

41

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
 500 ΒΕΡΟΙΑΣ

Αριθ. εις 712

Εξ αγοράς Διμήτρη

Τσαλωφάνης

68VIIQ-01227

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΚ
ΠΑΛΑΙΩΝ & ΝΕΩΤΕΡΩΝ
Συνερανθέντων
ΤΙΟ ΤΟΥ ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ
ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ
ΠΡΩΗΝ ΑΣΤΡΑΧΑΝΙΟΥ
ΚΤΡΟΥ ΝΙΚΗΦΟΡΟΥ,

Φιλαίμω δὲ δαπάνῃ ἐκδοθέντων,
Ὅπως ἰσρεὰν διανέμωνται τοῖς ἐν τοῖς
Ἑλληνομυσείοις Φοιτῶσιν,
ΥΠΟ ΤΩΝΤΙΜΙΩΤΑΤΩΝ & ΦΙΛΟΓΕΝΩΝ
ΑΥΤΑΔΕΛΦΩΝ

Ζ Ω Σ Ι Μ Α
ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ,
ΠΕΡΙΕΧΩΝ
ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ
καὶ
ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΝ.

ΕΝ ΜΟΣΧΑ

Εν τῷ τῆς Κοινότητος Τυπογραφῇ
Ῥηδηγέσῳ & Κλαυδίᾳ παρα
ἔτει 1798.

ΑΚΟΥΣΟΝ ΜΟΥ, ΤΕΚΝΟΝ, ΚΑΙ ΜΑΘ. ΕΠΙΣΤΗ-
ΜΗΝ, ΚΑΙ ΕΠΙ ΤΩΝ ΛΟΓΩΝ ΜΟΥ ΠΡΟΣΕΧΕ
ΤΗ, ΚΑΡΔΙΑ, ΣΟΥ. Σειρ. 16. 94



Съ дозволенія Московской Цензуры.

Εν τῇ
μικρῇ
Βιβλίῳ χειρῶν

ΤΟΙΣ ΚΑΤΑ ΠΑΣΑΝ ΤΗΝ
ΕΛΛΑΔΑ ΕΛΛΗΝΟΜΟΥΣΕΙΟΙΣ,
ΕΞΟΧΩΣ
ΤΩ, ΕΝ ΤΗ,
ΠΕΡΙΒΛΕΠΤΩ,
ΤΩΝ
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΜΗΤΡΟΠΟΛΕΙ,
ΚΛΕΙΝΟΙΣ, ΕΥΕΡΓΕΤΙΚΟΙΣ,
ΚΟΙΝΩΦΕΛΕΣΙΝ.

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



μιν, ὦ Πιερίδων ἢ Ἐλικωνι-
 άδων Μουσῶν δάματα· ὑμῖν
 γὰρ ἄς ἐμψύχοις καὶ λογι-
 κοῖς προσφωνεῖν συνωθεῖ ἡ-
 μᾶς

μας το τὸ γένος φίλτρον τιμὴν, ἐποι-
εῦχαριτίαν προσοφέλῃσιν ἅπαντες οἱ
Ἑλλήνων ἀπόγονοι. Ὑμεῖς γὰρ μετὰ
παντελῇ χεδὸν τὸ γένος κατακλυσμὸν
μόνον τῆς τῶν προγόνων ἡμῶν περιπύσ-
λέκτε, καὶ τῆς ἐγκυκλῆς καλῆς μα-
σεως, ἀλλὰ καὶ διαφορῶν ἐπισημῶν τὰ
πυρὰ θαυμασίως, καὶ, ὡς ἔτι εἶπω, ὑ-
φυῶς διεσώσατε. Ὑμεῖς ἐν κοινῇ ἀνα-
φοντες εὐεργέτας, εὐγνωμόνως τῆς τῶν
χαιρῶν Ἑλλήνων εὐκλείας ἀριδελότη-
προσαγορεύομεν ὑπομνήματα· καὶ φῶ-
τε τῆς ἀμαθείας σκότῃς ἀπαλλάττε-
καὶ σάλπιγγας τὸν τῆς παιδείας ἐρω-
ταῖς τῶν ὁμογενῶν καρδίαις προσεπε-
ρῆσας, καὶ πατέρας καλῶς προπαιδαγ-
σαντας τὰς καὶ μετὰ τὴν πτώσιν κατὰ
αφόρῃς καιρῶς ἐπὶ σοφίᾳ διαπρέψαντες,
τὸ Ἑλληνικὸν γένος κατευκλείσαντας,
ἀλλὰ καὶ πηγὰς τῶν ἀγαθῶν χορηγῶς ἀ-
των, εἶπερ δὴ σὺν τῇ σοφίᾳ πάντα
χονταί τ' ἀγαθὰ, ὡς ὁ τῶν ἀνθρώπων
πάντων σοφώτερος ἀπεφάνητο. Χάρις
Φιλογενέσιν ἐκείνοις, ὧν ὁ ζῆλος ὑπερβα-

καλυμμάτων ὅπως συνελθόντες. Λαβὲς τοῖς
καθ' ἡμέρας τοῖς ἐν ὑμῖν ἐμμελῶς τε καὶ ἐπι-
πόνως τὰ ζώηρά τῆς σοφίας προσχέασίτε
καὶ προσχέσι νόματα. Ὑμῶς γὰρ τὰς ἐκ τῆς
πτάμας συμφορὰς, ὅσον οἶοντε, ἐσήσατε,
τὸ τῇ ἀπαιδεύσει ἀκόλυστον ἄραντες ὄναιδος,
καὶ τὸν νῦν μὴ ἐάσαντες τοῖς ἀγενέσι καὶ ἀ-
νελευθέροις δι' ὅλα προσήκεσθαι, ἀλλὰ τὰ
γενναῖα καὶ σπουδαῖοις πρέποντα φρονεῖν πα-
ροτρύναντες· καὶ αὐτὴν δὲ τὴν τῶν θείων
Δογματῶν ἐρξότητα ἀκριβοῦς διατηρή-
σαντες καὶ πάντα ἀπαρ' ἀχάραντος, ὅπερ
δὴ πάντων τῶν καλῶν, ὡς τῶν αἰωνίων ἀγα-
θῶν πρόξενον, κάλλισόν τε τυγχάνει καὶ
ὑπέρτερον. Τὶ ἐν ὑμῖν ἀνταποδώσομεν, ὡς
πανωφελὴ παιδείας Γυμνασίη, περὶ πάν-
των ὧν ἡμῖν ἀνταπεδώκατε, καὶ ἀκριβὴς ἐτι
ἀνταποδοῖτε, εὖ οἶδαμεν δὲ, ὅτι καὶ ἀντα-
ποδώσετε; ὁ μὲν τιμῆς σέφανον, ὁ δὲ δόξης
ἐπαίνους· ὁ μὲν ἀργύριον, ὁ δὲ ἐπιστάσαν· ὁ
τοῦ ὑπεράσπῃσιν, ἐκείνος ἄλλα ἔδους προ-
σοσοι συστατικὰ βοηθήματα. ἡμεῖς δὲ πρὸς
τοῖς ἄλλοις καὶ τὴν δε τὴν βίβλον ὑμῖν προσ-
φέροντες ἀνατιθέμεθα, ἀμφοτέρω τοῖς ἐν ὑμῖν
τάς

τας μαθηματικάς εκπαιδευομένους επισή-
 λας διανεμηθησομένην. καὶ γὰρ τὸτο σκο-
 πῶν ὁ ταύτην συνταξάμενος, αἰτησαμέ-
 νοις ἡμῖν ἐδωρήσατο. Τῶν μαθηματικῶν
 σοιχείων περιεκτικὴ ἐστὶν ἡ βίβλος, καὶ τῶν
 ἀρχαρίων χειραγωγὸς πρὸς αὐτὴν τὴν τῆς
 μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἀκρόωσιν, λείαν
 αὐτοῖς τὴν ὁδὸν κατασκευάζουσα, καὶ τὴν
 τῶν πόνων προσλευάνουσα τραχύτητα τῇ
 τῷ πρακτικῷ μέρει αποβάδην καὶ τῷ θεω-
 ρητικῷ ἐπιμιξία, καὶ τὸν πόθον τῆς εἰς τὸν
 κολοφῶνα ἐπάρσεως περιθάλλουσα. Ἀλ-
 λὰ γὰρ ἐρεῖ τις, πῶς νῦν ἐν τῇ Ἑλλάδι οἱ τῶν
 Μαθηματικῶν μαθητὰὶ καὶ διδάσκαλοι;
 Ἐν Ἰωαννίνοις ἐξόχως, τῷ ἡμετέρῳ δῆθεν
 Φίλῳ ἐδάφη. ἐξόχως γὰρ ὁ αἰοίδημος ἐκείνος
 τῶν Μαθηματικῶν διδάσκαλος, ὁ Μεθό-
 διος, ὥσπερ ναῦς τις μεγαλέμπορος ἀπὸ
 τῆς δυτικῆς ἐπιστρέψας χώρας, τὰς Ἑυ-
 κλείδους καὶ Ἀρχιμήδους καὶ Ἀπολλωνίους καὶ
 Διοφάντους ἐπὶ τὴν Ἑλλάδα ἐπαναγαγὰν,
 εἰς τὴν τῶν Ἰωαννίνων Σχολὴν εἰσήγαγεν,
 ἄχρις αὐτῶν τῶν καθ' ἡμᾶς ἡμερῶν, ἐδὲ
 διδάσκαλοι μαθητεύοντες, ἐδὲ μαθητὰὶ
 τὰ

τὰ Μαθηματικά διδασκόμενοι ἐκείθεν ἐξέλειπον. τὸν μὲν γὰρ Μεθόδιον ὁ τέττα ἀεροατῆς, ὁ Μπαλάνος ὁ αἰμένητος διεδέξατο, πολλῶ πλείονα ἤπερ ἐκείνος τὴν ἐπίδοσιν ἐπιδέξας, ὡς τὰ ἑαυτῶ τύποις ἐκδοθέντα ἐπμαρτυρεῖσι μαθηματικὰ Φιλοπότηματα. τῶτον δὲ ὁ τέττα υἱόστε καὶ μαθητῆς ὁ ἐλλογιμώτατος Κοσμᾶς, ὁ ἄχρι τῆς σήμερον ἐν τῷ αὐτῷ Γυμνασίῳ, τῷ δὲ πρὸ πολλῶ ἐπὶ πολλῶ κρείττονι, ἐν πᾶσι μὲν τοῖς ἄλλοις καὶ τῇ τῆς καλῆς Βιβλιοθήκης κτήσει, προβάντι κατασάσει, χολαρχῶν πανευκλῶς, καὶ τὰς ἐκεί Φοιτῶντας τὰ Μαθηματικὰ ἐκπαιδεύων. Ἐὰν δὲ τὸν νῦν ἐπισήσης ἐπὶ τῷ πρὸς πάσας τὰς μαθήσεις ζέοντι πόθῳ, καὶ πὶ τῇ τῶν ὁμογενῶν νέων εὐφυΐᾳ, θᾶττον κατιδεῖν ἔχεις, ὅτι τῆς ἐν τῇ Ἑλλάδι σπανιότητος τῶν μαθηματικῶν παραδόσεων παρχίτιον καὶ ἡ ἑλλειψίς ἐστι καὶ τὸ δυσπόριζον τῶν μαθηματικῶν βιβλίων. Πάρεσιν ἔν ἀπὸ τῶ νῦν εὐθαρσῶς ἐλπίζεν, ὅτι τῶ ἐμποδῶν ἐκ μέσθ ἀρθέντος, ὁ πολυπλασιασμός καὶ ἡ αὐξησις τῶν τῷ ὄντι ἐπισημονικῶν προκύψει μαθησεων.

σεων. ἰδὲ γὰρ ἄνευ ἀργυρίᾳ καὶ τιμῆς οἱ ἐν
ταῖς τῶν Ἑλλήνων Σχολαῖς θαμίζοντες προ-
κειμένην ἐυρίσκουσιν τὴν δὲ τὴν ἐν αὐταῖς κα-
θιερωθῆσαν βίβλον.

Οἱ ἐκ τῆς ΖΩΣΙΜΑ ΑΥΤΑΔΕΛΦΟΙ, Α. Ν. Ζ. Μ.





ἄτην ἀράγε ὁ μὲν Πλάτων ταῖς
 τῆς Ἀκαδημίας θύραις ἐπεγράψα-
 το τὸ, Οὐδὲὶς ἀγεωμέτρητος
 εἰσίτω· Ὁ δὲ Ξενοκράτης, παντὶ
 ἀγεωμετρήτῳ, τῷ χάριν παιδείας αὐτῷ προσίοντι, Πο-
 ρεύς, εἶπε, λαβὰς γὰρ δι' ἔχεις Φιλοσοφί-
 ας; Οὐμὲν φαίην ἂν εἶναι, ἀλλὰ καὶ μάλα ἐκό-
 τωστε καὶ εὐστόχως, ὅπερ δὴ Φιλοσοφίαν νοήσας τὴν
 περὶ τῶν θανάτων καὶ ἐπιγείων σωμάτων θεωρίαντε καὶ ἐπι-
 στήμην. Σχήματος γὰρ σῶμα ἄμειρον ἔδεν· ἔδ' ἂν ἐνεσί-
 ποτε κινέμενον, μὴ γραμμὴν τινα καταγράψειν, ἢ σχεδιά-
 ζειν χῆμα. ἔνθεντοι πάνυ εὐφυῶς εἴρηται, τὰ στοιχεῖα τῆ
 τῆς φύσεως βιβλίῃ μὴ εἶναι Γράμματα, ἀλλὰ Τρί-
 γωνα, καὶ Παραλληλόγραμμα, καὶ Κύκλους καὶ Παρα-
 βολαῖς, καὶ Ὑπερβολαῖς, καὶ Ἐλλείψεϊς, καὶ Σπεί-
 ρας, καὶ Πυραμίδας, καὶ Κώνες, καὶ Κύβους, καὶ
 Κυλίνδρους, καὶ Σφαίρας, καὶ τὰ λοιπὰ. Πῶς ἔν' ἂν
 τις τὴν τῆς φύσεως ἀναγνώσκειν δύνηται βιβλίον, τα
 στοιχεῖα δι' ὧν γέγραπται μὴ εἰδώς; πῶς ὁ τῆς γνώ-
 σεως τῶν ιδιοτήτων τῶν χημάτων, τῶν ἐπ' αὐτῆς ἐπι-
 κειμένων τῆς τῶν σωμάτων ἐπιφανείας, καὶ τῶν πα-
 θῶν τῶν διὰ τῆς τέτων κινήσεως καταγραφόμενων γεωμ-
 μῶν, ὧν ἡ μόνη Γεωμετρία διδάσκαλος, μὴ μετέχων,

τὰ ἐν αὐτοῖς ἰδιώματα, καὶ παῖς, καὶ ἀποτελεσ-
ματα, καὶ τὰς πρὸς ἄλληλα χέσεις καὶ ἀποστάσεις
καὶ ἀναλογίας, καὶ ἀμειβαίας ἐνεργείαυτε καὶ ἀντε-
νεργείας κατανοήσεσιν; ἢ πῶς ἐλπίζετε ποτε αὐτὴν ἐπι-
γινῶναι τὴν τῶν σωμάτων φύσιν τε καὶ εἶσιν, ὃ μὴδὲ τὰ
ἐν αὐτοῖς ὁρώμενα καὶ ψηλαφώμενα γινώσκων; ἴσασι πάν-
τες οἱ περὶ τὴν τῆς φύσεως καὶ τέχνης θεωρίαν ἐνασχολ-
ούμενοι πόσον ἀναγκαῖα ἡ γεωμετρικὴ ἔξις πρὸς κα-
τάληψιν τῶν Ἀστρονομικῶν καὶ Μηχανικῶν καὶ Ἀρχιτε-
κτονικῶν καὶ Ὀπτικῶν καὶ Ὑδραυλικῶν καὶ Ναυτικῶν,
ἐμὴν ἀλλὰ καὶ τῶν περὶ τὸ πῦρ καὶ τὸν Ἀέρα καὶ τὸ
Ὑδωρ καὶ τὴν Γῆν, καὶ ἵνα συνελόντι εἶπω, πάντων
τῶν περὶ τὰ ὁρώμενα θεωρημάτων καὶ προβλημάτων
ὁμολογῆσάτε συμφώνως, ὅτι ταύτης ἀνευ μικρᾶς τι-
νας καὶ ὀλίγας, καὶ ταύτας ἐπιπολαίας καὶ ἀμφιβό-
λες, καὶ ὡς ἂν εἴποι τις χυδαίας, κτήσασθαι τις πε-
ρὶ τέτων δύναται γνώσεις, καὶ νύκτωρτε καὶ μεθ' ἡμέ-
ραν ἀγρύτες καταβάλλῃ πόνους. δι' αὐτῆς δὲ ῥαδίως
καὶ, ὅσον τῇ ἀνθρώπινῃ δέδοται φύσει, ἐντελῶς, καὶ
μόνον τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων εὐρεθέντα κατανοῆσαι ἔχο-
μεν, ἀλλὰ καὶ ἀφ' ἑαυτῶν εὐρεῖν τὰ ἄχρι τῆ νῦν
ἀδῆλα καὶ ζητούμενα.

Γεωμετρίαν δὲ λέγοντες, καὶ μόνον τὰ τῆ Ἐυκλείδου
νοῶμεν σοικεῖα ταῦτα γὰρ ἢ κλεῖς μόνον ἐστὶ τῆς τῶν
ὑψηλοτέρων μαθηματικῶν ἐπιστημῶν θύρας· ἀλλὰ καὶ
Ἀριθμητικὴν, καὶ Τριγωνομετρίαν, καὶ Ἀρχιμήδεια θεωρή-
ματα, καὶ Κῶνις τομάς, καὶ Ἀνάλυσιν, τὴν καὶ Ἀλ-
γεβραν καλεσμένην. ἐν τέτοις γὰρ ὅσον ἂν τις μᾶλλον
ἐσθλὴν καὶ, τοσούτον εὐχερῶς ἐπὶ τὴν κατανόησιν καὶ
εὐρεσιν τῶν τῆς φύσεως ἰδιωμάτων εὐδοκίμῃ καὶ προά-
γεται. τῇ δὲ διὰ τέτων ἀκριβῶς ἐξασκηθέντος ὁ νῦν,
καὶ μόνον τῶν περὶ τὴν Φυσιολογίαν, ἀλλὰ καὶ τῶν πε-
ρὶ

ρι παντος αλλε μαθηματος νοημάτων, ἀντικλητικὸς
 καθίσταται καὶ διακριτικὸς καὶ πάνυ ἐπίβολος. το-
 σῶτον γὰρ τῇ τῶν μαθηματικῶν ἀποδείξεων ἰσχὺς τε
 καὶ ἀκρίβεια ἢ τέτε διακριτικὴ ἐπιβρώννυται καὶ ὀξύ-
 νεται δύναμις, ὥστε ἐπικρίνειν δύνασθαι τὰ περὶ πάσης
 ὕλης ἢ ὑποθέσεως, ἥς γνωσθῇ αὐτῶν αἱ μόναι ἀναγ-
 καῖαι περιπτώσεις, βέλτιον καὶ αὐτῶν τῶν κατ' αὐτὸ
 πολυχρονίῳ μὲν ἀσκήσει ἐν αὐτῇ γυμναζόντων, παι-
 δείας ὅμως γεωμετρικῆς μὴ μεταχόντων. καὶ τῆτο δὴ
 κέρδος ἄλλο τῷ πρώτῳ ἔχ' ἦττον, μᾶλλον δὲ καὶ ὑπέρ-
 τερον, ἅτε δὴ γενικώτερον, ἢ Γεωμετρία προσεπιδα-
 ψιλέυεται.

Καὶ τὰ μὲν περὶ τῆς εὐρέσεως, καὶ αὐξήσεως,
 καὶ χρονολογικῆς προόδου, καὶ τῶν εὐρετῶν τῆς Γεω-
 μετρίας, καὶ τῶν περὶ αὐτῆς συγγραφάντων ἡμεῖς
 καταλιμπάνομεν, οἱ δὲ ταῦτα εἰδέναι ἐφίεμενοι, τῆς
 περὶ τέτων διαλαβόντας (*) μετίτωσαν. τῆτο δὲ μόνον
 ἐ παρασιωπητέον, ἀμέλειται τὸ, πάντῃ ἀδύηλον εἶναι
 τὸ κοινῶς φερόμενον, ἔσταν τὸ τῆς Ἀραβας πρώτης
 τῆς Ἀλγεβρας εὐρεταίς γενέσθαι. καὶ γὰρ τινες τὸν
 τῷ Μωσέως υἱὸν Μωάμεθ καὶ ἕτερον δὲ Μωάμεθ τὸν
 Βαγδαδῖνον καὶ τὸν Γήβερν πατέρας αὐτῆς ἔφασαν,
 ἀναπόδεικτον ὅμως τῆτο καὶ ἀβέβαιον, καὶ ἐδὲ καὶ
 τῆτο δῆλον, τὸ πότερον τῇ Ἀλγεβρᾷ ἔτοι, ἢ τῇ
 Ἀστρονομίᾳ τὰς ἰδίας καθιέρωσαν μελέτας. ὅπως δ' αὖν
 εἴη τῆτο, περὶανὸν εἴοικε, τέτῳ τὸ αὐτὸ πεποιηκέναι,
 παλαιῶν μαθηματικῶν ἀνδρῶν συγγραμμάσιν ὁμίλη-
 κό-

(*) Ὅρα τὸν Πρόλογ. τῆς τῷ Τακίτῳ Γεωμετρ. τῆς ἐν Νεαπόλ.
 ἔτ. 1744 ἐκδοθ. ὁμοίως καὶ τὸν τῷ Ἀλγεβρ. Βικεντίῳ τῷ
 Ῥικάρτῳ, τῆς ἐν ἔτ. 1765. ἐν Βονων. ἐκδοθ. Ἐξόχως δὲ τῷ
 Ἐγκυκλιωπαίδ. Λεξ. πρὸς τὴν Γεωμετρ.

μητική προαγορεύεται, ἰχνη τινὰ ὁρῶνται ἐν τῇ τῷ
 Διοφάντῳ βιβλῳ. ἀμφιβάλλει δὲ ἐδῆς περὶ τῆς ὅτι πολ-
 λαὶ τῶν ἀρχαίων βιβλίων μυριάδες ἐν τῇ κατὰ τὴν
 Ἀλεξανδρείαν τῶν Πτολεμαίων βιβλιοθήκῃ, σκαιότητι
 ἢ ἀλογίᾳ τῶν ταύτης κατακρατησάντων βαρβάρων
 πορὶ ἐπίτηδες κατηνάλυθσαν. ἐκ τέτων ὅμως ἐκ ἀν-
 τισ ἐυλόγως ἐπαγαγὼν ἔχη, τὲς ἀρχαῖες Ἑλληνικαὶ
 εὐρεταὶ εἶναι πάντων τῶν ἐν ταῖς κατ' ἡμᾶς ἡμέραις
 ἀπαινεσκειμένων ἐν ταῖς ὑπὸ τῶν νεωτέρων συγγρα-
 φαῖς τῆς Ἀναλύσεως πραγματείαις. τὶτο δὲ μόνον
 εἰκότως συναίγεται, τὸ τὲς νεωτέρες δηλονότι ἐκ τῶν
 διασωθέντων συγγραμμάτων τῶν παλαιότερων τὰς ἀφορ-
 μὰς λαβόντας, καὶ ὑπ' αὐτῶν χειραγωγηθέντας, πολ-
 λαὶ μὲν εὐρύν τὰ ταῖς ἀρχαῖς ἀνήκοντα μαθηματικαῖς
 ἐπιτήκαις πλεῖστα δὲ, ἢ βέλτιον φάναί, σχεδὸν πάντα
 τὰ τῇ Ἀναλύσει, συντόμῳ αὐτὰ καὶ εὐλήπτῳ τάξει
 ἐκφράσαντας ἢ μεθόδῳ.

Ἄλλα γὰρ καὶ τὰ περὶ τῆςδε τῆς βιβλῳ χρεῶν
 δῆλα ποιήσασθαι. τί γὰρ βέλεται αὕτη, ἐρεῖ τις, ἐνώ-
 πιον τῶν Ἑλλήνων μετὰ τὸν Εὐκλείδην καὶ τὸν Εὐδόξον
 καὶ τὸν Γερμῖνον καὶ τὸν Μαρίνον καὶ τὸν Ἀρχιμήδην
 καὶ τὸν Ἀπολλώνιον καὶ τὸν Πτολεμαῖον καὶ τὸν Πάππον καὶ
 τὸν Διοφάντον, καὶ τὴν λοιπὴν τῶν μαθηματικῶν Ἑλλή-
 νων χορείαν; Τῶν συγγραμμάτων αὐτῶν τὰ μὲν ἐξέ-
 λαπτε, τὰ δὲ μάλιστα δυσεύρετα καὶ δυσπόριζα. καὶν δὲ
 ῥαδίᾳ ὑπῆρχεν ἡ τέτων κτήσις, τοσούτον ὅμως ἐπίπνοος,
 διὰ τὸ μακροσκελὲς τῶν ἐν αὐτοῖς ἀποδείξεων, ἡ τέτων
 κατάληψις, ὥστε καὶ χρόνος δαὶν πολλὸς καὶ πόνος μα-
 κρὸς πρὸς τὴν ἐγκρατεῖς τέτων γενέσθαι. τὴναντίον δ' ἐνε-

εἰν ἐν τοῖς νεωτέροις Συντάγμασιν, ἀμέλειται τὸ σύν-
τομον ἅμα δὲ καὶ τὸ σαφές καὶ ἔυληπτον. πρὸς τέ-
τοις τὰ τῶν νεωτέρων ἔ μόνον τὰ ἐκπαλαι, ἀλλὰ καὶ
τὰ ἀρτίως εὐρεθέντα περιέχουσιν, ἐξ ὧς τὰ περὶ τῆς
ἀναλύσεως, ὧν τὰ σωζόμενα τῶν παλαιῶν βιβλίων
ἄμειρα.

Ταῦτα ἔν ἀνέπεισαν ἡμᾶς, ὅτε τὰ Μηθηματι-
κὰ τοῖς ἐν τῷ τότε τῆς πατρίδος ἡμῶν προσφορῶσι
Μισσέω παρεδίδωμεν, συλλογὴν τινὰ μαθηματικῶν συγ-
κροτήσασθαι σοιχείων ἔκτε τῶν ἀρχαίων καὶ τῶν μετ' αὐ-
τὰ συγγραμμάτων συνερανισθῶσαν. Ἐν τῇ σοιχειῶδες
δὲ Γεωμετρίᾳ καὶ ἐν ταῖς τῷ Κώνε τομαῖς τῇ τῷ Ἐυ-
κλείδῃ καὶ Ἀπολλωνίῳ τάξει (ἐξ ὧν τὰ ταῖς λοιπαῖς
ἐπισήμας ἀναγκαῖα συνελέξαμεν) ἀκολοθήσαντες, τι-
νάς μὲν τῶν ἐν αὐτοῖς ἀποδείξεων συντομωτέρας, ἐνι-
αχῶ δὲ καὶ ἄλλας ἀντ' ἐκείνων, ἦτοι ἰδίᾳ μελέτῃ εὐ-
ρεθείσας, ἢ ἐκ τῶν ἤδη ἐκδοθέντων νεωτέρων βιβλίων
ἐκληφθείσας, ἐπεξεργασάμεθα. ἐν δὲ ταῖς λοιπαῖς τῶν
Μαθηματικῶν πραγματείαις πάντα συνετάξαμεν ἦτοι
ἐκ τῆς τῶν περιφήμων Ἰταλῶν ἡμῶν διδασκάλων Φω-
νῆς παραλαβόντες, ἢ ἐκ τῶν νεωτέρων συναγαγόντες
βιβλίων.

Ἐδόκει δὲ τότε τὸ ἔτω συναπαρτιθὲν σοιχειῶδες
τῶν μαθηματικῶν σύστημα τερπνὸν τοῖς μαθητιῶσι καὶ
ἔυληπτον, ἔτι δὲ καὶ τασθὲν Φωτισικόν, μάλιστα τοῖς
εὐφροέτεροις, ὥς τε τὴν τέτῃ ἐγκρατεῖς γεγονότας, ἐπί-
τε τὰς πλατύτερον περὶ τῶν μαθηματικῶν διαλαμ-
βανέσας πραγματείας, καὶ ἐπὶ τὰς τέτων συνάεας
εὐχερῶς προάγεσθαι ἐπισήμας. διὸ ἔκτοτε ἄχρι τῷ
νῦν τινὲς τῶν τέτο εἰδόντων, ἔμην ἀλλὰ καὶ ἐνιοι τῶν
τὰ περὶ τέτῃ ἀκυσάντων, ἐκ ἐπαύσαντο, τύποις ἐκ-
δέναι αὐτὸ προτρέποντες, ὡς ἀναγκαῖον τῇ ἐν τοῖς
ἑλλή-

ἑλληνικοῖς Ἰνστυτασιζοῖς μεσοτροφομένη νεότητι. ἀλλ' ἡμεῖς οἱ μηδὲν τοῖς ἡμετέροις θάρρειν εἰσθότες, ἀνευδόμεθα, ταῖς προτροπαῖς μὴ καμπτόμενοι· μάλις αἰετὸς ὁ σοφὸς καὶ περικλεὴς Ἀρχιεπίσκοπος ὁ Ἐυγένιος τὸ μαθηματικὸν αὐτῷ ἐκδὲς σύνταγμα, τὴν ἀνάγκην ἔλυσεν, τὰς ὁμογενεῖς καὶ διὰ τὴν, καθάπερ δὴ καὶ δι' ἄλλων σοφῶν αὐτῷ εὐεργετήσας φιλοπονημάτων ἀλλ' εἴξαμεν τελευταῖον. εὐδὲ γὰρ ἀντιζηῖναι εὐδυνήθημεν τῇ ἰσχύϊ τῇ ζήλῳ, ὃν ὑπὲρ τῆς ἑδαξάν οἱ ἐκ τῶν ζωσιμῶν τιμιώτατοι καὶ φιλογενεῖς αὐτάδελφοι, δωρεὰν τὰς τυπωθησομένας βίβλους διανέμειν αἰρεθέντες τοῖς ἐν τοῖς Ἑλληνομοσείοις τὰ μαθηματικὰ διδασκομένοις. ἐπευχόμεθα ἔν νῦν, ὅπως αἰετὶ καὶ διὰ τῆςδε τῆς βίβλου οἱ Ἑλλήνων παῖδες τὸν νῦν καταυγαδέντες, ἄξιοι τῶν τῶν προγόνων αὐτῶν ἀναφανῶσι κλέες.

• A. N.





ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Σ

ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Σημείον ἐστὶν ἕ μέρος ἑδέν.

Β'. Γραμμὴ ἐστὶ μῆκος, ἕ πλάτος καὶ βάθος ἑδέν.
Γραμμῆς δὲ Πέρατα σημεία.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Ἐντεῦθεν δῆλον, ὅτι ἡ γραμμὴ εἰς γραμμαῖς μόνον δια-
ρεῖται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὡςπερ ἴχνος, ἡ ῥοήν τινα σημείε φερομένη νοητέον τὴν
γραμμὴν. καὶ εἰάν μὲν τὸ φερόμενον σημείον τὴν ἐπ' εὐ-
θείας φορὰν διατηρῇ, ἡ ἐξ αὐτῆ γραμμὴ εὐθεΐα-
ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΒ' (πίν. α. γ. 1.) Ἐάν δὲ συνεχῶς τὴν φορὰν
αὐτῆ μεταβάλλῃ, Καμπύλη, ὡς ἡ ΓΔ. (γ. 2.)
Διάφορα δὲ τὰ τῆς καμπυλότητος εἶδη, κατὰ τὰς
διαφόρους τῆ φερομένης σημείε τροπάς.

Γ. Εὐθεΐα δὲ γραμμὴ ἐστὶ κατὰ μὲν Ἀρχιμήδην,
ἡ τῶν ἔχουσιν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐλαχίστη κατὰ δὲ
Πλάτωνα, ἥς τὰ ἄκρα ἐπιπροδῇ πᾶσι τοῖς μέ-
σοις κατὰ δὲ Εὐκλείδην, ἥτις ἐξίσῃ τοῖς ἐφ' ἑαυ-
τῆς σημείοις κῆται.

Δ

Δ'.

Ε. Κορυφή μὲν γωνίας τὸ τῆς συμπτώσεως τῶν γραμμῶν σημεῖον, οἷον τὸ Α' (χ. 3, 4, 5.) Πλευρὰ δὲ αἱ τὴν γωνίαν περιέχουσαι γραμμαὶ, οἷον αἱ ΒΑ, ΓΑ, ἢ ΔΑ, ΓΑ, ἢ ΕΑ, ΓΑ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐμφαίνομεν τὴν γωνίαν, ἢ διὰ τῆ ἐν τῇ κορυφῇ αὐτῆς στοιχείου, λέγοντες ἡ γωνία Α, ἢ διὰ τριῶν τῆς ἐν τῇ κορυφῇ καὶ τῶν ἐν ταῖς πλευραῖς, οἷον ἡ γωνία ΒΑΓ, ἢ ὑπὸ ΒΑΓ, τὸ ἐν τῇ κορυφῇ στοιχεῖον ἐν τῷ μέσῳ γράφοντες καὶ προφέροντες.

Ζ'. Τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εὐθύγραμμος μὲν, ἡ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οἷον ἡ ΒΑΓ· (χ. 3.) Καμπυλόγραμμος δὲ, ἡ ὑπὸ καμπύλων, οἷον ἡ ΔΑΓ· (χ. 4.) Μικτόγραμμος δὲ, ἡ ὑπὸ εὐθείας καὶ καμπύλης, οἷον ἡ ΕΑΓ· (χ. 5.) Τῶν δὲ εὐθυγράμμων γωνιῶν, ἡ μὲν, ὀρθή· ἡ δὲ, Ἀμβλεία· ἡ δὲ, ὀξεῖα.

Ζ'. Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας σταθῇ, οἷον ἡ ΓΔ ἐπὶ τῆς ΑΒ, (χ. 6.) τὰς ἐφεξῆς γωνίας ΓΔΒ, ΓΔΑ, ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ἴσων γωνιῶν· ἡ δὲ ἐφeskυῖα εὐθεῖα ΓΔ, Κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέθηκε, τὴν ΑΒ. Ἀμβλεία δὲ γωνία ἡ μείζων ὀρθῆς, οἷον ἡ ΔΒΓ· (χ. 7.) ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς, οἷον ἡ ΔΒΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ἐκ τῶν εἰρημένων κατιδεῖν πάνυ ῥᾶδιον, ὡς ἐκ ἐκ τῆ τῶν πλευρῶν μεγέθους τὸ τῆς γωνίας γίνεται μέγε-

γεθος. καὶ γὰρ ἐπ' ἀπειρον αὐταὶ ἐκβλήσονται, ἔδε-
μειαν ἢ γωνία λαμβάνει ἀλλοίωσιν.

Η'. Ἐυθείαι παράλληλοι εἰσιν αἱ ἴσοις ἀπ' ἀλλή-
λων ἀφιστάμεναι τοῖς ἀποσήμασιν, οἷον αἱ ΑΒ, ΓΔ.
(χ. 5.) Ἀποσήματα δὲ, αἱ ἀπὸ τῶν σημείων
τῆς ἐτέρας ἐπὶ τὴν ἐτέραν ἀγόμεναι κάθετοι, οἷον
αἱ ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἐντεῦθεν δῆλον, ὅτι αἱ παράλληλοι ἐπὶ μηδέτερα
τὰ μέρη συμπίπτουσι, καὶ ἐπ' ἀπειρον ἐκβάλλονται.

Θ'. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν ἡ ὑπὸ ευθειῶν περα-
τεμένη. ἣν δὲ καὶ ἐπίπεδον καλεῖν εἰώθασιν. χ. 9.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.

Γίνεται ἡ ἐπιφάνεια, ευθείας σὺν τοῖς ἑαυτοῖς περα-
σιν ἐπὶ τὰ ἄνω, ἢ τὰ κάτω, ἢ τὰ δεξιὰ, ἢ τὰ ἀριστερὰ
φερομένης. διὸ δῆλον, ὡς μῆκος μὲν καὶ πλάτος, εἰ μὴν
δὲ καὶ βάθος ἔχει ἡ ἐπιφάνεια.

Ι'. Ἐθύγραμμα σχήματά εἰσι τὰ ὑπὸ ευθειῶν περι-
εχόμενα, πλειόνων ἢ δύο. Τρίπλευρα μὲν, τὰ
ὑπὸ τριῶν. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.
Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσά-
ρων. χ. 10, 11, καὶ 12.

ΙΑ'. Τῶν τριπλεύρων σχημάτων, Ἰσόπλευρον μὲν
τρίγωνόν ἐστι τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς. Ἰσο-
σκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευ-
ράς. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσας ἔχον.

τριγώνον ἐστὶ τὸ ἔχον ὀρθήν γωνίαν· Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν· Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς τρεῖς γωνίας ὀξείας ἔχον. κ. 13, 14, 15, 16, 17 καὶ 18.

ΙΒ'. Τῶν τετραπλεύρων χημάτων, Τετράγωνον μέν-
 ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ὀρθογώνιον· Ἐτερό-
 μηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, ἐκ ἰσόπλευρον δέ·
 Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, ἐκ ὀρθογώνιον δέ·
 Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε
 καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ ἔτε ἰσόπλευρόν-
 ἐστιν, ἔτε ὀρθογώνιον· Τὰ δὲ παραὰ ταῦτα τετράπλευρα,
 Τραπεζία καλεῖνται. κ. 19, 20, 21, 22, καὶ 23.

ΙΓ'. Κύκλος ἐστὶ χῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς καμπύ-
 λης περιεχόμενον, πρὸς ἣν, ἀφ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς
 τῆς χήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐ-
 θεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Γίνεται δὲ ὁ κύκλος εὐθείας τινὸς, οἷον τῆς ΚΑ,
 (κ. 24.) περιεγεχθείσης ἕως ὅτε ἀποκατασταθῇ ἕθεν
 ἤρξατο φέρεσθαι, ἐνὸς τῶν περὶ τῶν αὐτῆς, οἷον τῆς Κ,
 ἀκινήτου μένοντος. καὶ τὸ μὲν Κ, Κέντρον τῆς κύκλου
 καλεῖται· ἡ δὲ ΑΒΓΔ καμπύλη, ἡ ὑπὸ τῆς σημείας Α
 γινόμενη, Περιφέρεια· ἡ δὲ ΚΑ, ἡ περιεγεχθεῖσα,
 Ἡμιδιάμετρος, ὡσαύτως καὶ πᾶσα εὐθεῖα, ἡ
 ἀπὸ τῆς κέντρος πρὸς τὴν περιφέρειαν προσπίπτουσα·
 ἡ δὲ διὰ τῆς κέντρος ἡγμένη, καὶ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη
 ὑπὸ

ὡς ἡ ΑΙ.
Διάμετρος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

Πᾶσαι μὲν αἱ ἡμιδιάμετροι ἴσαι ἀλλήλαις· ἐκάστη γὰρ αὐτῶν αὐτὴ ἡ περιεγεχθεῖσα ἐστὶ τῆς δὲ ἡμιδιαμέτρου ἡ διάμετρος διπλασία· ἥτις δὴ καὶ δίχα τὸν κύκλον τέμνει.

ΙΔ'. Κύκλοι παραάλληλοί εἰσιν αἱ τὸ αὐτὸ μὲν ἔχοντες κέντρον, (χ. 25.) ἢ μὴν καὶ τὰς διαμέτρους ἴσας.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

Α'. Ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν· ὃ δὴ καὶ εὐθεῖαν ἐπιζευξάμιν λέγεται.

Β'. Πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

Γ. Παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφειν.

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

Η ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

Α'. Τὰ τῶ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα.

Β'. Ἐὰν ἴσοις ἴσα προσεθῇ, τὰ ὅλα εἰσὶν ἴσα.

Γ'. Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά εἰσιν ἴσα.

Δ'. Ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προσεθῇ, τὰ ὅλα εἰσὶν ἀνίστα.

Ε'. Τὰ τῶ αὐτῷ, ἢ τῶν ἴσων διπλασία, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

Ζ'. Τὰ τῶ αὐτῷ, ἢ τῶν ἴσων ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

Ζ'. Τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

Η'. Τὸ ὅλον τῶ μέρους μείζον ἐστὶ.

Θ'. Πάντα τὰ μέρη ἴσα τῶ ὅλῳ εἰσὶ.

Ι'. Δύω εὐθεῖαι χωρὶον ἢ περιέχουσι.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ευθείας πεπερασμένης,
τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη ευθεῖα ἡ ΑΒ. πίν. β.
χ. 26.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γε-
γράφθω ὁ ΒΓΔ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστή-
ματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ. (α) καὶ
ἀπὸ τῶ Γ σημείῳ, καθ' ὃ τέμνεσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι,
ἐπὶ τὰ Α καὶ Β σημεία ἐπεζεύχθωσαν ευθεῖαι αἱ ΓΑ,
ΓΒ. (β) λέγω δὴ, ὅτι τὸ ΑΓΒ τρίγωνον τὸ ζητούμενόν ἐστι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΒΓ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΑ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΓ ἴση τῇ
ΒΑ. (γ) ἡ ΒΓ ἄρα ἴση τῇ ΑΓ. (δ) ἰσόπλευρον ἄρα τὸ
ΑΓΒ τρίγωνον, καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης ΑΒ συνέσταται. ὃ
ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ ευ-
θείᾳ ἴσω ευθεῖαν θέσθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον, τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα ευ-
θεῖα, ἡ ΒΓ. χ. 27.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἀπὸ τῶ Α σημείῳ ἐπὶ τὸ Β ἡ ΑΒ. (ε)
καὶ συνεχάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΔΒ.
(ς) καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΑ κατὰ τὸ συνεχές.
(η) καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκ-
λος

(α) Κατὰ τὸ γ. Αἵτ. (β) Κατὰ τὸ α. Αἵτ. (γ) Κατὰ τὸ δ.
Πόρισ. (δ) Κατὰ τὸ α. Αἵτ. (ε) Κατὰ τὸ α. Αἵτ. (ς) Κα-
τὰ τὴν α. πρίτ. (η) Κατὰ τὸ β. Αἵτ.

λος γεγραφθῶ ο ΙΗΘ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Δ,
διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γεγραφθῶ ὁ ΗΚΛ. (θ)
λέγω δὴ, ὅτι ἡ ΑΛ ἴση ἐστὶ τῇ δοθείσῃ ΒΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΔΛ ἴση ἐστὶ τῇ ΔΗ. (ι) ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΑ ἴση τῇ
ΔΒ. (κ) ἄρα ἡ ΑΛ ἴση τῇ ΒΗ. (λ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΓ
ἴση τῇ ΒΗ. (μ) ἄρα ἡ ΑΛ ἴση τῇ ΒΓ. (ν) πρὸς τῷ
δοθέντι ἄρα σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ
ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Δύο δοθεῖσων εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς
μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσω εὐθεῖαν ἀφελῆν.

Ἔσωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ,
ὧν μείζων ἡ ΑΒ. ρ. 28.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κεῖσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΓΔ. (ξ)
καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος
γεγραφθῶ ὁ ΔΕΖ. (ο) λέγω δὴ ὅτι ἡ ΑΕ ἴση τῇ ΓΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΕ ἴση τῇ ΑΔ. (π) ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΔ ἴση τῇ
ΑΔ. (ρ) ἄρα ἡ ΑΕ ἴση τῇ ΓΔ. (σ) ἀφήρηται ἄρα
ἀπὸ τῆς μείζονος ΑΒ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἴση τῇ ἐλάσσονι ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς
δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἐκατέραν ἐκα-

Α 4

τέ-

-
- (θ) Κατὰ τὸ γ. αἶτ. (ι) Κατὰ τὸ δ. πάρ. (κ) Κατὰ τὴν α.
πρότ. (λ) Κατὰ τὸ γ. ἀξ. (μ) Κατὰ τὸ ἀρ. πρότ. (ν) Κα-
τὰ τὸ α. ἀξ. (ξ) Κατὰ τὴν β. πρότ. (ο) Κατὰ τὸ γ. αἶτ.
(π) Κατὰ τὸ δ. πάρ. (ρ) Ἐκ τῆς κατ. (σ) Κατὰ τὸ α. ἀξ.

παράγωνται ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἐσόν-
ται ἑκατέρω ἑκατέρω, ὅφ' αἷ ἴσαι
πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα (χ. 29.) τὰ ABΓ, ΔΕΖ ἔχοντα
τὴν μὲν AB ἴσην τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ γωνίαν
τὴν ΒΑΓ ἴσην τῇ ΕΔΖ. λέγω ὅτι καὶ βάσεις ἢ ΒΓ βάσει
τῇ ΕΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώ-
νῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἑκατέ-
ρω ἑκατέρω, ὅφ' αἷ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἢ
μὲν ΑΒΓ τῇ ΔΕΖ, ἢ δὲ ΑΓΒ τῇ ΔΖΕ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐφημερόσω τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ τὸ ΔΕΖ, καὶ τε-
θείω τὸ μὲν Α σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ, ἢ δὲ ΑΒ εὐθεῖαν
ἐπὶ τὴν ΔΕ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐφαρμόσει ἄρα καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε. (τ)
ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ
ἢ ΑΓ ἐπὶ τὴν ΔΖ. (υ) καὶ τὸ Γ ἄρα σημεῖον ἐφαρ-
μόσει ἐπὶ τὸ Ζ. (φ) ἀλλαμὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφήρ-
μοσαι, καὶ ἢ βάσις ἄρα ΒΓ, ἐπὶ τὴν βάσιν ΕΖ ἐφαρ-
μόσει, (χ) καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. (ψ) καὶ ὅλον τὸ τρί-
γωνον ΑΒΓ ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐ-
τῷ

(τ) ἴση γάρ ἢ ΑΒ τῇ ΔΕ. (υ) ἴση γάρ ἢ Α γωνία τῇ Δ.
(φ) ἴση γάρ ἢ ΑΓ τῇ ΔΖ. (χ) ἄλλως γάρ δύο εὐθεῖαι χω-
ρίον περιέξουσιν. ἕπερ ἄτοπον, κατὰ τὸ ι. Δξ. (ψ) Κατὰ τὸ ζ', αξ.

τῷ ἑσσι. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ ταῖς λοιπάς γωνίας ἐφαρμόσασσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ΑΒΓ τῇ ΔΕΖ, ἡ δὲ ΑΓΒ τῇ ΔΖΕ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ προσεκβεβληθεῖσιν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τῷ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ, καὶ προσεκβεβλημένας τὰς πλευράς ΑΒ, ΑΓ ἐπὶ τὰ Δ καὶ Ε σημεῖα. λέγω Α΄. ὅτι αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΓΒ. Β΄. ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ τὴν βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις, ἡ ΔΒΓ τῇ ΕΓΒ. χ. 30.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἐπεξέυχθω ἡ ΖΓ. (ω) καὶ εἰλήφθω ἡ ΑΗ ἴση τῇ ΑΖ. (α) καὶ ἐπεξέυχθω ἡ ΗΒ. (β)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΖΓΑ, ΗΒΑ, ἡ μὲν ΑΓ ἴση τῇ ΑΒ, (γ) ἡ δὲ ΑΖ τῇ ΑΗ, (δ) ἡ δὲ Α γωνία κοινή. καὶ βάσεις ἄρα ἡ ΖΓ βάσεις τῇ ΗΒ ἴση, καὶ ἡ γωνία ΖΓΑ τῇ ΗΒΑ, καὶ ἡ ΓΖΑ τῇ ΒΗΑ. (ε) πάλιν ἐν τοῖς τριγώνοις ΖΒΓ, ΗΓΒ, ἡ μὲν ΖΓ ἴση τῇ ΗΒ, (ς) ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΗΓ, (ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ΑΖ ἴση τῇ ΑΗ, (η) ἡ δὲ ΑΒ ἴση τῇ ΑΓ. (θ) καὶ λοιπὴ ἄρα

Α 5

ἡ

(ω) Κατὰ τὸ α. Αἱτ. (α) Κατὰ τὴν β. πρότ. (β) Κατὰ τὸ α. Αἱτ. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ε) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (ς) Ἐκ τῆς διάξ. (η) Ἐκ τῆς κατασκ. (θ) Ἐξ ὑποθ.

ἡ ZB ἴση τῇ HG. (ι) καὶ γωνία ἡ BZΓ τῇ BHΓ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ZGB ἴση τῇ HBG. (κ) δέδεικται δὲ ὅτι ZGA ἴση τῇ HBA. ἐὰν ἄρα ἀπὸ μὲν τῆς ZGA ἀφαιρεθῇ ἡ ZGB, ἀπὸ δὲ τῆς HBA ἡ HBG, ἔσεται ἡ λοιπὴ BGA ἴση τῇ λοιπῇ ΓBA. ἴσαι ἄρα αἱ πρὸς τῇ βάσει τῷ BAG τρίγωνε γωνίαι, ἡ ABΓ τῇ AGB.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ZBG, HGB, ἡ μὲν ZΓ ἴση τῇ HB, ἡ δὲ ZB τῇ HG, καὶ γωνία ἡ BZΓ τῇ BHΓ, ὡς ἔρηται. καὶ γωνία ἄρα ἡ ZBG ἕτερον ΔBG ἴση τῇ HGB, ἦτοι τῇ EGB. καὶ αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν ἄρα τῷ ἰσοσκελεῶς τριγώνου γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν. ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Τὸ ἄρα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἰσογώνιον ἐστίν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Ἐὰν τρίγωνον αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποταίνεσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ABΓ ἴσην ἔχον τὴν ABΓ γωνίαν τῇ AGB. λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ AB πλευρᾷ τῇ AG ἐστὶν ἴση. εἰ γάρ μὴ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ AB. κ. 31.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Εἰλήφθω ἡ BD ἴση τῇ AG (λ) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ. (μ)

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ABΓ, ΔBG ἡ μὲν AG ἴση τῇ ΔB, (ν) ἡ δὲ BG κοινὴ, ἡ δὲ AGB γωνία ἴση τῇ ΔBG. (ξ)
ἄρα

(ι) Κατὰ τὸ γ. Ἀξ. (κ) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (λ) Κατὰ τὴν γ' πρότ. (μ) Κατὰ τὸ κ. Αἰτ. (ν) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ξ) Ἐξ ὑποθ.

ἀρα καὶ τὸ τρίγωνον $ABΓ$ ἴσον τῷ $ΔΒΓ$. (ο) τὸ ὅλον
τῷ μέρει, ὅπερ ἄτοπον. Ἐκ ἀρα αὐτοῦ ἡ AB τῇ $ΑΓ$.
ἴση ἀρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Τὸ ἀρα ἰσογώνιον τρίγωνον, ἰσόπλευρόν ἐστι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Μόνη τῇ τῆς ὀγδόης προτάσεως δείξει συν-
ταίνει ἥτις γε δὴ ταύτης ἀνευ δαχθήσεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς
δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέ-
ρα, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσω,
καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἔξῃ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων
πλευρῶν ὑποτινομένας. καὶ τὸ τρίγωνον τῷ
τρίγωνῳ ἴσον ἔσται.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΕΖ$ ἔχοντα τὴν μὲν
 AB ἴσην τῇ $ΔΕ$, τὴν δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΔΖ$, καὶ τὴν $ΒΓ$
βάσιν τῇ $ΕΖ$ βάσει. λέγω ὅτι καὶ ἡ $ΒΑΓ$ ἴση ἐστὶ τῇ
 $ΕΔΖ$, καὶ ἡ $ΑΓΒ$ τῇ $ΔΖΕ$, καὶ ἡ $ΑΒΓ$ τῇ $ΔΕΖ$, καὶ
τὸ τρίγωνον $ABΓ$ τῷ τρίγωνῳ $ΔΕΖ$. χ . 32.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐφημέσω ἡ $ΕΖ$ ἐπὶ τὴν $ΒΓ$. καὶ πιπτέτω τὸ ση-
μεῖον $Δ$ ἐπὶ τὸ $Η$ ἑταῶς, ὥστε τὸ $ΗΒΓ$ τρίγωνον αὐτὸ
ᾗναί τὸ $ΔΕΖ$. καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΑΗ$. (π)

ΔΕΙ-

(ο) Κατὰ αὐτὴν δ. πρότ. (π) Κατὰ τὸ κ. Αἴτ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΒΑ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΗ. (ρ) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΒΑΗ ἴση τῇ ΒΗΑ. (σ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΑΗ γωνία ἴση τῇ ΓΗΑ. ὅλη ἄρα ἡ ΒΑΓ ἴση ὅλη τῇ ΒΗΓ, (τ) εἴτεν τῇ ΕΔΖ. ἡ γὰρ ΒΗΓ αὐτὴ ἐστὶν ἡ ΕΔΖ. δύο ἄρα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχει ἑκατέραν ἑκατέρω, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων ἐυθεῶν περιεχομένην, τὴν ΒΑΓ τῇ ΕΔΖ. καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα γωνίας ἴσας ἔχει, τὴν ΑΓΒ τῇ ΔΖΕ, καὶ τὴν ΑΒΓ τῇ ΔΕΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΒΑΓ ἴσον τῷ ΕΔΖ. (υ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τίω δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ ΒΑΓ. κ 33.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἡ ΑΕ ἴση τῇ ΑΔ, (φ) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ. (χ) καὶ συνεχάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΖΕ, (ψ) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. λέγω ὅτι ἡ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΔΖ, ΑΕΖ, ἡ μὲν ΑΔ ἴση τῇ ΑΕ, (ω) ἡ δὲ ΔΖ ἴση τῇ ΕΖ, (α) ἡ δὲ ΑΖ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΔΑΖ ἴση τῇ ΕΑΖ. (β) δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΔΑΕ, εἴτεν ἡ ΒΑΓ ὑπὸ τῆς ΑΖ.

ΠΡΟ-

(ρ) Ἐξ ὑποθ. ἡ γὰρ ΒΗ αὐτὴ ἐστὶν ἡ ΔΕ. (σ) Κατὰ τὴν ε. πρότ. (τ) Κατὰ τὸ β. Ἀξ. (υ) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (φ) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (χ) Κατὰ τὸ α. αἰτ. (ψ) Κατὰ τὴν α. πρότ. (ω) Ἐκ τῆς κατασκ. (α) Ὡσαύτως. (β) Κατὰ τὴν κ. πρότ.

Τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένῳ εὐθείᾳ διχα
τεμεῖν.

Ἐξω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ. χ. 34.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω ἐπὶ τῆς ΑΒ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΓΒ.
(γ) καὶ τετμήθω δίχα ἡ ΑΓΒ γωνία τῇ ΓΔ εὐθείᾳ.
(δ) λέγω ὅτι ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΓΔ κατὰ
τὸ Δ σημεῖον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΓΔ, ΔΓΒ, ἡ μὲν ΑΓ ἴση τῇ
ΓΒ, (ε) ἡ δὲ ΓΔ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΑΓΔ ἴση τῇ ΒΓΔ.
(ς) ἄρα καὶ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΔΒ. (η) τέτμηται ἄρα δι-
χα ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Δ ὑπὸ τῆς ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τῆς πρὸς αὐτῇ
δοθέντος σημείας, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐ-
θεῖαν γραμμὴ ἀγαγεῖν.

Ἐξω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν ση-
μεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ. χ. 35.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ
κείθω τῇ ΔΓ ἴση ἡ ΓΕ, (θ) καὶ συνεσάτω ἐπὶ τῆς
ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΖΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ
ΖΓ. Λέγω ὅτι ἡ ΖΓ κάθετός ἐστι τῇ ΑΒ.

ΔΕΙ-

(γ) Κατὰ τὴν α. πρότ. (δ) Κατὰ τὴν θ. πρότ. (ε) Ἐκ τῆς
κατασκ. (ς) Ὁσαύτως. (η) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (θ) Κατὰ
τὴν γ'. πρότ.

Εἰς τοὺς τριγώνους ΔΖΙ, ΓΖΕ, ἡ μὲν ΔΖ ἴση τῇ ΖΕ, ἡ δὲ ΔΓ ἴση τῇ ΓΕ, (ι) ἡ δὲ ΓΖ κοινή. ἄρα ἡ γωνία ἡ ΔΓΖ ἴση τῇ ΕΓΖ. (κ) ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστι τῇ ΑΒ. (λ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄπειρον, ἀπὸ τῆς δοθέντος σημείας, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ’ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἀπείρος εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ. χ. 36.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας τυχόν σημεῖον τὸ Δ. καὶ κέντρον μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ κύκλος γεγραφθῶ ὁ ΔΕΖΗ, (μ) καὶ τετμήθω ἡ ΗΕ δίχα κατὰ τὸ Θ, (ν) καὶ ἀπὸ τῆς Γ ἐπὶ τὸ Θ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΘ. λέγω ὅτι ἡ ΓΘ κάθετός ἐστι τῇ ΑΒ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΓΕ, ΓΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς τὰς τριγώνους ΗΓΘ, ΘΓΕ, ἡ μὲν ΗΓ ἴση τῇ ΓΕ, (ξ) ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΘΕ, (ο) ἡ δὲ ΓΘ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΗΘΓ ἴση τῇ ΕΘΓ. (π) ἡ ΓΘ ἄρα κάθετός ἐστι τῇ ΑΒ. (ρ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ’ εὐθείας σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ, ἥτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ.

Ἐν-

- (ι) Ἐκ τῆς κατασκευ. (κ) Κατὰ τὴν η. πρότ. (λ) Κατὰ τὸν ζ. ὅρισ. (μ) Κατὰ τὸ γ. αἵτ. (ν) Κατὰ τὴν ι. πρότ. (ξ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. (ο) Ἐκ τῆς κατασκευ. (π) Κατὰ τὴν η. πρότ. (ρ) Κατὰ τὸν ζ. ὅρισ.

νίας ποιείτω τὰς ΓΒΑ, ΑΒΔ. λέγω ὅτι αἱ ἐκθεταὶ γωνίαι
 ἦται δύο ὀρθαί εἰσιν, ἥ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. (πίν. γ. χ. 37.)
 εἰ μὲν ἔν η AB πρὸς ὀρθᾶς ἐστὶ τῇ ΔΓ, δῆλον ὅτι
 αἱ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι ὀρθαί εἰσιν (σ) εἰ δ' ἔ-

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἦχθω ἡ ΒΕ πρὸς ὀρθᾶς τῇ ΔΓ. (τ)

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ γωνίαι ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσὶ ταῖς ΓΒΑ, ΑΒΕ,
 ΕΒΔ. (υ) ἀλλὰ καὶ αἱ γωνίαι ΕΒΓ, ΕΒΔ ἴσαι ταῖς
 ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ. (φ) ἄρα αἱ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι ταῖς
 ΕΒΓ, ΕΒΔ. (χ) ἀλλ' αὐταί εἰσιν ὀρθαί. (ψ) αἱ ἄρα
 ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α. Καὶ πολλὰ δὲ εὐθεῖαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας φα-
 θεσθαι, καὶ κατὰ τὸ αὐτὸ συμπεσῶσαι σημεῖον, ἴσας
 δυσὶν ὀρθαῖς γωνίας ποιῶσι.

Β. Δύω εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας, γωνίας τέσσαρ-
 σιν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσι.

Γ. Καὶ πᾶσαι αἱ περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον γωνίαι τέ-
 σσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Ἐὰν πρὸς τινὶ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ
 σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
 κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς
 ἴσας

ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἐσόνται ἀλλή-
λαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς τῇ AB εὐθεῖα καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ B, δύο εὐθεῖαι αἱ BG, BD, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ABG, ABD γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποι-
εῖωσαν. Λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ GB ἡ BD. χ. 38.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἔσω ἡ BE ἐπ' εὐθείας τῇ GB. αἱ ἄρα ABE, ABG γωνίαι ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (ω) ἀλλὰ καὶ αἱ ABG, ABD ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (α) αἱ ἄρα ABE, ABG, ἴσαι ταῖς ABG, ABD. (β) κοινὴ ἀφηρέθω ἡ ABG. λοιπὴ ἄρα ἡ ABE ἴση λοιπῇ τῇ ABD. (γ) τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον. ἐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ BE τῇ GB. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι ἐδὲ ἀλλή τις πλήν τῆς BD. ἡ BD ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ GB. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποι-
ήσῃσι.

Δύο εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κα-
τὰ τὸ E σημεῖον. λέγω ὅτι αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἡ μὲν BED τῇ ΓΕΑ, ἡ δὲ BEΓ τῇ ΑΕΔ. χ. 39.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ γωνίαι BED, BEΓ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. (δ) ἀλλὰ καὶ αἱ BEΓ, ΓΕΑ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (ε) ἄρα αἱ BED, BEΓ ἴσαι ταῖς BEΓ, ΓΕΑ. (ζ) ἀφηρέθω ἡ κοινὴ BEΓ.
ἡ

(ω) Κατὰ τὸν ζ. ὅρισμ. (α) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὸ α. Ἀξ.
(γ) Κατὰ τὸ γ. Ἀξ. (δ) Κατὰ τὴν ιγ. πρότ. (ε) Κατὰ τὴν
ἐντὴν. (ζ) Κατὰ τὸ ι. Ἀξ.

ΒΕΔ δύο ἴσας ἔχει. ἄρα ἡ ΒΕΓ σὺν τῇ ΒΕΔ ἴσαί τῃ
ΒΕΔ σὺν τῇ ΑΕΔ. καὶ ἡ ἀφ' ἑξῆς ἡ ΒΕΔ. λοιπὴ ἄρα
ἡ ΒΕΓ ἴση λοιπῇ τῇ ΑΕΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβλη-
θείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἐκατέρας τῶν ἐντὸς
καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήθω αὐτῷ
μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γω-
νία ΑΓΔ μείζων ἐστὶν ἐκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναν-
τίων, τῶν ΓΑΒ, ΑΒΓ. ρ. 40.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήθω διχα ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Ε. (θ) καὶ ἐπι-
ξευχθεῖσα ἡ ΒΕ (ι) ἐκβεβλήθω ἐπὶ τὸ Ζ. (κ) καὶ
πέδω ἡ ΒΕ ἴση τῇ ΕΖ. (λ) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΖΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΖΕΓ, ΑΕΒ, ἡ μὲν ΓΕ ἴση τῇ
ΕΑ, (μ) ἡ δὲ ΖΕ τῇ ΕΒ, (ν) καὶ γωνία ἡ ΖΕΓ τῇ
ΑΕΒ. (ξ) ἄρα καὶ ἡ ΕΓΖ, εἶπεν ἡ ΑΓΖ γωνία ἴση τῇ
ΕΑΒ, ἥτοι τῇ ΓΑΒ. (ο) ἀλλ' ἡ ΑΓΔ μείζων τῆς ΑΓΖ.
(π) μείζων ἄρα καὶ τῆς ΓΑΒ. ἐμοίως δὲ τῆς ΒΓ
διατμηθείσης, καὶ ἐπιξευχθείσης τῆς ΑΕ, καὶ ἐκβλη-
θείσης ἐπὶ τὸ Ζ, ὥτε τὴν ΕΖ ἴσην εἶναι τῇ ΑΕ, καὶ
τῆς

Β

- (η) Κατὰ τὸ γ. Ἀξ. (θ) Κατὰ τὴν ι. πρότ. (ι) Κατὰ τὸ α. Αἰτ.
(κ) Κατὰ τὸ β. Αἰτ. (λ) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (μ) Ἐκ τῆς
κατασκ. (ν) Ἐκ τῆς κατασκ. (ξ) Κατὰ τὴν ιε. πρότ. (ο) ὡς
πρὸς τὴν δ. πρότ. (π) Κατὰ τὸ η. Ἀξ.

τῆς ΖΓ δὲ ἐπιχειρήσεως, καὶ ἐκβληθείσης, δεχθή-
σεται ἡ ΑΓΔ μείζων τῆς ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν
ἐλάσσονές εἰσι, πάντα μεταλαμβανόμενα.

Δήλη ἡ πρότασις αὕτη ἐκ τῶν τῆς ΑΒ'. προτάσε-
ως συνεπειῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μεί-
ζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευ-
ρὰν τῆς ΑΒ. λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ΑΒΓ μείζων
ἐστὶ τῆς ΒΓΑ. κ. 41.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΒ. (ρ) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΑΔ, (σ) καὶ γωνία ἄρα ἡ
ΑΒΔ ἴση τῇ ΑΔΒ. (τ) ἀλλ' ἡ ΑΒΓ μείζων τῆς ΑΒΔ.
(υ) ἄρα μείζων καὶ τῆς ΑΔΒ. ἀλλ' ἡ ΑΔΒ μείζων τῆς
ΒΓΑ. (φ) πολλῶ μᾶλλον ἄρα ἡ ΑΒΓ μείζων τῆς ΒΓΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν,
ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν Β γωνίαν
τῆς Γ. λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ, πλευρᾶς τῆς
ΑΒ μείζων ἐστὶ. κ. 42.

ΔΕΙ-

(ρ) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (σ) Ἐκ τῆς κατασκ. (τ) Κατὰ τὴν ε.
πρότ. (υ) Κατὰ τὸ η. Ἀξ. (φ) Κατὰ τὴν ιε. πρότ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἦτοί ἴση εἴναι ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ἐλάσσων. καὶ ἴση μὲν ἐκ εἶναι. ἴση γὰρ ἂν ᾦν καὶ ἡ Β γωνία τῇ Γ. (Χ) ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. ἐδὲ μὴν ἐλάσσων εἶναι ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. ἐλάσσων γὰρ ἂν ᾦν καὶ ἡ Β γωνία τῆς Γ. (Ψ) ὅπερ ὁμοίως τῇ ὑποθέσει ἀντίκειται. ἐπεὶ ἔν ἐδὲ ἴση εἶναι ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἐδὲ ἐλάσσων, μείζων ἄρα εἶναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμενα.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ. λέγω ὅτι αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμενα, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ, τῆς ΒΓ· αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ, τῆς ΑΓ. αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ, τῆς ΑΒ. χ. 43

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημείον. καὶ κείθω ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ. (ω). καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ. (α) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΔΓ ἴση τῇ ΑΓΔ. (β) ἀλλ' ἡ ΒΓΔ μείζων τῆς ΑΓΔ. (γ) μείζων ἄρα καὶ τῆς ΑΔΓ, εἶτεν τῆς ΒΔΓ. μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΔ τῆς ΒΓ. (δ) ἀλλ' ἡ ΒΔ ἴση ταῖς ΒΑ, ΑΔ. μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ ΑΔ τῆς ΒΓ. ἀλλ' ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ. (ε) αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ μείζονες τῆς ΒΓ. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ μείζονες τῆς ΑΓ· καὶ αἱ ΒΓ, ΓΑ μείζονες τῆς ΑΒ.

(χ) Κατὰ τὴν ε. πρότ. (ψ) Κατὰ τὴν ιη. πρότ. (ω) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (α) Ἐκ τῆς κατασκευ. (β) Κατὰ τὴν ε. πρότ. (γ) Κατὰ τὴν η. Ἀξ. (δ) Κατὰ τὴν ιθ. πρότ. (ε) Ἐκ τῆς κατασκευ.

Εάν τριγώνω ἐπὶ μίας τῶν πλευρῶν ἀπο-
τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συζαθῶ-
σιν, αἱ συζαθῆσαι, τῶν λοιπῶν τῶν τρι-
γώνω δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται,
μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνω τῶν ΑΒΓ ἐπὶ μίας τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ,
ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συ-
ζαθῶσιν αἱ ΒΔ, ΔΓ. λέγω Α', ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοι-
πῶν τῶν τριγώνω δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάττω-
ν εἰσι Β'. ὅτι μείζονα γωνίαν περιέχουσιν τὴν ΒΔΓ. κ. 44.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθω ἡ ΒΔ, καὶ συμπιπτέτω ἐπὶ τὸ Ε.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Αἱ ΒΑ, ΑΕ μείζονες εἰσι τῆς ΒΕ. (ζ) κοινὴ προσ-
κείθω ἡ ΕΓ. Αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ μείζονες τῶν ΒΕ, ΕΓ.
(η) πάλιν αἱ ΔΕ, ΕΓ μείζονες τῆς ΔΓ. (θ) κοινὴ
προσκείθω ἡ ΕΔ, αἱ ἄρα ΒΕ, ΕΓ μείζονες τῶν ΒΔ,
ΔΓ. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ,
ΑΓ. αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ πολλῶν μείζονες τῶν ΒΔ, ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Η' ΒΕΓ γωνία μείζων τῆς ΒΑΕ, ἔστιν τῆς ΒΑΓ.
(ι) ἀλλ' ἡ ΒΔΓ μείζων τῆς ΔΕΓ, ἥτοι τῆς ΒΕΓ. (κ)
πολλῶν ἄρα ἡ ΒΔΓ μείζων τῆς ΒΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς
δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι.

Δεῖ

(ζ) Κατὰ τὴν κ. πρότ. (η) Κατὰ τὸ δ. ἀξ. (θ) Κατὰ τὴν
κ. πρότ. (ι) Κατὰ τὴν ιε. πρότ. (κ) Κατὰ τὴν αὐτήν.

Δεί οὖν τὰς οὐκ τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι παντὴ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντα μεταλαμβανομένας.

Ἔσωσαν αἱ δοθεῖσαι, αἱ Α, Β, Γ. χ. 45.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκείθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ. καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν ΔΖ ἴση τῇ Α, ἡ δὲ ΖΗ τῇ Β, ἡ δὲ ΗΘ τῇ Γ. (λ) καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ. (μ) καὶ ἀπὸ τῆς κοίτης διατομῆς τῶν κύκλων Κ ἐπὶ τὰ κέντρα Ζ, Η ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ. (ν, λέγω, ὅτι τὸ ΚΗΖ τρίγωνον ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ Α ἴση τῇ ΖΔ. (ξ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΖ ἴση τῇ ΖΔ. (ο) ἄρα ἡ Α ἴση τῇ ΖΚ. (π) πάλιν ἡ Γ ἴση τῇ ΗΘ. (ρ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΗΚ ἴση τῇ ΗΘ. (σ) ἄρα ἡ Γ ἴση τῇ ΗΚ. (τ) ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΗΖ ἴση τῇ Β. (υ) τὸ ΚΗΖ ἄρα τρίγωνον ἐστὶ τὸ ζητούμενον. ἐκ τριῶν γάρ συνέση εὐθειῶν, αἱ ἴσαι εἰσὶ τρισὶ ταῖς δοθείσαις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΙ΄.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Β 3

Ἔσω

-
- (λ) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (μ) Κατὰ τὸ γ. Αἴτ. (ν) Κατὰ τὸ α Αἴτ. (ξ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ο) Κατὰ τὸ δ. πρότ. (π) Κατὰ τὸ α. Αἴτ. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (σ) Κατὰ τὸ αὐτὸ πρότ. (τ) Κατὰ τὸ α. Αἴτ. (υ) Ἐκ τῆς κατασκευ.

Ἐξω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ AB· τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον, τὸ Α' ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ ΔΓΕ. χ. 46.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἐφ' ἐκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΔΕ. (Φ) καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ΓΔ, ΓΕ, ΕΔ τρίγωνον συνεσάτω τὸ ΑΗΖ. (Χ) ὥστε εἶναι τὴν μὲν ΑΗ ἴσην τῇ ΓΕ, τὴν δὲ ΑΖ τῇ ΓΔ, τὴν δὲ ΗΖ τῇ ΕΔ. λέγω ὅτι ἡ ΗΑΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ΔΓΕ.

ΔΕΙΞΙΣ. ι

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΗΖ, ΓΕΔ, ἡ μὲν ΑΗ ἴση τῇ ΓΕ, ἡ δὲ ΑΖ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΗΖ τῇ ΕΔ. (Ψ) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΗΑΖ ἴση τῇ ΔΓΕ. (ω)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχη ἐκατέραν ἐκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχη, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένῳ, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξει.

Ἐξω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἐκατέραν ἐκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ. γωνία δὲ ἡ ΒΑΓ γωνίας τῆς ΕΔΖ μείζων ἔστω. λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ, βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστὶ. χ. 47.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Πρὸς τῇ ΕΔ εὐθείᾳ καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ Α συνεσάτω ἡ ΕΔΗ γωνία ἴση τῇ ΒΑΓ. (α) καὶ εἰλήφθω

(Φ) Κατὰ τὸ α. Αἰτ., (Χ) Κατὰ τὴν κβ. πρότ. (Ψ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ω) Κατὰ τὴν η. πρότ. (α) Κατὰ τὴν κγ. πρότ.

ἴση καὶ τῆς ΔΗΖ. πολλὰ ἄρα μείζων ἢ ΕΖΗ τῆς ΕΗΖ. ἔστι γὰρ ἡ ΔΗΖ μείζων τῆς ΕΗΖ. ἐπεὶ ἐν τῷ τριγώνῳ ΕΖΗ ἢ ΕΖΗ γωνία μείζων δέδεικται τῆς ΕΗΖ, καὶ ἡ ΕΗ ἄρα μείζων τῆς ΕΖ. ἀλλὰ τῇ ΕΗ ἴση δέδεικται ἡ ΒΓ. μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ Ε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς
 δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέ-
 ρα, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα,
 καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει τὴν
 ὑπὸ τῶν ἴσων ἐνθεῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευ-
 ρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ
 ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν ΑΒ, τῇ ΔΕ,
 τὴν δὲ ΑΓ, τῇ ΔΖ. βάσις δὲ ἡ ΒΓ, βάσεως τῆς ΕΖ
 μείζων ἔστω. λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ΒΑΓ γωνίας τῆς
 ΕΔΖ μείζων ἔστί. πίν. δ. κ. 48.

ἴσους ἀντικείμεναι· εἰ δὲ ἐλάττων, καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ ἐλάττων, ἔσται. (λ) καὶ τῷτε δὲ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. ἐκ ἔσιν ἄρα ἐδὲ ἴση, ἐδὲ ἐλάττων. μείζων ἄρα ἐστίν. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ Ζ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἐκατέραν ἐκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσω, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξῃ ἐκατέραν ἐκατέρα, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔωσαν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἔχοντα τὴν μὲν Β γωνίαν ἴσην τῇ Ε, τὴν δὲ ΑΓΒ τῇ Ζ. ἐχέτω δὲ πρότερον τὰς ΒΓ, ΕΖ, τὰς πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἴσας. λέγω ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ ἴσα ἔξουσιν τὰ τρίγωνα. σχ. 49.

Εἰ γὰρ ἀνίσος ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἔσται. ἔω δὴ μείζων ἡ ΑΒ.

Κ Α Τ Α Σ Κ Ε Υ Η.

Εἰλήφθω ἡ ΒΗ ἴση τῇ ΔΕ, (μ) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΓΗ.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΗΒΓ, ΔΕΖ, ἡ μὲν ΒΗ ἴση τῇ ΔΕ, (ν) ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, (ξ) ἡ δὲ Β γωνία τῇ Ε.
(ο)

(κ) Κατὰ τὴν η. πρότ. (λ) Κατὰ τὴν κδ. πρότ. (μ) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (ν) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ξ) Ἐκ τῆς ὑποθ.

(ο) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΗΓΒ ἴση τῇ Ζ. (π) ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΓΒ ἴση τῇ Ζ. (ρ) καὶ ἡ ΗΓΒ ἄρα ἴση τῇ ΑΓΒ. (σ) τὸ μέρος τῶ ἔλω. ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἀνιστος τῇ ΔΕ. ἄρα ἴση. ἐπεὶ ἔν ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΕΓ, ΔΕΖ, ἡ μὲν ΑΒ ἴση τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ γωνία ἡ Β ἴση τῇ Ε. καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τῶν τριγώνων ἴσα. (τ)

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνεσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. λέγω πάλιν, ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ τῶν τριγώνων ἴσα ἔσονται.

Εἰ γὰρ ἀνιστός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν ἔσται μείζων. ἔσω δὴ μείζων ἡ ΕΓ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἡ ΒΘ ἴση τῇ ΕΖ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΘ. χ. 50.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΘ, ΔΕΖ, ἡ μὲν ΑΒ ἴση τῇ ΔΕ, (υ) ἡ δὲ ΒΘ ἴση τῇ ΕΖ, (φ) ἡ δὲ γωνία Β ἴση τῇ Ε. (χ) ἄρα καὶ ἡ ΑΘΒ γωνία ἴση τῇ Ζ. (ψ) ἀλλὰ καὶ ἡ Γ ἴση τῇ Ζ. (ω) ἄρα καὶ ἡ ΑΘΒ ἴση τῇ Γ. ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ὅπερ ἀδύνατον. (α) ἐκ ἄρα ἀνιστος ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. ἄρα ἴση. καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τῶν ΒΑΓ, ΔΕΖ τριγώνων ἴσα. (β)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ΄.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

B 5

Εἰς

- (ο) Ὡσαύτως. (π) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (ρ) Ἐκ τῆς ὑποθ.
(σ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (τ) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (υ) Ἐξ ὑποθ.
(φ) Ἐκ τῆς κατασκ. (χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὴν δ. πρότ.
(ω) Ἐξ ὑποθ. (α) Κατὰ τὴν ις. πρότ. (β) Κατὰ τὴν δ. πρότ.

Εἰς οὗτω εὐθείας τὰς AB , $\Gamma\Delta$ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἢ $\Theta\Lambda$ τὰς ἐναλλὰζ γωνίας, ΛEZ , $EZ\Delta$ ἴσας ἀλλήλαις ποιέτω. λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$. χ . 51.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι συμπεσένται ἥτοι ἐπὶ τὰ B , Δ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ A , Γ .

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ B , Δ μέρη, κατὰ τὸ H .

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὸ EHZ τρίγωνόν ἐστιν, ἡ ἐκτὸς ἄρα ΛEZ γωνία μείζων τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον EZH . (γ) ἀλλὰ καὶ ἴση. (δ) ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ ἄρα αἱ AB , $\Gamma\Delta$ ἐκβαλλόμεναι συμπεσένται ἐπὶ τὰ B , Δ μέρη. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι ἐδὲ ἐπὶ τὰ A , Γ . αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσι. (ε) παράλληλος ἄρα ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσιν ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὁρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλων αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς δύο εὐθείας τὰς AB , $\Gamma\Delta$ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἢ EZ , τὴν ἐκτὸς γωνίαν EHB τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῇ $H\Theta\Delta$ ἴσην ποιέτω. λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$. χ . 52.

ΔΕΙ-

(γ) Κατὰ τὴν ις, πρότ. (δ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὸ γ. πόρισ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΕΗΒ γωνία ἴση τῇ ΑΗΘ. (ζ) ἀλλὰ τῇ ΕΗΒ ἴση ἡ ΗΘΔ. (η) ἄρα ἡ ΑΗΘ ἴση τῇ ΗΘΔ. (θ) καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ. ἡ ΑΒ ἄρα παράλληλος τῇ ΓΔ. (ι)

Ποιέτω δὲ ἡ ΕΖ εἰς τὰς ΑΒ, ΓΔ ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας τὰς ΒΗΘ, ΔΘΗ ἴσας δυσὶν ὀρθαῖς· λέγω πάλιν ὅτι ἡ ΑΒ παράλληλος τῇ ΓΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ γωνίαι ΒΗΘ, ΔΘΗ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. (κ) ἀλλὰ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι καὶ αἱ ΒΗΕ, ΒΗΘ. (λ) αἱ ἄρα ΒΗΘ, ΔΘΗ ἴσαι ταῖς ΒΗΕ, ΒΗΘ. (μ) κοινὴ ἀφηρήθω ἡ ΒΗΘ. ἄρα ἡ ΕΗΕ ἴση τῇ ΗΘΔ. (ν) ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς. παράλληλος ἄρα τῇ ΓΔ ἡ ΑΒ. (ξ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ΄.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τάςτε ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ. λέγω Α΄. ὅτι τὰς ἐναλλάξ γωνίας ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ· Β΄. ὅτι καὶ τὴν ἐκτὸς ΕΗΒ ἴσην τῇ ἐντὸς ΗΘΔ· Γ΄. ὅτι καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ΒΗΘ, ΔΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ϡ. 53.

Εἰ

(ζ) Κατὰ τὴν ιε. πρότ. (η) Ἐξ ὑποθ. (θ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (ι) Κατὰ τὴν κζ. πρότ. (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὴν ιδ. πρότ. (μ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (ν) Κατὰ τὸ γ. Ἀξ. (ξ) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῆς δε. τῆς πρώτ.

ἡ ἑτέρα αὐτῶν ἐστὶ μείζων. ἐστὶ δὴ μείζων ἡ ΑΗΘ τῆς ΗΘΔ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω ἡ ΚΗΘ γωνία ἴση τῇ ΗΘΔ. (ο) καὶ ἀπὸ τῶν Η καὶ Δ σημείων τῆς ΑΒ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ αἱ ΗΙ, ΛΜ. (π)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐπεὶ ἡ ΚΗΘ γωνία ἴση τῇ ΗΘΔ· (ρ) αἱ δὲ εἰσιν ἐναλλάξ. ἡ ΚΗ ἄρα παράλληλος τῇ ΓΔ. (σ) ἄρα τὰ μεταξὺ αὐτῶν ἀποσήματα ἴσα ἀλλήλοις, τὰ ΗΙ, ΝΜ. (τ) ἀλλὰ τῷ ΗΙ ἴσον καὶ τῷ ΛΜ. (υ) παράλληλος γάρ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. (φ) ἄρα καὶ ἡ ΛΜ ἴση τῇ ΝΜ. (χ) τὸ ὅλον τῷ μέρει. ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα ἡ ΚΗΘ γωνία ἴση τῇ ΗΘΔ. ὁμοίως δὴ δευχθήσεται ὅτι ἐδὲ ἄλλη τις μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς ΑΗΘ ἴση ἐστὶ τῇ ΗΘΔ. ἡ ἄρα ΑΗΘ ἴση τῇ ΗΘΔ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἡ γωνία ΕΗΒ ἴση τῇ ΔΘΗ. (ψ) ἀλλὰ τῇ ΑΗΘ ἴση ἡ ΗΘΔ. (ω) καὶ ἡ ΕΗΒ ἄρα ἴση τῇ ΗΘΔ. (α) κ. 54.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Γ΄.

Ἡ γωνία ΕΗΒ ἴση τῇ ΔΘΗ. (β) κοινὴ προσκείσθαι ἡ ΕΗΘ. ἄρα αἱ ΕΗΒ, ΒΗΘ ἴσαι ταῖς ΔΘΗ, ΒΗΘ. (δ) ἀλλ' αἱ ΕΗΒ, ΒΗΘ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. (ε) ἄρα καὶ αἱ ΒΗΘ, ΔΘΗ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς.

ΠΡΟ-

-
- (ο) Κατὰ τὴν κγ. πρότ. (π) Κατὰ τὴν ιβ. πρότ. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκ. (σ) Κατὰ τὴν κζ. πρότ. (τ) Κατὰ τὸν η. ὅρισ. (υ) Κατὰ τὸν αὐτὸν ὅρισ. (φ) Κατὰ τὴν ὑποθ. (χ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (ψ) Κατὰ τὴν ιε. πρότ. (ω) Δίδονται ἐν τῷ α. μέρει (α) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (β) Κατὰ τὸ β, μερ. (δ) Κατὰ τὸ β, μζ. (ε) Κατὰ τὴν ιγ. πρότ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄.

Αἰ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλή-
λων ἐσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρω τῶν ΑΒ, ΓΔ ἡ ΕΖ παράλληλος. λέ-
γω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ παράλληλος. κ. 55.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐμπίπτειτω εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΑΜ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία ΑΗΒ ἴση τῇ ΗΟΖ. (ζ) ἀλλὰ τῇ ΗΟΖ
ἴση ἡ ΘΚΔ. (η) ἄρα ἡ ΑΗΒ ἴση τῇ ΘΚΔ, (θ) ἔτεν
τῇ ΑΚΔ. ἄρα ἡ ΑΒ παράλληλος τῇ ΓΔ. (ι)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ΄.

Αὐτὸ τῷ δοθέντος σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ
παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α· ἡ δὲ δοθεῖσα εὐ-
θεῖα, ἡ ΒΓ. κ. 56.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ. καὶ ἐπε-
ξεύχθω ἡ ΑΔ. καὶ συνεστάτω ἡ ΕΑΔ γωνία ἴση τῇ
ΑΔΓ. (κ) καὶ ἐκβεθλήθω ἡ ΕΑ ἐπὶ τὸ Ζ. λέγω,
ὅτι ἡ ΕΖ παράλληλος ἐστὶ τῇ ΒΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΕΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ΑΔΓ. (λ) αἱ δὲ εἰσιν
ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ. (μ)

ΠΡΟ-

(ζ) Κατὰ τὸ β. μέρ. τῆς κθ. προτ. (η) Κατὰ τὸ αὐτό. (θ) Κατὰ
τὸ α. ἀξ. (ι) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῆς κη. προτ. (κ) Κατὰ τὴν
κγ. προτ. (λ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (μ) Κατὰ τὴν κς. προτ.

Παντός τριγώνου μιας των πλευρῶν προσειβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ, καὶ αἱ ἐντὸς τῷ τριγώνῳ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσειβελήδω αὐτῷ μιὰ πλευρὰ ἢ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. λέγω Α'. ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία, ἢ ΑΓΔ, ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς Α καὶ Β. Β'. ὅτι αἱ ἐντὸς τῷ τριγώνῳ τρεῖς γωνίαι, αἱ Α, Β, καὶ ΑΓΒ δυσὶν ὁρθαῖς εἰσὶν ἴσαι.
 §. 57.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω διὰ τῷ Γ σημεῖον ἡ ΓΕ τῇ ΑΒ παράλληλος. (ν)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἡ μὲν γωνία ΕΓΔ ἴση τῇ Β, (ξ) ἡ δὲ ΑΓΕ τῇ Α. (ο) ὅλη ἄρα ἡ ΑΓΔ ἴση ταῖς Β, καὶ Α.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἡ ΑΓΔ γωνία ἴση ταῖς Α καὶ Β. (π) κοινὴ προσκείδω ἡ ΑΓΒ. αἱ ἄρα ΑΓΔ, ΑΓΒ ἴσαι ταῖς Α, Β καὶ ΑΓΒ. (ρ) ἀλλ' αἱ ΑΓΔ, ΑΓΒ ἴσαι δυσὶν ὁρθαῖς. (σ) ἄρα καὶ αἱ Α, Β καὶ ΑΓΒ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι. (τ)

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Αἱ δύο γωνίαι παντὸς ἐυθυγράμμου τριγώνου δύο ὁρθῶν εἰσὶν ἐλάσσονες. αἱ τρεῖς γὰρ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι.

Β'. Τὸ τῶν γωνιῶν ἀθροισμα παντὸς τριγώνου, ἴσόν ἐστι τῷ ἀθροίσματι τῶν γωνιῶν παντὸς ἐτέρου.

Γ'.

(ν) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (ξ) Κατὰ τὸ τῆς κθ. πρότ. β. μέρ. (ο) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῆς αὐτ. (π) Δέδοται ἡδη. (ρ) Κατὰ τὸ β. Ἀξ. (σ) Κατὰ τὴν ιγ. πρότ. (τ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ.

- Γ'. Ἐὰν τριγώνῃς μία γωνία ἦτοι ὀρθή, ἢ ἀμβλεῖα ἢ, ἑκατέρω τῶν λοιπῶν ὀξεία ἔσται.
- Δ'. Ἐὰν ὀρθὴ μὲν ἢ μία τριγώνῃς γωνία, τὸ τῶν δύο λοιπῶν ἀθροισμα μιᾷ ὀρθῇ ἴσον ἔσται ἐὰν δὲ ἀμβλεῖα, μιᾷ ὀξείᾳ.
- Ε'. Ἐὰν μία τριγώνῃς γωνία ἴση ἢ τῷ τῶν δύο λοιπῶν ἀθροίσματι, ὀρθὴ ἔσιν ἐκείνη.
- Ζ'. Μιᾶς μὲν τριγώνῃς γωνίας γνωστῆς ἔσης, καὶ τὸ τῶν δύο λοιπῶν ἀθροισμα γνωστὸν ἔσται, δύο δὲ γνωστῶν, καὶ ἡ τρίτη δῆλη.
- Ζ'. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἦτοι ἀμφοτέρως ἀμφοτέρως, ἢ ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ λοιπὴ τῇ λοιπῇ ἴση ἔσται.
- Η'. Ἐὰν δύο τρίγωνα μιαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, καὶ αἱ λοιπαὶ δύο ταῖς λοιπαῖς δυσὶν ἴσαι ἔσονται, ἦτοι ἀμφοτέρω ἀμφοτέρως, ἢ ἑκατέρω ἑκατέρω.
- Θ'. Ἐὰν αἱ τὴν ὀρθὴν γωνίαν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ περιέχουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσιν, ἑκατέρω τῶν πρὸς τῇ βάσει ἴσων ἡμίσει ὀρθῆς ἔσιν ἴση.
- Ι'. Ἐκάστη τῶν τῷ ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ γωνιῶν ἴση τριτημορίᾳ δύο ὀρθῶν, εἴτεν δυσὶ τριτημορίοις μιᾶς ὀρθῆς.
- ΙΑ'. Ἐκ τέττε τὴν δοθεῖσαν ὀρθὴν γωνίαν εἰς τρεῖς τεμεῖν ἴσα μέρη καταμαθεῖν ῥαβδίων. ἔστω γάρ ὀρθὴ γωνία ἡ ΒΑΔ. καὶ συνεχάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΓΔ. (υ) καὶ ἐπεί ἡ ΓΑΔ ἴση δυσὶ τριτημορίοις μιᾶς ὀρθῆς (φ) ἢ ἄρα ΒΑΓ ἴση τριτημορίᾳ ὀρθῆς. τετμήθω δὲ δίχα ἡ ΓΑΔ (χ) διὰ τῆς ΑΕ. ἑκατέρω ἄρα τῶν ΓΑΕ, ΔΑΕ ἴση τριτημορίᾳ ὀρθῆς. ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΑΓ ἴση δέδεικται τριτημορίᾳ ὀρθῆς. ἴσαι ἄρα ἀλλήλαις αἱ τρεῖς γωνίαι
- ΒΑΓ

(υ) Κατὰ τὴν κ. πρότ. (φ) Κατὰ τὴν ι. συνέπ. (χ) Κατὰ τὴν θ. πρότ.

ΒΑΓ, ΓΑΕ, ΔΑΕ. εἰς τρεῖς ἄρα ἴσα μέρη τέτμηται ἡ δοθεῖσα ὀρθή γωνία ΒΑΔ. χ . 58.

ΙΒ'. Πασῶν τῶν ἀπὸ τυχόντος τινὸς σημείου ἐπὶ τὴν ὅποιαν ἐν εὐθεῖαν ἀγομένων εὐθεῶν ἐλάττων ἢ κάθετος. Ἦχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῆς Α σημεῖς εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΒ. ὧν ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒΓ γωνία ὀρθή, ἡ ἄρα ΑΓΒ ὀξεία. (ψ) ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΓ ἐλάττων. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΑΒ καὶ ἐκάστης τῶν λοιπῶν ἐλάττων. χ . 59.

ΙΓ'. Ἀπὸ τῆς αὐτῆς σημείας μία μόνον κάθετος τῇ δοθείσῃ ἀχθήσεται εὐθεία. Ἦχθωσαν γὰρ, εἰ δυνατόν, τῇ ΒΓ δύο κάθετοι, αἱ ΑΒ, ΑΖ. αἱ ἄρα γωνίαι τῆς ΑΒΖ τριγώνου δύο ὀρθῶν μείζονες. ὅπερ ἀδύνατον. (α) χ . 59.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τῆς εὐπορωτάτης ταύτης προτάσεως, ἥς ἐν πάσαις ταῖς μαθηματικαῖς ἐπισήμαις ἡ χρῆσις μεγίστη, εὐρετὴν γεγονέναι, φασι, (Εὐδὴμ. ὁ ἀρχαῖος Γεωμέτρ.) τὸν Πυθαγόραν. πολλάκις δ' αὐτῆς ὁ Ἀριστοτέλης μνησθῆναι, ἀκριβὲς ἀποδείξεως προτιθεὶς αὐτὴν ὑπόδειγμα. ὥστερ δὲ δι' αὐτῆς γνώσων καθέστηκεν ὅπόσαις ὀρθαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐντὸς τῶν τριπλεύρων γωνία· ἔτω δὴ καὶ αἱ ἐντὸς καὶ ἐκτὸς παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος.

ΙΔ'. Πᾶσαι αἱ ἐντὸς γωνίαι εὐθυγράμμου σχήματος ἴσαι εἰσὶ δις τοσαύταις ὀρθαῖς, ὅσαι αἱ ἐν τῷ σχήματι πλευραί, πλην τεσσάρων. Ἐξω εὐθύγραμμα τυχόντα, τό, τε τετράπλευρον ΑΒΓΔ, καὶ τὸ ἐξάπλευρον ΑΒΓΔΕΖ. (πίν. ε. χ . 60, 61.) καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς
μιας

(ψ) Κατὰ τὴν γ. συνίπ. (ω) Κατὰ τὴν ιθ. πρώτ. (α) Κατὰ τὴν λβ. πρώτ.

μίας οποιασὲν γωνίας ἐπὶ τὰς τῶν λοιπῶν ἐυθείας ἐπεξεύχθωσαν. οἷον ἐν μὲν τῷ τετραπλεύρῳ ἡ ΒΔ, ἐν δὲ τῷ ἑξαπλεύρῳ αἱ ΓΑ, ΓΖ, ΓΕ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρη χήματος αἱ γωνίαι αὐταὶ εἰσιν αἱ τῶν ἐν αὐτοῖς τριγώνων γωνίαι· τοσαύταις ἄρα ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρη χήματος αἱ γωνίαι, ὅσαις καὶ τῶν ἐν αὐτοῖς τριγώνων. καὶ ἐπεὶ ἐν μὲν τῷ τετραπλεύρῳ δύο εἰσὶ τρίγωνα, ἐν δὲ τῷ ἑξαπλεύρῳ τέσσαρα· δῆλον ἄρα, ὅτι αἱ μὲν τῷ πρώτῳ γωνίαι ἴσαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς· αἱ δὲ τῷ δευτέρῳ ὀκτώ. ἐξὶ δὲ τὸ μὲν τέσσαρα ὁ διπλάσιος ἀριθμὸς τῶν τῷ τετραπλεύρῳ πλευρῶν, πλὴν τεσσάρων· ὁ δὲ ὀκτώ ὁ τῶν τῷ ἑξαπλεύρῳ διπλάσιος, πλὴν τεσσάρων. ἴσαι ἄρα πᾶσαι αἱ ἐντὸς γωνίαι παντὸς ἐυθυγράμμου χήματος δις τοσαύταις ὀρθαῖς, ὅσαι αἱ ἐν τῷ χήματι πλευραί, πλὴν τεσσάρων.

Α Λ Δ Ω Σ.

Α' πό τινος σημείου τῶν ἐντὸς τῷ χήματι, οἷον τῷ Η, (χ. 62.) ἐφ' ἐκάστην τῶν γωνιῶν κορυφὴν ἐυθεῖαν ἐπεξεύχθωσαν, οἷον αἱ ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ, ΗΔ, ΗΕ, ΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἕξ εἰσὶ τὰ συζαθέντα τρίγωνα, δώδεκα ἄρα ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν αἱ τέτων γωνίαι. ἀλλ' αἱ περὶ τὸ Η γωνίαι, αἱ μὴ ἴσαι γωνίαι τῷ ἑξαπλεύρῳ, τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. (β) αἱ λοιπαὶ ἄρα, αἱ τῷ ἑξαπλεύρῳ, ἴσαι ὀκτὼ ὀρθαῖς, ὅπερ ἐστὶ τῷ διπλασίῳ τῶν πλευρῶν ἀριθμῷ, πλὴν τεσσάρων.

ΙΕ'. Πᾶσαι αἱ ἐκτὸς γωνίαι παντὸς ἐυθυγράμμου χήματος τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι. Ἐξω γάρ τιχόν ἐυθυγράμμον τὸ Χ. (χ. 63.) καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ τέτε πλευραί. καὶ ἐπεὶ ἡ Α συν τῇ Β ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς,

Γ

αί-

(8) Κατὰ τὴν γ. συνίπ. τῆς γ. πρωτ.

ὡσαύτως ἡ Γ σὺν τῇ Δ, καὶ ἡ Ε σὺν τῇ Ζ, καὶ ἡ Η σὺν τῇ Θ, καὶ ἡ Ι σὺν τῇ Κ· (γ.) πᾶσαι ἄρα ὁμῶς ληφθεῖσαι δέκα ὀρθαῖς ἴσαι. ἀλλ' αἱ ἐντὸς τῆς χήματος ἕξ ὀρθαῖς ἴσαι. (δ) αἱ ἐκτὸς ἄρα τέσσαρες ὀρθαῖς ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ'.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύσσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐτὰ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἐξώσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ. λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. χ. 64.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΒΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΓ, ΔΒΓ, ἡ μὲν ΑΒ ἴση τῇ ΓΔ, (ε) ἡ δὲ ΒΓ κοινὴ καὶ γωνία ἡ ΓΒΑ ἴση τῇ ΒΓΔ. (ς) καὶ ἡ ΑΓ ἄρα ἴση τῇ ΒΔ. καὶ γωνία ἡ ΒΓΑ ἴση τῇ ΓΒΔ. (η) αἱ δὲ εἰσιν ἐναλλάξ. αἱ ἄρα ΑΓ, ΒΔ παράλληλοι. (θ) ἀλλὰ δέδεικται ὅτι καὶ ἴσαι. ἴσαι τε ἄρα καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ'.

Τῶν παραλλήλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἐξω

(γ) Κατὰ τὴν ιγ. πρότ. (δ) Κατὰ τὴν προλ. συνέπ. (ε) Ἐξ ὑποθ. (ς) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῆς κθ. προτ. (η) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (θ) Κατὰ τὴν κς. πρότ.

Ἐξω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δ' αὐτῆς ἡ ΒΓ. λέγω Α', ὅτι αἱ ἀπεναντίας αὐτῆς πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ Β'. ὅτι ἡ ΒΓ διάμετρος διχα αὐτὸ τέμνει. χ. τὸ αὐτ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΔΒΓ, ΑΒΓ, ἡ μὲν ΒΓΔ γωνία ἴση τῇ ΓΒΑ, ἡ δὲ ΓΒΔ τῇ ΒΓΑ, (ι) ἡ δὲ ΒΓ κοινὴ. ἄρα ἡ μὲν ΔΓ ἴση τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΔΒ τῇ ΓΑ. καὶ γωνία ἡ ΓΔΒ ἴση τῇ ΓΑΒ. (κ) καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΒΓΔ ἴση τῇ ΓΒΑ, ἡ δὲ ΓΒΔ τῇ ΒΓΑ. ὅλη ἄρα ἡ ΔΓΑ ἴση ὅλῃ τῇ ΔΒΑ. (λ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐπεὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΑΓ τριγώνῳ. (μ) ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος διχα τέμνει τὸ ΑΓΔΒ παραλληλόγραμμον.

ΠΡΩΤΑΣΙΣ ΔΕ'.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἐξω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ταῖς ΑΖ, ΒΓ, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΖ παραλληλογράμμῳ. χ. 65.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΓ. (ν) ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΖ ἴση τῇ ΒΓ. (ξ) ἄρα καὶ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΕΖ. (ο) κοινὴ προσ-
κέσθαι

Γ 2

- (ι) Κατὰ τὸ ἀρην. κ. μέρ. (κ) Κατὰ τὴν κς. πρότ. (λ) Κατὰ τὸ β. Ἀξ. (μ) Κατὰ τὴν κς. πρότ. (ν) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (ξ) Κατὰ τὴν αὐτ. (ο) Κατὰ τὸ κ. αξ.

κείσθω ἡ ΔΕ. ἄρα ἡ ΔΕ ἴση τῇ ΔΖ. (π) ἔκκεν ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΑΕ, ΓΔΖ, ἡ μὲν ΑΕ ἴση τῇ ΔΖ, (ρ) ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΓΖ. (σ) τὸ ἄρα ΒΑΕ τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΔΖ τριγώνῳ. (τ) κοινὸν ἀφηρέσθω τὸ ΔΗΕ τρίγωνον. τὸ τραπέζιον ἄρα ΑΒΗΔ ἴσον τῷ ΓΗΕΖ τραπέζιῳ. (υ) κοινὸν προσκείσθω τὸ ΒΗΓ τρίγωνον. τὸ ἄρα ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ. (φ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΔΣ'.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐσὶν.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ ΒΔ, ΖΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων, τῶν ΒΓ, ΖΗ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ταῖς ΑΘ, ΒΗ. λέγω, ὅτι τὸ ΒΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ ἴσόν ἐστι. κ. 66.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΓΘ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΒΓ ἴση τῇ ΖΗ, (χ) τῇ δὲ ΖΗ ἴση ἡ ΕΘ. (ψ) καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἴση τῇ ΕΘ. (ω) εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι. (α) καὶ αἱ ΒΕ, ΓΘ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοι. (β) παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΕΘΓ. ἐστὶ δὲ ἴσον ἑκατέρῳ τῶν ΒΔ, ΖΘ παραλληλογράμμων. (γ) καὶ τὸ ΒΔ ἄρα ἴσον τῷ ΖΘ. (δ) ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟ-

(π) Κατὰ τὸ β. ἀξ. (ρ) Δίδασκαται. (σ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (τ) Κατὰ τὴν η. πρότ. (υ) Κατὰ τὸ γ. Ἀξ. (φ) Κατὰ τὸ β. ἀξ. (χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (ω) Κατὰ τὸ κ. Ἀξ. (α) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὴν λγ. πρότ. (γ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (δ) Κατὰ τὸ μ. Ἀξ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΖ'.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΔ, ΒΓ. λέγω, ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ. χ. 67.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθω ἡ ΑΔ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰς Ε, Ζ σημεῖα. καὶ διὰ μὲν τῆς Β ἤχθω ἡ ΒΕ παράλληλος τῇ ΓΑ, διὰ δὲ τῆς Γ, (ε) ἡ ΓΖ τῇ ΒΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ ΓΕ, ΒΖ παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. (ζ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον τὸ ἥμισυ ἐστὶ τῆς ΓΕ παραλληλογράμμου· τὸ δὲ ΔΒΓ, τὸ τῆς ΒΖ ἥμισυ. (η) τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον. (θ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΗ'.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΖ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΔΑ. λέγω, ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ. χ. 68.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθω ἡ ΑΔ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰς Η, Θ σημεῖα. καὶ διὰ μὲν τῆς Β ἤχθω ἡ ΒΗ παράλληλος τῇ ΑΓ· διὰ δὲ τῆς Ζ, ἡ ΖΘ τῇ ΓΔ. (ι)

Γ 3

ΔΕΙΞΙΣ.

(ε) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (ζ) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (η) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (θ) Κατὰ τὸ ε. Ἀξ. (ι) Κατὰ τὴν λα. πρότ.

Τὰ παράλληλογράμματα ΓΗ, ΓΘ ἴσα ἀλλήλοις εἰσιν.
(κ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον τὸ ἡμῖς ἐστὶ τῷ παραλ-
ληλογράμμῳ ΓΗ, τὸ δὲ ΔΓΖ τῷ ΓΘ. (λ) τὸ ΑΒΓ
ἄρα τρίγωνον ἴσον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ. (μ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΘ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσε-
ως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν
ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσιν.

Ἔστω τρίγωνα ἴσα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ (κ. 69.) ἐπὶ τῆς
αὐτῆς βάσεως, τῆς ΒΓ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ,
Α, Δ. λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσιν
ὅπερ εἰσιν, ὅτι ἡ τὰς κορυφῶν αὐτῶν ἐπιζευγνῦσα ΑΔ,
παράλληλός ἐστι τῇ βάσει ΒΓ. εἰ γὰρ μή,

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἡ'χθω ἡ ΑΕ παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΕΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσόν ἐστι τῷ τριγώνῳ ΕΒΓ. (ν) ἀλ-
λά καὶ τῷ ΒΔΓ ἴσον τῷ ΑΒΓ. (ξ) τὸ ἄρα ΕΒΓ ἴσον
τῷ ΔΒΓ. (ο) τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ
ἄρα ἡ ΑΕ παράλληλος τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν,
ὅτι ἐδὲ ἄλλη τις, πλὴν τῆς ΑΔ. ἡ ΑΔ ἄρα παρὰ λ-
ληλος τῇ ΒΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βά-
σεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, (καὶ
ἐπ' εὐθείας ἔχοντα τὰς βάσεις) καὶ ἐν ταῖς
αὐταῖς παραλλήλοις εἰσιν. Ἔστω

(*) Κατὰ τὴν λσ. πρότ. (λ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (μ) Κατὰ
τὰ ε, Ἄξ. (ν) Κατὰ τὴν λς. πρότ. (ξ) Ἐξ ὑποθ. (ο) Κα-
τὰ τὴν κ. Ἄξ

Ἐξω τρίγωνα ἴσα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, (σχ. 70) ἐπὶ ἴσων βάσεων, τῶν ΒΓ, ΓΕ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Α, Δ, καὶ ἐπ' εὐθείας ἔχοντα τὰς βάσεις ΒΓ, ΓΕ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰς παραλλήλους, ἔστιν ὅτι ἡ ΑΔ παράλληλος τῇ ΒΕ. εἰ γὰρ μὴ,

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἡ'χθω ἡ ΑΖ παράλληλος τῇ ΒΕ, (π) καὶ ἐπε-
ξεύχθω ἡ ΕΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ. (ρ) ἀλλὰ καὶ τὸ ΔΓΕ ἴσον τῷ ΑΒΓ. (σ) τὸ ἄρα ΖΓΕ ἴσον τῷ ΔΓΕ. (τ) τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ ἄρα ἡ ΑΖ παράλληλος τῇ ΒΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθή-
σεται, ὅτι ἐδὲ ἄλλη τις, πλὴν τῆς ΑΔ. ἡ ἄρα ΑΔ παράλληλος τῇ ΒΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΑ'.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν-
τε ἔχη τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς
παραλλήλοις ᾗ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλ-
ληλόγραμμον τῷ τριγώνῳ.

Παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν
ἔχέτω τὴν αὐτὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔσω παραλ-
λήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. λέγω, ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΓ
παραλληλόγραμμον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ. πίν. 5. σχ. 71.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΑΓ.

Γ 4

ΔΕΙ-

(π) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (ρ) Κατὰ τὴν λη. πρότ. (σ) Ἐξ
ὑποθ. (τ) Κατὰ τὸ α, Ἀξ.

Τὸ ΔΓ παραλληλόγραμμον διπλάσιον ἐστὶ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. (υ) ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΒΕΓ τριγώνῳ. (φ) τὸ ΑΓ ἄρα παραλληλόγραμμον διπλάσιον καὶ τῷ ΒΕΓ τριγώνῳ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΜΒ'.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγραμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Δ. κ. 72.

Κ Α Τ Α Σ Κ Ε Ξ Η.

Τετμήθω δίχα ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Ε, (χ) καὶ ἐπέξωχθω ἡ ΕΑ, καὶ συνεστιάτω ἡ ΓΕΖ γωνία ἴση τῇ Δ. (ψ) καὶ διὰ μὲν τῷ Α ἤχθω ἡ ΑΗ παράλληλος τῇ ΒΓ, διὰ δὲ τῷ Γ, ἡ ΓΗ τῇ ΖΕ. (ω) λέγω, ὅτι τὸ ΕΗ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ζητούμενον.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Τὸ ΑΒΕ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ. (α) τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ὂν τοῖς ΑΒΕ, ΑΕΓ, διπλάσιόν ἐστι τῷ ΑΕΓ. ἀλλὰ καὶ τὸ ΕΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τῷ αὐτῷ ΑΕΓ τριγώνῳ. (β) τὸ ἄρα ΕΗ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, (γ) καὶ ἔχει τὴν ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ Δ. τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστὶ.

Π Ρ Ο.

-
- (υ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (φ) Κατὰ τὴν λζ. πρότ. (χ) Κατὰ τὴν ι. πρότ. (ψ) Κατὰ τὴν κγ. πρότ. (ω) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (α) Κατὰ τὴν λη. πρότ. (β) Κατὰ τὴν μα. πρότ. (γ) Κατὰ τὸ ε. ἀξ.

Πάντος παραλληλογράμμου τὰ
διάμετρον παραλληλογράμμων
πληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἔσιν.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ ΒΔ, διάμετρον
ἡ ΑΓ. περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμοι
ΕΘ, ΗΖ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα
ΚΔ. λέγω, ὅτι ἴσόν ἐσιν τὸ ΒΚ τῷ ΚΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΔΓ
δὲ ΚΗΓ τῷ ΚΖΓ, τῷ δὲ ΑΕΚ τὸ ΑΘΚ
ρήθω ἀπὸ μὲν τῶ ΑΒΓ τὰ ΚΗΓ, ΑΕΚ
ΑΔΓ τὰ ΚΖΓ, ΑΘΚ, καὶ λοιπὰ ἄρα
ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. (ε)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΔ

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δ
γώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμο
λεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνία εὐθυγ

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, γ
γωνον, τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Δ

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεξάτω παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓ
γώνῳ Γ, καὶ ἐν τῇ γωνίᾳ ΕΒΗ ἴση τ
(ζ) καὶ κείθω ἡ δοθεῖσα ΑΒ ἐπ' εὐ
καὶ ἀπὸ τῆ Α σημείῃς ἤχθω ἡ ΑΚ πα
τέρει τῶν ΓΗ, ΕΒ. (η) καὶ ἐκβλ
σὺμπιπτέτω τῇ ΑΚ κατὰ τὸ Κ. κα

Γ 5

(δ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (ε) Κατὰ τὸ γ. ἸΑ
μβ. πρότ. (η) Κατὰ τὴν λμ. πρότ.

ἢ ΚΒ, καὶ ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ συνεχές, καὶ συμ-
πιπτέτω τῇ ΓΗ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Θ. καὶ ἀπὸ τῆς
Θ ἤχθω ἡ ΘΛ παραλλήλος ὁποτέρᾳ τῶν ΗΑ, ΓΚ.
καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΕΒ, ΚΑ, καὶ συμπιπτέτωσαν τῇ
ΘΛ κατὰ τὰ Μ καὶ Λ σημεῖα. Λέγω, ὅτι τὸ ΒΛ
ἐστὶ τὸ ζητούμενον παραλλήλογραμμον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΒΛ παραλλήλογραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΒ. (θ) ἀλλὰ καὶ τὸ Γ τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΒ. (ι) τὸ ΒΛ ἄρα
παραλλήλογραμμον ἴσον τῷ δοθέντι τριγώνῳ Γ. (κ) καὶ
παραβεβλήται μὲν παρὰ τὴν δοθεῖσαν ΑΒ, ἔχει δὲ
καὶ γωνίαν τὴν ΜΒΑ ἴσην τῇ δοθείσῃ Δ. (ἢ μὲν γὰρ
ΜΒΑ ἴση τῇ ΕΒΗ, (λ) τῇ δὲ ΕΒΗ ἴση ἡ Δ.) (μ)
τὸ ΒΛ ἄρα παραλλήλογραμμόν ἐστι τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΕ'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλλη-
λόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυ-
γράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ
δοθεῖσα γωνία ἡ Ε. σχ. 75.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ε'πεξεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ συνεχάτω τὸ ΚΗ παραλ-
λήλογραμμον ἴσον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, περιέχον καὶ γω-
νίαν τὴν ΖΚΘ ἴσην τῇ δοθείσῃ Ε. (ν) παρὰ δὲ τὴν
ΗΘ παραβεβλήθω παραλλήλογραμμον τὸ ΘΛ ἴσον τῷ
ΓΔΒ τριγώνῳ, περιέχον καὶ γωνίαν τὴν ΛΗΘ ἴσην τῇ
ΗΘΚ

- (θ) Κατὰ τὴν μγ. πρότ. (ι) Ἐκ τῆς κατασκ., (κ) Κατὰ
τὸ α. Ἀξ. (λ) Κατὰ τὴν ιε. πρότ. (μ) Ἐκ τῆς κατασκ.
(ν) Κατὰ τὴν μβ. πρότ.

ΗΘΚ. (ξ) Λέγω, ότι το ΚΛ ἐστὶ τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΚΗ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΘΛ τῷ ΓΔΒ. (ο) ὅλον ἄρα τὸ ΚΛ ἴσον ἔστω τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ΑΒΓΔ. ἔχει δὲ καὶ γωνίαν τὴν ΖΚΜ ἴσην τῇ δοθείσῃ Ε. (π) τὸ ΚΛ ἄρα τὸ ζητούμενον ἐστίν

Ὅτι δὲ αἱ ΖΗ, ΚΘ ἐπ' εὐθείας κῆνται ταῖς ΗΛ, ΘΜ, δείξεις ἕτως· Αἱ γωνίαι ΖΗΘ, ΗΘΚ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. (ρ) ἀλλ' ἡ ΛΗΘ ἴση τῇ ΗΘΚ. (σ) ἄρα καὶ αἱ ΖΗΘ, ΛΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἡ ΖΗ, τῇ ΗΛ. (τ) πάλιν αἱ ΛΗΘ ΜΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. (υ) ἀλλ' ἡ ΛΗΘ ἴση τῇ ΗΘΚ. (φ) ἄρα καὶ αἱ ΜΘΗ, ΗΘΚ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. καὶ ἡ ΚΘ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΘΜ. (χ).

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Ἐντεῦθεν δῆλον, ὡς καὶ δυσὶ, καὶ πλείοσιν εὐθυγράμμοις ἴσον ἔνεστι παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν, καὶ τὴ διαφορὰν εὐρεῖν τὴν μεταξὺ δύο δοθέντων εὐθυγράμμων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΖ'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ. κ. 76.

ΚΑ-

-
- (ξ) Κατὰ τὴν μδ. πρότ. (ο) Ἐκ τῆς κατασκευ. (π) Ὁσαύτως.
(ρ) Κατὰ τὴν κθ. πρότ. (σ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (τ) Κατὰ τὴν ιδ. πρότ. (υ) Κατὰ τὴν κθ. πρότ. (φ) Ἐκ τῆς κατασκευ.
(χ) Κατὰ τὴν ιδ. πρότ.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

"Ηχθω ἀπὸ τῆς Α ἢ ΑΔ ἴση τε (ψ) καὶ πρὸς ὀρθῶς τῇ ΑΒ. (ω) καὶ ἀπὸ μὲν τῆς Δ ἢ Χθω ἢ ΔΕ παραλλήλος τῇ ΑΒ, ἀπὸ δὲ τῆς Β ἢ ΒΕ παραλλήλος τῇ ΑΔ. (α) λέγω, ὅτι τὸ ΑΕ τὸ ζητούμενον τετράγωνόν ἐστι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμόν ἐστιν. (β) ἴση ἄρα ἢ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἢ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. (γ) ἀλλ' ἢ ΑΔ ἴση τῇ ΑΒ. (δ) αἱ τέσσαρες ἄρα ΑΒ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ δὲ αἱ Α, Β γωνίαὶ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. (ε) ἔστι δὲ ἢ Α ὀρθή. (ζ) καὶ ἢ Β ἄρα ὀρθή ἐστιν. ἀλλ' ἢ μὲν Α ἴση τῇ Ε, ἢ δὲ Β τῇ Δ. (η) ὀρθή ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν Ε, Δ. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον. τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστὶ. (θ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΖ'.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινέσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

"Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ΒΑΓ γωνίαν. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. §. 77.

ΚΑ-

(ψ) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (ω) Κατὰ τὴν ια. πρότ. (α) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (β) Ἐκ τῆς κατασκ. (γ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (δ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ε) Κατὰ τὴν κδ. πρότ. (ζ) Ἐκ τῆς κατασκ. (η) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (θ) Κατὰ τὴν ιβ. ὁρίσ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τὸ ΒΕ τετράγωνον, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τὰ ΗΒ, ΘΓ. (ι) καὶ διὰ τῶ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ ἤχθω παραλλήλος ἡ ΑΔ. (κ) καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΒΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ΓΒΔ. (λ) καὶ ἡ προσκείδω ἡ ΑΒΓ. ἡ ἄρα ΖΒΓ ἴση τῇ ΑΕΔ. (μ) ἐν τοῖς τριγώνοις ἐν ΖΒΓ, ΑΒΔ, ἡ μὲν ΖΒ ἴση τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΒΔ, (ν) καὶ γωνία ἡ ΖΒΓ τῇ ΑΒΔ. τὸ τρίγωνον ἄρα ΖΒΓ ἴσον τῷ ΑΒΔ. (ξ) καὶ ἐστὶ τῶ μὲν ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΗ παραλλήλογράμμον· (ο) βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ· τῶ δὲ ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΔ παραλλήλογράμμον· βάσιν τε γὰρ ἔχουσι τὴν αὐτὴν, τὴν ΒΔ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις, ταῖς ΒΔ, ΑΔ. ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΗ τῷ ΒΔ. (π) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπιζευχθεσῶν τῶν ΒΚ, ΑΕ, δεχθήσεται τὸ ΓΘ ἴσον τῷ ΓΑ. ὅλον ἄρα τὸ ΒΕ ἴσον τοῖς ΒΗ, ΓΘ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΕ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον, τὸ δὲ ΒΗ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ δὲ ΓΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΗ'.

Εἰάν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾗ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τῶ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ
περι-

(ι) Κατὰ τὴν μς. πρότ. (κ) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (λ) Ἐκ τῆς κατασκ. (μ) Κατὰ τὸ β. ἀξ. (ν) Ἐκ τῆς κατασκ. (ξ) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (ο) Κατὰ τὴν μα. πρότ. (π) Κατὰ τὸ ε, ἀξ.

περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τῷ τριγώνῳ δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστὶ.

Τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετραγώνον ἴσον ἔξω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις. λέγω ὅτι ὀρθή ἐστὶν ἡ ΒΑΓ γωνία. χ. 78.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΑΔ πρὸς ὀρθάς τῇ ΑΓ, (ρ) καὶ ἴση τῇ ΑΒ. (σ) καὶ ἐπεξευχθω ἡ ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετραγώνον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ. (τ) κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΑΓ. (υ) ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ. (φ) τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΑΓ, τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ. (χ) τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἴση τῇ ΔΓ. ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΓΑΒ, ΓΑΔ, ἡ μὲν ΒΑ ἴση τῇ ΑΔ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΓΑ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΒΑΓ ἴση τῇ ΔΑΓ. (ψ) ἀλλ' ἡ ΔΑΓ ὀρθή. (ω) καὶ ἡ ΒΑΓ ἄρα ὀρθή ἐστὶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΒΙΒΛΙΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, ὃ καὶ ὀρθογώνιον καλεῖν εἰώθασιν, οἷον τὸ ΑΓΕΖ, περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τῆν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν ἐυθε-

(ρ) Κατὰ τὴν ια. πρότ. (σ) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (τ) Ἰση γὰρ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ. (υ) Κατὰ τὸ β. εἰ. (φ) Ἐξ ὑποθ. (χ) Κατὰ τὴν μζ. πρότ. (ψ) Κατὰ τὴν η. πρότ. (ω) Ἐκ τῆς κατασκ.

