beta\gamma\delta}$

$= \frac{\alpha}{\beta}$. Καὶ ἐν ἀριθμοῖς· $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{10}$

$= \frac{6}{5} =$ τῷ πηλίκῳ. Ὁ πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ

διαιρέτου $\frac{2}{3}$, δώσει $\frac{4}{5}$ τὸν διαιρετέον· Ἐξὶ γὰρ $\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3}$

$= \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$. ὡσαύτως καὶ $6 : \frac{1}{8} = 6 \cdot \frac{8}{1}$

$= \frac{48}{1} = 48$. ὁ πολλαπλ. μετὰ τοῦ $\frac{1}{8}$ ἔσται 48

$\chi \frac{1}{8} = \frac{48}{1} \cdot \frac{1}{8} = \frac{48}{8} = \frac{6}{1} = 6$.

Σχόλιον.

Τὰ δ' εἶδη, ἧτοι πρόσθ. ἀφαιρ. πολλαπλατ.
 καὶ διαίρ. τῶν συγκεκριμένων (§. 4.) κλασμάτων εἶ-

ναι

ναι πάντα τα αὐτὰ μετὰ τῶν ἀΦηρημένων εἶδη, τὰ ὁποῖα ἤδη ἐπραγματεύσαμεθα. Ὅθεν εἶναι περιττὸν νὰ παρατεθοῦν καὶ αὐτῶν παραδείγματα. Ὁ ἀναγνώστης θέλει βεῖρει αὐτὰ εἰς κάθε κοινὸν ἀριθμητικὸν βιβλίον.

Περὶ τῶν Δεκαδικῶν κλασμάτων.

§. 153. Ἐπὶ τοῦ παραληφθέντος ἀριθμητικοῦ συστήματος τοῦ ἐκ δέκα χαρακτήρων, (§. 11.) τῆς ἀριθμήσεως δεξιόθεν χωρούσης, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ὁ ἐν τῷ β' τόπῳ τὸ δεκαπλάσιον σημαίνει τοῦ, ὁ ἐν τῷ α' τόπῳ δηλοῖ (§. 62.) Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἀριστερόθεν τῆς ἀρχῆς τῆς ἀριθμήσεως γενομένης, ἕκαστος χαρακτήρ τὸ δεκατημόριον δυνήσεται τοῦ ἀμέσως προηγησαμένου. Καὶ τοῦτο νόμος τῶν ἀριθμῶν γενικός, ἀπὸ Βουλῆς ἡρτημένος (§. 12. ἐν τέλει.) Ἀλλὰ καὶ τοῦτο δῆλον, ὅτι, ἐὰν ὁ τόπος τῶν ἀπλῶν, ἔνθα ὁ χαρακτήρ ἐν τῇ Φυσικῇ αὐτοῦ ἴσεται σημασίᾳ, τοῦ: ὁ α' τόπος, ὅθεν οἱ ἀριθμοὶ ἀρχονται, ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ προαγόμενοι, κόμματι διασπῇ, καὶ μετ' αὐτὸ καὶ ἕτεροι ἀριθμοὶ γραφῶσιν, ὁ α' τούτων τὸ δεκατημόριον σημαίνει ἑκάστου ἀριθμοῦ τοῦ ἐν τῷ τόπῳ τῶν ἀπλῶν, ὁ δὲ β' τὸ δεκατημόριον τοῦ α', κτ' π. χ' 5555, 5555' ἔνθα τὸ κόμμα ἐστίν, ἔνταυθα ἀπολήγει καὶ ἡ ἀπλή σημασία τοῦ 5, (ἥτοι σημαίνει, ὅπερ διώριζαι, τοῦτ. 5 μονάδας) ὁ δὲ 5 μετὰ τὸ κόμμα δηλοῖ 5, ὁ δὲ μετὰ τοῦτο β' δε-

10

κάκις ἔλαττον δύναται τοῦ α' ἥτοι σημαίνει 5.

100

ὁ γ' 5, ὁ δ' 5, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

1000

10000

οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων χαρακτήρων.

§. 154.

§. 154. Ὁ τοῦτο ἀκριβῶς θεωρῶν εὐχερῶς κατανοήσει, ὅτι, ἐπειδὴ ἡ δύναμις τῶν χαρακτηρῶν ἐφ' ἑκάστου τόπου δεκάκις ἐλαττοῦται τῆς τῶν προηγησαμένων, οἱ μετὰ τὸ κόμμα ἀριθμοὶ κλάσματα γίνονται, ὧν ἑκάστου ὁ παρονομαστὴς δεκάκις τὸν πρὸ αὐτοῦ ὑπερέχει· τὰ τοιαῦτα τῶν κλασμάτων καλοῦνται δεκαδικὰ, ὅτι καὶ ταῦτα κατὰ τὸν δεκαδικὸν διατέτανται νόμον· ὥςτε κἀνταῦθα δέκα μονάδες τῆς κατωτέρας τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἐγγύς ἀνωτέρας·

§. 155. Γράφουσι δὲ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, διασαλτέον ταῦτα τῷ κόμματι (,) (§. 153.) ἀπὸ τῶν ὀλοσχερῶν, τοὺς δὲ παρονομαστὰς ἀναγινώσκονταίς φωναῖς, δεκατημόρια, ἑκατοσημόρια, χιλιοσημόρια, δεκαχιλιοσημόρια, ἑκατονχιλιοσημόρια, μιλλιοσημόρια, κτ'· Εἰθίς μέντοι τοὺς παρονομαστὰς μὴ ὑποτιθέναι τοῖς δεκαδικοῖς, ὡς τῶν δυνάμεων τῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν κατ' αὐτοῦ διοριζομένων τάπων· π. χ. 15.34502 σημαίνει 15 ὀλοσχερεῖς, 3 δεκατημ., 4 ἑκατοσημ., 5 χιλιοσημ., οὐδὲν δεκαχιλιοσημ., 2 ἑκατονχιλιοσημόρια· Εἰ δὲ σὺδεις ὀλοσχερῆς πάρεσιν, ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ τοῦ μηδενικοῦ τεθέντος εἰς δῆλωσιν τοῦ μηδέναι παρεῖναι ὀλοσχερῆ, καὶ μετὰ τοῦτο τοῦ κόμματος, γραφῆτωσαν τὰ δεκαδικὰ· π. χ. 0,54002· ἐνθα οὐδεις ὀλοσχερῆς, 5 δεκατημ., 4 ἑκατοσημ., οὐδὲν χιλιοσημ., οὐδὲν δεκαχιλιοσημ., 2 ἑκατονχιλιοσημ·

§. 156. Τὰ δεκαδικὰ κλάσματα διττῶς γράφειν, καὶ ἀναγινώσκειν ἔχομεν, ἥτοι ἕκαστον χαρακτηρᾶ, ὡς ἰδιαίτερον κλάσμα θεωροῦντες, καὶ τὸν τούτῳ προσήκοντα παρονομαστὴν γράφοντες, καὶ ἀναγινώσκοντες, ὡς ἐν τῷ ἀνωτ. §. ἢ πάντας τοὺς δεκαδικοὺς χαρακτηρᾶς, ὡς τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς μόνου κλάσματος ἐκδεχόμενοι· οὗ παρονομαστὴς ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἰσχύατου δεκαδικοῦ χαρακτηρῶς πρὸς τὰ δεξιά· π. χ.

ο, 243 κατὰ μὲν τὸν ἀνωτ. τρόπον ἐστὶ $\frac{2}{10} + \frac{4}{100}$

καὶ $\frac{3}{1000}$. Κατὰ δὲ τὸν β' τρόπον $\frac{243}{1000}$, ἦται

243 χιλιοσημόρια. Ὅτι δὲ τοῦτο οὐδεμίαν ἐμποιεῖ διαφοράν τῇ δυνάμει τῶν κλασμάτων, δείκνυται διὰ τῆς τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομασὴν ἀναγωγῆς. Ἐστὶ γὰρ $\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{200}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{3}{1000}$ (§. 124.) ταῦτα δὲ $= \frac{243}{1000}$ (§. 130.)

ἄρα καὶ $\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{243}{1000}$ (§. 48. δ').

Σχόλιον. α'.

Ἐὰν γράφωμεν τὰ κλάσματα κατὰ τὸν β' τρόπον, ὁ παρονομ. λαμβάνει τόσα μηδενικά, ὅσα δεκαδικὰ κλάσματα πάρεισι· πρὸ δὲ τῶν μηδενικῶν τοῦ παρονομ. τίθεται ἡ 1· π. χ' $15, 243 = 15 + \frac{243}{1000}$. ἢ $15 \frac{243}{1000}$. Καὶ $6, 0045 = 6 \frac{45}{10000}$ (ἐδὼ εἶναι δ' μηδενικά, ὅτι καὶ οἱ τό-

ποι τῶν δεκαδικῶν εἰσὶ δ'. (καὶ τοι τῶν μηδενικῶν τόπον δύο χαρακτήρων ἐν τῷ ἀριθμητῇ ἐπεχόντων) καὶ $0, 4021 = \frac{4021}{10000}$ κτ.

Σχόλιον β'.

Ὅταν ἐν τῷ α' β' γ' κτ. τόπων τῶν δεκαδικῶν ἦναι μηδενικά, συντομίας χάριν παραλείπονται, γραφομένων μόνον τῶν σημαντικῶν χαρακτήρων ἐν τῷ ἀριθμητῇ· τὰ δὲ μηδενικά τοῦ παρονομαστοῦ δείξουσιν τὴν

$$\begin{aligned} & \text{τὴν δυνάμιν τῶν χαρακτήρων· οἷον } 0, 00056 \\ & = 0 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{6}{100000} \\ & = \frac{56}{100000} \end{aligned}$$

Σχῶλιον γ'.

Καὶ τοὺς ὀλοσχερεῖς χαρακτῆρας ἡμποροῦμεν νὰ τοὺς γράψωμεν ἐν τῇ ἀριθμητῇ μετὰ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, καὶ νὰ τοὺς διακρίνωμεν ὡς ὀλοσχερεῖς κατὰ τὸ α' σχῶλ' ὡς 4, 56 γραφείη ἂν καὶ οὕτω $\frac{56}{100} = 4, \frac{56}{100}$.

Περὶ Προσθέσεως, καὶ Ἀφαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν.

§. 157. Ἡ τῶν δεκαδικῶν πρόσθεσις, ἢ τῶν μόνων ὄντων, ἢ καὶ μεθ' ὀλοσχερῶν συμπεπλεγμένων, πάντῃ εὐχερὴς· τελεῖται γάρ, ὡς καὶ ἡ τῶν ὀλοσχερῶν. (§. 21.) ὅτι κἀνταῦθα δέκα μονάδες τῆς κατωτέρως τάξεως μίαν τῆς ἐγγύς ἀνωτέρας ἀποτελοῦσιν· αὐτόθεν δὲ δῆλον, ὅτι τὰ ὁμοειδῆ ὑπὸ τὰ ὁμοειδῆ γραπτέα, ὡς δεκατημόρια ὑπὸ δεκατημ. κτ' τὸ δὲ κόμμα, τὸ τὰ δεκαδικὰ ἀπὸ τῶν ὀλοσχερῶν διασελλόν, ἐν τῇ κεφαλαιῷ τὸν αὐτὸν καταληφεται τόπον, ὅν καὶ ἐν ταῖς πρόσθετέοις (§. 15.) εἶχε· τὸ γὰρ τῶν ἑκατοσημορίων κεφάλ. ἑκατοσημόρια δηλώσει, τὸ δὲ τῶν δεκατημορίων αὐτῆς δεκατημόρια, κτ. οἷον,

15,543	Καὶ	3,0021
0,236		12,999
5,002		0,9
0,0703		12,00096
20,7813		0,000004
		28,902064

§. 158. Ὡσαύτως καὶ ἡ τούτων ἀφαιρέσις κατὰ πάντα ὁμοία τῇ τῶν ὀλοσχερῶν. (§. 31.) περὶ δὲ τοῦ κόμματος κρατεῖ τὰ αὐτά. (§. ἀνωτ.) οἷον,

Κ

Μειωτέ-

Μειωτέος.	16,4327	Καὶ	15,0004	Μειωτ.
Ἀφαιρέτεος.	5,9294		14,9987	Ἀφαιρ.
Διαφορά.	11,4031		00,0017	Διαφ.

§. 159. Βασανίζονται δὲ, κατὰ τὸν ῥηθέντα τρόπον. (§. §. 25. 31.). Ἐνταῦθα κρατοῦσι καὶ τὰ ὀροθετηθέντα περὶ τῆς προσθέσεως, καὶ ἀφαιρέσεως μετ' ἐναντίως ἐχόντων σημείων. (§. 40. σχ. β'. 49.)

π. χ.	+ 3,0562	Καὶ	— 5,0321	Μειωτ.
	— 2,143		+ 2,1432	Ἀφαιρ.
τὸ κεφ.	+ 0,9132		— 7,1753.	Διαφ.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν.

§. 160. Καὶ οὗτος οὐδὲν διαφέρει τοῦ τῶν ὁλοσχερῶν πολλαπλασιασμοῦ. (§. 58. κτ.) Σημειῶσαι μόνον τιν ἐξῆς κανόνα ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν, εἴτε ἐν τῷ ἑτέρῳ, εἴτε ἐν ἑκατέρῳ τῶν παραγόντων, ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ τοῖς δεκαδικαῖς συνάπτονται, εἴτε οὐδεῖς ὁλοσχερῆς πάρεσι. Πολλαπλασιασθήτωσαν οἱ ἀριθμοὶ (§. αὐτ.) (ὥς εἰ πάντες ὁλοσχερεῖς εἶεν, μηδὲνα λόγον τῶν δεκαδικῶν ποιουμένων) μετ' ἀλλήλων, καὶ τὸ ταύτων παραγόμενον τοσαῦτα δεκαδικὰ περιέξει, ὅσα ἀμφοῖν τοῖς παράγουσιν ἐνυπῆρχον, ὁμοῦ ληφθέντα.

Παράδειγμα.

5,43
0,23
1629
1086
1,2489

Ἐπειδὴ οὖν τὰ τῶν παραγόντων δεκαδικὰ δ' εἰσὶν, ὁμοῦ ληφθέντα, καὶ χαρακτηρὲς τοσοῦτοι τοῦ παραγομένου διασέλλονται τῷ κόμματι, εἰς δεκαδικὰ γινόμενοι. Ἐστὶ δὲ $1,2489 = 1, \frac{2489}{10000}$ (§. 155. καὶ σχ. α' τοῦ §. 156.) Δειχθήσεται δὲ οὕτω

$$5,43 = \frac{543}{100} (\S. 156. \sigma\chi. \gamma'). \quad 0,23 = \frac{23}{100}$$

$$\frac{543}{100} \times \frac{23}{100} = \frac{543}{100} \times \frac{23}{100} = \frac{12489}{10000} (\S. 141.)$$

$$5,43 \times 0,23 = \frac{12489}{10000} (\S. 43. \delta.) = 1,2489$$

(§. 156. σχ. γ')

Οὕτω δείζομεν καὶ τὰ λοιπὰ τῶν παραδειγμάτων, ἐν οἷς εἴτε μόνον ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων τοῖς δεκαδικοῖς συνημμένος εὐρίσκεται, εἴτε οὐδεὶς ὁλοσχερῆς παρῇ.

§. 161. Ἐὰν ἐν τῷ παραγομένῳ μὴ τοσοῦτοι χαρακτήρες προκύπτωσι, ὅσοι κατὰ τον κανόνα (§. 4ν.) τῷ κόμματι διασαλῆναι ὤφειλον, πληροῦτι τὰ μηδενικά τὸν λοιπὸν τόπον, καὶ ἐν τῷ τόπῳ τῶν ἀπλῶν μονάδων ἐνὸς μετὰ τοῦ κόμματος τιθεμένου (§. 155.) π. χ.

0,0000032	Καὶ	0,0000032	
6		0,00324	
0,0000192		128	
		-64	
		96	
		0,000000010368	

Σημείωσαι, ὅτι τὰ σημεῖα + καὶ — κἀνταῦθα ἔπονται τοῖς γενικοῖς κανόσι (§. 77. καν.)

Περὶ Διαίρεσεως τῶν δεκαδικῶν.

§. 162. Ὁ δὲ τῆς διαίρεσεως τῶν δεκαδικῶν κανὼν (ἐν ᾗ, ἥτοι τῷ διαιρετέῳ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ μετὰ δεκαδικῶν ἔννευσιν, ἢ μόνον δεκαδικὰ, τῷ δὲ διαιρετῇ μόνον ὁλοσχερεῖς, ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ τελευταῖον ἀμφοῖν δεκαδικὰ μετὰ, ἢ ἄνευ ὁλοσχερῶν, τὰ δὲ δεκαδικὰ ἐπ' ἀμφοῖν ἥτοι ἰσάριθμα, ἢ τῷ μὲν, πλείῳ, τῷ δ' ἐλάττω) ἐστὶν ὁ ἑξῆς.

Κ 2

Δίελε,

Δίλελε, κατὰ τὸν συνήθη τρόπον. εἴ-
 τα ἀριθμῶν, εἰ ὁ διαιρετέος, ἢ ὁ διαι-
 ρέτης, πλείω ἔχει δεκαδικὰ, ἢ ἄμφω, ἰ-
 σάριθμα· Καὶ εἰ μὲν τοῦτο, οἱ τοῦ πη-
 λίκου χαρακτῆρες δηλοῦσιν ὁλοσχερεῖς
 ἀριθμούς· εἰ δὲ τῷ διαιρετέῳ πλείω δε-
 καδικὰ παρέισι, τοσούτους τῶν χαρακτή-
 ρων τοῦ πηλίκου ποιήσων δεκαδικὰ, ὅ-
 σοις ὁ διαιρετέος τοῦ διαιρέτου πλεονε-
 κτεῖ· Εἰ δὲ τελευταῖον τῷ διαιρέτῃ
 πλείω παρέισι, τοσαῦτα πρόσαφοντῷ πη-
 λίκῳ μηδενικά, καὶ ὅσους χαρακτῆρας
 ὁ διαιρετέος τοῦ διαιρέτου μειονεκτεῖ·

Παράδειγμα, ἔνθα τὰ δεκαδικὰ τοῦ διαιρετέου
 ἰσάριθμα τοῖς τοῦ διαιρέτου·

$$65.19 : 1.23 \quad | 53$$

$$61 \ 5$$

$$03 \ 69$$

$$3 \ 69$$

$$000$$

Ἐνταῦθα τὸ πηλίκον ἐστὶ 53.

ἢ 1, 23 ἐμπεριέχεται τῷ

$$65.19.53 : κς$$

Δειξίς·

$$65.19 : 1.23 = \frac{6519}{100} : \frac{123}{100} \quad (\S. 156. \sigma\chi. \gamma') \\ = \frac{6519}{100} \cdot \frac{100}{123} \quad (\S. 148. \lambda\alpha\nu.) = \frac{65190}{12300} = 53.$$

Παραδείγματα τοῦ β' τρόπου.

1) Ἐπ' ἄμφω ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ, καὶ δεκαδικὰ·

$$12.236 : 2.3 \quad | 5.32$$

$$11 \ 5$$

$$00 \ 73$$

$$69$$

$$046$$

$$46$$

$$00$$

Ἐν τούτῳ, προσῆν τῷ διαιρετέῳ γ' δεκαδικὰ, τῷ δὲ διαιρέτῃ ἔν·

Ὡς κατὰ τὸν κανόνα, ἐπεὶ ὁ διαιρετέος δυοὶ δεκαδικοὶς τὸν διαιρέτην ὑπερέχει, ἀποτμηθήσονται δύο χαρακτῆρες τοῦ πηλίκου εἰς δεκαδικὰ·

2) Ὁ

2) Ὁ μὲν διαιρέτης ἔξω εἰς ὀλοσχερῆς ἀριθμὸς, τῷ δὲ διαιρετέῳ ἔξωσαν ὀλοσχερεῖς, καὶ δεκαδικά, ὡς

$$31,155 : 5 \quad | \quad 6,231$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \hline \end{array}$$

11

10

15

15

005

5

0

Τῷ διαιρέτῃ οὐδὲν ἦν δεκαδικόν, τῷ δὲ διαιρετέῳ ἦν γ' ὥστε 3 χαρακτηριστοῦ πηλίκου τῷ κόμματι διασέλλονται

3) Ὁ διαιρέτης εἰς ὀλοσχερῆς, ὁ δὲ διαιρετέος μόνον δεκαδικά· εἶναι

$$0,009768 : 3 \quad | \quad 3256$$

9

07

6

16

15

18

18

00

Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος κατ' ἑξ. δεκαδικὰ τὸν διαιρέτην ὑπερέχει, ἐνταῦθα τῷ διαιρέτῃ αὐτὸν προσῆν) διασαλτέον ὁ χαρακτηριστοῦ πηλίκου, ἐν δὲ τῷ τόπῳ τῶν ἀπλῶν μονάδων, ἦτοι τῶν ὀλοσχερῶν, θετέον 0. (§. 155.) τὸ οὖν πηλίκον ἔσται 0,003256.

4) Ἐπ' ἀμφοῖν μόνον δεκαδικά, ἀλλὰ τῷ διαιρετῷ πλείω· ὡς

$$0,006816 : 0,0213 \quad | \quad 32$$

639

0426

426

0

Ἐπειδὴ τῷ διαιρέτῃ δ' δεκαδικὰ προσῆν, τῷ δὲ διαιρετέῳ 6, τοῦτ'· οὗτος ὑπερέχει ἐκείνον δυσεῖς δεκαδικοῖς, οὕτω χαρακτηριστοῦ πηλίκου διασαλῆναι χρή· Καὶ ἐπειδὴ ἐνταῦθα

θα μόνον δύο εἰσιν, εἰς σημεῖον τοῦ ἀπλοῦ ἀριθμοῦ, ἥτοι τοῦ ὁλοσχεροῦς, ἐν τῷ τόπῳ τούτου τεθήτω τὸ ο μετὰ τοῦ κόμματος· Ὡς τὸ πηλίκον ἔσαι 0,32, τούτ' ὁ διαιρέτης περιέχεται τσάκις ἐν τῷ διαιρετέῳ·

Δεῖξις·

$$\begin{aligned}
 12,236 : 2,3 &= \frac{12236}{1000} : \frac{23}{10} \quad (\S. 156. \\
 \text{σχ. γ' }) &= \frac{12236}{1000} \cdot \frac{10}{23} \quad (\S. 148. \text{ καν. }) = \frac{122360}{23000}, \\
 \eta &= \frac{12236}{2300}. \text{ Διέλε ἀμφω τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος} \\
 \text{διὰ } 23 &= \frac{532}{100} = 5 \frac{32}{100} = 5,32. \text{ Ὡσαύ-} \\
 \text{τως καὶ } 0,006816 : 0,0213 &= \frac{006816}{1000000} : \frac{0213}{10000} \\
 &= \frac{6816}{1000000} : \frac{213}{10000} \quad (\S. 156. \text{ σχ. β' }) = \frac{6816}{1000000} \times \\
 \frac{10000}{213} &= \frac{6816}{21509} = \frac{32}{100}.
 \end{aligned}$$

Παραδείγματα τοῦ γ' τρόπου.

$$\begin{array}{r}
 504,3 : 1,23 \quad | \quad 41 \\
 \hline
 492 \cdot \\
 \hline
 123 \\
 123 \\
 \hline
 000
 \end{array}$$

Τῷ πηλίκῳ προσίθεται καὶ 0, καὶ ἔτι κυρίως 410. ὅτι ὁ διαιρέτης τοῦ διαιρετέου πλεονεκτεῖ καὶ ἐν δεκαδικόν.

$$\begin{array}{r}
 \text{Καὶ} \quad 492 : 1,23 \quad | \quad 4 \\
 \hline
 492 \\
 000
 \end{array}$$

Τῷ πηλίκῳ προσίθεται καὶ δύο 0, καὶ ἔτι κυρίως 400.

Ὅτι ὁ διαιρέτης τοῦ διαιρετέου (ᾧ τινι ἐνταῦθα οὐδὲν δεκαδικόν πρόσεσι) δυοὶ δεκαδικοὶς πλεονεκτεῖ·

Καὶ

Καὶ $0,3325 : 0,000025 \quad | \underline{133}$

<u>25</u>	Ἐνταῦθα ὁ μὲν διαιρετέος ἔ-
82	χει 4 δεκαδικὰ, ὁ δὲ διαιρέ-
<u>75</u>	της 6· Ὡς ἐγγλέον· Ἐνθεν-
75	τοι καὶ τῷ πηλίκῳ προσαρ-
<u>75</u>	τῶνται ἔτι δύο μηδενικά, καὶ
00	ἔσ' 13300.

Δειγξίς.

$$504,3 : 1,23 = \frac{5043}{10} : \frac{123}{100} \quad (\S. 156. \text{σχ. γ.})$$

$$= \frac{5043}{10} \cdot \frac{100}{123} = \frac{5043 \cdot 100}{10 \cdot 123} = \frac{504300}{123}.$$

Δίελε ἄμ·
Φω τοὺς ὅρους διὰ 123, καὶ ἔσαι = 4100·

§. 163. Ἐν τοῖς μέχρι τοῦδε παραδείγμασιν, ὁ διαιρέτης κατεμέτρει ἀκριβῶς τὸν διαιρετέον, ἥτοι δηλοῖ αὐτὸν ἄνευ λειψάνου· Ἐὰν δ' ἐπίτινος παραδείγμ. καὶ λείψανον ὑπολείπεται, μεταχειρισθῆσόμεθα τοῦτο κατὰ τὴν ἐξῆς μέθοδον.

§. 164. Πᾶν κλάσμα, ὅποιον ἂν ᾖ, (§. 118.) δύναται μεταβληθῆναι εἰς δεκαδικόν· Μεθοδος λίαν ἐν χρήσει οὕσα· Ἐὰν μετὰ τὸ κόμμα, ὅπερ ὀρίον ἐστὶ τῶν ἀπλῶν ὀλοσχερῶν, καὶ δεκαδικῶν, (§. 153.) μηδενικά τεθῶσιν, ὅσα ἂν βούλῃ, ὁ πρὸ τοῦ κόμματος ὀλοσχερὴς ἀριθμὸς οὐδεμίαν ὑποίσεται μεταβολήν, ὡς ἐν τῷ τόπῳ τῶν δεκατημορίων, ἑκατοσχημ. κτ' μηδενικῶν ὄντων, μὴ δ' ἐν σημαινόντων· π. χ. 5, ἢ 5,0000 ἰσοδυναμοῦσιν ἀλλήλοις· Ὡσαύτως καὶ 124 τῷ 12400000· Εἰοῦν, κλάσματος προκειμένου, ἐν τῷ ἀριθμητῇ, ἔνθα αἱ ἀπλαῖ μονάδες ἀπολήγουσι, κόμμα ποιήσαντες μηδενικά προσάψομεν, τὸ κλάσμα μένει ἀμετάβλητον· π. χ. $\frac{3}{5}$, ἢ $\frac{30000}{5}$ ἴσα ἀλλήλοις· Ἐν γὰρ τοῖς τρόποις τῶν δεκαδικῶν μηδενικά πάρευσιν· Ἐπεὶ δὲ τὸ γνήσιον κλάσμα (§. 118.)

(οὐπερ

(ὅπερ ὁ ἀριθμητὴς θεωρεῖται ὡς διαμετέος, ὁ δὲ παρονομ. ὡς διαιρέτης) διελεῖν οὐκ ἔχομεν, ὡς τοῦ ἀριθμητοῦ ἐν τούτῳ ἐλάχιστος ὄντος τοῦ παρον· ἐὰν προσαρτήσαντες τῷ ἀριθμητῇ μηδενικά μετὰ τοῦ κόμματος ὀπίσθεν τοῦ τόπου τῶν ὁλοσχ. μονάδων μὴ διελώμεν τὸ κλάσμα, τηρεῖται, ὡς εἴρηται, ἀμετάβλητον· Οἶόντε δὲ βουλευμένοις καὶ διαίρειν τῷ παρον· τοῦ κλάσμ. διαιρέτῃ χωρεμένοις, καὶ τῶν τοῦ πηλίκου χαρακτηριστῶν τοσοῦτους διασέλλοντας τῷ κόμματι, ὅσα μηδενικά τῷ ἀριθμητῇ προσέθενται π. χ. $\frac{3}{4}$. τῷ 3 δυνάμηδενικῶν προσαφθέντων, ἔσται $\frac{300}{4}$. Οὐ ἐνεργεῖα διαμετέος, τὸ πηλίκον ἔσται 75· Ἐξὶ δὲ τοῦτο ἑκατοντάκις μείζον, ἢ εἶναι ὀφείλει, ὡς τοῦ ἀριθμητοῦ τῇ τῶν μηδενικῶν προσέθει ἑκατοντῆς ἀφ' ἑξήντας· Ἀνάγκη ἄρα τὸ πηλίκον εἶτι δια· ὅσο διαιρεθῆναι· Οὐ γεγονότος, ἔσται $\frac{75}{100} = 0,75$. Ἀλλ' εἰς τοῦτο βραχύτερον ἂν ἔλθοιμεν, εἰ, αὐτίκα ἐν τῇ διαίρεσει, ὅσα μηδενικά τῷ ἀριθμητῇ προσετέθη, εἰς τοσοῦτους κατὰ τὸ δεκαπλοῦν κατωτέρους τόπους τὸ πηλίκον καταβιβάζομεν. Ὅθεν εἰ ἀπὸ τοῦ $\frac{3}{4}$ τεθείη $\frac{300}{4}$, διαμετέομεν οὕτως, ὡς ἐνθὺς ἐν ἀρχῇ πρὸ τοῦ πηλίκου τὸ μηδενικὸν μετὰ τοῦ κόμματος, τιθέναι· 0,75· τὸ γὰρ πηλίκον τοῦ 30 διὰ 4 ἐγένετο δεκάκις κατωτέρων, τῇ προσέθει τοῦ μηδενικοῦ. Ὡς οὐκ ἔστι μονάς, ἀλλὰ δεκατημόριον, ὅπερ δεικνύται τῷ δὲ τῷ πρόπῳ 0,75. Ὁ οὖν κανὼν ἐστίν· Ἀπόδος τῷ διαιρέτῃ τοσοῦτα μηδενικά, ὅσα ἂν βούλῃ. Δίελε εἴτα διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, θείς πρὸ τοῦ πηλίκου εὐθὺς τὸ μηδενικὸν μετὰ τοῦ κόμματος, τὴν τῶν ὁλοσχερῶν ἀπουσίαν δεικνύον, καὶ οὕτω προάγων τὴν διαίρεσιν, ἐφ' ὅσον βούλῃ, ἢ δύνῃ, ἔξωις τὸ πηλίκον ἐν δεκαδικαῖς κλάσμασιν, ὅπερ ὅσον ἐστὶ τῷ ὀφθέντι κλάσματι,

σμάτι, ἢ τοῦλάχισον ἐγγίσα αὐτοῦ π. χ.

$$\frac{1}{2} = \frac{10}{20} = 0, 5$$

$$\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0, 375 \quad \text{Καὶ} \quad \frac{5}{8} = \frac{625}{1000}$$

$$= 0, 625$$

Ἐπειδὴ ἔκαστον νόμον κλάσμα μεταβάλλεται εἰς ὁλοσχερῇ ἀριθμὸν, καὶ γνήσιον κλάσμα (§. 118.) ἐξενεχθεῖν εἰς καὶ τοῦτο (τὸ γν' κλ.) αὐτοῦ ἐν δεκα-
 ὑκοῖς π. χ. $\frac{12}{5} = 3 \frac{4}{5} = 3 \frac{40}{50} = 3, 8$.

§. 165. Ἐπὶ τῶν προχειρισθέντων παραδειγμα-
 των τῆς μεταβολῆς τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκα-
 δικά, ἢ διαιρέσεις οὐδὲν λείψανον ὑπέλειπε· πολλά-
 κισ μέντοι τὴν διαίρεσιν εἰς πέρας ἀφικέσθαι οὐχ οἶοντε,
 ὅσα ἂν μηδενικά προσαρτήσῃς, καὶ ἐν ὅσων ἂν τὴν
 διαίρεσιν προαγάγῃς· Οὕτω δ' ἐγγίσα τῆς ἀληθείας
 ἂν γένῃσι, ὡς τελευταῖον τὸ ἀμάρτημα ὡς τὸ μηδὲν ἐκ-
 λογίζεσθαι· Ὅσῳ γὰρ πλείον μηδενικά προσεθῇ,
 τοσοῦτον ἐλάσσων καὶ ἡ ἀπέτη γνήσεται· Ἐξω με-
 ταβλητέον τὸ $\frac{3}{7}$ εἰς δεκαδικὸν κλάσμα· προσοφθί-
 τωσαν 6 μηδενικά τῷ ἀριθμητῇ $\frac{3000000}{7}$, καὶ διαιρε-
 θήτω· τὸ πηλίκον ἔσται 0, 428571... Ἐνταῦθα
 τὸ ἔλλειμμα ἔλαττον μιλιοσημορίου· Ἐάν γὰρ ἀντὶ
 τοῦ ἐνὸς μιλιοσημορίου τοῦ ἐν τῷ ἐσχάτῳ χαρακτήρι
 τοῦ πηλίκου, 2 μιλιοσημόρια τεθῇ, καὶ τὸ πηλίκον με-
 τεὰ τοῦ διαιρετέου πολλαπλασιασθῇ, τὸ πλεονέκμενον
 ἔσται μείζον τοῦ διαιρετέου· Ἐν πλείοσι τῶν δεκαδι-
 κῶν κλασμάτων, ἐνθα μεγίστη οὐκ ἀπαιτεῖται ἀκρίβεια,
 προάξομεν τὸ πηλίκον μέχρι τῶν δεκαχλιοσημορίων,
 ἢ καὶ χλιοσημορίων· Ἐξέσι δὲ, ὅτε τὸ πηλίκον ἀκρι-
 βῶσαι βουλόμεθα, καὶ τὸ λείψανον αὐτῷ προσαρτάν,
 οὐ παρονομαζήσῃς ἔσται ὁ διαιρέτης, μετὰ τοσοῦτων μηδε-
 νικῶν, ὅσα ἐνὶν τῷ διαιρετέῳ· ὥστε τὸ $\frac{3}{7}$ ἀκριβέστατα
 ἐξενεχθὲν ἔσται 0, 428571 $\frac{3}{7000000}$ · Τοῦτο γὰρ

$$= \frac{428571}{1000000} + \frac{3}{7000000} = \frac{428571 \cdot 7}{1000000 \cdot 7} + \frac{3}{7000000} =$$

$$= \frac{9999997}{7000000} + \frac{3}{7000000} = \frac{3000000}{7000000} = \frac{3}{7}. \text{ Ἄλλα}$$

τοῦτο οὐκ ἐν χρήσει τοῖς μόνον τοῖς δεκαδικοῖς ἀρ-
κουμένοις.

§. 166. Τῇ (§. 164.) μεθόδῳ χρῆσθαι δύ-
νάμεθα καὶ ἐπὶ τῶν κοινῶν τῆς διαιρέσεως παραδειγ-
μάτων, ἐν οἷς λείψανα ὑπολείπονται· ἀντὶ γὰρ τοῦ
τὸ λείψανον μετὰ τοῦ διαιρέτου ὡς κοινὸν κλάσμα τῶ
πηλίκῳ προσαρτᾶν, ἄμεινον ἂν ποιήσαιμεν, εἰ τοῦτο
εἰς τοσαῦτα δεκαδικὰ τρέψαιμεν κλάσματα, ὅσα ἰνα-
ρὰ εἰς τὸ τὴν ἀπάτην ἐλαχίστην ἀποδοῦναι. π. χ.
5432 διὰ 21 διαιρεθὲν δώσει πηλίκον 258, καὶ λεί-
ψανον τὸ 14, ἢ $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$. ἀλλὰ τῷ 14 προσθεν-
τος ἑνὸς 0, διασαλῆτιψαν αἱ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ τοῦ
πηλίκου μετὰ τοῦ κόμματος, μεθ' ὃ τεθῇτω τὸ α'·
πηλίκον τοῦ 140 : 21 = 6, δεκαδικὰ σημαί-
νον· καὶ οὕτως αἰ τῷ λειπομένῳ 0 προσιθῆις προάγα-
γε τὴν διαίρεσιν, ἐφ' ὅσον ἂν δόξῃ σοι· Τὸ οὖν ὅλικόν
πηλίκον ἔσαι 258,6666...

§. 167. Ἀλλὰ καὶ δύο, ἢ καὶ πλείω κλά-
σματα ῥᾶον πρὸς ἀλλήλα παραβαλοῦμεν, (§. 121, 122.)
εἰς δεκαδικὰ αὐτὰ τρέψαντες· ἐκ τούτου γὰρ δῆλον
ἔσαι, ὁπότερον τὸ ἕτερον ὑπερέχει· π. χ. $\frac{5}{3}$ καὶ $\frac{7}{11}$
ἐν δεκαδικοῖς κλάσμασιν = 0,384615... καὶ
0,272727.... Ἐνθα προφανές, ὅτι τὸ $\frac{5}{3}$ μεῖζον
τοῦ $\frac{7}{11}$ · ἐκείνου γὰρ τὸ α'· δεκαδικὸν $\frac{1}{10}$, τού-
του δὲ $\frac{2}{10}$.

§. 168. Ἐάν ἐπὶ τῆς διαιρέσεως μετὰ τῶν δε-
καδικῶν (§. 162.) καὶ λείψανον ὑπολείπηται, καὶ τοῦτο
εἰς δεκαδικὰ μεταβαλεῖν ἐν· τοῦτο δὲ γίνεται, τοῖς λει-
ψάνοις μηδενικῶν αἰ προσαπτομένων, καὶ τῆς διαιρέ-
σεως προαγομένης, καὶ τῶν πηλίκων, ὡς δεκαδικῶν
κλασμάτων, εἰς τοὺς αὐτοῖς προσήκοντας τόπους τιθε-
μένων· Καὶ ἐνθα μὲν ἐπ' ἀμφοῖν (διαρετέω, καὶ διαι-
ρέτη)

ρέτη) ἰσάριθμα τὰ δεκαδικὰ, ὧν τὸ πηλίκον ὁλοσχε-
 ρῆς ἀριθμὸς, (§. 162.) ὁ τύπος τοῦ α' δεκαδικοῦ
 κλάσματος αὐτόθεν δῆλος· τουτέστιν, ἔνθα τὰ πηλικά
 τῆς προαγομένης διαιρέσεως τοῦ λειψάνου ἀρχονται·
 ἔνθα δὲ τῷ διαιρέτῃ πλείω δεκαδικὰ ἔνεισι τῶν τοῦ
 διαιρετέου, τουτ'· ἔνθα τῷ πηλίκῳ τοσαῦτα μηδενικά
 προστιθέναι χρὴ, ὅσαις δεκαδικοῖς ὁ διαιρέτης τὸν διαι-
 ρετέον ὑπερέχει, (§. αὐτ.) ἀντὶ τῶν μηδενικῶν τι-
 θεάμεν τοσούτους ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς, (διὰ τῆς διαιρέ-
 σεως τῶν λειψάνων, οἷς τὰ μηδενικά προσήφθη, εἰς τὸ
 δύνασθαι διαιρεθῆναι, προκύπτοντας) ὅσα μηδενικά
 τῷ πηλίκῳ προσεθῆναι χρῆν· Ἐάν δὲ τοῦ διαιρετέου
 τὰ δεκαδικὰ πλείω, διατέλλονται α' ἐν τῷ πηλίκῳ,
 ὡς δεκαδικὰ, οἱ ἀπαιτούμενοι ἀριθμοί, (§. αὐτ.) καὶ
 εἶτα τοῦ τοῖς λειψάνοις μηδενικά προσαρτᾶν ἀρχόμε-
 θα, ὧν τὰ πηλικά τοῖς προηγουμένοις δεκαδικοῖς προ-
 ριθίσθω· ὁ δὲ τύπος τούτων αὐτόθεν διορίζεται.

Παραδείγματα καὶ τῶν τριῶν τρόπων·

Τοῦ α' $5143,2 : 3,2 \mid 1607,25 \quad 1607$
 ἐστὶ τὸ ὁλοσχερὲς πηλίκον, καὶ μετὰ τοῦτο ἀρχονται
 τὰ δεκαδικὰ· τὸ δ' ὅλκον πηλίκον ἐστὶ $1607,25$ · ὅτι
 ἐνταῦθα οὐδὲν ἔτι λείπεται·

Τοῦ β' $368,72 : 0,034 \mid 10844,7058$
 10844 εἰσιν οἱ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ τοῦ πηλίκου καὶ
 ἐπειδὴ τῷ διαιρέτῃ ἦν γ' δεκαδικὰ, τῷ δὲ διαιρετῷ
 2 , προστετέον ἦν τῷ πηλίκῳ καὶ ἓν μηδενικόν, καὶ τὸ
 λειψάνον τὸ δὲ ἦν $\frac{10}{34}$ · Ἀλλ' ἄμεινον πορρώτέρῳ χω-
 ροῦντας τῇ διαιρέσει, καὶ τοῖς λειψάνοις τὸ μηδενικόν
 προσαρτῶντας, ἀντὶ τοῦ ἐνὸς τῷ πηλίκῳ προσεθισο-
 μένου μηδενικοῦ, τῷ πηλίκῳ τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν
 τὸν ἀριθμὸν, τὸν ἤδη εἰς πηλίκον προκύπτοντα, προσι-
 θέναι, καὶ εἶτα τὰ δεκαδικὰ κλάσματα·

Τοῦ γ' $63,2155 : 315 \mid 18,0615714..$

Τὸ

Τὸ πηλίκον ἐνταῦθα κατὰ τὴν συνήθη διάκρισιν ἐστὶ 18061. Ἐπεὶ δὲ ὁ διαιρετέος τρισὶ δεκαδικοῖς τοῦ διαιρέτου πλεονέκτει, διασαλτέοι τρεῖς χαρακτῆρες τοῦ πηλίκου· καὶ τοῦτο ποιήσας, καὶ τὴν διαίρεσιν προάγων, τῷ τᾷ μηδενικᾷ τοῖς λειψάνοις προσιθέται, ὡς τὰ προϊόντα πηλικά πρὸς τοῖς δεκαδικοῖς. Τὸ οὖν πηλίκον ἔσται 18, 0615714

§. 169. Ἡ βάσανος τοῦ ἀκριβοῦς πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τῆς διακρίσεως τῶν δεκαδικῶν ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ τῶν ὁλοσχερῶν. (§ 98.) πλὴν ὅτι ἐνταῦθα, εἰς τὰ δεκαδικὰ ἐπ' ἀπειρον χωρῶσι, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ὁ διαιρετέος οὐκ ἀκριβοῦς πρακύπτει· ὅ, τι δὲ τοῖς σημείοις + καὶ — ἀνήκει, (§ 77.) ἀρμόζει ἐνταῦθα.

§. 170. Ἄλλα καὶ τὰ δεκαδικὰ εἰς τὰ κοινὰ μεταβαλοῦμεν αὐτοῖς κλάσματα, εἰ ἀναγκαῖον. Ἐπὶ γὰρ τῶν μὴ ἐπ' ἀπειρον χωροῦντων, ῥᾶδιόν· Τουτέστι γραφῆτω παρονομασῆς ἡ 1 μετὰ τασούτων μηδενικῶν, ὅσοι αἱ τῶν δεκαδικῶν τόποι, καὶ διαρεθῆτω ὁ ἀριθμητῆς, καὶ παρονομασῆς ὁ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, οἱ οὗ εἰς τοὺς ἐλαχίστους ὅρους ἀνάγονται· π. χ. $0,75 = \frac{75}{100}$ · ἂμφορ διὰ τοῦ 25 διαρεθέντες ἔσονται $= \frac{3}{4}$ · Καὶ $0,625 = \frac{625}{1000}$ · διαρεθέν διὰ 125 $= \frac{5}{8}$ · Ἰδε καὶ §. 114. ε. Εἰδ' αἱ ἀριθμοὶ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος εἰς ἀπειρον χωροῦσιν, ἡ πρότεθεῖσα μέθοδος οὐκ ἀσφαλὴς.

Περὶ τῶν Τετραγώνων, καὶ Κυβικῶν
Ἀριθμῶν

§. 171. Ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος τὸ προκύπτον παραγόμενον καλεῖται Ἀριθμὸς Τετραγώνος· ὁ δ' ἀριθμὸς, ἡ τοῦτου Τετραγωνικὴ Ῥίζα ὡς $12 \times 12 = 144$ · Ἐνταῦθα 144 ἐστὶν ὁ τετράγωνος, καὶ 12 ἡ ῥίζα.

Σχόλ.

Σχόλιον.

Ἡ προσηγορία τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ ἐλήφθη ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν, ὅπου τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου σχήματος, τούτ: τοῦ ἰσοπλεύρου, καὶ ὀρθογωνίου εὐρίσκεται, ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦτου ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθῇ.

§. 172. Ἐπειδὴ οἱ τετράγωνοι ἀριθμοὶ προκύπτουσιν, ἐὰν τὴν ρίζαν μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιάσωμεν, ἢ 1 μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθεῖσα δίδωσιν 1. ὥςτε 1 ἔσται ὁ τετράγωνος τῆς 1· ὡσαύτως καὶ 4 ἔσιν ὁ τετράγ. τοῦ 2· οὗτος δὲ ἡ ρίζα ἐκείνου.

§. 173. Τὸν αὐτὸν τρόπον εὐρίσκονται καὶ οἱ τετραγωνικοὶ ἀριθμοὶ τῶν κλάσμάτων, ἐὰν δηλονότι τὸ κλάσμα δι' ἑαυτοῦ πολλαπλασιάζεται· ὥςτε τοῦ $\frac{1}{2}$ ὁ τετράγ. ἔσιν $\frac{1}{4}$ · ὅτι $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. (§. 141.) τοῦ $\frac{1}{3}$ ὁ τετρ. ἔσιν $\frac{1}{9}$, κτ'· τούτέσι τετραγωνίσασμεν ἀμφοτέρους τοῦ κλάσματος· οἷον, τοῦ $\frac{2}{3}$ ὁ τετρ. $= \frac{16}{9}$.

§. 174. Ὁ δὲ τετράγωνος ἀριθμοῦ ὁλοσχεροῦς, κλάσματι συνημμένου, ἀναφανήσεται, εἰ εἰς νόθον κλάσμα ταῦτα μεταμείψαντες τὸν τετράγωνον τῶν ὄρων τοῦ κλάσματος λάβωμεν· ὥς $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. ὁ δὲ τετράγ. $= \frac{25}{4}$, κτ'· Ὡς οὖν ὁ λόγος ἐκ τούτου, ὅτι, ἐὰν ἡ ρίζα κλάσμα περιέχῃ, καὶ ὁ τετράγωνος αὐτῆς περιέξῃ.

§. 175. Ἐν γένει δὲ, ἐὰν ἡ ρίζα ᾖ α, ὁ τετράγ. αὐτῆς ἔσται αα· τῆς δὲ ρίζης β α ὁ τετρ. ἔσιν 4 αα· ὡσαύτως καὶ τῆς γ β ἔσιν ααββ· κτ'.

§. 176. Ἐὰν οὖν ἡ ρίζα ἐκ 2, ἢ πλειόνων παραγόντων συγκέηται, πολλαπλασιασθέν μετ' ἀλλήλων τοὺς τετραγώνους τούτων, καὶ προκύψει ὁ ὁλικὸς τετράγωνος· Καὶ ἀνάπαλιν· Ἐὰν ὁ τετράγωνος ἐκ 2, ἢ πλειόνων παραγόντων συγκροτῇται, αὖν ἐκ-

τος τετράγωνος, πολλαπλασιάσωμεν τὰς ρίζας τούτων μετ' ἀλλήλων, καὶ τὸ παραγόμενον ἔσται ἡ ὀλικὴ ρίζα· οἷον, ἐπειδὴ 2304 ἴσον τῷ 4. 16. 36. ἡ δὲ τετραγωνικὴ ρίζα τούτων ἐστὶ 2. 4. 6, ὅ ἐστι 48· ἄρα ὁ 48 ἡ τετραγωνικὴ ἐστὶ ρίζα τοῦ 2304. ὅτι 48. 48 = 2304·

§. 177· Ἐὰν τῇ ρίζῃ τὸ σημεῖον + προσῇ, ὡς ἐν τοῖς παραληφθεῖσι παραδείγμα. ἔσται καὶ ὁ τετράγ. ἀριθμὸς καταφατικός· ὅτι + μετὰ + πολλ. δίδωσι +, (§. 77.) ὥς καὶ ὁ τοῦ + α τετράγ. ἐστὶ + αα· Ἐὰν δὲ ἡ ρίζα ᾖ ἀποφατικὴ, ὡς — α, ὁ τετράγ. ἔσται ὡσαύτως καταφατικός· ὅτι — α Χ — α = + αα (§. αὐτ.) Καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου, + αα ρηθῆναι δύναται ὁ τετράγωνος καὶ τῆς ρίζης + α, καὶ τῆς — α· Καὶ παντὸς τετραγώνου δύω ἄρα ρίζας ἀποδοῦναι δυνάμεθα, τὴν μὲν, θετικὴν, τὴν δ' ἐτέραν ἀποφατικὴν. Ἡ οὖν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 25 ἐστὶ καὶ + 5, καὶ — 5. ὅτι + 5 Χ + 5 = 25, καὶ — 5 Χ — 5 = 25.

§. 178. Ἐὰν ἀριθμὸς τρεῖς ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῇ, ἢ ἐὰν ὁ τετράγωνος ἐπὶ τὴν ρίζαν πολλαπλασιασθῇ, τὸ παραγόμενον καλεῖται κύβος, ἢ Κυβικός ἀριθμός· οἷον α Χ α Χ α = ααα = κύβῳ τοῦ α· Ἡ αα Χ α = ααα = κύβῳ τοῦ α· καὶ 5 Χ 5 Χ 5 = 125. Ἡ 25 Χ 5 = 125 = κύβῳ τοῦ 5.

§. 179· Ῥαδίως δὲ καὶ τοὺς κυβικοὺς ἀριθμοὺς πῶν κλασμάτων εὐρήσωμεν, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· Οἷον τοῦ $\frac{1}{2}$ ὁ κύβος ἐστὶν $\frac{1}{8}$ · καὶ τοῦ $\frac{2}{3}$ = $\frac{8}{27}$ · τουτέστι ληψόμεθα ἐν μέρει τὸν κύβον τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ παρανομαστοῦ.

§. 180. Τὸν δὲ κύβον ἀριθμοῦ τινος, κλάσματι συνημμένου, ἀνιχνεύσωμεν, ὡς καὶ τὸν τετράγωνον· (§. 174.)

(§. 174.) Οἷον $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{27}{8} = \tau\omega\kappa\upsilon\beta\omega\tau\omicron\upsilon$
 $1\frac{1}{2}$ κτ.

§. 181. Ἐπειδὴ τοῦ ἀριθμοῦ α ὁ κύβος =
 ααα, καὶ ὁ κύβος τοῦ ἀριθμοῦ αβῆσαι αααβββ. Ἐάν οὖν
 ὁ ἀριθμὸς δύνω, ἢ πλείους παράγοντας ἔχη, εὐρίσκε-
 ται ὁ κύβος τῷ μετ' ἀλλήλωνν πολλαπλασιασμῷ τῶν
 κυβικῶν ἀριθμῶν ἀπάντων τῶν παραγόντων ὡς 12
 $= 3 \cdot 4$. πολλαπλασιάσον τὸν κύβον τοῦ $3 = 27$
 μετὰ τοῦ κύβου τοῦ $4 = 64$, καὶ ἔξεις 1728 τὸν
 κύβον τοῦ 12 .

§. 182. Ὁ κύβος ἀριθμοῦ θετικοῦ + ἄρξαι,
 ἢ δῆλον, καταφατικός + ααα τοῦ ἀποφατικοῦ δὲ
 — α, ῆσαι ἀποφατικός καὶ γὰρ — α Χ — α
 $= + αα$. (§. 77 καν.) + αα Χ — α = — ααα
 (§. αὐτ.) Ὡς οὖν ὁ κύβος τῆς — 1 ἐστὶ — 1 τοῦ
 — 2 = — 8, κτ.

Περὶ τῶν Δυνάμεων ἐν γένει.

§. 183. Ἐὰν ποσότης τις (εἴτε ἀριθμὸς, εἴ-
 τε γράμμα) ἄπαξ, ἢ πολλάκις μεθ' ἑαυτῆς πολλα-
 πλασιασθῇ, τὸ παραγόμενον καλεῖται, Δύναμις,
 ἢ Ἀξία. Ἐπεὶ δὲ ὁ τετράγωνος (§. 171.) γεννᾶ-
 ται, ἐὰν ἀριθμὸς τις ἄπαξ μεθ' ἑαυτοῦ, ὁ δὲ κύβος,
 (§. 178.) ἐὰν ὁ τετράγωνος ἐπὶ τὴν ρίζαν (§. 171.)
 πολλαπλασιασθῇ, καὶ οἱ τετράγωνοι, καὶ οἱ κύβοι
 περιλαμβάνονται ὑπὸ τῷ ὀνόματι τῶν Ἀξιῶν, ἢ Δυ-
 νάμεων.

§. 184. Αἱ δυνάμεις (§. ἀν.) διακρίνονται
 ἀπ' ἀλλήλων τῇ πληθύνει τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς
 ποσότητος μεθ' ἑαυτῆς ὡς α' δύναμις ἀκούει
 πᾶσα ποσότης, ἢ μονάδι μόνον πολλαπλασιασθεῖσαν
 νοοῦμεν ὡς 1, 2, 3, 4, κτ. ἢ α, β, γ, δ κτ.
 δις δ' ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθείσης, τὸ παραγόμενον
 καλεῖται, ἢ β' ταύτης δύναμις, ἢ ἄξια, ἰσο-
 δυνα-

δυναμούσα τῷ τετραγώνῳ· (§. 171.) ὡς $2 \times 2 = 4$. $3 \times 3 = 9$. ἢ $\alpha \times \alpha = \alpha\alpha$. $\beta \times \beta = \beta\beta$, κτ'. Ἐνθα 4 ἢ $\beta\beta$ ἐστὶ δύναμις τοῦ 2 . 9 τοῦ 3 . $\alpha\alpha$ τοῦ α . καὶ $\beta\beta$ τοῦ β . τρεῖς δὲ, ἡ γ δύναμις, τὴν αὐτὴν τῷ κύβῳ δύναμιν ἔχουσα· ὡς $2 \times 2 \times 2 = 8$. $3 \times 3 \times 3 = 27$. Καὶ $\alpha \times \alpha \times \alpha = \alpha\alpha\alpha$, κτ'. τετρακίς δὲ, ἡ δ δύναμις, ἡ ὁ Διτετράγωνος· οἷον, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$. Καὶ $\alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha = \alpha\alpha\alpha\alpha$. Ἐξ οὗ δῆλον, καὶ τίς ἡ ϵ · καὶ ζ · κτ'. δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ.

§. 185. Οὗτος ὁ τρόπος τοῦ τὰς δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος ἐκφέρειν, καὶ μάλα τὰ υπερτέρως, ὡς πᾶν διεξοδικῶς, παραλημπνέται. Ἐὰν γὰρ εἰδῶμεν τὴν ἑκατοστὴν δύναμιν τοῦ α ζητεῖσθαι, κατὰ τὰ εἰρημένα, γραπτέον τὸ α ἑκατοντάκις ἐφεξῆς. Εἰς ἀποφυγὴν μὲντοι τούτου, εἰώθασι τῇ ποσότητι πρὸς τὰ δεξιά χαρακτηριστῆρα ἐπιγράφειν, ἐμφαίνοντα, πόσους ἢ ποσότης μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιαστέα· καλεῖται δ' Ἐκθέτης, ἢ τὸ Ἐπίσημον τῆς δυνάμεως. Οἷον, α^{100} . Ἐνταῦθα 100 ἐστὶν ὁ ἐκθέτης τοῦ α . Ἀπαγγέλλεται δὲ, α εἰς τὴν ἑκατοστὴν ἀρθρὴν δύναμιν, ἢ α πολλαπλασιαστέον μεθ' ἑαυτοῦ ἑκατοντάκις, καὶ 4^6 . 6 ἐστὶν ὁ ἐκθέτης τοῦ 4 . τοῦτο δὲ, ἦτοι τὸ $4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$. Ἐὰν ἡ ποσότης ἐν τῇ α · ἢ δυνάμει, καίτοι τὴν μονάδα, ὡς ἐκθέτην, ἐπιγραφῆναι θέον· π. χ' α^1 , οὐκ ἔστι μὲντοι τοῦτο ἐν χρήσει, ἀλλὰ τὸ α Ὡσαύτως καὶ 5 ἐστὶν $= 5^1$, κτ'.

§. 186. Ἡ ποσότης, ἐξ ἧς ἡ δύναμις ἀνέφυ διὰ τοῦ ἀπαξ, ἢ πολλαίκις πολλαπλασιασμοῦ μεθ' ἑαυτῆς, καλεῖται Ρίζα. ἥτις τῷδε $\sqrt{\quad}$ σημείῳ ἐνδηλοῦται· ἐφ' ἧς αὖθις ἀριθμὸς γράφεται, (Ἐκθέτης τῆς ρίζης καλούμενος) σημαίνει, πόσους τὴν προκειμένην ποσότητα μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθῆναι

ναί

ναι ἔδει, μέχρις ἂν τοιαύτη ζητούμενη δύναμις προέλ-
 θῃ, οἷα εἰν, ἥς τὸ $\sqrt{}$ σημεῖον προτίθεται, ἢ ἡλικὴ
 εἰν ἢ ῥίζα, περὶ ἥς ὁ λόγος· Ἡ ῥίζα τῆς β'·
 δυνάμειος ἀκούει Τετραγωνικῇ, οὕτω γραφομένη
 $\sqrt{}$, ἢ καὶ οὕτω $\sqrt[2]{}$ · ἢ δὲ τῆς γ'· Κυβικῇ, οὕτως
 ἀποδιδομένη $\sqrt[3]{}$ · ἢ δὲ τῆς δ'· ε'· ζ'· κτ'· δυνάμειος
 ῥίζα, οὕτω $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[6]{}$, κτ. π. χ. a^2 · εἰν ἢ β'
 δύν· τοῦ α'· τὸ δὲ α ἢ ῥίζα· ἀηλωθήσεται οὖν
 $\sqrt{a^2} = a$ · α'. γὰρ τὸ α ἤρθη εἰς τὴν β'. δύν. εἴ-
 τα ἐκ ταύτης τῆς δυνάμειος ἐλήφθη ἢ ῥίζα ἢ τετραγω-
 νικῇ· Καὶ $\sqrt[3]{a^3} = a$, κτ.

§. 187. Ἀλλὰ καὶ ἐν γένει, ἡλικίῃ ἂν δύνα-
 μιν παραστήσαι βουλώμεθα, ἀντὶ τοῦ ἐκθέτου, τοῦ
 οἱ ἀριθμοῦ δηλουμένου, ἀλγεβραϊκῇ ποσότητι, ἥτοι
 γράμματι, χρυσόμεθα. ὡς a^p , x^q ποσότητες εἰσὶν
 ἀόριστοι εἰς ἀορίστους ἡρμέναι δυνάμεις· Εὐρίσκομεν
 δὲ καὶ ποσότητας ἐν τοιαύταις δυνάμεισι. π. χ.
 x^{p+q} , ἢ x^{p-q} , ἢ a^{p+2} , ἢ a^{p-2} , ἢ
 καὶ a^{p-3} , ἢ a^{p-3} κτ'· Ἐντεῦθεν φανερὸν, ὅ-
 τι καὶ ἡ ῥίζα τῆς τῷ ἐπ' αὐτὴν καθόλου ἐκθέτη ἐ-
 πισημειουμένης ποσότητος, (ἥτις ποσ. ἀνέφω τῷ
 ποσάκις πολλαπλασιασμῷ τῆς ῥίζης μεθ' ἑαυτῆς, ὅσα-
 κισ δεικνύει ὁ ἀόριστος ἐκθέτης, μετὰ τὸ διορισθῆναι)
 ἐπισημειωθήσεται ὡσαύτως τῷ αὐτῷ ἀορίστῳ ἐκθέτῃ· ὡς
 $\sqrt[p]{a^p} = a$ ἢ πολλαπλασιασθῇτω ἢ ποσότης α,
 ν: κισ, ἵνα προκύψῃ ἡ δύναμις a^n , ἥς τὸ α εἰν ἢ
 ῥίζα, ὅ, τι ἂν σημαίῃ τὸ ν

§. 188. Αἱ δυνάμεις ἐκάστου παραγομένου,
 L οἶον

οἷον τοῦ $\alpha\beta$, εὐρίσκονται, ἐὰν ἐκατέρου παράγοντος ἡ δύναμις χωρὶς λαμβάνηται· τουτ'· $\alpha\beta$, ἢ $\alpha^1\beta^1$, $\alpha^2\beta^2$, $\alpha^3\beta^3$, $\alpha^4\beta^4$, $\alpha^5\beta^5$, κτ. Ὡσαύτως καὶ αἱ τῶν κλασμάτων· οἷον τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ δυνάμεις εἰσὶν αἱ ἐξῆς·

$$\frac{\alpha^1}{\beta^1}, \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \frac{\alpha^3}{\beta^3}, \frac{\alpha^4}{\beta^4}, \frac{\alpha^5}{\beta^5}, \text{ κτ.}$$

§. 189. Τοῦ ἀποφατικοῦ ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ — α, αἱ δυνάμεις ἔφονται ἀλλήλαις κατὰ τάξιν οὕτω, — α, + α², — α³, + α⁴, — α⁵, + α⁶ κτ. (§. 77.) τουτέστιν, αἱ δυνάμεις, ὧν οἱ ἐκθέται περιττοὶ ἀριθμοὶ, γίνονται ἀποφατικάι. ὧν δὲ ἄρτιοι, κατὰφατικάι. ὥςτε ἡ γ'· ε'· ζ'· θ'· κτ. δυνάμεις τῶν ἀποφατικῶν ριζῶν ἔξει τὸ — σημεῖον· ἡ δὲ β'. δ'. ζ'. η'. κτ. τὸ +.

Ἡ μέθοδος τοῦ τὰ δ', εἶδη τοῦ ὑπολογισμοῦ μετὰ ποσοτήτων, διαφόρους ἐκθέτας τῆς δυνάμεως, καὶ ρίζης ἔχουσῶν, ὑπολογισθεῖεν, καλεῖται ὁ μετὰ ἐκθετῶν ὑπολογισμός.

Περὶ τῆς τούτων Προσθέσεως, καὶ Ἀφαιρέσεως.

§. 190. Τὴν τῶν ποσοτήτων, τῶν εἰς δυνάμεις ἀρθριστῶν, Πρόσθεσιν, καὶ ἀπ' ἀλλήλων Ἀφαιρέσιν, κατ' ὃν ἐδιδάχθημεν τρόπον, ἐν τῷ περὶ Πρόσθ. καὶ Ἀφαιρ' τῶν ὁλοσχ. περαινούμεν. Εἰ μὲν γὰρ ὁμοειδεῖς, ἢ ὁμόρριζοι, τουτ'· εἰ αἱ αὐταὶ ρίζαι, καὶ οἱ αὐτοὶ ἐκθέται, προσζέθενται, καὶ ἀφαιροῦνται, ὡς καὶ αἱ λοιπαὶ ὁμοειδεῖς ποσότητες. π. γ. εἰ δέοι προσθεῖναι $2\alpha^2$ τῷ $3\alpha^2$, (ἐνθα καὶ ρίζαι, καὶ ἐκθέται τὰ αὐτὰ) ἔσαι $2\alpha^2 + 3\alpha^2 = 5\alpha^2$. Καὶ $3\alpha^2 \chi^3$ τῷ $5\alpha^2$

$5a^2 \chi^3$, ἔσαι $8a^2 2\chi^3$. Καὶ $+ 4\chi^3 u^2$ τῷ
 $- 2\chi^3 u^2$, (τοῦτο δ' ἔστιν ἐναντία προσιθέναι) ἔσαι
 $2\chi^3 u^2$.

Ἐξω ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ $4a^2$ τὸ $+ 2a^2$.

Ἡ διαφορὰ ἔσαι $2a^2$. (§. 49.) Ἀπὸ τοῦ $4a^v \chi^\mu$
τὸ $+ a^v \chi^\mu$. ἡ διαφ. $= + 3a^v \chi^\mu$. Καὶ
ἀπὸ τοῦ $4a^v \chi^\mu$ τὸ $- 3a^v \chi^\mu$ ἀφαιρεθὲν παρέξει
διαφ. τὸ $+ 7a^v \chi^\mu$.

Καὶ ἕτερον παρ. $a^{2v+1} u - 3\chi^{3-\mu} + 5u^{p+1} - 18$
πρόσθεις $- 5a^{2v+1} u + 6\chi^{3-\mu} + 3u^{p+1} + 14$
 $- 4a^{2v+1} u + 3\chi^{3-\mu} + 8u^{p+1} - 4$.

Εἰ δὲ μὴ ὁμοειδεῖς εἶεν αἱ ποσότητες, αἱ εἰς δυνάμεις
γεγονῆσαι, καὶ προσεθῆναι, ἢ ἀφαιρεθῆναι πρόκεινται,
δείκνυται μόνον τοῦτο τοῖς σημείοις τῆς προσθ. (§. 16.)
καὶ ἀφαιρ. (§. 28.) π. χ. τῷ χ^3 προσεθὲν τὸ u^2 ἔ-
σαι $\chi^3 + u^2$. Τῷ $\chi^v a^\mu$ τὸ u^p , ἔσαι $\chi^v a^\mu$
 $+ u^p$. Ὡσαύτως καὶ ἀπὸ τοῦ χ^3 ἀφαιρεθὲν τὸ u^3
ἔσαι $\chi^3 - u^3$. Καὶ ἀπὸ τοῦ χ^v τὸ $u^{\mu+p}$, ἔ-
σαι $\chi^v - u^{\mu+p}$.

Περὶ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τούτων.

§. 191. Ἐὰν αἱ ποσότητες, αἱ εἰς δυνάμεις ἀρ-
θεῖσαι, ὁμοειδεῖς ᾧσι, πολλαπλασιασθῇ-
σονται αἱ δυνάμεις μετ' ἀλλήλων, ἔὰν οἱ
τούτων ἐκθῆται προσιθῶνται ἀλλήλοις.

L 2

Ὁμοει-

Ὁμοειδεῖς δὲ, ἢ Ὁμοβάθμιοι δυνάμεις εἰσὶν αἱ δυνάμεις, αἷς τὰ αὐτὰ πρόσσει γράμματα· π. χ. $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$. a^2 καὶ a^3 εἰσὶν ὁμοειδεῖς δυνάμεις τοῦ a , ὅτι καὶ τὸ a^2 , καὶ τὸ a^3 εἰσὶ τὰ αὐτὰ γράμματα, διαφόρους μόνον ἐκθέτας ἔχοντα· Ἐκ σαφεσέραν τούτου κατάληψιν ἀναπτυχθήτω τὸ παράδειγμα· a^2 ἐστὶν $= aa$. Καὶ $a^3 = aaa$. ὥστε $a^2 \cdot a^3 = aa \cdot aaa$. Ἀλλ' ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔξῃς, τὰ γράμματα ἐφεξῆς γράφειν καὶ ἀνευ τοῦ σημείου. (S. 76.) Ὅθεν $aa \cdot aaa = aaaaaa$ · τοῦτο δ' ἐστὶν a^6 . Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ a^6 προκύπτει καὶ τῇ προσθεροίσει τῶν ἐκθετῶν τοῦ a^2 καὶ a^3 .

Οὕτω καὶ $x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$. Ἐστὶ γὰρ $x^3 = xxx$. Καὶ $x^4 = xxxx$. ἴσον ἀντὶ ἴσου τεθὲν ἔσται

$$x^3 \cdot x^4 = xxx \cdot xxxx \cdot \text{τοῦτο δὲ ἐστὶ}$$

$$xxxxxxx = x^7. \text{ Ἄρα}$$

$$x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7.$$

Οὕτω ποιήσομεν, καὶ εἰ πλείω γράμματα, ἢ ἀριθμοὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰσὶ συννημμένα. οἷον $x^2 u^2 \cdot x^3 u^4 = x^{2+3} u^{2+4}$. Καὶ ἐνεργεία τῶν ἐκθετῶν προσθεθέντων $= x^5 u^6$. Ὡσαύτως καὶ $x^3 u \cdot xu = x^3 u^2$. $x^1 u^1 = x^{1+1} u^{1+1} = x^2 u^2$. Καὶ ἐν ἀριθμοῖς, $2^4 \cdot 6^5 \cdot 2^3 \cdot 6^2 = 2^{4+3} 6^{5+2} = 2^7 6^7$. Ἐὰν δὲ αἱ ποσότητες μὴ ὁμοειδεῖς ᾖσι, παρατίθενται μόνον ἀλλήλαις, ὡς τῶν κατὰ ταύτας ἐκθετῶν προσθεῖναι μὴ ἔχόντων· π. χ. εἰ πρόσκειται u^3 μετὰ τοῦ x^4 πολλαπλασιάσαι, γράψα-

γράφομεν $\nu^3 \chi^4$. εἰ γὰρ ἀναπτυχῇ, ἔσαι $\nu\nu\nu\chi\chi\chi\chi$.
 $= \nu^3 \chi^4$.

Ἐὰν οἱ ἐκθέται ἀλγεβρ. ἀριθμοὶ, (γράμ.)
 Αἱ δὲ ποσότητες, αἷς αἱ δυνάμεις ἀνήκουσιν,
 ὁμοσιδεῖς ᾗσι, συνάπτονται οἱ ἐκθέται διὰ
 τοῦ σημείου $+$. π. χ. $\alpha^r \alpha^\mu = \alpha^{r+\mu}$. Καὶ
 $\nu^r \chi^\mu \cdot \nu^4 \chi^\beta = \nu^{r+4} \chi^{\mu+\beta}$. Ἄλλως γὰρ
 οὐκ ἂν προσασθροισθῇεν, διὰ τὸ τοὺς ἐκθέτας γενικὰς
 εἶναι ποσότητας, τουτ: ἀορίστους, εἰς ὧν τὸν διορισμὸν
 πᾶς ἀριθμὸς τεθῆναι δύναται. Εἰ δ' αἰποσότητες, αἱ
 εἰς δυνάμεις ἀρθῆσαι, καὶ πολλαπλασιασθῆναι προκεί-
 μεναι, μὴ ὁμοσιδεῖς εἶεν, παρατίθενται ἀλλήλαις,
 ὡς ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. (§. αὐτ.) οἶον

$$\chi^r \cdot \nu^\nu = \chi^r \nu^\mu. \text{ Καὶ } \chi^{r+\nu} \cdot \alpha^{\mu+1} \\ = \chi^{r+\nu} \alpha^{\mu+1}.$$

Προκείσθω καὶ ἕτερα παραδείγματα, πᾶσι τοῖς
 ῥηθεῖσι τρόποις τοῦ τῶν δυνάμεων πολλαπλασιασμοῦ
 μετ' ἀλλήλων ὁρμύζοντα.

Πολλαπλαστίασον $\alpha\nu^3 \chi^4$ μετὰ τοῦ $\nu\chi$ τοῦ-
 πέσιν $= \alpha\nu^3 \chi^4$. $\chi^1 \nu^1 = \alpha\nu^{3+1} \chi^{4+1}$
 $= \alpha\nu^4 \chi^5$.

$$\chi^2 \nu^2 \alpha^4 \text{ μετὰ τοῦ } \alpha^3 \chi \nu^3 \beta = \chi^{2+1} \\ \nu^{2+3} \alpha^{4+3} \beta = \chi^3 \nu^5 \alpha^7 \beta.$$

$$\alpha^\mu \text{ μετὰ τοῦ } \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}. \text{ Καὶ } \alpha^{\mu+1} \mu\epsilon- \\ \tau\alpha \text{ τοῦ } \alpha^\mu = \alpha^{\mu+\mu+1} = \alpha^{2\mu+1}.$$

$$\chi^{\mu-2} \nu^r \text{ μετὰ τοῦ } \chi^\nu \nu^{r-1} = \chi^{\mu+\nu-2} \\ \nu^{r+r-1} = \chi^{\mu+\nu-2} \nu^{2r-1}.$$

$$\chi^{r+\mu}$$

$$\chi^{\rho+\mu} \nu^{\nu} \text{ μετὰ τοῦ } \beta^{\nu} \delta^{\chi} = \chi^{\rho+\mu} \nu^{\nu} \beta^{\nu} \delta^{\chi}.$$

$$\begin{aligned} \text{Καὶ } \alpha^{\nu+1} \chi^{3\nu+1} \nu^{\nu+1} \cdot \alpha^{-\nu} \chi^{-3\nu} \nu^{-\nu} \\ = \alpha^{\nu+1-\nu} \chi^{3\nu+1-3\nu} \nu^{\nu+1-\nu} = \alpha^1 \chi^1 \nu^1 \\ = \alpha \chi \nu \end{aligned}$$

Καὶ μείζω τούτων παραδείγματα κατὰ τοὺς αὐτοὺς κανόνας μεταχειρισθῶμεθα· οἷον, εἰ ὅσοι $\pi\chi + \alpha\chi^2 - \alpha^2$ πολλαπλασιάσαι μετὰ τοῦ $\chi^2 + \alpha^2$, ὁ κανὼν ὁ ἀνωτ. καταλλήλως κἀνταῦθα προσαρμοσθήσεται. ἐκκείσεται οὖν τὸ παραδ. οὕτω·

$$\begin{array}{r} \pi\chi + \alpha\chi^2 - \alpha^2 \\ \chi^2 + \alpha^2 \\ \hline + \alpha^2 \pi\chi + \alpha^3 \chi^2 - \alpha^4 \\ \pi\chi^3 + \alpha\chi^4 - \alpha^2 \chi^2 \\ \hline \pi\chi^3 + \alpha^2 \pi\chi + \alpha\chi^4 + \alpha^3 \chi^2 - \alpha^2 \chi^2 - \alpha^4. \end{array}$$

Ἐὰν γὰρ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀπὸ τοῦ $+\alpha^2$ μετὰ τοῦ $-\alpha^2$ ἀρξώμεθα, δῆλον ὅτι, κατὰ τὸν δοθέντα κανόνα τοῦ τὰς ὁμοειδῆς δυνάμεις τῇ προσθέσει τῶν ἐκθετῶν πολλαπλασιάζεσθαι, $-\alpha^4$ προκύψει (§. 77.) Ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔστιν αὐθις ἐν α , ἥτοι ἐν τῷ $\alpha\chi^2$. Τοῦτο πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ α^2 ἔσται $\alpha\chi^2 \alpha^2$. Ἀλλ' ἐνταῦθα τὸ α καὶ α^2 καὶ ἐνεργεῖα πολλαπλασιάσκει αἰόντες, τῇ τῶν κατ' αὐτὰ ἐκθετῶν προσθέσει, καὶ προκύψει $\alpha^3 \chi^2$. Ὅτι α , ἢ α^1 δύναται τὸ αὐτό· (§. 185.) κτ'. Ἀλλὰ καὶ ἐν γένει, εἴπου ἐγγχωρεῖ, τοῦ κανόνος οὐκ ἀμελητέον.

$$\begin{array}{r}
 \pi \cdot \chi \quad \alpha^{\rho} \pi^{\mu} - \beta \chi^{\nu} + \alpha \chi^{2\nu} \\
 \quad \quad \quad \alpha^{\nu} - \chi^{\mu} \\
 \hline
 -\alpha^{\rho} \pi^{\mu} \chi^{\mu} + \beta \chi^{\nu+\mu} - \alpha \chi^{2\nu+\mu} \\
 + \alpha^{\rho+\nu} \pi^{\mu} - \alpha^{\nu} \beta \chi^{\nu} + \alpha^{\nu+1} \chi^{2\nu} \\
 \hline
 \alpha^{\rho+\nu} \pi^{\mu} - \alpha^{\nu} \beta \chi^{\nu} - \alpha^{\rho} \pi^{\mu} \chi^{\mu} + \alpha^{\nu+1} \\
 \chi^{2\nu} + \beta \chi^{\nu+\mu} - \alpha \chi^{2\nu+\mu}.
 \end{array}$$

Ἐπὶ γὰρ τοῦ ἐσχάτου ὅρου $+\alpha\chi^{2\nu}$ μετὰ τοῦ $-\chi^{\mu}$ πολλαπλασιασθέντος, προσίθεμεν ἀλλήλοις τοὺς ἐκθέτας τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ πολλαπλασιασοῦ. τὸ δὲ σημεῖον ἔσαι —. (§. 177.) Ὡς μετὰ τὸν πολλαπλασιασμόν, οὗτος ὁ ὅρος ἔσαι $-\alpha\chi^{2\nu+\mu}$. Οὕτω καὶ τοὺς ἑτέρους ὅρους μετὰ προσοχῆς παρατηροῦσιν, εἰ μόνον τῶν προηγηθέντων ἐν συνέσει ἐγενόμεθα, οὐδεμίαν δυσχέρεια ἡμῖν ἀπαντήσῃ.

Σχόλιον.

Σημείνῃσαι, ὅτι ἡ πρόσθεσις τῶν δυνάμεων δὲν πρέπει νὰ συγχέηται μετὰ τὸν πολλαπλασιασμόν τῶν δυνάμεων. ὅθεν διὰ μνήμης ἔχε αἰετὸν τὸν κανόνα, ὅτι δυνάμεις πολλαπλασιάζειν ἐστὶ τὸ τοὺς αὐτῶν ἐκθέτας προσιθέναι.

§. 192. Καὶ ἐνεργεῖα δυνάμεις εἰς ἄλλας ἔτι ὑπερτέρας δυνάμεις διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κατ' αὐτάς ἐκθετῶν ἀνυψῶσαι δυνάμεθα· π.χ. εἰ τὸ προκείμενον a^2 (ὃ ἐστὶ β'. δύν. τοῦ a) εἰς τὴν β'. ἐξῆρται βούλει δύναμιν, πολλαπλασιάζας τὸν ἐκθέτην τοῦ a^2 διὰ τοῦ 2, ἔξεις τὴν β'. δύν. τοῦ a^2 . Οἷον $a^{2 \cdot 2} = a^4$. Εἰ δὲ εἰς τὴν γ', διὰ τοῦ

3, καὶ ἔσαι ἡ γ'. δύν. τοῦ $a^2 = a^{2 \cdot 3} = a^6$.
 Ἐνθετοὶ αἱ δοθεῖσαι δυνάμεις ἀρθήσονται
 εἰς ὑπερτέρας, εἰς τοὺς αὐτῶν ἐκθέτας
 τῷ ἀριθμῷ πολλαπλασιασώμεν, τῷ τὴν
 δύναμιν ἐμφαίνοντι, εἰς ἣν ταύτας ἐξῆ-
 ραι βουλόμεθα. Ὁ δὲ λόγος δῆλος ἐκ τοῦ ἐξῆς
 παραδείγμ. Εἰ δέοι a^2 εἰς τὴν γ'. δύναμιν ἐξῆρ-
 ποιήσωμεν τοῦτο, εἰ a^2 τρεῖς μετ' ἑαυτοῦ πολλαπλα-
 σιασθῇ, ὅπερ ἂν εἴη $a^2 \cdot a^2 \cdot a^2$. Δυνάμεις δὲ πολ-
 λαπλασιάζειν ἐκ τῶν αὐτῶν ἐκθέτας προσθέναι. Ὡς
 $a^2 \cdot a^2 \cdot a^2$ ἔσαι $= a^{2+2+2} = a^6$. ἀλλὰ τοῦτου
 συντομώτερον ἐφικόμεθα, εἰ, ἀντὶ τοῦ τὸν ἐκθέτην
 2 τρεῖς ἑαυτῷ προσεθῆναι, μετὰ 3 πολλαπλασιάσαι-
 μεν ὅπερ ἴσα δύναται τῇ τριττῇ προσθέσει τοῦ 2,
 καὶ οὕτως αἰρεται a^2 εἰς τὴν γ'. δύν. Αὖθις a^4 εἰς
 τὴν ε'. δύν. ἀρθὲν ἔσαι $a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 \cdot a^4$ ἢ
 $a^{4+4+4+4+4} = a^{20}$. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ a^{20} προκύψει,
 εἰ τὸν ἐκθέτην 4 μετὰ τοῦ 5 πολλαπλασιάσωμεν Ἐσαι
 γὰρ $a^{4 \cdot 5} = a^{20}$. Οὕτω καὶ a^6 u^4 εἰς τὴν γ'. ἀρ-
 θὲν δύν. ἔσαι $a^6 \cdot 3$ $u^{4 \cdot 3} = a^{18} u^{12}$. Καὶ ἐν γέ-
 νει Ἐσω a^r εἰς τὴν γ'. ἀρτέον δύναμιν. Ἐσαι οὖν
 $a^{r \cdot 3}$, ἢ a^{3r} . Καὶ a^r u^x εἰς τὴν ε'. $= a^{3r} u^{5x}$.
 Καὶ a^{r+1} u^{2r} εἰς τὴν δ'. $= a^{(r+1)4} u^{(2r)4}$
 $= a^{4r+4} u^{8r}$. Ὡσαύτως καὶ εἰ ἡ δοθεῖσα γενικὴ
 δύναμις εἰς ἑτέραν δοθεῖσαν γενικὴν δύναμιν ἐξαρτᾶ.
 Οἶον u^x εἰς τὴν μ δύν. ἀρθὲν ἔσαι $u^{x \cdot \mu}$. Καὶ a^{r+1}
 εἰς τὴν μ δύν. $= a^{(r+1)\mu}$, ἢ $a^{r\mu + \mu}$.

§. 193. Πολλάκις εὐρίσκομεν καὶ προσότηας
 διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ καὶ διὰ τοῦ σημείου
 τῆς προσθέσεως συνημμένας, εἰς δυνάμεις ἀρθῆναι προ-
 κειμένως. π. χ. $(ax)^2$. ὅ ἐστιν ax εἰς τὴν β'.
 καὶ

χρῆ-αἰσθῆναι δύν. (ἐνταῦθα αχ εἰσὶ δυνάμεις ποσότη-
 τῶν πολλὰ πλ.) Τότε οὖν ἑκατέρω, (εἰ δύν),
 ἢ ἑκάσῃ (εἰ πλείους) τῶν ποσοτήτων ἐπισημασθή-
 σεται τῷ ἐκθέτῃ. Καὶ $(αχ)^2$ γένοιτο ἄρα $α^2 χ^2$.
 Ὡς καὶ $(αχυ)^3 = α^3 χ^3 υ^3$. Καὶ $(α^2 χ)^4$
 $= α^{2 \cdot 4} χ^4 = α^8 χ^4$. Ὁ δὲ λόγος αὐτῆς κατα-
 φανῆς, εἰάν τὰς ποσότητας ἀναλύσωμεν $(αχ)^2$ ἐσὶν
 $αχ \cdot αχ$ ἥτοι $ααχχ$ ἢ $α^2 χ^2$. Καὶ $(α^2 χ)^4$
 $= α^2 χ \cdot α^2 χ \cdot α^2 χ \cdot α^2 χ = α^2 \cdot α^2 \cdot α^2 \cdot α^2$
 $χχχχ = α^8 χ^4$. τούτ. πολλαπλασιασάζομεν
 τὴν δοθεῖσαν δύναμιν ἐπὶ τὴν ἐκθέτην
 τῆς δυνάμεως ἐκάστης προκειμένης ποσό-
 τητος. Τῶν δὲ ποσοτήτων, τῶν ἑτέρους ἐκθέτας μὴ
 ἔχουσῶν, νοεῖται ἡ 1 ἐκθέτης. Ὡς ἐπὶ τοῦ $(αχ)^2$
 οὐδετέρω τῶν ποσοτήτων ἐκθέτης πάρεστιν· ἀλλὰ ταύ-
 τας θεωρήσωμεν ὡς $(α^1 χ^1)^2$. (§ 185.) Καὶ πολ-
 λαπλασιασάσθων τούτων τῶν ἐκθετῶν τοῦ α καὶ χ,
 ἥτοι τῆς 1, καὶ 1 μετὰ τοῦ 2, προκύπτει $α^2 χ^2$.
 Καὶ ἐν γένει $(αχ)^p = (α^1 χ^1)^p = α^p χ^p$. Καὶ
 $(α^ν χ^ρ)^μ = α^{νμ} χ^{ρμ}$.

Καὶ τῷ τῆς προσθέσεως σημείῳ συνημμέναι πο-
 σότητες εἰς δυνάμεις ἐξαίρεσθαι δύνανται. $(α + β)^2$
 ποσότης ἐστὶ σύνθετος εἰς τὴν β'. ἀρθησομένη δύναμιν
 ὅ ἐστιν, ἡ ποσότης $α + β$ πολλαπλασιασθεῖσα μεθ' ἑαυ-
 τῆς καὶ τούτου ἐνεργεία γεγονότος, προκύπτει $α^2 +$
 $2αβ + β^2$. ὅ ἐστιν $(α + β)^2$. Ὡσαυτως καὶ
 $(α + β)^3$. Ἐν τούτῳ πολλαπλασιασθῆτω α'.
 $α + β$ μετὰ τοῦ $α + β$, (ὅ ἐστιν ἀρθῆτω α' εἰς τὴν
 β' δύναμιν) καὶ τὸ παραγόμεν. $α^2 + 2αβ + β^2$ εἴ-
 τα ἐπὶ μετὰ τοῦ $α + β$. καὶ ἔσται $α^3 + 3α^2 β$
 $+ 3αβ^2 + β^3 = (α + β)^3$. Καὶ τοῦτο ἔχει
 αὐτ' ἐκεῖνου τοῦ σχήματος ἀντικαθίστασθαι, καὶ ἀνά-
 παλιν· ἐνίοτε γὰρ εὐχερείας, ἢ ἄλλου τινὸς ἐνεκα
 γραφά-

γράφουσι τὸ $(\alpha + \beta)^2$ ἀντὶ τοῦ $(\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$,
 ἢ καὶ ἀντὶ τοῦ $(\alpha + \beta)^3$ τὸ $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta)$.
 $(\alpha + \beta)$ κτ. Οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων. Ὡσαύτως
 καὶ αἱ τῶ — σημείω συνημμένοι. π. χ. $(\alpha - \beta)^2$.
 Ὅπερ $= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$. ἐὰν ἀμέλει $\alpha - \beta$
 μετὰ τοῦ $\alpha - \beta$ πολλαπλασιασθῇ.

Σχόλιον.

Ὅταν δείχνωμεν, ὅτι πρέπει νὰ ἐξαρθῇ εἰς δύνα-
 μιν μία διὰ τοῦ $+$, ἢ $-$ συμπεπλεγμένη (§. 44.)
 ποσότης, πάντοτε εἶναι ἀναγκαῖον νὰ κλείηται ἐν πα-
 ρενθέσει, καὶ ὁ ἐκθέτης νὰ βάνηται ἐπάνω πρὸς τὰ δε-
 ξιά, ὡς σὺνηθες· διότι ἄλλῶς ἢμπορεῖ νὰ
 ἀκολουθήσῃ ἀπάτη. π. χ. ἄλλο σημαίνει τὸ
 $(\alpha + \beta)^2$ ἀπὸ τὸ $\alpha + \beta^2$. Τὸ α'. θέλει νὰ εἰπῇ,
 ὅτι ἡ ποσότης $\alpha + \beta$ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ με-
 τὰ ἑαυτῆς. Τὸ δὲ β'. ὅτι εἰς τὴν ποσότητα α πρέπει νὰ
 προσεθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ β . Ἄς τεθῇ τὸ $\alpha = 5$.
 καὶ τὸ $\beta = 10$, καὶ ἔσαι $(\alpha + \beta)^2 = (5 + 10)^2$
 $= 15^2 = 15 \cdot 15 = 225$. Ἀλλὰ τὸ $\alpha + \beta^2$
 ἔσαι $= 5 + 10^2 = 5 + 10 \cdot 10 = 5 + 100$
 $= 105$. Τὸ οὖν 225 πάντῃ διάφορον τοῦ 105.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Δυνάμεων.

§. 194. Δυνάμεις ὁμόρριζοι (ὅ ἐσι
 τὴν αὐτὴν ποσότητα ρίζαν ἔχοντες)
 διαιροῦνται δι' ἀλλήλων, ἐὰν οἱ τοῦτων
 ἐκθέται ἀφαιρῶνται ἀπ' ἀλλήλων.

ἢ Δεῖξτε τοῦτου γενέσθω διὰ γραμμάτων.

Ἄξια, κατὰ τὰ εἰρημ. καλεῖται, ἡ προκύψασα ποσότης
 διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μετ' ἀλλήλων ὁμοειδῶν πο-
 σοτήτων. Οὕτως α. α. α. α. εἰς ἡ δ'. ὀξία, ἢ δύν.
 τοῦ α. ἢ α⁴. γραφείη δ' ἂν καὶ αααα. Ἀλλὰ διὰ τῆς
 διαιρέσεως τὰ γράμματα χωρίζονται αὐθις ἀπ' ἀλλή-
 λων,

λων, καὶ ἀφαιροῦνται τοσαῦτα, ὅσα ὁμοειδῆ γραμμά-
τα περιέχει ὁ διαιρέτης. (§. 99. σχ. β'.) Οἷον, εἰ αααα
= α⁴ διαιρεθῆναι θέοι διὰ αα, ὑπολειφθήσεται αα·
Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἐστὶ τοσαῦτα γραμμάτα ἀφαιρεῖν ἀπὸ
τοῦ διαιρετέου τῷ ἐν τῷ ἐκθέτῃ δεικνύναι, πόσα τού-
των ἀφαιρετέα· Τοῦτο δὲ γένοιτο διὰ τοῦ σημείου τῆς
ἀφαιρέσεως οὕτως. α⁴ διὰ α² διαιρεθὲν γραφήσεται
α⁴

α⁴ : α², ἢ α² = α⁴⁻² = α². Ἐοαρμόσει δὲ ὁ κα-
νὼν καὶ τοῖς διὰ γραμμάτων ἐκθέταις, ὡς καὶ τούτων
διορισθῆναι δι' ἀριθμῶν δυναμένον. οἷον α^μ : α^ν
= α^{μ-ν}. Ἐὰν δὲ αἱ ρίζαι τῶν δυνάμεων μὴ ὁμοει-
δεῖς ᾖσιν, (τοῦτ' μὴ τὰ αὐτὰ γράμ. ἢ) ὁ κανὼν χώ-
ραν οὐκ ἔχει, ὡς παντίπου ἐκ τῆς διαιρέσεως δῆλον·
α^μ β^ν οὐκ ἔστιν = α^{μ-ν}. Ἀλλὰ δηλώσομεν τὴν τού-
των διαίρεσιν ἦτοι α^μ : β^ν, ἢ $\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\nu}}$.

§. 195. Ἐπὶ τῶν ὁμοειδῶν ὁ κανὼν κρατεῖ,
καὶ ἐὰν ἡ δύναμις μὴ μόνη, ἀλλὰ διὰ τοῦ πολλαπλα-
σιασμοῦ μεθ' ἑτεροειδῶν συνημμένη ᾖ, μόνον εἰ ὁ διαι-
ρετέος, καὶ ὁ διαιρέτης ὁμοειδεῖς εἶεν δυνάμεις, τοῦτ'
δυνάμεις τὰς αὐτάς ἔχουσαι ρίζας. π. χ. α³ χ⁴ :
α² χ² = α³⁻² χ⁴⁻² = α¹ χ² = αχ²
(§. 185.) Καὶ α⁵ χ⁴ : α = α⁵⁻¹ χ⁴ = α⁴
χ⁴. Εἰ δὲ τῷ διαιρέτῃ καὶ δυνάμει οὐχ ὁμοειδῆς
πρόσθεσιν, ἐν τῷ πηλίκῳ οὐκ ἂν μία ἐκτῶν δύο ποσό-
της προκύψειεν, ἀλλ' ἐν μέρει καὶ τὴν ἑτέραν δεικτέαν.
π. χ. α⁵ χ⁴ : α² ψ² = α⁵⁻² χ⁴ : ψ²,
ἢ $\frac{\alpha^3 \chi^4}{\psi^2}$.

§. 196. Ἐὰν ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρέτου ἐν ὁμοει-
δέσι δυνάμεσι μείζων ᾖ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου,
ἀνάγκη

ἀνάγκη πᾶσα τὸν ἐκθέτην τοῦ πηλίκου ἀποφατικὸν εἶναι. Οἶον εἰ α^μ διελεῖν δεῖν διὰ α^ν , καὶ ν ἐστὶ μεῖζον τοῦ μ, ἔσται $\mu - \nu$ ἀναγκαίως ἀποφατικὴ ποσότης, ὅπερ ἐμφαίνουσι καὶ οἱ ἀριθμοί. π. χ. $\alpha^5 : \alpha^7 = \alpha^{5-7} = \alpha^{-2}$. ἢ α ἐν τῇδυνάμει -2 . Καὶ αχυ: $\alpha^3 \chi^2 \upsilon^4 = \alpha^{1-3} \chi^{1-2} \upsilon^{1-4} = \alpha^{-2} \chi^{-1} \upsilon^{-3}$. Τί δὲ τοῦτό ἐστιν, εἰ ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως ἀποφατικὴ ποσότης γίνεται, δειχθήσεται αὐτίκα, καὶ ὅπως ἀντὶ ταύτης ἑτέραν ἐκφράσιν εὐρεῖν ἔχομεν.

§. 197. Τὰ ἑξῆς παραδείγμ. παριζῶσι τὰ ῥηθέντα σαφέστερον $\chi^4 : \chi^3 = \chi^{4-3} = \chi^1 = \chi$. Καὶ $\chi^5 : \chi^7 = \chi^{5-7} = \chi^{-2}$.

Καὶ $\chi^3 \upsilon^2 : \chi \upsilon = \chi^{3-1} \upsilon^{2-1} = \chi^2 \upsilon$.
 $\chi^3 \upsilon^5 : \chi^4 \upsilon^2 = \chi^{3-4} \upsilon^{5-2} = \chi^{-1} \upsilon^3$.

Καὶ $\chi^5 \upsilon^4 \alpha : \chi^7 \upsilon^5 \alpha^2 = \chi^{5-7} \upsilon^{4-5} \alpha^{1-2} = \chi^{-2} \upsilon^{-1} \alpha^{-1}$.

Καὶ $\alpha^\nu : \alpha^\mu = \alpha^{\nu-\mu}$.

Καὶ $\alpha^{\nu+1} : \alpha^\mu = \alpha^{\nu+1-\mu}$.

Καὶ $\alpha^{\nu-1} : \alpha^{\mu+1} = \alpha^{\nu-1-(\mu+1)} = \alpha^{\nu-1-\mu-1} = \alpha^{\nu-\mu-2}$.

$\alpha^\nu \chi^\mu \upsilon : \alpha^\rho \chi^5 \upsilon^2 = \alpha^{\nu-\rho} \chi^{\mu-5} \upsilon^{1-2} = \alpha^{\nu-\rho} \chi^{\mu-5} \upsilon^{-1}$.

Καὶ $\chi^\rho \upsilon^5 : \chi^\mu = \chi^{\rho-\mu} \upsilon^5$.

$\chi^4 \upsilon^2$

$$(x^4 u^2 - u^3 x^5) : \alpha x^3 u = \frac{x^{4-3} u^{2-1} - u^{3-1} x^{5-3}}{\alpha} \\ = \frac{x u - x^2 u^2}{\alpha}$$

$$(\alpha x^2 u^3 - \alpha \beta x^2 u^2 - \alpha x^2 u^2) : \alpha x u \\ = x u^2 - \beta x u - x u = (u - \beta - 1) x u$$

§. 198. Τὴν τῶν ὁμοειδῶν δυνάμεων δι' ἀλλήλων διαίρεσιν μαθοῦσι, ῥᾶδιον ἔσαι δεῖξαι, καὶ ὅπως αἱ δυνάμεις, αἱ δι' ὁμοειδοῦς α' δυνάμεις διαιρούμεναι, διηλεκτῶς μειοῦνται, καὶ ὅπως ἐκ τούτου σειράτις τῶν δυνάμεων εἰς τοῦτίσω ἀναφύεται. Εἰς γὰρ τὸ πρόσω αὐξοῦνται αἱ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ὁμοειδοῦς α'. δυνάμεως* μέμνησο δὲ πάνταυθα τοῦ (§. 84. σχ.), ὅτι ἡ δι' αὐτῆς διαιρουμένη ποσότης = 1. Ὡς καὶ $\chi = 1$, ὡς ἡμῖν ἤδη τοῦτο ἀναγκαῖον εἶ-

χ

δέναι. Τὰ λοιπὰ δὲ δῆλον, ὅτι τὸ χ γενικὴ εἰς ποσότης καὶ ὅ, τι κατ' αὐτῆς ἀληθεύον εὑρεθήσεται, ἀληθεύσει καὶ κατὰ πάσης ποσότητος διωρισμένης.

Ἐὰν χ ἐν τῇ α' δυνάμει παρῇ, (ὅ ἐστιν, ἔπερ ἡ δοθεῖσα ποσότης εἰς οὐδεμίαν ἔτι ἐξήρται δυναμίν, ἢντινα καὶ οὕτω δηλῶσαι δυνάμεθα, χ^1) καὶ πολλαπλασιασθῇ μετὰ χ , καὶ τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον αὐτίς μετὰ χ , καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὡς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δῆλον, ἡ ἐπομένη ἀνακύψει σειρά τῶν δυνάμεων. χ , χ^2 , χ^3 , χ^4 , χ^5 , χ^6 , καὶ οὕτως ἐπ' ἀπειρον.

Ἄλλ' ἀπὸ τοῦ χ^6 τῆς διαιρέσεως διὰ χ ἀρξαμένοις, κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον, ἀαφανήσεται ἡδε ἡ σειρά.

$$\frac{\chi^6}{\chi}$$

$$\frac{\chi^6}{\chi} = \chi^{6-1} = \chi^5. \text{ Καὶ } \frac{\chi^5}{\chi} = \chi^{5-1} = \chi^4. \text{ Καὶ } \frac{\chi^4}{\chi} = \chi^{4-1} = \chi^3. \text{ Καὶ } \frac{\chi^3}{\chi} = \chi^{3-1} = \chi^2. \text{ Καὶ } \frac{\chi^2}{\chi} = \chi^{2-1} = \chi^1, \text{ ἢ } \chi. \text{ ὅτι } \chi^1 \text{ καὶ } \chi \text{ ἰσοδυναμεῖ. (§. 185.)}$$

$$\text{Ἀὖθις } \frac{\chi}{\chi} = \chi^{1-1} = \chi^0, \text{ ἢ } = 1. \text{ (ἐπεὶ δὴ γὰρ } \frac{\chi}{\chi} = 1. \text{ (§. 84. σχ.) τὸ δὲ } \frac{\chi}{\chi} = \chi^{1-1} = \chi^0. \text{ ἄρα καὶ (48. δ'.) } \chi^0 = 1.) \text{ Ὡς ἀντὶ τοῦ } \chi^0 \text{ ἀντικαθίσταν τὴν 1 ἔξῃ, ὡς ἴσῃν αὐτῶ.}$$

$$\text{Ἀὖθις } \frac{\chi^0}{\chi} \text{ ἢ } \left(\frac{1}{\chi} \right) = \chi^{0-1} = \chi^{-1}. \text{ Ὅτι}$$

$$0 - 1 = -1.$$

$$\text{Καὶ } \frac{\chi^{-1}}{\chi} \text{ ἢ } \frac{1}{\chi} : \chi \text{ (ὅτι, ὡς ἤδη δέδεικται, } \frac{1}{\chi} = \chi^{-1}. \text{ ὅθεν ἀντὶ τοῦ διαιρέτέου } \chi^{-1}, \text{ ἀντικατασταίῃ αὖν τὸ } \frac{1}{\chi} \text{) } = \frac{1}{\chi^2}. \text{ Ὅτι τὸ } \frac{1}{\chi} \text{ ἔστι } \chi : \chi^2.$$

μειωθῆναι χρή* (τοῦτο γὰρ δηλοῖ ἡ διαίρεσις ἢ δια τοῦ χ) Ἀλλὰ $\frac{1}{\chi}$ μειωθήσεται κατὰ τὸ χ , ἐὰν ὁ

διαρέτης $\chi : \chi^2$ αὐξηθῇ. τοῦτο δ' ἔσται, ἐὰν τὸν διαιρέτην μετὰ τοῦ χ πολλαπλασιάσωμεν. Ἀλλ' ἐπεὶ, ὡς δέδεικται, $\frac{1}{\chi} = \chi^{-1}$, τοῦτο δὲ τὸ χ^{-1}

διαίρεθὲν διὰ τοῦ χ ἔσται $\chi^{-1-1} = \chi^{-2}$. Ἀν

τὶ τοῦ $\frac{1}{x^2}$ χρησιμοποιεῖται τῷ x^{-2} . Καὶ $\frac{1}{x^2} : x = \frac{1}{x^3}$. Καὶ $\frac{1}{x^3} : x = \frac{1}{x^4}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Προτεθείσθωσαν ἤδη αἱ δύο ἴσαι σειραὶ τῶν μειομένων δυνάμεων, καὶ τὰ σχήματα τὰ ἀλλήλοις ἴσα γραφῆτω ὑπάλληλα· Ἀρκέσειν δ' ἀπὸ τοῦ x^6 , ἢ β'. σειρά ἐς κατὰ πάντα ἴση τῇ α'. π. χ.

$x^6, x^5, x^4, x^3, x^2, x^1, x^0, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4} \dots x^{-\nu}$.

$x^6, x^5, x^4, x^3, x^2, x^1, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4} \dots \frac{1}{x^\nu}$.

Ἡ ἀντικατάστασις τῶν ἴσων σχημάτων οὐ μικρὸν ἐν διαφοροῖς ὑπολογισμοῖς συμβάλλεται, ὡς ἐν τοῖς ἐξῆς σαφῶς ὁφόμεθα· π. χ. ἀντὶ τοῦ $\frac{1}{x}$ ἀντικαταστῆναι δύναται τὸ ἴσον x^{-1} , καὶ ἀντὶ τοῦ $\frac{1}{x^\nu}$ τὸ $x^{-\nu}$. Ἀντὶ δὲ τοῦ $\frac{1}{x^\nu}$ τὸ x^{-1} x^ν , κτ.

Σχόλιον.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς μετὰ ἐκθετῶν καταφ. καὶ ἀποφ. παρελείφθη ἀνωτέρω. διότι ἠγνοοῦμεν τὴν σημασίαν τῶν τοιούτων σχημάτων. ὡς a^{-1}, a^{-2} κτ. Οὐ χαλεπὸν δὲ ταῦτα εἰδόσι κακείνους πολλαπλασιάζειν. εἶον a^{-1} μετὰ τοῦ a^2 πολλαπλ. δίδωσιν a^1 , ὅ ἐστιν a . Φανερόν δὲ καὶ ἐκ τούτου, a^{-1}

$$= \frac{1}{a}$$

$\frac{a}{a} = 1$ τούτο πολλαπλ. μετὰ τοῦ a ἔσται $\frac{a}{a}$.

(§. 140.) ἦτοι a , Ὡσαύτως καὶ a^{-2} μετὰ a πολλαπ. $= a^{-2+1} = a^0 = 1$. Καὶ a^{-1} τῷ a^2 πολλαπ. $= a^{-3+2} = a^{-1}$.

§. 199. Πᾶσα ποσότης ἐν τῇ δυνάμει 0 ἔστι $\frac{0}{0} = 1$. (§. ἀνωτ.) Καὶ ἐπειδὴ τὸ χ ὡς ἀόριστον, οἰανοῦν σημαίνει ποσότητα, δύναται σημεῖν καὶ $(a + \beta)$. Ἐπεὶ οὖν $\chi^0 = 1$, ἔσται καὶ $(a + \beta)^0 = 1$. Καὶ τοῦτο ἀληθεύει καθόλου καὶ 0⁰ γὰρ ἔστιν $= 1$. Καί τοι γὰρ τὸ μηδενικὸν εἰς οὐδεμίαν ὑψουθῆναι δύναται ἔχει (ὅτι τὸ μηδὲν αἰ μὴδὲν) ἀλλὰ τὸ 0⁰ ὡς $\frac{0}{0}$ νοεῖν ἔξεσι καὶ μάλα. καὶ τὸ μηδὲν ἐμπεριέχε-

ται τῷ μηδενὶ ἅπαξ, ἵνα τί καὶ ἀφηρημένως φθεγζώμεθα.

Προκρίσω καὶ ἕτερα παραδείγματα, εἰς διαίρεσιν ἐν (§. 197.) μὴ προχειρισθέντα.

$$a^4 \chi^6 u^5 : a^4 \chi^6 u = a^{4-4} \chi^{6-6} u^{5-1} = a^0 \chi^0 u^{5-1} = 1 \cdot 1 \cdot u^{5-1} = u^{5-1} = u^4.$$

$$a^{5+1} \chi^2 : a^{5+1} \chi = a^{5+1-(5+1)} \chi^{2-1} = a^0 \chi^1 = 1 \cdot \chi^1 = \chi^1 = \chi.$$

$$(a^2 \chi^2 u^2 - \alpha \beta \chi u - \alpha \chi u) : \alpha \chi u = \alpha \chi u - \beta - 1.$$

§. 200. Ὅπως ἡ δοθεῖσα δύναμις εἰς ἐτέραν δύναμιν ζητούμενην ἐξαιρεται, εἴρηται. (§. 192.) συνοραῖ δὲ πάρεσιν, ὅτι οἱ ἐκθεταὶ τῶν δυνάμεων διὰ τῆς ἐνεργείας διαιρέσεως καταίρονται. Ἐν τῷ (§. 186.) δέδεικται προηγουμένως, καὶ τί ἐστὶ ρίζα, ἢ $\sqrt{}$ ἐν γενει.

καὶ τί ταῦτα $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[n+1]{}$, κτ. σημαίνει. ἄλλ.

ἀλλ' ἐκάστην δύναμιν (ἢ μᾶλλον πάντα ἐκθέτην τῆς δυνάμεως) νοεῖν ἔχομεν, ὡς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μεθ' ἑτέρας ποσότητος προκύψασαν, καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὴν παροῦσαν δύναμιν ἀρθεῖσαν. (§. 192.) ἡ ποσότης δὲ, δι' ἧς εἰς τὴν προκειμένην ὑψώθη δύναμιν, ἣν ἡ ρίζα· εἰ γὰρ π. χ. a^4 εἰς τὴν γ'. ἀρθῆναι προὔκειτο δύναμιν, ἐπολλαπλασιάζετο $a^{4 \cdot 3} = a^{12}$. (§. αὐτ.) Εἰ οὖν τὴν τούτου τριπλὴν ρίζαν λαβεῖν βουλόμεθα, ποιήσομεν τοῦτο διὰ τῆς ἀντικειμένης τῇ πολλαπλ. μεθόδου, τούτ: διὰ τῆς διαιρέσεως. ὥστε ἀναγκαῖον τὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ a^{12} οἰὰ τοῦ 3 διελεῖν· ὡς $a^{\frac{12}{3}}$. Καὶ τούτου ἐνεργείᾳ διαιρεθέντος, προκύψει a^4 , ὃ τῷ ὄντι ἡ $\sqrt[3]{}$ ἐστὶ τοῦ a^{12} . ὅτι a^4 τρίς μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθὲν δίδωσιν a^{12} . Εἰδέναι τοίνυν δεόν, ὅποια ρίζα τῆς δυνάμεως ζητεῖται, ὃ ἐστὶ, τὸν ἐκθέτην (§. 186.) τῆς ρίζης δεδομένον εἶναι χρή. Ἀλλως γὰρ μύριας ρίζας νοῆσαι δυνάμεθα π. χ. Ἐς a^{12} . ἡ $\sqrt[12]{}$ τούτου ἔσαι $a^{\frac{12}{12}} = a^1 = a$ · τὸ γὰρ αὐτὸ δωδεκάκις μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθὲν δίδωσιν a^{12} . Ἡ $\sqrt[4]{}$ τοῦ a^{12} ἐστὶν $a^{\frac{12}{4}}$, ἢ a^3 . ἡ $\sqrt[3]{}$ τοῦ $a^{12} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$. ἡ $\sqrt[2]{}$ τούτου, ἥτις ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον $\sqrt[2]{}$ ἄνευ ἐκθέτου γράφεται, (§. αὐτ.) $= a^{\frac{12}{2}} = a^6$, κτ. Ὁ οὖν κανὼν τοῦ τὰς ρίζας τῶν ἐκθετῶν εὐρίσκειν, τὰς εἰς εὐρεσιν προκειμένας, ἐστὶν ὁ ἑξῆς. Δίελε τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως διὰ τοῦ δοθέντος ἐκθέτου τῆς ρίζης, καὶ τὸ ἐκ τῶν ἐκθετῶν πηλίκον, τὸ διὰ τῆς διαιρέσεως προελθόν, δείξεισσι τὴν ζητουμένην ρίζαν. Ἐνθεντοί $\sqrt[6]{a^6} = a^{\frac{6}{6}} = a^1 = a$. Καὶ $\sqrt[4]{a^4} = a^{\frac{4}{4}} = a$. $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

M

Ση.

Σημειώσαι, ὅτι τοῦ ἐκθέτου τῆς ῥίζης ὑπὸ τὸ ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τεθέντος, τὸ ῥιζικὸν σημεῖον $\sqrt{}$ ἐκπίπτει· Ὁ δὲ κανὼν κρατεῖ ἐπὶ πάντων. Καὶ εἰάν ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως διὰ τοῦ ἐκθέτου τῆς ῥίζης διαιρέσιμος μὴ ᾖ, ὁ ὀρθὸς λόγος διδάσκει οὕτω χωρεῖ ἀναγκαῖον εἶναι. π. χ. $\sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$. Καὶ $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Ὡσαύτως καὶ εἰ οἱ ἐκθέται εἰσὶ γράμματα ὡς $\sqrt[μ]{x^ρ} = x^{\frac{ρ}{μ}}$. $\sqrt[ρ+1]{x^{ρ+μ}} = x^{\frac{ρ+μ}{ρ+1}}$. Ταυτὰ τῶν σχημάτων, καὶ τοι περαιτέρω ἐκτεθῆναι καὶ ἀναπτυχθῆναι μὴ δυνάμενα, ἔχουσι μέντοι αὐτὰθεν τὸ ἐναργές, καὶ ἀκριβές.

§. 201. Καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἡνυμῆναι ἀπαντῶσι ποσότητες, ἐξ ὧν τὴν ῥίζαν ἐξάγειν ἐπιταττόμεθα· Τότε οὖν ἐξάγεται ἡ ῥίζα ἐκάστης ποσότητος, ὡς τοῦ ἐκθέτου αὐτῶν διὰ πολλαπλασιασμοῦ προκύψαντος. π. χ. $\sqrt[3]{a^2 x^4 u} = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} u^{\frac{1}{3}}$. Καὶ $\sqrt[3]{a^6 x^9 u^3} = a^2 x^3 u$. ὅτι ἐν τούτῳ τῷ παραδ. ἡ διαίρεσις χωρεῖ· Ἡ $\sqrt[3]{a^4 x^2 u} = a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} u^{\frac{1}{3}} = a^2 x u^{\frac{1}{3}}$. Καὶ $\sqrt[μ]{x^ρ u^ν} = x^{\frac{ρ}{μ}} u^{\frac{ν}{μ}} = x^{\frac{ρ}{μ}} u^{\frac{ν}{μ}}$. Ἡ $\frac{ν}{μ} = 1$.

§. 202. Ὁ τρόπος τοῦ τὸ ῥιζικὸν σημεῖον πολλαπλασιάζειν, καὶ ἀντὶ τούτου τὸν ἐκθέτην τοῦ ῥιζικοῦ σημεῖου ὑπὸ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τιθέναι, καὶ π. χ. ἀντὶ τοῦ $\sqrt[3]{a^4}$, $a^{\frac{4}{3}}$ γράφειν, λίαν ἐν χρήσει, καὶ συντελεῖ τὰ μέγιστα, ὡς ἐν τοῖς ἐξῆς ἀφόμεθα. Τὰς οὕτω γραφομένας ποσότητας, ὁμοειδεῖς οὔσας καὶ ὁμοειδεῖς ἐκθέτας τῆς ῥίζης ἐχούσας, πολλαπλασιάζομεν.

σομεν, καὶ διαιρήσομεν κατὰ τὰ. (§. §. 191. 194.)
 Οἷον $a^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{2} = a^{\frac{7}{2}}$. Καὶ
 $v^{\frac{5}{4}} : v^{\frac{1}{4}} = v^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{4}$. Ἀλλὰ περὶ τούτων κατωτέρω
 πλατύτερον.

§. 203. Παραδείγματα διαιρέσεως τῶν δυνά-
 μεων, ἐς τὸδε ἀποταμιευθέντα, ὡς τὸν τρόπον τῆς
 τούτων ἀγνοοῦσι διαιρέσεως.

$$\begin{array}{r}
 \text{Δίελε } a^6 + \beta^6 \text{ διὰ τοῦ } a^2 + \beta^2 \\
 (a^2 + \beta^2) \ a^6 + \beta^6 \quad | \quad a^4 - a^2\beta^2 + \beta^4 \\
 \underline{a^6 + a^4\beta^2} \quad | \\
 -a^4\beta^2 + \beta^6 \\
 \underline{-a^4\beta^2 - a^2\beta^4} \\
 +a^2\beta^4 + \beta^6 \\
 +a^2\beta^4 + \beta^6 \\
 \\
 \text{Καὶ} \quad | \quad 6\gamma^2 - \beta^4\gamma + 4a^2 \\
 30\gamma^4 - 5\beta^4\gamma^3 + 20a^2\gamma^2 - 18a\gamma^2 + 3a\beta^4\gamma - 12a^3 \\
 \quad \quad \quad (5\gamma^2 - 3a) \\
 30\gamma^4 \quad \quad \quad - 18a\gamma \\
 \hline
 -5\beta^4\gamma^3 + 20a^2\gamma^2 \quad + \quad 3a\beta^4\gamma - 12a^3 \\
 -5\beta^4\gamma^3 \quad \quad \quad + \quad 3a\beta^4\gamma \\
 \hline
 + 20a^2\gamma^2 \quad \quad \quad - 12a^3 \\
 + 20a^2\gamma^2 \quad \quad \quad - 12a^3
 \end{array}$$

§. 204. Ἐὰν οἱ ἐκθῆται τῶν δυνάμεων κλά-
 σματα ὥσι, (§. 200.) μεταχειρισθῶμεθα καὶ ταῦ-
 τα, ὡς καὶ τὰ λοιπὰ τῶν κλασμάτων τούτ: ἐὰν καὶ
 τούτων ἄμφω τοὺς ὅρους μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολ-
 λαπλασιάσωμεν, ἢ διέλωμεν, τὸ κλάσμα οὐδόλως με-
 Μ 2 ταβάλ-

ταβάλλεται· π. χ. $\chi_{\frac{3}{4}}^3 = \tau\omega \chi_{\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}}^{\frac{3 \cdot 2}{2}} = \chi_{\frac{6}{8}}^6$. Καί
 ἐπεὶ $\chi_{\frac{3}{2}}^3 = \sqrt[4]{\chi^3}$. Τὸ δὲ $= \chi_{\frac{6}{8}}^6 = \sqrt[8]{\chi^6}$, (ῥ. αὐτ.)
 ἔσαι καὶ $\sqrt[4]{\chi^3} = \sqrt[8]{\chi^6}$ (§. 48. δ'). Ἀλλὰ καὶ
 ἐὰν ἄρῃω οἱ ὅροι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρεθῶσι,
 τὸ κλάσμα μένει αὐθις ἀμετάβλητον. $\chi_{\frac{6}{4}}^6 = \chi_{\frac{6:2}{4:2}}^{6:2}$
 $= \chi_{\frac{3}{2}}^3 = \sqrt[2]{\chi^3}$. Ὡς $\chi_{\frac{6}{4}}^6$, ἢ $\sqrt[4]{\chi^6} = \sqrt[2]{\chi^3}$
 Τούτῳ τῷ τρόπῳ δυνάμεις, τὰς κλασματικούς ἐχού-
 σας ἐκθέτας, προσιθέται, ἀφαιρεῖν, πολλαπλασιάζειν,
 καὶ διαιρεῖν δυνάμεθα. Ἀλλὰ σημειωτέον, ὅτι ἡ τού-
 των πρόσθεσις, καὶ ἀφαιρέσις οὐ κατὰ πάντα ὁμοία
 τῇ τῶν κοινῶν κλασμάτων, ὧν οἱ ἀριθμηταὶ, μετὰ τὸ
 εἰς τὸν αὐτὸν παρονομ. ἀναχθῆναι τὰ κλάσματα, προσί-
 θενται, (§. 130.) ἀλλὰ μεταξὺ τῶν δυνάμεων τιθέα-
 μεν μόνον τὸ σημεῖον +, ἢ —, ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρο-
 νομ. ταύτας μείζονος σαφηνείας χάριν, ἀναγκαίως οὐ-
 σης ἐνίοτε τῷ ὑπολογισμῷ, ἀνάγοντες, (ἢ γὰρ πρό-
 σθεσις, καὶ ἀφαιρέσις τῶν ἐκθετῶν, ὁ τούτων πολλα-
 πλασιασμός ἐστι, καὶ ἡ διαίρεσις μετ' ἀλλήλων) Οἷον,
 εἰ δέοι $\sqrt[3]{\chi^3}$, καὶ $\sqrt[3]{\chi^4}$ προσθεῖναι, ἔσαι $\chi_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$
 $+ \chi_{\frac{3}{2}}^{\frac{4}{2}}$. Ἀλλὰ καὶ ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρον. τὰς οὖν
 κλασματικὰς ἀναγαγόντες δυνάμεις μεταχειρισθῆσόμε-
 θα ταύτας, ὡς καὶ τὰς λοιπὰς.

$$\chi_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} + \chi_{\frac{3}{2}}^{\frac{4}{2}} = \chi_{\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3}}^{\frac{3 \cdot 3}{2}} + \chi_{\frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 2}}^{\frac{4 \cdot 2}{2}} = \chi_{\frac{9}{6}}^9$$

$$+ \chi_{\frac{6}{6}}^8 = \sqrt[6]{\chi^9} + \sqrt[6]{\chi^8}$$

Τὸ δὲ $\chi_{\frac{9}{6}}^9 +$
 $\chi_{\frac{8}{6}}^8 = \chi_{\frac{9+8}{6}}^{\frac{9+8}{2}} = \chi_{\frac{17}{6}}^{\frac{17}{2}} = \sqrt[6]{\chi^{17}}$ οὐκ ὁρῶν.
 Δειχθήσεται δὲ, ὅτι ἐκείνως, καὶ οὐκ ἄλλως χωρη-
 τέον.

Καὶ ἐν γράμμασι·

$$\sqrt[\nu]{u^{\rho}} + \sqrt[\mu]{u^{\sigma}} = u^{\frac{\rho}{\nu}} + u^{\frac{\sigma}{\mu}} = u^{\frac{\rho\mu}{\nu\mu}} \\ + u^{\frac{\sigma\nu}{\mu\nu}} = \sqrt[\nu\mu]{u^{\rho\mu}} + \sqrt[\nu\mu]{u^{\sigma\nu}}.$$

Ὡσαύτως καὶ εἰ αἱ ποσότητες ἀφαιροῦνται ἀπ' ἀλλήλων, ὡς $x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3}} - x^{\frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 2}} \\ = x^{\frac{9}{6}} - x^{\frac{8}{6}} = \sqrt{x^9} - \sqrt{x^8}$. Ἀυθις $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4}} - x^{\frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2}} = x^{\frac{4}{8}} - x^{\frac{2}{8}} \\ = \sqrt[8]{x^4} - \sqrt[8]{x^2}$. Καὶ ἐν γράμμασι.

$$x^{\frac{\nu}{\mu}} - x^{\frac{\tau}{\rho}} = x^{\frac{\nu\rho}{\mu\rho}} - x^{\frac{\tau\mu}{\rho\mu}} = \sqrt[\mu\rho]{x^{\nu\rho}} - \sqrt[\rho\mu]{x^{\tau\mu}} \\ - \sqrt[\mu\rho]{x^{\tau\mu}}.$$

§. 205. Τὸ οὕτω τὰς δυνάμεις, ὧν οἱ ἐκθέται κλάσματα, μεταβάλλειν, χρησιμώτατον πολλάκις ἐν ὑπολογισμοῖς, ὅτε τὰς δυνάμεις εἰς ἕτερα σχήματα, εἰς πλείω ἀνάπτωξιν, τρέψαι βουλόμεθα· τοῦτο δ' αἰεὶ ἐγχορεῖ, καὶ τῶν δυνάμεων κλασματικὸν ἐκθέτην μὴ ἔχουσῶν· ὑποτίθεται γὰρ ὁ ἐκθέτης, ὡς κλασματικὸς, οὐ παρὼν· ἢ 1. π. $x \cdot \alpha^{\mu-1}$ νοηθεῖν ἂν καὶ οὕτως $\alpha^{\frac{\mu-1}{1}}$. Καὶ τότε, εἰ ἀναγκαῖον, καὶ τὸ κλάσμα ἄλλως γραφῆσεται, τῆς ποσότητος ἥκιστα τροπὴν ὑφισταμένης· Οὕτω τὸ $\alpha^{\mu-1} = \tau\omega \alpha^{\frac{\mu-1}{1}}$. τοῦτο δὲ $= \alpha^{\frac{(\mu-1)\nu}{1 \cdot \nu}} = \alpha^{\frac{\mu \cdot \nu - \nu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu \cdot \nu - \nu}}$. Καὶ $\alpha^{\frac{1}{\mu}} = \alpha^{\frac{1 \cdot \nu}{\mu \cdot \nu}} = \alpha^{\frac{\nu}{\mu \cdot \nu}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha^{\nu}}$. Τὰ τοιαῦτα σχήματα μάλιστα χρήσιμα ἐν ταῖς Ἐξισώσεσι (περὶ

ρὶ ὧν μετὰ ταῦτα) "Οθεν ἐπιμελῶς παντὶ ἑαυτὸν ἀσκητέον·

§. 206. "Οσα περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δυνάμεων εἴρηται, (§. 191) τῶν ταυτορρίζων, κρατοῦσι καὶ περὶ τῶν κλασματικῶν ἐκθετῶν. ὅτι καὶ οὗτοι, ὡς ἀληθεῖς δυνάμεις, θεωρητέοι· ἀ' μέντοι τοὺς ἐκθέτας ἀνακτέον ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομασὴν, καὶ εἴτα προσθετέον τοὺς ἀριθμητάς, τὸν κοινὸν παρονομ. ὑπογράφοντας, διὰ τὸ §. 130. π. χ. $\chi^{\frac{1}{2}}$. $\chi^{\frac{2}{3}}$
 $= \chi^{\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}}$ $\chi^{\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3}} = \chi^{\frac{3}{6}}$ $\chi^{\frac{4}{6}} = \chi^{\frac{3+4}{6}} = \chi^{\frac{7}{6}}$
 $= \sqrt[6]{\chi}$. Ἀὐθις $\chi^{\frac{1}{2}}$. $\chi^{\frac{\nu}{\mu}} = \chi^{\frac{1 \cdot \mu}{2 \cdot \mu}}$ · $\chi^{\frac{\nu \cdot 2}{\mu \cdot 2}}$
 $= \chi^{\frac{\mu + 2\nu}{2\mu}} = \sqrt[2\mu]{\chi^{\mu + 2\nu}}$.

Πρὸς τούτοις, ὡς εἰδόσιν, ὅπως αἱ τοιαῦται ποσότητες, $\frac{1}{\chi}$, $\frac{1}{\chi^2}$, καὶ ἄλλως ἐκφέρονται,

(§. 198.) προκείσθω καὶ τούτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ παραδ. Ὡς $\frac{1}{\sqrt{\chi}} = \frac{1}{\chi^{\frac{1}{2}}} = \chi^{-\frac{1}{2}}$. Τοῦ-

το πολλαπλ. διὰ τοῦ χ ἔσται $\chi^{-\frac{1}{2}} \cdot \chi^1 = \chi^{-\frac{1}{2}}$.
 $\chi^{\frac{1}{2}} = \chi^{-\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 1}}$ · $\chi^{\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2}} = \chi^{-\frac{1}{2}}$ · $\chi^{\frac{2}{2}} = \chi^{-\frac{1}{2} + 2}$

$= \chi^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{\chi}$. Ὡς εἰ $\frac{1}{\chi} = \sqrt[2]{\chi} = \sqrt{\chi}$.

Ἀὐθις, ἐπειδὴ $\frac{1}{\sqrt[4]{\chi^2}} = \frac{1}{\chi^{\frac{2}{4}}} = \chi^{-\frac{2}{4}}$. Καὶ $\frac{1}{\sqrt[3]{\chi}}$

$= \frac{1}{\chi^{\frac{1}{3}}} = \chi^{-\frac{1}{3}}$. Ἔσται καὶ $\frac{1}{\sqrt[4]{\chi^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\chi}} = \chi^{-\frac{2}{4} - \frac{1}{3}}$.

$\chi^{-\frac{1}{3}} = \frac{-2 \cdot 3}{4 \cdot 3} \cdot \chi^{-\frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4}} = \chi^{-\frac{6}{12}} \cdot \chi^{-\frac{4}{12}}$
 $= \chi^{-\frac{4+6}{12}}$

$$= x^{-\frac{4}{12}-6} = x^{-\frac{10}{12}} = \sqrt[12]{x^{-10}} = \frac{1}{\sqrt[12]{x^{10}}}.$$

$$\text{Ὡσαύτως καὶ } \sqrt{x} \cdot \frac{3}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{1}{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$3x^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} = 3x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} = 3x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}. \text{ Προσέτι } \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{x}.$$

$$x^4 \cdot \sqrt{x^3} = x^4 \cdot 2x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$$

$$= x^{\frac{8}{2}} \cdot 2x^{-\frac{4}{2}} \cdot x^{-\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{2+3}{2}} = 2x^{\frac{8-4-3+5}{2}} = 2x^{\frac{6}{2}}$$

$$+ \frac{33}{2} = 2x^{\frac{20}{2}} = 2x^{10} = 2\sqrt[10]{x^{10}}.$$

$$\text{Καὶ } \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{3x^3} \cdot 3\sqrt{x^{10}} = x^{-2} \cdot \frac{1}{3}x^{-3} \cdot$$

$$3x^{\frac{10}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} x^{-\frac{6}{2}} \cdot 3x^{-\frac{10}{2}}.$$

$$= \frac{3x^{-\frac{4}{2}-\frac{6}{2}+\frac{10}{2}}}{3} = \frac{3x^{-\frac{10}{2}+\frac{10}{2}}}{3} = \frac{3x^0}{3}$$

$$= \frac{3 \cdot 1}{3} = \frac{3}{3} = 1. \text{ Ἀλλὰ περὶ πάντων τού-}$$

των πλατύτερον ἐν τῷ περὶ ῥιζικῶν πασατήτων.

$$\text{Καὶ ἕτερον παρὰδ. ἐν γράμμασι. } x^{\frac{\nu}{\mu}} \cdot x^{\frac{1}{\epsilon}}$$

$$= \frac{x^{\frac{\nu\epsilon}{\epsilon\mu}} \cdot x^{\frac{1\mu}{\epsilon\mu}}}{x^{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon\mu}}} = \frac{x^{\frac{\nu\epsilon+\mu}{\epsilon\mu}}}{x^1} = \sqrt[\epsilon\mu]{x^{\nu\epsilon+\mu}}.$$

§. 207. Δυνάμεις, ἃν οἱ ἐκθῇται κλασματικοί, εἰς ὑπερτέρας ἀνυψώσωμεν ἀξίας, πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν τῆς κλασματικῆς δυνάμεως μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐμφαινόντος, εἰς ἡλικὴν δύναμιν

μιν ἔξαρθῆναι χρή. π. χ. $\chi^{\frac{3}{2}}$ ἔσω εἰς τὴν β'. ἀρ-
τέον δύναμιν $= \chi^{\frac{3 \cdot 2}{2}} = \chi^{\frac{6}{2}} = \sqrt{\chi^6}$. Καὶ ἐ-
πειδὴ 6 διαιρεθῆναι δύναται διὰ τοῦ ριζικοῦ ἐκθέ-
του 2, ἔξενεχθείη τὸ $\sqrt{\chi^6}$ ὁμεινον διὰ τοῦ χ^3 . Ὁδὲ
λόγος αὐτῷθεν δῆλος· ἐπειδὴ γὰρ πολλαπλασιάζειν
ἐς τὸ τὴν ποσότητα τσάκις ἑαυτῇ προσθῆναι, ὅσας
μονάδας ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων περιέχει· πρόκειται
δὲ τὸ $\chi^{\frac{3}{2}}$ εἰς τὴν β'. ἀρθῆναι δύναμιν· ὁ ἐκθέτης το-
σάκις ἑαυτῷ προσθῆσεται, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ δο-
θεὶς ἀριθμός, ἦτοι δις, ἦτοι $\chi^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} = \chi^{\frac{6}{2}} = \chi^3$.
ὅπερ εὐχερέστερον προκύπτει διὰ τοῦ πολλαπλασια-
σμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ· Οἷον $a^{\frac{1}{2}}$ εἰς τὴν ε'. ἀρθὲν δύ-
ναμιν ἔσαι $= a^{\frac{1 \cdot 5}{3}} = a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5}$. Καὶ

$$\frac{1}{\sqrt{\chi}} \text{ ἀρθῆτω εἰς τὴν ε'. δύναμιν. Ἐπειδὴ } 1 = 1 = \chi^{\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{1}{2} \text{ τὸ } \chi^{-\frac{1}{2}} \text{ εἰς τὴν ε'. ἀρθὲν δύν. ἔσαι } = \chi^{\frac{-1 \cdot 5}{2}}$$

$$= \chi^{-\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{\chi^{-5}} = \frac{1}{\sqrt[2]{\chi^5}} \text{ Καὶ } \frac{v}{\rho} \text{ εἰς τὴν}$$

$$\mu: \text{ ἢν δύναμιν } = \frac{v \cdot \mu^v}{\rho^v} = \frac{1}{\sqrt[v]{v}}$$

§. 208. Τὰς κλασματικούς ἐκθέτας ἔχούσας
δυνάμεις δι' ἑτέρων διαιρήσομεν ταυτορρίζων δυνά-
μεων, τῇ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρέσει τῶν κατ' αὐτάς ἐκθε-
τῶν (§. 194.) Ἀλλὰ τοὺς κλασματικούς ἐκθέτας
ὑπὸ τὸν αὐτὸν χρή α'. παρόνομ. ἀνάγειν, καὶ οὕτως
ἀφαιρεῖν τὸν ἀριθμητὴν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ. π. χ.
 $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4}} : a^{\frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2}} = a^{\frac{4}{8}} : a^{\frac{2}{8}}$

$$= a^{\frac{4-2}{8}} = a^{\frac{2}{8}} = a^{\frac{1}{4}}. (\S. 125.) = \sqrt[4]{a}$$

$$\text{Ὡσαύτως } v^{\frac{3}{4}} : v^{\frac{1}{2}} = v^{\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}} : v^{\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4}} = v^{\frac{6}{8}} : v^{\frac{4}{8}}$$

$$= v^{\frac{6-4}{8}} = v^{\frac{2}{8}} = v^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{v}$$

$$\frac{v}{\mu} : \frac{v}{\sigma} = \frac{v \sigma}{\mu \sigma} : \frac{v \mu}{\mu \sigma} = \frac{v \sigma - v \mu}{\mu \sigma}$$

$$= \sigma \mu$$

ται αὕτη· Ὅθεν ὁ εὐκόλως προχωρῆσαι βουλόμενος ἅς προσέχη εἰς τοὺς κανόνας, καὶ παραδείγματα.

Περὶ Αὐσεως τῶν κλασμάτων εἰς Ἀπείρους Σειράς.

§. 210. Ἐκαστὸν κλάσμα οὐ μόνον γράφοντες, ἀλλὰ καὶ διὰ σειρᾶς ὄρων παραστήσαι δυνάμεθα, ἥς τὸ πέρας, ἐφ' ὅσον ἂν βούλη, τοῦ ὑπολογισμοῦ προσαγομένου, οὐχ εὐρίσκεται καὶ τοῦτό ἐστιν, ὃ Ἀπείρος Σειρὰ καλεῖται· ἔνθα μᾶλλον, καὶ μᾶλλον τῇ ἀληθείᾳ προσεγγίζουσι, πάντα αὐτῆς ἐφικέσθαι οὐχ οἶόν τε· ἢ δὲ τούτων χρῆσις ἐπίσημος, ὡς κατωτέρω δειχθήσεται.

§. 211. Πᾶς ἀριθμὸς τῆς 1 μείζων, οὐ μόνον ὡς τῇ προσθέσει δύο ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν προκύψας, ἔχει θεωρηθῆναι, ἀλλὰ καὶ δυσὶν ἀριθμοῖς τούτων ἐνι παραστήσαι· π. χ. τὸν 3 παραστήσομεν ὡς ἐκ $2 + 1$, καὶ τὸν 5 ὡς ἐκ $3 + 2$, ἢ ἐκ $4 + 1$ συγκείμενον· Ἀλλὰ τοὺς αὐτοὺς καὶ ὡς διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἀπ' ἀλλήλων δύο ποσοτήτων ἀναφυέντας ἂν θεωρήσαιμεν. Οἶον τὸν 3 ἐκ τοῦ 5 — 2, καὶ τὸν 5 ἐκ τοῦ 6 — 1, ἢ καὶ κατ' ὀντιναοῦν ἕτερον τρόπον. Ὡς κλάσμα δι' ἀπείρου σειρᾶς παραστήσαι βουλόμενος ἀπόδος τὸν παρὸν. διὰ ποσότητος, ἐκ β', μερῶν συνισταμένης, ἥτοι τῇ τῆς προσθέσεως, ἢ τῇ τῆς ἀφαιρέσεως συνημμένων σημείῳ. Ὡς $\frac{2}{2+1}$ παρὰ τὴν $\frac{2}{2+1}$, ἢ $\frac{2}{4-1}$. καὶ ἐνεργείᾳ διαιρῶν εὐρήσεις πηλίκον τὴν ἀπείρου σειρᾶν. Ἵνα δὲ τοῦτο ἐν γένει δηλωθῇ, παραληπτέον ἐπ' ἀμφοῖν τῶν τρόπων ἀλγεβραϊκὸν κλάσμα, ὡς διὰ τούτου ἀπάντων τῶν κλασμάτων σημαινομένων. Γράψον οὖν κλάσμα τὸ $\frac{\alpha}{\beta + \gamma}$, καὶ τὸ μὲν α παριστά-

τω πάντα ἀριθμὸν, καὶ αὐτὴν τὴν 1, τὸ δὲ $\beta + \gamma$ ὡσαύτως οἶουσοῦν δύο ἀριθμοὺς, μείζους τῆς 1, ὅμα ληφθέντας· π. χ. ἐν τῷ κλ. §. α ἔσται = 5. καὶ

ἴσιν

ἐάν τὸ $\beta = 4$ τεθῇ, ἔσται $\gamma = 2$. Παραπλησίως
καὶ τὸ $\frac{\alpha}{\beta - \gamma}$ παραστήσει πᾶν δυνατὸν κλάσμα. Προ-

κείσθω τοίνυν ἄμφω τὰ παραδείγ. ἦτοι $\frac{\alpha}{\beta + \gamma}$, καὶ

$\frac{\alpha}{\beta - \gamma}$, ὧν τὴν ἀπειρον σειράν εὐρόντες, ἀντικαταστήσο-

μεν ῥαδίως ἀντὶ τῶν γραμμάτων ἀριθμούς.

Καὶ α'. τὸ α' ἦτοι τὸ $\frac{\alpha}{\beta + \gamma}$ οὕτως ἐκκείμενον.

$$\beta + \gamma) \alpha \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\gamma}{\beta\beta} + \frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta\beta} - \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta} + \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta\beta} \text{ κτ.} \end{array} \right.$$

$$\frac{\alpha + \alpha\gamma}{\beta}$$

$$- \frac{\alpha\gamma}{\beta}$$

$$- \frac{\alpha\gamma}{\beta} - \frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta} + \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta}$$

$$- \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta}$$

$$- \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta} - \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta} + \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta\beta}$$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Του.

Τούτοις, τὸ $\frac{\beta}{\beta}$ τοῦ διαιρέτου περιέχεται
ἐν τῷ α (τῷ διαιρετέῳ) $\alpha : \beta$. Τεθήτω τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$

εἰς τὸ πηλίκον, καὶ πολλαπλασιασθήτω μετὰ τοῦ διαι-
ρέτου. (μέμνησο, ὅπως τὰ κλάσματα πολλαπλασιάζ.
καὶ διαιροῦνται). Τὸ γ. τοῦ διαιρέτου μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$

πολλαπλ. δίδωσιν $\alpha\gamma$. Καὶ τὸ β τοῦ διαιρ. μετὰ

τοῦ α αὖθις, δίδ. α . τεθήτωσαν ἄμφω ὑπὸ τὸν

διαιρετέον α . Καὶ ἄφελε α ἀπὸ τοῦ α . Ταῦτα τοί-
νυν ἀναιροῦσιν ἄλληλα. Ἐπεὶ δὲ οὐκ ἔσιν, ἄφ' ὅτου
τὸ $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ ἀφαιρεθήσεται, τίθεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐ-

ναντίω τῷ σημείῳ. Ὅτι, ὡς εἴρηται, ἐν τῇ ἀφαιρέσει
ὁ ἀφαιρετέος τρέπει τὰ ἑαυτοῦ σημεῖα εἰς τὰναντία.
Αὖθις τὸ β τοῦ διαιρέτου ἐν τῷ λειψ.— $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ περιέχεται

— $\frac{\alpha\gamma}{\beta\beta}$. τεθήτω εἰς τὸ πηλίκον, καὶ πολλαπλ.

μετὰ τοῦ διαιρέτου. $+ \gamma$. — $\frac{\alpha\gamma}{\beta\beta} = - \frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta}$.

Καὶ $+ \beta$. — $\frac{\alpha\gamma}{\beta\beta} = - \frac{\alpha\gamma}{\beta}$. Τεθὲν ὑπὸ

τὸν διαιρετέον ἀφαιρεθήτω. Τὸ — $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ τοῦ ἀφαιρετέου

(ὡς τοῦ — σημείου εἰς τὸ $+$ τρεπομένου, διὰ
τὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως.) ἀναιρεῖ τὸ — $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ τοῦ

μειωτέου. Καὶ — $\frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta}$, διὰ τὸ μὴ ἔχειν ἀπό-

τινος ἀΦαιρεθῆναι, τίθεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν τῷ σημείῳ + . Καὶ οὕτω χωράσῃς τῆς διαιρέσεως, καὶ τῶν κανόνων τῆς ἀΦαιρ. πολλαπλ. διαιρέσ. καὶ τῶν + καὶ — σημείων παρατηρούμενων, προσκύψει ἐν τῷ πηλίκῳ ἢ πρὸ ὀφθαλμῶν σειρᾶ, ἣν καὶ περαιτέρω προάξεις ἐπ' ἀπειρον, τοὺς δὲ τοὺς κανόνους σημειῶν 1) τὰ σημεία + καὶ — ἐν τῷ πηλίκῳ ἐναλλάξ ἐπαμβιβονται. 2) Ἐν πᾶσι τοῖς ὅροις τοῦ πηλίκου τὸ α ἐστὶν ἐν τῇ α' δυνάμει. 3) Τὸ γ ἐν τῷ ἀριθμ. τοῦ β'. ὅρου, τῆς α'. ὅν δυνάμει, ἐπὶ πάντων τῶν ἐπομένων ὅρων, εἰς τὰς Φυσικῇ τῇ τάξει χωρούσας δυνάμεις ἐξαίρεται· τὸ δὲ β τοῦ παρονομαστοῦ εὐθὺς ἐν τῇ α'. ὅρῳ, τῆς α'. ὅν δυνάμει, ἐν τοῖς ἐπομένοις διηγετικῶς κατὰ τὰς εἰς τὰς ὑπερτέρας ἀνέισι δυνάμεις, ἐν πᾶσι τοῖς ὅροις μιᾷ δυνάμει ὑπερτεροῦν τοῦ γ. Τούτων τοῖσιν κειμένων, ῥαδίως τὴν σειρὰν προάξεις ἐφ' ὅσον αὐν βούλη.

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} - \frac{\alpha\gamma^3}{\beta^4} + \frac{\alpha\gamma^4}{\beta^5} - \frac{\alpha\gamma^5}{\beta^6} \text{ κτ.}$$

Ἐκ τούτου καθορᾶν πάρεσιν, ὅτι τὸ πηλίκον οὐκ ἐντελές, ἀλλ' αἰετ' ἔγγιον τῆς ἀληθείας γίνεται· ὥς τε καὶ τὸ λείψ. τῆς διαιρέσ. ὡς κλάσμα τῷ πηλίκῳ προσεθῆναι ἀνάγκη.

Ἐξω $\frac{1}{6}$ ἐξενεκτέον δι' ἀπείρου σειρᾶς· Ἐνταῦθα ἔσαι $\alpha = 1$. ἔσω $\beta = 4$. ὥς τε $\gamma = 2$. ἀντὶ τῶν γραμμάτων τεθήτωσαν οἱ ἀριθμοὶ ἐν τῇ ἀνωτ. σειρᾷ·

$$\frac{1}{4 + 2} = \frac{1}{4} - \frac{1 \cdot 2}{4^2} + \frac{1 \cdot 2^2}{4^3} - \frac{1 \cdot 2^3}{4^4} + \frac{1 \cdot 2^4}{4^5} \dots$$

Ἡ

$$^{\circ}\text{Η, τῶν δυνάμεων ἐνεργεία ἐκδηλωθεῖσῶν} = \frac{1}{4} \\ - \frac{2}{16} + \frac{4}{64} - \frac{8}{256} + \frac{16}{1024} \dots$$

$^{\circ}$ Ἀφροῖπον ἐνταῦθα τὰ καταφατικὰ ποσότητες
 $\frac{1}{4}, \frac{4}{64}, \frac{16}{1024}$, αἱ τινες ὑπὸ τὴν αὐτὴν παρονομ.

$$\frac{4}{64} \frac{16}{1024} \\ \text{ἀναχθεῖσαι ἀποτελοῦσι} \frac{336}{1024} = \frac{21}{64} \cdot \text{Ὡσαύτως}$$

$$\text{καὶ τὰς ἀποφατικὰς} - \frac{2}{16} - \frac{8}{256} = \frac{5}{32}$$

Καὶ ἄφελε $\frac{5}{32}$ ἀπὸ $\frac{21}{64}$, ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀ. παρονομ.
 $\frac{32}{64}$

τὰ κλάσματα ἀναγαγὼν, καὶ ἔσαι ἡ διαφορὰ $\frac{11}{64}$, ὅπερ

οὐ πολλῷ μείζον τοῦ $\frac{1}{8}$ (§. 122.) Ἄλλ' ὅσω ἄντις τὴν
 σειρὰν προάγῃ διὰ τῶν + καὶ - σημείων, τοσοῦτῳ
 αὖ ἐγγιον τῆς ἀκριβείας γένοιτο.

Εἰ δέοι $\frac{2}{7}$ κατὰ τὸν ἀνωτ. τρόπον ἐκδηλωσάι,
 ἔσαι $\alpha = 2$. Ἐξω $\beta = 4$. ὥς γ $= 3$. ἥτοι

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} = \frac{2}{4 + 3} \cdot \text{ἀντικατάστησον εἰς τὴν}$$

τῶν γραμμάτων σειρὰν τὰς διωρισμένας ποσότητας,
 καὶ ἔσαι ἡ σειρά.

$$\frac{2}{4+3} = \frac{2}{7} = \frac{2}{4} - \frac{2 \cdot 3}{4^2} + \frac{2 \cdot 3^2}{4^3} - \frac{2 \cdot 3^3}{4^4} \\ + \frac{2 \cdot 3^4}{4^5} - \frac{2 \cdot 3^5}{4^6} + \frac{2 \cdot 3^6}{4^7} - \frac{2 \cdot 3^7}{4^8} \dots$$

$$\text{κτ.} = \frac{2}{4} - \frac{6}{16} + \frac{18}{64} - \frac{54}{256} + \frac{162}{1024}$$

$$- \frac{486}{4096} + \frac{1458}{16384} - \frac{4374}{65536} \cdot \text{Ἀφελῶν}$$

οὖν

οὐν τὰς — ποσότη. ἀπὸ τῶν +, μετὰ τὸ εἰς τὸν αὐ-
τὸν αὐτὰς ἀναγαγεῖν παρονομασίην, ἔξεις κλάσμα οὐ
πολλῶ ἔλαττον τοῦ $\frac{2}{3}$.

§. 211. Δεικτέον ἤδη, ὅπως σειρὰ ποσοτήτων διὰ τῆς
ἐνεργείας διαιρέσεως τοιούτου κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta - \gamma}$ ἀναφύε-

ται. καὶ διὰ τούτου γὰρ, ὡς εἴρηται, πᾶν κλάσμα παρί-
σταται· παρατεθήτω κἀνταῦθα τὸ ἀνωτ. διαιρεθὲν
παράδειγμα· Ὁ γὰρ τὴν διαίρεσιν ἐπισάμενος οὐ χα-
λεπῶς καὶ τοῦτο κατανοήσῃ.

$$\beta - \gamma) \alpha \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} + \frac{\alpha\gamma^3}{\beta^4}, \text{ κτ.}$$

$$\frac{\alpha - \frac{\alpha\gamma}{\beta}}{\beta}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma}{\beta}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma - \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2}}{\beta}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma^2 - \frac{\alpha\gamma^3}{\beta^3}}{\beta^2}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma^3}{\beta^3}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma^3 - \frac{\alpha\gamma^4}{\beta^4}}{\beta^3}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma^4}{\beta^4}$$

Ταύτης

Ταύτης τῆς σειρᾶς οἱ ὅροι πάντες εἰσὶ καταφα-
τικοί, καὶ ἡ σειρά χωρεῖ ἐπ' ἀπείρον.

$$\frac{\alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} + \frac{\alpha\gamma^3}{\beta^4} + \frac{\alpha\gamma^4}{\beta^5} + \frac{\alpha\gamma^5}{\beta^6} \text{ κτ.}$$

Τὸ ἐξῆς παράδειγμα δι' ἀριθμῶν ἀναπτύξει τὸ
λεγόμενον. Ἐξω ζητήεα ἡ σειρά τοῦ $\frac{1}{2}$. Ἐξω
 $\alpha = 1$. $\beta = 4$. καὶ $\gamma = 2$. Καὶ ἔσαι $\frac{\alpha}{\beta - \gamma}$

$$= \frac{1}{4 - 2}, \text{ ὅ ἐστιν } \frac{1}{2}. \text{ Ἀντὶ τῶν γραμμάτων τεθῇ-}$$

$$\begin{aligned} \text{πωσαν οἱ ἀριθμοί. ὡς } \frac{1}{4 - 2} &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 2}{4^2} \\ &+ \frac{1 \cdot 2^2}{4^3} + \frac{1 \cdot 2^3}{4^4} + \frac{1 \cdot 2^4}{4^5} \dots \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{4}{64} + \frac{8}{256} + \frac{16}{1024} \dots \end{aligned}$$

Ἐὰν οὖν τὰ κλάσματα ταῦτα ὑπὸ τὸν αὐτὸν πα-
ρονομ. ἀναχθῆντα προσεθῶσι, δώσουσι κεφάλαιον
σχεδὸν $\frac{1}{2}$. Ἐστὶ γὰρ τὸ κεφάλ. $\frac{21}{64}$, ἥτοι τοῦ $\frac{1}{2}$ διά-
φορα ἔτι κατὰ $\frac{1}{64}$. Καὶ τῆς σειρᾶς προαχθείσης,
οὕτως ἀκριβῶς ἐξενεχθήσεται, ὥςτε τὴν διαφορὰν με-
ταξὺ τοῦ δοθέντος κλάσματος, καὶ τοῦ ἐκ τῆς προ-
σθέσεως τῆς σειρᾶς προκύψαντος, ἀπειροσὴν εἶναι,
ἥτοι ἀπείρως μικράν, καὶ ἀσφαλῶς τὴν σειράν ἀντὶ
τοῦ κλάσματος ἀντικαταστήναι δύνασθαι.

Περὶ Δόγων.

§. 212. Ἡ δὴ ἀριθμῶν ὁμοειδῶν, (ἢ ποσοτή-
των ἐν γένει) πρὸς ἀλλήλους παράθεσις, τὴν τούτων
ταύ-

ταυτότητα, ἢ διαφορὰν ἀφορῶσα, Λόγος ἀκούει· αὐτοὶ δὲ οἱ παραβαλλόμενοι ἀριθμοὶ, Ὅροι τοῦ Λόγου. ὧν ὁ μὲν προτιθέμενος, Ἡγούμενος, ὁ δ' ἐπιτιθέμενος, Ἐπόμενος καλοῦνται. Ὁ δὲ λόγος διττός. ἦτοι γὰρ, ὅσαις μονάσιν ὁ ἕτερος ὅρος τοῦ ἑτέρου διαφέρει, θεωροῦμεν, (ὁ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἀνακαλύπτομεν) ὅτε καὶ ὁ λόγος Ἀριθμητικός. ἢ ποσάκις ὁ ἕτερος τῷ ἑτέρῳ ἐμπεριέχεται, (ὁ διὰ τῆς διαιρέσεως εὐρίσκομεν) ἔνθα ὁ λόγος Γεωμετρικὸς κέκληται·

Σχόλιον α'

Ὁ α'. τρόπος τῶν Λόγων ὠνομάσθη ἀριθμητικός, ὅτι ἡ παράθεσις γίνεται δι' ἀριθμήσεως τῶν μονάδων, εἰς τὰς ὁποίας κυρίως ἡ Ἀριθμητικὴ καταγίνεται· ἐν δὲ τῷ Γεωμετρικῷ ἡ παράθεσις τῶν δύο ἀριθμῶν γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθὼς παραβάλλομεν ἓν Γεωμετρικὸν ἀντικείμενον. π. χ. μίαν γραμμὴν πρὸς ἑτέραν. τουτ. ἔνθα ζητοῦμεν, ποσάκις ἡ ἐλάττων γραμμὴ, ὡς μέτρον λαμβανομένη, ἐφαρμόζει τῇ μείζονι, ὡς μετρητῷ.

Σχόλιον β'

Τὸ, Γεωμετρικὸς, παραλιμπάνεται πόλλάκις· Ὁθεν ἔνθα τὸ, Λόγος, μόνον ἀπαντᾷ, νοητέον τὸν Γεωμετρικόν.

Περὶ Ἀριθμητικοῦ Λόγου.

§. 213. Ὁ ἐν τῷ ἀριθμητικῷ λόγῳ (§. ἀνωτ.) τῇ μετὰ τῶν δύο ἀριθμῶν διαφορὰν παριστῶν ἀριθμὸς, Διαφορὰ εἶρηται. Ἐὰν οὖν οἱ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις ἴσοι ᾖσιν, ἡ τούτων διαφορὰ ἐξὶ τὸ μηδενικόν. ὡς $6 =$

N

2. 3.

2. 3. Εάν δὲ ἀνίστοι, ὡς 9 καὶ 16, τούτους ἀριθμητικῶς παραβάλλουσιν, ἔσονται διάφοροι ἀλλήλων ἐπὶ τὰς μονάσιν. Ἡ δὲ διαφορά εὐρίσκεται, τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθέντος, ὡς ἐνταῦθα τοῦ 9 ἀπὸ τοῦ 16. Σημεῖον δὲ τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου, τὸ τῆς ἀφαιρέσεως. (—) (§. 28.) Οἶον $+ 16 - 9$ ἢ $+ 5 - 3$. ἢ $7 - 5$. σημαίνει τὸν ἀριθμητικὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν ἢ ἐν γένει, α — β. Ἐπὶ τούτου τοῦ λόγου θεωρητέον γ'. τινά. α') τὸν μείζον ἀριθμόν. β') τὸν ἐλάσσον. καὶ γ') τὴν τούτων διαφορὰν ταῦτα δὲ οὕτως ἀλλήλοις συνῆπται, ὥστε τῶν ὁῶν δοθέντων, τὸ τρίτον ῥαδίως εὐρήσομεν. Κληθήτω ὁ μείζων α. ὁ ἐλάσσων β. καὶ ἡ διαφορὰ δ. Καὶ ἔσαι ὁ μείζων $\alpha = \beta + \delta$. ὁ ἐλάττων $\beta = \alpha - \delta$ καὶ ἡ διαφορὰ $\delta = \alpha - \beta$. Τεθήτω $\alpha = 10$. $\beta = 6$. $\delta = 4$. καὶ ἔσαι $\alpha = \beta + \delta$. ἦτοι $10 = 6 + 4$. $\beta = \alpha - \delta$. $6 = 10 - 4$. καὶ $\delta = \alpha - \beta$. ἢ $4 = 10 - 6$. Ὅτιαι δὲ παραβαλλόμεναι ποσότητες ὁμοειδεῖς (§. ἀνωτ.) εἶναι ὀφείλουσι, δῆλον. 5 γὰρ ὦραι π. γ. οὐκ ἂν παραβληθεῖεν πρὸς 7 δραχμάς.

Σχόλιον.

Σημείωσαι, ὅτι ἐν τῷ ἀριθμητικῷ λόγῳ α — β, εἰς τοὺς δύο ὅρους ἦτοι προσεθῇ ἀριθμὸς τις, οἶον ὁ γ, ἦτοι ἀφαιρεθῇ, ἡ διαφορά μένει ἡ αὐτή. Ὡς εἰάν δ ἦναι ἡ διαφορά μεταξὺ τοῦ α καὶ β, ἔσαι ὡσαύτως δ καὶ ἡ διαφορά τῶν $\alpha + \gamma$, καὶ $\beta + \gamma$, καὶ τῶν $\alpha - \gamma$, καὶ $\beta - \gamma$. Καὶ ἂν οἱ δύο ἀριθμοὶ α, καὶ β διπλασιασθῶσι, θέλει διπλασιασθῇ καὶ ἡ διαφορά. ἦτοι εἰάν $\alpha - \beta = \delta$, ἔσαι καὶ $2\alpha - 2\beta = 2\delta$.

Περὶ Ἀριθμητικῆς Ἀναλογίας.

§. 214. Δύω ἀριθμητικοὶ λόγοι, ἀλλήλοις ἴσοι, συστήσουσι σειράν ἀριθμῶν, ἐκ δ' ὅρων συγκειμένην, ἣτις Ἀριθμητικὴ Ἀναλογία καλεῖται. Ἰσοὶ δὲ οἱ λόγοι ἔσονται, ἑκατέροις τῆς αὐτῆς διαφορᾶς ἐνούσης. ὡς $4 - 7$. καὶ $8 - 11$. ἔνθα ἐπ' ἀμφοῖν ἡ διαφορὰ, ἣ δ $= 3$. Ὡς οἱ δύο λόγοι, ὡς χρῆ, τεταγμένοι, ἀναλογία λέγονται, ἥς σημεῖον τὸ τῆς ἰσότητος, $(=)$ (§. 17.) μεταξὺ ἐκείνων ἐμπίπτει. Οἷον, $5 - 7 = 6 - 8$. Καὶ $4 - 12 = 10 - 18$ εἰσὶν ἀναλογίαι δύο, ὡν τῆς α'. ἡ διαφορὰ $= 2$. Τῆς δὲ β'. $= 8$. Τοὺς δὲ ὅρους τῆς ἀναλογίας οὕτω διατακτέον, ὥς τοῦ μείζονος ὅρου ἐν τῷ α'. λόγῳ ἡγουμένου, τὸν μείζονα καὶ ἐπὶ τοῦ β'. λόγῳ ἡγεῖσθαι, καὶ ἀνάπαλιν.

§. 215. Ἐπειδὴ ἐπὶ παντὸς ἀριθμητικοῦ λόγου ὁ μείζων ὅρος ἐκ τοῦ ἐλάσσονος, πλεόν τῆς διαφορᾶς, σύγκειται. (§. 213.)—εἰς α'. δὲ ὅρον τοῦ λόγου, ἑκάτερος γενέσθαι δύναται, ὡς τοῦ λόγου σώου διὰ τοῦτο τηραιμένου. εἰάν ὁ ἐλάσσων κληθῇ α, καὶ α'. ὅρος γένηται, ἡ δὲ διαφορὰ δ. ὁ λόγος ἐξενεχθεὶς αὖ οὕτως $a - a + \delta$ ἢ $a - (a + \delta)$. Ἐάν δὲ καὶ ὁ α'. τοῦ β'. λόγου, β, ῥηθῇ. ἀνάγκη πᾶσα καὶ τὸν β'. ὅρον τούτου ἐκ τοῦ α' συνίστασθαι, καὶ τῆς διαφορᾶς ὡς, $\beta - (\beta + \delta)$. Ὡς τῶν δύο λόγων, ὡς χρῆ, διαταχθέντων, ἔσαι $a - (a + \delta) = \beta - (\beta + \delta)$ γενικὴ ἀναλογία, οἰανοῦν ἀριθμητικὴν παριζῶσα ἀναλογίαν. Οὐδέν δὲ τὸ καλύπον τὸ τὸν ἐπόμενον ὅρον ἐλάττωνα εἶναι τοῦ ἡγουμένου ἐν τῷ α'. λόγῳ. (ὅτε καὶ ἐν τῷ β'. λόγῳ ὁ ἐπόμε. ἐλάττων ἔσαι τοῦ ἡγουμένου. (§. ἀνωτ.).) Τότε γὰρ ἡ διαφορὰ, δ, ἔσαι ποσότης ἀποφατικὴ ὅπερ τὴν γενικὴν οὐ περιτρέπει ἀναλογίαν. π. χ. $12 - 8 = 15 - 11$. α.

ριθμητικὴ ἀναλογία, ἥς ὁ β'. καὶ ὁ δ'. ὅρος ἐλάσσονος τοῦ α'. καὶ γ'. Ἡ διαφορὰ, ἥ, δ, μεταξὺ ἐκατέρω τῶν ὁρῶν δυάδος $\equiv - 4$. "Ως $+ \delta$ γίνεται $\equiv - 4$. Ἀρα τὸ σχῆμα ἔσαι $12 - (12 - 4) = 15 - (15 - 4)$. Ἐπεὶ δὲ ἡ διαφορὰ $\equiv 4$ ἔξοι τοὺς ὅρους ἀντιστρέφειν, καὶ ἡ διαφορὰ αὐθις αὐτὴ μενεῖ, 4. Ἡ ἀναλογία οὖν ἔσαι $8 - 12 = 11 - 15$, κατὰ πάντα σύμφωνος τῷ γενικῷ σχήματι $\alpha - (\alpha + \delta) = \beta - (\beta + \delta)$.

§. 216. Διττὴ δὲ ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία, τοῖς Συνεχῆς, ἢ Διακεκριμένῃ. Καὶ τοῦ μὲν, εἰ ὁ γ'. ὅρος διαφορὰ τοῦ β'. οἷα τὰ προτεθέντα παραδείγματα. Ἐκεῖνο δὲ, τοῦ γ'. ὅρου τοῦ α' τοῦ τῷ β'. ὄντος. Ὡς, $9 - 13 = 13 - 17$. δὲ γενικὸν σχῆμα (§. ἀνωτ.) καὶ τῇ συνεχεῖ ἐφαρμοῇ ἀναλογία, εἰ μόνον $\mathcal{C} = \alpha + \delta$, ἥτοι ὁ γ'. ὅρος ἴσος τῷ β'. τεθεῖ. Εἰ οὖν, ἐπὶ τοῦ γενικοῦ σχήματος τὸ $\alpha + \delta$ ἀντικαταστή τοῦ β, τραπεῖσεται εἰς τὸ $\alpha - (\alpha + \delta) = (\alpha + \delta) - (\alpha + \delta + \delta)$. $\alpha - (\alpha + \delta) = (\alpha + \delta) - (\alpha + 2\delta)$. "Ὡς περ ὁ τύπος τῶν συνεχῶν ἀναλογιῶν. Παράδ. δι' ἀριθμῶν. $9 - 16 = 16 - 23$. Ἡ κατὰ τὸν τύπον (ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $= 7$) $9 - (9 + 7) = (9 + 7) - (9 + 2 \cdot 7)$

Σχόλιον α'.

"Ὡς ὁ α'. ὅρος παράγεται ἐκ τοῦ β'. ὡς ὁ ἐκ τοῦ γ'. ὀνομάζεται Ἀντίστροφος ἡ ἀναλογία, ἢ λόγος Ἀντίστροφος. ἢ Ἀντιπεπονθῶς οἷα 9, 5, 7, 11. ἔνθα 9 ἀνακύπτει ἐκ τοῦ 5, ὅχι ὡς ἐκ τοῦ 11, ἀλλ' ὡς 11 ἐκ τοῦ 7. τουτ. διὰ προσέσεως τῆς διαφορᾶς 4. Ὡς οἱ ἀριθμοὶ 9, 5, 7, 11 εἶναι ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ, ἢ ἐν ἀντιπεπονθῶτι λόγῳ, ἢ ἐν ἀντιστρόφῳ ἀναλογίᾳ.

Σχόλιον β'.

Εἰς διαφορὰν, ἡ ἀναλογία ἢ μὴ ἀντίστροφος λέγεται Ὁρθή, καὶ ὁ λόγος Ὁρθός, ἢ Ἐνθὺς, ἢ Εὐθετος. εἰς τὴν ὀρθὴν ἀναλ. δύναται νὰ μεταβῇ κάθε ἀντίστροφος, ἐάν μετασῇ τοῦ ἑτέρου λόγου ὁ ἕτερος ὀρθος.

§. 217. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται, ὅτι, ἐπὶ πασῶν τῶν ἀριθμητικῶν ἀναλογιῶν, (συνεχῶν τε, καὶ διακεκριμένων (§. ἀνωτ.)) τὸ κεφάλαιον τῶν δύο μέσων ὅρων ἴσον ἐστὶ τῷ κεφαλαίῳ τῶν δύο ἄκρων. π. χ. $4 - 9 = 16 - 21$. Ἐνθα $4 + 21 = 9 + 16$, ἄμφω $= 25$. Καὶ ἐν συνεχεῖ. $7 - 13 = 13 - 19$. καὶ ταῦθα $7 + 19 = 13 + 13 = 26$. Τοῦτο ὀρίσεται ἐκ τῶν γενικῶν τύπων. (§. ἀνωτ.) Τῆς γὰρ διακεκριμένης ἀναλογίας ὁ γενικὸς τύπος ἦν $\alpha - (\alpha + \delta) = \beta - (\beta + \delta)$. Ἐνθα οἱ δύο ἄκροι ὅροι $\alpha + \beta + \delta = \alpha + \delta + \beta$ τοῖς δύο μέσοις. Τῆς δὲ συνεχοῦς ὁ $\alpha - (\alpha + \delta) = (\alpha + \delta) - (\alpha + 2\delta)$. Οὗ οἱ ἄκροι $\alpha + \alpha + 2\delta = \alpha + \delta + \alpha + \delta = 2\alpha + 2\delta = (\alpha + \delta) 2$, τοῖς μέσοις. Τοῦτο δὲ καὶ βάσανον ἔχομεν τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Τοῦ γὰρ κεφαλαίου τῶν δύο μέσων ἴσου τῷ κεφαλαίῳ τῶν δύο ἄκρων ὄντος, ἡ ἀναλογία ἔσται Ἀριθμητική. ἄλλως δ' οὐχί.

§. 218. Ἐφ' οἷα σοῦν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας, ἔξει τοὺς ὅρους καὶ εἰς ἀλλήλους μεταμειβεσθαι, ὥς τε τὸν α'. εἰς β'. καὶ τοῦτον αὖθις εἰς α'. γίνεσθαι ὅπερ ἅμα καὶ τοῖς τοῦ β'. λόγου ὅροις συμβαίνει ἐνάγκη, τῆς ἀναλογίας διὰ τοῦτο μὴ οἰχομένης. Καὶ πάσαν τὴν ἀναλογίαν ἀντιστρέφειν. Οἷον ἢδε ἡ ἀναλογία $5 - 7 = 9 - 11$ μεταμειβεθῇ αὖ εἰς τήνδε. $7 - 5 = 11 - 9$. καὶ εἰς τήνδε. $9 - 11 = 11 - 9$. Ἐφ' ἑκατέρων τὰ κεφάλαιον τῶν μέσων, ἢ τῶν ἄκρων

ἀκρων ὄρων = 16. Ὡς ἀμφω ἀριθμητικαὶ ἀναλογίαι.

§. 213. Ἀλλὰ καὶ ἐναλλάξ τῶν ὄρων λαμβανομένων, (τουτ: α'. καὶ γ'. β'. καὶ δ'.) τὰ τῆς ἀναλογίας αὐθις σώζεται $\varsigma - 9 = 7 - 11$. τοῦτο δὲ καὶ τῇ συνεχεῖ ἀρμόζει ἀναλογία· ὅπερ ἐκ τῶν καθόλου τύπων, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καταταχθέντων, σαφῶς πρόδηλον.

§. 220. Τριῶν ὄρων τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας δοθέντων, ῥᾶσα ὁ δ', εὐρεθήσεται· Ἐστὶ γὰρ οὗτος ἡ διαφορὰ τοῦ α'. ὅρου ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τοῦ β'. καὶ γ'. ἀφαιρεθέντος, Ἡ ἐὰν ὁ πρῶτος, α, κληθῇ, ὁ δευτέρος β. καὶ ὁ τρίτος γ, ἔσται ὁ δ'. ἀζητούμενος, ὅς χ ῥηθῇτω, $\chi = \beta + \gamma - \alpha$. Δείκνυνται δὲ οὕτως. Ἡ ἀναλογία ἐστὶν $\alpha - \beta = \gamma - \chi$. Ἐπεὶ δὲ

$$\begin{array}{rcl} \alpha + \chi & = & \beta + \gamma \quad (\S. 217.) \\ \alpha & = & \alpha \quad \text{ἀφαιρ. ἔσται} \end{array}$$

$$\chi = \beta + \gamma - \alpha.$$

Παράδειγμα. $\varsigma - 12 = 16 - \chi$. Ἐνθα $\chi = 16 + 12 - \varsigma = 28 - \varsigma = 23$. Ὁθεν ἡ ἀναλογία $\varsigma - 12 = 16 - 23$. Ἐπεὶ δὲ κατὰ τὸ (§. 218.) πᾶς ὅρος τῆς ἀναλογίας ἔσχατος ἂν γένοιτο, ἀληθεύει ἄρα ἐν γένει, ὅτι τριῶν ὄρων δοθέντων, εὐρήσομεν τὸν δ', διὰ τούτων. Ἀπέσω π. χ. ὁ α'. ὥς $23 - 16 = 12 - \chi$. Ἐνθα $\chi = 12 + 16 - 23 = 28 - 23 = 5$. ἢ ὁ β'. ὥς $16 - 23 = \varsigma - \chi$. καὶ $\chi = 5 + 23 - 16 = 12$. ἢ ὁ γ'. $12 - \varsigma = 23 - \chi$. Ἐνθα $\chi = 23 + \varsigma - 12 = 16$. αἰτία δὲ, τὸ πάντα ὅρον ζητούμενον εἰς ἔσχατον γίνεσθαι· Καὶ ἐν γένει. Ὁ γενικὸς τύπος ἐστὶν $\alpha - \alpha + \delta = \beta - (\beta + \delta)$. Ἀπέσω ὁ α'. ὅρος α, καὶ ἡ ἀναλογία μενεῖ, ἐὰν τὸ α ἔσχατος ὅρος γένηται· τῇκαῦτα γὰρ

γὰρ ἔσαι $(\beta + \delta) - \beta = (\alpha + \delta) - \chi$.
 καὶ $\chi = (\beta + \alpha + \delta) - (\beta + \delta)$, ὁ ἀφαι-
 ρεθὲν ὑπολείψει α'. Ἀπέσω δὲ β'. καὶ ἔσαι
 $\beta - (\beta + \delta) = \alpha - \chi$. Καὶ $\chi = (\alpha + \beta + \delta) - \beta = \alpha + \delta$. Ὁ γ' καὶ ἔσαι $(\alpha + \delta) - \alpha = (\beta + \delta) - \chi$. καὶ $\chi = (\beta + \delta + \alpha) - (\alpha + \delta) = \beta$. Ταῦτα ποιήσομεν
 κατὰ τῶν συνεχῶν ἀναλογιῶν.

§. 221. Τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας τρεῖς ὅρους κυρίως ἔχούσης, εἰάν οἱ δύο ἄκροι δεδομένοι ὦσιν, αὐτίκα τὸν μέσον εὐρήσομεν, τῇ διαιρέσει τοῦ κεφαλαίου τῶν δύο ἄκρων διὰ 2. Ἡ δὲ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας εἴη $\alpha - \chi = \chi - \delta$.

καὶ $\alpha + \delta = \chi + \chi = 2\chi$. διαιρ. διὰ 2.

$$\frac{\alpha + \delta}{2} = \frac{2\chi}{2} = \chi.$$

Παράδειγμα $3 - \chi = \chi - 19$. Ἐνθα $\chi = \frac{19 + 3}{2}$

$$= \frac{22}{2} = 11. \text{ Ἡ δ' ἀναλογία } 3 - 11 =$$

$$11 - 19.$$

Περὶ Ἀριθμητικῆς Προόδου.

§. 222. Ἐάν συνεχεῖς ἀριθμητικαὶ ἀναλογίαι (§. 216.) οὕτω συγκροτῶνται, ὥστε τὸν α'. ὅρον λόγον ἔχειν πρὸς τὸν β', ὅν δὲ β' πρὸς τὸν γ'. ὅν δὲ γ' πρὸς τὸν δ'. κτ. Ἡ εἰς ὅσον οἶασι συνέχουσιν ἀναλογίας ὁ γ'. ὅρος αὖθις εἰς α'. γένηται, καὶ ὁ δ'. εἰς β'. καὶ γ'. ἑτέρας καινῆς συνεχοῦς ἀναλογίας, καὶ τοῦτων αὖθις ὁ δ'. ὅρος ζητῆται, καὶ διηγετικῶς οὕτω χωρῶμεν, ἀνακύψει σειρά ἀριθμῶν, Ἀριθμητικὴ Προόδος καλουμένη ὡς $2 - 4 = 4 - 6$. Αὖθις $4 - 6 = 6 - 8$. Καὶ $6 - 8 = 8 - 10$. Καὶ $8 - 10 = 10 - 12$. Ἐνθα οἱ α'.
 δύο

δύω ὄροι, (2, καὶ 4.) καὶ πάντες οἱ μετὰ τούτους
 εὐρεθέντες, Ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς Προόδου
 ἀκούουσιν. Ἡ δὲ προκειμένη πρόδος σύγκειται ἐκ τῶν
 ἀριθμῶν, 2, 4, 6, 8, 10, 12. Ἐάν δὲ καὶ
 καθόλου θεωρηθῇ, ἐκκείσονται οὕτως αἱ ἀναλογίαι ἀλ-
 λήλαις ἐπάμεναι. $a - (a + \delta) = (a + \delta) -$
 $(a + 2\delta)$. Ἀὖθις $(a + \delta) - (a + 2\delta) =$
 $(a + 2\delta) - (a + 3\delta)$. Καὶ $(a + 2\delta) -$
 $(a + 3\delta) = (a + 3\delta) - (a + 4\delta)$
 κτ. Οἱ ὄροι οὖν τῆς προόδου, ὧν δὲ τὴν διαφορὰν
 ἐμφαίνει, εἰσὶν οἵδε.

$a, a + \delta, a + 2\delta, a + 3\delta, a + 4\delta$
 κτ. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι σειράτις ποσοτήτων, ἢ ἀ-
 ριθμῶν, κατὰ τινα κοινὸν νόμον ἐπίσης αὐξουσῶν, ἢ μειου-
 μένων, ἐξ ὧν ἂν συνηροτῇται ὅρων, ἀριθμητικὴ
 ἀκούει Πρόδος. αἱ δὲ ποσότητες, ἢ οἱ ἀριθμοί, ὅροι
 τῆς ἀριθμητικῆς προόδου. Ὅτι δὲ τοῦτο ἀληθεύει λε-
 γόμενον, καὶ εἰ ἐπίσης μειοῦνται, ῥᾶδιον καὶ ἐκ τού-
 του συνιδεῖν, ὅτι τὴν τῶν ποσοτήτων σειράν καὶ εἰς
 τοῦπίσω (τούτ: δεξιόθεν πρὸς ἀριστερά) θεωρεῖν ἔ-
 χομεν. ἢ ὅτι δὲ καὶ ἀποφατικῇ ποσότης εἶναι δύναται,
 ἐκάστου ὅρου κατὰ δὲ ἐλαττουμένου. Ἡ οὖν Πρόδος
 ἢ τοι Αὐξουσα ἔστιν, ἢ Μειομένη, ἢ περὶ ἂν οἱ
 κατ' αὐτὴν ὄροι ἔχοιεν κακείνο μὲν ἔχει, εἰάν οἱ ὄροι
 οὐκ ἐκείνως αὐξῶσι. ταῦτα δὲ τῶν ὅρων αἰεὶ ἐλαττουμέ-
 νων. Οὕτως ἂν εἴη 2, 4, 6, 8, 10 κτ. αὐξου-
 σα πρόδος. Καὶ 12, 9, 6, 3, 1, μειομένη.
 ἢς (μειομένης) ἡ διαφορὰ τῶν ὅρων $= 3$.

§. 223. Ὁ ἀριθμὸς, κατ' ὃν οἱ ὄροι τῆς ἀ-
 ριθμ. προόδου αὐξονται, ἢ μειοῦνται, καλεῖται ὡ-
 σαύτως Διαφορά. (§. 213.) Ἐάν οὖν ὁ α'. ὅρος,
 καὶ ἡ διαφορὰ δοθῶσιν, ἐφ' ὅσον βουλώμεθα, τὴν ἀριθ-
 μητικὴν προαξομεν πρόδον. ἕκαστος γὰρ ὅρος εὐρε-
 θήσε-

θήσεται, τῆς διαφορᾶς τῷ προηγουμένῳ ὄρῳ προσεθε-
σης. ὡς 2, 5, 8, 11, 14 κτ.

§. 224. Γράφωμεν δὲ καὶ ἐπὶ τοὺς ὅρους τῆς
ἀριθμητικῆς προόδου τοὺς φυσικῇ τάξει ἀλλήλους δια-
δεχομένους χαρακτηῖρας, ἐν ᾗ ἡ τάξις ἐκάστου
τούτων ραδίως ἐπιγινώσκηται, οὗς (χαρακτ:) ¹τὸν Δείκτην ἀποκαλοῦσιν. Ἀλλ' ἵνατί τὸ ἐκ τούτου
ἐπόμενον ἴδωμεν, προκείσθω ἔτι ἅπας ἡ σειρά
² α , ³ $\alpha + \delta$, ⁴ $\alpha + 2\delta$, ⁵ $\alpha + 3\delta$, $\alpha + 4\delta$,
 $\alpha + 5\delta$, κτ. ἔνθα οἱ ἀριθμοὶ, 1, 2, 3, κτ.
οἱ δεῖκται εἰσὶν. Ἐν ταύτῃ ἔπеси καθορᾶν, ἐφ' ἐκά-
στου ὅρου τὸ δ, ἢ τὴν διαφορὰν, μονάδι ἐλάσσονα εἶναι
τῆς κατὰ τὸν ὅρον πληθύος, ἢ τοῦ Δείκτου· οὕτω π.
χ. τῷ ε', ὄρῳ 4δ, ἔνεισι, τῷ ζ', 5δ, κτ. Ἐξ ὧν
συνάγεται, ὅτι, ἐὰν ὁ α'. ὅρος $= \alpha$, καὶ ἡ διαφο-
ρά $= \delta$, δοθῶσιν, ἐκάστος ζητούμενος ὅρος ραδίως
εὐριθῆσεται. ἔσι γὰρ $\alpha +$ τοῦ μονάδι ἐλάττονος δ τῆς
κατὰ τὸν ζητούμενον ὅρον πληθύος, ἢ τοῦ δείκτου·
οὕτως ἂν εἴη ὁ κ'. ὅρος $\alpha + 19\delta$. ὁ δὲ μ'.
 $\alpha + 39\delta$. διὰ τῆς τούτων θεωρίας, καὶ καθόλου
τύπου εἰς εὐρεσιν τοῦ ἐσχάτου ὅρου ἐκάστης ἀριθμητικῆς
εὐρεῖν δυνάμεθα προόδου. ἐὰν γὰρ ἡ πληθὺς τῶν ὅ-
ρων ἐν γενεῇ $= \pi$ τεθῇ, ἀνάγκη πᾶσα ἐν τῷ ἐσχάτῳ
ὄρῳ τὸ δ μονάδι ἐλάττον εἶναι τῆς κατὰ τὸν ὅρον πλη-
θύος, ἥτοι ἔσαι $(\pi - 1)$ δ. Ὁ οὖν ἐσχάτος ὅρος ἐπὶ
πάντων ἔσαι $\alpha + (\pi - 1)\delta$.

Παράδειγμα. Ἐξω ὁ α'. ὅρος, ἢ τὸ $\alpha = 1$.
καὶ δ αὐσαύτως $= 1$, ἥτοι ἔξωσαν οἱ ὅροι μονάδι
ἀλλήλων διαφέροντες. Ἡ τῶν ὅρων πληθὺς, ἥτοι τὸ
 π , ἔξω 12. ἔσαι οὖν ὁ π : ος ὅρος, ἥτοι ἑνταῦθα ὁ
ἐσχάτος δωδέκατος ὅρος, ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἀντὶ
τῶν γραμμάτων ἀντικαταστήσῃν, $= 1 + (11) 1$.
Καὶ ἐπειδὴ ἡ μονάς οὐ πολλαπλασιάζει $= 1 + 11$
 $= 12$. Καὶ αὕτη ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶεν ἂν οἱ
Φυσι-

Φυσικοί χαρακτήρες. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12. οἵτινες ἐν ἀριθμητικῇ τῷ ὄν προόδῳ, ὧν ἡ διαφορά $= 1$, ἴστανται.

Ἔτερον παράδειγμα. Ἐξω $\alpha = 3$. $\delta = 1$ καὶ π , ἥτοι ἡ πληθὺς τῶν ὄρων $= 11$. Ἡ δὲ σειρά εἶναι 3 + 5 + 7. κτ. Ὁ δ' ἐνδέκατος ἐνταῦθα ζητούμενος ὄρος $= \alpha + (\pi - 1)\delta = 3 + (11 - 1)1 = 3 + 10 = 13$.

Ἐξω αὖθις $\alpha = 1$. $\delta = 6$. $\pi = 36$. ὣν σειρά εἶναι ἂν 1, 6, 12, κτ. καὶ ὁ ἑσχατος, ἡ ἐνταῦθα ὁ λς', ὄρος $= 1 + (36 - 1)6 = 1 + 35 \cdot 6 = 211$.

Ἐνθεντοι ἐκ τοῦ α'. ὄρου, καὶ τῆς διαφοράς εὐρεῖν δύναμεθα τὸν ζητούμενον ὄρον. Λεὶ γὰρ ὁ πρὸς τούτῳ ἐφαρμόζει, ὡς τὸν ζητούμενον ὄρον ἀντὶ τοῦ π. ἥτοι τοῦ ἑσχάτου θεωρεῖν ἐχόντων.

§. 225. Ἐφ' οἷα σοὺν ἀριθμητικῆς προόδου ὁ τινὰ θεωρήσει.

- 1) Ὁ πρῶτος ὄρος. ὅς α κληθῇτω.
- 2) Ὁ ἑσχατος. ὅς τις $= \omega$ τεθῇτω.
- 3) Ἡ διαφορά $= \delta$.
- 4) Ἡ πληθὺς τῶν ὄρων $= \pi$. Τριῶν οὖν ἐκ τούτων δοθέντων, ῥᾶςα τὸ τέταρτον εὐρήσομεν.

1) Ἐξωσαν δεδομένα α, ω, καὶ δ. ἥτοι ὁ α' ὄρος, καὶ ὁ ἑσχατος μετὰ τῆς διαφοράς, καὶ ζητήσῃτω π, ἥτοι ἡ τῶν ὄρων πληθὺς. ὁ ἑσχατος ὄρος ἥτοι (§. ἀνωτ.) $= \alpha + (\pi - 1)\delta$. ὥστε $\omega = \alpha + (\pi - 1)\delta$ ἢ ἐνεργεία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γεγονότος,

$$\omega = \alpha + (\pi - 1)\delta$$

$$\begin{array}{r} \omega = \alpha + \pi \delta - \delta. \\ \alpha = \alpha' \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Ἐνταῦθα ζητεῖται τὸ π.} \\ \text{ἄφ' ἑλε ἀπ' ἀμφοῖν τὸ α.} \end{array}$$

$$\omega - \alpha = \pi \delta - \delta.$$

$$\omega - \alpha = \pi - 1$$

δ

$$+ 1 = + 1$$

$$\omega - \alpha + 1 = \pi.$$

δ

ὅρος, πλὴν τοῦ πρώτου, διαيرهθεὶς διὰ τῆς διαφορᾶς, καὶ μονάδος τῷ πληλίῳ προσεθείσης.

Παράδειγμα. Ἐξω ὁ α'. ὅρος τῆς προόδου = 4. ὁ ἔσχατος 34, καὶ ἡ διαφορὰ 3. Ὡς ἐζητήσων τὴν πληθὺν τῶν ὅρων οὕτως. $\alpha = 4$. $\omega = 34$. $\delta = 3$. Καὶ ἔσαι $\pi = 34 - 4 + 1 = 30 + 1 = 10$

3

3

$$+ 1 = 11. \text{ Ἡ δὲ σειρά χωρήσειεν οὕτω.}$$

$$4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34.$$

Ἐτερον παράδειγμα. $\alpha = 216$. $\omega = 6$. $\delta = 5$. Ὁ οὖν ἔσχατος ὅρος, ἢ $\pi = 6 - 216$

$$+ 1 = - 210 + 1 = - 43. \text{ Ὅτι δὲ } \delta$$

5

διαιρετέος ἔνταῦθα ἀποφατικὸς, διὸ καὶ τὸ πληλίκον ἀποφατικὸν προέκυψε, (§. 77.) μηδένα εἰς ἀπάτην παρατρέπεται. Ἐστὶ γὰρ ἡ σειρά μεκουμένη (§. 222.) ὡς τοῦ α'. ὅρου μείζονος ληφθέντος τοῦ ἔσχατου. Ἐξέστι δὲ, τοῦ α'. καὶ ἔσχατου ὅρου δοθέντων, τὴν σειράν καὶ ἀνάπαλιν θεωρεῖσθαι, καὶ τὸν α'. ὅρον, εἰς τὸν ἔσχατον, ὃ τὴν τοῦ ὅρων πληθὺν ἤκιστα μεταβάλλει· καὶ τηνικαῦτα ἔσαι $\pi = 216 - 6$

$$+ 1 = 43.$$

5

Σχόλ.

Σχόλιον.

* Ἄς μὴ ξενίσῃ τινὰ τὸ ἐν τῷ β'. παραδ.

$+ 1 = 43$. διότι ἀγκαλὰ καὶ κατὰ τὸ
μενον ὠφείλεν εἶναι $- 41$. "Ὅτι $-\frac{210}{5} =$

$+ 1 = - 41$. Ἀλλὰ τὸ ἄτοπον οἷχε
ληφθῇ 5, ὃ ἐστὶν ἡ διαφορὰ ἀποφατική. Ἐπὶ
μειουμένης σειρᾶς αἰεὶ ἡ διαφορὰ τοιαύτη.

$-\frac{210}{5} = + 42$. (S. 77.) $+ 1 =$
 $- 43$. ὡς τῆς προόδου μειουμένης οὔσης.

2) Δοθέντων τοῦ α, ω, καὶ π, ἦτοι τοῦ α', καὶ
τοῦ ὅρου, καὶ τῆς τῶν ὅρων πληθύσεως, ζητήσθαι
ἡ διαφορὰ τῶν ὅρων, ἣτις ὡσαύτως διὰ τοῦ
τύπου εὐρίσκεται.

$\omega = \alpha + \pi \delta - \delta$ ἀφαιρεθῇ τῷ ἐκατέρωθεν
 $\omega - \alpha = \pi \delta - \delta$. ἢ

$\omega - \alpha = (\pi - 1) \delta$. διαιρεθ. ἄμφω διὰ π -

$\omega - \alpha = (\pi - 1) \delta$. ἢ $= \delta$. "Ὅτι τὸ π -

$\pi - 1$ $\pi - 1$ διαιρετέου ἀναιρεῖται ὑπὸ
 $\pi - 1$, τοῦ διαιρέτου ὥστε ὁ ἔσχατος ὅρος
τοῦ α', διαιρεθεὶς διὰ τῆς μονάδι μειωθείσης π
τῶν ὅρων, παρέξει σοι τὴν διαφορὰν.

Παράδειγμα. Ἐστω ὁ α'. ὅρος 5, ὁ ἔσχατος
αὐτοῦ ἡ πληθὺς τῶν ὅρων 19. Ὡς α = 5. ω
αὐτοῦ π = 19. Ἐσται οὖν $\delta = \frac{97-5}{19-1} = \frac{92}{18}$
Ἡ δὲ πρόοδος αὐτῆς εἴη 5, 10 $\frac{1}{2}$, 15 $\frac{2}{3}$, 20 $\frac{3}{4}$, 25 $\frac{4}{5}$,
30 $\frac{5}{6}$, κτ. μέχρι τῶν 97. ἣν ἕκαστος συγκρο-
τῆται μόνου αἰεὶ ἑκάστῳ ὅρῳ προηγηθέντι τὴν διαφο-
ρὰν προσέθῃσι.

3) Εἰ δέδονται α , δ , π , ἦτοι ὁ α' ὅρος, ἡ διαφορὰ, καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὁρῶν, ζητηθῇ τὸ ἔσχατος. Κατὰ τὸ (ἀρ. I.) ὁ ἔσχατος, ἦτοι $\omega = \alpha + (\pi - 1) \delta$.

Παράδειγμα. Ἐσω $\alpha = 2$. $\delta = 3$. $\pi = 12$.
Ἐστὶν ἄρα $\omega = 2 + (12 - 1) 3 = 2 + 11 \cdot 3 = 2 + 33 = 35$. Ἡ δὲ πρόδος γινώσκῃ αὐτῷ. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35.

4) Ἐάν ᾧπι γνωστὰ ω , δ , π . ἦτοι ὁ ἔσχατος ὅρος, ἡ διαφορὰ, καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὁρῶν, εὐρήσασθαι α , ἦτοι τὸν α' . ὅρου, κατὰ τὸν ἐγνωσμένον τρόπον.

$$\omega = \alpha + (\pi - 1) \delta \quad \text{ἀφαιρ. ἴσον ἀπ' ἀμφοῖν τὸ} \\ (\pi - 1) \delta = (\pi - 1) \delta$$

$\omega - (\pi - 1) \delta = \alpha$ ἦτοι ὁ ἔσχατος ὅρος, πλὴν τῆς μονάδι μειωθεῖσης πληθὺς τῶν ὁρῶν, πολλαπλασθιασθεῖς ἐπὶ τὴν διαφορὰν, δίδωσι τὸν α' .

Παράδειγμα. $\omega = 72$. $\pi = 11$. $\delta = 2\frac{1}{2}$.
Ὁ α' . ὅρος $\alpha = 72 - (11 - 1) 2\frac{1}{2} = 72 - 10 \cdot 2\frac{1}{2} = 72 - 25 = 47 = \tau\omega$
 α' . ὅρῳ. Ἡ δὲ πρόδος ἔσται 47, 49 $\frac{1}{2}$, 52, 54 $\frac{1}{2}$, 57, 59 $\frac{1}{2}$, 62, 64 $\frac{1}{2}$, 67, 69 $\frac{1}{2}$, 72.

Εἰς μνήμης ἐπιβοήθημα ἐκκείσθωσαν τὰ τέσσαρα τῶν σχημάτων ἐν τῷ ἑξῆς πινακιδίῳ.

$$\text{Ἐάν δοθῇ } \alpha, \omega, \text{ καὶ } \delta, \text{ ἔσται } \pi = \frac{\omega - \alpha}{\delta} + 1.$$

$$\text{Ἐάν δὲ } \alpha, \omega, \text{ καὶ } \pi, \text{ ἔσται } \delta = \frac{\omega - \alpha}{\pi - 1}$$

$$\text{Ἐάν δὲ } \alpha, \delta, \text{ καὶ } \pi, \text{ ἔσται } \omega = \alpha + (\pi - 1) \delta$$

$$\text{Ἐάν δὲ } \delta, \pi, \text{ καὶ } \omega, \text{ ἔσται } \alpha = \omega - (\pi - 1) \delta.$$

§. 226.

§. 226. Ἡ ἀριθμητικῆς οἰασοῦν προόδου κα-
θόλου σειρά ἦν. §. 224.

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \alpha & \alpha + \delta & \alpha + 2\delta & \alpha + 3\delta & \alpha + 4\delta & \alpha + 5\delta & \dots \end{array}$$

Ἐάν οὖν δύο τῶν τυχόντων ὄρων ἀ-
ριθμητικῆς οἰασοῦν προόδου, τῶν ἐπί-
σης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφισαμένων, προσε-
θῶσιν, αἰεὶ τὸ αὐτὸ προκύψει κεφάλαι-
ον· Οἷον ἐπὶ τοῦ προκειμ. παραδ. ὁ α'. καὶ ζ'. ὁ
β'. καὶ ε'. ὁ γ'. καὶ δ'. παρέξουσιν $2\alpha + 5\delta$, τὸ
δὲ οὐδὲν ἔχει δυσζύμβλητον. Οἱ γὰρ ὄροι, ἀπὸ τέλους
ἀριθμοῦμενοι, μειοῦνται διηγετικῶς κατὰ δ. ἀπ' ἀρχῆς
δὲ, αὖξουσιν κατὰ δ. Ὡς ἐξ ἀνάγκης ἀληθεύει ὁ κα-
νὼν. π.χ. ἐν τῇδε τῇ προόδῳ 3, 5, 7, 9, 11, 13,
τὸ κεφάλαιον τὸ ἐκδύω ἐπίσης ἀπ' ἀλλήλων, καὶ ἀπὸ
τῶν ἄκρων ἀφισαμένων ὄρων ἔσαι = 16.

Ἐκ τούτου καὶ πρὸς εὗρεσιν τοῦ ὀλικοῦ κεφα-
λαίου ἀπάντων τῶν ὄρων ἐκάστης ἀριθμητικῆς προόδου
ποδηγετούμεθα. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἐκ δύο ὄρων κεφάλ.
ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφισαμένων, καὶ ἀπ' ἀλλήλων,
τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῶν κεφαλαίων ἑτέρων δύο ὄρων, ὡσαύτως
ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφισαμένων. Ἀναγκαῖον
ἄρα, τὸ κεφάλαιον τὸ ἐκ δύο τοιούτων
ὄρων διὰ τῆς ἡμισείας πληθύσεως τῶν
ὄρων πολλαπλασιάζειν, τὸ ὀλικὸν τῆς
προόδου κεφάλαιον εἰδέναι θέλοντας.
Ὡς 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 28. Τὸ κεφάλ.
δύω ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφισαμένων ὄρων = 31.
Ἦν οὖν τὸ ὀλικὸν τῆς προόδου εὗρωμεν κεφάλαιον,
πολλαπλασιασθῆτω 31 ἐπὶ τὸ 4. (Οἱ γὰρ ὄροι τῆς
προόδου 8* ὦν τὸ ἥμισυ 4.) Καὶ ἔσαι = 124 = τῷ
κεφαλαίῳ τῷ ὀλικῷ τῆς προόδου. Τὰ δὲ τοῦ κανό-
νος κρατήσῃ, καὶ τῆς πληθύσεως τῶν ὄρων περιττῆς
(§. 106.) οὕσης. Οἷον 3, 7, 11, 15, 19, 23,
27.

27. Κἀνταῦθα τὸ κεφ. δύο ἐπ. ἀπὸ τῶν ἄκρ. ἄφισ.
 $\delta\rho = 30$. Ἡ τῶν ὅρων πληθὺς $= 7$. Ἡς τὸ
 ἡμισυ $= \frac{7}{2}$. Ἡ $= 3\frac{1}{2}$ δυνάσι. Ἐὰν οὖν 30 με-
 τὰ τοῦ $\frac{7}{2}$ πολλαπλασιασθῇ, ἀνακύψει τὸ κεφάλ.
 τῆς προόδου. $30 \cdot \frac{7}{2} = \frac{210}{2} = 105$.

Ἐν γένει. Ἐξω ὁ α'. ὅρος $= \alpha$. Ἡ τῶν
 ὅρων πληθὺς $= \pi$. Ὡς αἱ τῶν ὅρων δυνάδες, εἴτε ἄρ-
 τιοι, εἴτε περιττοὶ εἶεν $= \frac{\pi}{2}$, ὁ ἔσχατος ὅρος $=$

$$\alpha + (\pi - 1)\delta \quad (\S. 224.) \quad \text{Τὸ κεφάλαιον τὸ ἐκ δύο}$$

$$\delta\rho\omega\nu \text{ ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφισαμένον} = 2\alpha$$

$$+ (\pi - 1)\delta. \quad \text{Καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου τὸ κεφάλ.}$$

$$\text{τῆς ὁλικῆς προόδου} = (2\alpha + (\pi - 1)\delta) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2\alpha\pi}{2} + \frac{(\pi - 1)\delta\pi}{2} = \alpha\pi + \frac{(\pi - 1)\delta\pi}{2}.$$

$$\text{Ἡ καὶ } \alpha\pi + \frac{(\pi^2 - \pi)\delta}{2}.$$

Ἐφθεντοὶ ἐκ τοῦ α'. Ὅρου, τῆς πληθύος τῶν
 ὅρων, καὶ τῆς διαφορᾶς, εὐρίσκόμεν τὸ ὁλικὸν κεφά-
 λαιον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

Παραδείγματα, καὶ Προβλήματα α'. Ἡλίκον
 τὸ κεφάλαιον τῶν φυσικῶν χαρακτήρων ἀπὸ 1 μέχρι
 τῶν 50;

$$\text{Ἐνταῦθα δέδοται ὁ α'. Ὅρος } \alpha = 1. \text{ Ἡ τῶν}$$

$$\delta\rho\omega\nu \text{ πληθὺς } \pi = 50. \text{ Καὶ ἡ διαφορὰ } \delta = 1.$$

$$\text{Ὡς τὸ κεφάλ. ἢ } K = \alpha\pi + \frac{(\pi - 1)\pi\delta}{2}. \text{ Ἡ}$$

$$\text{τοὶ} = 1 \cdot 50 + \frac{(50 - 1)50 \cdot 1}{2} = 50.$$

$$+ \frac{49 \cdot 50}{2} = 50 + 49 \cdot 25 = 50 + 1222$$

$$= 1275.$$

β'. Προσά-

Β'. Ποσάκις ἡχεῖ Ὁρολόγιοντι ἡ-
χοῦν, ἐν 24 ὥραις; Ὡδε πρόκεινται
δύο πρόοδοι ἀλλήλαις ἴσαι. Τούτ: ἡ ἑτέρα ἀπὸ τῆς
1 μέχρι 12. Ὡσαύτως καὶ ἡ ἑτέρα ἀπὸ τῆς μονάδος
μέχρι 12. Τὴν ἑτέραν οὖν τούτων ὑπολογιζεύσαντες
πολλαπλασιάσωμεν τὸ εὐρεθὲν μετὰ 2. $K = απ$
 $+ (\pi - 1) \pi \delta$. Ἐνθα $\alpha = 1$. $\pi = 12$. $\delta = 1$.

$$\frac{2}{\Omega \text{σε}} 1.12 + \frac{(12-1)}{2} 12.1 = 12 + \frac{11.12}{2}$$

$$= 12 + 11.6 = 12 + 66 = 78.$$
 Ὡσε ἐβδο-
μηκονταεπτάκις ἐν 12, καὶ 156 ἐν 24. Εἰ δὲ καὶ
ποσάκις τὰ τεταρτημόρια ἡχοῦσι προσαριθμήσωμεν,
δεκάκις ἐν ἐκάστῃ ὥρᾳ ἡχοῦντα, 240 ἐν 24 ὥραις, ἔσαι
 $150 + 240 = 396$.

Περὶ Γεωμετρικοῦ Λόγου.

§. 227. Τὸ ἐπὶ τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου διὰ
τῆς διαιρέσεως (§. 212.) τοῦ ἑτέρου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ
ἑτέρου προκύπτει πηλίκον. Ἦτοι τὸν ἀριθμὸν, ὅς πο-
σάκις ὁ ἕτερος τῷ ἑτέρῳ ἐμπεριέχεται, ἐμφαίνει,
Ἐκθέτην, ἢ Ὀνομα τοῦ λόγου ὀνομάζουσιν. Οἶον,
ἐὰν 18 πρὸς 6 Γεωμετρικῶ τῷ λόγῳ παρεξετάζωμεν,
διελούσι 18 διὰ 6, τὸ πηλίκον 3 (ἢ ἑκθέτης) δείξει,
ποσάκις ὁ 18 περιέχει τὸν 6. Σημειοῦται δ' οὗτος ὁ
λόγος τῷ ἑτέρῳ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως, (§. 83.)
μεταξὺ τῶν παραβαλλομένων παρεντιθεμένων. Ὡς
7: 21. ἢ 48: 12. Ἡ καὶ οὕτως $\frac{21}{7}$, ἢ $\frac{48}{12}$.
Καὶ ἐν γένει $\alpha: \beta$, ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$. Τὸ δὲ σημεῖον ἀπαγ-
γέλλεται, α πρὸς β . $\frac{\alpha}{\beta}$

Ὁ δὲ τοῦ λόγου ἐκθέτης ἦτοι ὁλοσχερὴς ἐστὶν ἀ-
ριθμὸς, ἢ κεκλασμένος. Οὗτος δὲ (ὁ κεκλ.) ἦτοι
γνήσιον κλάσμα, ἢ νόθον. Ὡσπερ γὰρ, ποσάκις ὁ ἐλάσ-
σων

ων ἀριθμὸς τῶ μείζονι ἐμπεριέχεται ζητοῦμεν, οὕτω καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ποσάνκις ὁ ἐλάσσων τὸν μείζονα περιέχει, ζητῆσαι δυνάμεθα, ὅτε καὶ ὁ ἐκθέτης ἐλάσσων ἔσαι τῆς 1, ἥτοι κλάσμα. Οἰμὴν ἀλλὰ καὶ εἰ Γεωμετρικῶς τὸν ἐλάσσονα πρὸς τὸν μείζονα παραβάλλομεν, οὐκ αἰεὶ ἐκεῖνος οὕτως ἀκριβῶς τοῦτω περιληφθήσεται, ὥς τε τὸν ἐκθέτην, ἥτοι τὸ, ποσάνκις, οἱ ὁλοσχεροῦς ἀποδίδουσι. Ἐὰν τοῦνυν ὁ ἡγούμενος (§. 212.) ὅρος τοῦ λόγου ἐλάσσων ἢ τοῦ ἐπομένου, ὁ ἐκθέτης ἔσαι αἰεὶ κελασμένος. Ὡς 12 : 48. οὗ ὁ ἐκθέτης $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$. ἢ 48 περιέχεται ἐν 12 μόνον $\frac{1}{4}$: 15. Τοῦ 24 : 18. ἢ $\frac{24}{18}$ ὁ ἐκθέτης $= \frac{24}{18} = 1\frac{2}{3} = 1\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. ἢ 18 περιέχεται ἐν 24 πλέον, ἢ ἅπασι, ἥτοι $1\frac{1}{3}$, ἢ $\frac{4}{3}$: 15.

Σχόλιον.

Οἱ λόγοι διαφέρουσιν ἀλλήλων, διαφόρους ἔχοντες ἐκθέτας. Καὶ ἔσονται ἄρα τοσαῦτα εἶδη λόγων διάφορα, ὅσοι διάφοροι ἐκθέται διδονται. Καὶ ἅ. μὲν εἶδος λόγων ἀναμφιβόλως βέλομεν εἰπεῖ, ἔνθα ἄμφω οἱ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις ἴσοι. Ὡς 3 : 3. 4 : 4. α : α. Ὡν ἐκθέτης ἢ 1. (§. 84. σχ.) Διὸ καὶ τὸ τοιόνδε εἶδος καλεῖται Λόγος τῆς ἰσότητος. Τοῦτω δ' ἔπονται οἱ ὁλοσχερεῖ ἀριθμῶν ἐκθέτην ἔχοντες λόγοι. Ὡς 4 : 2. Ἐνθα ἐκθέτης ὁ 2. Καὶ 12 : 4. Ἐνθα ἐκθέτης ὁ 3. μετ' οὓς, οἱ κλασματικὸν ἐκθέτην ἔχοντες.

§. 228. Ἐστω α ὁ ἡγούμενος ὅρος. β ὁ ἐπόμενος, καὶ ε ὁ ἐκθέτης. Ἐὰν οὖν οὕτω ἐκ τούτων δοθῶσιν, εὐρήσομεν ῥᾶστα τὸν γ'. Ἐστὶ γὰρ α = β. ε. Καὶ β = α. Καὶ ε = α.

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{\beta}{\alpha}$$

§. 229. Ἐκ τοῦ σημείου τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου, (§. 227.) καὶ τῆς τούτου ιδιότητος ἔπεται,

Ο

ὅτι

ὅτι ὡς κλάσμα τοῦτον θεωρῆσαι δυνάμεθα. Εἰ δὲ τοῦτο, ἐφαρμόσει ἄρα τῷ λόγῳ καὶ τὰ παντὶ κλάσματι ἐφαρμόζοντα. Ἐνθεντοὶ ὁ ἡγούμενος, καὶ ἐπόμενος ὅρος τοῦ λόγου μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθέντες, ἢ διαιρεθέντες, τὸν λόγον ἡκιστα μεταβαλοῦσι. (§. 122.) π. χ. $12 : 48 = \frac{12}{48} : \frac{48}{48}$, ἢ $= 1 : 4$. Ἐστὶ γὰρ $\frac{12}{48} = \frac{12}{48} : \frac{12}{12} = \frac{1}{4}$. (§. αὐτ.) Αὖτις $12 : 48 = 12 \cdot 6 : 48 \cdot 6$. ἢ $= 72 : 288$. Ἐστὶ γὰρ $\frac{12}{48} = \frac{12 \cdot 6}{48 \cdot 6} = \frac{72}{288}$. Ὡς το πηλίκον, ἢ ὁ ἐκθέτης τοῦ λόγου μένει ἀμετάβλητος.

Καὶ ἐν γένει

$$\alpha : \beta = \alpha \cdot \gamma : \beta \cdot \gamma \quad \text{ἢ καὶ} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \gamma}$$

(§. 114. ε'.) Εἰ λόγος τις πάρεσιν, οὗ τοὺς ὅρους εἰς ἐλάσσονας ἀναγαγεῖν ἔχομεν, ποιήσομεν τοῦτο, κατὰ τὸ (§. 125. σχ.). Οἷον προκειμένου τοῦ λόγου $137 : 548 = \frac{137}{548}$. Ἀμφω τοὺς ὅρους διαιρήσομεν τῷ 137. Ἦτοι $\frac{137}{548} = \frac{137}{548} : \frac{137}{137} = \frac{1}{4}$. Ὡς ὁ λόγος $137 : 548 =$ τῷ $1 : 4$. Ὅσπερ ῥᾶον κατανοηθήσεται, ἢ ὁ $137 : 548$.

§. 230. Ἐὰν οἱ ὅροι δύο, ἢ πλείονων Γεωμετρικῶν λόγων μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασῶσιν, ἢ γούμενοι μεθ' ἡγουμένων, καὶ ἐπόμενοι μεθ' ἐπομένων, τὸ παραγόμεν. ῥηθήσεται Λόγος Σύνθετος. Οἱ δ' ἀπλοὶ λόγοι, Λόγοι Συντιθέντες. Ὡς, ἐκ τῶν λόγων $\alpha : \beta$, $\gamma : \delta$, $\epsilon : \zeta$ προκύπτει διὰ τῆς συνθέσεως ὁ λόγος $\alpha \gamma \epsilon : \beta \delta \zeta$. Καὶ $2 : 8$, καὶ $4 : 16$ δώσουσι τὸν λόγον $8 : 128$. Ὁ δ' ἐκθέτης τοῦ Συνθέτου λόγου τὸ παραγόμενόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐκθετῶν τῶν συντιθέντων. Ὡς ὁ 16 τοῦ $4 \cdot 4$.

§. 231. Ἐὰν οἱ λόγοι, οἱ οὕτω συντιθέμενοι, ἴσοι ἀλλήλοις ᾖσιν, ἀναφύονται ἐκ τούτων Λόγοι πολ-

Πολλαπλασίονες. τούτ: ἐκ δύο ἴσων ὁ διπλασίων, ἢ Τετραγωνικὸς Λόγος. Ἐκ τριῶν ἴσων, ὁ Τετραπλασίων, ἢ Κυβικὸς, κτ. Ὡς, τῶν λόγων $\alpha : \beta$ καὶ $\alpha : \beta$, ὁ σύνθετος λόγος ἐστὶν $\alpha^2 : \beta^2$. Ὅθεν λέγεται ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ. τὰ τετράγωνα ἴστανται ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν κατ' αὐτὰ πλευρῶν. Καὶ ἐκ τοῦ λόγου $\alpha : \beta$ τρίς τεθέντος, ἀνακύπτει ὁ λόγος $\alpha^3 : \beta^3$. Ὅθεν, οἱ κύβοι, ἢ αὐτόθι λέγεται, εἰσὶν ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῶν κατ' αὐτοὺς πλευρῶν.

Περὶ Γεωμετρικῆς ἀναλογίας.

§. 232. Ἡ Γεωμετρικὴ ἀναλογία ἐκ δύο σύγκειται Γεωμετρικῶν λόγων, (§. 212.) ἀλλήλοις ἴσων. Ἰσοὶ δὲ λέγονται, εἰ ἐκθέτης (§. 227.) ὁ αὐτὸς ἀμφοῖν πάρεσιν. Οἷον τοῦ λόγου (§. 212.) $2 : 8$ ὁ ἐκθέτης $= 4$. Ληϋθήτω καὶ ἕτερος λόγος $5 : 20$. Οὗ ὁ ἐκθέτης αὖθις $= 4$. Ἐνθεντοί, ὡς ἴσοι, τὴν Γεωμετρικὴν, ὡς εἴρηται, ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, καὶ ταύτην τῇ τῆς ἰσότητος δεικνυμένην σημείω. $(=)$ Καὶ ἐκκείσεται ἄρα ἡ Γεωμετρικὴ ἀναλογία οὕτω. $2 : 8 = 5 : 20$. Ἦν οὕτως ἀπαγγελοῦμεν 2 πρὸς 8 , ὡς 5 πρὸς 20 . Τὸν δ' ἐκθέτην τοῦ λόγου (§. 227.) οὐκ αἰεὶ ὁλοσχερῇ ἀριθμὸν εἶναι συμβαίνει, ἀλλ' ἐνίοτε καὶ κλάσμα, γνήσιον, ἢ νόθον. Ἀλλ' οὐδεὶς τούτου λόγος, ὡς τῆς ἀναλογίας σωζομένης. Ἐπὶ γὰρ δυοῖν λόγων, ἴσων ἀλλήλοις, ζητεῖται, εἰ ἐφ' ἑκατέρου ὁ ἕτερος ἄρος ἐπίσης τῷ ἑτέρῳ ἐμπεριέχεται. Τὸ δ' ἐπίσης τοσάνκις ἐμπεριέχεται, εἴτε δι' ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, εἴτε διὰ κλάσματος ἐκφέρεται, πάντῃ ἀδιάφορον. Οὕτως ἂν εἴη $6 : 5 = 12 : 10$ ὡσαύτως ἀναλογία. Ἦς ὁ ἐκθέτης §. Ὁ 6 γὰρ τῷ 5 οὐδὲ ἀπαξ ἐμπεριέχεται, ἀλλὰ μόνον $\frac{6}{5} : 15$. Ὅτι δὲ τοῦτο ἀληθές, ἢ βάσανος τῆς

διαίρεσιν δαίξει· (§ 98.) $\frac{3}{8} \times 6 = \frac{30}{8} = 3\frac{3}{4}$
 = τῷ διαιρετῷ· Παραπλησίως καὶ $12 \text{ ἐν } 10, \frac{12}{10} : 15$
 ἢ $\frac{2}{5} : 15$ ἐμπεριέχεται. Ὡς ἡ ἀναλογία ὁρθή.

§. 233. Ἀκριβῶς τὴν ἀναλογίαν θεωροῦσιν
 εὐδὴλον ἐκ τεσσάρων συγκροτεῖσθαι ὅρων. Τοῦ μὲν
 α'. καθ' ἑαυτόν. Τοῦ δὲ β'. ἐκ τοῦ α'. ἐπὶ τὸν
 ἐκθετην πολλαπλασιασθέντος. Τοῦ δὲ γ'. πάλιν καθ'
 ἑαυτόν· Τοῦ δὲ δ'. ὡσαύτως ἐκ τοῦ γ'. ἐπὶ τὸν
 ἐκθετην τῶν δύο α'. ὅρων. Ἐὰν οὖν ὁ α'. ὅρος
 = α κληθῇ, ὁ δὲ γ'. (ὅς ὁ α'. ἐστὶ ἐπὶ τοῦ β'. λό-
 γου) = β, ὁ δ' ἐκθετης τῶν δύο πρώτων ὅρων
 = μ. ἔσται ἡ ἑξῆς Γεωμετρικὴ ἀναλογία ἢ καὶ ὁλο-
 κιωτάτη. $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$. Ὡς δι' αὐτῆς ἀπα-
 σῶν τῶν ἀναλογιῶν παρισπασμένων. Ἐν ἣ ὁ ἐκθετης μ
 σημαίνει ὡσαύτως ἕκαστον ἀριθμὸν, εἴτε ὁλοσχερῆς, εἴ-
 τε πεκλασμένος εἴη.

§. 24. Ἡ ἀναλογία, ἐφ' ἧς ὁ γ'. ὅρος διὰ
 Φορος τοῦ β'. Διακεκριμένη ἀκούει. Ὡς ἡ ἐν
 §. ἀνωτ. Ἐξω $\alpha = 4$. $\beta = 6$. $\mu = 5$. Καὶ
 ἔσται $4 : \dots 5 = 6 : 6 \cdot 5$. ἢ $4 : 20 =$
 $6 : 30$ Διακεκριμένη ἀναλογία. Ἡ $\alpha = 6$. $\beta = 12$.
 $\mu = \frac{1}{2}$. Καὶ ἔσται $6 : 6 \cdot \frac{1}{2} = 12 : 12 \cdot \frac{1}{2}$.
 ἢ $6 : 3 = 12 : 6$ αὐθις Διακεκριμένη. Ἐφ' ἧς
 ὁ γ'. ὅρος ὁ αὐτὸς τῶ β'. ἢ $\alpha\mu = \beta$. Συνε-
 χής· Ὅθεν εἰάν ἐν τῇ καθόλου ἀναλογίᾳ ἀντὶ τοῦ β.
 τὸ $\alpha\mu$ ἀντικαταστῇ, ἡ ἑξῆς ἀνακυφει συνεχὴς ἀναλο-
 γία. $\alpha : \alpha\mu = \alpha\mu : \alpha\mu \cdot \mu$. ἢ $\alpha : \alpha\mu$
 = $\alpha\mu : \alpha\mu^2$. Ἡ καὶ εἰάν $\alpha = 5$. $\mu = 3$.
 πεθῇ, ἔσται $5 : 5 \cdot 3 = 5 \cdot 3 : 5 \cdot 3 \cdot 3$. ἢ $5 : 15$
 = $15 : 45$. Καὶ $12 : 6 = 6 : 3$. Ἀμφω συ-
 νεχείς.

Σχόλιον.

Ἀντίστροφος Γεωμετρικὴ Ἀναλογία,
 ἢ Ἀντίστροφος Γεωμετρικὸς Λόγος λεγέ-
 ται.

ται, εἰν ἀπὸ δ'. ποσότητος ἢ α'. πρὸς τὴν β'. λόγον ἔχει, ὅν ἢ δ' πρὸς τὴν γ'. Οἷον 4, 6, 15, 10. ἴσονται ἐν ἀντιστρόφῳ Γεωμετρικῷ λόγῳ. Ὅτι 4 ἔχει πρὸς 6, οὐχὶ ὡς 15 πρὸς 10, ἀλλ' ὡς 10 πρὸς 15.

§. 238. Ἐφ' οἰασοῦν Γεωμετρικῆς ἀναλογίας, εἴτε διακεκριμένης. α: αμ = β: βμ. εἴτε συνεχῆς. α: αμ = αμ: αμ², τὸ ἐκ τῶν δύο ἀκρῶν ὅρων παραγόμενον ἴσον τῷ ἐκ τῶν δύο μέσων. Ἐπ' ἐκείνης γὰρ αβμ = αμβ Ἐπὶ δὲ ταύτης ααμ² = αμαμ = α² μ² Ἐάν δὲ καὶ τῶν δύο ἡγουμένων ὅρων διὰ τοῦ ἰδίου ἐπομένου (§. 212) ἐκάτερος διαιρεθῇ, ἢ καὶ ἀνάπαλιν, τὰ πηλίκα ἔσαι ἴσα.

Καὶ ἐν μὲν τῇ διακεκριμένῃ. α: αμ = β: βμ, ἔσαι $\frac{\alpha}{\alpha\mu} = \frac{\beta}{\beta\mu}$. ἢ $\frac{\alpha\mu}{\alpha} = \frac{\beta\mu}{\beta}$. (Ἐνθα τῶν α'. δύο κλασμάτων τὸ πηλίκον = $\frac{1}{\mu}$. Τὸ γὰρ

α τοῦ ἀριθμητοῦ διαιρεθὲν διὰ τοῦ α τοῦ παρονομῆ: δίδωσι πηλίκον τὴν 1 (§. 84. σχ.) ἐν τῷ ἀριθμ: Τὸ δὲ μ μένει παρονομασίης. Ἰσοαὐτως καὶ τὸ $\frac{\beta}{\beta\mu}$ δίδ.

$\frac{\beta\mu}{\beta}$ πηλίκον τὴν 1 ἐν τῷ ἀριθμ. καὶ μ ἐν τῷ παρον: Τῶν δὲ β'. δευτέρων τὸ πηλίκον ἴσον μ. (§. 114. α') (Σημείωσις ἐνταῦθα, ὅτι οἱ ὁμολογοὶ ὅροι γίνονται διαιρέτα. Ὁ μᾶλλον γοι δὲ, ὁ α'. τῷ γ'. καὶ ὁ β'. τῷ δ') Ἐν δὲ τῇ συνεχεῖ α: αμ = αμ: αμ². ἔσαι $\frac{\alpha}{\alpha\mu} = \frac{\alpha\mu}{\alpha\mu^2}$. ἢ $\frac{\alpha\mu}{\alpha} = \frac{\alpha\mu^2}{\alpha\mu}$.

(Ἐνθα τῶν α'. δύο κλασμ. πηλίκον τὸ $\frac{1}{\mu}$, τῶν δὲ β'. δευτέρων τὸ μ).

Βάσανος δὲ τῆς ἀναλογίας (εἰσὶν κριβῆς εἴη) εὐχε-

εὐχερεστέρα, ἢ ἰσότης τῶν παραγομένων ἐκ τῶν δύο ἀκρων ὄρων. καὶ ἐκ τῶν δύο μέσων, κατὰ τὸν κανόνα, ἢ ἡ εὐρεσις τοῦ ἐκθέτου τῶν δύο λόγων. Τοῦτον γὰρ ἐνίοτε καὶ κλάσμα εἶναι συμβαίνει. Οὕτω π. χ. $2 : 9 = 4 : 18$ Γεωμετρικὴ ἐστὶν ἀκριβὴς ἀναλογία. Ὅτι $4 \cdot 9 = 2 \cdot 18$. Ἀμφω $= 36$.

Αὖθις, ἐπειδὴ τὰ ἐκ τῶν ὁμολόγων ὄρων πηλίκαι ἴσα ἀλλήλοις, ἢ $\frac{\alpha}{\beta\mu} = \frac{\beta}{\alpha}$. Καὶ $\frac{\alpha\mu}{\alpha} = \frac{\beta\mu}{\beta}$ ἔπεται, ὅτι καὶ δύο κλάσματα ἴσα ἀλλήλοις (§. 125.) ἀναλογίαν συστήσουσι. Καὶ ἀνάπαλιν, οἱ δύο λόγοι ἀναλογίας αἰασοῦν διὰ κλασμάτων ἐξενεχθῆσονται. Εἰ οὖν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, ἔσαι καὶ $\alpha : \beta = \gamma : \delta$. Καὶ $\alpha\delta = \beta\gamma$. Καὶ ἐν ἀριθμοῖς. Εἰ $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, ἔσαι καὶ $3 : 5 = 9 : 15$. Καὶ $5 \cdot 9 = 3 \cdot 15$.

§. 236. Ὁ λόγος δύο κλασμάτων, ὡς $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$ δι' ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν ἐξενεχθῆναι δύναται. Εἰ γὰρ ἀμφω μετὰ τῶν παρονομ. βδ πολλαπλασιάσεις, προκύψει $\frac{\alpha\beta}{\beta} : \frac{\gamma\delta}{\delta} = \alpha\delta : \beta\gamma$. Καὶ $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = \frac{15 \cdot 24}{24} : \frac{25 \cdot 24}{36} = 15 \cdot 36 : 24 \cdot 25 = 9 : 10$.

§. 237. Ἐὰν δύο κλάσματα ἢ μονὰς, ἢ ὁ αὐτὸς προσῆ ἀριθμητὴς, ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα ἀντίστροφον τῶν παρονομασιῶν. Ὡς $\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$. Καὶ $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\alpha}{\beta} (\S. \text{άνωτ.}) = \beta : \alpha$.

$$\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} : \frac{\varepsilon}{\beta} = \frac{\varepsilon\alpha\beta}{\alpha} : \frac{\varepsilon\alpha\beta}{\beta} = \varepsilon\beta : \varepsilon\alpha =$$

$\beta : \alpha$. Ἐάν δὲ δύο κλάσματα τὸν αὐτὸν ἔχωσι παρονομασὴν, ὡς $\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\beta}{\gamma}$, ἔχει λόγον πρὸς ἄλλη-

λα τὸν τῶν ἀριθμητῶν, δηλ. : ὡς $\alpha : \beta$. Καὶ ἐν ἀριθμοῖς παραδ. ἀμφοῖν τῶν τρόπων. $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = \frac{6}{16} : \frac{3}{16} = 6 : 3 = 2 : 1$. Καὶ $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$. ἢ $2 : 3$.

§. 238. Δύο ἀλλήλοις ἴσα παραγόμενα Γεωμετρικὴν παρέξουσιν ἀναλογίαν, ἐν ἣ ὁ ἕτερος παράγων τοῦ α'. παραγομένου ἔξει πρὸς τὸν ἕτερον τοῦ β', ὡς ὁ ἕτερος τοῦ β' πρὸς τὸν ἕτερον τοῦ α'. Ἔστω $\mu\rho = \nu\pi$. Διэле ἀμφω διὰ $\nu\rho$, καὶ ἔσαι $\frac{\mu\rho}{\nu\rho} = \frac{\nu\pi}{\nu\rho}$. (§. 114. α')

ἦτοι $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\pi}{\rho}$. ἦτοι ἔσαι $\mu : \nu = \pi : \rho$. (§. 235.)

§. 239. Ἡ δὲ βάσιμος ἀναλογία, $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$, ἐφ' ἧς αἱ λοιπαὶ πᾶσαι ἐρείδονται, ἥτις καὶ ὡς συνεχῆς ἀν ληφθεῖη, τοῦ $\beta = \alpha\mu$ τεθέντος, διαφόρως ἀμείβεσθαι δύναται.

1) Διὰ τῆς τῶν ὄρων μεταξάσεως. $\alpha\mu : \alpha = \beta\mu : \beta$. Καὶ ἐπεὶ τὰ παραγόμενα ἐκ τῶν ἀκέραιων, καὶ μέσων ὄρων ἴσα ἀλλήλοις, ἔσαι καὶ τότε τὸ σχῆμα ἀναλογία ἀκριβῆς. Καὶ ἐν ἀριθμοῖς $5 : 6 = 10 : 12$. Καὶ $6 : 5 = 12 : 10$.

Καὶ ἐναλλάξ. $\alpha : \beta = \alpha\mu : \beta\mu$. Καὶ $5 : 10 = 6 : 12$. Καὶ τῶν ὄρων ἀντιστραφέντων, ἔσαι $\beta : \alpha = \beta\mu : \alpha\mu$. Καὶ $10 : 5 = 12 : 6$.

Καὶ ὅλης τῆς ἀναλογίας ἀντιστροφίσης, ἔσαι $\beta\mu : \alpha\mu = \beta : \alpha$. ἢ $12 : 6 = 10 : 5$.

2) Διὰ

2) Διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ β'. ὅρου τῷ α'. καὶ τοῦ δ'. τῷ γ'. "Ἡ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ β'." ἀπὸ τοῦ α'. καὶ τοῦ δ'. ἀπὸ τοῦ γ'. Ὡς $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$. ἢ $5 : 6 = 10 : 12$. Ἐστὶ δὲ καὶ $\alpha + \alpha\mu : \alpha\mu = \beta + \beta\mu : \beta\mu$. ἢ $5 + 6 : 6 = 10 + 12 : 12$. τούτ' $11 : 6 = 22 : 12$.

Καὶ $\alpha - \alpha\mu : \alpha\mu = \beta - \beta\mu : \beta\mu$. ἢ $5 - 6 : 6 = 10 - 12 : 12$. τούτ' $-1 : 6 = -2 : 12$.

Ἀλλὰ καὶ τῷ β'. καὶ δ'. Ὅρων ἔξει τὸν α'. καὶ γ'. προσιδέσθαι, ἢ ἀπ' ἐκείνων τούτους ἀφαιρεῖν. Ὡς $\alpha : \alpha\mu + \alpha = \beta : \beta\mu + \beta$. ἢ $5 : 6 + 5 = 10 : 12 + 10$. Τούτ' $5 : 11 = 10 : 22$.

Καὶ $\alpha : \alpha\mu - \alpha = \beta : \beta\mu - \beta$. ἢ $5 : 6 - 5 = 10 : 12 - 10$. τούτ' $5 : 1 = 10 : 2$.

3) Διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὅτε ἦτοι πάντας τοὺς τῆς ἀναλογίας ὅρους τῇ αὐτῇ πολλαπλασιάζομεν ποσότητι, ἢ μόνον δύο, δηλαδὴ 1) τὸν α'. καὶ τὸν β'. 2) Τὸν γ' καὶ τὸν δ'. 3) Τὸν α'. καὶ τὸν γ'. ἢ 4) τὸν β'. καὶ τὸν δ'. Ἀεὶ γὰρ ἀληθὴς ἡ ἀναλογία, εἰ τὸ παραγόμενον τὸ ἐκ τῶν ἀκρων ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων ὅρῳ. Πολλαπλασιασθῆτωσαν οὖν πάντες οἱ ὅροι τῆς καθόλου ἀναλογίας μετὰ τοῦ γ', καὶ ἔσται $\alpha\gamma : \alpha\mu\gamma = \beta\gamma : \beta\mu\gamma$. ἢ $5 \cdot 2 : 6 \cdot 2 = 10 \cdot 2 : 12 \cdot 2$. τούτ' $10 : 12 = 20 : 24$.

Αὐθις $\alpha\gamma : \alpha\mu\gamma = \beta : \beta\mu$. ἢ $5 \cdot 3 : 6 \cdot 3 = 10 : 12$. τούτ' $15 : 18 = 10 : 12$.

Καὶ $\alpha : \alpha\mu = \beta\gamma : \beta\mu\gamma$. ἢ $5 : 6 = 10 \cdot 3 : 12 \cdot 3$.

Καὶ $\alpha\gamma : \alpha\mu = \beta\gamma : \beta\mu$. ἢ $5 \cdot 4 : 6 = 10 \cdot 4 : 12$. τούτ' $20 : 6 = 40 : 12$.

Καὶ

$$\text{Καὶ } \alpha : \alpha\mu\gamma = \beta : \beta\mu\gamma. \text{ ἢ } 5 : 6 \cdot 4 \\ = 10 : 12 \cdot 4. \text{ τούτ. } 5 : 24 = 10 : 48.$$

Ἐκ τούτων ἔπεται τὸ Θεώρημα. Ἐὰν οἱ δύο ὅροι τοῦ ἐτέρου λόγου τῆς ἀναλογίας, ἢ δύο ὁμόλογοι ὅροι τῆς ἀναλογίας, ἢ καὶ ἅπαντες οἱ ὅροι τῆς Ἀναλογίας, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθῶσιν, ἡ ἀναλογία οὐ μεταβάλλεται. Ὅ καὶ κατωτ. δευχθήσεται.

4) Διὰ τῆς διαιρέσεως. ὅτε ἦτοι ἅπαντας τοὺς τῆς ἀναλογίας ὅρους, διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ἢ μόνον δύο διαιροῦμεν. 1) Τὸν α'. καὶ β'. 2) Τὸν γ. καὶ δ'. 3) Τὸν α'. καὶ γ. Καὶ 4) τὸν β'. καὶ δ'. Ἐνθα ἡ Γεωμετρικὴ ἀναλογία τηρεῖται.

$$\text{Ὡς } \frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha\mu}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} : \frac{\beta\mu}{\gamma}. \text{ ἢ } \frac{5}{2} : \frac{10}{2} \\ = \frac{20}{2} : \frac{40}{2}. \text{ τούτ. } 4 : 8 = 10 : 20.$$

$$\text{Λόγις } \frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha\mu}{\gamma} = \beta : \beta\mu. \text{ ἢ } \frac{5}{2} : \frac{10}{2} = \\ 20 : 40. \text{ τούτ. } 4 : 8 = 20 : 40.$$

$$\text{Καὶ } \frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha\mu}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} : \frac{\beta\mu}{\gamma}. \text{ ἢ } 8 : 16 \\ = \frac{20}{2} : \frac{40}{2}. \text{ τούτ. } 8 : 16 = 10 : 20.$$

$$\text{Καὶ } \frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha\mu}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} : \frac{\beta\mu}{\gamma}. \text{ ἢ } \frac{5}{2} : 16 \\ = \frac{20}{2} : 40. \text{ τούτ. } 4 : 16 = 10 : 40.$$

$$\text{Καὶ } \frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha\mu}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} : \frac{\beta\mu}{\gamma}. \text{ ἢ } 8 : \frac{10}{2} = \\ 20 : \frac{40}{2}. \text{ τούτ. } 8 : 8 = 20 : 20.$$

5) Διὰ τῆς τῶν ὁρῶν εἰς δυνάμεις ἐξάρσεως, καὶ δι' ἐξαγωγῆς τῶν ριζῶν. Ἐπεὶ δὲ τῆς τῶν ριζῶν ἐξα-

ἐξαγωγῆς οὕτω λόγος ἐγένετο, διὰ τοῦ ριζικοῦ σημείου (§. 186.) αὐτὴν ἐκδηλώσομεν. Ἀλλὰ σημειώτεον, ὅτι ἦτοι πάντες οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας εἰς ὁμοβαθμίους δυνάμεις, ἦτοι εἰς δυνάμεις τοὺς αὐτοὺς ἐχούσας ἐκθέτας ἀνυψωθῆναι, ἢ ἀπὸ πάντων ρίζαι, τῶν αὐτῶν ἐκθετῶν, ἐξαχθῆναι ὀφείλουσιν. ἄλλως γὰρ τὰ τῆς ἀναλογίας οὐ σώζεται. Οἷον $\alpha^2 : \alpha^2 \mu^2 = \beta^2 : \beta^2 \mu^2$. ἢ $4^2 : 16^2 = 9^2 : 36^2$. Τοῦτ. $16 : 256 = 81 : 1296$.

Καὶ $\alpha : \alpha \mu = \beta : \beta \mu$. Ἐστὶ γὰρ $\alpha \beta \mu = \alpha \mu \beta$. Ἐνταῦθα ἐφαρμόζουσι καὶ τὰ ἀπὸ 1 μέχρι 5 ρηθέντα, τῆς ἀναλογίας αὐτῆς τηρουμένης.

Ὡς $\alpha \pm \alpha \mu : \alpha \mu = \beta \pm \beta \mu : \beta \mu$. Τὸ γὰρ παραγόμενον $\alpha \beta \mu \pm \alpha \mu \beta \mu = \tauῶ \text{ παραγομ. } \alpha \mu \beta \pm \mu \mu \alpha \beta$.

Ἐπεὶ δὲ καὶ δυνάμεις δίδονται, ὧν ὁ ἐκθέτης ἀποφατικὸς, ἔξομεν καὶ τοιαύτης ἀναλογίας

$\alpha : \alpha \mu = \beta : \beta \mu$. ἢ $4 : 16 = 9 : 36$. Καὶ ἐπειδὴ

$\alpha = \frac{1}{\alpha^v}$, (§. 198.) τὰς τοιαύτας τῶν ἀναλο-

γιῶν ἐκδηλώσομεν καὶ οὕτως.

$\frac{1}{\alpha^v}$

$$\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\alpha \mu} = \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\beta \mu} \quad \text{"Η}$$

$$\frac{1}{4^2} : \frac{1}{16^2} = \frac{1}{9^2} : \frac{1}{36^2}.$$

Ἐσαύτως καὶ δι' ἐξαγωγῆς τῆς ρίζης.

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\alpha \mu} = \sqrt{\beta} : \sqrt{\beta \mu} \quad \eta \quad \sqrt{4} : \sqrt{16} = \sqrt{9} : \sqrt{36}.$$

$$\text{Τοῦτ, } 2 : 4 = 3 : 6.$$

"Η καὶ $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\alpha \mu} = \sqrt{\beta} : \sqrt{\beta \mu}$. Καὶ διὰ τὸ §. 200. ἐξενεχθεῖν αὖ καὶ οὕτως.

$$\alpha \frac{1}{\gamma} : \alpha \frac{1}{\gamma} \mu \frac{1}{\gamma} = \beta \frac{1}{\gamma} : \beta \frac{1}{\gamma} \mu \frac{1}{\gamma}.$$

§. 240. Δύω ὁρῶν τῆς ἀναλογίας διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιασθέντων, ἢ διαιρηθέντων, ἡ ἀναλογία οὐ μεταβάλλεται. Δείκνυται δὲ οὕτως. $\alpha : \alpha \mu = \beta : \beta \mu$. κατὰ τὸ §. 235. $\frac{\alpha}{\alpha \mu} = \frac{\beta}{\beta \mu}$. Ἀμ-

φω κλάσματα ἰσοδύναμα. Ἀλλὰ καὶ $\frac{\alpha \gamma}{\alpha \mu \gamma} \eta \frac{\alpha : \gamma}{\alpha \mu : \gamma}$
 $= \frac{\alpha}{\alpha \mu}$. (§. 122.) Ἐσαύτως, καὶ $\frac{\beta \gamma}{\beta \mu \gamma} \eta$

$$\frac{\beta : \gamma}{\beta \mu : \gamma} = \frac{\beta}{\beta \mu}. \quad \text{"Ως καὶ } \alpha : \gamma : \alpha \mu \gamma = \beta : \beta \mu.$$

$$\eta \frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha \mu}{\gamma} = \beta : \beta \mu. \quad \text{Τὸ αὐτὸ δεიχθήσεται καὶ κατὰ}$$

τῶν ἐσχάτων δύο ὁρῶν. Ἄρα περὶ πάντων τῶν τεσσάρων, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

§. 241. Ἐὰν τρεῖς ὁροὶ τῆς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ᾗται συνεχοῦς, ἢ διακεκριμένης, δοθῶσιν, εὐρήσομεν αἰεὶ καὶ τὸν

τὸν δ'. Ἐστὶ γὰρ οὗτος τὸ ἐκ τῶν δύο μέσων ὅρου ποταγόμενον, διὰ τοῦ α'. ὅρου διαιρεθὲν. Ἡ ἐὰν ὁ δ'. ῥηθῇ χ , ἡ δὲ $\alpha : \alpha\mu = \beta : \chi$. Ἐστὶ ὁ ζητούμενος ὅρος $\chi = \frac{\alpha\mu\beta}{\alpha} = \mu\beta$. Ἡ δὲ δεῖξις εὐχερής.

Ἐστὶ γὰρ (§. 235.)

$$\frac{\alpha\chi}{\alpha} = \frac{\alpha\mu\beta}{\alpha} : \alpha$$

$$\frac{\alpha\chi}{\alpha} = \frac{\alpha\mu\beta}{\alpha} \quad (\S. 114. \alpha'.)$$

$$\frac{\alpha}{\chi} = \frac{\alpha}{\mu\beta}.$$

Ἐπειδὴ κατὰ τὸ §. 239. ἕκαστος ὅρος εἰς δ'. γεέσθαι δύναται, ἐν τριῶν ὁμοτέτων ὅρων ἀείποτε ὁ ἄκων ἐκρεθήσεται. π. χ . τεθήτω μὴ παρεῖναι τὸν γ'. ὅρου. Ὡς $\alpha : \alpha\mu = \chi : \beta\mu$. Ἀμφιψαμένοις τοίνυν τοὺς ὅρους, ἔσται. $\alpha\mu : \alpha = \beta\mu : \chi$. Καὶ $\chi = \frac{\beta\mu \cdot \alpha}{\alpha\mu} = \beta$. Ἐν ἀριθμοῖς. $6 : 18 = \chi : 12$. ἢ $18 : 6 = 12 : \chi$. Καὶ $\chi = \frac{12 \cdot 6}{18} = \frac{72}{18} = 4$. Ὡς $6 : 18 = 4 : 12$.

Τοῦτο δὲ κρατεῖ καὶ ἐπὶ τῶν συνεχῶν ἀναλογιῶν ἐν τῷ α'. καὶ ἐσχάτῳ ὅρῳ. Τῆς δὲ ἐκρέσεως τοῦ μέσου ὅρου ζητητέα ἑτέρα μέθοδος, περὶ ἧς ἐνταῦθα διαλαβεῖν ἀκριβῶς οὐχ οἶόντε, τὴν τῆς ῥίζης ἐξαγωγὴν μὴ εἰδότας. Ἐροῦμεν μέντοι καὶ περὶ ταύτης τινά. Μετὰ δὲ τὸ διδασθῆναι τὴν τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγὴν, ἥν οὐκ ἀλόγως μετὰ τὴν περὶ τῶν ἀναλογιῶν διδασκαλίαν ἐπερεθέμεθα, ῥαδίως ἐνργεῖα γενήσεται, ὅπερ ἤδη μόνον διὰ σημείων ἐμφαίομεν. π. χ . Ἐξω ζητητέος ὁ μέσος ὅρος τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας. Ἦτοι $\alpha : \chi = \chi : \alpha\mu^2$. Ἐπειδὴ τοίνυν $\alpha^2 \mu^2 = \chi\chi$, ἔσται καὶ, $\alpha\mu$ εἰν τῆς ῥίζης ληφθείσης $\sqrt{\alpha^2 \mu^2} = \sqrt{\chi^2}$. Ἄρα καὶ $\alpha\mu = \chi$. Εἰ πρόκειται ζητῆσαι τὸν μέσον ἀνάλο-

ἀνολογον ἀριθμὸν τοῦ 4 καὶ 9 ἐν συνεχεῖ ἀναλογία,
ἔστι $4 : \chi = \chi : 9$. ὥστε $4 \cdot 9$, ἢ $36 = \chi^2$.
καὶ $\sqrt{36} = \sqrt{\chi^2}$. Καὶ ἐπεὶ ἡ ῥίζα τοῦ 36
 $= 6$, ἢ ὁῦλον. Ἄρα $6 = \chi$. ἦτοι $4 : 6$
 $= 6 : 9$

Προκρίσθω καὶ ἕτερα παραδείγματα τῆς τοῦ δ'.
ὅρου εὐρέσεως.

Ἐξω δεδομένη ἡ ἀναλογία $5 : 15 = 9 : \chi$.
ἢ ζητησῆται ὁ δ'. ὅρος. Ἐστὶν οὖν $\chi = \frac{9 \cdot 15}{5} = 27$.
ἢ δὲ ἀναλογία $5 : 15 = 9 : 27$. Οὗτος ὁ τρόπος
τοῦ τὸν δ'. ζητεῖν ὅρον καθόλου τυγχάνει, εἴτε
ὁλοσχερεῖς ἀριθμοί, εἴτε κλασματικοί οἱ τρεῖς εἰν ὅ-
ροι. Ὡς καὶ ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $\frac{1}{4} : \frac{3}{8} = 3 : \chi$. ὁ δ'.
ὅρος ἔστι $\chi = \frac{3 \cdot 3}{8} : \frac{1}{4} = \frac{9}{8} \cdot \frac{4}{1} (\S. 148.) = \frac{39}{2}$
 $= 4\frac{1}{2}$. ἢ δ' ἀναλογία $\frac{1}{4} : \frac{3}{8} = 3 : 4\frac{1}{2}$.

§. 242. Ἐξω ἡ μονάς ὁ α'. ὅρος. β ὁ δεύτερος, καὶ γ
ὁ τρίτος. ὁ δὲ δ'. (§ ἄνωτ.) $\beta \chi \gamma : 1$, ἦτοι
 $\beta \chi \gamma$. Ἐνδεῦντοι ἔστι $1 : \beta = \gamma : \beta \chi \gamma$,
ὁ ἔστιν, ἡ μονάς, ὁ πολλαπλασιαστέος, ὁ
πολλαπλασιαστέος, καὶ τὸ παραγόμε. συνι-
σῶσιν αἰεὶ Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν. Ἐκ
ταύτου συνάγεται, ὅτι ἀριθμὸν δι' ἀριθμοῦ πολλαπλα-
σιάξεν ἐς πρὸς τὴν μονάδα, καὶ τοὺς δύο ἑστέντας
ἀριθμοὺς τὸν δ'. Γεωμετρικὸν ζητεῖν ἀνάλογον. Ἐάν
ὁ δὲ β'. καὶ γ'. ὅρος οἱ αὐτοὶ εἰν, π. χ. β. ὁ ἑσχα-
τος ὅρος εἴη ἂν $\beta \chi \beta : 1$, ὁ ἐστὶ β^2 . Ὡς $1 : \beta$
 $= \beta : \beta^2$. Τουτέστιν, ἡ μονάς, ἡ τετραγωνικὴ ῥί-
ζα, καὶ ὁ Τετράγωνος ποιοῦσι Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν.
Καὶ ἡ τετρ. ῥίζα ἔστιν ἄρα ὁ μέσος ἀνάλογος μεταξὺ μο-
νάδος, καὶ τετραγώνου.

§. 243. Ἐξω α ὁ α'. β ὁ β'. καὶ 1 ὁ γ'.
ὅρος. ὁ δὲ δ'. $= \beta \chi 1 : \alpha$, ἦτοι $\beta : \alpha$. Ὡς
 $\alpha : \beta = 1 : \frac{\beta}{\alpha}$ Τουτ. τὸ πηλίκον ἐστὶν ὁ δ'.
γεω-

γεωμετρικὸς ἀνάλογος πρὸς τὸν διαιρέτην, διαιρετέον, καὶ τὴν μονάδα. Εἰ τοίνυν πρὸς δύο δοθέντας ποσότητας, καὶ τὴν μονάδα, ὁ δ'. ἀνάλογος ζητεῖται, ἐγέ-
νετο ἡ διείρεσις.

§. 244. Συμβαίνει δὲ καὶ ἀναλογίαν πρὸς ἄλλην δοθεῖσαν παραβάλλεσθαι, ἐνίοτε δὲ καὶ ἀπαι-
τεῖσθαι τοῦτο. Ἐξῶν αὖθις καινήτις ἀνακύπτει ἀνα-
λογία. Ἐνθεντοι ἐκκείσθω καὶ τούτων τὰ κυριώτατα,
καὶ ἀναγκασιότατα, ὧν ἡ δεξις παρὰ πόδας, ὡς τῶν
παραγομένων ἴσων (§. 235.) ὄντων.

1) Ἐὰν δύο διαφόρων ἀναλογιῶν
οἱ τῶν πρώτων, ἢ οἱ τῶν ἐσχάτων λόγων
ὅροι, ἴσοι ἀλλήλοις ᾖσιν, ἔσονται καὶ οἱ
λοιποὶ τῶν ὅρων πρὸς ἀλλήλους ἀνά-
λογοι π. χ.

$$a : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \qquad 3 : 6 = 4 : 8$$

$$a : \alpha\mu = \gamma : \gamma\mu \qquad 3 : 6 = 5 : 10$$

$$\text{ἄρα καὶ } \beta : \beta\mu = \gamma : \gamma\mu \qquad \text{καὶ } 4 : 8 = 5 : 10$$

$$\text{Ἦ καὶ } a : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \qquad 3 : 6 = 4 : 8$$

$$\gamma : \gamma\mu = \beta : \beta\mu \qquad 8 : 16 = 4 : 8$$

$$\text{ἄρα καὶ } a : \alpha\mu = \gamma : \gamma\mu \qquad 3 : 6 = 8 : 16$$

Τοῦτο δ' ἐπεταὶ καὶ ἐκ τοῦ ἀξιώματος. (§. 48. δ'.)

Τὸ τοιόνδε τοῦ συνάγειν εἶδος ὅροις τεχνικοῖς
Ἀπλῶς Δι' ἴσου ἀποκαλοῦσιν.

2) Ἐὰν δὲ ὁ α'. καὶ γ'. ὅρος, ἢ ὁ β'.
καὶ δ'. ἐν δυσὶν ἀναλογίαις ἴσοι ᾖσιν,

$$\text{ὡς } a : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \qquad 3 : 6 = 4 : 8$$

$$a : \alpha\nu = \beta : \beta\nu \qquad 3 : 12 = 4 : 16$$

$$\text{ἔσαι καὶ } \alpha\mu : \alpha\nu = \beta\mu : \beta\nu \qquad 6 : 12 = 8 : 16$$

Αὐθις

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Αὐτοῖς} & \alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu & 3 : 6 = 4 : 8 \\
 & \alpha\nu : \alpha\mu = \beta\nu : \beta\mu & 9 : 6 = 12 : 8 \\
 \hline
 \text{ἄρα καὶ} & \alpha : \alpha\nu = \beta : \beta\nu & 3 : 9 = 4 : 12
 \end{array}$$

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐτέρας ἀναλογίας ὁ β'. ὅρος τῷ α'. τῷ ἐπὶ τῆς ἐτέρας, καὶ ὁ δ'. τῷ γ'. ἴσοι ᾧσι. π. χ.

$$\begin{array}{rcl}
 & \alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu & 3 : 6 = 4 : 8 \\
 & \alpha\mu : \alpha\nu = \beta\mu : \beta\nu & 6 : 9 = 8 : 12 \\
 \hline
 \text{ἔξαι καὶ} & \alpha : \alpha\nu = \beta : \beta\nu & 3 : 9 = 4 : 12
 \end{array}$$

Τοῦτο καλεῖται Τεταγμένως Δι' Ἰσου.

3) Ἐὰν α') οἱ δύο ἄκροι ὅροι δύο διαφύρων ἀναλογιῶν ἀλλήλοις ἴσοι ᾧσιν. ἢ β') οἱ δύο μέσοι. ἢ γ') ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐτέρας ἀναλογίας ὁ β'. ὅρος τῷ α'. τῷ ἐπὶ τῆς ἐτέρας, καὶ ὁ γ'. τῆς α'. τῷ δ'. τῆς β'. ἢ ὁ β'. καὶ γ'. τῆς α'. τῷ α'. καὶ δ'. τῆς β'. ἴσοι ᾧσιν. Οἶον

$$\begin{array}{rcl}
 \alpha') & \alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu & 3 : 6 = 8 : 16 \\
 & \alpha : \alpha\mu\nu = \beta : \beta\mu. & 3 : 12 = 4 : 16 \\
 & \nu & \\
 \hline
 \text{ἔξαι καὶ} & \alpha\mu : \alpha\mu\nu = \beta : \beta & 6 : 12 = 4 : 8 \\
 & \nu &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \beta') & \alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu & 3 : 6 = 8 : 16 \\
 & \alpha\mu\nu : \alpha\mu = \beta : \beta & 4 : 6 = 8 : 12 \\
 & \nu & \\
 \hline
 \text{ἄρα καὶ} & \alpha : \alpha\mu\nu = \beta : \beta\mu & 3 : 4 = 12 : 16 \\
 & \nu &
 \end{array}$$

$$\gamma') \alpha : \alpha\mu$$

$$\gamma) \quad \alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \quad 3 : 6 = 8 : 16$$

$$\alpha\mu : \alpha\mu\nu = \underline{\beta} : \beta \quad 6 : 4 = 12 : 8$$

$$\alpha\alpha \text{ καὶ } \alpha : \alpha\mu\nu = \underline{\beta} : \beta\mu \quad 3 : 4 = 12 : 16$$

ἀκούει δὲ Δι' Ἰσου Τεταραγμένως συνάγειν.