ἐυθειῶν, οἷον τῶν ΓΑ, ΑΖ. τετῶν ἡ μὲν τὸ ὕψος,
ἡ δὲ τὴν βάσιν· ἡ, ἡ μὲν τὸ μήκος, ἡ δὲ τὸ πλά-
τος τῷ ὀρθογωνίῳ ἐμφαίνει. πίν. ζ'. κ. 1.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Γίνεται τὸ ὀρθογώνιον ἥτοι τῷ ὕψει ΑΓ ἐπὶ τὴν
βάσιν ΑΖ, ἢ τῷ πλάτει τῆς βάσεως ΑΖ ἐπὶ τὸ ὕψος
φερομένης. εὐθεντοὶ ὡς ἐκ τῷ πολλαπλασιασμῷ τῷ ὕψει
ἢ τῆς βάσεως τὸ τῷ ὀρθογωνίῳ χωρίον ἐνοῦμεν γίνεσ-
θαι. εἰάν γάρ τό τε ὕψος (σχ. 2.) ΑΓ, ἢ τὴν βάσιν
ΑΖ εἰς μέρη ὁποιαῦν ἀλλήλοις ἴσα διέληται· οἷον τὸ μὲν
εἰς 4, τὴν δὲ εἰς 8· τσαῦτα ἴσονται τὰ τετρα-
γωνα τὰ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ΑΓΕΖ περιεχόμενα, εἴτεν
ἐκ τσατέρων τετραγώνων σύγκεται ἢ τῷ ὀρθογωνίῳ
ΑΓΕΖ ἐπιφάνεια, ὅσαι μονάδες ἐν τῷ γινόμενῳ ἐκ τῷ
4 καὶ τῷ 8. ὅπερ ἐστὶ 16. σημαίνουσι δὲ τὸ ὀρθογώ-
νιον, λέγοντες, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΖ, (κ. 1.) ἢ τὸ
ἐκ τῶν ΑΓ, ΑΖ, (εἰζόντες δηλαδή ἐν τῷ μεταξύ τῶν
ΑΓ, ΑΖ, ὅπερ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐμφαίνει.) ἢ τὸ
ΑΓΕΖ, ἢ τὸ ΑΕ, ἢ τὸ ΓΖ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Διὰ τῶν Α, Β, Γ ἢ τῶν ἐξῆς στοιχείων πᾶν ἐτιῦν
ἐμφαίνεται πρᾶγμα. ἢ δύο μὲν παράλληλοι ἐυθεῖαι με-
ταξύ αὐτῶν σημαίνουσιν ἰσότητα οἷον $A = B$, σημαίνει,
ὅτι τὸ Α ἴσον ἐστὶ τῷ Β· τὸ δὲ $A \neq B$, τὸ Α σὺν
τῷ Β, εἴτεν τὸ κεφάλαιον τῶν Α καὶ Β. τὸ δὲ $A - B$, τὸ
Α ἀφαιρεθέντος τῷ Β, τῷ τῆς τὴν διαφορὰν τὴν μεταξύ
τῷ Α καὶ Β· τὸ δὲ Α. Β, ἢ $A \times B$, τὸ γινόμενον ἐκ τῷ πολ-
λαπλασιασμῷ τῷ Α διὰ τῷ Β. λέγεται δὲ τὸ μὲν $+$,
μᾶλλον, ἢ πλέον· τὸ δὲ $-$, ἥττον, ἢ μῶν. τὸ δὲ Α. Β,
ἢ $A \times B$, Α ἐν Β. τὸ δὲ A^2 , ἢ AG^2 , τὸ τετραγώνον
ἐμφαίνει τὸ ἀπὸ τῷ Α, ἢ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἐυθείας.
συντομίας δὲ χάριν τέτοις χρώμεθα τοῖς σημείοις.

Β'.

Β'. Παντὸς παραλληλογράμμου χωρὶς τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ἐν παραλληλόγραμμον ὁποιοῦν σὺν τοῖς δυοῖν παραπληρώμασι. Γνώμων καλεῖται· ἔτεν τῷ παραλληλογράμμῳ ΑΒ ἐν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΕ, σὺν τοῖς δυοῖν παραπληρώμασι ΘΔ, ΔΖ γνώμων καλεῖται. καταγγέλλεται δὲ διὰ τῆς τῷ κύκλου περιφερείας ΚΛΜ. σχ. 3.

Γ. Ὑψος παντός σχήματος ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη κάθετος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Ἐὰν ὥσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσαδηποτὲν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἰσὸν ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τῆς ἀλμῆς καὶ ἐκάσθ τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἐξωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τετμήθω ἡ ΒΓ ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ Δ, Ε σημεία. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἰσὸν ἐστὶ τῷ ὑπὸ τε τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΓ. σχ. 4.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω. ἀπὸ τῷ Β σημείῳ τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ. (α) καὶ κείθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΒΗ. (β) καὶ διὰ μὲν τῷ Η, ἤχθω ἡ ΗΘ παράλληλος τῇ ΒΓ· διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ, αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ τῇ ΒΗ παράλληλοι. (γ).

ΔΕΙ-

(κ) Κατὰ τὴν ια. πρότ. τῷ α. β. (β) Κατὰ τὴν γ. τῷ α. β.

(γ) Κατὰ τὴν λα. τῷ α. β.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΒΘ ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ ὀρθογώνιαις. (δ) ἀλλὰ τὸ ΒΘ ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· (ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΗ.) (ε) τὰ δὲ ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, καὶ ΑΒ, ΔΕ· (ἴση γὰρ ἡ ΔΚ τῇ ΒΗ, εἶτα τῇ ΑΒ) καὶ ΑΒ, ΕΓ (ἴση γὰρ ἡ ΕΛ τῇ ΒΗ, ταῦτέστι τῇ ΑΒ.) περιέχεται. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὥς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα ἡ ΑΒ τετμήθω ὥς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ. Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΒ τετραγώνῳ. Χ. 5.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΕΔ. (ζ) καὶ ἤχθω διὰ τῷ Γ ὁποτέρου τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ. (η)

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τετράγωνον ΑΕ = ΓΕ + ΑΖ. (θ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΕ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΒ τετράγωνον· τὸ δὲ ΓΕ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· (ἴση γὰρ

Δ

ἡ

(δ) Κατὰ τὸ θ. Ἀξ. (ε) Ἐκ τῆς κατασκ. (ζ) Κατὰ τὴν μετὰ α. (η) Κατὰ τὴν λα. τῇ κ. (θ) Κατὰ τὸ θ. αξ.

ἢ ΕΒ τῇ ΑΒ) τὸ δὲ ΑΖ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ. τῶν ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετα-
τῆς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΒ
τετραγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ ὡς ἔτυχε τμηθῇ, τὸ
ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐνὸς τῶν τμημάτων περι-
εχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν
τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ
ἀπὸ τῆς προειρημένης τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα ἡ ΑΒ τετμήθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ. λέ-
γω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον
ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὀρθογωνίῳ μετὰ τῆς ἀπὸ
τῆς ΒΓ τετραγώνου. σχ. 6.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνον τὸ ΓΔΕΒ
(ι) καὶ ἐκβεβλήθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ. καὶ διὰ τῆς Α
ἤχθω ἡ ΑΖ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΒΕ. (κ)

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΕ = ΑΔ + ΓΕ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΕ ὀρθογών-
ιον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον (ἴση γὰρ
ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ, (λ) εἴτεν τῇ ΒΓ.) (μ) τὸ δὲ ΑΔ, τὸ
ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὸ δὲ ΓΕ, τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγ-
ώνον. (ν) τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα περιεχόμενον
ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τῆς ἀπὸ
τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

ΠΡΟ

(ι) Κατὰ τὴν μετ. τῆς κ. βιβλ. (κ) Κατὰ τὴν λα. τῆς αὐτ.
(λ) Κατὰ τὴν λαδ. τῆς αὐτ. (μ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ν) Ἐκ
τῆς κατασκευ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἐν
ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἔσοι
ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις,
ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὅρῳ.

Ἐθεῖα γραμμὴ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἐν
Γ. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον
τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις, καὶ
τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. ἧ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον
ὡς ἐπεξεύχθω ἡ ΒΔ. καὶ διὰ μὲν τῆς Γ ἡ χθ
παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ· διὰ δὲ τῆς
παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΕ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΒ = ΑΔ. (ξ) ἄρα καὶ γωνία ἡ Α
(ο) ἄλλ' ἡ ΔΑΒ ὀρθή ἐστιν. (π) ἑκατέρῃ
ΑΒΔ, ΑΔΒ ἡμίσεια ὀρθῆς. (ρ) καὶ ἐπεὶ
ΒΑΘ· (σ) ὀρθὴ δὲ ἡ ΒΑΘ, ὀρθὴ ἄρα καὶ
δὲ καὶ ἡ ΓΒΗ ἡμίσεια ὀρθῆς, ὡς δέδεικται,
ἄρα ἡμίσεια ὀρθῆς. (τ) ἄρα καὶ ἡ ΓΒ
ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ = ΗΚ, ἡ δὲ ΓΗ = ΒΚ.
ἰσόπλευρόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρῃ
ΓΒΚ, καὶ τῇ μὲν ΗΓΒ = ΗΚΒ, τῇ δὲ Γ
(φ) ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ΓΚ. ἄλλα δέδεικται.

Δ 2

(ξ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ο) Κατὰ τὴν ε. τῆς α. (π)
τασκ. (ρ) Κατὰ τὴν θ. συνέπ. τῆς λβ. τῆς
τὴν κθ. τῆς α. (τ) Κατὰ τὴν αὐτ. συνέπ. (υ)
τῆς α. (φ) Κατὰ τὴν λδ. τῆς κ.

πλευρὸν τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὀρθογώνιον (ἴση γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΓΒ, ὡς δέδεικται.) ὁ καὶ ἴσον τῷ ΗΕ. τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ $ΑΕ = ΘΖ + ΓΚ + ΑΗ + ΗΕ$. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις, καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὰ περὶ τῇ διάμετρον τῷ τετραγώνῳ παραλληλόγραμμα, τετράγωνα εἰσιν, ὡς ἐκ τῶν δευχθέντων ὀφθαλμοῦ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Εἰάν τις γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἀνίστα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίστων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς μετὰ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἀνίστα κατὰ τὸ Δ. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. κ. 8.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΒ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΕ. καὶ διὰ μὲν τῷ Δ ἤχθω ἡ ΔΗ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΒΖ· διὰ δὲ τῷ Θ, ἡ ΚΜ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ· διὰ δὲ τῷ Α, ἡ ΑΚ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΓΑ, ΒΜ.

ΔΕΙ-

Τὸ $\Gamma\Theta = \Delta Z$. (χ) κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔM . τὸ
 ἄρα $\Gamma M = \Delta Z$. (ψ) ἀλλὰ καὶ τὸ $A\Lambda = \Gamma M$. (ω)
 τὸ ἄρα $A\Lambda = \Delta Z$. (α) κοινὸν προσκείσθω τὸ $\Gamma\Theta$. τὸ
 ἄρα $A\Theta$ ἴσον τῷ γινώμονι IPN . (β) κοινὸν προσκείσθω
 τὸ ΛH . ἄρα $A\Theta + \Lambda H = \Gamma Z$. ἀλλὰ τὸ $A\Theta$ τὸ ὀρ-
 θογώνιον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB . (ἴση γὰρ ἡ $\Delta\Theta$ τῇ
 ΔB) (γ) τὸ δὲ ΛH τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τετραγώνου ἐστὶ,
 (δ) τὸ δὲ ΓZ , τὸ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνου. τὸ ἄρα
 ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῷ
 ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓB τε-
 τραγώνου.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ .

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ $\Gamma\mu\eta\theta\eta$ δίχα, προσεθῇ
 δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς
 ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τῆς προσκειμένης
 περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς
 ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγ-
 κειμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμέ-
 νης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνου.

Εὐθεῖα ἡ AB τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ , προσ-
 κείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ BD . λέγω,
 ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB περιεχόμενον ὀρθογώνιον με-
 τὰ τῷ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς
 $\Gamma\Delta$ τετραγώνου. χ . 9,

Δ 3

ΚΑ.

(χ) Κατὰ τὴν $\mu\gamma$. τῷ α . (ψ) Κατὰ τὸ β . $\alpha\zeta$. (ω) Κατὰ τὴν
 $\lambda\varsigma$. τῷ κ . (α) Κατὰ τὸ κ . $\alpha\zeta$. (β) Κατὰ τὸ β . $\alpha\zeta$. (γ) Κα-
 τὰ τὴν $\pi\rho\omicron\lambda\alpha\beta$. σημάσας, (δ) Κατὰ τὴν αὐτήν.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ. καὶ διὰ μὲν τῆ Β ἤχθω ἡ ΒΗ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΔΖ, ΓΕ· διὰ δὲ τῆ Θ, ἡ ΜΚ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΖ· διὰ δὲ τῆ Α, ἡ ΑΚ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΔΜ παράλληλος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ $\Gamma\Theta = \Theta Z$. (ε) ἀλλὰ καὶ τὸ $\Lambda\Lambda = \Gamma\Theta$. (ζ) τὸ ἄρα $\Theta Z = \Lambda\Lambda$. (η) κοινὸν προσκείσθω τὸ $\Gamma\Theta$. τὰ ἄρα $\Theta Z + \Gamma\Theta = \Lambda\Theta$. (θ) κοινὸν προσκείσθω τὸ ΒΜ. ὁ ἄρα γνώμων $\Gamma\Lambda = \Delta\Lambda$. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ. ἄρα $\Lambda\Lambda + \Lambda\Lambda = \Gamma Z$. (ι) ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΜ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον (ἴση γὰρ ἡ ΔΜ τῇ ΒΔ.) (κ) τὸ δὲ ΛΗ, τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἐστὶ τετράγωνον. (λ) τὸ δὲ ΓΖ, τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. (μ) τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῆ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Εἰάν ἐυθῆα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῷ ἐρημένῳ τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τμήματος τετραγώνῳ.

Ευ.

- (ε) Κατὰ τὴν μγ. τῆ α. (ζ) Κατὰ τὴν λς. τῆ α. (η) Κατὰ τὸ α. αῖ. (θ) Κατὰ τὸ β. αῖ. (ι) Κατὰ τὸ αὐτό. (κ) Κατὰ τὴν ἀρμ. σημύωσιν. (λ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (μ) Ἐκ τῆς κατασκευ.

Ἐυθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήθω ὥς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ. Λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ. κ. 10.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀναγεγράφθω τετράγωνα ἀπο μὲν τῆς ΑΒ, τὸ ΑΔ, ἀπὸ δὲ τῆς ΑΓ, τὸ ΑΛ. καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΕ. καὶ ἐκβεβλήθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Ζ. καὶ διὰ τῆς Θ ἤχθω ἡ ΜΗ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΕΔ, ΑΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Η' μὲν $HA = GB$. (ἴση γὰρ τῇ ΘΓ, ἴση ἔσθ' τῇ ΓΒ.)
(ν) ἡ δὲ $AK = AG$. (ξ) ὅλη ἄρα ἡ $HK = AB$. ἀλλὰ καὶ ἡ $HΘ = AG$. τὸ ἄρα ΗΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἐστὶ. πάλιν ἐπεὶ ἡ μὲν $HM = AB$, ἡ δὲ $EH = AG$. ἴση γὰρ τῇ ΗΘ, εἴτεν τῇ ΑΓ. καὶ τὸ ΗΔ ἄρα ὀρθογώνιον ἐστὶν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ περιεχόμενον. τὸ ἄρα ΗΔ σὺν τῷ ΗΔ τὸ δις ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ περιεχόμενον. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΜ, τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον. (ο) τὸ δὲ ΑΔ, τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ. καὶ ἐπεὶ τὰ $AD + AL = HL + HL + GM$. (π) ὅλην ἄρα ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Εἰὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὥς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῷ ἀπὸ

Δ 4

(ν) Κατὰ τὴν σημ. τὴν μετὰ τὴν δ. σφότ. τῷ δὲ τῷ β. βλ. (ξ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ο) Κατὰ τὴν σημ. σημ. (π) Κατὰ τὸ β. Ἀξ.

ἀπὸ τῆς λοιπῆς τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς εἰρημένης τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐυθεία γὰρ ἡ ΑΒ τεμήσθω ὡς ἔτυχεν κατὰ τὸ Γ. λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῆς ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. χ. 11.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθω ἐπ' εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεία ἡ ΒΔ, καὶ κείθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΒΔ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον τὸ ΔΟ. καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΛ. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν Β καὶ Γ σημείων ἤχθωσαν αἱ ΒΙ, ΓΖ παράλληλοι ὁποτέρᾳ τῶν ΑΟ, ΔΛ ἀπὸ δὲ τῶν Ρ, Σ, αἱ ΤΝ, ΜΗ παράλληλοι ὁποτέρᾳ τῶν ΔΑ, ΔΟ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΔΣ = ΣΟ. παραπληρώματα γάρ εἰσι τῆς παραλληλογράμμου ΔΟ. (ρ) ἀλλὰ καὶ τὸ ΒΣ = ΣΝ. παραπληρώματα γάρ τῆς ΒΝ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΠ ἴσον λοιπῷ τῷ ΚΟ. (σ) ἀλλὰ τὰ ΔΠ, ΒΣ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. (τ) τὰ τέσσαρα ἄρα ΔΠ, ΒΣ, ΣΝ, ΚΟ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. πάλιν τὸ ΜΡ = ΡΖ. παραπληρώματα γάρ τῆς παραλληλογράμμου ΜΖ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΜΡ = ΠΚ, τῷ δὲ ΡΖ = ΤΙ. (υ) τὰ τέσσαρα ἄρα ΜΡ, ΠΚ, ΡΖ, ΤΙ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. προσκεῖσθω τῷ μὲν ΚΟ τὸ ΡΖ, τῷ δὲ ΔΠ τὸ ΜΡ, τῷ δὲ ΒΣ τὸ ΠΚ, τῷ δὲ ΣΝ τὸ ΤΙ. τὰ τέσσαρα ἄρα ΝΙ, ΔΡ,

(ρ) Κατὰ τὴν μγ. τῆς α. (σ) Κατὰ τὸ γ. εἰς. (τ) Κατὰ τὴν λγ. τῆς α. (υ) Κατὰ τὴν αὐτήν.

ΔP , BK , καὶ $\Sigma N + TI$ ἴσα ἀκμήλοις εἰσίν. (ψ) ἀπὸ
 τὸ μὲν NI ὀρθογώνιον ἐστὶ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν AB ,
 BG . ἴση γὰρ ἡ μὲν IO τῇ AB . (χ) ἡ δὲ PI τῇ IL ,
 (ψ) τετρεῖς τῇ ΔB , (ω) εἴτεν τῇ BG . (α) τὰ ἄρα
 NI , ΔP , BK , $\Sigma N + TI$ τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν AB ,
 BG περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἰσίν. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ μὲν GH τὸ
 ἀπὸ τῆς AG τετραγώνον (β) τὸ δὲ ΔO , τὸ ἀπὸ τῆς
 AB , BG , ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέν τετραγώνον. (γ)
 καὶ ἐπεὶ τὸ $\Delta O = NI + \Delta P + BK + \Sigma N + TI + GH$.
 (δ) τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB , BG περιεχόμενον
 ὀρθογώνιον μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ
 τῷ ἀπὸ τῆς AB , BG , ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι
 τετραγώνῳ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἀνι-
 σα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημά-
 των τετράγωνα διπλάσιά ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ
 τῆς ἡμισείας, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν
 τομῶν τετραγώνῳ.

Ἐυθεῖα ἡ AB τετμήθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ ,
 εἰς δὲ ἀνισα κατὰ τὸ Δ , λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν $\Delta\Delta$,
 ΔB τετράγωνα διπλάσιά ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν AG , $\Gamma\Delta$
 τετραγώνων. χ. 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῷ Γ ἡ ΓE πρὸς ὀρθῶς τῇ AB , (ε)
 καὶ ἴση ἐκατέρω τῶν AG , ΓB . (ζ) καὶ ἐπεξεύχθω-

Δ 5

σαν

- (φ) Κατὰ τὸ β. ἀξ. (χ) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. (ψ) Κατὰ τὴν ερημ.
 σημ. (ω) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. (α) Ἐκ τῆς κατασκ. (β) Κατὰ
 τὴν ερημ. σημ. (γ) Ἐκ τῆς κατασκ. (δ) Κατὰ τὸ θ. ἀξ.
 (ε) Κατὰ τὴν ια. τῷ α. (ζ) Κατὰ τὴν γ. τῷ α.

σαν αἱ ΕΑ, ΕΒ. καὶ διὰ μὲν τῷ Δ ἡχθω ἡ ΔΖ πα-
ράλληλος τῇ ΓΕ· διὰ δὲ τῷ Ζ, ἡ ΖΗ παράλληλος
τῇ ΑΒ. (η) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Η' ΑΓ = ΓΕ. (θ) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΓΑΕ = ΓΕΑ.
(ι) ἀλλ' ἡ ΑΓΕ ὀρθή. (κ) ἐκατέρω αἶρα τῶν ΓΑΕ,
ΓΕΑ ἡμίσεια ὀρθῆς. (λ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκα-
τέρω τῶν ΓΒΕ, ΓΕΒ ἡμίσεια ὀρθῆς. ὅλη αἶρα ἡ ΑΕΖ
ὀρθή ἐστ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΔΒΖ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστίν,
ἡ δὲ ΖΔΒ ὀρθή· ἴση γὰρ τῇ ΕΓΒ· (μ) καὶ ἡ ΔΖΒ
αἶρα ἡμίσεια ὀρθῆς. (ν) ἴση αἶρα ἡ ΔΒΖ τῇ ΔΖΒ.
αἶρα καὶ ἡ ΔΒ = ΔΖ. (ξ) πάλιν ἐπεὶ ἡ ΗΖΕ = ΓΒΖ.
(ο) καὶ ἡ ΗΖΕ αἶρα ἡμίσεια ὀρθῆς. ἀλλὰ καὶ ἡ ΗΕΖ
ἡμίσεια ὀρθῆς δέδεικται. ἡ αἶρα ΗΖΕ = ΗΕΖ. αἶρα καὶ
ΗΖ = ΗΕ. (π) καὶ ἐπεὶ $\overline{ΑΕ}^2 = \overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΕ}^2$ (ρ) ἐστὶ
δὲ ἡ ΑΓ = ΓΕ. (σ) τὸ αἶρα $\overline{ΑΕ}^2$ διπλασίον τῷ $\overline{ΑΓ}^2$,
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ $\overline{ΕΖ}^2$ διπλασίον τῷ $\overline{ΗΖ}^2$, εἴτεν τῷ
 $\overline{ΓΔ}^2$. ἴση γὰρ ἡ ΗΖ τῇ ΓΔ. αἶρα $\overline{ΑΕ}^2 + \overline{ΕΖ}^2$ διπλα-
σιά ἐστὶ τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ἀλλὰ $\overline{ΑΕ}^2 + \overline{ΕΖ}^2 = \overline{ΑΖ}^2$. (τ)
τὸ αἶρα $\overline{ΑΖ}^2$ διπλασίον τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ἀλλ' $\overline{ΑΖ}^2 =$
 $\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΔΖ}^2$. (υ) τὰ αἶρα $\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΔΖ}^2$ διπλασίον ἐστὶ
τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ἀλλὰ $\overline{ΔΖ} = \overline{ΔΒ}$ ὡς δέδεικται. τὰ
αἶρα $\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΔΒ}^2$ διπλασία τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ὅπερ ἔδει
δείξαι.

ΠΡΟ.

- (υ) Κατὰ τὴν λα. τῷ α. (θ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ι) Κατὰ τὴν ε.
τῷ κ. (κ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (λ) Κατὰ τὴν θ. συνέπ. τῆς λβ.
τῷ α. (μ) Κατὰ τὴν κθ. τῷ α. (ν) Κατὰ τὴν αὐτὴν συνέπ.
(ξ) Κατὰ τὴν σ. τῷ α. (ο) Κατὰ τὴν κθ. τῷ α. (π) Κατὰ
τὴν ε. τῷ α. (ρ) Κατὰ τὴν μζ. τῷ κ. (σ) Ἐκ τῆς κατασκευ.
(τ) Κατὰ τὴν ρα. τῷ α. (υ) Κατὰ τὴν αὐτὴν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προσεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐσι τῷ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἕκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Εὐθεῖα ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ. λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐσι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. πίν. Η. 9. 13.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἡ ΓΕ πρὸς ὀρθᾶς τῇ ΑΒ, (Φ) καὶ ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ. (Χ) καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ. καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ἤχθω ἡ ΕΖ παράλληλος τῇ ΑΔ, διὰ δὲ τοῦ Δ, ἡ ΔΖ παράλληλος τῇ ΓΕ. (Ψ) καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΕΒ, ΖΔ, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δειχθήσεται ὡς καὶ ἐν τῇ προλαβέσῃ προτάσει, ὅτι ἡ μὲν ΑΕΒ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ΕΒΓ ἡμίσεια ὀρθῆς. ἐπεὶ δὲ ἡ ΔΒΗ = ΕΒΓ. (ω) καὶ ἡ ΔΒΗ ἄρα ἡμίσεια ὀρθῆς. ἀλλ' ἡ ΒΔΗ ὀρθή· ἴση γὰρ τῇ ΔΓΕ.
(α)

(Φ) Κατὰ τὴν ια. τῷ α. (Χ) Κατὰ τὴν γ. τῷ α. (Ψ) Κατὰ τὴν λα. τῷ α. (ω) Κατὰ τὴν στ. τῷ α.

(α) ἄρα καὶ ἡ ΒΗΔ ἡμίσεια ὀρθῆς. (β) ἡ ἄρα ΔΒΗ = ΔΗΒ. ἄρα καὶ ΔΒ = ΔΗ. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΕΗΖ ἡμίσεια ὀρθῆς, ἡ δὲ ΕΖΗ ὀρθή· ἴση γὰρ τῇ ΕΓΔ. (γ) καὶ ἡ ΖΕΗ ἄρα ἡμίσεια ὀρθῆς. ἡ ἄρα ΕΗΖ = ΖΕΗ. ἄρα καὶ ΖΗ = ΖΕ. (δ) καὶ ἐπεὶ $\overline{ΑΕ}^2 = \overline{ΕΓ}^2 + \overline{ΑΓ}^2$. (ε) ἐστὶ δὲ $\overline{ΕΓ}^2 = \overline{ΑΓ}^2$. ἡ γὰρ ΕΓ = ΑΓ. (ζ) τὸ ἄρα $\overline{ΑΕ}^2$ διπλάσιον τῷ $\overline{ΑΓ}^2$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $\overline{ΕΗ}^2$ διπλάσιον τῷ $\overline{ΕΖ}^2$, εἶπεν τῷ $\overline{ΓΔ}^2$. ἡ γὰρ ΕΖ = ΓΔ. τὰ ἄρα $\overline{ΑΕ}^2 + \overline{ΕΗ}^2$ διπλάσια τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ἀλλὰ τὰ $\overline{ΑΕ}^2 + \overline{ΕΗ}^2 = \overline{ΑΗ}^2$. (η) τὸ ἄρα $\overline{ΑΗ}^2$ διπλάσιον τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ἀλλ' $\overline{ΑΗ}^2 = \overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΔΗ}^2$. (θ) τὰ ἄρα $\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΔΗ}^2$ διπλάσια τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ἀλλὰ $\overline{ΔΗ}^2 = \overline{ΒΔ}^2$. δέδεικται γὰρ ἡ ΔΗ = ΒΔ. τὰ ἄρα $\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΒΔ}^2$ διπλάσια τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τῶν ἑτέρων τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῶν λοιπῶν τμήματος τετραγώνῳ.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ. κ. 14.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἀπὸ τῶν Α σημείων ἤχθω ἡ ΑΔ πρὸς ὀρθάς τε καὶ ἴση τῇ ΑΒ. καὶ τετμήσω δίχα ἡ ΑΔ κατὰ τὸ Ε, καὶ
 ἔπε-

- (α) Κατὰ τὴν κθ. τῷ α. (β) Κατὰ τὴν θ συνέπ. τῆς λβ. τῷ α.
 (γ) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. (δ) Κατὰ τὴν ε. τῷ α. (ε) Κατὰ τὴν μζ. τῷ α. (ζ) Ἐκ τῆς κατασκ. (η) Κατὰ τὴν μζ. τῷ α. (θ) Κατὰ τὴν αὐτήν.

ἐπεξεύχθω ἡ ΕΒ. καὶ διήχθω ἡ ΔΑ ἐπὶ τὸ Ζ· καὶ κείδω ἡ ΕΖ ἴση τῇ ΕΒ. εἰλήφθω δὲ ἡ ΑΗ ἴση τῇ ΑΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Η, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης ΑΒ καὶ τῆς ἑτέρας τῶν τμημάτων ΗΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τμήματος ΑΗ τετραγώνῳ. ἀναγεγάφθω γὰρ τετράγωνον ἀπὸ μὲν τῆς ΑΒ, τὸ ΑΓ· ἀπὸ δὲ τῆς ΑΗ, τὸ ΑΘ.

ΔΕΙΞΙΣ.

ΔΖ. ΖΑ + ΕΑ² = ΕΖ². (ι) ἀλλ' ΕΖ² = ΕΒ². (κ) ἄρα ΔΖ. ΖΑ + ΕΑ² = ΕΒ². (λ) ἀλλ' ΕΒ² = ΕΑ² + ΑΒ². (μ) ἄρα ΔΖ. ΖΑ + ΕΑ² = ΕΑ² + ΑΒ². (ν) κοινὸν ἀφηρέθω τὸ ΕΑ². ἄρα ΔΖ. ΖΑ = ΑΒ². (ξ) ἀλλὰ τὸ ΔΖ. ΖΑ τὸ ὀρθογώνιον ΔΘ εἶναι ἴση γὰρ ἡ ΖΑ τῇ ΖΘ. τὸ δὲ ΑΒ², τὸ ΑΓ τετράγωνόν εἶναι. τὸ ἄρα ΔΘ = ΑΓ. κοινὸν ἀφηρέθω τὸ ΔΗ. τὸ ἄρα ΗΓ = ΑΘ. (ο) ἀλλὰ τὸ μὲν ΗΓ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΗΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· τὸ δὲ ΑΘ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΗ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετραγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Εν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλείαν γωνίαν ὑποτανύσεως πλευρᾶς τετράγωνον, μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλείαν περιεχσῶν πλευρῶν τετραγώνων,
τῷ

- (ι) Κατὰ τὴν ε. τῷ β. (κ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (λ) Κατὰ τὸ α. ἀξ. (μ) Κατὰ τὴν μζ. τῷ α. (ν) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (ξ) Κατὰ τὸ γ. Ἀξ. (ο) Κατὰ τὸ αὐτ. Ἀξ.

τῷ περιεχομένῳ δις ὑποτε μίας τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτης πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνία.

Ἐστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ΒΑΓ γωνίαν. καὶ ἡχθῶ ἀπὸ τῆς Β σημείω ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἐστὶν, ὅτι $\overline{ΒΓ}^2 = \overline{ΒΑ}^2 + \overline{ΑΓ}^2 + 2\overline{ΓΑ} \cdot \overline{ΑΔ}$. χ. 15.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ $\overline{ΒΓ}^2 = \overline{ΓΑ}^2 + \overline{ΒΔ}^2$. (θ) ἀλλὰ $\overline{ΓΔ}^2 = \overline{ΓΑ}^2 + \overline{ΑΔ}^2 + 2\overline{ΓΑ} \cdot \overline{ΑΔ}$. (ι) τὸ ἄρα $\overline{ΒΓ}^2 = \overline{ΓΑ}^2 + \overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΒΔ}^2 + 2\overline{ΓΑ} \cdot \overline{ΑΔ}$. (κ) ἀλλ' $\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΒΔ}^2 = \overline{ΑΒ}^2$. (ρ) ἄρα $\overline{ΒΓ}^2 = \overline{ΓΑ}^2 + \overline{ΒΑ}^2 + 2\overline{ΓΑ} \cdot \overline{ΑΔ}$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τρίγωνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξείαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετραγώνου ἑλαττόν ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξείαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῇ περιεχομένῳ δις ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξείαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς

(θ) Κατὰ τὴν μζ. τῆ α. (ι) Κατὰ τὴν δ. τῆ β. (κ) Κατὰ τὸ α. αζ. (ρ) Κατὰ τὴν μζ. τῆ α.

τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς κα-
θέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ

Ἐξω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ὀξείαν ἔχον τὴν
πρὸς τῷ Β γωνίαν. καὶ ἤχθω ἀπὸ τῆς Α σημείω ἐπὶ
τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τε-
τράγωνον ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων
τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, τετέστιν
ὅτι $ΑΓ^2 + 2ΓΒ \cdot ΒΔ = ΓΒ^2 + ΒΑ^2$. χ. 16.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ $ΒΓ^2 + ΒΔ^2 = 2ΓΒ \cdot ΒΔ + ΓΔ^2$. (σ) κοινὸν προσ-
κείθω τὸ $ΑΔ^2$. ἄρα $ΒΓ^2 + ΒΔ^2 + ΑΔ^2 = 2ΓΒ \cdot$
 $ΒΔ + ΓΔ^2 + ΑΔ^2$. (τ) ἀλλὰ τὰ μὲν $ΒΔ^2 + ΑΔ^2 =$
 $ΑΒ^2$. τὰ δὲ $ΓΔ^2 + ΑΔ^2 = ΑΓ^2$. (υ) ἄρα καὶ $ΑΓ^2 +$
 $2ΓΒ \cdot ΒΔ = ΒΓ^2 + ΑΒ^2$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐάν δὲ ἡ κάθετος ΑΔ ἐκτὸς τῆς τριγώνου πίπτῃ,
(ὡς ἐν τῷ 17 χ.) δευθρήσεται ἔτι. Τὸ $ΑΒ^2 = ΑΔ^2 +$
 $ΒΔ^2$. (φ) ἀλλὰ τὸ $ΒΔ^2 = 2ΔΓ \cdot ΒΓ + ΓΒ^2 + ΓΔ^2$.
(χ) ἄρα $ΑΒ^2 = 2ΔΓ \cdot ΒΓ + ΓΒ^2 + ΓΔ^2 + ΑΔ^2$. (ψ)
ἀλλὰ $ΓΔ^2 + ΑΔ^2 = ΑΓ^2$. (ω) ἄρα $ΑΒ^2 = 2ΔΓ \cdot ΒΓ +$
 $ΓΒ^2 + ΑΓ^2$. κοινὸν προσκείθω τὸ $ΒΓ^2$. ἄρα $ΑΒ^2 +$
 $ΒΓ^2 = 2ΔΓ \cdot ΒΓ + 2ΓΒ^2 + ΑΓ^2$. (α) ἀλλὰ $ΔΓ \cdot ΒΓ +$
 $ΒΓ^2 = ΔΒ \cdot ΒΓ$. (β) ἐνθεντοί καὶ $2ΔΓ \cdot ΒΓ + 2ΒΓ^2 =$
 $2ΔΒ \cdot ΒΓ$. (γ) ἄρα $ΑΓ^2 + 2ΔΒ \cdot ΒΓ = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$.

ΠΡΟ-

- (σ) Κατὰ τὴν ζ. τῆ β. (τ) Κατὰ τὸ β. ὡξ. (υ) Κατὰ τὴν
μζ. τῆ α. (φ) Κατὰ τὴν αὐτὴν. (χ) Κατὰ τὴν δ. τῆ β.
(ψ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (ω) Κατὰ τὴν μζ. τῆ α. (α) Κατὰ
τὸ β. κξ. (β) Κατὰ τὴν γ. τῆ β. (γ) Κατὰ τὸ ε. Ἀξ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ΄.

Τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον Α. Χ. 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω τῷ Α εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ. (δ) εἰ μὲν ἔν ἴση ἔσιν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γεγονός ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δ' ὄχι, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μείζων ἔσιν. ἔστω δὴ μείζων ἡ ΒΕ· καὶ ἐκβεβλήθω ἐπὶ τὸ Ζ. καὶ κείθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ. (ε) καὶ τετμήθω ἡ ΒΖ δίχα κατὰ τὸ Η. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γεγραφθῶ τὸ ΒΘΖ· καὶ ἐκβεβλήθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγεγραφόμενον τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ Α. ἐπεξεύχθω γάρ ἡ ΗΘ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ ΒΕ. ΕΖ + ΗΕ² = ΗΖ². (ζ) ἀλλ' ΗΖ² = ΗΘ². ἴση γὰρ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ. (η) τὰ ἄρα ΒΕ. ΕΖ + ΗΕ² = ΗΘ². (θ) ἀλλ' ΗΘ² = ΗΕ² + ΕΘ². (ι) τὰ ἄρα ΒΕ. ΕΖ + ΗΕ² = ΗΕ² + ΕΘ². (κ) κοινὸν ἀφηρήθω τὸ ΗΕ². τὸ ἄρα ΒΕ. ΕΖ = ΕΘ². ἀλλὰ τὸ ΒΕ. ΕΖ ἐστὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔ. ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΔ. (λ) τὸ ἄρα ΒΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ τὸ εὐθύγραμμον Α ἴσον τῷ ΒΔ. (μ) τὸ ἄρα εὐθύγραμμον Α ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. (ν).

Περὶ

- (δ) Κατὰ τὴν με. τῆ α. (ε) Κατὰ τὴν γ. τῆ α. (ζ) Κατὰ τὴν ε. τῆ β. (η) Κατὰ τὸ δ. πόρις. (θ) Κατὰ τὸ α. αἴ. (ι) Κατὰ τὴν με. τῆ α. (κ) Κατὰ τὸ αὐτὸ αἴ. (λ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (μ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ν) Κατὰ τὸ αὐτὸ αἴ.

Περὶ καταμετρήσεως τῶν ἐνδυ- γράμμων χημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Α΄.

Τῷ δοθέντος ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ τὸ ἐμβαδὸν, εἶπεν τὸ
ὑπ' αὐτῷ περιεχόμενον χωρίον, καταμετρήσαι. Χ. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τῷ αὐτῷ μέτρω καταμετρηθήτω τό, τε ὕψος ΑΒ
τῷ ὀρθογωνίῳ καὶ ἡ βάσις ΒΓ. καὶ ἔσω τὸ μὲν ἴσον
πρὸς 5, ἡ δὲ, 6. καὶ πολλαπλασιασθήτω τὸ ὕψος
ΑΒ διὰ τῆς βάσεως ΒΓ, εἶπεν ὁ 5 διὰ τῷ 6. λέγω,
ὅτι τὸ γινόμενον 30, ὅπερ τριάκοντα ἐμφαίνει ποδιαῖα
τετράγωνα, ἴσον ἐστὶ τῷ τῷ ὀρθογωνίῳ ἐμβαδῷ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν ἡ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΒΓ φέξηται, ἐπὶ μὲν τὸ Ε ἀφι-
κομένη, πέντε καταγράψει τετράγωνα· ἐπὶ δὲ τὸ Ζ,
ἔτι πέντε, καὶ ἐφ' ἑκάστον δὲ τῶν ἐξῆς σημείων Η, Θ, Ι, Γ
ὁμοίως ἀνὰ πέντε. ἐπὶ τὸ Γ ἄρα σημεῖον καταντήσασα
30 καταγράψει. ὥστε δῆλον, ὅτι ἴσα εἰσὶ τῷ τῷ ὀρ-
θωγωνίῳ ἐμβαδῷ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

Τῷ δοθέντος παραλληλογράμμου ΑΓΔΒ τὸ ἐμβαδὸν
καταμετρήσαι. Χ. 20.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΓΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ΑΒ, τὸ τῷ
παραλληλογράμμου ὕψος ἐμφαίνουσα. καὶ κοινῷ κατα-
μετρηθήτω μέτρω τό, τε ὕψος ΓΖ καὶ ἡ βάσις ΑΒ. καὶ ἔσω
τὸ μὲν ΓΖ = 3· ἡ δὲ ΑΒ = 4 ποσί. λέγω ὅτι τὸ
γινόμενον ἐκ τῷ τῷ ὕψους καὶ τῆς βάσεως, ἦτοι τὸ 12
ἴσον ἐστὶ τῷ τῷ παραλληλογράμμου ἐμβαδῷ. ἐκβεβλήσ-

Ε

Δω

Θω γάρ ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Η· καὶ ἤχθω ἀπὸ τῆ Δ ἡ ΔΗ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΑΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΖΓΔΗ ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΓΔΒ παραλληλογράμῳ· (ξ) ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΗ βάσις ἴση τῇ ΑΒ· (ο) ἑκατέρω γὰρ ἴση τῇ ΓΔ· (π) τὸ δὲ τῷ ὀρθογωνίῳ ἐμβαδὸν ἴσον τῷ γινόμενῳ ἐκ τῆ ὕψους καὶ τῆς βάσεως, εἶπεν τῷ 12. (ρ) καὶ τὸ τῷ παραλληλογράμῳ ἄρα ἐμβαδὸν ἴσον τῷ ἐκ τῆ ὕψους καὶ τῆς βάσεως γινόμενῳ 12, τετέστι δώδεκα ποδιαίοις τετραγώνοις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

Τῷ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ τὸ ἐμβαδὸν καταμετρήσῃς.
 Ζ. 21.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἦχθω ἡ ΒΔ κάθετος τῇ ΑΓ, τὸ τῷ τριγώνῳ ὕψος ἐμφαίνεσα. καὶ καταμετρήσῃς τὸ, τε ΒΔ, καὶ ἡ ΑΓ. καὶ ἔσω τὸ μὲν ἴσον δακτύλοις (σ) 7· ἡ δὲ, 8. λέγω, ὅτι τὸ ἡμισυ τῷ γινόμενῳ ἐκ τῆ ὕψους καὶ τῆς βάσεως, ἦτοι τὸ 28 ἴσον ἐστὶ τῷ τῷ τριγώνῳ ἐμβαδῷ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆ Β ἡ ΒΕ παράλληλος τῇ ΑΓ· ἀπὸ δὲ τῆ Γ, ἡ ΓΕ παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ συμπιπτέτωσαν αἱ ΒΕ, ΓΕ κατὰ τὸ Ε.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τῷ ΑΕ παραλληλογράμῳ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινόμενῳ ἐκ τῆ ὕψους ΒΔ, καὶ τῆς βάσεως ΑΓ, εἶπεν τῷ 56. (τ) ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ἡμισυ ἐστὶ τῷ ΑΕ παραλληλογράμῳ. (υ) τὸ ἄρα τῷ τριγώνῳ ἐμβαδὸν ἴσον τῷ ἡμίσει

- (ξ) Κατὰ τὴν λε. τῆ α. (ο) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (π) Κατὰ τὴν λδ. τῆ α. (ρ) Κατὰ τὸ α. πρόβλ. (σ) Ὁ πᾶς εἰς 12 διαιρεταί μέρη, δακτύλιος καλέμενα· ὁ δὲ δάκτυλος, εἰς γραμμὰς 12.
 (τ) Κατὰ τὸ β. πρόβλ. (υ) Κατὰ τὴν λδ. τῆ α.

ἡμίσει τῷ γνωμένῳ ἐκ τῷ ὕψους ἢ τῆς βάσεως, ἦτοι
28 δακτυλιαίοις τετραγώνοις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Παντός δοθέντος εὐθυγράμμου, οἷον τῷ ΑΒΓΔΕ, τὸ
ἐμβαδὸν καταμετρήσαι. χ. 22.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ μιᾶς τῷ χήματος γωνίας, οἷον τῆς Α, ἐπὶ
ταῖς λοιπῇς εὐθεῖαι ἐπιτευχθεῖσαι τῶν ΑΓ, ΑΔ, εἰς
τρίγωνα μεριδῇτω τὸ σχῆμα. καὶ ἤχθω ἐφ' ἐκάστην
τῶν τριγώνων βάσιν κάθετος. οἷον, ἐπὶ μὲν τὴν ΑΓ,
ἢ ΒΘ· ἐπὶ δὲ τὴν ΓΔ, ἢ ΑΖ· ἐπὶ δὲ τὴν ΑΔ, ἢ ΕΗ.
καταμετρηθῇτω δὲ ἐκάστη τέτων, καὶ ἑκάστον ὕψος. ἢ
ἔσω δὴ τὸ μὲν ΒΘ = 3, ἢ δὲ ΑΓ = 6· τὸ δὲ ΑΖ =
5, ἢ δὲ ΓΔ = 4· τὸ δὲ ΕΗ = 2, ἢ δὲ ΑΔ = 8,
δακτύλοις. λέγω, ὅτι τὸ τῷ χήματος ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ
τῷ ἡμίσει τῷ ἀθροίσματος τῶν γνωμένων ἐξ ἐκάστης
ὕψους ἢ βάσεως, ἦτοι ἴσον (Φ) $\frac{3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 8}{2} = \frac{18 + 20 + 16}{2} =$
 $\frac{54}{2} = 27$ δακτυλιαίοις τετραγώνοις.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ εὐθύγραμμον ΑΒΓΔΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς τριγώνοις ΑΒΓ,
ΑΓΔ, ΑΔΕ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΑΒΓ τὸ ἐμβαδὸν = $\frac{3 \cdot 6}{2}$, τῷ
δὲ ΑΓΔ ἴσον $\frac{5 \cdot 4}{2}$, τῷ δὲ ΑΔΕ ἴσον $\frac{2 \cdot 8}{2}$ · πάντων ἄρα
ὁμῶς τῶν τριγώνων, εἴτεν τῷ εὐθυγράμμῳ τὸ ἐμβαδὸν
ἴσον $\frac{3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 8}{2} = 27$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον, ὅτι εἰσὶ τινὰ μεγέθη ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶ
κοινῶς μὴ καταμετρέμενα μέτρῳ. εἰάν ᾖν τὸ τῷ δοθέν-
τος εὐθυγράμμου ὕψος καὶ ἡ βάση τοιαῦτα ᾖ, δια-
τε-

Ε 2

(Φ) Ὅρα τὴν ἐν τοῖς ὅρισμοις τῷ β. βιβλ. σημ.

ρετέον αὐτὰ εἰς τὰ ελαχίστα τῶν ἐν χεῖρσι μετρῶν,
 οἷον εἰς γραμμάς, σκεπτέον δὲ τὸ ἀσύμμετρον μέρος
 ὁποῖω τῇ μέτρῃ μέρει ἐγγύτερον, ἥμισι, ἢ τριτη-
 μορίῳ, ἢ δεκατημορίῳ, ἢ ἄλλῳ τῷ τυχόντι. πολλα-
 πλασιαστὴν δὲ πρῶτον τὸ ὕψος διὰ τῇ μέρῃ τῆς βά-
 σεως τῆς καταμετρηθείσης· εἰδ' ἔτω μεριζέον τὸ ὕψος
 εἰς μέρη ἴσα τῷ καταλειφθέντι ἀσύμμετρῳ μέρει τῆς
 βάσεως, καὶ ἔτως αὐτὸ διὰ τέττα πλασσιαστὴν.
 οἷον, κείῳ ἀσύμμετρον εἶναι τὸ AB, ὕψος, (x, 23)
 καὶ τὴν BD βάσιν τῇ ὀρθογωνίᾳ AD. καταμετρηθήτω
 δὲ ἐκάτερον τέτων γραμμαῖς. καὶ ἔτω τὸ μὲν AB =
 3, ἢ δὲ EB = 2, τὸ δὲ ἐναπολειφθὲν τῆς BD ἀσύμ-
 μετρον μέρος BD ἴσον ἔτω ὡς ἐγγιστα ἥμισι γραμμῆς.
 πολλαπλασιασθήτω δὴ ἐν πρῶτον τὸ AB ὕψος διὰ τῆς
 καταμετρηθείσης BB βάσεως, εἴπεν τὸ 3 διὰ τῇ 2.
 τὸ ἐν γινόμενον 6 ἴσον τῷ τῇ AABE ὀρθογωνίᾳ ἐμ-
 βαδῶ. καὶ ἐπεὶ τὸ καταλειφθὲν ἀσύμμετρον BD ὡς
 ἥμισι γραμμῆς ἐκλαμβάνεται, τὸ ἄρα ὕψος AB 6 τοι-
 αῦτα μέρη περιέχει, διὸ τὸ ἐκ τῇ AB καὶ BD, εἴπεν
 τὸ ἐκ τῇ 6, καὶ 1 γινόμενον, τετραγωνίδιον 6 ἐμφαί-
 νει, ἀπὸ ἡμισείας γραμμῆς, οἷον τῆς BD, ἀναγεγραμ-
 μένα, ὧν ἕκαστον τεταρτημόριον τῇ ἀπὸ τῆς ὅλης ἀνα-
 γραφομένῃ γραμμῇ τετραγώνῳ. εἰσὶ δὲ τὰ 6 τεταρ-
 τημόρια ἴσα $1 + \frac{1}{2}$ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης ἀναγεγραφομένῳ
 γραμμῇ τετραγώνῳ. ἴσον ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῇ AΒΔΓ
 $1 + \frac{1}{2}$ γραμμικῷ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ AABE ἴσον 6
 γραμμικοῖς τετραγώνοις. ὅλον ἄρα τὸ AΒΔΓ ἴσον πε-
 ρίπε $7 + \frac{1}{2}$ γραμμικοῖς τετραγώνοις.

ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΡΙΤΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

- Α'. Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν οἱ Ζ, Ζ ὧν αἱ διαμέτροι ΑΒ, ΓΔ, ἢ αἱ ἡμιδιάμετροι ΚΒ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ. πίν. θ. χ. 1.
- Β'. Ἐυθεῖα ἡ ΑΒ κύκλῳ τῷ Χ ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἀπτομένη τῷ κύκλῳ καὶ ἐμβαλλομένη, ἔ τέμνει τὸν κύκλον. χ. 2.
- Γ'. Κύκλοι, οἱ Υ, Υ, ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἀπτόμενοι ἀλλήλων, ἔ τέμνουσιν ἀλλήλους. χ. 3.
- Δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσοι ἀπέχειν τῷ κέντρῳ Κ εὐθεῖαι αἱ ΕΔ, ΗΖ, λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τῷ κέντρῳ ἐπ' αὐτάς κάθεται ἀγόμεναι, οἷον αἱ ΚΒ, ΚΓ ἴσαι ᾧσι. (χ. 4.) μείζον δὲ ἀπέχειν λέγεται ἡ ΓΘ, ἐφ' ἡ μείζων κάθεται ΚΔ πίπτει. χ. 5.
- Ε'. Τμήμα κύκλῳ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον χῆμα ὑπὸ τε τῆς ΑΓ εὐθείας, καὶ κύκλῳ περιφερείας τῆς ΑΒΓ. χ. 6.
- Σ'. Τμήματες δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε εὐθείας, τῆς ΑΒ, καὶ κύκλῳ περιφερείας τῆς ΔΒ. χ. 7.
- Ζ'. Ἐν τμήματι γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας ΑΔΓΕΒ τῷ τμήματος ληφθῇ τὶ σημεῖον, οἷον τὸ Γ, καὶ ἀπ' αὐτῷ ἐπὶ τὰ πέρατά τῆς εὐθείας ΑΒ, ἥτις ἐστὶ βάσις τῷ τμήματος, ἐπεζευχθῶσιν εὐθεῖαι, αἱ ΓΑ, ΓΒ, ἡ περιεχομένη γωνία ΑΓΒ ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. χ. 8.
- Η'. Ὅταν αἱ περιέχουσιν τὴν γωνίαν ΑΒΓ εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ ἀπολαμβάνωσιν τινὰ περιφέρειαν, οἷον τὴν ΑΓ, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία. χ. 9.
- Θ. Τομεὺς δὲ κύκλῳ ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ Κ αὐτῷ τῷ κύκλῳ σαθῇ ἡ γωνία, οἷον ἡ ΑΚΓ, τὸ περιεχόμενον χῆμα ΚΑΓ ὑπὸ τε τῶν τὴν γωνίαν περιέχουσιν εὐθειῶν ΑΚ, ΚΓ, καὶ τῆς ἀπολαμβάναινομῆνης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας ΑΓ. χ. 10.

Ι'. Ὅμοια τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ ΒΑΓ, ΔΕΖ, τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, τὰς ΕΑΓ, ΔΕΖ. *κ.* 11.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Τὸ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὐρεῖν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ. *κ.* 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω τις εἰς αὐτὸν, ὡς ἐτυχεν, εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω διχα κατὰ τὸ Δ. καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἔχθω ἡ ΔΓ κάθετος τῇ ΑΒ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε. καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ διχα κατὰ τὸ Κ. λέγω, ὅτι, τὸ Κ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΓΒ κύκλου. μὴ γάρ· ἄλλ' εἰ δυνατόν ἔστω τὸ Η. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΔ, ΗΑ, ΗΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις, ΗΔΒ, ΗΔΑ ἡ μὲν ΗΒ = ΗΑ, (α) ἡ δὲ ΑΔ = ΔΒ, (β) ἡ δὲ ΗΔ κοινή. ἄρα καὶ ἡ γωνία ΗΔΒ = ΗΔΑ. (γ) ἡ ΗΔ ἄρα κάθετός ἐστι τῇ ΑΒ. (δ) ἡ ΗΔΒ γωνία ἄρα ὀρθή. ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΔΒ ὀρθή. (ε) ἡ ἄρα ΚΔΒ = ΗΔΒ, τὸ ὅλον τῶν μέρεσιν, ὅπερ ἀτοπον. ἔκ ἄρα τὸ Η κέντρον τοῦ ΑΓΒ κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι ἐδὲ ἄλλο τι, πλὴν τοῦ Κ. τὸ Κ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΓΒ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Ἐὰν κύκλος ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσῇται τοῦ κύκλου.

Ἔστω

(α) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῶν α. β. (β) Ἐκ τῆς κατασκευ. (γ) Κατὰ τὴν η. τῶν κ. (δ) Κατὰ τὸν ζ. ὁρισ. τῶν α. β. (ε) Ἐκ τῆς κατασκευ.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω τυχόντα δύο σημεῖα τὰ Α, Β. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς περικεῖται τοῦ κύκλου. κ. 13.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχόν σημεῖον τὸ Ε. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τὰ Α, Ε, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΕ, ΚΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΚΒ = ΚΑ. (ζ) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΚΒΑ = ΚΑΒ. (η) ἄλλ' ἡ ΚΕΒ μείζων τῆς ΚΑΕ. (θ) μείζων ἄρα καὶ τῆς ΚΒΕ. καὶ ἡ ΚΒ ἄρα μείζων τῆς ΚΕ. (ι) ἐπεὶ δὲ τὸ τῆς ΚΒ πέρασ, ὅπερ ἐστὶ τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐστὶ, τὸ τῆς ΚΕ, εἴταν τὸ Ε, ἐντὸς τοῦ κύκλου ἐστὶ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ πάντα τὰ λοιπὰ σημεῖα τῆς ΑΒ, πλὴν τῶν Α, καὶ Β, ἐντὸς τοῦ κύκλου εἰσὶ. ὁ δὴλον ἄρα, ὅτι ἡ ΑΒ ἐντὸς περικεῖται τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου, εὐθεῖαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὁρθὰς αὐτὴν τεμεῖ. καὶ ἐὰν πρὸς ὁρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΓΒ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου Κ ἡ ΚΖ, εὐθεῖαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ. λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὁρθὰς αὐτὴν τέμνεται. κ. 14.

Ε 4

ΚΑ-

(ζ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῷ α. β. (η) Κατὰ τὴν ε. τῷ α. (θ) Κατὰ τὴν ις. τῷ α. (ι) Κατὰ τὴν ιθ. τῷ α.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΚΑΖ, ΚΒΖ, ἡ μὲν ΚΑ = ΚΒ, (κ) ἡ δὲ ΑΖ = ΖΒ, (λ) ἡ δὲ ΚΖ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΚΖΑ = ΚΖΒ. (μ) ἡ ἄρα ΚΖ πρὸς ὁρθὰς τέμνει τὴν ΑΒ. (ν)

Τεμνέτω δὲ ἡ ΚΖ πρὸς ὁρθὰς τὴν ΑΒ. λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΚΑ = ΚΒ. (ξ) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΚΑΒ = ΚΒΑ. (ο) ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΑΚΖ, ΒΚΖ, ἡ μὲν γωνία ΚΑΖ = ΚΒΖ, ὡς δέδεικται, ἡ δὲ ΚΖΑ = ΚΖΒ, (π) ἡ δὲ ΚΑ = ΚΒ. ἄρα καὶ ΑΖ = ΖΒ. (ρ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τῶ κέντρου ἔσται, ὃ τέμνεσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνετώσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε, μὴ διὰ τῶ κέντρου Κ ἔσται. λέγω, ὅτι ὃ τέμνεσιν ἀλλήλας δίχα. εἰ γὰρ δυνατόν τεμνέτωσιν ἀλλήλας δίχα, ὥστε ἴσιν εἶναι τὴν μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὴν δὲ ΔΕ τῇ ΕΒ. χ. 15.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΚΕ.

ΔΕΙ-

-
- (κ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῷ α. β. (λ) Ἐξ ὑποθ. (μ) Κατὰ τὴν η. τῷ α. (ν) Κατὰ τὸν ζ. ὅρισ. τῷ α. β. (ξ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. (ο) Κατὰ τὴν ε. τῷ α. (π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Κατὰ τὴν κς. τῷ α.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΚΕΓ ὁρθή ἐστιν. (σ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΕΔ ὁρθή. (τ) ἡ ἄρα ΚΕΓ = ΚΕΔ. τὸ ὅλον τῶ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα αἱ ΑΓ, ΒΔ δι' ἄλλήλας τέμνουσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, ἐκ ἑσῶν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΒΗ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Β, Γ σημεία. λέγω, ὅτι ἐκ ἑσῶν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. εἰ γὰρ μὴ, ἔσω τὸ Κ. ρ. 16.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΚΓ, καὶ διήχθω ἡ ΚΖΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΚΖ = ΚΓ. (υ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΗ = ΚΓ. (φ) ἄρα καὶ ἡ ΚΗ = ΚΖ. (χ) τὸ ὅλον τῶ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα τὸ Κ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΒΗ κύκλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐν τὸς, ἐκ ἑσῶν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ Γ σημεῖον. λέγω, ὅτι ἐκ ἑσῶν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔσω τὸ Κ. ρ. 17.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΚΓ. καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ΚΕΒ.

Ε 5

ΔΕΙ-

(σ) Κατὰ τὴν προλαβ. (τ) Κατὰ τὴν αὐτ. (υ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῷ α. β. (φ) Κατὰ τὸ αὐτ. (χ) Κατὰ τὸ α. αἷ.

ΔΕΙΞΙΣ,

Η' ΚΕ = ΚΓ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΒ = ΚΓ. (ψ) ἄρα ἡ ΚΒ = ΚΕ. (ω) τὸ ὅλον τῶν μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ ἄρα τὸ Κ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐὰν κύκλος ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τὸ σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τῶν κύκλων, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων προσπίπτωσιν εὐθεῖαι τινες πρὸς τὸν κύκλον, μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή. τῶν δ' ἄλλων αἰεὶ ἡ ἐγγύιον τῆς διὰ τῶν κέντρων τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶ. δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων προσπεσῶνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἐκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΓΔΛ, διάμετρος δ' αὐτοῦ ἡ ΑΔ. καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰλήφθω τὸ σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τῶν κύκλων· κέντρον δὲ τῶν κύκλων ἔστω τὸ Κ. καὶ ἀπὸ τῶν Ζ πρὸς τὸν ΑΓΔΛ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαι τινες, αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ. λέγω Α'· ὅτι μεγίστη ἐστὶν ἡ ΖΑ, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον. Β'. ὅτι τῶν ἄλλων ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ. Γ'. ὅτι ἐλαχίστη ἡ ΖΔ. Δ'. ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείων δύο μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσῶνται πρὸς τὸν ΑΒΔΛ κύκλον ἐφ' ἐκάτερα τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. Χ. 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΗ. καὶ συνεχάτω ἡ ΖΚΘ γωνία ἴση τῇ ΖΚΗ. καὶ ἤχθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ.

ΔΕΙ-

(ψ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῆ α. β. (ω) Κατὰ τὸ κ. κξ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Αἱ ΖΚ, ΚΒ μείζονες εἰσι τῆς ΕΖ. (α) ἀλλ' ἡ ΚΒ = ΚΑ. (β) ἄρα αἱ ΖΚ, ΚΑ, ἦτοι ἡ ΖΑ μείζων τῆς ΖΒ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐν τοῖς γειγώνοις ΕΚΖ, ΓΚΖ, ἡ μὲν ΕΚ = ΓΚ, ἡ δὲ ΚΖ κοινή. καὶ γωνία ἡ ΕΚΖ μείζων τῆς ΓΚΖ. καὶ ἡ ΖΒ ἄρα μείζων τῆς ΖΓ. (γ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΖΓ μείζων τῆς ΖΗ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Γ'.

Αἱ ΗΖ, ΖΚ μείζονες τῆς ΚΗ. (δ) ἀλλ' ἡ ΚΗ = ΚΔ. αἱ ἄρα ΗΖ, ΖΚ μείζονες τῆς ΚΔ. κοινή ἀφ' ἧς ἡ ΖΚ. ἡ ἄρα ΗΖ μείζων τῆς ΖΔ. (ε)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Δ'.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΖΚΗ, ΖΚΘ, ἡ μὲν ΚΗ = ΚΘ, ἡ δὲ ΚΖ κοινή, καὶ γωνία ἡ ΗΚΖ = ΖΚΘ. ἄρα καὶ ΗΖ = ΖΘ. (ς) ἄλλη δὲ ἴση τῇ ΖΗ ἐπροσπεσῆται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν προσπιπτεύω. καὶ εἰ μὲν ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου ἡπερ ἡ ΖΘ, καθάπερ ἡ ΖΑ, μείζων ἔσται τῆς ΖΘ, (η) εἴτεν τῆς ΖΗ. ἴση γὰρ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ, ὡς δέδεικται· εἰ δὲ ἀπώτερον, ὡς ἡ ΖΕ, ἐλάσσων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Εὰν κύκλος ληφθῇ τὸ σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαδῶσιν εὐθεϊαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἐτύχε, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περι-

(α) Κατὰ τὴν κ. τῆ α. (β) Κατὰ τὸ αὐτὸ δ. πόρ. (γ) Κατὰ τὴν κδ. τῆ α. (δ) Κατὰ τὴν κ. τῆ α. (ε) Κατὰ τὸ γ. Ἀξ. (ς) Κατὰ τὴν δ. τῆ α. (η) Κατὰ τὸ β. μέρος τῆς δὲ τῆς πρώτ.

περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μὲν ἢ διὰ τῶ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἢ ἔγγιον τῆς διὰ τῶ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μέζων ἔσται. τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἔσιν ἢ μεταξὺ τῶ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἢ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης, τῆς ἀπώτερόν ἔσιν ἐλάττων· δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσῶνται ἀπὸ τῶ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ. καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες πρὸς τὸν κύκλον, αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ. ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τῶ κέντρου Κ. λέγω Α'. ὅτι τῶν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἔσιν ἢ διὰ τῶ κέντρου ΔΑ. Β'. ὅτι ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τῶ κέντρου μέζων τῆς ἀπώτερον, ἢ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἢ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ. Γ'. ὅτι τῶν πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἢ ΔΗ, ἢ μεταξὺ τῶ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· τῶν δὲ ἄλλων ἢ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης ΔΗ τῆς ἀπώτερόν ἔσιν ἐλάττων, ἢ μὲν ΔΜ τῆς ΔΛ, ἢ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ. Δ'. ὅτι δύο μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τῶ σημείου Δ προσπεσῶνται ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης ἐπὶ τε τὴν κυρτὴν, καὶ τὴν κοίλην περιφέρειαν. πίν Ι. 9. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν ΚΜ, ΚΛ, ΚΘ, ΚΓ, ΚΖ, ΚΕ. καὶ συνεσώτῳ ἡ ΔΚΒ γωνία ἴση τῇ ΔΚΜ. καὶ ἐπεξεύχθω
ἡ

ἡ ΔΒ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπίπτει τῇ περιφερείᾳ καὶ τὰ τὸ Ι. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΙ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

ΑΙ ΚΕ, ΚΔ μείζονες εἰσι τῆς ΕΔ. (θ) ἀλλ' ἡ ΚΕ = ΚΑ. (ι) ἄρα $AK + KΔ$, εἶπεν ΑΔ μείζων τῆς ΕΔ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐν ταῖς τριγώνοις ΕΚΔ, ΖΚΔ, ἡ μὲν ΕΚ = ΖΚ, ἡ δὲ ΚΔ κοινή. καὶ γωνία ἡ ΕΚΔ μείζων τῆς ΖΚΔ. ἡ ἄρα ΔΕ μείζων τῆς ΔΖ. (κ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΖ μείζων τῆς ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Γ'.

ΑΙ ΚΜ, ΜΔ μείζονες εἰσι τῆς ΚΔ. (λ) ἀλλ' ἡ ΚΜ = ΚΗ. λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΜ λοιπῆς τῆς ΔΗ μείζων. καὶ ἐπεὶ αἱ ΚΜ, ΜΔ ἐλάσσονες εἰσι τῶν ΚΛ, ΛΔ, ἴση δὲ ἡ ΚΜ τῇ ΚΛ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΜ ἐλάσσων τῆς ΔΛ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΔΛ ἐλάσσων τῆς ΔΘ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Δ'.

Ἐν ταῖς τριγώνοις ΚΕΔ, ΚΜΔ, ἡ μὲν ΚΒ = ΚΜ, ἡ δὲ ΚΔ κοινή, καὶ γωνία ἡ ΔΚΒ = ΔΚΜ. (μ) καὶ ἡ ΔΒ ἄρα ἴση τῇ ΔΜ. καὶ γωνία δὲ ἡ ΚΔΕ = ΚΔΜ, καὶ ἡ ΚΒΔ = ΚΜΔ. (ν) καὶ ἐπεὶ αἱ ΚΕΔ, ΚΒΙ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (ξ) ἴσαι δὲ δυσὶν ὀρθαῖς καὶ αἱ ΚΜΔ, ΚΜΕ. ἄρα $ΚΒΔ + ΚΒΙ = ΚΜΔ + ΚΜΕ$. (ο) καὶ ἀφαιρεθεῖσάν τῶν ἴσων ΚΒΔ, ΚΜΔ, ἔσται ΚΒΙ = ΚΜΕ. (π) ἀλλ' ἡ μὲν ΚΒΙ = ΚΙΒ, ἡ δὲ ΚΜΕ = ΚΕΜ. (ρ) ἄρα καὶ ἡ

(θ) Κατὰ τὴν κ. τῷ α. (ι) Κατὰ τὸ δ. τὸ ρ. τῷ α. (κ) Κατὰ τὴν κδ. τῷ α. (λ) Κατὰ τὴν κ. τῷ α. (μ) Ἐκ τῆς κατωσφ. (ν) Κατὰ τὴν δ. τῷ α. (ξ) Κατὰ τὴν ιγ. τῷ α. (ο) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (π) Κατὰ τὸ γ. ἀξ. (ρ) Κατὰ τὴν ε. τῷ α.

ἡ KIB = KEM. ἔκθ' ἐν τοῖς τριγώνοις ΙΔΚ, ΕΔΚ, ἡ μὲν γωνία ΔΙΚ = ΔΕΚ, ἡ δὲ ΚΔΙ = ΚΔΕ, ὡς δέ-
δεικται, ἡ δὲ ΚΔ κοινή. ἄρα ἡ ΔΙ = ΔΕ. (σ) ὅτι δὲ
τῇ ΔΙ εὐθείᾳ, ἔπ' ἐν τῇ ΔΕ ἄλλη ἴση ἐ προσπεσῆται
πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τῆς Δ σημεία δῆλον. αὕτη μὲν
γὰρ ἦτοί ἐγγιον ἔσται τῆς διὰ τῆς κέντρου, ἡ ἀπώτε-
ρον, ἥπερ ἡ ΔΙ. καὶ εἰ μὲν ἐγγιον, μείζων εἰ δ' ἀπώ-
τερον, ἐλάσσων. (τ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Εἰάν κύκλος ληφθῇ τὸ σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ
δὲ τῆς σημείας πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι
πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν ση-
μεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς κύκλου.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ Κ, καὶ
ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαι ἴσαι,
αἱ ΚΓ, ΚΒ, ΚΑ. λέγω, ὅτι τὸ Κ σημεῖον, κέντρον
ἐστὶ τῆς ΑΒΓ κύκλου. ς. 20.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τετμήθωσαν δι-
χα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεία. καὶ ἐπιζευχθῆσαι αἱ ΚΕ,
ΚΖ, διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Δ, Θ, Ι σημεία.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΚΕ, ΒΚΕ, ἡ μὲν ΑΚ = ΒΚ,
(υ) ἡ δὲ ΑΕ = ΒΕ, (φ) ἡ δὲ ΕΚ κοινή. καὶ γωνία
ἄρα ἡ ΚΕΑ = ΚΕΒ. (χ) ἡ ΔΗ ἄρα πρὸς ὁρθάς ἐστὶ
τῇ ΒΑ. (ω) ἀλλὰ καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. (α) ἐπ' αὐ-
τῆς

- (σ) Κατὰ τὴν α. τῆς α. (τ) Κατὰ τὸ β. μέρ. (υ) Ἐξ ὑποθ.
(φ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (χ) Κατὰ τὴν η. τῆς α. (ω) Κατὰ
τὸν ζ. ὁρισ. τῆς α. (α) Ἐκ τῆς κατασκευ.

τῆς ἄρα ἐστὶ τὸ τῷ κύκλῳ κέντρον. (β) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι καὶ ἐπὶ τῆς ΘΙ ἐστὶ τὸ κέντρον καὶ ἔστιν ἕτερον αἰ' ΗΔ, ΘΙ ἔχουσι κοινὸν σημεῖον ἢ τὸ Κ. τὸ Κ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῷ ΑΒΓ κύκλῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Κύκλος ὃ τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατόν κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο τεμνέτω, τὰ Β, Η, Ζ Θ. Χ. 21.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῷ κέντρῳ Κ τῷ ΑΒΓ κύκλῳ ἐπὶ τὰ Β, Η, Ζ σημεία ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν ἐν τῷ ΔΕΖ κύκλῳ. (γ) τὸ Κ ἄρα κέντρον ἐστὶ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ. (δ) ἐστὶ δὲ τὸ αὐτὸ Κ κέντρον καὶ τῷ κύκλῳ ΑΒΓ. (ε) δύο ἄρα κύκλων ἀλλήλους τεμνόντων τὸ αὐτὸ ἐστὶ κέντρον. ὅπερ ἀδύνατον. (ζ) ἔκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεία, ἢ δύο.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐν τὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἢ ἐπὶ τα κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύω

- (β) Ἐκ τῆς α. τῷ γ. δῆλον. (γ) Κατὰ τὸ δ. πρότ. τῷ α. Β.
(δ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (ε) Ἐκ τῆς κατασκ. (ζ) Κατὰ τὴν ε. πρότ. τῷ δὲ τῷ β.

Δύω κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἀπτεῖσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τῷ μὲν ΑΒΓ κύκλῳ κέντρον τὸ Κ, τῷ δὲ ΑΔΕ, τὸ Η. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῷ Κ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὸ Α σημεῖον πεσεῖται. μὴ γάρ· ἀλλ' εἰ δυνατόν πιπτέτω ἐπὶ τὸ Β, ὡς ἡ ΚΗΔΒ. χ. 22.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΑΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ ΚΗ, ΗΑ μείζονες εἰσι τῆς ΚΑ. (η) ἀλλ' ἡ ΚΑ ἴση τῇ ΚΗΔΒ. (θ) ἄρα αἱ ΚΗ, ΗΑ μείζονες τῆς ΚΗΔΒ. κοινὴ ἀφηρεῖσθαι ἡ ΚΗ. ἡ ἄρα ΗΑ μείζων τῆς ΗΒ. (ι) ἀλλ' ἡ ΗΑ = ΗΔ. (κ) ἡ ἄρα ΗΔ μείζων τῆς ΗΒ. τὸ μέρος μείζον τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τῷ Κ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ Α συναφῆς πεσεῖται. ἐπ' αὐτὴν ἄρα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἄπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύω κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτεύσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον. καὶ εἰλήφθω τῷ μὲν ΑΒΓ κύκλῳ κέντρον τὸ Η, τῷ δὲ ΑΔΕ τὸ Ζ. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῷ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς ἐλεύσεται. μὴ γάρ· ἀλλ' εἰ δυνατόν διερχέσθω διὰ τῶν Λ, Κ σημείων, ὡς ἡ ΗΛΚΖ. χ. 23.

ΚΑ-

(η) Κατὰ τὴν κ. τῷ α. (θ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῷ α. β. (ι) Κατὰ τὸ γ. Ἀξ. (κ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. (λ) Κατὰ τὴν κ. τῷ α.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ ΑΗ, ΑΖ μείζονες εἰσι τῆς ΗΛΚΖ. (λ) ἀλλ' ἡ μὲν ΑΗ = ΗΛ, ἡ δὲ ΑΖ = ΖΚ. ἄρα αἱ ΗΛ, ΖΚ μείζονες τῆς ΗΛΚΖ. τὰ μέρη τῶ ὅλῳ μείζονα, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τῆς Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη δι' ἄλλων σημείων ἐλεύσεται, ἢ διὰ τῆς ἐπαφῆς Α.

ΠΡΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Κύκλος κύκλῳ ἐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεία, ἢ καὶ ἓν, εἴαν τε ἐντὸς, εἴαντε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

Εἰ γὰρ δυνατόν κύκλος ὁ ΒΓΔ κύκλῳ τῷ ΒΕΖ ἀπ-
τέθῃ πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἓν, τὰ
Β, Δ. χ. 24.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθῃ τῷ μὲν ΒΓΔ κύκλῳ κέντρον τὸ Κ, τῷ δὲ
ΒΕΖ, τὸ Θ. καὶ ἐπιζευχθῆσα ἡ ΚΘ, ἐκβεβλήθῃ,
καὶ πιπτέτω κατὰ τὸ Β. (μ) καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ
ΚΔ, ΘΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ ΚΘ, ΘΔ μείζονες εἰσι τῆς ΚΔ. (ν) ἀλλ' ἡ
ΚΔ = ΚΒ. ἄρα αἱ ΚΘ, ΘΔ μείζονες τῆς ΚΒ. ἀλλ' ἡ
μὲν ΚΘ κοινὴ, ἡ δὲ ΘΔ = ΘΒ. αἱ ἄρα ΚΘ, ΘΔ καὶ
μείζονες καὶ ἴσαι τῇ ΚΒ. ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ ἄρα κύκ-
λος κύκλῳ ἐντὸς ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεία, ἢ ἓν.

Ἀλλ' εἰ δυνατόν ἐφαπτέθῃ ἐκτὸς κατὰ πλείονα ση-
μεῖα, ἢ ἓν, τὰ Α, Γ. χ. 25.

Ζ

ΚΑ.

(λ) Κατὰ τὴν κ. τῷ α. (μ) Κατὰ τὴν ια. τῷ γ. (ν) Κατὰ τὴν
κ. τῷ α.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῆς κέντρος Κ ἐπὶ τὸ Θ κέντρον ἐπεζεύχθω ἡ ΚΘ. ἥτις διὰ τῆς ἐπαφῆς διελεύσεται. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΚΓ, ΘΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μὲν ΚΑ = ΚΓ, ἡ δὲ ΘΑ = ΘΓ. αἱ ἄρα ΚΓ, ΘΓ ἴσαι τῇ ΚΘ. ὅπερ ἀδύνατον. (ζ) Ἐκ ἄρα κύκλος κύκλῳ ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ ἓν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ εὐθεῖα κύκλῳ ἐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ ἓν. ἐφαπτέσθω γάρ, εἰ δυνατόν, ἡ ΗΘ τῷ ΒΕΖ κύκλῳ κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν, τὰ Δ, Γ. καὶ εἰλήφθω μετὰ αὐτῶν τρίτον τὸ Β. καὶ ἀπὸ τῆς κέντρος Κ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΔ, ΚΒ, ΚΓ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΔ = ΚΓ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΚΔΓ = ΚΓΔ. (ο) ἀλλ' ἡ ΚΒΓ μείζων τῆς ΚΔΓ. (π) μείζων ἄρα καὶ τῆς ΚΓΒ. ἡ ΚΓ ἄρα μείζων τῆς ΚΒ. (ρ) ἀλλὰ καὶ ἴση, (σ) ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ ἄρα εὐθεῖα κύκλῳ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ ἓν. χ. 26.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῆς κέντρος. καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῆς κέντρος ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΔΓ, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔσωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ. λέγω, ὅτι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῆς κέντρος. χ. 27.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθωσαν ἀπὸ τῆς Κ κέντρος αἱ ΚΖ, ΚΗ κάθετοι ἐπὶ ταῖς ΑΒ, ΓΔ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΓ.

ΔΕΙ-

(ζ) Κατὰ τὴν κ. τῆ α. (ο) Κατὰ τὴν ε. τῆ α. (π) Κατὰ τὴν ιε. τῆ α. (ρ) Κατὰ τὴν ιθ. τῆ α. (σ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῆ α. β.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ $AB = \Gamma\Delta$. (τ) ἀλλ' ἡ μὲν AZ ἡμίσεια τῆς AB ,
 ἡ δὲ ΓH τῆς $\Gamma\Delta$. (υ) καὶ ἡ AZ ἄρα ἴση τῇ ΓH . (φ)
 ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{AK}^2 = \overline{AZ}^2 + \overline{ZK}^2$, τὸ δὲ $\overline{\Gamma K}^2 = \overline{\Gamma H}^2 +$
 $\overline{HK}^2$. (χ) ἐστὶ δὲ τὸ $\overline{AK}^2 = \overline{\Gamma K}^2$. ἴση γὰρ ἡ AK
 τῇ ΓK . ἄρα καὶ $\overline{AZ}^2 + \overline{ZK}^2 = \overline{\Gamma H}^2 + \overline{HK}^2$. (ψ) ἀφαιρεθέντων
 τὰ ἴσα $\overline{AZ}^2$, καὶ $\overline{\Gamma H}^2$. ἄρα $\overline{ZK}^2 = \overline{HK}^2$. (ω) ἄρα καὶ $ZK =$
 HK . αἱ ἄρα AB , $\Gamma\Delta$ ἴσον ἀπέχουσι τῶν κέντρων. (α)

Ἀλλὰ δὴ αἱ AB , $\Gamma\Delta$ ἴσον ἀπέχονται τῶν κέντρων
 K , τετέστιν ἴση ἔστω ἡ KZ τῇ KH . λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶ
 καὶ ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν $\overline{AK}^2 = \overline{AZ}^2 + \overline{KZ}^2$, τὸ δὲ $\overline{\Gamma K}^2 = \overline{\Gamma H}^2 + \overline{KH}^2$.
 (β) ἀλλ' $\overline{AK}^2 = \overline{\Gamma K}^2$. ἄρα $\overline{AZ}^2 + \overline{KZ}^2 = \overline{\Gamma H}^2 + \overline{KH}^2$.
 (γ) ἀλλὰ $\overline{KZ}^2 = \overline{KH}^2$. (δ) ἄρα τῶν ἴσων ἀφαιρεθέντων,
 καὶ $\overline{AZ}^2 = \overline{\Gamma H}^2$. (ε) καὶ ἡ AZ ἔσται ἄρα ἴση τῇ ΓH .
 ἀλλ' ἡ μὲν AZ ἡμίσειά ἐστι τῆς AB , ἡ δὲ ΓH τῆς $\Gamma\Delta$.
 (ζ) καὶ ἡ AB ἄρα ἴση τῇ $\Gamma\Delta$. (η)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος, τῶν
 δὲ ἄλλων αἰὲρ ἡ ἑγγιον τῆς διὰ τῶν κέντρων,
 τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

Ζ 2

Ἐστω

- (τ) Ἐξ ὑποθ. (υ) Κατὰ τὴν γ. τῇ γ. (φ) Κατὰ τὸ ε. αἶ. (χ) Κατὰ τὴν μζ. τῇ α. (ψ) Κατὰ τὸ α. αἶ. (ω) Κατὰ τὸ γ. αἶ.
 (α) Κατὰ τὸν δ. ὅρισ. τῇ γ. (β) Κατὰ τὴν μζ. τῇ α. (γ) Κατὰ τὸ α. αἶ. (δ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὸ γ. αἶ. (ζ) Κατὰ τὴν γ. τῇ γ. (η) Κατὰ τὸ ε. αἶ.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΘΔ, διάμετρος δ' αὐτοῦ ἡ ΑΔ. καὶ ἔγγιον μὲν τῆς ΑΔ ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ. λέγω, ὅτι μείζωσι μὲν ἔσιν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.
 κ. 28.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ αἱ ΚΕ, ΚΛ πρὸς ὁρθὰς ταῖς ΒΓ, ΖΗ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ ΚΒ, ΚΓ μείζονες εἰσι τῆς ΒΓ. (θ) ἀλλ' αἱ ΚΒ, ΚΓ ἴσαι τῇ ΑΔ. ἡ ΑΔ ἄρα μείζων τῆς ΒΓ. ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν $\overline{ΚΒ}^2 = \overline{ΚΕ}^2 + \overline{ΕΒ}^2$, τὸ δὲ $\overline{ΚΖ}^2 = \overline{ΚΛ}^2 + \overline{ΛΖ}^2$. (ι) ἔστι δὲ $\overline{ΚΒ}^2 = \overline{ΚΖ}^2$. ἄρα καὶ $\overline{ΚΕ}^2 + \overline{ΕΒ}^2 = \overline{ΚΛ}^2 + \overline{ΛΖ}^2$. (κ) ἀλλὰ τὸ $\overline{ΚΕ}^2$ ἑλάττω τῷ $\overline{ΚΛ}^2$. (λ) τὸ ἄρα $\overline{ΕΒ}^2$ μείζον τῷ $\overline{ΛΖ}^2$. καὶ ἡ ΕΒ ἄρα μείζων τῆς ΛΖ. ἀλλ' ἡ μὲν ΕΒ ἡμίσεια τῆς ΒΓ, ἡ δὲ ΛΖ τῆς ΖΗ. (μ) καὶ ἡ ΒΓ ἄρα μείζων τῆς ΖΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τῷ κύκλῳ πρὸς ὁρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσῆται τῷ κύκλῳ. καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα εἰ παρεμπεσῆται. καὶ ἡ μὲν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ἀπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμῳ μείζων ἔσιν, ἡ δὲ λοιπὴ, ἐλάττων.

Ἐστω

(θ) Κατὰ τὴν κ. τῷ α. (ι) Κατὰ τὴν μζ. τῷ α. (κ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (λ) Ἐξ ὑποθ. (μ) Κατὰ τὴν γ. τῷ γ.

Ἐξω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ τὸ Κ κέντρον, καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ. λέγω Α'. ὅτι ἡ ἀπὸ τῆ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ΑΕ, ἐκτὸς πεσεῖται τῷ κύκλῳ. Β'. ὅτι εἰς τὸν μεταξύ τόπον τῆς τε εὐθείας ΑΕ καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα εἰ παρεμπίπτει. Γ'. ὅτι ἡ μὲν μικτόγραμμος τῇ ἡμικυκλίᾳ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἀπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μέζων ἐστίν. ἡ δὲ λοιπὴ μικτόγραμμος, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας, καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας ἀπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν. χ. 29.

Εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ἡ ΑΕ ἐντὸς, ὡς ἡ ΑΓ. καὶ πάλιν εἰ δυνατόν παρεμπίπτέτω μεταξύ τῆς ΑΕ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἡ ΑΔ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΚΓ. καὶ ἡχθω ἡ ΚΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΔ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Η' ΚΑ=ΚΓ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΚΑΓ=ΚΓΑ. ὀρθὴ δὲ ἡ ΚΑΓ. (ν) ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΚΓΑ. αἱ ἄρα ΚΑΓ ΚΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. (ξ) ἐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τῆ Α σημείῃ τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τῷ κύκλῳ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι εὐθεῖα ἐπὶ τῆς περιφερείας. ἐκτὸς ἄρα πίπτει, ὡς ἡ ΑΕ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ε'πεὶ ἡ γωνία ΚΗΑ ὀρθή ἐστιν, (ο) ἡ ἄρα ΚΗΑ ἐλάσσων ὀρθῆς. (π) ἡ ἄρα ΚΑ μέζων τῆς ΚΗ. (ρ)

Ζ 3

αλλ'

(ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Κατὰ τὴν λβ. τῇ α. (ο) Ἐκ τῆς κατασκευ. (π) Κατὰ τὴν γ. συνέπ. τῆς λβ. τῇ α. (ρ) Κατὰ τὴν ιθ.

αἰ. ἢ $KA = KO$. ἄρα καὶ ἡ KO μείζων τῆς KH , τὸ μέρος μείζον τῆς ὅλης. ὅπερ ἀδύνατον. ἔκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε AE ἐυθείας καὶ τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας ἑτέρα ἐυθεῖα παρεμπεσῆται.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Γ'.

Εἰ γὰρ εἰς τις γωνία ἐυθύγραμμος, μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς BA ἐυθείας καὶ τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας καὶ τῆς AE ἐυθείας, παρεμπεσῆται ἐυθεῖα ἥτις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς BA ἐυθείας καὶ τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας, ὑπὸ ἐυθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας καὶ τῆς AE ἐυθείας. ὃ παρεμπίπτει δὲ, ὡς δέδεικται. ἔκ ἄρα, κτ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Ἀπὸ τῆς δοθέντος σημείας τῆς δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην ἐυθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ A , ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ $BΓΔ$, ὃ κέντρον τὸ K . πίν. ια'. ς. 30.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῆς K ἐπὶ τὸ A ἐπεζεύχθω ἡ KA . καὶ κέντρον μὲν τῷ K , διαστήματι δὲ τῷ KA κύκλος γεγραφθῶ ὁ $AΖΗ$. καὶ ἀπὸ τῆς $Δ$ ἤχθω ἡ $ΔΖ$ πρὸς ὁρθὰς τῇ AK . καὶ ἐπεζεύχθω ἡ KZ . καὶ ἀπὸ τῆς A ἐπὶ τὸ B ἐπεζεύχθω ἡ AB . λέγω, ὅτι ἡ AB ἦκται ἐφαπτομένη τῆς $BΓΔ$ κύκλου.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις $KZΔ$, KAB , ἡ μὲν $KΔ = KB$, ἡ δὲ $KZ = KA$. καὶ γωνία ἡ K κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ $KΔΖ = KBA$. (σ) αἰ. ἢ $KΔΖ$ ὁρθή ἐστ. (τ) καὶ ἡ KBA

(σ) Κατὰ τὴν δ. τῆς α. (τ) Ἐκ τῆς κατασκ.

ΚΒΑ ἄρα ὀρθή ἐσιν. ἐφάπτεται ἄρα ἡ ΑΒ τῷ κύκλῳ. (υ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Εἰάν κύκλος ἐφάπτηταί τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τῷ κέντρῳ ἐπὶ τὴν ἀφ' ἣν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεΐα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τῷ ἀπτομένῳ.

Κύκλος τῷ ΑΒΓ ἀπτόμενος τις εὐθεΐα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημειῶν. καὶ ἀπὸ τῷ κέντρῳ Κ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευχθῶ ἡ ΚΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΚΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. εἰ γὰρ μὴ, χ. 31.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΚΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΕ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Η' ΚΗΓ γωνία ὀρθή ἐστιν. (Φ) ἡ ἄρα ΚΓΗ ἐλάσσων ὀρθῆς. (Χ) μείζων ἄρα ἡ ΚΓ τῆς ΚΗ. (Ψ) ἀλλ' ἡ ΚΓ = ΚΒ. καὶ ἡ ΚΒ ἄρα μείζων τῆς ΚΗ. τὸ μέρος μείζον τῷ ὅλῳ. ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ ἄρα ἡ ΚΗ κάθετος τῇ ΕΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δείξομεν, ὅτι ἐδὲ ἀλλή τις, πλὴν τῆς ΚΓ. ἡ ΚΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

Εἰάν κύκλος ἐφάπτηταί τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφ' ἣς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεΐα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τῷ κύκλῳ.

Ζ 4

Κύκλος

(υ) Κατὰ τὴν προλαβ. (Φ) Ἐκ τῆς κατασκ. (Χ) Κατὰ τὴν γ. συνίπ. τῆς λβ. τῷ α. (Ψ) Κατὰ τὴν ιθ. τῷ α.

Κύκλε τῷ ΑΒΓ ἀπτεύθω τις ευθεία ἢ ΔΕ κατα τὸ Γ σημῆον, καὶ ἀπὸ τῷ Γ πρὸς ὁρθῶς τῇ ΔΕ ἤχθω ἢ ΓΑ. λέγω, ὅτι ἐπὶ τῆς ΓΑ ἐστὶ τὸ κέντρον τῷ κύκλου. μὴ γὰρ, ἀλλ' ἐὶ δυνατόν, ἔσω τὸ Ζ. χ . 32.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εὔπεξευχθω ἢ ΖΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΓΔ γωνία ὀρθή ἐστιν. (ω) ἀλλὰ καὶ ἢ ΖΓΔ ὀρθή. (α) ἢ ἄρα ΑΓΔ = ΖΓΔ. τὸ ὅλον τῷ μέρει. ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα τὸ Ζ κέντρον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τί, πλὴν τὸ ἐπὶ τῆς ΓΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

Ἐν κύκλῳ ἢ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίον ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Ἐσω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ Κ γωνία ἔσω ἢ ΒΚΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ ἢ ΒΑΓ. ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν ΒΓ. λέγω, ὅτι διπλασίον ἐστὶν ἢ ΒΚΓ τῆς ΒΑΓ. ἔσω προῦτον ἢ ἑτέρα τῶν πλευρῶν τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας, ἢ ΒΚ, ἐπ' ευθείας τῇ ἑτέρᾳ τῇ πρὸς τῇ περιφερείᾳ τῇ ΚΑ. χ . 33.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΚΑ = ΚΓ. ἄρα καὶ γωνία ἢ ΚΑΓ = ΚΓΑ. (β) ἀλλ' ἢ ΒΚΓ = ΚΑΓ + ΚΓΑ. (γ) ἢ ἄρα ΒΚΓ διπλασίον τῆς ΒΑΓ.

Ἐώσαν δὴ αἱ ΒΚ, ΚΓ πλευραὶ τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας ΒΚΓ ἐντὸς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας ΒΑΓ. χ . 34.

ΚΑ.

(ω) Ἐξ ὑποθ. (α) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (β) Κατὰ τὴν ε. τῷ κ. (γ) Κατὰ τὴν λβ. τῷ κ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΚ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΚΑ=ΚΒ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΚΑΒ=ΚΒΑ. (δ)
ἀλλ' ἡ ΒΚΕ=ΚΑΒ+ΚΒΑ. (ε) ἡ ἄρα ΒΚΕ διπλασία
τῆς ΚΑΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἡ ΓΚΕ διπλασία τῆς ΚΑΓ.
ὅλη ἄρα ἡ ΒΚΓ διπλασίον ὅλης τῆς ΒΑΓ.

Πάλιν τεμνέσθω ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν, ἡ ΚΓ, τῆς
πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας ὑπὸ τῆς ἑτέρας, τῆς ΒΑ, τῆς
πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας. χ. 35.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὅμοιως δὲ δείξομεν, ὅτι ἡ μὲν ΓΚΕ διπλῇ τῆς
ΓΑΕ, ἡ δὲ ΒΚΕ τῆς ΒΑΕ. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΚΒ
διπλασίον ἐστὶ τῆς λοιπῆς ΓΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι
ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐσὼ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ
γωνία ἔσωσαν αἱ ΒΑΔ, ΒΕΔ. λέγω, ὅτι ἴσαι ἀλλήλαις
εἰσὶ. χ. 36.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Αὐτὸ τῷ κέντρῳ Κ ἐπὶ τὰ Β, Δ σημεῖα ἐπεζεύχ-
θωσαν αἱ ΚΒ, ΚΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΒΚΔ γωνία διπλασίον ἐστὶ τῆς τε ΒΑΔ, καὶ τῆς
ΒΕΔ. (ζ) ἡ ἄρα ΒΑΔ=ΒΕΔ. (η)

Ζ 5

ΠΡΟ-

(δ) Κατὰ τὴν ε. τῆ α. (ε) Κατὰ τὴν λβ. τῆ α. (ζ) Κατὰ
τὴν προλ. πρότ. (η) Κατὰ τὸ ε. αἶξ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαὶ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον τὸ ΑΒΓΔ. λέγω, ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτῷ γωνίαὶ ΔΓΒ, ΒΑΔ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ὡσαύτως αἱ ΑΔΓ, ΓΒΑ. κ. 37.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ γωνίαὶ ΔΓΒ, ΓΔΒ, ΓΒΔ τῷ ΒΔΓ τριγώνῳ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. (θ) ἀλλ' ἡ μὲν ΓΔΒ = ΓΑΒ, ἡ δὲ ΓΒΔ = ΓΑΔ. (ι) αἱ ἄρα ΔΓΒ, ΓΑΒ, ΓΑΔ, εἴτεν αἱ ΔΓΒ, ΒΑΔ δυσὶν ὁρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ ΑΔΓ, ΓΒΑ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα ἔσυσταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστιάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ. κ. 38.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Διήχθω ἡ ΑΓΔ. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὸ ΑΓΒ τμήμα τῷ ΑΔΒ τμήματι ὁμοίον ἐστίν, (κ) ἡ γωνία ἄρα ΑΓΒ = ΑΔΒ. (λ) ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἔκ ἄρα, κτ.

ΠΡΟ.

(θ) Κατὰ τὴν λβ. τῷ κ. (ι) Κατὰ τὴν προβ. πρότ. (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὴν ι. ὑποθ. τῷ γ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἐωσαν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων, τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ. λέγω, ὅτι ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. χ. 39.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐφαρμοζομένης τῇ ΑΕΒ τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ, καὶ τιθεμένης τῇ μὲν Α σημείῳ ἐπὶ τὸ Γ, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον διὰ τὸ ἴσιν εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΓΔ· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμήμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ. εἰ γὰρ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ ΑΕΒ τμήμα μὴ ἐφαρμόσῃ, ἀλλὰ παραλλάξῃ, ὡς τὸ ΓΗΔ· κύκλος ὁ ΓΗΔ, κύκλον τὸν ΓΖΔ κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Γ, Η, Δ τέμνει. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. (μ) ἐφαρμοσάσης ἄρα τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, καὶ τὸ ΑΕΒ τμήμα τῷ ΑΖΔ ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Κύκλῳ τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον, ὅπερ ἐστὶ τμήμα.

Ἐω τὸ δοθὲν τῷ κύκλῳ τμήμα τὸ ΑΒΓ. χ. 40.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήθω δίχα ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Δ. καὶ ἤχθω ἡ ΔΒ κάθετος τῇ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ. ἡ ἄρα ΑΒΔ γωνία τῆς ΔΑΒ ἡ μείζων ἐστίν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάσσων. ἔσω πρῶτον μείζων. συνεχάτω ἡ ΒΑΕ = ΔΒΑ. καὶ δι-
ήχθω

(μ) Κατὰ τὴν ι, τῇ γ.

ηχθῶσιν ἢ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. λέγω, ὅτι τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τῆς κύκλου, ἧς τινος τμήμα τὸ ΑΒΓ. ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ ΕΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΕΔΑ, ΕΔΓ, ἡ μὲν ΑΔ = ΓΔ. (ν) ἡ δὲ ΔΕ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΑΔΕ = ΓΔΕ. (ξ) ἄρα καὶ ΑΕ = ΕΓ. (ο) ἄλλ' ΑΕ = ΕΒ. (π) ἔστι γὰρ ἡ γωνία ΕΑΒ = ΕΒΑ. (ρ) αἱ τρεῖς ἄρα ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις. (σ) τὸ Ε ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς κύκλου, ἧς τινος τμήμα τὸ ΑΒΓ. (τ) καὶ δῆλον ὡς τὸ ΑΒΓ τμήμα ἐλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου διὰ τὸ τὸ Ε κέντρον αὐτῆς ἐκ τὸς τυγχάνειν.

Ἄλλ' ἔσω ἡ ΑΒΔ = ΔΑΒ. λέγω, ὅτι τὸ Δ κέντρον ἐστὶ τῆς κύκλου, ἧς τινος τμήμα τὸ ΑΒΓ. χ. 41.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ γωνία ἡ ΑΒΔ = ΔΑΒ, ἄρα καὶ ΔΒ = ΔΑ. (ν) ἄλλὰ ΑΔ = ΔΓ. (φ) αἱ τρεῖς ἄρα ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις. τὸ Δ ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς περὶ ΑΒΓ πληρωθησομένης κύκλου. δῆλον δὲ, ὅτι τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιόν ἐστιν.

Ἔσω δὲ πάλιν ἡ ΑΒΔ ἐλάσσων τῆς ΔΑΒ. λέγω, ὅτι γινομένης τῇ ΑΒΔ ἴσης τῆς ΒΑΕ, τὸ Ε ἔσται κέντρον τῆς κύκλου, ἧς τινος τμήμα τὸ ΑΒΓ. χ. 42.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δειχθήσεται καθάπερ καὶ πρότερον, ὅτι αἱ τρεῖς ΕΒ, ΕΑ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις. τὸ ἄρα Ε κέντρον ἐστὶ τῆς περὶ ΑΒΓ πληρωθησομένης κύκλου. καὶ δῆλον, ὅτι τὸ ΑΒΓ μῆζον ἡμικυκλίου.

ΠΡΟ-

- (ν) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ξ) Ὅρθαι γὰρ ἐκ τῆς κατασκευ. (ο) Κατὰ τὴν δ. τῆς α. (π) Κατὰ τὴν ε. τῆς α. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (σ) Κατὰ τὸ α. αζ. (τ) Κατὰ τὴν ζ. τῆς γ. (υ) Κατὰ τὴν ε. τῆς α. (φ) Ἐκ τῆς κατασκευ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ
ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, εἴαν τε πρὸς
τοῖς κέντροις, εἴαν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις
ὥσι βεβηκῦται.

Ἐξωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς
ἴσαι γωνίαι ἔξωσαν, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ΒΚΓ, ΕΘΖ,
πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ. λέγω, ὅτι
ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ. χ. 43.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, (χ) ἴσαι
ἄρα καὶ αἱ ΒΚ, ΚΓ, ταῖς ΕΘ, ΘΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς
τῷ Κ γωνία τῇ πρὸς τῷ Θ ἴση. (ψ) καὶ ἡ ΕΓ ἄρα
ἴση τῇ ΕΖ. (ω) καὶ ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία ἴση τῇ
πρὸς τῷ Δ, ὁμοία ἄρα τὰ ΒΑΓ, ΕΔΖ τμήματα (α)
καὶ ἐστὶν ἐπὶ ἴσων ευθειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, ὡς δέδεικται.
ἴτα ἄρα ἀλλήλοις εἰσὶν. (β) ἔστι δὲ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκ-
λος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΗΓ
περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἐπὶ ἴσων περιφε-
ρειῶν βεβηκῦσαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν,
εἴαντε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴαν τε πρὸς ταῖς
περιφερείαις ὥσι βεβηκῦται.

Ἐν

(χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Ἐξ ὑποθ. (ω) Κατὰ τὴν δ. τῆς κ. (α) Κα-
τὰ τὸν ι. ὅφ. τῆς γ. (β) Κατὰ τὴν κδ. τῆς γ.

Ἐν ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ πρὸς μὲν ταῖς Κ, Θ κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ΒΚΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ. λέγω, ὅτι ἡ μὲν ΒΚΓ = ΕΘΖ, ἡ δὲ ΒΑΓ = ΕΔΖ. §. 44.

Εἰ μὲν ἡ ΒΚΓ = ΕΘΖ, φανερόν ὅτι καὶ ἡ ΒΑΓ = ΕΔΖ. (γ) εἰ δ' ὁ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἐσω μείζων ἡ ΒΚΓ,

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω ἡ ΒΚΗ = ΕΘΖ. (δ)

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία ΒΚΗ = ΕΘΖ. (ε) ἄρα καὶ ἡ ΒΗ περιφέρειαι, τῇ ΕΖ περιφερείᾳ ἴση. (ζ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΓ = ΕΖ. (η) ἄρα ἡ ΒΓ = ΒΗ. (θ) τὸ ὅλον τῶ μέρει, ὁπερ ἀδύνατον. ἔκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ ΒΚΓ τῇ ΕΘΖ. ἄρα ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν πρὸς τῶ Α ἡμίσεια τῆς πρὸς τῶ Κ, ἡ δὲ πρὸς τῶ Δ ἡμίσεια τῆς πρὸς τῶ Θ. (ι) καὶ ἡ πρὸς τῶ Α ἄρα ἴση τῇ πρὸς τῶ Δ (κ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

Ἐῴωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΕΖ, τὰς μὲν ΒΑΓ, ΕΔΖ περιφερείας μείζοντας ἀφαιρῶσαι, τὰς δὲ ΒΗΓ, ΕΘΖ ἐλάττονας. λέγω ὅτι ἡ μὲν ΒΑΓ = ΕΔΖ, ἡ δὲ ΒΗΓ = ΕΘΖ. §. 45.

ΚΑ.

- (γ) Κατὰ τὴν κ. τῇ γ. (δ) Κατὰ τὴν κγ. τῇ α. (ε) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ζ) Κατὰ τὴν προλ. πρώτ. (η) Ἐξ ὑποθ. (θ) Κατὰ τὴν κ. μείζ. (ι) Κατὰ τὴν κ. τῇ γ. (κ) Κατὰ τὴν ε. Ἀξ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῶν κέντρων Κ, Λ ἐπὶ τὰ Β, Γ, Ε, Ζ σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΛΕ, ΛΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΚΓ, ΕΛΖ, ἡ μὲν ΒΚ = ΕΛ, ἡ δὲ ΚΓ = ΛΖ· ἴσοι γὰρ οἱ κύκλοι· (λ) ἡ δὲ ΒΓ = ΕΖ. (μ) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΒΚΓ = ΕΛΖ. (ν) ἄρα καὶ ἡ περιφέρεια ΒΗΓ = ΕΘΖ. (ξ) ἀλλ' ὅλη ἡ ΑΒΗΓ περιφέρεια ἴση ὅλῃ τῇ ΔΕΘΖ. (ο) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΑΓ ἴση λοιπῇ τῇ ΕΔΖ. (π)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφέρειας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνωνται.

Ἔσωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴση περιφέρεια ἀπεκλήφθωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι. λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ = ΕΖ. κ. 45.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῶν Κ, Λ κέντρων ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Γ, Ε, Ζ σημεῖα αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΛΕ, ΕΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΚΓ, ΕΛΖ, ἡ μὲν ΒΚ = ΕΛ, ἡ δὲ ΚΓ = ΛΖ, (ρ) καὶ γωνία ἡ ΒΚΓ = ΕΛΖ. (σ) ἄρα καὶ ΒΓ = ΕΖ. (τ).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ'.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἔσω

(λ) Ἐξ ὑποθ. (μ) Ἐξ ὑποθ. (ν) Κατὰ τὴν η. τῷ κ. (ξ) Κατὰ τὴν κς. τῷ γ. (ο) Ἐξ ὑποθ. (π) Κατὰ τὸ γ. ἀξ. (ρ) Ἐξ ὑποθ. (σ) Κατὰ τὴν κς. τῷ γ. (τ) Κατὰ τὴν θ. τῷ κ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήθω δίχα κατὰ τὸ Γ.
καὶ ἡχθω ἡ ΓΔ κάθετος τῇ ΑΒ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΔΒ
περιφέρειαι δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ. ἐπεζεύχθωσαν
γὰρ αἱ ΑΔ, ΒΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΓΔΒ, ΓΔΑ, ἡ μὲν ΑΓ=ΓΒ,
(υ) ἡ δὲ ΓΔ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΔΓΒ=ΔΓΑ. (φ)
ἄρα καὶ ΔΒ=ΔΑ. (χ) ἄρα καὶ ἡ ΔΕΒ περιφέρεια
τῇ ΔΖΑ ἴση. (ψ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ'.

Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία
ὀρθὴ ἔστιν ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάτ-
των ὀρθῆς. ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι, μείζων ὀρ-
θῆς. καὶ ἐτι ἡ μὲν τῷ μείζονος τμήματος γω-
νία μείζων ἔστιν ὀρθῆς, ἡ δὲ τῷ ἐλάττονος
τμήματος γωνία, ἐλάττων ἔστιν ὀρθῆς.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτῷ ἡ ΒΓ,
κέντρον δὲ τὸ Κ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς περιφερείας
δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α καὶ Δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν
αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ. λέγω πρῶτον, ὅτι ἡ μὲν ἐν
τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ΒΑΓ ὀρθὴ ἔστιν. Β'. ὅτι ἡ ΑΓΒ
ἡ ἐν τῷ μείζονι τῷ ἡμικυκλίῳ τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς.
Γ'. ὅτι ἡ ΑΔΓ, ἡ ἐν τῷ ἐλάττονι τῷ ἡμικυκλίῳ τμή-
ματι μείζων ὀρθῆς. Δ'. ὅτι ἡ μὲν τῷ μείζονος τμήματος
μικτόγραμμος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ΑΒΓ πε-
ριφε-

(υ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (φ) Ὁμοίως. (χ) Κατὰ τὴν δ. τῷ κ.
(ψ) Κατὰ τὴν κη. τῷ γ.

ριφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας μέζων ὀρθῆς. Ε'. ὅτι ἡ τῷ ἐλάττωνος τμήματος μικτόγραμμος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ΑΔΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. χ. 47.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ, καὶ ἐκβεβλήθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἡ ΚΑ = ΚΒ. (ω) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΚΑΒ = ΚΒΑ. (α) ἀλλ' ἡ ΑΚΓ = ΚΑΒ + ΚΒΑ. (β) ἡ ἄρα ΑΚΓ διπλασία τῆς ΚΑΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΚΒ διπλασία τῆς ΚΑΓ. αἱ ἄρα ΑΚΒ, ΑΚΓ διπλασίονες τῶν ΚΑΓ, ΚΑΒ. ἀλλ' αἱ ΑΚΒ, ΑΚΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. (γ) αἱ ἄρα ΚΑΓ, ΚΑΒ, εἴτεν ἡ ΒΑΓ μιᾶς ὀρθῇ ἴση.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐπεὶ τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ μία γωνία ἡ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν, ὥς δέδεικται, ἑκατέρω ἄρα τῶν λοιπῶν ἐλάσσων ὀρθῆς. (δ) ἡ ἄρα ΑΒΓ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Γ'.

Αἱ τῷ τετραπλεύρῳ ΑΔΓΒ ἀπεναντίον γωνία ΑΔΓ, ΑΒΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. (ε) ἀλλὰ δέδεικται ἡ ΑΒΓ ἐλάσσων ὀρθῆς. ἄρα ἡ ΑΔΓ μέζων ὀρθῆς.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Δ'.

Ἡ ΒΑΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὥς δέδεικται. ἀλλ' ἡ μικτόγραμμος ΓΑΒ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας μέζων ἐστὶ τῆς εὐθυγράμμου γωνίας ΒΑΓ. ἄρα μέζων ἐστὶν ὀρθῆς.

Η

ΔΕΙ.

(ω) Κατὰ τὸ δ. πρό. τῇ α. (α) Κατὰ τὴν ε. τῷ α. (β) Κατὰ τὴν λβ. τῷ α. (γ) Κατὰ ιγ. τῷ α. (δ) Κατὰ τὴν γ. συνέπ. τῆς λβ. τῷ α. (ε) Κατὰ τὴν κβ. τῷ γ.

αλλ' ἡ μικτογραμμὸς ΔΗΙ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ΓΔΑ
 περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ ευθείας, ἐλάσσων ἐς τῆς ευ-
 θυγράμμου γωνίας ΓΑΖ. ἐλάσσων ἄρα ὀρθῆς ἐστὶ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΑΒ'.

Ἐὰν κύκλος ἐφαπτήται τις ευθεία, ἀπὸ δὲ
 τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις ευθεία
 τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιῇ γωνίας πρὸς
 τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς
 ἐναλλὰξ τῷ κύκλῳ τμήμασι γωνίαις.

Κύκλος τῷ ΑΓΒ ἐφαπτέσθω τις ευθεία ἡ ΕΖ κατὰ
 τὸ Β σημεῖον, καὶ τεμένετω αὐτὸν ἡ ΒΔ. λέγω, ὅτι
 ἃς ποιῇ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἴσαι ἔσονται ταῖς
 ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τῷ κύκλῳ γωνίαις, τετέστιν
 ὅτι ἡ μὲν ΖΒΔ ἴση τῇ ἐν τῷ ΔΑΒ τμήματι συνευ-
 μένῃ ἡ δὲ ΕΒΔ ἴση τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι. χ. 48.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΒΑ κάθετος τῇ ΖΕ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς
 ΒΔ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ. καὶ ἐπεζεύχθω-
 σαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΒΑ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ἐφαπτομένῃ ΖΕ,
 ἐπ' αὐτῆς ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον. (η) τὸ ἄρα ΕΔΑ ἡμι-
 κύκλιόν ἐστιν. ἄρα ἡ ΒΔΑ γωνία ὀρθή ἐστιν. (θ) αἱ ἄρα
 ΔΑΒ

(ζ) Κατὰ τὴν ιγ τῷ α. (η) Κατὰ τὴν ιθ. τῷ γ. (θ) Κατὰ
 τὴν προλ. πρότ.

$\Delta\alpha\beta\Gamma$ ἴσαι τὰς $\Sigma\beta\delta$, $\Sigma\epsilon\delta$. (κ) καὶ ἡ ἀφ' ἧς ἡ $\Delta\alpha\beta\Gamma$
 καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ $\Delta\alpha\beta$, ἡ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι, ἴση
 λοιπῇ τῇ $\Sigma\beta\delta$. (μ) πάλιν ἐπεὶ αἱ Γ καὶ Λ γωνίαι
 δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. (ν) δυσὶ δὲ ὀρθαῖς ἴσαι καὶ αἱ
 $\Sigma\beta\delta$, $\epsilon\beta\delta$. (ξ) ἄρα $\Gamma + \Lambda = \Sigma\beta\delta + \epsilon\beta\delta$. (ο)
 ἀλλ' ἡ $\Lambda = \Sigma\beta\delta$, ὡς δέδοικται. ἄρα καὶ ἡ Γ , εἴτεν
 $\Delta\Gamma\beta = \epsilon\beta\delta$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΔΓ'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμήμα
 κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γω-
 νίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ $\alpha\beta$, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία
 εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ . ἥτις ἡ ὀξεία ἐστίν, ἡ ὀρ-
 θή, ἡ ἀμβλεῖα. ἔστω δὲ πρότερον ὀξεία. κ. 49.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω ἡ $\Gamma\alpha\beta$ γωνία ἴση τῇ δοθείσῃ Γ . (π) καὶ
 ἦχθω ἡ $\alpha\zeta$ πρὸς ὀρθὰς τῇ $\Gamma\delta$. (ρ) καὶ συνεσάτω
 ἡ γωνία $\alpha\beta\kappa = \beta\alpha\kappa$. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ κ , διαστή-
 ματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν $\kappa\alpha$, $\kappa\beta$ ἴση γὰρ ἡ $\kappa\alpha$ τῇ $\kappa\beta$
 (σ) κύκλος γεγράφθω ὁ $\alpha\beta\zeta\eta$. λέγω, ὅτι τὸ $\alpha\beta\eta$ ἐστὶ
 τὸ ζητούμενον κύκλος τμήμα. ἐπεξέυχθω γὰρ ἡ $\beta\zeta$.

- (ι) Κατὰ τὴν δ. συνέπ. τῆς λβ. τῶ α. (κ) Ἐκ τῆς κατασκ.
 (λ) Κατὰ τὸ α. αῖ. (μ) Κατὰ τὸ γ. αῖ. (ν) Κατὰ τὴν
 κγ. τῶ γ. (ξ) Κατὰ τὴν ιγ. τῶ α. (ο) Κατὰ τὸ κ. αῖ.
 (π) Κατὰ τὴν κγ. τῶ α. (ρ) Κατὰ τὴν ια. τῶ α. (σ) Κατὰ
 τὴν ε. τῶ α.

Ἡ γωνία ΓΑΒ ἴση τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι ΑΖΒ. (τ) ἀλλὰ τῇ ΓΑΒ ἴση ἢ πρὸς τῷ Γ. (υ) καὶ ἡ ΑΖΒ ἄρα ἴση τῇ πρὸς τῷ Γ. (φ) γέγραπται ἄρα ἐπὶ τῆς δοθείσης ΑΒ τμήμα κύκλος τὸ ΑΒΖΗ περιέχον γωνίαν τὴν ΑΖΒ ἴσην τῇ δοθείσῃ Γ. Ἀλλὰ δὴ ὁρῶν ἔσω ἢ πρὸς τῷ Γ δοθεῖσα γωνία.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήσω δίχα ἢ ΑΒ κατὰ τὸ Κ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ὅποτέρῳ τῶν ΚΑ, ΚΒ ἡμικύκλιον γεγραφθῶ τὸ ΑΛΒ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΛΒ ἐστὶ τὸ ζητούμενον τμήμα. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΛ, ΛΒ. χ. 50.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΛΒ γωνία ὁρῶν ἐστίν. (χ) ἀλλὰ καὶ ἡ Γ ὁρῶν. ἴση ἄρα ἢ ΑΛΒ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ἢ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεῖα ἔσω.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεξάτω ἡ ΒΑΔ γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ Γ. καὶ τὰ λοιπὰ κατασκευάσω, καθάπερ καὶ ὅτε ὀξεῖα ἦν ἡ δοθεῖσα γωνία. λέγω δὴ, ὅτι τὸ ΑΛΒ τμήμα ἐστὶ τὸ ζητούμενον. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΛ, ΑΛ. χ. 51.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι ΑΛΒ. (ψ) ἀλλ' ἢ ΒΑΔ = Γ. (ω) καὶ ἡ ΑΛΒ ἄρα ἴση τῇ πρὸς τῷ Γ. (α)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ'.

Ἀπὸ τῆς δοθέντος κύκλου τμήμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἐσω

(τ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (υ) Ἐκ τῆς κατασκ. (φ) Κατὰ τὸ κ. αἶξ. (χ) Κατὰ τὴν λα. τῆ γ. (ψ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (ω) Ἐκ τῆς κατασκ. (α) Κατὰ τὸ κ. αἶξ.

Ἐξω ὁ μὲν δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ. *χ.* 52.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω τῷ ΑΒΓ κύκλῳ ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β. καὶ συνεσάτω τῇ πρὸς τῷ Δ γωνία ἴση ἡ ΖΒΓ. λέγω, ὅτι τὸ ΒΑΓ ἐστὶ τὸ ζητούμενον τμήμα. ληφθέντος γὰρ τυχόντος σημείου τῷ Α ἐπὶ τῆς περιφερείας ΒΑΓ, ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΖΒΓ γωνία ἴση τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι ΒΑΓ. (β) ἀλλὰ τῇ ΖΒΓ ἴση ἡ πρὸς τῷ Δ. (γ) ἡ ἄρα ΒΑΓ = Δ. (δ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ΄.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἐτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον. λέγω ὅτι τὸ ΑΕ. ΕΓ = ΔΕ. ΕΒ. *χ.* 53.

Εἰ μὲν αἱ ΑΓ, ΒΔ διὰ τῶν κέντρων διέρχωνται, φανερόν ὅτι ἴσων ἔσῳν τῶν ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ΑΕ. ΕΓ = ΔΕ. ΕΒ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ μὲν ΑΓ διὰ τῶν κέντρων Κ, ἡ δὲ ΔΒ μὴ διὰ τῶν κέντρων διερχέσθω. τεμνέτωσαν δὲ πρῶτον ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὸ Ε. *χ.* 54.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΚΒ.

Η 3

ΔΕΙ-

(β) Κατὰ τὴν λβ. τῷ γ. (γ) Ἐκ τῆς κατασκ. (δ) Κατὰ τὸ α. αἷ.

$\overline{KB}^2$. ἢ γὰρ $\overline{EK} = \overline{KE}$. (ζ) ἄρα $\overline{AE} \cdot \overline{EF} + \overline{KE}^2 = \overline{KB}^2$.
 (η) ἀλλὰ $\overline{KB}^2 = \overline{KE}^2 + \overline{EB}^2$. (θ) ἄρα $\overline{AE} \cdot \overline{EF} + \overline{KE}^2 = \overline{KE}^2 + \overline{EB}^2$. (ι) κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ $\overline{KE}^2$. ἄρα $\overline{AE} \cdot \overline{EF} = \overline{EB}^2$. (κ) ἀλλ' $\overline{EB}^2 = \overline{DE} \cdot \overline{EB}$. ἢ γὰρ $\overline{DE} = \overline{EB}$. (λ) ἄρα $\overline{AE} \cdot \overline{EF} = \overline{DE} \cdot \overline{EB}$.

Τεμνέτωσαν δὲ ἀλλήλας μὴ πρὸς ὀρθὰς αἱ $\overline{AG}$, $\overline{AB}$. χ. 55.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῆς κέντρος K ἡ $\overline{KH}$ πρὸς ὀρθὰς τῇ $\overline{AB}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{KD}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $\overline{AE} \cdot \overline{EF} + \overline{KE}^2 = \overline{KG}^2$. (μ) ἔστι δὲ $\overline{KG}^2 = \overline{KD}^2$. ἄρα $\overline{AE} \cdot \overline{EF} + \overline{KE}^2 = \overline{KD}^2$. ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{KE}^2 = \overline{KH}^2 + \overline{EH}^2$. τὸ δὲ $\overline{KD}^2 = \overline{KH}^2 + \overline{DH}^2$. (ν) ἄρα $\overline{AE} \cdot \overline{EF} + \overline{KH}^2 + \overline{EH}^2 = \overline{KH}^2 + \overline{DH}^2$. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ $\overline{KH}^2$. ἄρα $\overline{AE} \cdot \overline{EF} + \overline{EH}^2 = \overline{DH}^2$. ἀλλὰ $\overline{DH}^2 = \overline{DE} \cdot \overline{EB} + \overline{EH}^2$. (ξ) ἄρα $\overline{AE} \cdot \overline{EF} + \overline{EH}^2 = \overline{DE} \cdot \overline{EB} + \overline{EH}^2$. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ $\overline{EH}^2$. ἄρα $\overline{AE} \cdot \overline{EF} = \overline{DE} \cdot \overline{EB}$.

Ἀλλὰ δὴ μὴδὲ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτωσαν ἀλλήλας, μὴδὲ διὰ τῆς κέντρος K διερχέσθωσαν αἱ $\overline{AG}$, $\overline{AB}$. χ. 56.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{KE}$, καὶ ἐκβεβλήθω ἐφ' ἑκάτερα ταῦ μέρη ἐπὶ ταῖς H , Θ σημεῖα.