§. 245. Ἀλλὰ καὶ ἔὰν οἱ ὁμόλογοι ὄροι πάντῃ διαφόρων δοθεῖσιν ἀναλογιῶν μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι, καὶ αἱ προκύψουσιν ἀναλογίαι.

Ἐξω ἀναλογία $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$. Τῶν ὁμολόγων

Ἐξω καὶ ἑτέρα $\gamma : \gamma\nu = \delta : \delta\nu$. πρὸς ἀλλήλους
πολλαπλασια-

σθέντων, ἔσαι. $\alpha\gamma : \alpha\gamma\nu = \beta\delta : \beta\delta\nu$.

Οὕτω καὶ τοὺς ὄρους τριῶν, τεσσάρων, πέντε, καὶ πλείονων ἔτι ἀναλογιῶν πολλαπλασιάζειν μετ' ἀλλήλων δυνάμεθα.

Π.χ. ἐν ὀριθμοῖς $2 : 4 = 6 : 12$

$$3 : 9 = 5 : 15$$

$$5 : 2 = 10 : 4$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 : 4 \cdot 9 \cdot 2 = 6 \cdot 5 \cdot 10 : 12 \cdot 15 \cdot 4 \cdot \eta$$

$$30 : 72 = 300 : 720.$$

Παραπλησίως, καὶ ἔὰν οἱ ὄροι τῆς δοθείσης ἀναλογίας διὰ τῶν ὄρων ἑτέρας διαιρεθῶσι, προελεύσεται ὡσαύτως ἀληθὴς Γεωμετρικὴ ἀναλογία. Φανερόν, ὅτι κἀνταῦθα τοὺς ὁμολόγους ὄρους δι' ἀλλήλων διαιρεῖν χρή.

$\alpha : \alpha\mu$

$$\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$$

$$8 : 24 = 7 : 21$$

$$\gamma : \gamma\nu = \delta : \delta\nu$$

$$3 : 9 = 4 : 12$$

$$\frac{\alpha : \alpha\mu}{\gamma : \gamma\nu} = \frac{\beta : \beta\mu}{\delta : \delta\nu}$$

$$\frac{8 : 24}{3 : 9} = \frac{7 : 21}{4 : 12}$$

$$\gamma : \gamma\nu = \delta : \delta\nu$$

$$3 : 9 = 4 : 12$$

§. 246. Πολλάκις ἐπὶ δύο, ἥ καὶ πλειόνων ἀναλογιῶν, ὧν οἱ ὅροι δι' ἀλλήλων πολλαπλασιασθεῖσι, δύο ὅροι τῶν μὴ ὁμολόγων ἴσοι ἀλλήλοις. Ἐὰν τοῦτο δυοὶ συμβαίῃ ἀναλογίαις, καὶ ἡ προκύψει ἀναλογία διὰ τοῦ τῶν ὅρων πολλαπλασιασμοῦ, ἐν ἣ ὁ α'. ὅρος πρὸς τὸν β'. λόγον ἔχει, ὅν ὁ γ'. τῆς β'. πρὸς τὸν δ'. τῆς α'. οἶον, ἐὰν $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$

$$\gamma\nu : \gamma = \beta\nu : \beta$$

ἔσαι καὶ $\alpha\gamma\nu : \alpha\gamma\mu = \beta\nu : \beta\mu$. Ἐὰν γὰρ ἐνεργείᾳ τοὺς ὅρους μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς ἀναλογίαν τάξωμεν, ἔσαι

$\alpha\gamma\nu : \alpha\gamma\mu = \beta\beta\nu : \beta\beta\mu$ καὶ διὰ β τῶν ὅρων τοῦ β'. λόγου διαιρεθέντων, ἔσαι

$\alpha\gamma\nu : \alpha\gamma\mu = \beta\nu : \beta\mu$ (§. 240.)

Ἐν ἀριθμοῖς.

$$4 : 6 = 8 : 12$$

$$16 : 4 = 32 : 8$$

$$64 : 24 = 32 : 12$$

Τῶν δὲ ἀναλογιῶν οὕτως ἐκκειμένων.

$$\alpha\mu : \alpha = \beta\mu : \beta \quad \eta \quad \alpha : \beta = \gamma : \delta$$

$$\gamma : \gamma\nu = \beta : \beta\nu \quad \rho : \sigma = \delta : \varepsilon$$

ἔσαι καὶ $\alpha\gamma\mu : \alpha\gamma\nu = \beta\mu : \beta\nu$ $\alpha\rho : \beta\sigma = \gamma\delta : \delta\varepsilon$

Ἐν ἀριθμοῖς.

$$3 : 6 = 8 : 16$$

$$2 : 5 = 16 : 40$$

$$2.3 : 5.6 = 8 : 40$$

$$\eta \quad 6 : 30 = 8 : 40$$

P

Εὐχε-

Εὐχερέστερον δὲ ἢ καινὴ προκύψει ἀναλογία, εἰ πὰς ποσότητας πρὸς ἀλλήλας ἐξαλείφωμεν, ἃς προσορῶμεν, καὶ ἐνεργείᾳ μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθείσας, διὰ τῆς διαιρέσεως (ὅτι δύο ὅρους τῆς ἀναλογίης διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος διαιρεῖν ἔχομεν, τῆς ἀναλογίας διὰ τοῦτο μηδεμίαν τροπὴν ὑφισταμένης) πάλιν ἐκπεσοῦμενας.

$$\text{Π. χ. } 3 : 6 = 8 : 16$$

$$2 : 5 = 16 : 40$$

$$6 : 30 = 8 : 40. \text{ Ἄλλως γὰρ ἂν εἴη}$$

$$6 : 30 = 8 : 16 : 16 : 40 = 6 : 30$$

$$= 8 : 40. \text{ τοῦ } 16 \text{ διὰ } 16 \text{ διαιρεθέντος.}$$

Ἐὰν οὕτως ἐν τῷ κοινῷ βίῳ δύο ἀναλογίαι συντεθῶσιν, ὡς ἐκ τούτων τὴν γ'. ἀνακύψαι, καλεῖται τοῦτο ἢ Μέθοδος τῶν Πέντε. Ζητεῖται γάρ ἢ 5. ποσότης, τῶν 5 δοθεισῶν, ὡς ἐνταῦθα ἐκ τοῦ 3, 6, 8, 2, 5 ζητοῦμεν τὸν 40. Εἰ γὰρ οὗτος ἀπὴν, εἴχεν ἂν οὐ δυσχερῶς εὗρεθῆναι. Καὶ γὰρ

$$4 : 6 = 8 : 16$$

$$2 : 5 = 16 : \chi$$

$$6 : 30 = 8 : \chi. \text{ Καὶ } \chi = \frac{30 \cdot 8}{6}$$

$$= 40. (\S. 241.)$$

§. 247. Ἀλλὰ καὶ πλείους ἀναλογίαι οὕτω διατάττεσθαι δύνανται, ὡς' αἰεὶ τῇ ἐγγυὲς ἀναλογία κοινόντινα τῇ προτέρᾳ ὅρον ἐνυπάρχειν, οὐχ ὁμόλογον μέντοι ὡς ἐν ταῖς ἐξῆς ἀναλογίαις.

α : β

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$

$$\eta : \theta = \delta : \nu$$

$$\rho : \sigma = \nu : \epsilon$$

$$\pi : \omicron = \epsilon : \tau$$

$$\upsilon : \phi = \tau : \psi. \text{ Ἡ δ' ἐκ τούτων}$$

καινὴ ἀναλογία $\alpha . \eta . \rho . \pi . \upsilon : \beta . \theta . \sigma . \omicron . \phi = \gamma : \psi$.
 Ἐὰν γὰρ ἐνεργεῖα καὶ οἱ ὄροι τῶν ἐσχάτων λόγων τῆς
 ἀναλ. πολλαπλασιασθῶσιν, ἐν τῇ καινῇ ὁμῶς ἀναλο-
 γία οἱ δὺν ἐσχατοὶ ὄροι διὰ τῆς διαιρέσεως (§ 240.)
 εἰς τοὺς $\gamma : \psi$ ἀναχθεῖεν. Οὕτω ποιήσον καὶ ἐν ἀ-
 ριθμοῖς.

Περὶ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου.

§. 248. Οὕτω κέκληται, ὅτι τριῶν δοθέντων
 ὄρων, ζητεῖται ὁ δ'. ἐν πράγμασι μάλιστα, ὧν πολλὴ
 ἐν τῷ καινῷ βίῳ ἡ χρῆσις. Ταῦτα δὲ τῆς ἀναλογίας πράγ-
 ματα λόγον τινὰ πρὸς ἄλληλα ἔχειν ἐπάναγκες. Οὕ-
 τω π. χ. τὰ ὦνια, καὶ ἡ τούτων τιμὴ ἐν λόγῳ ἴσανται.
 Τοῦτ, ὅσω πλέον τις ὠνεῖται, τοσοῦτω πλέον καὶ κα-
 ταβαλεῖ. Καὶ δις τοσαῦτα ὦνια, διπλὴν ἀπαιτοῦσιν
 ἄρα καὶ τὴν τιμὴν. Παραπλησίως χρόνος, καὶ τόκος
 τῶν δανεισθέντων, καὶ μυρία ἄλλα, ὧν τινὰ πρὸς ἄλ-
 ληλα σχέσιν ἔχει, ὁ ὁρθὸς εὐρήσει λόγος, τὰ περὶ
 τούτων ἐπιλύσειν μέλλων προβλήματα.

§. 249. Διαφεῖται δὲ εἰς Ὁρθὴν, καὶ Ἀν-
 τίρροφον. Καὶ ὁρθὴ μὲν, ἐὰν οἱ ὁμόλογοι ὄροι τῆς
 ἀναλογίας οὕτω πρὸς ἀλλήλους ἔχωσιν, ὥς π. χ. τοῦ
 β'. ὄρου μείζονος, ἢ ἐλάττονος ὄντος, ἢ ὁ πρῶτος,
 καὶ τὸν δ'. οὕτως ἔχειν χρή. Ἐπὶ δὲ τῆς ἀντίρρο-
 φου τοῦτο οὐκ ἔστι. Παράδειγμα τῆς μὲν α'. τὸ,
 Ἐάντινος ὠνίου λίτραι 5, μινῶν πιπράσκωνται 7 πόν-
 σου ἄρ = ἀπεμπωληθήσονται τοῦ αὐτοῦ ὠνίου λίτραι
 13; ταῦτ: ἐπειδὴ αἱ 13 λ. πλείους τῶν 5, ὠνηθή-
 σονται

σονται ἀμέλει καὶ πλείονος, ἢ αἱ 7 εἰσι μνᾶι. Ὅθεν λέγομεν, $5 : 13 = 7 : \chi$. Τῆς δὲ β'. τὸ, Ἐὰν 10 γεωργοὶ ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ 20 πλ. θρα σκάπτωσι, πόσου χρόνου δεηθήσονται εἰς τοῦτο 20 γεωργοί; Ἐνταῦθα οὐκ ὁρῶν τὸ ἐπαγαγεῖν, 10 γεωργοὶ πρὸς 20 γ. ὡς 1 ἡμέρα : χ ἡμ. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ 20 γ. πλέον ἐργάζονται κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον, ἢ οἱ 10. ἐροῦμεν, ὡς $20 : 10 = 1 : \chi$.

§. 250. Πότερον δὲ, προκειμένοντι παράδειγμα τῇ ὁρθῇ, ἢ τῇ ἀντιστρόφῳ ἀρμυζει μεθόδῳ, τῷ τὸν νοῦ ἐπιστήσαντι ῥάδιον συνίεῖν. Καὶ τούτου τεθέντος, τὰ μὲν ὁμοειδῆ τὸν α'. καὶ β'. τῆς ἀναλογίας καταλήψονται τόπον, τὸ δ' ἀντιστοιχεί τὸν γ'. Τὸ δὲ ζητούμενον τὸν δ'. Ἐπεὶ δὲ ἡ προκειμένη μεθόδος ἀληθῆς Γεωμετρικὴ τυγχάνει ἀναλογία, ἥς οἱ τρεῖς ὅροι δέδονται, ὁ δὲ δ'. ζητεῖται· εἰς εὔρεσιν τούτου, γενήσεται τὸ ἐν §. 24.· εἴτε ὁλοσχερεῖς, εἴτε κλάσματα (ὧν τὸν πολλαπλ. καὶ διαίρ. ἐν τοῖς §. 3. 140. 144. ἐπραγματευσάμεθα) εἶεν οἱ δοθέντες ὅροι· οἷον, Πόσου ἄντις 32 πήχεις ὑφάσματος τινοῦ ὠνήσαιοτο, εἰ 5 π. ὠνήσάμενος 7 δραχμὰς ἀπέτισε;

$$5 : 32 = 7 : \chi. \quad \text{Καὶ } \chi = \frac{32 \cdot 7}{5} = 44 + \frac{4}{5} \cdot \text{δραχ.}$$

§. 251. Ἡ δὲ βάσανος τοῦ ὁρθῶς τὸ παρίδειγμα ὑπολελογίσθαι ἐν §. 235. δέδεικται. Ἐν γὰρ ὁρθῶς ἐχούσῃ ἀναλογία τὰ ἐκ τῶν ἀκρῶν παραγόμενα ἴσα τοῖς ἐκ τῶν μέσων. Ἄρα καὶ $5 \cdot 44 \frac{4}{5} = 32 \cdot 7$.

§. 252. Ἐν ἀντιστρόφῳ τῇ τῶν τριῶν μεθόδῳ, (§. 2. 9) οἱ ὅροι οὐ τὴν αὐτὴν τηροῦσι τάξιν, ἢν καὶ ἐν τῇ ὁρθῇ, ἀλλ' ἐξενεχθήσονται, ὡς καὶ ἐν τῇ ἀντιστρόφῳ ἀναλογίᾳ. (§. 234. σχ.) Τὸ αὐτὸ ἔργον ὑπὸ πλ. ὧν ἐν ἐλάσσονι χρόνῳ πληρωθήσεται, ἢ ὑπ' ἐλασ.

των

νων. Ὡς οὖν ὁ χρόνος, καὶ τὸ πλήθος τῶν ἐργατῶν εἰ-
σὶν ἐν ἀντιτρόφῳ λόγῳ. τουτ: ὅταν πλείους ἐργά-
ζονται, τοσοῦτω καὶ ἐλάσσονος αὐτοῖς χρόνου χρεία.
Ἡ δὲ βάσανος ἡ αὐτὴ, ὡς καὶ ἡ τῆς ὀρθῆς. (§. ἀνωτ.)

Σχόλιον.

Σημειῶσαι καθόλου, ὅτι τὴν ὀρθὴν τῶν τριῶν
μέθοδον τὴν μεταχειρίζομεθα, ὅτε δυνάμεθα νὰ εἰπῶμεν,
ὅσῳ πλεον τοῦτο, τοσοῦτω πλεον ἐκεῖνο·
ἢ ὅσῳ ἔλαττον τοῦτο, τοσοῦτω ἔλαττον
ἐκεῖνο. ὅσῳ πλείων ὁ πόνος, τοσοῦτω πλείων καὶ ὁ
μισθός, καὶ ἀνάπαλιν ἢ ὁ ἀντίτροφος χωρεῖ, ὅτε
πρέπει νὰ εἰπῶμεν. ὅσῳ πλεον τοῦτο, τοσοῦ-
τω ἔλαττον ἐκεῖνο, ἢ καὶ, ὅσῳ ἔλαττον
τοῦτο, τοσοῦτω πλεον ἐκεῖνο. ὡς δηλοῖ τὸ
παράδ. τοῦ ἀνωτ. §.

§. 253. Ἐπὶ τῶν προβλημάτων, ἔνθα τῇ
τῶν τριῶν μεθόδῳ δις χρῆσθαι ἀνάγκη, ἐν οἷς καὶ
δύω μὴ ὁμόλογοι ὄροι ἐπ' ἀμφοῖν ταῖς ἀναλογίαις ἀλ-
λήλοις ἴσοι, (§. 246.) ἡ μέθοδος, τῶν Πέντε Μέ-
θοδος ἀκούει. τουτ: πέντε τινῶν δοθέντων, τὸν
5. ζητεῖν πρόκειται. Οἷον 8 ἄνθρωποι ἐν ἡμέραις
12 κτίζουσι τείχους πόδας 4· πόσους πόδας κτίσουσι
36 ἄνθρωποι ἐν 18 ἡμέραις; Ῥητέον οὖν $8 : 36 = 4 : \chi$. καὶ $\chi = \frac{4 \cdot 36}{8} = 18$. ὡσαύτως καὶ
 $12 : 18 = 18 : \psi$. καὶ $\psi = \frac{18 \cdot 18}{12} = 27$. Ἀλ-
λὰ τὰς δύο ἀναλογίας οὕτω τακτέον.

8	:	36	=	4	:	χ	Ἐπειδὴ τοὺς ὄρους δύο ἀναλογιῶν πολλα- πλασιάζειν, καὶ δύο ὁμολόγους ὄρους τῆς ἀναλογίας διὰ τοῦ αὐ- τοῦ ἀριθμοῦ διαιτεῖν ἔξει
12	:	18	=	χ	:	ψ	
8 · 12 : 36 · 18 = 4 : ψ							
2	3	9	·	9	1		
1	3						

ἔξει, τῆς ἀναλογίας αὐτῆς τηρουμένης, διὰ τῆς ἐξα-
σκίσεως τοὺς πολυαρίθμους πολλαπλασιασμοὺς τῶν
δύω ἀναλογιῶν φυγεῖν δυνάμεθα, τῷ δύω ὅρους τῆς
ἀναλογίας διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύω προκύ-
ψαντας ἀναλογιῶν, τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ διαιρεῖν. Οὕ-
τως ἐν τῷ προκειμένῳ παραδείγμ. ὁ α'. καὶ γ'. ὅρος
διήρηται διὰ τοῦ 4. Ὅθεν ὑπὸ τὸν 4 ἐτέθη τὸ πη-
λίκον, ἢ 1, καὶ ὑπὸ τὸν 8 ἐν τῷ α'. ὅρῳ, ὁ 2. Εἴ-
τα οὗτος ὁ 2. καὶ ὁ 18 ἐν τῷ β'. ὅρῳ αὐτῆς διὰ τοῦ
2, εἴτα ὁ 12 καὶ 36 ἀμφω διὰ τοῦ 4, καὶ τελευ-
ταῖον τὰ ἐκ τούτων πηλικά 3, καὶ 9 ἐν τῷ α'. ὅρῳ
ἀμφω διὰ τοῦ 3. Ὡςτε ὑπολείπεται ἡδε ἡ ἀναλογία
 $1 : 3 \cdot 9 = 1 : \psi$ ὥςτε $\psi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 9}{1}$

$= 27$. Κατὰ τοῦτο τὸ διεξοδικῶς ἀναπτυχθὲν πα-
ράδειγμα, καὶ ἕτερα ἡμῖν προβαλλόμενα παραδείγ-
ματα ἐπιτομώτερον ἐπιλύσομεν. Δίδονται ὁ ἐνίοτε
καὶ προβλήματα, ὧν ἡ λύσις ἐν τῇ τῶν πέντε μεθόδῳ
τὴν ἀντίστροφον τῶν τριῶν μεθόδων ἀπαιτεῖ, ἐξοῦ ἐ-
κείνη καὶ τὸ ὄνομα, Μέθοδος τῶν Πέντε Ἀν-
τίστροφος, ἀρμόζει. Πότε δὲ ταύτη χρησόμεθα,
αὐτὰ διδάξει τὰ προβλήματα.

Σχόλιον.

Εἶναι καὶ ἄλλαι μέθοδοι τῶν Ἑπτὰ, τῶν Ἑν-
νέα, κτ. ὀνομαζόμεναι, καὶ ἄλλα εἶδη ὑπολογισμῶν,
τὰ ὅποια ἔλαβον τὴν ὀνομασίαν ἐκ τῶν πραγμάτων,
εἰς τὰ ὅποια προσαρμόζονται, ὡς ὁ τοῦ Τόκου ὑπολο-
γισμὸς, ὁ τοῦ Κέρδους, καὶ τῆς Ζημίας, ὁ τῆς Κοινω-
νίας, ἢ Συντροφίας, ὁ τῆς Μίξεως πραγμάτων ἐτε-
ροειδῶν, κτ. οἷτινες τῷ ὄντι εἰς τὴν ἀναλογίαν ἐρεῖδονται.
Περὶ τούτων ἂν δὲν ἀναφέρομεν, διότι ἐν παραδείγματι
δὲν ἀρκεῖ εἰς τὸ νὰ εὐχαριστήσῃ τὸν περιεργον, τὰ δὲ
πολλὰ ἤθελαν ἦναι ἔξω τοῦ σκοποῦ.

Ἀλλὰ

Ἀλλὰ πρὸ τοῦ νὰ μεταβῶμεν εἰς ἑτέραν διδασκαλίαν, πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι δίδονται καὶ ἰδιαίτερα εἶδη ὑπολογισμῶν περιτίνων πραγμάτων. Ὁθεν εἰς ἐκεῖνον ὁποῦ θέλει νὰ λύσῃ προβλήματα περὶ τῶν τοιούτων, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἱξεύρῃ τοῦτο τὸ εἶδος τῶν Λόγων· διότι ἀλλέως, ἂν ἱξεύρῃ καὶ τὴν Ἀριθμητικὴν, δὲν θέλει δυνηθῇ νὰ τὰ λύσῃ διὰ παράδειγμα ὡς ἀναφέρωμεν μόνον ἓν.

Ἡ τιμὴ τῶν Ἀδαμάντων δὲν διευθύνεται κατὰ τὸ βάρος των, ὥστε τὸ δύο Φοραῖς π. χ. βαρύτερο νὰ ᾖναι ὅξιον καὶ διπλῆς τιμῆς. ἀλλὰ κατὰ Λόγου πολλῶ μείζονα τούτου. Ἐπὶ τῶν Ἀδαμάντων αἱ τιμαὶ ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν οἱ τετράγωνοι ἀριθμοὶ τοῦ βάρους. ῥαθμῶνται δὲ κατὰ κεράτιον, καὶ κόκκον. τὸ δὲ κεράτιον $\equiv 4$ κόκκοις. Ἀδάμαντος οὖν προκειμένου, ῥαθμοῦ κόκκων δύο, τοῦ δ' ἑνὸς κόκκου ἀδάμαντος 5 μνῶν τιμωμένου, διὰ νὰ μάθωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀδάμαντος δὲν πρέπει νὰ συνάξωμεν $1 \text{ κόκκος} : 2 \text{ κόκ.} = 5 \text{ μναῖ} : \chi \text{ μνῶς.}$ ἢ ὡς $1^2 : 2^2 = 5 : \chi.$ ἢται ὡς $1 : 4 = 5 : \chi.$ Ὡς ὁ δύο κόκκων ἀδάμας 20 μνῶν ἄξιος. Εἰ δὲ δύο Ἀδάμαντες πρόκεινται, οὓς πρὸς ἀλλήλους παραβαλεῖν βουλόμεθα, καὶ ὡν ἑκατέρων τὸ βάρος, τὴν δέ τιμὴν τοῦ ἑτέρου μόνον οἶδαμεν. Οἷον ὁ ἕτερος ἐστὶ τριῶν κόκκων, 45 μνῶν ἄξιος, ὁ δ' ἕτερος 5 κόκκων, συνάξομεν. $3^2 : 5^2 = 45 : \chi.$ ἢ $9 : 25 = 45 : \chi.$ Καὶ χ , ἢτοι ἡ τιμὴ τοῦ β'. $= 125$ μναῖς. Ἀλλ' ἐπὶ τῶν Ἀδαμάντων θεωρητέον καὶ ἄλλας ιδιότητες αὐτῶν, αἱ ὁ οἷαι δὲν ἀνήκουν ἐνταῦθα. Ὡς τὴν τούτων πυκνότητα, κτ.

Περὶ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου.

§ 254. Ἀριθμῶν πληθὺς, ἢ Ποσοτήτων, διηγετικῶς αὐξομένων, ἢ μειομένων, ὧν ἐκάστη ἀμεσος οὐκ ἔστι τὸν αὐτὸν ἔχει ἐκθέτην, (§. 227) ὅν καὶ αἱ λοιπαὶ, (οἱ ἀλλήλων ἀμελεῖ τῶν δύο ἀριθμῶν διαιρουμένων) Γεωμετρικῇ ἀκούει Προόδος. Ὡς 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, κτ. ἢ 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, κτ. ἔνθα τῆς α'. ὁ ἐκθέτης = 2. τῆς δὲ β'. = 3. Ἀναφύεται δὲ ἐκ τῆς συνεχοῦς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας. (§. 244.) ἥς ὁ γενικός τύπος ὁδε ἔν. α. : αμ = αμ : αμ² Ἐάν οὖν τοὺς δύο ἑσχατοὺς ὅρους τῆς δε τῆς ἀναλογίας, πρῶτους ὅρους ἐτέρας καινῆς συνεχοῦς ἀναλογίας ποιήσωμεν, καὶ οὕτως αἰ χωρῶμεν, τὸν δὲ τὸν λόγον οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας ἔξουσιν. ἔσαι ὁ α'. πρὸς τὸν β'. ὡς ὁ β'. πρὸς τὸν γ'. ὡς ὁ γ'. πρὸς τὸν δ'. κτ. Αἱ δ' ἀναλογίαι οὕτως ἀποδοθήσονται.

α : αμ = αμ : αμ². Καὶ αμ : αμ² = αμ² : αμ³. Καὶ αμ² : αμ³ = αμ³ : αμ⁴. κτ. Ἐπεὶ δὲ οἱ δύο ἑσχατοὶ ὅροι τῆς ἀναλογίας αἰ ἐπαναλαμβανόνται, ἐξενεχθεῖν ἔν καὶ ὡς τὸ σχῆμα α : αμ = αμ : αμ² = αμ² : αμ³ = αμ³ : αμ⁴, κτ. Ἀλλ' ἐάν ληθῶσιν ἐνταῦθα οἱ δύο πρῶτοι δοθέντες ὅροι, καὶ οἱ διὰ τούτων ἐφεξῆς εὐρισκόμενοι, καὶ εἰς σειρὰν τεθῶσι, προκύψει σειρά ἢ ἐξῆς α, αμ, αμ², αμ³, αμ⁴, αμ⁵, αμ⁶, αμ⁷, κτ. Ἐνθα τὸ μ διηγετικῶς μιᾷ δυνάμει ἐπ' αὐξῇ, καὶ ἕκαστος ὅρος, ὁ προηγησάμενος τυγχάνει πολλαπλασιασθεῖς, ἢ διαιρεθεῖς διὰ τοῦ ἐκθέτου. (ἐάνταῦθα γὰρ τὸ μ Ἐκθέτης τῆς Προόδου καλεῖται, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ἀναλογίας, Ἐκθέτης τοῦ λόγου, ἢ τῆς ἀναλογίας, (§. 227.) ἐμφαίνων, ποσάκις ἕκαστος ὅρος τὸν πρὸ αὐτοῦ περιέχει, ἢ ἐν ἐκείνῳ περιέχεται) Ἵνα δὲ τὸ λεγόμενον ὑπ' ὅφιν παραστήσωμεν

μεν, ἀντικαταστήτωσαν ἐν τῇ σειρᾷ ἀντὶ τῶν γραμμάτων ἀριθμοί. Ἐξω οὖν $\alpha = 1$, καὶ $\mu = 2$, ἢ δὲ σειράν ἔσαι $1, 1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, κτ. $= 1, 2, 4, 8, 16, 32$, κτ. Ἐφ' ἧς προφανῶς καθορῶμεν, ὅπως ἕκαστος ὅρος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸν πρὸ αὐτοῦ.

Ἐὰν δὲ αὐθις ἢ $\alpha = 1$, καὶ μ , ἦτοι ὁ Ἐκθέτης $= \frac{1}{2}$, ἔσαι ἡ σειρά.

$1, 1 \cdot \frac{1}{2}, 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ κτ.

ἢ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$, κτ.

§. 255. Ἐὰν ἐπὶ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου οἱ ὅροι ἐπὶ τὸ διηνεκὲς αὐξωσι, καλεῖται ἡ Σειρά, Αὐξουσα. Μειουμένων δὲ, Μειουμένη. Κακείνο μὲν γίνεται, ἐὰν ὁ Ἐκθέτης, ἦτοι μ , μείζων τῆς 1 τυγχάνῃ, εἴτε ὁλοσχερῆς εἴῃ ἀριθμὸς, εἴτε νόσον κλάσμα. Τοῦτο δὲ, ἐλάττωνος τῆς 1, καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου, γνησίου κλάσματος τοῦ Ἐκθέτου ὄντος. Εἰ δ' Ἐκθέτης ἢ 1 εἴῃ, οἱ ὅροι ἔσονται ἀλλήλοις ἴσοι.

§. 256. Τῶν ὁρων τῆς ἐν γένει σειρᾶς (§. 254.)

τοῖς Φυσικοῖς ἐπισημειωθέντων χαρατῆρσιν, $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6$, κτ. δῆλον, ὅτι ἡ δύναμις τοῦ Ἐκθέτου μ αἰεὶ μονάδι ἐλαττοῦται τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐφ' ἑκάστου ὅρου. π. χ. ἐν τῷ 5^ῳ ὅρῳ τῆς Προόδου ἢ μὲν δύναμις τοῦ μ ἐστὶ 5, ὁ δ' ἐπ' αὐτοῦ ἀριθμὸς 6. Ὡσαύτως καὶ ἐν τῷ 8^ῳ, ἢ μὲν δύν. 3, ὁ δ' ἐπ' αὐτοῦ ἀριθμὸς 4, αὐτῶ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. Ἐνθεντοί, ἐὰν ἡ τῶν ὁρων πληθὺς π ρηθῇ, ἀναγκαίως ἡ δύναμις τοῦ ἐκθέτου τοῦ κατὰ τὸν ἑοχάτον ὅρου, ἢ ἡ δύναμις τοῦ π ὅρου ἔσαι $\pi - 1$. Εἰ π. χ. ἡ τῶν ὁρων πληθὺς 6, τρὺτ: $\pi = 6$, ἢ δύναμις

ναυμς τοῦ ζ' . ὅρου ἔσαι 6 — 1, ἢ ζ . Ὡς ἐπὶ πά-
των, ὁ ἔσχατος ὅρος οἰασοῦν Γεωμετρικῆς προόδου =

$$\pi - 1$$

$\alpha\mu$, εἰν ἐν γένει ἢ τῶν ὅρων πληθὺς π κληθῆ-
ῖ. Ἐπεὶ δὲ ἐφ' ἐκάστου ἐγγὺς προηγησαμένου ὅρου ἢ δύνα-
μις τοῦ ἐκθέτου 1 ἐλαττοῦται τῆς τοῦ ἐπομένου ὅρου
ἢ τοιαύτη σειρά, καθόλου θεωρουμένη, οὕτως ἀ-
ἐκδηλωθεῖ.

$$\pi - 3$$

$$\pi -$$

α , $\alpha\mu$, $\alpha\mu^2$. . . , $\alpha\mu$, $\alpha\mu$

$$\pi - 1$$

$\alpha\mu$

Ἡ εἰν ἢ σειρά ἀντιγραφή, καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος
α'. γένηται, εἰν ἂν ὁ γενικιώτατος τύπος, ὁ πάσαις ταῖς
Γεωμετρικαῖς ἐφαρμοζών Προόδοις, ὅδε:

$$\pi - 1$$

$$\pi - 2$$

$$\pi - 3$$

$$\pi - 4$$

$$\pi -$$

$\alpha\mu$, $\alpha\mu$, $\alpha\mu$, $\alpha\mu$, $\alpha\mu$
. . κτ. μέχρις αὐτῆς τῶν ὅρων πληθὺς τῷ π ἐξισω-
θεῖ.

Τηνικαῦτα γὰρ ἔσαι $\alpha\mu^{\pi-1}$, ἢ $\alpha\mu^0$. ἀλλὰ
 $\mu^0 = 1$. (§. 198.) ἄρα καὶ ὁ ὅρος = α . 1
= α . ὅπερ ὡς α'. ὅρος καὶ ἡμῖν παρελήφθη.

Ἐάν δὲ καὶ αὐθις τὴν Γεωμετρικὴν Προόδον
θεωρήσωμεν,

α , $\alpha\mu$, $\alpha\mu^2$, $\alpha\mu^3$, $\alpha\mu^4$, $\alpha\mu^5$, $\alpha\mu^6$. .

Εὐρίσκομεν, ὅτι οἱ δύο ἄκροι ὅροι, καὶ
αἱ δύο ἐπίσης ἀπὸ τῶν δύο ἄκρων ἀφαι-
σάμενοι, τὸ αὐτὸ παρέχουσι παραγόμενον. Ὡς οἱ α'.
 α , καὶ ὁ ἔσχατος $\alpha\mu^6 = \tau\omega \beta$. $\alpha\mu$, καὶ τῷ ζ .
 $\alpha\mu^5 = \tau\omega \gamma$. $\alpha\mu^2$, καὶ τῷ ϵ . $\alpha\mu^4$, κτ. Ἐ-
ναργέστερον δὲ δι' ἀριθμῶν. Ἐξω $\alpha = 3$. $\mu = 4$.

ἢ δὲ Πρόοδος 3, 3·4, 3·4², 3·4³, 3·4⁴, 3·4⁵. ἢ
3, 12, 48, 192, 768, 3072, κτ.

ἢς τὰ

ἥς τὰ παραγόμενα ἐκ τῶν ταῖς γραμμαῖς συνημμένων ὄρων ἴσα ἀλλήλοισ, ἦτοι $\equiv 9216$.

Εἰ οὖν, ὡς δέδεικται, γενικώτατα, ὁ α'. ὄρος

α κληθῇ, ὁ δ' ἔσχατος αμ $\pi-1$, ἀείποτε τὸ ἐκ δύο ἐπίσης αἰπὸ τῶν ἀκρῶν αὐθιζαμένων ὄρων παραγόμενον

$$\text{ἔσται } \alpha \cdot \alpha\mu \quad \pi-1 \quad \pi-1 \quad = \alpha^2 \mu.$$

§. 257. Τούτων κειμένων, ῥαδίως τὰ ἐξῆς ἐπιλυθῇσονται Προβλήματα. Δοθέντος τοῦ α'. ὄρου μετὰ τοῦ Ἐκθέτου τῆς Προόδου, καὶ τῆς πληθύος τῶν ὄρων, τὸν ἔσχατον ὄρον εὐρεῖν. Ὁ ἔσχατος ὄρος, $\pi-1$ αμ $\pi-1$. (§. ἀνωτ.) Ἐξω α $\equiv 3$. Ὁ ἐκθέτης μ $\equiv 2$. ἢ δὲ τῶν ὄρων πληθὺς, ἢ π $\equiv 17$. ὁ δὲ ἔσχατος $\equiv 3 \cdot 2^{17-1} \equiv 3 \cdot 2^{16}$. Ἐνθεντοι, ὁ 1 ἐξαρθένος εἰς τὴν 15'. δύν. καὶ εἶτα πολλαπλασιασένος τῷ 3. τόνδε τὸν τρόπον. (§. 191.)

$2^1 \cdot 2^1 = 2^2 = 4$. Ἀλλὰ $2^3 \cdot 2^2 = 2^4 = 4 \cdot 4 = 16$. Ἀθίς $2^4 \cdot 2^4 = 2^8 = 16 \cdot 16 = 256$. Καὶ $2^8 \cdot 2^8 = 2^{16} = 256 \cdot 256 = 65536$. Ὁ μετὰ τοῦ 3 ἔτι πολλαπλ. παρέξει τὸν ἔσχατον ὄρον $\equiv 196608$. Εἰ δ' ὁ α' ὄρος, ἢ α $\equiv 1$ ἦν, ἱκανὸν εἰς εὐρεσιν τοῦ ἔσχατου ὄρου τὸν Ἐκθέτην, καὶ τὴν τῶν ὄρων πληθύν εἶδέναι. Ὅτι ἢ 1 οὐ πολλαπλασιάζει.

Προκείσθω καὶ ἐν παράδ. τῆς μειωμένης σειρᾶς, ἥς ὁ ἐκθέτης κλάσμα. (§. 255.) Ἐξω α $\equiv 2$. μ $\equiv \frac{1}{3}$. ἢ δὲ τῶν ὄρων πληθὺς, ἢ π $\equiv 7$.

Ὁ οὖν ἔσχατος ὄρος $\equiv \alpha\mu \quad \pi-1$, καὶ τῶν ἀριθμῶν ἀντικαταστάντων ἐνταῦθα $\equiv 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} \equiv$

εἰς ἐλάσσονας ὅρους ἀποβραχύνειν οὐκ ἐνί.

Αὕτῃ δὲ ἡ σειρά.

$$2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \frac{2}{243}, \frac{2}{729}.$$

Δοθέντων τοῦ ἐσχάτου ὅρου, τῆς πληθύνους τῶν ὅρων, καὶ τοῦ Ἐκθέτου, τὸν α' εὗρεῖν. Κληθῆτω ὁ ἐσχάτος ὅρος ὀνόματι γενικωτάτῳ = β.

$$\begin{aligned} \text{Ὅθεν } \frac{\alpha \mu^{\pi-1}}{\alpha \mu^{\pi-1}} &= \beta & \pi-1 \\ \frac{\alpha \mu^{\pi-1}}{\mu^{\pi-1}} &= \beta & (\S. 114. \alpha.) \\ \frac{\mu^{\pi-1}}{\mu^{\pi-1}} &= \mu^{\pi-1} \end{aligned}$$

ἢ $\frac{\alpha}{\mu^{\pi-1}} = \beta$ Τουτ: ὁ α'. ὅρος ἴσος τῷ ἐσχάτῳ, διαιρεθέντι διὰ τοῦ Ἐκθέτου, εἰς δύναμιν ἐξηρμένου ἐλάττονα μονάδι τῆς τῶν ὅρων πληθύνος.

Ἐξω ὁ ἐσχάτος ὅρος τῆς Προόδου 18, ἥτοι β = 18. Ἡ δὲ τῶν ὅρων πληθὺς 5, ἥτοι π = 5. Ὁ δ' ἐκθέτης 2, τουτ μ = 2. Ἐστὶ δὴ ὁ α'. ὅρος α = $\frac{18}{2^{5-1}} = \frac{18}{2^4} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$. Ἡ οὖν σειρά προαχθεῖ

οὕτως $\frac{9}{8}, \frac{18}{8}, \frac{36}{8}, \frac{72}{8}, \frac{144}{8}$. ἢ διαιρεθέντος, ὅπερ ἐνεργείᾳ διαιρεθῆναι δύναται, ἔσται $\frac{9}{8}, 2\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2}, 9, 18, \dots$ Αὐθις, τοῦ α' καὶ β'. ὅρου τῆς Γεωμετρικῆς δοθέντων προόδου,

ῥα α οἱ ἐπόμενοι εὐρεθήσονται. Εἰ β' ὅρος διὰ τοῦ α'. διαιρεθῇ, προκύψει ἑτέης (§. 254.) τῆς Προόδου, μεθ' οὗ ἕκαστος πολλαπλασιασθῇς τὸν ἐπόμενον παράξει.

Εἰς καθόλου ὁ α'. ὅρος = α. Καὶ ὁ β'. Τοῦν αμ δίδωσι πηλίκον τὸ μ, ἦτοι τὸν

α
την, δι' οὗ πάντας τοὺς ἐπομένους ὅρους τῆς αὐτοῦ εὐχερῶς ἂν εὕρομεν, ἦτοι αὐξούσης, ἡμείου- (§. 255.)

Παράδειγμα. Τεθῇτω ὁ α'. ὅρος = 4. ὁ β'.

Ὁ ἄρα ἑκτέης = $\frac{9}{4}$. ἐπὶ τοῦτο τὸ κλάσμα πολλαπλασιασθῇτω ἕκαστος ὅρος, ἦτοι α'. ὁ β'. τὸν $\frac{9}{4}$, καὶ τὸ παραγόμενον $\frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$. ἔσται ὁ γ'. Ὅς αὐθις μετὰ τοῦ $\frac{9}{4}$ πολλαπλασιασθῇς αὐτὸν δ'. ὅρον, καὶ αὐτὰς ἐφεξῆς. Ἡ Πρόοδος 4, 9, $20\frac{1}{4}$, $45\frac{9}{16}$, $102\frac{33}{64}$, κτ.

Εἰς α'. ὅρος 5, ὁ β'. 1, ὁ δ' ἑκτέης $\frac{1}{5}$. πρόοδος

5, 1, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{625}$, κτ.

Εἰάν ὁ α'. ὅρος τῆς Προόδου μὴ 1 ᾖ, εὐχερῶς τοῦτον εἰς μονάδα τρέψομεν, τῇ ῥέσει ἀπάντων τῶν ὅρων διὰ τοῦ α'. Καὶ τούτου γεγονότος, προκύψει σειρά, τὸν ἑκτέην, καὶ τὸν αὐτὸν λόγον τῇ προτέρᾳ α.

Εἰς ἐν γένει ἡ σειρά α, αμ, αμ², αμ³, αμ⁵. κτ.

Ἦτις διαιρεθ. διὰ τοῦ α ἔσται 1, μ, μ², μ⁴, μ⁵, κτ. τὰς δυνάμεις τοῦ μ μόνον πα.

Καὶ

Καὶ δυνάμεισ' αἶρα οἴαντοσιν σειράν εἰς τοιαύτην ἀνάγειν, ἥς ὁ α'. ὄρος = 1.

Παράδειγμα. Ἐξω ἡ σειρά . 2 , 6 , 18
54 . 162 , 486 κτ.

Ἡς ὁ ἐκθέτης = 3. Ἀπάντων οὖν τῶν κατ' αὐτὴν ὄρων διὰ τοῦ 2 διαιρεθέντων, ὁ μὲν α'. ὄρος = 1 γενήσεται, ἡ δὲ σειρά =

1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 . κτ. οἵτινες δυνάμεις εἰσὶ τοῦ 3.

§. 258. Καὶ ἑτεράτινα τῶν Προβλημάτων ὥστερ' ἐχοιμένας ὑποσυνάψομεν, διὰ τῶν εἰρημένων προχείρως ἤδη ἔχει ἐπιλυθῆναι.

Ἐπὶ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου εὐρήσομεν καὶ τοὺς μέσους ὄρους, τῶν ἁκρῶν δοθέντων. ὁ ἐστὶ, μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν ἓνα, ἢ πλείους ἀριθμοὺς συνεχῶς ἀναλόγους, (§. 234.) Ἀλλὰ πρὸ τούτου, ἐπιμνηστέον τῶν ἐν §. 200. περὶ τῶν Ποσοτήτων, ἐν αἷς ῥιζικὸν σημεῖον $\sqrt{}$ ἀπαντᾷ, προηγουμένως ῥηθέντων.

Οἱ δύο δοθέντες ἀριθμοί, ὧν μεταξὺ ἓνα, ἢ πλείους συνεχῶς ἀναλόγους εὐρεῖν δεοί, ὁ α'. καὶ ὁ ἐσχάτος ὄρος τῆς Γεωμετρικῆς τυγχάνουσι Προόδου. Ἐπειδὴ οὖν δέδονται, ὁ μὲν α'. ἀριθμὸς α ῥηθῇτω, ὁ δ' ἐσχάτος β. Καὶ α'. ζητηθῇτω μεταξὺ τούτων εἰς μέσους ἀνάλογος, ὅς = χ τεθῇτω. Ἡ πρόοδος οὖν εἴη α, χ, β. Γνωσὸν δὲ, τὰ ἐκ τῶν ἁκρῶν παραγόμενα, καὶ τὰ δύο ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἁκρῶν ἀφισαμένων ὄρων, ἴσα ἀλλήλαις εἶναι. (§. 256.) Τὸ δὲ χ ἐν μέσῳ κεῖται. Ἀφίσταται ἄρα ἀπὸ τῶν δύο ἁκρῶν ἐπίσης. Ὡστε ἀναγκαῖον ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθῆναι. Ἐστὶ γάρ α : χ = χ : β. Καὶ αβ = χ². Ἐκ δύο δὲ ἴσων Ποσοτήτων καὶ αἱ ἐξαχθεῖσαι $\sqrt{}$ ἴσαι.

ἴσαι $\sqrt{a\beta} = \sqrt{\chi^2}$. ἢ $\sqrt{a\beta} = \chi$. Ἄλλ' ἐπεὶ οὕτω τὴν ρίζαν ἐξάγειν ἐδιδάχθημεν, ἱκανὸν ἐν τοσούτῳ καὶ τὸ $\sqrt{}$ σημεῖον.

Παράδ. δι' ἀριθμῶν. Ἐστω ὁ α' . ὄρος, ἥτοι $\alpha = 4$. Ὁ ἔσχατος $\beta = 9$. Ὁ ἄρα μέσος ἔσαι $= \sqrt{4 \cdot 9}$. ἢ $\chi = \sqrt{36} = 6$. Ἡ δὲ πρόοδος 4, 6, 9. ἣς ὁ ἐκθέτης $= \frac{3}{2}$. Συμβαίνει δὲ πολλάκις μεταξὺ δύο ἀριθμῶν πλείους συνεχῶς ἀναλόγους ζητεῖσθαι. π. χ. τρεῖς. Τῶν δύο δοθέντων ὁ μὲν α' . ἔστω $= \alpha$. ὁ δ' ἔσχατος $= \beta$. Ζητεῖσθωσαν ἤδη τύποι α' . τῶν ὄρων, τῶν εἰς ζήτησιν προκειμένων, οὓς κατὰ τὸν τῆς ἀναλογίας κανόνα εὐρήσομεν. Ἐστω ὁ α' . τῶν εὐρεθησομένων ὄρων $= \chi$. Ἐνθεντοὶ κατὰ τὸ §. 254. ἔσαι $\alpha : \chi = \chi : \frac{\chi^2}{\alpha}$.

Καὶ $\chi : \frac{\chi^2}{\alpha} = \frac{\chi^2}{\alpha} : \frac{\chi^3}{\alpha^2}$. Ἡ δὲ Πρόοδος $\alpha, \chi, \frac{\chi^2}{\alpha}, \frac{\chi^3}{\alpha^2}, \beta$. Ἐστὶ δὲ §. 255.

$$a\beta = \chi \cdot \frac{\chi^3}{\alpha^2}.$$

$$\text{Ἡ } a\beta = \frac{\chi^4}{\alpha^2}$$

$$\frac{a^3\beta}{\alpha^3} = \frac{\chi^4}{\alpha^3}, \alpha^2 (\S. 79. \alpha').$$

$$\text{Καὶ } (\S. 200.) \sqrt[4]{a^3\beta} = \sqrt[4]{\chi^4} = \chi^{\frac{4}{4}} = \chi.$$

Ἐνθεντοὶ εἰς εὐρέσιν τοῦ χ , τὴν τετραπλὴν ρίζαν τοῦ $\alpha^3\beta$ ἐξαγαγεῖν δεήσει. Οὐ γεγανότας, ἀπαντες οἱ ἐπόμενοι ὄροι πολλαπλασιασμῷ μόνῳ εὐρεθῆσονται. Προκείσθω καὶ τοῦτου παράδειγμα εἰς ἀναπτύξιν τοῦ ῥηθέντος.

ο

Ὁ α'. ὅρος, ἢ α' ἔσω = 1. Ὁ δ' ἔσχατος β = 81. Ὡστε, τριῶν μέσων ὄρων ζητουμένων, ἔσαι τούτων ὁ α'. ἢ χ = $\sqrt[4]{1^3 \cdot 81}$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ 1 αἰ 1 μένει. Ἔσαι χ = $\sqrt[4]{81}$, ὁ ἔξω = 3. Ἐάν γάρ 3 εἰς δ'. ἐξαρθῇ δύναμιν, ἔσαι = 81. Ἀρα καὶ ἡ τετραπλῇ $\sqrt$ τοῦ 81 = 3. Ἡ δὲ σειρά 1, 3, 9, 27, 81.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, τουτ' : δι' ἐξαγωγῆς τῆς ρίζης, δυνάμεθα καὶ τὸν α'. καὶ ἔσχατον ὄρον εὐρεῖν, δοθέντων τοῦ παραγομένου ἐκ τῶν δύο ἄκρων, τῆς πληθύος τῶν ὄρων, καὶ τοῦ Ἐκθέτου.

Ἔσω δεδομένον τὸ παραγόμεν. ἐκ τῶν δύο ἄκρων ὄρων = ε. Ὁ Ἐκθέτης δεδομένος = μ. Ὡσαύτως καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὄρων = π. Ἔσω ὁ α'. ὅρος ἀγνωστος = χ. Ὁ ἔσχατος παραπλησίως = ψ. Τὸ ἐκ τῶν δύο ἄρα ἄκρων παραγόμενον ἔσαι

$$\frac{\varepsilon}{\chi} = \frac{\chi\psi}{\chi} : \chi \quad (\S. 114. \alpha'.)$$

$$\frac{\varepsilon}{\chi} = \psi \quad \text{Ἀλλ' ἐπεὶ ὁ α'. ὅρος} = \chi. \\ \text{κατὰ τὸ } \S. 256. \text{ ἔσαι}$$

$$\frac{\chi\mu^{\pi-1}}{\chi} = \psi$$

$$\frac{\varepsilon}{\chi} = \chi\mu^{\pi-1} \quad (\S. 48. \delta'.)$$

$$\frac{\varepsilon}{\chi} = \chi^2\mu^{\pi-1} \quad \cdot \chi \quad (79. \alpha'.)$$

$$\frac{\varepsilon}{\mu^{\pi-1}} = \chi^2 \quad : \mu^{\pi-1} \quad (\S. 114. \alpha'.)$$

$$\frac{\varepsilon}{\mu^{\pi-1}} = \chi^2 \quad \text{Καὶ ἐξ ἀμφοῖν τῶν Ποσοτή-} \\ \text{των τῆς ρίζης ἐξαχθεῖ} \\ \text{σης.}$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\mu^{\pi-1}}} = \sqrt{\chi^2} = \chi.$$

$$\sqrt{\mu^{\pi-1}}$$

Οὕτω.

Οὕτω τῶν τούτων τοῦ χ , ἦται τοῦ α' ὅρου εὐρεθέντος,
 $\delta\alpha\sigma\alpha$ καὶ τὸ ψ , ἦται ὁ ἔσχατος, εὐρεθήσεται. Ἐξί γὰρ
 (§. 256.) $= \chi^{\pi-1}$. ἢ καὶ $= \frac{\varepsilon}{\chi}$. "Οτι,

ὡς εἶδομεν, $\frac{\varepsilon}{\chi} = \chi^{\pi-1}$. Τὸ δὲ χ εὐρίσκεται.

Παράδ. Ἐξω τὸ παραγόμεν. ἐκ τῶν δύο ἀκρων,
 ἢ $\varepsilon = 49$. Ὁ ἐκθέτης, ἢ $\mu = 2$. Ἡ τῶν ὁ-
 ρων πληθὺς, ἢ $\pi = 5$. Τὸ οὖν χ , ἢ ὁ α' ὅρος
 ἔσται $= \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2^{5-1}}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2^4}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}}$.

Ἐκ τούτων οὐ χαλεπὸν τὴν ρίζαν ἐξαγαγεῖν,
 καίτοι περὶ ταύτης οὐδὲν ἔτι διαλαβοῦσιν. Ἀμφω γὰρ
 αἱ Ποσότητες τῷ Πυθαγορικῷ (§. 59.) ἐνυπάρχου-
 σι πίνακι. Ἐνθεντοί $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}} = \frac{7}{4} = 1 \frac{3}{4}$. Ὁ

ὁ ἔσχατος ὅρος $= \frac{\varepsilon}{\chi} = \frac{49}{\frac{7}{4}} = 49 \cdot \frac{4}{7} =$

$\frac{196}{7} = 28$. Καὶ ἐπεὶ $\mu = 2$, ἡ σειρά οὕτως ἂν
 χωροῖται $\frac{7}{4}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, ἢ $1\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{2}$,
 7 , 14 , 28 .

Ὁ ἐν τοιούτοις παραδείγμασιν ἑαυτὸν ἐξασκῶν
 καλῶς ποιήσει, μετὰ τὸ τὴν περὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς
 ρίζης διδασκαλίαν (περὶ ἧς μετ' ὀλίγα ἐροῦμεν)
 ἐκμαθεῖν.

§. 259. Ἀπαντες οἱ ὅροι τῆς Γεωμετρικῆς
 Προόδου, ἅμα ληφθέντες, ἀποτελοῦσιν ἓν κεφάλαιον.
 Δοθέντων οὖν τῶν ὁρων, ἢ εὐρεθέντων, κατὰ τὰ ἄνωτ.
 εὐρεθῇ ἂν τὸ κεφάλαιον τούτων, τῇ προσέσει. Ἀλ-
 λά τοῦτο ἐν προσόδοις, ὧν οἱ ὅροι εἰς μέγα πλήθος
 Q ἐκτελεί.

ἐκτείνονται, λίαν ἐργῶδες. Ἐνθεντοὶ καὶ περὶ
 τοῦ βραχεϊάντινα ὑποσυνάψωμεν μέθοδον. Εἰς
 σιν τοῦ κατὰ τὴν Γεωμετρικὴν Προόδου κεφαλαι
 ἀναγκαία ἡ γνῶσις τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ ἑσ
 του ὅρου, καὶ τοῦ ἐκθέτου. Οὗτοι δὲ
 δεδομένοι, ἢ ζητητέοι, κατὰ τὰ Προβλήματα τὰ
 γηγέντα. Ταῦτα γὰρ τὰ τρία ἐξ ἀνάγκης ἀπαι
 τύπος, ὅν εἰς εὗρεσιν τοῦ κεφαλαίου ὑποδείξει βα
 μεθα. Ζητηθήτω τοίνυν ἐν γένει τὸ τῆς Προόδου
 Φάλαιον.

Ἐξω ὁ α'. ὅρος = a . Ὡς οὖν ὁ ἔσχατος
 $a\mu^{\pi-1}$, εἰάν ἡ τῶν ὅρων πληθὺς =
 K ἄρα, ἦτοι τὸ κεφάλαιον ἀπάντων τῶν
 ὅρων, ἔσαι

$K = a + a\mu + a\mu^2 + a\mu^3 \dots a\mu^{\pi-2} + a\mu^{\pi-1}$ §. 1
 ἦτοι ἀπάντων τῶν μ πολλαπλασιασθέντων, προκύψει

$\mu K = a\mu + a\mu^2 + a\mu^3 + a\mu^4 \dots a\mu^{\pi-1} + a\mu^{\pi}$ §. 2

Ἐκαστος ἄρα ὅρος αὖξει μιᾷ δυνάμει τοῦ μ .

τεῦθεν καὶ ὁ ἔσχατος $a\mu^{\pi-1}$, πολλαπλασιασ
 μετὰ τοῦ μ , ἔσαι $a\mu^{\pi-1+1} = a\mu^{\pi}$. (§. αὐτ.)

Ἄφελε ἤδη τὰς δύο σειρὰς ἀπ' ἀλλήλων.
 ἵνα τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων ἀφαιρεθῇ, οἱ ὅροι τῆς
 σειρᾶς ὑποτεθήτωσαν ὑπὸ τοὺς τῆς τῶν μ πολλαπλα
 σθείσης οὕτως, ὥς τοὺς ἴσους ὑπαλλήλους εἶ
 Ὡς

$$\mu K = \alpha\mu + \alpha\mu^2 + \alpha\mu^3 + \alpha\mu^4 \dots \alpha\mu^{\pi-1} + \alpha\mu^{\pi}$$

$$K = \alpha + \alpha\mu + \alpha\mu^2 + \alpha\mu^3 + \alpha\mu^4 \dots \alpha\mu^{\pi-1}$$

$$\mu K - K = -\alpha + \alpha\mu^{\pi}$$

Καὶ ἐνεργείᾳ τῆς ἀφαιρέσεως γεγόνυϊας, ὑπολεί-
πεται $\mu K - K = -\alpha + \alpha\mu^{\pi}$, ἢ $\alpha\mu^{\pi} - \alpha$. Τὸ
γὰρ $\alpha\mu^{\pi}$ μόνον τῶν μειωτέων ὅριον οὐκ ἀνῆρέθῃ ὑπὸ
τινος ἀφαιρετέου. Ὡσαύτως καὶ τὸ α τοῦ ἀφαιρε-
τέου ἐτέθῃ ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐναντίω τῷ σημείῳ,
(§. 49.) ὡς ἀπότινος ἀφαιρεθῆναι μὴ ἔχον. Ὡσε

$$\mu K - K = \alpha\mu^{\pi} - \alpha, \text{ ἢ}$$

$$(\mu - 1) K = \alpha\mu^{\pi} - \alpha \quad \text{ἀμεινον ἐκδηλωθέν.}$$

$$: \mu - 1.$$

$$(\mu - 1) K = \alpha\mu^{\pi} - \alpha \quad \text{ταυτέσι.}$$

$$\frac{\mu - 1}{\mu - 1} K = \frac{\alpha\mu^{\pi} - \alpha}{\mu - 1} \quad \text{Τὸ δὲ ἦν τὸ ζητούμενον.}$$

Τὸ κεφάλαιον ἄρα οἰασοῦν Γεωμετρικῆς Προό-
δου εὐρίσκεται, ἐὰν ὁ α'. ὅρος μετὰ τοῦ ἐκθέ-
του πολλαπλασιασθῇ, εἰς δύναμιν ἡρμέ-
νου, ἡλικίᾳ ἢ τῶν ὁρῶν πληθὺς, καὶ ἀπὸ
τοῦ παραγομένου ὁ α'. ὅρος ἀφαιρεθῇ,
καὶ εἴτα ἡ διαφορὰ διὰ τοῦ ἐκθέτου,
ἀφ' οὗ α'. ἢ μονᾶς ἀφαιρετέα, διαιρεθῇ.

Παράδειγμα. Προκειμένου εἰδέναι τὸ κεφάλαιον
τῆς ἐξῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, ἥς οἱ ὅροι 1, 2,
4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. Εὐρετέος α'.

ὁ ἐκθέτης κατὰ τὸ §. 257. ὅς ἐνταῦθα. = 2. Οἱ
δὲ ὅροι 9. Ὡς α = 1. μ = 2. π = 9. Τὸ
δὲ κεφάλ., ἀπάντων τῶν ὅρων, ἢ $K = \frac{1 \cdot 2^9 - 1}{2 - 1}$

$$= \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = \frac{2^9 - 1}{1} = 2^9 - 1. \text{ Ἡ}$$

δ' ἐνάτη δύναμις τοῦ 2 = 512 - 1 = 511 =
τῶ κεφαλαίῳ τῶν τῆς Προόδου ὅρων.

Ἐξω ὁ α'. ὅρος 3. Ἡ πληθὺς τῶν ὅρων 10.
Ὁ ἐκθέτης $\frac{3}{2}$. Τὸ ἄρα κεφαλ. τῆς ὀλικῆς Προόδου
 $K = 3 \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 3}{\frac{3}{2} - 1}$

$$\frac{3^{10}}{2^{10}} = \frac{59049}{1024}. \text{ Ἐνθενταί } K = 3 \cdot \frac{59049}{1024} - 3$$

$$= \frac{177147}{1024} - 3 = \frac{177147 - 3072}{1024} = \frac{174075}{1024} =$$

$$\frac{174075}{1024} \cdot \frac{2}{1} = \frac{348150}{1024} = 339 \frac{1014}{1024} = 339 \frac{307}{512} =$$

τῶ κεφ. τῆς Προόδου.

Ἡ δὲ σειρά ἦδε. 3, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{4}$, 115 $\frac{109}{512}$.

ἢ 3, $4\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{4}$, 115 $\frac{107}{512}$.

Παράδειγμα μειωμένης σειράς. Ἐξω ὁ α'. ὅρος
8. Ὁ ἐκθέτης $\frac{2}{3}$. Ἡ τῶν ὅρων πληθὺς 7. Ὡς

$$K = \frac{a\mu^{\pi} - a}{\mu - 1} \text{ ἐνταῦθα } = 8 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^7 - 8}{\frac{2}{3} - 1}$$

$$\text{Τὸ δὲ } \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{2^7}{3^7} = \frac{128}{2187}. \text{ Τούτ: } K =$$

8, $\frac{127}{2187}$

$$8 \cdot \frac{128}{218} - 8 = \frac{1024 - 17496}{218} = - \frac{16472}{218} = - \frac{3}{1}.$$

Καὶ ἐνεργεία τῶν δύο ἀποφατικῶν Ποσοτήτων πολ-
 λαπλασιασθεισῶν $= + \frac{49416}{2187} = 22 \frac{1302}{2187} = τῷ$
 κεΦ. ὅλης τῆς Προόδου. Σειρά δὲ ἦδε. 8, 5 $\frac{1}{3}$,
 3 $\frac{1}{3}$ $\frac{512}{729}$.

Ἐὰν ἡ γνωστὰ 1) τὸ κεφάλ. $= K$. 2) ὁ α'.
 ὅρος α. 3) ὁ ἔσχατος β. 4) ὁ ἐκθέτης μ. 5)
 καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὄρων π, καὶ ἐκ τούτων τῶν πέντε
 μόνον τρία δοθῇ, τὰ λοιπὰ δύο αἰεὶ εὗρεθῆσεται δι' ἐκεί-
 νων. Ὡν τινὰ προβλήμ. ἐπιλέλυνται, ἕτερα δὲ Λογα-
 ριθμικῶς ἐπιλύονται, καὶ δι' Ἐξισώσεων, περὶ ὧν ἐν
 οἰκείῳ τόπῳ.

260. Ἀλλὰ καὶ Προόδους παριστάνει τῇ διαγοίᾳ
 δυνάμεθα, ἐπ' ἀπειρον χωρούσας, καὶ ζητεῖν, εἰ καὶ
 τὰ τούτων κεφάλαιον εὗρεθῆναι δυνατόν. Ἐπὶ μὲν
 οὖν τῆς μειουμένης σειρᾶς τὸ ζήτημα καταφύσκει, ἥς
 ὁ Ἐκθέτης ἐλάττων τῆς 1. ἦτοι γνήσιον κλάσμα. Τη-
 νικαῦτα γὰρ οἱ ὅροι οὕτω τελευταῖον ἀπομεινύονται,
 ὥς ἴσους τῷ μηδενὶ ἐκλογίζεσθαι. Εἰ δ' ὁ ἐκθέτης μεί-
 ζων τῆς 1, οἱ ὅροι ἀυξηθήσονται διηνεκῶς, καὶ τελευ-
 ταῖον ἐν ἀπείροις ταῖς σειραῖς, ἔσονται καὶ οὗτοι ἀπεί-
 ρως μέγιστοι. Τῆς οὖν τοιαύτης σειρᾶς τὸ κεφάλαιον
 ἀμήχανον εὗρεῖν, ὥς καὶ ἡ τοῦ πράγματος φύσις δι-
 δάσκει. Τῶν δὲ μειουμένων ἀπείρων σειρῶν ταῖς μὲν οἱ
 ὅροι πάντες καταφατικοὶ, ταῖς δὲ τὰ ἐνόντα σημεία
 ἐναλλάξ ἐπαμείβονται. Ὡν ἀμφοῖν ἐν γένει τὸν
 τύπον, καὶ τὴν δεῖξιν ἐποιήσομεν.

Καὶ α'. τοῦ α'. Ἐξω ὁ α'. ὅρος $= α$. Ὁ
 τῆς προόδου ἐκθέτης γνήσιον κλάσμα $= \frac{β}{γ}$.

τούτων οὐκ ἀναγκαῖον εἰδέναι.

Ἡ

Ἡ σειρά ἔσαι ἄρα

$$\alpha + \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} : \text{ καὶ οὕτως } \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} \dots \text{ ἐπ' ἄπειρον.}$$

Ὅθεν τὸ κεφάλαιον αὐτῆς, ἢ

$$K = \alpha + \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} \dots \text{ ὁμοίως ἐπ' ἄπειρον.}$$

Πολλαπλασιασθῆτωσαν μετὰ τοῦ $\frac{\beta}{\gamma}$

$$\text{Καὶ ἔσαι } K \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} + \frac{\alpha\beta^6}{\gamma^6} \dots \text{ ἐπ' ἄπειρον.}$$

Ἐνθα ἐφ' ἐκάστου ὅρου, εἰ καὶ ἐπ' ἄπειρον ἡ σειρά νοοῖτο, ἡ δύναμις τοῦ β καὶ γ διηνεκῶς μονάδι ἐπαύξεται.

Ἐὰν οὖν ἀπὸ τῆς α . σειράς ἢ β . ἀφαιρεθῇ, ἥτις ἐλάσσων τῆς α . ὡς κλάσματι πολλαπλασιασθεῖσα, τῶν ἴσων ὅρων ὑπαλλήλων τεθέντων, ὅπερ μέχους ἐπ' ἄπειρον νοηθῆναι γοῦν ἔχει, ἦτοι

$$K = \alpha + \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} + \frac{\alpha\beta^6}{\gamma^6} \dots$$

$$K \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} + \frac{\alpha\beta^6}{\gamma^6} \dots$$

ὑπολειφθήσεται

$$K - K \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \alpha. \quad \text{Οἱ δὲ λοιποὶ ὅροι ἀναίρουσιν ἀλλήλους, Ἡ τοῦ λειψάνου καταληγνότερον ἐξενεχθέντος.}$$

$$\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) K = \alpha.$$

$$K = \frac{\alpha}{1 - \frac{\beta}{\gamma}} : \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) (\S. 114. \alpha')$$

"Η καὶ τῆς μονάδος κλάσματος γεγονυίας"

$$K = \frac{\alpha}{\frac{\gamma - \beta}{\gamma}}$$

"Ο καὶ οὕτως ἂν παραστή"

$$K = \alpha : \frac{\gamma - \beta}{\gamma} \quad \text{τουτέστι} (\S. 148. \text{καν.})$$

$$K = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\gamma - \beta} = \frac{\alpha \gamma}{\gamma - \beta}.$$

Εὐρήσομεν τοίνυν τὸ κεφάλαιον τῆς ἐπ' ἄπειρον προόδου, ἥς οἱ ὄροι καταφατικοί, ἐὰν ὁ α' ὄρος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν παρονομασὴν τοῦ Ἐκθέτου, καὶ τὸ παραγόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ παρον. τοῦ Ἐκθέτου, ἀφαιρεθέντος ἀπ' αὐτοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ Ἐκθέτου.

Παράδειγμα. Ζήτησον τὸ κεφάλ. τῆς ἀπείρου σειράς, τῆς ὧδε χωρούσης.

3, 2, $1\frac{1}{3}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{16}{27}$ καὶ οὕτως ἐπ' ἄπ.

Ἐνταῦθα ὁ α' ὄρος, ἢ $\alpha = 3$. Ὁ ἐκθέτης, ἢ τὸ κλάσμα $= \frac{2}{3} = \frac{\beta}{\gamma}$. Εἰ γὰρ μετὰ $\frac{2}{3}$ πολλαπλασιάσομεν, ἔσται τὸ παραγόμεν. $= 2$
 $=$ τῷ β'. ὄρῳ. Ὡς $\beta = 2$. Καὶ $\gamma =$

$$\gamma = 3. \text{ Ἄρα } K = \frac{\alpha\gamma}{\gamma - \beta} = \frac{3 \cdot 3}{3 - 1} = \frac{9}{2}.$$

$\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$. Καὶ τοῦτο ἐστὶ τὸ κεφάλαιον τῆς ἀπείρου ταύτης σειρᾶς.

Αὐθις. Ζητηθῆτω τὸ κεφ. τῆςδε $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, καὶ οὕτως ἐπ' ἄπ.

$$\text{Ἐνθα } \alpha = \frac{1}{2}. \text{ Ὁ ἐκθέτης, ἢ } \frac{\beta}{\gamma} =$$

$$\text{Ὡς } \beta = 1, \text{ καὶ } \gamma = 2.$$

$$\text{Ὁθεν } K = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{2 - 1} = \frac{2}{1} = \frac{1}{1} =$$

τῷ κεφαλαίῳ ταύτης.

Εὐρεθῆτω τὸ κεφάλαιον τῆς σειρᾶς $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{25}$, $\frac{1}{125}$, καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον. Ἐνθα $\alpha =$

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{2}{5}. \text{ Ὡς } \beta = 2, \text{ καὶ } \gamma = 5.$$

$$\text{τὸ κεφάλαιον} = \frac{\frac{2}{5} \cdot 5}{5 - 2} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} =$$

τῷ κεφαλαίῳ τῆς ἀπείρου σειρᾶς.

Εἰ δὲ τὰ σημεῖα ἐναλλάξ ἐπαμβιβάζονται, τὸν ὡσαύτως ἐν μειομένη σειρᾷ τύπον τοῦ κατ' ἀποδοῦναι κεφαλαίου. Ἐξω αὐθις ὁ α'. ὅρος ὁ δ' ἐκθέτης γνήσιον κλάσμα $= \frac{\beta}{\gamma}$. Καὶ ἐξ

$$\text{ὀλικὸν κεφάλαιον τῆς ἀπείρου σειρᾶς, ἢ } K = \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} - \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} \dots \text{ ἐπ' ἄπειρον}$$

Πολλαπλασιάσων ἤδη ὅλην τὴν σειρὰν τῆς

Διὰ τούτου ἕκαστος ὅρος μέχρις ἐπ' ἄπειρον αὐξηθήσεται κατὰ μίαν δύναμιν, τὴν $\frac{\beta}{\gamma}$. οὕτω

$$K \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} - \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} - \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} \dots$$

ἐπ' ἄπειρον.

Πρόσθες τῇ σειρᾷ, τῇ τῷ K ἀνηκούσῃ, τὴν σειράν, τὴν τῷ $K \cdot \frac{\beta}{\gamma}$ προσήκουσαν, τοὺς ἴσους ὅρους ὑπαλλήλους καταγράφας, οὕτω

$$K = \alpha - \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} - \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} \dots$$

$$K \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} - \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} - \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} \dots \text{ "Ωςτε}$$

$$K + K \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \alpha \dots \text{ Οὐδὲν γὰρ ἄλλο ὑπολεί-}$$

πεται.

$$\text{Τοῦτο δὲ ἁρμοδιώτερον ἐκφανθὲν εἴη } \left(1 + \frac{\beta}{\gamma}\right) K = \alpha.$$

$$\text{ἢ } \left(\frac{\gamma + \beta}{\gamma}\right) \cdot K = \alpha.$$

$$\text{Καὶ διελὼν ἄμφω διὰ τοῦ } \frac{\gamma + \beta}{\gamma} \text{ εἴς } K = \frac{\alpha}{\frac{\gamma + \beta}{\gamma}}$$

$$= \alpha \cdot \frac{\gamma}{\gamma + \beta}. \text{ (§. 148. κ.) } \text{"Ο τὸ κεφάλαιον τῆς}$$

τοιαύτης σειράς καταλλήλως ἐμφαίνει.

Παράδειγμα. "Εξω ἡ σειρά

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{4}{27}$$

Ἐνθα $\alpha = \frac{3}{4}$. Ὁ ἐκθέτης, ἢ $\beta = \frac{2}{3}$.

$$\text{Ὡς } \beta = 2. \gamma = 3. \text{ Καὶ } K = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2} = \text{τῷ κεφαλαίῳ.}$$

$$\text{Ἐξω ἢ σειρὰ } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots$$

$$\alpha = 1. \beta = \frac{1}{2}. \text{ Ὡς } \beta = 1.$$

$$\gamma = 2. \text{ ἄρα}$$

$$K = \frac{1 \cdot 2}{2 + 1} = \frac{2}{3}.$$

§. 261. Πρὶν ἢ πέρας τῷ περὶ Γεωμετρικοῦ Προόδου κεφαλαίῳ ἐπιθεῖναι, δέδοκται δι' ἐνὸς δείγματος, ἐκ τοῦ κοινοῦ εἰλημμένου βίου, τὴν τοῦδε ἀναπτύξαι διδασκαλίαν.

Ἀνὴρ τις τὸν βίου καταλύσας τὴν ἑαυτοῦ διέθετο περιουσίαν, ὥς τε τῶν εἰς υἱέων τὸν μὲν 1500 κομίσασθαι μνᾶς. Ἐκασον δὲ τῶν ἐπομέων πλέον, ἢ ὁ προηγησάμενος ἐκομίσαστο. Ζητήσῃ ἡ περιουσία, καὶ πόσον ἕκαστος ἐκομίσαστο.

Ἐνταῦθα Γεωμετρικὴν πάρεισι πρόσδος, ἥς $\alpha = 5$. Οἱ γὰρ υἱεῖς τοσοῦτοι. Ὁ δ' Ἐκθέτης $\beta = \frac{3}{2}$. Ὁ γὰρ ἐπόμενος $\frac{1}{2}$ πλέον, ἢ ὁ προηγησάμενος κομίσαστο. Ὁ α'. ὅρος 1500 τυγχάνει. Ἐκ τούτου εὐρεθήσεται τὸ κεφάλαιον αὐτῆς, ὃ ἡ ἐπίλυσις τοῦ ζητήματος. Ἔστι γάρ (§. 259.)

$$K = \frac{\alpha \mu^\pi - \alpha}{\mu - 1} = \frac{1500 \left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1500}{\frac{3}{2} - 1}$$

$$3^5 \left(\frac{3}{2} \right)^5 = \frac{243}{32}.$$

$$\text{Ἄρα } K = \frac{1500 \cdot \frac{243}{32} - 1500}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{9890 \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$= 9890 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 19781 \frac{1}{2}$ μυνών = πάση τῇ περιουσίᾳ. Ἡ δὲ πρόσδος προβαίη ἂν οὕτω.

$$1500 + 1500 \cdot \frac{3}{2} + 1500 \left(\frac{3}{2} \right)^2 + 1500$$

$$\left(\frac{3}{2} \right)^3 + 1500 \left(\frac{3}{2} \right)^4 = 1500 + 2250$$

$+ 3375 + 5062 \frac{1}{2} + 7593 \frac{3}{4}$. Ἄπερ καὶ αἱ τῆς κληρονομίας μερίδες. Καὶ ταῦτα μὲν ἀρκούν-
τος περὶ τούτων. ῥητέον δέ τι καὶ

Περὶ τοῦ Ἀπείρου.

§. 262. Κυρίως οὐδεὶς ἀριθμὸς, ἢ Ποσότης δίδεται, ὅς τῷ ὄντι ἀπείρως μέγιστος, ἢ ἀπείρως ἐλάχιστος τυγχάνει. Ὅσω γὰρ ἂν μέγιστος ὁ ἀριθμὸς ἦ, ὅν τῇ διανοίᾳ παρεστήσαμεν, δυνάμεθα μὲν τὸν αὐτὸν τοῦτον ἐπινοῆσαι καὶ διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, κτ. Παραπλησίως καὶ ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς, τῇ ἐπινοίᾳ γοῦν, διαιρεθήσεται εἰς μέρη. Ὡςτε Ἀπείρως μέγιστον, καὶ ἀπείρως ἐλάχιστον λέγονται καταχρηστικῶς, δηλοῦντα, οὕτω ποσότητά τινα ἐπαυξῆσαι, ἢ μειωθῆναι, ὥςτε πρὸς οὐδεμίαν ἑτέραν ποσότητα παραβάλλεσθαι, ἀλλὰ πᾶσαν ποσότητα πρὸς τὴν οὕτως ἐπαυξῆσθαι, ὥς τὸ μηδὲν λογίζεσθαι, καὶ τὴν οὕτω μειωθῆσαν ἐν τῷ ὑπολογισμῷ πρὸς πᾶσαν ἑτέραν ὥς τὸ μηδὲν θεωρεῖσθαι. Τῇ οὖν ἐπινοίᾳ παραστήσομεν τὴν ποσότητα μᾶλλον, καὶ μᾶλλον αὐξομένην, καὶ εἰς τοσοῦτον μέγεθος ἀφικομένην, ὥςτε οὐδεμία ταύτης μείζων ἂν γένοιτο. Καὶ τοῦτο καλεῖται Ἀπείρως μέγιστος ἀριθ-

ἀριθμὸς, ἢ Ποσότης. Νόει μοι γραμμὴν τινα ἀπὸ τοῦ Α ἀρξαμένην, καὶ διὰ τοῦ Β, Α — Β — αἰεὶ εἰς τὸ πρὸσω χωροῦσαν ἄνευ πέρατος. Καὶ αὕτη τυγχάνει ἀπείρως μεγίστη γραμμὴ. Καὶ ἐπὶ δύο γραμμῶν παραλλήλων, ἑκατέρωθεν προσεκβαλλομένων, μηδέποτε δὲ συμπιπτουσῶν, λέγεται, ὅτι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις ἐν ἀπείρῳ ἀποστάσει, τούτ: οὐδέποτε. Τὸ δὲ σημεῖον, δι' οὗ ἡ ἀπείρος παρίσταται ποσότης, τὸδε (∞) τυγχάνει.

§. 263. Ὡσαύτως καὶ Ποσότητα νοεῖν παρέσιν, οὕτως αἰεὶ μειουμένην, ὥς τε τελευταῖον ἐλάσσονα πάσης νοουμένης ἑτέρας ποσότητος γίνεσθαι, καὶ τοῦτο ἔσιν ἡ Ἀπείρος ἢ Ποσότης, ἢ ἡ ἀπείρως ἐλαχίστη, ἢ ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ὥς τὸ μηδὲν θεωρεῖσθαι δυναμένη, (§. ἀνωτ.) ὥς τούτῳ ἔγγιστα οὖσα. Διαφόροις δὲ τοῖς τρόποις καὶ αὕτη ἐπισημανθήσεται, ὥς καὶ ἡ ἀπείρος μεγίστη ποσότης. Δείκνυσι μέντοι τὸ δε τὸ σχῆμα $\frac{1}{\infty}$ αἰεὶ Ποσότητα ἀπείρος ἢν.

§. 264. Πᾶν κλάσμα, εἴτε γνήσιον, εἴτε νόθον, ἀπείρως μεγίστη Ποσότης γενήσεται, ἐὰν ὁ τούτου ἀριθμητὴς πεπερασμένος, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἀπείρως ἐλαχίστος, ἢ $= 0$, ἢ $+$. Ἐξω κλάσμα οἷον δηποτοῦν, εὐ ὁ ἀριθμητὴς ἐν γένει α κληθῆτω, ὁ δὲ παρονομαστὴς ω, τούτ: $\frac{\alpha}{\omega}$. Καὶ α μὲν ἔσω ὁ Διαι-

ρετέος, ω δὲ ὁ Διαιρέτης. Τὸ ἐκ τούτων πηλίκον ῥηθῆτω $= \pi$. Δῆλον οὖν, ὅτι ἐὰν ω, ἢ ὁ Διαιρέτης ἡμισευθῇ, τὸ πηλίκον, ἢ π, διπλασιασθήσεται. Ἐὰν δὲ τετρακίς, δεκάκις, ἑκατοντάκις, κτ. ω ἐλαττωθῇ, τὸ π τετραπλασιασθήσεται, δεκαπλασιασθήσεται, ἑκατονταπλασιασθήσεται, κτ. π. χ. Θετέον εἶναι τὸ $\alpha = 8$. Τὸ δὲ $\omega = 4$. Ὡς $\frac{8}{4} = 2$.

ἢ $\pi = 2$. Σημαίνετω ἤδη ω τὸ ἥμισυ τοῦ προτέρου. Τὸ οὖν πηλίκον ἔσαι $\frac{\pi}{2} = 4$. διπλάσιον τοῦ προτέρου. Ἐξω ω δεκάκις ἔλαττον. Καὶ ω , ὅπερ ἐν ἀρχῇ $= 4$ ἦν, ἔσαι $= \frac{4}{10}$. Καὶ $\frac{8}{0,4} = 20$. Ὡς π δεκαπλάσιον, κτ. Ἀλλὰ τὸ ω ὡς ἀπείρως ἐλάχιστον νοεῖν ἔχομεν. Ἄρα ἐξ ἀνάγκης π ἀπείρως μέγιστον. Ὅσω οὖν ω ἐλαττούται, τοσούτῳ ἐγγύτερον τοῦ 0 γίνεται. Εἰ δὲ τὸ $\omega = 0$ γένηται, ἀναγκαίως τὸ π ὡς ἀπείρως μέγιστον νοήσομεν. Εἰ γὰρ, τοῦ ω ἔτι ὡς ἀπείρως ἐλαχίστης ποσότητος θεωρουμένου, τὸ πηλίκον ἀπειρον ἦν, πολλῷ μᾶλλον ἔσαι τοῦτο, τοῦ $\omega = 0$ γεγονότος. Τὸ γὰρ 0, οὕτως εἰπεῖν, ἡ ἐλαχίστη τῶν ἀπείρως ἐλαχίστων Ποσοτήτων. Ἐνθεν τοι τὰ σχήματα $\frac{a}{0}$, ἢ καὶ $\frac{a}{0}$, ἀπειρον ἐμφαίνουσι ποσότη-

τα, ἢ $\frac{a}{\frac{1}{\infty}} = \frac{a}{0} = \infty$. Ἐν §. 229. δέδεικται,

ὡς ἕκαστον κλάσμα θεωρεῖν δύναμεθα ὡς τὸν λόγον δύο ἀριθμῶν. Ὡς καὶ τὸ σχῆμα $\frac{a}{\frac{1}{\infty}}$ θεωρηθεῖν ἂν ὡς

ὁ λόγος αἰ $\frac{1}{0}$. Τὸ δὲ $\frac{a}{0}$, ὅποιον ἂν ἦ, ἔσαι ἀπείρως μέγιστον πρὸς τὸ ἀπείρως ἐλάχιστον. Παραπλησίως καὶ $\frac{a}{0}$ ὁ λόγος τυγχάνει τοῦ αἰ 0. Τὸ δὲ

$\frac{a}{0}$ αὖθις, ὅ, τι ἂν σημαίνῃ, ἀπείρως μέγιστον ἔσαι πρὸς τὸ μηδενικόν. Ὡς, εἰ ἀντὶ τοῦ a πᾶς ἀριθμὸς, ἢ ποσότης τεθῇ, αἰ τὸ σχῆμα τοῦ ἀπείρως μεγίστου τηρηθῇσεται. Ὅθεν $\frac{12}{0}$, ἢ $\frac{12}{\frac{1}{\infty}} = \infty$. ἢ καὶ

$$\frac{1}{1} : \eta \frac{1}{0} = \infty . \quad \text{Ὡν τὸ ἔσχατον}$$

μᾶλλον ἐν χρήσει εἰς τὴν τοῦ ἀπείρου δήλωσιν. Ὅθεν ἐφ' ἐκάστης Ποσότητος, ἦτινι ὡς Διαιρέτης τὸ 0 προσήκει, ἀντικαθίστωσι τὸ ∞ .

§. 265. Ἐὰν δὲ τοῦ κλάσματος ὁ μὲν Ἀριθμητὴς πεπερασμένος, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἀπείρως μέγιστος ἢ, τὴνικαῦτα τὸ κλάσμα γενήσεται Ποσότης ἀπείρως ἐλαχίστη, καὶ ὅπως ἴσον τῷ μηδενί. Τεθῆτω Ποσότης τις $= \alpha$ δι' ἐτέρας $= \omega$ διαιρουμένη. Ὡς τὸ κλάσμα ἔσω $\frac{\alpha}{\omega}$. Καὶ τὸ μὲν α μενέτω ἀμε-

τάβλητον, τὸ δὲ ω αἰετὶ αὐξέτω. Ἐὰν οὖν ω διπλασιασθῇ, τὸ πηλίκον ἡμισευθήσεται. Εἰ δὲ δεκάκις ω ἡυξῆται, τὸ πηλίκον δεκάκις ἐλαττωθήσεται, κτ. Ἀλλὰ τὸ ω οὕτω μέγα ἔχομεν ἐπινοῆσαι, ὥς μηδεμίαν Ποσότητα ταύτης μείζω διόσσοθαι. Τότε οὖν καὶ τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{\alpha}{\omega}$ ἀπειροσὸν γενήσεται, καὶ

ὡς 0 θεωρηθήσεται. π. χ. Ἐσω $\alpha = 8$. $\omega = 2$. Καὶ ἔσαι π, ἢ τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{\alpha}{\omega} = \frac{8}{2} = 4$. Ἀυ-

ξηθῆτω 2, καὶ γενέσθω 4, καὶ ἔσαι $\pi = 2$. Ἀυξανέσθω ἔτι ω μᾶλλον καὶ μᾶλλον μέχρι τῶν 10000, καὶ γενήσεται $\pi = \frac{8}{10000} = \frac{1}{1250}$. Καὶ εἰν ω ἐπαύξῃται μέχρι μυλλιονίων, διλλιονίων, τριλλιονίων, μᾶλλον δ' ἐπὶ τοσοῦτον, ὅσον τῇ ἐπινοίᾳ ἀν' παρασταῇ, ἀναγκαίως θεωρήσομεν, καὶ μεταχειρισθόμεθα τὸ π ὡς οὐδέν. Ὅθεν ὁ τύπος $\frac{\alpha}{\omega} = 0$. Κἀνταῦθα

ὁ λόγος τυγχάνει $\alpha : \infty$, καὶ α , ὅποιον ἂν ἦ, πρὸς τὸ ∞ οἰχθήσεται.

§. 266.

§. 266. Ἐὰν ἐν τοῖς ὑπολογισμοῖς Ποσότη-
 τες ἀπαντῶσι μετ' ἀπείρου μεγίστων ποσοτήτων τῷ
 πολλαπλασιασμῷ συνημμένοι, ἢ καὶ ἀπείρως μέγισται
 ποσότητες μόναι, πᾶσαι αἱ λοιπαὶ τῶν ποσοτήτων οἴ-
 χονται πρὸς ἐκείνας, καὶ $= 0$ γίνονται, διὰ τὰ ἀ-
 νωτέρω. π. χ. Εἴπερ εἴη $3\alpha\beta\infty + 2\alpha\beta\infty =$
 $\pi\infty$, οἴχεται ἢ $3\alpha\beta\infty$, καὶ μένει μόνον $2\alpha\beta\infty =$
 $\pi\infty$. ἢ $\frac{rP\infty}{3r\infty + r^2 - 2P} = \zeta$, αἱ r^2 καὶ
 $-2P$ οἴχονται πρὸς τὴν $3r\infty$, καὶ λείπεται μόνον
 $\frac{rP\infty}{3r\infty} = \zeta$. Εὐρίσκομεν δὲ τὰς ἀπείρους ποσό-
 τητάς καὶ εἰς δυνάμεις ἡρμένας. ὡς ∞^2 , ∞^3 ,
 κτ.

Ἐὰν ὑπερτέρα τις δύναμις ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ἀ-
 παντᾷ, αἱ τοῦ ∞ ὑποδεσσεύου δυνάμεις οἴχονται
 πρὸς τὰς ὑπερτέρας. π. χ. Ἐστω $\frac{rP\infty + r\infty^2}{3r\infty - 2\pi\infty^2}$
 $= \tau$. Ἐνθα τὸ ∞ τοῦ ἀριθμητοῦ ἐκπίπτει
 πρὸς τὸ ∞^2 , (δηλὸν δ' αὐτόθεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ
 τοῦ ἀριθμητοῦ Ποσότητες.) Καὶ ἐν τῷ παρονομασῇ
 τὸ ∞ πρὸς τὸ ∞^2 , καὶ αἱ λοιπαὶ μετ' ἐκείνου Πο-
 σότητες. Ὑπολείπεται οὖν $\frac{r\infty^2}{-2\pi\infty^2} = \tau$. Τοῦ-

το δὲ πλατύτερον ἀναπτύξαι, οὐ τῆς παρούσης θεω-
 ρίας. Ταῦτὸ συμβαίνει καὶ ταῖς ἀπειροσφαῖς Ποσότησι.
 Τὸ γὰρ $\frac{1}{\infty}$, ἢ τὸ ἀπείρως ἐλάχισον, ἐκπίπτει ἐν παντὶ
 ὑπολογισμῷ πρὸς ἐτέρας Ποσότητες, καὶ γίνεται $= 0$.
 π. χ. $\alpha + \frac{\beta}{\infty} = \nu$. Ἐνταῦθα οἴχεται τὸ
 $\frac{\beta}{\infty}$, ὡς ἀπείρως ἐλάχισον. Ἐς γὰρ $= 0$. ὑπο-
 λείπεται δὲ $\alpha = \nu$. Καὶ πᾶσα ποσότης, ἢ τῇ $\frac{1}{\infty}$
 πολλα-

πολλαπλασιαζομένη, γίνεται $= 0$. ὡς α. $\frac{1}{\infty}$
 $= 0$.

Ἐάν ἐν ὑπολογισμοῖς δυνάμεις τοῦ $\frac{1}{\infty}$ ἀπαντῶ-
 σιν, οἷχονται πᾶσαι πρὸς τὸ $\frac{1}{\infty}$, καὶ αἱ μείζους πρὸς
 τὰς ἐλάσσους. Ὡς πρὸς τὸ $\frac{1}{\infty^2}$ οἷχεται τὸ $\frac{1}{\infty^3}$
 πρὸς τὸ $\frac{1}{\infty}$ τὸ $\frac{1}{\infty^2}$ κτ.

Ἀλλὰ πύθονται ἅντις, εἰ τοῦ ∞ ποσότης ση-
 μαίνοντος, ἥς μείζων οὐκ ἔχει ἐπινοηθῆναι, καὶ τοῦ
 $\frac{1}{\infty}$ ὄντος $= 0$, πλείους, ὡς εἶπεῖν, ἀπειρότητες
 $\frac{\infty}{\infty}$ δίδονται, τουτ. εἰ ἀπειρόντι τοῦ ἑτέρου μείζων, καὶ
 ο ἑλαττον ἑτέρου ο; ἀποφάσκοντες ἀποκρινόμεθα.
 Συμβάλλεται δὲ τὰ ρηθέντα εἰς τὸ τοὺς λόγους τῶν
 Ποσοτήτων πρὸς ἀλλήλας διορίζειν. Ἀλλὰ τοῦτο οὐ
 τοῦ παρόντος σκοποῦ.

§ 267. Πᾶν κλάσμα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀ-
 ριθμοῦ ἅμα ἐν τῷ ἀριθ. καὶ παρ. πολλαπλασιασθέν, ἢ
 διαιρεθέν, τροπὴν οὐχ ὑφίσταται. (§. 122.) Ὅτι
 ταῦτό ἐστιν, ὥσπερ εἰ τῇ μονάδι τοῦτο πολλαπλασιάζο-
 μεν, ἢ διαιροῦμεν, ἥτις οὔτε πολλαπλασιάζει, οὔτε
 διαιρεῖ. Τοῦτο δ' ἀληθεύει, καὶ ἐὰν ἡ ποσότης, δι' ἣς
 τοῦτο γίνεται, ἀπείρως μεγίστη, ἢ ἀπείρως ἐλαχίστη
 ᾖ. Ἐπειδὴ καὶ τὸ $\frac{\infty}{\infty} = 1$, καὶ $\frac{0}{0} = 1$, ὡς

τοῦ διαιρέτου ἅπαξ τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριεχομένου. Πο-
 σότης οὖν, π. χ. ἥδε $\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\infty}{\infty} = \frac{a}{\beta}$. Καὶ

$\frac{a}{\beta} \cdot \frac{1}{\infty} = \frac{a}{\beta}$ τυγχάνει. Τούτῃ μεταξὺ
 $\frac{\beta}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty}$

τῶν

τῶν Ποσοτήτων α καὶ β ὁ αὐτὸς μένει Λόγος, ὃν καὶ
 πρότερον εἶχον, καίτοι ἀμφοῖν ἐν τῷ $\alpha \cdot \infty$, ὡς

$$\beta \cdot \infty$$

ἀπείρως μεγίστων θεωρουμένων, καὶ ἐν λόγῳ οὐσῶν
 $\alpha \cdot \infty : \beta \cdot \infty$.

Παραπλησίως, καὶ εἰ ἀμφω μετ' ἀπείρου ἐλα-
 γίτης ποσότητος, ἦν $= 0$ ἔχομεν ἐκδέξασθαι, ἐπολλα-
 πλασιάσθησαν. Μεταξὺ γὰρ τοῦ $\alpha \cdot \frac{1}{\infty} : \beta \cdot \frac{1}{\infty}$
 ὁ αὐτὸς λόγος, ὅς καὶ μεταξὺ τοῦ $\alpha : \beta$.

Περὶ τῆς τῶν Ῥιζῶν Ἐξαγωγῆς.

§. 269. Ἐν τοῖς προηγηθεῖσι, περὶ τῶν Ῥιζῶν,
 καὶ Ῥιζικῶν σημείων ὀλίγ' ὅττα ἐν παρόντῳ διαλαβόν-
 τεσ, ἐν τῷ παρόντι τὴν περὶ τούτων ἀκριβεστέραν ἀπετα-
 μευσάμεθα διδασκαλίαν. Ἄλλ' ἵνα τὴν ταύτην συνέ-
 χειαν οἶσιν ἐπὶ τῶν ὀφθαλμῶν ἔχωμεν, ἀναγινώσκον τὰ ἐν
 §. §. 186. κτ. 200. κτ. ρηθέντα. Ὅπως δὲ ἀπὸ δοθεῖσάν
 ποσότητῶν, ἢ ἀριθμῶν, τὰς ζητούμενας ῥίζας ἐξάγειν
 δύνησόμεθα, καὶ δὴ ρητέον. Ἐπεὶ γὰρ νοηθῆναι δύ-
 νατὸν, τὰς ποσότητας διὰ τοῦ τοσάκις πολλαπλασιασ-
 μαὶ ποσότητος ἑτέρας, οἷα ἡ ζητούμενη ῥίζα, προελ-
 θεῖν, οὐ δυσχερὲς τήνδε δι' ὑπολογισμῶν ἀνακα-
 λύπτειν. Ἄλλ' ὡς δῆλον ἐξῆς γενήσεται, πάσας ἀ-
 κριβῶς εὑρεῖν οὐκ ἔστι, ὅσον βούλει, ἐλάχιστον τὸ ἐλ-
 λειμμα ποιήσαντι. Ἐνθεντοίαι Ῥίζαι, αἱ ἀκριβῶς
 μὴ ἀποδιδόμεναι, Ἀλογοὶ Ῥίζαι καλοῦνται. ὥσ-
 περ τούναντίον, Λογικαὶ, ὡς ἀκριβῶς ἀποδοῦναι
 οἶοντε. Οὕτως ἡ $\sqrt{2}$, ἡ $\sqrt{3}$, κτ. Ἀλογοὶ
 τυγχάνουσιν. Ἄλλ' εἰ καὶ τὰς ταιαύτας ἀλόγους ῥίζας
 ἐντελῶς ἐξάγειν ἀμήχανον, ἰδέαν μέντοι τινὰ καὶ πᾶ-

R

vu

νυ δυνατόν τούτων λαβεῖν. Καίτοι γὰρ ἡ τοῦ $\sqrt{12}$ ῥίζα ἄλογος, ἀνατυπούμεθα ὅμως ποσότητά τινα, ἥτις μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθεῖσα 12 παρέχει παραγόμενον. Λογικαί δὲ, ὡς $\sqrt{4} = 2$. $\sqrt{16} = 4$. $\sqrt{144} = 12$, κτ. Ἀλλὰ περὶ τούτων πλατύτερον ἐπιζητῶμεν.

§. 270. Καὶ α'. περὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης. Ἵνα δὲ τούτου ἐναργῆ ἐννοίαν λάβωμεν, σημειωτέον, ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοὶ δύνανται θεωρεῖσθαι, ὡς ἐκ πλειόνων συγκείμενοι, ἡλίκοι ἂν εἶεν. Ἀλλ' ἤδη τούτους θεωρήτεον, ὡς ἐκ δύο ποσότητων τῇ προσθέσει προκύψαντας, ἃς $\alpha + \beta$ καλέσωμεν. Ὑπο δὲ $\alpha + \beta$ ἅπαντες οἱ ἀριθμοὶ περιλαμβάνονται. π. χ. ὁ 1360 διαιρεθεὶς ἂν εἰς δύο μέρη $2 + 3$. Ὁ 1360 ὡσαύτως εἰς $1000 + 360$. Οὕτω καὶ αἱ λοιπαὶ πολλαχῶς. Τὸ δὲ $\alpha + \beta$ ἂν τι γενικοῦ τύπου ἀπασῶν τῶν Λογικῶν (§ ἀνωτ.) ῥιζῶν ληπτέον. Καὶ σύγκειται ἄρα ἡ ῥίζα ἐκ δύο μερῶν, ὅπερ Δυνάδυμον καλεῖται. Ἀρθέντος οὖν τοῦ $\alpha + \beta$ εἰς τὴν τετραγωνικὴν δύναμιν, ἐκ ποίων μερῶν συγκροτεῖται, ὁψόμεθα. $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)^2$. Καὶ ἐνεργεία πολλαπλασιασθὲν $= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. Ἐθα ἐν μὲν τῷ α'. ὅρα τὸν τετράγωνον τοῦ α'. μέρους τῆς ῥίζης, ἥτοι αα, ὁρῶμεν. Ἐν δὲ τῷ β'. τὸ ἐκ τῶν δύο μερῶν τῆς ῥίζης παραγόμενον, δις ληφθέν, ὃ ἐστὶ, $2\alpha\beta$. Ἐν δὲ τῷ γ'. τὸν τετράγωνον τοῦ β'. μέρους τῆς ῥίζης, ἥτοι ββ. Εἰ δότες οὖν, ὅπως ὁ τοῦ $\alpha + \beta$ τετράγωνος ἀνέφυ, ἀνάπαλιν χωρήσομεν, εἰς εὗρεσιν τῆς τοῦ $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ῥίζης, ἥτοι τοῦ $\alpha + \beta$, τουτ' διὰ τῆς διαιρέσεως. Εἰ δέοι τοίνυν τὴν τούτου εὗρεῖν ῥίζαν τὴν τετραγωνικὴν, διαιρετέον τὴν Ποσότητα διὰ τοῦ α.

α) α²

$$\begin{array}{r|l}
 \alpha) & \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\
 & \underline{\alpha^2} \\
 & 2\alpha + \beta) + 2\alpha\beta + \beta^2 \\
 & \quad \quad \quad \underline{+ 2\alpha\beta + \beta^2}
 \end{array}
 \quad \left| \quad \alpha + \beta
 \right.$$

Τὸ α'. μέρος τῆς ῥίζης αὐτάθην δῆλον, ἦτοι α. Ἐνθεντοὶ τούτου ἐν μέρει τεθέντος, ὡς τὸ σχῆμα ἐμφαίνει, διαιροῦμεν α'. τὴν ὅλικήν σύνθετον ποσότητα δι' αὐτοῦ, ἦτοι διὰ τοῦ α. Τοῦ δὲ προκύψαντος πηλίκου α ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιασθέντος, τὸ παραγόμεν. ἔσται α², οὕτινος ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθέντος, ὑπολείπεται τὸ 2αβ + β². Λείπεται οὖν ἔτι καὶ τὸ β'. μέρος τῆς ῥίζης εὑρεῖν. Ἀλλὰ τὸ σχῆμα 2αβ + β² καταλλήλοτερον καὶ ᾧδε ἂν ἐξενεχθῇ (2α + β) β. Εὐδὴλον ἄρα, ὅτι αἱ λοιπαὶ ποσότητες διὰ τοῦ 2α + β διαιρετέαι, εἰς εὐρεσιν τοῦ β. Ἐστὶ γάρ (2α + β) β = β.

$$(2\alpha + \beta)$$

Ἄλλ' ἐνταῦθα εἶδέναι α'. ἀναγκαῖον ἐνεργεῖν τὸ β, ὅτι ἐν τῷ Διαιρέτῃ ἅπαντᾷ. Ἐάν οὖν ὁ εὑρεθεὶς πρῶτος ὅρος τῆς ῥίζης, ἦτοι τὸ α, δις ληφθῇ, καὶ τούτῳ ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ τετραγώνου, ἦτοι τὸ 2αβ, διαιρεθῇ, προκύψει τὸ + β. Οὗ εἰς τὸ πηλίκον τεθέντος, ἅμα δὲ καὶ τῷ Διαιρέτῃ 2α, προσεθέντος, ἐξ οὗ 2α + β γίνεται, καὶ τούτου, ἦτοι τοῦ 2α + β τῷ εὑρεθέντι πηλίκῳ β πολλαπλασιασθέντος, ἀνακύψει παραγόμενον τὸ 2αβ + β². Ὅπερ τὸν Διαιρετέον ἀκριβῶς ἀναιρεῖ. Θεωροῦντας οὖν τοῦτο οὐ χαλεπὸν συνιδεῖν, ὅτι τὸ β'. μέρος τῆς ῥίζης εὐρίσκεται, εἰ, μετὰ τὸ ἀφαιρεθῆναι τὸν ἐκ τοῦ α' ὅρου Τετράγωνον, τὸ ἀμέσως τούτῳ ἐπόμενον παραγόμενον διὰ τοῦ δις ληφθέντος α'. ὅρου διαιροῦμεν, τιθέντες τὸ πηλίκον εἰς τὸν οἰκείου τόπον, ὡς β'. μέρος τῆς ῥίζης, ἅμα δὲ τοῦτο καὶ τῷ δις ληφθέντι ὅρῳ προσιθέντες, καὶ τὸ ὅλον (ἦτοι τὸν δις ληφθ. ὅρον,

καὶ τὸ τοῦτω προσεθὲν πηλίκον) μετὰ τοῦ εὐρεθέντος πηλίκου πολλαπλασιάζοντες, καὶ τὸ παραγόμενον ἀπὸ τοῦ λειψάνου τοῦ τετραγώνου ἀφαιροῦντες.

Προκρίσθω τὸ παράδ. οἱ ἀριθμοὶ, εἰς ὃ ὁ τοῦ τετραγ. ληφθήτω, εἰς δύο μέρη, κατὰ τὸ Δυνάμει διααιρεθέντος, τοῦτ' : εἰς $8 + 6 = \alpha + \beta$.

Κατὰ τὸν τύπον οὖν ταχθέν ἔστι $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 8 \cdot 8 + 2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6 =$ τῷ Τετραγώνῳ τοῦ 14. Ἐξ οὗ πρόκειται τὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν.

$$\begin{array}{r} : 8) \quad 8 \cdot 8 + 2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \quad | \quad 8 + 6 \\ \quad \quad \underline{8 \cdot 8} \\ 2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \\ : 2 \cdot 8 + 6) \quad 2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \end{array}$$

Τοῦ $8 \cdot 8$ ἡ ῥίζα 8 τυγχάνει. Τεθήτω ὡς α μέρος τῆς ῥίζης. Καὶ $8 \cdot 8 = 8 \cdot 8$. Οὗ ἀφαιρεθέντος, ὑπόλοιπον τὸ $2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6$. Τὸ α'. μέρος τῆς ῥίζης, ἢ 8 εἰς ληφθὲν $= 2 \cdot 8$. Διὰ τοῦτου, τοῦ β'. ὅρου τοῦ Τετραγώνου, ἦτοι τοῦ $2 \cdot 8 \cdot 6$ διααιρεθέντος, προκύψει πηλίκον $+ 6$. Οὗ καὶ τῷ καινῷ Διαιρέτῃ $2 \cdot 8$ προσεθέντος, ἔσται $2 \cdot 8 + 6$. Τοῦτο οὖν μετὰ τοῦ β'. μέρους τῆς ῥίζης πολλαπλασιασθὲν παράξει $2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6$. Ὁ ἀπὸ τοῦ λειψάνου ἀφαιρεθὲν οὐδὲν ὑπολείπει. Ὡς εὐρήται ἡ ῥίζα $= 8 + 6$. Ἄλλοι τοῦτον τὸν τρόπον οὐ δίδονται ἡμῖν οἱ ἀριθμοί, ἀλλ' ὅτι αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι ἔξακτέαι, ἀλλ' οὕτως $(14)^2 = 196$. Ὡς ἐκ τούτου ἔξακτέα ἡ ῥίζα.

§ 271. Πρὸ πάντων οὖν τοὺς Τετραγώνους τῶν ἀπλῶν χαρακτήρων ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τῶν 9 σημειώσαντες, οὓς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, κατὰ τὸν Πυθαγορικὸν πίνακα, ῥᾶσα εὐρήσομεν. Μαλλον δε

ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ὑποσυνάψομεν πίνακιδίῳ, προσθέν-
τες καὶ τοὺς Κύβους, καὶ Διτετραγώνους, (§. 184.)
ἵνα μὴ τούτους ὕστερον ἐν μέρει καταγράψωμεν ἀναγκα-
ζώμεθα.

Τετρ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Πί :	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Κύ.	1	8	27	64	125	216	343	512	729
Διτ.	1	16	87	250	256	1296	2401	4096	6561

Ἐνθα ὁρᾷς οὐδένα Τετράγωνον τῶν ἀπλῶν ἐν-
νέα χαρακτήρων πλείους τῶν δύο ἀριθμοὺς περιέχον-
τα. Δύω δὲ τούτων μόνον ἓνα. Οὐδένα Κύβων
πλείους τῶν τριῶν· τινὰς δὲ μόνον δύο, καὶ ἓνα.
Οὐδένα Διτετράγωνον πλείους τῶν ὀ. τινὰς δὲ μόνον
τρεις, καὶ δύο.

§. 272. Προκειμένου τοῖον ἀριθμοῦ, ἐξ οὗ
τὴν ρίζαν ἐξαγαγεῖν βούλει, χωρήσεις κατὰ τὸν ἐξῆς
τρόπον.

1) Δίελε τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς κλάσεις, ἀ-
νά δύο χαρακτήρας ἐκάστην περιεχούσας, δεξιόθεν π' ἀ-
ριστερὰ προϊὼν, ὥς περὶ τταρίθμων τῶν χαρακτήρων
τυχόντων, καὶ μοναδικὸν ἔχειν χαρακτήρα τὴν κλά-
σιν τὴν ἀριστερωτάτην.

2) Ζήτησον ἐν τῷ Πίνακιδίῳ (§ ἀνωτ.) τὴν
ρίζαν τῆς α'. κλάσεως, ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν δηλονότι ἀρ-
χόμενος, ἢ τὴν ἐγγυὲς ἐλάσσονα, εἰ ὁ ἀριθμὸς, οὗ
ἡ ρίζα ζητεῖται, οὐκ ἐπ' ἀκριβὲς τετραγώνος. Τοῦτο
δὲ δεῖγμα σαφές τῇ α'. κλάσει καίτι τοῦ διπλοῦ τῶν
μερῶν τῆς ρίζης ἐνεῖναι, ἐν γένει τοῦ 2 αβ.

3) Τὴν εὑρεθεῖσαν ρίζαν, ἢ τὴν ἐγγυὲς ἐλάτ-
τονα, εἰ ἡ ζητούμενη οὐχ εὔρηται, γράψον ἐν τῷ πη-
λίῳ,

λίκω, ὡς τὸ α'. μέρος τῆς ρίζης, ἢ ὡς τὸ α' (§. 270.) καὶ μεθ' ἑαυτῆς αὐτὴν πολλαπλασιάσας ἄφελε τὸ παραγόμενον ἀπὸ τῆς α'. κλάσεως.

4) Διπλασίασον τὸ εὔρεθὲν α'. μέρος τῆς ρίζης, καὶ θές τὸν ἔσχατον τούτου χαρακτήρα ὑπὸ τῆς α'. τῆς β'. κλάσεως, ἥς τοὺς χαρακτήρας κατάγαγε προθέμενος αὐτοὺς τῷ λειψάνῳ τῆς α'. κλάσεως. Ἐὰν δὲ τὸ διπλοῦν παραγόμενον τοῦ α'. μέρους τῆς ρίζης πλείους ἀριθμοὺς, ἢ ἓνα παρέχη, προάγονται ἀπὸ τὸν πρὸς τὰ ἀριστερά.

5) Δίελε ἤδη μετὰ τοῦ διπλοῦ παραγομένου ὡς καινοῦ διαιρέτου. Τὰ δὲ πηλίκον μὴ πάνυ μέγα λαμβανέσθω. Ὁ ἐστὶ τὸ β'. μέρος τῆς ρίζης, ἢ τὸ πηλίκον. Πρόσθες τὸ ἤδη εὔρεθὲν πηλίκον καὶ τῷ Διαιρέτῃ, ὑπὸ τὸν β'. χαρακτήρα τῆς β'. κλάσεως, ἔνθα ὁ τόπος κενὸς, αὐτὸ θέμενος, καὶ πολλαπλασιάσας τὸ πηλίκον μεθ' ὅλου τοῦ διαιρέτου, τοῦ ἐκ τοῦ διπλοῦ παραγομένου τοῦ α'. μέρους τῆς ρίζης, καὶ τοῦ ἤδη προκύψαντος πηλίκου συγκειμένου, ἄφελε τὸ παραγόμενον ἀπὸ τῆς β'. κλάσεως. Ἐὰν δὲ τὸ παραγόμενον μείζον ἢ τὸ διαιρέτῳ, ἀφ' οὗ ἄφαιρεθῇ δέουσι, τὸ πηλίκον εἰληπταὶ πάνυ μέγα. Ὅθεν μονάδι μειωτέον, ἵνα τὸ παραγόμενον ἔλαττον τυγχάνῃ. Καὶ οὕτω προκύψαντος καὶ τοῦ β'. μέρους τῆς ρίζης, κατάγαγε τὸ λειψάνον, εἴ τι ὑπολείπεται, καὶ τὴν ἐπομένην κλάσιν.

6) Εἰ δὲ πλείους τῶν δύο κλάσεις πάρεισιν, θεωρῶν τὰ εὔρεθέντα δύο μέρη τῆς ρίζης, ὡς τὸ α' μέρος, διπλασίασον αὐτὰ, θείς τὸν ἔσχατον χαρακτήρα ὑπὸ τὸν α'. τῆς καταχθείσης κλάσεως, τοὺς λοιποὺς πρὸς τὰ ἀριστερά. Δίελε αὖθις, καταγράφον τὸ πηλίκον καὶ πρὸς τοῖς εὔρεθεῖσι μέρεσι τῆς ρίζης, πρὸς τῷ Διαιρέτῃ. Πολλαπλασίασον, καὶ ἄφελε, ὡς ἔνθεν. παραπλησίως χωρῶν, εἰ καὶ ἕτεραι κλάσεις ὑπάρχουσιν.

Οὐ

Οὕτως οὖν εὐρήσομεν ἀκριβῶς τὴν ῥίζαν, εἰ ὁ
δοθεὶς ἀριθμὸς ἀληθῆς τυγχάνει τετραγώνος.

§. 273. Τοὺς προχειρισθέντας κανόνας καὶ
διὰ παραδείγμ. ἀναπτύξαι οὐκ αὖ ὀκνήσαιμεν. Δεῖ δὲ
καὶ τὸν ἐν γένει τύπον καταρχὰς καταγράψασθαι, ἵν' ὅ-
πως ἐν τῷ Τετραγώνῳ ἐμπεριέχεται, δῆλον γέ-
νηται.

Ἐξαχθήτω ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 1764
Τετραγ.

$$\begin{array}{r} (a^2) = \begin{array}{c|c} 17 & 64 \\ 16 & \end{array} \begin{array}{c} a + \beta \\ 4 \quad 2 \end{array} \\ (2a\beta + \beta^2) = 1 \ 64 \\ 2a + \beta = (82) \\ 2a\beta + \beta^2 = 1 \ 64 \end{array}$$

α'. Διαιρεθεὶς δεξιόθεν πρὸς ἀριστεράς κλάσεις
εἰδῶσι δύο κλάσεις. (κ. 1.) Ὡς καὶ τῆς ῥίζης οἱ
χαρακτῆρες δύο.

β'. Ζήτησον ἐν τῷ πινακιδίῳ τὸν 17 ἐν τοῖς Τε-
τραγώνοις, (κ. 2.) ὅσις οὐ πάρεστιν. Ἐγγὺς δὲ ὁ ἐ-
λάττω ἀπὸ τοῦ Τετραγ. ἦτοι ὁ 16, οὗ ἡ ῥίζα 4. γ. Ὁ-
φήτω ἐν τῷ Πηλίκῳ, ὡς τὸ α', μέρος τῆς ῥίζης, τοῦτ.
α. Μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθέντος τοῦ 4, τεθήτω
τὸ παραγόμεν. ὑπὸ τὴν α'. κλάσιν. $4 \cdot 4 = 16 =$
 a^2 . καὶ ἀπὸ τοῦ 17 τοῦ 16 ἀφαιρεθέντος, ὑπολείπε-
ται 1. (κ. 3.) Καταχθέντος ἡδὴ τοῦ λειψάνου,
τοῦτ. τοῦ $2a\beta + \beta^2$, διπλασιάσας τὸ α'. μέρος
τῆς ῥίζης, ἦτοι τὸν 4 καὶ ἔσαι $2 \cdot 4 = 8$. τοῦ-
το δ' ἐστὶ 2α. καὶ 8 ἐς αὐτὸ ὑπὸ τοῦ 6 τῆς β'. κλά-
σεως. (κ. 4.) Διέλε 16 διὰ 8, καὶ ἔξεις πηλίκον
τὸν 2. Τεθήτω καὶ οὗτος εἰς τὸ πηλ. ὡς τὸ β'. μέρος
τῆς ῥίζης, ὃ ἐστὶ β, καὶ πρὸς τῷ Διαιρέτῃ 8. Καὶ
τοῦ 82 ἐπὶ τὸν 2 πολλαπλασιασθέντος, πρακνύει
164

164, τουτ'· $(2\alpha + \beta) \beta$. ἡ $2\alpha\beta + \beta^2$. "Ὁ ἀΦαιρεθὲν ἀπὸ τῆς καταχθείσης κλάσεως, καὶ τοῦ λειψάνου τῆς α'. (κ. 5.) οἶχεται παντάπασι. Ἐπεὶ οὖν οὐδὲν ὑπολέλειπται, ἡ ἀκριβὴς ρίζα 42 τυγχάνει.

Τοῦτο βασανίσαι βουλόμενος, πολλαπλασίασας μεθ' ἑαυτῆς τὴν ρίζαν, καὶ ἀναγκαίως προκύψει ὁ Τετράγωνος. Ἐστὶ γὰρ $42 \cdot 42 = 1764$.

Ἵποτεθήτω ἔτι καὶ ἕτερα τῶν παραδ. πολυαριθμότερα, παρ' οἷς καὶ τὸν τύπον γράφειν οὐκ ἐπιλήσειον. Ὁ γὰρ τοῦτον μετὰ προσοχῆς μετιῶν ῥαδίως ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν μιμηθήσεται τὸ παράδειγμα.

$$\begin{array}{r|l}
 \text{Ἐξαχθήτω ἡ ρίζα ἐκ τοῦ } 817216 & \alpha + \beta \\
 \hline
 & \alpha + \beta \\
 & 904 \\
 \hline
 \alpha^2 = 81 & \\
 2\alpha\beta + \beta^2 = 72 & \\
 2\alpha\beta + \beta = (180) & \\
 (2\alpha + \beta) \cdot \beta = 000 & \\
 \hline
 & 7216 \\
 & 2\alpha + \beta (1804) \\
 (2\alpha + \beta) \cdot \beta & 7216 \\
 \hline
 & 0000
 \end{array}$$

Σημειῶσαι ἐνταῦθα, ὅτι ἐπὶ τῆς β'. ἦν κατὴ γάγονμεν, κλάσεως, ὁ 7 οὐ διαιρέσιμος διὰ 18. Ὡς τε τό πηλίκον = 0. Ἀλλὰ καὶ ἡ μετ' αὐτοῦ πολλαπλασιασθεῖσα ποσότης = 0. (§. 69.) Καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου ἀπὸ 72 οὐδὲν ἀΦήρηται, ἀλλ' ὅλος (ὁ 72) κατήχθη. Τούτῳ δὲ τῷ παραδ. ἐχρησάμεθα, εἰς τὸ δεῖξαι, ὅπως χωρεῖν δεῖον ἐπὶ τῶν τοιούτων, καὶ ὅτε τῇ ρίζῃ μηδενικά ἐνυπάρχουσι. Προκείσθω ἤδη παραδ. ἐν ᾧ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ρίζης μηδενικά ἀπαντῶσιν. Ἐξάγα-

Ἐξάγαγε τὴν ῥίζαν τοῦ	1440000					$\alpha + \beta$
						$\alpha + \beta :$
						$\alpha + \beta :$
$\alpha^2 = 1$	1	44	00	00		1 2 0 0
$2\alpha\beta + \beta^2 =$		44				
$2\alpha + \beta =$		22				
$(2\alpha + \beta) \cdot \beta =$		44				
	000000					

Ἐνθα τῶν δύο τελευταίων τάξεων ἡ ῥίζα $= 0$.
 Τοῦ γὰρ 0 ῥίζα $= 0$.

§. 274. Τῶν προχειρισθεῖσων Ποσοτήτων ἀκριβῶν οὐσῶν Τετραγώνων, καὶ αἱ τούτων ῥίζαι ἀκριβῶς ἀποδέδονται. Τοῦτο δὲ οὐκ ἀεὶ συμβαίνει. Δίδονται γὰρ καὶ ἀριθμοί, ὧν καὶ λείψανον ὑπολείπεται, εἰ ἀπὸ τῆς τελευταίας κλάσεως τὸ τελευταῖον ἀφαιρεθῇ παραγόμενον. Τὸ δὲ ὑπολειπόμενον γνήσιον τυγχάνει κλάσμα, τοῦτ' τῆς 1 ἑλαττον. Ὅθεν καὶ τὸ ἐν τετραγωνικῇ ῥίζῃ παράπτωμα οὐδὲ μονάδι ἐξισοῦται. Εἰ γὰρ τὸ ἐλλεῖπον μείζον ἦν τῆς 1, τὸν ἔσχατον τῆς ῥίζης χαρακτῆρα ἀπαξ, ἢ πολλὰκις προσαυξήσαι αὐν εἴχομεν. Ὡς οὖν ἐν τοῖς τοιοῦτοις τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκριβῶς μὴ ἐχούσης ἀποδοθῆναι, ἐπινενόηται μέθοδος, δι' ἧς, πλὴν τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν, τὸ λοιπὸν ἐν δεκαδικοῖς ζητεῖται κλάσμασιν, ὅτι ἔγγιστα τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τούτῳ τῷ τρόπῳ γνωσμένοις. Καὶ τοῦτό ἐσιν αἱ ὁλογοὶ ῥίζαι. (§. 269.) Προκείσθω οὖν τις τῶν τετραγώνων, οὗ ἡ ῥίζα πάντῃ πάντως ἀναπόδοτος.

ΛηΨθήτω

Ληφθήτω ἡ ῥίζα τοῦ 1321.

$$\begin{array}{r|l}
 13 & 21 \\
 \hline
 9 & \\
 \hline
 4 & 21 \\
 & (66) \\
 3 & 96 \\
 \hline
 & 25
 \end{array}$$

Ἦτις ὁ 36 τυγχάνει, ἀλλ' οὐκ ἀπολείπεται γὰρ 25) Καὶ μονάδι προσαντι τοι 37 εἶναι, οὐ δύναται· παρεμπίπτει 36, καὶ 37. Ἵνα δὲ τούτου πείραν λάβῃ, μέρους τῆς ῥίζης λαβὲ 7 ἀντὶ 6, καὶ παραγόμενον τὸ ἀφαιρετέον μείζον εἶναι τοῦ ἀναγκαίου τοίνυν πρὸς τῷ ὀλοσχερεὶ ἀριθμῷ κλάσμα εὑρεῖν, ὃ τῷ ὀλοσχερεὶ προσαντι καὶ τοῦτο τῇ ῥίζῃ προσῆκον. Εἰ οὖν τῇ προσάψῃς, καὶ 36. $\frac{1}{4}$ μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιάσας παραγόμενον 1314 $\frac{1}{10}$. Ὡς τὸ πάνυ βραχύ. Εἰ δὲ $\frac{3}{4}$, τοῦτ' 36 $\frac{3}{4}$ παραγόμεν. 1323 $\frac{3}{4}$. Ἄρα τὸ $\frac{3}{4}$ πάνυ τοίνυν κλάσμα, τὸ τῇ ὀλοσχερεὶ ῥίζῃ προσαντι μεταξὺ $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{3}{4}$ κεῖται. Ἀλλ' εἰ καὶ τοῦτο ζητοῖς, οὐχ εὐρήσεις. Εὐθεντοὶ οὐδὲν ἐτράποντο τήνδε. Ποίησον, διὰ τὸ ῥηθὲν, τοσαύτας καινὰς κλάσεις ἐκ μόνων ὅσα μέρη τῆς ῥίζης ὅτι ἐν δεκαδικοῖς ἔχειν βλεπόμενα, δύο μηδενικὰ ἑκάστη κλάσει ἐπὶ τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς διδούς, καὶ οὕτω χρὴ τρόπον τῷ προδιδασκέντι τὰ μέρη τῆς ῥίζης μέντοι τὸ μέρος τῆς ῥίζης, τῆς ἀπὸ τῶν ὀλοσχερῶν ἐξαχθείσης, ἀπολήγει, νόμισμα χρὴ μετὰ γὰρ τοῦτο τὰ μέρη τῆς ῥίζης τοῖς ἀπεδίδονται κλάσμασιν. Ὁ δὲ λόγος

μηδενικά προσαρτῶν τῷ λειψάνῳ, ὅτι ἐξ ἐνάτης κλά-
σεως ἐν καινὸν δεκαδικὸν ἀνακύπτει κλάσμα. "Ὅτι δὲ
ἡ τοιαύτη πρᾶξις ὀρθή, ἐπεταὶ ἐκ τούτου, ὅτι διὰ τοῦ
τόπου, ὃν τὰ δεκαδικὰ καταλαμβάνουσι κλάσματα,
δείκνυνται ταῦτα διὰ τῆς 1, τοσαῦτα μηδενικά ἐχού-
σης, διαιρεῖσθαι, ὅσαι δυάδες μηδενικῶν τῷ λειψά-
νῳ προσήφθησαν.

Παράδειγμα εἰς ἀνάπτυξιν ληφθήτω τὸ πρό-
τερον.

$$\begin{array}{r}
 1 \ 3 \overline{) 2 \ 1} \ 36,345 \\
 \underline{9} \\
 4 \ 2 \ 1 \\
 \underline{(66)} \\
 3 \ 9 \ 6 \\
 \hline
 \begin{array}{r|l}
 2 \ 1 & 00 \ 00 \ 00 \\
 (7 \ 23) & :: :: \\
 21 & 69 :: :: \\
 \hline
 3 & 31 :: \\
 & (72 \ 64) :: \\
 2 & 90 \ 56 :: \\
 \hline
 & 40 \ 44 \ 00 \\
 & (7 \ 26 \ 85) \\
 & 36 \ 34 \ 25 \\
 \hline
 & 4 \ 09 \ 75
 \end{array}
 \end{array}$$

Ἐνθα τριῶν δυάδων μηδενικῶν προσήφθεισῶν,
καὶ τρία δεκαδικὰ προέκυψαν, οὕτω κυρίως ἐκδηλού-
μενα 345, Ἄλλ' ὁ τόπος, ὃν κατέλαβον, τὰ
1000

αὐτὸ δηλοῖ. Εὕρηται οὖν ἡ ρίζα, εἰ καὶ μὴ πάντῃ
ἐπ' ἀκριβὲς, ἑλλεῖπει μέντοι τοῦ ἀκριβοῦς ἥττον,
ἢ χιλιοσημόριον, μεταξὺ τοῦ 36,345, καὶ 36,346
ἐμ-

ἐπιπίπτουσα. Καὶ ἔτι ἀκριβέστερον αὖ εὐρέσῃ, εἰ πλείους αἱ κλάσεις τῶν μηδενικῶν εἶεν οὕτως, ὥς το ἔλλειμμα καὶ τριλλιοσημορίου ἔλαττον εἶναι. Ἐάν οὖν ἤδη 36, 345 μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθῇ, καὶ τὰ δεκαδικὰ προσηκόντως ἐξαλειφθῇ, προκύψει σχεδὸν 1321. Ἐντελῇ δὲ τὴν ρίζαν λαβεῖν ἀμήχανον, μηδενικῶν, ὅσα αὖ βούλῃ, προσαφθέντων τῷ λειψάνῳ, ὡς ἄλογον οὖσαν. (§. 269.)

§. 275. Χρήσιμος δὲ ἡ μέθοδος τοῦ τὰς ρίζας, ὡς ἔγγιστα, εὐρίσκειν, καὶ εἰ ἐξ ἀπλῶν ἀριθμῶν τὴν ρίζαν ἐξαγαγεῖν πρόκειται. Τοσαῦται γὰρ κλάσεις μηδενικῶν παραληφθήσονται, ὅσα δεκαδικὰ ἔχειν βουλόμεθα. Ζητησθήτω ἡ $\sqrt{3}$ ἐν 3 δεκαδικοῖς. Ὡς ἐν τῷ 3 τρεῖς κλάσεις μηδενικῶν προσθετέαι·

3	00	00	00	1, 732 . . .
1	::	::	::	
2	00	::	::	
	(27)	::	::	
1	89	::	::	
11	00	::		
(3	43)	::		
10	29	::		
	71	00		
	(34	62)		
	69	24		

Ἐάν οὖν 1, 732 μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθῇ, προκύψει σχεδὸν 3.

1,732

$$\begin{array}{r}
 1,732 \\
 1,732 \\
 \hline
 3\ 464 \\
 51\ 96 \\
 1212\ 4 \\
 1732 \\
 \hline
 \end{array}$$

$2,999824 = 2, \frac{227824}{1000000}$. Ἐλ-
 λείπει τοίνυν τοῦ 3 ἔτι $\frac{176}{1000000}$, (ἐὰν γὰρ 176 τῷ
 999824 προσθῇς, ἔσται ὁ ἀριθμ. 1000000 ἴσος τῷ
 παρῶν· τουτ'· τὸ κλάσμα $= 1$. ἥτις προσεθεῖσα
 τῷ 2 δώσει κεφαλ. 3) ὅπερ οὐδὲ $\frac{1}{1000}$ τῆς μονάδος
 ἐξισοῦται.

§. 276. Καὶ ἐξ ἀριθμῶν, οἷς δεκαδικὰ ἐνυ-
 πάρχει, τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἐξαγαγεῖν δυνατὸν,
 τῇ αὐτῇ χρωμένους μεθόδῳ, παρ' ὅσον ἐν τῇ τῶν κλά-
 σεων διαιρέσει οἱ μὲν ὅλοσχερεῖς καθ' ἑαυτοὺς διαιρι-
 τέοι, τὰ δὲ δεκαδικὰ ἀριστερόθεν πρὸς τὰ δεξιά, εἴπερ
 ἀμέλει τοῖς ὅλοσχερεσὶ συνήπται. Ἐν οἷς ἀριθμοῦ ἀ-
 πύκτος, ὥς τε τὴν κλάσιν μὴ συμπληροῦσθαι, προσαρ-
 τάσθω καὶ μηδενικόν. (τὸ αὐτὸ γὰρ παριστᾷ, ὃ καὶ
 τὰ προσαρτηθέντα δεκαδικὰ, πλὴν ὅτι ταῦτα (τὰ
 δεκ.) ἐνεργεῖα ποσότητες τυγχάνουσι.) Ἐν δὲ τῷ
 πηλίκῳ, τῷ τὰ μέρη τῆς ρίζης περιέχοντι, τὸ κόμμα
 μὴ παραλειπέσθω, τὸ τοὺς ὅλοσχερεῖς ἀπὸ τῶν μηδε-
 νικῶν διασέλλον, ἐκ τῶν ὅλοσχερῶν τοῦ τετραγώνου
 προκύψαντας.

Παραδ.

(23	24)
92	96
5	34

καὶ τὰς ἀπὸ τῆς ῥίζης
 μηδενικῶν προσεθεῖεν, εἰς ἀκρι-
 βεσέραν τῆς ῥίζης εὔρεσιν, ἥτις,
 κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, ἐν τοῖς

δεκαδικοῖς, ὡς ἠρξάμεθα, κλάσμασι προάγεται.

Εἰ δέοι ἀπὸ κλάσματος τὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν,
 ἀπ' ἀμφοῖν ἐξακτέας τῶν ὅρων. π. χ. ἢ $\sqrt{\frac{9}{25}} =$
 $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$. Ἦν γὰρ $\frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5}$
 $= \frac{9}{25}$. Ὅθεν ἀνάγκη πᾶσα καὶ τὴν ῥίζαν οὕτως ἐξάγειν.

Ὡς εἰ ἐν γένει κλάσμα ὁποιοῦν $\frac{\alpha}{\beta}$ κληθῇ, ἔσαι

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}. \text{ Καὶ } \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} =$$

$\frac{2,236}{2,828}$. Σημειῶσαι, ὅτι, εἰ δέοι τὴν ῥίζαν ὅλου

τοῦ κλάσματος ἐξαχθῆναι, τὸ ριζικὸν σημεῖον τίθεται
 μεταξὺ ἀμφοῖν τῶν ὅρων. Εἰ δὲ ὑπὲρ, ἢ ὑπὸ τὴν εὐ-
 θεῖαν γραμμὴν κεῖται, σημαίνει, ἥτοι μόνον τοῦ ἀ-
 ριθμητοῦ, ἢ μόνον τοῦ παρονομαστοῦ τὴν ῥίζαν
 λαμβάνειν.

Ταυτὸ

Ταὐτὸ συμβαίνει καὶ τοῖς δεκαδικοῖς κλάσμα-
 σιν. Ἡ τοῦ 0, 0043 = $\sqrt{\frac{43}{10000}} = \sqrt{\frac{43}{10000}}$
 = $\frac{6,557}{100} = 0,06557 \dots$

Ἡ ἐπιτομώτερον, κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον. Ἐνθα
 τὸ μηδενικὸν μετὰ τοῦ κόμματος τὰς ἀπλᾶς διατέλ-
 λει μονάδας, γενέσθω μία κλάσις, καὶ ἀπὸ τῶν ἀρι-
 στερῶν ἐπὶ τὰ δεξιά προβαίνων διέλε τὰ δεκαδικὰ εἰς
 κλάσεις. Μοναδικοῦ δὲ ἀριθμοῦ ἐν τῇ τελευταίᾳ ὑ-
 πολειφθέντος τάξει, πρόσθεσ αὐτῷ καὶ μηδενικόν, ὥς
 τοῦτο τὰ δεκαδικὰ μηδὲνως μεταβάλλον. Καὶ ἀπὸ
 τῶν δεξιῶν δὲ ἢ διαίρεσις ἐπὶ τὰ λαϊὰ ἂν χωροῖη, εἰ
 τὰ δεκαδικὰ, ὧν ἡ πληθὺς περιττὴ, τῇ προσθέσει
 τοῦ 0 ἄρτια ποιήσαιμεν. Θές εἴτα εἰς τὸ πηλίκον, τὸ
 τὰ μέρη τῆς ῥίζης περιέξον, α'. τὸ μηδενικὸν μετὰ τοῦ
 κόμματος, τὴν τῶν ὁλοσχερῶν δηλοῦν ἀπουσίαν, με-
 σ' ὃ τὰ δεκαδικὰ. Εἰ δ' ἐν τῷ τετραγώνῳ πρὸς ἀριστε-
 ρὰν καὶ κλάσεις ἔνεισι, μηδενικὰ μόνον περιέχουσai,
 ἀνθ' ἐκάστης (θές εἰς τὸ πηλ.) ἐν μηδενικὸν μετὰ τὸ
 κόμμα, καὶ εἰς οὕτως ἐξάγαγε τὴν τετρ. ῥίζαν.
 Ἀλλὰ καὶ, εἰσοι βουλητὸν, τοῖς δεκαδικοῖς τοῦ τετρ.
 τοῖς πρὸς δεξιάν, ὅσα βούλει, μηδενικὰ ἔξει προσά-
 ψαι, ὥς πλείω τὰ μέρη τῆς ῥίζης προκύψαι.

Παραδ.

$$\begin{array}{r}
 0, \overline{14 \mid 44} \quad 0,38 \\
 \underline{ 9 } \\
 5 \mid 44 \\
 (68) \\
 \underline{ 5 } \\
 0
 \end{array}$$

Ὡστε ἡ $\sqrt{\text{τοῦ } c, 1444} = 0,38$.

Ἡ $\sqrt{0,545}$

$$\begin{array}{r}
 0, \overline{54 \mid 50} \quad 0,7382 \dots \\
 \underline{ 49 } \quad :: \\
 5 \mid 50 \\
 (1 \mid 43) \\
 4 \mid 29
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1 \overline{2.1. \mid 0.0 \mid 00} \\
 \underline{ (14 \mid 68) ::} \\
 1 17 44 :: \\
 \hline
 3. \overline{56. \mid 0.0} \\
 \underline{ (1 \mid 47 \mid 62)} \\
 2 95 24 \\
 \hline
 60 \mid 76
 \end{array}$$

Ἡ $\sqrt{0,000004851}$

$$\begin{array}{r}
 0, \overline{00 \mid 00 \mid 04 \mid 85 \mid 10} \quad 0,00220 \\
 \underline{ 4 ::} \\
 85 \mid \\
 (42) \mid \\
 84 \mid \\
 \hline
 1 \mid 10 \\
 (4 \mid 4)
 \end{array}$$

Κάνταῦθα τοῖς τελευταίοις ἀριθμοῖς, ἥτοι 110, καὶ ἑτέρας κλάσεις μηδενικῶν προσθεῖναι δυνάμεθα, τὴν ρίζαν ἀκριβεστέραν ἔχειν βουλόμενοι. §. 277.

$$\begin{array}{r}
 \text{Ἡ } \sqrt{\gamma^4 + 2\gamma^3 + 3\gamma^2 + 2\gamma + 1} \left| \begin{array}{l} \alpha + \beta \\ \gamma^4 + 2\gamma^3 + 3\gamma^2 + 2\gamma + 1 \\ \alpha^2 = \gamma^4 \end{array} \right| \begin{array}{l} \alpha + \beta \\ \alpha + \beta \\ \gamma^2 + \gamma + 1 \end{array} \\
 \hline
 2\alpha\beta + \beta^2 = + 2\gamma^3 + 3\gamma^2 + 2\gamma + 1 \\
 2\alpha = 2\gamma^2 \\
 2\alpha\beta + \beta^2 = (2\gamma^2 + \gamma) \cdot \gamma = 2\gamma^3 + \gamma^2 \\
 \hline
 + 2\gamma^2 + 2\gamma + 1 \\
 2\alpha + 2\gamma^2 + 2\gamma \\
 2\alpha\beta + \beta^2 = (2\gamma^2 + 2\gamma + 1) \cdot 1 = + 2\gamma^2 + 2\gamma + 1 \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

§. 278. Πᾶσα Τετραγωνικὴ ποσότης ἔχει ῥίζαν καὶ καταφατικὴν, καὶ ἀποφατικὴν. (§. 177.) Ὅτε τοίνυν τὴν ῥίζαν καταφατικῆς ποσότητος δεῖξαι βουλόμεθα, ἀμφοῖν τοῖς σημείοις $+$, καὶ $-$ χρῶμεθα. ὡς ἡ $\sqrt{25} = \pm 5$, ἡ $\sqrt{144} = \pm 12$, ἡ $\sqrt{16} = \pm 4$. Τοῦτο δὲ καὶ ἰκανῶς ἡμᾶς διδάσκει ἐξ ἀποφατικῆς ποσότητος οὐδεμίαν ἐξάγεσθαι ῥίζαν δυνατόν εἶναι, ὡς ἀδύνατον οὖσαν. π. γ. ἡ $\sqrt{-16}$ οὔτε $= + 4$, οὔτε $= - 4$. ἀμφοῖν γὰρ ὁ Τετράγωνος $+ 16$. Ἐνταῦθα δὲ ζητεῖται ῥίζα, ἥς ὁ τετράγ. $- 16$. ἀδύνατος ἄρα.

§. 279. Ἡ δὲ τῆς Κυβικῆς ῥίζης ἐξαγωγή, καίτοι μὴ συχνάκις ἀπαντῶσα, ἐργωδεστέρα μέντοι τυγχάνει. Ἄλλ' ὥσπερ ἐπὶ τῆς Τετραγωνικῆς, οὕτω καὶ ἐπὶ τῆς παρούσης, καθόλου τις τύπος, καὶ σχῆμα δίδεται, ὑφ' οὗ εἰς τὴν ταύτης ἐξαγωγὴν ὁδηγοῦμεθα.

$\alpha + \beta$ εἰς τὴν γ . ἀρθὲν δύνειμιν, ἡ $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$. Τὸ γὰρ $\alpha + \beta$ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν $=$

ρος αὐτῆς, καὶ τοῦτο ἔτι ἐπὶ τὸν 3. Ὅπερ
 τὸ α' ἐν μέρει παραγόμενον, ἐνταῦθα τὸ $3\alpha^2\beta$
 τετραγωνισίον τὸ β' μέρος τῆς ρ. πολλαπλασιάζον
 τοῦτο ἐπὶ τὸ α' μέρος, καὶ ἔτι μετὰ τοῦ 3. κ
 τως ἔχομεν τὸ β', ἐν μέρει παραγόμεν. ὡς δὲ τὸ
 3) Ἀρτέον εἰς κύβον τὸ β' μέρος τῆς ρ. ὅ
 τὸ γ' ἐν μέρει παραγόμεν. β^3 . Ταῦτα, τὰ γ.
 ρει παραγόμενα, ἀπὸ τοῦ καταχθέντος λειψάνου
 ρεθέντα, οὐδὲν ὑπολείψουσιν. — Ἡ τοίνυν κυβική
 τοῦ $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha + \beta$
 τούτου, καὶ τῆς θεωρίας τῆς κυβικῆς ποσότητος
 γομένη ἐν γένει τοὺς ἑξῆς κανόνας εἰς ἑξαγωγήν
 βικῆς ρίζης ἐξ ἀριθμῶν.

I) Διέλε τὸν δοθέντα ἀριθμὸν δεξιόθεν
 τὰ ἀριστερά εἰς κλάσεις, τρεῖς ἐκάστην χαρακτῆ
 ριχοῦσας, μηδόλιος φροντίζων, εἰ ἢ πρὸς τ
 τελευταία δύο, ἢ ἓνα τούτων περιλαμβάνει.
 ται γάρ, κατὰ τὸ πινακίδιον, (§. 271.) καὶ τ
 Κύβοι.

2) Ζήτητον ἐν τῷ Πινακιδίῳ τὴν ρίζα
 Κύβου τῆς α'. κλάσεως πρὸς ἀριστεράν, καὶ γ
 αὐτὴν ἐν τῷ Πηλίκῳ, ὡς τὸ α'. μέρος τῆς ρίζης
 δὲ τοιοῦτος ἀριθμὸς αὐτῷ (τῷ Πιν:) οὐχ ὑπ
 οῖος ὁ ἐν τῇ α' κλάσει, λαβὲ τὴν ρίζαν τοῦ ἐ
 λάσσονος Κύβου.

3) Ἄρον εἰς κύβον τὸ εὑρεθὲν α'. μέρος
 ζης, καὶ ἄφελε τοῦτον ἀπὸ τῆς α'. κλάσεως,
 γαγῶν τὸ λείψανον μετὰ τῶν χαρακτήρων τ
 κλάσεως.

4) Τετραγωνίσσον τὸ εὑρεθὲν α'. μέρος
 ζης, πολλαπλασιάσας τὸν Τετράγ. ἐπὶ τὸν 3
 διέλε δια τοῦ παραγομένου τὸ καταχθέν λείψ.

τούτων πηλίκον γράψον, ὡς τὸ β'. μέρος τῆς ρίζης.
Ἀλλὰ τὸ πηλίκον μὴ πάνυ μέγα λαμβανέσθω. Τρία
γὰρ ἐν μέρει τὰ παραγόμενα, τὰ ἀπὸ τοῦ καταχθέν-
τος λειψάνου ἀφαιρέθησόμενα.

5) Πολλαπλασιάσων ἤδη τὸ εὐρεθὲν β'. μέρος
τῆς ρίζης μετὰ τοῦ τριπλοῦ Τετραγώνου τοῦ α'. μέ-
ρους τῆς ρίζης. Ὅπερ δώσεισιν τὸ α'. ἐν μέρει παρα-
γόμενον, οὗ ὁ τελευταῖος χαρακτήρ ἐπὶ τὰ δεξιά
γράφηται ὑπὸ τὸν ἀνώτατον χαρακτήρα πρὸς τὰ ἀρι-
στερά τῆς β'. καταχθείσης κλάσεως.

6) Τετραγώνισον τὸ εὐρεθὲν β'. μέρος τῆς ρί-
ζης, πολλαπλασιάσας τὸν τετράγ. μετὰ τοῦ α'. μέ-
ρους τῆς ρίζης, καὶ μετὰ τοῦ 3. Τοῦτο δὲ παρέχει τὸ
β' ἐν μέρει παραγόμενον, οὗ τὸν τελευταῖον χαρα-
κτήρα ὑπὸ τὸν μέσον τῆς β'. κλάσεως γράψον.

7) Ὑψώσων ἤδη εἰς κύβον τὸ β'. μέρος τῆς ρί-
ζης, καὶ δώσει σοι τὸ γ'. ἐν μέρει παραγόμεν. οὗ τὸν
τελευταῖον χαρακτήρα ὑπὸ τὸν τελευταῖον τῆς β'. κλά-
σεως γράψον.

8) Τ' ἐν μέρει παραγόμενα πάντα προσάθροι-
σας ἄφες τὸ τούτων κεφάλαιον ἀπὸ τοῦ καταχθέν-
τος λειψάνου. Εἰ τοίνυν δύο κλάσεις μόναι προύκειν-
το, καὶ οὐδὲν υπολείπεται, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀκριβῆς
κύβος τυγχάνει, καὶ τὰ τῆς ρίζης μέρη ἀκριβῶς εὑ-
ρηται. Εἰ δὲ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν καὶ λείψ. υπολεί-
πεται, ἀψευδὲς σημεῖον τοῦ μὴ ἀκριβῆ τὸν κύβον εἶ-
ναι. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ οὐκ ἂν εἴη = 1. Εἰ γὰρ
τοῦτο, εὐρέθη ἂν ἡ 1 ἐπὶ τῆς εξαγωγῆς, τὰ β'. μέ-
ρος τῆς ρίζης μονάδι προσαυξήσασιν.

9) Πλείονον δὲ αὐτῶν τῶν κλάσεων, κα-
ταχθεσῶν καὶ τούτων καὶ τῶν δύο εὐρεθέντων με-
ρῶν τῆς ρίζης, ὡς ἐνὸς θεωρουμένων, τετραγωνίζου-
μεν αὐτά

αὐτὰ ἐπὶ τὸν 3 ἐπάγοντες, καὶ διὰ τούτων τὸ λείψανον διαιροῦντες, ὥς τε τὸ καινὸν β, ἦτοι ἕτερον μέρος τῆς ῥίζης, εὐρεῖν. Τὰ δὲ λοιπὰ γίνονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς αἱ κανόνες 5, 6, 7, 8. ἐπιτάττουσι.

Διὰ τῶν παραδειγμ. ἐκθυσόμεθα σαφῶς τὰ ῥήθεντα, πρὸ ὀφθαλμῶν τὸν καθόλου κυβικὸν τύπον ἔχοντες.

$$\text{Ἡ } \sqrt[3]{79507}.$$

	$\alpha + \beta$
79 507	4 3
$\alpha^3 = 64 ::$	
$= 15 507$	
Διαιρέτης $3\alpha^2 = (48)$	
ἐν μέρει παραγόμε.	$\begin{cases} 3\alpha^2\beta = 144 \\ 3\alpha\beta^2 = 108 \\ \beta^3 = 27 \end{cases}$
	15507
	00000

$$\text{Ἡ οὖν τούτου ῥίζα} = 43.$$

$$\text{Ἡ } \sqrt[3]{}$$

$$\sqrt[3]{\text{H}} \quad \sqrt[3]{34965783}.$$

(α'. καν. καὶ β'.)	34 965 783	$\alpha + \beta$
(γ'. καν.)	$\alpha^3 = 27$	$\alpha + \beta:$ 3 2 7
	7 965 :::	
(δ'. καν.) διαιρέτης	$3\alpha^2 = (27)$	:::
(ε'. ζ'. ζ'. καν.)	$\{ 3\alpha^2\beta = 54$	:::
ἐν μέρει παραγόμε..	$\{ 3\alpha\beta^2 = 36$	:::
	$\{ \beta^3 = 8$	:::
κεφ. τῶν ἐν μέρει παραγ.	= 5 68 :::	
(ς'. καν.) τὸ λείψ.	= 2 97 783	
κανὸς διαιρέτης, ἐν ᾧ	$\alpha = 32$	
ὥστε	$3\alpha^2 = (3072)$	
	$\{ 3\alpha^2\beta = 21504$	
ἐν μέρει παραγόμε..	$\{ 3\alpha\beta^2 = 4704$	
	$\{ \beta^3 = 343$	
κεφάλ. τῶν ἐν μέρει παραγ.	= 2197 783	
τὸ λείψ.	= 0000000	

Ὡς μηδενὸς τοίνυν ὑπολειπομένου, ἡ κυβικὴ ρίζα = 327. ἣτις τρίς ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθεῖσα τὸν κύβον παράγει 34965783.

§. 280. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς μὴ ἀκριβοῦς Κύβος ᾖ, ὅτε καὶ ἡ τούτου ρίζα οὐκ ἂν ἀκριβοῦς ἀνιχνευθεῖη, καὶ ἥς τὸ παράπτωμα ἔλαττον μονάδος, κλάσεις τῶν μηδενικῶν κἀνταῦθα προσαρτῶντες, τρία ἐκάστην περιεχούσας, ὅσον βούλει, ἔγγιστα τῆς ἀληθοῦς ρίζης γενησόμεθα. Ταῦτα δὲ τῇ τῶν μηδενικῶν προσθεῖσαι τῷ λείψανῳ προκύπτοντα ἐπόμενα μέρη τῆς ρίζης, τοῖς προσεφεθεῖσιν ὡς δεκαδικὰ προσθεῖσθαι. Τσαῦτα δὲ ἀνακύψουσιν, ὅσαι μηδενικῶν κλάσεις προσιζητηται.

$$\text{H} \quad \sqrt[3]{}$$

H V 5789436

$$\begin{array}{r|l}
 \alpha + \beta & \\
 \hline
 \alpha + \beta & \\
 \hline
 \alpha + \beta & \\
 \hline
 179,5 \dots &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 5 \overline{) 789 \overline{) 136}} & \\
 \hline
 1 & \\
 \hline
 4 \overline{) 789} & \\
 \hline
 3\alpha^2 = (3) & \\
 \hline
 \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha^2\beta = 21 \\ 3\alpha\beta^2 = 147 \\ \beta^3 = 343 \end{array} \right. & \\
 \hline
 \text{κεφ. τῶν ἐν μέρει παραγ.,} & = 3913 \\
 \text{τὸ λείψ.,} & 876 \overline{) 436} \\
 \hline
 \text{καινὸς διαιρέτ. ὅπου } \alpha = 17 & \\
 \text{ὥς} & 3\alpha^2 = (867) \\
 & 3\alpha^2\beta = 7803 \\
 \text{ἐν μέρει παραγόμεν.,} & \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha^2\beta = 4131 \\ \beta^2 = 729 \end{array} \right. \\
 \hline
 \text{τὸ τούτων κεφ.,} & = 822339 \\
 \text{τὸ λείψ.,} & = 540.97 \overline{) 000} \\
 \hline
 \text{καινὸς διαιρ. ἐνθα } \alpha = 179 & \\
 \text{ὥς} & 3\alpha^2 = (96123) \\
 & 3\alpha^2\beta = 480615 \\
 \text{ἐν μέρει παραγόμεν.,} & \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha\beta^2 = 13425 \\ \beta^3 = 125 \end{array} \right. \\
 \hline
 \text{τὸ τούτων κεφ.,} & = 48195875 \\
 \text{τὸ λείψ.,} & = 5901125
 \end{array}$$

Ὁ τὴν οὕτως ἐργώδη προᾶξιν πολλάκις ἐπαναλαμβάνειν μὴ ὀκνῶν, καὶ ἕτερα δεκαδικὰ παράξει ἡλίσματα, ὅσα βούληται.

§. 281. Αἱ διαφοραὶ τῶν Ποσοτήτων, αἱ ἐν §. 275. κτ. προβληθεῖσαι, ἀφ' ὧν τετραγωνικαὶ ῥίζαι ἦσαν

ἦσαν ἑξακτεάι, ἵνα καὶ κυβικὰς ῥίζας ἐκ τούτων ἐξαγάγωμεν, δοθῆναι δύνανται. Γίνονται δὲ τὰ αὐτά, ὡς περ ἐκεῖ, μόνον ὅτι, εἰ 1) ὁλοσχερεῖς ἀπλοῖ ἀριθμοὶ πρόκεινται, τοσαύτας κλάσεις μηδενικῶν ἐνθὺς ἐν ἀρχῇ προσαρτῶμεν, ὅσα μέρη ῥίζης ἐν δεκαδικοῖς βουλόμεθα ἔχειν κλάσμασι.

$$\Pi. \chi. \sqrt[3]{6}$$

		$a + \beta$
		$a + \beta :$
	6,000	000 1, 81 ...
	$a^3 = 1$	:::
	5,000	
διαρέτης	$3a^2 =$	(3)
ἐν μέρει παραγόμε.	$3a^2\beta =$	2 4
	$3a\beta^2 =$	1 92
	$\beta^3 =$	5 12
τὸ τούτων κεφ :	4 832	
λείψ.	168	000
καινὸς διαρέτ. ἐνθα $a = 18$		
ὥς	$3a^2 =$	(97 2)
λείψ.	$3a^2\beta =$	97 2
ἐν μέρει παραγόμε.	$3a\beta^2 =$	5 4
	$\beta^3 =$	1
τὸ τούτων κεφ.	= 97 741	
λείψ.	= 70 259.	

$$\text{Ἡ } \sqrt[3]{6} = 1, 81 \dots$$

2) Προκειμένων δὲ ἀριθμῶν, ὅς καὶ δεκαδικὰ ἔνεισι, διατρέψωσαν οἱ ὁλοσχερεῖς μόνοι δεξιόθεν πρὸς ἀριστερά, τὰ δὲ δεκαδικὰ ἀνάταλιν. Εἰ ὁ αἱ κλάσεις αἱ πρὸς δεξιά αὐτῶν πλήρεις, προσιδέσθωσαν καὶ μηδενικά.

π. χ.

$$\Pi. \chi. \text{ 'H } \sqrt[5]{126, 52}$$

	$a^3 =$	126, 520 5, 02
		125
		1 520
διαιρέτης	$3a^2 =$	(7, 5)
		1 520 000
καινὸς διαιρέτης, ἔνθα ὥς	$a = 50$	
	$3a^2 =$	(750 0)
ἐν μέρει παραγ.	$\left\{ \begin{array}{l} 3a^2\beta = \\ 3a\beta^2 = \\ \beta^3 = \end{array} \right.$	1 500 0 600 8
τὸ τούτων κεφ.	=	1 506 008
λείψ.	=	13992

3) Εἰ δὲ δεκαδικὰ μόνα πάρεσι, γραφέσθω ἐν τῷ τῆς ῥίζης πηλίκῳ τὸ σύνηθες μηδενικὸν διὰ τὴν τῆς μονάδος ἀπουσίαν, καὶ γινέσθω εἴτα ἡ εἰς κλάσεις διαίρεσις ἀριστερόθεν πρὸς τὰ δεξιὰ. Ἐλλιπεῖς δ' ὄντες οἱ τόποι τῆς τελευταίας κλάσεως πληροῦσθωσαν μηδενικῶν. Ἐὰν δὲ καὶ πρὸς τὰ λοιπὰ πρὸ τῶν χαρακτήρων μηδενικά ὑπάρχωσι, μετὰ τὸ κόμμα, τιθέσθω παραπλησίως εἰς τὸ τῶν ῥίζων πηλίκον τοσαῦτα ἔτι μηδενικά, ὅσαι αἱ κλάσεις αἱ μηδενικῶν πλήρεις. Τὰ λοιπὰ δὲ προβήσῃ τὸν συνήθη τρόπον.

Παράδ.

Παράδ. $\sqrt[3]{0,0000045}$

$$a^3 = \begin{array}{r|l} 0, & 000 \\ \hline & 004 \\ & 500 \\ & 0,016 \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & & 3 \overline{) 500} \\ \text{διαιρέτης } 3a^2 & = & (3) \\ \left\{ \begin{array}{l} 3a^2\beta = 18 \\ 3a\beta^2 = 108 \\ \beta^2 = 216 \end{array} \right. & & \\ \text{τὰ ἐν μέρει παραγόμενα} & & \\ \text{τὸ τούτων κεφ.} & = & 3 \ 096 \\ \text{λείψ.} & = & 404, \text{ κτ.} \end{array}$$

Ἐπὶ τῶν κλασμάτων ἐξάγομεν τὰς κυβικὰς ῥίζας ἐξ ἀμφοῖν τῶν ὄρων, τοῦ ῥιζικοῦ σημείου μεταξὺ ἀμφοῖν κειμένου. Ἄλλως γὰρ, ἡτοιμόνον ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ἢ μόνον ἀπὸ τοῦ παρονομαστοῦ ἢ τῆς κυβικῆς ἐξαγωγῇ ἀπαιτεῖται ῥίζης.

$$\begin{aligned} \text{Π. Χ. } \sqrt[3]{\frac{8}{125}} &= \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5} \quad \text{Καὶ} \\ \sqrt[3]{\frac{81}{125}} &= \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4,326\dots}{5} \quad \text{Ἐκ γὰρ τοῦ} \\ \text{ἀριθμοῦ ἢ } \sqrt[3]{\text{ἀκριβοῶς}} &\text{ ξαχθῆναι οὐκ ἔχει. Ἄλ-} \\ \text{λὰ } \sqrt[3]{\frac{81}{125}} &= \frac{1}{5} = 16\frac{1}{5} \quad \text{Καὶ } \frac{\sqrt[3]{81}}{125} = \\ 4,326\dots &\quad \text{Καὶ ἐν γένει } \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}} \end{aligned}$$

§. 282. Καὶ ἐξ Ἀλγεβραϊκῶν Ποσοτήτων τὴν $\sqrt[3]{\alpha}$ ἐξάγειν δυνάμεθα, ἀκριβοῶν εὐσῶν κύβων. Ἡ δ' ἐξαγωγὴ τελεῖται κατὰ τὸν γενικὸν τύπον. Ἄλλ' ἐπειδὴ τοῦτο σπανίως ἀπαντᾷ, προκρίσω καὶ τούτου παράδειγμα.

Ἡ

$$\text{Ἡ } \sqrt[3]{(\mu^3 + 12\mu^2 + 48\mu + 64)}$$

$$\alpha^3 = \frac{\mu^3 + 12\mu^2 + 48\mu + 64}{\mu^3}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{διαίρετης} & 3\alpha^2 & = 3\mu^2 \\ \text{ἐν μέρει πα-} & \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha^2\beta = \\ 3\alpha\beta^2 = \\ \beta^3 = \end{array} \right. & \begin{array}{l} + 12\mu^2 \\ + 48\mu \\ + 64 \end{array} \\ \text{ραγόμε} & & \\ \text{τὸ τούτων κεφ.} & = & 12\mu^2 + 48\mu + 64. \end{array}$$

Ὡς ἡ κυβικὴ ρίζα τῆς προτεθείσης Ποσότητος $\mu + 4$ τυγχάνει.

§. 283. Ἡ κυβικὴ ρίζα ποσότητος ἀποφατικῆς ἀποφατικῇ τυγχάνει, καταφατικῆς δὲ καταφατικῇ. Ἐνθεντοὶ ἐξ ἀποφατικῶν κυβικῶν ρίζων γινὼν οἰόντες, ὅπερ ἐπὶ ἀποφατικῶν τετραγώνων ἐγγυρεῖ. (§. 278.) ὡς $\sqrt[3]{125} = 5$.
 $\sqrt[3]{-125} = -5$. Καὶ γὰρ $-5 \cdot -5 \cdot -5 = -125$.

§. 284. Εἰς ἐξαγωγήν τῶν Διτετραγώνων, ἀναγκαῖος α'. γενικός τις τύπος τῆς δ'. δυνάμεως ἢτοι $\alpha + \beta$ εἰς τὴν δ'. δύναμιν ἐξαρτέαν, ἵνα καὶ τοῦτον καὶ ταύτας μεταχειρίζομεθα. $(\alpha + \beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$. Ἄλλ' ἐπεὶ τοῦτο, ὡς ἐκ τοῦ τύπου δῆλον, λίαν ἐπιδεδυμένον, ὡς τεσσάρων ἐν μέρει παραγομένων ἀνακυπτόντων γενικὸν τινα ἐκδησόμεθα κανόνα, ὃν ὁ πολὺς τὴν Φίαν ἐπενόησε Νεύτων, καὶ ὃν ἀπασῶν τῶν δυνάμεων ρίζαι διάτιος σειρᾶς ὅρων λαμβάνονται, ἢλίκα εἴησαν αἱ δυνάμεις.

§. 3

§. 285. Ἐπεὶ οὖν εἰς τοῦτο αἱ δυνάμεις τοῦ Δυνάμου, ἢ τῆς ποσότητος, τῆς ἐκ δύο συγκειμένης ὅρων, οἷοι $\alpha + \beta$, ἐν χρήσει παραλαμβάνονται, ὑποδείξαι διὰ βραχείων βουλούμεθα, ὅπως ῥᾶ αἰαντὸν δυνάμιν ποσότητα εἰς ἡλικηνοῦν ζητουμένην δύναμιν ἐξαίρειν δυνάμεθα, τουτ: καθ' ὃν τρόπον διορίζονται, καὶ διατάττονται ἐν τοῖς ὅροις αἱ τοῦ α καὶ β δυνάμεις, ὡσαύτως καὶ οἱ Συνεργοί, οὓς αὐταὶ ἐν ἀριθμοῖς ἔχουσι. Διὸ παρὰληΨήτω $\alpha + \beta$ μέχρις εἰς τὴν δεκάτην ὑψωτέον δύναμιν, ὧν ἑκάστη ἐν τῷ ἑξῆς ἐκκείσθω πινακιδίῳ. Ἐὰν $\alpha + \beta$ ἐπὶ τὸ $\alpha + \beta$ πολλαπλασιασθῇ προκύψει ἡ β'. τούτου δύναμις. Ἐὰν δὲ καὶ τὸ παραγόμεν. αὐθις ἐπὶ τὸ $\alpha + \beta$, ἢ γ', καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Αἱ δυνάμεις τοίνυν τοῦ $\alpha + \beta$ αἶδε τυγχάνουσι.

$$\alpha'. \text{ δύν. } \alpha + \beta$$

$$\beta'. \text{ δύν. } \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\gamma'. \text{ δύν. } \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3.$$

$$\delta'. \text{ δύν. } \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4.$$

$$\epsilon'. \text{ δύν. } \alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5.$$

$$\zeta'. \text{ δύν. } \alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^5 + \beta^6.$$

$$\eta'. \text{ δύν. } \alpha^7 + 7\alpha^6\beta + 21\alpha^5\beta^2 + 35\alpha^4\beta^3 + 35\alpha^3\beta^4 + 21\alpha^2\beta^5 + 7\alpha\beta^6 + \beta^7.$$

$$\theta'. \text{ δύν. } \alpha^8 + 8\alpha^7\beta + 28\alpha^6\beta^2 + 56\alpha^5\beta^3 + 70\alpha^4\beta^4 + 56\alpha^3\beta^5 + 28\alpha^2\beta^6 + 8\alpha\beta^7 + \beta^8.$$

$$\iota'. \text{ δύν. }$$

$$\S. \text{δυν. } \alpha^5 + 9\alpha^4\beta + 36\alpha^3\beta^2 + 84\alpha^2\beta^3 + 126\alpha\beta^4 + 126\alpha^4\beta^5 + 84\alpha^3\beta^6 + 36\alpha^2\beta^7 + 9\alpha\beta^8 + \beta^9.$$

$$\xi. \text{δυν. } \alpha^{10} + 10\alpha^9\beta + 45\alpha^8\beta^2 + 120\alpha^7\beta^3 + 210\alpha^6\beta^4 + 252\alpha^5\beta^5 + 210\alpha^4\beta^6 + 120\alpha^3\beta^7 + 45\alpha^2\beta^8 + 10\alpha\beta^9 + \beta^{10}.$$

Ἐάν ληφθῇ δυνάμει, οὗ ὁ ἕτερος τῶν ὅρων ἀποφατικὸς, ὡς $\alpha - \beta$, αἰτε δυνάμεις, καὶ οἱ τούτων συνεργοὶ χωρήσουσιν ὡσαύτως, εἰ μὴ ὅτι οἱ ἀρτιοὶ ὅροι, οἷον ὁ β' , δ' , ζ' , η' , κτ. γίνονται ἀποφατικοί, ἐνθα δηλάνοι αἱ περιτταὶ δυνάμεις τοῦ β πάρεσι.

§. 286. Ὡς ἐκ τοῦ πίνακος προφανές, τῷ α καὶ β ἐν τῇ α' δυνάμει οὐδεὶς ἐνυπάρχει ἐκθέτης, ὡς καὶ ἡ τοῦ πράγματος φύσις τοῦτο ἀπαιτεῖ, ἢ ἀκριβέστερον φάναι, τοῦ α , καὶ β ὁ ἐκθέτης $= 1$ ἐν τῇ α' δυνάμει. Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν δυνάμειων, ἐν μὲν τῷ α' ὅρω τὸ α μόνον κεῖται ἐν τῇ ὑπερτάτῃ δυνάμει, ἐν δὲ τῷ β' καὶ τοῖς λοιποῖς μετὰ τοῦ β πεπολλαπλασιασμένον ὁράται, μᾶ δυνάμει τοῦ πρὸ αὐτοῦ α ἐλαττούμενον, μέχρις οὗ παντάπασι ὁ τῆς αὐτοῦ δυνάμεως ἐκθέτης ἐκλίπη. Τὸ δὲ β ἀρχεται ἐν τῷ β' ὅσω ἐκθέτου ἀμοιροῦν, αἰτε χωρεῖ δυνάμει μᾶ αὐξανόμενον, μέχρις ἂν τῆς ὑπερτάτης ἐφίκηται δυνάμεως, ἐνθα ἡ σειρά πέρας λαμβάνει. τουτέστιν, οἱ μὲν τοῦ β ἐκθέται διηλεκτικῶς αὐξοῦσιν, οἱ δὲ τοῦ α μειοῦνται.

§. 287. Ῥάδιον οὖν ἔσαι τοὺς ὅρους οἵασι δυνάμει εὐρεῖν, ἡλικηοῦν ἂν εἴη, τὰ ἐν τῷ ἀνωτ. §. παρατηροῦντας. Οὕτως ἂν οἱ ὅροι, τοῦ

$$\alpha + \beta$$

$\alpha + \beta$ εἰς τὴν β' . ἀρθέντος δυνάμιν εἶεν, α^{12} , $\alpha^{11}\beta$, $\alpha^{10}\beta^2$, $\alpha^9\beta^3$, $\alpha^8\beta^4$, $\alpha^7\beta^5$, $\alpha^6\beta^6$, $\alpha^5\beta^7$, $\alpha^4\beta^8$, $\alpha^3\beta^9$, $\alpha^2\beta^{10}$, $\alpha\beta^{11}$, β^{12} . Ἐκ τούτου δὲ, ὡς καὶ ἐκ τῶν προτέρων, δῆλον τὴν σειρὰν ἐνὶ ὄρω πλεονεκτεῖν τοῦ ἀριθμοῦ τῆς ζητουμένης δυνάμεως. Ἐπὶ γάρ τῆς δ', δυνάμεως ε'. οἱ ὄροι. ἐπὶ τῆς ε'. ἐπτά. ἐπὶ τῆς β' . δεκατρεῖς. Καὶ ἐν γένει, εἰάν ὁ ἀριθμὸς τῆς δυνάμεως = μ τεθῇ, οἱ ὄροι αὐτῆς ἔσονται ἀναγκαίως $\mu + 1$. Ἀναγκαῖον δὲ καὶ τὰ τοὺς συνεργοὺς εὑρεῖν. Ὡς ἐν τῷ πινάκι ἐφ' ἀπασῶν π' ὄρει καθορᾶν τῶν δυνάμεων, αἰτίποτε ὁ β' . ὄρος τῆς σειρᾶς συνεργὸν κέντηται τὸν ἀριθμὸν, ὅς ὁ ἐκθετης τῆς προηγηθείσης ὑπερτάτης δυνάμεως τοῦ α ἦν. ἦτοι τοῦ α' . τῆς σειρᾶς ὄρου. Οὕτως ἐπὶ τῆς γ'. δυνάμεως ὁ συνεργὸς τοῦ β' . ὄρου = 3. ἐπὶ τῆς ε'. = 5. ὁ αὐτὸς δ' ἀριθμὸς ἦν καὶ τῷ α' . ὄρω ὁ ἐκθετης τῆς αὐτοῦ δυνάμεως. Τῶν δ' ἐπομένων ὄρων οἱ συνεργοὶ τὸν δὲ τὸν τρόπον ἀναφύονται. Πολλαπλασίασον ἕκασον ὄρον, ἀπὸ τοῦ γ'. ἀρχόμενος, μετὰ πάντων τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων τῶν προηγηθέντων ὄρων, τῶν τοῦ α ὀσμῇ, ἐξαιρουμένων τῶν δυνάμεων τοῦ α ἐκείνου τοῦ ὄρου, οὗ ὁ συνεργὸς ζητεῖται, καὶ διέλε τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον διὰ τοῦ παραγομένου πάντων τῶν τοῦ β ἐκθετῶν τῶν προηγησαμένων ὄρων, καὶ αὐτοῦ τούτου τοῦ ὄρου, οὗ ὁ συνεργὸς εἰς ζήτησιν πρόκειται. Ἡ καὶ τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τοῦ β' . γινομένης ὄρου, ὁ κανὼν κρατεῖ ὡσαύτως, καὶ οὕτως εὐρήσεις τοὺς συνεργοὺς πάντων τῶν ὄρων. Ληφθήτω εἰς παράδειγμα ἡ ε'. δύναμις, ἥς οἱ ὄροι (§. 285.) α^6 , $\alpha^5\beta$, $\alpha^4\beta^2$, $\alpha^3\beta^3$, $\alpha^2\beta^4$, $\alpha\beta^5$, β^6 . καὶ ζητηθήτωσαν τούτων οἱ συνεργοί. α' . τοῦ β' . ὄρου, ἢ τοῦ $\alpha^5\beta$. Κατὰ τὸν κανόνα λαβὼν τὰ παραγόμε. τῶν ἐκθετῶν τῶν προηγηθεισῶν δυνάμεων τοῦ α , (τῆς δυνάμεως τοῦ α τοῦ τοῦ ὄρου, ἦτοι τοῦ β' . ἐξαιρουμένης) διέλε αὐτὰ

διὰ

διὰ τοῦ παραγομένου τῶν ἐκφετῶν τῶν δυνάμεων τῶν προηγησαμένων ὄρων τοῦ β, καὶ τῆς δυνάμεως τούτου τοῦ ὅρου συνάμα ληϑείσης. Πρὸ τοῦ β'. ὅρου ἦν μόνον εἰς ὅρος α⁶, ἐν ᾧ οὐδὲν β παρὸν ἐτύγχανεν. Ὡς καὶ αὐδεμίαν τοῦτου δύνάμιν ἐν τῷ β'. ὄρῳ· (ἢ μᾶλλον δύνάμιν αὐτοῦ (τοῦ β) ἐν τούτῳ τῷ ὄρῳ ἢ 1) Ἀλλὰ β, ἢ β¹ παραληπτέον εἰς παραγόμενον τοῦ διαιρέτου, ἢ ὡς διαιρέτην. Ὁ συνεργὸς ἄρα τοῦ β'. ὅρου = $\frac{6}{1} = 6$. Τοῦ γ'. ὅρου ὁ συνεργός. Αἱ δυνάμεις τῶν προηγησαμένων ὄρων τοῦ α ἦσαν 6 καὶ 5, μὴ παραλαμβανομένης τῆς δυνάμεως τοῦ α τοῦ ἀνα χεῖρας ὅρου. αἱ δὲ τῶν προηγούμενων ὄρων τοῦ β μετὰ καὶ τῆς δυνάμεως τοῦ β τοῦδε τοῦ ὅρου = 1 καὶ 2. Ὁ συνεργὸς ἄρα τούτου τοῦ ὅρου = $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$.

Ὡσαύτως καὶ τοῦ δ'. ὅρου ὁ συνεργός = $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$. Τοῦ ε'. = $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$. Τοῦ ζ'. = $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6$. Τοῦ ζ'. = $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1$. ἥτις

οὐ προτίθεται τῆς ποσότητος, εἰς μὴ πολλαπλασιαζουσα. Εὐρίηται τοίνυν οἱ συνεργοὶ τοῦ (α + β). Ἡ δὲ σειρά εἴη ἂν α⁶ + $\frac{6}{1} \alpha^5 \beta$ + $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \alpha^4 \beta^2$ + $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 \beta^3$ + $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^2 \beta^4$ + $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \alpha \beta^5$ + $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \beta^6$ = α⁶ + 6α⁵β + 15α⁴β² + 20α³β³ + 15α²β⁴ + 6αβ⁵ + β⁶. Ὁ τῷ ἐν τῷ πινάκι συνάδει, καὶ πᾶς τις διὰ πολλαπλασιασμοῦ εὐρεῖν ἔχει. Οὕτως ἂν εὐρεθεῖεν πάντες οἱ συνεργοὶ ἀπάντων τῶν κατὰ πάσας τὰς δοθείσας δυνάμεις ὄρων. Ἀλλ' ἐν τούτοις μετὰ προσοχῆς παρατηρουμένοις ὀρώμεν ἕκαστον ὅρον ἔντε τῷ ἀριθμητῇ, καὶ παρονομαστῇ.

ἔξ

ἔξω τῷ Πολλαπλασιασμοῦ ὁ αὐτοῦ συνεργὸς συγκρο-
τεῖται, μονάδι ἐλάσσονας χαρακτῆρας ἔχειν, ἢ ἡ τά-
ξις τοῦ ζητουμένου ὅρου τυγχάνει. π. χ. ὁ δ'. ὅρος
ἔχει μόνον τρεῖς χαρακτῆρας ἐν τῷ ἀριθμητῇ μετ' ἀλλή-
λων πολλαπλασιασθησόμενους, καὶ τρεῖς ἐν τῷ παρονομι-
ασαύτως μετ' αἰλ. πολλαπλ. Πρὸς τούτοις τοῦ μὲν
ἀριθμητοῦ τοὺς χαρακτῆρας ἀπὸ τηλικούτου ἀρχεσθαι
ἀριθμοῦ, εἰς ἡλικίην δύναμιν $\alpha + \beta$ ἀρθῆναι δεοί.
Ἐκαστον δὲ τούτων (τῶν χαρ.) μονάδι τοῦ προηγου-
μένου ἐλαττουσθαι, ἢ ἐπισθαι ἀλλήλοισι κατὰ φυσικὴν
τάξιν, ἀντίστροφον μέντοι. Ἐν δὲ τῷ παρονομ. αἰ-
ποτε ἀπὸ μονάδος τὴν ἀρχὴν γίνεσθαι, τῶν ἐπομένων
ἀριθμῶν ἐν Φυσικῇ τάξει ἀλλήλους διαδιχομένων. Καὶ
τοῦτου καθόλου ὄντος, οὐ χαλεπὸν ἐκάστου ὅρου οἶα-
σεῖν ὁσθείσης δυνάμειος τοὺς συνεργοὺς, καὶ ἐκ τοῦ
ἐπομένου, καὶ ὅλον τὸν ὅρον εὑρεῖν, εἰδότες προσέ-
τι, καὶ ὅσοι ὅσοι ἐκάσῃ δυνάμει ἐνυπάρχουσι. Πρὸ
πάντων οὖν εὑρετέον τὰς δυνάμεις τοῦ α καὶ β . ἢ
τοῦ β δύν. αἰ μονάδι ἐλάττω τοῦ κατὰ τὸν ὅρον ἀ-
ριθμοῦ. τὴν δὲ τοῦ α δύν. ἐν ἐκάστῳ ὅρῳ ἀνακα-
λυπτομεν, ἀπὸ τῆς ὑπερτάτης δυνάμειος ἀφαιροῦντες
τοὺς ἐξέτην τοῦ β , τοῦ ἐν τῷ ἀνά χειρας ὅρῳ. Οἶον
ὁ ζ'. ὅρος τοῦ $(\alpha + \beta)^{10}$ ἐστὶν ὁ $\alpha^4 \beta^6$. Τὸ γὰρ
 β τοῦ ζ' ὅρου ἐν τῇ ζ' δυνάμει τυγχάνει. β^6 . Ἄρα τὸ α ἐν
τῷ αὐτῷ ὅρῳ ἔσται $\alpha^{10-6} = \alpha^4$. Ἐν τῷ ε' ὅ-
ρῳ τοῦ $(\alpha + \beta)^7$ τὸ μὲν β ἐν τῇ δ' δυνάμει, ὡς
 β^4 , τοῦ δὲ α ἢ εὐν μίς $= \alpha^{7-4} = \alpha^3$. Ὡς
ὁ μω, $\alpha^3 \beta^4$. Παραπλησίως καὶ ὁ η'. ὅρος τοῦ
 $(\alpha + \beta)^{10} = \alpha^{10-7} \beta^7 = \alpha^3 \beta^7$. Ἐὰν
οὖν ἤδῃ καὶ τοὺς συνεργοὺς εὐρήσωμεν. Ἐξω π. χ.
ὁ συνεργὸς τοῦ ζ' ὅρου τῆς 10 : ης δυνάμειος τοῦ
 $\alpha + \beta$ εὑρετέος. Ὁ ζ' ὅρος $= \alpha^4 \beta^6$. Ὁ δὲ
συνεργὸς τὸ παραγόμενον τυγχάνει ἔξ ἀριθμῶν ἐν μὲν
τῷ ἀριθμητῇ ἀπὸ τοῦ 10 ἀρχομένων, καὶ δηθενικῶς
μονάδι ἐλαττουμένων, ἐν δὲ τῷ παρονομασῇ ἀπὸ 1

Τ

μ χ. 1

$$\text{μέχρι τοῦ 6. Ἄρα ὁ ζ'. ὅρος τοῦ } (a + \beta)^{10} \\ = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^4 \beta^6 = 210 a^4 \beta^6.$$

$$\text{Ὁ ε'. ὅρος τοῦ } (a + \beta)^7 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ a^3 \beta^4 = 35 a^3 \beta^4.$$

§. 288. Ἐξω ἡ δύναμις, εἰς ἣν τὸ διώνυμον ἐξήρται = μ . Ἐπεὶ οὖν κατὰ τὸ ἐν §. §. 286. 287. ἡ τοῦ a δύναμις ἐν τοῖς ἐπομένοις ὅροις ἀεὶ μονάδι μειοῦται, ἡ δὲ τοῦ β ἐν μὲν τῷ β' . ἀπὸ 1 ἀρχεται, ἐν δὲ τοῖς ἐφεξῆς διηλεκτῶς μονάδι. προσαύξει, καὶ ὁ συνεργὸς τοῦ β' . ὅρου ὁ ἐκθέτης τῆς ὑπερτάτης δυνάμεως τοῦ a , διὰ 1 διακεθεῖς, τῶν δ' ἐχομένων ὅρων οἱ συνεργοὶ τὸ πηλίκον κλάσματος τυγχάνουσιν, οὗ οἱ ὅροι, κατὰ τὰ ἀνωτ. εὐρηγται, ἐκδηλωθεῖν αὖν τὸ διώνυμον γενικώτατα διὰ τῆς δε τῆς σειρᾶς.

$$(a + \beta)^\mu = a^\mu + \frac{\mu}{1} a^{\mu-1} \beta + \frac{\mu \cdot \mu-1}{1 \cdot 2} a^{\mu-2} \beta^2 + \frac{\mu \cdot \mu-1 \cdot \mu-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{\mu-3} \beta^3 + \frac{\mu \cdot \mu-1 \cdot \mu-2 \cdot \mu-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{\mu-4} \beta^4 + \frac{\mu \cdot \mu-1 \cdot \mu-2 \cdot \mu-3 \cdot \mu-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{\mu-5} \beta^5, \text{ κτ.}$$

$$a^{\mu-2} \beta^2 + \frac{\mu \cdot \mu-1 \cdot \mu-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{\mu-3} \beta^3$$

$$+ \frac{\mu \cdot \mu-1 \cdot \mu-2 \cdot \mu-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{\mu-4} \beta^4$$

$$+ \frac{\mu \cdot \mu-1 \cdot \mu-2 \cdot \mu-3 \cdot \mu-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{\mu-5} \beta^5$$

$a^{\mu-5} \beta^5$, κτ. ἥτις ἐκπερανθήσεται, ἡ ἥς ἀπαντες οἱ ὅροι τῆς δυνάμεως εἰς πέρας ἤξουσιν γραφόμενοι, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ a (ἦτοι τοῦ μ) ἀφαιρούμενος, ἴσος ἢ τῷ μ . π. χ. εἰ $\mu = 4$ εἴη,

περανθεῖν οὖν καὶ ἡ σειρά ἐπὶ τοιούτου ὅρου $a^{\mu-4} \beta^4$.

Την.

Τηνικαῦτα γὰρ ἔσαι $a^{4-4} \beta^4 = a^0 \beta^4$. Ἀλλὰ ποσότης ἐν τῇ οὐδυνάμει $= 1$. (§. 198.) ἄρα $a^0 \beta^4 = 1 \beta^4 = \beta^4$, ὅς ὁ ἔσχατος ἐστὶν ὅρος, ὃ οὐδεὶς συνεργός, ὡς ἐν τοῖς προηγηθεῖσι σαφῶς κατείδομεν. Καὶ β ἔσαι τηνικαῦτα ἐν τῇ ὑπερτάτῃ δυνάμει, εἰς ἣν τὸ δυνάμειον ἔδει ἐξαρθῆναι.

Τὸ μ ὡς πᾶσαν ποσότητα ἐν γένει παριστῶν καὶ κλάσμα ὑποδηλώσει, καὶ ὁ τῆς μνήμης μὴ ἀποβαλὼν, ὁ §. 200. εἴρηται, ῥαδίως συνήσει, ὅτι καὶ ῥίζαν διὰ τούτου τοῦ δυνάμειου ἐξάγειν ἔχομεν. π. χ.

Ἐξω $\mu = \frac{1}{2}$. Καὶ ἔσαι $(a + \beta)^{\frac{1}{2}} = (a + \beta)^{\frac{1}{2}}$. Τὸ δεῖσα δύναται τῷ $\sqrt{a + \beta}$, ἢ τῇ κυβικῇ ῥίζῃ αὐτοῦ. Ἐξω $\mu = \frac{3}{4}$. Ὡστε $(a + \beta)^{\frac{3}{4}} = (a + \beta)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(a + \beta)^3}$.

§. 289. Ἐκκείσθωσαν καὶ παραδείγμ. τούτων. Εἰ δέοι § εἰς τὴν ζ'. ἐξαρθῆναι δυνάμιν, εἴη ἂν κατὰ τὸ $(a + \beta)^{\frac{1}{2}}$, $\mu = 6$. καὶ $(a + \beta) = 5$. Διέλε τον ζ, ἡ βούλει. Ἐξω $a = 2$. ἄρα $\beta = 3$. Γράψας οὖν ἡδὴ τον ἐν γένει τύπον τοῦ ἀνωτ. §. σύνθες κατὰ τούτου τὴν σειρὰν, ἥτις ἔσαι $(2 + 3)^6 = 2^6 + \frac{6}{1} 2^5 \cdot 3 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} 2^4 \cdot 3^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^3 \cdot 3^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 2^2 \cdot 3^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} 2 \cdot 3^5 + 3^6$
 $= 2^6 + 6 \cdot 2^5 \cdot 3 + 15 \cdot 2^4 \cdot 3^2 + 20 \cdot 2^3 \cdot 3^3 + 15 \cdot 2^2 \cdot 3^4 + 6 \cdot 2 \cdot 3^5 + 3^6$. Καὶ τῶν ποσοτήτων ἐνεργεία εἰς δυνάμεις ἀρθισῶν, $= 64 + 6 \cdot 32 \cdot 3 + 15 \cdot 16 \cdot 9 + 20 \cdot 8 \cdot 27 + 15 \cdot 4 \cdot 81 + 6 \cdot 2 \cdot 27 + 3^6$.

$$+ 6 \cdot 2 \cdot 243 + 729 = 64 + 576 \\ + 2160 + 4320 + 4860 + 2916 \\ + 729 = 1:625.$$

Ἄλλ' εἶποι ἅντις πολλῶν ταχύτερον 5 κατὰ τὸν συνήθη τρόπον ἤρθη ἂν εἰς τὴν 5. δύναμιν, ἢ οὕτως. Εἰσι μέντοι δυσχερέστερα παραδείγματα. Ἐνθα τοῦτο πλεῖστα συμβάλλεται, καὶ μάλιστα ἐπὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ριζῶν μετὰ μείζονος ἐκθέτου. π. χ. Ἔστω ἐξακτῆα

ἢ $\sqrt[6]{6}$. Ὡς $(a + \beta)^{\frac{1}{6}}$. Ἐνταῦθα $a + \beta = 6$, καὶ $\mu = \frac{1}{2}$. Τεθῆτω a ὡς 4, καὶ β ὡς 2. Καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου, προτεθῆτω ἡ σειρά τοῦ Δουανύμου τοῦ $(4 + 2)^{\frac{1}{2}}$. Ἐὰν οὖν γραφῶσιν ἐν τῷ γενικῷ τύπῳ τοῦ Δουανύμου §. ἀνωτ. ἀντὶ τοῦ a καὶ β , καὶ μ τὰ ἰσοδύναμα, ὅπερ αὐτὸ δυσχερῶς γενήσεται, τοῦ τύπου πρὸ ὀφθαλμῶν λεγθέντος, ἔχομεν τὴν ἐπομένην σειράν. $(4 + 2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} 4^{\frac{1}{2}} - 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 1$

$$4^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 2^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot 2} - 1 \cdot \frac{1}{2} - 2$$

$$4^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 2^3 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 3$$

$4^{\frac{1}{2}} - 4 \cdot 2^4$, κτ. Τοῦτο δὲ, εἰάν οἱ συνεργοὶ προσηκόντως πολλαπλασιασθῶσι, καὶ διαιρεθῶσιν $= 4^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 4^{\frac{1}{2}} - 1 \cdot 2 - \frac{1}{8} \cdot 4^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 2^2 + \frac{1}{16} \cdot 4^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot 2^3 - \frac{1}{128} 4^{\frac{1}{2}} - 4 \cdot 2^4$, κτ. Ἀλλὰ $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, καὶ ἀντὶ τοῦ $a^{\frac{1}{2}} - 1$. ἔχει ἀντικαταστήναι τὸ $\sqrt{a}$, ἀντὶ δὲ τοῦ $a^{\frac{1}{2}} - 2$

τὸ $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$. Τὸ γὰρ, ἐφ' ᾧ καὶ αὐθις τοῦ

το ἐπαναλαβεῖν, ἀπὸ τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων ἀφαιρεῖντι, διαιρεῖν ἐςιν αὐτοὺς διὰ δυνάμεως τηλικαύτης, ἡλίκος ὁ ἀφαιρεθεὶς ἀριθμός. §. 194. "Ενθεντοι ἔσαι ἡ σειρὰ $\sqrt{4 + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{4 \cdot 2} - \frac{1}{8}$.

$$\sqrt{4 \cdot 2^2 + \frac{1}{128}} \cdot \sqrt{4 \cdot 2^3} - \frac{1}{128} \cdot \sqrt{4 \cdot 2^4}$$

$$2^4 \dots \text{Τοῦτο δὲ} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot 2 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{128} \cdot 4 + \frac{1}{128} \cdot \frac{2}{64} \cdot 8 - \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{256} \cdot 16, \text{ κτ.} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{128} + \frac{1}{64} - \frac{1}{1024}, \text{ κτ.}$$

Καὶ προσεθέντων τῶν καταφατικῶν ὄρων, ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἀποφατικῶν ἐν μέρει, καὶ τῶνδε ἀπ' ἐκείνων ἀφαιρεθέντων, ἔξομεν καταφατικὸν μὲν $\frac{101}{8}$, ἀποφατικὸν δὲ $\frac{97}{1024}$. "Αμφω δ' αἱ ποσότητες ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀχθεῖσαι παρονομασίην δώσουσι $\frac{2576 - 69}{1024} = \frac{2507}{1024}$

$$= 2 \frac{459}{1024} \cdot \text{ἡ ἐν δεκαδικαῖς κλάσμασιν} =$$

2, 448 . . . "Ο τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 6 αἰς ἔγγιστα, ἧς τινος ἀκριβῶς ἐξάγεσθαι μὴ ἐχούσης, καὶ ἡ σειρὰ αὖν εἰς ἀπέραντος, αἰ μέντοι ἔγγιον τῆς ἀκριβοῦς. Καὶ τὰς μὲν τετραγωνικάς, καὶ κυβικάς ῥίζας οὐκ αὖν δὴπου τοῦτον τὸν τρόπον ἐξαγάγοιμεν. Εἰ δὲ ῥίζας ἐξαγαγεῖν πρόκειται, μείζονας τοὺς ἐκθέτας ἐχούσας, τὸ Δυνώμυμον οὐ μικρὰν ἡμῖν εἰς τούτο τὴν ὀνητιν ἐμποιήσει. "Ενθεντοι ζητητέος προσφύερός τις τύπος τοῦ Δυνώμυμου.

§. 290. Διὰ τοῦτον τὸν λόγον γράψον ἔτι ἄπαξ τὸν τοῦ Δυνώμυμου τύπον.

$$\alpha + \frac{\mu \alpha}{1} \beta + \frac{\mu \cdot \mu}{1 \cdot 2} \alpha \beta + \mu \cdot$$

$$+ \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{\mu-3} \beta^3$$

$$+ \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{\mu-4} \beta^4, \text{ κτ. } \text{Ἐπειδὴ (194.) } a^{\mu-1} = \frac{a^{\mu}}{a}$$

$$\text{καὶ } a^{\mu-2} = \frac{a^{\mu}}{a^2}, \text{ τοῦ ἴσου ἀντὶ τοῦ ἴσου ἀντικα-}$$

ταζάντος, οὕτως ἀν ἐκκείοιτο ἡ σειρά,

$$a + \frac{\mu a \beta}{a} + \frac{\mu \cdot \mu - 1}{1 \cdot 2} \frac{a^{\mu-2} \beta^2}{a^2}$$

$$+ \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a^{\mu-3} \beta^3}{a^3}$$

$$+ \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{a^{\mu-4} \beta^4}{a^4}$$

κτ. ἥτις ἐν ἅπασιν τοῖς κατ' αὐτὴν ὅροις μετὰ τὸν α'.
τὸ $\frac{\beta}{a}$ περιέχει. ἐν γὰρ τῷ β'. ὅρῳ ἀντίκα δῆλον.

ἐν δὲ τῷ γ'. τὸ $\frac{\beta^2}{a^2}$ ἐνυπάρχει = $\frac{\beta \cdot \beta}{a \cdot a}$. ἐν

δὲ τῷ δ'. τὸ $\frac{\beta^3}{a^3} = \frac{\beta \cdot \beta \cdot \beta}{a \cdot a \cdot a}$, κτ. Κληθήτω τοίνυν $\frac{\beta}{a}$

= Π. Καὶ ἡ σειρά ἔξαι, ἀντὶ τοῦ β' τοῦ Π, καὶ ἀντὶ τοῦ

$\frac{\beta^2}{a^2}$ τοῦ Π², κτ. τεθέντος, $a + \frac{\mu}{1} a \Pi$

$$+ \frac{\mu \cdot \mu - 1}{1 \cdot 2} a \Pi^2 + \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a \Pi^3$$

$$a^{\mu} \Pi^3 \quad + \quad \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\mu \quad 4$$

$$a \quad \Pi, \text{ κτ.}$$

Κάν ταύτη τῇ σειρᾷ, ἥ δῆλον, ὁ α'. ὅρος ἐμπεριέχεται τῷ β'. ὁ β'. τῷ γ'. ὁ γ'. τῷ δ'. κτ. ἢ σαφέστερον. Ὁ β'. ὅρος προκύπτει τῷ Πολλαπλασιασμῷ τοῦ α'. ὅρου α^{μ} μετὰ τοῦ $\frac{\mu}{1} \Pi$. Ὁ δὲ γ'. τῷ τοῦ β'. μετὰ τοῦ $\frac{\mu - 1}{2} \Pi$. Ὁ δὲ δ'. τῷ τοῦ γ'. μετὰ $\frac{\mu - 2}{3} \Pi$, κτ. ὡς ἐκ τῆς προόδου σαφές.

Ῥηθῆτω ὁ α'. ὅρος Α. ὁ β'. Β. ὁ γ'. Γ ὁ δ'. Δ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, καὶ ἡ σειρά ἄλλως ἐκφανθήσεται. Ὁ οὖν α'. ὅρος, ἢ $\alpha^{\mu} = A$. Ἄρα ὁ β'. ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ α'. καὶ τοῦ $\frac{\mu}{1} \Pi$ συνισταμενος $= \frac{\mu}{1} A \Pi = B$. Ἐνθενταὶ ὁ γ'. ὁς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ β'. καὶ τοῦ $\frac{\mu - 1}{2} \Pi$ συγκροτεῖται $= \frac{\mu - 1}{2} B \Pi = \Gamma$. Ὡς καὶ ὁ δ', $\frac{\mu - 2}{3} \Gamma \Pi = \Delta$. ἢ δὲ σειρά

$$a^{\mu} + \frac{\mu}{1} A \Pi + \frac{\mu - 1}{2} B \Pi + \frac{\mu - 2}{3} \Gamma \Pi + \mu$$

+ $\mu - 3$ ΔΠ, κτ. Ἐν ᾧ τοῦτο μόνον σημει

τέον, ὅτι $\Pi = \frac{\beta}{\alpha}$, καὶ ὅτι τὰ μείζω τῶν γρα

μάτων Α, Β, Γ, Δ, κτ. ἐφ' ἑκάστου ὅρου τιμὴν αἰεὶ καὶ δύναμιν τοῦ προηγηθέντος ἐμφαίνουσι ὅρου. Τοῦτον τὸν τύπον ἀκριβῶς τῇ διανοίᾳ ἐντυπώσασθαι ἀναγκαῖον. Τὸ γὰρ πᾶν χρήσιμον τοῦ Διουμου πᾶς τις ἐπιγνώσεται εἰς τὰ τῆς Μαθηματικῆς ψηλότερα θεωρήματα χωρήσας. Σημειωτέον προτι, ὅτι τὸ μ καὶ κλάσμα, καὶ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς ναι δύναται. Τὸ α'. ἔσαι αἰετοτε ἐπὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς ρίζης τῇ συνεργείᾳ τοῦδε τοῦ τύπου, αἷς ἐν ἐξῆς ὁψόμεθα παραδείγματι.

§. 291. Εἰ δέοι τὸν ἀριθμὸν 12 εἰς γ. δύναμιν ἐξᾶραι, διαιρεθῇτω εἰς 4 + 8.

Ὡς $\alpha = 4$. καὶ $\beta = 8$. Καὶ ἐκ τοῦ πομένου $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{8}{4} = 2$. Τὸ δὲ ἐστὶ τὸ Π.

Ἐνθεντοι $\Pi = 2$ ἐνταῦθα. Τὸ δὲ $\mu = 3$ ἔστω $\alpha^3 = 4^3 = 64 = A$.

$\mu A \Pi = 3 \cdot 64 \cdot 2 = 384 = B$.

$\mu - 1$ ΒΠ = 1 · 384 · 2 = 768 = Γ.

$\frac{2}{\mu - 2}$ ΓΠ = $\frac{1}{2} \cdot 768 \cdot 2 = 512 = \Delta$.

$\frac{3}{\mu - 3}$ ΔΠ = $\frac{2}{1} \cdot 512 \cdot 2 = 0$.

4

Ἡ σειρά ἐφικνεῖται τοῦ πέρατος ἐπὶ τοῦ τοῦ τελευταίου ὅρου, ὡς τοῦ σχάτου μετὰ τοῦ γενικοῦ πολλαπλασιασθέντος, ὑπερ ὅλον τὸν ὅρο

μηδενικὸν τρέπει. (§. 69.) Ταύτη τοι καὶ ἅπαντες οἱ ἐξῆς ὅροι = τῷ 0. Οἱ δ' ἀναφύοντες ἀριθμοὶ ἀλλήλοις προσεθέντες παρέχουσι κεφάλ. $1728 = 12^3$.

Ἐξάγαγε τὴν $\sqrt{2}$. Διαιρεθῆτω ὁ 2 εἰς δύο μέρη, ἥτοι $= 1 + 1$. Ὡς προέκειται τὴν $\sqrt{(1+1)} = (1+1)^{\frac{1}{2}}$ ἐξάγαγεῖν.

Ἐνταῦτα $\mu = \frac{1}{2}$. $\Pi = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$. Ἡ δὲ σειρὰ ὡς προαχθεῖη.

$$+ \frac{\mu}{\alpha} = 1 \frac{1}{2} = + 1 = A.$$

$$+ \frac{\mu}{1} = A\Pi = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} = B.$$

$$+ \frac{\mu - 1}{2} B\Pi = - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = - \frac{1}{8} = \Gamma.$$

$$+ \frac{\mu - 2}{3} \Gamma\Pi = - \frac{1}{2} \cdot - \frac{1}{8} \cdot 1 =$$

$$+ \frac{1}{12} = \Delta.$$

$$+ \frac{\mu - 3}{4} \Delta\Pi = - \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{12} \cdot 1 = -$$

$$\frac{5}{128} = E.$$

$$+ \frac{\mu - 4}{5} E\Pi = - \frac{7}{16} \cdot - \frac{5}{128} \cdot 1 =$$

$$+ \frac{35}{1280} = Z.$$

$$+ \frac{\mu - 5}{6} Z\Pi = - \frac{1}{3} \cdot \frac{35}{1280} \cdot 1 = -$$

$$\frac{105}{3120} = H, \text{ κτ. } \text{Ὡς ἡ } \sqrt{2} \text{ εἴη ἂν} = 1$$

$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{128} + \frac{35}{1280} - \frac{105}{3120}, \text{ κτ.}$
ἐπ' ἄπειρον. Ἐπεὶ δ' ἡ παρούσα ἄλις ἐγγὺς τῆς ἀληθοῦς ῥίζης, ἔχομεν ἂν πέρας αὐτῇ ἐπιθεῖναι.

Ἐὰν οὖν αἱ καταφατικαὶ ποσότητες προσαθροισθῶσιν

σθῶσιν ἀλλήλαις, καὶ ἀπὸ τούτων αἱ ὁμοίως ἀλλήλαις προσεφεῖσαι ἀποφατικαὶ ἀφαιρεθῶσιν, ἀμφοτέρων τῶν κλασμάτων α'. εἰς τὸν αὐτὸν παρονομ. ἀχθέντων, προκύψει $1 \frac{415}{1024}$. Ἐν δὲ δεκαδικοῖς 1,405, ὑπερ εὐ πολὺ τῆς V 2 ἀφίζεται.

§. 292. Καὶ τὰ μὲν μέχρι τοῦδε ῥηθέντα περὶ τῆς ἀνὰ χεῖρας διδασκαλίας, διεξοδικωτάτης οὔσης, ἱστορικὴν τινα μόνον γνῶσιν παρέχοντα, ἀρκεῖ. Τοῦτο γὰρ τὸ εἶδος τῶν ὑπολογισμῶν δυσχερές πάνυ τοῖς, εἰ οὓς ταῦτα γέγραπται. Ἐνθεντοι καὶ ὅπως διὰ τοῦ Δυναύμου ἔτι μείζους ἐξάγονται ῥίζαι, ὅπως τε ἀποφατικαὶ δυνάμεις διὰ τούτου ἐξαίρονται, ὡς

$$(a + \beta)^{-2} = \frac{1}{(a + \beta)^2} \cdot \eta \text{ καὶ ὅπως ἡ}$$

τούτων ῥίζα ἐξάγεται, ὅσον $(a + \beta) - \frac{3}{4} =$
 $\frac{1}{4\sqrt{(a + \beta)^3}}$ κτ. ἐπίτηδες παρελείφθη. Ὁ

δὲ πλείω περὶ τούτου ζητῶν μετελθέτω τὰ τῶν Νευτῶν περὶ τούτου Μαθηματικὰ συγγράμματα. Ὁ γὰρ τὰ ῥηθέντα κατέχων μετ' ὠφελείας χρήσεται τοῖς τούτων συγγράμμασι.

Πλατυτέρα Θεωρία τῶν Ριζικῶν, Ἀλόγων τε καὶ Ἀδυνάτων Ποσοτήτων.

§. 293. Εἰ καὶ ἐν τοῖς Φθάσασι τῶν Ριζικῶν, καὶ ἀλόγων ποσοτήτων μνησίαν ἐποιήσαμεθα, ἐφ' ᾧ μέντοι τὰ ῥηθέντα σαφέστερον ἐκθεῖναι, καὶ πλατύτερον, ἰδίᾳ περὶ τούτων πραγματεύσασθαι δεῖν ἔγνωμεν. Πρὶν ἢ δὲ τῆς τούτων ἀψάσθαι θεωρίας, τοὺς ἀναγνώσας εἰς τὴν ἀνάγνωσιν τῶν ἐν §. §. 186. 200. 204, κτ. διαληφθέντων παραπέμπομεν.

§. 294.

§. 294. Ἐάν τὸ ῥιζικὸν σημεῖον (§. 186.) ποσότητων συμπεπλεγμένων (§. 44.) προτιθῇται, τὴν ἔξαγωγήν τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ ὀλικοῦ κεφαλαίου τῆς προκειμένης ποσότητος σημαίνει. ὡς $\sqrt[3]{(a^2 - 3ax + \beta)}$ Ὅτι τὴν $\sqrt[3]{}$ ἀπὸ τῶν τριῶν ὅρων τῆς ποσότητος ἐξακτέαν δηλοῖ. Τὸ δὲ σχῆμα εἴη ἂν καὶ $= (a^2 - 3ax + \beta)^{\frac{1}{3}}$. (§. 200.) Προκειμένης δὲ ποσότητος, τῷ πολλαπλασιασμῷ παραχθείσης, καὶ ἐκ παραγόντων ἀναφῦσαν ἐχούσης νοηθῆναι, ἥς τὸ $\sqrt{}$ προτεθείται, ἀρμόζει ὡσαύτως τὸ $\sqrt{}$ πᾶσι τοῖς ἀπλοῖς παράγονσι. π. χ. $\sqrt{a\beta} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta}$. Καὶ $\sqrt{48} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$. Εὐχερῶς δὲ τὸ λεγόμενον κατανοήσομεν. τῆς ἐξάρσεως τῶν ποσοτήτων εἰς δυνάμεις μνησθέντες. Ἦν γὰρ $(a\beta)^2 = a^2\beta^2$, ὡς τὸ $(a\beta)^2$ διὰ τοῦ $a\beta \cdot a\beta$ παραχθέν, Ὡσαύτως καὶ $(a\beta)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \beta^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta}$. Ἄρα $\sqrt{a\beta} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta}$. Οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

§. 295. Πᾶσα ποσότης ὑφ' ὁποιοῦν ῥιζικὸν σημεῖον ὑπαχθῆσεται, τῆς κατὰ ταύτην δυνάμειος συζομένης, ἔάν εἰς δυνάμεις τηλικαύτας ἐξαρθῇ, ἥλικος ἢ ἐκθέτης τοῦ ῥιζικοῦ, ὑφ' ὃ ταύτην ὑπάγειν ἐπιτατόμεθα. Οἷον, εἰ δέοι $a^2\beta$ ὑπὸ τὸ $\sqrt[3]{}$ ὑπαχθῆναι, εἴη ἂν $\sqrt[3]{a^{2 \cdot 3} \beta^3} = \sqrt[3]{a^6 \beta^3}$. Ἐνθα τὸ $a^2\beta$ εἰς τὴν γ'. ἐξήρται δύναμιν. Ὡς ἀνάγκη πᾶσα τὴν τούτου $\sqrt[3]{} = a^2\beta$ εἶναι. Ἦ $\sqrt[3]{a^6 \beta^3} = a^2\beta$. Ἦ ἄρα ποσότης αὐδεμίαν ὑπέστη τροπῇ. Διὰ ταύτης τῆς μεθόδου ὁ ὑπολαγισμὸς οὐκ ὀλιγάκις ἐξευμαρίζεται. Προτεθείσθω ἔτι καὶ ἕτερότατα ταυῦτα παραδ' : ἵνα διὰ τούτων ἄμα δευθῇ, ὅτε τὸ $\sqrt{}$ τῇ ποσότητι παράκειται, ὅπως πᾶσα ἡ ποσότης ὑπὸ ταῦτο ὑπάγεται. Ὡς $\beta \sqrt{a} = \sqrt{a\beta^2}$. ὅπου τὸ β εἰς δύναμιν ἐξήρται. ὥς, ἔάν ἡ ῥίζα, ἥτις

$\sqrt[3]{V} \alpha$. Τὸν αὐτὸν δὲ προβῆσθαι τρόπον καὶ ἐν ἀριθμοῖς, εἰς παράγοντας διατμηθεῖσαι, καὶ τούτους μεταβαλεῖς, τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦτο ἀπαιτοῦντος, καὶ τῶν παραγόντων ἐπιτρεπόντιον. π. χ. Εἰ πρόκειται 12 ὑπὸ τὸ $\sqrt[3]{V}$ ὑπαγαγεῖν, διαφόροις τρόποις οὖν γένοιτο. Εἴη γὰρ $\alpha\alpha = \sqrt[3]{V} 12^3 = \sqrt[3]{V} 1728$. ἢ ἐπεὶ $12 = 2 \cdot 6 = \sqrt[3]{V} 2^3 \cdot 6^3 = \sqrt[3]{V} 8 \cdot 216 = \sqrt[3]{V} 8 \cdot \sqrt[3]{V} 216$, καὶ οὕτω πολλαχῶς.

§ 296 Ἀλλὰ καὶ ἀνάπαλιν, ποσότητος ὑπὸ τὰ ριζικὰ κεκλιμένης, πολλάκις ἦται διόλου, ἢ γοῦν ἐν μέρει τούτων αὐτὰ ἀπαλλαξαίμεθα. Ἐὰν μὲν ὡς δύναμεις, τὸν αὐτὸν ἔκθετον ἔχουσιν, οὖν καὶ τὸ $\sqrt[3]{V}$, ἢ ἂν τὰς ρίζας ἐξάγειν οἶόντε ἢ, ποιοῦμεν τοῦτο, γράφοντες μόνον τὰς ρίζας. ὡς $\sqrt[3]{V} \alpha^3 = \alpha^{\frac{3}{3}} = \alpha$. Καὶ $\sqrt[3]{V} \alpha^3 \beta^3 = \alpha \beta$. Καὶ $\sqrt[3]{V} 64 = 4$, κτ. Ἐὰν δὲ ποσότητες, ἐκ παραγόντων συγκεκλιμέναι, τυχρᾶν σιν, ἐγχωρεῖ ἐνίοτε τὸ ἓνα, ἢ καί τινας τῶν παραγόντων ἀπὸ τοῦ ριζικοῦ σημείου ἀπαλλάττεσθαι, εἴπερ ἀμέλει ἢ τοῦτου, ἢ τούτων ρίζα δυνατὴ ἐξαχθεῖναι. Τηρικαῦτα οὖν τοῦτο ποιών τίθει πρὸ τῶν ἄλλων τὸ $\sqrt[3]{V}$. τὴν δ' ἐξαχθεῖσαν ρίζαν πρὸ τοῦ $\sqrt[3]{V}$. Εἰ δ' ἀριθμοὶ πρόκεινται, ἀνατεμών αὐτοὺς εἰς παράγοντας τὰ αὐτὰ τέλει. Ταῦτα δὲ τῇ περὶ Ἐξάρσεως, καὶ Διαιρέσεως τῶν Δυνάμεων διδασκαλίᾳ ἐρεῖδεται. Οἶον $\sqrt[3]{V} \alpha^2 \beta = \alpha^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} = \alpha \sqrt[3]{V} \beta$. Ἡ $\sqrt[3]{V} \alpha^6 \beta^3 \gamma^4 = \alpha^{\frac{6}{3}} \beta^{\frac{3}{3}} \gamma^{\frac{4}{3}} = \alpha^2 \beta \sqrt[3]{V} \gamma^4$. Ἡ $\sqrt[3]{V} 56 = \sqrt[3]{V} 8 \cdot 7 = \sqrt[3]{V} 8 \cdot \sqrt[3]{V} 7 = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 2 \sqrt[3]{V} 7$. Τοῦτο δὲ μάλις ἐν χρῆσει ἐπὶ τῶν Ἀλόγων ἀριθμῶν. Ἐπὶ γὰρ τῶν ἄλλων οὐκ ἀναγκαῖον, ὡς ἐκ τούτων τῆς ρίζης ἐνεργείᾳ ἐξαγομένης. π. χ. $\sqrt[3]{V} 45$. ἢ τούτου ρίζα τῷ ὄντι ἄλογος. Ἀλλὰ $45 = 9 \cdot 5$. Ὡς $\sqrt[3]{V} 45 = \sqrt[3]{V} 9 \cdot 5 = 9^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{V} 9 \cdot \sqrt[3]{V} 5 = 3 \cdot \sqrt[3]{V} 5$. Καὶ

$$\begin{aligned}
\sqrt{27} &= \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}. \\
\text{Καὶ } \sqrt[3]{192} &= \sqrt[3]{64 \cdot 3} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{3} \\
&= 4 \cdot \sqrt[3]{3}. \quad \text{Καὶ } \sqrt[4]{486} = \sqrt[4]{81 \cdot 6} \\
&= \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{6} = 3 \sqrt[4]{6}. \quad \text{Καὶ } 2\sqrt{32} \\
&+ 4\sqrt{288} - \sqrt[3]{64} = 2\sqrt{16} \cdot 2 + \\
&4\sqrt{36} \cdot 8 - 4 = 2 \cdot 4\sqrt{2} + 4 \cdot \\
&6\sqrt{2} \cdot 4 - 4 = 8\sqrt{2} + 48\sqrt{2} - 4 \\
&= 56\sqrt{2} - 4. \quad \text{Καὶ } \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{128} = \\
&4 - \sqrt[3]{8 \cdot 16} = 4 - \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \\
&4 - 4 \sqrt[3]{2}. \quad \text{Καὶ } \sqrt{48} + \sqrt{512} = \\
&\sqrt{3 \cdot 16} + \sqrt{4 \cdot 128} = 4\sqrt{3} + \\
&2\sqrt{4 \cdot 32} = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{4 \cdot 8} = \\
&= 4\sqrt{3} + 8\sqrt{8} = (\sqrt{3} + 2\sqrt{8}) \cdot 4. \\
\text{Καὶ } \sqrt[3]{1728} + 3\sqrt[4]{81} - 2\sqrt{64} &= \\
\sqrt[3]{8 \cdot 216} + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 8 &= 2\sqrt[3]{8 \cdot 27} \\
+ 3 \cdot 3 - 2 \cdot 8 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \\
- 2 \cdot 8 &= 12 + 9 - 16 = 21 - 16 \\
&= + 5.
\end{aligned}$$

Ἐπὶ πάντων τῶν τοιούτων παραδειγμ. πᾶσα ἡ σπουδὴ στρέφεται εἰς τὸ παράγοντάτινα ἐκκαλύψαι, (εἰς οὗς ἡ ποσότης διατέμνεται) ὅς Τετράγωνος, ἢ Κύβου, ἢ Διτετράγ. κτ. τυγχάνει, ἐξ ὧν ἡ ρίζα ἐξάγεται. Ἀναγκαῖον δ' ἐνίοτε τὸ τὴν ποσότητα δι' ἑτέρων τροπῶν εἰς τοῦτο προπαρασκευάζειν, ὃ τῇ συχνῇ μελέτῃ, καὶ ἀναγνώσει τῶν ἐνταῦθα τεινόντων συγγραμμάτων ἐκμανθάνομεν. Ὡς δὲ καὶ τοῦτου ἰδεῖν τινα παρασχεῖν, προκρίνω τὸ ἐξῆς παράδειγμα. $\sqrt{a^2\psi + 2a\omega\psi + \omega^2\psi}$. Ἐπειδὴ οὖν ἐνταῦθα ψ ὁ κοινὸς τῶν τριῶν τυγχάνει ὄρων, τραπήν ἂν τὸ παράρθ. εἰς τὸ $\sqrt{a^2 + 2a\omega + \omega^2} \cdot \psi$. Ἀλλ' ἀπὸ τοῦ a , τὴν ρίζαν ἐξάγειν ὄχομεν. Ἐξί γάρ $a + \omega$. Ἄρα ἡ ὁλικὴ ποσότης $= (a + \omega) \sqrt{\psi}$.

§. 297. Καὶ κλάσματα δὲ, ὑπὸ τὸ $\sqrt{}$ κείμενα, ἄλλοινα, τῆς ὁλονίας ἐν μέρει ἀπαλλοττῆν διωκτὸν

ὥς τε τὸν τούτων ἀριθμ. ἢ παρὸν. Λογικὸν δὲ γίνεσθαι. Λόγος δὲ ὁ ἐν (§. 122. καν.) Τηνικαῦτα οὖν πολλαπλασιάσωμεν ἄμφω τοὺς ὅρους τοῦ κλάσμ. ἤτοι τῷ ἀριθμ. ἢ παρονομασῇ (ἥπερ ἂν τὸν ἀριθμ. ἢ παρὸν. λογικὸν ἔχειν βουλούμεθα) τοσάκις, μέχρις οὗ ὁ ὅρος τοῦ κλάσμ. ὁ λογικὸς γενησόμενος, διὰ τούτου εἰς δύναμιν ἐξαρσῇ, ἡλικίος ὁ ἐκθέτης τοῦ $\sqrt{}$, ἢ ὡσάκις ὁ ἑκθέτης τοῦ $\sqrt{}$ τὴν μονάδα περιέχει. π. χ. ἐν τῷ $\sqrt[\alpha]{\beta}$, γενέσθω ὁ ἀριθμ. λογικός. Ὡς πολλαπλα-

$$\text{σιασθήτησαν ἄμφω οἱ ὅροι μετὰ τοῦ } \sqrt[\alpha]{\beta}. (\S. \text{αὐτ.})$$

$$= \frac{\sqrt[\alpha]{\beta} \cdot \sqrt[\alpha]{\beta}}{\sqrt[\alpha]{\beta} \cdot \sqrt[\alpha]{\beta}} = \frac{\beta}{\sqrt[\alpha]{\beta \cdot \beta}} \quad \text{ἢ καὶ} = \frac{\beta}{\sqrt[\alpha]{\beta^2}}$$

ὁς ἔσχατος τρόπος συζατὸς, ὅτι τῆς 1 ἢ $\sqrt[1]{} = 1$.
Ἐνθεντοί $\sqrt[\alpha]{\frac{\beta}{\beta}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\beta}{\sqrt[\alpha]{\beta \cdot \beta}} \quad \text{ἴσα.} \quad \text{Ἦδη δὲ καὶ ὁ}$

παρονομασῆς. Πολλαπλασιάσων οὖν ἄμφω τοὺς ὅρους τῷ $\sqrt[\alpha]{\beta}$. ἤτοι $\sqrt[\alpha]{\frac{\beta}{\beta}} = \sqrt[\alpha]{\frac{\beta \cdot \beta}{\beta \cdot \beta}} = \frac{\sqrt[\alpha]{\beta \cdot \beta}}{\sqrt[\alpha]{\beta \cdot \beta}} =$

$$\frac{\sqrt[\alpha]{\beta \cdot \beta}}{\sqrt[\alpha]{\beta \cdot \beta}} = \frac{1}{1} \sqrt[\alpha]{\beta \cdot \beta}.$$

Παράδειγμα ἐν ἀριθμοῖς. $\sqrt[3]{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}}$
 $= \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 3}}{\sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 3}} = \frac{3}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{43}}. \quad \text{Καὶ } \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$
 $= \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}}{\sqrt[4]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{54}}{3} = \frac{1}{3}.$
 $\sqrt[4]{54}.$

Μεταβάλλονται δ' ἐνίοτε καὶ κατὰ τινὰ τρόπον ἀσυνήθως. Ὡς $16 = \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{64} =$
 $\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{2}.$

$$\sqrt{2} \cdot 64 = \sqrt{128} = \sqrt{4 \cdot 32} = 2\sqrt{32} \\ = 2\sqrt{16 \cdot 2} = 2 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Καὶ } \frac{\sqrt{2}}{16} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{256}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 128}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{128}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 32}} = \frac{1}{2\sqrt{32}} = \frac{1}{2\sqrt{16 \cdot 2}} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 64}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{128}}. \end{aligned}$$

Αἱ τοιαῦται τῶν τροπῶν, καὶ μεταβολῶν λίαν εἰσὶν ἀξιοσημεῖωτοι. Ἐπὶ τοῦ α'. τῶν δύο ἤδη προτεθέντων παραδ. ἐγένετο ὁ ἀριθμ. ἐπὶ δὲ τοῦ β'. ὁ παρον. λογικός. Δίδονται δὲ καὶ κλάσματα, ἐξ ὧν τὴν ζητούμενην ρίζαν ἀπὸ τοῦ ἐτέρου ὅρου ἐξάγειν, καὶ τοῦ $\sqrt{\quad}$ ἀπαλλάττειν δυνάμεθα, π. χ. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$. Ὁ γάρ $2 = \sqrt[3]{8}$.

$$\text{Καὶ } \sqrt[4]{\frac{81}{144}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{144}} = \frac{3}{4}. \text{ Ἐν τούτῳ τῷ ὑποδείγματι ἀπὸ μὲν τοῦ ἀριθμητοῦ ἐξάγεται ἡ } \sqrt[4]{81}. \text{ Ὁ δὲ παρονομ. ἔχει ἂν καὶ αὐτὸς ἐν μέρει τῆς ἀλογίας ἀπαλλαχθῆναι, τῇ εἰς παράγοντας αὐτοῦ (§. ἄνωτ.) κατατομῇ } = \frac{3}{\sqrt[4]{16 \cdot 9}}$$

$$\frac{3}{2\sqrt[4]{9}}.$$

§. 298. Ἐὰν αἱ τοιαῦται ἄλογοι ποσότητες ἐφεξῆς εἰς λόγον τεθῶσιν, (§. 212.) ὁ λόγος κληθήσεται Ἄλογος, ὡς μὴ ἐντελῶς ἔχων διορισθῆναι.

Δυνα-

Δυνατὸν μὲν οἱ καὶ ἀλόγους ποσότητας Λόγον ἔχειν λογικὸν πρὸς ἑλλήλας, ἢ Λόγον ἀκριβῶς ἀποδοθῆναι δυνάμενον. Τοῦτο δ' ἔσαι, εἰ, ὡς εἴρηται, ἐν μέρεσι των ῥιζικῶν σημείων ταύτας ἀπαλλάξαι πειρώμεθα, ὅτε, καὶ εἰ ὁ λόγος λογικὸς γένηται, οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ ἐπιτίθενται τῷ $\sqrt{}$, οἱ δὲ πρὸ αὐτοῦ, (ἦτοι τοῦ $\sqrt{}$) οἱ ἀριθμοὶ, ἢ οἱ ὅροι τοῦ Λόγου τυγχάνουσιν. Ὡς $\sqrt{27}$ καὶ $\sqrt{12}$. Ἀμφω ἄλογοι. Ἀλλὰ $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$. Καὶ $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$. Ἐχουσιν οὖν λόγον πρὸς ἀλλήλους $\sqrt{27} : \sqrt{12} = 3\sqrt{3} : 2\sqrt{3}$. Καὶ διαιρεθέντων τῶν ἐσχάτων ὅρων ἀμφοῖν διὰ τοῦ $\sqrt{3}$, ἔτι $= 3 : 2$. Ὡς $\sqrt{27} : \sqrt{12} = 3 : 2$. Ὡσαύτως καὶ $\sqrt{80}$ καὶ $\sqrt{245}$ ἀμφω ἄλογοι. Ἀλλὰ $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$, καὶ $\sqrt{245} = \sqrt{49 \cdot 5} = 7\sqrt{5}$. Ἀρα $\sqrt{80} : \sqrt{245} = 4\sqrt{5} : 7\sqrt{5} = 4 : 7$.

§. 299. Ποσότητες ῥιζικαὶ, εἴτε λογικαὶ, εἴτε ἄλογοι, δύνανται ἀλλήλαις προσέθεσθαι, ἀφαιρεῖσθαι, πολλαπλασιασθῆναι, καὶ διαιρεῖσθαι, μόνον εἰ τῆς χρείας ἀπαιτούσης, μεταβάλλονται.

Περὶ τῆς τούτων Προσθέσεως, καὶ Ἀφαιρέσεως.

§. 300. Ἐπειδὴ μόναι τὰ ὁμοειδῆ προσέθεναι ἀλλήλοις, καὶ ἀφαιρεῖν ἔξουσιν, ἀναγκαῖον καὶ τὰς ῥιζικὰς ποσότητας ὁμοειδεῖς εἶναι, ὅ ἔσιν, οὐ μόνον τὰ $\sqrt{}$ τοὺς αὐτοὺς ἔχειν ἐκθέτας, ἀλλὰ καὶ τὰς μετ' αὐτὰ ($\sqrt{}$) ποσότητας ἴσας εἶναι χρή. π. χ. $\sqrt{3}$ καὶ ἔτι $\sqrt{3}$ καὶ προσθεῖεν αὐν, καὶ ἀφαιρεθεῖεν. Καὶ προσθεῖσαι μὲν $= 2\sqrt{3}$ (ὅτι $\sqrt{3}$, καὶ $\sqrt{3} = 1\sqrt{3}$, καὶ $1\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.) ἀφαιρεθεῖσαι δὲ $= 0$. Ἀφροίζονται γὰρ συνάμα, ἢ ἀφαιροῦνται. Ὡσαύτως καὶ $5^{\frac{2}{3}}\sqrt{8}$ καὶ $2^{\frac{3}{3}}\sqrt{8}$, καὶ

καὶ $\sqrt[3]{8}$. ἃς προσθέντες ἔχομεν κεφάλαιον $\sqrt[3]{8}$.
 Ἐπειδὴ γὰρ μετὰ τὸ $\sqrt[3]{}$, ἡ αὐτὴ κεῖται ποσότης, ἥ-
 τοι 8, ἀναγκαῖον μόνον τοὺς πρὸ τοῦ $\sqrt[3]{}$ ἀριθμοὺς προσπα-
 ροῖσαι. Ἐνθα δὲ πρὸ τοῦ $\sqrt[3]{}$ οὐδεὶς ἀριθμὸς ὑπάρ-
 χει, ὑπονοεῖται ἡ μονάς. Ὅθεν $5 + 2 + 1 = 8$.

Ἀλλὰ $\sqrt[3]{8}$ καὶ $\sqrt[3]{8}$ οὔτε προσεσθῆναι, οὔτ' ἀφαι-
 ρεσθῆναι ἀπ' ἀλλήλων δύνανται, ὡς μὴ ὁμοειδεῖς. Τὸ
 γὰρ $\sqrt[3]{}$ διάφορον τοῦ $\sqrt[3]{}$. καίτοι τῶν μετὰ τὰ $\sqrt[3]{}$ ἀ-
 ριθμῶν τῶν αὐτῶν ὄντων. Πᾶσαι οὖν αἱ τοιαῦται
 ποσότητες, ἐπὶ μὲν τῆς προσθέσεως διὰ τοῦ (+),
 ἐπὶ δὲ τῆς ἀφαιρέσεως διὰ τοῦ (—) δείκνυνται. ὡς

$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8}$. ἢ $\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{8}$. Παραπλησίως
 καὶ $\sqrt[3]{4}$ καὶ $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5}$. ἢ $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{5}$.

Καὶ $\sqrt[3]{6}$ καὶ $\sqrt[4]{5}$ ἥτοι $= \sqrt[3]{6} + \sqrt[4]{5}$,

ἢ $\sqrt[3]{6} - \sqrt[4]{5}$. Καὶ ἐν γένει. Ἐὰν ν καὶ μ
 ἀριθμοὺς πρὸ τῶν $\sqrt[3]{}$ σημαίνωσιν, α τοὺς ἀριθμοὺς
 τοὺς μετὰ τὰ $\sqrt[3]{}$, καὶ ζ τὸν ἐκσέτην τῆς ῥίζης, π δὲ
 τὸν τῆς δυνάμεως, μόνον τὰς τοιαύτας τῶν ποσοτήτων
 τῶν ῥιζικῶν προσθεῖναι, ἢ ἀφελεῖν ἔχομεν. Ὡς
 $\sqrt[3]{\zeta \pi} + \sqrt[4]{\zeta \pi}$

$\sqrt[3]{\alpha}$ καὶ $\mu \sqrt[3]{\alpha}$. Ἐνθα μ καὶ ν προσπαροῖ-
 ζοῖται, ἢ ἀφαιροῦνται. Ἐπὶ τῆς προσθέσεως, καὶ
 ἀφαιρέσεως ἐναντίως ἔχουσιν ποσοτήτων, οὐκ ἐπιλησέον
 τῶν §. §. 46. 49.

Παραδείγμ. ἐν γράμμασι, καὶ ἀριθμοῖς, ἐν οἷς
 τὰ ὁμοειδῆ ὑπὸ τὰ ὁμοειδῆ τακτέον.

$$\begin{array}{l} \text{Πρόσθεσ} \quad 2\alpha\sqrt{\beta\gamma} - 5\beta\sqrt{\delta\zeta} + \sqrt{\zeta} + 5\tau\omega \\ - \alpha\sqrt{\beta\gamma} - \beta\sqrt{\delta\zeta} + 2\sqrt{\zeta} + \rho. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Ἀποδίδ. δὲ} \quad 2\alpha\sqrt{\beta\gamma} - 5\beta\sqrt{\delta\zeta} + \sqrt{\zeta} + 5 \\ - \alpha\sqrt{\beta\gamma} - \beta\sqrt{\delta\zeta} + 2\sqrt{\zeta} + \rho \end{array}$$

$$\text{Τὸ κεφάλ.} = \alpha\sqrt{\beta\gamma} - 6\beta\sqrt{\delta\zeta} + 3\sqrt{\zeta} + 5 + \rho$$

Ἐν ἀριθμοῖς.

$$\text{Πρόσθεσ} \quad 5\sqrt{6} - 3\sqrt[4]{5^2} + \sqrt{7} - 8$$

$$\tau\omega \quad - 4\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{5^2} + 3\sqrt{7} + 2$$

$$\text{Τὸ κεφάλ.} = \sqrt{6} - \sqrt[4]{5^2} + 4\sqrt{7} - 6.$$

Παράδειγμα Ἀφαιρέσεως.

$$\text{ἀπὸ τοῦ} \quad 3\beta\sqrt{\zeta\eta} - 2\alpha\sqrt[4]{\zeta\mu} + 4\sqrt[3]{\alpha\delta} - \delta$$

$$\begin{array}{r} \text{ἀφ' ἐλε} \quad + \beta\sqrt{\zeta\eta} + \alpha\sqrt[4]{\zeta\mu} - 2\sqrt[3]{\alpha\delta} - \beta \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \end{array}$$

$$\text{ἡ Διαφορὰ} \quad 2\beta\sqrt{\zeta\eta} - 3\alpha\sqrt[4]{\zeta\mu} + 6\sqrt[3]{\alpha\delta} - \delta + \beta$$

$$\text{Ἀφ' ἐλε ἀπὸ τοῦ} \quad 5\sqrt[3]{} - \sqrt{48} - 3\sqrt{8^2} - 6\sqrt{2} - 8$$

$$\begin{array}{r} \tau\omega \quad 2\sqrt[3]{6} - 2\sqrt{48} + \sqrt{8^2} - 6\sqrt{2} - 5 \\ \hline \quad \quad \quad + \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \quad \quad \quad + \end{array}$$

$$\text{ἡ Διαφορὰ} \quad 3\sqrt[3]{6} + \sqrt{48} - 4\sqrt{8^2} - 3$$

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Ῥιζικῶν Ποσοτήτων.

§. 301. Εἰ καὶ ἐνταῦθα κυρίως περὶ τῶν Ἀλόγων ποσοτήτων ὁ λόγος, ὡς τῶν Λογικῶν, π. χ.
 $\sqrt{4},$

$\sqrt[3]{4}$, καὶ $\sqrt[3]{8}$, κτ. ἀκριβῶς ἐκφέρεσθαι δυνά-
 μένων, (ἔστι γὰρ $\sqrt[3]{4} = 2$, καὶ $\sqrt[3]{8} = 2$, κτ.)
 ἀλλὰ τὸ λεγόμενον ἐν γένει καὶ ἑκατέρων ῥηθῆσεται.
 Ἐνίοτε γὰρ οὐχ ὁλοσχερῶς τὰς Λογικὰς ἐκφέρειν
 βουλόμεθα. Καὶ ἵνα ἐκ τῶν ἐλασσόνων πρὸς τὰ μεί-
 ζω χωρήσωμεν, πρὸ πάντων σημειωτέον πᾶσαν τετρά-
 γωνον ῥιζικὴν ποσότητα, εἴτ' ἐξ ἀπλῆς, εἴτε καὶ ἐκ
 συμπεπλεγμένης συνίσταται ποσότητος, μεθ' ἑαυτῆς
 πολλαπλασιασθεῖσαν, αὐτὴν τὴν ποσότητα τοῦ ῥιζι-
 κοῦ ἀνευπαράγειν σημείου. Ὡς $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$.
 Καὶ $\sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = 4$. Καὶ $\sqrt{12} \cdot \sqrt{12} = 12$,
 κτ. Αὖθις $\sqrt{(a^2 + \beta - \chi)} \cdot \sqrt{(a^2 + \beta - \chi)}$
 $= (a^2 + \beta - \chi)$. ἢ $\sqrt{(25 + 16 - 9)}$
 $\sqrt{(25 + 16 - 9)} = 25 + 16 - 9$
 $= 32$.

Τοῦτο δὲ ῥαδίως κατανοήσομεν, εἰδότες, ὅτι
 πᾶσαν ποσότητα θεωρεῖν ἔχομεν, ὡς διὰ πολλαπλα-
 σιασμοῦ δύο ποσοτήτων ἀναφαιέσαν. Αἱ δὲ τυγχά-
 νουσιν αἱ $\sqrt{}$. Αὗται οὖν πολλαπλασιασθεῖσαι τὴν
 ποσότητα ὧν αὐτὴν παράξουσιν. Ὁ καὶ ταῖς Ἀ-
 λόγοις, καὶ Λογικαῖς ἀρμόζει. Καὶ ἡ ἄλογος γὰρ
 ποσότης τῷ ὄντι τυγχάνει, εἰ καὶ οἱ ἡμέτεροι χαρά-
 κτηρες αὐτὴν παρασῆσαι οὐ δύνανται.

Δύο ἴσαι Κυβικαὶ ῥίζαι, ἐπ' ἀλλήλας ἀχθεῖσαι,
 παρέχουσιν Ἐκθέτην τῆς Δυνάμεως $\frac{2}{3}$. π. χ.
 $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$. Τὸ γὰρ $\sqrt[3]{a} =$
 $a^{\frac{1}{3}}$. Ἀρα $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Πολλαπλασια-
 σθέντος δ' ἔτι ἄπαξ μετὰ τοῦ $\sqrt[3]{a}$, προκύψει a .
 Ὅτι $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{3}} = a$.

Ἐν γένει, ἐκάσῃ ῥιζικῇ ποσότης, εἰ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου
 U 2 ἀπαλ-

ἀπαλλαχθῆναι δέοι, τοσάκις μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιαστέα, ἡλικὸς ὁ ἐκθέτης τῆς ῥίζης. Τὸ δ' αὐτὸ τοῦτο χώραν ἔχει καὶ περὶ τῶν συμπεπλεγμένων ποσοτήτων.

$$\begin{aligned} \Omega & \sqrt[3]{(a + \beta)} \cdot \sqrt[3]{(a + \beta)} \cdot \sqrt[3]{(a + \beta)} \\ &= (a + \beta)^{\frac{1}{3}} \cdot (a + \beta)^{\frac{1}{3}} \cdot (a + \beta)^{\frac{1}{3}} = \\ &= (a + \beta)^{\frac{3}{3}} = a + \beta. \end{aligned}$$

§. 302. Ὅτε ῥιζικὰς ποσότητες μετ' ἄλλων ποσοτήτων πολλαπλασιάζουσι πρόκειται, εἴτε ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ εἶεν, εἴτε καὶ κλασματώδεις, πολλαπλασιάζομεν τὸν πρὸ τοῦ $\sqrt[3]{}$ κείμενον ἀριθμὸν, ἢ ποσότητα μετὰ τῶν ἄλλων ποσοτήτων. Ἐὰν δὲ οὐδεμία (ποσ.) πρὸ ἐκείνου (τοῦ $\sqrt[3]{}$) κείτοιο, προτίθεται αὐτοῦ ὁ ἀριθμὸς, (ἢ ποσότης) ὃ δὲ οὐ πολλαπλασιάζομεν. ἔνθα καὶ τῶν κανόνων, τῶν τοῖς $+$, καὶ $-$ σημείοις ἀνηκόντων, λόγον ποιητέον. Ἐὰν δὲ οὐδεμία ποσότης πρὸ ἀμφοῖν τῶν ῥιζικῶν ποσοτήτων ὑπάρχῃ, οὐδεμία καὶ πολλαπλασιαστέα, ἥπου καθ' ἑαυτὸ δῆλον, ὡς οὐδεμία παροῦσα. π. χ. $(4 \sqrt[3]{3})^6 = 4 \cdot 6 \sqrt[3]{3} = 24 \sqrt[3]{3}$. Καὶ $(-5 \sqrt[3]{6}) - 4 = + 20 \sqrt[3]{6}$. Καὶ $(-6 \sqrt[3]{24}) \cdot + 4 = - 24 \sqrt[3]{24}$. Καὶ $\sqrt[3]{18} \cdot 5$ (ἔνθα οὐδεὶς ἀριθμὸς πρὸ τοῦ $\sqrt[3]{}$ κεῖται) $= 5 \sqrt[3]{18}$. Καὶ $\sqrt[3]{3} \cdot - 4 = - 4 \sqrt[3]{3}$. Καὶ $\sqrt[3]{(a\beta)} \cdot \gamma = \gamma \sqrt[3]{a\beta}$. Καὶ $-\sqrt[3]{(\delta\zeta)} \cdot \beta = -\beta \sqrt[3]{(\delta\zeta)}$, κτ. Τὰς τοιαύτας ποσότητας καὶ ἐν μέρει μετατρέπειν ἐν. (§. 296.)

Δύω ῥιζικῶν ποσοτήτων μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιαζομένων, αἱ ῥίζαι ἦτοι τοὺς αὐτοὺς, (ὡς $\sqrt[3]{8}$ καὶ $\sqrt[3]{5}$) ἢ οὐχί, (ὡς $\sqrt[3]{8}$ καὶ $\sqrt[3]{5}$) ἐκθέτας ἔχουσιν. Εἰ οὖν τὸ β'. οὕτως αὐτὰς μεταβλητέον, (§. 204.) ὥς τε τοὺς αὐτοὺς λαβεῖν ἐκθέτας. Εἴτα πολ.

πολλαπλασιαστέον α'. τὰς ποσότητες μετ' ἀλλήλων, τὰς πρὸ τοῦ $\sqrt{}$ κειμένας, μεθ' ὃ καὶ τὰς μετὰ τὸ $\sqrt{}$, προτιθέοντας τούτου (τοῦ β'. παραγομένου) τὸ κοινὸν $\sqrt{}$ μετὰ τοῦ καινοῦ ἐκθέτου, καὶ μὴ ἀμελοῦντας τῶν περὶ τοῦ $+$ καὶ $-$ κανόνων. Καὶ τελευταῖον, εἰ ἐχχωρεῖ, κατὰ τὸ (§. 296.) πάσας συνάμα ὑπὸ τὸ ἀπλούστατον ἀκτέον σχῆμα, καὶ, εἰ ἀναγκαῖον, καὶ τοὺς πρὸ τοῦ $\sqrt{}$ κειμένους ἀριθμοὺς ὑπὸ τὸ ριζικόν. (§. 295.)

Παραδείγμ. $3\beta \sqrt{\gamma\delta} \cdot 4\alpha \sqrt{\gamma\delta} = 12\alpha\beta \sqrt{\gamma\delta} \cdot \sqrt{\gamma\delta} = 12\alpha\beta\gamma\delta$ (§. ἄνωτ.)

Ὡσαύτως $2\beta \sqrt{\gamma\delta} \cdot -3\gamma \sqrt{\beta\gamma} = -6\gamma\beta \sqrt{\beta\gamma^2\delta} = -6\gamma\beta\gamma \sqrt{\beta\delta} = -6\gamma^2\beta \sqrt{\beta\delta}$. Καὶ $-\sqrt{\gamma^3} \cdot -\sqrt{\gamma} = +\sqrt{\gamma^4} = +\gamma$.

Ἐν ἀριθμοῖς. $5\sqrt{18} \cdot 4\sqrt{2} = 20\sqrt{36} = 20 \cdot 6 = 120$, Καὶ $-3\sqrt{12} \cdot 2\sqrt{2} = -6\sqrt{24} = -6\sqrt{4} \cdot 6 = -6 \cdot 2\sqrt{6} = -12\sqrt{6}$.

Ἐὰν οἱ τῶν ριζῶν ἐκθέται ἀνισοὶ ὦσιν, εἰς τοὺς αὐτοὺς ἀκτέσι, ὡς εἴρηται, ἐκθέτας. π. χ. $\sqrt{\gamma\delta} \cdot \sqrt{\gamma^2\delta} = (\gamma\delta)^{\frac{1}{2}} \cdot (\gamma^2\delta)^{\frac{1}{2}} = (\gamma\delta)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} \cdot (\gamma^2\delta)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}} = (\gamma\delta)^{\frac{3}{2}} \cdot (\gamma^2\delta)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{\gamma\delta}^3 \cdot \sqrt{\gamma^2\delta}^2$. Καὶ ἐὰν ἐνεργεῖα αἱ ποσότητες εἰς τὰς δυνάμεις ἀρθῶσι τὰς ἀκκυρμείας, ἔσονται $\sqrt{\gamma^3\delta^3} \cdot \sqrt{\gamma^4\delta^2} = \sqrt{\gamma^7\delta^5}$. Ἀἰσικ $3\sqrt{\gamma} \cdot -2\sqrt{\zeta} = -6\gamma^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta^{\frac{1}{2}} = -6\gamma^{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4}} \cdot \zeta^{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{6}} = -6\gamma^{\frac{4}{4}} \cdot \zeta^{\frac{6}{6}} = -$

$$\begin{aligned}
&= -6\gamma \sqrt[12]{2} : \zeta \sqrt[12]{2} = -6 \sqrt[12]{\gamma^2 \zeta^3} . \\
&\text{ἀριθμοῖς. } \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \\
&5^{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3}} = 5^{\frac{3}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{3}} = \sqrt[6]{5^3} \\
&= \sqrt[6]{125 \cdot 4} = \sqrt[6]{500} . \text{ Καὶ } 2 \sqrt[3]{5} \\
&3 \sqrt[4]{6} = -6 \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{4}} = -6 \cdot 5^{\frac{4}{12}} \\
&= -6 \sqrt[12]{5^4} \cdot 6^3 = -6 \sqrt[12]{625} . \\
&= \sqrt[12]{135000} .
\end{aligned}$$

Οὕτω προπαρασκευασθεὶς πᾶς τις δυνήσεται
λαπλασιάζειν μετ' ἀλλήλων καὶ πολυμερεῖς Λογισμοὺς
καὶ Ἀλόγους ποσότητες, ὅτι καὶ αἱ πολυμερεῖς ἐκ
νομεριῶν διὰ τῶν σημείων + καὶ - συγκροτοῦν
Πρὸ μέντοι τοῦ τούτων | πολλαπλασιασμοῦ,
πᾶσαις ταῖς ῥιζικαῖς ποσότησι τ
αὐτοῦς δοτέον ἐκθέτας.

Προκείσθω πολλαπλασιασθῆναι

$$\begin{array}{r}
\alpha\beta \sqrt{\gamma} + \delta \sqrt{\zeta} \\
\text{μετὰ τοῦ} \quad 2\beta \sqrt{\gamma} + \delta \sqrt{\zeta} \\
\hline
+ \alpha\beta\delta \sqrt{\zeta\gamma} + \delta^2\zeta \\
+ 4\beta^2\gamma + 2\beta\delta \sqrt{\zeta\gamma} \\
\hline
4\beta^2\gamma + 4\beta\delta \sqrt{\zeta\gamma} + \delta^2\zeta .
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Καὶ} \quad 1 + \sqrt{2} \\
 1 + \sqrt{2} \\
 \hline
 + 1\sqrt{2} + 2 \\
 1 + 1\sqrt{2} \\
 \hline
 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}.
 \end{array}$$

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Ῥιζικῶν Ποσο-
τήτων.

§. 303. Ἀρξώμεθα ὡσαύτως ἀπὸ τῶν εὐχε-
ρεσάτων. Ἐςωσαν ὁ Διαιρετέος, καὶ ὁ Διαιρέτης τῶν
μονομερῶν, ἢ ἀπλῶν ποσοτήτων, καὶ ἦτοι ὁ Διαιρέ-
της, ἢ ὁ Διαιρετέος Ἄλογος, ὁ δ' ἕτερος Λογικός, ἢ
ἄμφω Ἄλογοι.

Ἐὰν ὁ Διαιρετέος Ἄλογος ᾖ, ὡς $\sqrt{21}$, ἀναγ-

καῖον ἄμφω τὰς ποσότητες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ριζικὸν θεί-
ναι σημῖον, ὅπερ κατὰ τὸ (§. 295.) ῥαδίως ἐκπεραν-
θῆσεται, καὶ τήνικαυτα εὐχερῶς τὴν διαίρεσιν τελέσο-
μεν. τῶν ποσοτήτων εἰς παράγοντας ἀνατεμνομένων,
εἰ ἄλλως αὗται διαιρέσιμοι, ἢ καὶ ἐνεργεῖα ταύτας διαι-
ρεῖν, καὶ μὴ μόνον τοῖς σημείοις δεικνύναι βουλόμενοι,
ἐν ᾧ καὶ τὰ περὶ τοῦ $+$, καὶ $-$ καλῶς ἐν νῷ κα-
θέξομεν. π. χ. $\sqrt{\frac{21}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 7}}{\sqrt{7 \cdot 7}}$
 $= \sqrt{\frac{3}{7}}$. Καὶ $\sqrt[3]{\frac{24}{6}} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{6^3}} = \frac{\sqrt[3]{4 \cdot 6}}{\sqrt[3]{6 \cdot 6 \cdot 6}}$
 $= \sqrt[3]{\frac{4}{6 \cdot 6}} = \sqrt[3]{\frac{4}{36}} = \sqrt[3]{\frac{4}{4 \cdot 9}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$
 $= \frac{1}{\sqrt[3]{9}}.$

Ἐὰν

Εάν δ' ὁ Διαιρέτης ἀλογος τυγχάνῃ, γίνεται τὰ
αὐτά. Οἷον $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}}$ ἢ
καὶ $= 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Καὶ $\frac{4}{2\sqrt{8}} =$
 $= \frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{2^2 \cdot 8}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{2 \cdot 16}} =$
 $= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ἀδῶς $\frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{2^2 \cdot 6}}$
 $= \sqrt{\frac{9}{24}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 8}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Τοῦ Διαιρέτου, καὶ Διαιρετέου, ἀμφοῖν ἀλόγων
ὄντων, αἱ ῥίζαι, ἥτοι τοὺς αὐτοὺς, ἢ οὐχί, ἐκθε-
τας ἔχουσι. Κακείνως μὲν, τῇ τῶν ποσοτήτων δια-
τομῇ εἰς τοὺς αὐτῶν παράγοντας, εἰσόμεθα, πότερον
ἢ ποσότης διαιρέσιμος, ἢ μή. Ὅτε καὶ τὸν Διαιρέτην, ἢ
Διαιρετέον, ἥπερ ἂν τὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἀπαιτοίη,
τῆς αὐτοῦ ἀλογίας ἔχαιμεν ἂν ἀπαλλάσσασθαι. (§. 297.)
Οὕτω δέ, μεταβληθήσονται οὕτως, ὥς ἀμφοῖν τοὺς
αὐτοὺς ἐνυπάρχειν Ἐκθέτας, καὶ εἴτα, ὡς ἐν τοῖς
προηγηθεῖσι δέδεικται, αὐτοὺς διαιρήσομεν. Ἐξω διαι-
ρετέον $\sqrt{6}$ διὰ $\sqrt{8}$, ἥτοι $\sqrt{\frac{6}{8}} = \sqrt{\frac{2}{2} \cdot \frac{3}{4}} =$
 $\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Ἀδῶς $\sqrt{\frac{\gamma^4 \delta^2}{\gamma^2 \delta}} = \sqrt{\frac{\gamma^2 \gamma^2 \delta \delta}{\gamma^2 \delta}}$
 $= \sqrt{\frac{\gamma^2 \delta}{1}} = \sqrt{\gamma^2 \delta} = \gamma \sqrt{\delta}$, ὅ τὸ πη-

λίκον τυγχάνει.

Εἰ πρόκειται διαιρεθῆναι $\sqrt{24}$ διὰ τοῦ $\sqrt{6}$,
ἥτοι

$$\etaτοι \frac{{}^3\sqrt{24}}{\sqrt{6}}, \xi\sigma\alpha\iota = \frac{24^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{2}}} = \frac{24^{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2}}}{6^{\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{3}}} =$$

$$\frac{24^{\frac{2}{3}}}{6^{\frac{2}{3}}} = \frac{{}^6\sqrt{24^2}}{6^3} = \frac{{}^6\sqrt{24 \cdot 24}}{6 \cdot 6 \cdot 6} = {}^6\sqrt{\frac{4 \cdot 4}{6}}$$

$$= {}^6\sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 3}} = {}^6\sqrt{\frac{2 \cdot 4}{3}} = {}^6\sqrt{\frac{8}{3}}.$$

$$\Lambda\upsilon\theta\iota\varsigma \frac{\sqrt{48}}{{}^4\sqrt{12}} = \frac{48^{\frac{1}{2}}}{12^{\frac{1}{4}}} = \frac{48^{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4}}}{12^{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{2}}} = \frac{48^{\frac{4}{8}}}{12^{\frac{2}{8}}} \eta$$

$$\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\omicron\nu\omicron\nu = \frac{48^{\frac{2}{4}}}{12^{\frac{1}{4}}} = {}^4\sqrt{\frac{48^2}{12}} = {}^4\sqrt{\frac{48 \cdot 48}{12}} =$$

$${}^4\sqrt{192} = {}^4\sqrt{16 \cdot 3 \cdot 4} = 2 {}^4\sqrt{12}. \text{ Καὶ} \\ \text{τοῦτ' ἔστι τὸ πηλίκον τὸ ζητούμενον τοῦ } \frac{\sqrt{48}}{{}^4\sqrt{12}}. \text{ Ὡ-}$$

$$\sigma\acute{\alpha}\upsilon\tau\omega\varsigma \frac{{}^3\sqrt{\gamma\delta}}{{}^2\sqrt{\gamma\delta}} = \frac{(\gamma\delta)^{\frac{1}{3}}}{(\gamma\delta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\gamma\delta)^{\frac{2}{6}}}{(\gamma\delta)^{\frac{3}{6}}} =$$

$${}^6\sqrt{\frac{(\gamma\delta)^2}{(\gamma\delta)^3}} = {}^6\sqrt{\frac{\gamma^2\delta^2}{\gamma^3\delta^3}} \eta = {}^6\sqrt{\frac{\gamma\gamma\delta\delta}{\gamma\gamma\gamma\delta\delta\delta}}$$

$$= {}^6\sqrt{\frac{1}{\gamma\delta}} = \frac{1}{{}^6\sqrt{\gamma\delta}}.$$

Ἡ βάσανος τῆς Διαιρέσεως τῶν ἀλόγων ποσοτή-
των γίνεται, ἐὰν τὸ εὔρεθὲν πηλίκον ἐπὶ τὸν Διαιρέ-
την πολλαπλασιασθῇ, δι' οὗ ὁ Διαιρετέος προκύπτει,
ἐνθα καὶ ταῖς ῥηθείσαις μεταβολαῖς ἐνίοτε χρήσεν.