ΔΕΙ-

- (ι) Κατὰ τὴν ε. τῆ β. (ζ) Κατὰ τὸ δ. πορ. τῆ α. (η) Κατὰ τὸ α. ἀξ. (θ) Κατὰ τὴν μζ. τῆ α. (ι) Κατὰ τὸ αὐτὸ ἀξ. (κ) Κατὰ τὸ γ. ἀξ. (λ) Κατὰ τὴν γ. τῆ γ. (μ) Κατὰ τὴν ε. τῆ β. (ν) Κατὰ τὴν μζ. τῆ α. (ξ) Κατὰ τὴν ε. τῆ β.

Εάν κύκλος $\Lambda\eta\Phi\psi$ τι σημείον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτῶ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφαπτήται, ἔσαι τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνέσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῶ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλος τῶ $AB\Gamma$ εἰλήφθω τὸ σημείον ἐκτός, τὸ Δ , καὶ ἀπὸ τῶ Δ προσπιπτέτωσαν πρὸς τὸν κύκλον δύο εὐθεῖαι αἱ $\Delta\Gamma A$, ΔB . καὶ ἡ μὲν $\Delta\Gamma A$ τεμνέτω, ἡ δὲ ΔB ἐφαπτέτω τῶ κύκλῳ. λέγω, ὅτι $\Delta A \cdot \Delta\Gamma = \Delta B^2$
 §. 57.

Ἡ τὸν κύκλον τέμνεσα $\Delta\Gamma A$ ἦτοι διὰ τῶ κέντρου εἶναι, ἢ ἔ. Ἐσὼ πρότερον διὰ τῶ κέντρου K .

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ KB ,

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $\Delta A \cdot \Delta\Gamma + \overline{K\Gamma}^2 = \overline{K\Delta}^2$. (π) καὶ $\overline{K\Delta}^2 = \overline{KB}^2 + \overline{B\Delta}^2$. (ρ) ἄρα $\Delta A \cdot \Delta\Gamma + \overline{K\Gamma}^2 = \overline{KB}^2 + \overline{B\Delta}^2$. ἀλλὰ $\overline{KB}^2 = \overline{K\Gamma}^2$. ἄρα ἀφαιρεθέντων τῶν ἴσων, ἔσαι $\Delta A \cdot \Delta\Gamma = \overline{B\Delta}^2$.

Η 4

Ἀλλὰ

(ο) Κατὰ τὰ προλαβόντα ἀρχθέντα. (π) Κατὰ τὴν 5. τῶ β. (ρ) Κατὰ τὴν μζ. τῶ κ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ μὴ ἔσω διὰ τῆς κέντρου Κ. χ. 58.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΚΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΑ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ΑΔ, ΔΓ + $\overline{ΖΓ}^2 = \overline{ΖΔ}^2$. (σ) κοινὸν προσκείθω τὸ $\overline{ΚΖ}^2$. ἄρα ΑΔ, ΔΓ + $\overline{ΖΓ}^2 + \overline{ΚΖ}^2 = \overline{ΖΔ}^2 + \overline{ΚΖ}^2$. (τ) ἀλλὰ τὰ μὲν $\overline{ΖΓ}^2 + \overline{ΚΖ}^2 = \overline{ΚΓ}^2$. τὰ δὲ $\overline{ΖΔ}^2 + \overline{ΚΖ}^2 = \overline{ΚΔ}^2$. (υ) ἄρα ΑΔ, ΔΓ + $\overline{ΚΓ}^2 = \overline{ΚΔ}^2$. ἀλλὰ $\overline{ΚΔ}^2 = \overline{ΚΒ}^2 + \overline{ΒΔ}^2$. (φ) ἄρα ΑΔ, ΔΓ + $\overline{ΚΓ}^2 = \overline{ΚΒ}^2 + \overline{ΒΔ}^2$. ἀλλὰ $\overline{ΚΓ}^2 = \overline{ΚΒ}^2$. τῶν ἴσων ἄρα ἀφαιρεθέντων, ἔσται ΑΔ, ΔΓ = $\overline{ΒΔ}^2$.

ΣΥΝΕΠΕΙΛΑΙ.

Α. Ἐὰν ἀπὸ τῆς αὐτῆς σημείου Δ (χ. 59.) ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ὁσαυδηποτὲν τὸν κύκλον τέμνουσαι, ἔσονται πάντα τὰ ὑπὸ τῶν ὅλων καὶ τῶν ἐκτὸς ἀπολαμβανόμενων μεταξὺ τῆς σημείου Δ καὶ τῆς περιφερείας περιχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἀλλήλοις· εἶπεν ΑΔ, ΔΓ = ΕΔ. Δγ = ΖΔ. Δγ, ἕκασον γὰρ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΘ τετραγώνῳ.

Β. Αἱ ἀπὸ τῆς αὐτῆς σημείου Δ ἀχθῶσιν τῆς κύκλου ἐφαπτόμεναι ΔΘ, ΔΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἑκατέρω γὰρ ἴση τῷ ὀρθογώνῳ ΑΔ, ΔΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΖ'.

Ἐὰν κύκλος ληφθῇ τὶ σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τῆς σημείου προσπ. πτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν
αὐ-

(σ) Κατὰ τὴν σ'. τῆ β. (τ) Κατὰ τὸ β. κξ. (υ) Κατὰ τὴν μξ. τῆ κ. (φ) Κατὰ τὴν κντήν.

αὐτῶν τεμνῇ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπιπτῇ, ἥ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνύσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῶν σημείων καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτύσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάπτεται τῷ κύκλῳ.

Κύκλῳ τῷ ΑΒΓ εἰλήφθω τὸ σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπιπτέωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ. καὶ ἡ μὲν τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπιπτέτω. ἔσω δὲ ΑΔ. $\Delta\Gamma = \Delta B^2$. λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τῷ κύκλῳ. χ. 60.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΔΕ ἐφαπτομένη τῷ κύκλῳ. (χ) καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων Κ ἐπὶ τὰ Ε, Δ, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΕ, ΚΔ, ΚΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΔ. $\Delta\Gamma = \Delta E^2$. (ψ) ἀλλὰ $\Delta\Gamma = \Delta B^2$.
(ω) ἄρα $\Delta E^2 = \Delta B^2$. ἄρα $\Delta E = \Delta B$. Ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΔΚΕ, ΔΚΒ, ἡ μὲν $ΚΕ = ΚΒ$, ἡ δὲ $\Delta E = \Delta B$, ἡ δὲ ΔΚ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΔΕΚ = ΔΒΚ. (α) ἀλλ' ἡ ΔΕΚ ὀρθή. (β) καὶ ἡ ΔΒΚ ἄρα ὀρθή ἐστίν. ἐφάπτεται ἄρα ἡ ΔΒ τῷ ΑΒΓ κύκλῳ. (γ)

-
- (χ) Κατὰ τὴν ιζ. τῆ γ. (ψ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (ω) Ἐξ ὑποθ. (α) Κατὰ τὴν η. τῆ α. (β) Κατὰ τὴν ιη. τῆ γ. (γ) Κατὰ τὴν ις. τῆ γ.
-

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Σχήμα εὐθύγραμμον εἰς χῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφειν λέγεται, ὅταν ἐκάστη τῶν τῷ ἐγγραφομένῳ χήματος $ΑΒΓΔ$ γωνιῶν ἐκάστης πλευρᾶς τῆς εἰς ὃ ἐγγράφεται $ΕΖΗΘ$ ἄπτηται. πίν. ιγ'. χ. 1.

Σχήμα δὲ περὶ χῆμα περιγράφειν λέγεται, ὅταν καὶ πλευρὰ τῆς περιγραφομένης $ΕΖΗΘ$, ἐκάστης γωνίας τῆς περὶ ὃ περιγράφεται $ΑΒΓΔ$ ἄπτηται. χ. 1.

Σχήμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφειν λέγεται, ὅταν ἐκάστη γωνία τῆς ἐγγραφομένης $ΑΒΓΔΕ$ ἄπτηται τῆς τῷ κύκλῳ $ΑΖΗ$ περιφερείας. χ. 2.

Σχήμα περὶ κύκλον περιγράφειν λέγεται, ὅταν τῆς τῷ κύκλῳ $ΑΘΗ$ περιφερείας ἐκάστη πλευρὰ τῆς περιγραφομένης $ΑΒΓΔΕΖ$, ἄπτηται. χ. 3.

Κύκλος εἰς χῆμα ἐγγράφειν λέγεται, ὅταν ἢ τῷ κύκλῳ $ΑΗΘ$ περιφέρεια ἐκάστης πλευρᾶς τῆς εἰς ὃ ἐγγράφεται $ΑΒΓΔΕΖ$ ἄπτηται. χ. 3.

Κύκλος περὶ χῆμα περιγράφειν λέγεται, ὅταν τῷ κύκλῳ $ΑΖΗ$ περιφέρεια ἐκάστης γωνίας τῆς περὶ ὃ περιγράφεται $ΑΒΓΔΕ$ ἄπτηται. χ. 2.

Εὐθεῖα ἢ $ΕΓ$ εἰς κύκλον τὸν $ΑΔΕΓ$ ἐναερόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ τῷ κύκλῳ. χ. 4.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μείζονι ἔσῃ τῆς τῷ κύκλῳ διαμέτρου ἴσω εὐθείαν ἐναερόσαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ΑΒΓ$, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα $ΑΒ$. χ. 5.

ΚΛ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω τῷ ΑΒΓ κύκλος διάμετρος ἡ ΒΓ. εἰ μὲν ἔν ἴση ἔσιν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δ' ἔ, μείζων ἔσιν ἡ ΒΓ τῆς Δ, κείθω τῇ Δ ἴση ἡ ΓΕ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκλος γεγραμμένος ὁ ΕΖΗ. καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΓΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἔσιν ἡ ζητούμενη.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΓΕ = ΓΖ. (δ) ἀλλὰ τῇ ΓΕ = Δ. (ε) ἄρα καὶ ἡ ΓΖ = Δ. (ζ) εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ΑΒΓ τῇ δοθείσῃ Δ ἴση ἐνήμεοται ἡ ΓΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ μὲν δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθέν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ. κ. ο.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΗΑΘ ἐφαπτομένη τῷ ΑΒΓ κύκλῳ. (η) καὶ συνεχῶτα ἡ μὲν γωνία ΗΑΒ = Ε, ἡ δὲ ΘΑΓ = Ζ. (θ) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΓ. λέγω, ὅτι τὸ ΒΑΓ τρίγωνόν ἐστι τὸ ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία ΗΑΒ = ΑΓΒ. (ι) ἀλλὰ τῇ ΗΑΒ = Ε. (κ) ἄρα καὶ ἡ ΑΓΒ = Ε. (λ) διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ = Ζ. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΑΓ ἴση λοιπῇ τῇ Δ. (μ)

- (δ) Κατὰ τὸ δ. πορ. τῷ α. (ε) Ἐκ τῆς κατασκ. (ζ) Κατὰ τὸ α. ἀξ. (η) Κατὰ τὴν ιζ. τῷ γ. (θ) Κατὰ τὴν κγ. τῷ κ. (ι) Κατὰ τὴν λβ. τῷ γ. (κ) Ἐκ τῆς κατασκ. (λ) Κατὰ τὸ α. ἀξ.

(μ) ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΒΑΓ τριγώνον τῷ ΔΕΖ· καὶ ἐγγεγραπταὶ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ μὲν δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ. κ. 7.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἡ ΕΖ ἐπὶ τὰ Θ, Ι σημῖα. καὶ ἀπὸ τῶ κέντρων Κ ἡχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ΚΒ. καὶ συνεστώσαν γωνίαι ἡ μὲν ΓΚΒ = ΔΕΙ, ἡ δὲ ΑΚΒ = ΔΖΘ. (ν) καὶ δια τῶν Α, Β, Γ σημείων ἡχθώσαν ἐφαπτόμεναι τῷ ΑΒΓ κύκλῳ αἱ ΛΜ, ΜΗ, ΗΛ. λέγω, ὅτι τὸ ΛΜΗ τρίγωνον ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ τῷ ΗΓΚΒ τετραπλεύρῳ γωνίαι ἴσαι εἰσὶ τέσσαρσιν ὀρθαῖς. (ξ) ἀλλ' ἡ ΚΓΗ ὀρθή ἐστιν, ὁμοίως καὶ ἡ ΚΒΗ. (ο) αἱ ἄρα ΓΚΒ, ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. ἀλλὰ καὶ αἱ ΔΕΙ, ΔΕΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. (π) ἄρα ΓΚΒ + ΓΗΒ = ΔΕΙ + ΔΕΖ. (ρ) ἀλλ' ἡ ΓΚΒ = ΔΕΙ. (σ) ἄρα καὶ ἡ ΓΗΒ, εἴτεν ἡ ΛΗΜ = ΔΕΖ. διὰ τὰ αὐτὰ ὅν δεχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ΛΜΗ = ΔΖΕ. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΜΛΗ = ΕΔΖ. (τ) ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΜΛΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ περιεγγραπταὶ περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον.

Ἡ ὅτι

- (μ) Κατὰ τὴν ζ. συνέπ. τῆς λβ. πρὸτ. τῷ α. (ν) Κατὰ τὴν κγ. τῷ α. (ξ) Κατὰ τὴν ιδ. συνέπ. τῆς λβ. τῷ α. (ο) Κατὰ τὴν ιη. τῷ γ. (π) Κατὰ τὴν ιγ. τῷ α. (ρ) Κατὰ τὸ α. εἰς. (σ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (τ) Κατὰ τὴν ζ. συνέπ. τῆς λβ. τῷ α.

συμπίπτει, δειχθήσεται ὅτως· ἡ ΑΚ ἐκ ἐστὶν ἐν-
 θείας τῇ ΚΓ. ἔσω γὰρ εἰ δυνατόν. αἱ ἄρα ΒΚΓ, ΒΚΑ
 γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. (υ) ἢ ἐπεὶ αἱ ΔΖΘ, ΔΖΕ,
 ΔΕΙ, ΔΕΖ ἴσαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς, (Φ) αἱ δὲ ΔΖΕ,
 ΔΕΖ ἐλάσσονες δύο ὀρθῶν. (Χ) αἱ ἄρα ΔΖΘ, ΔΕΙ
 μείζονες δύο ὀρθῶν. ἀλλ' ἢ μὲν ΒΚΓ = ΔΕΙ, ἢ δὲ ΒΚΑ =
 ΔΖΘ. (Ψ) αἱ ἄρα ΒΚΓ, ΒΚΑ μείζονες δύο ὀρθῶν. ἀλλὰ
 καὶ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς ἐδείχθησαν ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ
 ἄρα ἡ ΑΚ ἐπ' ἐνθείας τῇ ΚΓ. ἐπεξεύχθω ἐν ἡ ΑΓ.
 καὶ ἐπεὶ αἱ ΚΓΛ, ΚΑΛ ὀρθαὶ εἰσιν· (ω) αἱ δὲ ΑΓΛ,
 ΓΑΛ ἐλάσσονες τῶν ΚΓΛ, ΚΑΛ. αἱ ἄρα ΑΓΛ, ΓΑΛ
 ἐλάσσονες δύο ὀρθῶν. ἐκ ἄρα ἡ ΗΛ παραάλληλος τῇ
 ΜΛ. εἰ γὰρ παραάλληλος, αἱ γωνίαι ΑΓΛ, ΓΑΛ ἴσαι
 δυσὶν ὀρθαῖς, ἀλλὰ καὶ ἐλάσσονες ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ
 ἄρα ἡ ΗΛ παραάλληλος τῇ ΜΛ. συμπίπτει ἄρα ἡ ΗΛ
 τῇ ΜΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι ἢ αἱ ΗΛ,
 ΛΜ συμπίπτει τῇ ΗΜ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Δ'.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔσω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ χ. 8.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήσωσαν δίχα αἱ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι ταῖς ΒΚ,
 ΓΚ ἐνθεαῖς, (α) αἱ συμβαλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ
 Κ. καὶ ἀπὸ τοῦ Κ σημείω ἤχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ, ΚΕ
 πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. (β) λέγω, ὅτι ὁ κέν-
 τρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΖ, ἢ ΚΗ ἢ ΚΕ
 γραφόμενος κύκλος ἐστὶν ὁ ζητούμενος.

ΔΕΙ-

- (υ) Κατὰ τὴν ιγ. τῇ α. (Φ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (Χ) Κατὰ τὴν
 α. συνέπ. τῆς λβ. τῇ α. (Ψ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ω) Κατὰ
 τὴν ιη. τῇ γ. (α) Κατὰ τὴν θ. τῇ α. (β) Κατὰ τὴν ιβ. τῇ α.

Εν τοῖς τριγώνοις BKZ , BKE , ἡ μὲν γωνία $KBZ =$
 KBE , (γ) ἢ δὲ $KZB = KEB$, (δ) ἢ δὲ BK κοινὴ. καὶ
ἡ KZ , ἄρα ἴση τῇ KE . (ε) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ $KZ =$
 KH . αἱ ἄρα KZ , KE , KH ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέν-
τρον μὲν τῷ K , διαστήματι δὲ τῷ KZ , ἢ KE , ἢ KH
κύκλος γράφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων
καὶ ἐφάπεται τῶν $BΓ$, $ΓΑ$, $ΑΒ$ εὐθειῶν. (ζ)

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ε'.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι

Ἐστω δοθὲν τρίγωνον τὸ $ΑΒΓ$. καὶ θ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήσθωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΑΓ$ δίχα κατὰ τὰ $Δ$, $Ε$ α-
μείκ. (η) καὶ ἀπὸ τῶν $Δ$, $Ε$ σημείων ταῖς $ΑΒ$, $ΑΓ$
πρὸς ὀρθαῖς ἤχθωσαν αἱ $ΔΚ$, $ΕΚ$. συμπεσῶνται δὲ
τοὶ ἐντὸς τοῦ $ΑΒΓ$ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς $ΒΓ$ εὐθείας
ἢ ἐκτὸς τοῦ $ΑΒΓ$ τριγώνου συμπιπτεύωσαν πρῶτον
τοὺς κατὰ τὸ $Κ$. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΚΓ$, $ΚΒ$, $ΚΑ$
λέγω ὅτι ὁ κέντρον μὲν τῷ $Κ$, διαστήματι δὲ τῷ $ΚΓ$
ἢ $ΚΒ$, ἢ $ΚΑ$ γράφόμενος κύκλος ἐστὶν ὁ ζητούμενος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εν τοῖς τριγώνοις $ΑΚΕ$, $ΓΚΕ$, ἡ μὲν $ΑΕ = ΕΓ$
(θ) ἢ δὲ $ΚΕ$ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ $ΚΕΑ = ΚΕΓ$. ὀρθαὶ γὰρ
καὶ ἡ $ΚΑ$ ἄρα ἴση τῇ $ΚΓ$. (ι) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ
 $ΚΑ = ΚΒ$. αἱ τρεῖς ἄρα $ΚΑ$, $ΚΓ$, $ΚΒ$ ἴσαι ἀλλήλαις
εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ $Κ$, διαστήματι δὲ μιᾷ τῇ
 $ΚΑ$, $ΚΓ$, $ΚΒ$ κύκλος γράφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν

(γ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (δ) Ὁσαύτως. (ε) Κατὰ τὴν κς. τῆς
(ζ) Κατὰ τὴν ις τῆς γ. (η) Κατὰ τὴν ι. τῆς α. (θ) Ἐκ
κατασκευ. (ι) Κατὰ τὴν δ. τῆς α.

ως ορίζοντες, οὗ το K κέντρον ἐστὶ τὸ ζητούμενον κύκ-
λου. χ . 11.

ΣΥΝΕΠΕΙΛΑ.

Ὅτε μὲν ἐντὸς τῆς τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τῆς
κύκλου, ἡ $ΒΑΓ$ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὁρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ
τῆς $ΒΓ$, ὁρθὴ ἔσται· ὅταν δὲ ἐκτὸς τῆς τριγώνου, μείζων.
ὥστε καὶ ὅταν ἐλάττων ὁρθῆς τυγχάνῃ ἡ $ΒΑΓ$ γωνία
ἐντὸς τῆς τριγώνου συμπεσῶνται αἱ $ΔΚ$, $ΕΚ$. ὅταν δὲ
ὁρθὴ, ἐπὶ τῆς $ΒΓ$. ὅταν δὲ μείζων ὁρθῆς, ἐκτὸς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγ-
γράψαι.

Ἐξω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ΑΒΓΔ$. χ . 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθωσαν τῆς $ΑΒΓΔ$ κύκλου διάμετροι πρὸς ὁρθὰς ἀλ-
λήλων αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$,
 $ΔΑ$. λέγω, ὅτι τὸ $ΑΒΓΔ$ ἐστὶ τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις $ΒΑΚ$, $ΔΑΚ$, ἡ μὲν $ΕΚ = ΚΔ$, ἡ δὲ
 $ΚΑ$ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ $ΑΚΒ = ΑΚΔ$. (κ) ἄρα καὶ $ΑΒ =$
 $ΑΔ$. (λ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρωθεν τῶν $ΒΓ$, $ΓΔ$, ἑκα-
τέρωθεν

(κ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (λ) Κατὰ τὴν δ. τῆς κ.

τέραι τῶν AB , AD ἴση ἔσιν. ἰσόπλευρον ἄρα τὸ $ABGD$ τετράπλευρον. ἐπεὶ δὲ τὸ $BAΔ$ ἡμικύκλιόν ἐστιν, ὀρθή ἄρα ἢ $BAΔ$ γωνία. (μ) καὶ διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἐκάστη τῶν $ABΓ$, $BΓΔ$, $ΓΔΑ$ ὀρθή ἐστίν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABGD$ τετράπλευρον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, τετράγωνόν ἄρα ἐστὶ καὶ ἐγγεγραπταὶ εἰς τὸν $ABGD$ κύκλον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγεράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ABGD$. πίν. ΙΔ' χ. 13.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθωσαν τῷ $ABGD$ κύκλῳ δύο διαμέτροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, αἱ AG , BD . καὶ διὰ τῶν σημείων A , B , $Γ$, $Δ$ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τῷ κύκλῳ αἱ ZH , $HΘ$, $ΘE$, EZ . λέγω, ὅτι τὸ $HΘEZ$ τετράγωνόν ἐστι τὸ ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ πρὸς τῷ A γωνίαι ὀρθαί εἰσιν, ὁμοίως καὶ αἱ πρὸς τῷ B , καὶ $Γ$, καὶ $Δ$. (ν) ἐπεὶ δὲ αἱ HBK , AKB δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. (ξ) ἡ ἄρα $HΘ$ παράλληλος τῇ AG . (ο) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ZE παράλληλος τῇ AG . αἱ ἄρα $HΘ$, ZE παράλληλοι. (π) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ HZ παράλληλός ἐστι τῇ $ΘE$. τὸ ἄρα $HΘEZ$ παραλληλόγραμμόν ἐστιν. ἄρα ἢ μὲν $HZ = ΘE$, ἢ δὲ $HΘ = ZE$. (ρ) ἐπεὶ δὲ ἡ $AG = BD$, καὶ ἐκατέρωθεν μὲν τῶν $HΘ$, ZE ἴση τῇ AG , ἐκατέρωθεν δὲ τῶν HZ , $ΘE$ ἴση τῇ BD . (παραλληλόγραμμά γάρ τὰ $HΓ$, AE ,

(μ) Κατὰ τὴν λα. τῷ γ. (ν) Κατὰ τὴν ιη. τῷ γ. (ξ) Κατὰ τὴν αντ. καὶ κατὰ τὴν νατισκ. (ο) Κατὰ τὴν κη. τῷ κ. (π) Κατὰ τὴν λ. τῷ σ. (ρ) Κατὰ τὴν λδ. τῷ σ.

ΑΒ, ΓΔ. (υ) ἡ ὑποκείμενη ἀρεὰ τοῦ ΗΘΕΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΓΘ ὀρθή ἐστιν, (τ) ὁ, Θὴ ἀρεὰ καὶ ἡ πρὸς τῷ ΓΔ. (υ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς Θ, Ε, Ζ σημείοις γωνία ὀρθή ἐστιν. ὀρθογώνιον ἀρεὰ τὸ ΗΘΕΖ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, τετράγωνον ἀρεὰ ἐστὶ περιγεγραπταὶ δὲ καὶ περὶ τὸν ΑΛΙΔ κύκλον.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Τὸ περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένον τετράγωνον ΗΕ διπλάσιόν ἐστι τῷ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένῳ τετραγώνῳ ΑΒΓΔ. ἐπεὶ γὰρ $\overline{ΒΔ}^2 = \overline{ΕΑ}^2 + \overline{ΑΔ}^2$. (φ) ἐστὶ δὲ $\overline{ΒΑ}^2 = \overline{ΑΔ}^2$. ἢ γὰρ $ΒΑ = ΑΔ$. τὸ ἀρεὰ $\overline{ΒΔ}^2$ διπλάσιον τῷ $\overline{ΒΑ}^2$. ἀλλὰ $\overline{ΒΔ}^2 = \overline{ΗΖ}^2$. ἴση γὰρ ἡ ΒΔ τῇ ΗΖ. (χ) τὸ ἀρεὰ $\overline{ΗΖ}^2$ διπλάσιον τῷ $\overline{ΒΑ}^2$. ἀλλὰ τὸ $\overline{ΗΖ}^2$ ἐστὶ τὸ ΗΕ, τὸ δὲ $\overline{ΑΒ}^2$ ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ. τὸ ἀρεὰ περιγεγραμμένον ΗΕ διπλάσιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ ΑΒΓΔ. χ. 14.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ. χ. 15.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήσθω ἑκατέρω τῶν ΑΒ, ΑΔ δίχα κατὰ τὰ Ζ, Ε σημεία. (ψ) ἢ διὰ μὲν τῷ Ζ ὁποτέρω τῶν ΑΔ, ΒΓ ἤχθω παράλληλος ἡ ΖΗ, διὰ δὲ τῷ Ε, ὁποτέρω τῶν ΑΒ, ΔΓ ἡ ΕΘ. (ω) λέγω, ὅτι ὁ κέντρον μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΚΖ, ΚΕ, ΚΗ, ΚΘ γραφόμενος κύκλος ἐστὶν ὁ ζητούμενος.

Θ

ΔΕΙ-

- (σ) Κατὰ τὴν κη. τῷ α. (τ) Κατὰ τὴν ιη. τῷ γ. (υ) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. (φ) Κατὰ τὴν μζ. τῷ α. (χ) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. (ψ) Κατὰ τὴν ε. τῷ α. (ω) Κατὰ τὴν λα. τῷ α.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ ΑΘ, ΕΓ, ΑΚ, ΖΘ, ΕΗ, ΚΓ παραλληλόγραμμά εἰσιν. αἱ ἄρα ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. (α) καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΔ, ΑΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. (β) ἔστι δὲ ἡ μὲν ΑΕ ἡμίσεια τῆς ΑΔ, ἡ δὲ ΑΖ τῆς ΑΒ· ἄρα $ΑΕ = ΑΖ$. ἀλλ' ἡ μὲν $ΑΕ = ΖΚ$, ἡ δὲ $ΑΖ = ΕΚ$. (γ) ἄρα καὶ ἡ $ΖΚ = ΕΚ$. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρω τῶν ΚΘ, ΚΗ ἴση ἑκατέρω τῶν ΖΚ, ΚΕ. αἱ τέσσαρες ἄρα ΕΚ, ΖΚ, ΚΘ, ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ὁ ἄρα κέντρω μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἐνὶ αὐτῶν γραφόμενος κύκλος διὰ τῶν Ε, Ζ, Θ, Η σημείων ἔξει, καὶ ἐγγεγραμμένος ἔσται εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ. χ. 16.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ τεμνέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Κ. λέγω, ὅτι ὁ κέντρω μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΚΑ, ΚΔ, ΚΓ, ΚΒ, γραφόμενος κύκλος ἔστιν ὁ ζητούμενος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΔΑΒ, ΔΓΒ, ἡ μὲν $ΔΑ = ΔΓ$, ἡ δὲ $ΑΒ = ΒΓ$, ἡ δὲ ΔΒ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ $ΑΔΒ = ΓΔΒ$, καὶ ἡ $ΑΒΔ = ΓΒΔ$. (δ) ἑκατέρω ἄρα τῶν ΑΔΓ, ΑΒΓ γωνιῶν δίχα τέμνηται ὑπὸ τῆς ΔΒ. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρω τῶν ΔΑΒ, ΔΓΒ, δίχα

(α) Κατὰ τὴν λδ. τῆ α. (β) Ἐξ ὑποθ. (γ) Κατὰ τὴν λδ. τῆ κ. (δ) Κατὰ τὴν η. τῆ α.

δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ ἐν ταῖς ΑΔΚ, ΓΔΚ τριγώνοις, ἡ μὲν ΑΔ = ΔΓ, ἡ δὲ ΔΚ, κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΑΔΚ = ΓΔΚ, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ ΑΚ = ΚΓ. (ε) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρω τῶν ΔΚ, ΚΒ ἴση ἑκατέρω τῶν ΑΚ, ΚΓ. αἱ τέσσαρες ἄρα ΑΚ, ΚΓ, ΔΚ, ΚΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἐνὶ αὐτῶν γραφόμενος κύκλος ἦξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ περιγεγραμμένος ἔσται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέρω τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνικῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκέδω τις ἐνθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ. (ζ) καὶ κέντρον μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμόθω εἰς αὐτὸν ἡ ΒΔ ἴση τῇ ΑΓ, (η) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΔΒ τρίγωνον ἐστὶ τὸ ζητούμενον. ἐπεξεύχθω γάρ ἡ ΔΓ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΔΓΑΕ. ρ. 17.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΒ = ΑΔ. ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ ΑΔΒ τρίγωνον. καὶ ἐπεὶ ΑΒ. ΒΓ = ΑΓ². (θ) ἐστὶ δὲ ΑΓ² = ΔΒ². ἡ γάρ ΑΓ = ΔΒ. (ι) ἄρα καὶ ΑΒ. ΒΓ = ΔΒ². (κ) ἐφαπτομένη ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῷ ΔΓΑΕ κύκλῳ. (λ) ἡ γωνία ἄρα ΒΔΓ = ΔΑΓ. (μ) κοινὴ προσκείθω ἡ ΑΔΓ. ἄρα

⊙ 2

ΑΔΓ

(*) Κατὰ τὴν δ. τῇ κ. (ζ) Κατὰ τὴν ια. τῇ β. (η) Κατὰ τὴν α. τῇ δ. (θ) Ἐκ τῆς κατὰ κ. (ι) Ὡσαύτως. (κ) Κατὰ τὴν κ. αἰ. (λ) Κατὰ τὴν λζ. τῇ γ. (μ) Κατὰ τὴν λβ. τῇ γ.

$\Delta\Delta\Gamma + \Delta\Delta\Gamma$, ἤτοι $\Delta\Delta\Gamma = \Delta\Delta\Gamma + \Delta\Delta\Gamma$. (ν) ἄλλ' ἢ $\Delta\Gamma\Delta = \Delta\Delta\Gamma + \Delta\Delta\Gamma$. (ξ) ἄρα καὶ ἡ $\Delta\Delta\Gamma = \Delta\Gamma\Delta$.
 (ο) ἄλλ' ἢ $\Delta\Delta\Gamma = \Delta\Gamma\Delta$. (π) ἄρα καὶ ἡ $\Delta\Gamma\Delta = \Delta\Gamma\Delta$.
 ἄρα καὶ $\Delta\Gamma = \Delta\Gamma$. (ρ) ἄλλ' ἢ $\Delta\Gamma = \Delta\Gamma$. ἄρα καὶ ἡ
 $\Delta\Gamma = \Delta\Gamma$. ἄρα καὶ γωνία ἡ $\Gamma\Delta\Delta = \Gamma\Delta\Delta$. (σ) ἡ ἄρα
 $\Delta\Gamma\Delta$ διπλασίον ἐστὶ τῆς $\Delta\Delta\Gamma$. ἄλλ' ἢ τῇ $\Delta\Gamma\Delta$ ἴση δέ-
 δεικται ἡ $\Delta\Gamma\Delta$. καὶ ἡ $\Delta\Gamma\Delta$ ἄρα διπλασίον τῆς $\Delta\Delta\Gamma$.
 ἄλλ' ἢ τῇ $\Delta\Gamma\Delta$ ἴση ἡ $\Delta\Delta\Gamma$. (τ) καὶ ἡ $\Delta\Delta\Gamma$ ἄρα δι-
 πλασίον τῆς $\Delta\Delta\Gamma$. ἰσοσκελὲς ἄρα συνέστη τρίγωνον τὸ
 $\Delta\Delta\Gamma$ ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ $\Delta\Gamma$ βάσει γωνιῶν δι-
 πλασίονα τῆς λοιπῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. χ. 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκέσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ, διπλασίονα
 ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει ΗΘ γωνιῶν τῆς λοι-
 πῆς τῆς πρὸς τῷ Ζ. (υ) καὶ ἐγγεγράψθω εἰς τὸν
 ΑΒΓΔΕ κύκλον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ ἰσογώνιον τὸ ΖΗΘ.
 (φ) καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρη τῶν ΑΓΔ, ΑΔΓ γωνιῶν
 ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΒΑ,
 ΑΕ, ΕΔ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ ἐστὶ τὸ ζητούμενον πεν-
 τάγωνον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἑκατέρη τῶν ΑΓΔ, ΑΔΓ γωνιῶν διπλασίον
 ἐστὶ τῆς ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ,

ΔΒ

(ν) Κατὰ τὸ β. ἀξ. (ξ) Κατὰ τὴν λβ. τῆ α. (ο) Κατὰ
 α. ἀξ. (π) Κατὰ τὴν ι. τῆ α. (ρ) Κατὰ τὴν σ. τῆ
 (σ) Κατὰ τὴν ι. τῆ α. (τ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (υ) Κατὰ
 προλ. πρότ. (φ) Κατὰ τὴν β. τῆ δ.

ΔΒ εὐθειῶν αἱ πέντε ἄρα γωνίαι ΓΑΔ, ΒΔΓ, ΒΔΑ, ΑΓΕ, ΕΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. καὶ αἱ περιφέρειαι ἄρα ΓΔ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις. (χ) ἄρα καὶ αἱ πέντε εὐθεῖαι ΓΔ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις. (ψ) ἰσόπλευρον ἄρα τὸ πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ περιφέρειαι ἴση τῇ ΑΕ. ἐστὶ δὲ ἡ μὲν ΑΒΓΔ περιφέρειαι τριπλασία τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΑΕΔΓ τριπλασία τῆς ΑΕ. ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓΔ περιφέρειαι ἴση τῇ ΑΕΔΓ περιφέρειαι. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΕΔ = ΑΒΓ, (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάστη τῶν ΒΓΔ, ΓΔΕ, ΒΑΕ γωνιῶν ἴση ἐκατέρᾳ τῶν ΑΕΔ, ΑΒΓ. ἰσογώνιον ἄρα τὸ πεντάγωνον, ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ εἰσὶν ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστὶ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ΑΒΓΔΕ. χ. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Νενοήθω τῷ ἐγγεγραμμένῳ πενταγώνῳ τῶν γωνιῶν σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε. καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τῷ κύκλῳ αἱ ΗΘ, ΘΖ, ΖΛ, ΛΜ, ΜΗ. Λέγω, ὅτι τὸ ΗΘΖΛΜ ἐστὶ τὸ ζητούμενον πεντάγωνον. ἐπεδείχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῷ κέντρῳ Κ ἐπὶ τὰ Β, Ζ, Γ, Α, Δ σημεῖα αἱ ΚΒ, ΚΖ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΑ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ, σημεῖοις γωνίαι ὀρθαὶ εἰσιν.

$$(α) \text{ ἄρα } \overline{ΖΚ}^2 = \overline{ΚΒ}^2 + \overline{ΒΖ}^2. \text{ ἀλλὰ } \overline{ΖΚ}^2 = \overline{ΚΓ}^2 + \overline{ΓΖ}^2.$$

⊙ 3

(β)

(χ) Κατὰ τὴν 25. τῷ γ. (ψ) Κατὰ τὴν 28. τῷ γ. (ω) Κατὰ τὴν 25. τῷ γ. (α) Κατὰ τὴν 14. τῷ γ.

(β) ἄρα $\overline{KB}^2 + \overline{BZ}^2 = \overline{K\Gamma}^2 + \overline{\Gamma Z}^2$. (γ) ἀλλὰ $\overline{KB}^2 = \overline{K\Gamma}^2$. καὶ γὰρ ἡ $KB = K\Gamma$. ἄρα καὶ $\overline{BZ}^2 = \overline{\Gamma Z}^2$. (δ) ἄρα καὶ $BZ = \Gamma Z$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $\Gamma\Lambda = \Delta\Lambda$. ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν $Z\epsilon\kappa$, $Z\iota\kappa$, ἡ μὲν $KB = K\Gamma$, ἡ δὲ $BZ = \Gamma Z$, ἡ δὲ KZ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ $BKZ = ZK\Gamma$. (ε) ἡ ἄρα $BK\Gamma$ διπλασία τῆς $ZK\Gamma$. ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι ἡ $\Delta K\Gamma$ διπλασία ἐστὶ τῆς $\Lambda K\Gamma$. ἀλλ' ἡ $BK\Gamma = \Delta K\Gamma$. (ς) ἄρα καὶ ἡ $ZK\Gamma = \Lambda K\Gamma$. καὶ ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν $KZ\Gamma$, $K\Lambda\Gamma$, ἡ μὲν γωνία $ZK\Gamma = \Lambda K\Gamma$, ἡ δὲ $K\Gamma Z = K\Gamma\Lambda$, ἡ δὲ $K\Gamma$ κοινή. ἄρα καὶ ἡ γωνία $KZ\Gamma = K\Lambda\Gamma$, καὶ ἡ $Z\Gamma = \Gamma\Lambda$. (η) ἡ ἄρα $Z\Lambda$ διπλασία τῆς $Z\Gamma$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $Z\Theta$ διπλασία τῆς ZB . καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ $BZ = \Gamma Z$, καὶ ἡ ΘZ ἄρα ἴση τῇ $Z\Lambda$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΛM , MH , $H\Theta$ ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΘZ , $Z\Lambda$. αἱ πέντε ἄρα ΛZ , $Z\Theta$, ΘH , $H M$, $M\Lambda$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσόπλευρον ἄρα τὸ πεντάγωνον. ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς τριγώνοις $Z\epsilon\kappa$, $Z\iota\kappa$, ἡ μὲν $BK = \Gamma K$, ἡ δὲ $BZ = \Gamma Z$, ἡ δὲ ZK κοινή, καὶ γωνία ἄρα ἡ $KZB = KZ\Gamma$. (θ) ἡ ἄρα $BZ\Gamma$ διπλασία τῆς $KZ\Gamma$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $\Delta\Lambda\Gamma$ διπλασία τῆς $K\Lambda\Gamma$. ἀλλ' ἡ $KZ\Gamma = K\Lambda\Gamma$, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ ἡ $BZ\Gamma = \Delta\Lambda\Gamma$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν $\Lambda M H$, $M H \Theta$, $H \Theta Z$ ἴση ἑκατέρᾳ τῶν $\Theta Z \Lambda$, $Z \Lambda M$. ἄρα αἱ πέντε γωνίαι H , Θ , Z , Λ , M τῷ πεντεγώνῳ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσογώνιον ἄρα τὸ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστὶ πεντάγωνον.

ΠΡΟ

- (β) Κατὰ τὴν μζ. τῷ α. (γ) Κατὰ τὸ α. αζ. (δ) Κατὰ τὸ γ. αζ. (ε) Κατὰ τὴν η. τῷ α. (ς) Κατὰ τὴν κς. τῷ γ. (η) Κατὰ τὴν κς. τῷ α. (θ) Κατὰ τὴν η. τῷ κ.

Εἰς τὸ δοθέν πεντάγωνον, ὁ ἐστὶν ἰσοπλευ-
ρόν τε καὶ ἰσογώνιον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ. χ. 20.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήθω ἑκατέρω τῶν ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑφ'
ἑκατέρας τῶν ΓΚ, ΔΚ. καὶ ἀπὸ τῆς Κ σημείω, καθ' ὃ συμ-
βάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΚ, ΔΚ ἐυθεῖαι ἡχθώσαν ταῖς
ΓΔ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΕ, ΕΔ κάθετοι αἱ ΚΖ, ΚΘ, ΚΗ, ΚΜ,
ΚΛ. λέγω, ὅτι ὁ κέντρος μὲν τῶ Κ, διαστήματι δὲ ἐνὶ
τέτῳ γραφόμενος κύκλος ἐστὶν ὁ ζητούμενος. ἐπεξεύχ-
θωσαν γάρ αἱ ΚΒ, ΚΑ, ΚΕ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΚΒΓ, ΚΔΓ, ἡ μὲν ΒΓ = ΓΔ, (ι)
ἡ δὲ ΓΚ κοινή, καὶ γωνία ἡ ΚΓΒ = ΚΓΔ. (κ) ἄρα
καὶ ἡ γωνία ΚΒΓ = ΚΔΓ. (λ) ἀλλ' ἡ ΓΔΕ διπλασία
τῆς ΚΔΓ. (μ) διπλασία ἄρα καὶ τῆς ΚΒΓ. ἀλλ' ἡ
ΓΒΑ = ΓΔΕ, (ν) ἄρα καὶ ἡ ΓΒΑ διπλασία τῆς ΚΒΓ.
ἡ ἄρα ΚΒ δίχα τέμνει τὴν ΓΒΑ γωνίαν. διὰ τὰ αὐ-
τὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκατέραν τῶν ΒΑΕ, ΑΕΔ
δίχα τέμνει ἑκατέρω τῶν ΚΑ, ΚΕ. ἐν τοῖς τριγώνοις
ἐν ΚΓΖ, ΚΓΘ, ἡ μὲν γωνία ΚΖΓ = ΚΘΓ, (ξ) ἡ δὲ
ΚΓΖ = ΚΓΘ, ἡ δὲ ΚΓ κοινή. ἄρα καὶ ἡ ΚΖ = ΚΘ.
(ο) ὁμοίως δὴ δευχθήσεται τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἡ ΚΗ,
τῇ δὲ ΚΗ ἡ ΚΜ, τῇ δὲ ΚΜ ἡ ΚΛ. αἱ πέντε ἄρα
ΚΖ, ΚΘ, ΚΗ, ΚΜ, ΚΛ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ
ἄρα κέντρος μὲν τῶ Κ διαστήματι δὲ ἐνὶ τέτῳ γρα-

Θ 4

Φέ-

- (ι) Ἐξ ὑποθ. (κ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (λ) Κατὰ τὴν δ. τῆς α.
(μ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Ἐκ τῆς κατασκευ.
(ο) Κατὰ τὴν κτ. τῆς α.

ο κύκλος αὐτὸς ἐστὶν ὁ κύκλος ἐκ τῶν Κ, Γ, Δ, Ε. ὁ κύκλος αὐτὸς περὶ τὸν Κέντρον αὐτοῦ ἐστὶν ὁ κύκλος ἐκ τῶν Κ, Γ, Δ, Ε. λέγω ὅτι ὁ κύκλος αὐτὸς ἐστὶν ὁ κύκλος ἐκ τῶν Κ, Γ, Δ, Ε. ὁ κύκλος αὐτὸς περὶ τὸν Κέντρον αὐτοῦ ἐστὶν ὁ κύκλος ἐκ τῶν Κ, Γ, Δ, Ε.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὅμοιως τῷ πρὸ τέττε δευτέρῳ, ὅτι ἐκείνη τῶν ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἐκείνης τῶν ΚΒ, ΚΑ, ΚΕ ἐνθεῶν. ἐπεὶ ἔν ἡ γωνία ΒΓΔ = ΓΔΕ, (π) καὶ τῆς μὲν ΒΓΔ ἡμίση αἷ ΚΓΔ, τῆς δὲ ΓΔΕ ἡ ΚΔΓ, (ρ) ἄρα καὶ ἡ ΚΓΔ = ΚΔΓ. ἄρα καὶ ἡ ΚΓ = ΚΔ, (σ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκείνη τῶν ΚΒ, ΚΑ, ΚΕ ἴση ἐκατέρᾳ τῶν ΚΓ, ΚΔ. αἷ πέντε ἄρα ἐνθεῶν ΚΓ, ΚΔ, ΚΕ, ΚΑ, ΚΒ ἴσαι ἀλλήλαις. ὁ ἄρα κύκλος μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τέττων γραφόμενος κύκλος ἔχει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ δοθέν ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρον τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐξω

(π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Ἐκ τῆς κατὰσ. (σ) Κατὰ τὴν 5. τῶν αἰ.

εληφθῶ το κέντρον τε κύκλος το Κ. ἢ κέντρον μὲν τῷ Δ,
 διαστήματι δὲ τῷ ΔΚ κύκλος γεγραμμένος ἐκ ΓΘ. καὶ ἐ-
 πιζευχθεῖσαι ἀπὸ τῶν τομῶν Ε, Γ ἐπὶ τὸ κέντρον αἱ
 ΕΚ, ΓΚ, διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεῖα. ἢ ἐπε-
 ζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ. λέγω. ὅτι
 τὰ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἢ ἰσογώνιον ἐστὶ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Η' ΔΚ = ΔΕ. ἀλλὰ τῇ ΚΔ = ΚΕ. (τ) ἄρα καὶ ἡ
 ΚΕ = ΔΕ. (υ) ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΚΕΔ τρίγωνον. ἄρα
 καὶ ἰσογώνιον. (Φ) ἡ ἄρα ΕΚΔ γωνία ἴση τριτημοσίου
 δύο ὀρθῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΚΓ ἴση τριτη-
 μοσίῳ δύο ὀρθῶν. (Χ) ἀλλ' αἱ τρεῖς ΕΚΔ, ΔΚΓ, ΓΚΒ
 ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (ψ) ἄρα καὶ ἡ ΓΚΒ ἴση τριτημο-
 ρίῳ δύο ὀρθῶν. αἱ ἄρα ΕΚΔ, ΔΚΓ, ΓΚΒ ἴσαι ἀλλή-
 λαις εἰσίν. καὶ αἱ κατὰ κορυφήν ἄρα ΒΚΑ, ΑΚΖ,
 ΖΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις. (ω) καὶ αἱ περιφέρειαι ἄρα ΑΒ,
 ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. (α) καὶ
 αἱ αὐταὶς ὑποτείνεσαι ἄρα ἐυθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.
 (β) ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ἑξάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ πε-
 ριφέρειαι ἴση τῇ ΑΖ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΑΒ τετραπλα-
 σία ἡ ΑΒΓΔΕ, τῆς δὲ ΑΖ ἡ ΑΖΕΔΓ. ἄρα ἢ ἡ ΑΒΓΔΕ =
 ΑΖΕΔΓ. (γ) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΖΕ = ΑΒΓ. (δ) διὰ
 τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν
 τῶν ἑξαγώνων γωνιῶν ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖΕ, ΑΒΓ. ἰσο-
 γώ-

- (τ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῷ α. (υ) Κατὰ τὸ α. ἀξ. (Φ) Κατὰ τὴν
 συνέπ. τῆς ε. τῷ α. (Χ) Κατὰ τὴν ι. συνέπ. τῆς λβ. τῷ α.
 (ψ) Κατὰ τὴν ιγ. τῷ α. (ω) Κατὰ τὴν ιε. τῷ α. (α) Κα-
 τὰ τὴν κς. τῷ γ. (β) Κατὰ τὴν κθ. τῷ γ. (γ) Κατὰ τὸ
 ε. ἀξ. (δ) Κατὰ τὴν κς. τῷ γ.

γώνιον ἄρα τὸ ἐξάγωνον, δέδεικται δὲ ὅτι ἢ ἰσόπλευρον, καὶ ἐγγεγραπται εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστὶ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐκάστη ἐξαγώνος γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ τριτημορίοις δύο ὀρθῶν. ἐκάστη γὰρ ἴση δυσὶ γωνίαις ἰσοπλεύρων τριγώνων.

Β'. Ἡ τῷ ἐξαγώνῳ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῷ κύκλου.

Γ'. Ἐὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων ἐφαπτομένας τῷ κύκλῳ ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τῷ πενταγώνῳ εἰρημένοις. ἢ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τῷ πενταγώνῳ εἰρημένοις εἰς τὸ δοθὲν ἐξάγωνον κύκλον ἐγγράψομεν τε καὶ περιγράψομεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαμ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ. χ. 23.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Γεγραφθῶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνῳ μὲν ἰσοπλεύρῳ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένῳ πλευρὰ, ἢ ΑΓ, πενταγώνῳ δὲ ἰσοπλεύρῳ ἢ ΑΒ. καὶ τετμήσῃ ἢ ΒΓ περιφέρειαν δίχα κατὰ τὸ Ε. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ. καὶ ἐναρμολήτωσαν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἴσαι αὐταῖς εὐθεῖαι κατὰ τὸ συνεχές. λέγω, ὅτι ἐγγεγραμμένον ἔσται τὸ ζητούμενον πεντεκαδεκάγωνον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Οἶον ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἢ μὲν ΑΒΓ περιφέρειαν, τρίτον ἔσται τῷ κύκ-

κύκλῳ, ἔσαι πέντε· ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια, πέμπτον ἔσαι τῷ κύκλῳ, ἐστὶ τριῶν. λοιπὴ ἄρα τῶν ἴσων, δύο. ἑκατέρω ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ πεντεκαδεκαγώνε πλευρά.



ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α΄. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ πρὸς ἀλλήλα ποιά χέσις.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Διττὴ ἡ ποιά χέσις, κατὰ πηλικότητα, εἶτεν περιοχὴν, καὶ καθ' ὑπεροχὴν. καὶ ἡ μὲν, Γεωμετρικὸς, ἡ δὲ, Ἀριθμητικὸς, καλεῖται λόγος. οἷον, ἐμφαινόντων τῶν Α, Β τὰ ὁποιαῦν ὁμογενῇ μεγέθῃ, εἰάν τις θεωρῇ ποσάκις τὸ Α περιέχει ἢ περιέχεται ὑπὸ τῷ Β, τὸν Γεωμετρικὸν πολυπραγμονεῖ λόγον· εἰάν δὲ, πόσον ὑπερέχει ἢ ὑπερέχεται τὸ Α ὑπὸ τῷ Β, τὸν Ἀριθμητικόν. καὶ τὸ μὲν Α Ἡγούμενον, τὸ δαὲ Β Ἐπόμενον τῷ λόγῳ λέγεται.

Β΄. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθῃ λέγεται εἶναι, πρῶτον τὸ Α, πρὸς δεύτερον τὸ Β, καὶ τρίτον τὸ Γ, πρὸς τέταρτον τὸ Δ, εἰάν τὸ Α ποσάκις περιέχει ἢ περιέχεται ὑπὸ τῷ Β, ὁσάκις καὶ τὸ Γ ὑπὸ τῷ Δ. καὶ τὰ μὲν τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθῃ λόγον, Ἀνάλογον καλεῖσθαι οἱ δὲ λόγοι, ἴσοι.

Γ΄. Μὴ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθῃ εἶναι λέγεται, ὅταν πρῶτον τὸ Α ὃ ποσάκις περιέχει ἢ περιέχεται ὑπὸ δευτέρου τῷ Β, ὁσάκις καὶ τρίτον τὸ Γ ὑπὸ τετάρ-

τῷ

τε τῷ Δ. καὶ εἰ μὲν πρῶτον, τὸ Α πλεονάκις περιέχει ἢ ἐλαττονάκις περιέχεται ὑπὸ δευτέρου, τῷ Β, ἢ τρίτον, τὸ Γ ὑπὸ τετάρτου τῷ Δ, τὸ πρῶτον, τὸ Α, πρὸς δευτέρου τὸ Β μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ τρίτον τὸ Γ, πρὸς τέταρτον τὸ Δ. καὶ τὰ μὲν μὴ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη, μὴ **Ἀνάλογα** καλεῖται· οἱ δὲ λόγοι, **ἄνιστοι**.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α.

Ἐπειδὴ τὸ περιέχειν, ἢ περιέχεσθαι λόγῳ διαφορὰν ἔποιε, διὰ τὴν ἐν ταῖς ἑξῆς ἥτοι μόνον τῷ περιέχειν, ἢ μόνον τῷ περιέχεσθαι χρῶμεθα.

Δ. **Ἀναλογία** εἰναι ἢ τῶν λόγων ὁμοιότης ἢ ἰσότης, ἥτις ἐν τρισὶν ὅροις τελέαχιστόν ἐστι. καὶ ὅταν μὲν τὸ ἐπόμενον τῷ ἐνός λόγῳ, ἡγόμενον τῷ ἄλλῳ τῷ ἐγγύς τυγχάνῃ, **Συνεχὴς ἢ Ἀναλογία** καλεῖται, καὶ τὰ μεγέθη **Συνεχῶς ἀνάλογα**, ἢ ἐν **Συνεχεῖ λόγῳ**· ὅταν δὲ ἄλλως ἔχῃ, **Κεχωρισμένη ἢ Διακεκριμένη**, καὶ τὰ μεγέθη, **Διακεκριμένως ἀνάλογα**, ἢ ἐν **Διακεκριμένῳ λόγῳ**.

Ε. Ἐὰν τὸ ἡγόμενον μείζον ἢ τῷ ἐπομένῳ, **Μείζονος Ἀνισότητος** ὁ λόγος λέγεται· εἰ δὲ ἐλαττον, **Ἐλάσσονος**.

Ζ. **Ἐκθέτης** λόγος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ ποσάκις μέγεθος τι ὑπὸ τῷ ὁμογενῆς μεγέθους περιέχεται ἐμφαίνων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὡς οἱ τῶν ἴσων λόγων ἐκθέται ἴσοι ἀπλήλως εἰσὶ. καὶ ὧν λόγων οἱ ἐκθέται ἴσοι εἰσὶν, ἴσοι καὶ κῆνοι.

ΣΗ.

ἴσθον ὅτι τὸ πῆλίκον ταῦτον τῷ ἐκτετῇ οὕτως δὴ
προκύπτει, τῷ ἐπομένῃ διὰ τῷ ἡγμένῃ διαφεθέντος,
ἢ τὸ ἀνάπαλιν.

Ζ'. Τὸ γινόμενον ἐκ τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν ἡγμένων
ὁποιωνῇ λόγων, πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῷ πολλα-
πλασιασμῷ τῶν ἐπομένων αὐτῶν, λόγον ἔχειν λέ-
γεται **Συγκείμενον** ἐκ τῶν λόγων ἕς πρὸς ἄλλη-
λα ἔχει τὰ μεγέθη, τετέστι τὰ ἡγμένα, πρὸς τὰ
ἐπόμενα· ἕκαστος δὲ τῶν ἐξ ὧν ὁ συγκείμενος σύγ-
κεται, **Ἀπλῆς**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εἰάν Α πρὸς Β, καὶ Γ πρὸς Δ, καὶ Ε πρὸς Ζ λό-
γους τὲς ὁποῖσθ' ἐπὶ ἀλλήλα ἔχη, τὸ γινόμενον ἐκ
τῶν Α, Γ, Ε, πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν Β, Δ, Ζ
λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων ὃν ἔχει Α πρὸς Β,
καὶ Γ πρὸς Δ, καὶ Ε πρὸς Ζ. ὁ λόγος δὲ ὃν ἔχει
Α πρὸς Β, ἢ Γ πρὸς Δ, ἢ Ε πρὸς Ζ ἀπλῆς ἐστὶ τῶ
συγκειμένῳ λόγῳ παρατιθέμενος. ἔστω $A=2$, $B=4$,
 $\Gamma=3$, $\Delta=9$, $E=1$, $Z=8$. τὸ ἄρα γινόμενον ἐκ
τῶν Α, Γ, Ε, ἴσον ὁ· τὸ δὲ ἐκ τῶν Β, Δ, Ζ ἴσον
288. ὁ ἔν 6 πρὸς τὸν 288 λόγον ἔχει συγκείμενον
ἐκ τῶ ὃν ἔχει 2 πρὸς 4, 3 πρὸς 9, καὶ 1 πρὸς 8.
ἔχει γάρ ὁ 6 πρὸς τὸν 288 λόγον ὃν 1 πρὸς 48·
εἴτεν ὁ 288 ἐστὶ τεσσαρακονταοκταπλάσιος τῷ 6. εἰάν
δὲ τὲς τῶν λόγων ἐκθέτας πολλαπλασιάσῃς, ἦτοι τὸν
τῷ 2 πρὸς 4, καὶ τὸν τῷ 3 πρὸς 9, καὶ τὸν τῷ 1 πρὸς
8, προκύπτει ὁ 48. ἀπλῆς δὲ ὁ λόγος τῷ 2 πρὸς 4,
ἢ τῷ 3 πρὸς 9, ἢ τῷ 1 πρὸς 8, τῶ λόγῳ ὃν ἔχει ὁ 6 πρὸς
τὸν 288 παρατιθέμενος.

Η'.

Η. Εάν μὲν αὖ ἐξ ὧν ὁ συγκείμενος λόγος δυάωσι, ἢ ἴσοι, ὁ μὲν συγκείμενος διπλασίων λέγεται ἑκά-
 τερος τῶν ἐξ ὧν σύγκειται· ἑκάτερος δὲ αὐτῶν ὑπο-
 διπλασίων· εἰ δὲ τρεῖς, ἢ ἴσοι, ὁ μὲν συγκεί-
 μενος τριπλασίων, ἕκαστος δὲ τῶν ἐξ ὧν σύγκει-
 ται ὑποτριπλασίων· εἰ δὲ τέτταρες, ἢ ἴσοι,
 τετραπλασίων, καὶ ἕκαστος τῶν ἐξ ὧν σύγκει-
 ται, ὑποτετραπλασίων, ἢ ἐφεξῆς ὁμοίως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

Τετράγωνος ἀριθμός ἐστι τὸ γινόμενον ἐξ ἀριθ-
 μῶ τινός ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος· ὁ δὲ δι' ἑ,
 ῥίζα τετραγωνικὴ ἀκέραια. οἷον ὁ μὲν 36, τετρά-
 γωνος τῆς 6, ὡς ἐξ αὐτῆς πολλαπλασιασθόμενος γινόμε-
 νος· ὁ δὲ 6, ῥίζα τετραγωνικὴ τῆς 36.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'.

Κύβος ἀριθμός ἐστι τὸ γινόμενον ἐξ ἀριθμῶ τινός
 ἐπὶ τὸ ἑαυτῆς τετράγωνον πολλαπλασιασθέντος. ὁ δὲ πρῶ-
 τον ληφθεὶς ἀριθμός κυβικὴ ῥίζα. οἷον, ὁ μὲν 216,
 κύβος τῆς 6. ὁ δὲ 6, κυβικὴ ῥίζα τῆς 216.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ε'.

Οὐδ' ὁ διπλασίων λόγος τὸν διπλάσιον ἐμφαίνει, ἐδ' ὁ
 τριπλασίων τὸν τριπλάσιον. ὁ μὲν γὰρ διπλασίων ὑπὸ
 τῆς τετραγώνου τῆς λόγου ἐμφαίνεται, ὁ δὲ τριπλασίων
 ὑπὸ τῆς κύβου. ἐχέτω μὲν γὰρ ἴσους λόγους 2 πρὸς 1
 καὶ 8 πρὸς 4. δῆλον ἄρα ὅτι τὸ 16, τὸ ἐκ τῶν ἡγ-
 μένων γινόμενον, πρὸς τὸ 4, τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἐπο-
 μένων, ἐκ ἑχέει λόγον διπλάσιον, ἀλλὰ τετραπλάσιον
 εἶτις λόγον ἔχει, ὃν ἐμφαίνει τὸ τῆς ἐκθέτε 2 τετρά-
 γωνον

ον, ἀμελείτοι το 4. εἰώσαν πάλιν λόγοι τρεῖς ἰσοί, ἔχει 2 πρὸς 1, καὶ 8 πρὸς 4, καὶ 6 πρὸς 3. καὶ λέγει, ὅτι τὸ 96, τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἡγεμένων, πρὸς τὸ 12, τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἐπομένων, ἐκ ἔχει λόγον τριπλάσιον, ἀλλ' ὀκταπλάσιον, τὸν ἐμφανόμενον δηλαδὴ ὑπὸ τῷ κύβῳ τῷ ἐκθέρῳ 2, εἶπεν τῷ 8, λέγοντες ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ἐννοῶμεν τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχειν ὡς τὸ τετράγωνον τῷ Γ πρὸς τὸ τετράγωνον τῷ Δ. οὕτως ταῦτόν ἐστιν εἰπεῖν Α πρὸς Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ Ε πρὸς Ζ, τῷ εἰπεῖν Α πρὸς Β λόγον ἔχειν ὡς ὁ κύβος τῷ Ε πρὸς τὸν κύβον τῷ Ζ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ 5.

Σύγκειται πολλάκις ὁ λόγος ἐκ μόνον ἐξ ἀπλῶν, ἀλλὰ καὶ ἐκ διπλασιῶν καὶ τριπλασιῶν καὶ ὑποδιπλασιῶν καὶ ποτεριπλασιῶν, καὶ ἄλλων ὁποσωνῶν καὶ ὅποιωνῶν λόγων.

Θ'. Ἐναλλάξ λόγος ἐστὶ λήψις τῷ ἡγεμένῳ πρὸς τὸ ἡγόμενον, καὶ τῷ ἐπομένῳ πρὸς τὸ ἐπόμενον. οἷον εἰάν τὸ Α ἡγόμενον ᾗ τῷ Β, καὶ τὸ Γ τῷ Δ, καὶ ληφθῇ τὸ μὲν Α ἡγόμενον τῷ Γ, τὸ δὲ Β τῷ Δ.

Ι'. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λήψις τῷ ἐπομένῳ ὡς ἡγεμένῳ, πρὸς τὸ ἡγόμενον ὡς ἐπόμενον. οἷον, εἰάν τὸ Α ἡγόμενον ᾗ τῷ Β, καὶ τὸ Γ τῷ Δ, καὶ ληφθῇ τὸ μὲν Β ἡγόμενον τῷ Α, τὸ δὲ Δ τῷ Γ.

ΙΑ'. Σύνθεσις λόγος ἐστὶ λήψις τῷ ἡγεμένῳ μετὰ τῷ ἐπομένῳ ὡς ἑνός, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον. οἷον εἰάν τὸ Α ἡγόμενον ᾗ τῷ Β, καὶ ληφθῇ Α + Β ἡγόμενον τῷ Β.

ΙΒ'. Διαίρεσις λόγος ἐστὶ λήψις τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ὑπερέχει τὸ ἡγόμενον τῷ ἐπομένῳ, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον. οἷον εἰάν τὸ Α ἡγόμενον ᾗ τῷ Β, καὶ ληφθῇ Α - Β ἡγόμενον τῷ Β.

ΙΓ'.

ΙΓ'. **Αναξροφὴ λόγος** ἐστὶ λήψις τῆ ἡγεμένης πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἣ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τῆ ἐπομένης. οἷον, εἰάν τὸ Α ἡγούμενον ἦ τῷ Β, καὶ ληφθῇ Α πρὸς Α - Β.

ΙΔ'. **Δι' ἴσος λόγος** ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβαιόμενων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὅταν ἦ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἑχάτον, ἔτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἑχάτον. οἷον ὄντων μεγεθῶν τῶν Α, Β, Γ, καὶ τῶν Δ, Ε, Ζ· καὶ Α πρὸς Β τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντος ὡς καὶ Δ πρὸς Ε, καὶ Β πρὸς Γ ὡς Ε πρὸς Ζ· ὅταν ἦ καὶ Α πρὸς Γ, ἔτω Δ πρὸς Ζ. τῆτο δὲ αὐτὸ καὶ τεταγμένη ἀναλογία καλεῖται.

ΙΕ'. **Τεταραγμένη ἀναλογία** ἐστὶν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνηται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, ἔτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι, ἔτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον. οἷον τριῶν ὄντων μεγεθῶν τῶν Α, Β, Γ, καὶ ἄλλων ἴσων τὸ πλῆθος τῶν Δ, Ε, Ζ, ὅταν ἦ Α πρὸς Β ἔτω Δ πρὸς Ε, καὶ Β πρὸς Γ, ἔτω Ζ πρὸς Δ.

ΙΣ'. **Ὁμόλογα μεγέθη** λέγεται τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγεμένοις, τὰ δὲ ἐπόμενα τοῖς ἐπομένοισι.

ΙΖ'. **Ὁμοία μέρη** εἰσὶ τὰ ὑπὸ τῶν ὅλων ἰσάκεις περιεχόμενα.

ΙΗ'. **Πολλαπλάσιόν** ἐστὶ τὸ μᾶζον τῷ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρηθῇ ὑπὸ τῷ ἐλάσσονος.

ΑΞΙ-

ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

- Α. Τὰ ἴσα ὑπὸ τῷ αὐτῷ ἰσάκεις περιέχονται καὶ τὸ αὐτὸ, ἰσάκεις ὑπὸ τῶν ἴσων.
- Β. Τὰ ὑπὸ τῷ αὐτῷ ἰσάκεις περιεχόμενα ἴσα ἀλλήλοις ὡσαύτως ἴσα καὶ τὰ τὸ αὐτὸ ἰσάκεις περιέχονται.
- Γ. Τὸ μᾶλλον ὑπὸ τῷ αὐτῷ ἐλαττονάκεις περιέχεται, ἢ περὶ τὸ ἐλαττον καὶ τὸ αὐτὸ πλεονάκεις ὑπὸ τῷ μείζονος ἢ περὶ ὑπὸ τῷ ἐλάσσονος.
- Δ. Τὸ πλεονάκεις περιέχον τὸ αὐτὸ, μᾶλλον τῷ ἐλαττονάκεις περιέχοντος ὡσαύτως τὸ ἐλαττονάκεις ὑπὸ τῷ αὐτῷ περιεχόμενον μᾶλλον τῷ πλεονάκεις περιεχομένῳ.
- Ε. Τὰ ὑπὸ τῆς μονάδος πολλαπλασιασθέντα ἢ διαιρεθέντα τὰ αὐτά εἰσι τοῖς καὶ πρὸ τῷ πολλαπλασιασμῷ καὶ τῆς διαιρέσεως.
- Σ. Τῶν ἴσων καὶ τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια ἴσα. καὶ ὧν τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια ἴσα, καὶ κείνα ἴσα.
- Ζ. Τῷ δι' ἑαυτῆς, ἢ δι' ἴσου διαιρεθέντος μονὰς τὸ πηλίκον.
- Η. Τῶν ἴσων δι' ἴσων διαιρεθέντων ἴσα τὰ πηλικά. καὶ ὧν δι' ἴσων διαιρεθέντων ἴσα τὰ πηλικά, καὶ κείνα ἴσα.



Ερμηνεία τῶν σημείων, οἷς τὰ ἐν τοῖς μεγέθεσι, τοῖς διὰ τῶν σοιχείων δηλωμένοις, πάθῃ ἐμφαίνεται.

Τὸ μὲν Α. Β, ἢ ΑΧΒ τὸ γινόμενον δηλοῖ τὸ ἐκ τῷ πολλαπλασιασμῷ τῷ Α ἐπὶ τὸ Β ἀπαγγέλλεται δὲ ὅτως Α ἐν τῷ Β· τὸ δὲ Α. Β † Γ † Δ ἐμφαίνει, ὅτι τὸ Α

κοινὸς πολλαπλασιασῆς ἐστὶ πάντων τῶν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν
 μεγεθῶν· ἀπαγγέλλομεν δὲ A ἐν τῷ B ἢ Γ ἢ Δ · τὸ
 δὲ $\frac{A}{B}$, τὸ πηλίκον τὸ προκύπτει ἀπὸ τῆς διαιρέσεως τῆς
 A διὰ τῆς B · ὃ ἢ ἐκθέτης λέγεται· ἀπαγγέλλον δ' ἔτῳς·
 A διαιρεθὲν διὰ τῆς B . τὰ δὲ $A : B :: \Gamma : \Delta$ ἢ $A :$
 $B = \Gamma : \Delta$ ἐμφαίνει, ὅτι ὁ λόγον ἔχει τὸ A πρὸς τὸ
 B , τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ · ἐμφανεῖται
 δὲ ἔτῳς· ὡς A πρὸς B , ἔτω Γ πρὸς Δ . τὰ δὲ $A :$
 $B \supset \Gamma : \Delta$, ὅτι τὸ A πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει,
 ἢ περὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ . τὰ δὲ $A : B \prec \Gamma : \Delta$, ὅτι τὸ
 A πρὸς τὸ B ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ τὸ Γ πρὸς
 τὸ Δ . καὶ τὸ μὲν $A \supset B$, ὅτι τὸ A μείζον τῆς B · τὸ
 δὲ $B \prec A$, ὅτι τὸ B ἔλαττον τῆς A .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄. καὶ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥΣ Ζ΄.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον,
 καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἐξω μεγέθη ἴσα τὰ A καὶ B , ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε
 μέγεθος τὸ Z . λέγω Α΄. ὅτι $A : Z :: B : Z$. Β΄. ὅτι
 καὶ $Z : A :: Z : B$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐπειδὴ $A = B$, (α) ἐκάτερον ἄρα ἰσάκεις περιέχε-
 ται ὑπὸ τῆς αὐτῆς Z . (β) ἄρα $A : Z :: B : Z$. (γ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπειδὴ $A = B$, (δ) τὸ Z ἄρα ἰσάκεις περιέχει
 ἐκάτερον τῶν A καὶ B . (ε) ἄρα $Z : A :: Z : B$. (ς)

ΠΡΟ-

(κ) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὸ α. αἱ. τῆς ε. (γ) Κατὰ τὸν β. ὅρισμ.
 (δ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὸ α. αἱ. (ς) Κατὰ τὸν β.
 ὅρισμ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄. καὶ Θ΄

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον
ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐ-
τὸν ἔχει λόγον, καὶ κείνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν.

Ἔστω $A : Z :: B : Z$. λέγω, ὅτι $A = B$. ἔστω δὲ καὶ
 $Z : A :: Z : B$. λέγω πάλιν, ὅτι $A = B$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐπειδὴ $A : Z :: B : Z$, (η) τὸ A ἄρα τοσάκις
ὑπὸ τῷ αὐτῷ Z περιέχεται, ὡσάκις καὶ τὸ B . (θ) ἄρα
 $A = B$. (ι)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπειδὴ $Z : A :: Z : B$, (κ) ἐκάτερον ἄρα τῶν A ,
καὶ B ἰσάκις περιέχεται ὑπὸ τῷ Z . (λ) ἄρα $A = B$. (μ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄, καὶ Η΄.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μᾶλλον πρὸς τὸ αὐ-
τὸ μᾶζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ ἐλάττω καὶ
τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἐλάττω μᾶζονα λόγον ἔ-
χει, ἢ περ πρὸς τὸ μᾶζον.

Ἔστω $A \supset B$, καὶ ἄλλο ὃ ἔτυχεν τὸ Z . λέγω Ἀ΄. ὅτι
 $A : Z \supset B : Z$. Ε΄, ὅτι $Z : B \supset Z : A$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐπειδὴ $A \supset B$, (ν) τὸ A ἄρα ὑπὸ τῷ Z ἐλατ-
τωσάκις περιέχεται, ἢ περ τὸ B . (ξ) ἄρα $A : Z \supset B :$
 Z . (ο)

I 2

ΔΕΙ-

- (η) Ἐξ ὑποθ. (θ) Κατὰ τὸν β. ὅρισμ. (ι) Κατὰ τὸ β. αἵ-
ν. (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὸν β. ὅρισμ. (μ) Κατὰ τὸ
β. αἵν. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Κατὰ τὸ γ. αἵν. (ο) Κατὰ τὸν γ.
ὅρισμ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Β΄.

Ἐπειδὴ $A \supset B$, (π) τὸ Z ἄρα πλεονάναις ὑπὸ τῆς A, ἥπερ ὑπὸ τῆς B περιέχεται. (ρ) τὸ Z ἄρα πρὸς τὸ A ἐλάττωνα λόγον ἔχει, ἥπερ πρὸς τὸ B. (σ) ὅπερ ἐστὶν, ὅτι τὸ Z πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ πρὸς τὸ A, ἦτοι $Z : B \supset Z : A$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄, καὶ Ι΄.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκείνο μείζον ἐστὶ πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἐλαττόν ἐστιν.

Ἐχέτω $A : Z \supset B : Z$. λέγω, ὅτι $A \supset B$. ἔχέτω δὲ καὶ $Z : B \supset Z : A$. πάλιν ἔσται $A \supset B$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Α΄.

Ἐπειδὴ $A : Z \supset B : Z$, (τ) τὸ A ἄρα πλεονάναις ἥπερ τὸ B περιέχει τὸ Z. (υ) ἄρα $A \supset B$. (φ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Β΄.

Ἐπειδὴ $Z : B \supset Z : A$, τὸ Z ἄρα περιέχεται ὑπὸ τῆς B ἐλαττονάναις, ἥπερ ὑπὸ τῆς A. (χ) τὸ B ἄρα ἐλαττον τῆς A, ὅπερ ἐστὶν $A \supset B$. (ψ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄, καὶ ΙΑ΄.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἐστω $A : B :: Γ : Δ$, καὶ $Γ : Δ :: Ε : Ζ$. λέγω, ὅτι καὶ $A : B :: Ε : Ζ$.

ΔΕΙ-

-
- (π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Κατὰ τὸ γ. ἀξ. (σ) Κατὰ τὸν γ. ὅρισ. (τ) Ἐξ ὑποθ. (υ) Κατὰ τὸν γ. ὅρισ. (φ) Κατὰ τὸ δ. ἀξ. (χ) Κατὰ τὸν γ. ὅρισ. (ψ) Κατὰ τὸ αὐτ. ἀξ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $A : B :: \Gamma : \Delta$, (ω) τοσάνκις ἄρα τὸ A περιέχεται ὑπὸ τῷ B , ὁσάνκις καὶ τὸ Γ ὑπὸ τῷ Δ . (α) ἀλλ' ὁσάνκις τὸ Γ περιέχεται ὑπὸ τῷ Δ , τοσάνκις καὶ τὸ E ὑπὸ τῷ Z . ἔστι γὰρ $\Gamma : \Delta :: E : Z$ καὶ τὸ A ἄρα τοσάνκις περιέχεται ὑπὸ τῷ B , ὁσάνκις τὸ E ὑπὸ Z . ἄρα $A : B :: E : Z$. (β)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ' , καὶ $\iota\zeta'$. τῷ ζ' .

Εἰάν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ ὑπὸ τῶν ἁκρῶν γινόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. καὶ εἰάν τὸ ὑπὸ τῶν ἁκρῶν ἴσον ᾗ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, τὰ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω $A : B :: \Gamma : \Delta$. λέγω, ὅτι $A \cdot \Delta = B \cdot \Gamma$. ἔστω δὲ καὶ $A \cdot \Delta = B \cdot \Gamma$. λέγω, ὅτι $A : B :: \Gamma : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥΤΟΥ Α΄.

Ἐπειδὴ $A : B :: \Gamma : \Delta$, (γ) ὁ λόγος ἄρα ὃν ἔχει τὸ A πρὸς τὸ B ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Δ . (δ) καὶ οἱ αὐτῶν ἄρα ἐκδέταί ἴσοι. (ϵ) ἤτοι $\frac{B}{A} = \frac{\Delta}{\Gamma}$. (ζ) καὶ ἐκατέρωθι διὰ τῶν αὐτῶν A, Γ , εἴτεν διὰ τῶν γινομένων ἐκ τῶν ἡγυμένων πολλαπλασιασθέντος, ἔσται $\frac{A \cdot \Gamma \cdot B}{A} = \frac{A \cdot \Gamma \cdot \Delta}{\Gamma}$. (η) ἀλλ' $\frac{A}{A} = 1$. ὡσαύτως καὶ $\frac{\Gamma}{\Gamma} = 1$. (θ) ἄρα $\Gamma \cdot B = A \cdot \Delta$. (ι)

Ι 3

ΔΕΙ.

- (ω) Ἐξ ὑποθ. (α) Κατὰ τὸν β. ὅρισμ. (β) Κατὰ τὸν αὐτ. ὅρισμ. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὸν β. ὅρισμ. (ϵ) Κατὰ τὸ πόρ. τὸ μετὰ τὸν σ . ὅρισμ. (ζ) Κατὰ τὴν β. σημ. τὸν μετὰ τὸ πόρ. (η) Κατὰ τὸ σ . ἀξ. (θ) Κατὰ τὸ ζ . ἀξ. (ι) Κατὰ τὸ ϵ . ἀξ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Β΄.

Ἐπεὶ $\Gamma. B = A. \Delta$, (κ) ἄρα διὰ τῆ αὐτῆ μεγέθους $A. \Gamma$ ἑκατέρω διαιρεθέντος, ἔσται $\frac{\Gamma. B}{A. \Gamma} = \frac{A. \Delta}{A. \Gamma}$. (λ) ἄλλὰ $\frac{\Gamma}{\Gamma} = 1$, ὡσαύτως καὶ $\frac{A}{A} = 1$, (μ) ἄρα $\frac{B}{A} = \frac{\Delta}{\Gamma}$. (ν) ἄρα καὶ $A : B :: \Gamma : \Delta$, (ξ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄. καὶ ΙΖ΄.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω $A : B :: \Gamma : \Delta$. λέγω, ὅτι καὶ $A : \Gamma :: B : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰ γὰρ μὴ $A : \Gamma :: B : \Delta$, εἰλήφθω ἕτερον μέγεθος τὸ Ε ἥτοι μᾶλλον ἢ ἐλαττον τῷ Δ, ὥστε εἶναι $A : \Gamma :: B : E$. ἄρα $A. E = B. \Gamma$. (ο) ἄλλὰ καὶ $A. \Delta = B. \Gamma$. (π) ἐστὶ γὰρ $A : B :: \Gamma : \Delta$. ἄρα $A. E = A. \Delta$. (ρ) ἄλλ' $A = A$. ἄρα καὶ $E = \Delta$. (σ) ἀλλὰ καὶ μᾶλλον ἢ ἐλαττον τὸ Ε τῷ Δ ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα $A : \Gamma :: E : E$. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ εἶδε $A : \Gamma :: B$ πρὸς ἄλλο τι, πλὴν τῷ Δ. ὡς ἄρα $A : \Gamma :: B : \Delta$.

Α Λ Λ Ω Σ.

Ἐπεὶ $A : B :: \Gamma : \Delta$. ἄρα $A. \Delta = B. \Gamma$. (τ) ἄρα καὶ $A : \Gamma :: B : \Delta$. (υ)

ΣΤ.

- (κ) Ἡ ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὸ η. αἶξ. (μ) Κατὰ τὸ ζ. αἶξ. (ν) Κατὰ τὸ α. αἶξ. (ξ) Κατὰ τὸ πόρ. τὸ μετὰ τὸν ε. ὄρισμο. (ο) Κατὰ τὴν προλ. πρὸς (π) Ὁσαύτως. (ρ) Κατὰ τὸ κ. αἶξ. τῷ κ. (σ) Κατὰ τὸ ε. αἶξ. (τ) Κατὰ τὴν προλ. πρὸς. (υ) Κατὰ τὴν αὐτ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ (Φ).

Τῶ αὐτῷ δὴ τρόπῳ δεῖξομεν, ὅτι ἐάν $A : B :: Γ : Δ$,
ἔσται καὶ ἀνάπαλιν $B : A :: Δ : Γ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄, καὶ ΙΕ΄.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν
αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Ἐξω ἰσάκεις πολλαπλάσια τὸ μὲν A τῷ B , τὸ δὲ
 $Γ$ τῷ $Δ$. λέγω, ὅτι $A : Γ :: B : Δ$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὰ A καὶ $Γ$ ἰσάκεις πολλαπλάσια τῶν B καὶ
 $Δ$, τὰ ἄρα B καὶ $Δ$ ὅμοια μέρη εἰσὶ τῶν A καὶ $Γ$. το-
σάκεις ἄρα τὸ B περιέχεται ὑπὸ τῷ A , ὡσαύκεις καὶ
τὸ $Δ$ ὑπὸ τῷ $Γ$. (Χ) ὡς ἄρα $B : A :: Δ : Γ$. (Ψ)
καὶ ἐναλλάξ ὡς $B : Δ :: A : Γ$. (ω)

ΠΟΡΙΣΜΑ. Α΄.

Ἐάν τρία ὁποιαῦν μεγέθη ᾗ τὰ $A, B, Γ$ τὸς ὁ-
ποισέν λόγους ἔχοντα, τὸ πρῶτον A , πρὸς τὸ τρί-
τον $Γ$ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει
πρῶτον A , πρὸς δεύτερον B , καὶ ἐκ τῷ ὃν ἔχει δέυ-
τερον B , πρὸς τρίτον $Γ$. τὸ γὰρ γινόμενον ἐκ τῶν ἡ-
γεμένων, τὸ $A. B$, πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἐπομέ-
νων, τὸ $B. Γ$, λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τε τῷ λόγῳ
ὃν ἔχει A πρὸς B , καὶ ἐκ τῷ ὃν ἔχει B πρὸς $Γ$. (†)
ἀλλ' $A. B : B. Γ :: A : Γ$. τὰ γὰρ $A. B$ καὶ $B. Γ$
ἰσάκεις πολλαπλάσια τῶν A καὶ $Γ$. ἄρα τὸ πρῶτον A ,
πρὸς τὸ τρίτον $Γ$ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τε τῷ ὃν
πρῶτον A , πρὸς δεύτερον B , καὶ ἐκ τῷ ὃν ἔχει δέυ-

(Φ) Μετὰ τὴν δ. πρότ. ὁ Ἑυκλείδης τίθει τὴν αὐτήν. (Χ) Κατὰ τὸν 1. β.
ὅρισμ. (Ψ) Κατὰ τὸν β. ὅρισμ. (ω) Κατὰ τὴν προλ. πρότ.
(†) Κατὰ τὸν 2. ὅρισμ.

τερον Β πρὸς τρίτον Γ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ εἰάν τέσσαρα, ἢ πέντε, ἢ ὁσαδήποτε ἐν μεγέθῃ ἦ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔχατον λόγόν ἔχει συγκείμενον, ἐκ τῶν λόγων ὧν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα τὰ μεταξὺ μεγέθη, καὶ ἐξ ὧν ἔχουσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ τὸ πρὸς τὸ ἔχον τὸ πρὸς τὸ ἔχατον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

Τριῶν μὲν ὄντων τῶν τῆς συνεχῆς ἀναλογίας μεγεθῶν, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ τὸ δεύτερον πρὸς τὸ τρίτον. τεττάρων δὲ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα, καὶ ἔτι εἴς τας ἐφεξῆς. ἐξ ἴσων γάρ οἱ συγκείμενοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ΄, καὶ Α΄, ἡ αὐτὴ δὲ καὶ ΙΒ΄.

Εἰάν ἡ ὁποσαῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἐν τῶν ἡγχιμένων, πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, ἔτι εἴς ἀπαντα τὰ ἡγχιμένα, πρὸς ἀπαντα τὰ ἐπόμενα.

Ἐσὼ $A : B :: \Gamma : \Delta :: E : Z :: H : \Theta$. λέγω, ὅτι ὡς $A : B :: A + \Gamma + E + H : B + \Delta + Z + \Theta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ $A : B :: \Gamma : \Delta$, ἄρα $A \cdot \Delta = B \cdot \Gamma$. (α) ὡσαύτως ἐπειδὴ $A : B :: E : Z$, (β) ἄρα $A \cdot Z = B \cdot E$. (γ) καὶ διὰ τὰ αὐτὰ $A \cdot \Theta = B \cdot H$. προσκείσθω τῷ μὲν $A \cdot \Delta$ τό τε $A \cdot Z$ καὶ τῷ $A \cdot \Theta$ τῷ δὲ $B \cdot \Gamma$ τό τε $B \cdot E$ καὶ τὸ $B \cdot H$. ἄρα $A \cdot \Delta + A \cdot Z + A \cdot \Theta = B \cdot \Gamma + B \cdot E + B \cdot H$, κοινὸν προσκείσθω τὸ A .

(*) Κατὰ τὴν 5. τῆ 5. (β) Κατὰ τὴν 5. τῆ 5. (γ) Κατὰ τὴν 5. τῆ 5.

A. B. ἄρα $A : B :: A : \Delta :: A : Z :: A : \Theta :: B : A :: B : \Gamma :: B : E :: B : H$, ἔτι $A : B :: A : \Delta :: A : Z :: A : \Theta :: B : A :: B : \Gamma :: B : E :: B : H$, ἄρα $A : B :: A : \Gamma :: A : E :: A : H :: B : \Delta :: B : Z :: B : \Theta$. (δ).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ' καὶ ΙΗ'.

Ἐὰν μεγέθη ὁποιαῶν ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω $A : B :: \Gamma : \Delta$. λέγω, ὅτι καὶ $A + B : B :: \Gamma + \Delta : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ $A : B :: \Gamma : \Delta$, ἄρα $A : \Delta :: B : \Gamma$. (ε) κοινὸν προσκείδω τὸ B. Δ. ἄρα $A : \Delta + B : \Delta :: B : \Gamma + B : \Delta$, ἥτοι $A + B : \Delta :: \Gamma + \Delta : \Delta$. B. ἄρα $A + B : B :: \Gamma + \Delta : \Delta$. (ζ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ' καὶ ΙΖ'.

Ἐὰν ὁποιαῶν μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διακρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω $A : B :: \Gamma : \Delta$. λέγω ὅτι καὶ $A - B : B :: \Gamma - \Delta : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ $A : B :: \Gamma : \Delta$, ἄρα $A : \Delta :: B : \Gamma$. (η) ἀφηρέδω κοινὸν τὸ B. Δ. ἄρα $A : \Delta - B : \Delta :: B : \Gamma - B : \Delta$, ἥτοι $A - B : \Delta :: \Gamma - \Delta : \Delta$. B. ἄρα $A - B : B :: \Gamma - \Delta : \Delta$. (θ)

ΣΥΝΕΠΕΙΑ. (ι)

Ἐὰν $A : B :: \Gamma : \Delta$, ἔσται καὶ κατ' ἀναστροφὴν λόγος, $A : A - B :: \Gamma : \Gamma - \Delta$. ἐπεὶ γὰρ $A : B :: \Gamma : \Delta$, (κ)

I 5

ἄρα

(δ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (ε) Κατὰ τὴν αὐτ. (ζ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (η) Κατὰ τὴν αὐτ. (θ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (ι) Μετὰ τὴν ιθ. πρότ. παρὰ τῷ Ἐυκλῆδῳ. (κ) Ἐξ ὑποθ.

ἄρα $A. \Delta = B. \Gamma.$ (λ) τέτων ἐκάτερον ἀφηρέθω ἀπὸ τῶ
 αὐτῶ $A. \Gamma$ μεγέθους, καὶ ἔσται τὸ $A. \Gamma - A. \Delta = A. \Gamma - B. \Gamma$, ἥτοι
 $A. \Gamma - \Delta = \Gamma. A - B.$ ἄρα $A : A - B :: \Gamma : \Gamma -$
 $\Delta.$ (μ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄, καὶ ΚΒ΄.

Ἐὰν ἡ ὁποσαῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα
 τὸ πλῆθος σύνδυνω λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐ-
 τῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσας ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἐστω ὁποσαῦν μεγέθη, τὰ A, B, Γ , καὶ ἄλλα
 αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Δ, E, Z , σύνδυνω λαμ-
 βανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὥς $A : B :: \Delta : E$, καὶ
 $B : \Gamma :: E : Z$. λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσας ἐν τῷ αὐτῷ λό-
 γῳ ἔσται, ὥς $A : \Gamma :: \Delta : Z$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὥς $A : B :: \Delta : E$, (ν) καὶ ἐναλλαξ ἄρα ὥς
 $A : \Delta :: B : E$, (ζ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὥς $B : E :: \Gamma : Z$.
 ἄρα καὶ $A : \Delta :: \Gamma : Z$. (ο) καὶ ἐναλλαξ ἄρα ὥς
 $A : \Gamma :: \Delta : Z$. ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄, καὶ ΚΓ΄.

Ἐὰν ἡ τρεῖς μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ
 πλῆθος σύνδυνω λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ
 λόγῳ, ἡ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλο-
 γία, καὶ δι' ἴσας τεταραγμένως ἐν τῷ αὐτῷ
 λόγῳ ἔσται.

Ἐστω τρεῖς μεγέθη, τὰ A, B, Γ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς
 ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυνω λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ,
 τὰ

(λ) Κατὰ τὴν σ. τῷ ε. (μ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (ν) Ἐξ ὑποθ.
 (ξ) Κατὰ τὴν ζ. τῷ ε. (ο) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε.

τὰ Δ, Ε, Ζ. ἔσω δὲ τετραραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία,
ὡς μὲν Α: Β:: Ε: Ζ, ὡς δὲ Β: Γ:: Δ: Ε. λέγω,
ὅτι καὶ Α: Γ:: Δ: Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ Α: Β:: Ε: Ζ, (π) ἄρα Α. Ζ = Β. Ε. (ρ)
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ Β. Ε = Γ. Δ. ἄρα Α. Ζ = Γ. Δ.
(σ) ἄρα Α: Γ:: Δ: Ζ. (τ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ΄, καὶ Β΄.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάνεις ἢ πολλαπλάσιον,
καὶ τρίτον τετάρτου ἢ δὲ καὶ πέμπτον
δευτέρου ἰσάνεις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τε-
τάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον,
δευτέρου ἰσάνεις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ τρί-
τον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Ἐσω πρῶτον τὸ Α δευτέρου τῷ Β ἰσάνεις πολλαπλάσιον,
καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τῷ Δ, εἴταν ἔσω ὡς Α: Β:: Γ:
Δ. ἔσω δὲ καὶ πέμπτον τὸ Ε δευτέρου τῷ Β ἰσάνεις πολλαπλά-
σιον, καὶ ἕκτον τὸ Ζ τετάρτου τῷ Δ, ἥτοι ἔσω ὡς Ε: Β:: Ζ:
Δ. λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον Α + Ε δευτέρου
τῷ Β ἰσάνεις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ Γ +
Ζ τετάρτου τῷ Δ, εἴταν ἔσται Α + Ε: Β:: Γ + Ζ: Δ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς Α: Β:: Γ: Δ, (υ) ἄρα Α. Δ = Β. Γ. (φ)
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ Ε. Δ = Β. Ζ. προσκείσω τῷ μὲν
Α. Δ τὸ Ε. Δ, τῷ δὲ Β. Γ τὸ Β. Ζ. ἄρα Α. Δ +
Ε.

(π) Ἐκ ὑποθ. (ρ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (σ) Κατὰ τὸ α. ἀξ. τῷ α.
(τ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (υ) Ἐξ ὑποθ. (φ) Κατὰ τὴν ε.
τῷ ε.

E. $\Delta = B$. $\Gamma + B$. ζ , ἥτοι $A + E$. $\Delta = B$. $\Gamma + \zeta$.
 ἄρα $A + E : B :: \Gamma + \zeta : \Delta$. (X) ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄, καὶ Γ.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρῃ ἰσάνῃς ἢ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτῃ, ληφθῇ δὲ ἰσάνῃς πολλαπλάσια τῷ πρώτῃ καὶ τρίτῃ, καὶ δι' ἴσων τῶν ληφθέντων ἐκάτερον ἐκατέρῃ ἰσάνῃς ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τῷ δευτέρῃ, τὸ δὲ τῷ τετάρτῃ.

Ἔστω πρῶτον A δευτέρῃ τῷ B ἰσάνῃς πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτῃ τῷ Δ, εἴτεν ἔστω $A : B :: \Gamma : \Delta$. καὶ ληφθῇ τῷ ἰσάνῃς πολλαπλάσια τῷ μὲν A τὸ E, τῷ δὲ Γ τὸ Z. λέγω, ὅτι καὶ $E : B :: Z : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ τὰ E, Z ἰσάνῃς πολλαπλάσιά εἰσι τῶν A, Γ. τοσάνῃς ἄρα τὸ A περιέχεται ὑπὸ τῷ E, ὡσάνῃς καὶ τὸ Γ ὑπὸ τῷ Z. (ψ) ἄρα ὡς $A : E :: \Gamma : Z$. ἄρα καὶ ἀνάπαλιν ὡς $E : A :: Z : \Gamma$. (ω) ἀλλὰ καὶ $A : B :: \Gamma : \Delta$. (α) ἄρα δι' ἴσων, ὡς $E : B :: Z : \Delta$. (β)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ΄, καὶ Δ΄.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάνῃς πολλαπλάσια τῷ τε πρώτῃ καὶ τῷ τρίτῃ, πρὸς τὰ ἰσάνῃς πολλαπλάσια τῷ δευτέρῃ

(X) Κατὰ τὴν αὐτὴν. (ψ) Κατὰ τὸν 15. ὅρισ. (ω) Κατὰ τὴν 7ης ζ. τῷ ε. συνέπ. (α) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὴν 16. τῷ ε.

τέρη καὶ τετάρτη καὶ ὅποιον ἐν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Ἔστω ὡς $A : B :: \Gamma : \Delta$. καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν A, Γ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ E, Z , τῶν δὲ B, Δ , τὰ H, Θ . λέγω, ὅτι ὡς $E : Z :: H : \Theta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὰ E, Z ἰσάνεις πολλαπλάσιά εἰσι τῶν A, Γ . ἄρα ὡς $A : E :: \Gamma : Z$. (γ) καὶ διὰ τὰ αὐτά, ὡς $B : H :: \Delta : \Theta$. καὶ ἐπεὶ ὡς $A : E :: \Gamma : Z$. ἔσται καὶ ἀνάπαλιν, ὡς $E : A :: Z : \Gamma$. (δ) ἀλλὰ καὶ ὡς $A : B :: \Gamma : \Delta$. (ε) ἄρα δι' ἴσος, καὶ ὡς $E : B :: Z : \Delta$. (ς) ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς $E : Z :: B : \Delta$. (η) καὶ ἐπεὶ ὡς $B : H :: \Delta : \Theta$, ἔσται καὶ ἐναλλάξ ὡς $B : \Delta :: H : \Theta$. ἄρα καὶ ὡς $E : Z :: H : \Theta$. (θ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ', καὶ ΙΘ', ἡ αὐτὴ δὲ καὶ Ε΄.

Ἐὰν ᾗ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, ἕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἔστω ὡς $AB : \Gamma\Delta :: AE : \Gamma Z$. λέγω, ὅτι καὶ ὡς $AB : \Gamma\Delta :: EB : Z\Delta$. πίν. ιε'. χ. 2.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς $AB : \Gamma\Delta :: AE : \Gamma Z$, ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς $AB : AE :: \Gamma\Delta : \Gamma Z$. (ι) ἄρα καὶ διαιρεθὲντα ἔσται, ὡς $AB - AE : AE :: \Gamma\Delta - \Gamma Z : \Gamma Z$. (κ) ἀλλ' $AB - AE = EB$, καὶ $\Gamma\Delta - \Gamma Z = Z\Delta$. ἄρα ὡς $EB : AE ::$

(γ) Κατὰ τὸν ιζ. ὅρισ. (δ) Κατὰ τὴν ἀρην. συνέπ. (ε) Ἐξ ὑπαθ. (ς) Κατὰ τὴν ιβ. τῆ ε. (η) Κατὰ τὴν ζ. τῆ ε. (θ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (ι) Κατὰ τὴν ζ. τῆ ε. (κ) Κατὰ τὴν ικ. τῆ ε.

$AE :: Z\Delta : \Gamma Z$. ἄρα καὶ ἀνάπαλιν, ὡς $AE : EB :: \Gamma Z : Z\Delta$. (λ) ἄρα καὶ συντεθέντα ἔσται, ὡς $AE + EB : EB :: \Gamma Z + Z\Delta : Z\Delta$. (μ) αὐτὸν $AE + EB = AB$, καὶ $\Gamma Z + Z\Delta = \Gamma\Delta$. ἄρα ὡς $AB : EB :: \Gamma\Delta : Z\Delta$. ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς $AB : \Gamma\Delta :: EB : Z\Delta$. ο. ε. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ', καὶ ζ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάνις ἢ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάνις ἢ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς, ἤτοι ἴσα ἐσὶν, ἢ ἰσάνις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Ἔστω ὡς $AB : E :: \Gamma\Delta : Z$. καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ AH , $\Gamma\Theta$, ἔστω $AH : E :: \Gamma\Theta : Z$. λέγω, ὅτι καὶ ὡς $HB : E :: \Theta\Delta : Z$. ς. 2.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $AB : E :: \Gamma\Delta : Z$, ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς $AB : \Gamma\Delta :: E : Z$. (ν) ὁμοίως ἐπεὶ $AH : E :: \Gamma\Theta : Z$, ἔσται καὶ ὡς $AH : \Gamma\Theta :: E : Z$. ἄρα καὶ ὡς $AB : \Gamma\Delta :: AH : \Gamma\Theta$. (ξ) καὶ ἐναλλάξ, ὡς $AB : AH :: \Gamma\Delta : \Gamma\Theta$. ἄρα καὶ διαιρεθέντα ἔσται ὡς $AB - AH : AH :: \Gamma\Delta - \Gamma\Theta : \Gamma\Theta$, (ο) εἴτεν ὡς $HB : AH :: \Theta\Delta : \Gamma\Theta$. ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς $HB : \Theta\Delta :: AH : \Gamma\Theta$. αὐτὰ καὶ καὶ $AH : \Gamma\Theta :: E : Z$, ὡς δέδεικται. ἄρα $HB : \Theta\Delta :: E : Z$. (π) ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς $HB : E :: \Theta\Delta : Z$. δῆλον δὲ, ὅτι ἐὰν τὸ $HB = E$, καὶ τὸ $\Theta\Delta = Z$. ἐὰν δὲ μὴ, τὰ HB , $\Theta\Delta$ ἰσάνις πολλαπλάσια τῶν E καὶ Z .

ΠΡΟ-

(λ) Κατὰ τὴν τῆς ζ. τῆ ε. συνέπ. (μ) Κατὰ τὴν ι. τῆ ε. (ν) Κατὰ τὴν ζ. τῆ ε. (ξ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (ο) Κατὰ τὴν ια. τῆ ε. (π) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ΄, καὶ ΙΓ΄.

Εἰάν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔξει, ἥπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Ἔστω ὡς $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $\Gamma : \Delta \supset E : \Sigma$. λέγω, ὅτι καὶ $A : B \supset E : \Sigma$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Επεὶ $\Gamma : \Delta \supset E : \Sigma$. τὸ Γ ἄρα περιέχεται ὑπὸ τῷ Δ ἐλαττονάκεις ἥπερ τὸ E ὑπὸ τῷ Σ . (ρ) ἀλλ' ὁσάκεις τὸ Γ περιέχεται ὑπὸ τῷ Δ , τοσάκεις καὶ τὸ A ὑπὸ τῷ B . ἔστι γὰρ ἐξ ὑποθέσεως ὡς $A : B :: \Gamma : \Delta$. καὶ τὸ A ἄρα περιέχεται ὑπὸ τῷ B ἐλαττονάκεις ἥπερ τὸ E ὑπὸ τῷ Σ . ἄρα $A : B \supset E : \Sigma$. (σ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ΄, καὶ ΙΔ΄.

Εἰάν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· τὸ δὲ πρῶτον τῷ τρίτῳ μᾶζον ἢ, καὶ τὸ δεύτερον τῷ τέταρτῳ μᾶζον ἔσται, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἐλάσσον, ἐλάσσον.

Ἔστω $A : B :: \Gamma : \Delta$. λέγω, ὅτι εἰάν $A \supset \Gamma$, καὶ $B \supset \Delta$. καὶ ἂν $A = \Gamma$, καὶ $B = \Delta$. καὶ ἂν $A \subset \Gamma$, καὶ $B \subset \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

(ρ) Κατὰ τὸν γ. ὄρισμ. (σ) Κατὰ τὸν αὐτ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $A : B :: \Gamma : \Delta$, ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς $A : \Gamma :: B : \Delta$. ἐξ ἧς δῆλον τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ΄, καὶ Κ΄.

Εὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυω λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσας δὲ τὸ πρῶτον τε τρίτον μείζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τε ἕκτον μείζον ἔσται καὶ ἴσον, ἴσον καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐστω τρία μεγέθη, τὰ A, B, Γ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Δ, E, Σ . καὶ ἔστω ὡς $A : B :: \Delta : E$, καὶ ὡς $B : \Gamma :: E : \Sigma$. λέγω, ὅτι εἰάν $A > \Gamma$, καὶ $\Delta > \Sigma$ καὶ ἂν $A = \Gamma$, καὶ $\Delta = \Sigma$ καὶ ἂν $A < \Gamma$, καὶ $\Delta < \Sigma$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς $A : B :: \Delta : E$, καὶ ὡς $B : \Gamma :: E : \Sigma$. ἄρα καὶ δι' ἴσας, ὡς $A : \Gamma : \Delta : \Sigma$ (τ) ἐξ ἧς δῆλον τὸ προτεθέν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ΄, καὶ ΚΑ΄.

Εὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυω λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τετραγαγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσας δὲ τὸ πρῶτον τε τρίτον μείζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τε ἕκτον μείζον ἔσται καὶ ἴσον, ἴσον καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐστω

(τ) Κατὰ τὴν 16. τῆς 1.

Ἐξω τρεῖς μεγέθη, τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Δ, Ε, Ζ. καὶ ἔσω, ὡς Α: Β:: Ε: Ζ, καὶ ὡς Β: Γ:: Δ: Ε. λέγω, ὅτι εἰάν Α > Γ, καὶ Δ > Ζ· καὶν Α=Γ, καὶ Δ=Ζ· καὶν Α < Γ, καὶ Δ < Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς Α: Β:: Ε: Ζ, καὶ ὡς Β: Γ:: Δ: Ε, ἄρα καὶ δι' ἴσιν τεταραγμένως ὡς Α: Γ: Δ: Ζ. (υ) ὅθεν φανερόν τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΙ', καὶ ΚΔ'.

Εἰάν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον ἔχη δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθέν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Ἐξω ὡς Α: Β:: Γ: Δ, καὶ ὡς Ε: Β:: Ζ: Δ. λέγω, ὅτι ὡς Α+Ε: Β:: Γ+Ζ: Δ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς Α: Β:: Γ: Δ, ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς Α: Γ:: Β: Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς Ε: Ζ:: Β: Δ. ἄρα καὶ ὡς Α: Γ:: Ε: Ζ. (φ) ἄρα καὶ ἐναλλάξ ὡς Α: Ε:: Γ: Ζ. ἄρα καὶ συντεθέντα ὡς Α+Ε: Ε:: Γ+Ζ: Ζ. (χ) ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς Ε: Β:: Ζ: Δ, (ψ) ἄρα καὶ δι' ἴσιν, ὡς Α+Ε: Β:: Γ+Ζ: Δ. (ω) ὁ ἔδει δεῖξαι.

Κ

ΠΡΟ-

(υ) Κατὰ τὴν ιγ. τῷ ε. (φ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (χ) Κατὰ τὴν ι. τῷ ε. (ψ) Ἐξ ὑποθ. (ω) Κατὰ τὴν ιβ. τῷ ε.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ', ἢ ΚΕ'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ μέγιστον αὐτῶν καὶ τὸ ἐλάχιστον, δύο τῶν λοιπῶν μείζονα ἔσται.

Ἔστω ὡς $AB : ΓΔ :: E : Z$. καὶ μέγιστον μὲν αὐτῶν ἔστω τὸ AB , ἐλάχιστον δὲ τὸ Z . λέγω, ὅτι τὸ $AB + Z \supset ΓΔ + E$. 3.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω τὸ μὲν $AH = E$, τὸ δὲ $ΓΘ = Z$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς $AB : ΓΔ :: E : Z$ ἔστι δὲ τὸ μὲν $E = AH$, τὸ δὲ $Z = ΓΘ$ ἄρα καὶ ὡς $AB : ΓΔ :: AH : ΓΘ$. ἄρα καὶ ὡς $AB : ΓΔ :: BH : ΔΘ$. (α) ἀλλὰ τὸ $AB \supset ΓΔ$. ἄρα καὶ $BH \supset ΔΘ$. ἐπεὶ δὲ $AH = E$, καὶ $ΓΘ = Z$. εἰάν ἄρα τῷ μὲν AH προσεθῇ τὸ Z , τῷ δὲ $ΓΘ$ τὸ E , ἔσται $AH + Z = ΓΘ + E$. προσκείσθω τοῖς μὲν $AH + Z$ τὸ HB , τοῖς δὲ $ΓΘ + E$, τὸ $ΔΘ$, καὶ ἔσται $AH + Z + BH \supset ΓΘ + E + ΔΘ$. δεδοκται γάρ τὸ $BH \supset ΔΘ$. ἔτιεν $AB + Z \supset ΓΔ + E$. ὃ ἔδει δεῖξαι.



Τὰ ἐξῆς Θεωρήματα, πλὴν τῶ ἐχάστῃ, ἐκ τῶν τῶ Πάππῃ εἰσὶ τῶ Ἀλεξανδρέως.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Α'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἢ περ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ ἐκ τῶν ἀκρῶν γινόμενον μείζον τῶ ἐκ τῶν μέσων ἔσται.

καὶ

(α) Κατὰ τὴν εἰς τῶ 3.

κὺ ἐὰν τὸ ἐκ τῶν ἁκρῶν μείζον τῷ ἐκ τῶν μέσων, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔξει, ἢ περ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

Ἐχέτω $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$. λέγω, ὅτι $A \cdot \Delta \supseteq B \cdot \Gamma$.
ἐὰν δὲ $A \cdot \Delta \supseteq B \cdot \Gamma$, $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐπειδὴ $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$, τὸ A ἄρα περιέχεται ὑπὸ τῷ B ἐλαττοναίᾳς ἢ περ τὸ Γ ὑπὸ τῷ Δ . (β) εἰλήφθω μέγεθος τὸ E ἐλαττον τῷ A , τοσάκις ὑπὸ τῷ B περιεχόμενον, ὡσάκις καὶ τὸ Γ ὑπὸ τῷ Δ . ἔσαι ἄρα ὡς $E : B :: \Gamma : \Delta$. (γ) ἄρα $E \cdot \Delta = B \cdot \Gamma$. (δ) ἀλλ' $A \cdot \Delta \supseteq E \cdot \Delta$ ἐλαττον γάρ τὸ E τῷ A . ἄρα $A \cdot \Delta \supseteq B \cdot \Gamma$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπεὶ $A \cdot \Delta \supseteq B \cdot \Gamma$, εἰλήφθω μέγεθος τὸ E ἐλάττον τῷ A , ὥστε εἶναι $E \cdot \Delta = B \cdot \Gamma$. ἄρα ὡς $E : B :: \Gamma : \Delta$, (ε) ἔτεν τὸ E τοσάκις περιέχεται ὑπὸ τῷ B , ὡσάκις καὶ τὸ Γ ὑπὸ τῷ Δ . ἀλλὰ τὸ $A \supseteq E$. τὸ A ἄρα ὑπὸ τῷ B ἐλαττοναίᾳς περιέχεται, ἢ περ τὸ Γ ὑπὸ τῷ Δ . ἄρα $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$. σ. ε. δ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Ἐκ δὴ τέτε φανερόν, ὅτι ἐὰν $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$, κὺ ἐναλλάξ $A : \Gamma \supseteq B : \Delta$. κὺ τέτε γάρ κειμένε, τὸ ἐκ τῶν ἁκρῶν γινόμενον, ἔτεν τὸ A μείζον τῷ ἐκ τῶν μέσων, ἦτοι τῷ $B \cdot \Gamma$. ἀνάπαλιν δὲ τὸ B πρὸς τὸ A ἐλάττονα λόγον ἔξει, ἢ περ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ , ἔτεν $B : A \leq \Delta : \Gamma$. ὅπερ ἐστὶ ὅτι τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ B πρὸς τὸ A , ἦτοι $\Delta : \Gamma \supseteq B : A$. τέτε γάρ κειμένε, πάλιν $A \cdot \Delta \supseteq B \cdot \Gamma$.

(β) Κατὰ τὸν γ. ὅρισμ. τῷ ε. (γ) Κατὰ τὸν β. ὅρισμ. τῷ ε.

(δ) Κατὰ τὸν ε. τῷ ε. (ε) Κατὰ τὴν ἀντήν.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Β'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἢ περ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ δεύτερον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔξει, ἢ περ τρίτον καὶ τέταρτον πρὸς τέταρτον.

Ἐχέτω $A : B \supset \Gamma : \Delta$. λέγω, ὅτι καὶ $A \vdash B : B \supset \Gamma \vdash \Delta : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $A : B \supset \Gamma : \Delta$, ἄρα $A \cdot \Delta \supset B \cdot \Gamma$. (ζ) κοινὸν προσκείσθω τὸ $B \cdot \Delta$. ἄρα $A \cdot \Delta + B \cdot \Delta \supset B \cdot \Gamma + B \cdot \Delta$, τετέστιν $A + B \cdot \Delta \supset B \cdot \Gamma + \Delta$. ἄρα $A + B : B \supset \Gamma + \Delta : \Delta$. (η)

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Γ'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἢ περ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ διαμεθέντα μείζονα λόγον ἔξει.

Ἐχέτω $A : B \supset \Gamma : \Delta$. λέγω, ὅτι καὶ $A - B : B \supset \Gamma - \Delta : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ $A : B \supset \Gamma : \Delta$, ἄρα $A \cdot \Delta \supset B \cdot \Gamma$. (θ) κοινὸν ἀφηρεῖσθω τὸ $B \cdot \Delta$. ἄρα $A \cdot \Delta - B \cdot \Delta \supset B \cdot \Gamma - B \cdot \Delta$, τετέστιν $A - B \cdot \Delta \supset B \cdot \Gamma - \Delta$. ἄρα $A - B : B \supset \Gamma - \Delta : \Delta$. (ι)

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Δ'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἢ περ τρίτον πρὸς τέταρτον, κατὰ ἀναστροφὴν λόγος, ἐλάττονα λόγον ἔξει.

ΔΕΙ-

(ζ) Κατὰ τὸ α. Θεώρ. (η) Κατὰ τὸ αὐτὸ Θεώρ. (θ) Κατὰ τὸ αὐτ. Θεώρ. (ι) Κατὰ τὸ αὐτ. Θεώρ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$, ἄρα $A : \Delta \supseteq B : \Gamma$. τέ-
των ἐκάτερον ἀφηρήθω ἀπὸ τῶν $A : \Gamma$. ἄρα $A : \Gamma - A$.
 $\Delta \supseteq A : \Gamma - B : \Gamma$, ἦτοι $A : \Gamma - \Delta \supseteq \Gamma : A - B$, ὅπερ ἐστὶν
 $A - B : \Gamma \supseteq A : \Gamma - \Delta$. ἄρα $A - B : A \supseteq \Gamma - \Delta : \Gamma$.
(κ) ἄρα ἀνάπαλιν. $A : A - B \supseteq \Gamma : \Gamma - \Delta$. (λ)

ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄.

Εἰαν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον
ἔχη, ἢ περ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ δεύτερον
πρὸς πέμπτον μείζονα ἢ περ τέταρτον πρὸς
ἕκτον, δι' ἴσιν καὶ πρῶτον πρὸς πέμπτον μεί-
ζονα λόγον ἔξει, ἢ περ τρίτον πρὸς ἕκτον.

Ἐχέτω $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$, καὶ $B : E \supseteq \Delta : \Sigma$. λέγω,
ὅτι καὶ $A : E \supseteq \Gamma : \Sigma$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$, καὶ ἐναλλαξ ἄρα $A : \Gamma \supseteq$
 $B : \Delta$ ὡσαύτως ἐπεὶ $B : E \supseteq \Delta : \Sigma$, καὶ ἐναλλαξ
 $B : \Delta \supseteq E : \Sigma$. ὁ λόγος ἄρα ὃν ἔχει τὸ B πρὸς τὸ
 Δ μείζων τῷ ὃν ἔχει τὸ E πρὸς πρὸς τὸ Σ . ἀλλὰ τῷ
λόγῳ ὃν ἔχει τὸ B πρὸς τὸ Δ μείζων ὁ λόγος ὃν ἔ-
χει τὸ A πρὸς τὸ Γ . καὶ γὰρ δέδεικται $A : \Gamma \supseteq B :$
 Δ . ἄρα ὁ λόγος ὃν ἔχει τὸ A πρὸς τὸ Γ πολλῷ μεί-
ζων τῷ ὃν ἔχει τὸ E πρὸς τὸ Σ . ἄρα $A : \Gamma \supseteq E :$
 Σ . ἄρα καὶ ἐναλλαξ, $A : E \supseteq \Gamma : \Sigma$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχη, ἥπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ δεύτερον πρὸς πέμπτον μείζονα ἥπερ ἕκτον πρὸς τρίτον, καὶ δι' ἴσιν τεταραγμένως πρῶτον πρὸς πέμπτον μείζονα λόγον ἔξει, ἥπερ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Ἐχέτω $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$, καὶ $B : E \supseteq \Sigma : \Gamma$. λέγω, ὅτι καὶ $A : E \supseteq \Sigma : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$, ἄρα $A \cdot \Delta \supseteq B \cdot \Gamma$. (μ) ἀλλὰ $B \cdot \Gamma \supseteq E \cdot \Sigma$. ἔχει γὰρ $B : E \supseteq \Sigma : \Gamma$. ἄρα πολλῷ μᾶλλον $A \cdot \Delta \supseteq E \cdot \Sigma$. ἄρα $A : E \supseteq \Sigma : \Delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5'.

Ὡν διπλασιόνων λόγον οἱ ὑποδιπλασίονες ἴσοι, καὶ κεινοὶ εἰσιν ἴσοι καὶ ἂν ὑποδιπλασιόνων οἱ διπλασίονες ἴσοι, καὶ κεινοὶ εἰσιν ἴσοι.

Ἔστω ὡς $A : B :: B : \Gamma$, καὶ ὡς $E : Z :: Z : O$. ἔσονται δὲ οἱ ὑποδιπλασίονες ἴσοι, (ν) εἴτε ὡς $A : B :: E : Z$. λέγω, ὅτι καὶ οἱ διπλασίονες αὐτῶν ἴσοι, ἥτοι ὡς $A : \Gamma :: E : O$. καὶ εἰ ὡς $A : \Gamma :: E : O$, ἔσται καὶ ὡς $A : B :: E : Z$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἐπεὶ ὡς $A : B :: B : \Gamma$, ἔστι δὲ καὶ ὡς $A : B :: E : Z$, (ξ) ἄρα καὶ ὡς $B : \Gamma :: E : Z$. (ο) ἀλλ' ὡς $E : Z :: Z : O$. (π) ἄρα καὶ ὡς $B : \Gamma :: Z : O$. (ρ) ἀλλὰ καὶ ὡς $A : B :: E : Z$. ἄρα δι' ἴσιν καὶ ὡς $A : \Gamma :: E : O$ (σ)

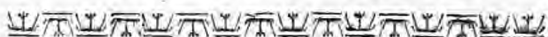
ΔΕΙ-

(μ) Κατὰ τὸ α. θεώρ. (ν) Ὅρα τὸ β. πόρ. τὸ μετὰ τὴν η. τῆς ε. (ξ) Ἐξ ὑποθ. (ο) Κατὰ τὴν ε. τῆς ε. (π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτ. ε. (σ) Κατὰ τὴν ιβ. τῆς ε.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Εἰ γὰρ μὴ ὡς $A : B :: E : Z$, εἰλήφθω ἄλλο τι ἢτοι μᾶζον ἢ ἐλαττον τῷ Z , οἷον τὸ Ξ , ὥτε εἶναι, ὡς $A : B :: E : \Xi$, καὶ γεγονέντω ὡς $E : \Xi :: \Xi : X$. καὶ ἐπεὶ καὶ ὡς $A : B :: B : \Gamma$ (τ) ἐστὶ δὲ καὶ ὡς $A : B :: E : \Xi$, (υ) εἴτην οἱ ὑποδιπλασίονος ἴσοι, καὶ οἱ τετραπλασίονες ἄρα ἴσοι, τετέστιν ὡς $A : \Gamma :: E : X$. (φ) ἂν ὡς $A : \Gamma :: E : O$. (χ) ἄρα καὶ ὡς $E : X :: E : O$. (ψ) ἄρα $X = O$. (ω) ἄρα καὶ ὡς $E : \Xi :: \Xi : O$. ἄρα $E : O = \Xi : \Xi$. (α) ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $E : Z :: Z : O$, (β) ἄρα $E : O = Z : Z$. ἄρα $Z : Z = \Xi : \Xi$. ἄρα καὶ $Z = \Xi$. τὸ Ξ ἄρα καὶ ἴσον, καὶ ἐλαττον ἢ μᾶζον τῷ Z , ὅπερ ἀδύνατον. ἔκ ἄρα ὡς $A : B :: E : \Xi$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐδὲ πρὸς ἄλλο τι τὸ E πλὴν ἢ πρὸς τὸ Z ἔξει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ A πρὸς τὸ B . ἄρα ὡς $A : B :: E : Z$. ὃ ἔδει δεῖξαι.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι ὧν λόγων οἱ ὑποτριπλασίονες εἰσιν ἴσοι, καὶ οἱ τριπλασίονες, ἢ τετραπλασίονες αὐτῶν εἰσιν ἴσοι, καὶ τὸ ἀνάπαλιν.



ΒΙΒΛΙΟΥ ΕΚΤΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Ὅμοια χήματα εὐθύγραμμά ἐστιν ὅσα τὰς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ἀνάλογον.

Β. Ἀντιπεπονθότα χήματά ἐστιν, ὅταν ἐν ἑκατέρῳ τῶν χημάτων ἡγόμενοι τε καὶ ἐπόμενοι λόγοι ὦσιν.

Κ 4

Γ'.

(τ) Ἐξ ὑποθ. (υ) Ἐκ τῆς κατασκ. (φ) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῷ δὲ τῷ θεωρήμ. (χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (ω) Κατὰ τὴν β. τῷ ε. (α) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (β) Ἐξ ὑποθ.

Γ'. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθὺα τετμήσθαι λέγεται, ὅταν ἢ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μᾶζον τμήμα, ἔτω τὸ μᾶζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

Δ'. Ὑψος παντὸς χήματός ἐστιν ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κἀθετος ἀγομένη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Τὰ τρίγωνα ἢ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐὼ τρίγωνα καὶ τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ ὕψη ἔχοντα ἴσα, τὰς ἀπὸ τῶν Β, Ζ ἀγομένας κἀθετους ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΕΗ, ἥτοι τὰς ΒΔ, ΖΘ. λέγω, ὅτι ὡς ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς ΕΖΗ τρίγωνον, ἔτως ἡ ΑΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΗ βάσιν. πίν. ις'. χ. ι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΓ = ΒΔ. ΑΓ, τὸ δὲ ΕΖΗ = ΖΘ. ΕΗ. (γ) ἄρα ὡς ΑΒΓ : ΕΖΗ :: ΒΔ. ΑΓ : ΖΘ. ΕΗ. ἄλλ' ὡς ΒΔ. ΑΓ : ΖΘ. ΕΗ :: ΒΔ. ΑΓ : ΖΘ. ΕΗ. (δ) ἄρα ὡς ΑΒΓ : ΕΖΗ :: ΒΔ. ΑΓ : ΖΘ. ΕΗ. (ε) ἄλλ' ὡς ΒΔ. ΑΓ : ΖΘ. ΕΗ :: ΑΓ : ΕΗ. (ζ) τὸ γὰρ ΒΔ = ΖΘ. (η) ἄρα ὡς ΑΒΓ : ΕΖΗ :: ΑΓ : ΕΗ. (θ)

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Ἐπεὶ δὲ τὰ παραλληλόγραμμα διπλάσια εἰσι τῶν τριγώνων τῶν τὸ αὐτὸ ὕψος ἐχόντων ἢ τὴν αὐτὴν βάσιν

(γ) Κατὰ τὸ γ πρόβλ. τὸ μετὰ τὴν ιδ. τῆ β. (δ) Κατὰ τὴν η. τῆ ε. (ε) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (ζ) Κατὰ τὴν η. τῆ ε. (η) Ἐξ ὑποθ. (θ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε.