§. 304. Τὴν τῶν μονομερῶν ἀλόγων ποσοτή-
των διαίρεσιν καταμαθόντας, καὶ εἰς τὰς πολυμερεῖς
χωρητέον. Καὶ α', παραληφθήτω ὁ Διαιρετέος, ὡς πο-
σοτῆς πολυμερῆς, τοῦ Διαιρέτου μονομεροῦς μένοντος.
Ἡ δ' ἀρχὴ ἐνταῦθα γινέσθω ἐκ τοῦ εἰς τὸ αὐτὸ ῥιζικόν
ὑπάγειν σημεῖον ἀπάσας τοῦ Διαιρετέου τὰς ποσότη-

τας, καὶ αὐτὸν τὸν Διαρέτην, εἰ τοῦτο οὐ τυγχάνουσιν. (Εἰ καὶ ἐνίοτε τρόποι ἂν ἀπαντῶεν ἕνθα τοῦτο οὐκ ἀναγκαῖον, καὶ ἕνθα οἱ ἀριθμοὶ, οἱ πρὸ τοῦ $\sqrt{\quad}$ τυχόν κείμενοι, ὡς ἔχουσιν, ἂν μένοιεν. Ἄλλ' ἡ μὲν ἐνταῦθα λόγος περὶ τῶν εὐχερεστάτων, καὶ μάλλον ἐν χρήσει.) Καὶ εἴτα διαιρεθῇτω ἑκάστη ποσότης ἐν μέρει διὰ τοῦ διαρέτου, τῷ συνήθει τοῦ διαιρεῖν τρόπῳ. π. χ.

$\sqrt{24} + \sqrt{48} - \sqrt{72}$ διαιρεθ. δια τοῦ $\sqrt{6}$.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6}) \sqrt{24} + \sqrt{48} - \sqrt{72} & \sqrt{4} + \sqrt{8} \\ \sqrt{24} : : : & - \sqrt{12} \\ \hline & \\ & \circ \quad \sqrt{48} : \\ & \quad \sqrt{48} : \\ & \hline & \circ - \sqrt{72} \\ & \quad - \sqrt{72} \\ & \hline & \circ \end{array}$$

Ἔστω ἄρα τὰ πηλίκων $\sqrt{4} + \sqrt{8} - \sqrt{12}$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ῥίζα ἔχει ἐν μέρει ἐξαχθῆναι, τραπέη ἂν εἰς τόδε. $2 + \sqrt{4} \cdot 2 - \sqrt{4} \cdot 3 = 2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot 2$.

$$\begin{array}{l} \text{Δίελε } \gamma\sqrt{\gamma\delta} - \zeta\sqrt{\gamma\zeta} - \gamma\sqrt{\delta\zeta} \text{ διὰ τοῦ} \\ - \sqrt{\gamma}. \text{ Ἄ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν τεθέντα σημείον ἔσαι} \\ = \gamma\gamma^2\gamma\delta - \gamma\zeta^2\gamma\zeta - \gamma\gamma^2\delta\zeta : - \gamma \\ = \sqrt{\gamma^3\delta} - \sqrt{\zeta^3\gamma} - \sqrt{\gamma^2\delta\zeta} \\ \hline \quad \quad \quad - \gamma \end{array}$$

Δίελε οὖν ἤδη ἐνεργείᾳ.

$- \sqrt{\gamma}$

$$\begin{array}{r|l} V\gamma^3\delta - V\zeta^3\gamma - V\gamma^2\delta\zeta & -V\gamma^2\delta + \zeta^3 \\ V\gamma^3\delta & + V\gamma\delta\zeta \end{array}$$

$$0 - V\zeta^3\gamma$$

$$-V\zeta^3\gamma$$

$$0 - V\gamma^2\delta\zeta$$

$$-V\gamma^2\delta\zeta$$

$$0$$

$$\begin{aligned} \text{ῥε τὸ πηλίκον} &= -V\gamma^2\delta + V\zeta^3 \\ \gamma\delta\zeta &= -\gamma V\delta + \zeta V\zeta + V\gamma\delta\zeta. \end{aligned}$$

δ' ἔξωσαν καὶ ὁ Διαιρετέος, καὶ ὁ Διαιροσύνητες πολυμερεῖς. Ἐνθα αὖθις, εἰ ἀναγ-
 ἀπάσαις χρῆσθον ταῖς προπαρασκευαῖς, τοῦτ'
 τὰς ποσότη. ὑπὸ τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν ὑπακτέον,
 ὅπως προσηκόντως κατὰ τὰς αὐτῶν δυνάμεις
 ὥσπερ τοῦτο ἢ μετὰ γραμμάτων συνήθης
 διαίρεσις, καὶ εἴτα, ἢ σύνηθες, διαιρετέον,
 καὶ οἱ περὶ τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ $-$ κανόνες οὐ πα-

$$\begin{aligned} \text{ῥελε} \quad 6V6 + 2V15 - 3V10 - 5 \\ V2 + V5. \end{aligned} \quad \text{ῥέμενος α', πάντας τοὺς}$$

ὑπὸ τὸ ῥιζικόν.

$$= V36.$$

$$= V_{36} \cdot 6 + V_{44} \cdot 15 - V_{99} + 10 - V_{25} \mid V_{26} - V_5$$

$$V_{9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6} \mid V_{2 \cdot 6 \cdot 5}$$

$$V_{9 \cdot 2} + V_5$$

$$0 - V_{9 \cdot 10} - V_{25}$$

$$- V_{9 \cdot 2 \cdot 5} - V_{25}$$

Διὰ $W\beta\gamma - W\beta\delta + \delta V\gamma\mu - \delta V\delta\mu$ διὰ τοῦ $V\gamma - V\delta$. Ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ εἰδικὸν
 ὡς ἔχουσιν οἱ ὅροι τοῦ Διακρίνου $= V\gamma^2\beta\gamma - V\gamma^2\beta\delta + V\delta^2\gamma\mu - V\delta^2\delta\mu$.

$$\eta \quad = \quad V\gamma^3\beta - V\gamma^2\beta\delta + V\delta^2\gamma\mu - V\delta^3\mu \mid V\gamma^2\beta$$

$$\text{διὰ τοῦ } V\gamma - V\delta \mid V\gamma^3\beta - V\gamma^2\beta\delta$$

$$+ V\delta^2\mu$$

$$0 \mid 0 + V\delta^2\gamma\mu - V\delta^3\mu$$

$$+ V\delta^2\gamma\mu - V\delta^3\mu$$

$$0 \mid 0$$

$$\text{"Ωσε τὸ πηλίκον} = \sqrt{\gamma^2 \beta} + \sqrt{\delta^2 \mu} \\ = \gamma \sqrt{\beta} + \delta \sqrt{\mu}.$$

Τὸ μετὰ ἀλόγων διαιρεῖν ἀείποτέ ἐργῶδες, μά-
λιστα ἐν παραδείγμασιν ἐκ πλειόνων συγκροτούμενοις ὅ-
ρων, ἔνθα πολλάκις οὐδ' ἐκπερᾶναι τὴν διαίρεσιν ἐνι,
ὡς ἦτοι τοῦ Διαιρέτου μὴ ἀκριβῶς τῷ Διαιρετέῳ ἐμπε-
ριεχομένου, ἢ οὕτω τῶν ποσοτήτων ἔχουσιν, ὥσε
οὐκ ἐκ πρώτης ὄψεως συνιδεῖν πάρεσιν, ὅπως ἀλλήλας
περιέχουσι. Τηνικαῦτα παραδέδονται διάφοροι τῶν
Μεσσοίων, ἐνίοτε χρήσιμοι οὖσαι. Ἐν μία καὶ τὸ
τὰς τοσούτητας εἰς κλάσμοι ἀνάγειν, καὶ τὸν παρονομα-
σὴν λογικὸν ποιεῖν, ἥπερ (§. 297.) εἴρηται. Ἀλ-
λὰ καὶ τοῦτο ἐπὶ τῶν λίαν συνθέτων δυσχερέστατον,
καὶ λίαν ἐπίπονον. Προτεθείσθω καὶ τούτου παρά-
δειγμα.

$$\begin{array}{r} \text{Δίελε} \quad 8 - 5 \sqrt{2} \\ \hline \text{διὰ} \quad 3 - 2 \sqrt{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Ἐὰν ἄμφω οἱ ὅροι πολ-} \\ \text{λαπλασιασθῶσι διὰ τοῦ} \\ 3 + 2 \sqrt{2}, \text{ τὸ κλάσμα τροπὴν οὐχ ὑφίσταται} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{πολλαπλ. διὰ} \quad 8 - 5 \sqrt{2} \\ \hline 3 + 2 \sqrt{2} \\ + 16 \sqrt{2} - 10 \cdot 2 \\ + 24 - 15 \sqrt{2} \\ \hline + 24 + \sqrt{2} - 20 \\ = 4 + \sqrt{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Ἐπαρονομ.} \quad 3 - 2 \sqrt{2} \\ \text{πολλαπλ. διὰ} \quad 3 + 2 \sqrt{2} \\ \hline + 6 \sqrt{2} - 4 \cdot 2 \\ + 9 - 6 \sqrt{2} \\ \hline 9 - 8 = + 1 \end{array}$$

$$\text{"Ωσε τὸ πηλίκον} = \frac{4 + \sqrt{2}}{1} = 4 \sqrt{2}.$$

I

H

§. 305. Καὶ ταῦτα μὲν ἱκανὰ τοῖς Πρωτοπει-
ροις. Περὶ δὲ τῶν Ἀδυνάτων Ποσοτήτων καὶ
δὴ λέγωμεν. Οὕτω δὲ καλοῦνται ῥίζαι, αἱ ἄρτιον
Ἐκθέτην ἔχουσαι, καὶ ἀποφατικῶν ποσοτήτων προ-
κείμεναι. Ὡς $\sqrt[4]{V} - 4$. ἢ $\sqrt[4]{V} - 8$. ἢ καὶ $\sqrt[4]{V} - 12$.
ἢ $\sqrt[4]{V} - 16$, κτ. τὴν προσηγορίαν λαχοῦσιν, ἐκ
τοῦ μηδεμίαν οἶδουσθαι ποσότητα, ἣτις ἀρτιάν τις πολ-
λλαπλασιασθεῖσα δώσει ἀποφατικὸν Ἀριθμόν. Κα-
ταφατικῶς γὰρ τῆς ποσότητος ληψθεῖσης, πάντα τὰ
ἐξ αὐτῆς παραγόμενα, μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθεί-
σης, καταφατικά. Ἀποφατικῶς δὲ, πᾶν παραγόμε-
νον ἐξ αὐτῆς, (αὐτῆς μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθεί-
σης) τὸ ἀρτίαν δύναμιν λαμβάνον, καταφατικόν, τὸ
δὲ περιττὴν, ἀποφατικόν ἔσται. Ἐπεὶ τοίνυν ἐκάστη ῥί-
ζα ἦτοι $+$, ἢ $-$, οὐδεμία ποσότης, ἢ ἀριθμὸς δι-
δασταί, ὅς ἢ ῥίζα αὐτῇ εἴη ἀδυνάτου ποσότητος. Ἐξω
παράδειγμα $\sqrt[4]{V} - 16$, ὃ ἀδύνατον ποσότητα ἐμ-
φαίνει. Ἡ γὰρ τούτου ῥίζα ἦτοι $+$ 4, ἢ $-$ 4.
Ἀλλὰ πολλαπλαστίαν $+$ 4, ἢ $-$ 4 μεθ' ἑαυ-
τοῦ, καὶ αἰεὶ προκύψει $+$ 16. Ὡς οὐδένα ἀριθ-
μὸν δυνατὸν ἀποδοῦναι, ὅς δι' ἑαυτοῦ πολλαπλασια-
σθεὶς $= 16$ παραγόμενον παρέξει. Ἀποφατικαὶ
μόντοι ποσότητες, ὧν τὸ $\sqrt[4]{V}$ σὺν περιττῷ Ἐκθέ-
τη πρόκειται, οὐκ ἀδύνατοι τυγχάνουσι, πάντως γὰρ
τῇ πολλαπλασιασμῷ ἀποφατικῆς ποσότητος μεθ' ἑαυ-
τῆς ἀνέφυσαν. π. χ. $\sqrt[3]{V} - a^3$ ἔστι δῆπου ἐνεργεῖα
ποσότης. Ἐστὶ γὰρ $= - a$. Ὅτι ἐνεργεῖα ἢ $- a$
πολλαπλασιασθεῖσα παράξει $= a^3$. ($- a \cdot - a$
 $= + a^2$ (§. 77. καὶ.). $- a = - a^3$.
(§. αὐτ.)) Καὶ ἢ $\sqrt[3]{V} - 8 = - 2$. Ὅτι
 $- 2 \cdot - 2 \cdot - 2 = - 8$. Ὡσαύτως καὶ
αἱ

αἱ λοιπαὶ ἀποφατικαὶ ποσότητες ὧν οἱ ῥιζικοὶ ἔκθεται περιττοί. Αἱ ἄρα ἀδύνατοι ποσότητες μήτε καταφα-
τικαί, μήτε ἀποφατικαὶ οὔσαι, οὐδαμῶς μέντοι τιῷ
μηδενὶ ἐξισοῦνται. Εἰσὶ δὲ ταῦτ' αὐτὸ, ἦτοι Ἀδύνα-
τοι. Ὡς ἡ ὑπαρξὶς πάντως ἐν τῇ φαντασίᾳ γοῦν χώ-
ραν ἔχειν δύναται. φαντασθῆναι γάρ π. χ. δυνατόν,
δίδωσθαι ποσότητα, ἥτις μετ' ἑαυτῆς πολλαπλασια-
σθεῖσα τὸν ἀποφατικὸν παράγει ἀριθμὸν, καίτοι
ἄγνωστον οὔσαν. Ἐνθεντοὶ ἀκούουσι καὶ φαντασιώ-
δεις Ποσότητες.

§. 306. Καὶ τούτῳ τιῷ τῶν ῥιζῶν γένει τὰ δ'.
εἶδη τῶν ὑπολογισμῶν ὑπολογισθεῖσαι ὁνομάμεθα. Καὶ γὰρ
καὶ ἐπιτομώτερον ἐκφέρονται, προσίθενται, ἀφαιροῦν-
ται, πολλαπλασιάζονται, καὶ διαιροῦνται, εἰ μὴ τὰ
λοιπὰ τοιαῦται, ὥς τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις ταύ-
ταις ἐφαρμόζεσθαι. Περὶ ὧν μικρόν τι ἐροῦμεν. Τὰ
γὰρ περὶ τῶν ἀλόγων βηθέντα ποσοτήτων καὶ ταῦθα
τελεῖται. Βουλομένοις οὖν ταύτας ἐπιτετμημένως
ἐκῆλθον ἀναγκαῖον εἰς παράγοντας αὐτὰς κατατέμεναι,
ὡς ἂν ἐνός ἡ ῥίζα ἐξοχθῆναι δύναται. π. χ. $\sqrt{18}$
 $= \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. Καὶ
 $\sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
 Διὰ τούτου ἡ ποσότης ἀπαλλάττεται ἐν μέρει καὶ τοῦ
 ἀδυνάτου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ 1 αἰείποτε ὡς εἰς παράγειν
 διάσπῃ ποσότητος νοεῖται, χρησέον καὶ ταύτῃ, ἣν ἁ-
 πάσας τὰς ἀδυνάτους ποσότητες ἐν μέρει τοῦ ἀδυνάτου ἀ-
 παλλάττωμεν. Ὡς $\sqrt{4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{1}$
 $= 2\sqrt{1}$. Καὶ $\sqrt{12} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{1}$
 καὶ ἐπεὶ 12 ἔχει περαιτέρω ἀνατέμενεσθαι $=$
 $\sqrt{4} \cdot 3 \cdot \sqrt{1} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{1}$
 $= 2\sqrt{3}$. Καὶ $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{1}$
 $= 2\sqrt[4]{1}$, κτ. Ἡ Πρόσθεσις, καὶ Ἀφαιρέσις τῶν
 Ἀδυνάτων τὸν αὐτὸν ἐκπεραίνεται τρόπον, ὅν καὶ ἡ

Ἀλόγων. (§. 300.) Ἀλλὰ κἀνταῦθα τὰ
ὄντα προσαθροίζεται, καὶ ἀφαιρεῖται·

$$\begin{array}{r}
 9ες \quad 3\sqrt{} - 2 + \sqrt{} - 4 - 5\sqrt{} - 1 \\
 \omega \quad 2\sqrt{} - 2 - 2\sqrt{} - 4 - 2\sqrt{} - 1 \\
 \hline
 \Phi\acute{\alpha}\lambda. = 5\sqrt{} - 2 - \sqrt{} - 4 - 7\sqrt{} - 1 \\
 \pi\acute{o} \tau\omicron\upsilon \quad 3\sqrt{} - 2 + \sqrt{} - 4 - 5\sqrt{} - 1 \\
 \phi\epsilon\lambda\epsilon\tau\acute{o} \quad 2\sqrt{} - 2 - 2\sqrt{} - 4 - 2\sqrt{} - 1 \\
 \quad \quad \quad - \quad + \quad + \\
 \hline
 \Phi\omicron\rho\alpha \quad \sqrt{} - 2 + 3\sqrt{} - 4 - 3\sqrt{} - 1
 \end{array}$$

§. 307. Ἐπὶ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ με
ων ποσότητων σημειωτέα εἰσὶ τὰ ἐξῆς.

ἵσαι ἀδύνατοι Ποσότ. ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλα

ιν, ἥ ἐκ τούτων προκύπτουσα Ἀποφατ

ίνει. Ὅλον $\sqrt{} - 3$. $\sqrt{} - 3 = - 3$.

σημεῖον τὸ μετὰ τῇ· ρίζαν οὐ μεταβάλλει τὸ

τῆς Ποσότητος. "Ὅπερ ῥᾷδιον συνιδεῖν, ὡς

τῆς Ποσότητος μόνον δεικνυμένης, οὐχὶ δὲ

ομένης, καί, κατὰ τὴν τῶν ριζῶν, ἣν ἐλάβοι

τῆς ποσότητος ἀναφυομένης τῷ πολλαπλα

ἐκείνων (τῶν ριζῶν) μετ' ἀλλήλων. Δι

$8 \cdot \sqrt{} - 8 = - 8$. Καὶ $\sqrt[4]{} -$

$16 = - 16^{\frac{2}{4}} = - 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{} -$

$16 \cdot \sqrt{} - 1 = 4\sqrt{} - 1$.

Εν γένει, τὸ σημεῖον — τῶν ἀδυνάτων πο

τὸ μετὰ τὴν ρίζαν, διὰ τοῦ πολλαπλα

ὁ μεταβάλλεται ἐπὶ τοῦ τοιούτου πολλαπλα

τῆς εἰς δυνάμεις ἐξάρσεως, καὶ ὁ κανὼν ὁ π

σημείων (§. 77.) ἀρμόζει μόνον τοῖς σημείο

ὁ τοῦ $\sqrt{}$ κειμένοις. Ἀλλ' ὅτε οὕτω διαφύρ

ἀδυ

ἀδυνάτους ποσότητες δι' ἀλλήλων πολλαπλασιάζειν δέοι, συμβαίνει ἕτερόν τι. ἔνθα χρησίμον πάνυ τὸ ταύτας εἰς τοὺς αὐτῶν ἀπλοῦς παράγοντας διατέμνειν προ τοῦ τούτων πολλαπλασιασμοῦ. π. χ. $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-2} = -\sqrt{6}$. Ἐστὶ γὰρ $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$. καὶ $\sqrt{-2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1}$. Ὡς $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{6} \cdot -1 = -\sqrt{6}$. Ὅπου ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀδυνάτων ποσοτήτων δυνατόν τι προκύπτει. Αὐτὸ δὲ τοῦτο καὶ συνεργεῖα τοῦ σημείου, τοῦ πρὸ τοῦ ριζικοῦ κειμένου, ἀν' γένοιτο. π. χ. $(\sqrt{-8} + \sqrt{-2}) \cdot (\sqrt{-8} - \sqrt{-2})$ δίδωσι δυνατόν ποσότητα $= -6$. Ὁ δὴλον τῷ ἐνεργείᾳ πολλαπλασιασμῷ.

$$\begin{array}{r} \sqrt{-8} + \sqrt{-2} \\ \sqrt{-8} - \sqrt{-2} \\ \hline -\sqrt{-16} - (-2), \text{ ἢ } +2 \\ -8 + \sqrt{-16} \\ \hline -8 \qquad \qquad \qquad +2 = -6. \end{array}$$

Ἀδυνάτων δὲ ποσοτήτων μετὰ δυνατῶν πολλαπλασιαζομένων, τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον αἰεὶ ἀδύνατον. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{-2}$ δίδωσι $\sqrt{-10}$. Τὸ γὰρ $\sqrt{5} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-10}$. Εἰώθασι μέντοι συχνάκις μὴ ἐνεργεῖα πολλαπλασιάζειν, ἀλλὰ μόνον τὸν πολλαπλασιασμόν τῶν ἀδυνάτων μετὰ τῶν δυνατῶν δεικνύναι, ἵν' εὐχερέστερον ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ὁ πολλαπλασιασμὸς γνωρίζηται. π. χ. $\sqrt{a}$ πολλαπλ. μετὰ τοῦ $\sqrt{-\gamma}$, γράφεται μόνον $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-\gamma}$. Εἰ καὶ ἀντὶ τούτου καὶ τὸ $\sqrt{-a\gamma}$ ἂν τεθῇ. Ὡσαύτως καὶ $\sqrt{4} \cdot \sqrt{-3}$ μένει πολλάκις ἄτρεπτον.

X

Τελευ-

Τελευταῖον συμβαίνει καὶ δυνατῶν μετ' ἀδυνα-
των πολλαπλασιαζομένων, δυνατήντινα προκύπτειν
ποσότηται. Τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν ἀμφοῖν τοῖς παρά-
γουσιν ἐνυπάρχουσιν ἀδύνατοι ποσότητες, ἴσαι ἀλλήλαις,
καὶ τὰ τῶν παραγόντων σημεῖα μὴ τὰ αὐτὰ ἦ. Ἐν-
θεν τοὺς λέγόμενον οὐκ ἀντιφάσκει τοῖς προηγηθεῖσι.
π. χ. $2\gamma\sqrt{} - \delta. - 3\beta\sqrt{} - \delta = -$
 $6\beta\gamma\sqrt{} - \delta. \sqrt{} - \delta = - 6\beta\gamma - \delta = + 6\beta\gamma\delta.$
Καὶ $6\sqrt{} - 4. - 6\sqrt{} - 4 = - 30.$
 $\sqrt{} - 4. \sqrt{} - 4 = - 30. - 4$
 $= + 120.$

§. 308. Ἡ Διαίρεσις τῶν ἀδυνάτων Ποσοτ. δι'
ἀλλήλων τελεῖται κατὰ τοὺς αὐτοὺς νόμους, ὡς καὶ ὁ
τούτων πολλαπλασιασμός. Χρήσιμον δ' ἐπὶ τῶν δυσχε-
ρεστέρων παραδ. καὶ τοῖς Πρωτοπείροις ῥᾶον εἰς κατά-
ληψιν, τὸ ταύτας, κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον,
ἀναλύειν. π. χ. $\frac{\sqrt{} - 4}{\sqrt{} - 1} = \frac{\sqrt{} 4 \cdot \sqrt{} - 1}{\sqrt{} - 1}$

$$= \sqrt{} 4 = 2. \text{ Ἀλλὰ } \frac{\sqrt{} - 4}{\sqrt{} - 1} =$$

$$\frac{-\sqrt{} 4 \cdot \sqrt{} - 1}{\sqrt{} - 1} = -\sqrt{} 4 = -2.$$

$$\text{Καὶ } \frac{\sqrt{} - 8}{\sqrt{} - 4} = \frac{\sqrt{} 8 \cdot \sqrt{} - 1}{\sqrt{} 4 \cdot \sqrt{} - 1} =$$

$$\frac{\sqrt{} 8}{\sqrt{} 4} = \sqrt{} 2.$$

Ἐνθα καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως ἀδυνάτων δυνατὰ
ἀνέβυσαν. Ἀλλ' ὡς τὰ πολλὰ δεκνύομεν μόνον τὴν
διαίρεσιν, ταῖς ποσότησι τὸ τοῦ κλάσματος σχῆμα ὀν-
δόντες, ἐὰν μὴ ῥαδίως διαιρῶνται. Ἄλλως γὰρ εἰς
τὸ

$$\begin{aligned} & \text{τὸ βραχύτατον αὐτὰς πειρατέον ἀνάγειν. ὡς} \\ & \sqrt{} - \alpha : \sqrt{} - \beta = \frac{\sqrt{} - \alpha}{\sqrt{} - \beta}. \text{ Καὶ} \\ & \gamma\delta \sqrt{} - \gamma : -\delta \sqrt{} - \gamma = \frac{\gamma\delta \sqrt{} - \gamma}{-\delta \sqrt{} - \gamma} \\ & = -\frac{\gamma}{\delta} = -\gamma. \text{ Καὶ } 8 \sqrt{} - 6 : - \\ & 4 \sqrt{} - 2 = \frac{8 \sqrt{} - 6}{-4 \sqrt{} - 2} = -2 \sqrt{} - 3. \end{aligned}$$

§. 309. Ἡ δ' οἷσις, ἣν αἱ ἀδύνατοι ποσότητες τῇ Ἀριθμητικῇ παρέχονται, λίαν ἐπίσημοι. πολ-
λάκις γὰρ προτείνονται Προβλήματα, περὶ ὧν ἀδήλον,
πότερον δυνατόν, ἢ μὴ. Τοῦτο δ' ἐπὶ τὸ πέρας γεγόμε-
νοι τοῦ ὑπολογισμοῦ μαθησόμεθα. Ἐάν γὰρ τινικαῦ-
τα ποσότητες προέλθωσιν ἀδύνατοι, τὸ Ζήτημα ἀδύ-
νατον, ἢ ἀνεπίλυτον τυγχάνει. Τὰ δὲ τῶν αὐτῶν μάλι-
κα ἐν ταῖς Ἐξισώσεσιν ἀπαντᾷ. Οἶον, εἰ ζητεῖται 10
εἰς δύο μέρη διακερθεῖναι, ἃ ἐπ' ἀλλήλα πολλαπλασια-
σθέντα δώσουσι 3 παραγόμενον. τοῦ Ζητήματος δια-
ταχθέντος, (ὡς τοῦτο αἱ Ἐξισώσεις διδάξουσιν) οὕτω,
(τῶν δύο μερῶν, ὡς ἀγνώστων, τοῦ μὲν x , τοῦ δὲ v
(ἐνθέντος))

$$\begin{array}{l|l} x + v = 10 & xv = 36 \\ x = 10 - v & x = \frac{36}{v} \\ 10 - v = \frac{36}{v} & (\S. 48, \delta'.) \end{array}$$

$$\begin{aligned} 10v - v^2 &= 36 \\ v^2 - 10v &= -36 \\ v^2 &= 10v - 36 \\ v &= 5 \pm \sqrt{25 - 36} \\ v &= 5 \pm \sqrt{-11} \\ v &= 5 - \sqrt{-11} \end{aligned}$$

Ἀναφανήσονται ἐν τέλει οἱ παράγοντες $5 \vee - 11$, καὶ $5 - \vee - 11$, ἀδυνάτους δηλοῦντες ποσότητας. Ὡς καὶ τὸ ζητούμενον οὐκ ἐπιλύσιμον. Καὶ δίδωσι μὲν ὁ πολλαπλασιασμός τῶν δύο ἀδυνάτων ποσοτήτων μετ' ἀλλήλων τῷ ὄντι 36, ἀλλὰ τοιαῦται ποσότητες κυρίως οὐ δίδονται.

Πολλαπλασιασθήτωσαν ἄμφω δι' ἀλλήλων

$$5 + \vee - 11$$

$$5 - \vee - 11$$

$$- 5 \vee - 11 - (-11)$$

$$+ 25 + 5 \vee - 11$$

$$25 \cdot 0 - (-11) = +11$$

$$\text{Ὡς } 25 + 11 = 36.$$

Σημειωτέον πρὸς τούτοις, ὅτι τὰς ἀδυνάτους ποσότητας ἐν ταῖς Δείξεσι Φευκτέον, μάλιστα, ἐνθα ἡ Δείξις δι' ἐνεργείᾳ ποσοτήτων (καίτοι χαλεπῶς ἐνίοτε) ἔχει ἐπαχθῆναι. Δι' ἐκείνων γὰρ, ὡς ἀδυνάτων, οὐδὲν νοῆσαι δυνάμεθα, καὶ τῇ διανοίᾳ λαμπρότερον ἐπιλάμπει φῶς, τῶν συμπερασμάτων δυναταῖς ποσότησι συναγομένων.

§. 310. Ἐπιμνησέου τελευταῖον καὶ εἶδους ῥιζῶν ἐτέρου, καὶ τούτων ἐνίοτε ἀπαντωσῶν. Προκείμεναι γὰρ συμβαίνει ἐκ ῥίζης καὶ ἐτέραν ἔτι ἐξάγειν, ὅπερ οὕτως ἐκφαίνεται. $\vee \vee 5$ Ὁ ἐστίν, ἐξαχθῆτω ἀπὸ τοῦ 5 ἢ $\vee$, καὶ ἐκ τῆς προκυψάσης ποσότητος αὐθις ἢ $\vee$. ἢ καὶ $\vee \vee$ 16. ἢ ἐν γένει $\vee \vee$ α. Ἐὰν οὖν αἱ ποσότητες, ἐξ ὧν ἡ α'. ῥιζα, ἢ πλησίον τῆς ποσότητος κειμένη, ἐξακτέσθαι, τοιαῦται

ται ὡσιν, ὥς τε τὴν τούτων ῥίζαν ἀκριβῶς ἀποδίδο-
σθαι, μόνον ἐν ῥιζικὸν κυρίως πάρεσιν, ὡς τῆς ἐτέρας
ρίζης ἐξαχθῆναι δυναμένης, π. χ. $\sqrt{\sqrt{9}}$. εἴη ἂν
(ὅτι τοῦ 9 ἡ ῥίζα ἀκριβῶς ἀποδίδεται $= \sqrt{3}$.
Καὶ $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$. Καὶ $\sqrt{\sqrt{\alpha^2}}$
 $= \sqrt{\alpha}$. Τῶν δὲ ποσοτήτων ἀλόγων οὐσῶν, οὐ δυ-
σχερὲς ἀμφοῖν ἐν μόνον ῥιζικὸν προθεῖναι σημεῖον, εἰ
τοῦτο ἀναγκαῖον. Ὡς γὰρ ἔφημεν, τὰς ῥίζας, ὡς
δυνάμεις, κλασματικὰς ἐκθέτας ἔχούσας, γράφειν
ἔξεσι, καὶ, ὅτε τοὺς ἐκθέτας τῶν δυνάμεων διαιροῦ-
μεν, τὰς τούτων ῥίζας διὰ τούτου ἐξαγομεν. (§ 200.)
Ὡς τε τούτῳ τῷ τρόπῳ καινὸν, καὶ ἐν μόνον ῥιζικὸν πα-

ρέσαι σημεῖον. π. χ. $\sqrt[3]{\sqrt{\gamma}} = \gamma^{\frac{1}{3}} : 2 = \gamma^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2}$
 $= \gamma^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\gamma}$. Καὶ $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{5} =$
 $8^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{8}$. Καὶ $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8^2}} = 8^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} =$
 $8^{\frac{2}{9}} = 8^{\frac{2}{9}} = \sqrt[9]{8^2} = 2$. Καὶ ἐν γένει.
 $\sqrt[r]{\sqrt[\sigma]{\sqrt[\nu]{\alpha}}} = \alpha^{\frac{\nu}{\sigma}} \cdot \frac{1}{r} = \alpha^{\frac{\nu}{\sigma r}} = \sqrt[\sigma r]{\alpha}$. Ἐὰν τεθῇ
 $r = 3$. $\sigma = 2$. $\nu = 4$. $\alpha = 12$. ἔσαι
 $\alpha^{\frac{\nu}{\sigma r}} = 12^{\frac{4}{6}} = 12^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{12^2} = \sqrt[3]{144}$.

Τὰ ἀναγκαιότατα περὶ τῶν ῥιζικῶν ὑπολογι-
σμῶν εἰπεῖν πειρασάμενοι πλατύτερον τούτους ἐξε-
θέμεθα εἰς πλείω ἐνάργειαν. Ὡς τε καὶ ἐλπίς ἡμῖν πά-
ρεσι τοὺς πρωτοπείρους, τοὺς μετὰ προσοχῆς τὰ ῥηθέντα
ἀναλεξομένους, ῥαδίως προχωρήσιν εἰς τὰ τελεώτερον
περὶ τούτων πραγματευόμενα συγγράμματα.

Περὶ Λογαρίσμων.

§. 311. Ἡ τῶν Λογαρίσμων χρῆσις οὐκ αὖ
εἰποῖτις ὅσῃ τὴν ὄψιν διὰ πάσης ἐπαγγέλλεται τῆς
Μαθησεως, καὶ ὅσῃ εὐχέρειαν ἐν παντὶ εἶδει παρέχε-
ται ὑπολογισμῶν, περὶ ὧν πρὸ τῆς περὶ τῶν Ἀναλο-
γιῶν, Προόδων, καὶ Ῥιζῶν ἔξαγωγῆς διδασκαλίας οὐκ
ἐπραγματουσάμεθα, ὡς τούτοις τῆς περὶ τῶν Λογα-
ρίσμων διδασκαλίας ἐπεριδομένης. Ἡ λέξις Λογα-
ριθμος, ἥπου παντὶ ὄῳ, σύγκειται ἐκ τῶν λέξεων
Λόγων, καὶ Ἀριθμὸς, ὅπερ τὸν ἀριθμὸν, ἢ τὴν
πληθὺν ὑπεμφαίνει τῶν Λόγων. (§. 212.) Τοῦτο
καὶ γὰρ τῶν οἱ λογάριθμοι ποιοῦσι, δεικνύοντες
ἀμέλει, ποσάπλασίον ὁ Λόγος, ἀπὸ τοῦ θεμελιώδους
λόγου δύο ἐγγὺς ἀλλήλων ὄρων τῆς Γεωμετρικῆς σει-
ρᾶς ἀρχομένοις. Κατωτέρω γενήσεται σαφέστερον τὸ
λεγόμενον.

Ὁ δὲ τούτων ἐφευρετὴς ἀμφισβητήσιμος. Οἱ
μὲν γὰρ Γερμανῶ τινι Ἰούστῳ Βυργίῳ τούτους ἀ-
ποδιδόασιν. οἱ δὲ, Σκότον τινα Ἰωάννην Νεππέρ-
ρον, Βαρῶνον, ὡς τούτους πρῶτον ἐπινοήσαντα ἐκδι-
δόασιν. Ὅς μὲντοι τυχὸν τὴν τούτων χρῆσιν κοινω-
φελεστέραν ἐποίησεν. Ἐξέδωκε γὰρ Πόνημα, Περι-
γραφή Θαυμασίου Κανόνας τῶν Λογαρίσ-
μων 1614 ἐν Ἐδιμβούργ, ἐπιγραφόμενον. Εὐρίκος δὲ
Βρίγγιος, ὥτιμι τὸ Μαθηματικὸν εἶδος ἡσκέτο ἐξ ἐ-
παγγέλματος (Professor), τύποις ἐξέδωκε τὴν ἑαυ-
τοῦ, Ἀριθμητικὴν Λογαριθμικὴν, ἐν ἔτει
1624, ἐν ᾗ, συμβουλὴ τοῦ Νεππέρου, ἑτέρου Λο-
γαριθμικοῦ Σύστημα, καὶ εἰς χρῆσιν προσφορώτερον, ὑ-
πελογίστευσεν, ἢ τὸ τοῦ Νεππέρου, ὃ καὶ κατὰ τοῦτο
τοῦ Νεππερικοῦ διάφορον. Ὁ μὲν γὰρ Νεππέρους ὡς
Γενικὴν Σειράν Πρόσδον Μειουμένην (§. 255.) ὑπε-
σῆτατο. ὁ δὲ, τοῦναντίον, Αὐξουσαν, (§. αὐτ.) πρό-
τερον καὶ αὐτὸς ἑτέραν Βάσιν τοῦ ἰδίου συστήματος πα-
ραλα-

φιλαβίων. Τούτων ἀπάντων ὅσον οὕτω ἐναργῆ ἐν-
νοιοιαν ληψόμεθα. Ἀλλὰ τὸ περὶ τούτων διεξοδικῶς
λεγειν οὐ κατὰ σκοπὸν ἂν εἴη τῆς παρούσης βίβλου,
καὶ τοῖς Πρωτοπείροις ἀνοίκειον. Ἐπειδὴ οὖν οἱ Νεπ-
πериκοὶ Λογάρισμοι οὐκέτι ἐν χρήσει, τὸ δὲ κοινόν,
καὶ ἐν χερσὶ πάντων Λογαριθμικὸν Σύστημα, τὸ τοῦ
Βριγγίου, ὃ καὶ ἐν ταῖς οὕτω καλουμένοις Λογαριθμι-
κοῖς Πίναξιν εὐρίσκεται, περὶ τούτου ἐροῦμεν, καὶ
τοῦτο προσεκτικῶς ἀναπτύξομεν, δεικνύντες, ὅπως δι'
αὐτοῦ ὑπολογίζεον.

§. 312. Ἀρκτέον οὖν τοῦ οὕτω τούτους ἐκτι-
θεῖναι, ἥπερ ἂν ῥᾶτα θεωρηθεῖεν, καὶ ἀναπτυχθεῖεν,
κατὰ τοὺς ἐν κοινῇ χρήσει ὄντας Βριγγιανούς
Λογαρίθμους.

Ἐάν ὑπὸ Γεωμετρικὴν τινα Προόδον, (§. 254.)
ἁτοίξῃ αὖ ἡ, ἥς ὁ α'. ὅρος ἀπὸ 1 ἀρχεται, ἑτέρα
Προόδος ὑπογραφῶν Ἀριθμητικὴ, (§. 21.) ἡ α'.
ὅρος τὸ 0, ὁποῖα αὖ ἡ καὶ αὕτη, ὥς ἐφ' ἑκάστον ὅσον τῆς
Γεωμετρικῆς Προόδου ἑκαστον τῆς Ἀριθμητικῆς κεῖσθαι,
ἑκαστος ὅρος τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου καλεῖται ὁ
Λογάρισμος τοῦ ἐπ' αὐτὸν κειμένου ὅρου τῆς Γεω-
μετρικῆς Προόδου.

Π. χ. Γεωμετρικὴ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256
Προόδος

Ἀριθμητικὴ. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Ἐνθα ἑκαστος ὅρος τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου τὸν
Λογάρισμον παρίσχει τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν ὅρου τῆς Γεωμε-
τρικῆς. π. χ. 5 ὁ Λογάρισμος τυγχάνει τοῦ 32. ἡ 5
ἐμφαίνει, ὅτι 32 ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ ὁ πεντα-
πλασίον ἐστὶ Λόγος τοῦ 1 : 2. Ἐκ γὰρ οὕτω συνά-
γωμεν $1 : 2 = 2 : 4$, $2 : 4 = 4 : 8$,
 $4 : 8 = 8 : 16$, $8 : 16 = 16 : 32$. πρόδη-
λον

λόν ἐκάσῳ, ὅτι τοῦτο ὁ εἰς λόγος. Πέντε γὰρ οἱ Λόγοι ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τῶν 32. οἷον 1 : 2. (εἰς) 2 : 4. (δύω) 4 : 8. (τρεις) 8 : 16. (τέσσαρες) 16 : 32. (πέντε). Ἐπεὶ δὲ πόσαν Γεωμετρικὴν Πρόσδον ἀφ' οἰασοῦν ἂν ὄρχηται ποσότητος, εἰς ἑτέραν ἔχομεν τρέψαι, ἥς ὁ α'. ὅρος ἀπὸ 1 ἀρχεται, τοῦ νόμου, καὶ τοῦ Λόγου, καθ' οὓς οἱ ὅροι χωροῦσι, μηδὲ ὅλως τροπὴν ὑφισταμένων. (§. 257.) Ἐξέσιν οἰανοῦν Γεωμετρικὴν Πρόσδον εἰς ταύτην ἀνάγειν (τὴν ἀπὸ 1 ἀρχ.). Ἐυθεντοὶ καὶ εἰκότως ἐκείνην, ὡς τοιαύτην ἂν θεωροῖμεν, (ἥτοι ἀπὸ 1 ἀρχ.) καίτοι τοῦτο ἀναγκαῖον μὴ εἶναι. Ὡσαύτως οὐ πάσα ἀνάγκη τὸ, ὡς ἐν τῷ προτεθέντι παραδείγματι, τὴν Ἀριθμητικὴν Σειρὰν ἀπὸ τοῦ 0 ἀρχεσθαι, καίτοι τοῦτο ἀπλούσατον, καὶ μάλιστα τῇ φύσει συνάδον· οὐδὲ μὲν οὖν τὸ κατὰ τὴν τάξιν τῶν Φυσικῶν χαρακτήρων χωρεῖν, κατὰ τὸ παράδειγμα. Καὶ κατ' ἄλλην γὰρ τάξιν τῶν ὁρῶν (τῆς Ἀριθμ. Σ.) χωροῦντων, ἢ τῶν Λόγων πληθὺς ἂν παρασαίη. Καὶ τούτου δὲ μὴ κεκμένου, ἀλλὰ καθόλου τῶν Γεωμετρικῶν, καὶ Ἀριθμητικῶν Σειρῶν ἐμφαινομένων, ὡς

$\alpha, \alpha\mu, \alpha\mu^2, \alpha\mu^3, \alpha\mu^4, \alpha\mu^5, \alpha\mu^6 \dots$

$\alpha, \alpha + \delta, \alpha + 2\delta, \alpha + 3\delta, \alpha + 4\delta, \alpha + 5\delta, \alpha + 6\delta \dots$

ἐγχοροῦσι μέντοι μεταξὺ τῆς ἀποσάσεως δύο ὁρίων τῆς Γεωμετρικῆς Σειρᾶς τοσοῦτοι Λόγοι, ὅσαι διαφοραὶ ἐνυπάρχουσι μεταξὺ τῆς ἀποσάσεως δύο ὁρῶν τῆς Ἀριθμητικῆς σειρᾶς, καὶ ἡ πληθὺς τῶν δ , ἢ τῶν διαφορῶν, ἐμφάνειεν αὐτοῦτο, τῆς ἑτέρας, ἢ καὶ ἑκατέρας τῶν σειρῶν αὐξάνουσης, ἢ μειουμένης οὐσης, ἢ ἐν γένει, ὅπως αὐ αὐταὶ ἔχωσιν. Ἀλλ' αἱ τοιαῦται θεωρίαι τοῦ ἡμετέρου σκοποῦ ἡμᾶς ἀπάξουσιν. Λόγος καὶ γὰρ ἐνταῦθα μόνον περὶ τῶν ἀπλousάτων, καὶ εὐχέστεράτων. Ἀρκτέον οὖν καθόλου Γεωμετρικῆς τινος

Προ-

Προόδου ἀπὸ 1, ὅπερ ἔσαι, τὴν ἀνωτέρω Γεωμετρικὴν διὰ τοῦ α διελούσι, καὶ τῆς Ἀριθμητικῆς ἀπὸ τοῦ 0, ὥςτε τὸ ἐν ἀρχῇ αὐτῆς α = 0 γενέσθαι, καὶ ἀπὸ πάντων ἐκπεσεῖν τῶν ὄρων.

Αἱ δὲ Πρόοδοι ἀποδοθεῖεν ὥδε.

Γεωμ. Πρόοδος. 1, μ, μ², μ³, μ⁴, μ⁵, μ⁶ . .

Ἀριθ. Πρ. 0, δ, 2δ, δ, 4δ, 5δ, 6δ . . .

Ὅποῖαι ἂν ἐνταῦθα παραληφθῶσιν ἀμφοῖν αἱ σειραὶ, εἴτε αὐξουσαι, εἴτε μειούμεναι, ἢ διάφοροι, πάρεσ μέντοι κατανοεῖν, ὅτι ἡ τῶν διαφορῶν πληθὺς τὸν ἀριθμὸν τῶν λόγων τοῦ 1 : μ δείκνυσιν, ἢ ἡ πληθὺς τῶν διαφορῶν δείκνυει τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ μ. Τούτου δὲ οὕτως ἔχοντος, ἐὰν καὶ μετὰ τῶν ὄρων τῆς Ἀριθμητικῆς σειρᾶς τὰ αὐτὰ γίνωνται, ὅ καὶ μετὰ τῶν ἐκθετῶν τῶν ὁμοταγῶν δυνάμεων ἐγίνετο βουλομένοι τούτους πολλαπλασιάζειν μετ' ἀλλήλων διαιρεῖν, εἰς καινὰς δυνάμεις ἐξαίρειν, ἢ τὴν ρίζαν ἐξαγαγεῖν, τὸ αὐτὸ ἔξομεν συναγόμενον, ὅπερ κάκει, καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμητικὸς ὅρος ἐξ ἀνάγκης δηλώσει τὴν ἐπ' αὐτοῦ κειμένην δύναμιν τοῦ μ, ἥς ὁ ἐκθέτης τῆς ἀπὸ τοῦ κοῦτος, ἡλικὸς ὁ ἀριθμὸς, ἢ ἡ πληθὺς τῆς διαφορᾶς τούτου τοῦ ἀριθμητικοῦ ὅρου. Θεωρηθήτω ἔτι ἅπαρ ἡ σειρά.

1, μ, μ², μ³, μ⁴, μ⁵, μ⁶, μ⁷ . . .

0, δ, 2δ, 3δ, 4δ, 5δ, 6δ, 7δ . . .

Βουλομένοις οὖν μ² μετὰ τοῦ μ⁴ πολλαπλασιάσαι προσθετέοι μόνον οἱ τούτων Λογάρισμοι. (ὁμοειδὲς γάρ δυνάμεις πολλαπλασιάζειν ἐστὶ τοὺς αὐτῶν ἐκθέτες προσθεῖναι) τὸ δὲ κεφάλαιον δείξει τὸν ὅρον τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, τὸν ὑπὲρ τὴν ποσότητα, τὴν ἢ ἀνακύψασαν, κείμενον. Ὁ τοῦ μ² λόγάρισμος = 2 Ὁ δὲ τοῦ μ⁴ = 4δ. Ὡς 2δ + 4δ = 6δ
Ἐφ'

Ἐξ οὗ μ^6 τυγχάνει. Ἀλλὰ καὶ μ^2 , καὶ μ^4 ὡσαύτως δῶσαι μ^6 . Παραπλησίως, καὶ εἰ τὰς δυνάμεις τοῦ μ δι' ἀλλήλων διαιρεῖν πρόκειται, ἔξαρσιν ἀφαιρεῖν μόνον ταύς τούτων Λογαρίθμους. Οὕτως ἂν εἴη $\mu^5 : \mu^3$, λογαριθμικῶς θεωρηθὲν, $5\delta - 3\delta = 2\delta$, ἐξ οὗ μ^2 κεῖται. καὶ $\mu^5 : \mu^3 = \mu^2$. (§. 194.) Εἰ δὲ αἱ τὰς δυνάμεις τοῦ μ εἰς κεινὰς δυνάμεις ἔξαρται, ποιούμεν ταῦτο, κατὰ τὸ (§. 192.) Ἐξαρσιν μέντοι καὶ ταῦτα μόνον ταύς τούτων Λογαρίθμους μετὰ τοῦ ποσότητος ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζειν. π. χ. Ἀρθῆτω μ^3 εἰς τὴν γ' δύν. Ὁ τούτου Λογαρίθμος $= 2\delta$. Ὅς ἐπὶ τὸν 3 πολλαπλασιασθῆς 6δ παρέχει, καὶ ἡ δύναμις τοῦ μ , τοῦ ἐπὶ τοῦ 6δ , $= \mu^6$. καὶ μ^2 εἰς τὴν γ . ἄρξιν δύν. $= \mu^6$. Οὕτω καὶ ἡ ἔξαγωγή τῆς ῥίζης, ἥτις, ὡς γνωστὸν, ἡ διαιρέσις ἐστὶ τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῆς ῥίζης, (§. 200.) διὰ τῶν Λογαρίθμων τελεσθήσεται. π. χ. $\sqrt[3]{\mu^6}$. Ὁ τοῦ μ^6 Λογάρ. $= 6\delta$. Ὁ διὰ 3 διαιρεθὲν ἔσται $= 2\delta$. ἐξ οὗ μ^2 κεῖται $= \sqrt[3]{\mu^6}$. (ἔστι γὰρ $\sqrt[3]{\mu^6} = \mu^2 = \mu^2$). Ὅρα οὖν πάρεστιν, ὅπως ὁ Πολλαπλασιασμὸς εἰς Πρόσθεσιν τῶν Λογαρίθμων, ἢ Διαίρεσις εἰς τὴν τούτων Ἀφαιρέσιν, ἢ εἰς δυνάμεις ἔξαρσιν εἰς πολλαπλασιασμόν, καὶ ἡ Ἐξ γωγὴ τῆς ῥίζης εἰς διαιρέσιν αὐτῶν μεταβάλλεται, καὶ ὅπως οἱ Λογαρίθμοι, καθόλου θεωρούμενοι, ὡς ἐνεργεῖα ἐκθ'έται τῶν δυνάμεων ποσότητος οἰασθὲν ἔχουσι θεωρεῖσθαι.

§. 313. Παράληϋθέντος ἤδη ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω δύν Σειρῶν ὁποιοῦσιν ἑτέρου σειρῶν, ἢ Προσδίων εἶδους, ἀριθμοῦσι καὶ τούτοις ἀναγκαιῶς τὰ ῥηθέντα. Ἔστω ἡ Γεωμετρικὴ Σειρὰ 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 ... ἡ δὲ Ἀριθμητικὴ, ἢ οἱ Λογάρ. 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 ... Εἴεν ἂν οὖν οἱ τοῦ 3 . 27 λογαρίθμοι $2 + 6 = 8$. Οὗτος δὲ (ὁ Λογ. 8) προσήκει τῷ 81, ὅς καὶ $=$

3 . 27. Ἀύθις τοῦ $\frac{243}{27}$ οἱ λογ. = 10 — 6

= 4. Ὅτι ὁ τοῦ 243 λογάρ. = 10, ὁ δὲ τοῦ 27 = 6, ἐν τῷ ἡμετέρῳ ἤδη παραληφθέντι Συσήματι. Ὁ δὲ λογάρ. 4 ἀνήκει τῷ $9 = \frac{243}{27} = 9$.

Ἐσαύτως 3 εἰς τὴν δ'. ἀρθὲν δύναμιν εἴη ἂν λογαριθμικῶς, ὁ λογάρ. τοῦ 3 μετὰ τοῦ 4 πολλαπλασιασθεῖς. Ὡς $2 \cdot 4 = 8$. ὅς λογάριθμος ὑπὸ τὸν 81 κεῖται. Ὅς = 3^4 . Καὶ ὡς 729 εἴη λογαριθμικῶς, λογάρ. τοῦ 729 διαιρεθεῖς διὰ 2. Ἀλλὰ λογάρ. τοῦ 729 ἐστὶ 12. ὅς διὰ 2 διαιρεθεῖς δίδωσι τὸν λογάρ. 6 τῷ 27 προσήκοντα = τῇ V 729.

Ἀλλὰ καὶ ἑτέρου Λογαριθμικοῦ περὶ αὐτῶν Συσήματος, ἑτέρων τεθεισῶν Σειρῶν (ὅπερ Λογαριθμικὸν ἀκούει Σύστημα)

Γεωμετρικῇ, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256} \dots$

Αριθμητ. ἢ

Λογάριθμοι 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . .

Ὡς $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ λογαριθμικῶς ὑπολογισθὲν = $1 + 6 = 7 =$ τῷ λογάρ. τοῦ $\frac{1}{128}$. Τοῦτο δὲ προκύπτει, καὶ ἐὰν $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$ δι' ἀλλήλων πολλαπλασιασθῇ. (§. 141.) Παραπλησίως καὶ $\frac{1}{2} : \frac{1}{8}$ λογαριθμικῶς = $6 - 3 = 3 =$ τῷ λογάρ. τοῦ $\frac{1}{8}$. Ὁ προκύπτει καὶ τοῦ $\frac{1}{4} : \frac{1}{8}$ ἐνεργείᾳ διαιρεθέντος. (148.) κτ.

§. 314. Καὶ συνήσει μὲν πᾶς τις, ὡς οἶμαι, καλῶς, ὡς ἐπὶ τῶν ὅρων ταύτης, ἢ ἐκείνης τῆς σειράς τῆς Γεωμετρικῆς διὰ τῶν Λογαρίθμων ὑπολογίσασθαι δύναμεθα, ἀλλ' ἀπορήσειεν, ὅπως οἱ λογάριθμοι τῶν ὅρων εὔρεθῶν, τῶν μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς παραληφθείσης Γεωμετρικῆς σειράς ἐπιπίπτοντων. π. χ.

ἐν τῇ σειρᾷ. 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 . . οἱ λογαριθμοὶ τῶν μὴ παρόντων ὄρων, τοῦτ' ἐστὶ τῶν 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10 κτ. ὥστε ἐν γένει καὶ τοῦτοις Λογαριθμικῶς πᾶν εἶδος ὑπολογισμοῦ ἐφαρμόζεσθαι, ὃ δὴ πάλαι εὐχευεσέρας ποιῖται τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, ἐν πᾶν πολυαριθμοῖς παρεδείγμασι Πολλαπλασιασμοῦ, Διαιρέσεως, κτ. Εἰς λύσιν τοῦτου, καὶ εἰς τὸ καθόλου τὴν περὶ τούτων ἔννοιαν ἐναργεστέραν λαβεῖν, τὸ Βριγγιανὸν Σύστημα θεωρητέον, ἐρμηνευτέον τε, καὶ δεικτέον τὸν τρόπον, καθ' ὃν τοὺς λογαριθμοὺς ἀπάντων τῶν ἀριθμῶν κατὰ τοῦτο τὸ σύστημα εὐρήσομεν, καὶ τοῖς αὐτοῦ ἐκδοθεῖσι Πίναξι τῶν Λογαριθμῶν χρῆσθαι δυνησόμεθα.

§. 315. Ἐνρίκος Βρίγγιος συμβουλία τῇ τοῦ Βαρώνου Νεππέρου, ὡς εἴρηται, ἕτερον τοῦ Νεππερικῶν Λογαριθμικὸν ἐξηριθμήσατο Σύστημα, ἐν ᾧ τὸν Λόγον (§. 2. 2.) $1 : 10$, ὡς ἀπλοῦν ἐκλαβόμενος, (καὶ τὴν ἀριθμητικὴν Πρόοδον τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν, ἥς ἀπὸ τοῦ 0 ἤρξατο, καὶ εἰς τὴν 1, 2, 3, 4, κτ. προηγάζετο) ἐκ τούτου τὴν Γεωμετρικὴν διωρίσατο πρόοδον. Ἀνέκυψεν οὖν ἡ ἐξῆς Γεωμετρικὴ, καὶ Ἀριθμητικὴ Πρόοδος

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, κτ.

0, 1, 2, 3, 4, 5 . .

Ἡ Ἀριθμητικὴ αὕτη Πρόοδος, ἥ οἱ Λογαριθμοὶ τῆς Γεωμετρικῆς Πρόοδου, οἱ ἀληθεῖς ἐκθέται τυγχάνουσι τῶν δυνάμεων τοῦ 10. Ὡς καὶ τὸ 0 ὑπὸ τὴν μονάδα ταύταις ἀνήκει, Ἐστὶ γὰρ $10^0 = 1$. (§. 198.) Ἦν οὖν ἀναγκαῖον μετὰ τοῦτο, ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Σειρᾷ τῶν Φυσικῶν τάξει ἀλλήλους διαδεχομένων ἀριθμῶν τοὺς Λογαριθμοὺς εὐρεῖν. Μεταξὺ τῆς 1 καὶ 10 ἑλλείπουσιν ἔτι 8 χαρακτῆρες, μεταξὺ τῶν 10, καὶ 100 ἔτι πλείους, καὶ ἔτι πλείους μεταξὺ τῶν λοιπῶν ὄρων.

θριον. Ἄλλ' ἅπαντες οἱ ἀριθμοὶ (οἱ ἐλλείποντες) θεωρηθεῖεν ἂν ὡς δυνάμεις τοῦ 10. Ὅτι μεταξὺ 1 καὶ 10, ἢ ὁ ταῦτόν, μεταξὺ τοῦ 10⁰ καὶ 10¹, καὶ ἑτέρας μυρίας δυνάμεις νοεῖν ἔχομεν, ὧν οἱ ἐκθῆται ἐλαττοὺς τῆς 1, καὶ μείζους τοῦ 0. Οὕτω καὶ μεταξὺ τοῦ 10¹ καὶ 10², ἦτοι μεταξὺ τοῦ 10 καὶ 100, καὶ ἄλλοι μυρίοι ἀριθμοί, ὧν ἡ δύναμις ὑπερέχει μὲν τὴν 1, ὑπερέχεται δὲ ὑπὸ τοῦ 2. Ἐκ τούτων δὴλον, ὅτι ἅπαντες οἱ Ἐκθῆται τῶν δυνάμεων, ταῦτ' ἅπαντες οἱ ὅροι τῆς Ἀριθμητικῆς Σειρᾶς, ἢ ἅπαντες οἱ Λογάρισμοι τῶν ὀλοσχερῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ 1 καὶ 10 γνήσιά εἰσι κλάσματα, ὡς ἐλάσσους ὄντες τῆς 1, καὶ ἅπαντες οἱ Λογάρισμοι τῶν ἀριθμῶν, τῶν ὑπὲρ 10, ὀλοσχερεῖς ἀριθμοί, προσηρητημένα ἐαυτοῖς καὶ κλάσματα ἔχοντες, ὅ ἐστι νόθα κλάσματα. (τῶν ὀλοσχερῶν, καὶ τῶν κλασμάτων εἰς κλάσμα γεγονότων) οὕτω π. χ. ἅπαντες οἱ ἀριθμοὶ μεταξὺ 10, καὶ 100, ἔχουσι λογάρ. τὴν 1, καὶ κλάσμα. ὅτι μόνον ἐπὶ τοῦ 100 ὁ Λογάρισμος 2 γίνεται, κτ. Τούτους δὲ τοὺς ὀλοσχερεῖς ἀριθμοὺς, καὶ τὸ 0, τοὺς παρὰ ταῖς Λογαρίθμοις κειμένους, τὸ τούτων Χαρακτηριστικὸν ἀποκαλεῖται, καὶ παρὰ τούτῳ (τῷ χαρ.) ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν (πλὴν τῶν ἐν τῇ σειρᾷ ἀπαντῶντων, ἦτοι τοῦ 10, 100, 1000, 10000, τῶν ὀλοσχερεῖς ἀριθμοὺς λογαρίθμους ἔχόντων) κεῖται τὸ κλάσμα. Ἐὰν οὖν τὸ κλάσμα ἐν γένει διὰ $\frac{\mu}{\nu}$ ἐκδηλωθῇ, εἴη ἂν π. χ. ὁ τοῦ 5 λογάρ.

$$= 0 + \frac{\mu}{\nu} \cdot \text{ὁ τοῦ } 45 = 1 + \frac{\mu}{\nu}, \text{ κτ. Ἐπεὶ}$$

δὲ οἱ Ἐκθῆται τῶν δυνάμεων ἀπάντων τῶν ἀριθμῶν, (ἢ οἱ τούτων λογαρίθμοι) τῶν μεταξὺ ἐκείνων (τῶν ἀρ:) κειμένων, οἷς ὀλοσχερῆς ἀριθμὸς τὸ Χαρακτηριστικόν, ἢ ἡ δύναμις, ὡς ἐνεργεῖα δυνάμεις τοῦ 10

2500

θεωρητέοι, τόδε τὸ κλάσμα πάντα ἐπ' ἀκριβὲς ἐκὼν
 λυῖσθαι ἀμύχανον. Ἐνθεντοὶ ἀρκεῖσθαι χορὴ τῷ ὡς ἐγ-
 γιστα γίνεσθαι τῆς κλασματικῆς δυνάμεως, ἢ τῶν λο-
 γαρίθμων τῶν ἀριθμῶν, τῶν μεταξὺ τῶν ὁρῶν τῆς
 σειρᾶς ἐμφιλοχωρούντων. Ταύτητοι τὰ δεκαδικὰ πα-
 ρεῖληπται κλάσματα, τῷ Χαρακτηριστικῷ προσαιφθέντα,
 μέχρι τῶν 7 ἐν τοῖς ἐκδοδομένοις ἐλάσσονσι Πίναξιν ὁ-
 πολογικευθέντα, πλὴν τοῦ χαρακτηριστικοῦ. Ὡς,
 εἰ καὶ οὐδεὶς λογάριθμος παντάπασιν ἀκριβὴς, εἰ μὴ
 μόνον οἱ τῶν δυνάμεων τοῦ 10, ἦτοι τῆς 1, 10, 100,
 1000, κτ. τὸ παράπτωμα οὐδὲ δεκαμυλλιοσημορίῳ
 ἐξισοῦσθαι.

§. 316. Ἀλλὰ πῶς εὗρονται οἱ Λογάριθμοι;
 ἐργωδεσάτω τινόντι, καίτοι μὴ δυσχερὲς τῷ τῷ τρό-
 πῳ. Διὰ ζητήσεως ἀμέλει τῶν μέσων ἀναλόγων ἀ-
 ριθμῶν, μεταξὺ τῆς Ἀριθμητικῆς, καὶ Γεωμετρικῆς
 Σειρᾶς, οἵτινες μέχρι 7 δεκαδικῶν ἐζητοῦτο κλασμα-
 των, (ἐν τοῖς ἐν χρήσει αὖσι δηλονότι Πίναξι) μέχρι
 οὗ τελευταίου ἀριθμοῦ ἐνέτυχον, οὕτως ἐγγὺς ὄντι
 τοῦ ζητουμένου, ὥς τὸ διάπτωμα μὴδὲ $\frac{1}{1000000}$
 (§. ἀνωτ.) εἶναι, ὃν καὶ ὡς ἀληθῆ παρελαβόν, πρὸς
 ἡ καὶ ὁ τούτου λογάριθμος προέκυπτεν, ὃν διὰ ζη-
 τήσεως τοῦ μέσου ἀριθμητικῶς ἀναλόγου ἀριθμοῦ εὗ-
 ρον. ("Ἡδὴ δ' ἐπινενάηνται μέθοδοι ἕτεραι τοὺς λογα-
 ρίθμους εὐρίσκειν εὐχερέστεραι, ὑπὸ τῶν τοὺς Πίνακας
 καταγραφάμενων ἀγνωστούμεναι.) Ζητητέος οὖν, ὥς
 τὸ ῥηθὲν παραδειγματίσωμεν, ὁ τοῦ 9 λογάρος καὶ ὁ-
 πως οἱ ἀναγνώσται τῆς ἐργωδούς πράξεις, ἥπερ οἱ πρῶ-
 τον τούτους εὐρόντες ἐχρήσαντο, μὴ ἀπείροι ὦσι. Κα-
 τὰ τὸ (§. 241.) εἰάν ζητῆται ὁ μέσος γεωμετρικῶς ἀ-
 νάλογος ἀριθμὸς, τῶν οὕτω ἀκρῶν δοθέντων, οἵτινες α
 καὶ β ἐνταῦθα κληθῆτωσαν, προβαίνομεν τόνδε τὸν
 τρόπον. $\alpha : \chi = \chi : \beta$. Ὡς $\chi^2 = \alpha\beta$.
 (§. 238.) καὶ ἀμφοῖν τῆς ρίζης ληφθείσης $\chi =$
 $\sqrt{\alpha\beta}$.

$\sqrt{ab}$. Εἰς εὕρεσιν οὖν τοῦ μέσου γεωμετρικῶς ἀναλόγου ἀριθμοῦ πολλαπλασιαστέοι μετ' ἀλλήλων οἱ δύο δοθέντες ἀκροὶ ὄροι, καὶ ἐκ τοῦ παραγομένου ἑξακτέα

$\eta \sqrt{\quad}$. Τὸν δὲ μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον εὐρίσκομεν, κατὰ τὸ (§. 221.) ἐὰν οἱ ἀκροὶ γ καὶ δ ᾗθῶσι, $\gamma - \chi = \chi - \delta$. διὰ τὸ (§. 218.) ἔστι $\chi + \chi$, ἢ $2\chi = \gamma + \delta$. Καὶ ἀμφοῖν διὰ 2 διαιρεθέντων, εὐρίσκεται τὸ $\chi = \frac{\gamma + \delta}{2}$. Ὡς προ-

σφετέοι α'. οἱ δύο ἀκροὶ, καὶ εἴτα τὸ κεφάλαιον διαιρετέον διὰ 2. Οὕτως οὖν προκύπτει ὁ, τε μέσος γεωμετρικῶς ἀνάλογος, καὶ ὁ τούτου λογάριθμος. Προ-

κειμένων τοίνυν δύο δυνάμεων τοῦ 10, π. $\chi \cdot 10$,

καὶ $10^{\nu+1}$, ὧν μεταξὺ ὁ μέσος ἀνάλογος ζητεῖται,

οὕτω χωρητέον. $10 : \chi = \chi : 10^{\nu+1}$. Ἐνθεν

τοῦ $10^{\nu+1} \cdot 10 = \chi^2$. Ἀλλὰ $10^{\nu+1} \cdot 10 = 10^{2\nu+1}$

$= 10^2$. Ὡς $10^2 = 10^{2\nu+1}$. Ἀρα $10^2 = \chi^2$.

καὶ τῆς ρίζης ἀμφοῖν ἑξαχθείσης $2\sqrt{10}$.

$= \chi$. Ἐστὶ δὲ $2\sqrt{10} = 10^{\frac{2\nu+1}{2}}$.

Ἀρα $10^{\frac{2\nu+1}{2}} = \chi$. Ἐκ τούτων ἔπεται, ὅτι

ὁ λογάριθμος τοῦ καινοῦ μέσου ἀριθμοῦ οἱ λογάριθμοι τῶν δύο προτέρων τυγχάνουσιν ἀλλήλους προσε-

φαιμένοι, καὶ διὰ 2 διηρημένοι. Ὁ δὲ μέσος καινὸς ἀριθ-

μὸς οἱ δύο πρότεροι πολλαπλασιασθέντες, καὶ τῆς ρί-

ζης τούτων ἑξαχθείσης, ὁ καὶ ἀνωτ. ἔφημεν.

§. 317. Πειρασώμεθα ἤδη τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ 9 μέχρις ἑπτὰ δεκαδικῶν ζητῆσαι. Διὸ καὶ τοῖς δεδομένοις ἀριθμοῖς τῆς Γεωμετρικῆς, καὶ Ἀριθμητικῆς Προόδου 7 μηδενικά προσαφθήτω, ὡς 7 μέντοι δεκαδικὰ κλάσματα, ἅτινα ὡς μηδενικά οὐδὲν σημαίνει, καὶ τοὺς ἀριθμοὺς ἤκιστα μεταβάλλει. Οἱ δὲ δύο δοθέντες ἀριθμοὶ τῆς Γεωμετρικῆς προόδου, ὧν μεταξὺ 9 ἐπίπτει, 1 καὶ 10 εἰσὶν. Ὅθεν συνάγομεν $1, 0000000 : \chi = \chi : 10, 0000000$. Ὡς $\chi^2 = 10, 0000000000000000$. Καὶ $\chi = \sqrt{10, 0000000000000000}$. Ἡ δὲ $= 3,1622777$ ἐν ἑπτὰ δεκαδικοῖς. Ὁ δὲ ὁ μέσος ἀνάλογος τυγχάνει. Ὁ δὲ τοῦτου λογάριθμος εὐρίσκεται οὕτως. Ἐπεὶ ὁ τῆς 1 λογάρ. $= 0$, ὁ δὲ τοῦ 10 ἢ 1, ἐν ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ συνάξομεν ὥδε $— 0 — \chi = \chi — 1$. Ἀρα $0 + 1 = 2 \chi$. ἢ $1 = 2 \chi$. Ὡς $\chi = \frac{1}{2}$. Ταύτητοι τῇ 1 προσαφθήτω καὶ 7 μηδενικά, καὶ εἴτα διαιρεθῆτω. Ἐυθεντοὶ $\frac{1,0000000}{2} = 0,50000000$. Εὐρηται τοίνυν ὁ μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς μεταξὺ 1 καὶ 10, καὶ ὁ τοῦτου λογάριθμος. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ 3,1622777... ὁ δὲ τοῦτου λογάριθμος 0,50000000. Ἀλλ' οὗτος οὐκ ἐστὶν ὁ ζητούμενος 9 μετὰ τοῦ ἰδίου λογαρίθμου. Ζητήσθωσαν οὖν αὐθις οἱ μέσοι ἀνάλογοι γεωμετρικῶς τε καὶ ἀριθμητικῶς μεταξὺ τοῦ εὐρεθέντος, καὶ τοῦ 10. Ἀναγκαῖον μέντοι αὐθις τὸν εὐρεθέντα ἀριθμὸν, καὶ 10 μετ' ἑπτὰ προσηρησμένων δεκαδικῶν μηδενικῶν δι' ἀλλήλων παλλαπλασιάζειν, καὶ ἐκ τοῦ παραγομένου τὴν $\sqrt{}$ ἐξάγειν, καὶ οὕτω προσκύψει αὐθις ὁ μέσος γεωμετρικὸς μεταξὺ 3,1622777 καὶ 10. Εἴτα προσθενταὶ οἱ λογάριθμοι τῶν δύο ἀριθμῶν, καὶ τὸ τούτων κεφάλαιον διαιρεῖται διὰ 2, τὸ δὲ πηλίκον ἔσται ὁ λογάριθμος τοῦ καινοῦ μέσου γεωμετρικῶς ἀναλόγου.

π. χ. 3,1622777 . 10,0000000 =

31. 62277700000000. ἡ δὲ ῥίζα τοῦτου μέχρις 7
 δεκαδικῶν = 5,6234132. Ὁ τοῦτου λογάρ. ὁ λο-
 γάρ. ἐστὶ τοῦ προτέρου ἀριθμοῦ, προσεθείς τῷ τοῦ 10
 λογαρίθμῳ, τοῦ κεφαλαίου διὰ 2 διαιρεθέντος, ἦτοι

$$\frac{0,50000000}{2} + 1 = \frac{1,50000000}{2} =$$

0,75000000. Οὗτος δ' αὖτις οὐχ ὁ 9, καὶ ὁ τοῦτου
 λογάρ. Ὡς πάλιν ζήτητον τὸν μέσον ἀνάλογον με-
 ταξὺ 10, καὶ 5, 6234132, καὶ τὸν τοῦτου λο-
 γαρίθμον, καὶ οὕτω χωρῶν εἰς ζήτησιν τοῦ μέσου ἀ-
 ναλόγου μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, καὶ τοῦ λογαρίθμου
 αὐτοῦ, εἰς τὸν ζητούμενον τελευταῖον κατανήσεις,
 ὅς, ἀντὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ἐξαχθείσης τῆς
 ῥίζης, μεθ' ἑαυτὸν ἔχει μόνον τοσαῦτα μηδενικά. Ἐν
 τῷ ἐχομένῳ Πίνακι δείκνυται οὕτως ἡ εὔρεσις τοῦ ἀ-
 ριθμοῦ 9 σὺν τῷ ἰδίῳ λογαρίθμῳ, ἔνθα ὁ μέσος ἀ-
 ριθμὸς ἐκαστοῦ ὀρθογωνίου, ὁ προκύπτων μέσος ἀνάλο-
 γος τυγχάνει, τὰ δὲ γράμματα ἐμφαίνει, μεταξὺ
 τίνων ζητεῖται, καὶ ὅπως μεταξὺ τοῦ εὑρεθέντος μέ-
 σου, καὶ τοῦ ἑτέρου, τοῦ διδομένου, αὖτις ὁ καινὸς
 ζητεῖται. Ἐν τῇ β'. στήλῃ παρὰκείνται οἱ λογάριθμοι
 τῶν εὑρεθέντων ἀριθμῶν.

	Μέσοι γεωμε- τρικῶς ἀνάλο- γοι ἀριθμοί.	Οἱ τούτων λογά- ριθμοί.
α	1,00000000	0,00000000
γ	3,1622777	0,50000000
β	10,00000000	1,00000000
β	10,00000000	1,00000000
δ	5,6234132	0,75000000
γ	3,1622777	0,50000000

Υ

β

Μέσοι γεωμε- τρικῶς ἀνάλο- γοι ἀριθμοί.	Οἱ τούτων λογά- ριθμοί.
---	----------------------------

β	10,0000000	1,000000000
α	7,4989421	0,875000000
δ	5,6234132	0,750000000
β	10,0000000	1,000000000
ζ	8,6596432	0,937500000
ε	7,4989421	0,875000000
β	10,0000000	1,000000000
η	9,3057204	0,968750000
ζ	8,6596432	0,937500000
η	9,3057204	0,968750000
θ	8,9768713	0,953125000
ζ	8,6596432	0,937500000
η	9,3057204	0,968750000
ι	9,1398170	0,960937500
θ	8,9768713	0,953125000
ι	9,1398170	0,960937500
κ	9,0579777	0,957031250
θ	8,9768713	0,953125000
κ	9,0579777	0,957031250
λ	9,0173333	0,955078125
θ	8,9768713	0,953125000
λ	9,0173333	0,955078125
μ	8,9970796	0,954101562
θ	8,9768713	0,953125000
λ	9,0173333	0,955078125
ν	9,0072008	0,954589844
μ	8,9970796	0,954101562

Μέσοι γεωμε- τρικῶς ἀνάλο- γοι ἀριθμοί.		Οἱ τούτων λογά- ριθμοί
ν	9,0072008	0,95458984
ο	9,0021388	0,95434570
μ	8,9970796	0,95410156
ο	9,0021388	0,95434570
π	8,9996088	0,95422363
μ	8,9970796	0,95410156
ο	9,0021388	0,95434570
ϛ	9,0008737	0,95428467
π	8,9996088	0,95422362
ϛ	9,0008737	0,95428467
ρ	9,0002412	0,95425415
π	8,9996088	0,95422363
ρ	9,0002412	0,95425415
σ	8,9999250	0,95421889
π	8,9996088	0,95422363
ρ	9,0002412	0,95425415
τ	9,0000831	0,95424652
σ	8,9999250	0,95423889
τ	9,0000831	0,95424652
υ	9,0000041	0,95424271
σ	8,9999250	0,95423889
υ	9,0000041	0,95424271
χ	8,9999650	0,95424080
σ	8,9999250	0,95423889
υ	9,0000041	0,95424271
ψ	8,9999845	0,95424217
χ	8,9999650	0,95424080

Μέσοι γεωμε- τρικῶς ἀνάλο- γοι ἀριθμοί.	Οἱ τούτων λογά- ριθμοί.
υ 9,0000041	0,95424271
ω 8,9999943	0,95424223
ψ 8,9999845	0,95424217
υ 9,0000041	0,95424271
α 8,9999992	0,95424247
ω 8,9999943	0,95424223
υ 9,000 041	0,95424271
β 9,0000016	0,95424259
α 9,9999992	0,95424247
β 9,0000016	0,95424259
γ 9,0000004	0,95424253
α 8,9999992	0,95424247
γ 9,0000004	0,95424253
δ 8,9999998	0,95424250
α 8,9999992	0,94424247
γ 9,0000004	0,95424253
ε 9,0000000	0,95424251
δ 8,9999998	0,95424250

*Ενθα ὁ τελευταῖος μέσος ἀνάλογος, ὁ παρὰ τῷ ε κείμενος, οὕτως ἐγγύς τοῦ 9, ὥς τὸ διάπτωμα μὴδὲ δεκαμυλλιοσημορίῳ ἐξισοῦσθαι. Ὡς δὲ δυνάμεθα τοῦτον ἀντὶ τοῦ 9 λαβεῖν. Ὁ δὲ τούτου λογάριθμος, ὁ παρ' αὐτῷ ἀριθμός. 0,95424251. Προϋχώρησαν δὲ οἱ λογάριθμοι μέχρι τῶν 8 δεκαδικῶν, ἐπεὶ δὲ τελευταῖον οἱ λογάριθμοι ἐν τοῖς πρώτοις ἑπτὰ δεκαδικοῖς ἴσοι ἀλλήλοις γίνεσθαι ἄρχονται.

Οὕτως ἐργῶδει τῷ τρόπῳ ὑπελογίσθησαν οἱ λογάριθμοι πλειόνων ἀριθμῶν, ἀλλ' οὐ πάντων. Ἀναγκαῖον

καγκαῖον γὰρ ἦν μόνον τοὺς λογαρίθμους τῶν ὀλοσχε-
ρῶν εὑρεῖν, τῶν εἰς παράγοντας κατατμηθῆναι μὴ δυ-
ναμένων, καὶ διὰ τοῦτο Πρώτων Ἀριθμῶν κα-
λουμένων. (§. 105.) π. χ. 2, 5, 7, 11, 13, 17, 19, κτ.
Καὶ τούτων γὰρ μέγα τὸ πλήθος μέχρι τῶν 10000
ἀριθμοῦσιν. Οἱ δὲ τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν λογάρ. δια-
φόροις ἂν εὑρεθεῖεν τοῖς τρόποις, τουτ: διὰ Προσθε-
σεως, Ἀφαιρ. καὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν εὑρεθέντων
λογαρίθμων. Ἐπειδὴ γὰρ Δυνάμεις πολλαπλασιά-
ζειν ἐστὶ τοὺς αὐτῶν ἐκθέτας προσθεῖναι, δοθέντων
τῶν λογαρ. διαφορῶν πρώτων ἀριθμῶν, ὃ εἶδέναι βου-
λόμενος, τίς τῶν λογαρίθμων τῷ ἐκ τούτων προσήκει
παραγομένῳ, προσθεῖτω μόνον τοὺς λογαρίθμους. ὅτι
ἐν τούτῳ τῷ λογαριθμικῷ Συστήματι ἅπαντες οἱ ἀριθ-
μοὶ δυνάμεις εἰσὶ τοῦ 10. π. χ. $3 \cdot 5 = 15$.
Προσθεντος τοῦ λογαρ. τοῦ 5 τῷ τοῦ 3 λογαρ. προ-
κύψει ὁ τοῦ 15 λογαριθμός. Κατὰ τοὺς ἐκδεδομέ-
νους Πίνακας

$$\text{λογ. } 5 = 0,6989700$$

$$\text{λογ. } 3 = 0,4771212$$

$$\text{Ὡσε } \text{λογ. } 15 = 1,1760912$$

Καὶ ἐὰν τούτῳ ἔτι καὶ τὸν λογ. ἑτέρου ἀριθμοῦ
προσθεῶμεν, ἔξομεν τὸν λογάρ. τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν αὐ-
τος (ὁ ἑτ. ἀρ.) τῷ 15 πολλαπλασιασθεῖς παράξει.
π. χ. $9 \cdot 15 = 135$.

$$\text{Ὡσε τῷ λογ. τοῦ } 15 = 1,1760912$$

$$\text{προσθεῖς ὁ λογ. τοῦ } 9 = 0,9542425$$

$$\text{δίδωσι τὸν λογ. τοῦ } 135 = 2,1303337$$

Ἀλλὰ καὶ δι' Ἀφαιρέσεως εὑρεῖν αὐτοὺς ἔχομεν,
δεδομένων τινῶν. Ὁμοειδεῖς γὰρ Δυνάμεις διαιρεῖν ἐστὶ
τοὺς αὐτῶν ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεῖν ἐκθέτας. (§. 194.)
π. χ.

π. χ. λ. 10 = 1,0000000. Δοθέντος οὖν καὶ τοῦ λογ. 5 = 2,6989700, εἴη ἐν ὁ λογ. $\frac{10}{5}$, ἢ λογ. 2 = τῷ λ. 10 — λ. 5. ἥτοι

$$\lambda. 10 = 1,0000000$$

$$\lambda. 5 = 0,6989700 \quad \text{ἀφαιρ.}$$

$$\lambda. 2 = 0,3010300$$

Ὡσαύτως καὶ διὰ Πολλαπλασιασμοῦ. Δυνάμεις γὰρ εἰς καινὰς αἵρειν δυνάμεις ἐς πολλαπλασιάζειν αὐτὰς τῷ ἀριθμῷ τῷ ἐμφαίνοντι, εἰς ἡλικίην δύναμιν αὐτὰς ἐξαρθῆναι δεόσι. Τούτου δὲ γεγονότος μόνον διὰ τῶν λογαρίσμων, ἔχομεν τὸν λογάριθμον τῆς Δυνάμεως. π. χ.

$$9 \cdot 9 = 9^2 = 81. \quad \text{Ἐστὶ δὲ}$$

$$\delta \lambda. 9 = 0,9542425$$

πολλαπλ. μετὰ

2

$$\text{δίδωσι } \lambda. 81 = 1,9084850.$$

Οὕτω καὶ ὁ λογάρ. τοῦ 9 πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν 3, δώσει τὸν λογάρ. τοῦ $9^3 = 729$. Ὅς ἔσται

$$\lambda. 9 = 0,9542425$$

3

$$= 2,8627275 = \lambda. 729.$$

§. 318. Οἱ λογάριθμοι τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ μετὰ τοῦ 10, ἢ μετὰ δυνάμεων τοῦ 10 πολλαπλασιασθέντος, μένουσιν οἱ αὐτοὶ τοῖς, οἱ τῷ ἀριθμῷ ἐνυπῆρχον, εἰ μὴ ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν μεταβάλλεται, καὶ μονάδι, ἢ τοσαύταις μονάσι προσαύξει, ὅσας ὁ ἐκθέτης τῶν τοῦ 10 δυνάμεων, μεθ' ὧν ἐπολλαπλασιασθῇ, μονάδας περιέχει. ὅπερ οὐ δυσκατανόη-

τον

του τῷ διανοομένῳ τὸν πολλαπλασιασμόν ἐπὶ λογαριθμικῶν ὑπολογισμῶν εἰς πρόσθεσιν μεταβάλλεσθαι, καὶ τὰς τοῦ 10 δυνάμεις μόνον 1, 2, 3, 4, 5, κτ. ἦτοι μόνον ὁλοσχερῇ ἀριθμὸν ἀνεῦ παρηρημένου κλάσματος λογάριθμον, ἔχειν. Οὕτω π. χ. λ. 20 = λ. 2 + λ. 10 = 0,3010300 + 1 = 1,3010300. "Οτι 20 = 2 · 10. Καὶ λ. 200 = λ. 2 + 100 = 0,3010300 + 2 = 2,3010300. "Οτι 200 = 2 · 100, κτ. Παραπλησίως λ. 810 = λ. 81 + λ. 10 = 1,9084850 + 1 = 2,9084850. "Οτι 810 = 81 · 10, κτ.

Ἐπομένως καὶ ἐκάστη ποσότης, ἥ διὰ τῶν δυνάμεων τοῦ 10 διαιρουμένη, τὸν αὐτὸν τηρεῖ λογάριθμον, πλὴν ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτῆς τοσαύταις μονάσι μειοῦται, ὅσαις ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ 10 μεμεῖνται, ὡς λ. 2700 = 3,4313638. Ὡς λ. 270 = λ. 2700 — λ. 10 = 3,431,638 — 1 = 2,4313638. καὶ λ. 27 = λ. 2700 — λ. 100 = 3,4313638 — 2 = 1,4313638. καὶ λ. 2,7 = λ. 27 — λ. 10 = 1,4313638 — 1 = 0,4313638, κτ.

§. 319. Ἐκ τούτων αὖν πᾶς τις ἐπιγνοίῃ ὅτι ἐπὶ λογαριθμικῶν ὑπολογισμῶν πᾶς Πολλαπλασιασμὸς μεταβάλλεται εἰς Πρόσθεσιν, ἢ Διαίρεσιν εἰς Ἀφαιρέσιν, ἢ εἰς Δυνάμεις ἔξαρσις εἰς Πολλαπλασιασμόν. (§. 317.) παραπλησίως καὶ ἡ τῶν Ῥιζῶν Ἐξαγωγή εἰς Διαίρεσιν τῶν Λογαρίθμων. ἥπου γὰρ οἶδαμεν, Δυνάμεις διὰ Ῥιζικῶν διαιρεῖν Ἐκθετῶν τὴν ῤίζαν ἐστὶν ἔξάγειν. π. χ. ὁ τοῦ 49 λογ. = 1,690 961.

Ἄρα ὁ λογ. $\sqrt[2]{49} = \lambda. 49^{\frac{1}{2}} = \lambda. \frac{49}{2}$. ἢ

1,690-

$$\underline{1,6901961} = 0,8450980. \text{ Καὶ αὐτός ἐστιν ὁ λογ.}$$

2

✓ 49. Οὗ ἐν τοῖς Πίναξι ζητηθέντος, περὶ ὧν μετα-
ταῦτα ἔσαι λόγος, εὐρήσομεν τὸν ταύτῃ προσήκου-
τα ἀριθμὸν εἶναι τὸν $7 = \sqrt{49}$. Ὡσαύτως

$$\lambda. \sqrt[4]{256} = \lambda. \frac{256}{4} = \frac{2,4082400}{4} =$$

$$0,6020600 = \lambda. 4. \text{ ὅς } (4) = \sqrt[4]{256}.$$

§. 320. Πρὶν ἢ περὶ τῶν διαφόρων ὑπολογι-
σμῶν διὰ τῶν λογαριθμῶν εἰπεῖν τὰ κατὰ σκοπὸν τῆς
τῆς βιβλίου, δεκτέα πρῶτον ἡ τάξις, καὶ χρῆσις
τῶν ἐν χρήσει λογαριθμικῶν Πινάκων. Ἐνρίκος Βριγ-
γιος ὑπελογίσευσεν τῷ εἰρημένῳ τρόπῳ τοὺς λογαριθ-
μοὺς τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 20000, καὶ ἀπὸ
90000 μέχρι τῶν 100000. Ὁλλανδὸς δέ τις, Ἀ-
δριανὸς Φλάκκος μετὰ τοῦτον, ἐξηριθμήσατο τοὺς τῶν
ἀριθμῶν λογαριθμοὺς ἀπὸ τῶν 20000, μέχρι τῶν
90000, ἐκδόους αὐτοὺς, ἐν 1628, ὥς προκύψαι τοὺς
λογαριθμοὺς τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 100000.
Μετὰ ταῦτα καὶ ἑτέρατις Ἰσάνη Ἐκδόσις, περιέχουσα
καὶ τοὺς Βριγγιανούς, καὶ Φλακκιανούς λογαριθμοὺς
ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 101000, ἐν 1742. Εἰσὶ μὲντοι
καὶ ἑτεραι ἐκδόσεις, ὧν αἱ μᾶλλον εὐπόροιαι αἱ ἀπὸ
1 μέχρι τῶν 10000 χωροῦσαι, αὐτῷ τῆς τάξεως ἔχου-
σαι. Ἐν ἀρχῇ πρόκεινται οἱ πίνακες τῶν Ἡμιτό-
νων, Ἀπτομένων, καὶ Τερμνουσῶν μετὰ τῶν
οἰκείων Λογαριθμῶν, περὶ ὧν ἐν τῇ Τριγωνομετρίᾳ.
Τούτοις δ' ἐπὶ οἱ τῶν λογαριθμῶν πίνακες ἀπὸ 1
μέχρι τῶν 10000, ὧν ἐπὶ μὲν τῆς ἑτέρας σελῆς οἱ
χαρακτῆρες, ἐπὶ δὲ τῆς ἀντισηχούσης οἱ ταύτων λογά-
ριθμοι μετὰ τοῦ οἰκείου παράκεινται. Χαρακτῆρες
σικοῦ, (§. 315.) εἰς ἑπτὰ δεκαδικὰ προαγόμενα
κλάσματα. Τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν ἀπὸ μὲν 1 μέχρι

των $9 = 0$. ἀπὸ δὲ τοῦ 10 μέχρι τοῦ $99 = 1$,
 ἀπὸ δὲ τοῦ 100 μέχρι τοῦ $999 = 2$, καὶ οὕτως ἐ-
 ξεῖς. Ἐν γένει γάρ, τῆς τοῦ 10 δυνάμεως 1 αὐ-
 ξομένης, μονάδι κἀκείνη (τὸ χαρ.) προσαύξεται.
 Δῆλον δ' ἐκ τούτου, ὅτι τὸν ἀριθμὸν εἰδότες, (ὡς τὸ
 χαρ. προσήκει) ἅμα καὶ ὅσαι μονάδες τῷ τούτου χα-
 ρακτηριστικῷ ἔννεσι γινώσκωμεν. Γινώσκον γάρ, μεταξὺ
 τῶν ὁλοσχερῶν δυνάμεων τοῦ 10 ὁ ἀριθμὸς ἐμπίπτει,
 καὶ ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν παντὸς ἀριθμοῦ μονάδι ἐ-
 λαττοῦται τῆς πληθύος τῶν χαρακτήρων, οὓς ὁ ἀριθ-
 μὸς τοῦ λογαρίθμου περιέληφε. π. γ. ἅπαντες οἱ με-
 ταξὺ 100 καὶ 1000 ἀριθμοὶ ἐκ τριῶν σύγκεινται χα-
 ρακτήρων, ὧν τὸ χαρακτηριστικὸν μονάδι ἔλαττον,
 τοῦτ' $= 2$. Τὰ δὲ τῶν μεταξὺ 1000 καὶ 10000
 ἀριθμῶν, τῶν ἐκ δ' χαρακτήρων συγκατασκευάστων $=$
 3 , κτ. Δυνατὸν οὖν τὸ χαρακτηριστικὸν παραλείπειν,
 ὥς ἐν τοῖς μείζουσιν ἐγένετο πῖναξι. Τὸν λογάριθμον
 τῶν ἀριθμῶν τινος βουλόμενος εὐρεῖν, ζήτησον ἐν τοῖς
 πῖναξι τὸν ἀριθμὸν, καὶ ὅψαι καὶ τὸν ἴδιον λογάριθ-
 μον αὐτῷ ἀντιστοιχοῦντα. Τοῦ λογαρίθμου δὲ δοθέν-
 τος, ζήτησον αὐτὸν αὐτότε, ὃν αὐτίκα εὐρήσεις, τὸ
 χαρακτηριστικὸν εἰδώς, καὶ παρ' αὐτῷ ἐν τῇ ἐγγύς στή-
 λῃ κεῖται ὁ ἀριθμὸς, ὁ τούτῳ προσανήκων. Ἐὰν δὲ δο-
 ῇ λογάριθμος ἐν τοῖς πῖναξιν ἐπ' ἀκριβείας μὴ περιεχο-
 μένος, ἀλλὰ μόνον 4 τυχάν, ἢ 5 τῶν πρώτων χαρα-
 κτήρων αὐτοῦ τῷ ἐν τοῖς πῖναξι λογαρίθμῳ συναδω-
 σιν, ὁ ἀριθμὸς (ὡς ὁ λογ. ἀνήκει) μείζων, ἢ ἐλάτ-
 των δεκαδικαῖς τισι κλάσμασι τυγχάνει τοῦ ἐν τῷ πῖ-
 ναξι ἀριθμοῦ. Ὅσῳ οὖν μᾶλλον οἱ ἀριθμοὶ τῶν λο-
 γαρίθμων ἀλλήλοις συναδουσι, τοσοῦτ' ἱελάττων ἢ
 διαφορά τῶν ἀριθμῶν, οἷς ἐκείνοι (οἱ λογ.) ἀνήκου-
 σιν, ἢς ἐν αὐκ ὀλίγοις ὑπολογισμοῖς παραμελεῖν εἴω-
 ρασιν.

§. 321. Ἐπεὶ δὲ ἡμῖν ἐνταῦθα ὁ λόγος ἔξαι-
 ρέτως

ρέτως περὶ τῶν ἐλασσόνων λογαριθμικῶν πινάκων, τοῦ-
τοις μάλισα καὶ χρησόμεθα, τούτοις ἀρμόζοντα πα-
ραδείγματα μεταχειριζόμενοι. (εἰ καὶ τὸ ἐνταῦθα λε-
γόμενον καὶ τοῖς μείζουσι προσανήκει) Καὶ ὅπως μὲν
ὁ λογάριθμος τοῦ ὁλοσχεροῦς, ἀριθμοῦ, ὁ τοῖς πίνα-
ξιν ἐνυπάρχων, εὑρίσκεται, εἴρηται ἤδη. (§. ἀνωτ.)
"Ὅτι δὲ καὶ δύο, ἢ πλειόνων ἀριθμῶν δι' ἀλλήλων
πολλαπλασιασθῆναι προκειμένων, διὰ τῆς προσθέσεως
τῶν κατὰ τούτους λογαρίθμων, ὡς κεφάλαιον λογά-
ριθμος προκύψει, τῷ παραγομένῳ ἐκ τούτων ἀντι-
στοιχῶν, προηγουμένως δῆλον. Ἀλλὰ θεωρηθῆτω ἀ-
κριβέστερον. π. χ. $136 \cdot 24 \cdot 2$ λογαριθμικῶς =
 $\lambda. 136 + \lambda. 24 + \lambda. 2$.

"Ενθεντοι	$\lambda. 136$	=	$2,1335389$	
	$\lambda. 24$	=	$1,3802112$	
	$\lambda. 2$	=	$0,3010300$	προς.

$$\text{ἄρα } \lambda. 136 \cdot 24 \cdot 2 = 3,8147801$$

"Ὅς τῷ ἀριθμῷ 6528 ἀντιστοιχεῖ $= 136 \cdot 24 \cdot 2$
ὄντι. Τὰ αὐτὰ τελεῖται καὶ ἐπὶ τῆς Διαιρέσεως,
παρ' ὅσον ἐν ταύτῃ οἱ λογάριθμοι ἀφαιροῦνται
ἀπ' ἀλλήλων, τῆς τούτων διαφορᾶς ἐν τοῖς πίναξι
τῷ πληνῶ ἀντιστοιχοῦσης. Οἶον, 8815 διαιρεθεὶς
διὰ 1763 ἔσται λογαριθμικῶς. $\lambda. 8815 -$
 $\lambda. 1763$.

ἦτοι	$\lambda. 8815$	=	$3,9452223$	
	$\lambda. 1763$	=	$1,2462523$	ἀφαιρ.

$$\text{ἄρα } \lambda. 8815 - \lambda. 1763 = 0,6999700$$

"Ὅν τῷ ἀριθμῷ 5 ἀντιστοιχοῦντα εὐρήσο-
μεν $= \frac{8815}{1763}$.

Εἰ

ἐναντίως ἔχούσας ποσότητες πολλαπλασιά-
 ν δέσσι, ὁπότερον τῶν σημείων (§. 77. καν.)
 μένω, ἢ τῷ πηλίκῳ ἀρμόζει, ἐπισάμενοι,
 μεθὰ τοὺς λογαριθμούς, ὡς περὶ αἱ ποσό-
 φαι καὶ εἶεν, καὶ τὸν ἀριθμὸν ζητήσαντες
 ἐντος λογαριθμοῦ τὸ προσήκον σημεῖον τῷ
 αριθμῷ ἀποδώσομεν.

δυνάμεις δ' ἐξαίρονται λογαριθμικῶς αἱ ποσό-
 αἱ ῥίζαι λογαριθμικῶς ἐξάγονται, κατὰ τὰ
 §. κτ. Ἀλλ' ἐπὶ τούτου σημειώτερον ἔτι τι
 ἢ ῥίζα τῆς ποσότητος μὴ ὁλοσχερῆς ἢ, οὐ-
 θέντι λογαριθμῷ ἀριθμὸς ὁλοσχερῆς ἀντιστοι-
 χεῖς οὖν τις τῶν λογαριθμῶν τῶν ὁλοσχε-
 ρῶν, τῶν τῷ εὐρεθέντι ὡς ἔγγιστα γινομένων,
 (ὁ ληφθεὶς λογ.) νῦν μὲν μεγίστη δια-
 βραχὺς, νῦν δὲ πάνυ μέγας. Ἀριστα τοί-
 ζητῶν τινὰ τῶν λογαριθμῶν τῶν μειζόνων
 τῶν ἐν τοῖς πίναξι, τὸν ἐκείνῳ ἴσον, (τῷ
 ὡς λογ.) Τούτου δὲ μὴ εὐρισκομένου, ἔτε-
 ρον ἐγγύτατον, μηδένα λόγον τοῦ χαρακτη-
 ριζομένου. Καὶ τούτου κειμένου, διάσειλον
 πίναξιν ἀριθμοῦ (ὅς τῷ ἤδη εὐρεθέντι λο-
 γάρ.) τοσοῦτους χαρακτηῖρας δεξιόθεν ἀρ-
 χὴς δεκαδικὰ ποιῶν αὐτοὺς κλάσματα, ὅ-
 τι τὸ χαρακτηριζικόν τοῦ ἐν ἀρχῇ λογαριθμοῦ
 αἰ, καὶ οὕτως ἔσαι ἡ ῥίζα ἀκριβεστέρα. π. χ.
 λογαριθμικῶς = λ. 1648 = 3,2169572

23190. Οὗτος ὁ λογάριθμος ζητηθεὶς οὐχ
 ἀκριβῶς παρὰ τοῖς ὁλοσχερεῶσιν ἀριθμοῖς,
 ὁ χαρακτηριζικόν. Ὁ ἐγγύτατος εἴη ἂν
 λογάρ. ὅς 1,0791812 τυγχάνει. Ἀλλὰ ἵσ-
 τας. ὅτι ὁ γ'. χαρακτηῖρ τοῦ κατ' αὐτὸν λο-
 γαριθμοῦ, ἢ ὁ γ'. τοῦ εὐρεθέντος. Ζητησάτω
 οὐδ'

οὖν ἐν τοῖς μείζουσιν ἀριθμοῖς, τοῦ χαρακτηριστικοῦ πα-
 παραμελοῦσιν. ὁ τοῦ 1181 λογάρ. (πλὴν τοῦ χαρα-
 κτηριστικοῦ) = 0722499. ὁ δὲ τοῦ 1182 =
 0724175. Ὁ β'. τούτων (τῶν λογ.) ἐστὶ μείζων,
 (τοῦ εὐρεθέντος) ὁ δὲ α'. ἐλάσσων. Ἀλλὰ ληφθήτω
 ὁ α'. Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ καταρχᾶς λογ. ἦν ἡ
 1, τὸ δὲ τοῦ ἡδὴ ληφθέντος 3. Ὡστε ἡ τούτων δια-
 φορὰ 2. Ἀναγκαῖον ἄρα δύο χαρακτηρησας τοῦ ἀ-
 ριθμοῦ διατεῖλαι, τοῦ τῷ ληφθέντι λογαριθμῷ ἀνῆ-
 κοντος, δεκαδικὰ αὐτοὺς ποιοῦντας, καὶ ἀντὶ 1181
 γράψαι 11,81. Εἶδ' ὁ β'. παρελληπτο λογαριθμὸς,
 ἐγράψαμεν αὖν 11,82. Τὸ τοίνυν διάπτωμα κεῖται
 μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν, οὐδὲ $\frac{1}{100}$ ἐξισούμενον. του-
 τὶ ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 1648 ἐλάσσων τοῦ 11,82, καὶ μεί-
 ζων τοῦ 11,81 τυγχάνει. Ὁ δὲ τοὺς μείζους τῶν
 πινάκων κεκτημένος εὐρήσει ταύτην ἐτι ἀκριβεσέρον.

Ζητούμενων δὲ τῶν λογαριθμῶν τῶν γνησίων
 κλασμάτων, λαβὼν τὸν λογάρ. τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ
 παρονομαστοῦ ἐκ τῶν πινάκων, (ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ κλάσμα-
 τος μὴ μείζους ὦσι τῶν ἐν τοῖς πινάξιν ἀριθμῶν, πε-
 ρὶ οὗ κατωτέρω) ἄφες τὸν τοῦ παρον. λογάρ. ἀπὸ
 τοῦ λογ. τοῦ ἀριθμητοῦ. Ἐπεὶ δὲ ὁ παρονομ. τοῦ
 γνησίου κλάσματος μείζων αἰ τοῦ ἀριθμητοῦ, ἐξ ἀ-
 νάγκης καὶ ἡ τῶν λογαρ. διαφορὰ ἔσται ἀποφατικὴ.
 Ἐνθεντοι τὴν ἀφαίρεσιν ἀνάπαλιν ποιησάμενος, θές
 πρὸ τῆς διαφορᾶς, ὅς ὁ εὐρεθεὶς λογαριθμὸς τυγχάνει,
 τὸ —. Ὡστε ἅπαντες οἱ τῶν γνησίων κλασμάτων
 λογάρ. εἴτε τῶν κοινῶν εἰεν τὰ κλάσματα, εἴτε τῶν
 δεκαδικῶν, ἀποφατικοὶ τυγχάνουσι. Τὰ αὐτὰ
 γίνεται καὶ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν τουτ. ὑποτεθέντος
 τούτοις τοῦ προσήκοντος παρονομαστοῦ, οὐ ὁ λογάρ.
 (ὡς τῶν παρον. δυνάμεων τοῦ 10 ὄντων) αἰ ὁλοσχε-
 ρῆς ἀριθμὸς, ἢ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαίρεσις, ὡς ἡδὴ λέ-
 λεκται, τελείσθω. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι τὸ
 χαρα-

χαρακτηριστικὸν τῶν κλασματικῶν λογαρίθμων, τῶν μεταξὺ 1 καὶ 0, 1 παρεμπιπτόντων = 0, τῶν δὲ μεταξὺ 0, 1 καὶ 0, 01 = — 1, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὡς ἡ ἐχομένη πρόοδος ἐμφαίνει.

$$0, 0001 \cdot 0, 001 \cdot 0, 01 \cdot 0, 1$$

Χαρακτηριστικὸν — 4, — 3, — 2, — 1,

$$1, 10, 100, 1000, 10000$$

Χαρακτηριστικὸν 0, 1, 2, 3, 4.

Παραδείγματα.

$$\lambda. \frac{3}{4} = \lambda. 3 - \lambda. 4$$

$$\lambda. 3 = 0,4771212$$

$$\lambda. 4 = 0,6020600$$

$$\text{ἄρα } \lambda. \frac{3}{4} = - 0,1249388$$

$$\text{Ὁ } \lambda. 0,0532 =$$

$$\lambda. \frac{532}{10000} = \lambda. 532 - \lambda. 10000.$$

$$\text{Ὡς } \lambda. 532 = 2,7259116$$

$$\lambda. 10000 = 4,0000000$$

$$- 1,2740884.$$

Καὶ ζητηθέντων τῶν δε τῶν λογαρίθμων ἐν τοῖς τῶν μειζόνων ἀριθμῶν λογαρίθμοις, εὐρίσκεται ὁ τοῦ α'. (λογ.) ἐγγύτατος ἀριθμὸς, ὃν μάλιστα ἐκεῖνος συνάδει, 1333, καὶ τοῦ σημείου — παροραθέντος, εἴη ἂν ὁ ἀριθμὸς (ὅτι ἐπὶ τοῦ προκειμένου λογαρ. τὸ χαρακτηριστικὸν = 0) = 1, 333. Ἐπεὶ δὲ τὸ ἀποφατικὸν πρόκειται σημεῖον, ἔστιν ὁ ἀριθμὸς = $\frac{1}{1,333}$. Ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τοῦ ἐτέρου λογαρίθμου, ὃ σχεδὸν ὁ ἀριθμὸς 1880 ἐν ταῖς μεγίστοις λογαρίθμοις ἀντιπαρα-
εἴη

εἰη ἂν ὁ ἀριθμὸς 18,8 . . Ἐπεὶ δὲ — 1, (τὸ χαρακτηριστ.) ἔστι $\frac{1}{18,8}$. Εἰς δεκαδικὸν δὲ κλάσμα γεγονότων ἀμφοῖν τῶν κλασμάτων, αὐτίκα εὐρήσομεν, ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ α'. τὸ πηλίκον $0,75 = \frac{3}{4}$, ἐπὶ δὲ τοῦ β'. 0,0532 προκύψει. Καὶ γὰρ $\frac{1}{1,33} = \frac{1000}{1333} = 0,750 \dots$ Καὶ $\frac{1}{18,8} = \frac{10}{188} = 0,05319 \dots$ σχεδὸν = 0,0532. Ὁ δὲ λόγος, δι' οὗ οὐκ ἀκριβῶς ἴσον, ὅτι οἱ λογάριθμοι οὐκ ἀκριβῶς ἤρμοζον, περὶ οὗ κατωτέρω.

Τὸ δὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦ τοιούτου λογαρίθμου, οὗ τὸ — πρόκειται, κλάσμα εἶναι, οὗ ἀριθμητῆς ἡ 1, παρονομαστῆς δὲ ὅτιω λογαρίθμῳ ἐν τοῖς πίναξι προτήκων ἀριθμὸς, καὶ μόλα σαφῶς κατανοεῖται τῷ διανοομένῳ τοὺς λογαρίθμους ἐκθέτας εἶναι τῶν δυνάμεων.

καὶ ὅτι (§. 198.) $a^{-1} = \frac{1}{a}$ καὶ $a^{-2} =$

$\frac{1}{a^2}$. ἢ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, ὅπερ τὸ ῥηθὲν διαλευκαί-

νει. Ἐὰν οὖν ζητῶνται οἱ λογάριθμοι τῶν κλασμάτων, τῶν τὴν 1 ἀριθμητὴν ἐχόντων, ληφθήτω μόνον ἐκ τῶν πινάκων ὁ τοῦ παρονομαστοῦ λογάριθμος, καὶ τούτου τὸ — προτεθήτω, καὶ οὗτος ἔσται ὁ λογάρ. τοῦ τοιούτου κλάσματος. Ὡς λ. $\frac{1}{16} = -1, 2041200$. Ἐστὶ γὰρ = λ. 1 — 16. Ἀλλὰ λ. 1 = 0. Ἐστὶν ἄρα = —λ. 16 = —1, 2041200.

§. 322. Ὡς δὲ καὶ τοὺς λογαρ. τῶν νόθων εὐρεῖν κλασμάτων, μεταχειριζόμεθα ταῦτα ὡς ἐνεργεῖα διαιρέσεως παραδείγματα, εἰ τούτων κατὰ τὰ (§. ἀνωτ.) ὁ λογάριθμος ζητεῖται. Οὗτος δ' αἰετοτε καταφατικὸς, ὡς ἐπὶ τῶν τοιούτων κλ. τοῦ ἀριθ-

ἀριθμητοῦ μείζονος ὄντος τοῦ παρονομαστοῦ Ἐνθεν-
τοι καὶ ῥᾶδιον ἔσαι λογαριθμοὺς εὐρεῖν ὁλοσχερῶν, οἷς
καὶ κλάσματα πρόσκεινται· ὅτι ῥαδίως εἰς νόθα με-
ταφέρονται κλάσματα.

Π. χ. λ. $3\frac{2}{3} = \lambda. \frac{2^9}{8} = \lambda. 29 - \lambda. 8$, Ἀλλὰ

$$\lambda. 29 = 1,4623980$$

$$\alpha\varphi\alpha\iota\rho. \lambda. 8 = 0,9030900$$

$$\alpha\varrho\alpha \lambda. \frac{2^9}{8} = \lambda. 3\frac{2}{3} = 0,5593080$$

Ζητηθέντος οὖν τούτου ἐν τοῖς πίναξιν τρόπῳ τῷ
ῥηθέντι, εὐρήσομεν τούτῳ παρακείμενον τὸν ἀριθμὸν,
3, 625, ὅπερ ἔσαι καὶ $\frac{2^9}{8}$, ἢ $3\frac{2}{3}$, εἰς δεκαδικὸν με-
ταποιηθὲν κλάσμα. Ἐὰν δέ τι ἀριθμῷ καὶ δεκαδικῷ
πρόσκεινται κλάσματα, μεταβάλλεται πᾶσα ἡ πο-
σότης εἰς νόθον κλάσμα, ὅπερ γίνεται διὰ τοῦ πολλα-
πλασιασμοῦ μετὰ δυνάμεων τοῦ 10, παρονομαστὴν λαμ-
βάνον τοιοῦτον, οἷα ἡ, δι' ἧς ἐπολλαπλασιάσθῃ, τοῦ
10 δύναμις. Τὰ λοιπὰ δὲ γίνεται τὸν αὐτὸν τρόπον,
ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ τῆς διαιρέσεως παραδείγματος, οὗ ὁ
λογάρ. ζητεῖται. Καὶ οὗτος ἔσαι ὡσαύτως κατὰ
Φατικὸς. Ἐνταῦθα λόγος ἐστὶν ἐπὶ ποσοτήτων,
ὧν οἱ ἀριθμοὶ τοῖς πίναξιν ἐνεῖσι π. χ. λ. 2, 545
 $= \lambda. 2, \frac{2^{545}}{1000} = \lambda. \frac{2^{545}}{1000} = \lambda. 2545 - \lambda.$
1000.

$$\lambda. 2545 = 3,4056878$$

$$\lambda. 1000 = 3,0000000 \quad \alpha\varphi\alpha\iota\rho.$$

$$0,4056878 = \lambda. \frac{2^{545}}{1000}$$

$= \lambda. 2,545$, ᾧ ἀκριβῶς ὁ ἀριθμὸς 2, 545
ἀντιστοιχεῖ.

§. 323. Μετὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς εὐρέσεως
τῶν λογαριθμικῶν ἐκᾶστου εἶδους κλασματικῶν, ῥᾶδιον ἔσαι
μετὰ

μετά κλασμάτων, ἢ μετὰ κλασμάτων, καὶ ὁλοκλη-
ρῶν, καὶ ὅλως, ἅπαν εἶδος ὑπολογισμῶν λογαριθμικῶς
ὑπολογίζεσθαι· ὡς πολλαπλασιάζειν, διαιρεῖν, εἰς
ἐξάμεις ἐξάγειν, ῥίζας ἐξάγειν, κτ.

Παραδείγμ. $\frac{3}{4} \cdot 8$ εἴη ἂν $\lambda. \frac{3}{4} + \lambda. 8$.

$$\lambda. \frac{3}{4} = - 0,1249388 \quad (\S. 321.)$$

$$\lambda. 8 = + 0,9030900$$

$$= + 0,7781512 = \lambda. \frac{3}{4} \cdot 8.$$

Ἦ, τινι λογαριθμῷ ὁ ἀριθμὸς 6 προσήκει, καὶ
 $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$.

Ἦσαύτως $(\frac{3}{4})^2 = 2$. $\lambda. \frac{3}{4} = - 0,1249388$

$$- 0,2498776$$

Ὅς (λογ.) ἀντιστοιχεῖ σχεδὸν τῷ ἀριθμῷ
 $\frac{1}{1,778}$ καὶ $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$ σχεδὸν $= \frac{1}{1,78}$, ἢ $\frac{1}{1,78}$.
Ὅτι $\frac{9}{16}$, καὶ $\frac{1000}{1778}$ παρέχουσι σχεδὸν τὰ αὐτὰ πηλί-
κα, ἀμφοῖν εἰς δεκαδικὰ γεγοιότων κλάσματα, ἦτοι
0, 5625. Εἰ δὲ τὴν $\sqrt{\frac{3}{4}}$ λογαριθμικῶς ζητεῖν
ῥέοι, εἴη ἂν $\lambda. \frac{3}{4} : 2 = - 0,1249388 = -$

$0,0624694$, ᾧ τινι ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{1,733}$ ὅτι ἔγγιστα
προσήκει· Τὸ τοῦτον $\frac{1}{1,733}$ ἢ $\sqrt{\frac{3}{4}}$ τυγχάνει, Ἐξί
γὰρ $\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3} = \frac{1,7320}{2} = 0,8660 \dots$

Ἦσαύτως καὶ $\frac{1}{1,733} = \frac{1000}{1153} = 0,8640 \dots$ ὅπερ
κατὰ τι ἔλαττον τοῦ 0, 8660, ὡς τοῦ λογαριθμοῦ
ἀκριβῶς τοῖς πίναξι μὴ ἐμπεριεχομένου, . περὶ οὗ
κατωτέρω.

§. 324. Κατὰ τῶν Ἀναλογιῶν τοὺς λογαριθ-
μους

μους ἐν χρήσει παραλαμβάνεσθαι, καὶ πᾶν συνε-
χῶς, πᾶς τις συναρᾶ. Ὁ οὖν πολλαπλασιάζειν, καὶ
διαθεῖν διὰ λογαριθμῶν εἰδῶς, οὐδεμίαν ἔξει ἐν τού-
τῳ δυσχέρειαν, μεμνημένος, ὅτι ἐπὶ τῶν λογαριθμι-
κῶν ὑπολογισμῶν ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς πρόσθεσιν,
καὶ ἡ διαίρεσις εἰς ἀφαίρεσιν μεταβάλλεται, καὶ τῶν
κανόνων, τῶν περὶ τῶν ἀντιθέτων ποσοτήτων. π. χ.
100 λίτρας ὠνήσατό τις τὸ, ὅ, τι ἄντις καὶ ὑπόθε-
σιν εἴποι, 76 δραχμῶν. πόσου ὠνήσεται 7350 λί-
τρας; Ὑπολογισθῇτω λογαριθμικῶς, καίτοι τοῦτο εὐ-
χερέστερον ἂν ἐπιλυθεῖν τῷ συνήθει τρόπῳ. ἦται
 $100 : 7350 = 76 : \chi$. Καὶ ἐπειδὴ $\chi =$
 $7350 \cdot 76$, ἔσαι λογαριθμικῶς, λ. 7350 +

100

λ. 76 — λ. 100.

$$\lambda. 7350 = 3.8662873$$

$$\lambda. 76 = 1.8808136$$

προσθ.

$$5.7471009$$

$$\lambda. 100 = 2.0000000$$

ἀφαιρ.

$$3.7471009$$

Ὅς ἐν πίναξί τῷ 5586 προσεπαυήκει. Το-
σούτων ἄρα δραχμῶν ὠνηθήσονται 7350 λίτραι.

Ἔτερον παράδ. Ἐξωσαν δύο κύβοι, ὁ μὲν σι-
δηροῦς, ὁ δὲ μολιβδόυς, ὧν τὰ βάρη λόγον ἔχουσι
πρὸς ἀλλήλα, ὥν $176 : 256$. Τεθῇτω καὶ ἑτέρα
τις σιδηρὰ σφαῖρα, 1 λίτραν ἔλκουσα. Ζητεῖται, πό-
ση ἔσαι ἡ ὅλη σφαῖρας μολιβδίνης, τὸν αὐτὸν ἔχουσα
ὄγκον, καὶ σχῆμα; Φημί δὴ.

$$176 : 256 = 1 \text{ λίτρα} : \chi \text{ λίτ.}$$

Z

καὶ

$$\begin{array}{rcl}
 \text{καὶ } \chi & = & \frac{256}{178} \cdot \text{λογαριθμ. λ. } 256 - \text{λ. } 176. \\
 & & \text{λ. } 256 = 2,4082400 \\
 & & \text{λ. } 176 = 2,2455127 \\
 & & \hline
 & & 0,1627273 \quad \text{ἀφαιρεθ.}
 \end{array}$$

Οὗτος ὁ λογάριθμος ἐν τοῖς μείζουσιν ἀριθμοῖς ζητηθεὶς τῶν πινάκων, τῶν προσηκόντων τῷ χαρακτηρικῷ καλῶς παρατηρηθέντων, δώσει ἀριθμὸν μεταξὺ 1,454 καὶ 1,455 ἐμπίπτοντα. Τὸ διάπτωμα τοίνυν, διὰ τὸ τὸν ἀριθμὸν ἀκριβῶς τοῖς πίναξι μὴ ἐνυπάρχειν, ἔλαττον, ἢ $\frac{1}{1000}$ λίτρας, ὃ περίπου τὸ $\frac{1}{2}$ ἐστὶ μέρος τῆς δραχμῆς. Καὶ οὐ πόρρω τοίνυν τοῦ ἀληθοῦς ὑποθεῖναι δυνάμεθα τὴν μολιβδίνην σφαῖραν ἔλκειν 1,454 λίτρας, ἢ $1 + \frac{454}{1000}$ λίτ. Ἐκ τούτου δῆλος ὁ τρόπος, κατ' ὃν, τριῶν δοθέντων οἰνωσὺν ἀριθμῶν τῆς Γεωμετρικῆς Ἀναλογίας, ὃ δ' αἰ λογαριθμικῶς ἐξευρίσκεται, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν ὄρων εἰς τέταρτον γίνεσθαι. (§. 239.)

§. 325. Ἄλλ' εἶποι αὖ τις, ὅποιοι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀποφατικῶν ποσοτήτων, π. χ. ὁ λ. — 8. ὁ λ. — 1000. ἢ ὁ λ. — 2. κτ; οὐδένα τούτων ὑπάρχειν ἀπαντῶμεν, ἢ τούτων τοὺς λογαρίθμους ἀδυνάτους εἶναι ποσότητας. Οἱ μὲν γὰρ θετικαὶ τοῖς θετικοῖς ἀρμόζουσιν ἀριθμοῖς, τοῖς μείζουσι τῆς 1. Οἱ δ' ἀποφατικοὶ τοῖς κλάσμασι, τοῖς ἐλάττοσι τῆς 1 (§. 321.) μείζουσι μέντοι τοῦ 0. Ἡ δ' ἀποφατικὴ ποσότης οὐδέτερον τούτων. Οἱ δὲ λογάριθμοι ἦτοι καταφατικοί, ἢ ἀποφατικοί. Ἄρα τούτων οὐδεὶς ὑπάρχει λογάριθμος.

§. 326. Καὶ μέχρι τοῦδε μὲν μετὰ λογαρίθμων ἐλογισάμεθα, οὓς καὶ ἐν τοῖς ἐλάττοσι πίναξι, τοῖς ἐν χρήσει οὖσιν, εὕρισκομεν. Ὡρα δὲ καὶ τὰ ἐξῆς ἐπιλύσαι τῶν Προβλημάτων.

1) Δο-

1) Δοθέντος ἀριθμοῦ τινος, ζητήσω ὁ τούτου λογάριθμος, ὁ τοῖς πίναξι μὴ ἐνυπάρχων.

2) Δοθέντος λογαρίθμου τινὸς, ζητηθῇτω ὁ τούτου ἀριθμὸς, ὁ τοῖς πίναξι μὴ ἐνυπάρχων.

Τοῦτ': ἐὰν ποσότητες προκένωνται μείζους τῶν ἐν τοῖς πίναξιν, ὧν οἱ λογάριθμοι εὐρετέοι, ἢ λογάριθμοι, ὧν τὸ χαρακτηριστικὸν μείζον τοῦ ἐν τοῖς πίναξι, καὶ ὧν οἱ ἀριθμοὶ τοῖς τῶν ἐν τοῖς πίναξι λογαρίθμων ἀριθμοῖς οὐ πάντη συνάδουσιν, ἢ ἐὰν ἄμω μὴ παρῇ.

§. 327. Εἰς ἐπίλυσιν τοῦ α'. Προβλήμ. προσκετέον τοῖς ἐξῆς. Ἐρευνήσον πανταχόθεν, εἰ ὁ ἀριθμὸς εἰς παράγοντας ἔχει ἀναλῦσθαι, τοῖς πίναξιν ἐνυπάρχοντας. Εἰ οὖν τοῦτο, προσθεῖς τοὺς λογαρίθμους (τῶν παραγ.) ἔξεις τὸν ζητούμενον λογάριθμον. (§. 317.) Καὶ τοῦτο ἡ μέθοδος ἡ εὐχερὲς αὐτῇ, ἀριζή, καὶ ἀσφαλεσάτη τυγχάνει.

Παράδ. Ζήτησον τὸν λογάριθμον τοῦ 183220, τοῦ ἐν τοῖς πίναξι μὴ εὐρισκομένου, ἔχοντος μέντοι διαφόρως εἰς παράγοντας κατατέμεσθαι π. χ. εἰς 10 . 2 . 9161. ἢ εἰς 20 . 9161.

$$^{\circ}\Omega_{\pi} \quad \lambda. \quad 20 = 1,3010300$$

$$\lambda. \quad 9161 = 3,9619429$$

$$\text{ἀρα } \lambda. 20 + \lambda. 9161 = \lambda. 183220 = 5,2629729$$

Ἄλλο. ὁ λ. τοῦ 1492992 = λ. 36 + λ. 128 + λ. 324, ἅτε τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τούτους τοὺς παράγοντας ἀναλυομένου. ἢ 1492992 = 36 . 128 . 324. Ἐνθεν

$$\lambda. 36 = 1,5563025$$

$$\lambda. 128 = 2,1072100$$

$$\lambda. 324 = 2,5105450$$

$$\delta\lambda. \lambda. 14,2992 = 6,1740575, \text{ κ.}$$

Ἐὰν δ' ὁ ἀριθμὸς εἰς παράγοντας οὐκ ἀμυνοίτο, τοὺς λογαρίθμους διὰ τῶν διαφορῶν λύσομεν. Ἐπὶ γὰρ τῶν μειζόνων ἀριθμῶν αἱ δύο ἀριθμῶν, καὶ αἱ τῶν κατ' αὐτοὺς λογαρίθμων αἱ αὐταὶ, μικρόν τι ἀλλήλων διαφέρουσαι.

$$\pi. \chi. \text{ ὁ λογ. τοῦ } 9991 = 3,9996$$

$$\text{ὁ λογ. τοῦ } 9990 = 3,9995$$

$$\eta \text{ τούτων λογαριθμ. διαφορὰ} =$$

$$\text{Αὔθις } \lambda. 9992 = 3,99965$$

$$\lambda. 9990 = 3,99956$$

$$\eta \text{ τούτων λογαριθμ. διαφορὰ} = 86$$

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ 9990, καὶ 9991 καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ 9990, καὶ 9992 = αὐτὴς ἡ λογαριθμικὴ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ καὶ 9992, καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου, δύο ἀριθμοὶ διαφορῶντων, σχεδὸν ἔτι ἅπαξ τηλικαύτης ἢ λογαριθμ. διαφ. δύο ἀρ. μονάδι διαφορῶντων.