σιν, (ι) καὶ τὰ παραλληλόγραμμα ἄρα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἀλλήλας εἰσιν ὡς αἱ βάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Ἐὰν τριγώνῃς παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμῇ τὰς τῷ τριγώνῃς πλευράς. καὶ ἔὰν αἱ τῷ τριγώνῃς πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τῷ τριγώνῃς πλευρᾷ παράλληλος.

Ἔστω τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ, καὶ ἤχθω μιᾷ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΔΕ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ΒΔ: ΔΑ: ΓΕ: ΕΑ. Ἐὰν δὲ αἱ τῷ ΑΒΓ τριγώνῃς πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ὥστε εἶναι ὡς ΒΔ: ΔΑ:: ΓΕ: ΕΑ, λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. κ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΓ, ΕΒ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ τρίγωνον ΒΕΔ = ΓΕΔ. (κ) ἄρα ὡς ΒΕΔ: ΔΕΑ:: ΓΕΔ: ΔΕΑ. (λ) ἀλλ' ὡς ΒΕΔ: ΔΕΑ:: ΒΔ: ΔΑ. (μ) ἄρα ὡς ΒΔ: ΔΑ:: ΓΕΔ: ΔΕΑ. (ν) ἀλλ' ὡς ΓΔΕ: ΕΔΑ:: ΓΕ: ΕΑ. (ξ) ὡς ἄρα ΒΔ: ΔΑ:: ΓΕ: ΕΑ. (ο)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ὡς ΒΔ: ΔΑ:: ΓΕ: ΕΑ. (π) ἀλλ' ὡς ΒΕΔ: ΔΕΑ:: ΒΔ: ΔΑ. (ρ) ἄρα καὶ ὡς ΒΕΔ: ΔΕΑ:: ΓΕ: ΕΑ.

Κ 5

(σ)

- (ι) Κατὰ τὴν μα. τῷ α. (κ) Κατὰ τὴν λζ. τῷ α. (λ) Κατὰ τὴν α. τῷ ε. (μ) Κατὰ τὴν α. τῷ σ. (ν) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (ξ) Κατὰ τὴν α. τῷ σ. (ο) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Κατὰ τὴν α. τῷ σ.

(σ) ἄλλ' ὡς ΓΔΕ : ΕΔΑ :: ΓΕ : ΕΑ. (τ) ἄρα ἢ ὡς ΒΕΔ : ΔΕΑ :: ΓΔΕ : ΕΔΑ. (υ) ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΕΔ = ΓΔΕ. (φ) εἰσὶ δὲ ἢ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἄρα εἰσὶ παραλλήλοις. (χ) ἡ ἄρα ΔΕ παράλληλος τῇ ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Ἐὰν τριγώνῳ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεία τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τῷ τριγώνῳ πλευραῖς. καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τῷ τριγώνῳ πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεία δίχα τέμνῃ τὴν τῷ τριγώνῳ γωνίαν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήθω δίχα ἡ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ΒΔ : ΔΓ :: ΒΑ : ΑΓ. Ἐὰν δὲ ἦ ὡς ΒΔ : ΔΓ :: ΒΑ : ΑΓ· λέγω, ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας. χ. 3.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΓΕ παράλληλος τῇ ΑΔ, (ψ) καὶ διαχθῆσθαι ἡ ΕΑ, συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.

ΔΕΙ-

-
- (σ) Κατὰ τὴν α. τῷ ε. (τ) Κατὰ τὴν α. τῷ σ. (υ) Κατὰ τὴν α. (φ) Κατὰ τὴν β. τῷ ε. (χ) Κατὰ τὴν λβ. τῷ α. (ψ) Κατὰ τὴν λα. τῷ α.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Η' μὲν γωνία $ΕΑΔ = ΒΕΓ$, ἡ δὲ $ΔΑΓ = ΑΓΕ$. (ω) ἀλλ' ἡ $ΒΑΔ = ΔΑΓ$. (α) ἄρα καὶ ἡ $ΔΕΓ$, ἔτεν $ΑΕΓ = ΑΓΕ$. ἄρα καὶ ἡ $ΑΕ = ΑΓ$. (β) ἀλλ' ὡς $ΛΔ : ΔΓ :: ΒΑ : ΑΕ$. (γ) ἄρα καὶ ὡς $ΒΔ : ΔΓ :: ΒΑ : ΑΓ$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ὡς $ΒΔ : ΔΓ :: ΒΑ : ΑΓ$. (δ) ἀλλ' ὡς $ΒΔ : ΔΓ :: ΒΑ : ΑΕ$. (ε) ἄρα ὡς $ΒΑ : ΑΓ :: ΒΑ : ΑΕ$. ζ ἄρα $ΑΕ = ΑΓ$. (η) καὶ γωνία ἄρα ἡ $ΑΗΓ = ΑΓΕ$. (θ) ἀλλ' ἡ μὲν $ΑΕΓ = ΒΑΔ$, ἡ δὲ $ΑΓΕ = ΔΑΓ$. (ι) ἄρα καὶ ἡ $ΒΑΔ = ΔΑΓ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Τῶν ἰσογώνων τριγώνων ἀνάλογον εἰσὶν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Ἐξωσαν ἰσογώνια τρίγωνα, τὰ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$ ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν γωνίαν $Γ$ τῇ $Ζ$, τὴν δὲ $Β$ τῇ $Ε$, τὴν δὲ $Α$ τῇ $Δ$. λέγω, ὅτι ὡς $ΑΒ : ΑΓ :: ΔΕ : ΔΖ$, καὶ ὡς $ΑΓ : ΓΒ :: ΔΖ : ΖΕ$ καὶ ὡς $ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ$. χ. 4.

Ἐάν μὲν τὰ τρίγωνα ἰσόπλευρα ᾖ, δῆλον τὸ προτεθέν· εἰ δὲ μή.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐφημέρω τὸ $ΔΕΖ$ τρίγωνον ἐπὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον, καὶ τιθέω τὸ μὲν $Δ$ σημεῖον ἐπὶ τὸ $Α$, ἡ δὲ $ΔΖ$
 εὐ-

(ω) Κατὰ τὴν κθ. τῆ α. (α) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὴν σ. τῆ α. (γ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (δ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (ζ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (η) Κατὰ τὴν β. τῆ ε. (θ) Κατὰ τὴν ε. τῆ α. (ι) Κατὰ τὴν κθ. τῆ α.

εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΑΓ. ἐφαρμόσει δὲ καὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὴν ΑΒ διὰ τὸ ἴσιν εἶναι τὴν Δ γωνίαν τῇ Α. ἡ δὲ ΕΖ ἐντὸς πεσεῖται τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, καὶ ἔσεται ἡ μὲν $ΑΕ = ΔΕ$, ἡ δὲ $ΑΖ = ΔΖ$, ἡ δὲ ΕΖ αὐτὴ ἡ ΕΖ. καὶ ἡ μὲν ΑΕΖ γωνία αὐτὴ ἡ Ε, ἡ δὲ ΔΖΕ αὐτὴ ἡ Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ $ΑΕΖ = Ε$, (κ) ἡ δὲ $Ε = Β$, (λ) ἄρα ἡ $ΑΕΖ = Β$. ἡ ἄρα ΕΖ παράλληλος τῇ ΒΓ, ὡς ἄρα $ΒΕ : ΕΑ :: ΓΖ : ΖΑ$. (μ) ἄρα καὶ ὡς $ΒΕ + ΕΑ : ΕΑ :: ΓΖ + ΖΑ : ΖΑ$, (ν) εἶπεν $ΒΑ : ΕΑ :: ΓΑ : ΖΑ$. καὶ ἐναλλάξ ὡς $ΒΑ : ΓΑ :: ΕΑ : ΖΑ$. (ξ) ἀλλ' ἡ μὲν $ΕΑ = ΔΕ$, ἡ δὲ $ΖΑ = ΔΖ$. ἄρα ὡς $ΒΑ : ΓΑ :: ΔΕ : ΔΖ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, τῷ μὲν Ζ σημείω ἐπὶ τὸ Γ ἐφαρμοδέντος, δεῖχθήσεται, ὅτι ὡς $ΓΑ : ΓΒ :: ΔΖ : ΖΕ$. τῷ δὲ Ε ἐπὶ τὸ Β, ὅτι ὡς $ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσῃ τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξῃ τὰς γωνίας, ὑφ' αἷς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, ὑποτείνουσιν.

Ἐσὼ δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν $ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ$, ὡς δὲ $ΒΓ : ΓΑ :: ΕΖ : ΖΔ$, καὶ εἴτι ὡς $ΒΑ : ΑΓ :: ΕΔ : ΔΖ$. λέγω ὅτι ἰσογώνια ἔσῃ τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξῃσι τὰς γωνίας, ὑφ' αἷς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι, τὴν μὲν ΑΒΓ τῇ ΔΕΖ, τὴν δὲ ΒΓΑ τῇ ΕΖΔ, καὶ εἴτι τὴν ΒΑΓ τῇ ΕΔΖ. κ. 5.

ΚΑ.

(κ) Ἐκ τῆς κατασκ. (λ) Ἐξ ὑποθ. (μ) Κατὰ τὴν β. τῷ ε. (ν) Κατὰ τὴν ι. τῷ ε. (ξ) Κατὰ τὴν ζ. τῷ ε.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συγεσάτω τῇ μὲν γωνίᾳ $ABΓ = ZEH$, τῇ δὲ $ΑΓΒ = EZH$. (ο) καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ $ΒΑΓ$ ἴση λοιπῇ τῇ $ΕΗΖ$. (π)

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ $ΕΗΖ$, $ΑΒΓ$ τρίγωνα ἰσογώνιά ἐσιν. ὡς ἄρα $AB : BG :: EH : EZ$. (ρ) ἀλλ' ὡς $AB : BG :: ΔΕ : ΕΖ$. (σ) ἄρα ὡς $ΔΕ : ΕΖ :: ΕΗ : ΕΖ$. (τ) ἢ ἄρα $ΔΕ = ΕΗ$. (υ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἢ $ΔΖ = ΖΗ$. ἔτι δὲ καὶ ἢ $ΕΖ$ κοινὴ. καὶ γωνία ἄρα ἢ μὲν $ΔΖΕ = ΕΖΗ$, ἢ δὲ $ΔΕΖ = ΖΕΗ$, καὶ ἢ $ΕΔΖ = ΕΗΖ$. (φ) ἀλλ' ἢ μὲν $ΕΖΗ = ΑΓΒ$, ἢ δὲ $ΖΕΗ = ΑΒΓ$. (χ) ἢ δὲ $ΕΗΖ = ΒΑΓ$. (ψ) ἄρα ἢ μὲν $ΔΖΕ = ΑΓΒ$, ἢ δὲ $ΔΕΖ = ΑΒΓ$, ἢ δὲ $ΕΔΖ = ΒΑΓ$. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσονται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὑφ' αἷς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, μίαν γωνίαν τὴν $ΒΑΓ$, μιᾷ γωνίᾳ τῇ $ΕΔΖ$ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἔστω ὡς $BA : AG :: ED : EZ$. λέγω, ὅτι ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἔξει τὴν μὲν $ΑΒΓ$ γωνίαν τῇ $ΔΕΖ$, τὴν δὲ $ΑΓΒ$ τῇ $ΔΖΕ$. χ. θ.

ΚΑ.

- (ο) Κατὰ τὴν κγ. τῆ α. (π) Κατὰ τὴν ζ. συνέπ. τῆς λβ. τῆ α.
 (ρ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (σ) Ἐξ ὑποθ. (τ) Κατὰ τὴν ε.
 τῆ α. (υ) Κατὰ τὴν β. τῆ ε. (φ) Κατὰ τὴν η. τῆ α.
 (χ) Ἐκ τῆς κατσκ. (ψ) Κατὰ τὴν ρηθ. συνέπ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω ἡ μὲν ΖΔΗ γωνία ἴση ὁποτέρᾳ τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἡ δὲ ΔΖΗ τῇ ΑΓΒ. (ω) λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση (α)

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ ΔΗΖ. ὡς ἄρα ΑΒ : ΑΓ :: ΔΗ : ΔΖ. (β) ἀλλ' ὡς ΑΒ : ΑΓ :: ΕΔ : ΔΖ. (γ) ὡς ἄρα ΕΔ : ΔΖ :: ΔΗ : ΔΖ. (δ) ἄρα ἡ ΕΔ = ΔΗ. (ε) ἐν τοῖς τριγώνοις ἐν ΔΕΖ, ΔΖΗ, ἡ μὲν ΔΕ = ΔΗ, ἡ δὲ ΔΖ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΕΔΖ = ΖΔΗ. (ς) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΔΖΕ = ΔΖΗ, καὶ ἡ ΔΕΖ = ΔΗΖ. (η) ἀλλ' ἡ μὲν ΔΖΗ = ΑΓΒ, (θ) ἡ δὲ ΔΗΖ = ΑΒΓ, (ι) ἄρα ἡ μὲν ΑΓΒ = ΔΖΕ, ἡ δὲ ΑΒΓ = ΔΕΖ. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἦτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσονται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, περὶ αἷς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ΒΑΓ γωνίαν τῇ ΕΔΖ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας, τὰς ΑΒΓ,

(ω) Κατὰ τὴν κγ. τῆ α. (α) Κατὰ τὴν ζ. συνίπ. τῆς λβ. τῆ α. (β) Κατὰ τὴν δ. τῆ ε. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (ε) Κατὰ τὴν β. τῆ ε. (ς) Ἐκ τῆς κατασκευ. (η) Κατὰ τὴν δ. τῆ β. (θ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ι) Κατὰ τὴν ρηθ. συνίπ.

ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἔστω ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ. τῶν δὲ λοιπῶν γωνιῶν τῶν πρὸς ταῖς Γ, Ζ σημείοις ἐκατέραν ἅμα ἦτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς. λέγω, ὅτι ἰσογώνιον ἔσται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. καὶ ἴση ἔσται ἡ ΑΒΓ γωνία τῇ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση. πίν. ΙΖ. ς. 7.

Εἰ γὰρ ἀνίστος ἐστὶν ἡ ΑΒΓ γωνία τῇ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒΓ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω ἡ ΑΒΗ γωνία ἴση τῇ ΔΕΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΗ, ΔΕΖ ἡ μὲν γωνία Α = Δ, (κ) ἡ δὲ ΑΒΗ = ΔΕΖ. (λ) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗΒ ἴση λοιπῇ τῇ ΔΖΕ. ἰσογώνια ἄρα τὰ ΑΒΗ, ΔΕΖ τρίγωνα. ἄρα ὡς ΑΒ : ΒΗ :: ΔΕ : ΕΖ. (μ) ἀλλ' ὡς ΔΕ : ΕΖ :: ΑΒ : ΒΓ. (ν) ὡς ἄρα ΑΒ : ΒΗ :: ΑΒ : ΒΓ. (ξ) ἡ ἄρα ΒΗ = ΒΓ. (ς) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΒΗΓ = ΒΓΗ. (π) εἰάν ἔν ἐκατέρα τῶν Γ, Ζ γωνιῶν ἐλάσσων ὀρθῆς, καὶ ἡ ΒΗΓ ἔσται ἐλάσσων ὀρθῆς καὶ γὰρ ἡ Γ = ΒΗΓ, ὡς δέδεικται. ἀλλ' αἱ ΒΗΓ, ΒΗΑ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (ρ) ἡ ἄρα ΒΗΑ, ἔσται ΑΗΒ μείζων ὀρθῆς. καὶ ἡ Ζ ἄρα μείζων ὀρθῆς δέδεικται γὰρ ἡ ΑΗΒ = Ζ. ἡ ἄρα Ζ γωνία καὶ μείζων καὶ ἐλάσσων ὀρθῆς, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐάν δὲ ἐκατέρα τῶν Γ, Ζ μείζων ὀρθῆς, ἐπεὶ ἡ ΒΗΓ = ΒΓΗ, ὡς δέδεικται αἱ δύο ἄρα γωνίαι ΒΗΓ, ΒΓΗ τῷ τριγώνῳ ΗΒΓ μείζονες δύο ὀρθῶν, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ ἀνίστος τῇ

- (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (μ) Κατὰ τὴν δ. τῆ σ.
(ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (ς) Κατὰ τὴν β. τῆ ε.
(π) Κατὰ τὴν ε. τῆ κ. (ρ) Κατὰ τὴν ιγ. τῆ κ.

τῇ ΔΕΖ. ἄρα ἴση. καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ
τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση. ἰσογώνια ἄρα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρι-
γωνα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Εἰάν ἐν ὀρθογώνῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς
γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ
πρὸς τῇ καθετῷ τρίγωνα ὁμοιά ἐσι τῷ τε
ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν
ΒΑΓ γωνίαν. καὶ ἤχθῳ ἀπὸ τῆς Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κά-
θετος ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι ὁμοίων ἐσιν ἐκάτερον τῶν ΑΒΔ,
ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ, καὶ ἔτι ἀλλήλοις. χ. 8.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰν τοῖς τριγώνοις ΑΒΓ, ΑΒΔ, ἡ μὲν γωνία ΒΑΓ =
ΒΔΑ, (σ) ἡ δὲ πρὸς τῷ Β κοινή. καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ
πρὸς τῷ Γ, λοιπῇ τῇ ΒΑΔ ἴση. (τ) ἰσογώνιον ἄρα
τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. καὶ ἐπὶ τὰ ἰσο-
γώνια τρίγωνα ἀνάλογον ἔχει τὰς πλευράς τὰς πε-
ρὶ τὰς ἴσας γωνίας, (υ) ὁμοιον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγω-
νον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. (φ) ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὸ
ΑΔΓ τρίγωνον ὁμοίων ἐσι τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. ἐκάτερον
ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων, ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τριγώ-
νῳ ὁμοίων ἐσι. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν γωνία ΒΔΑ = ΑΔΓ,
(χ) ἡ δὲ ΒΑΔ = Γ, ὡς δέδεικται, καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ
πρὸς τῷ Β, λοιπῇ τῇ ΔΑΓ ἴση. ἰσογώνιον ἄρα καὶ
τῷ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. ἄρα ὁμοιον. (ψ)

ΣΥ.

(σ) Ἐξ ὑποθ. (τ) Κατὰ τὴν ζ. συνέπ. τῆς λβ. τῆς κ. (υ) Κα-
τὰ τὴν δ. τῆς ε. (φ) Κατὰ τὸν α. ὄρισμ. τῆς ε. (χ) Ἐξ
ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὴν δ. καὶ τὸν α. ὄρισμ. τῆς ε.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Εἰς δὴ τέττε φανερόν, ὅτι εἰς ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογός ἐστιν. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΒΔΓ, ΑΔΓ ὡς ΒΔ : ΔΓ :: ΔΓ : ΔΑ. καὶ ἐτι τῆς βάσεως καὶ ἐνὸς ὁποτέρου τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογός ἐστι. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΓ, ὡς ΒΑ : ΑΓ :: ΑΓ : ΑΔ. ὁσαύτως διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΒΓ, ὁμοιότητα, ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΒΓ : ΒΔ.

Β'. Ἡ ἀπὸ τῆς πυχόντος σημείου Γ τῆς περιφερείας τῆς κύκλου ΑΓΕ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ΑΒ ἀγομένη ΓΔ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν τῆς διαμέτρου τμημάτων ΑΔ, ΔΒ, εἴτεν ἐστὶν ὡς ΑΔ : ΔΓ :: ΔΓ : ΔΒ. καὶ $\overline{ΔΓ}^2 = ΑΔ \cdot ΔΒ$. (ω) ἐπιζευχθεῖσιν γὰρ τῶν ΑΓ, ΓΒ εὐθειῶν, ἡ γωνία ΑΓΒ ὀρθή ἐστι. (α) τὸ ἄρα ΑΓΒ τρίγωνον ὀρθογώνιον ἐστίν. ἐξ ὅθεν δῆλον τὸ προκείμενον.

Γ'. Ἐάν τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἢ τινὶ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τὸ ἀπὸ τῶν τμημάτων ΑΔ, ΔΒ τῆς ΑΒ ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ, εἴτεν εἰς ἢ $\overline{ΓΔ}^2 = ΑΔ \cdot ΔΒ$, ἐπιζευχθεῖσιν τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἔσεται ἡ ΑΓΒ γωνία ὀρθή. ἐπεὶ γὰρ $\overline{ΓΔ}^2 = ΑΔ \cdot ΔΒ$, (β) ὡς ἄρα ΑΔ : ΓΔ :: ΓΔ : ΔΒ. τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΔΓ, ΒΔΓ ἀνάλογον ἔχει τὰς πλευράς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας ΓΔΑ, ΓΔΒ. ἡ ἄρα γωνία ΓΔΑ = ΒΓΔ. (γ) ἀλλ' ἡ ΓΔΑ σὺν τῇ ΑΓΔ ἴση μιᾷ ὀρθῇ. (δ) ἄρα καὶ ἡ ΒΓΔ σὺν τῇ ΑΓΔ ἴση μιᾷ ὀρθῇ. ἡ ἄρα ΑΓΒ ὀρθή ἐστιν.

Λ

Δ'.

(10) Κατὰ τὴν σ. τὴ ε. (κ) Κατὰ τὴν λα. τὴ γ. (β) Ἐξ ὑποθ.

(γ) Κατὰ τὴν ε. τὴ ε. (δ) Κατὰ τὴν δ. συνει. τὴν ε. τὴ κ.

Δ'. Ἐὰν διαμέτρῳ τῇ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΓΒ ὑποτείνεσθῃ πλευρᾷ ΑΒ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ κύκλος γραφῇ, διὰ τῷ Γ ἥξει. εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι ὑπερθεῖν, ἢ ἐνερθεῖν τῷ Γ ἥξει. ἡκέτω δὴ ὑπερθεῖν. (χ. 10.) καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΒΓ, συμπιπτέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Ζ. καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΖ. ἡ ἄρα ΑΖΒ γωνία ὀρθή. (ε) ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΓΒ ὀρθή. (ζ) ἡ ἄρα ΑΖΒ = ΑΓΒ, ὅπερ ἀδύνατον. (η) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὑδὲ ἐνερθεῖν τῷ Γ (χ. 11.) ὁ κύκλος ἥξει. ἔσαι γὰρ πάλιν ἡ ΑΖΒ ἴση τῇ ΑΓΒ, ὅπερ ἀδύνατον. (θ) ἥξει ἄρα ὁ κύκλος διὰ τῷ Γ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσαχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ. καὶ ἐπιτεταχθῶ ἀφελεῖν ἀπ' αὐτῆς μέρος τὸ τρίτον. χ. 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω τὴν εὐθεῖα ἀπὸ τῷ Α ἡ ΑΓ, γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς ΑΒ τυχῶσαν. καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημῆσιν ἐπὶ τῆς ΑΓ, τὸ Δ. καὶ κείσθωσαν τῇ ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΕΓ, καὶ διὰ τῷ Δ παράλληλος ἥχθω τῇ ΒΓ ἡ ΑΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΖ τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς ΑΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΖΔ παράλληλος τῇ ΒΓ, ὡς ἄρα ΓΔ: ΔΑ:: ΒΖ: ΖΑ. (ι) ἀλλ' ἡ ΓΔ διπλασία τῆς ΑΔ, διπλασία ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ. τριπλασία ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΖΑ. τρίτον ἄρα μέρος τῆς ΒΑ ἡ ΖΑ.

ΠΡΟ-

(ε) Κατὰ τὴν λα. τῷ γ. (ζ) Ἐξ ὑποθ. (η) Κατὰ τὴν ιε. τῷ αἰ

(θ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (ι) Κατὰ τὴν β. τῷ ε.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἀτμητὸν τῇ δοθείσῃ
εὐθείᾳ τετμημένη ὁμοίως τεμεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἀτμητος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ
τετμημένη κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, ἡ ΑΓ, Χ. 13.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κείθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ, ὥστε γωνίαν τυχεῖσαν περι-
έχειν. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ. καὶ διὰ τῶν Δ, Ε ση-
μείων τῇ ΒΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΗ. λέγω,
ὅτι ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται κα-
τὰ τὰ Ζ, Η σημεῖα. ἤχθω γάρ ἡ ΔΚ παράλληλος
τῇ ΑΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἐν τῷ τριγώνῳ ΔΚΓ ἡ ΘΕ παράλληλος τῇ
ΚΓ, ὥς ἄρα ΓΕ : ΕΔ :: ΚΘ : ΘΔ. (κ) αὐτὴ ἡ μὲν
ΚΘ = ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ = ΗΖ. (λ) ὥς ἄρα ΓΕ : ΕΔ ::
ΒΗ : ΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΗΕ ἡ ΖΔ τῇ ΗΕ
παράλληλος, ἄρα ὥς ΕΔ : ΔΑ :: ΗΖ : ΖΑ. ἡ ἄρα
ἀτμητος ΑΒ τῇ τετμημένῃ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Ἐκ δὴ τέτε φανερόν, ὅτι πάνυ ῥᾷδιον τὴν δοθεῖ-
σαν εὐθεῖαν ΑΒ ἐν τοσέτοις ἴσοις τεμεῖν μέρεσιν, ὅσοις
εἴη τις ἐπιτάξῃ. διήχθω γάρ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀόρι-
στον ἡ ΑΓ γωνίαν τυχεῖσαν περιέχουσα μετὰ τῆς ΑΒ.
καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ. καὶ κεί-
θωσαν ἴσαι τῇ ΑΖ αἱ ΖΕ, ΕΔ, ΔΓ, καὶ ἐφεξῆς αἰχμαί
ὅσαι αὖν δεοὶ πρὸς ἀπαρτισμὸν τῶ ἀριθμῷ τῶν μερῶν
εἰς αὐ διελεῖν ἐπετάχθημεν τὴν ΑΒ. καὶ ἐπιζευχθείσης
τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν σημείων Ζ, Ε, Δ, ἤχθωσαν τῇ ΒΓ
παράλ-

παράλληλοι αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΔΚ. λέγω δὴ, ὅτι ἡ ΑΒ
αὐτῶν εἰς τὰ ἐπιταχθέντα τέτμηται μέρη. ὅπερ
τῶν αὐτῶν δευχθήσεται, δι' ὧν καὶ ἡ πρότασις. χαίρει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Δύω δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον
προσευρεῖν.

Ἐξωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ. χαίρει 15

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Κελεύωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ γωνίαν περιέχουσαν τυχῆσαν
καὶ ἐκβεβλήωσαν ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα. καὶ κελεύω
ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τῆς
παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΕ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΕ τρίτη
ἀνάλογος ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΔΕ ἡ ΔΕ παράλληλος
τῇ ΒΓ, ὡς ἄρα $AB : BD :: AG : GE$. (μ) ἀλλ' ἡ $BD = AG$
(ν) ὡς ἄρα $AB : AG :: AG : GE$. τρίτη ἄρα ἀνάλογος
τῶν ΑΒ, ΑΓ ἡ ΓΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον
προσευρεῖν.

Ἐξωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ Α, Β, Γ. χαίρει 15

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐκκελεύωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ γωνίαν περιέχουσαν
τυχῆσαν, τὴν ΕΔΖ. καὶ κελεύω τῇ μὲν Α = ΔΗ,
τῇ δὲ Β = ΗΕ, τῇ δὲ Γ = ΔΘ. καὶ ἐπιζεύχθω
τῆς ΗΘ, παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τῆς

(μ) Κατὰ τὴν β. τ. σ. (ν) Ἐκ τῆς κατασκευ.

ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΘΖ τῶν Α, Β, Γ τετάρτη ἐστὶν ἀνάλογον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἐν τῷ τριγώνῳ ΔΕΖ ἡ ΗΘ τῇ ΕΖ παράλληλος, ὡς ἄρα ΔΗ: ΗΕ:: ΔΘ: ΘΖ. (ξ) ἀλλ' ἡ μὲν ΔΗ=Α, ἡ δὲ ΗΕ=Β, ἡ δὲ ΔΘ=Γ. (ο) ὡς ἄρα Α: Β:: Γ: ΘΖ. τῶν ἄρα Α, Β, Γ τετάρτη ἀνάλογον προσέυρηται ἡ ΘΖ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Ἐντεῦθεν καὶ τὸν δευτέρον λόγον τῆς μείζονος ἀνισότητος, ὃν ἔχει ἐυθεία ἡ ΑΒ, πρὸς ἐυθεῖαν τὴν ΒΓ ἐπ' ἀπειρον προαγαγεῖν, καὶ τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ἀπείρων ὄρων προσευρεῖν μενθάνομεν· καὶ ἔτι, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν πρώτων ὄρων καὶ τῶν δευτέρων, αὐτὸς τε ὁ πρώτος ὄρος, καὶ πάντων τῶν ἀπείρων ὄρων κεφάλαιον συνεχῶς εἰσὶν ἀνάλογα. ρ. 17.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπ' ἐυθείας κείθω ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ. καὶ ἥχθωσαν ἀπὸ μὲν τῶ Α ἡ ΑΛ ἴση τε καὶ κάθετος τῇ ΑΒ, ἀπὸ δὲ τῶ Β, ἡ ΒΟ ἴση τε καὶ κάθετος τῇ ΒΓ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΛΟ, ἐκβεβλήθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ ΑΓ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ζ. καὶ ἥχθω ἀπὸ τῶ Γ ἡ ΓΚ κάθετος τῇ ΑΖ, καὶ εἰλήφθω ἡ ΓΕ ἴση τῇ ΓΚ. καὶ ἀπὸ τῶ Ε ἥχθω ἡ ΕΡ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΑΖ, καὶ εἰλήφθω ἡ ΕΔ ἴση τῇ ΕΡ. καὶ ἀπὸ τῶ Δ ἥχθω ἡ ΔΣ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΑΖ, καὶ εἰλήφθω ἡ ΔΙ ἴση τῇ ΔΣ, καὶ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπ' ἀπειρον γιγνέσθω. λέγω Α', ὅτι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΕ, ΕΔ, ΔΙ, καὶ ὀφείζῃς αἱ λοιπαὶ ἐπ' ἀπειρον συνεχῶς ἀνάλογόν εἰσι. λέγω δὲ Β', ὅτι ἡ ΑΖ ἴση τῇ κεφαλαίῳ τῶν ἀπείρων ὄρων.

(ξ) Κατὰ τὴν ς. τῆ σ. (ο) Ἐκ τῆς κατασκευῆς.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὰ τρίγωνα $Z\Lambda\Lambda$, $Z\Theta\Gamma$ ἰσογώνια εἰσιν, ὡς ἄρα $Z\Lambda : \Lambda\Lambda :: Z\Theta : \Theta\Gamma$. (π) ἀλλ' ἡ μὲν $\Lambda\Lambda = \Lambda\Theta$, ἡ δὲ $\Theta\Gamma = \Gamma\Lambda$. (ρ) ἄρα ὡς $Z\Lambda : \Lambda\Theta :: Z\Theta : \Gamma\Lambda$. ἄρα καὶ κατ' ἀνατροπὴν λόγος ὡς $Z\Lambda : Z\Lambda - \Lambda\Theta :: Z\Theta : Z\Theta - \Gamma\Lambda$, (σ) ἥτοι ὡς $Z\Lambda : Z\Theta :: Z\Theta : \Gamma\Lambda$. καὶ ἐπεὶ ὡς $Z\Lambda : \Lambda\Theta :: Z\Theta : \Gamma\Lambda$, ὡς δεικνύται, καὶ ἐναλλάξ δὲ, ὡς $Z\Lambda : Z\Theta :: \Lambda\Theta : \Gamma\Lambda$, (τ) ἄρα καὶ ὡς $\Lambda\Theta : \Gamma\Lambda :: Z\Theta : \Gamma\Lambda$. (υ) καὶ ἐπεὶ ἰσογώνια εἰσι τὰ $Z\Theta\Gamma$, $Z\Gamma\Lambda$ τρίγωνα, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς $Z\Theta : \Theta\Gamma :: Z\Gamma : \Gamma\Lambda$. (φ) ἄρα καὶ ἐναλλάξ ὡς $Z\Theta : Z\Gamma :: \Theta\Gamma : \Gamma\Lambda$. (χ) ἄρα καὶ ὡς $\Lambda\Theta : \Gamma\Lambda :: \Theta\Gamma : \Gamma\Lambda$. (ψ) ἀλλ' ἡ μὲν $\Theta\Gamma = \Gamma\Lambda$, ἡ δὲ $\Gamma\Lambda = \Gamma\Theta$. ὡς ἄρα $\Lambda\Theta : \Gamma\Lambda :: \Gamma\Lambda : \Gamma\Theta$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δεικνύσεται, ὡς $\Gamma\Lambda : \Gamma\Theta :: \Gamma\Theta : \Theta\Delta$, καὶ ὡς $\Gamma\Theta : \Theta\Delta :: \Theta\Delta : \Delta\Gamma$, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως ἐπ' ἀπείρον. αἱ ἄρα $\Lambda\Theta$, $\Gamma\Lambda$, $\Gamma\Theta$, $\Theta\Delta$, $\Delta\Gamma$, καὶ αἱ ἐφεξῆς ἐπ' ἀπείρον συνεχῶς ἀνάλογόν εἰσιν.

Ὅτι δὲ ἐπ' ἀπείρον τὰς ὁρὰς προαγαγεῖν δυνατόν, δείξεις ἔτιωσ' ἡχθῶ ἡ $I\Theta$ κάθετος τῇ ΛZ . καὶ ἐπεὶ ἰσογώνια τὰ $Z\Lambda\Lambda$, $ZI\Theta$ τρίγωνα, ὡς ἄρα $Z\Lambda : \Lambda\Lambda :: ZI : I\Theta$. ἀλλ' ἡ $Z\Lambda \simeq \Lambda\Lambda$ ἔστι γὰρ ἡ $Z\Lambda \simeq \Lambda\Theta$, ἡ δὲ $\Lambda\Theta = \Lambda\Lambda$. ἄρα καὶ ἡ $ZI \simeq I\Theta$. δυνατόν ἄρα ἀπὸ τῆς ZI μέγρος λαβεῖν ἴσον τῇ $I\Theta$, καὶ ἐφεξῆς πάλιν ἄλλο, καὶ ἔτιωσ' ἐπ' ἀπείρον. δὴλον ἄρα, ὅτι ἐπ' ἀπείρον προαγαγεῖν δυνατόν τὰς τοιαύτας ὁρὰς.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ὁ ἕκαστος τῆς τοιαύτης συνεχῆς σειρᾶς ὁρᾶς ἡ ἐντὸς τῆς Z πίπτει, ἡ ἐκτὸς, ἡ ἐπ' αὐτῇ τῇ Z . ἄλλα-
μὴν

- (π) Κατὰ τὴν δ. τῆς σ. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (σ) Κατὰ τὴν συνέπ. τῆς ια. τῆς ε. (τ) Κατὰ τὴν ζ. τῆς ε. (υ) Κατὰ τὴν ε. τῆς ε. (φ) Κατὰ τὴν δ. τῆς σ. (χ) Κατὰ τὴν ζ. τῆς ε. (ψ) Κατὰ τὴν ε. τῆς ε.

μὴν ἔτε ἐντὸς πίπτει καὶ γὰρ εἰ ἐντὸς πεσῆται, ἔκ
 ἔστι ὁ ἑχάτος· ἐνέστι γὰρ ἢ ἄλλον μετ' αὐτὸν λαβεῖν·
 ἔτε ἐκτός· ἔτω μὲν γὰρ ἀν' αἷη ἡ ΖΙ ἐλάττων τῆς
 ΙΗ· ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἡ ΖΙ $\succ$ ΙΗ. ἄρα
 ἐπ' αὐτῇ τῇ Ζ πεσῆται ὁ ἑχάτος ὅρος. ἴση ἄρα ἡ ΑΖ
 τῷ κεφαλαίῳ πάντων τῶν ὄρων.

Μὴ ξενίζετωσε δὲ, εἰ ἡ ΑΖ πεπερασμένη ἔστα,
 ἀπειρα περιέχει μεγέθη. πάντα γὰρ μέρη αὐτῆς εἰσιν,
 ἀπειρα μὲν τῷ ἀριθμῷ, ἐμὴν δὲ καὶ τῷ μεγέθει. προ-
 ἰόντα γὰρ ἐλαττώεται.

Ἔτι δὲ λέγω, ὅτι ἡ διαφορὰ τῆ πρώτης ὄρε καὶ
 τῆ δευτέρας, αὐτὸς τε ὁ πρώτος ὅρος, ἢ πάντων τὸ
 τῶν ἀπείρων ὄρων κεφάλαιον συνεχῶς εἰσιν ἀνάλογον.
 ἦχθω γὰρ ἡ ΟΧ παράλληλος τῇ ΑΖ.

ΔΕΙΞΙΣ,

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ΑΧΟ, ΑΑΖ τρίγωνα ἰσογώνια εἰσι,
 ὡς ἄρα ΑΧ: ΧΟ:: ΑΑ: ΑΖ. (ω) αἰτ' ἡ μὲν ΑΧ ἡ
 διαφορὰ ἐστὶ τῶν ΑΑ, ΒΟ, εἴτεν τῶν ΑΒ, ΒΓ, (α)
 ὅπερ ἐστὶ τῆ πρώτης καὶ δευτέρας ὄρε, ἡ δὲ ΧΟ = ΑΒ,
 (β) ἡ δὲ ΑΑ = ΑΒ. ἄρα ΑΧ: ΑΒ:: ΑΒ: ΑΖ. ὅπερ
 ἦν τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Δύο δοθεαῖν εὐθειῶν, μέσσω ἀνάλογον
 προσσευρῆν.

Ἔσωσαν αἱ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ. χ. ιδ.

Δ 4

ΚΑ-

(ω) Κατὰ τὴν δ. τῇ ε. (α) Ἐκ τῆς κατασκευ. (β) Κατὰ τὴν
 λδ. τῇ κ.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Κείθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ AB , $BΓ$, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς $ΑΓ$ ἡμικύκλιον τὸ $ΑΔΓ$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ B ἢ $ΒΔ$ κάθετος τῇ $ΑΓ$. λέγω, ὅτι ἡ $ΒΔ$ ἐστὶν ἡ ζητούμενη. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΑΔ$, $ΔΓ$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ $ΑΔΓ$ γωνία ὀρθή ἐστι. (γ) τὸ ἄρα $ΑΔΓ$ τρίγωνον ὀρθογώνιον ἐστίν. ἡ ἄρα $ΔΒ$ κάθετος μέση ἀνάλογός ἐστι τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$. (δ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Τῶν ἴσων τε ἢ μίαν μιᾷ ἴσῳ ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὧν παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσῳ ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκάστα.

Ἐσῶ ἴσα παραλληλόγραμμα, τὰ $ΑΒ$, $ΒΓ$, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ $Β$ γωνίας. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς $ΔΒ : ΒΕ :: ΗΒ : ΒΖ$. καὶ εἰάν $ΔΒ : ΒΕ :: ΗΒ : ΒΖ$, λέγω, ὅτι τὸ $ΑΒ$ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ $ΒΓ$ παραλληλογράμμῳ. κ. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Κείθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ $ΔΒ$, $ΒΕ$, καὶ δῆλον ὅτι ἐπ' εὐθείας ἔσονται καὶ αἱ $ΖΕ$, $ΒΗ$. (ε) ἐκβληθεῶν δὲ τῶν $ΑΖ$, $ΓΕ$, ἢ συμβαλεῶν ἀπὸ ἑκάστης κατὰ τὸ $Θ$, συμπεπληρώθω τὸ $Ξ$ παραλληλόγραμμον.

ΔΕΙ-

(γ) Κατὰ τὴν λυ. τῆ γ. (δ) Κατὰ τὴν α, συνέπ. τῆς κ. τῆ δ.
(ε) Ἐκ τῆς ιε. τῆ κ. ἐπ' ἑλ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ὡς $X: Z:: \Delta B: BE$. (ζ) ὡσαύτως ὡς $P: Z::$
 $HB: BZ$. (η) ἀλλὰ $P=X$. (θ) ἄρα καὶ ὡς $X: Z::$
 $HB: BZ$. ἄρα ὡς $\Delta B: BE:: HB: BZ$. (ι)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ὡς $\Delta B: BE:: HB: BZ$. (κ) ἀλλ' ὡς $\Delta B: BE::$
 $X: Z$. ἄρα ὡς $X: Z:: HB: BZ$. (λ) ἀλλ' ὡς $HB:$
 $BZ:: P: Z$. (μ) ἄρα καὶ ὡς $X: Z:: P: Z$. (ν) ἄρα
 $X=P$. (ξ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ ἴσῳ ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ᾗ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐσὶν ἐκείνα.

Ἔσω ἴσα τρίγωνα, τὰ $AB\Gamma$, $\Delta\Delta Z$ ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ A γωνίας. λέγω, ὅτι ἐσὶν ὡς $\Gamma A: \Delta\Delta:: EA: AB$. καὶ εἰάν ὡς $\Gamma A: \Delta\Delta:: EA: AB$, ἔσται τὸ τρίγωνον $Z=X$. 20.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κείθω, ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓA τῇ $\Delta\Delta$. καὶ δῆλον ὅτι ἐπ' εὐθείας ἔσται καὶ ἡ EA τῇ AB . (ο) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $B\Delta$.

Λ 5

ΔΕΙ-

- (ζ) Κατὰ τὴν α. τῷ σ. (η) Κατὰ τὴν αὐτὴν. (θ) Ἐξ ὑποθ.
 (ι) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὴν ε.
 τῷ ε. (μ) Κατὰ τὴν α. τῷ σ. (ν) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (ξ) Κα-
 τὰ τὴν β. τῷ ε. (ο) Ἐκ τῆς α. τῷ ε.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ὡς $\Xi: P:: \Gamma\Lambda: \Lambda\Delta$. (π) ὡσαύτως ὡς $X: P::$
 $E\Lambda: AB$. (ρ) ἀλλὰ $X = \Xi$. (σ) ἄρα ὡς $\Xi: P::$
 $E\Lambda: AB$. ἄρα ὡς $\Gamma\Lambda: \Lambda\Delta:: E\Lambda: AB$. (τ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ὡς $\Gamma\Lambda: \Lambda\Delta:: E\Lambda: AB$. (υ) ἀλλ' ὡς $\Xi: P:: \Gamma\Lambda:$
 $\Lambda\Delta$. (φ) ἄρα ὡς $\Xi: P:: E\Lambda: AB$. (χ) ἀλλὰ καὶ
 ὡς $X: P:: E\Lambda: AB$. (ψ) ἄρα ὡς $\Xi: P:: X: P$.
 (ω) ἄρα $\Xi = X$. (α)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Εἰάν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ
 ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον
 ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογω-
 νίῳ. καὶ εἰάν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον
 ὀρθογώνιον ἴσον ᾗ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περι-
 εχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι
 ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐξωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ $AB, \Gamma\Delta, E, Z$ ἀνά-
 λογον, ὡς $AB: \Gamma\Delta:: E: Z$. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν
 AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν
 $\Gamma\Delta, E$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. εἰάν δὲ $AB, Z = \Gamma\Delta,$
 E , ἔσαι ὡς $AB: \Gamma\Delta:: E: Z$. πίν. ΙΗ. χ. 21.

Ἡ πρότασις αὕτη πρὸτέθη τε καὶ δέδεικται ἐν τῷ
 πέμπτῳ βιβλίῳ. (β) ἀλλὰ δὴ καὶ ἄλλως δεῖχθήσεται.
 ΚΑ-

- (π) Κατὰ τὴν κ. τῷ ε. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (σ) Ἐξ ὑποθ.
 (τ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (υ) Ἐξ ὑποθ. (φ) Κατὰ τὴν α.
 τῷ ε. (χ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (ψ) Κατὰ τὴν α. τῷ ε. (ω) Κα-
 τὰ τὴν ε. τῷ ε. (α) Κατὰ τὴν β. τῷ ε. (β) Ἡ ἕκτη τῷ ε. ἐστὶ.

$\Sigma \chi \omega \sigma \alpha \nu \alpha \nu \tau \omega \nu \Pi, \Gamma$ σημειώσας τὰς α, β, γ
 συνθέσας πρὸς ὁρθὰς αἱ $\Delta \Pi, \Gamma \Theta$. καὶ κείδω τῇ μὲν
 Z ἴση ἡ $\Delta \Pi$, τῇ δὲ E ἴση ἡ $\Gamma \Theta$. καὶ συμπληρώσω
 τὰ X, P παραλληλόγραμμα.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ὡς $AB : ΓΔ :: E : Z$. (γ) ἂν μὲν $E = ΓΘ$,
ἢ δὲ $Z = ΑΗ$. (δ) ἄρα ὡς $AB : ΓΔ :: ΓΘ : ΑΗ$.
ἐντιπεπόνθασιν ἄρα τῶν X, P παραλληλογράμων αἱ
περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραί. ἄρα ἴσα εἰσὶ τὰ X, P
παραλληλόγραμμα. (ε)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπεὶ $X = P$ ἄρα ἀντιπεπόμεθα αὐτῶν αἱ πλευ-
ραί, ἔστιν ὥς $AB : \Gamma\Delta :: \Gamma\Theta : \Lambda\text{H}$. (ζ) ἀλλ' ἡ
μὲν $\Gamma\Theta = E$, ἡ δὲ $\Lambda\text{H} = Z$, (η) ὥς ἄρα $AB :$
 $\Gamma\Delta :: E : Z$.

ΣΗΝΕΠΕΙΑ.

Ἐνθεῦθεν δῆλος ὁ τῆς τῶν **τριῶν Μεθόδου**, τῆς καὶ **χρυσῆς Μεθόδου** καλεμένης, λόγος. ὅτι γὰρ ὁ τέταρτος τῆς ἀναλογίας ὅρος ἴσος τῷ πληκτῷ τῷ περὶ πτόντι ἐκ τῆς γινόμενου ἐκ τῶν μέσων διὰ τῆς πρώτης διαιρεθέντος, δείκνυται ἔσως. ἐπεὶ γὰρ ὡς $AB : \Gamma\Delta :: E : Z$, ἄρα $AB \cdot Z = \Gamma\Delta \cdot E$. ἐκατέρω δὲ τέτων τῶν ἴσων διὰ τῆς αὐτῆς AB διαιρεθέντος, ἔσται $\frac{AB \cdot Z}{AB} = \frac{\Gamma\Delta \cdot E}{AB}$. (9) ἀλλ' $AB = 1$, (1) ἄρα $Z = \Gamma\Delta \cdot E$. ὁ ἄρα τέταρτος ὅρος ὁ Z ἴσος τῷ πληκτῷ τῷ περὶ πτόντι.

(γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ε) Κατὰ τὴν ιδ. τῆ ε.
(ζ) Κατὰ τὴν αὐτήν (η) Ἐκ τῆς κατασκ. (θ) Κατὰ τὴν
η αἰξ. (ι) Κατὰ τὸ ζ. αἰξ. τῆ ε.

πτοντι, διαμεθέντος τῷ γινομένῳ ἐκ τῶν μέσων ΓΔ. Ε.
διὰ τῷ πρώτῳ ΑΒ.

Ἐκ τῆς προτάσεως δὲ ταύτης καὶ τὸ ἐξῆς τῷ Πτο-
λεμαίῳ θεώρημα δέκνυται.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Παντὸς τετραπλεύρου ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμ-
μένῳ τὸ ἐκ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ὀρθογώνιον,
ΑΙ. ΒΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς δυσὶν ὀρθογωνίοις τοῖς
ἐκ τῶν ἀντικειμένων τῷ τετραπλεύρῳ πλευ-
ρῶν, ἥτοι τοῖς ΑΒ. ΔΓ + ΑΔ. ΒΓ. χ. 22.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰ ἐκ ἑστίν ἡ ΒΑΓ γωνία ἴση τῇ ΓΑΔ, συνεσάτω
ἡ ΒΑΖ ἴση τῇ ΓΑΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΖ, ΑΓΔ, ἡ μὲν γωνία ΑΒΖ =
ΑΓΔ, (κ) ἡ δὲ ΒΑΖ = ΓΑΔ. (λ) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ
ΑΖΒ, ἴση λοιπῇ τῇ ΑΔΓ. (μ) ὡς ἄρα ΑΒ : ΒΖ ::
ΑΓ : ΓΔ. (ν) ἄρα ΑΒ. ΓΔ = ΒΖ. ΑΓ. (ξ) ἐπεὶ δὲ
ἡ γωνία ΒΑΖ = ΕΑΔ, (ο) ἀφαρεθείσης, ἄρα κοινῆς
τῆς ΕΑΖ, ἔσεται ἡ ΒΑΕ, εἴτεν ἡ ΒΑΓ = ΖΑΔ. ἐν
τοῖς τριγώνοις ἔν ΑΖΔ, ΑΒΓ, ἡ μὲν γωνία ΑΓΒ =
ΑΔΖ, (π) ἡ δὲ ΖΑΔ = ΒΑΓ, ὡς δέδεικται. καὶ λοι-
πὴ ἄρα ἡ ΑΖΔ ἴση λοιπῇ τῇ ΑΒΓ. (ρ) ὡς ἄρα ΑΔ :
ΔΖ :: ΑΓ : ΓΒ. (σ) ἄρα ΑΔ. ΓΒ = ΔΖ. ΑΓ. προσ-
κείσθω τῷ μὲν ΑΒ. ΓΔ τὸ ΑΔ. ΓΒ, τῷ δὲ ΒΖ. ΑΓ
τὸ ΔΖ. ΑΓ. ἔσεται ἄρα ΑΒ. ΓΔ + ΑΔ. ΓΒ = ΒΖ.
ΑΓ

(κ) Κατὰ τὴν κα. τῷ γ. (λ) Ἐκ τῆς κατασκ. (μ) Κατὰ τὴν
ζ. συνέπ. τῆς λβ. τῷ κ. (ν) Κατὰ τὴν δ. τῷ ε. (ξ) Κα-
τὰ τὴν ε. τῷ ε. (ο) Ἐκ τῆς κατασκ. (π) Κατὰ τὴν κα.
τῷ γ. (ρ) Κατὰ τὴν εἰθ. συνέπ. (σ) Κατὰ τὴν δ. τῷ ε.

ΑΓ + ΔΖ. ΑΓ. ἀλλὰ ΒΖ. ΑΓ + ΔΖ. ΑΓ = ΒΖ + ΖΔ.
ΑΓ = ΒΔ. ΑΓ. ἄρα ΒΔ. ΑΓ = ΑΒ. ΔΓ + ΑΔ. ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσι, τὸ ὑπὸ τῶν
ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ
ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ. καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν
ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀ-
πὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι
ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐξωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὥς Α :
Β :: Β : Γ. λέγω ὅτι Α. Γ = Β. Β. καὶ ἐὰν Α. Γ = Β.
Β, ἔσται ὥς Α : Β :: Β : Γ. §. 23.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκείδω τὴν εὐθεῖαν ἢ Δ ἴση τῇ Β.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α.

Ὡς Α : Β :: Β : Γ. (τ) ἀλλὰ Β = Δ. (υ) ἄρα ὥς
Α : Β :: Δ : Γ. ἄρα Α. Γ = Β. Δ. (φ) καὶ ἐπεὶ Β = Δ,
ἄρα καὶ Α. Γ = Β. Β.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β.

Ἐπεὶ Α. Γ = Β. Β, ἔστι δὲ Β = Δ. ἄρα Α. Γ =
Β. Δ. ἄρα ὥς Α : Β :: Δ : Γ. (χ) ἀλλὰ Β = Δ. ἄρα
καὶ ὥς Α : Β :: Β : Γ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας, τῷ δοθέντι εὐ-
θυγράμμῳ ὁμοῖον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐ-
θύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἐξω

(τ) Ἐξ ὑποθ. (υ) Ἐκ τῆς κατὰ τὴν γ. τῆς ε.
(χ) Κατὰ τὴν αὐτήν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἐυθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθέν ἐν: δύνγραμμον τὸ ΓΕ ρ. 24.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΔΖ. καὶ συνεχάτω ἡ μὲν γωνία ΗΑΒ = Γ, ἡ δὲ ΑΒΗ = ΓΔΖ. εσεται δὲ καὶ ἡ λοιπὴ ΑΗΒ ἴσῃ λοιπῇ τῇ ΓΖΔ. πάλιν συνεχάτω ἡ μὲν γωνία ΒΗΘ = ΔΖΕ, ἡ δὲ ΘΒΗ = ΕΔΖ. καὶ εσται καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῷ Θ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μὲν γωνία Α = Γ, ἡ δὲ Θ = Ε. (ψ) καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΒΗ = ΓΔΖ, ἡ δὲ ΘΒΗ = ΕΔΖ. (ω) ὅλη ἄρα ἡ ΘΒΑ ἴση ὅλῃ τῇ ΕΔΓ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΗΑ = ΕΖΓ. ἰσογώνια ἄρα εἰσὶ τὰ ἐνδύγραμμά ΑΘ, ΓΕ. ἐπεὶ δὲ τὰ ΗΒΑ, ΖΔΓ τρίγωνα ἰσογώνια: εἰσιν, (α) ὥς ἄρα ΑΗ : ΗΒ :: ΓΖ : ΖΔ. (β) ὡσαύτως ἐπεὶ τὰ ΗΒΘ, ΖΔΕ τρίγωνα ἰσογώνια εἰσιν, ὥς ἄρα ΗΒ : ΗΘ :: ΖΔ : ΖΕ. ἄρα δι' ἴσε καὶ ὥς ΑΗ : ΗΘ :: ΓΖ : ΖΕ. (γ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται; ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ τῶν ἐνδύγραμμων πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοια ἄρα εἰσὶ τὰ ἐνδύγραμμα, (δ) καὶ ὁμοίως κείμενα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ἡ τέχνη τῆς τὸς γαιῶ- γραφικῆς καὶ χωρογραφικῆς καταγράφειν ἀναπηγάζει χάρτας, καὶ τῆς ἀγρῆς καὶ οἰκίας καὶ πόλεως ἰχνο- γραφεῖν. μικρὰ μὲν γὰρ, ὅμοια δὲ καὶ ὁμοίως τοῖς με- γάλους κείμενα καταγράφει χήματα οἱ τῆς ἰχνογρα- φικῆς ἔμπειροι τέχνης.

ΠΡΟ-

- (ψ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (α) Ἐκ τῆς κατασκευ. (α) Ἐκ τῆς κα-
τασκευ. (β) Κατὰ τὴν δ. τῇ ε. (γ) Κατὰ τὴν ιβ. τῇ ι.
(δ) Κατὰ τὸν α. ὅρισ. τῇ ε.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα καὶ ἀνίστα πρὸς ἀλλήλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐστω ὅμοια καὶ ἀνίστα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσων ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε, ὡς δὲ ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. κ. 25.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἢ ΕΗ, ὥστε εἶναι ὡς ΒΓ : ΕΖ :: ΕΖ : ΕΗ. καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΗΑ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ, (ε) ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς ΑΒ : ΔΕ :: ΒΓ : ΕΖ. (ζ) ἀλλ' ὡς ΒΓ : ΕΖ :: ΕΖ : ΕΗ. (η) ἄρα καὶ ὡς ΑΒ : ΔΕ :: ΕΖ : ΕΗ. (θ) τὸ ἄρα ΑΒΗ τρίγωνον ἴσον τῷ ΔΕΖ. (ι) καὶ ἐπεὶ ὡς ΒΓ : ΕΖ :: ΕΖ : ΕΗ. (κ) ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΕΗ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. (λ) ἀλλ' ὡς ΒΓ πρὸς ΕΗ, ἔτως ΑΒΓ τρίγωνον, πρὸς ΑΒΗ τρίγωνον. ἄρα καὶ ΑΕΓ τρίγωνον, πρὸς ΑΒΗ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΗ = ΔΕΖ, ὡς δέδεικται. τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον, πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἢ ΒΓ, πρὸς τὴν ΕΖ. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟ-

(ε) Ἐξ ὑποθ. (ζ) Κατὰ τὴν ζ. τῷ ε. (η) Ἐκ τῆς κατασκευ. (θ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (ι) Κατὰ τὴν ιε. τῷ ε. (κ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (λ) Κατὰ τὸ θ. πόρ. τὸ μετὰ τὴν η. τῷ ε.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαμερεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἐσὼ ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ. λέγω Α', ὅτι ἐπιζευχθεῖσάν τῶν ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ, διαμερεῖνται εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα, τὰ Β, Σ, καὶ Ξ, Τ, καὶ Ψ, Φ ἴσα τὸ πλῆθος. Β', ὅτι ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. Γ', ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον, πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ΑΒ, πρὸς τὴν ὁμόλογον ΖΗ. ρ. 26.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥΤ Α'.

Ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ = ΖΗΘ, καὶ ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΖΗ : ΗΘ. (μ) τὸ ἄρα Ρ τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ Σ. (ν) ἄρα καὶ ὅμοιον. (ξ) ἡ ἄρα γωνία ΒΓΔ = ΗΘΖ : ἀλλ' ὅλη ἡ ΒΓΔ = ΗΘΚ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΔ λοιπὴ τῇ ΖΘΚ ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Ψ τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ Φ τριγώνῳ, καὶ ἐπὶ μένως ὅμοιον. καὶ γωνία ἡ ΑΔΕ = ΖΚΛ. ἀλλ' ὅλη ἡ ΓΔΕ ἴση ὅλη τῇ ΘΚΛ. (ο) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΔΑ ἴση λοιπῇ τῇ ΘΚΖ. ἐπεὶ ἔν τῶν Ξ, Τ τριγώνων ἡ μὲν γωνία ΑΓΔ = ΖΘΚ, ἡ δὲ ΓΔΑ = ΘΚΖ, ὡς δέδεικται, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΑΔ λοιπὴ τῇ ΘΖΚ ἴση. ἴσα

(μ) Κατὰ τὸν κ. ὅρισ. τῷ σ. (ν) Κατὰ τὴν σ. τῷ σ. (ξ) Κατὰ τὴν δ. τῷ σ. (ο) Κατὰ τὸν ἔρημ. ὅρισ.

ἰσογώνιον ἄρα τῷ Ξ τρίγωνον τῷ T τριγώνῳ. ἄρα καὶ ὅμοιον. ἔκ᾽ ἐν τῷ μὲν P τρίγωνον ὅμοιον τῷ Σ , τὸ δὲ Ξ τῷ T , τὸ δὲ Ψ τῷ Φ . τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ$, $ΖΗΘΚΛ$ εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διήρηται, καὶ ἴσα τὸ πλῆθος.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ P τρίγωνον πρὸς τὸ Σ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $ΑΓ$, πρὸς τὴν $ΖΘ$. ἀλλὰ καὶ τὸ Ξ πρὸς τὸ T διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $ΑΓ$, πρὸς τὴν $ΖΘ$. (π) ἄρα ὡς $P : \Sigma :: \Xi : T$. (ρ) καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς $\Xi : T :: \Psi : \Phi$. ἄρα ὡς $P : \Sigma :: \Xi : T :: \Psi : \Phi$. ἄρα καὶ ὡς $P + \Xi + \Psi : \Sigma + T + \Phi :: P : \Sigma$. (σ) ἀλλὰ τὸ μὲν $P + \Xi + \Psi$ ἴσον τῷ $ΑΒΓΔΕ$ πολυγώνῳ, τὸ δὲ $\Sigma + T + \Phi$ ἴσον τῷ $ΖΗΘΚΛ$ πολυγώνῳ. ὡς ἄρα $ΑΒΓΔΕ : ΖΗΘΚΛ :: P : \Sigma$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Γ'.

Τὸ P τρίγωνον πρὸς τὸ Σ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $ΑΒ$, πρὸς τὴν $ΖΗ$. (τ) ἀλλ' ὡς $P : \Sigma :: ΑΒΓΔΕ : ΖΗΘΚΛ$. (υ) ἄρα καὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πολύγωνον, πρὸς τὸ $ΖΗΘΚΛ$ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $ΑΒ$, πρὸς τὴν $ΖΗ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Ἔστω ἐκάτερον τῶν A, B εὐθυγράμμων τῷ Γ ὅμοιον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ A ὁμοίον ἐστὶ τῷ B . χ . 27.

M

ΔΕΙ-

- (π) Κατὰ τὴν $\iota\theta$. τῆς σ . (ρ) Κατὰ τὸ ζ . θεώρ. τὸ μετὰ τὸ ϵ βιβλ. (σ) Κατὰ τὴν θ . τῆς ϵ . (τ) Κατὰ τὴν $\iota\theta$. τῆς ϵ .
(υ) Κατὰ τὸ β. μέρ. τῆς δ τῆς προτ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὅμοιον τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιον τε ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιον τε ἐστὶν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ἐκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιον τε ἐστὶ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ἄρα καὶ τὸ Α τῷ Β ἰσογώνιον τε ἐστὶ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται. καὶ ἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾧ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐξωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ΑΒ: ΓΔ:: ΕΖ: ΗΘ. καὶ ἀναγεγράψωσαν ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ Ρ, Σ· ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ Τ, Υ. λέγω, ὅτι ἐστὶν, ὡς Ρ: Σ:: Τ: Υ. εἰ δὲ ὡς Ρ: Σ:: Τ: Υ, ἔσται καὶ ὡς ΑΒ: ΓΔ:: ΕΖ: ΗΘ. κ. 28.

ΔΕΙΞΙΣ. ΤΟΤ Α'.

Ἐπεὶ τὸ Ρ ὅμοιον ἐστὶ τῷ Σ, ἄρα τὸ Ρ πρὸς τὸ Σ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. (Φ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ Τ πρὸς τὸ Υ διπλασίονα λόγον

(Φ) Κατὰ τὴν η. τῆς ε.

λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. ἀλλ' ὡς ΑΒ: ΙΔ:: ΕΖ: ΗΘ. (χ) ἄρα καὶ ὡς Ρ: Σ:: Τ: Υ. (ψ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ Ρ πρὸς τὸ Σ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, (ω) ὡσαύτως καὶ τὸ Τ πρὸς τὸ Υ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. ἀλλ' ὡς Ρ: Σ:: Τ: Υ. (α) ἄρα καὶ ὡς ΑΒ: ΓΔ:: ΕΖ: ΗΘ. (β)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ Χ, Ρ ἴσην ἔχοντα τὴν ΕΓΔ γωνίαν τῇ ΕΓΗ. λέγω, ὅτι τὸ Χ πρὸς τὸ Ρ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν ὧν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, καὶ τῶν ὧν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. κ. 29.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Κείθω, ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ, καὶ ἡ ΔΓ, τῇ ΓΕ. (γ) καὶ συμπληρώθω τὸ παραλληλόγραμμον Ψ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὰ Χ, Ψ, Ρ τρία εἰσὶ μεγέθη, τὸ πρῶτον ἄρα Χ πρὸς τὸ τρίτον Ρ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν ὧν ἔχει πρῶτον Χ πρὸς δεύτερον Ψ, καὶ ἐκ τῶν ὧν ἔχει δεύτερον Ψ πρὸς τρίτον Ρ. (δ) ἀλλ' ὡς Χ: Ψ:: ΕΓ: ΓΗ, καὶ ὡς Ψ: Ρ:: ΔΓ: ΓΕ. (ε) ἄρα τὸ Χ πρὸς τὸ Ρ λόγον ἔχει συγ-

Μ 2

κείν

(χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὸ ζ. θεωρ. τὸ μετὰ τὸ ε βιβλ. (ω) Κατὰ τὴν κ. τῷ ε. (κ) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὸ ἀρ. θεωρ. (γ) Ἐκ τῆς ιε. τῇ α. δῆλον (δ) Κατὰ τὸ κ. πέρ. τὸ μετὰ τὴν η. τῷ ε. (ε) Κατὰ τὴν α. τῷ ε.

κείμενον ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΒΓ : ΓΗ, καὶ ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΔΓ : ΓΕ.
ὁ εἶδες δεῖξαι.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ, ἐπ' ἐυθείας κειμένων τῶν ΔΓ, ΓΒ πλευρῶν τῶν Χ, Ρ τριγώνων, τῶν τὰς περὶ τὸ Γ γωνίας ἴσας ἔχόντων, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΔΕ, δευχθήσεται, ὅτι τὸ Χ τρίγωνον πρὸς τὸ Ρ τρίγωνον λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῆς ὅν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, καὶ ἐκ τῆς ὅν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. χ. 30.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὰ παραλληλόγραμμα καὶ τρίγωνα τὰ ἄνισα ἔχοντα τὰ ὕψη καὶ τὰς βάσεις ἐν λόγῳ συγκειμένῳ εἰσὶν ἐκ τε τῆς λόγῳ ὅν ἔχει ὕψος πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ τῆς ὅν ἔχει βάσις πρὸς βάσιν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ Χ, Ρ ἄνισα ἔχοντα ὕψη, τὰ ΒΙ, ΖΚ, καὶ βάσεις τὰς ΑΔ, ΕΘ. λέγω, ὅτι τὸ Χ πρὸς τὸ Ρ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΒΙ : ΖΚ, καὶ ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΑΔ : ΕΘ. χ. 31.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἡγεμένων, εἶπεν ΒΙ. ΑΔ, πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἐπομένων, ἦτοι ΖΚ. ΕΘ, λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΒΙ : ΖΚ, καὶ ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΑΔ : ΕΘ. (ζ') ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΙ. ΑΔ = Χ, τὸ δὲ ΖΚ. ΕΘ = Ρ. (η) καὶ Χ ἄρα πρὸς Ρ λόγοι ἔχει συγκείμενον ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΒΙ : ΖΚ, καὶ ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΑΔ : ΕΘ. ὅπερ ἐστίν, ὅτι Χ : Ρ :: ΒΙ. ΑΔ : ΖΚ. ΕΘ.

Καί

(ζ') Κατὰ τὸν ζ. ὅρισμ. τῆς ε. (η) Ὅρα τὸ χόλ. τὸ μετὰ τὸν ζ. ὅρισμ. τῆς ε.

Καὶ Φανερόν, ὅτι εἰάν τά τε ὕψη καὶ αἱ βάσεις ἴσαι ᾖ, ἴσα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα. εἰάν δὲ τὰ ὕψη ἴσαι ᾖ, τὰ παραλληλόγραμμα ἀνάλογον εἰσὶ ταῖς βάσεσιν, ἔτεν ὡς $X : P :: AD : E\Theta$, εἰάν δὲ αἱ βάσεις ἴσαι, ἀνάλογον τοῖς ὕψεσι, τετέστιν ὡς $X : P :: BI : ZK$.

Ἐπεὶ δὲ τὰ τρίγωνα ἡμίσεά εἰσι τῶν παραλληλογράμμων τῶν τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τὰς αὐτάς βάσεις ἔχόντων, (θ) καὶ τὰ τρίγωνα ἄρα τὰ ἀνίστα ἔχοντα τὰ ὕψη καὶ τὰς βάσεις ἐν λόγῳ συγκαμμένα εἰσὶ τῶν ὕψεων καὶ τῶν βάσεων. εἰάν δὲ τὰ ὕψη ἴσα ἔχῃ, ἀνάλογόν ἐστι ταῖς βάσεσιν· εἰάν δὲ τὰς βάσεις ἴσας, ἀνάλογον τοῖς ὕψεσιν· εἰάν δὲ τά τε ὕψη καὶ τὰς βάσεις ἴσας, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ τὰ τρίγωνα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὁμοιά ἐστι τῶν ὅλων καὶ ἀλλήλοις.

Ἐξω παραλληλόγραμμον τὸ $AB\Gamma\Delta$, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ AG , περὶ δὲ τὴν AG παραλληλόγραμμα τὰ $EH, \Theta K$. λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν $EH, \Theta K$ ὁμοίον ἐστὶ τῷ ὅλῳ $AB\Gamma\Delta$, καὶ ἀλλήλοις. χ . 32.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς παραλληλογράμμοις $\Theta K, B\Delta$, ἡ μὲν γωνία $Z\Theta\Gamma = AB\Gamma$, ἡ δὲ $ZK\Gamma = A\Delta\Gamma$, (ι) ἡ δὲ πρὸς τῷ Γ κοινή, καὶ ἡ $KZ\Theta$ ἄρα ἴση τῇ ΔAB . (κ) ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΘK τῷ $B\Delta$. καὶ ἐπεὶ τὰ τρίγωνα $\Gamma KZ, \Gamma\Delta A$ ἰσογώνιά εἰσιν, ὡς ἄρα $\Gamma K : KZ :: \Gamma\Delta : \Delta A$. (λ) τῶν

M 3

ἄρα

(θ) Κατὰ τὴν μα. τῆ α. (ι) Κατὰ τὴν κθ. τῆ α. (κ) Ὅρα τὴν ιδ. συνέπ. τὴν μετὰ τὴν λβ. τῆ α. (λ) Κατὰ τὴν δ. τῆ ε.

ἄρα ΘΚ, ΒΔ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ
περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραί. ὅμοιον ἄρα τὸ ΘΚ τῷ
ΒΔ. (μ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΗ ὁμοίον ἐστὶ τῷ
ΒΔ. τὰ ἄρα ΘΚ, ΕΗ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ὅμοια. (ν)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ
τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δὴ ὅμοιον συ-
στήσασθαι, τὸ ΑΒΓ· ᾧ δὲ ἴσον, τὸ Δ. πίν. ΙΔ'. χ. 33.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Παραβεβλήθω παρὰ μὲν τὴν ΒΓ, τῷ ΑΒΓ εὐθυ-
γράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν
ΓΕ, τὸ ΓΜ ἴσον τῷ Δ ἐν γωνίᾳ τῇ ΖΓΕ ἴση τῇ ΓΕΛ.
(ξ) καὶ δῆλον, ὅτι ἐπ' εὐθείας εἰσὶν ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΓΖ,
ἡ δὲ ΛΕ τῇ ΕΜ. (ο) καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μέ-
ση ἀνάλογον ἡ ΗΘ. (π) καὶ ἀναγεγράψω ἀπὸ τῆς
ΗΘ τὸ ΗΚΘ εὐθύγραμμον ὅμοιον τῷ ΑΒΓ. (ρ) λέ-
γω, ὅτι τὸ ΗΚΘ ἴσον τῷ δοθέντι Δ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ΖΓ : ΗΘ :: ΗΘ : ΓΒ. (σ) ἡ ἄρα ΖΓ πρὸς τὴν
ΓΒ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΒ.
(τ) ἀλλὰ καὶ τὸ ΗΚΘ πρὸς τὸ ΓΑΒ διπλασίονα λό-
γον ἔχει, ἥπερ ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΒ. (υ) ὡς ἄρα ΗΚΘ :
ΓΑΒ :: ΖΓ : ΓΒ. (φ) ἀλλ' ὡς ΖΓ : ΓΒ :: ΓΜ : ΒΕ.
(χ) ἄρα καὶ ὡς ΗΚΘ : ΓΑΒ :: ΓΜ : ΒΕ. (ψ) ἀλλὰ τὸ
ΓΑΒ

- (μ) Κατὰ τὸν α. ὁρισμ. τῆ σ. (ν) Κατὰ τὴν κη. τῆ σ. (ξ) Κα-
τὰ τὴν με. τῆ κ. (ο) Ἐκ τῆς ιδ. τῆ κ. (π) Κατὰ τὴν ιγ. τῆ σ.
(ρ) Κατὰ τὴν ιη. τῆ σ. (σ) Ἐκ τῆς κατασκ. (τ) Κατὰ τὸ
β πόρ τὸ μετὰ τὴν θ. τῆ κ. (υ) Κατὰ τὴν ι. ἢ κ. τῆ σ.
(φ) Κατὰ τὸ ζ. θωρ. τὸ μετὰ τὸ κ. βιβ. (χ) Κατὰ τὴν κ.
τῆ σ. (ψ) Κατὰ τὴν κ. τῆ σ.

ΓΑΒ = ΒΕ (ω) ἄρα καὶ τὸ ΗΚΘ = ΓΜ. ἀλλὰ τὸ ΓΜ = Δ. (α) ἄρα καὶ τὸ ΗΚΘ = Δ. ἀλλὰ τὸ ΗΚΘ ὅμοιον τῷ ΑΒΓ. (β) τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστὶ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΣ'.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὁμοίον τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐστὶ τῷ ὅλῳ.

Ἀπὸ παραλληλογράμμου τῷ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφαιρήσω τὸ ΕΖ ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, τὴν ΑΒΓ. λέγω, ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΖ. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔσω τῷ ΕΖ διάμετρος ἡ ΒΗ, τῷ δὲ ΑΒΓΔ ἡ ΒΘΔ. 9. 34.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ἡ ΗΖ παραλληλὸς ἐστὶ τῇ ΔΓ, ἰσογώνιά ἐστι τὰ ΒΓΔ, ΒΖΘ τρίγωνα. ὡς ἄρα ΒΓ : ΓΔ :: ΒΖ : ΖΘ. (γ) ἀλλ' ὡς ΒΓ : ΓΔ :: ΕΖ : ΖΗ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ, ΕΖ. ὡς ἄρα ΒΖ : ΖΘ :: ΒΖ : ΖΗ. (δ) ἡ ἄρα ΖΘ = ΖΗ. (ε) τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα περὶ ἄλλην διάμετρον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ. ἄρα περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐστὶ τῷ ΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἑλλει-

Μ 4

πόν-

(ω) Ἐκ τῆς κατασκευ. (α) Ἐκ τῆς κατασκευ. (β) Ὅμοιως. (γ) Κατὰ τὴν δ. τῷ ε. (δ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (ε) Κατὰ τὴν β. τῷ ε.

πόντων εἶδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις-
τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας
ἀναγραφόμενῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμι-
σείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμ-
μον, ὅμοιον ὃν τῷ ἐλλείματι.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω διχα κατὰ τὸ Γ. καὶ
παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΔ παραλ-
ληλόγραμμον, ἐκείπῃον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΔΒ
ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀνα-
γραφέντι τῆς ΑΒ, τετέστι τῆς ΓΒ. λέγω, ὅτι πάντων τῶν
παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένων παραλληλογράμμων,
καὶ ἐκείπόντων εἶδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ
ὁμοίως κειμένοις τῷ ΔΒ, μέγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. χ. 35.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΖ παραλ-
ληλόγραμμον, ἐκείπῃον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΖΒ
ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΔΒ. καὶ ἔχεται πρῶ-
τον τὸ ΑΖ τὴν ΑΚ βάσιν μέζονα τῆς ἡμισείας τῆς
ΑΒ, εἴτην τῆς ΑΓ. λέγω, ὅτι μέζον ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ΑΖ.
ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΚΖ, καὶ συμπιπτέτω τῇ ΔΕ κατὰ τὸ Ι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ ΔΒ, ΖΒ παραλληλόγραμμα περὶ τὴν αὐτὴν εἰς
διάμετρον τὴν ΔΒ. (ζ) τὸ ἄρα $ΓΖ = ΖΕ$. (η) κοινὸν
προσκέσθω τὸ ΖΒ, τὸ ἄρα $ΓΘ = ΚΕ$. ἀλλὰ τὸ $ΓΘ =$
 $ΓΗ$. (θ) ἄρα $ΓΗ = ΚΕ$ κοινὸν προσέσθω τὸ ΓΖ. τὸ
ἄρα ΑΖ ἴσον τῷ γνώμονι ΛΜΝ. ἀλλὰ τὸ ΒΔ $\supset$ ΛΜΝ.
ἄρα τὸ ΒΔ $\supset$ ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΒΔ = ΑΔ. (ι) τὸ ἄρα ΑΔ $\supset$
ΑΖ.

Ἄλλὰ

(ζ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (η) Κατὰ τὴν μυ. τῆ α. (θ) Κατὰ τὴν
λς. τῆ κ. (ι) Κατὰ τὴν αὐτήν.

Ἀλλὰ δὴ ἐχέτω το AZ βάσιν τὴν AK ἐλασσονα τῆς AG . καὶ ἐπεὶ τὸ $\Delta\Theta = \Delta H$, (κ) ἔστι δὲ τὸ $\Delta H \supseteq MH$, ἄρα καὶ τὸ $\Delta\Theta \supseteq MH$. ἀλλὰ τὸ $\Delta\Theta = \Delta K$. (λ) ἄρα καὶ τὸ $\Delta K \supseteq MH$. κοινὸν προσκείσθω τὸ MA ἄρα τὸ $AD \supseteq AZ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. κ. 36.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ'.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεΐαν τῷ δοθέντι εὐ-
 θυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον πα-
 ραβαλεῖν, ἐλλείπον ἔδει παραλληλογράμ-
 μῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι. δεῖ δὴ τὸ διδόμε-
 νον εὐθύγραμμον, ὃ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν,
 μὴ μείζον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παρα-
 βαλλομένῃ, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων,
 τῷ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ ὃ δὲ ὅμοιον ἐλ-
 λείπεν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεΐα ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν εὐ-
 θυγράμμον, ὃ δὲ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν,
 τὸ Γ , μὴ μείζον ὂν τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλ-
 λομένῃ, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων ὃ δὲ δὲ ὅμοιον
 ἐλλείπεν, τὸ Δ . κ. 37.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E . καὶ ἀναγεγράφ-
 θω ἀπὸ τῆς AE τὸ AZ παραλληλόγραμμον ὅμοιον καὶ
 ὁμοίως κείμενον τῷ δοθέντι Δ . (μ) καὶ συμπληρώσ-
 θω τὸ $A\Theta$ παραλληλόγραμμον. τὸ δὲ AZ , ἥτοι ἴσον
 M 5 ἔστι

(κ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (λ) Κατὰ τὴν μγ. τῷ α. (μ) Κατὰ
 τὴν ιη. τῷ ς.

ισον, γεγονός αν εἴη το ἐπιταχθέν. παραβιβάζεται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΖ, ἔλλειπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΕΘ, ὁμοίᾳ ὄντι τῷ Δ· εἰ δ' ἐκ ἴσον, μᾶζόν ἐστι τὸ ΑΖ τῷ Γ. εὐρεθήτω ἔν η ὑπεροχή, κατ' ἣν τὸ ΑΖ ὑπερέχει τὸ Γ. (ν) καὶ αὐτῇ μὲν τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ ΕΘ ὅμοιον ἀναγεγράφθω παραλληλόγραμμον τὸ ΚΛ, κοινὴν ἔχον τὴν ΕΖΘ γωνίαν τῷ ΕΘ. (ξ) καὶ διήχθω ἡ μὲν ΚΙ ἐπὶ τὰ Μ, Ν σημῆα, ἡ δὲ ΛΙ ἐπὶ τὸ Ο. λέγω, ὅτι τὸ ΑΙ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ

Τὰ ΚΛ, ΕΘ παραλληλόγραμμα περὶ τὴν αὐτὴν εἰς διὰ μέτρον τὴν ΖΙΒ. (α) τὸ ἄρα $EI = IO$. (π) κοινὸν προσκείσθω τὸ ΟΝ. ἄρα τὸ $EN = OO$. ἀλλὰ τὸ $EN = EM$. (ρ) τὸ ἄρα $EM = OO$. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΙ. τὸ ἄρα ΑΙ ἴσον τῷ ΡΙΣ γινώμενι. ἀλλ' ὁ ΡΤΣ = Γ· ὑπερέχει γὰρ τὸ ΕΘ τὸ Γ κατὰ τὸ ΚΛ, ὁ δὲ ΡΙΣ ἐλλείπει τῷ ἴσος εἶναι τῷ ΕΘ, κατὰ τὸ ΚΛ· τὸ ἄρα $AI = \Gamma$. ἐπεὶ δὲ τὸ ΟΝ ὅμοιον ἐστὶ τὸ ΚΘ, τὸ δὲ ΕΘ τῷ Δ, τὸ ἄρα ΟΝ ὅμοιον τῷ Δ. (σ) τὸ ἄρα ΑΙ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ παραβίβληται, ἴσον τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ Γ, καὶ ἐλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΟΝ, ὁμοίᾳ τῷ δοθέντι Δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβι-

- (ν) Κατὰ τὴν συνίπ. τῆς μετὰ τὴν με. τῷ α. (ξ) Κατὰ τὴν κε. τῷ ε. (α) Ἐκ τῆς καταστ. (π) Κατὰ τὴν μυ. τῷ κ. (ρ) Κατὰ τὴν λς. τῷ α. (σ) Κατὰ τὴν κα. τῷ ε.

παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ, καὶ συναμφοτέροις μὲν τοῖς
 ΒΖ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ
 αὐτὸ συνεσάτω, τὸ ΚΜ, κοινὴν ἔχον τῷ ΒΖ τὴν πρὸς
 τὸ Ζ γωνίαν, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΒ ἐπὶ τὰ Η,
 Θ σημεῖα. καὶ συμπληρώσω τὸ ΑΘ παραλληλόγραμ-
 μον. λέγω, ὅτι τὸ ΑΝ ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὰ ΕΛ, ΚΜ περὶ τὴν αὐτὴν εἰσὶ διάμετρον
 τὴν ΖΝ, τὸ ἄρα $ΚΒ = ΒΜ$. (τ) ἀλλὰ τὸ $ΚΒ =$
 $ΚΑ$. (υ) τὸ ἄρα $ΚΑ = ΒΜ$. κοινὸν προσκείσω τὸ ΚΒ.
 τὸ ἄρα $ΑΘ = ΚΒ + ΒΜ$. κοινὸν προσκείσω τὸ ΘΗ.
 τὸ ἄρα $ΑΝ = ΡΣΤ$ γινώσκον. ἐπεὶ δὲ τὸ $ΚΜ = ΒΖ +$
 $Γ$, (Φ) κοινὸν ἄρα ἀφαιρέσαντες τῷ ΒΖ, ἔσται ὁ $ΡΣΤ = Γ$.
 ἄρα καὶ τὸ $ΑΝ = Γ$. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΘΗ ὅμοιον ἐστὶ
 τῷ ΚΜ, τὸ δὲ ΚΜ τῷ Δ, (Χ) καὶ τὸ ΘΗ ἄρα ὅμοιον
 τῷ Δ. παρὰ τὴν δοθῆσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ
 δεθέντι εὐθυγεάμῳ, τῷ Γ, ἴσον παραλληλόγραμμον
 παραβίβληται τὸ ΑΝ, ὑπερβάλλον ἴδιον παραλληλο-
 γεάμῳ, τῷ ΘΗ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι Δ.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον
καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἐξω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη, ἡ ΑΒ. χ. 39.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης
ΑΒ καὶ τῆς ἑτέρας τῶν τμημάτων ΒΕ περιεχόμενον ὀρ-
θογώνιον ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τμήματος ΑΕ τε-
τραγώνῳ. (ψ) λέγω, ὅτι γέγονε τὸ ἐπιταχθέν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὸ ΑΒ. ΒΕ = ΑΕ. ΑΕ, (ω) ὡς ἄρα ΑΒ : ΑΕ ::
ΑΕ : ΒΕ. (α) ἡ δοθεῖσα ἄρα ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λό-
γον τέτμηται. (β)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ΄.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς
τιῷ ὀρθῷ γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς εἶδος
ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τιῷ ὀρθῷ γωνίαν πε-
ριεχουσῶν πλευρῶν εἶδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ
ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἐξω τριγώνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχεν τὴν
ΒΑΓ γωνίαν. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ
τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως
ἀναγραφομένοις, τετέστιν ὅτι $P = Z + X$. χ. 40.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΓ.

ΔΕΙ.

(ψ) Κατὰ τὴν ια. τῆ β. (ω) Ἐκ τῆς κατασκευ. (α) Κατὰ τὴν
στ. τῆ ε. (β) Κατὰ τὴν γ. ὁρίσιν. τῆ ε.

ΔΕΙΞΙΣ,

Ὡς $ΓΒ: ΕΑ:: ΕΑ: ΒΔ$. (γ) ἡ ἄρα $ΓΒ$ πρὸς τὴν $ΒΔ$ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $ΓΒ$ πρὸς τὴν $ΒΑ$. (δ) ἀλλὰ καὶ τὸ P πρὸς τὸ $Ξ$ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $ΓΒ$ πρὸς τὴν $ΒΑ$. (ε) ὡς ἄρα $P: Ξ:: ΓΒ: ΒΔ$. (ζ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς $P: Χ:: ΓΒ: ΓΔ$. ἄρα καὶ ὡς $P: Ξ+Χ:: ΓΒ: ΒΔ+ΓΔ$. (η) ἀλλὰ ἡ $ΓΒ=ΒΔ+ΓΔ$. ἄρα καὶ τὸ $P=Ξ+Χ$. ἔπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΔΒ'.

Εἰάν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Ἐσώ δύο τρίγωνα, τὰ $ΑΒΓ$, $ΔΓΕ$, τὰς δύο πλευρὰς τὰς $ΒΑ$, $ΑΓ$, ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ταῖς $ΔΓ$, $ΔΕ$, ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς $ΑΒ: ΑΓ:: ΔΓ: ΔΕ$. καὶ συντεθέντα κατὰ μίαν γωνίαν, τὴν πρὸς τῷ $Γ$, ἔχεντασαν τὴν μὲν $ΑΒ$ παραλλήλον τῇ $ΔΓ$, τὴν δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΔΕ$. λέγω, ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐσὶν ἡ $ΒΓ$ τῇ $ΓΕ$. χ. 41.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία $Λ=X$. (θ) ἀλλὰ καὶ ἡ $Δ=X$. (ι) ἄρα ἡ $Λ=Δ$. ἔπερ δὲ καὶ ὡς $ΒΑ: ΑΓ:: ΔΓ: ΔΕ$. (κ)
ισο-

- (γ) Κατὰ τὴν α συνέπ. τὴν μετὰ τὴν η. τῷ ε. (δ) Κατὰ τὸ β. πρὸς τὸ μετὰ τὴν η. τῷ ε. (ε) Κατὰ τὴν κ. τῷ ε. (ζ) Κατὰ τὸ ζ. Ἰσώρ τὸ μετὰ τὸ ε. βιβλ. (η) Κατὰ τὴν κγ. τῷ ε. (θ) Κατὰ τὴν κθ. τῷ κ. (ι) Κατὰ τὴν αὐτὴν. (κ) Ἐξ ὑποθ.

ἰσογώνιον ἄρα το $AB\Gamma$ περιγώνον τῷ $\Delta I E$. (λ) ἄρα
 γωνία ἡ $B = \omega$. αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι $\omega + \chi + \nu =$
 $B + A + \nu$. ἀλλὰ αἱ $B + A + \nu$ δυσὶν ὀρθαῖς ἐ-
 ἴσαι. (μ) ἄρα ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς καὶ αἱ $\omega + \chi + \nu$.
 ἄρα $B\Gamma$ ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ $I E$. (ν) ο. ε. δ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Λ Γ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν
 λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν β-
 βήκασιν, εἴαν τε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴαν
 πρὸς ταῖς περιφερείαις ὡς βεβηκυῖαι. ἔ-
 δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις σ-
 νισάμενοι.

Ἐξωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ $AB\Gamma$, $\Delta E Z$, καὶ πρὸς μὲν τοῖς
 κέντροις αὐτῶν K , Λ γωνίαι ἔξωσαν αἱ $AK\Gamma$, $\Delta\Lambda Z$
 πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ $AB\Gamma$, $\Delta E Z$. λέγω, ὅτι
 ὅτι ὡς ἡ $A\Gamma$ περιφέρεια, πρὸς τὴν ΔZ περιφέρεια
 ἔστω ἡ $AK\Gamma$ γωνία, πρὸς τὴν $\Delta\Lambda Z$ γωνίαν, καὶ
 $AB\Gamma$ πρὸς τὴν $\Delta E Z$. Β'. ὅτι ὁ $AK\Gamma$ τομεὺς, πρὸς τὴν
 $\Delta\Lambda Z$ τομέα, ἔστω ἡ $A\Gamma$ περιφέρεια, πρὸς τὴν $\Delta E Z$
 περιφέρειαν. χ. 42.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διηγήσω ἡ $A\Gamma$ εἰς ὅποσαδήποτε ἴσα μέρη, τὰ $A\Theta$,
 $H\Theta$, ΘI , $I\Gamma$, ὁμοίως καὶ ἡ ΔZ , εἰς τὰ ΔM , $M\Theta$,
 (ξ) καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KH , $K\Theta$, KI , ΛM .

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἐπεὶ αἱ γωνίαι AKH , $HK\Theta$, ΘKI , $IK\Gamma$ ἴσαι ἀλλή-
 λαις εἰσὶν, (ο) τοσαύτας ἄρα ἴσας γωνίας περιέχει
 ἡ $AK\Gamma$ γωνία πρὸς τὴν $\Delta\Lambda Z$ γωνίαν.

(λ) Κατὰ τὴν δ. τῆς σ. (μ) Κατὰ τὴν λβ. τῆς κ. (ν) Κατὰ τὴν ιδ. τῆς κ. (ξ) Κατὰ τὴν λ. τῆς γ. (ο) Κατὰ τὴν κζ. τῆς γ.

ΑΚΓ γωνία, ὅσα ἴσα μέρη τῆς ὅλης περιφερείας περιέχει τὸ ΑΓ τόξον. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοσαύτας ἴσας γωνίας περιέχει ἡ ΔΔΖ γωνία, ὅσα ἴσα μέρη τῆς ὅλης περιφερείας τὸ ΔΖ τόξον. ὡς ἄρα ΑΓ : ΑΚΓ :: ΔΖ : ΔΔΖ. ἄρα καὶ ἐναλλάξ ὡς ΑΓ : ΔΖ :: ΑΚΓ : ΔΔΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΚΓ διπλασία ἐστὶ τῆς ΑΒΓ, ἡ δὲ ΔΔΖ τῆς ΔΕΖ, (π) ἔστιν ἄρα ὡς ΑΚΓ : ΑΒΓ :: ΔΔΖ : ΔΕΖ. (ρ) ἄρα καὶ ἐναλλάξ ὡς ΑΚΓ : ΔΔΖ :: ΑΒΓ : ΔΕΖ. ἄρα καὶ ὡς ΑΓ : ΔΖ :: ΑΒΓ : ΔΕΖ. (σ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Οἱ τομεῖς ΑΚΗ, ΗΚΘ, ΘΚΙ, ΙΚΓ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσιν, ὡς δῆλον. τοσάυτες ἄρα ἴσες τομεῖς περιέχει ὁ ΑΚΓ τομεὺς, ὅσα ἴσα μέρη τῆς ὅλης περιφερείας τὸ ΑΓ τόξον. ὡσαύτως τοσάυτες ἴσες τομεῖς περιέχει ὁ ΔΔΖ τομεὺς, ὅσα ἴσα μέρη τῆς ὅλης περιφερείας τὸ ΔΖ τόξον. ὡς ἄρα τομεῖς ΑΚΓ, πρὸς ΑΓ τόξον, ἔτω ΔΔΖ τομεῖς, πρὸς ΔΖ τόξον. καὶ ἐναλλάξ ὡς ΑΚΓ : ΔΔΖ :: ΑΓ : ΔΖ.

ΒΙΒΛΙΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α΄. Στερεόν ἐστὶ, τὸ μῆκος, καὶ πλάτος, καὶ βάθος ἔχον.

Β΄. Στερεῶς πέρας, ἐπιφάνεια.

Γ΄. ἑυθεῖα, ἡ ΑΒ πρὸς ἐπίπεδον τὸ ΖΔ ἄρθῃ ἐστίν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῇ ἑυθείας,
τὰς

(π) Κατὰ τὴν α. τῷ γ. (ρ) Κατὰ τὴν η. τῷ ε. (σ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε.

τας $Z\Delta$, ΓE , καὶ ἕσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τῷ $Z\Delta$, ὁρθὰς ποιῇ γωνίας, ὡς τὰς $AB\Gamma$, ABE , $AB\Delta$, ABZ . πίν. K. §. 1.

Δ'. Ἐπίπεδον, τὸ EH , πρὸς ἐπίπεδον, τὸ AG , ὁρθόν-
ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τῶν ἐπιπέδων τομῇ, τῇ EZ ,
πρὸς ὁρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι, αἱ OK , $ΠΞ$, ἐνὶ τῶν
ἐπιπέδων, τῷ EH , τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ, τῷ AG πρὸς
ὁρθὰς ᾖσιν. §. 2.

Ε'. Εὐθείας, τῆς AB , πρὸς ἐπίπεδον, τὸ ΔE , κλίσις ἐστίν,
ὅταν ἀπὸ τῆ μετεώρου πέρατος, τῆ A , τῆς εὐθεί-
ας AB ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΔE κάθετος ἀχθῇ, ἡ AG ,
καὶ ἀπὸ τῆ γινομένης σημεῖς Γ , καὶ ἀπὸ τῆ ἐν τῷ
ἐπιπέδῳ πέρατος B τῆς εὐθείας, εὐθεῖα ἐπιζευχ-
θῇ ἡ $B\Gamma$, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ὀξεία
γωνία, ἡ $AB\Gamma$. §. 3.

Σ'. Ἐπιπέδες, τῆ BK , πρὸς ἐπίπεδον, τὸ AG κλίσις
ἐστίν ἡ ὀξεία γωνία ΘZE , ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν
 ΘZ , EZ τῶν πρὸς ὁρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ $B\Delta$ ἀγο-
μένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημεῖω Z ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπι-
πέδων. §. 4.

Ζ'. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίθαι λέγεται,
καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλί-
σεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσι.

Η'. Παράλληλα ἐπίπεδα ἐστὶ τὰ ἀσύμπτωτα.

Θ'. Ὅμοια στερεὰ χήματα ἐστὶ τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέ-
δων περιεχόμενα, ἴσων τὸ πλήθος.

Ι'. Ἰσα δὲ καὶ ὁμοια στερεὰ χήματα ἐστὶ, τὰ ὑπὸ ὁμοίων
ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

ΙΑ'. Στερεὰ γωνία ἐστίν ἡ B , ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἡ δὺν
ἐπιπέδων γωνιῶν, ὡς τῶν $AB\Gamma$, $\Gamma B\Delta$, $\Delta B A$, περι-
εχομένη, μὴ ἔσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἐνὶ
σημεῖῳ συνισαμένων, τῷ B . §. 5.

ΙΒ'.

ΙΔ. Παράλληλες ἐπιπέδων εἰσι σχήματα ἑξῆς ὑπο αὐτῶν τετραπλεύρων περιεχόμενον, ὧν τὰ ἀπ' ἐναντίον παρὰλληλα. κ. 8.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέντι ἐκ ἔσιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ.

Εἰ δυνατόν εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒ μέρος μέντι τὸ ΑΒ ἔσω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΖ, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐν μετεώρῳ. κ. 9.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῆς ἄρα ΑΒΓ εὐθείας τὰ ἄκρα ἐκ ἐπιπροσθε τοῖς μέσοις, εἰ δὲ δὴ αὐτὴ ἡ ΑΒΓ εὐθεῖα ἐξ ἴσθ τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις καίται, εἰ δὲ ἡ ἐλαχίστη ἐστὶ τῶν τὰ αὐτὰ ἔχουσιν πέρατα Α, καὶ Γ. ἐκ ἄρα εὐθεῖα ἡ ΑΒΓ. (α) ἐκ ἄρα εὐθείας γραμμῆς μέρος μέντι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Εἰάν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ. καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἔσιν ἐπιπέδῳ.

N

Δύο

(α) Κατὰ τὸν γ. ὅρισμ. τῆ α.

Δύω εὐθεΐαι, αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον. λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνὶ εἰς ἐπιπέδῳ. χ . 10.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒ, ΓΔ τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε, εἰ ἐν τῷ αὐτῷ ἐκ εἰσιν ἐπιπέδῳ, μέρος μὲν τι αὐτῶν ἔσται ἐν τῷ ὑποκειμένῳ, μέρος δὲ τι ἐν ἄλλῳ, ὅπερ ἀδύνατον. (β) αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἐξ ὧν ὁρᾷται, ὅτι καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνὶ εἰς ἐπιπέδῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνηται ἀλλήλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεΐα ἐστίν.

Δύο ἐπίπεδα τὰ ΑΓ, ΗΘ τεμνέτωσαν ἀλλήλα· κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΒ γραμμὴ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ γραμμὴ, εὐθεΐα ἐστίν. εἰ γὰρ μὴ, ἐπεξεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐν μὲν τῷ ΑΓ ἐπιπέδῳ, εὐθεΐα ἡ ΔΕΒ, ἐν δὲ τῷ ΗΘ, ἡ ΔΖΒ. χ . 11.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ ΔΕΒ, ΔΖΒ ἄρα εὐθεΐαι χωρίον περιέχουσιν. ὅπερ ἀτοπον. ἐκ ἄρα αἱ ΔΕΒ, ΔΖΒ εὐθεΐαί εἰσιν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι ἐδὲ ἄλλη τις ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγυμένη εὐθεΐα ἔσται, πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς. ἡ ΔΒ ἄρα γραμμὴ, εὐθεΐα ἐστίν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄.

Ἐὰν εὐθεΐα δυσὶν εὐθείαις τεμνέσται ἀλλήλας πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισαθῇ, καὶ τῷ δι’ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθὰς ἔσται. Εὐθεΐα

(β) Κατὰ τὴν α. πρότ. τῷ ια.

μνησθῆναι ἀλλήλους κατὰ το Ε σημειον προς ορθῶς
 φερότω. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ καὶ τῶ δια τῶν ΑΒ, ΓΔ
 πιπέδῳ προς ὀρθῶς ἐστ. χ. 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἀπειλήφθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλή-
 λαις. καὶ διήχθω διὰ τῆ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΗΕΘ. καὶ
 ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΒ. καὶ ἀπὸ τυχόντος τῆς ΖΕ
 σημείω τῆ Ζ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ,
 ΖΘ, ΖΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΕΑΔ, ΕΓΒ, ἡ μὲν ΕΔ = ΕΓ,
 ἡ δὲ ΕΑ = ΕΒ, (γ) καὶ γωνία ἡ ΑΕΔ = ΓΕΒ. (δ)
 ἄρα καὶ ἡ ΑΔ = ΓΒ, καὶ γωνία ἡ μὲν ΔΑΕ = ΓΒΕ,
 ἡ δὲ ΑΔΕ = ΒΓΕ. (ε) Ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΑΕΗ,
 ΒΕΘ, ἡ μὲν γωνία ΗΑΕ = ΕΒΘ, ὡς δέδεικται, ἡ δὲ
 ΑΕΗ = ΒΕΘ, (ς) ἡ δὲ ΑΕ = ΕΒ. (η) ἄρα καὶ ἡ ΑΗ =
 ΒΘ, καὶ ἡ ΕΗ = ΕΘ. (θ) ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς τριγώνοις
 ΖΓΕ, ΖΔΕ, ἡ μὲν ΕΓ = ΕΔ, ἡ δὲ ΕΖ κοινή, καὶ
 γωνία ἡ ΖΕΓ = ΖΕΔ, (ι) ἄρα καὶ ἡ ΖΓ = ΖΔ. (κ)
 διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΑ = ΖΒ. ἔκ᾽ ἐν τοῖς τρι-
 γώνοις ΖΓΒ, ΖΑΔ, ἡ μὲν ΖΓ = ΖΔ, ἡ δὲ ΖΒ = ΖΑ,
 ἡ δὲ ΓΒ = ΑΔ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΖΒΓ = ΖΑΔ. ἐν
 τοῖς τριγώνοις ἄρα ΖΑΗ, ΖΒΘ, ἡ μὲν ΑΗ = ΒΘ, ἡ
 δὲ ΑΖ = ΖΒ, καὶ γωνία ἡ ΖΑΗ = ΖΒΘ. ἄρα καὶ
 ἡ ΖΗ = ΖΘ. ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΖΗΕ, ΖΘΕ, ἡ μὲν
 ΖΗ = ΖΘ, ἡ δὲ ΗΕ = ΘΕ, ἡ δὲ ΕΖ κοινή. καὶ γω-
 νία ἄρα ἡ ΖΕΗ = ΖΕΘ. (λ) ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρω τῶν

N 2

ZFH,

(γ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (δ) Κατὰ τὴν ιε. τῶ α. (ε) Κατὰ τὴν
 δ τῶ α. (ς) Κατὰ τὴν ιε. τῶ α. (η) Ἐκ τῆς κατασκευ. (θ) Κα-
 τὰ τὴν κς. τῶ α. (ι) Ἐξ ὑποθ. (κ) Κατὰ τὴν δ. τῶ α.
 (λ) Κατὰ τὴν η τῶ α.

ΖΕΗ, ΖΕΘ. ἡ ἄρα ΖΕ κάθετός ἐστι τῇ ΗΘ. ὁμοίως δὴ δέξομεν, ὅτι ἡ ΖΕ πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῇ εὐθείας, καὶ ἕσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἡ ἄρα ΖΕ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. (μ) ἀλλὰ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ εὐθεῶν. ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἀπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισαθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ τρισὶν εὐθείαις, ταῖς ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Β ἀφῆς ἐφεσάτω. λέγω, ὅτι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ τῷ ΘΚ. χ . 13.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἕξωσαν αἱ μὲν ΒΔ, ΒΕ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ τῷ ΘΚ, ἡ δὲ ΒΓ ἐν μετεώρῳ τῷ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ κάθετός ἐστι ταῖς ΒΔ, ΒΕ, (ν) κάθετός ἐστι καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ, (ξ) εἶπεν τῷ ΘΚ. κάθετος ἄρα ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΒΖ. (ο) ἡ ἄρα γωνία ΑΒΖ ὀρθή ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒΓ ὀρθή. (π) ἡ ἄρα ΑΒΖ = ΑΒΓ. τὸ ὅλον τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα ἡ ΒΓ ἐν μετεώρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι, αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ.

ΠΡΟ.

(μ) Κατὰ τὸν γ. ὅρισμ. τῆ ια. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Κατὰ τὴν δ. τῆ ια. (ο) Κατὰ τὸν γ. ὅρισμ. τῆ ια. (π) Ἐξ ὑποθ.

Εάν δύο ευθείαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

Δύο εὐθεῖαι, αἱ AB , $ΓΔ$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τῷ EZ , πρὸς ὁρθὰς ἔωσαν. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $ΓΔ$. χ . 14.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τοῦ σημείου B , καθ' ὃ ἡ AB τῷ ἐπιπέδῳ EZ συμβάλλει, ἐπὶ τὸ Δ , καθ' ὃ συμβάλλει ἡ $ΓΔ$, ἐπεζευχθῶ ἡ $ΒΔ$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ γωνίαι $ΑΒΔ$, $ΓΔΒ$ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὁρθαῖς. (ρ)
ἡ ἄρα AB παράλληλός ἐστι τῇ $ΓΔ$. (σ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Εἰάν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Ἐωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, αἱ AB , $ΓΔ$. καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ E , Z . λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ E , Z σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. πίν. KA . χ . 15.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔσω ἐν τῷ μετεώρῳ, ὡς ἡ $ΕΗΖ$.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω ἐν τῷ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδῳ ἡ EZ .

N 3

ΔΕΙ-

(ρ) Ἐξ ὑποθ. (σ) Κατὰ τὴν κη. τῇ α.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δύω ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΗΖ, ΕΖ χωρίον περιέξουσιν. ὅπερ ἄτοπον. ἢ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη ἐκ ἑσιν ἐν μετεώρῳ ἐπιπέδῳ. ἄρα ἐν τῷ τῶν παραλλήλων, ΑΒ, ΓΔ ἑστὶν ἐπιπέδῳ.

Ἰστέον δὲ, ὅτι ἀληθὴς ἡ πρότασις, καὶ μὴ αἱ ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι ᾧσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Ἐὰν ᾧσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὁρθὰς ᾗ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθὰς ἕσται.

Ἐξωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΘΖ πρὸς ὁρθὰς ἕστω. λέγω, ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ, ἡ ΓΔ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΘΖ πρὸς ὁρθὰς ἕσται. χ. 16.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ. καὶ ἦχθω τῇ ΒΔ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΘΖ πρὸς ὁρθὰς ἡ ΔΕ. καὶ κείθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΔ, ΒΔΕ, ἡ μὲν ΑΒ = ΔΕ, (τ) ἡ δὲ ΒΔ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΑΒΔ = ΒΔΕ· ἑκάτερα γὰρ ὁρθή· ἄρα καὶ ἡ ΑΔ = ΒΕ. (υ) ἐκὼν ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΕ, ΑΔΕ, ἡ μὲν ΑΒ = ΔΕ, ἡ δὲ ΒΕ = ΑΔ, ἡ δὲ ΑΕ κοινὴ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΒΕ = ΑΔΕ. (φ) ἀλλ' ἡ ΑΒΕ ὁρθή. (χ) ὁρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΔΕ. ἡ ΕΔ ἄρα κάθετός ἐστι ταῖς ΑΔ, ΔΒ. καὶ τῷ ἐπιπέδῳ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΑΔ, ΔΒ, κάθετός ἐστιν ἡ ΕΔ.

(τ) Ἐκ τῆς κατασκ. (υ) Κατὰ τὴν δ. τῆς α. (φ) Κατὰ τὴν η. τῆς α. (χ) Ἐξ ὑποθ.

ΔΒ. (ω) ἡ ΕΖ ἄρα κάθετος ἐστὶ καὶ τῇ ΓΔ. (α) ἡ γωνία ἄρα ΓΔΕ ὀρθή ἐστίν· ὀρθὴ δὲ καὶ ἡ ΓΔΒ. (ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒΔ, ΓΔΒ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (β) καὶ ἡ ΑΒΔ ὀρθή. (γ) ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΔΒ.) ἡ ἄρα ΓΔ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῶν ΔΒ, ΔΕ. ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι καὶ τᾶ δια τῶν ΔΒ, ΔΕ ἐπιπέδῳ. (δ) ἐστὶ δὲ τὸ δια τῶν ΔΒ, ΔΕ ἐπίπεδον, τὸ ΘΖ. ἡ ἄρα ΓΔ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ἐπιπέδῳ ΘΖ. ο. ε. δ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Θ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ μὴ ἔσται αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλους εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρω τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος τῇ ΕΖ, μὴ ἔσται αὐταῖς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστίν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. ρ. 17.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήθῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχόν σημεῖον τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ΕΖ ἐν μὲν τῷ δια τῶν ΕΖ, ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἤχθῃ ἡ ΗΘ· ἐν δὲ τῷ δια τῶν ΕΖ, ΓΔ ἤχθῃ πρὸς ὀρθάς ἡ ΗΚ. καὶ ἐπεζεύχθῃ ἡ ΘΚ.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Η' ΕΖ κάθετός ἐστι τῷ ἐπιπέδῳ ΘΗΚ. (ε) ἀλλ' ἑκατέρω τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος τῇ ΕΖ. (ζ) ἑκατέρω ἄρα αὐτῶν κάθετος τῷ ΘΗΚ ἐπιπέδῳ. (η) αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι. (θ) ὃ ἔδει δεῖξαι.

N 4

ΠΡΟ-

- (ψ) Κατὰ τὴν δ. τῇ ια. (ω) Κατὰ τὴν β. τῇ ια. (κ) Κατὰ τὴν γ. ὁρισμ. τῇ ια. (β) Κατὰ τὴν κθ. τῇ ια. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὴν δ. τῇ ια. (ε) Κατὰ τὴν δ. τῇ ια. (ζ) Ἐξ ὑποθ. (η) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (θ) Κατὰ τὴν ε. τῇ ια.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

Εάν δύο ευθείαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων, δυσὶν ευθείαις ἀπτομέναις ἀλλήλων παράλληλοι ᾧσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξωσι.

Δύο ευθείαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων, αἱ AB, BG, δυσὶν ευθείαις ταῖς DE, EZ ἀπτομέναις ἀλλήλων, παράλληλοι ἔωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ABΓ γωνία τῇ ΔΕΖ. χ. 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπειλήφθω ἡ μὲν BG = EZ, ἡ δὲ BA = ED. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AD, BE, ΓΖ, ΑΓ, ΔΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ BG ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ EZ. (ι) ἄρα καὶ ἡ ΓΖ ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ BE. (κ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τῇ BE ἴση τε καὶ παράλληλος ἡ AD. καὶ αἱ ΓΖ, AD ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοι. (λ) καὶ ἡ ΑΓ ἄρα ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ ΔΖ. (μ) ἐκὼν ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἡ μὲν BG = EZ, ἡ δὲ BA = ED, ἡ δὲ ΑΓ = ΔΖ. ἄρα καὶ γωνία ἡ ABΓ = ΔΕΖ, (ν) ο. ε. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄.

Ἀπο τῷ δοθέντος σημείου μετεώρεθ' ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον ευθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω

(ι) Ἐκ τῆς κατασκευ. καὶ ἐξ ὑποθ. (κ) Κατὰ τὴν λγ. τῆ α. (λ) Κατὰ τὸ α. αἵ. τῆ α. καὶ τὴν προλ. πρότ. (μ) Κατὰ τὴν λγ. τῆ α. (ν) Κατὰ τὴν η. τῆ α.

Ἐξω το μὲν δοθέν σημεῖον μετεώρον τὸ Α, τὸ δε
δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ ΕΜ. χ. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω ἐν τῷ ὑποκείμενῳ ἐπιπέδῳ ΕΜ εὐθεῖα, ὡς
ἔτυχεν, ἡ ΒΓ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τῆς Α σημεῖος ἐπὶ τὴν
ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. (ξ) εἰ μὲν ἔν ἡ ΑΔ κάθετός ἐστι
καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονός ἂν εἴη τὸ
ἐπιταχθέν· εἰ δ' ἔ, ἤχθω τῇ ΒΔ κάθετος ἡ ΔΖ. καὶ
ἀπὸ τῆς Α ἐπὶ τὴν ΔΖ ἤχθω κάθετος ἡ ΑΗ. (ο)
λέγω, ὅτι ἡ ΑΗ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον
ἐπίπεδον ΕΜ. ἤχθω γάρ τῇ ΒΔ παράλληλος ἡ ΗΘ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΒΔ κάθετός ἐστι ταῖς ΑΔ, ΔΖ. (π) ἄρα κά-
θετός ἐστι καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ. (ρ) καὶ ἡ ΘΗ
ἄρα παράλληλος ἔσται τῇ ΒΔ, (σ) κάθετός ἐστι τῷ
διὰ τῶν ΑΔ, ΔΖ, ἐπιπέδῳ. (τ) κάθετος ἄρα ἡ ΘΗ
καὶ τῇ ΑΗ τῇ ἔσῃ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΑΔ,
ΔΖ. (υ) ἡ ἄρα ΑΗ πρὸς ὀρθὰς ἐστι τῇ ΗΘ, ἐστὶ δὲ
πρὸς ὀρθὰς καὶ τῇ ΗΖ, (φ) πρὸς ὀρθὰς ἄρα ἐστὶ καὶ
τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΖ. (χ) ἀλλὰ τὸ διὰ
τῶν ΗΘ, ΗΖ ἐπίπεδον, ἐστὶ τὸ ὑποκείμενον ΕΜ. ἡ
ἄρα ΑΗ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ΕΜ ἐπι-
πέδον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τῆς πρὸς αὐτῷ
δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμ-
μὴν ἀναστῆσαι.

N 5

Ἐξω

- (ξ) Κατὰ τὴν ιβ. τῆς α. (ο) Κατὰ τὴν αὐτήν. (π) Ἐκ τῆς
κατασκ. (ρ) Κατὰ τὴν δ. τῆς ια. (σ) Ἐκ τῆς κατασκ.
(τ) Κατὰ τὴν η. τῆς ια. (υ) Κατὰ τὸν γ. ὁρισμ. τῆς ια.
(φ) Ἐκ τῆς κατασκ. (χ) Κατὰ τὴν θ. τῆς ια.

Νεννηθῶ τι σημείον μετεώρον, τὸ B. καὶ ἀπὸ τῆς B.
ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κἀθετός ἤχθῳ ἡ BG. καὶ
διὰ τῆς A σημείε ἤχθῳ ἡ ΑΔ παρὰλληλος τῇ BG.
λέγω, ὅτι ἡ ΑΔ κἀθετός ἐστὶ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ EM.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ BG κἀθετός ἐστὶ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ EM.
(ψ) ἀλλὰ τῇ BG παρὰλληλος ἡ ΑΔ. (ω) καὶ ἡ ΑΔ
ἀρα κἀθετός ἐστὶ τῷ ὑποκειμένῳ EM ἐπιπέδῳ. (α)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Ἀπὸ τῆς αὐτῆς σημείε τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ
δύω εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἐκ ἀναστήσονται
ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν ἀπὸ τῆς αὐτῆς σημείε Δ τῷ αὐτῷ
ἐπιπέδῳ EZ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΘ, ΔΗ πρὸς ὀρθὰς ἀνε-
στήθωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Θ, Η. χ. 21.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθῳ τὸ διὰ τῶν ΔΘ, ΔΗ ἐπίπεδον, τὸ ΘΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΘΔΚ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἡ ΗΔΚ ὀρθή.
ἡ ἀρα ΘΔΚ = ΗΔΚ. τὸ ὅλον τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύ-
νατον. ἐκ ἀρα ἀπὸ τῆς αὐτῆς σημείε τῷ αὐτῷ ἐπιπέ-
δῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐ-
τὰ μέρη.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Οὔτε μὲν ἀπὸ τῆς αὐτῆς σημείε μετεώρε, τῆς B,
δύω εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀχθήσονται.
ἤχθῳ.

(ψ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ω) Ἐκ τῆς κατασκευ. (α) Κατὰ τὴν 11.
τῆς 1α.

ἡχθῶσαν γὰρ εἰ δυνατόν αἱ ΒΑ, ΒΓ. (χ. το αὐτ.)
 καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΓ. ἔκθ' αἱ τῷ ΒΑΓ τριγώνῳ γωνίαι
 μείζονες δύο ὀρθῶν. ὅπερ ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστὶ,
 παράλληλά ἐστὶ τὰ ἐπίπεδα.

Ἐυθεῖά τις ἡ ΑΒ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΓΔ, ΕΖ ἐπι-
 πέδων πρὸς ὁρθάς ἔστω. λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστὶ τὰ
 ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα. χ. 22.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῷ τυχόντος σημείῳ Θ τῇ ΑΒ παράλ-
 ληλος ἡ ΘΗ. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΒΗ, ΑΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΘΗ παράλληλος τῇ ΑΒ· (β) ἔστι δὲ ἡ ΑΒ
 πρὸς ὁρθάς τῷ ἐπιπέδῳ ΓΔ· (γ) καὶ ἡ ΘΗ ἄρα πρὸς
 ὁρθάς ἐστὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΓΔ. (δ) ὁρθὴ ἄρα ἡ Θ
 γωνία. ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΑΘΗ, ΑΒΗ, ἡ μὲν γωνία
 $\Theta = Β$, ἡ δὲ $\text{ΑΗ}\Theta = \text{ΗΑΒ}$, (ε) ἡ δὲ ΑΗ κοινή. ἄρα
 καὶ ἡ $\Theta Η = ΑΒ$. (ζ) ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι πᾶσαι
 αἱ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων παράλληλοι τῇ ΑΒ, πρὸς τε
 ὁρθάς εἰσι τοῖς ἐπιπέδοις, καὶ ἀλλήλαις ἴσαι. τὰ ἄρα
 ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα ἀσύμπτωτά εἰσιν. ἄρα παράλληλα. (η)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Εἰάν δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων περὶ
 δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων παράλ-
 λη-

-
- (β) Ἐκ τῆς κατασκευ. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὴν η. τῷ ια.
 (ε) Κατὰ τὴν κθ. τῷ α. (ζ) Κατὰ τὴν κς. τῷ α. (η) Κα-
 τὰ τὸν η. ὀρίσμ. τῷ ια.

ληλοι ὥσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσαι, παράλληλά ἐσι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύω εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων, αἱ AB, BG, περὶ δύω εὐθείας ἀπτόμεναις ἀλλήλων ταῖς ΔΕ, ΕΖ, ἔσωσαν παράλληλοι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσαι. λέγω, ὅτι τὰ διὰ τῶν AB, BG, καὶ ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδα παράλληλά ἐσι. *χ.* 23.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διὰ μὲν τῶν AB, BG, ἤχθω τὸ ἐπίπεδον ΑΓ, διὰ δὲ τῶν ΔΕ, ΕΖ, ἤχθω τὸ ΔΖ. καὶ ἀπὸ τῆ Β ἤχθω ἡ BH κάθετος τῷ ΔΖ. καὶ διὰ τῆ Η ἤχθω ἡ μὲν ΗΚ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΕΔ παράλληλος ἐν τῷ ΔΖ ἐπιπέδῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ ΗΚ, ΗΘ παράλληλοί ἐσι ταῖς ΕΖ, ΕΔ. (θ) ἀλλὰ ταῖς ΕΖ, ΕΔ παράλληλοι αἱ BG, BA. (ι) αἱ ἄρα ΗΚ, ΗΘ παράλληλοι ταῖς BG, BA. (κ) ἄρα ἡ μὲν γωνία BHK = HEG, ἡ δὲ BHO = HBA. (λ) ἀλλ' ἑκατέρα τῶν BHK, BHO ὀρθή. (μ) καὶ τῶν HBG, HBA ἄρα ἑκατέρα ὀρθή. ἄρα ἡ HB κάθετος ἐστὶ ταῖς BG, BA. καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπιπέδῳ τῷ ΑΓ κάθετος ἡ HB. (ν) τὰ ἄρα ΑΓ, ΔΖ ἐπίπεδα παράλληλά ἐσι. (*)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδῳ τινὸς τέμνηται, αἱ κοινὰ αὐτῶν τομὰὶ παράλληλοί ἐσι.

Δύω

(θ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ι) Ἐξ ὑποθ. (κ) Κατὰ τὴν θ. τῆ ια. (λ) Κατὰ τὴν χθ. τῆ ια. (μ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ν) Κατὰ τὴν θ. τῆ ια. (*) Κατὰ τὴν προλ.

Δύω ἐπίπεδα παράλληλα, τὰ AB , $\Gamma\Delta$, ὑπὸ ἐπιπέδῳ $EZ\Theta H$ τεμνέσθω. κοινὰ δὲ τομαὶ αὐτῶν ἔωσαν αἱ EZ , $H\Theta$. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ EZ τῇ $H\Theta$. χ . 24.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι συμπεσόνται αἱ EZ , $H\Theta$, ἤτοι ἐπὶ τὰ Z , Θ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ E , H . ἐκβεβλήσθωσαν πρότερον ὡς ἐπὶ τὰ Z , Θ μέρη, καὶ συμπίπτέτωσαν κατὰ τὸ K .

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ EZK ἐν τῷ AB ἐστὶν ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς EZK σημεῖα ἐν τῷ AB ἐπίπεδον εἰσὶν. ἐν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς EZK εὐθείας σημεῖον εἰς τὸ K . τὸ K ἄρα ἐν τῷ AB ἐστὶν ἐπίπεδον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ K ἐν τῷ $\Gamma\Delta$ ἐστὶν ἐπίπεδον. τὰ AB , $\Gamma\Delta$ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσόνται· καὶ συμπίπτει δὲ διὰ τὸ παράλληλα ὑποκείσθαι. ἔκ ἄρα αἱ EZ , $H\Theta$ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσόνται ἐπὶ τὰ Z , Θ μέρη. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ E , H μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσόνται. ἄρα παράλληλοί εἰσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τὰς αὐτὰς λόγους τμηθῇσονται.