435 . 2 σχεδὸν = 869. Καὶ οἱ λογαριθμοὶ λαττοῦνται μόνον ἐνὶ δεκαμυλλιοσημορίῳ. Κοινοὶ δὲ ἀκριβές ἐν ἑπτὰ δεκαδικοῖς, εἰς ὅσα οἱ λογαριθμοὶ τῶν ἐλασσόνων ὑπελογισθῆσαν πινάκων. ἀλλὰ πλείων τῶν 7 δεκαδικῶν τῶν λογαρίθμων ἐπὶ τῶν πινάκων ἀπαιτοῦνται ὑπολογισμῶν. Δυνατὸν τοῖς διαφορὰς τῶν ἀριθμῶν πρὸς τὰς διαφορὰς τῶν ἀριθμῶν ἐν μείζουσιν ἀριθμοῖς παραβάλλειν, ἀ

σήμευ τοῦ παραπτώματος. Τούτοις ἐρεῖδεται καὶ τὰ ἑξῆς

1) Δοθέντων ἀριθμῶν μειζόνων, οὓς οἱ πίνακες οὐκ ἐμπεριλαμβάνουσι, διατέλλομεν τοσοῦτους τῶν ἀριθμῶν ἀριξερόθεν πρὸς τὰ δεξιὰ, ὥς τοσοῦτους μόνον ὑπολείπεσθαι ἐν τοῖς ἀριξεροῖς, ὅσοι τοῖς πίναξιν ἐνεῖσι, τῶν λοιπῶν ἐν τοσοῦτῳ, ὡς δεκαδικῶν θεωρουμένων. π. χ. δοθέντος τοῦ ἀριθμοῦ 8946352, διάξειλον μέχρι τῶν 6 (ὅτι μέχρι τοῦδε ὁ ἀριθμὸς ἐνυπάρχει τοῖς πίναξι) οὕτως αὐτὸν θεωρῶν 8946, 352.

2) Ζήτησον ἤδη τοὺς λογαριθμοὺς τοῦ διασθέντος, καὶ τοῦ μονάδι τοῦτον ὑπερέχοντος, καὶ ἀφελὲ τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τοῦ μείζονος. π. χ.

$$\lambda. 8947 = 3.9516774$$

$$\lambda. 8946 = 3.9516289$$

$$\begin{array}{l} \text{ἡ διαφορὰ τῶν} \\ \text{β. ἀρ.} = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{καὶ ἡ λογ. διαφορ.} = 485, \\ \text{ἡ ἄμεινον} \\ \text{0, 0000485.} \end{array}$$

Ἀνέκυψεν οὖν ἡ λογαριθμικὴ διαφορὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ μονάδι μείζονος, ἢ ὁ 8946.

3) Ἐπειδὴ οἱ γ' τελευταῖοι χαρακτῆρες τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ὡς δεκαδικὰ τεθεώρηται, οὐκ ἐπὶ εἰσὶν = 1. Ὡς διὰ τὰ ἀνωτ. ἐν ἀρχῇ τοῦ §. ἔχομεν ἂν τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν, καὶ τῶν λογαριθμῶν διὰ Γεωμετρικῆς παραβάλλειν ἀναλογίας εἰς εὔρεσιν δ' ἀριθμοῦ.

4) Συνάγω τοίνυν. ὃν λόγον ἔχει ἡ Διαφορὰ 1 πρὸς τὸ δεκαδικὸν κλάσμα, τὸ τῷ ἀριθμῷ προσκείμενον, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ἡ εὐρεθεῖσα λογαριθμικὴ διαφορὰ

Φορὰ πρὸς τὴν εὐρετέαν, τὴν ἔτι τῷ δε-
καδικῷ προσεπαυήκουσαν κλάσματι. Ὡς
 $1 : 0,352 = 0,0000485 : \chi$ καὶ $\chi =$
 $0,352 \cdot 0,0000485 = 0,0000170720$.

I

5) Τοῦτο προσθέντες τῷ λογαρίθμῳ τοῦ δια-
 σαλέντος αριθμοῦ, τοῦτ'· μόνον τοὺς α'. ἀριθμοὺς τῆς
 εὐρεθείσης διαφορᾶς, δηλονότι τὰ ἴσα δεκαδικὰ τοῖς
 ἴσοις, ἐνταῦθα 170, ἔχομεν τὸν λογάρ. τοῦ ζητουμέ-
 νου ἀριθμοῦ μετὰ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος.

$$\begin{array}{rcl} \text{Ὡς} & \lambda. & 8946 = 3,9516289 \\ & & \text{πρόσθες τούτῳ} \quad 170 \end{array}$$

$$\text{δίδωσι τὸν} \quad \lambda. 8946,352 = 3,9516459$$

6) Ἐπεὶ δὲ οὐ τὸν λογάρ. τούτου τοῦ ἀριθμοῦ
 μετὰ δεκαδικοῦ, ἀλλ' ὅλιν τὸν ἀριθμὸν ἄνευ δεκα-
 δικοῦ ἔχειν βουλόμεθα, προσίθεμεν τῷ χαρακτηρι-
 στικῷ τοῦ εὐρεθέντος λογαρίθμου τοσαύτας ἔτι μοι-
 δας, ἢ 1, ὅσα ἦν τὰ δεκαδικὰ τοῦ ἀριθμοῦ κλά-
 σματα, καὶ οὕτω προκύπτει ὁ λογάρ. τοῦ δοθέντος
 ἀριθμοῦ τοῦ ὁλοσχεροῦς. Ἐνταῦθα τοίνυν τῷ εὐρε-
 θέντι λογαρίθμῳ προσθετέον ἔτι 3. Ὅτι 3 ἦν τὰ
 δεκαδικὰ γεγονότα. Καὶ ἔσαι $\lambda. 8946352 =$
 $6,9516459$. Τοῦτο δὲ τὸ β'. ῥαδίως κατανοῆσαι
 δυνάμεθα. Καὶ γὰρ $8946,352 \cdot 1000 =$
 8946352 . Ἐνθεντοι καὶ λογ. $8946,352 +$
 $\lambda. 1000 = \lambda. 8946352$. Ἀλλὰ λογ. $1000 =$
 $3,0000000$. Ἄρα ἀνάγκη ἦν τοῦτον τῷ τοῦ προ-
 τέρου χαρακτηριστικῷ προσεθῆναι, δι' οὗ πρῶεσιν ὁ λο-
 γάριθμος ἐν τοῖς πρώτοις 7 δεκαδικαῖς τόποις
 ἀκριβής.

§. 328. Ὑποκείσθω καὶ ἕτερον παράδειγμα.
Ζήτησαν τὸν λογάρ. τοῦ 196668.

Ἐυθεντοὶ κατὰ τὸν α'. κανόνα 1966,68.

κατὰ τὸν β'. λ. 1967 = 3,2938044

λ. 1966 = 3,2935835

ἡ λογαρ. διαφ. = 2,09

ἢ μᾶλλον = 0,0002209

κατὰ τὸν δ'. καν. 1:0,68 = 0,0002209:χ

Καὶ χ = 0,68. 0,0002209 = 0,000150212.

κατὰ τὸν ε'. καν. λ. 1966 = 3,2935835

προσεθ. 1502

ἄρα λογάρ. 1966,68 = 3,2937337

κατὰ τὸν ζ'. καν. λ. 196668 = 5,2937337.

Σημειῶσαι, ὅτι ὁ προκείμενος ἀριθμὸς καὶ εἰς παράγοντας ἀν' ἀναλυθεῖη. Τούτου δὲ γεγονότος, καὶ τῶν λογαριθμῶν προσεθέντων, προκύψει ὁ αὐτὸς οὗτος λογάριθμος.

§. 329. Αὐτόματον ἐκ ταύτης ἔπεται τῆς μεθόδου, ὅτι καὶ τοὺς λογαριθμοὺς μειζόνων, καὶ ἐλασσόνων ἀριθμῶν, οἷς πλεῖστα δεκαδικὰ προσήρτηνται, μέχρι τῶν 7 δεκαδικῶν ἀν' εὗροιμεν τόπων, εἰ μόνον αἰέποτε ἐν ἀρχῇ θεωροῖντο, ὡς τέσσαρας ἀριθμοὺς ἔχοντες ὅλοσχερεῖς, καὶ κατὰ τοῦτο ὁ ὑπολογισμὸς κατασκευάζεται. Τοῦ δὲ ὑπολογισμοῦ εἰς πέρας ἀχθέντος, ἔτι ἅπαξ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ θεωρηθέντος, δῆλον ἔσται, πότερον προσθετέαι μονάδες τῷ χαρακτηρικῷ, ἢ τούτου ἀφαιρετέαι. π. χ. λ. 473,8425. πρῶτον θεωρηθῇτω, ὡς 4738,425.

Ἐστ

$$^{\circ}\text{Εξ} \delta\epsilon \quad \lambda. \quad 4739 = 3,6756867$$

$$\lambda. \quad 4738 = 3,6755951$$

$$\text{λογαρ. διαφ.} = 916$$

$$^{\circ}\Omega\varsigma\epsilon \quad 1 : 0,425 = 0,0000916 : \chi. \quad \text{καὶ} \quad \chi = 0,0000916 \cdot 0,425 = 0,0000389300.$$

$$\alpha\acute{\rho}\alpha \quad \lambda. \quad 4738 = 3,6755951$$

$$\text{πρόσθεσ} \quad 389$$

$$3,6756340 =$$

τῷ λ. τοῦ 4738,425. Ἐπεὶ μέντοι ὁ λογ. τοῦ 473,8425 ζητεῖται, ἀφαιρετέα ἢ 1 ἀπὸ τοῦ χαρακτηριστικοῦ. Ὅθεν λ. 473,8425 = 2,6756340.

§. 330. Τὸ β'. Πρόβλημα. (§. 326.) Αὐτίκα δῆλον ἐνταῦθα, ὅτι, τοῦ προβλήματος ἐπιλυθέντος, εὑρεθήσονται οἱ ἀριθμοὶ, εἴτε τοῦ λογαρίθμου οὕτως ἔχοντος, ὥςτε μείζονος μὲν χαρακτηριστικοῦ εἶναι, ἢ τὸ ἐν τοῖς ἐν χρήσει πίναξι, τὰ αὐτὰ δὲ δεκαδικὰ προσκείμενα ἔχειν, εἴτε ἅμα μείζονος χαρακτηριστικοῦ, καὶ διαθόρων δεκαδικῶν τούτων προσόντων. Εἰ οὖν τὸ α'. ἀναγκαῖον μόνον τὸν τούτων ἐν τοῖς πίναξιν εὑρεθέντα ἀριθμὸν μετὰ δυνάμειος τοῦ 10 πολλαπλασιάζειν, ἢ διαιρεῖν, ἡλίκον τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου, τούτ: ἢ περ πλείους, ἢ ἐλάσσους μονάδας ἔχει τοῦ ἐν τοῖς πίναξιν εὑρεθέντος μετὰ τῶν αὐτῶν δεκαδικῶν. π. χ. Ἐξω δεδομένος ὁ λογάρ. 5,7550359. Τὰ δεκαδικὰ τούτου (τοῦ λογ.) ἐνείσιν ἀκριβῶς καὶ τῷ λογ. τοῦ ἀριθμοῦ 5689. Ἀλλὰ τούτου τὸ χαρακτ. = 3. ἐνταῦθα δὲ = 5. τούτ: δύο μονάσι μείζον. Πολλαπλατιάζομεν οὖν μόνον 5689 ἐπὶ 10², ἢ 100, καὶ 568900 ἔσται ὁ ἀριθμὸς τοῦ δοθέντος λογαρίθμου. Ὡσαύτως καὶ ὁ λογάρ. 1,5933968. οὗ τὰ δεκαδικὰ ἴσα τοῖς τοῦ 3921.

21. Ἐπεὶ δὲ τοῦτου τὸ χαρακτ. 3, ἐνταῦθα δὲ 1, αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς (διὰ τὸ τὴν διαφορὰν τῶν δύο χαρακτ. = 2 εἶναι) διὰ 10². Ἔστιν οὖν $\frac{1921}{100} = 19.21$. Εἰ δὲ τὸ τὸ β'. τὸν ἐξῆς χωρήσεις τρόπον.

1) Ζήτησον ὑπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν 3 δυάδα λογαρίθμων, ὧν μεταξὺ τὰ δεκάδικα τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ἐμπίπτουσιν, ὅπερ οὐ χαλεπῶς εὐρήσεις, τὸ τινὰς τῶν τοῦτου πρώτων ἀριθμῶν αἰείποτε τοῖς συνάδειν.

2) Ζήτησον ἤδη μεταξὺ τοῦ ἐγγὺς μείζονος, ἐγγὺς ἐλάσσονος λογαρίθμου τὴν λογαριθμικὴν διαφορὰν. ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τούτοις (τοῖς λογ.) ἀντι-χρύντων ἀριθμῶν = 1, μηδὲν τῷ χαρακτηριστικῷ προσέχοντι.

3) Ἀφελὲ ἀπο τοῦ δοθέντος λογαρίθμου τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα, καὶ ἔξεις αὐτὴν τὴν διαφορὰν, ἀμείνων τοῦ χαρακτηριστικοῦ παρעωραμένου,

4) Ἐπιφέρων οὕτως, ὡς ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων, εἰς ὃν δοθεὶς παρεμπίπτει, πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ δοθέντος, καὶ τοῦ ἐγγὺς καταδεξέου, οὕτως ἢ 1 πρὸς τὸν εὐρετέον ἀριθμόν.

5) Τὸν εὐρεθέντα ἀριθμὸν πρόσθεε, ὡς δεκάδικὸν κλάσμα, τῷ ἀριθμῷ, ᾧ τινι λογάριθμος ἴδιος ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων λογάριθμος προσῆν.

6) Τοῦ οὖν χαρακτηριστικοῦ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, ἴσου τῷ χαρακτηριστικῷ 3 ὄντος, ὑφ' ὃ οἱ παραθέσεως ἐζήτηνται λογάριθμοι, μένει τὸ κατὰ τὸν προηγηθέντα κανόνα προσηρτημένον δεκάδικὸν κλάσμα ἐν τῷ οἰκίῳ σχήματι. Μείζονος δὲ ὄντος, (τοῦ χαρακτ.) ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται μετὰ δυνάμει τοῦ 10, ἐκθέτην ἐχούσης ἀριθμὸν, τοσαύτας μονά-

μονάδας περιέχοντα, ὅσαις τὸ χαρακτήρ. τοῦ δοθέντος λογαρίθμου πλεονέκτει, Ἐλάττονος δὲ, διαιρεῖται (ὁ ἀρ.) διὰ δυνάμεως τοῦ 10, ἥς ὁ ἐκθέτης τοσαύτας περιέχει μονάδας, ὅσαις (τὸ χαρακτ.) ἐλαττοῦται. Καὶ τούτῳ τῷ τρόπῳ προκύπτει ἀριθμὸς μέχρις 6, ἢ 7 χαρακτήρων ἀκριβής, ἀλλ' οὐ μέχρι πλείονων ἐπὶ τῆς χρήσεως τῶν λογαρίθμων τῶν ἐλασσόνων πινάκων, ὃ κατὰδῆλον καὶ ἐκ τῶν προτέρων §. §. καὶ τῆς ὀλικῆς τούτων μεταχειρίσεως.

§. 331. Δοθέντος τοῦ λογαρίθμου 5,4325798, ζήτησον τὸν ἀριθμὸν κατὰ τὸν α'. κανόνα, οὗ μεταξὺ τοῦ λογαρίθμου ὁ δοθεὶς ἐμπίπτει, τοῦ χαρακτ. παραμελῶν

$$\lambda. 2708 = 3,4326487$$

$$\lambda. 2707 = 3,4324882$$

$$\text{διαφορὰ τῶν λογ. διαφορὰ} = 1605$$

$$\text{ὡς ἀριθμῶν} = 1.$$

$$\text{Κατὰ τὸν γ'. καν. ὁ δοθεὶς λογ.} = 5,4325798$$

$$\text{ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων} = 3,4324882$$

$$\text{λογαρ. διαφορὰ} = 916$$

$$\text{Κατὰ τὸν δ'. καν. } 1605 : 916 = 1 : \chi$$

$$\text{καὶ } \chi = \frac{916}{1605} = 0,5707.$$

Κατὰ τὸν ε'. προσαρτηθὲν τῷ 2707 ὡς δεκαδικὸν δίδωσι 2707,5707.

Κατὰ τὸν ζ'. καν. πολλαπλασιασθῆναι χρὴ τοῦτο ἐπὶ $10^2 = 100$, (διὰ τὸ ἐνταῦθα τὸ χαρακτ. 5 εἶναι, δυάδι τοῦ 3 ὑπερέχον, οὗ τὸν ἀριθμὸν ἤδη εὔρομεν) καὶ ἔσαι = 270757,07. ὅς ὁ ἀριθμὸς τοῦ δοθέντος τυγχάνει λογαρίθμου.

*Εἶσω

Ἐξω δεδομένος λογάρος. 1.3456789, οὗ τὰ δεκαδικὰ μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν τῶν ἐξῆς ἐπιπίπτει λογαρίθμων

$$\delta \text{ λογ. τοῦ } 2217 = 3.3457657$$

$$\delta \text{ λογ. τοῦ } 2216 = 3.3455698$$

$$\text{διαφορὰ } 1959$$

$$\delta \text{ δοθεὶς λογάρος. } 1.3456789$$

$$\delta \text{ ἐγγὺς ἐλάσσων ἐν τοῖς } 3.3455698$$

$$\text{πίναξι, τοῦ χαρακτήρος. } \text{διαφορὰ } 1091$$

παραμελουμένου.

$$\text{Σύναξον οὖν. } 1959 : 1091 = 1 : \chi. \text{ καὶ } \chi = \frac{1091}{1959} = 0,556.$$

Ὁ τοίνυν ἀριθμὸς τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, τοῦ χαρακτήρος. = 3 ὄντας, εἴη αὖν 2216,556.

$$\text{Ἐπεὶ δὲ τὸ χαρ.} = 1. \text{ ἔστιν ὁ ἀριθμὸς } = 2216,556 = 22,16556. \text{ Εἰ δὲ τὸ χαρακτ. τοῦ}$$

100

$$\text{δοθέντος λογαρ.} = 0 \text{ ἐτύγχανεν, ἦν αὖν ὁ ἀριθμὸς } 2,216556. \text{ Εἰ δὲ τὸ χαρακτ.} = -1. \text{ ὁ ἀριθμὸς} =$$

1

$$(\S. 321.) \text{ Εἰ δὲ τὸ } \chi = \frac{1}{6}, \text{ ὁ } 22,16556$$

$$\text{ἀριθμὸς} = 2216556.$$

§. 332. Ὅπως οὖν ἐπινενόηνται, παρίσανταίτε, καὶ ἐν χρήσει τυγχάνουσιν οἱ λογάριθμοι ἐν τοῖς δι ἀριθμῶν ὑπολογισμοῖς, ἄλλος εἰπόντες, ἴδωμεν ἔτι καὶ τὸν τρόπον, τὸν ἐν τοῖς διὰ γραμμάτων ὑπολογισμοῖς, ἦτοι τὸν καθόλου. Ἐπὶ οὖν τούτων, ἡ λέξις, λογάριθμος, πῶ γράμματι λ ἐκδηλοῦται, προτιθεμένῳ τῆς ποσότητος. π. χ. ὁ λ. τοῦ α = λα. ὁ λ. τοῦ γ = λγ, κτ. Ἐπεὶ δ' οἱ λογάριθμοι Ἐκθέται εἰσὶ τῶν

τῶν Δυνάμεων, οὕτω καὶ μεταχειριζόμεθα τοῖς, περὶ ὧν ὁ λόγος, ὑπολογισμοῖς. Ἐπὶ αὐτῶς τὸν Πολλαπλασιασμὸν εἰς Πρόσθεσιν καὶ Διαιρέσιν εἰς Ἀφαίρεσιν, τὴν Ἐξαγωγήν καὶ εἰς Διαιρέσιν, καὶ τὴν εἰς Δυνάμεις ἔξαρσιν ἐκ πολλαπλασιασμὸν τρέπομεν. Ἐὰν οὖν παραγόμενός τις Φόρων ζητῆται ποσοτήτων, ἐκδηλωθεῖν αὐτῶν λογαριθμῶν προσθέσεως. Εἴτα δὲ, διὰ διορισθὲν, εὐρεθῆναι δύναται. Ὡς τὸ παραδειγματικῶς παρασάν εἶη $\lambda\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma + \lambda\delta$ ἀπλησίως καὶ $\lambda\gamma\delta$ λογαριθμικῶς $= \lambda\epsilon$ καὶ $\lambda\delta$. Καὶ ἐν Συμπεπλεγμέναις Ποσότητι (ὅπου $\lambda\mu + \alpha - \chi$), ἀλλ' οὐχὶ $= \lambda\mu + \alpha - \chi$. Τοῦτο γὰρ δηλώσει τῶνδε ποσοτήτων πολλαπλασιασμὸν μετ' ἀλλήλων. Τοῦτο γὰρ $\lambda\mu + \alpha - \chi$ σημαίνει, ἥπου δῆλον, τὸ $\lambda\mu$ πολλαπλασιάσαι χρῆναι, καὶ τῷ ἐκ τούτου γομένῳ α προσεθῆναι, καὶ τοῦ Κεφαλαίου τοῦ χ ἀφαιρεθῆναι. Οὐ γεγονότος, ὁ τούτου λογαριθμὸς δοθήσεται. Καὶ ἡ Διαιρέσις τῶν λογαριθμῶν τὸν τρόπον γίνεται, ὅν καὶ ἐν ἀριθμοῖς, τοῖς ἀφαιρέσεως, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. ὁ λ .

$\lambda\alpha - \lambda\beta$. Καὶ τὸ σχῆμα $\lambda\mu$ λογαριθμῶν

οὕτω παρασάγη. $\lambda\alpha + \lambda\mu - \lambda\epsilon$. Τὸ δὲ

$(\lambda\gamma + \lambda\delta) - (\lambda\epsilon + \lambda\epsilon)$ τούτ: οἱ δύο λογαριθμοὶ προσθέντες ἀφαιροῦνται ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τῶν δύο πρώτων. Τὸ δὲ $\beta\zeta - \mu\eta$

τὸν τρόπον. $\lambda (\beta\zeta - \mu\eta) - (\lambda\epsilon + \lambda\epsilon)$

§. 333. Ἐπειδὴ ἡ εἰς Δυνάμεις ἔξαρσις

διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ Ἐκθέτου τῆς Ποσότη-
τος, ἀναγκαῖον καὶ τοὺς λογαρίθμους οὕτω παρίσασθαι.
Ἐνθεντοί a^2 λογαριθμῶς εἶη 2.λα. Ὁ ἐστὶ, τοῦ λογ.
τοῦ a πολλαπλασ ἐπὶ 2, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦδε
τοῦ λογαρίθμου ζητηθέντος, προκύψει a^2 ἀριθμὸς,
τοῦ a πρότερον ὡς ἀριθμοῦ διορισθέντος. χ^3 λογαριθ-
μικῶς = 1. λχ. Καὶ $\chi^v = v$. λχ. Καὶ τού-
των καὶ δυσχερέστερα τούτων ὑποδείγματα διορίζειν μαν-
 $v-2$

θάνομεν π. χ. a λογαριθμικῶς ἐστὶ v . λα — 2.λα.
Ἡ γὰρ δύναμις τοῦτο ποιεῖν ἐπιτάττει, καὶ οἱ λογά-
ριθμοὶ δυνάμεις δῆπου τυγχάνουσι. Τὸ δὲ καὶ τού-
 $v-2$ v 2 v
του δῆλον, ὅτι $a = a : a = \frac{a}{a^2}$. Ἄρα

καὶ v . λα — 2. λα. Ταῦτα οὖν μετ' ἐπιστάσεως θεω-
ροῦντες πλείω τῶν σχημάτων εὐχερῶς κατανοήσασμεν.
 $v-\mu$

Ὡς a χ^w λογαριθμικῶς ἐστὶ v . λα — μ . λα +
 v $3-v$
 $\lambda\chi + \lambda w$. Καὶ $a \chi$ μ ἐστὶ λογαρ. v . λα
 $+ 3$. λχ — v . λχ + $\lambda\mu$. Καὶ τὸ ἐξῆς a
 -3 v -3
 μ ἐστὶ v . λα — 3. λμ. Ἐστὶ γὰρ a μ
 a $\frac{1}{\mu^3}$ (§. 198.) = $\frac{a}{\mu^3}$. Ἐὰν αἱ τῶν ποσοτή-

των δυνάμεις κλάσματα ᾧσι, καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου, καὶ
ρίζαι παρισῶνται, τελοῦνται αὖθις τὰ αὐτά. Τίθεται
γὰρ ὁ κλασματικὸς Ἐκθέτης ὡσαύτως πρὸ τοῦ λ. ὃ
τὸν λογάριθμον ἐμφαίνει· π. χ. $\chi^{\frac{3}{4}}$ λογαριθμικῶς
εἶη $\frac{3}{4}$. λχ. ἢ $3\lambda\chi$, ὃ ἐστὶν, ὁ λογάριθμος τοῦ χ

4
πολλαπλασιασθῆναι μετὰ τοῦ 3 ὀφείλει, καὶ τὸ πα-
ραγίμ.

ραγόμε. διὰ 4 διαιρεθῆναι, καὶ τοῦ προκύπτοντος
 ριθμοῦ τὸν ἀριθμὸν ζητηθῆναι, διορισθέντος πρὸς
 ἀμέλει τοῦ χ. π. χ. Ἐστω $x = 36$. $x^{\frac{3}{4}} =$
 $= \sqrt[4]{36^3}$, καὶ λογαριθμικῶς $= \frac{3}{4} \lambda$.

$$^{\circ}\Omega_{56} \quad \underline{3\lambda \cdot 36} = \lambda \cdot 36 = 1,5563025$$

$$\quad \quad \quad 4 \quad \text{πολλαπ. διὰ} \quad 3$$

$$= \underline{4,6689075}$$

$$\text{διαίρ. διὰ} \quad 4 = 1,1672268$$

Οὕτως λογαρίθμου ἐκ τῶν πινάκων ἐξεν-
 τος, εὐρίσκομεν σχεδὸν τὸν ἀριθμὸν 14,7.

$36^{\frac{3}{4}}$, ἢ $\sqrt[4]{36^3} = 14,7$. Κάντεῦθεν προ-
 ῆ μέγιστη ὄνησις τῶν λογαριθμικῶν ὑπολογισμῶν
 σαύτως καὶ τὸ σχῆμα $x \cdot y = \frac{y}{x} \cdot x$. ἢ $\frac{y}{x}$

καὶ $(ym + rx)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \lambda (ym + rx)$, κτ. ὡς

Ἐφ' ᾧ τοῦτο διὰ παραδείγμ. διαλευκάν-
 τῶν Γεωμετρικῶν ληφθέντος Προόδου, κἂν τοῦτο
 τῶν λογαριθμικῶν σχημάτων δεῖξαι χρήσιν, ἡ
 Γεωμετρικὴ Προόδω δοθεὶς ὁ α'. ὅρος, καὶ ὁ ἔσχα-
 καὶ ὁ τῆς Προόδου ἐκθέτης. Ἐκ τούτων εὐρε-
 πληθὺς τῶν ὅρων.

Ὁ α'. ὅρος ἔστω $= a$. ὁ ἔσχα. $= \beta$. ὁ τῆς
 δου ἐκθέτης $= \mu$. καὶ ἡ τῶν ὅρων πληθὺς
 ἣτις ζητεῖται. Ἀντὶ τοῦ ἔσχατου ὅρου $= \beta$, ἀντι-

στῆσαι δυνάμεθα τὸ $\beta = a \mu^{x-1}$. (§. 257.

$$\beta = \alpha^{\chi-1} \cdot \text{λογαριθμικῶς}$$

$$\begin{array}{r} \lambda\beta = \lambda\alpha + \chi\lambda\mu - \lambda\mu \\ \lambda\mu \qquad \qquad + \lambda\mu \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + \lambda\mu = \lambda\alpha + \chi\lambda\mu \quad (\S. 48. \alpha'.) \\ \lambda\alpha \qquad \qquad - \lambda\alpha \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + \lambda\mu - \lambda\alpha = \chi\lambda\mu \quad (\S. 53. \alpha'.) \\ \qquad \qquad \qquad : \lambda\mu \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + \lambda\mu - \lambda\alpha = \chi\lambda\mu \quad (\S. 114. \alpha'.) \\ \lambda\mu \qquad \qquad \lambda\mu \qquad \qquad \eta \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + \lambda\mu - \lambda\alpha = \chi. \text{ Καὶ προσφύε-} \\ \lambda\mu \qquad \qquad \qquad \text{σερον ἐκδηλωθέν.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \beta - \lambda\alpha) + \lambda\mu = \chi. \text{ καὶ ἔτι προσφύε-} \\ \lambda\mu \qquad \lambda\mu \qquad \qquad \text{σερον} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \beta - \lambda\alpha) + 1 = \chi. \\ \lambda\mu \end{array}$$

αὐτο δ' ἐστὶ χ , ἢ ἡ τῶν ὄρων πληθὺς ἢ ζητου-
 ογαριθμικῶς ἐξενεχθεῖσα. θῶμεν οὖν τὴν σε-
 ρὴν ἔχειν, ἥτοι τὸν α' . ὄρον εἶναι 2, ἢ $\alpha = 2$.
 τὸν 1458, ἢ $\beta = 1458$. τὸν ἐκθέτην
 ἢ $\mu = 3$. καὶ τὴν πληθὺν τῶν ὄρων, ἢ
 ζητεῖσθαι. Ἐσται οὖν κατὰ τοῦτο τὸ σχῆμα
 $(\lambda\beta - \lambda\alpha) + 1$. ἥτοι $\chi =$

$$\begin{array}{r} 1458 - 12) + 1. \\ \lambda 3 \end{array}$$

Ἐστὶ

$$\text{"Ως } \frac{2,8627275}{0,4771212} = \frac{28627275}{4771212} \quad (\text{ὅτι ἀμφοῖν}$$

ἴσα δεκαδικὰ ἔνεισι.) =

$$\begin{array}{r|l} 28627275 & 6. \text{ "Ο τὸ πηλίκον τυγχά-} \\ (4771212) & \text{νει. Τὸ δὲ λείψ. 5 ὁ.} \\ 28627272 & \end{array}$$

πολέλειπται, ὅτι οἱ λογαρίθμοι σχεδὸν πάντες ἄ-
λογοι ποσότητες εἰσὶ. Τούτῳ προσεθήτω ἔτι 1.
"Ως $6 + 1 = \chi = \tau\eta\ \pi\lambda\eta\theta\acute{\upsilon}\tau\omega\ \delta\epsilon\ \rho\omega\upsilon.$ "Ο-
θεν 7 οἱ ὅροι. Καὶ ἡ Σειρὰ ἔσαι

2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458.

Περὶ Συνδυασμοῦ.

§. 334. Ἡ Μέθοδος, καθ' ἣν, ποσῶς ἢ
τάξις δεδομένων πραγμάτων οἰωνοῦν, καὶ ὁποσωνοῦν,
μετακινεῖται, καὶ μετατίθεται, ἀνὰ δύο, ἢ ἀνὰ τρία,
ἢ ἀνὰ δ', κτ. λαμβανομένων, ἢ ἐν γένει, καθ' ἣν
Συζυγίαι καὶ Μεταθέσεις τῶν δοθέντων καθ' ὁροθε-
τηθέντας γίνονται νόμοις, καὶ ποσάκις τοῦτο ἐν δο-
θείσῃ τινὶ πληθύνει πραγμάτων τελέσαι δυνατόν, εὑ-
ρεῖν δυνάμεθα, Συνδυασμοῦ Μέθοδος καλεῖται.
Αὐτὴ οὖν δῆλον ταύτην διεξοδικωτάτην, καὶ ἐπὶ
μυρίων εἶναι ἐν χρήσει, ὥς πᾶς τις συνομολογήσει,
ἐνίων μόνον ἀψαμέναις.

§. 335.

335. Ἀποτοίνων τῶν εὐχερειαίων ποιησά-
 ῃν ἀρχὴν εἰπόμεν περὶ τῆς δυνατῆς Μεταθέσεως
 θμῶν δοθέντων πραγμάτων. Ἐὰν οὖν τινὰ
 , (νοήσεις δὲ ὁ, τι ἂν βούλη, οὖν ἀριθμοὺς,
 αἵματα, ἢ ἀνθρώπους, ἢ γράμματα, κτ.) ἄπερ
 β. ῥηθῇτω, μόνον δις ταῦτα μετακινήσαι, καὶ
 ἵνα δύνηται, τουτ. μόνον οὖν θέσεις διαφόρους
 ὧν ὑποίσεται τάξις. ἦτοι γὰρ οὕτως, αβ, ἢ
 βα, τεθῆσεται. Αἱ δυναταὶ ἄρα οὖν τινῶν
 θέσεις καὶ οὕτως ἂν ἐκδηλωθεῖεν. $1 \cdot 2 = 2$.
 ἂ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μετ' ἀλλήλων τῶν
 πρώτων ἀριθμητικῶν χαρακτήρων. Ληφθῇτω
 οὗτοι καὶ τρίτον τι, τὸ γ, ὅπερ πρὸς τῷ αβ
 τεθῆναι δύναται, ἐν ἀρχῇ, γαβ, μεταξὺ
 αβ, καὶ μετ' αὐτά, αβγ. Τρισπῶς δὲ καὶ
 ᾧ βα. τουτ. γβα. βγα. βαγ. Τοῦτο οὖν δι-
 σταθεσεὶς τριπλασίονας τῷ προτέρων. ἦτοι τῶν
 β. Ὡς τὸν ἀριθμὸν, ἢ τὴν πληθύν τῶν προ-
 μεταθέσεων ἐπὶ τὸν 3 πολλαπλασιάσαι χρῆ.
 ποσάκις τρία τινὰ μετατεθῆναι δύναται, εἰδέ-
 ῃτοι $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Ὅπερ αὖθις διὰ τοῦ
 πολλαπλασιασμοῦ τῶν πρώτων τριῶν ἀριθμητικῶν
 πτεὶ χαρακτήρων. Πλείους δὲ τῶν 6 μεταθέ-
 ῃ τριῶν οὐ δύναται. Αὖθις τοῦ δ. γραμμάτος
 δοθέντος ἦτοι τοῦ δ, ἴσονται δυναταὶ μετα-
 τῶν δ. γραμμάτων 24. Εἰσὶ δὲ. δγαβ. γδαβ.
 . γαβδ . δαγβ . αδγβ . αγδβ . αγβδ .
 . αδβγ . αβδγ . αβγδ . δγβα . γδβα .
 . γβαδ . δβγα . βόγα . βγδα . βγαδ .
 . βδαγ . βαδγ . βαγδ . Τῆς τοίνυν πλη-
 τῶν προτέρων μεταθέσεων τῷ 4 πολλαπλασια-
 ς, ἔσαι γνωστὸν, ποσάκις δ. τινὰ μετατεθῆναι
 ἔσονται. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς, ὁ, ποσάκις τρία μετα-
 ται, δηλῶν, πρέκυψε διὰ τοῦ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$
 ποσάκις δ. διὰ τοῦ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$,
 Αα πρδ.

προκύψει. Εάν δε ε. υποτεθωσιν, των τη
 σιν εἰδέναι βουλόμεθα, δῆλον, ὅτι μετατι
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 : \kappa\iota\varsigma = 120 : \kappa\iota\varsigma$
 γένει, ὁ τῶν μεταθέσεων δυνατὸς ἀριθμὸς,
 προσλεύσεται, τοσούτων χαρακτήρων, ἄλλ
 σική τάξει ἐπομένων, (ἀπὸ τῆς 1 τῆς ἀρχῆς
 πολλαπλασιαζομένων, ὅσα τὰ πράγματα
 τῆς δυνατῆς μεταθέσεως λόγος. Οὕτω π.
 πραγμάτων αἱ δυνατὰ μεταθέσεις εἶναι ὡς
 $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. Εάν οὖν ὁ ἀριθμὸς
 δοθέντων π κληθῇ, τὴν τῶν δυνατῶν με
 πληθύν δια τοῦ ἐξῆς γενικοῦ ἂν παραστήσῃμεν
 $\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2 \cdot \pi - 3 \cdot \pi - 4 \cdot \pi - 5$, κτ. μέχρις ἂν ὁ ἔσχατος ὅρος =
 1 γένηται. Ὅπερ τελευταῖον ἀναγκαίως γενήσεται
 π ἐνεργείᾳ τυγχάνει ἀριθμὸς, ἥτοι εἰ διορισθῇ
 αὐτὸ γὰρ προκύπτει, τῶν παραγόντων, τῶν
 ἀλλήλων πολλαπλασιασθησομένων, τοῦ πολ
 λου ἐκ δεξιῶν, εἰτ' ἐξ ἀριστερῶν ἀρχο
 πὶ τοῦ υποτεθέντος τύπου ἢ μὲν ἀρχὴ γίνετα
 ἔσχατου ἀριθμοῦ, τοῦ π, τὸ δὲ πέρας εἰ
 Παράδειγμα εἰς ἀνάπτυξιν. Ζητεῖται, πο
 λέξεις, „μία σωτηρία ἡττηθεῖσι μηδεμίαν ἐλ
 τηρίαν, ἂν μετατεθεῖεν; Ἐπειδὴ ἐξ αἱ λέξ
 τεθῆσονται ὁῦτοι καὶ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 : \kappa\iota\varsigma = 362880 : \kappa\iota\varsigma$. Ἐ
 τούτους οἷς ἐστὶ τῆς ἡμέρας, ἀπαλλαγείη ἂν
 κων σχεδὸν μετὰ 4971 ἡμερας.

§. 336. Σημείωσαι, ὅτι, εἰάν ἐν τοῖς
 νοκ, καὶ τι, ἢ τινὰ τὰ αὐτὰ οἷς, ἢ τρεῖς, ἢ
 κς ἀπαντᾷ, τῆς καὶ ταῦτα ἐξαίρεσις ὁ ἀνωτέρω

πόκειται. Ἐάντι τὸ αὐτὸ ἐν τῇ τῶν δοθέντων πλη-
 θυΐ δις ἐνυπάρχη, ἐλαττωθήσονται κατὰ τὸ ἥμισυ αἱ
 Συζυγίαι. (εἰ δ' ὡς διάφορον τῷ ἀριθμῷ θεωρεῖται,
 κρατήσῃ ὁ α'. νόμος) Ἐξ α' μόνον. προσελθέτω
 καὶ ἕτερον α, καὶ ἔσαι αα, μία μόνη μετάθεσις, τουτί
 τὸ ἥμισυ τῶν μεταθέσεων, ας δύο διάφορα τῷ εἶδει
 συνισῶσι. Προσεθέντος δὲ τῷ αα καὶ τοῦ γ, ἔχομεν
 ααγ . γαα . αγα, τρεῖς μόνον μεταθέσεις, τὸ ἥμι-
 συ τῶν ἐκ τριῶν διαφόρων τῷ εἶδει ἀνακυπτουσῶν.
 (§. ἀνωτ.) Ἐνθεντοι τὴν τῶν δοθέντων πληθύν
 (τοῦ ἐνὸς δις ἀπαντῶντος) διὰ 2 διαίρειν χρή. Ὁ
 δὲ γενικὸς τούτου τύπος ἂν εἴη, τῆς πληθύνος τῶν
 πραγμάτων = $\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2 \cdot \pi - 3 \cdot \pi - 4$.

1 . 2

τῆς σειρᾶς τοῦ ἀριθμητοῦ προαγομένης, ἔς ὃ ὅσχα-
 τως ὅρος = 1 ἤ. Εἰ δὲ δύο τὰ αὐτὰ ἐν
 ταῖς δοθεῖσι, τὸ σχῆμα εἰς τὴν τραπεζίαν
 $\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2 \cdot \pi - 3$, κτ. Εἰ δὲ τρία, εἰς

1 . 2 . 1 . 2

τούδε. $\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2 \cdot \pi - 3 \cdot \pi - 4$.

1 . 2 . 1 . 2 . 1 . 2

κτ. Εἰ δέτι τὸ αὐτὸ τρεῖς ἀπαντήσῃ ἐν ταῖς δοθεῖσι,
 ὁ Διαφέτης ἔσαι $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Τηνικαῦτα γὰρ
 ἀναγκαίως αἱ μεταθέσεις κατὰ τὸ ζ'. μειωθήσονται,
 ὡς τῶν ἑξάκις μεταθέσεων τῶν τριῶν, τῶν ἥδη ὡς τὸ
 αὐτὸ θεωρουμένων, ἐκπιπτουσῶν. Εἰ γὰρ π. χ. α
 τρεῖς ἐνυπάρχει, εἴη ἂν τοῦ ααα μία καὶ μόνη μετάθε-
 σις, ἐν ᾧ τούτου μὴ ἔχοντος οὕτως, ἔξ αὖ ἐγέ-
 νοντο. (§. ἀνωτ.) Ὡς οὖν ὁ γενικὸς τύπος ἔσαι

$\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2 \cdot \pi - 3 \cdot \pi - 4$.

1 . 2 . 3

Τετράκις δέτινος παρόντος, διὰ τὰ αὐτὰ ἔσαι τὸ σχῆμα

$\pi . \pi - 1 . \pi - 2 . \pi - 3 . \pi . 4 . \pi -$

$1 . 2 . 3 . 4$

κτ. Ἐάν δὲ συμβῇ τι τρεῖς παρῆναι, δις δ' ἕτερον
εὐχερῶς ἐκ τῶν ῥηθέντων καὶ τοῦτο ἂν διορίσαι
τούτεσιν ὁ διαιρέτης ἐκ τῶν $1 . 2 . 3 . 1 . 2$
ζησεται. ὅτι ἐξ μεταθέσεως ὡς μία, καὶ δύο αὐτῶν
μία ὑπολογισθήσονται. $\pi . \chi$. Τεθήτωσαν αἱ ποσ
τες $\alpha\alpha\alpha\beta\beta\gamma$. ποσάνις αὗται μετατεθῆναι δύναν
ὡς οὐδὲ τυγχάνουσαι, μετατεθῆσονται $1 . 2 .$
 $4 . 5 . 6$: κς. Ἐπεὶ δὲ τὸ α τρεῖς, καὶ τὸ
παρὸν τυγχάνει, ὁ διαιρέτης ἔσται $1 . 2 . 3 . 1$
τουτ. τὸ σχῆμα $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 5$

$1 . 2 . 3 . 1 . 2$

$4 . 5 . 6 = 60$: κς. Ὡσαύτως, ποσάνις

2

ἐννέα ταῦτα $\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\gamma\gamma$ μεταθεῖναι δυνατόν; $1 .$

$3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9$: κς. Διὰ δὲ

διαίρετην $1 . 2 . 3 . 4 . 1 . 2 . 3 . 1 . 2$

$1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 = 1260$

$1 . 2 . 3 . 4 . 1 . 2 . 3 . 1 . 2$

Αἱ γὰρ μεταθέσεις, αἱ ἐκ τεσσάρων ἀναφύομεναι
μία νομίζονται, ὡς τοῦ α τετράκις, αἱ δ' ἐκ τρι
ῶσαύτως ὡς μία, ὡς τοῦ β τρεῖς αἱ δ' ἐκ τοῦ γ παρα
σίκας ὡς μία, ὡς τοῦ γ δις παρόντων. Παράδ. μετ
τῶν 10 (§. ἀνωτ.) ἔξωσαν καὶ 5 γυναῖκες. Α
τούτων μεταθέσεις οὗται γινέσθωσαν, ὡς ἐκάστην
ναῖκα παρὰ τῷ ἰδίῳ εἶναι δεῖ ἀνδρὶ. Ἐπεὶ οὖν
νῆρ, καὶ ἡ γυνὴ ὡς ἐν ὑπολογίζονται, ἔσται μόνον
5 μεταθέσεις. Ἐπεὶ $1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$
οἱ τούτων τύποι μετατεθῆσονται. Ἄρα δις
ἡμέρας ἐξισωμένων, 60 ἡμερῶν μόνον χρεῖα.

§. 337. Καὶ μυρία ἕτερα εἶδη Συνδυασμῶν
δοται, ὧν κανόνας οὐ δυσχερὲς ἐπινοῆσαι. Θεωρη

τω καὶ τούτων τινά. Ἀριθμοῦ τινὸς πραγμάτων δοθέντος, ἐξ ὧν τοσαύτας διαφόρους Δυάδας, τοσαύτας διαφόρους Τριάδας, τοσαύτας διαφ. Τετράδας λαμβάνειν δεῖ, ὅσα Κ π. χ σημαίνει αὐται καλοῦνται Συνδυασμοί, Συντρισσεασμοί, ἢ Συντρισσεύσεις, Συντετρασσεύσεις, κτ. Ζητητέος ἦδη ὁ τῶν δυάδων νόμος. Εἰς τινὰ δοθεῖεν, ἅπερ ἀνὰ δύο συνάψαι θέοι, ἐνθα μέντοι οὐδένα λόγον ποιούμεθα τοῦ, πότερον ἐφ' ἐκάστης δυάδος πρὶτίθεται, ἢ ἐπιτίθεται, εὐρήσομεν τὰς δυάδας κατὰ τὸ ἐχόμενον Πινακίδιον, οὗ ἐν τῇ α'. σειρᾷ ἡ τῶν δοθέντων πληθὺς, ἐν δὲ τῇ β'. αὐτὰ τὰ δοθέντα, ἐν δὲ τῇ γ'. αἱ τούτων δυάδες κεῖνται

ἡ τῶν πραγμάτων		αὐτὰ τὰ πράγμ.	αἱ δυάδες.
πληθὺς.	1	α	ο
	2	β	αβ
	3	γ	αγ. βγ,
	4	δ	αδ. βδ. γδ
	5	ε	αε, βε, γε, δε.

Αὐτόθεν φανερόν, ὅτι ἐν τι οὐδεμίαν δυάδα δύναται ἀποτελέσαι, διὰ τοῦτο κεῖται ο ἐν τῷ α'. τόπων. Ἐκ δὲ δύο τελεῖται δυάς, ἥτοι αβ, οὐδένα λόγον τῆς τούτων θέσεως ἔχοντων, καὶ αβ, ἢ βα ὡς τὸ αὐτὸ θεωρούντων, καὶ εἰς τὰς δυάδας ἦδη μόνον ἀφορῶντων. ληφθὲν δὲ καὶ τὸ γ'. ἥτοι τὸ γ. δώσει μεθ' ἐκατέρου τῶν προτέρων, μετὰ τοῦ α καὶ β, καινὴν δυάδα. Ὡς ἐν δύο δυάδες, αἷς καὶ τῆς α'. προσεθείσης, ἔσονται τρεῖς αἱ δυάδες. Ἐνθεντοι τρεῖς πράγματα διδοῦσι τρεῖς δυάδας. Αὐθις καὶ τὸ δ' ληφθὲν, ἥτοι τὸ δ, παρέξει σὺν ἐκάσῳ τῶν προηγηθέντων τριῶν καινὴν δυάδα. Ἄρα τρεῖς δυάδες, αἷς καὶ τὰς πρότερον τρεῖς προσαιριθμήσαντες ἔχομεν ἕξ δυάδας. Τὸ ε'. δίδωσι μεθ'

μεθ' ἑκάστου τῶν προτέρων τεσσαρίων τεσσαράς καινάς
 δυάδας, σὺν ταῖς ἐξ ταῖς προηγηθείσαις = 10 δυά-
 δας. Ἡδὴ οὖν καὶ τὸν νόμον εὐχερῶς ἂν διορίσαιμεν.
 Πᾶσαι ἀμέλει αἱ δυάδες τὸ κεφάλαιόν εἰσι τῶν ὄρων
 Ἀριθμητικῆς Σειράς, ἧς ἡ ἀρχὴ μονάδι ἐλαττοῦται τῆς
 δοθείσης πληθύος τῶν πραγμάτων, καὶ διηλεκτικῶς μο-
 νάδι μειοῦται. ἢ ἡς ἡ διαφορὰ ἡ 1, καὶ τὸ πέρας ἡ 1.
 Ὡς ἐπὶ τῶν πέντε τῶν δοθέντων ἢ τῶν δυάδων πλη-
 θύς εἴη ἂν τὸ κεφάλαιον τοῦ $4 + 3 + 2 + 1$
 = 10. Ἐξ δὲ δοθέντων τὸ κεφάλαιον $5 + 4 +$
 $3 + 2 + 1 = 15$. Ἡ δυνάμεθα θεωρῆσαι αὐ-
 τὰς, ὡς τὸ κεφάλαιον Ἀριθμητικῆς Σειράς, ἢ τινι ἀ-
 ὄρος = 1, καὶ ἡ διαφορὰ = 1. Ὁδ' ἐσχατος
 μονάδι ἐλαττοῦμενος τῆς τῶν δοθέντων πληθύος. Τὸ
 τῆς Ἀριθμητικῆς Πρὸσδοῦ κεφάλαιον = $\alpha\pi +$
 $(\pi^2 - \pi)$ δ. (§. 226.) Ἐνθα π τὸν ἀριθμὸν,

2

ἢ τὴν πληθύν σημαίνει τῶν ὄρων. α τὸν ἀ'. ὄρον, καὶ
 δ τὴν διαφοράν. Ἐπεὶ δ' ἐνταῦθα $\alpha = 1$, καὶ
 δ = 1, ὑπολείπεται μόνον ἐν τῷ σχήματι
 $\pi + (\pi^2 - \pi)$. Ἀλλὰ λόγον ποιητέον καὶ

2

τοῦ, ὅτι οἱ ὄροι μονάδι ἐλαττοῦνται τῆς πληθύος τῶν
 δοθέντων. Ἐν γάρ 5 πράγμασι π . χ. τέσσαρες οἱ ὄ-
 ροι τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς, δι' ὧν τὸ ταύτης ἰξευρίσκε-
 ται κεφάλαιον. Ὡς ἐν π πράγμασι, $\pi - 1$ οἱ ὄ-
 ροι. Εἰ σὺν ἡ τῶν δοθέντων πληθύς, ἢ ἀνὰ δύο συν-
 δυασθητομένη = π , οἱ ὄροι τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς,
 ἧς τὸ κεφάλαιον τὴν τῶν συνδυασμῶν ὑποδείκνυσι πλη-
 θύν, εἴεν $\pi - 1$. Καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου ἀντὶ τοῦ
 π γραπτέον τὸ $\pi - 1$. Ὡς ὁ τύπος $\pi +$
 $(\pi^2 - \pi)$ εἰς τόνδε μετασχηματισθήσεται, $\pi - 1$

2

+ (π

$$+ \frac{(\pi - 1)^2}{2} - (\pi - 1). \text{ ὅς ἀναπτυχθεὶς}$$

$$\text{ἔσται } \pi - 1 + \frac{\pi^2 - 2\pi + 1 - \pi + 1}{2}.$$

Εἰ δὲ καὶ τὸ $\pi - 1$ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀνάξομεν παρονομασίην, εἶη ἂν =

$$\frac{2\pi - 2 + \pi^2 - 2\pi + 1 - \pi + 1}{2},$$

$$\text{καὶ τῇ προσθέσει} = \frac{\pi^2 - 3\pi + 2\pi + 2 - 2}{2}$$

$$= \frac{\pi^2 - \pi}{2}. \text{ Ἀλλὰ } \frac{\pi^2 - \pi}{2} = \frac{\pi(\pi - 1)}{2}.$$

Τοῦτο ἄρα ἔσται ὁ γενικὸς τύπος Συζυγιῶν ἀνὰ δύο.

Παράδ. Ποσάνκις δυνάμεθα ἐννέα τινὰ σὺν δύο μετ' ἀλλήλων συζεῦξαι; Ἐνταῦθα $\pi = 9$. ἄρχ $9(9 - 1)$. ἢ $9 \cdot 8$: κίς = 36. Τσσαῦται

2 2
δυσάδες ἐμπεριέχονται τοῖς ἐννέα. Ἐκ τούτου, καὶ ὅπως ἐν τοῖς δημοσίοις Λάχεσι τὰς ἀνὰ δύο συζυγίας τῶν ἀριθμῶν (Amben) ζητεῖν γρή, μαθηάομεν. Εἰ π. χ. 12 οἱ ἀριθμοί, πόσαι Amben τούτοις ἐνυπάρχουσι; $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$. Ἐν δὲ 90 ἀριθμοῖς

2
ἔνεισιν $\frac{90 \cdot 89}{2}$ Amben = 4005. Τῶν δὲ

2
90 ἐξάγονται μόνον 5 ἀριθμοί. τούτοις ἄρα $\frac{5 \cdot 4}{2}$

= 10 Amben. Ὡς τὸ πιθανὸν τοῦ μίαν Amben βέροισις

ἐξαχθήσεσθαι ἐπὶ 10, τοῦ δὲ μὴ ἐξαχθήσεσθαι 39, 5 τουτ' ὁ λόγος τοῦ πιθανοῦ πρὸς τὸ ἀπίθανον

§. 318. Εάν δὲ τὰ δοθέντα ἀνα τριά συνάψαι βουλόμεθα, τῆς τούτων θέσεως, καὶ τάξεις παραμελοῦντες, καὶ π ἢ τῶν δοθέντων ἢ πληθὺς, ἔσαι ὁ τούτων γενικὸς τύπος $\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2$.

$$1 \cdot 2 \cdot 3$$

Εἰ δ' ἀνὰ τέσσαρα, ὁ $\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2 \cdot \pi - 3$.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Ὅς (τύπους) ἀποδείξαι οὐκ ἔχομεν, ὡς τῆς διδασκαλίας περὶ τῶν Ἐσχηματισμένων ἀριθμῶν προαπαιτουμένης, περὶ ἧς κατωτέρω ρηθῆσεται ὀλίγα. Τῷ δὲ βουλομένῳ παντάπασι καθόλου τύπου πρὸ ὀφθαλμῶν ἔχειν, ἐάν ἐκ π δοθέντων πραγμάτων ρ συζυγίας ποιῆσαι δέη, ἔσαι ὁ τύπος τούτου. $\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2 \dots (\pi - \rho + 1)$ ὅ ἐστιν,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \rho$$

οἱ ταῦ ἀριθμητοῦ παράγοντες γίνονται τοσοῦτοι, ὅσαι συζυγίαι δέδονται, οἱ δὲ τοῦ παρονομαστοῦ ἀπὸ 1 αὐθις τοσοῦτοι, ὅσαι αἱ συζυγίαι. Παραδείγματα, Πόσας τριάδας περιέχουσιν 20 ἀριθμοί, ταῦτ. 20 ἀριθμοὶ ἀνὰ τρεῖς εἰλημμένοι; Τὰ π δοθέντα εἰσὶν 20, ἢ $\pi = 20$. Πρόκεινται δὲ εἰς ρ συζυγίας γενέσθαι, ἐνταῦθα εἰς τριάδας, ἢ ἀνὰ τρεῖς ληφθῆναι. Ὡς $\rho = 3$. Ἀρξαι οὖν ἐν τῷ ἀριθμητῇ ἀπὸ τοῦ 20, πολλαπλασιάζων τοῦτον ἐπὶ τὸν ἐγγὺς ὑποδεέστερον ἀριθμὸν, καὶ οὕτω χωρῶν, μέχρις ἂν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $(\pi - \rho + 1)$ γένῃσι $= 20 - 3 + 1 = 20 - 2 = 18$. Ὡς ἔστι κατὰ τὸν τύπον $20 \cdot 19 \cdot 18 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 1140$.

$$1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$6$$

Πόσας δὲ τετράδας; $= \pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2 \cdot \pi - 3$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$= 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 4845$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

γ. Ἐὰν δὲ Συνδυασμοί, Συντρισσεύσεις, ἢ, ἐν οἷς - αἱ - ἤ: τάξεως, ἢ θέσεως, ἦν πρὸς ἑλληλα ἔχ., οὐκ ὀλιγοῦμεν, καὶ δεδομένων οἷς, τρεῖς, κτ. ἑαυτῷ συναφθῇ-
τούτων νόμος ἕτερος ἔσται τοῦ προτέρου. ὀκείται α καὶ β πρὸς δύο συνάψαι. (οὐ-
τως καὶ εἰς τὴν τούτων ἀφορᾶν τάξιν, ὁ-
ἀνωτέρω Συνδυασμῶν οὐκ ἐγίνετο) καὶ
των καὶ μεθ' ἑαυτοῦ, προκύψουσι Συζυ-
γίους τῶν τεσσάρων. ἦτοι αβ, βα, αα,
δὲ παρόντων, τοῦ α, β, γ, καὶ κατὰ
τρόπον ἀνὰ δύο συζευγνυμένων, ἔσονται ἐν-
υγίαι. αβ, αγ, βγ, βα, γα, γβ, αα,
Τῶν οὖν δύο 4 αἱ Συζυγίαι, ὅς (4) ὁ
τοῦ 2 τυγχάνει. Τῶν δὲ τριῶν, ἀνὰ
νομένων, 9 = τῷ τετρ. τοῦ 3. Τῶν δὲ
αὐθις πρὸς δύο, 16 = τῷ τετρ. τοῦ 4.
γίνει, π πράγματα, οὕτως συναπτόμενα,
 π^2 Συζυγίας.

δ. Ποσάκις οἱ ἐννέα χαρακτῆρες οἱ ἀριθ-
μοὶ δύο ἀλλήλοις συνάπτονται, καὶ τῆς
ξέως ἀμέλει θεωρουμένης, καὶ ἑκάστου τοῦ-
αυτοῦ συναπτομένου; 9 . 9. ἢ $9^2 =$
ἢ δὲ τούτοις καὶ οἱ 9 ἀπλῶς χαρακτῆ-
ριθμηθῶσι, καὶ χωρὶς τούτων, καὶ ἑκα-
τῆς ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τῶν 9 τῷ 0 συνα-
10, 20, κτ. τουτ: καὶ 18 ἔτι ἀριθμητικαὶ
31 προσεδώσιν, ἴσομεν 99, τουτ. πάντας τοὺς
καὶ 100 ἀριθμοὺς. Τῶν δὲ δεδέντων πρὸς
πτομένων, ἢ τῶν Συζυγιῶν πληθεὺς αἰεὶ ὁ
τῶν ἔσται. Ἡ ἐὰν τὰ ὑποθέντα π ἢ, αἱ
πρὸς τρία συζυγίαι εἰσονται π^3 , κτ.

εἰς δ. Ποσάκις τοὺς 9 χαρακτῆρας πρὸς

729:κς. Ἐπεὶ δ' οἱ 9 χαρακτῆρες ἀνά' δύο 81:κς ἀλλήλοις ἔχουσι συναφθῆναι, ἐὰν ἐκάσῃ τούτων συζυγία καὶ τὸ 0 (τὸ μηδ:) προσεθῇ, δι' οὗ ἐκάσῃ τρεῖς περιέξει χαρακτῆρας, προκύψουσιν ἔτι 81 ἀνὰ τρεῖς (χαρακτ. ἔχουσαι) συζυγίαι. Εἰ δὲ θῶμεν καὶ ἕκασον ἀπλοῦν χαρακτῆρα δυοὶ μηδενικοῖς συνάπτεσθαι, (δι' οὗ αὖθις ἕκαστος ἀπλοῦς ἐκ τριῶν συγκείσεται) γενήσονται 9 ἔτι συζυγίαι, ἀνὰ τρεῖς. Πρὸς τούτοις τὸ 0 καὶ εἰς τὸ μέσον τῶν 81 συζυγιῶν (τῶν ἀνὰ δύο) τεθῆναι δυνατόν. Ἐκ τούτου αὖθις ἔσονται 81 συζυγίαι, τρεῖς ἐκάσῃ χαρακτῆρας περιλαμβάνουσαι. Ὡς προσθετέον $729 + 81 + 81 + 9$, ἵνα προέλθωσι πάντες οἱ ἀριθμοὶ, οἱ μεταξὺ 100 καὶ 999. (ἀμφοῖν τοῦ 00 καὶ 999 τούτοις συμπεριλαμβανομένων) Συζυγίαι δ' εἰσὶν 900 ἀνὰ τρεῖς. Καὶ τοσοῦτοι οἱ ἀριθμοὶ ἀκριβῶς μεταξὺ 100 καὶ 999. Ὡς δὲ τοὺς δυνατοὺς τρόπους τῶν Συλλογισμῶν ὑπολογισεῦσαι βουλητὸν, τῶν διὰ τοῦ Α Ε Ι Ο ἐκδηλουμένων, τέσσαρα εἶναι ταῦτα εἰδὼς, πρὸς τρία, ἢ ἀνωτ. δέδεικται, συνάψας 4^3 συζυγίας προκύψει, ἥτοι 64:κς ἀνὰ τρία συζευχθήσεσθαι, οὐδόλως ἐνδοιάσκει.

§. 340. Οἱ δ' Ἐσχηματισμένοι ἀριθμοὶ (ὥς καὶ τούτους μὴ παραδραμεῖν) οὕτω κέκληνται διὰ τὴν, ἣν λαμβάνουσι, θέσιν, σχήματα παριζῶντες Γεωμετρικά.

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1, κτ.

Ἐν τῇ α'. κατὰ κάθετον σειρᾷ μενάδες ἔνεισι μόναι, ἐφ' ὅσον ἂν βούλη, προαγόμεναι. ἐπὶ δὲ τῆς β'. τὰ κεφάλαιά εἰσι τῶν ἀπλῶν ὄρων, ὡς αἰ τοὺς προηγηθέντας ὄρους τῆς προτέρας σειρᾶς εἷς ὄρον τῆς β'. ἢ τῆς ἀμέσως ἐχομένης συμπληροῦν. π. χ. τῆς β'. κατὰ κάθετον σειρᾷ ἀριθτικὸν ἐστὶ τὸ 0. Οὐδεὶς γὰρ ὄρος τῆς πρώτης σειρᾶς προηγήσατο, ὅς εἰς κεφάλαιον ἂν γένοιτο. Ὁ β'. ὄρος τῆς β'. σ. = 1, ὡς τοῦ προηγησαμένου ὄρου τῆς α'. = 1 ὄντος. Ὁ γ'. τῆς β'. = 2, τὸ γὰρ κεφάλαιον τῶν δύο προηγηθέντων ὄρων τῆς α'. = 1 + 1 = 2. Διὰ τοῦτο καὶ ὁ δ'. τῆς β'. = 3 = τῶν κεφαλαίων τῶν τριῶν προηγουμένων τῆς α'. = 1 + 1 + 1 = 3. Καὶ τοῦτον τὸν τρόπον παράγονται ἐπὶ τῆς β'. σειρᾶς οἱ φυσικοὶ χαρακτήρες. Αὐτοὶς ἐν τῇ γ'. σειρᾷ εὐρίσκομεν τὰ κεφάλαια τῶν τῆς β'. φυσικῶν χαρακτήρων, ὡς αἰ τοῦ κεφαλαίου τῶν προηγουμένων ὄρων τῆς προηγηθείσης σειρᾶς καινὸν ὄρον ἀποτελεῖν. Οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν σειρῶν. Ἐνθεντοὶ καὶ ἀνάγκη πᾶσαι τῆς σειρᾶς ἀπὸ τοῦ 0 ἀρχεσθαι, καὶ, ὅσω περαιτέρω χωροῦσι, τοσούτῳ πλείω 0 τοῖς πρώτοις ὄροις (πρὸς τὰ κάτω) ἐνυπάρχειν. Ὅτι προηγούμενοι ὄροι-

ροα-

ροι τῶν προηγουμένων σειρῶν εἰς συγκεφαλαίωσιν οὐ πρόκεινται. π. χ. ὁ δ', ἀριθμὸς τῆς γ', σειράς = 10. τὸ γὰρ κεφαλαίον τῶν προηγηθέντων ὅρων τῆς β' = $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Ὁ δ', ἀριθμὸς τῆς ε' = 35 = τῷ κεφ. τῶν προηγ. ὅρων τῆς δ' = $0 + 0 + 0 + 1 + 4 + 10 + 20 = 35$, κτ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ τιμὴ καὶ δύναμις ἀπάντων τῶν ὅρων οὕτω κατὰ νόμους διορίζεται, πᾶς τις ἂν συνίδοι, ὅτι καὶ γενικοὺς τύπους ἀνακαλύψαι δυνάμεθα εἰς εὐχρῆ εὗρεσιν ἐκάστου ὅρου οἰασθῶν σειράς. Καὶ αἱ μὲν ὀριζόντιαι Σειραὶ τῶν προτεθεισῶν σειρῶν τοὺς συνεργοὺς τοῦ Δυνάμειου περιέχουσι. (§. 285.) π. χ. τῇ δ', ὀριζοντείᾳ σειρά ἑνυπάρχουσιν 1, 3, 3, 1. Οὗτοι δὲ καὶ οἱ συνεργοὶ τοῦ $(\alpha + \beta)^3$. τῇ δὲ ε', 1, 5, 10, 10, 5, 1 = τοῖς συνεργοῖς τοῦ $(\alpha + \beta)^5$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἐκ δὲ τῆς θεωρίας τῶν κατὰ καθεστὸν σειρῶν αἱ νόμοι τῶν Συνδυασμῶν, Συντρίσσεύσεων, καὶ τῶν κατὰ τὸ δοκοῦν Συζυγιῶν (§. 338.) ἀποδείκνυνται. περὶ ὧν εἰπεῖν ἄλλης ἂν εἴη Πραγματείας, ἡμῶν ἐν παρόδῳ μόνον τούτων ἐν τῇ παρούσῃ ἀπτομένων.

§. 341. Ἀριθμητικῶν Προόδων προκειμένων, ὧν ἡ τῶν ὅρων διαφορὰ ἢ 1, ἢ 2, ἢ 3, ἢ ὀρισθῶν ἀριθμὸς, διὰ τῆς Προσθέσεως τῶν προηγηθέντων ὅρων τοιαύτης σειράς, ἀναφύεται ὅρος καινός. καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου καὶ Σειρά καινὴ, οὗς Πολυγώνους ἀριθμοὺς καλοῦσι, τοῖς Εἰσχηματισμέναις προσήκοντας ἀριθμοῖς. Ὁ δὲ λόγος τῆς τούτων προσηγορίας, ὅτι ὁ β'. τούτων ὅρος δεικνύει, ὅσας γωνίας Σχήματι Γεωμετρικῶν περιλαμβάνει, καὶ ὅτι πλείους ἂν τούτων ἐνεργεία διὰ τοσαύτων σημείων, ὅσαι τῷ δεδομένῳ τῆς σειράς ὅρῳ αἱ μονάδες, τοιοῦτον σχήματι, ἐξ οὗ καὶ τῇ σειρά τὸ ὄνομα, παρασαίεν.

Παράδ.

Παράδ. Ἐξω ἡ διαφορὰ τῶν ὄρων τῆς α'. ἀριθμ. σειρᾶς ἡ 1.

Αριθμ. Σειρά. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, κτ.

Πολύγωνοι ἀριθμοί. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28

Τούτ. αἰ τῶν ὄρων τῆς προηγηθείσης σειρᾶς προσιθεμένων, ἀνακύπτουσιν ἐκ τούτων οἱ καιροί. Ἐσι γάρ $1 = 1$. $1 + 2 = 3$. $1 + 2 + 3 = 6$. $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, κτ. Καλοῦνται δὲ εἰδικῶς οὗτοι Τρίγωνοι ἀριθμοί. Ὁ β'. ὄρος δείκνυσι τὰς γωνίας τοῦ Τριγώνου τρεῖς εἶναι ἑκάστος οὖν ὄρος ταύτης τῆς σειρᾶς διὰ τῶν σημείων ὡς Τριγώνου παραστήσεται, π. χ. ὁ ὄρος 15. Ἐν τούτῳ, ὡς καὶ πρὸς τῶν λοιπῶν ὄρων, ἡ πληθὺς τῶν ὄρων τῆς α'. σειρᾶς, οἱ ὧν τοῦ κεφαλαίου ὁ παρὼν προέκυψε, τὰ μέρη τῆς πλευρᾶς τοῦ Τριγώνου, ἢ ἐν ταῦθα τὰ σημεῖα παριστᾷ, ἐξ ὧν ἀναγκαίως ἐκάστη πλευρὰ συνίσταται. 15 ἀνέφω τῷ κεφαλαίῳ τῶν 5 ὄρων τῆς προηγ. σειρᾶς. Ἄρα ἡ τούτου πλευρὰ περιέχει δὴπου 5 σημεῖα, οὕτως ἀποδιδόμενα.



28 δὲ τῷ κεφαλαίῳ τῶν 7 ὄρων. Ὡς ἡ πλευρὰ τοῦ Τριγώνου ἐξ 7 σημείων, ὡς παρισταμένων.

Ἐάν οὕτω καὶ τοὺς ὅρους τῆς Ἀριθμητικῆς
 ρᾶς, ὧν ἡ διαφορὰ $= 2$, συγκεφαλαιῶμεν, καὶ
 σειρὰν ποιῶντες, ἀνακύπτουσιν Ἀριθμοὶ Τετ-
 ράγωνοι. Ὁ δὲ β'. τούτων ὅρος αὐθις ἐμφαίνει τὰ
 νίας τοῦ Τετραγώνου, καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὁ-
 ῶν τῇ προσθέσει ἀεὶ καινὸς ὅρος τῆς τῶν πολυ-
 ἀριθμῶν σειρᾶς προέρχεται, τὴν πλευρὰν, ἢ το-
 μεῖα, τὰ ἐκάστη πλευρᾷ τοῦ Τετρ. ἀνήκοντα.

Π. χ. Ἀριθμ. Σειρά. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

Πολύγωνοι ἀριθμοί. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

Ληφθῆτω π. χ. 36 διὰ τῆς προσθέσεως
 ρων συναπαρτισθεῖς, ὅς Τετράγωνον δώσει, οὗ ἡ π-
 ρὰ $= 6$ σημείοις.

Ἐὰν τῆς Ἀριθμ. Σ. ἡ διαφορά = 3 τεθῇ, ἡ τῶν Πολυγώνων ἀριθμῶν σειρά Πενταγώνους ἀριθμοὺς παρίσῃ. π. χ.

Ἀριθμ. Σ. 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, κτ.
Πολύγ. ἀρ. 1 5 12 22 35 51, κτ.

Οὗτοι οὐχ οὕτως καλῶς διὰ σημείων παραστή-
ναι δύνησονται, καίτοι τοῦ κανόνος μὴ ἐξαι-
ρούμενοι. Τῆς δὲ κατὰ τὴν Ἀριθμ. Σ. διαφοράς
= 4 ληφθεῖσης, οἱ Ἐξάγωνοι ἀναφανήσονται
ἀριθμοί, κτ. Εἰ δὲ καὶ τοὺς Πολυγώνους οὕτως ἀν-
λήλαιοι προσθήσομεν, οἱ Πυραμιδοσειδεῖς.

Π. χ. πολύγ. τρίγωνοι 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28
Πυραμιδοσειδεῖς 1 4 10 20 35 56

Τῶν δὲ Πυραμιδοσειδῶν αὖθις οὕτω προσαθροί-
σθέντων, οἱ Πυραμιδοσειδεῖς τῶν ὑπερτέρων τά-
ξεων, κτ. οἷς οἱ ἀρχαιότεροι Ἀριθμητικοὶ ἐνησχολοῦν-
το, Προβλήματα κατὰ τούτους (τοὺς ἀρ.) περτεί-
νουντες, ὧν ἡ ἐπίλυσις ῥαδίᾳ τῷ τὰς ιδιότητας τῶν
ἀριθμῶν μετελθεῖν ἐβόλοντι.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ἀν γένει, καὶ περὶ τῶν Ἑξισώσεων
τοῦ α'. βαθμοῦ, καὶ τῆς τούτων
ἐπιλύσεως.

§. 342. Ἑξίσωσις ἴσιν Ἐκφράσις διά-
φορος τῆς αὐτῆς Ποσότητος, ἥς μεταξὺ τὸ τῆς ἰσό-
τητος τίθεται σημεῖον (=). Ὡς $5 + 7 =$
 $10 + 2$. ἢ $4 \cdot 6 = 3 \cdot 8$, κτ. Ἡς (Ἑξισ.)
δύο αἱ ὅροι, ὁ μὲν ἐξιόθεν, ὁ δ' ἀριστερόθεν τοῦ ση-
μείου κείμενος. Ἐκάτερος δὲ ἦτοι ἀπλοῦς, ἢ συμ-
πλεγμένος. Εἰ οὖν ταύτη τῇ Ἑξίσώσει ἄγνωστος
ἐνυπάρχοι Ποσότης, ὡς $4 \cdot 6 = 3 \cdot \chi$, διὰ τῶν
δοθεισῶν ῥαδίως ἀν εὑρεθείη. Ἀναγκαῖον μέντοι τὴν
Ἑξίσωσιν οὕτω μετατίθεσθαι, ὥς ᾗ ἐκατέρωθεν τοῦ
σημείου τοῖς ἄλλοις ἰσοδυναμεῖν, εἰς ὃ τὸ χ (ἦτοι ἡ
ἄγνωστος ποσότης, ἡ δὲ αὐτοῦ δηλουμένη (§. 42.)
μονωθὲν τὴν ἑαυτοῦ δύναμιν ἡμῖν ὑποδείξῃ. Ἵνα δὲ
τὸ χ μόνον ἐπὶ τάδε, ἢ ἐπ' ἐκεῖνα τοῦ σημείου τῆς
ἰσότητος ὑπολείψῃ, χρῆσθον Προσθήσει, Ἀφαι-
ρέσει, Πολλαπλασιασμῷ, Διαιρέσει, εἰς Δυνάμεις ἑ-
ξάρσει, Ἐξαγωγή τῶν Ριζῶν, Λογαριθμικοῖς, καὶ
παντὸς ἑτέρου εἴδους ὑπολογισμοῖς κατὰ τὴν χρεῖαν,
ὅπερ ὑπὸ τοῦ ὀρθοῦ διδαχθῆσόμεθα λόγου. Ἐπὶ τοῦ
προτεθέντος παραδ. διαιρεθέντων ἀμφοῖν τῶν ἴσων διὰ
3, μόνωθήσεται τὸ χ , (ἐκείνων καὶ μετὰ τοῦτο ἴσων
τηρουμένων (§. 114. α'.)) ἴσων δὲ ταῖς γνωσταῖς ποσό-
τησι, ταῖς ἐπὶ θάτερα τοῦ σημείου. Ἐσαι γάρ

$$4 \times 6 = 3 \cdot \chi$$

$$: 3$$

$$\frac{4 \cdot 6}{3} = \frac{3 \cdot \chi}{3} = \chi. \text{ Ἀλλὰ } \frac{4 \cdot 6}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

$$8 = \chi.$$

§. 343. Προβλήματος δὲ εἰς ἐπίλυσιν προ-
 ου, τὰς αὐτοῦ καταστάσεις, καὶ τὰς ἐν αὐτῷ
 ας, καὶ ἀγνώστους Ποσότητας ὅτι μάλιστα διασκέ-
 ται, καὶ ἐκ τούτων τὴν Ἐξίσωσιν συνιστᾶν χρή-
 ιμες γὰρ τούτων οὐ δίδονται. Χρήσιμος δ' εἰς
 ο καὶ ἡ συνεχὴς ἄσκησις, θήγουσα τὴν διάνοιαν,
 ραδίως τὰ προβαλλόμενα κατανοεῖν, καὶ τὴν ἐκ
 ὄν Ἐξίσωσιν διατάττειν. Πολλάκις δὲ ἡ ἐπίλυ-
 οῦ Προβλήματος καθ' ἑαυτὴν εὐχερετέρα, ἢ ἡ
 ὁρῶν τῆς Ἐξισώσεως διάταξις, ἔνθα προσοχῆς
 ἥς χρεία. Ὅπως δέ, ἡ Ἀλγεβρα χρησμός ἐστιν
 κους, αἶτι μὲν ἀποκρινομένη, ὁρῶς δὲ καὶ ἀπταί
 τῷ οὕτω χρησιμεύον.

§. 344. Καὶ αὐτὰ δὲ τὰ Προβλήματα πολλὰ
 ἡλκον διαφύροντα τυγχάνει. Τοῖς μὲν γὰρ, μία
 μόνῃ ἀγνώστῳ Ποσότητι, τοῖς δὲ, δύο,
 τρις, καὶ ἑτεροῖς ζητούμεναι πλείουσιν
 θεντοὶ ἐπ' ἑκείνων μὲν, καὶ Ἐξισώσεως μιᾶς
 ἰα, ἐπὶ δὲ τούτων, τοσοῦτων, ὅσαι αἱ ζητού-
 αι ἀγνοεῖται, ὥς πάσας (Ἐξισ.) ἐκ τοῦ Προβλή-
 τος ἐπαγαγεῖν δεήσει. Αὐθαί των Προβλημάτων
 μὲν Διωρισμένα, οἷς μοναχῶς ἀπαντῶμεν. Τὰ
 Ἀδιόριστα, ἢ Ἀόριστα, οἷς πολλαχῶς. Περὶ
 (Ἀδιορ.) ὕπερον. Ἦδη δὲ λόγος περὶ των δια-
 μένων, ἔνθα τὸ Πρόβλημα διὰ των κατ' αὐτὸ κα-
 στάσεων οὕτω διορίζεται, ὥς τε τὴν τιμὴν καὶ ὕψος
 ἀγνώστου ποσότητος μίαν εἶναι καὶ μόνην. Κα

B b

Ἐξ

Ἐξίσωσις μὲν τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἀνοῖται, ἐν ἣ ἡ ἀγνωστὸς ποσότης πρώτης τυγχάνει δυνάμεως, οἷον χ, ψ, ω . Ἡ δ' Ἐξίσωσις καταλλήλως διαταχθεῖσα, ἐὰν ἡ ἀγνωστὸς ἐν τῇ β'. ἢ δυνάμει, ὡς χ^2, ψ^2 , κτ., τοῦ δευτέρου βαθμοῦ καλεῖται. Τοῦ δὲ χ , ἡ καὶ ἑτέρων ἀγνώστων εἰς τὴν γ'. ἐξηρημένον δυνάμιν, οἷον χ^3, ψ^3 , κτ. τοῦ τρίτου βαθμοῦ. Ὅλως δὲ, ἡ Ἐξίσωσις ἐκ τῆς δυνάμεως, εἰς τὴν ἢ ἀγνώστην ἡρμηνυ ἀπαντᾷ, προσαγορεύεται. Τούτων δ' εὐχερέστεραι εἰς ἐπιλύσιν αἱ τοῦ α' βαθμοῦ, περὶ ὧν καὶ δὴ ρητέον.

§. 345. Καὶ τούτων αὐθις, (τῶν τοῦ α' βαθμοῦ) αἱ διὰ Προσθέσεως, ἢ Ἀφαιρέσεως μόνης δυνατὸν ἐπιλύειν, αἱ μάλιστα εὐχερεῖς. π. χ. Ἐξω $\chi + \alpha = \beta$ Ἐὰν ἀμφοῖν $+ \alpha$ ἀφαιρεθῇ, ἢ $- \alpha$ προσεθῇ, ἐπὶ θάτερα τοῦ σημείου τοῦ χ μονωθέντος, ἀναφανήσεται ἡ τούτου δύναμις. Ἐπειδὴ γὰρ $\chi + \alpha = \beta$. Ἐσται καὶ (§. 48. α')

$$\chi + \alpha = \beta$$

$$\text{προς. } - \alpha = - \alpha$$

$$\chi = \beta - \alpha$$

Διὰ γὰρ τῆς προσθέσεως τοῦ $- \alpha$, τοῦ τῷ χ συμπεπλεγμένου $+ \alpha$ ὑπ' ἐκείνου ἀναιρεθέντος, μένει

μόνον τὸ χ . Ἡ δὲ πλαγίως ἀγομένη γραμμὴ τὸ Ἄρα σημαίνει.

$$\text{Ὡσαύτως καὶ } \chi - \alpha = \beta$$

$$+ \alpha = \beta \text{ προς.}$$

$$\chi = \beta + \alpha$$

Ἐν ἀριθμοῖς.

$$\begin{array}{r} 4 + \chi = 16 \\ - 4 = - 4 \text{ προς} \\ \hline \chi = 16 - 4 = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Καὶ } \chi - 8 = 15 \\ \text{προς. } + 8 = 8 \\ \hline \chi = 15 + 8 = 23 \end{array}$$

$$\chi = 16 - 4 = 12$$

$$\chi = 15 + 8 = 23$$

§. 346.

346. Ἦπου ἐκάσω, τὰς προκειμένας Ἐξισώσεις, προ ὀφθαλμῶν παριζαται, ἐν, ἵνα ὡς ὑπολειφθῇ, τὴν τούτω προσκειμένην ποσιν προσθέσεις, ἢ Ἀφαιρέσεις ἀπὸ θάτερου ὡς ἀποβάλλωμεν, ἐναντίως ἔχοντι τῷ ση-
θάτερα μετατίθεται ἢ αὐτῇ ποσότης. Ὁ-
ῶν. Ἀπὸ θάτερου ἐπὶ θάτερα τοῦ
ποσότητα μεταθεῖναι βουλόμε-
αλείψας αὐτὴν θές ἐπὶ θάτερα
τῷ τῷ σημείῳ. Οἶον, εἰ Ἐξίσωσις πρό-

$$- \gamma \delta = \beta$$

$$\begin{array}{r} \beta - \alpha + \gamma \delta, \quad \text{ἔσαι} \\ \text{τῶν γνωστῶν ποσο-} \\ \text{τήτων μετ' ἐναντίων} \\ \text{ἑτέροις σημείων εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ σημείου με-} \\ \text{τῶν.} \end{array}$$

347. Τῶν δ' Ἐξισώσεων οὕτως ἔχουσῶν,
ἄγνωστον ἐγνωσμένη ἑτέρα τῷ πολλῷ πλασια-
σμένην εἶναι, δια τῆς διαιρέσεως τὸ γ μονώ-
δ' ἐκάτερα τοῦ τῆς ἰσότητος σημείου τὰ ἴσον
ν. ὡς

$$- \gamma + \delta = 5\alpha$$

$$= 5\alpha + \gamma - \delta$$

$$: \beta$$

$$= 5\alpha + \gamma - \delta$$

$$\beta$$

πράδειγμα. Παῖς τις πρὸς ἑτέρον Φησίν, εἰ-
απλασίῳ τῶν σῶν μῆλα ἔσχον, καὶ 8 πρὸς
εἶεν ἂν τὰ ἐμὰ 60. Ζητεῖται οὖν, πόσα εἶ-

χεν ὁ ἕτερος. Ἐπειδὴ ἀγνοῦσα, τεθήτω $= x$.
 α' ἔφη. εἰ τετραπλασίῳ ἔσχε, καὶ ἔτι 8, εἴεν αὐτοῦ $= 60$. Ὡς ἀνάγκη τέσσαρα x , καὶ 8 εἶναι. Ἐξαι ἄρα ἡ Ἐξίσωσις

$$4x + 8 = 60$$

8 ἐπὶ τὰδε μετεν.

$$4x = 60 - 8 = 52$$

: 4

$$\frac{4x}{4} = \frac{x}{4} = \frac{52}{4}$$

$$x = 13$$

ἡ

$$x = 13$$

Τὰ οὖν τοῦ ἑτέρου

ὁδὸς μῆλα $= 13$. Καὶ γὰρ $13 \cdot 4 + 8 = 60$.

§. 348. Τῶν δὲ ὄρων τῆς Ἐξισώσεως ἢ πάντων, ἢ τινῶν, κλασματικῶν ὄντων, πειρατὴ τῷ πολλαπλασιασμῷ ἀπάντων τῶν ὄρων ἐπὶ πάντων τοὺς τῶν κλασμάτων παρονομασάς, εἰς ὁλοσχερεῖς τοὺς μεταβαλεῖν ἀριθμούς. Καὶ μετὰ τοῦτο γὰρ, ἑκατέρωθι ὄροι τὸ ἴσον τηρήσουσι. (§. 79. α'.) ἢ πάντων τῶν παρονομασῶν ἓνα ποιήσαντες, μετὰ τοῦ τοῦ τῆς Ἐξισώσεως πολλαπλασιασμοῦ ὄρους.

$$\Omega; \quad \frac{\chi}{3} + \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta\delta}{4} = \gamma$$

$$\frac{\chi + \alpha - \frac{3\beta\delta}{4}}{4} = 3\gamma \quad \cdot 3$$

$$4\chi + 4\alpha - 3\beta\delta = 12\gamma$$

$$4\chi = 12\gamma - 4\alpha + 3\beta\delta. \quad (\S. 346.)$$

$$\frac{\quad}{4} : 4$$

$$\chi = 12\gamma - 4\alpha + 3\beta\delta.$$

4

$$\eta \quad \chi = 3\gamma - \alpha + \frac{3\beta\delta}{4}.$$

4

Τὸ αὐτὸ δ' αὖν προκύψει, καὶ ἐὰν ἡ Ἐξίσωσις
ᾧ κοινῶ τῶν κλασμάτων παρονομασῇ, ἥτοι τῷ 36,
πολλαπλασιασθῇ, ἢ τῷ 12. (§. 125. σχολ.)

Τὰ αὐτὰ γενήσεται, καὶ τῆς ἀγνώστου ποσότη-
τος τῷ τοῦ κλάσματος παρονομασῇ ὑπαρχούσης. οἷον

$$\frac{100}{\chi} - 8 = 12$$

$$\frac{\chi}{\chi} \quad \cdot \quad \chi$$

$$100 - 8\chi = 12\chi$$

$$100 = 12\chi + 8\chi = 20\chi \quad : 20$$

$$5 = \chi$$

Ὡσαύτως καὶ τοῦ ἐπομένου παραδείγ. προ-
επιμένου.

$$5\chi + 3$$

$$5x + 3 = 7x - 7$$

$$3 + 7 = 7x - 5x \quad (\S. 346.)$$

$$10 = 2x \cdot \eta \frac{10}{2} = x \cdot \eta 5 = x.$$

Ἐνθα ἐκατέρωθεν τοῦ σημείου, τοῦ κλάσματος ἀποσκευασθέντος τῆς β' Ἐξισώσεως, ἔγκειται ἡ ἀγνώστη ποσότης. Τούτου οὖν καὶ πᾶν ἄλλων οὕτως ἔχοντος, διὰ σπουδῆς ἔχειν χρὴ μετ' ἀντικειμένων σημείων ἐπὶ θάτερα μόνον τὴν ἀγνώστην μεταβιβάσειν. Εἰ δὲ τὸ x ἐν πλείοσιν ὅροις ὁλοσχερῶν ποσοτήτων, τὸ προτεθέν παράδειγμα, ὅπως χωρητέον, διδάξει. τοῦτ. τῶν συνεργῶν τοῦ x ἀριθμῶν ὄντων, προσιθέμεν τούτους ἀλλήλοις, ἢ ἀφαροῦμεν, ὡς ἐνταῦθα. Ἐπὶ γὰρ $7x - 5x = 2x$. Τῆς δ' Ἐξισώσεως καθόλου οὕσης, τοῦτ. μόνον ἐκ γραμμάτων συγκειμένης, τὴν ἀγνώστην ποσότητα, πλείοσιν ὅροις ἐνυπάρχουσαν τῆς αὐτῆς δυνάμεως, ὡς τοῦτο αἰεὶ αἱ τοῦ α'. βαθμοῦ Ἐξισώσεις ἀπαιτοῦσι, γενικὸν παράγοντα ποιητέον. τὰς λοιπὰς δὲ τῷ σημείῳ τῆς Παιενθέσεως ἐναποληπτέον. (§. 78.) Καὶ ἐν γένει, ἐπὶ πασῶν τῶν Ἐξισώσεων τὰς ποσότητας εἰς τοὺς κατ' αὐτὰς παράγοντας ἀναλύειν, καὶ τρόποις ἑτέροις, τὴν εὕρεσιν τῆς ἀγνώστου ἱξυμαρίζουσι, χρῆσθαι, ὅτι χρήσιμον. Ἐξῶ ἢ Ἐξισώσεις,

$$\alpha x + \beta$$

$$\alpha\chi + \beta = \eta\delta - \zeta$$

$$\chi - \gamma$$

$$\alpha\chi + \beta = \eta\delta\chi - \zeta\chi - \gamma\eta\delta + \gamma\zeta.$$

$$\beta = \eta\delta\chi - \alpha\chi - \zeta\chi - \gamma\eta\delta + \gamma\zeta.$$

$$\beta + \gamma\eta\delta - \gamma\zeta = \eta\delta\chi - \alpha\chi - \zeta\chi$$

Εἴθε τὸ χ κοινὸς ὅρος. Ὡς

$$\beta + \gamma\eta\delta - \gamma\zeta = (\eta\delta - \alpha - \zeta) \chi$$

$$\beta + \gamma\eta\delta - \gamma\zeta = \chi \cdot \eta\delta - \alpha - \zeta$$

$$\frac{\beta + \gamma\eta\delta - \gamma\zeta}{\eta\delta - \alpha - \zeta} = \chi \cdot \eta \quad \frac{\beta + (\eta\delta - \zeta)\gamma}{\eta\delta - \alpha - \zeta} = \chi.$$

κλασματικῆς δὲ οὔσης τῆς ἀγνώστου ἐν πλείοσιν ὅροις τῆς Ἐξίσ. τῶν κλασμάτων ἀλλήλοις προσαθροισθέντων, μετὰ τὸ εἰς τὸν αὐτὸν ἀχθῆναι παρονομ. τελεῖται τὰ συνήθη.

Παράδειγμα. Ποιμὴν τις ἐρωτηθεὶς, πόσα πρόβατα ἔχοι; ἀπεκρίνατο τὸ δ'. μέρος τῶν προβάτων ὁ ἐμὸς ποιμαίνει δοῦλος, τὸ ἦ' ὁ ἐμὸς ἀδελφός. τὰ δ' ὑπ' ἐμοῦ ποιμαινόμενα τὸ ἥμισυ παιτῶν, ὧν ἔχω, εἰσὶ προβάτων. Εἰσὶ δ' ἔτι καὶ 4 ἐν τῇ μάνδρᾳ. Ζητεῖται οὖν τὸ κεφάλαιον τῶν αὐτοῦ προβάτων. Ὡς ἀγνοεον ῥηθῇτω χ .

Τούτου

Τούτων ὁ δοῦλος ποιμαίνει τὸ δ'. μέρος. ὡς $\frac{1}{4}\chi$.

ὁ ἀδελφὸς . . . τὸ ἡ'. ἥτοι $\frac{1}{8}\chi$.

αὐτὸς δὲ . . . τὸ ἡμισυ. τοῦτ. $\frac{1}{2}\chi$.

ἐν δὲ τῇ μάνδρᾳ εἰσὶ 40.

Ὡς πάντα εἰσὶ $\frac{1}{4}\chi + \frac{1}{8}\chi + \frac{1}{2}\chi + 40$.
Καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου ταῦτα ἐξισοῦνται τῇ ἀγνώστῃ πο-
σότητι, ἥτοι τῷ χ . Κατὰ τοῦτο οὖν ῥᾶσα τὴν Ἐ.
ξίσωσιν περαινόμεν.

$$\frac{1}{4}\chi + \frac{1}{8}\chi + \frac{1}{2}\chi + 40 = \chi$$

πρόσθες τὰ κλάσμ.

$$\frac{7}{8}\chi + 40 = \chi$$

. 8 ἀποσκευασθῆτω τὸ
κλάσμα διὰ πολλαπλ.
(§. 348.)

$$7\chi + 320 = 8\chi$$

$$320 = 8\chi - 7\chi \quad (§. 346.)$$

$$\text{ἢ}$$

$$320 = \chi$$

Ἔχει τοίνυν 320 πρόβατα. Τούτων ποι-
μαίνει ὁ δοῦλος $\frac{1}{4}\chi = \frac{320}{4} = 80$

ὁ ἀδελφὸς $\frac{1}{8}\chi = \frac{320}{8} = 40$

αὐτὸς δὲ $\frac{1}{2}\chi = \frac{320}{2} = 160$

καὶ 40 ἐν τῇ ποιμνῇ = 40

τὸ κεφ. = 320

§. 349. Ἐνίστε δὲ ἡ τοῦ α'. βαθμοῦ Ἐξίσω-
σις, β'. βαθμοῦ εἶναι δοκεῖ, διὰ τὸ δευτέρας δυνά-
μεως εἶναι τὸ ταύτης χ , καίτοι τινόντι τοῦ α'. οὔσα.
π. χ . ἐπιτοῦδε τοῦ Περσβλήματος, Ζήτησον ἀριθμὸν.

τράγωνος τηλικούτος, ἡλικος ὁ ἀριθμὸς, εἰς

Ἐξω ὁ ἀριθμὸς = χ . Ὡστε
 ὑπόθεσιν. $\chi^2 = 2\chi$.

$$\frac{\chi^2}{\chi} = 2 \quad : \quad \chi$$

Ὁ 2 ἄρα ἐστὶν
 ὁ ἀριθμὸς τοιοῦτος. Ἐστὶ γὰρ $2^2 = 4$.
 $2 = 4$.

αὶ ῥιζικῶν δὲ σημείαν τῇ Ἐξίσωσει προσόπτειν,
 τοῦ α'. βαθμοῦ. Ἀλλ' ἐπὶ τὸ τὸ ῥιζι-
 κὸν σημεῖον, εἰς τὴν εἰς δυνάμει ὕψισιν κα-
 ἐν. π. χ . Ζητησῆτω ἀριθμὸς, οὗ ἀπὸ 1000
 ἔντος τὸ λείψανον ἔξει ῥίζαν Τετραγωνικὴν τὸν
 μὲν. τοῦτ. ἢ Τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ λειψάνου

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔξω = χ . Οὐ-
 ρεσῆτω ἀπὸ 1000, καὶ ἀπὸ τοῦ λειψάνου ἔ-
 ξω ἢ τετρ. ῥίζα. Τὸ δὲ σχῆμα εἴη $\alpha\gamma$
 $(1000 - \chi)$. Καὶ τούτου γεγονότος, ἡ ῥίζα
 $= 16$. Ὡστε προκύπτει ἡ Ἐξίσ.
 $(1000 - \chi) = 16$. Καὶ τῶν ὅρων τῆς Ἐ-
 Τετράγωνον ἀρθέντων, ἐκπίπτει τὸ χ .

$$1000 - \chi = 16 \cdot 16 = 256.$$

$$1000 = 256 + \chi$$

$$1000 - 256 = \chi \quad \text{ἢ} \quad 744 = \chi$$

ἀπὸ 1000 ὁ 744 ἀφαιρεσῆ, ὑπολείπεται λεί-
 ψανον ἀριθμὸς 256, οὗ ἢ τετρ. ῥίζα 16. ἥτοι
 $16 = 16$.

350. Εἰδ' ἡ ἄγνωστος ποσότης, ἥτοι τὸ χ ,
 ἑτέρας πάρεσι ποσότητος, τῆς α'. ὅν καὶ αὐ-
 μεως, τὴν Ἐξίσωσιν ὡς α'. βαθμοῦ θεωρήσαν-
 τες.

τες, διὰ τῶν λογαρίθμων αὐτὴν ἐπιλύσομεν.
 *Ἐστω ἡ Ἐξίσωσις

$$\begin{array}{r} \chi \\ 2 = 512 \\ \hline \end{array}$$

$$\chi \lambda. 2 = \lambda. 515$$

$$\begin{array}{r} \text{ἄρα } \chi = \lambda. 515 \\ \lambda. 2 \end{array}$$

Διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ποσοτήτων, ἔσονται ἴσοι οἱ λογάριθμοι. Ὡς

Καὶ τῶν λογαρίθμων ἐκ τῶν πινάκων ληφθέντων,

$$\chi = \frac{2,7092700}{0,3010300}$$

Τῶν δ' ὅρων ἀμφοῖν κλάσμ. τῷ 10 πολλαπλασιασθέντων, προκύπτει

$$\text{πραγόμενον} = \frac{27092700}{3010300} = 9. \text{ Ὡς } \chi =$$

$$\text{Καὶ } 2^{\chi} = 2^9 = 512.$$

$$\text{*Ἐστω δεδομένον. } 5 \cdot 3^{2\chi} - 100 = 305$$

$$\frac{3^{2\chi} - 20 = 61}{: 5 \text{ πάντα ὅροι}}$$

$$3^{2\chi} = 61 + 20 = 81$$

$$2\chi \Lambda. 3 = \Lambda. 81$$

$$\frac{ : \Lambda 3}{: \Lambda 3}$$

$$2\chi = \Lambda. 81$$

$$\Lambda 3$$

$$\frac{ : 2}{: 2}$$

$$\chi = \Lambda. 81$$

$$2 \cdot \Lambda. 3$$

Καὶ τοὺς λογαρίθμους ζητήσαντες, ἔσται

$$\chi = \frac{1,9081850}{0,4771212 \cdot 2} = \frac{1,9084850}{0,9542424} \cdot 10 = 19084850 = 2 = \chi. \text{ Τὸ δ' ὑπολειπόμενον } 9542424$$

λείψ. 2 μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν προῆλθεν ἐκ τοῦ τὸν ἑσχατον ἀριθμὸν τοῦ Α. 3 μὴ εἶναι ἀκριβῆ, ὅς μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν κυρίως 5 ὤφειλεν εἶναι,

Παραδείγματα γυμνασίας χάριν.

§. 351. Α'. Δίελε 30 εἰς δύο μέρη, ὥστε τὸ μείζον τούτων 8 μονάσι τοῦ ἐλάσσονος πλεονεκτεῖν.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἄμφω τὰ μέρη ἄγνωστα, ἔστω τὸ μείζον = χ . Ἐπεὶ δὲ τὸ μείζον, κατὰ τὴν ὑπόθ. ὀκτὼ μονάσι τοῦ ἐλάσσονος ὑπερτερεῖ, ἀνάγκη πᾶσα τὸ ἔλαττον 8 μονάσι τοῦ μείζ. ἐλαττοῦσθαι, ἦτοι τοῦ χ . Ὡστε τὸ ἔλαττον = $\chi - 8$. Ἐξ ἀμφοῖν οὖν, τοῦ χ , καὶ $\chi - 8$ συνίσταται ὁ 30 ἀριθμός. ἄμφω γάρ ᾧμα 30 ἔσονται. Ὡστε παρὰ πόδας καὶ ἡ Ἐξίσωσις, δι' ἧς τοῦ χ , ἦτοι τοῦ μείζ. μέρους εὐρεθέντος, γνωσθήσεται καὶ τὸ ἔλαττον, ἦτοι τὸ $\chi - 8$. Ἐνθεντοι

$$\chi + \chi - 8 = 30$$

$$\chi + \chi = 30 + 8$$

$$2\chi = 38$$

$$\chi = \frac{38}{2} = 19$$

$$\chi = \frac{38}{2} = 19 = \text{τῷ μείζονι μέ-}$$

ρει. Τὸ δ' ἔλαττον $\chi - 8 = 19 - 8 = 11$.

Καὶ $19 + 11 = 30$. Καὶ ἐν γένει. Δίελε α εἰς δύο μέρη, ὥστε τὸ ἕτερον τούτων μείζον τοῦ ἑτέρου κα-

τὰ τὸ γ εἶναι. Καὶ τοῦτου εἴη ἂν τὸ μὲν χ
τὸ δ' ἔλαττον $\chi - \gamma$.

$$\text{Καὶ } \chi + \chi - \gamma = \alpha$$

$$\underline{2\chi = \alpha + \gamma}$$

$$\chi = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Ἐπειδὴ ο

ται τὸ μείζον, ῥᾶσα ὁρίζεται καὶ τὸ
ἴσι γάρ $= \frac{\alpha + \gamma - \gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$

(§. 133.) $= \frac{\alpha + \gamma - 2\gamma}{2} = \frac{\alpha - \gamma}{2}$.

§. 352. Β'. Μῦθος. Ὅτε κατὰ τοῦ
πείους χρόνους τὰ ζῶα ὁμόφωνα ἦν τοῖς ἀν-
θρώποις, πιλῶς ὄρνιθας γεωργοῦ καταφαγε-
λος ὑπ' αὐτοῦ συνελήφθη. Μέλλουσα οὖν ἀ-
φθίσεσθαι, ἔδειτο αὐτοῦ ἀφεθῆναι. οὐδὲ γάρ
ὄρνιθας καταφαγεῖν. Τοῦ δὲ, ὅσας, πυ-
λὸν ἀπεκρίνατο, οἷς τοσοῦτους ἀλεκτρυόνας, ὅσας ὁ
ἀπεκτονέναι, λέγουσα· εἰ ἕκαστος ἀλεκτρυὼν 2
ἐκάσῃ δὲ ὄρνις 6 ὑπ' ἐμοῦ ἀπημπωλήθη, ἔσχα-
τη 100 θαλήρους. Ἐχω μέντοι τούτους, καὶ
τοὺς χαρίζομένη, ἀντὶ τούτων σωτηρίας τυχα-
μαι. Πόσους τοίνυν ἀλεκτρυόνας, καὶ ὄρνιθας
λίωπῃς κατεβεβρώκει;

Λύσις. Ἐπειδὴ δις τοσοῦτους ἀλεκτρυό-
νας ἀπέκτεινεν, ὁ μὲν τῶν ἀλεκτρυόνων
ἔσχατη $= \chi$. ὁ δὲ τῶν ὄρνιθων, ἅτε τὸ ἡμί-
κτον $= \frac{1}{2}\chi$, ἢ $\frac{\chi}{2}$ (§. 104, σχ.) Εἰ τοίνυν

νόνα 2 λεπτῶν ἀπεδέδοτο, εἴεν ἂν τὰ λεπτά
εἰ ἐκάστην ὕρνωσα 6, εἴεν ἂν χ . 6 τὰ

$$\frac{6\chi}{2} = 3\chi \text{ λεπ.} \quad \text{"Ἀμφω αἱ τιμαὶ 100}$$

ἴσῃ Σαλήρους = 28800 λεπτοῖς. Ἐξ
ἴσως.

$$+ 3\chi \text{ λεπ.} = 28000 \text{ λεπ.}$$

$$\frac{\quad}{\quad} \text{ πρόσθετες } \chi$$

$$= 28800$$

$$= \frac{28800}{5} = 5760.$$

σημαίνει τοὺς ἀλεκτρούνας· ἀπέκτεινεν ἄρα
5760 ἀλεκτ. καὶ $\frac{\chi}{2} = \frac{5760}{2} = 2880$

353. Γ'. Πατήρτις ἀποθνήσκων οὕτω
ἵς υἱοῦς τὴν ἑαυτοῦ χρηματικὴν περιουσίαν
πρὸς ἀλλήλους ἠθέλησε. τὸν μὲν α'. τὸ ἡμι-
κληρονομίας κομίσασθαι, πλὴν 1000 Σαλή-
δὲ β'. τὸ τριτημόριον αὐτῆς, πλὴν 800 Σ.
τὸ τεταρτημόριον, πλὴν 600 Σ. Ζητεῖται
κληρονομία, καὶ ἡ ἐκάστου μερίς.

ἵς. Τεθῆτω ἡ περιουσία = χ . Ὁ α'.
ζέται $\frac{\chi}{2} - 1000$. Ὁ β'. $\frac{\chi}{3} - 800$.

$\frac{\chi}{4} - 600$. Αἱ δὲ τρεῖς αὗται μερίδες ἴσαι

περιουσία τῇ πατρικῇ = χ . Ὅθεν ἡ

$$\chi - 1000$$

$$\frac{x}{2} - 1000 + \frac{x}{3} - 800 + \frac{x}{4} - 600 = x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 1000 - 800 - 600 = x$$

$$\frac{13}{12}x - 2400 = x.$$

$$13x - 2400 \cdot 12 = 12x$$

$$13x - 12x = 2400 \cdot 12$$

$$x = 2400 \cdot 12 = 28800 = \text{πάση τῇ κληρονομίᾳ. ἐξ ἧς ὁ α' ἐκομίσασατο } \frac{x}{2} - 1000 = \frac{28800}{2}$$

$$- 1000 = 13400 \text{ δαλ.}$$

$$\text{Ὁ β' } \frac{x}{3} - 800 = \frac{28800}{3} - 800 = 8800.$$

$$\text{Ὁ γ' } \frac{x}{4} - 600 = \frac{28800}{4} - 600 = 6600$$

§. 354. Δ'. Δίλε 50 δαλ. εἰς 10 μέρη, ὥς ᾧ ἐκάστων μέρος μείζον εἶναι τοῦ ἑτέρου θαλήρου. Ὁ ποῖον τὸ ἐλάχιστον μέρος, καὶ ἕκαστον τῶν μερῶν; Λύσις. Ἐξω τὸ ἐλάχιστον = x . τὸ ἄρα τούτῳ ἀμέσως ἐπόμενον, τὸ μονάδι αὐτοῦ μείζον = $x + 1$. τὸ δὲ τούτῳ, $x + 2$, κτ'. Τοῦτο δὲ Ἀριθμητ. Προόδου ἡμῖν παρέχει, ἐκ 10 ὄρων. Καὶ ἐπεὶ ὁ ἔσχατος ὅρος ἐκάστης Ἀριθμ. Πρ. ἐν γένει = $a + (\pi - 1)\delta$. §. 224. Ἐνταῦθα δὲ a , ἢ ὁ α'. ὅρος = x , ἢ πληθὺς τῶν ὄρων = $\pi = 10$, καὶ δ , ἢ ἡ διαφορὰ = 1. Ἔσται ὁ ἔσχατος ὅρος, $x + 10 - 1$, ἢ $x + 9$. Ὡς τὸ ὀλίγον κεφάλ. τῆς Προόδου, ὅπερ εὑρίσκεται. (§. 226.) ἐάν ὁ α'. καὶ ἔσχατος ὅρος προσαθροισθῇ.

τες τῇ ἡμισείᾳ πληθύνει τῶν ὥρων πολλαπλασιασθῶσιν,
ἔσαι $(\chi + \chi + 9) \cdot 5 = (2\chi + 9) \cdot 5 =$
 $1 \chi + 45$. Ὁ κατὰ τὴν ὑπόθ. $= 50$. πάντες
γὰρ οἱ ὥροι τοὺς 50 συμπληροῦσι θαλ.

Ἡ οὖν Ἐξίσωσις

$$10\chi + 45 = 50$$

$$10\chi = 50 - 45 = 5$$

$$\chi = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Τὸ α'. τοίνυν μέρας
 $\frac{1}{2}$ θαλ. τυγχάνει· τὰ δὲ λοιπὰ χωροῦσι κατὰ τὴν ἐξῆς
ταξίν. $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$,
 $9\frac{1}{2} = 50$.

§. 355. Ε'. Τρεῖς μύλοι ἀλήθουσιν, ὁ μὲν α'.
ἐν 2 ὥραις ὁ σίτου μεδίμνους ὁ δὲ β'. ἐν 3 ὥρ. 5 μεδ.
Ὁ δὲ γ'. ἐν 4 ὥρ. 3 μεδ. Ἐὰν οὖν ἅμα τοῦ ἀλήθουν
ἄρξωνται, Ζητεῖται, ἐν πόσαις ὥραις ἀλεσθῆσονται
130 μεδίμνοι, καὶ πόσους μεδ. ἕκαστος ἀλήσει;

Λύσις. Αἱ ἄγνωστοι ὥραι τεθῆτωσαν $= \chi$. πό-
σους δὲ μεδ. ἕκαστος μύλος ἀλήσει ἐν χ ὥραις, εὐρήσομεν
διὰ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου. (§. 248.)

$$2 \text{ ὥραι} : 6 \text{ μεδ.} = \chi \text{ ὥραι} : \frac{6\chi}{2} = 3\chi \text{ μεδ.}$$

τοσοῦτους ἀλήσει ὁ α'.

$$\text{Λύσις. } 3 \text{ ὥραι} : 5 \text{ μεδ.} = \chi \text{ ὥραι} : \frac{5\chi}{3} \text{ μεδ.}$$

τοσο. ἀλ. ὁ β'.

$$\text{Καὶ } 4 \text{ ὥραι} : 3 \text{ μεδ.} = \chi \text{ ὥραι} : \frac{3\chi}{4} \text{ μεδ.}$$

τοσοῦτους ἀλήσει ὁ γ'.

ἅπαντες

ἅπαντες δὲ οἱ μέδ. οἱ ὑπὸ τῶν τριῶν ἐν χ ὥραι
σφισσόμενοι ἴσοι 130 μεδ.

Ἔσθεν ἢ Ἐξίσουσιν.

$$3\chi + \frac{2}{3}\chi + \frac{1}{4}\chi = 130$$

$$3\chi + \frac{20}{12}\chi = 130 \quad \text{τὰ κλάσμ. προ-} \\ \text{τὴν αὐτὴν παρνομ.,}$$

$$36\chi + 20\chi = 1560. \quad \text{ἢ} \quad 65\chi = 1560$$

$$\chi = \frac{1560}{65} = 24. \quad \text{Ὡς 24 ὥρων χρεία,}$$

τοὺς τρεῖς μύλους τοὺς 130 μεδ. ἀλῆσαι.

Ἐπεὶ οὖν τὸ χ γνωστὸν, τὸ τὰς ὥρας δι-
γνωστὸν καὶ τὸ, πόσους ἕκαστος μεδ. ἀλῆσει ἐν 24
ἡμέραις ἀρχόμενοι, καὶ ἡμέρας παυόμενοι. Ἦτοι

Ὁ μὲν α'. $3\chi = 3 \cdot 24 = 72$ μεδ.

Ὁ δὲ β'. $\frac{2}{3}\chi = \frac{2}{3} \cdot 24 = 40$ μεδ.

Ὁ δὲ γ'. $\frac{1}{4}\chi = \frac{1}{4} \cdot 24 = 18$ μεδ.

$$\text{τὸ κεφάλ.} = 130 \text{ μεδ.}$$

Ἐπὶ τούτου τοῦ παραδ. προαποτεῖται ἡ τῶν
Τριῶν Μεθόδου γνωσις, δι᾽ ἧς καὶ ἡ Ἐξίσουσιν
ταῖον συνάγεται, εἰς εὐρεσιν τῶν ἀγνώστων ποσο-
τῶν. Τὸ δὲ Πρόβλημα καὶ ἀνάπαλιν ἔχει προβάλλει
τοῦτ'· δοθείσων τῶν ὥρων, εὐρεῖν τοὺς μεδί-
τους ὑπὸ τῶν τριῶν μύλων ἐν τοσαύτοις ὥραις
σφισσόμενους, οὗ ἢ ἐπίλυσις κατὰ τὸν αὐτὸν γ-
νῶστον τρόπον. Καὶ τῶν μύλων πλειόνων ὄντων, ῥαδι-
αὐθις αἱ ὥραι, καὶ οἱ μέδιμοι εὐρεθίεν.

Δύναται δὲ καὶ καθόλου προτεθῆναι.
μύλων ὁ μὲν α'. ἀλῆθαι ἐν α ὥραις β μεδ. ὁ δὲ β
ὥραις δ μεδ. ὁ δὲ γ'. ἐν ε ὥρ. ζ μεδ. Ἐν πόσαις
ἡμέραις

η μεθίμνους; Τεθεισῶν κἀνταῦθα τῶν ὠ.
 , συνάξομεν

$$\text{ραι} : \beta \text{ μεδ.} = \chi \text{ ὠραι} : \frac{\beta \chi}{\alpha} \text{ μεδ.}$$

$$\text{ὠραι} : \delta \text{ μεδ.} = \chi \text{ ὠραι} : \frac{\delta \chi}{\gamma} \text{ μεδ.}$$

$$\text{ὠραι} : \zeta \text{ μεδ.} = \chi \text{ ὠραι} : \frac{\zeta \chi}{\epsilon} \text{ μεδ.}$$

$$\frac{\beta \chi}{\alpha} + \frac{\delta \chi}{\gamma} + \frac{\zeta \chi}{\epsilon} = \eta$$

$$\beta \chi + \frac{\alpha \delta \chi}{\gamma} + \frac{\alpha \zeta \chi}{\epsilon} = \alpha \eta$$

$$\gamma \beta \chi + \alpha \delta \chi + \frac{\alpha \gamma \zeta \chi}{\epsilon} = \alpha \gamma \eta$$

$$\gamma \epsilon \beta \chi + \alpha \epsilon \delta \chi + \alpha \gamma \zeta \chi = \alpha \gamma \eta \epsilon$$

$$(\gamma \epsilon \beta + \alpha \epsilon \delta + \alpha \gamma \zeta) \chi = \alpha \gamma \eta \epsilon$$

$$\chi = \frac{\alpha \gamma \eta \epsilon}{\gamma \epsilon \beta + \alpha \epsilon \delta + \alpha \gamma \zeta}$$

ὅν ἐν γένει τὸ χ. Τῶν δὲ γραμμάτων, κατὰ
 παράδ. διορισθέντων, ἔσαι α = 2. β = 6.
 , δ = 5. ε = 4. ζ = 3, καὶ η = 130.

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 130 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{3120}{72 + 40 + 18} = 24.$$

Εὐφραρισθεὶς δὲ τὸ πᾶσι ἐν γενεῇ, καὶ ἐὰν διαφω-
 ρα πράγματα ἐν διαφόρῳ χρόνῳ διάφορα παράγω-
 ῖς ἀποτελέσματα, καὶ εἶδεναι βουλούμεθα τὸ παρὰ γό-
 μιστον συνάμα ἐκείνων ἐνεργούσαν. π. χ. Τριῶν οἰ-
 κοδόμων ὃ μὲν ἐν 1 ἡμέρᾳ ὁ κυβικὸς οἰκοδομεῖ πόδας,
 ὃ δ' ἕτερος ἐν 2 ἡμ. ὁ κυβ. πόδ. ὃ δὲ γ' ἐν 3 ἡμ.
 14 κυβ. πόσον χρόνον οἰκοδομήσουσιν 180 κυβ. πό-
 δας, συνάμα ἐργαζόμενοι;

$$\text{Κατὰ τὸν τύπον ἔστι } \chi = \frac{\alpha\gamma\eta\epsilon}{\gamma\epsilon\beta + \alpha\epsilon\delta + \alpha\gamma\zeta}$$

$$\alpha = 1. \beta = 6. \gamma = 2. \delta = 9. \epsilon = 3. \\ \zeta = 14. \eta = 180. \text{ καὶ } \chi =$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 180 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 9 + 1 \cdot 2 \cdot 14} = \frac{1080}{36 + 27 + 28} \\ \frac{1080}{91} = 11 \frac{89}{91} \text{ ἡμ. σχεδὸν } = 11 \frac{8}{9} \text{ ἡμ.}$$

91

§. 356. Ζ'. Ἐργάτας τις μισθωσάμενος,
 τὸν μισθὸν αὐτοῖς τελέσειν μέλλων, οὐχ ἱκανῶς ἔχει
 χρημάτων, εἰς τὸ ἐκάσῳ ἴσον μισθὸν ἀποδοῦναι. Εἰ
 μὲν γὰρ ἕκαστος παρ' αὐτοῦ 6 θαλήρους λάβοι, τὸν
 ὁμολογηθέντα μισθὸν, ἐνδεὶς αὐτῷ (τῷ μισθωσαμένῳ)
 ἔτι 20 θαλήρων. Εἰδὲ 4, ὑπολείπονται αὐτῷ ἔτι 12.
 Ζητεῖται, πόσα τὰ χρήματα, καὶ πόσοι οἱ ἐρ-
 γάται;

Λύσις. Ἐξω τῶν ἐργατιῶν ὁ ἀριθμὸς = χ .
 Ἐπειδὴ οὖν ἐκάσῳ 6 θαλ. ὀφείλει ὁ ταύτους μισθω-
 σάμ. εἴη ἂν τὸ ὅλινον κεφάλαιον τῶν καταβληθησο-
 μένων χρημάτων ἴσον τῷ ἀριθμῷ τῶν ἐργατιῶν, πολ-
 λαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν θαλ. τῶν ἐκάσῳ
 ὀφειλομένων, τοῦτ' = 6χ . ἀλλ' εἰ ἕκαστος 6 θαλ.
 λήψεται, κατὰ τὴν ὑπόθ. δεήσει τῷ μισθωσ. ἔτι
 20 θαλ. τοῦτ' ἔχει $6\chi - 10\text{ θαλ.}$ Βούλεται δ' ἐ-
 κάσῳ θαλ. 4 δοῦναι, ὥς περ πάνσιν ἅμα 4χ . Ἵπο-

λείπον

αὐτῷ ἔτι 12. Ὡς ἔχει ἐνεργείᾳ $4\chi + 12$
 Προέκυψαν οὖν οὕτω δύο τιμαὶ τῶν αὐτοῦ
 ἴσαι ἀλλήλαις ἀσγκαίως οὖσαι, ὡς ἄμφω
 α. Ἐξ ὧν Ἐξίσωσις συνίσταται, τὸ χ

$$6\chi - 20 = 4\chi + 12$$

$$6\chi - 4\chi - 20 = 12 \quad (\S. 346.)$$

$$2\chi - 20 = 12$$

$$2\chi = 12 + 20 = 32$$

$$\chi = \frac{32}{2} = 16 = \text{τοῖς ἐργάταις.}$$

καὶ τὰ χρήματα εὐρεθῆναι, ἀντικαταστήτω
 τῶν πρώτων τιμῶν τὸ εὐρεθὲν ἀντὶ τοῦ χ .
 οὐ $4\chi + 12$. Ἐπειδὴ $\chi = 16$, ἔσαι
 $= 4 \cdot 16 + 12 = 64 + 12 = 76 = \text{τοῖς}$
 Ἐπεὶ δὲ τὰ ὀφειλόμενα $6\chi = 6 \cdot 16 = 96$
 ζάνουσιν, εἰκότως ἄρα 20 δραλ. αὐτῷ

γενεῖ δὲ καὶ τοῦτο ἐπιλύσαι δυνατόν. Εἰ
 αὐτῶν ἀριθμῷ α δραλ. δοῦναι βουλόμενος,
 χρειαν ἔχει, καὶ διὰ τοῦτο δίδωσιν αὐτοῖς γ
 πομένων αὐτῷ καὶ δ δραλ. κατὰ ταῦτα ἂν εἴη

$$= \gamma\chi + \delta$$

$$= \beta + \delta \quad \begin{array}{l} \text{μετενεχθ. αἰ γνωσθαὶ ἐτέρωσε,} \\ \text{ὡς αὐτῶς καὶ αἱ ἄγνωστοι} \end{array}$$

$$= \beta + \delta$$

$$= \frac{\beta + \delta}{\alpha - \gamma}$$

9. 357. Η. Εκ οὗτω εἰδωνοῖνον, τοῦ μὲν ἀρίστου ὁ ξέσης 15 ὀβολῶν τιμᾶται, τοῦ δὲ κακίστου 10. Ἐθέλει οὖν τις τούτους κεράσαι, καὶ τῶν δύο εἰδῶν ἓνα ξέην ποιῆσαι, 12 ὀβολῶν τιμώμενον. Πόσον λήψεται ἐξ ἑκατέρου;

Λύσις. Λαβέτω ἀπὸ μὲν τοῦ κακίστου τὸ μέρος χ , ὅπερ (χ) κλάσμα τοῦ ξέσου τυγχάνει, ὡς ἔλαττον τοῦ ξέσου εἶναι κατὰ τὴν ὑπόθ. ὀφείλου. ἀπὸ τοῦ ἀρίστου ἄρα εἰς συμπλήρωσιν τοῦ ξέσου $1 - \chi$. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ ὅλου τοῦ ξέσου ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ τοῦ κακίστου οἴνου ληφθέν, ἦτοι τὸ χ , λειπούμενον ἔτι καὶ τὸ τοῦ ἀρίστου μέρος. τούτ. ἀπὸ μὲν τοῦ κακ. $= \chi$ ἀπὸ δὲ τοῦ ἀρ. $= 1 - \chi$. Ὁ ξέσης τοῦ κακ. τιμᾶται 10. ὥσε τὸ μέρος χ , $10 \cdot \chi$. τοῦ δ' ἀρίστου 15 ὀβολῶν ὥσε τὸ μέρος $1 - \chi$ τιμηθήσεται $(1 - \chi) \cdot 15 = 15 - 15\chi$. Ἐνθεντοι ὁλόκως ὁ ξέσης τιμᾶται $10 \cdot \chi + 15 - 15\chi$. τοῦτο δὲ κατὰ τὴν ὑπόθ. εἶναι ὀφείλει $= 12$. Ἐκ τούτου εὐρήσομεν τὸ χ . Ἡ δ' Ἐξίσωσις ἔσαι

$$10\chi - 15\chi + 15 = 12$$

$$15 - 12 = 15\chi = 10\chi$$

3 = 5χ . Καὶ $\chi = \frac{3}{5}$. Ἦτοι ἀπὸ μὲν τοῦ κακίστου λήψεται $\frac{3}{5}$, καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου ἀπὸ τοῦ ἀρίστου $\frac{2}{5}$. Ἐστὶ γὰρ $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$. Ἀπὸ τοῦ ξέσου καὶ ἕτερον μέτρον ἀν παραληφθεῖν.

Εἰ οὖν ὁ ξέσης τοῦ κακίστου 10 τιμᾶται ὀβολῶν, $\frac{3}{5}$ τοῦ ξέσου τιμηθήσονται $\frac{3}{5} \cdot 10 = 6$ ὀβ., τοῦ δὲ

ἀρίστου

$\beta, \frac{1}{3} \xi$. τιμ. $\frac{2}{5} \cdot 15 = 6$ ὀβ. Ὡστε

$12 = \frac{5}{5}$ τῇ τιμῇ τοῦ κραθέντος οἴνου.