Δύο εὐθεῖαι, αἱ AB , ΓB ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τῶν $H\Theta$, $K\Lambda$, MN τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ A , Z , Δ , Γ , E , B σημεῖα. λέγω, ὅτι εἰσὶν ὡς $AZ: Z\Delta:: \Gamma E: EB$. χ . 25.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ AB , ΔB , $\Gamma\Delta$. καὶ συμβαλέτω ἡ $\Gamma\Delta$ τῷ $K\Lambda$ ἐπίπεδον κατὰ τὸ Ξ σημεῖον. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $E\Xi$, ΞZ .

ΔΕΙ-

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΗΘ, ΚΛ, ὑπὸ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΑΞ τέμνονται, ἡ ΖΞ παράλληλός ἐστι τῇ ΑΓ. (ξ) ὡς ἄρα ΔΖ : ΖΑ :: ΔΞ : ΞΓ. (ο) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ΒΕ : ΕΓ :: ΔΞ : ΞΓ. ὡς ἄρα ΔΖ : ΖΑ :: ΒΕ : ΕΓ. (π) ἄρα καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΖΑ : ΔΖ :: ΕΓ : ΒΕ. (ρ) ο. ε. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δ' αὐτῆς ἐπίπεδα, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Ἐυθεῖά τις, ἡ ΑΒ τῷ ἐπιπέδῳ ΚΛ πρὸς ὀρθὰς ἔστω. λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. ρ. 26.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἦχθω διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον τὸ ΔΕ. καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῶν ΔΕ, ΚΛ ἐπιπέδων ἡ ΓΕ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔΕ ἐπιπέδῳ ἡ ΖΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκατέρω τῶν ΑΒΖ, ΗΖΒ γωνιῶν ὀρθὴ ἐστίν. (σ) παράλληλοι ἄρα αἱ ΑΒ, ΗΖ. (τ) ἀλλ' ἡ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ. (υ) καὶ ἡ ΗΖ ἄρα κάθετός ἐστι τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ. (φ) ἐπίπεδον δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστίν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ

(ξ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (ο) Κατὰ τὴν β. τῆ σ. (π) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (ρ) Κατὰ τὴν συνέπ. τῆς ζ. τῆ ε. (σ) Ἐξ ὑποθ. καὶ ἐκ τῆς κατασκ. (τ) Κατὰ τὴν κη. τῆ α. (υ) Ἐξ ὑποθ. (φ) Κατὰ τὴν η. τῆ ικ.

πλέον το διά τῆς AB πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῶ ὑποκειμένῳ
 $ΚΔ$ ἐπιπέδῳ. ὁμοίως δὴ δεῖχθήσεται ἢ πάντα τὰ διὰ
 τῆς AB ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμε-
 νον ἐπίπεδον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπι-
 πέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν
 τομὴ τῶ αὐτῶ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Δύο ἐπίπεδα τὰ AB , $ΓΔ$ τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ
 EZ πρὸς ὀρθὰς ἔστω. κοινὴ δ' αὐτῶν τομὴ—ἔστω ἡ $ΗΘ$.
 λέγω, ὅτι ἡ $ΗΘ$ τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ EZ πρὸς ὀ-
 ρθὰς ἔστι. μὴ γάρ. πλὴν. KB . $κ$. 27.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῆς $Η$ σημείω ἐν μὲν τῶ AB ἐπιπέδῳ τῇ $ΑΔ$
 εὐθείᾳ ἤχθῳ πρὸ ὀρθὰς ἡ $ΗΜ$. ἐν δὲ τῶ $ΓΔ$ ἐπιπέ-
 δῳ τῇ $ΚΔ$ εὐθείᾳ ἤχθῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΗΚ$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὰ AB , $ΓΔ$ ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς εἰσι τῶ ἐπι-
 πέδῳ EZ , ($κ$) καὶ αἱ $ΗΜ$, $ΗΚ$ ἄρα πρὸς ὀρθὰς εἰσι
 τῶ αὐτῶ EZ ἐπιπέδῳ. ($ψ$) ἀπὸ μετεώρου ἄρα σημείω τῆς
 $Η$ δύο κάθεται τῶ ὑποκειμένῳ ἤχθησαν ἐπιπέδῳ. ὅπερ
 ἄτοπον. ($ω$) ἐκ ἄρα τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ EZ ἀπὸ
 τῆς $Η$ σημείω πρὸς ὀρθὰς ἀχθήσεται ἄλλη τις, πλὴν
 τῆς $ΗΘ$ κοινῆς τομῆς τῶν AB , $ΓΔ$ ἐπιπέδων. ἡ ἄρα
 $ΗΘ$ κάθετός ἐστι τῶ EZ ἐπιπέδῳ.

ΠΡΟ-

($κ$) Ἐξ ὑποθ. ($ψ$) Κατὰ τὸν δ. ὅρισμ. τῆς $ια$. ($ω$) Κατὰ τὴν
 συνέπ. τῆς $ιγ$. τῆς $ια$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

Ἐὰν τερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται, δύο ὅποιαι ἐν τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι, πάντα μεταλαμβάνονται.

Στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τὸ Α ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, τῶν ΒΑΓ, ΒΑΔ, ΔΑΓ περιέχεται. λέγω, ὅτι δύο ὅποιαι ἐν αὐτῶν μείζονες εἰσι τῆς λοιπῆς, πάντα μεταλαμβάνονται. κ. 28.

Εἰ μὲν αἱ ΒΑΓ, ΒΑΔ, ΔΑΓ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσι, Φανερόν ὅτι δύο ὅποιαι ἐν τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι, πάντα μεταλαμβάνονται. εἰ δ' ἔ' ἔσω μείζων ἡ ΒΑΓ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσώτω ἡ ΒΑΕ γωνία ἴση τῇ ΒΑΔ. καὶ εἰλήφθω ἡ ΑΕ = ΑΔ. καὶ διὰ τῆ Ε σημείω διαχθεῖσα ἡ ΒΕΓ, τεμνέτω τὰς ΑΒ, ΑΓ, κατὰ τὰ Β, Γ σημεία. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΑΕ, ΒΑΔ, ἡ μὲν ΑΕ = ΑΔ, (α) ἡ δὲ ΑΒ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΒΑΕ = ΒΑΔ. (β) ἄρα καὶ ἡ ΒΕ = ΒΔ. (γ) ἀλλ' αἱ δύο ΔΒ, ΔΓ μείζονες τῆς λοιπῆς τῆς ΒΓ. (δ) ἡ δὲ ΒΔ δέδεικται ἴση τῇ ΒΕ· ἡ ἄρα ΔΓ μείζων τῆς ΕΓ. ἐν τοῖς τριγώνοις ἔ' ΑΕΓ, ΑΓΔ, ἡ μὲν ΑΕ = ΑΔ, ἡ δὲ ΑΓ κοινὴ, ἡ δὲ ΕΓ ἐλάσσων τῆς ΔΓ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΕΑΓ ἐλάσσων τῆς ΔΑΓ. (ε) ἐστὶ δὲ ἡ ΒΑΔ ἴση τῇ ΒΑΕ. αἱ ἄρα ΒΑΔ, ΔΑΓ μείζονες εἰσι τῆς ΒΑΓ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι.

ἮΠΡΟ.

(α) Ἐκ τῆς κατασκευ. (β) Ἐκ τῆς κατασκευ. (γ) Κατὰ τὴν δ. τῆ α. (δ) Κατὰ τὴν κ. τῆ α. (ε) Κατὰ τὴν καὶ τῆ α.

Ἀπασὰ σερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἐσὼ σερεὰ γωνία ἢ πρὸς τῷ Α, περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν Τ, Υ, Α, Ρ, Σ. λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι Τ, Υ, Α, Ρ, Σ ἐλάσσονές εἰσι τεσσάρων ὀρθῶν. κ. 29.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ μὲν Η, Θ, γωνίαι μείζονες εἰσι τῆς ΕΖΒ, αἱ δὲ Ι, Κ τῆς ΖΒΓ, αἱ δὲ Μ, Λ τῆς ΒΓΔ, αἱ δὲ Ν, Ξ τῆς ΓΔΕ, αἱ δὲ Ο, Π τῆς ΔΕΖ. (ζ) ἀλλ' αἱ ΕΖΒ, ΖΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ, ΔΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἕξ ὀρθαῖς. (η) αἱ ἄρα Η, Θ, Ι, Κ, Μ, Λ, Ν, Ξ, Ο, Π μείζονες ἕξ ὀρθῶν. ἀλλ' αἱ γωνίαι Η, Θ, Ι, Κ, Μ, Λ, Ν, Ξ, Ο, Π μετὰ τῶν Τ, Υ, Α, Ρ, Σ, ἴσαι εἰσὶ δέκα ὀρθαῖς. (θ) αἱ ἄρα Τ, Υ, Α, Ρ, Σ ἐλάσσονές εἰσι τεσσάρων ὀρθῶν. ο. ε. δ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Τῶν ἐπιπέδων σχημάτων τῶν ἰσογωνίων τε καὶ ἰσοπλευρών, τῶν καὶ Κανονικῶν λεγομένων, τρία μόνον, τρίγωνον, τετράγωνον, καὶ πεντάγωνον, σῶμα συγκροτῆσι Κανονικὸν καλεσμενον. Εἰσὶ δὲ σάματα κανονικὰ μόνα πέντε. Πυραμὶς, ὑπὸ τεσσάρων ὀκτάεδρον, ὑπὸ ὀκτώ. Εἰκοσάεδρον, ὑπὸ εἴκοσι ἰσοπλευρών τε

Ξ

καὶ

(ζ) Κατὰ τὴν κρολ. πρότ. (η) Κατὰ τὴν ιδ. συν. τὴν μετὰ τὴν λβ. τῷ κ. (θ) Κατὰ τὴν λβ. τῷ α.

καὶ ἴσων ἀλλήλοις τριγώνων περιεχόμενον. Κύβος, ὑπὸ ἑξ ἴσων τετραγώνων καὶ Δωδεκαέδρον, ὑπὸ δώδεκα κανονικῶν καὶ ἴσων ἀλλήλοις πενταγώνων. ἐπεὶ γὰρ πᾶσα σφαιρὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων, ἢ τεσσάρων ὀρθῶν ἐπιπέδων γωνιῶν περιέχεται, φανερόν ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν τὴν σφαιρὰν περιέχουσιν, ἐλάττον δεῖ εἶναι τεσσάρων ἐπιπέδων ὀρθῶν. ἐπεὶ ἔν ἡ μὲν τῆς πυραμίδος σφαιρὰ γωνία ὑπὸ τριῶν περιέχεται ἐπιπέδων τριγωνικῶν γωνιῶν, ὧν τὸ κεφάλαιον ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς· (ι) ἡ δὲ τῆς Ὀκταέδρου, ὑπὸ τεσσάρων, αἱ εἰσιν ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς καὶ τριτημορίῳ δύο ὀρθῶν· αἱ δὲ τῆς Εἰκοσαέδρου, ὑπὸ πέντε, ὧν τὸ ἄθροισμα ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς, καὶ δυσὶ τριτημορίοις δύο ὀρθῶν· ἡ δὲ τῆς Κύβου, ὑπὸ τριῶν ὀρθῶν· ἡ δὲ τῆς Δωδεκαέδρου ὑπὸ τριῶν πενταγωνικῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ὧν τὸ κεφάλαιον ἴσον τρισὶν ὀρθαῖς, καὶ τρισὶ πεμπτημορίοις μιᾷς ὀρθῆς· (ἡ γὰρ τῆς πενταγώνου γωνία ἴση μιᾷ ὀρθῇ, καὶ πεμπτημορίῳ ὀρθῆς.) (κ) συσφαθίσονται ἄρα ὑπὸ τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων χημάτων σφαιρὰ γωνία. ἐξ ἧς ὁ δῆλον, ὅτι καὶ τὰ προδιαληφθέντα πέντε Κανονικὰ σώματα ἐξ αὐτῶν οἷον τε συσφαθίσαι.

Ὅτι δὲ ἐδ' ὑπὸ τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων χημάτων, ἐδ' ὑπ' ἄλλων τινῶν, Κανονικὰ συνίσταται σώματα, πλὴν τῶν πέντε λεχθέντων, καταμαθεῖν πάνυ ῥαδίον. δύο μὲν γὰρ ἰσόπλευρα τρίγωνα σφαιρὸν ἐ συνισῶσι, διὰ τὸ ὑπὸ πλείονων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν τὴν σφαιρὰν περιέχεσθαι γωνίαν. ἐδὲ μὴν ἑξ, διὰ τὸ τὰς ἑξ τριγωνικὰς γωνίας, ἐξ ὧν τὴν σφαιρὰν συσφαθίσαι δεῖ, ἴσας εἶναι τέσσαρσιν ὀρθαῖς· ἐξ ἧς ὁ δῆλον, ὡς ἐδὲ πλείονα, ἢ ἑξ· ἐδὲ δὲ ἑξάγωνα, διὰ τὸ τὰς τρεῖς ἑξαγωνικὰς

γω-

(ι) Ὅρα τὴν ἐρηθ. σημ. (κ) Κατὰ τὴν αὐτὴν σημ.

γωνίας ἴσας εἶναι τέσσαρσιν ὁρθαῖς· (ἴση ἢ ἐξαγωνικὴ γωνία ὁρθῇ καὶ τριτημορίᾳ ὁρθῆς.) εἰδὲ δὴ ἄλλα κανονικά σχήματα ἐπίπεδα, διὰ τὰς αὐτὰς λόγους περὶέξουσι Κανονικόν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ, ΚΒ'.

Εὰν ὥσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσας εὐθεῖαι, δυνατόν ἐσιν ἐκ τῶν ἐπιξενυγνυσθῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐσῶσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔσῶσαν, πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι. καὶ ἔσῶσαν ἴσας αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εὐθεῖαι. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐκ τῶν ἐπιξενυγνυσθῶν τὰς ἴσας εὐθείας, εἶπεν ἐκ τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΚΗ τρίγωνον συστήσασθαι. ϡ. 30.

Εἰ μὲν αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΚΘΗ γωνίαι ἴσας ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΚΗ ἴσας ἀλλήλαις ἔσονται. (λ) ὁθεν δῆλον ὅτι ἐξ αὐτῶν συσταθήσεται τρίγωνον. ἔσῶσαν δὴ αἱ ἐξηθεῖσαι γωνίαι ἅπασαι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω ἡ ΛΘΚ γωνία ἴση τῇ Ε. καὶ κείσθω ἡ $\Theta\Lambda = ΕΖ$. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΑΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΔΕΖ, ΛΘΚ, ἡ μὲν $ΕΖ = ΛΘ$, (μ) ἡ δὲ $ΕΔ = ΘΚ$, (ν) καὶ γωνία ἡ $ΔΕΖ = ΛΘΚ$. (ξ) ἄρα καὶ ἡ $ΔΖ = ΑΚ$. (ο) καὶ ἐπεὶ αἱ γωνίαι ΔΕΖ, ΚΘΗ Ξ 2 μεί-

(λ) Κατὰ τὴν δ. τῆ α. (μ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ν) Ἐξ ὑπεδ. (ξ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ο) Κατὰ τὴν δ. τῆ κ.

μείζονες εἰσι τῆς ΑΒΓ· (π) ἔστι δὲ ἡ ΛΘΚ ἴση τῇ ΔΕΖ·
 (ρ) ἄρα καὶ αἱ ΛΘΚ, ΚΘΗ, εἴτεν ἡ ΛΘΗ μείζων τῆς ΑΒΓ.
 ἐν τοῖς τριγώνοις ἐν ΛΘΗ, ΑΒΓ, ἡ μὲν ΛΘ = ΒΓ· ἴση
 γὰρ ἡ ΛΘ τῇ ΕΖ, (σ) ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΒΓ· (τ) ἡ δὲ
 ΘΗ τῇ ΒΑ, καὶ γωνία ἡ ΔΘΗ μείζων τῆς ΑΒΓ. ἄρα
 καὶ ἡ ΛΗ μείζων τῆς ΑΓ. (υ) ἀλλ' αἱ ΛΚ, ΚΗ μεί-
 ζονες τῆς ΛΗ, (φ) πολλῶν ἄρα μείζονες τῆς ΑΓ. δέ-
 δεικται δὲ ἡ ΛΚ ἴση τῇ ΔΖ. αἱ ἄρα ΔΖ, ΚΗ μείζο-
 νες τῆς λοιπῆς ΑΓ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι αἱ ΑΓ, ΔΖ
 μείζονες τῆς ΚΗ, καὶ αἱ ΑΓ, ΚΗ μείζονες τῆς ΔΖ.
 τῶν τριῶν ἄρα ΑΓ, ΔΖ, ΚΗ αἱ δύο μείζονες εἰσὶ τῆς
 λοιπῆς, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· δῆλον ἄρα, ὅτι ἐξ αὐ-
 τῶν συζαθήσεται τρίγωνον. (χ)

Λ Η Μ Μ Α Α'.

Ἐὰν τρεῖς γωνίαι, αἱ Β, Ε, Θ (χ. 31.) ἐλάσ-
 σονες μὲν ὥσι τεσσάρων ὀρθῶν, δύο δὲ τῆς
 λοιπῆς μείζονες, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι
 περιέχωνται δὲ ὑπὸ ἴσων εὐθειῶν, τῶν ΑΒ, ΒΓ;
 ΕΔ, ΕΖ. ΘΚ, ΘΗ· καὶ συζαθῇ μὲν ὑπὸ τῶν αὐ-
 τὰς ἐπιζευγνυσῶν τρίγωνον ὅποιονδ' ἐν, εἶον
 τὸ ΛΜΝ, (χ. 32.) περὶ ὃ κύκλος περιγύραφ-
 θῇ· ἐφαρμοσθῇ δὲ, ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΘΚ
 τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΘΗ τῇ ΑΒ, ὥτε ὑπὸ τῶν ἐπιπέ-
 δων γωνιῶν Β, Ε, Θ σρεαὴν γωνίαν συζαθῇ-
 ναι

(π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκ. (σ) Ὡσαύτως. (τ) Ἐξ
 ὑποθ. (υ) Κατὰ τὴν κδ. τῆ α. (φ) Κατὰ τὴν κ. τῆ α.
 (χ) Κατὰ τὴν κβ. τῆ α.

να τὴν Ο· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς Ο σημείῃς ἀγομένη τῷ κύκλῳ κάθετος ΟΚ ἐπὶ τὸ κέντρον αὐτῆς πεσεῖται.

Ἐστω πρῶτον ὀξυγώνιον τὸ ΔΜΝ τρίγωνον.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΚΝ, ΚΜ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΟΚΔ γωνία ὀρθή ἐστι, (ψ) τὸ ἄρα $\overline{ΛΟ}^2 = \overline{ΟΚ}^2 + \overline{ΚΛ}^2$. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ $\overline{ΟΝ}^2 = \overline{ΟΚ}^2 + \overline{ΚΝ}^2$. ἀλλ' ἡ ΔΟ = ΟΝ. (α) καὶ $\overline{ΛΟ}^2$ ἄρα ἴσον $\overline{ΟΝ}^2$. ἄρα καὶ $\overline{ΟΚ}^2 + \overline{ΚΛ}^2 = \overline{ΟΚ}^2 + \overline{ΚΝ}^2$. κοινὸν ἀφηρέσθω τὸ $\overline{ΟΚ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΚΛ}^2 = \overline{ΚΝ}^2$. ἄρα καὶ ΚΛ = ΚΝ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΚΜ = ΚΝ. αἱ τρεῖς ἄρα ΚΛ, ΚΝ, ΚΜ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. τὸ σημεῖον ἄρα Κ τὸ κέντρον τῆς κύκλου ἐστίν. (β) ἡ ἄρα κάθετος ΟΚ ἐπὶ τὸ τῆς κύκλου κέντρον πίπτει.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι ἡ ΟΚ ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς κύκλου πίπτει, καὶ τε ὀρθογώνιον ἢ τὸ ΔΜΝ τρίγωνον, (χ. 33.) καὶ ἀμβλυγώνιον. χ. 34.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Ἡ πλευρά ἄρα τῶν τοιούτων ἰσοσκελῶν τριγώνων, οἷον ἡ ΟΝ μείζων τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΝ τῆς κύκλου, τῆς περιγεγραφομένης περὶ τὸ τρίγωνον, τὸ ἐκ τῶν βάσεων τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων συνιστάμενον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΟΚΝ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ΚΟΝ ὀξεία. (γ) ἡ ἄρα ΟΝ μείζων τῆς ΚΝ.

Ξ 3.

ΛΗΜ-

(ψ) Ἐξ ὑποθ. (ω) Κατὰ τὴν μζ. τῆς α. (α) Ἰσαι γὰρ αἱ ΔΟ, ΟΝ ταῖς ΒΓ, ΕΖ. (β) Κατὰ τὴν ζ. τῆς γ. (γ) Κατὰ τὴν γ. συνέπ. τὴν μετὰ τὴν λβ. τῆς α.

Δύο δοθεῖσαν ευθείων, των AB, ΑΓ, τρίτη
 ευρεθήσεται ἡ ΒΓ, ἥς τὸ τετράγωνον σὺν τῷ
 ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ΑΓ τετραγώνῳ ἴσα
 ἔσονται τῷ ἀπὸ τῆς μείζονος ΑΒ τετραγώνῳ,
 εἰὰν ἐπὶ τῆς μείζονος ΑΒ ἡμικύκλιον γραφ-
 θῇ τὸ ΑΓΒ, καὶ εἰς αὐτὸ ἐναρμοσθῇ ἡ ἐλάσ-
 σων ΑΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευχθῇ
 ἡ ΓΒ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΓΒ γωνία ὀρθή ἐστι, (δ)
 τὸ ἄρα $AB^2 = AG^2 + GB^2$. (ε) χ. 35.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς
 λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανό-
 μενα, φερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. δεῖ δὲ δὲ
 τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶ-
 ναι.

Ἔσωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ΑΒΓ,
 ΔΕΖ, ΗΘΚ. χ. 36. 37.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπειλήφθησαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ,
 ΘΚ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ. καὶ συνε-
 γράτω τὸ ΔΜΝ τρίγωνον, ὥστε ἴσῃν εἶναι τὴν μὲν ΑΓ
 τῇ ΔΜ, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ΔΝ, τὴν δὲ ΗΚ τῇ ΜΝ. καὶ
 περιγεγράφθω περὶ τὸ ΔΜΝ τρίγωνον κύκλος ὁ ΔΜΝ.
 καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τὸ Δ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΔ. καὶ
 ἐπει

(δ) Κατὰ τὴν λω. τῷ γ. (ε) Κατὰ τὴν μζ. τῷ κ.

ἐπεὶ ἡ AB , ἡ τῷ ἰσοσκελεῖς $ABΓ$ τριγώνου πλευρὰ μείζων τῆς ἡμιδιαμέτρου $ΚΛ$, (ζ) ἔσται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνον μείζων τῷ ἀπὸ τῆς $ΚΛ$ τετραγώνου. κείδω ἔν ἐνθεῖα τις ἡ $ΠΡ$, ἥς τὸ τετραγώνον σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου $ΚΛ$ τετραγώνῳ ἴσα ἔωσαν τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ. (η) καὶ ἀπὸ τῆς κέντρου $Κ$ ἀνασάτω ἡ $ΚΟ$ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ $ΛΜΝ$, καὶ ἴση τῇ $ΠΡ$. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΟΛ$, $ΟΝ$, $ΟΜ$. λέγω δὴ, ὅτι γέγονε τὸ ἐπιταχθεῖν. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΚΝ$, $ΚΜ$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ $ΟΚΛ$ γωνία ὀρθή ἐστι, (θ) τὸ ἄρα $\overline{ΛΟ}^2 = \overline{ΟΚ}^2 + \overline{ΚΛ}^2$. (ι) ἔστι δὲ καὶ $\overline{ΑΒ}^2 = \overline{ΟΚ}^2 + \overline{ΚΛ}^2$. (κ) ἄρα $\overline{ΛΟ}^2 = \overline{ΑΒ}^2$. ὥστε καὶ ἡ $ΛΟ = ΑΒ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΟΜ = ΒΓ$. ἔκθεν ἐν τοῖς τριγώνοις $ΛΟΜ$, $ΑΒΓ$, ἡ μὲν $ΛΟ = ΑΒ$, ἡ δὲ $ΟΜ = ΒΓ$, ἔστι δὲ καὶ ἡ $ΛΜ = ΑΓ$. (λ) καὶ γωνία ἄρα ἡ $ΛΟΜ = ΑΒΓ$. (μ) ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ μὲν $ΛΟΝ = ΔΕΖ$, ἡ δὲ $ΝΟΜ = ΗΘΚ$. συνέση ἄρα ξερεὰ γωνία ἡ $Ο$ ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, αἱ ἴσαι ταῖς δοθεῖσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Ἐὰν ξερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχεται, τὰ ἀπεναντίον αὐτῷ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστι.

Ξ 4

ΣΤΕ-

- (ζ) Κατὰ τὴν συνέπ. τῷ α. λήμ. (η) Κατὰ τὸ β. λήμ. (θ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ι) Κατὰ τὴν μζ. τῷ α. (κ) Ἐκ τῆς κατασκευ. ἡ γὰρ $ΠΡ = ΟΚ$. (λ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (μ) Κατὰ τὴν η. τῷ α.

Στερεόν τὰ ΑΒΓΔΕΖΘΗ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχεται, τῶν ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΖΒ, ΑΕ. λέγω, Α', ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτῆ ἐπίπεδα παραλληλόγραμμα εἰσι. Β', ὅτι καὶ ἴσα. χ. 38.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΔΖ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παραλλήλα, τὰ ΒΗ, ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδῳ τῷ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ ΑΒ, ΓΔ παραλλήλοι εἰσι. (ν) πάλιν ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παραλλήλα τὰ ΕΖ, ΑΕ ὑπὸ ἐπιπέδῳ τῷ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ ΑΔ, ΒΓ παραλλήλοι εἰσι. παραλληλόγραμμοι ἄρα τὸ ΑΓ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκασον τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΒ, ΒΖ, ΑΕ, παραλληλόγραμμον ἐστίν.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΒΘ παραλλήλοι εἰσι ταῖς ΔΓ, ΓΖ, (ξ) ἡ ἄρα γωνία ΑΒΘ = ΔΓΖ. (ο) ἔκ᾽ ἐν ταῖς τριγώνοις ΑΒΘ, ΔΓΖ, ἡ μὲν ΑΒ = ΔΓ, ἡ δὲ ΒΘ = ΓΖ, (π) καὶ γωνία ἡ ΑΒΘ = ΔΓΖ. καὶ τὸ ΑΒΘ ἄρα τρίγωνον ἴσον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ. (ρ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τῷ ΑΒΘ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΔΖ τῷ ΔΓΖ. (σ) τὸ ἄρα ΒΗ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΔΖ παραλληλογράμῳ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν παραλληλόγραμμον ΑΓ = ΗΖ, τὸ δὲ ΖΒ = ΑΕ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰσέον δὲ ὅτι τὰ ἀπεναντίον παραλληλόγραμμα καὶ ὁμοιά εἰσιν. ἔχουσι γάρ ἴσας τὰς γωνίας, καὶ ἀναλόγως τὰς πλευράς.

ΔΗΜ.

- (ν) Κατὰ τὴν ις. τῷ ια. (ξ) Ἐξ ὑποθ. (ο) Κατὰ τὴν ι. τῷ ια. (π) Κατὰ τὴν λδ. τῷ κ. (ρ) Κατὰ τὴν ε. τῷ κ. (σ) Κατὰ τὴν μα. τῷ κ.

ΛΗΜΜΑ Γ΄.

Πᾶν παραλληλεπίπεδον ἐμφαίνεται ὑπὸ τῶν
 γινομένων ἐκ τῶν ὕψους αὐτῶν καὶ τῆς βάσεως.

Ἐστὶ παραλληλεπίπεδον τὸ ΘΓ, ἔστω αἱ ΑΘ, ΒΗ ἐν-
 θεῖαι κάθετοι ἐπὶ τῆς βάσεως ΟΖ. πίν. ΚΓ. χ. 39.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διαμεθίστησαν αἱ τῆς βάσεως πλευραὶ ΘΗ, ΗΖ,
 καὶ τὸ ΒΗ ὕψος εἰς ἴσα ὀποσαῦν μέρη. οἷον ἡ μὲν ΘΗ,
 εἰς τέσσαρα, τὰ ΗΙ, ΙΚ, ΚΛ, ΛΘ· ἡ δὲ ΗΖ, εἰς
 δέκα, τὰ ΗΠ, ΠΨ, καὶ τὸ δὲ ΒΗ, εἰς ὀκτώ, τὰ
 ΗΦ, ΦΩ, καὶ ἡχθῶ διὰ μὲν τῶν Ι ἢ ΙΞ παραλ-
 ληλος τῇ ΗΖ· διὰ δὲ τῶν Ι, Ξ σημεῖαν, ἐπίπεδον τὸ
 ΙΜΝΞ παραλληλον τῷ ΗΓ ὀρθογωνίῳ. διὰ δὲ τῶν Π,
 ἢ ΠΟ παραλληλος τῇ ΗΓ· διὰ δὲ τῶν σημεῖων Ο, Π,
 τὸ ΟΣΡΠ ἐπίπεδον παραλληλον τῷ ΙΒ· διὰ δὲ τῶν Φ,
 ἢ ΦΧ παραλληλος τῇ ΗΓ· διὰ δὲ τῶν σημεῖων Χ, Φ,
 τὸ ΧΦΤΥ ἐπίπεδον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΙΖ ὀρθογώνιον τεταρτημόριον ἐστὶ τῶν ΘΖ ὀρ-
 θογωνίων· τὸ δὲ ΙΓ παραλληλεπίπεδον τῶν ΘΓ παραλ-
 λελεπίπεδον· τὸ γὰρ ὅλον ΘΓ εἰς τέσσαρα διαμεριθί-
 σεται παραλληλεπίπεδα τῷ ΙΓ ἴσα, ὅτε δὴ ὑπὸ ἴσων
 ἐπιπέδων περιεχόμενα. πάλιν τὸ μὲν ΙΠ ὀρθογώνιον
 δεκατημόριον μὲν ἐστὶ τῶν ΙΖ ὀρθογωνίων, τεσσαρακοση-
 μόριον δὲ τῶν ΘΖ. ὁμοίως τὸ ΙΡ παραλληλεπίπεδον δεκα-
 τημόριον μὲν ἐστὶ τῶν ΙΓ παραλληλεπίπεδα· ὅτε δὴ διαι-
 ρεθῆναι ἔχοντας εἰς δέκα παραλληλεπίπεδα ἴσα τῷ ΙΡ·
 τεσσαρακοσημόριον δὲ τῶν ΘΓ, διὰ τὸ εἰς τεσσαράκον-
 τα τοιαῦτα τὸ ὅλον ΘΓ μερίζεσθαι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ,
 ὁ κύβος ΙΤ ὀγδοὺς μὲν μέρος τῶν ΙΡ παραλληλεπίπεδα
 ἐστὶ, ὀγδοηκοσὶν δὲ τῶν ΙΓ, καὶ τριακοσιοσεικοσημόριον τῶν

Ξ 5

ΘΓ.

ΘΓ. ὅλον ἄρα τὸ ΘΓ παραλληλεπίπεδον ἴσον 320 κύβοις τῷ ΙΓ ἴσοις. ἔστι δὲ τὸ 320 τὸ γινόμενον ἐκ τῆ ὕψους ΒΗ, καὶ τῆς βάσεως ΘΖ. τὴν μὲν γὰρ βάσιν ἐμφαίνει ὁ 40 ἀριθμὸς, τὸ δὲ ὕψος ὁ 8· ὡν τὸ γινόμενον 320. τὸ ἄρα ΘΓ παραλληλεπίπεδον ἐμφαίνεται ὑπὸ τῆ ΒΗ. ΘΖ, ἔτεν ὑπὸ τῆ γινομένη ἐκ τῆ ὕψους καὶ τῆς βάσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Εἰάν σερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπ' ἐναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, ἔτω τὸ σερεὸν πρὸς τὸ σερεόν.

Στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΗΖ ἐπιπέδῳ τῷ ΚΔ τετμήθω, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπ' ἐναντίον ἐπιπέδοις ΗΒ, ΜΖ. λέγω ὅτι ἔσιν ὡς ἡ ΒΓ βάσις, πρὸς τὴν ΔΕ βάσιν, ἔτω τὸ ΗΔ σερεόν, πρὸς τὸ ΚΖ σερεόν. χ. 40.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὸ ΗΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ ΑΖ, (τ) τὸ αὐτὸ ἄρα ὕψος ἔχουσι τὰ παραλληλεπίπεδα ΗΔ, ΚΖ. ἐμφανέτωσαν ἔν ταῖς τέτων ὕψη αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ΗΑ, ΜΕ. ἔκων ἔσται τὸ μὲν παραλληλεπίπεδον $HΔ = HA \cdot BG$, τὸ δὲ $KZ = ME \cdot DE$. (υ) ὡς ἄρα $HA : BG : ME : DE :: HD : KZ$. ἀλλ' ὡς $HA : BG : ME : DE :: BG : DE$. ἔστι γὰρ ἡ $HA = ME$. (φ) ὡς ἄρα $BG : DE :: HD : KZ$. (χ)

ΠΡΟ-

(τ) Κατὰ τὸν ιδ. ὅρισ. τῆ ια. (υ) Κατὰ τὴ γ. λήμ. (φ) Κατὰ τὴν η. τῆ ι. (χ) Κατὰ τὴν ι. τῆ ι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΣ΄.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ σφραγῶ γωνία, ἴσω σφραγῶ γωνίαν συστήσασθαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον, τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα σφραγῶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΓΔΗ, ΓΔΖ, ΖΔΗ ἐπιπέδων γωνιῶν. Χ. 41.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΔΖ τυχόν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΓΔ, ΔΗ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΖΘ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΘ, ΘΔ, ΘΗ, ΗΖ, ΖΓ. καὶ ἀπειλήφθω ἡ ΑΚ ἴση τῇ ΔΓ. καὶ συνεχάτω ἡ μὲν ΚΑΝ γωνία ἴση τῇ ΓΔΗ, ἡ δὲ ΚΑΛ τῇ ΚΔΘ. καὶ κείθω ἡ μὲν ΑΛ = ΔΘ, ἡ δὲ ΑΝ = ΔΗ. καὶ ἀπὸ τοῦ Α σημείε ἀνεσάθω ἡ ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΔ ἐπίπεδον. καὶ κείθω ἡ ΛΕ = ΘΖ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ Α σφραγῶ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΚΑΝ, ΚΑΕ, ΕΑΝ ἴση ἐστὶ τῇ δοθείσῃ Δ. ἐπεζεύχθωσαν γάρ αἱ ΚΛ, ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΚΑΛ, ΓΔΘ, ἡ μὲν ΑΚ = ΔΓ, ἡ δὲ ΑΛ = ΔΘ, καὶ γωνία ἡ ΚΑΛ = ΓΔΘ. (ψ) ἄρα καὶ ἡ ΚΛ = ΓΘ. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΝ = ΘΗ. Ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΚΛΕ, ΓΘΖ ἡ μὲν ΚΛ = ΓΘ, ὡς δέδεικται, ἡ δὲ ΛΕ = ΘΖ, (α) καὶ γωνία ἡ ΚΛΕ = ΓΘΖ. (β) ἄρα καὶ ἡ ΚΕ = ΓΖ. (γ) διὰ τὰ

(ψ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ω) Κατὰ τὴν δ. τῆ α. (α) Ἐκ τῆς κατασκ. (β) Κατὰ τὸν γ. ὁρισ. τῆ ια. (γ) Κατὰ τὴν δ. τῆ α.

τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $NE = HZ$. πάλιν ἐν τοῖς τριγώνοις $ΑΔΕ$, $ΔΘΖ$, ἡ μὲν $ΑΔ = ΔΘ$, ἡ δὲ $ΔΕ = ΘΖ$, καὶ γωνία ἡ $ΑΔΕ = ΔΘΖ$. (δ) ἄρα καὶ ἡ $ΑΕ = ΔΖ$. ἐν τοῖς τριγώνοις $ΕΝΚΑΕ$, $ΓΔΖ$, ἡ μὲν $ΑΚ = ΔΓ$, ἡ δὲ $ΑΕ = ΔΖ$, ἡ δὲ $ΚΕ = ΓΖ$. καὶ γωνία ἄρα ἡ $ΚΑΕ = ΓΔΖ$. (ε) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΕΑΝ = ΖΔΗ$. ἔστι δὲ καὶ ἡ $ΚΑΝ = ΓΔΗ$, (ς) ἡ ἄρα πρὸς τῷ A γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ $Δ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'.

Ἀπο τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι $σερεῶ$ παραλληλεπίπεδω, ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον $σερεὸν$ παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ $ΑΒ$, τὸ δὲ δοθὲν $σερεὸν$ παραλληλεπίπεδον τὸ $ΔΓ$. χ . 42.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω πρὸς τῇ $ΑΒ$ εὐθείᾳ τῇ πρὸς τὸ $Γ$ $σερεῶ$ γωνία ἴση ἡ πρὸς τῷ A , ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν $ΒΑΘ$ γωνίαν τῇ $ΕΓΖ$, τὴν δὲ $ΘΑΚ$ τῇ $ΖΓΗ$, καὶ ἔτι τὴν $ΚΑΒ$ τῇ $ΗΓΕ$. καὶ γεγονέντω ὡς $ΕΓ : ΓΗ :: ΒΑ : ΑΚ$, καὶ ὡς $ΗΓ : ΓΖ :: ΚΑ : ΑΘ$. καὶ ἔσται καὶ ὡς $ΕΓ : ΓΖ :: ΒΑ : ΑΘ$. (η) καὶ συμπεπληρώθω τὸ $ΒΘ$ παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ $ΑΛ$ $σερεὸν$. λέγω, ὅτι τὸ $ΑΛ$ ὁμοίον ἔστι καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ δοθέντι $ΓΔ$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς $ΕΓ : ΓΗ :: ΒΑ : ΑΚ$, καὶ γωνία ἡ $ΕΓΗ = ΒΑΚ$, (θ) ὁμοιον ἄρα τὸ $ΕΗ$ παραλληλόγραμμον τῷ $ΒΚ$ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ μὲν $ΗΖ$
ὁμοιον

(δ) Κατὰ τὸν γ. ὀρισμ. τῆ καί (ε) Κατὰ τὴν η τῆ α. (ς) Ἐκ τῆς κατασκευ. (η) Κατὰ τὴν ιβ. τῆ ε. (θ) Ἐκ τῆς κατασκευ.

ὅμοιον τῷ ΚΘ, τὸ δὲ ΕΖ τῷ ΒΘ. τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τῷ ΓΔ σερεῖ τρισὶ παραλληλογράμμοις τῷ ΑΛ σερεῖ ὁμοιά ἐσιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ ταῖς ἀπεναντίον ἴσα τε ἐστὶ καὶ ὅμοια. (ι) ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ σερεὸν ὅλῳ τῷ ΑΛ ὁμοίον ἐσιν. (κ) ὅτι δὲ καὶ ὁμοίως κείμενον, δῆλον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ΄.

Εὰν σερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ σερεὸν ὑπὸ τῷ ἐπιπέδῳ.

Στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τετμήδῳ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίων ἐπιπέδων, τὰς ΓΖ, ΔΕ. λέγω, ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ ΑΒ ὑπὸ τῷ ΓΔΕΖ. χ. 43.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΒΖ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΔΑΕ τῷ ΔΘΕ. (λ) ἐστὶ δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΕ παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΗΕ τῷ ΓΘ, (μ) τὸ δὲ ΓΔΕΖ κοινὸν ἐκατέρῳ τῶν πρισμαμάτων ΓΗΖΕΑΔ, ΓΒΖΕΘΔ. ἴσον ἄρα τὸ ΓΗΖΕΑΔ τῷ ΓΒΖΕΘΔ. (ν) ὥστε ὅλον τὸ ΑΒ σερεὸν δίχα τέμνεται ὑπὸ τῷ ΓΔΕΖ ἐπιπέδῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ΄.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα σερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος,
 ὡν

(ι) Κατὰ τὴν κδ. τῆ ια. καὶ τὴν μετ' αὐτὴν σημ. (κ) Κατὰ τὸν θ. ὅρισμ. τῆ ια. (λ) Κατὰ τὴν λη. τῆ α. (μ) Κατὰ τὴν κδ. τῆ ια. (ν) Κατὰ τὸν ι. ὅρισμ. τῆ ια.

ων αὐ ἐφεσώσται ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσὶν εὐθειῶν,
ἴσα ἀλλήλοις ἐσίν.

Ἐξω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, τῆς ΑΒ παραλληλε-
πίπεδα, τὰ ΑΓΔΖΜΘΒΛ, ΑΓΕΗΝΚΒΛ ὑπὸ τὸ αὐ-
τὸ ὕψος ὄντα, ὧν αἱ ἐφεσώσται, αἱ ΑΖ, ΛΗ, ΛΜ,
ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔσω-
σαν τῶν ΖΝ, ΔΚ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΓΔΖΜΘΒΛ
τῷ ΑΓΕΗΝΚΒΛ. χ. 44.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ,

Ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἐκάτερον τῶν ΓΘ, ΓΚ,
ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ ἐκατέρᾳ τῶν ΔΘ, ΕΚ. (ξ) ὥστε καὶ ἡ
ΔΘ = ΕΚ. κοινὴ ἀφαιρεθῶ ἡ ΕΘ. λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ,
λοιπὴ τῇ ΘΚ ἴση. ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΓΔΕ, ΒΘΚ,
ἡ μὲν ΔΕ = ΘΚ, ἡ δὲ ΓΔ = ΒΘ, ἡ δὲ ΓΕ = ΕΚ. (ο) τὸ
ἄρα ΓΔΕ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΘΚ τριγώνῳ. (π) διὰ τὰ αὐ-
τὰ δὴ καὶ τὸ ΑΖΗ = ΛΜΝ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ μὲν ΔΗ παραλ-
ληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΝ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΓΖ
τῷ ΒΜ, τῷ δὲ ΓΗ τῷ ΒΝ. τὸ πρίσμα ἄρα ΓΔΕΗΖΑ
ἴσον τῷ ΒΘΚΝΜΛ πρίσματι. (ρ) κοινὸν προσκείσθω τὸ
σερεὲν ΑΓΕΗΜΘΒΛ. τὸ ἄρα ΑΓΔΖΜΘΒΛ παραλληλε-
πίπεδον ἴσον τῷ ΑΓΕΗΝΚΒΛ παραλληλεπίπεδῳ. ο. ε. δ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Α'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα σερεὰ πα-
ραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν
αἱ ὑφεσώσται ἔν εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν,
ἴσα ἀλλήλοις ἐσίν.

Ἐξω-

(ξ) Κατὰ τὴν λδ. τῆ α. (ο) Κατὰ τὴν αὐτήν. (π) Κατὰ τὴν
η. τῆ α. (ρ) Κατὰ τὴν ε. ὅρισμα. τῆ ακ.

ἔξωσαν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, τῆς ΑΒ παραλληλεπίπεδα, τὰ ΑΗΝΛΒΓΕΚ, ΑΛΜΖΔΘΒΓ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφereῶσαι, αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ, ἐκ εἶσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἐυθεῶν. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗΝΛΒΓΕΚ τῷ ΑΛΜΖΔΘΒΓ. χ . 45.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΚΕ, ΖΔ, καὶ συμπίπτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Π. ὡσαύτως ἐκβεβλήθω ἡ μὲν ΝΗ συμπίπτουσα τῇ ΖΠ κατὰ τὸ Ξ, ἡ δὲ ΜΘ τῇ ΚΕ κατὰ τὸ Ρ. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΛΟ, ΑΞ, ΒΡ, ΙΠ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΒΡΚΝΛΟ πρίσμα ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΠΕΗΛΞ πρίσματι. (σ) κοινὸν προσκείτω τὸ σκεδὸν ΡΟΛΛΓΕΗΑ. τὸ ἄρα ΑΗΝΛΒΓΕΚ παραλληλεπίπεδον ἴσον τῷ ΑΛΟΞΠΡΒΓ παραλληλεπίπιδον. ἀλλὰ τὸ ΑΛΟΞΠΡΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΛΜΖΔΘΒΓ. (τ) ἄρα τὸ ΑΗΝΛΒΓΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΛΜΖΔΘΒΓ. σ. ε. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΛ'.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσα ἀλλήλοις ἐσὶν.

Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ, ΓΖ, ὧν τὰ ὕψη ΕΒ, ΖΔ ἴσα. λέγω, ὅτι τὸ ΑΕ = ΓΖ. πίν. ΚΔ. χ . 46.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΑΕ = ΕΒ. ΑΒ, τὸ δὲ ΓΖ = ΖΔ. ΓΔ. (υ) ἀλλ' ΕΒ. ΑΒ = ΖΔ. ΓΔ. ἐστὶ γὰρ ἡ μὲν ΑΒ = ΓΔ, τὸ δὲ ΕΒ = ΖΔ. (φ) ἄρα καὶ ΑΕ = ΓΖ.

ΠΡΟ-

(*) Διχαίρεται καθάπερ καὶ ἐν τῇ προλ. προτάσ. (τ) Κατὰ τὴν προλ. προτ. (υ) Κατὰ τὸ γ. λήμ. (φ) Ἐξ ὑποθ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΒ'.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τετραὰ παραλληλεπίδα πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐξωσαν παραλληλεπίπεδα, τὰ ΑΒ, ΓΔ ἴσα ὕψη ἔχοντα, τὰ ΒΕ, ΔΖ. λέγω, ὅτι ὡς ΑΒ : ΓΔ :: ΑΕ : ΓΖ. χ. 47.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν παραλληλεπίπεδον ΑΒ=ΒΕ. ΑΕ, τὸ δὲ ΓΔ=ΔΖ. ΓΖ, (χ) ὡς ἄρα ΑΒ : ΓΔ :: ΒΕ. ΑΕ :: ΔΖ. ΓΖ. ἀλλ' ὡς ΒΕ. ΑΕ : ΔΖ. ΓΖ :: ΑΕ : ΓΖ. (ψ) ἐστὶ γὰρ τὸ ΒΕ=ΔΖ. ὡς ἄρα ΑΒ : ΓΔ :: ΑΕ : ΓΖ. (ω)

ΣΗΝΕΠΕΙΑ.

Ἐὰν μὲν αἱ τῶν παραλληλεπιπέδων βάσεις ἴσαι ᾖσι, τὰ δὲ ὕψη ἀνίστα, ἔσονται τὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ὕψη. ἐπεὶ γὰρ ΑΒ : ΓΔ :: ΒΕ. ΑΕ : ΔΖ. ΓΖ. ἐστὶ δὲ ἡ ΑΕ=ΓΖ. ὡς ἄρα ΑΒ : ΓΔ :: ΒΕ : ΔΖ. εἰ δὲ αἱ βάσεις αὐτῶν καὶ τὰ ὕψη ἀνίστα ᾖσιν, ἔσται τὰ παραλληλεπίπεδα ἐν λόγῳ συγκείμενα ἐκ τῶν ὅν ἔχει ὕψος πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ τῶν ὅν ἔχει βάσεις πρὸς βάσιν. ἐκέτω γὰρ ΒΕ : ΔΖ τὸν ὅποιον ἐν λόγῳ, ὡσαύτως καὶ ΑΕ : ΓΖ. τὸ ἄρα γινόμενον ἐκ τῶν ἡγεμένων, πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἐπομένων, εἴπεν ΒΕ. ΑΕ : ΔΖ. ΓΖ : λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν ὅν ἔχει ΒΕ : ΔΖ, καὶ ἐκ τῶν ὅν ἔχει ΑΕ : ΓΖ. (α) ἀλλ' ὡς ΑΒ : ΓΔ :: ΒΕ. ΑΕ : ΔΖ. ΓΖ : ἄρα καὶ ΑΒ πρὸς ΓΔ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν ὅν ἔχει ΒΕ : ΔΖ, καὶ ἐκ τῶν ὅν ἔχει ΑΕ : ΓΖ.

ΠΡΟ.

(χ) Κατὰ τὸ γ. λήμ. (ψ) Κατὰ τὴν η' τῷ ε. (ω) Κατὰ τὴν ε' τῷ ε. (α) Κατὰ τὸν ζ. ὀρίσμ. τῷ ε.

ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰς τῶν ὁμο-
λόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὁμοία παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ. ὁμό-
λογος δὲ ἔστω ἡ ΑΘ, τῇ ΘΚ. λέγω ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς
τὸ ΓΔ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΑΘ πρὸς τὴν
ΘΚ. κ. 48.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κείθω τὰ ΑΒ, ΓΔ παραλληλεπίπεδα, ὥστε τὰς
ΑΘ, ΘΚ ἐπ' εὐθείας εἶναι, ἐπ' εὐθείας δὲ ἔσονται καὶ
αἱ ΗΘ, ΘΛ. ὁμοίωι γάρ ὄντων τῶν παραλληλογράμ-
μων ΑΗ, ΑΚ, (β) ἴσαι εἰσὶν αἱ γωνίαι ΑΘΗ, ΚΘΛ.
καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΙΒ, ΖΣ, ΦΗ, ΑΘ. καὶ πε-
πληρώθω τὸ ΘΞ παραλληλεπίπεδον. ὥσαύτως ἐκβλη-
θεῖσῶν τῶν ΟΛ, ΝΔ, πεπληρώθω τὸ ΛΡ παραλλη-
λεπίπεδον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς τὸ ΑΒ παραλληλεπίπεδον, πρὸς τὸ ΘΞ παραλλη-
λεπίπεδον, ἔστω ἡ ΑΗ βάση, πρὸς τὴν ΘΤ βάσιν.
(γ) ἀλλ' ὡς ΑΗ : ΘΤ :: ΑΘ : ΘΚ. (δ) ὡς ἄρα ΑΒ :
ΘΞ :: ΑΘ : ΘΚ. (ε) ἀλλ' ὡς ΑΘ : ΘΚ : ΗΘ : ΘΛ.
(ς) ἄρα ὡς ΑΒ : ΘΞ :: ΗΘ, ΘΛ. (η) ἀλλ' ὡς ΗΘ :
ΘΛ :: ΒΘ : ΣΛ. (θ) ὡς ἄρα ΑΒ : ΘΞ :: ΒΘ : ΣΛ.
(ι) ἀλλ' ὡς ΒΘ : ΣΛ :: ΘΞ : ΛΡ. (κ) ὡς ἄρα ΑΒ :
ΘΞ :: ΘΞ : ΛΡ. (λ) ἐπεὶ δὲ ὡς ΘΞ : ΛΡ :: ΒΘ :
ΣΛ,

- (β) Κατὰ τὸν θ. ὁρισμ. τῆ ια. (γ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (δ) Κα-
τὰ τὴν α. τῆ ε. (ε) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (ς) Ἐξ ὑποθ.
(η) Κατὰ τὸν ε. τῆ ε. (θ) Κατὰ τὴν α. τῆ ε. (ι) Κατὰ
τὴν ε. τῆ ε. (κ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (λ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε.

$\Theta\Xi :: \Theta\Delta :: \Lambda\Gamma :: \Gamma\Delta$. τὰ τέσσαρα ἀνάλογον. τὸ
 ἄρα πρῶτον $\Lambda\beta$, πρὸς τὸ τέταρτον $\Gamma\Delta$ τριπλασίονα
 λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ πρῶτον $\Lambda\beta$ πρὸς τὸ δεύτερον $\Theta\Xi$.
 (υ) ἀλλ' ὡς $\Lambda\beta :: \Theta\Xi :: \Lambda\Theta :: \Theta\kappa$, ὡς δέδεικται. τὸ
 ἄρα $\Lambda\beta$ πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ
 $\Lambda\Theta$ πρὸς τὴν $\Theta\kappa$. ο. ε. δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ δὴ τῆς Φανερόν, ὅτι εἰς τέσσαρες εὐθεῖαι ἀ-
 νάλογον ὦσιν, ἔστι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην,
 ἔτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης σερεὸν παραλληλεπίπედον,
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀ-
 ναγραφόμενον. ἐπειδήπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τε-
 τάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ πρὸς τὴν δευ-
 τέραν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ'.

Τῶν ἴσων σερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντι-
 πεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὡς σε-
 ρεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ
 βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκείνα.

Ἔστω

- (μ) Κατὰ τὴν πολ. πρότ. (ν) Κατὰ τὴν α. τῆ ε. (ξ) Κατὰ
 ε. τῆ ε. (ο) Ἐξ ὑποθ. (π) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (ρ) Κατὰ
 τὴν α. τῆ ε. (σ) Κατὰ τὴν α. τῆ ε. (τ) Κατὰ τὴν ε. τῆ
 ε. (υ) Κατὰ τὸ β. πρὸς τὸ μετὰ τὴν η. τῆ ε.

προς την ΓΖ βασιν, εἶτω τὸ ΔΖ ὑψος, πρὸς τὸ ΒΚ ὕψος. καὶ εἰάν ὡς ΑΚ: ΓΖ:: ΔΖ: ΕΚ, λέγω, ὅτι τὰ ΑΒ, ΓΔ παραλληλεπίπεδα ἴσα ἀλλήλοις. χ. 49.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ μὲν ΑΒ=ΕΚ. ΑΚ, τὸ δὲ ΓΔ=ΔΖ. ΓΖ. (φ)
ἀλλὰ τὸ ΑΒ=ΓΔ. ἄρα καὶ τὸ ΒΚ. ΑΚ=ΔΖ. ΓΖ.
ὡς ἄρα ΑΚ: ΓΖ:: ΔΖ: ΒΚ. (χ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐπεὶ ὡς ΑΚ: ΓΖ:: ΔΖ: ΒΚ. ἄρα τὸ ΑΚ. ΕΚ=ΓΖ. ΔΖ. (ψ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΚ. ΒΚ ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλεπίπεδον, τὸ δὲ ΓΖ. ΔΖ ἐστὶ τὸ ΓΔ. (ω) τὸ ἄρα ΑΒ=ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΕ'.

Τῇ δέξαι μόνῃ συντείνει τῆς ἐξῆς προτάσεως, ἥτις ἢ ἀνευ αὐτῆς δειχθήσεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΔΣ'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν σερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης σερεῶ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς Α: Β:: Β: Γ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. χ. 50.

(φ) Κατὰ τὸ γ. λῆμ. (χ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (ψ) Κατὰ τὴν αὐτ. (ω) Κατὰ τὸ γ. λῆμ.

Ἐκκείδω σφραγίσαντες γωνία, ἡ πρὸς τῷ Ε, περιεχομένη ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων ὀρθῶν τῶν ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ. καὶ κείδω τῇ Β ἴσην ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΕΗ, ΕΖ. καὶ συμπληρώσω τὸ ΚΕ παραλληλεπίπεδον. καὶ ἐκκείδω ἡ ΔΜ ἴση τῇ Α. καὶ συνεστιάτω πρὸς τῇ Α σφραγίσαντες γωνία, περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὀρθῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΝΛΞ, ΜΛΞ, ΜΛΝ. καὶ εἰλήφω ἡ μὲν ΛΝ = Β, ἡ δὲ ΛΞ = Γ. καὶ συμπληρώσω τὸ ΘΛ παραλληλεπίπεδον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς $A : B :: B : \Gamma$, (α) ἔστι δὲ ἡ μὲν $\Lambda M = A$, ἡ δὲ $\Lambda \Xi = \Gamma$, ἑκατέρωθεν δὲ τῶν ΖΕ, ΕΗ ἴση τῇ Β, (β) ὡς ἄρα $\Lambda M : Z\Xi :: E\eta : \Lambda \Xi$. ἄρα $M\Lambda : \Lambda \Xi = Z\Xi : E\eta$. (γ) αἱ ἄρα βάσεις $M\Xi$, ΖΗ τῶν ΘΛ, ΚΕ παραλληλεπιπέδων ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. καὶ τὰ ὕψη δὲ αὐτῶν ΝΛ, ΔΕ ἴσα ἀλλήλοις. ἑκάτερον γὰρ ἴσον τῇ Β. (δ) τὸ ἄρα ΘΛ παραλληλεπίπεδον ἴσον τῷ ΚΕ. (ε) καὶ ἔστι τὸ μὲν ΘΛ, τὸ ἐκ τῶν τριῶν Α, Β, Γ, τὸ δὲ ΚΕ τὸ ἀπὸ τῆς μέσης Β. τὸ ἄρα ἐκ τῶν τριῶν, κτ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΖ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν παραλληλεπίπεδα, ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα, ἀνάλογον ἔσται. καὶ εἰὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν σφραγίσαντες παραλληλεπίπεδα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾧ, καὶ αὐτὰ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστω.

- (α) Ἐξ ὑποθ. (β) Ἐκ τῆς κατωτ. (γ) Κατὰ τὴν 15. τῆς 5.
(δ) Ἐκ τῆς κατωτ. (ε) Κατὰ τὴν 16. τῆς 16.

Ἐξῶσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον, AB, ΓΔ, EZ, ΗΘ, ὡς AB: ΓΔ:: EZ: ΗΘ. λέγω, ὅτι καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα παραλληλεπίπεδα, τὰ ΚΑ, ΛΓ, ΜΕ, ΝΗ ἀνάλογον ἔσται, ἔσται ὡς ΚΑ: ΛΓ:: ΜΕ: ΝΗ. εἰάν δὲ ὡς ΚΑ: ΛΓ:: ΜΕ: ΝΗ, ἔσται καὶ ὡς AB: ΓΔ:: EZ: ΗΘ. χ. 51.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Α΄.

Τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ. καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ EZ πρὸς τὴν ΗΘ. (ζ) ἀλλ' ὡς AB: ΓΔ:: EZ: ΗΘ. (η) ἄρα καὶ ὡς ΚΑ: ΛΓ:: ΜΕ: ΝΗ. (θ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Β΄.

Ἐπεὶ τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ, καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ EZ πρὸς τὴν ΗΘ. (ι) ἔστι δὲ ὡς ΚΑ: ΛΓ:: ΜΕ: ΝΗ, (κ) ἄρα καὶ ὡς AB: ΓΔ:: EZ: ΗΘ. (λ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΔΗ΄.

Εἰάν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾗ, καὶ ἀπότινος σημεία τῶν ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων κείθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κείθετος.

Ἐπίπεδον τὸ ΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ AB πρὸς ὀρθὰς ἔστω κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΑΔ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῇ ΓΔ ἐπιπέδῳ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ

Ο 3

τῇ

(ζ) Κατὰ τὴν λγ. τῇ ια. (η) Ἐξ ὑποθ. (θ) Κατὰ τὸ ζ. θεωρ. τὸ μετὰ τὸ ε. Βιβλ. (ι) Κατὰ τὴν λγ. τῇ ια. (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὸ αὐτὸ θεωρ.

τῷ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη, ἐπὶ τῆς ΔΑ πεσεῖται. χ. 52.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν πιπτέτω ἐκτὸς, ὡς ἡ ΕΖ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῷ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΑ ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κάθετος ἦχθω ἡ ΖΗ· ἥτις καὶ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐσται. (μ) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΕΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία ΕΖΗ ὀρθή ἐστιν. (ν) ἔστι δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ΕΗΖ. (ξ) τριγώνῳ ἄρα τῷ ΕΖΗ αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ὅπερ αἰτοπον. Ἐκ ἄρα ἡ αἶψα τῷ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ΔΑ. ἐπὶ τὴν ΔΑ ἄρα πεσεῖται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΘ'.

Εἰάν τις παραλληλεπιπέδῳ τῶν ἀπεναντίων ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων, καὶ ἡ τῷ τριγώνῳ παραλληλεπιπέδῳ διάμετρος δίχα τέμνῃσιν ἀλλήλας.

Παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΑΖ τῶν ἀπεναντίων ἐπιπέδων τῶν ΓΖ, ΑΦ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσασιν κατὰ τὰ Κ, Λ, Ο, Μ· Ξ, Θ, Ρ, Π σημαῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσασιν τὰ ΚΟ, ΕΡ. κοινὴ δὲ τῶν ἐπιπέδων τομὴ ἔστω ἡ ΝΣ, τῷ δὲ ΑΖ παραλληλεπιπέδῳ διαγώνιος ἡ ΔΗ. λέγω, ὅτι αἱ ΝΣ, ΔΗ δίχα τέμνῃσιν ἀλλήλας. χ. 53.

ΚΑ-

(μ) Κατὰ τὸν δ. ὀρισμ. τῷ κ. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Ἐκ τῆς κατασκευ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΔΝ, ΝΕ, ΒΣ, ΣΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΝΔΞ, ΝΘΕ, ἡ μὲν ΝΘ = ΝΞ, ἡ μὲν γὰρ ΝΘ = ΕΛ, ἡ δὲ ΝΞ = ΛΓ· (ο) ἔστι δὲ ἡ ΕΛ = ΛΓ· (π) ἡ δὲ ΘΕ = ΔΞ, καὶ γωνία ἡ ΝΘΕ = ΝΞΔ. (ρ) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΘΝΕ = ΞΝΔ. (σ) διὰ δὴ τῆτο εὐθεῖα ἔστιν ἡ ΔΝΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθεῖα ἔστι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ ΔΒ, ἔστι δὲ ἡ ΓΑ καὶ τῇ ΕΗ ἴση τε καὶ παράλληλος. αἱ ἄρα ΔΒ, ΕΗ ἴσασιν καὶ παράλληλοι. (τ) ἴσασιν τε ἄρα καὶ παράλληλοι καὶ αἱ ΕΛ, ΗΒ. Ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΗΤΣ, ΔΤΝ, ἡ μὲν γωνία ΤΗΣ = ΤΔΝ, ἡ δὲ ΤΣΗ = ΤΝΔ, (υ) καὶ ἡ ΗΣ = ΔΝ. ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν ΒΗ, ΔΕ. ἄρα ἡ μὲν ΗΤ = ΤΔ, ἡ δὲ ΣΤ = ΤΝ (φ) ο. ε. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ'.

Ἐὰν ᾗ δύο πρίσματα ἰσοῦψῃ, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾗ τὸ παραλληλόγραμνον γραμμον τῷ τριγώνῳ, ἴσα ἔσιν τὰ πρίσματα.

Ἐσὼ πρίσματα ἰσοῦψῃ τὰ ΑΒΕΖΔΓ, ΗΘΚΝΟΜ. καὶ τὸ μὲν ἔχέτω βάσιν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ, τὸ ΗΘΚ τρίγωνον. διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ΑΖ τῷ ΗΘΚ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΕΖΔΓ πρίσμα τῷ ΗΘΚΝΟΜ πρίσματι. χ. 54.

Ο 4

ΚΑ-

- (ο) Κατὰ τὴν λγ. τῷ α, καὶ τὴν κατασκ. (π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Κατὰ τὴν κθ. τῷ α. (σ) Κατὰ τὴν δ. τῷ α. (τ) Κατὰ τὴν λ. τῷ α. (υ) Κατὰ τὴν κθ. τῷ α. (φ) Κατὰ τὴν κς. τῷ α.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Συμπεπληρώσω τὰ ΑΞ, ΚΜ παραλληλεπίπεδα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΘΚ τριγώνῳ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τῷ ΗΘΚ τριγώνῳ, (χ) ἴσον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΘΚ. τὰ ἄρα παραλληλεπίπεδα ΑΞ, ΚΜ ἐπὶ ἴσων βάσεων καὶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν. ἄρα τὸ ΑΞ = ΚΜ. (ψ) ἀλλὰ τῷ μὲν ΑΞ ἡμισυ ἐστὶ τὸ ΑΒΕΖΔΓ πρίσμα, τῷ δὲ ΚΜ, τὸ ΗΘΚΝΟΜ. (ω) τὰ ἄρα ΑΒΕΖΔΓ, ΗΘΚΝΟΜ πρίσματα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.



ΒΙΒΛΙΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Πυραμὶς ἐστὶ χῆμα τερεὸν, ἐπιπέδοις τριγωνικοῖς, οἷον, τοῖς ΖΑΒ, ΖΒΓ, ΖΓΔ, ΖΔΑ περιεχόμενον, ἀπὸ ἐνὸς ὁποιοδήποτε ἐπιπέδου, οἷον τῷ ΑΒΓΔ, πρὸς ἐνὶ σημείῳ τῷ Ζ συνεχές. καὶ τὸ μὲν ΑΒΓΔ ἐπίπεδον Βάσις, τὸ δὲ Ζ σημεῖον Κορυφὴ τῆς πυραμίδος ἐστὶ πίν. ΚΕ'. χ. 1.

Σχηματίζεται δὲ ἡ Πυραμὶς, εἰάν, ληφθέντος τυχόντος ἐπιπέδου, οἷον τῷ ΑΒΓΔ, ἀπὸ τίνος μετεώρου σημείου, τῷ Ζ, ἐπὶ πάσας τὰς κορυφαὺς τῶν τῷ ἐπιπέδῳ γωνιῶν εὐθεῖαν ἐπιζευχθῶσιν, οἷον αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ.
Β'.

(χ) Κατὰ τὴν μα. τῷ α. (ψ) Κατὰ τὴν λα. τῷ ια. (ω) Ἐκ τῆς κη. τῷ ια. ἤλθον.

Β'. Ἐὰν ἀπὸ τινος τῶν ἐν μετεώρῳ σημείῳ, τῷ Α, ἐπὶ τὴν τῷ κύκλῳ ΓΑΔ περιφέρειαν ἐφαπτομένη ἀχθῇ ἢ ΑΓ· καὶ μένοντος τῷ Α σημείῳ, περιενεχθῇ περὶ τὴν περιφέρειαν, καὶ εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἢ μὲν ἐπιφάνεια ἢ παρὰ τῆς εὐθείας καταγραφομένη, **Κωνικὴ** λέγεται· τὸ δὲ σερεὸν τὸ ὑπὸ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ τῷ κύκλῳ περιεχόμενον, **Κῶνος**· καὶ ἢ μὲν εὐθεῖα ΑΓ, πλευρὰ τῷ Κώνῃ· τὸ δὲ σημεῖον Α, **Κορυφή**· ὁ δὲ κύκλος ΓΑΔ, **Βάσις**· ἢ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ κέντρον τῷ κύκλῳ ἐπιζευγνυμένη, ἢ ΑΚ, **Ἀξων**. καὶ εἰάν μὲν ὁ Ἀξων πρὸς ὀρθὰς ἢ τῇ βάσει, ὀρθὸς ὁ Κῶνος καλεῖσθαι (χ. 2.) εἰάν δὲ μὴ, **Πλάγιος** 3.

Γίνεται δὲ ὁ Κῶνος, καὶ ὅταν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ μενέσης πλευρᾶς, τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι.

Γ'. Ἐὰν εὐθεῖαί τις, ἢ ΓΖ, δύο κύκλων ἴσωντε καὶ παραλλήλων καὶ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ὄντων ἐπιπέδῳ, τῶν ΓΓ, ΖΖ, ἐφάπτηται, καὶ περιενεχθῆσα, ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἢ μὲν ὑπὲρ αὐτῆς καταγραφομένη ἐπιφάνεια, **Κυλινδρικὴ** λέγεται· τὸ δὲ ὑπὸ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ τῶν δύο κύκλων περιληφθὲν σερεὸν, **Κύλινδρος**· καὶ ἢ μὲν εὐθεῖα ἢ ΓΖ, πλευρὰ τῷ κυλίνδρῳ· οἱ δὲ ΓΓ, ΖΖ,

ληλόγραμμε μένσης μιας πλευρας, περιενοχθὲν τὸ
παραλληλόγραμμον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν
ἤρξατο φέρεσθαι,

Δ'. Ὅμοιοι Κῶνοι καὶ Κύλινδροι εἰσὶν, ὧν οἵτε ἄζονες
καὶ αἱ διαμέτροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἴσας
περιέχουσι γωνίας.

Ε'. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίς τῷ ΑΓΒ μένσης
τῆς διαμέτρου ΑΒ, περιενοχθὲν τὸ ἡμικύκλιον, εἰς τὸ
αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι,
τὸ περιληφθὲν σφερόν. καὶ Ἐπιφάνεια μὲν τῆς
σφαίρας, ἡ ὑπὸ τῆς περιφερείας τῇ ἡμικυκλίς κατα-
γραφομένη· Κέντρον δὲ τὸ αὐτὸ Κ, ὃ καὶ τῇ ἡμι-
κυκλίς· Ἄζων δὲ ἐστὶν ἡ μένσας ευθεία ΑΒ, περὶ
ἣν τὸ ἡμικύκλιον σφέρεται· Διάμετρος δὲ τῆς
σφαίρας, ευθείά τις διὰ τῷ κέντρῳ ἡγμένη, καὶ
περατωμένη ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφα-
νείας τῆς σφαίρας. χ. 6.

Σ'. Σχῆμα εἰς σχῆμα, ἐπίπεδον εἰς ἐπίπεδον, ἢ σφερόν
εἰς σφερόν ἀπολήγειν, ἢ σχεδὸν ταυτίζεσθαι, λέγεται,
ὅταν ἡ αὐτῶν διαφορὰ ἐλάσσων ἢ πάσης δοθείσης
ποσότητος.

ΠΡΟ-

ἴα ἐν τοῖς κυκλοῖς ὁμοία πολύγωνα πρὸς ἀλλήλα ἐστίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἐξώσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὁμοία πολύγωνα, τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ,· διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔξωσαν αἱ ΑΔ, ΗΛ. λέγω, ὅτι ἐστίν ὡς ΑΒΓΔΕΖ πολύγωνον, πρὸς ΗΘΚΛΜΝ πολύγωνον, ἔτω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΛ τετράγωνον. ϡ. 7.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΒΔ, ΒΖ, καὶ αἱ ΘΛ, ΘΝ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν ταῖς τριγώνοις ΒΑΖ, ΘΗΝ, ἡ μὲν ΒΑΖ γωνία ἴση τῇ ΘΗΝ· ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ΒΑ: ΑΖ:: ΘΗ: ΗΝ· (α) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΖΒ=ΗΝΘ. (β) ἀλλ' ἡ μὲν ΑΖΒ=ΒΔΑ, ἡ δὲ ΗΝΘ=ΘΛΗ. (γ) ἄρα καὶ ἡ ΒΔΑ=ΘΛΗ. ἐν ταῖς τριγώνοις ἔν ΑΒΔ, ΗΘΛ, ἡ μὲν γωνία ΑΒΔ=ΗΘΛ, (δ) ἡ δὲ ΒΔΑ=ΘΛΗ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΒΑΔ λοιπὴ τῇ ΘΗΛ ἴση. ὡς ἄρα ΒΑ: ΑΔ:: ΘΗ: ΗΛ. (ε) καὶ ἐναλλάξ ὡς ΒΑ: ΘΗ:: ΑΔ: ΗΛ. (ς) ἀλλὰ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ, πρὸς πολύγωνον ΗΘΚΛΜΝ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΘΗ. (η) ἄρα πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ πρὸς πολύγωνον ΗΘΚΛΜΝ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΗΛ. εἴτεν ὡς πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ, πρὸς πολύγωνον ΗΘΚΛΜΝ, ἔτω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΛ τετράγωνον. (θ) ο. ε. δ.

ΣΥ.

- (α) Κατὰ τὸν α. ὁρισμ. τῆ σ. (β) Κατὰ τὴν σ. τῆ σ. (γ) Κατὰ τὴν κα. τῆ γ. (δ) Κατὰ τὴν λα. τῆ γ. (ε) Κατὰ τὴν δ. τῆ σ. (ς) Κατὰ τὴν ζ. τῆ ε. (η) Κατὰ τὴν κ. τῆ ε. (θ) Ὡς τὴν ε. σημ. τὴν ἐν ταῖς ὁρισμ. τῆ ε. βιβλ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Ἐκ δὴ τέτε φανερόν, ὅτι καὶ αἱ περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων τῶν εἰς τὰς κύκλους ἐγγεγραμμένων ἀνάλογόν εἰσι ταῖς διαμέτροις τῶν κύκλων, εἴτεν ὡς $AB + BG + ΓΔ + ΔΕ + ΕΖ + ΖΑ : ΗΘ + ΘΚ + ΚΛ + ΛΜ + ΜΝ + ΝΗ :: ΑΔ : ΗΛ$. ἐπεὶ γὰρ ὡς $AB : ΗΘ :: ΑΔ : ΗΛ$, ὡς δέδεικται· καὶ ἔστιν, ὡς $AB : ΗΘ :: AB + BG + ΓΔ + ΔΕ + ΕΖ + ΖΑ : ΗΘ + ΘΚ + ΚΛ + ΛΜ + ΜΝ + ΝΗ$. (ι) ἄρα καὶ $AB + BG + ΓΔ + ΔΕ + ΕΖ + ΖΑ : ΗΘ + ΘΚ + ΚΛ + ΛΜ + ΜΝ + ΝΗ :: ΑΔ : ΗΛ$. (κ)

Λ Η Μ Μ Α Α'.

Ἡ περιμετρος τῶν πολυγώνων τῶν εἰς τὸν κύκλον περιγεγραμμένων τε καὶ ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν τῷ κύκλῳ περιφέρειαν ἀπολήγει· αὐτὰ δὲ τὰ πολύγωνα εἰς τὸν κύκλον.

Ἔσω περὶ τὸν κύκλον ΖΗΘΛΜ περιγεγραμμένον πολύγωνον, τὸ ΑΒΓΔΕ. καὶ ἐπιζευχθεσῶν ἀπὸ τῶν κέντρων Κ ἐπὶ τὰ Α, Ο, Ε σημεῖα τῶν ΚΑ, ΚΟ, ΚΒ, ἐγγεγραφθῶ ὁμοιον πολύγωνον τὸ ΖΗΘΛΜ. λέγω, Α'. ὅτι ἡ περιμετρος τῶν περιγεγραμμένων, ὁμοίως καὶ ἡ τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων εἰς τὴν τῷ κύκλῳ περιφέρειαν ἀπολήγει· Β'. ὅτι καὶ αὐτὰ τὰ πολύγωνα ἀπολήγει εἰς τὸν κύκλον. χ. 8.

ΔΕΙΞΙΣ. ΤΟΤ Α'.

Ἡ ΚΖΑ διχα τέμνει τὴν τε ΒΑΕ καὶ τὴν ΗΖΜ γωνίαν. (λ) ἔστι δὲ ἡ ΒΑΕ = ΗΖΜ, διὰ τὴν τῶν πολυγώνων ὁμοιότητα. ἄρα καὶ ἡ ΒΑΚ γωνία ἴση τῇ ΗΖΚ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΒΚ = ΖΗΚ. τὰ τρίγωνα ἄρα ΚΑΒ,

(ι) Κατὰ τὴν η. τῷ ε. (κ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (λ) Ὅρκ τὴν ἀκρίβειαν τῆς β. πρωτ. τῷ δ. βιβλ.

ἀλλ' ὡς $BA : HZ$ ὅτως ἡ περίμετρος τῆ περιγεγραμμένης, πρὸς τὴν περίμετρον τῆ ἐγγεγραμμένης πολυγώνου. (ξ) ἢ ἄρα τῆ περιγεγραμμένης πολυγώνου περίμετρος, πρὸς τὴν τῆ ἐγγεγραμμένης λόγον ἔχει ὡς ἡ AK πρὸς τὴν ZK . ἀλλ' ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ AK πρὸς τὴν ZK παντὸς δοθέντος λόγου ἐλάσσων γενήσεται, εἰς ἀπειροσθέντα πολύγωνα περὶ τὸν κύκλον περιγεγραφῇ ἢ ἐγγεγραφῇ. ἢ ὁ λόγος ἄρα ὃν ἔχει ἡ περίμετρος τῆ περιγεγραμμένης πολυγώνου, πρὸς τὴν τῆ ἐγγεγραμμένης ἐλάσσων ἔσται παντὸς δοθέντος λόγου. ὅπερ ἐστίν, ὅτι ἡ ὑπεροχὴ καθ' ἣν ἡ περίμετρος τῆ περιγεγραμμένης ὑπερέχει τὴν τῆ ἐγγεγραμμένης ἐλάσσων ἔσται πάσης δοθείσης ποσότητος. ἢ ἄρα περίμετρος τῆ περιγεγραμμένης ἀπολήξει εἰς τὴν τῆ ἐγγεγραμμένης περίμετρον. (ο) πολλῶ μαλλον ἄρα ἑκατέρω τῶν εἰρημένων περιμέτρων εἰς τὴν τῆ κύκλου περιφέρειαν ἀπολήξει, τὴν μεταξύ ἑκατέρας κειμένην.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον $ABΓΔΕ$, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον $ZHΘΛΜ$ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἡ BA πρὸς τὴν HZ . (π) ἀλλ' ὡς $BA : HZ :: AK : ZK$, ὡς δέδεικται, τὸ ἄρα $ABΓΔΕ$ πρὸς τὸ $ZHΘΛΜ$ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἡ AK πρὸς τὴν ZK . ὅπερ ἐστίν, ὅτι τὸ $ABΓΔΕ$ περιγεγραμμένον πολύγωνον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον $ZHΘΛΜ$ λόγον ἔχει ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AK τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZK τετράγωνον. ἀλλ' ὁ λόγος ὃν ἔχει $AK^2 : ZK^2$ ἐλάσσων παντὸς δοθέντος λόγου

- (μ) Κατὰ τὴν δ. τῆ ε. (ν) Κατὰ τὴν ζ. τῆ ε. (ξ) Κατὰ τὴν προλ. συνέπ. (ο) Κατὰ τὸν ε. ἔρισμ. τῆ ιβ. (π) Κατὰ τὴν α. τῆ ε.

γε ἔσται, εἰάν ἀπειροσριθμὰ πολυγώνια περιγεγραφῇ καὶ ἐγγεγραφῇ εἰς τὸν κύκλον. καὶ ὁ λόγος ἄρα ὃν ἔχει τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἐλάσσων ἔσται παντὸς δοθέντος λόγου, τῷ τῶν ἢ ὑπεροχὴ καθ' ἣν τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ὑπερέχει τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσων ἔσται πάσης δοθείσης ποσότητος. τὸ περιγεγραμμένον ἄρα πολύγωνον εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον ἀπολήξει. ὥστε πολλῶν μᾶλλον ἐκάτερον τῶν εἰς τὸν κύκλον ἀπολήξει, τὸν μεταξὺ ἐκατέρω κείμενον.

Λ Η Μ Μ Α Β'.

Εἰάν τὰ περιγεγραμμένα ἢ ἐγγεγραμμένα σχήματα ἀπολήγῃ εἰς ἃ περιγέγραπται, ἢ ἐγγέγραπται, ὃν λόγον ἔχει τὰ περιγεγραμμένα ἢ ἐγγεγραμμένα πρὸς ἄλλα τινὰ, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὰ περὶ ἃ περιγέγραπται, ἢ ἐγγέγραπται.

Νενόηθω σχήματα, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ καλούμενα. καὶ περὶ τὰ Α, Β περιγεγραμμένα ἔσω τὰ Γ, Δ, εἰς ἃ καὶ ἀποληγέτω. ἔσω δὲ ὡς Γ: Δ:: Ε: Ζ. λέγω, ὅτι ἔσται καὶ ὡς Α: Β:: Ε: Ζ. εἰ γὰρ μὴ, τὸ Α πρὸς τὸ Β ἦτοι μείζονα λόγον ἔξει, ἢ περ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἢ ἐλάσσονα. ἐχέτω δὴ Α: Β > Ε: Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ Α: Β > Ε: Ζ, ἄρα Β: Α < Ζ: Ε. (ρ) κενώθω, ὡς Θ: Α:: Ζ: Ε. καὶ δῆλον ὅτι τὸ Θ μείζον ἐστὶ τῷ Β. (σ) ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς Γ: Δ:: Ε: Ζ. (τ) ἄρα καὶ

(ρ) Κατὰ τὴν συνέπ. τῇ α. θεωρ. τῇ μετὰ τὸ ε. βιβλ. (σ) Ἐκ τῆς δ. τῇ ε. δῆλον. (τ) Ἐξ ὑποθ.

καὶ ἀνάπαλιν ὡς $\Delta : \Gamma :: Z : E$. (υ) ὥτε καὶ ὡς $\Theta : A :: \Delta : \Gamma$. (φ) ἀλλὰ τὸ Θ μείζον ὢν τῷ B , μείζον ἐστὶ καὶ τῷ Δ . (τὸ μὲν γὰρ Θ ὑπερέχει τὸ B κατὰ τινὰ ὀρίσμενὴν ποσότητα, τὸ δὲ Δ τὸ B ποσότητι πάσης δοθείσης ἐλάσσονι) καὶ τὸ A ἄρα μείζον τῷ Γ , (χ) εἶπεν τὸ Γ ἔλαττον τῷ A . τὸ περιγεγραμμένον ἔλαττον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. ὅπερ ἄτοπον. ἐκ ἄρα τὸ A πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ E πρὸς τὸ Z .

Ἐχέτω δὴ $A : B < E : Z$. καὶ κείθω πάλιν ὡς $\Theta : B :: E : Z$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $\Gamma : \Delta :: E : Z$, (ψ) ἔσται καὶ ὡς $\Theta : B :: \Gamma : \Delta$. (ω) ἀλλὰ τὸ Θ μείζον ὢν τῷ A , μείζον ἐστὶ καὶ τῷ Γ διὰ τὰς ἡδὴ ῥηθέντας λόγους. ἄρα καὶ τὸ B μείζον τῷ Δ , (α) ὅπερ ἐστὶ τὸ Δ ἔλαττον τῷ B . τὸ περιγεγραμμένον ἔλαττον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. ὅπερ ἄτοπον. ἐκ ἄρα A πρὸς B ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ E πρὸς Z , δεδεικται δὲ, ὅτι ἐὰν μείζονα λόγον ἔχει. ὡς ἄρα $A : B :: E : Z$. ο. ε. δ.

Ἔσω δὲ τὰ Γ, Δ ἐγγεγραμμένα εἰς τὰ A, B , εἰς ἃ καὶ ἀποληγέτω. ἔσω δὲ ὡς $\Gamma : \Delta :: E : Z$. λέγω, ὅτι καὶ ὡς $A : B :: E : Z$. εἰ γὰρ μὴ, τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B ἢτοι μείζονα ἢ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ E πρὸς τὸ Z . ἐχέτω δὴ $A : B > E : Z$. καὶ κείθω ὡς $\Theta : B :: E : Z$. καὶ δῆλον ὅτι τὸ Θ ἔλαττον ἐστὶ τῷ A . (β) ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $E : Z :: \Gamma : \Delta$, (γ) ἔσται καὶ ὡς $\Theta : B :: \Gamma : \Delta$. ἀλλὰ τὸ Θ ἔλαττον ὢν τῷ A , ἔλαττον ἐστὶ καὶ τῷ Γ . ἄρα καὶ B ἔλαττον τῷ Δ . (δ)

τὸ

- (υ) Κατὰ τὴν συνέπ. τῆς ζ. τῷ ε. (φ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (χ) Κατὰ τὴν κ. τῷ ε. (ψ) Ἐξ ὑποθ. (ω) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (α) Κατὰ τὴν κ. τῷ ε. (β) Ἐκ τῶν ἄρσμ. δῆλον. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὴν κ. τῷ ε.

το περιγεγραμμένον ἔλαττον τῶν ἐγγεγραμμένων. ὅπερ
 ἄτοπον. ἔκ ἄρα $A : B \supset E : Z$.

Ἐχέτω δὴ $A : B \subset E : Z$. ἄρα $B : A \supset Z : E$. (ε)
 κείωω ὡς $\Theta : A :: Z : E$. καὶ δὴλον, ὅτι τὸ Θ ἔλατ-
 τον τῷ B . (ζ) ἐπεὶ δὲ ὡς $\Gamma : \Delta :: E : Z$, ἔσται καὶ ὡς
 $\Delta : \Gamma :: Z : E$. (η) ἄρα καὶ ὡς $\Theta : A :: \Delta : \Gamma$. (θ)
 ἀλλὰ τὸ Θ ἔλαττον ὂν τῷ B , ἔλαττόν ἐστι καὶ τῷ Δ .
 καὶ τὸ A ἄρα ἔλαττον τῷ Γ . (ι) τὸ περιγεγραμμέ-
 νον ἔλαττον τῶν ἐγγεγραμμένων. ὅπερ ἄτοπον. ἔκ ἄρα
 $A : B \subset E : Z$. ἀλλὰ δεδεικται, ὅτι ἐδὲ $A : B \supset E : Z$.
 ἄρα ὡς $A : B :: E : Z$. ο. ε. δ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Β'.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ
 τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα τὰ εἰς τὰς κύκλους ἐγγεγραμ-
 μένα, ἀπολήγει εἰς τὰς κύκλους. (κ) ἀλλὰ τὰ ὅμοια
 πολύγωνα τὰ εἰς τὰς κύκλους ἐγγεγραμμένα εἰσὶν ὡς
 τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. (λ) ἄρα καὶ οἱ κύ-
 κλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τε-
 τράγωνα. (μ)

Σ Τ Ν Ε Π Ε Ι Α.

Αἱ δὲ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν,
 ὡς αἱ διαμέτροι. ἐπεὶ γὰρ αἱ περίμετροι τῶν πολυ-
 γώνων τῶν εἰς τὰς κύκλους ἐγγεγραμμένων, εἰς τὰς περι-
 φερείας αὐτῶν ἀπολήγουσιν, (ν) αἱ δὲ περίμετροι πρὸς
 ἄλλη-

- (ε) Κατὰ τὴν συνέπ. τῶν α. θεωρ. τῶν μετὰ τὸ ε. βιβλ. (ζ) Ἐκ
 τῆς δ. τῶν ε. (η) Κατὰ τὴν συνέπ. τῆς ζ. τῶν ε. (θ) Κατὰ
 τὴν ε. τῶν ε. (ι) Κατὰ τὴν κ. τῶν ε. (κ) Κατὰ τὸ α. λήμ.
 (λ) Κατὰ τὴν α. τῶν β. (μ) Κατὰ τὸ β. λήμ. (ν) Κατὰ
 τὸ κ. λήμ.

ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ διάμετροι. (ξ) καὶ αἱ τῶν κύκλων ἄρα περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ τῶν κύκλων διάμετροι. (ο)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ', καὶ Δ'.

Εἰσὶν ἐπιμήκιστοι καὶ μόνον δαλεύουσι τῇ τῆς πέμπτης προτάσεως δέξει. ἥτις καὶ ἀνευ αὐτῶν δειχθήσεται.

ΛΗΜΜΑ Γ'.

Τὰ εἰς τὰς πυραμίδας, τὰς τριγώνους βάσεις ἔχουσας, ἐγγεγραμμένα τε καὶ περιγεγραμμένα πρίσματα, εἰς αὐτὰς ἀπολήγει.

Ἔστω πυραμὶς ἡ ΖΑΒΣ, καὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς εἰς ἴσα μέρη διαμεθεύσης, τὰ ΖΛ, ΛΗ, ΗΣ, περιγεγραμμένα μὲν περὶ αὐτὴν νενοήθω πρίσματα, τὰ ΖΨΩΟΠΛ, ΛΜΤΚΧΗ, ΗΔΕΒΑΣ· ἐγγεγραμμένα δὲ τὰ ΛΠΟΘΡΗ, ΗΧΚΦΓΣ, ἐκβληθεισῶν δὴθεν τῶν μὲν ΨΠ, ΩΟ ἐπὶ τὰ Ρ, Θ σημεῖα, τῶν δὲ ΜΧ, ΤΚ ἐπὶ τὰ Γ, Φ. καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΡΘ, ΓΦ. χ. 9.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΨΡ, ΩΘ ἐπὶ τὰ Ξ, Ν σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΞΝ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ πρίσμα ΖΨΩΟΠΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΠΟΘΡΗ πρίσματι. (π) ἔστι δὲ τὸ ΛΠΟΘΡΗ ἴσον τῷ ΗΡΘΝΞΣ, (ρ) ἄρα καὶ τὸ ΖΨΩΟΠΛ ἴσον τῷ ΗΡΘΝΞΣ. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν
Π πρίσ-

(ξ) Κατὰ τὴν συνίπ. τὴν μετὰ τὴν α. τῇ ιβ. (ο) Κατὰ τὸ β. λῆμ. (π) Κατὰ τὴν λα. τῇ ικ. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτήν.

πρίσμα ΛΜΤΚΧΗ ἴσον τῷ ΗΧΚΦΓΣ, τὸ δὲ ΛΠΟΘΡΗ ἴσον τῷ ΗΡΘΝΞΣ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΟΠΜΤΚΧΡΘ ἴσον λοιπῷ τῷ ΘΡΧΚΦΓΞΝ. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον πρίσμα ΗΔΕΒΑΣ ἴσον τοῖς ΖΨΩΟΠΛ, ΟΠΜΤΚΧΡΘ, καὶ τῷ ΚΧΔΕΒΑΓΦ. ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ, καθ' ἣν πάντα τὰ περιγεγραμμένα πρίσματα ὑπερέχει τὰ ἐγγεγραμμένα ἴση ἐστὶ τοῖς ΖΨΩΟΠΛ, ΟΠΜΤΚΧΡΘ, ΚΧΔΕΒΑΓΦ. αὕτη ἄρα ἡ ὑπεροχὴ ἴση τῷ περιγεγραμμένῳ πρίσματι ΗΔΕΒΑΣ. ἀλλὰ τὸ πρίσμα τὲτο ἐλάττον πάσης δοθείσης ποσότητος γενήσεται, εἰς ἅπερα τὸν ἀριθμὸν μέρη τῆς ΖΣ πλευρᾶς διαιρεθείσης, ἀπεροἀριθμα πρίσματα περὶ τὴν πυραμίδα περιγεγραμμένα τε καὶ ἐγγεγραμμένα νοηθῇ. ἡ ὑπεροχὴ ἄρα καθ' ἣν τὰ περιγεγραμμένα πρίσματα ὑπερέχει τὰ ἐγγεγραμμένα ἐλάσσων ἔσται πάσης δοθείσης ποσότητος. τὰ ἄρα περὶ τὴν πυραμίδα περιγεγραμμένα πρίσματα εἰς τὰ ἐγγεγραμμένα ἀπολήξει. (σ) πολλῷ μᾶλλον ἄρα τὰ τε περιγεγραμμένα περὶ τὴν πυραμίδα πρίσματα καὶ τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς αὐτὴν, μεταξύ αὐτῶν κειμένην, ἀπολήξει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔσαι πυραμίδες, καὶ τριγώνως ἔχουσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ πρίσματα τὰ εἰς τὰς πυραμίδας, τὰς τριγώνως βάσεις ἔχουσαι, ἐγγεγραμμένα τε καὶ περιγεγραμμένα ἀπολήγει εἰς τὰς πυραμίδας. (τ) ἀλλὰ τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πρίσματα πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

(ε) Κατὰ τὴν γ. ὁρίσμ. τῆς ιβ. (τ) Κατὰ τὸ προλ. λῆμ.

ταῖς. (υ) ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔσαι πυραμίδες, ἢ τριγώνες ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔσαι πυραμίδες, καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐξωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες αἱ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ, πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΒΓΔΕ, ΗΘΙΚ, κορυφὰς δὲ τὰ Α, Ζ σημεῖα. λέγω, ὅτι ὡς ΑΒΓΔΕ : ΖΗΘΙΚ :: ΒΓΔΕ : ΗΘΙΚ. χ. 10.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διηρήθω ἡ μὲν ΒΓΔΕ βάσις εἰς τὰ Χ, Φ τρίγωναι ἡ δὲ ΗΘΙΚ, εἰς τὰ Ρ, Τ. καὶ νενοήθωσαν ἐφ' ἐκάστη τριγώνῳ πυραμίδες ἰσοῦψεῖς, ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσιν, αἱ ΑΒΓΕ, ΑΓΔΕ, ΖΗΘΚ, ΖΘΙΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ΑΒΓΕ : ΖΗΘΚ :: Χ : Ρ. (Φ) ὡσαύτως καὶ ὡς ΑΒΓΕ : ΖΘΙΚ : Χ : Τ. ἄρα καὶ ὡς ΑΒΓΕ : ΖΗΘΚ + ΖΘΙΚ :: Χ : Ρ + Τ. (χ) ἀλλ' ὡς ΑΒΓΕ : ΑΓΔΕ :: Χ : Φ. (ψ) ἄρα καὶ ὡς ΖΗΘΚ + ΖΘΙΚ : ΑΓΔΕ :: Ρ + Τ : Φ. (ω) εἴτεν ὡς ΖΗΘΙΚ : ΑΓΔΕ :: ΗΘΙΚ : Φ. ἄρα καὶ ὡς ΑΓΔΕ : ΖΗΘΙΚ :: Φ : ΗΘΙΚ. (α) ἔτι δὲ καὶ ὡς ΑΒΓΕ : ΖΗΘΙΚ :: Χ : Ρ + Τ, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ ὡς (β) ΑΒΓΕ + ΑΓΔΕ : ΖΗΘΙΚ :: Χ + Φ : ΗΘΙΚ, εἴτεν ὡς ΑΒΓΔΕ : ΖΗΘΙΚ :: ΒΓΔΕ : ΗΘΙΚ. ο. ε. δ.

Π 2

ΠΟ.

- (υ) Κατὰ τὴν λβ'. τῆ ια. (φ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ιβ. (χ) Κατὰ τὴν κγ. τῆ ε. (ψ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ιβ. (ω) Κατὰ τὴν ιβ. τῆ ε. (α) Κατὰ τὴν εννίσ. τῆς ζ. τῆ ε. (β) Κατὰ τὴν κγ. τῆ ε.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τῆς Φανερῆς, ὅτι αἱ μὲν ἴσας τὰς βάσεις ἔχουσαι πυραμίδες καὶ ἀνίστα τὰ ὕψη, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη· αἱ δὲ ἀνίστα τὰ τε ὕψη καὶ τὰς βάσεις, ἐν λόγῳ συγκαμίνῳ ἕκτε τῷ ὃν ἔχει ὕψος, πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ τῷ ὃν ἔχει βάσιν πρὸς βάσιν· αἱ δὲ ἴσα τὰ τε ὕψη καὶ τὰς βάσεις, ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. καὶ γὰρ τὰ πρίσματα τὰ ἐγγεγραμμένα τε καὶ περιγεγραμμένα εἰς τὰς τριγῶνας ἔχουσας βάσεις πυραμίδας, εἰς αὐταὺς ἀπολήγει· αἱ δὲ πολυγῶνες ἔχουσαι βάσεις πυραμίδες, εἰς πυραμίδας τριγῶνας ἔχουσας βάσεις διαμερῶνται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Πᾶν πρίσμα τριγῶνον ἔχον βάσιν διαμερεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγῶνας βάσεις ἔχουσας.

Ἐστω πρίσμα, ἔστω μὲν τὸ ΑΒΓ τριγῶνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΖΔΕ πρίσμα διαμερεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγῶνας βάσεις ἔχουσας. χ . 11.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξέχθωσαν αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΒΔ τριγῶνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΔΒ τριγῶνι. (γ) καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τριγῶνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν τῷ ΕΔΒ τριγῶνον, κορυφὴ δὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ. (δ) ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν τὸ ΕΔΒ τριγῶνον,

γον,

(γ) Κατὰ τὴν λδ. τῷ κ. (δ) Κατὰ τὸ προλ. πρίσμα.

νον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι ἥς βάσις μὲν τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἐπεὶ δὲ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ, (ε) καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἡ δὲ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον ἴση ἐδέχθη τῇ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον. ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον. διήρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΖΔΕ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχέσας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Ἐκ δὴ τῆς φανερόν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τῷ πρίσματι, τῷ τὴν βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος αὐτῇ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπειδήπερ καὶ ἕτερόν τι κῆμα εὐθύγραμμον ἔχη ἡ βάσις τῷ πρίσματι, καὶ τὸ αὐτῆς ἀπεναντίον, διαιρεῖται εἰς πρίσματα τριγώνους βάσεις ἔχοντα, ὁμοίως καὶ τὰ αὐτῶν ἀπεναντίον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ἐκ τῆς καὶ τὴν πυραμίδα καταμετρεῖν μανθάνομεν. ἐπεὶ γὰρ καταμετρεῖται τὸ παραλληλεπίπεδον, πολλαπλασιαζόμενον τῷ ὕψει αὐτῷ διὰ τῆς βάσεως (ζ) πᾶν δὲ παραλληλεπίπεδον εἰς δύο ἴσα διαιρεῖται

Π 3

πρίσ-

(ε) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. (ζ) Κατὰ τὸ λῆμ. τὸ μετὰ τὴν κδ. τῷ ια.

καὶ τὸ πρῶτον ἄρα καταμετρήσονται
αὐτὴ διὰ τῆς βάσεως πολλαπλασια-
σάσης πυραμίδος τρίτης μέρος ἐστὶ τῆς πρὸς
βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος αὐτῇ, καὶ
μετρηθήσεται ἄρα καὶ ἡ πυραμὶς, τρι-
μῆρος αὐτῆς πολλαπλασιασθέντος διὰ τῆς
ἐπαλιν, τριτημορίου δηλαδή τῆς βάσεως
τῆς διὰ τῆς ὕψους ἢ τῆς ὕψους διὰ τῆς
τριτημορίου ἀπὸ τῆς γινομένης ληφθέντος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσας
τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμο-
ίων.

καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες αἱ ΗΑΒΓ,
ΘΕΖ. εἰς μὲν εἰσὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ. τρίγωνα,
Η, Θ σημεῖα. λέγω, ὅτι ἡ ΗΑΒΓ πυ-
ραμὶς ὅμοιος τῇ ΘΕΖ. πυραμίδι τριπλασίονα λόγῳ
Γ πρὸς τὴν ΕΖ. πίν. ΚΖ. χ. 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Θω. τὰ ΒΛ, ΕΘ παραλληλεπίπεδα.

ΔΕΙΞΙΣ.

καὶ ΑΒΓ = ΔΕΖ, ἡ δὲ ΗΒΓ = ΘΕΖ,
ΕΘ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ΑΒ : ΔΕ :: ΒΓ :
ΕΘ :: ΑΒ : ΔΕ, καὶ ὡς ΑΒ : ΔΕ ::
ὁμοιον ἄρα τὸ μὲν ΒΜ παραλληλόγραμ-
μα, τὸ δὲ ΒΝ τῷ ΕΡ,
Ε. (1) τὰ τρία ἄρα παραλληλόγραμμα,
Κ τρισὶ τοῖς ΕΠ, ΕΡ, ΕΞ ὁμοιά ἐστιν.
ἀλλὰ

τῇ ια. (9) Κατὰ τὸν 9. ἴσημι. τῇ ια. (1) Ἐκ
ἴσου.

ἄλλα τὰ μετὰ τρία, ΒΜ, ΒΝ, ΒΚ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοια· τὰ δὲ τρία, τὰ ΕΠ, ΕΡ, ΕΞ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοια. (κ) ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΛ σκευὸν τῷ ΕΟ σκευῶ. (λ) τὸ ἄρα ΒΛ πρὸς τὸ ΕΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. (μ) ὥς δὲ ΒΛ πρὸς ΕΟ ἔτως ἢ ΗΑΒΓ πυραμῖς, πρὸς τὴν ΘΔΕΖ πυραμίδα. ἐπειδήπερ ἡ πυραμῖς ἔκτον μέρος ἐστὶ τῷ σκευῶ, διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἡμισυ ὂν τῷ σκευῶ παραλληλεπιπέδῳ, (ν) τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος. καὶ ἡ ΗΑΒΓ ἄρα πυραμῖς, πρὸς τὴν ΘΔΕΖ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἢ ΒΓ, πρὸς τὴν ΕΖ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Καὶ αἱ πολυγῶνες ἄρα ἔχουσι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰς τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. εἰς πυραμίδας γὰρ διαιρεῖνται τριγῶνες ἔχουσαι βάσεις.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Θ'.

Τῶν ἴσων πυραμίδων, καὶ τριγῶνες βάσεις ἔχουσιν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν πυραμίδων τριγῶνες βάσεις ἔχουσιν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσαι εἰσὶν ἐκείνων.

Ἐξῶσαν ἴσαι πυραμίδες, αἱ ΗΑΒΓ, ΘΔΕΖ, τριγῶνες ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφαὶς δὲ τὰς Η, Θ σημῖα. λέγω, ὅτι ὥς ἡ ΑΒΓ βάσις, πρὸς τὴν

Π 4

ΔΕΖ

(κ) Κατὰ τὴν κδ. τῆ ικ. καὶ τὴν μετ' αὐτὴν σημ. (λ) Κατὰ τὸν 3. ὁρισμ. τῆ ικ. (μ) Κατὰ τὴν λγ. τῆ ικ. (ν) Κατὰ τὴν κη. τῆ ικ.

ΔΕΖ βάσιν, ἔτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς HABΓ πυραμίδος ὕψος. εἰάν δὲ ἢ ὡς ABΓ : ΔΕΖ, ἔτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς HABΓ πυραμίδος ὕψος, ἔσται ἡ HABΓ = ΘΔΕΖ. χ. 13.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Συμπεπληρώθω τὰ ΒΛ, ΕΟ παραλληλεπίπεδα.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ HABΓ πυραμὶς τῇ ΘΔΕΖ πυραμίδι, (ξ) καὶ ἐστὶ τῆς μὲν HABΓ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΛ τετραγών, τῆς δὲ ΘΔΕΖ τὸ ΕΟ, ἴσον ἄρα τὸ ΒΛ τῷ ΕΟ. ὡς ἄρα ἡ BM βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, ἔτω τῷ ΕΟ τετραπλὸν τὸ ὕψος, πρὸς τὸ τῷ ΒΛ τετραπλὸν ὕψος. (ο) ἀλλ' ὡς BM : ΕΠ :: ABΓ : ΔΕΖ. (π) ὡς ἄρα ABΓ : ΔΕΖ, ἔτω τὸ τῷ ΕΟ ὕψος, πρὸς τὸ τῷ ΒΛ ὕψος. (ρ) ἀλλὰ τὸ μὲν τῷ ΕΟ ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τῷ ΒΛ τῷ τῆς HABΓ. ὡς ἄρα ἡ ABΓ βάσις, πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, ἔτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς HABΓ πυραμίδος ὕψος.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐπεὶ ὡς ABΓ : ΔΕΖ, ἔτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς HABΓ πυραμίδος ὕψος· (σ) ἐστὶ δὲ ὡς ABΓ : ΔΕΖ :: BM : ΕΠ· (τ) καὶ τὰ τῶν πυραμίδων δὲ ὕψη τὰ αὐτὰ εἰσι τοῖς τῶν παραλληλεπιπέδων· ἄρα ὡς BM : ΕΠ, ἔτω τὸ τῷ ΕΟ ὕψος, πρὸς τὸ τῷ ΒΛ. (υ) ἴσον ἄρα τὸ ΒΛ τῷ ΕΟ. (φ) καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα HABΓ = ΘΔΕΖ. ἔκτον γὰρ μέρος τῶν παραλληλεπιπέδων εἰσὶν αἱ πυραμίδες.

ΠΟ.

(ξ) Ἐξ ὑποθ. (ο) Κατὰ τὴν λδ. τῷ ια. (π) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. καὶ τὴν η. τῷ ε. (ρ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (σ) Ἐξ ὑποθ. (τ) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. καὶ τὴν ε. τῷ ε. (υ) Κατὰ τὴν η. τῷ ε. (φ) Κατὰ τὸ λδ. τῷ ια.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Δῆλον δέ, ὅτι τὰ αὐτὰ καὶ ταῖς πολυγώνους ἐχέ-
σαι βάσεις πυραμίσιν ἀνήκει.

ΛΗΜΜΑ Δ'.

Τῶν πρίσμάτων τῶν πολυγώνους ἐχόντων
βάσεις, καὶ ἐγγεγραμμένων ἢ περιγεγραμ-
μένων περὶ τὰς κυλίνδρους αἱ μὲν ἐπιφάνειαι
εἰς τὰς τῶν κυλίνδρων ἐπιφανείας ἀπολή-
γῃσι, αὐτὰ δὲ τὰ πρίσματα εἰς τὰς κυλίν-
δρους. τῶν δὲ πυραμίδων, τῶν πολυγώνους
βάσεις ἐχουσῶν, καὶ ἐγγεγραμμένων ἢ περι-
γεγραμμένων περὶ τὰς κώνας, αἱ μὲν ἐπιφά-
νεια εἰς τὰς τῶν κώνων ἐπιφανείας, αὐτὰ
δὲ αἱ πυραμίδες εἰς τὰς κώνας ἀπολήγῃσι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μὲν τῆ πρίσματος βάση, πολύγωνος ἔστω, εἰς
τὴν τῆ κυλίνδρου βάση, κύκλον ἔστω, ἀπολήγει· τὸ δὲ
ἀπ' ἐναντίον τῆς βάσεως τῆ πρίσματος πολύγωνον, εἰς
τὸν ἀπεναντίον τῆς βάσεως τῆ κυλίνδρου κύκλον. (Χ)
καὶ αἱ πλευραὶ ἄρα τῆ πρίσματος εἰς τὰς τῆ κυλίν-
δρου πλευρὰς ἀπολήγῃσι, καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια εἰς ὅλην
τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ αὐτὸ τὸ πρίσμα εἰς τὸν κύλινδρον.

Ἡ μὲν τῆς πυραμίδος βάση, πολύγωνος ἔστω, εἰς τὴν
τῆ κώνου βάση, κύκλον ἔστω, ἀπολήγει· (Ψ) ἡ δὲ κορυφή
αὐτῆς τῇ κορυφῇ τῆ κώνου ταυτίζεται. καὶ αἱ τῆς πυραμίδος
ἄρα πλευραὶ εἰς τὰς τῆ κώνου ἀπολήγῃσι, καὶ ὅλη ἡ ἐπιφά-
νεια εἰς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ αὐτὴ ἡ πυραμὶς εἰς τὸν
κῶνον.

Π 5

ΠΟ-

(Χ) Κατὰ τὸ α. λῆμ. τὸ μετὰ τὴν α. πρότ. τῶ ιβ. (Ψ) Κατὰ
τὸ αὐτὸ λῆμ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τήτε φανερόν τῷ τρόπῳ ὃ, τε κύλινδρος καὶ ὁ κῶνος καταμετρηθήσεται. ὁ μὲν δῆθεν, πολλαπλασιασάμεντος τῆ ὕψους αὐτῆς διὰ τῆς βάσεως (α) ὁ δὲ, τῆ τριτημορίου τῆ ὕψους διὰ τῆς βάσεως πολλαπλασιασάμεντος, ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ τῆ ὕψους διὰ τῆς βάσεως πολλαπλασιασάμεντος, καὶ τῆ τριτημορίου ἀπὸ τῆ γινομένης ληφάμεντος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τῆ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψους ἴσον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τῆ τὴν βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος αὐτῇ, καὶ ὕψους ἴσον. (α) ἀλλ' ἢ πυραμὶς ἢ εἰς τὸν κῶνον ἐγγεγραμμένη, ἢ περιγεγραμμένη, εἰς αὐτὸν ἀπολήγει. (β) καὶ ὁ κῶνος ἄρα τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τῆ τὴν βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψους ἴσον. ἀλλὰ τὸ πρίσμα τὸ εἰς τὸν κύλινδρον ἐγγεγραμμένον ἢ περιγεγραμμένον, εἰς αὐτὸν ἀπολήγει. (γ) καὶ ὁ κῶνος ἄρα τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τῆ τὴν βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψους ἴσον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις.

ΔΕΙ.

- (α) Ἡ βῆσις κύκλος ἐστὶ. τίνι δὲ τρόπῳ καταμετρεῖται ὁ κύκλος, ἢ συνίσταται διαλαμβάνει, ἢ μετὰ τὸ δ. θεωρ. τῶν τῆ Ἀρχιμήδους.
(α) Κατὰ τὸ α. πορίσ. τὸ μετὰ τὴν ζ. πρότ. τῆ ιβ. βιβλ.
(β) Κατὰ τὸ προλ. λήμ. (γ) Κατὰ τὸ αὐτὸ λήμ.

Αἱ μὲν πυραμίδες, εἰς τὰς κῶνας, τὰ δὲ πρίσματα, εἰς τὰς κυλίνδρους ἀπολήγουσιν. (δ) αἱ δὲ αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, καὶ τὰ πρίσματα εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. (ε) ἄρα καὶ οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Σ Τ Ν Β Π Ε Ι Α.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι οἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. εἰάν δὲ τὰ τε ὕψη καὶ αἱ βάσεις τῶν κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀνίστα ὥσιν, ἔσεται κῶνος πρὸς κῶνον, καὶ κύλινδρος πρὸς κύλινδρον ἐν λόγῳ συγκειμένῳ ἐκ τε τῶ λόγου, ὃν ἔχει ὕψος πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ τῶ ὃν ἔχει βάση πρὸς βάση. ἐπεὶ δὲ αἱ τῶν κῶνων καὶ κυλίνδρων βάσεις κύκλοι εἰσὶν οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχουσιν, ἢ περ αἱ αὐτῶν διαμέτροι (ζ) καὶ κῶνος ἄρα πρὸς κῶνον, καὶ κύλινδρος πρὸς κύλινδρον λόγον ἔχει συγκειμένον ἐκ τῶ λόγου, ὃν ἔχει ὕψος πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ τῶ διπλασίονος τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Β'.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἐσώσαν ὅμοιοι κῶνοι, οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ. λέγω, ὅτι ὁ ΑΒΓ κῶνος πρὸς τὸν ΔΕΖ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔσώσαν δὴ πρῶτον οἱ κῶνοι ὁμοιοί. (χ. 14.) ὧν ἄξονες, οἱ ΑΗ, ΔΘ.

ΔΕΙ-

(δ) Κατὰ τὰ αὐτὰ λήμ. (ε) Κατὰ τὴν σ. τῆ 1β. καὶ τὴν λβ. τῆ ικ. (ζ) Κατὰ τὴν β. τῆ 1β.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ Κῶνος ΑΒΓ πρὸς τὸν κῶνον ΔΕΖ λόγον ἔχει συγ-
κείμενον ἐκ τῆς λόγου ὃν ἔχει ὕψος πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ
τῆς διπλασίου τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων. (η) ἀλλὰ
τὰ τῶν ὀρθῶν κῶνων ὕψη εἰσὶν οἱ αὐτῶν ἄξονες. ὁ κῶ-
νος ἄρα ΒΑΓ πρὸς τὸν κῶνον ΔΕΖ λόγον ἔχει συγ-
κείμενον ἐκ τῆς λόγου, ὃν ἔχει ΑΗ : ΔΘ, καὶ ἐκ τῆς ὃν
ἔχει $\overline{ΒΓ}^2 : \overline{ΕΖ}^2$. (θ) ἀλλ' ὡς ΑΗ : ΔΘ :: ΒΓ : ΕΖ, διὰ
τὴν τῶν κῶνων ὁμοιότητα. (ι) οἱ λόγοι ἄρα, ἐξ ὧν ὁ
συγκείμενος τρεῖς καὶ ἴσοι. ὁ ἄρα συγκείμενος τριπλα-
σίον ἑνὸς ἐκάστου τῶν ἐξ ὧν σύγκεται. (κ) ὁ κῶνος ἄρα
ΑΒΓ πρὸς τὸν κῶνον ΔΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ
ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται,
ὅτι καὶ οἱ ὅμοιοι κύλινδροι, οἱ ὀρθοὶ, ἐν τριπλασίονι
λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἐξωσαν δὴ οἱ ὅμοιοι κῶνοι ΒΑΓ, ΗΘΚ πλάγιοι.
(χ. 15.) καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΑΓ, ΘΚ διάμετροι
τῶν βάσεων αὐτῶν. καὶ ἀπὸ τῶν Β, Η κορυφῶν τῶν
κῶνων ἤχθωσαν αἱ ΒΙ, ΗΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΙ, ΘΠ.
καὶ δῆλον, ὅτι αἱ ΒΙ, ΗΠ τὰ τῶν κῶνων ὕψη εἰσὶ. καὶ
ἐπεὶ ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΙΔ ΒΠΛ, ἡ μὲν γωνία ΒΙΔ =
ΗΠΛ, (λ) ἡ δὲ ΒΔΙ = ΗΛΠ, (μ) λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΒΙ
ἴση λοιπῇ τῇ ΛΗΠ. ὡς ἄρα ΒΔ : ΗΛ :: ΒΙ : ΗΠ. (ν)
ἀλλ' ὡς ΒΔ : ΗΛ :: ΑΓ : ΘΚ. (ξ) ἄρα ὡς ΒΙ : ΗΠ ::
ΑΓ : ΘΚ. (ο) ἐπεὶ δὲ ὁ κῶνος ΒΑΓ, πρὸς τὸν κῶνον
ΗΘΚ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῆς ὃν ἔχει ὕψος, τὸ
ΒΙ, πρὸς ὕψος, τὸ ΗΠ, καὶ ἐκ τῆς διπλασίου, ὃν
ἔχει

- (η) Κατὰ τὴν προλ. συνέκ. (θ) Ὅρα τὴν ε. σημ. τὴν ἐν τοῖς
ὅρισμ. τῆ ε. βιβλ. (ι) Κατὰ τὸν δ. ὅρισμ. τῆ ιβ. (κ) Κατὰ τὸν
η. ὅρισμ. τῆ ε. (λ) Ὅρθαι γάρ. (μ) Κατὰ τὸν δ. ὅρισμ.
τῆ ιβ. (ν) Κατὰ τὴν δ. τῆ ε. (ξ) Κατὰ τὸν δ. ὅρισμ. τῆ ιβ.
(ο) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε.

ἔχει $ΑΓ:ΘΚ$, εἰτεν ἐκ τούτων ἔχει $ΑΓ^2:ΘΚ^2$. (π) ἔστι δὲ ὡς $ΒΙ:ΗΠ::ΑΓ:ΘΚ$, τετέστιν ἴσοι οἱ τρεῖς λόγοι ἔξ ὧν ὁ συγκεῖμενος ἄρα ὁ κῶνος $ΕΑΓ$, πρὸς τὸν κῶνον $ΗΘΚ$ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΘΚ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ οἱ ἄμφοι κύλινδροι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσι τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Γ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος, πρὸς τὸν κύλινδρον, ὅτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος ὁ $ΑΖ$ ἐπιπέδῳ τῷ $ΗΘ$ τετμήσθω, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, $ΑΒ$, $ΓΖ$, καὶ συμβαλλέτω τῷ $ΕΖ$ ἄξονι κατὰ τὸ $Κ$ σημεῖον. λέγω, ὅτι ὡς ὁ $ΒΗ$ κύλινδρος, πρὸς τὸν $ΗΖ$ κύλινδρον, ὅτως ὁ $ΕΚ$ ἄξων, πρὸς τὸν $ΚΔ$ ἄξονα. ς. 16.

Ἐξω ὁρθὸς ὁ κύλινδρος $ΑΖ$, καὶ ὡς δύο ἀπ' ἀλλήλων κεχωρισμένοι νενοήθωσαν οἱ $ΒΗ$, $ΗΖ$ κύλινδροι.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Ἐπεὶ οἱ κύλινδροι $ΒΗ$, $ΗΖ$ ἴσας βάσεις ἔχουσι τὰς $ΑΒ$, $ΓΖ$, πρὸς ἀλλήλους ἄρα εἰσιν ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη. (ρ) ἄρα ὁ $ΒΗ$ κύλινδρος, πρὸς τὸν $ΗΖ$ κύλινδρον, ὅτως τὸ $ΕΚ$ ὕψος, πρὸς τὸ $ΚΔ$ ὕψος. ἀλλὰ τὰ $ΕΚ$, $ΚΔ$ εἰσιν οἱ ἄξονες. ἄρα ὁ $ΒΗ$ κύλινδρος, πρὸς τὸν $ΗΖ$ κύλινδρον, ὅτως ὁ $ΕΚ$ ἄξων, πρὸς τὸν $ΚΔ$ ἄξονα.

Ἀλλ' ἔξω πλάγιος ὁ $ΑΖ$ κύλινδρος, καὶ ἀπὸ τῶν $Ε$ καὶ $Κ$ σημείων ἤχθωσαν αἱ $ΕΔ$, $ΚΜ$ πρὸς ὁρθὰς ταῖς $ΗΘ$,

(π) Κατὰ τὴν συνίπ. τὴν μετὰ τὴν ικ. τῇ ιβ. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτὴν συνίπ.

ΗΘ, ΓΖ βάσει. καὶ ἐπὶ τῶν κυλίνδρων ΡΗ, ΗΖ ἴσαι εἰσὶν αἱ βάσεις ΗΘ, ΓΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ΒΗ κύλινδρος πρὸς ΗΖ κύλινδρον, ἔτως ΕΛ ὕψος, πρὸς ΚΜ ὕψος. (σ) ἀλλ' ὡς ΕΛ : ΚΜ :: ΕΚ : ΚΔ. (τ) ἰσογάνια γὰρ τὰ τρίγωνα ΕΛΚ, ΚΜΔ. ὡς ἄρα ΒΗ κύλινδρος, πρὸς ΗΖ κύλινδρον, ἔτως ΕΚ ἄξων, πρὸς ΚΔ ἄξονα. (υ).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ὕψη.

Ἐκ τῆς συνεπείας τῆς ἐνδεκάτης προτάσεως αὕτη δέλη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Τῶν ἴσων κῶνων ἢ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκείνοι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Οἱ μὲν κῶνοι εἰς τὰς πυραμίδας, οἱ δὲ κύλινδροι εἰς τὰ πρίσματα ἀπολήγουν. (φ) ἀλλὰ τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ πρισμάτων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν καὶ ὧν πυραμίδων καὶ πρισμάτων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκείνα. (χ) ἄρα καὶ τῶν ἴσων κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκείνοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ', καὶ ΙΖ'.

Μόνον τῇ δείξει τῆς ἐξῆς προτάσεως χρήσιμοι, ἥτις διὰ τῶ ἐπομένῃ λήμματος δείξεσεται.

ΛΗΜΜΑ Ε'.

Οἱ εἰς τὸ ἡμισφαίριον ἐγγεγραμμένοι τε καὶ περιγεγραμμένοι κύλινδροι, εἰς αὐτὸ ἀπολήγουσιν.

Ἐστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ. χ . 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῆς κέντρος Κ κάθετος τῇ διαμέτρῳ ΑΓ καὶ ΚΒ, καὶ τετμήθω εἰς ὅποσα ἐν ἴσα μέρη, τὰ ΚΦ, ΦΗ, ΗΒ. καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Φ, Η, Β ἤχθωσαν τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΡΟ, ΙΛ, ΔΕ. καὶ πεπληρώθω τὰ τε περὶ τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΓ περιγεγραμμένα ὀρθογώνια ΡΓ, ΙΞ, ΔΖ, καὶ τὰ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένα ΠΤ, ΘΝ. καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΔΜ, ΕΝ ἐπὶ τὰ Χ, Ω σημεία.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν τὰ περιγεγραμμένα ὀρθογώνια ὑπερέχει τὰ ἐγγεγραμμένα ἴση ἐστὶ τοῖς ὀρθογώνιοις ΔΖ, ΙΜ, ΞΕ, ΡΣ, ΞΓ. ἐστὶ δὲ τὸ μὲν ΔΖ = ΜΩ, τὸ δὲ ΙΜ = ΠΧ, τὸ δὲ ΞΕ = ΝΤ, οἷς προσθεμένων καὶ τῶν ΡΣ, ΞΓ, ἴσα τῷ ΡΓ. ἡ ὑπεροχή ἄρα, καθ' ἣν τὰ περιγεγραμμένα ὀρθογώνια ὑπερέχει τὰ ἐγγεγραμμένα ἴση ἐστὶ τῷ ὀρθογώνιῳ ΡΓ. ἀλλὰ τὸ ΡΓ ἔλαττον πλάσης δοθείσης ποσότητος γενήσεται, εἰάν, τῆς ΚΒ εἰς ἀπειροσρίθμη διαιρεθείσης μέρη, ἀπειρα τὴν ἀριθμὸν εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΓ ἐγγραφῇ τε καὶ περιγραφῇ ὀρθογώνια. τὰ ἄρα εἰς τὸ ἡμικύκλιον ἐγγεγραμμένα

μένα ὀρθογώνια, εἰς τὰ περιγεγραμμένα ἀπολήγει.
 (ψ) ἄρα πολλῶ μᾶλλον τὰ τε ἐγγεγραμμένα καὶ περι-
 γεγραμμένα περὶ τὸ ἡμικύκλιον ὀρθογώνια εἰς αὐτὸ
 ἀπολήξει, τὸ μεταξύ αὐτῶν κείμενον. περιεγεγνηται
 δὴ περὶ τὴν ΚΒ ἡμιδιάμετρον τὸ ΔΒΓ ἡμικύκλιον σύν
 τοῖς περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένοις τε καὶ ἐγγεγραμμέ-
 νοις ὀρθογώνιοις, ἕως δ' ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο
 φέρεσθαι. ἐκ μὲν ἔν τῃ ἡμικυκλίᾳ, ἡμισφαίριον ἐκ δὲ
 τῶν ὀρθογωνίων, κύλινδρος περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένος
 τε καὶ ἐγγεγραμμένος γίνονται. ἐπεὶ δὲ τὰ ὀρθογώνια
 εἰς τὸ ἡμικύκλιον ἀπολήγει, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν ἄρα γι-
 νόμενοι κύλινδροι εἰς τὸ ἐκ τῆς ἡμικυκλίας γινόμενον ἀπο-
 λήξουσιν ἡμισφαίριον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι
 λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Ἔστω ἡμικύκλια, τὰ ΝΓΙ, ΟΒΠ, ὧν περιεγεγνη-
 τῶν αἱ σφαῖραι γίνονται. λέγω, ὅτι ἡ ἐκ τῆς ΝΓΙ γι-
 νομένη σφαῖρα, πρὸς τὴν ἐκ τῆς ΟΒΠ γινομένην σφαί-
 ραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΑΓ διάμετρος,
 πρὸς τὴν ΗΒ διάμετρον. χ. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Προσαναγεγραφθῶσαν οἱ κύκλοι ΑΝΓΙ, ΗΟΒΠ. (ω)
 καὶ τετμήθω ἡ ΚΓ ἡμιδιάμετρος εἰς ὅποσα ἔν ἴσῃ μέ-
 ρη, ὡσαύτως καὶ ἡ ἡμιδιάμετρος ΟΒ εἰς ἴσα τὸ πλῆ-
 θος τοῖς προλαβῶσι. καὶ τῶν αὐτῶν κατασκευασθέν-
 των, τῶν ἐν τῷ προλαβόντι καταγεράμματι, ἐπεξεύ-
 χθῶσαν αἱ ΓΖ, ΖΑ, ΒΜ, ΜΗ.

ΔΕΙ.

Επεὶ ἡ ΑΖΓ γωνία ὀρθή ἐστίν, (α) ὡς ἄρα ΑΕ:
 ΕΖ:: ΕΖ: ΕΓ. (β) ἡ ἄρα ΑΕ πρὸς τὴν ΕΓ διπλα-
 σίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΓ. (γ) διὰ
 τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΞ πρὸς τὴν ΞΒ διπλασίονα λό-
 γον ἔχει, ἥπερ ἡ ΞΜ πρὸς τὴν ΞΒ. ἀλλ' ὡς ΑΕ: ΕΓ::
 ΗΞ: ΞΒ. (δ) ὅμοια γὰρ μέρη αἱ ΕΓ, ΞΒ τῶν ΑΕ,
 ΗΞ. ἄρα καὶ ὡς ΕΖ: ΕΓ:: ΞΜ: ΞΒ. (ε) ἀλλ' ἡ
 μὲν ΕΓ=ΕΡ, ἡ δὲ ΞΒ=ΞΣ. (ζ) ἄρα καὶ ὡς ΕΖ:
 ΕΡ:: ΞΜ: ΞΣ. οἱ κύλινδροι ἄρα οἱ ἐκ τῶν ὀρθογω-
 νίων ΔΕ, ΛΞ γινόμενοι ὅμοιοι εἰσιν. (η) ὁ κύλινδρος
 ἄρα ὁ ἐκ τῆς ΔΕ, πρὸς τὸν κύλινδρον τὸν ἐκ τῆς ΛΞ
 τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΡ πρὸς τὴν ΞΣ.
 (θ) ἀλλ' ὡς ΕΡ: ΞΣ:: ΑΓ: ΗΒ. (ι) ἄρα ὁ ἐκ τῆς
 ΔΕ κύλινδρος, πρὸς τὸν ἐκ τῆς ΛΞ κύλινδρον τριπλα-
 σίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΗΒ. διὰ τὰ
 αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι ἕκαστος τῶν κυλίνδρων, τῶν
 γινόμενων ἐκ τῶν ὀρθογωνίων, τῶν εἰς τὸ ἡμικύκλιον
 ΝΓΙ ἐγγεγεγραμμένων, πρὸς ἕκαστον τῶν κυλίνδρων, τῶν
 ἐκ τῶν ὀρθογωνίων, τῶν εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΟΒΠ ἐγ-
 γεγεμμένων, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΑΓ
 πρὸς τὴν ΗΒ. ἄρα καὶ πάντες οἱ κύλινδροι, οἱ ἐκ τῶν
 ὀρθογωνίων, τῶν εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΝΓΙ ἐγγεγεγραμμέ-
 νων, γινόμενοι, πρὸς πάντας τὰς κυλίνδρους, τὰς ἐκ
 τῶν ὀρθογωνίων, τῶν εἰς τὸ ΟΒΠ ἐγγεγεγραμμένων, τρι-
 πλασίονα λόγον ἔχουσιν, ἥπερ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΗΒ.

P (κ)

- (α) Κατὰ τὴν λα. τῆς γ. (β) Κατὰ τὴν α. συνέπ. τὴν μετὰ τὴν
 η. τῆς ε. (γ) Κατὰ τὸ β. πᾶρ. τὸ μετὰ τὴν κ. τῆς ε. (δ) Κατὰ τὴν
 η. τῆς ε. (ε) Κατὰ τὸ ζ. θεώρ. τῶν μετὰ τὸ ε. βιβλ. (ς) Ἐκ
 τῆς κατασκευ. (η) Κατὰ τὸν δ. ὀρισμ. τῆς ιβ. (θ) Κατὰ τὴν
 ιβ. τῆς ιβ. (ι) Κατὰ τὴν η. τῆς ε.

(κ) ἀλλ' ἐπειὶ οἱ κυλινδροὶ εἰς τὸ ἡμισφαίριον ἀπο-
 λήγῃσι, τὸ ἐκ τῆς ἡμικυκλίδος ΝΓΙ γινόμενον ἔσται δὲ,
 εἰς τὸ ἐκ τῆς ΟΒΠ ἡμισφαίριον. (λ) ἄρα καὶ τὸ ἡμι-
 σφαίριον, τὸ ἐκ τῆς ΝΓΙ, πρὸς τὸ ἡμισφαίριον, τὸ ἐκ
 τῆς ΟΒΠ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ ἢ ΑΓ πρὸς
 τὴν ΗΒ (μ) ἀλλ' ὥς τὸ ἐκ τῆς ΝΓΙ ἡμισφαίριον, πρὸς
 τὸ ἐκ τῆς ΟΒΠ ἡμισφαίριον, ἔστω ἢ ἐκ τῆς ΝΓΙ σφαῖ-
 ρα, πρὸς τὴν ἐκ τῆς ΟΒΠ σφαῖραν. (ν) ἄρα καὶ ἢ ἐκ
 τῆς ΝΓΙ σφαῖρα, πρὸς τὴν ἐκ τῆς ΟΒΠ σφαῖραν τρι-
 πλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ ἢ ΑΓ, πρὸς τὴν ΗΒ. ὅπερ
 εἶδει δεῖξαι.

(κ) Κατὰ τὴν ε, λ, ς. τῆ ε. (λ) Κατὰ τὸ προλ. λῆμ. (μ) Κα-
 τὰ τὸ β. λῆμ. τὸ μετὰ τὴν α. τῆ ιβ. (ν) Κατὰ τὴν η. τῆ ι.

Τ Ε Λ Ο Σ

ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ





ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΙ.

Ἀριθμητική ἐστὶν ἡ τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς λέγων τε καὶ παθῶν ἐπιτήμη· θεωρητικὴ μὲν, ὡς τὰς αὐτῶν ἐπιθεωρεῖσα λέγες καὶ τὰ πάθη· πρακτικὴ δὲ, ὡς τὸ ὅπως δεῖ τέτοις χρῆσθαι ἐπιτηδεύειν.

Ἀριθμός ἐστὶν ἡ κατ' ἀφαίρεσιν ἔννοια ἢ τὴν ἐνάδα, ἢ τὸ πλῆθος, ἢ τὰ μέρη δηλῶσα τῶν πραγμάτων. ἀριθμοὶ δὲ λέγονται καὶ τινὰ σημεῖα, ἢ χαρακτηριστῆρες τῆτο αὐτὸ ἐμφαίνοντες. οἷον οἱ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. ὧν ὁ μὲν πρῶτος μονὰς λέγεται, καὶ δηλοῖ ἓν· ὁ δὲ δεύτερος, δυὰς, ἢ οὐώ· ὁ δὲ τρίτος, τριάς, ἢ τρεῖα· ὁ δὲ τέταρτος, τετρας, ἢ τέτταρα· ὁ δὲ πέμπτος, πεντάς, ἢ πέντε· ὁ δὲ ἕκτος, ἑξάς, ἢ ἑξ· ὁ δὲ ἑβδομος, ἑβδομάς, ἢ ἐπτάς, ἢ ἐπτά· ὁ δὲ ὀγδοος, ὀγδοάς, ἢ ὀκτώ· ὁ δὲ ἑννάτος, ἑννεάς, ἢ ἑννέα· ὁ δὲ δέκατος, δέκην, ἢ χαρακτηριστὴρ τῆς μηδενὸς δηλω-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εἰσὶ μὲν καὶ ἄλλοι χαρακτῆρες ἀριθμοῦς δηλῶντες, οἷον τὰ ἑλληνικὰ καὶ ῥωμαϊκὰ στοιχεῖα. τοῖς ἐκτεθῆσι δὲ χρώμεθα, ὧν τινὲς μὲν Ἀραβας, τινὲς δὲ Ἰνδοὶ (α) ἐυρετὰς εἰναί φασι, διὰ τὸ δι' αὐτῶν βραδύον ἢ δι' ἄλλαν τὴν ἐποιοῦν ἀριθμὸν ἐμφαίνεσθαι. ἐκ γὰρ συνδήκης ὁ αὐτὸς χαρακτῆρς δεκαπλασίως, ἢ ἑκατονταπλασίως, ἢ χιλιοπλασίως, ἢ ἔτις ἐφεξῆς ἀναλόγως ἢ τιθεταί τόπω, πλείονα δηλοῖ ὢν πρότερον ἐδήλω. οἷον ὁ χαρακτῆρς 1 μόνος, μονάδα ἐμφαίνει. εἰάν δὲ προσγεαφῇ αὐτῷ τὸ μηδενικὸν ἔτις, ὥς ἐν τῷ δευτέρῳ ἐπὶ τὰ ἀριττὰ κῶσαι τόπω, ἔτις ἔτω, 10, δεκάδα· εἰάν δὲ καὶ ἕτερον, ἔτις 100, ἑκατοντάδα· εἰάν δὲ καὶ τρίτον ὁμοίως 1000, μονάδα χιλιάδος· εἰάν δὲ καὶ τέταρτον τῷ αὐτῷ τόπῳ 10000, δεκάδα χιλιάδος· εἰάν δὲ καὶ πέμπτον, οἷον 100000, ἑκατοντάδα χιλιάδος. περαιωθείσης δὲ τῆς πρώτης τῶν σημείων ἐξάδος, εἰάν καὶ ἐβδόμην προσεθῇ τῷ ἐξημένῳ τρόπῳ, οἷον 1000000, μονάδα μυριάδος ἐμφαίνει. εἰάν δὲ καὶ ὄγδον, οἷον 10000000, δεκάδα μυριάδος ὁμοίως καὶ ἑννατον 100000000, ἑκατοντάδα μυριάδος καὶ δέκατον δ', οἷον 1000000000, μονάδα χιλιάδος μυριάδος· καὶ ἐνδικοτον, οἷον 10000000000, δεκάδα χιλιάδος μυριάδος· καὶ δωδέκατον δὲ, οἷον 100000000000, ἑκατοντάδα χιλιάδος μυριάδος. περαιωθείσης δὲ τῆς δευτέρας ἐξάδος, εἰάν ὁμοίως προσκλήται δέκατον τρίτον, ὁ χαρακτῆρς 1, μονάδα διττονίς δηλοῖ· εἰάν δὲ δέκατον τέταρτον, δεκάδα διττονίς, καὶ ἐφεξῆς ἔτις, ὡς καὶ ἐν ταῖς πρότερον ἐξάσιν, ἕως ἢ ἡ τρίτη περαιωθῇ ἐξάς. μετὰ δὲ τὴν τρίτην πάλιν εἰάν καὶ ἄλλο προσεθῇ, ὁ 1, μονάδα

(α) Ὅρα τὸ 1 καὶ τῇ τῷ Οὐλρ. Ἀριθμ.

ἐξάδες γραμμαῖς δύο, τὸ διλλιόνιον δηλέσας· τρεῖς δὲ ἐπὶ τῷ δεκάτῃ ἐνάτῃ, τετέσι τῷ πρώτῃ τῆς πέμπτης, τὸ τετραλλιόνιον σημαίνεσας, ἢ ἔτως ἐφεξῆς. οἷον τὸν προκείμενον 987453218674123590468 ἀριθμὸν ὑποδιαΐειλον μὲν ἔτω. 987^{'''}, 453^{''}, 218['], 674['], 123['], 590['], 468[']· ἀναγνώσθι δὲ ἔτως· ἐννεακόσια ὀγδοήκοντα ἑπτὰ τριλλίονα, τετρακόσια πενήκοντα τρεῖς χιλιάδες, διακόσια δέκα ἢ ὀκτὼ διλλίονα, ἑξακόσια ἐβδομήκοντα τέσσαρες χιλιάδες, ἑκατὸν ἑκοσι καὶ τρία μιλίονα, πετακόσια ἐννεήκοντα χιλιάδες, τετρακόσια ἐξήκοντα ἢ ὀκτὼ. ὡσαύτως ἢ τὸν ἐξῆς· 745^{'''}, 890^{''}, 431['], 678['], 321['], 345['], 712['], 804['], 953['], 148['], 305[']· ἀναγινώσκωμεν ἔτω· ἑπτακόσια τεσσαράκοντα πέντε πενταλλίονα, ὀκτακόσια ἐννεήκοντα χιλιάδες, τετρακόσια τριάκοντα ἢ ἑν τετραλλιόνιον, ἑξακόσια ἐβδομήκοντα ὀκτὼ χιλιάδες, τριακόσια ἑκοσι καὶ ἑν τριλλιόνιον, τριακόσια τεσσαράκοντα πέντε χιλιάδες, ἑπτακόσια δώδεκα διλλίονα, ὀκτακόσια καὶ τέσσαρες χιλιάδες, ἐννεακόσια πενήκοντα τρία μιλίονα, ἑκατὸν ἑκοσι ἢ ὀκτὼ χιλιάδες, τριακόσια ἢ πέντε.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Διὰ τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν τὴν τε ἐνάδα καὶ τὸ πλῆθος τῶν πραγμάτων ἐμφαίνωμεν, πῶς δὲ διὰ τῶν αὐτῶν καὶ τὰ ὀποῖα ἐν ὁλότητι τῶν πραγμάτων μέσθι, ἐν τῷ δευτέρῳ ἐρεῖμεν βιβλίῳ.

Λ Η Μ Μ Α..

Τέσσαρσιν ἅπαντες οἱ ἀριθμοὶ ὑπόκεινται πάθεσι, τῇ προσθέσει, τῇ ἀφαιρέσει, τῷ πολλαπλασιασμῷ, καὶ τῇ διαιρέσει.

Γ'.

Γ'. Ἀριθμὸν δοθέντα ἀριθμῷ δοθέντι προθεῖναι, ἐστὶ τὸ ἄλλον τοῖς δοθεῖσι προσευρεῖν ἴσον. καλεῖσθαι δὲ ὁ εὐρεθεὶς Ἐθροισμα, ἢ Κεφάλαιον.

Δ'. Ἀριθμὸν δοθέντα ἀπὸ ἀριθμοῦ δοθέντος ἀφελεῖν, ἐστὶν ἄλλον εὐρεῖν ἴσον τῇ ὑπεροχῇ, ἣ ὁ ἕτερος τῶν δοθέντων τὸν ἕτερον ὑπερέχει. καλεῖσθαι δὲ ἡ εὐρεθεῖσα ὑπεροχὴ Διαφορά.

Ε'. Ἀριθμὸν δοθέντα δι' ἀριθμοῦ δοθέντος πολλαπλασιάσαι, ἐστὶν ἄλλον εὐρεῖν, τοσάκις τὸν ἕτερον τῶν δοθέντων περιέχοντα, ὡσάκις τὴν μονάδα ὁ ἕτερος. καλεῖσθαι δὲ ὁ μὲν τῶν δοθέντων, Πολλαπλασιαστέος· ὁ δὲ, Πολλαπλασιαστής· ὁ δὲ ἐκ τῆς πολλαπλασιασμῷ προκύπτων, Γινόμενον. Ἡ καὶ ἄλλως· πολλαπλασιασμός ἀριθμῶν ἐστὶ τὸ τοσάκις λαβεῖν τῶν δοθέντων τὸν ἕτερον, ὡσάκις τὴν μονάδα περιέχει ὁ ἕτερος.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ Α΄.

Ὡς ἄρα μονὰς πρὸς Πολλαπλασιασὴν, ἔτω Πολλαπλασιαστέος πρὸς τὸ Γινόμενον.

Ζ'. Ἀριθμὸν δοθέντα δι' ἀριθμοῦ δοθέντος διελεῖν, ἐστὶν ἄλλον εὐρεῖν δηλῆντα ποσάκις ὁ εἷς τῶν δοθέντων τὸν ἕτερον περιέχει. καλεῖσθαι δὲ ὁ μὲν τῶν δοθέντων, Διαιρετέος· ὁ δὲ, Διαιρέτης· ὁ δὲ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτων, Πηλίκον, ἢ Ἐκθέτης.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ Β΄.

Ἡ μονὰς ἄρα πρὸς τὸν Διαιρέτην λόγον ἔχει, ὃν τὸ Πηλίκον πρὸς τὸν Διαιρετέον.

Ζ. Οἱ μὲν ἐπὶ τὴν αὐτὴν μονάδα ἀναφερόμενοι ἀριθμοί, Ὀμογενεῖς, ἢ Ὀμοταγεῖς· οἱ δὲ μὴ, Ἑτερογενεῖς, ἢ Ἑτεροταγεῖς εἰσίν. οἷον ὁμογενεῖς ὁ 24 καὶ ὁ 48, ἑκατέρω αὐτῶν ὥρας δηλῶντες· ἑτερογενεῖς δὲ, εἰ τὲ μὲν ὥρας ἐμφαίνοντος, ὁ ἕτερος λεπτά τῆς ὥρας δηλοῖ.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Α'.

Τὰς δοθέντας ὁμογενεῖς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ, Δ, Ε προσιδέναι, εἴτεν ἀριθμὸν ἐνῆαν ἴσον τοῖς δοθείσι. (Α) 3845 (Β) 267 (Γ) 473 (Δ) 89 (Ε) 5321.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Α

Τετάρχθωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἕτως, ὥστε
 τὰς μὲν μονάδας ὑπὸ τὰς μονάδας, τὰς δὲ δε- Α 3845
 κάδας ὑπὸ τὰς δεκάδας, τὰς δὲ ἑκατοντάδας Β 267
 ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας, καὶ ἐφεξῆς ἕτω κατὰ Γ 473
 σήλην κεισθαι. καὶ εὐθείας ὑποκάτω αὐτῶν ἀχ- Δ 89
 θείσης, (ἵν' ὁ ζητέμενος ὑπ' αὐτὴν γραφῆται, Ε 5321
 καὶ μὴ τοῖς δοθείσι συγχέηται.) ἡ τῆς ἀθροίσεως ἀρχὴ ἀπὸ
 τῶν μονάδων γινέσθω ἕτως· ἐν συν ἑννέα συνισῶσι δέκα, καὶ
 τριῶν προσιδεμένων, δεκαετία ἀναφύει, ἔτι δὲ ἑπτὰ προ-
 σαθροισόμεναι, εἰκοσι γίνονται, καὶ πέντε προσκειμένων,
 εἰκοσιπέντε καθίστανται. ἐπεὶ δὲ ὁ 25 ἐκ δύο σύγκει-
 ται χαρακτηριστῶν, ὧν ὁ μὲν, ὁ 5, μονάδας δηλοῖ· ὁ δὲ,
 ὁ 2, δεκάδας· ὁ μὲν 5 ἐν τῷ πρώτῳ δεξιόθεν ὑπὸ τὴν
 γραμμὴν καὶ ὑπ' αὐτὰς τὰς τῶν δοθέντων ἀριθμῶν μο-
 νάδας γεγραφθῶ τόπω· ὁ δὲ 2 προσιδέσθω τῇ ἐγγύς
 τῶν δοθέντων ἀριθμῶν σήλῃ τῶν δεκάδων. καὶ ἐπει-
 δὴ αὐταὶ προσαθροισόμεναι, ὧ ἥδη εἴρηται τόπω,
 27 γίνονται, προσιδεμένων δὲ καὶ τῶν 2 εἰρημένων, 29
 ἀναφύουσιν, εἴτεν 2 ἑκατοντάδες καὶ 9 δεκάδες, αἱ
 μὲν

μὲν ἔν 9 δεκάδες ἐν τῷ δευτέρῳ τόπῳ ἐγγυὲς τῇ 5 γε-
γράφωσαν· αἱ δὲ 2 ἑκατοντάδες, τῇ ἐγγυὲς τῶν δο-
θέντων ἀριθμῶν σήλη τῶν ἑκατοντάδων προσκείδωσαν.
καὶ ἐπεὶ 17 εἰσὶν αὐταί, τῶν 2 προσκειμένων, 19
καθίστανται, ἥτοι χιλιάς 1 καὶ 9 ἑκατοντάδες. ἔκον αἱ
μὲν 9 ἑκατοντάδες ἐν τῷ τρίτῳ γεγράφωσαν τόπῳ· ἡ δὲ
1 χιλιάς, τῇ ἐγγυὲς τῶν χιλιάδων σήλη προσκείδω,
καὶ αἱ προκύπτουσαι 9 χιλιάδες ἐν τῷ τετάρτῳ γραφ-
θήτωσαν τόπῳ. λέγω ἔν τὸν εὐρεθέντα ἀριθμὸν Ζ εἶναι
τὸν ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Οἱ εὐρεθεῖς Ζ ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατον-
τάδων, καὶ χιλιάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν σύγκειται, ὡς
ἐκ τῆς πράξεως ὀφλόν. ἴσως ἄρα τοῖς δοθεῖσιν ὁ Ζ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Τὸς δοθέντας ὁμογενεῖς τε καὶ ἑτερογενεῖς ἀ-
ριθμοὺς προσαφροῖται, ἔτιεν ἀριθμὸν εὐρεῖν
ἴσον πᾶσι τοῖς δοθεῖσι.

Δεῖ δὲ δεδωμένον εἶναι, τετέστι γνωστὸν τὸ, ἵπποσαι
τῶν ἐλασσόνων ἀριθμῶν μονάδες, μίαν τῶν μειζόνων συ-
νισῶσι μονάδα.

Ἐξωσαν ἔν οἱ δοθέντες οἱ Α, Β, (Α) 8 (Β) 13 (Γ) 21
Γ, Δ, καὶ οἱ Ε, Ζ, Η, Θ, (Δ) 5 (Ε) 17 (Ζ) 20
καὶ οἱ Ι, Κ, Λ, Μ, καὶ 60 μὲν (Η) 19. (Θ) 18 (Ι) 48
μονάδες τῶν Ι, Κ, Λ, Μ, μί- (Κ) 16 (Λ) 30 (Μ) 38
αν τῶν Ε, Ζ, Η, Θ συνισά-
σασαν 24 δὲ τῶν αὐτῶν Ε, Ζ, Η, Θ, μίαν τῶν Α, Β, Γ, Δ,
ἔτιεν οἱ μὲν ἡμέρας, οἱ δὲ ὥρας,
οἱ δὲ λεπτά ἐμφανέτωσαν.

ἡμέρας	ὥρας	λεπτά
8	17	48
13	20	16
21	19	30
5	18	38

(Ν) 50 4 12

P 5

ΠΡΑΚ-

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Γεγραφθῶσαν οἱ ὁμογενεῖς ὑπὸ τῆς ἑαυτῶν ὁμογε-
νεῖς ἢ ἐν τῷ προλαβόντι προβλήματι εἴρηται τάξει.
ἢ εὐρεθῇ τὸ τῶν ἐλαχιστοτέρων Κεφάλαιον, ὑπ' αὐ-
τῶν τῆς ἀρχῆς τῆς ἀθροίσεως γενομένης. ἐπεὶ ἔν τῷ το-
ῖσιν 132, ἦτοι δις ἐξήκοντα σὺν 12, δις δὲ 60 λεπ-
τά, 2 ὥραι εἰσὶ, τὰ μὲν 12 ὑπὸ τὰ λεπτά γε-
γραφθῶ ὁ δὲ 2 ταῖς ὥραις προσκείσθω. συναθροισθῶ-
σων δὲ ἢ τῶν ὥρων, ἐπειδὴ τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν ἴσον
76, ἦτοι τῷ τρεῖς 24 καὶ ἔτι 4· ὁ μὲν 4 ὑπὸ τὰς
ὥρας κείσθω· ὁ δὲ 3, ταῖς ἡμέραις προσιδέσθω. ἢ τῶν
ἡμερῶν ἔν προσαθροισθῶσων, καὶ τῇ Κεφαλαίᾳ αὐτῶν
50 ὑπ' αὐτὰ γραφέντος, ὁ ἀριθμὸς N ὁ ζητέμενος ἔσται.

Ἡ δ' αἴτις ἔκτε τῆς πράξεως καὶ ἐκ τῆ προλαβόν-
τος προβλήματος δῆλη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

Ἀριθμῶν δύο δοθέντων ὁμογενῶν, τῶν Α
καὶ Β, τὸν ἐλάσσονα ἀπὸ τῆ μείζονος ἀφε-
λεῖν. ὃ ταυτὸν ἔστι, τὴν τέτων διαφορὰν εὐ-
ρεῖν.

(Α) 9313 (Β) 38506

Γεγραφθῶ ὑπὸ τὸν μείζονα Β ὁ (Β) 38506
ἐλάσσον Α ἢ ἐν τῷ πρώτῳ προβλή- (Α) 9313
ματι εἴρηται τάξει. ἢ ἀρχῆς ἀπὸ (Γ) 29193
τῶν μονάδων γενομένης, ἀφηρέθῶσαν αἱ 3 μονάδες τῇ
ἐλάσσονος ἀπὸ τῶν 6 τῇ μείζονος, ἢ λοιπὰ αἱ 3 ὑπὸ
τὴν τῶν μονάδων σήλην γεγραφθῶσαν. ὡσαύτως καὶ
ἢ μία δεκάς ἀπὸ τῶν δεκάδων. καὶ ἐπεὶ ἑδεμίαν δε-
κάδα ὁ μείζων ἔχει, (τὸ μηδενικὸν γὰρ σημεῖον ἐν τῷ
τῶν δεκάδων αὐτῇ τόπῳ κεῖται.) εἰλήφθω μία μονάς
ἀπὸ τῆ ἐγγυς χαρακτῆρος, τῇ 5, ἥτις μονάς ἑκατον-
τάδος

τάδος ἴσα, δέκα δεκάσιν ἴση ἐστὶ. τῆτο δὲ ποιητέον ἰσάκεις ἀπὸ τῆ ἥττονος χαρακτῆρος τὸν μείζονα δεοὶ ἀφελεῖν. ἀφηρεῖσθαι ἔν η μία δεκάς ἀπὸ τῶν 10, ἢ ἡ διαφορά 9 ἐν τῷ τῶν δεκάδων γεγραφθῶ τόπῳ ὁμοίας αἱ 3 ἑκατοντάδες ἀπὸ τῶν 4, (ἐχὶ ἀπὸ τῶν 5, ἐπειδὴ εἰληπται ἡδὴ ἀπ' αὐτῶν μία, ὡς δέκα ἐπιλογισθεῖσαι δεκάδες.) ἢ λοιπὴ ἡ μία ἐπὶ τὸν τῶν ἑκατοντάδων γεγραφθῶ τόπον. πάλιν ἐπειδὴ ὁ χιλιάδων χαρακτήρ, ὁ 8, ἥττων τῆ 9, εἰληφθῶ ἐκ τῆ ἐγγύς 3 μονάς, ἥτις δεκάδας χιλιάδων ἐμφαίνουσα, δέκα χιλιάσιν ἴση ἐστὶ. ταύτης δὲ ταῖς 8 προσεθείσης, ἀπὸ τῶν ἀναφυομένων 18 ἀφηρεῖσθαι αἱ 9, ἢ αἱ λοιπαὶ 9 ἐν τῷ τῶν χιλιάδων γεγραφθῶσαν τόπῳ. ἐπεὶ δὲ ὁ ἐλάσσων Α δεκάδας χιλιάδων 2 περιέχει, γεγραφθῶσαν ἐν τῷ τῶν δεκάδων τῶν χιλιάδων τόπῳ αἱ ἐναποληφθεῖσαι 2, αἱ ἐν τῷ Β. λέγω ἔν τὸν Γ εἶναι τὸν ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ Γ ταῖς ὑπεροχὰς περιέχει τῶν μονάδων, δεκάδων, καὶ ταῖς τῶν ἐξῆς χαρακτῆρων τῆ Α καὶ Β, ὡς ἐκ τῆς πράξεως δῆλον. ὁ Γ ἄρα ἡ διαφορά ἐστὶ τῶν Α καὶ Β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἦττονος ὄντος τῆ χαρακτῆρος, ἀφ' ἧς δεοὶ τὸν μείζονα ἀφελεῖν, εἰάθαι μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν, τὸν μὲν 5 ἢ ἡ μονὰς εἰληφθῇ μὴ ἀπομεμειωμένον μονάδος ἐπιλογισθῆναι, τὴν δὲ ἀπ' αὐτῆς ληφθεῖσαν μονάδα τῷ ὑπ' αὐτὸν προσιδέσθαι, ἢ ἔως αὐτὸν ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρεῖν. εἰν τὸν 5 ἔχῃ ὡς 4, ἀλλ' ὡς 5 ἐπιλογισόμενοι, τὴν μονάδα σὺν τῷ 3, εἶπεν τὸν 4 ἀπὸ τῆ 5 ἀφαιρέσει προνοητικῶς τῆτο ποιῶντες, ὅπως ἂν μὴ ἐπιλάθοντο ποτε, ὁρῶντες τὸν 5, τῆς ἀπ' αὐτῆς ληφθείσης

σης μονάδος. ἐστὶ δὲ ταῦτον τὸ ἀφελεῖν τὸν 3 ἀπὸ τῆς 4 τῶν 4 ἀπὸ τῆς 5.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Ἀριθμῶν δύο δοθέντων τῶν Α καὶ Β ἐξ ἑτεροταγαῶν συγκειμένων, ἀπὸ τῆς μείζονος τὸν ἐλάσσονα ἀφελεῖν, ἥτοι τὴν αὐτῶν προσευρεῖν διαφοράν.

Δεῖ δὲ γνωστὸν εἶναι τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῶν ἐλασσόνων ἀριθμῶν, ἐξ ὧν ἡ τῶν μείζονων μονὰς σύγκεται.

ἡμέρ. ὥρ. λεπτ. ἡμέρ. ὥρ. λεπτ.

(Α) 14 6 15 (Β) 7 22 52

ΠΡΑΚΤΕΑ.

(Α) 14 6 15

Τεταχθῶ μὲν ὁ (Β) 7 22 52

ἐλάσσων Β ὑπὸ τὸν (Γ) 6 7 23

Α, ὡς ἐν τῇ β'. καὶ α. προβλήματι εἴρηται. γεγονέναι δὲ ἡ ἀφαίρεσις ὡς ἐν τῷ προλαβέντι προβλήματι, παρατηρηθείσης τῆς ποσότητος τῶν μονάδων εἰς ἣν αἱ τῶν μείζονων ἀριθμῶν μονάδες ἀναλύονται. οἷον ἐπεὶ δὴ ὁ 52 μείζων τῆς 15, καὶ λαβεῖν δεῖ ἀπὸ τῆς 6 μίαν μονάδα προσθησομένην τῷ 15, ὅπως αὖν ὁ 52 ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρεθῇ, ἥτις δὴ ἴση 60, (μία γὰρ ὥρα εἰς 60 λεπτά ἀναλύεται.) ἀφαιρετέον τὸν 52 ἀπὸ τῆς 75, τὸ δὲ λοιπὸν 23 ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν γραπτέον. ὡσαύτως ἐπεὶ δὴ ὁ 22 μείζων τῆς 6, καὶ μία μονὰς τῶν ἐγγύς 14 ἴση 24, (μία γὰρ ἡμέρα εἰς 24 ἀναλύεται ὥρας.) ἀφαιρετέον ἢ τὸν 22 ἀπὸ τῆς 29, ἢ τὸν 23 ἀπὸ τῆς 30, καὶ τὸ λοιπὸν 7 ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν καὶ ὑπὸ τὰς τῶν ὥρῶν μονάδας γραπτέον. ἀφαιρεθέντος δὲ καὶ τῆς

Αναγραφέντος τὰς πει-
 ρῶν τετραγώνου, (χ. 1.) τετ-
 ρηθῶσαν ὡς ἐννέα ἴσα μέ-
 ρη δυὰ τῶν συμπίπτουσιν
 αὐτῇ πλευρῶν. ἢ ἀπὸ τῶν
 τεμνῶν ἐκατέρωθεν τῶν λοιπῶν
 πλευρῶν παραλλήλων ἀχ-
 θαισῶν, ὁμοθέκοντος ἢ ἐν
 τετραγωνίῳ προκύψουσιν.
 ἐν τοῖς ἐννέα τῶτων τοῖς
 ἀνωτάτοις, ὡσαύτως ἢ ἐν

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

τοῖς τῇ ἀριστερᾷ τῶν τῶ τετραγώνου πλευρῶν προσκει-
 μένοις αἱ μοναδικοὶ γεγραφθῶσαν χωραυτικῆς. ἢ προ-
 σεδῆτω τῷ 2 ὁ 2, ἢ τὸ κεφάλαιον 4 ἐν τῷ τετρα-
 γωνίῳ τῷ ὑπὸ τὸν 2 γεγραφθῶ. πάλιν τῷ 2 προσ-
 κείσθω ὁ 4, ἢ τὸ κεφάλαιον 6 ἐν τῷ ὑπὸ τὸν 4
 τετραγωνίῳ γεγραφθῶ. καὶ ὕτως ἐφεξῆς τῷ 2 τὸ
 προκύπτον προσιδέτω κεφάλαιον ἕως 8 ὅλη ἡ δευτέ-
 ρα τῶν τετραγωνίων πληρωθῇ σῆλη. ὁμοίως ὁ 3 τῶ 3
 συναπτέτω, καὶ τὸ κεφάλαιον 6 ὑπὸ τὸ τετραγωνί-
 ον τὸ ὑπὸ τὸν 3 γεγραφθῶ. καὶ πάλιν ὁ 3 τῶ 6
 προσιδέτω, ἢ τὸ κεφάλαιον 9 ὑπὸ τὸν 6 γεγραφθῶ.
 τὸ αὐτὸ δὲ γινέτω ἕως 8 ἢ ἡ τρίτη τῶν τετρα-
 γωνίων πληρωθῇ πάλιν. καὶ ὁ 4 τῶ 4 καὶ ὁ 5 τῶ 5

Ὁ ἔτω κατεσκευασμένος πίναξ πάντα περιέχει τὰ γινόμενα ἐξ ἐκάσθ τῶν μοναδικῶν χαρακτηριστῶν δι' ἐκάσθ πολλαπλασιασθέντος. οἷον, ἡ μὲν δευτέρα στήλη πάντα τὰ ἐκ τῆ 2 διὰ τῆ 1, 2, 3, 4, καὶ τῶν ἐξῆς ἀχρι τῶν 9 πολλαπλασιασθέντος· ὡσαύτως ἡ τρίτη, τὰ ἐκ τῆ 3, καὶ ἡ τετάρτη τὰ ἐκ τῆ 4, καὶ ἐφεξῆς αἱ λοιπαὶ τὰ ἐκ τῶν ἐφεξῆς διὰ τῶν αὐτῶν περιέχουσιν. ἔνθεντοι καὶ διὰ μνήμης τῶτον ἔχειν πάνυ ἐπωφελές. ἄλλως μὲν γὰρ ὅσας αὖ τὰς δοθέντας ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσαι βελώμεθα, πρὸ ὀφθαλμῶν δεῖ αὐτὸν τινεῖναι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5'.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν Α διὰ τῆ δοθέντος Β πολλαπλασιάσαι.

(Α) 3604 (Β) 273.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

1. Γεγραφέτω ὁ πολλαπλασιαστὴς Β ὑπὸ (Α) 3604
τὸν πολλαπλασιαστὴν Α ἔτως, ἄς (Β) 273
ταῖς μὲν μονάδας ὑπὸ ταῖς μονά- (Γ) 10812
δας, ταῖς δὲ δεκάδας ὑπὸ ταῖς δε (Δ) 25228
κάδας κειῖται, καὶ ἐφεξῆς ἔτως. (Ε) 7208
(Ζ) 983892

2. Ἐυθείας ἀχθείσης, πρῶτον διὰ τῆ χαρακτηριστῆος τῶν μονάδων, εἶτα διὰ τῆ τῶν δεκάδων, καὶ ἐφεξῆς διὰ τῶν λοιπῶν ἀπάντων τῆ πολλαπλασιαστῆς χαρακτηριστῶν ἕνα ἕκαστον τῆ πολλαπλασιαστῆς πολλαπλασιάσον. καὶ ἐπεὶ ὁ 4 διὰ τῆ 3 πολλαπλασιασθεὶς ταύτῃ ἐστιν εἰπεῖν ὁ 4 τρεῖς λευθεῖς, τὸν 12 παραγεῖ, τὸν μὲν 2 ὑπὸ τὴν εὐθείαν, ὑπ' αὐτὴν δὴθεν τὴν τῶν μονάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν στήλην γραφόν.

τῶν ἐκ τῶν δεκάδων Γινόμενα αὐτὴν προσῆλθε. ἔπειτα δὲ τὸ
 ἐξ ἑνὸς διὰ τῆς 3 πολλαπλασιασθέν, ἐξ ἑνὸς ἀποδίδωσι,
 τὴν περὶ ἡξήκοντα μίαν δεκάδα ἐν τῷ τῶν δεκάδων
 γράφον τόπῳ. ἢ τὸν 6 δὲ διὰ τῆς 3 πολλαπλασι-
 ασας, τῆς Γινόμενης 18, τῆς 18 ἑκατοντάδας ἐμ-
 φαίνοντος, εἴτεν 8 ἑκατοντάδας καὶ μίαν χιλιάδα,
 τὸν μὲν 9 ἐν τῷ τῶν ἑκατοντάδων τόπῳ γράφον,
 τῆς δὲ μιᾶς χιλιάδος μνημόνευε, ὅπως ἂν τῷ ἐκ
 τῶν χιλιάδων Γινόμενῳ προσῆλθε. ὡσαύτως καὶ τῆς
 3 διὰ τῆς 3 πολλαπλασιασθέντος, καὶ τῷ Γινόμε-
 νῳ 9, χιλιάδας ἐμφαίνοντι, τῆς μιᾶς προσεθείσης,
 τὰς 10 χιλιάδας ἐν τῷ ἰδίῳ γράφον τόπῳ.

3. Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ πολλαπλασιάσας τὸν 7, τὸν τὰς
 δεκάδας τῆς πολλαπλασιασθῆ παριζῶντα δι' ἑνὸς ἐκά-
 στε τῶν τῆς Α χαρακτῆρων. ἴσμεν δὲ ὅτι τὸ Γινόμε-
 νον ἐκ τῶν 4 καὶ 7 δεκάδας 28 ἐμφαίνει, εἴτεν 8
 δεκάδας καὶ 2 ἑκατοντάδας. τὸν μὲν ἔν 8 ἐν τῷ
 τῶν δεκάδων τόπῳ γραπτέον, τὸν δὲ 2 ταῖς ἑκα-
 τοντάσιν ἐπαθροισέον. ὡσαύτως καὶ τῆς 2 διὰ πάν-
 των πολλαπλασιασθέντος, τὸ πρῶτον Γινόμενον, εἴτεν
 τὸ ἐκ τῶν 2 καὶ 4 ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας τακτέον,
 τὰ δὲ ἐξ ἧς γινόμενα ἐν τοῖς ἰδίῳ τόποις.

4. Ἐπαθροίσον (κατὰ τὸ 1. πρὸ βλ.) πάντας τὰς
 ἐκ τῶν πολλαπλασιασμῶν παραχθέντας ἀριθμούς,
 ἦτα τὰς Γ, Δ, Ε. λέγω δὴ ὅτι τὸ τέτων Κεφάλαιον,
 τετέστιν ὁ Ζ ὕστατον τὸ ζητούμενον Γινόμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ μὲν Γ πάντα τὰ Γινόμενα περιέχει τῶν τῆς Α
 χαρακτῆρων διὰ τῶν τῆς Β μονάδων πολλαπλασιασθέν-

δηλον.) οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα πάντα τὰ Γινόμενα περιέχουσι τῶν τῶ Α καὶ Β χαρακτηριστῶν. ἀλλὰ τοῖς Γ, Δ, Ε ἴσος ὁ Ζ. (κατὰ τὸ 1. πρόβλ.) ὁ Ζ ἄρα τὸ Γινόμενόν ἐστι τῶν Α καὶ Β. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τῶν εἰρημένων ῥαδίον κατιδῶν, ὅτι τὸ πολλαπλασιάζειν, προσιθῆναι ἐστὶ διὰ συντομωτέρας μεθόδου, εἰάν γὰρ τὸν πολλαπλασιαστὸν Α ποσάνις, ἢ ἐν τῷ α. πρόβλ. εἰρηται τάξι, γραφῆς, ὁσάνις, ἢ μονάς ὑπὸ τῶ πολλαπλασιαστῶ περιέχεται, εἴτεν 273, εἴτα τὰ γραφέντας ἀριθμὸς ἐπαθροίσῃς, τὸ προκύπτον Κεφάλαιον ἴσον ἔσται τῷ Γινόμενῳ Ζ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐὰν οἱ πολλαπλασιαστέοι καὶ ἑτεροταγεῖς περιέχωσι, τὲς ὁμογενεῖς διὰ τῶν ὁμογενῶν πολλαπλασιασόν, καὶ τὰ Γινόμενα κατ' ἰδίαν γράψον, τῷ αὐτῷ ὅθεν τρώπῳ, ᾧ καὶ τὲς ἅπαντα ἀπ' ἀλλήλων διακεκλιμένες πολλαπλασιάζεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν Α διὰ τῶ δοθέντος Β διελῶν, εἴτεν ἀριθμὸν εὐρεῖν ἐμφαίνοντα ποσάνις ὁ Διαιρετέος Α τὸν Διαιρέτην Β περιέχει.

Ἔστω πρῶτον ὁ Διαιρέτης Β (Α) 3804 (Β) 5
εἰς ὁποιοσὺν τῶν μοναδικῶν χαρακτηριστῶν. (Α) 3804 (Β) 5

35 (Γ) 7604 5

ΠΡΑΚΤΕΑ

-30

1. Δύω εὐθειῶν ἀχθισῶν, τὴν
τυχεῖσαν περιεχουσῶν γωνίαν,
ἐν αὐτῇ κείθω ὁ Διαιρέτης Β. καὶ εἰ μὲν ὁ ἐν τοῖς

30

- - 4

9

ἀξι-

ἀριστεροῖς πρῶτος τῷ Διαρετέε χαρακτηρισῆς ἴσος, ἢ μείζων ἢ τῷ Διαρετέε, σκέπτε ποσάνις αὐτὸν περιέχει· εἰ δ' ἐλάσσων, ποσάνις αὐτός τε ὁ πρῶτος καὶ ὁ ἐγγύς δεύτερος αὐτὸν περιέχουσιν καὶ τὸν τῷτο ἐμφαίνοντα ἀριθμὸν ὑπὸ τὴν ἑτέραν τῶν εὐθειῶν τὴν ἐριζόντιον σημείωσον, οἷον ἐπὶ τῶν προκειμένων ἀριθμῶν ἐπεὶ ὁ 3 τῷ 5 ἐλάσσων, ὁ δὲ 38 ἔπλεον ἢ 7 τὸν 5 περιέχει, τὸν 7 ὡς τῷ Πηλίκῳ μέγεθος ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν θῆς.

2. Διὰ τῷ εὐρεθέντος 7 τὸν Διαρετέην πολλαπλασιάσας, καὶ τὸ Γινόμενον 35 ὑπὸ τὸ 38 τάξας, καὶ ἀφελὼν αὐτὸ ἀπ' αὐτῆς, τὸ λοιπὸν 3 σημείωσον.
3. Καταγαγὼν τὸν ἐγγύς τῷ παρ' ᾧ ἡ ἀφαίρεσις ἐγένετο χαρακτηρισῆς, ἔσται τὸ μηδενικὸν σημείον, καὶ πλησίον τῷ λοιπῷ 3 γράψας, ὅσα ὁ 1. καὶ 2. εἰσηγῆται ἀριθ. ποίει καὶ ταῦτα, ὥς ἂν πάντας τὰς τῷ διαρετέε καταγωγὰς χαρακτηρισῆας. ἐπεὶ δὲ ὁ ἑκάστος 4 ἔθ' ἀπαξ τὸν 5 περιέχει, τὸ μηδενικὸν ὡς τέττε δηλωτικὸν ἐν τῷ πηλίκῳ γράψον.
4. Ὅταν, τῆς διαμετρώσεως ἔτω περαιωθείσης, ἐναπολειφθῶσι τινες τῷ Διαρετέε χαρακτηρισῆες, μηκέτι τὸν Διαρετέην περιλαμβάνοντες, ὡς ὁ 4, τὸν δὲ γράφονταί ἔτσι τὸν τρόπον, $\frac{4}{5}$ κλάσματα καλέμενοι, περὶ ὧν ἐν τῷ ἐξῆς ἐρῶμεν ⁵ βιβλίῳ, καὶ τῷ πηλίκῳ ὡς ἐν τῷ Γ ἰδεῖν ἐστὶ προσίθεται.

Αὐτὰ δὲ συγκείμενος ἔσω (Δ)	46327	(Ε)	832
ἐκ πολλῶν ὁ Διαρετέης μοναδικῶν χαρακτηρισῆων, οἷον ὁ	4160	(Ζ)	55†507
	4727		832
Ε, Διαρετέος δὲ ἔσω ὁ Δ.	4160		
	507		

5. Εἰ μὲν οἱ ἐν τοῖς ἀριστεροῖς τῷ Διαρετέε χαρακτηρισῆες ὅ, τε πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος ἴσοι, ἢ μείζονες ὡς τῶν

Σ

τῶν

των οὐα τῷ Διαμετέ των εν τοις αριθεροις
 πρώτε δῆθεν καὶ τῷ δευτέρῳ, τασάτε παρ
 σον χαρακτῆρας τῷ Διαμετέ από τῷ εν τοι
 σεροις πρώτε έναρξάμενος, ὅσες ἀν' ἐτυχεν ἐν
 διαμετέ, καὶ ἐπείνω τῷ ἐχάτε των ἀριθμηθ
 σίξας, τὰ εν τῷ 1. καὶ 2. των Αριθ. ἐρ
 ἐκτέλεσον, τὸ ἐυρεθὲν τῷ Πηλίκῳ μέρος 5 διὰ
 των των τῷ Διαμετέ χαρακτῆρων πολλαπλασι
 από των αὐτῷ μονάδων έναρξάμενος, καὶ τὸ Γιν
 ὑπὸ τὸν Διαμετέον ἔτω γράψας, ὥστε τὸ μὲν ἐ
 μονάδων Γινόμενον ὑπὸ τὸν σιχθέντα κῆδαι, τὰ
 των ἐφεξῆς ὑπὸ τῶς ἐφεξῆς λοιπὸς τῷ Διαμετέ
 ρακτῆρας. εἰάν δὲ οἱ εἰρημένοι δύο τῷ Διαμετέ χαρ
 ρες ἐλάσσονες των τῷ Διαμετέ ὥσι, τασάτες τῷ
 ρετέ παρριθμῆσαι καὶ χαρακτῆρας, ὅσες ὁ Δια
 ἔχει, καὶ ἐπὶ ένα, καὶ ἐπ' αὐτὸν σίξαι, ὡς ἐπὶ τῷ π
 μένε παραδείγματος, τὴν δὲ λοιπὴν ἐπεξεργασία
 ἀνωτέρω εἴρηται ποιητέον.

Τέτων ἔτω γεγονότων, ὁ Γ, καὶ ὁ Ζ ἔσονται
 ζητέμενα Πηλικά.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκαστος των τῷ Γ χαρακτῆρων παρίησι ποσά
 τῷ Α, ἢ ἕκαστος δῆθεν, ἢ καὶ ἀνά δύο ὁμῶς χα
 τῆρες (καὶ ἀνά τρεῖς δὲ, ἢ ἀνά τέσσαρες, καὶ ἐ
 ὅταν ὁ Διαμετέ ἐκ πολλῶν συγκένηται χαρακτῆ
 ἐν τοις Δ, καὶ Ε.) τὸν Β περιέχσιν. ὅλος ἄρα ὁ Β
 φαίνει πσάκις ὅλος ὁ Α τὸν Β περιέχει. ὁ Γ ἄ
 ζητέμενόν ἐστι Πηλίκον. τὰ αὐτὰ δὲ καὶ περὶ τῷ Ζ ἔ
 τω

ΣΧΟΛΙΟΝ

Τὸ ἐυρεθὲν τῷ Πηλίκῳ μέρος, οἷον τὸν 5 δι' ὃ
 Διαμετέ πολλαπλασιάζοντες, τὸ Γινόμενον, εἴτ
 4160 από τῷ Διαμετέ ὡς εἴρηται τρόπῳ (ἐν τῷ
 τῷ

πριμ.) ἀφελόμεν, ἡὰ ευρόντες ἢ ποσάκεις αἱ πρώ-
τοι αὐτῶ χαρακτήρες τὸν Διαρέτην περιέχουσι, καὶ
οἱ λοιποὶ αἱ ἐφεξῆς ποσάκεις αὐτὸν περιέχουσιν ἑυρωμεν.
ἐπεὶ δὲ ὁ ευρεθεὶς 7 ἐμφαίνει τὸν 832 Διαρέτην πεν-
τάκεις ὑπὸ τῶν τῶ Διαρέτεω χαρακτήρων 4132 πε-
ριέχεσθαι, πεντάκεις δὲ αὐτὸν ἀπ' αὐτῶν ἀφελέν, εἴθ'
ἔτω καὶ ἐπὶ τὰς λοιπὰς προίνα. ἐργάδως δὲ τέτλη ἔν-
τος, τὸ πενταπλάσιον ἀφαιρέμεν, ὡς ἐπὶ τὸ Γινόμε-
νον ἐκ τῶ μέρους τῶ πηλίκου 5 καὶ τῶ Διαρέτεω 832.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α.

Τὸ ο ἐν τῶ πηλίκῳ τίθεται ὁ μόνον ὅταν ὁ τελευταῖος
τῶ Διαρέτεω χαρακτήρ ἐλάσσων ἢ τῶ Διαρέτεω, καθά-
περ ἐν τῶ 3. Ἀριθ. ἔρηται, ἀλλ' ὅσακεις ἐν ὅλῃ τῇ τῆς
διαρέσεως ἐργασία αἱ τῶ Διαρέτεω χαρακτήρες ἐλάσ-
σοντες τῶ Διαρέτεω τύχουσιν. ἐμφανὴς δὲ ὁ λόγος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β.

Πολλάκεις τὸ Γινόμενον ἐκ (H) 48134 (Θ) | 2496
τῶ ευρεθέντος μέρους τῶ Πη- 4992 (I) 2
λίκου καὶ τῶ Διαρέτεω με-
ζον ὢν τῶν τῶ Διαρέτεω χα- (H) 48134 (Θ) | 2496
ρακτήρων, ἀφ' ὧν δεῖ ἀφαι- 2496 (K) :
ρεθῆναι, ὡς ἐπὶ τῶν H, Θ, I ἀριθμῶν, ἐκ ἀφαι-
ρεῖται ἀπ' αὐτῶν. συμβαίνει δὲ τέτο, ἐπειδὴ οἱ μὲν
πρῶτοι τῶ Διαρέτεω χαρακτήρες, εἴτεν ὁ 48 ὅς τὰς
τῶ Διαρέτεω πρώτους περιέχει, ἢ μὴν δις καὶ οἱ ἐξῆς,
τὰς ἐξῆς. ὁ γὰρ 13 εἰσάπαξ τὸν 96 περιλαμβάνει. ἐκ
ευμήχανον δὲ τὸ ευρεῖν ποσάκεις ὅλοι ἅμα οἱ τῶ Δια-
ρέτεω χαρακτήρες ὑπὸ τῶν τῶ Διαρέτεω περιέχοντα,
οἷον ποσάκεις τὸν 2496 ὁ 4813 περιλαμβάνει, μάλιστα
πολλῶν ὄντων τῶν τῶ Διαρέτεω χαρακτήρων. διατοί τῶ
το ὅσακεις ἀν' τὸ Γινόμενον ἐκ τῶ Πηλίκου καὶ τῶ Δια-
ρέτεω μεζον ἢ τῶν τῶ Διαρέτεω χαρακτήρων, ἀφ' ὧν

δεῖ ἀφαιρεῖσθαι, μειωτέον τὸ ὀριζὲν τῷ Πηλίκῳ μέρῳ μονάδας, ἢ δυάδας, ἢ ὅτε ἀπαιτῇ ὁ λόγος. ἵνα δὲ μὴ αὐτό τε καὶ τὸ Γινόμενον γραφῆται, καὶ πάλιν ἐξαλείφῃται, πειρατέον πρῶτον ἀπὸ μνήμης, εἰ ἄρα τὸ ἐκ τῷ μέρῳ τῷ Πηλίκῳ καὶ τῷ Διαρετέῳ Γινόμενον ἀπὸ τῶν τῷ Διαρετέῳ ἀφαιρεῖται χαρακτῆρων, καὶ ἔτι αὐτὸ γραπτέον. ὃ δὴ ἡ τῆς πράξεως συνήθεια βράδιον καθίησι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ΄.

Ὅτε οἱ τῷ Διαρετέῳ χαρακτῆρες εἰς μονάδας ἀναλύονται δυνάμει ἐλάσσονας, τότε οἱ ἐναπολειφθέντες καὶ μηκέτι ὑπὸ τῷ Διαρετέῳ διαρετέοι πολλαπλασιάζονται διὰ τῷ ἀριθμῷ, εἰς ὃν αἱ μονάδες ἀναλύονται. καὶ τῷ Γινόμενῳ διὰ τῷ Διαρετέῳ τὸν αὐτὸν πάλιν διαρεθέντος τρόπον, τὸ Πηλίκον κατ' ἰδίαν ὑπὸ τὸν Διαρετέην σημειῖται. οἷον, εἰάν ὁ Δ ἡμέρας (Δ) 46327 (Ε) 532
ἐμφαίνῃ, καὶ ἐκάστη τῶν 4160 (Ζ) 55. 16
αὐτῶν μονάδων εἰς ὥρας 4727
ἀναλύεται 24, τῷ ἐνα- 4160
πολειφθέντος 567 διὰ 567
τῷ 24 πολλαπλασιασ- 24
θέντος, καὶ τῷ Γινο- 2268
μένῳ Η διὰ τῷ αὐτῷ 1134
Διαρετέῳ Ε διαρεθέν- (Η) 13608
τος, τὸ Πηλίκον 16 832
ὑπὸ τὸν Διαρετέην ση- 5288
μεῖται, σιγμῆς προ- 4992
εντεθείσης, ὡς ἐν τῷ 296
Ζ ὁρᾶται. καὶ ἔτι τὸ Πηλίκον Ζ ἡμέρας μὲν 55, ὥρας
δὲ 16 δηλοῖ. ἀλλὰ γὰρ πάλιν τὰς ἐναπολειφθέντας
χαρακτῆρας 296 διὰ τῷ 60 ἐνὸν πολλαπλασιάσαι,
καὶ

καὶ τὸ Γινόμενον ὁμοίως διελεῖν, εὐρεῖν τε τὸ Πηλίκον
 λεπτὰ ἐμφαίνον, ἢ αὖ τὰς ἐναπολειφθέντας, ἢ ἕτως
 ἐφεξῆς ἕως αὖ αἱ τῶν ἀπολειφθέντων μονάδες ἐλά-
 χισταί γένωνται. καὶ τότε δὴ δι' ἐκείνων κλάσμα συνί-
 σαται, καὶ ὃ ἐν εἰρηται (ἐν τῷ 4. Ἀριθ. τῷ 7. προβλ.)
 τρόπον.

Περὶ τῶν ἀσφαλῶν καὶ ἐπισφαλῶν βασάνων.

Ἐν τῷ ταῖς εἰρημέναις ἐκτελεῖν τέσσαρας πράξεις,
 ἐξ ἀπροσεξίας ἢ παραδρομῆς παραλογίζεσθαι συμβαί-
 νει, ἢ τὰς εὐρεθέντας ἀριθμοὺς ἐσφαλμένους εἶναι. διά-
 ται τὸτο βάσανοί τινες, εἶπεν μέθοδοι, νενόηνται, δι' ὧν
 κατιδεῖν ἔνεστι πότερον ἁπταισοὶ εἶσιν οἱ εὐρεθέντες, ἢ ὅ-
 τέτων αἱ μὲν ἀσφαλεῖς, αἱ δὲ ἐπισφαλεῖς τυγχάνουσι.

Βάσανος ἀσφαλῆς τῆς προθέσεως.

Ἀπὸ τῷ Γ Ἀθροίσματος τῶν A καὶ B (A) 34567
 ἄφελε τὸν ἕτερον, οἷον τὸν B. εἰάν δὲ τὸ (B) 24098
 λοιπὸν ἴσον ἢ τῷ ἑτέρῳ, τῷ A, ἁπταισος (Γ) 58665
 ἔσται ὁ Γ. ἐπεὶ δὴ γὰρ ὁ Γ ἴσος ταῖς A καὶ
 B; (κατὰ τὸν γ'. ὁρισμ.) τῷ ἑτέρῳ ἄρα
 αὐτῶν ἀπὸ τῷ Γ ἀφαιρεθέντος, τὸ
 λοιπὸν ἴσον ἔσται τῷ ἑτέρῳ,

Βάσανος ἀσφαλῆς τῆς ἀφαιρέσεως.

Τῇ εὐρεθείᾳ τῶν A καὶ B Διαφορὰ Γ (A) 34567
 πρόσθετε τὸν ἀφαιρεθέντα B. εἰάν δὲ (B) 24008
 ὁ A προκύψῃ, ἔδὲν ἔχει ὁ Γ ἐλάτ- (Γ) 10469
 τωμα. εἰ γὰρ ὁ Γ ἢ ἀληθῆς ὑπε-
 ροχή ἐστὶν ἢ ὁ A ὑπερέχει τὸν B, προσκειμένε αὐτὰ
 τῷ B, ἴσος ἔσται τῷ A.

Βάσανος ἀσφαλῆς τῷ πολλαπλασιασμῷ.

Διέλε τὸ Γινόμενον Γ διὰ τῷ ἑτέρῳ Α) 34507
 τῶν πολλαπλασιαζέντων, ἔπεν διὰ τῷ (Β) 24098
 Α, ἢ τῷ Β, εἰάν δὲ Πηλίκον προκύψῃσιν (Γ) 832995566
 τῷ ἑτέρῳ, παρόραμα ἐκ ἐστὶν ἐν τῷ Γ. ἐπειδὴ γὰρ ὁ Γ,
 τὸ ἐκ τῶν Α καὶ Β Γινόμενόν ἐστιν, ἄρα ὡς 1 : Α :: Β :
 Γ. (κατὰ τὴν τῷ ε. ὀρισμ. συνέπ.) ἀλλὰ τῷ Γ διὰ
 τῷ Α διαιρεμένῳ, ἐστὶν ὡς 1 : Α ἔτω τὸ Πηλίκον, πρὸς τὸν
 Γ. (κατὰ τὴν τῷ ε. ὀρισμ. συνέπ.) τὸ Πηλίκον ἄρα
 ἴσον τῷ Β, τῷ Γ ἄρα διαιρεθέντος διὰ τῷ Α, προ-
 κύψει ὁ Β, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τῷ Γ διὰ τῷ Β διαιρε-
 θέντος, ὁ Α παραχθήσεται.

Βάσανος ἀσφαλῆς τῆς διαιρέσεως.

(Γ) 832995566 (Β) | 24098

Πολλαπλασιάσων τὸν (Α) 34507
 Διαιρέτην Β διὰ τῷ Πηλίκῳ Α. εἰάν δὲ τὸ ἐξ αὐτῶν Γι-
 νόμενον ἴσον ἢ τῷ Διαιρετέῳ Γ, τέλειον ἔσται τὸ Πηλί-
 κον Α. ἐπειδὴ γὰρ ὁ Α τὸ Πηλίκον ἐστὶ τῶν Γ καὶ Β,
 ὡς ἄρα 1 : Β :: Α : Γ. (κατὰ τὴν τῷ ε. ὀρισμ. συ-
 νέπ.) ἀλλὰ τῷ Β διὰ τῷ Α πολλαπλασιαζόμενῳ, ἐστὶν
 ὡς 1 : Β, ἔστω Α πρὸς τὸ Γινόμενον. (κατὰ τὴν τῷ ε.
 ὀρισμ. συνέπ.) τὸ ἐκ τῶν Α καὶ Β ἄρα παραγόμενον
 ἴσον τῷ Διαιρετέῳ Γ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐὰν τῆς διαιρέσεως περαιωθείσης, ἐγκυκαταλειφθῶσι-
 τινες χαρκτηῖρες, προδετέον αὐτοὺς τῷ Γινόμενῳ ἐκ τῷ
 Πηλίκῳ καὶ τῷ Διαιρέτῃ, ἵν' ὁ Διαιρετέος προκύψῃ.

Αἱ

Αἱ ἐπισφαλεῖς βάσανοι.

Ἡ τῆς προθέσεως.

Ἀπὸ τῶν Α καὶ Β, ἐξ ὧν τὸ (Α) 34567 3|
 κεφάλαιον Γ σύγκειται, ὁ 9 τόν- (Β) 24098 3|
 δε ἀφηρέθω τὸν τρόπον 3 σὺν (Γ) 58665
 4 καὶ 5 εἰς 12· ἀπ' αὐτῶν δὲ
 τῆ 9 ἀφαιρεθέντος, τὸ λοιπὸν ἐστὶν ὁ 3· ὃ τῆ 6 προ-
 σθεμένῃ, ὁ 9 ἀναφύει· ἢ μὴ λογιθέντος, τὸ λοιπὸν ἐδέν-
 ἐστιν. ὁ 7 δὲ σὺν τῷ 2 ἴσα εἰς τῷ 9, ἢ μὴ λογιθέντος, πάλ-
 λιν τὸ λοιπὸν ἐδέν. ὁ 4 δὲ σὺν τῷ 8 (παρορῶνται τό, το
 ο καὶ ὁ 9 ὅπερ ἂν τύχωσιν.) εἰς 12, τῆ δὲ 9 ἀφαι-
 ρεθέντος, ὁ 3 ἐγκαταλείπεται. εἰάν ἔν τῆ 9 τῷ αὐ-
 τῷ τρόπῳ ἀπὸ τῆ Γ κεφαλᾷς ἀφαιρεθέντος, τὸ λοι-
 πὸν ἴσον ἢ τῷ λοιπῷ τῶν Α καὶ Β, ἐξ ὧν ὁ Γ, εἴτεν
 τῷ 3, ἀνελλειπὲς ἔσται τὸ Γ κεφάλαιον.

Ἡ τῆς ἀφαίρεσεως.

Ἀφελὲ ἀπὸ μὲν τῆ Α ὃ ἦδη (Α) 34567 4|
 ἔρηται τρόπῳ, τὸν 9, ὡσαύτως (Β) 24096 4|
 καὶ ἀπὸ τῆ Β. ἀπὸ δὲ τῆ 7 τῆ (Γ) 10471
 ἐναπολειφθέντος ἀπὸ τῆ Α, τὸν
 3 τὸν ἐναπολειφθέντα ἀπὸ τῆ Β. καὶ εἰάν τῷ λοιπῷ
 4 ἴσον ἢ τὸ ἐναπολειπόμενον ἀπὸ τῆς Διαφορᾶς Γ,
 τῆ 9 ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρεθέντος, ἐντελὲς ἔσται ἡ Διαφορὰ Γ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐάν δὲ τῆ 9 ἀρθέντος, τὸ λοι- (Δ) 972631 7|
 πὸν 4 τὸ ἐναπολειφθὲν ἀπὸ τῆ Ε (Ε) 45283 7|
 μᾶλλον ἢ τῆ 1 τῆ ἐναπολειφ- (Ζ) 927348
 θέντος ἀπὸ τῆ Δ, ἀφ' ἧς ὁ Ε
 ἀφήρηται, δεκάδος ληφθείσης, καὶ τῷ λοιπῷ ἐλάσσει-
 νι 1 προσεθείσης, τὸ λοιπὸν 4 ἀπ' αὐτῆς ἀφηρέθω.

Σ 4

καὶ

καὶ εἰάν τῳ λοιπῷ 7 ἴσον ἢ τὸ ἐναπολειφθὲν ἀπο τῆς Διαφορᾶς Z, τῆς ληφθείσης ἤδη δεκάδος αὐτῇ προσθείσης, εἰδὲν ἐν τῇ Γ Διαφορᾷ περὶάπτωμα.

Ἡ τῷ πολλαπλασιασμῷ.

Τὸ ἐναπολειφθὲν 7 ἀπὸ τῷ πολ- (A) 34567 $\frac{7}{8}$
 λαπλασιαστέον Α διὰ τῷ 5 τῷ ἐνα- (B) $\frac{24098}{5}$ 8
 πολειφθέντος ἀπὸ τῷ πολλαπλα- (Γ) 832995566
 σιαστῷ Β, τῷ 9 ἀφ' ἑκατέρου ἀρ-
 θέντος, πολλαπλασιάσας, ἀπὸ τῷ Γινόμενου 35 τὸν
 9 ἀφελει. καὶ εἰάν τῳ λοιπῷ 8 ἴσον ἢ τὸ ἐναπολειπό-
 μενον ἀπὸ τῷ Γ, τῷ ἐκ τῶν Α καὶ Β Γινόμενου, παρέρ-
 ραμα ἐν τῷ Γ εἶναι.

Ἡ τῆς Διαμέσεως.

Τὸ ἐναπολειφθὲν (Γ) 832995566 (B) $\frac{24098}{5}$ 8
 5 ἀπὸ τῷ Διαμέτῳ (A) 34567 $\frac{7}{8}$
 Β διὰ τῷ 7 τῷ ἐναπο-
 λειφθέντος ἀπὸ τῷ Πηλίκου Α, ἀφ' ἑκατέρου τῷ 9 ἀρθέν-
 τος, πολλαπλασιάσας. καὶ εἰάν ἀπὸ τῷ ἐξ αὐτῶν Γι-
 νομένῳ 35 τὸ ἐναπολειφθὲν 8 ἴσον ἢ τῳ ἐναπολειφ-
 θέντι ἀπὸ τῷ Διαμετέῳ Γ, ἀφ' ἑκατέρου αὐτῶν τῷ 9
 ἀρθέντος, ἀπταίον εἶναι τὸ Πηλίκον Α.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐάν δὲ, τῆς διαμέσεως (Δ) 7856 (E) $\frac{32}{5}$ 8
 παραιωθείσης, ἐναπολειφ- 64 (Z) $\frac{245}{2}$ 8
 θῶσί τινες χαρακτηριστῆρες, ὡς 145
 ἐν τῷ Δ οἱ 16, προσθετέον 128
 τέτρε τῳ ἐκ τῶν ἐναπολει- 176
 φθέντων ἀπὸ τῷ Διαμέτῳ 160
 καὶ τῷ Πηλίκῳ Γινόμενῳ, εἶπεν 16

τα

τὰ 10. εἴθ' ἔτως ἀπ' αὐτῶ, ἦτοι ἀπὸ τῆ 26 ἀφαιρετεον
τὸν 9. καὶ ἔαν τὸ λοιπὸν 8 ἴσον ἢ τῷ λοιπῷ τῆ Δια-
ρετέε, τέλειον ἔσται τὸ Πηλίκον Ζ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

"Οτι δὲ αἱ τοιαῦται βάσανοι ἐκ ἀσφαλῆς, ἐπι-
γνώμαι βέλδιον. ἔαν γάρ τὸν Ζ λαθῶν, ἔτω γράψῃς 254,
ἢ μὲν βάσανος ἀπταυον αὐτὸν ἐμφαίνει· ὁ δὲ, τῆ
ἀληθοῦς τοσούτον διέστηκεν, ὅσον ὁ 45 τῆ 54. αὐταῖς δὲ
μικρὰ δὲν ἅπαντες χρῶνται, ἐπεὶ τῶν ἀσφαλῶν ἦττον
ἐργώδεις τε καὶ ἐπίπονοι, τοιαῦτα δὲ παραπτώματα
σπανιώτατα ταῖς ἀριθμητικαῖς ἐμπίπτει πράξεσι.



ΒΙΒΛΙΟΥ Β.

Περὶ κλάσματων καὶ τῶν καλεσμένων
Δεκαδικῶν

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Κλάσμα ἐστὶ τὸ ἐκ δύο ἀριθμῶν εὐθείᾳ ἀριζον-
τίᾳ διακεχωρισμένων συγκροτούμενον, ἢ μονάδος μέ-
ρη. ἢ μόναις μονάδας, ἢ μέρη ὁμῶς ἢ μονάδας ἐμφαίνον.

Β'. Παρονομαζῆς Κλάσματος, οἷον τῆ Α, (Α) $\frac{2}{3}$
ἐστὶν ὁ ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν κείμενος ἀριθμὸς, $\frac{2}{3}$
εἰς ὅσα μέρη ἢ μονάς διήρηται σημαίνων.
οἷον, ὁ 3, ὅς εἰς τρία τὴν μονάδα μεριδιᾶσαν ἐμ-
φαίνει μέρος.

Γ'. Αριθμητῆς Κλάσματός ἐστιν ὁ ἐπὶ τῆς εὐθείας ὢν
ἀριθμὸς, οἷον ὁ 2, ὅσα μέρη τῆς εἰς τρία διαιρεθείσης
μονάδος εἴληπται εἰς τὴν τῆ Α Κλάσματος σύστασιν
δηλῶν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἀναγινώσκωμεν δὲ τὰ Κλάσματα πρῶτον τὸν ἐπάνω τῆς εὐθείας ἀριθμὸν ἐξαγγέλλοντες, ἃς ἔτω τὸν ὑποκάτω, τὸν δὲ τὸν τρόπον τρίτα, ἢ δύο τριτημόρια· τέσσαρα πέμπτα, ἢ σαρά πεμπτημόρια· ὀκτὼ δέκατα, ἢ ὀκτὼ δεκατημόρια· ἑπτὰ ἐνδέκατα, ἢ ἑπτὰ ἐνδεκατημόρια· τρία νενηκοσά, ἢ τρία ἐννενηκοσημόρια· πέντε ἑκατοσά πέντε ἑκατοσημόρια.

Δ'. Τῶν Κλασμάτων, Γνήσιον μὲν, τὸ ἑλάττωον νάδος, ἢ τὸ Ἀριθμητὴν ἐλάττωον (Β) $\frac{31}{51}$ ἔχον τῷ παρονομαστῇ, οἷον τὸ Β.
Νόθον δὲ, τὸ ἴσον ἢ μείζον μονάδος, ἢ ἔτινος ὁ ἀριθμητῆς ἴσος ἢ μείζων τῷ παρονομαστῇ, ὡς τὰ Γ, (Γ) $\frac{3}{3}$ (Δ) $\frac{7}{4}$ (Ε) Δ. Νόθον δὲ γίνεται καὶ πᾶς ἀριθμὸς ὁλόκληρος, τῆς μονάδος αὐτῷ ὑπογραφείσης. οἷον, τὸ Ε.

Ε'. Δεκαδικὰ εἰσιν Ἀριθμητὰ Κλασμάτων, ἃ μὲν Παρονομαστὰ λόγον δεκαπλάσιον πρὸς ἄλλη ἔχουσιν· οἱ δὲ Ἀριθμητὰ μοναδικοὶ εἰσι χαρακτηριστικαῦτά εἰσι τὰ προκείμενα Κλάσματα. $\frac{3}{10}$ $\frac{2}{100}$ $\frac{4}{1000}$ $\frac{7}{10000}$ $\frac{5}{100000}$ ἃν οἱ Ἀριθμητὰ γραφόμενοι ἔτω, 0. 32475, Δεκαδικὰ σημεῖα, ἢ Δεκαδικοὶ Χαρακτῆρες λέγονται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὸ μὲν πρὸ τῆς εἰγμῆς μηδενικὸν σημεῖον, μηδὲ παρεῖναι ὁλόκληρον μονάδα ἐμφαίνει· ὁ δὲ 3, τρεῖς

κατημέροια· ὁ δὲ 2, δυὼ ἐκατοσημέροια· ὁ δὲ 4, τεσσαρά χιλιοσημέροια· ὁ δὲ 7, ἑπτὰ δεκαχιλιοσημέροια· ὁ δὲ 5, πέντε ἑκατονχιλιοσημέροια. ἀλλὰ γὰρ πρὸ τῆς εἰγμῆς καὶ ἀριθμοὶ κῆνται, ὡς ἐν τῷ Α, (Α) 35. 139. ὁλοκλήρως δηλῆντες. οἷον, ὁ μὲν 35 τὸ αὐτὸ δηλοῖ ὃ καὶ ἀνευ τῶν 139, ἔτεν τριάκοντα πέντε· ὁ δὲ 1, ἐν δεκατημέροιον· ὁ δὲ 3, τρία ἐκατοσημέροια· ὁ δὲ 9, ἐννέα χιλιοσημέροια. αἰσάντως καὶ ἐν τῷ Β, (Β) 20. 005. ὁ μὲν 20, εἴκοσι ὁλοκλήρως δηλοῖ ἀριθμὸς· τὰ δὲ, 00, ἐδὲν παρεῖναι δεκατημέροιον, ἐδὲ ἐκατοσημέροιον· ὁ δὲ 5, πέντε χιλιοσημέροια.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Οἱ μὲν πρῶτος ἄρα μετὰ τὴν εἰγμὴν τόπος, τῶν δεκατημερίων ἐστίν· ὁ δὲ δεύτερος, τῶν ἐκατοσημερίων· ὁ δὲ τρίτος, τῶν χιλιοσημερίων, καὶ ἐφεξῆς ἔτω. τῶν δεκαδικῶν ἄρα σημείων μεῖσται μὲν ἡ δύναμις ἰν δεκαπλασίῳ λόγῳ ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ προϊῖσα, αὖτις δὲ ἀπὸ τῶν δεξιῶν ἐπὶ τὰ ἀριστερά. ὅπερ δὴ καὶ ἐπὶ τῶν ὁλοκλήρων συμβαίνει.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Τὸ δοθὲν Κλάσμα Α εἰς ἐλαχίστους (Α) $\frac{4}{8}$ ἀγαγεῖν ὅρως· ὃ ἐστὶ Κλάσμα εὐρεῖν ἴσον μὲν τῷ δοθέντι, ὑπὸ δὲ ὅσον ἐνεσιν ἐλαχιστοτέρων ἀριθμῶν ἐμφαινόμενον.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Διὰ τῆ αὐτῆς ἀριθμῆ, τῆ πάντων ἂν ἐνεσι μέγιστος διαμεθῇτω ὁ, τε Ἀριθμητῆς καὶ ὁ Παρανομαστῆς τῆ δοθέντος Κλάσματος, οἷον διὰ τῆ 4. καὶ τὸ μὲν ἐκ τῆ Ἀριθμητῆς προϊὸν Πηλίκον, 1, τὸν Ἀριθμητὴν τὸ δὲ ἐκ τῆ Παρανομαστῆς, 2, τὸν Παρανομαστὴν συνισάτω τῆ ζητούμενη Κλάσματος Β. λέγω δὴ, ὅτι

οτι το Β το ἑτῶ συγκροτῆμενον, το ζητῆμε- (B) $\frac{1}{2}$
νον Κλάσμα ἐστὶ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν Α εἰς 8 τὴν μονάδα διηρημένην σημαίνει μι-
ρη, ἀφ' ὧν τὰ 4, ἔτρεν τὸ ἡμισυ εἰληπται. τὸ δὲ Β
εἰς 2, ἀφ' ὧν τὸ 1 ἐλήφθη (κατὰ τὸν Β', καὶ Γ' ὅρις).
ὅ ἐστὶ τὸ τῆς αὐτῆς μονάδος ἡμισυ. ἴσον ἄρα τῷ Α τ
Β. συγκεκρότητα δὲ καὶ ἐκ τῶν ὧν ἕνεστιν ἐλαχιστοὶ
ἀριθμῶν. τὸ Β ἄρα ἐστὶ τὸ ζητῆμενον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Χρήσιμος ἡ τῇ δετῇ προβλήματος λύσις πρὸς σαφετέραν
ὧν τὸ Κλάσμα ἐμφαίνει γινῶσιν. οἷον (Γ) $\frac{9}{243} = (\Delta) \frac{1}{27}$
τὸ μὲν ὑπὸ τῇ Γ ἐμφαινόμενον, δύσ-
ληπτον· τὸ δὲ ὑπὸ τῇ ἴσῃ αὐτῷ Δ, (Ε) $\frac{192}{448} = (Ζ) \frac{3}{7}$
εὐληπτον· ὡσαύτως τὸ μὲν ὑπὸ τῇ
Ε, δυσνόητον· τὸ δὲ ὑπὸ τῇ ἴσῃ αὐ-
τῷ Ζ, εὐνόητον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Τὰ δοθέντα Κλάσματα Α καὶ (Α) $\frac{2}{3}$ (Β) $\frac{5}{7}$
Β, ὧν οἱ Παρονομασὰν διάφοροι,
ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀγαγεῖν Παρο- (Γ) $\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} (\Delta) \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 7}$
νομασὰς· ἔτρεν κλάσματα εὐ-
ρεῖν ἴσα τοῖς δοθεῖσι, καὶ τῆς (Ε) $\frac{14}{21} (Ζ) \frac{15}{21}$
αὐτῆς παρονομασὰς ἔχοντα.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἐκατέρω τῶν Κλασμάτων τὸν τε Ἀριθμητὴν καὶ
Παρονομαστὴν διὰ τῇ Παρονομαστῇ τῇ ἑτέρῃ πολλαπλα-
σίασον· οἷον, διὰ τῇ 7 τῇ Παρονομαστῇ τῇ Β τὸν τε
ἀριθμητὴν 2, καὶ τὸν Παρονομαστὴν 3 τῇ Α, ὥστε γε-
νέσθαι

ἔσται τὸ Γ ἢ τὸ Ε' ὁμοίως διὰ τῆ Παρονομασίᾳ τε
 Α, ἦτοι τῷ 3, τὴν τε Ἀριθμητὴν 5, καὶ τὸν Παρο-
 νομασὴν 7 τῷ Β, ὥστε γενέσθαι τὸ Δ ἢ τὸ Ζ. ἢ ἔσται
 τὰ Ε καὶ Ζ τὰ ζητούμενα Κλάσματα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ὅτε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστής τῶν κλάσ-
 ματος διὰ τῆ αὐτῆ ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζεται ἢ διαι-
 ρεῖται, ὁρῶντες ἄρα ὅτι τὸ προκύψαν Κλάσμα Ε ἰσο-
 δύναμιν τῷ Α, ὡσαύτως καὶ τὸ Ζ τῷ Β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐὰν δὲ τὰ δοθέντα (Α) $\frac{2}{3}$ (Β) $\frac{5}{7}$ (Γ) $\frac{3}{5}$ (Δ) $\frac{2}{9}$
 Κλάσματα πλείονα ἢ
 ὅντα ἢ, οἷον τὰ Α, Β,
 Γ, Δ, ἄγε πρῶτον τὰ Α (Α) $\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7}$ (Β) $\frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 7}$ (Γ) $\frac{3}{5}$
 καὶ Β εἰς τὰς αὐτὰς Πα-
 ρονομασίας, ὡς εἴρηται. (Α) $\frac{2 \cdot 7 \cdot 5}{3 \cdot 7 \cdot 5}$ (Β) $\frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 7 \cdot 5}$
 εἰς τὴν αὐτὴν δὲ Παρο-
 νομασίην τῶν Α καὶ Β ἢ Χ.
 Ὡς καὶ τὸ τρίτον Γ. καὶ (Γ) $\frac{3 \cdot 7 \cdot 3}{3 \cdot 7 \cdot 5}$ (Δ) $\frac{2}{9}$
 πάλιν εἰς τὴν παρονομα-
 σίην τῶν τριῶν Α, Β, Γ (Α) $\frac{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9}{3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9}$ (Β) $\frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9}{5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9}$
 ἢ ΧΩ καὶ τὸ τέταρτον
 Δ, καὶ ἔτι εἰς τὴν
 ποίει, εἰάν ἄλλα δοθέν-
 τα ὡς κλάσματα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτων ὁρῶντες, ὅτι εἰς τὰς αὐτὰς Παρονομασίας
 ἔχουσιντα πολλὰ ὄντα τὰ δοθέντα Κλάσματα, εἰάν
 ὅτε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστής ἐνὸς ἐκάστου διὰ
 πάντων τῶν Παρονομασιῶν τῶν λοιπῶν Κλασμάτων πολ-
 λαπλασιασθῇ.

ΠΡΟ-

Ἰὰ δοθέντα ὁμο- (Α) $\frac{1}{9} + (Β) \frac{5}{9} + (Γ) \frac{2}{9} = (Δ) \frac{8}{9}$
 γενῇ Κλάσματα
 Α, Β, Γ συνάψαι, (Ε) $\frac{1}{2} + (Ζ) \frac{2}{3} + (Η) \frac{4}{5}$
 εἶπεν Κλάσμα εὐ-
 ρεῖν ἴσον τοῖς δο-

θεῖσι. (Θ) $\frac{15}{30} + (Ι) \frac{20}{30} + (Κ) \frac{24}{30} = (Λ) \frac{59}{30} = (Μ) 1 + \frac{29}{30}$

Π Ρ Α Κ Τ Ε Α

Ἐὰν μὲν τὰ δοθέντα Κλάσματα τὲς αὐτὰς ἔχῃ
 Παρονομαστὰς, ὡς τὰ Α, Β, Γ, πάντων τὲς Ἀριθ-
 μητὰς συνάψας, τὸν κοινὸν Παρονομαστὴν ὃ ὑπὸ τὸ Κε-
 φάλαιον ὁ γράψον· ἢ ἔσαι τὸ ἔτω συγκροτέμενον Κλάσ-
 μα Δ τὸ ζητέμενον. εἰ δὲ οἱ τέτων Παρονομασταὶ διά-
 φοροι ὡς οἱ τῶν Ε, Ζ, Η, εἰς τὲς αὐτὰς μὲν Παρο-
 νομαστὰς τὰ Κλάσματα ἀνάγαγε, ὥστε γενέσθαι τὰ Θ,
 Ι, Κ· τὰ δὲ λοιπὰ, ὡς εἴρηται, ποιήσον. ἔτω μὲν ἔν
 προκύψει τὸ ζητέμενον Κλάσμα Λ, ὅπερ ἴσον τῷ Μ.
 Η' δὲ αἵτις ἔκτε τῆς πράξεως, ἢ τῇ αἰ. προβλ. τῇ αἰ.
 Βιβλ. δῆλη.

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ.

Τῶν συναπτομένων Κλασμάτων τὸ Κεφάλαιον ἐνίστι-
 μὲν κλάσμα γνήσιόν ἐστιν· ἐνίστιοι δὲ, νόθον· ἐνίστιοι δὲ, με-
 ναὶς, ἢ μονάδες ὁλόκληροι.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Δ.

Δύο Κλασμάτων ὁ- (Α) $\frac{5}{7} - (Β) \frac{2}{7} = (Γ) \frac{3}{7}$
 μογενῶν δοθέντων τῶν
 Α ἢ Β ἀπὸ τῶ μείζονος (Δ) $\frac{3}{5} - (Ε) \frac{7}{15}$
 Α τὸν ἐλάσσονα Β ἀ-
 φελεῖν. (Ζ) $\frac{45}{75} - (Η) \frac{35}{75} = (Θ) \frac{10}{75}$

ΠΡΑΚ-

ΠΡΑΚΤΕΑ

Ἐὰν μὲν τὲς αὐτὲς Παρανομασίαι τὰ Κλάσματα ἦχῃ, ὡς τὰ Α, καὶ Β, ἀπὸ τῆ Ἀριθμητῆ 5 τῆ μέ-
ζονος, τὸν 2 τὸν τῆ ἐλάσσονος Β ἀφελών, ὑπὸ τὸ λοι-
πὸν 3 τὸν κοινὸν Παρανομασίην 7 γράψον· καὶ ἔσαι τὸ
προκύψαν Κλάσμα Γ ἢ τῶν δοθέντων Α καὶ Β Διαφο-
ρά· Ἐὰν δὲ διαφορᾷ, ὡς τὰ Δ, Ε, εἰς τὲς αὐτὲς
μὲν ἀνάγαγε Παρανομασίαις, ὥστε γενέσθαι τὰ Ζ, Η,
τὰ δὲ λοιπὰ ὡς εἴρηται ποιήσων. καὶ ἔσαι τὸ Θ τὸ ζη-
τέμενον Κλάσμα.

Ἡ δειξις ἐκ τε τῆς πράξεως, καὶ ἐκ τῆ γ'. προβλ.
τῆ 1. βιβλ. δῆλη.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Ἐὰν τὰ ἀπὸ τῆ δο- (I) $\frac{7}{5}$ (K) $-\frac{1}{3}$ (Λ) $-\frac{2}{5}$ (Μ) $-\frac{3}{7}$
θέντος Κλάσματος I
ἀφαιρεθῇσόμενα πολ- (K) $-\frac{1}{3}$ (Λ) $-\frac{2}{5}$ (Μ) $-\frac{3}{7} =$ (N) $-\frac{122}{105}$
λά ἡ, οἶον τὰ Κ, Λ,
Μ, ταῦτα πάντα
συνάψας (κατὰ τὸ γ' (I) $\frac{7}{5} -$ (N) $\frac{122}{105} =$ (Ξ) $\frac{125}{525}$
προβλ.) τὸ κεφά-
λαιον Ν. ἀπὸ τῆ 1 ἀφελῇ· τὸ δὲ λοιπὸν Ξ ἔσαι ἢ ζη-
τέμενη Διαφορά.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Ἐὰν μὲν τὰ δοθέντα Κλάσματα Γνήσια ἦ, ἢ τῶ-
ν Διαφορὰ Γνήσιον Κλάσμα ἔσαι· ἔάν δὲ Νόθα, ὅτε
μὲν Νόθον, ὅτε δὲ μοναῖς, ἢ μονάδες ὁλόκληροι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

Τὸ δοθὲν Κλάσμα (Α) $\frac{1}{2}$ (Β) $\frac{1}{3} =$ (Γ) $\frac{1}{6}$
Α διὰ τῆ δοθέντος Β
πολλαπλασιάσαι.

ΠΡΑΚ.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τὸν Ἀριθμητὴν τῷ Πολλαπλασιαστέῳ Α διὰ τῷ Ἀριθμητῇ τῷ Πολλαπλασιαστῇ Β πολλαπλασιάσας, ὡς τὴν τῶν Παρονομαστῶν διὰ τῷ Παρονομαστῇ, ὅποιαιδὴ περὶ οἱ Παρονομασταὶ ὦσιν, ὑπὸ τὸ Γινόμενον τῶν Ἀριθμητῶν 1, τὸ τῶν Παρονομαστῶν ὁ γραφόν. ἔστι δὲ τὸ ἔτω προκύπτον Κλάσμα Γ τὸ Γινόμενον ἐκ τῶν δοθέντων Α καὶ Β Κλασμάτων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μονὰς πρὸς τὸν Πολλαπλασιαστὴν λόγον ἔχει, ὁ Πολλαπλασιαστὴς πρὸς τὸ Γινόμενον. (κατὰ τὴν νέπ. τῷ ἔ. ὀρισμ. τῷ α. βιβλ.) εἴαν ἄρα ὁ Γ τὸ Γινόμενον ἢ τῶν Α καὶ Β, ἔσται ὡς $1 : 1 :: 1 : 1$. ἀλλὰ τῷτο ἀληθὲς ὡς δῆλον. ὁ Γ ἄρα $\frac{1}{3}$ ὁ τὸ Γινόμενον ἐστὶ τῶν Α καὶ Β.

Α Λ Λ Ω Σ.

Ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τοσάκις λαμβάνεται ὁ πολλαπλασιαστέος ὡσάκις ἡ μονὰς ἐν τῷ Πολλαπλασιαστῇ (κατὰ τὸν ἔ. ὀρισμ. τῷ α. βιβλ.) ἐστὶ δὲ ἐν τῷ Πολλαπλασιαστῇ Β ἐν τριτημόριον τῆς μονάδος. ἐν ἄρα τριτημόριον τῷ Πολλαπλασιαστῇ Α, ἔσται τῷ ἡμίσεος τῆς μονάδος, ἐστὶ τὸ Γινόμενον τῶν Α καὶ Β. ἀλλ' ὁ Γ, ἢ ἐν ἑκτημόριον τῆς ὅλης μονάδος, ἐν τριτημόριον ἐστὶ Α, τετῆσι τῷ τῆς μονάδος ἡμίσεος. ὁ Γ ἄρα ἐστὶ ζητούμενος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Ἐὰν τὰ δοθέντα (Α) $\frac{1}{2}$. (Β) $\frac{2}{3}$. (Γ) $\frac{3}{5}$. (Δ) $\frac{4}{6}$ Κλάσματα πλείονα ἢ δύο ἢ ὅσον τὰ Α, (Α) $\frac{1}{2}$. (Β) $\frac{2}{3}$ = (Ε) $\frac{2}{6}$. (Γ) $\frac{3}{6}$. (Δ) $\frac{4}{6}$ δύο Α καὶ Β Γινόμενον Ε διὰ τῷ τριτῷ Γ πολλαπλασιά-

σον, ἢ τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον Ζ διὰ τῆ τετάρτης Δ, καὶ ἔτιως ἐφεξῆς. καὶ ἔσται τὸ Η τὸ ἐκ πάντων παρὰχθέν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Τῶν Κλάσμάτων Γνησίων μὲν ὄντων, τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον Γνήσιόν τε Κλάσμα ἐστὶ καὶ ἐκάστῃ τῶν πολλαπλασιαζομένων ἔλαττον· Νόθων δὲ τινῶν καὶ τινῶν γνησίων, ὅτε μὲν νόθον, ὅτε δὲ γνήσιον, ἐνίοτε δὲ καὶ μονάς, ἢ μονάδες ὀλόκληραι· καὶ ὅτε μὲν μᾶζον, ὅτε δὲ ἔλαττον ἐκάστῃ τῶν πολλαπλασιαζομένων· Νόθων δὲ μόνον, νόθον αἰετ, ἐνίοτε δὲ μονάς, ἢ μονάδες ὀλόκληραι, ἐκάστῃ δὲ τῶν πολλαπλασιαζομένων μᾶζον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5'.

Τὸ δοθέν Κλάσμα (Α) $\frac{1}{2}$: (Β) $\frac{1}{3}$
 Α διὰ τῆ δοθέντος (Α) $\frac{1}{2}$ (Γ) $\frac{3}{1} = (Δ) \frac{3}{2}$
 Β διελθῆν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τὸν Διαιρέτην Β ἀναποδίσας, ὥστε τὸν μὲν Ἀριθμητὴν, Παρονομαστὴν γενέσθαι τὸν δὲ Παρονομαστὴν, Ἀριθμητὴν, τὸ ἔτιω περὶκύψαν Κλάσμα Γ διὰ τῆ Διαιρέτης Α πολλαπλασιάσον. καὶ ἔσται τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον Δ, τὸ ἐκ τῶν Α καὶ Β προῖόν Πηλίκον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μονάς πρὸς τὸ Πηλίκον, ἔτιως ὁ Διαιρέτης πρὸς τὸν Διαιρέτην. (κατὰ τὴν συνέπ. τὴν μετὰ τὸν 5. ἀριθμ. τῆ ἀ. βιβλ.) εἰάν ἄρα τὸ Δ, τὸ Πηλίκον ᾗ, ἔσται ὡς $1 : \frac{3}{2} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$. ἀλλὰ τῆτο ἀληθές. ὁ Δ ἄρα τὸ Πηλίκον $\frac{3}{2}$ ἐστίν.

Τ

Γιν

Ἰνα δὲ εὐδηλον ᾗ, ὅτι $1 : \frac{3}{2} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$, γεγονέναι ἐναλλαζῶς ὡς $1 : \frac{1}{3} :: \frac{3}{2} : \frac{1}{2}$. καὶ ἐπεὶ $1 : \frac{1}{3} :: 3 : 1$, καὶ $\frac{3}{2} : \frac{1}{2} :: 3 : 1$. ἔστι δὲ ὡς $3 : 1 :: 3 : 1$. ἄρα καὶ $1 : \frac{1}{3} :: \frac{3}{2} : \frac{1}{2}$, (κατὰ τὴν ἐπ' αὐτῷ. τῆς βιβλ. τῆς Γεωμ.) εἶπεν $1 : \frac{3}{2} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$.

Α Λ Α Ω Σ.

Τὸ Πηλίκον ἐμφαίνει ποσάκις τὸν Διαιρέτην ὁ Διαιρέτεος περιέχει. (κατὰ τὸν 5' ὅρισ. τῆς α'. βιβλ.) ἀλλὰ τὸ Πηλίκον $\frac{3}{2}$ ἦτοι $1 + \frac{1}{2}$ δηλοῖ ποσάκις ὁ Διαιρέτεος $\frac{1}{2}$ τὸν Διαιρέτην $\frac{1}{2}$ περιέχει. δῆλον γάρ, ὡς ἀπαξ καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ ἡμισυ αὐτῆς $\frac{1}{2}$ περιέχει. τὸ $\frac{3}{2}$ ἄρα τὸ ζητούμενον Πηλίκον ἐστίν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τῶν Κλασμάτων εἴτε Γνησίων ὄντων ἑκατέρων, εἴτε Νόθων, ἢ τῶ μὲν, Νόθε, τῶ δὲ, Γνησίᾳ, τὸ Πηλίκον Νόθον ἔσται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

Τὸ δοθὲν Κλάσμα Α

$$(A) \frac{2}{5} \quad (B) \frac{3}{5}$$

τῷ δοθέντι ὁλοκλή-

$$(A) \frac{2}{5} + (B) \frac{3}{5}$$

ρω Β συντιθέναί, ἢ

$$(A) \frac{2}{5} + (B) \frac{3}{5} = (G) \frac{17}{5}$$

ἀπ' αὐτῶ ἀφελῆν,

$$(A) \frac{2}{5} + (B) \frac{3}{5} = (G) \frac{17}{5}$$

ἢ δι' αὐτῶ πολλα-

$$(B) \frac{3}{5} - (A) \frac{2}{5} = (Δ) \frac{1}{5}$$

πλασιάσαι, ἢ διελῆν.

$$(B) \frac{3}{5} - (A) \frac{2}{5} = (Δ) \frac{1}{5}$$

ΠΡΑΚΤΕΑ.

$$(A) \frac{2}{5} \quad (B) \frac{3}{5} = (E) \frac{6}{5}$$

Γεγραφθῶ ἡ μονὰς ὑπὸ

$$(A) \frac{2}{5} \quad (B) \frac{3}{5} = (Z) \frac{2}{5}$$

τὸν ὁλόκληρον Β. ἔτω μὲν

$$(A) \frac{2}{5} \quad (B) \frac{3}{5} = (Z) \frac{2}{5}$$

γάρ ὁ ὁλόκληρος εἰς Νόθον

$$(A) \frac{2}{5} \quad (B) \frac{3}{5} = (Z) \frac{2}{5}$$

Κλάσ.

Κλάσμα μεταποιηθήσεται. (κατὰ τὸν δ'. ὀρισμ. τῷ δε τῷ βιβλ.) εἰ μὲν ἔν ἐπισυναΐψαι δεήσει τῷ ὁλοκλήρῳ Β τὸ Κλάσμα Α, τὰ ἐν τῷ γ'. προβλήματι τῷδε τῷ βιβλίῳ ποιήσων, καὶ ἔσαι τὸ Κεφάλαιον τέτων τὸ Γ· εἰ δ' ἀφελῶν, τὰ ἐν τῷ δ' ἢ δὲ Διαφορὰ ἔσαι τὸ Δ· εἰ δὲ πολλαπλασιάσαι, τὰ ἐν τῷ ε'. καὶ τὸ Γινόμενον ἔσαι τὸ Ε· εἰ δὲ διελῶν, τὰ ἐν τῷ ς'. καὶ τὸ Πηλίκον ἔσαι τὸ Ζ. δεῖξεις δὲ τὰ ἐυρεθέντα εἶναι τὰ ζητούμενά, ὡς καὶ ἐν τοῖς εἰρημένοις προβλήμασι δέδεικται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η.

Τὴς δοθέντας ἀριθ- (Α) 25. 4670 (Β) 8. 569.
 μους Α καὶ Β, τὴς ἐξ (Α) 25. 4670
 ὁλοκλήρων καὶ Δεκα- (Β) 8. 569
 δικῶν συγκειμένους, ἐ- (Γ) 34. 0360
 πισυναΐψαι. ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τετάρθωςαν οἱ δοθέντες Α καὶ Β, ὥστε τὴς χαρακτηρισ αὐτοῖς ἰσοδυναμους καὶ εἶναι. καὶ τῶν ἐν τῷ α'. προβλήματι τῷ α'. βιβλίῳ γενομένων, ὁ Γ ἔσαι τὸ ζητούμενον Κεφάλαιον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὅτι ὁ Γ τὸ ζητούμενον Κεφάλαιόν ἐστι, δηλον ἐκ τῶν ἐν τῷ προδιαληφθέντι προβλήματι εἰρημένων. δεκα γὰρ μονάδες τῶν ἐλασσόνων μιᾷ τῶν μειζόνων ἴσαι, κατὰ τὴν μετὰ τὴς ὀρισμὸς τῷ δε τῷ βιβλίῳ συνέπειαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

Δύω ἀριθμῶν τῶν (Α) 58. 2745 (Β) 36. 985
 Α καὶ Β δοθέντων, (Α) 58. 2745
 τῶν ὁλοκλήρων καὶ (Β) 36. 985
 (Γ) 21. 2895

Τ 2

δεκα-

δεκαδικὰ περιεχόντων, ἀπὸ τῆς μείζονος Α
τὸν ἐλάσσονα Β ἀφελῆν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τετάρχθωσαν οἱ δοθέντες Α καὶ Β καθάπερ ἢ ἐν
τῷ προλαβόντι προβλήματι. καὶ τῶν ἐν τῷ Β. προ-
βλήματι τῆς Α'. βιβλίῃ γεγονότων, ἔσται, ὡς δῆλον, ὅτι
ὁ ζητεμένη Διαφορά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν Α (Α) 2. 32. (Β) 3. 5
διὰ τῆς δοθέντος Β πολλα- (Α) 232
πλασιάσαι, ἐκατέρω ὁλο- (Β) 35.
κλήρως καὶ δεκαδικὰ περι- (Γ) 8. 120.
εχοντος.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τετάρχθωσαν οἱ πολλαπλασιαζόμενοι Α καὶ Β, ὡς
ἐτάχθησαν ἂν, εἰ μόνως ὁλοκλήρων δηλωτικῆς περι-
χον χαρακτῆρας. καὶ γενομένων τῶν ἐν τῷ Γ, προβλη-
ματι τῆς Α'. βιβλίῃ ἐπιταχθέντων, ἀπὸ τῶν χαρακ-
τῆρων τῆς Γινόμενης Γ εἰλήφθωσαν δεξιόθεν χαρακτῆρας
ὕπὲρ τῶν δεκαδικῶν τοσῶτοι, ὅσοι εἰσὶν οἱ τῆς δεκαδικῆς
δηλῶντες ἐν τοῖς πολλαπλασιασμοῖς Α καὶ Β, εἴτεν τρεῖς.
καὶ ἔσται ὁ ἔτω σιχθεὶς Γ τὸ ζητούμενον Γινόμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἴαν γὰρ τῆς πολλαπλασι- (Α) $2 + 3 + 2$. (Β) $3 + 5$
αθησομένους Α καὶ Β κατὰ τὸν $\frac{10}{10} \frac{100}{100}$ $\frac{10}{10}$
προκείμενον γραφῆς τρόπον,
ὡς ἐν τῷ ε' καὶ ζ'. προβλήματι ἐξηται πολλαπλασιάτης
τὸ αὐτὸ Γινόμενον Γ παραχθήσεται.

ΠΡΟ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ΄.

Δύω ἀριθμῶν δοθέντων (Α) 1. 44 : (Β) 1. 2
 τῶν Α καὶ Β, τῶν ἐξ ὅλο- (Α) 144 (Β) $\frac{12}{1}$
 κλήρων καὶ δεκαδικῶν συγ- (Γ) 1. 2
 κειμένων, τὸν μείζονα Α διὰ τῶ ἐλάσσονος Β
 διελεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Γεγραφθῶσαν οἱ διαιρεθῆσόμενοι Α καὶ Β, ὡς ἐγρά-
 φησαν ἂν, εἰ μόνον ὁλοκλήρων δηλωτικὰς περιεῖχον
 χαρακτῆρας. καὶ γενομένων τῶν ἐν τῷ δ΄. προβλήματι
 τῷ α΄. βιβλίῳ ἐπιταχθέντων, ἀπὸ τῶν χαρακτῆρων
 τῶ Πηλίκω Γ σεσημειώθωσαν δεξιόθεν τοσούτοι χαρακ-
 τῆρες ὑπὲρ τῶν δεκαδικῶν, ὅσοι τὴν Διαφορὰν ἐμφά-
 νισι τῶν δεκαδικῶν χαρακτῆρων τῶ τε Διαμετέω Α καὶ
 τῶ Διαμετέω Β. οἷον, ἐπεὶ δύο χαρακτῆρες τῶν δεκα-
 δικῶν δηλωτικοὶ ἐν τῷ Διαμετέω Α, καὶ εἰς ἐν τῷ Β,
 καὶ ἡ Διαφορὰ εἰς, ἐν τῷ Πηλίκῳ Γ εἰς ὑπὲρ τῶν δε-
 καδικῶν σεσημειώθω. καὶ ἔσται τὸ ἔτος ἐσιγμένον Πη-
 λίκον Γ, τὸ ζητέμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ τὸν Α καὶ Β ὡς (Α) $\frac{1 + 4 + 4}{10 \quad 100} : (Β) \frac{1 + 2}{10}$
 ὡς προέκτα γράψας,
 ὡς ἐν τῷ ε΄ καὶ ζ΄ προβλήματι εἴρηται διέλῃς, τὸ πρὸν
 Πηλίκον ἴσον τῷ Γ ἔσται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὰ ἐν τῷ ι καὶ ια προβλήματι πραττόμενα τὴν ἐν-
 χέριαν σκοπεῖσι καὶ συντομίαν. καὶ γὰρ λίαν ἐπίμοχθον τὰς
 ὁλοκλήρας καὶ δεκαδικὰς περιέχοντας ἀριθμούς, ὡς ἐν ταῖς
 δείξεσι τῶν προβλημάτων εἴρηται γράφειν, εἰδ' ἂν
 πολλαπλασιάζειν, ἢ διαιρεῖν.

ΒΙΒΛΙΟΥ Γ΄

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α΄. Ἐξ Ἀριθμῶ τινὸς ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος ὁ γινόμενος, **Τετράγωνος** λέγεται· ὁ δὲ ληφθεὶς ἀριθμὸς, **Πλευρὰ**, ἢ **Ῥίζα τετραγωνικὴ**. οἷον τῷ 5 τετράγωνος ὁ 25· τῷ δὲ 25 ῥίζα τετραγωνικὴ ὁ 5. ὡσαύτως τῷ 36 τετράγωνος ὁ 1296· τῷ δὲ 1296 ῥίζα τετραγωνικὴ ὁ 36, καὶ τῷ $\frac{8}{9}$ τετράγωνος ὁ $\frac{64}{81}$ · τῷ δὲ $\frac{64}{81}$ τετραγωνικὴ ῥίζα ὁ $\frac{8}{9}$.

Β΄. Ἐκ Τετραγώνου ἐπὶ τῆς ἑαυτῷ ῥίζης πολλαπλασιασθέντος ὁ γινόμενος, **Κύβος** καλεῖται τῷ ἀπ' ἀρχῆς ληφθέντος· ὁ δ' ἀπ' ἀρχῆς ληφθεὶς, **Κυβικὴ ῥίζα**. οἷον τῷ 5 Κύβος ὁ 125· τῷ δὲ 125 κυβικὴ ῥίζα ὁ 5· ὁμοίως τῷ 36 Κύβος ὁ 46656· τῷ δὲ 46656 κυβικὴ ῥίζα ὁ 36, καὶ τῷ $\frac{8}{9}$ Κύβος ὁ $\frac{512}{729}$ · τῷ δὲ $\frac{512}{729}$ κυβικὴ ῥίζα ὁ $\frac{8}{9}$.

Γ΄. Ἐκ Κύβου ἐπὶ τῆς ἑαυτῷ ῥίζης πολλαπλασιασθέντος ὁ γινόμενος, **Τετάρτη Δύναμις** λέγεται τῷ ἀπ' ἀρχῆς ληφθέντος, εἴτεν τῆς ῥίζης· αὕτη δὲ, **Τετάρτης Δυνάμεως ῥίζα**· γενικῶς δὲ **Δυνάμεις** καλεῖνται τὰ ἐξ ἴσων ἀριθμῶν γινόμενα. Δευτέρα μὲν δύναμις, εἰ δὲς ὁ παράγων ληφθείη· Τρίτη δὲ, εἰ τρεῖς· Τετάρτη δὲ, εἰ τετράκις, καὶ ἔτιως ἐφεξῆς. οἷον τῷ ἀριθμῷ 2 δευτέρα μὲν δύναμις ἐστὶ 2. 2 ἢ 4· τρίτη, 2. 2. 2, εἴτεν 8· τετάρτη, 2. 2. 2. 2,

τῷ 16.

τετέσι 16· πέμπτη, 2. 2. 2. 2. 2, ὃ ἐστὶ 32, καὶ ἔτιως ἐφεξῆς. αὐτὸς δὲ ὁ 2 πρὸς μὲν τὴν δευτέραν τῶν δυνάμεων ἀναφερόμενος, ρίζα δευτέρα λέγεται, πρὸς δὲ τὴν τρίτην, τρίτη, καὶ ἔτιως ἐφεξῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Τὸν ἐκ τετραγώνου ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος γινόμενον, οἷον τὸν 16, τὸν ἐκ τῆ 4. 4 αἱ πάλαι (Διόφαντ. ἐν τῷ 1. καὶ 2. ὁρισμ. τῆ 1. βιβλ.) Δυναμοδύναμιν ἐκάλεον καὶ γὰρ καὶ ὁ τετραγώνος Δύναμις παρ' αὐτῶν ἐλέγετο· τὸν δὲ ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς κύβον πολλαπλασιασθέντος, οἷον τὸν 32, τὸν ἐκ τῆ 4. 8, Δυναμόκυβον· τὸν δὲ ἐκ Κύβου ἐαυτὸν πολλαπλασιάσαντος, Κυβόκυβον· τὸν δὲ μηδὲν τῶν ιδιωμάτων τέτων κτησάμενον, ἔχοντα δὲ ἐν αὐτῷ πλῆθος μονάδων, ἀριθμὸν Ἄλογον.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ. Α'.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ τὸν τέττε τετραγώνον, ἢ τὸν κύβον, ἢ τὴν τετάρτην Δύναμιν, καὶ τὰς ἐφεξῆς αὐτῆ Δυνάμεις εὐρεῖν πάνυ ῥάδιον· ἔχ' ἔτιω δ' εὐχερὲς καὶ ἡ ἀπὸ τῶν Δυνάμεων ἐπὶ τὰς ρίζας ἐπάνοδος. διὸ τὰ ἐπόμενα περὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τῆ τετραγώνου ρίζης σημειώτεον.

Α'. Ὁ ἐκ τῆ μεγίστη τῶν μοναδικῶν χαρακτηῖρος τετραγώνος ἐκ δύο μόνον σύγκεται χαρακτηῖρων. οἷον ὁ ἐκ τῆ 9, ἔκτε τῆ 8 καὶ 1. ἔστι γὰρ ὁ 81.

Β'. Τὸν ὅποιονδ' ἐν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς δύο ἀναλύειν ἔξεσι, καὶ δυσὶν ἴσον ὑπολαμβάνειν. οἷον τὸν $34 = 30 + 4$, ὡσαύτως τὸν $235 = 230 + 5$, καὶ τὸν $355 = 300 + 55$.

Γ'. Ἐπειδὴ τὸ ἀπὸ τῆς ὡς ἔτυχε τμηθείσης ὅλης εὐθείας τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ἐκατέρων τῶν μερῶν τετραγώνοις σὺν τῷ δις ὑπὸ τῶν αὐτῶν μερῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ (κατὰ τὴν δ'. πρὸτ. τῆς βιβλ. τῆς Γεωμ.) τέμνεται δὲ εἰς δύο ὡς ἔτυχε καὶ πᾶς δοθεὶς ἀριθμὸς (κατὰ τὴν προλαβ. σμ. μίωσ.) καὶ παντὸς ἄρα ἀριθμοῦ ὁ τετραγώνος ἴσος τοῖς ἐξ ἐκατέρων τῶν μερῶν αὐτῆς τετραγώνοις σὺν τῷ δις ὑπὸ τῶν αὐτῶν μερῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

ΣΧ. 2.

Ἐξω ἢ μὲν $AB = T$, ἢ δὲ $AG = \alpha$, A Γ B
 ἢ δὲ $GB = \beta$. ἄρα $T = \alpha + \beta$.
 εἰάν ἄρα τό, τε T ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθῇ, ὡσαύτως καὶ τὸ $\alpha + \beta$, ἔσται $T = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2$, ἥτοι $T^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. ἔξω τὸ μὲν $T = 37$, τὸ δὲ $\alpha = 30$, τὸ δὲ $\beta = 7$. ἄρα $\alpha + \beta = 30 + 7$. ἄρα $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 7 + 7^2 = 900 + 420 + 49 = 1369$.
 Ἀριθμὸς ἄρα παντὸς εἰς δύο ὡς ἔτυχε διαιρεθέντος, καὶ τῆς τετραγώνου αὐτῆς συζάντος, ὁ μὲν ἐν τῷ πρώτῳ δεξιῷ τόπῳ κείμενος χαρακτήρ, οἷον ὁ 9, τῆς τετραγώνου ἐστὶ τῆς ἐτέρας τῶν τῆς εἰζης αὐτῆς μερῶν τῆς ἐν τοῖς δεξιοῖς κείμενα, οἷον τῆς 7· ὁ δὲ ἐγγὺς δεύτερος, ἥτοι ὁ 6, τῆς δις ὀρθογωνίᾳ τῆς ἐξ ἐκατέρων τῶν αὐτῶν μερῶν γινομένης, ἥγαν τῆς τε 30 καὶ τῆς 7, περιέχει χαρακτήρας· ἐν δὲ τῷ ἐγγὺς τρίτῳ, ἢ καὶ τετάρτῳ, εἰάν παρῇ, ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης παραδείγματος, οἱ τῆς τετραγώνου χαρακτήρες τῆς ἐτέρας τῆς εἰζης μέρους, τῆς τέτῃς τῆς 30.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐάν τῆς δοθέντος ἀριθμοῦ T τῆς χαρακτή- (Τ) 1369
 ρας εἰζης ἀπὸ τῆς πρώτης δεξιᾶς ἀρξάμε-

νος, καὶ τὸν ἐγγὺς τῷ εἰχθέντος ἄσικτον καταλιπὼν, τὸν δὲ ἐξῆς τρίτον πάλιν εἴξας, ἢ αὖ τὸν πέμπτον, εἰάν ᾧ, ἢ ἔτις ἐφεξῆς ποιῆς, ἓνα μὲν εἴξων, ἓνα δὲ ἄσικτον καταλιμπάνων, τοσῶτοι εἰσονται οἱ μοναδικοὶ χαρακτηριστῆρες οἱ τὴν τετραγωνικὴν εἴξαν τῷ δοθέντος ἐμφαίνοντες, ὅσα τὰ ἐγχαραχθέντα εἴγματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Τῷ δοθέντος τετρα-	(T) 55225	(P) 235
γάνου ἀριθμοῦ T τὴν	4 A	
τετραγωνικὴν ἐξα-	4) 15	
γαγῶν εἴξαν.	529 . . . B	
	46) 232	
	55225 . . Γ	
	00000	

ΠΡΑΚΤΕΑ

1. Στίξον τὸν δοθέντα T, ὡς ἐν τῷ παρίσματι εἴρηται, καὶ τὸν μέγιστον τῶν τετραγάνων, τὸν ὑπὸ τῷ πρώτῳ ἐν τοῖς ἀριστεροῖς χαρακτηριστῆρες, (ἢ τῶν δύο πρώτων, εἰάν δύο ᾦσι) εἴπεν τῷ 5, περιεχόμενον, τέτρεσι τὸν 4 λαβὼν, τέτον μὲν ἀπὸ τῷ 5 (ἢ ἀπὸ τῶν δύο χαρακτηριστῆρων, εἰάν ᾦσιν.) ἀφείλε. τὴν δὲ εἴξαν αὐτῷ 2 ὁμοειχὸν τῷ P γράψον, πρῶτον ἔσαν τῆς ζητεμένης τῷ T εἴξεως χαρακτηριστῆρα.
2. Ὑπὸ τὸν 4 εὐθεῖαν ἀγαγὼν, τὸ ἀπὸ τῆς ἀφαιρέσεως λοιπὸν, εἴπεν τὸ 1, ὑπὸ τὴν γραμμὴν γράψον, καὶ τὸν ἐγγὺς τῷ 5 ἄσικτον χαρακτηριστῆρα, εἴπεν τὸν 5 καταγαγὼν, τὸ συμπληρέμενον 15 διὰ τῷ διπλασίᾳ τῷ εὐθεθέντος τῆς εἴξεως χαρακτηριστῆρες, εἴπεν διὰ τῷ 4 διείλε. καὶ ἔσαι τὸ προϊόν πηλίκον 3, ὁ δεύτερος τῆς ζητεμένης εἴξεως χαρακτηριστῆρ.

3. Τὸν ἐκ τῶν ἑυρεθέντων χαρακτηριστῶν 23 τετραγώνων, τῷ 529 ἀπὸ τῶν τῷ δοθέντος Τ χαρακτηριστῶν, ἦτοι τῶν 552 ἀφελῶν, καὶ τὸν ἐγγύς 2 καταγαγὼν, τὸν προκύψαντα 232 διὰ τῆς διπλασίας τῷ ἑυρεθέντος 23 διέλε. καὶ ἔσται τὸ πηλίκον 5 ὁ τῆς ζητημένης ρίζης τρίτος χαρακτήρ.
4. Τὸν ἐκ τῶν ἑυρεθέντων 235 χαρακτηριστῶν τετραγώνων, ἦτοι τὸν 5525 ἀπὸ τῷ δοθέντος Τ ἀφελῶν. (εἰάν τις πλείονες οἱ τῷ δοθέντος ἀριθμῷ τετραγῶναι ὥστε χαρακτηριστῶν, ὡς ἐν τῷ 2 ἢ 3. ἀριθμῷ εἰρηται ποιεῖται ἕως ἢ πάντας τὰς τῆς ρίζης ἑυρεῖς χαρακτηριστῶν.) Φημὶ δὴ τὸν ἔτως ἑυρεθέντα ἀριθμὸν Ρ τὴν ζητημένην εἶναι τετραγωνικὴν ρίζαν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ γὰρ τῷ Ρ τετραγῶναι, ἔτεν τῷ Γ, ἀπὸ τῷ δοθέντος τετραγῶναι Τ ἀφαιρεθέντος, τὸ λοιπὸν ἐδύνευσιν. ἴσος ἄρα ὁ Γ τῷ Τ. ἀλλ' ἢ τῷ Γ τετραγωνικὴ ρίζα ὁ Ρ. ἄρα ὁ Ρ ἐστὶν ἢ τῷ Τ ζητημένη τετραγωνικὴ ρίζα.

Α Λ Λ Ω Σ

Μετὰ τὸ διελθὼν διὰ τῷ (Τ) 55225 (Ρ) 235
 4 τῷ διπλασίᾳ τῷ πρώτῳ $\frac{4}{4} \dots \dots \dots \text{Α}$
 τῆς ρίζης χαρακτηριστῶν, 4) 152
 ἦτοι τῷ 2, τὸν 15, καὶ κατα- $\frac{12}{12} \dots \dots \dots \text{Β}$
 γαγῶν τὸν 2, τὸν ἐκ τῷ Τ $\frac{9}{9} \dots \dots \dots \text{Γ}$
 τετραγῶναι, τὸ γινόμενον ἐκ τῷ $\frac{2325}{2325}$
 πηλίκου 3 καὶ τῷ διαγέτω 46) 230... Δ
 4, ἦτοι τὸν 12 σὺν τῷ ἐκ $\frac{25}{25} \dots \dots \dots \text{Ε}$
 τῷ αὐτῷ Πηλίκῳ τετραγῶναι, $\frac{0000}{0000}$
 τῷ 9 γράψας ὡς ταῖ
 ἐν τῷ Β καὶ Γ ὁράται, τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν ἀπὸ
 τῷ 152 ἀφελῶν. Πάλιν τὸν ἐγγύς χαρακτηριστῶν 2 τῷ

τε-

τετραγώνῃς Τ καταγαγών, ἢ τῷ λοιπῷ 23 προσγράψας, ὥστε γενέσθαι τὸν 232, διέλε αὐτὸν διὰ τῆ διπλασίᾳ τῶν τῆς ῥίζης χαρακτῆρων, τετέσι διὰ τῆ 46. καὶ τὸν ἐγγὺς τῆ τετραγώνῃς Τ χαρακτῆρα 5 καταγαγών, τὸ ἐκ τῆ Πηλίκῃς 5 ἢ τῆ Διαρέτε 4 ἢ γινόμενον σὺν τῇ τῆ αὐτῆς Πηλίκῃς 5 τετραγώνῳ, ἦτοι τῷ 25, ὡς τὰ ἐν τῷ Δ ἢ Ε ὁράται, γράψας, ἀπὸ τῆ 2325 ἀφελε. εἰάν δὲ καὶ ἄλλοι ἐν τῷ δοθέντι τετραγώνῳ ὥσι χαρακτῆρες, τὰ αὐτὰ ποίει ἕως ἔ πάντας τὰς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἑξῆς χαρακτῆρας.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Ἴστέον, ὅτι τὸ διὰ τῶν ἐν τῷ 2. ἀριθμ. εἰρημένων εὐρισκόμενον Πηλίκον μεῖζόν ἐστιν ἐνίοτε τῆ τῆς ζητημένης ῥίζης χαρακτῆρος. ὃ δὴ δῆλον γίνεται ἐκ τῆ μὴ ἀφαιρεῖσθαι τὸν ἐξ αὐτῆς τε καὶ τῶν ἄλλων τῆς ῥίζης χαρακτῆρων γινόμενον τετραγώνον ἀριθμὸν ἀπὸ τῆ τετραγώνῃς, ἔτινος ζητεῖται ἡ ῥίζα. τότε δὲ τσαῖκίς ἀπὸ τῆ διαληφθέντος Πηλίκῃς τὴν μονάδα ἀφαιρετέον, ὡσαύκις ἂν ἀπαιτῇ ὁ λόγος, ἔτεν ἕως ἔ ὃ ἐξ αὐτῆς τε καὶ τῶν ἄλλων τῆς ῥίζης χαρακτῆρων γινόμενος τετραγώνος, ἀπὸ τῆ τετραγώνῃς ἀφαιρεθῇ, ἔτινος ζητεῖται ἡ ῥίζα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Τῆ δοθέντος κλασματίς ἀριθμῶς τετραγώνῃς Α τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν εὐρεῖν. δει δὴ δὲ τὸν τε ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρωνομητὴν τῆ κλάσματος τετραγώνῃς (Α) $\frac{141}{576}$ (Β) $\frac{12}{24}$ εἶναι.

ΠΡΑΚ.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ευρεθήτω κατὰ τὸ α. προβλ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶ ἀριθμητῆ, ἥτις ἐστὶν ὁ 12. ὡσαύτως καὶ ἡ τῶ παρωνομαστῆ, ἥτις ἐστὶν ὁ 24. ἔσται ἐν τῷ Κλάσμα Β ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶ Α.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῶ Β δι' εαυτῆ πολλὰπλασιασθέντος, τὸ Α προκύπτει. τὸ Β ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐστὶ τῶ Α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Δ τῶ Γ, καὶ τὸ Ζ τῶ Ε.

(Γ)	15120	(Δ)	123
	44100		216
(Ε)	36	(Ζ)	6
	81		9

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Τῶ δοθέντος τετραγώνου Τ, τῶ ἐξ ὁλοκλήρων καὶ δεκαδικῶν συγκαμμένου, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν εὑρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ζίξον τὸν δοθέντα (Τ) 145.5009 (Ρ) 12.2
Τ κατὰ τὸ α προβλ.
ὡπερ ἂν εἴ ἐξ ὁλοκλήρων μόνον ἦν συγκαμμένος. καὶ τὴν τέτε τετραγωνικὴν ῥίζαν, τὴν ἐν τῷ Ρ εὐρών, διὰ τῶν τῶ α προβλήμ. ἐξημένων, ποσῆτες χαρακτῆρας ἐπ' αὐτῆς διαχωρίσον ὑπὲρ τῶν ἐν τῷ τετραγώνῳ ὁλοκλήρων, ὅσαί αἱ ἐπ' αὐτῶν τ. α. ὅσαί γὰρ αἱ συγκαμνοῦνται καὶ οἱ τῆς ῥίζης χαρακτῆρες (κατὰ τὸ προβλ. πορίσ. τῶ δε τῶ βιβλ.) ἐπεὶ ἐν δύο εἰσὶν αὐταὶ ἐπὶ τῶ ἐν τῷ τετραγώνῳ Τ ὁλοκλήρων, δύο ἔσονται ἐν τῇ ῥίζῃ Ρ οἱ ὁλόκληροι χαρακτῆρες, οἱ δὲ λοιποὶ δεκαδικοί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Τῶ δοθέντος τετραγώνου ἀριθμοῦ Τ, τῶ ἐξ ὁλοκλήρων μόνον συγκαμμένου χαρακτῆρων, τὴν τετραγωνικὴν εὑρεῖν ῥίζαν.

ΠΡΑ

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ὅσα ἂν ἐποίεις, χαρὰ (Τ) ο. 17424 (Ρ) ο. 132
 κτήρων μόνων ὄντων ἀριθ-
 μῶν ὁλοκλήρων, τὰ αὐτὰ πράξον ἅπαντα. ἔχεις δὲ τὴν
 Ρ ἦξαν τῷ Τ δεκαδικὰ μόνᾳ ἐμφαίνεσαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε.

Τῷ δοθέντος ἀριθμοῦ Τ, τῷ μὴ τετραγώνῳ,
 τὴν ὡς ἐγγιστα τετραγωνικὴν ἔξωθεν εὐρεῖν
 ἅτεν ἀριθμὸν εὐρεῖν, ὅς δι' ἑαυτῷ πολλα-
 πλασιασθῆναι ποιήσει τινὰ ὅτι ἐγγιστα τῷ δο-
 θέντι Τ ἴσον.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

1. Εὐρεθήτω ἡ (Τ) 129. 00. 00. 00 (Ρ) 11. 357
 τῷ Τ τετραγω- 1 Α
 νικῇ ἦζα ἁπλό- 2) 2 .
 πῶ εὐρίσκειτ 121 Β
 ταν, εἴπερ ὁ Τ 22) 8. 0
 τετραγώνος ἦν. 12769 Γ
 ἔστω δὲ ἐν τῷ Τ 226) 1.310
 γιον ὁ ἐν τῷ Ρ 1288225 . . Δ
 ἀριθμὸς 11. 2270) 0. 17750
 128881449 . . Ε
 2. Προσκειθήτω
 σαν ὁμοσῆχοι
 τῷ Τ δύο μηδενικοὶ χαρακτῆρες ἐν τῷ τῶν δεκαδικῶν
 κλασμάτων τόπῳ. καὶ ὡς ἐνὸς τετραγώνῳ τῷ 129. 00
 λογιζόμενος, καὶ τῆς αὐτῆς πράξεως διαπερανθείσης,
 τὸν

τὸν προκύπτοντα τῆς ῥίζης χαρακτῆρα 3 ἐν τῷ δεκαδικῷ χώρῳ ὁμότιχον τοῖς ἐν τῷ Ρ τάξιν.

3. Πάλιν δύο μηδενικῶν χαρακτῆρων τῷ Γ ὁμοίως προσθέντων, καὶ αὐτὸν δύο, καὶ ἐφεξῆς ἕτως, ἐφ' ὅσον αὐτὸν βέλη, τὰ αὐτὰ πέραναι.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ Β.

Ὅτῳ αὖν πλείονα τῷ δοθέντι ἀριθμῷ προσθῆς μὴ δυνικά σημεῖα, τὴν αὐτὴν ἐπαναλαμβάνων πρᾶξιν, τοσάτω ἀκριβετέραν εὐρήσεις τὴν ῥίζαν. ὁ μὲν γὰρ ἀπὸ τῆ 11 τετράγωνος, εἶπεν ὁ Β διήσι τῆ 129 μονάδας 8. ὁ δὲ ἀπὸ τῆ 11. 3, ἦται ὁ Γ, μόνον μίαν μονάδα, 3 δεκατημόρια καὶ 1 ἑκατοσημόριον· ὁ δὲ ἀπὸ τῆ 11. 35, τέτειν ὁ Δ, μονάδα μὲν ἑδεμίαν, ἐν δὲ δεκατημόριον, 7 χιλιοσημόρια, καὶ 5 δεκατοχιλιοσημόρια· ὁ δὲ ἀπὸ τῆ 11. 357, ἦγεν ὁ Ε, ἐν δεκατημόριον, ἐν ἑκατοσημόριον, καὶ ἐφεξῆς τὰ ὑπὸ τὸν Ε δεκαδικά.

ΣΧΟΛΙΟΝ

Τῆ δοθέντος ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου, ἀμήχανον τὴν ἐπ' ἀκριβὲς τετραγωνικὴν ῥίζαν προσεῦρεῖν. ὁ γὰρ μὴ ὢν τετράγωνος, ἐκ ἐστὶ γινόμενον ἐξ ἀριθμοῦ δι' ἑαυτὸ πολλαπλασιαθέντος. ἐκ αὖν εὐρεθείη ἄρα ἀριθμός, ὅς δι' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθεὶς τὸν μὴ τετράγωνον ποιήσει. ὁ γὰρ δι' ἑαυτὸ πολλαπλασιαζόμενος τετράγωνον ποιεῖ. κατὰ τὸν ἀ. ὀρισμ. τῆδε τῆ βιβλ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ καὶ τε κεκλασμένος ἢ ὁ μὴ ὢν τετράγωνος, καὶ τε ἐξ ὁλοκλήρων ἢ δεκαδικῶν, καὶ ἐν δεκαδικῶν μόνων συγκείμενος, ἢ τέττε πλησιετέρα εὐρίσκειται τετραγωνικὴ ῥίζα.

Περὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης.

ΘΕΩ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Παντὸς ἀριθμοῦ τῷ ἐκ δύο μερῶν συγκαμέ-
νῳ ὁ κύβος περιέχει τὸν τῷ πρώτῳ μέρος
κύβον, τὸ τριπλάσιον τῷ γινομένῳ ἐκ τε τῷ
δευτέρῳ μέρος καὶ τῷ τετραγώνῳ τῷ πρώτῳ,
τὸ τριπλάσιον τῷ γινομένῳ ἐκ τε τῷ πρώτῳ
μέρος καὶ τῷ τετραγώνῳ τῷ δευτέρῳ, καὶ τὸν
κύβον τῷ δευτέρῳ μέρος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν τὸ τετράγωνον τὸ ἐκ τῷ $\alpha + \beta$, εἴτεν $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
διὰ τῆς ἑαυτῇ ῥίζης $\alpha + \beta$ πολ- (Α) $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
λαπλασιάζῃ, ὡς ἐν τοῖς Α καὶ (Β) $\alpha + \beta$
Β ἐρᾷται, περικύψει ὁ Γ κύβος,
πάντα περιέχων τὰ εἰρημένα.

$$\begin{array}{r} \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \\ + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ \hline \end{array}$$

$$(Γ) \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐστω $\alpha = 30$, καὶ $\beta = 7$. ἄρα $\alpha + \beta = 30 + 7$,
καὶ $\alpha^3 = 27000$, καὶ $3\alpha^2\beta = 18900$, καὶ $3\alpha\beta^2 =$
 4410 , καὶ $\beta^3 = 343$. ἄρα $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 +$
 $\beta^3 = 27000 + 18900 + 4410 + 343 = 50653$. ὁ
κύβος ἄρα τῷ $30 + 7$, εἴτεν τῷ 37 ἴσος 50653 . ὅ
δὴ εὐρήσεις, καὶ τὸν ἐκ τῷ 37 κύβον ἄλλως συνθέμε-
νος, τετέστι τὸ ἐξ αὐτῷ τῷ 37 τετράγωνον 1309 δι'
αὐτῷ τῷ 37 πολλαπλασιάσας.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ.

Α'. Τῶν τῷ κύβῳ μερῶν, τῷ ἐκ (Α) $27000 = \alpha^3$
τῷ ἀριθμῷ $30 + 7$ συνισαμένῳ, $18900 = 3\alpha^2\beta$
ὡς ἐν τῷ Α ταχθέντων, καὶ τῷ $4410 = 3\alpha\beta^2$
ἀθροίσματος γινομένῳ, ὡς ἐν
τῷ Β, εἰ μὲν χαρακτηῖται τῷ (Β) $343 = \beta^3$

τῷ

τῇ πρώτῃ μέρῃ ἐν τοῖς πρώτοις τοῖς ἐν τοῖς λαοῖς
τῇ ἀριθμοῦ, ἔτεν τῇ κύβῃ B, κῆνται οἱ δὲ τῇ
κύβῃ τῇ δευτέρῃ μέρῃ, ἐν τοῖς πρώτοις τοῖς δεξιῖς
τὰ δὲ δύο εἰρημένα γινόμενα, ἐν τοῖς μεταξύ τετων.
B'. Ο' ἐκ τῇ μεγίστῃ τῶν μοναδικῶν χαρακτήρων κύβος
729, ὁ ἐκ τῇ 9, ἐκ τριῶν χαρακτήρων σύγκειται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐὰν ἄρα ὁποῖον κυβικῷ ἀριθμῷ τὰς χαρακτῆρας
ἀνὰ τρεῖς διέλῃς, ἀπὸ τῇ πρώτῃ τῇ ἐν τοῖς δεξιῖς
εἴξῃν ἀρξάμενος, τοσῶτοι ἔσονται οἱ μοναδικοὶ χαρα-
κτῆρες, ἐξ ὧν ἡ κυβικὴ ῥίζα τῇ συχθέντος ἀριθμῷ συγ-
κεῖται, ὅσαι αἱ τυπωθεῖσαι σιγμαί. οἷον αἱ τῇ B, δια.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.

Τῇ δοθέντος κύ-	(K)	1953125	(P)	125
βος K, τῇ ἐξ ὁλο-	A . . .	1		
κλήρων συγκε-	(E) 3	09 . . .	Δ	
μένει, τὴν κυβικὴν	B . . .	1728		
εὐρεῖν ῥίζαν.	(H) 432	2251 . .	Z	
	Γ . . .	1953125		
		0000000		

ΠΡΑΚΤΕΑ.

1. Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν K, ὡς ἐν τῷ πορίσματι εἰρη-
ται εἴξον. καὶ εὐρεῖν τὸν μέγιστον κύβον τὸν περιε-
χόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν, ἢ δύο, ἢ ἑνὸς, ὡς ἐν τῷ
δοθέντι K, χαρακτῆρων τῶν ὑπὸ τῆς ἐσχάτης σιγ-
μῆς τοῖς ἐν τοῖς λαοῖς ὀριζέντων, τέττε μὲν τὴν
ρίζαν, ἥτις ἐστὶν 1, πρῶτον μέρος τῆς ζητημένης ἔσαν
ρίζης, ἀντίσυχον τῷ P. αὐτὸν δὲ τὸν κύβον, ἔτεν τὸ
1, ὑπὸ τὰς εἰρημένους χαρακτῆρας γράψον. ὃν δὲ
ἀπ' αὐτῶν ἀφελὼν, συνεπικατάγραψον τῇ ἐναπο-
λειφθείσῃ διαφορᾷ, εἴτις δῆθεν ἐναπολείποιο, (ἐν
τῷ

τῷ περκειμένῳ ὑποδείγματι ἑδεμία.) τὸν ἐγγὺς τῆς εἰρημένης πρώτης σιγμῆς ἀριθμὸν, τετέσι τὸν 9.

2. Τετονὶ τὸν 9 ἀριθμὸν διέλε δια τῷ τριπλασίῃ τῷ τετραγώνῳ τῷ ἐκ τῷ πρώτῃ μέρος τῆς ἡδὴ εὐρεθείσης ῥίξης, ἦτοι διὰ τῷ 3, καὶ τὸ Πηλίκον 3 ὡς δεύτερον ἀναλογίζε τῆς ῥίξης μέρος
3. Τὸν ἀπὸ τῷ 13 κύβον, ἀμίλει τὸν 2197 ἄφελε ἀπὸ τῶν τῷ K χαρακτηριστῶν, ἦτοι τῶν 1953. καὶ ἐπεὶ ὁ 2197 μείζων τῷ 1953, δῆλον ὅτι τὸ ἐναποτεθὲν τῆς ῥίξης δεύτερον μέρος μείζων τῷ δευτέρῳ ἐστίν. ὁ δὲ καὶ ἐν τῇ τῆς τετραγωνικῆς ῥίξης εὐρέσει συμβαίνειν σεσημειώται. ἀφαιρετέον ἄρα ἀπὸ τῷ διαληφθέντος δευτέρου μέρος τὴν μονάδα τοσάκις, ὡσάκις ἂν δεῖ, εἴτεν ἕως ἂν ὁ προκύπτων κύβος ἐλάττωσιν ἢ τῶν εἰρημένων τῷ K χαρακτηριστῶν. τῷ 2 ἐν ἀντὶ τῷ 3 ἐν τῷ P τεθέντος, καὶ τῷ ἐκ τῷ 12 κύβῳ 1728, ἀφ' ὧν εἰρηται ἀφαιρεθέντος χαρακτηριστῶν, τῷ λοιπῷ 225 συνεπικαταγραφῆται τὸ 1, τὸ ἐγγὺς τῆς προτέρως σιγμῆς. πάλιν τὸν προκύψαντα 2251 διὰ τῷ τριπλασίῃ τῷ ἐκ τῷ 12 τετραγώνῳ 144, τετέσι τῷ 432 διελών, καὶ τὸ Πηλίκον 5 ἀντὶ τρίτῳ ἐναποθέμενος τῆς ῥίξης μέρος, τὸν ἐκ τῷ 125 κύβον 1953125 ἀπὸ τῷ δευτέρῳ K ὁμοίως ἄφελε. τὰ αὐτὰ δὲ ποιεῖ ἕως ἔς πάντα τὰ τῆς ζηταμένης ῥίξης εὐρεῖς μέρη. ὁ ἔτω δὲ προκύψας ἀριθμὸς P ἐστὶν ἡ ζηταμένη ῥίζα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκ τῷ P κύβος ἴσος τῷ δεθέντι ἀριθμῷ K, δῆλον ἄρα ὅτι ὁ P ἡ κυβική ἐστὶ τῷ K ῥίζα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐκάστης τῶν εἰρημένων πράξεων ὁ λόγος ἐκ τῶν πρὸ αὐτῶν σημειώσεων δῆλος. διαχωρίζοντα γὰρ ἀνά τρεῖς

Υ

οὗ χαρακτῆρες διὰ τὸ ἐκ τριῶν συγκεῖσθαι τὸν κύβον τὸν ἐκ τῆ μεγίστης μοναδικῆς χαρακτῆρος, ὡς ἐν τῇ Β' ἐρρέθη σημειῶσαι. ζητεῖται δ' ὁ μέγιστος κύβος ὁ ἐν τοῖς πρώτοις χαρακτῆρσι τοῖς ἐν τοῖς ἀριστεροῖς κεκμένοις, διὰ τὸ ἐν αὐτοῖς κεῖσθαι τὸν κύβον τὸν ἐκ τῆ πρώτης τῆς εἰζης μέρους, κατὰ τὴν Α' σημειῶσιν. καὶ ἐπεὶ ἐγγύς τῆ κύβου τέτρε τὸ Γινόμενόν ἐστιν ἐκ τῆ τριπλασίως τῆ τετραγώνως τῆ πρώτης τῆς εἰζης μέρους καὶ τῆ δευτέρως, διὰ τῆτο διαιρεθέντος αὐτῆς τῆ Γινόμενης διὰ τῆ τριπλασίως τῆ τετραγώνως τῆ εὐρεθέντος πρώτης τῆς εἰζης μέρους, τὸ προκύπτει Πηλίκον τὸ ἕτερον τῆς εἰζης μέρους ἐστίν. πολλαπλασιάζεται δὲ ἡ αὐτὴ πρᾶξις, τῶν ἤδη εὐρεθέντων τῆς εἰζης μερῶν ἀπάντων, ἀνθ' ἑνὸς, τῆ πρώτης, ἐκλαμβάνομένων, καὶ τῆ δευτέρως πάλιν ζητημένως. οἷον ἐπὶ τῆ 125, εὐρεθέντων τῶν, δύο τῆς εἰζης μερῶν, εἶπεν τῶν 12, καὶ ἀνθ' ἑνὸς ἐκλαμβάνομένων, τῆ πρώτης, ζητεῖται τὸ δεύτερον, τὸ 5. καὶ γὰρ τὸ 125 (ὡσαύτως καὶ ἄλλος ὅποιος ἐν ἀριθμός,) εἰς δύο ἀναλύεται, τετέστιν εἰς τὸν 120 καὶ εἰς τὸν 5.

Τὸ αὐτὸ ἄλλως.

Γενομένων τῶν	(K) 1953125	(P) 125
ἐν ταῖς προδιαλη-	<u>1</u>	Α
φθεύσαις πράξε-	0953	
σι, πρώτης καὶ 1, 3, 2.	6	Β
δευτέρως, συνεπι-	1. 3. 4 12	Γ
καταγράφω-	2. 2. 2 8	Δ
σαν τῷ 9 οἱ ἐξῆς	225125	
δύο χαρακτῆρες,	3, 144. 5 2160	Ε
οἱ ὑπὸ τῆς δευτέ-	3. 12. 25 900	Ζ
ρας σιγμῆς ὀρι-	5. 5. 5 125	Η
σθετές, εἶπεν 53.		
καὶ τὸ Γινόμενον	000000	

ἐκ τῆ νεοφανῆς πηλίκῃ 2 ἢ τῆ διαρέτῃ 3 ἔτω γραφίτω, ὥς τὸν ἑκατον τῶν αὐτῆ χαρακτῆρων ὑπὸ τὸν μετὰ τὴν πρώτην σιγμὴν κείσθαι, ὡς τὸ ἀντικρὺ τῆ Β. ὡσαύτως τὸ Γινόμενον ἐκ τῆ τριπλασίᾳ τῆς πρώτης ῥίζης, ἔσται 1. 3, ἢ τῆ τετραγώνῃ 4, τῆ ἐκ τῆ εἰρημένης Πηλίκῃ 2 ἔτω γραπτέον, ὥς τὸν ἑκατον τῶν αὐτῆ χαρακτῆρων ὑπὸ τὸν δεύτερον μετὰ τὴν πρώτην σιγμὴν τετάχθαι, ὡς τὸ ἐν τῷ Γ ὁρώμενον. τέως δὲ καὶ ὁ κύβος 8 τῆ αὐτῆ Πηλίκῃ ὑπὸ τὴν δευτέραν γεγράφθαι σιγμὴν, ἔσται ὁ ἑκατος τῆ κύβου χαρακτῆρ ὑπὸ τὸν ὑπὸ τὴν δευτέραν σιγμὴν υποκείσθαι, ὡς ὁ ἀντικρὺ τῆ Δ. ἔσται τῆ κεφαλαίᾳ τῶν Γινόμενων τέτων ὑπὸ τῆ 953 ἀφαιρεθέντος, προσκαταγραφίτω τῷ λοιπῷ 225 ὁ ἐγγὺς τῆς δευτέρας σιγμῆς χαρακτῆρ, ἦται τὸ 1. καὶ τῆ προκύπτοντος 2251 διὰ τῆ τριπλασίᾳ τῆ τετραγώνῃ τῆς ἀρτι εὐρεθείσης ῥίζης 12 διαρεθέντος, ἢ τῆ πηλίκῃ 5 ὡς τρίτῃ τῆς ῥίζης χαρακτῆρος ἐναποτεθέντος, πάλιν τὸ Γινόμενον ἐκ τῆ Διαρέτῃ καὶ τῆ καινῆς πηλίκῃ 5 ἔτω γραφόν, ὥς τὸν ἑκατον τῶν αὐτῆ χαρακτῆρων ὑπὸ τὸν ἐγγὺς τῆς δευτέρας σιγμῆς κείσθαι, ὡς τὸ ἀπεναντίας τῆ Ε. τὸ δὲ Γινόμενον ἐκ τῆ τριπλασίᾳ τῆς ῥίζης 12 καὶ τῆ τετραγώνῃ τῆ αὐτῆ Πηλίκῃ ἔσται, ὥς τὸν ἑκατον ὑπὸ τὸν δεύτερον μετὰ τὴν δευτέραν σιγμὴν χαρακτῆρα τετάχθαι, ὡς τὸ ἀπεναντι τῆ Ζ. τὸν δὲ τῆ αὐτῆ Πηλίκῃ κύβον 125 ὑπὸ τὴν τρίτην σιγμὴν, ὡς περὶ τῆ προλαβόντος εἰρηται κύβου, ἀντικρὺ δὲ τῆ Η ἑσάταται αὐτὰ δὲ γινέσθαι ἄχρις ἢ τὸ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως λοιπὸν ἴσον γένηται τῷ Ο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

Τῆ δοθέντος κλασματικῆς ἀριθμῆς κύβου Κ τὴν κυβικὴν εὐρεῖν ῥίζαν. δεῖ δὲ δὲ τὸν τε ἀ-

ριθμητην καὶ τον παρωνομασην τε κλ.
τος ἀριθμὸς εἶναι κύβου.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Α.

(Κ) $\frac{2197}{12167}$

12167

Τῆς κυβικῆς τῆ ἀριθμητῆ ρίζης διὰ τῆς ἐ
προβλήματι μεθόδε εὐρεθείσης, ὡσαύτως καὶ
παρωνομασῶ, συνεσάτω ἐξ αὐτῶν κλάσμα τὸ
δὴ εἶναι ἡ ζητεμένη τῆ Κ κυβικὴ ρίζα.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Τῆ ἐκ τῆ Ρ τετραγώνου διὰ τῆ Ρ πολλαπλα
τος, ὁ Κ προκύψει. ὁ Ρ ἄρα ἡ κυβικὴ ἐστὶ τῆ

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Η'.

Τῶ δοθέντος κύβου Κ, τῶ ἐξ ὀλοκλή
δεκαδικῶν συγκειμένον, τὴν κυβικὴν ἐξ
γεῖν ρίζαν.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Α.

Εὐρεθήτω ἡ τῆ Κ ρίζα (Κ) i. 771561 (Ρ)
κατὰ τὸ 5' προβλ. ὥσπερ
ἀν εἰ ἐκ μόνων ὀλοκλήρων ὁ Κ συνέκεστο. τοσ
χαρακτῆρες ἐκ τῆς ρίζης Ρ εἰλήφθωσαν ὑπὲρ
λοκλήρων, ὅσαι αἰ ἐπὶ τῶν ὀλοκλήρων σιγμαὶ τῶ
Κ. ὅσαι γὰρ αἰ σιγμαὶ, τοσαῦται καὶ αἰ ρίζα
εἰ τῶ Ρ λοιποὶ χαρακτῆρες τὰ δεκαδικὰ τῆς ρ
φαίνεσι.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Δειχθήσεται δὲ ὁ Ρ κυβικὴ τῆ Κ ρίζα, κα
καὶ ἐν τῶ προλαβόντι προβλήματι.

18 δοθέντος κύβου K, τὴν ἐκ δεκαδικῶν μόνον
συγκειμέναν, τὴν κυβικὴν ἑυρεῖν εἴζαν.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Α.

(K) 0. 8365429 (P) 0. 203

Ἀπερ' ἂν ἐποίησ, εἶγε ἐκ μόνων ὁλοκλήρων ὁ K συ-
νέκετο, τὰ αὐτὰ ποιήσας, τὴν κυβικὴν αὐτῷ εἴζαν
P εὐρήσεις.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Ι'.

Τὸ δοθέντος ἀριθμοῦ K, τὸ ἐξ ὁλοκλήρων
συγκειμένον, καὶ μὴ ὄντος κύβου, τὴν ὡς ἐγ-
γιστα κυβικὴν ἑυρεῖν εἴζαν.

(K) 9312. 000000 (P) 21, 03

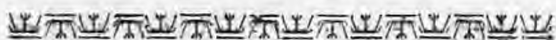
Π Ρ Α Κ Τ Ε Α

Πάνθ' ὅσα ἐν τῷ ε'. ἐντέταλται προβλήματι ποιή-
σας, καὶ κυβικὴν εἴζαν δι' ὁλοκλήρων ἐμφανισμένην ἑυ-
ρῶν τὴν 21, ὁμοσίχα τοῖς ἐν τῷ K ὁλοκλήροις τρία
μηδενικὰ γράψον σημεῖα. τὴν αὐτὴν δὲ ἐπαναλαμβά-
νων πράξιν, ἀντὶ μὲν τῶν δεκαδικῶν τῆς εἴζης χαρακ-
τήρων, τὸ 0 εὐρήσεις· ἀντὶ δὲ τῶν ἑκατοσῶν, τριῶν
μηδενικῶν προσθεθέντων, τὸν 3. εἰ δὲ ἔτι ἀκριβετέραν
εἶναι ἐθέλῃς τὴν εἴζαν, ἔτι τρία, καὶ αὐτὰ πρὸς, καὶ
ἐφεξῆς ἔτως, ὅσα γὰρ ἂν τὴν τοιαύτην δεκαπλα-
σιάξης πράξιν, τοσούτῳ ἡ ζητούμενη εἴζα ἀκριβετέρα
προκύψει. τὴν τελείαν γὰρ ἀληθῆ εὐρεῖν ἀμήχανον,
τὸ δοθέντος ἀριθμοῦ μὴ ὄντος κύβου, καθάπερ δὴ εἶδεν
τὸ ἀριθμὸν τὸ μὴ ὄντος τετραγώνου, ὡς ἐν τῷ προλα-
βόντι εἴρηται χωλῶ.

Τὰ αὐτὰ δὲ γινώσκω, εἴτε κεκλασμένος ἢ ὁ δο-
θεὶς ἀριθμὸς, ὁ μὴ ἂν κύβας, εἴτε ἐξ ὁλοκλήρων καὶ
δεκαδικῶν, εἴτε ἐκ δεκαδικῶν μόνον συγκείμενος ἢ χα-
ρακτηῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τρία μηδενικά προσίθεται σημεῖα, διὰ τὸ ἐκ τριῶν
συγκεῖσθαι τὸν ἐκ τῆ μεγίστη τῶν μοναδικῶν χαρακτή-
ρων κύβον, ὡς ἐν τῇ προλαβέσῃ β' εἴρηται σημειάσει.



ΒΙΒΛΙΟΥ Δ'.

Περὶ ἰσοδιαΦερόντων καὶ Λογαριθμῶν

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Λόγος ἀριθμητικὸς ἐστὶν ἡ κατ' ὑπεροχὴν τοιαύ-
τε τις χέσις, ὥσπερ δὴ γεωμετρικὸς, ἡ κατὰ περιοχὴν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅσον γὰρ ἕτερον ἑτέρῳ ὑπερέχει μέγεθος, ἢ ἕτε-
ρον ἑτέρῳ διαφέρει, θεωρεῖ ὁ Ἀριθμητικὸς, ὥσπερ πο-
σάκις ἕτερον περιέχει τὸ ἕτερον ὁ Γεωμέτρης. οἷον ὁ μὲν
θεωρεῖ, ὅτι ὁ 8 ὑπερέχει τὸν 2 κατὰ τὸν 6. ὁ δὲ,
ὅτι ὁ 8 περιέχει τὸν 2 τετράκις. ὥσπερ δὲ ὄροι εἰσὶ,
καὶ ἡγέμενα, καὶ ἐπόμενα, καὶ λόγων ἰσότητες, καὶ
ἀνισότητες, καὶ ἀναλογίαι ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ, ἔτω καὶ
τῇ Ἀριθμητικῇ ἐν ἐκείνῃ μὲν, τῆς περιοχῆς ἐν ταύ-
τῃ δὲ, τῆς ὑπεροχῆς θεωρημένης.

Β'. Ἀναλογία ἀριθμητικὴ, δύο ἀριθμητικῶν λόγων πα-
ράθεσις ἐστὶ καὶ ἡ μὲν **Συνεχὴς**, ἡ δὲ **Διηρημέ-
νη**, ἢ **Διακεκριμένη** λέγεται.

ΠΟ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐντεῦθεν δῆλον, ὅτι ἐξ ἐλαττόνων ἢ τριῶν ὅρων ἐκ
 ὧν συσταθεῖ ἀνάλογια ἀριθμητική, καθάπερ δὴ ἐδὲ Γε-
 ωμετρική.

Γ'. Μεγέθη ἀριθμητικῶς ἀνάλογον, ἢ ἐν ἀριθ-
 μητικῷ λόγῳ εἶναι λέγεται, εἰάν ἡ διαφορὰ τῶ
 πρώτου καὶ τῶ δευτέρου ἴση ἢ τῇ διαφορᾷ τῶ δευ-
 τέρου καὶ τῶ τρίτου, ἢ τῇ τῶ τρίτου καὶ τῶ τετάρ-
 του. οἷον, 2, 5, 8· ἢ 3, 7, 11, 15.

Δ'. Ἐν συνεχεῖ ἀριθμητικῷ λόγῳ, ἢ συνεχῶς κατὰ
 ἀριθμητικὸν λόγον μεγέθη ἀνάλογον εἶναι λέγεται,
 εἰάν πρῶτον διαφέρει δευτέρου, ὅσον καὶ δευτέρον τρί-
 του. οἷον, 2, 5, 8.

Ε'. Ἐν διακεκριμένῳ δὲ ἀριθμητικῷ λόγῳ, ἢ κατὰ δια-
 κεκριμένον ἀριθμητικὸν λόγον ἀνάλογον, εἰάν πρῶτον
 διαφέρει δευτέρου, ὅσον καὶ τρίτον τετάρτου. οἷον, 3,
 7, 11, 15.

Σ'. Αἱ ἐκ πολλῶν ὅρων συνιστάμεναι ἀριθμητικαὶ ἀνα-
 λογίαι, Σειραὶ, ἢ Πρόοδοι λέγονται ἀριθμητικαί· ἐν
 αἷς ἢ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, κτ, σειρά Φυ-
 σικὴ ἀριθμητικὴ καλεῖται· ὁμοίως καὶ αἱ ἐκ πολλῶν
 Γεωμετρικῶν ὅρων, Γεωμετρικαί.

Ζ'. Ἐάν μὲν οἱ τῆς ἀναλογίας ὅροι προϊόντες αὐξῶσιν,
 οἷον οἱ 3, 5, 7, 9, 11, κτ, ἀνάλογια, ἢ σειρά
 Αὐξουσα καλεῖται· εἰάν δὲ μειῶνται, οἷον, οἱ 18,
 15, 12, 9, 6, κτ, Μειωμένη.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

Εἰάν μὲν ἡ σειρά τῶν ἐν συνεχεῖ ἀριθμητι-
 κῷ λόγῳ ὄντων μεγεθῶν αὐξουσα ἢ, οἷον,

3, 6, 9, ὁ μὲν δεύτερος ὅρος ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν ὅρων σύγκειται· ὁ δὲ τρίτος, ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τῆς διαφορᾶς· εἰάν δὲ μεικμένη, οἷον, 12, 9, 6, ὁ μὲν πρῶτος, ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τῆς διαφορᾶς· ὁ δὲ δεύτερος, ἐκ τῆς τρίτης καὶ τῆς διαφορᾶς.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ δὴ γὰρ ἡ διαφορὰ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας ἴση τῇ τῆς τρίτης καὶ τῆς τετάρτης, (κατὰ τὸν δ' ὅρον.) ἐν μὲν τῇ αὐξήσει ἄρα σειρᾷ τῷ μὲν πρώτῳ προσθεμένης τῆς διαφορᾶς, προκύπτει ὁ δεύτερος· τῷ δ' ἑξῆς τῶν τῆς τρίτης, ὁ τρίτος. ἐν δὲ τῇ μειυμένῃ τῷ μὲν τρίτῳ προσυναφθεῖσα ἡ διαφορὰ, ποιεῖ τὸν δεύτερον· τῷ δ' ἑξῆς τῶν τῆς τρίτης, ποιεῖ τὸν πρῶτον. δῆλον ἄρα τὸ προκείμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι δοθέντος τῆς τε πρώτης ὁριζωνίας καὶ τῆς τῶν ὅρων διαφορᾶς, ῥαδίως ἐπ' ἀπαιτήσιν τὴν σειρὰν προάγειν ἐνεσιν. οἷον, εἰάν ὁ μὲν πρῶτος τῆς διαφορᾶς ὅρος ἴσος ᾗ τῷ 2, ἡ δὲ τῶν ὅρων διαφορὰ τῷ 3, προσθεμένης τῆς 3 τῷ 2, προκύπτει ὁ δεύτερος 5, καὶ τῷ 5 πάλιν προσθεμένης τῆς 3, ὁ τρίτος 8, καὶ τῷ 8 αὖ τῆς 3, ὁ τέταρτος 11, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Β'.

Εἰάν μὲν ἡ σειρὰ τῶν ἐν διακεκριμένῳ ἀριθμητικῷ λόγῳ μεγεθῶν αὐξασα ᾗ, οἷον 3, 6, 7, 10, ὁ μὲν δεύτερος ὅρος ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν ὅρων σύγκειται, ὁ δὲ

τέ-

τεταρτος ἐκ τῆς τρίτης καὶ τῆς διαφορας·
 εἰν δὲ μεικμένη, οἷον, 24, 20, 16, 12, ὁ μὲν
 πρῶτος ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τῆς διαφορᾶς, ὁ
 δὲ τρίτος ἐκ τῆς τετάρτης καὶ τῆς διαφορᾶς.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ γὰρ ἡ διαφορὰ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας
 ἴση τῇ τῆς τρίτης καὶ τῆς τετάρτης, (κατὰ τὸν ἑ. ὅρισ.)
 τῆς μὲν αὐξήσεως ἄρα σειρᾶς, ὁ δεύτερος ὅρος ὁ πρῶ-
 τός ἐστι σὺν τῇ διαφορᾷ, ὡσαύτως ὁ τέταρτος ἡ δια-
 φορὰ ἐστι σὺν τῷ τρίτῳ· τῆς δὲ μεικμένης ὁ μὲν πρῶ-
 τος αὐτὸς ὁ δεύτερός ἐστι καὶ ἡ διαφορὰ· ὁ δὲ τρίτος,
 ἡ διαφορὰ σὺν τῷ τετάρτῳ. ἐκ τούτων ἔν δῆλον τὸ
 προκείμενον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.

Εἰν τρία μεγέθη συνεχῶς κατὰ ἀριθμη-
 τικὸν λόγον ἀνάλογον ἢ, τὸ τῆς πρώτης καὶ
 τῆς τρίτης ἄθροισμα διπλάσιον ἔσται τῆς δευ-
 τέρας ὅρος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐστω πρῶτον ἡ ἀναλογία αὐξήσα, οἷον 4, 7, 10.
 καὶ ἐπεὶ ὁ τρίτος ὅρος 10 ἐκ τῆς δευτέρας 7 καὶ τῆς
 διαφορᾶς 3 σύγκειται, ἔστιν ἐκ τῆς πρώτης 4 καὶ τῆς
 διπλασίας τῆς διαφορᾶς, τετέστιν 6· ὁ γὰρ δεύτερος,
 ὁ πρῶτός ἐστιν σὺν τῇ διαφορᾷ. (κατὰ τὸ ἀ. θεωρ.)
 τὸ ἄρα τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης ἄθροισμα, ἔστιν τὸ
 $4 + 10 = 4 + 4 + 6$, δις τόντε πρῶτον καὶ τὴν
 διαφορὰν περιέχει, ἦτοι ἐκ τῆς διπλασίας τῆς πρώτης
 καὶ τῆς διαφορᾶς σύγκειται. ἀλλ' ὁ δεύτερος ἴσος τῷ
 ὅρῳ 5

πρῶ-

πρώτῳ σὺν τῇ διαφορᾷ, ὡς εἴρηται. τὸ τῷ πρώτῳ καὶ τῷ τρίτῳ ἄθροισμα διπλάσιον τῷ δευτέρῳ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Δ.

Εἰάν τέσσαρα μεγέθη κατὰ διηρημένον ριθμητικὸν λόγον ἀνάλογον ᾗ, τὸ τῷ πρώτῳ καὶ τῷ τετάρτῳ ἄθροισμα τῷ τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ τρίτῳ ἴσον ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἴπω ἡ ἀναλογία αὐξουσα, οἷον, 2, 7, 12, 17 ἐπεὶ ὁ τέταρτος 17 ἐκ τῷ τρίτῳ καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῆς κεῖται, (κατὰ τὸ β'. θεωρ.) τὸ ἄρα ἄθροισμα τῷ πρώτῳ καὶ τῷ τετάρτῳ $2 + 17$ ὁ πρώτος ἐστὶ καὶ ὁ τρίτος καὶ ἡ διαφορὰ, εἴτεν $2 + 12 + 5$. παλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος 7 ὁ πρώτος ἐστὶ καὶ ἡ διαφορὰ, τὸ ἄρα τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ τρίτῳ ἄθροισμα, εἴτεν τὸ $7 + 12 = 19$ $5 + 12$, ὁ πρώτος ἐστὶ σὺν τῇ διαφορᾷ καὶ τῷ τρίτῳ ἀλλὰ τέτο αὐτό ἐστὶ καὶ τὸ τῷ πρώτῳ καὶ τετάρτῳ ἄθροισμα, ὡς δέδεικται. τὸ ἄρα τῷ πρώτῳ καὶ τῷ τετάρτῳ ἄθροισμα ἴσον τῷ τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ τρίτῳ. ὃ εἶδει δεικνύει.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ τὸ προκειμενον καὶ ἐπὶ τῆς ἐκβαλλόμενης δειχθήσεται ἀναλογίας.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Α΄.

Δύω ἀριθμῶν δοθέντων, οἷον, τῶν 9 καὶ 16 μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον εὐρεῖν.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Α.

Σύναψον τὰς δύο δοθέντας, καὶ τὸ αὐτῶν ἄθροισμα, τὸν 25 δίχα διελὼν, εὐρήσεις τὸν ζητούμενον μέσον $16 \div 5 = 3.2$ ὅς ἐστιν ὁ 11.

Τὸ τῆ πρώτῃ καὶ τῆ τρίτῃ ἀθροίσμα διπλασίον ἐστὶ
 τῆ δευτέρας, τετέστι τῷ μέσῳ. (κατὰ τὸ γ' θεώρ.) ἀλλ'
 ἀφαιρέσαντες ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος εἰσὶ. ἢ γὰρ ὁ μέσος
 ζητεῖται. τὸ αὐτῶν ἄρα ἀθροίσμα τὸ 22. τὸ διπλά-
 σον τῷ μέσῳ ἐστὶ. τὸ ἥμισυ ἄρα τέττε, εἶπεν τὸ 11,
 ἢ ζητούμενος μέσος ἐστὶ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, οἷον, τῷ 8, 5, 9,
 τέταρτον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον εὐρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ

Τὸν δεύτερον καὶ τρίτον, εἶπεν τὸν 5 καὶ 9, συνά-
 ψας, καὶ ἀπὸ τῆ ἀθροίσματος αὐτῶν τῷ 14 τὸν πρῶ-
 τον 8 ἀφελὼν, τὸν ζητούμενον τέταρτον εὐρήσεις·
 ἢ ἐστὶ τὸ λοιπὸν τὸ ἐκ τῆς τοιαύτης δε περὶ κύπτου ἀφαι-
 ρεως, εἶπεν ὁ 6.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τῷ πρώτῳ καὶ τετάρτῳ ἀθροίσμα ἴσον ἐστὶ τῷ
 τῷ δευτέρῳ καὶ τρίτῳ. (κατὰ τὸ δ' θεώρ.) εἰάν ἄρα
 ὁ τέταρτος ὀνομασθῇ χ, ἔσεται $8 + χ = 14$. ἐκατέρω-
 θεν δὲ τῷ 8 ἀφαιρεθέντος, ἔσεται $χ = 6$, τετέστιν ὁ
 τέταρτος ἴσος τῇ διαφορᾷ τῷ πρώτῳ καὶ τῷ ἀθροί-
 σματος τῷ δευτέρῳ καὶ τρίτῳ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'

Εἰάν ὡσι τέσσαρα μεγέθη, οἷον τὰ 3, 7, 5,
 9 ἀριθμητικῶς ἀνάλογα, καὶ ἐναλλὰξ, εἶ-
 πεν 3, 5, 7, 9, καὶ ἀνάπαλιν, ἦτοι 7, 3, 9,
 5 ἀνάλογον ἔσται. πάλιν εἰάν τεταγμένη ἡ
 ἀνα-

ἀναλογία ἥ, ὅρα τὸν ιδ'. ὁρισμ. τῆς ἐ. βιβλ. τῆς Γεωμετρ.) οἷον 1, 2, 3, 4, καὶ 2, 4, 4, 1, 11. ὥσάυτ' εἴ
 Π, ἔσεται καὶ δι' ἴσ' 1, 9, 3, 11. ὥσάυτ' εἴ
 εἰς τετραγυμένη ἡ ἀναλογία ἥ, ἥτοι 3, 7,
 5, 9, καὶ 7, 10, 2, 5, ἔσεται καὶ δι' ἴσ' τε-
 τραγυμένως 3, 10, 2, 9. δῆλος δὲ ὁ λόγος.
 ἡ γὰρ μεταξὺ ἀλλήλων διαφορὰ ἡ αὐτή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ.

Δύω ἀριθμῶν δοθέντων, οἷον τῶν 1 καὶ 9
 μέσον γεωμετρικῶς ἀνάλογον εὐρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ

Τῆ ἐκ τῶν δύο δοθέντων 1 καὶ 9 Γινόμενη 1. 9
 τὴν τετραγωνικὴν ἐξάγαγε ρίζαν. αὕτη δὴ ἔσται ὁ
 τέμενος μέσος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐσὼ μὲν γὰρ X ὁ ζητούμενος μέσος. ἄρα ὡς 1: X::
 X: 9. τὸ ἐκ τῶν ἀκρῶν ἄρα ἴσον τῷ ἐκ τῆς μέσης,
 (κατὰ τὴν 5. πρότ. τῆς ἐ. βιβλ. τῆς Γεωμετρ.) ἔστι
 $1 \cdot 9 = X^2$. τῆς ἄρα τετραγωνικῆς ρίζης ἐκατέρωθεν
 ἐξαχθείσης, ἔσται $X = 3$. ὁ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, οἷον τῶν 2, 7, 12,
 τέταρτον γεωμετρικῶς ἀνάλογον προσευ-
 ρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τὸ ἐκ τῶν μέσων 7 καὶ 12 Γινόμενον διὰ τῆς πρώτης
 2 διελε. ἔσται δὲ ἐν τῷ Πηλίκῳ 42 ὁ ζητούμενος τέταρτος.

ΔΕΙΞΙΣ

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐξω X ὁ ζητούμενος. ἄρα ὡς $2 : 7 :: 12 : X$. τὸ
 ἐκ τῶν ἀκρῶν ἄρα ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων, (κατὰ τὴν
 εἰς τὴν ἐ.) εἶπεν $2 \cdot X = 7 \cdot 12$. διέλεε ἐκάτερον τέτων
 τῶν ἴσων διὰ τῆς 2 . ἔσαι ἔν τὰ τέτων Πηλικά ἴσα,
 εἶπεν $\frac{2 \cdot X}{2} = \frac{7 \cdot 12}{2}$, ὅπερ ἔστι, $X = 42$

ΟΡΙΣΜΟΣ Η'.

Λογάρισμός ἐστιν ὁ ἀριθμὸς ὁ τῆς διπλασίου, ἢ
 τριπλασίου, ἢ τετραπλασίου, ἢ ὅπως ἂν πολλαπλασί-
 ονος λόγῳ ἐμφαντικός.

ΣΧΟΛΙΟΝ

Ἐάν ὑπὸ τὴν γεωμετρικὴν συνεχῇ σειρᾷ, οἷον τὴν,
 $3, 6, 12, 24, 48, 96$, κτ. ἀριθμητικὴν γραφῆς,
 οἷον τὴν, $2, 3, 4, 5, 6$, κτ. ἀμέλειται ὅρον ἀριθ-
 μητικὸν ὑπὸ ὅρον γεωμετρικόν, οἱ ἀριθμητικοὶ ὅροι Λο-
 γάρισμοι εἰσονται τῶν γεωμετρικῶν ὁ μὲν 2 Λογάρισθ-
 μος τῆς 6 ὅν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 12 , ὅστις διπλα-
 σίον ἐστίν, ἥπερ ὁ λόγος ὅν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 6 . ὁ
 δὲ 5 , τῆς 6 ὅν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 24 , ὅς ἐστι τρι-
 πλασίον, ἥπερ ὅν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 6 . ὁ δὲ 4 , τῆς
 6 ὅν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 48 , τετραπλασίονα ὄντα,
 ἥπερ ὅν ἔχει ὁ αὐτὸς 3 πρὸς τὸν 6 , καὶ ἐν τοῖς ἐφε-
 ρέουσιν ὁμοίως.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. οἱ ἐν ὅροι (Α) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$, κτ.
 τῆς Ἀριθ- (Β) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, κτ.
 μητικῆς σει-
 ρᾶς Β, οἱ ὑπὸ τὰς τῆς Γεωμετρικῆς Α γραφόμενοι,
 οἱ τέτων Λογάρισμοί εἰσιν.

Β'.

Β'. Ἐὰν ἡ Προόδος ἡ ὑπὸ τὴν Γεωμετρικὴν, ἡ Φυσικὴ Σειρὰ τῶν ἀριθμῶν ἦ, τὸ οὖν πρῶτον ἔχουσα ὅρον, ὡς ἐν τῷ προκειμένῳ ὑποδείγματι, οἱ Λογάριθμοι τὰ ἀπὸ τῆς μονάδος ἀποσήματα τῶν γεωμετρικῶς ἀναλόγων ἀριθμῶν ἐμφαίνουσιν. οἷον τὸ μὲν 1, τὸ ἐν τῇ Β σειρᾷ δηλοῖ, ὅτι τὸ τῷ 2, τῷ ἐν τῇ γεωμετρικῇ σειρᾷ Α ἀπόσημά ἀπὸ τῆς μονάδος ἐν ἑστί· ὁ δὲ ἐξῆς 2 ὁ ἀριθμητικὸς, ὅτι δύο τὰ ἀπὸ τῆς μονάδος ἀποσήματα τῷ γεωμετρικῷ 4· ὁ δὲ ἐξῆς 3, ὅτι τρεῖς τὰ τῷ 8 ἀποσήματα, καὶ ἕτως ἐν τοῖς ἐφεξῆς.

Γ'. Ἐπεὶ οἱ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου ἀριθμοί, τῆς πρῶτον ἔχουσης ὅρον τὴν μονάδα, Δυνάμεις εἰσὶ, Φυσικῇ προεῖσσαι τάξει, ἔαν ἡ ὑπ' αὐτὴν Ἀριθμητικὴ, ἡ Φυσικὴ ἦ, ἀπὸ τῷ οὖν ἐναρξομένη, οἱ Λογάριθμοι οἱ ἐκδέταί εἰσὶ τῶν Δυναμένων. οἷον, τὸ μὲν 1, ἐκδέτης τῷ 2· πρώτη γὰρ ὁ 2 Δύναμις· ὁ δὲ 2, τῷ 4· δευτέρα γὰρ ὁ 4 Δύναμις, εἶπεν τετραγώνος· ὁ δὲ 3, τῷ 8, ὅς ἐστι τρίτη Δύναμις, ἦτοι κύβος, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α 5'.

Ἐὰν ἡ μονὰς τὸ οὖν λογάριθμον ἔχη, ὁ λογάριθμος παντὸς γινομένου, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων, τῷ πολλαπλασιασῷ, καὶ τῷ πολλαπλασιασῷ· οἷον ὁ λογάριθμος τῷ 8, τῷ γινομένου ἐκ τῷ πολλαπλασιασμοῦ τῷ 2 ἐπὶ τὸν 4, ἐστὶ τὸ ἀθροίσμα τῶν λογαρίθμων τῷ 2 καὶ τῷ 4, εἶπεν ὁ 3.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς μονάς, πρὸς Πολλαπλασιασθῆν, ἔτω πολλαπλασιαστέος πρὸς Γινόμενον, (κατὰ τὴν α'. συνέπ. τῆ ε'. ὀρίσ. τῆ α'. τῆς Ἀριθμ. βιβλ.) ἔτεν ὡς 1 : 2 :: 4 : 8, ὁ τῆ Γινόμενε ἄρα 8 Λογάρισμος, ὁ τέταρτος τῶν ἰσοδιαφερόντων 0, 1, 2, ἐστίν, ἦτοι ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς τῆ Λογαρίθμου τῆς μονάδος, τῆ πολλαπλασιασῆ, καὶ τῆ πολλαπλασιαστέου. ἀλλ' ὁ τέταρτος τῶν ἰσοδιαφερόντων ἴσος τῇ διαφορᾷ τῆ ἀθροίσματος τῶν μέσων καὶ τῆ πρώτου. (ὄρα τὸ β'. πρόβλ. τῆ δε τῆ βιβλ.) ἔστι δὲ ὁ πρῶτος 0 ἐξ ὑποθέσεως. ὁ Λογάρισμος ἄρα τῆ Γινόμενε 8 ἴσος τῷ Ἀθροίσματι 3 τῶν Λογαρίθμων τῆ πολλαπλασιασῆ καὶ τῆ πολλαπλασιαστέου. ὁ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Τὸ ἀθροισμα ἄρα δύο ὁποιωνῶν Λογαρίθμων, ὁ Λογάρισμός ἐστι τῆ Γινόμενε ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν, ὧν οἱ Λογάρισμοι τὸ διαληφθὲν συνεκρότησαν Ἀθροισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ὁ μὲν τῆ τετραγώνου Λογάρισμος διπλάσιός ἐστι τῆ τῆς ἐαυτῆ τετραγωνικῆς ῥίζης· ὁ δὲ τῆ κύβου, τῆς κυβικῆς τριπλάσιος, καὶ ἔτις ἐφεξῆς. τῆ μὲν γάρ τετραγώνου ὁ Λογάρισμος τὸ Ἀθροισμὰ ἐστι δύο ἴσων Λογαρίθμων, τῆ πολλαπλασιασῆ δηλαδή καὶ τῆ πολλαπλασιαστέου· τῆ δὲ κύβου, τριῶν, καὶ ἔτις ἐφεξῆς. οἷον ὁ μὲν 2 ὁ Λογάρισμος τῆ τετραγώνου 4, διπλάσιός ἐστι τῆ Λογαρίθμου 1 τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης 2. ὁ δὲ 3 ὁ Λογάρισμος τῆ κύβου 8, τριπλάσιός ἐστι τῆ Λογαρίθμου 1 τῆς κυβικῆς ῥίζης 2.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'.

Ἐὰν ὁ τῆς μονάδος Λογάρισμος τὸ 0 ᾗ, ὁ τῆ Πηλίκου Λογάρισμος ἴσος ἔσται τῇ δια-

φο-

Φορὰ τῶν λογαρίθμων τῷ Διαρέτῃ καὶ Διαρετέῃ· οἷον ὁ 2, διαφορὰ ὧν τῷ 7, Λογαρίθμος τῷ 128, καὶ τῷ 5, Λογαρίθμος τῷ 32 ὁ Λογάρυθμός ἐστι τῷ Πηλίκῃ 4, τῷ προκύπτοντος ἐκ τῆς διαρέσεως τῷ 128 διὰ τῷ 32.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς Διαρέτης, πρὸς Διαρετέον, ἔτω μονάς, πρὸς Πηλίκον. (ὄρα τὴν Β'. συνέπ. τῷ α'. τῆς Ἀριθμ. βιβλ.) ὁ τῷ Πηλίκῃ ἄρα Λογάρυθμος ὁ τῶν ἰσοδιαφερόντων τέταρτος ἐστίν, εἴτεν ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς ὅρος τῶν Λογαρίθμων τῷ Διαρέτῃ, τῷ Διαρετέῃ, καὶ τῆς μονάδος. ἀλλ' ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς ἴσος τῇ διαφορᾷ τῶν κεφαλαίων τῶν μέσων καὶ τῷ πρώτῃ. (ὄρα τὸ β'. πρόσβ. τῷ δε τῷ βιβλ.) ὁ τῷ Πηλίκῃ ἄρα Λογάρυθμος ἴσος τῷ τῶν Λογαρίθμων, τῷ Διαρετέῃ δηλαδή καὶ τῆς μονάδος, ἀθροίσματι, τῷ Λογαρίθμῳ τῷ Διαρέτῃ ἀφαιρεθέντος. ἀλλ' ὁ τῆς μονάδος Λογάρυθμος ἴσος ὁ ἐξ προθέσεως. ὁ τῷ Πηλίκῃ ἄρα Λογάρυθμος ἴσος τῇ διαφορᾷ τῶν Λογαρίθμων τῷ Διαρέτῃ καὶ Διαρετέῃ. ο, ε,

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἡ διαφορὰ δύο ὁποιωνῶν Λογαρίθμων, ὁ Λογάρυθμός ἐστι τῷ Πηλίκῃ τῷ ἐκ τῆς διαρέσεως προκύπτοντος τῶν ἀριθμῶν, ὧν οἱ Λογάρυθμοι τὴν διαληφθεῖσα μεταξὺ ἀλλήλων ἔχουσι διαφοράν. οἷον ὁ 6 ἡ διαφορὰ τῶν Λογαρίθμων 2 καὶ 8, ὁ Λογάρυθμός ἐστι τῷ Πηλίκῃ 64, τῷ ἐκ τῆς διαρέσεως προκύπτοντος τῶν καὶ 256.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Τῶν Λογαριθμῶν, οἷς οἱ Μαθηματικοὶ χρῶνται, τὸν τύπον ὁ Ρεϊγγιος (α) τῇ τῷ πρώτῳ αὐτῶν εὕρετῃ Νε. πέρη ὁδηγία πρώτος συνετάξατο ἐκ τῆςδε τῆς γεωμετρικῆς αὐτῆς λαβῶν προόδου 1, 10, 100, 1000, 10000. εἰς δὲ οἱ παρ' αὐτῇ εὕρεθέντες, καὶ κανόνι ἢ πίνακι συνταχθέντες τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν τῶν ἀπὸ μονάδος ἀρχομένων Λογαριθμοὶ τὸν ἀριθμὸν, 10000, τίνι δὲ τέτῳ εὔρε μεθόδῳ, ἐρῶμεν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Οἱ τῶν ἀριθμῶν 1, 10, 100, 1000, 10000, τῶν γεωμετρικῆς σειρᾶς ὄρων ὄντων, Λογαριθμοὶ ἀπάντας εὕρηνται. οἱ γὰρ ὑπ' αὐτῆς γραφέντες τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ὄροι, 0, 1, 2, 3, 4, οἱ αὐτῶν εἰς Λογαριθμοὶ, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

Μεταξὺ τῶν γεωμετρικῶν ὄρων, 1 καὶ 10, (ἁπλῶς καὶ μεταξὺ τῶν ἄλλων) ἐπ' ἀκριβὲς γεωμετρικὸν ἀνάλογον εὑρεῖν ἀμήχανον. ὁ γὰρ μεταξὺ αὐτῶν γεωμετρικὸς ἀνάλογος ἢ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐστὶ τῷ Γινομένῳ ὑπὸ τῷ 1 καὶ 10, (κατὰ τὸ γ'. προβλ. τῷ δ'. βιβλ. τῆς Ἀριθμητ.) τέτῳ δὲ μὴ ὄντος τετραγώνου, τὴν ἐπ' ἀκριβὲς τετραγωνικὴν αὐτῇ ῥίζαν εὑρεῖν ἀδύνατον. (κατὰ τὴν γ'. σημ. τῷ γ'. βιβλ. τῆς Ἀριθμητ.) καὶ δὲ ἀδύνατον τὸν ἀκριβῆτε εὑρεῖν καὶ ἐντελῆ μέσον ἀνάλογον, εὕρεσκειται δ' ἐν ὅμῳ ὁ ἐγγύτατος, καὶ τῷ ἐντελεῶς διαφέρων κατὰ τινὰ μόνον δεκαδικὰ μέρη τῆς μονάδος εἰς ἐν διαμεθεώσεως μιλλιόνιον, εἰς ἐξαγομένης τῆς τῷ 1. 10 τετραγωνικῆς ῥίζης, προσεδῆ σημα μῆδενικὰ ἑπτὰ ἀντὶ τῶν δεκαδικῶν. ἐκ τέτῳ

Φ

ἔπε-

(α) Τῆς Γεωμετρίας ἦν διδασκαλὸς ἐν τῇ κατὰ τὴν Ὁξωνίαν Ἀκαδημίᾳ. ὅρα τὸ 348 παράγγρ. τῆς τῷ Οὐέλφ. Ἀριθμ.

ἐπιταί, καὶ αὐτὲς τῆς Λογαρίθμου τῶν τοιῶτων ἀριθ-
μῶν μὴ ἐξηκριβωμένους εἶναι εἰς τὸ παντελές. οἷον τῷ
ἀριθμῷ 9 Λογαρίθμος λαμβάνεται ὁ 0. 95424251.
ἔτος δὲ 8 τῷ 9, ἀλλὰ τῷ 9. 00000000 Λογαρίθ-
μός ἐστι, τετῆς Λογαρίθμός ἐστιν ἀριθμῷ μὴ διαφέ-
ροντος τῷ 9 εἰμὴ κατὰ τινὰ δεκαδικὰ τῶν μερῶν τῆς
εἰς μιλλιόνιον διαιρεθείσης μονάδος. παραβλεπτέα δὲ ἐν
τῇ πρακτικῇ χρήσεται ἡ τοιαύτη διαφορὰ, ὡς μηδεμιᾶς
αἰδητῆς ἀλλοιώσεως πρόξενος.

Ἡ τῷ εὐρίσκῃ τῶν Λογαρίθμων μέθοδος.

Κείσθω δὲν εὐρεῖν τὸν τῷ 9 Λογαρίθμον. προσγε-
γράψω τοῖς τε γεωμετρικοῖς ὅροις 1, καὶ 10, ὁμοίως
καὶ τοῖς ἀριθμητικοῖς 0 καὶ 1 σημεῖα μηδενικά ἐπτά.
(πρὸς τὴν τῶν δεκαδικῶν ταῦτα προσγράφεται δῆλω-
σιν.) καὶ λεγέσθω ὁ μὲν τῶν γεωμετρικῶν ὅρων, ὁ 1.
00000000, Α· ὁ δὲ, ὁ 10. 00000000, Β. καὶ εὐρε-
θῇτω μεταξύ μὲν τῶν Α καὶ Β μέσος γεωμετρικός ὅρος
ὁ Γ, ἦτοι ὁ 3. 1622777. (κατὰ τὸ γ. τῷ 9 τῷ βιβλ.
πρόβλ.) μεταξύ δὲ τῶν 0. 00000000, καὶ 1. 00000000,
μέσος ἀριθμητικός, ὁ 0. 50000000, (κατὰ τὸ α'.
τῷ 9 τῷ βιβλ. πρόβλ.) ὅστις δὴ ὁ Λογαρίθμος τῷ Γ
ἔσται. πάλιν μεταξύ τῷ Γ καὶ τῷ Β μέσος γεωμετρι-
κός ὁ Δ, καὶ μεταξύ τῷ 1. 00000000, καὶ τῷ 0. 50000000
μέσος ἀριθμητικός ὁ 75000000 εὐρεθῇτω, ὡς ἐν τῷ
προκειμένῳ τύπῳ (ὅρα πίν. ΚΖ'.) πάρεσιν ἰδεῖν. καὶ
ἐφεξῆς ὁμοίως τὰ αὐτὰ ἐπιτελέσθω, ἄχρις ἢ ὁ εὐρε-
θισόμενος μέσος γεωμετρικός ε, τῷ 9 μηδὲν διαφέρει,
εἰμὴ κατὰ τινὰ δεκαδικὰ τῶν δεκατομμυριοσημορίων
ἐλάσσονα, εἴτεν ἴσος ἢ 9. 00000000. ἔσται δὴ ἔν ὁ Λογα-
ρίθμος αὐτῷ, ὁ ἑκάτος πάντων τῶν τῷ διαληφθέντι
τρόπῳ εὐρεθέντων ἀριθμητικῶν μέσων ὅρων, εἴτεν ὁ
0. 95424251. τῷ 9 γὰρ τῷ τρόπῳ ἑκάστον τῶν Λο-
γα-

γαρίθμων εὑρεῖν ἔνεστιν. ἀλλ' ἴσμεν, ὅτι ἐκ τινων εὑρεθέντων, ἢ ἄλλως εὑρεῖν πάνυ ῥάδιον. οἷον, τὸν τῷ 9 εὑρεθέντα Λογάρισμον εἰάν μὲν δίχα διέλῃς, τὸν τῷ 3 ἔξεις· εἰάν δὲ διπλασιάσῃς, τὸν τῷ 81. (ὅρα τὸ β'. τῆδε τῷ βιβλ. πόρ.) πάλιν εἰάν τὸν τῷ 3 Λογάρισμον τῷ τῷ 9 συνάψῃς, ὁ τῷ 27 προκίψει. (κατὰ τὸ γ'. πόρ. τῷ αὐτ. βιβλ.) τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ ἐκ τέτων τῶν εὑρεθέντων καὶ ἄλλως εὐρήσεις.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ.

Ὁ ἐν τοῖς Λογαρίθοις τῶν ὁλοκλήρων μονάδων ἀριθμὸς τοσαύτας περιέχει μονάδας, ὅσα εἰσὶ τὰ μηδενικὰ σημεῖα ἐν τῷ ἀριθμῷ ᾧ προσανήκει. οἷον, τὸ μὲν 1 Λογάρισμός ἐστι τῷ 10, τῷ ἐν μηδενικὸν περιέχοντος σημεῖον· ὁ δὲ 2, τῷ 100, τῷ δύο μηδενικὰ περιέχοντος σημεῖα· ὁ δὲ 3, τῷ 1000· ὁ δὲ 4, τῷ 10000. ἐνθεντοὶ τὴν ἐν τοῖς Λογαρίθοις τῶν ὁλοκληρῶν μονάδων ἀριθμὸν, τὸ τῷ Λογαρίθμῳ χαρακτηρητικὸν καλεῖν εἰώθασιν.

ΣΤΗΝΕΨΙΑ Δ'.

Ἐκ τῶν εἰρημένων κατιδεῖν ῥάδιον, ὅτι τῶν μὲν μεταξύ τῷ 1 καὶ 10 ἀριθμῶν οἱ Λογάρισμοι μονάδος ἐλάσσονες· τῶν δὲ μεταξύ τῷ 10 καὶ 100, μείζονες μὲν μονάδος, ἐλάσσονες δὲ δυάδος· τῶν δὲ μεταξύ τῷ 100, καὶ 1000, μείζονες μὲν δυάδος, ἐλάσσονες δὲ τριάδος· τῶν δὲ μεταξύ τῷ 1000 καὶ τῷ 10000, μείζονες μὲν τριάδος, ἐλάσσονες δὲ τετράδος· τοῖς δὲ ἐλαττοσι τῆς μονάδος ἀριθμοῖς ἀποφατικοὶ ἐπανήκεισι Λογάρισμοι. ἐπεὶ μὲν γὰρ ὁ τῆς μονάδος Λογάρισμος ἴσος ὁ ἐξ ὑποθέσεως, τῷ τῆς μονάδος ἄρα ἐλάσσονι ἀριθμῷ, ἐλάσσων τῷ 0 ἐπανήκει Λογάρισμος, εἶτεν ἀποφατικός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

Τὸ δοθέντος νόθε κλάσματος $\frac{9}{5}$ τὸν Λογάρισμον εὐρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἀπὸ τῷ Λογαρίθμῳ 0.9542425 τῷ Ἀριθμητῷ 9 τὸν τῷ Παρωνομαστῷ 5, εἶπεν τὸν 0.6989700 ἄφελε. καὶ ἔσαι δὴ ἡ τέτων διαφορὰ 0.2552725 ὁ Λογάρισμος τῷ νόθε κλάσματος $\frac{9}{5}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πηλίκον ἐμφαίνει πᾶν κλάσμα προκύπτον ἐκ Διαιρετέων μὲν τῷ Ἀριθμητῷ, Διαιρέτε δὲ τῷ Παρωνομαστῷ, οἷον τὸ $\frac{9}{5}$ ἐμφαίνει τὸν 9 Διαιρετέον καὶ τὸν 5 Διαιρέτην. ἀλλὰ παντὸς Πηλίκου ὁ Λογάρισμος ἴσος τῇ διαφορᾷ τῷ Διαιρετέῳ καὶ Διαιρέτῃ. (κατὰ τὸ γ΄. πέρ. τῷδε τῷ βιβλ.) ἡ ἄρα διαφορὰ τῶν Λογαρίθμων τῷ Ἀριθμητῷ καὶ Παρωνομαστῷ τῷ κλάσματος, ὁ Λογάρισμος αὐτῷ ἐστίν. ο. ε. δ.

Ἐὰν δὲ τὸ κλάσμα γνήσιον ᾖ, οἷον τὸ $\frac{3}{7}$, ἄφελε τὸν τῷ Ἀριθμητῷ 3 Λογάρισμον 0.4771213 ἀπὸ τῷ Λογαρίθμῳ 0.8450980 τῷ Παρωνομαστῷ 7. καὶ ἔσαι δὴ ἡ τέτων ἀποφατικὴ διαφορὰ — 0.3679767 ὁ τῷ κλάσματος $\frac{3}{7}$ Λογάρισμος. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\frac{3}{7}$ τῆς μονάδος ἔλαττον, ὁ δὲ τῆς μονάδος Λογάρισμος τὸ 0 ἐστίν ἐξ ὑποθέσεως, ὁ τῷ $\frac{3}{7}$ ἄρα Λογάρισμος ἐλάσσων τῷ 0, ὁ διὰ τῷ ἀποφατικῷ δηλεῖται σημεῖον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Σ΄.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων τῶν 4, 68, 3, τέταρτον γεωμετρικῶς ἀνάλογον διὰ τῶν Λογαρίθμων εὐρεῖν.

ΠΡΑΚ-

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τὲς τῶν μέσων Λογαρίθμους, ἔτεν τὸν 1. 8325089
τῷ 08 Λογαρίθμον, τῷ 0. 4771213 τῷ 3 Λογαρίθ-
μῳ σύνοισον. καὶ ἀπὸ τῷ ἀθροίσματος 2. 3096302
τὸν τῷ πρῶτῳ 4 Λογαρίθμον 0. 6020600 ἀφελε. ἔσται
δὴ ἐν ἡ τέτων διαφορᾷ 1. 7075702 ὁ τῷ ζητεμένῳ
τετάρτῳ Λογαρίθμος ὃ προσεπανήκει ἀριθμὸς ὁ 51,
ἐν τοῖς πίναξι τῷ Λογαρίθμῳ σύνοιστος κείμενος

Ἡ δὲξις, ἔκτε τῷ β'. προβλήματος καὶ ἐκ τῆς α'.
συνεπείας τῷ δε τῷ βιβλίῳ, ἐπίδηλος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Ἐυχρηστοὶ δὲ μάλιστα οἱ Λογαρίθμοι ἐν τοῖς τριγωνο-
μετρικοῖς καὶ ἀστρονομικοῖς ἀναλογισμοῖς, ἐν οἷς ἐκ πολ-
λῶν σύγκεινται οἱ ἀριθμοὶ χαρακτηρῶν. ἀντὶ γὰρ τῷ
πολλαπλασιάσαι συνάπτομεν, καὶ ἀντὶ τῷ διελῆν ἀφαι-
ρῶμεν, τῷ τέτῳ ἀντὶ τῷ πολλαπλασιάσαι δύο ἀριθμοῖς,
τὲς τέτων Λογαρίθμους ἐν τοῖς Πίναξι ἐυρόντες, συ-
νάπτομεν. ὁ δὲ ἐν τοῖς αὐτοῖς Πίναξι τῷ ἐυρεθέντι
Ἀθροίσματι σύνοιστος ἀριθμὸς, τὸ Γινόμενον ἐστὶ τῶν
δύο εἰρημένων ἀριθμῶν. ἀντὶ δὲ τῷ θάτερον διὰ τῷ
ἐτέρῳ διελῆν ἀριθμῷ, τὲς τέτων Λογαρίθμους ἐυρόν-
τες, τὸν ἕτερον ἀπὸ τῷ ἐτέρῳ ἀφαιρῶμεν. ὁ δὲ τῷ ἐυ-
ρεθείσῃ διαφορᾷ σύνοιστος ἐν τοῖς Λογαρίθμων Πίναξι
κείμενος ἀριθμὸς, τὸ Πηλίκον ἐστὶ τῶν δύο εἰρημένων
ἀριθμῶν. αἰλλὰ καὶ τῷ τῶν Ἀλγεβρικῶν προβλημάτων
λύσει χρήσιμοι οἱ Λογαρίθμοι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Τῶν τῶν Λογαρίθμους, καὶ τῶν ἐπανήκοντας αὐτοῖς
ἀριθμοῖς περιεχόντων Πινάκων οἱ ὑπὸ τῷ Οὐλάκ ἐκ-
δοθέντες τῶν ἄλλων προτιμώτεροι.

ΒΙΒΛΙΟΥ Ε΄.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Περὶ διαφόρων Μεθόδων, ἃ μόνον ταῖς ἐπιθήμασι, ἀλλὰ καὶ τοῖς τὴν ἐμπορίαν μετιῶσι. πάνυ χρησίμων.

Περὶ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου.

- Α΄. Μέθοδος τῶν τριῶν ἐστὶν ὁ Κανὼν, δι' ἧς τριῶν δεδέντων ὄραν, τὴν ὁποιανδήποτε ἐμφαινόντων ποσότητα, ὁ τέταρτος ὁ γεωμετρικῶς ἀνάλογος εὐρίσκεται.
- Β΄. Ὅμοειδῆς μὲν ὄροι εἰσὶν οἱ Ἀριθμοὶ, οἱ τὴν αὐτὴν, Ἑτεροειδῆς δὲ, οἱ μὴ τὴν αὐτὴν ἐμφαίνοντες ποσότητα.
- Γ΄. Ἐπ' Εὐθείας οἱ ὄροι τετάχθαι λέγονται, ὅταν οἱ ὁμόλογοι, (ὄρα τὸν 15. ὅρισμ. τῆς βιβλ. τῆς Γεαμ.) ὁμοειδῆς, Ἀντιπεπονηθότως δὲ, ὅταν ἑτεροειδῆς ᾖσι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐκέρδησέ τις χρυσᾶ νομίσματα 350, μέτρα σίτου 600 πωλήσας, ζητεῖ δὲ εἰδέναι πόσα τῶν αὐτῶν κερδήσει νομισμάτων, 7000 πωλήσας. τέτων ἔν τῶν τριῶν ὄραν δεδέντων τῇ τῶν τριῶν Μεθόδῳ εὐρίσκεται ὁ ζητούμενος τέταρτος. καὶ ὁμοειδῆς μὲν ὄροι εἰσὶν, ὅτε 600 καὶ ὁ 7000, ὅτε δὲ ἑκάτερος αὐτῶν τὸ αὐτὸ ἐμφαίνων, ὅπερ ἐστὶ μέτρα σίτου ἑτεροειδῆς δὲ, ὅτε 350 καὶ ὁ 600. τέτων γάρ ὁ μὲν 350 νομίσματα, ὁ δὲ 600 σίτου μέτρα ἐμφαίνει. εἰάν ἔν, κληθέντος τῷ ζητῶμεν, χ, ταχ. 9ῶ.

Θῶσιν οἱ ὄροι ἔτω 600 : 350 :: 7000 : χ, ἐπ' εὐ-
 ευθείας τετάχθαι λέγονται· εἰάν δὲ ἔτω 600 : 350 ::
 χ : 7000, ἀντιπεπονθότως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ὅταν ἔν τοιόν δέ τι Πρόβλημα προτεθῇ, σκεπτέον
 πρῶτον ἀκριβῶς τίνι τρόπῳ τακτέον τὰς ὁρες, ἐπ' εὐ-
 θείας, ἢ ἀντιποπονθότως. ἐκ τέττε γὰρ ἡ ἀληθὴς τῆ
 Προβλήματος ἡρηται λύσις. εἰάν γὰρ ἔχῃ ὡς δὲ τὰς
 ὁρες τάξης, εὐδέποτε τὸ ἀληθὲς ζητέμενον εὐρήσεις, πε-
 ρὶ τέττε δὲ ἴσμεν, ὅτι ὅταν μὲν τῶν τριῶν δοθέντων
 ὁρων ὅσον μείζων ἢ ἐλάσσων ἢ ὁ ἕτερος τῶν ὁμοειδῶν,
 εἴτεν ὁ 600, τῆ ἑτεροειδὲς αὐτῷ, οἷον τῆ 350, το-
 σῆτον ἀναλόγως καὶ ὁ ἕτερος τῶν ὁμοειδῶν, οἷον ὁ 7000
 τῆ ζητεμένης, τότε ἐπ' εὐθείας τακτέον τὰς ὁρες. ὅταν
 δὲ ὅσον μείζων ἢ ἐλάσσων ἢ ὁ ἕτερος τῶν ὁμοειδῶν
 τῆ ὁμοειδὲς αὐτῷ, τοσῆτον ἀναλόγως καὶ ὁ ζητέμενος
 τῆ ἑτέρε τῆ ὁμοειδὲς αὐτῷ, τότε ἀντιπεπονθότως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Πωλήσας τις μέτρα κριθῆς 50, ἐκτῆσατο
 νομίσματα 350, ζητῇ δὲ πόσα νομίσματα
 κτήσεται, μέτρα κριθῆς πωλήσας 460.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Κάλεσον τὸν ζητέμενον ἀριθμὸν χ. καὶ ἐπεὶ ὅσον
 ἐλάσσων ὁ τῶν μέτρων τῆς κριθῆς ἀριθμὸς 50 τῆ ἀ-
 ριθμῆ τῶν περιθέντων ἤδη νομισμάτων 350, τοσῆτον
 ἀναλόγως ἐλάσσων ἐστὶ καὶ ὁ τῶν πωληθησομένων μέ-
 τρων τῆς κριθῆς ἀριθμὸς 460 τῆ ἀριθμῆ τῶν περιθη-
 σομένων νομισμάτων, εἴτεν τῆ ζητεμένης ἀριθμῆ χ,
 τάξον ἐπ' εὐθείας τὰς ὁρες ἔτω 50 : 350 :: 460 : χ.

πολλαπλασιασας δὲ τὴς δυὸς μεσος, τέτρεσι τὸν 350 ἐπὶ τὸν 460, τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον 161000 διὰ τῆς πρώτης 50 διέλε. λέγω ὅτι τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτων Πηλίκων ἐστὶν ὁ ζητούμενος, εἴτεν ὁ $\chi = \frac{161000}{50} = 3220$.

ΑΒΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς 50 : 350 :: 460 : χ . τὸ ἄρα ἐκ τῶν ἑκῶν Γινόμενον ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων, (κατὰ τὴν 5, τῆς βιβλ. τῆς Γεωμ.) τέτρεσι 350, $460 = 50 \cdot \chi$. ἑκατέρω δὲ τέτων διὰ τῆς 50 διαιρεθέντος, ἔσεται $\chi = 3220$. ὅπερ ἐστὶν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἴσος τῷ Πηλίκῳ τῆς Γενομένης ἐκ τῶν μέσων, διὰ τῆς πρώτης διαιρεθέντος.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ δοθέντων τῶν κτηθέντων χρημάτων 350, καὶ 3220, καὶ τῆς ἑτέρας τῶν μέτρων ἀριθμοῦ 50, εὐρεθήσεται ὁ ἕτερος τῶν μέτρων ἀριθμὸς χ , ταχθείσης δηλονότι τῆς ἀναλογίας ἕτω 350 : 50 :: 3220 : χ . ἔσεται γὰρ $350 \cdot \chi = 50 \cdot 3220$. εἴτεν $\chi = \frac{50 \cdot 3220}{359} = 460$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

Γράτιόν τις ἔχων ἐξ 8 συγκείμενον πηχῶν, ὧν ἑκάστη τὸ πλάτος $\frac{3}{4}$ πήχεως, ὑποσεγάσας ἐν αὐτῷ βέλεται ὀθόνην, πλάτος ἔχουσαν ἴσον πήχει, ζητᾷ ἂν πόσοι πήχεις ὀθόνης εἰσὶν ἀναγκαῖοι.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Καλείθω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς. καὶ ἀπὸ ὅσον ἔλασσαν τῶν δοθέντων πήχεων τὸ πλάτος $\frac{3}{4}$ τῆς ὀθόνης πλάτες 1, τοσῶτον ἀναλόγως καὶ ὁ $\frac{4}{3}$ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν τῆς ὀθόνης πήχεων χ τῶν δοθέντων 8

πή.

πήχεων, συνεσάτω ἀναλογία ἀντιπεπονθότας ἔχουσα
 τὲς ὀρες, ἢ ἐξῆς· ὡς $3 : 1 :: \chi : 8$. εἰσι δὲ καὶ ἀνά-
 παλιν ὡς $1 : 3 :: 8 : 4 \chi$ (κατὰ τὴν συνέπ. τῆς ζ'. τῆ
 ε'. βιβλ. τῆς 4 Γεωμ.) διὸ $1. \chi = 3 \cdot 8$. λέγω δὴ ἔν,
 ὅτι τὸ χ , εἶπεν ὁ ὁ ἐστὶν ὁ ζητούμενος 4 ἀριθμὸς τῶν τῆς
 ὁθόνης Πηχῶν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ τό, τε ἱμάτιον καὶ ἡ ὑπ' αὐτὸ βραδυσο-
 μένη ὁθόνη ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ἐμφαινέτωσαν αὐτὰ δύο
 ἴσα ὀρθογώνια, τὰ ΑΓ, ΕΗ. (πὶν ΚΖ'. χ. 20.) καὶ
 ἡ μὲν ΒΓ ἴση ἔστω 3, ἡ δὲ ΑΒ = 8, ἡ δὲ ΕΖ = 1, ἡ
 δὲ ΖΗ = χ . καὶ ἐπεὶ 4 ἴσα τὰ ΑΓ, ΕΗ ὀρθογώνια, ἀντι-
 πεπόνθασιν ἄρα αἱ τέτων πλευραί. (κατὰ τὴν ιδ'. τῆ
 ε'. τῆς Γεωμ. βιβλ.) ὡς ἄρα ΒΓ : ΕΖ :: ΖΗ : ΑΒ, εἶπεν αἰς
 $\frac{3}{4} : 1 :: \chi : 8$. καὶ ἀνάπαλιν ὡς $1 : \frac{3}{4} :: 8 : \chi$. ἐξ ὧν
 δῆλον τὸ περὶκείμενον.

Τῷ αὐτῷ δὴ τῷ τρόπῳ δοθέντος τῷ ἀριθμῷ τῶν γεω-
 γῶν τῶν σκαψάντων ἀμπελῶνά τινα ἐν ἀριθμῷ ἡμερῶν
 δοθέντι, εὐρεθήσεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἐν αἷς
 γεωργοῖ, ὧν ὁ ἀριθμὸς δέδοται, τὸν αὐτὸν σκάψουσιν
 ἀμπελῶνα. ὡσαύτως δοθεισῶν τῶν τιμῶν τῶν ἀνισο-
 τίκων νομισμάτων, καὶ τῷ ἀριθμῷ τῷ ἐμφαίνοντος τὸ
 ἕτερον τῶν νομισμάτων εἶδος, εὐρήσεις τὸν ἀριθμὸν τῷ
 ἑτέρῳ εἶδος τῶν νομισμάτων. καὶ ἄλλαν δὲ τοιούτων Πρε-
 βλημάτων τὰς λύσεις εὐρεῖν διὰ τῆς μεθόδου ταύτης
 ἔσθδιν.

ΣΗΜΒΕΙΩΣΙΣ.

Γινέον δὲ, ὅτι τῶν τριῶν ἡ μέθοδος, ἡ βάσις ἐστὶ τῶν
 λοιπῶν μεθόδων, ὡς ἐκ τῶν ἐξῆς δῆλον.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῆς Ἑτερείας.

Ἐτερεῖαν ἐμπορικὴν τιμὴν ποιήσαντων, ὁ μὲν κατέβαλε νομίσματα 1600, ὁ δὲ 1450, ὁ δὲ 1500, ἐκέρδησαν δὲ 2460. ζητᾶται δὲ πόσον δεῖ ἕκασον τῶν τριῶν τῷ κέρδεος λαβεῖν μέρος.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Α.

Καλέσας τὸ μὲν ζητούμενον τῷ πρώτῳ μέρος Χ, τὸ δὲ τῷ δευτέρῳ Υ, τὸ δὲ τῷ τρίτῳ Ζ, συναψον τὰς καταβληθέντας τῶν νομισμάτων ἀριθμούς. καὶ γεγενῆσθαι ὡς τὸ κεφάλαιον τῶν νομισμάτων, πρὸς τὸ ὅλον κέρδος, ἔτω τὸ μέρος τὸ ὑπὸ ἑκάστῃ καταβληθὲν πρὸς τὸ ζητούμενον ἐπανῆκον αὐτῷ μέρος, εἴπεν ὡς 4550: 2460:: 1600: Χ. καὶ ὡς 4550: 2460:: 1450: Υ καὶ ὡς 4550: 2460:: 1500: Ζ. καὶ εὐρεθήτωσαν οἱ τεταρτεῖ ἀνάλογοι Χ, Υ, Ζ ὡς ἐν τοῖς πολλαβῆσι Προβλήμασιν. ἔσται ἔν ὃ μὲν $Χ = 865 + \frac{5}{91}$ τὸ μέρος τὸ ἀνήκον τῷ πρώτῳ· ὁ δὲ $Υ = 783 + \frac{87}{91}$ τὸ τῷ δευτέρῳ· ὁ δὲ $Ζ = 810 + \frac{90}{91}$ τὸ τῷ τρίτῳ.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Ἡ δὲξις ἐξ αὐτῆς τῆς πράξεως δήλη. ὃν γὰρ λόγον ἔχει τὸ κεφάλαιον τῶν νομισμάτων, πρὸς τὸ ὅλον κέρδος, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἕκαστος τῶν καταβληθέντων ἀριθμῶν, πρὸς τὸ ἐπανῆκον αὐτῷ τῷ κέρδεος μέρος.

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ Α'.

Τὰ αὐτὰ ποιητέον, καὶ πλείονες τῶν τριῶν ὧσιν οἱ τὴν ἑτερεῖαν ποιήσαντες, τοσούτων δηλαδὴ ἀναλογιῶν συγκριθῆναι, ὥσοι εἰσὶν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί.

Σ Η.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

Εάν συνάψῃς πάντας τὰς ἐνδεθέντας, οἶον τὸν $865 + \frac{5}{91}$ καὶ τὸν $783 + \frac{87}{91}$ καὶ τὸν $810 + \frac{20}{91}$, προκύψει δὲ ἐκ τῆς ἀθροίσματος τὸ κέρδος, ὅπερ ἴσιν ὁ 2460, ἐδὲν παρῆσιν σφάλμα.

Περὶ τῆς τῶν πέντε Μεθόδου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Οἰκοδόμοι 4 ἐν ἡμέραις 7 τῆχος ὠκοδόμησαν ποδῶν 232. ζητάται ἔν πόσας πόδας τέχης οἰκοδομήσασιν οἰκοδόμοι 10 ἐν ἡμέραις 13.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τὰς ἀριθμοὺς τῶν οἰκοδόμων διὰ τῶν ἡμερῶν ἐν αἷς ἐργάζονται πολλαπλασιάσας, εἶπεν τὸν 4 διὰ τῆς 7, καὶ τὸν 10 διὰ τῆς 13, ἐκ τῶν ἰσοσάρων ὄρων δύο συγκρότησεν. καὶ τῆς ζητημένης κληθείης χ, συνεστῆτο ἐκ τῶν Γινομένων 4. 7 καὶ 10. 13, καὶ τῆς δευτέρας ἀριθμοῦ 252 τῶν ποδῶν τῆς οἰκοδομηθείσης τέχης, καὶ τῆς ζητημένης χ ἡ ἐξῆς ἀναλογία, ὡς 4. 7 : 10. 13 :: 252 : χ. ἔσται δὴ ἔν ὁ χ, ἰστέστιν ὁ 1170 ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

ΛΕΙΞΙΣ

Ὅ γὰρ ἐργάζονται ἔργον οἰκοδόμοι 4 ἐν ἡμέραις 7, τὸ αὐτὸ ποιεῖ εἰς οἰκοδόμος ἐν ἡμέραις 28, ἢ 28 οἰκοδόμοι ἐν ἡμέραις μιᾷ. ὁμοίως ὅπερ οἱ δέκα οἰκοδόμοι ποιοῦσιν ἐν ἡμέραις 13, τὸ αὐτὸ εἰς ἐν ἡμέραις 130, ἢ 130 οἰκοδόμοι ἐν ἡμέραις μιᾷ. Ἐκ τούτων ἔν δὴλον, ὅτι πολλαπλα-

λαπλασιαζομένων τῶν ἀριθμῶν τῶν οἰκοδόμων διὰ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἡμερῶν, ἐν αἷς οἰκοδομέσσι, καὶ ἐκ τῶν Γινομένων συγκροθεμένης ἀναλογίας, ὡς εἴρηται, ὁ ζητῶμενος εὐρίσκεται.

Ἀλλὰ δὴ καὶ ἄλλως τὸ ζητῶμενον χ. εὐρεθήσεται. ἐπεὶ γάρ, εἰ μὲν αἱ τῆς ἐργασίας ἡμέραι ἴσαι ἀπλήλαις ᾖσι, τὰ οἰκοδομηθησόμενα τείχη ἀνάλογά εἰσι τοῖς τῶν οἰκοδόμων ἀριθμοῖς· εἰ δὲ οἱ οἰκοδόμοι ἰσάριθμοι, τὰ τείχη ἀνάλογά εἰσι ταῖς ἡμέραις· κείθω πρῶτον ἴσας εἶναι τὰς τῆς ἐργασίας ἡμέρας, εἴτα ἰσαριθμοὺς εἶναι τοὺς οἰκοδόμους. ἔκθ' ἔσται καὶ ἡ μὲν τὴν πρῶτην ὑπόθεσιν $4 : 10 :: 252 : \Upsilon$. (κληθέντος Υ τῆς οἰκοδομήματος τῶν δέκα οἰκοδόμων.) καὶ ἡ δὲ τὴν δευτέραν, ὡς $7 : 13 :: \Upsilon : \chi$. ἐκ τῆς πρώτης ἄρα ἀναλογίας ἔσται $4 \cdot \Upsilon = 10 \cdot 252$. ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, $13 \cdot \Upsilon = 7 \cdot \chi$. (καὶ ἡ τὴν 5. τῆς 1. τῆς Γεωμ.) πολλαπλασιασθήτω τὰ ἴσα $4 \cdot \Upsilon$ καὶ $10 \cdot 252$ διὰ τῶν ἴσων $13 \cdot \Upsilon$ καὶ $7 \cdot \chi$. ἔκθ' ἔσται $4 \cdot \Upsilon \cdot 7 \cdot \chi = 10 \cdot 252 \cdot 13 \cdot \Upsilon$. καὶ τῶν τῶν ἴσων διὰ τῆς αὐτῆς Υ διαιρεθέντων, ἔσεται $4 \cdot 7 \cdot \chi = 10 \cdot 252 \cdot 13$, ὅπερ ἐστὶν $28 \cdot \chi = 130 \cdot 252$, ὡς ἄρα $28 : 130 :: 252 : \chi$. (καὶ τὸ β. μέρ. τῆς αὐτ. προτ.) τὸ ἄρα $\chi = \frac{130 \cdot 252}{28}$ εἶπεν $\chi = 1170$.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῆς ψευδὸς ὑποθέσεως.

Διὰ τῆς Μεθόδου ταύτης τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς ὅσατε καὶ πηλίκαι ἐπιτάξαιεν ἂν τις μέρη διαιρέσεν. ψευδὲς δὲ ὑποθέσεως ἡ Μέθοδος προσηγόρευται, διὰ τὸ ἐξ ὑποθετικῶν, καὶ ἀναλόγων μὲν τοῖς ζητούμενοις, μὴ αὐτῶν δὲ τῶν ζητούμενων ἀριθμῶν τὴν τῶν Προβλημάτων πορίζεσθαι ἐπίλυσιν.

Π Ρ Θ.

Κατέλαπε τις τοὺς τρεῖς υἱοὺς καὶ
μοῖς αὐτῶν χρυσῶν χιλιάδας ἑπτὰ
λάμβανος τὸν μὲν πρῶτον τῶν υἱῶν αὐ
βεῖν τριπλάσιον τῷ δευτέρῳ, τὸν δε
ρον διπλάσιον τῷ τρίτῳ. ζητεῖται δὲ
ἕκαστον δεῖ λαβεῖν.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Λ.

Κείμενον τὸν μὲν πρῶτον τῶν ἀδελφῶν δεῖν
τάς τε ἑν κειμένε, δηλον, ὅτι ὁ μὲν δεύτερος
τρίτος ἢ λήψεται. τὰς τρεῖς τέτρες ὑποθετα
μὲς σύναψον, καὶ κληθείσης τῆς μὲν μερίδα
τε, καὶ τῆς δὲ τῷ δευτέρῳ, γ' τῆς δὲ τῷ τρίτῳ
γονείω, ὡς $9:6::7000:χ$, καὶ ὡς $9:2$
γ, καὶ ὡς $9:1::7000:Ζ$. λέγω δὲ ὅτι οἱ
εἰσὶν οἱ ζητούμενοι. καὶ ἔστιν ὁ μὲν $χ = 4666\frac{2}{3}$
δὲ $γ = 1555\frac{1}{3}$, ὁ δὲ $Ζ = γ 777\frac{1}{3}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δηλον ἐκ τῆς ὑποθέσεως, ὅτι ὁ λόγον
θροισμα τῶν ἐξ ὑποθέσεως ληφθέντων ἀριθμῶν
ὁ γ, πρὸς ἣν μερίδα ὑποθετικῶς λαμβάνει
εἶπεν πρὸς τὸν 6, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὁ
χρυσῶν ἀριθμὸς, εἶπεν ὁ 7000, πρὸς τὴν
ἀληθῶς λαβεῖν δεῖ τὸν πρῶτον, γιγνέσι πρὸς
τὸν αὐτὸν λόγον ἀληθείας καὶ ἡ δευτέρα καὶ
ἀναλογίαι. ἐξ ἧς δὴλον τὸ προκείμενον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α.

Εάν πλείονα ὦσι τὰ ζηθέμενα, ἰσαριθμοὺς τοῖς ζηθε-
μένοις τῷ εἰρημένῳ τρώπῳ συστήσας τὰς ἀναλογίας, ἐν-
ρήσεις τὰ ζηθέμενα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β.

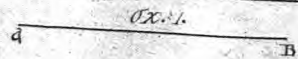
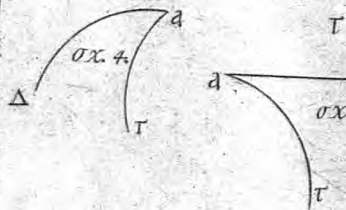
Εάν τὸς εὐρεθέντας ἀριθμοὺς, οἷον τὸν $4666 + \frac{2}{3}$,
καὶ τὸν $1555 + \frac{5}{9}$, καὶ τὸν $777 + \frac{7}{9}$ συνάψας, ἐν-
ρης τὸ τῶν ἀθροίσμα ἴσον τῷ διαιρεθέντι ἀριθμῷ, εἴην
τῷ 7000, ἀληθεὺς ἔσονται οἱ εὐρεθέντες. ὡσάυτως ἀλη-
θεὺς ἔσονται, εἰς ὡς $4666 + \frac{2}{3} : 1555 + \frac{5}{9} :: 6 : 2$,
καὶ $4666 + \frac{2}{3} : 777 + \frac{7}{9} :: 6 : 1$. καὶ $1555 + \frac{5}{9} : 777 + \frac{7}{9} :: 2 : 1$.

Τ Ε Λ Ο Σ

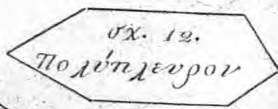
ΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.



σχ. 1.

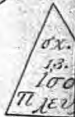
σχ. 12.
Πολύπλευρον



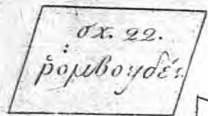
σχ. 17.
Ταμ
βλην
νον



σχ. 13.
100
π. μεν



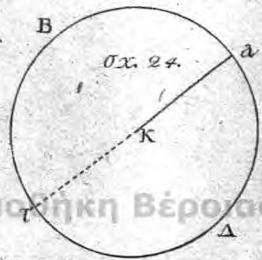
σχ. 22.
ρομβοειδ.



σχ. 18.
όξυγων
νον



σχ. 23.
Τραπεζίον

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α.

Εάν πλείονα ὦσι τὰ ζηλέμενα, ἰσαριθμοὺς τοῖς ζηλούμενοις τῷ εἰρημένῳ τρέπω συστήσας τὰς ἀναλογίας, εὐρήσεις τὰ ζηλέμενα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β.

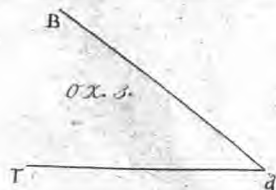
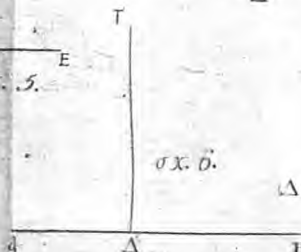
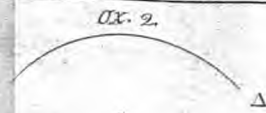
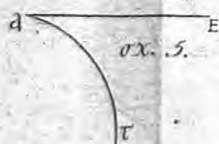
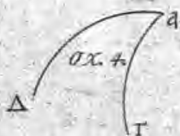
Εάν τὸς εὐρεθέντας ἀριθμοὺς, οἷον τὸν $4666 + \frac{2}{3}$ καὶ τὸν $1555 + \frac{5}{9}$, καὶ τὸν $777 + \frac{7}{9}$ συνάψας, εὐρήσης τὸ τῶν ἀθροισμα ἴσον τῷ διαιρεθέντι ἀριθμῷ, εἴηεν τῷ 7000, ἀληθεὺς ἔσονται οἱ εὐρεθέντες. ὡσάυτως ἀληθεὺς ἔσονται, εἰάν ὡς $4666 + \frac{2}{3} : 1555 + \frac{5}{9} :: 6 : 2$, καὶ $4666 + \frac{2}{3} : 777 + \frac{7}{9} :: 6 : 1$. καὶ $1555 + \frac{5}{9} : 777 + \frac{7}{9} :: 2 : 1$.

Τ Ε Λ Ο Σ

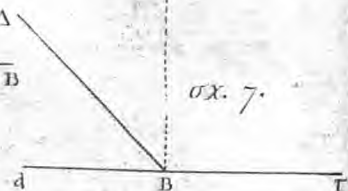
ΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.



σχ. 1.
d B



σχ. 9.
Επιράνγα



σχ. 12.
Πολύγυρον



σχ. 11.
τετρά-
πλευρον

σχ. 22.
ρομβοειδές



σχ. 19.
τετρά-
γωνον

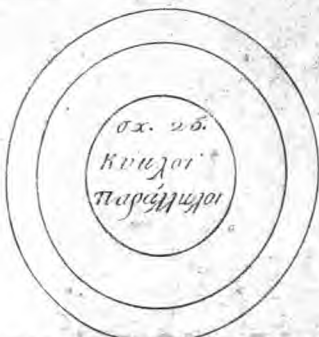
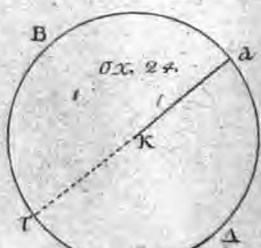


σχ. 20.
επτερόκωνος

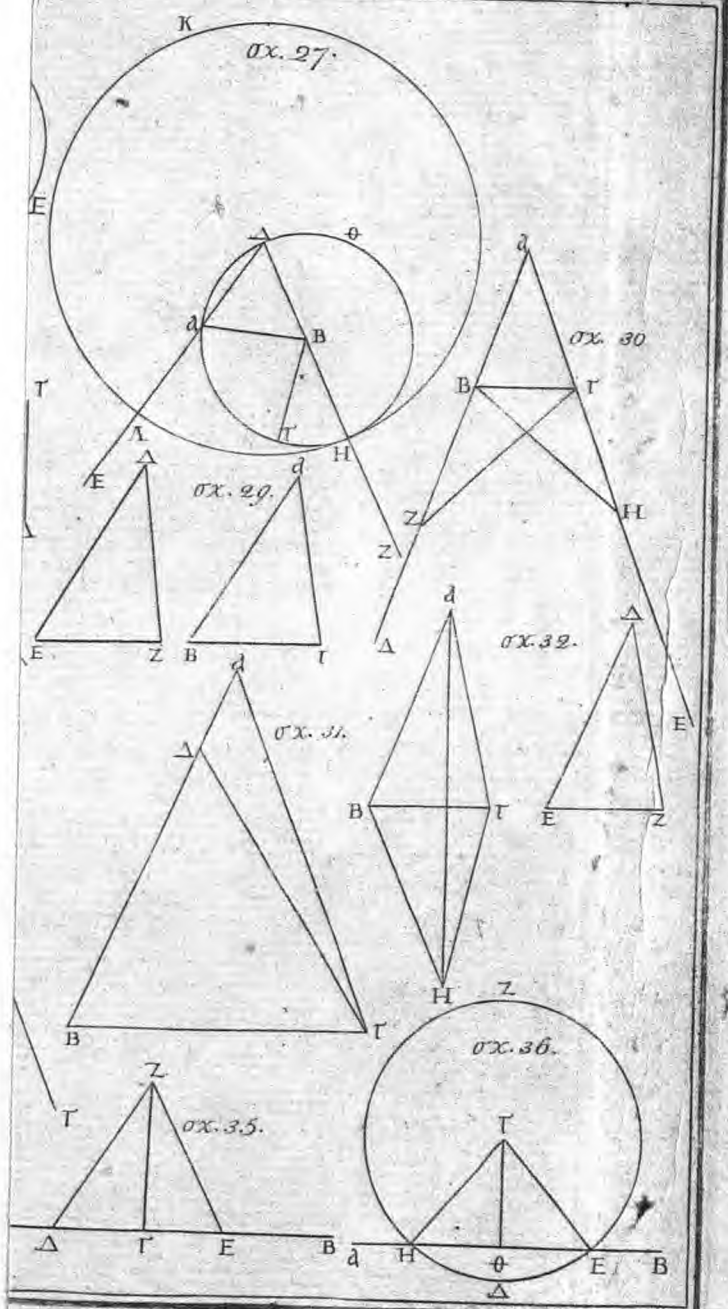


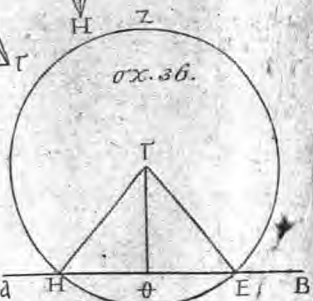
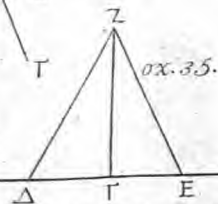
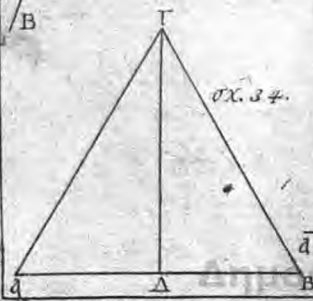
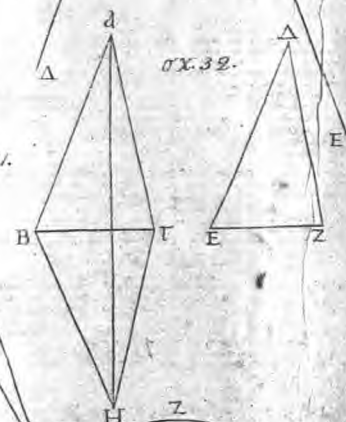
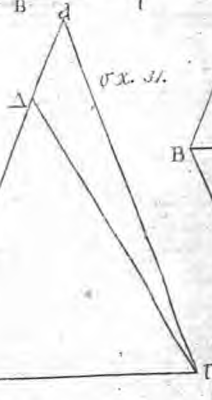
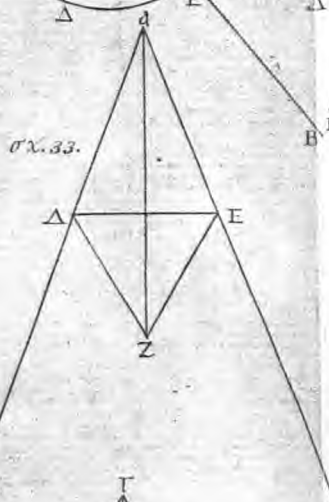
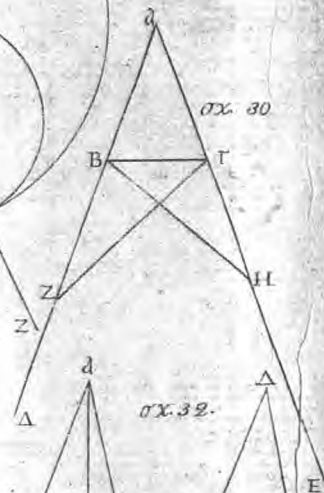
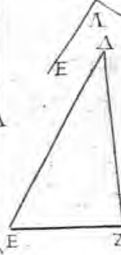
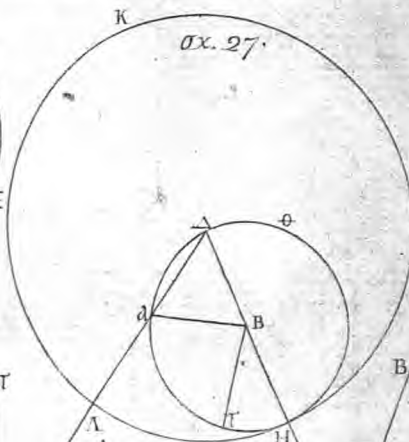
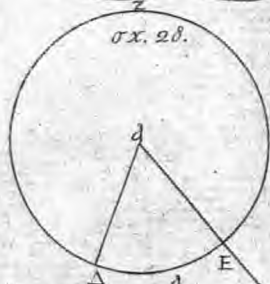
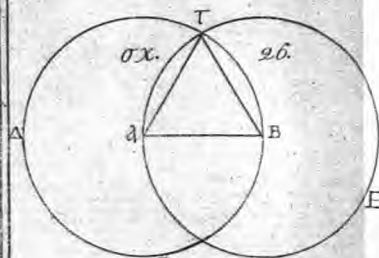
σχ. 23.
τραπέζιον

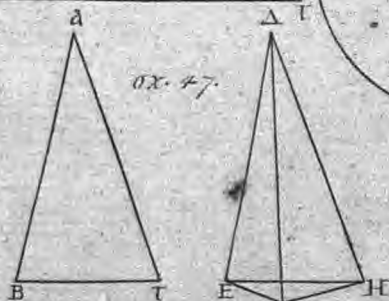
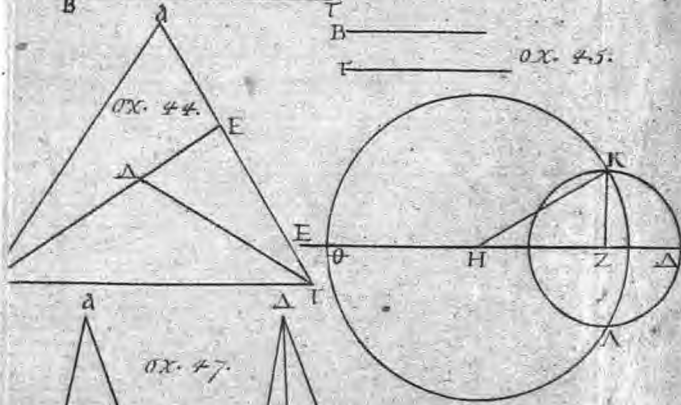
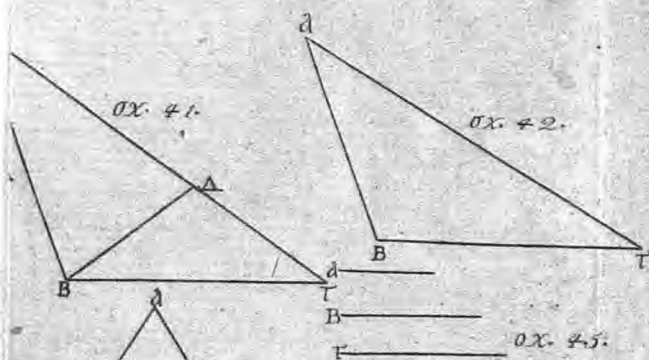
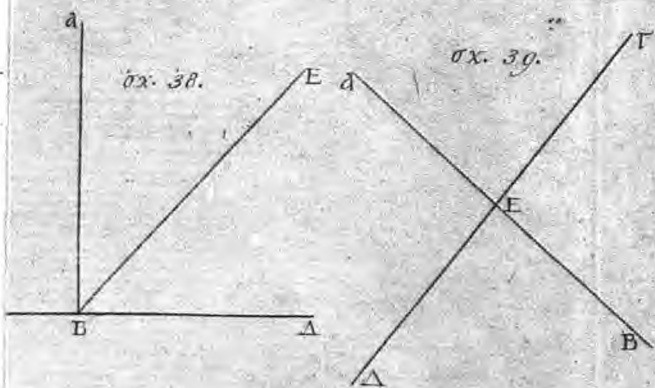
σχ. 21.
ρόμβος

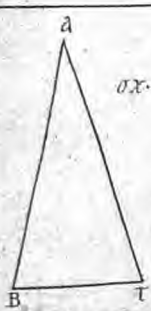
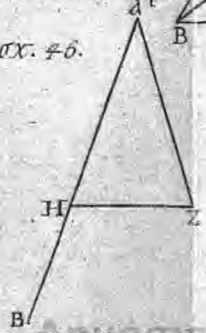
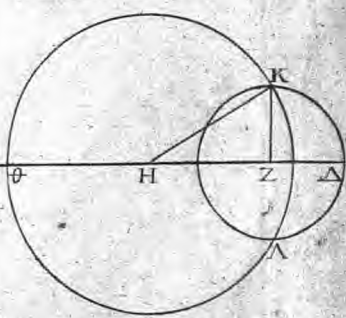
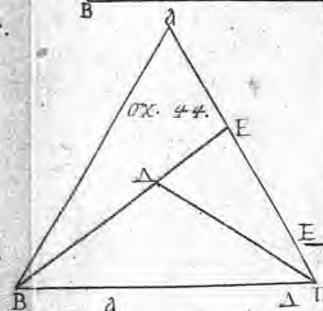
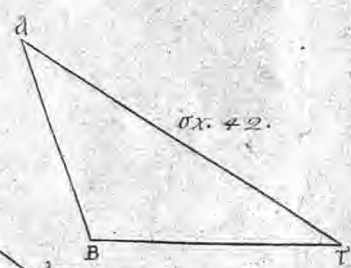
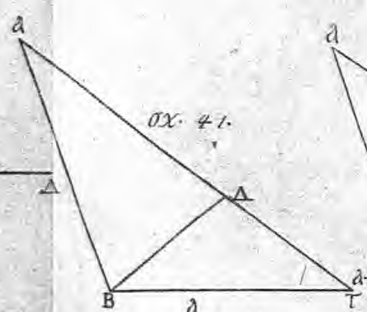
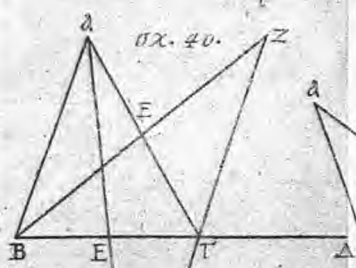
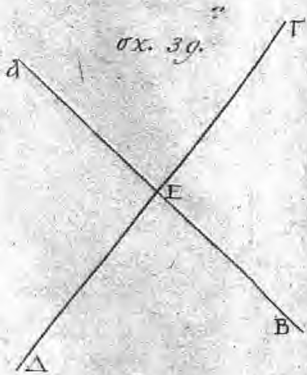
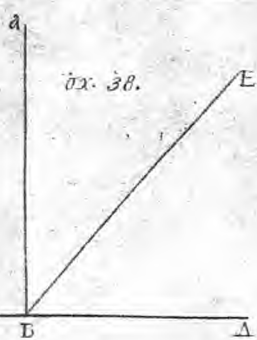
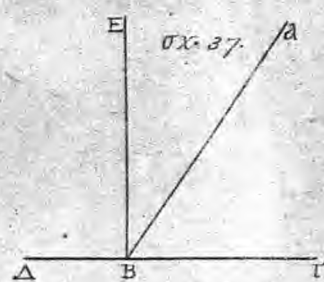




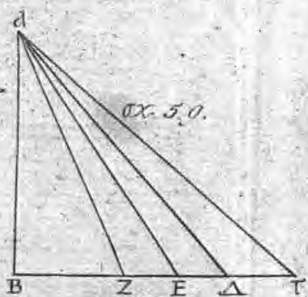
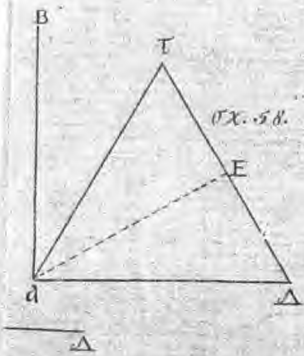
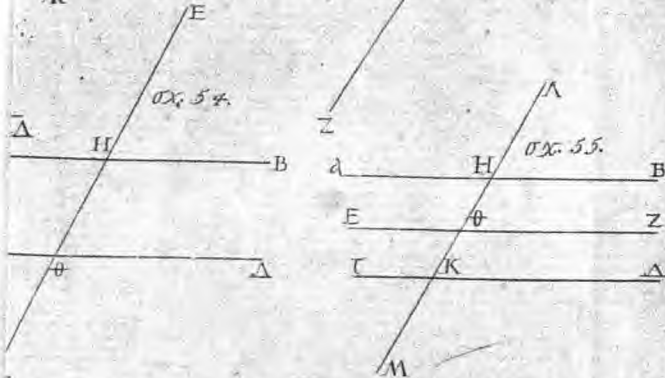
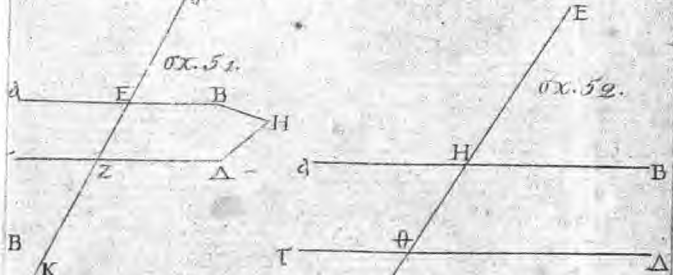
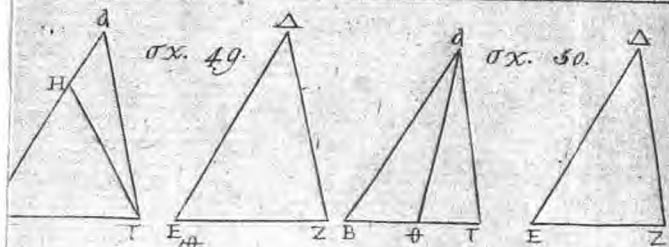


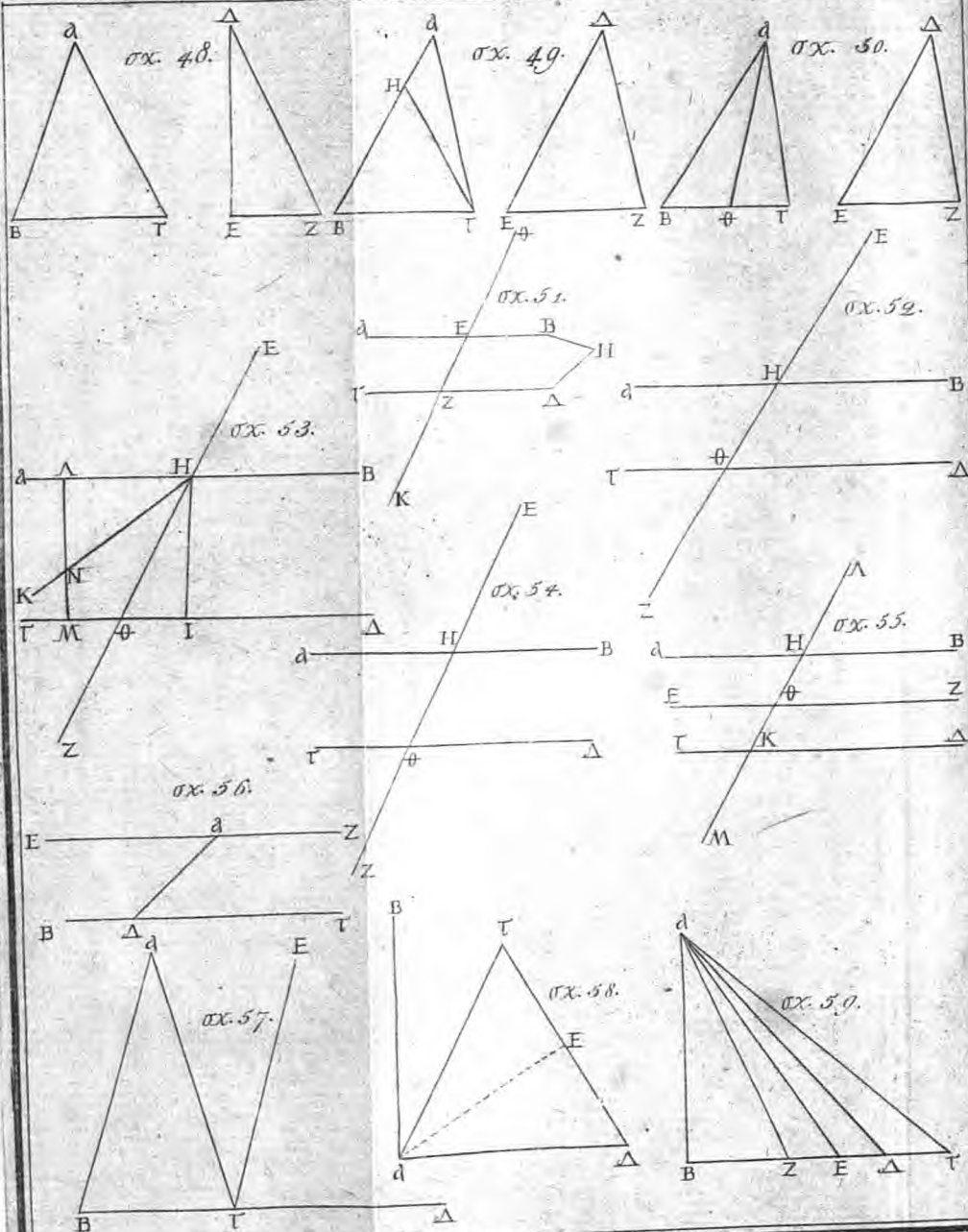




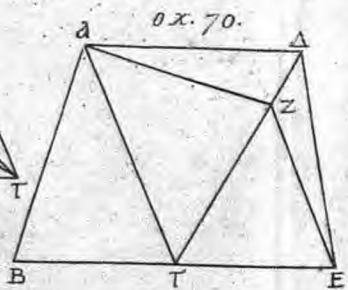
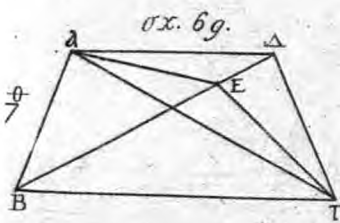
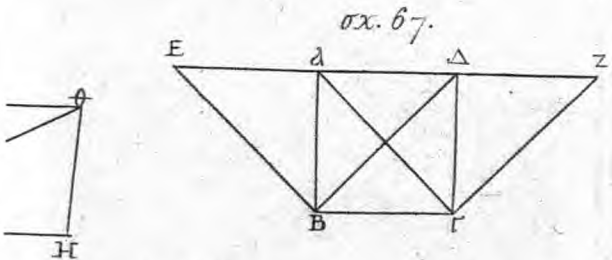
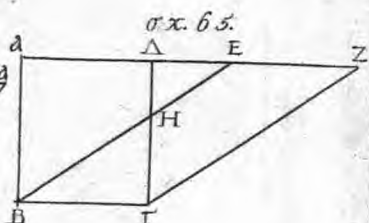
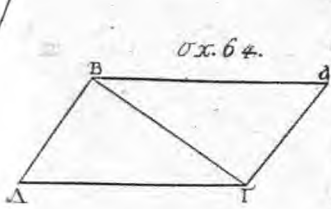
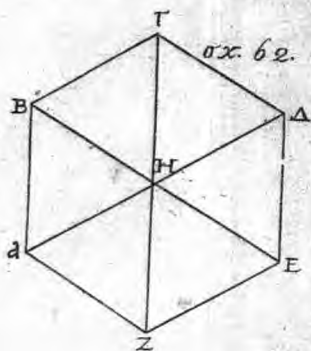
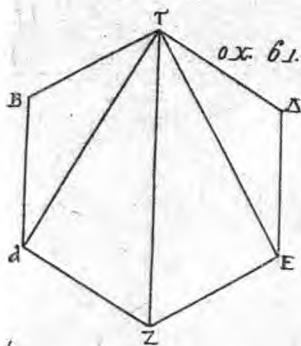


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

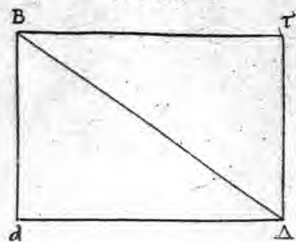




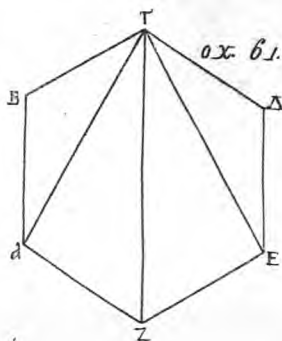
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



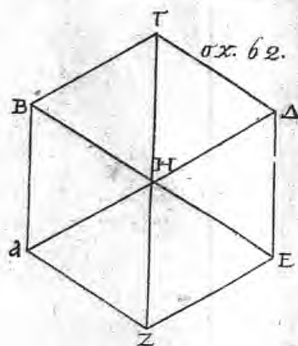
σχ. 60.