γίνει. Ἐσὼ μικτέα δύο τινα, ὧν ἡ τιμὴ εἰς τρίτοντι. Καὶ τοῦ μὲν ἡ τιμὴ κείνου τοῦ δ' ἑτέρου $= \beta$, τοῦ δ' ἐκ τῆς μέτρων $= \gamma$. Ὡστε κἀνταῦθα ἡ μὲν τοῦ εἰρη τοῦ αχ, ἡ δὲ τοῦ ἀρίστου τὸ $(1 - \chi)\beta$ χ. Ἀμφω δὲ $= \gamma$.

$$\alpha + \beta - \beta\chi = \gamma$$

$$\alpha - \beta\chi = \gamma - \beta$$

$$\alpha - \beta)\chi = \gamma - \beta$$

$$\chi = \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}$$

$$\alpha - \beta$$

Ὅτι ἐστὶν ὁ γενικὸς τύπος τῆς Μεθόδου διαφόρων εἰς ἓν, χρησίμος ὧν παντοῦ, χρυσοῦ, ἀργύρου, κτ.

3. Θ'. Α ————— Γ. Ὁδοιπέ-
του Α ἀποδημήσας ἐπὶ τὸ Γ πορεύεται.
τοῦ Α ἀπέχον, 6 μίλλια καθ' ἑκάστην δια-
Μετὰ δὲ 4 ἡμέρας, ἕτερος ἱππάζων ἀ-
αὐτῷ ἔπεται, 10 μίλλια ἑκάστης διανύων
τεῖ μαθεῖν, ἐν πόσῃς αὐτὸν καταλήψε-

Καπὶ τούτου ἡ τιμὴ Τριῶν Μεθόδος ἀ-
ρῶσαν αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς αὐτὸν ὁ β'.
 $= \chi$. ὁ δὲ ἀπὸ πρὸ δ' ἡμ. ἀποδημήσας,
τῆς ἡμέρας διανύων, ἥδη $4 \cdot 6 = 24$
ὑπερέγει. Ἐν γ' ἡμ. ἐν αἷς αὐτὸν ὁ β'.

καταλήφεται, ἔχεται τῆς οἴου. 6 μιλ. ὁσημέραι διανύον. ἐν χ ἄρα ἡμέρας ὁδοιπορήσει ὁ χ μιλ. Ὅτι 1 ἡμέρα : χ μιλ. = χ ἡμ. : 6 χ μιλ. Ὡς ἡ ὁλικὴ ὁδοιπορία τοῦ α'. πρὶν καταληφθῇ, εἰν 24 + 6 χ μιλ. Ὁ β'. ὁσημέραι ἱππάζεται 10 μιλ. ἔνθεντοι ἐν χ ἡμ. 10 χ μιλ. Καὶ ἐπειδὴ μετὰ τοῦτο τὸν α'. κατὰλήφεται, τὰ διαστήματα, τὰ ὑπ' ἀμφοῖν διανυσθέντα, ἔξ ἀνάγκης ἔσαι ἴσα.

$$\text{ἦτοι} \quad 24 + 6\chi = 10\chi$$

$$24 = 10\chi - 6\chi = 4\chi$$

$$\frac{24}{4} = \chi \quad \eta \quad 6 = \chi \quad \text{Ἐν 6}$$

ἄρα ἡμ. καταληφθήσεται ὁ α'. Ὡς καὶ τὸ διάστημα τὸ διανυσθὲν ἔσαι = 60 μιλίοις.

Ἐὰν αἱ ὁσημέραι ὁδοιπορίαι τοῦ α'. ὁδοιπόρου = α κληθῶσι. τοῦ β'. = β . ὁ χρόνος, κατ' ὃν ὁ α'. προεπορεύθη = γ . ἔσαι τοῦ α'. τὸ διανυσθὲν διάστημα α'. = $\alpha\gamma$, καὶ β'. ἔτι $\alpha\chi$. ὅτι γ ἡμέρας προῶδευσε, καὶ χ ἡμέρας ὁδεύει ἔτι. Τηνικαῦτα οὖν τοῦ β'. τὸ διάσ. ἔσαι = $\beta\chi$. Καὶ ἐπεὶ ἀμφοῖν τὰ διανυσθ. διαστήματα ἴσα, ἔσαι $\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta\chi$

$$\alpha\gamma = \beta\chi - \alpha\chi = (\beta - \alpha)\chi$$

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta - \alpha} = \chi = \tau\omega \text{ χρόνῳ, ἐν}$$

ᾧ τὸν α'. αὖν καταλάβοι.

Ἀλλὰ θῶμεν τὸν χρόνον, ἐν ᾧ ἐκεῖνον καταλήφεται, διωρισμένον, ἦτοι τὸ χ δεδομένον εἶναι, καὶ ζητεῖσθαι, πόσα μίλλια τὸν β'. ὁσημέραι διανύειν χρή, ἵνα τὸν α'. καταλάβῃ. Ἐπειδὴ οὖν χ γνωτὸν, καὶ

β ζῇ

β ζητεῖται, ῥᾶσα διὰ τῆς ἐξῆς εὐρεθήσεται Ἐξι-
σώσεως.

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta - \alpha} = \chi$$

$$\frac{\alpha\gamma - \beta\chi - \alpha\chi}{\beta - \alpha} = \beta - \alpha$$

$$\alpha\gamma - \beta\chi - \alpha\chi$$

$$\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta\chi$$

$$\eta \quad \frac{(\gamma + \chi) \alpha = \beta\chi}{(\gamma + \chi) \alpha = \beta} : \chi$$

$$\frac{\chi}{\chi}$$

$$\eta \text{ καὶ, ἐπειδὴ} \quad \frac{\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta\chi}{\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta} : \chi$$

$$\frac{\chi}{\chi}$$

$$\frac{\alpha\gamma + \alpha = \beta}{\chi}$$

Ἐνθεντοι ἐν τῷ προτέρῳ παραδείγμ. ἐνθα $\alpha = 6$.
 $\gamma = 4$. καὶ $\chi = 6$. β ἔσαι, ἡ πορεία τοῦ β'.
 ἡ ζητούμενη. ἦτις, τοῦ ὑπολογισμοῦ ἀκριβοῦς ὄντος,
 $= 10$ ἔσαι. Ἀλλὰ $\frac{\alpha\gamma}{\chi} + \alpha = \frac{6 \cdot 4}{6} +$
 $6 = 10$.

§. 359. Γ'. Ἄνθρωπός τις 100 χρυσοῦς καὶ ἔ-
 κασον δαπανῶν ἐν αὐτῷ, κερδαίνει τοσοῦτον, ὥστε
 τὴν λοιπὴν αὐτοῦ περιουσίαν κατὰ τὸ τρίτον ἐπαύξει.
 Μετὰ δὲ τρεῖς ἐνιαυτοὺς δις τοσοῦτον πλούσιος, ὅσον

ἐν ἀρχῇ ἦν, ἀναφαίνεται. Πόσους οὖν χρυσοὺς κα-
τ' ἀρχὰς ἐσχέκει, καὶ πόσους ἤδη;

Λύσις. Τεθῆτω ἡ ἐν ἀρχῇ αὐτοῦ περιουσία
= x χρυσ. ἀφ' ἧν 100 λαμβάνει ἐν τῷ πρώτῳ ἐ-
νιαυτῷ. Ἔχει οὖν ἔτι $x - 100$. Αὖξει δὲ τὸ
λείψανον τοῦτο κατὰ τὸ τρίτημόριον. Τὸ δὲ γ : μό-
ριον τοῦ $x - 100 = \frac{x - 100}{3}$. Ἔχει ἄρα με-

τὰ τὸν α'. ἐνιαυτὸν $x - 100 + \frac{x - 100}{3}$.

Ἄ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀχθέντα παρῶσι : =
 $3x - 300 + \frac{x - 100}{3} = 4x - 400$.

Ἐκ τούτων λαμβάνει ἐν ἀρχῇ τοῦ β'. ἐνιαυτοῦ αὖ-
θις 100 χρυσοὺς. Ὑπολείπονται δ' αὐτῷ ἐπὶ
 $4x - 400 - 100$. Καὶ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀχθ.

παρῶν. = $\frac{4x - 400 - 100}{3} = \frac{4x - 500}{3}$.

Αὖξεται δὲ τοῦτο ἔτι κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$. Τὸ τρίτον μέρος
τούτου ἐστὶ $\frac{4x - 500}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4x - 500}{9}$. Ἐν

τέλει ἄρα τοῦ β'. ἐνιαυτοῦ ἔσχε $\frac{4x - 500}{3} + \frac{4x - 500}{9}$

= $\frac{12x - 2100 + 4x - 500}{9} = \frac{16x - 2600}{9}$.

Λαμβάνει δ' ἐκ τούτων ἐν ἀρχῇ τοῦ γ'. ἐνιαυτοῦ πάλιν
100 χρυσοὺς. Εἰσὶν οὖν αὐτῷ ἐπὶ $\frac{16x - 2600}{9} - 100$

= $\frac{16x - 2600 - 900}{9} = \frac{16x - 3500}{9}$.

ὑπὸ

αὐτὸν ἀχθ. παρον. Αὐξεται δὲ τὸ λείψανον
 γ'. ἐνιαυτῷ αὖθις κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$. Τὸ δὲ τριτημό-

$$\frac{16\chi - 3700}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16\chi - 3700}{27}$$

$$\text{τοῖνον τοῦ γ'. ἐνιαυτοῦ ἔχει } \frac{16\chi - 3700}{27} +$$

$$- 3700 = \frac{4\chi - 1100}{27} + \frac{16\chi - 3700}{27}$$

$$\frac{4\chi - 14800}{27} \text{ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀνχθ. πα-}$$

Τὸ δὲ πᾶσα ἡ αὐτοῦ περιουσί· ἐστὶν ἐν τέλει
 ἐνιαυτοῦ. Κατὰ δὲ τὸ Πρόβλημα ὁ πλάσιον
 εἶναι ὀφείλει τοῦ ἐν ἀρχῇ. Ἐπεὶ δ' ἐν ἀρχῇ
 ἀναγκαίως τοῦτο ἔσαι = 2χ. Ὅθεν ἡ Ἐξίσωσις

$$\frac{4\chi - 14800}{27} = 2\chi$$

$$\frac{4\chi - 14800}{27} = 2\chi$$

$$\frac{4\chi - 14800}{27} = 2\chi$$

$$\frac{4\chi - 14800}{27} = 2\chi$$

$$\frac{4\chi - 14800}{27} = 2\chi$$

$$\frac{4\chi - 14800}{27} = 2\chi$$

$$\frac{4\chi - 14800}{27} = 2\chi$$

$$\frac{4\chi - 14800}{27} = 2\chi$$

$$\frac{4\chi - 14800}{27} = 2\chi$$

$$\frac{4\chi - 14800}{27} = 2\chi$$

$$\frac{4\chi - 14800}{27} = 2\chi$$

$$\frac{4\chi - 14800}{27} = 2\chi$$

ἐπαίξειν ἐνιαυτῶν, ἀλλὰ καὶ ὁῶρον αὐτῶν ὀφείσθαι, ὡς ἐπὶ τὸ τοῦ β' ἐνιαυτοῦ 2 θαλήροισι τὸ τοῦ α'. ὑπερτερεῖν, ὡσαύτως καὶ τὸ τοῦ γ' τὸ τοῦ β', κτ. Τῶν 5 δὲ παρρηχικότων ἐνιαυτῶν, ὁ δούλος ἐτιμῆται. 35 θαλ. πλὴν 100, οὓς ἐν τοσούτῳ παρὰ τοῦ δεσπότου ἔλαβε. Ζητεῖται, 1) πόσος ὁ μισθὸς τῶν 5 ἐνιαυτῶν. καὶ 2) ποσὸν τὰ δῶρα τιμῆθῃσιν; Ἐπειδὴ ὁ δούλος ἐν γένει τοῦ + 241 θαλ. = 239. παρὰ τοῦ δεσπότου ἀπαιτεῖ. ὁ δὲ τοῦτου μισθός, κατὰ τὴν ὑπόθ. $40 + 50 + 60 + 70 + 80 = 300$ θαλ. τὰ δῶρα ἤπου ὅλῃαν, ἐν τοῖς ὑπολειπομένοις 35 θαλ. ἐμπεριέεται. Ἐξω ἄρα τὸ δῶρον τοῦ α'. ἐνιαυτοῦ = χ. καὶ κατὰ τὴν ὑπόθ. προκίψει ἡ ἐχόμενη τῶν δῶρων σειρά. $\chi, \chi + 2, \chi + 4, \chi + 6, \chi + 8 = 5\chi + 20 = 35$.

$$5\chi = 35 - 20 = 15$$

$$\chi = \frac{15}{5} = 3 \text{ θαλ.}$$

= τῇ τιμῇ τοῦ δῶρου τοῦ α'. ἐν. Ὡς τὸ τοῦ β' = 5. τὸ τοῦ γ' = 7. τὸ τοῦ δ' = 9. τὸ τοῦ ε' = 11. πάντα = 35 θαλ.

§. 361. IB'. Ἀποθανόν τις καταλείπει τοῖς ἑαυτοῦ παισὶ κληρονομίαν, σκεύη ἀργυρᾶ, λίθους τιμίας, ἱμάτια λινᾶ, καὶ χεῖματα, πάντα συνάμα 1800 θαλ. τιμώμενα. Εἰσὶ δ' αἱ μὲν λίθοι τρεῖς τοσούτου ἄξιοι, ὅπου τὰ ἀργυρᾶ σκεύη, τὰ δὲ χεῖματα 30 θαλήροισι ἐλάττω τῆς ἡμισείας τιμῆς τῶν ἀργυρῶν σκευῶν, καὶ τῶν λίθων συνάμα. τῶν δὲ λινῶν ἱματίων ἡ τιμὴ 1 θαλήροισι ἐλάττωται τοῦ ἡμίσεος τῶν χρημάτων. Ζητεῖται, πόσου ἐκάστον ἄξιον.

Λύσις. Ἐξω τὰ ἀργυρᾶ σκεύη χ θαλ. ἄξια. Ἐπεὶ δὲ τῶν λίθων ἡ τιμὴ τριπλῇ, ἔσονται ἄξιοι 3χ θαλ. Ἐπεὶ δὲ καὶ τὰ χεῖματα 30 θαλ. ἐλάττωται τῆς

ἄμφοιν συνάμα τῶν προηγησαμέ-

$$— 30 = \frac{4\chi}{2} — 30 =$$

Τῶν δὲ λινῶν' ἰμ. 10 θαλ. ἐλατ-

ίσεος τῶν χρημάτων ἢ τιμὴ —

$$0 = \chi — 15 — 10 =$$

ἢ τιμὴ ἀπάντων

$$10 + \chi — 25 = 1800$$

ἢ μάλλον

$$55 = 1855.$$

$$= 265 \text{ θαλ.}$$

$$\text{ἑξία} = \chi = 265 \text{ θαλ.}$$

$$\chi = 795 \text{ ρ.}$$

$$— 30 = 530 — 30 = 500$$

$$— 25 = 256 — 25 = 240$$

$$1800 \text{ θαλ.}$$

ἴδονται δὲ καὶ Προβλήματα, ὧν ἡ
βῶς ὑπολογιζόμενοις ἀδύνατος, ἥτις
ἔστιν τοῦ Προβλήμ. ὑποθέσεων, καὶ
βληθεῖσων. π. χ. Δίελε 32 εἰς δύο
ζωνας τὸ πηλίκον, διὰ τοῦ 8 διαιρέ-
σθαι ἐλάσσονος διὰ τοῦ 6, ἄμφο τῶ
εἰσθῶ τὸ μείζον = χ . Τὸ ἐλατ-
τον = χ . διαιρεθῇ τὸ μείζον διὰ 8
ἐλαττον διὰ τοῦ 6, τουτ: $32 - \chi$.

Ἀρθω τὰ πηλικά, κατὰ τὴν ὑπόθ. = 4. Ἐν-
τεῦθεν ἡ Ἐξίσωσις

$$\frac{x}{8} + \frac{32 - x}{6} = 4.$$

$$x + \frac{296 - 8x}{6} = 32$$

$$6x + 256 - 8x = 192$$

$$6x - 8x = 192 - 256$$

$$-2x = -64.$$

$$+ 2x = + 64$$

$$x = 32$$

32. Καὶ ἐπεὶ ὁ ἐλάττων $32 - x$, εἴη ἂν $32 - 32 = 0$. Ὅθεν οὐδεὶς ἐλάσσων πάρεστιν. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθ. παρεῖναι δεῖ καὶ τὸν ἐλάσσονα. Ἄρα τὸ Προβλ. κατὰ τὸν δοθέντα τρόπον ἀδύνατον.

§. 363. Προβλήματος δὲ προτιθεμένου τοῦ α'. βαθμοῦ, ὧ δύνω, τρεῖς, ἢ καὶ πλείους τῶν ἀγνώστων ἐνυπάρχουσι ποσοτήτων, τοσαύτας Ἐξισώσεις συστήσομεν, κατὰ τὰς τοῦ Προβλήματος ὑποθέσεις, ὅσαι τῶν ποσοτήτων αἱ ζητούμεναι ἀγνώστοι. Ἀλλ' οὐδεμίαν τούτων (τῶν ἀγν.) ἐφ' ἑτέραν (καὶ ταύτην ἀγν.) πεπολλαπλασιασμένην εἶναι ρή. Ἄλλως γὰρ ἐν τῇ τοῦ Προβλήμ. ἐπιλύσει οὐχ ἀπλᾶι προκύψουσιν Ἐξισώσεις. Χρῶνται δὲ, τὰ τοιαῦτα τῶν Προβλ. ἐπιλύσειν μέλλοντες, διαφοραῖς μεθόδοις. Ἦτοι γὰρ ἡ εὐρεθεῖσα δύναμις μιᾶς ἀγνώστου ἐπὶ τῶν ἑτέρων

τικαθίσταται Ἐξισώσεων, ἢ καὶ ἐκ δύο Ἐξισώσεων δύναμιν μιᾶς εὐρόντες ἀγνώστου, ἀμφω τὰς αἰνὴν ποιοῦμεν Ἐξισώσιν, ἢ τρίτον δυάδα προσθέντες, ἢ ἀφελόντες, τάχιστα εἰς πέ-
ροκειμένου ἂν ἀφικοίμεθα. Διὰ παραδειγμά-
υχθήσεται τὸ λεγόμενον.

364. Καὶ α'. Εἰ δύο ἄγνωστοι ποσότητες
ήματι ἔνεισι.

ἰσῶν τοῦ Κεφαλαιου, καὶ τῆς Διαφορᾶς
ῶν, εὐρεθήτωσαν οἱ ἀριθμοί. Κληθήτω-
τε ἄγνωστοι, ὁ μὲν μείζων χ , ὁ δ' ἐλάσσων ψ .
ον Κεφάλαιον δέδύται. Ὅπερ ἔσω $= \alpha$.
ἢ τούτων Διαφορὰ, ἣτις $= \beta$ τεθήτω. Ἐκ
νίσανται δύο Ἐξισώσεις αἱ ἐξῆς. $\chi + \psi = \alpha$.
 $\chi - \psi = \beta$, ὅς κατὰ τοὺς διαφοροὺς ἐπιλύσω-
υς.

Διὰ τῆς ἀντίκαταστάσεως τῆς εὐρεθείσης τι-
νῶν ἀνάμεικτος τῆς ἑτέρας τῶν ἀγνῶστων ἐπὶ τῆς ἑ-
ξισώσεως. $\chi + \psi = \alpha$. $\chi = \alpha - \psi$. Τὸ
εὐδιάμενον, ἦτοι τὸ $\alpha - \psi$ θίξ ἐπὶ τῆς ἑ-
ξισ. ἦτοι τῆς $\chi - \psi = \beta$, ἀντὶ τοῦ χ , ἣτις
τραπείη $\alpha - \psi - \psi = \beta$

$$\text{ἢ } \alpha - 2\psi = \beta$$

$$\alpha = \beta + 2\psi$$

$$\alpha - \beta = 2\psi$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \psi$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \psi$$

ψ, ἔσαι γνωστὸν καὶ τὸ χ . Ἐπειδὴ γὰρ κα-
ί. Ἐξισ. $\chi = \alpha - \psi$, ἀντίκαταστήσας
τοῦ

$$\begin{aligned}
 \text{τοῦ } \psi \text{ τὸ ἰσοδύναμον ἔξεις } \chi &= \alpha - \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \\
 &= \frac{2\alpha - (\alpha - \beta)}{2} = \frac{2\alpha - \alpha + \beta}{2} \\
 &= \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad \text{"Ὡς ὁ μείζων ἀριθμὸς} \\
 &\frac{\alpha + \beta}{2}, \text{ καὶ ὁ ἐλάσσων, ἢ } \psi = \frac{\alpha - \beta}{2}
 \end{aligned}$$

2) Ἐὰν ἐξ ἑκατέρας Ἐξισώσ. ἡ δύναμις τῆς αὐτῆς ποσότητος ζητῆται, καὶ ὡς Ἐξισώσεις θεωρῆται. Καὶ οὗτός ἐστιν ὁ φυσικὸς τρόπος. Τῇ γὰρ δευτέρᾳ Ἐξισώσει τὴν καὶ μὴ ἐγνωστος παρέσαι. Τοῦτ.

$$\begin{array}{rcl}
 \chi + \psi & = & \alpha. \quad \text{Καὶ} \quad \chi - \psi = \beta \\
 \chi & = & \alpha - \psi \quad \chi = \psi + \beta
 \end{array}$$

"Ὡς καὶ $\alpha - \psi = \beta + \psi$ (§. 48. δ')

$$\alpha - \beta + \psi + \psi = \beta + 2\psi$$

$$\alpha - \beta = 2\psi$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \psi$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2}$$

"ἵνα δὲ οὕτω καὶ τὸ χ εὗρωμεν, Ἐξω

$$\chi + \psi = \alpha. \quad \text{Καὶ} \quad \chi - \psi = \beta$$

$$\psi = \alpha - \chi \quad \psi = \beta - \chi$$

$$\chi - \beta =$$

"Ἐ

Ἐνθεντοι καὶ $a - \chi = \chi - \beta$ (§. αὐτ.)

$$\begin{array}{r} a = \quad \quad 2\chi - \beta \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + \beta = 2\chi \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + \beta = 2\chi \\ \hline \end{array}$$

2

3) Διὰ τῆς προσθέσεως τῶν Ἐξισώσεων, πάνυ καλῶς ἐνταῦθα ἐγχωρούσης.

$$\chi + \psi = a$$

$$\chi - \psi = \beta$$

$$\begin{array}{r} \chi + \psi = a \\ \chi - \psi = \beta \\ \hline 2\chi = a + \beta \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\chi = a + \beta \\ \hline \chi = \frac{a + \beta}{2} \end{array}$$

2

Εἰδὲ τὸ ψ εὐρεῖν βούλει, ἔσαι τοῦτο διὰ τῆς Ἀλγεβραϊκῆς Ἀφαιρέσεως. $\chi + \psi = a$

$$\chi - \psi = \beta$$

$$\begin{array}{r} \chi + \psi = a \\ \chi - \psi = \beta \\ \hline 2\psi = a - \beta \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\psi = a - \beta \\ \hline \psi = \frac{a - \beta}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \psi = \frac{a - \beta}{2} \\ \hline \end{array}$$

2

§. 365.

ἐπὶ πάντων, ὁ μείζων ἀριθμὸς τὸ ἥμισυ κεφάλαιον ἐστὶ καὶ ἡ ἡμίσεια διαφορᾶς, ὁ δ' ἐλάττω. τὸ ἥμισυ κεφάλαιον πλὴν τῆς ἡμίσειας διαφορᾶς.

Τὸ παράδειγμα ἐν ἀριθμοῖς. Ἐστω τὸ Κεφάλαιον δύο ἀριθμῶν 24, ἡ τούτων Διαφορὰ = 6. Τίνες οἱ ἀριθμοί; Ἐνταῦθα $\alpha = 24$. καὶ $\beta = 6$. Ἐνθεντοί $\chi = \frac{24 + 6}{2} = 15$. Καὶ $\psi = \frac{24 - 6}{2} = 9$. Ὡς ὁ μείζων ἀριθμὸς 15, ὁ δ' ἐλάττω 9.

§. 365. Ἐτέρον παράδ. Δύο τινῶν ἐν καλάθοις μῆλα φερόντων, ὁ ἕτερος ἐρωτηθεὶς, πόσα ἄμφω φέροικεν, ἀπεκρίνατο. Ἐάν ἐκ τῶν ἐμῶν 100 λαβὼν τοῖς τοῦ ἐταίρου μου ταῦτα προσθῇς, ἔξει ἐν τῷ ἑαυτοῦ καλάθῳ τρεῖς τοσαῦτα, ὅσα ἐν τῷ ἐμῷ. Ἐάν δ' ἐκ τῶν ἐκείνου 100 τοῖς ἐμοῖς προσθῇς, ἔσονται ἴσα τὰ μῆλα ἐν ἀμφοῖν τοῖς καλάθοις.

Λύσις. Ἐνταῦθα πρόκειται δύο ἀγνώστοι. Ὁ δὲν καὶ δύο Ἐξισώσεις, ἐνθα οὐδετέρα τῶν ἀγνώστων τῇ ἑτέρᾳ διά πολλαπλασιασμοῦ συναπτά εἶναι ὀφείλει. Ἐν τῷ α'. καλάθῳ ἐστω χ μῆλα, ἐν δὲ τῷ β'. ψ . Ἐάν ἀπὸ τοῦ α'. 100 λάβῃς, ὑπολείποντ' ἐτι $\chi - 100$. Τὰ δὲ τοῦ ἐτέρου, οἷς τὰ 100 προσέθεται, $\psi + 100$. Οὕτως οὖν ἐγένοντο ταῦτα τρεῖς τοσαῦτα, κατὰ τὴν ὑπόθ. ὅσα τὰ τῷ α'. Ἄρα $\psi + 100 = (\chi - 100) \cdot 3 = 3\chi - 300$. Ἡ α'. Ἐξίσωσις. Λέθεις, ληθύνων ἀπὸ τῶν ψ μήλων 100, εἴεν ἂν λοιπὰ $\psi - 100$. Καὶ τῆνικαῦτα, ἡ τὸ Πρόβλημα βούλεται, ἴσα ἐκατέρων τὰ μῆλα. Ὡς $\psi - 100 = \chi + 100$. Ἡ β'. Ἐξισ. Λέθεις τοίνυν. Ἐξισώσεις, $\psi + 100 = 3\chi - 300$. Καὶ

$= 100 = \chi + 100$ ῥᾶσα διὰ τῆς 'Α-
 ως ἐπιλυθῆναι δύνανται. Οὕτω γὰρ τὸ ψ
 ισώσεων ἐκπεσεῖται.

$$\psi + 100 = 3\chi - 300$$

$$\psi - 100 = \chi + 100$$

$$+ \quad \quad \quad - \quad \quad \quad \text{ἀφ' ἐλ}$$

$$+ 200 = 2\chi - 400. (\S. 49.)$$

$$200 + 400 = 600 = 2\chi$$

$$600 = 300 = \chi$$

2

εἰς τὴν ἀτάκην ἤδη τοῦ χ ἐπὶ τῆς ἐτέρας τῶν 'Εξι-
 σῶσιν ἴσον, ἦτοι 300, καὶ ἕξεις ψ. Γενέσθω
 ἐν τῇ β'. $\psi - 100 = \chi + 100$.

$$\text{ἐν } \psi - 100 = 300 + 100 = 400$$

$$\psi = 400 + 100 = 500$$

Ὡς' ἐν τῷ ἐτέρῳ καλᾷθω, τὰ χ μῆλα = 300
 τῷ ἐτέρῳ τὰ ψ = 500. Ἐὰν ἀπὸ τῶν 300
 ἀφαιρεθῇ, καὶ τοῖς 500 προσεθῇ, ἔσται
 $+ 100 = 600 = 200 \cdot 3$. Ἐκατὸς
 τῶν 500 ἀφαιρεθὲντα, καὶ τοῖς 300 προσ-
 ποιήσουσι $300 + 100 = 400 = \text{τὸ ἐν τῷ ἐτέρῳ ὑπολειφθεῖσι } 400$.

§. 366 Τριῶν δ' ἀγνύσεων τῇ πρωτοβαθμ-
 οῦς ἀρχόντων 'Εξιπύσει, εἴπερ ἐκ τοῦ Προβλήμα-
 τος 'Εξιπύσεις συσταται, καὶ ταῦτα ἔχει πάντως, καὶ
 ὅν ὑποδειχθέντα τρόπον, ἐπιλυθῆναι, λίαν μέντοι
 ἐκ τῶν πλειόνων ἐνεκα' Ἐξιπύσεων, ὅτε καὶ κα-

Dd

δυν

δυνος τοῦ ἀκριβοῦς ὑπολογισμοῦ ἀμαρτάνειν
 ἢ πλεονέκον καὶ κατὰ τοῦτο τὴν εὐχερесеραν,
 καὶ τῆς τοιαύτης ἁμοιβῆς ὄντων.

§. 36. Εὐρεθῆτωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ,
 ἔχοντες. ὥστε τὸ Κεφάλαιον τοῦ α'. καὶ β'.
 τὸ Κεφάλαιον τοῦ α' καὶ γ'. = β, τὸ Κεφ.
 β. καὶ γ'. = γ εἶναι.

Λύσις. Ῥηθῆτωσαν οἱ ἀριθμοὶ, χ, ψ,
 Ὡς κατὰ τὸ Πρόβλημα $\chi + \psi = \alpha$. $\chi +$
 Καὶ $\psi + \omega = \gamma$. Τρεῖς ἄρα αἱ Ἐξισώσεις

$$\chi + \psi = \alpha$$

$$\chi + \omega = \beta$$

$$\psi + \omega = \gamma. \text{ Πρὸ πάντων ἀφαιρε}$$

ἀπὸ τῆς α'.

$$\chi + \psi = \alpha$$

$$\chi + \omega = \beta \quad \text{ἀφαιρῶ}$$

$$\psi - \omega = \alpha - \beta \quad (1)$$

πρόσθες ταύτη τὴν γ. $\psi + \omega = \gamma$

$$2\psi = \alpha + \gamma - \beta$$

Πρόβλεψεν οὖν οὕτως Ἐξισώσεις, μετὰ μ
 νον ἀγνώστου. Ὡς $2\psi = \alpha + \gamma$

$$\psi = \alpha + \gamma$$

Καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου ἀντὶ τοῦ ψ ἀντικαταστά
 τῇ α'. ἢ γ'. Ἐξισώσῃ, εὐρεθῆσεται
 καὶ ω.

Καὶ ἡ μὲν α'. ἔσται οὕτω

$$\frac{\chi + \alpha + \gamma - \beta}{2} = \alpha.$$

$$2\chi + \alpha + \gamma - \beta = 2\alpha$$

$$2\chi = 2\alpha - \alpha - \gamma + \beta$$

$$\eta \quad 2\chi = \alpha - \gamma + \beta$$

$$\chi = \frac{\alpha - \gamma + \beta}{2}$$

Ἡ δὲ γ'.

$$\frac{\alpha + \gamma - \beta + \omega}{2} = \gamma$$

$$\alpha + \gamma - \beta + 2\omega = 2\gamma$$

$$2\omega = 2\gamma - \gamma - \alpha + \beta = \gamma - \alpha + \beta$$

$$\omega = \frac{\gamma - \alpha + \beta}{2}$$

Παράδ. ἐν ἀριθμοῖς. Ἐστω $\chi + \psi = 16$.

$$\chi + \omega = 24 \quad \psi + \omega = 32. \quad \text{Ὡς ἔσται}$$

$$\alpha = 16 \quad \beta = 24 \quad \gamma = 32. \quad \text{Καὶ ἔσται,}$$

κατὰ τὰ ἀνακύψαντα ἰσοδύναμα τῶν ἀριθμῶν.

$$\psi = \frac{16 + 32 - 24}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$\chi = \frac{16 - 32 + 24}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\omega = \frac{32 - 16 + 24}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$\text{"Εξιν ἄρα } \chi + \psi = 4 + 12 = 16$$

$$\chi + \omega = 4 + 20 = 24$$

$$\psi + \omega = 12 + 20 = 32. \quad \text{Καὶ τῶν}$$

μὲν τοῦ α'. βαθμοῦ Ἐξισώσεων ἄλῃς.

Περὶ τῶν Ἐξισώσεων τοῦ β'.
βαθμοῦ.

§. 368. Τοῦ δὲ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ Τετραγωνικαὶ Ἐξισώσεις καλοῦνται, ἐν αἷς ἡ ὑπερτάτη δύναμις τῆς ἀγνώστου ἢ β'. τυγχάνει. Ὡς $\chi^2 = 3\alpha + \beta$. ἢ $3\chi^2 - \gamma = 5\alpha\beta + \frac{\delta}{2}$. ἢ $\chi^2 - \pi\chi = 3\pi\gamma - \frac{3}{2}\delta$. ἢ

$$3\chi^2 - 3\pi\chi + 9\chi = 2\gamma\chi + \delta.$$

§. 369. Προῦργου δὲ καὶ ταύταις, κατὰ τὰς τοῦ προβλήματος ὑποθέσεις, τὴν Ἐξίσωσιν συγκροτεῖν, τοὺς ὅρους, τοὺς τὴν ἀγνώστον περιέχοντας, ἀγνοῦντας ἐπὶ ἑξάτερα τῇ Προσθεσεὶ, ἢ Ἀφαιρέσει, ἢ μᾶλλον, τῇ τῶν σημείων τροπῇ. Ὡς, εἰ αὕτη πρό-
κεῖται

$5\chi\gamma - \gamma^2 = 15\chi + \rho$. ἥτις, μετα-
 ρων, ἔσται $3\chi^2 + 5\chi\gamma - 15\chi$
 Οὕτως οὖν οὐ μόνον τοὺς γνωστοὺς, καὶ
 ἰδιὰ ἐπὶ θάτερα ἀλλὰ καὶ τὴν Ἐ-
 (ὃ ἐστὶ τὸ ρ τὸν ἕτερον ὅρον (§. 342.)
 ὁσίως) ἀγαγεῖν ἔχομεν, ἐς τὰ μάλι-
 στον ὃν ἐπὶ τῶν ὑπερτέρων Ἐξισώσεων,
 ἰσχύσεται. π. χ. τῆςδε τῆς Ἐξισώ-
 $5\chi\gamma - 15\chi = \rho + \gamma$ εἰς τὸ
 οκειμένης, διὰ τῆς μεταθέσεως τοῦ
 τικειμένου σημείου δεξιόθεν πρὸς τ' ἄ-
 λου, εὐχερῶς τὸ ζητούμενον τελεσθῇ-
 ἂρ ἀμφοῖν τοῖς τῆς Ἐξισώσεως ὅροις
 γ προσεθῇ, ἐπὶ θάτερα μὲν μετὰ τοῦ
 προσεθήσεται σημείου, ἐπὶ δὲ θάτερα,
 ῥήσει, καὶ ἀντεισάξει τὸ ρ . Οἶον

$$5\chi\gamma - 15\chi = \rho + \gamma$$

$$\rho - \gamma = - \rho - \gamma$$

$$5\chi\gamma - 15\chi - \rho - \gamma = 0$$

ἢ χ παρῇ, μετὰ, ἢ ἄνευ συνεργῶν,
 καὶ διαφοροῖς σημείοις, τὸ χ^2 , ἢ χ ,
 οὔμενον παράγων, μετὰ τὸ τὰς λοιπὰς
 παρενθέσει ἐναπολαβεῖν, ἐν δεξιᾷ, ἢ
 παρενθέσεως τεθήσεται. Ὡσαύτως καὶ
 ὡς ὡν προκείμεναι ποσοτήτων, διὰ τῆς
 ἡ ἀφαιρέσεως εἰς ἓνα ὅρον γενήσονται.
 οἰς $3\chi^2 + 6\chi\gamma - \chi^2 = \chi^2 +$
 ὃν εἴη ἂν $= 3\chi^2$ $\chi^2 + 6\chi\gamma$
 $\chi + \gamma - \delta\gamma = 0$. Αὕτη δὲ $=$
 $\chi^2 + (6\gamma - 5\alpha - 1)\chi +$
 $0 = 2\chi^2 + (6\gamma - 5\alpha - 1)\chi$
 $= 0$. Ἐπεὶ δὲ οἱ ἔσχατοι γνωστοί

ὅροι (τὸ γ — ὄν) ἐπὶ πάντων προσθιμένοι ἀλλή-
 λους, ἢ ἀφαιρούμενοι εἰς ἓνα ὅρον γενέσθαι δύνανται,
 κληθήτωσαν ἐν γένει = ρ . οὗ ἀντὶ τοῦ γ — ὄν
 ἀντικαταστάτος. ὡδέπως αὖν ἡ Ἐξίσωσις ἀποδοθεῖη.
 $2\chi^2 + (6\gamma - \gamma\alpha - 1)\chi + \rho = 0$. Ἀπο-
 δέδοται δὲ τῷ ρ δύο διαφάρα σημεῖα + καὶ —,
 διὰ τὸ τὸν ἑσχατον ὅρον καὶ καταφατικὴν, καὶ ἀπο-
 φατικὴν ποσότητα ἔχειν εἶναι. Διὲ γὰρ τῆς προσθέ-
 σεως, ἢ ἀφαιρέσεως τῶν δεδομένων ποσοτήτων ἐνερ-
 γεία τοῦτο γίνεται. Λύθικ καὶ τοὺς συνεργοὺς τῶν
 ἀγνώστων ὅρων, εἰς τὸν ἥδη δειχθέντα τύπον ἀχθέν-
 τας, ὡς μίαν ποσότητ' αὖν ἐκδέξαιμεθα. Τὰ γὰρ
 $6\gamma - \gamma\alpha - 1$ γνωστὰ ὄντα εἰς μίαν συγμεφάλαιω-
 θήσονται, ἥτοι καταφατικὴν, ἢ ἀποφατικὴν ποσό-
 τητα. Παραπλησίως, εἰάν ἐν, ἢ πλείω χ^2 συνερ-
 γοὺς ἔχωσι, θεωρήσομεν καὶ τούτους ὡς μίαν, ἀλλὰ
 + αἰ, ἥτοι καταφατικὴν ποσότητα, διὰ λόγον τὸν
 αὐτὰ καὶ ὀφθισόμενον. Καὶ τὸ μὲν ἐν τῶν διαφάρων συ-
 νεργῶν τοῦ χ^2 προκύψον, εἰς μίαν ποσότητα προσθέ-
 σει, ἢ ἀφαιρέσει ἀχθέντων, κείσθω = α , τὸ δὲ
 διὰ τῶν συνεργῶν τοῦ χ = β . Πᾶσαι οὖν αἱ δυνα-
 ται τῶν Ἐξισώσεων, αἱ Τετραγωνικαί, εἰς τὸ μηδενί-
 κεν ἀχθεῖσαι, τυιόνδε λήφονται σχῆμα.

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \xi = 0.$$

Τοὺς δὲ συνεργοὺς τοῦ χ^2 , ὡς καταφα-
 τικὴν αἰ ἐκδεχόμεθα ποσότητα, τὸ + αὐ-
 τῶν προτιθέντες. Ἐι γὰρ καὶ ἐκ τῶν διαφάρων συ-
 νεργῶν τῶν διαφάρων χ^2 , εἰς μίαν γενομένην ποσό-
 τητα, ἀποφατικὴ προκύψειεν, ἀλλ' οὐδὲν τὸ χ^2 , ἐπὶ
 θάτερα τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος μεταβιβασθέν σὺν
 ταῖς λοιπαῖς ποσότησι, καταφατικὸν ἔσται, τῇ τῆς
 εἰσῆς ἐξαγωγῇ ἐν τῇ τῆς Ἐξισώσεως ἐπικύσει λίαν συμ-
 βαλ-

βαλλόμενον. Οἶον, $4 - 3\chi^2 \equiv 5\chi - 6$.
 ἔνθα τὸ χ^2 ἀποφατικόν. Ἄλλ' ἀχθῆσθαι εἰς τὸ μη-
 δεικὸν τῆς Ἐξισώσ. ἔσαι τὸ χ^2 καταφατικόν.
 $3\chi^2 + 5\chi - 10 = 0$. Ἡ τοιαύδε προκει-
 μένης Ἐξισώσεως,

$$- 5\chi^2 + 10\chi - 8 = 0$$

προσθεῖς
 ἐκατέρ.

$$+ 5\chi^2 - 10\chi + 8 = 5\chi^2 - 10\chi + 8$$

$$\text{ἔξει} \quad 0 = 5\chi^2 - 10\chi + 8. \text{ Ἡ}$$

ἀμειψαμένῳ πάντων τῶν ὄρων τὰ σημεῖα, ἔσαι τὸ
 χ^2 καταφατικόν.

§. 370. Ὁ τύπος τῆς γενικῆς Τετραγωνικῆς
 Ἐξισώσ. κατὰ τὸ §. ἀνωτ. ἐστὶν $\alpha\chi^2 \pm \beta\chi \pm$
 $\rho = 0$. Καὶ κλασμάτων δὲ ταῖς Ἐξισώσ. ἐνυπαρ-
 χόντων, εἰς ἐκεῖνο, τὸ ἐκ τριῶν συνιστάμενον οὐ
 ναχθεῖεν ἂν σχῆμα, καὶ τῆς ἀγνώστου ποσότητος τῆς
 παρονομαστῆ τῶν κλασμάτων ἐνούσης. Ὡς

$$\alpha\chi + \beta$$

$$\alpha\chi + \beta = \epsilon\chi + \zeta$$

Ἀποκαταστήσω τὰ κλάσματα τῷ πολλαπλασιασμῷ.

$$\frac{\alpha\chi + \beta}{\gamma\chi + \delta} = \frac{\epsilon\chi + \zeta}{\eta\chi + \theta}$$

Ὡς πολλαπλ. μετὰ τοῦ $\gamma\chi + \delta$

$$\alpha\chi + \beta = \gamma\epsilon\chi^2 + \zeta\gamma\chi + \delta\epsilon\chi + \zeta\delta$$

$$\gamma\chi + \theta$$

$$\alpha\eta\chi^2 + \beta\eta\chi + \alpha\theta\chi + \theta\beta = \gamma\epsilon\chi^2 + \zeta\gamma\chi + \delta\epsilon\chi + \zeta\delta$$

$$\alpha\eta\chi^2 - \gamma\epsilon\chi^2 + \beta\eta\chi + \alpha\theta\chi - \zeta\gamma\chi - \delta\epsilon\chi = \zeta\delta - \theta\beta$$

$$(\alpha\eta - \gamma\epsilon)\chi^2 + (\beta\eta + \alpha\theta - \zeta\gamma - \delta\epsilon)\chi = \zeta\delta - \theta\beta$$

$$(\alpha\eta - \gamma\epsilon)\chi^2 + (\beta\eta + \alpha\theta - \zeta\gamma - \delta\epsilon)\chi - \zeta\delta + \theta\beta = 0$$

$$\gamma\chi + \theta$$

Ἐνταῦθα, κατὰ τὸν καθόλου τύπον, $\alpha\chi^2 + \beta\chi$
 $= 0$, τὰ μὲν $(\alpha\eta - \gamma\epsilon)$ παρίσχει τὸ α .
 $(\beta\eta + \alpha\theta - \zeta\gamma - \delta\epsilon)$ τὸ β , καὶ $-\zeta\delta$
 β τὸ ρ . Ὡς οἱ πάντων τῶν ὅρων συνεργοὶ εἰς
 ἑρεῖς ἐγένοντο ποσότητος ἀριθμὸν πάντα, καὶ
 τὴν ἰσημερινὴν σημαίνουσας. Ἡ δὲ τοιαύτη Ἐξίσω-
 σις, καὶ χ^2 , καὶ χ , καὶ πρὸς τούτοις καὶ γνωσὴ ἑ-
 ἰς, καὶ Μικτὴ ἀσχύει. Τοῦ δὲ μέσου ὅρου
 τοῦ μετὰ τοῦ χ πολλαπλασιασθέντος, ὃ
 πρὸς τοῦ γενικοῦ τύπου τὸ $+ \beta\chi$, ὡς ὑπαλείπε-
 $\alpha\chi^2 + \rho = 0$, καλεῖται Ἀμιγῆς Τε-
 τρωνικὴ Ἐξίσωσις. ἣν καὶ διὰ τοῦ γενικοῦ τύπου
 εἶναι δυνατόν, τὸν συνεργὸν β τοῦ β' ὅρου
 ἀποτιθεμένους, ἐκπεσεῖται γὰρ οὕτως ὅλος ὁ ὅρος.
 (69.) Ἐὰν δ' ἐπίτινος Ἐξισώσεως ἡ γνωσὴ ἀπὴ
 ποσοτήτων, τινι: $+ \rho$, τῶν χ^2 , καὶ χ πα-
 ρόντων μόνον μετὰ συνεργῶν, ὡς $\alpha\chi^2 + \beta\chi = 0$,
 ταῦτα ἢ Ἐξίσωσις τοῦ α' βαθμοῦ ῥηθεῖη.

$$\begin{array}{r} \text{γὰρ } \alpha\chi^2 = + \beta\chi \\ \hline \alpha\chi = - \beta \\ \hline : \alpha \\ \hline \chi = + \frac{\beta}{\alpha} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{διέλεε διὰ } \chi \\ \\ \\ \end{array}$$

§. 371. Ὁ ἄρα τύπος τῆς ἀμιγῆς δευτερο-
 βαθμοῦ Ἐξισώσεως ὁ γενικὸς, ὁ $\alpha\chi^2 + \rho = 0$,
 $\chi^2 = + \rho$ τυχάνει. Ἐπεὶ δὲ τὸν τῆς ἀγνώστου
 συνεργὸν ἀπείναι τοῦ χ^2 χορῇ, ὡς ἡ ἐννάμειος τοῦ
 ζητουμένης, διὰ τῆς διαιρέσεως ταῦτον ἀποσκευα-
 σθεα. Ἐνθῦτοι

$\alpha\chi^2$

$$\frac{\alpha \chi^2 = \pm \rho}{\chi^2 = \pm \frac{\rho}{\alpha}}$$

Ἀντὶ δὲ τοῦ κλάσματος $\frac{\rho}{\alpha}$ τεθήτω ἑστὴ
ποσότης. Ὡς κείσθω ἐν γένει $\frac{\rho}{\alpha}$

Τὸ οὖν γενικώτατον σχῆμα πασῶν τῶν Τετραγωνικῶν Ἐξισώσεων ἐστὶ $\chi^2 = \pm \zeta$, τοῦ ζ ὁλὴν ἄριθμὸν, ἢ κλάσμα (γνήσιον, ἢ νόθον) κατὰ τὸν ἀποφατικὸν ὑπερφαίνοντος. Τῷ ἄρα χ τὴν Ἐξίσωσιν ἐπιλύσαι βουλομένῳ, ἢ τὸ χ ἐξακτῆς ἐξάμφοιν τῶν ὄρων ἢ $\sqrt{}$. Ἡ $\sqrt{\chi^2} = \chi$. Ἐνταῦθα τοίνυν $\chi = \sqrt{\pm \zeta}$. μειωτέον δὲ τὰ ἐξῆς.

Πρῶτον. Τῆς γνωστῆς ποσότητος ἐπὶ τῷ σημείῳ τῷ καταφατικῷ σημείῳ συνεζευχθεὶς, μόνον μίαν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν, ἢ τὴν $\sqrt{\pm \zeta}$ μόνον ἐνεργεῖα ποσότητα, ὡς τῆς $\sqrt{}$ τῆς ἀποφατικῆς ποσότητος, ἢ $\sqrt{} - \zeta$ ἀδυνάτου καθεστηκυίας. (§ 305.) ὅτι τῷ ὑπολογίζεσθαι ἐπὶ τετραγωνικῶν ὑπολογισμοῦ σχήματι περὶ τυχοῦς δεῖγμα σαφὲς τὸ βλεπόμενον εἶναι ἀδύνατον. π. χ. $\chi^2 = -18$.

$$\chi = \sqrt{-18}$$

Σώζεται τοίνυν ὁ τύπος τῶν ἐνεργεῖα δυνατῶν τετραγωνικῶν ἁμιγῶν Ἐξισώσεων ὅδε. $\chi^2 = \sqrt{\pm \zeta}$

Δεύτερον. Καὶ καταφατικοῦ τοῦ ζ ὄντος, αἰετὶ τὴν $\sqrt{}$ ἀκριβῶς ἐξαγείσθαι, ἀλλ' ὡς τὰ πρὶν ὅτι ἐγρίσθαι αὐτῆς ἀρκεῖσθαι. Τοῦ γὰρ

τετραγώνου οὗτος, καὶ ἡ τοῦ χ τιμὴ καὶ συ-
κριβῆς, καὶ λογικὴ ἔσται. π. χ.

144 — τῆς $\sqrt{\quad}$ ἀμφοῖν ἑξαχθ.

$\sqrt{144} = 12$. Ὡσαύτως

$\frac{16}{25}$ — τῆς $\sqrt{\quad}$ ἀμφοῖν ληθθ.

$\frac{16}{25} = \frac{4}{5}$. Ἀλλὰ $\chi^2 = 18$

$$\chi = \sqrt{18}$$

αὐτοῦ τοῦ χ οὐ λογικὴ, ὥς τῆς $\sqrt{18}$ ἀκριβῶς
εἶναι μὴ ἔχουσης.

Ὡσαύτως καὶ $\chi^2 = \frac{24}{5}$, Καὶ τῆς ρίζης ἀμ-
ξαχθείσης, $\chi = \sqrt{\frac{24}{5}}$. ἢ $\chi = \sqrt{\frac{24}{5}}$
ἢ $\sqrt{25}$ ἢ $\sqrt{\quad}$ λογικὴ, ἄλογος δὲ ἡ τοῦ 24.

Τρίτον. Ἐπειδὴ τῆς ἀποφατικῆς ποσότητος ρί-
ζιδόδοται τετράγωνος, μόναις ταῖς δυναταῖς Ἐξι-
στῶν ἀμιγῶν τετραγωνικῶν Ἐξισώσεων τὸν τύ-
πον $\sqrt{\zeta}$ ἀνήκειν. Ἀλλὰ τὴν $\sqrt{\zeta}$ καὶ κατα-
γεῖν, καὶ ἀποφατικὴν εἶναι δύνασθαι. Εἴτε γὰρ
εἴτε — ἢ $\sqrt{\zeta}$ ληθθῇ, αἶσι τὸ ζ καταφατι-
καί. Ἐστὶ γὰρ — $\sqrt{\zeta}$. — $\sqrt{\zeta} = +\zeta$. Καὶ
 $\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta}$ αὐθις $= \zeta$. Ἡ ἐν ἀριθμοῖς,
 $7^2 = 49$. ἔσται $\chi = \sqrt{49} = +7$,
7. Ὅτι $+7 + 7 = 49$. Καὶ -7 .
 $-7 = 49$. Ταῦτ' ἄρα ἐπὶ τῶν Τετραγωνικῶν
Ἐξισώσεων προτίθεται τοῦ ριζικοῦ ἀμφω τὰ σημεῖα
καὶ —. Ὡς ἐν γένει $\chi^2 = \zeta$. Καὶ
 $\pm \sqrt{\zeta}$, ὅπερ δυνατὴν Ἐξίσωσιν παρίσχει.
τοῦτο κυρίως ὁ ἀληθὴς καθόλου τύπος τῶν ἀμ-
ιγῶν Τετραγ. Ἐξισώσεων.

§. 372.

§. 372. Θηράσματος δ' ἡ ἐπίλυσις τοῦ
Ἐξισώσ. καὶ διὰ λογαρίθμων. Εἰ γὰρ

$$\chi^2 = \zeta$$

$$\text{ἔσαι καὶ } \frac{2\Lambda}{\chi} = \Lambda \cdot \zeta \quad (\S. 333.)$$

$$\Lambda \cdot \chi = \frac{\Lambda \cdot \zeta}{2} \quad \text{Τοῦτ.}$$

τὸν ἀριθμὸν τοῦ καινοῦ λογαρίθμου, τοῦ δι-
ρέσεως τοῦ $\Lambda \cdot \zeta$ προελθόντος, τὴν τοῦ
δεικνύοντα. Τοῦτο δ' ἐπὶ τῶν Ἐξισώσεων
βαθμοῦ μᾶλλον ἐν χρήσει. Ἀλλ' ἀναπτυ-
ρῆσέν καὶ παραδείγματι.

$$\chi^2 = 148$$

$$2\Lambda \cdot \chi = \Lambda \cdot 148$$

$$\Lambda \cdot \chi = \frac{\Lambda \cdot 148}{2}$$

Ἐστὶ δὲ ὁ

$$148 = \frac{2,1702617}{2} \quad \text{Ὅς διὰ 2 διαυρε}$$

σι 1,0851308 λογ. Ζητηθέντος δὲ τοῦτο
μείζοσιν ἀριθμοῖς, καὶ κατὰ τὸ χαρακτη-
ρῶν ἀριθμῶν δυνάμειος διορισθείσης, ὡς εἴρ-
ριθμός. ὁ τῷ χ ἰσοδύναμος, μεταξὺ 12
12, 17 ἐμπίπτει. Κατὰ δὲ τὸν συνήθη
ὑπολογισμῷ πρυτανευθέντος, ἐπειδὴ $\chi^2 =$
ἔσαι καὶ $\chi = \pm \sqrt{148}$. Ὡς οὖν
ρίζα τοῦ 148 οὕσα οὐκ ἂν ἀκριβῶς ἔξαχθ-
ῇ γίγισα δ' αὐτῆς γενέσθαι βουλομένοις
 $12, 165 = \chi$.

§. 373. ἀναπτύξιντες χάριν των προχειρισθέντων, κείσθω τὰ ἐξῆς παραδείγματα.

Α'. Ζήτησον ἀριθμὸν, οὗ τὸ ἥμισυ ἐπὶ τὸ αὐτοῦ τεταρτημόριον πολλαπλασιάσας, καὶ ἀπὸ τοῦ παραγομένου 10 ἀφελὼν, ἔσῃς διαφορὰν τὸν 152 ἀριθμὸν.

Λύσις. Ἐστω ὁ ἀριθμὸς = x . οὗ τὸ ἥμισυ = $\frac{x}{2}$. Τὸ δὲ, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ $\frac{x}{4}$, ἔσται

$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{4} = \frac{x^2}{8}$. Ἀφαιρεθέντος δ' ἀπὸ τοῦδε τοῦ 10, ὑπολείπεται $\frac{x^2}{8} - 10$. Τοῦδὸ δὲ = 152.

Ὅθεν ἡ Ἐξίσωσις $\frac{x^2}{8} - 10 = 152$

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{8} = 152 + 10 = 162 \\ \hline x^2 = 162 \cdot 8 = 1296 \end{array}$$

Ἐξάγαγε τὴν $\sqrt{\quad}$
 $x = \pm \sqrt{1296} = \pm 36$.

Τούτου τὸ ἥμισυ, ἥτοι $\frac{x}{2} = 18$. τὸ δὲ τεταρτημ.

$\frac{x}{4} = 9$. Ὡς 18 $\cdot 9 = 162 - 10 = 152$.

§. 374. Β'. Δοθέντος τοῦ κεφαλαίου δυοῖν ἀριθμῶν, ὅ = α τεθήτω, καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν Τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν = β, εὑρεῖν ἐκ τούτων τοὺς ἀριθμοὺς.

Λύσις. Κατὰ τὸ §. 364, δοθέντων τοῦ κεφαλαίου, καὶ τῆς διαφορᾶς οὗτοι ἀριθμοί, εὗρηται οἱ ἀριθμοί, ὥς, εἰ α τὸ κεφάλ. τῶν ἀριθμῶν, καὶ β

τὴν διαφορὰν σημαίνει, τὸν μείζω
 $\frac{a + \beta}{2}$, τὸν δ' ἐλάσσονα $= \frac{a - \beta}{2}$

τῷ παρόντι Προβλήμ. τὸ μὲν κεφάλαιον τῶν
 μῶν $= a$, δέδοται, οὐχὶ δὲ καὶ ἡ τοῦ
 Τεθῆτω οὖν αὕτη $= \psi$. Ἐνθεντοι
 ριθμὸς $= \frac{a + \psi}{2}$, ὁ δ' ἐλάσσων $=$
 2

Δέδοται δὲ καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦ Τετραγ
 τῶν ἀριθμῶν $= \beta$. Κατὰ τὸ Πρόβλ
 τραγωνισέον τὸν μείζω, καὶ ἐλάσσον ἀριθμ
 ἀλλήλοις προσθετέον τοὺς τετραγώνους, ἵν
 μοὺς αὐτοὺς εὕρωμεν. Ἄλλα $\left(\frac{a + \psi}{2} \right)^2$

$$\left(\frac{(a + \psi) \cdot (a + \psi)}{4} \right) = \frac{a^2 + 2a\psi + \psi^2}{4}$$

$$\text{Καὶ } \left(\frac{a - \psi}{2} \right)^2 = \frac{(a - \psi) \cdot (a - \psi)}{4}$$

$$= \frac{a^2 - 2a\psi + \psi^2}{4}$$

4

γωνοὶ ἀλλήλοις ἴσονται ἴσοι τῷ δοθέντι

Προσεθ. $\frac{a^2 - 2a\psi + \psi^2}{a^2 + 2a\psi + \psi^2}$

$2a^2 + 2\psi^2$

"Ωσε $\frac{2a^2 + 2\psi^2}{2} = \beta$.

$\frac{4}{a^2 + \psi^2} = \beta$ ἢ

$\frac{2}{a^2 + \psi^2} = 2\beta$

$\psi^2 = 2\beta - a^2$

$\psi = \pm \sqrt{2\beta - a^2}$. 'Ο

μείζων ἀριθμὸς ἦν $a + \psi$. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ ψ τὸ

εὐρεθὲν ἰσοδύναμον ἀντικαταστήτῃ $+$ σημείῳ, ἔσται

$$= \frac{a^2 + \sqrt{2\beta - a^2}}{2}$$

$\frac{a - \psi}{2} = \frac{a - \sqrt{2\beta - a^2}}{2}$. Ἐνταῦθα

τῆς ῥίξης τὰ σημεῖα τὸ $+$ καὶ $-$ ἄμφω χρήσιμα.

Παράδ. ἐν ἀριθμοῖς. Ἐςω τὸ κεφ. τῶν δυνάμεων $= 1$. τὸ δὲ τῶν κατ' αὐτοὺς τετραγώνων $= 58$. Τίνες οἱ ἀριθμοί; $a = 10$. Καὶ $\beta = 58$.

"Ωσε ὁ μείζων ἀριθμὸς $= \frac{10 + \sqrt{2 \cdot 58 - 10^2}}{2}$

ὁ δ' ἐλάσσων $= \frac{10 - \sqrt{2 \cdot 58 - 10^2}}{2}$. Ἡ

ὁ μὲν

$$\delta \text{ μὲν μείζων} = \frac{10 + \sqrt{(116 - 100)}}{2}$$

$$\frac{10 + \sqrt{16}}{2} = \frac{10 + 4}{2} = 7. \text{ Ὁδ' ἐλ}$$

$$\sigma\omega\nu = \frac{10 - \sqrt{(116 - 100)}}{2}$$

$$\frac{10 - \sqrt{16}}{2} = \frac{10 - 4}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\text{τὸ κεφάλ., } 3 + 7 = 10 = \alpha. \text{ Τὸ δὲ } \tau$$

$$\text{Τετραγ.} = 49 + 9 = 58 = \beta.$$

§. 375. Ἐμποροίτινες κοινοῦσαν ποιησάμενοι ἕκαστος τὸ ἑαυτοῦ μέρος συνεισήνεγκε δεκάκις τοσοῦτον θαλήρους, ὅσα τὰ τῆς κοινωνίας πρόσωπα. Ἐμπευσάμενοι οὖν, ἑκάστη θαλήρων ἑκατοντάς οἱς τοσοῦτον ὅσοι αὐτοί, κέρδος ἤνεγκεν. Ἐάν τοίνυν τὸ ἑκατοντὸν κέρδους μέρος ἐπὶ $2 \frac{2}{3}$ πολλαπλασιασθῇ, προῖαι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐμπόρων. Πόσοι οὖν ἦσαν, πικέρδησαν, καὶ πόσους θαλ. ἕκαστος συνεισήνεγκεν ζητεῖται.

Κείσθωσαν οἱ ἔμποροι $= \chi$. Ἐκαστος τοῦτον συνεισῆν. δεκάκις τοσοῦτους θαλ. ὅσοι αὐτοί 10χ θαλ. ἕκαστος. πόσον δὲ τὸ κεφάλαιον τῆς κοινωνίας τῶν ἀπάντων συνεισφορᾶς, μανθάνομεν διὰ τῆς Τριῶν Μεθόδου. 1 ἔμπορος: 10χ θαλ. $= \chi$ ἔμποροι: $10 \cdot \chi^2$ θαλ. Ὡς τὸ ὅλικόν κεφάλαιον $10 \cdot \chi^2$. Ἐπεὶ δ' ἑκάστη ἑκατοντάς τοῦ κεφαλαίου οἱς τοσοῦτον κέρδος ἤνεγκεν, ἢ οἱ ἔμποροι. Οὗτο $= \chi$. Ἐκάστη ἄρα ἤνεγκε 2χ θαλ. Πόσα δὲ ἔλαβον τῷ κεφαλαίῳ χρησάμενοι, ἐκέρδησαν, ἢ ἐχορᾶν ἀναλογία ὑποδηλοῖ. 100 θαλήροι: 2χ θαλ. κέρδος $= 10 \chi^2$ θαλήροι: $10 \chi^2 \cdot 2 \chi = 20 \chi^3 =$

$$100 \cdot 2 \chi = 100 \chi = 100 \chi$$

τῶ ὀλικῷ κέρδει. Τὸ ἑκατοσημόριον τοῦ κέρδους, ὃ
 ἔστι $\chi^3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{\chi^3}{500}$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ 2 ὃ

$= \frac{2\chi^3}{500}$. Τὸ δ' ἐκ τούτου παραγόμενον ἔσται ὁ τῶν
 ἐμπορίων ἀριθμός. Οὗτοι δὲ τέθενται $= \chi$.

$$\text{ὥστε } \frac{\chi^3}{500} \cdot \frac{20}{9} = \chi$$

$$\frac{20\chi^3}{500 \cdot 9} = \chi$$

$$\frac{\chi^3}{2 \cdot 5} = \chi$$

$$\chi^3 = 225\chi$$

$$\chi^2 = 225$$

$$\chi = \pm \sqrt{225} = 15. \text{ Οἱ}$$

ἐμποροὶ τοίνυν εἰσὶ 15. Τὸ καταβληθὲν μέρος ἐκά-
 στου $= 10\chi = 10 \cdot 15 = 150$ δραλ. Τὸ ἀ-
 πάντων $= 10\chi^2$ δραλ. $= 10 \cdot 15^2 = 2250$ δραλ.
 Ἐκάστῃ ἑκατοντάς ἡν. κ. 2χ
 δραλ. $= 30$ δραλ. Τὸ ὀλικὸν κέρδος $= \frac{\chi^3}{5} = \frac{15^3}{5} =$

$$\frac{3375}{5} = 675 \text{ δραλ.}$$

5

§. 376. Αἱ δὲ μικταὶ τῶν Ἐξισώσεων, αἱ Τε-
 τραγωνικαί, οὕτω κέκληνται, διὰ τὸ μὴ ἐντελῇ Τετρά-
 γωνον περιέχειν. Εἰσὶ δὲ, ὡς εἴρηται, (§ 370.) ἐν
 αἷς ἡ ἀγνωστος τῆς β'. δυνάμειος τυγχάνει, καὶ ἐστὶ καὶ
 τῆς α'. καὶ γνωστῆς αὐτῇ ποσότητος προσκειμένης. Ὡς
 $\chi^2 + \pi\chi = \rho$, ἐνθα π, καὶ ρ αἱ γνωσταί. Με-

γεί δ' αἰεὶ ἡ Ἐξίς. Τετράγωνος, τοῦ χ^2 καὶ ἐν πλείο-
σιν ὅροις, καὶ διαφόροις σημείοις ἀπαντῶντος. Ὡσαύ-
τως, καὶ τοῦ χ οὕτως ἔχοντος. Τῆς γάρ Ἐξισώσεως
διαταχθεῖσης, ἀναζόμεν αὐτὴν εἰς τὸν τύπον, ὥστε
τὸ χ^2 ἐνὶ ὅρῳ ἐνυπάρχειν, καὶ ἓνα ὅρον μετὰ τῶν λοι-
πῶν ἀποτελεῖν, παραπλησίως καὶ τὸ χ ἓνα, τρίτον
δὲ εἶναι τὸν τὰς γινυαῖς περιλαμβάνοντα. (§. 369.)

§. 377. Πρὸ δὲ πάντων τὴν ὑπερτέραν δύναμιν
τῆς ἀγνώστου, ἢ τὸ χ^2 τοῦ οἰκείου συνεργοῦ ἀπαλ-
λακτέον, εἰ πάρεστι, τῇ διαιρέσει πάντων τῶν ὅρων διὰ
τοῦ συνεργοῦ τοῦ χ^2 . Ὡς $6\chi^2 + 4\chi = 48$.
Διέλε διὰ 6, καὶ ἔσαι $\chi^2 + \frac{4\chi}{6} = \frac{48}{6}$. ἢ χ^2

$+ \frac{2}{3}\chi = 8$. Καὶ τούτου τελεσθέντος, ἡ Ἐξί-
σωσις καταλλήλως ἢ Τετραγωνικῇ, ἢ Μικτῇ Φημί,
τῷδε τῷ γενικωτάτῳ ἐκφανθεῖν τύπῳ. $\chi^2 + \pi\chi$
 $= + \rho$. Ἀλλὰ σημειώσαι α'. τὴν ταιαύτην Ἐξί-
σωσι αἰεὶ ἐκ τριῶν συνίστασθαι ὅρων, β'. τοῦ $\pi\chi$, καὶ
 ρ ἀμφοῖν τὰ ἐναντία σημεία προκεῖσθαι, ὥς τῶν ὅρων
τούτων καταφατικῶντε, καὶ ἀποφατικῶν εἶναι δύνα-
μένων. γ'. τὸ π καὶ ρ πᾶσαν δυνατὴν ἐγνωσμένην παρι-
στᾶν ποσότητα, ἥτοι ὁλοσχιρεῖς, καὶ κλασματώδεις ἀ-
ριθμοὺς, καὶ τὴν 1. ὀγεσθαι δὲ εἰς τὸ 0 (§. 369.)
τῇ προσθέσει τῶν ποσοτήτων ἐπὶ ῥάτερα ἐναντίῳ τῷ
σημεῖῳ. ὥς $\chi^2 + \pi\chi + \rho = 0$.

§. 378. Ἄλλ' εἴπερ ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^2 +$
 $\pi\chi = + \rho$ τὸ $\chi^2 + \pi\chi$, ἢ $\chi^2 - \pi\chi$ ἐνεφ-
γεία, καὶ ἀληθῶς τετράγωνον ἦν, τῇ ἐξαγωγῇ ἐκα-
τέρωθεν τῆς τετραγ. ῥίζης, ἢ τιμῇ τοῦ ρ εὖρητο αὖ ῥα-
δίως. Ἀλλὰ τούτου μὴ ἔχοντος οὕτως, ἑτέραν ὁδὸν τρα-
πέσθαι χρή, Ἐν τοῖς προηγηθεῖσι δέδεικται πᾶσαν
ποσότητα ἔχειν θεωρεῖσθαι, ὥς ἐκ δύο μερῶν συνιστα-
μένην,

έναν, κἀντεῦθεν καὶ τὸ Δυνατόν ἀναφύεσθαι.
 §. 270.) Καὶ τὸ $(a + \beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$, καὶ $(a - \beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$ εἶναι
 τὸ οὖν ἐντελὲς τετράγωνον τοῦ Δυνατοῦ ἐκ τριῶν
 συνίσταται ὅρων. Ἀλλ' ἐν τῷ $\chi^2 + \pi\chi$ δύο αἱ πα-
 ρύτητες, χ καὶ π , καὶ αὐτὴν τὴν 1 τοῦ π ὀηλοῦν-
 ος. Οἱ δὲ ὅροι μόνον δύο. Οὐκ ἔστι ἄρα ἐντελὲς
 τετράγωνον. Τοὺς δὲ γενικοὺς τύπους $a^2 + 2a\beta + \beta^2$
 καὶ $a^2 - 2a\beta + \beta^2$ ἐπιτηροῦντες ὁρῶ-
 μεν τὸν τρίτον ὅρον, ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ β , μέρους
 τῆς ρίζης ἀνακύπτειν, ἐάν τὸ τῷ δευτέρῳ ὅρῳ ἐνυπάρ-
 ρον, (πλὴν τοῦ a , μέρους τῆς ρίζης) ἦται ὁ συνερ-
 γὸς ἡμισυθῇ καὶ ἡ ἡμισυθεισα ποσότης τετραγωνι-
 σθῇ, ἢ μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθῇ. Οἶον ἐν τῷ
 γ'. ὅρῳ $+ 2a\beta$, πλὴν τοῦ a , ἔνεστι καὶ 2β . ὃ ἡμι-
 ευθεν δίδωσι $+ \beta$, ὃ τετραγωνισθὲν δίδωσι β^2 , ἡ-
 οὖν τὸν γ'. ὅρον. Ὡσαύτως καὶ ἐν τῷ $- 2a\beta$, τὸ
 $- 2\beta$ ἡμισ. δίδ. $- \beta$, τοῦτο τετραγ. δίδ. $+ \beta^2$,
 οὖν γ'. αὐτοῦ ὅρον. Οὕτω μεταχειριζομένων καὶ τὸν
 συνεργὸν τῆς ἀγνώστου ποσότητος ἐν τῷ β , ὅρῳ τῆς τε-
 τραγωνικῆς Ἐξισώσεως, προκύψει κἀνταῦθα γ'. ὁ-
 ρος. Ὡς ἐπὶ Σάτερα τοῦ τῆς ἰσότη. σημείου ἐντελὲς
 τετράγωνος, ἐκ ὁμιεροῦς ποσότητος συγκροτούμενος.
 Ἀλλ' ὁ γ'. ὅρος ἀν γκαίως τῆνικαῦτα καπὶ Σάτερα προ-
 ἐδήσεται, ἵνα τὸ ἴσον τῆς Ἐξισώσεως τηρηθῇ. Οὐ-
 γὰρ ὁ ὁ ἐφ' ἑκάτερα προσεθεὶς ὅρος αἰ ποσότης ἐγνω-
 μενη τυγχάνει, ἐκ τῶν συνεργῶν τοῦ χ , γνωσῶν ὄν-
 των, προκύπτει. $\pi \cdot \chi \cdot \chi^2 + \pi\chi = \rho$ Ἡμι-
 ευθεὶς ὁ π συνεργὸς τοῦ χ εἶναι $\frac{\pi}{\chi}$ τετραγωνισθεὶς

εἶ, $\frac{\pi}{\chi} \cdot \frac{\pi}{\chi} = \frac{\pi^2}{\chi^2}$, καὶ ἐφ' ἑκάτερα προσεθεὶς

ποιήσει τὴν Ἐξίστην $\chi^2 + \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\rho^2}{4}$

Εἰς 2

+

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\pi^2}{4}. \text{ Παραπλησίως } \chi^2 - \pi\chi = \pm \varrho. \text{ ἔαν} \\
 & - \pi \text{ ἡμισυνθῇ, ἔσαι } - \frac{\pi}{2} \cdot \text{ τετραγων. δὲ} = \\
 & - \frac{\pi}{2} \cdot - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \text{ καὶ πρὸς, } \chi^2 - \pi\chi \\
 & + \frac{\pi^2}{4} = \pm \varrho + \frac{\pi^2}{4}.
 \end{aligned}$$

ἔχομεν οὖν ἐπὶ τὰτερα ἐντελεῖ δυνάμειον τετράγωνον, οὐ καὶ ἡ ρίζα γνωστή. Τὸ γὰρ ἕτερον μέρος τῆς ρίζης ἢ α'. δύναμις τῆς ἀγνώστου ἐστὶ ποσότητος. τὰτερον δὲ ὁ ἡμισυνεργὸς τοῦ χ τοῦ ἐν τῷ β'. ὅρῳ μετὰ τοῦ σημείου, τοῦ τῷ χ προσόντος. $\pi \cdot \chi$ τοῦ $\chi^2 + \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} = \pm \varrho + \frac{\pi^2}{4}$ ἡ ρίζα τοῦ ἑτέρου

ὅρου τῆς Ἐξισώσ. ἐστὶ $\chi + \frac{1}{2}\pi$ τοῦ δὲ $\chi^2 - \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} = \pm \varrho + \frac{\pi^2}{4}$ ἡ ρίζα τοῦ ἐτ. ὅρ. τῆς

Ἐξ. $\chi - \frac{1}{2}\pi$. Ἐάν οὖν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ὅρου τῆς Ἐξισ. ρίζα ἐξαγῇται, ἔξακτέα καὶ ἀπὸ τὰτερου. ἄλλως γὰρ οἱ ὅροι τῆς Ἐξισ. ἰσοδυναμεῖν οὐκ ἔχουσιν. Ὅθεν ἐπὶ τῆς α'. Ἐξισώσεως.

$\chi^2 +$

$$x^2 + \pi x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pm \rho + \frac{\pi^2}{4}}{4}$$

ἔξαχθ. τῆς
ρίζ. ἔσαι

$$x + \frac{\pi}{2} = \sqrt{\left(\frac{\pm \rho + \frac{\pi^2}{4}}{4}\right)}$$

Ὡς

$$x = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(\frac{\pm \rho + \frac{\pi^2}{4}}{4}\right)}$$

Ἐπὶ δὲ τῆς β'. $x^2 - \pi x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pm \rho + \frac{\pi^2}{4}}{4}$

τῆς $\sqrt{}$ ἔξ.
ἔσαι

$$x - \frac{\pi}{2} = \sqrt{\left(\frac{\pm \rho + \frac{\pi^2}{4}}{4}\right)}$$

καὶ

$$x = +\frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(\frac{\pm \rho + \frac{\pi^2}{4}}{4}\right)}$$

Ἀλλὰ σημειωτέον κἀνταῦθα ἐν γενεῇ, ὅτι, ἐπειδὴ πᾶ-
σα τετραγωνικὴ ρίζα, ὡς κἀπὶ τῶν ἀμιγῶν τετραγω-
νικῶν Ἐξισώσ. καὶ καταφατ. καὶ ἀποφ. λαμβάνεται,
πρὸ τοῦ $\sqrt{}$ τίθενται ἄμφω τὰ σημεῖα + καὶ -.

Ὡς

$$x + \frac{\pi}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\pm \rho + \frac{\pi^2}{4}}{4}\right)}$$

καὶ

$$x = -\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\pm \rho + \frac{\pi^2}{4}}{4}\right)}$$

Ὡσαύτως κἀπὶ τοῦ ἑτέρου $x = +\frac{\pi}{2} \pm$

$\sqrt{\left(\frac{\pm \rho + \frac{\pi^2}{4}}{4}\right)}$. Ἐπεὶ δὲ ἡ ρίζα καταφατικῶς

ληφθεῖσα, καὶ τῷ π προσεθεῖσα, τὴν ἑτέραν τοῦ x
τιμὴν

τιμήν παρέχει, ἀποφατικῶς, δὲ, τὴν ἑτέραν, ἐπὶ τῆς
 ἐσχάτης Ἐξισ. ἔσαι α'. $\chi = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(\frac{+r + \frac{\pi^2}{4}}{2}\right)}$
 καὶ β'. $\chi = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\left(\frac{+r + \frac{\pi^2}{4}}{2}\right)}$.

Τὴν οὖν ρίζαν ἐξάξομεν, τὰς ποσότητας, τὰς
 μετὰ τὸ ριζικὸν κεκείμενας, συνάψαντες τῇ πρόσθεσι.
 προκειται δὲ τοῦ r τὸ $+$ καὶ $-$, ὡς καὶ καταφα-
 τικοῦ, καὶ ἀποφατικοῦ εἶναι δυναμένου, ἐν ᾧ τὸ $\frac{\pi^2}{4}$
 αἰεὶ καταφατικὸν τυγχάνει. Τούτοις δὲ πρόσθεας καὶ
 τὸ, εἴαν ἡ ὁδοῦσα γινώσκῃ ποσότης, ἢ τὸ r , ἢ ἀποφα-
 τικῇ, καὶ μείζων τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$, τὴνικαῦτα $\sqrt{\left(-r + \frac{\pi^2}{4}\right)}$
 ἢ ρίζα γίνεται ἀδυνάτου ποσότητος, ἔξαχθῆναι ἀδυνα-
 τοῦσα, (§. 305.) καὶ τὸ πρόβλημα ἀδύνατον εἶναι,
 κατὰ τὴν τοιαύτην ὑπόθεσιν, οὐκ ἐκινύουσα.

§. 179. Ἐκ πάντων τούτων οἱ τῆς ἐπιλύσεως
 κανόνες τῶν μεμνημένων Τετραγωνικῶν πηγάζουσιν
 Ἐξισώσεων, τούτεσι, τῆς Ἐξισώσεως, κατὰ τὰ
 προηγηθέντα, διαταχθείσης, ἡ μίσσευσον, καὶ
 τετραγωνίσαν τον συνεργὸν τοῦ χ , προ-
 σθεὶς τοῦτον ἐκατέρωθεν, καὶ τὴν ρίζαν
 ἐξαγαγών ἐκατέρωθεν, (ἥτις ἐπὶ φάτερα, ἐν-
 θα καὶ ἄγνωστοι τῶν ποσοτήτων, ῥαδίως εὐρίσκεται.
 (§. ἀνωτ.)) μετὰ θες τὸ β'. μέρος τῆς ρίζης,
 τὸ παρὰ τῷ χ οὖν, ἐναντίω τῇ σημεῖω ἐπὶ
 φάτερα, καὶ τὸ χ ὑπολειφθήσεται ἰσο-
 ῦρόν, καὶ ἡ τούτου διπλή δύναμις ἐν
 γνωσταῖς ποσότησι.

§. 380. Τὰ ἐξῆς παραδείγματα τὰ ἐς δεῦρο ῥηθέντα σαφῶς ἀναπτύσσουσι.

Α'. Ζήτησον δύο ἀριθμοὺς, ὧν ὁ ἕτερος 12 μονάσι τοῦ ἑτέρου μείζων. Τούτων μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθέντων τὸ παραγόμενον ἐστὶ 220.

Λύσις. Ἐστω ὁ ἐλάττω = χ . Ὁ ἄρα μείζων $\chi + 12$. Οὗτοι πολλαπλασιασθήτωσαν. Ὡς $\chi \cdot (\chi + 12) = \chi^2 + 12\chi$. Τὸ δὲ προκύψαν παραγόμεν. = 220.

Ἡ δ' Ἐξίσωσις
ἡμίσητόν σου. $\chi^2 + 12\chi = 220$.

τοῦ χ . τετρ.

αὐτόν. $\chi^2 + 12\chi + 36 = 220 + 36 = 256$

καὶ περ. ἑκατ.

Ἐξάγ. τὴν $\chi + 6 = \pm \sqrt{256} = \pm 16 =$ τῇ ρίζῃ
ρ. ἑκατ.

$$\chi = -6 \pm 16$$

Ἐχει ἄρα τὸ χ δύο τιμὰς, ἡ δυνάμεις, ἄμφω δυνατὰς οὖσας. ἦτοι $\chi = -6 + 16 = 10$. Καὶ $\chi = -6 - 16 = -22$. Ὡς ἐπὶ μὲν τοῦ α'. ὁ μείζων ἀριθμὸς = $10 + 12 = 22$. ἐπὶ δὲ τοῦ β'. = $-22 + 12 = -10$ Ἐπ' ἀμφοῖν δ' ἀληθεύει καὶ τὸ Πρόβλημα. Καὶ γὰρ $10 \cdot 22 = +220$. Καὶ $-22 \cdot -10 = +220$. Τῆς δ' Ἐπιλύσεως τοῦ προβλ. γενικῶς ἀποδιδόμενης, κείσθω = χ ὁ ἐλάσσων. Ἡ μεταξὺ τῶν δυοῖν διαφορὰ = β. ὁ μείζων ἄρα $\chi + \beta$. Τὸ ἐξ ἀμφοῖν παραγόμεν. ἔστω = γ. Ἡ δ' Ἐξίσωσις

$$\chi \cdot (\chi$$

$$\chi \cdot (\chi + \beta) = \gamma$$

$$\chi^2 + \beta\chi = \gamma.$$

ἀναπλήρ. τὸ

$$\text{τετράγ. } \chi^2 + \beta\chi + \frac{1}{4}\beta^2 = \gamma + \frac{1}{4}\beta^2 = 4\gamma + \beta^2$$

Ἐξαχθ. ἢ $\sqrt{\quad}$

$$\chi + \frac{1}{2}\beta = \pm \sqrt{4\gamma + \beta^2} \quad \text{Καὶ ἐπεὶ ἡ}$$

$$\chi + \frac{1}{2}\beta = \pm \sqrt{\frac{4\gamma + \beta^2}{4}} \quad \text{ρίζα τοῦ πα-}$$

$$\chi = -\frac{1}{2}\beta \pm \sqrt{\frac{4\gamma + \beta^2}{4}}$$

§. 381. Β'. Ζητηθῇ τωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, ἐν συνεχεῖ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ κείμενοι, καὶ οὕτως ἔχοντες, ὥστε τὸ κεφάλ. τοῦ α'. καὶ β'. = 10 εἶναι, τὴν δὲ διαφορὰν τῶν δύο τελευταίων = 24.

Λύσις. Ἐξω ὁ α'. — χ . Καὶ ἐπεὶ τὸ κεφάλ. τοῦ α'. καὶ β' = 10, κατὰ τὴν ὑπόθ. ἀναγκαιῶς ὁ β'. τοσαύτῳ ἐλάττων ἔσται τοῦ α', ὅσῳ μέγας ὁ α'. τοῦτ' ἔσται $10 - \chi$. Ὅτι $10 - \chi + \chi = 10$. Ἐπεὶ δ' αὖθις οἱ δύο ἔσχατοι διάφοροι ἀλλήλων 24 μονάσι, καὶ συνεχῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίαν εἶναι χρή, ἔνθα ὁ β' καὶ γ' ἀριθμὸς ἴσος ἀλλήλοισ. (§. 24.) ἦτοι καὶ ὁ γ' = $10 - \chi$. ὁ δ' ἀριθμὸς, ὅς ὁ παρ' μὲν ζητούμενος γ' τυγχάνει = $34 - \chi$ ἔσται. Τὴν γὰρ διαφορὰν 24 εἶναι χρή ἀπὸ τοῦ προηγουμένου. καὶ εἰν 10 — χ ἀπὸ τοῦ $34 - \chi$ ἀφ' ἡρεθῇ, ὑπολείπ. ἡ διαφορὰ 24. Πᾶσα οὖν ἡ ἀναλογία εἴη $\chi : 10 \quad \chi : 10 - \chi : 4 \quad \chi$.

Ἐάν

Ἐάν οἱ δύο ἄκροι, καὶ οἱ δύο μέσοι ὄραι ἐπ' ἀλλή-
λους πολλαπλασιασθῶσι, προκύψει ἥδε ἡ ἑξέ-
σσις.

$$34x - x^2 = x^2 - 20x + 100$$

$$- 100 = x^2 - 54x$$

$$- 50 = x^2 - 27x$$

ἀναπλήρ. τὸ

$$\text{τετραγ.} \quad - 50 + \left(\frac{27}{2}\right)^2 = x^2 - 27x + \left(\frac{27}{2}\right)^2$$

$$- 50 + \frac{729}{4} = x^2 - 27x + \frac{729}{4}$$

$$\frac{529}{4} = x^2 - 27x + \frac{729}{4}$$

ἐξάγ. τὴν $\sqrt{}$

$$\pm \sqrt{\frac{529}{4}} = x - \frac{27}{2} \quad (\S. 78.)$$

Ἡ τῆς ρίζης ἐνεργεία ἐξαχθείσης

$$\pm \frac{23}{2} = x - \frac{27}{2}$$

$$\frac{27}{2} \pm \frac{23}{2} \quad \eta \quad \frac{27 \pm 23}{2} = x$$

$$\Omega\varsigma \chi. \alpha'. = \frac{27 + 23}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\text{Καὶ } \beta'. = \frac{27 - 23}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ὡς ἐπὶ μὲν τοῦ α'. οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ x , $10 - x$,
 $34 - x$ εἰσὶ $+ 25 - 15$ καὶ $+ 9$ ἢ ὁ ἀναλογία
 $25 : - 15 = - 15 : 9$. Ἐπὶ δὲ τοῦ β'. οἱ
τρεῖς ἀριθμοὶ, 2 , 8 , 32 . καὶ ἡ ἀναλογία $2 : 8$
 $= 8 : 32$. Ἐπ' ἀμφοῖν τὸ κεφάλ. τοῦ α'. καὶ β'.
ὄρου $= 10$. Ὅτι καὶ $25 - 15$, καὶ $2 + 8$
 $= 10$.

— 10. Καὶ ἡ διαφορά τῶν δύο τελευτ. ὅρων
κατὰ τὸ Πρόβλημα.

§. 382. Γ'. Ζήτησαν 2 ἀριθμούς, ὡς
Φάλ. 15, καὶ τὸν τὸ παραγόμενον 54. Τοῖς
Ἐξίσωσιν παράγειν, δύο ἀγνώστους περ-
νουσάν, χ καὶ ψ . Ἀλλ' εὐχερῶς, ὡς αὐτὸ
φανὲς ἔσαι, εἰς μίαν ἀγνώστον ἀναχθῆσεται.
ἀριθμοὶ ἔσωσαν χ καὶ ψ . Ὡς κατὰ τὸ
 $\chi + \psi = 15$. Καὶ $\chi\psi = 54$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Ἐπειδὴ} & \chi + \psi = 15 & \text{ἀντικαταστάς αὐτὴν} \\ & & \text{τοῦ ἀντὶ τοῦ} \\ & \chi = 15 - \psi & \text{Ἐξίσ. } \chi\psi \\ & & \text{ἔσαι} \end{array}$$

$$(15 - \psi)\psi = 54$$

$$15\psi - \psi^2 = 54$$

$$- 54 = \psi^2 - 15\psi$$

$$\begin{array}{l} \text{ἀναπ.} \\ \text{τὸ} \\ \text{τετρ.} \end{array} \quad \begin{array}{l} - 54 - (\frac{15}{2})^2 = \psi^2 - 15\psi - (\frac{15}{2})^2 \\ - 54 + \frac{225}{4} = \psi^2 - 15\psi + \frac{225}{4} \end{array}$$

$$\eta \quad - \frac{216}{4} + \frac{225}{4} = \frac{9}{4} = \psi^2 - 15\psi + \frac{225}{4}$$

$$\text{Ὡς} \quad \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} = \sqrt{\psi^2 - 15\psi + \frac{225}{4}}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{15}{2} = \frac{18}{2} = 9 = \psi.$$

$$+ \psi = 15. \psi \delta\epsilon = 9. \alpha\gamma\alpha \chi =$$

§. 383. Γυνήτις ἐρωτηθεῖσα, πόσας
ἀπεκρίνατο. Ἡ ἐμὴ μήτηρ ἐν τῷ γεγεννημένῳ
εἰκοσιτεσσαραετῇς. Ἐὰν οὖν ἡ παροῦσα ἡλικία

μου μετὰ τῆς ἐμῆς, ἣν ἤδη ἄγω, ἡλικίας πολλα-
 πλάσι, προκύψουσιν 756 ἔτη. Ζητεῖται, ποσα-
 θυγάτηρ, καὶ πασαετῆς ἡ μήτηρ.

Λύσις. Κεῖσθαι τὴν θυγατέρα εἶναι χ ἐτῶν. Ἡ
 ἄρα ἔσαι $24 + \chi$ ἐτῶν. ἣν γὰρ 24 ετῆς,
 ἡ γεννήσασα, οἷς (24 ἔτ.) προσίθεται καὶ τὰ
 τα ἔτη τῆς θυγατρὸς. πάλλαπλ. δι' ἀλ-
 λὰ τὰ ἔτη ἀμφοῖν. $(24 + \chi) \cdot \chi = 24\chi$
 2 . Ταῦτα δ' ἔσαι = 756. Ὅθεν ἡ Ἐξίς.

$$\chi^2 + 24\chi = 756$$

τὸν συν.

τετρ. καὶ

$$\text{δὲς ἑκατ. } \chi^2 + 24\chi + 144 = 756 + 144$$

$$\chi^2 + 24\chi + 144 = 900$$

ν √ ἑκ.

$$\chi + 12 = \pm \sqrt{900} = \pm 30.$$

$$\chi = -12 \pm 30 = \text{τῇ ἡλικίᾳ}$$

θυγατρὸς. Ἐνταῦθα μόνον ἡ ἑτέρα τιμὴ τοῦ χ
 γίνομαι, ἥτοι $\chi = -12 + 30 = 18$. Οὐ-
 δὲ καὶ ἡ ἑτέρα $\chi = -12 - 30$. Ὡς ἡ
 θυγάτηρ 18 ετῆς. Ἡ δὲ μήτηρ, ὡς 24 ετῆς. ἐν
 ταύτῃ τεκεῖν, εἰν ἡσὶ $24 + 18 = 42$ ἐτῶν.
 $42 \cdot 18 = 756$. Λέλυται ἄρα τὸ ζητού-
 ν.

§. 384. Ε. Πρόβατάτινος 200 θαλήρων ὡ-
 σπόμενου, εἰ τοσούτου 20 ἐτι εὐλήφει, καὶ οὖν προ-
 σόν ἡμίσει θαλήρων ἑλαττον ἀν' ἐτιμηθῇ, ἡ ἤδη
 εἶται. πόσα τὰ πρόβατα:

Λύσις. Τεθῆτω τὰ πρόβ. ψ . Καὶ ἐπεὶ
 200 θαλήρων ἄξιαι, ἑκάσταν πρόβ. τιμᾶται 200

Καὶ γὰρ ψ πρόβατα: 200 θαλ. = 1 πρόβ.
 200 θαλ. εἴκοσι πρόβ. ἔτι ἐκείνοις προσεθ.

$\psi + 20$ πρόβ. Καὶ τηνικαῦτα ἦν ἂν τὸ
 ἄξιον 200 θαλ. Τὸ δὲ ἡμ. θαλ. ἔλαττον

τῆς προτέρας τιμῆς τοῦ προβάτου. Ὡς, ἐὰν ἂν
 προτέρας τιμῆς ἐκάστου προβάτου $\frac{1}{2}$ θαλ. ἀφα
 ἔσαι ἴση τῇ β'. τιμῇ. τουτ.

$$\frac{200}{\psi + 20} = \frac{200}{\psi} - \frac{1}{2}$$

τά κλ. ὑπὸ τὸν αὐτ.

$$\frac{200}{\psi + 20} = \frac{400 - \psi}{2\psi}$$

τά κλ. τῇ πολλαπ.

$$400\psi = 400\psi - \psi^2 + 8000 - 20\psi$$

$$\psi^2 + 20\psi = 8000.$$

τὸ τετρ. ἀναπλ.

$$\psi^2 + 20\psi + 100 = 8100$$

ἐξαχθ. ἡ $\sqrt{}$

$$\psi + 10 = \pm \sqrt{8100} = \pm 90$$

$$\psi = -10 \pm 90. \quad \text{Τὸ } -90 \text{ περι}$$

Ὡς ὑπολείπεται ἡ ἑτέρα τοῦ ψ τιμῇ. ἣτο
 $= -10 + 90 = 80.$ Ὡνήσατο ἄρ.

200 δραλ. Ὡν ἕκαστον ἀξίον $\frac{200}{80} = 2\frac{1}{2}$ δραλ.

τι καὶ 20 εἰλήφει τοσούτου, εἶχεν ἂν 100.
ῶν ἕκ. 2 δραλ. ἐτιμήθη, ἥτοι $\frac{1}{2}$ δραλ. ἔλαττον,

§. 385. Ζ'. Ἴππον τρεῖς Α, Β, καὶ Γ κοι-
ριάρμενοι 120 δραλ. συνέθεντο καταβαλεῖν. Ζη-
τῶν εἰ τοσαῦτα χρήματα μετ' ἑαυτῶν ἔχοιεν,
ἵνα τοῖς τρισὶν ἅμα πάρησιν, οὕτω μὲντοι, ὥστε
θαλήρω τοῦ Α πλεονεκτήειν, Γ δὲ τοσούτους ἔ-
στος ὁ τῶν δραλ. τοῦ Α ἀριθμὸς, ἑαυτῶ πολ-
σιασθεῖς, ἢ τετραγωνισθεῖς. Πόσους ἕκαστος
εἶ;

Λύσις. Ἐχέτω Α, x δραλ. Β, $x + 1$, Γ

$x = x^2$. πάντες δὲ ἴσοι 121. Ἦτοι

$$x^2 + x + 1 + x = 121$$

$$\hline \text{ἢ}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 121$$

$$\hline \text{ἐξάγ. τὴν } \sqrt{}$$

$$x + 1 = \sqrt{121} = \pm 11$$

$$\hline$$

$$x = -1 + 11. \text{ Κάνταῦθα ἢ } + \text{μόνου}$$

τοῦ x χρήσιμος. Ὡς $x = -1 + 11$

ο. Ἐνθεντοι Α ἔχει 10 δραλ. Β. 11. καὶ
00.

Εἰ δ' ἡ τιμὴ -11 παρείληπτο, ἦν ἂν x
 -12 . Καὶ $x + 1 = -11$. Καὶ x^2
 -144 . Ὅθεν καὶ $-11 - 12$ καὶ $+144$
τως $= 121$. Ἀλλὰ ταύτη χρῆσασθαι πε-
ν.

§. 386.

§. 386. Εἰσὶ δὲ καὶ Προβλήματα εἰς τὰ γωνικάς φέροντα Ἐξισώσεις, ἐν οἷς δύο, τρεῖς, πλείους ἐνυπάρχουσι τῶν ἀγνώστων ποσοτήτων. οὖν καὶ τοσαῦται συνισῶνται τῶν Ἐξισώσεων, τὸ τιμὰ ἐς διωρισμένον. Καὶ δίδονται ἄρα δύο ρισμένοι τιμαὶ, κατὰ τὸν αὐτὸν εὐρισκόμεναι πον, αἷς καὶ τῶν τοῦ α'. βαθμοῦ Ἐξισώσ. (§. 385 κτ.)

§. 387. Η'. Ἄνδρες καὶ γυναῖκες συνῆλθον ἀριθμῶντινα ξεσῶν οἴνου, τὸ ἥμισυ τῶν ξεσῶν, ὅ τῶν γυναικῶν ἀριθμός. Ἀποτίσαι δ' ὑπὲρ τοῦ θαλ. 3, καὶ γρόσσους 20 (ἕκαστος γρόσσος = 2 καὶ 2 λεπτοῖς παρ' ἡμῖν) χρή. Ἀλλὰ συντίθει ἀλλήλοις κληρώσασθαι, πότερον, οἱ ἄνδρες, ἢ αἱ γυναῖκες ἀποτίσουσι. Καὶ εἰ μὲν οἱ ἄνδρες, ἕκαστος ἀποτίσει τετράκις τοσαῦτα λεπτά, ὅσοι αὐτοὶ ἅμα. ὁ αἱ γυναῖκες, τοσαῦτα λεπτά, ὅσαι αὐταί. Πόσοι οἱ ἄνδρες, καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες; πόσους ξέσας οἱ ἄνδρες; καὶ πόσου ἕκαστος τιμᾶται ξέσης;

Λύσις. Τὰ δύο τελευταῖα τῶν Ζητημάτων, ἐκ τοῦ προβλήμ. δῆλον, διὰ τῆς ἐπιλύσεως διορίζονται τῶν πρώτων. Κεῖσθωσαν ψ ἄνδρες, καὶ χ γυναῖκες. Εἴπερ οἱ ἄνδρες ἀποτίσαι ὅφειλουσιν, κατὰ λεί ἕκαστος τετράκις τοσαῦτα, ἢ αὐτοί. Ἐκ τοῦ ἔχοντος εὐρεῖν τὸ ὅλικόν κεφάλαιον, τὸ ὑπὸ τῶν ὁρῶν καταβληθήσόμενον. ἦτοι $1 \text{ ἀνὴρ} : 4 \psi = \text{ἀνδ.} : 4 \psi^2$. Ὡς $4 \psi^2$ λεπτά διδῶσι πάντες οἱ ἄνδρες. Εἰδ' αἱ γυναῖκες, κατὰ τὴν ὑπόθ.

$1 \text{ γυνή} : \chi \text{ λεπτά} = \chi \text{ γυναῖκες} : \chi^2 \text{ λεπτά}$. Ἔντοι πάσαι αἱ γυναῖκες διδῶσι χ^2 λεπτά. Ἐπὶ ὁ ἅμφω ἴσα, ἔσαι ἄρα $\chi^2 = 4 \psi^2$

$$\chi = \sqrt{4 \psi^2} = 2 \psi.$$

ἔτι ἅπαζ τοσαῦται γυναῖκες, ἢ ἄνδρες, τὸ κε-
τὸ ὑπὸ τῶν γυν. καταβλ. ἦν χ^2 λ. ἦν δὲ 3 θαλ.
20 γρ. = 1024 λεπτοῖς. Ὅθεν

$$\chi^2 = 1024$$

$\chi = \sqrt{1024} = 32 =$ τῷ ἀριθμῷ τῶν
γυναικῶν. Καὶ ἐπειδὴ $\chi = 2 \psi$. $\chi = \psi$. ἥσαι

= 16 ἄνδ. ἔπιον δὲ αἶνον ἡμισυ ξεσῶν, ἢ ὁ ἀριθ-
τῶν γυναικῶν, ἥτοι χ ξέσ. $\frac{32}{2} = 16$ ξέσ. Ἐ

δὲ 16. ξ. τιμῶνται 3 θαλ. καὶ 20 γρόστων, ὅξ. τι-
καὶ 8 γρ. Εἰ οὖν οἱ ἄνδρες ἀποτίσουσιν, ὀφείλει
ος 4ψ λεπτ. ἢ 4 · 16 λεπτ. = 8 γρόσ. Ε-
γυναῖκες, ἐκάστη καταβαλεῖ χ λεπτ. ἢ 32 λεπτ.
4 γρόσ. Ἐπ' ἀμφοῖν προκίπτει 3 θαλ. 20
γρ.

§. 388. Θ'. Ζήτησον δύο ἀριθμοὺς, χ καὶ
τῶν τὸ παραγόμενον, τὸ κεφάλαιον, καὶ ἡ διαφ-
τῶν κατ' αὐτοὺς τετραγώνων ἴσα.

Λύσις. Τὸ παραγόμεν. τῶν ἀριθμῶν τεθήτω
τὸ τούτων κεφάλαιον $\chi + \psi$. ἡ διαφ-
τετραγώνων αὐτῶν = $\chi^2 - \psi^2$. Ὡς, κ
τὸ πρόβλημα, I) $\chi + \psi = \chi\psi$. II) χ
 $-\psi^2 = \chi\psi$. Καὶ $\chi + \psi = \chi^2 - \psi^2$
λαὶ $\chi^2 - \psi^2 = (\chi + \psi) \cdot (\chi - \psi)$
τῶν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκεῖνο ἀναφύετ
α, ἰάν

$\chi +$

$$\chi + \psi = \chi^2 - \psi^2 \quad \text{ἔσαι καὶ}$$

$$\chi + \psi = (\chi + \psi) \cdot (\chi - \psi)$$

$$\chi + \psi = \chi - \psi$$

$$\chi + \psi$$

$$1 = \chi - \psi$$

$$1 + \psi = \chi$$

Ἐπειδὴ ἐν 1) $\chi + \psi = \chi\psi$, ἀντικαταστήσας ταύτη τῇ Ἐξίσωσι τὸ ἰσοδύναμον τοῦ χ , ἦτοι ἀντὶ τοῦ $1 + \psi$ ἔσαι $1 + \psi + \psi = (1 + \psi) \cdot \psi$

$$2\psi + 1 = \psi^2 + \psi$$

$$1 = \psi^2 + \psi - 2\psi = \psi^2 - \psi$$

τὸν συνεργόν

τοῦ ψ , ὅς ἐστι

$$1 + \frac{1}{4} = \psi^2 - \psi + \frac{1}{4}$$

ἕξιν, ἡμίση. τε-

τραγ. καὶ πρὸς

σθες ἑκάτερον.

$$\pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \psi - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \psi$$

$$1 \pm \sqrt{5} = \psi$$

Καὶ ἔπειδὴ

τοῦ 4 λα

2

Ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν προηγηθεῖσαν Ἐξίσωσιν $1 + \psi$ ἀντικαταστάτος, ἀντὶ τοῦ ψ , τοῦ εὐρεθέντος, ἔσαι

$$1 + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \eta \quad \frac{3}{2} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2

2

$\frac{1}{2} + \sqrt{5} = \chi$. Εύρηται οὖν οἱ ἀριθμοὶ οἱ ζη-

μενοι. ἑκάστος δ' ἔχει δύο τιμὰς, ὡς ἐν τοῖς ῥιζο-
σ σημείοις ταῖς δύο $+$ ποσότησιν, ἢ ταῖς δύο $-$
χρησαίμεθα. παραληφθήτωσαν αἱ $+$ ποσότη-
ἐναῖς 1) τὸ παραγόμεν. ἀμφοῖν τῶν ἀριθμῶν ἐς $\chi\psi$,
ψχ. Ὡς $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

πολλαπλ.

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$+ \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4}$$

$$+ \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{4\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4} + \sqrt{5} = 2 + \sqrt{5}.$$

ὁ κεφάλαιον ἀμφοῖν τῶν ποσοτήτων, ἢ $\chi + \psi$
 $= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{2} =$
 $+ \sqrt{5}.$

Ἡ διαφορὰ τῶν Τετραγώνων, ἢ $\chi^2 - \psi^2$.

Τετραγων. το ψ . $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \psi.$$

τετραγων. καὶ χ ἤδη

$$\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{9}{4} + \frac{6\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4} + \frac{6\sqrt{5}}{4} = \frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Ὡστε } \chi^2 - \psi^2 = \left(\frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} +$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{7-3}{2} + \frac{3\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{2} +$$

$$\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} = x^2 - \psi^2. \text{ Λέλω.}$$

2
αἰ ἄρα τὸ Πρόβλημα.

§. 389. Καὶ ταῦτα μὲν ἱκανὰ περὶ τῶν Τετραγωνικῶν Ἐξισώσεων. Πρὶν ἢ δ' εἰς τὰς τοῦ γ'. βαθμοῦ μεταβῆναι, σημειωτέον ἐστὶ τινα περὶ ἐκείνων, τῆς ἐκείνων φύσεως, καὶ ἐπιλύσεως μᾶλλον καθολικωτέραν ἢν ἐνριαν παρέχοντα. Αἱ τετραγωνικαὶ τῶν Ἐξισώσεων, καθὰ προὔχειρίσαμεν, ἐπιδεκτικαὶ διπλῆς ἐπιλύσεως τυγχάνουσιν, ὡς πρὸ τῆς ρίζης ἀμφοῖν τῶν σημείων + καὶ — προκειμένων, καὶ τῆς τετραγ. ρίζης καταφοτικῆς καὶ ἀποφατικῆς ἐκληφθῆναι δυναμένης. Εἰ γὰρ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῆς ἐφ' ἑαυτὴν καταφατικῶς προκύπτει τετράγωνος. Ἐὰν δὲ καὶ τὸ δ. μέρος τῆς ρίζης, τὸ παρὰ τῷ χ, ἐπὶ θάτερον μετανεχθῇ, ἵνα τὸ χ μειωθῇ, τὸ χ, ἢ κυρίως, ἢ ῥίζα τῆς Ἐξισώσεως διπλὴν τιμὴν λαμβάνει, καὶ ἐπὶ μὲν τῶν πλειόνων Ἐξισώσεων γίνεται τοῦτο ἐνεργεία, ποτὶ ἢ ῥίζα αὐτῶν ἅμα τὰς τιμὰς ἄμφω παρ. δεχεται, αἵτινες ἦτοι ἄμφω καταφατικαί, ἢ ἄμφω ἀποφατικαί, ἢ ἡ μὲν καταφατικὴ, ἢ δ' ἑτέρα ἀποφατικὴ. Ἐίστη δὲ μίαν καὶ μόνην λαμβάνει, μᾶλλον δὲ ἄμφω εἰσὶν ἀδύνατοι. Ὡς ἐκ τῶν παραδ. δῆλον ἡμῖν εἶναι.

Ἡ Ἐξίσωσις $x^2 - 12x + 36$, καταλλήλως ἐπιλυθεῖσα, δίδωσι $x = + 6 + \sqrt{0}$. ἢ ἐπειδὴ ἢ $\sqrt{0} = 0$, $x = + 6$. Ἐστὶν ἄρα τῷ χ μία μόνη τιμή. Εἰ γὰρ $x^2 - 12x + 36 = 0$, εἰ καὶ $x^2 - 12x = - 36$. ἄρα καὶ $x^2 - 12x + 36 = - 36 + 36 = 0$. Ὡς $x - 6 = \sqrt{0}$. καὶ $x = + 6 + \sqrt{0}$. Ἡ δ' Ἐξίσ. $x^2 + 10x + 48 = 0$ δίδωσι α'. $x = - 4 + 1 = - 3$. Καὶ β'. $x = - 5 - \sqrt{1} = - 6$. ἄμφω ἀδυνάτους τι-

μὲν οὖσα. Συνιθεῖν δὲ πρέπει, ὅτι, ἐάν καὶ τι
 τοῦ χ προκύψῃ, καὶ τὰς τοιαύτας τῶν Ἐξισ.
 τὴν $\chi = 0$ ποιεῖν ἔχομεν. Τοῦτο δ' ἔσαι, εἰ
 εὑρεθεῖσαν, ἢ εὑρεθεῖσας τιμὰς τοῦ χ , ἢ τῆς β
 τῷ χ ἀντικειμένους τοῖς σημείοις προσθεῖναι.
 π. χ . ἐκ τῆς Ἐξισώσεως $\chi^2 + \chi - 20 = 0$
 τιμαὶ $\chi = -5$, καὶ $\chi = +4$ εὑρεθεῖεν,
 γεθέντος ἐπὶ τῆς α . τοῦ 5 τῷ χ ἐναντίῳ τῷ σημ.
 ἢ Ἐξισ. γενήσεται $\chi = 0$. Ἐάν $\chi = -5$
 εἶναι καὶ $\chi + 5 = 0$ ἀναγκάως. Ὅτι $-5 +$
 $= 0$. Ἐνθα τὰ χ ἀμφὸς διάφορα. Ἐννοοῦντα
 διὰ τούτων (τῶν χ) αἱ τῆς Ἐξισώσ. ρίζαι. Ὅθι
 π' ἀλλήλας πολλαπλ. χ^2 παράξουσιν. Ἐάν ἄρα
 $= +3$, ἔσαι καὶ $\chi - 3 = 0$. ἢ ἐν γένει, ἐάν
 $= -\alpha$, ἔσι καὶ $\chi + \alpha = 0$. καὶ εἰ $\chi = +\alpha$
 εἶναι καὶ $\chi - \alpha = 0$.

Ἐάν δὲ δύο τοιαῦται τοῦ χ τιμαὶ, αἱ εἰς
 χ θεῖσαι, ἢ καὶ μία, εἰ μία παρῇ, ἐπ' ἄλλη
 πολλαπλασιασθῶσιν, ἀνάγκη πᾶσα τετραγων.
 Ἐξίσωσιν προσθεῖν $= 0$ ὡσαύτως εὑσαν, ἢ
 τιμαὶ καὶ δυνάμεις τῶν ἄρων ἀλλήλας ἀναιροῦσιν
 περ ἀμέλει τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ χ ἀντὶ τοῦ
 τῇ Ἐξισ. ἀντικαθιστῶμεν, ὅλην τὴν Ἐξισ. εἰς τὸ
 δευκτὸν ἄγοντες. Ἀλλὰ καὶ τοιαύτην Ἐξίσωσιν
 κύψαι ἀνάγκη, ἥτις, ἐπιλυσμένη, τὰς αὐτὰς
 τοῦ χ παράσχοι, ἐξ ὧν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ
 φη. Οἷον ἐπὶ τῆς Ἐξισ. $\chi^2 + 8\chi + 15 = 0$
 ἢ $\chi^2 + 8\chi = -15$, ἢ μὲν ἑτέρα τιμὴ τοῦ χ
 $= -5$, ἢ δ' ἑτέρα $\chi = -3$. ἔσιν ἄρα $\chi + 5 = 0$
 καὶ $\chi + 3 = 0$, αἵτινες πολλαπλασιασθ.
 τ' ἀλλήλων.

$$x + 5 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$+ 3x + 15$$

$$+ 5x$$

$$+ 8x + 15 = 0. \text{ ἢ } x^2 + 8x = -15. \text{ Τὸ}$$

ἔρ' ο μετα τοῦ ο πολλ. διδ. ο. Ταῦτὸ γίνεται, καὶ
 ἀδυνάτων οὐσῶν τῶν τιμῶν, ὅπερ αἰ ἀμφοῖν αἱ τιμαὶ
 αὐτὰς ὀφείλουσιν. Εἰ γὰρ τὴν τιμὴν τοῦ x ἐν ἀδυνά-
 ταις ῥίζαις ἐν γένει θῶμεν $x = a \pm \sqrt{V} - \beta$, δὴ-
 ον ὅτι $a + \sqrt{V} - \beta$, καὶ $a - \sqrt{V} - \beta$ ἀδύνατοι
 ὁμοότητες. Ἀλλ' ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθεῖσαι
 ἀπ' αὐτῶν καὶ ἑξίσωσιν παράξουσιν, ἥς τιμαὶ ὑπάρχου-
 σιν. π. x , ἢ ἑξίσ. $x^2 - 6x + 12 = 0$ δίδωσι τι-
 μὰς τοῦ x , α'. $x = +3 + \sqrt{V} - 3$, καὶ β'. x
 $= +3 - \sqrt{V} - 3$. Ὡσε $x - 3 - \sqrt{V} - 3$
 $= 0$. καὶ $x - 3 + \sqrt{V} - 3 = 0$. πολλαπλ.
 ἐπ' ἀλλήλων.

$$x - 3 - \sqrt{V} - 3 = 0$$

$$x - 3 + \sqrt{V} - 3 = 0$$

$$+ x \sqrt{V} - 3 - 3 \sqrt{V} - 3 + 3$$

$$- 3x + 9 + 3 \sqrt{V} - 3$$

$$x^2 - 3x - x \sqrt{V} - 3$$

$$x^2 - 6x + 9 + 3 = 0$$

$$= x^2 - 6x + 12 = 0.$$

§. 390. Γνωσῶν οὖν τῶν τοῦ x οὐσῶν τιμῶν,
 καὶ τῆς ἐτέρας τούτων ἐν τῇ εἰς τὸ ο ἀχθείσῃ ἑξίσω-
 σι τεθείσης, γενήσεται διὰ τούτου καὶ ἡ ἑξίσ. ο.
 Καί, εἴν ἡ ἑξίσ. διάτνος ἀριθμοῦ ἐν αὐτῇ, ἀντὶ τοῦ

χ τε

χ τεθέντος, ὁ γεννῆται, ὁ τεθεὶς ἀριθμὸς ἐστὶ τιμὴ τοῦ
 χ π. χ. ἐν τῇ Ἐξίσωσει $\chi^2 + 8\chi + 15 = 0$.
 ἢν $\chi = -5$, καὶ $\chi = -3$. Ὅτε ἀντὶ τοῦ χ τῶν
 -5 ἐν τῇ Ἐξίσωσει, καὶ ἐστὶ $+ 25 = 40 + 15$
 $= + 40 - 40 = 0$. Καί ἐαν ἀντὶ τοῦ χ ὁ -3
 τεθῇ, ἐστὶ $+ 9 = 24 + 15 = + 24 - 24$
 $= 0$. Ὅπερ ἄλλως ἔχειν οὐ δύναται.

§. 391. Ἐκ πάντων τῶν εἰρημένων συνάγομεν,
 ὅτι πᾶσα τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις, εἰς τὸ ο ἄχθείσα,
 θεωρηθεὶς ἔν, ὡς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο πα-
 ραγόντων, εἰς τὸ ο ἄχθέντων, παραχθείσα. Ἀμ-
 Φοῖ δ' αἰ τιμαὶ τοῦ χ , ἐξ ὧν ἡ τοιαύτη ἀνέσθῃ Ἐξίσω-
 σις, καλοῦνται Ρίζαι τῆς Ἐξίσωσεως. Καὶ πᾶ-
 σαν Τετραγ. Ἐξίσ. ποῦν ἂν πλείους, ἢ δύο τοιαύτας
 τιμας τοῦ χ , ἢ δύο ρίζας ἔχειν. Εἰ γὰρ τρεῖς, ἢ
 καὶ πλείους, εἴη αὖ καὶ τὸ χ εἰς κύβον, ἢ εἰς ὑπερ-
 στέρα τινα ἡμέτερον δύναμιν, καὶ ἡ Ἐξίσωσις οὐκέτι
 Τετραγωνικὴ ἀκούει.

§. 392. Ἀλλὰ θεωρήσωμεν ἐτι γενικώτατα
 τὴν Τετραγ. Ἐξίσ. 1) Ἀμφοῖν τῶν τοῦ χ τιμῶν θε-
 τικῶν παραληφθεῖσιν, τουτ: εἰ θῶμεν $\chi = \alpha$, καὶ
 $\chi = \beta$, καὶ ἔχομένως $\chi - \alpha = 0$, καὶ $\chi - \beta = 0$,
 καὶ ἐπ' αὐτὰς ἡλὸς πολλαπλασιασμοῦ, προκύψει χ^2
 $- \beta\chi - \alpha\chi + \alpha\beta = \chi^2 - (\alpha + \beta)\chi + \alpha\beta$
 $= 0$. 2) Ἀποφατικῶν δ' ἀμφοῖν, ἦται $\chi = -\alpha$,
 καὶ $\chi = -\beta$, καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου $\chi + \alpha = 0$,
 καὶ $\chi + \beta = 0$, καὶ ἐπ' αὐτὰς πολλαπλ. προ-
 κύψει $\chi^2 + (\alpha + \beta)\chi + \alpha\beta = 0$. 3) Τῆς μὲν κα-
 παφατικῆς, τῆς δ' ἀποφατικῆς, τουτ $\chi = +\alpha$,
 καὶ $\chi = -\beta$. Ὅθεν $\chi - \alpha = 0$, καὶ $\chi + \beta$
 $= 0$, καὶ οἱ αὐτὸς πολλαπλ. προκύψει $\chi^2 +$
 $(\beta - \alpha)\chi - \alpha\beta = 0$. Ἐπιτηροῦσι δὲ πρῶτον
 καθορᾶται κατὰ τῶν τριῶν τρόπων τῷ γ. ὅρω το πα-
 ραγόμενον τῶν τιμῶν τοῦ χ ἐνυπάρχειν. Εἰ οὖν αἱ
 Τετραγ.

Τετραγ. τῶν Ἐξισώσεων οὐ καὶ ἑαυτὰς εὐχερεῖς εἰς ἐπίλυσιν εἶεν, τὸ παραγόμενον εἰς τοὺς κατ' αὐτὸ ἀναλύσαντες παράγοντας, καὶ τιθέντες ἀντὶ τοῦ χ εἰς τὴν Ἐξίσ. τοὺς παράγοντας καὶ ἓνα, εἰς ὃ ἡ Ἐξίσ. = 0 γένοιτο, εἶχομεν ἂν τὴν τιμὴν τοῦ χ . Ἐργωδέστατον δὲ ταῦτο, τῆς τιμῆς τοῦ χ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ μὴ οὐσης. Χρῶνται μέντοι τῷ τρόπῳ τούτῳ ἐπὶ τῶν ὑπερτέρων Ἐξισώσεων. δευτέρου. τῷ β'. ὁρῶ αἰεὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ριζῶν, ὡς συνεργὸν τοῦ χ παρῆναι. Καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ α'. τρόπου τῷ μέσῳ ὀρῶν συνεργὸς τὸ — ($\alpha + \beta$), τῷ δὲ β'. τὸ + ($\alpha + \beta$), τῷ δὲ γ' τὸ + ($\beta - \alpha$), ὅπερ (τὸ γ'.) ἀλγεβραϊκῶς προσθεῖν δώσει τὸ κεφάλαιον τῶν ριζῶν. Καὶ δυνάμεθα τοίνυν τὴν ρίζαν εἰκάσασθαι τῇ τῶν συνεργῶν τοῦ β'. ὁρῶ εἰς μέρη κατατομῇ, ἀπόπειραν ποιούμεναι. εἰ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τούτων ὁ γ'. προκύπτει ὅρος. τρίτου. ἁμφοῖν τῶν ριζῶν, ἢ τιμῶν τοῦ χ . Θετικῶν οὐσῶν, τὸν μέσον ὅρον τῆς εἰς τὸ 0 ἀχθείσης Ἐξισώσεως ἀποφατικὸν εἶναι, ἁμῶς δὲ τοὺς ἑτέρους θετικούς. Ἀποφατικῶν δ' ἐκείνων οὐσῶν, πάντας τοὺς ὅρους τῆς εἰς τὸ 0 ἀχθ'. Ἐξ. καταφατικούς. Ἀλλὰ τῆς μὲν καταφατικῆς, τῆς δ' ἀποφατικῆς οὐσης, τὸν μὲν β'. ὅρον καὶ ἀποφατικόν, καὶ καταφατικόν εἶναι, ἢ περ ἐν τῷ + ($\beta - \alpha$) τὸ β. ἢ α. μείζον εἶη, τὸν δὲ γ'. αἰεὶ ἀποφατικόν, τὸν δὲ α'. αἰεὶ καταφατικόν. Ὅθεν ἐκ τῶν σημείων τῶν ὁρῶν τῆς Ἐξισώσεως εἶναι γνωστὸν, πότερον καταφατικῶς, ἢ ἀποφατικῶς ρίζας ἔχουσιν. Οὕτως ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^2 - 24\chi + 108 = 0$, ἁμῶς αἱ ρίζαι καταφατικαί. Εἰσι δὲ + 18 καὶ + 6. Ἐν δὲ τῇ $\chi^2 + 16\chi + 55 = 0$ ἁμῶς ἀποφατικαί, αἱ — 5, καὶ — 11. Ἐν δὲ τῇ $\chi^2 + \chi - 2 = 0$ τελευταῖον, ἢ μὲν ἀποφατικῇ, ἢ δ' ἑτέρα καταφατικῇ. — 2 καὶ + 1. Ὡσαύτως καὶ τῇ $\chi^2 - 5\chi - 6 = 0$ αὐθις ἢ μὲν καταφατικῇ + 6, ἢ δ' ἀποφ. — 1. τέταρτον. τού-

τω

τῷ τῷ τρόπῳ εὐχερῶς ταῖς Ἐξισώσεις ποιῆσθαι, αἷς
 δύο δοθεῖσαι τιμαὶ ἐνυπάρχουσιν, ἥτοι τῇ προσθέσει
 τῶν δύο δοθεισῶν τιμῶν προελεύσεται ὁ συνεργὸς τοῦ
 β' ὅρου, ἢ ὁ συνεργὸς τοῦ χ, καὶ τῷ πολλαπλασιασ-
 μῷ δι' ἀλλήλων, ὁ γ'. ὅρος. Τὰ δὲ σημεῖα μετὰ τὴν
 προσθεσιν, καὶ πολλαπλασιασμὸν καὶ εἰς αὐτὰ ὁῦλα,
 π. χ. Εἰ δύο τετραγωνικὴν Ἐξίσωσιν ποιῆσαι, ἔνθα
 αἱ τοῦ χ τιμαὶ — 8 καὶ + 3 εἰσὶν, ὥστε $\chi + 8$
 $= 0$, καὶ $\chi - 3 = 0$, πρόσθετες — 3 καὶ + 8,
 ὅπερ = 5, καὶ πολλαπλασιάσας + 8 ἐπὶ — 3
 $= -24$. Ἐάν οὖν τὸ κεφάλαιον τῶν ῥιζῶν συ-
 νεργὸς τοῦ β' ὅρου τεθῇ, καὶ τὸ παραγόμενον γ'. ὅρος
 γένηται, ἔσται ἡ Ἐξίσωσις $\chi^2 + 5\chi - 24 = 0$.

§. 393. Ἐάν δὲ μία μόνον τιμὴ τοῦ χ ἐν τε-
 τραγωνικῇ δοθῇ Ἐξισώσει, τῇ διαίρῃσει τῆς Ἐξισώσεως
 δι' αὐτῆς προκίψει ἡ ἑτέρα, τουτέστι διαιεθεύσης τῆς
 εἰς τὸ 0 ἀχθείσης Ἐξισώσεως διὰ τοῦ εἰς τὸ 0 ἀχθέν-
 τος γνωστοῦ χ, ἐπειδὴ τοῦτο ὁ ἕτερος ἐστὶ παράγων,
 διὰ τῆς διαίρεσεως ὁ ἕτερος πρόεισιν, εἰς πηλίκον γινώ-
 μενος, κατὰ τοὺς ὅρους τῆς διαίρεσεως. π. χ. τῆς Ἐ-
 ξισώσεως $\chi^2 + 9\chi - 36 = 0$ ἡ ἑτέρα ῥίζα = +3.
 Ὡστε $\chi = +3$, καὶ $\chi - 3 = 0$. Δίελε τὴν
 Ἐξίσωσιν διὰ τοῦ $\chi - 3$, καὶ τὸ πηλίκον ἔσται ἡ ἑ-
 τέρα ῥίζα. (Ἡ γὰρ Ἐξίσωσις τῷ πολλαπλασιασμῷ
 ἀμφοῖν τῶν ῥιζῶν παρήχθη.) Οἶον

$$\begin{array}{r|l}
 \chi - 3 = 0 & \chi^2 + 9\chi - 36 = 0 \\
 & \chi^2 + 3\chi \\
 \hline
 & + 12\chi - 36 \\
 & + 12\chi - 36 \\
 \hline
 & 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \quad \chi + 12 = 0$$

ἔσται

σε καὶ $x + 12 = 0$, ἄρα $x = -12 = τῇ ἑτέρᾳ$
 57.

Αἱ μέχρι τοῦδε παῖσαι θεωρίαι τὴν φύσιν καὶ ἰ-
 σότητος τῶν ὑπερτέρων Ἐξισώσεων ἀνιχνεύουσιν ἐπι-
 ρησιμοί. Ἐπὶ δὲ τῶν τετραγ. μόνων Ἐξισ., οὐκ ἀ-
 γκαῖαι.

περὶ τῶν Κυβικῶν Ἐξισώσεων, καὶ πε-
 ρὶ τῶν ὑπερτέρων Ἐξισώσεων ἐν
 γένει.

§. 394. Κυβικαὶ δ' Ἐξισώσεις ἀμιγεῖς.
 ὅσα μόνον ὁ κύβος τῆς ἀγνώστου ποσότητος παρέσιν, ἐ-
 ισοῦμενος γνωστῇ τινι ποσότητι. τοῦτ' ἐνθα x^3 κα-
 ῖ ἑαυτὸ, οὐδεμία δ' ἑτέρα τῶν ἀγνώστων. Εἰ δὲ τὸ x^3
 αἱ συνεργῶ συνῆπται, ἀχθεῖν αὖν, ἥ ἐν τοῖς ἀνωτέ-
 ρω δέδεικται, μόνον ἐπὶ θάτερα. Ὡς $x^3 = 343$ ἐ-
 ν Ἐξισ. Κυβικῇ ἀμιγῇ. Ὡσαύτως καὶ ἡδε. $3x^3$
 $+ 15 = 549$ τοιαύτη αὖ γένοιτο. $3x^3 = 549$
 $- 15$. ἢ $3x^3 = 534$. καὶ $x^3 = \frac{534}{3} = 178$.
 καθόλου. $x^3 = a$, τοῦ a ὁλοσχερῇ ἀρι μόν, ἢ
 πλάσμα, ἢ οἰανδήποτε ἐγνωσμένην ποσότητα σημαίνοντος.

§. 395. Τῶ τοίνυν τὰς τοιαύτας τῶν Ἐξισώ-
 σεων ἐπιλύσειν μέλλοντι, ἑξακτέα ἢ κυβικὴ ρίζα ἐξ
 ἀμφοῖν τῶν ποσοτήτων, κατὰ τὰ προηγουμένα, τὴν
 τοῦ x διωρισμένην τιμὴν δεικνύουσα, εἴτε καταφατικὴν,
 εἴτε ἀποφατικὴν οὖσαν, ἥπερ αὖν τὸ σημεῖον ἔχοι, τὸ πρὸ
 τῆς δεδομένης. Ἡ γὰρ κυβικὴ ρίζα θάτερον τῶν δυοῖν
 εἶναι δύναται, ἀλλ' οὐκ ἄμφω ἅμα. π. γ. $x^3 = 343$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{343}$$

Καὶ $x = ? = τῇ$ κυβικῇ ρίζῃ τοῦ 343.

Παρα

Παραπλησίως καὶ $x^3 = \frac{64}{125}$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} \cdot \text{ἢ } x =$$

Ἐστὶ γὰρ $\sqrt[3]{64} = 4$ καὶ $\sqrt[3]{125} = 5$.
ἐν γένει. $x^3 = a$

$$x = \sqrt[3]{a}.$$

§. 396. Ἡ δὲ ρίζα τῆς ἀγνώστου μία καὶ μὴ ἐπὶ τῶν κυβικῶν. (§. ἀνωτ.) Ἐπ' ἀμφοῖν δὲ τῶν Τετρ. Ἐξισ. δύω. Ἀλλὰ ζητεῖται, εἰ καὶ ταῦτα πλείους εὐρεθεῖεν ρίζαι. πάντως γε. ταῖς γὰρ λοιπῶν τῶν ριζῶν, τὰς δύω (τρεῖς γὰρ ταῖς Κυβικαῖς ἀπὸ διδόαμεν Ἐξισ.) ῥᾶτα εὐρήσομεν, τὴν Ἐξίσωσιν τοῦ x , τῆς εὐρεθείσης πρώτον ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρέσας ρίζης, διαιροῦντες, ἐξ οὗ Τετραγ. Ἐξισ. περὶ κύψει, κατὰ τὸν συνήθη ἐπιλυομένην τρόπον. Οἷον
ἔστω $x^3 = 64$

$x = \sqrt[3]{64} = 4$. Ἐπεὶ οὖν $x = 4$ ἔσται $x - 4 = 0$. Καὶ ἐπειδὴ $x^3 = 64$, ἔσται καὶ $x^3 - 64 = 0$. Ἀνάγκη δὲ $x^3 - 64 = 0$ διὰ τοῦ $x - 4 = 0$ διαιρέσιμον εἶναι. Ἐστὶ γὰρ τὸ μὴ τοῦ $x = 4$. Καὶ ἐὰν ἡ τιμὴ ἐν τῇ Ἐξίσωσιν $x^3 - 64 = 0$ τοῦ x ἀντικαταστή, ἢ Ἐξίσωσις χωρὶς εἰς τὸ μηδέν.

$$\begin{array}{r|l} x - 4) & x^3 - 64 \\ & x^3 - 4x^2 \\ \hline & + 4x^2 - 64 \\ & + 4x^2 - 16x \\ \hline & + 16x - 64 \\ & + 16x - 64 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

Ἡ οὖν προκύψασα Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις ἐστὶ
 $x^2 + 4x + 16 = 0$. Ἀνάγκη δὲ πᾶσα $= 0$
 αἰ, ὡς τοῦ Διαιρέτου, καὶ Διαιρετέου $= 0$ ὄντων.
 πιλυθήτω τοίνυν

$$x^2 + 4x + 16 = 0$$

$$x^2 + 4x = -16$$

$$x^2 + 4x + 4 = -16 + 4 = -12$$

$$x + 2 = \pm \sqrt{-12}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{-12}. \text{ Καὶ οὕ-}$$

τως προήλθον καὶ αἱ λοιπαὶ δύο τιμαὶ τοῦ x . Ὅθεν

$$1) x = +4. \quad 2) x = -2 + \sqrt{-12}. \quad 3)$$

$$x = -2 - \sqrt{-12}. \quad \text{Ὡς αἱ δύο τελευταῖαι}$$

τιμαὶ τοῦ x ἀδύνατοι ποσότητες, ἄρα καὶ ἄχρηστοι. Ἀλ-

λὲν εἰς αὐτὴν πολλαπλασιασθῇ, ἀνα-

καίως προκύψει καὶ ἡ Ἐξίσωσις. $x^3 = 64$ Ἡ μία

τιμὴ τοῦ x ἦν $-2 + \sqrt{-12}$. Ὅθεν αὐτὴ πολλ.

$$-2 + \sqrt{-12}$$

$$-2\sqrt{-12} - 12 - 12$$

$$+ 4 - 2\sqrt{-12}$$

$$+ 4 - 4\sqrt{-12} - 12 - 12 = -8 - 4\sqrt{-12}$$

ὁ παραγόμενος αὐτὸς $-4\sqrt{-12} - 8$

πολλ. μετὰ $-2 + \sqrt{-12}$

$$+ 48 - 8\sqrt{-12}$$

Ὡς ἐπεὶ $+ 8\sqrt{-12} + 16$

ταύτα

$$+ 8\sqrt{-12} + 64 - 8\sqrt{-12} + 4$$

ἴσους.

Ἦσαύτως καὶ ἡ ἑτέρα ρίζα — 2 — $\sqrt{\quad}$ — 1
 ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθεῖσα δώσει + 64
 γόμενον. Καὶ πᾶσαι τρεῖς ρίζαι εἰς τὸ 0 ἀχθῶ
 καὶ ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθεῖσαι, δώσουσιν
 τὴν Ἐξίσωσιν $\chi^3 = 64$.

§. 397. Ἐν τῷ προτεθέντι παραδείγματι
 μὲν δύο τοῦ $\chi^3 = 64$ ρίζαι ἦσαν αὐτάτοι. Ὁ
 ἀλλὰ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἀμιγῶν κυβικῶν Ἐξίσωσις
 τῆς μιᾶς μόνον τῶν τριῶν δυνατῆς οὐσης, εἴτε
 Φατικῆς, εἴτε ἀποφατικῆς. Ἐξισώσεις δὲ κυβικὰς
 ἀμιγῶς προκειμένης, ἥς ἡ ρίζα οὐκ ἔχει ἀκριβῶς
 ὁρῆσαι, τὸ ὡς ἔγγιστα αὐτῆς γενέσθαι πειρασθῆναι
 ἐν τῇ Ἐξαγωγῇ. Ἀλογος γὰρ τῆνικαὺτα οὐδὲν
 ση πάντως ἀναπόδοτος. π. χ. ἐάν $\chi^3 = 148$

$$\text{ἔσαι } \chi = \sqrt[3]{148} = 5,28$$

Παραδείγμ. Α'. Ζήτησον ἀριθμὸν, οὗ ὁ
 τράγωνος ἐπ' αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιασθεῖς
 παραγόμενον δώσει.

Λύσις. Ἐξω ὁ ἀριθμὸς = χ . Οὗ ὁ τράγωνος
 = χ^2 . ὁ δ' ἡμιτετράγωνος = $\frac{\chi^2}{2}$. Ὅς (ἡμιτετ.)

λαπλ. ἐπὶ χ ἐξισωθ. τῷ 256.

$$\text{ὥς } \chi \cdot \frac{\chi^2}{2} = 256$$

$$\frac{\chi^3}{2} = 256$$

$$\chi^3 = 512$$

$$\chi = \sqrt[3]{512} = 8.$$

θεντοι $\frac{\chi^2}{2} = \frac{9}{2} = 32$. καὶ ἐπειδὴ $\chi = 8$, λέλυ-

ται τὸ ζητούμενον. Ἐστὶ γὰρ $32 \cdot 8 = 256$.

Β'. Γεωργὸς τις τυροὺς ὀρνίθων ἀνταλλαζάμε-
νος ἀπὲς δύο τυρῶν λαμβάνει τρεῖς ὀρνίθους. Αἱ
δ' ὀρνίθες τίκτουσιν ἐκάσῃ $\frac{1}{2}$ ὥρῃ, ὅσος ὁ αὐτῶν ἀριθ-
μὸς. Τῶν δ' ὥων ὑπὲρ αὐτοῦ πωλουμένων, 9 ὥα το-
σοῦτων λεπτῶν ἀποδίδονται, ὅσα ὥα ἐκάσῃ τέτοκε. συ-
νάγει δ' ἐκ τούτων 72 λεπτά. Πόσους οὖν τυροὺς,
ὀρνίθους, καὶ ὥα ἐσχήκει;

Λύσις. Ἐστὼ ὁ τῶν τυρῶν ἀριθμὸς $= \chi$. Ἐ-
πειδὴ οὖν ἀπὲς δύο τυρῶν 3 λαμβάνει ὀρνίθους, ἡ τῶν
Τριῶν Μεθόδος δείξει τὰς ληφθείσας ὀρνίθους. ἦτοι 2
τυροί: χ τυρ. $= 3$ ὀρνίθες: $\frac{3\chi}{2}$ ὀρν.

Ἐκάσῃ ὥρῃ $\frac{1}{2}$ ὥων τίκτει, ἔσαι αὐταί. Ὁ ἀριθμὸς ἄρα τῶν
ὀρνίθων μετὰ τοῦ $\frac{1}{2}$ πολλαπλασιασθεὶς δίδωσι τὸν ἀ-
ριθμὸν τῶν ὥων ἐκάσῃ ὀρνίθους. τουτέστι $\frac{3\chi}{2} \cdot \frac{1}{2} =$

$\frac{3\chi}{4} = \frac{1}{2} \chi$. ἐκ τούτων διὰ τῆς ἐχομένης Ἀναλο-

γίας εὐχεριῶς ἂν εὑροίμεν, πόσα ὥα ἅπασαι τετόκα-
σιν αἱ ὀρνίθες. 1 ὀρνίς: $\frac{1}{2} \chi$ ὥα $= \frac{2}{3} \chi$ ὀρνίθες:
 $\frac{3}{4} \chi^2$ ὥα, ἦτοι $\frac{3}{4} \chi^2$ ὥα τετόκασιν. Ἐκ τούτων πω-
λεῖ 9 τοσοῦτων λεπτῶν, ὅσα ὥα ὑφ' ἐκάσῃς ἐτέχθη.
Ἐτέχθη δὲ ὑφ' ἐκάσῃς $\frac{1}{2} \chi$. Ἄρα 9 ὥα εἰσὶν ἄξια
λεπτῶν $\frac{1}{2} \chi$. Αὐθαίς δὲ διὰ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου
ἀνακαλύψομεν, πόσου ἅπαντα τετίμηται πᾶ ὥα.

9 ὥα: $\frac{1}{2} \chi$ λεπτ. $= \frac{3}{4} \chi^2$ ὥα: $\frac{3\chi^3}{8 \cdot 9}$ λεπτ.

$= \frac{\chi^3}{24} =$ τῇ τιμῇ τῶν ὥων ἀπάντων. Ὅθεν κα-

πᾶ

$$\begin{array}{r} \text{τὰ τὸ Πρόβλημα} \quad \frac{\chi^3}{24} = 72 \\ \hline \chi^3 = 1728 \\ \hline \chi = \sqrt[3]{1728} = 12. \end{array}$$

πειδὴ οὖν χ ἦν ὁ ζητούμενος τῶν τυρῶν ἀριθμὸς ἔσχεν ἄρα 12 τυρούς. Ἐλαβε $\frac{3}{2}\chi$ ὄρνιθας $= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 = 18$. Ἐκάστη ἔτεκε $\frac{1}{2}\chi$ ὡὰ $= \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$. ἀπαντα τὰ ὡὰ ἦν $\frac{3}{4}\chi^2 = \frac{3}{4} \cdot 12 \cdot 12 = 108$. ἀπέδοτο οὖν $\frac{1}{2}\chi$ λεπτ. ἢ $\frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ λεπτ. Ὡς ἀναγκαίως 108 ὡὰ 72 λεπτῶν ἄξια.

§. 398. Ἐξισώσεις δ' ἐντελεῖς Κυβικάι, ἐν αἷς πλὴν τοῦ Κυβου τῆς ἀγνώστου, καὶ ταύτης τετράγωνος, καὶ ἡ α'. αὐτῆς δύναμις, καὶ ἓτ μία δεδομένη Ποσότης. Ὡς $\chi^3 + 9\chi^2 + 20\chi = -12$. Ἦτις εἰς τὸ ὀχθεῖσα εἰς $\chi^3 + 9\chi^2 + 20\chi + 12 = 0$. ἢ ἐν γενεῇ $\chi^3 + \pi\chi^2 + \rho\chi + \beta = 0$. Ἐνθα π , ρ , καὶ β ἀριθμοὺς γνωστοὺς καταφατικούς, ἢ ἀποφατικούς, (διὰ τοῦτο γὰρ ἄμφω τὰ σημεῖα προκεχάρανται), ἢ καὶ κλάσματα παριστῶσιν. Ἐπὶ τῆς τῶν τοιούτων ἐπιλύσεως τὰς διαφόρους παραδραμόντες μεθόδους, οἱ ὧν τὰς τῆς Ἐξισώσεως εὐρίσκουσι ῥίζας, μεθοδόντινα τῆς τῶν τοιούτων Ἐξίσωσ. ἐπιλύσεως ὑποδείξομεν.

§. 399. Ἐπιστάσεως ἄξιον, ὅτι καὶ αὗται, καθὰ καὶ περὶ τῶν ἀμικτῶν τοῦ γ'. Βαθμοῦ λέλεκται, τρεῖς τιμαὶς τοῦ χ , ἢ τρεῖς ῥίζας ἔχουσιν, οὐκ αἰεὶ μέντοι, ὡς ἐκ' ἐκείνων, τῶν αὐτῶν ῥιζῶν ἀδυνάτων οὐσῶν. Δυνατὸν γὰρ καὶ τὰς τρεῖς δυνατὰς εἶναι, καὶ τοῦτο οὖν ὀλιγάκις. π. χ. $\chi^3 + 9\chi^2 + 20\chi + 12 = 0$. ταύτῃ τρεῖς αἱ δυναταὶ ῥίζαι $\chi = -1$, $\chi = -2$, $\chi = -6$. Ἡ δ' Ἐξίσωσις ἀνέφυ τῷ πολλαπλασιασ-

σμῷ

μῶ τῶν τριῶν παραγόντων, εἰς τὸ οὐ ἀχθέντων, ἦτοι
 $(\chi + 1) \cdot (\chi + 2) \cdot (\chi + 6)$. Καὶ πᾶσαν
 δὲ Κυβικὴν Ἐξίσωσιν θεωρεῖν ἐνι, ὡς ἐκ τοῦ πολλα-
 πλασιασμοῦ τριῶν παραγόντων, ἐνθα αἱ τιμαὶ τοῦ χ
 εἰς τὸ οὐ ἤχθησαν, παραχθεῖσαν, καίτοι τῶν τριῶν τοῦ
 χ τιμῶν ἐνίοτε τῶν αὐτῶν εἶναι δυναμένων. Ὡς ἐν τῇ
 Ἐξίσώσει, $\chi^3 - 6\chi^2 + 12\chi - 8 = 0$, τὸ $\chi = 2$
 τυγχάνει. Ἀλλ' ἡ Ἐξίσωσις ἀνέφω τῷ τριττῷ πολ-
 λαπλασιασμῷ τοῦ $\chi - 2 = 0$.

Τεθῆτω ἐν γένει ἡ τριττὴ τοῦ χ τιμὴ, ἥ μάλ-
 λον, ἐκείνης ῥίζης τῆς Ἐξίσωσεως, τῆς τῷ χ δεικνυμέ-
 νης, καίτοι τῶν τριῶν διαφορῶν ἔχουσιν εἶναι, καὶ
 πολλαπλασιασθῆτωσαν πρὸς ἀλλήλας αἱ τρεῖς τιμαί.
 Ἐξω $\chi = -\pi$. Καὶ $\chi = -\rho$. καὶ $\chi = -\sigma$.
 Ὡς $\chi + \pi = 0$. Καὶ $\chi + \rho = 0$. Καὶ $\chi +$
 $\sigma = 0$. Πολλαπλ. $\chi + \pi = 0$.

$$\chi + \rho = 0$$

$$+ \rho\chi + \pi\rho$$

$$\chi^2 + \pi\chi$$

$$\chi^2 + \pi\chi + \rho\chi + \pi\rho$$

$$\chi + \sigma$$

$$\sigma\chi^2 + \sigma\pi\chi + \sigma\rho\chi + \sigma\pi\rho$$

$$\rho\chi^2 + \pi\rho\chi$$

$$\chi^3 + \pi\chi^2$$

$$\chi^3 + (\pi + \rho + \sigma)\chi^2 + (\sigma\rho + \pi\rho + \sigma\pi)\chi + \sigma\pi\rho = 0$$

Καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ προτεθέντος καὶ αἱ τρεῖς τοῦ χ
 τιμαί, ἥ καὶ αἱ τρεῖς ῥίζαι, ἦσαν ἀποφατικαί.

Εἰ

Εἰ δὲ καταφατικαὶ εἶεν, τὸ ἐκ τῶν τριῶν παραγόμενον εἶη ἄν

$$x^2 - (\sigma + \pi + \rho)x^2 + (\sigma\rho + \pi\rho + \sigma\pi)x - \sigma\rho = 0.$$

§. 400. Αἱ τῆς ἐν γένει ταύτης Ἐξισώσεως ἰδιότητες, ἀκριβῶς θεωρουμένης, λίαν εἰσὶν ἀξιοσημείωτοι, ἥ ὥστε ταύτας παρελθεῖν, τῶν ριζῶν ἀμέλει δυνατῶν οὐσῶν, ὡς ἐνταῦθα ταύτας παρελάβομεν.

1) Πασῶν τῶν ριζῶν ἀποφατικοῦν οὐσῶν, πάντες οἱ ὄροι τῆς εἰς τὸ 0 ἀχθείσης Ἐξισώσεως ἔχουσι πρὸ ἐαυτῶν τὸ +.

Καταφατικῶν δὲ πάντων οὐσῶν, τὰ σημεῖα ἐναλλάξ ἐπαμβιβάζεται. Ἐκ τούτων συνάγουσιν, ὅτι, ὅσας τὰ σημεῖα τῆς εἰς τὸ 0 ἀχθ. Ἐξισ. ἐπαμβιβάζεται, καὶ τοσαῦται καταφατικαὶ ρίζαι. ὅσας δὲ τὰ αὐτὰ σημεῖα, εἴτε +, εἴτε - ἀλλήλοις ἐπονται, καὶ τοσαῦται ρίζαι ἀποφατικαὶ ταύτῃ ἐνυπάρχουσιν οὕτω τῆς Ἐξισώσεως $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, καὶ αἱ τρεῖς ρίζαι καταφατικαί. τὰ γὰρ σημεῖα τρεῖς ἐπαμβιβάζεται. Αἱ δὲ ρίζαι εἰσὶ + 1, + 2, καὶ + 3. Τῆς δὲ $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$, πᾶσαι ἀποφατικαί. Τρεῖς γὰρ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἀλλήλοις ἐπεται. Εἰσὶ δὲ καὶ ταύτῃ ρίζαι ταῖς ἀνωτ. αἱ αὐταί. - 1, - 2, καὶ - 3. Ἐν τῇ Ἐξισώσει $x^3 - x^2 - 10x - 8$ ἅπαξ τὰ σημεῖα ἐπαμβιβάζεται. Ἐνθα γὰρ ἐν ἀρχῇ ἦτοῦ + εἰς τὸ - ἐπαμβιβάζη. Ἔσεται δὲ δις εἴτα τὰ αὐτὰ σημεῖα. Καὶ ἔξει ἄρα τῶν τριῶν ριζῶν τὴν μὲν μίαν καταφατικὴν, τὰς δὲ λοιπὰς δύο ἀποφατικὰς, ἦτοι - 1, - 2, καὶ + 4.

2) Ἐν τῇ β'. ὁρῶ τούτων (τῶν Ἐξισ.) τὸ κεφάλαιον πασῶν τῶν ριζῶν, ἢ μᾶλλον, τὸ κεφάλαιον τῶν ποσοτήτων, τῶν ταῖς ρίζαις ἀντικειμένων, ἔστιν. Εἶδη

Εἰδὴ τῶν ριζῶν τὰ σημεῖα διάφορα, Σειρηγτέον καὶ τὸ κεφάλαιον ἀλγεβραϊκῶς. Καὶ διὰ τῆς προσθέσεως γὰρ τῶν καταΦ. καὶ ἀποΦ. Ποσοτήτων κεφαλαιόντι προκύπτει.

3) Ὁ γ'. ὅρος περιέχει τὸ κεφάλαιον τῶν ριζῶν, ἀπὸ δύο εἰλημμένων.

4) Καὶ τελευταῖον ὁ δ'. ὅρος, ἢ τελευταῖος τὸ παραγόμενον τῶν τριῶν ριζῶν. Ὅπερ μάλιστα σημειώσεως ἄξιον. διὰ τοῦτου γὰρ εἰς ἐπίλυσιν τῶν τοιούτων Ἐξίσ. προδιατεθέντες, καὶ τὴν τῶν ὑπερτέρων οὐ μετὰ πολλοῦ παρακῶμεν τοῦ ποιοῦ.

§. 401. Πρὸ πάντων δὲ, ἐν ἡ Ἐξίσωσις οὕτως ἔχει, ὥστε τὸ χ' ἐν ἀρχῇ μόνον εἶναι, καὶ τοὺς συνεργοὺς τῶν ὑτέρων ποσοτήτων μετὰ τοῦ ἐσχάτου ὅρου ὁλοσχερεῖς ἀρίθμους εἶναι, ὅθλον, ὅτι ἡ τριαύτη Κυβική Ἐξίσωσις, εἰ λογικὸς ἔχει ρίζας, ἑτέρας οὐχ ἔξει, ἢ ὧν ὁ πολλαπλασιασμὸς τὸ ἐσχάτον παρήγαγε παραγόμενον. Ἐλθόντοι τοῦ ἐσχάτου παραγομένου εἰς παραγόντας τοῖς προσήμιστας ἀναλυθέντος, τεθήτωσαν (οἱ παράγ.) καταΦατικοί, καὶ ἀποφατικοί (τὰ σημεῖα τῆς Ἐξίσ. ἐρφαίνουσι τοῦτο, ὡς ἔρηται) ἐν τῇ Ἐξίσ. ἀπὸ τοῦ χ' οὕτως, ὡς ἐν μὲν τῷ χ' τὸν παράγοντα εἰς κύβον ἡμεῖον, ἐν δὲ τῷ χ' εἰς τετράγωνον, καὶ τῷ συνεργῷ πεπολλαπλασιασμένον εἶναι, ἐν δὲ τῷ χ' μόνον τῷ συνεργῷ (πεπολλ. εἶναι). Τούτοις δὲ καὶ τῆς γνωστῆς ποσότητος τοῦ ἐσχάτου ὅρου προσθεῖσης, ἀνάγκη διὰ τοῦ παράγοντος, εἰ ρίζα τῆς Ἐξίσ. ἐστὶ, πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς ἀναιρεθῆναι, τοῦτ. τὴν Ἐξίσ. εἰς τὸ μηδὲν χωρῆσαι. Εἰ δ' οὐδεις τῶν παραγόντων ταῦτο ποιῆσαι δυνατός, οὐδεμίαν λογικὴν ρίζαν τότε ταύτη (τῇ Εξ.) παρεῖναι δείκνυσιν. Μίας δὲ ρίζης εὐρεθείσης, ῥῆσα τὰς λοιπὰς ἀνακινύφομεν οὕτω τῇ τῆς Ἐξίσώσεως διαιρέσει διάτινος παράγοντος αὐτῆς.

αὐτῆς, ὅς προκύπτει, ἐάν τὸ ὡς ρίζα εὑρεθῇ ἐπὶ 9 τετρα μετατιθῇται, τῷ χ ἀντικειμένῳ τῷ σημείῳ συμ-
πλεκόμενον. τῆνικαῦτα γὰρ ἢ ἐκ τούτου τετραγωνικὴ Ἐξίς.
ῥαδίως ἐπιλύεται. Οἷον $\chi^3 + 4\chi^2 - 4\chi - 16 = 0$. Ἐνταῦθα δις ἔπεται τὰ αὐτὰ σημεία
καὶ ἀπαξ ἀμείβεται. Τὸ γὰρ $+ \chi^3$ καὶ $+ 4\chi^2$
ἔπονται ἀλλήλοις, τὰ αὐτὰ ἔχοντα σημεία, καὶ $- 4\chi$
καὶ $- 16$ ὡσαύτως. Ἀλλὰ $+ 4\chi$ καὶ $- 16$ ἀμείβει τὰ σημεία.
Εἰσὶν ἄρα δύο ρίζαι ἀποφατικαὶ καὶ μία μόνῃ καταφατικῇ.
Ἀλλ' ἀναλύσωμεν ἥδη τὸ 16 εἰς τοὺς κατ' αὐτὸν παράγοντας, παραλαμβάνον-
τες τὸν ἑτερον μετὰ τὸν ἑτερον ἀντὶ τοῦ χ . Καὶ
ἐπεὶ αἱ πλείους τῶν ριζῶν ἀποφατικαί, μόνον τὸ
ἀποφατικὰς τιμάς.

Παράγοντες τοῦ ἐσχάτου ὄρου	Τὸ ἐκ τῆς Ἐξίσως. προκύπτον, ἢ ἢ τιμὴ τῶν παραγόντων, ἢ οἱ παράγον- τες, τοῦ χ ἀντικαταστῶσι, καὶ αἱ ἀπο- φατικαί, καὶ καταφ. ποσότητες ἀνα- ρῶσιν ἀλλήλας.
± 1	τοῦ $- 1$ ἀντὶ τοῦ χ τεθέντ. προκ. $- 9$
± 2	τοῦ $- 2$ 0
± 4	τοῦ $- 4$ 0
± 8	τοῦ $- 8$ — 240
± 16	τοῦ $- 16$ — 3024

Εὑρηνται οὖν δύο ρίζαι, ἥτοι $- 2$, καὶ $- 4$
διὰ τούτων γὰρ ἀντὶ τοῦ χ τεθέντων, ἢ Ἐξίσωσις
εἰς τὸ μηδὲν οἴχεται. Ἀλλ' ἐπὶ τῶν Κυβικῶν Ἐξίς.
καὶ μιᾷ ρίζῃ ἀγαπητέον, ὡς τῶν ἑτέρων διὰ ταύτης
ἀνακαλυπτομένων. Οἷον τεθῇτω τὴν $- 2$ εὑρεθῇ-
ναι. Ὡς, ἐάν $\chi = - 2$, ἐστὶ $\chi + 2 = 0$
Διὰ τούτου τοῦ τῆς Ἐξίς, παράγ. διαιρ. ἢ Ἐξίς.

$\chi + 2$

$$\begin{array}{r}
 \alpha) \quad x^3 + 4x^2 - 4x - 16 \mid x^2 + 2x - 8 \\
 \underline{x^3 + 2x^2} \\
 + 2x^2 - 4x \\
 \underline{+ 2x^2 + 4x} \\
 - 8x - 16 \\
 \underline{+ 8x + 16} \\
 0 \quad 0
 \end{array}$$

οὖν τετραγωνικῇ Ἐξίσ. ἐξί

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x^2 + 2x = +8$$

$$x^2 + 2x + 1 = +8 + 1 = 9$$

$$x + 1 = \pm \sqrt{9} = \pm 3$$

$$x = -1 \pm 3$$

$$x. \alpha' = -1 + 3 = +2. \text{ καὶ } \beta'.$$

$-1 - 3 = -4$. Αἱ ἄρα ρίζαι σὺν τῇ πρώτῃ
 ἰσῇ τυγχάνουσι -2 , $+2$, καὶ -4 . Ἡ
 ἰσ. ἀνέφθι τῷ πολλαπλ. τῶν ἐξῆς Ποσοτήτων
 $2 = 0$, καὶ $x - 2 = 0$, καὶ $x + 4 = 0$.
 τῆς πείρας ἐκάστῳ ὀήλον γενήσεται, ταύτας πολ-
 υσιάζαντι.

Ζήτησον τὰς ρίζας τῆς Ἐξίσωσ. $x^3 - 10x^2$
 $+ x - 30 = 0$, πάσας καταφατικὰς οὐσας,
 ἢ σημείων τρεῖς ἐπαμβομένων. Ὁ 30 διατέμε-
 νος παράγοντας τοὺςδε. 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15.

G g 2

Πείρα

Πειρασώμεθα οὖν αὖθις τοὺς παράγ. καταφατικούς λαμβάνοντες. Καὶ αἱ ρίζαι γὰρ τοιαῦται. Ἐάν τὸ $x = + 1$ τεθῇ, προκύψει ἐκ τῆς Ἐξισ. — 8. Ὡς 1 οὐκ εἴη ρίζα τῆς Ἐξισ. Ἐάν δὲ $x = + 2$, πάντες οἱ ὅροι ἀναιρήσουσιν ἀλλήλους, εἰς τὸ μηδὲν χωροῦντες. Ἀρα $+ 2$ ἐστὶ μία ρίζα τῆς Ἐξισ. Καὶ ἐπομένως $x - 2 = 0$.

Διέλε τὴν Ἐξισ. διὰ τούτου

$$\begin{array}{r|l}
 x - 2x)^3 - 10x^2 + 31x - 30 & x^2 - 8x + 15. \\
 \underline{x^3 - 2x^2} & \\
 -8x^2 + 31x & \\
 \underline{+ 8x^2 - 16x} & \\
 + 15x - 30 & \\
 \underline{+ 15x - 30} & \\
 0 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ὡς} \quad x^2 - 8x + 15 = 0 \\
 \underline{x^2 - 8x = -15} \\
 x^2 - 8x + 16 = -15 + 16 = +1 \\
 \underline{x - 4 = \pm \sqrt{1} = \pm 1} \\
 x = + 4 \pm 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ὡς} \quad x. \alpha'. = 4 + 1 = 5 \\
 \quad \quad x. \beta'. = 4 - 1 = 3
 \end{array}$$

Αἱ ρίζαι ἀρα $+ 2, + 3, + 5$, ἡ ὃ Ἐξισ. πα-
ρήχθη

ρήχθῃ τῷ Πολλ. τοῦ $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 5 = 0$.

§. 402. Καὶ τοῦτον ταύτην τὸν τρόπον τὰς λογικάς τῶν Ἑξισ. ρίζας ζητοῦμεν, ἐὰν x^3 , ἢ καὶ ἐν γένει (τοῦτο γάρ ἐπὶ πασῶν τῶν ὑπερτέρου βαθμοῦ Ἑξισ. χώραν ἔχει) ἡ ὑπερτάτης δυνάμεως ἀγνώστος ποσότης καὶ αὐτὴν ἢ, καὶ οἱ τῶν λοιπῶν ὅρων συνεργοὶ κλασματικοὶ μὴ ᾖσιν. Ἀλλὰ καὶ τὰ κλάσματα δυνάμεθα, τὴν Ἑξισ. εἰς ἑτέραν τρέποντες, ἀποσκευάσασθαι. Ἐπειδὴ δὲ λόγος περὶ τῆς τῶν Ἑξισ. ἐγένετο τροπῆς, ρητέον καὶ περὶ τούτου βραχέα τινα. Χρησόμεθα δὲ τοῖς δ' τῶν υπολογισμῶν εἰδεσι, Προσθ. Ἀφαιρ. Πολλ. καὶ Διαιρ. ἐπὶ τῶν Ἑξισ. εἰς τὸ καινὰς παραγαγεῖν, ὡν τῶν ριζῶν εὐρεθεῖσῶν, καὶ τῆς προτέρας τῆς δοθείσης αἱ ρίζαι εὐχερῶς προχειρίζονται. Πᾶσα δὲ ἡ μέθοδος ἐν τούτῳ εἴρεται, ἐν τῷ δεξιότητι ἔχειν ἀμελεῖν ἐν τῷ θάτερον ἀντὶ θάτερου ἀντικαθίσταν, ἢτοι ἴσον ἀντὶ ἴσου. Χρησόμεθα δὲ οὐχ ἀπλῶς, ἀλλ' ἢ περὶ τὴν τῶν ριζῶν τῆς Ἑξισ. εὐρεσιν ῥᾶον ἀνακαλύπτειν ἠγορήμεθα. Καὶ ἐν μὲν τῇ προσθέσει, τῷ x ἑτέραν τινα ἐγνωσμένην προσθέτοντες ποσότητα, ἐξισώσασμεν ἅμῳ ἀγνώστῳ ἑτέρῳ, κατὰ τὴν δοκοῦν, ἐν δὲ τῇ Ἀφαιρέσει ἀφαιροῦντες ἐκείνην. Οἶον, εἰ ὕλοι τὴν Ἑξισ. $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ διὰ τῆς προσθέσεως εἰς ἑτέραν τρέψαι, πρῶτες τῷ x ἑτερον δεδομένον ἀριθμὸν, καὶ εἴτα ἐξίσωσον αὐτὰ τῷ ψ . Ὡς $x + 3 = \psi$. Ἐξω γὰρ x , ὅ, τι ἂν βούλη, ἐάντι τούτῳ προσεθῇ, ἔσαι ἅμῳ ἴσα ἑτέρῳ ποσότητι ἀγνώστῳ. Ἐξω οὖν $x + 3 = \psi$. Ἄρα $x = \psi - 3$. Ἦδη ἀντὶ τοῦ x ἀντικατάστησον πανταχοῦ τῆς Ἑξισ. τῆς δοθείσης τὸ $\psi - 3$. Ἦτοι

ἀντὶ

$$\begin{array}{rcl}
 \text{ἀντὶ τοῦ } \chi^3 \text{ τὸ } (\psi - 3)^3 & = & \psi^3 - 9\psi^2 + 27\psi - 27 \\
 - 7\chi^2 & = & (\psi - 3)^2 \cdot -7 = -7\psi^2 + 42\psi - 63 \\
 + 7\chi & = & (\psi - 3) \cdot 7 = +7\psi - 21 \\
 + 15 & = & = +15 \\
 \hline
 0 & = &
 \end{array}$$

πράσθεις τοὺς ὅρους τῆς καὶ
 ὡς Ἐξίσ., οὕτω, $\psi^3 - 16\psi^2 + 76\psi - 96$

Ἐνταῦθα τὸ $\psi - 3$, α', εἰς κύβον ἀρθὲν κατα-
 γέγραπται. εἶτα ἐτετραγωνίσθη, καὶ οἱ ὅροι πάντες
 τοῦ Τετραγώνου τῷ συνεργῷ τῆς προτέρας ἐπολλα-
 πλασιάζθησαν Ἐξισώσεως, γ'. τὸ $\psi - 3$ ἐπολλα-
 πλασιάζθη μόνον ἐπὶ τὸν συνεργὸν τοῦ χ , καὶ τελευταῖον
 ἡ γνωστὴ ποσότης, ὡς καὶ πρότερον, ἐγκεχάραται, τῶν
 ἴσων δυνάμεων ὑπὸ τὰς ἴσας τεθείσων, καὶ τῶν ὅρων
 ἀπάντων προσθέντων. Μία οὖν τῶν ῥιζῶν τῆς και-
 νῆς Ἐξισώσεως, ἡ μία τιμὴ τοῦ ψ ἐστὶν $= +2$. Ἐ-
 πεὶ δὲ $\chi + 3 = \psi$. ἐπειδὴ $\psi = 2$, ἔσαι καὶ $\chi + 3$
 $= 2$. (§. 48 δ'.) Ὡς $\chi = 2 - 3 = -1$. Ἐνθεν-
 τοι μία τιμὴ τοῦ $\chi = -1$. Ἐξ αὐτῆς δ' εὐρίσκομεν
 καὶ τὰς λοιπὰς. Εἰσὶ δὲ $+5$, καὶ $+3$. Εἰ δὲ δι'
 Ἀφαιρέσεως τρέπεται, ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῆς ἀγνώστου
 γνωστὴν τινά, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον Ἐξίσουσιν καινὴν
 παράγωμεν. Ὅλον, $\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi + 15 = 0$.
 Ἐς $\chi - 3 = \psi$. Ἐσιν ἄρα $\chi = \psi + 3$. Ἐκ
 ταύτης γενέσθω ἡ καινὴ Ἐξίσ., ὡς πρότερον. Ἐνθεντοι

$$\begin{array}{rcl}
 \text{ἀντὶ τοῦ } \chi^3 \text{ τὸ } (\psi + 3)^3 & = & \psi^3 + 9\psi^2 + 27\psi + 27 \\
 - 7\chi^2 & = & (\psi + 3)^2 \cdot -7 = -7\psi^2 - 42\psi - 63 \\
 + 7\chi & = & (\psi + 3) \cdot 7 = +7\psi + 21 \\
 + 15 & = & = +15 \\
 \hline
 0 & = & \psi^3 + 2\psi^2 - 8\psi \quad 0
 \end{array}$$

Τπθ'

Υπολείπεται οὖν $\psi^3 + 2\psi^2 - 8\psi$. Ὁ δ' ἔχρατος ὅρος διὰ τῆς τρῶπης τῆς Ἐξισ. ἐκπέπτωκε. Σημειωτέον οὖν, ὅτι, εἰ τοῦτο συμβαίνει, μία τῶν ριζῶν $= 0$. Ἐπεὶ γὰρ ὁ γ'. ὅρος τὸ παραγόμενον πασῶν ἐστὶ τῶν ριζῶν, ἀναγκαίως ἐκπίπτει ὁ ὅρος τῷ 0 πολλαπλασιασθεὶς. Ὡς $\psi = + 0$. Ἀδιάφορον δ' ὁπότερον τῶν σημείων ἔνταυθα τεθῇ. Ὅτι $+ 0$ καὶ 0 τὸ αὐτὸ, ἦτοι μηδέν. Ἦν δὲ $\chi - 3 = \psi$. Ἄρα καὶ $\chi - 3 = 0$, ἀντὶ τοῦ ψ τοῦ ἴσου ἀντικαταστάνας. Καὶ ἐπομένως $\chi = 0 + 3 = 3$. Ἐστὶ τοίνυν μία τῶν ριζῶν τοῦ $\chi = 3$. Τὰς δὲ λοιπὰς αὐτίκα εὐρήσομεν τῇ διαιρέσει τῆς πρώτης Ἐξισ. διὰ τοῦ $\chi - 3 = 0$. Ὁ αὐτὸς τρόπος ἐστὶν ἐν τῇ τῆς Ἐξισ. τρῶπῃ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὡς ἡ Ἐξισ. $\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi + 15$ πολλαπλ. διὰ 2, ὅ ἐστιν, ἡ ἀγνώστος ποσ. χ πολλαπ. διὰ 2, καὶ τὸ παραγ. ἐξισωθῇ τῷ ἑτέρῳ καινῇ ἀγνώστῳ ποσότητι, οὕτω. $2\chi = \psi$. Ὡς $\chi = \frac{\psi}{2}$. Ἀντικαταστήτω τὸ εὐρεθὲν ἴσον $\frac{\psi}{2}$ τοῦ χ

ἐν τῇ Ἐξ.

$$\text{Ἦτοι } \chi^3 = \left(\frac{\psi}{2}\right)^3 = \frac{\psi^3}{8}$$

$$- 7\chi^2 = \left(\frac{\psi}{2}\right)^2, - 7 = - \frac{7\psi^2}{4}$$

$$+ 7\chi = \frac{\psi \cdot 7}{2} = + \frac{7\psi}{2}$$

$$+ 15 = + 15$$

$$0 = \frac{\psi^3}{8} - \frac{7\psi^2}{4} + \frac{7\psi}{2} + 15.$$

Εἰ

Εἰ δ' ἡ τοιαύτη Ἐξίσ. $x^3 + ax^2 + bx + \gamma$ διὰ
 ὁ πολλαπλασιασθῇ, εἴη ἂν

$$\delta x = \psi. \text{ Ὡς } x = \frac{\psi}{\delta}$$

$$\text{ἄρα } x^3 = + \frac{\psi^3}{\delta^3}$$

$$+ ax^2 = + \frac{a\psi^2}{\delta^2}$$

$$+ bx = + \frac{b\psi}{\delta}$$

$$+ \gamma = + \gamma$$

$$0 = \frac{\psi^3}{\delta^3} + \frac{a\psi^2}{\delta^2} + \frac{b\psi}{\delta} + \gamma$$

Ἐὰν δὲ τῆς Ἐξίσ. ταύτης πάντας τοὺς ὅρους τῶν
 πολλαπλασιάσωμεν,

$$0 = \frac{\psi^3}{\delta^3} + \frac{a\psi^2}{\delta^2} + \frac{b\psi}{\delta} + \gamma$$

$$\cdot \delta^3$$

$$\text{ἔσαι } 0 = \psi^3 + \delta a \psi^2 + \delta^2 b \psi + \delta^3 \gamma.$$

Ἐκ τούτων ἔπεται, ὅτι, εἰ ἡ ρίζα τῆς Ἐξίσ.
 ἐπίτινα δοθέντα πολλαπλασιασθῇναι πρόκειται ἀριθ.
 καὶ οὕτω χωρεῖν δυνάμεις, τούτ. ἕκαστον ὅρον τῆς
 Ἐξίσ. ἐπὶ τὰς δυνάμεις τοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζει
 ἐκ Γεωμετρικῆς ἀναφυσμένης Προόδου, ἧς ὁ α'.
 $= 1$, ὁ β'. ὁ ἀριθμός. ὁ γ'. ὁ τούτου Τετράγωνος
 δ'. ὁ τούτου Κύβος, κτ. π. χ. εἰ πρόκειται πολ.
 πλασιάζει τὴν ρίζαν τῆς εἰς τὸ 0 ἀχθείσης Ἐξίσ.
 $- 7x^2 + 7x + 15$ ἐπὶ τὸν 2, ποιήσωμεν τοῦ
 ἐποθέντος ὑπὸ τοῦς ὅρους Γεωμ. Προόδου, ἧς ὁ
 ὅρος 1, οἱ δὲ λοιποὶ αἱ δυνάμεις τοῦ ἀριθμοῦ 2, κα

κασον ὅρον τῆς Ἐξισ. τῷ ὑπ' αὐτὸν κειμένῳ τῆς προόδου ὅριον πολλαπλασιάσαντες. Ὡστε, εἰ $2\chi = \psi$, οὕτω καταγράφομεν τὴν Ἐξίσωσιν

$$\psi^3 - 7\psi^2 + 7\psi + 15 = 0$$

1, 2, 4, 8. Γεωμ. πρόοδος
πολλαπ. τοῦς ————— τῶν δυν. τοῦ 2

$$\delta\rho. \tau\eta\varsigma \text{ Ἐξ. } \psi^3 - 14\psi^2 + 28\psi + 120 = 0$$

μετὰ τούτων

Τῷ αὐτῷ τρόπῳ τρέπομεν τὰς Ἐξισ. καὶ διὰ τῆς Διαιρέσεως. Τραπήτῳ αὐδὲς ἢ αὐτὴ Ἐξισ. $\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi + 15$. Ὡστε, ἐπεὶ $\frac{\chi}{2} = \psi$, ἔστιν ἄρα $\chi = 2\psi$

Γενέσθω ἡδὴ ἀντικατάστασις

$$\begin{array}{rcl} \chi^3 & = & (2\psi)^3 = 8\psi^3 \\ -7\chi^2 & = & (2\psi)^2 \cdot 7 = -28\psi^2 \\ +7\chi & = & (2\psi) \cdot 7 = +14\psi \\ +15 & = & +15 \end{array}$$

$$0 \qquad 8\psi^3 - 28\psi^2 + 14\psi + 15$$

Καὶ ἐν γένει $\chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$. Ἐὰν $\frac{\chi}{\delta} = \psi$ τεθῇ, ἔσται $\chi = \delta\psi$. Ὡστε ἀντικαταστήσαντες,

$$\begin{array}{rcl} \tau\omicron\varsigma, \text{ ἔσται } \chi^3 & = & (\delta\psi)^3 = +\delta^3\psi^3 \\ +\alpha\chi^2 & = & (\delta\psi)^2 \alpha + \delta^2\psi^2 \alpha \\ +\beta\chi & = & (\delta\psi) \beta + \delta\psi\beta \\ +\gamma & = & +\gamma \end{array}$$

$$0 = \delta^3\psi^3 + \delta^2\psi^2 \alpha + \delta\psi\beta + \gamma$$

Ἐνταῦθα γίνεται τὸ ἀνάπαλιν τῆς προτέρας πράξεως. Ἦτοι, τῆς Γεωμετρ. Σειρᾶς ἀναστροφείσης, καὶ ὑπὸ μὲν

μὲν τὸν ἔσχατον ὅρον τῆς ἰσότητος, ὑπὸ δὲ τοὺς λοιποὺς τῶν δυνάμεων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἐφεξῆς ἀνάπαλιν, καὶ τῶν ὅρων τῆς Ἐξίσ. ταύταις πολλαπλασιασθέντων, τελέσομεν τὸ αὐτό.

Ληφθήτω ἡ αὐτὴ Ἐξίσ. ἐνθα χ διὰ δ προῖκει-
το διαιρεθῆναι, ἦτοι $\chi = \psi$. καὶ $\chi = \psi\delta$.

Καταγραφείσῃς οὖν τῆς Ἐξίσ. καὶ ἀντὶ τοῦ χ
τοῦ ψ ἀντικαταστάνας ἐν τῇ αὐτῇ δυνάμει, ἔσαι τὸ
σχῆμα

$$\begin{array}{cccc} \psi^3 & + & \alpha\psi^2 & + & \beta\psi & + & \gamma \\ \delta^3, & & \delta^2, & & \delta, & & 1 \end{array}$$

$$\delta^3\psi^3 + \delta^2\alpha\psi^2 + \delta\beta\psi + \gamma.$$

Ὡς, εἰ δέοι Ἐξίσωσίν τινα διὰ τῆς Διαιρέσεως τρέψαι,
ἀντικατάστησον τοῦ χ τὸ ψ , καὶ ὑπογράψας ὑπὸ τὸ ψ
τὸν ἀριθμὸν, δι' οὗ τὸ χ διαιρεθῆναι πρόκειται, ἐν σει-
ρᾷ δυνάμεων ἀνάπαλιν, ἀπὸ μονάδος ἀρχομένη, καὶ
ἐφ' ἑκάστου ὅρου μιᾷ δυνάμει αὐξομένη, πολλαπλασία-
σον ἐπὶ ταύτην τοὺς τῆς Ἐξίσ. ὅρους. π. χ. $\chi^3 +$
 $2\chi^2 + \chi - 12 = 0$. Ἐςω ἡ Ἐξίσ. αὕτη μετα-
βλητέα διὰ τῆς Διαιρέσεως. καὶ $\chi = \psi$. Ὡς

$\chi = 2\psi$. Λαβὲ οὖν ἀντὶ τοῦ χ τὸ ψ ἐν τῇ αὐτῇ
δυνάμει, καὶ ὑπόγραψον τὴν σειράν. Ἦτοι

$$\psi^3 + 2\psi^2 + \psi - 12 = 0$$

$$\begin{array}{cccc} 8 & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

$$8\psi^3 + 8\psi^2 + 2\psi - 12 = 0$$

Εἰ δὲ τύχοι ἐν τῇ Ἐξίσώσει τοῦτον, ἢ ἐκεῖνον
τὸν ὅρον ἀπεῖναι, ὁ τοῦτου τόπος ἀνερίσκω χαρακτη-
ρίζεται, εἰς σημεῖον τῆς τοῦ ὅρου ἀπουσίας. Ἀλλ' ἐν
τῇ

Ἐξισώσεως διὰ τοῦ Πολλ. ἢ τῆς Διαιρ. μετα-
 αναγκαῖον ὑπὸ τὸν ἀπόντα ὅρον τῆς Ἐξ. τὸν
 ἰόντα ὅρον τῆς ὑπ' αὐτὴν Γεωμ. καταγράφεσθαι
 τε, καίτοι τῷ ἐπ' αὐτὸν ὅρῳ πολλαπλασιασθῆ-
 ῖν, ὡς ο, ἢ μηδὲν ὄντα. Ὅθεν οὐδὲ
 ὄντα ὑπὸ τὴν γραμμὴν προκύπτει. Οἶον, εἰδέοι
 Ἐξισ. $\chi^3 + 3\chi - 6 = 0$. τῷ Πολλαπλ. ἐπὶ
 μεταβληθῆναι, ὥστε $3\chi = \psi$, ἔνθεντοι καὶ $\frac{\psi}{3}$
 εἶναι, ἀποδεσθεῖν οὕτω

$$\psi^3 * + 3\psi - 6 = 0$$

$$1, 3, 9, 27$$

$$\psi^3 * + 27\psi - 162 = 0$$

ἐν τῇ αὐτῇ Ἐξισ. $\frac{\chi}{3} = \psi$ εἶναι, ὥστε καὶ
 3ψ , καὶ οὕτω.

$$\psi^3 * + 3\psi - 6 = 0$$

$$27, 9, 3, 1$$

$$27\psi^3 * + 9\psi - 6 = 0$$

δὲ ψ^3 μονωθήσεται, εἰ διὰ τοῦ κατ' αὐτὸ συνερ-
 ἄντες οἱ τῆς Ἐξισώσεως διαιροῦνται ὅροι, οὕτω.

$$+ \frac{9\psi}{27} - \frac{6}{27} = \psi^3 * + \frac{\psi}{3} - \frac{2}{9}.$$
 Ἡ
 γένει ἡ Ἐξισ. ἢ

$$\delta^3\psi^3 + \delta^2\alpha\psi^2 + \delta\beta\psi + \gamma = 0$$

$$\frac{\psi^3}{1} + \frac{\alpha\psi^2}{\delta} + \frac{\beta\psi}{\delta^2} + \frac{\gamma}{\delta^3} \quad \text{διὰ } \delta^3 \text{ διαιρε-} \\ \text{θεῖσα ἔσαι}$$

Οὕτως

Οὕτως εἰωθασί καὶ τὰς διὰ τῆς διαιρέσεως μεταβλη-
θείσας Ἐξισώσεις παρῖσιν.

§. 403. Τούτων οὕτως ἔχόντων, εἰάν ἐπίτι-
νος Ἐξισ. καὶ κλάσματα παρῇ, ἀπαλλάξαι τούτων
δυνάμεθα τῷ πολλαπλ. (§. ἀνωτ.) Τούτέστι, ζητή-
σομεν ποσότητα, ἣτις ὁ κοινὸς τυγχάνει παράγων ἀ-
πάντων τῶν παρονομασιῶν τῶν κλασμάτων, τῶν τῇ
Ἐξισ. παρόντων, ὡς συνεργῶ τοῦ χ ταύτη χρῆσά-
μενοι. π. χ. $\alpha\chi$ Τὸ δὲ $\alpha\chi = \psi$ θήσομεν Ὡστε καὶ
 $\chi = \frac{\psi}{\alpha}$ τούτου ἐν τῇ Ἐξισ. ἀντικαθιστάμενος, προ-

καίψει καινὴ Ἐξισ. ἣτινι οὐδὲν ὑπάρχει κλάσμα. Ἀλ-
λὰ τοιοῦτον παράγοντα αἰρετέον, ὥστε, εἰ τὸ καινὸν
 ψ εἰς τὴν ὑπερτάτην ἐξήρθη δύναμιν, καὶ ὑπὲρ τὸ

ψ τὸν ὑπερτάτου παρονομασὴν ἀπάντων τῶν ὅρων
τῆς Ἐξισ. εἰς τὴν ὑπερτάτην δύναμιν ἡρμένον, ὑποτί-
θεσθαι. Οὕτω γὰρ εἴτα τῷ τῶν ὅρων πολλαπλ. ἐπὶ
ταύτην τὴν ποσὴν τὰ κλάσματα πάντα δυνατόν ἀπο-
σκευάσασθαι. Ἐάν δὲ οἱ παρονομασαὶ τῶν κλασμά-
των οὐδένα κοινὸν ἔχωσι παράγοντα, τίθεται ὡς τοῦ χ
συνεργός τὸ παραγόμεν. ἀπάντων τῶν παρονομασιῶν. ὡς
ἐν τῇ Ἐξισώσει.

$\chi^3 - \frac{3}{4}\chi^2 + \frac{1}{8}\chi + 20 = 0$, ἐν ᾗ ὁ
κοινὸς παράγων τοῦ παρονομαστοῦ, ὅστις παραλαβεῖν
ἔχοι, $= 4$. Ὡστε τεθήτω $4\chi = \psi$. Ὡστε $\chi = \frac{\psi}{4}$.
Ἡ δὲ καινὴ Ἐξισ. ἐστὶ

4

$\chi^3 =$

$$\chi^3 = \frac{\psi^3}{64}$$

$$- \frac{3}{4}\chi^2 = - \frac{3\psi^2}{64}$$

$$+ \frac{11}{16}\chi = \frac{+ 3\psi}{64}$$

$$* 20 = * 20$$

$$0 = \frac{\psi^3}{64} - \frac{3\psi^2}{64} + \frac{3\psi}{64} + 20$$

$$\text{ἐπὶ } 64.0 = \psi^3 - 3\psi^2 + 3\psi + 1280.$$

πρόκειται ἡ Ἐξίς. $\chi^3 - 3\chi^2 + \frac{11}{4}\chi - \frac{3}{4}$
 θήτω $2\chi = \psi$. ὁ γὰρ 2 ὁ γενικός ἐστὶ πα-
 πάντων τῶν παρονομασῶν τῶν κλασμάτων ἐν
 Ἐξίς. ὥστε $\chi = \frac{\psi}{2}$. Ἀντικατὰστήτω ἤδη

$$\chi^3 = \frac{\psi^3}{8}$$

$$- 3\chi^2 = - \frac{3\psi^2}{4}$$

$$+ \frac{11}{4}\chi = \frac{+ 11\psi}{8}$$

$$- \frac{3}{4} = - \frac{3}{4}$$

$$\text{ὥστε } 0 = \frac{\psi^3}{8} - \frac{3\psi^2}{4} + \frac{11\psi}{8} - \frac{3}{4}$$

$$\text{τοῦτο ἐπὶ } 8.0 = \psi^3 - 6\psi^2 + 11\psi - 6.$$

Αἱ

Αἱ ῥίζαι τῆς τελευταίας Ἐξισώσ. εἰσὶ $\psi = +1$, $\psi = +2$, $\psi = +3$ Καὶ ἐπεὶ $\chi = \frac{\psi}{2}$, ἔστιν ἄρα $\chi = \frac{1}{2}$, $\chi = 1$, $\chi = \frac{3}{2}$.

Καὶ ἐν γένει. $\chi^3 + \frac{\alpha\chi^2}{\beta} + \frac{\gamma\chi}{\delta} + \frac{\epsilon}{\zeta} = 0$. καὶ

τῶν παρονομαζῶν τῶν κλασμάτων παρὰ τῷ χ τεθέντων, ἢ $\beta\delta\zeta \cdot \chi = \psi$, ἔσται $\chi = \frac{\psi}{\beta\delta\zeta}$

$$\text{ἄρα} \quad \chi^3 = \frac{+\psi^3}{\beta^3\delta^3\zeta^3}$$

$$+ \alpha\chi^2 = \frac{+\alpha\psi^2}{\beta^2\delta^2\zeta^2}$$

$$+ \frac{\gamma\chi}{\delta} = \frac{+\gamma\psi}{\beta\delta^2\zeta}$$

$$+ \frac{\epsilon}{\zeta} = \frac{+\epsilon}{\zeta}$$

$$0 = \frac{\psi^3}{\beta^3\delta^3\zeta^3} + \frac{\alpha\psi^2}{\beta^2\delta^2\zeta^2} + \frac{\gamma\psi}{\beta\delta^2\zeta} + \frac{\epsilon}{\zeta}$$

πολλαπλ. $0 = \psi^3 + \alpha\delta\zeta\psi^2 + \beta^2\gamma\delta^2\zeta^2\psi + \beta^3\delta^2\zeta^3\epsilon$,
ἐπὶ $\beta^3\delta^3\zeta^3$ οἷς οὐδὲν ἔνεστι κλάσμα.

§. 404. Διὰ τῶν τροπῶν τῶν Ἐξισώσεων τῷ Πολλαπλ. ἢ Διαιρέσει, καὶ ἐὰν ἔντινι Ἐξισ. τῶν συνεργῶν τινὲς τῶν Ποσοτήτων ἄλογοι ὡσι, διὰ τούτου ἦτοι πάντες, ἢ τινὲς λογικὸι γενέσθαι δύνανται. Ὡς ἐν τῇδε τῇ Ἐξισώσει. $\chi^3 + \chi^2 \sqrt{5} - 3\chi - 3\sqrt{5} = 0$.

Τεθῆτω $\chi \sqrt{5} = \psi$. Ὡς $\chi = \frac{\psi}{\sqrt{5}}$. Δι

ἀντικαταστάσεως ἔσται

$$\chi^3 =$$

$$^3 = \left(\frac{\psi}{\sqrt{5}} \right)^3 = + \frac{\psi^3}{5\sqrt{5}}$$

$$^2 \sqrt{5} = \left(\frac{\psi}{\sqrt{5}} \right)^2 \cdot \sqrt{5} = + \frac{\psi^2 \sqrt{5}}{5} = \frac{\psi^2 \sqrt{5}}{\sqrt{5} \sqrt{5}} = \frac{\psi^2}{\sqrt{5}}$$

$$\chi = \frac{\psi}{\sqrt{5}} \cdot -3 = \frac{-3\psi}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5} = -3\sqrt{5}$$

$$0 = \frac{\psi^3}{5\sqrt{5}} + \frac{\psi^2}{\sqrt{5}} - \frac{3\psi}{\sqrt{5}} - 3\sqrt{5}$$

$$0 = \psi^3 + 5\psi^2 - 15\psi - 75$$

Τούτου αἱ ρίζαι αἱ δύο, ἀποφατικά, μία
καταφατική, (Τὰ γὰρ αὐτὰ σημῖα δις
ῥητοῖς ἐφέπεται, ἅπαξ δ' ἐπαμείβεται) ἢ
— 5. Καὶ + √ 15. Καὶ — √ 15. Καὶ
ἢ $\chi = \frac{\psi}{\sqrt{5}}$, ἔσαι, εἰ ἀντὶ τοῦ ψ τὸ εὑρε

$$\tau\epsilon\theta\eta, \chi = - \frac{5}{\sqrt{5}} = - \frac{\sqrt{5} \cdot + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$- \sqrt{5}. \text{ Ἀὐθις } \chi = + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = + \sqrt{3}.$$

$$\text{ἔτι } \chi = - \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = - \sqrt{3}. \text{ Αἱ τρεῖς}$$

$$\text{τοῦ } \chi \text{ δυνάμεις } - \sqrt{3}, + \sqrt{3} - \sqrt{5}.$$

§. 405. Ἐὰν ἐπίτινος Ἐξισώσεως ὁ ἔσχατος
ἐν αὐτῷ τὸ παραγόμενον τῶν ριζῶν ἐμπεριέχεται.
μέγας ἢ, πλείους ἔχων παράγοντας, λίαν ἐργῶδες
ῥημένοις τὸν παράγοντα εὑρεῖν, δι' οὗ οἱ τῆς Ἐ-
ξισ.

Ξισ. ὅροι ἀναιρουῦνται. ὅς τῆνικαὺται ἡ ῥίζα τυγ-
 χάνει. Ἐπινενόηται τοῖων μεθεδος τὴν Ἐξισ.
 εἰς ἑτέραν μεταβάλλειν, ἐλάσσονα τὸν ἔσχατον ἔχουσα
 ὅρον, εἰς τοὺς κατ' αὐτὸν παράγοντας ῥᾶον ἀναλυθῆναι
 δυνάμενον, καὶ τὴν ῥίζαν τῆς Ἐξισ. εὑρεθῆναι. Γί-
 νεται δὲ τοῦτο διὰ τῆς τροπῆς τῆς Ἐξισ. τῇ Προσθε-
 σει, ἢ Ἀφαιρέσει, κατὰ τὰ εἰρημένα. Χρησόμεθα
 δὲ τῇ ἑτέρα τῶν μεθόδων, ἥπερ ἂν τὰ σημεῖα τῶν πο-
 σοτήτων ἔχουσιν. Καίωθω ἀμέλει ἀντὶ τοῦ χ ἑτερο-
 κατὰ τὸ δοκοῦν ἀριθμὸς, ὅς ἐν γείει α ῥηθῆτω, ἐν τῇ
 Ἐξισίσει τῷ καταφ. ἢ ἀποφ. σημειῖν. (ἄμφω γὰρ
 πεῖρατέον). Καὶ τοῦτου προὔποτεθέντος, προσε-
 κτέαν, τί τὸ ἐξ ἀπάντων τῶν τῆς Ἐξισ. ὅρων προ-
 κύπτειν. ἅμα ὑπολογισθέντων. Εἰ γὰρ τεθῇ $\chi =$
 $\psi + 3$, προκύψει καινὴ Ἐξίσουσις, ἐν ἣ, ὡς τοῦ
 ἔσχατου ὅρου ἐλάσσους ἔχοντος παράγοντας, αἱ τοῦ
 ψ τιμαὶ ῥᾶον εὑρεθεῖεν, καὶ τούτων αἱ τοῦ χ ἀμεινοῖ-
 ᾶν διορισθεῖεν. Οἶον $\chi^3 + 2\chi^2 - 56\chi -$
 $192 = 0$. Ὁ 192 ἔχει κατὰ τμήθῃναι εἰς πλείους
 παράγοντας. Ὡς 1, 2, 3, 4, 6, 8, κτ. καὶ εἰς
 τοὺς παράγοντας, τοὺς ἐν μέρει ἐκ τοῦ πολλαπλασια-
 σμοῦ δύοι τοιοῦτων παραγόντων ἀναφωομένους. Ἐάν-
 οὖν θῶμεν — 3 ἀντὶ τοῦ χ , ἀνακύπτει — 33.
 ὅς ἀριθμὸς, πολλῶ ἐλάσσους παράγοντας. ἢ ὁ — 192
 ἔχει. Ἐςω εἴτα $\chi + 3 = \psi$, ἄρα $\chi = \psi$
 — 3. καὶ ἀντικατάστησον.

$$\begin{aligned}
 \chi^3 &= (\psi - 3)^3 = \psi^3 - 9\psi^2 + 27\psi - 27 \\
 + 2\chi^2 &= (\psi - 3)^2 + 2 = \psi^2 - 6\psi + 9 + 2 = \psi^2 - 6\psi + 11 \\
 - 56\chi &= (\psi - 3) - 56 = \psi - 59 \\
 - 192 &= -192
 \end{aligned}$$

$$0 =$$

$$\psi^3 - 7\psi^2 - 41\psi - 33$$

Τῇ

οὖν — 33 ἐλάσσους οἱ παράγοντες τῶν τοῦ
 Εἰσὶ δὲ 1, 3, 11. Καὶ ἐπειδὴ ἐν τῇ προ-
 ξισώσει σημεῖα δις ἔπεται ἀλλήλοις τὰ αὐ-
 τὰ ἐπαμείβεται, τῶν ῥιζῶν αἱ μὲν οὖν ἄ-
 μία ὁ καταφατική. Εἰς ἀπόπειραν ἀηφ-
 ᾶ. αἱ ἀποφατικαὶ ποσότητες. Ἐάν ἀντὶ
 τῇ ἐν τῇ Ἐξισ. — 1, γενήσεται (ἢ Ἐξ.)
 Ως $\psi = -1$, καὶ $\psi + 1 = 0$. Δι-
 ὅτι τῆς Ἐξισ. διὰ τοῦτου, εὐρήσομεν $\psi^2 =$
 $33 = 0$. ἥτις ἐπιλυθεῖσα δίδωσι $\psi =$
 7. Ως α'. $\psi = +11$. καὶ β'. ψ
 Ἐκ τούτου εὐρίσκομεν (ἐπειδὴ $\chi = \psi$)
 ὡς τιμὰς τοῦ $\chi = -4$. $\chi = +8$.
 -6 .

ρον παράδ. Ἐξω ἢ Ἐξισ. $\chi^3 + 19\chi^2$
 $+ 120 = 0$. Κάνταύτῃ τῷ 120 πλεί-
 οἱ παράγοντες. Ἐάν κατὰ τὸ δοκοῦν ἐν τῇ
 4 ἀντὶ τοῦ χ ἀντικαταστή, προέρχεται —
 καταφ. καὶ ἀποφ. ποσοτ. ἀλλήλοις προσε-
 λάσσους ἔχων τοὺς παράγοντας. Τεθῆτω
 $+4 = \psi$. ἢ $\chi = \psi - 4$, καὶ ἀν-
 τὸ τοῦ χ τὸ $\psi - 4$.

$$\begin{aligned}
 &= \psi^3 - 12\psi^2 + 48\psi - 64 \\
 &= + 19\psi^2 - 152\psi + 304 \\
 &= + 94\psi - 376 \\
 &= + 120
 \end{aligned}$$

$$= \psi^3 + 7\psi^2 - 10\psi - 16$$

τοῦ 16 παράγοντες εἰσὶν 1, 2, 4, 8. Ἐάν
 τὸ τοῦ $\psi + 1$ καὶ — 1, οἱ τῆς Ἐξισ. ἁ-
 ναιροῦνται. Διὰ δὲ τοῦ $+2$ καὶ μάλα.
 2 μία ῥίζα τῆς Ἐξισ. Αἱ δὲ λοιπαὶ οὖν

εὐρεθῇσονται τῇ Διαιρέσει τῆς Ἐξισ. διὰ $\psi - 2$.
Εἰ γὰρ $\psi = 2$, ἔστι καὶ $\psi - 2 = 0$. Δι-
λε οὖν

$$\begin{array}{r}
 \psi - 2) \quad \psi^3 + 7\psi^2 - 10\psi - 16 \quad | \quad \psi^2 + 9\psi + 8 \\
 \underline{\psi^3 + 2\psi^2} \\
 + 9\psi^2 - 10\psi \\
 + 9\psi^2 + 18\psi \\
 \hline
 + 8\psi - 16 \\
 + 8\psi - 16
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Ἐπεὶ οὖν} \quad \psi^2 + 9\psi + 8 = 0 \quad \text{ἔστι καὶ} \\
 \psi^2 + 9\psi + 8\frac{1}{4} = -8 + 8\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\
 \hline
 \psi = \phantom{-8 + 8\frac{1}{4}} - \frac{9}{2} \pm \frac{7}{2}
 \end{array}$$

Ὡς α. $\psi = -\frac{19}{2} = -8\frac{1}{2}$. καὶ β.
 $= -\frac{7}{2} = -3\frac{1}{2}$ + Εὐρηται δὲ καὶ $\psi = 1, 2$. Τὸ
δὲ χ ἦν $= \psi - 4$. Ἄρα $\chi = -12$. Καὶ
 $= -5$. Καὶ $= -2$.

§. 406, Εἰσιεῖν δ' ἐν ταῖς Ἐξισ. καὶ τὸν β'.
ὅρου ἐκ μέσου ποιεῖν, τὴν ἐπίλυσιν τῆς Ἐξισ. διὰ τῶν
παραγόντων ἐξευμαρίζοντας. Ἐν τῷ β'. ὅρῳ τῆς
Ἐξισ. ὡς δεδῆλωται, τὸ κεφάλαιον ὑπάρχει τῶν ῥι-
ζῶν. Τὴν οὖν τροπὴν τῆς Ἐξισ. οὕτω περαινεύουσιν,
ὥστε τὰς ῥίζας ἀναιρεῖν ἀλλήλας διὰ τῆς Προσθέσεως,
καὶ τὸ τούτων κεφάλ. $= 0$ γίνεσθαι, ἔσαι αὖτὶς ὁ β'.
ὅρος

ρος = 0, καὶ ἐπομένως ἐκπεσεῖται. Δηλωθήτω
 γένει πᾶσα Ἐξίσ. τοῦ γ'. βαθμοῦ τῷ δὲ τῷ γενι-
 ῳ τύπῳ. $\chi^3 + \pi\chi^2 + \rho\chi + \sigma = 0$. Τῷ
 δ' ἐνυπάρχει τὸ κεφάλ. καὶ τῶν τριῶν ριζῶν.

Ὅπερ ἀποσκευασθῆναι χρή, καὶ εἰς τὸ μηδὲν
 ᾠρῆσαι. Ἵνα δὲ τούτου γενικὴν ἔχωμεν τὴν ἐκφρα-
 ν, ἐνθα ὁ β'. ὅρος ἐκ συμπεπλεγμένης ποσότητος
 ὑγκείται, ὅς = 0 τεθῆναι δύναται, ἔσω $\chi =$
 $+ \epsilon$. Ἐνθεντι

$$\begin{array}{rcl}
 \chi^3 & = & \psi^3 + 3\epsilon\psi^2 + 3\epsilon^2\psi + \epsilon^3 \\
 + \pi\chi^2 & = & + \pi\psi^2 + 2\pi\epsilon\psi + \pi\epsilon^2 \\
 + \rho\chi & = & + \rho\psi + \rho\epsilon \\
 + \sigma & = & + \sigma \\
 \hline
 \sigma & = & \psi^3 + 3\epsilon \left\{ \begin{array}{l} + 3\epsilon^2 \\ + \pi\psi^2 + 2\pi\epsilon \end{array} \right\} \psi + \epsilon^3 \\
 & & + \rho \left\{ \begin{array}{l} + \pi\epsilon^2 \\ + \rho\epsilon \end{array} \right\} + \sigma
 \end{array}$$

Τούτῳ δὲ τῷ τρόπῳ πάσας τὰς τοῦ γ'. βαθμοῦ
 Ἐξισώσεις, τὰς πλήρεις τοὺς ὅρους ἐχούσας, παραση-
 νάσθαι δυνάμεθα. Εἰ οὖν ἐνταῦθα τὸν β'. ὅρον = 0 γε-
 ῖναι θέοι, ἀναγκαῖον τὴν Ἐξίσ. εἰς ἑτέραν μεταβα-
 λῆναι, ἐν ἣ τὸ κεφάλ. τῶν ριζῶν, ὅπερ οἱ συνεργοὶ τοῦ
 γ'. εἰσὶν ὅρου, ἢ ἐνθα τὸ $3\epsilon + \pi = 0$ ἂν γένοιτο.
 ἢ τοίνυν

$$\begin{aligned} 3\varepsilon + \pi &= 0 \\ 3\varepsilon &= -\pi \\ \varepsilon &= -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

ἔσαι καὶ

Ὡς προφανές ἐνταῦθα, ὅποιαν τιμὴν τῷ ε ἀποδοῦναι χρή ἐν κυβικῇ Ἐξίσ. ἐνθα ὁ β'. ὅρος καταφατικός, ἀντὶ τοῦ χ τὸ $\psi + \varepsilon$ θεῖναι βουλομένους, ἔσαι ἀμέλει $-\frac{1}{3}\pi$, ἢ $-\frac{\pi}{3}$. Εἰ οὖν ἀντὶ τοῦ χ

τὸ $\psi - \frac{1}{3}\pi$ ἀντικατέσῃ, εἴη ἀντὶ τῶν ῥιζῶν κεφαλ. $= 0$, καὶ ὁ β'. ὅρος ἐκπέσοι. Οὕτω δεῖξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ἡ Ἐξίσ. εἴη $\chi^3 - \pi\chi^2$ κτ. ἦτοι, ἐὰν ὁ β'. ὅρος ἀποφατικός, ἀντὶ τοῦ ε τὸ $+\frac{1}{3}\pi$ ἀντικαταστήσῃαι χρή, καὶ ὅτι, ἐὰν ἀντὶ τοῦ $\chi = \psi + \varepsilon$ ληφθῇ, $\chi = \psi + \frac{1}{3}\pi$ δι' ἀντικαταστάσεως ταύτης τῆς ποσότητος, ἀντὶ τοῦ χ ὁ β'. ὅρος ἐκπεσεῖν ἔχει. Ἐξ οὗ ὁ Κανών.

Ἐπ' κυβικῶν τῶν Ἐξίσ. ὁ β'. ὅρος ἐκπεσεῖται, ἐὰν ἀντὶ τοῦ χ ἐτέρωτις ἄγνωστος ποσότης τεθῇ, οἷον Ψ , καὶ τούτῳ τὸ τριτημόριον τοῦ συνεργοῦ τοῦ β'. ὅρου ἀντικειμένῳ τῷ σημείῳ προσεθῇ, ἢ περ ἦν ἐν τῇ Ἐξίσώσει, καὶ τούτου ἀντικαταστάσαντος ἐν τῇ Ἐξίσώσει ἀντὶ τοῦ χ .

Παραπλησίως δειχθήσεται καὶ ὅτι, ἐὰν ἀπότινος Ἐξίσ. οἰουδηγοτοῦν βαθμοῦ τον β'. ἐκβαλεῖν βουλόμεθα ὅρον, ἀντὶ τοῦ χ ἐτέραν ἄγν. ποσότη. θεῖναι χρή, ἣτινι καὶ ὁ συνεργὸς τοῦ β'. ὅρου μετ' ἀντικειμένου τοῦ σημείου, ἢ πρότερον εἶχε, προσε-

5196

τίθεται, διαιρούμενος μέντοι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅς ὁ
 Εκθέτης τῆς ὑπερτάτης Δυνάμεως τῆς ἀγνώστου ποσό-
 τητος ἐν τῇ Ἐξίσωσι τυγχάνει. Οἷον ἔσω ἐν γενεῇ
 Ἐξίσ. μ βαθμοῦ, ἢ ἡ ὑπερτάτη ἀγνώστου ποσότης ἔ-
 μ

τω χ . Ὁ συνεργὸς τοῦ β'. ὅρου ῥηθῆτω $+ \pi$.
 ἢ περ τὸ αὐτοῦ σημεῖον $+$, ἢ $-$ εἴη καὶ ὁ β'.
 ὅρος ἐκ μέσου γενήσεται ἀντι τοῦ χ τοῦ $\psi + \pi$ ἀν-

μ
 τικασάσαντος, ἥτοι εἰάν ὁ β'. ὅρος ἐν τῇ Ἐξ. $+ \eta$,
 τίθεται $\chi = \psi - \pi$. Ἐάν δὲ $-$, $\chi = \psi +$

μ
 π . Ληφθῆτω παράδ. ἐκ τῶν τοῦ γ' βαθμοῦ

Ἐξίσ.

§. 407. Ἐσω $\chi^3 - 9\chi^2 + 26\chi - 24$
 $= 0$. Ἐκπεσέτω ὁ ταύτης β'. ὅρος. Ὡς κατὰ
 τὸν κανόνα τεθῆτω $\chi = \psi + \frac{2}{3}$. ἢ $\chi =$
 $\psi + 3$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Ἐνθεντοι} & \chi^3 = & \psi^3 + 9\psi^2 + 27\psi + 27 \\ & - 9\chi^2 = & - 9\psi^2 - 54\psi - 81 \\ & + 26\chi = & + 26\psi + 78 \\ & - 24 = & - 24 \end{array}$$

$$0 = \psi^3 \quad * \quad - \psi \quad *$$

Ἐνταῦθα καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος ἐκπέπτωκεν. οὕτω
 συμβάν. οὐ γὰρ αἶτι τοῦτο. προῆλθε δὲ, ὅτι μία
 τῶν ριζῶν τοῦ ψ ἔσαι $= 0$. Ὡς καὶ μία τῶν
 τοῦ $\chi = 3$. Εἰ γὰρ $\psi = 0$, ἔσι $\chi = 0 +$
 $3 = 3$. Ἐπὶ τούτου ἀρα καὶ εἰς ἀμγῇ Τετραγω-
 νικήν ἢ μεταβέβληται Κυβική Ἐξίσωσις. Ἐάν
 γάρ

$$\begin{aligned} \text{γάρ } \psi^3 - \psi &= 0. \text{ ἔστι καὶ } \psi^3 = +\psi & : \psi \\ \psi^2 &= +1 \\ \psi &= +\sqrt{1} = +1 \end{aligned}$$

Ὡς οὖν τοῦ ἐσχάτου ἐκπεπτωκότος ὅρου, ἔσαι ἡ γ'. ῥίζα τοῦ $\psi = 0$. (§. 402.) Ἐπεὶ δὲ $\chi = \psi + 3$, εἰς ἀντὶ τοῦ ψ αἱ τούτου ἀντικαταστάσεις τιμαί, ἔσαι μία τιμὴ τοῦ $\chi = 0 + 3 = 3$. ἢ δ' ἑτέρα $\chi = +1 + 3 = 4$. ἢ δὲ γ'. $\chi = -1 + 3 = +2$. Ὅπερ τινόντι οὕτως ἔχει. Ἐξω ἡ Ἐξισ. $\chi^3 + 9\chi^2 + 14\chi - 24 = 0$. Καὶ ἀποσκευάσθητω ὁ β'. ὅρος. Ὡςτε κατὰ τὸν κανόνα ἔσω $\chi = \psi - \frac{2}{3} = \psi - 3$. ἄρα

$$\begin{aligned} \chi^3 &= \psi^3 - 9\psi^2 + 27\psi - 27 \\ + 9\chi^2 &= + 9\psi^2 - 54\psi + 81 \\ + 14\chi &= + 14\psi - 42 \\ - 24 &= - 24 \end{aligned}$$

$$0 = \psi^3 - 13\psi - 12$$

Αἱ δὲ ῥίζαι, $\psi = -1$. Καὶ $\psi = -3$. Καὶ $\psi = +4$. Καὶ τούτων $\chi = +1$. Καὶ $\chi = -4$. Καὶ $\chi = -6$.

§. 408. Καὶ μέθοδοι δὲ δίδονται, ὅπως ὁ γ'. καὶ ὁ β'. ὅρος, ἢ ὁριστῶν ἑτερος, ἐκ τῆς Ἐξισώσεως αἴρονται, ἀλλ' ὡς τῆς τούτων χρήσεως μικρῆς οὐσίας, ἐνταῦθα παραλείπονται. Ὁ δὲ β'. ἀποσκευάζεται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, διὰ τὸ τὸν ὑπολογισμὸν μετὰ τῶν τῆς Ἐξισ. ῥιζῶν διὰ τούτου συνεπιτέμνεσθαι. Ὅποιον δ' αὖν ὅρον ἀποσκευάσασθαι βούλη, μόνον τὸν, ὃν τὸ

τὸ χ ἐνυπάρχει, δυνήσῃ. Εἰ γὰρ καὶ πάντῳ χρή-
 μιν πάντας τοὺς τῆς Ἐξ. ὅρους, ἡλικὴ ἂν ᾖ, ἐκ
 εἰσοῦ αἶρεν, τοῦ α' καὶ τελευταίου ἐξαιρουμένου,
 ἀλλ' ἀδύνατον. Ἀμήχανον γάρ, π. χ . ἐκάστην Κυ-
 κλὴν Ἐξίσ, οὕτω μεταβαλεῖν, ὥστε τελευταῖον ψ^3
 $+ \gamma = 0$ ὑπολειφθῆναι, καὶ τηνικαῦτα ἐκ τοῦ ψ
 ὃ χ εὐρεθῆναι. Δῆλον δὲ τὸ λεγόμενον κακὸν τούτου,
 τι τῇ ἐντελεῖ κυβικῇ Ἐξισώσει τρεῖς αἱ δυνατὰ τιμαὶ
 τοῦ χ , τῆς τοῦ $\psi^3 + \gamma = 0$, ἢ $\psi^3 = -\gamma$
 ἴαν μόνου δυνατὴν, τὰς δὲ δύο ἀδυνατοὺς ἔχουσης,
 §. 397.) ὥστε τὰς τιμὰς τοῦ χ διὰ τῆς τοῦ ψ εὐ-
 εῖν μὴ δύνασθαι.

§. 409. Ὡςπερ ἐκ τῆς Ἐξίσ. ὅρον τινα δύνα-
 τὸν ἐξαγαγεῖν, οὕτω καὶ ἀνάπαλιν αὐθις εἰσαγαγεῖν
 χόμεν, εἰ ἀναγκαῖον, τῇ τῆς ρίζης ἐνὶ ἀριθμῷ ἐ-
 ταυξήσῃ, ἢ τοῦ χ τὸ $\psi + 1$, ἢ $\psi + 2$, κτ. τι-
 θέντες προσηκόντως ἀντικαταστήσομεν. Ἐξω ἢ Ἐξίσ.
 $\psi^3 - 13\psi - 12$. ἣς ὁ β'. ἄπειν ὅρος, καὶ ἣς
 αἱ ρίζαι -1 , -3 , καὶ $+4$. Ἐάν οὖν τεθῇ
 $\psi = \chi + 1$, προκύψει Ἐξίσ. ἢ ἐξῆς.

$$\begin{array}{r} \psi^3 = \chi^3 + 3\chi^2 + 3\chi + 1 \\ - 13\psi = - 13\chi - 13 \\ - 12 = - 12 \\ \hline 0 = \chi^3 + 3\chi^2 - 10\chi - 24. \end{array}$$

ἣς αἱ ρί-
 ζαι -2 , -4 , καὶ $+3$.

§. 410. Ὅπως τὰς ἐνεργείας ρίζας οἰασοῦν
 Ἐξίσ. ἀπόκειραν λαμβάνοντες ἂν εὕρομεν. ἀντὶ τοῦ
 χ ἕνα τῶν εὐρεθέντων παραγόντων τοῦ ἐσχάτου ὅρου ἐν
 τῇ Ἐξισώσει ἀντικαθιστάντες, δέδεικται. Ἀλλ' εἰάν
 ποσότης τῆς εἰς πολλοὺς ἀναλύηται παράγοντας,
 ὁχληρὸν

αρχήν παντ εκείνο ποιείν. Επενοήσαν οὖν μετὰ
 δους τὰ τῶν ριζῶν ὅρια, ἢ πέρατα εὐρίσκουσιν, ὅ
 ἐσι τοὺς ἀριθμοὺς, ὧν μεταξὺ τῶν ριζῶν ἐμπίπτουσιν
 αἱ δυναταί. Εἰ τοίνυν ἀριθμοὶ δύο καταφατικοὶ πρό-
 κεινται, ὧν ὁ μὲν μείζων, ὁ δ' ἐλάττων τῶν ριζῶν,
 καλοῦνται οὗτοι τὰ ὅρια, ἢ οἱ ὅροι τῶν θετι-
 κῶν ριζῶν. Εἰ δ' οἱ δύο ἀριθμοὶ ἀποφατικοί, οἱ
 ὅροι τῶν ἀποφατικῶν ριζῶν. Ὅπως δὲ ἡζή-
 τησις τῶν κατὰ τὰς ρίζας ὄρων δι' Ἐξισώσεως εὐεπι-
 χειρητός ἢ, μετάβαλε τὴν Ἐξίσ. εἰς ἑτέραν, ἣς ὁ β'.
 ὁρος ἄπεται (σ. 405.) Ἐξω Ἐξίσ. ἢ β', ἀμοιροῦ-
 σα ὄρου ἡδε $\chi^3 - \pi\chi + \gamma = 0$. Ἐσιν οὖν χ^3
 $+ \gamma = +\pi\chi$. Ἀναγκη ἄρα πᾶσα τὸ $\pi\chi$ μείζων
 εἶναι τοῦ χ^3 . ἵνα γὰρ τὸ χ^3 τῷ $\pi\chi$ ἐξισωθῇ, προ-
 σθετέω αὐτῷ (τῷ χ) καὶ τὸ γ . Ὡς

$$\begin{array}{r}
 \pi\chi > \chi^3 \\
 \hline
 \pi > \chi^2 \\
 \hline
 \sqrt{\pi} > \chi
 \end{array}$$

Εὐρίηται οὖν ἀριθμὸς μείζων τῆς ρίζης. Ζητη-
 σήτω καὶ ἕτερος ἐλάσσων αὐτῆς. Ἐπειδὴ $\chi^3 - \pi\chi$
 $+ \gamma = 0$, ἔστι καὶ $\chi^3 + \gamma = \pi\chi$. Ὡς τὸ
 γ μόνον πάντως, ἐλάττων τοῦ $\pi\chi$. Τὸ γὰρ χ^3 τού-
 τῳ ἔτι προσθῆναι χρὴ, ἵνα τῷ $\pi\chi$ ἴσον γέννηται
 Ἐνθεντοι

$$\begin{array}{r}
 \gamma < \pi\chi \\
 \hline
 \gamma < \chi
 \end{array}$$

ότης. τῆς ῥίζης ἐλάσσων.
 κεῖται μεταξὺ $\sqrt{\pi}$, καὶ
 πειραν τῶν παραγόντων

$$- 25x + 36 = 0$$

$$+ 36 = + 25x$$

$$< 25x$$

$$: x$$

$$< 25$$

$$< \sqrt{25} \cdot \eta < 5.$$

$$36 = 25x$$

$$36 < 25x$$

$$: x$$

$$\frac{36}{25} < x$$

44. Ἡ Θετική τοίνυν ῥίζα

5. ἢ τῷ βουλομένῳ ἐν ὁ-
 πειραν λαβεῖν οὐκ ἀναγκαῖον
 ἵστος τοῦ 4 ἀποπειράσασθαι.

Καὶ ἡ μὲν Θετική λογική ῥίζα

$$+ 36 = 0 \text{ ἐς τὴν ὄντι}$$

ἰ δύο ἄλογοι, ὧν ἡ μὲν +

5, 6 . . .

ρισον δὲ Πρόβλημα καλεῖ-

σθῆναι δυνάμενον. (§. 344)

οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ, ὧν τὸ κεφά-

οῦν πολλαχῶς ἂν ποιήσαιμεν.

12. $1 + 2 + 7 = 10$. $1 + 3 + 6 = 10$.
 $1 + 4 + 5 = 10$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 412. Παράδειγμα. Ζήτησον δύο ἀριθμούς
 ὧν τὸ κεφάλαιον, καὶ ὧν τὸ παραγόμενον ἅμα ἴσα δε-
 δομένῳ τινὶ ἀριθμῷ, π. χ. α. Επειδὴ ἀγνώστοι, οἱ
 δύο ἀριθμοὶ, ῥηθῆτωσαν χ , καὶ ψ . Τὸ ἄρα τού-
 των κεφάλαιον ἐστὶ $\chi + \psi$. τὸ δὲ παραγόμενον $\chi\psi$.
 Ὡς $\chi + \psi + \chi\psi = \alpha$. Ἄλλ' εἰκαί, ὡς εἴ-
 ρηται, εἰς ἀγνώστους ἀριθμοὺς διὰ μιᾶς Ἐξισώσ. δύο δὲ
 διὰ δυοῖν διορίζονται, καὶ ἐν γένει, τοσαύτας εἶναι
 τὰς Ἐξισώσεις χρῆ, ὅσαι τῶν ποσοτήτων αἱ ἀγνώστοι.
 Τοῦτο μέντοι οὐκ ἀεὶ δυνατόν. Ἐνθεντοί ἀναγκαίως
 καὶ μία, ἢ πλείους τῶν ἀγνώστων ἀδιορίζαι μένουσιν,
 ἢ περ αὖ Ἐξισώσεις κατὰ τὸ πρόβλημα συζαταὶ εἶναι,
 ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος παραδ. ἔνθα, δύο ἀγνώστων προ-
 κειμένων, μία μένον Ἐξισώσας ἐκ τοῦ προβλ. συζατή-
 ῳς ἢ ἑτέρα τῶν ἀγνώστων ἀδιορίζεσθαι μενεῖ. Ζητητέα
 οὖν ἢ τοῦ χ τιμῇ, τοῦ ψ ἀδιορίζου μένοντος.

$$\chi + \psi + \chi\psi = \alpha$$

$$\chi + \chi\psi = \alpha - \psi$$

$$(1 + \psi)\chi = \alpha - \psi$$

$$\chi = \frac{\alpha - \psi}{1 + \psi}$$

$$\chi = \frac{\alpha - \psi}{1 + \psi}$$

Ἐνταῦθα, ὅ, τι αὖ τὸ ψ ὑποτεθῇ, τὸ χ διώ-
 ρισαι. Καὶ μυρία τούτου αἱ ἐπιλύσεις, μάλις α, εἰ
 τὸ ψ καὶ κλασματικὸν παραληφθῇ π. χ. ἔσω $\psi = \frac{1}{4}$.
 καὶ ἀσημαννέτιο 6, καὶ ἔσται $\chi = 6 - \frac{1}{4} = \frac{23}{4} = 23 \cdot \frac{1}{4} =$

Δημόσιον Κεντρικὴν Βιβλιοθήκην

23. Καὶ $\chi + \psi + \chi\psi = 6$ ἔσται $= 6$.

$$\frac{1}{4} + \frac{23}{20} = 6$$

$$\frac{5}{20} + \frac{23}{20} = 6$$

$$\frac{120}{20} = 6$$

ἄν ἀριθμῶν ὁλοσχερῆς θετικὸς ἦ,
 ἄλλον ἔσαι διωρισμένον. Ἐξω γὰρ
 ὅς, καὶ παραπλησίως $\alpha = 6$.

$$6 - \psi$$

$$1 + \psi$$

$\eta = 0$, οὐδὲ $= 6$. Καὶ τὸ
 ἄριθμόν εἶναι χρή. τὸ δὲ β'. ὅτι
 ἂν γένοιτο, καὶ τοῦ χ οὐδεμία
 Ἀλλ' οὔτε ἀποφατικόν εἶναι δυνα-
 τιν. Ὅθεν πέντε μόνον ἐπιλύσεις
 εἶναι δύναται 1, 2, 3, 4, 5, καὶ
 ποσότης $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$. Ἀλλ'
 ἄριθμοὶ ἐπὶ τούτου ὁλοσχερεῖς κατα-
 ἔξω τοῦτο ἀπαιτεῖται, τὸ πρόβλ.
 Τεθεντῶν δ' ἐν τῇ Ἐξισώσει ἀν-
 τούτοις ἀνήκοντες ἀριθμοὶ, καὶ πλ
 εφάλ. τῆς Ἐξισ. ἔσαι $= 6$.

λε 25 εἰς δύο μέρη, ὧν θάτερον
 διὰ 3 διαιρέσιμον. Λύσις. Ἐξωσαν
 ἀ τὴν ἐνεργεῖα γεγονυῖαν διαίρεσιν
 (δὲ διὰ 3) χ καὶ ψ . Ὡς χ
 ἀφ' ὧν ἔσονται ἅμα 25, καὶ διὰ
 αἷν ὁ ἕτερος τῶν ζητειμένων, διὰ δὲ
 ὅς.

$$2\chi + 3\psi = 25$$

$$2\chi = 25 - 3\psi$$

$$\chi = 12\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\psi$$

2

Ἐπειδὴ χ ὁλοσχερῆς καταφατικός ἐστιν ἀριθμὸς καὶ ψ τοιοῦτον εἶναι χρή, οὐκ ἔχει ἄρα ψ μείζον εἶναι τοῦ 8. Ἐἰ γὰρ τοῦτο, ἐγένετο ἂν $25 - 3\psi$

2

ἀποφατικὴ ποσότης. καὶ χ , τὸ τούτῳ ἴσον, ὡσαύτως, κατὰ τῆς ὑποθ. Ἀλλ' οὐδ' ἄρτιος ἀριθμὸς τὸ ψ ἂν εἴη. ἄλλως γὰρ καὶ 3 ψ ἀρτιωθήσεται. (διὰ γὰρ τοῦ μετ' ἀλλήλων πολλαπλ. περιττοῦ καὶ ἀρτίου ἀριθμοῦ αἰεὶ ἄρτιος ἀναφύεται) καὶ εἰ 3 ψ ἀρτιος, $25 - 3\psi$ οὐκέτι διὰ 2 διαιρεθεῖη. (πᾶς γὰρ ἄρτιος ἀπὸ περιττοῦ ἀφαιρεθεὶς περιττὸν ὑπολείπει, διὰ 2 μὴ διαιρέσιμον) Ἐπεὶ οὖν ψ μείζον τοῦ 8 εἶναι οὐκ ἔχει, οὐδὲ μὲν οὖν ἄρτιος ἀριθμὸς, οὐδὲ 0, (ὅτι ἀριθμὸν εἶναι χρή) δέδοται δ' ἐνταῦθα μόνον μία Ἐξίσωσις τῶν δύο ἀγνώστων, ἔχομεν ἐκ τούτων τὸ ψ ἀποδοῦναι. Ἦτοι δύναται παρασῆσαι πάντα περιττὸν καταφατικὸν ἀριθμὸν, μεταξὺ 0 καὶ 8 κείμενον. Ὡς ψ εἴη ἂν 1, 3, 5, 7, καὶ κατὰ τοῦτο διορίζεται καὶ τὸ χ . Ἐπιδέχεται ἄρα τὸ προβλ. δ' ἐπιλύσεις

$$\text{Ἐὰν } \psi = 1 \text{ ἔστι } \chi = 11$$

$$\text{Ἐὰν } \psi = 3 \text{ ἔστι } \chi = 9$$

$$\text{Ἐὰν } \psi = 5 \text{ ἔστι } \chi = 7$$

$$\text{Ἐὰν } \psi = 7 \text{ ἔστι } \chi = 5$$

Εἰσὶν οὖν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ $2\chi + 3\psi$ α'. $22 + 3$. β'. $16 + 9$. γ'. $10 + 15$, καὶ δ'. $4 + 21$.

§. 414.

§. 414. Ἐν συνελεύσει τινι ἀνδρῶν, καὶ γυναι-
κῶν δεδαπάνηται 1000 γρόσσοι. Καὶ ἕκαστος μὲν
ἀνδρῶν 19, ἐκάστη δὲ τῶν γυναικῶν 13 γρ. κατέ-
αλε. Πόσοι οἱ ἄνδρες, καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

Λύσις. Αὐτίκα δῆλον, ὅτι τῶν τῆς Ἑξισ. ὑ-
ποθέσεων ἐκ μέσου ἀρθρῶν, ἢ τοῦ Ζητήματος ἐπι-
στασις οὕτως ἀν' ἀποδέδοτο, Δίελε 1000 εἰς δύο μέρη,
τὸ μὲν διὰ 19, τὸ δ' ἕτερον διὰ 13 διαιρεσίμου,
ἐν τὰ πηλίκᾳ ὁλοσχερεῖς, καὶ καταφατικοὶ ἀριθμοί.
Διαιρεθέντα τὰ ζητούμενα μέρη διὰ 19, καὶ 13 ἔσω-
σαν χ, καὶ ψ. Ἔσονται ἄρα τὰ μέρη $19χ + 13ψ$,
καὶ ἐκ τοῦ ἐπομένου $19χ + 13ψ = 1000$. Ζη-
τήσωμεν τὸ ψ, ὡς εὐχερέστερον εἰς εὐρεσιν. Ἐνθεν τοι

$$13ψ = 1000 - 19χ$$

$$ψ = 1000 - 19χ$$

13

εἰ οὖν ἐνταῦθα πείραν λαμβάνοντες ζητῆσαι βουλόμε-
θα, τί τὸ χ σημαίνει, ἐφ' ᾧ $1000 - 19$ ὁλοσχε-

13

ρῶς καταφατικὸν εἶναι, ὡς καὶ τὸ χ τοιοῦτον λίαν διεξοδι-
κόν. Πειρατέον τοίνυν ἄλλως, καὶ $1000 - 19χ$

13

νεργεῖα διαιρετέον. Ὡς $ψ = 1000 - 19χ$

13

$$= \frac{1000}{13} - \frac{19χ}{13} = 76 + \frac{12}{13} - χ$$

$$- \frac{6χ}{13}$$

$$- 6\chi = 76 - \chi + \frac{12 - 6\chi}{13} \quad \text{Ε}$$

πειδὴ δὲ ψ ὁλοσχερῆς ἀριθμὸς εἶναι ὀφείλει, καὶ χ ὡσαύτως, ἔστι καὶ $76 - \chi$ ὁλοσχερῆς ἀριθμὸς. Ἀνάγκη ἄρα καὶ $\frac{12 - 6\chi}{13}$ ὁλοσχερῆ ἀρ. εἶναι. Ἀλ-

λως γὰρ ψ οὐκ ἂν εἴη ὁλοσχερῆς. Οὐ μόνον δὲ $12 - 6\chi$ διὰ 13 διαιρέσιμος, ἀλλὰ καὶ τὸ 6 : μόριον αὐτοῦ, ἢ $2 - \chi$. Ἐστὶ γὰρ $\frac{12 - 6\chi}{13}$

$$= \frac{(2 - \chi) \cdot 6}{13}. \quad \text{Ἐπεὶ δ' ὁ ἕτερος παράγων}$$

6 διὰ τοῦ 13 οὐκ ἔχει διαιρεθῆναι, ἀνάγκη πᾶσα τὸν ἕτερον παράγ. διαιρεῖσθαι δύνασθαι, εἴπερ πᾶσα ἡ ποσοτικὴ διὰ τούτου διαιρέσιμος εἶναι ὀφείλει. Ἄλλως γὰρ οὐ δυνατόν. Ὡς 2 - χ διὰ 13 διαιρέσιμος.

Παραληλθῆτω καὶ ἑτέρα καινὴ ἄγνωστος ποσότης. ἐπειδὴ γὰρ $2 - \chi$ διὰ 13 διαιρέσιμος, ἔστω τὸ πηλίκον = ω . Ἀλλὰ τοῦτο ἀποφατικὸν εἶναι χρῆ, ὥς τοῦ χ μείζονος εἶναι ὀφείλοντος, ἢ ὁ 2. ἄλλως γὰρ ἡ διάφρασις οὐκ ἂν γένοιτο. Ὡς 2 - χ

$$= -\omega, \quad \text{καὶ ἐπομένως} \quad \frac{2 - \chi}{13} = -\omega. \quad \text{ἀν-}$$

τικαταστήτω ἐν τῇ Ἐξισώσει. Ἦν τὸ $\psi = 76 - \chi + \frac{12 - 6\chi}{13}$. Δι' ἀντικαταστάσεως γίνεσθαι

$$\psi = 76 - 2 - 13\omega + \frac{12 - 12 - 78\omega}{13}$$

$$= 74 - 13\omega - 6\omega = 74 - 19\omega. \quad \text{Ἐπειδὴ} \quad \psi = 74 - 19\omega, \quad \text{καὶ θετικὸν δὲ, (τὸ } \psi) \text{ τὸ } \omega \text{ οὐ}$$

οὐ τηλικούντων εἶναι χρή, ὥστε 74 ἀναιρεῖν. Εἰ
 γὰρ 4 τεθῇ, πάνυ ἂν μέγα εἴη. Ὅτι $4 \cdot 19 = 76$.
 Ὅθεν ἀνάγκη ἔλαττον τοῦ 4 εἶναι, καὶ ὁλοσχερῇ
 ἰριθμόν. Δύναται οὖν $\omega = 0, 1, 2, 3$ εἶναι.
 Εἰ $= 0$, ἔσαι $\psi = 74$. Εἰ δὲ $= 1$, ἔσαι
 $\psi = 55$. Εἰ δὲ $= 2$, ἔσαι $\psi = 36$. Εἰ δὲ
 $= 3$, ἔσαι $\psi = 17$. Τέσσαρες ἄρα ἐπιλύσεις τοῦ
 Προβλήμ. δυναταί. Εἰ γὰρ $\psi = 74$, ἔσαι $\chi = 12$.
 Ἦν γὰρ $\chi = \frac{1000 - 13\psi}{19}$. Ἐἰ δὲ $\psi = 55$,

19

ἔσαι $\chi = 15$. Εἰ δὲ $\psi = 36$, ἔσαι $\chi = 28$.
 Εἰ δὲ $\psi = 17$, ἔσαι $\chi = 41$. Ὅτι χ τοὺς ἄν-
 δρας, καὶ ψ τὰς γυναῖκας σημαίνει. Καὶ εἰς ἀνὴρ
 καταβάλλει 19 γρ. μία δὲ γυνὴ 13 γρ.

Ἦσαν οὖν

1) 2 ἄνδρες, καὶ 74 γυναῖκες. καὶ οἱ μὲν
 38 γρ. κατάβαλλουσιν, αἱ δὲ γυναῖκες 962.

2) 15 ἄνδ. καὶ γυν. ὧν οἱ μὲν 285, αἱ δὲ
 715 γρ. ἀποτίουσι.

3) 28 ἄνδ. καὶ 36 γυν. καὶ οἱ μὲν 532 γρ.
 αἱ δὲ 468 καταβ.

4) 41 ἄνδ. καὶ 17 γυν. ὧν οἱ μὲν 779, αἱ
 δὲ 221 καταβάλλουσι,

Ἄλλις τῶν Ἐξισώσεων, ὅσον τοῖς Πρωτοπείροις ἀρ-
 κεῖ, καὶ καταβάλωμεν.

Τέλος.

Σημείωσις εἰς τὸ §. 312.

„Οἱ Λογάριθμοι, καθόλου θεωρούμενοι, ὡς ἐνεργεῖα
Ἐκθέται τῶν Δυνάμ. ἔχουσι θεωρεῖσθαι.

Ἐξω Γεωμ. Πρόοδος. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.

Ἀριθμ. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Ἐν τῇ Γεωμετρικῇ προόδῳ ὁ Ἐκθέτης (§. 294.)
ἐστὶ 2. ἐν ἣ ὁ μὲν 2 (ὁ β'. ὅρος) ἢ α'. δύναμις ἐστὶ τοῦ
ἐκθέτου.. ὁ δὲ 4, ἢ β'. ὁ δὲ 8 ἢ γ'. κτ. Ὅθεν
γράφον τὴν προόδον οὕτως.

1, 2¹, 2², 2³, 2⁴, 2⁵, 2⁶. ὑπογράφας καὶ

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 τὴν ἀριθμ. σ.

Ὅρας οὖν, ὅτι ἕκαστος ὅρος τῆς προόδου τῆς ἀριθμ.
ὡς ἀξία τοῦ ἐκθέτου τῆς γεωμ. πρ. θεωρεῖται, καὶ ὅ-
τι οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων τῶν ὄρων τῆς προόδου τοῖς
λογαρίθμοις πάντῃ συναδουσιν ὁ λογάριθμος ἄρα, ὁ
ἐκθέτης ἐστὶ τῆς ἀξίας, εἰς ἣν ὁ κατὰ τὸ δοκοῦν λη-
φθεὶς ἀριθμὸς ἀρθῆναι ὀφείλει, ἵν' ἐκτισθῇ ἑτέρῳ δο-
θέντι ἀριθμῷ. ὡς ὁ λογ. τοῦ 128 ἐν τῷ παρόντι συ-
νήματι ὁ ἐκθέτης ἐστὶ τῆς ἀξίας, εἰς ἣν ὁ ἀριθμὸς 2
ἀρτέος, ἵνα ἴσος τῷ 128 γένηται. ἢ ἐν γένει, τοῦ α ὁ
λογ. ἐστὶ ν τοῦ α^μ ὁ μ.

„Ἐπὶ

Εἰς τὸ). 327.

ἐξ τῶν μείζ. ἀριθμῶν αἱ διαφοραὶ τῶν κατ'
 ἑρ σχεδὸν αἱ αὐταί.

τὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων, καὶ τὰς
 τῶν ἀριθμῶν, οἷς ἐκεῖνοι ἀνήκουσι, πρὸς ἀλ-
 λαβαλλόμεν, εὐρίσκομεν τὰς τῶν λογαρ.
 τὸν αὐτὸν σχεδὸν λόγον ἐχούσας, ὅν καὶ
 μῦθον. Ἀλλ' ἐπὶ μὲν τῶν ἐλασσόνων ἀριθ-
 μῶν ἀπώμα ἐπίστημον, ἐπὶ δὲ τῶν μειζόνων,
 τῶν ὑπὲρ 8000 οὕτως ἐλάχιστον, ὥστε μό-
 φθῆναι δυνατόν. "Ενθεντοὶ οὗτος ὁ τρέ-
 χησιν τοῖς βουλομένοις τοὺς λογαρίθμους
 ἀριθμῶν, τοὺς ἐν τοῖς κοινοῖς μὴ ἐνόντας
 25

$$\lambda. 669 = 2,8254261$$

$$\lambda. 668 = 2,8247765$$

ἀρ. 1 διαφ. τ. λογ. 6496

$$\lambda. 669 = 2,8254261$$

$$\lambda. 665 = 2,8228216$$

ἀρ. 4 διαφ. τ. λ. 26045

τέρον οὖν, εἰ αἱ διαφοραὶ τῶν ἀριθμῶν, 1
 αὐτὸν ἔχουσι λόγον, ὅν αἱ τῶν κατ' αὐτοὺς
 , καὶ 26045. Τοῦ λόγου 1 : 4 ὁ ἐκθέ-
 τοῦ δὲ 6496 : 26045 ἔστι 4 ⁸¹/₈₈. Ὡστε
 ὁ οὗτος ἐκεῖνου. "Ενθεντοὶ ἐν τούτοις
 διαφ. καὶ αἱ τῶν κατ' αὐτοὺς λογ. οὐδε-
 ῇ παρέχουσιν ἀναλογίαν. Θεωρητέον τοῦ-
 μείζονι τῶν ἀριθμῶν.

$$\lambda. 8236 = 3,9157163$$

$$\lambda. 8235 = 3,9156636$$

Εὐθα αἱ διαφοραὶ τῶν ἀρ. 1 καὶ 2 τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν αἱ τῶν λογ. 527, καὶ 1054.

Ἐστὶ γὰρ $1 : 2 = 527 : 1054$. ὁ λόγος ὁ ἐκθέτης 2.

Εἰς τὸ §. 326.

Ἐν τῇς ἐλάσσοσι τῶν Πινάκων περι-
λογ. ἀπὸ 1 μέχρι 10000. Εἶς εὐρετέος
τοῦ 86759. Χρητῶμεν δὲ οὕτω. διὰ σει-
λενταῖον χαρακτῆρα τοῦ ἀριθμοῦ ἐν δέξιοις
λειφθῇ ἀριθμὸς, οὗ ὁ λογάριθμος πῖναξιν ἐν
ἐν μὲν ὁ ὑπολοίπος ἀριθμὸς ἐξ 6 σύγκειται χα-
ρᾶς διασταλέου 2, εἰδ' ἐξ. 7, 3, κτ. Εἶτα ζῆ-
τὸν λογ. τοῦ ἀριθμοῦ 8675, καὶ τὸν τοῦ
ζήσαντος 8676, ποιῶν ἐκ τούτων τοὺς λογ. τῶν
86750, καὶ 86760, (ἐπαύξινον τὸ χαρα-
κτῆρ τῶν προτέρων μονάδι,) ὡς μεταξὺ ὁ ζητούμε-
τος 86759 ἐμπίπτει. Ἀφύλε ἤδη ἀπ' ἀλλ.
τοὺς ἀριθμοὺς, καὶ τοὺς τούτων λογ. εἰς εὐ-
διαφορῶν, συνάγειν οὕτως. Ὡς ἡ διαφορὰ
καὶ γ'. ἀριθμοῦ πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ ἑτέρου
οὕτω καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ α'. καὶ γ'. λογαρίθ-
μους τὴν διαφορὰν τοῦ ἀγνώστου ἑτέρου, καὶ γ'.
μου. Καὶ εὐρεθεῖσα ἡ διαφορὰ διὰ τῆς το-
μεθόδου, ἣτις ἐν τοσούτῳ χ' ῥηθῇτω, προσε-
ἐλάσσονι λογαρίθμῳ, ὥς τὸν ζητούμενον λο-
γᾶν κῦψαι. Τουτέστιν, ἐνταῦθα ὁ μείζων ἀριθμὸς
ταῖς α' καὶ ὁ ἐλάσσινός ὁ γ'. ἡ δ' εὐρεθεῖ-
σά ὁ ἀφαιρέθῃτω ἀπὸ τοῦ λογ. τοῦ α'. ἦτοι τ.
ἀριθμοῦ.

$$\text{λογ. } 8675 = 3,9382695$$

$$\text{λογ. } 86750 = 4,9382695$$

$$\text{λογ. } 8676 = 3,9383145$$

$$\text{λογ. } 86760 = 4,9383195$$

$$\text{λογ. } 86750 = 4,9382695$$

$$\text{ἀρ. } 10 \quad \text{τῶν λογ. } 500$$

$$\text{λογ. } 86759 = \dots\dots\dots$$

$$\text{λογ. } 86750 = 4,9382695$$

$$\text{ἀρ. } 9 \quad \text{τῶν λογ. } \chi$$

$$00 : \chi. \quad \text{Καί } \chi = \frac{500}{10} = 450 = \chi.$$

$$86750 = 4,9382695$$

$$\chi = 450$$

$$86759 = 4,9383145$$

ως εὔρεϊν δυνάμεθα καὶ λογαρίθμου τὸν
 ζῶνα ὄντα τῶν ἐν τοῖς πίναξιν. Ἐςω δε-
 γ. 4,9383145. Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς, ὁ
 μν. Ζήτησον α'. τὸν δε τὸν λογαρίθμον
 χαρακτηρικῶ, π. χ. ἐν τῷ χαρακτ. 3.
 εἰς ἐνυπάρχοντι. Εἰ δ' αὐδεὶς λογάρ.
 αὐτὰ ἔχων δεκαδικά, λάβε τὸν ἐγγὺς
 εἰ ἐγγὺς μείζονα τοῦ δοθέντος, τὸ χα-
 ρακτέρου ἴσον ποιῶν τῷ τοῦ δοθέντος,
 οἷς τοσαῦτα μηδενικά προσθεῖς πρὸς τὰ
 μονάδες τῷ χαρακτ. τοῦ λογ. προστετέ-
 αφελε τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα λογάρ. ἀπὸ
 ζῶνος, ὁμοίως καὶ τοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς
 τούτοις, ἀπ' ἀλλήλων, ἀφαιρῶν ἔτι καὶ
 ἐλάσσονα λογάρ. ἀπὸ τοῦ δοθέντος, καὶ
 τὰς δύο διαφορὰς τῶν λογαρίθμων, καὶ
 διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν τὸν δ', ἀνάλεγον.

κατὰ τοὺς πίνακας, ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων λογάρ. ἐν χα-
ραντηρ. 3 ἐστὶ

$$3\ 93826\ 5 = \text{λογ. } 8675$$

$$\alpha\alpha\alpha\ 4,9382695 = \text{λογ. } 86750$$

ὁ ἐγγὺς μείζων λογ. ἐστὶ

$$3,9383195 = \text{λογ. } 8676$$

$$\alpha\alpha\alpha\ 4,9383195 = \text{λογ. } 86760$$

$$\alpha\phi. \ 4,9382695 = \text{λογ. } 86750$$

$$\text{διαφ. τῶν λογ. } 500, \text{ διαφ. τ. ἀρ. } 10$$

$$\text{ὁ δοθεὶς λογ. } 4,9383145 = \dots\dots\dots$$

$$\text{ὁ ἐγγὺς ἐλάσ. } 4,9382695 = \text{λογ. } 86750$$

$$\text{διαφ. τῶν λογ. } \quad 450 \cdot \text{ διαφ. τῶν ἀρ. } \chi$$

$$500 : 450 = 10 : \chi, \text{ Καὶ } \chi = \frac{450 \cdot 10}{500} = 9$$

Ἐπειδὴ 9 ἡ διαφορὰ ἐστὶ μετὰξὺ τοῦ γνωστοῦ ἐ-
λάσσονος ἀριθμοῦ 86750, καὶ τοῦ ἀγνώστου μείζονος,
ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἐστὶ $86750 + 9$
 $= 86759$.

Τὰ παροράματα διόρθωσον οὕτω.

1	εἶχω	15	διότι	ἀνάγνωθι	διότι.
2		17	ἐὰν	—	ἐάν.
4		26	τι	—	τι
αὐτ.		28	β	—	β
5		19	καὶ σί	—	καὶ οὐ
		29	οὐκ	—	οὐκ
6		7	αὐτὶ	—	ἀντὶ
12		19	ὑπαγορεύειν	—	ὑπαγορεύειν
-		21	ὑμνουμένων	—	ὑπονοουμένων
-		25	ἐνθεντοι	—	ἐνθεντος
13		7	αὐτὶ	—	ἀντὶ
		9	αὐτὸ	—	ἀντὶ.
14		12	διὰ	—	διὰ
16		2	καὶ	—	καὶ
17		14	ὥς	—	ὥς
25		8	εἶη	—	εἶη
51		19	αὐτὸ ἐστίν	—	αὐτό ἐστιν
99		8	ἐλάττω	—	ἐλάττων
109		31	$\zeta^4:2$	—	$\zeta^4:2$

Πελ. 112	Σίχψ	9	ὥπερ	ἀνάγνωσι	ὥπερ
136		23	τόν δ' ἐς	—	τὸ δ' ἐς
151		10	5043·100 10·123	—	ποριττόν
160		19	πολιαπλασιασέα	—	πολλαπλασ.
169		2	Τὸτ	—	Τότε
173		9	εἰς τοῦπίσω	—	ἀνάπαλιν
197		2	Εὐθύς, ἢ Εὐθετος	—	περιττόν.
233		12	Προόδοι	—	Προόδου
266		9	πυλευταίων	—	τελευταίων
416		2	διαφορᾶς	—	διαφορά.
			ὁ δ' ἐλάσσω,	—	ὁ δ' ἐλάσσω,
		8	ὁ	—	ὁ
		10	Ἐτέρον	—	Ἐτερον
		26	Ἐξίσσεις	—	Ἐξίσσεις
		30	τοίνυν	—	τοίνυν

Δι' ἀνάγκαιαν ἀπουσίαν τοῦ Μεταφραστοῦ, καὶ τοῦ Στοιχειωθέντος ἀγνοίαν, τοσαῦτα εἰσέφερσαν παροράματα ἐν τῇ ἀρχῇ, ἐν τῇ ἀφιερωτ. ἐπισ. καὶ ἐν τῇ πρὸς τὸν ἀναγνώστην, ὡσαύτως καὶ περὶ τὰ τέλη τῆς βίβλου, ὥς τε καὶ ἑτέρου ἐλέγχου δεηθῆναι τῶν κυριωτέρων παροραμάτων, βαρβαρισμοὺς πολλοὺς παριδόντας, ὑφ' ἑκάστου ῥᾶσα ἐπιγινωσκομένους.

		ἐν ἀρχῇ
Ἀριθμητικῆς	γρ.	Ἀριθμητικῆς
Ἀλγεβρῆς	—	Ἀλγεβρας μεθ' ἑλλ. ρ.
		ἐν τῇ ἀφ. ἐπισ.
τὸ μοι	ἀνάγν. μετὰ τοῦ α'. κυρίω.	ἦτοι κυρίω μοι,
λαμπρότ.		λαμπρότ.
		ἐν τῇ πρὸς τὸν ἀναγ.
Μᾶλλον		Μᾶλλον.
ἐαυτοῖς		ἐαυτοῖς
εἰ δέναι		εἰδέναι.
τὸν προβαλλόμε.		τὰ προβαλ.

πρὸς
ἐμαυτοῦ.
ἔμετ.
τὸ, τε,
ἀναγνώσεως,
ταῖς βίβλου

πρὸς
ἐμαυτοῦ.
ἤμετ.
τὸ, τε,
ἀναγνώσεως.
τῆς βίβλου.

Σελ. 386. 5. 31. $\chi = 15 + 8 + 23$ γρ. $\chi = 15 + 8 = 23$.

394 4 = λ. 515
5 λ. 515
λ. 2

= λ. 512.
λ. 512
λ. 2

395 I ἔσαι
402 7 κυβ. 5.

ἔσαι. 409
κυβ. π.

18 μεταξύ τῶ

1080

1080

$36 + 27 + 28$

91

τεθήτω τὸ =

404 21 $15\chi = 10\chi$

$15\chi - 10\chi$

406 26 ζητεῖσθαι

ζητεῖσθαι.

27 γνωστὸν

γνωστὸν

407 13 ἔσαι, ἡ πο.

ἔσαι ἡ πο.

409 4 $16\chi - 3700$ γρ.

$16\chi - 3700$

2

9

410 5 πλὴν ἐκατόν

πρὸς ἐκατόν.

28 I θαλ. ἐλάττ.

10 2. ἐλ.

414 6 τῆς αὐτῆς ποσ.

τῆς αὐτῆς ἀγνώστου ποσ.

416 2 διαφορᾶς

διαφορά.

10 Ἑτέρων

Ἑτερον

26 Ἐξισώσεις

Ἐξισώσεις.

30 τοίνυν, Ἐξισ.

τοίνυν Ἐξισ.

417 22 ἐνυπαρχόντων

ἐνυπαρχουσών

418 2 ἵνα

ἵνα

425 9 ἀκούει

ἀκούει.

426 10 ἐξ ἀμφοῖν

ἐξ ἀμφοῖν.

427 13 $\eta \chi = \sqrt{24}$

$\eta \chi = \sqrt{24}$

5

5

429 9 ἀφαιρεθέντος

ἀφαιρεθέντος.

10 Τοῦτο

Τοῦτο

Σελ.

Σελ. 440 ἐν τέλει $\chi: 10$ κτ. $\chi: 10 - \chi = 10 - \chi:$

441 19 καὶ $+ .9$

καὶ $+ 9.$

447 5 τῶν

τῶν

449 14 $= \frac{1}{2} \sqrt{5}$
2

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

451 11 καταφοτιῆς

καταφ.

453 8 Εἰ

Εἰ

454 3 ἤν

ἤν

455 6 ὀλοσχεροῦς

ὀλοσχεροῦς

459 ἐν τέλει $+ 4$

$+ 64$

464 9 ἀποφατικοῦ

ἀποφατικῶν.

12 πάντων

πασῶν

468 9 $\chi - 2\chi)^3$

$\chi - 2)^3 \chi^3$

470 9 ἑτετρ.

ἑτετρ.

470 26 Ψ

Ψ^3

476 9 $\alpha\chi$ Τὸ δέ.

$\alpha\chi$. Τὸ δέ

477 4

οἱ ἀσερίσκοι περιττοί.

478 12 $+ \beta^3 \delta^3 \zeta^3 = \gamma\beta$

$\beta^3 \delta^3 \zeta^2 =$

480 19 κατὰ μ.

καταμ.

481 αὐτ. ἀλλήλοις.

ἀλλήλαις.

482 15 $= - + 1$

$= - 1$

αὐτ. $\Psi = 1.2$ γρ.

$\Psi = 2$

484 14 ποσότητος, ἀντὶ τοῦ χ

ποσότητος ἀντὶ τοῦ χ .

16 Ἐπ' κυβικῶν τῶν.

Ἐπὶ τῶν κυβικῶν

485 8 ἀντικατασάντος

ἀντικατασάντος

ἐν τέλει, ἢ μετ. κ. Ἐξ.

ἢ κ. Ἐξ. μετ.

486 8 $+ 1 + 3 + 4$

$+ 1 + 3 = + 4$

12 $\Psi - \frac{2}{3}$

$\Psi - \frac{2}{3}$

22 καὶ δ' ὄρος

καὶ δ' ὄρος

23 σχρήσεως

χρήσεως

488 24 προσθῆναι

προσθεῖναι

489 19 λοιπαὶ

λοιπαί.

490 10 δυοῖν

δυεῖν.

13 ἀδιόριζαι

ἀδιόριζαι

491 7 ὀλοσχερῇ

ὀλοσχερῇ

17 ποσότης

ποσότησι

20 ταθέντων . . : οἱ τοῦτοις ἀν. ἀρ.

γρ.

ταθέντων τῶν τοῦτοις ἀν. ἀρ.

Σελ.

Σελ. 493	5	αὐτίκα.	αὐτίκα.
	8	διαίρεσίμου	διαίρεσίμου
	18	ζητήσωμεν	ζητήσωμεν.
	19	τοιοῦτον	τοιοῦτον,
494	14	παράλη.	παράληφθ.
495	1	τηλικούτου	τηλικούτου
	8	ἔσαι χ 12	ἔσαι χ = 2
	9	Εἰ,	Εἰ
	16	κατόβαλλουσι	καταβάλ.
	17	15 ἀνθ. καὶ γ.	15 ἀνθ. καὶ 55 γυν.
496	15	συναΐδουσιν	συναΐδουσιν.
	20	τοῦ α ὁ λογ.	τοῦ α ὁ λογ.
497	1	Εἰς τὸ).	Εἰς τὸ θ.
	27	ἀκριβή	ἀκριβή
	28	μειζονι	μείζοσι.
498	9	ἐν τῇ: ἐλ.	ἐν τοῖς ἐλ.
	11	χωρήσωμεν	χωρήσωμεν
	14	ἐν μέν	εἰ μέν
	20	ἄφελος	ἄφελος
500	15	τοῦ ἀγνώστου	τοῦ ἀγνώστου.
	16	ἔσαι	ἔσαι

21013

ΕΠΙΣΤΟΛΗ

ΕΠΙΣΤΟΛΗ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βελούσιας