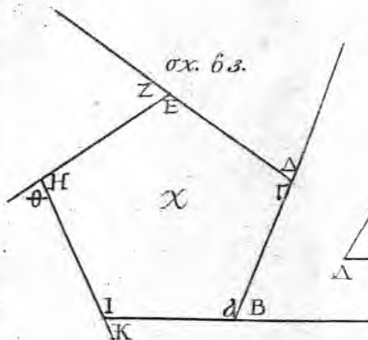
σχ. 61.



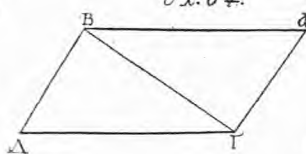
σχ. 62.



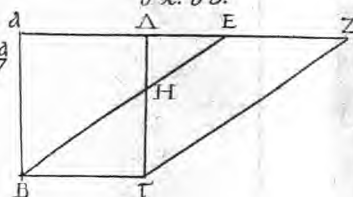
σχ. 63.



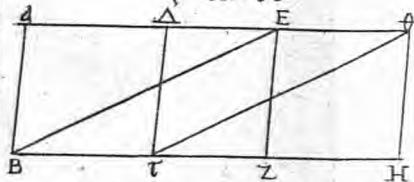
σχ. 64.



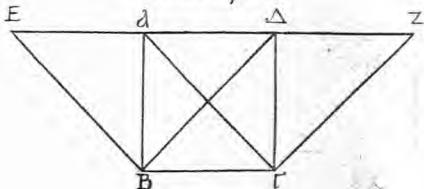
σχ. 65.



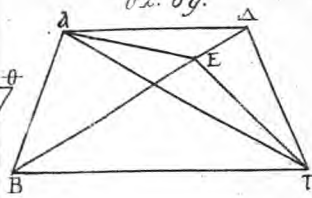
σχ. 66.



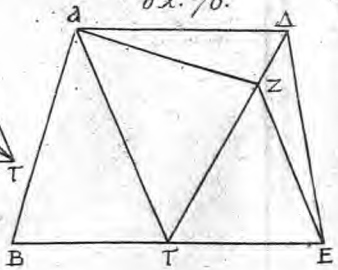
σχ. 67.



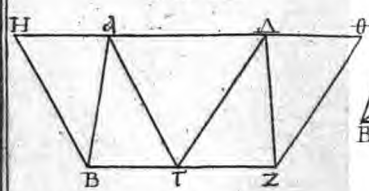
σχ. 69.



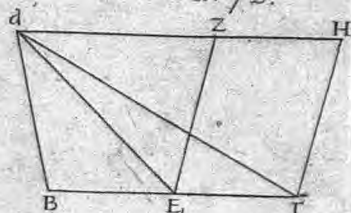
σχ. 70.



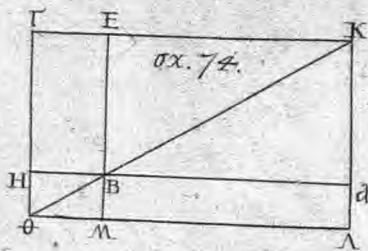
σχ. 68.



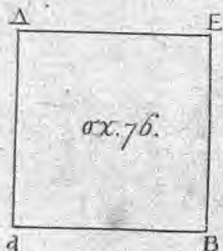
σχ. 72.



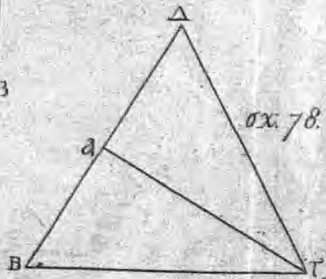
σχ. 74.



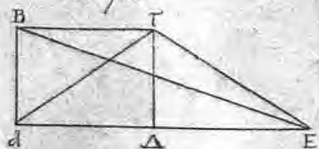
σχ. 76.



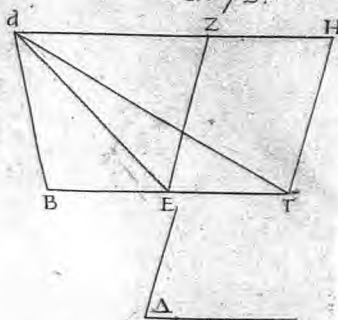
σχ. 78.



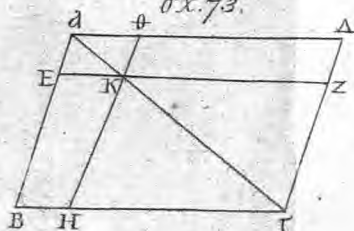
σχ. 71.



σχ. 72.



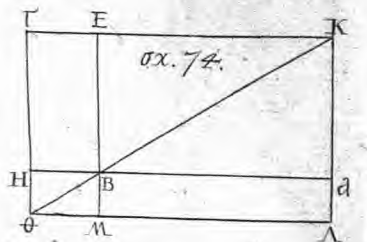
σχ. 73.



σχ. 75.



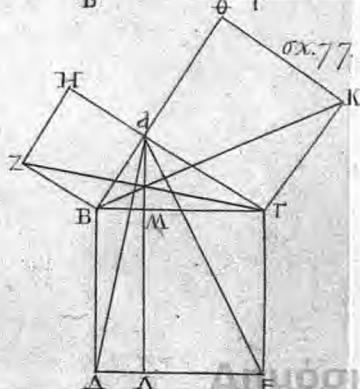
σχ. 74.



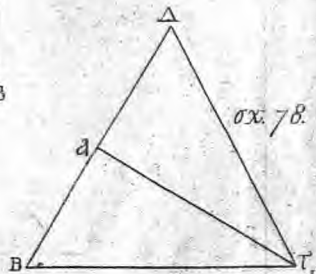
σχ. 76.

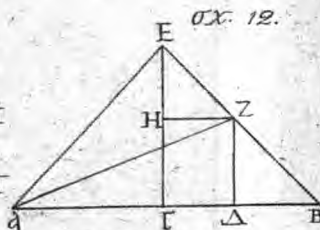
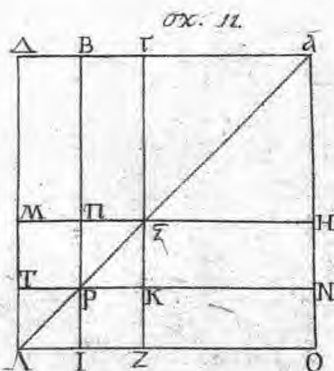
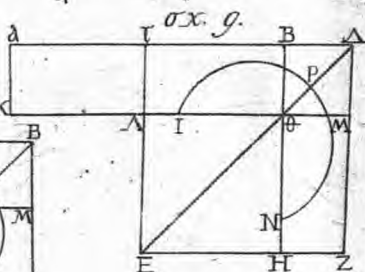
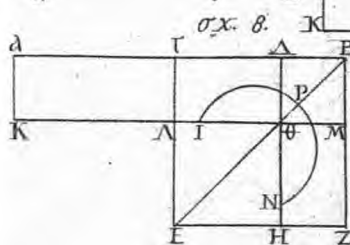
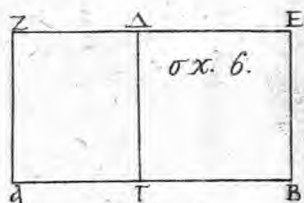
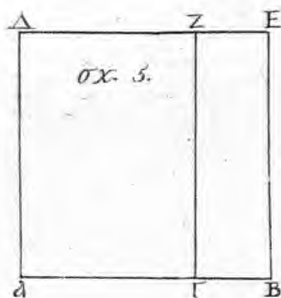
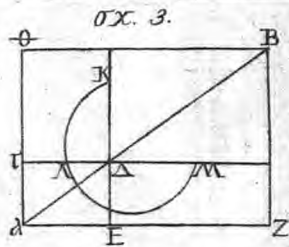
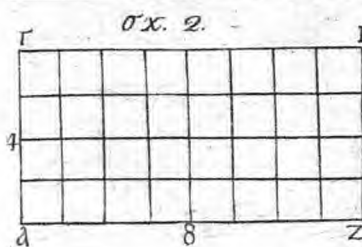


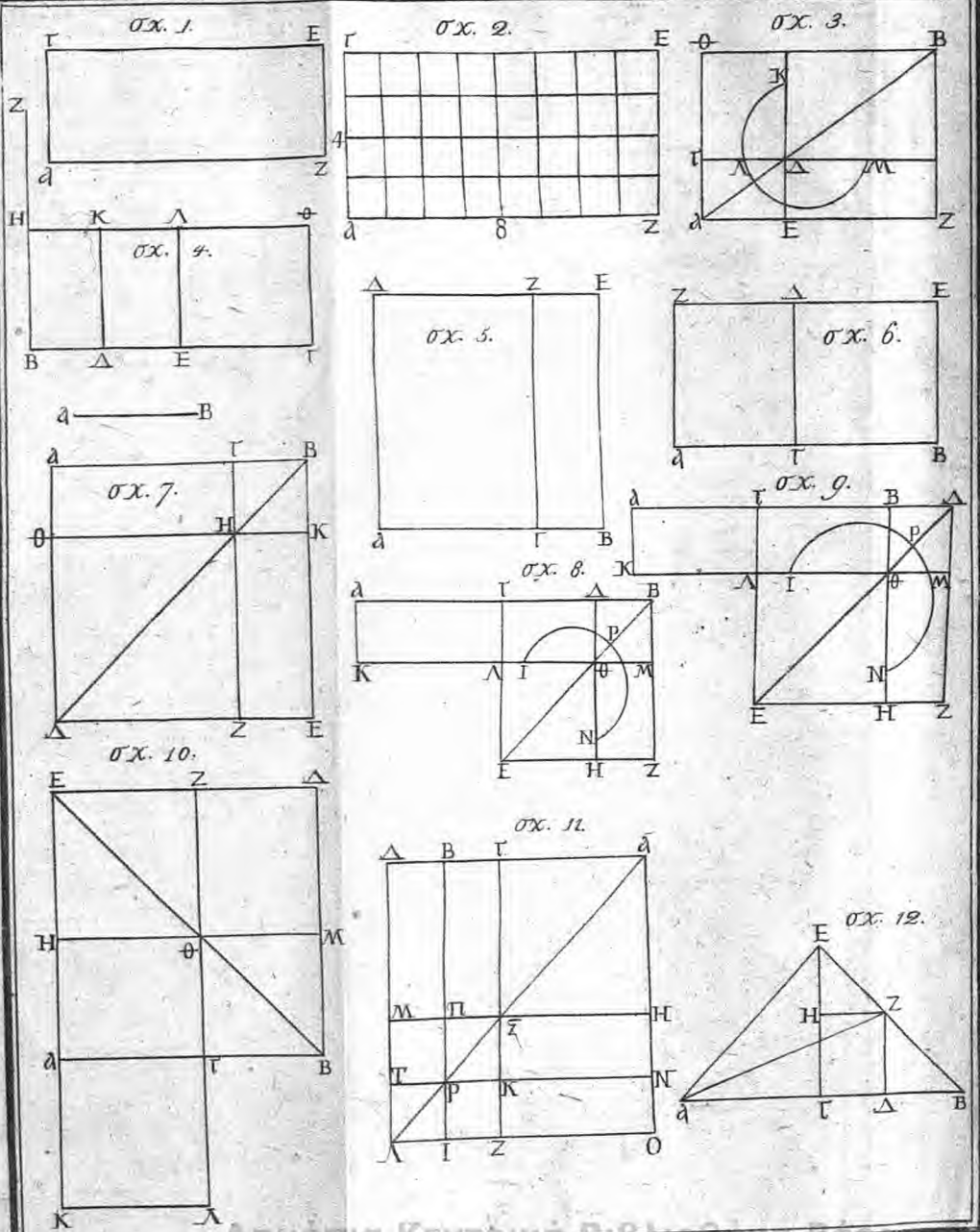
σχ. 77.



σχ. 78.

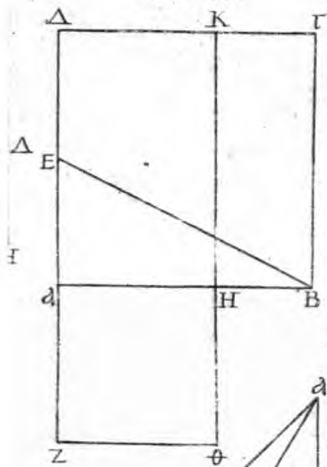




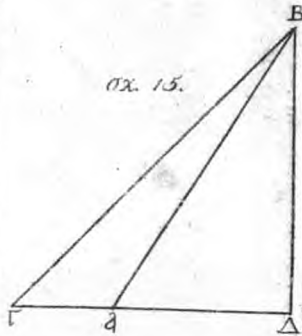


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

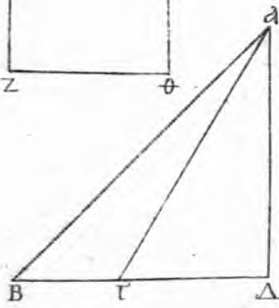
σχ. 14.



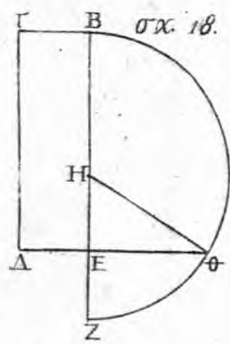
σχ. 15.



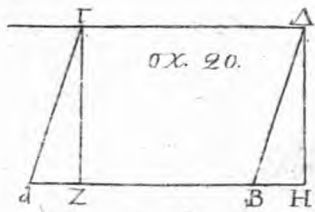
σχ. 17.



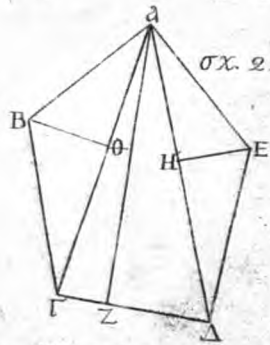
σχ. 18.



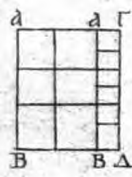
σχ. 20.



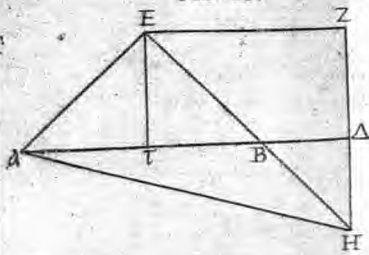
σχ. 22.



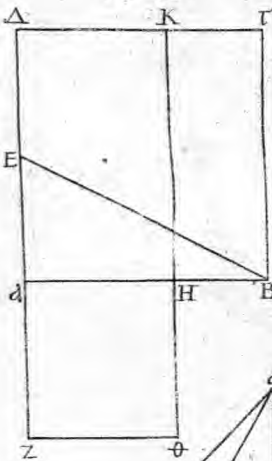
σχ. 23.



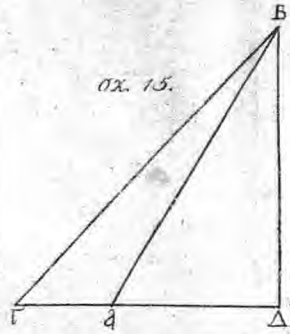
σχ. 13.



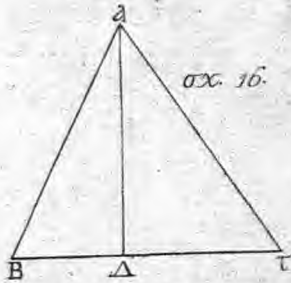
σχ. 14.



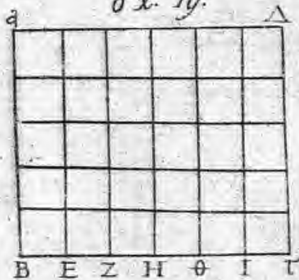
σχ. 15.



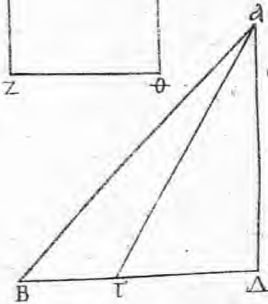
σχ. 16.



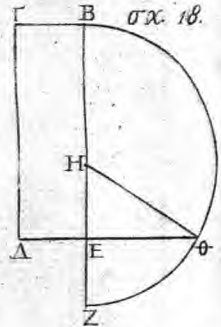
σχ. 19.



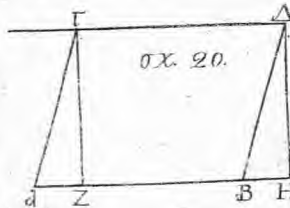
σχ. 17.



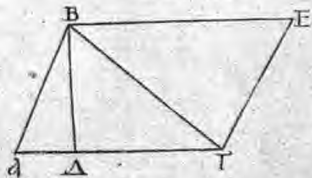
σχ. 18.



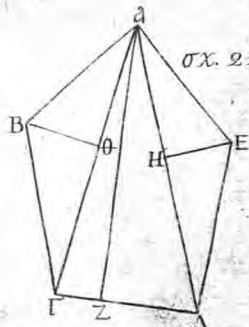
σχ. 20.



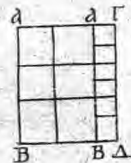
σχ. 21.



σχ. 22.



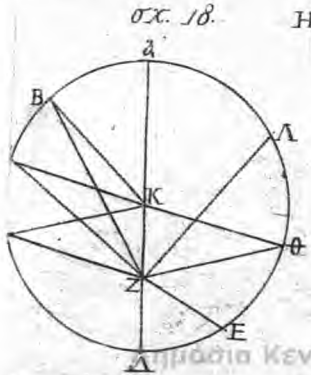
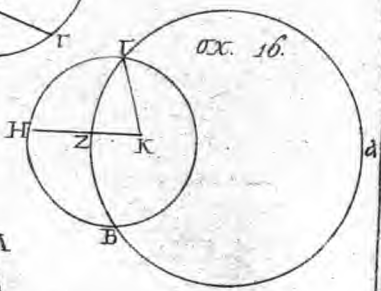
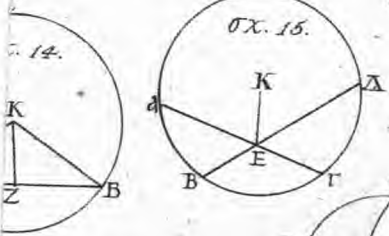
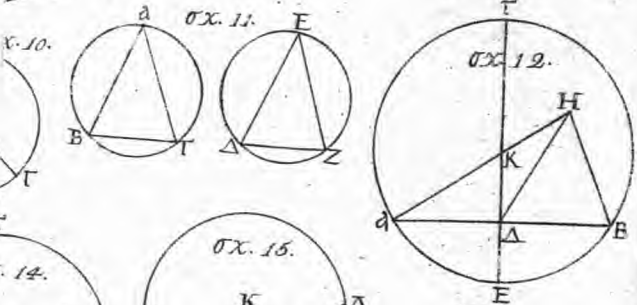
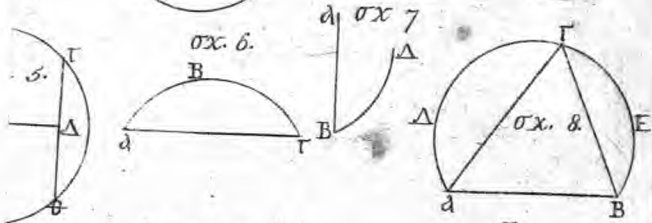
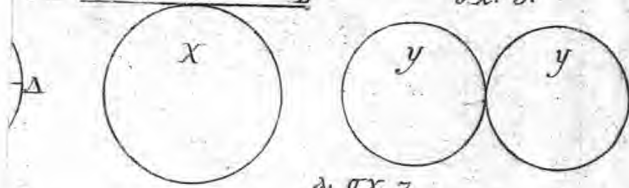
σχ. 23.



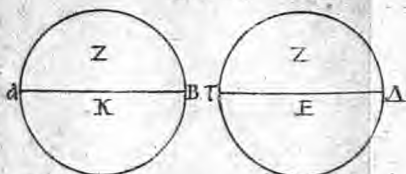
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

σx. 2.

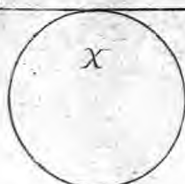
σx. 3.



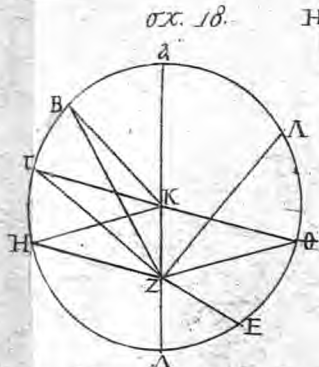
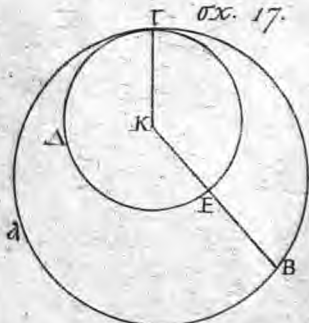
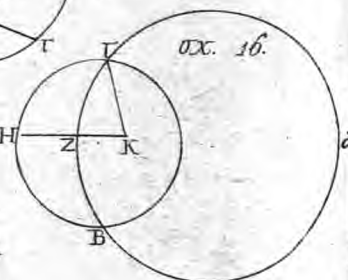
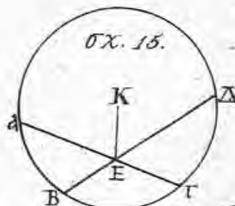
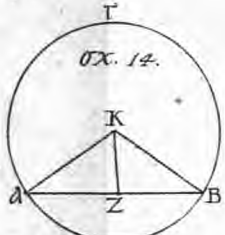
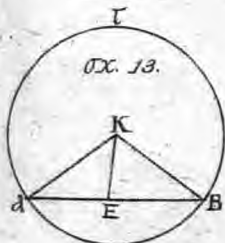
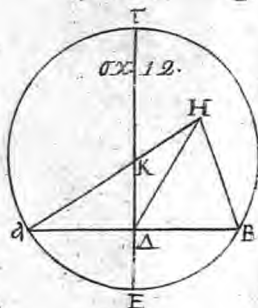
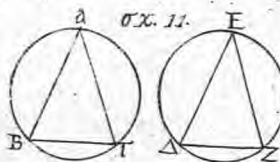
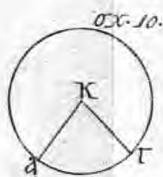
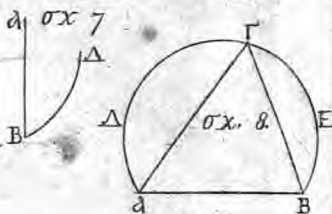
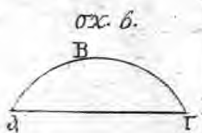
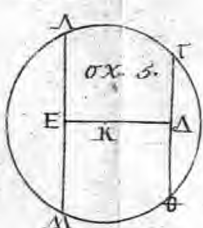
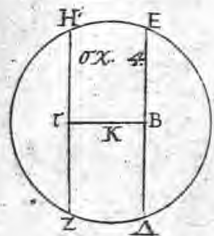
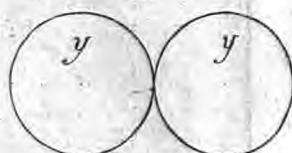
σχ. 1.



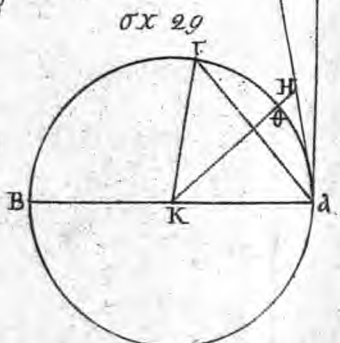
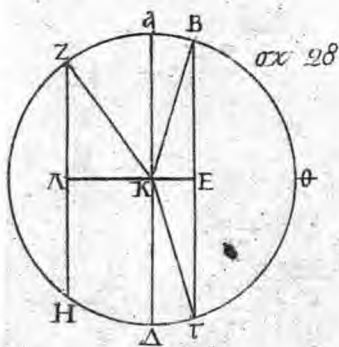
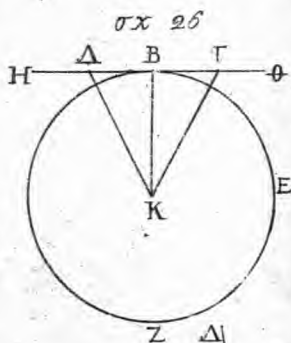
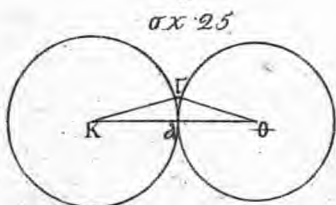
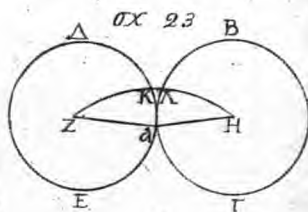
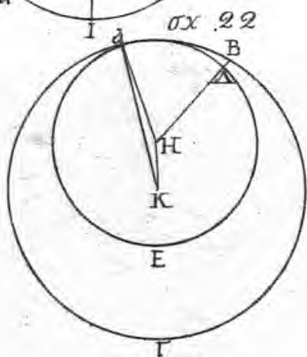
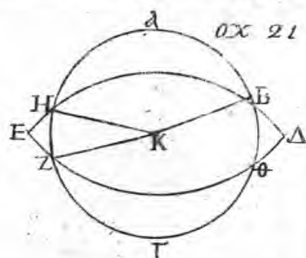
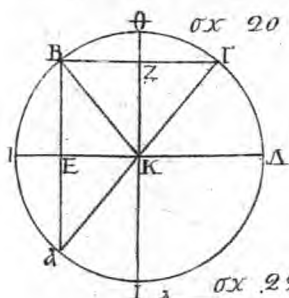
σχ. 2.

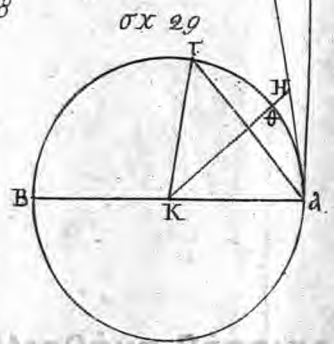
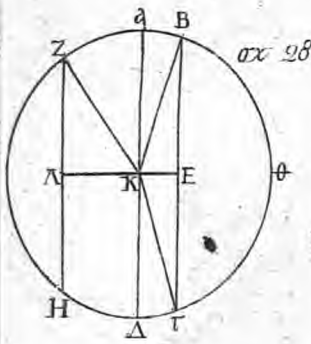
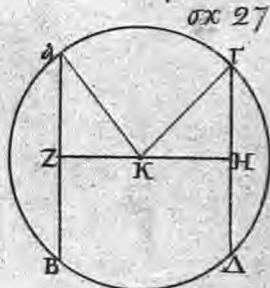
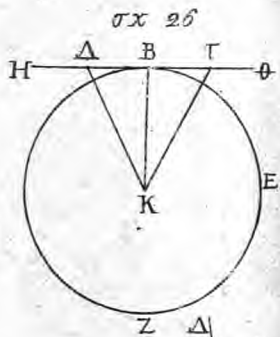
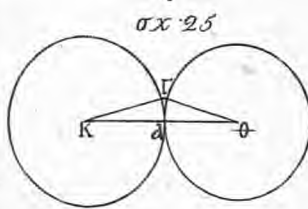
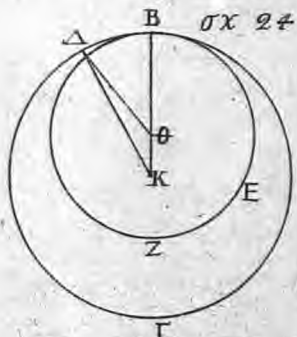
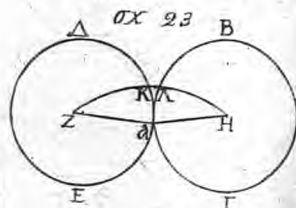
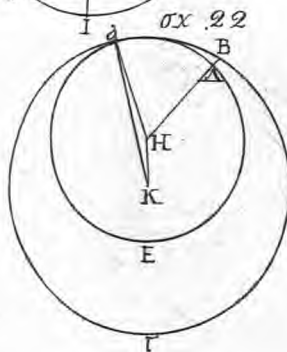
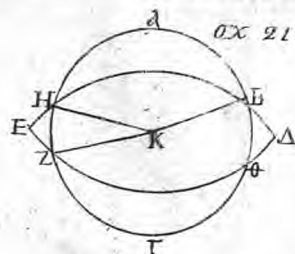
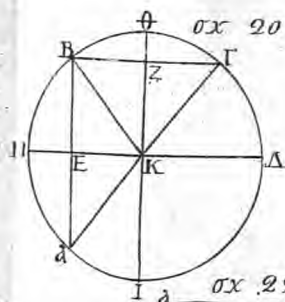
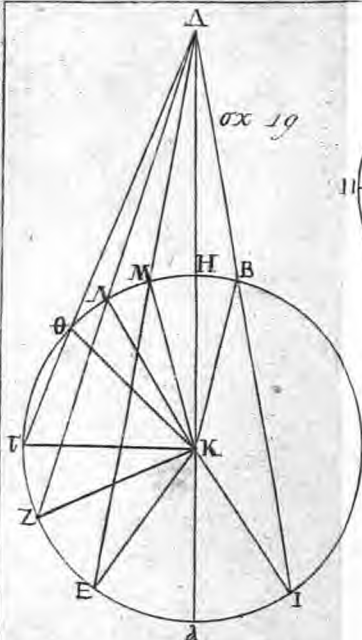


σχ. 3.

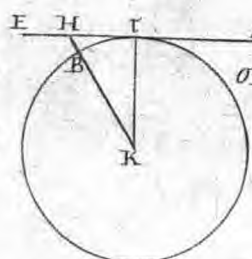


σχ. 18.

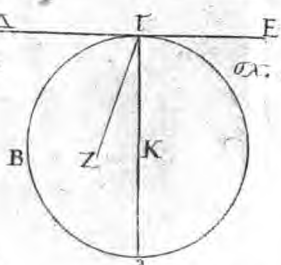




Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



σX. 31.

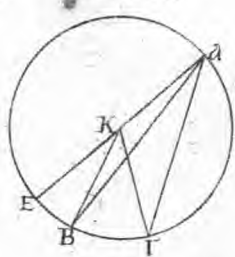


σX. 32.

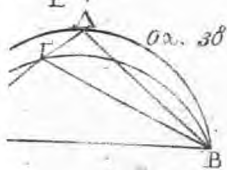
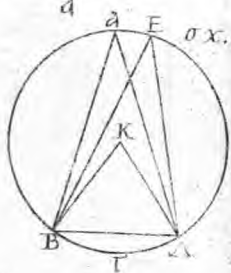
σX. 34.



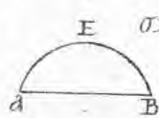
σX. 35.



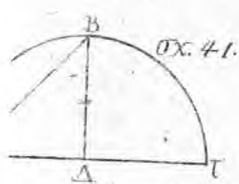
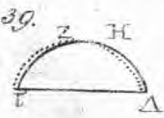
σX. 36.



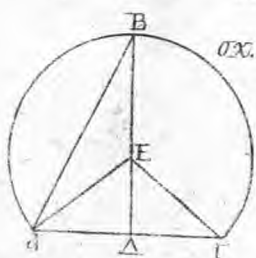
σX. 38.



σX. 39.



σX. 41.



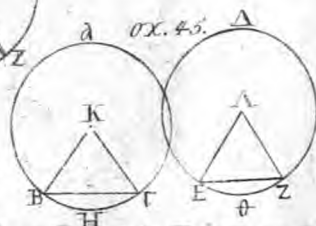
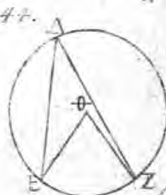
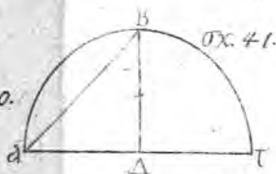
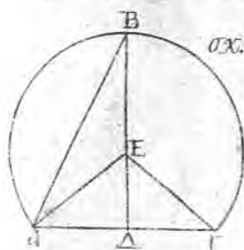
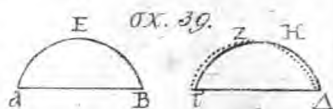
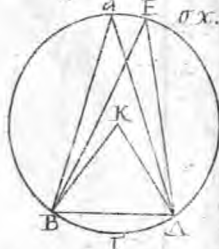
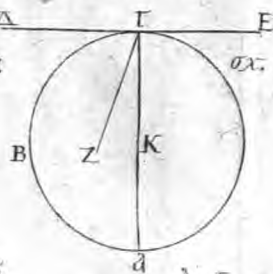
σX. 42.

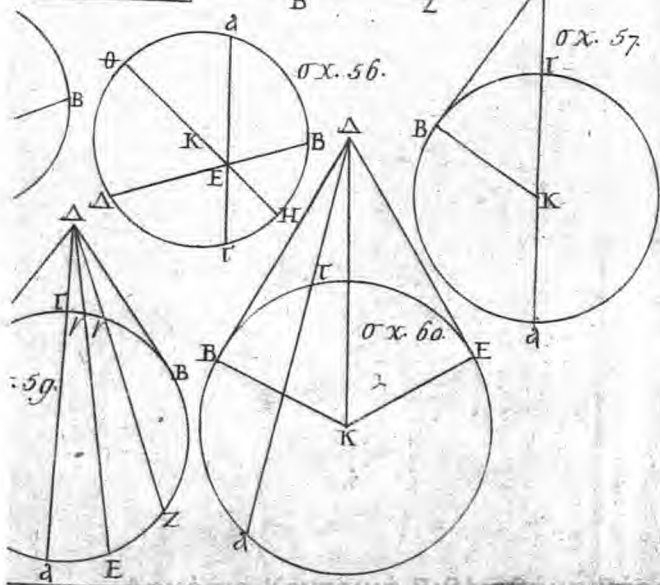
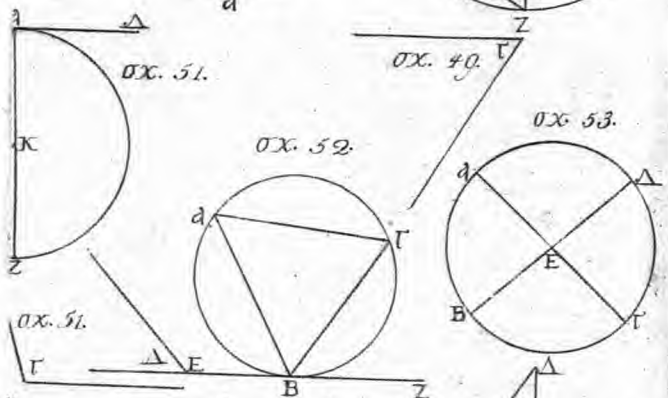
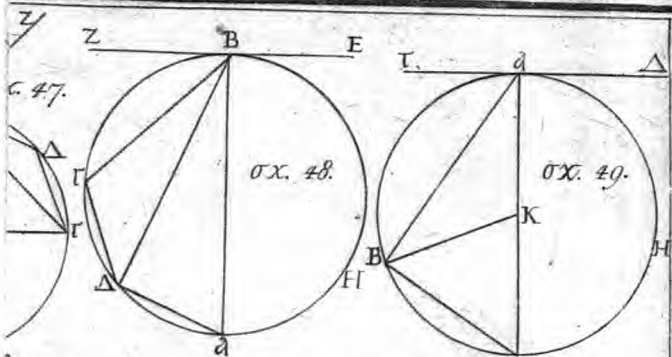
σX. 43.

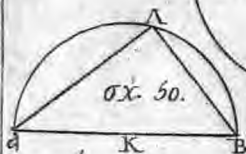
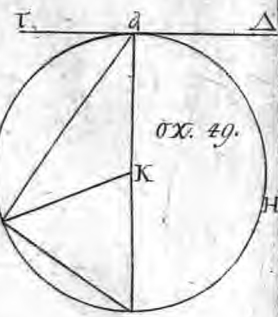
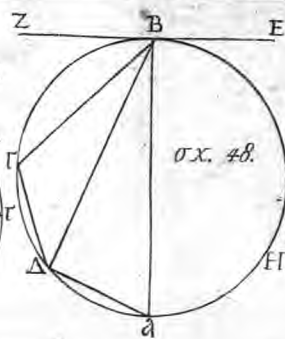
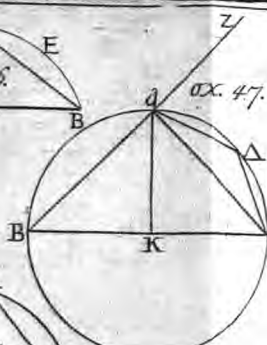


σX. 45.



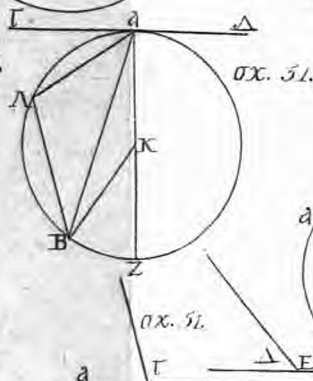






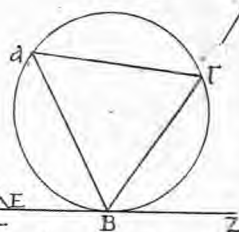
σx. 50.

Γ

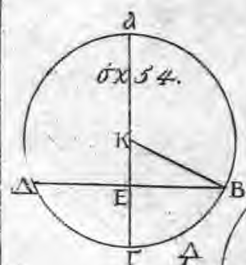
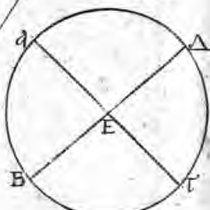


σx. 50.

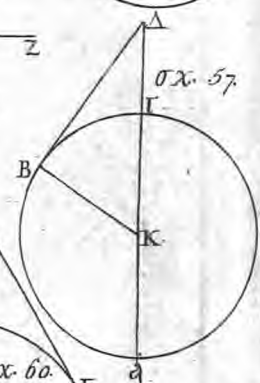
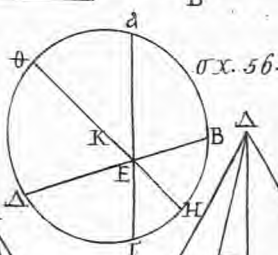
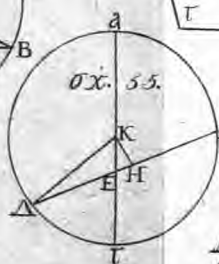
σx. 52.



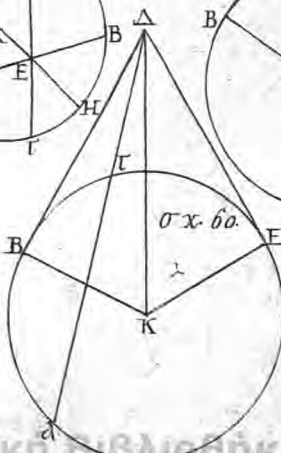
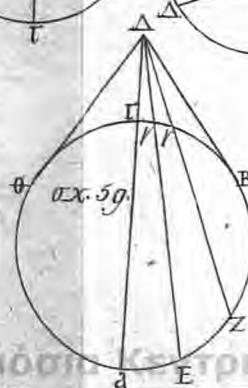
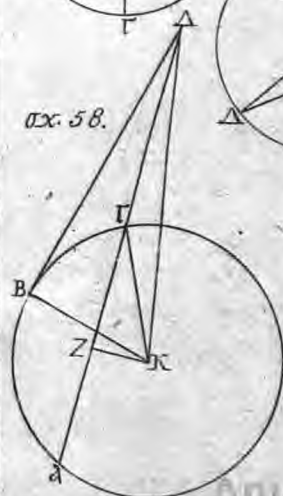
σx. 53.



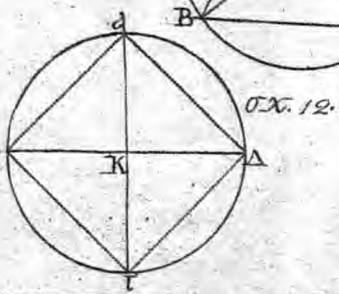
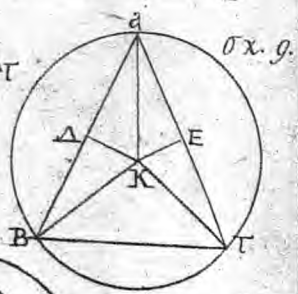
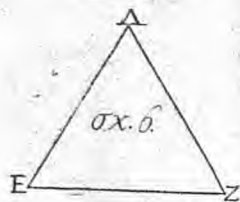
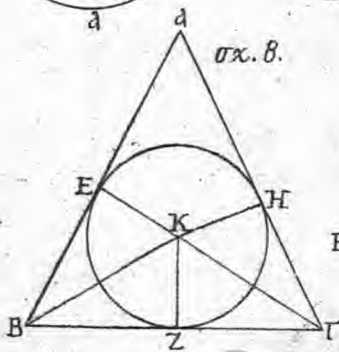
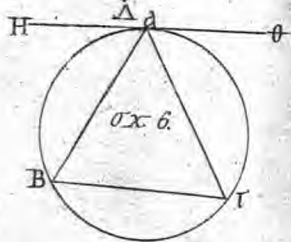
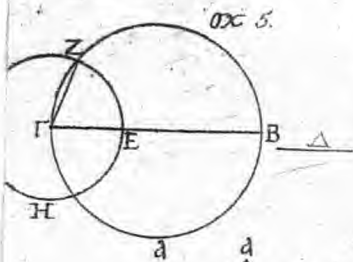
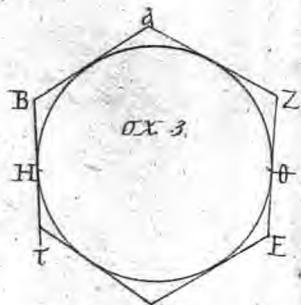
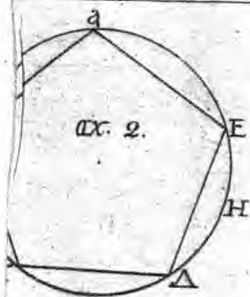
σx. 51.



σx. 58.



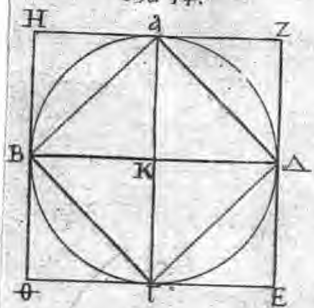
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



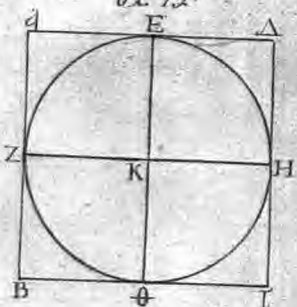


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

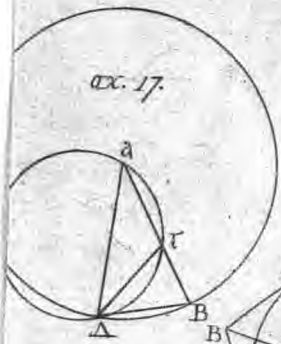
σχ. 14.



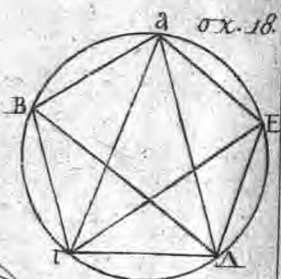
σχ. 15.



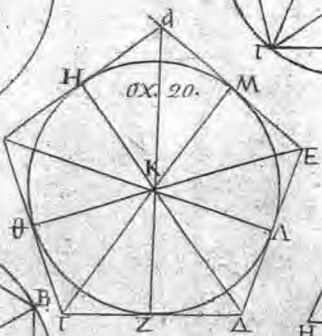
σχ. 17.



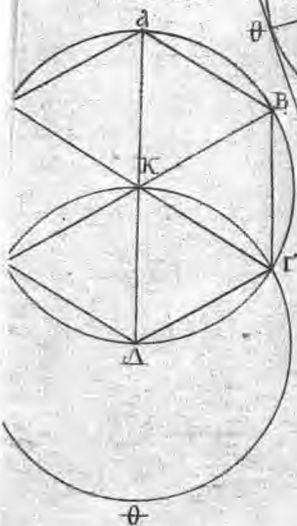
σχ. 18.



σχ. 20.



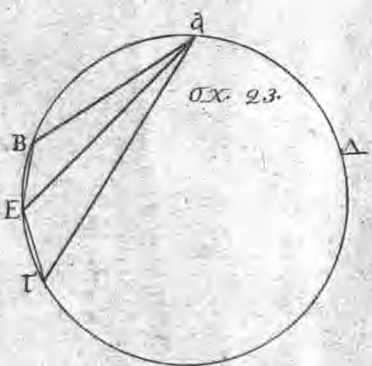
σχ. 22.

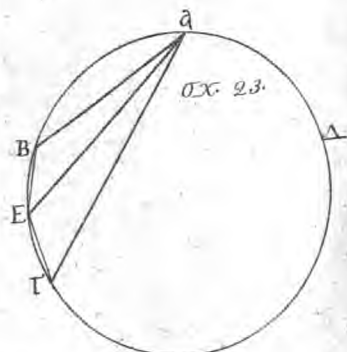
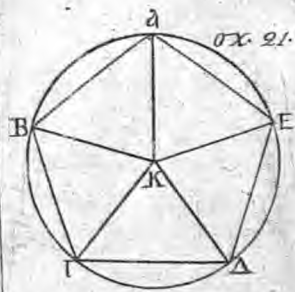
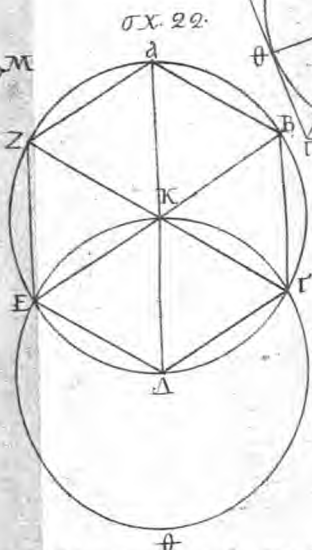
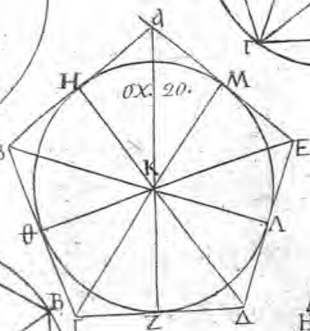
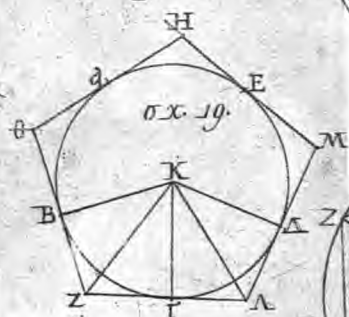
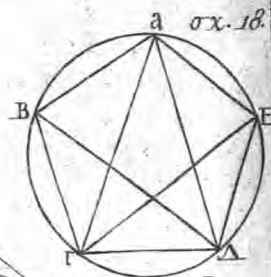
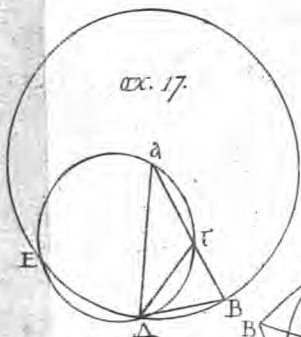
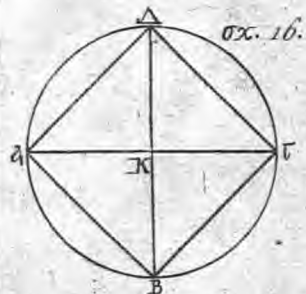
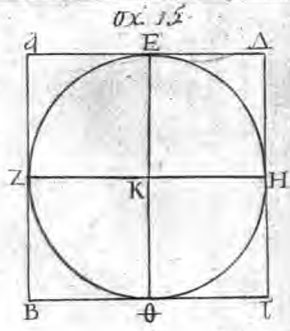
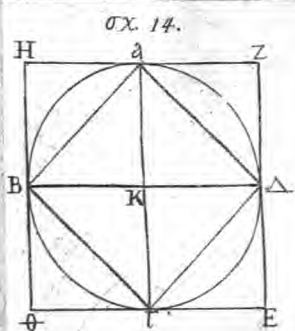
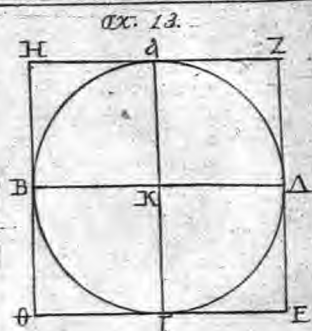


σχ. 18.

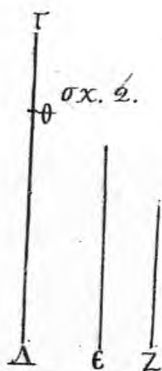


σχ. 23.

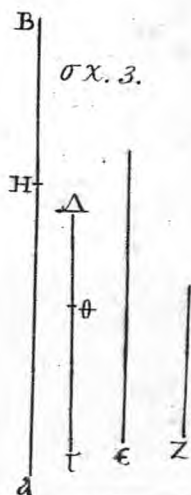




Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



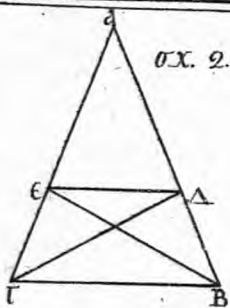
σχ. 2.



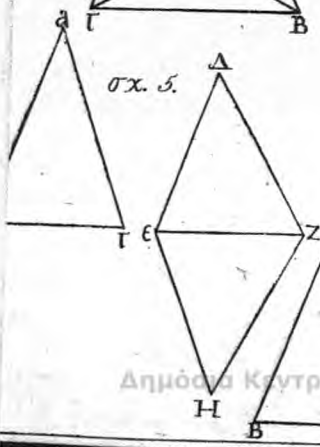
σχ. 3.

Βιβ. 5.

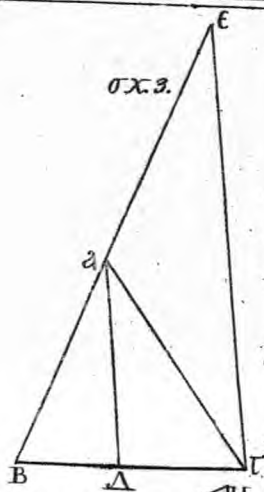
Πιν. 15



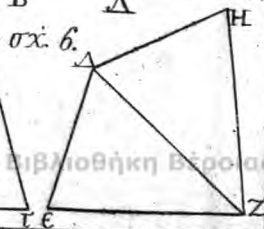
σχ. 2.



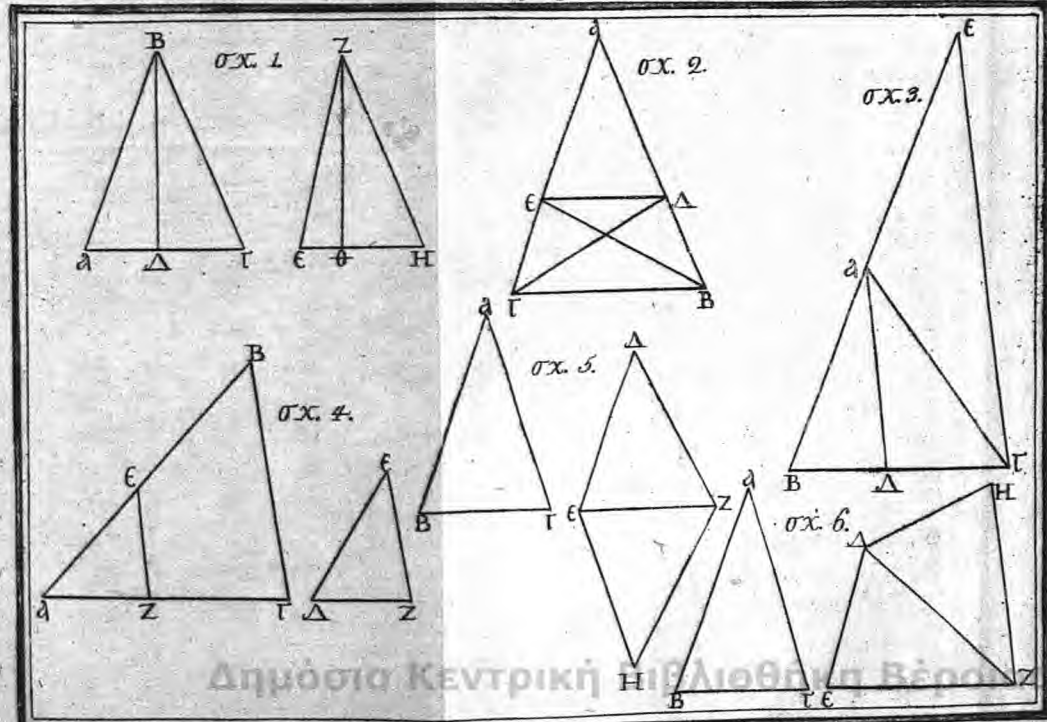
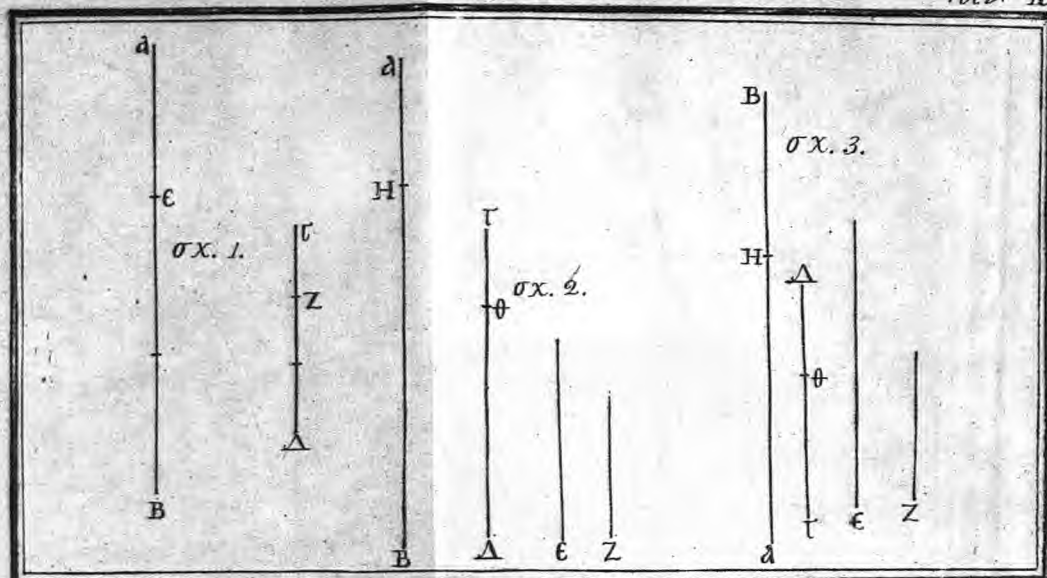
σχ. 5.



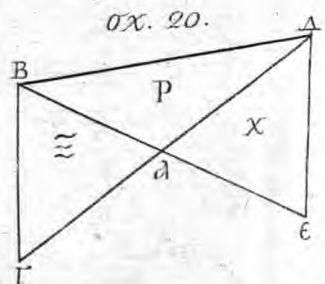
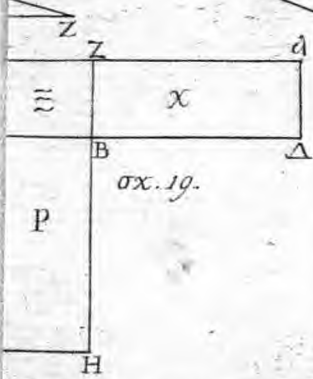
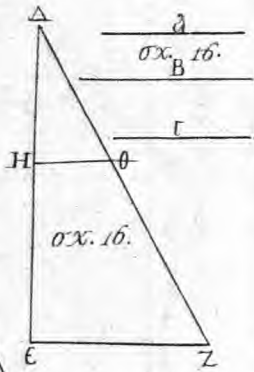
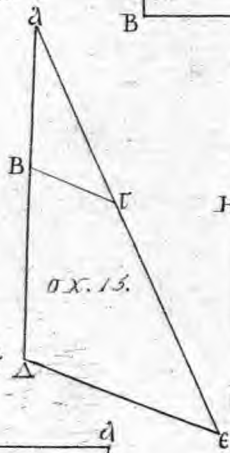
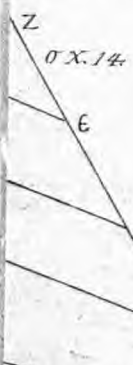
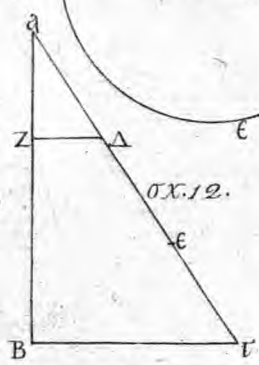
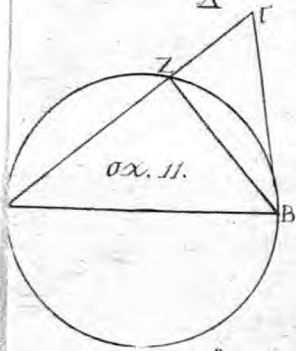
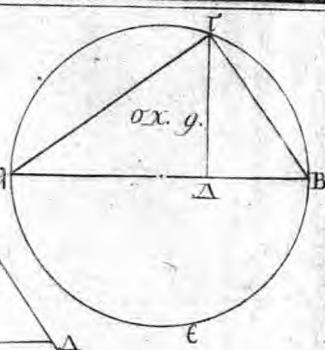
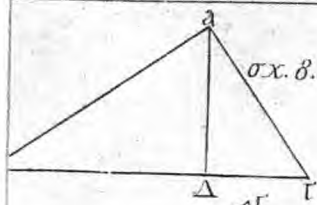
σχ. 3.

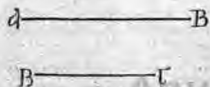
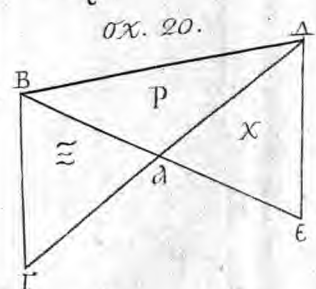
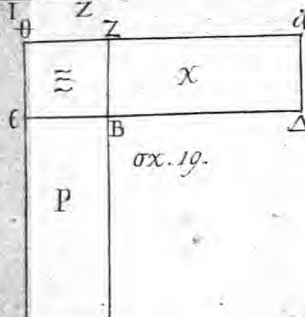
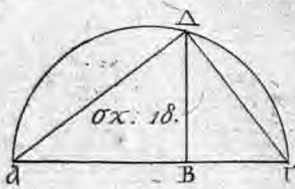
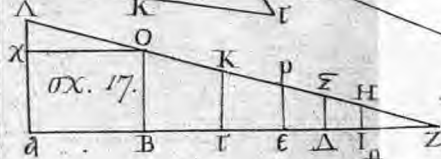
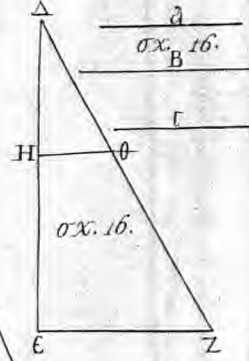
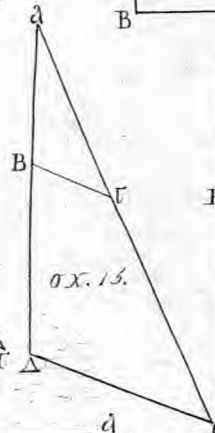
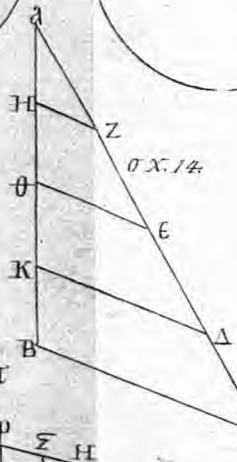
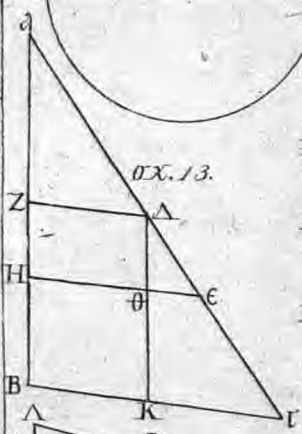
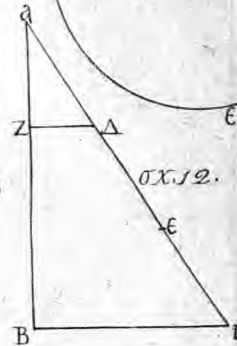
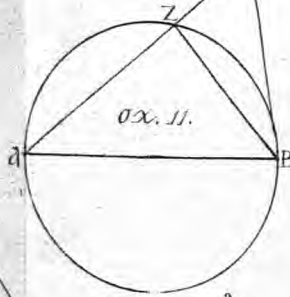
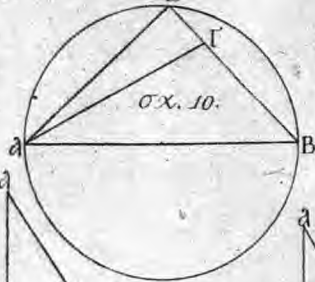
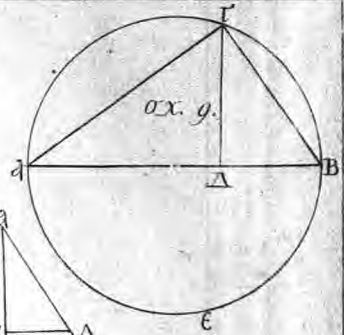
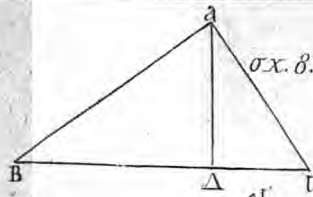
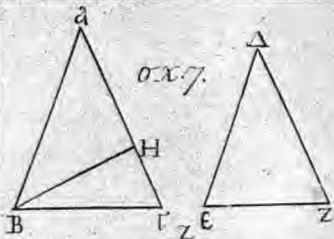


σχ. 6.



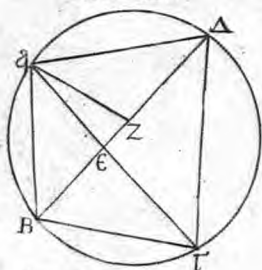
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



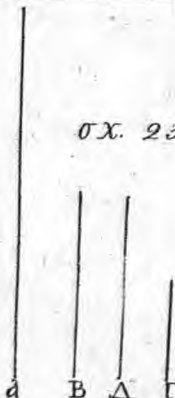


αλ

σχ. 22.



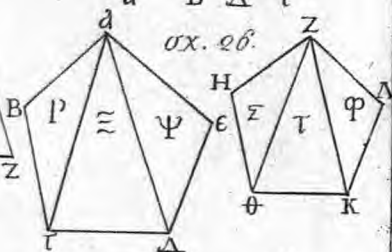
σχ. 23.



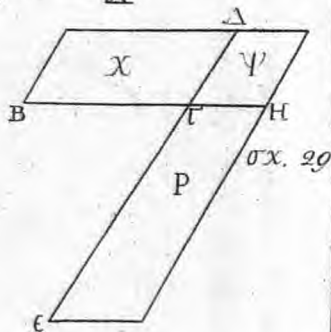
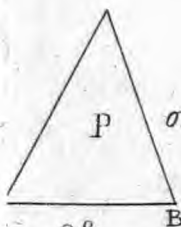
σχ. 25.



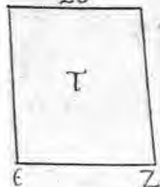
σχ. 26.



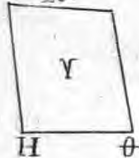
σχ. 28.



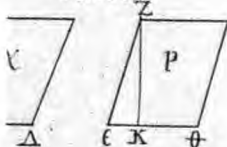
28.



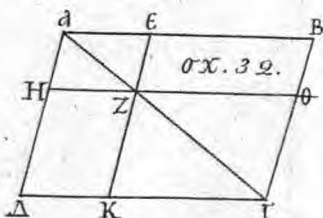
28.

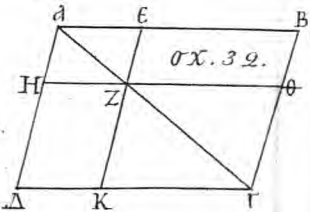


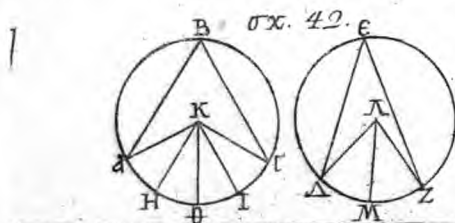
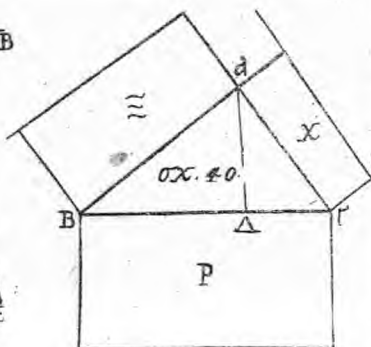
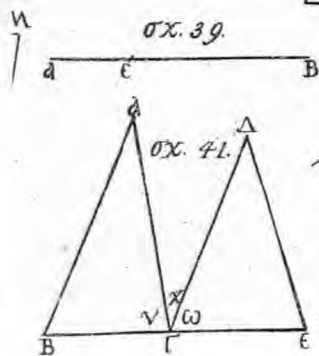
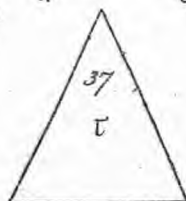
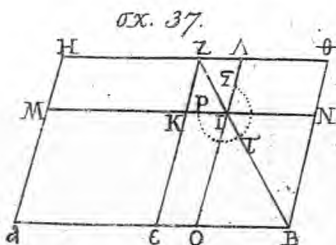
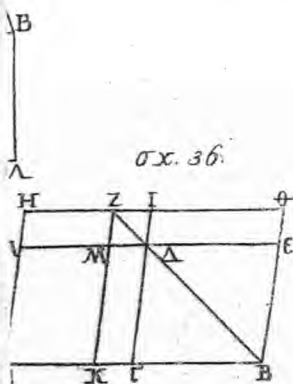
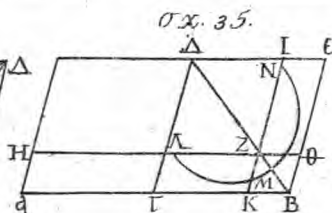
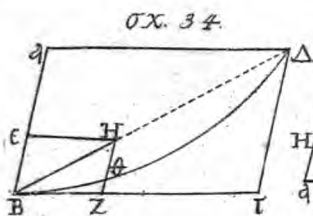
σχ. 31.



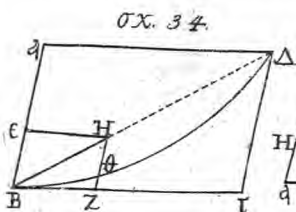
σχ. 32.



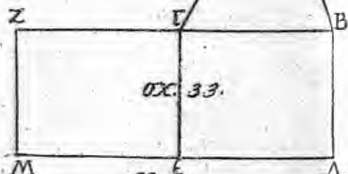
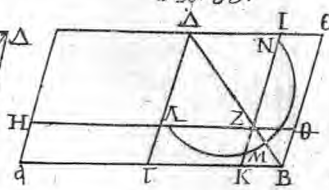




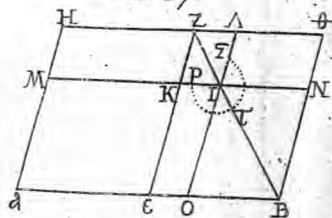
33.



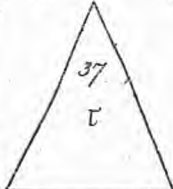
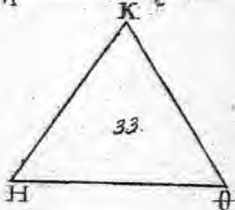
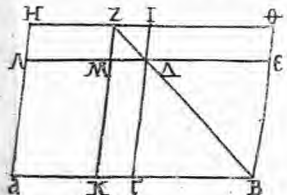
σx. 35.



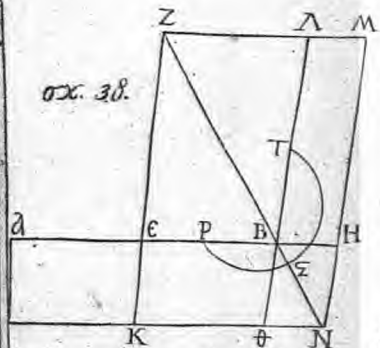
σx. 37.



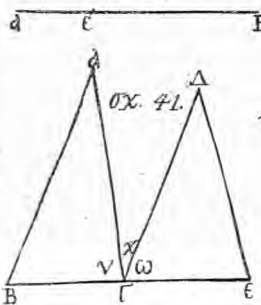
σx. 36.



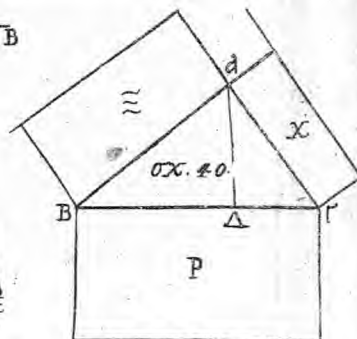
σx. 38.



σx. 39.



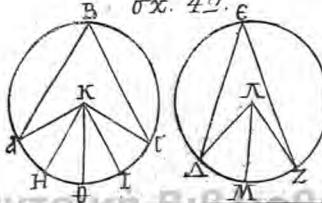
σx. 41.



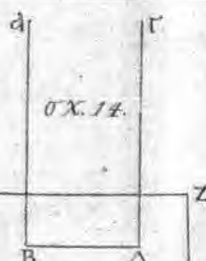
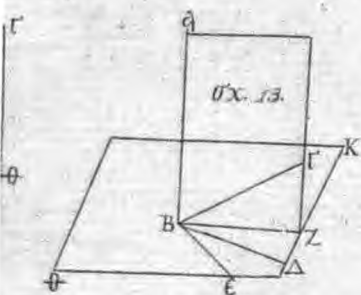
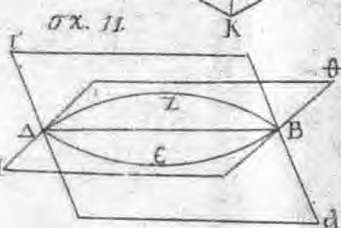
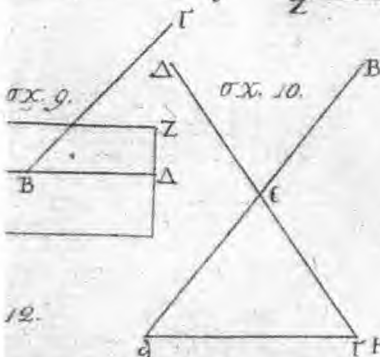
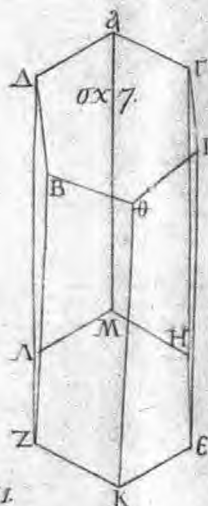
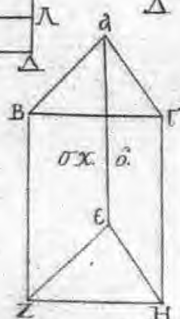
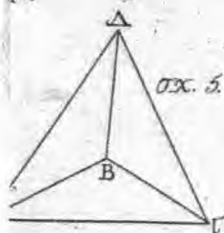
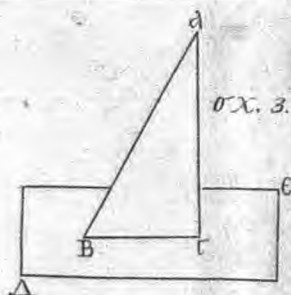
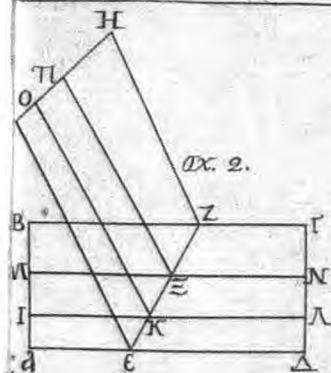
σx. 40.

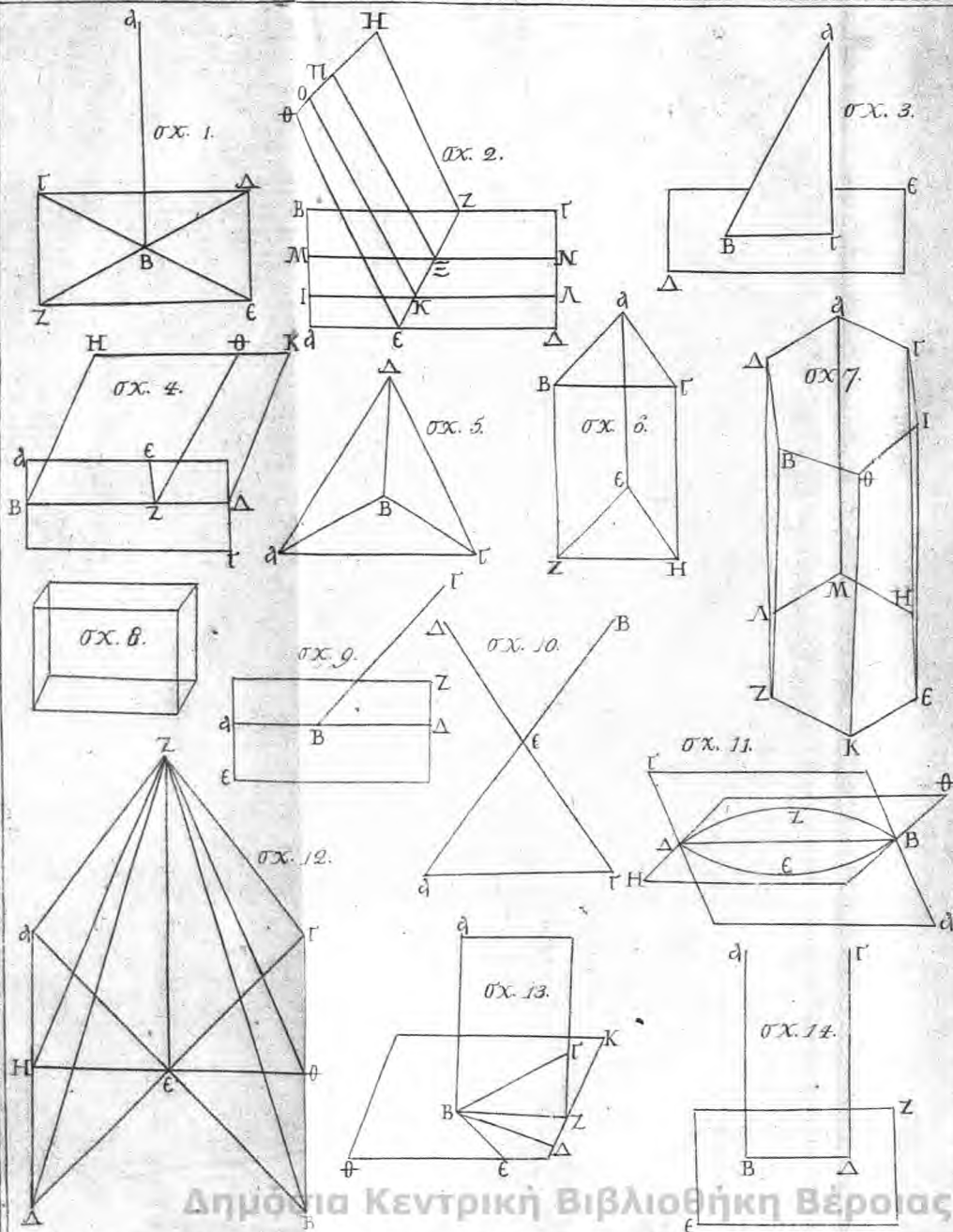


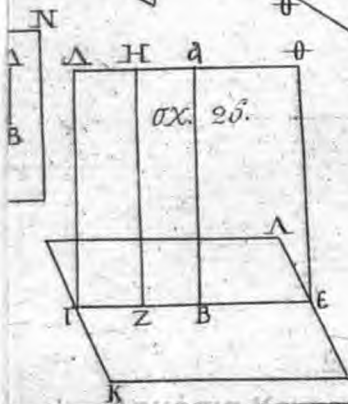
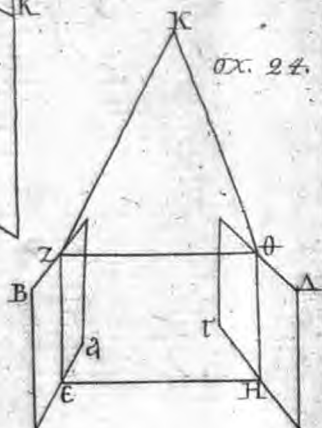
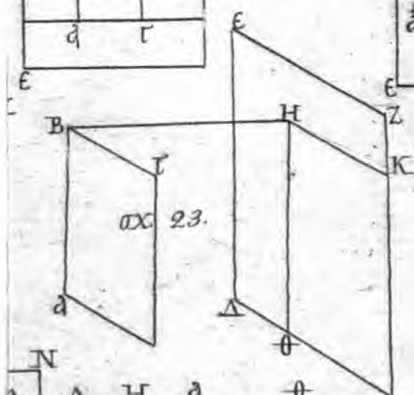
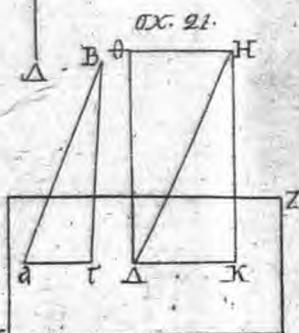
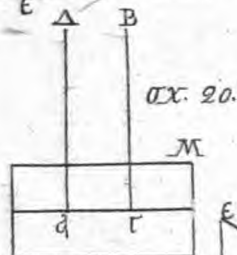
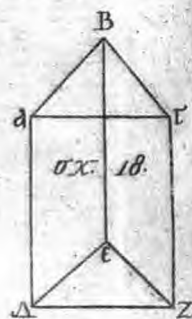
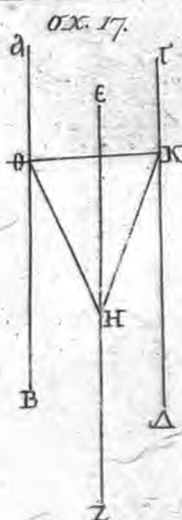
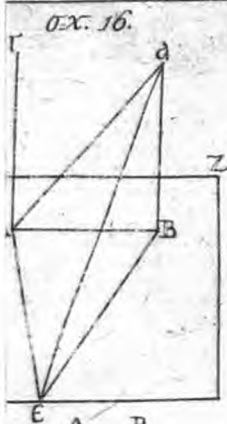
σx. 42.

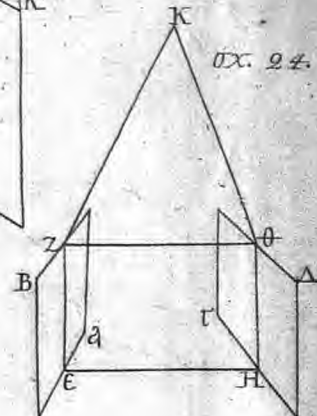
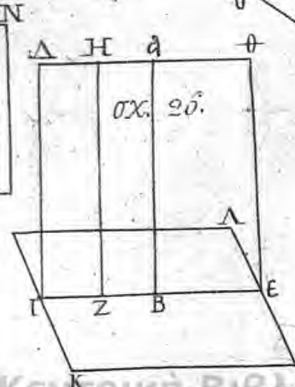
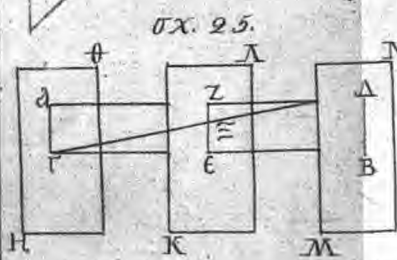
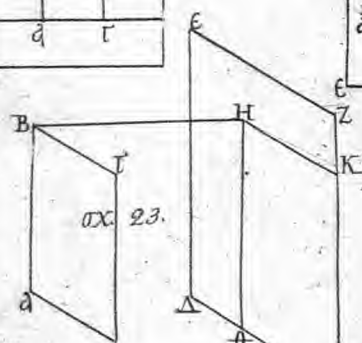
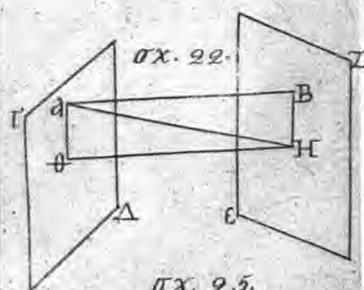
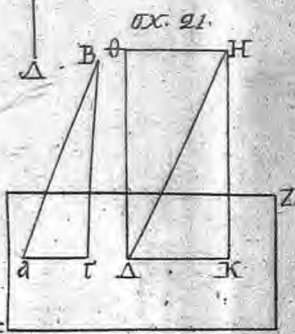
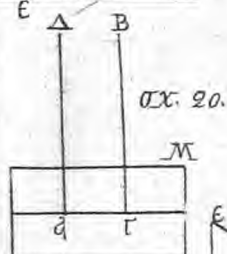
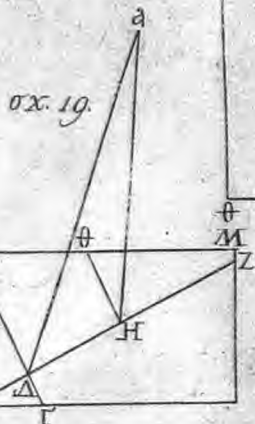
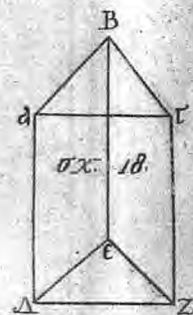
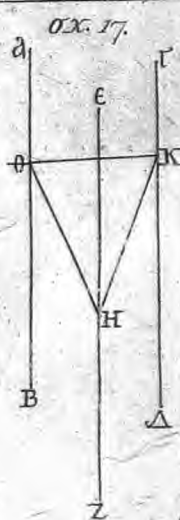
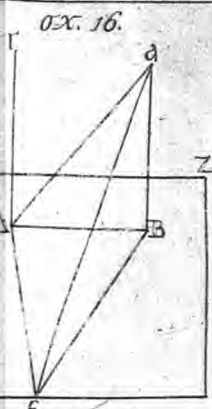
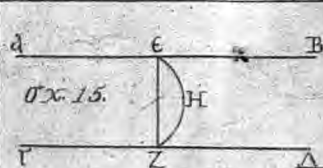


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

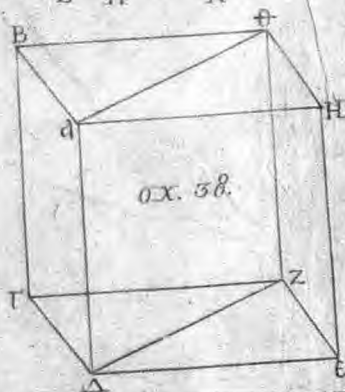
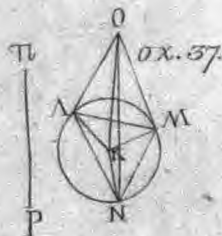
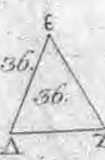
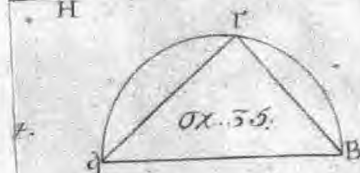
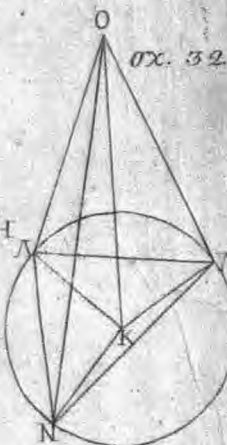
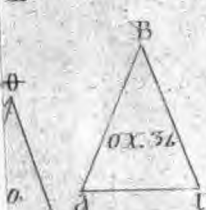
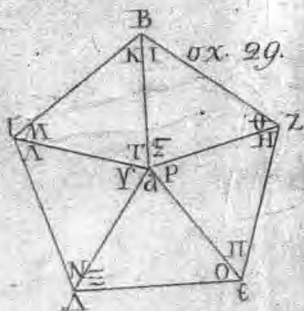
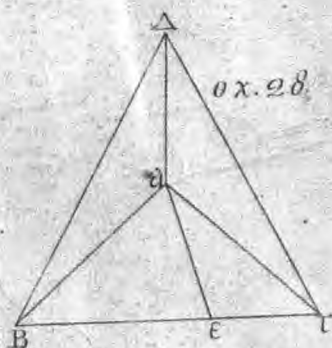


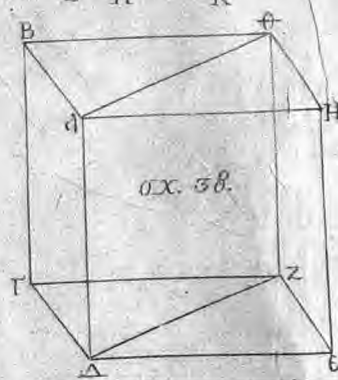
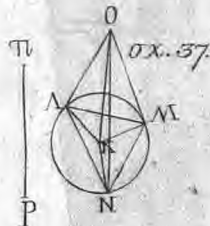
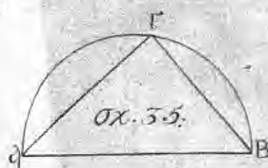
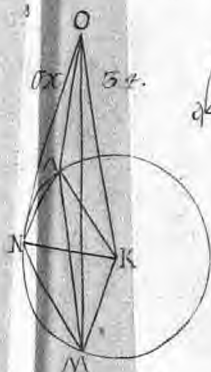
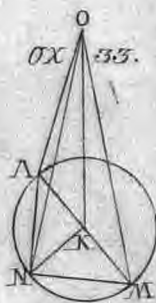
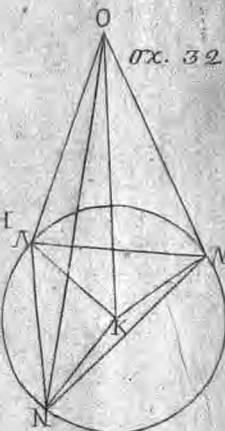
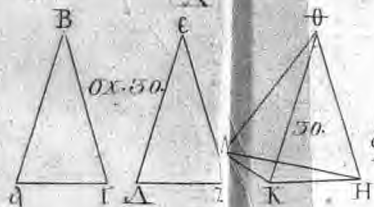
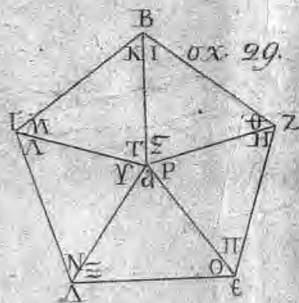
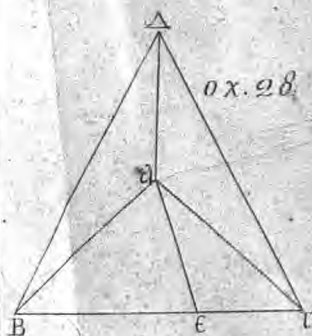
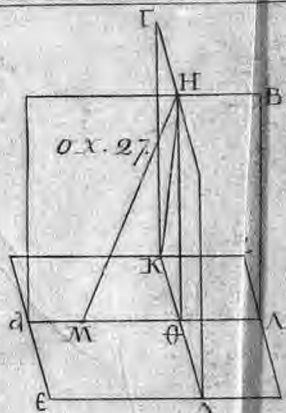




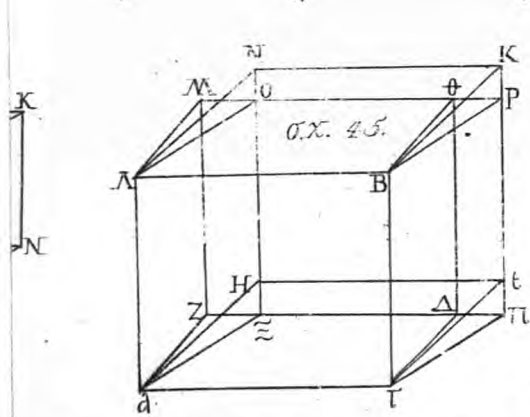
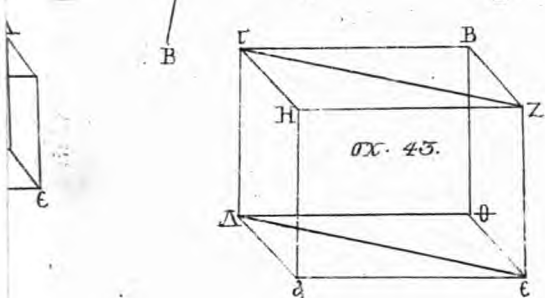
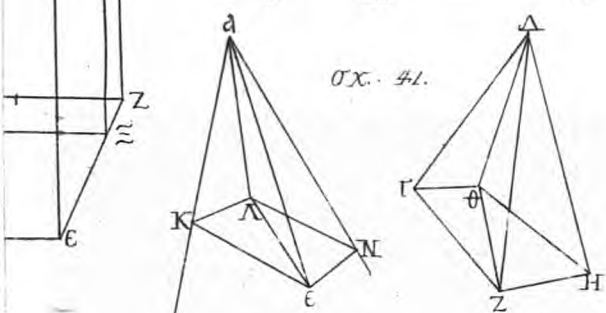
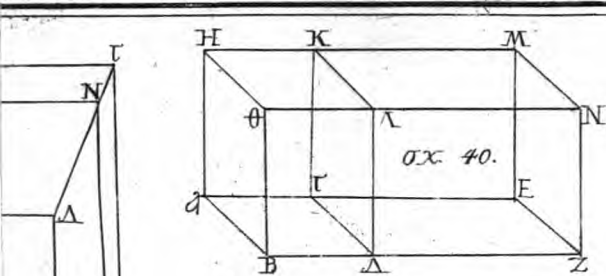


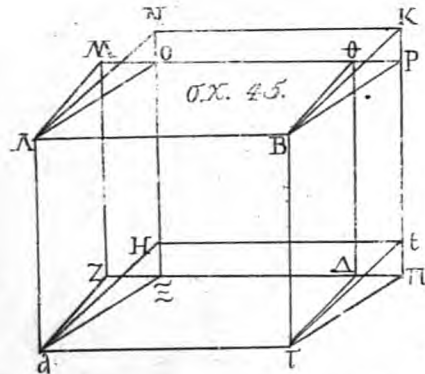
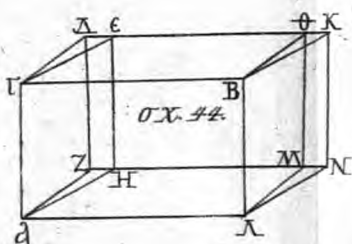
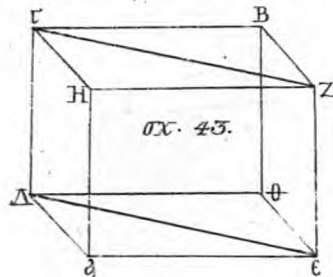
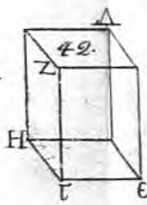
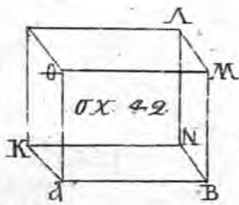
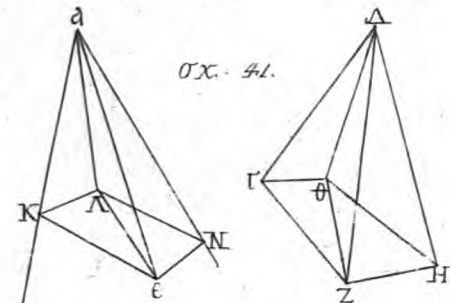
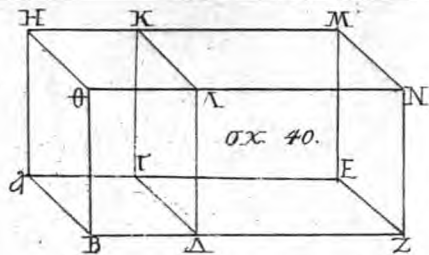
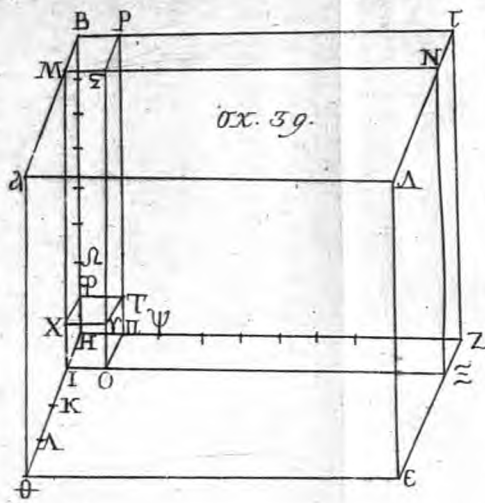
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

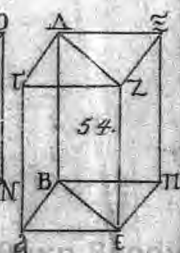
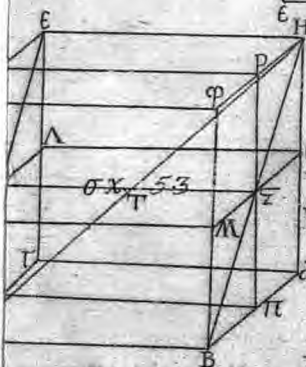
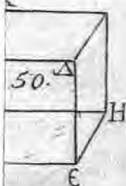
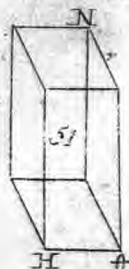
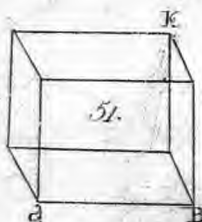
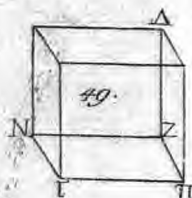
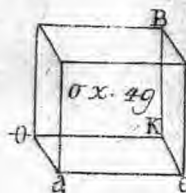
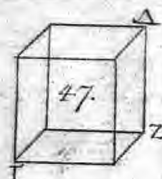
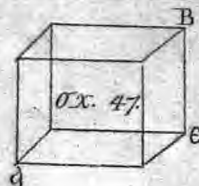


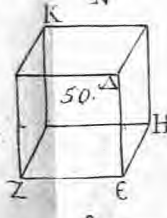
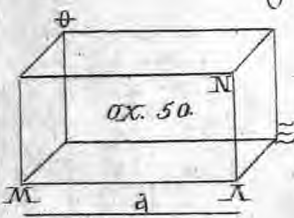
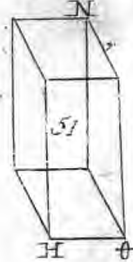
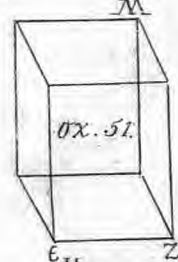
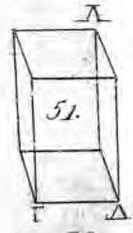
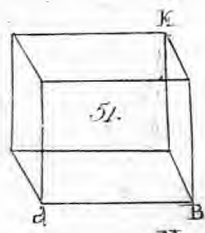
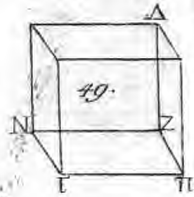
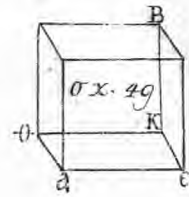
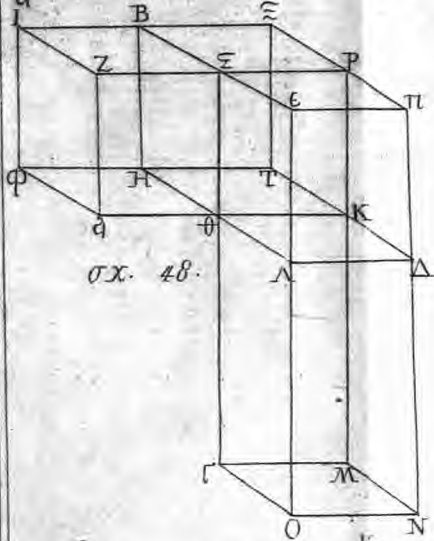
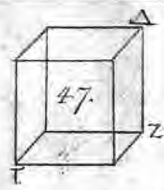
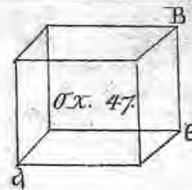
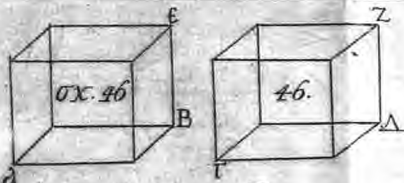


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

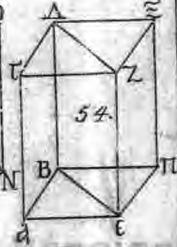
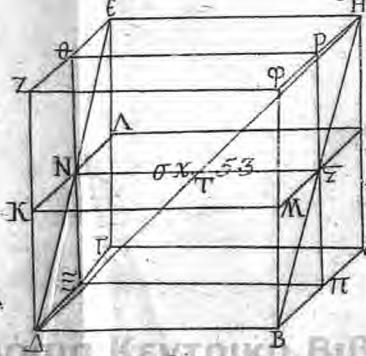
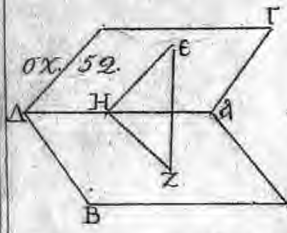




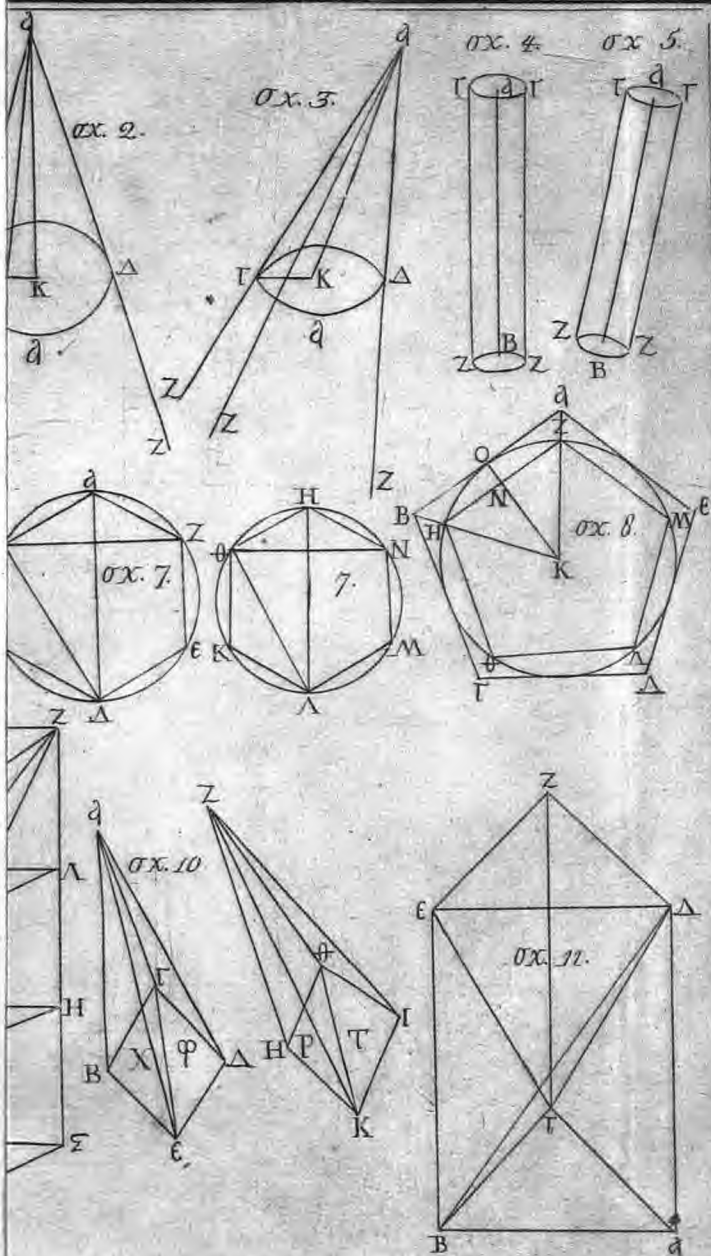


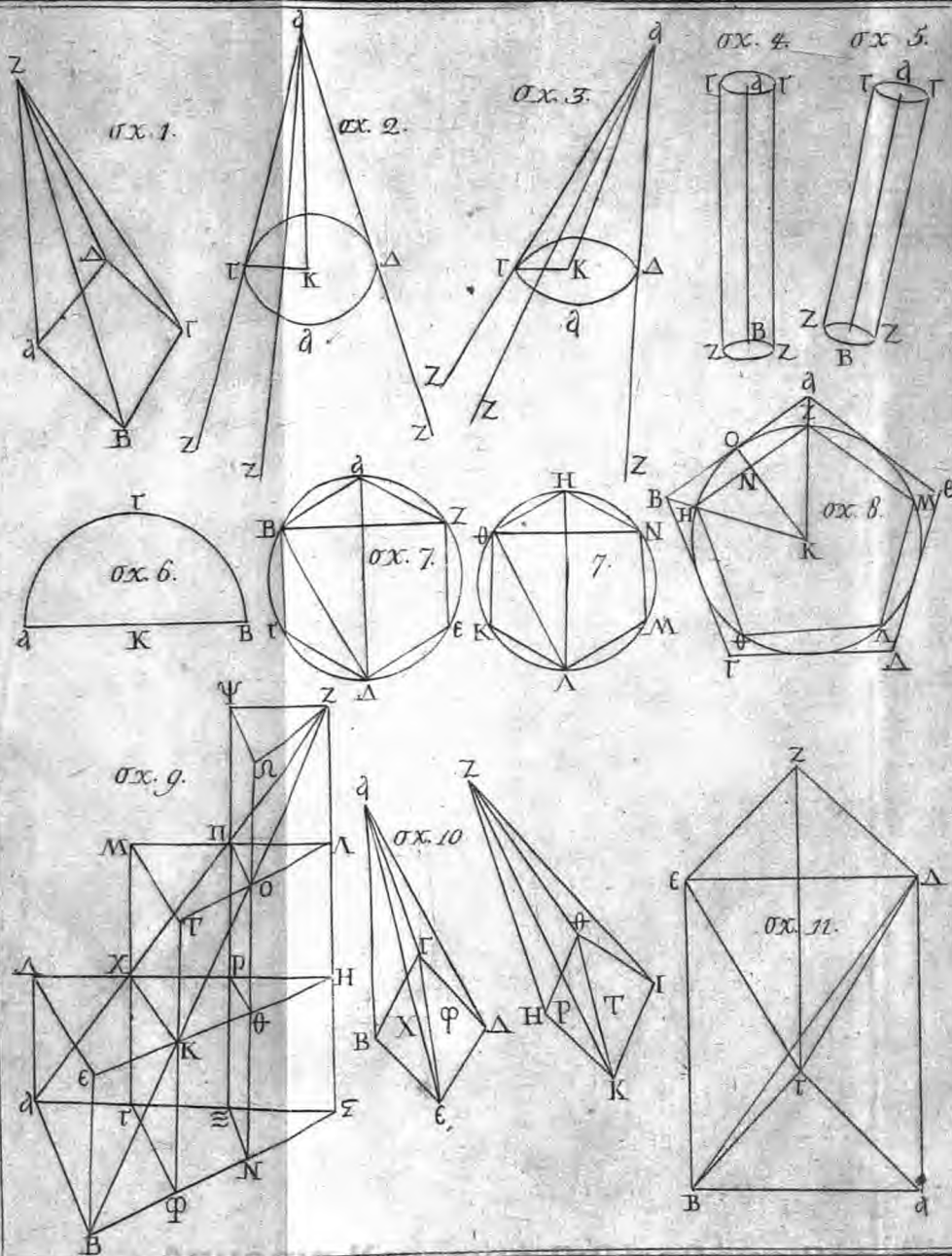


$$\frac{B}{\Gamma} = 50.$$

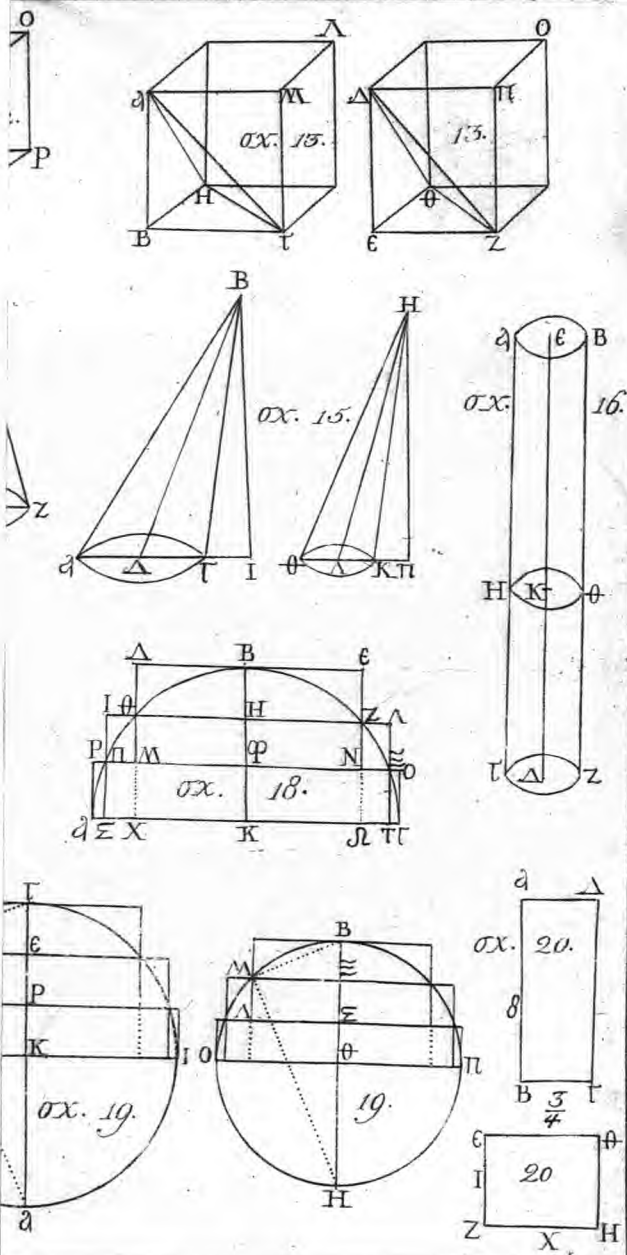


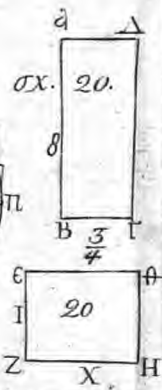
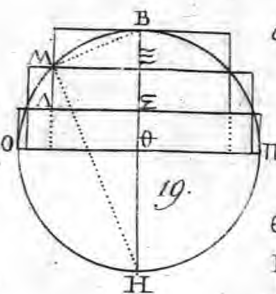
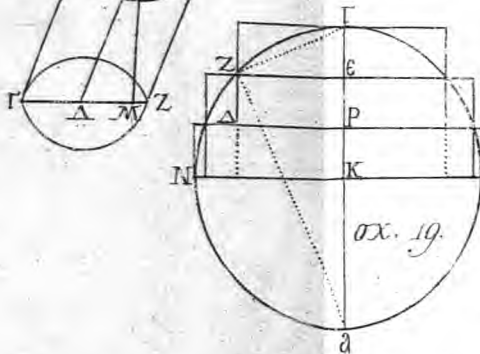
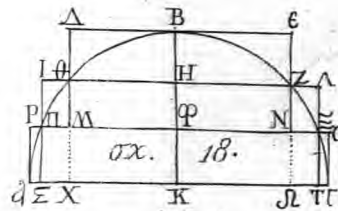
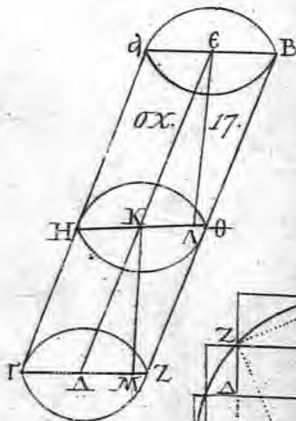
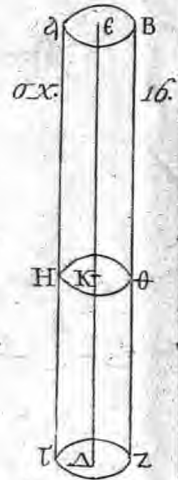
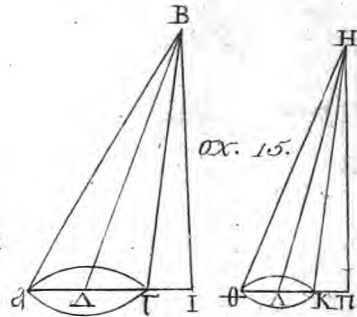
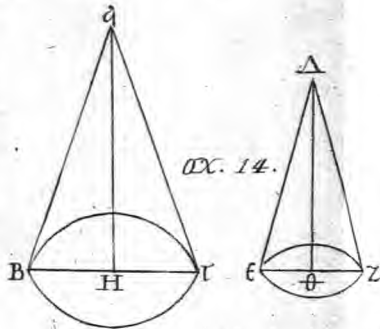
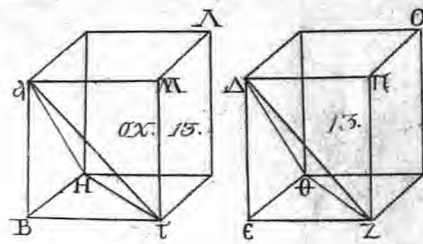
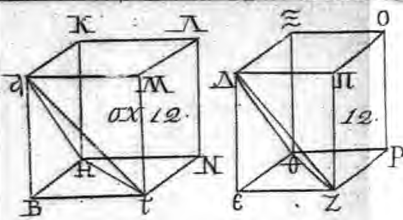
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας





Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας





Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΥΠΟΣ.

Λογόμενοι

Αριθμ. Γεωμ.
ανάλ.

Λογόμενοι.

0. 00000000	Ο	9. 0021388	0. 95434570
0. 50000000	Ξ	9. 0008737	0. 95428467
1. 00000000	Π	8. 9996088	0. 95422363
1. 00000000	Ξ	9. 0008737	0. 95428467
0. 75000000	Ρ	9. 0002412	0. 95425415
0. 50000000	Π	8. 9996088	0. 95422363
1. 00000000	Ρ	9. 0002412	0. 95425415
0. 87500000	Σ	8. 9999250	0. 95421889
0. 75000000	Π	8. 9996088	0. 95422363
1. 00000000	Ρ	9. 0002412	0. 95425415
0. 93750000	Τ	9. 0000831	0. 95424652
0. 87500000	Σ	8. 9999250	0. 95421889
1. 00000000	Τ.	9. 0000831	0. 95424652
0. 96875000	Υ.	9. 0000041	0. 95424271
0. 93750000	Σ.	8. 9999250	0. 95421889
0. 97875000	Τ	9. 0000041	0. 95424652
0. 95312500	Χ	8. 9999650	0. 95424271
0. 93750000	Σ	8. 9999250	0. 95421889
0. 97875000	Τ	9. 0000041	0. 95424271
0. 96093750	υ	8. 9999845	0. 95424217
0. 95312500	Χ	8. 9999650	0. 95424080
0. 96093750	Τ	9. 0000041	0. 95424271
0. 95703125	Φ	8. 9999943	0. 95424223
0. 95312500	υ	8. 9999845	0. 95424217
0. 95703125	Τ	9. 0000041	0. 95424271
0. 95507812	α	8. 9999992	0. 95424247
0. 95312500	Φ	8. 9999943	0. 95424223
0. 95507812	Τ	9. 0000041	0. 95424271
0. 95410156	β	9. 0000016	0. 95424259
0. 95312500	α	8. 9999992	0. 95424247
0. 95507812	β	9. 0000016	0. 95424259
0. 95458984	γ	9. 0000004	0. 95424253
0. 95410156	α	8. 9999992	0. 95424247
0. 95458984	γ	9. 0000004	0. 95424253
0. 95434570	δ	8. 9999998	0. 95424250
0. 95410156	α	8. 9999992	0. 95424247
0. 95434570	γ	9. 0000004	0. 95424253
0. 95422363	ε	9. 0000000	0. 95424251
0. 95410156	δ	8. 9999998	0. 95424250

Ο ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΥΠΟΣ.

Ἀριθμ. Γεωμ.

Λογᾶριθμοί

Ἀριθμ. Γεωμ.

Λογᾶριθμοί.

ἀνὰλ.

ἀνὰλ.

Α	1. 00000000	0. 00000000	Ο	9. 0021388	0. 95434570
Γ	3. 1622777	0. 50000000	Ξ	9. 0008737	0. 95428467
Β	10. 00000000	1. 00000000	Π	8. 9996088	0. 95422363
Β	10. 00000000	1. 00000000	Ξ	9. 0008737	0. 95428467
Δ	5. 6234132	0. 75000000	Ρ	9. 0002412	0. 95425415
Γ	3. 1622777	0. 50000000	Π	8. 9996088	0. 95422363
Β	10. 00000000	1. 00000000	Ρ	9. 0002412	0. 95425415
Ε	7. 4989421	0. 87500000	Σ	8. 9999250	0. 95421889
Δ	5. 6234132	0. 75000000	Π	8. 9996088	0. 95422363
Β	10. 00000000	1. 00000000	Ρ	9. 0002412	0. 95425415
Ζ	8. 6596432	0. 93750000	Τ	9. 0000831	0. 95424652
Ε	7. 4989421	0. 87500000	Σ	8. 9999250	0. 95421889
Β	10. 00000000	1. 00000000	Τ	9. 0000831	0. 95424652
Η	9. 3057204	0. 96875000	Τ	9. 0000041	0. 95424271
Ζ	8. 6596432	0. 93750000	Σ	8. 9999250	0. 95421889
Η	9. 3057204	0. 97875000	Τ	9. 0000041	0. 95424652
Θ	8. 9768713	0. 95312500	Χ	8. 9999650	0. 95424271
Ζ	8. 6596432	0. 93750000	Σ	8. 9999250	0. 95421889
Η	9. 3057204	0. 97875000	Τ	9. 0000041	0. 95424271
Ι	9. 1398170	0. 96093750	Υ	8. 9999845	0. 95424217
Θ	8. 9768713	0. 95312500	Χ	8. 9999650	0. 95424080
Ι	9. 1398170	0. 96093750	Τ	9. 0000041	0. 95424271
Κ	9. 0579777	0. 95703125	Φ	8. 9999943	0. 95424223
Θ	8. 9768713	0. 95312500	Υ	8. 9999845	0. 95424217
Κ	9. 0579777	0. 95703125	Τ	9. 0000041	0. 95424271
Λ	9. 0173333	0. 95507812	ΰ	8. 9999992	0. 95424247
Θ	8. 9768713	0. 95312500	Φ	8. 9999943	0. 95424223
Λ	9. 0173333	0. 95507812	Τ	9. 0000041	0. 95424271
Μ	8. 9970796	0. 95410156	β	9. 0000016	0. 95424259
Θ	8. 9768713	0. 95312500	α	8. 9999992	0. 95424247
Λ	9. 0173333	0. 95507812	β	9. 0000016	0. 95424259
Ν	9. 0072008	0. 95458984	γ	9. 0000004	0. 95424253
Μ	8. 9970796	0. 95410156	α	8. 9999992	0. 95424247
Ν	9. 0072008	0. 95458984	γ	9. 0000004	0. 95424253
Ο	9. 0021388	0. 95434570	δ	8. 9999998	0. 95424250
Μ	8. 9970796	0. 95410156	α	8. 9999992	0. 95424247
Ο	9. 0021388	0. 95434570	γ	9. 0000004	0. 95424253
Π	8. 9996088	0. 95422363	ε	9. 0000000	0. 95424251
Μ	8. 9970796	0. 95410156	δ	8. 9999998	0. 95424250

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βεροίας

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΑΠΡ