

Αὔξ. Ἀρ.

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΚΡΑΤΙΚΟΥ ΝΟΣΟΚΟΜ. ΒΕΡΟΙΑΣ
ΕΚ ΔΩΡΕΑΣ
ΙΑΤΡΟΥ ΑΝΤΩΝΙΟΥ ΤΣΟΥΠΕΛΗ

Ἐν Βεροίᾳ τῇ 19

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ΒΕΡΟΙΑΣ

4500

Αριθ. ειλ.

711

ΔΩΡΕΑ

Αντων. Βασιλειάδης

GRVIB 01930



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Α. ΤΑΚΟΥΕΤΙΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΤΑ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΟΥΙΣΤΩΝΟΣ

ἔξελληνισθέντα μὲν ἐκ τῆς Λατινίδος φωνῆς ὑπὸ τῆς

ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ

Κ Υ Ρ Ι Ο Υ

ΕΥΓΕΝΙΟΥ τῆς ΒΟΥΛΓΑΡΕΩΣ

Ἱεροδιακόνε ἐτι ὄντος, καὶ χολαρχῆντος ἔντε Ἰωαννίνοις, καὶ ἐν τῇ
Ἀθωνιάδι Ἀκαδημίᾳ, καὶ ἐν Κωνσταντινπόλει, πρὸς ἀκρόασιν
τῶν παρ' αὐτῷ μαθητιόντων.

Τὰ νῦν δὲ τύποις ἐκδοθέντα ὑπὸ τῆς Ἀυταδελφότητος τῶν

Ζ Ω Σ Ι Μ Α Δ Ω Ν

Α. καὶ Ν. καὶ Ζ. καὶ Μ.

ἐπὶ τῇ διανεμηθῆναι δωρεὰν τοῖς φιλεπισήμοσιν Ἑλλήνων Νεανίσκοις.



Ἐν Βιέννῃ τῆς Ἀ' αἰτίας.

ἐν τῇ Ἑλληνικῇ Τυπογραφίᾳ Γεωργίου Βενδότη.

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βέροιας
1805
Αρ. 6. 711

Γεωμετρήσων εισίτω· ὁυ κωλύω.

Τῷ μὴ θέλοντι, συζυγώσω τὰς θυγάς.



ΑΦΗΓΗΣΙΣ ΙΣΤΟΡΙΚΗ

Περὶ ἀρχῆς καὶ προόδου

τῶν Μαθηματικῶν Ἐπισημῶν.

Τὴν ἐκθεσιν τῶν σοιχείων τῶν Μαθηματικῶν ἀναβαλλομένῳ, πρῶτον ἂν ἔσεοδαι περὶ ἀρχῆς τε τέτων, καὶ τιμιότητος, βραχὺ ἄττα ἔδοξέ μοι προδιελθεῖν, ὥς ἂν γνοῖεν οἱ τῆς Μαθήσεως Θιασῶται, οἳ τινι φέροντες σφᾶς αὐτὰς ἀφοσιώσονται ἐπισήμῃ, καὶ ἅμα διδάσκειν, οἳ ὧν ἂν τύχωσιν ἀφηρημένοι τὴν γνῶσιν, τέτων προχειρότατα ποιέμενοι τὴν κατάγνωσιν, ἡλίκον τῶν Ἐξέων τὸ ἀξίωμα, περὶ ὧν τὴν κτῆσιν, ὅσας δέποτε ἐπὶ σοφίᾳ γνωριμωτάτες ὁ παλαιὸς ἠνεγενε χρόνος, ἀμύθητον ὅσῃ τὴν σπεδὴν κατεβάλλοντο. Ἐν χρήσει δέ μοι ἦκε τὴν προτεθεῖσαν ἀφήγησιν συγκομισομένῳ, τὰ ὑπὸ Πέτρῳ τῷ Ῥώμῃ ἐν ὅλῳ τῷ τῶν Σχολῶν Α΄ Βιβλίῳ, περὶ τῶν Μαθηματικῶν ἱσορηθέντα, ἅπερ ἐκ τῶν Πρόκλου, Λαερτίου, Οὐίτρευϊς, Γελλίου, Πολυβίου, Τζέτζε, καὶ ἄλλων, ἀκριβῶς ἐχέοντων, ἢ θαυμάσιως ἐκεῖνος συγγράφας ἐξέδοτο.

Πρώτη μὲν οὖν (εἰ χρὴ πιστεύειν Ἰωσήφῳ) τῶν ἐπισημῶν ἀνδράποισ ὑπῆρξεν ἡ Μάθησις. Αὐτὸς γὰρ ἐν τῷ Α΄ τῶν Ἀρχαιολογιῶν Κεφ. Γ΄, τὰς ἀπὸ Σήδε, φησὶ, τὴν τῶν ἑρμῶν παρατηρήσαντας διακόσμησιν, καὶ ἀσέρων περιόδους, τὰ εὑρημένα ἐξίτηλα γένηται, παγκό

ρηκότος τὸν ὀλεθρον, τὸν μὲν κατ' ἰχθύν πυρὸς, τὸν δὲ κατὰ πλῆθος, καὶ βίαν ὕδατος, σήλας δὲ ἰδρυσάμενες, τὴν μὲν ἐκ πλίνθου, τὴν δ' ἑτέραν ἐκ λίθων, ἀμφοτέραις ἐγγράψαι τὰ ἐνρημένα, ἵνα καὶ τῆς πλινθίνης ἀφανισθείσης ὑπὸ τῆς ἐπομβρίας, ἡ λινθίνη μείνασα, παράχῃ μαθεῖν τοῖς ἀνθρώποις, τὰ ἐγγεγραμμένα δηλῶσα. Καὶ πλινθίνην δὲ ὑπ' αὐτῶν ἀνατεθῆναι, φησὶ, μένει δὲ ἄχρι τῆ δευρο κατὰ τὴν Συριάδα. Ταῦτα γὰρ ἡμῖν Γώσηπος, παρ' ᾧ καὶ ἡ τέτων πίσις μενέτω.

Μετὰ δὲ τὸν κατακλυσμὸν, Ἀσσυρίης τε, καὶ Χαλδαίης πρώτες ἀπάντων περὶ τὰ Μαθήματα ἐναρχομένην, αὐτὸς τε Γώσηπος ἐς παραδεδικώς, καὶ Πλίνιος, καὶ Διόδωρος, καὶ Κικέρων. Ἐκ δὲ Χαλδαίων, καὶ Ἀσσυρίων, παρ' οἷς ἀνέφυσάν τε, καὶ θάλλειν ἤρξαντο, ἐνεπιδιμῆσαι τοῖς Αἰγυπτίοις, ὑπὸ Ἀβραάμ μετενεχθείσας τὰς Ἑξεις. Οὗτος γὰρ Θεῷ κελεύοντι πειθαρχήσας, ἐξελθὼν τε τῆς γῆς αὐτῆς, καὶ τῆς συγγενείας, καὶ τὴν Χαννανίτιδα πρῶτον παροικήσας, εἴτ' ἐντεύθεν εἰς Αἴγυπτον μεταναξέυσας, κατιδὼν τε τὰς Αἰγυπτίους, Σοφίας τε ἡμέρῳ ἡττονας ὄντας, καὶ πρὸς παιδείαν Φύσεως ἔχοντας ἑν, ὡς αὐτὸς Γώσηπος μαρτυρεῖ Βιβλ. Α'. Κεφ. Θ', Ἀριθμητικὴν τε, καὶ Ἀστρονομίαν, ἧς ἡγεῖσθαι τὴν Γεωμετρίαν ἐπαναγκῆς ἦν, αὐτοῖς ἐκoinώνησε, τῇ ἑδνῇ ἐντυχὼν τοῖς λογιστάτοις. Τὰς δ' Αἰγυπτίους ἐπὶ πλεῖστον τὸ εἶδος τῆτο τῆς Μαθηματικῆς παιδείας ἡμιβωκέναι εἶδος, καὶ ὑπὸ ἀρίστας πρώτας αὐτὰς εὑρετὰς, κατὰ Σχολῆς περισσίαν μαρτυρημένους ἐν Α'. Μεταφ. Κεφ. Α'. „Ἐφεῖσθαι γὰρ ἐν Αἰγύπτῳ τοῖς „Γερῶσι δημοσίᾳ περὶ τὰς τοιαύτας σχολάζειν τέχνας.

Τὸ δ' ὑπ' ἐντεύθεν, ἡ Μάθησις ἐξ Αἰγύπτου διαπλεύσασα, φιλοσόφος διαπεφοίτηκε. Θαλῆς τε γὰρ ὁ Χρῖς φησὶ ἐτύγχανε γεγονώς, πρῶ-

τος Εἰρήνων κατάρως εἰς Αἴγυπτον, ἐκείθεν ἐπὶ τὴν Εἰλάδα τὴν
Γεωμετρίαν μετακομίσαι ἰσόρηται, ὅς δὴ πρὸς ταῖς ἄλλοις, καὶ τῶν
ἐν τῷ πρώτῳ τῶν χοιχείων τὴν Εἰ. εὐρηκὼς ἄδεται, καὶ τὴν ΙΕ.,
καὶ Κς., καὶ τῶν ἐν τῷ Δ. δὲ, Β., καὶ Γ., καὶ Δ., καὶ Ε., ἐφ'
ἧ καὶ βῆν δύσαι λέγεται, ὑπερηοεῖς τῷ εὐρήματι. Οἱ δ' αὐτὸς καὶ
τὰς Ἰσημερίας, καὶ τὰς Τροπὰς πρώτος παρατηρεῖν ἤρξατο (1),
πρώτος τε Ἡλίο ἐκλειψιν προειρήκει, ὡς Ἰππίας τε, καὶ Ἀριστοτέλης
μνημονεύει· καὶ Σελήνης δὲ, ἣν, τῇ Τζέτζε μαρτυρεῖντος, Κύρῳ τῷ
Βασιλεῖ Περσῶν προηγόρευεν. Εἰς οἷς καὶ τῶν Μαθημάτων ἐν Εἰ-
λησιν οὗτος πατήρ, καὶ πρόξενος ἦκσε.

Μετὰ δὲ Θάλητα, Πυθαγόρας ὁ Σάμιος, Φιλοσόφων ἐκείνος
ὁ ἀρχαιότατος, διαφερόντως τὰ τῶν Μαθημάτων προήγαγε τε,
καὶ διεκάλουνεν, οὕτω μέντοι περὶ τὸ Ἀριθμητικὸν εἶδος σπυδά-
σας (2), ὡς ἐξ ἀριθμῶν καὶ πᾶσαν τὴν κατ' αὐτὸν τῇ φιλοσοφεῖν
ἰδέαν συζήσασθαι· οὕτω δέ τοι καὶ τὸ Γεωμετρικὸν ἀκριβώσας, ὡς
πρώτος, ἧ φισί Λαέρτιος, τὴν Γεωμετρίαν ἀποσπάσαι τῆς ὕλης,
καὶ οἷον ἀποκαθάραι, καὶ ντεῦθεν δαιμόνιον τι πτερυξάμενος, εἰς
περίνοιαν τῆς ΔΒ., καὶ ΜΔ., καὶ ΜΖ., καὶ ΜΗ., τῶν τῇ Α.
Βιβλίῳ Προτάσεων ἐξαρθῆναι, ὧν δὴ μάλιστα τῆς ΔΒ., καὶ ΜΖ.
γεραίρεται, ἐφ' ἧς τῇ εὐρέσει ὑπεργαυνύμενος, καὶ Εἰ κατόμβην λέ-
γεται δύσαι, ὡς παρὰ τῷ Λαερτίῳ μαρτυρεῖ Ἀπολλόδωρος. Τῇ
δ' αὐτῇ καὶ ἡ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν ἐκθεσις, ἐδέτῳ ἄλλῳ τῶν

(1) Αὐτὸς δὲ καὶ τῆς Ἀρκτεῖς τῆς ἐλάσσονος ἐυρετῆς λέγεται. Λαέρ. ἐν βίῳ·
καὶ Θέων εἰς τὰ Ἀράτ. Φαινόμεν. Καὶ ὁ Παλ. Ὁμήρ. Σχολ. παρὰ Μεναν. ἐν Ση-
μειώσ. εἰς τὸν Λαέρτ.

(2) Ἰωάν. Μαλαλ. Χρονικ. Τόμ. Α'. Σελ. 201. Πυθαγόρας, ὅς ὁ Σάμιος
Ἀριθμητικὴν συνεγράψατο. Εἰ καὶ μηδὲν αὐτὸν συγγραφεῖν· ὅτι ἄλλοι
περὶ Τύχ. Ἀλεξ. καὶ Λαν. περὶ τῆς ἐν τῷ ἀσπᾶσαι
Προσιμ. καὶ Πορφ. ἐν βίῳ Πυθαγ. καὶ ἄλλων, ἀλλὰ

Κανονικῶν ἐν σώμασι σχημάτων ἀνατίθεται τὸ πεντάριθμον. Καὶ Ἀερολογίαν δὲ, καὶ Μεσικὴν, αὐτὸς τε ἤσκει, καὶ ἑτέρος ἐδίδασκεν· οὐδὲ γὰρ ὅπως φύσεως ὀξύτητι διενεγκῶν, τὰ θαυμασὰ ἐκεῖνα ἐξευρεῖν οἷος ἐγένετο, ἀλλὰ καὶ πρῶτος γυμνάσιον συγκροτῆσαι φέρεται, εἰς ὅπερ ἦν τῇ Νεολαίᾳ θαμίζεσι, τὰς καλίστας τάυτας, καὶ τιμιωτάτας τῶν τεχνῶν ἐκπαιδεύεσθαι.

Ἐπὶ δὲ τῷ Πυθαγόρᾳ καὶ Ἀναξαγόρας ἐγένετο ὁ Κλαζο-
μένιος, καὶ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος, ὧν ὁ Πλάτων μέμνηται ἐν Ἐρασμῇ,
ἐνθα νεανίσκος εἰσάγει περὶ Ἀναξαγόρα, καὶ Οἰνοπίδα, ἐπὶ Κύκλων
καταγραφαῖς ἀλλήλοις προσδιαφιλονεικῶντας. Ἀριστοτέλης γὰρ καὶ
Γεωμετρικὴν ἀναφέρει πραγματείαν τῷ Ἀναξαγόρᾳ συγγραφει-
σαν (1). Ὅ,τε Λαέρτιος καὶ περὶ Ἡλίου διέξεισιν, ὡς κατασκευά-
σειεν ἐκεῖνος τῆς Πελοποννήσου μείζονα εἶναι (ἀμέλειτοι ἐν σπαρ-
γάνοις ἔτει τῆς Ἀερονομικῆς θεωρίας ἐνεπιμμένης). Καὶ περὶ τῆς
Σελήνης, ὡς καὶ περὶ τῶν ἐν αὐτῇ οἰκητόρων, ἔστιν ἅττα φιλο-
σοφήσειεν. Οἰνοπίδῃ δὲ ὁ Πρόκλος τὴν τε ΙΒ', καὶ τὴν ΚΓ', τῇ Α'.
Βιβλίῳ προσαναγράφει (2). Τέτων ἐξῆς γενέσθαι φέρονται Βρί-
σων τε, καὶ Ἀντιφῶν, καὶ Ἰπποκράτης ὁ Χῖος, οἱ τὸν Κύκλον τε-
τραγωνίσαι ἀποπειρασάμενοι, καὶ τέττα γε ἕνεκα ὑπὸ Ἀριστοτέλους
ἐλεγχόμενοι ἅμα, καὶ κλειζόμενοι· ὧν Ἰπποκράτης τῇ εὐκλείᾳ
διήνεγκεν, ὁ ἐξ ἐμπόρου φιλόσοφος τε, καὶ Γεωμέτρης, ὃς παρὰ
τὸν τῇ Κύκλου τετραγωνισμόν, καὶ τῇ διπλασιασμῇ τῇ Κύβει πρῶ-
τος λέγεται πειραθῆναι, διὰ τῆς τῶν δυεῖν μέσων εὐρέσεως, ἣν
δήπε μέθοδον, ὡς ἐπίσημόν τε, καὶ διαφέρουσιν κοινῇ οἱ εἰσέπειτα
πάντες ἡσπάσαντο. Ὁ δ' αὐτὸς κἀντέυθεν ἑ μικρόν τινα καρπῆται

(1) Ὁ Ἀριστοτέλης δὲ καὶ τετραγωνισμόν Κύκλου γράφει τὸν Ἀναξαγόραν ἐν εἰρκῇ

(2) Ὁ Πρόκλος δὲ περὶ Ἐξορ. Σελ. 607) διὰ τὸν Μύδρον.

καὶ τὸν Μηνίσκον τετραγωνισμόν εὐρών. Παρὰ Πρόκλ. εν

τὸν ἔπαινον, ὅτι πρῶτος (μαρτυρῶντος τῷ Πρόκλῳ) καὶ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων ἐυρεθέντα εἰς ἓν συνειλοχώς, καὶ διαταξάμενος, τὰ σοιχεῖα τῆς Μαθησεως συνεγράφατο.

Ὁ δὲ Δημόκριτος ἔδεν ἦττον ἢ ἐν Φιλοσοφίᾳ, καὶ περὶ τὸ Μαθηματικὸν εἶδος θαυμάζεται, εἰ καὶ μηδὲν τῶν αὐτῶν, ἥτε Φυσικὸν, ἥτε Μαθηματικὸν σπέδασμα, εἰς ἡμᾶς ὁ χρόνος παρέπεμψε, φθόνῳ (εἰσὶν οἱ φασίν) Ἀριστοτέλους, τῷ μόνῳ τὰ ἑαυτῶ ἐφιεμένῃ τοῖς πᾶσιν ἀναγινώσκεσθαι. Τὴν γεμὴν κατὰ Δημόκριτον φιλοσοφίαν Πέτρος ὁ Γασσένδος ἀρτίως ἀνεδείματο, βίβλον ἀμφιλαφῆς σοφίας μετὴν συγγραφάμενος. Ἐπὶ τέτοις δὲ καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος, καὶ τοὶ ἔδεν ἔδὲ αὐτῶ τῶν Μαθηματικῶν ἐυρημάτων περὶον, ἐκ γὰρ τέτα μέγας τις γενέσθαι μνημονεύεται, ὅτι Πλάτωνος κατηγήσασθαι ἔλαχε.

Ἀλλ' εἰς τὸν Πλάτωνα τέως ἡμᾶς φέρων ὁ λόγος κατήγαγεν, καὶ μᾶλλον τὰς Μαθηματικὰς κατηγλαΐσειν ἔξεις, ὅς τις ἴδεις. Τό, τε γὰρ τῆς Γεωμετρίας ἐκεῖνος χρῆμα προδύκαις προήγαγε τὰς ἐπισημοτάταις, καὶ τὴν Ἀναλυτικὴν ἐξεύρεν, ἀσφαλεστέτην ἔσαν τῷ συλλογίζεσθαι, καὶ τὰ ζητούμενα εἰς φῶς ἄγειν μέθοδον· καὶ τὰ γε φιλοσοφούμενα τοῖς ἀπὸ τῶν Μαθημάτων θαυμασιωτέροις λόγοις συγκαταμίξας τε, καὶ διευκρινήσας, εἰς τ' αὐτὰ τὰς ἔξεις ἐν τοῖς αὐτῷ βιβλίοις συνῆψε, καὶ συνηρόσατο. Τὸ γὰρ τοι περιεδομένον ἐκεῖνο, μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίστω, πρὸ τῶν πυλῶνων τῆς Ἀκαδημίας προγράψας, ἐκ ἀλοτρῖαν, ἐκ ἀλυσιτελῆ, καὶ ἀπρόσφορον τὴν Μαθηματικὴν τυγχάναςαν, οἰκείαν δὲ, καὶ φίλην, καὶ ἐμετρίαν τὴν συντέλειάν τε, καὶ τὸν κόσμον ἐκπρεπῆ παρεχομένην, τῇ ὑγιεί, καὶ ἀσφαλεστέρᾳ Φιλοσοφίᾳ λαμπρῶς ἐδήλωσεν. Ἀλλὰ γὰρ ὅσος τῆς Μαθηματικῆς παιδείας ὑπῆρξε καὶ ἐπαινέτης, τῷ τὰ ἐκεῖνα ὑπομνήματα

Ἐκ γέν τῆς τῆ Πλάτωνος Ἀκαδημίας ἐκ εὐαρίσμων ἐξεῤῥυ-
κόντων ἀνδρῶν, τριῶν ἐπὶ δέκα τῶν ἐκείνῃ γνωρίμων ὁ Πρόκλος μέ-
μνηται περὶ τὰ Μαθηματικὰ διαφερόντως ἐσπεδακόντων. Καὶ γὰρ
καὶ Λεωδάμας ὁ Θάσιος, καὶ Ἀρχύτας ὁ Ταραντίνος, καὶ Θεαίτητος
ὁ Ἀθηναῖος, ἐπὶ πλείστον τὴν Ἑξιν προήγαγον. Λεωδάμας μὲν
γὰρ, τὴν ἣν ὑπὸ Πλάτωνος παρειλίφη ἀνάλυσιν ἐπιμελῶς γυ-
μνάσας, δι' αὐτῆς πολλῶν ἐυρετῆς ὀφθῆναι ὑπὸ Λαερτίᾳ γεναίρε-
ται. Τὸν δὲ Θεαίτητον, καὶ τὰ γε παρ' αὐτῷ εὐρημένα (ἐν οἷς τὰ τε
γραφέντα αὐτῷ σοιχεῖα θαυμάζεται, καὶ τὰ περὶ τῆς τῶν κανο-
νικῶν Σωμάτων ἐγγραφῆς) κατέστησε περιώνυμον, ἔδεν ἦττον δὲ
καὶ οἱ παρὰ Πλάτωνος ἔπαινοι, τῇ καὶ τῶν διαλόγων ἓνα τῶν αὐ-
τῷ ἐπ' ὀνόματι τῷ ἐκείνῃ ἐπιγράψασθαι ἀξιώσαντος. Τῷ δὲ Ἀρ-
χύτῃ καὶ σοιχεῖα φέρεται γεγραμμένα· καὶ περὶ διπλασιασμοῦ τῇ
Κύβε ἔργον παρ' Εὐτοκίῳ ἀναγινώσκεται. Κακείνο δὲ τῷ Ἀνδρὶ
τείνει εἰς κλέος ὅν μέτριον, ὅτι πρῶτος τὰ Μαθηματικὰ ταῖς ἀν-
θρώπων χρήσεσι προσβιβάσας, καὶ περισεραν ἐκ ξύλου ἱσταμένην
ἐτερατεύσατο, πολλῷ τῷ χρόνῳ τῇ Δαιδάλῳ ὕστερος γεγονώς,
δαιδάλειόν τι μηχανήμα. Ὁ δὲ Ἀρχύτας πρὸς τῇ Μαθηματικῇ
δεξιότητι, καὶ σρατηγικὴν ἐμπειρίαν ἐπιδεξάμενος, ἐν ταῖς πατρίοις
μάχαις πεντάκις μὲν ἠγήσατο τῶν οἰκείων, πεντάκις δὲ καὶ τρο-
παῖον ἔσχησε. Καὶ Νεοκλᾶδες δέ τις φήμη διαῤῥεῖ, ὅτι τοσούτον ἀπὸ
τῶν εὐρημάτων, ὅσον ἀπὸ Λέοντος θαυμαζομένῃ, τῷ αὐτῷ διακέ-
σαντος. Οὗτος γὰρ καὶ σοιχεῖα τῆς ὅλης Μαθήσεως συγγράφαι
λέγεται, τελεωτέραν τε ἀναδείξαι τὴν Ἑξιν, καὶ τῇ χρήσει δεξιω-
τέραν, ὥς ἐν δίκῃ καὶ τοῖς ἐπισημοτέροις τῶν Στοιχασογράφων συγ-
καταλέγεσθαι.

Ἐπεὶ δὲ ὁ Κνίδιος, τ' ἄλλα μὲν τοῖς πρὸ αὐτῷ ἴσος, τὰ δὲ
ἀριστων ἀναδειχθεὶς, καὶ (εἰ τῷ Σχολιαστῇ
ὡς τὸ πέμπτον Βιβλίον ἐκδεδωκώς, καὶ σοι-

χεῖρα συνέγραψε, γενικώτερα ἀποδόν. Οὗ δ' αὐτὸς καὶ τὰς, αἷς ὁ
 Πλάτων ἐπεκεχαρήκει, Τομὰς ἐπὶνύξησε, καὶ τῶν Ἀστρονομικῶν
 ὑποθέσεων πρῶτος δημιουργὸς ἀνεφάνη, καὶ δὴ καὶ τὰς τῆς Γεωμε-
 τρίας πηγὰς, παραπλησίως τῷ Ἀρχύτῃ, ἅς ὀργανικὰς τε, καὶ
 μηχανικὰς τέχνας μετωχετεύσατο. Ἐπὶ τέτοις δὲ καὶ Ἀμύκλας
 ὁ Ἡρακλεώτης, Μέναιχμός τε, καὶ ὁ τότε ὁμαίων Δεινόκρατος,
 Ἐλικῶν τε ὁ Κυζικηνὸς, καὶ Θεῦδιος, καὶ Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος,
 Φίλιππος τε ὁ Μεδμαῖος, οἱ πάντες Πλατωνικοὶ, ἐπὶ τὸ κρεῖττον
 τυγχάνουσι τὴν Γεωμετρίαν προαγαγόντες, καὶ τελεώτερον. Μέ-
 ναιχμος μὲν γὰρ, τὰς Κωνικὰς ἐπινοήσας τομὰς, διὰ τῶν τὰς
 δύο ἐξήρᾳσατο μέσας, ἣν δὴ περὶ εὐρεσιν πρὸ τῶν λοιπῶν ἔθετο ὁ
 Εὐτόκιος. Οὔτε Θεῦδιος, καὶ ὁ Ἑρμότιμος, καθόλητε μάλλον, καὶ
 ἀκριβέστερα τὰ σοιχεῖα ἀπέδωκαν. Καὶ ἔτοι μὲν δὴ ἐκ τῆς τῆς Πλά-
 τωνος Ἀκαδημίας οἱ πάντες εἰσιν, οἱ τὴν Μαθηματικὴν φιλοσο-
 φίαν, ὡς Πρόκλος φησὶ, καταρτίσαντες. Ἐφ' οἷς καὶ Ξενοκράτης, ὁ
 τῆς μὲν Πλάτωνος ὁμιλητὴς, τῆς δὲ Ἀριστοτέλους καθηγητὴς χρη-
 ματίσας, καὶ Ἀριστοτέλης αὐτὸς, ἐμετρίαν τὴν ἀπὸ τῶν Μαθη-
 μάτων ἠνέγκαντο δόξαν. Ἐκείνους γὰρ ποτε καὶ διακῆσαι τις ἐπιθυ-
 μήσας, ἐπεὶ Γεωμετρίας ἁμοῖρος ἐτύγχανεν ὦν, ἀπιδι, ἤκεσε,
 κώπην γὰρ Φιλοσοφίας ἐκέντησαι.

Περὶ δὲ τῆς Ἀριστοτέλους τι ἂν καὶ εἴποιμι; Οὕτω τὰ ἐκείνους βιβλία
 τῶν Μαθηματικῶν τόπων εἰσὶν ἀνάπλεα, ὡς ὅλην ἐξ αὐτῶν πραγ-
 ματείαν τὸν Βλαγκάνον συνειλοχένοι. Δύο δὲ τῶν ἐκ τῆς ἐκείνους
 Σχολῆς μάλιστα θρυλλέμενοι φέρονται, Εὐδημός τε, καὶ Θεόφρα-
 στος· ὧν ὁ μὲν, δύο περὶ ἀριθμῶν βιβλία συνέγραψε, τέτταρα
 δὲ περὶ Γεωμετρίας, ἓν δὲ περὶ ἀτόμων Γραμμῶν. Ἐκείνους δὲ
 μαθηματικὴν συνέταξεν Ἰσορίαν, ἐξ ἧς Πρόκλος τε, καὶ ἄλλοι, τὰ
 παρ' αὐτοῖς ἠρανίσαντο. Ἀρισταῖος δὲ, καὶ Ἰσίδωρος, τὰ
 Γεωμετρῶν τὰ πρῶτα τελεῖσι, τὰς περὶ τ

σοφείλομεν βίβλους. Ἐπὶ πᾶσι δὲ ὁ Εὐκλείδης, τὰ τοῖς ἄλλοις
 ἐνυρημένα εἰς ἓν ἀθροίσας, διατάξας, προσαυξήσας, ἀκριβέστερόν
 τε ἀποδείξας, ἐκεῖνα ἡμῖν κατέλιπε τὰ σοιχεῖα, δι' ὧν ἀπαντα-
 χῆ γῆς οἱ μαθητιῶντες σοιχεῖσθαι εἰώθασιν. Εὐκλείδης δὲ ἐν
 ἔτι πρὸ Χριστοῦ σπδ'. τὸ ζῆν καταλύσαντι, ἐπεγένοντο μετὰ Ἐ-
 κατονταετηρίδα σχεδόν, Ἐρατοσθένους, καὶ Ἀρχιμήδους. ὧν Ἐρα-
 τοσθένης μὲν, πλὴν ὀλίγων, πάντα μικρὰ δεῖν ἀπώλετο τὰ συγ-
 γράμματα, Ἀρχιμήδης δὲ πολλὰ μὲν ἠφάνισαι, πολλὰ δὲ καὶ σώ-
 ζεται, ἐς δεῦρο περιφερόμενα.

Ἀρχιμήδην δὲ ἀπὼν, Κολοφῶνα οἶόν τινα τῆς ἐν ἀνθρώποις
 λεπτονοίας, καὶ τῆς Μαθηματικῆς ἀπάσης παιδείας πέρας τε, καὶ
 ἀκρότητα τυγχάνω διανοόμενος. Τέτα τὰς πολλὰς θαυμαστὰς ἀ-
 ξίας εὐρέσας Πολύβιός τε, καὶ Πλέταρχος, καὶ Τζέτζης, καὶ ἄλλοι, τῇ
 μνήμῃ παρέδωκαν. Ἐκείνῳ δὲ σύγχρονος ἦν καὶ Κόνων, γεωμετρικὸς
 ὁ αὐτός, καὶ ἀστρονόμος, ἐφ' ᾧ προαποθανόντι, ἐν τοῖς περὶ τετρα-
 γωνισμῶν τῆς Παραβολῆς Ἀρχιμήδους ἐπιπενθεῖ. Ἐξῆς δὲ μετὰ
 Ἀρχιμήδην, καὶ Κόνωνα, χρόνῳ ἔ πάνυ πολλὰ παρὰ ῥέυσαντος, Ἀ-
 πολλόνιος ἐγένετο ὁ Περγαῖος, ἕτερος ἔτος Γεωμετρῶν ὑπατος,
 ὁ κατ' ὑπερβολὴν ἐπαίνει μέγας Γεωμέτρης ὑμνέμενος. Τέτα
 ἑπτὰ περίεσι βιβλία περὶ Κῶν τομῶν, φρενὸς λεπτοτάτης ἀποκυ-
 ῆματα. Τῷ δ' αὐτῷ καὶ τῶν Εὐκλεδείων τὸ ΙΔ'. καὶ ΙΕ'. προανα-
 γράφεται, τὰ ὑπὸ Γ' ψικλέους κατ' ἐπιτομὴν προβεβλόμενα. Ἰπ-
 παρχος δὲ, καὶ Μενέλαος, περὶ Γ' ποτεινῶν τῶν ἐν τῷ Κύκλῳ, ὁ
 μὲν ἕξ, ἐκεῖνος δὲ δυοκαίδεκα βιβλία πρώτῳ συνεγραψάτην, ἐφ'
 οἷς καὶ χάριτος πολλῆς ἐτυχέτην, καὶ εὐκλείας διαφερέσεως, ὥς ἐπὶ
 ὠφελεῖ τε, καὶ ἀναγκαίῳ ἐνρήματι. τῇ δὲ Μενέλαος καὶ περὶ Τριγώνων
 σφαιρικῶν βιβλία τρία ἔτι περίεσι. Καὶ Θεοδοσίᾳ δὲ τῇ Τριπολίτῃ
 περὶ τῶν Σφαιρικῶν ἀπασιν ἐν χερσὶ περιφέρει-

ται. Καὶ ἔτοι μὲν ἐν, πλὴν Μενελάου, καὶ Γασδώρου, καὶ Ὑψικλέους, ἅπαντες πρὸ τῆ Κοσμοσωτηρίας ἔτης ἡμιμάκότες εἰσιν.

Ἐτα δὲ τῷ ἀπὸ τῆς Θεογονίας ἑβδομηκοστῷ, Κλάυδιος ὁ Προλεμαῖος ἠνθισεν, ὁ τῶν Ἀστρονόμων ὑπατος, ἀνὴρ θαυμασιώτατος γεγονώς, καὶ τὴν Θνητῶν φύσιν (ἣ λέγεται) ὑπερηρμένος· οὐχ ὅπως περὶ τὴν Ἀστρονομίαν διενεγκὼν, ἀλλὰ καὶ τοῖς Γεωμετρικοῖς ὁφθαῖς ἐμπειρότατος, οἷά περ πρὸς ἄλλοις πολλοῖς τῶν αὐτῷ συγγραφεύτων, καὶ τὰ περὶ τῶν Ὑποταυεσῶν ἐν ἑξ μὲν ὑπὸ Μενελάου βιβλίοις, ἐν δὲ δυοκαίδεκα ὑπὸ Ἰππάρχου ἐκπονηθέντα, ἐν μόνοις πέντε ἐκάνῳ κατ' ἐπιτομὴν ἐκδομένα τοῖς Θεωρήμασι. Καὶ Πλετάρχει δὲ τῇ περιωνύμῃ ἐν Φιλοσόφοις Μαθηματικὰ ἅττα προβλήματα φέρεται. Τὰ δέ τοι Εὐτοκίῃ τῇ Ἀσκαλωνίτῃ, ἐλογισμώτατα συγγεγραμμένα ἕς τὰ Ἀρχιμήδους, καὶ τὰ Ἀπολλωνίου ὑπομνήματα, τίς ἀγνοεῖ; Ἐξ αὐτῶν ἐν, καὶ τὰ Φίλωνος, καὶ Διοκλέους, καὶ Νικομήδους, καὶ Σπόρου, καὶ Ἡρώωνος, περὶ τῆ διπλασιασμῆ τῇ Κύβει, ὡς ἡμᾶς ἡκε καταλεγόμενα. Οἱ δὲ Ἡρώων καὶ τοῖς Μηχανικοῖς ἐδὲν ἦττον, ἢ τοῖς Γεωμετρικοῖς, φύσεως μεγέθει διέπρεψε, καὶ ὃν καὶ ἡ τῇ διπλασιασμῇ τῇ Κύβει ἐπίνοια, τῶν κατ' ἄλλους ἀπασῶν προκριτέα εἶναι τῷ Πάπῳ ἐν Γ. βιβλίῳ, Προτάσει Ζ. μεμαρτύρηται. Καὶ τὰ Κτησιβίου δὲ τῇ Ἀλεξανδρέως, ὧ καὶ τὸ τῶν Ἀντλιῶν χρεῖμα ὀφείλομεν, παρὰ τε Οὐίτρονιῳ, Πρόκλῳ, καὶ Πλινίῳ, καὶ Ἀθηναίῳ τῷ Δειπνοσοφιστῇ, πολλῇ λόγῃ κρίνεται ἀξία. Οὐδὲν ἦττον δὲ καὶ Γεμίνου παρὰ Μαθηματικοῖς ἀνδράσι τὸ κλέος· τηλικῆτος γὰρ ἀνεδάχθη καὶ ἔτος, οἷον ἐν πολλοῖς τῷ Πρόκλῳ καὶ αὐτῇ Εὐκλείδῃ πρότερον τίθεσθαι.

Οἱ δὲ Ἀλεξανδρεὺς Διόφαντος, τοῖς τε τὰ Ἀριθμητικῇ ὥφθη, οἱ κατὰ τὴν Γεωμετρίαν Ἀρχιμήδους, καὶ Ἀπολλωνίου, καὶ Ἡρώωνος εἰσι κλειζόμενοι. Ἀπάσης γὰρ ἐκείνος.

κῆς λεπτονοίας, καθηγεμένων οἷα γεραίρεται. Τέτα γὰρ δὴ ἐπίνοια καὶ ἡ Σαυμασὴ τέχνη, ἣν Ἀλγεβραν ὀνομάζουσιν, ἡ καὶ ἡμᾶς ὑπὸ Φραγγίσκου Βιέτα, καὶ Ρενάτε Καρτεσίε, καὶ ἄλλων μετ' ἐκείνων, καθολικωτέρα καταστᾶσα, καὶ ἐπὶ πολὺ ἀκριβείας, καὶ τελειότητος προαχθεῖσα. Λοιποὶ δὲ ἐν τοῖς παλαιοῖς διὰ φήμης ἄγονται, Νικόμαχος ἐν Ἀριθμητικοῖς, καὶ Γεωμετρικοῖς, καὶ Μασίκοις διαβόητος, καὶ Σερένιος ἐν δυοῖ βιβλίοις, τοῖς περὶ Κυλίνδρου, καὶ Κώνων τομῶν, ἐν Γεωμέτραις γνωριμώτατος, καὶ Πρόκλος ἐπ' αὐτοῖς, καὶ Πάππος, καὶ Θέων. Ἡλίκος γὰρ τὴν ἐν τοῖς Μαθημασι σοφίαν ὁ Πρόκλος, οἷτε εἰς τὰ Εὐκλείδει ὑπομνηματισμοί, καὶ τ' ἄλλα, ἅττα πάννυ σοφῶς συνέθετο, μαρτυρεῖ. Λύκιος δὲ ἕτος τὸ γένος ὢν, καὶ λόγοις τοῖς ἀπὸ Φιλοσοφίας, καὶ τῶν Μαθημάτων ἐνδιαπρέφας, καὶ ἔτα ἀπὸ Χριστοῦ υπέρ. τὸ ζῆν ἐκμετρήσας, διακριτέος τῆ ὁμωνύμου Πρόκλου, ὅστις Ἀνακασίε ἐν τῇ Κωνσταντίνῃ τὰ αὐτοκρατορικὰ σιγήπτρα κατέχοντας, ἔτα Σωτηρίῳ τῷ φιδ'. Οὐιταλιανῶ τὴν Αὐτοκρατορίδα τῶν πόλεων πολιορκεῖν, τῇ τῶν Ὀπτικῶν μεθοδείᾳ κατόπτρων, τὸ ναυτικὸν κατενέπρησεν, ἡ διέξασιν ἰσορῶν ὁ Ζωναράς, καὶ Ράμος ἐκ τέτα, καὶ Βαρόνιος ὕσερον. Οἱ δὲ Ράμος καὶ Θέων, τὸν ἦπε λόγος πολλῶν γενόμενου ἄξιον, Σαυμασίοις μετ' ὑπερβολῆς ἐγκωμίοις ἐξαίρει, ἐκάνε εἶναι καὶ τὰ παρὰ πάντων εἰς τόδε τῷ Εὐκλείδει προσαναγεγραμμένα σοιχεῖα διατανόμενος. Ἀλλ' ἐπιακῶς ὁ Ράμος, πανταχῆ τῷ Εὐκλείδει ὢν ὁ πάννυτοι δίκαιος, ἄλλως δὲ ἐδὲ τῷ λόγῳ σεῖρῳ τὴν εἰκασίαν αὐτῆ προσεράδων, ἐνταῦθα ἐκ ἀκασέος. Τελευταῖον δὲ οὐραγὸς οἶον τετάχθω ὁ Πάππος, ὁ χρόνῳ μὲν (ὥς ἄρα περὶ τὸ ὕ. ἀκμάσας ἀπὸ Θεογονίας) τῶν παλαιῶν μικρῶν δεῖν γενόμενος ὁ ἔχματος, εὐκλείας δὲ περισίᾳ, καὶ τῇ περὶ τὰς Μαθηματικὰς ἐπισήμας τῶν ἁπλῶν, ἐν τοῖς πρώτοις ἀριθμητέος, ὃν δὴ, ἡ τῆς Ὑβίης, καὶ Διοφάντας τὸ πρὶν ἐνεγκαμένη τῶν ὁ φορὸν τῶν μεγαλοφυῶν διαπρεφάντων

Ἀνδρῶν ἔδαφος, ἐπ' ἀγαθῷ μεγάλῳ τῆς μαθήσεως καὶ τῆτον ἐξήνεγκε. Συγγέγραπται δὲ τῷ Παππῷ συλλογῶν Μαθηματικῶν βιβλία οὐκ ὅτε τέλαχισον, ὧν δύο μὲν τὰ πρῶτα (ἑμὴ τῶν Βιβλιοθηκῶν παρέρριπταί πε, λανθάνοντα) τῷ χρόνῳ ἠφάνισαι· λοιπὰ δὲ τὰ ἕξ τοσούτων ἐσι, καὶ τηλικύτων ἐκ παντὸς μονονεχὶ τῆς Μαθήσεως ἄδης καλλίσων τε, καὶ τιμιωτάτων ἐυρημάτων ἀνάμεσα, ὡς ἐν τοῖς πρώτοις τῶν σωζομένων παλαιῶν ὑπομνημάτων, κοινῇ ψήφῳ τάττεσθαι ἐναρίθμια.

Τὰ τοίνυν περὶ ἀρχῆς τε, καὶ προόδου τῆς Μαθηματικῆς ἕξεως, διὰ βραχέων ἔτως ὑμῖν ἰσορήσῳ, ἐξ ὧν τὰ κατὰ χρόνον, καὶ χρῆσιν, καὶ ἀξίαν πρεσβεῖα τῶν τοιούτων ἐπισημῶν λαμπρῶς ἀναφαίνεται. Καὶ μὲν δὴ τῶν τὰ πρῶτα ἐν Σοφίᾳ φερόντων οἱ αὐτοὶ, τὴν τε ἄλλην Φιλοσοφίαν ἀποκυήσαντες ὥφθησαν, καὶ τὴν Μαθηματικὴν ταύτην, ὡς ἐν ἐνὶ τοκετῷ ἀδελφὰς οἶονεὶ διδύμους, ἃς ἅτις ἀλλήλων διασπᾶσας πρὸς βίαν ἀπαγαγεῖν πειραθῆη, καὶ χωρὶς εἴησαι, ἀπηνῶς ἔτος νῆ Δία κατὰ τῶν ἐκ φύσεως ἐχρηκότων τὴν ὁμογένειαν ἐνεχθήσεται, καὶ ἀπανθρώπως. Τέτο γὰρ ἐπὶ τῶν Διδύμων συμβαίνειν ἔωθε, τὸ θάτερον ἀρθέντος, ὑπεκλύεσθαι καὶ θάτερον, καὶ κατατήκεσθαι.

ΠΙΝΑΚΑΣ

ΕΜΠΛΗΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΝ

Π Ι Ν Α Ξ

Τ Ω Ν

ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ.

	Σελ.		Σελ.
ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄	1	ΜΕΡΟΣ Β΄	183
ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄	65	ΜΕΡΟΣ Γ΄	189
ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄	90	ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄	199
ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄	128	ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΒ΄	261
ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄	157	ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΒ΄	294
ΜΕΡΟΣ Α΄	162		

Π. Ι. Ν. Ε.

Τ. 102

ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α.	1	ΜΕΡΟΣ Β.	1
ΒΙΒΛΙΟΝ Β.	2	ΜΕΡΟΣ Γ.	2
ΒΙΒΛΙΟΝ Γ.	3	ΒΙΒΛΙΟΝ Δ.	3
ΒΙΒΛΙΟΝ Δ.	4	ΒΙΒΛΙΟΝ Ε.	4
ΒΙΒΛΙΟΝ Ε.	5	ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ.	5
ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ.	6		



ΑΝΔΡΕΟΥ ΤΑΚΟΥΤΕΤΙΟΥ ΜΕΤΑ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ
ΤΟΥΤ ΟΥΓΙΣΤΩΝΟΣ.

Τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

BIBLION A.

Επισήμης ἔργον, τὸ ἐξ ἐννοιῶν τινων ἀπλυσέρων, αἷς ἐνῆκεν ὁ Δημιουργὸς τῇ λογικῇ Φύσει, ἐπιφέρειν ὅ,τι μὴ πρότερον ἔγνωσθ'· κακῶς ἕτερον αὖθις, ὡς βαθμίδα ὥσανει προὔφρασηκέναι πρὸς τὴν ἐφομένην, αἷ τὴν γνῶσιν, ἣτις ἠγάθητο. Γένοιτο γὰρ ἂν τῇ τοιῷδε λόγῳ ἀκριβῶς ἐχομένοις, ἀπὸ τῶν ἐλαχίστων τε καὶ κατ' αὐτὰ πλεονάντων τὸ γινώριμον, ἀλωτὰ τῇ γνώσει ῥαδίως, καὶ αὐτὰ τὰ λίαν ἀφανῆ καὶ δυσκάτοπτα. Ταύτην δέ τοι τὴν Ἐπισήμην συνήθητε καὶ προσήκεσαν Μέθοδον, ὡς ἐκ ἀνηνύτως, αἷς ἡ περὶ τὸ Ποσὸν ὑπὸ κείται θεωρία, πρὸ τῶν ἄλλων ἡσπύσαντο εἰσηγήσεις, πάντες ἴσασιν, ὅσοι τῆς κατ' αὐτὰς μελέτης καὶ ἀκροὶ δακτύλοις ἐγεύσαντο. Μαρτυρήσεις δ' ἂν τῷ λεγομένῳ καὶ μόνῃ (μὴδὲν ἐπιὸν ἤδη λέγειν περὶ τῶν ἄλλων εἰδῶν τῆς Μαθήσεως) ἡ Γεωμετρία, ἀπὸ τῶν προδηλοτάτων ἐπ' αὐτὰ δὴ τὰ ἀδηλότατα ἐν βραχεὶ ἀναφερομένη, καὶ ἐπὶ τὰ πάνυ ὑψηλάτε καὶ ἀποπτα ἀπὸ τῶν λίαν ταπεινῶν, αὐτίκα μάλα ἱπταμένη μετάρσιος. Προκαταβάλλονται γὰρ ἐν αὐτῇ ἀπλῆσταί τινες, καὶ ῥᾶσαι νοηθῆναι Ἀρχαί, αἷς λόγῳ μετέχων καὶ νῦν, ἡδεῖς ἡδέως ἐκ ἂν συνανέσειεν. Εἰδ' ἐξῆς ὑποτίθεται ταύτη ἡδὲ συγχωρεῖται ὅλως ἡδὲν, ὅ,τι μὴ λογισμοῖς ἀπταίσοις ἀσφῶν ἔσται. Κάντεῦθεν τῶς Θεωρήμασι τισιν, οἷας τὴν μὲν

ὅτι πορρωτάτω ἀφιδρυμένοι, παντός δὲ λόγου, καὶ θαύματος ὑπερηρμένοι, μετὰ τῷ ἀσφαλῆς καὶ ἀναμφιλέκτε τῆς πίσεως, τὸ πρὸς σαφήνειαν εἰλικρινέστε, καὶ διηκριβωμένον ἐπαυγάζει, ὡς ἐκ ἄντις ῥαδίως ἐλπίζειν.

Ἀρχὼν δὲ τῶν κατὰ τὴν Γεωμετρίαν Εἶδη τρία τὰ ἐφεξῆς. Ὁρισμοί, Αἰτήματα, Ἀξιώματα. ὧν οἱ μὲν, τῶν ἐν χρήσει παραληφθεομένων εἰς φωνῶν ἀναπτύξεις. τὰ δὲ, οἷα περ οὐ χαλεπῶς ὑπὸ τῶν εὖ ἐχόντων τὰς φρένας ἀπαιτημένων, διδόμενα. τὰ δὲ, ἅττα αὐτολαμπῇ καὶ καταφανεῖ πεφυκότα, τῷ κατὰ Φύσιν λόγῳ ποδηγέτη παρεπομένοις, κοινῇ παιζήσιν τε, καὶ σπυδάξασιν τοῖς πᾶσιν ἡξίωται. Αὐτῶν δὲ τέτων αἱ Ἀποδείξεις εἰσὶν ἐχόμεναι, αἷς γε τῶν ἐν τοῖς Μαθήμασιν ἀληθεύων, ταῖς κατὰ τῆς λογισμῆς ἀνάγκαις διαπιστευμένων καὶ κρατυνομένων, καὶ ἄκων ὑπενδοίῃ πειοθεῖς, καὶ ὁ περιφανὴς τὸ θράσος καὶ τὴν ἀπόνοιαν. Καὶ τοίνυν πρῶτος ἡγεῖται ὁ περὶ Γραμμῶν λόγος, καὶ τῶν ποικίλων Γωνιῶν, αἷς, ἐφ' ἐν συνῆσαι σημεῖον ἐκείναι, ἀποτελεῖσιν. Εἴτ' ἐν ὀκτὼ ταῖς πρώταις Προτάσεσι, τὰ περὶ τῶν ἐπιπέδων Τριγώνων πραγματεύεται, ἅμα τε καὶ τὴν τῶν ἐπιπέδων Γωνιῶν φύσιν προσεκτιθέμενος. Μετ' αἷς, Γωνίας μὲν καὶ Γραμμάς διχοτομεῖν, Καθέτως δὲ καδιέναιτε, καὶ ἀφιέναι μεθοδεύει. Εἰς δὲ τὰ λοιπὰ τῶν Τριγώνων πάθη, ναιμὴν καὶ τῶν Παραλλήλων Εὐθειῶν ἐρμηνεύει. Ἐπὶ τέτοις ὅσα περ τοῖς Τετραπλεύροις παρακολουθεῖν οἶδε, καὶ ἰδίᾳ τοῖς Παραλληλογράμμοις διασκέπτεται· καὶ δείκνυσί γε τίνι δήποτε λόγῳ τὰ Πολύγωνα, καὶ ἀτακτοῖν τὸ σχῆμα, εἰς Ὀρθογώνια ἂν ἀναχθεῖν, ἢ ἀπλῶς Παραλληλόγραμμα, ἢ καὶ Τρίγωνα, τὰ μᾶλλον ἐν τοῖς σχήμασι κανονιζόμενά τε, καὶ γνωριζόμενα. Τελευταῖον δὲ οὐραγεῖ τὸ Πυθαγόρειον διαβεβαιωμένον Θεώρημα, καὶ τὸ ἐκείνου ἀντίστροφον.

Ὁ ρ ι σ μ ο ι .

- α. Σημεῖον ἐστὶ τὸ ἐν τῷ μεγέθει ἀδιαίρετον. ἦτοι τὸ μὴδὲ τῇ ἐπινοίᾳ διαιρεθῆναι δυνάμενον. Ἐστὶ δὲ πῶς παντός μεγέθους τὸ Σημεῖον ἀρχή, οἷα δὴ καὶ Μονὰς ἀριθμῶ.
- β. Γραμμὴ δὲ μέγεθος μόνον κατὰ μήκος· μήκος καὶ γὰρ ἀπλατές. Νοεῖται δὲ κατὰ Σημεῖον ῥοὴν ἀναφύεσθαι.
- γ. Γραμμῆς δὲ πέρατα Σημεῖα.
- δ. Ἐὐθεῖα Γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσας τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς Σημεῖοις κεῖται. Ἡ Ἐὐθεῖα Γραμμὴ ἐστίν, ἢ ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα τῶ αὐτῷ ἐπὶ τὸ αὐτὸ Σημεῖον ἀχθῆναι δυνάμενων.

Η" ὡς τῷ Πλάτῳ, ἥς τὰ ἄκρα συνεπισκιάζει τὰ μέσα, ἐποπτεύουσιν ἀμέ- Η' εἰς τὰ ἄκρα
τοὺς μέσους
ἐπιπροβαίνει
λει πατέρω τῶν ἐπ' αὐτῆς εὐθύ προηγμένης περάτων. Εἰς δὲ ἀπάντων ὁ νοῦς.

Ὁ ὄργανον δὲ τὸ εἰς καταγραφὴν Εὐθείας δεξιῶς ἔχον, ἐστὶν ὁ Κανὼν, Εὐθύ γε, ἢ
ἀν τὸ μέσου
ἀμφὶν τοῦ
ἐχάτοιν ἐ-
πιπροβαίνει ἢ.
ἐν περ ἢ ἀσραβῇ, ἢ μὴ, τυγχάνοντα, ὅπως ἐπικρίνειν εἰδῶσιν. Ἀγεται
μὲν κατὰ τὸν Κανόνα Γραμμὴ, ἢ παρ' αὐτὸν ἀντιστραφέντα τὰ πέρατα, ὥστε
τὸ δεξιτερόν κατὰ τὸ ἀριστερόν γενέσθαι, ἢ ἀνάπαλιν, δευτέρω αὖθις ἐπὶ
τῆς πρώτης. Εἰ μὲν οὖν ἀκριβῶς ἐκείνῃ προσεφαρμόζεται, εὐθύς ὁ Κανὼν. Πλάτ. Παρ-
μενίδ.
εἰδ' οὖν, ἤκιστα δῆλον ὅτι. (1)

Ἐπιφάνεια δὲ ἐστὶ μέγεθος, ὃ μῆκος ἢ πλάτος μόνον ἔχει καὶ δυεῖν ἄρα
πλατεῖ διαστάσεων. Νοεῖται δὲ Γραμμῆς ῥοῇ φύεσθαι.

Ἐπιφανείας δὲ πέρατα Γραμμαί.

Ἐπίπεδον, εἰτὴν ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἣτις ἐξ ἴσων ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς 5.
2. κ. 2.
Γραμμαῖς κείται. Η" ὡς ὁ Ἡρῶν, ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἐφ' ἥς ἀπαντα-
χῶ Εὐθεῖα ἔχει προσαρμοσθῆναι. Φύεται γὰρ ἢ αὕτη ἐξ Εὐθείας βρείτης
ἐπ' εὐθείας· ἄλλως γὰρ ἂν καταγραφεῖν, ἢ ἐξ Εὐθείας βρείτης μὴ ἐπίπεδος
Ἐπιφάνεια. Η", ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥς τὰ ἄκρα συνεπισκιάζει τὰ μέσα,
πατέρω δηλονότι τῶν ἐπ' αὐτῆς εὐθύ προηγμένης περάτων ἐποπτεύουσιν. Η"
ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν ἢ ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν. Εἰς δὲ ἢ
τάτων ὁ νοῦς.

Τῶ μὲν ἔν Σώματος ἐνταῦθα, ἦτοι τῷ Στερεῖ ὁ Εὐκλείδης τὸν ὅρισμόν
ἐκ ἀπέδωκεν, ἅπω περὶ αὐτῶ ἐν ταῖς πρᾶγματευσόμενος. Μήτις δὲ ἢ τὰτα
ἐφίλοιο, Σῶμα μέγεθος ἐστὶ κατὰ μῆκος, ἢ πλάτος, ἢ βῆθος. Τρεῖς τοί-
νον εἰσὶ διαστάσεις τῷ Σώματι, δύο δὲ τῇ Ἐπιφανείᾳ, μία δὲ τῇ Γραμμῇ.
Τῷ δὲ Σημεῖω ἡδεμία.

Ἐπίπεδος Γωνία ἐστὶν ἢ ἐν Ἐπιπέδῳ δύο Γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων, η.
ἢ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν Γραμμῶν κλίσις.

Γωνίαν ἄρα συναποτελῶσιν αἱ δύο Γραμμαὶ βα, γα, ἀλλήλων μὲν ἀ- κ. 3.
πτόμεναι κατὰ τὸ α, μηδαμῶς δὲ ἐπ' εὐθείας κείμεναι· ἦτοι μὴ μίαν Γραμ-
μὴν συναποτελῆσαι.

Πλευραὶ δὲ, εἰτὴν σκέλη τῆς Γωνίας εἰσὶν, αἱ συνισῶσαι τὴν Γωνίαν 3.
γραμμαί.

Κορυφὴ δὲ τῆς Γωνίας ἐστὶ τὸ Σημεῖον α, καθ' ὃ τὰ σκέλη ἀλλήλοισι 1.
συνίσσιν.

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βελόριας

κ. 4.

Γωνία μία προκειμένη, ἐνὶ γράμματι κατὰ κορυφὴν κειμένη, πλειόνων δὲ ἐφ' ἓν σημεῖον κειμένων ἐκάστη, τρισὶ γράμμασιν ἐπισημαίνεσθαι εἴωθεν, ὧν τὸ ἐν μέσῳ τὴν τῆς Γωνίας κορυφὴν ὑποδεικνύειν ἐτάχθη, καίτοι καὶ πρὸς τῷτο, ἐν μόνον τῆς Γωνίας τοῖς σκέλεσιν ἀποχερῆσαι παρεγχεύμενον. Οὕτως ἢ ὑπὸ τῶν Γραμμῶν βα, γα περιεχομένη, ἢ τοῖς τρισὶ γράμμασι βαγ, εἰ-
τουὶν καὶ τῷ ἐνὶ μόνῳ α περισημαίνεται.

κ. 5. ια.

Γωνίαι ἴσαι, ἢ μᾶλλον ὅμοιαι εἰσιν, ὧν ἐπ' ἀλλήλαις τῶν Κορυφῶν ἐπιτιθεμένων, καὶ αἱ Πλευραὶ συνεφαρμόζονται. Πρὸς γεμὴν ἰσότητα Γωνιῶν, τὰς Πλευρὰς ἴσας εἶναι, ἡκιστα ἀπαιτεῖται.

ιβ.

Αἱ οἱ δὲ, ἢτοι ἀνόμοιοι, ὧν ἐὰν αἱ Κορυφαὶ ἀλλήλαις, καὶ Πλευρὰ τῇ Πλευρᾷ ὥς προτεπικείμεναι, ἢ λοιπὴ τῆς λοιπῆς ἐξίσταται. Ἐκείνη δὲ μεί-
ζων, ἢς Πλευρὰ ἢ ἐκπίπτουσα. Ἀμφω δὲ τῷ ὀρίσμῳ ταῖς εὐθυγράμμοις (ὅρα
μοι ὁρ. ιγ.) Γωνίαις προσήκετον.

Ἀλλὰ καὶ αὐξομένων τῷ μήκει, ἢ μειωμένων τῶν σκελῶν, ἡ Γωνία ἀναυ-
ξῆς μένειτε καὶ ἀμείωτος.

Ἐπεὶ δὲ ἐν τῇ τῶν Γραμμῶν κλίσει Γωνίας ἡ φύσις κεῖται, ἡ δὲ τῶν
Γραμμῶν κλίσις ποσὸν ἢ ἐξιν· οὐδ' ἡ Γωνία ἄρα ποσὸν τι εἶσαι. Εἴη γὰρ ἂν
ἄλλως καὶ ἡ Καμπυλότης, πρὸς ἣν ἐκείνη τοσάτω διενήνοχεν, ὅτῳ καὶ θραυστικῇ
κάμφεως. Ἰσας τοίνυν σὺν Εὐκλείδῃ καὶ τοῖς ἄλλοις Γεωμέτραις τὰς Γωνίας
ἀποκαλῶντες, εἰδέν, ὅτι μὴ τὸ ὅμοιον, καὶ ἐμφερές τῆς τῶν Πλευρῶν κλίσεως
πρὸς ἀλλήλας, καὶ τὸ ἀκριβὲς τῆς αὐτῶν τάτων προτεφαρμόσεως ἐπ' ἀλλή-
λαις, τῇ τῆς ἰσότητος κλήσει ὑποσημαίνειν βεβλόμεθα. Ἀλλὰ περὶ ταῦτα
μετὰ τὴν ις'. Πρὶν τῇ Γ'. Βιβλ. ἐντόχοις ἂν πλείοσι.

Μήποτε δ' ἄρα αὐξήσεως καὶ μειώσεως δεκτικὴ ὦση, καὶ τὸ ποσὸν τῇ
Γωνίᾳ παρέπεται; Εὐθεῖαι γὰρ δύο συνῆσθαι ἀλλήλαις ἐφ' ἓν σημεῖον, πῇ
μὲν μείζονα, πῇ δ' ἐλάσσων τὴν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσαι νεῦσιν, αὐτόθεν καὶ μεί-
ζονα Γωνίαν συνιζῶν πεφύκασιν, ἢ ἐλάσσονα. Ταύτητοι καὶ (ἐν ὀρίσμ. ιε.
καὶ ις.) ἡ μὲν Ἀμβλεία μείζων τῆς Ὄρθης ὄρεται. Ὁξεῖα δὲ, ἡ Ὄρθης ἐλάτ-
των. Καὶ δῆλον ἄρα ἐκ τῶν ὅτι συμβαίνει τὸ ποσὸν τῇ Γωνίᾳ, καθ' ὃ καὶ
ἴση πρὸς ἴσην ἀκεί, καὶ πρὸς ἀνιστον ἀνισος. Τῷ δ' αὐτῷ λόγῳ καὶ ἡ Καμπυ-
λότης τὸ ποσὸν εἰσὶν ἐπιδέχεσθαι. Πᾶσα γὰρ Γραμμὴ, καὶ Ἐπιφανεία πᾶ-
σα, Γραμμῆς εὐθείας καὶ ἐπιπέδου Ἐπιφανείας κατὰ τὸ μᾶλλον, ἢ ἥττον ἀπέ-
χεται τῆς εὐθείας, ὅταν αἱ περιέχουσαι αὐτὴν Γραμμαὶ Εὐ-
θεῖαι καλεῖται, ὅταν Καμπυλαί. Μικτὴ δὲ, τῆς μὲν Εὐθείας

ῥσθς, τῆς δὲ Καμπύλης. (ὄρα τὰ ἐν τῷ μετὰ τὴν ις. τῷ γ. βιβλ. Πο-
ρίσματα.)

Ὅταν Εὐθεία γδ, ἐπ' Εὐθείαν αβ σταθεῖσα, ἐπὶ μηδέτερα κλίνη, ἢ ιδ. κ. ιι.
τὰς ἐφεξῆς Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ (τὴν ὑπὸ αγδ τῇ ὑπὸ βγδ) ὁρθὴ ἐστὶν
ἐκατέρω τῶν ἴσων Γωνιῶν, ἢ ἡ ἐφεσηκεῖα Εὐθεία γδ, Κάθετος καλεῖται ἐφ'
ἣν ἐφεσηκε.

Καὶ ἄλλως, ὁρθὴ Γωνία (ἡ ὑπὸ βαγ) ἐστὶν, ἥ περ ἐτέρωθεν ἀναφύε- κ. 12.
ται ἴση (ἡ ὑπὸ γαδ) τῆς ἐτέρας τῶν Πλευρῶν (βα) προηγμένης.

Δύο Κανόνες πρὸς ὁρθὴν Γωνίαν συνεσηκότες, τὸν Γνώμονα συναποτε- κ. 13.
λῶσι, τὸ εἰς Πυθαγόραν εὐρετὴν, παρὰ Οὐίτρεϊς (ι) Κεφ. β. βιβλ. 2., ἀνα-
φερόμενον ὄργανον. Ἐστὶ δὲ τοσαύτη τῆς ὁρθῆς Γωνίας ἡ δύναμις, πρὸς τε
κατασκευὴν ἐν ἀπασι, ἢ καταμέτρησιν, ἢ μόρφωσιν, ἢ σκηρυγμῶν, ὥς μη-
δὲν μονοηχί ἐκείνης ἀνευ ἐν τοῖς τοιούτοις περαίνεσθαι. Τῇ δὲ δὴ Γνώμονος
βάσανος ἡ ἐφεξῆς γινέσθω. Ἐπὶ τῆς τυχέσης ἐξ κατὰ τὸ τυχὸν σημεῖον α, κ. 14.
ἡ τῇ Γνώμονος Πλευρᾷ αβ, προσειραρμοζέσθω τῇ Γραμμῇ αε, διὰ δὲ στατέ-
ρας τῶν τῇ Γνώμονος Πλευρῶν ἀγέσθω Εὐθεῖα ἡ αγ. Εἴτα ἀντιστρεφόμενα
τῇ Γνώμονος πρὸς τὸ ζ, ἣν μὲν ἄμφω αὐτὰ αἱ Πλευραὶ ταῖς Εὐθείαις αγ,
αζ ἐπ' ἀκριβὲς ἐφαρμόζονται, δεῖγμα τῆτο ἡμῖν ἔσται σαφὲς τῆς τότε εὐθύ-
τητος. Ο' δὲ λόγος ἐξ αὐτῶν τῷ ιδ. ὁρισμῷ εὐδὴλος.

Ἀμβλεῖα Γωνία (βαγ) ἐστὶν, ἡ μείζων Ὁρθῆς (ζαγ). κ. 15.

Οξεῖα δὲ (λαι) ἡ ἐλάσσων Ὁρθῆς ζαι. κ. 16.

Σχῆμα ἐπίπεδον, ἐστὶν ἐπίπεδος Ἐπιφάνεια, ὑπὸ μιᾶς, ἢ πλείονων Γραμ- κ.
μῶν πανταχόθεν περατῆμένη.

Κύκλος ἐστὶ Σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς Γραμμῆς περιεχόμενον, ἡ καλεῖ- κ. 17.
ται Περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἐνός Σημεῖου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων (α)
πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι Εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

Κέντρον δὲ τῇ Κύκλῳ τὸ Σημεῖον (α) καλεῖται. ι3.

Διάμετρος δὲ τῇ Κύκλῳ ἐστὶν Εὐθεία (ἡ βγ) διὰ τῇ Κέντρῳ ἡγμένη, ἢ κ.
περατῆμένη ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τῇ Κύκλῳ Περιφέρειας, ἥτις ἢ δίχα
τέμνει τὸν Κύκλον· ὅπερ ἐκ τῆς ἀκριβῶς τῶν Ἡμικυκλίων ἐπ' ἀλλήλα ἐφαρ-
μόσεως, ἐστὶν εὐδὴλότατον.

Ἡμιδιάμετρος (ἣν Ἀκτῖνα καλῶσιν) ἐστὶν ἡ Εὐθεία (αζ) ἡ ἀπὸ τῇ Κέντρῳ κ.
ἐπὶ τὴν Περιφέρειαν ἡγμένη.

κ. 19. κβ.

Ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα (βλγ) ὑπὸ τε Διαμέτρῳ (βγ) καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης, ὑπ' αὐτῆς, τῆς Κύκλου Περιφέρειας, τριτέσι τῆς Ἡμιπεριφέρειας (βλγ).

Γεννᾶται δ' ὁ Κύκλος ὡδί. Εὐθεία (ή αβ), εἰς ἑξάτερον (α) τῶν περὶ τῶν ἀκινήτασα περιαχθεῖη, ἡ μὲν τὸν Κύκλον ἀναφύσει, ἑξάτερον δὲ τῶν ἐπ' αὐτῆς πέρας (β), τὴν Περιφέρειαν.

Ἀναφαίνεται δὲ καὶ ἐν αὐτῇ τῇ γενέσει, παντὸς θαύματος οὕσα ἀξία ἢ Κύκλου φύσις. Τὸ μὲν, ὅτι κινήσει τε καὶ ἡρεμίᾳ, τοῖς μαχομένοις δὴ τέτοις συναπαρτίζεται, τῆς μὲν Γραμμῆς, ὡς εἴρηται, περιεχομένης, τῇ δὲ ἑτέρῃ τῶν ἐπ' αὐτῆς περάτων ἀτρεμάντος. Τὸ δ' ὅτι ἅπαντα τὰ σημεῖα, τὰ ἐπὶ τῆς Γραμμῆς τῆς γεννώσης, κατὰ τὸ αὐτὸ τῇ χρόνῳ περιόδῳ αὐτοῦ διαπεραίνοντα, ἐκ ἰσοταχῶς προβαίνει κινούμενα. Τὸ δ' ὅτι καὶ ἡ τὸν Κύκλον ὀρίζουσα Περιφέρεια, ἐκ τῶν ἐναντίων πως καὶ αὐτὴ δοκεῖ συγκροτεῖσθαι, καὶ ἄκρων ἄνευ μέσων λόγων ἔχοντων. ἀμέλειται ἐκ κοίτης τε καὶ κυρτῆς, ὧν μεσιτεύει τὸ εὐθεῖς, διὰ πᾶς καὶ τὸ ἴσον μεταξύ μείζονος καὶ ἐλάττονος. Ὁ δὲ καὶ μάλλον ἀντις θαυμάσειεν. καὶ πλάττει παντὸς ἀμοιράσης τῆς Γραμμῆς, ἢ ταῦτα δὴ τὰναντία παρασυμβέβηκεν. Ἐπὶ τέτοις οὖν καὶ Ἀριστοτέλης λίαν θαυμάσας ἐγίνετο. Ἀλλὰ γὰρ μακρῶς ταῦτα ὑπερπαλεῖ τῷ θαύματι, ἢ περὶ Κύκλου, ἐν τῇ συνάμα τοῖς Κυλινδρικοῖς καὶ Δακτυλιοειδέσι, τύποις ἡμῖν ἐκδοθείσῃ κατὰ τὸ ἀρχνβ. Φυσικῇ τε καὶ Μαθηματικῇ Διαλέξει, ἐπραγματευσάμεθα. Ἀ" δὲ καὶ μετιθι βεληθεῖς ἐν ἐκείνοις.

Τὴν Περιφέρειαν οἱ ἀπὸ τῶν Μαθημάτων, εἰς 360 (αἱ Μοῖραι καλεῖσι) μερίζειν εἰώδασι, διὰ τὸ ἐν ταῖς χρήσεσι πάντως τῇ Ἀριθμῇ περιδέξιον. Τὴν δὲ Ἡμιπεριφέρειαν εἰς 180. Τὸ δὲ Τεταρτημόριον εἰς 90.

κγ. Εὐθύγραμμα Σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ Εὐθειῶν περιεχόμενα.

αδ. Τρίγωνον, ἢ Τρίπλευρον, τὸ ὑπὸ τριῶν Εὐθειῶν περιεχόμενον. Πρὸς δ', ἢ τε δὴ τῶν λοιπῶν ἀπάντων εὐθυγραμμῶν Σχημάτων ἀπλάστατον ὄν, ἐκεῖνα πέφυκεν ἀναλύεσθαι.

κε. 19. κε.

κε. 20. κε.

κε. 21. κε.

κε. 22. κε.

κε. 23. κε.

Τρίγωνον Ἰσόπλευρον ἐστὶ τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον Πλευράς.

Ἰσοσκελές δὲ τὸ τὰς δύο μόνας.

Σκεληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσας ἔχον Πλευράς.

Ὀρθογώνιον Τρίγωνον ἐστὶ τὸ ἔχον ὀρθὴν Γωνίαν.

Ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν Γωνίαν.

καὶ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον Γωνίας.

καὶ τὰς τέτταρας ἔχον Σχημάτων Ὀρθογώνιον ἐστὶ, τὸ καὶ τὰς τέτταρας

γωνίας, ἔχον ὀρθάς, καὶ ἐκ τῆ ἀκολούθῃ ἴσας, καὶ ἴσας ἔχῃ τὰς Πλευράς, καὶ τε καὶ μὴ. καλεῖται δὲ τὸ β'. καὶ Ἑτερόμηκες. Ἐκεῖνο δέ,

Τετράγωνον τὸ Ἰσόπλευρόν τε καὶ Ὀρθογώνιον, καὶ ταύτῃ δέ τοι καὶ ἴσο. λβ. κ. 26.
γώνιον. Ἀπαν οὖν Τετράγωνον ἐστὶν Ὀρθογώνιον, ἐμὴν δὲ ἀνάπαλιν.

Ρόμβος δέ, ὃ Ἰσόπλευρον μὲν, ἐκ Ἰσογώνιον δέ. λγ.

Ρομβοειδὲς δέ, τὸ τὰς ἀπεναντίον Πλευράς τε καὶ Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις λδ. κ. 27.
ἔχον, ὃ ἢτε Ἰσόπλευρον ἐστὶν, ἢτε Ἰσογώνιον.

Παραλληλόγραμμον δέ ἐστὶν, ὃ περ αἱ ἀπεναντίον Πλευραὶ, (αβ, γγ) καὶ λε. κ. 28.
(βδ, αγ) εἰσὶ παράλληλοι. Τὶ δὲ τὸ παραλλήλων εἶναι, ἐχόμενα ὀριζήσεται.

Ἀπαν ἂν Ὀρθογώνιον Ἑτερόμηκες καὶ Τετράγωνον, ἐστὶ Παραλληλόγραμ-
μον, ἀνάπαλιν δὲ ἑδαμῶς. Ομοίως δὲ καὶ Ρόμβοι, καὶ Ρομβοειδὴ Παραλληλό-
γραμμα, ἀνάπαλιν δὲ ἑδαμῶς.

Παράλληλοι εἰσὶν Εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἦσαι, καὶ ἐκβαλ- κς. κ. 29.
λόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἴσοις ἀλλήλων αἰεὶ ἀπέχοντι δια-
στήμασι.

Τὰ δὲ ἴσα διαστήματα διὰ τῶν μεταξὺ Καθέτων λαμβάνεται. Ταύτητοι
πατῶν τῶν ἐπὶ ἑτέραν αβ τῶν δύο Παραλλήλων, καθέτων πλ, ἴσων ἀλ-
λήλαις ἔσων, Παράλληλοι αἱ αβ, γγ Εὐθεῖαι εἰρήσονται. Εὐθείαι οὖν τῆς
λπ, ἐπ' Εὐθείᾳ τὴν αβ Καθετὴ, δι' αὐτῆς αἰεὶ πρὸς Καθετον ἀγομένης,
τὸ πέρας λ, τὴν γγ Παράλληλον διαγράφεται. Οὕτωτοι καὶ αἱ Παράλλη-
λοι τὴν γένεσιν ἴσχυσι.

Ἐν τῷτοις ἀλλ' οὖν τὸν Στοιχειωτὴν, Παραλλήλων Εὐθείας ὀριζόμενον,
,, τὰς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἦσας, καὶ ἐκβαλλομένας ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ
,, μέρη, ἐπὶ μηδέτερα δὲ συμπίπτουσας ἀλλήλαις, αἰτιάσεται τυχὸν ἄντις ὡς
ὀρισμὸν ἀποδεδωκότα ἐλλίπῳς ἔχοντα, τῇ τε Ὑπερβολῇ καὶ Κογχρειδεῖ πρὸς
Εὐθείαν παραβαλλομέναις, καὶ δυσὶν ἴσαις Παραβολαῖς ταῖς περὶ τὸν αὐτὸν Ἀ-
ξωνα, πρὸς ἀλλήλας, καὶ πλείοσιν ἄλλαις γραμμαῖς τὸν νοῦν προσέχων, ὥς
ἐπ' ἄπειρον μὲν προεκβαλλομένας, καὶ αἰεὶ ἐγγίον ἐπὶ, παντὸς ὁδοῦ, ἐ-
λάσσοι διαστήματι γινομένας, ἢτε συμπίπτειν ποτὲ ἀλλήλαις συμβαίνει,
ἢτε μὴν παραλλήλων εἶναι, παρὰ τὸ μὴδὲ ἐπίσης ἀφίστασθαι. Αὐτὸ γὰρ
τῷτο ὅδ' ἐπὶ τῶν Εὐθειῶν καθ' αὐτὸ γινώσκον ἐστὶ, τὸ διεξάγειν δι' ἴσων, ἐπεὶ
οὐ συνίασι. Γένοιτο γὰρ ἂν καὶ ταύτας τυχὸν, γίνεσθαι μὲν αἰεὶ καὶ αἰεὶ
μᾶλλον ἐγγίον, συμπίπτειν δὲ ἐφ' ἑν ἑδαμῶς ἡδέποτε. Ὡς τε καὶ καλῶς τὴν
τῆς παραλληλίας τῶν Γραμμῶν φύσιν, ὃ παρ' Εὐκλείδῃ ὀρίσιν, ἀνα-
πτύσσειν. Ἀλλὰ γὰρ ἕτεροι ὑποτυχόν, αἰτίας ἂν εἴη, ὡς ἂν ἄλλοις ἀνα-
πτύσσειν.

ἄνδρα ἀπήλαξεν. Οὐδὲ γὰρ ἀνάγκη τὰς ἐν τοῖς Μαθήμασιν ὁρίσμεν, μὴ
πραγματιώδεις ὄντας, ὀνοματιώδεις δὲ μόνον, τὴν φύσιν τῆ ὀριζομένη ἐπ' ἀ-
κριβείας ἀναπτύσσειν. Ἐνδεῖν τοι καὶ Εὐκλείδης Εὐθείας προτειπὼν Παραλλήλους,
τὰς ἐπ' ἁπειρον μὲν ἐφ' ἐκάτερα ἐκβαλλομένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐπὶ μη-
δέτερον δὲ συμπιπτόσας, ἑμμένων δὲ καὶ ἐφεξῆς αἰεὶ ταύτη γε τῇ σημασίᾳ τῶν
Παραλλήλων, μᾶλλον δὲ, καὶ τὸ μόναις ταῖς Παραλλήλοις, καὶ ἐπίσης ἀλλή-
λων ἀφεςώσαις προσιδιάζον ἐν ταῖς Εὐθείαις, διὰ τῆ ὁρίσμεν παραδέμενος, ἐ
πάνυτι δικαίαν τὴν δίκην, δῆλον ὅτι δικάζεται.

κ. 30. λθ.
31.

Παραλληλογράμμη τε, καὶ παντὸς Τετραπλεύρου Διάμετρος, ἦτοι Διαγώ-
μιος, ἐστὶν ἡ διὰ τῶν ἀπεναντίων Γωνιῶν ἡγμένη Εὐθεῖα (αβ)

λη.

Τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων Εὐθειῶν περιεχόμενα, Πολύπλευρά τε
ἐστὶ, καὶ Πολύγωνα.

κ. 32. λθ.

Γωνία δὲ ἐκτὸς σχήματος Εὐθυγράμμη ἐστὶν, ἡ συνισαμένη, Πλευρᾶς
ἔξω τῆ Σχήματος ἐκβαλλομένης. Τοιαῦται εἰσὶν αἱ ὑπὸ ζβγ, καὶ ηγκ, καὶ
δαβ. Τοσούτων τοίνυν ἐκτὸς Γωνιῶν Σχήμα ἕκαστον δεκτικὸν ἂν εἴη, ὁπό-
σων, καὶ ἐντὸς εὐμοιρεῖ καὶ Πλευρῶν.

μ.

Γραμμὴ, Γωνία, Σχήμα διχάζεσθαι, ἢ δίχα τέμνεσθαι λέγεται, εἴαν
εἰς μέρη δύο ἴσα ἀλλήλοις, τέτων ἕκαστον ἢ διαιρέμενον. Παραπλησίως δὲ καὶ
τριχάζεσθαι, ἢ τρίχα τέμνεσθαι λέγεται, τὸ εἰς τρία ἀλλήλοις ἴσα διανεμό-
μενον. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Α Ἰ τ ῆ μ α τ α.

Αἴτημα ἐστὶν, ὅπερ, ὅτι ῥαδίως ἔχει τελεῖσθαι, αὐτόθεν δῆλον τυγ-
χάνει. Ἡ τῆδω τοίνυν.

α.

Α' πὸ παντὸς Σημεῖος, ἐπὶ πᾶν Σημεῖον, εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β.

Καὶ πεπερασμένην Εὐθεῖαν, κατὰ τὸ συνεχές ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

γ.

Καὶ παντὶ Κέντρῳ καὶ Διαστήματι Κύκλον γράφεσθαι.

Α' Ξ ι ὠ μ α τ α.

Α' ξίωμα ἐστὶν ἔννοια κοινὴ, καθ' αὐτὴν τὸ γινώριμον ἔχουσα.

α.

Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. Καὶ τὸ θατέρω τῶν ἴσων μεῖ-
ζον, ἢ ἔλαττον, καὶ θατέρω πάντως.

β.

Καὶ εἴαν ἴσοις ἴσα προσεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ.

Καὶ εἴαν ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἐστὶν ἴσα.
προσεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Καὶ εἰάν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ εἰσιν ἄνισα.

Καὶ τὰ τῷ αὐτῷ, ἢ τῶν ἴσων ἡμίση, ἀλλήλοισι εἰσιν ἴσα. Καὶ τὰ τῷ αὐτῷ, ἢ τῶν ἴσων διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοισι εἰσιν. Καὶ τὰ τριπλάσια δὲ, καὶ τὰ τετραπλάσια ὡσαύτως. Οἰοίμην δὲ καὶ τῶν ἀνίσων τὰ ἡμίση, ἢ διπλάσια, ἢ τριπλάσια, ἢ κξ. ἄνισα εἰσιν.

Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα, ἴσα ἀλλήλοισι εἰσιν· ὅπερ ἐκ ὁρθῶς ὁ Κλάβιος ἀντιγράφειν παρεβιάσατο, ψευδὲς ὅν ὅτι καθόλου τὰ ἴσα ἐπ' ἀλλήλα ἐφαρμόζει. Τὰ γὰρ ἀνόμοια τῶν Μεγεθῶν, καὶ ἴσα ἢ, ἐκ εἰσὶν ἐφαρμόζοντα. Ἐάν οὖν πρὸς τῷ ἴσῳ, ληφθῇ καὶ τὸ ὅμοιον, ἔξει δὴ χώραν τ' ἀντιτροφον· καὶ ὁ καὶ ἡμῖν κείδω τὸ ἐξῆς.

Εὐθεῖαι ἴσαι ἐπ' ἀλλήλας ἐφαρμόζουσι. Καὶ Γωνίαι εὐθύγραμμοι ὡσαύτως. Καὶ Κύκλοι δὲ ἴσοι ὄντες ἐπ' ἀλλήλας ἐφαρμόζουσι. Καὶ τῷ αὐτῷ, ἢ ἴσων Κύκλων Περιφέρειαι ἴσαι, ἢτοι τόξα, ἐπ' ἀλλήλας ἐφαρμόζουσι. Καὶ Τετραγωνα, ἢ ἕτερα ὁποιαδιποτὲν Σχήματα, ὅμοιά τε καὶ ἴσα ὄντα, ἐπ' ἀλλήλα ἐφαρμόζει.

Καὶ τὸ ὅλον τῷ μέρει μείζον αὐτῷ εἰσιν· ἴσον δὲ ἅπασιν τοῖς αὐτῷ μέρεσιν ἅμα ληφθεῖσι.

Καὶ πᾶσαι αἱ ὁρθαὶ Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν.

Τὸ γεμὴν παρ' Εὐκλείδῃ ια'. τῶν Ἀξιομάτων, ὅτι εἰάν εἰς δύο Εὐθείας, (αβ, γζ) Εὐθεῖα ἐμπίπτουσα (ηι) τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη Γωνίας, (ὕπὸ βλπ, ζπλ) δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὐταὶ Εὐθεῖαι ἐπ' ἀπειρον συμπεσῶνται ἀλλήλαις, ἐφ' αἷ μέρη εἰσιν αἱ τῶν δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονες Γωνίαι· ἐπεὶ μηδὲν τι σαφέστερόν ἐστι τῷ δεικνυμένῳ τῷ αὐτῷ Εὐκλείδῃ ἐν Προτ. κδ'. ὡς ἀμέλει, εἰάν αἱ (ὕπὸ βλπ, ζπλ) Γωνίαι δυσὶν Ὀρθαῖς ὥσιν ἴσαι, αἱ Εὐθεῖαι (αβ, γζ) ἐδὲ ποτε συμπεσῶνται. Ταύτητοι τῆς τῶν Ἀξιομάτων τάξεως σὺν Γεμίνῳ, καὶ Πρόκλῳ, καὶ τοῖς ἄλλοις τῶν Γεωμετρῶν, καὶ αὐτοὶ ἐκσυρίττομεν. Οὐδὲ γὰρ ἐδ' Ἀξίωμα τὸ τοιαῦτον, ἀλλὰ Θεώρημα ἀντικεῖ, ὅπερ ἡμῖν μετὰ τὴν λγ'. τῷ ἀνὰ χεῖρας Βιβλίῳ δειχθήσεται, τῷ λς'. εἰς τῷτο ὁρισμῷ ὑπαργήσοντος. Τάτε δὲ τὰ ἐφεξῆς δύο ἀντισαγαγαεῖν ἐδοξεν, οἷς ἐκ τῷ ὁρισμῷ τῆς Παραλλήλιας αὐτίκα μάλα τ' ἀληθεὲς ἐπιλαμβάνει. Ἐῶσω τοίνυν Ἀξίωμα τὸ ἐπόμενον.

Τῶν Εὐθειῶν αἱ Παραλλήλοι κοινῇ χρῶνται Καθετῶ· τιτέστιν ἢ πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν Παραλλήλων Κάθετος, αὐτὸ τῷτο εἰς καὶ πρὸς τὴν ἑτέραν.

Καὶ Κάθετοι δύο (λξ, πι), ἀπὸ τῶν Παραλλήλων ἐκκείρωθεν (τὰ λπ, ξι) ἐναπολαμβάνουσι.

Τὸ μὲν παρ' Εὐκλείδῃ ια'. Α'ξιώμα (καί τοι ἔμικρὰ τείνον εἰς ἀπόδειξιν τῶν ἂν παρέπεται ταῖς Παραλλήλοις παθήματα, ἄλλως τε δὲ καὶ παντὶ τῷ προσέχοντι ἄλλῃς καταφανῶς ἔχον) εἰκὸς τὸν ὁρισμὸν ἀνωτέρω τῶν Παραλλήλων μετακινήσαντα, καὶ κεῖθεν ἕτερον ἀντισυνεγκόντα, καὶ τῷ ἐντεῦθεν τὸν Συγγραφεῖα μετασκευάσασθαι, καὶ τὰ ἀνωτέρω δύο Α'ξιώματα, ἅτε δὴ τῷ κατ' αὐτὸν ὁρισμῷ τῶν Παραλλήλων μᾶλλον συγγενῇ, καὶ οἰκείᾳ τυγχάνοντα, ἀντικαταστήσαι.

- ιγ. Δύο Εὐθεῖαι χωρὶον ἢ περιέχουσι· τριῶν τὰλάχιστον εἰς τῷτο ἀπαιταμένων.
 ιδ. Δυσὶν Εὐθεῖαις Τμήμα κοινὸν ἔκ' ἑσσι· καὶ πᾶσαι αἱ Εὐθεῖαι κατὰ Σημεῖον ὑπ' ἀλλήλων πεφύκασι τέμνεσθαι.

κ. 34. Οἷον τῇ ἀφ Εὐθείᾳ ἐμπεσούσα ἡ ψδ, καὶ ἐκβληθεῖσα, ἔμενεν κατὰ τὴν δα χωρήσει, ἀλλ' ἐπὶ τὸ ε, ὡς ἐκείνην τὴν ἀφ, κατὰ Σημεῖον μόνον τὸ δ διατέμνεται. Τυτὶ δὲ τ' Α'ξιώμα τῇ ἐννοίᾳ τῆς Εὐθείας προσέχουσιν, ἐστὶν ἐκδηλότερον· μᾶλλον δὲ, καὶ ἐξ αὐτῆς τῆς ὁρισμῆς τῆς Γραμμῆς, τῆς μήκους μόνον ἀπλατῆς ἔστις, σαφὲς ὅτι ἅπασαι αἱ Γραμμαὶ, καὶ τε Εὐθεῖαι τύχωσι, καὶ τε Καμπύλαι, καὶ συμμίσγῃν Εὐθεῖαι τε ἅμα καὶ Καμπύλαι, δι' ἀλλήλων ἴσσαι, κατὰ γε Σημεῖον τὰς τομὰς ποιεῖσθαι ἔσονται.

Ἐπειδὴ δὲ εἰσὶν οἱ τῶν ἐπὶ λεπτότητι ἑαυτὲς μακαριζόντων, ἐν τῷ φιλοσοφεῖν περιττοὶ, δυνατόν ἡγνῆται τὴν τῶν Γραμμῶν κατὰ τι μέρος ἑαυτῶν σύμμιξιν, ἔδοξε δὴ τούτοις χαρισσαμένους, εἰς τὰμφανέστερον περάσασθαι προσνεγκεῖν τὸ Α'ξιώμα.

κ. 35. Καὶ δὴ ἐχέτωσαν εἰ δυνατόν, Εὐθεῖαι δύο ἀφ, δψ Τμήμα κοινὸν τὸ αδ. καὶ Κέντρῳ τῷ δ γεγράφθω Κύκλος, τέμνων τὰς Εὐθείας κατὰ β καὶ γ· καὶ Τόξον εἰλήφθω τὸ βζ ἴσον τῷ βγ, καὶ νοείθω ἡγμένη ἡ Εὐθεῖα ζδ.

Αἱ τοίνυν Εὐθεῖαι γδ, καὶ ζδ τὴν αὐτὴν ὁλως ἔλαχον θέσιν πρὸς τὴν βδ. Α'λλα μὲν ἡ Εὐθεῖα γδ συνάμα τῇ βδ, κοινὸν λέγονται ἔχειν Τμήμα τὸ δα. Ἀρα καὶ ἡ Εὐθεῖα ζδ, κοινὸν ἔχει μετὰ τῆς βδ, τὸ Τμήμα δα. Καὶ ἔστιν ἄρα ταῖς τρισὶν Εὐθεῖαις γδ, βδ, ζδ, κοινὸν Τμήμα τὸ δα.

Ληφθῆτω οὖν αὖθις Τόξον τὸ ζη, ἴσον τοῖς πρότερον βζ, καὶ γβ. καὶ νοείθω ἡγμένη Εὐθεῖα ηδ. Καὶ ὁλῶν αὖθις, ὡς αἱ Εὐθεῖαι βδ, ηδ, τὴν αὐτὴν ἔλαχον θέσιν πρὸς τὴν ζδ. Ἀλλ' ἡδη δέδεικται τὴν βδ μετὰ τῆς ζδ, κοινὸν ἔχειν Τμήμα τὸ δδ. Κοινὸν ἄρα ἔσται καὶ ταῖς Εὐθεῖαις ηδ, ζδ, Τμήμα τὸ δα.

Οὐκ ἔναι τέτταρες ἡδη Εὐθεῖαι γδ, βδ, ηδ, ζδ, Τμήμα κοινὸν ἔχουσι τὸ δδ ὁλως πρόπον, καὶ ὁλῶς τῆς τῆς Κύκλου Περιφερείας, Τόξοις ἴσων, ῥᾶδιον ἂν εἴη δεῖξαι, πᾶσας ἅμα τὰς

Καὶ Α'ξίως
 ἂν δεῖξαι.
 Τὸ βπρὸς
 ἡμικύκλι-
 ον ἀποτί-
 νηται γὰρ
 ἀπὸ τῆς Δια-
 μέτρου βω.
 ὡσαύτως τὸ
 γπα, ἡμι-
 κύκλιον καὶ
 αὐτό· ἀπο-
 τίμνεται
 γὰρ ἀπὸ τῆς
 Διαμέτρου
 γδω· τὰ δὲ
 τε αὐτῇ Κύ-
 κλου

κυκλόθεν ἡγμένας Εὐθείας, Τμήμα ἐχάσας κοινὸν τὸ δα. Τηλικῶτον οὖν τὸ
 ἄτοπον ἔψεται, διςσὰς, τεθέντος, Εὐθείας τὴν τε γδ, ἡ βδ, κοινὰ Τμήμα-
 τος εὐμοιρεῖν. Ἀδύνατον ἄρα Εὐθείας δύο κοινὸν Τμήμα πεκτῆσθαι.

Τῷ δὲ τεθέντι Ἀξιωματι, ἡ ἰσχύς πᾶσα τῇ κατὰ τὰ Σχολαστήρια τε-
 θρυλημένα, ἐρείδεται λόγῳ, τῇ ἐκ Σημείων ὅλως ἀδιαίρετων τε, ἡ ἀριθμῷ
 ὠρισμένων, μηδὲν ἔχειν τῶν Μεγεθῶν συγκεῖσθαι, ὡδὶ δεικνύοντος. Συγκεῖσθαι
 εἰ δυνατόν, Μεγέθει ἐκ σημείων· περὶ δὲ τὸ αὐτὸ Κέντρον νοείδωσαν γεγραμ-
 μέναι, ὅποσαισὲν δόξη, Κύκλων Περιφέρειαι· τεθείδω δὲ τὴν ἀπασῶν ἐξω-
 τάτην, ἥτοι τὴν μεγίστην, ἐκ δέκα μυριάδων Σημείων συνεχάναι, ἀφ' ὧν ἐκά-
 στα ἐπὶ τὸ κοινὸν Κέντρον ἡγμένα νοείδωσαν Γραμμαὶ εὐθεῖαι.

Ἐκ μὲν οὖν τῇ ἀναπτυχθέντος Ἀξιωματος, ἀσφαλές ὅτι ἕδαμῃ αἱ Εὐ-
 θεῖαι ἐκείναι συναναμίγνυνται, ἢ δὲ πρὶν, ἢ πρὸς αὐτὸ τὸ Κέντρον ἀφικέσθαι,
 ἀλλήλαις συνίασιν. Ταύτητοι ἡ πᾶσαι τὰς ἐν μέσῳ Περιφέρειας διήκυσται, ἐν
 ταύταις Σημεῖα, τοῖς ἐν τῇ ἐξωτάτῳ ἐπιστημανῶσι πάντως ἰσάριθμα. Ὡς
 ἡ ἐξ ἰσαριθμῶν Σημείων ἀπάται αἱ ὁμόκεντροι Περιφέρειαι συγκεκρότηνται,
 ἡ ἐκ τῇ ἀκολύθῃ, αἱ πᾶσαι ἀλλήλαις ἴσαι εἰσίν· οὕτω δέ τοι, ὡς τὴν ἐπὶ
 τῇ ὑποκειμένη ταῖς Χάρτι καταγεγραμμένην, μηδέν τι τῆς τῇ Στερεώματος
 Περιφέρειας τὸ μέγεθος ἀπολείπεσθαι. Καὶ ἄλλαι οὖν ἀριθμὸν μονοὺς ὑπερ-
 βεβηκείαις Ἀποδείξεσι τῆς τοιαύτης δε κατακλυζομένης ἀπάτης, μίαν δὲ ταύτην
 πρὸ τῶν πολλῶν ἐνταυθὶ παραδέσθαι ἡξίωσα, αὐτὴ δὲ πανταχῶς περιδομένην,
 ἡ ἐκ τῇ προτεθέντος Ἀξιωματος ἀμέσως ἐξηρητημένην.

Τῶν ἴσων Κύκλων αἱ Διάμετροι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Καὶ αἱ τέτων δὲ
 Ἡμιδιάμετροι, εἰτὲν αἱ Ἀκτῖνες, ὁμοίως. Καὶ εἰάν Κύκλων δύο αἱ Ἀκτῖνες, εἰ-
 τὲν αἱ Διάμετροι ἴσαι ὦσιν, οἱ Κύκλοι ἴσοι εἰσίν. Ταῦτα δὲ ἡ ἐπὶ Τετραγώνων
 Πλευραῖς τε ἡ Διαμέτροις, ἡ ὁποίων ἄλλων Σχημάτων ὁμοίων τε καὶ ἴσων
 ταῖς ὁμολογήσαις Πλευραῖς τε, ἡ Διαμέτροις (περὶ ὧν ἐν τῷ ια'. ὁρ. τῷ Ε'.
 Βιβλ., ἡ ὁρισμ. α'. τῷ ε'.) παραπλησίως κρατεῖ· ἡ ἀνάπαλιν.

Καὶ ἡ τῇ μείζονος δὲ Κύκλου Διάμετρος μείζων, ἡ ἡ τῇ ἐλάσσονος ἐλάτ-
 τω, ἡ ἀνάπαλιν. Ὡς αὐτῶς δὲ ἡ ἐπὶ Τετραγώνων Πλευραῖς τε ἡ Διαμέτροις,
 ἡ ὁποίων ἄλλων Σχημάτων ὁμολόγοις Πλευραῖς τε, ἡ Διαμέτροις τὰ αὐτὰ
 ἡξίωται· ἡ ἀνάπαλιν.

Τῶν Προτάσεων αἱ μὲν τι προβάλλουσιν ποιητέον, ἡ καλεῖνται Προβλή-
 ματα· αἱ δὲ μόνῃ τῇ θεωρίᾳ ἐφημεῖσαι, ἡ Θεωρήματα ἐπὶ λέγονται.

Πραγματεύεται δὲ τῷ τῷ πρώτῳ Βιβλίῳ,

κ.) Τὸ ἄρα
 βρω, ἴσων τῷ
 γπα· τὸ ὁ-
 λον τῷ μέ-
 ρει. Ὁ περὶ
 δύνατον.
 (Δ' ε. 2.)

κ. 36.

10.

11.

τοῖς Τριγώνοις τε, ἢ Παραλληλογράμοις παραπομένων παθῶν. Ἐν ᾧ ἢ
Προτάσεις ἐπισημότεραί εἰσιν αἱ ἐφεξῆς· ΛΕ. ΛΖ. ΜΑ. ΜΔ. ΜΕ. ΜΖ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας (αβ) πεπερασμένης, Τρίγωνον ἰσόπλευ-
ρον συστήσασθαι.

κ. 37.

Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αβ (1) Κύκλος γεγράφθω ὁ Ζγβ. Καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ β, Διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ βα, Κύκλος γεγράφθω ὁ αγλ. Καὶ ἀπὸ τῆ γ Σημεῖα, καθ' ὃ τέμνυσιν ἀλλήλας οἱ Κύκλοι, ἐπεξεύχ-
θωσαν Εὐθεῖαι (2) αἱ γα, γβ.

Φημὶ δὴ τὸ συνεχὲς Τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον. Ἡ γὰρ αγ Εὐθεῖα, ἴση (3) τῇ αβ· ἀλλὰ ἢ ἡ βγ ἴση τῇ βα (4). Ἄρα αἱ αγ, βγ ἴσαι (5) ἀλ-
λήλαις εἰσίν. Αἱ τρεῖς ἄρα τῶ Τριγώνου Πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Τὸ ἄρα
αγβ Τρίγωνον καὶ (6) ἰσόπλευρόν ἐστι, ἢ ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης
Εὐθείας συνέσταιται τῆς αβ· Ὅπερ ἔδει ποιῆται.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β.

„Πρὸς τῷ δοθέντι Σημεῖῳ (α), τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (εζ) ἴσην Εὐθεῖαν
στήσασθαι.

κ. 38.

Εἰλήφθω δὴ τῷ Διαβήτῃ διάστημα τὸ εζ (7)· ἢ μετήχθω ἀπὸ τῆ α ἐπὶ
τὸ δ. Καὶ ἔσαι πάντως ἡ ἀχθεῖσα (8) Εὐθεῖα αδ, ἴση τῇ δοθείσῃ (9) εζ.

Α' λ λ ω ς.

κ. 39.

Ἐς τὸ μὲν δοθέν Σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα Εὐθεῖα ἡ εζ, ἢ ἐπε-
ξεύχθω ἀπὸ τῆ α Σημεῖα ἐπὶ τὸ ε (10) Εὐθεῖα ἡ αε. Καὶ συνεχίσθω ἐπ' αὐ-
τῆς Τρίγωνον ἰσόπλευρον (11) τὸ αβε. Καὶ ἐκβεβλήθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς
βα, βε (12) Εὐθεῖαι αἱ αλ, εδ. Καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ ε, Διαστήματι δὲ τῷ εζ (13),
Κύκλος γεγράφθω ὁ μνζ. Καὶ πάλιν (14) Κέντρῳ μὲν τῷ β, Διαστήματι δὲ τῷ
βν, Κύκλος γεγράφθω ὁ νξο.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ε Σημεῖον, Κέντρον ἐστὶ τῶ μζν Κύκλου, ἴση ἐστὶν (15) ἡ εζ
τῇ εν. Καὶ πάλιν ἐπεὶ τὸ β, Κέντρον ἐστὶ τῶ νξο Κύκλου (16), ἴση ἐστὶν ἡ βο

γα
δι.
γδω.
τῷ αὐτ.

(3) Ὁρ. ιη. (4) Ὁρ. ιη. (5) Α' Ε. α. (6) Ὁρ. κτ.
(9) Α' Ε. α. (10) Διτ. α. (11) α. Βιβ. α. (12) Διτ. β.
(15) Ὁρ. ιη. (16) Ὁρ. ιη.

τῇ βν. Ἀλλ' ἀπ' αὐτῶν αἱ βα καὶ βε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. (1) Λοιπὴ ἄρα ἡ αο, λοιπὴ τῇ εν (2) ἴση ἐστὶ. Εὐδείχθη δὲ καὶ ἡ εζ ἴση τῇ εν· καὶ ἡ αο ἄρα (3) ἴση τῇ εζ. Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι Σημεῖω τῷ α, τῇ δοθείσῃ Εὐδεία τῇ εζ, ἴση Εὐδεία κεῖται ἡ αο. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

„Δύο δοθεισῶν Εὐδειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος (αβ) τῇ ἐλάσσονι (γ) ἴσην Εὐδείαν ἀφελεῖν.

Λαβὼν τῷ Διαβήτῃ (4) τὸ Διάστημα τῆς ἐλάσσονος γ, μετάστησον ἐπὶ τὴν μείζονα, ἀπὸ τῆ α ἐπὶ τὸ ε. κ. 40.

Η' Ο' υ τ ω.

Κείδω πρὸς τῷ α Σημεῖω, τῇ γ Εὐδεία, ἡ αδ ἴση (5)· καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αδ (6), Κύκλος γεγράφθω ὁ εζ. Ἰση οὖν ἡ αε τῇ αδ. (7) Ἀλλὰ καὶ ἡ γ τῇ αδ (8) ἐστὶν ἴση. Ἀρα ἡ αε ἴση τῇ γ (9). Δύο ἄρα δοθεισῶν Εὐδειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος αβ, τῇ ἐλάσσονι γ ἴση ἀφήρηται ἡ αε. Ο. Ε. Π. κ. 41.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

„Εὰν δύο Τρίγωνα (φ, ψ) τὰς δύο Πλευράς ταῖς δυσὶ Πλευραῖς ἴσαι καὶ ἓξῃ ἑκατέραν ἑκατέρῃ (ἦτοι τὴν μὲν βα τῇ ζλ, τὴν δὲ γα τῇ ιλ) καὶ τὴν Γωνίαν (α) τῇ Γωνίᾳ (λ) ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων Εὐδειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν Βάσιν (βγ) τῇ Βάσει (ζι) ἴσην ἔξει, καὶ τὸ Τρίγωνον (φ) τῷ Τριγώνῳ (ψ) ἴσον ἔσαι, καὶ αἱ λοιπαὶ Γωνίαι ταῖς λοιπαῖς Γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρῃ ἑκατέρῃ (ἦτοι ἡ μὲν β τῇ ζ, ἡ δὲ γ τῇ ι) ὅφ' αἱ ἴσαι Πλευραὶ ὑποτείνεσι. κ. 42.

Ἐπιτιθεμένα γάρ τῷ Τριγώνῳ ψ ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ φ, αἱ Πλευραὶ λζ, λι ἀκριβῶς ἐφαρμόσασι ταῖς ἴσαις (10) Πλευραῖς αβ, αγ, ὥτως ὥστε τὰ τρία Σημεῖα τὰ, λ, ζ, ι ἐπιπесеῖν ἐπὶ τοῖς τρισὶν α, β, γ. Ἀρα καὶ ἡ Βάσις ζι ὅλη, ἐπὶ Βάσεως τῆς βγ ὅλης ἐπιπесеῖται. Ἀλλὰ καὶ αἱ Γωνίαι ζι, β, ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ ι, γ· καὶ ὅλα τὰ Τρίγωνα ἐπ' ἀλλήλα ἐφαρμόσει. Καὶ πάντα ἄρα ἴσα (11) ἔσαι.

(1) Ἐκ Κατασκ. (2) Ἀ' ε. γ. (3) Ἀ' ε. α. (4) Ἀ' τ. α' γ. γ. (7) Ο' ρ. ιη, (8) Ἐκ Κατασκ. (9) Ἀ' ε. α. (10)

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Παραπληρώσω δὲ λόγῳ καὶ τὸ ἐφεξῆς Θεώρημα, ὃ παρὰ πόδας ἢ χαρτῆς, ἐξέσαι δεῖται.

„Εὰν δύο Τριγώνων (φ, ψ) αἱ Πλευραὶ βγ, καὶ ζι ἴσαι ᾧσι, καὶ αἱ πρὸς ταύτας τὰς Πλευρὰς Γωνίαι (ἀμέλειτοι αἱ β καὶ γ, ταῖς ζ καὶ ι) ἴσαι ᾧσιν, ἑκατέρω ἑκατέρω· καὶ τ' ἄλλα πάντα, καὶ αὐτὰ τὰ Τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσται.

α. 43.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ Γωνίαι β καὶ γ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς Γωνίαις ζ καὶ ι, εἰς τὴν Πλευρὰν ζι ἐπιθῆς, ἐπὶ τῆς ἰσῆς αὐτῇ Πλευρᾷ βγ, αὐταὶ ἐπ' ἀλλήλας (1) ἐφαρμόσασιν. Οὕτω δέ τοι διὰ τὴν ἰσότητά των Γωνιῶν ζ, β, καὶ ι, γ, καὶ ἡ ζλ ἐπιπεσεῖται (2) ἐπὶ τὴν βα, καὶ ἡ ιλ ἐπὶ τὴν γα. Ἐπιπεσεῖται δὲ ἄρα καὶ τὸ Σημεῖον λ ἐπὶ τὸ Σημεῖον α, (ἐκπεσὼν γὰρ τῷ α, ὅδ' αἱ πλευραὶ ζλ, ιλ ταῖς Πλευραῖς βα, γα ἐπικείμενται) καὶ ἀκριβῶς ἄρ' ἔστω τὰ πάντα ἐφαρμόζοντα, (3) ἴσα ἔσται.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ε.

„Τῶν Ἰσοσκελῶν Τριγώνων αἱ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι (α, γ) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

α. 44.

Νοεῖσθω δὴ τὸ Τρίγωνον αβγ δις κεῖμενον, τῇ γεμῇ θέσει αὐτεσφαρμένον ΓΒΑ. Ἐπεὶ τοίνυν ἐν τοῖς δυοῖν Τριγώνοις αβγ, καὶ ΓΒΑ, ἡ μὲν αβ Πλευρὰ ὑποτίθεται ἰση τῇ ΓΒ, ἡ δὲ γβ τῇ ΑΒ, καὶ ἡ Γωνία β τῇ Γωνίᾳ Β· καὶ ἡ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνία α, τῇ Γωνίᾳ Γ, ἤτοι τῇ γ (ἡ αὐτὴ γὰρ ἐστίν) ἰση (4) ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Α' Λ Λ Ω Σ.

„Τῶν Ἰσοσκελῶν Τριγώνων αἱ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ προσεκβληθειῶν τῶν ἰσῶν Εὐθειῶν, καὶ αἱ ὑπὸ τὴν Βάσιν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

Τῷ Ἰσοσκελεῖ αβγ προσεκβεβλήθωσαν ἐπ' εὐθείας τῶν αβ, αγ, αἱ βδ, γε. Καὶ εἰλήφθω ἐπὶ μὲν τῆς βδ τυχὸν Σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἀφελήσθω ἀπὸ τῆς μεῖζορος αε, τῇ ἐλάσσονι αζ, ἰση ἡ αη (5), καὶ ἐπεξεύχθωσαν (6) αἱ ζγ, ηβ.

γ
Δ
γδω
τῷ αὐτῷ

Επεὶ οὖν ἔσιν ἡ μὲν αζ, ἴση τῇ αη (1), ἡ δὲ αβ, τῇ αγ (2), ἡ Γωνία δὲ κοινὴ ἔσιν ἡ περιεχομένη ὑπὸ ζαη· ἡ Βάσις ἄρα (3) ἡ ζγ, Βάσει τῇ βη ἴση ἔσιν, ἡ τὸ αζγ Τρίγωνον, τῷ αηβ Τριγώνῳ, ἡ ὑπὸ αγζ τῇ ὑπὸ αβη, ἡ ὑπὸ αζγ τῇ ὑπὸ αηβ. Ἀλλ' ἔστι δὴ ἡ λοιπὴ ἡ βζ, λοιπῇ τῇ γη (4) ἴση. Ἐδείχθη δὲ ἡ ζγ, ἴση τῇ βη, ἡ ὑπὸ βζγ τῇ ὑπὸ γηβ ἴση· ἡ τὰ λοιπὰ ἄρα τοῖς λοιποῖς (5) ἴσα ἔσιν, ἥτε ὑπὸ βγζ τῇ ὑπὸ ηβγ ἴση ἔσιν. Καὶ εἰν ἄρα ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τῶν αγζ, ἡ αβη τῶν ἴσων δεδειγμένων, ἔσιν καὶ λοιπῇ (6) ἡ ὑπὸ αγβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αβγ ἴση, αἱ πρὸς τὴν Βάσιν εἰσίν. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ζβγ, ἡ ὑπὸ βγη (τῶν πάντων ἐν αὐτοῖς τοῖς Τριγώνοις ἴσων δειχθέντων) ἴσαι ἡ αὐταὶ ἀλλήλαις εἰσίν, αἱ ὑπὸ τὴν Βάσιν εἰσίν. Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν Τριγώνων αἱ πρὸς τὴν Βάσιν, ἡ αἱ ὑπὸ τὴν Βάσιν κξ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Α' ρ' οὖν τὸ Ἰσόπλευρον Τρίγωνον, ἔστι ἡ Ἰσογώνιον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ς .

„Εἰν Τριγώνῳ (αβγ) αἱ δύο Γωνίαι (α ἡ γ) ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, ἡ αἱ „Πλευραὶ (αβ, βγ) αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας Γωνίας ὑποτείνονται, ἴσαι ἀλλήλαις „ἔσονται.

Νοεῖσθω δις τὸ Τρίγωνον κείμενον, τῇ γεμῇν θέσει ἀντεσημασμένον, αβγ, x. 46. ΓΒΑ. Τῆς οὖν Πλευρᾶς γα, ἐξιστημένης τῇ Πλευρᾷ ΓΑ, ἡ τῆς Γωνίας α τῇ Γ, ἡ τῆς γ τῇ Α, ἡ τὰ λοιπὰ πάντα ἴσα (7) ἔσιν. Καὶ δὴ ἡ ἡ Πλευρὰ αβ τῇ Πλευρᾷ ΓΒ, ἥτοι τῇ γβ. (ἡ αὐτὴ γὰρ ἔστιν) Ο. Ε. Δ.

Α' λ λ ω ς .

Εἰ μὴ γάρ, ἔσω ἐτέρα, οἷον ἡ αβ, μείζων τῆς αγ, ἡ ἀφαιρήσθω ἀπὸ τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι αγ, ἴση (8) ἡ βδ, ἡ ἐπεξεύχθω (9) ἡ δγ. Ε'πει οὖν ἴση ἔσιν ἡ δβ τῇ αγ (10), δύο δὲ αἱ δβ, βγ, δυὶ ταῖς αγ, γβ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ Γωνία ἡ ὑπὸ δβγ, τῇ ὑπὸ αγβ (11) ἔσιν ἴση· Βάσις ἄρα ἡ δγ, Βάσει τῇ αβ (12) ἴση ἔσιν· ἡ τὸ αγβ τῷ δβγ Τριγώνῳ ἴσον ἔσιν, τῷ ἐλάσσονι τὸ μείζον· ὅπερ ἄτοπον. Ἀ'ρα κτ.

x 47.

(1) Κατασκ. (2) Ε'ξ ὑποθ. (3) δ. Βιβ. α. (4) Α'ξ. γ. (5) δ. Βιβ. α. (6) Α'ξ. γ. (7) Σχόλ. τῆς δ'. (8) γ. Βιβ. α. (9) Α'τ. α. (10) Ε'κ κατ. ἡ ὑποθ. (11) δ. Βιβ. α. (12) δ. Βιβ. α.

Π ό ρ ι σ μ α .

Τὸ ἄρα Ἰσογώνιον Τρίγωνον, ἐστὶ καὶ Ἰσόπλευρον.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Επὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας (αβ) δυοὶ ταῖς αὐταῖς Εὐθείαις (αγ, γβ)
 „ἄλλαι δύο Εὐθεῖαι (αβ, δβ) ἴσαι ἑκατέρω ἑκατέρω καὶ συζυγίζονται πρὸς
 „ἄλλω καὶ ἄλλω Σημεῖω (γ καὶ δ) ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (τὰ κατὰ γ καὶ δ), τὰ
 „αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι (α καὶ β) ταῖς ἐξ ἀρχῆς Εὐθείαις.

κ. 48.

Εἰ γὰρ, ἐπιζευχθεῖσιν τῆς γδ (1) ἔσαι ἡ ὑπὸ αγδ, ἴση τῇ ὑπὸ (2)
 αδγ. Μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ αδγ, τῆς ὑπὸ δγβ. (3) Πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ γδβ
 μείζων τῆς ὑπὸ δγβ. Ἀλλὰ καὶ ἴση (4), ἴσων ὑποτιθεμένων τῶν βγ, βδ, ὅ
 περ ἀδύνατον. Ἀρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς κτ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Εὰν δύο Τρίγωνα (αβγ, δεζ) τὰς δύο Πλευρὰς, ταῖς δυοὶ Πλευραῖς
 „ἴσαις ἔχη (τὰς αβ, αγ ταῖς δε, δζ) ἑκατέρω ἑκατέρω, ἔχη δὲ καὶ τὴν
 „Βάσιν (βγ) τῇ Βάσει (εζ) ἴσην· καὶ τὴν Γωνίαν τῇ Γωνίᾳ ἴσην ἔξει (τὴν ὑπὸ
 „βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ) τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων Εὐθειῶν περιεχομένην.

κ. 49.

Εφαρμοσάσιν γὰρ τῆς βγ ἐπὶ τὴν ἴσην (5) εζ, καὶ αἱ αβ, αγ εφαρμό-
 σουσιν ἐπὶ τὰς εδ, δζ. Εἰ μὴ γὰρ, συζυγίζονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας,
 δυοὶ ταῖς αὐταῖς Εὐθείαις, ἄλλαι δύο Εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρω ἑκατέρω, πρὸς
 ἄλλω καὶ ἄλλω Σημεῖω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ὅπερ (6)
 ἀδύνατον. Εφαρμόσασιν ἄρα· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, ἐπὶ τὴν ὑπὸ εδζ εφαρμό-
 σαι, καὶ (7) ἴση αὐτῇ ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον Γωνίαν (βαγ) δίχα τεμεῖν.

κ. 50.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν Σημεῖον τὸ δ, καὶ ἀφηρήθω ἀπὸ τῆς αγ
 τῇ αδ (8) ἴση ἡ αε. Καὶ ἐπεζεύχθω (9) ἡ δε. Καὶ συναράδω ἐπὶ τῆς δε, Τρί-
 γωνον (10) Ἰσόπλευρον τὸ δζε· καὶ ἐπεζεύχθω (11) ἡ δζ. Λέγω δὴ ὡς αὐ-
 τη τὴν ὑπὸ βαγ δίχα τεμεῖ.

Βιβ. α. (3) Α' Ε. α. (4) ε. Βιβ. α. (5) Α' Ε. η. (6) ζ. Βιβ. α.

(9) Α' Γ. α. (10) α. Βιβ. α. (11) Α' Γ. α.

Καὶ γὰρ $\delta\alpha$, $\delta\zeta$ ἴσαι ταῖς $\epsilon\alpha$, $\epsilon\zeta$ (1). ἡ δὲ Βάσις $\alpha\zeta$ κοινή· ἡ ἄρα ὑπὸ $\delta\alpha\zeta$ ἴση (2) τῇ ὑπὸ $\zeta\alpha\epsilon$. Δίχα ἄρα (3) τέτμηται ἡ ὑπὸ $\beta\alpha\gamma$. Ο. Ε. Π.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐκ τούτων δῆλον πῶς ἂν εἰς 4, ἢ 8, ἢ 16, ἢ κξ. ἴσας ἀλλήλαις ἡ δοθεῖσα Γωνία τέμνεσθαι ἔχει· τῶν ἡμίσεων δηλονότι ἐφεξῆς ὑποδιχαζομένων.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Οὐδεὶς ἀδέπω ϵ νῦν οἷος ὥφθῃ μέθοδον ὑποδέσθαι, καθ' ἣν Κύκλῳ τε, ϵ Εὐθείᾳ χρωμένοις, εἴη ἂν τὴν δοθεῖσαν Γωνίαν εἰς ἴσας ὁσασθηποτῶν ὑποτέμνειν. Ὁ γεμὴν Πάππος, ϵ ὁ Ἀρχιμήδης Γραμμάς τινὰς τῶν Καμπύλων, οἷον τὴν Τετραγωνίζουσαν, ϵ τὴν Σπειροειδῆ, εἰς τὸτο συντελάσας εἰσήνεγκαν· ὧν ὁ πρῶτος ϵ Γωνίαν τετριχοτόμηκε Βιβλ. δ. Πρωτ. λα., τῇ Ὑπερβολῇ κεχημένος, ὃ ϵ διὰ τῆς Παραβολῆς, ἢ ϵ διὰ τῆς Κογχοειδὸς διανύσαι ῥάδιον.

Μηχανικῶς δὲ εἰς ὁσασθηποτῶν ἴσας τὴν δοθεῖσαν Γωνίαν τεμεῖς, εἰ ἂν ἀπὸ τῆς κορυφῆς (α) τῆς Γωνίας, ὡς ἀπὸ Κέντρου, Κύκλῳ τόξον ὑπὸ τῶν τῆς Γωνίας σκελῶν ἐναπολαμβάνόμενον καταγράψῃς, ϵ τὸτο εἰς ὅσα διηποτοῦν ἂν δόξῃ, μέρη ἀλλήλοις ἴσα διέλῃς. Οὕτω γὰρ ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ Κέντρου α, διὰ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις Σημείων ἐξῆσαι Εὐθεῖαι, εἰς μέρη ἰσάριθμά τε καὶ ἰσάλληλα, τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον Γωνίαν διαμερίσων.

96. 51.

Π ρ ό τ α σ ι ς I.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν πεπερασμένην (αβ) δίχα τεμεῖν.

Συνεχάσω ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρον Τρίγωνον (4) τὸ αβγ. (ὑπεργήσειε ἂν ἂν ἔδεν ἦττον ϵ τὸ Ἰσοσκελές) δίχα τε ἡ πρὸς τῷ γ Γωνία τετμήσθω (5) τῇ Εὐθείᾳ γδ. Φιμὶ δὲ ὡς τῇ αὐτῇ, ϵ ἡ αβ κατὰ τὸ δ δίχα διήσεται.

96. 52.

Ἰσῶν γὰρ ἑσῶν ἀλλήλαις τῶν αβ, γβ, κοινῆς δὲ τῆς γδ, ἴσης δὲ τῆς ὑπὸ αβδ, τῇ ὑπὸ δγβ (6), ϵ αἱ Βάσεις αδ, βδ ἴσαι (7) ἀλλήλαις ἔσονται. Δίχα ἄρα τέτμηται (8) ἡ δοθεῖσα αβ. Ο. Ε. Π.

Ἀρκέσει δὲ κατὰ τὰς Πράξεις, Κέντροις τοῖς α ϵ β, Κύκλῳ δύο καταγράψαι, τέμνοντας ἀλλήλας κατὰ ε, ϵ ζ, καὶ τὴν (9) εζ ἐπιζευγύναι.

96. 53.

(1) Κατασ. (2) κ. Βιβ. α. (3) Ὁρ. μ. (4) α. Βιβ. α. (5)
(7) δ. Βιβ. α. (8) Ὁρ. μ. (9) Αἰτ. α.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

„Τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (αβ) ἀπὸ τῆ πρὸς αὐτῇ δοθέντος Σημεῖο (γ), πρὸς ὁρθὰς Γωνίας εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

κ. 54.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ τυχόν Σημεῖον τὸ δ, καὶ κείθω ἴση τῇ γδ ἢ γε (1), καὶ ἐπὶ τῆς δε Τρίγωνον ἰσόπλευρον συνεσάθω (2) τὸ δζε, καὶ ἐπεξεύχθω ἢ ζγ (3). Φημὶ δὴ ταύτην πρὸς ὁρθὰς ἦχθαι.

Γ'σαι γάρ (4) ἢ μὲν δζ τῇ ζε, ἢ δὲ γδ τῇ γε, ἢ δὲ γζ κοινή. Α'ρ' ἔν (5) καὶ ἢ ὑπὸ δγζ, ἴση τῇ ὑπὸ ζγε· εἰσι δὲ ἐφεξῆς. Α'ρα (6) ὁρθὴ ἐστὶν ἑκατέρω. Ο. Ε. Π.

Ε'πὶ ταῖς κατὰ ταύτην, καὶ τὴν ἐφεξῆς Πράξεσιν ὁ Γνώμων ἡμῖν ὑπαργήσει.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΒ.

„Ε'πὶ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν ἄπειραν (αβ), ἀπὸ τῆ δοθέντος Σημεῖο (γ) ὅ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

κ. 55.

Κέντρῳ μὲν τῷ γ, Κύκλος γεγράφθω, τέμνων τὴν δοθεῖσαν κατὰ τὰ η καὶ ε Σημεῖα, ὁ εζη· καὶ δίχα τετμήθω ἢ εη κατὰ τὸ θ· (7) καὶ ἐπεξεύχθω (8) ἢ γθ· Φημὶ δὴ ταύτην εἶναι τὴν Ζητεμένην.

Ε'πιξευχθεισῶν γάρ καὶ τῶν ηγ, εγ, ἴσων τε οὐσῶν (9), αἱ μὲν ηθ, καὶ εθ ἴσαι ἀλλήλαις (10) εἰσὶν, ἢ δὲ γθ κοινή. Α'ρ' οὖν καὶ ἢ ὑπὸ ηθγ ἴση ἔσται (11) τῇ ὑπὸ εθγ· ταύτη δέ τοι καὶ Ὄρθαί. (12) Καὶ Κάθετος ἄρα ἢ θγ, ἀπὸ τῆ δοθέντος Σημεῖο γ, κτ. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ.

„Ὡς ἂν Εὐθεῖα (ἢ αβ) ἐπ' Εὐθεῖαν (τὴν γδ) σταθεῖσα, Γωνίας ποιῇ, ἥτοι δύο Ὄρθας, ἢ δυσὶν Ὄρθαῖς ἴσας ποιήσῃ.

κ. 56.

Εἰ μὲν γάρ ἴση ἢ ὑπὸ γβα τῇ ὑπὸ αβδ, δύο Ὄρθαί (13) εἰσὶν. Εἰ δ' ἔ, ἦχθω ἀπὸ τῆ β πρὸς ὁρθὰς (14) ἢ βε. Αἱ ἄρα ὑπὸ γβε, καὶ εβδ Ὄρθαί εἰσὶν. Ε'πεὶ οὖν ἢ ὑπὸ γβε ἴση δυσὶ ταῖς ὑπὸ γβα, καὶ ὑπὸ αβε (15) κοινῇ προσεθείσῃς τῆς ὑπὸ εβδ, ἔσονται (16) αἱ δύο ὑπὸ γβε, καὶ ὑπὸ εβδ, ἴσαι ταῖς τρισὶν ὑπὸ γβα, αβε, εβδ. Πάλιν ἐπεὶ ἢ ὑπὸ δβα, δυσὶ ταῖς ὑπὸ δβε,

α. Βιβ. α. (3) Αἰτ. α. (4) Ε'κ Κατ. (5) η. Βιβ. α. (6) Ὄρ. 13.

(9) Ὄρ. 14. (10) Ε'κ Κατ. (11) η. Βιβ. α. (12) Ὄρ. 13.

α. (15) Α'ξ. β. (16) Α'ξ. β.

εβα ἴση ἐς (1)· κοινῇ προσεθείσης τῆς ὑπὸ αβγ, ἔσονται αἱ ὑπὸ δβα, αβγ, τρισὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβα, αβγ ἴσαι. (2) Αἱ δύο ἄρα ὑπὸ δβα, αβγ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ γβε, εβδ Ὁρθαῖς προδειχθείσαις, ἴσαι (3) εἰσὶν. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α .

Ὡς εἴ γε Εὐθείαι πλείας μιᾶς, ἐπὶ τὴν αὐτὴν Εὐθείαν, κατὰ τὸ αὐτὸ Α'. Σημεῖον συζαῶσι, παραπλησίως ἐπέσαι δεῖξαι, ὅτι Γωνίας ποιῶσι δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσας.

Καὶ εἰάν Εὐθείαι δύο αβ, ε γδ, ἀλλήλας τέμνωσι κατὰ τὸ ε, Γωνίας Β'. ποιήσασιν τὰς πάσας τέτταρσιν Ὁρθαῖς ἴσας. Δῆλον δὲ ἐκ τῆς Προτάσεως.

Καὶ αἱ περὶ τὸ αὐτὸ δὲ Σημεῖον Γωνίαι, αἱ πᾶσαι τέτταρας Ὁρθὰς συζαῶσιν· ὅπερ φανερόν ἐκ τῆ δευτέρου Πορίσματος. Γ'. κ. 57.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

„Εάν πρὸς τινι Εὐθείᾳ (γδ) εἰ τῷ πρὸς αὐτῇ Σημεῖω (δ), δύο Εὐθείαι (αδ, βδ) μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς Γωνίας (αδγ, βδγ) δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ Εὐθείαι (αδ, βδ).“

Εἰ μὴ γάρ, ἔωσαν ἐπ' εὐθείας, αἱ αδ, εδ· ἄρα (4) αἱ ὑπὸ αδγ, ε γδε δύο Ὁρθὰς συναποτελεῖσιν· ὅπερ (5) ἄτοπον· ὑπετέθη γὰρ τὰς ὑπὸ κδγ, ε βδγ δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσας εἶναι. κ. 58.

Π ο ρ ῖ σ μ α .

Εντεῦθεν ἐπὶ τῶν Κατοπτρικῶν δέκνυται, τὴν τῇ Φωτὸς Ἀκτίνᾳ ἐν τῷ ἀνακλᾶσθαι, διὰ τῆς κατὰ τὴν ἀντανάκλασιν Γωνίας, ἥ περ ἴση ἐς αὐτὴν ἡ Γωνία τῆς ἐπιπτώσεως, ὁδὸν φέρεσθαι ἀπασῶν τὴν συντομωτάτην. Τῶν γὰρ ὑπὸ βεδ, αεζ συνεξισμένων ἀλλήλαις, αἱ Εὐθείαι αε ε β ἄμα ληφθεῖσαι, Εὐθειῶν τῶν τυχεσῶν, οἷον τῶν αζ ε ββ ἄμα ληφθεῖσων, εἰσὶν ἐλάσσονες. Ἀπὸ γὰρ τῆ Σημεῖου β, ἥχθω Κάθετος (6) ἡ βγ, ε γενέσθωσαν αἱ βδ, γδ ἴσαι (7) ἀλλήλαις· ἥχθωσαν δὲ ἐπιζευγνύμεναι (8) καὶ εγ, ζγ. Ἐπὶ μὲν οὖν τῶν Τριγώνων βεδ, ε γεδ, τῆς μὲν δε κοινῆς ἑσῆς, τῶν δὲ βδ, ε δγ (9) ἴσων ἀλλήλαις ἑσῶν, τῆς τε ὑπὸ βδε, τῇ ὑπὸ γδε (10) συνεξισθαι. κ. 59.

(1) Α'ξ. β. (2) Α'ξ. β. (3) Α'ξ. α. (4) γγ. Βιβ. α. (5) Βιβ. α. (6) γ. Βιβ. α. (7) Α'ξ. α. (8) Ε'κ Κατ. (9) Ε'κ Κατ. (10) Ε'κ Κατ.

μένους, κ τὰ λοιπὰ πάντα (1) ἴσα ἔσαι. Ἐσαι δὲ ἡ βε, ἴση τῇ γε, κ ἡ ὑπὸ βεδ, ἴση τῇ ὑπὸ δεγ. Ἐὰν οὖν ταῖς ἴσαις βε, γε, κοινὴ προσεδῇ ἡ εα, ἔσονται (2) αἱ βε καὶ εα ἅμα ληφθεῖσαι, ἴσαι ταῖς γε καὶ εα ἅμα ληφθεῖσαις. Ἐπεὶ δὲ κ αἱ ὑπὸ βεδ, αεζ ἴσαι (3) ἀλλήλαις εἰσιν, ἡ δὲ ὑπὸ βεδ φθάσα ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ δεγ· ἄρα (4) κ ἡ ὑπὸ αεζ, ἴση ἔσαι τῇ ὑπὸ δεγ. Κοινὴ δὲ προσεδείσῃς τῆς ὑπὸ δεα, δύο αἱ ὑπὸ δεα κ δεγ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ δεα κ αεζ (5), ἔσονται ἴσαι. Ἀλλὰ μὲν αἱ ὑπὸ δεα, κ αεζ δυσὶν (6) Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν· ἄρα κ αἱ ὑπὸ δεγ κ δεα, δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Καὶ ἐπομένως (διὰ ταύτην τὴν Πρότασιν) αἱ Εὐθεῖαι αε, εγ, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις, ταύτεσι Εὐθεῖαν μίαν συνισῶσι τὴν γα, ἣτις ἴση ἐδείχθη δυσὶ ταῖς Εὐθείαις αε κ εβ ἅμα ληφθεῖσαις.

Ὡς αὐτως ἐπὶ τῶν Τριγώνων βδζ, γδζ ῥάδιον δεῖξαι, ἴσας ἀλλήλαις εἶναι τὰς Εὐθείας βζ, κ γζ· κ προσεδείσῃς κοινῆς τῆς αζ, αἱ δύο βζ, αζ ἅμα, ἴσαι ἔσονται δυσὶ ταῖς γζ, αζ ἅμα. Ἀλλὰ μὲν ἡ γα, (ἦτοι αἱ δύο αε, εβ ἅμα) ἐλάσσων ἐστὶ τῶν αζ, κ γζ ἅμα (7) (ἦτοι τῶν αζ, ζβ ἅμα). Αἱ ἄρα Εὐθεῖαι αε, εβ, ἅμα ληφθεῖσαι, ἐλάσσονες εἰσι τῶν δύο Εὐθειῶν αζ, ζβ ἅμα ληφθεισῶν. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΕ.

„Ἐὰν δύο Εὐθεῖαι (αβ, δγ) τέμνωσιν ἀλλήλας (κατά τι Σημεῖον τὸ ε), τὰς κατὰ κορυφὴν (ε) Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσῃσι.

α. 60.

Ταύτεσι τὴν ὑπὸ αεγ τῇ ὑπὸ δεβ. καὶ τὴν ὑπὸ αεδ τῇ ὑπὸ βεγ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αε ἐπ' Εὐθεῖαν τὴν δγ ἐφέσκηκεν, ἔσονται (8) αἱ ὑπὸ αεδ, κ αεγ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι. Πάλιν ἐπεὶ ἡ εγ, ἐπ' Εὐθεῖαν τὴν αβ ἐφέσκηκεν, ἔσονται (9) αἱ ὑπὸ αεγ, κ βεγ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι. Δύο ἄρα αἱ ὑπὸ αεδ, κ αεγ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ βεγ, κ αεγ ἴσαι εἰσὶ. Καὶ ἀφαιρεθείσῃς κοινῆς τῆς ὑπὸ αεγ, ἔσαι (10) ἡ ὑπὸ αεδ ἴση τῇ ὑπὸ βεγ. Ὀμοίως δὲ δεῖχθήσεται κ ἡ ὑπὸ αεγ ἴση οὕσα τῇ ὑπὸ βεδ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐντεῦθεν οἱ τοῖς ἑλεφαντίνοις, κ διὰ τῆτο ἑλαστικοῖς Σφαιριδοῖς ἐν ταῖς Παιδιαῖς χρώμενοι, τὴν τῷ ἀντιπαίζοντος Σφαῖραν ἀντικρῆσθαι παιδευέσθωσαν.

Εἶς τῶν Σφαιριδίων ὃ μὲν ἀποκρυσσον τὸ β, ὃ δὲ τὸ α. Πλευρὰ δὲ εὐθύγραμμος ἡ γδ. Εὐθεία δὲ ἡ βε πρὸς ὀρθὰς ἐφισταμένη (1) ἐπὶ τὴν γδ. Καὶ κείῳ ἡ δε ἴση τῇ δβ (2), καὶ ἐπεξεύχθω (3) ἡ αε, τέμνουσα τὴν γδ κατὰ τὸ ζ· ἐπεξεύχθω δὲ καὶ ἡ βζ. Ἐὰν οὖν ἡ Σφαῖρα κατὰ τὴν Εὐθείαν αζε προσωθεῖ, ὥς ἂν προσβάλλῃ τῷ Σημείῳ ζ, ἀνακάμψασα ὥς τὸ β σπεύτεται. Ἐπὶ μὲν γὰρ τῶν Τριγώνων βζδ, καὶ εζδ, ἡ μὲν ζδ Πλευρὰ κοινὴ, ἡ δὲ δβ, ἴση τῇ δε (4), ἥτε ὑπὸ βδζ, ἴση τῇ ὑπὸ εδζ (5). Τὰ ἄρα Τρίγωνα (6) ἴσα ἀλλήλοις· καὶ ἔσαι ἄρα ἡ ὑπὸ βζδ, ἴση τῇ ὑπὸ δε. τοιγαρὶν καὶ (7) τῇ κατὰ κορυφὴν ὑπὸ αζγ ἴση. Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ὑπὸ αζγ Γωνία ἐστὶν ἡ κατ' ἐπίπτωσιν, ἡ δὲ ὑπὸ βζδ Γωνία ἡ κατ' ἀντανάκλασιν, αἱ δὲ κατὰ τὰς προσβολὰς τῶν ἐλασικῶν Σωμάτων ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· εὐδὴλον ἄρα ὅτι τὴν Σφαῖραν α, ἐλασικὴν ὑποτιθεμένην, καὶ ἐπὶ τὸ ε διΐσχυομένην, μετὰ τὴν ἀντανάκλασιν ἡ ἀποκρυσσομένη Σφαῖρα β ἐκδέχεται. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις.

„ Παντὸς Τριγώνου (αβγ) μιᾶς τῶν Πλευρῶν (βγ) ἐκβληθείσης (ἐπὶ τὸ δ) ἡ ἐκτὸς Γωνία (ὑπὸ αγδ) ἐκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον (ὑπὸ γαβ, καὶ αβγ) μείζων ἐστὶ.

Τετμήσθω ἡ αγ δίχα (8) κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βε (9) ἐκβεβλήθω (10) κατὰ τὸ ζ, καὶ κείῳ τῇ βε ἴση (11) ἡ εζ, καὶ ἐπεξεύχθω (12) ἡ ζγ, καὶ διήχθω ἡ αγ ἐπὶ τὸ η (13).

Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν αε, ἴση τῇ εγ (14), ἡ δὲ βε, ἴση τῇ εζ (15), ἡ δὲ ὑπὸ αεβ, ἴση (16) τῇ κατὰ κορυφὴν ὑπὸ ζεγ, ἔσαι καὶ ἡ ὑπὸ εγζ (17) ἴση τῇ ὑπὸ εαβ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ αγδ μείζων (18) τῆς ὑπὸ εγζ. Ἀρα μείζων ἔσαι (19) καὶ τῆς ὑπὸ γαβ. Ἡ ἄρα ἐκτὸς (20) ἔσαι ὑπὸ αγδ, μείζων τῆς ἐτέρας τῶν ἀπεναντίων, ἥτοι τῆς ὑπὸ γαβ.

Παραπλησίως καὶ τὴν βγ δίχα τεμών, δείξαις τὴν ὑπὸ βγη, ἥτοι τὴν ἴσην αὐτῇ (21) ὑπὸ αγδ, μείζονα καὶ τῆς ὑπὸ αβγ. Ἀρα κτ. Ο. Ε. Δ.

κ. 62.

Πόρισμα.
Ἀφ' ἐνὸς Σημεῖου πρὸς τὴν αὐτὴν Εὐθεῖαν, Εὐθείας ἀγαγὲν πλείονας δυοῖν ἀδυνατον (Ις. καὶ Ε'. Βιβλ. α.) ἴσας ἀλλήλαις.

(1) μ. Βιβλ. α. (2) γ. Βιβ. α. (3) Α' Ε. α. (4) Ε' κ. κατ. (5) Ε' κ. κατ. (6) δ. Βιβ. α. (7) ι. Βιβ. α. (8) ε. Βιβ. α. (9) Α' ι. α. (10) Α' ι. β. (11) Βιβ. α. (12) Α' ι. α. (13) Α' ι. β. (14) Ε' κ. κατ. (15) Ε' κ. κατ. (16) Ε' κ. κατ. (17) Ε' κ. κατ. (18) Α' Ε. β. (19) Α' Ε. α. (20) Ο' ρ. λβ. (21) Α' Ε. α.

τῆς ὑπὸ βαε. (15) Ἀρα ἡ ὑπὸ βδγ πολλῷ μείζων τῆς ὑπὸ βαε, ἢτοι
τῆς ὑπὸ βαγ. Ο. Η. τὸ Β'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΒ.

„Ἐκ τριῶν Εὐθειῶν (α, β, γ), ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι
„πάντῃ μεταλαμβάνομεναι, Τρίγωνον συστήσασθαι.

κ. 69.

Εἰκείδω τις Εὐθεΐα ἡ δε πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ δ, ἄπειρος δὲ
κατὰ τὸ ε· καί κείδω (1) τῇ μὲν α ἴση ἡ δζ, τῇ δὲ β ἴση ἡ ζη, τῇ δὲ γ
ἴση ἡ ηθ. Καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ ζ, Διαστήματι δὲ τῷ ζδ (2), Κύκλος γε-
γράφω ὁ δηλ. Καὶ Κέντρῳ πάλιν τῷ η, Διαστήματι δὲ τῷ ηθ, Κύκλος
γεγράφω ὁ κλθ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ κζ, κη. Λέγω ὅτι ἐκ τριῶν Εὐ-
θειῶν τῶν ἰσῶν ταῖς α, β, γ Τρίγωνον συνέσκηκε τὸ κζη.

Η' γὰρ κζ ἴση (3) τῇ ζδ· ἴση ἄρα (4) τῇ α. Η' δὲ ηθ ἴση (5) τῇ
β· ἡ δὲ ηκ ἴση (6) τῇ ηθ· ἴση ἄρα (7) τῇ γ. Ἐκ τριῶν ἄρα, κτ. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΓ.

„Πρὸς τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (αβ), καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ Σημείῳ (α), τῇ
„δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ (δγε), ἴσην Γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

κ. 70.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῶν Πλευρῶν τῆς δοθείσης Γωνίας, τυχόντα Σημεῖα τὰ
δε, καὶ ἐπεξεύχθω Εὐθεΐα ἡ δε. (8) Καὶ ἐκ τριῶν Εὐθειῶν, ἰσῶν τρισὶ ταῖς
γδ, δε, γε, Τρίγωνον συνεστιάθω (9) τὸ αζη, ὧς τε ἴσην εἶναι τὴν μὲν γδ
τῇ αζ, τὴν δὲ γε τῇ αη, καὶ ἔτι τὴν δε τῇ ζη. Τῶν τοίνυν τριῶν ταῖς τρι-
σὶ Πλευραῖς ἐπὶ τῶν Τριγώνων, ἑτέρας τῇ ἑτέρᾳ ἰσῶν ἡσῶν (10), εὐδη-
λον ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ζαη, ἴση (11) ἐστὶ τῇ ὑπὸ δγε. Ο. Ε. Π.

Π ό ρ ι σ μ α Α.

κ. 71.

Ἐντεῦθεν καὶ Γραμμὴν ἀπρόσβατον τὴν αβ, καταμετρεῖν ῥάδιον. Ἀπὸ
γὰρ τῶν τυχόντος Σημεῖα γ παρατετηρήθω Γωνία ἡ ὑπὸ αγβ, καὶ κατα-
μετρηθῇ τῶσαν αἱ Εὐθεΐαι αγ, καὶ βγ. Ἐπὶ δὲ τῶν τυχόντος ἐπιπέδα, ἑπὲρ
ἐσιν ἐπιβῆναι, πρὸς τῷ Σημείῳ ζ τῷ ἐπὶ τῆς ἀπείρου Εὐθείας εζ, συνε-
στιάθω Γωνία ἴση (12) τῇ ὑπὸ αγβ ἡ ὑπὸ εζε· καὶ ληφθῇ τῶσαν αἱ ζη,

(1) τ. Βιβ. α. (2) Α' γ. γ. (3) Ο' ρ. ιη. (4) Α' ξ. α. (5) Ε' κ. Κατασ. (6) Ο' ρ. ιη.
(7) κ. β. Βιβ. α. (8) Ε' κ. κατ. (9) η. Βιβ. α. (10) κ. γ.

ἢ $\angle\theta$ (1) ἴσαι ταῖς $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$, ἑκατέρα ἑκατέρα· καὶ ἐπεξεύχθω (2) ἡ $\eta\delta$.
 Ἡ δὲ ἔσαι πάντως ἴση τῇ ἀπροσβάτῳ Εὐθείᾳ $\alpha\beta$.

Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων $\alpha\gamma\beta$, $\eta\angle\theta$, αἱ $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ Πλευραὶ ἴσαι (3)
 εἰσὶ ταῖς $\eta\angle$, $\angle\theta$, ἑκατέρα ἑκατέρα, ἡ δὲ ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$, ἴση τῇ (4) ὑπὸ $\eta\angle\theta$.
 ἔσαι ἄρα (5) ἢ Βάσις ἡ $\alpha\beta$, ἴση Βάσει τῇ $\eta\delta$.

Π ό ρ ι σ μ α Β.

Ἡ ὡς τῷ Θάλητι μεμερόδευται. Ἐς τὴν Γραμμὴν ἀπρόσιτος ἡ $\alpha\delta$, ἐφ'
 ἣν πρὸς τῷ κατὰ τὸ πέρας αὐτῆς Σημείῳ α (6), ἤχθω Κάθετος ἡ $\alpha\gamma$, ἢ
 εὐλήφθω Γωνία ἡ ὑπὸ $\alpha\gamma\delta$, ἢ ταύτῃ ἐπὶ θάτερα τῆς Γραμμῆς $\alpha\gamma$, ἴση (7)
 συνεχάτω ἡ ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$, ἢ διήχθω ἡ $\alpha\beta$ (8) ἐπὶ τὸ β . ἢ ἔσαι πάντως ἡ
 $\alpha\beta$ προσβάσιμος τῇ $\alpha\delta$ ἀπροσβάτῳ ἴση. Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων $\alpha\beta\gamma$,
 $\alpha\delta\gamma$, ἡ μὲν $\alpha\gamma$ ἐστὶ κοινὴ, αἱ δὲ ὑπὸ $\delta\alpha\gamma$, ἢ $\beta\alpha\gamma$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν (9),
 ἥτε ὑπὸ $\delta\gamma\alpha$ ἴση τῇ ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$ (10). Ἀρα ἢ ἡ $\alpha\beta$ Πλευρὰ ἴση (11) τῇ $\alpha\delta$.

κ. 72.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Χρηζομένους τοῖς Πρωτοπείροις, ἔδοξε τινα εἰς πράξιν ἢ μικρὸν συντε-
 λῆντα περὶ τῶν Γωνιῶν ὑποθέσθαι.

Γωνίας μέτρον ἐστὶ, Κύκλῳ τῷ $\lambda\zeta\beta\lambda$, τῷ Κέντρῳ α , τῇ κορυφῇ τῆς Γω-
 νίας καταγεγραφομένη ἢ Περιφέρεια, φερὲν εἰπεῖν $\beta\gamma$, ἡ ὑπὸ τῶν σκελῶν
 τῆς Γωνίας $\alpha\eta$, $\alpha\delta$ ἐναπολαμβανομένη· ὅπερ ἐκ τῆς ἐσχάτης τῆς ζ' . Βιβλίου
 Προτάσεως ἔσαι κατάδηλον.

κ. 73.

Ὅπόσαι τοίνυν αἱ τῆς Περιφερείας $\beta\gamma$ μοῖραι, τοσούτων εἶναι μοιρῶν εἰ-
 ρήσεται ἢ ἡ ὑπὸ $\delta\alpha\eta$ Γωνία. Ἐπεὶ δὲ τὴν ὀρθὴν Γωνίαν ὑπὸ $\beta\alpha\angle$, τῆς ὅλης
 Περιφερείας καταμετρεῖ τὸ τεταρτημόριον $\beta\angle$, τὸ μοῖρας τὰς πάσας 90 πε-
 ριέχειν ὑποτιθέμενον, ταύτητοι πᾶσα ὀρθὴ Γωνία μοιρῶν εἶναι λέγεται
 90. Ὀμοίως, ἐπεὶ τὰς δύο Ὀρθὰς τὴν τε ὑπὸ $\beta\alpha\angle$, ἢ τὴν ὑπὸ $\zeta\alpha\lambda$, κατα-
 μετρεῖ ἡ Ἡμιπεριφέρεια $\beta\zeta\lambda$, ἡ εἰς 180 μοῖρας διατετιμῆσθαι ὑποτιθέμενη.
 Ὀρθὰς δὲ τέσσαρας καταμετρεῖ ἡ ὅλη Περιφέρεια ἢ εἰς μοῖρας 360 διανεμο-
 μένη· διάτοι τῷτο αἱ μὲν δύο Ὀρθαὶ μοιρῶν εἶναι λέγονται 180, αἱ δὲ
 τέτταρες μοιρ. 360. Τῶτων ἔτω προσεσημειωμένων πράξεις ἐπὶ Γωνιῶν
 συνίστανται αἱ ἐφεξῆς.

Δημοσία Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βέροιας

(1) γ. Βιβ. α. (2) Αἰτ. α. (3) Ἐκ κατ. (4) Ἐκ κατ.
 Βιβ. α. (7) κγ. Βιβ. α. (8) Αἰτ. β. (9) Αἰ. ι. (10) Ε'

κ. 74. Α'. Πρὸς τῷ ἐπὶ τῆς δοθείσης βλ, δοθέντι Σημείῳ β, Γωνίαν συστήσασθαι ἴσην τῇ δοθείσῃ α. Κέντρῳ μὲν τῷ α (1) Περιφέρεια γεγράφθω ἡ γζ. Κέντρῳ δὲ τῷ β, ἡ Διαστήματι ἴσῳ, Τόξον γεγράφθω τὸ λψ, ἐξ ἧς ἀφηρόθω τὸ λξ, ἴσον τῷ γζ, ἡ ἐπεξεύχθω (2) ἡ βξ· ἡ ἔσται πάντως ἡ ὑπὸ λβξ, ἴση τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ τῇ κατὰ τὸ α.

κ. 75. Β'. Τῆς δοθείσης Γωνίας ὑπὸ ξοπ, ὅσαι εἰσὶν αἱ μοῖραι προσευρεῖν. Ἡμικυκλίᾳ κερατίνῃ διαφανῆς, εἰς 180 μοῖρας διηρημένῃ, κείθω τὸ μὲν Κέντρον ἐπὶ τὴν κορυφὴν τῆς Γωνίας ο, ἡ δὲ Ἡμιδιάμετρος ολ, ἐπὶ τὴν Πλευράν οπ. Τὸ δὲ Τόξον λμ, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς Γωνίας σκελῶν ἐναπολαμβανόμενον, δείξει πάντως ὅσων μοιρῶν ἡ δοθεῖσα Γωνία.

Γ'. Γωνίαν δοθείσας μοῖρας τὰς 42, συστήσασθαι περιέχουσαν· Ἦχθω Εὐθεῖα φπ, ἐφ' ἧς τῷ Σημείῳ ο ληφθέντι κείθω τὸ τῇ Ἡμικυκλίᾳ Κέντρον, ὡς τὴν Ἡμιδιάμετρον ολ ἐφαρμόσαι ἐπὶ τὴν οπ· ἀπὸ δὲ τῆ λ, ἀριθμητήτωσαν μοῖραι 42 ἄχρι τῆ μ. Ἡ γοῦν ἀπὸ τῆ ο διὰ τῆ μ ἀχθεῖσα Εὐθεῖα, δώσει τὴν ὑπὸ μολ μοιρῶν 42.

Τέτων ἀπάντων ἡ δεῖξις ἡρτῆται ἐκ τῆς ἐσχάτης Προτάσεως τῆ ζ'.
Βιβλ. 8.

Π ό ρ ι σ μ α.

κ. 76. Δοθείσης τῆς ὑπὸ βαζ Γωνίας, δῆλον ἐστὶ ἡ τὸ ἐκείνης πρὸς δύο Ὄρθὰς ἀναπλήρωμα (ἦτοι ἡ ὑπὸ γαζ). Οἷον εἰν ἡ Γωνία ἡ ἀπὸ βαζ μοιρῶν 70, ἔσται πάντως ἡ ὑπὸ γαζ μοιρῶν 110. Οἱ γὰρ ἀριθμοὶ ἅμα προσληφθέντες, μοῖρας τὰς πάσας 180, τὸ δυοῖν ὀρθῶν Γωνιῶν μέτρον συναποτελεῖσι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΔ.

„Εὰν δύο Τρίγωνα (τὰ αβγ, δεζ) τὰς δύο Πλευράς (τὰς αβ, αγ) „ταῖς δυοῖ Πλευραῖς (ταῖς δε, δζ) ἴσας ἔχῃ, ἐκατέραν ἐκατέρᾳ, τὴν δὲ „Γωνίαν (τὴν ὑπὸ βαγ) τῆς Γωνίας (ὑπὸ εδζ) μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν „ἴσων Εὐθειῶν περιεχομένην, ἡ τὴν Βάσιν (βγ) τῆς Βάσεως (εζ) μείζονα ἔξει.

κ. 77. Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ βαγ τῆς ὑπὸ εδζ (3), συνεχάτω (4) τῇ ὑπὸ βαγ ἴση ἡ ὑπὸ εδγ, ἡ κείθω (5) ἡ δι ἴση ὁποτέρᾳ τῶν αγ, δζ. Καὶ

(3) Εξ ὑποθ. (4) αγ. Βιβ. α. (5) γ. Βιβ. α.

τοίνυν ἡ Βάσις (1) βγ ἴση ἔσαι τῇ Βάσει εη. Ἀλλὰ γὰρ τὸ ζδῆ ἐστὶν (2) Ἰσοσκελές· ἄρα ἡ ὑπὸ δηζ, ἴση τῇ ὑπὸ δζη. (3) καὶ μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ δζη τῆς ὑπὸ (4) εηζ· πολλῶν δὲ μείζων ἡ ὑπὸ εζη τῆς ὑπὸ εηζ. Ἀρ' ἔν (5) ἡ Πλευρὰ εη μείζων τῆς εζ. Ἐστὶ δὲ εη ἴση (6) τῇ βγ· ἄρα ἡ βγ μείζων τῆς εζ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΕ.

„Εάν δύο Τρίγωνα (αβγ, δεζ) τὰς δύο Πλευρὰς (αβ, αγ) ταῖς δυσὶ Πλευραῖς (δε, δζ) ἴσας ἔχη ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ Βάσιν (βγ) τῆς Βάσεως (εζ) μείζονα ἔχη· καὶ τὴν Γωνίαν (ὑπὸ βαγ) τῆς Γωνίας (ὑπὸ εδζ) μείζονα ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων Εὐθειῶν περιεχομένην.

Εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάσσων. Ἀλλ' εἰ μὲν ἐκεῖνο, ἔσαι δὴ (7) καὶ ἡ βγ, ἴση τῇ εζ (κατὰ τῆς ὑποθ.). Ἀλλ' ἡδεμὴν τῆτο· αἱ γὰρ ἐλάττωσαν ἡ ὑπὸ βαγ τῆς ὑπὸ εδζ, ἔσαι καὶ ἡ Βάσις (8) βγ, ἐλάττωσαν Βάσεως τῆς εζ (κατὰ τῆς ὑποθέσ.). Ἐὰν ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ. κ. 78.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κς.

„Εάν δύο Τρίγωνα (αβγ, δεζ) τὰς δύο Γωνίας (ταῖς ὑπὸ αβγ, καὶ αγγβ) ταῖς δυσὶ Γωνίαις (ταῖς ὑπὸ δεζ, καὶ δζε) ἴσας ἔχη ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν Πλευρὰν μιᾷ Πλευρᾷ ἴσην ἔχη, ἦτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις Γωνίαις (βγ, καὶ εζ), ἢ τὴν ὑποτείνουσιν ὑπὸ μιᾷ τῶν ἴσων Γωνιῶν, (τὴν αβ τῇ δε, ἢ τὴν αγ τῇ δζ)· καὶ τὰς λοιπὰς Πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς Πλευραῖς ἴσας ἔξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν Γωνίαν τῇ λοιπῇ Γωνίᾳ (τὴν ὑπὸ βαγ τῇ ὑπὸ εδζ).

Κείθωσαν δὲ πρῶτον ἴσαι αἱ Πλευραὶ βγ, εζ αἱ πρὸς ταῖς ἴσαις Γωνίαις, καὶ τὰ λοιπὰ πάντα ἴσα ἔσαι (9). κ. 79.

Κείθω δεύτερον ἡ αβ ἴση τῇ δε, ἀλλ' ἡ βγ μείζων τῆς εζ, καὶ ἀφαιρέσῃτω (10) ἀπὸ τῆς βγ μείζονος ἡ βθ, ἴση δὲ τῇ ἐλάσσονι, καὶ ἐπεζεύξῃτω ἡ αθ (11)· καὶ ὅτως ἐπὶ τῶν Τριγώνων βαθ, καὶ εδζ, τῶν δύο Πλευρῶν, καὶ τῆς ὑπὸ αὐτῶν περιεχομένης Γωνίας, ἴσων ὄντων ταῖς δυσὶν (ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ), καὶ τῇ ὑπὸ τούτων περιεχομένῃ Γωνίᾳ· ἔσαι καὶ ἡ ὑπὸ αθβ ἴση

(1) δ. Βιβ. α. (2) Ε' κατ. (3) ε. Βιβ. α. (4) Α' ε. (5) Ε' κατ. (6) δ. Βιβ. α. (7) δ. Βιβ. α. (8) κδ. Βιβ. α. (9) Σχόλ. Πρ. δ. (10) Ε' κατ. (11) Ε' κατ.

τῇ (1) ὑπὸ δζε. Α'λλ' ἢ ὑπὸ αγκβ ἴση (2) τῇ ὑπὸ δζε. Α'ρα ἢ ὑπὸ αγκβ (3) ἴση ἔσαι τῇ ὑπὸ αδβ· ὅπερ ἀδύνατον (διὰ τὴν ιε').

Κεῖθω τρίτον δζ = αγ. Εἰδ' οὖν, ἢ οὖν εζ = βγ (διὰ τὸ α'). ἢ τὰ λοιπὰ ἴσα ἔσαι. Εἰδ' οὖν, ἢ οὖν βγ > εζ, ληφθήτω γδ = εζ, ἢ ὁμοίως ἐφο-
δεύσει τὰ τῆς ἀποδείξεως, ὡς ἐπὶ τῷ β'.

Εἰδ' ἄρα δύο Τρίγωνα κτ. Ο. Ε. Δ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ε'δοξέ τινα ἐνταῦθα περὶ τῆς ἐν τῷ Ἰσοσκελεῖ Τριγώνῳ παρενδεῖσθαι. Καθέτε, ὑφ' ἧς ἢτε Βάσις, ἢ ὑφ' ἣν ἐκείνη ὑποτείνει, ἢ Γωνία δίχα τέμνε-
σθαι πεφύκασιν. Ε'ξω τοίνυν Ἰσοσκελὲς Τρίγωνον τὸ αβγ, ἢ κορυφὴ μὲν α,
Βάσις δὲ ἢ βγ, σκέλη δὲ ἴσα ἀλλήλοις τὰ αβ, αγ. Φημί δὴ·

κ. 80. Α.

Εἰδ' ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν κορυφὴν α Γωνίας, Κάθετος ἀχθῇ πρὸς τὴν Βά-
σιν ἢ αδ, δίχα τεμεῖ αὕτη τὴν τε Βάσιν βγ, ἢ τὴν Γωνίαν ὑπὸ βαγ, ὑφ'
ἣν ἢ Βάσις ὑποτείνει. Ε'πὶ γὰρ τῶν Τριγώνων αβδ, αγδ, τῶν μὲν Πλευρῶν
αβ, ἢ αγ ἴσων (4) ἀλλήλαις ἔσων, τῆς δὲ αδ κοινῆς ἐκατέρω, τῶν τε Γωνιῶν
ὑπὸ αβδ, ἢ ὑπὸ αγδ (5) ἴσων ἀλλήλαις, ἢ τῶν ὑπὸ αδβ, ἢ αδγ (6) ὁμοίως
ἴσων ἔσων· ἢ τὰ λοιπὰ (7) πάντα ἴσα ἔσαι. Α'ρα ἢ ἢ Πλευρὰ βδ, ἴση ἔσαι
τῇ γδ, ἢ ἢ ὑπὸ βαδ, ἴση τῇ ὑπὸ γαδ. Η' ἄρα Κάθετος αδ (8) ἐπὶ τῷ Ἰσο-
σκελεῖ, τὴν τε Βάσιν βγ δίχα τέμνει, ἢ τὴν κατὰ τὴν κορυφὴν ὑπὸ βαγ
Γωνίαν.

Β.

Εἰδ' ἢ Εὐθεῖα αδ ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν κορυφὴν Γωνίας ἀχθεῖσα, δίχα
τέμνη τὴν Βάσιν· δίχα δὴ πε τεμεῖ ἢ τὴν κατὰ τὴν κορυφὴν Γωνίαν α, ἢ
ἐπὶ τὴν Βάσιν πρὸς ὀρθὰς ἐπιστήσεται. Τῆς γὰρ Βάσεως βγ δίχα τμηθεῖσθαι
κατὰ τὸ δ, τὰ δύο Τρίγωνα αβδ, ἢ αγδ τὰς δύο Πλευρὰς ταῖς δυσὶ Πλευ-
ραῖς ἴσας ἔξει ἐκατέραν ἐκατέρω, ἢ τὴν Βάσιν τῇ Βάσει, ἢ ἔσαι (9) ἄρα ἐπ'
αὐτῶν, ἢ ἢ ὑπὸ βαδ ἴση τῇ ὑπὸ γαδ, ἢ ὑπὸ αδβ, ἢ αδγ. Οὐκὲν ἢ μὲν
κατὰ τὴν κορυφὴν α (10) δίχα ἔσαι τετμημένη, ἢ δὲ αδ πρὸς ὀρθὰς (11) ἐπὶ
τὴν Βάσιν ἐφραγήσεται.

Τὰ δ' αὐτὰ
διὰ τῆς δ.
ραδίως δεικ-
νύται.

Γ.

Εἰδ' ἢ αδ τὴν κατὰ κορυφὴν Γωνίαν δίχα τέμνη, δίχα τε, ἢ πρὸς ὀρ-
θὰς ἢ τὴν Βάσιν βγ τεμεῖ. Ε'πὶ γὰρ τῶν Τριγώνων βαδ, ἢ δαγ, αἱ βα, ἢ

αγ, ἴσαι εἰσὶν (1), ἡ δὲ αδ κοινὴ, ἥτε ὑπὸ βαδ ἴση ἐστὶ τῇ (2) ὑπὸ γαδ. Ἀ'ρα εἰ αἱ Βάσεις βδ, εἰ γδ (3) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἥτε ὑπὸ αδβ ἴση τῇ ὑπὸ αδγ. Ἀ'ρα ἡ μὲν βγ Βάσις (4) δίχα τέμνεται, ἡ δὲ αβ (5) πρὸς ὀρθὰς ἐπ' αὐτὴν ἐφέστηκε.

Εἰ ἐπὶ τῇ ἰσοσκελεῖ Τριγώνῳ αβγ ἀχθῇ Εὐθεῖα ἡ δε, ἡ τὴν Βάσιν βγ δίχα τε, εἰ πρὸς ὀρθὰς τέμνουσα κατὰ τὸ δ, προαχθεῖσα αὐτὴ διὰ τῆς κορυφῆς τῆ Τριγώνου α διελεύσεται. Εἰ γὰρ περὶ τὴν δε ὡς περὶ Α'ξονα τὸ ἀριστερὸν εδβ τῆ αβγ Τριγώνου περιαχθῇ, ὥς τε τῷ δεξιτέρῳ εδγ ἐπιπτεσεῖν, ἐφαρμόσασσι μὲν αἱ ἴσαι ὀρθαὶ Γωνίαι αἱ πρὸς τῷ δ, ἐφαρμόσασσι δὲ εἰ αἱ ἴσαι Πλευραὶ δβ, δγ, ἐφαρμόσασσι δὲ εἰ αἱ ἴσαι Γωνίαι, αἱ κατὰ τὰ β εἰ γ ἐπ' ἀλλήλας (6). Καὶ συμπεσῶνται ἄρα αἱ Πλευραὶ βα, γα, ὡσαύτως δὲ εἰ ὅλα τὰ Τρίγωνα βαδ, γαδ· ταύτητοι εἰ ἡ πλευρὰ δα, ταῖς Πλευραῖς βα, γα, κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον α συναντήσῃ, τατέσι διὰ τῆς κορυφῆς α τῆ Τριγώνου αβγ διελεύσεται.

Α' λ λ ω ς.

Εἰ μὴ γὰρ, μὴ διερχέσθω ἡ δε προαχθεῖσα διὰ τῆς κορυφῆς α, διατεμνέτω δὲ θατέραν τῶν Πλευρῶν, οἷον τὴν αβ, κατὰ τὸ ζ, εἰ ἐπεξεύχθω (7) ἡ ζγ. Ἐπὶ μὲν ἂν τῶν Τριγώνων βδζ, εἰ δζγ, ἡ μὲν βδ, ἴση τῇ γδ, ἡ δὲ δζ κοινὴ, ἥτε ὑπὸ βδζ, ἴση τῇ ὑπὸ γδζ (8). Ἀ'ρα εἰ (9) ἡ ὑπὸ ζβδ, ἴση τῇ ὑπὸ ζγδ. Ἀ'λλ' ἡ ὑπὸ ζβδ, ἴση τῇ ὑπὸ αγβ (10) τῇ ἰσοσκελεῖ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι εἶναι. Ἀ'ρα ἡ ὑπὸ ζγδ, ἴση τῇ ὑπὸ αγδ, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἐκ ἔστιν. (11) Ἀ'λλ' ἐπ' αὐτῶν δὴ τῶν Τριγώνων, δείκνυται εἰ ἡ βζ, ἴση τῇ γζ· κοινῆς οὖν προσεθείσης τῆς ζα, ἔσται ἡ βα, ἴση δυσὶ ταῖς (12) γζ, ζα· ἡ δὲ βα ἴση τῇ γα (13). Ἀ'ρα αἱ γζ, ζα, αἱ δύο, ἴσαι τῇ μιᾷ γα, ἐπὶ τῇ Τριγώνῳ γζα, ὅπερ (14) ἐκ ἔστιν. Οὐκ' ἄρα διὰ τῆ ζ διελεύσεται κτ.

Εἰ Εὐθεῖα ἡ αδ, ἀπὸ τῆς τῆ Τριγώνου αβγ κορυφῆς α, ἐπὶ τὴν Βάσιν β. ε 80. βγ πίπτουσα, ταύτην δίχα τε, εἰ πρὸς ὀρθὰς τέμνη, ἰσοσκελεῖς ἔσται τὸ Τρίγωνον. Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων βαδ, γαδ, ἡ μὲν αδ κοινὴ, αἱ δὲ βδ, γδ ἴσαι ἀλλήλαις, εἰ αἱ ὑπὸ βδα, εἰ γδα (15) ἴσαι ἀλλήλαις. Ἀ'ρα εἰ ἡ βα ἴση (16) τῇ γα. Καὶ ἰσοσκελεῖς ἄρα (17) τὸ Τρίγωνον βαγ.

(1) Ε'ξ ὑποθ. (2) Ε'ξ ὑπ. (3) δ. Βιβ. α. (4) Ο'ρ. μ. (5) Ο'ρ. ιδ. (6) Α'ξ. γ. (7) Α'π. α. (8) Ε'ξ ὑποθ. (9) δ. Βιβ. α. (10) Ε'ξ ὑποθ. ε. Βιβ. α. (11) Α'ξ. δ. (12) Α'ξ. β. (13) Ε'ξ ὑποθ. (14) κ. Βιβ. α. (15) Ε'ξ ὑποθ. (16) δ. Βιβ. α. (17) Ε'ξ ὑποθ.

Εἴαν Εὐθεία ἡ αδ, Τριγώνων τῇ αβγ, τὴν κατὰ τὸ α Γωνίαν δίχα τέμνῃ, ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον Πλευρὰν βγ, πρὸς ὁρθὰς ἐπιση, Ἰσοσκελὲς ἔσται τὸ Τρίγωνον. Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων αβδ, αγδ, ἡ μὲν αδ κοινὴ, αἱ δὲ ὑπὸ βαδ, καὶ βδα, ἴσαι ταῖς ὑπὸ γαδ, καὶ γδα (1) ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν. Ἄρα (2) καὶ βα, ἴση τῇ γα. Ἰσοσκελὲς ἄρα (3) τὸ Τρίγωνον.

Π ρ ό τ α σ ι ς KZ.

„Εἴαν εἰς δύο Εὐθείας (αβ, γδ) Εὐθεία ἐμπίπτουσα (ἡ ζε) τὰς ἐναλλὰξ Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ (ἦτοι τὴν ὑπὸ αεζ τῇ ὑπὸ εζδ, καὶ τὴν ὑπὸ γζε τῇ ὑπὸ ζεβ), Παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ Εὐθεῖαι.

κ. 82. Ἐκ τῇ κατ' Εὐκλείδην ὁρισμῷ τῶν Παράλληλων. Εἰ μὴ εἰσὶ Παράλληλοι, ἐκβαλλόμεναι αἱ αβ, γδ συμπεσόνται, ἦτοι ἐπὶ τὰ βδ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ αγ. Ἐκβεβλήθωσαν, καὶ συμπίπτουσιν κατὰ τὸ η· καὶ ἔσται ἄρα τὸ εηζ Τρίγωνον. Τοιγαρὲν ἡ ὑπὸ αεζ ἐκτός (4), μείζων ἔσται τῆς ὑπὸ εζη ἐντός. Ἀλλὰ (5) καὶ ἴση, ὅπερ ἐκ ἔστιν· οὐκ ἄρα συμπεσόνται. Καὶ Παράλληλοι (6) ἄρα εἰσὶ.

κ. 83. Ἐκ δὲ τῇ ἀντισυνεχθέντος τῶν Παράλληλων ὁρισμῷ ὡδί. Ἀπὸ τῇ Σημεῖα ε, ἡχθω (7) πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τῆς γδ, ἡ εθ. Καὶ ἀπὸ τῇ ζ ὁμοίως, πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τῆς αβ, ἡχθω ἡ ζη. Ἐπὶ μὲν οὖν τῶν Τριγώνων ζηε, καὶ εθζ, ἡ μὲν ὑπὸ ηεζ ἴση τῇ ὑπὸ εθδ (8), ἡτε ὑπὸ ζηε, ἴση τῇ ὑπὸ εθζ (9). ἡ δὲ ζε Πλευρὰ κοινὴ. Ἄρα (10) ἡ ζη, ἴση τῇ εθ· εἰσὶ δὲ ἄμφω Κάθετοι ἐπὶ τῆς αβ· ἡ μὲν ζη ἐκ κατασκευῆς· ἡ δὲ θε, ὅτι τῇ ὑπὸ εθζ (ἐκ κατ.) Ὁρθή, ἴση ἡ ἐναλλάξ ὑπὸ θεβ (ἐξ ὑποθέσ.), ἴσαι ἄρα αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν αβ Κάθετοι ζη, θε. Ἰσοῖς ἄρα ἀπέχεται διαστήμασιν αἱ αβ, καὶ γδ (11) Παράλληλοι εἰσὶ.

κ. 84. Ἀλλὰ γὰρ ἔσωσαν αἱ λοιπαὶ ἐναλλάξ αἱ ὑπὸ βεζ, καὶ γζε ἴσαι ἀλλήλαις. Καὶ ἐπεὶ αἱ δύο ὑπὸ βεζ καὶ αεζ (12) δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ὑπὸ γζε, καὶ εζδ δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἰσοῖς ἄρα ἔσονται (13) αἱ δύο ἅμα, ταῖς δυσὶν ἅμα. Ἀφαιρεθεισῶν ἄρα τῶν ὑπὸ βεζ, καὶ γζε ἴσων (14) ἁρῶν, ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ ὑπὸ αεζ, καὶ εζδ (15) ἀλλήλαις. Καὶ ὅτως ἐφοδεύεται ὡς ἀνωτέρω ἡ δεξιὰ.

(1) Εἰς ὑποθ. (2) Σχόλ. δ. καὶ κς. Βιβ. α. (3) Ὁρ. κς. (4) ις. Βιβ. α. (5) Εἰς ὑποθ. (6) Εὐκλείδ. (7) ιβ. Βιβ. α. (8) Εἰς ὑποθ. (9) Ἐκ κατ. (10) κς. (11) ιγ. Βιβ. α. (12) Α' ε. ι. (13) Εἰς ὑποθ. (14) Α' ε. γ.

Η" εἰς οὗτως· ἐάν αἱ Ἐναλλάξ λοιπαὶ ὑπὸ βεζ, εἰ γὰρ ἴσαι ὦσι, τὰς αβ, εἰ γὰρ Παραλλήλους διὰ τῆ ἀντιστοιχίας ὁρίστω δείξω. Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ἐμπιπτάσης εζ ἐπ' ἀπειρον ἐκατέρωθεν προηγμένης, ἐτέρωθεν τυχὸν Σημεῖον τὸ ι, ἐτέρωθεν δὲ ἀφαιρεθῆτω (1) ἡ κζ ἴση τῇ ει. Καὶ ἀπὸ τῆ ι Σημεῖου, ἐπὶ τῆς γδ δεῖσαν προεκβληθείσης, ἦχθω πρὸς Ὁρθὰς (2) ἡ ιδ· ὡσαύτως δὲ εἰ ἀπὸ τῆ κ Σημεῖου ἐπὶ τῆς αβ ἡ κα.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ὑπὸ βεζ, εἰ βει (3) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, αἴτε ὑπὸ εζγ, εἰ ὑπὸ γζκ ὡσαύτως, αἱ δύο ἅμα, ταῖς δυσὶν ἅμα (4) ἔσονται ἴσαι. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ βεζ, εἰ εζγ εἰσὶν ἴσαι (5) ἀλλήλαις, ἀφαιρεθῆσονται καταλείψουσι τὰς ὑπὸ ιεβ, εἰ κζγ (6) ἀλλήλαις ἴσαι. Ἐπὶ τοίνυν τῶν Τριγώνων εακ εἰ ζδι, ἡ μὲν ὑπὸ εακ, ἴση τῇ ὑπὸ δδι, ἴσων δειχθεῖσων τῶν κατὰ κορυφὴν αὐταῖς (7) ἡ δὲ ὑπὸ καε, ἴση (8) τῇ ὑπὸ ιδζ, ἄμφω γὰρ ὀρθαί· ἡ δὲ εη Πλευρὰ, ἴση τῇ ζι (κοινὴ γὰρ ἐκατέραις ἡ ζε), προστεθῆ δὲ ἡ ει ἴση τῇ κζ (9). Ἀρα (10) εἰ ἡ ὑπὸ εακ, ἴση τῇ ζιδ, ἦτε κα Πλευρὰ ἴση τῇ ιδ. Παραπλησίως δὲ εἰ ἐπὶ τῶν Τριγώνων ιεβ, κζγ, ἴση δειχθήσεται ἡ ιβ, τῇ κγ. Καὶ ἀφαιρεθῆσονται ἄρα (11) ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ λοιπαὶ γα, δβ· ἀλλὰ εἰ Κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς αβ· ἡ μὲν γα ἐκ κατασ., ἡ δὲ δβ, ὅτι ἴση τῇ κατὰ τὸ δ (ἐκ κατ.) Ὁρθῇ ἡ ἐναλλάξ ὑπὸ δββ (εἰς ὑποθ.). Ἰσάι ἄρα αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν αβ Κάθετοι γα, δβ, καὶ ἴσοις τοίνυν ἀπέχουσι τοῖς διακλήμασιν αἱ αβ, γδ εἰσὶ (12), εἰ Παραλλήλοι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΗ.

Ἐάν εἰς δύο Εὐθείας (αβ, γδ) Εὐθεῖα ἐμπίπτουσα (ἡ εζ), τὴν ἐκτὸς ᾠγωνίαν (τὴν ὑπὸ εηβ) τῇ ἐντὸς εἰ ἀπεναντίον, εἰ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (τῇ ὑπὸ ηδδ) ἴσων ποιῇ· ἡ τὰς ἐντὸς, εἰ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (τὰς ὑπὸ βηθ, εἰ ηδδ) ἴσας δυσὶν ὀρθαῖς ποιῇ, Παραλλήλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ Εὐθεῖαι αβ, γδ.

Ἐπειδὴ γὰρ ἡ ὑπὸ εηβ, ἴση τῇ ὑπὸ (13) ηδδ, ἡ δὲ ὑπὸ εηβ (14) ἴση τῇ αηθ. Ἀρα αἱ (15) ὑπὸ αηθ, εἰ ηδδ ἴσαι· εἰσὶ δὲ ἐναλλάξ. Ἀρα (16) Παραλλήλος ἡ αβ πρὸς τὴν γδ.

Πάλιν ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βηθ εἰ ηδδ (17) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Εἰσὶ δὲ εἰ

κ. 85.

Ἐπὶ τῶν Τριγώνων αακ, διζ, (19) βεζ + αεζ = γζε + εδδ, εἰ βεζ = γζε, (εἰς ὑποθ.) αακ = ιδδ. Καὶ καε = ιδζ (ἐκ κατ.) εἰ ζι = εκ, αεζ (κς.) καε = ζιδ, εἰ κα = ιδ. Ἀλλ' ἐπὶ τῶν Τριγώνων κγζ εἰ βι, ἡ ὑπὸ γζκ ὡς ἴση τῇ ὑπὸ ιεβ, ὡς ἴσαι ταῖς κατὰ κορυφὴν δειχθείσαις ἴσαις (11) καὶ κγζ = ιεβ ὡς δὲ δεικται· εἰ κζ = ει (ἐκ κατασ.) ἄρα εἰ κγ = ιβ· ὡς εἰ γα = βδ.

κ. 86.

κ. 87.

(1) γ. Βιβ. α. (2) ιδ. Βιβ. α. (3) ιγ. Βιβ. α. (4) Α' ε. ι. (5) Ε' ε. ὑποθ. (6) Α' ε. γ. (7) ιε. Βιβ. α. (8) Α' ε. ι. (9) Α' ε. β. (10) κς. Βιβ. α. (11) Α' ε. γ. (12) λς. ὁρισμ. Ταυτεῖον. (13) Ε' ε. ὑποθ. (14) ιε. Βιβ. α. (15) Α' ε. α. (16) Ε' ε. ὑποθ. (17) Β' ε. ὑποθ.

αὶ ὑπὸ αηθ, βηθ (1) δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι· αἱ δύο ἄρα ἅμα ληφθεῖσαι, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δυσὶν (2) ἅμα ληφθεῖσαις· κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ βηθ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αηθ (3) λοιπὴ τῇ ὑπὸ ηθδ ἴση ἔσται. Εἰσὶ δὲ ἐναλλάξ. Ἀ'ρα κτ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ε'κ μὲν οὖν τῆ Β'. μέρας, φανερόν ὅτι ἅπαν Ὁρθογώνιον ἐστὶ καὶ Παραλληλόγραμμον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΘ.

„Η' εἰς τὰς Παραλλήλους Εὐθείας (αβ, γδ) Εὐθεῖα ἐμπέπτουσα (εζ) τὰς
 „τε ἐναλλάξ Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ (τὴν ὑπὸ βηθ, τῇ ὑπὸ ηθγ, καὶ
 „τὴν ὑπὸ αηθ, τῇ ὑπὸ ηθδ), καὶ τὴν ἐκτός (ὑπὸ εηβ) τῇ ἐντός, καὶ ἀπεναντίον,
 „καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (τῇ ὑπὸ ηθδ) ἴσην, καὶ τὰς ἐντός, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ
 „μέρη (τὰς ὑπὸ βηθ, καὶ ηθδ) δυσὶν ὁρθαῖς ἴσας.

κ. 88.

Α'. Εἰ γὰρ μὴ, ἔστω μείζων φερέειπεν ἡ ὑπὸ αηθ, τῆς ὑπὸ ηθδ. Κοινὴ προσελήφθω ἡ ὑπὸ βηθ, καὶ ἔσονται αἱ δύο, ὑπὸ αηθ, καὶ βηθ, μείζονες (4) τῶν δύο ὑπὸ βηθ, καὶ ηθδ. Ἀ'ρα αἱ ὑπὸ βηθ, καὶ ηθδ, δυσὶν ὁρθῶν ἐλάσσονες εἰσὶ. Καὶ ἐκβαλλόμεναι ἄρα ἐπ' ἀπειρον κατὰ ταῦτα τὰ μέρη αἱ αβ, γδ συμπεσύνται, καὶ οὐδὲ Παράλληλοι (5) ἔσονται· ὅπερ ἐστὶ κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Γ'σι ἄρα ἡ ὑπὸ αηθ τῇ ὑπὸ ηθδ. Ο. Η. τὸ Α'.

Β'. Α'λλὰ ἡ ὑπὸ αηθ, ἴση (6) τῇ ὑπὸ εηβ. Καὶ ἡ ὑπὸ εηβ ἄρα ἴση (7) τῇ ὑπὸ ηθδ. Ο. Η. τὸ Β'.

Γ'. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ βηθ. Αἱ ἄρα ὑπὸ εηβ καὶ βηθ, ταῖς ὑπὸ βηθ καὶ ηθδ (8) ἴσαι εἰσὶν. Α'λλ' ἐκείναι (9) δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἀ'ρα καὶ αὗται. Ο. Η. τὸ Γ'.

Καὶ ὥδε μὲν Εὐκλείδης, κατὰ τὸν παρ' αὐτῷ τῶν Παραλλήλων ὀρισμὸν, καὶ τὸ ια'. Α'ξίωμα. Ο' δὲ Τακτέτιος ὁ τὸν ὀρισμὸν μετασκευάσας, καὶ τὸ Α'ξίωμα ἐκσυρίξας

Α' λ λ ω ς .

κ. 89.

Α'. Α'πὸ ξ καὶ λ, ἠχθωσαν Κάθετοι αἱ ξρ, καὶ λπ (10). Κάθετοι δὲ πάντως ἔσονται ἐπ' ἄμφω τὰς Παραλλήλους (11) αβ, καὶ γζ· καὶ δὴ, καὶ

(9) Α'ξ. ι. (3) Α'ξ. γ. (4) Α'ξ. δ. (5) Α'ξ. ια· καὶ ὁρ. λς.

(8) Α'ξ. β. (9) ιγ. Βιβ. α. (10) ιβ. Βιβ. α. (11) Α'ξ. ια.

ἀλλήλαις (1) ἴσαι. Ἀλλὰ καὶ ἴσα ἀπὸ τῶν Παραλλήλων (2) ἐναπολήφονται
μέρη, τὰ ρλ, πξ. Τὰ ἄρα Τρίγωνα φ, καὶ ψ, ἀμοιβαδὸν ἔσαι ἰσόπλευρα.
Ἄρα καὶ (3) αἱ ὑπὸ ρλξ, πξλ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· αἱ δὲ εἰσιν ἐναλλάξ.
Ἄρα. Ο. Η. τὸ Α'. Εὐδην δὲ ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ ἐναλλάξ αἱ ὑπὸ βλξ, καὶ
ὑπὸ λξγ, διὰ τὴν ΙΓ' τῇ Βιβλίᾳ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Β'. Η' ὑπὸ ηλβ ἴση τῇ ὑπὸ (4) αλξ· ἄλλ' αὕτη ἴση ἐδείχθη τῇ ὑπὸ
λξζ. Ἄρα (5) ἡ ὑπὸ ηλβ, ἴση τῇ ὑπὸ λξζ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναν-
τίον, κτ. Ο. Η. τὸ Β'. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ ηλρ, ἴση δειχθήσε-
ται τῇ ὑπὸ λξγ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Γ'. Η' ὑπὸ αλξ ἴση (6) τῇ ὑπὸ ζξλ. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ζξλ, καὶ γξλ (7)
δυτὶν Ὁρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αλξ, καὶ γξλ, δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσαι εἰ-
σίν. Ο. Η. τὸ Γ'. Οὕτω δὲ δειχθήσονται καὶ αἱ ὑπὸ βλξ, ζξλ δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσαι.

Π ό ρ ι σ μ α .

Εὐτεῦθεν τῷ Ἐρατοδένει ἐπόμενοι, τὴν τῆς γῆς Περίμετρον καταμε-
τρεῖν παιδευόμεθα. Παρατετηρηκώς γὰρ ἐκεῖνος Σούνης τῆς κατ' Αἴγυπτον
πόλεως, θέρως τρεπόμενον πρὸς Κάθετον ἐπηρτῆσθαι τὸν ἥλιον, Γνώμονι δὲ
χρησάμενος, καὶ ἀπὸ τῆς ἐν Αἰγύπτῳ Ἀλεξανδρείας, τῆς ὑπὸ τὸν αὐτὸν μο-
νονὰ Μεσημβρινὸν τελάσης, μοίρας σχεδὸν ἑπτὰ σὺν πεμπτημορίῳ ἀπέχον-
τα τὸν Φωστῆρα κατειληφώς, τοσάτον ἀμέλειτοι ἀπὸ τῆ ἐπ' αὐτὴν κατὰ κο-
ρυφὴν Σημεῖα ἀποκλίνοντα· λαβὼν δὲ καὶ τὴν μεταξὺ τῶν πόλεων διάστασιν,
σαδίων ὥσπερ 5000 τυγχάνουσιν, δυνάμει τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτάσεως τὴν ὅ-
λην τῆς γῆς Περίμετρον ἐδηράσατο λόγῳ τοιῷδε.

Ἐς ω α μὲν ἡ πόλις Σούνη, β δὲ ἡ Ἀλεξανδρεία, ἔνθα Γνώμων στήριζε-
ται πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸν Ὀρίζοντα ὁ βγ. Ἐς ωσαν δὲ καὶ αἱ δα, καὶ γη Ἀκτῖνες
αἱ ἀφ' ἧλιν πρὸς γε τὴν αἰδοθσιν ἀλλήλαις παράλληλοι· ἡ δὲ δα ἀκτίς ἐπὶ
τὸν κατὰ τὴν Σούνην Ὀρίζοντα Κάθετος, διὰ τῆς Κέντρος τῆς γῆς διῆσα· ἡ
δὲ γη Ἀκτίς ἐπὶ τὸν κατὰ τὴν Ἀλεξανδρείαν Ὀρίζοντα πλαγιάζουσα, διὰ τῆς
κορυφῆς τῆς Γνώμονος διήκεσα, καὶ μετ' αὐτῆς Γωνίαν τὴν ὑπὸ ηγζ, μοιρῶν δι-
λονότι $7\frac{1}{2}$ συνισῶσα· ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ηγζ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐναλλάξ (8) ὑπὸ αζβ,
ἧς μέτρον τὸ Τόξον αβ, τὸ μοιρῶν ὅν $7\frac{1}{2}$, τὴν τῆς γῆς Περίμετρον τοιαύτη
τινὶ ἀναλογίᾳ ἐξεύρατο. Ὡς ἔχουσι μοῖραι $7\frac{1}{2}$, πρὸς σαδίας 5000, οὕτως

Πόρισμα.

Παντός Πα-
ραλληλο-
γράμμου, αἱ
δύο Γωνίαι
αἱ ἐπὶ τὰ αὐ-
τὰ μέρη πάν-
τη μεταλαμ-
βανόμεναι,
δυσὶν Ὁρθαῖς
ἴσαι εἰσίν.
Καὶ αἱ τέτ-
ταρες ὀρθαῖς
τέτρασιν.

κ. 90.

ὅλος ὁ Κύκλος μοιρῶν ὧν 360, ἔχει πρὸς 250000. Τασέτων ἄρα καθ' ἑαυτὴν τὴν ὅλην τῆς γῆς Περίμετρον ὀρίζεον. Ο. Η. Ε.

Π ρ ό τ α σ ι ς Λ.

„Αἱ τῇ αὐτῇ Εὐθείᾳ (εζ) Παράλληλοι (αβ, γδ), καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ Παράλληλοι.

κ. 91.

Εὐπιπτόμεναι εἰς αὐτὰς Εὐθεῖαι ηκ, καὶ ἴση ἔσαι ἢ ὑπὸ αηθ τῇ (1) ὑπὸ ηθζ· καὶ αὕτη δὲ (2) ἴση τῇ ὑπὸ θκδ. Ἀρα (3) καὶ ἢ ὑπὸ αηκ, ἴση τῇ ὑπὸ ηκδ. Ἀρα αἱ Εὐθεῖαι αβ, καὶ γδ (4) ἀλλήλαις εἰσὶ Παράλληλοι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΑ.

„Διὰ τῆ δοθέντος Σημεῖος (α) τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (βγ) παράλληλον εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν (τὴν εζ).

κ. 92.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχόν Σημεῖον τὸ δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ αδ (5), καὶ συνεχάτω πρὸς τῷ α Σημεῖον τῆς δα τῇ ὑπὸ αδγ ἴση (6) ἢ ὑπὸ δαε, καὶ ἐκβεβλήθω ἐπ' εὐθείας τῆς αε, Εὐθεῖα ἢ αζ. Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο Εὐθείας τὰς βγ, εζ, ἐμπεσῶσα ἢ αδ, τὰς ἐναλλάξ Γωνίας, τὰς ὑπὸ εαδ, αδγ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα (7) ἢ εζ τῇ βγ. Ο. Ε. Π.

κ. 93.

Εἰς δὲ Πρᾶξιν ἀρκέσει ἀχθείσῃς τῆς αδ, Τόξον γράψαι τὸ ιπ, καὶ Κέντρον μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ, τὸ Τόξον ξφ. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ τέτῃς ἀφαιρεθῇ τὸ ξβ ἴσον τῷ ιπ, ἢ διὰ τῆ α καὶ β Εὐθεῖα ἔσαι ἢ ζητούμενη Παράλληλος.

Ἡ δειξις ἡρτῆται ἐκ τῆς ΚΘ'. τῆ Γ'. Βιβλίω.

Α' λ λ ω ς.

κ. 94.

Κέντρον τῷ τυχόντι ο Κύκλος γεγράφθω, διῶν μὲν τῇ Περιφερείᾳ διὰ τῆ δοθέντος Σημεῖος α, τέμνων δὲ καὶ τὴν δοθείσαν Εὐθεῖαν κατὰ Σημεῖα ξ καὶ π· τῷ δὲ Τόξῳ πα, ἴσον εἰλήφθω Τόξον τὸ ξν, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ αν· ἢ δὲ ἔσαι ἢ ζητούμενη Παράλληλος.

Ἡρτῆται δὲ ἢ δειξις ἐκ τῆς ΚΘ'. τῆ Γ'. Βιβλίω, καὶ τῆς ΚΖ'. τῆ ἀνὰ χεῖρας. Ταύτην δ' εὐρήσεις ἐν τῷ Λήμματι τῷ πρὸς τὴν Ιζ'. Πρότασιν, τῶν ἐκ τῶν τῆ Ἀρχιμήδου ἐκλελεγμένων Θεωρημάτων.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Ἀποδέδεικται ἡμῖν ἄρα τὰ ἐπὶ τῶν παραλλήλων Εὐθειῶν θεωρήματα, διὰ τε τῆ κατ' Εὐκλείδην Ἀξιώματος, καὶ ἐκείνου ἄνευ· ἐπεὶ πολλοῖς εἰς τάξιν Θεωρήματος, καὶ ἥ περ ἐκ ἀλόγως ἀνάγεται. Ἀλλὰ καὶ αἱ τρεῖς ἀνωτέρω Προτάσεις, ΚΖ'. ΚΗ'. καὶ ΚΘ'. φημι, ὅς ὁ Τακτικὸς μὴ ἐξηρημένως τῇ εὐκλείδει Ἀξιώματος προθέμενος δεῖξαι, εἰς τὰς ΚΗ. ΚΘ. ΚΖ. μετασῆτας συνέχεε, τῆς προσηκούσης παρ' ἡμῶν ἔτυχον χώρας καὶ τάξεως. Ἡ' δὲ οὖν καὶ τὸ Ἀξίωμα ἐκεῖνο πειρατέον ἀποδείξαι, τὸ συνεχῶς ἐν τοῖς ἐφεξῆς εἰς χρῆσιν παραληφθησόμενον.

Θ ε ώ ρ η μ α .

„Εὖν Εὐθεῖα (αγ) εἰς Εὐθείας (τάς αβ, καὶ γδ) ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς
 „καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη Γωνίας (ὕπὸ βαγ, καὶ δγα) δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονας
 „ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ Εὐθεῖαι αβ, καὶ γδ συμπεσύνται ἀλλήλαις, ἐφ' αἷ
 „μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Δ ε ῖ ξ ι ς ἡ κατὰ Πτολεμαῖον.

Λ ῆ μ μ α Α.

„Αἱ ἀπὸ δυοῖν Ὀρθαῖς ἴσων ἐκβαλλόμεναι καὶ συμπίπτουσι.

Εἰσὶ γὰρ Παραλλήλοι (1). Ἀ'ρα καὶ τὸ ἀνάπαλιν, αἱ ἀπ' ἐλασσόνων συμπίπτουσι. Χρήζει δὲ πάντως τὸ ἐπιφερόμενον δεῖξεως· οὐ γὰρ ἐξ ἀνάγκης ἔχει τ' ἀκόλουθον, ὅπως ἐπ' ἀμφοῖν τῶν ὑποθέσεων ἐνδοιάσειε τις μὴ ποτε ἐπίσης ἐπαληθεύοι τῶν Γραμμῶν τὸ ἀσύμπτωτον.

Λ ῆ μ μ α Β.

„Ἡ εἰς τὰς Παραλλήλους (αβ, γδ) Εὐθεῖα ἐμπίπτουσα (εζ), τὰς ἐντὸς
 „καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη Γωνίας (ὕπὸ βεζ, καὶ δεε) δυοῖν Ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ.

Εἰς τὴν ἡ παρ' Εὐκλείδην ΚΘ'. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τῆ εἰς ἀπόδειξιν ὑποκειμένη α'. Ἀξιώματος τῷ Στοιχειωτῇ κατεσκευάσαι, τὸ διάλληλον φεύγων τῶν ἀποδείξεων ὁ Πτολεμαῖος, ἄλλως ἀποδεικνύειν πειράται ὡς ἐφεξῆς.

Εἰ μὴ γὰρ, ἡ ἐλάσσονας, ἡ μείζονας. Ἀλλ' εἰ μὲν τῆτο, αἱ λοιπαὶ
 ὑπὸ αεζ, καὶ γζε, δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν (2)· ἀλλὰ καὶ αἱ

96. 95.

αὐταὶ (1). Εἰδ' ἐκεῖνο, αἱ λοιπαὶ μείζονες (2). Ἄλλα δὲ ἐλάχιστοι αἱ αὐταὶ (3). Ἄτοπον δὲ ἐκάτερον· δυσὶν ἄρα Ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ. Ταῦτα Πτολεμαῖος.

Ἀλλὰ μή ποτε παραλογισμὸς ἐν τέτοις λανθάνει (φησὶν ὁ Πρόκλος); Κωλύει γὰρ ὁδὸν τὸν ἀσυνπτῶτα λέγοντα τὰς ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο Ὀρθῶν ἐκβαλλομένας, τὰς μὲν τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ δύο Ὀρθῶν μείζους λέγειν, τὰς δὲ ἐπὶ ἑτέτερα δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονας.

Θεώρημα Α.

„Εὖν εἰς δύο Εὐθείας (τὰς αβ, γδ), Εὐθεῖα ἐμπίπτατα (ἢ εζ) τὰς ἐν-
 „τὸς δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν Ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ (τὰς ὑπὸ βεζ, καὶ
 „δεζ), αἱ Εὐθεῖαι (αβ, δὲ γδ) συμπεσάνται ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρ-
 „θῶν ἐλάσσονες (ὑπὸ βεζ, δὲ δεζ).

κ. 96.

Εἰ μὴ γὰρ, ἢ ἐπ' ἑτέτερα συμπεσάνται ἢ ἐφ' ἑτέρα, τὰ μέρη α δὲ γ,
 ἔνθα αἱ τῶν Ὀρθῶν εἰσὶ μείζονες, ἢ αἱ Ὀρθαῖς δυσὶν ἴσαι· προαδείκνυται δ' ἂν
 ἢ ἐφ' ἐκάτερα. Ἀλλ' εἰ μὲν ἐπ' ἑτέτερα, Παράλληλοι (4) ἔσονται αἱ Εὐθεῖαι
 αβ, γδ. Ἀλλὰ τοιαῦται ἔσαι, τὰς ἐντὸς δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν Ὀρ-
 θαῖς ἔχουσιν ἴσας (5)· ἔσονται ἄρα αἱ ὑπὸ εβζ, δὲ δεζ, δυσὶν Ὀρθαῖς δὲ ἴσαι,
 καὶ μή.

κ. 97.

Ἀλλὰ συμπίπτουσιν κατὰ τὸ η, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ ὑπὸ αεζ, γζε
 δυσὶν Ὀρθῶν μείζονες· καὶ Τριγώνον συζησεται τὸ ηεζ. Καὶ δὴ αἱ μὲν ὑπὸ
 ηεζ, δὲ ηζε, μείζονες εἰσι δυσὶν (6) Ὀρθῶν, αἱ δὲ ὑπὸ ηεζ, δὲ ζεβ (7) δυ-
 σὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ· μείζονες ἄρα αἱ ὑπὸ ηεζ, δὲ ηζε, τῶν ὑπὸ ηεζ, καὶ
 ζεβ· δὲ κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ ηεζ, μείζων ἢ ὑπὸ ηζε (8) τῆς ὑπὸ βεζ.
 Ἐπὶ ἄρα τῇ εζη Τριγώνῳ, ἐλάσσων ἢ ἐκτὸς ὑπὸ βεζ, τῆς ὑπὸ ηζε ἐντὸς
 δὲ ἀπεναντίον. Ὅπερ (9) ἔκ' ἐστίν.

Ὡσαύτως τὸ ἄτοπον δειχθήσεται καὶ τῶν ὑπὸ αεζ, δὲ γζε, ἐφ' ἃ
 μέρη συμβαίνειν λέγεται ἢ σύμπτωσις, Ὀρθῶν ὑποτιθεμένων· ἄλλως τε δὲ,
 δὲ ἀντιφάσκοντα τεδείσεται πρὸς τὸ προσληφθὲν Α'. Λήμμα.

Τελευταῖον ὅδ' ἂν ἐφ' ἐκάτερα συνέλθοιεν· ἢ γὰρ Εὐθεῖαι δύο χωρὶν
 ποτὲ περιέξῃσι (10).

Πᾶσα ἄρα ἀνάγκη συνελθεῖν αὐτάς, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρ-
 θῶν ἐλάσσονες.

Βιβ. α. (3) Ε' ἐπὶ ὑποθ. (4) Ὁρ. λε. (5) Λήμ. β. (6)
 (8) Δ' ἐ. γ. (9) ιε. Βιβ. α. (10) Δ' ἐ. ιγ.

Καὶ ταῦτα μὲν οὕτω σαφροῖς θεμελίοις ἐπακοδόμηται.

Δεῖξις ἡ κατὰ Πρόκλον.

Ἀξίωμα.

„Εἰ ἂν ἀφ' ἐνὸς Σημεῖς δύο ἐκβάλλωνται Εὐθεῖαι, Γωνίαν ποιῶσαι ἐπ' ἄπειρον, πᾶν πεπερασμένον Μεγέθος ὑπερβάλλει ἢ διάσασις αὐτῶν τῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλομένων.

Τῷ δ' Ἀξιώματι τάττω ἡ Ἀριστοτέλης ἐχρήσατο, δεικνύς τὸν κόσμον μὴ εἶναι ἄπειρον. Ἀπείρων γὰρ ἔσῶν τῶν ἀπὸ τῆ Κέντρου πρὸς τὴν Περιφέρειαν ἐκβαλλομένων, ἄπειρον τὸ μεταξύ. Πεπερασμένε γὰρ ὄντος αὐξῆσαι τὴν διάσασιν ἀδύνατον. Ὡς ἐκ ἄπειροι αἱ Εὐθεῖαι.

Λήμμα.

„Εἰ ἂν Παραλλήλων Εὐθειῶν τὴν ἑτέραν (αβ), Εὐθεῖά τις (ἢ εζ) τέμνῃ· τεμεῖ προεκβληθεῖσαν ἢ τὴν λοιπὴν (γδ).

Εἴπερ γὰρ Εὐθεῖαι δύο εἰσὶν ἀφ' ἐνὸς Σημεῖς τῇ ζ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι, αἱ ζα, ζθ, παντὸς Μεγέθους μείζονα ἔχουσι διάσασιν (1)· ὥς ἐκ τῆς τέτῃ ὅσον ἐστὶ τὸ μεταξύ τῶν Παραλλήλων· ὅταν οὖν μείζον ἀλλήλων διασῶσι τῆς τέτῃ διαστάσεως, τεμεῖ ἢ ζθ τὴν γδ. Εἰ ἂν ἄρα Παραλλήλων τὴν ἑτέραν τέμνῃ τις Εὐθεῖα κτ

κ. 98.

Θεώρημα.

„Ἐῶσαν δύο Εὐθεῖαι (αἱ αβ, γδ), ἢ ἐμπίπτέτω εἰς αὐτὰς ἢ εζ, ἢ ἐλάσσονας δύο Ὀρθῶν ποιῶσα, τὰς ὑπὸ βεζ, δζε· λέγω ὅτι συμπεσύνται αἱ Εὐθεῖαι κατὰ ταῦτα τὰ μέρη, ἐφ' ἃ αἱ τῶν δύο Εὐθειῶν εἰσὶν ἐλάσσονες.

Εἰπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ βεζ, δζε ἐλάσσας εἰσὶ δύο Ὀρθῶν· τῇ ὑπεροχῇ τῶν δύο Ὀρθῶν ἔσω ἴση ἢ ὑπὸ θεβ (2), ἢ ἐκβεβλήσῃ ἢ δε (3) ἐπὶ τὸ κ. Εἴπερ οὖν εἰς τὰς κθ, γδ ἐμπίπτωκεν ἢ εζ, ἢ ποιεῖ τὰς ἐντὸς δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσας, τὰς ὑπὸ θεζ, ἢ δζε, Παραλλήλολοι εἰσιν αἱ (4) θκ, γδ Εὐθεῖαι. Ἀλλὰ τέμνει τὴν κθ (5) ἢ αβ, τεμεῖ ἄρα (6) ἢ τὴν γδ.

κ. 99.

(1) Διὰ τὸ Α'ξ. (2) κγ. Βιβ. α. (3) Α'τ. β.
(6) Διὰ τὸ Λήμμα.

Α' Ζ' ἔδὲ ταύτοις ἔοικεν ἀγαπᾶν ὁ νεώτερος Τακνέτιος, ἐπαπορεῖ δὲ δι' ὃν λόγον ἐν ὀρισμῷ λς'. φθάσαι ἐξέθετο.

Δεῖξις ἡ κατὰ Κλάβιον.

Λήμμα Α.

κ. 100.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς Εὐθείας βθ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεΐσης τῆς βο, Γωνία συζυγῆ ὀξεῖα ἢ ὑπὸ βοφ, αἱ ἄλλαι Κάθετοι ρπ, τσ, αἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βθ ἀγόμεναι, καὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς οφ περατῆμεναι, αἱ ἐλάττονες, καὶ ἐλάττονες ἔσονται.

Ἐπεὶ ἀχθεΐσης τῆς βπ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς οφ (ἢ καὶ ἐπὶ τὰ μέρη τῆς ὀξεῖας Γωνίας κείσεται· δεῖ γὰρ τὰς δύο τὰς ὑπὸ βοπ, καὶ βπο, δυσὶν Ὄρθων εἶναι ἐλάσσονας (1)· ἀδύνατον δὲ τὴν μὲν Ὄρθὴν εἶναι, τὴν δὲ Ἀμβλεῖαν ἐπὶ τῇ Τριγώνῳ πβο)· εἶτα καὶ ἐπὶ τῆς βθ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεΐσης τῆς πρ, καὶ τῆς ρσ ὁμοίως πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς οφ, καὶ τῆς στ ὡσαύτως πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βθ, κτ'. φανερόν ὅτι ἡ μὲν βο, μείζων (2) ἔσται τῆς βπ, ἢ δὲ τῆς πρ, ἢ δὲ τῆς ρσ, ἢ δὲ τῆς στ, ὡς ὑποτείνεσθαι τὴν Ὄρθην, ὑποτείνεσθαι τὴν Ὄξεϊαν.

Λήμμα Β.

Τῆς ὑπὸ τσπ Ἀμβλείας ἄσης, αἱ πρ, οβ, κτ' αἱ πρὸς Ὄρθας ἔσται ἐπὶ τῆς αὐτῆς βθ, ἐφ' ἃ μέρη ἐστὶν ἡ Ἀμβλεῖα, αἱ μείζονες ἔσονται, καὶ μείζονες· οἷον ἡ μὲν σρ, αἱ μείζων τῆς στ, τῆς δὲ σρ μείζων ἡ πρ, τῆς δὲ πρ μείζων ἡ βπ, τῆς δὲ βπ, ἡ βο, ὡς ἐν τῷ α'. Λήμματι.

Λήμμα Γ.

Ἐπειδὴ τοῖνον ἐπὶ τῆς βτ πρὸς ὀρθὰς ἤχθησαν ἴσαι αἱ τσ, βψ, ἐπιζευχθεΐσης τῆς σψ, αἱ ὑπὸ σψβ, καὶ ψστ Ὄρθαι ἄμφω ἔσονται. Εἰ μὴ γάρ, ἂν ἢ ἑτέρα Ὄξεϊα ἢ, ἢ γὰρ Ἀμβλεῖα, αἱ Κάθετοι ψβ, καὶ στ, ἴσαι μὲν οὐ, ἀντιστοίχῳ εἶεν, καὶ ἡ μὲν μείζων, ἢ δὲ ἐλάσσων. Ὡς ἐπὶ τῶν ἀνωτέρων Λημμάτων.

Θεώρημα.

Ἐὰν Εὐθεῖα ἡ αο, εἰς Εὐθείας τὰς οδ, αλ ἐμπίπτασα, τὰς ὑπὸ

αοδ, ε σαλ, δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσοναι ποιῇ, λέγω δὲ ὅτι προεκβληθεῖ-
σαι αἱ οδ καὶ αλ, συμπεσύνται ἐφ' αὐτὰ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρθῶν ἐ-
λάσσονες.

Εἰάν γὰρ ἐπὶ τὰ μέρη τῆς ὑπὸ αοδ Ὀξείας, πρὸς ὀρθάς ἀχθῇ ἀπὸ τῆς
α Σημεῖς ἢ αβ ἐπὶ τῆς οδ, λιφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς αλ, τυχὸν Σημεῖον τὸ ε,
ἐπὶ δὲ τῆς αβ πρὸς ὀρθάς ἀχθῇ ἢ εζ, εἴτα λιφθῇ ἢ ἐκ ἴση τῇ αε, καὶ
προαχθείσῃς τῆς εμ ἴσης τῇ εζ, συζευχθῇ ἢ κμ· ἴση ἔσαι καὶ αὕτη τῇ
αζ, ἥτε ὑπὸ εμκ, ἴση τῇ Ὀρθῇ ὑπὸ αζε (ὅτι αἱ δύο εκ, εμ, ἴσαι ταῖς
δυτὶν αε, εζ, περιέχονσι δὲ ε Γωνίας ἴσας τὰς κατὰ τὴν κορυφὴν ε). Λιφθεῖ-
σα δὲ ἢ ζη ἴση τῇ αζ, ἴση ἔσαι εἰς τῇ μκ· καὶ συζευχθεῖσα ἢ ηκ, πρὸς ὀρ-
θάς σήσεται ἐπὶ τῆς αη (ὡς δὴλον ἐκ τῆ γ'. Λήμματος), τῶν μκ, ζη ἴσων τε
ἔσων ἀλλήλαις, ε πρὸς ὀρθάς ἐπὶ τῆς ζμ ἰσαμένων.

Εἰάν ἄρα ε τῇ ακ, ἴση λιφθῇ ἢ κλ, ε τῇ αη ἴση ηθ, προαχθείσῃς
τῆς ηκ ἐπὶ τὸ ν, ε τῆς κν ἴσης λιφθείσῃς τῇ ηκ, ἐπιζευγνυμένη ἢ λν, ἴση
δειχθήσεται τῇ αη, ἥτε πρὸς τῷ ν Γωνία Ὀρθή, καθάπερ ἢ ὑπὸ αηκ. Καὶ
εἰάν ἐπιζευχθῇ ἢ λθ, πρὸς ὀρθάς σήσεται ε αὕτη ἐπὶ τὴν αθ. Κείσθω οὖν
ἢ λγ ἴση τῇ αλ, ε θι ἴση τῇ αθ· εἰάν ἐπιζευχθῇ ε ἢ γι, πρὸς ὀρθάς ε
αὕτη σήσεται ἐπὶ τὴν αι.

Ἀλλὰ γὰρ λιφθείσῃς τῆς μὲν ζη ἴσης τῇ αζ, ε τῆς ηθ ἴσης τῇ αη, ε
τῆς θι ἴσης τῇ αθ, ε οὕτως ἐφεξῆς, ἔσαι ποθ' ὅτε ἢ αι, μείζων ἔσαι τῆς
αβ, ε οὕτως ἢ βδ ἐντὸς τῆ Τριγώνου αἰγ ἐνχεθήσεται· εἰάν ἄρα προαχθεῖν
ἢ βδ, ἔξω τέως τῆ πεπερασμένη διαστήματος τῆ Τριγώνου γενήσεται. Ἐπεὶ
δὲ ἐκ αὐτῶν συνέλθοι ποτὲ τῇ βάσει γγ, τῇ διὰ τὰς ὑπὸ δβι, ε γιβ τὰς δυτὶν
ὀρθαῖς ἴσας ἔσας, πρὸς αὐτὴν Παραλλήλω (1), συμπεσεῖται ἄρα ἢ βδ τῇ
αγ Πλευρᾷ κατὰ τὸ υ. Ἀρ' οὖν αἱ οβδ, ε αλ, εἰς ας ἐμπίπτει ἢ αο, ἢ
ἢ αβ, ἀπ' ἐλαττόνων ἢ δυοῖν Ὀρθῶν προεκβαλλόμεναι ἐκ εἰσὶν ἀσύμπτωτοι.

Καὶ αὕτη μὲν ἢ κατὰ Κλάβιον ἀπόδειξις, ἣν μηδαμῶς μὲν ἠρτῆσθαι τῆς
θεωρίας τῶν Παραλλήλων ὁ Τακνέτιος ἔφησεν, εἶναι δὲ διεξοδικωτάτην τε,
ε ἐργωδεςτάτην.

Δεῖξις ἢ κατὰ Τακνέτιον.

κ. 101.

Κείσθωσαν αἱ ὑπὸ γβα, δαβ δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονες, ε ἔσωσαν αἱ ὑπὸ
γβα, φαβ δυτὶν Ὀρθαῖς ἴσαι (συζήσης ἀμέλειτοι τῆς ὑπὸ φαβ ἴσης τῇ (2)

ὕπὸ βγ· καὶ ἔσονται αἱ βγ, ἀφ' Παράλληλων (1), ἡ δὲ ὑπὸ φαβ, μείζων (2) τῆς ὑπὸ δαβ, τῇ ὑπεροχῇ τῆς ὑπὸ φιδ. Τέτων οὕτω κειμένων, προσληπτέον δίκην Ἀξιώματος κατ' αὐτὸ τὸ γινώριμον ἔχοντος, ὅτι μεταξὺ τῶν αδ καὶ ἀφ' ἐπ' ἄπειρον προηγμένων, ἐξέσαι τῇ αμ Παράλληλον ἀγαγεῖν τὴν ψφ, ἣτις μείζων εἶναι τῆς αβ. Εἰλήφθω τῇ φψ ἰση ἡ αρ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ φρ. Ἐπεὶ τοίνυν αἱ αρ, φψ Παράλληλοί εἰσιν, αἱ ἐναλλάξ ὑπὸ φψα, καὶ ραψ, ἔσονται (3) ἴσαι. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ Πλευραὶ φψ, ψα, ἴσαι ταῖς ρα, αψ (4). Ἀρα καὶ αἱ ὑπὸ ρφα, φαψ (5) ἴσαι εἰσὶ. Καὶ ἡ ρψ Παράλληλός (6) ἐστὶ τῇ αφ. Ἀλλὰ καὶ ἡ βγ Παράλληλός ἐστὶ τῇ αφ. Ἀρα αἱ ρψ, καὶ βγ (7) Παράλληλοι εἰσιν. Ἐστὶν ἄρα ἡ βγ καὶ παράλληλος τῇ ρψ, καὶ ἐγκεκλεισμένη τῷ Τριγώνῳ αρψ· καὶ δι' ἐπ' ἄπειρον προεκβαλλομένη, καὶ ἄτε τῇ Παραλλήλῳ ρψ συμπεσεῖν δυναμένη, ἡ δὲ ἐπὶ τὸ α γενέσθαι (8), τῇ αδ προεκβληθεῖσιν ἡ βγ ἐξ ἀνάγκης συμπεσεῖται. Ο. Ε. Δ.

Αὐτὸς δὲ τῆτο ὧδέ πως δείκνυμι.

α 102.

Διὰ τῆ δ Σημεῖς ἦχθω (9) ἡ δὲ Παράλληλος πρὸς τὴν αβ· προεκβεβλήθω δὲ ἐπ' εὐθείας τῇ δε ἡ εφ (10) ἐπ' ἄπειρον, ὁμοίως δὲ καὶ τῇ δγ ἡ γχ, καὶ ἦχθω Κάθετος ἀπὸ τῆ α ἐπὶ τὴν δγ προεκβληθεῖσαν (11) ἡ αδ. Μεταξὺ δὲ τῶν δχ, δφ εἰς ἄπειρον διαζευγνυμένων, κείθω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς δχ ἡ μλ (12) μείζων τῆς αδ· καὶ ἀφηρόθω ἀπὸ τῆς μλ μείζονος ἡ ρλ ἰση τῇ (13) ἐλάσσονι αδ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ρα, ἣτις (μεταξὺ τῶν Σημείων ρ καὶ α παρεμπέπτεσαν) τεμεῖ τὴν δφ κατὰ τὸ ζ, διὰ δὲ τὰς ἴσας Κάθετας (ὁρ. λς.) αδ, ρλ, Παράλληλός ἐστὶ πρὸς τὴν δλ. Διὰ γὼν τῷ Σημεῖς ζ, ἦχθω Παράλληλος τῇ αγ ἡ ζκ. Αὗται δὲ ἔσονται καὶ ἴσαι ἀλλήλαις· εἰάν γάρ ἀπὸ ζ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ ἐπὶ τῆς δλ ἡ ζι (14), ἐπὶ τῶν Τριγώνων κζι, γαδ, αἱ ὑπὸ ζκι, καὶ ζικ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ αγδ, καὶ αδγ ἑκατέρω ἑκατέρω (15). Ἀλλὰ καὶ ἡ Πλευρὰ ζι ἰση τῇ αδ (16). Ἀρα (17) καὶ ζκ ἰση τῇ αγ. Καὶ Γωνία δὲ ἡ ὑπὸ βαγ ἰση (18) τῇ ὑπὸ δεγ, ἡ δὲ τῇ ὑπὸ εζκ. Ἀρα καὶ ὑπὸ βαε (19) ἰση τῇ ὑπὸ εζκ.

Ὡς ἐπεὶ αγ δέδεικται ἰση τῇ ζκ, ἐφαρμόσθωσι (20). Καὶ Γωνία δὲ ἡ ὑπὸ

(1) κη. Βιβ. α. (2) Ὁρ. β. (3) κβ Βιβ. α. (4) Εκ κατ. (5) δ. Βιβ. α. (6) κζ. Βιβ. α. (7) λ. Βιβ. α. (8) Α' Ε. γ. καὶ ιδ. (9) λα. Βιβ. α. (10) Α' τ. β. (11) β. Βιβ. α. (12) ρβ. Βιβ. α. (13) γ. Βιβ. α. (14) ιβ. Βιβ. α. (15) κβ. Βιβ. α. καὶ διὰ (16) αβ. Βιβ. α. (17) κβ. Βιβ. α. (18) κβ. Βιβ. α. (19) Α' Ε. γ. (20) Α' Ε. γ.

βαε, ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ εζι ὁμοίως ἐφαρμόσεται· ὡσαύτως δὲ καὶ ὑπὸ αὐτῇ τῇ ὑπὸ ζκδ· καὶ εἰ ἂν ἄρα νοήσης τὸ βαγδ κείμενον ἐπὶ τῇ δζκ Τριγώνῳ, ὥς τὴν αὐτὴν πεσεῖν ἐπὶ ζκ, καὶ αβ πεσεῖται ἐπὶ ζδ, καὶ γδ ἐπὶ κδ. Ἀλλ' αἱ ζδ, κδ, οὕτως αὐταὶ εἰσιν αἱ αβ, γδ προσκβληθεῖσαι, καὶ συμπίπτουσαι ἐπὶ τὸ δ. Ἐάν ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α Α'.

Ἐκ δὲ τὰτα φανερόν τὰς μὴ Παραλλήλους Εὐθείας προσκβαλλομένας τέως συμπίπτειν· περὶ οὗ ἦν ἐνδοιάζειν, διὰ τὸν ἐπαχθέντα λόγον Ορίσμ. λς'. Ἐΰσωσαν γὰρ Εὐθεῖαι μὴ Παράλληλοι αἱ αβ, γδ, εἰς αἷ ἐμπίπτετα ἡ αὐτὴν· διὰ δὲ τῇ γ ἡχθω ἡ γε Παράλληλος πρὸς τὴν (1) αβ. Ἔσονται δὲ αἱ ὑπὸ εγα, καὶ βαγ (2) δυσὶν Ορίσμ. ἴσαι· ἄρα αἱ ὑπὸ δγα, καὶ βγ (3) δυσὶν Ορίσμ. εἰσιν ἐλάσσονες. Ἀρα διὰ τὸ προαποδεδειγμένον Θεώρημα, αἱ αβ, καὶ γδ συμπεσύνται.

Π ό ρ ι σ μ α Β'.

Φανερόν δὲ καὶ ὅτι εἰ ἂν Εὐθεῖα ἡ γδ ἐπ' ἀπειρον προσκβάλλοιτο, ἀπείρους Εὐθείας ἀλλήλαις Παραλλήλους, ἐπ' ἀπειρον καὶ αὐτὰς (δεῖσαν) προσκβαλλομένας τεμεῖ, τὰς αβ, εζ, ηδ, ικ. κτ. Εἰ γὰρ ἡ αβ Παράλληλος τῆς εζ ἐπίσης (4) ἀφίσταται, τέμνεται δὲ ὑπὸ τῆς γδ, καὶ ἄρα σώζει καὶ πρὸς αὐτὴν τὸ παράλληλον. Ἡ ἄρα δγ ἡδὲ πρὸς τὴν εζ ἔσται Παράλληλος (εἰ γὰρ, ἦν ἂν (5) καὶ πρὸς τὴν αβ ἦν τέμνει· ὅπερ ἂν ἔσι (6))· τέμνει ἄρα ἡ δγ καὶ τὴν εζ. Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον μηδὲ πρὸς τὴν ηδ, ἢ ικ, κτ. παράλληλος ἔσται ἡ δγ, τέμνει καὶ ταύτας προσκβληθεῖσα, καὶ ἀπείρους Παραλλήλους ἐπ' ἀπειρον.

Πρότασεως ΔΒ'. Μέρος Α'.

„Παντὸς Τριγώνου μιᾶς τῶν Πλευρῶν προσκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς Γωνία (ὑπὸ αὐτῇ), δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον (ταῖς κατὰ τὸ α καὶ β) ἴση ἔσται.

Ἡχθω διὰ τῇ γ τῇ βα Παράλληλος ἡ γε (7)· ἐπεὶ δὲ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτει ἡ αὐτὴν, ἔσται (8) ἡ ὑπὸ εγα, ἴση τῇ ὑπὸ γαβ· ὡσαύτως ἐμπιπτήσης καὶ τῆς βδ, ἔσται (9) καὶ ἡ ὑπὸ δγε, ἴση τῇ ὑπὸ γβκ. Ἡ ἄρα ὅλη ὑπὸ αὐτῇ, ἴση δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. Ο. Ε. Δ.

(1) λα. Βιβ. α. (2) κδ. Βιβ. α. (3) Ορί. δ. (4) Ορί. λς. (5) λ. Βιβ. α. (6) διὰ τὰ Πρόρ. τὸ ἀνωτ. (7) λα. Βιβ. α. (8) κδ. Βιβ. α. (9) α. Βιβ. α.

Πορίσματα.

- A. H' ἄρα ἐκτὸς ἐκατέρας τῶν ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον μείζων. Ἐστὶ δὲ ἡ παρ' Εὐκλείδῃ Ιζ'. ἥς τὴν δεῖξιν εἰς τόδε ὁ Τακνέτιος ὑπερέθετο.
- κ. 106. B. Καὶ Γωνιῶν τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως αβ, μείζων τῆς ὑπὸ αβγ περιεχούσης, ἢ ὑπὸ αδβ περιεχομένη. Προαχθείσης γὰρ τῆς βδ κατὰ τὸ ε, ἢ ὑπὸ βδα μείζων τῆς ὑπὸ δεα, ἢ δὲ τῆς ὑπὸ εγδ· τὸ δὲ ἦν τὸ δεύτερον τῆς ΚΑ'. Πρωτ. μέρος, ὅπερ ἐνταῦθα δεῖξαι ὁ Τακνέτιος ὑπέθετο.
- κ. 107. Γ. Ὡς ἂν Εὐθεΐαι αἱ αβ, αγ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας δε, ἀπὸ τῆς αὐτῆς Σημεῖα α σαδῶσιν ἢ μὲν πρὸς ὀρθὰς ἢ αβ, ἢ δὲ πλαγίως ἢ αγ, κείσεται μὲν ἡ Κάθετος αβ, ἐφ' ἧς μέρη εἰσὶν ἡ ὀξεῖα Γωνία ὑπὸ αβγ, ἢ δὲ μὴ πρὸς ὀρθὰς, τὴν ὀρθὴν Γωνίαν ὑπὸ αβγ ὑποτενεῖ. Εἰ μὴ γὰρ, ὑποτεινέτω μὲν (κειμένη ἐνθα ἢ αζ) ἡ Κάθετος, τὴν ὑπὸ αγζ Ἀμβλείαν, ὑποτεινέτω δὲ ἢ μὴ πρὸς ὀρθὰς αγ, τὴν ὑπὸ αζγ Ὀξεῖαν· καὶ ἔτιωσ' ἔσται ἢ μὲν ὑπὸ αζε Ὀρθή (1) μείζων τῆς ὑπὸ αγε Ἀμβλείας, ἢ ἐκτὸς τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ἢ δὲ ὑπὸ αγδ Ὀξεῖα (2) μείζων τῆς ὑπὸ ἀζγ Ὀρθῆς, ἢ ἐκτὸς τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον (3)· τῆτο δὲ ἄτοπον (4). Ἄρα κτ.

Προτάσεως ΑΒ'. Μέρος Β'.

- „Καὶ αἱ ἐντὸς τῶν Τριγώνων Γωνίαι δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι. Διὸ καὶ μοίρας 180 συναποτελεῶσιν.
- κ. 108. Μιᾶς γὰρ τῶν Πλευρῶν αβ κατὰ τὸ ζ προεκβληθείσης, ἢ ἐκτὸς ὑπὸ ζβγ, δυσὶ ταῖς ἐντὸς (5) καὶ ἀπεναντίον α καὶ γ ἴση ἐστὶ. Κοινὴ γὰρ προσεθείσης τῆς ὑπὸ γβα, δυσὶ ταῖς ὑπὸ ζβγ, γβα (6) αἱ τρεῖς τῶν Τριγώνων ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλ' αἱ δύο δυσὶν Ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι (7). Καὶ αἱ τρεῖς ἄρα (8) τὰ Τριγώνων ἐντὸς Γωνίαι δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

Α' λ λ ω ς.

- κ. 109. Διὰ τῆς Γωνίας γ ἡχθω ἐξ παράλληλος τῇ ὑποτενύσει αβ (9). Καὶ ἐπεὶ αἱ ἐναλλάξ η καὶ κ, καὶ αἱ ἄλλαι θ καὶ λ ἴται (10) ἀλλήλαις εἰσὶν· αἱ δὲ τρεῖς η, ι, θ (11) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἄρα (12) καὶ αἱ τρεῖς ι, κ, λ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

(1) Ε' ἐ ὑποθ. (2) Ε' ἐ ὑποθ. (3) Πόρ. α. (4) Ο' ρ. ιδ. α. ιε'. (5) Διὰ τὸ α'. Μέρος. (6) Ε' β. (7) ιγ. Βιβ. α. (8) Α' ε. α. (9) λα. Βιβ. α. (10) κδ. Βιβ. α. (11) Α'. (12) Α' ε. α.

Εγὼ δὲ καὶ Ἀλλως δείξω.

Ληφθήτω ἐπὶ μιᾶς τῶν Πλευρῶν, αἶον τῆς αβ, τυχὸν Σιμεῖον τὸ ε, κ. 110.
 καὶ ἐπεξεύχθω ἡ γε. Διὰ μὲν οὖν τὸ Α'. Μέρος ἡ ὑπὸ γεβῖτη ταῖς ὑπὸ εαγ,
 καὶ αγε· ὡσαύτως ἡ ὑπὸ γεα, ἴση ταῖς ὑπὸ εβγ, καὶ βγε. Αἱ δύο ἄρα αἰ ἐφε-
 ξῆς πρὸς τῷ ε, τρισὶ ταῖς ὑπὸ βγα, καὶ γαβ, καὶ αβγ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' ἐκεί-
 ναι δυσὶν Ὁρθαῖς (1) ἴσαι εἰσίν. Ἀρα καὶ αὗται.

Πορίσματα.

Οὐτινοσὺν εὐθυγράμμω Τριγώνῳ, αἱ τρεῖς Γωνίαι ἅμα ληφθεῖσαι, εἰ- 4.
 σὶν ἴσαι ταῖς οὐτινοσὺν Εὐθυγράμμω τρισὶ Γωνίαις ἅμα ληφθεῖσαις.

Καὶ εἴαν ἐν Τριγώνῳ ἡ μία Ὁρθὴ ᾗ, ἡ μείζων Ὁρθῆς· αἱ λοιπαὶ Ὁξεῖαι E.
 εἰσίν, ἡ δὲ Γωνία ὑφ' ἣν ἡ μὴ μεγίστη τῶν ἐν τῷ Τριγώνῳ Πλευρῶν ὑποτεί-
 νει, αἰέποτε (2) Ὁξεῖα ἐστὶ.

Μιᾶς δὲ ἐν τῷ Τριγώνῳ Ὁρθῆς ἔσης, δύο ἅμα αἱ λοιπαὶ μίαν Ὁρθὴν ς.
 συναποτελεῖσι.

Καὶ ἡ δυσὶ ταῖς λοιπαῖς ἅμα ἐν τῷ Τριγώνῳ ἴση ἔσται Γωνία, Ὁρθὴ ἔσται. Z.

Δοθεῖσιν τῶν μοιρῶν μιᾶς τινος τῶν Γωνιῶν, φανερόν ὅσας μοίρας καὶ δύο H.
 αἱ λοιπαὶ ἅμα συναποτελεῖσι· καὶ ἀνάπαλιν.

Εἴαν Τριγώνῳ αἱ δύο Γωνίαι, ἥτοι ἑκατέρω ἰδίᾳ, ἡ ἅμα, Τριγώνῳ ταῖς Θ.
 δυσὶ Γωνίαις, ἥτοι ἑκατέρω ἰδίᾳ, ἡ ἅμα ἴσαι ὦσι, καὶ ἡ λοιπὴ τῇ λοιπῇ ἴση
 ἔσται. Εἴ δὲ τέτε τῷ Πορίσματος καὶ τῆς Κς. τὸ Β'. Μέρος ῥαδίως δεικνύται.

Δυσὶν Τριγώνων εἴαν Γωνία Γωνία, μία μὲν ἴση ᾗ, καὶ αἱ λοιπαὶ ταῖς λοι- I.
 παῖς ἴσαι ἔσονται, εἴτε ἑκατέρω ἑκατέρω, εἴτε καὶ ἅμα.

Τῆς κατὰ κορυφὴν Γωνίας τῇ ἴσοσκελὲς ὀρθῆς ἔσης, τῶν λοιπῶν πρὸς 1A.
 τὴν Βάσιν (3) ἡμίσεια Ὁρθῆς ἑκατέρω ἔσται. Καὶ τῇ ἴσοσκελὲς αἱ πρὸς τὴν
 Βάσιν Γωνίαι αἰεὶ ὀξεῖαι. Καὶ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῇ ἴσοσκελὲς ἐπὶ τὴν Βάσιν
 ἀγομένη Κάθετος (4) ἐντὸς πίπτει τῷ Τριγώνῳ.

Ἡ τῇ ἴσοπλευρῷ Τριγώνῳ Γωνία, τριτημόρια δύο Ὁρθῆς μιᾶς περιέχει, 1B.
 ἥτοι τριτημόριον ἐν (5) δυσὶν Ὁρθῶν· ὥς ἐπεὶ Ὁρθαὶ δύο μοιρῶν εἰσὶν 180,
 ἔσται δὲ τριτημόριον δυσὶν Ὁρθῶν, ἥτοι ἡ τῇ ἴσοπλευρῷ Γωνία μοιρ. 60. Ταῦ-
 τα δὲ τριτημόριά ἐστὶ δύο Ὁρθῆς μιᾶς, ἥτις μοιρῶν ἐστὶν 90.

κ. 111. ΙΓ. Ἐντεῦθεν ἡ Γωνία ὀρθήν τὴν ὑπὸ βαγ, τριχοτομῆσαι ῥάδιον, Τριγωνον ἰσόπλευρον τὸ αδγ ἐπὶ τῆς ἐτέρας τῶν Πλευρῶν αγ (1) συστήσαντας, ἡ τὴν ὑπὸ δαγ Γωνίαν (2) δίχα τεμόντας. Τῆς γὰρ ὑπὸ δαγ δύο τριτημόρια Ὄρθῆς (3) περιεχάσῃς, εὐδὴλον ὅτι τῶν ὑπὸ βαδ, ἡ δαε, ἡ εαγ ἐκάστη Ὄρθῆς ἐστὶ τριτημόριον.

κ. 112. ΙΔ. Ἀπασῶν τῶν ἀπὸ τῆ αὐτῆς Σημεῖα α, ἐπίτινα Εὐθείαν βγ ἀχθῆναι δυναμένων Εὐθειῶν, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ Κάθετος αδ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ αεδ Γωνία ὀξεία, ἡ δὲ ὑπὸ αδε ὀρθή (4) ἡ ἡ αδ ἐλάσσων ἔσται (5) τῆς αε ἡ οίασθαι ἄλλῃς.

ΙΕ. Ἀφ' ἐνόσγε Σημεῖα ἐπὶ μίαν Εὐθείαν, μίαν μόνην ἐξέσαι πρὸς ὀρθὰς ἀγαγεῖν.

Ις. Διὰ δὲ τῆ Α'. Μέρους τῆς ἀνά χειρας Προτάσεως, ἡ τὴν ἀξέρων Παράλλαξιν, τῆς τῆς τῆ ἀληθείας ἀπὸ τῆ φαινομένης τότε διαφορὰν διορίζειν καταμανθάνομεν.

κ. 113. Ἐξω γῆς Κέντρον τὸ α, β δὲ ἔνθα ὁ παρατηρῶν, ἡ δβγ ἡ τῆ ἀξέρων γωνιώδης Διάστασις ἡ ἀπὸ τῆ κατὰ κορυφὴν Σημεῖα δ τῷ παρατηρῶντι καθορῶμένη· ἔξω δὲ γωνιώδης Διάστασις ἡ ὑπὸ δαγ ἡ ἀληθείας. Τῆ μὲν οὖν αβγ Τριγώνῃς ἡ ἐκτὸς Γωνία ὑπὸ δβγ ἡ διὰ τῆς παρατηρήσεως δεδομένη, δυτὶ ταῖς ἐντὸς ἡ ἀπεναντίον ὑπὸ βαγ, ἡ βγα ἴση (6) ἐστίν. Οὐκοῦν ἡ ὑπὸ βγα, ἐστὶ τῶν ὑπὸ δβγ, ἡ δαγ διαφορά. Ἐάν οὖν ἡ ὑπὸ δαγ ἡ δι' ἐπιλογισμῶ γινωσκομένη, ἀπὸ τῆς ὑπὸ δβγ, ἡν ἡ παρατήρησις δίδωσιν ἀφαιρεθῇ, ἡ τῆτων τῶν Γωνιῶν διαφορὰ (ἡτοι ἡ ὑπὸ βγα) ἡν Παράλλαξιν ἀποκαλεῖμεν, ἔσται κατὰδὴλος. Ο. Η. Ε.

ΙΖ. Φανερόν δὲ ἡ ἀπὸ τῆ Β'. Μέρους ταύτης τῆς Προτ., ὅτι παντὸς Τριγώνῃς αἱ δύο Γωνίαι, δύο Ὄρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἡτις ἡν ἡ ΙΖ'. Πρότ. ἡ εἰς τόδε τῷ Τακτικῷ ὑπερτερεῖσα.

κ. 114. ΙΗ. Ἐπὶ τῆ ὀρθογωνία σκαληνῆς Τριγώνῃς τῶν ὀξείων Γωνιῶν, ὅφ' ἡν μὲν τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν β περιεχασῶν Πλευρῶν, ἡ μείζων βγ ὑποτείνει, ἡμισείας Ὄρθῆς μείζων ἐστὶν (ἡτοι ἡ α)· ὅφ' ἡν δὲ, ἡ ἐλάσσων βα, ἡμισείας Ὄρθῆς ἐλάσσων (ἡτοι ἡ γ). Αἱ γὰρ ὀξείαι Γωνίαι α ἡ γ ἅμα ληφθεῖσαι (7) Γωνίαν ὀρθὴν συναποτελοῦσιν. Ἄρα ὅφ' ἡν μὲν ἡ μείζων Πλευρὰ βγ ὑποτείνει, ἡμισείας Ὄρθῆς ἐστὶ μείζων (8), ἡ α· ὅφ' ἡν δ' ἡ ἐλάσσων, ἐλάσσων, ἡ γ.

(1) α. Βιβ. α. (2) β. Βιβ. α. (3) Πόρ. ἀνωτ. (4) Πόρ. α. (5) β. Βιβ. α. (6) Διὰ τὸ γ. Πόρ. (8) ιη. Βιβ. α.

Ἐντεῦθεν ἐ Πύργῳ, ἥτοι παντός Σημεῖα μετεώρη τὸ ὕψος διὰ τῆς ἡλίου 10. κ. 115. σκιας καταμετρεῖν δυνατόμεθα. Ἡλίου γὰρ ὑπὲρ τὸν Ὀρίζοντα μοίραις 45 ὑψιμένῃ, εἴτιν αἱ τῶν σωμάτων σκιαί κατ' ἐπιπέδῳ προβαλλόμεναι, τῷ ἐκείνων ὕψει ἀκριβῶς ἴσαι. Ἐπεὶ διὰ τὴν ὑπὸ αβγ Ὀρθὴν, ἐ τὴν ὑπὸ αγκβ ἡμισειαν (1) Ὀρθῆς, ἔσαι ἐ ἡ ὑπὸ βαγ ἡμισεία Ὀρθῆς (2). Τῶν οὖν πρὸς τὴν Βάσιν Γωνιῶν ἴσων ἑστῶν, αἱ Πλευραὶ αβ, βγ ἴσαι (3) ἔσονται. Καταμετρηθείσης ἄρα τῆς βγ, ἔσαι δὴλη ἐ ἡ αβ, τὸ τῇ Πύργῳ ἀπὸ τῇ Ὀρίζοντος ὕψωμα.

Ἐκ δὲ δὴ τῶν ἐ Γραμμὴν ἀπρόσβατον τὴν αβ καταμετρεῖν ῥᾶδιον. κ. κ. 116. Τρίγωνον γὰρ Ἰσόπλευρον τὸ τυχόν αδε, τῷ ἐπ' αὐτὸ Σημεῖω α ἐ τῇ Πλευρᾷ αδ πρὸς τῷ τῆς ἀπρόσβάτης Σημεῖω α, κατὰ τὴν αὐτὴν ὑποτεθείδω προσκείμενον. Ἀπὸ δὲ τῇ Σημεῖω α ὥσεϊ Διόπτρας, διὰ Πλευρᾶς τῆς αε ὥσεϊ Διόπτρας, πάντα τὰ ἐπὶ τῆς Εὐθείας αγ Σημεῖα παρατηρείδω, εὐθύτε κατ' αὐτὴν κινείδω, ὥστε διὰ τῆς εδ Πλευρᾶς κατὰ τὴν γζ κειμένης, τὸ β τῆς ἀπρόσβάτης ἀντικρὺ διοπτάνεσθαι· οὕτω ἐ γὰρ ἡ αγ βατὴ τῇ ἀπρόσβάτῳ αβ ἴση ἔσαι. Ἐπὶ γὰρ τῶν βαγ, δαε, κοινὴ μὲν ἡ κατὰ τὸ α Γωνία, ἴσαι δ' ἄλλήλαις αἱ κατὰ τὸ ε ἐ γ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αδε τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ λοιπὴ (4) τῇ λοιπῇ. Ἀλλὰ τὸ αδε ὑπετέθη Ἰσόπλευρον εἶναι, ἐ ἐπομένως (5) Ἰσογώνιον· τὸ ἄρα αβγ Ἰσογώνιον, ἐ ἐκ τῇ ἀκολέθῃ (6) ἐ Ἰσόπλευρον. Ἰση ἄρα τῇ βατῇ αγ ἡ ἀπρόσβατος αβ.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Τὰ Καλλίστα τῆδε, ἐ εὐφορωτάτα ἐν Θεωρήμασιν, οὗ πολλὴ δι' ὅλων τῶν Μαθημάτων ἡ χρῆσις, εὐρετὴν γενέσθαι τὸν Πυθαγόραν Εὐδημος ὁ ἀρχαῖος Γεωμέτρης μάρτυς ἐστὶ· συνεχῶς δὲ τῷ αὐτῷ μέμνηται ἐ Ἀριστοτέλῃς, ὅς ἐ δειγμα ὅσον αὐτὸ ἀκριβῶς προβάλλεται ἀποδείξεως. Ἀλλ' ὥσπερ ἐπὶ τῶν Τριπλεύρων ἔγνωμεν ἐκ τῆς τῇ Θεωρήματος, ὅσαις Ὀρθαῖς αἱ πᾶσαι τρεῖς Γωνίαι εἰσὶν ἰσοδύναμοι, οὕτω ἐ ἐπὶ παντός Σχήματος εὐθυγράμμου, ὅσας αἱ ἐν αὐτῷ συναποτελεῖσιν Γωνίας ὀρθάς, διὰ τῶν ἐφεξῆς τριῶν Θεωρημάτων παιδευσήσόμεθα.

Θ ε ώ ρ η μ α Α'.

„Παντός Τετραπλεύρου αἱ τέτταρες Γωνίαι, τέττασιν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.

(1) Σχόλ. κγ. Βιβ. α. (2) Πόρ. ε. (3) ε. Βιβ. α. (4) Πόρ. ε. (5) Πόρ. τῆς Ε. Βιβ. α. (6) Πόρ. τῆς ε. τῇ α'.

κ. 117.

Ἐπιζευγνυμένης γὰρ διὰ τῶν ἀπεναντίων Γωνιῶν τῆς βδ, εἰς δύο Τρίγωνα τὸ Σχήμα ἀναλυθήσεται, ἐφ' ὧν ἑκατέρῃ αἱ Γωνίαι πᾶσαι δυσὶν (1) Ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.

Θ ε ώ ρ η μ α Β.

„Επὶ παντὸς Σχήματος εὐθυγράμμου ἅπασαι αἱ Γωνίαι, δις τοσαύτας πλὴν τεττάρων, Ὁρθὰς συναποτελεῖσι Γωνίας, ὅσαι εἰσὶν αἱ τῇ Σχήματος Πλευραί.

κ. 118.

Ἀπὸ τῆ ἐντὸς τῇ Σχήματος Σημεῖς τυχόντος τῆ α, ἤχθωσαν ἐπὶ πάσας τὰς Γωνίας Εὐθεΐαι, εἰς τοσαῦτα τὸ Σχήμα διαμερίζουσαι Τρίγωνα, ὅσαι αἱ ἐπ' αὐτῷ Πλευραί. Ἐπεὶ οὖν ἕκαστα τῶν Τριγώνων, δυσὶν Ὁρθαῖς (2) ἴσας φέρουσι τὰς Γωνίας, πάντα πάντῃ δις τοσαύτας Ὁρθὰς παρέξουσιν, ὅσαι αἱ τῇ Σχήματος Πλευραί. Ἀλλ' αἱ περὶ τὸ Σημεῖον α Γωνίαι (3) τέτρασιν Ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ πασῶν τῶν ἐν τοῖς Τριγώνοις Γωνιῶν, τὰς περὶ τὸ α ἀφέλῃς, δις τοσαύταις Ὁρθαῖς ἴσαι πλὴν τεττάρων, καταλειφθήσονται αἱ Γωνίαι, ὅσαι εἰσὶ τῇ Σχήματος αἱ Πλευραί.

Π ό ρ ι σ μ α.

Καὶ φανερόν ἄρα τῶν εὐθυγράμμων Σχημάτων τὰ ἰσάριθμα τὰς Πλευράς, καὶ ὅλως εἰσὶν Ἰσογώνια. Ὅπερ ἐκ ἔξω θαύματος.

Π ρ ᾱ ξ ι ς.

Τὸν τῇ Σχήματος Παρανομασίην διπλασιάσαντι, ἀπὸ τε τῇ Παραγεμένῃ τὸν ἀριθμὸν 4 ἀφελόντι, κατάλοιπος ἔσται ὁ τῶν ὀρθῶν Γωνιῶν ἀριθμὸς, αἷς αἱ ἐντὸς τῇ Σχήματος Γωνίαι συνεξισῶνται.

Θ ε ώ ρ η μ α Γ.

„Επὶ παντὸς Σχήματος εὐθυγράμμου, ἅπασαι αἱ ἐκτὸς Γωνίαι τέτρασιν Ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.

κ. 119.

Αἱ γὰρ ἐφεξῆς δύο, δυσὶν Ὁρθαῖς (4) ἴσαι εἰσὶν. Ἄρα αἱ ἐντὸς ἅμα πᾶσαι, συνάμα ταῖς ἐκτὸς ἅμα πάσαις, δις τοσαύταις Γωνίαις Ὁρθαῖς, ὅσαι αἱ τῇ Σχήματος Πλευραί, ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλὰ καὶ αἱ ἐντὸς ἅμα πᾶσαι (5)

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βέροιας

συνάμα τέτταρσιν Ὀρδαῖς, δις ποσαύταις Ὀρδαῖς, ὅσαι αἱ τῇ Σχήματος Πλευραὶ, ἴσαι εἰσίν. Ἀ'ρα αἱ ἐκτὸς μόναι (1) τέτταρσιν Ὀρδαῖς ἴσαι εἰσίν.

Π ὁ ρ ι σ μ α .

Θαυμαζόν τῷ ὄντι ταῖς τῶν Εὐθυγράμμων τὸ πάθος· ἐξ ἧς καὶ κεῖνο παρέπεται, ὅτι καὶ τὰ ὁπωσὺν τῷ εἶδει διαφέροντα ἐκτὸς εἰσὶν ὀλικῶς Ἰσογώνια, ὥστε καὶ Τριγώνη τὰς τρεῖς ἐκτὸς, ἴσας εἶναι ταῖς χιλίαις ἐκτὸς Γωνίαις τῇ χιλιογώνῃ Σχήματος. Τῆτο δὴ τὸ παράδοξον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΓ.

„Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ Παραλλήλους (αβ, γδ) ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι Εὐθεῖαι (αγ, βδ), καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ Παραλλήλοι εἰσίν.

Ἐπιζευχθεῖσθαι γὰρ τῆς αδ, αἵτε ὑπὸ βαδ, καὶ αδγ ἴσαι ἀλλήλαις (2) εἰσίν, αἵτε αβ καὶ γδ Πλευραὶ (3) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἥτε αδ κοινή. Ἀ'ρα καὶ αγ (4) ἴση τῇ βδ. Ο. Η. τὸ Α'.

κ. 120.

Ἀλλὰ καὶ ὑπὸ δαγ ἴση τῇ ὑπὸ αδβ. Ἀ'ρα καὶ αγ (5) τῇ βδ Παραλλήλος ἐστίν. Ο. Η. τὸ Β'.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Εἰάν Εὐθείας δύο Παραλλήλους μὲν, ἀνίστας δὲ, τὰς αβ, γδ, ἐπιζευγνύουσι δύο Εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη αγ, βδ, προσεκβαλλόμεναι αὐταὶ αἱ ἐπιζευγνύουσαι, συμπεσάνται ἐφ' ἃ μέρη ἐστὶν ἡ τῶν Παραλλήλων ἐλάσσων γδ. Εἰάν γὰρ ἀπὸ τῆς μείζονος ληφθῇ (6) βε, ἴση τῇ ἐλάσσονι γδ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ εγ (7), αἱ εγ, καὶ βδ ἔσονται (8) Παραλλήλοι. Οὐκοῦν αἱ ὑπὸ δβε, καὶ βεγ δυσὶν Ὀρδαῖς (9)· ἀλλ' ἐστὶ δὴ ἡ ὑπὸ βεγ, μείζων τῆς ὑπὸ (10) εαγ. Ἀ'ρα αἱ ὑπὸ δβα, καὶ βαγ, δυσὶν Ὀρδαῖς ἐλάσσονες εἰσίν. Αἱ ἄρα Εὐθεῖαι βδ καὶ αγ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο Ὀρδαῖς ἐκβαλλόμεναι συμπεσάνται (11).

κ. 121.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΔ.

„Τῶν Παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον Πλευραὶ τε καὶ Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ Διάμετρος αὐτὰ δι' ἑαυτὴν τέμνει.

(1) Α'ξ. γ. (2) κβ. Βιβ. α. (3) Εξ ὑποβ. (4) δ. Βιβ. α. (5) κβ. Βιβ. α. (6) γ. Βιβ. α. (7) Α'ιγ. α. (8) λγ. Βιβ. α. (9) κβ. Βιβ. α. (10) ιε. Βιβ. α. (11) Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν λα. Βιβ. α.

κ. 122.

Καὶ γὰρ (1) ὑπὸ αβγ, ἢ βγδ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· καὶ ὁμοίως ὑπὸ γβδ, ἢ βγα. Ἀρα (2) αἱ ὅλαι ὑπὸ αβδ, ἢ ὑπὸ αγδ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Ὡσαύτως δειχθήσονται ἢ αἱ λοιπαὶ ἀπεναντίον α, ἢ δ Γωνίαι ἴσαι. Ἐπὶ μὲν οὖν τῶν γαβ, ἢ γδβ Τριγώνων, δυοῖν ταῖς δυσὶ Γωνίαις ἴσων δειχθεῖσων ἑκατέρας ἑκατέρᾳ, ἢ ἡ γβ Πλευρὰ κοινὴ ἐσιν· ἄρα ἢ αβ Πλευρὰ (3) ἴση τῇ γδ, ἢ αγ ἴση τῇ βδ. Ὡς ἴσαι ἀλλήλαις ἢ αἱ Πλευραὶ αἱ ἀπεναντίον, καὶ ὅλον δὲ τὸ Τρίγωνον (4) ἴσον ἐσὶν ὅλῳ τῷ Τριγώνῳ, τὸ γαβ, τῷ γδβ. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

κ. 123. Α'.

Παραλληλόγραμμον, οὗ ἡ μία τῶν Γωνιῶν ὀρθὴ ὣν ἡ α, ἐσὶν Ὁρθογώνιον, ἥτοι ἢ τὰς λοιπὰς Ὀρθὰς ἔχει. Αἱ γὰρ ἐντὸς δύο, αἱ κατὰ τὸ α ἢ γ (5) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἢ δὲ α Ὀρθή (6), ἄρα ἢ ἡ γ. Αἱ δὲ ἀπεναντίον ἴσαι (7)· ἄρα ἢ αἱ λοιπαὶ Ὀρθαὶ εἰσὶ.

Β'.

Παραλληλόγραμμα τὰ μίαν μὲν ἴσην Γωνίαν τῶν ἐν αὐτοῖς ἕτερον πρὸς ἕτερον, ἔχοντα, καὶ τὰς λοιπὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἔξει· ἐκάστην ἐκάστη, καὶ ἴσογώνια ἔσαι. Δειχθήσεται δὲ ὡς ἢ τὸ ἀνωτέρω.

κ. 124. Γ'.

Κάντευθεν ἢ τῶν Ὀρέων τά τε ὑπὲρ τὸν Ὀρίζοντα ὕψη, καὶ τὰς ὀριζοντεῖς Γραμμὰς καταμετρεῖν παιδευόμεθα· ὥν ἔσω αἰκλ ὅρος Πλευρὰ, ἐπ' αὐτῆς δὲ Γνώμων μέγας, ἥτις ἕτερου ἀντὶ Γνώμονος ὑπεργάν, οὕτω· πηγνύδω, ὡς τὴν μὲν τῷ Γνώμονος Πλευρὰν παράλληλον τῷ Ὀρίζοντι βα, ἀπτεσθαι τῆς κορυφῆς α, τὴν δὲ βε πρὸς ὀρθὰς ἵστασθαι. Ἐφεξῆς δὲ μετρίσθω τὸ ὄργανον ἐπὶ Σημεῖν τῷ ε, κατὰ ἐδι, ἢ ἰδκ προσωτέρω, ἢ κμλ. Ἐπεὶ γὰρ τῶν Παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον Πλευραὶ, ἢ Γωνίαι (8) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, εἰκὸς γε συμπληρωμένα τῷ Παραλληλογράμμῳ τὴν μὲν αὐτὴν εἶναι τῇ βε, τὴν δὲ εν, τῇ βα, ἢ τὰς Γωνίας ἕδεν ἥττον· ἢ ἐπὶ τῶν ἄλλων Παραλληλογράμμων ὡσαύτως. Ἡ μὲν οὖν ὀριζόντειος κειμένη Πλευρὰ τῷ Γνώμονος βα, δε, κτ. τὴν ὀριζόντειον Γραμμὴν τῷ ὅρος λρ καταμετρήσει, ἢ δὲ Κάθετος τὸ ὑπὲρ τὸν Ὀρίζοντα ὕψος αρ, τοσαύτως λαμβανόμεναι δηλονότι, ὥσαι γε αἱ τῷ Ὀργάνῳ ἀλλεπάλληλοι μεταβάσεις ἢ ἐφαρμοσσεις.

κ. 125. Δ'.

Ἐντευθεν δὲ καὶ ἀστρονομικῶς Τεταρτημορίῳ χρωμένους, Πύργῳ ὕψος καταμετρεῖται τὸ αβ· ὅπερ γὰρ ἢ τῷ ὑψώματος Γωνία ἐν τῷ Τεταρτημορίῳ

(1) κδ. Βιβ. α. (2) Α' ε. β. (3) κς. Βιβ. α. (4) δ. Βιβ. α. (5) κδ. Βιβ. α. (6)

(8) λδ. Βιβ. α.

ἡμίσεια εἰν Ὀρθῆς τῷ κατὰ τὸ ε παρατηρῶντι, ἀχθῆναι ἢ δε πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸν Ὀρίζοντα, ἰσοϋψὺς τῷ ἄχρι τῆ ὀφθαλμοῦ τῆ σώματος ἀνασῆματι, καὶ διὰ τῆ ὀφθαλμοῦ εἰς τῇ δε παράλληλος (1), καὶ ἔσαι πάντως τὸ εἰς βδ Παράλληλόγραμμον ὀρθογώνιον (2), καὶ Πλευρὰ ἢ βδ, Πλευρὰ τῇ δε τῆ ἀνασῆματος ἰση (3), καὶ δε ἰση τῇ βδ, ἥτοι τῇ τῆ παρατηρῶντος ἀπὸ τῆ Πύργου ἀποσάσει. Ἐπὶ μὲν οὖν τῷ Τριγώνῳ αβε, τῆς μὲν ὑπὸ αβε Ὀρθῆς ἔσης (4), τῆς δὲ ὑπὸ αεδ ἡμισείας Ὀρθῆς (5) ὁμολογημένης, ἔσαι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βδε (6) ἡμίσεια Ὀρθῆς, ἥτε δε, εἰτὰν ἢ τῆ παρατηρῶντος ἀπὸ τῆ Πύργου ἀπόσασκε, ἰση τῇ (7) βε, ἥτοι τῷ ὑπὲρ τὸν ὀφθαλμόν τῆ Πύργου ὑψώματι. Τῇ γὰρ βε προσεδείσσης τῆς βδ, ἰσης τῇ εδ, τῷ τῆ ὀφθαλμοῦ διλονότι ὑψώματι, παρέσαι τὸ ἔλον τῆ Πύργου ὑψώμα, αβ.

Ἐντεῦθεν τελευταῖον καὶ Γεωδαῖται Ἀγρῇ παραλληλογράμμῳ αδ, τὸ Ε. α. 126. χωρίον ῥῆσα διχάζασιν. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς Διαγωνίης γβ, ταύτιστε τῆ μεταιτάτα Σημεῖα ε (8) ληφθέντος, ὁποιαδηποτὴν Εὐθεία, οἷα ἢ εδ, διὰ τῆ Σημεῖα ε ἡγμένη τὸ χωρίον διχάζεται. Τὸ γὰρ αβγ Τρίγωνον (9) ἴσον τῷ γβδ, τὸ δὲ γεδ ἴσον τῷ βει (διὰ τε τὰς ὑπὸ ηβε, καὶ βγε (10) ἐναλλαξ ἴσας ἔσας, καὶ τὰς ὑπὸ ηβε, καὶ γεδ (11) τὰς κατὰ κορυφὴν, καὶ αὐτὰς ἴσας, καὶ τὴν γε ἰσην (12) τῇ βε) τυγχάνει (13). Ἐὰν οὖν τῷ Τραπεζίῳ αηγ, ἀντὶ Τριγώνῳ τῆ ηβε, προσῇς Τρίγωνον τὸ γεδ, καὶ Τραπεζίῳ τῷ βεδδ, ἀντὶ τῷ εγδ, τὸ ἴσον Τρίγωνον ηβε προσῇς, ἔσαι τὸ μὲν αηγ Τραπεζίον, ἴσον τῷ Τριγώνῳ αβγ, τὸ δὲ βεδδ, τῷ βγδ. Ἀλλὰ τὰ Τρίγωνα ἴσα. Ἀρα καὶ τὰ Τραπεζία. Ο. Ε. Δ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Ἐκ τῆ δὲ τῆ Θεωρήματος καὶ τῆ ὁρισμῆ, ὅνπερ τῆ δευτέρῃ Βιβλίῳ προτακτέον, εὐμαρῶς ἢ τῆ ὀρθογωνίης Παραλληλογράμμου ἐπιφέρεται καταμετρησις τῆ γὰρ τοιῆδε τὸ χωρίον πολλαπλασιασμῷ τῶν δύο προσεχῶν Πλευρῶν αβ, καὶ βγ παράγεται. Οἷον εἰ μὲν αβ ποδῶν ἢ τεττάρων, ἢ δὲ βγ ποδῶν ὅκτω, ἀγομένων ἐπὶ 8 τῶν 4, Παραγόμενον ἔσαι τὸ ποδῶν 32 ἄθροισμα τετραγώνων, ὑφ' ὧν τὸ τῆ Ὀρθογωνίης χωρίον καταμετρεῖται.

α. 127.

(1) λα. Βιβ. α. (2) Ὀρ. λε. καὶ Πόρ. α. τῆς ἀνὰ χεῖρας. (3) λδ. Βιβ. α. (4) κδ. Βιβ. α. (5) Εξ ὑποσ. (6) Πόρ. ε. τῆς κβ. τῆ α'. (7) ε. Βιβ. α. (8) ι. Βιβ. α. (9) λδ. Βιβ. α. (10) κδ. Βιβ. α. (11) ιε. Βιβ. α. (12) Εξ ὑποσ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΕ.

„Τὰ Παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως (αβ) ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις (αβ, γδ) ἴσα ἄλλήλοις εἰσὶ.

κ. 128.

Εἰπεὶ γὰρ αἱ αγ, βε Παραλλήλοι εἰσιν, ἐμπίπτει δὲ εἰς αὐτὰς ἡ γδ, ἡ ὑπὸ αγῆ, τῇ ἐκτὸς ὑπὸ βεδ ἴση (1) εἰσὶν. Εἴςι δὲ καὶ αγ ἴση τῇ βε (2), αἶτε γε, καὶ ἡδ ἴσαι τῇ αὐτῇ τρίτῃ αβ, ἄρα καὶ (3) ἄλλήλαις. Κοινῆς δὲ προσεθείσης τῆς εη, ἔσαι (4) γη ἴση τῇ εδ. Ἀρα τὸ αγῆ Τρίγωνον, τῷ βεδ Τριγώνῳ (5) ἴσον εἰσὶ. Εἰάν τοίνυν ἀφαιρεθῇ κοινῇ τὸ εδῆ Τρίγωνον, ἔσαι τὸ αγεδ Τραπεζίον ἴσον τῷ βδῆ Τραπεζίῳ (6). Κοινῇ προσεθείσθω τὸ αδβ, καὶ ἔσαι τὸ αγεβ, ἴσον (7) τῷ αηδβ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Λς.

„Τὰ Παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων Βάσεων (βγ, ζη) ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις (αθ, βη) ἴσα ἄλλήλοις εἰσὶ.

κ. 129.

Ἦ μὲν βγ ἴση τῇ ζη (8)· ἡ δὲ ζη τῇ εθ (9). Ἀρα βγ ἴση (10) τῇ εθ· εἰσὶ δὲ καὶ παραλλήλοι (11). Ἀρα καὶ αἱ ταύτας ἐπιζευγνύσασαι βε, καὶ γθ, ἴσαι τε εἰσὶ (12) καὶ παραλλήλοι, καὶ Παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ βεδγ (13). Πρὸς αὐτὸ δὲ τό, τε αβγδ, καὶ τὸ εζηθ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσι Βάσεως, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις (14) εἰσιν. Ἐκάτερον ἄρα τῷ τρίτῳ ἴσον (15) εἰσὶ, καὶ ἄλλήλοις (16) ἄρα· τὰ δὲ εἰσιν ἐπὶ ἴσων Βάσεων, καὶ τ. Αἴρακτ. Ο. Ε. Δ.

Ἦ μὲν οὖν ΚΕ· καὶ Λς· ἄμφω καθόλου ἔσονται ἐν Προτά. Α· τῇ ζ· Βιβλίῳ δεικνύμεναι.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Α· Κὰν ἄρα εἰς ἄπειρον προσκτείνοιτο τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς, ἤτοι ἴσης Βάσεως Παραλληλόγραμμον, ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις μένον, ἴσον ἐς αἰεὶ ἔσαι.

Β· Καὶ πόλεις ἢ χῶραι παραλληλόγραμμοί τε, καὶ ἰσομεγέθεις ἄλλήλαις εἰεν ἂν χιλιοπλασίως τὴν Περίμετρον διαφέρουσαι.

Γ· Καὶ Σχήματα ἰσοπερίμετρα ὅτι πλείζον τὰ Ἐμβαδὸν πολλακίς διοίσουσι.

Δ· Καὶ ἔδὲ αἰεὶ τὰ ἴσα (ὅ τῷ Κλαβίῳ ἡξιῶται (17)) ἐπ' ἄλληλα ἐφαρμόσσουσι.

(1) κδ. Βιβ. α. (2) λδ. Βιβ. α. (3) Α'ξ. α. (4) Α'ξ. β. (5) δ. Βιβ. α. (6) Α'ξ. γ. (7) Α'ξ. β. (8) Ε'ξ ὑποθ. (9) λδ. Βιβ. α. (10) Α'ξ. α. (11) Ε'ξ ὑποθ. (12) λγ. Βιβ. α. (13) Ο'ρα λς. (14) Ε'ξ κατ. (15) λν. Βιβ. α. (16) Α'ξ. α. (17)

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐκ τῶν αὐτῶν δὲ Θεωρημάτων, καὶ ἡ παντὸς Παραλληλογράμμου γεζδ 90. 130.
ῤα ληφθήσεται καταμέτρησις, πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ τῷ ὕψει τῆς Βά-
σεως. Τὸ γὰρ Εἰςβαδὸν τῷ Ὀρθογωνίῳ γβ, ἴσα ὄντος (1) τῷ Παραλληλο-
γράμμῳ γζ, παράγεται ὑπὸ τῆς γδ πολλαπλασιαζομένης (2) διὰ βδ, ἥτοι
τῆς ἴσης (3) ζη.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΖ.

„Τὰ Τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ὄντα (βγ) καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς
„Παραλλήλοις (βγ, καὶ αδ), ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

Ἐκβληθείσης τῆς αδ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ ε καὶ ζ Σημεῖα, 90. 131.
διὰ μὲν τῷ β (4) Παράλληλος ἤχθω πρὸς τὴν αγ ἢ βε, διὰ δὲ τῷ γ, Παράλ-
ληλος πρὸς τὴν βδ ἢ γζ.

Ἰσα οὖν ἀλλήλοις εἰσὶ τὰ γαεβ, καὶ βδζγ (5) Παραλληλόγραμμα. Καὶ
εἰ τῷ μὲν γαεβ ἡμισυ, τὸ Τρίγωνον (6) γαβ, τῷ δὲ βδζγ ἡμισυ, τὸ Τρί-
γωνον βδγ· τὰ δὲ τῶν ἰσῶν ἡμίση (7) ἴσα εἰσὶν. Ἀρα τὰ βαγ, καὶ βδγ Τρί-
γωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως κτ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΗ.

„Τὰ Τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἰσῶν Βάσεων ὄντα (βγ, εζ), καὶ ἐν ταῖς αὐ-
„ταῖς Παραλλήλοις (βζ, αδ), ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

Ἐκβεβλήθω ἡ αδ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη, καὶ διὰ μὲν τῷ β ἤχθω ἢ βη 90. 132.
Παράλληλος τῇ γα (8), διὰ δὲ τῷ ζ, ἤχθω ἢ ζθ Παράλληλος τῇ εδ. Ἐπεὶ
οὖν ἴσα τὰ Παραλληλόγραμμα βγαγ, καὶ εδδζ (9), εἰ δ' αὐτῶν ἡμίση (10)
τὰ Τρίγωνα βαγ, καὶ εδζ· τὰ ἄρα (11) βαγ καὶ εδζ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. Ο. Ε. Δ.

Καὶ αὗται δὲ αἱ Προτάσεις ἐν τῇ Α' τῷ ε'. Βιβλίῳ κατόλου κείσονται.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Τὰ αὐτὰ δὲ κἀνταῦθα ἐπὶ τῶν Τριγώνων σημειωτέον, ἃ φθάσασιν ἀνω-
τέρῳ (12) ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων ἡμῶν σσημειώσεται.

(1) λε. Βιβ. α. (2) Σχόλ. τῆς ΔΔ. τῇ α'. Βιβλ. (3) Ὁρ. λε. (4) λε. Βιβ. α.
(5) λε. Βιβ. α. (6) λε. Βιβ. α. (7) ΔΔ. ε. (8) λε. Βιβ. α. (9) λε. Βιβ. α. (10)
λε. Βιβ. α. (11) ΔΔ. ε. (12) Πόρ. μετὰ τὴν λε.

Π ό ρ ι σ μ α .

κ. 133. Ἐντεῦθεν δὲ καὶ Τρίγωνον τὸ τυχὸν χωρίον αβγ ἐπὶ τῶν ἀγρῶν ῥᾶσα τοῖς Γεωδαίταις διχάζεται, τῆς μὲν Βάσεως αγ δίχα τεμνομένης, Εὐθείας δὲ τῆς βδ ἐπιξευγνυμένης. Τὰ γὰρ αβδ, καὶ βγ Τρίγωνα ἰσοϋφῆτε ὄντα, καὶ ἴσα ἐχόντα τὰς Βάσεις (1), ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ, διὰ τὴν ἀνωτέρω.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΘ.

„Τὰ ἴσα Τρίγωνα (βαγ, βδγ) τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως (βγ) καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις (βγ, αδ) εἰσὶ.

κ. 134. Εἰ μὴ γὰρ, ἔσω Παραλλήλος ἡ αε, προηγουμένης (2) βδ, ἢ γῶν ἢ αζ, καὶ ἐπιξευχθῆτω ἡ εγ, ἢ γῶν ἢ ζγ (3)· καὶ ἔσται ἄρα τὸ βεγ, ἢ τὸ βζγ ἴσον (4) τῷ βαγ. Ἀλλὰ καὶ τὸ βδγ ἴσον (5) τῷ βαγ. Ἄρα (6) τὸ βεγ, ἢ τὸ βζγ ἴσον ἔσται τῷ βδγ· τὸ ὅλον τῷ μέρει, ἢ γῶν τὸ μέρος τῷ ὅλῳ. Τὸ δὲ ἀδύνατον (7)· οὐδ' ἡ αε ἄρα ὑπὲρ τὴν αδ, οὐδ' ἡ αζ ὑπὸ τὴν αδ Παραλλήλος ἐστὶ τῇ βγ. Καὶ Παραλλήλος ἄρα ἡ αδ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Μ.

„Τὰ ἴσα Τρίγωνα (βαγ, δεζ) τὰ ἐπὶ τῶν ἰσῶν Βάσεων (βγ, δε) ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις εἰσὶ.

κ. 135. Εἰ μὴ γὰρ, ἢ χθω (8) διὰ τῆ α Παραλλήλος ἡ αθ, προεκβληθείσης τῆς δε κατὰ τὸ θ, ἢ ακ, καὶ ἐπεξεύχθω (9) ἡ δζ, ἢ γῶν ἢ κζ· καὶ ἔσται ἄρα τὸ δδζ, ἢ τὸ δκζ ἴσον (10) τῷ βαγ. Ἀλλὰ καὶ τὸ δεζ ἐστὶν ἴσον (11) τῷ βαγ. Ἄρα (12) τὸ δδζ, ἢ γῶν τὸ δκζ ἴσον ἐστὶ τῷ δεζ, τὸ ὅλον τῷ μέρει, ἢ γῶν τὸ μέρος τῷ ὅλῳ· τὸ δὲ ἀδύνατον (13). Οὐδ' ἡ αθ ἄρα, οὐδ' ἡ ακ, οὐδ' ἐτέρατις, ἀλλ' ἢ μόνη ἡ αε Παραλλήλος ἐστὶ πρὸς τὴν βζ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΑ.

„Ἐὰν Παραλληλόγραμμον (τὸ αβγδ) Τριγῶνῳ (τῷ βεγ) Βάσιν τε ἔχη τὴν αὐτὴν (βγ), καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις ᾗ (αε, βγ), διπλάσιον ἔσται τὸ Παραλληλόγραμμον τῷ Τριγῶνῳ.

Επιζευχθείτης τῆς $\alpha\gamma$ (1), τὸ βαγ Τρίγωνον (2) ἴσον τῷ βεγ. Ἀλλὰ κ. 136.
τὸ $\alpha\beta\gamma\delta$ (3) διπλάσιον τῷ βαγ, ἄρα (4) ἔ τῷ βεγ. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

Τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ἐτέρας τῶν τῷ Παραλληλογράμμῃ Πλευρῶν ὡς ἐπὶ Βά- Α. κ. 137.
σεως $\alpha\beta$ συνεχὲς, ἔ ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον ἐκείνη $\gamma\delta$ Πλευρὰν τῇ κορυφῇ ϵ προσ-
πίπτον $\alpha\epsilon\beta$ Τρίγωνον, ἡμίσειά ἐστὶ τῷ Παραλληλογράμμῃ $\alpha\beta\gamma\delta$.

Καὶ εἰν ἀπὸ τῷ μεσαιτάτῃ Σημελε γ , μιᾶς τῶν Πλευρῶν $\alpha\beta$ τῷ Πα- Β. κ. 138.
ραλληλογράμμῃ, ἐπὶ τινὰ τῶν ἐφ' ἑτέρα τὰ μέρη Γωνιῶν δ , ἐπιζευχθείη ἡ
 $\gamma\delta$, Τρίγωνον συστήσεται τὸ $\gamma\delta\beta$, τῷ Παραλληλογράμμῃ τεταρτημόριον.

Ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ ἐπὶ τῆς ἡμισείας τῆς Πλευρᾶς ὡς Βάσεως, ἐπὶ τὴν Γ. κ. 139.
ἀπεναντίον περατόμενον, τεταρτημόριον ἐστὶ τῷ Παραλληλογράμμῃ Τρί-
γωνον.

Σχόλιον.

Ἐκτε τῆς προκειμένης, καὶ τῷ προσημιμένῃ τῇ Λς'. Σχολίῳ, φανερὸν κ. 140.
ὅτι παντὸς Τριγώνου $\alpha\beta\gamma$ τὸ Ἐμβαδὸν παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῇ ὕψους
 $\beta\delta$ διὰ τῆς ἡμισείας τῆς Βάσεως $\alpha\gamma$, ἢ γὰρ πολλαπλασιασμῷ τῆς Βάσεως $\alpha\gamma$,
διὰ τῆς ἡμισείας τῇ ὕψους $\beta\delta$. Καὶ εἰν ἄρα δοθῇ μία ἡτισὴν τῷ Τριγώνῳ Πλευ-
ρὰ, ἔ προσέτι τὸ τῷ αὐτῷ ὕψος, τετέστιν ἢ ἀπὸ τῆς ἀπεναντίον Γωνίας ἐπὶ
τὴν δοθεῖσαν Πλευρὰν, ἦν γε δὲν προαχθείσαν Κάθετος, ῥᾷδιον ἔσαι τὴν
ἀκριβῆ τῷ Τριγώνῳ λαβεῖν καταμέτρησιν. Οἷον εἰν ἡ μὲν Βάσις $\alpha\gamma$ ποδῶν ἢ
100, τὸ δὲ ὕψος $\beta\delta$ ποδῶν δὲς εἰπεῖν 85, πεπολλαπλασιάσθω 50 διὰ 85,
καὶ προκύψουσι 4250 Πόδες τετράγωνοι, ὑφ' ὧν τὸ Ἐμβαδὸν τῷ $\alpha\beta\gamma$ Τριγώνῳ
συναπαρτίζεται. Τὸ δὲ δὴ ὕψος, ἦτοι ἡ Κάθετος βατὰ μὲν ὄντος τῷ Τριγώνῳ,
ἔδεν ἦττον ἢ αἱ Πλευραὶ, μηχανικῶς ἡμῖν ἐπιγνωθήσεται, ἀβάτα δὲ, γεω-
μετρικῶς διὰ τῆς ΙΒ. ἔ τῆς ΙΓ'. τῷ Β'. Βιβλίῳ (ὡς ἐν τῷ ἐκείνῳ Σχολίῳ)
ἔσαι κατάδηλον.

Ἐπὶ τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ, τὸ ὕψος θατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν Γω-
νίαν Πλευρῶν ταυτίζεται. Ἐνθεντοί ϵ ταύτης ἡ ἡμίσεια τῇ ἐτέρᾳ ὅλη πολ-
λαπλασιασθεῖσα, τὸ Ἐμβαδὸν τῷ Τριγώνῳ παρέξεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΒ.

„Τῷ δοθέντι Τριγώνῳ (αγβ) ἴσον Παραλληλόγραμμον (δεζβ) συστή-
„σασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ Γωνίᾳ (θ).

κ. 141.

Βάσιν τὴν αβ δίχα τεμῶν (1) κατὰ τὸ δ, ἢ πρὸς τῷ δ Σημείῳ τῇ δο-
θείσῃ Γωνίᾳ θ, ἴσην δέμενος (2) τὴν ὑπὸ εδβ, ἀγαγόντε διὰ μὲν β Πα-
ράλληλον τῇ δε, διὰ δὲ γ Παραλληλον (3) τῇ αβ, ἔξεις τὸ δεζβ Πα-
ραλληλόγραμμόν τε, ἢ ἐν Γωνίᾳ ἴσῃ τῇ δοθείσῃ (4) συνεχὸς, καὶ δὴ καὶ
(ἐπιζευχθείσης τῆς (5) γδ) διπλασίον (6) τῇ Τριγώνῳ βγδ· κἀντεῦθεν καὶ
ἴσον (7) τῷ βαγ, διπλασίονι ἢ αὐτῷ (8) τῇ βγδ πεφυκότι.

Π ό ρ ι σ μ α .

κ. 142.

Δοθέντι τῷ αγβ Τριγώνῳ ἔξῃσαι λαβεῖν ἢ ἴσον Ὀρθογώνιον, ἄχ-
θείσης μὲν διὰ γ Παραλλήλου (9) τῇ αβ, δίχα δὲ τμηθείσης τῆς αβ (10)
κατὰ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τῇ β Καθείς τε (11) ἄχθείσης τῆς βε· τὸ γὰρ ὑπὸ
ζβ, ἢ βε ἔσαι τὸ ζητέμενον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΓ.

„Παντὸς Παραλληλογράμμου (αβγδ) τῶν περὶ τὴν Διάμετρον (αγ)
„Παραλληλογράμμων (ηζ, εθ), τὰ Παραπληρώματα (κβ, κδ) ἴσα ἀλλή-
„λοις ἐστί.

κ. 143.

Τὰ γὰρ αδγ, ἢ αβγ Τρίγωνα ἴσα (12) ἀλλήλοις ἐσίν, ὡσαύτως δὲ
ἢ κζγ ἴσον κηγ, ἢ αδκ ἴσον ακκ· εἰ δὲ οὖν ἀπὸ τῶν ἴσων ἀφέλῃς τὰ ἴσα,
λοιπὸν τὸ κδ, λοιπῷ τῷ κβ (13) ἴσον ἔσαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΔ.

„Παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν (αβ) τῷ δοθέντι Τριγώνῳ (γ) ἴσον Πα-
„ραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ (δ).

κ. 144.

Συνεσάδω Παραλληλόγραμμον (14) τὸ ηθ ἴσον τῷ δοθέντι Τριγώνῳ
γ, ἐν Γωνίᾳ δοθείσῃ τῇ ὑπὸ ηδθ, ἢ προαχθῇ τῷ ἐπ' εὐθείας τῇ θδ (15)
ἢ δε ἴση (16) τῇ δοθείσῃ αβ. Εξαχθῇ τῷ δὲ ἢ ἢ κη κατὰ τὸ συνεχές,

Δη (1) 1. Βιβ. α. (2) κγ. Βιβ. α. (3) λα. Βιβ. α. (4) Ε' κατ. (5) Α'τ. α. (6)
μα. Βιβ. α. (7) Α'ε. ε. (8) λη. Βιβ. α. (9) λα. Βιβ. α. (10) 1. Βιβ. α. (11) ιβ.
Βιβ. α. (12) 1. Βιβ. α. (13) Α'ε. γ. (14) κβ. Βιβ. α. (15) Α'τ. β. (16) γ. Βιβ. α.

ἐξ διὰ τῆς ἡχθω ἐξ Παράλληλος (1) τῇ δὲ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ (10) ζδ, ἐ
προεκβληθῶ ὥστε συμπεσεῖν (*) τῇ κθ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ λ. Καὶ διὰ τῆς
λ ἀχθῆτω Παράλληλος (2) τῇ δε ἡ λμ, ἐ ταύτη συμπίπτέτωσαν αἱ ηδ, ζε
προεκβληθείσαι κατὰ ν ἐ μ (συμπεσένται δὲ πάντως, ἅτε δὴ ἀπ' ἐλαττό-
νων, ἡ δύο Ὁρθῶν, τῶν ὑπὸ λδν, ἐ λζμ, μετὰ τῆς ὑπὸ ζλμ, ἐκβαλλόμε-
ναι (3)). φημί δὴ τὸ δμ Παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Καὶ γὰρ τὸ δμ ἴσον τῷ δι (4). ἀλλὰ δι ἴσον τῷ δοθέντι Τριγώνῳ (5) γ.
Α'ρα ἐ δμ, ἴσον (6) τῷ Τριγώνῳ γ. Συνέσει δὲ ἐ Γωνία ἡ ὑπὸ θδῃ ἴση (7)
τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ δ. ἡ δὲ ὑπὸ νδε ἴση τῇ θδῃ (8). Α'ρα ἐ ἡ ἐν τῷ παραβε-
βλημένῳ Παραλληλογράμμῳ Γωνία ὑπὸ νδε, ἴση ἐστὶ τῇ δοθείσῃ (9) Γωνίᾳ δ.
Ἡ δὲ Πλευρὰ δε, ἴση (10) ἐ αὐτῇ τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ αβ. Α'ρα κτ. Ο. Ε. Π.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ε'κ δὴ τέτε φανερόν, πῶς ἂν εἴη ἐ παρὰ τὴν δοθείσαν Εὐθείαν παρα-
βαλεῖν ἴσοντε, ἐ ἰσογώνιον τῷ δοθέντι Παραλληλόγραμμον.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Ε'κ τῆς Προτάσεως καὶ τῷ προσεθέντι Πορίσματος, τὴν γεωμετρικὴν
Διαιρέσιν αἰά τις ἐστὶ διδασκόμεθα. Καθάπερ γὰρ τὸν διὰ Πολλαπλασιασμῷ
Παραγόμενον ἀριθμὸν, δίκην Ὁρθογωνίᾳ τινὸς εὐλόγως θεωρήμεν, οὗ δύο
αἱ τυχῆσαι προσεχθεῖς Πλευραὶ εἰσιν οἱ Παράγοντες (11), οὕτως ἡμῖν ἐ ἀν-
τὶ μὲν Διαιρέτῃ τὸ Ὁρθογώνιον κείσεται, ἀντὶ δὲ τῷ Διαιρέτῃ ἐ τῷ Πηλίκῃ,
αἱ περὶ ἐκάστην τῶν Γωνιῶν Πλευραὶ προσληφθήσονται. Ε'πεὶ δὲ τὸν κείμενον
Διαιρέτῃ ἀριθμὸν, διαφέρουσι τοῖς Διαιρέταις μερίζοντες, διαφέροντα ἐ τὰ
Πηλικά πορίζόμεθα· διὰ τῆτο δὴ ἐ Ὁρθογώνιον χωρίον δοθέν, τῇ τυχῆσῃ
Εὐθείᾳ, ὡς Πλευρᾷ παραβαλεῖν δυνασόμεθα, ἢ πρὸς ὁρθὰς ἐτέρας ἐπικεί-
σεται, ἀντὶ τῶν Πλευρῶν τῆς ἐτέρας. Οἷον ἔσω Ὁρθογώνιον τὸ αβ, ἐκ δυο-
καίδεκα τετραγώνων ποδῶν συνιστάμενον, ἢ Πλευραὶ ἡ μὲν αγ τριποδιαία, ἡ
δὲ αε τετραποδιαία. Ε'σω δὲ ἰσομέγεδες Ὁρθογώνιον παρὰ Πλευρὰν διπο-
διαίαν (ἥτις ἀντὶ Μερικῆ ἔσται) παραβαλεῖν, ὡς ἐντεῦθεν Πλευρὰν ἐτέραν ἀνα-
φανῆναι, ἥτις ἂν ὡς Πηλίκον λογίζοιτο. Ε'πὶ τῆς αε προαχθείσης εἰλήφθω

κ. 145.

(1) λα. Βιβ. α. (2) ΑΓ. α. (*) Θεωρ. πρὸ τῆς λβ. (3) λαβιβ. α. (4) Θεωρ.
πρὸ τῆς λβ. (5) μγ. Βιβ. α. (6) Ε'κ Κατ. (7) ΑΓ. α. (8) Ε'κ κατ. (9) κ. Βιβ. α.
(10) ΑΓ. α. (11) Ε'κ κατ.

Γραμμὴ διποδιαία ἡ εδ, παρ' ἣν παραβεβλήθω (1) Ὁρθογώνιον τὸ ἐν ἴσῳ τῷ αβ. Οὕτω γὰρ ἡμῖν καὶ ἡ ἑτέρα τῇ Ὁρθογωνίᾳ Πλευρὰ προκύψει ἡ εἰς ἐξαποδιαία, ἣτις ἔσται Πηλίκον τὸ ζητούμενον. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὰ Παραλληλόγραμμα βδ αἰ, αἰ εὐθείαι βδ, αε ἴσαι εἰσὶ ταῖς Εὐθείαις εδ, ζι (2) ἑκατέρω ἑκατέρω, εἰς Πρᾶξιν ἄλλαι ἔσται, εἰάν ἐπὶ τῆς γβ προαχθεῖται ληφθῇ ἡ βδ διποδιαία, καὶ διὰ τῶν Σημείων δ καὶ ε ἀχθῇ Εὐθεῖα ἡ δε κατὰ τὸ συνεχὲς προεμβαλλομένη, ὥστε συμπεσεῖν (3) τῇ Εὐθείᾳ γα κατὰ τὸ συνεχὲς προεμβαλλομένη ἐπὶ τὸ ζ. ἔσται γὰρ ἡ αζ Εὐθεῖα ἡ ζητούμενη. Τὸ δὲ τῆς τοιαυτῆς Διαιρέσεως εἶδος Παραβολὴ ἦκεσε, τῇ Ὁρθογωνίᾳ χωρὶς αβ (ἢ τῇ ἴσῳ ἐκείνῳ εη) παρὰ τὴν Εὐθείαν βδ (ἢ τοὶ τῇ ἴσῳ εδ) παραβαλλομένη. Τὰτα δὲ ἔνεκα καὶ ἡ Διαιρέσις Παραβολὴ τὰ πολλὰ ἐξωνόμασαι τοῖς ἀρχαιοτέροις Γεωμέτραις, οἵ καὶ τὴν διὰ Κανόνος καὶ Διαιρέτης Γεωμετρικὴν κατασκευὴν, τῆς ἐν ἀριθμοῖς δὲ ἐπιλογισμῶν τελευμένης, προσφευγέσαν ὥντο τυγχάνειν καὶ κρείττονα.

Π ρ ό τ α σ ι ς Μ Ε.

„Τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ (βαγ) ἴσον Παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, „πρὸς τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν (ιπ) καὶ ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ Γωνίᾳ (θ).

κ 146.

Ἀναλελύθω τὸ Εὐθύγραμμον, εἰς Τρίγωνον ὅσα ἂν οἶόν τε ἦ, τὰ φ, χ, ψ· παρὰ δὲ τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν ιπ (4) Παραλληλόγραμμον παραβεβλήθω τὸ ιω, ἐν τῇ κατὰ τὸ ι Γωνίᾳ ἴσῃ τῇ δοθείσῃ θ, ἴσον τῷ Τριγώνῳ φ. Ὡσαύτως παρὰ τὴν ρυ παραβεβλήθω τὸ ρσ ἴσον τῷ Τριγώνῳ χ, καὶ παρὰ τὴν τσ τὸ τω, ἴσον τῷ Τριγώνῳ ψ. Φημί δὲ ὅτι τὸ ιω Παραλληλόγραμμον ἔστί τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ υρτ, ἴσῃ τῇ κατὰ τὸ ι, ἴσαι γὰρ ἄμφω τῇ δοθείσῃ (5), ἡ δὲ κατὰ τὸ ι καὶ ἡ ὑπὸ ιρυ δυσὶν Ὁρθαῖς (6) ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἰ ὑπὸ ιρυ, καὶ υρτ δυσὶν Ὁρθαῖς (7) ἴσαι ἔσονται, καὶ ἐπομένως αἰ ιψ καὶ τρ (8) ἐπ' εὐθείας ἔσονται κείμεναι. Παραπλησίως δὲ δεῖχθήσονται καὶ αἰ ρτ, καὶ λτ ἐπ' εὐθείας κείμεναι, ὥστε μίαν εἶναι Εὐθείαν τὴν ιλ. Πάλιν αἰ ὑπὸ τρυ, καὶ συρ (9) δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλὰ καὶ αἰ ὑπὸ τρυ καὶ ιρυ δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσαι ἐδείχθησαν, εἰάν ἄρα κοινὴ ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπὸ τρυ, ἔσται ἡ ὑπὸ συρ (10) ἴσῃ τῇ ὑπὸ ιρυ. Κοινὴ προσθήσθω ἡ ὑπὸ ρυπ, καὶ ἔσονται αἰ ὑπὸ ιρυ καὶ ρυπ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ συρ, καὶ ρυπ (11). Ἀλλ' ἐκείναι δυσὶν Ὁρθαῖς (12)

(1) Διὰ τὸ ἀνωτ. Πορίσμα. (2) λδ. Βιβ. κ. (3) Πδε. α τῇ Σχολίᾳ τῇ κατὰ τὴν ΑΔ. Ποστ. (4) βδ. Βιβ. κ. (5) Α'ξ. α. καὶ ἐκ Κατ. (6) κδ. Βιβ. κ. (7) Α'ξ. β. (8) καὶ κδ. Βιβ. κ. (9) Α'ξ. γ. (10) Α'ξ. β. (11) Α'ξ. β. (12) κδ. Βιβ. κ.

ἴσαι εἰσὶν, ἄρα καὶ αὐταὶ αἱ ὑπὸ συρ, καὶ ρυπ (1) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Καὶ κεῖνται ἄρα ἐπ' εὐθείας, καὶ (2) αἱ πυ, καὶ συ. Ὡσαύτως δὲ δείξω καὶ τὰς υσ, ὡς ἐπ' εὐθείας εἶναι κειμένας, ὥς καὶ τὴν πω μίαν Εὐθείαν εἶναι. Ἐπειδὴ ἔν ἡ μὲν ιρ ἴση τῇ πυ, ἡ δὲ ρτ ἴση τῇ υσ, ἡ δὲ τλ ἴση τῇ σω (3)· ἄρα καὶ ὅλη ἡ ιλ (4) ἴση ὅλῃ τῇ πω ἐσίν. Ἀλλὰ μὲν καὶ αἱ ὑπὸ λιπ καὶ ιπω δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι (εἰσὶ γὰρ αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ Παραλληλογράμῳ φ) (5) εἰσίν. Ἀρα αἱ ιλ καὶ πω παράλληλοι εἰσίν (6). Ἐδείχθησαν δὲ καὶ ἴσαι αἱ ἄρα ιπ καὶ λω (7) καὶ ἴσαι, καὶ Παράλληλοι εἰσὶ· καὶ ἔστιν ἄρα τὸ πλ Παραλληλόγραμμον· Ἀλλ' ἔστι δὴ τὸ μὲν φ Παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ φ Τριγώνῳ, τὸ δὲ χ τῷ χ, τὸ δὲ ψ τῷ ψ (8). Ἀρα καὶ τὸ ὅλον Παραλληλόγραμμον πλ, τῷ ὅλῳ Εὐθυγράμῳ βαγ (9) ἴσον ἐστί. Παρεβλήθη δὲ τὸ Παραλληλόγραμμον καὶ παρὰ τὴν δοθείσαν Εὐθείαν τὴν ιπ, καὶ ἐν Γωνίᾳ τῇ κατὰ τὸ ι, ἴση τῇ δοθείσῃ θ, γέγονεν ἄρα Ο. Ε. Π.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐκ δὲ ταύτης τῆς Προτάσεως καταφανές, καὶ πῶς ἔσαι Παραλληλόγραμμον ἐν τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ συστήσασθαι, ἴσον δυσὶν ἢ πλείουσιν Εὐθυγράμμοις ἅμα ληφθεῖσι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐξεύροι δ' ἄντις καὶ τὴν ὑπεροχὴν εὐμαρῶς ἐντεῦθεν, ἢ Εὐθυγράμῳ Εὐθύγραμμον ὑπερέχεται τῷ μείζονι τὸ ἔλαττον· ἀμέλειτοι ἔαν παρὰ τὴν αὐτὴν Εὐθείαν ιπ, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ Γωνίᾳ πιλ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη παραβάλλοι ἐκατέρω ἴσον Παραλληλόγραμμον· ὅ γὰρ Παραλληλογράμῳ τὸ μείζον ὑπερέχει τὸ ἔλαττον, ἢ τῶν Εὐθυγράμμων διαφορὰ ἔσαι. Ο. Η. Ε.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Κεῖσθαι δ' ἐνταῦθα καὶ τὸ ἐφεξῆς Πρόβλημα, ὡς πάνυ ὠφέλιμον ἐσόμενον ἐπὶ Ἡράξει τῆς ἐν τῷ Β'. Βιβλ. ΙΔ'. Προτάσεως.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α.

„Τῷ δοθέντι Τετραπλεύρῳ μὴ ὀρθογώνῳ (εζ) ἴσον Ὀρθογώνιον καταγράψαι.

(1) Α' ξ. α. (2) ιδ. Βιβ. α. (3) λδ. Βιβ. α. (4) Α' ξ. β. (5) κδ. Βιβ. α. (6) κη. Βιβ. α. (7) λγ. Βιβ. α. (8) Ε' κ κατ. (9) Α' ξ. α. καὶ β.

Ἀναλελύσθω εἰς Τρίγωνα, Εὐθείας (1) ἐπιζευχθείσης τῆς αγ, τὸ δοθέν Τετράπλευρον. Ἀπὸ δὲ τῶν ἀπεναντίον Γωνιῶν, πρὸς ὁρθὰς ἤχθωσαν ἐπ' αὐτὴν αἱ βξ, ζι (1)· καὶ δίχα τετμήσθω ἡ αγ (3) κατὰ τὸ σ· ἀπὸ δὲ τῆς σ, Κάθετος ἀχθήτω ἡ σλ (4) ἴση δυσὶ ταῖς βξ, καὶ ζι (5). Τὸ γὰρ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ λσ καὶ σα, ἴσον ἔσται τῷ δοθέντι Τετραπλεύρῳ βζ.

Ἡ δειξίς σαφὴς ἐκ τῆς ΜΑ'. καὶ τῇ μετ' αὐτὴν Σχολίᾳ, ἣν καὶ μετὰ τὴν Α'. Πρὸτ. τῇ Β'. Βιβλ. διὰ τῇ ἐκείσε Παρίσματος εὐρήσεις ἐκτεθειμένην.

Π ρ ό τ α σ ι ς Μς.

α. 148. „Ἀπὸ τῆς δοθείσης Εὐθείας (αβ) Τετράγωνον ἀναγράψαι.
Ἡ' χθωσαν πρὸς ὁρθὰς ἀπὸ τῶν α καὶ β περάτων (6) ἴσαι τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (7) αβ, αἱ αγ, βε, καὶ ἐπεζεύχθω (8) ἡ γε. Ἐπὶ οὖν αἱ κατὰ α καὶ β εἰσὶν (9) ὀρθαὶ, Παράλληλοι (10) ἔσονται αἱ αγ, βε· ἀλλὰ καὶ ἴσαι (11). Οὐκὰν καὶ γε ἡ ἐπιζευγνύουσα Παράλληλός ἐστι (12) πρὸς τὴν αβ, καὶ δὴ καὶ ἴση, ὥστε τὸ Σχῆμα Ἰσόπλευρον· ἀλλὰ καὶ αἱ γ καὶ ε, ἀπ' ἐναντίον οὖσαι, ταῖς β καὶ α Γωνίαις ἴσαι (13) εἰσὶ, καὶ ἐπομένως ὀρθαὶ. Ἄρα καὶ ὀρθογώνιον τὸ Σχῆμα, ἥτοι (14) Τετράγωνον. Ο. Ε. Π.

Σ χ ό λ ι ο ν.

α. 149. Οὕτως εὐμαρῶς καὶ ὀρθογώνιον συστήσεις ἐπὶ τῆς δοθείσης αβ, ὑπὸ δυσὶν τῶν αβ καὶ αγ περιεχόμενον, τὰς αγ καὶ βδ ἴσας τῇ δοθείσῃ πρὸς ὁρθὰς ἀγαγόν, καὶ τὴν γδ ἐπιζεύξας.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΖ.

α. 150. „Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις Τριγώνοις (αβγ) τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν Γωνίαν ὑποτείνουσας Πλευρᾶς (αγ) Τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιεχουσῶν Πλευρῶν (αβ, γβ) Τετραγώνοις.
Ἐπεζεύχθωσαν (15) αἱ ιγ, βζ, καὶ ἤχθω βε (16) Παράλληλος τῇ αζ. Ἐὰν οὖν ταῖς ὑπὸ ιαβ, ζαγ ὀρθαῖς ἔσται, καὶ ἴσαι, προσεσθῇ κοινὴ ἡ ὑπὸ βαγ, ἔσονται αἱ ὅλαι (17) ὑπὸ ιαγ, ζαβ ἴσαι ἀλλήλαις. Εἰσὶ δὲ ἐπὶ τῶν

(1) Αἴτ. α. (2) ιβ. Βιβ. α. (3) ι. Βιβ. α. (4) ιβ. Βιβ. α. (5) γ. Βιβ. α. (6) ια. Βιβ. α. (7) γ. Βιβ. α. (8) Αἴτ. α. (9) Ἐκ κατ. (10) κη. Βιβ. α. (11) Ἐκ κατ. (12) λγ. Βιβ. α. (13) λδ. Βιβ. α. (14) σθ. λθ. (15) Αἴτ. α. (16) λκ. Βιβ. α. (17)

Τριγώνων $\gamma\alpha$, κ $\beta\zeta$, κ αἱ δύο Πλευραὶ αἱ $\gamma\alpha$, καὶ $\alpha\gamma$, ἴσαι ταῖς δυσὶ Πλευραῖς $\beta\alpha$ (1) κ $\alpha\zeta$, αἱ περιέχουσαι τὴν ἴσην Γωνίαν ταῖς περιέχουσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· ἄρα τὰ Τρίγωνα $\gamma\alpha\beta$, καὶ $\beta\zeta\alpha$ (2) ἴσα ἄλλήλοις ἐσὶ. Ταῦτα δὲ ἐπεὶ μετὰ τῶν Παραλληλογράμμων $\alpha\beta\lambda\iota$, κ $\psi\alpha\zeta\epsilon$, ὑφίστηεν ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως αἱ, κ $\alpha\zeta$, κ εἰσὶ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις ταῖς αἱ, $\gamma\lambda$, κ ταῖς $\alpha\zeta$, $\beta\epsilon$, τῶν Παραλληλογράμμων (3) αὐτῶν ἡμίση ἐσὶ. Τὰ ἄρα Παραλληλόγραμμα $\alpha\beta\lambda\iota$, κ $\psi\alpha\zeta\epsilon$ (4) ἴσα ἄλλήλοις ἐσὶ. Τῷ δ' αὐτῷ λόγῳ Εὐθειῶν ἀχθουσῶν τῶν $\alpha\phi$, κ $\beta\epsilon$, δείξομεν κ τὰ Παραλληλόγραμμα $\epsilon\gamma$, καὶ $\beta\phi$, ἴσα ἄλλήλοις ὄντα. Τὸ ὅλον ἄρα $\alpha\phi$, δυσὶ τοῖς $\beta\iota$, κ $\beta\phi$ ἴσον ἔσται. Ο. Ε. Δ.

Εὐλόγηται τὴν $\lambda\beta\gamma$ Παράλληλον εἶναι τῇ $\gamma\alpha$, ἥτοι τὰς $\lambda\beta$, κ $\gamma\beta$ ἐπ' εὐθείας κειμένας ἄλλήλαις Εὐθεῖαν μίαν συναποτελεῖν. Τὸτο δὲ δῆλον (5) τῶν ὑπὸ $\lambda\beta\alpha$, κ $\alpha\beta\gamma$ Ὀρθῶν ἑσῶν καθ' ὑπόθεσιν.

Πορίσματα.

Ὀρθογωνία ἄρα κ Ἰσοσκελὴς τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτείνουσας τὴν ὀρθὴν Γωνίαν Α'. Τετράγωνον, διπλάσιον τῇ ἀπὸ τῆς σκέλης.

Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Διαγωνίης, διπλάσιον τῇ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τῇ Τε- Β. * τραγῶνι.

Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραπλάσιον τῇ ἀπὸ τῆς ἡμισείας. Ἐπὶ γὰρ Γ.* α. 151. τῇ ἰσοσκελῇ Ὀρθογωνίᾳ $\alpha\beta\gamma$ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας β Καθέτε ἀχθούσης τῆς $\beta\epsilon$ (6), ἡ ὑπὸ $\epsilon\beta\gamma$ ἡμίσειά ἐστιν Ὀρθῆς· ἀλλὰ κ ἡ ὑπὸ $\beta\gamma\alpha$ ἡμίσεια κ αὐτῇ (7) ἐστὶν Ὀρθῆς. Τὸ ἄρα $\beta\epsilon\gamma$ Ἰσοσκελὲς (8) ἐστὶν· ἐστὶ δὲ κ Ὀρθογώνιον (9). Ἀρα τὸ ἀπὸ $\beta\gamma$ Τετράγωνον, διπλάσιόν ἐστι (10) τῇ ἀπὸ $\epsilon\gamma$ Τετραγῶνι. Ἀλλ' ἡ $\epsilon\gamma$ ἡμίσειά ἐστι (11) τῆς $\alpha\gamma$, τότε ἀπὸ τῆς ὅλης $\alpha\gamma$, διπλάσιον τῇ ἀπὸ $\beta\gamma$, κ τὸ ἀπὸ $\beta\gamma$ διπλάσιον τῇ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, (12) ἥτοι τῇ ἀπὸ τῆς $\epsilon\gamma$. Τὸ ἄρα ἀπὸ $\alpha\gamma$ Τετράγωνον τῆς ὅλης, διπλάσιον ὂν τῇ διπλασίονος, τετραπλάσιόν ἐστι τῇ ἀπὸ τῆς ἡμισείας $\epsilon\gamma$. Ο. Ε. Δ.

Καὶ Καθέτε δὲ ἀπὸ τῆς Σημεῖς ἀχθούσης ἐπὶ τὴν $\beta\gamma$ Πλευράν, ὡσαύ- Δ. * τως δειχθήσεται τὸ ἀπὸ τῆς Διαγωνίης $\alpha\gamma$, ὀκταπλάσιον εἶναι τῇ ἀπὸ τῆς

(1) Ὁρ. $\lambda\beta$. (2) δ. Βιβ. α. (3) κα. Βιβ. α. (4) Α' ξ. ζ. (5) ιδ. Βιβ. α. (6) Διὰ τὸ Α'. τῶν ἐν τῷ Σχολ. τῷ μετὰ τὴν Κς. (7) ε. κ $\lambda\beta$. Βιβ. α. (8) ζ. Βιβ. α. (9) Ελ. κατ. (10) Τῶν ἀνωτ. Πόρ. Α'. (11) Διὰ τὸ Α'. τῶν ἐν τῷ ᾠθέντι Σχολ. (12) Τῶν ἀνωτ. Πόρ. Α'.

ἡμισείας τῆς Πλευρᾶς δγ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Διαγωνίης αγ Τετραγώνων, ἐκκαιδεκαπλάσιον ἔσαι τῷ ἀπὸ τῆς Διαγωνίης τεταρτημορίᾳ ζγ, καὶ τριακοδιπλάσιον τῷ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τεταρτημορίᾳ θγ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὡς ἀπὸ τῶν ὀρθῶν Γωνιῶν ἐπ' ἀπειρον ἀγομένων τῶν βε, εδ, δζ, ζθ, κτ. πρὸς ὀρθὰς, καὶ ἐναλλάξ τῆς τε Διαγωνίης (ἥτοι τῆς Ὑποτεινέτης), καὶ τῆς Πλευρᾶς διχαζομένων, τὴν τε τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἀγομένων Καθέτων βε, εδ, δζ, κτ. καὶ τὴν ἀπὸ τῶν Τμημάτων τῶν διχαζομένων αγ, εγ, ζγ, κτ. ἢ βγ, δγ, θγ, κτ. πρόσδοον εἶναι κατὰ τὰ μόρια 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, κτ.

κ. 152. Ε'. Ἐπὶ παντὸς Τριγώνου αβγ, ἐὰν ἀπὸ τῆς Γωνίας α, ἐπὶ τὴν Βάσιν (προηγμένην δεῖσαν) πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ ἡ αδ, ἔσαι ἡ τῶν Τετραγώνων διαφορὰ τῶν ἀπὸ τῆς ἐτέρας τῶν Πλευρῶν αβ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὁμοῦς Τμήματος βδ, ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῆς λοιπῆς Πλευρᾶς αγ, καὶ τῷ ἀπὸ ταύτης ὁμοῦς Τμήματος δγ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ πρὸς τῷ ο ὀρθαὶ εἰσιν (1), ἔσαι ἐπὶ τῷ αβδ Τριγώνῳ, τὸ $\frac{\alpha\beta}{T_{\text{τετρ}}} = (2) \frac{\alpha\delta}{T} + \frac{\beta\delta}{T}$ κοινῇ δὲ ἐκατέρωθεν ἀφαιρεθέντος τῷ $\frac{\beta\delta}{T}$, ἔσαι (3) $\frac{\alpha\beta}{T} - \frac{\beta\delta}{T} = \frac{\alpha\delta}{T}$. Τὸ αὐτὸν δὲ τρόπον ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ αδγ, δεῖξαι ἐς τὸ $\frac{\alpha\gamma}{T} - \frac{\delta\gamma}{T} = \frac{\alpha\delta}{T}$. Ἀρα $\frac{\alpha\beta}{T} - \frac{\beta\delta}{T} = \frac{\alpha\gamma}{T} - \frac{\delta\gamma}{T}$. Ο. Ε. Δ.

κ. 153. ς'. Ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ αβγ, Καθέτω ἀχθείσης τῆς αδ, μείζον μὲν ἔσαι τὸ τῆς Βάσεως βγ Τμήμα, τὸ τῇ μείζονι τῶν Πλευρῶν αγ προσκείμενον, ἔλαττον δὲ τὸ τῇ ἐλάττωσι αβ. Τῆς γὰρ αγ Πλευρᾶς μείζονος (5) ἔσης, τῆς δὲ αβ ἐλάττωσος, ἔσαι καὶ $\frac{\alpha\gamma}{T}$ μείζον (6) ἢ αβ. Ἀλλ' $\frac{\alpha\gamma}{T}$ (7) = $\frac{\alpha\delta}{T} + \frac{\delta\gamma}{T}$, καὶ $\frac{\alpha\beta}{T} = \frac{\alpha\delta}{T} + \frac{\beta\delta}{T}$. Ἀρα τὸ τῶν Τετραγώνων $\frac{\alpha\delta}{T}$ καὶ $\frac{\delta\gamma}{T}$ ἄθροισμα, μείζον ἐστὶ τῷ τῶν Τετραγώνων $\frac{\alpha\delta}{T}$ καὶ $\frac{\beta\delta}{T}$ ἄθροίσματος. Τῷ ἄρα κοινῇ ἀφαιρεθέντος (8) $\frac{\alpha\delta}{T}$, ὑπολειφθήσεται τὸ $\frac{\delta\gamma}{T}$, μείζον τῷ $\frac{\beta\delta}{T}$, καὶ οὕτω τὸ Τμήμα δγ, τῷ Τμήματι βδ (9) μείζον ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

κ. 154. ζ'. Ἐὰν ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ αβε, τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς βε Τετραγώνων μείζον ἢ τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν αβ καὶ αε Τετραγώνων ἅμα ληφθέντων, ἢ ὑπὸ βαε, ὅφ' ἦν ὑποτείνει ἡ βε, ὀρθῆς ἔσαι μείζον.

(1) Ὁρ. 18. (2) μζ. Βιβ. α. (3) Δ'ε. γ. (4) Δ'ε. α. (5) Ε'ε ὑποβ. (6) Δ'ε. ιε. (7) Δ'ε. ι. (8) Δ'ε. ε. (9) Δ'ε. ις.

Ἡ'χθω γὰρ ἐπὶ τῆς αβ (1) ἀπὸ τῆς πρὸς αὐτῇ Σημεία α, πρὸς ὁρ-
θὰς ἢ αζ, ἴση τῇ Πλευρᾷ αε, καὶ ἐπεξεύχθω (2) ἢ βζ. Διὰ μὲν οὖν
τὴν ὑπὸ βαζ Ὀρθὴν, ἔσαι τὸ ἀπὸ τῆς βζ Τετράγωνον (3) ἴσον τοῖς ἀπὸ
βα καὶ αζ Τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν, ἦτοι (διὰ τὰς ἴσας ζα, καὶ εα) τὸ
ἀπὸ τῆς βζ Τετράγωνον (4), ἴσον ἔσαι τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αε Τετραγώ-
νοις ἅμα ληφθεῖσιν. Ἀλλὰ (5) τὸ ἀπὸ τῆς βε Τετράγωνον, μείζον ἐστὶ
τῶν ἀπὸ βα καὶ αε Τετραγώνων ἅμα ληφθέντων. Ἀρα τὸ ἀπὸ τῆς βε
Τετράγωνον (6) μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῆς βζ Τετραγώνων, ἥτε βε Εὐθεῖα
μείζων (7) ἔσαι τῆς βζ. Ἐνθεντοὶ καὶ ἡ ὑπὸ βαε (8) τῆς ὑπὸ βαζ Ὀρθῆς,
μείζων τυγχάνει. Ο. Ε. Δ.

Παραπλησίως εἰάν ἐπὶ τῇ Τριγώνῳ αβγ, τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τῆς ὑπο- H'.
τεινῆς τὴν ὑπὸ βαγ Τετράγωνον, ἔλαττον ἢ τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ
τῶν Πλευρῶν βα καὶ γα, ἅμα ληφθέντων, δειχθήσεται ἡ ὑπὸ βαγ, Ὀρ-
θῆς ἐλάσσων. Ἀχθεῖσθαι γὰρ ἐπὶ τῆς αβ Πλευρᾷ, Καδέτε τῆς αζ ἴσης
τῇ αγ, ἐπιζευχθεῖσθαι τε τῆς βζ, ἔσαι (9) $\beta\zeta = \frac{\beta\alpha}{T} + \frac{\alpha\zeta}{T}$. Ἀλλ' $\frac{\alpha\zeta}{T}$
 $= \frac{\alpha\gamma}{T}$ (10). ἄρα $\frac{\alpha\zeta}{T} = \frac{\beta\alpha}{T} + \frac{\alpha\gamma}{T}$. Ἀλλὰ (11) $\frac{\beta\gamma}{T}$ ἔλαττον ἐστὶν ἢ $\frac{\beta\alpha}{T}$ καὶ
 $\frac{\alpha\gamma}{T}$. ἄρα $\frac{\beta\gamma}{T}$ ἔλαττον ἢ $\frac{\beta\zeta}{T}$, καὶ ἐπομένως (12) ἡ βγ ἐλάσσων τῆς βζ.
Ἐνθεντοὶ καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῆς ὑπὸ (13) βαζ Ὀρθῆς ἐλάσσων. Ο. Ε. Δ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν .

Τὸ ἀποδειχθὲν Θεώρημα, ὅπερ Εὐκλείδης ἐν Προτ. ΔΑ. Βιβ. ζ'. ἐπὶ
πάνθ' ἀπλῶς τὰ ἐμπερὶ ἀλλήλοις ἐναποδέδειχε Σχήματα, Πυθαγόρειον
φερονύμως ἀπὸ τῆς εὐρόντος ὠνόμασαι, ὑπὲρ ἧς καὶ δύσθαι λέγεται Πυθα-
γόρας ταῖς Μάσαις, (ἢ Πρόκλος μαρτυρεῖ, καὶ Οὐϊτρύιος, καὶ ἄλλοι) ὑπερησ-
θεῖς τῷ εὐρήματι, ἐφ' ᾧ καὶ τῆς ἐκεῖνων ᾤετο ἀπολελαυκέναι ἐλλάμψεως·
ἀμέλειται τὸν παροχέα τῶν φώτων ἐν ταῖς κατὰ τὰς ἐπισήμας θεωρίαις, καὶ
χορηγὸν τῆς Σοφίας ἡγνόει Κύριον, εἰδὲ καὶ ἔγνω, ἀλλ' ἐχ' ὡς θεὸν ἐδόξα-
ζεν. Ἐστὶ δὲ πυκνή τε, καὶ παντὶς μείζων ἢ τῆς Θεωρήματος τάχα δι' ὅλης τῆς
Μαθήσεως χρῆσις, ἐπ' ἅλλοις τε πάνυ πολλοῖς συντελεῖντος, καὶ τὴν εἰς τὰ ἀ-

(1) ια. Βιβ. α. (2) λ'τ. α. (3) μζ. Βιβ. α. (4) Α'ξ. ιε. (5) Ε'ξ. ὑποθ. (6) Α'ξ. α.
(7) Α'ξ. ις. (8) κε. Βιβ. α. (9) μζ. Βιβ. α. (10) Ε'κ κατ. καὶ Α'ξ. ιε. (11) Ε'ξ ὑποθ.
(12) Α'ξ. ις. (13) κε. Βιβ. α.

σύμμετρα τῶν Μεγεθῶν φέρσαν, τὸ μέγα τῆς γεωμετρικῆς Φιλοσοφίας μυ-
σηρίον ὑπανόγοντος.

κ. 155.

Ὅτι γὰρ ἡ τῷ Τετραγώνῳ Πλευρὰ ἀσύμμετρος τυγχάνει ἥσα τῇ Δια-
γωνίῳ, Θεώρημα φέρεται πάσαι τοῖς Γεωμετροῖσι τεθρυλλημένον, καὶ πρὸ
πάντων Ἀρισ. καὶ Πλάτωνι, οἱ, καὶ τὸν τῷτο μὴ εἰδόντα, ἔδδ' ἄνθρωπον ἡξία
καλεῖν, συγκατέλεγε δὲ τοῖς κτήνεσιν. Ἡ δὲ δὴ τῷ τοιούτῳ ἀπορρήτα γνώσκῃ
τῇ προεκτεθείσῃ ΜΖ'. Προτάσει τὴν ἀρχὴν ἔοικε προσοφείλειν. Ἐπεὶ γὰρ ἐπὶ
τῷ Τετραγώνῳ, Ὁρθὴ ἐστὶν ἡ κατὰ τὸ α Γωνία, τὸ ἀπὸ τῆς Διαμέτρου γβ
Τετράγωνον, ἴσον πάντως δυσὶν ἔσαι τοῖς ἀπὸ τῶν Πλευρῶν αβ, αγ Τετρα-
γώνοις, καὶ δὴ ἐκ τούτου, καὶ τῷ ἑτέρῳ (1) διπλάσιον. Τῷ γυν ἀπὸ τῆς Δια-
μέτρου γβ Τετραγώνῳ ὑποτιθεμένη ὡς 2, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς αβ ὡς 1,
ἡ μὲν γβ Διαγώνιος ῥίζα τετραγωνικὴ ἔσαι Δυνάδος, ἡ δὲ Πλευρὰ αβ, ῥίζα
τετραγωνικὴ Μονάδος, ἥτοι μονάς, ὧν ὁ λόγος (ὡς ἐν ἄλλοις εἰρήσεται) ἀριθ-
μοῖς πάντα ἀνέκφρατος, δι' ὃ καὶ ἀσύμμετροι λέγονται.

Αὕτη δὲ τὸ ἡ ἀσύμμετρον τῆς Πλευρᾶς καὶ τῆς Διαγωνίας ἐπὶ τῶν Τετρα-
γώνων ἀποδεικνύσα, ἔχαστη μὲν ἐστὶ τῶν παρ' Εὐκλείδῃ τῷ Ι' Βιβλ. Προτά-
σεων, δεικνύται δὲ παρὰ Τακκετίῃ, ἐν τοῖς ὑπ' αὐτῷ φιλοπονηθεῖσι χειροῖς
τῶν Ἀριθμητικῶν, κατὰ τὸ Σχόλιον τὸ μετὰ τὴν ΙΑ'. Πρώτ. τῷ Β'. Βιβλίῳ.

Ἐν οἷς ἐπισῆσαι ἄξιον, ὡς εἰ καὶ μηδεὶς ἕτερος παρὴν λόγος, εἰς δεῖξιν
τῷ μὴ ἐξ ὠρισμένων τῷ ἀριθμῷ Σημεῖων τὰ Μεγεθῆ συνίστασθαι, ἤρκεσεν
ἂν ὅτος καὶ μόνος. Οὐδὲ γὰρ ἂν ἦν Μεγεθῆ ὅλως ἀλλήλοισι ἀσύμμετρα, εἰ
πάντων ἦν μέτρον κοινὸν λαβεῖν τὸ Σημεῖον.

Ἐπὶ τέτοις ἅπασι προκείμεῳ καὶ Προβλήματα τρία, τὰ ἐκ τῆς ΜΖ'.
ἐπιρρημένα, ὧν πυκνοτάτη ἡ χρῆσις, τὰ ἐφεξῆς.

Πρόβλημα Α'.

„Τετραγώνων ὁποσωνῶν δοθέντων, ἴσον τοῖς πᾶσι Τετράγωνον ἀνα-
γράφαι.

κ. 156.

Κείδω Τετράγωνον τρία, ὧν Πλευραὶ αβ, βγ, γε, καὶ συνεχάδω Γω-
νία ὀρθὴ ἢ ὑπὸ ρβψ, ἥς αἱ Πλευραὶ ἐπ' ἄπειρον ἔσωσαν προεκτεινόμεναι.
Ἐπὶ δὲ τῶν Πλευρῶν (2) μετινέχθωσαν αἱ αβ, καὶ βγ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ αγ,
καὶ ἔσαι πάντως τὸ ἀπὸ τῆς αγ Τετράγωνον (3) ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, καὶ
βγ. Εἴτα ἡ αγ μετινέχθω καὶ αὐτὴ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τὸ φ, ἥτε γε τρίτῃ τῶν

(1) Α'. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (2) γ. Βιβ. α. (3) μζ. Βιβ. α.

δοθεισῶν Πλευρῶν, μετατιθέσθω ἐπὶ βε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εφ· καὶ ἔσαι δὴ τὸ ἀπὸ τῆς εφ (1) Τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ βφ, καὶ εβ (ἦτοι εγ), τετέστιν ἴσον τρισὶ τοῖς δοθείσι, τοῖς ἀπὸ αβ, καὶ βγ, καὶ γε. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό β λ η μ α Β.

„Δυσὶν δοθεισῶν Εὐθειῶν ἀνίσων (αβ, βγ) Τετράγωνον ἀναγράφαι, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος (αβ) Τετράγωνον, ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς (βγ) ἑλάσσονος.

Κέντρῳ μὲν τῷ β, Διαστήματι δὲ τῷ βα Κύκλος γεγράφθω· ἐπὶ δὲ τῆς Διαμέτρου αζ, ἀπὸ τῷ Κέντρῳ β ἐπὶ ζ, ἐκκεῖσθω ἡ βγ, ἀπὸ δὲ τῷ γ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ γε προσπίπτουσα ἐπὶ τὴν Περιφέρειαν πρὸς τὸ ε. Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γε Τετράγωνον ἐστὶ τὸ ζητούμενον· ἦτοι ἡ ὑπεροχὴ τῷ ἀπὸ τῆς αβ Τετραγώνῳ, ἢ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς γβ Τετράγωνον. κ. 157.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βς· καὶ δὴ τὸ ἀπὸ τῆς βε τετράγ. ἴσον (2) τοῖς ἀπὸ βγ καὶ γε, ἅμα ληφθεῖσιν. Ἀῖρα κτ.

Π ρ ό β λ η μ α Γ.

„Παντὸς ὀρθογωνίου Τριγώνου, τὰς δύο εἰδῶς Πλευρὰς πάντῃ μεταλαμβανομένας, καὶ τὴν λοιπὴν εὐρήσεις.

Πλευραὶ αἱ τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιέχουσαι, ἔσωσαν αἱ αγ, αβ, ἡ μὲν ποδῶν 6, ἡ δὲ 8. Δεῖ δὴ προσεμερῆν ὅσων τυγχάνει ποδῶν ἡ βγ, ἡ ὑπὸ τὴν ὀρθὴν Γωνίαν ὑποτείνουσα. κ. 158.

Πεπολλαπλασιάσθω οἱ 6 καὶ 8 δι' ἑαυτὸν μὲν δ', εἰς ἑαυτὸν δ' ἑκατὸς· καὶ ἀνακύψει δὴ τῶν Πλευρῶν Τετράγωνα, τῆς μὲν 36, τῆς δὲ 64· τῶν κεφάλαιον ἐπαθροισμένων τὰ 100. Τοιγαρὲν ἡ τετραγώνειος ῥίζα τῶν 100, ἡτις ἐστὶν ἡ 10, δώσει τῆς πόδας τῆς ζητούμενης Πλευρᾶς βγ. Ἡ δὲ δεῖξις σαφής (3). Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἄθροισμα τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ αβ, καὶ αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς βγ, ἡ ῥίζα πάντως τῷ τηλικῷ ἄθροισματι, ἡ αὐτὴ ἔσαι τῇ ῥίζῃ, ἦτοι τῇ Πλευρᾷ βγ.

Ἀλλ' ἔσωσαν δὴ δοδεῖται αἱ Πλευραὶ αβ, καὶ βγ, ἡ μὲν ποδῶν ἕσα 10, ἡ δὲ 6· δεῖ δὴ προσεμερῆν τὴν αγ, ὅσων ἐστὶ. Τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς αβ Τετράγωνον 36, ἀφηρήσθω ἀπὸ τῷ Τετραγώνῳ 100 τῷ ἀπὸ τῆς βγ. Τὸ δὲ

(1) μζ. Βιβ. α. (2) μζ. Βιβ. κ. (3) μζ. Βιβ. α.

κατάλοιπον 64 Τετράγωνον ἔσαι τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς $\alpha\gamma$. Ἐὰν οὖν ἐξέλῃς
 καὶ ἀπὸ τῆς τὴν Τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἔξεις 8, ὅς ἔσαι ὁ ἀριθμὸς τῶν ποδῶν
 τῶν ἐπὶ τῆς Πλευρᾶς $\alpha\gamma$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΗ.

„Ἐὰν Τριγώνῃ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν Πλευρῶν ($\alpha\beta$) Τετράγωνον ἴσον ἢ τοῖς
 „ἀπὸ τῶν λοιπῶν τῶν Τριγώνων δύο Πλευρῶν ($\alpha\gamma$, $\beta\gamma$) Τετραγώνοις, ἢ
 „περιεχομένη Γωνία (ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$) ὑπὸ τῶν λοιπῶν τῶν Τριγώνων δύο Πλευρῶν
 „Ὁρθῇ ἔσιν.

α. 159.

Εἰ μὴ γὰρ, ἔσω ἢ ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$ Ὁρθῇς μείζων, ἢ γοῦν ἐλάσσων. Ἀῖρα
 (ὡς ἐν IB'. καὶ II'. Πρωτ. τῇ B'. Βιβλ., ταῖς ἐκ ταύτης ἐδαμῶς ἡρημέναις
 δειχθήσεται) τὸ ἀπὸ τῆς $\alpha\beta$ Τετράγωνον ἔκ ἔσαι ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν $\alpha\gamma$ καὶ
 $\beta\gamma$ Τετραγώνοις· ὁπέρ ἐστι κατὰ τῆς ὑποθέσεως.

Α' λ λ ω ς.

Ἦχθω πρὸς ὀρθάς ἢ $\gamma\zeta$ ἐπὶ τῆς $\gamma\beta$, ἴση τῇ $\alpha\gamma$, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ
 $\beta\zeta$. Καὶ δὴ τὸ ἀπὸ τῆς $\beta\zeta$ Τετράγωνον (1), ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $\zeta\gamma$, καὶ
 $\gamma\beta$, ἢτοι τοῖς ἀπὸ τῶν $\alpha\gamma$ καὶ $\beta\gamma$ (2), τατέστι τῷ ἀπὸ (3) τῆς $\alpha\beta$ Τετρα-
 γώνῳ. Αἱ ἄρα $\alpha\beta$, καὶ $\zeta\beta$ (4) ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶν· ἐπὶ ἄρα τῶν Τριγώνων,
 διὰ τὴν ἰσότητά τῶν Πλευρῶν (5), ἔσαι καὶ ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$, ἴση τῇ ὑπὸ $\beta\gamma\zeta$. Ἀῖρα
 καὶ πρὸς τῷ $\gamma\epsilon\phi\epsilon\chi\eta\varsigma$ Γωνίαι (6) ὀρθαί, ὅταν δείξαι πρᾶκειτο τὴν ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$.

(1) μζ. Βιβ. α. (2) Ε'κ κατ. (3) Ε'ξ ὑποθ. (4) Α'ξ. ιε. (5) η. Βιβ. α. (6)
 Ὁρ. ιδ.

Τῶν σοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

Βραχεία μὲν ἡ Βίβλος τὸν ὄγκον, διαφέρουσα δέ τοι τῶν ἐν αὐτῇ θεωρημένων τῇ χρήσει καὶ τιμιότητι. Ὅπερ εἰ καὶ τοῖς ἐντυγχάνουσι τῶν Νεανίσκων αὐτίκα μὲν ἔπω, προσωτέρω ἄλλ' οὖν γενομέναις, εὖ οἶδ' ὅτι ἐξ αὐτῆς ἔσαι τῆς πείρας κατάδηλον.

Καὶ δὴ θεωρεῖ μὲν ἡ Βίβλος τῶν Εὐθειῶν τὰς δυνάμεις, οἷα περ ἐστὶ τὰ Τετράγωνα, παραβάλλει δὲ καὶ Τετραγώνοις αὐτοῖς καὶ Ὀρθογώνιοις, τοῖς γε ἀπὸ, καὶ ὑπὸ Εὐθειῶν ὅλων περιεχομένοις, Ὀρθογώνια παντοῖα, τὰ ὑπὸ τῶν, ἢ δίχα, ἢ ἄλλως πως τετμημένων Εὐθειῶν ἀνακύπτοντα. Καὶ πολλὴς οὖν τὸ σοιχειῶδες τῷ μέρει γέμον τῆς ὠφελείας πολλῶν τε ἕνεκα κρίνεται, καὶ τέτα προ πάντων, ὅτι τῶν Ἀλγεβραϊκῶν πράξεων ταῖς κυριωτέραις προκαταβάλλει τὰς θεμελίους, τῶν μὲν τριῶν πρωτίτων ἐν αὐτῷ Προτάσεων εἰς ἀπόδειξιν τῆ πολλᾶπλασιασμῷ τεινασῶν, τῆς δὲ τετάρτης εἰς ἐξαγωγήν τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν ξυντελέσης, τῶν δὲ λοιπῶν ἀπὸ μὲν ε΄. ἕως Η΄. ταῖς κατὰ τὴν περιώνυμον Ἀλγεβραν, ἀπὸ δὲ Η΄. ἕως τῆς ἐσχάτης ταῖς κατὰ τὴν Τριγωνομετρίαν πράξεισι συμβαλλομένων. Οὐ τοίνυν μικροψυχιτέον τοῖς πρωτοπείροις, τραχυτέρας πως ἐν αὐταῖς πρώταις ἐπιβολαῖς καὶ δυσαντιβλέπτῃ ἀπαντώσει τῆς Βίβλου. Παρὰ γὰρ τὸ τὰς πλείους τῶν ἐν αὐτῇδείξεων τῷ προδηλοτάτῳ ἐκείνῳ προσερεῖδεσθαι Ἀξιώματι, τῷ τὸ ὅλον ἴσον ἅπασιν τοῖς ἐν αὐτῷ μέρεσιν ἀποφανομένῳ, καὶ οἷς ὁ τέλος ἐκ πρώτης ἐπιβάλλειν δοκῶσιν, ἐνδελεχῶς ἐπικύπτοντες, ἔσαι ποθ' ὅτε καθ' ἑαυτὰς θαυμάσονται, ὅτι πράγματα σφίσι παρεῖχε τὰ ἔτω σαφῆτε καὶ γνώριμα.

Ὅρισμοί.

Πᾶν Παραλλήλογραμμον ὀρθογώνιον (τὸ καὶ ἀπλῶς Ὀρθογώνιον καλεῖμενον) περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιεχουσῶν Εὐθειῶν α γ, α β.

κ. 160.

Τῶτων γὰρ τῇ μὲν $\alpha\gamma$ τὸ ὕψος, τῇ δὲ $\alpha\beta$ τὸ τῆς Ὀρθογωνίας διορίζεται πλάτος. Εἴτα νοαμένης τῆς $\alpha\gamma$ πρὸς ὀρθὰς φέρεσθαι δι' ὅλης τῆς $\alpha\beta$, ἢ ϵ τῆς $\alpha\beta$ ὡταύτως δι' ὅλης τῆς $\alpha\gamma$, τὸ Εἰμβαλὸν τῆς Ὀρθογωνίας τῇ τοιαύτῃ κινήσει τὴν γένεσιν λήφεται. Καὶ εἰκότως ἄρα πολλαπλασιασμῷ τῶν δύο προσεχῶν Πλευρῶν ἐπ' ἀλλήλαις, γεννᾶσθαι τὰ Ὀρθογώνια λέγεται.

κ. 161.

Ὅτε τοίνυν ἡμῖν ὑποτίθεται τὸ ὑπὸ $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, ἢ συντόμως τὸ $\alpha\gamma\beta$, οὐδὲν ἄλλ' ἢ τὸ ὑπὸ τῶν Εὐθειῶν $\alpha\gamma$ ϵ $\gamma\beta$, ἢ τῶν ταύταις παριστημένων, ἑκατέρως ἑκατέρᾳ πρὸς ὀρθὴν Γωνίαν συσχευμένων, ὑποδηλᾶται περιεχόμενον Ὀρθογώνιον. Παραπλησίως, ϵ διὰ τῆς ὑπὸ $\alpha\beta$ ϵ $\beta\gamma$, εἴτην $\alpha\beta\gamma$, τὸ ὑπὸ δυσὶν Εὐθειῶν ἴσων ταῖς $\alpha\beta$, ϵ $\beta\gamma$ περιεχόμενον ὑποσημαίνεται Ὀρθογώνιον, τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιλαμβανουσῶν.

Ὀρθογώνιον δὲ τὸ μὲν Εἰτερόμηκες, τὸ δὲ Τετράγωνον. Καὶ Εἰτερόμηκες μὲν τὸ τὰς προσεχεῖς Πλευρὰς ἔχον ἀνίστας, ἥτοι τὸ ὑπὸ δυσὶν Εὐθειῶν ἀνίσων περιεχόμενον. Τετράγωνον δὲ τὸ ἀπὸ δύο ἴσων, ἥτοι τὸ ἀπὸ μιᾶς ἐφ' ἑαυτὴν ἀγομένης περιεχόμενον.

Υ Π Ο Θ Ε Σ Ε Ι Σ.

Κεῖσθω τὸ μὲν = σημεῖον Ἰσότητος.

τὸ δὲ + σημεῖον Προθέσεως.

τὸ δὲ — σημεῖον Υφαιρέσεως.

τὸ δὲ ο ἀντὶ τῆς Μηδενός.

τὸ δὲ × σημεῖον Πολλαπλασιασμῷ, ὅπερ ἂν αἰ παρεντίθεται φιλεῖ, τῶν ἐπιπολλαπλασιαζομένων ἀμέσως τὰ πολλα παρασυναπτομένων οἷον $\alpha\beta$, ἀντὶ $\alpha \times \beta$.

τὸ δὲ : σημεῖον Διαιρέσεως· οἷον $\alpha : \beta$ σημαίνει τὸ α διαιρέμενον διὰ τῆς β . ὃ ϵ ἐν εἶδει κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ πολλάκις εἶωθε γράφεσθαι.

τὸ δὲ T σημεῖον Τετραγώνου.

τὸ δὲ K σημεῖον Κύβου.

τὸ δὲ V σημεῖον τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης.

τὸ δὲ V³ σημεῖον τῆς Κυβικῆς.

τὸ δὲ :: σημεῖον τῶν ἴσων λόγων οἷον $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$.

τὸ δὲ ∷ σημεῖον τῆς συνεχῆς Ἀναλογίας.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Εάν ὡς δύο Εὐθεΐαι (αβ, αγ), τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα-
 „διποτῶν Τμήματα (αε, εζ, ζγ), τὸ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν
 „δύο Εὐθειῶν (αβ, αγ), ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τε τῆς ἀτμήτης (αβ), καὶ ἑκάστη
 „τῶν Τμημάτων (αε, εζ, ζγ) περιεχομένοις Ὀρθογωνίοις.

Ἦχθω ἀπὸ τῆ α, ἐπὶ τῆς αγ πρὸς ὀρθὰς (1) ἡ αη, καὶ κείθω ἴση τῇ
 ἁτμήτῳ αβ. Καὶ διὰ τῆ η τῇ αγ Παράλληλος (2) ἡ χθω ἡ ηθ· διὰ δὲ τῶν
 ε, ζ, γ, τῇ αη Παράλληλοι αἱ εκ, ζλ, γθ.

κ. 162.

Ἰσον δὲ ἐστὶ τὸ ηγ, τοῖς ηε, κζ, λγ (3). Καὶ ἔστι τὸ μὲν ηε τὸ ὑπὸ
 ηαε, ταυτὸν εἶπεν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἀτμήτης αβ, καὶ τῆς Τμήματος
 αε. Τὸ δὲ κζ τὸ ὑπὸ κεζ, τὸ ὑπὸ κε (ἡ τις ἴση τῇ ηα (4)), τατέσι τῆς
 αγ, καὶ εζ. Τὸ δὲ λγ, ὁμοίως ὑπὸ λζγ, ἦτοι ὑπὸ αβ καὶ ζγ (5).

Π ό ρ ι σ μ α.

Κρατυνδείη δ' ἂν ἐντεῦθεν πληρεστέρα τυγχάνουσα δείξῃ, καὶ ἡ τῇ
 προβλήματος ἐπίλυσις, τῇ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΜΕ'. τῇ Α'. Βιβλ.
 προτεθέντος. Τῇ γὰρ Τετραπλεύρῳ βζ, διὰ τῆς Εὐθείας αγ εἰς τὰ δύο
 Τρίγωνα αβγ καὶ αζγ ἀναλυθέντος, δέχα τμηθείσης τῆς αγ κατὰ τὸ σ,
 ἀπὸ τε τῶν ἀπεναντίον Γωνιῶν β καὶ ζ, ἐπὶ τῆς κοινῆς Βάσεως αγ Καθέτων
 ἀχθεῖσιν τῶν βξ καὶ ζι, καὶ ἀπὸ τῆ σ πρὸς ὀρθὰς ἡγμένης τῆς σλ, καὶ ἰσο-
 μήκας ταῖς δυσὶν ἅμα βξ καὶ ζι ληφθείσης, δεκτέον ὅτι τὸ Ὀρθογώνιον τὸ
 ὑπὸ γσ καὶ σλ, ἴσον τῷ Τετραπλεύρῳ βζ. Ἐπειδὴ γὰρ τὰ Τρίγωνα αβγ,
 αζγ (6) ἴσα τοῖς Ὀρθογωνίοις τοῖς ὑπὸ γσ καὶ βξ, καὶ ὑπὸ γσ καὶ ζι, δά-
 τερον δατέρω· ἐπεὶ τε Εὐθεΐα ἡ λσ, ἴση ἐστὶ ταῖς βξ καὶ ζι ἅμα ληφθείσαις,
 εἰς τε μέρη τέτμηται τὰ σδ καὶ δλ, αἱ ἴσα ἐλήφθη τοῖς βξ καὶ ζι, τὸ ἕτερον
 τῷ ἑτέρῳ. Τὰ ἄρα Τρίγωνα, ἦτοι τὸ Τετράπλευρον βζ, τοῖς Ὀρθογωνίοις
 γδ, λε τοῖς ὑπὸ τῆς ἀτμήτης γσ, καὶ ἑκατέρῃ τῶν μερῶν τῆς τετμημένης
 σλ, τατέσι (δυνάμει τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτάσ.) τῷ Ὀρθογωνίῳ λγ τῷ ὑπὸ
 τῶν λσ καὶ γσ, ἐξ ἀνάγκης συνεξιστάται.

κ. 163.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Τὰ δὲ πρῶτα δέκα τῶν ἐν τῷ παρόντι Βιβλίῳ Θεωρημάτων ἀληθεύει

(1) ια. Βιβ. α. (2) ΑΔ. τῇ α'. (3) ΑΞ. δ. (4) ΑΔ. τῇ α'. (5) Ορ. τῇ β'. (6) μα. Βιβ. α.

ἔδεν ἦττον καὶ ἐπὶ ἀριθμῶν, ἢν εἰς μέρη κατὰ τὰς Γραμμὰς διαιροῦντο. Αὐτοφύεται γὰρ καὶ τὰ ἀριθμητικὰ Ὀρθογώνια διὰ πολλαπλασιασμῶν δυοῖν ἀριθμῶν· τὰ δὲ ἀριθμητικὰ Τετράγωνα, δι' ἐνὸς ἀριθμοῦ κατ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένα.

Οἷον ἔσω ἀριθμὸς μὴ τετμημένος ὁ 9, τετμημένος δὲ ὁ 12 εἰς μέρη ταυτὶ τὰ τρία, 3 καὶ 4, καὶ 5· καὶ ἔσαι δὴ τὸ Ὀρθογώνιον ὑπὸ 9 καὶ 12 = 108, ἴσον τοῖς τρισὶν Ὀρθογώνιοις 27, καὶ 36, καὶ 45, ὧν τὸ μὲν ὑπὸ 9 καὶ 3, τὸ δὲ ὑπὸ 9 καὶ 4, τὸ δὲ ὑπὸ 9 καὶ 5 συναπαρτίζεται.

Ἡ γοῦν ἀριθμὸς ἔσω 432, ὡσεὶ Πολλαπλασιαστέος τετμημένος εἰς 400, καὶ 30, καὶ 2· ἀριθμὸς δὲ, οἷον Πολλαπλασιαστής ὁ 8 μὴ τετμημένος. Καὶ ἔσαι $8 \times 432 = 3456$, ἴσος $8 \times 400 = 3200 + 8 \times 30 = 240 + 8 \times 2 = 16$. Κἀντεῦθεν οὖν τὴν ἀπόδειξιν λιπτέον τῆς κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν πράξεως.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β.

κ. 164.

„Εὰν εὐθεία Γραμμὴ (αβ) τμηθῇ ὡς ἔτυχε (κατὰ τὸ γ), τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης (αβ) καὶ ἑκατέρᾳ τῶν Τμημάτων (αγ, γβ) περιεχόμενα Ὀρθογώνια, ἴσα ἐσὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης Τετραγώνῳ.

Ληφθήτω δὴ ἡ $Z = τῇ αβ$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ὀρθογ. } Zαβ = \text{Ὀρθογ. } Zαγ \\ \text{Ὀρθογ. } Zγβ} \end{array} \right\} (1).$$

Ταῦτέστιν ἐπεὶ ἡ $Z = τῇ αβ$.

Τετράγ. τὸ ἀπὸ αβ = Ὀρθογ. βαγ)

Ὀρθογ. αβγ)

Α' λ λ ω ς.

κ. 165.

Αὐτογεγράφω αβδε Τετράγωνον ἀπὸ Εὐθείας τῆς αβ (2), καὶ ἀπὸ τῆς Σημείας γ ἤχθω (3) πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τῆς αβ ἢ γδ. Αἱ γὰρ πρὸς τῷ γ Γωνίαι Ὀρθαὶ ἔσονται, ταῖς κατὰ τὸ α καὶ β ἴσαι εἰσὶν· αἵ τε Εὐθεῖαι αε, γδ, βδ πρὸς ἀλλήλας Παραλλήλοι (4) εἰσι, τὰ τε αδ, καὶ βδ Παραλληλόγραμμα Ὀρθογώνια (5). Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ Εὐθεῖα γδ τῇ Εὐθείᾳ αε (6), ἥτοι τῇ αβ (7) ἴση. Ἐνθεντοὶ τὰ αδ καὶ βδ Ὀρθογώνια εἰσὶν ὑπὸ (8) τῆς ὅλης αβ, καὶ

(1) Α. τῆ β'. (2) Μς. τῆ α'. (3) ΙΑ. τῆ α'. (4) ΚΗ τῆ α'. (5) Ορ. τῆ β'.
(6) ΑΔ. τῆ α'. (7) Εκ κατ. (8) Ορ. τῆ β'.

τῶν Τμημάτων $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ περιεχόμενα, ἃ δὲ καὶ ἅμα ληφθέντα, τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς $\alpha\beta$ συνεξιστάται.

Ἐς αὐτὸν ἀριθμὸς 8 εἰς 5 καὶ 3 τετμημένοι. Τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης $8 \times 8 = 64$, ἴσον ἐστὶ τοῖς Ὀρθογώνιοις $8 \times 3 = 24$, καὶ $8 \times 5 = 40$.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

„Εάν εὐθεία Γραμμὴ ($\alpha\beta$) ὡς ἔτυχε τμηθῇ (κατὰ τὸ γ), τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης ($\alpha\beta$) καὶ ἐνὸς τῶν Τμημάτων ($\beta\gamma$) περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν Τμημάτων ($\alpha\gamma$, $\gamma\beta$) περιεχομένῳ Ὀρθογώνιῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς προειρημένης Τμήματος ($\beta\gamma$) Τετραγώνῳ. κ. 166.

Ληφθήτω δὲ ἡ $\zeta = \gamma\beta$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ὀρθογ. } \alpha\beta\zeta = \text{Ὀρθογ. } \alpha\gamma\zeta \\ \text{Ὀρθογ. } \gamma\beta\zeta \end{array} \right\} (1). \text{ Ἀλλὰ } \zeta = \gamma\beta.$$

$$\text{Ἀρα Ὀρθογ. } \alpha\beta\gamma = \text{Ὀρθ. } \alpha\gamma\beta \\ \text{Τετρ. } \gamma\beta)$$

Α' λ λ ω ς.

Ἀναγεγράφω (2) γὰρ Ὀρθογ. τὸ $\alpha\delta$, ὑπὸ τῆς ὅλης $\alpha\beta$ καὶ τῆς Τμήματος $\gamma\beta$, καὶ ἀπὸ τῆς Σημείας γ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ $\gamma\epsilon$. Διὰ γὰρ τὴν $\gamma\epsilon$ Εὐθείαν, ἥτις τῇ $\beta\delta$ (3), καὶ ἐπομένως τῇ $\beta\gamma$ (4) ἴση ἐστὶ, τὸ Ὀρθογώνιον $\alpha\delta$ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης $\alpha\beta$ καὶ τῆς Τμήματος $\beta\gamma$ περιεχόμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ τε Ὀρθογώνιῳ $\alpha\epsilon$ τῷ ὑπὸ τῶν Τμημάτων $\alpha\gamma$ καὶ $\gamma\beta$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς προειρημένης Τμήματος $\gamma\beta$ Τετραγώνῳ $\gamma\delta$. κ. 167.

Ἐς αὐτὸν ἀριθμὸς 7 εἰς 3 καὶ 7 τετμημένος. Τὸ γὰρ Ὀρθογ. $7 \times 3 = 21$ ἴσον ἐστὶ τῷ Ὀρθογ. $3 \times 4 = 12$, καὶ τῷ Τετραγ. $3 \times 3 = 9$, ἅμα ληφθεῖσι. Ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ Ὀρθογώνιον $7 \times 4 = 28$, ἴσον ἐστὶ τῷ Ὀρθογ. $3 \times 4 = 12$, καὶ τῷ Τετραγ. $4 \times 4 = 16$, ἅμα ληφθεῖσι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

„Εάν εὐθεία Γραμμὴ ($\zeta\lambda$) τμηθῇ ὡς ἔτυχε (κατὰ τὸ ξ), τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης Τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν Τμημάτων ($\zeta\xi$, $\xi\lambda$) Τετραγώνοις, καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν Τμημάτων ($\zeta\xi$, $\xi\lambda$) περιεχομένῳ Ὀρθογώνιῳ. κ. 168.

(1) Α. τῷ β'. (2) Σχόλ. τὸ τῆς Μζ'. τῆς α'. (3) ΚΗ. καὶ ΑΔ. τῆς α'. (4) Ε'κ κατ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. } \zeta\lambda = \text{Ορθογ. } \zeta\lambda\xi \\ \text{Ορθογ. } \lambda\xi\zeta \end{array} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Α' } \lambda \text{ Ορθογ. } \zeta\lambda\xi = \text{Ορθογ. } \zeta\epsilon\lambda \\ \text{Τετράγ. } \epsilon\lambda \end{array} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Καὶ Ορθογ. } \lambda\xi\zeta = \text{Ορθογ. } \zeta\epsilon\lambda \\ \text{Τετράγ. } \zeta\epsilon \end{array} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Α' } \epsilon\alpha \text{ Τετράγ. } \zeta\lambda = \text{δισ Ορθ. } \zeta\epsilon\lambda \\ \text{Τετ. } \epsilon\lambda \\ \text{Τετ. } \zeta\epsilon \end{array} \right\}$$

Α' λ λ ω ς.

κ. 169.

Α'ναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ζλ Εὐθείας Τετράγωνον (4) τὸ ζλδη, καὶ ἄχ-
θείσης τῆς Διαμέτρου ηλ ἐπὶ τῷ ζηλ Τριγώνῳ, διά τε τὰς ἰσας Πλευρὰς ζη
καὶ ζλ, καὶ δὴ καὶ διὰ τὴν κατὰ τὸ ζ ὀρθὴν Γωνίαν, ἔσονται αἱ ὑπὸ ζηλ, καὶ ζλη
ἡμίσειαι (6) Ο'ρθῆς, καὶ ἀλλήλαις ἰσαι· διὰ γὰρ τῷ ξ Σημεῖον, ἤχθω πρὸς
τὴν ζη (6) Παράλληλος ἡ ξκ, ἣτις Παράλληλος ἔσται καὶ τῇ λδ, τεμεῖ δὲ καὶ
τὴν Διάμετρον ηλ κατὰ τὸ γ. Διὰ δὲ τῷ Σημεῖον γ, Παράλληλος ὁμοίως
ἤχθω τῇ ζλ καὶ τῇ ηδ, ἡ δι. Ἐπεὶ τοίνυν ἅπασαι αἱ τῷ Τετραγώνῳ ζδ Γω-
νίαι Ο'ρθαὶ εἰσιν, ἔσονται δὴ καὶ πάντα τὰ παραλλήλογράμματα ζγ, ξι, θκ,
γδ ὀρθογώνια (7). Ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ ξκ καὶ ζη Παράλληλοι, ἔσται ἡ ἐκτὸς
Γωνία (8) λγξ, ἰση τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ζηλ, ἥτοι τῇ ὑπὸ ζλη ἡμι-
σεῖα οὕτῃ Ο'ρθῆς. Α'ρα ἐπὶ τῷ λξγ Τριγώνῳ αἱ ξγ, ξλ, ἴσαι (9) εἰσὶν
ἰσαι δὲ καὶ τῷ Ο'ρθογώνῳ ξι (10) αἱ ἀπεναντίον Πλευραὶ ελ, γι, καὶ ξγ, λι.
Τὸ ἄρα ξι (11) Τετράγωνόν ἐστιν ἀπὸ τῆς ελ Εὐθείας. Ὡσαύτως δὲ δειχ-
θήσεται καὶ τὸ θκ Τετράγωνον εἶναι ἀπὸ τῆς Εὐθείας θγ, ἥτοι (12) ἀπὸ
τῆς ζξ. Α'λλ' αἱ γξ καὶ ελ ἰσαι εἰσιν, ἔσται τὸ ζγ Ο'ρθογώνιον ὑπὸ τῶν ζξ
καὶ ελ Τμημάτων τῆς δοθείσης Εὐθείας ζλ. Α'λλὰ γὰρ τὰ Ο'ρθογώνια ζγ
καὶ γδ ἴσα (13) εἰσὶ, διὸ καὶ ἅμα ληφθέντα, ἴσα ἐσὶ τῷ δις Ο'ρθογώνῳ τῷ
ὑπὸ τῶν Τμημάτων ζξ, ελ. Ἐνθέντοι τὸ ζδ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης
Εὐθείας ζλ, ἴσον ἐστὶ τοῖς θκ καὶ ξι, τοῖς ἀπὸ τῶν Τμημάτων ζξ, ελ Τε-

(1) Β. τῷ β. (2) Γ. τῷ β. (3) Διὰ τὴν αὐτ. (4) Μς. τῷ α'. (5) Πόρ. δ'. τῆς
ΑΒ. τῷ α'. (6) ΑΔ. τῷ α'. (7) Πόρ. α'. τῆς ΑΔ. τῷ α'. (8) ΚΘ. τῷ α'. (9) ε. τῷ α'.
(10) ΑΔ. τῷ α'. (11) Ο'ρ. ΑΒ. τῷ α'. (12) ΑΔ. τῷ α'. καὶ ἄξ. ιε. (13) ΜΓ. τῷ α'.

παραγώνοις, σὺν τοῖς $\zeta\gamma$ καὶ $\gamma\delta$, ἦτοι σὺν τῷ δις Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν αὐτῶν Τμημάτων. Ο. Ε. Δ.

Ἐς αὐτὸν ἀριθμὸς 10 εἰς μέρη 7 καὶ 3 τετμημένος. Τὸ Τετράγωνον $10 \times 10 = 100$, ἵσον τοῖς Τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν μερῶν $7 \times 7 = 49$, καὶ $3 \times 3 = 9$, καὶ τοῖς δυτίν Ὀρθογωνίοις $7 \times 3 = 21$, καὶ $7 \times 1 = 21$. Ἡ γὰρ ἔς αὐτὸν ἀριθμὸς 12, εἰς μέρη 10 καὶ 2 τετμημένος· τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης $12 \times 12 = 144$, ἵσον ἐστὶ τοῖς Τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν μερῶν $10 \times 10 = 100$, καὶ $2 \times 2 = 4$, συνάμα τῷ δις Ὀρθογωνίῳ $10 \times 2 = 20$, ἦτοι $2 \times 10 \times 2 = 40$. Ἐξ ὧν καὶ ἡ τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης Ἐξαγωγή ἤρτηται.

Πορίσματα.

Ἐκ τούτων δὲ φανερόν, ὅτι τὰ Παραλληλόγραμμα $\xi\iota$ καὶ $\zeta\kappa$, τὰ περὶ Α' τὴν Διάμετρον (ὅρα τὸ ἄνωτ. Σχῆμα) τῷ Τετραγώνῳ, Τετράγωνῳ ἐστὶ.

Καὶ ὅτι ἡ Διάμετρος παντὸς Τετραγώνου δίχα τέμνει τὰς δι' αὐτὴν ἄγεται Β' Γωνίας. Ἐστὶ γὰρ ἡ μὲν ὑπὸ $\zeta\lambda\delta$ Ὀρθή, ἡ δὲ ὑπὸ $\zeta\lambda\eta$ ἡμίσεια Ὀρθῆς.

Καὶ ὅτι τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἡμίσειας, τῆς ἀπὸ τῆς ὅλης ἐστὶ Γ' καὶ 170. Τετραγώνου τεταρτημόριον. Ἐὰν γὰρ αἱ $\xi\kappa$, δι' παραλλήλῳ κινήσει πρὸς τὰ μεσαιτάτω τῶν $\zeta\lambda$, $\eta\delta$, καὶ $\eta\zeta$, $\delta\lambda$ χωρήσωσι, τὰ τε δύο Ὀρθογώνια $\zeta\gamma$, $\gamma\delta$, καὶ τὰ δύο Τετράγωνα $\xi\iota$, καὶ $\zeta\kappa$ εἰς τέσσαρα Τετράγωνα ἀλλήλοις ἴσα ἀποτελεστήσωσι τὰ $\lambda\gamma$, $\iota\kappa$, $\gamma\eta$, $\xi\delta$. Ὡσαύτως δὲ δήλον καὶ ὅτι καὶ ἅπαν Ὀρθογώνιον (ἢ γὰρ καὶ ἀπλῶς ἅπαν Παραλληλόγραμμον) τὸ ὑπὸ δύο ὁποιωνῶν Εὐθειῶν, τῇ Ὀρθογωνίᾳ (ἢ καὶ τῇ Παραλληλογράμμῳ τῇ τῷ δοθέντι ἰσογωνίᾳ) τῇ ὑπὸ τῶν ἡμισειῶν ἐστὶ τετραπλάσιον.

Καὶ ὅτι ἅπαν Τετράγωνον $\xi\delta$ ἵσον ἐστὶ τῷ δις Ὀρθογωνίῳ $\zeta\kappa$, $\xi\delta$ τῷ Δ' καὶ 171. ὑπό τε τῆς Πλευρᾶς τῇ Τετραγώνῳ $\delta\lambda$, ἦτοι $\zeta\lambda$, καὶ τῆς ἡμίσειας ταύτης, οἷον τῆς $\zeta\eta$ περιεχομένῳ. Καὶ ὅτι ἅπαν Παραλληλόγραμμον ἵσον τῷ δις Παραλληλογράμμῳ τῷ ἰσογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς ἐτέρας τῶν Πλευρῶν καὶ τῇ ἡμίσειᾳ τῆς ἐτέρας.

Πρότασις Ε.

„Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ (πφ) τμηθῇ εἰς ἴσα (κατὰ τὸ ρ) καὶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ σ), τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης Τμημάτων (πσ, σφ) περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, μετὰ τῇ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν (ρσ) Τετραγώνῳ, ἵσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμίσειας (πρ) Τετραγώνῳ. καὶ 172.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ο'ρθογών. } \pi\sigma\phi = \text{Ο'ρθ. } \pi\rho \times \sigma\phi \\ \text{Ο'ρθ. } \rho\sigma\phi \end{array} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ο'ρθογ. } \pi\rho \times \sigma\phi = \text{Ο'ρθ. } \rho\sigma\phi \\ \text{Τετρίστιν } (2) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ο'ρθογ. } \pi\rho \times \sigma\phi = \text{Ο'ρθ. } \rho\sigma\phi \\ \text{Τετρ. } \sigma\phi \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αρ'α Ο'ρθογ. } \pi\sigma\phi = \text{Ο'ρθογ. } \rho\sigma\phi \\ \text{Ο'ρθογ. } \rho\sigma\phi \\ \text{Τετρ. } \sigma\phi \end{array} \right\}$$

Προσιδέω κοινῇ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ ρσ, ἔτσι

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ο'ρθογών. } \pi\sigma\phi \\ \text{Τετράγ. } \rho\sigma \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{Ο'ρθογ. } \rho\sigma\phi \\ \text{Ο'ρθογ. } \rho\sigma\phi \\ \text{Τετραγ. } \sigma\phi \\ \text{Τετραγ. } \rho\sigma \end{array} \right\} = \rho\sigma^T = \pi\rho^T (3).$$

Α' λ λ ω ς.

κ. 173.

Ἐπὶ τῆς Εὐθείας πφ, ἀπὸ τῆς ἡμισείας ρφ ἀναγεγράφω Τετράγωνον (4) τὸ ρζ, ἡ ἀχθείσης τῆς Διαμέτρου φε, διὰ τῆ σ ἤχθω (5) Παράλληλος τῇ ρε ἢ φζ, ἡ ση τέμνῃσα τὴν Διάμετρον κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τῆ θ ὁμοίως (6) Παράλληλος τῇ πφ ἢ τῇ εζ, ἡ κι τέμνῃσα τὴν ρε κατὰ τὸ λ. καὶ διὰ τῆ π ὡσαύτως Παράλληλος τῇ ρλ ἢ πκ. Ἐπειδὴ τοίνυν τὸ σι Τετράγωνόν ἐστι (7) περὶ τὴν Διάμετρον τῇ Τετραγώνῳ ρζ, ἔτσι σφ = σθ (8). ἔπει τὸ σλ Παραλληλόγραμμον (9) ἐστιν, ἔτσι ἡ ῥσ = λθ (10) ἡ ρλ = σθ = σφ. Ἐστι δὲ (11) πρ = ρφ = φζ. τὸ ἄρα πλ = σζ (12). Κοινῇ προσιδέω τὸ ρη, ἡ ἔτσι πθ + λη = ρζ. Ἀλλὰ τὸ μὲν πθ ἐστὶ τὸ Ο'ρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν τῆς πφ Εὐθείας ἀνίστων Τμημάτων πσ, σφ, τὸ δὲ λη ἐστὶ (13) τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν ρσ, τὸ δὲ ρζ (14) ἐστὶ τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ρφ. Ἐὰν ἄρα Εὐθεῖα ἡ πφ εἰς ἴσα τμηθῇ κατὰ τὸ ρ, ἡ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ σ, ἔτσι κτ. Ο. Ε. Δ.

Ἐκ δὲ δὴ ταύτης ἡ τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως ἤρτηται ἡ Γεωμετρικὴ κα-

(1) Α'. τῆ β'. (2) Γ'. τῆ β'. (3) Δ'. τῆ β'. (4) Μς. τῆ α'. (5) ΑΔ. τῆ α'. (6) Αντ. (7) Α. Πόρ. τῆς ἀνωτ. (8) Ο'ρ. λρ. Βιβ. α'. (9) Ε'κ κατ. (10) ΑΔ. τῆ α'. (11) Ε'ξ ὑποθ. (12) Ο'ρ. λρ. Βιβ. α'. (13) Α'. Πόρ. τῆς ἀνωτ. καὶ ΑΔ. τῆ α'. Βιβ. (14) Ε'κ κατασκ.

τασκευὴ τῶν Ἐξισώσεων τῶν τετραγωνικῶν καὶ διατεθειμένων, ὡς ἐπὶ τῆς ΚΗ· καὶ ΚΘ· τῇ 5'. Βιβλ. πληρέστερον ἀναπτυχθήσεται.

Ἐς αὐτὸν ἀριθμὸς ὁ 8 εἰς ἴσα τετμημένους 4 καὶ 4, καὶ εἰς ἅνιστα 5 καὶ 3. Καὶ ἔσαι τὸ Ὀρθογώνιον $5 \times 3 = 15$ μετὰ τῷ Τετραγώνῳ $\chi\chi = 1$, ἴσον τῷ Τετραγώνῳ $4 \times 4 = 16$.

Πορίσματα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ὅτι τὸ Ὀρθογώνιον $\pi\sigma\phi$ τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων, ἔλαττον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας $\pi\rho$, ἢ $\rho\phi$ Τετραγώνῳ. Α'.

Ὅσῳ ἔγγιον τῷ μέσῳ ρ τὸ κατὰ τὴν ἅνισον τομὴν Σημεῖον σ γίνεται, τοσάτω μείζον ἔσαι τὸ $\pi\sigma\phi$ Ὀρθογώνιον· ὅσῳ τε ἀπωτέρω ἐκεῖνο, τοσάτω ἔλαττον τῷ $\tau\omega\gamma\epsilon$. Τὸ γὰρ σ προσιὸν μὲν ἔλαττοϊ, ἀπὸν δὲ ἐπαύξει τὴν μεταξὺ τῶν τομῶν $\rho\sigma$, ἐνθεντοὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\rho\sigma$ Τετράγωνον (1) μειωθήσεται ἀναλόγως, καὶ αὐξηθήσεται. Ἀλλὰ διὰ τὴν ἐν χερσὶ Πρέτ. $\rho\sigma^T + \pi\sigma\phi = \pi\rho^T$. ὅσῳ ἄρα ἦττον τὸ $\rho\sigma^T$, τοσάτω μείζον ἔσαι τὸ Ὀρθογ. $\pi\sigma\phi$, καὶ τὴνναντίον. Β'.

Ὅσῳ ἔγγιον γίνεται τὸ Σημεῖον σ τῷ μέσῳ ρ , τοσάτω ἔλαττον ἔσαι τὸ ἄθροισμα τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων $\pi\sigma$, $\sigma\phi$. ὅσῳ δὲ πορρωτέρω, τοσάτω μείζον ἔσαι τὸ ῥηθὲν ἄθροισμα. Καὶ γὰρ (2) $\pi\phi^T = \pi\sigma^T + \sigma\phi^T + 2\pi\sigma\phi$. ἄλλα μὲν ἐγγυτέρω μὲν τῷ σ τῷ ρ γινόμενου μείζον τὸ $\pi\sigma\phi$ καθίσταται Ὀρθογώνιον (3), ἀπωτέρω δὲ ἔλαττον, τὸ ἄρα σ τῷ μέσῳ ρ προσιὸν, ἐλάσσονα τὰ ($\pi\sigma^T = \sigma\phi^T$) Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων, μείζονα δὲ ἀπὸν ἀπὸ τῶν αὐτῶν ἀναδεικνυσί. Γ'.

Ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων Ὀρθογώνιον $\pi\sigma\phi$, τετράκις ληφθὲν, ἔλαττον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης $\pi\phi$ Τετραγώνῳ. Τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ἡμισείας $\pi\rho$ Τετράγωνον, τετράκις ληφθὲν, ἴσον (4) τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης $\pi\phi$ Τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τὸ $\pi\sigma\phi$ Ὀρθογ. (5) ἔλαττον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας $\rho\phi$, ἢ $\pi\rho$ Τετραγώνῳ, ἐνθεντοὶ καὶ τὸ $\pi\sigma\phi$ τετράκις, ἐλάσσον τῷ ἀπὸ $\pi\rho$ Τετραγ. τετράκις· ἔλαττον ἄρα καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης $\pi\phi$ Τετραγώνῳ. Ο. Ε. Δ. Δ'.

Εἰν Εὐθεῖαι δύο ἴσαι ἀλλήλαις $\alpha\beta$, καὶ $\gamma\delta$, ἑτῶτοι κατὰ τὰ Σημεῖα ϵ καὶ ζ τετμημέναι, ὥστε τὸ Ὀρθογώνιον $\alpha\epsilon\beta$ τὸ ὑπὸ τῶν Τμημάτων τῆς ἐτέρας ἴσον εἶναι τῷ Ὀρθογώνῳ $\gamma\zeta\delta$, τῷ ὑπὸ τῶν Τμημάτων τῆς ἐτέρας, ἔσαι Ε'. κ. 174.

(1) Α' ξ. 5. (2) Δ'. τῇ β'. (3) Πέρ. ἀνωτ. - (4) Πέρ. Γ. τῆς Δ. τῇ β'. (5) Πέρ. α. τῶν ἀνωτέρω.

δὴ καὶ τῶν τῶν Τμήματα ἴσα τῷ ἑτέρῳ τὸ ἕτερον, τῷ μείζονι τὸ μείζον,
καὶ τῷ ἐλάσσονι τὸ ἐλάσσον, εἴαν ἢ τὰ Τμήματα ἅντα. Ἐάν μὲν γὰρ
τὰ ε καὶ ζ Σιμεῖα εἰς ἴσα τέμνη τὰς Εὐθείας αβ καὶ γδ, δῆλον ὅτι τὸ μὲν
αε = γζ, τὸ δὲ εβ = ζδ. Ἐάν δὲ ἄλλως, τετμήθωσαν δὲ αὖ αὖ αβ καὶ γδ,
ἢ μὲν κατὰ τὸ μ, ἢ δὲ κατὰ τὸ ν, ἄμφω εἰς ἴσα. Οὕτω γὰρ ἐπεὶ τὰ τέ-
των ἡμίση μβ, καὶ νδ, ἴσα (1) ἐστὶ, πάντως καὶ μβ^Τ = νδ^Τ (2). Ἀλλὰ γὰρ
διὰ τὴν Πρὸτ. μβ^Τ = αεβ + με^Τ, καὶ νδ^Τ = γζδ + νζ^Τ, ἄρα (3) αεβ +
με^Τ = γζδ + νζ^Τ. Ἐάν οὖν ἀφαιρεθῇ τὰ ὑποτεθέντα ἴσα Ὁρθογώνια (4),
ἔσται με^Τ = νζ^Τ, καὶ δὴ καὶ με = νζ. Τῶν οὖν ταῖς ἴσαις αμ καὶ γν προσε-
θεῖσιν, καὶ ἀπὸ τῶν ἴσων μβ, νδ ἀφαιρεθεῖσιν, ἔσται (5) αε = γζ, καὶ εβ =
ζδ. Ο. Ε. Δ.

κ. 175. ε.

Τὸ Ὁρθογώνιον τὸ ὑπὸ τε τῶν ἄθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς δυοῖν Εὐ-
θεῖων πρ καὶ ρσ, ἴσον ἐστὶ τῇ διαφορᾷ τῶν Τετραγώνων, τῶν ἀπὸ αὐτῶν
τάτων τῶν Εὐθεῖων, καὶ γὰρ πσφ + ρστ = πρ^Τ. Ἐάν οὖν ἀφέλῃς ἐκα-
τέρῳθεν ρστ, ἔσται πσφ = πρ^Τ — ρστ. Ἐπεὶ δὲ πσ, τῶν Εὐθεῖων πρ
καὶ ρσ τὸ ἄθροισμά ἐστι, καὶ (διότι ρφ = πρ) σφ ἐστὶν ἡ τῶν διαφορᾶ,
δῆλον τὸ προτεθέν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ζ.

κ. 176.

„Ἐάν εὐθεῖα Γραμμή (αβ) τμηθῇ δίχα (κατὰ τὸ γ), προσεθῇ
„δέ τις αὐτῇ Εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας (ἢ βζ), τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ
„προσκειμένη (αζ), καὶ τῆς προσκειμένης (βζ) περιεχόμενον Ὁρθογώνιον,
„μετὰ τῶν ἀπὸ τῆς ἡμισείας (γβ) Τετραγώνων, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγ-
„κειμένης ἑκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς (ἐστὶ δὲ
„αὕτη ἢ γζ) ἀναγραφέντι Τετραγώνῳ.

Πρόδες ἐπ' εὐθείας ἐτέρωθεν τὴν λα ἴσην τῇ προσκειμένη βζ. Καὶ
δὴ ἐπεὶ ταῖς ἴσαις αγ καὶ βγ, ἴσαι προστετέθησαν αὖ αὖ αλ καὶ βζ, ἔστι πάν-
τως ἡ λζ εἰς ἴσα τετμημένη κατὰ τὸ γ, καὶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ β.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ἄρα Ὁρθογών. λβζ} \\ \text{Τετραγ. γβ} \end{array} \right\} = \text{Τετραγ. γζ. (6).}$$

Ἀλλὰ γὰρ ἐπεὶ ἴσαι ἀλλήλαις αὖ αὖ λβ καὶ αζ

$$\text{Ὁρθογών. λβζ} = \alpha\zeta\beta$$

(1) Α' ε. ε. (2) Α' ε. ιι. (3) Α' ε. α. (4) Α' ε. γ. (5) Α' ε. β. καὶ γ. (6) Διὰ
τὴν ἀνωτ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Α'ρα Ορθογών. αβ} \\ \text{Τετραγ. γβ} \end{array} \right\} = \text{Τετραγ. γζ.}$$

Α' λ λ ω ς.

Κατασκευάσαντες τὸ σχῆμα ὡςπερ καὶ τὸ ἀνωτέρω, ἔχομεν τὸ αὐτὸ Ο'ρθογώνιον, ὑπὸ τῆς ὅλης συν τῇ προσκειμένῃ (ἦτοι ὑπὸ τῆς αζ) καὶ τῆς προσκειμένης (ἦτοι τῆς βζ). τὸ δὲ καὶ Τετράγωνον ἀπὸ τῆς γβ, ἣτις ἐστὶν ἡμίσεια τῆς αβ. τὸ δὲ γε Τετράγωνον ἀπὸ τῆς γζ, ἣτις ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ο'ρθογώνιον δεῖσιν ἐστὶ τῷ Ο'ρθογώνιῳ ακ (καὶ γὰρ (1) ακ = κβ = δε (2)), τὸ δὲ λοιπὸν χωρίον ἐκατέρωσε κοινόν, δηλὸν τὸ προτεθέν.

κ. 177.

Ἐς αὖ ἀριθμὸς 6 τετμημένος εἰς ἴσα 3 καὶ 3, τῷ δὲ προσεθείδω ἀριθμὸς 2, καὶ ἔσται τὸ Ο'ρθογώνιον $8 \times 2 = 16 + 3 \times 3$ τῷ Τετραγώνῳ $9 = 5 \times 5 = 25$.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α.

Ἐὰν οὖν τρεῖς Εὐθεῖαι αζ, γζ, βζ ἀριθμητικῶς ὦσιν ἀνάλογοι (τοῦ Δ. 96. 178. τέσιν εἴαν ἡ αγ διαφορὰ τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν, ἴση ᾗ τῇ διαφορᾷ γβ τῆς δευτέρας πρὸς τὴν τρίτην), ἔσται τὸ Ο'ρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αζ, καὶ βζ, συνάμα τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς διαφορᾶς αγ, ἢ γβ, ἴσον τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης γζ.

Ἐνθεντοὶ καὶ τὸ Ο'ρθογώνιον αὐτὸ (ἐπὶ τῷ προαναγραφέντῳ Σχήματι) β. ἔλαττόν ἐστι τῷ Τετραγώνῳ γε, τῇ ἐλλείψει τῷ Τετραγώνῳ κη. Ἡ δὲ ἐλλείψις, τῆς αβ δοθείσης, ἢ αὐτὴ αἰεὶ μένει, ὁσησὲν καὶ τύχοι ἢ βζ Εὐθεῖα αὐξήσεως. Παρὰ δὲ τὴν αὐξήσιν αὐτῆς ταύτης τῆς βζ, τὸ Ο'ρθογώνιον αὐτὸ Τετραγώνῳ γε μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐγγυτέρω γίνεται καὶ λόγῳ καὶ Σχήματι, ὥς τε τὴν διαφορὰν κη, πρὸς τὸ Μέγεθος τῶν Σχημάτων αὐτῶν καὶ γε, ὥς μηδὲ λόγῳ τινὸς οὕτως ὀλιγωρεῖσθαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ (αβ) τμηθῇ ὡς ἔτυχε (κατὰ τὸ γ), τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης (αβ) καὶ τὸ ἀπ' ἐνὸς τῶν Τμημάτων (αγ), τὰ συναμφοτέρα Τετράγωνα,

κ. 179.

(1) λ. Βιβ. α. (2) μυ. Βιβ. α.

ἴσα ἐστὶ τῶ τε δις ὑπὸ τῆς ὅλης (αβ) καὶ τῆ εἰρημένης Τμήματος (αγ) περιε-
χομένῳ Ὀρθογώνιῳ, καὶ τῶ ἀπὸ τῆ λοιπῆς Τμήματος (γβ) Τετραγώνῳ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγωνον τὸ ἀπὸ αβ} = \text{Ὀρθογ. βγα δις} \\ \text{Τετραγ. αγ} \\ \text{Τετραγ. γβ} \end{array} \right\} (1)$$

Πρόδες ἐκατέρωστε Τετράγ. αγ, καὶ ἔσαι

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. αβ} \\ \text{Τετραγ. αγ} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{βγα Ὀρθ. δις} \\ \text{Τετραγ. αγ δις} \\ \text{Τετραγ. γβ.} \end{array} \right.$$

Ἀλλὰ τὸ βγα Ὀρθογ. δις, σὺν τῷ Τετραγ. τῷ ἀπὸ αγ δις, ἴσον
ἐστὶ (2) τῷ ὑπὸ βαγ δις. Ἐὰν ἄρα ἀντὶ τῆ βγα δις, καὶ ἀντὶ τῆ Τετραγ.
αγ δις, ληφθῇ τὸ βαγ δις, ἔσαι.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. αβ} \\ \text{Τετραγ. αγ} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{βαγ Ὀρθογ. δις} \\ \text{βγ Τετραγ.} \end{array} \right.$$

Α' λ λ ω ς.

κ. 180.

Κατασκευαζέμενος τῇ Σχήματος ὡς εἶναι τὸ μὲν αδ, Τετράγωνον τὸ
ἀπὸ τῆς ὅλης αβ, τὸ δὲ αλ, Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Τμήματος αγ, ἀχ-
θεΐσης τε τῆς Διαμέτρου εβ, καὶ προσκλιθεΐσης τῆς λγ ἐς γε τὸ ζ, ἥτις ἀν-
τέμνη καὶ τὴν Διάμετρον κατὰ τὸ η, διὰ δὲ τῆ η Παραλλήλου τῇ αβ καὶ
εδ, ἀχθεΐσης τῆς δι, ἔσονται αἱ δρ καὶ δι Εὐθείαι, τῇ τε ὅλῃ αβ, καὶ ἀλλή-
λαις ἴσαι (ἀμέλειτοι γὰρ δρ = δα + αρ, καὶ αρ (3) = αγ, καὶ αδ = γη
(4) = γβ (4)· ἐνθεντοι δρ = αγ + γβ = αβ = δι (6).), καὶ δε, δι ὁ-
μοίως τῷ Τμήματι αγ, καὶ ἀλλήλαις ἴσαι. Ἐπεὶ τοίνυν ἴσα τὰ δύο Ὀρθο-
γώνια δδ καὶ δλ, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, καὶ τῆς Τμήματος αγ· ταῦτα δὲ με-
τὰ τῇ γι Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἑτέρας Τμήματος γβ, τὸ αὐτὸ πληρῶσι χω-
ρίον, ὃ καὶ τὰ Τετράγωνα αδ, καὶ αλ, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ὅλης ὄν, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς
Τμήματος, δῆλον τὸ προτεθέν.

Ἐςω ἀριθμὸς 13 ὡς ἔτυχε τετμημένος εἰς 9 καὶ 4, καὶ ἔσαι $13 \times 13 =$
 169 · καὶ $9 \times 9 = 81$, τὰ συναμφότερα Τετράγωνα 250, ἴσα τῷ $13 \times 9 =$
 117 , καὶ $13 \times 9 = 117$, καὶ $4 \times 4 = 16$, ἅπερ ἅμα 250.

(1) Δ. τῆ β'. (2) Γ. τῆ β'. (3) Ἐκ κατασκ. καὶ Ὁρ. ΑΒ. τῆ κ'. (4) λδ. Βιβ. α.
(5) Δ. Πόρ. τῆς Δ. τῆ β'. (6) ΑΔ. τῆ κ'.

Διὰ μὲν τῆς Δ'. τῶν τῷ παρόντος Βιβλίου Προτάσεων τὸ ἀπὸ τῆς Δυναμικῆς ῥίξης παράσταται ἡμῖν Τετράγωνον, διὰ δὲ τῆς Ζ'. ταύτης, τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τῆς ῥίξης Τετράγωνον ὑπεξάγεται, κατὰ τὸ ἐφεξῆς

Π ό ρ ι σ μ α.

Εἰάν ἀπὸ Εὐθείας τῆς αβ, μέρος ἀφαιρεθῇ τὸ αγ, τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς βγ Τετράγωνον, τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης αβ, ἢ τῷ ἀπὸ τῆς ἀφαιρεθέντος Τμήματος αγ, συναμφοτέρων τῶν Τετραγώνων, διαφέρει τῷ δις ὑπὸ βαγ Ὁρθογώνιῳ τῷ ὑπὸ τε τῆς ὅλης ἢ τῆς ἀφαιρεμένης Τμήματος περιεχομένῳ. α. 181.

Καὶ γὰρ δυνάμει τῆς ἀνὰ χειρὸς Προτ. Ζ'. $\alpha\beta^T + \alpha\gamma^T = 2\beta\alpha\gamma + \gamma\beta^T$.
Εἰάν ἔν ἐκατέρωθεν ἀφαιρεθῇ τὸ $2\beta\alpha\gamma$, ἔσται $\alpha\beta^T + \alpha\gamma^T - 2\beta\alpha\gamma = \gamma\beta^T$.
Ο. Ε. Δ.

Τῷ ὄντι δὲ ἐπὶ τῷ ἀνωτέρῳ ἀναγεγραμμένῳ Σχήματος τὸ γι Τετράγ. = Τετραγ. αδ, ἢ Τετραγ. αλ — Ὁρθογ. βδ — Ὁρθογ. βλ. τατέσι βγ^T = $\alpha\beta^T + \alpha\gamma^T - 2\beta\alpha\gamma$.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Εἰάν Εὐθεῖα (λζ) εἰς ἴσα τμηθῇ (κατὰ τὸ ι), προσεθῇ δέ τις αὐτῇ „Εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας (ἢ ζξ), τὸ ὑπὸ τῆς ἡμισείας (ιλ), ἢ τῆς συγκειμένης „ἔκτε τῆς ἡμισείας ἢ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς (ιξ) περιεχόμενον Ὁρ- „θογώνιον (λιξ), τετράκις ληφθὲν μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς προσκειμένης (ζξ) Τε- „τραγώνῳ, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης ἢ τῆς προσκειμένης, „ὡς ἀπὸ μιᾶς (λξ) ἀναγραφέντι. α. 182.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. ιξ} \\ \text{Τετραγ. ιζ} \end{array} \right\} = 2\xi\zeta \text{ Ὁρθογ.} \\ \qquad \qquad \qquad \zeta\xi \text{ Τετραγ.} \quad (1).$$

Τατέσιν, ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως $\zeta\iota = \iota\lambda$, ἢ $\iota\zeta^T = \lambda\iota^T$ ἢ $\xi\iota\zeta = \xi\iota\lambda = \lambda\iota\xi$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. ιξ} \\ \text{Τετραγ. λι} \end{array} \right\} = 2\lambda\xi \text{ Ὁρθογ.} \\ \qquad \qquad \qquad \zeta\xi \text{ Τετραγ.}$$

Εἰάν ἄρα τοῖς ἴσοις κοινὸν προσθῇ τὸ $2\lambda\xi$, ἔσται

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. ιξ} \\ \text{Τετραγ. λι} \\ \text{Ὁρθ. λιξ δις} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} 2\lambda\xi \text{ Ὁρθογ.} \\ 2\lambda\xi \text{ Ὁρθογ.} \\ \zeta\xi \text{ Τετραγ.} \end{array} \right\}$$

Τατέσι (2) Τετράγ. λξ =

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Δ. τῷ α'.

α 183.

Αναγεγράφω Τετράγωνον τὸ ξδ ἀπὸ τῆς ὅλης εἰς τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς λξ, καὶ ἀχθείσης τῆς Διαμέτρου λα, διὰ τῶν ι εἰς 2 Σημείων ἤχθωσαν Παράλληλοι τῇ λδ καὶ ξα, αἱ ιβ καὶ ζε τέμνεται τὴν Διάμετρον κατὰ τὰ Σημεῖα ρ εἰς σ· διὰ δὲ τῶν Σημείων ρ εἰς σ, ἤχθωσαν Παράλληλοι τῇ λξ καὶ δα, αἱ τυ καὶ μθ. Ἐπεὶ γυν ἡ λξ εἰς ἴσα τέμνεται κατὰ τὸ ι, ἔσαι (1) τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας λι Τετράγωνον τι, τεταρτημόριον τῆ ἀπὸ τῆς ὅλης λξ Τετραγώνου μζ· καὶ τὰ τέσσαρα Ὀρθογώνια τι, ρζ, μρ, οπ (2) Τετράγωνα ἔσαι ἀλλήλοις ἴσα. Ἐτι παρὰ τὰς ζπ, πσ τῶν ἰσῶν Τετραγώνων Πλευρὰς, καὶ δι' αὐτὸ τῆτο ἴσας, ἴσα ἔσαι (3) καὶ τὰ Ὀρθογώνια ζν, πθ. Ἀλλὰ ζθ (4) = δτ, εἰς πθ (5) = σβ. Ἀρα εἰς ζν (6) = μβ· καὶ δὴ τὰ τέσσαρα Ὀρθογώνια ζν, πθ, σβ, μβ ἴσα ἀλλήλοις ἔσαι. Ἐπεὶ τοίνυν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ εἰς αἱ λι, ιρ, ἔσαι τὸ ρξ (τατέσι τὸ Τετράγωνον ρζ μετὰ τῷ Ὀρθογώνιῳ ζν) Ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς ἡμισείας λι, εἰς ιξ τῆς συγκεκλιμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας εἰς τῆς προσκειμένης περιεχόμενον. Τὰ ἄρα τέσσαρα Τετράγωνα τι, ρζ, μρ, οπ μετὰ τῶν τεσσάρων Ὀρθογωνίων ζν, πθ, βμ, βσ, ἴσα τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ἡμισείας λι, εἰς τῆς συγκεκλιμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας εἰς τῆς προσκειμένης, ἦτοι τῆς ιξ περιεχομένῳ, τετράκις ληφθέντι. Ἀλλ' ἔστι δὴ εἰς τὸ εδ Τετράγωνον ἀπὸ τῆς προσκειμένης ζξ. Ἐὰν ἄρα Εὐθεῖα ἡ λξ εἰς ἴσα τμηθῇ κατὰ τὸ ι, προσεθῇ δέ τις αὐτῇ Εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ζξ, ἔσαι κτ. Ο. Ε. Δ.

Ἐξω ἀριθμὸς 12 εἰς ἴσα 6 εἰς 6 τετμημένος, καὶ τῆτω προσκείσθω ἀριθμὸς ἕτερος 4. Καὶ ἔσαι τὰ τέτταρα Ὀρθογώνια $10 \times 6 = 240$ μετὰ τῷ Τετραγώνῳ $4 \times 4 = 16$, ἴσα τῷ Τετραγώνῳ $16 \times 16 = 256$.

Ὁ δὲ Εὐκλείδης οὕτω προτίθησι τὸ Θεώρημα.

„Ἐὰν, φησὶν, εὐθεῖα Γραμμὴ (ιξ) τμηθῇ ὡς ἔτυχεν (κατὰ τὸ 2), τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης (ιξ) εἰς ἑνὸς τῶν Τμημάτων (ιζ) περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς λοιπῆς Τμήματος (ζξ) Τετραγώνῳ, ἴσον ἔσιν τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης (ιξ) εἰς τῆς εἰρημένῃς Τμήματος (ιζ), ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι Τετραγώνῳ.

Οἷον ἔξω ἀριθμὸς 10 εἰς 6 εἰς 4 τετμημένος, καὶ ἔσαι τὸ παραγόμενον

(1) Πόρ. γ'. τῆς δ'. τῆς β'. (2) Πόρ. τὸ αὐτό. (3) Δε. τῆς α'. (4) ΜΓ. τῆς α'. (5) Διὰ τὴν αὐτήν. (6) Δ'ε. γ'.

$$6 \times 10 \text{ τετράκις ληφθέν} = 240, \text{ καὶ } 4 \times 4 = 16. \text{ τὰ δὲ } 240 + 16 = 256 \\ = 10 + 6 \times 10 + 6.$$

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Εάν εὐθεῖα Γραμμὴ (αγ) τμηθῇ εἰς ἴσα (κατὰ τὸ β), καὶ εἰς ἀνίστα κα- κ. 184.
 „τὰ τὸ ζ, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης Τμημάτων (αζ, ζγ) Τετράγωνα,
 „διπλάσιά ἐσι τῷ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας (αβ), καὶ τῷ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν το-
 „μῶν (βζ) Τετραγώνω.

$$\text{Τετράγ. αζ (1)} = \text{Ο'ρθ. 2αβζ} \left. \begin{array}{l} \text{Τετραγ. αβ} \\ \text{Τετραγ. βζ} \end{array} \right\} \text{Κοινῇ οὖν προσεθέντος τῷ Τετραγ. ζγ. ἔσαι.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. αζ} \\ \text{Τετραγ. ζγ} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{Ο'ρθογ. 2αβζ δις} \\ \text{Τετρ. αβ} \\ \text{Τετρ. βζ} \\ \text{Τετρ. ζγ} \end{array} \right\}$$

$$\text{Α'λλ' Ο'ρθογ. αβζ} = \gamma\beta\zeta, \text{ ὅτι } \alpha\beta = \beta\gamma \text{ ἐξ ὑποθέσεως.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Α'ρα Τετράγ. αζ} \\ \text{Τετραγ. ζγ} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{Ο'ρθογ. } \gamma\beta\zeta \text{ δις} \\ \text{Τετρ. αβ} \\ \text{Τετρ. βζ} \\ \text{Τετρ. ζγ} \end{array} \right\}$$

Ἀλλὰ $\gamma\beta\zeta \text{ δις} + \zeta\gamma^T (2) = \beta\gamma^T + \beta\zeta^T$. ἤτοι $= \alpha\beta^T + \beta\zeta^T$,
 εἰάν ἄρα ταῦτα ἀντ' ἐκείνων τεθῇ ἔσαι

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. αζ} \\ \text{Τετραγ. ζγ} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{Τετραγ. αβ δις} \\ \text{Τετραγ. βζ δις} \end{array} \right\}$$

Α' λ λ ω ς.

Ἦ'χθω ἀπὸ τῆ β τῇ αζ πρὸς ὀρθάς (3) ἴση τῇ βα ἢ βε, καὶ ἐπιζεύχ- κ. 185.
 θεισῶν τῶν βε, ζε, ἢχθω διὰ τῆ γ ἢ γπ Παράλληλος τῇ βε (4), καὶ διὰ
 τῆ π ἢ πι Παράλληλος τῇ αζ. ἐπεζεύχθω δὲ ἡ απ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ αβε
 Γωνία ἐστὶν Ο'ρθή, καὶ αἱ αβ καὶ βε ἴσαι ἀλλήλαις, ἔσονται δὴ (5) αἱ ὑπὸ
 βαε, καὶ βεα ἡμίσειαι Ο'ρθῆς. Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ αἱ ὑπὸ βεζ καὶ βζε,

(1) 4. τῷ β'. (2) Ζ. τῷ β'. (3) ΙΑ. τῷ α'. (4) ΑΑ. τῷ α'. (5) Πόρ. ια'. τῆς
 ΑΒ. τῷ α'.

ἡμίσι. Οὐδὴς, ὥστε ἡ ὅλη ὑπὸ αεπ Οὐδὴ. Ἀλλὰ καὶ τῆς ὑπὸ εβζ Οὐδὴς ἔσης, ἥτε ὑπὸ εηπ, καὶ ὑπὸ πγζ (1) ἔσονται Οὐδαί. ἡμίσεια δὲ Οὐδὴς ἡ ὑπὸ ηεπ, ἡ ἄρα λοιπὴ (2) ὑπὸ ηπε, ἡμίσεια Οὐδὴς καὶ αὐτή. ἄρ' οὖν (3) καὶ ηε ἴση τῇ ηπ. Ὡσαύτως δὲ δείξεις καὶ τὴν γπ ἴσην εἶναι τῇ γζ. Τὸ τοίνυν ἀπὸ αε Τετράγωνον ἴσον (4) τοῖς ἀπὸ αβ καὶ βε, διπλάσιον δὲ (5) τῷ ἀπὸ αβ. Παραπλησίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ επ, διπλάσιον τῷ ἀπὸ ηπ (6). Ἀλλ' ἡ ηπ ἴση τῇ βγ (7), τὸ ἄρα ἀπὸ επ διπλάσιον καὶ τῷ ἀπὸ βγ. Ἀλλὰ μὲν τὸ ἀπὸ απ ἴσον τοῖς ἀπὸ αε καὶ επ ἅμα (8) ληφθεῖσι· τὸ ἄρα ἀπὸ απ διπλάσιον τῶν ἀπὸ αβ καὶ βγ. Τῷ δὲ δὴ ἀπὸ απ ἴσα (9) τὰ ἀπὸ αγ καὶ γπ (τῆς ὑπὸ αγπ Οὐδὴς ἔσης, ἐπεὶ (10) καὶ ἡ ὑπὸ πγζ Οὐδὴ δέδεικται), τὰ ἄρα ἀπὸ αγ καὶ γπ διπλάσια τῶν ἀπὸ αβ καὶ βγ. Ἀλλὰ γὰρ καὶ ἡ γπ ἴση ἐδείχθη τῇ γζ, τὰ ἄρα ἀπὸ αγ καὶ γζ, ἅπέρ' ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίστων Τμημάτων Τετράγωνα, διπλάσια τῶν ἀπὸ αβ καὶ βγ, τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ἡμισείας ὄντος, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν. Ο. Ε. Δ.

Εἴσω ἀριθμὸς 32 τετμημένος εἰς ἴσα 16 καὶ 16, καὶ εἰς ἄνισα 20 καὶ 12. Τὰ τοίνυν Τετράγωνα $20 \times 20 = 400$ καὶ $12 \times 12 = 144$, διπλάσιά ἐστὶ τῶν Τετραγώνων τῷ τε $16 \times 16 = 256$, καὶ $4 \times 4 = 16$.

Π ρ ό τ α σ ι ς I.

α. 186.

„Εὰν εὐθεία Γραμμὴ (Ζι) τμηθῇ δίχως (κατὰ τὸ λ), προσεθῇ δὲ τις αὐτῇ Εὐθεία ἐπ' εὐθείας (ἡ ιξ), τὸ ἀπὸ τῆς ἑλῆς σὺν τῇ προσκειμένῃ (ΖΞ), καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης (ιξ), τὰ συναμφοτέρα Τετράγωνα, διπλάσιά ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας (Ζλ), καὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκεimenῆς ἔκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς (λξ) ἀναγραφέντος Τετραγώνου.

Προσκεισθῶ δὴ ἐπ' εὐθείας ἡ πζ ἐτέρωθεν ἴση τῇ ιξ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ Ζλ, ιλ ἴσαι εἰσὶν ἐξ ὑποθ., καὶ ταύταις ἴσαι προστετέθησαν, ἔσονται αἱ πλ, ξλ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ὅτως ἡ πξ εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ λ, καὶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ ι. Καὶ τοίνυν

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. πι} \\ \text{Τετραγ. ιξ} \end{array} \right\} (11) = \left. \begin{array}{l} \text{Τετραγ. πλ δις} \\ \text{Τετραγ. λι δις} \end{array} \right\}$$

(1) ΚΗ. τῷ α'. (2) ΑΒ. τῷ α'. (3) ε. τῷ α'. (4) ΜΖ. τῷ α'. (5) Α. Πόρ. τῆς ΜΖ. τῷ α'. (6) Διὰ τὴν αὐτ. (7) ΑΔ. τῷ α'. (8) ΜΖ. τῷ α'. (9) Διὰ τὴν αὐτ. (10) ΙΓ. τῷ α'. (11) Διὰ τὴν ἀνωτ.

Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ πι Τετράγ. ταυτόν ἐστι τῷ ἀπὸ ζε, ἢ Τετράγ. τὸ ἀπὸ
πλ τῷ ἀπὸ λξ, ἢ τὸ ἀπὸ λι τῷ ἀπὸ ζλ.

Ἄρα Τετράγ. ζε } = Τετράγ. λξ } δις.
Τετράγ. ιξ } = Τετράγ. ζλ }

Α' λ λ ω ς.

Ἦχθω ἀπὸ τῆ λ Σημεία, τῇ Εὐθείᾳ ζι πρὸς Ὁρθάς (1) καὶ ἴση τῇ
ζλ ἢ λι, ἢ λε, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ζε, ιε. διὰ δὲ τῆ ε Ἦχθω ἢ επ (2)
Παράλληλοι τῇ ζε, καὶ διὰ τῆ ξ, ἢ ξπ Παράλληλος τῇ λε. Καὶ ἐπεὶ Πα-
ράλληλοί εἰσιν αἱ ελ, πε, αἱ εἰ, πε μὴ Παράλληλοι, προαχθεῖσαι (3)
συμπεσοῦνται πε, ὅσον κατὰ τὸ η· ἐπεξεύχθω δὲ ἢ ἢ ζη. Ἐπειδὴ τοίνυν ἢ
ὑπὸ ζλε Ὁρθή, αἱ δὲ ζλ, λε ἴσαι, ἔσονται αἱ ὑπὸ λζε, λεζ (4) ἡμίσειαι
Ὁρθῆς. Παραπλησίως δὲ καὶ αἱ ὑπὸ λιε ἢ λει (5) ἔσονται ἡμίσειαι Ὁρθῆς.
κἀντεῦθεν ἢ ὅλη ὑπὸ ζει Ὁρθή. Ἦ δὲ δὴ Γωνία ὑπὸ ξη, ἴση τῇ λιε (6),
ἢ ἐπομένως Ὁρθῆς ἡμίσεια καὶ αὐτῇ. Διὰ δὲ τὰς Παράλληλους ελ, πι, ἃς
τέμνει ἢ ζε κατὰ τὸ λ ἢ ξ, ἢ τὴν ὑπὸ ελξ Ὁρθήν, ἔσαι δὴ καὶ ἢ ἐναλλάξ
(7) ὑπὸ ηξλ Ὁρθή. Ταύτηται ἐπὶ τῇ Τριγώνῃ ηξι τῆς μὲν κατὰ τὸ ξ Γω-
νίας Ὁρθῆς ἔσης, τῆς δὲ κατὰ τὸ ι ἡμισείας Ὁρθῆς, ἔσαι ἢ ἢ ὑπὸ ξη ἡμί-
σεια (8) ἢ αὐτῇ Ὁρθῆς· διὸ ἢ αἱ Πλευραὶ ξη, ξι ἀλλήλαις (9) ἴσαι. Τῆς
γὰρ τῆ λπ Παραλληλογράμμε Γωνίας τῆς κατὰ τὸ λ Ὁρθῆς ἔσης, ἢ ἢ ἀπε-
ναντίον π Ὁρθή (10) ἂν εἴη. Ὡς ἢ ἐπὶ τῇ επη Τριγώνῃ, τῆς μὲν κατὰ τὸ
π Ὁρθῆς δειχθείσης, τῆς δὲ κατὰ τὸ η ἡμισείας Ὁρθῆς, ἔσαι δὴ καὶ ἢ ὑπὸ
πη Ὁρθῆς ἡμίσεια (11), αἷτε Πλευραὶ πε, πι ἀλλήλαις (12) ἴσαι. Ἀλλ-
ὰ γὰρ ἐν τῷ Ὁρθογωνίῳ λπ, επ = λξ (13), ἄρα ἢ λξ = πη. Ἦν δὲ μὲν
οὖν ἐπὶ τῇ ὀρθογωνίᾳ Τριγώνῃ ζλε, ἴσων οὕσων τῶν ζλ καὶ λε, τὸ ἀπὸ ζε
Τετράγωνον (14) διπλάσιόν ἐστι τῇ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ζλ· ἐπὶ δὲ τῇ ὀρθο-
γωνίᾳ Τριγώνῃ επη, ἴσων ὁμοίως ἔσων τῶν πε, πη, τὸ ἀπὸ εη Τετράγωνον
διπλάσιόν ἐστι (15) τῇ ἀπὸ επ, ἢ λξ, ἢτοι τῇ ἀπὸ τῆς συγχειμένης ἔκτε τῆς
ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης. Τὰ δὲ τοι ἀπὸ ζε ἢ εη Τετράγωνα, ἴσα ἐσὶ
(16) τῷ ἀπὸ τῆς ζη Τετραγώνῳ, τετέστι τοῖς Τετραγώνοις (17) τοῖς δυτὶς

α. 187.

(1) ΙΑ. τῆ α'. (2) ΙΑ. τῆ α'. (3) Πόρ. α'. τῆ Σχολ. τῆς ΙΑ. τῆ α'. (4) Πόρ.
ια'. τῆς ΑΒ. τῆ α'. (5) Δί αὐτ. (6) ΙΕ. τῆ α'. (7) ΚΘ. τῆ α'. (8) Πόρ. ζ'. τῆς ΑΒ.
τῆ α'. (9) ζ. τῆ α'. (10) ΙΔ. τῆ α'. (11) ζ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῆ α'. (12) ζ. τῆ α'.
(13) ΙΔ. τῆ α'. (14) Πόρ. α'. τῆς ΜΖ. τῆ α'. (15) Διὰ τὴν αὐτ. (16) ΜΖ. τῆ α'.
(17) Διὰ τὴν αὐτ.

τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΖΞ, τῆς ἑκτε τῆς ὅλης καὶ τῆς προσκειμένης, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Ξη, ἥτοι τῆς ιξ, ἥτις ἐστὶν ἡ προσκειμένη. Τὰ ἄρα Τετράγωνα (1) τότε ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ ΖΞ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης Ξι, τὰ συναμφότερα, διπλάσιά ἐστι τῶν Τετραγῶνων τῆτε ἀπὸ τῆς ἡμισείας ΖΛ, καὶ τῆ ἀπὸ τῆς συγκεκλιμένης ἑκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ΛΞ, τῶν συναμφοτέρων. Ο. Ε. Δ.

Ἐςω Ἀριθμὸς 40 τετμημένος εἰς ἴσα 20 καὶ 20, καὶ τάτω προσκείσθω ἀριθμὸς 14. Καὶ ἔσαι δὴ τὰ Τετράγωνα $54 \times 54 = 2916$, καὶ $14 \times 14 = 196$. διπλάσια τῶν Τετραγῶνων $20 \times 20 = 400$, καὶ $34 \times 34 = 1156$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν (αβ) τεμεῖν (κατὰ τὸ γ), ὥς τε τὸ ὑπὸ τῆς ὁ-
„λης καὶ τῆς ἑτέρας τῶν Τμημάτων περιεχόμενον Ὀρθογώνιον (αβγ), ἴσον
„εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς λοιπῆς Τμήματος (αγ) Τετραγῶνῳ. —

κ. 188.

Ἀπὸ α ἡχθῶ Κάθετος πρὸς Ὀρθὰς τῇ αβ ἴση ἡ αζ· ἀχθεῖσα δὲ δι-
χα τετμήσθω κατὰ τὸ χ, ἐπεξεύχθω δὲ ἡ χβ· τῇ δὲ χβ ἀπὸ τῆς ζα προ-
αχθεῖσθαι, ἀποτετμήσθω ἴση ἡ χι· εἴτα ἀποτετμήσθω ἡ αγ ἴση τῇ αι. Φη-
μι ὡς γέγονεν οὕτω τὸ ἐπιταχθέν. Πληρωθέντος γὰρ τῆς Τετραγῶνα αβζ,
καὶ ἀχθεῖσθαι διὰ γ πρὸς ὀρθὰς, καὶ πληρωθέντος καὶ τῆς Ὀρθογωνίας ζιλξ,
ἐπεὶ ἡ ζα εἰς ἴσα μὲν τέτμηται κατὰ τὸ χ, προστετέθη δέ τις αὐτῇ Εὐθεία
ἐπ' εὐθείας ἡ αι, ἔσαι:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ὀρθογ. ζια} \\ \text{Τετραγ. χα} \end{array} \right\} = (2) \text{ Τετραγ. χι} = \chi\beta^{\tau} (3) = \left. \begin{array}{l} \chi\alpha^{\tau} \\ \alpha\beta^{\tau} \end{array} \right\} (4).$$

Ἀφαιρεθέντος τοίνυν ἑκατέρωθεν τῆς χα^τ

Ἔσαι Ὀρθογ. ζια = Τετραγ. αβ ἥτοι ζλ = ασ.

Ἀφαιρεθέντος δὲ καὶ τῆς κοινῆς χωρὶς αξ, ἔσαι αλ = γσ.

Ἄλλα τὸ αλ Τετράγωνον ἐστὶν ἀπὸ τῆς αγ, ἐπειδὴ αγ = αι ἐκ κατα-
σκευῆς, τὸ δὲ γσ Ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αβγ, ὅτι τῇ βτ ἴση ἡ αβ· τὸ
ἄρα Ὀρθογώνιον αβγ, ἴσον τῷ Τετραγῶνῳ τῷ ἀπὸ αγ· Τέτμηται ἄρα ἡ
δοθεῖσα Εὐθεία αβ, κατὰ τὸ αἰτηθέν.

(1) Αξ. α. (2) ζ. τῆ β. (3) Εκ κατ. καὶ Αξ. ιι. (4) ΜΖ. τῆ δ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Τῶν ἐπὶ τῇ παρόντος Βιβλίου Προτάσεων τὰς μὲν πρώτας δέκα, καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἀληθεύσας κατελήφαμεν, τὴν δὲ δὴ πρώτην ἐπὶ τῇ δεκάτῃ ἀριθμητικῶς ἐκδέσθαι ἀμήχανον, οὐδὲ γὰρ ἔστιν εὐρεῖν ἀριθμὸν τοιαύτην τινὰ τὴν τομὴν ἐπιδεχόμενον, ὡς τὸ ὑπὸ τῇ ὅλῃ καὶ τῇ ἑτέρῃ τῶν μερῶν παραγόμενον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῇ λοιπῇ Τετραγώνῳ· ὃ δὴ περὶ καὶ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΚΘ'. τῇ τρίτῃ Βιβλίᾳ τῶν στοιχείων τῆς Ἀριθμητικῆς, τῆς προσηκέσης τετύχηκε δειξέως. Ἀλλ' εὐροὶ ἅντις ἐν ἀρρήτοις ἀριθμοῖς Πηλικότητας, τοῖς γραμμικοῖς Τμήμασιν αὐ καὶ γβ ἀντιστοιχίσας. Οἶον ἔστω $\alpha\beta = 2$, ἀμέλειτοι προσκείσθω δυαδικὸς ἀριθμὸς διαιρετέος εἰς μέρη, ὧν τὸ ἀπὸ τῇ μείζονος Τετραγώνου, ἴσον εἴη τῷ Ὀρθογώνῳ, τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης δυάδος καὶ τῇ ἐλάττωτος. Ἐῖσαι γὰρ τὸ μὲν τῶν μερῶν μείζον $\alpha\gamma = \sqrt{5} - 1$. τὸ δὲ γβ τὸ ἐλάττον $= 3 - \sqrt{5}$. Οὕτω γὰρ ἡ μόνον τὸ ἐκ ταυτῶν τῶν μερῶν ἄθροισμα ἴσον τῇ δυάδι παρίσταται, ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῇ μείζονος μέρους Τετραγώνου, καὶ τὸ ὑπὸ τῆς δυάδος καὶ τῇ ἐλάττωτος μέρους ἀνακύπτει, ἴσα ἄμφω τῇ αὐτῇ Πηλικότητι, ἣτις ἐστὶν $6 - 2\sqrt{5}$. Τῆς γὰρ προτεθείσης ταύτης θαυμασία ἡ δύναμις, περὶ ἧς ὄρω τὴν Α'. τῇ ζ'. Βιβλίᾳ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΒ.

„Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις Τριγώνοις (αγβ), τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλείαν
 „Γωνίαν (γ) ὑποτείνουσας (αβ) Πλευρᾶς Τετραγώνου, μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ
 „τῶν τὴν ἀμβλείαν Γωνίαν περιεχουσῶν Πλευρῶν (αγ, βγ) Τετραγώνων,
 „τῷ περιεχομένῳ δις, ὑπὸ τε μιᾷς (βγ) τῶν περὶ τὴν ἀμβλείαν Γωνίαν
 „(αγβ), ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ Κάθετος πίπτει (αζ), καὶ τῆς ἀπολαμβανομέ-
 „νης ἐκτὸς (ζγ) ὑπὸ τῆς Καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ Γωνίᾳ.

Καὶ γὰρ Τετράγ. αβ (1) = $\alpha\zeta^T$
 $\beta\zeta^T$

Ἀλλὰ μὲν $\beta\zeta^T = \beta\gamma^T$
 $\gamma\zeta^T$
 $2\beta\gamma\zeta$ } (2).

(1) MZ. τῷ ε'.

(2) δ. Βιβ. β'.

Ἄρα τεθέντων τῶν ἴσων ἀντὶ τῶν ἴσων, ἔσαι

$$\begin{array}{l} \text{Τετράγ. } \alpha\beta^T = \alpha\zeta^T \\ \beta\gamma^T \\ \gamma\zeta^T \\ 2\beta\gamma\zeta \end{array}$$

Ἐπεὶ τοίνυν τὰ $\alpha\zeta^T + \gamma\zeta^T = \alpha\gamma^T$ (1), ἔσαι Τετράγ. $\alpha\beta = \alpha\gamma^T + \beta\gamma^T + 2\beta\gamma\zeta$. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ.

κ. 190.

„Ἐπὶ παντός Τριγώνου (αγβ) τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀξείαν Γωνίαν (γ) ὑποτεινάσης Πλευρᾶς (αβ) Τετράγωνον, ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τῆν ὀξείαν Γωνίαν περιεχασῶν Πλευρῶν (αγ, βγ) Τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δις Ὀρθογωνίῳ (βγζ), ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τῆν ὀξείαν Γωνίαν (ἤτοι τῆς βγ), ἐφ' ἣν πίπτει ἡ Κάθετος (αζ), ἢ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντός (γβ) ὑπὸ τῆς Καθέτης (αζ) πρὸς τῇ ὀξείᾳ Γωνίᾳ (γ).

$$\begin{array}{l} \beta\gamma^T (2) = 2\beta\zeta\gamma \\ \beta\zeta^T \\ \zeta\gamma^T \end{array}$$

$$\text{Καὶ } \alpha\gamma^T (3) = \begin{array}{l} \zeta\gamma^T \\ \alpha\zeta^T \end{array}$$

$$\text{Τὰ ἄρα δύο } \alpha\gamma^T + \beta\gamma^T = \begin{array}{l} 2\beta\zeta\gamma \\ \beta\zeta^T \\ 2\zeta\gamma^T \\ \alpha\zeta^T \end{array}$$

Ἀλλὰ γὰρ τὸ βζγ Ὀρθογ. δις, μετὰ τῷ ἀπὸ ζγ Τετραγώνῳ δις, ἴσον ἐστὶ (4) τῷ δις ὑπὸ βγζ. Ἐὰν ἄρα ταῦτα ἀντὶ ἐκείνων τεθῇ, ἔσαι

$$\alpha\gamma^T + \beta\gamma^T = \begin{array}{l} 2\beta\gamma\zeta \\ \beta\zeta^T \\ \alpha\zeta^T \end{array}$$

Τὰ δὲ δὴ $\alpha\zeta^T + \beta\zeta^T = \alpha\beta^T$ (5), ἐὰν ἄρα καὶ τῷ ἀντὶ ἐκείνων τεθῇ, $\alpha\gamma^T + \beta\gamma^T = 2\beta\gamma\zeta + \alpha\beta^T$.

Τατέσι τὰ ἀπὸ αγ καὶ βγ Τετράγωνα ὑπερέχει τὸ ἀπὸ αβ Τετράγωνον, τῷ δις Ὀρθογωνίῳ βγζ.

(1) MZ. τῷ α'. (2) δ. Βιβ. α'. (3) MZ. τῷ α'. (4) Γ. τῷ β'. (5) MZ. τῷ α'.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐςαι δὲ ἑδὲν ἥττον ἀληθείας ἐχομένη ἢ Πρότασις, καὶ εἰ Ἀμβλείας τῆς α. 191.
ὕπο αβγ τυχάσης (1), ἢ αζ Κάθετος ἔξω τῷ Τριγώνῳ πεσεῖται ἐπὶ τῆς
γβ Πλευρᾷ προεκβληθείσης. Ἡ δὲ δεῖξις σχεδὸν ἡ αὐτή, ἢ ὡς περὶ ἔχυστα.

$$\begin{array}{rcl} \text{Τετράγ. αγ (2)} & = & \text{Ορθογ. γβζ δὲς} \\ & & \left. \begin{array}{l} \text{Τετρ. γβ} \\ \text{Τετρ. αβ} \end{array} \right\} \end{array}$$

Κοινῇ ταύτην προσεδέντος τῷ Τετραγώνῳ ἀπὸ γβ

$$\begin{array}{rcl} \text{Ἐςαι Τετράγ. αγ} & \left. \right\} & = 2\gamma\beta\zeta \text{ Ορθογ.} \\ \text{Τετραγ. γβ} & \left. \right\} & \quad 2 \gamma\beta \text{ Τετραγ.} \\ & & \quad \alpha\beta \text{ Τετραγ.} \end{array}$$

$$\text{Ἀλλὰ τὸ } 2\gamma\beta\zeta \text{ Ορθογ.} + 2\gamma\beta^T (3) = 2\beta\gamma\zeta$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Ἀρα Τετράγ. αγ} & \left. \right\} & = 2\beta\gamma\zeta \text{ Ορθογ.} \\ \text{Τετραγ. γβ} & \left. \right\} & \quad \alpha\beta \text{ Τετραγ.} \end{array}$$

Α' λ λ ω ς .

Καθόλου δ' ἂν μᾶλλον δειχθεῖν ἢ τῷ Παρόντος ΙΓ'. εἴτε ἐντὸς τῷ Τριγώνῳ τῆς πρὸς Κάθετον ἀγομένης πιπτύσης, εἴτε ἔκτός, ὡς

$$\begin{array}{l} \beta\gamma^T + \gamma\zeta^T (4) = 2\beta\gamma\zeta + \beta\zeta^T. \text{ Ἐὰν οὖν προσεθῇ } \alpha\zeta^T, \text{ ἔσαι } \beta\gamma^T \\ + \gamma\zeta^T + \alpha\zeta^T = 2\beta\gamma\zeta + \beta\zeta^T + \alpha\zeta^T. \text{ Ἀλλὰ } \gamma\zeta^T + \alpha\zeta^T = \alpha\gamma^T. \text{ Ἀρα} \\ \beta\gamma^T + \alpha\gamma^T = 2\beta\gamma\zeta + \beta\zeta^T + \alpha\zeta^T (5). \text{ Ἀλλὰ καὶ } \beta\zeta^T + \alpha\zeta^T (6) = \\ \alpha\beta^T. \text{ Ἀρα } \beta\gamma^T + \alpha\gamma^T = 2\beta\gamma\zeta + \alpha\beta^T. \text{ Ο. Ε. Δ.} \end{array}$$

Σ χ ό λ ι ο ν Α'.

Ἐκ δὲ ταύτης ἔ τῆς ΜΖ'. τῷ α'. , ἔ παντὸς Τριγώνου, οὗ δῆλαι μὲν
ἂν εἶεν αἱ Πλευραὶ, ἄβατον δὲ τὸ χωρίον, λαβεῖν ἔξεσαι τὴν καταμέτρησιν.
Διὰ γὰρ τούτων τῶν Θεωρημάτων, καίτοι ἐμποδῶν ἰσαμένον τῷ τόπῳ, τὴν εἰς
τῷτο ἀπαιτημένην Κάθετον ἐξευρίσκομεν. Ἡ δὲ τοι Κάθετος ἡμῖν διὰ τῷ ἡμί-
σας τῆς Πλευρᾷς ἐφ' ἣν πίπτει πολλαπλασιασθεῖσα, τὸ χωρίον ἀποδώσει τὸ
τῷ Τριγώνῳ, ὡς δῆλον ἐκ τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΜΑ'. τῷ α'.

(1) Πόρ. γ'. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (2) ΙΒ. τῷ β'. (3) Γ. τῷ α'. (4) Ζ. τῷ β'. (5)
ΜΖ. τῷ β'. (6) Διὰ τὴν αὐτ.

α. 192. Οἷον ἔσω Τρίγωνον τὸ τυχὸν $αβγ$, καὶ τότε δῆλαι αἱ Πλευραὶ· δεῖ οὖν δῆλην καταστῆσαι καὶ τὴν Κάθετον $αζ$, τὴν ἀπότινος Γωνίας $α$, ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσιν αὐτὴν Πλευρὰν $βγ$ ἀγομένην.

α. 193. Τὸ γὰρ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς $αβ$, τῆς τὴν ὀξείαν Γωνίαν $γ$ ὑποτείνουσιν, εἰάν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς ἀδροίσματος τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ $αγ$ καὶ $βγ$, ὑπόλοιπον (1) ἔσται τὸ δις Ὀρθογ. $βγζ$. Ἐνθεντοὶ καὶ τὰ λοιπὰ τὰ δε τὴν ἡμίσειαν (τετάρτην τὸ Ὀρθογ. $βγζ$) διὰ τῆς προδήλου ἕως Πλευρᾶς $βγ$ διελόμενος, ἔξει Εὐθείαν τὴν $γζ$. Καὶ εἰάν ἄρα τὸ ἀπὸ $γζ$ Τετράγωνον ἀφέλῃς ἀπὸ τῆς Τετραγώνου τῆς ἀπὸ $αγ$, κομίσῃ δὲ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ $αζ$, οὗ περ ἡ Τετραγωνικὴ ρίζα παρέξει τὴν Κάθετον $αζ$.

Κεῖσθω γὰρ δὴ ἡ μὲν $αβ = 13$, ἡ δὲ $βγ = 14$, ἡ δὲ $αγ = 15$ · καὶ ἔσται $αβ^T = 169$, καὶ $βγ^T + αγ^T = 196 + 225 = 421$ · διὸ τὸ $2βγζ (= βγ^T + αγ^T - αβ^T = 421 - 169) = 252$. Καὶ ἐπεμένως τὸ $βγζ = 126$, καὶ $γζ = 9$. Ἀρ' οὖν $αζ^T (= αγ^T - γζ^T = 225 - 81) = 144$, καὶ $αζ = 12$. Τὸ δὲ τῆς Τριγώνου χωρίον ἔσται $12 \times 7 = 6 \times 14 = 84$.

Δυνήσῃ δὲ αὐτὸ ταῦτο λαβεῖν καὶ διὰ τῆς $ΙΒ'$. Προτάσεως· ἀρκέσει γεμὴν ἡ $ΙΓ'$. εἰς ταῦτο. Οὐδὲν γάρ ἐστι Τρίγωνον, ἐφ' ὅτῳ ἡ ἀπότινος τῷ Γωνίῳ ἐπὶ τὴν ταύτην ὑποτείνουσιν Κάθετον, ἐκ ἐντὸς αὐτῆς τῆς Τριγώνου πεσεῖται.

α. 194. Ἀλλ' ἵνα μὴ καὶ τότε δεῖγμα τοῖς νεωτέροις προσδένται, ὅπως ἀμέλει καὶ διὰ τῆς $ΙΒ'$. ἐπὶ τῶν ἀμβλυγωνίων Τριγώνων, (ἐφ' ὧν ἐκτὸς συμβαίνει πίπτειν τὴν ἀπὸ τῆς ἐτέρας τῶν Ὀξείων Κάθετον) τὸ Πρόβλημα ἐπιλυόμεθα. Φέρε δὴ κεῖσθω Τρίγωνον ἀμβλυγωνίον τὸ $αγβ$ · καὶ τότε ἡ μὲν $αγ = 20$, ἡ δὲ $αβ = 13$, ἡ δὲ $βγ = 11$. Καὶ ἔσται $αγ^T = 400$, καὶ $αβ^T + βγ^T = 169 + 121 = 290$. Ἐνθεντοὶ $αγ^T - αβ^T - βγ^T = 400 - 290 = 110 = 2γβζ$. Καὶ $γβζ = 55$, καὶ $βζ = 5$. Καὶ $βζ^T = 25$, καὶ $αβ^T - βζ^T = 169 - 25 = 144 = αζ^T$. Καὶ τοίνυν $αζ = 12$, καὶ $\frac{1}{2} αζ \times βγ = 6 \times 11 = 65$, ὅπερ ἐστὶ τὸ χωρίον τῆς Τριγώνου $αβγ$.

Σ Χ ό λ ι ο ν Β'.

α. 195. Ἐπὶ παντὸς Τριγώνου ($αγβ$) εἰάν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ($α$) ἐπὶ τὴν Βάσιν ($βγ$) προσεμβληθεῖσιν ἦν δεῖσται, ἀχθῇ Κάθετος ἡ $αζ$, ἔσται ἡ διαφορὰ τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν ($αγ$, $αβ$), ἰση τῷ δις Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς Βάσεως $γβ$, καὶ $(ζγ - \frac{1}{2} βγ)$ τῆς ἀποσάσεως, ἣν ἡ Κάθετος ἔχει

(1) $ΙΓ'$. τῆς $Β'$.

ἐπὶ τῇ μέσῃ τῆς Βάσεως. Ὅρα τὴν Καθόλου Ἀριθμητ. Σελ. 103. κατὰ τὴν Α'. ἐκδοσιν.

Διὰ γὰρ δὴ ταύτην τὴν Πρότασιν $αγ^T + βγ^T = αβ^T + 2βγζ$. Ἐὰν οὖν ὑφέλῃ τις ἐκατέρωθεν $αβ^T + βγ^T$, ἔσται $αγ^T - αβ^T = 2βγζ - βγ^T$. Ἀλλὰ γὰρ $βγ^T (1) = 2βγ \times \frac{1}{2} βγ$. Ἀρα $αγ^T - αβ^T = 2βγ \times γζ - \frac{1}{2} βγ$. Φανερόν δὲ τὸ τῆς ἐπιφορᾶς. Ἐὰν γὰρ τὰς $2βγ \times γζ - \frac{1}{2} βγ$ Παρά- γοντας πολλαπλασιάσῃς, ἔξεις Παραγόμενον τὸ $2βγζ - 2βγ \times \frac{1}{2} βγ$, ὡς ἂνωτέρω.

Ἐὰν δὲ αἱ Πλευραὶ $αβ$, $αγ$ ἴσαι ᾖσι, ἐπιπεσέεται πάντως ἡ αζ Κά- κ. 196.
θετος κατὰ (2) τὸ μέσον τῆς Βάσεως. Ὡς τὴν τε διαφορὰν τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν Τετραγώνων, καὶ τὴν τῆς Καθέτου ἀπὸ τῆς μεσαιτάτης τῆς Βάσεως ἀπόστασιν τέλεον ἐξαφανίζεσθαι.

Καὶ εἰάν ἡ ἑτέρα τῶν πρὸς τὴν Βάσιν Γωνιῶν Ὁρθὴ ἦ, οἷον ἡ $β$, ἡ κ. 197.
Κάθετος αζ τῇ Πλευρᾷ $αβ$ εἰς ἓν συμπεσεῖται. Ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν Τετραγώνων, τῷ Τετραγώνῳ αὐτῷ (3) τῷ ἀπὸ τῆς Βά- σεως συνεξισώδησεται. Ἡ δὲ τῆς Καθέτου ἀπὸ τῆς μέσης τῆς Βάσεως ἀπόστα- σις, ἴση ἔσται αὐτῇ τῇ ἡμισείᾳ τῆς Βάσεως. Τῷτοι καὶ τὸ δις Ὁρθογώνιον τὸ ὑπὸ τε τῆς Βάσεως καὶ τῆς τοσῆςδε ἀποστάσεως, ἦτοι τὸ ὑπὸ τῆς Βάσεως καὶ τῆς ἡμισείας τῆς Βάσεως (4), ἴσον ἔσται καὶ αὐτῷ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Βάσεως. Καὶ ἔσται ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν, ἴση τῷ δις Ὁρθογώνιῳ τῷ ὑπὸ τε τῆς Βάσεως, καὶ τῆς ἀποστάσεως ἣν ἔχει ἡ Κάθετος ἀπὸ τῆς μέσης τῆς Βάσεως.

Σ Χ ό λ ι ο ν . Γ'.

Ἐπὶ παντὸς Τριγώνῳ $αβγ$ εἰάν ἀπὸ τῆς κορυφῆς $α$, Εὐθεῖα ἀχθῇ ἡ κ. 198.
 $αγ$, τὴν Βάσιν $βγ$ δίχα τέμνῃσα κατὰ τὸ $γ$, τὰ ἀπὸ τῶν Πλευρῶν $αβ$, $αγ$ Τετραγώνῳ ἅμα ληφθέντα, διπλάσια ἔσται τῶν Τετραγώνων, τῆς τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Βάσεως $βγ$, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς διχοτομήσεως τὴν Βάσιν $αγ$, ἅμα ληφθέντων.

Ἀπὸ τῆς κορυφῆς $α$, ἦχθω Κάθετος ἡ αζ τῇ Βάσει, καὶ πιπτέτω δὴ ἀχθεῖσα μεταξὺ τῶν Σημείων $γ$ καὶ $π$ (5). Καὶ ἔσται ἡ μὲν ὑπὸ $αγβ$ Ἀμ-

(1) Πόρ. δ. τῆς Δ. τῆς β'. (2) Αριθ. α. τῆς Σχολ. τῆς Κε. τῆς α'. (3) Πρόβλ. β'. μετὰ τὴν ΜΖ. τῆς α'. (4) Δ. Πόρ. τῆς Δ. τῆς β'. (5) Γ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῆς α'.

βλεῖα, ἢ δὲ ὑπὸ αγκυρὸς ξεία. Ἐνθεντοι (διὰ τὴν IB'.) $\alpha\beta^T = \alpha\gamma^T + \beta\gamma^T + 2\beta\gamma Z$. Διὰ δὲ τὴν IG'. $\alpha\pi^T = \alpha\gamma^T + \gamma\pi^T - 2\pi\gamma Z$. Ἀλλὰ μὲν $\beta\gamma = \pi\gamma$. Ἄρα καὶ $\gamma\beta^T = \gamma\pi^T$ (1), καὶ $2\beta\gamma Z = 2\pi\gamma Z$ (2). Διὸ καὶ $\gamma\beta^T + \gamma\pi^T =$ (3) $2\gamma\beta^T$, καὶ $2\beta\gamma Z - 2\pi\gamma Z = 0$. Ἐὰν ἄρα τοῖς ἴσοις ἴσα προῶδῃς, τὰ ἀδροιζόμενα ἴσα ἔσται· καὶ τοίνυν $\alpha\beta^T + \alpha\pi^T = 2\alpha\gamma^T + 2\beta\gamma^T$. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Τῶν αὐτῶν δὲ μενσῶν, τῆς τε Βάσεως φημί βπ, καὶ τῆς Εὐθείας αγκυρῆς τὴν Βάσιν διχοτομήσης, ὅπως ἂν ἄλλως ἢ πρὸς τὴν Βάσιν αὐτὴν κεκλιμένη, οἷον ἡ Αγκυρῆς, τὸ ἀδροισμα τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν Τετραγώνων αἰεὶ τὸ αὐτὸ ἔσται. Αἰεὶ γὰρ $\alpha\beta^T + \alpha\pi^T = \beta\pi^T + \alpha\pi^T$, καὶ ὅτως ἐν ἅπασιν.

Προσαρμοθεὶς δ' ἂν ταῦτὶ τὸ Θεώρημα καὶ ταῖς τῶν Καμπύλων Ἀπτομέναις, καὶ Διαμέτροις, καὶ Τεταγμέναις. Οἷον ἀπτεῖσθωσαν αἱ Εὐθεῖαι αβ, απ, Κωνικὴν οἰανδηποτὴν τομὴν, ἢ τομὰς ἀντιθέτως κατὰ τὰ Σημεῖα β καὶ π· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βπ, δίχα τεμήσθω κατὰ τὸ γ· καὶ ἔσται ἡ βγ ἢ ἡ πγ, Τεταγμένη πρὸς τὴν Διάμετρον αγκυρῆς. Ἐνθεντοι τὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν Ἀπτομένων αβ, απ, διπλάσια ἔσται τῶν Τετραγώνων, τὰ τε ἀπὸ τῆς Ἀπτομένης βγ, ἢ πγ, καὶ τῆς Διαμέτρου τῆς μεταξὺ τῆς τε Τεταγμένης, καὶ τῆς συνόδου τῶν Ἀπτομένων ἐναπολαμβανομένης αγκυρῆς.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

„Τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ (φχψ) ἴσον Τετράγωνον συστήσασθαι.

κ. 199.

Εὐθεῖαν λαβὼν τὴν τυχεῖσαν ια, ἐπ' αὐτῆς τῷ Εὐθυγράμμῳ φχψ, ἴσον σύστημα Παραλληλόγραμμον (4) ὀρθογώνιον τὸ γι, οὗ αἱ Πλευραὶ αἱ ια, γα, εἰς ἴσας ἀλλήλας ὦσι, αὐτὸ ἔσται τὸ ζητούμενον Τετράγωνον. ἀνίστων δὲ ἁπλῶς τὴν μείζονα Πλευρὰν ια προεκβαλὼν ἐπὶ τὸ λ, ὥστε ἡ ἀλ ἴσην εἶναι τῇ αγκυρῇ, δίχα τέμε τὴν ιλ κατὰ τὸ ζ. Καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ ζ, Διαστήματι δὲ τῷ ζι, ἢ ζλ, Κύκλον γράψον· πρόαγε δὲ καὶ τὴν γα, ὥστε προαχθεῖσαν τῇ τε Κύκλῳ Περιφερείᾳ ἀπαντῆσαι κατὰ τὸ β· Φημί δὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς αβ Τετράγωνον, ἴσον εἶναι τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ φχψ.

Ἦχθω καὶ γὰρ Εὐθεῖα ἡ ζβ, καὶ ἐπεὶ ἡ ιλ Εὐθεῖα εἰς ἴσα τέμνεται κατὰ τὸ ζ, καὶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ α, ἔσται

(1) Δξ. ιε. (2) Δξ. τῷ α'. (3) Δξ. ζ. (4) ΜΕ. τῷ α'.

Τμήμα Κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον Σχήμα ὑπὸ τε Εὐθείας καὶ Κύκλου **Ε'**. **96. 202.**
 Περιφερείας, ὅσον τὰ $\alpha\beta$ καὶ $\beta\gamma$. **Η'** δὲ $\alpha\beta$ τῶν Τμημάτων ἐκατέρω Βάσις.

Γωνία ἐν Τμήματι ἐστὶν (ἢ ὑπὸ $\alpha\epsilon\beta$, καὶ ὑπὸ $\alpha\beta\delta$) ἡ περιεχομένη ὑπὸ ϵ' .
 ὅσων Εὐθειῶν ($\alpha\epsilon$ καὶ $\beta\epsilon$, ἢ $\alpha\beta$ καὶ $\delta\beta$) τῶν ἐφ' ἑντι τῶν τῆς Περιφερείας Σημείων (ὅσον ϵ ἢ δ) ἀπὸ τῶν περάτων τῆς Βάσεως ($\alpha\beta$) ἀγομένων.

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσιν τὴν Γωνίαν Εὐθεΐαι ἀπολαμβάνωσιν τινα Περι- **Ζ'**
 φέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ Γωνία· ὅσον ἐν τῷ Σχήματι, ἐπὶ
 τῆς Περιφερείας $\alpha\gamma\beta$.

Τομεὺς δὲ Κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ Κέντρῳ αὐτῶ τῷ Κύκλῳ (κ) συζα- **Η'**
 ῶν ἡ Γωνία, τὸ περιεχόμενον Σχήμα ὑπὸ τε τῶν τὴν Γωνίαν περιεχουσῶν
 Εὐθειῶν ($\kappa\lambda$ καὶ $\kappa\mu$), καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν Περιφερείας, ὅσον
 τὸ $\kappa\lambda\mu$.

Τμήματος δὲ Γωνία ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε Εὐθείας καὶ Κύκλου **Θ'**.
 Περιφερείας, ὅσον ἡ ὑπὸ $\beta\alpha\gamma$, καὶ ἡ ὑπὸ $\beta\delta\lambda$, καὶ ἡ ὑπὸ $\beta\delta\delta$.

Ἡ ἐντὸς τοῦ Κύκλου γεγραμμένη Εὐθεΐα $\beta\gamma$ λέγεται τῶν τόξων $\beta\alpha\gamma$ **Γ'**. **96. 203.**
 καὶ $\beta\iota\gamma$ Ὑποτείνουσα, καὶ δὴ καὶ τῆς πρὸς τῷ Κέντρῳ ὑπὸ $\beta\delta\gamma$ Γωνίας ὡσαύ-
 τως Ὑποτείνουσα καὶ Χορδή. Καὶ εἰάν ἀπὸ τοῦ πέρατος α τῇ τόξῳ $\alpha\beta$, Διά-
 μετρος ἀχθῇ ἡ $\alpha\iota$, ἐπ' αὐτῇ δὲ ἀπὸ πατέρου πέρατος καὶ τῷ τόξῳ $\alpha\beta$,
 πρὸς Ὁρθῶς ἡ $\beta\eta$, ἔσται αὕτη τῶν τόξων $\beta\alpha$ καὶ $\beta\iota$, ἢ γὰρ τῶν πρὸς τῷ
 Κέντρῳ Γωνιῶν ὑπὸ $\beta\delta\alpha$ καὶ ὑπὸ $\beta\delta\iota$, Ἡμίτονον ὀρθόν ἢ καὶ ἀπλῶς Ἡμίτο-
 νον, ἢ δὲ $\eta\alpha$ ἔσται τῷ τόξῳ $\alpha\beta$, ἢ τῆς ὑπὸ $\alpha\delta\beta$ Γωνίας (ὡσπερ δὴ καὶ ἡ
 $\eta\iota$ τῷ τόξῳ $\beta\iota$, ἢ τῆς ὑπὸ $\beta\delta\iota$) Ἡμίτονον πλάγιον. Εἰάν δὲ προσεβληθεΐ-
 σα ἡ Ἡμιδιάμετρος $\delta\beta$, τῇ κατὰ τὸ α τῷ Κύκλῳ ἀπτομένη ἐξ συμπέσει
 κατὰ τὸ Σημεῖον ϵ , ἡ μὲν $\alpha\epsilon$ καλεῖται τῶν τόξων $\alpha\beta$ καὶ $\beta\iota$, ἢ γὰρ τῶν
 ὑπὸ $\alpha\delta\beta$ καὶ $\beta\delta\iota$ Γωνιῶν Ἀπτομένη, ἥτε δὲ Εὐθεΐα, πρὸς τὰ αὐτὰ τόξα
 τε καὶ Γωνίας Τέμνουσα. Ἐντι τῆς πρὸς τῷ Κέντρῳ ὀρθῆς Γωνίας ὑπὸ $\alpha\delta\kappa$,
 τὸ $\delta\kappa$ (ὅπερ ἐνταῦθα Ἡμιδιάμετρος τοῦ Κύκλου ἐστὶ) ἰδίως Ἡμίτονον ὀλο-
 χειρές τε καὶ ὀλικὸν ἀκροῖ. Ἐπὶ τέτοις δὲ καὶ τὸ ὀρθόν Ἡμίτονον βλ. τῆς
 ὑπὸ $\beta\delta\kappa$ (ἣτις Παραπλήρωμα διατελεῖ τῆς ὑπὸ $\alpha\delta\beta$ πρὸς Ὁρθήν) Συνημί-
 τονος τῆς ὑπὸ $\alpha\delta\beta$ Γωνίας ὀνόμασαι. Ἡ δὲ $\delta\kappa$ Ἀπτομένη, ἢ δὲ $\delta\delta$ Τέμνουσα
 πρὸς γε τὴν αὐτὴν Γωνίαν ὑπὸ $\beta\delta\kappa$, Συναπτομένη δέ τοι καὶ Συντέμνουσα
 πρὸς τὴν ὑπὸ $\alpha\delta\beta$.

Ὅμοια Τμήματα Κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα Γωνίας ἴσαι.

ΓΑ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Τὸ δοθέντος Κύκλου τὸ Κέντρον εὑρεῖν.
 α. 204. Διήχθωτις εἰς αὐτὸν ὡς ἔτυχεν Εὐθεία ἢ βγ, καὶ τετμήθω δίχα κατὰ τὸ π Σημεῖον (1), καὶ ἀπὸ τῆ π τῇ βγ πρὸς ὁρθὰς ἤχθω (2) ἢ πλ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ τετμήθω ἢ λζ δίχα κατὰ τὸ α. Λέγω δὴ ὅτι τὸ α Κέντρον ἐστὶ τῷ Κύκλῳ.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔσω τὸ ξ ἐκτὸς τῆς Εὐθείας ζλ (ὃ γὰρ ἀμείλιτοι ἐπὶ ταύτης ἄλλοδίπνη ἂν εἴη παρὰ τὸ α, τέμνοι γὰρ ἂν τὸ παρὰ τὸ α Σημεῖον τὴν λζ εἰς ἄνισα), καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ βξ, πξ, γξ. Καὶ ἐπεὶ Κέντρον εἶναι δοκεῖ τῷ Κύκλῳ τὸ ξ, ἔσονται αἱ βξ, γξ ἴσαι ἀλλήλαις, τὰ δέ ται βξπ καὶ πξγ ἀμοιβαδὸν Ἰσόπλευρα. Ἐπεὶ καὶ βπ = πγ (3), καὶ ἡ ξπ ἐπ' ἀμφοῖν κοινή, ἄρ' ἔν καὶ ἡ ὑπὸ ξπγ Γωνία (4) = ξπβ. Ἄρα ἡ ὑπὸ ξπγ (5) Ὀρθή ἐστι, καὶ τῇ ὑπὸ λπγ Ὀρθῇ καὶ αὐτῇ (6) ὅση ἴση· τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ὅτι εἴαν ἐν Κύκλῳ τις Εὐθεῖα (λζ) Εὐθεῖάν τινα (βγ) δίχα καὶ πρὸς ὁρθὰς τέμνη, ἐπὶ τῆς Τεμνύσης ἐστὶ τὸ Κέντρον τῷ Κύκλῳ.
 α. 205. Ὅτι ῥᾶσα δὲ διὰ Γνώμονος τὸ τῷ Κύκλῳ Κέντρον λαμβάνεται τῆς κορυφῆς τῷ γνώμονος π τῇ Περιφερείᾳ τῷ Κύκλῳ προσαπτομένης. Εἴαν γὰρ Εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ δε τὰ καθ' ἃ αἱ τῷ γνώμονος Πλευραὶ τὴν τῷ Κύκλῳ τέμνουσι Περιφέρειαν, Σημεῖα δὲ καὶ εὐ συνάπτωσα, δίχα δὲ τμηθῇ κατὰ τὸ α, ἔσαι δὴ τούτο Κέντρον τῷ Κύκλῳ τὸ α. Ἀλλ' ἡ δεῖξις ἐκ τῆς ΛΑ'. τῷ παρόντος Βιβλίου ληφθήσεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β.

„Εἴαν κύκλῳ ἐπὶ τῆς Περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα Σημεῖα (β, γ), καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ Σημεῖα ἐπιζευγνυμένη Εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῷ Κύκλῳ.
 α. 206. Ληφθήτω γὰρ ἐπὶ τῆς βγ Εὐθείας Σημεῖον ἕτερον παρὰ τὰ δύο τὸ ξ, καὶ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α ἐπεξεύχθωσαν αἱ αβ, αξ, αγ. Ἐπεὶ οὖν αἱ αβ, αγ ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει Γωνίαι (7) β καὶ γ ἔσονται ἴσαι. Ἡ δὲ ἐκ-

(1) I. τῷ α'. (2) IΑ. τῷ α'. (3) Ἐκ κατ. (4) Η. τῷ α'. (5) Οε. IΔ. τῷ α'. (6) Ἐκ κατ. (7) Ε. τῷ α'.

$\left. \begin{array}{l} \text{Ορθογ. ιαλ} \\ \text{Τετρ. ζα} \end{array} \right\} (1) = \text{Τετραγ. ζλ} = (2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ζβ} = (3) \\ \text{Τετρ. αβ.} \end{array} \right\} \text{Τετρ. ζα.}$

Αφαιρεθέντος ἄρα ἐκατέρωθεν τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ ζα, ἔσαι

Ορθογ. ιαλ = Τετραγ. αβ.

Τατέστιν ἐπεὶ αἱ αγ, αλ ἴσαι εἰσὶν, ἔσαι τὸ Ορθογώνιον γι, ἥτοι τὸ Εὐθύγραμμον (4) φχψ = Τετραγ. αβ. Ο. Ε. Δ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἡ κατ' Εὐκλείδην κατασκευὴ, διὰ τῆς ΜΖ'. τῷ Α', τὸ Εὐθύγραμμον μετασχηματιζόμενον λαμβάνει εἰς Ορθογώνιον. Ἐπεὶ δέ τοι ἐργώδης ἡ μεταμόρφωσις αὕτη τῷ Σχήματός ἐστι, ῥᾷδιον ἴσως τὸ πρόβλημα τόνδε τὸν τρόπον ἐπιλυθήσεται.

Τὸ δοθέν Εὐθύγραμμον εἰς τοσαῦτα Τετράγραμματα ἀναλελύσθω εἰς ὅσα αὖν ἐξῇ. Εἴθ' ἐκάστοις Τετραγράμμοις ἰδίᾳ (5), Ορθογώνια συνεσάδω ἴσα. Ἐὰν δέ τι ὑπόλοιπον ᾖ (ὡς ἐπὶ τῷ προτεθέντος Σχήματος), ἀπλᾶν Τρίγωνον οἷον τὸ φ, συνεσάδω δὴ (6) καὶ τάτω Ορθογώνιον ἴσον. Εἴτα ἐκάστοις Ορθογωνίοις, διὰ τῆς ἀνὰ χειρὸς Πρωτ. ΙΔ'. συνεσάδω Τετράγωνα ἴσα, καὶ τελευταῖον Τετράγωνον ἐν (7) τοῖς κειμένοις ἅπασιν ἴσον· καὶ ἔσαι πάντως ἴσον ἔ τῷ δοθέντι Εὐθύγραμμῳ φχψ.

(1) Ε. τῷ β'. (2) Ἐντε κατασκ. ἔ τῷ Ορ. τῷ Κύκλῳ. (3) ΜΖ. τῷ α'. (4) Ἐκ κατασκ. (5) Σχολ. Β. τῆς ΜΕ. τῷ α'. (6) Πόρ. τῆς ΜΒ. τῷ α'. (7) Πρόβλ. Α'. Σχολ. τῆς ΜΖ. τῷ α'.

Τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

Τὸ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις τῶν Σχημάτων τελεωτάτα, τὰ πάθη τὰ βασιμώτατα ἐπὶ τῇ παρόντος Βιβλίας δεικνυνται. Ὅσης δὲ τὸ Βιβλίον γέμει τῆς ὠφελείας, αὐτὸς ὁ Κύκλος περὶ ὃν ἡ πραγματεία, δῆλον καθίστησιν, ἅφ' ἧς τὰ ἐπὶ ὅλων τῶν μαθημάτων θαυμαζόμενα ὡς ἀπὸ πηγῆς πρόεισι πολυχεύμονος. Τάτων δὲ τὰ ἐπισημότερα τῶν Θεωρημάτων ἐστὶ τὰ ἐφεξῆς, τὸ Ις., τὸ Κ', τὸ ΚΑ', ἢ ΚΒ', τὸ ΛΑ', ἢ ΛΒ', ἢ ΛΕ', ἢ Λς'.

Τοῖς δέ τοι πάθεσι τῇ Κύκλῳ ἐπισυνάπτεται καὶ ἡ διαφορῶν Γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας παράθεσις, τῶν μὲν ἐντὸς τῆς ἐκείνης Περιφερείας, τῶν δὲ καὶ ἔξωθεν ἐπ' αὐτὴν ἀγομένων. Ἐπὶ τέτοις δὲ καὶ ὅσα συμβαίνει τοῖς Κύκλοις ἐπιθεωρεῖται, ὥς Κύκλοι τέμνυσιν ἄλλοι, ἢ ὧν αὐτοὶ Κύκλοι, ἢ γὰρ Εὐθεῖαι εἰσὶν ἀπτόμεναι. Ἀλλὰ ἢ τῶν Γωνιῶν ὅσαι τε πρὸς τὸ Κέντρον, ἢ ὅσαι δὴποτε πρὸς τὴν Περιφέρειαν εἰσὶν, ἀλλήλαις παρεξετάζονται. Ἐνί τε λόγῳ τὰ πρότερον οἶονεῖ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας στοιχεῖα, ἅττα μάλιστα τῇ Κύκλῳ ἐξήρηται, ἐπὶ τῇ ἀνὰ χεῖρας Βιβλίᾳ ἐκτίθεται.

Ὁ ρ ι σ μ ο ι.

- Α'. Ἰσοὶ Κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ Διάμετροι ἢ αἱ Ἡμιδιάμετροι ἴσαι εἰσὶ.
 ρ. 200. Β'. Εὐθεῖα Κύκλῳ ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἡτις ἀπτομένη τῇ Κύκλῳ κατὰ τὸ β ἢ ἐμβαλλομένη ἢ τέμνει τὸν Κύκλον.
 Γ'. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, ὅτινες ἀπτόμενοι ἀλλήλων ἢ τέμνυσιν ἀλλήλους.
 ρ. 201. Δ'. Ἐν Κύκλῳ ἴσου ἀπέχειν τῇ Κέντρῳ (α) Εὐθεῖαι λέγονται (αἱ δγ, δλ), ὅταν αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τῇ Κέντρῳ ἐπ' αὐτὰς Κάθετοι (αμ, αν) ἴσαι εἰσὶ. Ὡς εἴπερ αἱ ἀπὸ τῇ Κέντρῳ ἀγόμεναι Κάθετοι ὧσιν ἄνισοι, μᾶλλον τῇ Κέντρῳ ἀπέχειν εἰρήσεται (ἢ πρ) Εὐθεῖα, ἐφ' ἣν ἢ ἀπὸ τῇ Κέντρῳ Κάθετος (αμ) μείζων ἐστίν, ἢ ττον δὲ (ἢ στ) ἐφ' ἣν ἢ ἀπὸ τῇ Κέντρῳ (αν) ἐλάσσων.

μεῖ (1)· καὶ ἐπεὶ Εὐθεΐα ἡ βγ εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ δ, καὶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ ε, ἔσαι (2) τὸ Οῤθωγώνιον $\beta\epsilon\gamma + \epsilon\delta^T = \beta\delta^T$. Κοινῇ οὖν προσεθείτω τὸ $\alpha\delta^T$ · καὶ ἔσαι $\beta\epsilon\gamma + \epsilon\delta^T + \alpha\delta^T = \beta\delta^T + \alpha\delta^T$. Ἀλλὰ μὲν $\epsilon\delta^T + \delta\alpha^T = (3) \alpha\epsilon^T$, καὶ $\beta\delta^T + \alpha\delta^T = (4) \alpha\beta^T$. Ἀρα $\beta\epsilon\gamma + \alpha\epsilon^T = \alpha\beta^T$. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

„Εὰν ἐν Κύκλῳ δύο Εὐθεΐαι (βγ, ζλ) μὴ διὰ τῆ Κέντρου ἄμφω ἔσαι, τέμνωσιν ἀλλήλας, καὶ τέμνεσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ τέτων ἡ ἐτέρα λζ διὰ τῆ Κέντρου διηγμένη τύχοι, σαφές ὡς ἦκιστα αὕτη διὰ τῆς ἐτέρας τῆς μὴ διὰ τῆ Κέντρου ἄγεσθαι ὑποτιθεμένης βγ, δίχα τμηθήσεται. κ. 209.

Εἰ δ' ἑτετέρα διὰ τῆ Κέντρου α ἔσιν, ἀπὸ τῆ Κέντρου ἤχθω ἡ αξ· εἰν ἔν ἀμφοτέραι αἱ βγ καὶ ζλ δίχα τετμημέναι ὥσι κατὰ τὸ ξ, εἰν ἂν καὶ αἱ ὑπὸ αξγ καὶ αξλ Οῤθαι (5), καὶ ἐπομένως ἀλλήλαις ἴσαι· τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὁπερ ἀδύνατον.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

„Εὰν δύο Κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλας, καὶ ἔσαι αὐτῶν τὸ αὐτὸ Κέντρον.

Ἀλλως γὰρ τῆς αβ ἐπιζευχθείσης, καὶ ἀχθείσης τῆς αγζ, εἰν ἂν ἴσαι αἱ αζ καὶ αγ, τῷ μέρει τὸ ὅλον, ἐπεὶ ἑκατέρα τέτων ἴση τῇ τρίτῃ αβ (6). κ. 210.

Π ρ ό τ α σ ι ς ς.

„Εὰν δύο Κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ἔσαι αὐτῶν τὸ αὐτὸ Κέντρον.

Ομοίως τῇ ἀνωτέρῳ δειχθήσεται.

κ. 211.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Εὰν Κύκλος ἐπὶ τῆς Διαμέτρου ληφθῇτι Σημεῖον ὃ μὴ ἔσι Κέντρον τῆ Κύκλου, ἀπὸ δὲ τῆ Σημεῖς προσπίπτωσιν Εὐθεΐαι τινὲς πρὸς τὸν Κύκλον (γβ, γλ, γξ, γζ). κ. 212.

„Α'. Μεγίστη μὲν ἔσαι ἐφ' ἧς τὸ Κέντρον (α) ἡ γβ.

(1) Πόρ. β'. τῶν ἀνωτ. (2) Ε. τῆ β'. (3) ΜΖ. τῆ α'. (4) Διὰ τὴν αὐτ. (5) Διὰ τὴν ἀνωτ. (6) Οῤ. ΙΗ'. τῆ α'. καὶ Α'ξ. α'.

„Β'. Ἐλάχιστη δὲ ἡ λοιπή, ἥτοι τὸ λοιπὸν τῆς Διαμέτρου μέρος γζ.
 „Γ'. Τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἡ ἕγγιον τῆς διὰ τῆ Κέντρου, τῆς ἀπωτέρω
 „μείζων ἐστὶ.

„Δ'. Δύο δὲ μόνον Εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τῆ αὐτῆς Σημεῖς (γ) ὁ Κέντρον
 „μὴ ἐστὶ, περσύνται πρὸς τὸν Κύκλον ἐκατέρωθεν.

Δείκνυτ. τὸ Α'. Ἡ ἄνω ἀπὸ τῆς Κέντρου α, Εὐθεῖα ἡ αλ, καὶ ἐπεὶ αλ, αβ ἴσαι εἰσὶ, κοινῆς αὐταῖς προσεθείσης τῆς αγ, ἔσονται λα, αγ ἅμα ἴσαι τῇ βγ. Ἀλλὰ μὲν λα, αγ μείζονες εἰσι (1) τῆς γλ. ἄρα καὶ βγ μείζων τῆς γλ. Ὡσαύτως καὶ οἰασθὲν ἄλλης μείζων ἡ γβ δειχθήσεται.

Β'. Ἀπὸ τῆς Κέντρου ἡ ἄνω καὶ ἡ αξ. Ἡ μὲν οὖν αξ (τετάρτην ἡ αζ) ἐλάσσων ἐστὶ (2) τῶν αγ καὶ γξ ἅμα ληφθεισῶν. Ἀφαιρεθείσης ἄρα τῆς κοινῆς αγ, ὑπολειφθήσεται ἡ γζ ἐλάσσων τῆς γξ. Ὡσαύτως δ' αὖ καὶ οἰασθὲν ἄλλης ἐλάσσων ἔσται ἡ γζ δειχθεῖν.

Γ'. Ἐπὶ τῶν Τριγώνων γξα, γλα ἡ Πλευρὰ λα ἴση τῇ ξα, ἡ δὲ γα ἐπ' ἀμφοῖν κοινὴ, ἡ δὲ ὑπὸ λαγ Γωνία μείζων τῆς ὑπὸ ξαγ. Ἀρα καὶ ἡ Βάσις (3) λγ μείζων τῆς Βάσεως ξγ.

Δ'. Φανερόν ἐκ τῶν προαποδειχθέντων, εἰάν γὰρ τρεῖς ἴσας ἀλλήλαις ἀρχθῆναι δυνατόν, οἷον τὰς γξ, γι, γπ, εἴεν αὖ αἱ δύο τῶν, οἷον αἱ γι, γπ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος καὶ ἀλλήλαις ἴσαι. Ὅ τῳ Γ'. μέρει τῆς Προτάσεως ἀντιπεριπίπτει.

Π ό ρ ι σ μ α.

Παραπλησίω δὲ λόγῳ μετὰ Θεοδοσίῃ ἐπιφέρομεν, ὅτι τῶν τόξων τῶν μεγίστων Κύκλων τῶν ἀπὸ τῆς τυχόντος Σημεῖς, ὃ μὴ ἐστὶ Πόλος τῆς δοθέντος Κύκλου, ἐπὶ τῆς Ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας πρὸς τὸν Κύκλον αὐτὸν ἀγομένων, μέγιστον μὲν ἐστὶν, ἐφ' ᾧ ὁ τῆς Κύκλου Πόλος, ἐλάχιστον δὲ τὸ λοιπόν. Τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ τὸ ἕγγιον τῆς διὰ τῆς Πόλου, τῆς ἀπωτέρω μείζων ἐστὶ. Δύο δὲ μόνον Τόξα ἴσα ἀπὸ τῆς αὐτῆς Σημεῖς, ὃ μὴ Πόλος ἐστὶ προσπερσύνται πρὸς τὸν Κύκλον ἐκατέρωθεν. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ ἐπὶ τῶν πλειόνων Προτάσεων τῆς δὲ τῆς Βιβλίας μετιόντας ἐνὶ συλλογίζεσθαι, ἐπὶ γὰρ τῶν τοιούτων ἀπὸ τῶν Ἐπιπέδων ἐπὶ τὰ σφερα μεταβαίνειν ἐστὶν εὐχερέστατον.

(1) Κ. τῆ α'. (2) Διὰ τὴν αὐτήν. (3) ΚΔ. τῆ α'.

τὸς ὑπὸ αὐγ (1) μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς β, μείζων δὲ πᾶ ἔσαι ἢ τῆς ἴσης ἐκεί-
νῃ γ. Καὶ τοίνυν ἐπὶ τῇ ξαγ Τριγώνῃ, ἡ Πλευρὰ αγ, ἄτε δὴ ὑποτείνουσα
τὴν μείζονα Γωνίαν ὑπὸ αὐγ μείζων ἐστὶν (2), ἡ δὲ αξ, ὡς ὑποτείνουσα τὴν
ἐλάσσονα γ ἐλάσσων. Ἀλλὰ μὲν ἡ αγ ἀφικνεῖται ἀπὸ τῆς Κέντρος ἔχει τῆς
Περιφερείας, ἂρ' ἡ αξ ἰσαμῶς ἀφίξεται. Τοιγαρὶν τὸ ταύτης πέρας εἰσω
πεσεῖται τῇ Κύκλῳ. Τῆτο δ' αὐτὸ δεῖχθήσεται καὶ περὶ τῆς τυχόντος ἄλλῃ
Σημεῖα τῶν ἐπὶ τῆς βγ. Ἡ ὅλη ἄρα βγ πεσεῖται ἐντὸς τῆς Κύκλῳ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ὅποιαδήποτε οὖν ἂν ἄρα Εὐθεία τῇ Κύκλῳ ἀψιγται, κατὰ Σημεῖον μό-
νον ἐφάπτεται. Εἴπερ γὰρ κατὰ δύο ἀπτοῖτο τῆς Περιφερείας Σημεῖα, εἴη
ἂν ἡ διὰ τῶν δύο ταυτῶν Σημεῖων ἀγνομένη Εὐθεία, τῇ Κύκλῳ ἐντὸς (3) πί-
πτουσα· τῆτο δὲ τῆς Ἀπτομένης τὸν Ὅρισμὸν σαφῶς ἀνατρέπει. Παραπλη-
σίῳ δὲ λόγῳ (ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὰ σφαιρὰ μεταβῆσιν) ἔχει ἂν ἀποδειχ-
θῆναι ἢ ἅπαν Ἐπίπεδον κατὰ Σημεῖον τῆς Σφαίρας ἐφάπτεσθαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

„Εὖ ἐν Κύκλῳ Εὐθεία τις (βλ) διὰ τῆς Κέντρος, Εὐθείαν τινα (γ2)
„μὴ διὰ τῆς Κέντρος δίχα τέμνῃ, ἢ πρὸς ὁρθὰς αὐτὴν τεμεῖ, καὶ εὖ πρὸς
„ὁρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, ἢ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

Α'. Ἀπὸ τῆς Κέντρος ἀπέχεσθαι αἱ αγ, α2, καὶ ἐπεὶ αἱ γξ, ζξ α. 207.
ἴσαι (4) ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ αἱ αγ ἢ α2, ὡς ἀπὸ τῆς Κέντρος ἴσαι ἀλλήλαις,
ἡ δὲ αξ ἐπ' ἀμφοῖν τοῖς Τριγώνοις κοινή. Ἀρα (5) αἱ ὑπὸ αὐγ, ἢ ὑπὸ αξ2
ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἐπομένως (6) Ὅρθαι. Ο. Η. τὸ Α'.

Β'. ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως αἱ ὑπὸ αὐγ ἢ αξ2 Ὅρθαι, ἔσαι ἢ τὸ ἀπὸ αγ
Τετράγωνον (7) ἴσον τοῖς Τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ αξ ἢ ξγ. Ομοίως δὲ καὶ
τὸ ἀπὸ α2, ἴσον τοῖς ἀπὸ αξ καὶ ξ2. Τὰ δὲ τοῖς ἀπὸ αγ ἢ α2 Τετράγωνα
(8) ἀλλήλοις ἴσα ἐστίν, ἄρα καὶ τὰ δύο ἀπὸ αξ ἢ ξγ, ἴσα ἔσαι τοῖς δυτὶν
ἀπὸ αξ ἢ ξ2· καὶ τῇ κοινῇ ἀπὸ αξ ἐκαστέρωθεν ἀφαρεθέντος, ἔσαι τῷ ἀπὸ
γξ ἴσον τὰ ἀπὸ ζξ. Ἀρα ἢ ἡ γξ ἴση τῇ ζξ. Ο. Η. τὸ Β'.

(1) Πόρ. α. τῆς ΑΒ. τῆ α'. (2) 19. Βιβ. α'. (3) Διὰ ταύτην. (4) Εξ ὑποθ. (5)
Η. τῆ α'. (6) Ὅρ. 14. τῆ α'. (7) ΜΖ. τῆ α'. (8) Αξ. 12.

Πορίσματα.

Α'. Ἡ ἡμίσεια τῆς Χορδῆς τῆς ὁποιαυδήποτε Γωνίαν πρὸς τῷ Κέντρῳ ἔσαν ὑποτείνουσας, τῇ ἡμίσει τῆς αὐτῆς Γωνίας ὀρθὸν Ἡμίτονον ἔσιν. Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῇ Χορδῇ γζ, ἥτις ὑποτείνει τὴν πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνίαν ὑπὸ γαζ, Κάθετος ἀπὸ τῷ Κέντρῳ ἀχθῇ ἡ αξ, ἔσονται ἐπὶ τῶν Τριγώνων (1) αἱ γξ, ζξ ἀλλήλαις ἴσαι, ἡ δὲ αξ κοινὴ, αἵτε πρὸς τῷ ξ Γωνίαι Ὀρθαί. Ἀρα ἡ ὑπὸ γαξ ἡμίσεια ἔσται τῆς Γωνίας τῆς ὑπὸ γαζ, ἡ δὲ γξ Εὐθεῖα ἡμίσεια τῆς Χορδῆς-γζ. Ἀλλ' ἡ γξ Ἡμίτονόν (2) ἔσιν ὀρθὸν τῆς ὑπὸ γαξ. Ἡ ἄρα ἡμίσεια τῆς Χορδῆς, τῆς ὁποιαυδήποτε Γωνίαν πρὸς τῷ Κέντρῳ ἔσαν ὑποτείνουσας, τῇ ἡμίσει τῆς αὐτῆς Γωνίας ὀρθὸν Ἡμίτονον ἔσιν.

Β'. Καὶ εἰάν παντὸς Τριγώνου ἰσοπλευρὰ ἢ καὶ ἰσοσκελεῖς ἀγζ, ἡ μὲν Γωνία α ὡς Κέντρον ληφθῇ, θάτερον δὲ τῶν ἴσων σκελῶν ἀγ ὡς Διάσημα, καὶ Κύκλος γραφῇ, διελεύσεται δὴ ὁ Κύκλος καὶ διὰ τῷ ζ (3). Ἐνθεντοὶ δυνάμει τῆς προκειμένης Προτάσ., εἰάν Εὐθεῖα ἡ αξ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῷ ἰσοσκελεῖς Τριγώνου ἀγομένη διχοτομοῖ τὴν Βάσιν, ἔσται ἐπ' αὐτῇ καὶ πρὸς ὀρθάς· εἰάν δὲ ἐπ' αὐτῇ πρὸς ὀρθάς ᾖ, ταύτην διχοτομήσει. Κάντεῦθεν δ' ἂν ἔχοιεν ἐπαχθῆναι καὶ τὰ λοιπὰ, ἅπερ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν Κς. τῷ α'. Βιβλία ἄλλαθεν ἔσιν ἐπιφερόμενα.

Σχόλιον.

α. 208.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῷ ἰσοσκελεῖς Τριγώνου αβγ, ἐπὶ τὸ τυχερὸν Σημεῖον τῆς Βάσεως Γραμμὴ εὐθεῖα ἀχθῇ, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ἀγομένης Τετραγώνον μετὰ τῷ ὑπὸ τῶν Τμημάτων τῆς Βάσεως Ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς αβ ἢ αγ.

Ἡτοὶ γὰρ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς α ἀγομένη Εὐθεῖα πρὸς ὀρθάς κείσεται ἐπὶ τῇ Βάσει βγ, ἢ ἀχθῇ· καὶ κείσθω δὴ πρῶτον πρὸς ὀρθάς ὡς ἡ αδ. Ἐσται ἔν βδ = γ (4)· διὸ δὴ καὶ τὸ Ὀρθογώνιον βδγ = βδγ ἢ δγτ. Ἀλλὰ αδτ + βδτ = (5) αβτ· ὁπέρ ἐστιν αδτ + βδγ Ὀρθογ. = αβτ. Ο. Η. τὸ ἀποδειχθέν.

Ἀλλὰ γὰρ ἔσται ἀγομένη Εὐθεῖα ἡ αε, μὴ πρὸς ὀρθάς ἔσα ἐπὶ τῆς Βάσεως· ἡχθῶ δὲ δὴ καὶ πρὸς ὀρθάς ἡ αδ, ἢ καὶ τὴν Βάσιν κατὰ τὸ δ δίχα τε-

(1) Διὰ τὴν Πρότ. (2) Ὁρ. Ι. τῷ β'. (3) Ὁρ. ΙΗ. ΙΘ. καὶ Κς. τῷ α'. Βιβλ. (4) Πόρ. β. τῶν ἀνωτ. (5) ΜΖ. τῷ α'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Εάν Κύκλος ληφθῇ τι Σημεῖον ἐκτός (α), ἀπὸ δὲ τῷ Σημεῖοι πρὸς τὸν
 „Κύκλον διαχθῶσιν Εὐθεῖαι τινές (αβ, αγ, αζ, αξ, απ, αρ), ὧν μία μὲν
 „διὰ τῷ Κέντρῳ, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχεν.

„Α'. Τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλῃν Περιφέρειαν προσπιπτασῶν Εὐθειῶν,
 „μεγίστη μὲν (ἢ αβ) ἢ διὰ τῷ Κέντρῳ (ψ).

„Β'. Τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἢ ἔγγιον τῆς διὰ τῷ Κέντρῳ (αβ) τῆς ἀπώτε-
 „ρον μείζων ἐστί.

„Γ'. Τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν Περιφέρειαν προσπιπτασῶν Εὐθειῶν, ἐλα-
 „χίστη μὲν ἐσιν ἢ μεταξὺ τῶν τε Σημεῖα (α) καὶ τῆς Διαμέτρου.

„Δ'. Τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἢ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης, τῆς ἀπώτερον ἐσιν
 „ἐλάσσων.

„Ε'. Δύο δὲ μόναι Εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσῶνται ἀπὸ τῷ Σημεῖοι (α)
 „πρὸς τὸν Κύκλον, ἐφ' ἐκότερα τῆς ἐλαχίστης, ἥτοι πρὸς τὴν κυρτὴν ἢ καὶ
 „πρὸς τὴν κοίλῃν αὐτὴν διαγόμεναι.

Α'. Ἀπὸ τῷ Κέντρῳ ψ ἢ χθῶ ἢ ψγ. Ἐπεὶ γὰρ ψγ, ψβ ἴσαι ἄλλη-
 λαις εἰσὶ, κοινῆς προσεδείχθη τῆς αψ, ἔσονται αψ, ψγ ἅμα ληφθεῖσαι
 ἴσαι τῇ αβ. Α'λλ' αἱ αψ, ψγ ἅμα (1) τῆς αγ μείζονές εἰσιν, ἄρα καὶ ἡ αβ
 μείζων τῆς αγ. Ὡσαύτως δὲ καὶ οἶασθαι ἄλλης ἢ αβ μείζων δειχθήσεται.

Β'. Η'χθῶ ἢ ψζ. Αἱ γὰρ γψ, φα Πλευραὶ ἴσαι ταῖς Πλευραῖς ζψ,
 ψα, ἢ δὲ ὑπὸ γψα μείζων τῆς ὑπὸ ζψα. Ἀ'ρα (2) ἡ Βάσις γα μείζων
 τῆς Βάσεως ζα.

Γ'. Η'χθῶ ἢ ψπ. Αἱ γοῦν δύο απ, πψ ἅμα μείζονές εἰσι τῆς αψ.
 Α'φαιρεθεῖσῶν ἄρα τῶν ἴσων ψπ, ψξ ὑπολειφθήσεται ἢ αξ ἐλάσσων τῆς
 απ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἢ αξ οἶασθαι ἄλλης ἐλάσσων δειχθήσεται.

Δ'. Η'χθῶ ἢ ψρ. Αἱ γὰρ απ, πψ ἐλάσσονές εἰσιν ἅμα ληφθεῖσαι (3),
 τῶν αρ, ρψ ἅμα ληφθεῖσῶν. Α'φαιρεθεῖσῶν ἄρα τῶν ἴσων ψπ, ψρ, ὑπο-
 λειφθήσεται ἢ απ ἐλάσσων τῆς αρ.

Ε'. Φανερόν ἐκ τῶν προαποδειχθέντων. Ἐὰν γὰρ πλείους δυοῖν ἴσαι ἄλ-
 λήλαις ἄχθῆναι δύνανται, προσπεσῶνται δὴ δύο ἴσαι Εὐθεῖαι, ἥτοι πρὸς
 τὴν κυρτὴν ἢ καὶ πρὸς αὐτὴν τὴν κοίλῃν, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος· ὃ τῷ Β'. ἢ
 τῷ Δ'. μέρει ἀντιπεριπίπτον ἐστί.

(1) Κ. τῷ α'. (2) ΚΔ. τῷ α'. (3) ΚΔ. τῷ α'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Εάν Κύκλος ληφθῇ τι Σημεῖον ἐντός (α), ἀπὸ δὲ τῶ Σημεῖοις πρὸς
 „τὸν Κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο Εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν Σημεῖον
 „Κέντρον ἔσαι τῷ Κύκλῳ.

Κατάδηλον τὸ Θεώρημα ἐκ τῶ Δ'. μέρους τῆς Ζ'. τῷ παρόντος.

Ο'. δὲ Εὐκλείδης οὕτω τοι δείκνυσι.

κ. 214.

Εἴω φησὶ Κύκλος ὁ αβγ, ἐντός δὲ αὐτῷ Σημεῖον τὸ δ, καὶ αἱ ἀπὸ τῷ
 δ προσπίπτουσαι Εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις δα, δβ, δγ. Λέγω δὴ ὅτι τὸ δ Κέν-
 τρον ἐστίν.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ, βγ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα (1) κατὰ τὰ
 Σημεῖα ε καὶ ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ εδ, δζ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ η, κ, θ, λ
 Σημεῖα. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αε τῇ εβ (2), κοινὴ δὲ ἡ εδ, ἤτε δα ἴση (3)
 τῇ δβ, Γωνία ἄρα (4) ἡ ὑπὸ αεδ Γωνία τῇ ὑπὸ βεδ ἴση ἐστίν, καὶ ἀμφω ἄρα
 (5) ὀρθαί. Ἡ ἡκ ἄρα τὴν αβ, καὶ δίχα τέμνει καὶ πρὸς ὀρθάς, ὥς ἐπὶ
 τῆς Τεμνέσης ηκ ἔσαι τὸ Κέντρον (6) τῷ Κύκλῳ. Τῷτο δὲ ὁμοίως ῥᾶδιον ἔσαι
 καὶ ἐπὶ τῆς λθ δεῖξαι. Κοινὸν δὲ ταῦτι μόνον ἐστὶ ταῖς ηκ, λθ τὸ Σημεῖον καὶ
 ὃ τέμνονται τὸ δ, τὸ δ ἄρα Σημεῖον ἔστι τὸ Κέντρον τῷ Κύκλῳ.

Δείκνυσι δὲ καὶ ἄλλως.

κ. 215.

Μὴ γάρ φησιν, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔσω τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ δε
 διήχθω ἐπὶ τὰ ζ, η Σημεῖα, ἡ δὲ ζη Διάμετρος ἐστὶ τῷ Κύκλῳ. Καὶ ἐπεὶ
 ἐπ' αὐτῆς εἰληπταί τι Σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶ Κέντρον τῷ Κύκλῳ τὸ δ (7), μεγίστη
 μὲν ἔσαι ἡ δη, μείζων δὲ ἡ μὲν δγ τῆς δβ, ἡ δὲ δβ τῆς δα (8), ἀλλὰ καὶ
 ἴση (9). Ὅπερ ἀδύνατον.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ι.

„Κύκλος ὃ τέμνει Κύκλον κατὰ πλείονα Σημεῖα ἢ δύο.

κ. 216.

Τεμνέτω γὰρ εἰ δυνατόν κατὰ πλείονα ἢ δύο, ὅϊον κατὰ β, γ, δ, ἀπὸ
 δὲ τῷ Κέντρῳ α τῷ βεζ Κύκλῳ ἐπεξεύχθωσαν Εὐθεῖαι αβ, αγ, αδ· αὗται
 δὲ ἔσονται ἴσαι (10). Ἐπεὶ δὲ ἐπὶ τὰς τομὰς εἰσι περατέμεναι, αἱ αὗται

(1) I. τῷ α'. (2) Ἐκ κατ. (3) Εξ ὑποθ. (4) Η. τῷ α'. (5) Ὁρ. ΙΔ. τῷ α'. (6)
 Διὰ τὸ Πόρ. τῆς Α. τῷ γ'. (7) Μέρος Α'. τῆς Ζ. τῷ γ'. (8) Διὰ Γ'. μέρος τῆς αὐ-
 τῆς. (9) Εξ ὑποθ. (10) Ὁρ. ΙΗ. τῷ α'.

ἐκ πρὸς τὴν Περιφέρειαν τῆς ἡβδ Κύκλου προσπεσῶνται. Ἀρα (1) τὸ α Κέντρον ἔσται ἐκ τῆς ἡβδ Κύκλου, καὶ δύο ἄρα Κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτὸ ἔσται Κέντρον. Ὅπερ (2) ἀδύνατον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

„Εὰν δύο Κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντὸς, ἐκ ληφθῇ αὐτῶν τὰ Κέντρα (1) καὶ (2), ἢ ἐπὶ τὰ Κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη Εὐθεΐα, ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν Κύκλων.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν πιπτέτω ὡς ἡ ζηδθ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ αζ, αη. Ἐπεὶ γὰρ αἱ αη, ηζ τῆς ζα (ταυτὸν δ' εἰπεῖν (3) τῆς ζθ) μείζονες (4) εἰσιν, ἀφαιρείσθω κοινὴ ἡ ζη, ἐκ αἱ ἡ λοιπὴ αη, τῆς λοιπῆς ηδ μείζων, ἴση δὲ ἡ αη τῇ ηδ (5). Ἡ ἄρα ηδ μείζων τῆς ηθ, τὸ μέρος τῆς ὅλης. Ὅπερ, ἀδύνατον.

κ. 217.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΒ.

„Εὰν δύο Κύκλοι ἄπτονται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἢ ἐπὶ τὰ Κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη Εὐθεΐα διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Εἰ μὴ γὰρ, ἔστω τὰ Κέντρα τῶν Κύκλων ὡς τὰ α, β, τὴν μὴ διὰ τῆς ἐπαφῆς σ' ἀγομένην Εὐθεΐαν αβ, τέμνασαν δὲ τῆς Κύκλου κατὰ ο καὶ περατῶντα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ασ, βσ. Ἔσονται δὲ αἱ ασ, βσ ἅμα (6) μείζονες τῆς αβ. Ἀλλὰ μὴν ἡ μὲν ασ ἴση τῇ αο, ἡ δὲ βσ ἴση τῇ βπ (7), αἱ ἄρα ασ καὶ βπ ἅμα μείζονες τῆς ὅλης αβ. Ὅπερ ἀδύνατον.

κ. 218.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐκ ταύτης ἄρα ἐκ τῆς πρὸ αὐτῆς φανερόν, ὡς εἰάν Κύκλοι δύο ἄπτονται ἀλλήλων εἴτε ἐντὸς εἴτε ἐκτὸς, ἢ ἀπὸ τῆς Κέντρον τῆς ἑτέρας διὰ τῆς ἐπαφῆς ἀγομένη Εὐθεΐα, διὰ τῆς Κέντρον τῆς ἑτέρας προεκβαλλομένη διελεύσεται. Ἡ γὰρ τοιαύτη Εὐθεΐα ἡδὲν διοίσει τῆς ἐπὶ τὰ Κέντρα ἐπιζευγνυμένης, ἥτις (διὰ τὴν ΙΑ. καὶ ΙΒ.) ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται, καὶ διὰ τῆς ἐπαφῆς διελεύσεται.

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Ε. τῆς γ'. (3) Ὅρ. ΙΗ. τῆς α'. (4) Κ. τῆς α'. (5) Ὅρ. ΙΗ. τῆς α'. (6) Κ. τῆς α'. (7) Ὅρ. ΙΗ. τῆς α'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ.

„Κύκλος Κύκλῳ ἢ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα Σημεῖα ἢ καὶ ἓν, εἴαν τε
 „ἐντὸς, εἴαν τε ἐκτὸς ἐφάπτεται. Ομοίως δὲ καὶ Εὐθεία Κύκλῳ ἢ ἐφάπτε-
 „ται κατὰ πλείονα Σημεῖα ἢ καὶ ἓν.

κ. 219.

Ἀπτόμεθα γὰρ ἐντὸς (εἰ δυνατόν) Κύκλος Κύκλῳ, ἐν μέρει Περιφερείας
 τῷ γλ. Ἡ γὰρ ἐπὶ τὰ Κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη Εὐθεία, ἐκβαλλομένη
 ἐπὶ τὴν συναφὴν (1) πεσεῖται τῶν Κύκλων, οἷον κατὰ τὸ γ. Ἀλλ' ἐπεζεύχ-
 θωσαν καὶ αἱ αλ, βλ. Ἐπεὶ τοίνυν αἱ βλ, βγ (ὡς ἀπὸ τῶ Κέντρου ἐπὶ τὴν
 Περιφέρειαν ξλγ) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κοινῆς προσεθείσης τῆς αβ, ἡ αβ καὶ
 βλ ἅμα ἴσαι τῇ αγ εἰσὶ. Τῇ δὲ αγ ἴση ἡ αλ, ὡς ἀπὸ τῶ Κέντρου α πρὸς
 τὴν Περιφέρειαν πλγ, ἄρα αἱ αβ, βλ ἅμα ἴσαι τῇ αλ εἰσὶν. Ὅπερ (2)
 ἀδύνατον.

Ἀλλ' ἀπτόμεθα Κύκλος Κύκλῳ ἐκτὸς (εἰ δυνατόν) κατὰ πλείονα Σημεῖα
 ἢ καὶ ἓν, οἷον κατὰ τὸ Τόξον ξλ. Ἡ γὰρ Εὐθεία απ ἡ ἐπὶ τὰ Κέντρα α
 καὶ π ἐπιζευγνυμένη, διελεύσεται πάντως (3) διὰ τῆς ἐπαφῆς, οἷον κατὰ τὸ
 ξ. Ἡ δὲ μὲν ἐν ἡχθωσαν καὶ αἱ αλ, πλ, καὶ οὕτως αἱ δύο τῶ Τριγώνῳ Πλευ-
 ραὶ αλ, πλ ἅμα, ἴσαι ἔσονται ταῖς αξ, πξ, ἥτοι τῇ ὅλῃ απ. Ὅπερ (4)
 ἀδύνατον.

Τελευταῖον δὲ ἡ βγ Εὐθεία ἀπτόμεθα τῷ Κύκλῳ (εἰ δυνατόν) κατὰ μέ-
 ρος τὸ γε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τῶ Κέντρου π Εὐθείαι αἱ πγ, πε. Αὐ-
 ται δὲ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ πγε Τρίγωνον. Διὸ (5) αἱ
 ὑπὸ πγε, πεγ ὀξεῖαι εἰσὶ, καὶ ἡ ἐπὶ τῇ βγ Κάθετος ἀπὸ τῶ Κέντρου π (6),
 πεσεῖται μεταξὺ γ καὶ ε, οἷον κατὰ τὸ δ, καὶ ἔσονται ἄρα τὰ σκέλη πγ καὶ
 πε ἴσα τῇ μεταξὺ τούτων Καθέτῳ (7). Ὅπερ (8) ἄτοπον.

Π ό ρ ι σ μ α .

κ. 220.

Οἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας τὰ ἑαυτῶν Κέντρα ἔχοντες Κύκλοι, καὶ ταύ-
 την κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον τέμνοντες β, ἐν τῷ αὐτῷ Σημεῖῳ β ἀλλήλων
 κατὰπτονται.

Ἄλλως τε ἡ παρῶσα Πρότασις ΙΓ. ἐξ αὐτῆς τῆς τῶν παραβαλλομένων

(1) ΙΑ. τῷ γ'. (2) Διὰ τὴν Κ. τῷ α'. (3) ΙΒ. τῷ α'. (4) Διὰ τὴν Κ. τῷ α'. (5)
 Πόρ. ια'. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (6) Πόρ. Γ. τῆς αὐτ. (7) Ὅρ. ΙΗ. τῷ α'. (8) Διὰ τὸ ἰδ'.
 Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'.

ἄλλήλαις Γραμμῶν ἐννοίας ἐστὶ κατάδηλος. Οὐ γὰρ ἐξ Εὐθείας καὶ Κύκλου Περιφέρειαι, ἀδὲ Περιφερειῶν αὐτῶν διαφέρειν Καμπυλότητες, ἀδὲ Κυρταὶ δύο, ὅτι μὴ κατὰ Σημεῖων ἄλλήλων ἄπτεσθαι δυνήσονται· κατὰ μέρη γὰρ ἐφαρμόζειν ἔστι δυνατόν. Ἐφαρμόσειαν δὲ, εἰ κατὰ μέρος τι πεφύκεσαν ἄπτεσθαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

„Εν Κύκλῳ αἱ ἴσαι Εὐθεῖαι (βγ, λζ) ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῆς Κέντρου.
„Καὶ αἱ ἴσον ἀπέχονται ἀπὸ τῆς Κέντρου ἴσαι ἄλλήλαις εἰσὶ.

Ἀπὸ τῆς Κέντρου α ἐπεξεύχθησαν αἱ αβ, αλ, καὶ ἤχθησαν αἱ αξ, αὐτὴν πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τῶν βγ, λζ (1), καὶ ἔσονται αἱ βγ, λζ δίχα τετμημέναι (2) κατὰ ξ καὶ ι.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ βγ, λζ ἴσαι ἄλλήλαις (3) εἰσὶν, ἴσα ἔσται καὶ τῶν τῶν ἡμισυ ξβ, ιλ, καὶ δὴ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν (4) Τετράγωνα ἄλλήλοις ἴσα. Ἀλλὰ γὰρ τὸ ἀπὸ αβ Τετράγωνον (5) ἴσον τοῖς ἀπὸ αξ καὶ βξ, καὶ τὸ ἀπὸ αλ Τετράγωνον (6) ἴσον τοῖς ἀπὸ αὐτῶν καὶ ιλ, τὰ δὲ ἀπὸ αβ καὶ αλ Τετράγωνα (7) ἄλλήλοις ἴσα εἰσὶν, ἄρα τὰ ἀπὸ αξ καὶ βξ Τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ αὐτῶν καὶ ιλ, τὰ συναμφοτέρω τοῖς συναμφοτέροις. Ἀλλὰ μὲν τὰ ἀπὸ βξ καὶ ιλ ἴσα ἄλλήλοις ἐδείχθη, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ αξ καὶ αὐτῶν Τετράγωνα ἴσα ἄλλήλοις εἰσὶν. Ἀρα (8) καὶ αἱ Κάθετοι αξ καὶ αὐτῶν ἴσαι, καὶ αἱ βγ, καὶ ζλ Εὐθεῖαι (9) ἐπίσης εἰσὶν ἀπὸ τῆς Κέντρου α ἀπέχονται. Ο. Η. τὸ Α'.

Ἀνάπαλιν δὲ, εἰ αἱ ξα, ια ἀποσάσεις ὡς ἴσαι, τότε δὴ ἀφαιρεθέντων τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἴσων Εὐθειῶν ξα, ια, ὁμοίως ἀποδειχθήσεται τὰ λοιπὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ ξβ, ιλ ἴσα ἄλλήλοις εἶναι, ἐκ τῆς ἀκολούθου δὲ καὶ τὰς Εὐθείας ξβ, ιλ ἴσας ἄλλήλαις εἶναι. Αὗται δὲ ἡμίσειαι εἰσὶ τῶν Εὐθειῶν (10) βγ, ζλ, ἄρα καὶ αὗται εἰσὶν ἴσαι. Ο. Η. τὸ Β'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΕ.

„Εν Κύκλῳ μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ Διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἡ εἰς ἡ ἑγγιον
„τῆς Κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶ.

Ἦχθησαν γὰρ ἀπὸ τῆς Κέντρου ἐπὶ τὰς βγ, ζι Κάθετοι αἱ εθ, εκ. Καὶ ἐπεὶ ἑγγιον μὲν τῆς Κέντρου ἡ βγ, ἀπώτερον δὲ ἡ ζι, μείζων ἄρα ἡ εκ (11)

π. 222.

Α' Μας.

Η' αεδ = εμ
+ εν. αὐτὴ δὲ
εμ + εν >
μν, ἄρα αεδ
> μν. Πάλιν
εμ + εν = εζ
+ εη. Καὶ
μν > ζη,
ἄρα μν > ζη.
Ο. Ε. Δ.

(1) ΙΒ. τῆ α'. (2) Γ. τῆ γ'. (3) Ε'ξ ὑποθ. (4) Α'ξ ιε'. (5) ΜΖ. τῆ α'. (6) Διὰ τὴν αὐτ. (7) Δι' ὅρ. ΙΗ. τῆ α'. καὶ Α'ξ. ιε'. (8) Α'ξ. ιε'. (9) Ὅρ. Δ. τῆ γ'. (10) Γ. τῆ γ'. (11) Ὅρ. Δ. τῆ γ'.

τῆς εθ. Κείθω τῇ εθ ἴση ἢ ελ, καὶ διὰ τῷ λ τῇ εκ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖται ἢ λμ διήχθω ἐπὶ τὸ ν, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ εμ, εν, εζ, εη.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἢ εθ τῇ ελ, ἴση ἐστὶ (1) καὶ ἢ βγ τῇ μν. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἢ μὲν αε τῇ εμ, ἢ δὲ εδ τῇ εν, ἢ ἄρα αδ ταῖς εμ, εν ἴση ἐσίν. Αἱ δὲ, μείζονες εἰσι (2) τῆς μν, καὶ ἢ αδ ἄρα μείζων τῆς μν, καὶ δὴ καὶ τῆς ταύτης ἴσης βγ. Πάλιν ἐπεὶ αἱ δύο εμ, εν ἴσαι ταῖς δυσὶν εζ, εη, ἢ δὲ ὑπὸ μὲν μείζων τῆς ὑπὸ ζην, Βάσις ἄρα ἢ μν Βάσεως τῆς ζην (3) μείζων ἐσίν. Ἀλλὰ ἢ μν τῇ βγ ἐδείχθη ἴση, ἄρα ἢ βγ τῆς ζην μείζων ἐστὶ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις.

„Η' τῇ Διαμέτρῳ τῷ Κύκλῳ (γβ) πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας (β) ἀγομένη
„(12), ἐκτὸς πεσεῖται τῷ Κύκλῳ, καὶ προαγομένη ἀπτεται τῷ Κύκλῳ μὴ
„τέμνῃσα· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε Εὐθείας καὶ τῆς Περιφερείας,
„ἐτέρα Εὐθεῖα (κατὰ τὴν ἐπαφὴν β) ἂ παρεμπεσέται, ὅτι μὴ Τέμνῃσα.

α. 223.

Α'. Ληφθήτω δὴ ἐπὶ τῆς ιβζ Εὐθείας Σημεῖον τὸ τυχὸν λ, καὶ ἐπεξεύχθω ἀπὸ τῷ Κέντρῳ ἢ αλ. Καὶ ἐπεὶ ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ λαβ ἢ ὑπὸ αβλ Ὁρθὴ ἐσίν (ἐξ ὑποθ.), ἔσται ἢ ὑπὸ αλβ (4) Ὁξεῖα. Ἀρα ἢ αλ ἢ ὑποτείνουσα τὴν μείζονα Γωνίαν ὑπὸ αβλ, μείζων ἐστὶ τῆς αβ τῆς ὑποτείνουσας (5) τὴν ἐλάσσονα ὑπὸ αλβ. Ἀλλ' ἢ αβ ἄχρι τῆς Περιφερείας μόνον ἦκει, ἢ ἄρα αλ ἐπέκεινα τῆς Περιφερείας γενήσεται, καὶ τότε λ ἐκτὸς πεσεῖται τῷ Κύκλῳ. Αὐτὸ δὲ τῷτο καὶ περὶ παντὸς ἄλλης Σημεῖα τῶν ἐπὶ τῆς ιζ δειχθήσεται, πλὴν τῷ β. Η' ὅλη ἄρα ιζ ἀπτεται τῷ Κύκλῳ κατὰ τὸ β μὴ τέμνῃσα (6). Ο. Η. τὸ Α'.

Β'. Ὑπὸ τὴν βζ (εἰ δυνατόν) εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε Εὐθείας καὶ τῆς Περιφερείας, παρεμπίπτει ἑτέρα Εὐθεῖα ἢ ρβ. Ἐπεὶ δὲ ἢ ὑπὸ ρβα Ὁρθὴ (ἐξ ὑποθ.), ἔσται ἢ ὑπὸ ρβα Ὁξεῖα· οὐκ ἄρα ἐπὶ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἴσεται ἢ βρ. Η' χθω γὰρ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α ἐπὶ τῇ βρ πρὸς ὀρθὰς ἢ αο, πρὸς γε τὴν βρ (7) πίπτουσα, καὶ τὴν Περιφέρειαν κατὰ τὸ π. Καὶ τοίνυν ἢ μὲν αβ, αὐτὴ δὴ ὑποτείνουσα τὴν μείζονα Γωνίαν ὑπὸ αοβ (ἥτις Ὁρθὴ), μείζων ἐστὶ (8) τῆς αο τῆς ὑποτείνουσας τὴν ἐλάσσονα Ὁξεῖαν ὑπὸ οβα. Ἀλλὰ μὴν ἢ αβ ἴση τῇ απ, ἢ ἄρα απ μείζων τῆς αο, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ. Ὅπερ ἀδύνατον.

(1) ΙΑ. τῷ γ'. (2) Κ. τῷ α'. (3) ΚΑ. τῷ α'. (4) Πόρ. Ε. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (5) ΙΘ. τῷ α'. (6) Ὑρ. β. Βιβλ. γ'. (7) Γ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (8) ΙΘ. τῷ α'.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Α'.

Ἡ παρ' Εὐκλείδῃ Πρότασις οὕτως ἐκφέρεται.

„Ἡ τῇ Διάμετρῳ τῷ Κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτός πε-
 „σεῖται τῷ Κύκλῳ, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε Εὐθείας καὶ τῆς Περιφε-
 „ρείας, ἑτέρα Εὐθεῖα ἢ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τῷ Ἡμικυκλίῳ Γωνία ἀπά-
 „σης ὀξείας Γωνίας Εὐθύγραμμῳ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττω. Τε-
 „τραμερὲς οὖν ἄτω τῆς Προτάσεως προκειμένης, τὸ μὲν Α'. καὶ Β'. μέρος Ἀν-
 „δρέας ὁ Τακνέτιος (ὡς ἐστὶν ἰδεῖν ἀνωτέρω) καλῶς ἀποδέδειξε, τὸ δὲ δὴ Γ'. καὶ
 Δ'. οἷον δὴ τινὰς παραδόξας δέσεις μηδενὶ ἐδράκῳ λόγῳ προσερερισμέναις,
 ἐδὲ λόγῳ ἠξίωσε. Δοκεῖ δὲ ὡς ἂν ὀρθῶς περὶ τῶν ὑπερβληφῶς, εἴπερ γὰρ
 Εὐθύγραμμος τις Γωνία ὑπὸ ἀβρ, τῆς μὲν Ὀρθῆς ὑπὸ αβζ ἐλάττων (ὅπερ
 ἐστὶν Ὀξεία), τῆς δὲ τῷ Ἡμικυκλίῳ Γωνίας αβπ μείζων ὑπατεθεῖη, ἡ γοῦν
 εἰ δυνατόν τὴν τυχεύσαν Εὐθύγραμμον ὑπὸ ζβρ, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς
 τε Α'πτομένης ζβ καὶ τῆς Περιφέρειας πβ παρεμπεσεῖν, κατὰ τὸ β Σημεῖον
 κορυφωμένην, εἴη ἂν ἐκ τῶ ἀκολούθῃ καὶ Εὐθεῖαν μεταξὺ τῆς τε Α'πτομένης καὶ
 τῆς Περιφέρειας ἀγαγεῖν δυνατόν, τὸν Κύκλον μιδαμῶς τέμνουσαν. Ἀλλὰ τι-
 τί ἐν τῷ Β'. μέρει ὡς ἔχον ἀδυνάτως ἐδείκνυτο.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α .

Ἐκ δὴ τῶν αὐτῶν φανερόν, ὡς ἡ Εὐθείας τε καὶ Περιφέρειας ἐπαφῇ
 ἐν ἀδιαίρετῳ ἐστὶ.

Καὶ ὅτι ἐὰν Κέντροις τοῖς ἐπὶ τῇ αὐτῇ Εὐθείᾳ ἐπ' ἄπειρον προεκβαλλο-
 μένῃ ληφθῇ, διὰ τῶ β ἀγόμενοι Κύκλοι ὑπὲρ ἀριθμὸν, ὃν ἂν εἴποις, γρα-
 φῶσιν, ἅπαντες ἀπλῶς οὔτε ἐλάσσονες καὶ οἱ μείζας, τῆς ιζ Εὐθείας κατὰ
 τὸ αὐτὸ Σημεῖον β καθάψονται. Ὅρα τὸ Πόρ. τὸ μετὰ τὴν ΙΓ'. τῷ παρόντος.

Καὶ οἱ Κύκλοι ἄρα οἱ κατὰ Μέγεθος τῷ δοθέντος ἀεὶ μείζον προσευρυνό-
 μενοι, ἔγγιον ἀεὶ ἐπ' ἄπειρον τῆς Α'πτομένης γίνονται, καίτοι ἂν ποτε
 αὐτῇ, πλὴν ἢ κατὰ τὸ Σημεῖον τῆς ἐπαφῆς συναπτόμενοι, ὃ σφαιρέατον
 ἅμα καὶ θαύματος ἄξιον.

Καὶ Γραμμὴ ἄρα ἡ τυχεύσα εἰς ἀεὶ διαιρετὰ διαιρετὴ πέφυκεν. Ἐάν γὰρ
 ἀπό τινος τῶν ἐπὶ τῆς Διαμέτρως Σημεῖων, ἐπὶ τὴν Α'πτομένην ιζ προσπίπτα-
 σα διαχθῇ Εὐθεῖα ἡ απ (ἐν Σχήμ. τῷ Πορίσμ. τῷ μετὰ τὴν ΙΓ'. τῷ παρόν-
 τοι), οἱ ὑπὲρ ἀριθμὸν γραφόμενοι Κύκλοι, ὧν τὰ Κέντρα ἐπὶ τῆς Εὐθείας αβ
 τῆς ἐπ' ἄπειρον προεκβαλλομένης, καθάψονται μὲν τῆς Εὐθείας ιζ (διὰ τὸ Β'.

Πόρ. τῶν ἄνωτ.), καθάφονται δὲ καὶ ἀλλήλων (διὰ τὸ Πόρ. τὸ μετὰ τὴν ΙΓ'. τῇ Πόρ.), ἀλλ' ἐν σημείῳ τῷ αὐτῷ β. Οὐδαμῶς δὲ ἦτοι ἀλλήλοις, ἢ τῇ Εὐθείᾳ, πλὴν ἢ κατὰ τὸ β συναφθῆσονται. Ὡς καὶ τὴν Εὐθείαν ἀπ' ἐξ ἀνάγκης τεμαῖσιν ἐπ' ἄπειρον, τινέσιν εἰς ὁποσωνῶν δοθέντων ἔτι πλείονα.

Ε'. Καὶ τὴν κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνίαν ὑπὸ λβπ (ἐν Σχήμ. τῷ τῆς Πρωτ.) (τὴν ὑπὸ τῆς Ἀπτομένης δηλονότι βζ, καὶ τῆς Περιφερείας βπ περιεχομένην) οὐδεμία Εὐθεῖα δυνήσεται τεμεῖν.

Ζ'. Διὰ γεμὴν τῶν Περιφερειῶν τῶν κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον β συναπτομένων (ὅρα Σχήμ. τῇ Πόρ. τῆς ΙΓ'.) τμηθεῖν ἂν καὶ ἀπομειωθεῖν ἢ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία ἐπ' ἄπειρον. Κανὲν τῷ δὴ, καὶ ἐν τῷ Γ'. Πορίσματι τῇ τῶν ἀσυμπτάων Γραμμῶν παραδόξῃ κεῖται ἢ πᾶσα φύσις, οἷαι ἀμέλει εἰσὶν Εὐθεῖα τε καὶ Ὑπερβολή, ἐπ' ἄπειρον μὲν ἄμφω προεκβαλλόμεναι, καὶ γε Διαστήματι τῷ παντὸς δοθέντος ἐλάσσονι ἀλλήλαις πελάζεσθαι, μηδαμῶς δὲ μηδαμῶς συμπίπτεσθαι. Οὐ δὲ εὐσόχως τε ἠψατο, καὶ δεῖξιν ἀπέδωκε καὶ Μάριος Βεττινός ὁ Γησιεὺς, καὶ πρό γε τῆς Βαρόκιοις καὶ Κάρδανος ἐκ τῶν τῇ Ραββὶ Μωϋσέως τῇ ἀπὸ Ναρβόνης, οὗ καὶ τὴν κατασκευὴν ἡμῖν ὁ Κάρδανος ὑποτίθησιν ἐν τοῖς περὶ Δεπτότητος Βιβλ. Ιζ'. Καὶ ταῦτα μὲν ὁ Τακ. Η' δὲ κατὰ τὴν ἐπαφὴν (ἢ λέγεται) Γωνία, ὡς ὁ Οὐίξων ἐκ τῶν τῇ Οὐαλλισίᾳ περὶ Γωνίας γεγραμμένων εὐληφῶς ἀποφαίνεται, διὰ τῶν κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον ἀπτομένων Περιφερειῶν ἠκιστα μειῖται, ὡς ἔδὲ Γωνία ἔστα, ἔδὲ τὸ ποσὸν ἔχασα. Καὶ γὰρ Γωνία ἐστὶν (κατὰ τὸν Η'. τῇ Α'. Βιβλ. Ο'ρισμὸν) ἢ ἐν ἐπιπέδῳ δύο Γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' Εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν Γραμμῶν κλίσεις. Η' δὲ πρὸς Εὐθείᾳ (ἐν Σχήμ. τῇ μετὰ τὴν ΙΓ'. Πορίσμ.) μιᾷ ἢ πλείονων Περιφερειῶν κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον β ἀπτομένη, ἐν αὐτῷ τῷ τῆς ἐπαφῆς Σημεῖῳ (ἐν ἐκείνῳ γὰρ ὑφέστηκεν ἡ Γωνία, εἴ τις ἐστὶν) ἑδμεῖαν ἔχει κλίσιν πρὸς τὰς Περιφερείας αὐτὰς, ἐκείναις δὲ πάντα ἐστὶ συμπίπτουσα. Ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν τοσαῦτα. Ὅτι δὲ καὶ τὸ Ζ' ταυτὶ Πόρισμα συνάδει τῷ Γ'. φανερόν.

Πάντως δὲ εἰ κλίσιν ἔχει ἡ Εὐθεῖα, καὶ οὐκ ἂν τοῦ Σημεῖου ῥοὴ ἔχει διορισμὸν, πῶς αὐτὴ φαίη τὴν Ἀπτομένην Εὐθείαν κλίσιν ἔχειν πρὸς τὴν Περιφερειαν, ἢ ἠκιστα τέμνει.

Ζ'. Καντεῦθεν ἐξ ὧν ὁ Οὐίξων ἀποφαίνεται, δηλὸν ὅτι ἡ ὑπὸ αβπ (ἐν Σχήμ. τῷ τῆς Πρωτ.) τῇ Ἡμικυκλίᾳ Γωνία, τῇ Εὐθυγράμμῳ τε καὶ Ο'ρθῇ ὑπὸ αβζ ἴση ἐστὶν. Εἰ γὰρ ὁ μεταξὺ τῆς τε Εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἥς ἐκείνη ἀπτεται τόπος πβζ, πρὸς γε τὸ β Σημεῖον ἢ ἐστὶ Γωνία, ὡς ἔδὲ τὸ ποσὸν ἔχασα, καὶ τῆς αὐτῆς ἀπὸ τῆς ὑπὸ αβζ ἀφαιρεθέντος, ὑπολειφθήσεται ἔδὲν ἡττον ἢ ὀρθῇ Γωνία ἀμείωτος, ἥτε τῇ Ἡμικυκλίᾳ Γωνία ὑπὸ αβπ, ὀρθὴ ἔτι ὑπολειφθήσεται.

Τὸ γεμὴν ἐν τῷ ἐφεξῆς Σχολίῳ (περὶ ᾧ τῷ εὐκλεεῖ Οὐαλλισίῳ πληρέστερον γέγραπται, ἐν τόμῳ Β'. τῶν μαθηματικῶν ἐκείνου ποιημάτων, ἐν τῇ περὶ Γωνίας τῆς κατ' ἐπαφῆν, ἢ τῆς τῷ Ἡμικυκλίου Γεωμετρικῇ ἐρευνῇ, Σελίδι 605 — 630, καὶ ἐν τῇ ὑπὲρ ἐκείνης ἀπολογίᾳ Σελίδι 631 — 664) ὑποτιθέμενον Ζήτημα ὑπερβάντες, εἶγε τὰ χροῖνα εἰς φειδόμενοι οἱ μαθητιῶντες, τῆς ΙΖ'. ἢ τῶν ἄλλων Προτάσεων ἀπτόσθωσαν.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Β'.

Δείκνυται ἅμα καὶ ἐπιλύεται ὁ παραλογισμὸς τῶν παραδόξων, τῶν ἐκ τῆς κατὰ τὴν ἐπαφῆν Γωνίας ἐπιφέρεσθαι εἰωσότων.

Ταῦτα μὲν οὖν τὰ ἐκ τῆς Ις'. Προτάσ. ἄχρι τῆς δε ἐπαχθέντα, οὐδὲν ἦντον ἔχει τῷ ἀσφαλῆς τὸ παράδοξον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα ἐκ τῆς αὐτῆς ἐπιφέρεσθαι εἰωσότα ὑπὲρ πᾶσαν ὅλως διανοίας ἐς κατάληψιν. Ἀνδ' ὅτε δὴ καὶ εἰς ὑπόνοιαν ἐμπεσεῖν μοι ποτὲ ἐγένετο, μήτι ἐνταῦθα λανθάνει τοῖς τοῖς, οἷον ἀγνοούμενον εἰς ἀπάτην συγχεῖν ἢ αὐτὸς ἄχ' ἤκιστα τὴς ἐπὶ φρενῶν θαυμαζομένους λεπτότητι, καὶ πὶ τὸ τὰ παραδοξότατα ἐκεῖνα ὑποτιθέναι ἐπείγειν· τῷ ὄντι δὲ ἢ κατεληφέναι μοι δοκῶ, ὃ φθάσας ὑπονεύονκα. Τὰ δὲ δὴ παράδοξα, ἅπερ ἐκ τῆς Ις'. ἐπιφέρειν εἰώθασιν, ὡς ἐκ τῶν πολλῶν τὰ κεφαλαιωδέστερα λαβεῖν, ἔσι τάδε.

Ἡ κατὰ τὴν ἐπαφῆν Γωνία ὑπὸ σαπ, οἰασθῇ Ὁξείας ἐλάσσων ἐστίν. Α. κ. 224.
Εἴω γὰρ Ὁξεία ἢ ὑπὸ ραο, ἀφ' ἧς δυνατόν ἀφελεῖν ἡμίσειαν, καὶ ἀπὸ τῆς λοιπῆς αὐτῆς ἡμίσειαν, ἢ ἔτις ἐφεξῆς ἄνευ πέρατος, ἔτω γάρτοι ἢ Ὁξεία οἰασθῇ δοθείσης ἐλάσσων ἂν γένοιτο. Ἀλλὰ γὰρ εἰ ἢ ἐπ' ἀπειρον ἔτις αὐτὴ ἀπομειωθεῖ, αἰεὶ γεμὴν τῆς λοιπῆς Γωνίας, οἷον τῆς ὑπὸ σαο, ἢ ἑτέρα τῶν Πλευρῶν σα (1) ἐντὸς τῷ Κύκλῳ πεσεῖται. Ἐνθεντοί ἢ ἢ κατὰ τὴν ἐπαφῆν Γωνία παο, ὑπὸ τῆς Ὁξείας περιχεθήσεται, ἢ μέρος ἐκείνης ἔσαι, ἢ αὐτῆς ἐλάσσων.

Ἡ Γωνία τῷ Ἡμικυκλίῳ βαπ, καί τοι τῆς Ὁρθῆς ἐλάσσων ἔσαι, ἀλλ' Β.
οἰασθῇ Ὁξείας μείζων ἐστίν. Ὅτι διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὁποσην ἂν εἴη τὸ μέγεθος ἢ Ὁξεία, οἷα ἢ ὑπὸ βαο, ἐντὸς τῆς τῷ Ἡμικυκλίου Γωνίας ὑπὸ βαπ κείσεται.

Καὶ ταῦτα δὴ τὰ δύο ἐν αὐτῇ τῇ Ις'. ἐκφέρεται, ὥς ἢ διαπορεῖν ἐνίς.

(1) Ις. τῷ γ'.

πότερον γνήσια τῇ Στοιχειωτῇ ἔσιν, ἢ γὰρ ὑπότινος παρείσθηνεται. Ὑπερ-
δὲ περὶ τὰτα ἐνδοιάζειν ἢ ἀπεικότως, καὶ γὰρ καὶ Ἀπολλόνιος, ἢ μέγα δὲ
ἐπὶ Γεωμετρίας τὸ κλέος, τὸ αὐτὸ τὰτο πάθημα ἐπίτε τῆς Ἐλλείψεως, καὶ
τῆς Ὑπερβολῆς, καὶ τῆς Παραβολῆς ἀποδείξας, τά γε τοιαῦτα ὑποσυνάψαι
παρείασε.

Γ'. Γωνία ὀρθή ἢ ὑπὸ οαβ (μᾶλλον δὲ καὶ ἡ τυχεύουσα Ὁξεία ὑπὸ οασ)
ἀπείρους τῶν κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνίας ἐστὶ περιέχουσα ἴσας, καὶ ἀπείρον ἄρα
τὴν πρὸς ταύτην ὑπεροχὴν ἔχει. Ἡ γὰρ ὑπὸ οαβ εἰς ἀπείρους ἂν διαιρε-
θεῖται Ὁξείας καὶ ἐλάττωσθε καὶ ἐλάττωσθε, ὧν ἐκάστη μείζων τῆς κατὰ τὴν
ἐπαφὴν Γωνίας ὑπὸ παο (1) ὑπετέθει.

Δ'. Ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία ὑπὸ παο, τῆς Ὀρθῆς ὑπὸ βαο μέρος πραγ-
ματιῶδες τυγχάνει, ἅτε δὲ συνάμα τῇ τῇ Ἡμικυκλίᾳ Γωνίᾳ ὑπὸ βαπ
τὴν Ὀρθὴν ἀπαρτίζουσα. Ἀλλὰ καὶ ἔτις ἐμπὴς ἔχουσα, ὅποσον ἂν πολλα-
πλασιασθεῖ, τῷ ὅλῳ ἑαυτῆς συνεξισωθῆναι ἢ δύναται· κἀντεῦθεν καὶ ἴσα
ἀπειροπληθῇ προσιδέμενα ἀλλήλοις, τὸ ἀπείρον ἢ συνίστησι.

Ε'. Καὶ μετάβασις δέ τις ὧδε τελεῖται ἐκ τῇ ἐλάττωτος ἐπὶ τὸ μείζον,
καὶ διὰ τῶν μεταξὺ ἀπάντων ἡ πρόοδος, διὰ δὲ τῇ ἴσῃ ἠδὲ μὴ· ἢ ὁ εἰς
ταῦτο φέρει, τῇ αὐτῇ τὸ μὲν μείζον ἐστὶ λαβεῖν, τὸ δὲ ἐλάττον, ἴσον δὲ
ἔδαμῶς. Ἐὰν γὰρ Εὐθεία ἢ αβ κατὰ θάτερον αὐτῆς τῶν περάτων α ἐπιρι-
ζομένη οὕτω κινήθῃ, ὥστε τῇ Ἀπτομένη αὐτῇ ἐφαρμόσθαι, συστήσει δῆπου
Ὁξείας τὰς ὑπὸ βαρ, βασ, καὶ ἄλλας ὅσας ἂν δυνατῶς ἐχέσκει. Αἱ δὲ καὶ
τοι καὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μεγεθυνόμεναι, καὶ ἄλλ' οὖν τῆς τῇ Ἡμικυκλίᾳ
Γωνίας ὑπὸ βαπ (2) ἐλάττωσθες ἔσονται. Ἐν ᾧ δ' ἂν πρῶτον ἢ αβ τῇ
Ἀπτομένη αὐτῇ ἐφαρμόσθῃ, Ὀρθὴ αὐτίκα ἢ ὑπὸ οαβ συνίσταται, ἥτις μείζων
τῆς τῇ Ἡμικυκλίᾳ Γωνίας καθέστηκε.

Ταῦτα τοίνυν καὶ τέτων ἔτι πλείω ἐκ τῆς δε τῆς Ις. Προτ. ἐπιφέρει-
ται, ἅπερ εἰ ὡς προτίθεται, οὕτω καὶ ἔχει, πᾶρῳ καταλήψεως οἰατοῦν
δεόντως ἀπόκειται, καὶ ἔστιν ὅλως ὑπὲρ διάνοιαν. Ταύτητοι καὶ τῶν παραδό-
ξων δὴ τέτων ἑαυτὸν ἀπαλλάττων ὁ Πελετάριος, τὴν κατὰ τὴν ἐπαφὴν
Γωνίαν ἀνεπίδεκτον πάνπαν εἶναι ποσότητος ἀπέφηνετο, καὶ μὲν οὖν καὶ
πέραν ἂν εἶχεν ἐκείνῳ τὸ περὶ τέτο, εἰ πάσης ἀπλῶς Γωνίας τὸ ποσόν τι
εἶναι ἀπέφηνεν. Ἀλλὰ γὰρ τῇ ἀληθείᾳ λίαν ἀπῆχθη, ἐντεῦθεν ἀπάσας
τας τῇ Ἡμικυκλίᾳ Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις τυγχάνειν ἀπικυρυστάμενος, ὅπερ

(1) Παράδ. Α. (2) Παράδ. Β.

ἢ ἂν ἐπέφερε συνεῖς, ὡς ὅπερ αὐτὸς τῇ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνίᾳ προσεῖ-
ναι ὑπέλιπε, κοινὸν ἀπατῶν τῶν Γωνιῶν τυγχάνει παρακολάθημα. Ἐγὼ
δὲ οὐδὲ τῷ Κλαβίῳ, ἐν οἷς κατὰ τῇ Πελεταρίῳ διείλεται, συναινέειν ἔχω,
ἐπίσης γὰρ ἐκάτερον τῇ ἀληθείᾳ διαμαρτάνειν ἢ γῆμαι, τὸν μὲν ἀπάσαις
ὅσαις ταῖς Γωνίαις τῷ ποσῷ μετεῖναι οἰόμενον, τὸν δὲ πλὴν τῶν κατὰ
τὴν ἐπαφὴν ἀπάσαις. Ἔτεροι δὲ ἀπαντήσῃ μιᾷ ἀπασαν ἐκ μέσῃ ποιῆ-
σαι δυσχέρειαν οἰσθέντες, ἀπαραδέχεται ἀλλήλαις εἶναι τάς τε καμπυλογράμ-
μους, καὶ τὰς εὐθυγράμμους Γωνίας ὑπέθεντο, ἐρωτώμενοι δὲ τῇ χάριν εἶσιν
ἀπαραδέχονται, ἅλως αὐτοῖς ἔχειν, εἰ φάιν ἐνόμισαν, ὅτι ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν
Γωνία ὅσακισθὲν ἐπιπολλαπλασιασθεῖν, συνεξισθῆναι ἦτοι Ὁρθῇ, ἢ Ὁξείᾳ
τινὶ Γωνίᾳ, ἢ δέ ποτ' ἀφίξεται.

Ἀλλὰ μὲν τῆτο δὴ τὸ παραδοξότατον ἐστὶν ἐν ἀρχῇ αἰτῶμενον· τί δὴ πο-
τε ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία, καίτοι τῆς Ὁρθῆς μέρος τυγχάνουσα, ὅσακι-
σθὲν ἐπιπολλαπλασιασθεῖν, ἢ ἂν ταύτῃ συνεξισωθεῖν ποτέ, ἁρπῇ γὰρ ἂν
ὑπερχοίῃ αὐτήν. Πρὸς ἃ ἐκεῖνοι τὴν κατ' ἐπαφὴν Γωνίαν ἢ δὲ μέρος τῆς
Ὁρθῆς εἶναι διδόασιν, παρὰ τὸ μὴ συνεξισθῆναι αὐτῇ ἐπιπολλαπλασιαζομένην.
Ἀλλ' οἱ τὰ παράδοξα ἐκεῖνα εἰσηγήμενοι, καὶ ἀποδεχόμενοι αὐτοῖς ὑπεξανί-
σανται, κἀντεῦθεν (φασί) τῇ δ' ἡκιστα ἐπεται, μηδαμῶς εἶναι μέρος ἀληθὲς
καὶ πραγματιῶδες, ὅτι καὶ τῇ τῇ Ἡμικυκλίᾳ προσεθεῖσα, ὁλοχρεῖ τὴν Ὁρθὴν
ἀποδίδωσι, ταῦτ' ὅτι καὶ μόνον μὴ μέρος εἶναι Πηλίκον κἀκεῖνοι διδόασιν. Τὰς δὲ
τοιῶδες λόγῳ τὰ προσπίπτοντα δυσχερῇ ἐπιλύσασθαι προελομένους, ἔδει δὴ πᾶ
τὴν κατ' ἐπαφὴν Γωνίαν μηδένα ὅλως τρόπον μέρος εἶναι τῆς Εὐθυγράμμου
ἀποδεικνύειν πειρᾶσθαι, οὐδὲ τῇ προσλήψει τῆς τῇ Ἡμικυκλίᾳ τὴν Ὁρθὴν
συναπαρτίξειν διῃχυρίζεσθαι, τῇ δ' ὅπερ ἡμεῖς σὺν Θεῷ ποιήσῃ αὐτοὶ πει-
ρασόμεθα.

Ἐμοὶ γὰρ δοκεῖ ὅτι τὸ πᾶν τῆς ἐπιλύσεως ἐξ αὐτῆς δὴ τῆς κατ' Εὐκλείδην Ὁρ. η. Βιβ.
ὀρισμῆς τῆς Γωνίας ἤρτηται. Ταύτην γὰρ τοῖς ἐς βάθος φιλοκρινῶσι φανερόν, α.
ὅτι φύσει πᾶσα Γωνία ποσότητός ἐστιν ἀνεπίδεκτος· ταύτης γὰρ τῆς ἐξ ἀπᾶ-
της ἐκποδῶν γενομένης, αὐτίκα πάντα ἡμῖν οἰχθήσεται τὰ παράδοξα. Ἐγὼ
γὰρ ὅτως εἰμὶ δόξης ἔχων.

Ὅτι ἡδεμία Γωνία ποσὸν ἐστὶ, τρόπος δέ τις μᾶλλον ἢ Γωνία ποσότητος. α.
Ἐρεῖται γὰρ ἐκείνην (Ὁρ. Η. τῇ Α'.) δυοῖν εἶναι Γραμμῶν ἀλλήλων ἀπτομέ-
νων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων κλίσιν, ἡ δὲ τῶν Γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας
κλίσεις ἢ ἐστὶ ποσὸν, τρόπος δέ τις ποσότητος, τῆς γὰρ καμπυλότητος τὸ
ποσὸν εἶναι παραιτημένης, πῶς ἂν αὐτὸ ἡ κλίσις περιποιᾶτο, μηδὲν ἐκείνης

διαφέρειν μαλλον, ἢ ὅσον ἡ κλάσις τῆς κάμψεως; Εἴτα καὶ ποσόντι οὕσα ἡ Γωνία, εἴη ἂν πάντως ἦτοι Γραμμὴ, ἢ Ἐπιφάνεια, ἢ Σῶμα. Ἀλλ' ὅτι μὲν ἐδὲ Γραμμὴ, ἐδὲ Σῶμα καθ' αὐτὸ δῆλον, ὅτι δὲ ἐδ' Ἐπιφάνειά τις ἐστίν, ἐντεῦθεν ἀποδείξαι βῆδον, τῆς μὲν γὰρ Ἐπιφανείας ἴδιον, ἢ δι' ἀφαιρέσεως τῶν μερῶν ἀπομείωσις, τῆς δὲ Γωνίας ἀδαμῶς. Ἀλλ' ἐδ' ἂν εἴη (ὅπερ ἂν ἴσως τις ὑπολάβοι) ἡ Γωνία Ἐπιφάνειά τις ἀόριστος, ἐπεὶ πᾶσα Γωνία ὠρισμένη καθέστηκε.

Β'. Τῶν οὖν Γωνιῶν μὴ ποσῶν, ποσῇ δὲ τρόπων τινῶν οὐσῶν, ἡ κατὰ παρὰ τῶν χρέσις οὐκ ἂν εἴη κατ' ἰσότητα ἢ ἀνισότητα, κατὰ δὲ τὸ ὅμοιον ἢ ἀνόμοιον.

Γ'. Ἐπειδὴν δὲ ἴσαι ἢ ἄνισοι ἀλλήλαις παρατιθέμεναι αἱ Γωνίαι λέγονται, τῆτο δὴ νοητέον ἐκεῖνας ὁμοίας, ἢ ἀνομοίας εἶναι λέγεσθαι. Ταύτας δὲ ἴσας τε καὶ ἀνίσας ὁ Στοιχειωτής ὀνομάζειν προείλετο, τὰς πρῶτας μᾶλλον οἱ ἐσομένης φωνᾶς, ἐπὶ τῇ τῶν Εὐθυγράμμων θεωρίᾳ παραλαβὼν, ἢ δὴ περὶ χρήσει καὶ αὐτοὶ ἐοικησόμεν.

Δ'. Ὅμοιαι δὲ Γωνίαι εἰσὶν, ὧν ἅμφω αἱ Πλευραὶ ἐπιτιθέμενων ἐφαρμόζουσιν, ἀνόμοιοι δὲ ὧν ἐκ ἐφαρμόζουσιν αἱ Πλευραί. Οὐδὲν γὰρ ἀμέλει ἡ Γωνία ἕτερόν ἐστιν, ὅτι μὴ δυοῖν Γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας κλίσις, οὐκ ἔστιν ἡ Γωνία ὁμοίαι, αὐτὸ τῆτο εἰσὶ τῶν Γραμμῶν ὁμοίαι κλίσεις. Οὐκ ἔσονται δὲ τῶν Γραμμῶν ὁμοίαι κλίσεις, εἰμὴ ἅμφω ἐπιτιθέμεναι ἀλλήλαις προσεφαρμόζουσι. Γωνίαι ἄρα ὁμοίαι εἰσὶν, ὧν ἐφαρμόζουσιν αἱ Πλευραί, ἀνόμοιοι δὲ ὧν ἐκ ἐφαρμόζουσι.

Ε'. Καὶ τοίνυν σαφές ἐστι, μηδεμίαν Γωνίαν καμπυλόγραμμον συνεξιστῆσαι ἔχειν Γωνία μηδεμιᾶ εὐθυγράμμῳ. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ τῶν Γωνιῶν ἰσότης ἐδὲν ἐστίν ἕτερον παρὰ τὴν τῶν αὐτῶν ὁμοιότητα (Θέσ. Β. καὶ Γ.), ἡ δὲ ὁμοιότης τῶν Γωνιῶν ἐν τῇ τῶν Πλευρῶν κείται προσεφαρμόσει (Θέσ. Δ.). ἀδύνατον δὲ προσεφαρμόζειν Γωνίαν καμπυλόγραμμον Γωνία εὐθυγράμμῳ, ἄρα κτ. Οὐκ ἄρα ὁρῶνς ὁ Πρόκλος ἴσα καταγεγραφῶς Ἡμικύκλια, συλλογίζεται ὅτι τῶν ἴσων Ἡμικυκλίων καθ', ἡμικύκλιον αἱ Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ντεῦθεν ἐπιφέρει, ὅτι εἰ προσεβῇ Γωνία ἡ ὑπὸ βαε, ἔσαι ἡ ὑπὸ βαδ καμπυλόγραμμος ἴση τῇ ὑπὸ γαε ὁρῇ. Τί θαί; ψεύδεται τὸ Ἀξιῶμα, ὡς εἰ τοῖς ἴσοις, ἢ ἀπὸ τῶν ἴσων, ἴσα προσθῇ ἢ ἀφέλῃς, τὰ ἀθροιζόμενα ἢ τὰ λοιπὰ ἴσα ἔσαι; Οὐ μὰ δὲ, ἀλλὰ τοῖς ποσῇ δεκτικαῖς μόνοις ταῖς προσηνῆκον ἐστίν. Αἱ δὲ Γωνίαι ποσῇ εἰσὶν ἀνεπίδεκτοι, τὸ δὲ Ἀξιῶμα ὡς ἂν ἔχη κατὰ τῶν Γωνιῶν χωρὰν, ὥτως ὥφειλεν ἐκφέρεισθαι καὶ νοεῖσθαι, τὸ τὰς ὁμοίας δηλονότι Γωνίας.

νίας, προσαπτομένας ταῖς ὁμοίαις Γωνίαις, καὶ ὁμοίως κειμέναις, Γωνίας ὁμοίας παρέχειν. Ὁ δὲ Πρόκλος παρατίθησι μὲν Γωνίας ὁμοίας, προσάπτει δὲ ἑκατέραις τρίτην κοινὴν, τὴν παρὰ τὸ τὴν ἑτέραν Εὐθείαν ἔχειν, διατέραν δὲ καμπύλην τῶν Πλευρῶν, μὴ ὁμοίως προσαπτομένην.

Εὐθεντοὶ ἐπεὶ αὕτη ἡ τῶν Γωνιῶν φύσις, ἡ τῶν ἀπτομένων Γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας κλίσις, ἡδέποτ' ἔσαι Γωνία Γωνίας μέρος, οὐδὲ γὰρ κλίσις τις μέρος ἂν εἴη ἑτέρας κλίσεως, οὐδὲ μὲν οὖν Γωνία ἀπὸ Γωνίας ἀφαιρεῖσθαι δυνήσεται, οὐ γὰρ ἂν ἀφέλητις κλίσει ἀπὸ κλίσεως κτ. Ταῦτα γὰρ καὶ τὰ τοιαῦτα, ἔχι ταῖς τῶν Πλευρῶν κλίσεσιν, αἱ ποσὴ εἰσιν ἀνεπίδεκτοι, ταῖς δὲ μεταξὺ τῶν Πλευρῶν Ἐπιφανεῖαι ἐστὶ προσήκοντα.

Τελευταῖον ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων ὑποσυνάψομεν, ὅπως νοητέον τὰ παρὰ τῶν Γεωμέτρων καὶ τῷ Εὐκλείδῃ πρὸ πάντων λεγόμενα, τὰ περὶ τομῆς Γωνιῶν, καὶ αὐξήσεώς τε καὶ μειώσεως τῆς αὐτῶν, καὶ ὅτι Γωνία Γωνίας διπλασία, ἢ τριπλασία, καὶ τὰ παραπλήσια. Ταῦτα γὰρ οἰόμεθα μὴ κυρίως ἐκείνης, ἀναλογικῶς δὲ περὶ Γωνιῶν λέγειν, ἐλέσθαι τε τῶν φωνῶν τὰς χρησιμωτέρας, καὶ ὧν ἡδὲνα κίνδυνον φέρει ἀπάτης, ἕως ἂν μὲν ἐπὶ τῶν εὐθυγραμμίων Γωνιῶν παραληφθεῖσα ἡ χρῆσις. Καὶ δὴ τὸ Γωνίαν ὑπὸ Εὐθείας τινός, φέρει εἰπεῖν τῆς δα διαιρεῖσθαι, ἡδὲν ἄλλο σημαίνειν φανέν, ἢ τὸ μεταξὺ τῶν Πλευρῶν εα, γα, ἄλλην Πλευρὰν παρεμπίπτειν, ἣτις καινὰς κλίσεις δύο σὺν ἑκατέρᾳ τῶν Πλευρῶν, τρεῖσι δύο καινὰς Γωνίας συνίστησι. Τὸ δὲ τὴν ὑπὸ εαγ διπλασίαν εἶναι τῆς ὑπὸ εαδ, ἡδὲν ἄλλο ἔσαι, ἢ τὸ μεταξὺ τῶν Εὐθειῶν εα, γα, τρίτην παρεμπίπτειν τιὰ πρὸς ἑκατέραν ἐκείνων ὁμοίαν τὴν ἐπίκλισιν ἔχουσαν, ἐξ ἧς δὴ συμβαίνει καὶ τὰς εα, δα ταῖς γα καὶ δα ἐπιτιθεμένας, μηδαμῶς ἀμειβομένων τῶν κλίσεων ἐφαρμόζεν· ὥς εἴτις ἔτως εἴη συλλογιζόμενος (Γωνία ἡ ὑπὸ εαδ, ἴση ἐστὶ Γωνία τῇ ὑπὸ ἰλπ, ἥτε ὑπὸ δαγ ἴση τῇ ὑπὸ πλρ, ἄρα καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ εαγ, ἴση ἔσαι ὅλη τῇ ὑπὸ ἰλρ) ἡδὲν ἄλλο φήσει, ἢ ὅτι ἡ τῶν Εὐθειῶν κλίσις εαδ ὁμοία ἐστίν, ἢ γὼν ἡ αὐτὴ τῇ τῶν Εὐθειῶν κλίσει ἰλπ. Ἡ δὲ κλίσις τῶν Εὐθειῶν δαγ, ὁμοία ἐστὶ τῇ κλίσει τῶν Εὐθειῶν πλρ, ἃρ οὖν καὶ ἡ κλίσις τῶν Εὐθειῶν εαγ, ὁμοία ἔσαι τῇ κλίσει τῶν Εὐθειῶν ἰλρ. Σὺ δέ μοι καὶ ἄτω (ὅ πάντως εἰς ταυτὸ φέρει κατὰ τὴν Δ. Θεσ.) τὴν ἐπιφορὰν ταύτην ὑποσυνάψεις· αἱ Πλευραὶ εδ ἐφαρμόζονται ταῖς Πλευραῖς ἰλπ, καὶ αἱ δαγ ταῖς πλρ, ἄρα καὶ αἱ εαγ ταῖς ἰλρ· ἣτις δὲ συνέπεια ἡδὲν ἥττον ἔσαι σαφές, ἢ εἴπερ συνάψαις, ὅτι τοῖς ἴσοις ἴσων προσθεθέντων τὰ ὅλα ἴσα ἐστὶ. Παραπλησίως δὲ, καὶ εἰτινες ἄλλαι χρήσεις ταῖς

ποσότητι προσιδιάζεται, ἐπὶ τὰς Γωνίας εἰώθασι μεταφέρεσθαι, τῆς τῶν Θεωρημάτων ἀληθείας σωζομένης ἐρμηνευθήσονται.

Τάτων οὖν ἡτῶ κειμένων, τὰ περὶ τὰς Γωνίας παραδόξα ἐκεῖνα ῥᾶστα ἡμῖν ἐπιλυθήσεται. Ταῦτα γὰρ οὐκ ἄλλοθεν ἢ παρὰ τὴν ἀρχὴν ἔχον, ἢ ἐκ τῆς τὰς Γωνίας ἀντὶ ποσῶν προσλαμβάνεσθαι, καὶ ἔστιν ἄρα (ὡς ἐνὶ λόγῳ ἀπαντῆται) τὰ πάντα ψευδῇ κυριολεκτικῶν τῶν φράσεων. Οὕτω γὰρ ἐκεῖνα ληφθέντα τοῖς ποσῶ μετέχουσι προσοικειωθήσεται, οὗ τὴν Γωνίαν ἀνεπίδεκτον εἶναι φάσαντες ἀπεδείξαμεν.

Καὶ τοίνυν ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία, ἔκουν ἢ ἐλάσσων ἐστὶν ἀπάσης Ὀξείας, ἢ δὲ μέρος τὸ τυχὸν Γωνίας τῆς εὐθυγράμμου, οὐδ' ἐν τῇ Εὐθυγράμμῳ ἀπειράκις ἐστὶ περιεχομένη, πολλὰ γὰρ καὶ δεῖ, εἰ ἢ δὲ ἀπαξ· οὐδὲν γὰρ τῶν τοιούτων τῇ τῶν γραμμῶν πρόσεσι κλίσσει, ἐν ἣ ἅπαντα κεῖται ἡ φύσις ἡ τῆς Γωνίας. Ἐὰν δὲ μὴ κυρίως, ἀναλογικῶς δὲ πως ἐκεῖνα ὑποτεθῇ λαμβανόμενα, οὐδὲν ἤδη περιέξει, ὃ τῆς κοινῆς αἰσθήσεως καὶ τῷ λόγῳ εἴη ἄλλοτριον, οὕτω καὶ γὰρ τότε τὴν κατ' ἐπαφὴν Γωνίαν (ὄρα τὸ Σχῆμ. ἐν τῷ Α'. τῶν Παραδόξων), τὴν ὑπὸ παρ' ἐλάσσονα εἶναι οἰασθῇ Ὀξείας, καὶ τὸ τὴν τῇ Ἡμικυκλίᾳ ὑπὸ παρ' οἰασθῇ Ὀξείας μείζονα, ἢ δὲ ἄλλο σημαίνει, ἢ ὅτι ὑπὸ τὴν Ἀπτομένην οὐ, ἢ δὲ μὴ ἐστὶν ἀγαγεῖν Εὐθείαν πρὸς τὴν ἐπαφὴν, ἢ τις μὴ τέμνει τὴν Περιφέρειαν· ὃ δὴ παρὰ τὸ πάδημα ἐστὶ τῆς Κύκλου φύσεως παντὸς θαύματος ἄξιον, ἢ μὴν δὲ τοιοῦτον, οἷον ὑπὲρ κατάληψιν εἶναι πᾶσαν, καὶ τῷ λόγῳ ἀντιμαχόμενον. Παραπλήσιος δὲ τῷ ἐκτεθέντι ἔσται καὶ τῶν παραδόξων τῶν Γ'. καὶ τῶ Δ'. ὁ νῦν. Καὶ ἡτῶ διὰ μόνον τῶ κατ' Εὐκλείδην Ὄρισμ., ἀκριβῶς ἐπιγνῶσι τῆς Γωνίας τὴν φύσιν, πᾶσα ἡμῖν ἢ ἐκ τῶν παραδοξοτάτων ἐκείνων ἐπιπολάξουσα τῇ διανοίᾳ ἀχλύς, οἷον φῶτος ἐπιλάμψαντος διασκίδνεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΖ.

„Ἀπὸ τῆ δοθέντος Σημεῖος (β), τῆ δοθέντος Κύκλου (ορ) ἐφαπτομένην „εὐθείαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

κ. 227.

Ἐπεζεύχθω τὸ Κέντρον α τῆ δοθέντος Κύκλου, καὶ τὸ δοθὲν Σημεῖον β, δι' Εὐθείας τῆς αβ, τεμνάσης τὴν τῆ Κύκλου Περιφέρειαν κατὰ τὸ ο. Καὶ Κέντρον μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αβ Κύκλος γεγράφθω, καὶ ἀπὸ τῆ ο ἤχθω οπ (Ι) πρὸς ὁρθὰς τῇ αβ, προσπίπτουσα τῷ Κύκλῳ βπ κατὰ τὸ π, καὶ

(1) Ι. τῷ α'.

ἐπεξεύχθω πα, τέμνωσα τὴν τῷ δοθέντος Κύκλου ορ Περιφέρειαν κατὰ τὸ ι, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ βι. Λέγω δὴ ὅτι αὕτη ἔσται ἡ τῷ Κύκλου ορ Εἰραπτομένη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ βα, ια Πλευραὶ ἴσαι ταῖς πα, οα εἰσὶν (1), ἡ ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ, ἡ δὲ πρὸς τῷ α Γωνία κοινὴ ἐπὶ τῶν Τριγώνων ιαβ, οαπ, ἔσται δὴ καὶ ὑπὸ αοπ (2) ἴση τῇ ὑπὸ αιβ. Ἀλλὰ μὲν ἡ ὑπὸ αοπ Οῤῥθὴ (3) ἔστιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αιβ Οῤῥθὴ ἔστιν. Ἀρα (4) ἡ βι Εἰραπτομένη τῷ Κύκλου ἐστὶ κατὰ τὸ ι. Ο. Ε. Π.

Σ Χ ό λ ι ο ν .

Διὰ τῆς ΛΑ'. τῷ Παρόντος, πάνυ καλῶς ἀπὸ τῷ δοθέντος Σημεῖο ο κα. 228. τῷ δοθέντος Κύκλου βπ, εἰραπτομένην κατὰ τὸ β, τὴν οβ εὐθείαν Γραμμὴν ἀγεῖν παιδεύομεθα,

Τὴν ἐπιζευγνύουσιν τὸ α Κέντρον, καὶ τὸ δοθέν Σημεῖον ο, δίχα τέμνοντες (5) κατὰ τὸ ρ, καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ ρ, Διαστήματι δὲ τῷ ρα Κύκλον γράφοντες τὸν δοθέντα τέμνοντα κατὰ τὸ β, καὶ τὴν οβ ἐπιζευγνύντες, ἥτις ἔσται ἡ Εἰραπτομένη.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς αβ, ἔσται ἡ ὑπὸ αβο, ἅτε δὴ Γωνία ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ ἴσα (διὰ τὴν ΛΑ'. τῷ παρ.), Οῤῥθὴ. Ὡς δὲ διὰ τὴν Ις'. τῷ αὐτῷ, ἡ οβ τῷ Κύκλου βπ ἔσται Εἰραπτομένη.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΗ.

„Ἐὰν Κύκλος ἐφάπτηταί τις Εὐθεΐα (γλ), ἀπὸ δὲ τῷ Κέντρῳ (α) ἐπὶ τὴν ἀφῆν (β) ἐπιζευχθῇ τις Εὐθεΐα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα Κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν Ἀπτομένην.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' ἀπὸ τῷ α Κέντρῳ Κάθετος ἦχθω ἄλλῃ (6) ἡ αζ, τέμνωσα τὸν Κύκλον κατὰ τὸ ο (7). καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ αζβ Οῤῥθὴ ὑποτίθεται, ἔσται ἡ ὑπὸ αβζ (8) Οῤῥθὴ. Ἡ ἄρα αβ (ἥτοι ἡ αο) μείζων (9) τῆς αζ, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ. κα. 229.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΘ.

„Ἐὰν Κύκλος ἐφάπτηταί τις Εὐθεΐα (βγ), ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς (α) τῇ Εἰρα-

(1) Οῤ. ΙΗ. τῷ α'. (2) Δ. τῷ α'. (3) Εκ κατ. (4) Ις'. τῷ γ'. (5) ΙΔ. τῷ α'. (6) Ι. τῷ α'. (7) Μέρ. τῆς Ις. τῷ α'. (8) Πορ. Ε. τῆς ΙΒ. τῷ α'. (9) ΙΘ. τῷ α'.

„πτομένη πρὸς ὀρθὰς Γωνίας εὐθεῖα Γραμμὴ (αἱ) ἀχθῆ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης
 „ἔσαι τὸ Κέντρον τῆς Κύκλου.

κ. 230.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' ἔσω τὸ Κέντρον μὴ ἐπὶ τῆς αἱ, κατὰ τὸ ψ, καὶ ἀπὸ
 τέτα ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπεξεύχθω ἡ ψα, καὶ ἔσαι ἡ ὑπὸ ψαγ (1) ὀρθή, καὶ
 δὴ ἐῖσι τῇ ὑπὸ ιαγ, τῇ (καθ' ὑπόθεσιν) ἐς αὐτῇ ὀρθῇ, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κ.

„Εν Κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνία (ὑπὸ βαγ) διπλασίῳ ἐστὶ τῆς πρὸς
 „τῇ Περιφερείᾳ (ὑπὸ βζγ), ἔταν τὴν αὐτὴν Περιφέρειαν (βγ) Βάσιν ἔχω-
 „σιν αἱ Γωνίαι.

κ. 231.

Α'. Τῶν βα, βζ Πλευρῶν συμπίπτουσιν, εἰ τύχοι, ἐπεὶ αἱ ἀπὸ τῆς
 Κέντρου πρὸς τὴν Περιφέρειαν αζ, αγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν, ἔσονται δὲ (2) αἱ
 πρὸς τῷ ζ ἐ γ Γωνίαι ἀλλήλαις ἴσαι. Α'λλ' ἡ ὑπὸ βαγ (3) ἴση ἐστὶ ταῖς
 δυσὶν ἀπεναντίον ἅμα ληφθεῖσαις, ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ διπλασίῳ ἐστὶ τῆς κα-
 τὰ τὸ ζ.

κ. 232.

Β'. Εἴαν δὲ αἱ αβ ἐ αγ τῆς πρὸς τῷ Κέντρῳ Πλευραὶ, μεταξὺ τῶν
 βζ ἐ γζ, τῶν πρὸς τῇ Περιφερείᾳ Πλευρῶν, ὥσιν πίπτουσαι, ἀχθείσης διὰ
 τῆς Κέντρου τῆς ζχ, ἡ μὲν ὑπὸ βαχ (διὰ τὸ Α') διπλασίῳ τῆς ὑπὸ βζχ,
 ἡ δὲ ὑπὸ χαγ διπλασίῳ τῆς ὑπὸ χζγ. Ἡ ἄρα (4) ὅλη ὑπὸ βαγ διπλα-
 σίῳ τῆς ὅλης ὑπὸ βζγ.

Ἐσω ἡ ὑπὸ χαβ μοιρ. 6, καὶ ἔσαι (5) ἡ ὑπὸ χζβ μοιρ. 3. Ἐσω δὲ
 ἐ ἡ ὑπὸ χαγ μοιρ. 4, καὶ ἔσαι (6) ἡ ὑπὸ χζγ μοιρ. 2· τοιγαρὲν χαβ +
 χαγ = μοιρ. 6 + 4 = μοιρ. 10 = βαγ. Αἱ δὲ χζβ + χζγ = μοιρ. 3 + 2 =
 μοιρ. 5 = βζγ, ὁ δὲ δεκαδικὸς ἀριθμὸς τῆς πενταδικῆς διπλασίῳ ἐστὶν, ἄρα
 ἐ ἡ ὑπὸ βαγ τῆς ὑπὸ βζβ διπλασίῳ ἐστὶ.

κ. 233.

Γ'. Εἴαν ἡ βζ τεμνῇ τὴν αγ, ἥτε ὑπὸ βαγ Γωνία, ἐ ἡ ὑπὸ βζγ ἐκτὸς
 ἀλλήλων κείμεναι ὥσιν, ἐπεξεύχθω ἡ αζ, ἐ διήχθω πρὸς τὸ λ· Καὶ δὴ ὅλης
 τῆς ὑπὸ λαγ (7) διπλασίῳ ἔσσης ὅλης τῆς ὑπὸ λζγ, εἴαν ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπὸ
 λαβ διπλασίῳ ἐτέρωθεν, ἐ ἡ ὑπὸ λζβ ταύτης ὑποδιπλασίῳ, λοιπὴ ἡ
 ὑπὸ βαγ (8) λοιπῆς τῆς ὑπὸ βζγ διπλασίῳ ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Ἐσω λαγ μοιρ. 12, ἐ λαβ μοιρ. 2, καὶ ἔσονται (9) λζγ μοιρ. 6, ἐ

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Ε. τῆς α'. (3) ΑΒ. τῆς α'. (4) Διὰ ΙΒ. τῆς πέμπτου τὴν ἐκ
 ταύτης μηδαμῶς ἡρημένην. (5) Διὰ τὸ Α'. (6) Διὰ τὸ αὐτό. (7) Διὰ τὸ Α'. (8) Διὰ
 τὴν ΙΘ. τῆς Ε'. τὴν ἐκ ταύτης μηδαμῶς ἡρημένην. (9) Διὰ τὸ Α'.

λζβ μοιρ. 1. Α'ρα λαγ — λαβ = μοιρ. 12 — 2 = μοιρ. 10 = βαγ. Καὶ
 λζγ — λζβ = μοιρ. 6 — 1 = 5 = βζγ, ἡ ἄρα ὑπὸ βαγ διπλασίων ἐστὶ
 τῆς ὑπὸ βζγ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΑ.

„Εν Κύκλῳ, αἱ ἐν τῷ αὐτῷ Τμήματι (βπγ) Γωνίαι (βπγ, βσγ)
 „ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

Ε'ξω δὲ Α'. μείζον Ἡμικυκλίᾳ τὸ Τμήμα βπγ, καὶ ἀπὸ τῆς Κέντρου α. 234.
 ἤχθωσαν αἱ αβ, αγ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ βαγ διπλασίων ἐστὶ (1) τῆς τε ὑπὸ
 βπγ καὶ τῆς ὑπὸ βσγ, καὶ οἶσεν ἄλλης τῆς πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ἑσῆς, ἐκεί-
 ναι ἄρα αἱ ὑπὸ βπγ καὶ βσγ, καὶ ὅσαι ἄλλαι ἐν τῷ αὐτῷ Τμήματι (2), ἴσαι
 ἀλλήλαις εἰσὶ.

Α'λλ' ἐξω δὲ Β'. τὸ Τμήμα, ἥτοι Ἡμικύκλιον, ἡ ἔλαττον Ἡμικυκλίᾳ, α. 235.
 τὸ βπζγ· καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ποβ ἴση ἐστὶ (3) τῇ ὑπὸ ζογ, ἡ δὲ ὑπὸ
 πβζ ἴση τῇ ὑπὸ πγζ (4). Α'ρα καὶ λοιπὴ (5) ὑπὸ βπο, ἴση ἔσται τῇ λοι-
 πῇ ὑπὸ οζγ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Εὐτεῦθεν ἐπὶ τῶν ὀπτικῶν ἐπιφέρομεν, ὅτι Γραμμὴ πᾶσα οἷον ἡ βγ,
 ὑπὸ τῆς ὀφθαλμοῦ τῆς ὀπαποῦ ἂν τύχῃ κειμένη τῆς Περιφερείας, ἥς ἡ Γραμ-
 μὴ ἐστὶν Ὑποτείνουσα, ἰσομεγέθους ὁράται, ὡς ἄρα διὰ Γωνιῶν πανταχῇ ἴσων,
 τῶν ὑπὸ βπγ καὶ βζγ ὀπτανομένη.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Ε'ὰν ἐπὶ Περιφερείας βογ τῆς αὐτῆς, βεβηκεῖται ὥστε Γωνίαι δύο ἴσαι
 ἀλλήλαις, καὶ τῶν ἡ ἑτέρα ὑπὸ βζγ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ἢ τῇ ἀντιθέτῳ
 πρὸς τὴν βογ, ἔσαι δὲ ἑκατέρω τῶν Γωνιῶν πρὸς τῇ Περιφερείᾳ, τῇ πρὸς τὴν
 βογ ἀντιθέτῳ, τετέστιν ἡ τῇ ὑπὸ βζγ ἴση Γωνία οὐδ' ὑπὲρ τὴν Περιφε-
 ρειαν ἀφίξεται, ὥτε εἰσω τῆς Περιφερείας πεσεῖται.

Πιπτέτω γὰρ εἰ δυνατόν εἰσω τῆς Περιφερείας κατὰ τὸ 1 ἡ ὑπὸ βιγ, α. 236.
 ἡ τῇ ὑπὸ βζγ τῇ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ἴση, καὶ προήχθω ἡ βι, ὥστε προσ-

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Αξ. ζ'. (3) ΙΕ. τῆς α'. (4) Διὰ τὸ Α'. μέρος. (5) Πόρ.
 Θ. τῆς ΑΒ. τῆς α'.

πεσεῖν τῇ Περιφερείᾳ κατὰ τὸ π, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ πγ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ Τμήματι Γωνίαι (1) ὑπὸ βπγ, βζγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἡ δὲ ὑπὸ βιγ (2) ἴση τῇ ὑπὸ βζγ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βιγ ἐκτός, ἴση τῇ ὑπὸ βπγ ἐντός. Ὅπερ (3) ἄτοπον.

Ἀλλὰ γὰρ εἰ δυνατόν πιπτέτω τῆς Περιφερείας ἐπέκεινα ἡ Γωνία ἀφικνυμένη τῷ Κύκλῳ ἐκτός, κατὰ τὸ ε, ἀπὸ δὲ τῶ Σημείου θ, καθ' ὃ τέμνει τὴν Περιφέρειαν, ἡχθω ἐπὶ τὸ γ ἡ θγ. Καὶ ἔσται ὁμοίως ἡ ὑπὸ βθγ (4) ἴση τῇ ὑπὸ βζγ· ἡ δὲ ὑπὸ βεγ (5) ἴση τῇ αὐτῇ ὑπὸ βζγ. Ἀρα ἡ ὑπὸ βθγ ἴση τῇ ὑπὸ βεγ, ὅπερ (6) ἀδύνατον. Ο. Ε. Δ.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, καὶ τῷ Τμήματος Ἡμικυκλίου ὄντος ἢ γὰρ Ἡμικυκλίου ἐλάσσονος, ἀποδείξαι ῥᾶδιον, ὅτι ἡ τῇ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ἴση, ἔτε ἐπέκεινα τῆς Περιφερείας γενήσεται, ἔτε ἐντός, ἀλλ' ἐπ' αὐτὴν δὴ τὴν Περιφέρειαν ἀκριβῶς ἀφίξεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΒ.

„Τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις Τετραπλεύρων (αβγδ), αἱ ἀπεναντίον Γωνίαι „δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.

κ. 237.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ βζ, γα. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ αβγ μετὰ δυσὶν τῶν κατὰ τὸ ο καὶ π, δυσὶν Ὁρθαῖς (7) ἴσθται, καὶ ἡ μὲν ο ἴση τῇ ι, ἡ δὲ π ἴση τῇ σ (8), ἡ ἄρα ὑπὸ αβγ σὺν δυσὶ ταῖς κατὰ τὸ σ καὶ ι, δυσὶν Ὁρθαῖς συνεξισθται. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ ἡ ὑπὸ βαζ καὶ ὑπὸ βγδ δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσαι δειχθήσονται.

Π ό ρ ι σ μ α Α'.

Καὶ εἰ ἄρα τις τῶν τῷ Τετραπλεύρῳ τῷ ἐν τῷ Κύκλῳ Πλευρῶν προσχθῇ, οἷον ἡ αζ κατὰ τὸ δ, ἔσται ἡ ἐκτός Γωνία ὑπὸ γζδ, ἴση τῇ τῷ Τετραπλεύρῳ ἀντιθέτῳ β. Ἡ γὰρ τῇ ἐκτός ἐφεξῆς ὑπὸ γζα, ὁποτέρῃ ἂν τῶν προσηθείῃ (9) Ὁρθὰς δύο συστήσει.

Π ό ρ ι σ μ α Β'.

Καὶ περὶ Ρ'όμβον, ἢ ῥομβοειδὲς Σχῆμα Κύκλος ἐκ αὐτοῦ ἔχει γραφῆναι.

(1) Διὰ ταύτην τὴν ἀνὰ χεῖρας. (2) Ἐξ ὑποθ. (3) Πόρ. Α'. τῆς ΑΒ. τῷ α'. ἥτοι ἴσ. τῷ α'. (4) Διὰ τὴν Πόρτ. (5) Ἐξ ὑποθ. (6) Διὰ τὸ αὐτὸ Πόρισμα. Ἡ'τοι ἴσ. τῷ α'. (7) ΑΒ. τῷ α'. (8) ΚΑ. τῷ γ'. (9) Διὰ ταύτ. καὶ τὴν ΙΓ. τῷ α'.

Τῶτων γὰρ αἱ ἀπεναντίον δύο Γωνίαι, ἤτοι ἐλάσσονές εἰσι δυσὶν Ὁρθῶν ἢ μείζονες.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΓ.

„Εἰ πὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας (αβ) δύο Τμήματα Κύκλων ὅμοια, καὶ ἄνισα
„(τὰ αβγ, αδβ) οὐ συζαθίσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Συζαθήτω γὰρ εἰ δυνατόν, καὶ διήχθω ἡ αδγ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ γβ, α. 238.
δβ. Ἐπεὶ οὖν ὅμοιον ἐστὶ τὸ αβγ Τμήμα τῷ αδβ Τμήματι· ὅμοια δὲ Τμή-
ματα ἐστὶ τὰ δεχόμενα Γωνίας ἴσαι (1), ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ τῇ ὑπὸ αδβ,
ἢ ἐντὸς τῇ ἐκτός. Ὅπερ (2) ἀδύνατον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΔ.

„Τὰ ἐπὶ ἴσων Εὐθειῶν (αβ, γδ) ὅμοια Τμήματα Κύκλων αεβ, γζδ
„ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

Αἱ γὰρ ἴσαι Εὐθεῖαι ἐπιτεθεῖσαι ἀλλήλαις ἐφαρμόσῃσι, κἀντεῦθεν ἐ- α. 239.
φαρμοσασῶν ἀλλήλαις καὶ τῶν Περιφερειῶν, ἴσα ἔσται πάντως τὰ ὅμοια Τμή-
ματα. Εἰδὲ παραλλάξῃ καὶ μὴ ἐφαρμόσῃ ἡ γδζδ Περιφέρεια, ἣτις τῇ αεβ
Τμήματος ὑποτίθεται εἶναι, τῇ γδζδ Περιφέρειᾳ, τεμεῖ ἄρα Κύκλος κατὰ πλείο-
να ἢ δύο Σημεῖα Κύκλον ἕτερον, οἷον κατὰ τὰ γ, καὶ η, καὶ δ. Ὅπερ (3)
ἀδύνατον.

Εἰ δὲ τῶς ἐφαρμοσασῶν τῶν ἴσων Εὐθειῶν, ἡ ἑτέρα τῶν Περιφερειῶν α. 240.
ἢ περιέχασα, ἢ δὲ ἑτέρα περιεχομένη, διαχθείσης Εὐθείας τῆς αεζ, καὶ
ἐπιζευχθείσων τῶν ζβ, εβ, ἔσται ἡ ὑπὸ αεβ ἴση τῇ ὑπὸ αεβ (4), καὶ διὰ
καὶ ἄνισοι (5). Ὅπερ ἀδύνατον.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τὰς ἀμέσως προηγμένας δύο, ὡς ἔκ ἀναγκαίας ἦσας παρέδραμεν ὁ
Τακκῆτιος, καὶ ὡς περὶ ὁμοίων Τμημάτων διαλεγόμενας, ὧν ἄνευ τῆς τῶν Α'-
ναλογιῶν θεωρίας, ἀκριβῆ (φῃσι) λαβεῖν μὴ ἐξεῖναι περίνοιαν, καὶ ται ἡδὲ
πάντη ταύτας ἐκεῖνος ὥφθῃ ἀποσυρίξας, ἐν γὰρ τοῖς Πορίσμασι τοῖς μετὰ
τὴν ἐσχάτην τῷ ζ'. Βιβλίῳ, λόγον ἐκείνων ἐποίησεν. Αὐτοῖς δὲ κἀνταῦθα τὰ

(1) Ὁρ. ΙΑ. τῇ γ'. (2) Ιε. τῇ α'. (3) Ι. τῇ γ'. (4) Ὁρ. ΙΑ. τῇ γ'. (5) Ιε. τῇ
α'. καὶ Α. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῇ αὐτῇ.

Εὐκλείδης ἐξ αὐτῆ ἀνελλιπῶς λαβόντες ἐδείξαμεν, ὡς ἂν μή τι δόξῃ τοῖς ἐν-
τυγχάνουσιν ὑπερτίθεσθαι, πάνυ πολλὰ τῆ λόγῃ δεόμενον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΕ.

„Κύκλος Τμήματος δοθέντος (αβγ) προσαναγράψαι τὸν Κύκλον, οὗ πέρα
„ἔστι Τμήμα.

κ. 241.

Υποτεινέτωσαν ὡς ἔτυχε τὸ Τμήμα Εὐθεῖαι δύο αἱ αβ καὶ βγ, καὶ δι-
χα τετμήθωσαν κατὰ τὰ Σημεῖα ι καὶ λ (1), ἀπὸ δὲ τῶν Σημεῖων ι καὶ λ πρὸς
ὀρθὰς (2) ἀγέθωσαν ἑκατέρω τῶν Εὐθειῶν αἱ ιο, λο, τέμνεσθαι ἀλλήλας κα-
τὰ τὸ ο· φημὶ δὴ τῷτο εἶναι τὸ τῷ Κύκλῳ Κέντρον, ὃ Τμήμα ἐτέδῃ τὸ αβγ.

Ἐπειδὴ γὰρ τὸ Κέντρον ἐφ' ἑκατέρας (3) εἶναι δεῖ, καὶ ἐπὶ τῆς ιχ δηλο-
νότι καὶ ἐπὶ τῆς λψ, ἔσαι ἄρα ἐπὶ τῷ κοινῇ ταύταις ὄντος Σημεῖοι τῷ ο.

Ἄλλως παρ' Εὐκλείδῃ.

κ. 242.

Τῆς αγ Υποτεινέσθης δίχα (4) τμηθεῖσθης κατὰ τὸ δ, ἐὰν ἀπὸ τῷ δ πρὸς
ὀρθὰς ἀχθῇ (5) ἡ δβ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ αβ, ἡ ὑπὸ αβδ ἥτοι μείζων ἔσαι τῆς
ὑπὸ βαδ, ἢ ἴση, ἢ ἐλάσσων· καὶ εἰ μὲν μείζων συνεξάδῃ πρὸς τῷ α ἡ ὑπὸ
βαε (6) ἴση τῇ ὑπὸ αβδ, καὶ διήχθῃ ἐπὶ τὸ ε ἡ δβ, καὶ ἐπεζεύχθῃ ἡ εγ, καὶ
ἔσαι ἡ αε (7) ἴση τῇ βε. Ἐπειδὴ δὲ καὶ αδ ἴση (8) τῇ δγ, ἥτε δε κοινὴ, καὶ
ὑπὸ αδε ἴση τῇ ὑπὸ εδγ, Ὄρθαι γὰρ ἄμφω, ἔσαι καὶ ἡ αε (9) ἴση τῇ εγ·
ὥστε ἴσαι ἀλλήλαις αἱ τρεῖς αε, βε, γε. Τὸ ἄρα Σημεῖον ε (10) Κέντρον ἔ-
σαι τῷ Κύκλῳ, ὃν ἄντις διὰ τῶν α, β καὶ γ Σημεῖων ἀγόμενον προσαναγρά-
ψειε.

κ. 243.

Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ αβδ ἴση ἢ τῇ ὑπὸ βαδ, ἴσαι (11) ἔσονται καὶ αἱ αδ, δβ
ἀλλήλαις, καὶ δὴ καὶ ἡ δγ, ἥτις (12) ἴση ἐλήφθη τῇ αδ. Ὡς τῶν τριῶν ἴσων
ἴσων (13), Κέντρῳ τῷ δ, καὶ Διαστήματι τῷ ἐκείνων ὁ Κύκλος προσαναγρα-
φήσεται.

κ. 244.

Ἐὰν δὲ ὑπὸ αβδ ἐλάττωται ἢ τῆς ὑπὸ βαδ, συνεξάδῃ ἡ ὑπὸ βαε (14)
ἴση τῇ ὑπὸ αβδ, καὶ ἐπεζεύχθῃ ἡ εγ, ἥτις ἴση ὁμοίως (15) δειχθήσεται
τῇ αε καὶ ἐπομένως τῇ εβ. Ὡς τὸ ε Κέντρον εἶναι (16), ὃ ἂν προσαναγρα-
φείη ὁ Κύκλος.

(1) I. τῷ α'. (2) I.A. τῷ α'. (3) Πόρ. τῆς A. τῷ γ'. (4) I. τῷ α'. (5) I.A. τῷ α'.
(6) KΓ. τῷ α'. (7) ζ. τῷ α'. (8) Eκ κατ. (9) A. τῷ α'. (10) Θ. τῷ γ'. (11) ζ.
τῷ α'. (12) Eκ κατ. (13) Διὰ τὴν Θ. τῷ γ'. (14) KΓ. τῷ α'. (15) A. τῷ α'. (16) Θ. τῷ γ'.

Π ρ ᾱ ξ ι ς.

Κέντρω ληφθέντι ἐπὶ τῷ δοθέντος Τόξου τῷ τυχόντι β, καὶ Διασήμε-
τι ὡταύτως τῷ τυχόντι βκ, Κύκλος γεγραφθῶ ὁ ακγλ, τέμνων τὸ δοθὲν Τό-
ξον κατὰ τὰ Σημεῖα α καὶ γ. Εἴτα Κέντροις ληφθεῖσιν ἐκατέρωθεν ἐπὶ τῷ Τό-
ξῳ, ἐν Διασήμετι ἴσῳ τῷ πρότερον Κύκλοι γεγραφθῶσαν τέμνοντες τὸν
γεγραμμένα πρὶν ἄμφω κατὰ δύο Σημεῖα. Οὕτω γὰρ αἱ τὰς τομὰς ἐπιζευγύ-
σαι Εὐθείαι, τέμνονται ἀλλήλας κατὰ τὸ Σημεῖον κ, δώσουσι τὸ Κέντρον. Ὁρα κ. 245.
τὴν Πρᾶξιν τῆς Ι'. τῷ Α'. καὶ τὸ Πόρ. τῆς Α'. τῷ Γ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κς.

„Ἐν τοῖς ἴσοις Κύκλοις (ἢ πάντως καὶ ἐν ἐνὶ καὶ τῷ αὐτῷ Κύκλῳ), αἱ ἴσαι
„Γωνίαι ἐπὶ ἴσων Περιφερειῶν βεβήκασιν, εἴαν τε πρὸς τοῖς Κέντροις, εἴαν
„τε πρὸς ταῖς Περιφερείαις ὥσι βεβηκῆται.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ βγ, εζ, καὶ αἱ μὲν ηβ, ηγ ἴσαι ταῖς δε, κ. 246.
εζ (1), ἡ δὲ ὑπὸ βηγ ἴση (2) τῇ ὑπὸ εδζ, ἄρα (3) καὶ Βάσις βγ ἴση τῇ Βά-
σει εζ. Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ α Γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ δ (4), τὸ ἄρα βαγ
Τμήμα (5) ὁμοιον τῷ εδζ· ἐς δὲ ἐπὶ ἴσων Εὐθειῶν τῶν βγ, εζ, ἄρα (6) καὶ
ἴσα ἀλλήλοις. Ὡς εἴαν ἀπὸ τῶν ἴσων (7) Κύκλων ἀφαιρεθῶσιν, ἔσται τὰ λοιπὰ
(8) ἴσα, καὶ προσεδέντα ἄρα ἐφαρμόσει (9), ἥτε βγκ Περιφέρεια ἴση τῇ ελζ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΖ.

„Ἐν τοῖς ἴσοις Κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων Περιφερειῶν βεβηκῆται Γωνίαι, ἴσαι
„ἀλλήλαις εἰσὶν, εἴαν τε πρὸς τοῖς Κέντροις, εἴαν τε πρὸς ταῖς Περιφερείαις ὥσι
„βεβηκῆται.

Ἀλλὰ μὴ ἔσωσαν ἴσαι, μείζων δὲ ἡ ὑπὸ βηγ τῆς ὑπὸ εδζ, καὶ συνε- κ. 247.
ζάσθω πρὸς τῷ η ἡ ὑπὸ βηγ ἴση τῇ ὑπὸ (10) εδζ. Οὐκὲν (11) ἡ βη Περι-
φέρεια ἴση τῇ εζ, ταύτη δὲ καὶ ἡ βγ (12) ἴση, ἄρα ἡ βκ ἴση τῇ βγ, τὸ
μέρος τῷ ὅλῳ.

Ὡς ἂν οὖν οὕτως ἴσαι ἀποδειχθῶσιν αἱ πρὸς τοῖς Κέντροις, ἴσαι ἔσυν-
ται (13) καὶ αἱ πρὸς ταῖς Περιφερείαις.

(1) Α'ξ. ιε. (2) Ε'ξ ὑποθ. (3) Δ. τῷ α'. (4) Κ. τῷ γ'. καὶ Α'ξ. ε. (5) ΙΑ Ὁρ.
τῷ γ'. (6) ΚΔ. τῷ γ'. (7) Ε'ξ ὑποθ. (8) Α'ξ. γ'. (9) Α'ξ. η'. (10) ΚΓ. τῷ α'.
(11) Διὰ τὴν ἀνωτ. (12) Ε'ξ ὑποθ. (13) Κ. τῷ γ'.

Π ό ρ ι σ μ α .

κ. 248.

Εὐθεΐα ἡ εζ, ἡ κατὰ τὸ μεσαίτατον α Περιφερείας τινὸς οἶον τῆς βγ, ἀπτομένη τῇ Κύκλῳ, Παράλληλός ἐστι τῇ βγ Εὐθεΐα τῇ ὑποτείνουσῃ τὴν αὐτὴν Περιφέρειαν. Ἐπιζευχθεΐσης γὰρ τῆς δα, ἐπιζευχθεΐσων δὲ καὶ τῶν δβ, δγ, καὶ ἴσων οὐσῶν (1) ἐπὶ τῶν Τριγώνων, τῆς δὲ δι κοινῆς, ἐπεὶ ἡ Περιφέρεια βα ἴση (2) τῇ Περιφερείᾳ αγ, καὶ ὑπὸ βδι ἴση (3) ἐστὶ τῇ κδγ, ἄρα (4) καὶ ὑπὸ βηδ ἴση τῇ ὑπὸ γηδ, καὶ (5) ἄμφω Ὄρθαί. Ἀλλὰ καὶ αἱ ἐντὸς ὑπὸ εαδ καὶ βαδ Ὄρθαί (6), ἄρα (7) βγ Παράλληλός ἐστι τῇ εζ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΗ.

κ. 249.

„Εν τοῖς ἴσοις Κύκλοις (καὶ ἐν τῷ αὐτῷ δὲ πάντως), αἱ ἴσαι Εὐθεΐαι (βγ, εζ) ἴσας Περιφερείας ἀφαιρῶσι, τὴν μὲν μείζονα (βαγ) τῇ μείζονι (εδζ), τὴν δὲ ἐλάττωνα (βηγ) τῇ ἐλάττωι (εδδ).

Τῶν γὰρ Κέντρων κ καὶ λ (8) ληφθέντων, καὶ τῶν Εὐθειῶν κβ, κγ, λε, καὶ λζ ἐπιζευχθεΐσων, καὶ ἴσων ἀλλήλαις (9) ὄσων, ἐπεὶ καὶ ἡ βγ (10) ἴση τῇ εζ, ἔσαι καὶ ἡ ὑπὸ βκγ ἴση (11) τῇ ὑπὸ ελζ. Ἀλλὰ μὲν αἱ ἴσαι Γωνίαι ἐπὶ ἴσων Περιφερειῶν βεβήκασιν (12), ἄρα ἡ βηγ ἴση τῇ εδζ, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ (13) ἡ βαγ ἴση τῇ εδζ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Εν τοῖς ἴσοις ἄρα Κύκλοις, ἡ ἐν τῷ αὐτῷ, αἱ μὴ ἴσαι Εὐθεΐαι, ἀχὶ ἴσας Περιφερείας ἀφαιρῶσιν, ἀλλ' ἡ μὲν μείζων μείζονα, ἡ δὲ ἐλάττω ἐλάττωνα.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΘ.

κ. 250.

„Εν τοῖς ἴσοις Κύκλοις, ὑπὸ ταῖς ἴσας Περιφερείας ἴσαι Εὐθεΐαι ὑποτείνουσι.

Ἐπιζευχθεΐσων γὰρ ὁμοίως τῶν Εὐθειῶν ὡς ἀνωτέρω, ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ Περιφέρειαι (14) βηγ, εδζ, ἴσαι καὶ αἱ ὑπὸ βηγ καὶ ελζ Γωνίαι εἰσὶ (15). Ἀλλὰ καὶ αἱ κβ, κγ ἴσαι εἰσὶ (16) ταῖς λε, εζ, ἄρα (17) καὶ βγ ἴση τῇ εζ.

(1) Α. ρ. ιη'. (2) Εξ ὑποθ. (3) Διὰ τὴν Πρότ. (4) Δ. τῷ α'. (5) Ο. ΙΔ. τῷ α'. (6) ΙΗ. τῷ γ'. (7) ΚΗ. τῷ α'. (8) Α. τῷ γ'. (9) Α. ξ. ιε'. (10) Εξ ὑποθ. (11) Κ. τῷ α'. (12) Κς. τῷ γ'. (13) Α. ξ. γ'. (14) Εξ ὑποθ. (15) ΚΖ. τῷ γ'. (16) Α. ξ. ιε'. (17) Δ. τῷ α'.

Π ό ρ ι σ μ α .

Υπὸ ἄρα τὰς ἀντίστας Περιφερείας, Εὐθεΐαι ἄνιστοι ὑποτείνουσι, μείζων μὲν ὑπὸ τὴν μείζονα, ἐλάσσων δὲ ὑπὲρ τὴν ἐλάσσονα.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τῶν ἀμέσως προηγησαμένων Δ'. Προτάσεων, ὁ Τακτικὸς τὴν τάξιν ἀντέστρεψε, προτάξας μὲν εἰς Κζ'. ἢ ΚΖ'. τὴν ΚΗ'. ἢ ΚΘ'. ὑποσυνάψας δὲ μετὰ ταύτας ἐκείνας, ὡς ἂν προχειροτέρας ἔχειν λαβεῖν τὰςδείξεις ἡγόμενος. Α'λλ' αὐτοὶ κἀντάτοις τῷ Στοιχειωτῇ κατ' ἴχνος ἀκολουθεῖν ἔγνωμεν, τῆς ἐκ τῶν τοιῶνδε μεταθέσεων ἐπιγινομένης συγχύσεως τὰς νέας ἀπαλλάττοντες.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α .

„Τὴν δοθεῖσαν Περιφέρειαν (αβγ) δίχα τεμεῖν.

Ἐπεξεύχθω μὲν ἡ αγ, ἀπὸ δὲ τῆς Σημεῖς (καθ' ὃ ἂν δίχα (1) τμηθεῖν) πρὸς ὀρθάς (2) ἤχθω ἡ οβ. Φημὶ δὲ, ὡς αὕτη τὴν Περιφέρειαν προσπεσῶσα κατὰ τὸ β δίχα τέμνει. κ. 251.

Ἐπιξευχθεῖσων γὰρ τῶν αβ, γβ, αἰ αο ἢ οβ ἴσαι ταῖς γο ἢ οβ, ἡ δὲ ὑπὸ αοβ ἴση (3) τῇ ὑπὸ γοβ, ἄρα (4) ἡ αβ ἴση τῇ γβ, ἄρα ἡ Περιφέρεια αβ ἴση (5) τῇ Περιφερείᾳ γβ.

Π ρ ᾱ ξ ι ς .

Κέντροις μὲν α ἢ β, Διασήμεσι δὲ ἴσοις, κύκλοι γεγράφθωσαν τεμνόμενοι, ἡ δὲ ἐπιξευγνύουσα τὰς κατατομάς δίχα τὸ τόξον τεμεῖ (6). κ. 252.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐκ δὲ τάττε φανερόν, ὡς ἡ ἡμίσεια τῆς Ὑποτεϊνέσεως τὴν Περιφέρειαν, ἐς τὴν ἡμίσεως τῆς Περιφερείας Ἡμίτονον ὀρθόν, καὶ ἀνάπαλιν, τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον διπλασιαζόμενον, ὑποτείνει τὴν διπλασίονα Περιφέρειαν. Ἐς δὲ πάντως τῷ παρόντι παραπλήσιον τὸ πρῶτον Πόρισμα τῆς τρίτης Προτάσεως τῷ Γ'. τὸ περὶ τῆς Ὑποτεϊνέσεως τὴν πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνίαν ἀποφαινόμενον.

(1) I. τῆς α'. (2) IΔ. τῆς α'. (3) Ε'κ κατ. (4) Δ. τῆς α'. (5) ΚΗ. τῆς γ'. (6) Διὰ ταύτην ἢ τὴν Παρὰ τῆς I. τῆς α'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΑ.

„Εν Κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ Γωνία (βγζ) Ὀρθή ἐστίν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι Τμήματι ἐλάττων Ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων Ὀρθῆς, καὶ ἔτι ἡ μὲν τῷ μείζονος Τμήματος Γωνία μείζων ἐστίν Ὀρθῆς, ἡ δὲ τῷ ἐλάττονος τμήματος Γωνία ἐλάττων ἐστίν Ὀρθῆς.

κ. 253.

Α'. Ἐπεξεύχθω ἡ ἀγ, ἐπεὶ ἔν ἴσαι αἱ αβ, ἀγ (1), καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, αβγ (2) ἴσαι εἰσί. Δι' αὐτὸ δὲ τῆτο καὶ αἱ ὑπὸ αγζ καὶ αζγ ἴσαι εἰσίν, ἡ ἄρα ὅλη ὑπὸ βγζ, δυσὶ ταῖς κατὰ τὸ β καὶ ζ ἴση ἐστίν. Α'λλ' αἱ τρεῖς (3) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἡ ἄρα ὑπὸ βγζ Ὀρθή.

Β'. Προαχθείσης τῆς ζγ κατὰ τὸ δ, αἱ ὑπὸ δγβ καὶ βγζ (4) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἡ δὲ ὑπὸ βγζ Ὀρθή οὕσα (5) δέδεικται, ἄρα ἡ ὑπὸ δγβ Ὀρθή. Α'λλ' ἡ ὑπὸ δγβ ἐκτὸς τῆς κατὰ ζ (6) μείζων ἐστίν, ἡ ἄρα κατὰ τὸ ζ, ἥτις ἐστίν ἐν τῷ γζηβ Τμήματι, ὁ μείζων ἐστίν Ἡμικυκλία, Ὀρθῆς ἐλάττων ἐστίν.

Γ'. Ἐπειδὴ τὸ βδγζ ἐν τῷ Κύκλῳ Τετράπλευρόν ἐστιν, αἱ ἀπεναντίων τάτε Γωνίαι δ καὶ ζ δυσὶν Ὀρθαῖς (7) εἰσί. Ἐστὶ δὲ ἡ κατὰ τὸ ζ (8) ἐλάττων Ὀρθῆς, ἡ ἄρα κατὰ τὸ δ ἐν τῷ ἐλάσσονι τῷ Ἡμικυκλίῳ Τμήματι ἔσα, μείζων ἐστίν Ὀρθῆς.

Δ'. Αὐτόθεν (ὡς Εὐκλείδης φησὶν) ἐστὶ φανερόν, ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βγζ (9) Ὀρθή, ἡ ἄρα περιεχομένη ὑπὸ τῆς βγ Εὐθείας, καὶ τῆς γζη Περιφερείας (ἥτις ἐστίν ἡ Γωνία τῷ μείζονος Τμήματος), μείζων Ὀρθῆς ἐστίν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δγβ (10) Ὀρθή, ἄρα ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς βγ Εὐθείας, καὶ τῆς γδβ Περιφερείας (ταυτὸν εἰπεῖν ἡ Γωνία τῷ ἐλάσσονος Τμήματος) ἐλάττων Ὀρθῆς ἐστίν.

Σ χ ό λ ι ο υ.

Τὸ δὲ Δ'. τῆς προτεθείσης Προτ. μέρος, ὁ μὲν Τακᾶέτιος παρέδραμεν, αὐτοὶ δὲ σὺν Οὐίξωνι, ἐξ αὐτῶ τῷ Εὐκλείδῃ ἀποκαταστήται δεῖν ἔγνωμεν.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

κ. 254. Α'.

Ἐντεῦθεν οὖν καὶ τῷ γνώμονος βάσανον ἐνὶ λαβεῖν, εἰ ἐπ' ἀκριβές ἐστιν

(1) Ὁρ. ΙΗ. τῷ α'. (2) Ε. τῷ α'. (3) ΑΒ. τῷ α'. (4) ΙΓ. τῷ α'. (5) Διὰ τὸ Α'. (6) Πόρ. α'. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (7) ΚΒ. τῷ γ'. (8) Διὰ τὸ Β'. (9) Διὰ τὸ Α'. (10) Διὰ τὸ Α'. καὶ τὴν ΙΓ. τῷ α'.

Ορθογώνιος. Εάν γὰρ τῷ τυχόντος Σημεῖν α ἐπὶ Κύκλῳ Περιφερείας, ἢ τῷ γνώμονος κορυφῇ ἀπτομένη, αἱ Πλευραὶ διὰ τῶν περάτων τῆς τῷ Κύκλῳ διήκωσι Διαμέτρου, Οἷον μὲν ἔσαι ἡ Γωνία, ἀκριβὲς δὲ ὁ γνώμων. Ἀλλως δ' ἔδαμῶς.

Καὶ εἰάν τῶν τῷ γνώμονος Πλευρῶν πρὸς τοῖς Σημείοις β καὶ γ ἀκινήτων. β .
τῶν, ἡ κορυφῇ α ἀπὸ τῷ αὐτῷ ἐπὶ τὸ αὐτὸ περιάγοιτο, Κύκλον ἀναγράφει,
ἢ Διάμετρος ἡ $\beta\gamma$.

Εὐτεῦθεν δὲ καὶ ἀπ' ἄκρας γ τῆς δοθείσης Εὐθείας $\beta\gamma$, Εὐθεΐαν πρὸς Γ . κ. 255.
Κάθετον τῇ δοθείσῃ ῥαδίως ἄγειν παιδευόμεθα, κύκλον μὲν γράφοντες διὰ τῷ
πέρατος τῆς Εὐθείας γ ἀγόμενον, καὶ τὴν $\beta\delta$ ἐπιζευγνύντες Διάμετρον, καὶ
τὴν $\gamma\delta$, ἣτις ἔσαι ἡ ζητημένη.

Επὶ τῷ Οἷον Τριγώνῳ $\beta\gamma\delta$, τῆς ὑποτείνουσας τὴν ὑπὸ $\beta\gamma\delta$ ὀρθὴν δ .
Γωνίαν $\beta\delta$ δίχα τμηθείσης (1), καὶ τῆς $\gamma\alpha$ ἐπιζευχθείσης, εἰς Τρίγωνον δύο
ἰσοσκελεῖ τὰ $\beta\alpha\gamma$, γὰρ τὸ Τρίγωνον $\gamma\beta\delta$ τμηθήσεται. Οὗ δὲ Κύκλος, ὅς ἐστι
Κέντρον μὲν τῷ α , Διαστήματι δὲ τῷ $\alpha\beta$ ἀναγραφεῖν, καὶ διὰ τῆς κορυφῆς γ τῆς
ὀρθῆς Γωνίας διελεύσεται. Ἐστὶ δὲ παραληπτέον εἰς δεῖξιν Λ . τὸ β .

Ἐπεὶ δὲ ἡ μικτόγραμμος Γωνία τῷ μείζονος Τμήματος Οἷον μείζων ϵ .
ἔστιν, ἢτε τῷ ἐλάττονος Οἷον ἐλάττω (2), ἢ ἄρα τῷ Ἡμικυκλίῳ Γωνία
τῇ εὐθυγράμμῳ Οἷον ἴση ἔσαι. τῷ ὅπερ ἀνωτέρω ἐξ ἄλλης ἀρχῆς ἐδείκ-
νυμεν (3).

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΒ.

„Εάν Κύκλῳ ἐφαπτηταί τις Εὐθεΐα ($\gamma\delta$), ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὸν
„Κύκλον, διαχθῇ τις Εὐθεΐα ($\alpha\beta$) τέμνῃσα τὸν Κύκλον, ὥς ποιῇ Γωνίας
„πρὸς τῇ Ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τῷ Κύκλῳ Τμή-
„μασι Γωνίαις.

Διήχθω δὴ Λ . ἡ τέμνῃσα $\alpha\beta$ διὰ τῷ Κέντρῳ, καὶ ἔσαι ἡ ὑπὸ $\gamma\alpha\beta$ (4) κ. 256.
Οἷον. Ἀλλὰ καὶ ἡ κατὰ τὸ Λ Οἷον (5) ἔστιν, ἢ ἄρα ὑπὸ τῆς Ἐφαπτομένης
καὶ τῆς Τεμνύουσας, ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ Τμήματι.

Διήχθω δὴ β . ἡ τέμνῃσα $\alpha\beta$ μὴ διὰ τῷ Κέντρῳ, διήχθω δὲ καὶ διὰ τῷ κ . 257.
Κέντρῳ ἡ $\alpha\pi$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $\beta\pi$ · καὶ ἐπεὶ ἡ ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ ὑπὸ $\alpha\beta\pi$
Οἷον ἐστὶ (6), δύο ἄρα αἱ ὑπὸ $\beta\pi\alpha$ καὶ $\pi\alpha\beta$ ἴσαι ἔσονται (7) μὲν Οἷον.

(1) I . τῷ α . (2) M . A . τῆς Π ροτ. (3) Π όρ. Z . τῆς I ς. τῷ γ . (4) III . τῷ γ .
(5) AA . τῷ γ . (6) AA . τῷ γ . (7) Π όρ. ϵ . τῆς AB . τῷ α .

Α'λλὰ ἐ ἡ ὑπὸ γαπ Ὀρδή (1) ἐσιν, ἀφαιρεθείσης ἄρα τῆς κοινῆς ὑπὸ βαπ, ἡ κατὰ τὸ π (ἦτοι ἡ κατὰ τὸ λ (2)) ἴση τῇ ὑπὸ γαβ.

Πάλιν αἱ ὑπὸ ζαβ καὶ γαβ ἴσαι (3) εἰσὶ δυσὶν Ὀρδαῖς, καὶ ἐν τῷ Τετραπλεύρῳ βοαλ, αἱ ἀπεναντίον (4) ο ἐ λ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν Ὀρδαῖς. Αἱ δύο ἄρα ὑπὸ ζαβ ἐ γαβ, ἴσαι δυσὶ ταῖς κατὰ τὸ ο ἐ λ. Α'λλ' ἡ κατὰ τὸ λ ἴση εἰδείχθη ἀνωτέρω τῇ ὑπὸ γαβ, ἐὰν ἄρα τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων ἀφαιρεθῇ, ἔσαι ἡ ὑπὸ ζαβ ἡ ὑπὸ τῆς Ἐφαπτομένης ἐ τῆς Τεμνέσης, ἴση τῇ κατὰ τὸ ο τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ Τμήματι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΓ.

„Επὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας (βγ) γράφαι Τμήμα Κύκλου, δεχόμενον ὁ Γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐδυσγράμῳ.

κ. 258.

Εἴαν ἡ δοθεῖσα Γωνία ὀξεῖα ᾗ, οἷα ἡ ὑπὸ αβζ, ἀπὸ τῆ β ἤχθω τῇ αβ (5) πρὸς ὀρδάς ἡ βλ, πρὸς δὲ τῷ πέρατι γ τῆς δοθείσης Εὐθείας βγ, συνεσάσθω Γωνία (6) ἡ ὑπὸ βγι ἴση τῇ ὑπὸ γβλ, ἥς δὲ συζάσης τεμεί ἡ Πλευρά γι τὴν βλ κατὰ τὸ ι. Εἴτα Κέντρῳ μὲν τῷ ι, Διαστήματι δὲ τῷ ιβ Κύκλος γεγράφθω διερχόμενος (ἐπεὶ ἴσαι μὲν αἱ πρὸς τῇ Βάσει (7) Γωνίαι, ἴσαι δὲ αἱ τὰς Γωνίας ὑποτείνεσθαι (8) ιβ, ιγ Πλευραί) διὰ τῆ γ, καὶ Τμήμα ἔχων τὸ βπγ, δεχόμενον Γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ὑπὸ αβζ.

Επειδὴ γὰρ ἡ αβ τῇ Διαμέτρῳ βλ πρὸς ὀρδάς (9) ἐσιν, ἡ αβ ἐφάπτεται τῷ Κύκλῳ (10), τὸν δὲ τέμνει ἡ βγ. Ἀρα ἡ ἐν τῷ ἐναλλάξ Τμήματι βπγ Γωνία (11) ἴση τῇ δοθείσῃ ὑπὸ αβζ.

Εἴαν δὲ ἡ δοθεῖσα ὑπὸ ββγ Ἀμβλεία ᾗ, διὰ παραπλησίως τῆς κατασκευῆς, ἔσαι τὸ γοβ τὸ ζητούμενον Τμήμα.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Διὰ δὲ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ἐ Κύκλος Περιφέρειαν ἀγαγεῖν ἐξέσαι, ἥτις τῆς δοθείσης Εὐθείας αρ κατὰ τὸ δοθέν Σημεῖον ἄπτοιτο, καὶ δι' ἄλλου Σημεῖος τῆ γ, ὃ ἐκτὸς εἴη τῆς δοθείσης αρ δῆκοι. Α'μέλειτοί τῆς βγ ἐπιζευχθείσης, ἐ τῇ δοθείσῃ αρ πρὸς ὀρδάς ἀχθείσης τῆς βλ, ἐὰν γένῃ-

(1) IH. τῆ γ'. (2) KA. τῆ γ'. (3) IG. τῆ α'. (4) KB. τῆ γ'. (5) LA. τῆ α'. (6) KG. τῆ α'. (7) Eκ κατ. (8) ζ, τῆ α'. (9) Eκ κατ. (10) Iζ. τῆ γ'. (11) AB. τῆ α'.

ται ἡ ὑπὸ βγ, ἴση τῇ ὑπὸ βγ, ἡ τῶν Εὐθείων βλ & γι τομή τὸ Κέντρον παρέξει, ἡ δὲ ββ ἢ γγ τὴν Διάμετρον, οἷς ὁ Κύκλος γεγράφεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΔ.

„Α'πὸ τῆ δοθέντος Κύκλου Τμήμα ἀφελεῖν, δεχόμενον Γωνίαν ἴσην τῇ „δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐθυγράμμω.

Α'χθεῖσθαι τῆς Ε'φαπτομένης τῆ Κύκλου αβ (1), πρὸς τῷ β Σημεῖω τῆς ἐπαφῆς συνεσάδω (2) Γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση τῇ δοθείσῃ· οὕτω γὰρ ἡ βγ, ἀφελεῖ Τμήμα τὸ βγδ, δεχόμενον Γωνίαν (3) ἴσην τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐθυγράμμω. κ. 259.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΕ.

„Ε'ὰν ἐν Κύκλῳ δύο Εὐθεῖαι (γλ, βζ) τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν „τῆς μιᾶς Τμημάτων περιεχόμενον Ὀρθογώνιον (γολ), ἴσον ἐσὶ τῷ ὑπὸ τῶν „τῆς ἐτέρας Τμημάτων περιεχομένῳ Ὀρθογώνιῳ (βοζ).

Ε'ὰν οὖν ἀλλήλας τέμνωσι κατὰ τὸ Κέντρον α, αὐτίθεν εὐδηλον τὸ λεγόμενον, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων Τετράγωνα τῷ αὐτῷ Κύκλῳ ἴσα ἐσὶ.

Ε'ὰν δὲ ἡ ἐτέρα γλ διαγομένη διὰ τῷ Κέντρῳ α, τὴν ἄλλην βζ δίχα τέμνῃ, ἐπεὶ καὶ πρὸς ὀρθὰς (4) τέμνεται, τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ ζο, Ὀρθογώνιον ἐσὶ τὸ ὑπὸ βοζ. Ε'πεξεύχθω δὲ ἡ αζ, καὶ ἔσται Ὀρθογ. γολ + αο^τ (5) = αλ^τ = αζ^τ = αο^τ + οζ^τ (6). Ε'ὰν ἔν ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν αο^τ, ἔσται Ὀρθογ. αολ = οζ^τ = βοζ. Ο. Ε. Δ. κ. 260.

Ε'ὰν δὲ ἡ ἐτέρα γλ διὰ τῷ Κέντρῳ ἀγομένη, τέμνῃ τὴν ἐτέραν βζ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ ο, ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α ἀχθεῖσθαι τις Εὐθεῖα ἡ αἰ, τεμνέτω δίχα (7) τὴν βζ κατὰ τὸ ι, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ αβ. Ε'πεὶ ἔν ἡ ὑπὸ αἰβ (8) Ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ γλ εἰς ἴσα τέμνεται κατὰ τὸ α, καὶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ ο, ἔσται Ὀρθογ. γολ + αο^τ = (9) αλ^τ = αβ^τ = (10) αἰ^τ + βἰ^τ. Α'λλ' αο^τ (11) = αἰ^τ + ιο^τ, ἄρα Ὀρθογ. γολ + αἰ^τ + ιο^τ = αἰ^τ + βἰ^τ. Κοινῇ οὖν ἀφηγρήδω αἰ^τ, & ἔσται Ὀρθογ. γολ + ιο^τ = βἰ^τ, τὸ δὲ βἰ^τ = (12) βοζ + ιο^τ. Ε'ὰν ἄρα κἀντεῦθεν τὸ κοινὸν ιο^τ ἀφαιρεθῇ, ἔσται Ὀρθογ. γολ = Ὀρθογ. βοζ. κ. 261.

(1) ΙΖ. τῷ γ'. (2) ΚΓ. τῷ α'. (3) ΑΒ. τῷ γ'. (4) Γ. τῷ γ'. (5) Ε. τῷ β'.
(6) ΜΖ. τῷ α'. (7) Ι. τῷ α'. (8) Γ. τῷ γ'. (9) Ε. τῷ β'. (10) ΜΖ. τῷ α'. (11)
Διὰ τὴν αὐτ. (12) Ε. τῷ β'.

κ. 262.

Εάν δὲ οὐδετέρα τῶν Εὐθειῶν γλ, ζβ διὰ τῆ Κέντρου διάγῃται, ἐπεξεύχθω ἡ αο, καὶ διήχθω ἐκκτέρωθεν πρὸς τὴν Περιφέρειαν ψχ, καὶ κατὰ τὸ δειχθέν ἄνωτέρω, τῶν Ὀρθογωνίων ζοβ καὶ γολ ἐκάτερον ἴσον ἐστὶ τῷ ψοχ, ὥς καὶ ἀλλήλοις αὐτὰ ἴσα ἔσται.

Α' λ λ ω ςι.

κ. 263.

Εν γένει δ' ἂν ὅτως ἡ ἀπόδειξις ῥαδίως ἀποδοθῇ, ἐπιζευχθεῖσιν τῶν γζ, λβ. Ἐπὶ τῶν Τριγώνων ἡ μὲν ὑπὸ ζγλ ἴση τῇ ὑπὸ ζβλ (1), ἡ δὲ ὑπὸ γοζ ἴση τῇ ὑπὸ βολ (2). Ἄρα (3) Ἰσογώνια ἐστὶ τὰ Τρίγωνα. Ὡς κατὰ τὴν Δ' τῆ ς'. Βιβλίῳ τὴν ἐκ τῆς ἀνὰ χειρὸς μηδαμῶς ἡρητημένην, γο : οζ :: βο : ολ. Καὶ ἐπομένως κατὰ τὴν Ις'. τῆ αὐτῆ ς'. γο × ολ = οζ × βο. Ο.Ε.Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δς.

κ. 264.

Εάν Κύκλος ληφθῇτι Σημεῖον ἐκτός (β), καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν Κύκλον προσπίπτωσι δύο Εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν Κύκλον (βγ), ἡ δὲ ἐφάπτεται (βζ), ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς Τεμνέσσης (γβ), καὶ τῆς ἐκτός ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς τε Σημεῖου καὶ τῆς κυρτῆς Περιφέρειας (βο) περιεχόμενον Ὀρθογώνιον (γβο), ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς Ἐφαπτομένης (βζ) Τετραγώνῳ.

Εάν ἂν ἡ Τέμνασα βγ διὰ τῆς Κέντρου α διάγοιτο, ἐπεξεύχθω ἡ αζ, καὶ ἔσται ἡ ὑπὸ αζβ (4) Ὀρθή. Ἐπεὶ δὲ ἡ γο εἰς ἴσα τέμνεται κατὰ τὸ α, καὶ προστεθῇ αὐτῇ Εὐθεία τις ἐπ' εὐθείας ἡ οβ, ἔσται Ὀρθογ. (5) γβο } = αβΤ.
Τετραγ. αο }

Ἦτοι Ὀρθογ. γβο + αζΤ (6) = βζΤ + αζΤ. Καὶ ἀφαιρεθέντος ἄρα τῆ κοινῆ αζΤ, ἔσται γβο = βζΤ.

κ. 265.

Εάν δὲ μὴ ἡ γβ διὰ τῆς Κέντρου α διάγῃται, ἐπεξεύχθωσαν Εὐθεῖαι αἱ αβ, αζ, αο καὶ αλ. Καὶ ἡ ἀπὸ τῆς Κέντρου α, εἰδὶχα τέμνει τὴν ογ κατὰ τὸ λ, ἡ ὑπὸ (7) αλο Ὀρθή ἔσται. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αζβ (8) Ὀρθή ἔσται. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γο εἰς ἴσα τέμνεται κατὰ τὸ λ, καὶ προστεθῇ αὐτῇ Εὐθεία τις ἐπ' εὐθείας ἡ οβ,

Ἔσται Ὀρθογ. γβο } (9) = λβΤ. Κοινῇ προσειλήφθω τὸ αλΤ.
Τετραγ. λο }

(1) ΚΑ. τῆ γ'. (2) ΙΒ. τῆ α'. (3) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῆ α'. (4) ΙΗ. τῆ γ'. (5) ς. τῆ β'. (6) ΜΖ. τῆ α'. (7) Γ. τῆ γ'. (8) ΙΗ. τῆ γ'. (9) ς. τῆ β'.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Καὶ ἔσαι } \text{Ο}^{\circ}\rho\theta\omicron\gamma. \gamma\beta\omicron \\ \text{Τετραγ. } \lambda\omicron \\ \text{Τετραγ. } \alpha\lambda \end{array} \right\} = \lambda\beta^{\tau} + \alpha\lambda^{\tau}.$$

Ἀλλὰ τὰ μὲν $\lambda\omicron^{\tau} + \alpha\lambda^{\tau} = \alpha\omicron^{\tau} = \alpha\zeta^{\tau}$, τὰ δὲ $\lambda\beta^{\tau} + \alpha\lambda^{\tau} = \alpha\beta^{\tau}(1)$, ἄρα $\text{Ο}^{\circ}\rho\theta\omicron\gamma. \gamma\beta\omicron + \alpha\zeta^{\tau} = \alpha\beta^{\tau} = (2) \alpha\zeta^{\tau} + \beta\zeta^{\tau}$. καὶ τῷ κοινῷ ἀφαιρέσεν τοὺς $\alpha\zeta^{\tau}$, ἔσαι $\gamma\beta\omicron = \beta\zeta^{\tau}$. Ο. Ε. Δ.

Α' λ λ ω ς.

Ρ' ἄδιον δ' ἂν εἴη καὶ γενικώτερον τὴν ἀπόδειξιν ἀποδέναι ὥδι.

Η' χθω γζ καὶ ζο· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ βζο τῇ κατὰ τὸ γ (3) ἴση ἐστίν, ἡ δὲ κατὰ τὸ β ἐπὶ τῶν Τριγώνων κοινὴ, τὰ γβζ καὶ ζβο Τρίγωνα ἔσαι (4) ἴσογώνια. Α' ρα (Δ. τῷ ζ'. ἥτις ἐκ τῆς δε. ἑδαμῶς ἡρτῆται) ἔσι $\gamma\beta : \beta\zeta :: \beta\zeta : \beta\omicron$, καὶ ἐπομένως (κατὰ τὴν ΙΖ'. τῷ ζ'. ἥτις ὑδ' αὐτῇ ταύτης ἐξήρτῆται ὅλως) $\gamma\beta \times \beta\omicron = \beta\zeta^{\tau}$. Ο. Ε. Δ.

κ. 266.

Πορίσματα.

Ε' ἂν ἀπὸ τῆ αὐτῆς Σημεῖν β τῷ ἐκτός τῆ Κύκλου ὄντος, ἐποσαιῶν διαχθῶσι Τέμνεσαι βγ, ἅπαντα τὰ ὑπὸ γβο Ὀρθογώνια ἴσα ἀλλήλοις ἔσαι, ἐπεὶ τέτων ἕκασον ἴσων ἐσὶ (5) τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Ε' φαπτομένης βζ.

Δ. κ. 267.

Καὶ αἱ ἀπὸ τῆ αὐτῆς δὲ ἐκτός τῆ Κύκλου ὄντος Σημεῖν Ε' φαπτόμεναι τῷ Κύκλῳ βζ, βπ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ἐκατέρῳ γὰρ τῶν ἀπὸ τέτων Τετραγώνων (6) ἴσων τὸ ὑπὸ γβο Ὀρθογώνιον.

Β.

Καὶ δύο δὲ ἀπὸ τῆ ἐκτός τῆ Κύκλου β ἀχθεῖεν ἂν Εὐθεῖαι μόναι τῷ Κύκλῳ Ε' φαπτόμεναι αἱ βζ· βπ, εἰ γὰρ καὶ τρίτην ἀχθεῖναι δυνατόν ἦν Ε' φαπτομένην, ἦν ἂν καὶ αὐτὴ (7) ἴση ταῖς βζ, βπ, καὶ τῆς ἐτέρας τέτων μηδωποσῶν διαφέρουσα.

Γ.

Κάντεῦθεν μετὰ τῷ Μαυρολύκῃ, ἐὰν ὕψος ὅρου τὸ δα δῆλον ἦ, γινώσκῃται δὲ καὶ ἡ ὀριζόντιος αβ, ἡ τῆς γῆς Ε' φαπτομένη κατὰ τὸ β, ἐνθα πρῶτον ἡ κορυφὴ τῷ ὅρου, τοῖς αὐτῷ ἀφισαμένοις ἀφανὴς γίνεται, τὴν Διάμετρον τῆς γῆς δε (ἣν ἐνὶ λαβεῖν ἐπὶ τῆς ἀδ προαχθείσης ἀχρη τῆς Περιφερείας) καταμετρεῖν παιδεύμεθα. Ἐσαι γὰρ (8) τὸ Ὀρθογών. αε × αδ = αβ^τ, ὥστε διαιρεσέν τὸ ἤδη δῆλον ὄν Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς αβ, διὰ τῷ ὕψους τῷ ὅρου αδ,

Δ. κ. 268.

(1) Μ2. τῷ α'. (2) Διὰ τὴν αὐτ. (3) ΑΒ. τῷ γ'. (4) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ κ'.
(5) Διὰ τὴν Πρῶτ. (6) Διὰ τὴν Πρῶτ. (7) Διὰ τὸ β'. Πόρ. (8) Διὰ τὴν Πρῶτ.

ἢ αὐτῇ δὴλα ὑποτιθεμένε, τὸ Πηλίκον δώσει Εὐθείαν τὴν αε, ἀφ' ἧς ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ τῷ ὄρει ὕψος αδ, λοιπὴ πάντως ἔσαι ἢ ἐδ τῆς γῆς Διάμετρος.

Ἐπὶ παντὸς Ὀρθογωνία Τριγώνω αβγ, τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῇ ἄθροίσματος τῆς τε Ὑποτείνουσας ἢ τῆς ἐτέρας τῶν Πλευρῶν, ἢ ὑπὸ τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν περιεχόμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς λοιπῆς Πλευρᾶς Τετραγώνῳ. Ἐὰν γὰρ Κέντρῳ τῷ γ, Διαστήματι δὲ τῷ γβ Κύκλος γραφῇ, τὴν Ὑποτείνουσαν τέμνων κατὰ τὸ δ, διαχθῇ δὲ ἡ αγ ἄχρι πρὸς τὴν Περιφέρειαν ε, ἔσαι ἢ μὲν αε ἴση τῷ ἄθροίσματι τῷ ἐκ τῆς Ὑποτείνουσας αγ, καὶ τῆς Πλευρᾶς βγ (ἐπεὶ $\beta\gamma = \gamma\epsilon$ (1)), ἢ δὲ αδ ἡ διαφορὰ τῆς Ὑποτείνουσας αγ, ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς γβ (ἐπεὶ $\gamma\alpha = \gamma\beta$ (2)). Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν αε τέμνησα τὸν Κύκλον ἐστὶν (3), ἢ δὲ αβ ἐφαπτομένη (4) αὐτῷ, ἔσαι τὸ ὑπὸ εαδ (ταυτὸν εἶπειν τὸ ὑπὸ τῇ ἄθροίσματος τῆς Τεμνύσης ἢ τῆς Πλευρᾶς, καὶ ὑπὸ τῆς τέτων αὐτῶν διαφορᾶς περιεχόμενον Ὀρθογώνιον), ἴσον τῷ ἀπὸ αβ (ταυτὸν εἶπειν τῷ ἀπὸ τῆς λοιπῆς Πλευρᾶς) Τετραγώνῳ (5). Ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

κ. 268. ε'.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς α Γωνίας τῷ αβγ Τριγώνῳ, ἢ ἀνισοὶ αἱ Πλευραὶ αβ, αγ, Κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τὴν Βάσιν (ἣν δέοι προαχθεῖσαν) ἢ αλ, ἔσαι τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῇ ἄθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν Πλευρῶν αβ, αγ, ἴσον τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῇ ἄθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν Εὐθειῶν λβ, λγ, τῶν ἀπὸ τε τῆς Καθέτου αλ, ἢ τῶν πρὸς τὴν Βάσιν Γωνιῶν β ἢ γ ἀπολαμβανομένων.

Κέντρῳ μὲν γὰρ τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αγ, τῷ τῆς ἐλάσσονος Πλευρᾶς δηλονότι, Κύκλος γεγραφθῶ τέμνων τὴν μείζονα τῶν Πλευρῶν αβ κατὰ τὸ δ, τὴν δὲ Βάσιν (ἣν δέοι προαχθεῖσαν) κατὰ τὸ ο. Προήχθω δὲ ἢ ἡ βλ μείζων Πλευρὰ, ἄχρι τῆς Περιφέρειας κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπεὶ ἴσαι (6) αἱ αγ, αδ, αε, ἔσαι μὲν εβ τῶν Πλευρῶν τὸ ἄθροισμα, ἔσαι δὲ βδ τῶν Πλευρῶν ἡ διαφορὰ. Ἐπεὶ δὲ ἴσαι (7) αἱ λγ, λο, ἔσονται ἐπὶ τῇ Α'. Σχήμ. αἱ βγ ἢ βο, ἐπὶ δὲ τῇ Β'. Σχήμ. αἱ βο ἢ βγ, τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἐναπολαμβανομένων λβ ἢ λγ. Ἀλλὰ μὲν (8) τὸ εβδ = γβο, ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Ἐπὶ γὰρ τῇ Α'. τῶν δύο Σχημάτων, ὅτως ἂν τις τὸ Θεώρημα προτείνειεν.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς Γωνίας α τῷ αβγ Τριγώνῳ, Κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τῇ Βάσει ἢ βγ, εἰς Τμήματα δύο τὰ βλ, λγ αὐτὴν κατατέμνησα, τὸ Ὀρθογώνιον

(1) Ὁρ. ΙΗ. τῷ α'. (2) Διὰ τὸν αὐτ. (3) Ἐκ κατ. (4) Ἐκ κατ. καὶ διὰ τὴν Ιε. τῷ γ'. (5) Διὰ ταύτην τὴν Προτ. (6) Ὁρ. ΙΗ. τῷ α'. (7) Γ. τῷ γ'. (8) Α. Πόρ. τῆς παρῆς.

τὸ ὑπὸ τῆ ἀθροίσματος, ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν Πλευρῶν αβ, αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ Ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τε τῆς Βάσεως βγ, ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν Τμημάτων τῆς αὐτῆς Βάσεως βο. Ἡ δὲ τῆ Θεωρήματος τῇδε χρήσις κατὰ τὴν ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν ἐπισημοτάτη ἐστὶ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΖ.

„Εὐὲν Κύκλῳ ληφθῆτι Σημεῖον ἐκτὸς (β), ἀπὸ δὲ τῆ Σημεῖα πρὸς τὸν
 „Κύκλον προσπίπτωσι δύο Εὐθεῖαι, ἢ ἡ μὲν αὐτῶν (βγ) τέμνῃ τὴν Κύκλον,
 „ἢ δὲ (βζ) προσπίπτῃ, ἢ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνύσης (γβ) ἢ τῆς ἐκτὸς
 „ἀπολαμβανομένης (βο) μεταξὺ τῆς τε Σημεῖα ἢ τῆς κυρτῆς Περιφέρειας, ἴσον
 „τῷ ἀπὸ τῆς προσπίπτουσης (βζ) Τετραγώνῳ, ἢ προσπίπτουσα (βζ) ἐφά-
 „ψεται τῷ Κύκλῳ κατὰ τὸ ζ.

Αὐτὸ τῆ β ἢ χθω (1) Ἐφαπτομένη ἢ βπ, ἢ ἐπεξεύχθωσαν αἱ επ, εζ, κ. 269.
 εβ· καὶ ἐπεὶ τῷ Ὀρθογωνίῳ γβο, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ βζ Τετράγωνον (2), ἢ
 τὸ ἀπὸ (3) βπ, ἔσαι δὴ ταῦτα ἀλλήλοις ἴσα τὰ Τετράγωνα, ἢ μέντοι (4)
 ἢ αἱ Εὐθεῖαι βζ, βπ ἴσαι ἀλλήλαις· τὰ ἄρα ζεβ, πεβ Τρίγωνα ἐσὶν ἀλλή-
 λους ἰσοπλευρά, ἄρα ἢ αἱ κατὰ τὸ ζ ἢ π Γωνίαι (5) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν.
 Ἀλλὰ γὰρ ἢ κατὰ τὸ π (6) Ὀρθή ἐσιν, ἄρα ἢ ἢ κατὰ τὸ ζ Ὀρθή ἐσιν, ὥς
 (7) ἢ βζ ἐσὶν Ἐφαπτομένη. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Ἡ ἄρα ὑπὸ εβζ (8) ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εβπ. Ὁ ἢ ἄμεινον ἂν ταχθεῖν Α'·
 μετὰ τὸ Β'. Πόρισμα τῆς Δς'. τῆ Γ'. ἀνωτέρω.

Καὶ ἐὰν Εὐθεῖαι δύο ἴσαι ἀλλήλαις βζ, βπ, ἀπὸ τίνος Σημεῖα τῶν Β'.
 ἐκτὸς τῆ Κύκλου, πρὸς τὴν κυρτὴν προσπίπτωσι Περιφέρειαν, ἢ δὲ τάτων
 ἢ ἑτέρα βπ Ἐφαπτομένη τῆ Κύκλου, ἢ ἡ ἑτέρα πάντως βζ τῆ αὐτῆς Κύ-
 κλου ἐφάψεται. Ἰσών γὰρ ἐτῶν (9), ἢ τὰ ἀπὸ τάτων Τετράγωνα (10) ἴσα
 ἀλλήλοις ἔσαι. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ βπ (11) = γβο, ἄρα ἢ βζ^Γ (12) = γβο,
 ἄρα διὰ τὴν ΔΖ'. τὴν ἀνὰ χεῖρας, ἢ βζ ἀπτομένη ἐστὶ τῇ Κύκλῳ.

(1) 12. τῆ γ'. (2) Εἰς ὑποθ. (3) Διὰ τὴν Δς. τῆ γ'. (4) Αἰ. ι'. (5) Η. τῆ α'.
 (6) ΙΗ. τῆ γ'. (7) Ις. τῆ γ'. (8) Η. τῆ α'. (9) Εἰς ὑποθ. (10) Αἰ. ι'. (11) Δς.
 τῆ γ'. (12) Αἰ. ι'.

Τῶν σοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

Προβληματώδης ἐστὶν ἅπαντα ἢ ἐν χειρὶ Βίβλος, διδάσκειν δὲ προτίθεται ἡμᾶς, τίνι δὴ ποτε μεθόδῳ τῶν Σχημάτων μάλιστα τὰ κανονικά, καὶ τεταγμένα ἀκρόντα, ἐγγράφεταιτε τῷ Κύκλῳ καὶ περιγράφεται. Ἡ δὲ χρῆσις τῆς Βίβλου ἐπὶ τῇ κατασκευῇ τῶν ὀχυρωμάτων ἐστὶ πυκνοτάτη, καὶ μέντοι καὶ ἐξ αὐτῆς, οἶονεὶ Πηγῆς, τὰ τῶν Ἡμιτόνων καὶ Ἀπτομένων, καὶ Τεμνωσῶν θαυμαζόμενα κανόνια, τὰ ἐπ' ἀγαθῷ μεγίστῳ τῶν μαθηματικῶν ἐπισημῶν ἐπινοηθέντα ἐξοχετεύεται.

Ταύτη δέ τοι καὶ πρὸς τὴν Τριγωνομετρικὴν μάθησιν ἔχει ἡ Βίβλος πολὺ τὸ ἀνύσιμον· οὐδὲ γὰρ ἄλλως ἢ πολύγωνα Κύκλοις ἐγγράφοντες, τῶν Ὑποτεινωσῶν τέτων καὶ Ἀπτομένων, καὶ Τεμνωσῶν κατασκευάζειν παιδευόμεθα τὰ κανόνια, δι' ὧν, καὶ Σχημάτων αὐτῶν, καὶ σωμάτων Μεγέθη καταμετρεῖται. Καὶ μὴν καὶ τὰς γε τῶν ἀσέρων, ἥ καλεῖν εἰώδασι φάσεις, τήν τε τεταρτημορικὴν δηλαδὴ καὶ τὴν ἑκτημορικὴν, καὶ ὅσας ἄλλας, χορῇ γ' ἄντις ἀνευ τῆς παρὰ τῆςδε τῆς Βίβλου ἐπικυρίας ὁρθῶς διακρίνειεν, αὐτὴ δὲ καὶ τέτων τῆς τῶν πολυγώνων ἐν Κύκλῳ ἐγγραφῆς ὅλως ἐξηρημένων. Εἶδὲ καὶ Κύκλῳ τὸ ἐμβαδόν, καὶ οἷον τετραγωνισμόντινα λαβεῖν ἐνι, οὐκ ἄν ποθεν ἄλλοθεν ἂν δὲ τῆτο, ὅτι μὴ ἐκ πολυγωνίων καὶ Τετραγωνικῶν χωρίων, ὑπὲρ ἀριθμὸν τῷ Κύκλῳ ἐγγραφομένων τε, καὶ περὶ αὐτὸν γραφομένων, εἰς πέρας ἀγαγεῖν δυνατόμεθα· καὶ τῶν Κύκλων δὲ ὃν ἔχῃ πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον, ἐκ τῶ διπλασίου τῶν ἐν τέτοις τε καὶ περὶ αὐτὰς Πολυγώνων ὑποσυνάπτομεν. Τό γε μὴν τῆς κατὰ τὰ Στρατιωτικὰ Ἀρχιτεκτονικῆς χρήσει ὃν εἶδος, τῇ ἐν Κύκλῳ τῶν Πολυγωνίων Σχημάτων ἐγγραφῇ, οὕτω πυκνῶς φέρεται κεχρημένον, ὥς εἰκότως τῷδε τῷ Βιβλίῳ, οἷον ἀρχικῇ τινὶ ἔξει προσανατίθεσθαι.

Ὅ ρ ι σ μ ο ι.

Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς Κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ἢ (ὃ ταυτόν εἶσι) Κύκλος περὶ Σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη τῶν τῷ Εὐθύγραμμῳ Γωνιῶν, πρὸς αὐτῇ εἶσι τῇ τῷ Κύκλῳ Περιφερείᾳ. Ἐστὶ δ' ὁ παρ' Εὐκλείδῃ Γ'. κ' ε'.

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ Κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ἢ (ὃ ταυτόν εἶσι) Κύκλος εἰς Σχῆμα ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἐκάστη Πλευρὰ τῆς τῷ Κύκλῳ Περιφερείας ἐφάπτηται. Οἱ παρ' Εὐκλείδῃ Δ'. κ' Ε'. ἐν ἐνὶ τούτῳ σαφῶς περιέχονται.

Σχῆματα δὲ τεταγμένα καὶ κανονικά λέγεται τὰ Ἰσόπλευρά τε καὶ Ἰσογώνια.

Τῆς δὲ περὶ τῆς ἐγγραφῆς κ' περιγραφῆς τῶν Εὐθύγραμμων πρὸς τὰ Εὐθύγραμμα (τὸν Α'. κ' Β'. φησὶ παρ' Εὐκλείδῃ), τῆς διὰ τῆς προσεπιπτώσεως τῶν Γωνιῶν ἐπὶ τὰς Πλευρὰς ἀποδομένους, καὶ δὴ κ' τὸν παρὰ τῷ αὐτῷ Ζ'. καδ' ὃν Εὐδεῖαν εἰς Κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγει, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς Περιφερείας ἢ τῷ Κύκλῳ, ὡς περιττὸς ἄρα δοκῶντας οἱ περὶ Τακτέσιον παραγράφει.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον (βδ), τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (α) μὴ μείζονι ἴσῃ κ. 270.
τῆς τῷ Κύκλῳ Διαμέτρῳ, ἴσην Εὐδεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἦτοί ἢ τῷ δοθέντος Κύκλου ἀγομένη Διάμετρος βδ ἴση τῇ δοθείσῃ α, κ' γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθὲν· ἢ εἴπερ μείζων, εἰλήφθω ἢ βγ (1) ἴση τῇ ἐλάσσονι α, καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ β, Διαστήματι δὲ τῷ βγ (2) Κύκλος γεγράφθω, καὶ (3) ἐπεξεύχθω ἢ βε, ἢ δὲ ἴσῃ (4) τῇ βγ, κ' ἐπομένως (5) τῇ α.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον, τῷ δοθέντι Τριγώνῳ (χ) ἰσογώνιον Τριγώνον ἐγγράφαι.

Ἦχθω Α'πτομένη τῷ Κύκλῳ ἢ ἐξ κατὰ τὸ δ, κ' συνεσάθω ἢ ὑπὸ εδῇ κ. 271.

(1) Γ. τῇ α. (2) Αἴτ. γ'. (3) Αἴτ. α. (4) Ὁρ. ΙΗ. τῇ α. (5) Ε'κ κατ. καὶ διὰ τὸ Α'. Δξ.

κατὰ τὸ δ (1) ἴση τῇ τῷ Τριγώνῳ Γωνία γ, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζδθ ἴση τῇ α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηθ· φημὶ δὲ ὅτι γέγονε τὸ ἐπιταχθέν.

Ἦ γὰρ κατὰ τὸ θ Γωνία ἴση (2) τῇ ὑπὸ εδθ, τατέσι (3) τῇ ἐν τῷ δοθέντι Τριγώνῳ γ, ἡ δὲ κατὰ τὸ η τῇ ὑπὸ ζδθ, ἦτοι τῇ α, ἡ ἄρα λοιπὴ ὑπὸ ηδθ (4) ἴση ἔσται λοιπῇ τῇ κατὰ τὸ β. Ἄρα εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον κτ. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

„Περὶ τὸν δοθέντα Κύκλον, τῷ δοθέντι Τριγώνῳ (ιλκ) ἰσογώνιον Τριγώνον περιγράψαι.

κ. 272.

Προήχθω ἐκατέρωθεν ἡ Πλευρὰ ικ, ὥστε συζηῖναι τὰς ἐκτὸς Γωνίας ο, ν, καὶ συνεχάσθωσαν δὴ κατὰ τὸ Κέντρον α (5) αἱ ὑπὸ ηαβ, ηαζ ἴσαι ταῖς κατὰ τὸ ο καὶ ν Γωνίαις. Εἴτα κατὰ τὰ Σημεῖα η, β, ζ Εὐθεῖαι ἀπτεύσθωσαν τῷ Κύκλῳ τρεῖς, συμπίπτουσαι κατὰ τὰ Σημεῖα γ, ε, δ.

Ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τῷ Τετραπλευρῷ γηαβ, αἱ κατὰ τὸ β καὶ η Γωνίαι ἄμφω (6) εἰσὶν Ὀρθαῖ, καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα δύο ἥτε ὑπὸ ηαβ, καὶ ἡ κατὰ τὸ γ (7) ἴσαι εἰσὶ δυσὶν Ὀρθαῖς, καὶ ἴσαι ἄρα εἰσὶ ταῖς κ καὶ ο· ὥστε ἀφαιρεθεῖσων τῶν ἴσων (8) ὑπὸ ηαβ καὶ ο, ἔσται ἡ γ λοιπὴ ἴση τῇ λοιπῇ κ. Ὡσαύτως δὲ δευδύησεται καὶ ἡ ι ἴση τῇ δ, ἄρα (9) καὶ ἡ λοιπὴ ε, ἴση τῇ λοιπῇ λ. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ δευ τῷ ιλκ, καὶ περιγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον. Ο. Ε. Π.

Ὅτι δὲ καὶ Ἐφαπτόμεναι προαχθεῖσαι συμπίπτουσιν ἀλλήλαις, ἔτως ἂν δείξαις. Αἱ Γωνίαι ι, ν, καὶ κ, ο, καὶ ἑκατέραν τὴν συζυγίαν δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι (10) εἰσὶν. Αἱ δὲ ι καὶ κ δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν (11), αἱ ἄρα ο καὶ ν (τατέσιν (12) αἱ ὑπὸ ηαβ καὶ ηαζ) δυοῖν Ὀρθῶν μείζονές εἰσι, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ὑπὸ βαζ (13) δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσων ἐστὶ· ἡ ἄρα Περιφέρεια βηζ τῆς ἡμιπεριφερείας (14) μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ ζβ ἐλάσσων, ταύτητοι καὶ ἐπιζευχθεῖσαι ἡ ζβ Εὐθεῖα, ὑπὲρ τὸ Κέντρον α (τατέσι μεταξὺ α καὶ ε) κείσεται. Ἐπεὶ δὲ αἱ ὑπὸ αζε, αβε (15) εἰσὶν Ὀρθαῖ, φανερόν ὅτι αἱ ὑπὸ βζε, ζβε ἐλάσσονές εἰσι δυοῖν Ὀρθῶν. Ὡς (16) αἱ Εὐθεῖαι γβε καὶ δζε προαχθεῖσαι πεσόν-

(1) ΚΓ. τῷ α'. (2) ΑΒ. τῷ γ'. (3) Εκ κατασ. (4) Πόρ. Σ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (5) ΚΓ. τῷ α'. (6) ΙΗ. τῷ γ'. (7) Θεώρ. Α'. τῆς Σχολ. μετὰ τὴν ΑΒ. τῷ α'. (8) Εκ κατασ. (9) Πόρ. Θ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (10) ΙΓ. τῷ α'. (11) ΙΖ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (12) Εκ κατ. (13) Γ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (14) Σχολ. τῆς ΚΓ. τῷ α'. (15) ΙΗ. τῷ γ'. (16) Σχολ. τῆς ΑΑ. τῷ α'.

ται καθ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅσον κατὰ τὸ ε. Παρα-
πλησίῳ δὲ λόγῳ δειχθήσεται ὅτι ἡ σύμπτωσης ἢ τῶν λοιπῶν.

Α' Λ Λ ω ς.

Πρὸς τῷ Κέντρῳ α τῷ δοθέντος Κύκλου, τῷ ἐπὶ τῆς Ἡμιδιαμέτρου βα, κ. 273.
συνεσάδωσαν ὡς ἀνωτέρω αἱ ὑπὸ βαη, ζαβ ἴσαι ταῖς ο ἢ ν ταῖς ἐκτὸς ἕσαις
Γωνίαις τῷ Τριγώνῳ ιλκ, ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ· κατὰ δὲ τὰ Σημεῖα ζ, η, β ἔφα-
πτεύωσαν τῷ Κύκλῳ αἱ τρεῖς Εὐθείαι Γωνίας ὀρθὰς συνισῶσαι τὰς αβγ,
αηγ, ἢ τὰς αβε, αζε, ἢ ἐπεξεύχθησαν αἱ βη, βζ, ἐκατέρωθεν τῆς βα Ἡμι-
διαμέτρου Τρίγωνον συνισῶσαι τὰ βαη ἢ βαζ. Ἐὰν οὖν ἀπὸ τῶν δύο ὀρθῶν
Γωνιῶν ὑπὸ αβγ ἢ αηγ τῷ βαη Τριγώνῳ, ἅς πρὸς τοῖς β ἢ η Γωνίας ἔχει,
ἀφαιρεθῶσι, λοιπαὶ αἱ ὑπὸ ηβγ ἢ βηγ δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονες ἔσονται,
ὥς αἱ Ἐφαπτόμεναι βγ, ηγ προαχθεῖσαι καθ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρ-
θῶν ἐλάσσονες (1), συνελεύσονται τέως κατὰ τι Σημεῖον· ὡσαύτως δὲ καὶ
αἱ βε, ζε συνελεύσονται προαχθεῖσαι ἢ αὐταῖ· προεκβεβλήθησαν οὖν καὶ
συμπιπτεύωσαν, αἱ μὲν κατὰ τὸ γ, αἱ δὲ κατὰ τὸ ε· ἐπεὶ τοίνυν ἐπὶ τῷ
Τετραπλεύρῳ αβγη, αἱ κατὰ τὰ β ἢ η Σημεῖα εἰσὶν Ὀρθαί, αἱ ὑπὸ βαη
ἢ βγη ἴσαι εἰσὶ (2) δυοῖν Ὀρθαῖς. Ἀλλὰ ἢ αἱ ο, ι δυοῖν Ὀρθαῖς (3) ἴσαι
εἰσὶ, ἢ τῶν ἢ ο ἴση (4) τῇ ὑπὸ βαη, ἄρα ἢ ἡ ὑπὸ βγη ἴση τῇ ι. Ὡσαύ-
τως δὲ δειχθήσεται ὅτι ἢ ὑπὸ βεζ ἴση τῇ κ· ἀλλ' αἱ ι ἢ κ ἄμα ληφθεῖσαι,
δυοῖν Ὀρθῶν (5) ἐλάσσονές εἰσιν, ἄρα αἱ ὑπὸ ηγε καὶ γεζ δυοῖν Ὀρθῶν
ἐλάσσονές εἰσι, ταύτητοι αἱ Εὐθείαι γη, εζ προεκβληθεῖσαι συμπεσύνται.
Συμπιπτεύωσαν οὖν κατὰ τὸ δ· καὶ ἐπεὶ αἱ γ ἢ ε Γωνίαι τῷ γδε Τριγώνῳ,
ἴσαι ἐδείχθησαν ταῖς ι ἢ κ τῷ ικλ, ἢ ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ, ἔσαι πάντως ἴση ἢ ἡ
λοιπὴ τῇ λοιπῇ (6), ἥτοι ἢ δ τῇ λ. Καὶ Ἰσογώνιον ἄρα ἐδείχθη τὸ γδε
Τρίγωνον τῷ δοθέντι ιλκ, ἢ περιγέγραπται δὲ (7) ἢ περὶ τὸν δοθέντα Κύ-
κλον. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

„Εἰς τὸ δοθὲν Τρίγωνον Κύκλον ἐγγράψαι.

Αἱ δύο Γωνίαι γ καὶ ε δίχα τετμήθησαν δι' Εὐθειῶν τῶν γα, εα, κ. 274.

(1) Σχολ. τῆς ΑΔ. τῷ α'. (2) Θεώρ. α'. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (3) ΠΓ. τῷ α'. (4) Ε'κ
κατ. (5) ΑΗ. τῷ α'. Πόρ. ιζ'. (6) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (7) Ε'κ κατ.

συνιστῶν κατὰ τὸ α (διὰ τὸ τὰς δύο τῆ Τριγώνου Γωνίας γ καὶ ε δυοῖν Ὁρθῶν (1) ἐλάσσονας εἶναι, καὶ ἔτι τὰς ὑπὸ αγγ καὶ αεγ ἔτι ἐλάσσονας). Ἀπὸ δὲ τῆ α (2) πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ αβ, αη, αζ. Τῇ γυν Κύκλῳ, ὃς ἂν Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αβ γραφεῖν, διὰ τῶν Σημείων ζ καὶ η διερχομένῃ ἐφάπτονται αἱ τρεῖς τῆ Τριγώνου Πλευραί, καὶ ἔτως εἰς τὸ Τρίγωνον ἐγγεγραμμένος ἔσται ὁ Κύκλος.

Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων γαβ καὶ γαη, αἱ μὲν ὑπὸ αβγ καὶ αηγ ἴσαι εἰσιν, ὡς ἄμφω (3) Ὁρθαί, αἱ δὲ ὑπὸ αγγ καὶ αηη ὁμοίως (4) ἀλλήλαις ἴσαι, ἄρα καὶ (5) ὑπὸ γαβ ἴση τῇ ὑπὸ γαη, καὶ ἐπομένως (6) ἡ αβ ἴση τῇ αη. Ὡσαύτως δ' ἄντις δείξετε καὶ τὰς αβ καὶ αζ ἴσας ἔσας, καὶ τοίνυν ὁ α Κέντρῳ καὶ Διαστήματι τῷ αβ ἐγγεγραμμένος (7), καὶ διὰ τῆ η καὶ ζ διελεύσεται. καὶ ἐπεὶ αἱ κατὰ τὰ β καὶ η καὶ ζ Γωνίαι εἰσιν (8) Ὁρθαί, αἱ τῆ Τριγώνου Πλευραὶ (9) ἐφάπτονται τῷ Κύκλῳ, ὥστε ἐγγεγραμμένος ἔσται (10) ὁ Κύκλος εἰς τὸ δοθέν Τρίγωνον. Ο. Ε. Π.

Πορίσματα.

Α. Ἐντεῦθεν οὖν γνωσκομένων τῶν τῆ Τριγώνου Πλευρῶν, δήλα ἡμῖν ἔσται καὶ τέτων τὰ Τμήματα, τὰ διὰ τῶν ἐπαφῶν τῆ ἐγγεγραμμένῃ εἰς τὸ Τρίγωνον Κύκλῳ γινόμενα.

× 275.

Οἶον ἔστω $\delta\gamma = 12$, καὶ $\delta\epsilon = 16$, καὶ $\gamma\epsilon = 18$, καὶ ἔσται $\delta\gamma + \delta\epsilon = 12 + 16 = 28$. εἰς ἀπὸ τέτων ἀφαιρεθῇ $\gamma\epsilon = 18 = \gamma\eta + \epsilon\zeta$, λοιπὰ ἔσται $\eta\delta + \delta\zeta = 10$, ἄρα (11) $\eta\delta = 5 = \delta\zeta$, καὶ $\eta\gamma = 7 = \gamma\beta$, καὶ $\beta\epsilon = 11 = \zeta\epsilon$.

Β. Δοθεῖσῶν τῶν τῆ Τριγώνου Πλευρῶν, καὶ τῆς Ἡμιδιαμέτρου τῆ ἐγγεγραμμένῃ εἰς τὸ Τρίγωνον Κύκλῳ, ῥάδιον ἔστι τὸ ἐμβαδὸν τῆ Τριγώνου προσευρεῖν, νοητέον γὰρ τὰς ἄλλας αη καὶ αε, ὡς ἐπὶ τῆ ἀνωτ. Σχήματος ἡγμένας. Ἐπιζευχθεῖσης γὰρ καὶ τῆς αδ, ἡ τῆ Κύκλου Ἡμιδιάμετρος αὐτὸ τὸ ὕψωμα ἔστι τῶν τριῶν Τριγώνων γαε, εαδ, δαγ, εἰς ἃ τὸ ὅλον Τρίγωνον γδε διανέμεται, αἱ δὲ τέττε Πλευραὶ Βάσεις ἐκείνων. Ἡ ἄρα Ἡμιδιάμετρος ἐπιπολλαπλασιασθεῖσα τῷ τῶν Πλευρῶν ἡμιαθροίσματι, δώσει (12) τὸ ἐμβαδὸν τῆ Τριγώνου γδε.

(1) ΙΖ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῆ α'. (2) ΙΒ. τῆ α'. (3) Ε' κατ. (4) Ε' κατ. (5) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῆ α'. (6) Κε. τῆ α'. (7) Θ. τῆ γ'. (8) Ε' κατ. (9) Ιε. τῆ γ'. (10) Ὁρ. Β. τῆ δ'. (11) Β. Πόρ. τῆς Αε. τῆ γ'. (12) Σχόλ. τῆς ΜΑ. τῆ α'. καὶ Πρώτ. Α. τῆ β'.

Οἷον ἔσω $αβ = 5$, αἱ δὲ Πλευραὶ ὡς ἀνωτέρω 12, 16, 18, τῶν δὲ ἡμιάθροισμα 23, καὶ ἔσαι $5 \times 23 = 115$, τὸ ἐμβαδὸν τῆς Τριγώνου.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

„Περὶ τὸ δοθέν Τρίγωνον Κύκλον γράψαι, ὅταν (ὁ ταυτὸν εἴη) τριῶν δοθέντων Σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων (β, γ, δ), Κύκλον δι' αὐτῶν ἀγόμενον γράψαι.

Ἐπιζευχθεῖσιν τῶν βγ, γδ, καὶ δίχα τμηθεῖσιν κατὰ τὰ α καὶ ε (1), καὶ ἀχθεῖσιν πρὸς ὁρθὰς τῶν (2) σα καὶ εα, τῶν κατὰ τὸ α συνιστῶν, τὸ α Κέντρον ἔσαι, ὃ ἂν καταγραφεῖν ὁ διὰ β καὶ γ καὶ δ διαγόμενος Κύκλος.

Ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ αβ, αγ, αδ, ἐπὶ τῶν Τριγώνων αἱ δο, αο Πλευραὶ ἴσαι ἔσονται (3) ταῖς γδ, αο, αἵτε πρὸς τῷ ο Γωνίαι ἄμφω ὀρθαί, ὥστε (4) ἡ αδ ἴση τῇ αγ ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ αβ ἴση τῇ αγ. Καὶ τῶν τριῶν οὖν ἔστω (5) ἴσων ἔσων, τὸ α (6) Κέντρον ἔσαι τῶν Κύκλων τῶν διὰ τῶν Σημείων ἀγόμενων β, γ, δ.

Π ρ ᾱ ξ ι ς.

Κέντροις τοῖς β καὶ γ καὶ δ ἂν τρεῖς ἴσας ἀλλήλοις γράψῃς Κύκλους τεμνομένους, αἱ ἐπιζευγνύσονται τὰς τῶν Κύκλων τομὰς Εὐθεῖαι, καὶ ὁ συνίασι Σημεῖον, τὸ τῷ ζητημένῳ Κύκλῳ δώσασι Κέντρον.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐκ δὲ τῶν καὶ περὶ Τετραπλευρον (αβγδ), οὗ ἂν αἱ ἀπεναντίον Γωνίαι ὑπὸ αβγ, αδγ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ᾖσι, Κύκλον γράψαι διδασκόμεθα.

Ἐπιζευχθεῖσιν γὰρ τῆς αγ, Κύκλος περὶ τὸ δοθέν Τρίγωνον (7) αβγ γραφήσεται. Ἐὰν οὖν κατὰ τὴν ἀντίθετον Περιφέρειαν ληφθῇτι Σημεῖον το δ, καὶ ἐπιζευχθῶσιν αἱ αδ, δγ, ἔσονται δὲ τῶν αβγδ Τετραπλευρῶν αἱ ἀπεναντίον Γωνίαι β καὶ δ (8) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. Ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῇ αβγδ Τετραπλευρῶν αἱ ἀπεναντίον β καὶ δ (9) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἐὰν ἄρα ἀφαιρεθῇ ἑκατέρωθεν ἡ β, ἔσαι ἡ κατὰ τὸ δ ἴση τῇ κατὰ τὸ ζ. Ἀμφω δὲ τῇ αὐτῇ Περιφέρειᾳ αβγ βεβήκασιν, καὶ τῶν ἡ ἑτέρα δ πρὸς τῇ ἀντιθέτῳ Περιφερείᾳ εἰσὶν,

(1) Γ. τῷ α. (2) ΙΑ. τῷ α. (3) Εκ κατ. καὶ Γ. τῷ γ. (4) Δ. τῷ α. (5) ΑΕ α. (6) Θ. τῷ γ. (7) Διὰ τὴν Πρότ. (8) ΚΒ. τῷ γ. (9) ΕΕ ὑποκ.

ἄρα (1) ἢ ἡ ζ. Ἐνθεντοὶ ὁ διὰ τῶν τριῶν Γωνιῶν α, β, γ , τῆς Τετραπλεύρου $\alpha\beta\gamma\delta$ ὑγμένος, ἤχθῃ πάντως ἢ διὰ τῆς τετάρτης ζ. Ο. Ε. Π.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

κ. 279.

Κατὰ τὴν διαφορὰν τῆς Τριγώνου, περὶ ὃ ὁ Κύκλος γράφεται, διαφέρουσαν ἢ τὸ τῆς περιγραφομένης Κύκλου Κέντρον ἴσχει τὴν θέσιν. Ἐὰν μὲν γὰρ Ὁξυγώνιον τύχη, ἔσαι δὴ τὸ Κέντρον ἐντὸς τῆς Τριγώνου, διὰ γὰρ τὴν ὑπὸ βγδ (2) τὴν ἐν τῷ μείζονι Τμήματι, τὸ Κέντρον α ἐν αὐτῷ τῷ μείζονι Τμήματι πεσεῖται, ἢ Βάσις ἢ βδ· ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται, ὅτι τὸ Κέντρον α ἐν τοῖς μείζουσιν εἰσὶ Τμήμασιν, ὧν Βάσεις αἱ βγ ἢ δγ, ὥς ἐντὸς τῆς Τριγώνου βγδ ἔσαι τὸ α Κέντρον. Ἐν δὲ τῷ ὀρθογώνιῳ Τριγώνῳ, περὶ ὃ ἂν εἴη περιγεγραμμένος ὁ Κύκλος, τὸ Κέντρον θ' κείσεται ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσιν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν εἰ (3). Ἀμβλυγωνίᾳ δὲ τῆς Τριγώνου ὄντος κείσεται τὸ τῆς περιγραφομένης περὶ αὐτὸ Κύκλου Κέντρον μ (4) ἐκτὸς τῆς Τριγώνου.

Α'.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς Κέντρος α , ἐφ' ἐκάστην τῶν Γωνιῶν β, γ , δ τῆς ὀξυγωνίας Τριγώνου ἐπιζευχθῶσιν Εὐθεῖαι $\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta$ (Σχ. 1.), τεμῶσι δὴ τὸ Τρίγωνον εἰς Τρίγωνα τρία ἰσοσκελῆ τὰ $\alpha\beta\gamma, \alpha\beta\delta, \alpha\gamma\delta$, διὰ τὴν τῶν Ἡμιδιαμέτρων ἰσότητά. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον, ἢ εἰ ἐπιζευχθῇ (Σχ. 2.) ἐπὶ τῇ ὀρθογωνίᾳ Τριγώνῳ, περὶ ὃ περιγράφεται ὁ Κύκλος, ἢ ζθ, διελεύσῃ καὶ κείνο εἰς ἰσοσκελῆ δύο τὰ $\epsilon\theta\zeta, \zeta\theta\eta$, ὃ ἢ ἀνωτέρω (5) σσημειώται. Ἐὰν δὲ ἐπὶ ἐκάστης τῶν τῆς Ἀμβλυγωνίας (Σχ. 3) Γωνιῶν, ἀπὸ τῆς Κέντρος μ τῆς περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένης Κύκλου ἐπιζευχθῶσιν αἱ $\mu\iota, \mu\kappa, \mu\lambda$, συστήσονται ὡσαύτως Τρίγωνα τρία ἰσοσκελῆ, ὧν τὸ μὲν $\mu\lambda$, ἢ Βάσις ἢ τὴν Ἀμβλεῖαν ὑποτείνουσα, ἐκτὸς κείσεται τῆς Ἀμβλυγωνίας, ἢ σὺν ἐκείνῳ Τετράπλευρον τὸ $\mu\lambda\kappa$ συστήσει τοῖς δυσὶν ἰσοσκελέσι $\mu\kappa, \mu\lambda$ ἴσον.

κ. 280. Β'.

Ἐπὶ τῇ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῃ ὀξυγωνίᾳ Τριγώνῳ βγδ, εἰ ἀπὸ τῆς Κέντρος α Ἡμιδιάμετροι ἀχθῶσιν αἱ $\alpha\theta\epsilon, \alpha\iota\zeta, \alpha\eta$, πρὸς ὀρθὰς τέμνεται τὰς Πλευράς βγ, γδ, βδ, αὗται δὲ δίχα τεμῶσι (6) τὰς τε Πλευράς κατὰ θ, ι, κ, ἢ τὰς Περιφερείας, αἷ ὑποτείνουσιν αἱ Πλευραὶ κατὰ ε, ζ, η, ἢ τὰς πρὸς τῷ α Γωνίας τῶν ἰσοσκελῶν Τριγώνων.

Ὀμοίως δὲ ἢ ἐπὶ τῇ ὀρθογωνίᾳ λξμ τῇ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῃ

(1) Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν ΚΑ. τῇ γ'. (2) ΑΑ. καὶ Σχόλ. τῆς ΚΑ. τῇ γ'. (3) Αὐτ. (4) Αὐτ. (5) Πόρ. δ. τῆς ΑΑ. τῇ γ'. (6) Γ. τῇ γ'. ἢ Σχόλ. Ὁρ. α'. τῆς Κς. τῇ α'. ἢ Α. τῇ γ'.

να, αὶ πρὸς ὁρθὰς ἀγόμεναι ἐπὶ τῶν Πλευρῶν νρσ, νπτ, ταύταις τε (1) κατὰ ρ καὶ π, καὶ αὖτε αὐταὶ ὑποτείνουσι Περιφερείας κατὰ σ, τ, καὶ τὰς πρὸς τῷ γ Γωνίας δίχα τέμνουσιν, ἡ δὲ νο τὴν Περιφέρειαν λομ, ἣν ἡ Διάμετρος λμ ὑποτείνει, κατὰ τὸ ο δίχα τέμνει.

Ἐπὶ δὲ τῇ Ἀμβλυγωνίᾳ ἡ υφ δίχα τέμνουσα τὴν ὑποτείνουσαν ψψ, καὶ τὸ Τόξον ψχψ διαχθεῖται δίχα (2) τέμνει, καὶ δὴ καὶ αἱ λοιπαὶ να, να καὶ τὰς Πλευράς, καὶ αὖτε αἱ Πλευραὶ ὑποτείνουσι Περιφερείας.

Ἐνθεντοι ἐπὶ τῇ ὀξυγωνίᾳ Τριγῶνι αἱ ἡμίταιαι τῶν Πλευρῶν βδ, δγ, γι, κτ. εἰσὶν τῶν ὑπὸ βαε, εαγ, γαζ, κτ. (3) Ἡμίτονα ὁρθά. (Σχ. 1).

Καὶ παραπλησίως ἐπὶ τῇ ὀρθογωνίᾳ (Σχ. 2.) καὶ Ἀμβλυγωνίᾳ (Σχ. 3.), ἡ μὲν λρ ὁρθὸν εἰς Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ λνο, ἡ δὲ ξπ τῆς ὑπὸ ξνπ ἐπ' ἐκείνῃ, ἐπὶ δὲ τῇ μὲν ψο τῆς ὑπὸ ψνα, ἡ δὲ ωι τῆς ὑπὸ ωνα. Πάλιν ἐπὶ τῇ ὀρθογωνίᾳ ἡ λν Ἡμιδιάμετρος, ὁλικὸν Ἡμίτονον εἰς τῆς ὑπὸ λνο (4) καὶ ἐπεὶ τὸ αὐτὸ εἰς ἐκάστης Γωνίας, καὶ τῇ παραπληρώματος εἰς ὁρθὰς δύο (5) ὁρθὸν Ἡμίτονον, ἐπὶ τῇ Ἀμβλυγωνίᾳ ἡ ψδ, ὁρθὸν Ἡμίτονον εἶναι τῆς τε ὑπὸ ψυφ καὶ τῆς ὑπὸ ψυχ.

Ἡ πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνία ὑπὸ βαε, ἣτις βέβηκεν ἐπὶ τῆς βε ἡμισείας τῆς Περιφερείας βεγ, ἴση εἰς τῇ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ὑπὸ βδγ, ἣτις βέβηκεν ἐπὶ τῆς ὅλης Περιφερείας βγ· ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βαγ τῆς τε ὑπὸ βαε (6) καὶ τῆς ὑπὸ βδγ (7) διπλατίων εἰς, φανερόν (8) ὅτι αἱ ὑπὸ βαε καὶ βδγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν Ὡσαύτως δὲ ἴσαι δειχθήσονται καὶ αἱ ὑπὸ γαδ καὶ γδβ, καὶ αἱ ὑπὸ γαζ καὶ γβδ (Σχ. 1). Αἱ δὲ ὑπὸ λνο καὶ λξμ ἐπὶ τῇ ὀρθογωνίᾳ (Σχ. 2), ὅτι ἄμφω ὀρθαὶ οὖσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δῆλον. Ἐπὶ δὲ τῇ Ἀμβλυγωνίᾳ (Σχ. 3.) ὅτι ἡ ὑπὸ ψυχ ἡ βεβηκεῖα ἐπὶ τῷ ἡμίσει τῇ Τόξῳ ψχ, ἴση τῇ ὑπὸ ψωψ, τῇ βεβηκεῖα ἐπὶ τῷ ὅλῳ Τόξῳ ψχψ, ἥτω δεικνύται· ἐπεξεύχθωσαν αἱ ψχ, χψ· ἡ πρὸς τῷ Κέντρῳ ὑπὸ ψυφ, ἣτις βέβηκεν ἐπὶ τῆς ἡμισείας ψφ τῆς Περιφερείας ψφψ, δειχθήσεται ὡς ἀνωτέρω ἴση τῇ ὑπὸ ψχψ, ἣτις βέβηκεν ἐπὶ τῆς ὅλης Περιφερείας ψφψ. Ἀλλ' ἐπὶ τῇ Τετραπλεύρῳ ψχψω αἱ μὲν ἀπεναντίον χ καὶ ω (9) δυτὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἥτοι τὰς ὑπὸ ψυφ καὶ ψυχ (10), εἰάν ἄρα ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἴσαι ὑπὸ ψχψ, ψυφ, εἶναι λοιπὴν ψυχ ἴση ψωψ.

Παντὸς Τριγῶνι βγδ (Σχ. 1.) αἱ Πλευραὶ βγ, βδ, γδ εἰσὶ πρὸς ἀλ-

(1) Αὐτ. (2) Α. τῇ γ'. (3) Πόρ. α'. τῆς Γ. τῇ γ'. (4) Ο'ρ. Ι. τῇ γ'. (5) Αὐτ. (6) Αὐτ. τὸ Ε. τῶν αὐτ. (7) Κ. τῇ γ'. (8) Α'ξ. ε'. (9) ΚΒ. τῇ γ'. (10) ΙΓ. τῇ α'.

λήλας ὡς τὰ Ἡμίτονα τῶν Γωνιῶν ὑπὸ βδγ, βγδ, γβδ, ὑφ' αἷ ἐκείναι αἱ Πλευραὶ ὑποτείνασιν. Εἰσὶ γὰρ πάντως αἱ Πλευραὶ βγ, βδ, γδ, ὡς τὰ αὐτῶν ἡμίση βδ, βκ, γι· τετέστιν ὡς τὰ Ἡμίτονα τῶν Γωνιῶν (1) τῶν ὑπὸ βαε, βαη, γαζ. Ἀλλ' αὐταὶ αἱ Γωνίαι ταῖς πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ἴσαι εἰσίν, (2) ἢ μὲν δηλονότι τῇ δ, ἢ δὲ τῇ γ, ἢ δὲ τῇ β· ἄρα αἱ Πλευραὶ βγ, βδ, γδ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ Ἡμίτονα τῶν Γωνιῶν, ὑφ' αἷ ἐκείναι αἱ Πλευραὶ ὑποτείνασιν. Ἐκ δὲ δὴ τότε μόνον τὸ Πορίσματος, τὸ πλεῖστον μέρος τῆς ἐπιπέδου Τριγωνομετρίας ἐπιφέρεται, ὅπερ ἀκριβῶς σημειωτέον.

κ. 281. ε'. Κάντεῦθεν τὴν ἀπὸ τῆς γῆς ἀπόστασιν τῆς Σελήνης καταμετρεῖν παιδεύομεθα· δοθείσης γὰρ διὰ τῶν Ἀστρονομικῶν παρατηρήσεων τῆς παραλλακτικῆς Γωνίας ὑπὸ αγβ, καὶ τῆς ὑπὸ δβγ, καὶ δὴ καὶ τῆς ταύτης παραπληρώσεως εἰς δύο Ὁρθὰς ὑπὸ γβα, καὶ μέντοι καὶ τῆς Ἡμιδιαμέτρου τῆς γῆς αβ, ἐρῶμεν ὡς τὸ Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, πρὸς τὸ Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ γβα, ὥτως αβ πρὸς αγ (3) κτ.

κ. 282. ζ'. Ἐντεῦθεν δὲ καὶ τῆς Ἡλιακῆς ἀφ' ἡμῶν ἀποστάσεως ἐνὶ τὸ μέτρον λαβεῖν· καὶ γὰρ αὖθις εἰάν διὰ τῶν Ἀστρονομικῶν παρατηρημάτων, ἢ τῆς κατὰ μῆνα παραλλάξεως Γωνία (ἐν ᾗ μάλιστα διχότομος ἐστὶν ἡ Σελήνη) ληφθῇ ὑπὸ σηγ, καὶ ἡ τῆς Σελήνης ἀπόστασις σγ, ἀναλογισόμεθα ὡδὶ· τὸ Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ σηγ, πρὸς τὸ Ἡμίτονον τῆς Ὁρθῆς ησγ (ἥτοι πρὸς τὴν Ἡμιδιάμετρον (4)), ὥτω σγ ἢ τῆς Σελήνης ἀπὸ τῆς γῆς ἀπόστασις, πρὸς γῆ τὴν τῇ Ἡλίᾳ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ ά σ ι ς ε.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον Τετράγωνον ἐγγράψαι.

κ. 283.

Ἡ"χθωσαν Διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλας τέμνεσθαι (5) αἱ αγ, βδ, καὶ ἐπεξεύχθωσιν αἱ αβ, βγ, γδ, δα. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ βε τῇ εδ (6), ἢ δὲ εἰς ἐπὶ τῶν Τριγώνων βεα, αεδ κοινὴ, ἥτε ὑπὸ βεα ἴση τῇ ὑπὸ (7) αεδ, ἄρα (8) βα ἴση τῇ αδ. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ αβ ἴση δεῖχθήσεται τῇ βγ, καὶ ἡ αδ τῇ δγ, καὶ τὸ αβγδ Ἰσόπλευρον ἔσαι, καὶ δὴ τὸ αὐτὸ καὶ Ὁρθογώνιον· ἐπειδὴ γὰρ αἱ βδ καὶ αγ Διάμετροι ἐτέθησαν, ἔσαι τὰ βαδ, αδγ, δγβ, γβα (9) Ἡμικύκλια, καὶ αἱ ἐν αὐτοῖς (10) Γωνίαι α, β, γ, δ Ὁρθαί. Τετράγωνον ἄρα (11) ἐστὶ τὸ αβγδ, καὶ ἐγγέγραπται (12) εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον.

(1) Πόρ. γ'. τῷ παρόντος Σχολ. (2) Πόρ. δ'. τῶν ἀνωτ. (3) Πόρ. ε'. (4) Ὁρ. Ι. τῷ γ'. (5) ΙΑ. τῷ α'. (6) Ὁρ. ΙΗ. τῷ α'. (7) Εκ κατ. (8) Δ. τῷ α'. (9) ΚΒ. Ὁρ. τῷ α'. (10) ΛΑ. τῷ γ'. (11) Ὁρ. ΛΒ. τῷ α'. (12) Ὁρ. Α. τῷ δ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Περὶ τὸν δοθέντα Κύκλον Τετράγωνον περιγράψαι.

Τῶν Διαμέτρων τῆ Κύκλου ὡς ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἀχθείσων, κατὰ τὰ Ση- 96. 285.
μεῖα α, β, γ, δ ἠχθωσαν αἱ Ἐφαπτόμεναι ζθ, δι, ιη, ηζ· καὶ ἐπεὶ αἱ
πρὸς ταῖς ἐπαφαῖς Γωνίαι (1) Ὅρθαί εἰσιν, οἷον αἱ ὑπὸ ζαε, ζβε καὶ αἱ λοι-
παὶ, ἐπιζευχθείσης τῆς αβ, αἱ ὑπὸ ζαβ καὶ ζβα ἐλάσσονες εἰσι δυοῖν Ὅρθῶν
(2)· καὶ δεικνυμένα τέτα καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν, αἱ Ἐφαπτόμεναι προεκβληθείσαι
συμπεσῶνται, καὶ συστήσεται ἄνω τὸ ζηιθ, ὃ φημὶ δὴ εἶναι Τετράγωνον.

Καὶ γὰρ ἐπειδὴ ὑπὸ ζαε ἰση τῇ ὑπὸ αεδ, ἔσαι (3) ἡ ζι Παράλληλος
πρὸς τὴν βδ, διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ δι Παράλληλος πρὸς τὴν βδ, ὥς
καὶ πρὸς (4) ἀλλήλας. Ομοίως δὲ καὶ αἱ ζθ καὶ ηι Παράλληλοι εἰσὶ τῇ αγ καὶ
ἀλλήλαις, τοιγαρὶν αἱ ζι καὶ δι (ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων ζδ καὶ βι) ἴσαι
ἔσονται (5) τῇ αὐτῇ βδ, καὶ δὴ (6) καὶ ἀλλήλαις· ὡσαύτως δὲ ἐπὶ τῶν Παραλ-
ληλογράμμων ζγ, αι, αἱ ζθ, ηι ἴσαι εἰσὶ τῇ αὐτῇ αγ καὶ ἀλλήλαις. Ἀλ-
λα μὲν αἱ αγ, βδ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν, ἄρα αἱ τέσσαρες ζι, ηι, ιθ, θζ ἴσαι
ἀλλήλαις εἰσιν, ὥς ἰσόπλευρον ἐστὶ τὸ ζηιθ. Ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ β ἐφε-
ξῆς (7) Ὅρθαί εἰσιν, ἄρα καὶ αἱ ἀπεναντίον ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων Γω-
νίαι, ἤτοι ἡ ι καὶ ἡ ι· Ὅρθαί (8) εἰσὶ, καὶ (9) ἐπομένως καὶ αἱ ζ καὶ θ, ὥς καὶ
Ὅρθογώνιον τὸ αὐτὸ ζηιθ, καὶ Τετράγωνον (10) ἄρα, καὶ εἰς τὸν δοθέντα Κύκ-
λον (11) περιγεγραμμένον. Ο. Ε. Π.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Τὸ εἰς τὸν Κύκλον περιγεγραμμένον Τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῷ εἰς
τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένῳ.

Ἐπειδὴ γὰρ ἡ ὑπὸ βαγ ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ (12) Ὅρθή ἐστι, τὸ ἀπὸ τῆς 96. 286.
ὑποτείνουσιν βγ Τετράγωνον (13) ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ καὶ αγ, καὶ ἐπο-
μένως (14) τὸ ἀπὸ βγ, ἤτοι τὸ ἀπὸ εζ περιγεγραμμένον εἰς τὸν Κύκλον Τε-
τράγωνον, διπλάσιόν ἐστι τῷ ἀπὸ αβ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ.

Καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου δὲ αη Τετραγώνῳ, τὸ μὲν περιγεγραμ-

(1) ΙΗ. τῷ γ'. (2) Σχόλ. τῆς ΑΑ. τῷ δ'. (3) ΚΖ. τῷ α'. (4) Α. τῷ α'. (5) ΑΔ.
τῷ α'. (6) ΑΞ α'. (7) Εκ κατ. (8) ΑΔ. τῷ α'. (9) Διὰ τὴν αὐτ. (10) ΔΒ. Ὁρ.
τῷ α'. (11) Εκ κατ. Ὁρ. Α. τῷ δ'. (12) ΑΑ. τῷ γ'. (13) ΜΖ. τῷ α'. (14) Α. Πόρ.
τῆς ΜΖ. τῷ α'.

μένον εἰς τὸν Κύκλον τετραπλάσιον, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον διπλάσιον. Ἀλλ' αὖ ἡ τῆ περιγεγραμμένη Πλευρὰ Διάμετρος ἐστὶ τῆ ἐγγεγραμμένης, ἡ δὲ Πλευρὰ ἡ τῆτε Διάμετρος ἐστὶ τῆ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου βῆ, ἡ ἄρα τῶν Τετραγώνων πρόδος τῶν ἀπὸ τῶν Διαμέτρων πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Πλευρῶν, κατὰ ὑποδιπλασίονα λόγον συνεχῶς χωρεῖ, ἡ δὲ ἀνάπαλιν τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Διαμέτρων κατὰ διπλασίονα, καὶ ἡ μὲν τῶν ἀπὸ τῶν Διαμέτρων τῶν Κύκλων πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Ἡμιδιαμέτρων κατὰ ὑποτετραπλασίονα, ἡ δὲ ἀνάπαλιν τῶν ἀπὸ τῶν Ἡμιδιαμέτρων πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Διαμέτρων κατὰ λόγον τετραπλασίονα.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Εἰς τὸ δοθὲν Τετράγωνον Κύκλον ἐγγράψαι.

κ. 287.

Δίχα τετμήθωσαν αἱ αβ καὶ αδ (1), ἀπὸ δὲ τῶν τομῶν ζ καὶ ε, ἡχθώσαν ἡ μὲν (2) ζη ὁποτέρᾳ τῶν αδ, βγ, ἡ δὲ εθ ὁποτέρᾳ τῶν αβ, δγ, καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ κ, Διαστήματι δὲ τῷ κζ ἡ κε Κύκλος γεγράφθω· φησὶ δὲ ὅτι οὗτος ἐγγεγραμμένος ἐστὶ εἰς τὸ δοθὲν Τετράγωνον, ἐπεὶ γὰρ Παραλληλόγραμμον ἐστὶ (3) τὸ ακ, ἔσται ἡ αζ ἴση τῇ ἀπεναντίον (4) εκ, ἡ δὲ αε τῇ ζκ. Ἀλλ' αἱ αζ καὶ αε, αὗτε δὲ τῶν αβ καὶ αδ ἴσων (5) ἡμίσειαι, ἴσαι (6) ἀλλήλαις εἰσὶν, ἄρα καὶ κζ ἴση τῇ κε· ὡσαύτως δὲ δεῖξω ἴσας εἶναι καὶ τὰς κη, κε, ὥστε ἐπεὶ αἱ τρεῖς κζ, κε, κη ἴσαι ἀλλήλαις, ὁ Κέντρῳ μὲν τῷ κ, Διαστήματι δὲ τῷ κζ γραφόμενος Κύκλος, ἦξει καὶ διὰ τῶν Σημείων ε, η, θ, καὶ τῆτε δὲ ἐφάψονται αἱ Εὐθεῖαι κατὰ τὰ αὐτὰ Σημεῖα· ἐπεὶ γὰρ αἱ Γωνίαι α καὶ β (7) Ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ κατὰ τὸ ε καὶ θ ἀπεναντίον (8) Ὀρθαὶ ἔσονται· ὡσαύτως δὲ διὰ τὸ Ὀρθόν τῶν α καὶ δ, Ὀρθαὶ καὶ αἱ κατὰ ζ καὶ η· ἄρα (9) αἱ αβ, αδ, βγ, γδ Εἵφαπτόμεναι εἰσὶ τῷ Κύκλῳ, καὶ ἔτιω ἐγγέγραπται ὁ Κύκλος (10) εἰς τὸ δοθὲν Τετράγωνον. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Περὶ τὸ δοθὲν Τετράγωνον Κύκλον περιγράψαι.

κ. 288.

Ἐπιζευχθεῖσων τῶν αγ, βδ, Κέντρῳ τῷ ε, Διαστήματι δὲ τῷ εα, ὁ γραφόμενος Κύκλος ἦξει καὶ διὰ β καὶ γ καὶ δ· ἐπεὶ γὰρ αἱ αδ, δβ ἴσαι

(1) I. τῷ α. (2) AA. τῷ α. (3) Εκ κατ. (4) AA. τῷ α. (5) AB. ὁρ. τῷ α.
(6) AE. ε. (7) Εξ ὑποθ. (8) AA. τῷ α. (9) Ιε. τῷ γ. (10) Ὀρ. Β. τῷ δ.

ταῖς γδ, δβ, ε Βάσις ἢ αβ ἴση τῇ βάσει βγ, ἄρα ε ἢ ὑπὸ αδβ ἴση ἐστὶ (1) τῇ ὑπὸ βδγ· ἢ δὲ ὑπὸ αδγ Ὀρθή (2), ἄρα ὑπὸ αδε, εδγ ἡμίσεια Ὀρθῆς ἑκατέρω. Παραπλησίως δεῖξω ε τὰς ὑπὸ εαδ ε εγδ ἡμισείας εἶναι Ὀρθῆς, ὥστε εα ε εγ (3) ἴσαι ἔσονται τῇ αὐτῇ εδ ἑκατέρω, ε δὲ (4) ε ἀλλήλαις· ὁμοίως δὲ δεῖχθήσεται ὅτι ε τῇ εβ. Ὁ ἄρα Κέντρον τῷ ε, ε Διασήμετι τῷ εα γραφόμενος Κύκλος ἦξει ε διὰ β ε γ ε δ, ἄρα κτ. (5). Ο. Ε. Π.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α.

Εὐτεῦθεν δὲ φανερόν, ὡς ἢ ὑπὸ εβα ἢ ὑπὸ τε τῆς Ἀπτομένης εβ, καὶ τῆς Τεμνάσης βα ἡμίσειά ἐσιν Ὀρθῆς, ἦτοι μοιρ. 45. ἢ δὲ ὑπὸ αβδ ἡμιόλειον Ὀρθῆς, ἦτοι μοιρ. 135. Ὡς ε ἢ πλευρὰ αβ τῇ ἐγγεγραφομένῃ εἰς τὸν Κύκλον Τετραγώνῃ (ἢ ὁ ταυτὸν ἐσιν, ἢ Εὐθεῖα ἢ ἀποτέμνουσα τὸ τεταρτημόριον τῆς ὅλης Περιφερείας) ἐναρμοζομένη τῷ Κύκλῳ διατέμνει αὐτὸν εἰς Τμήματα δύο, ὧν τὸ μὲν μείζον βδα (6) Γωνίαν περιέχει τὴν ὑπὸ βγα ἢ βζα ἡμίσειαν ἦσαν Ὀρθῆς, τὸ δ' ἔλαττον αιβ Γωνίαν ἡμιόλειον ἦσαν Ὀρθῆς. Ταύτητοι ε ἢ ἐν τῷ τεταρτημορίῳ Τμήματι Γωνία ἴση ἐστὶν Ὀρθῇ ε ἡμίσεια Ὀρθῆς ἅμα ληφθεῖσαι, ἢ δὲ Γωνία ἢ βεβηκεία ἐπὶ Περιφερείᾳ τεταρτημορικῇ, ἴση ἐστὶν ἡμίσεια Ὀρθῆς.

Καὶ εἰ ἐπὶ τῆς αβ (ἥτις ἐστὶ τῇ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένη Τετραγώνῃ Πλευρὰ) ὡς ἐπὶ Διαμέτρῳ, Κέντρῳ τῷ μεσαιτάτῳ Σημείῳ η, ε Διασήμετι τῷ ηα, ἢ ηβ Κύκλος γραφῇ ἐλάσσων, διελύσεται δὲ ἢ τάτῃ Περιφέρειᾳ διὰ τῇ κ, ὁ Κέντρον ἐστὶ τῇ Κύκλῳ. Εἰ δὲ ε περὶ τὸν μείζονα Κύκλον γεγραμμένον τύχη Τετραγώνον, διήξει πάντως ἢ τῇ ἐλάσσονος Κύκλου Περιφέρειᾳ ε διὰ τῆς τῇ περιγεγραμμένῃ Τετραγώνῃ Γωνίας ε. Περί γάρ τὸ Τετραγώνον αεβη, ἢ ἢ μὲν τῶν Γωνιῶν κ πρὸς τῷ Κέντρῳ ἐστὶ τῇ Κύκλῳ, ἢ δὲ ε τῇ τῇ περιγεγραμμένῃ Τετραγώνῃ Γωνία συμπίπτει, περιγέγραπται (7) ὁ ἐλάσσων Κύκλος.

Π ρ ό τ α σ τ ε ς I.

„Γοσοκελῆς Τρίγωνον συζήσασθαι (βαγ), ἔχον ἑκατέρω τῶν πρὸς τῇ Βάσει Γωνιῶν (αβγ ἢ αγγ), διπλασίονα τῆς λοιπῆς (ἦτοι τῆς κατὰ κορυφὴν α).“

(1) Η. τῷ α'. (2) Εξ ὑποθ. (3) ε. τῷ α'. (4) Αε. α'. (5) Οε. α. τῷ δ. (6) ΑΒ. τῷ γ. (7) Θ. τῷ δ.

Δ'. α. 289

* Καὶ εἰ ἐν α-
πό μέρει τῆς
τεταρτημορ.
Περιφ. ἐπὶ
τὸ πέραρ αὐ-
τῆς ἐπιζευχ-
θῇ εβ, ἢ ὑπὸ
τῶν δύο τεμ-
νωσάν εβ, αβ
τῆς μὲν ὀκ-
τημόριον τῆς
ὅλης Περιφε-
ρείας, τῆς δὲ
τεταρτημορ-
B'.

ριον ἀποτεμ-
νύσης, Γωνία
ὑπὸ εβα τε-
ταρτημορίου
ἐστὶ Ὀρθῆς.
Ὁμοίως δὲ ε
ἢ ὑπὸ τε τῆς
Ἀπτομένης
εβ, ε τῆς ἀ-
ποτέμνουσας
ὀκτημόριον
εβ, οἷον ἢ ὑπὸ
εβι, τεταρ-
τημόριον ε-
στὶν Ὀρθῆς.
Ὡς αὐτῶς δὲ
ε ἢ βεβηκεία
ἐπὶ τῇ ὀκτι-
μορικῇ Περι-
φερείᾳ εβ, ἢ
τοῖ ἢ ὑπὸ
βγι τεταρ-
τημ. ε αὐτῇ
Ὀρθῆς. Καὶ

κ. 289.

ἑξαπλασίων
ἄρα τούτων
ἑκάστης ἢ ἐν
τῷ τεταρτη-
μορικῷ Τμή-
ματι ὑπὸ
αιβ.

Ἐκκείδω τίς Εὐθεία ἢ αβ, ἢ ἄτω τετμήδω κατὰ τὸ δ (1), ὥς το
ὑπὸ αβδ Ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ αδ Τετραγώνω. Καὶ Κέντρῳ μὲν
τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αβ Κύκλος γεγράφθω, ἢ τῷ γραφέντι Κύκλῳ
ἐνηρμόδω (2) ἢ βγ ἴση τῇ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ αγ, καὶ ἔσαι τὸ βαγ
Τρίγωνον τὸ ζητούμενον.

κ. 290.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς γδ, περὶ τὸ γδα Κύκλος (3) γεγράφθω
καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ αβδ ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ αδ, ἦτοι τῷ ἀπὸ
βγ, ἐφάπτεται πάντως ἢ βγ (4) τῷ Κύκλῳ δο, ὃν τέμνει ἢ γδ. Ἄρα ἢ
ὑπὸ βγδ (5) ἴση ἔσαι τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ Τμήματι ὑπὸ γαδ. Κοινῆς δὲ
προεθείσης τῆς ὑπὸ δγα, ἔσαι ἢ ὑπὸ βγα ἴση τῇ α ἢ τῇ ὑπὸ αγδ
ἅμα ληφθείσαις. Ἄλλὰ τὰ σκέλη αγ ἢ αβ ἴσα ἐστὶ, ἢ (6) ἢ ὑπὸ αβγ
ἴση τῇ ὑπὸ βγα, ἄρα ἢ ἢ ὑπὸ αβγ ἴση ἐστὶ τῇ α ἢ τῇ ὑπὸ αγδ ἅμα
ληφθείσαις. Ἄλλαι μὲν ἢ ἢ ἐκτὸς ὑπὸ βδγ (7) ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς ἢ
ἀπεναντίον α, ἢ ὑπὸ αγδ ἅμα ληφθείσαις, αἱ δύο ἄρα ὑπὸ γβδ ἢ γδβ
ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἐπομένως (8) ἢ δγ ἴση ἐστὶ τῇ βγ, ἦτοι (9) τῇ
αδ. Ἄρα αἱ Γωνίαι α, ἢ ὑπὸ αγδ (10) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· δέδεικται δὲ
ἢ ὑπὸ αβγ ἴση ἀμφοῖν ἅμα, τῆς ἄρα κατὰ τὸ α διπλασίων ἐστὶ. Ἄρα
Ο. Ε. Π.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐκ τῆς τῆ Προβλήματος δὲ κατασκευῆς δῆλον, ὅτι τῆς ἐτέρας τῶν
ἴσων τῆ Ἰσοσκελεῖς Πλευρῶν δίδομένης, τὸ ζητούμενον συνίσταται Τρίγωνον.
Δεῖσαν δὲ ἐπὶ τῆς Βάσεως βγ δοθείσης Ἰσοσκελεῖς τοῖσιν συστήσασθαι, ἔ-
περ ἀμέλει ἑκατέρα τῶν πρὸς τὴν Βάσιν Γωνιῶν διπλασίων εἶναι τῆς λοι-
πῆς, πρῶτον ἐπὶ τῆς βγ ὡς ἐπὶ σκέλει, τὸ Τρίγωνον βγδ (11) κατασκευα-
ζέον, ἢ κορυφὴ μὲν ἢ γ, Βάσις δὲ ἢ βδ, εἴτα πρὸς τῷ γ Σημείῳ τῆς
βγ, Γωνίαν δευτέρον τὴν ὑπὸ βγα ἴσην (2) τῇ γβδ, καὶ προεκβληθείσης
τῆς βδ ὥς συμπεσεῖν τῇ γα κατὰ τὸ α, συστήσεται τὸ αβγ Τρίγωνον
κατὰ τὸ ἐπιταχθέν ἐπὶ τῆς δοθείσης Βάσεως βγ.

Ἐπειδὴ γὰρ αἱ ὑπὸ βδγ ἢ αγβ, ὡς τῇ αὐτῇ τρίτῃ, ἴσαι ἐτέθησαν
(13) ἢ ἀλλήλαις, καὶ τέτων ἢ μὲν ὑπὸ βδγ (14) ἴση δυσὶ ταῖς ἐντὸς ἢ

(1) ΙΑ. τῷ β'. (2) Α. τῷ β'. (3) Ε. τῷ δ'. (4) ΑΖ. τῷ γ'. (5) ΑΒ. τῷ γ'. (6) Ε. τῷ α'. (7) ΑΒ. τῷ α'. (8) ζ. τῷ α'. (9) Ε'κ κατασ. (10) Ε. τῷ α'. (11) Διὰ τῆ
ανωτ. Προβλ. (12) ΚΓ. τῷ α'. (13) Ε'κ κατ. (14) ΑΒ. τῷ α'.

ἀπεναντίον τῇ τε α καὶ τῇ ὑπὸ δγα, ἡ δὲ ὑπὸ βγα ἰση ταῖς ὑπὸ βγδ καὶ δγα, κοινῆς ἄρα ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ δγα, ἔσαι ἡ ὑπὸ βγδ ἰση τῇ α· ταύτης ἄρα διπλασίων ἑκατέρω τῶν πρὸς τὴν Βάσιν τῷ μείζονος Τριγώνου ἔσαι, ὅτι κἀκείνης.

Πορίσματα.

Ἐκατέρω τῶν πρὸς τῇ Βάσει Γωνιῶν β καὶ γ τῷ ἤδη συζάντος Ἰσοσκελὸς Τριγώνου, δυοὶ πεμπτημόριοις δυοῖν Ὁρθῶν ἰση εἰς, τατέσι τέσσαρα πεμπτημόριοις μιᾶς Ὁρθῆς, ἡ δὲ λοιπὴ α ἐν εἰς πεμπτημόριον δυοῖν Ὁρθῶν, ἦτοι πεμπτημόρια δύο μιᾶς. Δῆλον δὲ τὸ λεγόμενον ἔκτε τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτάσεως, καὶ ἐκ τῆς ΑΒ'. τῷ πρώτῳ.

Ἐπειδὴ οὖν μέτρον δυοῖν Ὁρθῶν τὸ Ἡμικύκλιον εἰς, μοιρῶν ἀμέλει 180, ἔσαι δὴ τὸ μὲν τῶν δύο Ὁρθῶν πεμπτημόριον, οἷα ἡ α Γωνία μοιρ. 36. τὰ δὲ δύο πεμπτημόρια τῶν δύο Ὁρθῶν, οἷα ἡ κατὰ τὸ β Γωνία, μοιρ. 72. Καὶ ἐπεὶ ἡ Ὁρθὴ μοιρ. εἰν 90, τὸ ταύτης πεμπτημόριον μοιρ. εἰς 18· ἄρα ἡ κατὰ τὸ α Γωνία (μοιρ. ἔσα 36) δύο πεμπτημόρια μιᾶς Ὁρθῆς περιέχει. Ἡ δὲ κατὰ τὸ β Γωνία (μοιρ. ἔσα 72) τέσσαρα πεμπτημόρια μιᾶς Ὁρθῆς, ἡ δύο πεμπτημόρια δυοῖν περιέχει· τὰ γὰρ δύο πεμπτημόρια δυοῖν Ὁρθῶν τέσσαρα εἰς μιᾶς, καὶ τὸ πεμπτημόριον δυοῖν δύο μιᾶς. Καὶ ἐν γένει διὰ τῶν μορίων τῶν Ὁρθῶν ἐπιλογιζόμενοι τὰς Γωνίας, τῇ ἡμισείᾳ τῇ τῶν Ὁρθῶν ἀριθμῷ, τὸν ἀριθμὸν τῶν μορίων διπλασιάζομεν, καὶ ἀνάπαλιν. Οἷον εἰν τις Γωνία ἐξ Ὁρθῆς πεμπτημόρια περιέχουσα τύχη, περιέξει πάντως ἡ αὐτὴ δυοῖν Ὁρθῶν τρία πεμπτημόρια.

Ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ βαγ (ὅρα τὸ Σχ. τῆς Προτ.) δυοῖν Ὁρθῶν εἰς πεμπτημόριον, ἦτοι δύο δεκατημόρια, μοιρ. ἀμέλει 36, ἔσαι πάντως ἡ αὐτὴ δεκατημόριον Ὁρθῶν τεττάρων, ἦτοι τῆς ὁλοκληρῆς τῇ Κύκλῳ Περιφερείας, μοιρ. 360. Ἐνθεντοὶ ἡ Εὐθεῖα βγ Πλευρὰ εἰς τῇ κανονικῇ Δεκαγώνῳ τῇ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφομένῃ, οὗ Ἡμιδιάμετρος ἡ Εὐθεῖα αβ, εἶπεν ἡ αγ.

Ἐὰν ἡ τῇ Κύκλῳ Ἡμιδιάμετρος αβ (Σχ. τῷ αὐτ.) ἦτω τμηθῇ κατὰ τὸ δ, ὥς τὸ ὑπὸ αβδ Ὁρθογώνιον, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης Ἡμιδιαμέτρου καὶ τῇ ἐλάσσονος Τμήματος, ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῇ δα μείζονος Τμήματος, ἔσαι τὸ μείζον τῶν Τμημάτων ἡ Πλευρὰ τῇ Δεκαγώνῳ τῇ εἰς τὸν Κύκλον, ἡ Ἡμιδιάμετρος ἡ αβ, ἐγγραφομένη. Φανερόν γὰρ τῇ ἀποδείξει τῆς ἐν Χερσὶ Προτάσ., ὅτι τὸ αδ Τμήμα ἴσον εἰς τῇ Βάσει βγ.

Ἐὰν Κέντρῳ μὲν τῷ γ, Διαστήματι δὲ τῷ γβ ἡ γδ Κύκλος γραφῇ, ἐ-

πειδὴ τὸ βγδ Ἰσοσκελὲς τῷ βαγ Ἰσοσκελεῖ ἐστὶν ἰσογώνιον (1), ἔσαι δὴ ἡ Βάσις βδ Πλευρὰ τῆ κανονικῆς Δεκαγώνου (2), ὅπερ ἂν εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφεῖν. Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆ Κύκλου Ἡμιδιάμετρος γβ = (3) αδ Πλευρὰ ἐστὶ τῆ Ἑξαγώνου (4), ὅπερ ἂν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφεῖν, ἔαν ἄρα Εὐθεῖα τις οἶον ἡ αβ, ἔτω τμηθῇ κατὰ τὸ δ, ὥστε τὸ ὑπὸ αβδ Ὀρθογώνιον, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ καὶ τῆ ἐλάσσονος Τμήματος βδ, ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆ μείζονος Τμήματος αδ, ἔσαι τὸ μὲν μείζον τῶν Τμημάτων αδ Πλευρὰ τῆ Ἑξαγώνου, τὸ δὲ ἔλαττον δβ Πλευρὰ τῆ Δεκαγώνου τῆ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφομένη. Καὶ αὕτη ἐστὶν ἡ παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ ἐν Βιβλ. ΙΓ'. Πρώτ. Θ.

Ε'. Ἐντεῦθεν δὲ παιδευόμεθα τὴν τῆ Κύκλου τεταρτημορικὴν Περιφέρειαν εἰς μέρη πέντε ἴσα ἄλλήλοις, καὶ (τῆς δίχα τομῆς συνεχιζομένης (5)) εἰς μέρη 10, 20, 40, καὶ τέμνειν. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ βγ Εὐθεῖα Πλευρὰ ἐστὶ τῆ κανονικῆς Δεκαγώνου (6) τῆ εἰς τὸν Κύκλον, δὲ Κέντρον μὲν τὰ α, Ἡμιδιάμετρος δὲ ἡ αβ, ἐγγραφομένη, ἔσαι δὴ τὸ Τόξον βγ δεκατημόριον τῆς ὅλης Περιφέρειας, ἥτοι πεμπτημόριον τῆς Ἡμιπεριφέρειας. Ἐνθεντοὶ ἡ ἡμίσεια τῆ Τόξου βγ δεκατημόριον ἔσαι τῆς Ἡμιπεριφέρειας, πεμπτημόριον δὲ τῆς τεταρτημορικῆς.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον Πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον „(ἥτοι κανονικόν) ἐγγράψαι.

α. 291.

Συνεσάδω Τρίγωνον (7), δὲ ἑκατέρω τῶν πρὸς τῇ Βάσει Γωνιῶν διπλασιῶν εἶη τῆς λοιπῆς, τῷ δὲ συσπέννῃ Ἰσογώνιον ἐγγεγράφω (8) εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον τὸ γαδ, καὶ τῷ ἐγγραφέντος αἱ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι ὑπὸ αγδ, αδγ δίχα (9) τετμήσθωσαν διὰ τῶν γε καὶ δβ Εὐθειῶν, τῶν τῇ Περιφέρειᾳ κατὰ τὰ Σημεῖα ε καὶ β. προσπιπτουσῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εα.

Ἐπεὶ οὖν αἱ Γωνίαι ζ, η, θ, ι, κ ἴσαι (10) ἄλλήλαις εἰσὶ, καὶ αἱ Περιφέρειαι πάντως αἷς βεβήκασι αε, εδ, βγ, αβ, γδ (11), ἴσαι ἄλλήλαις εἰσὶ, καὶ δὴ καὶ αἱ τὰς ἴσας Περιφέρειας ὑποτείνουσαι Εὐθεῖαι (12) ἴσαι

(1) Διὰ τὴν ἀπόδ. τῆς I. τῆ παρόντ. (2) Πόρ. β'. τῆς παρὸς. (3) Διὰ τὴν κατ. ταύτ. τῆς I. (4) Α. Πόρ. τῆς ΙΕ. τῆ δ'. (5) Α. Βιβ. γ'. (6) Πόρ. Β. ταύτ. (7) Κατὰ τὴν ἀνωτ. (8) Β. τῆ δ'. (9) Θ. τῆ α'. (10) Ε' κατ. (11) Κε, τῆ γ'. (12) ΚΘ. τῆ γ'.

ἄλλῃλαις εἰσὶν, ὥστε τὸ Πεντάγωνον εἶναι ἰσόπλευρον· ἄλλ' ἔστι δὲ ἡ ἰσογώνιον, ἐπεὶ αἱ τὰτα Γωνίαι βαε, αεδ, κτ. βεβήκασιν ἐπὶ ἴσων (1) Περιφερειῶν βγδε, αβγδ, κξ. γέγονεν ἄρα (2) τὸ ἐπιταχθέν.

Πορίσματα.

Ἡ τῷ ἰσοπλεύρῳ τε ἢ ἰσογώνῳ Πενταγώνῳ Γωνία ἴση ἐστὶν ἕξ πεμπτιμορίοις μιᾷς Γωνίας Ὁρθῆς (ἦτοι (3) τρισὶ πεμπτιμορίοις δυοῖν Ὁρθῶν). Ἐπειδὴ γὰρ αἱ πρὸς τῷ α τρεῖς Γωνίαι ἴσαι εἰσὶν ὡς ἐπὶ ἴσων Περιφερειῶν βγ, γδ, δε βεβηκείαι, ἡ δὲ μετὰξὺ ἴση ἐστὶ δυοῖ (4) πεμπτιμορίοις Ὁρθῆς, φανερόν ὅτι αἱ τρεῖς ἅμα (ταυτόν δὲ εἶπεῖν ἡ τῷ Πενταγώνῳ Γωνία) ἴση ἔσται ἕξ πεμπτιμορίοις μιᾷς Ὁρθῆς.

Ὡς ἐπεὶ τὸ πεμπτιμόριον τῆς Ὁρθῆς μοιρ. ἐστὶ 18, ἔσται ἡ τῷ Πενταγώνῳ Γωνία μοιρ. 18 ἑξάκις, ἦτοι μοιρ. 108. ἐν ᾧ δὲ φανερὸν ἕξ πεμπτιμόρια Ὁρθῆς τὴν τῷ Πενταγώνῳ Γωνίαν περιέχειν, δῆλον ὅτι πεμπτιμόριον Ὁρθῆς, τὴν Ὁρθὴν αὐτὴν ὑπερέχειν ἀποφανόμεθα.

Ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῷ Προβλήματος κατασκευῆς φανερόν γίνεταί, ἢ ὅπως ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας γδ Πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε, ἢ ἰσογώνιον ἐνὶ συστήσασθαι. Συνεσάδω γὰρ ἐπ' αὐτῆς ὡς ἐπὶ Βάσεως (5) τὸ ἰσοσκελὲς γαδ, οὐπὲρ ἑκάτερα τῶν πρὸς τῇ Βάσει Γωνιῶν διπλασίῳ εἴη τῆς λοιπῆς, καὶ περὶ αὐτὸ συσάδην Κύκλος (6) γεγράφθω καὶ δίχα τετμήσθωσαν (7) αἱ πρὸς τῇ Βάσει Γωνίαι δι' Εὐθειῶν τῶν γε, δβ τῇ Περιφερείᾳ προσπιπτουσῶν κατὰ Σημεῖα τὰ ε καὶ β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εα. Οὕτω ἢ γὰρ Πεντάγωνον συστήσεται ἰσόπλευρόν τε ἢ ἰσογώνιον ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας γδ, ὡς ἐν τῇ ἀποδείξεως τῆς Προτάσεως δηλον ἐστὶ. Ἀλλὰ καὶ δι' ἄλλης τῆς μεθόδου συνίστασθαι τὸ εφεξῆς διδάσκεται Πρόβλημα.

Σχόλιον Α'.

Ἐν γένει μὲν οὖν τῶν κανονικῶν Σχημάτων τὰ μὲν περιττόπλευρα ἐγγράφονται πέφυκεν εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον δι' ἰσοσκελῶν Τριγώνων, ὧν αἱ πρὸς τῇ Βάσει ἴσαι Γωνίαι, τῶν κατὰ κορυφὴν τυγχάνουσιν ἴσαι πολλαπλα-

(1) ΚΖ. τῷ γ'. (2) Ὁρ. γ'. καὶ α'. (3) Α'. Πόρ. τῆς ἀνωτ. (4) Αὐτ. (5) Σχολ. τῆς Ι. τῷ δ'. (6) Ε. τῷ δ'. (7) Θ. τῷ α'.

σίονες, τὰ δὲ ἄρτιόπλευρα δι' ἰσοσκελῶν Τριγώνων, ὧν αἱ πρὸς τῇ Βάσει ἴσαι Γωνίαι, τῶν κατὰ κορυφὴν εἰσι πολλαπλασίονες ἡμιόλαιοι. Οἷον ἐπὶ τῇ Ἰσοσκελεῖ α γ δ, εἴαν ἡ Γωνία γ, ἢ δ τριπλασίων ἢ τῆς α, ἢ γ δ ἔσαι Πλευρὰ Ἑπταγώνου· εἴαν δὲ τετραπλασίων, Ἑνεαγώνου κξ. Εἴαν δὲ ἡ γ ἢ δ ἢ $1\frac{1}{2}$ τῆς α, ἔσαι ἡ γ δ Πλευρὰ Τετραγώνου, καὶ εἴαν ἡ γ ἢ δ ἢ $2\frac{1}{2}$ τῆς α, ὑποτενεῖ ἡ γ δ ἐκτιμόριον τῆς ὅλης Περιφερείας· καὶ εἴαν ἡ γ, ἢ δ ἢ $3\frac{1}{2}$, ἔσαι ἡ γ δ Πλευρὰ Ὀκταγώνου, κξ. Καθάπερ γὰρ ἐπὶ τῇ τῆς ἐν χερσὶ Προτάσεως Ἰσοσκελεῖς, τῶν πρὸς τῇ Βάσει διχοτομημένων Γωνιῶν τὰ μέρη, συνάμα τῇ κατὰ κορυφὴν Γωνίᾳ βεβήκασιν ἐπὶ πέντε ἴσοις Τόξοις τῆς ὅλης Περιφερείας, διὸ καὶ τῇ τοιῷδε Τριγώνῳ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραφομένῳ, ἡ Βάσις Πλευρὰ ἔσαι τῇ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραφομένῳ τὸν αὐτὸν ἰσοπλεύρῳ τε καὶ ἰσογωνίῳ Πενταγώνῳ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, καὶ εἴαν ἡ ἑτέρα τῶν πρὸς τῇ Βάσει τῇ Ἰσοσκελεῖ Γωνιῶν, τριπλασίων τύχη τῆς κατὰ κορυφὴν, τῶν πρὸς τῇ Βάσει τριχοτομημένων Γωνιῶν τὰ μέρη συνάμα τῇ κατὰ κορυφὴν Γωνίᾳ, ἐπὶ Τόξων ἑπτὰ βεβήσονται ἰσαριθμῶν τοῖς μέρεσι τῆς ὅλης Περιφερείας, διὸ καὶ τῇ τοιῷδε Τριγώνῳ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραφομένῳ ἡ Βάσις Πλευρὰ ἔσαι τῇ κανονικῇ Τετραγώνῳ, ὅπερ ἂν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφεῖν. Ὡσαύτως δὲ δήλον ἔσαι καὶ περὶ τῶν λοιπῶν. Ἐς ω καὶ γὰρ α ὁ ἀριθμὸς τῶν Πλευρῶν τοῦ κανονικῆ Σχήματος ὅπερ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφειν δεῖ, ἔσαι δὲ ἡ τῇ εἰς ἐγγραφὴν τῆτε ὑπεργάντος Ἰσοσκελεῖς Γωνία πρὸς τῇ Βάσει, πρὸς γε τὴν κατὰ κορυφὴν Γωνίαν τῇ αὐτῇ, ὡς $\frac{a}{2}$ πρὸς 1· ὥς εἴαν Μονὰς ἀντὶ τῆς κατὰ κορυφὴν Γωνίας ὑποτεδῇ, τὰς πρὸς τῇ Βάσει Γωνίας τῇ Ἰσοσκελεῖς, συνάμα τῇ κατὰ κορυφὴν διὰ τῶνδε δὴ τῶν ἀριθμῶν, ἐπὶ τῇ ἐγγραφῇ ἔτινος τῷ Σχήματος κανονικῇ ἐκδετέον. Ἀμέλειτοι ἐπὶ μὲν τῇ

$$\text{Ἰσοπλεύρου Τριγώνου} \quad 1 + 1 + 1 = 3.$$

$$\text{Ἐπὶ δὲ τῇ Τετραγώνῳ} \quad 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 1 = 4.$$

$$\text{Ἐπὶ δὲ τῇ Πενταγώνῳ} \quad 2 + 2 + 1 = 5.$$

$$\text{Ἐπὶ δὲ τῇ Ἑξαγώνῳ} \quad 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 1 = 6.$$

$$\text{Ἐπὶ δὲ τῇ Ἑπταγώνῳ} \quad 3 + 3 + 1 = 7.$$

$$\text{Ἐπὶ δὲ τῇ Ὀκταγώνῳ} \quad 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} + 1 = 8.$$

$$\text{Ἐπὶ δὲ τῇ Ἑνεαγώνῳ} \quad 4 + 4 + 1 = 9.$$

$$\text{Ἐπὶ δὲ τῇ Δεκαγώνῳ} \quad 4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} + 1 = 10.$$

Καὶ ἐπὶ τῶν ἐξῆς δὲ ὡσαύτως χωρητέον.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.

Εὐμήχανος μὲν ἢ κατ' Εὐκλείδην τῷ Πενταγώνῳ εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον ἐγγραφή, προχειροτέρα δὲ πολλῶ ἢ κατὰ Πτολεμαῖον ἐν πρώτῳ Βιβλ. τῷ Ἀλμαγέστῃ· ἐς τοιαύτην.

Ἡ' χ' ὥσαν αἱ Διάμετροι εἰς, β' ζ' πρὸς ὁρθὰς τεμνόμεναι κατὰ τὸ α, ἢ α. 292.
 δίχα (1) τετμήσθω ἡ αὐτὴ ἡμιδιάμετρος κατὰ τὸ γ, ἢ Κέντρῳ μὲν τῷ γ, Δια-
 σήματι δὲ τῷ γβ Κύκλος γεγράφθω, τέμνων τὴν εἰς Διάμετρον κατὰ τὸ η.
 Οὕτω ἢ γὰρ ἡ ἐπιζευγνυμένη Εὐθεία ἢβ Πλευρά ἐστι τῷ Πενταγώνῳ, ἡ δὲ
 αὐτὴ τῷ Δεκαγώνῳ.

Ἀ' ζ' ἐνταῦθα τὴν δεῖξιν ἐπαγαγεῖν τῷ λεγομένῳ ἢχ οἷον τε, ἄτε δὴ
 ἐκ τῆς Γ'. τῇ κατ' Εὐκλείδην ΙΓ'. Βιβλίῳ ἐξηρητημένην, ἣν ὅρα παρὰ τῷ Κλα-
 βίῳ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν Γ'. τῇ ΙΓ'. Βιβλίῳ.

Ε' πὶ γὰρ τῆς Γ'. ἐκείνης τῇ κατ' αὐτὸν ΙΓ'. ἀποδείκνυσιν ὁ Εὐκλείδης,
 ὅτι ἡ Πλευρὰ τῇ εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον ἐγγεγραμμένη ἰσοπλεύρα τε ἢ
 ἰσογωνία Πενταγώνῳ, ἴσα δύναται τῇ τε τῷ Ἐξαγώνῳ Πλευρᾷ, ἢ τῇ τῷ
 Δεκαγώνῳ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραφομένων. Ἀ' ζ' ὅτι δὴ τῷ Ἐξα-
 γώνῳ Πλευρὰ τῇ τῷ Κύκλῳ ἡμιδιαμέτρῳ ἴση ἐστὶ, φανερόν ἐστι ἐκ τῆς Α' Πο-
 ρίσματος τῆς ΙΕ'. τῇ Δ'. Ὅτι δὲ ἢ ἡ τῇ εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραφομένη Κύκλον
 Δεκαγώνῳ Πλευρὰ, τὸ μείζον ἐστὶ τῶν Τμημάτων τῆς ἡμιδιαμέτρου, τῆς κα-
 τὰ τὴν ΙΑ'. Πρότ. τῇ Β'. Βιβλίῳ τετμημένης, φανερόν ἢ τῷ ἡδὴ ἐγένετο
 ἐν τῷ Γ'. Πορίσματι τῆς Γ'. τῇ παρόντος Δ'. Ἀ' ζ' ἢ ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ αβ
 τῷ ὁρθογωνίῳ κατὰ τὸ α, ὅτι μὲν ἢ αβ Πλευρὰ ἡμιδιαμέτρος ἐστὶ τῷ Κύκλῳ
 δῆλον· ὅτι δὲ ἢ ἡ αὐτὴ Πλευρὰ, τὸ μείζον ἐστὶ Τμήμα τῆς ἡμιδιαμέτρου αε,
 τῆς κατὰ τὴν ΙΑ'. τῇ Β'. τετμημένης, ἐπιγνοίη τις ἂν τὴν ἐπὶ τῆς ΙΑ'. τῇ Β'.
 κατασκευὴν, τῇ τῇ ἐν χερσὶ Σχολίῳ παραδόμενος. Ἀ' ρα διὰ τὴν Γ'. τῇ ΙΓ'.
 ἢ τὴν ΜΖ'. τῇ Α'. ἢ βη ἐστὶ ἡ Πλευρὰ τῷ Πενταγώνῳ τῇ εἰς τὸν Κύκλον
 ἐγγεγραφομένη, ἡ δὲ τῆς Γ'. τῇ ΙΓ'. ἀπόδειξις κατὰ τὸ τέλος τῇ ἕκτῃ Βιβ-
 λίῳ παρατελεῖται.

Ἡ' δὲ παράθεσις τῶν κατασκευῶν τῆς τε ΙΑ'. τῇ Β'. ἢ τῆς κατὰ τὸν α. 293.
 Πτολεμαῖον ἐπιλύσεως τῷ Προβλήματος, ἢτω γινέσθω· ἐπὶ μὲν ἐκείνης ἢ
 αβ (2) ἴση ἔσται τῇ αε, ἢ πρὸς ὁρθὰς δίχα ἐτέμνετο κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπε-
 ζεύγνυτο ἢ δε, ἢ προήγετο ἢ δε κατὰ τὸ κ, ὡς εἶναι τὴν δε ἴσην τῇ δε,

(1) Γ. τῇ α'.

ὅτι τὸ μῆκος τῆς προαχθείσης τῷ ακ ἴση ἀπετέμενετο ἀπὸ τῆς αε ἢ αη, ὅ
ἔτω τὸ ἀπὸ τῆς αη Τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ αει Ορθογωνίῳ ἐδείκνυτο.

Ἐπὶ δὲ ταύτης παραπλησίως (4) $αβ = αε = αδ$. διχα δὲ τέμνεται
ἢ αδ κατὰ τὸ γ, ὅτι ἐπεξεύχθη ἢ γβ, τὸ δὲ ταυτὸν ἐστὶν ὡς εἰ διχα τμηθεῖν
ἢ αβ κατὰ τὸ δ, ὅτι ἐπιξεύχθη ἢ εδ. Ἐπεὶ δὲ ἢ εδ = βγ (ἐν γὰρ τοῖς
αβγ, αδε Τριγώνοις $αγ = αδ$, ὅτι τῶν ἴσων ἡμίσειαι, καὶ $αβ = αε$, ὅτι
τῶ αὐτῇ Κύκλῳ Ἡμιδιάμετροι, ἥτε ὑπὸ γαβ = δαε, ἄρα ὅτι βγ = δε), εἰ
ληφθῇ δκ = δε, ὅτι γβ = γη, ἔσται γη = δκ, ἄλλ' $αγ = αδ$, ἄρα ακ =
αη. Καὶ ὡσαύτως ἄρα κἀνταῦθα, κατὰ τὴν τῆς ΙΑ. τῇ Β'. κατασκευῇ, τὸ ἀπὸ
τῆς αη Τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ αει Ορθογωνίῳ.

Π ρ ό β λ η μ α .

Ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας (αβ) Πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε ὅτι ἰσογώ-
νιον (ὁπέρ ἐστι κατὰ τὰς ὕψερων εἰπεῖν, τεταγμένον) ἔτω συστήσεις.

κ. 294.

Τῆς αβ τμηθείσης (1) κατὰ τὸ γ, ὡς τὸ Ορθογώνιον ὑπὸ αβγ ἴσον
εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ αγ, ἀπὸ τῆς αβ ἐκατέρωθεν προαχθείσης,
ληφθῆναι αδ ὅτι βε ἴσαι ἐκάτερα τῷ μείζονι τμήματι αγ, καὶ Κέντροις α
ὅτι δ, Διαστήματι δὲ τῷ αβ, γραφήτωσαν Κύκλοι τέμνοντες ἀλλήλους κατὰ τὸ
ζ· ὅτι πάλιν Κέντροις β ὅτι ε, Διαστήματι τῷ αὐτῷ γραφήτωσαν ὁμοίως Κύκ-
λοι ἀλλήλους τέμνοντες κατὰ τὸ η· καὶ τέως Κέντροις τοῖς ζ ὅτι η, ὅτι τῷ αὐ-
τῷ Διαστήματι αβ, Κύκλοι γραφήτωσαν ἀλλήλους τέμνοντες κατὰ τὸ ι· Τὰ
γὰρ Σημεῖα α, ζ, ι, η, β, ἐπιξευγνόμενα δώσει τὸ τεταγμένον Πεντά-
γωνον (τετέστι τὸ ἰσόπλευρόν τε ὅτι ἰσογώνιον) ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας αβ.

Καὶ ἐκ μὲν τῆς κατασκευῆς δῆλον ὅτι ἰσόπλευρον· εἶναι δὲ ὅτι ἰσογώ-
νιον ὥδε δειχθήσεται. Ἀχθείσης τῆς δζ, τὸ αδζ ἔσται (2) ἰσοσκελές, ἐπεὶ
τε ἢ τέτε Βάσις αδ, τὸ μείζον Τμήμα ἐστὶ τῆς δζ Πλευρᾶς, τῆς κατ' ἄκρον
ὅτι μέσον λόγον (3) τμηθείσης (ἴση γὰρ ἢ δζ τῇ αβ, ὅτι ἢ αδ τῇ αγ), ἢ ἄρα
ὑπὸ δαζ ἴση ἐστὶ δυσὶ πεμπτημορίοις (4) δυσὶν Ορθῶν. Ὡς ἢ λοιπὴ ὑπὸ
ζαβ ἴση ἔσται (5) τριτὶ πεμπτημορίοις δυσὶν Ορθῶν, ὁπέρ ἐστιν ἐξ πεμ-
πτημορίοις μιᾶς Ορθῆς, ταύτη δὲ τοι ὅτι Γωνία ἐστὶν αὕτη (6) τῇ Πενταγώνῳ
τῇ τεταγμένῃ. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ὅτι ὅτι ὅτι ὑπὸ ηβα, πεμπτημορίοις
ἐξ μιᾶς Ορθῆς ἰσομένη, τῇ ὑπὸ ζαβ ἴση ἐστὶ. Διὸ ὅτι τὰς λοιπὰς ἐπ' ἀνάγκης

(1) ΙΑ. τῇ β'. (2) Ε' κατ. (3) Παράδειγμα τὴν Α. τῇ ε'. μετὰ τῆς ΙΑ. τῇ β'. (4)
Α. Πόρ. τῆς Ι. τῇ δ'. (5) ΙΓ. τῇ α'. (6) Α. Πόρ. τῆς ΙΑ. τῇ δ'.

(λέγω τὰς ζ ἢ ι ἢ η) ἴσας ταύταις εἶναι, ὡς δῆλον ἐκ τῆς H' . τῆ A' , τῆς $\zeta\eta$ ὑποτείνεσθαι νομμένης.

Ἀ'χθεισὼν γὰρ τῶν $\zeta\eta$, $\zeta\beta$, διὰ τὰ ἐπὶ ἴσων Βάσεων αὐτῶν ϵ ἢ $\beta\epsilon$ ἴσα Τρίγωνα αὐτῶν, εἰσι, παράλληλοι ἔσονται (1) αἱ Εὐθείαι $\zeta\eta$, δε' ἐνθεντοὶ αἱ ἑναλλάξ Γωνίαι ὑπὸ $\delta\alpha\zeta$, $\alpha\zeta\eta$, ἢ ὑπὸ $\epsilon\beta\eta$, $\beta\eta\zeta$ (2) ἴσαι ἀλλήλοις εἰσὶ, ἢ τῶν ἐκάστη δυοῖν πεμπτημορίοις δυεῖν Ὁρθῶν ἴση ἔσαι· ἐπεὶ δὲ ἐπὶ τῇ Ἰσοσκελεῖ αὐτῶν, ἢ κατὰ κορυφὴν α' τρισὶ πεμπτημορίοις δυεῖν Ὁρθῶν (3) ἴση ἔσιν, ἑκατέρα τῶν πρὸς τὴν Βάσιν ἐνὶ πεμπτημορίῳ ἴση ἔσαι. Διὸ ἢ τῆς $\beta\zeta$ δίχα τεμνύσης τὴν ὑπὸ $\alpha\zeta\eta$, ἢ ὑπὸ $\zeta\beta\eta$ (ἐπεὶ αβη — αβζ ἀπὸ τριῶν, πεμπτημόριον ἐν ἀφῆρηται) περιέξει πεμπτημόρια δύο, ἢ ἢ ὑπὸ $\zeta\eta\beta$ δύο, ἢ ἢ ὑπὸ $\beta\zeta\eta$ ἓν. Καὶ τοῖον τῇ $\beta\zeta\eta$ Ἰσοσκελεῖ ὄντος (4), τὰ $\beta\alpha\zeta$, $\zeta\eta$, Ἰσόπλευρά τε ἀλλήλοις εἰσὶ, ἢ δὴ (5) ἢ Ἰσογώνια, ἥτε ὑπὸ $\zeta\eta$ περιέξει δυεῖν Ὁρθῶν τρία πεμπτημόρια, ἢ ὑπὸ $\iota\zeta\eta$ ἓν, ἢ ὑπὸ $\iota\eta\zeta$ ἓν· ὥστε αἱ ὑπὸ $\iota\zeta\eta$, $\iota\eta\zeta$ ἅμα ληφθεῖσαι, πεμπτημόρια συστήσασιν τρία· ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ὅτι ἢ ἢ ὑπὸ $\iota\eta\beta$ τρία πεμπτημόρια περιέχασα εἰσὶ. Τὸ ἄρα Πεντάγωνον ἐστὶν ἰσογώνιον, ἢ συνέστη ὅπως ἡμῖν ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας αβ Πεντάγωνον τεταγμένον. Ο. Ε. Π.

Καὶ ἄλλως δὲ ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας αβ Πεντάγωνον τεταγμένον συστήσεται, εἰς ἐπὶ τῆς αβ ὡς ἐπὶ Βάσεως, ἐξ ἀντιθέτου ἰσοσκελεῖς Τρίγωνον συστήσεται τὸ αβχ, ἢ ἢ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνία ὑπὸ $\beta\alpha\chi$ ἢ αβχ διπλασίον ἢ τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ χ. Προαχθεισὼν γὰρ τῶν $\chi\alpha$, $\chi\beta$ ἐπὶ ζ ἢ η , ὥστε τὰς αζ, βη ἴσας εἶναι τῇ αβ ἑκατέραν, ἢ Κέντροις τοῖς ζ ἢ η , ἢ Διαστήμασι τοῖς αζ, βη, Κύκλων γραφέντων κατὰ δισσὰ Σημεῖα τεμνομένων, ὧν πορρωτέρω τῆς αβ τὸ ι , ἢ ἐπιζευχθεισὼν τῶν $\zeta\iota$ ἢ $\eta\iota$, φημὶ δὴ ὅτι συνέστη κτ. H' δὲ δεῖξις παραπλησίᾳ εἰς τὴν ἀνωτέρω, ἀχθείσης γὰρ τῆς αη, ἢ τῶν Εὐθειῶν αβ, $\zeta\eta$ Παραλλήλα, τῇ τῶν Τριγώνων αβη, $\zeta\alpha\beta$ (6) ἰσότητι ἀποδειχθήσεται (7).

κ. 295.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΒ.

„Περὶ τὸν δοθέντα Κύκλον Πεντάγωνον περιγράψαι ἰσόπλευρόν τε ἢ ἰσογώνιον.

Εἰ γυγραφῆτω δὴ Πεντάγωνον ὡς ἀνωτέρω ηδίκημ ἰσόπλευρόν τε ἢ ἰσογώ-

κ. 296.

(1) M. τῆ α'. (2) KZ. τῆ α'. (3) AB. τῆ α'. (4) ε. τῆ α'. (5) H. τῆ α'. (6) A. τῆ α'. (7) M. τῆ α'.

νιον, ἢ ἀχθήτωσαν Ἀπτόμεναι κατὰ τὰ Σημεῖα η, θ, ι, κ, μ, συμπίπτεσθαι κατὰ β, γ, δ, ε, ζ. Οὕτω γὰρ γενήσεται τὸ ζητούμενον.

Ἀχθήτωσαν ἀπὸ τοῦ Κέντρου Εὐθείαι αη, αβ, αθ, αγ, αι, ἢ ἐπεὶ αὐτὰς βη, βθ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Σημεῖου β ἀπτονται τοῦ Κύκλου, ἴσαι (1) ἔσονται· τῶν δὲ Τριγώνων ηαβ, θαβ ἀμοιβαδὲν Ἰσοπλευρῶν ὄντων, ἴσαι ἔσονται (2) αὐτὰς Γωνίαι, ἢ μὲν ξ τῇ ο, ἢ δὲ π τῇ σ. Ἐνδευτοὶ ἢ ὅλη ἢ κατὰ τὸ β διπλασίων ἔσται τῆς ο, ὅλη δὲ ἢ ὑπὸ θαη διπλασίων ἔσται τῆς σ. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἢ αὐτὰς Γωνίαι, ἢ τε κατὰ τὸ γ, ἢ ἢ ὑπὸ θαη διπλασίονες εἰσιν, ἢ μὲν τῆς τ, ἢ δὲ τῆς ν. Ἀλλ' αὐτὰς ὑπὸ ηαθ ἢ θαη ἴσαι (3) εἰσὶ, βεβήκασι γὰρ ἐπὶ ἴσαις Περιφερείαις ταῖς ηθ, θι (4), ἃς οὖν ἢ τέτων αὐτὰς ἡμίσειαι σ ἢ ν ἴσαι εἰσὶ. Ἐπεὶ τοίνυν ἐπὶ τῶν Τριγώνων βαθ, γηθ, αὐτὰς δύο Γωνίαι σ ἢ ν ἴσαι εἰσὶ, ἢ αὐτὰς πρὸς τῷ θ δύο (5) ὀρθαὶ, ἢ τε αθ Πλευρὰ κοινὴ, ἔσται ἢ (6) βθ ἴση τῇ γθ, ἢ τε κατὰ τὸ ο Γωνία ἴση τῇ κατὰ τὸ τ· ὡσαύτως ἂν ἢ αὐτὰς βη, ζη ἴσαι δειχθεῖεν, ὥστε αὐτὰς γβ, ζβ διπλασίονες οὔσαι τῶν ἴσων βη, βθ, ἴσαι εἰσὶ. Οὐκ ἄλλως ἢ αὐτὰς λοιπαὶ τὰ περιγεγραμμένους Πενταγώνους Πλευραὶ ἴσαι δεικνύμεναι, Ἰσόπλευρον αὐτὸ παραστήσασιν· ἔστι δὲ τὸ αὐτὸ καὶ Ἰσογώνιον, ἐπεὶ γὰρ αὐτὰς κατὰ τὰ β ἢ γ Γωνίαι διπλασίονες ἀπεδείχθησαν τῶν ο ἢ τ, ἑκατέρω ἑκατέρας, ἔσονται δὲ ἢ αὐτὰς ἴσαι, ἢ ὡσαύτως ἢ αὐτὰς λοιπαί. Περιγέγραπται ἄρα περὶ τὸν δοθέντα Κύκλον τὸ τεταγμένον Πεντάγωνον. Ο. Ε. Π.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Τῇ αὐτῇ μεθόδῳ περὶ τὸν Κύκλον, ἢ ὅποιονδήποτε ἄλλο ἰσόπλευρον τε καὶ ἰσογώνιον Σχήμα περιγραφήσεται, τὰ παραπλησίως πρῶτον τῷ Κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, ταύτας εἰς ἀχθῶσιν Ἀπτόμεναι τὰ Κύκλου κατὰ τὰ Σημεῖα η, θ, ι, κ, κς. καθ' ἃ αὐτὰς ἐγγεγραμμένους Γωνίας τῇ Περιφερείᾳ προσπίπτουσι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ. ἢ ΙΔ.

„Εἰς τὸ δοθὲν Πεντάγωνον, ὅστις ἰσόπλευρόν τε ἢ ἰσογώνιον, Κύκλον ἐγγράψαι, ἢ περὶ αὐτὸ περιγράψαι.

κ. 297.

Αὐτὰς δύο τὰ Πενταγώνων Γωνίαι β ἢ γ δίχα τετμήσωσαν διὰ τῶν Εὐθειῶν βα ἢ γα τῶν συνισθῶν κατὰ τὸ α, ἀπὸ δὲ τῆς α ἀχθήτω Κάθετος ἢ αλ.

(1) Β. Πόρ. Δς. τῇ γ'. (2) Η. τῇ α'. (3) Κς. ἢ ΚΘ. τῇ γ'. (4) Εκ κατ. (5) ΙΗ. τῇ γ'. (6) Κς. τῇ α'.

Ο' τοίνυν Κέντρω τῷ α διὰ τῆ λ καταγραφόμενος Κύκλος, ἀπασῶν τῶν τῆ Πενταγώνου Πλευρῶν ἄφεται· ὁ δέ τοι Κέντρω τῷ α διὰ τῆ β καταγραφόμενος, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν Σημείων γ, δ, ε, ζ.

Μέρος Α'. Ἀπὸ τῶν Γωνιῶν τῶν κατὰ δ, ε, ζ, ἀχθήτωσαν καὶ αἱ δα, εα, ζα· ἐν γὰρ τοῖς Τριγώνοις δγα, βγα, ἐν οἷς ἴσαι μὲν αἱ Πλευραὶ δγ, αγ (1) ταῖς βγ, γα, ἴσαι δὲ (2) αἱ Γωνίαι π καὶ ο, καὶ αἱ η καὶ ι (3) ἔσονται ἴσαι· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὅλαι Γωνίαι αἱ κατὰ β καὶ δ ἴσαι (4). Ταύτη τοι τῆς η (5) Γωνίας ἡμισείας ἔσθαι τῆς β, καὶ ἡ ι ἡμισεία ἔσθαι τῆς δ, ὥστε καὶ τὴν δ δίχα τετμημένην εἶναι διὰ τῆς δα. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον, καὶ αἱ λοιπαὶ τῆ Πενταγώνου Γωνίαι ε καὶ ζ, δίχα τετμημέναι εἰσὶ, διὸ καὶ αἱ Ἡμιγωνίαι ἅπασαι ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶν· ἤχθωσαν δὲ καὶ αἱ Κάθετοι αμ, ασ, αν, αρ, καὶ ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν Τριγώνων λβα, μβα, αἱ Γωνίαι η καὶ ὑπὸ βλα, ἴσαι εἰσὶ ταῖς Γωνίαις ξ καὶ ὑπὸ βμα, ἥτε βα Πλευρὰ κοινὴ, ἔσονται δὴ (6) καὶ αἱ αλ, αμ ἴσαι· ὥσαύτως δεῖξω καὶ τὰς λοιπὰς αμ, ασ, αν, αρ ἀλλήλαις ἴσας εἶναι· Ο' ἄρα Κέντρω τῷ α διὰ τῆ λ γραφόμενος Κύκλος, καὶ διὰ τῶν μ, σ, ν, ρ διελεύσεται· ἐπεὶ τε αἱ πρὸς τῷ λ, καὶ μ, καὶ σ, καὶ ν, καὶ ρ Γωνίαι ὀρθαὶ εἰσιν, (7) ἄφεται δὴ ὁ Κύκλος (8) τῶν πέντε τῆ Πενταγώνου Πλευρῶν. Ο. Η. τὸ Α'.

Μέρος Β'. Ἐπὶ τῆ Τριγώνου γαβ, τῶν Γωνιῶν ο καὶ η ἴσων δειχθειῶν, ἔσονται αἱ Πλευραὶ (9) αγ, αβ ἴσαι ἀλλήλαις, ὥσαύτως δὲ καὶ αἱ αβ, αζ, αε, αδ· διὸ καὶ ὁ Κέντρω τῷ α διὰ τῆ β καταγραφόμενος Κύκλος, καὶ διὰ τῶν γ, δ, ε, ζ, διελεύσεται. Περὶ τὸ τοίνυν Πεντάγωνον ὁ Κύκλος περιγεγραπταί. Ο. Η. τὸ Β'.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Τῇ αὐτῇ δὲ μεθόδῳ, εἴς τε καὶ περὶ ὁποῖον Σχῆμα ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, Κύκλος ἐγγραφήσεται καὶ περιγραφήσεται, δεῦν ὁποῖων Γωνιῶν, αἱ ἂν ἐγγυὲς ἀλλήλων ὦσι, δίχα τεμνομένων, οἷον τῶν δγβ³, γβζ, διὰ τῶν Εὐθειῶν γα, βα, καὶ ἀπὸ τῆ κατὰ τὴν σύμπτωσιν Σημεῖν α, ἐφ' ἣσιν οὖν τῶν Πλευρῶν βγ πρὸς ὀρθὰς ἀχθείσης τῆς αλ· τῶν γὰρ Κύκλων, τῶν Κέντρω μὲν τῷ α, Διασῆμασι δὲ τοῖς αλ, αβ καταγραφόμενων, ὁ αὐτὸς μὲν εἰς τὸ Πολύγωνον ἐγγεγραμμένος ἔσται, ὁ δὲ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένος.

(1) Εξ ὑποθ. (2) Εκ κατ. (3) Δ. τῆ α'. (4) Εξ ὑποθ. (5) Εκ κατ. (6) Κε. τῆ α'. (7) Εκ κατ. (8) Ιε. τῆ γ'. (9) Κε. τῆ α'.

Πορίσματα.

Α'. Κάντεῦθεν ἐὰν Γωνίαι δύο προτεχεῖς αἱ β, γ τῷ τεταγμένῳ Σχήματος, διχοτομηθῶσι ταῖς βα, γα Εὐθείαις, ταῖς συμπιπτύσαις κατὰ τὸ α, ἀπὸ δὲ τῷ κατὰ τὴν σύμπτωσιν Σημεῖα α, Εὐθεῖαι ἀχθῶσιν αἱ αδ, αε, αζ ἐπὶ τὰς λοιπὰς τῷ Σχήματος Γωνίας, δίχα τμηθῆνται αἱ πᾶσαι Γωνίαι, καὶ τὸ τεταγμένον Σχῆμα (1) διαιρεθήσεται εἰς τοσαῦτα Τρίγωνα ἰσοσκελῆτε καὶ ἀλλήλοις ἴσα, ὅσαι αἱ τῷ Σχήματος Πλευραί. Ἀπὸ δὲ τῷ α, ἐπὶ τὰς τῷ Σχήματος Πλευρὰς πρὸς ὁρθὰς ἀχθειςτῶν τῶν αλ, αμ, κτ., δίχα (2) τμηθῆσονται αἱ Πλευραί, αἵτε Τέμνεσαι ἐκείναι, ὡς Ἡμιδιάμετροι τῷ ἐγγραφομένῳ Κύκλῳ, καὶ ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶ.

Β'. Δοθείσης τοίνυν τῆς τῷ τεταγμένῳ Σχήματος Πλευρᾶς, καὶ τῆς τῷ εἰς αὐτὸ ἐγγραφομένῳ Κύκλῳ, ῥάδιον τὴν τῷ ἐμβαδῷ καταμέτρησιν λαβεῖν, πολλαπλασιάζοντες τὴν μὲν Ἡμιδιάμετρον τῇ ἡμισείᾳ τῆς Πλευρᾶς, τὸ δὲ ἐντεῦθεν παραγόμενον τῷ τῷ Σχήματος παρονομασίῃ. Οὕτω τοι τὸ τῷ Πεντάγωνῳ βγδεζ ἐμβαδὸν, ἐστὶν αλ x λβ x 5.

Πρότασις ΙΕ.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον Εἰσάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

α. 298.

Ἦχθω Διάμετρος ἡ ζαβ, καὶ Κέντρω τῷ β διὰ τῷ α Κύκλος γεγράφθω, τέμνων τὸν δοθέντα κατὰ γ καὶ δ, καὶ πάλιν Κέντρω τῷ ζ, διὰ τῷ α γεγράφθω Κύκλος τέμνων τὸν δοθέντα κατὰ ε καὶ η, καὶ ἐπεξεύχθω τὰ Σημεῖα β, γ, ε, ζ, η, δ, αἱ γὰρ ἐπιζευχθεῖσαι Εὐθεῖαι δώσωσι τὸ ζητούμενον.

Ἀχθειςτῶν γὰρ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α, αγ, αε, αη, αδ, φανερόν ἐστι τὰ Τρίγωνα θ, ι, μ, λ, ἰσόπλευρα (3) ἐστίν· ἐπεὶ δὲ τῶν Γωνιῶν ἑκατέρω ὑπὸ γαβ, εαζ, τριτημόριον (4) δυεῖν Ὀρθῶν ἐστὶ, καὶ ἐπομένως τριτημόρια δύο ἄμφω, δῆλον (5) ὅτι ἡ ὑπὸ εαγ τριτημόριόν ἐστι καὶ αὐτὴ δυεῖν Ὀρθῶν· Αἱ τοίνυν ὑπὸ εαγ, γαβ ἴσαι εἰσὶν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ Πλευραὶ εα, αγ ἴσαι ταῖς Πλευραῖς βα, αη, καὶ Βάσεις ἄρα (6) εγ ἴση τῇ Βάσει γβ, ταῖς (ὡς εδείχθη) τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ αγ, ὥς τε καὶ τὸ ν ἰσόπλευρον ἐστὶ· Ὡσαύτως δὲ

(1) Γ. Ὁρ. τῷ δ. καὶ Πρότ. ε. καὶ Κε. τῷ α'. (2) Ἀριθ. Α. τῷ Σχολ. μετὰ τὴν Κε. τῷ α'. (3) Α. τῷ α'. (4) ΙΒ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (5) ΙΓ. τῷ α'. (6) Α. τῷ α'.

δειχθήσεται Ἰσόπλευρον εἶναι καὶ τὸ κ· καὶ ἐπεὶ οὖν ἅπαντα τὰ Τρίγωνα θ, ι, κ, λ, μ, ν ἰσόπλευρά ἐστι, φανερόν ὅτι ἐκάστη τῶν ἐν αὐτοῖς Πλευρῶν γβ, βδ, δη, ηζ, ζε, εγ, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς Κύκλου αγ, ἥτοι αβ, καὶ δὴ καὶ ἀλλήλαις ἴσαι αἱ αὐταί. Τὸ ἄρα Ἐξάγωνον ἰσόπλευρον ἐστίν· ἐστὶ δὲ καὶ Ἰσογώνιον, ἐκάστη γὰρ τῶν ἐν αὐτῷ Γωνιῶν, ε, γ, β, δ, η, ζ, σύγκειται ἐκ δυεῖν Γωνιῶν τῶν τῆς Ἰσοπλεύρου, εἰς ἅρα τὸν δοθέντα Κύκλον, Ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐνεγραψάμεθα.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α.

Α'. Ἡ τῇ εἰς τὸν Κύκλον περιγεγραμμένῃ Ἐξαγώνῳ Πλευρᾷ (ἥτοι ἡ μοιρῶν 60 Ὑποτείνουσα) ἴση τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ἐστίν, ὥστε τὸ 30 μοιρ. Ἡμίτονον, ἴσον ἐστὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου (1) τῇ ἡμισείᾳ.

Β'. Ἡ τῇ τεταγμένη Ἐξαγώνῳ Γωνίᾳ, τέτταρσι τριτημορίοις μιᾶς Ὀρθῆς ἴση ἐστίν, ἴση γὰρ ταῖς δυσὶ τῇ ἰσοπλεύρῃ Τρίγωνα Γωνίαις ἅμα, ὧν ἐκάστη (2) δυσὶ τριτημορίοις μιᾶς Ὀρθῆς ἴση ἐστίν· ὥστε περιέχει Ὀρθήν τε καὶ τριτημόριον Ὀρθῆς, τετέστι μοιρ. $90 + 30 =$ μοιρ. 120.

Γ'. Καὶ εἰν ἄχθῃ Διάμετρος ἡ στ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ἑτέραν ζβ, καὶ Κέντροις μὲν τοῖς ο καὶ σ, Διαστήματι δὲ τῷ οα, τομαὶ γένοιντο κατὰ ξ καὶ π, καὶ κατὰ ρ καὶ τ, ἐπιζευχθῇ δὲ τὰ Σημεῖα ξ, ε, ο, γ, π, β, τ, δ, σ, η, ρ, ζ, συστήσεται Δωδεκάγωνον τεταγμένον, μιᾶ τῇ Διαβήτῃ διανοιγῇ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφόμενον, τῷ δ' ὅπερ ἐν τοῖς Γνωμονικοῖς πολλῇς ἐστὶ χρήσεως. Κἀντεῦθεν καταμανθάνομεν καὶ τὴν τεταρτημορικὴν Περιφέρειαν οζ, εἰς μέρη τρεῖς ἀλλήλοις ἴσα οε, εξ, εξ τριχομεῖν, καὶ ἐκ τῆ ἀκολούθῃ συνεχεῖ (3) τῇ διχοτομίᾳ, εἰς μέρη ἴσα 6, 12, 24, 48, κτ. διαμερίζειν.

Δ'. Ἐκ δὲ τῶν δειχθέντων ῥᾶσα καὶ ἡ τῇ ἰσοπλεύρῃ Τρίγωνα εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφῇ ἐπιφέρεται. Ἀχθεύσης γὰρ τῆς Διαμέτρου βζ, Κέντρῳ τῷ β, διὰ τῆ α Κέντρου καταγραφῇ τῷ Τόξῳ τὸ γαδ· τῶν γὰρ Σημεῖων γ, ζ, δ ἐπιζευχθέντων Εὐθείαις, συστήσεται τὸ ζητούμενον Ὀρθογώνιον.

Ε'. Ἡ τῇ ἰσοπλεύρῃ Τρίγωνα Πλευρᾷ γχδ, τῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπ' αὐτὴν Διαμέτρου βζ τεταρτημόριον τὸ βχ ἀποτεμένει. Αἱ γὰρ ὑπὸ αγγ, βγχ ἐπὶ ἴσων Περιφερειῶν τῶν βδ, δη βεβηκείαι, ἴσαι (4) εἰσίν· αἵ τε Πλευραὶ

κ. 299.

κ. 300.

(1) Α. Πόρ. τῆς Γ. τῇ γ'. καὶ Α. Πόρ. τῆς Α. τῇ γ'. (2) Πόρ. ΙΒ. τῆς ΑΒ. τῇ α'.
(3) Α. τῇ γ'. (4) ΚΘ. τῇ γ'.

αγ, γχ ἴσαι ταῖς Πλευραῖς βγ, γχ, ἄρα ἔσται αἱ αχ, βχ (1) ἴσαι εἰπὶν· ἢ ἄρα βχ τεταρτημόριον ἐστὶ τῆς Διαμέτρου βδ.

Αἰ. Διὰ τὰς ὑπὸ αγχ, βγχ τὰς ὡς πρότερον ἴσας, ἔσται πρὸς τῷ χ Ὁρθὰς (2) ἔσται διὰ τὴν γχ κοινὴν, ἔσται (3) αχ = βχ.

Π ρ ό β λ η μ α .

κ. 301.

Εἰς ἑξάγωνον τεταγμένον ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας βγ, ῥᾶσα συστήσεις, Τρίγωνον συστήσας (4) ἰσοπλευρον ἐπ' αὐτῆς, ἢ Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αβ Κύκλον γράψας· ὅτος γὰρ τῷ ζητεμένῳ Εἰς ἑξάγωνον δεκτικὸς ἐστὶ. Δῆλον ἔκτε τῆς Προτάσεως, ἔσται τῷ Α'. τῶν Πορισμάτων.

Θ ε ώ ρ η μ α .

„Τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τῆ ἰσοπλεύρου Τριγώνου, τριπλάσιον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου τῆς Κύκλου, εἰς ὃν ἐγγέγραπται τὸ Τρίγωνον· ἐνθεντοὶ ἔσται πρὸς τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Διαμέτρου, ἐστὶν ὡς 3 πρὸς 4. Εἴςτι δὲ αὕτη ἡ ΙΒ'. Πρὸς τῷ ΙΓ'. Βιβλίῳ παρὰ τῷ Στοιχειωτῇ.

κ. 302.

Αἰ. Ἐκείτω Ἡμιδιάμετρος ἡ αδ· τὸ γὰρ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ δδ, ἴσον ἐστὶ τοῖς Τετραγώνοις (5) τοῖς ἀπὸ ζα, δα, ἔσται τῷ δις Ὁρθογ. ὑπὸ ζαχ. Αἰ. Ἄλλ' αὖ τὸ δις Ὁρθογ. ζαχ, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγ. τῷ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου ζα, ἥτοι τῆς δα (ἔσται γὰρ ἐπεὶ αχ ἔσται χβ ἴσαι (6) εἰσὶ, τὸ Ὁρθογ. ζαχ δις ληφθέν, ἴσον ἐστὶ τοῖς δυτὶν Ὁρθογωνίοις, τῷ τε ὑπὸ ζα ἔσται αχ, ἔσται τῷ ὑπὸ ζα ἔσται χβ, τῷ τε τῷ Ὁρθογωνίῳ ζαβ (7), ἥτοι τῷ Τετραγ. τῷ ἀπὸ ζα, ἄρα τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ δδ τριπλάσιον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου.

Εἰπεὶ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης Διαμέτρου δδ Τετράγωνον, τετραπλάσιον ἐστὶ (8) τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ ζα, φανερόν ὅτι τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ δδ, πρὸς τὸ Τετραγ. τὸ ἀπὸ τῆς Διαμέτρου, ἐστὶν ὡς 3 πρὸς 4.

Π ό ρ ι σ μ α .

Κέντεῦθεν ἔπεται, ὡς ἡ τῇ ἰσοπλεύρῳ Τριγώνῳ Πλευρᾷ, ἐστὶ πρὸς τὴν

(1) Α. τῷ α. (2) Εξ. ὑποθ. (3) Κς. τῷ α. (4) Α. τῷ α. (5) ΙΒ. τῷ β. (6) Ε. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (7) Α. τῷ β. (8) Γ. Πόρ. Πρὸς Α. τῷ β.

Διάμετρον, ὡς ἡ Τετραγωνικὴ ρίζα τῆς τριαδικῆς πρὸς 2, ἥτις ἐστὶν ἡ ρίζα ἢ τετραγώνειος τῆς τετραδικῆς ἀριθμῶ. Ταῦτητοι ἔστιν ἡ Γραμμαὶ αὗται τῶν ἀσυμμέτρων τυγχάνουσι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον, Πεντεκαίδεκάγωνον ἰσοπλευρόν τε ἢ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Εἰς γὰρ τὸν Κύκλον ἐναρμοθεῖσα τῇ Πενταγώνῳ Πλευρᾷ ἢ αὐτῇ (1) εἰς τὸν Κύκλον ἐναρμοθεῖσα τῇ Πενταγώνῳ Πλευρᾷ ἢ αὐτῇ (2) ἢ αὐτῇ τῇ ἰσοπλευρῇ Τριγώνῳ, ἥτε γὰρ Περιφέρειαν διχα τμηθῆτω κατὰ τὸ ε, οὕτω γὰρ ἡ γε Εὐθεῖα, ἥτις ἂν ἐπιζευχθεῖ, ἔσται ἡ τῇ Πεντεκαίδεκάγωνῳ Πλευρᾷ.

κ. 303.

Εἰς γὰρ ὅλη ἡ Περιφέρεια ὑποτεθείη 15, ἔσται ἡ μὲν αὐτῇ Περιφέρεια, 3, ἡ δὲ αὐτῇ, 5, διὸ δὲ ἡ γὰρ, 2, ἢ ἐπομένως ἡ γε, 1.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Α'. Διὰ τῆς ὑποτεθείσης μεθόδου, ὑπὲρ ἀριθμῶν ὅσα τεταγμένα Σχήματα εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφεται. Εἰς γὰρ δύοιν τεταγμένων αἱ Πλευραὶ αὐτῇ, αὐτῇ τῷ Κύκλῳ ἐναρμοθεῖσιν, ἢ τῶν Περιφερειῶν διαφορὰ γὰρ τοιούτων ἔσται περιεκτικὴ Πλευρῶν τῇ καὶ τῇ τεταγμένῳ Σχήματος, ὅσαις μονάσι διαφέρουσιν ἀλλήλων οἱ τῶν προτέρων Παρανομασίαι. Ὅτε Παρανομασίης τῇ καὶ λαμβάνεται σχήματος, τῶν Παρανομασιῶν τῶν προτέρων ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζομένων.

Οἷον εἰς τὴν κατὰ τὸν ὑπόθεσιν. ἡ μὲν αὐτῇ Τετραγώνῳ Πλευρᾷ, ἡ δὲ αὐτῇ Δεκαγώνῳ, ἢ τῶν Παρανομασιῶν διαφορὰ ἔσται 6· ἢ τοῖνον ἡ Περιφέρεια γὰρ ἔξ Πλευρῶν τῇ καὶ τῇ Σχήματος ἔσται περιεκτικὴ, ἐκείνο δέτοι Πλευρῶν ἔστι 40, οἱ γὰρ Παρανομασίαι 4 ἢ 10, ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιασθέντες παρέχουσι 40.

κ. 304.

Β'. Κάντευσθαι διδασκόμεθα τὴν τεταρτημορικὴν Περιφέρειαν, εἰς μέρη ἴσα 15 διαμερίζειν (ἢ δὲ ἢ συνεχεῖ τῇ διχοτομίᾳ (1) εἰς 30, 60, 120, καὶ μέρη), τὴν Περιφέρειαν δηλονότι γε πεντεκαίδεκατημόριον τῆς ὅλης ἔσαν, δι' ἐπανειλημμένης διχοτομίας εἰς μέρη τέτταρα ἀλλήλοις ἴσα διαμερίζοντες. Καὶ Καθόλου ἐπὶ ἥτις οὖν τεταγμένῳ Σχήματος τῇ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, δοθείσης τῆς Πλευρᾶς βχ, τὴν τῇ Κύκλῳ τεταρτημορικὴν Περιφέρειαν, ἐπανειλημμένη διχοτομήσει τῆς Περιφερείας βχ, εἰς τοσαῦτα

(1) ΙΑ. τῷ δ. (2) Δ. Πόρ. τῆς ΙΕ. τῷ δ. (3) Δ. τῷ γ.

μέρη ἴσα, ὅσαι αἱ τῷ Σχήματος εἰσὶ Πλευραὶ διαιρεῖν ἐξέσαι, καὶ ἐπαναλήψει τῆς διχοτομήσεως εἰς δις, τετράκις, ὀκτάκις κτ. τὰς αὐτὰ ἴσα ἀλλήλοις, ὅσαι αἱ Πλευραὶ τῷ Σχήματος.

Γ'. Ἐπεὶ δὲ ἡ τεταρτημορική Περιφέρεια εἰς μοίρας τετμημένη 90 ὑποτίθεται, καὶ ἐκάστη δὲ τῶν μοιρῶν εἰς ἐξηκοσημόρια Α'. 60, φανερόν ὡς τὸ τεταρτημόριον τῆς ὅλης Περιφερείας, ἐξηκοσημόρια $90 \times 60 = 5400$ περιέχον ἐστὶ· καὶ εἰς αὐτὸν διὰ τῶν ἀνωτ. Πορίσμ. τὸ τεταρτημόριον εἰς 120 μέρη διαιρεθῇ, τῶν ἑκάστων ἐξηκοσημόρια πρῶτα $45 = \frac{1}{2} 90$, τετάρτη τρία τεταρτημόρια μοίρας μιᾶς περιέχον ἐσσι. Ἡ δὲ ὅτω βραχεῖα Περιφέρεια ἄνευ ἐπισήμης ἀπάτης εἰς μέρη ὅσας αὐτὴ ἴσα, ὡς εἰ καὶ εὐθείαι τις (1) Γραμμὴ ᾗν, δυνήσεται διαιρεῖσθαι. Διαίρειδω τοίνυν εἰς τρία ἴσα, ὧν τὰ 15 ἐξηκοσημόρια Α'. ἦτοι τῆς μοίρας τὸ τεταρτημόριον δώσωσι, τὸ δὲ ἡμισυ $15 + 15$, τὴν δ' ὅλην μοίραν $15 + 45$. Πάλιν διὰ τριχοτομίας τῇ Τόξῃ 15, Τόξον ἐξομεν 5, καὶ τῇ εἰς ἴσα πέντε τῷδε τομῇ Τόξον ἐξηκοσημορίαι Α'. ἐνός, καὶ σαφὲς ἄρα ὁ τρόπος κατ' ὃν Κύκλος ἀποχρῶν τὸ Μέγεθος, εἰς ἐξηκοσημόρια δεύτερα αὐτὴν διαιρεθεῖν, καὶ ἐφεξῆς. Ἐάν δὲ τὸ ρηθὲν Τόξον ἦτοι ἡ Περιφέρεια 45 καμπυλωτέρα ᾗ, ἢ ὥστε δίκην εὐθείας Γραμμῆς διαιρεῖσθαι ἔχειν, προαγαγόντες τὴν δίχα τομὴν, εἰς Τόξον ὅτι ἐγγύς Εὐθείας γινόμενον τέως ἀφισόμεθα. Οὕτωτοι τὸ $22\frac{1}{2}$ τρία ὀκτημόρια περιέχει. καὶ $11\frac{1}{4}$ τρία δεκαδ' ἑκτημόρια μοίρας, καὶ ὅπως ἐφεξῆς· καὶ δῆλον ἄρα ὅπως ὁ Κύκλος εἰς τὰς μοίρας τὰς αὐτῆς, καὶ τὰς τῶν μοιρῶν ἡμισείας, καὶ τὰ τεταρτημόρια, καὶ τὰ ὀκτημόρια, κξ., ἢ γὰρ, εἰ ὅτω θόξῃ, εἰς ἐξηκοσημόρια Α', Β', Γ', κξ. μηχανικῶς γὰρ δύναται διαιρεῖσθαι.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Α'.

Ἡ δὲ τῷ Κύκλῳ Περιφέρεια διαιρεῖσθαι γεωμετρικῶς ἔχει εἰς μέρη

4, 8, 16, κξ. διὰ τῆς ζ'. Πρωτ. τῷ Δ', καὶ τῆς Θ'. τῷ Α'.

3, 6, 12, κξ. διὰ τῆς ΙΕ'. τῷ Δ', καὶ Πορ. Δ'. καὶ Γ'.

5, 10, 20, κξ. διὰ τῆς ΙΑ'. καὶ Πορ. Β'. καὶ Ε', καὶ Ι'. τῷ Δ'.

15, 30, 60, κξ. διὰ τῆς Ιζ'. τῷ Δ', καὶ Πορ. Β'.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Β'.

Οὕτω δὲ ἡ μέθοδος εὐρίσκεται, τῷ διὰ Κύκλου καὶ Εὐθείας ἐγγράφεσθαι

(1) Σχολ. τῆς Γ. τῷ ζ'.

τῷ Κύκλῳ τεταγμένα Σχήματα, κατ' ἀριθμὸς Πλευρῶν τὰς ἐξῆς 7, 9, 11, 13, 14, 17, κξ., τῆς τοιαύτης ἐγγραφῆς ὑποτιμένης ἐκ τῆς διαιρέσεως τῆς Περιφερείας εἰς μέρη τινὰ, ἣν δὴ διαίρεσιν καταθύμιον ἔστω καὶ νῦν οἱ Γεωμετρῶντες ἔχουσι. Ἀλλ' ἐξέσαι τῆς τῷ Κύκλῳ Περιφερείας εἰς μοῖρας 360 διαιρεθείσης, μηχανικῶς Σχήματα ἐποιαδιποτῶν τεταγμένα εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον ἐγγράφειν ἔτω.

Π ρ ό β λ η μ α Α'.

Τὰς 360 μοῖρας (τετῆσι τὴν ὅλην Περιφέρειαν) διέλεε διὰ τῷ Παρανομαστῇ τῷ ἐγγραπτῇ Πολυγωνίῳ (τῷ Ἐννεαγωνίῳ φέρε), ἰσαριθμῶν δὲ ταῖς τῷ Πηλίκῃ μονάσιν (οἷον κατὰ τὰ τεθέντα ὧδε 40) μοιρῶν Γωνίαν τὴν ὑπὸ αἰκὴ πρὸς τῷ Κέντρῳ λαβὼν, καὶ τὴν αὐτὴν ἐπιζεύξας, Πλευρὰν ἕξαις τῷ Ἐννεαγωνίῳ τῷ ζητημένῳ, ὅπερ αὖν εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφειν.

κ. 305.

Π ρ ό β λ η μ α Β'.

Ἐπὶ δὲ τῆς δοθείσης Εὐθείας, Σχήμα τεταγμένον καταγράψαις διὰ τῷ ἐφεξῆς πίνακος.

Ἡ ὀρθὴ Γωνία πρὸς τὴν τῷ Σχήματος Γωνίαν ἐστίν	Διαφ.			
Ἐπὶ μὲν τῷ Πενταγώνῳ	ὥς 5	πρὸς 6	1	
Ἑξαγώνῳ	ὥς 3	πρὸς 4	1	
Ἑπταγώνῳ	ὥς 7	πρὸς 10	3	
Ὀκταγώνῳ	ὥς 2	πρὸς 3	1	
Ἐννεαγώνῳ	ὥς 9	πρὸς 14	5	
Δεκαγώνῳ	ὥς 5	πρὸς 8	3	
Ἐνδεκαγώνῳ	ὥς 11	πρὸς 18	7	
Δωδεκαγώνῳ	ὥς 3	πρὸς 5	2	

Δεῖσαν τοῖνον ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας χαβ Ἑπτάγωνον τεταγμένον καταγράψαι, Κέντρῳ μὲν τῷ χ, Διαστήματι δὲ τῷ χαβ Κύκλος γεγράφθω, καὶ τότε τεταρτημόριον ἀποτετμήσθω τὸ βγ, εὐρὼν δὲ ἐκ τῷ Πίνακος τὸν τῆς ὀρθῆς Γωνίας πρὸς τὴν τῷ Ἑπταγώνῳ λόγον, ὥς 7 πρὸς 10, καὶ τὴν διαφορὰν 3, μέρισον τὸ τεταρτημόριον εἰς Τόξα 7 ἴσα ἀλλήλοις, οἷς δὴ τοσαῦτα ἐφεξῆς πρόοις ἀπὸ τῷ ο κατὰ τὸ ν, ὅσαι μονάδες ἐν τῇ διαφορᾷ. Εἶτα διὰ τῶν τριῶν σημείων β, χ, ξ (1) Κύκλον κατὰ γράφον, ὅς τις τῷ ἐπὶ τῆς δοθείσης χαβ Ἑπταγωνίᾳ ἐστὶ χωρητικός.

κ. 306.

(1) Ε. τῷ 8.

Ο' δέ τοι Πίναξ διὰ τῆ Β'. Θεωρήματος τῆ ἐν τῷ Σχολ. τῷ μετὰ τὴν ΔΒ'. τῆ πρώτῃ Βιβλ. κατεσκευάσθη, δι' οὗ δὴ Θεωρ. εὐρίσκεται ὅσαις δὴ ποτε Γωνίαις ὀρθαῖς, ἀπασαι αἱ ἐφ' ἐποιοῦν εὐθυγράμμω Σχήματι Γωνίαι ἅμα ληφθεῖται ἴσαι εἶναι. Ο' γὰρ ἀριθμὸς τῶν ὀρθῶν Γωνιῶν διαιρεθεὶς διὰ τῆ Παρονομαστῆς τῆ Σχήματος, τὸν λόγον παρονομάζει τὸν τῆς Γωνίας τῆ Σχήματος πρὸς τὴν Ὀρθήν.

Ἐπειδὴ δὲ περὶ τῶν τεταγμένων Σχημάτων πολλὰ εἰς τόδε παρετέθη, τὸ ὑφυλλόμενον τῷ Πρόκλῳ Θεώρημα πέρας τῷ Βιβλίῳ ἐπιτιθέσθω.

Θ ε ώ ρ η μ α .

Τῶν τεταγμένων Σχημάτων τρία μόνα, τετέστιν 6 μὲν Τρίγων. ἰσοπλ., 4 δὲ Τετράγ., 3 δὲ Ἑξάγ. χωρίον πληρῆν δύνανται, μίαν δηλονότι Ἐπιφάνειαν συνεχῇ συνισκῶντα· δέκνυνται δὲ ὧδε.

Εἰς τῆτο γὰρ ἀπαιτεῖται, τὸ κατ' ἐκείνο τὸ εἶδος Γωνίας ὅποσας ἐν, συνίσσας εἰς ἓν Σημεῖον Ὀρθὰς τέτταρας συναποτελεῖν· τοσαῦται γὰρ περὶ τὸ αὐτὸ Σημεῖον Γωνίαι συνίστανται (1). Οἷον ἐκ Τριγώνων φέρ' εἰπεῖν ἰσοπλευρῶν τὸ χωρίον πληρῆται, ὅποσων τῶν κατ' αὐτὰ Γωνιῶν, μ, λ, ν, κ, θ, ι περὶ τὸ αὐτὸ Σημεῖον α συναπτομένων, καὶ Ὀρθὰς τέτταρας συνισκῶν. Ἀλλ' 6 τῆ ἰσοπλ. Τριγ. Γωνίαι Ὀρθὰς τέτταρας συναποτελεῖσιν (ἴση γὰρ ἐκάσῃ ἐστὶ δυοὶ τριτημορίοις (2) Ὀρθῆς, αἵτε 6 τριτημορίοις 12, τετέστιν Ὀρθ. 4), τέτταρες δὲ τῆ Τετραγ. ὡς δηλόν, καὶ 3 δὲ τῆ Ἑξαγώνου (ἴση γὰρ ἐκάσῃ 4 τριτημορίοις (3) Ὀρθῆς, αἵτε 3 τριτημορίοις 12, τετέστιν Ὀρθ. 4). Ἀ'ρα κτ.

Ὅτι δὲ ἕδὲν ἄλλο Σχῆμα τῆτο δύναται φανερόν ἔσθαι, εἴτις τὴν κατ' αὐτὸ Γωνίαν εὐρεθεῖσαν ὡς ἀνωτέρω παντὶ ἀριθμῷ πολλαπλασιάσαι, ἥει γὰρ τὸ γινόμενον τῆς τῶν Ὀρθῶν τετραδὸς ἦτοι ὑπερέχον ἔσθαι, ἢ ἐλλείπον.

(1) Γ. Πόρ. τῆς ΙΓ. τῆ α'. Ὅρα τὸ Σχ. τῆς ΙΒ. Πρωτ. (2) ΙΒ. Πόρ. τῆς ΔΒ. τῆ α'. (3) Β. Πόρ. τῆς ΙΒ. τῆ δ'.

Τῶν σοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

BIBΛΙΟΝ Ε΄.

Εἰς μὲν κατασκευὴν τῶν τῷ ζ΄. Προτάσεων, τόδε τὸ Ε΄. ἀναγκαϊότατον κρίνεται, τὰ δ' ἐν αὐτῷ πραγματευόμενα εἰς χρῆσιν ἤκει πυκνότατα· ὁ δέ τοι τῇ ἐπιχειρεῖν τρόπος ἐκ τῆς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας λαμβανόμενος, λεπτότατός τε τυγχάνει ὢν, καὶ ἀσφαλές τε καὶ συντομώτατος. Διὸ καὶ τῇ κατ' αὐτὸν τῷ συλλογίζεσθαι μεθόδῳ, οἷα Λογικῇ τινι μαθηματικῇ, ἥτε Γεωμετρία, καὶ ἡ Ἀριθμητικὴ, καὶ Μητικὴ, καὶ Ἀστρονομία, καὶ Στατικὴ, καὶ τὰ λοιπὰ τῶν Μαθημάτων εἶδη μάλιστα κέχρηνται, ἐπεὶ καὶ ἀναλογίαις τισὶν ἄλλῃς συνημμέναις αἱ ἕξεις αὗται βεβήκασι, τὰ περὶ τὰ ἀνάλογον ἔχοντα συλλογίζεσθαι τὰς τρόπῃς παρὰ τῷ Πέμπτῃ τῷδε Βιβλίῳ αἱ πᾶσαι ἐρανίζονται. Ἡ μὲν οὖν πρακτικὴ ἀκέραια Γεωμετρία, ἡ περὶ τὴν τῶν Γραμμῶν, καὶ Σχημάτων, καὶ Σωμάτων καταμέτρησιν ἐναχολαμένη, ἐκ τῆς τῶν Ἀναλογιῶν διδασκαλίας τὸ πλεῖστον μέρος ἐξήπται, αἷτε Ἀριθμητικαὶ μέθοδοι ἅπασαι κομιδῇ διὰ τῶν τῷ Πέμπτῃ τῷδε Βιβλίῳ Προτάσεων, καὶ ἄνευ τῷ Ζ΄. καὶ Η΄. καὶ Θ΄. τῶν κατὰ πρόθεσιν περὶ Ἀριθμῶν πραγματευομένων, δεικνύσθαι δύνανται. Τὴν δὲ Μητικὴν τῶν Ἀρχαίων, τί ἄλλο ἢ Γεωμετρικὰς Ἀναλογίας ταῖς τῶν φωνῶν ὑπηχίσεσι προσαρμοζόμενας, ὀρθῶς κρίνειν ἐλόμενος ὀνομάσαι; Αὐτὸ δὲ τῷδε καὶ περὶ τῆς Στατικῆς τῆς περὶ τὰ τῶν Σωμάτων βάρη ἔχεις ἂν ἀποφύνηται. Συνελόντι γὰρ φάναι, τὴν τῶν Ἀναλογιῶν διδασκαλίαν ἀπὸ τῶν Μαθηματικῶν ἀφελῶν, ἡδὲν ὅ,τι καὶ λόγῳ ἄξιον καταλείψει.

Ὅσον οὖν τοῖς Γεωμετρικοῖς ἡ τῶν Ἀναλογιῶν συμβάλλεται ἐπισήμη, ἂν εἰς ἀγνοεῖ τῶν Μαθηματικῶν· ταύτην Εὐκλείδης ἐν ὅλῳ τῷ Ε΄. καὶ ζ΄. Βιβλίῳ πραγματεύσατο. Ἀλλὰ γὰρ εἰ καὶ αὐτῷ τε καὶ τοῖς λοιποῖς τῶν σοιχείων διημιθεγοῖς πλεῖστον ὑφέλλεται ὑφ' ἡμῶν, ἐν οἷς μέντοι περὶ τῆς Ἀναλογίας εἰρήκασι ἐνδεῖν τι ἔτι δοκεῖ. Τὸ δὲ πᾶν τῆς δυσχερείας περὶ τὸν Ε΄. τῷ Ε΄. Βιβλίῳ ὀρίσμον εἰσφέρεται, ἔνθα ὁ Εὐκλείδης διδάσκει, τί ἐστὶ τὸ τέτ-

ταρα Μεγέθη εἶναι ἀνάλογον, εἴτ' ἂν λόγους δύο τῆς αὐτῆς, ἢ ὁμοίης, ἢ ἴσους τυγχάνειν. Καὶ δὴ λόγους δύο ἴσους, εἴτ' ἂν ὁμοίης εἶναι ἀπέδωκεν, ὅτε τὰ ἡγούμενα ἐν αὐτοῖς ὁπωῦν ἀριθμῷ ἐπίσης πολλαπλασιαζόμενα, πρὸς τὰ ἐπόμενα ὁπωῦν καὶ αὐτὰ ἀριθμῷ ἐπίσης πολλαπλασιασθέντα, αἰέτοι ἢ ἴσα ἅμα μείζονα, ἢ ἅμα ἐλάσσονα ἐσὶ (1). Κἀκτὴ ἐν τῷ Ὁρισμῷ, πᾶσαι ἐπατα τὰς τῷ Ε'. καὶ ε'. τῶν Βιβλίων ἀποδείξεις ἤτοι ἐμμέτως, ἢ καὶ ἀμέσως ἐπιφέρει. Καὶ ἡ μὲν κατ' Εὐκλ. διδασκαλία αὕτη ἐστίν, ἃς δὲ δυσκολίας ἐστὶ περιέχοντα, ἐκ ὀλίγων εἰσὶ. Α'. καὶ γὰρ τὸ βέβαιον ἐστὶ, τὸν ἐκτεθέντα Ὁρισμόν, τὴν μὲν τῶν ἴσων λόγων φύσιν εἶναι, τῶν δὲ πάθῃματι μόνον διασαφεῖν. Εἴτα ἐκεῖνο τὸ κατὰ τὰ πολλαπλάσια ἴδιον τίθεται πάντως, ἤτοι ὡς Σημεῖον ἀδιάπταιον τῶν ἴσων λόγων, ὥστε ἐκεῖνος ἀποδειχθέντος ἤδη, περὶ ὧντινωνῶν λόγων ἐπιφέρειν ἐξεῖναι ἀσφαλῶς, ὅτι ἴσοι εἰσὶν, ἢ γὰρ ἐκ τούτων ἐκείνου τοιοῦτος τις ἐστὶ, τὸ τὰ λόγων τὸν αὐτὸν ἔχοντα Μεγέθη μηδὲν ἕτερον ὑπολαμβάνειν, ἢ τὸ τὰ αὐτῶν πολλαπλάσια κατὰ γε τὸν εἰρημένον τρόπον ὑπερέχειν ἢ ὑπερέχεσθαι. Εἰ μὲν οὖν τὸ Α', δεῖξαι ὤφειλε τὸ πάθῃμα ἐκεῖνο πᾶσι τε καὶ μόνοις τοῖς ἴσοις τῶν λόγων παρακολεθεῖν, ἢν ἐξ αὐτῆς ἢ τῶν λόγων ἰσότης ἀσφαλῶς εἶχεν ἐπισυνάγεσθαι· τὸ δὲ ἐκ εὐκαταφρόνητόν τι Θεώρημα τυγχάνει γε ὅν, ἂν οἷον ἢτ' Εὐκλείδης αὐτὸς, ἢτ' ἄλλος τις παρὰ τὸν Εὐκλείδην εἰς τόδε ἀπέδειξεν. Εἰ δὲ τὸ Β', ἐξομεν δὴ τὴν πληροφορίαν τῷ ἀληθεύειν τὰ Θεωρήματα κατὰ γε τὸν νῦν τῷ Ὁρισμῷ λαμβανόμενα, ἐμὴν δὲ τῇ τῶν ἀποδείξεων δυνάμει, καὶ ἀσφαλῆς ἡμῖν καὶ βεβαία ἐστί ἢ τῶν λόγων ἰσότης. Οἷον (εἰς γὰρ δεῖγμα κεισθῶ ἢ Α'. τῷ ε'.) ἐκ τῆς παρ' Εὐκλείδην ἀποδείξεως βεβαίως εἰσόμεθα, τὸν λόγον τὸν τῶν Τριγώνων αβγ, δεξ ἴσον εἶναι τῷ λόγῳ τῷ τῶν Βάσεων αγ, δζ, ἀντὶ τῆς τῶν λόγων ἰσότητος, ἔδεν ὅτι μὴ τὸ τῶν πολλαπλασίων εἰρημένον ἴδιον ἐννοῶντες, ἐμὴν δὲ καὶ τὰς τῶν Τριγώνων λόγους ἐκεῖνας τοῖς λόγοις τῶν Βάσεων ἀληθῶς καὶ κυρίως συνεξισθῶναι κατανοήσομεν, μή ποῦ ἀποδειχθὲν τὸ τοιόνδε τῶν πολλαπλασίων πάθος τῇ τῶν λόγων ἀληθείᾳ καὶ κυρίᾳ ἰσότητι ἐξ ἀνάγκης παρέπεσθαι. Ὅπως ἂν ἂν ὁ Ὁρισμός ἔτος ληφθῇ, αἱ τῷ Ε'. καὶ τῷ ε'. Βιβλίᾳ ἀποδείξεις ἐκ ἀσταλεύτως πεπηγάσιν, ἕως ἔτις ἀποδείξη τὴν ἀληθείαν καὶ κυρίαν τῶν λόγων ἰσότητα, τῷ τῶν πολλαπλασίων ἐκείνῳ πάθει αἰεὶ ἀπαρατήτως συνέπεσθαι. Ἄλλως δὲ, καὶ εἰ πάντα ὁρθῶς ἔχουν καὶ βεβαίως τὰ περὶ τῶν τεθῆ, ὅγε μὴν τῶν πολλαπλασίων λαβύρινθος οὗτος

(1) Ὁ Ὁρισμ. οὗτος ἀναπτύσσεται κατωτ. μετὰ τὸν ε'. Ὁρισμ.

ἔ ἐμοὶ ἔ πᾶσιν ἄει ἀπαρέσκων ὥφθη, τοῖς δὲ πρωτοπείροις ἔ πράγματα πολλὰ παρεχόμενος, ὧν ἔ τω πολλὰκις τὴν διάνοιαν συμποδίζει, ὡς μὴ ἔ ξαρκεῖν πρὸς τὴν ἔ ξοδον. Διατᾶτο τοῖνυν τὴν μυελῷ ἔ κιν, ἔ οἶονεὶ ψυχὴν τῆς Γεωμετρίας ἔ ἀπάσης τῆς Μαθητικῆς τελῆσαν τῶν Ἀναλογιῶν εἰσήγησιν, τᾷ ἔ λλείμματος αὐτοὶ τᾷδε ἀπαλλάξαι φροντίσαντες, ταῦτα τὰ τρεῖς ποιῆσαι πειρασόμεθα.

Α'. Δείξω ὅτι τὰ τᾷ Ε'. Βιβλίῳ Θεωρήματα, τὰ διὰ τῶν πολλαπλασίων παρ' Εὐκλείδου δεικνύμενα, ὅσα ἔ Α'ξιώματα ἐν τέτοις δύνασθαι, διασαφήσεώς τινος ἢ περ ἀποδείξεως χρῆζοντα. Οὕτω γὰρ δὴ ἡ τῶν Ἀναλογιῶν γνῶσις, ἢν ἡ τῶν πολλαπλασίων ἔ κδεσις δυσχερῆτε ἔ πολλῆς ἐχομένην ἀσαφείας εἰς τόδε ἀπέφηνε, εὐχερῆς τε ἔ σαφὴς καταστήσεται.

Β'. Ἀποδείξομεν, ὅτι ὅσᾳκις τὰ τῶν ἢ γνυμένων ὁποιαδήποτε ἴσοπολλαπλασία τοῖς τῶν ἐπομένων ἴσοπολλαπλασίῳις παρατιθέμενα, ἢτοι ὡσαύτως μείζονά ἐσιν, ἢ ὡσαύτως ἐλάσσονα, ἢ ὡσαύτως ἴσα, οἱ λόγοι ἄληθῶς τε ἔ κυρίως ἴσοι, εἴτ' ἢν ὅμοιοι εἰσὶ. Τύττε γὰρ τεθέντος ἔ κατασκευασθέντος, ἀπασαι αἱ κατ' Εὐκλείδην ἀποδείξεις, ἔ ὅλη ἡ κατ' αὐτὸν περὶ τῶν Ἀναλογιῶν διδασκαλία τὸ ἐδραῖον ἔξει ἔ ἔμπεδον, ἢν εἴτις ταῖς ἡμετέραις μὴ ἀρέσκοντο δεῖξεσι, πρὸς τὰς Εὐκλείδειας καὶ τοὶ διεξοδικὰς ἢσας, ἀλλ' ἀσφαλεῖς ἢδὴ ἔ σερρεὰς τρέποιτο. Διορισόμεθα δὲ ἔ δὴ ἔ ἀποδείξομεν, ἔ τῶν ἴσων λόγων ἄλλοτι γνῶρισμα ἐναργέστατον ἔ πρῶτον, ἐξ ἔ ἀπάσας τὰς τᾷ Ε'. Βιβλίῳ Προτάσεις, ὁ βελλόμενος ἐπάγειν δυνήσεται.

Γ'. Καὶ περὶ Παρανομασιῶν τῶν λόγων, ἔ περὶ συνθέσεως πραγματεύσομαι, πραγματεῖαν τοῖς εἰς τὰ βαδύτερα τῆς Γεωμετρίας χωρῆσαι ἐπιμεμένοις ἀναγκαιοτάτην· ἔνθα καὶ τὸ Α'ξίωμα ἀποδείξομεν, ἢ μᾶλλον εἰπεῖν τὸ Θεώρημα, τὸ ἄχρι τᾶν ἀναποδείκτως ὑποτιθέμενον, ὅτι ὁ λόγος ὁ ἐκ τῶν ἄκρων ἐξ ὁποσωνῶν λόγων τῶν κατὰ τὸ μέσον ἴσχει τὴν σύνθεσιν. Τοῖς γεμῖν πρωτοπείροις ἄλλος ἔξει, εἰ τὰς Ο'ρίσμάς ἔ τῶν Μερῶν τὸ Α'. μετέλθοιεν.

Υ' πόμνησις τοῖς τὴν Γεωμετρίαν διδασκομένοις.

Ὅσον εἰς τὴν Γεωμετρικὴν μάθησιν ἡ τῶν Ἀναλογιῶν ἐπισήμη συντελέσσα ἐστίν, ἢδεῖς τῶν Μαθηματικῶν (ὁ καλῶς τῷ Τακτικῷ σσημειώται) ἀγνοεῖ, μυελὸς γάρ πως οὗτος τῶν Μαθηματικῶν ἐστὶν ἐπισημῶν, ἔ οἱ παντοῖοι τᾷ περὶ τὰ ἀνάλογα συλλογίζεσθαι τρόποι λυσιτελέστατοι εἰσὶν ἄμα ἔ ἀσφαλέστατοι, ὡς τέτων ἄνευ ἔδὲ βραχύτι χωρῆσαι δυνατόν ὄν. Τὴν γε

μὴν Διδασκαλίαν ταύτην, ταῖς ἀνθρώπων ψυχαῖς τῷ κοινῷ λόγῳ σύμφυτον εἶναι ἡγεῖμαι, καὶ τὰς ποικίλας τῆ περὶ τῶν Ἀναλογικῶν συλλογίζεσθαι τρόπους, ἃς δι' ὅλα τὰ ἐν χερσὶ Βιβλία μετὰ πολλῶν δυσκολιῶν παραδίδωσιν ὁ Στοιχειωτής, καὶ τοσαῦτον ἀποδείξεως κυρίως, ἢ ἐκδέσσεως τινος, καὶ τῆς ἐκ τῶν παραδειγμάτων διασαφήσεως δεῖσθαι ὑπολαμβάνω· καί μοι, οἱ διὰ μακρᾶς Προτάσεων περίοδα τὴν εἰσηγητικὴν ταύτην εὐχερῇ καταστῆται πειρώμενοι, αὐτὸ τὸ καθ' αὐτὸ φανώτατον συστιάξαι δοκῶσι, καὶ πολλῶν δυσχερέσεων ἀπεργάζεσθαι. Αὐτὸ δὲ τὸ Κεφάλαιον ἐν ὀλίγοις τὰ πρᾶγματος ὑποδείξω. Σαφές οὖν ἐστίν, ὡς Πηλικότητες τέτταρες ἀναλογικαί, ὡς ἄρα ὁμοίαι τε καὶ ἴσαι τὰς πρὸς ἀλλήλας λόγους ἔχουσαι ἀνάσπιν, ὅτε τέτων ἡ πρώτη τὴν τοσάκις τὴν δευτέραν περιεμένονεν, ὡσάκις ἡ τρίτη τὴν τετάρτην, ἢ ὅτε τοσάκις ἡ Α' περιέχεται ἐν τῇ Β', ὡσάκις ἡ Γ' ἐν τῇ Δ'. Οὕτωςτοι 16 : 8 :: 4 : 2, ἢ γὰρ 3 : 9 :: 4 : 12 λόγοι ὅμοιοι εἰσιν, ἐπὶ γὰρ τὰ προτέρη παραδείγματος τὰ ἐπόμενα 8 καὶ 2, ἐν τοῖς ἡγεμένοις αὐτῶν 16 καὶ 4, ἑκάτερον ἐν ἑκατέρῳ δις περιέχονται, καὶ ὁ λόγος ἐπ' ἀμφοῖν θεωρεῖται διπλάσιος. Καὶ τῷ Β' δὲ παραδείγματι οἱ λόγοι ὅμοιοι εἰσιν, ἐπειδὴ τὰ ἐπόμενα 9 καὶ 12, τρεῖς τὰ ἡγεμένα τὰ ἑαυτῶν ἑκάτερον περιέχει, ὅθεν καὶ ὁ λόγος ὑποτριπλασίῳ ἑκατέρωτε λέγεται. Οὐδ' ἔστι τις τῶν συμμέτρων Πηλικότητων λόγος, ὃ μὴ δι' ἀριθμῶν ὁρισμένων, ἀλλ' ἔστι τις τῶν ἀσυμμέτρων ἀλλήλοισι, ὃ μὴ δι' ἀριθμῶν τῷ ἀληθεῖ ἐς ἀπεκὼν ἐγγύς γινόμενων ἐξενεχθῆναι δυνάμενος. Ο' δέ τοι λόγοι δυεῖν Πηλικότητων, τῆς μὲν ἡγεμένης, τῆς δ' ἐπομένης, τῷ διὰ τῆς τῆ ἡγεμένης διὰ τῆς ἐπομένης διαμέσεως ἀνακύπτουσι Πηλίκῳ ἐκφέρεται· οὕτως ὁ λόγος 16 πρὸς 8 ἴσα δύναται τῷ $\frac{2}{1}$, ἥτοι 2 = 2, λόγος γὰρ διπλάσιος ἐστίν· ὅτε λόγος 3 πρὸς 9 ἐστὶ $\frac{1}{3}$ ἥτοι $\frac{1}{3}$, τατέστιν ὑποτριπλασίῳ· ὁ δὲ λόγος 8 πρὸς 3 ἐστὶ $\frac{8}{3}$ ἥτοι 2 $\frac{2}{3}$, τατέστι διπλάσιος ἐπιδιτρίτοις, τὸ δὲ πηλίκον ταῦτο τὰ λόγους ἑκάστης κατονομάζεται· Ἐκ μὲν ἔν τῶν εἰρημένων φανερόν ὅτι τὰς ὁμοίας λόγους ὁποιασὲν ὄντας, καὶ μόνον δι' ἀριθμῶν διαφερόντων, ἀλλὰ καὶ διὰ τῶν αὐτῶν ὁρδότατα ἐκτιθέμεθα, τῷ ὄντι γὰρ τὸν διπλάσιον λόγον ἐπίσης καὶ τῷ 2 πρὸς 1, καὶ τῷ 16 πρὸς 8, καὶ τῷ 4 πρὸς 2 ἐπίσης σημαίνουμέν· ὁμοίως δὲ καὶ τὸν ὑποτριπλασίονα, καὶ τῷ 1 πρὸς 3, καὶ τῷ 4 πρὸς 12, καὶ τῷ 3 πρὸς 9 παραπλησιώτατα ὑποδηλάμεν. Εἴαν οὖν τέτταρες Πηλικότητες ὧσιν ἀνάλογοι Α' : Β' :: α' : β', ζητεῖται ἐν τῷ δε τῷ Ε'. Βιβλίοις δὲ ἢ ποτε ὁμοίαις τρόποις, οἱ ὅμοιοι ἄτοι λόγοι ἀμείβεσθαι τε, καὶ δὴ καὶ συντίθεσθαι ἀλλήλοισι πεφύκασιν, ὥστε καὶ τὰς ἀνακύπτουσας ἐντεῦθεν λόγους ἑκατέρωθεν ὁμοίαις τυγχάνειν; Ἀπαντήτέον δὲ πάντως, ὅτι ἀπασιν τοῖς τῶν

ποις, ἥς ἅντις ἔχοι ἐπινοῆσαι. Ἐπειδὴ γὰρ ὅτε λόγος Α πρὸς Β, καὶ ὁ α πρὸς β ὅμοιοι ἀλλήλοις εἰσὶ, διὰ τῶν αὐτῶν ἐκάτερος ἀριθμῶν παραστῆναι δύνησεται ὧδε, Α : Β :: 9 : 3, καὶ α : β :: 9 : 3· ἐνθεντοὶ καὶ πάντες ἀπλῶς οἱ λόγοι, οἱ ἂν ἐκατέρωθεν, ἢ τῇ Ἐναλλάξ τῶν ὁρῶν μεταλήψει, ἢ τῇ Ἀνάπαλιν, ἢ Συνθεσει, ἢ Διαίρεσει, ἢ δι' Ἀντιστροφῆς, ἢ Μίξεως ἀνακύψαν, διὰ τῶν αὐτῶν ὅλως ἀριθμῶν ἐξενεχθεῖεν, καὶ ἐπομένως καὶ λόγον τὸν αὐτὸν ἐκατέρωθεν διασώσειαν. Οἷον δὴ περ Α + Β : Β :: α + β : β· τῇ γὰρ αὐτῇ λόγῃ παραστατικῇ ἢ 9 + 3 : 3, ἥτις ἐστὶν ἡ τῇ λόγῃ σύνθεσις· ὡσαύτως δὲ καὶ περὶ τῶν ἄλλων οἰητέον. Ἀλλὰ δὴ τῆτο μάλιστα τοῖς μαθητιῶσι παρατηρεῖσθω, τὸ τὰς πάντῃ ὁμοίους λόγους ἥς μετῴσι, καὶ τρόπῳ πάντῃ παραπλησίῳ ἀμείβειν τε καὶ διατάσσειν, ὥς ἅτως ἐκ τῆς παραπλησίας ἀμοιβῆς τε καὶ διατάξεως ὁμοιοτάτων πανταχῶς καὶ τῶν λόγων ἀναφυησομένων, καὶ θαυμάζειν ἐπείσιν, ὅτι μηδένα τῶν τὰ Γεωμετρικὰ σοιχεῖα ἄχρι τῆτο ἐκδεδωκότων, ἐν τῷ τόδε τὸ Εἰ. Βιβλίον ὑποτιθέναι, τὸ ῥῆσον τῆτο καὶ προχειρότατον τῶν ἴσων λόγων τεκμήριον, εἰς ἀνάπτυξιν τε καὶ διασάφησιν τῆς τῶν Ἀναλογιῶν διδασκαλίας προχειρισάμενος φαίνεται. Ἀλλ' αὐτοὶ τῇ περὶ τῶν ὁμοίων λόγων ἐπιχειρεῖν, τὰς κυριωτέρας τῶν τρόπων, οἷς ἡ Γεωμετρία κέχρηται, ἐπὶ τῇ βραχείᾳ τῆδε Πίνακος ὑποθῶμεν· καὶ δὴ ἔστω

$$Α : Β :: α : β :: 9 : 3.$$

Καὶ ἐναλλάξ Α : α :: Β : β :: 9 : 9 :: 3 : 3.

Ἀνάπαλιν Β : Α :: β : α :: 3 : 9.

Ἐν Συνθ. Α + Β : Β :: α + β : β :: 9 + 3 = 12 : 3.

Ἐν Διαίρ. Α - Β : Β :: α - β : β :: 9 - 3 = 6 : 3.

Ἐν Ἀντισρ. Α : Α + Β :: α : α + β :: 9 : 9 + 3 = 12.

Α : Α - Β :: α : α - β :: 9 : 9 - 3 = 6.

Ἐν Μίξει Α + Β : Α - Β :: α + β : α - β :: 9 + 3 : 9 - 3 :: 12 : 6.

Οὔθεν δὲ καὶ εἰ Α : Β :: α : β, καὶ Β : Γ :: β : γ, ἔσται Α : Γ :: α : γ.

9 : 3 :: 9 : 3, καὶ 3 : 1 :: 3 : 1, ἔσται 9 : 1 :: 9 : 1.

Ἐνθα ὁ λόγος τῇ Α : Γ (τῆτέστιν 9 : 1) συγχεῖσθαι λέγεται ἐκ τῶν λόγων τῇ Α : Β, καὶ τῇ Β : Γ (τῆτέστιν 9 : 3 καὶ 3 : 1).

Δι' ἴσιν τεταγμένως Α : Β :: α : β· 8 : 3 :: 16 : 6.

Καὶ Β : Γ :: β : α· 3 : 2 :: 24 : 16.

Ἔσται γὰρ Α : Γ :: β : β· 8 : 2 :: 24 : 6.

Ἐνθα ὡς περὶ ὁ λόγος Α : Γ (8 : 2) σύγκειται ἐκ τῶν λόγων Α : Β, καὶ Β : Γ (τῆτέστιν 8 : 3 καὶ 3 : 2) ἐπ' εὐθείας κειμένων, ἅτως ὁ λόγος τῇ δ πρὸς

X

β (24 : 6). σύγκειται ἐκ τῶν λόγων δ : α, ε α : β (ταῦτες 24 : 16 ε 16 : 6), ἀλλὰ μετατεθέντων.

Ἀλλὰ γὰρ περὶ τῆς τῶν λόγων συνθέσεως εὐρήσεις πλείονα ἐν Ο' ρ. Ε'. τῇ ζ'. Βιβλίῳ.

Τελευταῖον εἰάν ἢ $A : B :: \Gamma : \Delta :: 9 : 8$

$\alpha : \beta :: \gamma : \delta :: 3 : 4$

Ἐσται ε $A \times \alpha : B \times \beta :: \Gamma \times \gamma : \Delta \times \delta :: 9 \times 3 : 8 \times 4 :: 27 : 32$.

Καὶ $\frac{A}{\alpha} : \frac{B}{\beta} :: \frac{\Gamma}{\gamma} : \frac{\Delta}{\delta} :: \frac{9}{3} : \frac{8}{4} :: 3 : 2$.

Ο' τῆς τοίνυν τὰς τρόπους τῇ περὶ τὰ ἀνάλογον ὄντα ἐπιχειρεῖν ἀκριβῶς εἰδώς, ε ἔτι τοις χρῆσθαι κατὰ τὸ δέον ἐπιστάμενος, τῶν τῇ Ε'. Βιβλίῳ ἐν μέρει Προτάσεων (εἰ μή τις τὰς Ἀξιωματικὰς οὐσας ε ἑναργεστάτας ἐξέλῃ) σπανιώτατα δεηθήσεται. Ο'θεν δὴ ε εἰ παρ' ἐμοὶ ἦν, ὅλην ἄνωθεν τὴν τῶν Ἀναλογιῶν διδασκαλίαν, ε χωρὶς τῆς παρ' Εὐκλείδῃ μεθόδα αὐτοῦς ὑποδείην ἄν. Ἐπεὶ δὲ τῷ Τακτικῷ τῷ τῆς Εὐκλείδους τάξεως ἄλλως ἀκριβεῖ ἐν ἅπασιν ἀκολάθῳ, ἅπασαν κἀνταῦθα τὴν τῇ Στοιχειωτῇ εἰσήγησιν ἀνελιπῇ, ε ὡς ἔχει παρ' ἐκείνῳ τάξεως ἔδοξεν ὑποδέσθαι, ε αὐτοὶ τὴν ἰδίαν πρόθεσιν ὑπερβησόμεθα.

Μ Ε Ρ Ο Σ Α'.

Τὰ τῶν Ἀναλογιῶν ζοιχεῖα Μεθόδῳ εὐχερες ἐργα ἐκτίθεται.

Ο ρ ι σ μ ο ι.

Α'. Μέρους ἐστὶ Μέγεθος Μεγέθους, τὸ ἔλαττον τῇ μείζονος ὅταν (ποσάκις δηλ. ἐπαναληφθὲν) καταμετρήῃ τὸ μείζον· μέρη δὲ ὅταν ε καταμετρήῃ.

Οἷον μῆκος ποδιαῖον μέτρον ἐστὶ μῆκος τῇ δεκαποδιαίῳ, εἰάν γὰρ δεκάκις ἐπαναληφθῇ, καταμετρήσῃ αὐτό· μῆκος δὲ τὸ τετραποδιαῖον οὐ μέρος, μέρη δὲ τῇ δεκαποδιαίῳ ἐσὶν, ἐπαναληφθὲν γὰρ ε καταμετρεῖ, ἀλλὰ δις μὲν ἐλλείπει, τρίς δὲ ὑπερέχει. Τὰ δέ τοι μέρη ἦτοι συμμέτρως ἔχει πρὸς τὸ ὅλον ὡς ἐπὶ τῇ τεθέντος, ἢ γῶν ε ἀσυμμέτρως, ὡς ἐάν τις τὴν Πλευρὰν τῇ Τετραγώνῳ παραβάλλῃ πρὸς τὴν τῇ αὐτῇ Διαγώνιον. Ο'ρα τὸ Σχόλ. τῆς ΜΖ'. τῇ Α'. Βιβλίῳ.

Μεγέθους Μεγέθους πολλαπλάσιόν ἐστι, τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονος ὅταν Β'.
καταμετρηῇται ὑπὸ τῷ ἐλάσσονος, τατέσιν ὅταν τὸ ἔλαττον μέρος τῷ μείζονος
ἢ, εἴτ' ἂν ὁ ταυτὸν ἐσιν, ὅταν τὸ μείζον περιεκτικὸν ἐπ' ἀκριβὲς ἢ τῷ ἐλάτ-
τονος πλεονάκεις ἐπαναληφθέντος.

Λόγος ἐστὶ δύο Μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα Γ'.
ποια ῥέσις.

Ἐπὶ παντός δὲ λόγος ὅροι δύο εἰσιν, ὧν ὁ μὲν πρωτοταγὴς ἡγούμενον
τῷ λόγῳ καλεῖται, τατέσιν ὁ δὲ Ὁρῆς ἐκφερόμενος, ὁ δὲ ἐξῆς Ἐπόμενον.

Τῷ ἡγούμενῳ τε καὶ ἐπομένῳ συνισαμένων, ὁ λόγος τῆς ἰσότητος εἶναι λέγε-
ται, ἀνίστων δὲ ὄντων, Ἀνισότητος, καὶ μείζονος μὲν ἀνισότητος, εἰ τὸ ἡγόμε-
νον μείζον ἢ, ἐλάσσονος δὲ, ἢν ἔλαττον.

Λόγος λογικός ἐστιν, ὁ ἐν τοῖς συμμετρίοις τῶν Μεγεθῶν θεωρούμενος, Δ'.
καὶ ἀριθμοῖς ἐκφέρεσθαι δυνάμενος, ἄλογος δὲ, ὁ ἐν τοῖς ἀσύμμετροις τῶν
Μεγεθῶν θεωρούμενος, καὶ δι' ἀριθμῶν ἀνεκφράστος.

Οἷον ὁ λόγος 2 πρὸς 1 λογικός ἐστιν, ὁ δὲ 1/2 : 1 ἄλογος, καὶ γὰρ 1/2
ἑδενὶ ἀν' ἀριθμῷ ἐκφραδεῖται.

Καὶ σύμμετρα μὲν Μεγέθη ἐσιν, ἅττα κοινόντι παραληφθέν μέτρον κα-
ταμετρεῖ, ἀσύμμετρα δὲ, ἅττα κοινὸν ἑδὲ μέτρον καταμετρεῖ.

Λόγοι δύο A : B καὶ Γ : Δ ὅμοιοι, ἴσοι, οἱ αὐτοὶ εἰσιν, ὅταν τὸ θάτερον Ε'.
ἡγούμενον Α, ἐπίσης τε καὶ ὡσαύτως (τατέσιν ἑδὲ μᾶλλον, ἑδὲ γε ἥττον) πε-
ριέχῃ τὸ ἐπόμενον Β τὸ ἑαυτῷ, ὡς περ τὸ θάτερον ἡγούμενον Γ περιέχει τὸ
ἐπόμενον Δ τὸ ἑαυτῷ.

Ἡ' ὅταν τὸ θάτερον ἡγούμενον Α ὡσαύτως περιέχῃται ἐν τῷ ἰδίῳ ἐπο-
μένῳ Β, ὡς περ τὸ θάτερον ἡγούμενον Γ ἐν τῷ ἰδίῳ ἐπομένῳ Δ.

Τὰ δὲ Μεγέθη τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, καλεῖται Ἀνάλογον.

Λόγοι δύο ἀνόμοιοι εἰσι, τατέσι λόγος λόγῳ μείζων ἐστίν, ὅταν τὸ θά-
τερον ἡγούμενον Ε, μᾶλλον περιέχῃ τὸ ἴδιον ἐπόμενον Ζ, ἢ τὸ θάτερον ἡγόμε-
νον Η, τὸ ἴδιον ἐπόμενον Θ· ἢ ὅταν τὸ θάτερον ἡγούμενον, ἥττον περιέ-
χῃται ἐν τῷ ἰδίῳ ἐπομένῳ, ἢ τὸ θάτερον ἡγούμενον ἐν τῷ ἰδίῳ.

Ἡ' τῶν λόγων ἰσότης τε καὶ ἀνισότης ἀναπτύσσεται.

Τι δὲ βέλεται τὸ θάτερον τῶν ἡγούμενων ἦτοι ἐπίσης, ἢ μᾶλλον περι-
έχειν τὸ ἴδιον ἐπόμενον, ἢ θάτερον τὸ ἑαυτῷ, εἰάν οἱ λόγοι λογικοὶ ᾤσι,
ὁριζῶνται τε καὶ ἀναπτύχθῃναι περαιτέρω καὶ διὰ τῶν ἀριθμῶν δυνατόν. Οἷον
εἰάν τὸ Α τριπλάσιον ἢ τῷ Β, τότε Γ τριπλάσιον τῷ Δ, δῆλον ὅπως τὸ

Α ἐπίσης τε ἢ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, περιεκτικὸν ὃν τυγχάνει τῷ Β, καὶ ὃν ἢ τὸ Γ τῷ Δ· καὶ εἰ μὴ τὸ Ε τριπλάσιον ἢ τῷ Ζ, τὸ δὲ Η διπλάσιον τῷ Θ, φανερόν αὖτις ὅπως τὸ Ε, μᾶλλον περιέχει τὸ Ζ, ἢ τὸ Η, τὸ Θ. Εἰ δὲ οἱ λόγοι τῶν ἀλόγων τύχωσι, τὸ πρᾶγμα περαιτέρω ἀναπτύξεώς ἐστιν ἀνένδεκτον. Ἐξω Μεγέθῃ ἀσύμμετρα τὰ Α ἢ Β, σαφές δὲ ὅτι τὸ Α ἢ μόνον μείζον τῷ Β ἐστίν, ἢ ὅπως μείζον ἐστίν (ἄλλως γὰρ τὸ Α περιεκτικὸν τυγχάνει τῷ Β, ἢ Μεγέθους ἄλλο τὸ τυχόν, ὃ μείζον ἂν εἴη αὐτῷ τῷ Α, ἢ ἔλαττον), οὐδέ γε δεῖ περαιτέρω ζητεῖν ἢ ἀναπτύξαι πειραῖσθαι, τίς ὁ ὠρισμένος τρόπος, καὶ ὃν τὸ Α περιέχειν λέγεται τὸ Β, ἐστὶ γὰρ ὁ τρόπος δι' ἀριθμῶν πάντῃ ἀνέκφρατος ἢ ἀδιερμήνευτος· ὥς τε κατὰ περὶ δυοῖν δοθέντων Μεγεθῶν ἀσυμμέτρων, ζητεῖν οὐ δεῖ τί τὸ ὅπως, εἰτ' οὖν ὠρισμένως θάτερον περιέχειν θάτερον, οὕτως τοι ἢ Μεγεθῶν τεσσάρων, ἐν οἷς ἀνά δύο τὸ ἀσύμμετρον ἐστὶ, δοθέντων, ζητεῖν ἢ δεῖ τί τὸ ἐπίσης τε ἢ ὡσαύτως τὸ Γ φέρε, περιεκτικὸν εἶναι τῷ Δ, ὥς περ τὸ Α περιεκτικὸν τυγχάνει τῷ Β· τῷ γάρ τοι τρόπῳ καὶ ὃν τὸ Α περιεκτικὸν ἐστὶ τῷ Β ἀδιερμηνεύτως ἔχοντος, ἢ ἡ ταυτότης πάντως τῷ τρόπῳ ὅτῳ τὸ Α περιέχει τὸ Β, τῷ ὅτῳ τὸ Γ περιέχει τὸ Δ, ὡσαύτως ἀδιερμήνευτος ἐστὶ.

Ἡ δὲ τῶν τρόπων ταυτότης ἐκ τῷ κατ' Εὐκλείδην Ὄρισμῷ τῶν ἴσων λόγων, περὶ οὗ κατωτέρω, ἢ ἐκ τῇ κατὰ γε τὸν Τακυστίον γνωρίσματος τῶν αὐτῶν, περὶ οὗ ἐφεξῆς, ὅσον τῇ φύσει τῶν πραγμάτων ἐγχεῖται, ἀποχωρῶντος εἰσὶν ἀναπτύσσονται.

307.

Ὅτι δὲ ἀλόγων τινὸς λόγῳ, τῷ Α φέρε πρὸς τὸ Β δοθέντος, δυνατοὶ εἶσι ἢ λόγοι ἄλλοι ἄπειροι, ἢ τοι ἴσοι, ἢ μείζονες, ἢ ἐλάσσονες, ἐν ὅροις ποικίλοις συνεσῶτες, συνιδεῖν ῥᾶδιον ἐντεῦθεν. Ληφθήτω Μεγέθους ὁποιοῦν τὸ Γ, ἢ ἀφαιρεθήτω τὸ Β ἀπὸ τῷ ἀσύμμετρον αὐτῷ Α, ὅσας ἂν ἐξῇ, ὅσον τρεῖς, ἢ λοιπὸν ἔσω τὸ ΕΖ· ἔσω δὲ Ο τρίτημόριον τῷ Γ, κείδω δὲ ἢ τὸ τυχόν Χ πρὸς μὲν τὸ Γ ἀσύμμετρώς ἔχον, τῷ δὲ Ο μείζον· ἐπεὶ δὲ τὸ Α περιέχει τὸ Β πλεονάκεις ἢ τρεῖς, τὸ δὲ Γ περιέχει τὸ Χ ἡττονάκεις ἢ τρεῖς (τρεῖς γὰρ ἐπ' ἀκριβὲς τὸ Γ περιεκτικὸν ἐτέθη τῷ Ο, οὗ μείζον ἐλήφθη τὸ Χ), ἔσαι ὁ ἄλογος λόγος τῷ Γ πρὸς τὸ Χ, ἐλάσσω τῷ ἀλόγῳ λόγῳ τῷ Α πρὸς τὸ Β. Ἡ δὲ κείδω ἢ τὸ Π τεταρτημόριον ὃν τῷ Γ, ἢ ἔσω τὸ τυχόν Ψ, τῷ μὲν Γ ἀσύμμετρον, τῷ δὲ Π ἔλαττον· καὶ ἐπεὶ τὸ Α περιέχει τὸ Β ἡττονάκεις ἢ τετράκεις, τὸ δὲ Γ περιέχει τὸ Ψ πλεονάκεις ἢ τετράκεις (τὸ γὰρ Γ ἐπ' ἀκριβὲς τετράκεις περιεκτικὸν ἐτέθη τῷ Π, οὗ περ ἔλαττον ἐλήφθη τὸ Ψ), ἔσαι δὲ ὁ ἄλογος λόγος τῷ Γ πρὸς τὸ Ψ, μείζων τῷ ἀλόγῳ λόγῳ τῷ Α πρὸς τὸ Β.

Ἦδη δὲ ἐπεὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Χ, ἐλάσσονα λόγον ἔχον ἐστὶν ἢ τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ πάλιν ἐπειδὴ τὸ Γ πρὸς τὸ Ψ, μείζονα λόγον ἔχον ἐστὶν ἢ τὸ Α πρὸς τὸ Β, φανερόν ὅτι τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, μέσον τινὰ λόγον ἢ πρὸς τὸ Χ καὶ τὸ Ψ ἔξει, ἴσον τῷ ὅνπερ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β. Ὅ δὴ παρὰ τῆς κατὰ φύσιν ἐναργείας κατάδηλόν ἐστιν ἡδὲν ἦττον, ἢ εἰ τις διανοεῖται ὥδε· δοτὸν μὲν τὸ μείζον τῷ Κ, δοτὸν δὲ τὸ ἐλάττω τῷ Κ, δοτὸν ἄρα καὶ τὸ ἴσον τῷ Κ.

Τὶ τὸ ἐν τῷ κατ' Εὐκλείδην Ὁρισμῷ τῶν ἴσων λόγων
ἔλλειπον.

Ὁ μὲν οὖν Εὐκλείδης, λόγους δύο Α πρὸς Β, καὶ Γ πρὸς Δ ἴσους εἶναι φησὶν, ὅταν τὰ τῶν ἡγαγμένων ἰσάνεις πολλαπλάσια Ε καὶ Ζ, τῶν τῶν ἐπομένων ἰσάνεις πολλαπλασίων Η, Θ, καὶ ὅποιον ἂν πολλαπλασιασμὸν ἢ ἅμα ὑπερέχη, ἢ ἅμα ἔλειπη, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ταῖς ἐν ὅταν τῷ Ε ὑπερέχοντος τὸ Η, καὶ τὸ Ζ ὑπερέχη τὸ Θ, καὶ ὅταν τῷ Ε ὑπερεχομένη τῷ Η, καὶ τὸ Ζ ὑπερέχηται τῷ Θ, καὶ ὅταν τῷ Ε συνισαμένα τῷ Η, καὶ τὸ Ζ συνισέμενον ᾖ τῷ Θ. Ἐνθα καλῶς σημειώτεον, ὡς ὁ Εὐκλείδης τὴν τῶν ἰσάνεις πολλαπλασίων ὑπεροχὴν καὶ ἔλειψιν, ἐκ ἀναλογικῶς καὶ κατὰ ὁμοιότητα ἐξεδέξατο, ἔτω γὰρ ἀλόγως τὸ αὐτὸ διὰ τῶν αὐτῶν ἀναπτύξαι ἂν ἐπεχείρησεν, ἀλλὰ τὴν ὑπεροχὴν καὶ τὴν ἔλειψιν ἀπλῶς. Ἀλλὰ καὶ ἡτῶς ἔμπης τὸν τῶν Γεωμετρῶν ὑπατεύοντα, κατὰ τι ἔλλειπειν ἀνωτέρω ἡμῖν σεσημειώται· ὅτοι γὰρ διὰ τῶν, τὸν τῶν ἴσων λόγων Ὁρισμὸν ἀποδῆναι σκοπῶν, τὸ τῷ ὀρίσει πάθος εἰς Ὁρισμὸν ἐξέλιπε· δῆλον γὰρ ὅτι ἐκ τῆς τῶν λόγων ἰσότητος, ὡς ἐξ ἀρχῆς προβλυσάνει αὕτη ἢ τῶν πολλαπλασίων ἰδιότης· ἢ γὰρ ὡς γνώρισμα τῆτο προβάλλεται ὃν τῶν ἴσων λόγων πρῶτόν τε καὶ ἀδιάπτεισον, καὶ ἔτις ἀποδείξει ὥφειλε, τοῖς ἴσοις λόγοις αὐτὸ αἰετὶν συνημμένον εἶναι, ὡς ἐκ τῆς ἐκείνης αἰετὶν ἐπιφέρεισθαι, ἣτις δὴ συνάφεια ἀσαφής τε ἐστὶ καὶ ἐκ εὐαπόδεικτος, ἢ τέως ἀντὶ τῆς τῶν λόγων ἰσότητος ἡδὲν ἕτερον ἐννοεῖ, ὅτι μὴ τὴν ἅμα τῶν πολλαπλασίων ἐκείνων ὑπεροχὴν καὶ ἔλειψιν· καὶ ἡτῶς ἐν ὧ τῷ Ε' καὶ ζ'. Βιβλ. ἔταν τέσσαρα Μεγέθη Ἀνάλογον εἶναι ἀποδεικνύει, ἡδὲν ἕτερον εἰσόμεθα, ἢ τὴν εἰρημένην ὑπεροχὴν καὶ ἔλειψιν αὐτοῖς προσήκειν, ἀγνοοῦντες εἰ ὅλως ταῦτα τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος Μεγέθη Ἀνάλογον τῶντι ἐστὶ.

Ἀλλ' ὁ Εὐκλείδης ἐν τῷ τῶν ἴσων λόγων Ὁρισμῷ, ἡδὲν ἄλλο ἢ

τὸν νῦν καὶ ὃν τὰς φωνὰς ἐκεῖνας ἐξειλήφει, ὡς ἔθος τοῖς ἀπὸ τῶν Μαθημάτων δεῖξαι προδόμενος, συνορᾶν ἢ ἔχω τὶ τοσαῦτον αἰτιατέος ἐστὶ καὶ μάλιστα τῷ Ὄρισμῷ ἅπασιν τοῖς ἴσοις τῶν λόγων ἀληθῶς προσήκοντος, εἴτε λογικοὶ εἴεν, εἴτ' οὖν καὶ ἄλογοι, ὡς ἐν τῷ Β'. μέρει τῷ ἐν χερσὶ Βιβλίου καὶ αὐτὸς ὁ Τακτέτιος ἀποδείκνυσιν, ὃ καὶ τοῖς ἀκριβῶς τὸν νῦν τῷ Ὄρισμῷ ἐπισήτασιν αὐτόθεν κατάδηλον ἐστίν· ὅρα τὰ ἡμῖν σεσημειωμένα ἐν Ὄρισμ. Λς. τῷ Α'. Βιβλίῳ. Πρὸς γὰρ τὸν αὐτὸν ἡμῖν λίσσον προσκρῖναι ἐκατέρωσθε ὁ Τακτέτιος· ἀλλ' ἐπέιγες τῇ κατ' αὐτὸν μεθόδῳ ἐπάναγκες ἀκολουθεῖσαι, ἰδωμεν τέως ὅποιονδὴ ποτε καθόλου τεκμήριον τῶν ἴσων λόγων ἡμῖν προβάλλεται.

Γνώρισμα ἕτερον τῶν ἴσων λόγων πρῶτόν τε καὶ ἀδιάπταισον ὑποτίθεται.

Γνώρισμα τοίνυν αὐτοὶ σαφές τε καὶ ἀδιάπταισον, καὶ πρῶτον τοιαῦτον ὑποθησόμεθα τε καὶ δείξομεν ἐν Θεώρ. Ε'. καὶ ζ'. τῷ Β'. Μέρους (ἀλλὰ γὰρ δείξεως ἐργώδους ἐπιδεῖς εἶναι ἥκιστα δοκεῖ ταῦτ' ἐν τῶν ἴσων λόγων τεκμήριον, ὡς ἐκ τῶν Ὄρισμ. Ε'. καὶ ζ'. ἀμέσως ἐπιφερόμενον, καὶ τῶν οἷον τις ἔκθεσις τε καὶ διασάφησις ὄν)· ἐστὶ δὲ τοιαῦτο.

κ. 308.

Οἱ λόγοι (οἱ κατὰ τὴν μέζονα ἀνισότητα) ἴσοι εἰσὶν (οἷον ὁ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΖ, καὶ ὁ τῆς ΗΜ πρὸς τὴν ΝΠ), ὅταν καὶ αὐτὰ τὰ ἐπόμενα, καὶ τῶν ἅπαν ὁποῖον μέρους ὅμοιον, ἐν τοῖς ἡγόμενοις ἰσαριθμῶς αἰεὶ περιέχεται· οἷον ἐὰν τῷ δεκατημορίῳ τῆς ΓΖ διακοσιάκις ἐν τῇ ΑΒ περιεχομένῃ, καὶ τὸ δεκατημόριον τῆς ΝΠ διακοσιάκις ἐν τῇ ΗΜ περιέχεται· καὶ ἐὰν τῷ ἑκατοσημόριῳ τῆς ΓΖ χιλιάκις ἐν τῇ ΑΒ περιεχομένῃ, καὶ τὸ ἑκατοσημόριον τῆς ΝΠ χιλιάκις ἐν τῇ ΗΜ περιέχεται, καὶ ὅπως ἐφεξῆς ἐς ἄπειρον, ἔσαι ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΖ, ὡς ἢ ΗΜ πρὸς τὴν ΝΠ. Οὕτω γάρτοι κατὰ τὸν Ε'. Ὄρισμόν, τὸ τῷ προτέρῳ λόγῳ ἡγόμενον ΑΒ, ἐπίσιν τε καὶ ὡσαύτως (τατέσιν ἢ μᾶλλον, ἢ ἥττον) περιέχει τὸ ἴδιον ἐπόμενον ΓΖ, ὡς τὸ τῷ Β'. ἡγόμενον ΗΜ περιέχει τὸ ἴδιον ἐπόμενον ΝΠ.

Εἰ δὲ οἱ κατὰ τὴν ἐλάσσονα ἀνισότητα λόγοι ΓΖ πρὸς ΑΒ, καὶ ΝΠ πρὸς ΗΜ ἴσοι τεθῶσι, τὰ ἡγόμενα αὐτὰ, καὶ τῶν ἡγόμενων πᾶν ὁποῖον μέρους ὅμοιον, ἐν τοῖς ἐπομένοις αὐτῶν ἰσαριθμῶς αἰεὶ περιεχόμενα ἔσαι· τῷτο γὰρ αὖθις ὁ Ε'. τῶν Ὄρισμ. ἀπαιτεῖ, τὸ ἡγόμενον ἀμέλει ΓΖ, ὡσαύτως περιέχεσθαι ἐν τῷ ἴδιῳ ἐπομένῳ ΑΒ, ὥσπερ τὸ ἡγόμενον ΝΠ ἐν τῷ ἴδιῳ αὐτῷ ΗΜ.

Αἰνισοὶ δὲ λόγοι εἰσὶν, ὅταν ἦτοι τὰ ἐπόμενα αὐτὰ, ἢ τῶν ἐπομένων πᾶν ὁτιῦν μέρος ὁμοιον, μὴ ἰσαριθμῶς ἐν τοῖς ἡγυμένοις περιέχεται. Καὶ τῶν μείζων μὲν ὁ λόγος, ὅστις ἦτοι τὸ ἐπόμενον, ἢ τὸ μέρος τῆ ἐπομένη πλεονάκεις περιέχοιτο ἐν τῷ ἡγυμένῳ.

Οἷον ἐὰν ἑκατονχιλιοσημόριον τῆς ΓΖ πλεονάκεις περιέχεται ἐν τῇ ΑΒ, ἢ τὸ ἑκατονχιλιοσημόριον τῆς ΝΠ ἐν τῇ ΗΜ, ἔσται ὁ λόγος ΑΒ πρὸς ΓΖ μείζων τῆ λόγῳ ΗΜ πρὸς ΝΠ. * Ἐπεται δὲ ἡ τῆτο ἐκ τῆς ζ'. Οἰσμός.

Ἰσαριθμῶς δὲ περιέχεσθαι λέγεται, ὡς αἱ ἀφαιρέσεις αἱ δυναταὶ ἰσάριθμοι εἰσὶ.

Τῷ δὲ τοιῷδε τεκμηρίῳ, ἡ ἢ τῶν ἀλόγων λόγων ἰσότης τε ἡ ἀνισότης καταφαίνεται. Οὕτω γὰρ ἡ τὰ ἡγυμένα τὰ τοῖς ἐπομένοις ὕψα ἀσύμμετρα, τῇ ἀφαιρέσει τῶν συμμετρῶν τε ἡ ἀναλόγων τοῖς ἐπομένοις αὐτοῖς, εἰς τὸ μηδὲν ἀπολήγυσιν οἷον ἐξαντλήμενα.

Οἷμοια δὲ μέρη ἐσὶ τὰ ἐπίσης τε ἡ ὡσαύτως ἐν τοῖς ὅλοις αὐτῶν περιέχόμενα, ὥς ἐ οἷονδὴ ποτε μέρος τῆ οικείᾳ ὅλα τὸ ἕτερον εἶναι τεθείη, τοιῦτον εἶναι ἡ τῆ οικείᾳ τὸ ἕτερον. Οἷ τῶν ὄντι ἀδὲν ἄλλο ἐστίν, ἢ τὰ μέρη πρὸς τὰ αὐτῶν ὅλα, ἡ δὲ ἡ ἀνάπαλιν τὰ ὅλα πρὸς τὰ μέρη αὐτῶν εἶναι ἀνάλογον, εἴτε τὰ μέρη τοῖς ὅλοις σύμμετρα ἢ, εἴτε ἡ ἀσύμμετρα.

Μέρος δὲ μέρει ὁμοιον, τὸ ὡσαύτως τὸ κατ' αὐτὸ ὅλον καταμετρῆν, οἷον ἐὰν ἑκάτερον φέρε τῆ ὅλα τριτημόριον ἢ, ἢ δεκατημόριον, ἢ κξ.

Μεγέθη συνεχῶς ἀνάλογον ἐστίν (α, β, γ, δ), ὡς οἱ μεταξὺ ὅροι β, γ δις λαμβάνονται, διττὴν ἔχοντες τὴν σχέσιν, τὴν μὲν τῆ ἐπομένη πρὸς τὸν ἀμέσως ἡγυμένον, τὴν δὲ τῆ ἡγυμένη πρὸς τὸν ἐφεξῆς ἐπόμενον· τὰς δέ τοι συνεχεῖς λόγους ὅτως ἐκφέρομεν, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, ἢ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, ἡ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ, ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, κξ

Μεγέθη δὲ διωρισμένως ἀνάλογον ἐστίν, ὡς ἀδείς τῶν ὅρων δις λαμβάνεται· ἢ ὅτως ἐκφέρομεν Α πρὸς Β, ὡς Γ πρὸς Δ.

Τὰ δὲ πλείονα τριῶν Μεγέθη ἀνάλογον εἶναι λεγόμενα, διωρισμένως ἢ ἐν νοείῳ.

Ἐὰν ἢ Μεγέθη συνεχῶς ἀνάλογον (α, β, γ, δ), τὸ πρῶτον α πρὸς τὸ τρίτον γ διπλασίονα τὸν λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ τὸ αὐτὸ πρῶτον α πρὸς τὸ δεύτερον β, καὶ τὸ πρῶτον α πρὸς τὸ τέταρτον δ τριπλασίονα, ἢ τὸ πρῶτον α πρὸς τὸ δεύτερον β, ἡ ἐφεξῆς.

Ὡσαύτως δὲ ἡ τὸ πρῶτον α πρὸς τὸ δεύτερον β, ὑποδιπλασίονα (τε-

τέσι τὸν ἐφ' ἡμισείας) λόγον λέγεται ἔχειν, ἢ τὸ αὐτὸ α πρὸς τὸ τρίτον γ, καὶ ὑποτριπλασίονα, ἢ τὸ αὐτὸ α πρὸς τὸ τέταρτον δ, καὶ ἕτως ἐφεξῆς.

Καὶ εἰς λόγους τριπλασίων λόγῳ τινὶ διπλασίονι ἴσος ἦ, ἔσαι ὁ τῷ δευτέρῃ ἀπλῆς τῷ κατὰ τὸν πρότερον ἀπλῆ ἡμιπλασίων, τετέστιν ἡμιόλειος. Οἶον ἔσω α, β, γ, δ :: καὶ Α, Β, Γ ::· κείῳ δὲ α πρὸς δ ἐν τῇ προτέρῃ ἀναλογίᾳ, ὡς Α πρὸς Γ ἐν τῇ δευτέρᾳ· φημὶ δὲ ὅτι Α ἔστι πρὸς Β ἐν λόγῳ ἡμιολείῳ τῷ λόγῳ α πρὸς β. Ἐς γὰρ ζ μεταξὺ β καὶ γ, ἢ ὁ ταυτὸν ἔστι, μεταξὺ α καὶ δ μέσον ἀνάλογον, διὰ γὰρ τῆς ἴσης λόγους α πρὸς δ, καὶ Α πρὸς Γ, καὶ τὰς ἀναλόγους ἐκατέρωστε μεσότητας ζ καὶ Β, ἔσαι α:ζ::Α:Β. Ἀλλὰ μὲν ὁ λόγος α πρὸς ζ σύγκειται ἐκ τῶ ὅλου λόγῳ α πρὸς β, καὶ τῆς ἡμισείας τῷ αὐτῷ β πρὸς ζ, ἄρα ὁ λόγος Α πρὸς Β, ὅς ἴσος ἐστὶ τῷ λόγῳ α πρὸς ζ, περιέχει τόν τε ὅλον λόγον α πρὸς β, καὶ τὴν κατ' αὐτὴν ἡμίσειαν, ἦτοι τὸν β πρὸς ζ· ὁ δὲ ἐκ τῶ ὅλου καὶ τῆς ἡμισείας λόγος, ἡμιπλασίων καλεῖται, τετέστιν ἡμιόλειος, ἔστιν ἄρα Α πρὸς Β ἐν λόγῳ ἡμιπλασίονι, ἦτοι ἡμιολείῳ τῷ α πρὸς β. Καὶ ἕτως ἐν τοῖς Ἀστρονομικοῖς, ἐπειδὴ οἱ κύβοι τῶν ἀποστάσεων τῶν Πλανητῶν ἀφ' ἡλίου, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ἀπὸ τῶν περιοδικῶν χρόνων Τετράγωνα, ἕτως ὥς τὸν τριπλασίονα τῶν ἀποστάσεων λόγον, τὸν αὐτὸν εἶναι τῷ τῶν περιοδικῶν χρόνων διπλασίονι (οἱ μὲν γὰρ κύβοι ἐν λόγῳ εἰσὶ (1) τριπλασίονι, τὰ δὲ Τετράγωνα ἐν διπλασίονι (2) τῶν ἰδίων Πλευρῶν, ἦτοι τῶν ῥιζῶν σχετικῶς), λέγειν εἰώθαμεν, ὡς οἱ περιοδικοὶ χρόνοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ἐν λόγῳ ἡμιπλασίονι, ἦτοι ἡμιολείῳ τῶν ἀφ' ἡλίου ἀποστάσεων.

ΙΔ'. Ομόλογα Μεγέθη καλεῖται, τὰ μὲν ἡγόμενα τοῖς ἡγμένοις, τοῖς δ' ἐπομένοις τὰ ἐπόμενα. Οἶον εἰάν ἦ Α:Β::Γ:Δ, ὁμόλογα ἔσαι τὰ Α, Γ, καὶ Β, Δ.

Οἱ δὲ λοιποὶ τῶν Ὄρισμῶν εὐχερέστερον ἐν αὐταῖς ταῖς Προτάσεσι κατανυγθήσονται.

Τὸ δὲ Πέμπτον Βιβλίον Προτάσεις περιέχον ἐστὶν 25, ἐξ ὧν αἱ 10 ἂν ἄλλης χρήσεως εἰσὶν, ἢ ἐπὶ τῷ ἐξ αὐτῶν τὰς λοιπὰς διὰ τῶν Ἰσοπολλυπλασίων ἀποδειχθῆναι· διὸ ἐκείνας παραλιπόντες, τὰς λοιπὰς 15 μόναις ὑποδείσομεν, τὴν παρ' Εὐκλείδῃ τάξιν τηρήσαντες. Ἐπισητέον ἄλλ' οὖν ὅτι τὰ τῷ παρόντι Βιβλίῳ Θεωρήματα, ἢ μόναις ταῖς Γραμμαῖς, ἀλλὰ καὶ παντὶ πο-

(1) ΛΓ. τῷ ια'. (2) Κ. τῷ ζ'.

σότητος εἶδει προσήκοντα ἐστὶ· διὰ τῆς Γραμμᾶς αἷς χρησόμεθα, ὡς παρα-
 σατικᾶς οἰασθήποτε ποσότητος δέον ἐκδέχεται.

Α' Ξίωμα.

Τριῶν Μεγεθῶν δοθέντων Α, Β, Γ, δοτὸν ἔτι τέταρτον Δ, πρὸς ὃ ἂν
 τὸ Γ, τῷ τῷ Α πρὸς τὸ Β λόγῳ δευτικὸν ᾖ.

Πρότασις Α. Β. Γ. Δ. Ε. ζ.

Ἐν τῇ καθ' ἡμᾶς μεθόδῳ περιτταὶ εἰσιν, ὧν ἡ Δ' ἐπισημοτέρα οὖσα,
 ἡ τὴν Χρήσιν πυκνότερα, ἡ ἡμῖν κατωτέρῳ ἀποδειχθήσεται. Ἐστὶ γὰρ τὸ
 Α'. Λήμμα τῷ Β'. μέρες τῷ παρόντος Βιβλίου.

Πρότασις Ζ.

„Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἡ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.
 Ταῦτέστιν εἰάν ὑποτεθῶσι Μεγέθη δύο τὸ μὲν Α, τὸ δὲ Β ἀλλήλοις ἴσα,
 δοθῇ δὲ ἡ Μεγέθους τρίτον τὸ Γ, ἔσαι δὴ Α πρὸς Γ, ὡς Β πρὸς Γ· καὶ
 ἀνάπαλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Α, ὡς τὸ αὐτὸ Γ πρὸς τὸ Β.

Αὕτη ἡ Πρότασις, ὅσα δὴ ἡ αἰ ἐφεξῆς ἐπόμεναι τέσσαρες, φιλά Α'-
 ξιώματα οὖσαι, ἀδεμιᾶς ἐπιδεῖς τυγχάνουσι δείξεως.

Σχόλιον.

Ὡς αὐτως δὲ καὶ τὰ ἴσα πρὸς τὰ ἴσα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ταῦτέστιν
 εἰάν ἡ ἕτερον Μεγέθους τὸ Δ φέρεται δοθῇ, ὅπερ ἴσον εἴη τῷ Γ, ἔσαι Α:Γ:
 :Β:Δ, καὶ ἀνάπαλιν. Παραπλησίῳ δὲ τῷ λόγῳ ἡ αἰ ἐφεξῆς τρεῖς Προ-
 τάσεις σαφῶς ἀληθεύουσι, ἡ εἰάν ἀντὶ τῷ ἐνὸς Μεγέθους Γ, δύο ἴσα ὑπο-
 τεθῇ τὰ Γ ἡ Δ.

Πρότασις Η.

„Τῶν ἀνίσων Μεγεθῶν, τὸ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει,
 ἡ ἢ πρὸς τὸ ἔλαττον, ἡ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἡ πρὸς
 τὸ μείζον.

Οἶον εἰάν ἡ Μεγέθη ἄνισα τὰ Ζ, Θ, τὸ μείζον Ζ πρὸς τι τρίτον τὸ
 Κ, μείζονα λόγον ἔξει, ἡ τὸ ἔλαττον Θ πρὸς τὸ αὐτὸ Κ· καὶ τὸ ἔλαττον
 Θ πρὸς τὸ Κ, ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἡ τὸ μείζον Ζ πρὸς τὸ αὐτὸ Κ.

Υ

Καὶ τὸ αὐτὸ Κ ἐλάσσονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ μείζον Ζ, ἢ πρὸς τὸ ἔλαττον Θ· τότε αὐτὸ Κ πρὸς τὸ ἔλαττον Θ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς τὸ μείζον Ζ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἐστί· καὶ πρὸς αὐτὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ κεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Οἷον ἐὰν ᾖ $A : Γ :: B : Γ$, τὰ Α καὶ Β ἴσα.

Καὶ ἐὰν ᾖ $Γ : Α :: Γ : Β$, τὰ Α καὶ Β ἴσα.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ι.

„Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκείνο μείζον ἐστί· πρὸς δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἔλαττον ἐστί.

Οἷον ἐὰν $Z : K > Θ : K$, ἔσαι $Z > Θ$. Διό

Καὶ ἐὰν $Θ : K < Z : K$, ἔσαι $Θ < Z$.

Εἰ δὲ $K : Θ > K : Z$, ἔσαι $Θ < Z$. Διό

Εἰ δὲ $K : Z < K : Θ$, ἔσαι $Z > Θ$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

„Οἱ τῶ αὐτῶ λόγοι οἱ αὐτοὶ (ἢ ἴσοι, ἢ ὅμοιοι, ἰσοδύναμα γὰρ ταῦτα), καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Οἷον ἐὰν ᾖ $A : B :: Γ : Δ$.

Καὶ $E : Z :: Γ : Δ$ · ἔσαι $A : B :: E : Z$.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ὡσαύτως δὲ καὶ οἱ λόγοι οἱ τοῖς ἴσοις ἴσοι, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσοι· καὶ οἱ λόγοι οἱ τῷ ἑτέρῳ τῶν ἴσων μείζονες, ἢ ἐλάσσονες, καὶ τῷ ἑτέρῳ ὁμοίως μείζονες εἰσὶν, ἢ ἐλάσσονες. Ἡ δὲ ἐὰν ὁ ἕτερος τῶν ἴσων λόγων τρίτη τινὸς μείζων ᾖ, ἢ ἐλάσσων, καὶ ὁ ἕτερος τῷ αὐτῷ τρίτη μείζων ἔσαι, ἢ ἐλάσσων.

Οἷον ἐὰν ᾖ $A : B :: Γ : Δ$, καὶ $Γ : Δ > E : Z$.

Ἐσαι καὶ $A : B > E : Z$.

Αὕτη δὲ ἐστὶν ἡ ΙΓ'. Πρότασις, ἣν ὁ Τακτέτιος παρέδραμε. Καὶ ὡσαύτως ἐὰν ᾖ $A : B :: Γ : Δ$, καὶ $Γ : Δ < E : Z$.

Ἐσαι καὶ $A : B < E : Z$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΒ.

„Εάν ἡ ὅποσα ἂν Μεγέθη ἀνάλογον, ἔσαι ὡς ἐν τῶν ἡγαμένων πρὸς
 „ἐν τῶν ἐπομένων, ὅτως ἅπαντα τὰ ἡγόμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα.

Οἷον εἰάν ἡ $A : B :: \Gamma : \Delta :: E : Z$.

Ἐσαι $A : B :: A + \Gamma + E : B + \Delta + Z$.

Καὶ τοίνυν (ἵνα διὰ παραδείγματος τὸ ἄλλως σαφές λευκότερον ἦ)
 εἰάν ἕκαστον A , καὶ Γ , καὶ E , ἑκάστη B , καὶ Δ , καὶ Z , τριπλάσιον ἦ (τετέστιν
 εἰάν ἕκαστον πρὸς ἕκαστον λόγον ἔχη, ὃν 3 πρὸς 1), καὶ τὰ A , Γ , E ἅμα ληφ-
 θέντα, τῶν B , Δ , Z ἅμα ληφθέντων τριπλάσια ἔσαι (τετέστιν ἕξει λόγον
 ὃν 3 πρὸς 1). Καὶ ἐπὶ τῶν ἀλόγων δὲ λόγων αὐτὸ τὸτο ὁμοίως ἐστὶ σαφές.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Τὴν ΙΓ'. Πρότασιν ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΙΑ'. ἀνωτέρω εἰθέμε-
 θα, καὶ αὐτὴν δεῖξωσι δεομένην· τὴν δ' ἐφεξῆς ΙΔ'. καί τοι τῷ Τακτικῷ πε-
 ριττὴν δόξασαν, ὡς ἂν ἀχρηστον ἀποκαταστήσαι κατὰ χώραν, καὶ δεῖξαι δεῖν
 ἔγνωμεν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

„Εάν πρῶτον (α) πρὸς δεύτερον (β) τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον, καὶ τρίτον
 „(γ) πρὸς τέταρτον (δ), τὸ δὲ πρῶτον (α) τῷ τρίτῳ (γ) μείζον ἦ, καὶ τὸ δεύ-
 „τερον (β) τῷ τετάρτῳ (δ) μείζον ἔσαι· καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

Εἰάν ἡ δοθεῖσα ἀναλογία κατ' ἰσότητα ἦ, τῶν ἡγαμένων τοῖς ἐπομένοις
 ἴσων ὄντων, ἡ Πρότασις κατ' αὐτὴν δῆλη. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ ἀναλογίᾳ τῇ κα-
 τὰ τὴν μείζονα ἀνισότητα, τῷ ἑτέρῳ λόγῳ τὸ ἡγόμενον (1) ἐπίσης, ἦτοι
 ὡσαύτως περιέχει τὸ ἐπόμενον αὐτῷ, ὥσπερ τὸ τῷ ἑτέρῳ ἡγόμενον τὸ ἐπό-
 μενον τὸ ἰδίον· ἐν δὲ τῇ ἀναλογίᾳ τῇ κατὰ τὴν ἐλάσσονα ἀνισότητα, τὸ τῷ
 ἑτέρῳ ἡγόμενον ἐπίσης περιέχεται ἐν τῷ ἰδίῳ ἐπομένῳ, ὥσπερ καὶ τὸ θατέρω
 ἐν τῷ ἰδίῳ, δῆλον ὅτι καὶ ἐν τῇ ἀναλογίᾳ τῇ κατὰ τὴν ἦτοι μείζονα, ἢ ἐλάσ-
 σονα ἀνισότητα, φανερὰ ἡ Πρότασις τῷ προσέχοντι. Εἰ δέ τις ἐκ περιστάσεως ἐπι-
 ταύτης τὴν ἀπόδειξιν ζητοίῃ, μετίτω τὰ ἐφεξῆς.

Α'. Εἰάν ἡ $A > \Gamma$, ἔσαι (2) $A : B > \Gamma : B$. Ἄλλὰ $A : B :: \Gamma : \Delta$ (3),
 ἄρα $\Gamma : \Delta > (4) \Gamma : B$, ἄρα (5) τὸ Δ ἔλαττον τῷ B · καὶ ἐπομένως $B > \Delta$.

(1) ὅε. B . τῷ ϵ . (2) H . τῷ ϵ . (3) Ἐξ ὑποθ. (4) Σχόλ. τῆς ΙΑ. τῷ ϵ . (5) I . τῷ ϵ .

Β'. Ἐὰν ᾗ $A = \Gamma$, ἔσαι (1) $A : B :: \Gamma : B$. Ἀλλ' ἔστιν (ἐξ ὑποθ.) $A : B :: \Gamma : \Delta$, ἔστιν ἄρα (2) $\Gamma : B :: \Gamma : \Delta$ · καὶ ἐπομένως (3) $B = \Delta$.

Γ'. Ἐὰν ᾗ $A < \Gamma$, ἔσαι $A : B < \Gamma : B$ (4)· ἔστι δὲ (ἐξ ὑποθ.) $A : B :: \Gamma : \Delta$, ἄρα (5) $\Gamma : \Delta < \Gamma : B$ · ἐνθεντοι τὸ Δ μείζον τῶν B (6), καὶ ἐπομένως $B < \Delta$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΕ.

„Μέρος (α) πρὸς Μέρος (β) εἴαν ᾗ ὁμοία, ἔστιν ὡς ὅλον (Α) πρὸς ὅλον (Β)· καὶ ἐν γένει τὰ ὁμοία μέρη εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὅλα, εἴτε σύμμετρα τοῖς ὅλοις ταῦτα ᾗ, εἴτ' ἂν καὶ ἀσύμμετρώς πρὸς αὐτὰ ἔχη.

Τῶντοι Ἀξιώματος δίκην ληπτέον τὸ τεθεὶν ἀκριβῶς ἐφιστάνεσι, τί ἔστι τὸ τὰ μέρη ὁμοία εἶναι· ὅρα Ο'ρ. Ζ'.

„Ο' δὲ Εὐκλείδης ἔτω προτίθῃσι τὴν Πρότ.· τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως, πολλὰπλασίους τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἐὰν τὰ ὁμοία μέρη $\gamma\beta$, $\lambda\iota$, ἀπὸ τῶν ἰδίων ὅλων $\alpha\beta$, $\zeta\iota$ ἀφαιρεθῇ, καταλείψει μέρη ὁμοία τὰ $\alpha\gamma$, $\zeta\lambda$, ὃ καθ' αὐτὸ δῆλον ἐστὶ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις.

„Ἐὰν τέσσαρα Μεγέθη ἀνάλογον ᾗ ($A : B :: \Gamma : \Delta$), καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔσαι ($A : \Gamma :: B : \Delta$).

Κεῖθω τὰ B καὶ Δ ἐλάσσονα τῶν A καὶ Γ · εἰ γὰρ ἴσα, καθ' αὐτὸ δῆλον (ἔξει γὰρ τότε τὰ ἴσα A καὶ B πρὸς τὰ ἴσα Γ καὶ Δ (7), τὸν αὐτὸν λόγον, ὥστε εἶναι $A : \Gamma :: B : \Delta$)· ἐπεὶ δὲ τοίνυν (ἐξ ὑποθ. $A : B :: \Gamma : \Delta$), ἔσονται διὰ τὸν Ζ'. Ο'ρισμ. B καὶ Δ τῶν ὅλων A καὶ Γ μέρη ὁμοία. Ἐνθεντοι διὰ τὴν ἀνωτ., ὃν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα τὰ ὅλα A καὶ Γ , τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὰ μέρη τὰ ὁμοία B καὶ Δ , τατέστιν $A : \Gamma :: B : \Delta$.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, καὶ εἴαν τὰ ἡγόμενα A καὶ Γ , τῶν ἐπομένων B καὶ Δ ἐλάσσονα τεθῇ, ἐπεὶ δὲ $A : B :: \Gamma : \Delta$, ἔσονται (8) A καὶ Γ μέρη ὁμοία τῶν ὅλων B καὶ Δ , καὶ ἐπομένως (9) $A : \Gamma :: B : \Delta$.

(1) Ζ. τῷ ε'. (2) ΙΑ. τῷ ε'. (3) Θ. τῷ ε'. (4) Η. τῷ ε'. (5) Σχόλ. ΙΑ. τῷ ε'. (6) Ι. τῷ ε'. (7) Σχόλ. τῆς Ζ. τῷ ε'. (8) Ο'ρ. Ζ. τῷ ε'. (9) ΙΕ. τῷ ε'.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Εάν ἢ $A : B :: \Gamma : \Delta$, ἔσαι καὶ ἀνάπαλιν $B : A :: \Delta : \Gamma$. Καθ' αὐτὸ δὲ ὅλον.

Παρ' Εὐκλείδῃ δὲ Πορίσματος ἔχει χῶραν τῆς Δ'. Πρὸτ., ὅπερ ἐκείνης τῇ καθ' ἡμᾶς Μετῶδῳ περιττῆς ἔστις, ἐνταῦθα κείδω.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΖ.

Ἐάν ἡγόμενον (αβ) πρὸς ἐπόμενον (γβ), ἢ ὡς ἡγόμενον ἕτερον (ζι) πρὸς ἐπόμενον ἕτερον (λι), ἔσαι καὶ ἐν διαιρέσει ὡς (αγ) ἢ ὑπεροχῇ (ζλ) πρὸς ἐπόμενον αὐτῷ, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον (γβ), ἢ ὅπως ἢ (ζλ) ὑπεροχῇ τῷ δευτέρῳ ἡγμένῳ ὑπὲρ τὸ ἐπόμενον αὐτῷ, πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπόμενον τὸ δεύτερον (λι).

Ταύτην ὁ Στοιχείωτής ἔτιω προτίθησιν· εἰν συγκείμενα Μεγέθη ἀνάλογον ἢ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσαι.

Καὶ αὕτη δὲ Ἀξιώματος δίκην ἔχει ληφθῆναι· Εἰν γὰρ τὰ ὅλα αβ, ζι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὰ χ καὶ ψ, καὶ εἰ μέρη τινὰ ὅμοια ἀφαιρεθῇ, τὸν αὐτὸν ἔξει πρὸς τὰ χ καὶ ψ λόγον, ὃν εἶχε πρότερον· τατέσιν ἢ αβ καὶ ἀπομειωθεῖσα, ἔσαι ἔδεν ἥττον πρὸς τὴν χ, ὥσπερ καὶ ἢ ζι ὁμοίως ἀπομειωθεῖσα ἔχει πρὸς τὴν ψ, τῆτο δὲ ἔστιν ὃ τίθησιν ἢ Πρότασις· ἐπεὶ γὰρ τίθεται $\alpha\beta : \gamma\beta :: \zeta\iota : \lambda\iota$, ἔσονται (1) $\gamma\beta$ καὶ $\lambda\iota$ μέρη ὅμοια τῶν ὅλων αβ καὶ ζι, τὰ δὲ αγ καὶ ζλ ἔσαι τὸ ὅλα, ἀφ' ὧν τὰ ὅμοια μέρη ἀφίρηται· ἀλλὰ γὰρ τὰ ὅλα τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον πρὸς $\gamma\beta$ καὶ $\lambda\iota$, τοιγαρὲν καὶ αγ καὶ ζλ (ἀτινα ἐστὶ τὰ ὅλα αὐτά, ἀφ' ὧν τὰ ὅμοια μέρη ἀφίρηται), τὸν αὐτὸν καὶ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἔξουσι λόγον πρὸς $\gamma\beta$ καὶ $\lambda\iota$, τατέσιν ἔτι δὴ $\alpha\gamma : \gamma\beta :: \zeta\lambda : \zeta\iota$.

Α' λ λ ω ς.

Ἐπεὶ δὴ $\alpha\beta : \gamma\beta :: \zeta\iota : \lambda\iota$, ἄρα (2) $\gamma\beta$ καὶ $\lambda\iota$ μέρη ὅμοια ἐστὶ τῶν ὅλων αβ καὶ ζι. Ἐνθεντοὶ καὶ εἰν ἀπὸ τῶν ὁσίων ὅλων ἀφαιρεθῇ, καταλείψει (3) μέρη ὅμοια τὰ αγ, ζλ τῶν αβ, ζι· διό (4) $\alpha\beta : \zeta\iota :: \alpha\gamma : \zeta\lambda$ · διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ $\alpha\beta : \zeta\iota :: \gamma\beta : \lambda\iota$, ἄρα (5) $\alpha\gamma : \zeta\lambda :: \gamma\beta : \lambda\iota$, καὶ ἐναλλάξ $\alpha\gamma : \gamma\beta :: \zeta\lambda : \lambda\iota$ · Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΗ.

Ἐάν ἢ ἡγόμενον (αγ) πρὸς ἐπόμενον τὸ ἑαυτῷ (γβ), ὡς ἡγόμενον

(1) Ο. Ε. Δ. τῷ ε'. (2) Ο. Ε. Δ. τῷ ε'. (3) Σχόλ. ΙΕ. τῷ ε'. (4) ΙΕ. τῷ ε'. (5) ΙΔ. τῷ ε'.

ἕτερον (Ζλ) πρὸς ἐπόμενον τὸ ἐαυτῆ (Λι), ἔσαι δὴ καὶ ἐν συνθέσει (αγ
 σύν βγ) τὸ πρῶτον ἡγούμενον σύν τῷ ἐπομένῳ αὐτῆ, πρὸς τὸ αὐτὰ ἐπό-
 μενον (γβ), ὥσπερ (Ζλ σύν Λι) τὸ δεύτερον ἡγούμενον σύν τῷ ἐπομένῳ
 αὐτῆ, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον (Λι).

Οἱ δὲ Εὐκλείδης ταύτην ἄνω προτίθησιν· εἰὰ διηρημένα Μεγέθη ἀνάλο-
 γον ἢ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσαι.

Αὐτοῖς Ἀξιώματος δίκην καὶ αὕτη ληφθῆναι δύναται· Ἐάν γάρ δύο Με-
 γέθη αγ καὶ Ζλ, τὸν αὐτὸν πρὸς χ καὶ ψ λόγον ἔχοντα ἢ, καὶ ἐπαυξηθέντα
 ὁμοίως, τετέσιν ἀναλόγως τὰ αγ, Ζλ πρὸς τὰ χ καὶ ψ αὐτὰ λόγον ἔξωσιν
 εἰς τὸν αὐτόν· ἀμέλειτοι καὶ αὐξηθὲν τὸ αγ ἔσαι πρὸς τὸ χ, ὥσπερ δὴ καὶ τὸ
 Ζλ αὐξηθὲν ὁμοίως ἐστὶ πρὸς τὸ ψ. Οὐδὲν ἔν αὐτῷ ἢ τῷτο ἢ Πρότασις προτί-
 θεσι· τίθεται μὲν γὰρ αγ : γβ :: Ζλ : λι, εἰὰ οὖν ταῖς αγ, Ζλ προσεθῶ-
 σιν αἱ γβ, λι, ἔσονται αἱ αγ, Ζλ ὁμοίως, τετέσιν ἀναλόγως ἐπηυξημέναι·
 καὶ ἐπειδὴ τοίνυν αἱ αγ καὶ Ζλ, ὁμοίως ἔχουσαι εἰσι πρὸς τὰς γβ, λι, καὶ μετὰ
 τὸ ὁμοίως αὐξηθῆναι (τότε δὲ ἔσονται αβ, ζι) πρὸς τὰς αὐτὰς γβ, λι, ὡ-
 ταύτως εἰς ἔξωσι, τετέσιν ἔσαι αβ : γβ :: ζι : λι.

Α' λ λ ω ς.

Ἐπειδὴ αγ : γβ :: Ζλ : λι, ἄρα (1) αγ : Ζλ :: γβ : λι· ἄρα καὶ αγ +
 γβ : Ζλ + λι :: γβ : λι (2), τετέσιν αβ : ζι :: γβ : λι· καὶ πάλιν ἐναλλάξ
 αβ : γβ :: ζι : λι. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α Α'.

Ἐάν ἡγούμενον (αβ) ἢ πρὸς ἐπόμενον (γβ), ὡς ἡγούμενον ἕτερον (ζι)
 πρὸς ἐπόμενον ἕτερον (λι), ἔσαι καὶ τὸ πρῶτον ἡγούμενον (αβ) πρὸς (αγ), τὴν
 ἣν ἔχει ὑπεροχὴν ὑπὲρ τὸ ἐπόμενον τὸ αὐτῆ, ὥσπερ τὸ ἕτερον ἡγούμενον
 (ζι) πρὸς (Ζλ), τὴν ἣν ἔχει ὑπεροχὴν ὑπὲρ τὸ ἐπόμενον τὸ ἐαυτῆ (Λι).

Ἐπειδὴ γὰρ αβ : γβ :: ζι : λι, ἔσαι καὶ ἐν διαιρέσει (3) αγ : γβ :: Ζλ : λι·
 καὶ ἀνάπαλιν (4) βγ : γα :: ιλ : λζ· καὶ ἐν συνθέσει (5) βα : γα :: ιζ : λζ.

Τὸ δ' ἔτι πρὸς ἐπιχειρεῖν κατ' Ἀναξαρξοφῆν λόγῳ καλεῖται.

Καὶ παρὰ ταῦτα, εἰὰ ἡγούμενον (αγ) πρὸς τὸ ἐπόμενον αὐτῆ (γβ), ἢ
 ὡς ἕτερον ἡγούμενον (Ζλ) πρὸς τὸ ἴδιον ἐπόμενον (Λι), ἔσαι καὶ κατ' ἄλλον ἀνα-
 ξαρξοφῆς τρόπον, τὸ πρῶτον ἡγούμενον (αγ) πρὸς αὐτὸ τὸ πρῶτον ἡγούμενον,

(1) Ις. τῷ ε'. (2) ΙΒ. τῷ ε'. (3) ΙΖ. τῷ ε'. (4) Σχόλι. τῆς Ις. τῷ ε'. (5) ΙΗ. τῷ ε'.

σὺν τῷ ἐπομένῳ αὐτῷ (αβ), ὡς τὸ ἕτερον ἡγούμενον (ζλ) πρὸς αὐτὸ τὸ ἕτερον ἡγούμενον σὺν τῷ ἐπομένῳ αὐτῷ (ζι).

Καὶ γὰρ αγ:γβ::ζλ:λι· καὶ (1) ἀνάπαλιν βγ:γα::ιλ:λζ· καὶ ἐν συνθέσει (2) βα:αγ::ιζ:ζλ· καὶ πάλιν ἀνάπαλιν αγ:αβ::ζλ:ζι.

Π ό ρ ι σ μ α Β'.

Εἰάν ᾗ αγ:αβ::ζλ:ζι, ἔσαι καὶ αγ:γβ::ζλ:λι, καὶ αβ:γβ::ζι:λι.

Ἐπειδὴ γὰρ αγ:αβ::ζλ:ζι, ἔσαι ἀνάπαλιν βα:γα::ιζ:λζ· καὶ ἐν διαιρέσει (8) βγ:γα::ιλ:λζ· καὶ πάλιν ἀνάπαλιν αγ:γβ::ζλ:λι· καὶ ἐν συνθέσει (4) αβ:γβ::ζι:λι.

Ἀλλως· γα:αβ::λζ:ζι, ἔσαι ἀνάπαλιν βα:αγ::ιζ:ζλ· καὶ κατ' ἀναστροφὴν (5) αβ:βγ::ζι:ιλ· ὅπερ ἦν θάτερον· καὶ ἐν διαιρέσει (6) αγ:γβ::ζλ:λι, ὅπερ ἦν θάτερον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΘ.

„Εἰάν ᾗ ὡς ὅλον (αβ) πρὸς ὅλον (ζι), ἔτις ἀφαιρεθὲν (γβ) πρὸς ἀφαι-

9. 310.

ρεθὲν (λι), καὶ τὸ λοιπὸν (αγ) πρὸς τὸ λοιπὸν (ζλ), ἔσαι ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ὅλως ἐναργές ἐστι καθ' ἑαυτὸ τὸ λεγόμενον, ἔχει γεμὴν διὰ τῶν προτεθέντων ἀποδειχθῆναι ἔτις· ἐπεὶ αβ:ζι::γβ:λι, ἔσαι καὶ ἐναλλάξ (7) αβ:γβ::ζι:λι, καὶ κατ' ἀναστροφὴν λόγῳ (8) αβ:αγ::ζι:ζλ· καὶ πάλιν ἐναλλάξ αβ:ζι::αγ:ζλ.

Ἀλλως· αβ:ζι::γβ:λι· καὶ ἐναλλάξ (9) αβ:γβ::ζι:λι, ὥστε (10) γβ:λι εἰσὶ μέρη ὅμοια τῶν ὅλων αβ καὶ ζι· ταύτητοι καὶ ἐάν ἀπὸ τῶν ἰδίων ὅλων ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ (11) μέρη ὅμοια εἰσὶν αγ καὶ ζλ· ἄρα (12) αβ:ζι::αγ:ζλ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κ. καὶ ΚΑ.

Εἰν τῇ καθ' ἡμᾶς μεθόδῳ εἰσὶ περιτταί, κεῖνται γεμὴν ἐν τοῖς Πορίσμασι τῶν ἐφεξῆς Προτ. ΚΒ'. καὶ ΚΓ'.

(1) Σχόλ. τῆς Ιζ'. τῷ ε'. (2) ΙΗ. τῷ ε'. (3) ΙΖ. τῷ ε'. (4) ΙΗ. τῷ ε'. (5) Α'. Πόρ. ταύτ. (11) ΙΖ. τῷ ε'. (7) Ις. τῷ ε'. (8) Α. Πόρ. τῆς ἀνωτ. (9) Ις. τῷ ε'. (10) Ο'ρ. Ζ. τῷ ε'. (11) Σχόλ. τῆς ΙΕ. τῷ ε'. (12) ΙΕ. τῷ ε'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΒ.

„Εάν ἢ $A : B :: E : Π$, ἢ $B : Γ :: Π : Ρ$, ἢ ἄτως ἐφεξῆς, ἔσαι δι' ἴσην
 „ὡς A πρῶτον πρὸς $Γ$ ἔχατον, ἢ τῷ E πρῶτον πρὸς $Ρ$ ἔχατον.

Εκφέρεται δὲ παρ' Εὐκλ. ἄτως. Εάν ἢ ὅποσαῦν Μεγέθη, ἢ ἄλλα αὐ-
 „τοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δι' ἴσην ἐν
 „τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσαι.

Κεῖσθω δὴ τὰ $Γ$ ἢ $Ρ$ ἐλάχιστονα εἶναι τῶν B ἢ $Π$ (ἢ δ' αὐτὴ δεῖξις ἢ
 μειζόνων ὑποτιθεμένων). Ἐπειδὴ (1) $B : Γ :: Π : Ρ$, ἔσαι τὰ $Γ$ ἢ $Ρ$, τῶν
 ὅλων B ἢ $Π$ (2) μέρη ὅμοια· καὶ ἐπεὶ τοίνυν τὰ A ἢ E , πρὸς τὰ B ἢ $Π$ τὸν
 αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔξει δὴ ἢ πρὸς τὰ $Γ$ ἢ $Ρ$, ἢ ἐς τῶν B ἢ $Π$ μέρη ὅμοια,
 λόγον τὸν αὐτὸν, ἢ τῷτο τοίνυν ὅσον Ἀξίωμα ἐστίν· εάν Μεγέθη δύο πρὸς
 ἑτέρα δύο τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, ἢ πρὸς τὰ ὅμοια μέρη τάτων τὸν αὐτὸν
 ἔξει λόγον.

„Εάν δὲ ἢ πλείονα τριῶν ἐκατέρωθεν Μεγέθη παρῇ, τῷ αὐτῷ τρό-
 „πῳ ἢ περὶ τῶν ἄλλων συλλογιόμεθα.

Ἄλλως· Ἐπειδὴ $A : B :: E : Π$, ἔσαι (3) ἐναλλάξ $A : E :: B : Π$.
 ἐπεὶ δὲ ἢ $B : Γ :: Π : Ρ$, ἔσαι ἢ ἐναλλάξ $B : Π :: Γ : Ρ$. ἄρα (4) $A : E ::$
 $Γ : Ρ$, καὶ ἐναλλάξ $A : Γ :: E : Ρ$.

Π ό ρ ι σ μ α Α'.

Κάντεῦθεν ἡ παραλειφθεῖσα τῷ Τακτικῷ Κ'. ἔχει ἐπενεχθῆναι. Ἐσώ-
 σαν γὰρ πηλικότητες τρεῖς $A, B, Γ$, τρισὶν ἄλλαις $E, Π, Ρ$ ἀνάλογον
 ἔχασαι, σύνδυο λαμβανόμεναι, τῷτο δὲ ἐστὶν $A : B :: E : Π$, ἢ $B : Γ :: Π : Ρ$.
 εάν οὖν ἢ A μείζων ἢ τῆς $Γ$, ἔσαι δὴ ἢ ἢ E μείζων τῆς $Ρ$, καὶ εάν ἴση, ἴση
 ἢ εάν ἐλάχιστων, ἐλάχιστων. Κατὰ γὰρ τὴν ἐν χερσὶ Πρότ. $A : Γ :: E : Ρ$,
 ἢ ἐναλλάξ $A : E :: Γ : Ρ$. ἄρα διὰ τὴν ΙΔ'. τῷ παρόντος Βιβλίου δῆλον τὸ
 προτεθέν.

Π ό ρ ι σ μ α Β'.

Ἐπειδὴ δὲ $A : B :: E : Π$, ἔσαι ἢ ἐν συνθέσει (5) $A + B : B :: E + Π : Π$.
 ἔσαι δὲ $B : Γ :: Π : Ρ$, ἄρα διὰ τὴν ἐν χερσὶ Πρότ. ἔσαι $A + B : Γ :: E +$

(1) Ε'ξ. ὑποθ. (2) Ὅρισ. Ζ. τῷ ε'. (3) Ις. τῷ ε'. (4) ΙΑ. τῷ α'. (5) ΙΗ. τῷ ε'.

Π : Ρ· καὶ παραπλησίως ἐν διαίρεσει (1) Συλλογιζομένων, ἔσαι Α — Β : Γ :: Δ — Π : Ρ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΓ.

„Εάν ἢ ὡς Α πρῶτον πρὸς Β δεύτερον, ἔτω Δ πρῶτον πρὸς Π δεύτερον, καὶ ὡς Β δεύτερον πρὸς Γ τρίτον, ἔτω τρίτον τὸ τυχὸν Ρ πρὸς τὸ πρῶτον Δ, ἔσαι δι' ἴσα τεταραγμένως, καὶ ὡς Α πρῶτον πρὸς Γ τρίτον, ἔτω Ρ τρίτον πρὸς Π δεύτερον.

Ἐκφέρεται δὲ ὑπὸ τῆς Στοιχειωτῆς αὐτῇ οὕτως. Εάν ἢ τρία Μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλήθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσαι.

Ὡς Β ἔχει πρὸς Γ, ἔτω καὶ (2) Π πρὸς ἄλλο ὁποῖον ἐν τῷ Σ δύναται ἔχειν. Ἦδη μὲν οὖν ἐπεὶ Β : Γ :: Ρ : Δ (3), καὶ πάλιν Β : Γ :: Π : Σ (4), ἔσαι καὶ Ρ : Δ :: Π : Σ (5)· καὶ τοῖνυν καὶ ἐναλλάξ (6) Ρ : Π :: Δ : Σ. Εἴτα ἐπεὶ (ἐξ ὑποθ.) Δ : Π :: Α : Β, καὶ Π : Σ :: Β : Γ (ἐκ κατ.), δι' ἴσα ἔσαι (6) Δ : Σ :: Α : Γ· δέδεικται δὲ Ρ : Π :: Δ : Σ, ἄρα (7) Ρ : Π :: Α : Γ.

Καλεῖται δὲ τοῖς Γεωμέτραις ἡ τοιαύτη ἀναλογία Τεταραγμένη.

Π ό ρ ι σ μ α .

Κείθω Μεγέθη τρία Α, Β, Γ, πρὸς τρία Ρ, Δ, Π ἀνάλογον σύνδυο λαμβανόμενα, ἄλλα τεταραγμένως, τιτέσιν ἔσω Α : Β :: Δ : Π, καὶ Β : Γ :: Ρ : Δ. Εάν ἔν τὸ Α μείζον ἢ τῆς Γ, ἔσαι δι' ἴσα καὶ τὸ Ρ μείζον τῆς Π, καὶ ἐάν ἴσον, ἴσον, καὶ ἐάν ἑλάττω, ἑλάττω. Κατὰ γὰρ τὴν ἐν Χερσὶ Πρῶτ. Α : Γ :: Ρ : Π, καὶ ἐναλλάξ Α : Ρ :: Γ : Π· ἄρα διὰ τὴν ΙΔ'. τῶ παρόντες δῆλον τὸ προτεθέν. Αὕτη δὲ ἔστιν ἡ παραλειφθεῖσα ΚΑ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΔ.

„Εάν ἢ Α πρὸς Β, ὡς Γ πρὸς Ζ, καὶ Ι πρὸς Β, ὡς Α πρὸς Ζ, ἔσαι καὶ ὡς Α σὺν Ι πρὸς Β, ἔτω Γ σὺν Α πρὸς Ζ.

Ταύτην ὁ Στοιχειωτής ἔτω προβάλλεται. Εάν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχη δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύ-

(1) ΙΖ. τῶ ε'. (2) Αξ. τὸ πρὸ τῆς Α'. τῶ ε'. (3) Εξ ὑποθ. (4) Εκ κατ. (5) ΙΔ. τῶ ε'. (6) Ις. τῶ ε'. (7) Διὰ τὴν ἀνωτ. (8) ΙΔ. τῶ ε'.

„τερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθέν πρῶτον καὶ
 „πέμπτον πρὸς δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς
 „τέταρτον.

Ἐπειδὴ (ἐξ ὑποθ.) $I:B::\Lambda:Z$, ἔσαι καὶ (1) ἀνάπαλιν $B:I::Z:\Lambda$.
 ἄλλ' (ἐξ ὑποθ.) ἔσιν $A:B::\Gamma:Z$, καὶ $B:I::Z:\Lambda$, ἄρα (2) δι' ἴσιν $A:$
 $I::\Gamma:\Lambda$. Καὶ τοίνυν ἐν (3) συνδέσει καὶ $AI:I::\Gamma\Lambda:\Lambda$. ἄλλ' ἔσιν (4)
 $I:B::\Lambda:Z$, πάλιν ἄρα δι' ἴσιν (5) $AI:B::\Gamma\Lambda:Z$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΕ.

„Εάν τέσσαρα Μεγέθη (αβ, γζ, ι, λ) ἀνάλογον ᾗ, τὸ μέγιστον
 „(αβ) καὶ τὸ ἐλάχιστον (λ), τῶν λοιπῶν (γζ, ι) μείζονα ἐστί.

κ. 311.

Κείδω αβ:γζ::ι:λ, καὶ ἀπὸ τῆ μεγίστη αβ ληφθήτω απ ἴσον τῷ ι,
 ἀπὸ δὲ τῆ γζ ληφθήτω γρ ἴσον τῷ ἐλαχίστῳ λ, καὶ ἔσαι ὅλον αβ πρὸς
 ὅλον γζ, ὡς τὸ ἀφαιρεθὲν απ πρὸς τὸ ἀφαιρεθὲν γρ, ὥστε καὶ τὸ λοιπὸν (6)
 πβ πρὸς τὸ λοιπὸν ρζ, ὡς ὅλον αβ πρὸς ὅλον γζ. ἄλλ' (7) αβ μείζον τῆ
 γζ, ἄρα καὶ πβ μείζον τῆ ρζ. Ἦδη δὲ ἐπεὶ ἡ μὲν απ ἐλήφθη ἴση τῇ ι, ἡ δὲ
 γρ ἴση τῇ λ, ἔσαι καὶ απ σὺν λ, τῷ ι σὺν γρ ἴσον. Εάν ἄρα τῷ απ σὺν
 λ προσεθῇ τὸ μείζον πβ, τῷ δὲ ι σὺν γρ προσεθῇ τὸ ἐλάττω ρζ, ἔσαι τὸ
 ὅλον απβ σὺν λ, μείζον τῆ ὅλη ι σὺν γρζ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

κ. 312.

Εάν ᾗ τρία Μεγέθη Α, Β, Γ ἀνάλογον, τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἡμιάθροισ-
 μα, τῆ μέσης μείζον ἔσαι· ἐπεὶ γὰρ (8) $A:B::B:\Gamma$, ἔσαι (9) τὸ ἐκ τῶν
 ἄκρων Α καὶ Γ ἄθροισμα μείζον, ἢ τὸ Β δις ληφθὲν, καὶ ἐπομένως τὸ ἡμιά-
 θροισμα (10) τὸ ἐκ τῶν ἄκρων μείζον ἐστὶ τῆ Β ἀπαξ ληφθέντος.

Αἱ δὲ ἐπόμεναι Προτάσεις ἐχθὶ τῆ Εὐκλείδου ἔσαι, ἄλλ' ἐκ τῶν τῆ Πάπ-
 πα τῆ Ἀλεξανδρέως καὶ ἐξ ἄλλων λαμβανόμεναι, διὰ τὸ πολὺ τῆς χρήσεως,
 ταῖς Εὐκλείδειοις εἰώθασιν παρασυνάπτεσθαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κς.

„Εάν πρῶτον (Α) πρὸς-δεύτερον (Β) μείζονα λόγον ἔχη, ἢ τρίτον (Γ)

(1) Σχόλ. τῆς Ις. τῆ ε'. (2) ΚΒ. τῆ ε'. (3) ΙΗ. τῆ ε'. (4) Ε' ἐξ ὑποθ. (5) ΚΒ.
 τῆ ε'. (6) ΙΘ. τῆ ε'. (7) Ε' ἐξ ὑποθ. (8) Ο' ρ. Η. τῆ ε'. (9) Διὰ ταύτην τὴν Πρ.
 (10) Δξ. ε. τῆ α'.

πρὸς τέταρτον (Z), ἔξει καὶ ἀνάπαλιν δεύτερον (B) πρὸς πρῶτον (A) ἐλάσσο-
να λόγον, ἢ τέταρτον (Z) πρὸς τρίτον (Γ).

Ἐπειδὴ γὰρ τίθεται τὸ A μείζονα λόγον ἔχον πρὸς τὸ B, ἢ τὸ Γ πρὸς
τὸ Z, τὸ A πάντως (1) πρὸς τι τὸ BX, ὃ μείζον ἔσαι (2) τῷ B, τὸν αὐτὸν
ἔξει λόγον, ὃν τὸ Γ πρὸς τὸ Z· καὶ ἀνάπαλιν τοίνυν, ἔσαι BX : A :: Z : Γ·
ἀλλὰ B ἐστὶ πρὸς A ἐν ἐλάσσονι λόγῳ (3) ἢ BX πρὸς A, ἄρα (4) B : A < Z : Γ.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Τὸ δ' αὐτὸ παραπλησίως δειχθήσεται κατὰ τῆς ἐλάσσονος ἀναλογίας·
τετέστιν εἴαν B πρὸς A ἐλάσσονα λόγον ἔχη ἢ Z πρὸς Γ, ἔξει δὴ ἀνάπα-
λιν A πρὸς B μείζονα λόγον ἢ Γ πρὸς Z.

Π ρ ό τ α σ ι ς KZ.

„Εἴαν A πρὸς B μείζονα λόγον ἔχη ἢ Γ πρὸς Z, καὶ ἐναλλάξ A πρὸς
„Γ μείζονα λόγον ἔξει ἢ B πρὸς Z.

Ἐπειδὴ ὁ λόγος A πρὸς B μείζων τίθεται τῷ λόγῳ Γ πρὸς Z, ἔσαι
(5) ὁ λόγος A πρὸς ἄλλο τι BX (ὅπερ ἐξ ἀνάγκης μείζον ἔσαι (6) τῷ B), ἴσος
τῷ λόγῳ Γ πρὸς Z· καὶ τοίνυν ἐναλλάξ (7) ἔσαι A : Γ :: BX : Z· ἀλλὰ BX
πρὸς Z ἐστὶν ἐν μείζονι λόγῳ (8) ἢ B πρὸς Z, ἄρα (9) A : Γ > B : Z.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ περὶ τῆς ἀναλογίας τῆς ἐλάσσονος.

Π ρ ό τ α σ ι ς KH.

„Εἴαν αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχη ἢ ζι πρὸς ιλ, καὶ ἐν συνθέ-
„σει αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ζλ πρὸς ιλ.

Ἐπειδὴ τίθεται αβ, βγ ἐν μείζονι λόγῳ τυγχάνειν ἢ ζι πρὸς ιλ, καὶ
ἄρα ἔτεροντι (10) τὸ ξβ (ὃ καὶ ἀνάγκη ἐλαττον εἶναι (11) τῷ αβ) ἐστὶ
πρὸς βγ, ὡς ζι πρὸς ιλ· καὶ τοίνυν ἐν συνθέσει (12) ξγ πρὸς βγ, ὡς
ζλ πρὸς ιλ· ἄρα (13) αγ : βγ > ζλ : ιλ.

(1) Διὰ τὸ ΑΞ. τὸ πρὸ τῆς Α. τῷ ε'. (2) Ι. τῷ ε'. (3) Η. τῷ ε'. (4) Σχόλ. τῆς
ΙΑ. τῷ ε'. (5) Διὰ τὸ ΑΞ. τὸ πρὸ τῆς Α. τῷ ε'. (6) Ι. τῷ ε'. (7) Ις. τῷ ε'. (8)
Η. τῷ ε'. (9) Σχόλ. τῆς ΙΑ. τῷ ε'. (10) ΑΞ. τὸ πρὸ τῆς Α. τῷ ε'. (11) Ι. τῷ ε'.
(12) ΙΗ. τῷ ε'. (13) Η. τῷ ε'. καὶ Σχόλ. ΙΑ. τῷ ε'.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Τὸ δ' αὐτὸ παραπλησίως ἀποδειχθήσεται ἐπεὶ περὶ τῆς ἀναλογίας τῆς ἐλάττονος.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΘ.

„Εὰν αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχη ἢ ζλ πρὸς ιλ, καὶ ἐν διαιρέσει αβ πρὸς βγ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ζι πρὸς ιλ.

κ. 315.

Ἐπειδὴ τίθεται αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχειν ἢ ζλ πρὸς ιλ, ἔτερώντι πάντως (1) τὸ ξγ (ὃ καὶ ἐλάττον εἶναι ἐπ'ἀνάγκης (2) τῷ αγ) ἔσαι πρὸς βγ, ὡς ζλ πρὸς ιλ· καὶ τοῖνον ἐν διαιρέσει (3) ἔσαι ξβ : βγ : : ζι : ιλ· ἄρα (4) αβ : βγ > ζι : ιλ.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Τὸ αὐτὸ παραπλησίως δεῖχθήσεται καὶ περὶ τῆς ἀναλογίας τῆς ἐλάττονος.

Π ρ ό τ α σ ι ς Λ.

„Εὰν αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχη ἢ ζλ πρὸς ιλ, κατὰ λόγον ἀναστροφὴν, αγ πρὸς αβ ἐλάττονα λόγον ἔξει ἢ ζλ πρὸς ζι.

κ. 316.

Ἐπειδὴ αγ πρὸς βγ ἐν λόγῳ μείζονι ἐστὶν ἢ ζλ πρὸς ιλ, ἔσαι ἐν διαιρέσει (5) αβ πρὸς βγ, ἐν λόγῳ μείζονι ἢ ζι πρὸς ιλ· ἄρα ἀνάπαλιν γβ πρὸς βα (6) ἐστὶν ἐν ἐλάττονι λόγῳ ἢ λι πρὸς ιζ· ἄρα ἐν συνθέσει (7) γα πρὸς βα ἐν λόγῳ ἐλάττονι ἐστὶν ἢ λζ πρὸς ιζ.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Τὸ αὐτὸ παραπλησίως ἀποδείκνυται καὶ περὶ τῆς ἀναλογίας τῆς ἐλάττονος· τατέσιν εὖ αγ πρὸς αβ ἐλάττονα λόγον ἔχη ἢ ζλ πρὸς ζι, ἔξει καὶ κατ' ἀναστροφὴν τῷ λόγῳ αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἢ ζλ πρὸς ιλ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΑ.

„Εὰν αβ πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχη ἢ ζ πρὸς ι, καὶ γ πρὸς λπ

(1) ΑΞ. τὸ πρὸ τῆς Α. τῷ Ε'. (2) Ι. τῷ Ε'. (3) ΙΖ. τῷ Ε'. (4) Η. τῷ Ε'. καὶ Σχόλ. τῷ Ε'. (5) Διὰ τὴν ἀνστ. (6) Κς. τῷ Ε'. (7) ΚΗ. τῷ Ε'. ἐν Η. (ζι) πρὸς ιλ.

„μείζονα λόγον ἔχει ἢ 1 πρὸς σ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἔσαι δι ἴση καὶ τὸ
 „πρῶτον αβ, πρὸς τὸ ἔχατον λπ μείζονα λόγον ἔχον, ἢ τὸ πρῶτον ζ
 „πρὸς τὸ ἔχατον σ.

Ἐπειδὴ $\alpha\beta : \gamma > \xi : 1$, ἕτερον ἄρα (1) τὸ $\xi\beta$ (ὅπερ ἐξ ἀνάγκης (2) α. 317.
 ἔλαττον ἔσαι τῷ αβ) ἐστὶ πρὸς γ ὡς ζ πρὸς 1· καὶ ἐπειδὴ $\gamma : \lambda\pi > 1 : \sigma$,
 ἄρα τὸ γ πρὸς ἕτερόν τι (ὅπερ ἐξ ἀνάγκης μείζον ἔσαι τῷ λπ) τὸ λρ,
 ἔσαι ὡς τὸ 1 πρὸς τὸ σ, ὥστε καὶ δι ἴση (3) $\xi\beta : \lambda\rho :: \zeta : \sigma$. ἄρα $\xi\beta$ πρὸς
 λπ μείζονα λόγον ἔχει (4) ἢ ζ πρὸς σ· ἄρα αβ πρὸς λπ (5) πολλῷ
 μείζονα λόγον ἔχει ἢ ζ πρὸς σ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τὸ δ' αὐτὸ παραπλησίως δειχθήσεται καὶ περὶ τῆς ἐλάσσονος ἀνα-
 λογίας.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐκ δὲ τῆς ἀποδείξεως τῆςδε τῆς Προτάσεως φανερόν, ὅτι εἰν αβ
 πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ζ πρὸς 1, καὶ $\gamma : \lambda\rho :: 1 : \sigma$, καὶ πρῶτον αβ
 πρὸς ἔχατον λρ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρῶτον ζ πρὸς ἔχατον σ· ὁ
 παραπλησίως ἀληθές ἐστι καὶ ἐπὶ τῆς ἐλάσσονος ἀναλογίας.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΒ.

„Εἰν αβ πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχει ἢ 1 πρὸς σ, καὶ γ πρὸς λπ
 „μείζονα ἢ ζ πρὸς 1, ἔσαι καὶ δι ἴση τεταραγμένως αβ πρὸς λπ μείζονα
 „λόγον ἔχον, ἢ ζ πρὸς σ.

Παραπλησία ἐστὶν ἡ ἀπόδειξις τῇ ἀνωτέρω, πλὴν ὅσον ἀντὶ τῆς ΚΒ'.
 ληπτέον τὴν ΚΓ'.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τὸ δ' αὐτὸ παραπλησίως ἀποδειχθήσεται καὶ περὶ τῆς ἐλάσσονος ἀ-
 ναλογίας. Καὶ ἐκ ταύτης δὲ τῆς Προτάσεως Πέρισμα παραπλήσιον τῷ
 ἀπὸ τῆς ἀνωτέρω Προτ. ἐπιφέρεται.

(1) Αξ. τὸ πρὸς τῆς Α, τῷ ε'. (2) Ι, τῷ ε'. (3) ΚΒ, τῷ ε'. (4) Η, τῷ ε'. (5)
 Διὰ τὴν αὐτήν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΓ.

„Εάν ὅλον (αβ) πρὸς ὅλον (ζι) μείζονα λόγον ἔχη, ἢ ἀφαιρεθὲν
 „(γβ) πρὸς ἀφαιρεθὲν (λι), ὅλον πρὸς ὅλον ἐλάσσονα λόγον ἔξει, ἢ
 „λοιπὸν (αγ) πρὸς λοιπὸν (ζλ).

κ. 318.

Εἰπεὶ δὲ αβ πρὸς ζι μείζονα λόγον ἔχει ἢ γβ πρὸς λι, ἔσαι ἐναλλάξ (1)
 αβ πρὸς γβ ἐν μείζονι λόγῳ ἢ ζι πρὸς λι· ἄρα κατὰ ἀναστροφὴν (2) αβ πρὸς
 αγ ἐν ἐλάσσονι ἔσαι, ἢ ζι πρὸς ζλ· ἄρα καὶ ἐναλλάξ (3) αβ πρὸς ζι, ἐν ἐλάσ-
 σονι λόγῳ ἔσαι ἢ αγ πρὸς ζλ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, καὶ εἰάν ὅλον πρὸς ὅλον ἐλάσσονα λόγον ἔχη, ἢ
 ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, ὅλον πρὸς ὅλον μείζονα λόγον ἔξει, ἢ λοιπὸν
 πρὸς λοιπὸν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΔ.

„Εάν οἱ λόγοι (Α:Γ, καὶ Ε:Ζ) ὥσι τῶν ἰσῶν λόγων (Α:Β, καὶ
 „Ε:Ζ) διπλασίονες, ἢ τριπλασίονες, καὶ ἐφεξῆς, ἴσοι ἔσονται καὶ αὐτοί.

Εἰπεὶ δὲ γὰρ τῶ λόγῳ Α:Β διπλασίων ὁ Α:Γ, ἔσαι (4) Α:Β::Β:Γ·
 διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον Ε:Ζ::Ζ:Ξ, ἀλλ' (5) Α:Β::Ε:Ζ, καὶ Β:
 Γ::Ζ:Ξ (καὶ γὰρ Β:Γ::Α:Β::Ε:Ζ::Ζ:Ξ), δι' ἴσα τοίνυν (6) Α:Γ:
 :Ε:Ξ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΕ.

„Εάν οἱ ἴσοι λόγοι (Α:Γ::Ε:Ξ) διπλασίονες ὦσιν, ἢ τριπλασίονες,
 „καὶ ἐφεξῆς, τῶν λόγων Α:Β καὶ Ε:Ζ, ἔσονται καὶ ἴσοι ἀλλήλοις ἴσοι.

Εἰ μὴ γὰρ ἔσω ὡς Α πρὸς Β, ἥτως Ε πρὸς ἄλλο τι τὸ Φ, ὅπερ ἄνισον
 ἂν εἴη τῷ Ζ, καὶ ἔσω ὡς Ε:Φ::Φ:Χ· καὶ ἐπεὶ τοίνυν τῶν ἰσῶν λόγων Α:
 Β καὶ Ε:Φ διπλασίονές εἰσιν οἱ λόγοι Α:Γ καὶ Ε:Χ, καὶ ὁ λόγος Ε:Χ
 ἴσος ἔσαι (7) τῷ λόγῳ Α:Γ, τατέστιν (ἐξ ὑποθ.) τῷ λόγῳ Ε:Ξ· ἀρ' οὖν
 (8) ἴσα τὰ Ξ καὶ Χ, οὐκ ἔστι καὶ τὰ μέσα Ζ καὶ Φ ἴσα ἔσαι· ἄρα Α:Β::Ε:Ζ.
 Ο. Ε. Δ.

Εκ τῆς ἀντιφατικῆς ὁρθῶς συνεπεράνθη ἡ ἀπόφανσις.

(1) ΚΖ τῷ ε'. (2) Α. τῷ ε'. (3) ΚΖ. τῷ ε'. (4) Ὁρ. Ι. τῷ ε'. (5) Εξ ὑποθ.
 (6) ΚΒ τῷ ε'. (7) Διὰ τὴν ἀνωτ. (8) Θ. τῷ ε'.

ΜΕΡΟΣ Β΄.

Ὁ κατ' Εὐκλείδην διὰ τῶν Πολλαπλασίων Ὄρισμός τῶν ἴσων λόγων ἀποδείκνυται καὶ προτίθεται, καὶ δείκνυται τὸ μᾶλλον ἄμεσον, καὶ εὐχερέστερον γνῶρισμα τῆς τῶν λόγων Ἰσότητος.

Τὰ τῶν Ἀναλογιῶν χοιχεῖα, μεθόδῳ (εἰ μὴ ἀπατώμεθα) προχειροτέρα εἰσηγησάμενοις, λοιπὸν ἡμῖν, ὃ τὸ Β΄. ἦν τῶν ὑπερχιμένων, πληρῶσαι. Ἐνταῦθα τοῖνον (τὸ ὑπὸ μηδενὸς εἰς τόδε γενόμενον) ἀποδείξομεν, μὴδὲν ὅτι μὴ κατ' αὐτὸ τῇ ἐναργείᾳ τῇ κατὰ φύσιν φωτὶς ἐστὶ συμφανὲς λαμβάνοντες, ὡς λόγοι δύο ἀλλήλοις ἴσοι εἰσὶν, ὅτε τὰ ὁποιαδήποτε Ἰσοπολλαπλάσια τῶν ἡγεμένων, τοῖς τῶν ἐπομένων Ἰσοπολλαπλασίοις παραβαλλόμενα, ἢ εἰ ἢ ἅμα μείζονα εἰσὶν, ἢ ἅμα ἐλάσσονα, ἢ ἅμα ἴσα. Οὐ δὲ τῆς δείξεως χαλεπῆς τε ἥσης καὶ διεξοδικῆς, ὡς ἐξ αὐτῶν τῶν πραγμάτων ἔστι φανερόν, ῥᾶ τ' ἄντις ἐπιγνοίῃ πρωθυστερώς πρὸς τὸν Εὐκλείδην χωρῆσαι, τὸν ἐκ τῆς ἀναποδείκτου εἰς τόδε ταύτης ιδιότητος τῶν πολλαπλασίων, ἥς ἡ ἐπιφορὰ ἔτως ἀσαφὲς οὕσα τυγχάνει, καὶ τῆς τῶν λόγων Ἰσότητος τοσούτον ἀπέχουσα, ὡς ἐκ γνῶρισματος πρώτα τε καὶ βασιμωτάτα τῶν ἴσων λόγων, ἐπὶ τὴν τέτων θεωρίαν ὀρμησάμενον.

Λ ἦ μ μ α Α΄.

„Ἐς ὡ $A : B :: \Gamma : Z$ · κείδω δὲ τῶν ἡγεμένων A καὶ Γ , ὁποιαδήποτε Ἰσοπολλαπλάσια τὰ I καὶ Π , τατέσιν ἦτοι διπλάσια, ἢ τριπλάσια καὶ ἐφεξῆς, „Ἐς ὡ δὲ καὶ τῶν ἐπομένων B καὶ Z , ὁποιαδήποτε Ἰσοπολλαπλάσια τὰ Λ καὶ P . „Ἐς αἰ δὲ δὴ $I : \Lambda :: \Pi : P$, ἥτις ἐστὶν ἡ Δ΄. τῇ παρόντος Βιβλίας, ἢ ἐν „τῷ Α΄. μέρει παραλειφθεῖσα.

Ἐπειδὴ γὰρ $A : B :: \Gamma : Z$, καὶ I τὸ διπλάσιον τῇ A ἔστι πρὸς τὸ B , ὡς τὸ Π τὸ διπλάσιον τῇ Γ ἐστὶ πρὸς τὸ Z , καὶ I τὸ τριπλάσιον τῇ A ἔστι πρὸς τὸ B , ὡς τὸ Π τὸ τριπλάσιον τῇ Γ ἐστὶ πρὸς τὸ Z , καὶ τῆτο ἐς ἀπειρον, ὅπερ ἕθενός ἦττον Ἀξιωματικὸς αὐτολαμπές ἐστι καὶ αὐτότιςον. Ἐπεὶ οὖν $I : B :: \Pi : Z$, ἔστι καὶ I πρὸς Λ τὸ διπλὸν τῇ B , ὡς Π πρὸς P τὸ διπλὸν τῇ Z , καὶ ἔτως ἐς ἀπειρον, ὅπερ αὖθις ἕθενός τῶν Ἀξιωματικῶν δεύτερον εἰς σαφήνειαν· δῆλον ἄρα τὸ προτεθέν.

Α'λλως. Ἐκ τῶν Προτ. Ις', ΙΕ', καὶ ΙΑ'. τῆ ε'.

Ἐπειδὴ $A : B :: \Gamma : Z$, ἐναλλάξ $A : \Gamma :: B : Z$. ἄλλὰ (ΙΕ') $A : \Gamma :: I : \Pi$, καὶ $B : Z :: \Lambda : \rho$. ἄρα διὰ τὴν ΙΑ'. $I : \Pi :: \Lambda : \rho$, καὶ ἐναλλάξ $I : \Lambda :: \Pi : \rho$.

Λ ἦ μ μ α Β'.

„Ἐὰν τὰ Μεγέθη A καὶ B κοινὸν ἔχῃ μέτρον τὸ Γ , ἔσαι τὸ A τοσάκις „λαμβάνομενον, ὡσάκις ἐστὶ τὸ Γ ἐν τῷ B , ἴσον τῷ B τοσάκις λαμβανομένω „νῷ, ὡσάκις ἐστὶ τὸ Γ ἐν τῷ A .

Περιεχέσθω γὰρ δὴ κατ' ὑπόθεσιν τὸ Γ ἐν τῷ B τετράκις, ἐν δὲ τῷ A ἑξάκις, ὡς εἶναι μὲν τὸ $B = 4\Gamma$, εἶναι δὲ τὸ $A = 6\Gamma$. Τοιγαρὲν 6Γ (τετρεςὶ τὸ A) ἐπιπολλαπλασιασθὲν τῷ 4 (τετρεςὶ τοσάκις ληφθὲν, ὡσάκις τὸ Γ ἐστὶν ἐν τῷ B), δώσει δὴ 24Γ . ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ 4Γ (τετρεςὶ τὸ B) ἐπιπολλαπλασιασθὲν τῷ 6 (τετρεςὶ τοσάκις ληφθὲν, ὡσάκις τὸ Γ ἐστὶν ἐν τῷ A), δώσει δὴ 24Γ . Τὸ ἄρα A τοσάκις λαμβανομένον, ὡσάκις τὸ Γ ἐστὶν ἐν τῷ B , τῷ B τοσάκις λαμβανομένῳ, ὡσάκις τὸ Γ ἐστὶν ἐν τῷ A , ἴσον ἐστί.

Θ ε ώ ρ η μ α Α'.

α. 319.

„Ἐὰν ὁ λόγος $αβ$ πρὸς $ζι$ μείζων ᾖ τῷ λόγῳ $λ$ πρὸς $ρ$, τοιαῦτα δυνατόν ληφθῆναι τῶν ἡγμένων $αβ$ καὶ $λ$ ἴσοπολλαπλάσια, τοιαῦτα δὲ „ἴσοπολλαπλάσια καὶ τῶν ἐπομένων $ζι$ καὶ $ρ$, ὡς τῷ πολλαπλασίῳ τῷ ἡγμένῳ „ $(αβ)$ τῷ μείζονος λόγῳ, ὑπερέχοντος τὸ πολλαπλάσιον τῷ ἐπομένῳ $(ζι)$, „τὸ τῷ ἡγμένῳ $(λ)$ τῷ ἐλάσσονος λόγῳ πολλαπλάσιον, μὴ ὑπερέχειν τὸ „πολλαπλάσιον τῷ ἰδίῳ ἐπομένῳ $(ρ)$.

Ἐς τὸν ὁ λόγος $αβ$ πρὸς $ζι$ μείζων τῷ λόγῳ $λ$ πρὸς $ρ$, ἔςωσαν δὲ καὶ $αβ$ καὶ $λ$ οἱ τῶν λόγων μείζονες ὅροι. Ἐπεὶ τοίνυν $αβ$ πρὸς $ζι$ μείζονα λόγον ἔχει ἢ $λ$ πρὸς $ρ$, ἑτερόν τι τὸ $φ$ ἔξει πρὸς τὸ $ζι$, τὸν αὐτὸν λόγον (Ι) ὃν τὸ $λ$ πρὸς τὸ $ρ$ · καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος $φ : ζι$ τῷ λόγῳ $λ$ πρὸς $ρ$ ἴσος ἐστί, ἐτέθη δὲ ὁ λόγος $αβ$ πρὸς $ζι$ μείζων τῷ λόγῳ $λ$ πρὸς $ρ$, ἔσαι καὶ ὁ λόγος $αβ$ πρὸς $ζι$ μείζων τῷ λόγῳ $φ$ πρὸς $ζι$, καὶ ἐπομένως $αβ$ μείζον ἐστὶ τῷ $φ$, ἃ δὴ πάντα κατ' αὐτὰ δῆλα ἐστὶ· τοίνυν ἀπὸ τῆ $αβ$ δυνατόν ληφθῆναι τὸ $αγ$ ἴσον τῷ $φ$, καὶ ἔσαι $αγ : ζι :: λ : ρ$. Α'φαιρέσθω τοιγαρὲν τὸ λοιπὸν $βγ$ ἀπὸ $αγ$, ὡσάκις ἂν ἐξῇ, ὅσον τρεῖς, εἴτα τετμήσθω τὸ $αγ$ εἰς τοσαῦτα ἴσα μέρη, φέρε

(Ι) Ἀξ. τὸ πρὸ τῆς A . τῆ ε'.

Ξ, εἰς ὃ ἐκ τῶν ἐν ληφθῆναι ἂν ἔχει πλεονάκεις ἀπὸ τῆ Ζι, ἢ βγ ἀπὸ αγ, ὅσον τετράκεις, καὶ λοιπὸν ἔσω τὸ Ξ, ὅπερ ἔλαττον ἔσαι ἐνὸς μορίου· καὶ τὰτα δὲ δυνατόν εἶναι καθ' αὐτὸ τε δήλον, καὶ ἐκ τῆς Α'. τῆ Ι'. Βιβλίῳ ἐπιφερόμενον ἐστὶ, τῆς τῶν Ἀναλογιῶν μηδαμῶς ἐξηρητημένης· τῶν δὲ δὴ μορίων ἐκείνων τὸ Μέγεθος ἔσω Π.

Ἐπεὶ τοιγαρὲν τὸ Π κοινὸν ἐστὶ μέτρον τῶν Μεγεθῶν αγ, ΖΞ, ἄρα τὸ αγ τοσάκεις ληφθὲν, ὡσάκεις τὸ π ἐγχωρεῖ ἐν τῷ ΖΞ, τετέσι τετράκεις, ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΞ τοσάκεις ληφθέντι, ὡσάκεις τὸ π ἔστιν ἐν τῷ αγ, τετέσιν ἑξάκεις. Εἴτα ἐπειδὴ τὸ λοιπὸν Ξ ἐνὸς μορίου ἔλαττον ἐστὶ, τετέσι τῆ π, ἔσαι τὸ Ξ τοσάκεις λαμβανόμενον, ὡσάκεις τὸ π ἐστὶν ἐν τῷ αγ, τετέσιν ἑξάκεις ἔλαττον εἰσέτι τῆ αγ. Ἐτι ἐπειδὴ τὸ βγ ὑπτονάκεις ἀφαιρεθῆναι δύναται ἀπὸ τῆ αγ, ἢ τὸ π ἀπὸ τῆ Ζι (ὕπετέδῃ γὰρ τὸ μὲν βγ ἀπὸ τῆ αγ ἀφαιρεῖσθαι ἔχειν τρεῖς, τὸ δὲ π ἀπὸ τῆ Ζι τετράκεις), πρόδηλόν ἐστιν ὡς τὸ βγ τοσάκεις λαμβανόμενον, ὡσάκεις ἐστὶ τὸ π ἐν τῷ Ζι, τετέσι τετράκεις, μείζον ἔσαι τῆ αγ, καὶ ἐπομένως πολλῶ μείζον ἢ τὸ Ξ λαμβανόμενον ἑξάκεις, ὅπερ ἀνωτέρω ἐδείχθη ἔλαττον ὂν τῆ αγ. Ἀλλὰ μὲν ἐδείχθη ὅτι τὸ αγ τετράκεις, καὶ τὸ ΖΞ ἑξάκεις λαμβανόμενα ἴσα ἐστίν, εἰ ἄρα τῷ αγ τετράκεις λαμβανομένῳ προσεδῇ τετράκεις τὸ βγ, καὶ τῷ ΖΞ ἑξάκεις λαμβανομένῳ προσεδῇ τὸ Ξ ἑξάκεις, ἔσονται τὰ 4 αγ καὶ 4 βγ, τετέσι τὰ 4 αβ, μείζονα τῶν 6 ΖΞ καὶ 6 Ξι, τετέσι τῶν 6 Ζι· ἐπειδὴ δὲ τὰ 4 αγ ἴσα ἦν τοῖς 6 ΖΞ, ἔσαι τὰ 4 αγ ἐλάσσονα τῶν 6 Ζι· ἀλλ' ἐτίθετο ἀνωτέρω αγ:Ζι::λ:ρ, ἄρα (διὰ τὸ Α'. Λήμ.) τὰ 4 λ ἐλάσσονά ἐστι τῶν 6 ρ· καὶ ἐλήφθη ἄρα τῶν ἡγμένων αβ καὶ λ τὰ Ἰσοπολλαπλάσια, τετέσι τὰ τετραπλάσια, καὶ δὴ καὶ τῶν ἐπομένων Ζι καὶ ρ τὰ Ἰσοπολλαπλάσια, ἦτοι τὰ ἑξαπλάσια, καὶ μὲν ἐδείχθη ὅτι τὸ πολλαπλάσιον τῆ ἡγμένη αβ (τετέσι τὰ 4 αβ) ὑπερέχει τὸ πολλαπλάσιον τῆ ἐπομένη Ζι (τετέσι τὸ 6 Ζι), τὸ δὲ τοι πολλαπλάσιον τῆ ἡγμένη λ (ὅπερ ἐστὶ 4 λ) ὑχ ὑπερέχει τὸ πολλαπλάσιον τῆ ἐπομένη ρ (τετέσι τὸ 6 ρ). Ο. Ε. Δ.

Θ ε ώ ρ η μ α Β.

„Ἐὰν τῶν ἡγμένων (α, γ) ὅποιαν Ἰσοπολλαπλάσια, ὅποισιν
 „τῶν ἐπομένων (β, ζ) Ἰσοπολλαπλάσις, ἦτοι ἅμα ἴσα ἦ, ἢ τῶν
 „ἅμα μείζονα, ἢ ἐλάσσονα, ὁ λόγος (α:β) τῷ λόγῳ (γ:ζ) ἴσος ἔσαι.

Εἰ γὰρ μή, ἀλλ' ἔσω ὁ λόγος α:β > γ:ζ. Διὰ δὲ τὸ ἀνωτέρω Θεώρημα, τοιαῦτ' ἄττα μὲν τῶν ἡγμένων α καὶ γ, τοιαῦτ' ἄττα δὲ τῶν ἐπομέ-

νων λαβεῖν ἐν ἰσοπολλαπλάσια, ὡς τὸ τᾶ ἡγμένε α πολλαπλάσιον ὑπερέχον τὸ πολλαπλάσιον τῆ ἐπομένε β, τὸ δατέρε ἡγμένε γ πολλαπλάσιον ἡμισα ὑπερέχειν τὸ πολλαπλάσιον τῆ ἐτέρε ἐπομένε ζ. ἄτοποι δὲ ὡς τὴν ὑπόθεσιν περιτρέπον. Ἄρα κτ.

Εν τῇ δὲ τῇ ἀποδείξει, οἷα κὰν ταῖς ἐξῆς, τῶν ἐν τῷ Ε'. Βιβλίῳ αὐτῷ Προτάσεις παραλαμβάνονται αἱ αὐτοφανεῖς καὶ αὐτόπιστοι.

Θ ε ώ ρ η μ α Γ'.

„Εὰν τοιαῦτα μὲν τῶν ἡγμένων (Ξ, Ρ), τοιαῦτα δὲ τῶν ἐπομένων (Π, Σ) Ἰσοπολλαπλάσια ληφθῆναι δυνατόν ᾗ, ὡς τῆ πολλαπλάσια δατέρε τῶν ἡγμένων (Ξ) τὸ τῆ ἐπομένε (Π) πολλαπλάσιον ὑπερέχοντος, τὸ δατέρε τῶν ἡγμένων (Ρ) πολλαπλάσιον, τὸ τῆ ἐπομένε αὐτῷ (Σ) πολλαπλάσιον μηδαμῶς ὑπερέχειν, ἔσται ὁ λόγος (Ξ : Π), καθ' ὃν τὸ τῆ ἡγμένε πολλαπλάσιον ὑπερέχει τὸ πολλαπλάσιον τῆ ἐπομένε, μείζων δατέρε (Ρ : Σ).

Αἴσας γὰρ εἶναι τῆς τοιαύδε λόγου ἄτω κατασκευάζω. Εἰ γὰρ ἴσων τὰ τῶν ἡγμένων ὅποιαδήποτε Ἰσοπολλαπλάσια (ὡς ἐκ περιστάσεως σαφὲς ἐκ τῆ Α'. Δήμματος), τῶν ἐπομένων ὅποιαδήποτε Ἰσοπολλαπλάσιων ἢ ἅμα μείζονα, ἢ ἅμα ἐλάσσονα, ἢ ἅμα τέτοις ἴσα. Περιτρέπει δὲ τετὶ τὴν ὑπόθεσιν.

Τὸν δὲ δὴ λόγον (Ξ : Π), καθ' ὃν τὸ τῆ ἡγμένε Ἰσοπολλαπλάσιον ὑπερέχον τίθεται, μείζονα τυγχάνειν, ὥδε πως δείκνυμι. Εἰ γὰρ μὴ, ἔστω δὴ ὁ λόγος (Ρ : Σ) μείζων τῆ λόγου (Ξ : Π), ἄρ' οὖν (κατὰ τὸ Α'. Θεώρ.) τοιαῦτα δὴ ληφθῆναι δυνατόν τῶν ἡγμένων Ρ καὶ Ξ Ἰσοπολλαπλάσια, τοιαῦτα δὲ καὶ τῶν ἐπομένων Σ καὶ Π, ὡς τὸ τῆ ἡγμένε Ρ τῆ κατὰ τὸν μείζονα λόγον πολλαπλάσιον, ὑπερέχον τὸ πολλαπλάσιον τῆ ἐπομένε Σ τόγχε τῆ ἡγμένε Ξ πολλαπλάσιον, μὴ ὑπερέχειν τὸ πολλαπλάσιον τῆ ἐπομένε Π. Οὐκ ἐν τῷ τοιαῦτα (ὅπερ ἐκ τῆ Α'. τῶν Θεωρημάτων εὐαπόδεικτον ἐστίν), ὡς τῆ πολλαπλάσια τῆ Ξ ὑπερέχοντος τὸ τῆ Π πολλαπλάσιον, τὸ πολλαπλάσιον τῆ Ρ μὴ ὑπερέχειν τὸ πολλαπλάσιον τῆ Σ. Ὅπερ ἂν ἦτο ἀναίρεται τὰ τῆς ὑποθέσεως.

Θ ε ώ ρ η μ α Δ'.

„Τῆ λόγου ἄλογε τυγχάνοντος, ἂν ὅ,τις τῶν τῆ ἡγμένε πολλαπλάσιον

„λαπλασίων, οὐδενὶ ὁτῶν τῶν τῷ ἐπομένῳ πολλαπλασίων ἴσων ἂν εἴη.
 „Ταύτη δέ τοι ἐν οἷς διὰ τῶν πολλαπλασίων ζητεῖται ἢ τῶν ἀλόγων ἀνα-
 „λογιῶν ἰσότης, νοητέον μόνον τῶν πολλαπλασίων τὸ ἅμα τῆς ὑπερο-
 „χῆς καὶ ἐλλείψεως.

Ἐς δὲ λόγος ἀλόγος $A : B$. Εἶπερ οὖν τὸ A ποσάκις ληφθὲν, ἰσωδῆναι εἴχε τῷ B ποσάκις ληφθέντι, ὥς ὑφ' ἐκατέρῃ ἴσην πληκτικότητα συσαδῆναι τὴν Z , ἐκάτερον ἂν A καὶ B ἦν ἂν τῷ αὐτῷ Z συμμέτρως ἔ-
 χον, καὶ σύμμετρα ἂν ἦν, κατὰ τῆς ὑποθέσεως.

Ἐπειδὴ δὲ τῶν Θεωρημάτων τὸ B' ἔδεν ἦττον τοῖς ἀλόγοις, ἢ τοῖς
 λογικοῖς τῶν λόγων προσῆκον ἐστὶ, τῇ ἅμα ὑπεροχῇ τε καὶ ἐλλείψει τὴν
 ἅμα ἰσότητα προσιδέμεθα σὺν τῷ Εὐκλείδει.

Τοῖς παρὰ τῷ Στοιχειωτῇ ἐν Ὁρίσμοις E' καὶ ϵ' ὑποτιθεμένοις ὡς
 δειχθεῖσιν, ἀπασαι ἤδη αἱ ἐν τῷ E' καὶ ϵ' Βιβλίῳ ἀποδείξεις ἔχασιν τὸ
 ἐξαίριον· καὶ δῆλον ἄρα ὡς τὸ τῆς ἅμα νοημένης ὑπεροχῆς, εἴτεν ἐλλεί-
 ψως τεκμήριον, ἀπαιτῶς ἔχει εἰς διαγνώρισιν τῆς τῶν λόγων ἰσότητος,
 ἢ καὶ ἀπλῶς μέντοι, ἔδὲ ἀμέσως, τῆς δὲ ἦν φθάσαντες παρεχόμεθα δει-
 ξεως ὁρθῶς πρῶτον κατανοηθεῖσιν.

Ἀλλὰ γὰρ ἐπεὶ τὸ διὰ τῶν πολλαπλασίων τεκμήριον καί τοι ἀσφα-
 λές, παρρώτερον γεμῖν ὃν τυγχάνει καὶ πεπλεγμένον, ἕτερον αὐτ' ἐκείνῳ
 σαφέστατόν τε ἅμα καὶ ἐγγυτάτω ὂν, ἡμοι ὑπέσχηται, προδήσομαί τε καὶ δείξω.

Θ ε ω ρ η μ α Ε'.

„Ἐὰν τὰ ἐπόμενα ($\gamma\zeta$, $\nu\pi$), καὶ τῶν ἐπομένων ἕκαστον μέρος ὅμοιον κα. 320
 „(οἷον δεκατημόριον, ἑκατοσημόριον, χιλιοσημόριον, καὶ ἥτως ἐφεξῆς πέ-
 „νηρατος ἄνευ), ἐν τοῖς ἡγεμένοις ($\alpha\beta$, $\eta\mu$) ἰσαριθμῶς ἀεὶ ὥσι περιεχόμενα,
 „οἱ λόγοι ($\alpha\beta$ πρὸς $\gamma\zeta$, καὶ $\eta\mu$ πρὸς $\nu\pi$) ἴσοι ἔσονται.

Σεσημειώσω, ὅτι τὴν ἰσαριθμὸν ἐκατέρωστε περιοχὴν ἐκ τῆς ἰσαριθμῶς
 ἐκατέρωθεν ἀφαιρέσεως τεκμαιρόμεθα.

Δείκν. Εἰ μὴ γὰρ, ἔσαι τῶν λόγων ὁ ἕτερος, οἷον ὁ $\alpha\beta$ πρὸς $\gamma\zeta$,
 μείζων τῷ λόγῳ $\eta\mu$ πρὸς $\nu\pi$ · καὶ δῆλον τοῖσιν, ὅτι Εὐθεῖα τις (οἷον ἡ $\alpha\delta$)
 ἐλάσσων τῆς $\alpha\beta$ λόγον ἔξει πρὸς $\gamma\zeta$, ὂν $\eta\mu$ πρὸς $\nu\pi$ · οὐδὲν δὲ ἦττον
 σαφές, ὅτι καί τι τῶν ἐπὶ τῆς $\gamma\zeta$ μορίων (οἷον εἰπεῖν φέρε τὸ τριακσόν),
 ἔλαττον τῆς διαφορᾶς $\delta\beta$. Ἐς δὲ ἡ $\gamma\epsilon$ τριακσόν τῆς $\gamma\zeta$, καὶ ἀφαιρεθῇ τῷ
 ἀπὸ τῆς $\alpha\beta$ ὅσας ἂν εἴῃ, οἷον χιλιάκις, ἔσω δὲ ὅλον τὸ ἀφαιρεθὲν $\alpha\epsilon$.

A a 2

καὶ ἐπεὶ αὖ εἶναι τίθεται 1000 πρὸς 1 τὴν γε, ἢ δὲ γζ 30 πρὸς μονάδα τὴν γε, ἔσαι αὖ : γζ :: 1000 : 30.

κ. 320.

Ἦν δὲ οὖν ληφθήτω καὶ ἀπὸ τῆς νη μέρους τὸ νη ὁμοιον τῷ ληφθέντι γε, ἡλικον τριακασόν· καὶ ἐπεὶ κατ' ὑπόθεσιν αἱ γε καὶ νη ἰσαρίθμως ἐν ταῖς αβ, ἡμ περιεχόμεναί εἰσιν, ἐκείνων τε ἡ γε ἀπὸ τῆς αβ ὁσάκις ἐξῆν ἀφίρηται, οἷον χιλιάκις, καὶ αὐτὴ δὲ ἡ νη ἀπὸ τῆς ἡμ χιλιάκις ἂν ἔχοι ἀφαιρεθῆναι. Ἐπεὶ δέ τοι τὸ ὅλον ἀφαιρεθὲν ηκ ἐστὶ 1000 πρὸς 1 τὴν νη, καὶ νη ἐστὶ 30 πρὸς τὴν αὐτὴν νη, ἔσαι δὲ ηκ : νη :: 1000 : 30, τετέστιν ὡς αὖ πρὸς γζ. Ἦν δὲ τῆς γε ἀφαιρεθείσης ὁσάκις ἐξῆν ἀπὸ τῆς αβ, καὶ καταλιπέσης τὴν ξβ, τῆς τε ξβ ἐλάσσονος ἔτω τῆς γε ὑποτιθεμένης, ἡ γε τριακοσημόριον ἔσα τῆς γζ ἐλάσσων ἐλήφθη τῆς δβ· τοιγαρὶν ἡ ξβ πολλῷ ἐλάσσων τῆς δβ, ὥς ἡ αὖ μείζων τῆς αδ, καὶ ἐπομένως αὖ : γζ > αδ : γζ· ἐτίθετο δὲ αδ : γζ :: ημ : νη, ἄρα αὖ : γζ > ημ : νη, τετέστι πολλῷ μείζων τῷ ηκ πρὸς νη· ἄτοπον δὲ, εἰδείχθη καὶ γὰρ αὖ : γζ : ηκ : νη. Ἀδύνατον ἄρα τὰς δοθέντας λόγους αβ πρὸς γζ καὶ ημ πρὸς νη εἶναι ἀνίστους, ὥς ἔσοι εἰσὶν. Ο. Ε. Δ.

Θ ε ω ρ η μ α ζ'.

„Εάν ἦτοι τὰ ἐπόμενα (γζ, νη), ἢ τῶν ἐπομένων οποιαδήποτε μόρια ὅμοια (οἷον δεκατημόρια), μὴ ἰσαρίθμως ἐν τοῖς ἡγαμένοις (αβ, ημ) περιεχόμενα ἦ, οἱ λόγοι (αβ : γζ, καὶ ημ : νη) ἀνίστοι ἔσονται, καὶ τήτων μείζων, ἢ τὸ τῷ ἐπομένῳ μόριον πλεονάκις ἐμπεριέχεται.

κ. 321.

Ἐς ὧ δὲ περιεχόμενον τὸ γε, δεκατημόριον φέρε τῷ γζ, ἐν τῷ αβ χιλιάκις, καὶ ἔσω αὖ 1000 πρὸς 1 τὴν γε, τὸ δὲ λοιπὸν ξβ ἔλαττον τῷ γε. Εἴτα δὲ νη δεκατημόριον τῷ νη περιεχέσθω ἐν τῷ ημ 997κις, ὡς εἶναι τὸ ηκ 997 πρὸς 1 τὴν νη, καὶ δῆλον ὡς τὸ λοιπὸν ημ ἔλαττον τῷ νη, κἀντεῦθεν 1000κις τὸ νη μείζον τῷ ημ. Ἀλλὰ γὰρ ἔσω ησ 1000 πρὸς 1 τὴν νη, καὶ ἐπεὶ αὖ ἐστὶ 1000 πρὸς 1 τὴν γε, καὶ ησ 1000 πρὸς 1 τὴν νη, καὶ δὲ καὶ γζ 10 πρὸς γε, καὶ νη 10 πρὸς νη, ἔσαι αὖ : γζ :: ησ : νη, ἄρα αβ : γζ ἐν μείζονι λόγῳ, ἢ περ ησ : νη, καὶ ἐπομένως ἐν πολλῷ μείζονι, ἢ ημ πρὸς νη. Ο. Ε. Δ.

Καὶ ἔστιν ἄρα ἡμῖν ἀναμφήριον καὶ βᾶσον νοηθῆναι τεκμήριον, πρὸς τὴν τῶν ἴσων τε καὶ ἀνίσων λόγων ἐπίκρισιν. Ἐξ οὗ καὶ πάσας, ὅπόσαι μὴ αὐτόπιστοι εἰσιν, ἔχοιμεν ἂν τὰς τῷ Ε'. Βιβλία Προτάσεις, αἷ διὰ Ἰσοπολλαπλασίλων ὁ Στοιχειωτής ἐπεχείρησεν, ἀποδείξαι, εἰμὴ πρῶτα ἔσεσθαι τοῖς μαθητιῶσιν ἐγνώκειμεν, κατὰ τὴν ἐν τῷ Α' μέρει μέθοδον αὐτὰς ὑποθέσθαι.

ΜΕΡΟΣ Γ.

Περὶ τῶν κατὰ τὰς λόγους Παρονομασιῶν, καὶ τῶν Ἀλγορίθμων,
καὶ Συνθέσεως.

§. Α'.

Διαιρέσεις τῶν λόγων.

Διαιρεῖται δὴ πρὸ πάντων ὁ λόγος εἰς λογικὸν καὶ ἄλογον, ὡς εἴρηται ἐν Ὁρ. Δ., ὁ δὲ λογικὸς εἰς τὸν κατ' ἰσότητα καὶ ἀνισότητα, ὅς καὶ ὑποδιαιρεῖται εἰς τὸν κατὰ τὴν μείζονα ἀνισότητα, ἔνθα τὸ ὑγόμενον μείζον τῷ ἐπομένῳ, καὶ εἰς τὸν κατ' ἐλάσσονα ἀνισότητα, ἔνθα τὸ ὑγόμενον ἔλαττον τῷ ἐπομένῳ.

Τῇ δὲ δὴ λογικῇ λόγῳ τῇ κατὰ τὴν μείζονα τῶν ἀνισοτήτων εἶδη πέντε. Ὁ μὲν γὰρ Πολλαπλάσιος, ὁ δ' Ἐπιμόριος, ὁ δ' Ἐπιμερής, ὁ δὲ πολλαπλάσιος Ἐπιμόριος, ὁ δὲ πολλαπλάσιος Ἐπιμερής.

Καὶ Πολλαπλάσιος μὲν, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα τῶν ὄρων πλεονάκις περιέχων ἐστίν, οἷον δις, τρίς, τετράκις, κξ., ὅς καὶ φερωνύμως ἀπὸ τῆς περιοχῆς διπλάσιος ἀκίει, καὶ τριπλάσιος, καὶ τετραπλάσιος, κξ.

Ἐπιμόριος δὲ λόγος, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα τῶν ὄρων ἅπαξ περιέχει, καὶ μόριόντι τῶν ἐν αὐτῷ, οἷος ὁ λόγος 3 πρὸς 2, ἢ 6 πρὸς 4, ὅς καλεῖται καὶ Ἡμιόλειος· ὁ γὰρ τοι μείζων τὸν ἐλάσσονα ἅπαξ περιέχει, καὶ τέττα ἡμίσειαν· καὶ ὁ λόγος 4 πρὸς 3, ἢ 16 πρὸς 12, ὅς καὶ Ἐπίτριτος λέγεται, τῷ μείζονος τὸν ἐλάσσονα ἅπαξ, καὶ τέττα πρὸς τριτημόριον περιέχοντος, καὶ ἄτως ἐφεξῆς.

Λόγος δὲ ἐπιμερής ἐστίν, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα τῶν ὄρων ἅπαξ περιέχει, καὶ τέττα μέρη μὴ μόριον συναποτελεῖντα. Τοιοῦτος ὁ λόγος 8 πρὸς 5, καὶ 14 πρὸς 10, τὸ γὰρ 8 περιέχει τὸ 5 ἅπαξ, καὶ ἔτι πρὸς 3, ἅτινά ἐστι τρία πεμπτημόρια τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ 5, ἅπερ ἅμα ληφθέντα μόριον ἐν τῷ πενταδικῷ ἑδαμῶς δίδωσιν· ὡσαύτως δὲ καὶ 14 περιέχει τὰ 10 ἅπαξ, καὶ δις 2, τατέσι δύο πεμπτημόρια τῷ ἀριθμῷ 10, ἅττα ἅμα ληφθέντα (ἧτοι 4) ἐντιμόριον τῷ 10 ἦκιστα συναποτελεῖ. Προστέθει γὰρ τὸ μόριον μὴ συναποτελεῖν, εἴη γὰρ ἂν εἴπερ ἄλλως ὁ λόγος Ἐπιμόριος.

Λόγος δὲ πολλαπλάσιος ἐπιμόριος ἐστίν, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα

πλεονάκεις περιέχει, ἢ ἔτι πρὸς αὐτῆς μόριον, οἷος ὁ λόγος 5 πρὸς 2, ἢ 10 πρὸς 4 κξ.

Λόγος δὲ πολλαπλάσιος ἐπιμερὴς ἐστίν, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάττωνα πλεονάκεις περιέχει, ἢ ἔτι μέρη τῆς αὐτῆς, μηδέν τι μόριον συναποτελεῦντα· τοιοῦτος ὁ λόγος 8 πρὸς 3, ἢ 16 πρὸς 6, κξ.

§. Β'.

Περὶ Παρονομασίᾳ τῆς λόγου τῆς λογικῆς.

Παρονομασίης τῆς λογικῆς λόγου ἐστίν, ὃ σαφῶς τε ἢ εὐκρινῶς ἐκδηλῶν τὴν διατέρεα τῶν ἀριθμῶν ᾗ ἐστιν πρὸς θάτερον, ἀμέλειτοι ὁ ἕτως ἔχων πρὸς τὴν μονάδα, ὡς ὁ μείζων τῶν ὄρων πρὸς τὸν ἐλάττωνα, ἢ παραδεικνύς ὅσάκις ὁ μείζων τὸν ἐλάττωνα περιέχει, ἢ (ὃ ταυτὸν ἐστίν) ὅσάκις ὁ ἐλάττωνας ἐν τῷ μείζονι περιέχεται. Τῆς γὰρ λόγου 27 πρὸς 9 Παρονομασίης ἐστίν ὁ 3, ἔστι γὰρ τὰ 3 πρὸς τὴν μονάδα, ὡς 27 πρὸς 9· ὅθεν δεικνύται διὰ τῆς 3, ὅτι τρεῖς ἐν τῷ ἡγυμένῳ τὸ ἐπόμενον περιέχεται.

Λόγος δὲ παντὸς ὁ Παρονομασίης ἐξευρίσκειται, τῆς μείζονος τῶν ὄρων διαιρεμένης διὰ τῆς ἐλάττωσος, οὕτω γάρτοι τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον, τῆς λόγου Παρονομασίης ἔσται, καθότιγε τὸ Πηλίκον ἐστὶ πρὸς τὴν Μονάδα, ὡς ὁ Διαιρετέος πρὸς τὸν Διαιρέτην, ταυτὸν εἰπεῖν, ὡς τῶν ὄρων ὁ μείζων πρὸς τὸν ἐλάττωνα.

Οἷον δὴ κείῳ λόγος 60 πρὸς 6· διαιρέσω δὲ τὰ 60 διὰ 6, ἢ Πηλίκον ἀνακύψει τὸ 10, ὃ ὁ τῆς λόγου τυγχάνει Παρονομασίης. Ἀλλὰ κείῳ λόγος 60 πρὸς 16, διαιρέσω δὲ 60 διὰ 16, Πηλίκον ἀνακύψει $3\frac{3}{4}$, ὅς ἐστιν ὁ Παρονομασίης.

§. Γ'.

Περὶ Παρονομασιῶν τῶν λόγων τῶν ἀλόγων.

Τῶν ἀλόγων λόγων ἐφ' ἑντι κοινὸν ἐπόμενον ἀναχθέντων, τὰ τῆς κοινῆς ἐπομένη ἡγύμενα, οἱ Παρονομασίαι αὐτῶν ἔσονται, τὸ δὲ τοι κοινὸν ἐπόμενον ἔργον τε, ἢ τάξιν Μονάδος πληρώσει.

Λόγος δὲ ἁπλοῦς, ὅς ἂν ἄλογος ᾖ, μόνον ἐκκειμένον τὸν Παρονομασίην δυνατόν παρασῆσαι. Ἐάν δὲ δύο ἢ πλείους τύχασιν καὶ ἕτερόν τινα νῦν, οἱ τῶν Παρονομασιῶν παρασῆαι δεικνύντες δηλονότι, ὅπως τῶν λόγων ὁ ἕτερος ἔχει πρὸς θάτερον, ὃ δὴ περ' ἀριστα σεσημειωκὸς φέρεται Γρηγόριος, ὁ παρὰ τῆς

Ἀγία βικεντία ἐν Βιβλ. Η'. τῇ Γεωμετρικῇ πονήματος αὐτῇ Οἱ. Β'. Οὗτος οὖν πολλοῖς τε καὶ ἐπιστήμοις εὐρήμασι τὴν Γεωμετρικὴν ἐπαυξήσας, ἐν τῷ Η'. μάλιστα Βιβλίῳ τῷ εἰρημένῳ Συγγράμματος, ὡς καινὴν τινα σχεδὸν ἐπιστήμην περὶ Ἀναλογιῶν δειμάμενος εἰκότως γεραίρεται.

Κείθωσαν οὖν ἄλλοι λόγοι Α πρὸς Β, καὶ Γ πρὸς Δ, καὶ ἀναχθῆτωσαν πρὸς τὰς λόγους Ζ : Ξ, καὶ η : Ψ κοινὸν ἔχοντες ἐπόμενον τὸ Ψ, ὥς ἐστὶ τὸν λόγον Ζ : Ξ = Α : Β, καὶ τὸν λόγον η : Ψ = Γ : Δ. Ἐπὶ δὲ τῶν κοινὸν ἐπόμενον Ψ, τὸ ἔργον ἐκτελέσει τὸ τῆς Μονάδος, τὰ δὲ ἡγόμενα Ζ καὶ η ἔσονται οἱ Παρανομασίαι τῶν λόγων Ζ πρὸς Ξ, καὶ η πρὸς Ψ (τῆς τῶν λόγων Α πρὸς Β, καὶ Γ πρὸς Δ)· παραδεικνύσιν γὰρ ὅπως ὁ ἕτερος τῶν λόγων ἔχει πρὸς θάτερον, καὶ γὰρ Ζ : η, ὡς ὁ λόγος Ζ : Ξ πρὸς τὸν λόγον η : Ψ, ἦτοι Α : Β πρὸς τὸν Γ : Δ.

§. Δ'.

Ἀξιώματα.

Οἱ λόγοι (Ζ : Ξ καὶ η : Ψ), οἵτις κοινὸν ἔσιν ἐπόμενον (τὸ Ψ), λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ἡλίκον τὰ ἡγόμενα (Ζ καὶ η)· ἔστι δὲ ἡ Β'. τῶν ἐν τῷ Η'. Βιβλ. παρὰ Γρηγ. τῷ εἰρημένῳ. κ.

Τῆς δὲ ὁ λόγος η : Ψ τοσούτω μείζων ἐστὶ τῇ Ζ : Ξ, ὅσῳ τὸ η μείζον τυγχάνει τῇ Ζ.

Οἱ λόγοι (ι : λ, καὶ ι : μ) οἵτις κοινὸν ἔσιν τὸ ἡγόμενον, τὸν κατὰ τὰ ἐπόμενα λόγον ἀντιπεπόνθασιν· ἔστι δὲ Πρὸτ. Ζ'. τῶν ἐν τῷ Η'. Βιβλ. παρὰ Γρηγ. β.

Τάτο δὲ ἔστιν, ὅτι ὁ λόγος ι : λ ἐστὶ πρὸς τὸν λόγον ι : μ, ὡς ἀντισφῶς μ ἐπόμενον πρὸς λ ἐπόμενον, ἦτοι ὁ λόγος ι : λ τοσούτω μείζων τῇ ι : μ, ὅσῳ τὸ μ μείζον τῇ λ.

Οἱ λογικοὶ τῶν λόγων εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ τῶν Παρανομασιῶν. γ.

Οἷον κείθωσαν λόγοι 12 πρὸς 3, καὶ 15 πρὸς 6, ὧν Παρανομασίαι 4 καὶ $2\frac{1}{2}$ · καὶ κατὰ τὸν Ὄρισμόν (1) $12 : 3 = 4 : 1$, ὁ δὲ λόγος $15 : 6 = 2\frac{1}{2} : 1$ · ἀλλὰ μὲν 4 : 1 ἐστὶ πρὸς τὸν λόγον $2\frac{1}{2} : 1$, ὡς (2) $4 : 2\frac{1}{2}$, ἄρα καὶ ὁ λόγος 12 : 3 ἐστὶ πρὸς τὸν λόγον 15 : 6, ὡς ὁ Παρανομασίης 4 πρὸς τὸν Παρανομασίην $2\frac{1}{2}$.

(1) §. Β. (2) §. Δ. Αξ. α.

Η' τῶν λογικῶν λόγων πρόοδεσις καὶ ἀφαίρεσις.

Προσίδονται οἱ λόγοι τῶν κατ' αὐτὰς Παρονομασιῶν προσιδεμένων· ὁ γάρτοι λόγος, ὃν τὸ τῶν Παρονομασιῶν ἄθροισμα ἔχει πρὸς τὴν μονάδα, τὸ τῶν δοθέντων λόγων τυγχάνει ἄθροισμα.

Κείδωσαν λόγοι $12 : 3$ καὶ $15 : 6$, καὶ τέτων Παρονομασιῶν 4 καὶ $2\frac{1}{2}$ προσιδέμενοι ἀλλήλοις καὶ $6\frac{1}{2}$ συναποτελῶντες· ὁ τοίνυν λόγος $6\frac{1}{2}$ πρὸς 1 , ἴσος κρίνεται τοῖς λόγοις $12 : 3$ καὶ $15 : 6$. Δῆλον δὲ ἐκ τῶν Α'ξιῶμ. τῷ Α καὶ τῷ Γ'.

Α'φαιρῶνται δὲ ἀφαιρεμένῃ τῷ ἐλάσσονος τῶν Παρονομασιῶν ἀπὸ τῷ μείζονος, ὃν γὰρ ἔχει λόγον τὸ λοιπὸν πρὸς τὴν μονάδα, τοῖατον ἔχει τὸ λοιπὸν, μετὰ τὸ τὸν ἐλάσσονα τῶν λόγων ἀπὸ τῷ μείζονος ἀφαιρεθῆναι. Δῆλον καὶ τῷτο ἔκτε τῷ Α' καὶ τῷ Γ'. Α'ξιῶμ.

Κείδωσαν οἱ λόγοι $12 : 3$ καὶ $15 : 6$, ὧν Παρονομασιῶν 4 καὶ $2\frac{1}{2}$, ἀφαιρεθῆτω δὲ ὁ ἐλάσσων $2\frac{1}{2}$ ἀπὸ τῷ μείζονος 4 , ὥστε λοιπὸν εἶναι $\frac{1}{2}$. Τὰ γὰρ $\frac{1}{2}$ πρὸς τὴν 1 , εἰς ὥς ὁ λοιπὸς λόγος, μετὰ τὴν γενομένην ἀφαίρεσιν τῷ $15 : 6$ ἦτοι τῷ $2\frac{1}{2} : 1$, ἀπὸ τῷ λόγῳ $12 : 3$, ἦτοι $4 : 1$.

Η' τῶν ἀλόγων λόγων πρόοδεσις καὶ ἀφαίρεσις.

Οἱ δοθέντες λόγοι (Α : Β καὶ Γ : Δ) ἀναχθῆτωσαν ἐπὶ τῆς τοῦ αὐτοῦ ἔχοντος ἐπόμενον (Ζ : Ψ καὶ η : Θ) τὸ Ψ· τῶν γὰρ ἡγεμένων Ζ καὶ η προσεδέντων ἀλλήλοις, ἔσαι τὸ ἄθροισμα Ζη πρὸς τὸ ἐπόμενον Ψ, ἴσον τοῖς λόγοις Ζ : Ψ καὶ η : Θ, τατέσι τοῖς λόγοις Α : Β καὶ Γ : Δ.

Η' δὲ τέτων ἀφαίρεσις τελεῖται τῶν δοθέντων λόγων ἐπὶ τὸ αὐτὸ κοινὸν ἐπόμενον ἀναγομένων, καὶ τῷ ἐλάσσονος ἡγεμένῳ, οἷον τῷ η, ἀπὸ τῷ μείζονος φέρε Ζ ἀφαιρεμένῳ· ὁ γάρτοι τῷ λοιπῷ πρὸς Ψ, εἰς ὃν ὁ λοιπὸς, μετὰ τὸ τὸν λόγον η : Ψ, ἦτοι τὸν Γ : Δ ἀφαιρεθῆναι ἀπὸ τῷ λόγῳ Ζ : Ψ, ἦτοι τῷ Α : Β. Δῆλον ἐκ τῷ Α'. Α'ξιῶματος.

Ο' τῶν λογικῶν λόγων πολλαπλασιασμὸς, καὶ ἡ τέτων διαίρεσις.

Οἱ τῶν λόγων Παρονομασιῶν ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασθέντες, δώ-

σας τὸν Παρονομασίην τὰ λόγια, τὰ ἐκ τῶν δοθέντων διὰ πολλαπλασιασμῶ παρακύπτοντος.

Τατέστιν ὁ λόγος, ὃν πρὸς τὴν μονάδα ἔχει ὁ διὰ πολλαπλασιασμῶ ἐπ' ἀλλήλοις τῶν Παρονομασιῶν παρηγμένος ἀριθμὸς, αὐτὸς ὁ ἐκ τῆ πολλαπλασιασμῶ τῶν λόγων ἐστὶ γινόμενος. Δῆλον δὲ ἐκ τῶν Α'ξιωμ. Α'. ἢ Γ'. ὁ γὰρ τῶν λόγων πολλαπλασιασμὸς, ἔδεν ὅτι μὴ θατέρῳ ἐπὶ θατέρῳ ἐπανειλημμένη τις πολλακίς πρόσθεσις ἐστὶ· τῶτον δὲ τελεῖσθαι ἐπαναληφθείσης πολλακίς τῆς τῶν ἡγμένων προσθέσεως, πρόδηλόν ἐστιν ἕκτε τῆ Α'. ἢ τῆ Γ'. Α'ξιώματος.

Οἷον δὴ κείθωσαν λόγοι $9 : 3$ ἢ $20 : 4$, ἢ τῶν Παρονομασιῶν 3 ἢ 5 , οἱ ἢ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιαζόμενοι παρέχουσι 15 . Ο' τοίνυν λόγος $15 : 1$, ἡλικὸς ἐστὶν ὁ διὰ πολλαπλασιασμῶ τῶν λόγων $9 : 3$, ἦτοι $(3 : 1)$, καὶ $20 : 4$ (ἦτοι $5 : 1$) παραγόμενος.

Ἡ δὲ δὴ τῶν διαίρεσις τελεῖται, τῆ Παρονομασίᾳ τῆ μείζονος λόγου διαιρεμένη διὰ τῆ Παρονομασίᾳ τῆ λόγου τῆ ἐλάσσονος. Ο' γὰρ τῆ πηλίκου λόγος πρὸς τὴν μονάδα, ἐστὶν ἡλικὸς ὁ ἐκ τῆς διαίρεσεως τῆ μείζονος τῶν δοθέντων λόγων διὰ τῆ ἐλάσσονος. Δῆλον ἐκ τῆ Α'. ἢ Γ'. τῶν Α'ξιωμάτων· ἡ γὰρ λόγος διὰ λόγου ἑτέρα διαίρεσις, οὐδὲν ὅτι μὴ ἀφαίρεσις ἐστὶ θατέρου ἀπὸ θατέρου πολλακίς ἐπανειλημμένη.

§. Η'.

Ο' τῶν ἀλόγων λόγων πολλαπλασιασμὸς.

Κείθωσαν λόγοι $A : B$ ἢ $\Gamma : \Delta$ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασέει, καὶ γινέσθω $A : B :: \Delta : E$. Ο' τοίνυν λόγος $\Gamma : E$ ἐστὶν ὁ παραγόμενος διὰ πολλαπλασιασμῶ τῶν λόγων $A : B$ ἢ $\Gamma : \Delta$.

Ἡ μὲν οὖν Πράξις τῆ παρὰ τῆ ἀγία Βικεντίας ἐπὶ κλην Γρηγορίου ἐστὶν ἐν Η'. Βιβλ. Πρωτ. ΟΕ', ἢ δ' ὑπ' αὐτῆ μέντοιγε, ἢ δ' ὑπ' ἑτέρα τινὸς δεδειγμένη, ἣν αὐτὸς ἡμεῖς δεικνύμεν.

Ο' λόγος $\Gamma : E$ παράγεται πολλαπλασιασμῶ τῶν λόγων $\Gamma : \Delta$, καὶ $\Delta : E$, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆ §. ΙΒ'. τῆς ἐντεῦθεν μιδαμῶς ἡρητιμένης. Α'λλ' οἱ λόγοι $\Gamma : \Delta$ ἢ $\Delta : E$, ἐκ κατασκευῆς, οἱ αὐτοὶ εἰσι τοῖς $\Gamma : \Delta$ καὶ $A : B$, ἄρα ὁ λόγος $\Gamma : E$, ἐστὶν ἡλικὸς ὁ ἐκ πολλαπλασιασμῶ τῶν λόγων $A : B$ ἢ $\Gamma : \Delta$ ἀναφορῶν. Ο. Ε. Δ.

Η' τῶν ἀλόγων λόγων Διαίρεσις.

Κείθω λόγος ὁ $\Gamma : E$ διαιρετέος διὰ τῶ λόγῳ $A : B$, καὶ δὴ γινέσθω $A : B :: \Gamma : \Delta$. Ο' γὰρ λόγος $\Delta : E$ τὸ Πηλίκον ἐστὶ.

Ο' γάρτοι λόγος $\Gamma : \Delta$ (τατέσιν ἐκ κατασκευῆς ὁ $A : B$) πολλαπλασιασθεὶς διὰ τῶ λόγῳ $\Delta : E$, παράγει τὸν λόγον $\Gamma : E$, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς ἐν §. IB'. τῆς ἐντεῦθεν μηδαμῶς ἡρητιμένης, ὁ ἄρα λόγος $\Delta : E$ ἐστὶ τὸ Πηλίκον, πολλαπλασιασθέν γὰρ ἐπὶ τῷ διαιρέτῃ, ὅς ἐστιν ὁ λόγος $A : B$, ἀποκαθίστησι τὸν λόγον $\Gamma : E$, ὅς τις ἦν ὁ διαιρετέος.

Περὶ Συνθέσεως τῶν λόγων, καὶ ταύτης Ὁρισμός.

Λόγος ἐκ λόγων συγκείσθαι λέγεται, ὅτε τῶν κατὰ τὰς λόγους πηλοκοτήτων (ἢτοι τῶν Παρονομασιῶν) ἐπ' ἀλλήλαις πολλαπλασιαζομένων, λόγον τινὰ συνισῶσιν· ἐστὶ δὲ παρ' Εὐκλείδῃ ὁ Ε'. τῶν τῶ ζ'. Βιβλ. Ὁρισμῶν.

Κείθωσαν λόγοι ὅποσοιῦν, καὶ τῶτων Παρονομασίαι 2, 3, $1\frac{1}{4}$. Πολλαπλασιαζέσθωσαν δὲ ἐπ' ἀλλήλοις οἱ Παρονομασίαι 2 καὶ 3, τότε παραγόμενον 6, Παρονομασίης τῶ λόγῳ ἔσαι, τῶ συγκειμένα ἐκ τῶν ἀπλυσέρων λόγων, ὧν Παρονομασίαι οἱ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασθέντες. Ἀμέλειτοι ὁ λόγος 6 : 1 σύνδετός ἐστιν ἐκ τῶν λόγων 6 : 3 καὶ 12 : 4· ὡς εἶγε καὶ τὸν Παρονομασίην 6 πολλαπλασιάσαις περαιτέρω, καὶ διὰ τῶ τρίτε τῶν ἐκτεθέντων ἀπλυσέρων Παρονομασιῶν, οἷον διὰ $1\frac{1}{4}$, ἀνακύψει δὴ ὁ $7\frac{1}{2}$ Παρονομασίης τῶ λόγῳ τῶ συνδέτε ἐκ τῶν τριῶν δοθέντων λόγων, ὧν Παρονομασίαι ἦσαν 2, 3, $1\frac{1}{4}$.

Η' τῶν λόγων σύνθεσις πολλαπλασιασμὸς τῶν αὐτῶν ἀντικρυς ἐστὶ· καὶ πᾶς δὲ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν ἐκείνων λόγων συγκείσθαι λέγεται, ἐξ ὧν περ διὰ πολλαπλασιασμῶ παράγεται.

Ὡς γὰρ ἐκ τῶ Ἀξιῶμ. τῶ Δ'. καὶ §. Ζ'. δῆλον ἐστὶ, λόγος ἐκ λόγων πλειόνων πολλαπλασιασμῶ παραγόμενος ἐστὶν, ὃν τὸ ἐκ τῶν Παρονομασιῶν τῶν ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζομένων γινόμενον, ἔχει πρὸς τὴν μονάδα,

ἦτοι πρὸς τὸ κοινὴν ἐπόμενον· ἀλλὰ καὶ κατὰ γε τὸν παρ' Εὐκλείδη ὀρισμὸν, λόγος ἐκ λόγων συγκείμενός λέγεται, ὃν τὸ ἐκ τῆ πολλαπλασιασμῆ τῶν Παρονομαζῶν γινόμενον ἔχει πρὸς τὴν μονάδα, ἦτοι πρὸς τὸ κοινὴν ἐπόμενον. Ὁ ἀρα λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν συντίθεται, ἐξ ὧν καὶ διὰ πολλαπλασιασμῆ παράγεται.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Πρὸς ῥαυτοτέραν τῆς ἐφεξῆς ἀποδείξεως σύνεσιν παρατηρητέον, ὡς τὰ Μεγέθη ἐπιδέχεται τὸν ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασμὸν, καὶ τὴν δι' ἀλλήλων διαιρέσιν κατὰ τινα πρὸς τὰς ἀριθμὸς ἀναλογίαν. Καθάπερ γὰρ ἀριθμὸς δι' ἀριθμῷ πολλαπλασιάζεται λέγεται, ὅταν ὡς ἡ μονὰς ἔχει πρὸς τὸν ἕτερον, ἔτως ὁ λοιπὸς πρὸς τρίτον ἀριθμὸν, ὅς τὸ παραγόμενον εἶναι λέγεται, ἔτω δὲ καὶ Μεγέθους διὰ Μεγέθους πολλαπλασιάζεσθαι λέγεται, ὅταν ὡς ὅποιαδήποτε Εὐθεῖα ἀντὶ μονάδος ληφθεῖσα πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν δοθεισῶν ἔχει, ἔτως ἡ ἑτέρα πρὸς ἄλλην τινὰ τετάρτην, ἥτις καὶ αὐτὴ τὸ παραγόμενον εἶναι ἀκύσεται. Παραπλησίως δὲ, ὥσπερ ἀριθμὸς δι' ἀριθμῷ διαιρεῖσθαι λέγεται, ὅταν ὡς θάτερος ἔχει πρὸς θάτερον, ἔτως ἡ μονὰς πρὸς τρίτον, ὅς τὸ Πηλίκον καλεῖται, οὕτω τοι καὶ Μεγέθους διὰ Μεγέθους διαιρεῖσθαι εἰρήσεται, ὅταν ληφθεῖσθαι τινὸς πηλικότητος ἀντὶ μονάδος, ὡς θάτερον ἔχει πρὸς θάτερον, ἔτω τοι ἡ μονὰς πρὸς τι ἄλλα, ὃ δὲ Πηλίκον ὁμαίως κληθήσεται.

§ IB'.

Εἰάν ὧσιν ὅποιοιδηποτῶν καὶ ὅσοιδηποτῶν ἦτοι ἀριθμοὶ, ἡ Μεγέθη, ὃ τῆ Α'. λόγος πρὸς τὸν ἑκατον, συγκείμενός ἐστιν ἐκ τῶν λόγων τῶν μεταξύ.

Εἰν μὲν ἀριθμοῖς Θεωρί τε καὶ Εὐτοκίῳ καὶ τῷ Οὐιτελλίῳ ἀποδέδεικται, ἐπὶ δὲ τῶν Μεγεθῶν ὅστις ἀδελφὸς ὁ εἰς τὸ δε κατασκευάσας τὰ προτεθέν. Ταύτη τοι καὶ ὁ ῥηθεὶς ἀνωτέρω Γρηγόριος Γεωμετρῶν τὰ πρῶτα γενομένοις, ἐν τῷ Η'. Βιβλ. ἐν ἀρχ. Β'. ταῖς ἀρχαῖς ὑπέλιπε δεῖν τὸ τοιοῦτο συγκαταλέγεσθαι, εἰς ὃ τις ἀποδείξει αὐτὸ κρατύνας, τοῖς Θεωρήμασιν ἐναρίθμιον τάξει.

Αὐτοὶ γὰρ τὴν ἐν γένει τῇ τοιᾷδε ἀπόδειξιν παρασχέειν ὥδε ἐπιχειρήμεν.

Δείκνυται ἐν τοῖς Μεγέθεσι.

Κεῖσθαι Μεγέθη ὅποια ἔν καὶ ὅποια ἔν τὰ Α, Β, Γ, Δ· δεικτέον τὸν Α : Δ λόγον συγκείμενον εἶναι ἐκ τῶν λόγων Α : Β, καὶ Β : Γ, καὶ Γ : Δ.

Γινέσθω ὡς $B : Γ$, οὕτω $X : B$, καὶ ἔσονται οἱ λόγοι $A : B$ καὶ $B : Γ$ ἐπὶ τὰς λόγους ἀνηγμένοι $A : B$ καὶ $X : B$, τὰς ἔχοντας ἐπόμενον τὸ αὐτὸ τὸ B . Ἐνθέντοι καὶ τῶν τοιῶνδε λόγων Παρονομαζαὶ ἔσονται A καὶ X , τὸ δὲ ἐπόμενον B (1) ἔργον πληρώσει μονάδος, ἢ δὴ πρὸς πάντας τὰς ἀριθμητικὰς Παρονομαζὰς κοινόντι τίθεται εἶναι ἐπόμενον.

Βαλιθέντας τοίνυν τὰ μεγέθη A καὶ X δι' ἀλλήλων πολλαπλασιάσαι, λαβεῖν δεῖ (2) ὡς B ἡ μονὰς ἐστὶ πρὸς X , ἥτως A πρὸς ἄλλοτι τὸ Z , ὃ δὴ τὸ παραγόμενον ἐστὶ πολλαπλασιασμῷ τῷ τῷ A διὰ τῷ X , ἢ (ὃ ταυτὸν ἐστὶ) τῷ τῷ X διὰ τῷ A . Οἷον εἰ καὶ ἀριθμὸς ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιάσαι θελήσας τὰς P , Σ , σχοίης ἂν τὴν μονάδα πρὸς τὸν ἕτερον τὸν Σ , ὡς τὸν ἕτερον P πρὸς τὸ ἀπ' ἐντεῦθεν διὰ τῷ πολλαπλασιασμῷ παραγόμενον, φέρε τὸ Υ .

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Z , τὸ παρηγμένον εἶναι ἐτέδη πολλαπλασιασμῷ τῷ τῶν Παρονομαζῶν A καὶ X , ἔσαι δὴ ὁ λόγος (3) τῆδε τῇ γενομένῃ Z πρὸς τὴν μονάδα B , ὃ τὸ κοινὸν εἶναι ἐπόμενον εἴρηται, ἡλίκος ὁ πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων $A : B$ καὶ $X : B$ γινόμενος, ὡς καὶ τῇ τῶν Ἀριθμητικῶν λόγων πολλαπλασιάσει ἐν $\S$. Z' συμβαίνειν δέδεικται, καθ' ἣν ἂν οἱ Παρονομαζαὶ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασθῶσιν, ὃ τῷ παραγόμενῳ λόγῳ πρὸς τὴν μονάδα, ἡλίκος ὁ ἐκ τῷ τῶν λόγων πολλαπλασιασμῷ τυγχάνει γε ὢν.

Ἄλλα μὲν ἐκ κατασκ. ὁ λόγος $X : B$, αὐτόχρημα ἐστὶν ὁ $B : Γ$, ἄρα καὶ ὁ λόγος $Z : B$ παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων $A : B$ καὶ $B : Γ$. Ἐπεὶ δέτοι ἐκ κατασκ. ὡς $B : X$, ἥτως ἐστὶ καὶ $A : Z$, καὶ ἀνέπαλιν $Z : A :: X : B$, τετέστιν ἐκ κατασκ. ὡς $B : Γ$. τοιγαρὴν καὶ ἐναλλάξ $Z : B :: A : Γ$. Δέδεικται δὲ ὅτι $Z : B$ παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων $A : B$ καὶ $B : Γ$, ἄρα καὶ ὁ λόγος $A : Γ$ παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων $A : B$ καὶ $B : Γ$. Ἀλλὰ γὰρ ἐν $\S$. IA' . ἐδείχθη τὸν λόγον συγκείμενον εἶναι ἐκ τῶν αὐτῶν λόγων, ἐξ ὧν καὶ πολλαπλασιασμῷ παράγεται. Ὁ ἄρα λόγος $A : Γ$ σύνθετος ὢν τυγχάνει ἐκ τῶν λόγων $A : B$ καὶ $B : Γ$.

Τὸν αὐτὸν δὴπε τρόπον δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὁ λόγος $A : Δ$ σύνθετός ἐστιν ἐκ τῶν λόγων $A : Γ$ καὶ $Γ : Δ$. Ὁ ἄρα λόγος $A : Δ$ σύνθετος ὢν τυγχάνει ἐκ τῶν λόγων $A : B$, καὶ $B : Γ$, καὶ $Γ : Δ$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἐς ἄπειρον. $O. E. Δ$.

(1) $\S$. Γ' . (2) Σχόλ. τὸ ἀνωτ. (3) $\S$. I . O .

Δείννται καὶ τῶν ἀριθμῶν.

Τὴν αὐτὴν πάντῃ δεῖξιν χάραν ἔχειν καὶ τῶν Ἀριθμῶν ἡδὴ δείξω, 8 2 4
 ὅθεν δὴ καὶ κείνης τὸ ἀληθές καὶ ἐδραϊὸν μᾶλλον ἀναφανήσεται. 4 1 4

Κεῖσθωσαν ἀριθμοὶ ὁποιοδηποτῶν τρεῖς 8, 4, 3, καὶ γινέσθω 4:8::3 2 4
 1:2, καὶ 4:3::1: 2 4 καὶ δῆτα ἔσονται οἱ λόγοι 8:4 καὶ 2:1, καὶ δὴ
 καὶ οἱ 4:3 καὶ 1: 2 4, ἀλλήλοισι ἴσοι· καὶ δι' ἴσα δὲ (1) 8:3::2: 2 4.

Εἴτα γινέσθω ὡς 2:1::1: 2 4 καὶ ἔσονται οἱ λόγοι 2:1 καὶ 1: 2 4
 (τατέσιν οἱ λόγοι 8:4 καὶ 4:3) ἀναγόμενοι ἐπὶ τὰς δύο λόγους 2:1 καὶ
 1: 2 4, κοινὸν ἔχοντας ἐπόμενον τὴν μονάδα· ἔνθεντοι 2 καὶ 1 ἔσονται (2)
 τῶν λόγων 8:4 καὶ 4:3 Παρονομασαί. Πεπολλαπλασιασάσθωσαν οὖν δι' ἀλ-
 λήλων οἱ Παρονομασαί 2 καὶ 1, γινέσθω δηλονότι 1: 2 4::2: 2 4, καὶ ἔσαι
 2 τὸ παραγόμενον ἐκ 2 καὶ 1, οἱ παρονομασαί εἰσι τῶν λόγων 8:4 καὶ 4:3
 ἐπ' ἀλλήλοισι πολλαπλασιασθέντων. Ὁ ἄρα λόγος τῶδε τῶ παραγομένῃ 2
 πρὸς 1, ἡλικίος ἐστὶν (3) ὁ παραγόμενος ἐκ τῶ πολλαπλασιασμῶ τῶν λόγων
 8:4 καὶ 4:3· ἀλλὰ γὰρ ἐπεὶ ἐκ τῆς κατασκ. 1: 2 4 = 2: 2 4, ἔσαι καὶ ἀνά-
 παλιν 2: 2 4 = 1: 2 4· πάλιν δὲ ἐκ τῆς κατασκ. 2: 2 4 = 1: 2 4, ἄρα 2: 2 4
 = 1: 2 4, καὶ δὴ καὶ ἐναλλάξ 2: 2 4 = 2: 2 4. Εἰδείχθη δὲ ὡς ὁ λόγος 2: 2 4
 1 ἐστὶν ὁ παραγόμενος ἐκ τῶ πολλαπλασιασμῶ τῶν λόγων 8:4 καὶ 4:3,
 ἄρα καὶ ὁ λόγος 2: 2 4 ἐστὶν ὁ παραγόμενος ἐκ τῶ πολλαπλασιασμῶ τῶν
 λόγων 8:4 καὶ 4:3· δέδεικται δὲ ἀνωτέρω τὸν λόγον 2: 2 4 ἴσον εἶναι
 τῷ λόγῳ 8:3, ἄρα καὶ ὁ λόγος 8:3 παράγεται καὶ αὐτός ἐκ τῶ πολ-
 λαπλασιασμῶ τῶν λόγων 8:4 καὶ 4:3. Καὶ τοίνυν διὰ τὰ ἐν §. ΙΑ', ὁ
 λόγος 8:3 ἐκ τῶν λόγων 8:4 καὶ 4:3 συγκείμενος ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δεῖχθήσεται, καὶ πλείονων ἢ τρεῖς προκειμένων
 ἀριθμῶν, τὸν λόγον 8:25 συγκείμενον εἶναι ἐκ τῶν λόγων 8:3 (οὗ- 8
 τοις γὰρ ἐστὶν ἐκ τῶν 8:4 καὶ 4:3) καὶ 3:25· τόν τε λόγον 8:73 συγ- 3
 κείσθαι ἐκ τῶν λόγων 8:25 (οὗτοις γὰρ ἐστὶν ἐκ τῶν 8:4, καὶ 4:3, καὶ 25
 3:25) καὶ 25 πρὸς 73, καὶ ἔτις εἰς ἄπειρον. 73

(1) KB. τῷ ε'. (2) §. Β'. (3) §. Ζ'.

§. II'.

Ὅποσων ἐν λόγων δοθέντων $A : B$, καὶ $\Gamma : \Delta$, καὶ $E : Z$, λόγον παραχρῆν τὸν ἐξ ἀπάντων συγκείμενον.

Ἐὰν γένηται ὡς $A : B$, ἅτως ὅ,τι τύχοι $H : \Theta$ · καὶ ὡς $\Gamma : \Delta$, ἅτως $\Theta : I$ · καὶ ὡς $E : Z$, ἅτως $I : K$, ὁ λόγος $H : K$ συγκείμενος ἔσται ἐκ τῶν λόγων $H : \Theta$, καὶ $\Theta : I$, καὶ $I : K$, ὡς ἐν §. ἄνωτ. ἀποδείκνυται· ἀμέλει τοι διὰ τὴν κατασκ. ἐκ τῶν δοθέντων λόγων $A : B$, $\Gamma : \Delta$, $E : Z$.

§. ΙΔ'.

Ὁ λόγος ἐκ ἑσιν ἴσος τοῖς λόγοις ἐξ ὧν περ συντίθεται.

Δυσὲν μεταξὺ πηλικότητων H , K πηλικότητες ἄλλαι παρεμβεβλήσθωσαν, εἴτε συνεχῶς ἀνάλογοι αὗται εἴεν, εἴτε καὶ μή. Ὁ γὰρ λόγος τῆς πρώτης H πρὸς τὴν ἐσχάτην K ἂν ἔσιν ἴσος τοῖς λόγοις τοῖς μεταξὺ $H : \Theta$, $\Theta : I$, $I : K$, καί τοι ἐξ αὐτῶν δὴ τέτων συγκείμενος.

Τὸ γὰρ ἐξ αὐτῶν συγκείσθαι ἕδεν ἕτερον σημαίνει, ἢ τὸ ἐξ ἐκείνων ἐπαλλήλοις τοῖς πολλαπλασιασμοῖς παράγασθαι, ὡς δέδεικται ἐν §. ΙΑ'. Ἐπεὶ οὖν ὁ λόγος $H : K$, ἐκ τῶν λόγων $H : \Theta$, καὶ $\Theta : I$, καὶ $I : K$ παρῆκται ἐπαλλήλως πολλαπλασιασθέντων, ὡς ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς ἐν §. ΙΒ'. δῆλον, ἀδύνατον τὰς λόγους $H : \Theta$, $\Theta : I$, $I : K$, ἴσας τυγχάνειν ἅμα ληφθέντας τῷ λόγῳ $H : K$, εἰ μήτε κατὰ συμβεβηκός, ἢ τε τῶν λόγων πρόδεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμός τὸν αὐτὸν λόγον συστήσειαν. Ἐφ' ᾧ δὲ τοῖς εἰρημένοις λόγοις λόγον ἴσον λαβεῖν, δέον αὐτὰς προσιδέναι, ὡς εἴρηται ἐν §. Ε'. καὶ ζ'. ἐκ γὰρ τῆς τοιαύτης προδέσεως, λόγος ἀνακύψει ἴσος τοῖς δοθεῖσιν ἅπασιν. Ὁ δὲ λόγος, ἥπερ ἔφην, αἰεὶ διοίσει τῷ κατὰ σύνθεσιν, εἴτεν πολλαπλασιασμὸν ἀνακύπτοντος.

Τῶν σοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ ε'.

Η ἐν τῷ ἀνωτέρῳ Ε'. Βιβλίῳ ἐν γένει ἐκτεθεῖσα τῶν ἀναλογιῶν διδασκαλία, ἐπὶ τῇ ἐν χερσὶν ε'. τοῖς ἐπιπέδοις τῶν Σχημάτων προσεφαρμόζεται. Ε'ς δὲ οὕτως ἀναγκαῖα ἢ τῶν ἐνταῦθα παραδιδόμενων γνῶσις, ὡς τῶν ἄνευ ἐς τὰ ἄδυστα τῆς Γεωμετρίας χωρεῖν, ἢ τὰς ἀπὸ τῶν μαθημάτων ἡδίστας καρπὸς δρέπεσθαι, μὴ ἐξεῖναι. Εἰκασησὲν τῶν Προτάσεων ἰδίᾳ ἔδει ἐξυφαίνειν ἐγκώμιον, τοσαύτη ἢ ἐξ ἀπασῶν ἀποφερομένη ὠφέλεια.

Ἐπιχειρεῖ δὲ τετὶ τὸ ε'. Βιβλ. τὴν καλλίστην περὶ τῆς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας διδασκαλίαν, τὴν προσφάτως ἐκτεθεῖσαν, παντοίαις τε ἢ πάντῃ ἐπισημωτάταις προσάπτειν ταῖς χρήσεσιν, ἀπὸ τε τῶν ἐν σχήμασιν ἀπλευσάτων Τριγώνων τὴν καταρχὴν ποιῶμενον, τάς τε ἐν αὐτοῖς πλευρὰς καὶ τὰ χωρία, ὅπως ἔχουσιν ἀναλογίας πρὸς ἄλληλα ἐξετάζει· εἶτα ἢ τῶν Γραμμῶν τὰς ἀναλόγους, ἢ τὰς τῶν Σχημάτων αὐξήσεις τε ἢ μειώσεις, τὰς κατ' ἰσότητα λόγων ὀρίζειται, ἢ ὅτῳ δὴ ποτε τρόπῳ ἐκεῖνα αὐξεῖν ἢ μείναι κατὰ λόγον τὸν δοθέντα κατασκευάζει· ἐτι τε μὲν ἢ τὴν Ἀναλογικὴν μέθοδον, ἣτις Χρυσῇ γεραίρεται, ἢ ἥς δι' ὅλης τῆς Ἀριθμητικῆς πυκνωτάτη ἢ χρήσις, ἐκτίθησιν τε ἢ ἀναπτύσσει· καὶ πὶ τῇ ὀρθογώνῳ Τριγώνῳ, ἢ ὅπως τὸ Τετράγωνον, ἀλλὰ δὴ ἢ τὸ Πεντάγωνον ἢ τὸ Ἑξάγωνον, καὶ ἀπλῶς τῶν Πολυγώνων ὅποιον, τὰ ἀπὸ τῆς Ὑποτεινέσης, τοῖς δυσὶν ἢ ὅπως Τετραγώνοις, ἀλλὰ ἢ Πενταγώνοις ἢ Ἑξαγώνοις, ἢ ἀπλῶς τῶν Πολυγώνων ὅποισιν ὅμοιοις, ἢ ἀπὸ τῶν δύο Πλευρῶν τῶν τὴν Ὀρθὴν περιεχουσῶν Γωνίαν συνιστάμενοι ἅμα ληφθεῖσι συνεξισθῆναι ἀποδείκνυσιν· τελευταῖον δὲ ῥάσας τινὰς ἢ ἀσφαλεσάτας προτίθησιν τὰς ἀρχάς, αἷς ἂν δι' ἀπάσης Μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἐξέλθῃ τῶν τε Γραμμῶν, ἢ τῶν Ἐπιφανειῶν, ἢ τῶν στερεῶν Σωμάτων λαμβάνειν τὴν καταμέτρησιν.

Ὅ ρ ι σ μ ο ί.

Ὅμοια Σχήματα εὐθύγραμμά εἰσιν, ὅσα τὰς τε Γωνίας ἴσας ἔχει κα- Α'.

τὰ μίαν, ἢ τὰς περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευρὰς ἀνάλογον, ἢ (ὃ ταυτόν ἐστι) τὰς μεταξὺ τῶν ἴσων, ἢ ἢ τὰς Ὑποτείνουσας τὰς ἴσας.

α. 322.

Οἷον τὰ Τρίγωνα χ , ψ ὁμοία εἰρήσεται, εἰάν ἡ Γωνία α ἴση ἢ ἡ Γωνία ζ , ἢ ἡ β τῇ ι , ἢ ἡ γ τῇ λ . καὶ μὴν ἢ εἰάν ἢ $\alpha\beta : \zeta\iota :: \beta\gamma : \lambda\iota$ ἢ $\beta\gamma : \lambda\iota :: \gamma\alpha : \lambda\zeta$, ἢ $\gamma\alpha : \lambda\zeta :: \alpha\beta : \zeta\iota$, ἢ γὰρ ἢ ἐναλλάξ (1) εἰάν ἢ $\alpha\beta : \beta\gamma :: \zeta\iota : \lambda\iota$, ἢ $\beta\gamma : \gamma\alpha :: \iota\lambda : \lambda\zeta$, ἢ $\gamma\alpha : \alpha\beta :: \lambda\zeta : \zeta\iota$ γινόμενης αἰετὶ τῆς παραθέσεως μεταξὺ τῶν Πλευρῶν τῶν περὶ τὰς ἴσας Γωνίας, ἢ (ὃ ταυτόν ἐστι) τῶν μεταξὺ τῶν ἴσων, ἢ τῶν τὰς ἴσας ὑποτείνουσῶν.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἢ ἡ τῶν λοιπῶν εὐθυγράμμων Σχημάτων ἀπάντων ὁμοιότης ἀναπτύχθῃσεται.

Β. Ἀντιπεπονθότα δὲ Σχήματα ἐσὶν, ὅταν ἐκατέρῳ τῶν Σχημάτων ἢ γόμενοι τε ἢ ἐπόμενοι ὅροι (ἀντιστρόφως) ὦσι.

α. 323.

Οἷον ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων χ ἢ ψ , εἰάν ἢ $\alpha\gamma : \gamma\beta :: \zeta\gamma : \gamma\lambda$. Ἡ γόμενοι τοίνυν εἰσὶν ὅροι $\alpha\gamma$ ἢ $\zeta\gamma$, ὧν ἐν ἐτέρῳ τῶν Σχημάτων ἕτερος, ὁ μὲν $\alpha\gamma$ ἐν τῷ χ , ὁ δὲ $\zeta\gamma$ ἐν τῷ ψ . ἐπόμενοι δὲ οἱ $\gamma\beta$ ἢ $\gamma\lambda$, ὧν ὁμοίως ἐν τῷ ἐτέρῳ τῶν Σχημάτων ὁ ἕτερος, ἀλλ' ἀντιστροφείσης τῆς τῆς ξεως, ὁ μὲν γὰρ $\gamma\beta$ ἐν τῷ ψ , ὁ δὲ $\gamma\lambda$ ἐν τῷ χ . ἐντεῦθεν γὰρ ἢ τὰ Παραλληλόγραμμα χ , ψ ἀντιπεπονθότα ἦκαστε. Τὸ δ' αὐτόμοι νοεῖ ἢ περὶ τῶν ἄλλων Σχημάτων.

Πηλικότιτες δὲ τέσσαρες πρὸς ἀναλογίαν ἀντιπεπόνθασι, τῆς Α'. πρὸς τὴν Γ', ὧν ἡ Δ'. πρὸς τὴν Β'. λόγον ἐχάσης, ἢ τῆς Α'. πρὸς τὴν Δ', ὧν ἡ Γ'. πρὸς τὴν Β'. Οἷον εἰάν ἢ $A : \Gamma :: \Delta : B$, ἢ γὰρ $A : \Delta :: \Gamma : B$, ἔσονται αἱ Α, Β, Γ, Δ ἀντιπεπονθεῖαι ἀνάλογον.

α. 324. Γ.

ΥΨος ἐπὶ παντὸς Σχήματος ἐστὶν ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν βάσιν Κάθετος ἀγομένη ΑΠ. ἔστι δὲ παρ' Εὐκλείδῃ ὅρος δ'.

Οἷον τὰ Τρίγωνα ΑΒΓ ὕψος ἐστὶν ἢ Κάθετος ΑΠ, ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀγομένη ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ, ἢτοι ἐντὸς τῶ Τρίγωνο, ἢ ἢ ἐκτὸς ἢν δύοι προαχθεῖσαν. Ἡ δὲ δὴ Βάσις ἢ ἢ κορυφή κατὰ τὸ δοκῶν μεταλαμβάνονται.

Δ.

Τόξα ὁμοία Κύκλων λέγεται, τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον πρὸς τὰς ὅλας Περιφερείας.

Οἷον εἰάν ἐκάτερον ἢ τῆς ἰδίας Περιφερείας τριτημόριον, ἢ τεταρτημόριον, κξ.

Καὶ Τμήματα δὲ Κύκλων ὁμοιά ἐσιν, οἷς Τόξα ὁμοία ἐσὶ. Τὸ δ' αὐτόμοι νοεῖσθαι ἢ περὶ τῶν ὁμοίων Τομέων.

(1) Ις. τῷ ε'.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν οἱ τήτων Ἐκδέται ἐπ' ἄλ- Ε'
λήλοις πολλαπλασιασθέντες, τὸν ἐκείνη Ἐκδέτην παράγωσι· τὸ δὲ τῷ λόγῳ
Ἐκδέτην λαμβάνειν, ἐστὶ διαιρῆναι διὰ τῷ ἐπομένῳ τὸ ὑγόμενον.

Οὕτως ἐκ τῶν λόγων $\alpha : \beta$ καὶ $\rho : \sigma$, σύγκειται ὁ λόγος $\alpha \times \rho$ πρὸς β
 $\times \sigma$, καὶ γὰρ $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\rho}{\sigma} = \frac{\alpha \times \rho}{\beta \times \sigma}$. ἢ εἰς γένηται $\rho : \sigma = \beta : \gamma$, ἐκ τῶν
λόγων $\alpha : \beta$ καὶ $\rho : \sigma$, σύγκειται ὁ λόγος $\alpha : \gamma$. Τηνικαῦτα γὰρ $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\rho}{\sigma}$
 $= (1) \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \times \beta}{\beta \times \gamma} = (2) \frac{\alpha}{\gamma}$.

Οὕτωςτοι καὶ τὸ διπλοῦν τῷ τριπλῷ ἐξαπλῶν ἐστίν· οὐκ ἄλλως δὲ καὶ ὁ λό-
γος $4 : 3$ σύγκειται ἐκ τῶν λόγων 4 πρὸς ὀντιναῦν ἀριθμὸν (οἷον πρὸς 7), καὶ
τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ (φέρεις τῷ 7) πρὸς 3 , καὶ γὰρ $\frac{4}{3} \times \frac{7}{7} = \frac{4}{3}$.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δῆλον, καὶ ὅτι λόγος ὁποιοῦν ἐκ πλείονων λόγων
συγκεῖσθαι δύναται· οὕτως ὁ λόγος $\alpha : \epsilon$ συγκεῖσθαι δύναται ἐκ τῶν λόγων
 $\alpha : \beta$, καὶ $\beta : \gamma$, καὶ $\gamma : \delta$, καὶ $\delta : \epsilon$.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Τὰ Τρίγωνα (αβγ, δεζ), καὶ τὰ Παραλλήλογράμματα (αεφγ, θπρζ)
„τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τετρεσί τὰ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα παραλλήλοις,
„πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς αἱ Βάσεις (αγ, δζ).

Ἐκ τῆς ὅλον τὸ ε'. Βιβλ. ἐξηπται τῷ Θεωρήματος, καὶ εἴτι ἀπλῶς α. 325.
ἐπὶ Σχημάτων εἴτε ἐπιπέδων, εἴτε καὶ σφαιρῶν, διὰ τῆς ἀναλογίας φέρεται
ἀποδεδειγμένον· Ὁ μὲν οὖν Εὐκλείδης διὰ τῶν πολλαπλασίων τὸ προτεθέν
ἀποδείκνυσιν, ἐξ ὧν πολλὴ ἐκ πρώτης τῷ Βιβλίῳ ἀφετηρίας τοῖς πρωτοπεί-
ροις συμβαίνει δυσχέρεια· καὶ τοίνυν ἄλλην ἡμῖν ἀποδοτέον δεῖξιν εὐχερεσέ-
ραν, ἐκ τῷ Ε'. λαβῶσι ταύτην θεωρήματος τῷ Β'. μέρος τῷ Ε'. Βιβλίῳ, ἢ γῶν ἐκ
τῷ ἑτέρῳ ἐκείνων τῶν ἴσων λόγων τεκμηρίῳ τῷ πρώτῳ καὶ ἀπταίς, ὃ μεταξὺ
τῶν ὄρων τῷ Ε', πρὸ τῷ Ζ'. δηλ. Ὁρισμῷ, παρετέθη, ὧδε.

Ληφθήτω δὴ τῆς Βάσεως δζ μῶριον ἡλικονῶν, οἷον τὸ δι τεταρτημόριον,
καὶ ἀχθῆτω εη, καὶ ἔσται τὸ δι τεταρτημόριον τῷ Τρίγωνῳ δεζ. (3). Διό περ
ἦτε δι Εὐθεῖα, καὶ τὸ δι Τρίγωνον εἰσὶ τῶν ἐπομένων ὁμοία μῶρια (4). Ἀ-
φαιρεθήτω τοίνυν δι ἀπὸ τῆς Βάσεως αγ, ὅσῳκις ἂν ἐξῇ, οἷον ὀκτάκις· καὶ
ἐπειδὴ αἱ γθ, θι, κ, καὶ αἱ λοιπαὶ ἴσαι εἰσὶ τῇ δι ἐκάσῃ, ἔσται δὴ καὶ τὰ

(1) ΑΔ. τῷ ε'. (2) ΙΕ. τῷ ε'. (3) ΑΗ. Βιβλ. α'. (4) Σφ. Ζ. τῷ ε'.

ὁκτώ Τρίγωνα $\gamma\beta\delta$, $\delta\beta\iota$, $\iota\beta\alpha$ καὶ τὰ λοιπὰ, τῷ Τριγώνῳ δεη ἴσα ἔκαστον (1)· καὶ ὅταν τις ἄρα ἢ διη περιέχεται ἐν τῷ ἡγεμένῳ $\alpha\gamma$, τοσάκις τὸ Τρίγωνον δεη περιέχεται ἐν τῷ ἡγεμένῳ $\alpha\beta\gamma$. Τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ δείξω, καὶ ἡλικαυτῶν τῶν ἐπομένων (τῆς τε Βάσεως φημί $\delta\zeta$, καὶ τῷ Τριγώνῳ δε ζ) ὁμοίαι μερίδας, ἐν τοῖς ἡγεμένοις (λέγω τῇ Βάσει $\alpha\gamma$, καὶ τῷ Τριγώνῳ $\alpha\beta\gamma$) ἰσαριθμῶς αἰεὶ περιέχεσθαι. Ἀρα διὰ τὸ Ε'. Θεώρ. τῇ Β'. μέρος τῇ Ε'. Βιβλία, τετέστι διὰ τὸ ἕτερον ἐκείνο τῶν ἰσῶν λόγων τεκμήριον, ὡς Βάσις $\alpha\gamma$ πρὸς Βάσιν $\delta\zeta$, οὕτω καὶ Τρίγωνον τὸ $\alpha\beta\gamma$ πρὸς Τρίγωνον ἐστὶ τὸ δε ζ . Ο. Ε. Δ.

Ἐπεὶ δὲ τὰ Παραλληλόγραμμα $\alpha\phi$ καὶ $\delta\rho$ διπλασίονα ἐστὶ (2) τῶν Τριγώνων $\alpha\beta\gamma$, δε ζ , ἔσαι δὴ καὶ αὐτὰ πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ Βάσεις.

Πορίσματα.

κ. 326. Α'. Τὰ Τρίγωνα ($\alpha\beta\gamma$, $\zeta\iota\lambda$) καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα, τὰ ἴσας ἔχοντα τὰς Βάσεις $\alpha\gamma$, $\zeta\lambda$, ἢ τὴν αὐτὴν, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ὕψη $\beta\epsilon$, $\iota\phi$. Ἐξωσαν καὶ γὰρ $\phi\sigma$ καὶ $\xi\rho$ ἴσαι ταῖς ἰσαῖς βάσεσι $\zeta\lambda$, $\alpha\gamma$, καὶ ἔσονται $\phi\sigma$, $\xi\rho$ ἄλλήλαις ἴσαι· ἀχθήτωσαν οὖν αἱ $\sigma\iota$, $\rho\beta$, καὶ ἐὰν ἐπὶ τῶν Τριγώνων $\xi\beta\rho$, $\phi\iota\sigma$ ληφθῶσιν αἱ $\beta\epsilon$, $\iota\phi$ ὡς Βάσεις, ἔσονται αἱ $\xi\rho$, $\sigma\phi$ τέτων ὕψη. Ἐπὶ δὲ ταῦτα ἴσα εἰσὶν, ἔσονται $\xi\beta\rho$, $\phi\iota\sigma$ πρὸς ἄλληλα (3) ὡς αἱ Βάσεις $\beta\epsilon$, $\iota\phi$. Ἄλλ' ἐκ κατασκευ. $\xi\rho$ ἴτη τῇ $\alpha\gamma$ ἐστὶ, καὶ $\phi\sigma$ ἴση τῇ $\zeta\lambda$, ἐνθεντοὶ καὶ τὰ Τρίγωνα $\xi\beta\rho$, $\phi\iota\sigma$, ἴσα ἐστὶ (4) τοῖς Τριγώνοις $\alpha\beta\gamma$, $\zeta\iota\lambda$. Ἀρα καὶ τὰ Τρίγωνα $\alpha\beta\gamma$, $\zeta\iota\lambda$, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς $\beta\epsilon$ πρὸς $\iota\phi$.

κ. 325. Β'. Τὰ Τρίγωνα ($\alpha\beta\gamma$, δε ζ), καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα ($\alpha\phi$, $\delta\rho$), αἵτινα ἐσὶν ὡς αἱ Βάσεις $\alpha\gamma$, $\delta\zeta$, τὸ αὐτὸ ὕψος ἔξωσιν, ἐν ταῖς αὐταῖς διηλονότι Παραλλήλοις σαθῆναι δυνήσονται. Ἐστὶ δὲ τὸ ἀντίστροφον τῆς Α'. Προτάσεως.

Εἰ μὴ γὰρ, ἡδὲ ἢ βε Παράλληλος πρὸς τὴν $\alpha\zeta$. Ἀχθήτω δὴ διὰ τῆς ϵ Σημεῖα ἢ $\epsilon\sigma$. Παράλληλος πρὸς τὴν $\alpha\zeta$, τέμνῃσα τὴν $\gamma\beta$ κατὰ τὸ σ , καὶ ἐπεξεύχτω ἢ $\alpha\sigma$. Τὰ τοίνυν Τρίγωνα $\alpha\sigma\gamma$, δε ζ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα Παραλλήλοις, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα (5) ὡς αἱ Βάσεις $\alpha\gamma$, $\delta\zeta$. Ἄλλ' καὶ τὰ Τρίγωνα $\alpha\beta\gamma$, δε ζ εἰσὶ (6) καὶ αὐτὰ ὡς αἱ Βάσεις $\alpha\gamma$, $\delta\zeta$, ἄρα τὸ Τρίγωνον $\alpha\sigma\gamma$ (7) ἴσον ἐστὶ τῷ Τριγώνῳ $\alpha\beta\gamma$, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον. Οὐκ ἄρα διὰ τῆς ϵ Σημεῖα Εὐθεῖα τις πρὸς τὴν $\alpha\zeta$ Παράλληλος ἀχθῆναι δυνήσεται ἄλ-

(1) ΔΗ. ΒΙΒ. Α'. (2) ΜΑ τῇ Α'. (3) Α. τῇ Ε'. (4) ΔΗ. τῇ Κ'. (5) Διὰ τὴν Πρότ. (6) Εἰς ὑποδ. (7) Διὰ τὴν ΙΑ. καὶ Θ. τῇ Ε'.

λη παρὰ τὴν βε. Καὶ ἐπομένως τὰ ἔχοντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις Τριγωνα αβγ, δεζ, ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις εἰσὶ.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα αφ, δρ, τὰ τῶν Τριγώνων αβγ, δεζ (1) διπλάσια, ἐπὶ ταῖς αὐταῖς μὲν βάσεσι, ταῖς αὐταῖς δὲ παραλλήλοις εἰσὶν, αἷς καὶ τὰ Τρίγωνα, φανερόν ὅτι καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα (2), ἅτινα εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἐν ταῖς αὐταῖς καὶ ταῦτα Παραλλήλοις εἰσὶ.

Τὰ Τρίγωνα (αβγ, ζηλ) καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα, ἃ εἰσι πρὸς ἄλληλα Γ'. α. 327. ὡς ὕψι τὰ βε, ιφ, τὰς Βάσεις αγ, ζλ ἴσας ἔχει. Ἐστὶ δὲ ἀντίστροφον τῷ Α'. Πορίσματι.

Κατασκευαθέντων γὰρ τῶν Τριγώνων ξβρ, φισ, ὡς ἐν τῷ Α'. Πορίσμ., δειχθήσεται ὡς ἄνωτ. τὸ Τρίγωνον αβγ = Τριγ. ξβρ, καὶ τὸ ζηλ = φισ. Ἀλλὰ μὴν ἐξ ὑποθ. αβγ : ζηλ :: βε : ιφ, ἄρα ξβρ : φισ :: βε : ιφ. Ἐὰν ἐν λιηθῶσιν αἱ βε, ιφ, ὡς Βάσεις τῶν Τριγώνων ξβρ, φισ, ἔσονται ξρ, φσ, τὰ τῶν ὕψι. Καὶ ἐπειδὴ τὰ Τρίγωνα εἰσὶν ὡς αἱ Βάσεις, τὰ ὕψι ξρ, φσ (3) ἴσα ἔσται. ἄλλ' ἐκ κατασκ. ξρ = αγ καὶ φσ = ζλ, ἄρα αγ καὶ ζλ ἔσονται ἴσα.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β.

„Ἐὰν Τριγώνον παρὰ μίαν τῶν Πλευρῶν (βγ) ἀχθῇτις Εὐθεῖα παράλληλος (ζηλ), ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τῆ Τριγώνου Πλευράς (τατέσιν αζ : ζβ :: αλ : γλ).

„Καὶ ἐὰν αἱ τῆ Τριγώνου Πλευραὶ (βα, γα) ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἢ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη Εὐθεῖα (ζηλ), παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσαι τῆ Τριγώνου Πλευρᾶν (βγ) παράλληλος.

Μέρος Α'. Ἐπεξεύχθησαν αἱ βλ, γζ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ζλ τίθεται Παράλληλος εἶναι πρὸς τὴν βγ, ἔσαι τὰ Τρίγωνα ζβλ, λγζ ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ζλ, ἄλλήλοις (4) ἴσα, ὥστε τὸ Τρίγωνον χ πρὸς ἐκάτερον, λόγον ἔξει (5) τὸν αὐτόν, τατέσι χ : ζβλ :: χ : λγζ. ἄλλὰ τὸ Τρίγωνον χ ἐστὶ πρὸς τὸ Τρίγωνον ζβλ, ὡς αζ (6) πρὸς ζβ. καὶ πάλιν τὸ Τρίγωνον χ ἐστὶ πρὸς τὸ Τρίγωνον λγζ, ὡς (7) αλ πρὸς λγ, ἄρα (8) καὶ αζ : ζβ :: αλ : λγ. Ο. Η. τὸ Α'.

α. 328.

Μέρος Β'. Ὡς αζ πρὸς ζβ, οὕτω (9) τὸ Τρίγωνον χ πρὸς τὸ Τρίγωνον

(1) Μ.Α. τῷ α'. (2) Ι.Ε. τῷ ε'. (3) Διὰ τὸ Β'. Πόρ. τῆς παρήγου. (4) Α.Ζ. τῷ α'. (5) Ζ. τῷ ε'. (6) Διὰ τὴν ἄνωτ. (7) Διὰ τὴν αὐτήν. (8) Ι.Α. τῷ ε'. (9) Διὰ τὴν ἄνωτ.

ζβλ. Πάλιν ὡς αλ πρὸς λγ, οὕτω (1) τὸ Τρίγωνον χ πρὸς τὸ Τρίγωνον λγζ· τίθεται δὲ αζ : ζβ :: αλ : λγ, ἄρα (2) Τρίγωνον χ πρὸς Τρίγωνον ζβλ, ὡς Τρίγωνον χ πρὸς Τρίγωνον λγζ· Ὡς τὰ Τρίγωνα (3) ζβλ καὶ λγζ, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ὄντα, ἴσα ἁλλήλοισι εἰσὶ· καὶ ἐπομένως (4) αὐτὰ ζλ, βγ Παράλληλοι εἰσὶν. Ο. Η. τὸ Β'.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

κ. 329. Α'. Ἐὰν παρὰ μίαν τῶν Τριγώνων Πλευρὰν (βγ) πλείονες ἀχθῶσι Παράλληλοι (ξ, ζλ), ἔσαι ἅπαντα τὰ τῶν Πλευρῶν Τμήματα ἁλλήλοισι ἀνάλογον. Ἀχθῆτω γὰρ ἡ ζπ Παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ· Αὐτὴ γὰρ εὐθεῖα ζσ, σπ ἴσαι εἰσὶ (5) ταῖς λξ, ξλ· ἄλλα (6) βι : ιζ :: πσ : σζ, ἄρα καὶ βι : ιζ :: γξ : ξλ.

κ. 330. Β'. Ἐὰν ὅσοι Κύκλοι δύο ἐνδοθεν ἀπτόμενοι, ἀπὸ δὲ τῆς Σημεῖα τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ αβ ἡ τῆς μείζονος τῶν Κύκλων Διάμετρος, τέμνῃ τὸν ἐλάττονα κατὰ τὸ γ, ἀχθῇ δὲ καὶ ὅποιαδήποτε ἄλλη ἡ αδ, τέμνῃ τὸν ἐλάττονα κατὰ τὸ ε, ἔσαι μὲν ἡ αγ Διάμετρος (7) τῆς ἐλάττονος τῶν Κύκλων, ἔσονται δὲ αὐτὴ Διάμετροι ταῖς Ὑποτείνουσιν ἀνάλογον, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν Διαμέτρων πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν Ὑποτείνουσιν ὡσαύτως· τιτέσιν αβ : αδ :: αγ : αε :: βγ : δε, ἢ καὶ ἐναλλάξ αγ : γβ :: αε : εδ, καὶ αβ : βγ :: αδ : αε. Ἐὰν γὰρ ἀχθῶσιν αὐτὴ εὐθεῖα βδ, γε, διὰ τὰς ὑπὸ αδβ, αεγ ὀρθὰς (8) ὕψους, καὶ διὰ τὸ τοῦτο ἴσας, αὐτὰ βδ, γε (9) Παράλληλοι ἔσονται· Ἀρὰ (10) αγ : γβ :: αε : εδ. Ο. Η. τὸ Α'.

Καὶ ἐν συνδέσει (11) αβ : βγ :: αδ : δε. Ο. Η. τὸ Β'.

Καὶ ἐν ἀντιστροφῇ (12) βα : αγ :: δα : αε. Ο. Η. τὸ Γ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

„Ἐὰν Τριγώνῳ Γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνῃ τὴν Γωνίαν εὐθεῖα (βζ), τέμνῃ καὶ τὴν Βάσιν (αγ), τὰ τῆς Βάσεως Τμήματα (αζ, ζγ), τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τῶν Τριγώνων Πλευραῖς (αβ, γβ).“

„Καὶ ἐὰν τὰ Βάσεως Τμήματα (αζ, ζγ), τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τῶν Τριγώνων Πλευραῖς (αβ, γβ), ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν το-

(1) Διὰ τὴν αὐτήν. (2) ΙΑ. τῷ ε'. (3) Θ. τῷ ε'. (4) ΙΘ. τῷ α'. (5) ΙΔ. τῷ α'. (6) Β. τῷ ε'. (7) Πόρισμα τῆς ΙΒ. τῷ γ'. (8) ΙΑ. τῷ γ'. (9) ΚΘ. τῷ α'. (10) Διὰ τὴν παρῶν. (11) ΙΗ. τῷ ε'. (12) Διὰ τὸ Α'. Πόρ. τῆς ΙΗ. τῷ ε'.

„μὴν ἐπιζευγνυμένη Εὐθεΐα (βζ), δίχα τέμνει τὴν τῷ Τριγώνῳ Γωνίαν (ὕπὸ αβγ).

Μέρος Α'. Προαχθῆτω ἡ γβ, ὥς τὴν προεκβληθεῖσαν βγ ἴσῃ εἶναι κ. 331.
τῇ βα· καὶ ἐπειδὴ ἐν τῷ Τριγώνῳ ψ, αἱ Πλευραὶ λβ, αβ ἴσαι ἀλλήλαις
εἰσὶ, καὶ αἱ Γωνίαι (1) αἱ κατὰ τὸ λ καὶ ξ ἴσαι ἔσονται· Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ
αβγ δυοὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση (2) ἔσιν, ἡ Γωνία ι, ἥτις ἐξ ὑπο-
θέσεως, τῆς ὑπὸ αβγ ἡμίσεια ἐστὶ, τῇ κατὰ τὸ λ Γωνίᾳ ἴση ἔσται, ὥς αἱ
αλ καὶ ζβ Παράλληλοι (3) εἰσὶ· Καὶ τοίνυν ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ αγλ (4), αζ: ζγ
:: λβ (τατέστιν αβ): βγ. Ο. Η. τὸ Α'.

Μέρος Β'. Προεκβληθεῖσθαι ὡς ἀνωτέρω τῆς γβ, ὡς τὴν λβ ἴσῃ εἶναι
τῇ αβ, ἐπειδὴ τίθεται εἶναι αζ: ζγ:: αβ (ταυτὸν εἰπεῖν λβ) βγ, ἔσονται
αἱ αλ, ζβ (5) Παράλληλοι, καὶ ἔτι καὶ ἡ ἐκτὸς Γωνία ι ἔσιν ἴση (6) τῇ ἐν-
τὸς λ, ἥτε ἐναλλάξ π, ἴση τῇ ξ· Ἀλλὰ γὰρ τῶν λβ, αβ ἴσων ὑσῶν, καὶ αἱ
Γωνίαι (7) λ καὶ ξ ἴσαι εἰσὶν· Ἄρα καὶ αἱ ι καὶ π ἴσαι Γωνίαι εἰσὶ, καὶ δίχα ἄρα
τέτμηται ἡ ὑπὸ αβγ Ο. Η. τὸ Β'.

Π ό ρ ι σ μ α.

Εἴαν ἡ τὴν Γωνίαν τῷ Τριγώνῳ δίχα τέμνουσα Εὐθεΐα, καὶ τὴν Βάσιν δι-
χα τέμνη, τὸ Τρίγωνον τῇ δυνάμει τῆς ἐν χειρὶ Προτάσεως, ἴσοσκελές ἔ-
σται, καὶ ἡ διχοτομῆσα Εὐθεΐα ἐπὶ τὴν Βάσιν πρὸς ὀρθὰς (8) στήσεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

„Τῶν ἴσογωνίων Τριγώνων ἀνάλογον εἰσὶν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας κ. 332.
Γωνίας, καὶ ὁμολογοὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας Γωνίας ὑποτείνεσθαι Πλευραὶ, τατέ-
στιν ὅτι τὰ ἴσογώνια Τρίγωνα ὁμοία (9) ἐσὶ.

Ἐπὶ τῶν Τριγώνων χ, ψ, ἔστω ἡ Γωνία α ἴση τῇ ζ, καὶ ἡ γ τῇ λ, καὶ
καὶ ἡ β τῇ ι. Φημὶ δὲ ὅτι αβ: ζι:: αγ: ζλ, καὶ αγ: ζλ:: γβ: λι, καὶ γβ:
λι:: βα: ιζ· καὶ ὁμοίως αβ: αγ:: ζι: ζλ, καὶ αγ: γβ:: ζλ: λι, καὶ γβ:
βα:: λι: ιζ.

Εἴαν γὰρ ἡ ζ Γωνία τῇ ταύτης ἴση α ἐπιτεθῇ, αἱ Πλευραὶ ζι, ζλ, κ. 333.
ταῖς αβ, αγ Πλευραῖς ἐφαρμόσθωσι· καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ αιλ, κατ' ὑποθ.

(1) Ε. τῷ α'. (2) ΑΒ. τῷ α'. (3) ΚΘ. τῷ α'. (4) Β. τῷ ε'. (5) Β. τῷ ε'. (6)
ΚΖ. τῷ α'. (7) Ε. τῷ α'. (8) Διὰ τὸν Γ'. Ἀριθμ. τῷ Σχολ. τῷ μετὰ τὴν Κε. τῷ α'.
(9) Ο. Α'. τῷ ε'.

ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς β, ἔσονται (1) ιλ, βγ Παράλληλοι· ἄρα (2) βι : ια :: γλ : λα, καὶ ἐν συνθέσει βα : ιζ :: γα : λζ. Ἐὰν δὲ ἡ λ Γωνία τῇ ἴσῃ γ ἐπιτεθῇ, ὡσαύτως δείξω, ὅτι καὶ αγ : ζλ :: βγ : ιλ· καὶ τελευταῖον εἰάν ἡ Γωνία τῇ ἴσῃ β ἐπιτεθῇ, δείξω παραπλησίως, ὅτι καὶ βγ : ιλ :: αβ : ζι. Ἐπεὶ δέ τοι τὰ ἡγόμενα βα, αγ, γβ, πρὸς τὰ ἐπόμενα ιζ, ζλ, λι, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα ἐσὶν, ἔσαι δὴ καὶ ἐναλλάξ (3) βα : αγ :: ιζ : ζλ, καὶ αγ : γβ :: ζλ : λι, καὶ γβ : βα :: λι : ιζ· ὧς δὴλον ἐστὶ τὸ προτεθέν.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

κ. 333. Α'. Ἐὰν Τριγώνῳ παρὰ μίαν τῶν Πλευρῶν βγ, Παράλληλος ἀχθῇ ἡ ιλ, συστήσεται Τρίγωνον τὸ ιζλ ὅμοιον τῷ ὅλοχρεῖ Τριγώνῳ βζγ· ὅθεν δὴ γζ ἔσαι πρὸς λζ, ὡς βγ πρὸς λι, καὶ ἐναλλάξ γζ : βγ :: λζ : λι· καὶ πάλιν ζβ : ζγ :: ζι : ζλ.

Ἐπειδὴ γὰρ αἱ λι, βγ παράλληλοι εἰσιν, ἔσονται αἱ ἐκτὸς (4) ὑπὸ ζιλ, ζλι, ἴσαι ταῖς ἐντὸς β καὶ γ, ἑκατέρα ἑκατέρῃ, ἡ δὲ κατὰ τὸ ζ κοινὴ ὥς ἰσογώνια ἔσαι τὰ Τρίγωνα, καὶ τὰς ὑποτείνουσας ὑπὸ τὰς ἴσας Γωνίας β, καὶ ὑπὸ ζιλ, τατέσι τὰς γζ, λζ, πρὸς τὰς βγ, λι, αἱ ὑποτείνουσιν ὑπὸ τὴν κοινὴν Γωνίαν ζ, ἀνάλογον ἔχοντα· ὁμοίως δὲ καὶ τὰς περὶ τὴν κοινὴν (5) Γωνίαν ζ, τατέσι ζβ : ζγ :: ζι : ζλ.

κ. 334. Β'. Ἐὰν Τριγώνῳ τὰς Παραλλήλους αγ, λξ τέμνητις Εὐθεῖα ἡ βζ, ἡ ἀπὸ τῆς ἀντιθέτης Γωνίας β ἡγμένη, τεμεῖ αὐτὰς ἀνάλογον.

Κατὰ γὰρ τὸ Α'. Πόρισμα, αζ : λι :: ζβ : ιβ, καὶ ζγ : ιξ :: ζβ : ιβ· ὥς αζ : λι :: ζγ : ιξ, καὶ ἐναλλάξ αζ : ζγ :: λι : ιξ (6).

κ. 335. Γ'. Καὶ μεταξὺ δυεῖν Παραλλήλων αβ, γδ, εἰάν Εὐθεῖαι δύο εζ, ηθ διατέμνωσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ ι, τὰ τέτων Τμήματα ει, ιζ, ηι, ιθ, ἔσαι ἀνάλογον· τὰ γὰρ ειη, ζιθ Τρίγωνα διὰ τὰς ἐν τῷ ι κατὰ κορυφὴν (7) ἴσας ἔσας, καὶ τὰς ἐναλλάξ (8) κατὰ ε καὶ ζ, καὶ η καὶ θ, αἱ καὶ αὐταὶ ἴσαι εἰσιν, ἰσογώνια ἔσαι καὶ ὅμοια· Ἄρα ει : ιζ :: ηι : ιθ.

Δ'. Ἐκ δὲ δὴ τῷ Α'. Πόρισματος, καὶ πύργου, ἡ τῷ τυχόντος ἄλλῃ μετεώρῃ σημεῖα τὸ ὕψος, μόνῃ τῇ ὑπὸ τῆς σκηχθείσης βακτηρίας πεμπομένη σκιᾷ, καταμετρεῖν παιδευόμεθα.

κ. 336. Πήξας γὰρ πρὸς ὀρθὰς τὴν βακτηρίαν ζλ ἐπὶ τῷ ἐδάφει, ὅτως ὥς

(1) ΚΘ. τῷ α'. (2) Β. τῷ ε'. (3) Ιε. τῷ ε'. (4) ΚΖ. τῷ α'. (5) Α. Ὁρ. τῷ ε'. (6) Ιε. τῷ ε'. (7) ΙΕ. τῷ α'. (8) ΚΖ. τῷ α'.

τὴν ἀφ' ἡλίου ἀκτῖνα βα, τὸ τῆ πύργου περατῆσαν σκίασμα, καὶ διὰ τῆ λ χωρεῖν, ἔξεις ἐπὶ τῆ τριγώνου αψβ, τὴν ζλ πρὸς τὸ ψβ ὕψωμα τῆ πύργου παράλληλον. Εὐρεῖντοί καὶ ὡς αζ ἡ τῆς βακτηρίας ἀπ' ἄκρας τῆ σκιάσματος ἀπόστασις, πρὸς ζλ τὸ τῆς βακτηρίας ὑπὲρ γῆν μῆκος, ὥτως αψ ἡ τῆ πύργου ἀπ' ἄκρας τῆ σκιάσματος ἀπόστασις, πρὸς ψβ τὸ τῆ πύργου αὐτῆς ὕψος. Εὐχερὲς δὲ ἔσῃς τῆς τῶν τριῶν πρώτων καταμετρήσεως, ῥᾶστα καὶ τὸ Δ', τατέσι τὸ ζητούμενον ὕψος εὐρεθήσεται. Ο. Ε. Ε.

Εὐτεῦθεν δὲ καὶ τῶν Κανονίων, τῶν τὰ Ἡμίτονα, καὶ τὰς Ἀπτομένας, καὶ Ε. κ. 337. τὰς Τεμνύσας περιεχόντων, τὴν ἀρχὴν λαμβάνομεν. Εἴπω γὰρ Κύκλον Ἡμιδιαμέτρος ἡ αγ, μερῶν φέρει 100000, καὶ Γωνία ἡ ὑπὸ ΒαΔ μοιρῶν 80°. καὶ ἐπεὶ ἡ μοιρῶν 60 Ὑποτείνουσα (1) ἴση ἐστὶ τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ αγ, ἡ ΔΒ, ἥτις ἐστὶ τὸ Ἡμίτονον μοιρῶν 30, τῇ ἡμισείᾳ τῆς Ἡμιδιαμέτρου, ἦτοι $\frac{1}{2}$ αγ ἴση ἔσται (2), καὶ μέρη 50000 περιέξει. Εἴτι γυν τῆ ὀρθογωνίου Τριγώνου αδβ, τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ αβ (3) ἴσον ἐστὶ τοῖς δυοῖν Τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ αδ καὶ βδ. Τετραγωνιοδῆτω τοῖνυν ἡ Διάμετρος αβ, διὰ πολλαπλασιασμοῦ 100000 x 100000, καὶ ἀπὸ τῆ εὐτεῦθεν ἀνακύπτουτος Τετραγώνου, τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ βδ ἀφαιρεθήτω, καὶ λοιπὸν ἔσται Τετράγωνον τὸ ἀπὸ αδ, ἦτοι τὸ ἀπὸ τῆ Συνημιτόνου ζβ, τῆ τῇ αδ ἴση (4), ἐξ ἧς δὴ ἐξαχθεῖσιν τῆς ρίζης, δῆλη ἔσται ἡ βζ, εἴταν ἡ κδ. Ἀφαιρεθεῖσα δὲ καὶ αὕτη ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου αγ = 100000, τὸ πλάγιον Ἡμίτονον δγ καταλείπει. Εἴτα διὰ τῆς ἐξῆς ἀναλογίας (5) αδ : βδ :: αγ : εγ, δῆλη ἔσται καὶ ἡ Εφαπτομένη εγ. ἐπειδὴ δὲ (6) ἐστὶν αδ : αβ :: αγ : αε, δῆλη ἔσται καὶ ἡ Τέμνουσα αε. Τῇ δ' αὐτῇ μεθόδῳ καὶ ἐκ τῆς βζ, ἥτις ἐστὶ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βαη μοιρ. 60, ληφθήσεται τὸ τῆς αὐτῆς Γωνίας πλάγιον Ἡμίτονον, καὶ ἡ Ἀπτομένη, καὶ ἡ Τέμνουσα. Ἡ δὲ ἐπεὶ (7) τὸ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον Τετράγωνον (8), διπλάσιον ἐστὶ τῆ Τετραγώνου τῆ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου, εἴαν ἡ Ἡμιδιάμετρος ὑποτεθῇ 100000, ἔσται ἡ Πλευρὰ τῆ Τετραγώνου τῆ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένη (τατέσιν ἡ μοιρ. 90 ὑποτείνουσα) ἴση τῇ τετραγωνείᾳ ρίζῃ τῆ ἀριθμοῦ 100000 x 100000 x 2. ὅθεν δὴ γινώσκειται καὶ ἡ ἡμίσεια Πλευρὰ, τατέσι τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον (9) μοιρ. 45, καὶ ἐπομένως καὶ τὸ πλάγιον Ἡμίτονον, καὶ ἡ Ἀπτομένη, καὶ ἡ Τέμνουσα. Καὶ ἐν γένει εἴαν δοθῇ ὁ τῆς Ὑποτείνουσας οὐτινοσὲν τόξου λόγος, ὅν ἔχει πρὸς τὴν

κ. 338.

(1) Α. Πόρ. τῆς ΙΕ. τῆ Δ'. (2) Α. Πόρ. τῆς Γ. τῆ γ'. (3) ΜΖ. τῆ α'. (4) ΛΔ. τῆ α'. (5) Α. Πόρ. τῆς Δ. τῆ ζ'. (6) Διὰ τὴν αὐτὴν. (7) Ὑπο Σχημ. (8) Σχολ. τὸ μετὰ τὴν ε. καὶ ζ. τῆ δ'. (9) Διὰ τὸ Α'. Πόρ. τῆς Γ. τῆ γ'.

Ἡμιδιάμετρον, εὐρεθήσεται τῆς τῆ τόξε ἡμισείας τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον, καὶ τὸ πλάγιον, καὶ ἡ Ἀπτομένη, καὶ ἡ Τέμνυσα. Οἱ δ' ἂν πλειόνων ἐφίοιτο, μετὰ τὸ τῆ περικλῆς Οὐαλλισίς πόνημα, τὸ περὶ τῶν τομῶν τῆς Γωνίας, ἐν τῇ Β'. τεύχει τῶν ἐκείναις συγγραμμάτων, Σελ. 533—601.

κ. 339. ε'. Κἀντεῦθεν εἰς ἀπὸ ἡμισοῦν Γωνίας α τῆ Τριγώνου αβγ τῆ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένη, Κάθετος ἐπὶ τὴν Βάσιν ἀχθῇ ἡ αε, ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ τῆ Κύκλου Διάμετρος αδ, ἔσαι δὲ ἡ Κάθετος αε, πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν Πλευρῶν τῶν περὶ τὴν Γωνίαν, φέρε πρὸς τὴν αγ, ὡς ἡ ἑτέρα Πλευρὰ αβ, πρὸς τὴν τῆ Κύκλου Διάμετρον αδ. Ἀχθείσης γὰρ τῆς βδ, τὰ Τρίγωνα αεγ, αβδ, Ἰσογώνια ἐστὶ, καὶ γὰρ αἱ γ καὶ δ Γωνίαι (1) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν, ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς Περιφερείας βα βεβικεῖται. αἱ δὲ Γωνίαι ἥτε (2) ὑπὸ αβδ καὶ ἡ (3) ὑπὸ αεγ ὀρθαὶ καὶ ἴσαι. ὥστε καὶ αἱ ὑπὸ βαδ καὶ αεγ ἀλλήλαις (4) ἴσαι εἰσὶ. Τὰ ἄρα Τρίγωνα διὰ τὴν ἐν χειρὶ Πρότ. ὁμοία, καὶ ἄτως αε : αγ :: αβ : αδ. Ο. Ε. Δ.

κ. 340. ζ'. Τὴν τῆ Κύκλου Διάμετρον αβ (προεκβληθεῖσαν ἢ δέοι) τεμνέτω πρὸς ὀρθῆς Εὐθείας ἀπειρος ἡ εζ κατὰ τὸ γ, ἐπὶ δὲ τῆς Εὐθείας εζ, ληφθέντος τῷ τυχόντος σημείου ε ἐκτὸς τῆ Κύκλου, ἐπεζεύχθω ἡ αε τέμνυσα τὸν Κύκλον κατὰ τὸ δ. ἔσαι γὰρ ἄτως ἡ Ὑποτείνουσα αδ πρὸς τὴν τῆ Κύκλου Διάμετρον αβ, ὡς αγ πρὸς αε. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς Εὐθείας δβ, τὰ Τρίγωνα αδβ καὶ αεγ Ἰσογώνια ἐστὶν. ἡ μὲν γὰρ α ἐκατέροις κοινὴ, αἱ δὲ κατὰ τὸ γ καὶ δ Γωνίαι ὀρθαὶ (5) εἰσὶν. ἔνθεντοι καὶ ἡ τρίτη ἴση ἔσαι (6) τῇ τρίτῃ. Τοιγαρὶν διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότασιν, τὰ Τρίγωνα ὁμοία ἐστὶ, καὶ αδ : αβ :: αγ : αε.

Τῶν δὲ τοι σημείων β καὶ γ συμπίπτόντων, ἡ τῆ Κύκλου Διάμετρος μέση ἀνάλογος ἐστὶ τῶν αδ καὶ αε. ἔσαι γὰρ δὴ αδ : αβ = αβ : αε.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

„Εὰν δύο Τρίγωνα τὰς Πλευρὰς ἀπάσας ἔχῃ ἀνάλογον, Ἰσογώνια ἔσονται τὰ Τρίγωνα.

κ. 341. Τατέσιν εἰς αβ ἡ πρὸς ρζ ὡς αγ πρὸς ρπ, καὶ αγ : ρπ :: γβ : πζ, καὶ γβ : πζ :: αβ : ρζ, λέγω δὲ ὅτι αἱ Γωνίαι αἱ ἀπεναντίον τοῖς ὑγνμένοις, ταῖς Γωνίαις ταῖς ἀπεναντίον τοῖς ἐπομένοις ἴσαι εἰσὶ. τατέσιν ἡ μὲν γ τῇ ι, ἡ δὲ β τῇ ζ, ἡ δὲ α τῇ ξ.

(1) ΚΑ. τῇ γ. (2) ΑΔ. τῇ γ. (3) Εξ ὑποθ. (4) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῇ α'. (5) Ἡ μὲν ἐξ ὑποθ. ἡ δὲ διὰ τὴν ΑΔ. τῇ γ. (6) Διὰ τὸ Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῇ α'.

Γωνίαι	Ἡ γῆμ.	Ε' πόμ.	Γωνίαι.
γ	αβ	ρζ	ι
β	αγ	ρπ	ζ
α	γβ	πζ	ξ

Ταῖς Γωνίαις α καὶ γ ποιεῖ ἴσας τὰς χ καὶ ψ, ὥστε τὰς Πλευρὰς συνελθεῖν κατὰ τὸ ν· οὕτω δέ τοι καὶ αὐτὰ β καὶ ν (1) ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Ἐπειδὴ οὖν τὰ Τρίγωνα Φ καὶ Τ ἰσογώνια ἔσιν, ἔχει $\alpha\beta : \rho\nu :: \alpha\gamma : \rho\pi$ (2), ἄρα $\alpha\beta : \rho\zeta :: \alpha\beta : \rho\nu$, καὶ ἐπομένως αὐτὰ ρν, ρζ (3) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Ὡς αὐτως δεῖξω ἴσας εἶναι καὶ τὰς πν, πζ· κἀντεῦθεν τὰ Τρίγωνα Φ καὶ Σ ἰσοπλευρὰ ἔσιν, ἀκολουθῶς δὲ καὶ αὐτὰ Γωνίαι ι, ζ, ξ ἴσαι εἰσὶ (4) ταῖς χ, ν, ψ, τετέστι (5) ταῖς γ, β, α. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ζ.

„Εὰν δύο Τρίγωνα Τ καὶ Σ, μίαν μιᾶ Γωνίαν ἴσην ἔχει (τὴν α καὶ τὴν ξ), περὶ δὲ τὰς ἴσας Γωνίας τὰς Πλευρὰς ἀνάλογον ($\alpha\beta : \alpha\gamma :: \rho\zeta : \rho\pi$), τὰ Τρίγωνα ἔσαι ὅμοια.

Ταῖς Γωνίαις α καὶ γ ἴσαι γινέσθωσαν αὐτὰ χ καὶ ψ, ὥστε τὰς Πλευρὰς συνελθεῖν κατὰ τὸ ν, καὶ Γωνίαι γοῦν (6) β καὶ ν ἴσαι ἔσονται καὶ αὐταί· Οὕτω δέ τοι δεῖξαι ῥῆδιον, ὥς ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω, ἴσας εἶναι καὶ τὰς ρζ, ρν, ἢ δὲ ρπ ἐπ' ἀμφοῖν, τῷ τε Φ καὶ τῷ Σ κοινῇ· ἀλλὰ γὰρ καὶ αὐτὰ Γωνίαι ξ καὶ χ ἀλλήλαις ἴσαι, ὥς συνεξιστέμεναι τῇ αὐτῇ α, ἢ μὲν χ ἐκ κατασκ., ἢ δὲ ξ ἐξ ὑποθ., ἄρα καὶ αὐτὰ ι καὶ ζ (7) ἴσαι καὶ αὐταί εἰσὶ ταῖς ψ καὶ ν· Ὡς τὸ Σ Τρίγωνον ἰσογώνιον ὂν ἐστὶ τῷ Φ Τριγώνῳ, τετέστιν ἐκ κατασκ. τῷ Τ· Ἀρ' οὖν τὰ Τρίγωνα Σ καὶ Τ (8) ὅμοια εἰσὶ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ζ.

„Εὰν δύο Τρίγωνα (αβγ, ζιλ), μίαν Γωνίαν (β) μιᾶ Γωνίαν ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας Γωνίας (α, ζ) τὰς Πλευρὰς ἀνάλογον (ὥς εἶναι βα : αγ :: ιζ : ζλ), τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν, ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ὅμοια ἔσαι τὰ Τρίγωνα.

Εἴπερ αὐτὰ γ καὶ λ ὀρθαί, διὰ τὰς β καὶ ι ἴσας εἶναι τιθεμέναις, ἰσογώνια (9) ἔσαι τὰ Τρίγωνα, καὶ δὴ (10) καὶ ὅμοια. κ. 342.

(1) Πόρ. Θ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (2) Διὰ τὴν ἀνωτ. (3) Θ. τῷ ε'. (4) Η. τῷ α'. (5) Διὰ τὴν κατασκ. (6) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (7) Δ. τῷ α'. (8) Δ. τῷ ε'. (9) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (10) Δ. τῷ ε'.

Ἐὰν δὲ αἱ Γωνίαι γ καὶ λ μὴ ὀρθαὶ ὦσιν, ὁμογενεῖς δὲ (τὸτο δὲ ἔστιν, ἢ τοι ἅμα ὀρθῆς ἐλάσσονες, ἢ μείζονες), αἵτε α καὶ ζ Γωνίαι τύχωσιν ἴσαι, διὰ τὰς συνισθῆναι ὑποτιθεμένας β καὶ ι , ἔδεν ἦγγον τὰ Τρίγωνα (1) Ἰσογώνια ἔσαι, καὶ δὴ (2) καὶ ὅμοια. Κεῖσθωσαν γεμῖν αἱ α καὶ ζ μὴ ἴσαι, καὶ ἔσῳ ἡ α μείζων, πρὸς δὲ τῷ α σημείῳ τῆς $\alpha\beta$ Εὐθείας, τῇ Γωνίᾳ ζ ἴση συνεξάσθω ἡ ὑπὸ $\beta\alpha\delta$ · καὶ διὰ τὰς β καὶ ι τὰς ἴσας, καὶ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ $\alpha\delta\beta$ καὶ λ ἴσαι (3) ἔσονται, τὰ τε Τρίγωνα $\alpha\beta\delta$, $\zeta\iota\lambda$ (4) ὅμοια, καὶ $\iota\zeta : \zeta\lambda :: \beta\alpha : \alpha\delta$ · ἀλλὰ $\iota\zeta : \zeta\lambda$ (5) :: $\beta\alpha : \alpha\gamma$, ἄρα (6) $\alpha\gamma = \alpha\delta$. Καὶ οὕτως ἐπὶ τῷ Ἰσοσκελεῖ $\alpha\gamma\delta$, αἱ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι γ καὶ ὑπὸ $\alpha\delta\gamma$ (7) ὀξεῖαι, ἢ τοι ὀρθῆς ἐλάσσονες εἰσὶ· Τοῖνον ἡ ὑπὸ $\alpha\delta\beta$ ἀμβλεία (8) ἔσῃ, καὶ ἐκ τῆ ἀκολουθείας καὶ ἡ κατὰ τὸ λ · ἀλλ' ἡ κατὰ τὸ λ αὐτὴ ὁμογενὴς εἶναι ἐτέδῃ τῇ γ , καὶ ἐπομένως ὀξεῖα, ἡ αὐτὴ ἄρα ἐκότερον, ὅπερ ἀδύνατον· Οὐκ ἄρα ἡ ὑπὸ $\beta\alpha\gamma$ τῇ Γωνίᾳ ζ ἄνιστος ἔστιν· ἐπεὶ δὲ ἴσαι, τὰ $\alpha\beta\gamma$, $\zeta\iota\lambda$ Τρίγωνα Ἰσογώνια τε εἰσὶ καὶ ὅμοια.
Ο. Ε. Δ.

Ταύτην δὴ τὴν Πρότασιν ὑπὸ Τακτικῆς καλῶς παραλειφθεῖσαν, ἐπ' ἀναγκῆς εἶναι ἔγνω ἀποκαταστῆσαι ὁ Οὐίλσον, ὡς πάνυ οὖσαν πολὺχρησον.

Πορίσματα.

4. Τῶν αὐτῶν πεδέντων, ἔσαι ἡ Γωνία $\alpha =$ τῇ Γων. ζ , καὶ ἡ $\gamma = \lambda$.
 5. Ἐὰν δύο Τρίγωνα Σ , Φ (ὅρα ἐν Σχημ. τῆς Ε'. ἄνωτ.), μίαν μιᾷ Γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ζ τῇ ν , τὰς δὲ περὶ τὰς ἄλλας Γωνίας ξ καὶ χ Πλευρὰς ἴσας, τὰς τε λοιπὰς Γωνίας ι καὶ ψ , ἢ τοι ἅμα ὀρθαί, ἢ ἅμα ὀξεῖαι, ἢ ἅμα ἀμβλείαι, τὰ Τρίγωνα ἴσα ἔσαι. Ὅμοια γάρ ἐσι διὰ τὴν παρῆσαν, καὶ τὸ Σχολ. τῆς Ζ'. τῇ Ε'. , ἡ ἄρα $\chi = \xi$ (9), καὶ ἐπομένως (10) καὶ Τρίγωνον Τριγώνω.

Πρότασις Η.

„Ἐὰν ἐν ὀρθογώνῳ Τριγώνῳ ($\alpha\beta\zeta$), ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας ἐπὶ τὴν Βάσιν Κἀθετος ἀχθῇ ($\beta\gamma$), τὰ πρὸς τῇ Κἀθέτῳ Τρίγωνα, ὅμοια εἰσὶ τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

α. 343. Ἐπὶ τῶν Τριγώνων $\alpha\beta\zeta$ καὶ Λ , ἡ μὲν κατὰ τὸ ζ Γωνία κοινὴ, αἱ δὲ ὑπὸ $\alpha\beta\zeta$ καὶ χ ἐξ ὑποθέσ. ὀρθαί, καὶ διὰ τῶτο ἴσαι· ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ α καὶ ξ (11)

(1) Θ. Πόρ. τῆς AB . τῇ α' . (2) Δ. τῇ ϵ' . (3) Θ. Πόρ. τῆς AB . τῇ α' . (4) Δ. τῇ ϵ' . (5) Εξ ὑποθ. (6) Θ. καὶ IA . τῇ ϵ' . (7) Πόρ. IA . τῆς AB . τῇ α' . (8) IG . τῇ α' . (9) Ὁρ. Δ. τῇ ϵ' . (10) Δ. τῇ α' . (11) Θ. Πόρ. τῆς AB . τῇ α' .

ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, ὅτι τὰ Τρίγωνα $\alpha\beta\gamma$ καὶ P ὁμοία εἶναι, ἥτε Γωνίαι ἴση τῇ $\angle$. Κἀντεῦθεν δῆλον ἔσται, ὅτι καὶ τὰ P καὶ Δ ἀλλήλοις ὁμοία, αἱ γὰρ Γωνίαι ι καὶ ζ , α καὶ ξ , υ καὶ χ ἴσαι ἀλλήλαις. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Η' βγ μέση ἀνάλογος ἐστὶ τῶν αγ, γζ.

Επειδὴ γὰρ ἐπὶ τῶν Τριγώνων P καὶ Δ , ἴσαι εἰσὶν αἱ Γωνίαι καὶ ζ , ὧν ἡ μὲν ἀπεναντίον ἐστὶ τῆς Πλευρᾶς αγ, ἡ δὲ τῆς γβ, ἴσαι δὲ καὶ αἱ α καὶ ξ , ὧν ἡ μὲν ἀπεναντίον ἐστὶ τῆς Πλευρᾶς γβ, ἡ δὲ τῆς γζ, φανερόν (1) ὅτι $\alpha\gamma : \gamma\beta :: \gamma\beta : \gamma\zeta$.

Η' βζ μέση ἀνάλογος ἐστὶ τῶν αζ, γζ· ἡ δὲ αβ μέση τῶν ζα καὶ γα.

Επὶ γὰρ τῶν Τριγώνων $\alpha\beta\gamma$ καὶ Δ , ἴσαι μὲν αἱ Γωνίαι ὑπὸ $\alpha\beta\gamma$, καὶ ἡ κατὰ τὸ χ , ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ αζ, τὴν δὲ ἡ βζ· ἴσαι δὲ καὶ αἱ α καὶ ξ , ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ βζ, τὴν δὲ ἡ γζ· ὥστε (2) $\alpha\zeta : \beta\zeta :: \beta\zeta : \gamma\zeta$.

Παραπλησίως, ἐπεὶ ἐν τοῖς Τριγώνοις $\alpha\beta\gamma$ καὶ P , ἴσαι μὲν αἱ Γωνίαι ὑπὸ $\alpha\beta\gamma$ καὶ υ , ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ αζ, τὴν δὲ ἡ αβ, ἴσαι δὲ καὶ αἱ κατὰ τὸ ζ καὶ ι , ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ αβ, τὴν δὲ ἡ αγ, ἔσται πάλιν $\alpha\zeta : \alpha\beta :: \alpha\beta : \alpha\gamma$.

Επὶ τῶν τριῶν τετῶν Τριγώνων $\alpha\beta\gamma$, καὶ P , καὶ Δ , αἱ τὰς ἴσας Γωνίας ὑποτείνουσαι ἀνάλογον (3) εἰσὶν. Ὅθεν ἐὰν τῷ A' . λόγῳ οἱ ὅροι ἀπὸ τῶν Τριγώνων $\alpha\beta\gamma$, οἱ δὲ τῷ B' . ἀπὸ τῶν P , οἱ δὲ τῷ Γ' . ἀπὸ τῶν Δ ληφθῶσιν, ἔσται $\alpha\beta : \beta\zeta :: \alpha\gamma : \gamma\beta :: \beta\gamma : \gamma\zeta$ καὶ πάλιν $\beta\alpha : \alpha\zeta :: \gamma\alpha : \alpha\beta :: \gamma\beta : \beta\zeta$ καὶ τελευταῖον $\alpha\zeta : \beta\zeta :: \alpha\beta : \beta\gamma :: \beta\zeta : \gamma\gamma$. Τέτω γὰρ τῷ τρόπῳ ἀναλογιζομένοις, οἱ ὁμόλογοι τῶν ὁρῶν ταῖς ἴσαις τῶν Γωνιῶν πανταχῇ ὑποκρίσονται.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (αβ) κατὰ τὸν δοθέντα λόγον ($\zeta\iota : \iota\lambda$) τεμεῖν.

Ἀρχήτω ἄπειρος ἡ αψ, καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθῆτωσαν απ, πρ ἴσαι ταῖς $\zeta\iota$, $\iota\lambda$. ἀπὸ δὲ τῆ ρ ἐπεξεύχθω ἡ ρβ, καὶ πρὸς αὐτὴν διὰ τῆ π ἤχθω Παράλληλος ἡ πγ. Φημὶ δὲ ὡς οὕτως ἐγένετο τὸ ἐπιταχθέν· δῆλον δὲ ἐκ τῆς B' . Προτάστ. τῆς ζ' . Βιβλίας.

(1) Δ. τῆς ζ' . (2) Δ. τῆς ζ' . (3) Δ. τῆς ζ' .

Πορίσματα.

- Α'. Εντεῦθεν τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν $αβ$ οὕτω τεμεῖς, ὥς εἶναι τὴν ὅλην πρὸς τὴν ἀποτμηθεῖσαν $βγ$, ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ κατὰ μείζονα ἀνισότητα· ταῖς τῆς $αβ$ ὡς ἡ $ζλ$ πρὸς τὴν $λι$, εἰς ἐπίτινος μὴ πεπερασμένης Εὐθείας τῆς $αψ$, λάβης μὲν τὴν $αρ = ζλ$, λάβης δὲ ἐπὶ τῆς $ρα$ τὴν $ρπ = λι$, καὶ ἐπιζεύξης τὴν $ρβ$, καὶ πρὸς αὐτὴν Παράλληλον ἀγάγῃς τὴν $πγ$.
- Β'. Κἀντεῦθεν αὖθις, τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν $αγ$ οὕτω προεκβάλλειν δυνήσῃ ἐπὶ τὸ $β$, ὥς τὴν ὅλην προεκβεβῆσαν $αβ$ εἶναι πρὸς τὴν προσκειμένην $βγ$, ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ κατὰ μείζονα ἀνισότητα, ταῖς τῆς $αβ$ ὡς $ζλ$ πρὸς $λι$, λαβὼν ἀμέλειτοι ἐπὶ Εὐθείας μὴ πεπερασμένης τῆς $αψ$, τὴν μὲν $αρ = ζλ$, τὴν δὲ $ρπ$ ἐπὶ τῆς $ρα$ ἴσην τῇ $λι$, καὶ ἐπιζεύξας τὴν $πγ$, καὶ Παράλληλον ἀγαγὼν πρὸς αὐτὴν τὴν $ρβ$, ἥτις ἐπὶ τῆς $αγ$ προεκβληθείσης, τὸ Σημεῖον $β$ διορίσει.
- Γ'. Κἀντεῦθεν τέως τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν $αγ$ οὕτω προεκβαλεῖν ἔξεις, ὥς εἶναι τὴν $αγ$ πρὸς τὴν ὅλην προεκβληθείσαν, ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ κατὰ ἐλάσσονα ἀνισότητα, ταῖς τῆς $αβ$ ὡς ἔχει ἡ $ζι$ πρὸς τὴν $ζλ$, ἀμέλειτοι λαβὼν ἐπὶ Εὐθείας μὴ πεπερασμένης τῆς $αψ$, Εὐθείας τὰς $απ$, $αρ$, τὰς $ζι$, $ζλ$ ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ ἐπιζεύξας τὴν $πγ$, καὶ πρὸς αὐτὴν Παράλληλον ἀγαγὼν τὴν $ρβ$, ἥτις ἐπὶ τῆς Εὐθείας $αγ$ προεκβληθείσης, τὸ Σημεῖον $β$ διορίσει.

Πρότασις Ι.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν ἄτμητον ($αβ$), τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ ($αι$) τετμημένη ὁμοίως τεμεῖν (κατὰ $λ$ καὶ $π$).“

- κ. 345. Ἐπεζεύχθω ἡ $βι$ ἐπὶ τὰ πέρατα τῶν δοθεισῶν Εὐθειῶν, ἀπὸ τῆς αὐτῆς Σημεῖα $α$ κατὰ γωνίαν ἡγμένων, παρὰ δὲ τὴν ἐπιζευχθεῖσαν, ἀπὸ τῶν Σημεῖων $ζ$ καὶ $γ$ ἤχθωσαν Παράλληλοι πρὸς τὴν $αβ$, ἣν χρὴ τεμεῖν, προσπίπτειν κατὰ Σημεῖα τὰ $λ$ καὶ $π$. Φημὶ δὲ ὥς ἐγένετο τὸ ἐπιταχθέν.

Δῆλον δὲ ἐκ τῆς Α'. Πορίσμ. τῆς Β'. τῆς Γ'.

- κ. 346. Καὶ ἄλλως δέπως, εἰς τὴν τετμημένην Εὐθεῖαν $ια$ μείζων ἢ τῆς ἣν χρὴ τεμεῖν, $βπ$, ἔσωσαν Κύκλοι τρεῖς ἄλλήλων ἐφαπτόμενοι περὶ Διαμέτρους τὰς $ιζ$, $ιγ$, $ια$, ἐνηρμόθω δὲ καὶ ἡ $βπ$ ὑποτείνουσα, ἀπὸ τῆς $ι$ Σημεῖα εἰς τὴν τῶν μείζονος τῶν Κύκλων προσπίπτουσα Περιφέρειαν. Οὕτω γὰρ οἱ δύο ἐλάσσονες Κύκλοι, κατὰ τὰ Σημεῖα $λ$ καὶ $π$, τὴν $βπ$ Εὐθεῖαν τεμαῖσι, κατὰ λόγον

(1) τῶν τομῶν τῶν τῆς Διαμέτρου ια. Ἐὰν δὲ ἡ ια Εὐθεία τετμημένη ᾗ εἰς μέρη τέτταρα, τεσσάρων Κύκλων δεήσει, καὶ ἂν εἰς πέντε, πέντε, καὶ οὕτως ἐς ἄπειρον.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐκ δὲ ταύτης τῆς Προτάσεως, καὶ τὴν δοδεΐσαν Εὐθεΐαν εἰς ὁσαδήποτε μέρη ἁλλήλοισι ἴσα διαιρεῖν παιδευόμεθα, συνάπτοντες μὲν κατὰ γωνίαν τῇ Εὐθείᾳ αβ (ὡς ἐν τῷ Σχήμ. τῆς Προτ.), ἣν χρὴ τεμεῖν, Εὐθεΐαν μὴ πεπερασμένην τὴν αι, καὶ ταύτην εἰς μέρη ὅσα ἂν δέξῃ ἴσα ἁλλήλοισι διαιρῶντες τῷ διαβήτῃ, οἷον εἰς αγ, γζ, ζι, κξ., καὶ τὴν ιβ ἐπιζευγνύντες, καὶ πρὸς αὐτὴν Παραλλήλους τὰς ζλ, γπ ἄγοντες.

Ἀλλως δὲ καὶ ῥᾶδιον, ὡς παρὰ τῷ Μαυρολύκῳ. Ἐςω ἡ αβ τριχοτομητέα, καὶ ἀχθήτω ἡτοι αὐτῆς ὑπερθεῖν ἢ ἑνερθεῖν, παράλληλος ἡ ισ μὴ πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τῆς ισ ὑπὸ τὴν αβ κειμένης, ληφθήτωσαν τῷ διαβήτῃ μέρη τρία ἴσα τὰ ιπ, πρ, ρσ, ἅπερ ἂν ἅμα μείζονα ᾖ τῆς αβ, ἐλάσσονα δὲ, ἂν ἡ ισ ὑπὲρ τὴν αβ τεθῇ· διὰ δὲ ι κα, καὶ διὰ σ κα β, ἀχθήτωσαν Εὐθεΐαι συμπίπτουσαι κατὰ τὸ γ (2). Αἱ γὰρ ἀπὸ τῆς γ διὰ π κα ρ ἀγόμεναι Εὐθεΐαι, τὴν δοδεΐσαν αβ τριχοτομήσουσιν. Ἡ δὲ δεΐξις σαφὴς ἐκ τῆς Β'. Πορίσμ. τῆς Δ'. Προτ.

α. 347.

Ἀλλως ἔτι σὺν Μαυρολύκῳ τὸ αὐτὸ τῆτο ἐκπερανῶμεν. Οἷον κείσθω αβ, ἣν εἰς τέτταρα δεῖ τεμεῖν, καὶ ἀχθήτω Εὐθεΐα μὴ πεπερασμένη ἡ αχ, καὶ πρὸς αὐτὴν Παράλληλος ἡ βψ, ἥδ' αὐτὴ πέρας ἔχουσα· Ἐκ δὲ τούτων ληφθήτωσαν τῷ διαβήτῃ μέρη ἴσα τὰ αλ, λξ, ξπ, κα βυ, υτ, στ, ἐφ' ἑκατέρας δηλ. μονάδι ἐλάσσονα τῶν α χρεῖ ἐπὶ τῆς αβ λαβεῖν. αἱ γὰρ διὰ τούτων ἀγόμεναι Εὐθεΐαι λρ, ξσ, πυ, εἰς τέτταρα τὴν δοδεΐσαν αβ τεμεῖσι. Ἐπειδὴ γὰρ ἐκ κατασκ. αἱ λξ κα ρσ ἴσαι τε εἰσὶ καὶ Παράλληλοι, καὶ αἱ ταύτας ἐπιζευγνύουσαι λρ κα ξσ (3) ἴσαι ἔσονται καὶ αὐταὶ καὶ Παράλληλοι· ὡσαύτως δὲ κα αἱ ξσ κα πυ Παράλληλοι εἰσὶν. Ἐπειδὴ τοίνυν ἡ απ εἰς μέρη τρία ἴσα ἁλλήλοισι τέτμηται, εἰς τρία ἴσα κα ἡ αι (4) τετμημένη ἔσται· παραπλησίως δὲ κα ἡ βγ εἰς τρία ἴσα· ἡ τοίνυν ὅλη αβ εἰς ἴσα τέτταρα.

α. 348.

Αὗται δὲ αἱ δύο πράξεις εὐχερέστεραι τῆς κατ' Εὐκλείδην εἰσὶ, ὡς ἐφ' ὧν ἐλάσσονες αἱ ἀγόμεναι Παράλληλοι.

(1) Β. Πόρ. τῆς Β'. τῷ ε'. (2) Σχόλ. ΑΓ. τῷ α'. (3) ΑΓ. τῷ α'. (4) Α. Πόρ. τῆς Β. τῷ ε'.

Π ό ρ ι σ μ α .

κ. 349.

Εντεῦθεν δὴ τὸ Τραπεζίον αβγδ, ἥπερ αἱ αδ καὶ βγ Πλευραὶ παράλληλοι εἰσὶν, εἰς μέρη ὅποσα ἂν ἀλλήλοις ἴσα διαμερίζειν μανθάνομεν. Προεκβύβλησθω γὰρ ἡ βγ εἰς τὸ ε, εἰς ὃ τὴν γε ἴσην εἶναι τῇ αδ. Διὰ γὰρ τὰς ἐναλλὰξ Γωνίας ὑπὸ δαζ καὶ ζεγ, καὶ τὰς αδζ καὶ εγζ (1) ἴσας ἔσσαι, καὶ δὴ καὶ διὰ τὰς Βάσεις αδ, γε τὰς ἐκ κατασκευῆς ἴσας, τὰ Τρίγωνα αδζ καὶ ζγε (2) ἴσα ἀλλήλοις ἔσιν· ἐνθεντοὶ καὶ τὸ Τρίγωνον αβε τῷ Τραπεζίῳ αβγδ ἴσον ἐστί. Καὶ διαιρεθείσης τοίνυν τῆς Βάσεως (3) εἰς ἴσα ὁσαδιποτῶν μέρη, οἷον εἰς τρεῖς βη, ηρ, ρε, καὶ ἐπιζευχθεῖσιν τῶν αη, αρ, ἔσται τὸ αβη Τρίγωνον, καὶ τὸ αηρ καὶ τὸ αρε, τῷ Τραπεζίῳ τριτημόρια. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

κ. 350.

„Δυσὶν δοθεῖσιν Εὐθείων (αβ, βγ) τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐπεξεύχθω ἡ αγ, ἀπὸ δὲ τῆς βα προεκβληθείσης ληφθῆτω ἡ αζ = βγ, διὰ δὲ ζ παρὰ τὴν αγ παράλληλος ἀχθῆτω ἡ ζχ μὴ πεπερασμένη, πρὸς ἣν κατὰ τὸ λ ἡ βγ προεκβληθεῖσα καὶ αὐτὴ προσπιπτέτω. Φημὶ δὴ ὅτι αβ : βγ :: βγ : γλ. Καὶ γὰρ αβ : αζ :: βγ : γλ (4). Ἀλλὰ (5) αζ = βγ, ἄρα αβ : βγ :: βγ : γλ· ἥτε γλ ἡ τρίτη οὕτως ἐστὶν ἀνάλογος. Ο. Η. Ε.

Α' λ λ ω ς .

κ. 351.

Συνεσάδωσαν αἱ αβ, βγ πρὸς ὁρθάς, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ αγ, ἀπὸ δὲ τῆς γ ἀχθῆτω μὴ πεπερασμένη ἡ γχ, πρὸς ὁρθάς ἐπὶ τῆς αγ, ἥπερ κατὰ τὸ λ προσαντάτω ἡ αβ προεκβληθεῖσα. Φημὶ δὴ τὴν αβ εἶναι πρὸς τὴν βγ, ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν βλ. Δῆλον δὲ ἐκ τῆς Α'. Πορίσματος τῆς Η'. Προτάσεως.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Δυνατὸν δὲ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν, μὴ μόνον διὰ τριῶν ὄρων, ἀλλ' ἐτι καὶ δι' ἄλλων ὑπὲρ ἀριθμὸν πλείονων προάγεσθαι, καὶ τό γε ἄρροισμα τῆς τῶν ἐς ἄπειρον ἀναλογούντων ὄρων προόδου ὑπ' ὀφθαλμοῖς τίθεσθαι. Περὶ τούτου ἀρίστα τῷ Γεηγορίῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἀγίας Βικεντίας, ἐν Β'. Βιβλ. τῆς αὐτῆς ποιήματος διεκλιπται, τὴν τῆς Γεωμετρικῆς προόδου εἰσήγησιν ἀκριβῶς ὑποδεμένῳ. Ταύ-

(1) KZ. τῷ α'. (2) Kε. τῷ α'. (3) Διὰ τὸ ἀνά χεῖρας Σχόλ. (4) B. τῷ ε'. (5) Ἐκ κατ.

τητοι εἰς ἡμῖν ἐπιτεταμμένῃ τῷ προκειμένῳ τὴν κατασκευὴν εἰς ἀπόδειξιν ἐν-
ταῦθα ἀποδοτέον.

Δ ἤ μ μ α Α'.

„Τῷ κατὰ τὴν ἐλάχιστον ἀνισότητά λόγῳ λξ πρὸς πρ εἰς συνεχιζο-
μένην, εἰς Μέγεθος παντὸς τῷ δοθέντος μείζον ἤκειν συμβαίνει. κ. 352.

Ἐςω λξ : λρ :: λρ : πλ, κξ : εἰςαι δὴ εἰς ἀνάπαλιν (1) πλ : ρλ :: ρλ :
εἰλ. ἄρα εἰς ἐν διαιρέσει (2) πρ : ρλ :: ρξ : εἰλ, καὶ ἐναλλάξ (3) πρ : ρξ ::
ρλ : εἰλ. Ἀλλὰ μὲν ρλ μείζων ἐστὶ τῆς εἰλ, ἄρα εἰς πρ μείζων τῆς ρξ. Ὡσαύ-
τως δεῖξω εἰς τὴν ιπ μείζονα εἶναι τῆς πρ, εἰς ἄνω εἰσεξῆς. Ἐπειδὴ τοῦτον
συνεχιζομένην τῷ λόγῳ λξ πρὸς λρ, τῷ πρώτῳ λξ εἰς προσεπιγίνεται τὰ
μέρη ερ, ρπ, πι, κξ : διηγεῖται τὴν αὐξήσιν ἀπεργαζόμενα, φανερόν ὡς οὕτως
ἤκειν συμβαίνει πρὸς τι Μέγεθος, ὅπερ ἂν παντὸς τῷ δοθέντος μείζον εἴη.
Ο. Ε. Δ.

Δ ἤ μ μ α Β'.

„Τῷ κατὰ τὴν μείζονα ἀνισότητά λόγῳ αβ πρὸς γβ διηγεῖται συνεχι-
ζομένην, εἰς Μέγεθος παντὸς τῷ δοθέντος ἑλαττον ἤκειν συμβαίνει.

Κεῖσθω ἡ λξ, ὅσον ἂν βελοιο βραχυτάτη, καὶ γινέσθω (4) βγ : βα :
: λξ : λρ. Δυνατὸν οὖν τὸν λόγον λξ πρὸς λρ ἐπὶ τοσῆτον συνεχιζεσθαι,
ὥς ὅρον τινα ἐμπεσεῖν (οἷον φέρε τὸν λι), ὅς μείζων εἴη τῷ αβ (5). Ἀλλὰ
γὰρ ἰσαριθμῶς τῷ λόγῳ λξ πρὸς λρ, κατὰ ὅρας τὰς γβ, εβ, ζβ, συνεχι-
ζέσθω εἰς ὁ λόγος αβ πρὸς γβ, εἰς εἰςαι ἡ ζβ ἐλάσσων τῆς εἰλ.

Ἐκ γὰρ δὴ τῆς κατασκευῆς φανερόν, ὅτι ιλ, πλ, ρλ, εἰλ ἀνάλογον
εἰσὶ ταῖς αβ, γβ, εβ, ζβ. Τοιγαρὶν δι' ἴσα (6) ιλ : εἰλ :: αβ : ζβ, καὶ
ἐναλλάξ (7) ιλ : αβ :: εἰλ : ζβ. Ἀλλὰ γὰρ (8) ἡ ιλ μείζων τῆς αβ, ἄρα εἰς
ἡ εἰλ μείζων τῆς ζβ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό β λ η μ α.

„Τὸν δοθέντα λόγον τὸν κατὰ μείζονα ἀνισότητά αβ πρὸς βγ, δι' ἁ-
πείρων συνεχῶς ὁρων προαγαγεῖν, εἰς τῶν ἡπάντων τὸ ἄθροισμα προδεδῆαι.

(1) Σχόλ. τῆς Ις. τῷ ε'. (2) ΙΖ. τῷ ε'. (3) Ις. τῷ ε'. (4) Πέρ. Γ. τῆς Θ. τῷ
ε'. (5) ἡμ. α'. (6) ΚΒ. τῷ ε'. (7) Ις. τῷ ε'. (8) Ἐκ κατ.

κ. 354.

Α' χθήτων Κάθετοι αὐ αλ, βξ, ἴσαι ταῖς δοθείσαις αβ, βγ, διὰ δὲ λ καὶ ξ ἀχθήτω Εὐθεῖα συνιῶσα (1) τῇ αβγ προεκβληθείσῃ κατὰ τὸ ψ· Φημί δὲ Α', ὡς εἰάν ἀπὸ τῆ γ πρὸς ὀρθὰς ἀγάγῃς τὴν γπ, ἔσαι ἡ γπ τῇ ἀνάλογος. Μεταχθήτω δὲ ἡ γπ εἰς τὴν γε, ἀπὸ δὲ τῆ ε Κάθετος ἀνήχθω ἡ ερ, καὶ ἔσαι ἡ τετάρτη· μετινέχθω ἡ ερ εἰς τὴν εζ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡχθω ἡ ζσ, καὶ ἔσαι ἡ πέμπτη· καὶ οὕτω τοῖνον ὁ λόγος αβ : βγ, τατέσιν ὁ αλ πρὸς βξ, διὰ τῶν ὀρων αλ, βξ, γπ, ερ, ζσ, κξ : εἴτ' οὖν διὰ τῶν αβ, βγ, γε, εζ, ζι, κξ : ἐς ἄπειρον προαχθήσεται. Ἀπας γὰρ ὅρος, οἷον ὁ ζσ, ἀφαιρεθῆναι δυνήσεται ἀπὸ τῆ λοιπῆς ζψ· ἐπειδὴ γὰρ ἡ λα, ἦτοι ἡ αβ, ἐλάσσων τῆς αψ, καὶ ἡ ζσ ἐλάττων ἔσαι καὶ αὐτὴ τῆς ζψ (2).

Λέγω δὲ Β', ὡς ἡ αψ ἴση ἐστὶ τῷ ὅλῳ ἀθροίσματι τῶν ἐς ἄπειρον ἀναλογησῶν.

Α'. Μέρος. αψ : βψ :: αλ : βξ (3), τατέσιν ὡς αβ : βγ· καὶ τοῖνον ἐναλλαξὶ καὶ ἀνάπαλιν (4) αβ : αψ :: βγ : βψ· ἄρα (5) αψ : βψ :: βψ : γψ· Ἀλλὰ μὲν (6) αψ : βψ :: λα : ξβ, καὶ βψ : γψ :: ξβ : πγ, ἄρα λα : ξβ :: ξβ : πγ. Ὡσαύτως δεῖξω ξβ : πγ :: πγ : ρε, καὶ ἐφεξῆς ἐς ἄπειρον.

Β'. Μέρος. Ἀπαν τὸ τῶν ἀπειροπληθῶν ὀρων ἀθροίσμα, ἂν ἐλάσσον ἐστὶ τῆς αψ, ἢ δέ γε μείζον, ἴσον ἄρα· Καὶ μείζον μὲν ἔχει, δέδεικται γὰρ ἀνωτέρω ὡς ἡ πγ ἐλάσσων τῆς γψ, ἢ τε ρε τῆς εψ, καὶ ἡ σζ τῆς ζψ, καὶ ἔτις ἐφεξῆς τέρματος ἄνευ· δυνήσονται ἄρα ἅπαντες οἱ ὅροι πγ, ρε, σζ, κξ : πέρατος ἄνευ, ἐπ' Εὐθείας τῆς αψ ἀλλήλων ἐχόμενοι συσθεῖναι, καὶ τῶς ὥς ἐμδέποτε τῶ σημεῖς ψ ἐφικνεῖσθαι, ἐπὶ παντὸς οὐτινοσῶν ἀριθμοῦ πέρατος ἔχοντος πληθυνόμενος· Ὅτι δὲ ἂν εἰ ὑπὲρ ἀριθμὸν ἡ τῶν ὀρων πρόοδος συνεχίζεται, τὴν Εὐθεῖαν αψ ὑπερβαλέσθαι δυνήσεται, ἐκ τῆς αὐτῆς φανερόν, ὅτι ἅπαντα ἡ ἐπ' ἄπειρον προήκοντα τῶν ὀρων πρόοδος, ἐπ' αὐτὴν τὴν αψ ἔχει μετενεχθῆναι, ὥς ἐμδέποτε ἂν τῆς Εὐθείας αψ μείζων γένοιτο ἡ τοιαύτη πρόοδος· ἀλλὰ γὰρ ἂν ἐλάσσων ἂν εἴη τῆς αψ, ἢ δὲ καὶ γὰρ ἐδείχθη τὰς αψ, βψ, γψ συνεχῶς εἶναι ἀνάλογον· Καὶ ὡσαύτως ἂν δειχθεῖν καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εψ, ζψ, ιψ, κξ : Ἐπειδὴ τοῖνον μεταγομένων τῶν ἀνάλογον ὄντων πγ, ερ, ζσ, κξ : εἰς τὰς γε, εζ, ζι, κξ : τὰ λοιπὰ εψ, ζψ, ιψ, κξ : αὖτε συνεχῶς ἀνάλογον ἐστίν, ὡς δέδεικται· ἐφικ-

(1) Σχ. μετὰ τὴν ΑΓ. τῆ α'. (2) Ἐκ τῆ Α. Πόρ. τῆς Δ. τῆ ε'. καὶ ἐκ τῆς ΙΔ. τῆ ε'. (3) Διὰ τὸ αὐτὸ Πόρισμα. (4) Ιε. τῆ ε'. μετὰ τῶ Σχολίῳ. (5) Β. Πόρ. τῆς ΙΗ. τῆ ε'. (6) Α. Πόρ. τῆς Δ. τῆ ε'.

τὸν τέως ἐστὶ πρὸς τι λοιπὸν (1), ὃ ἂν τῷ δοθέντος παντὸς εἴη ἔλαττον· ταύτητοι καὶ τῶν ἀναλόγων τὸ ἄθροισμα, ἅπαν ὑπερβάλλει μέγεθος, ὅπερ ἂν τῆς αψ ἔλαττον εἴη. Ἐπεὶ δὲ δὴ ἔτε μείζον τυγχάνει ὄν, ἔτε ἔλαττον τῆς αψ, τῇ αὐτῇ ἴση ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Θ ε ώ ρ η μ α.

„Ἡ τῶν πρώτων ὁρῶν διαφορὰ, καὶ ὁ ὅρος ὁ πρῶτος, καὶ ὅλον τὸ τῶν ἀπείρων ἀναλογιῶν ἄθροισμα συνεχῶς ἀνάλογον ἐστὶ.

Ἐν τῷ ἀνωτ. Σχήματι ἀχθήτω ἡ $\epsilon\chi$ Παράλληλος τῇ αψ, καὶ λχ ἔσαι ἡ διαφορὰ τῷ Α'. ὅρα αλ, τετέσι τοῦ αβ, καὶ τῷ Β'. βξ, ἦτοι βγ. Παραλλήλως τοίνυν ἔσης τῆς χξ πρὸς τὴν αψ, ἔσαι λχ : χξ :: λα : αψ (2). Ἀλλὰ μὴν $\chi\xi = \alpha\beta$, καὶ $\lambda\alpha = \alpha\beta$, ἄρα ἡ λχ διαφορὰ ἐστὶ πρὸς αβ τὸν πρῶτον ὅρον, ὡς αβ ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς αψ τὸ ὅλον ἄθροισμα. Ο. Ε. Δ.

Τὸ δ' αὐτὸ καθόλου τε καὶ συντόμως δειχθήσεται ἐν οἰωδήποτε ποσῷ γένει τοιῷδε τρόπῳ. Ἐςω συνεχῶς ἀνάλογον ὅποιαν (καὶν ἀριθμοὶ ὧσιν) αψ, βψ, γψ, καὶ : τὰ δὲ πάντα ἐπὶ τὸ πρῶτον μετηνέχθω τὸ αψ· καὶ ἔτως ἔσονται αβ, βγ, γε, εζ, καὶ : τῶν ἀναλόγων διαφοραὶ, αἵτινες ἅπασαι συνάμα τῇ ἐσχάτῃ πηλικότητι ιψ συνεξιστῶνται τῇ πρώτῃ αψ· Ἐπειδὴ τοίνυν τῶν ἀναλόγων ἐς ἀπειρον συνεχιζομένων, ἡ ἐσχάτη ποσότης διὰ τῷ Β'. Λήμματος οἵχεται, σαφές ἂν εἴη, τῶν ἐς ἀπειρον ἀναλόγων τὰς διαφορὰς συνισθῆναι τῷ πρώτῳ ὁρῳ αψ· Εἴτα ἐπειδὴ αψ : βψ :: βψ : γψ, καὶ (3) κατ' ἀντιστροφὴν, ὡς αβ διαφορὰ πρὸς αψ πρῶτον ὅρον, οὕτω βγ ἡ δευτέρα διαφορὰ πρὸς βψ τὸν ὅρον τὸν Β', καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως. Ἀρὰ ὡς αβ πρώτη διαφορὰ πρὸς αψ πρῶτον ὅρον, ἔτως (4) ἅπασαι αἱ διαφοραὶ (τετέσιν ὡς ἤδη δέδεικται τὸ πρῶτον ποσὸν αψ) πρὸς τὸ ὅλον ἄθροισμα τῶν ἀπείρων. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς IB.

„Τριῶν δοθεισῶν Εὐθειῶν (αβ, βγ, αζ), τετάρτην ἀνάλογον προσσευρεῖν.

Διατετάχθωσαν αἱ δοθεῖσαι Εὐθεῖαι ὡς ἐπὶ τῷ Σχήματος· ἀχθήτω δὲ καὶ Εὐθεῖα ἡ βζ, πρὸς ἣν Παράλληλος ἡ γψ, μὴ πεπερασμένη, ἥ δὴ-

(1) Λήμ. Β'. (2) Α. Πόρ. τῆς Δ. τῷ ε'. (3) Α. Πόρ. τῆς ΙΗ. τῷ ε'. (4) ΙΒ. τῷ ε'.

πα γψ προσαντάτω ἢ αζ προεκβληθεῖσα κατὰ τὸ λ. Φημὶ δὲ δὴ ὡς αβ : βγ :: αζ : ζλ· δῆλον δὲ ἐκ τῆς Β'. τῇ Παρόντος· ὥς ἢ ζλ ἢ ζητεμένη ἐστὶ τετάρτη ἀνάλογος.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Καλῶς ὁ ἡμέτερος Βεττίνος, ἐν τοῖς αὐτῇ θησαυροῖς τῆς Μαθηματικῆς φιλοσοφίας, ἐκ τῆς ΛΕ'. τῇ Γ'. καὶ τῆς ΙΔ'. τῇ ἀνὰ χεῖρας, ἢ τῆς παρῶσης ἐδόλως ἐξηρτῆται, τριῶν δοθεισῶν τὴν τετάρτην, καὶ δεῖν τὴν τρίτην παραρτῆσαι ὥς πῶς.

κ. 357.

Εἰάν ὥσι τρεῖς Εὐθεῖαι, ἡ δευτέρα γβ, καὶ ἡ τρίτη βδ ἐπ' εὐθείας ἐκ κεῖσθωσαν, καὶ τῶν ἡ πρώτη βα ἀπτεῖσθω κατὰ τὸ β ὑπὸ τῇ τυχεύσει Γωνίᾳ· εἴτα διὰ τῶν Σημείων γ, α, καὶ δ (1), Κύκλος γεγράφθω, οὗ τῇ Περιφέρειᾳ ἢ αβ πρώτη προεκβληθεῖσα προσαντάτω κατὰ τὸ ψ· Ἡ γὰρ βψ ἢ τετάρτη ἔσται ἀνάλογος.

Εἰπεδὴ γὰρ τὰ Ὀρθογώνια αβψ, γβδ (2) ἴσα ἀλλήλοις ἔσιν, ἔσται αβ : βγ :: βδ : βψ διὰ τὴν ΙΔ'. τῇ Παρόντος, τὴν ἐκ ταύτης ὥσπερ εἴρηται, μηδόλως ἐξηρτημένην.

κ. 358.

Εἰάν δὲ ὥσι δύο Εὐθεῖαι αβ, βγ, τῇ δευτέρᾳ βγ ἐπ' εὐθείας προσκείσθω ἢ βδ ἴση τῇ βγ· εἴτα πρὸς τὴν γδ προσπίπτειτω ἡ πρώτη αβ κατὰ τὸ β ἐν οἰαδήποτε Γωνίᾳ· Καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἀνωτέρω· Ἐσται γὰρ ἡ βψ ἢ ζητεμένη τρίτη ἀνάλογος.

Ἡ ἀπόδειξις παραπλησίᾳ ἔσιν· Ἰσῶν γὰρ ὄντων τῶν ὑπὸ αβψ, γβδ Ὀρθογωνίων, ἔσται αβ : βγ :: βδ = βγ : βψ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ.

„Δεῖν δοθεισῶν Εὐθειῶν (αγ, γβ), μέσσην ἀνάλογον προσεμεῖν.

κ. 359.

Ἡ ἐκ τῶν δύο τῶν δοθεισῶν συγκεκλιμένη αβ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ ξ, καὶ Κέντρῳ τῷ ξ γεγράφθω Κύκλος διὰ α καὶ β· Εἴτα ἀπὸ τῇ γ πρὸς Ὀρθῶς ἢ χσθω ἢ γζ, πρὸς τὴν Περιφέρειαν κατὰ τὸ ζ προσπίπτειτω.

Λέγω δὲ ὡς αγ : γζ :: γζ : γβ.

Ἀχθήτωσαν γὰρ αἱ αζ, βζ, καὶ τὸ (3) αζβ Τρίγωνον ἔσται ὀρθογώνιον, ἀπὸ δὲ τῆς τῆς ὀρθῆς Γωνίας ἢ Κάθετος ζγ ἐπὶ τὴν Βάσιν, ὥς αγ : γζ :: γζ : γβ (4)

(1) Β. τῇ γ'. (2) ΛΕ. τῇ γ'. (3) ΛΑ. τῇ γ'. (4) Α. Πόρ. τῆς Η. τῇ ε'.

Πορίσματα.

Κάντεῦθεν δῆλον, ὡς εἶγε ἐξ οὐτινοσῶν τῶν κατὰ τὴν περιφέρειαν Ση- Α'.
μείων ζ, ἐπὶ τὴν Διάμετρον Κάθετος ἄχθειν ἢ ζγ, ἡ τοιαύτη μέση ἔσται ἀνά-
λογον, μεταξὺ τῶν τῆς Διαμέτρου τιμημάτων αγ ἢ γβ.

Δῆλον δέ, ὅτι ἡ μέση ἀνάλογον γζ τὸ τῶν ἄκρων ἡμιάθροισμα αξ ἢ Β'.
δέποτε ὑπερβαλέσθαι δυνήσεται· ἀλλὰ τῶν ἀκροτήτων ἀνίσων ἑσῶν, ἡ μέση
γζ τῇ ἡμιάθροισματος ἐλάσσων ἔσται, τῷ δ' ὅπερ κακτῆς ΚΕ'. τῷ Ε'. Βιβλία
ἐν εἶδει πορίσματος ἐπεφέρετο.

Σχόλιον περὶ τὸ Β'. Πόρισμα.

Πρόβλημα.

Ἐπὶ τῶν Τριῶν ἀναλόγων, δοθέντος τῷ ἄθροισματος τῶν ἄκρων αβ, ἢ τῆς
μέσης δε, τὰς ἀκρότητας αὐτὰς προσευρεῖν. Δεῖ δὲ τὴν μέσιν δε τῆς ἡμισείας
τῷ ἄθροισμ. αβ μὴ εἶναι μείζονα (κατὰ τὸ Β'. Πόρ.).

Περὶ τὴν αβ ὡς περὶ Διάμετρον Κύκλος γεγράφθω· τῷ δὲ δὴ Κύκλῳ κα-
τὰ τὸ β (ὃ θάτερον ἐστὶν ὀποτερονὲν τῶν τῆς Διαμέτρου περάτων) ἀπτεύσθω
ἢ Εὐθεῖα ηβ τῇ δοθείσῃ δε ἴση, ἢ διὰ τῷ η ἀχθήτω ηζ τῇ αβ Παράλλη-
λος, ἥτις διὰ τὸ τὴν δε, ἦτοι τὴν ηβ τῆς τῷ Κύκλῳ ἡμιαδιαμέτρου μὴ μείζονα
εἶναι, προσπείσεται τῷ Κύκλῳ κατὰ τὸ ζ· ἀπὸ δὲ τῷ ζ Σημεῖν ἐπὶ τὴν Διά-
μετρον αβ, καθεῖδω Κάθετος ἢ ζγ, αὕτη γὰρ τὴν αβ τεμεῖ κατὰ τὰς ζη-
τημένας ἀκρότητας αγ, γβ.

Ἡ γὰρ ζγ (διὰ τὸ Α'. Πόρ. τῶν ἐνταῦθα) ἡ μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν
αγ, γβ· διὰ δὲ τὴν ΛΔ'. τῷ Α'. ζγ = ηβ, τατέσιν (ἐκ κατασκευ.) ζγ = δε·
ὥς περὶ ἀντιθέσθαι τὸ ζητούμενον.

Ἀριθμητικῶς δὲ εὐρεθήσονται αἱ αγ, γβ, τῶν αὐτῶν ὡς ἀνωτέρω δο-
θέντων, εἰάν ἀχθείσῃς τῆς ζε, ἐκ τῇ αὐτῆς Τετραγώνῃ = $\frac{1}{2} αβ^2$ = Τετραγ.
τῷ ἀπὸ $\frac{1}{2} αβ$, ἀφαιρεθῇ ζγ² = δε², καταλειφθῇ δὲ ξγ². Ἡ γὰρ ἐκ τῆ-
ς Τετραγωνικῆς ῥίζα ξγ προσεθεῖσα μὲν τῇ ἡμισείᾳ τῆς αβ, ἀφαιρεθεῖσα δὲ
ἀπὸ τῆς αὐτῆς ἡμισείας, τῇ μὲν θάτεραν τὴν αγ, τῇ δὲ θάτεραν τὴν γβ τῶν
ζητημένων ἀκροτήτων παρέξεται.

Κάντεῦθεν δὴ ἢ τρεῖς, ἢ ἐπτά, ἢ πεντεκαίδεκα μέσαι ἀνάλογον ῥῆσα Γ'.
προσευρεθήσονται, κατ' ἀριθμὸς δηλονότι τηλικέτης, ἢ λίκου ἐκ τῆς συνεχῆς
ἀναλογίας 1, 2, 4, 8, 16 κξ: προδίδει ἀνακύπτωσιν· ἦτοι γὰρ μία = 1,
ἢ τρεῖς = 1 + 2, ἢ ἐπτά = 1 + 2 + 4, ἢ ὅπως ἐξῆς.

Εε 2

Εἴπωσαν δοθεῖσαι πηλικότητες α ε, ε, ή τῶν μέση ή μ ή διά τήν ἀνά
 χείρας Πρότασιν ἐξευρισκομένη. Εἴτα μεταξὺ α ε μ ληφθῇτω μέση ή λ,
 μεταξὺ δὲ μ ε μέση ή ν, εἴονται λ, μ, ν, τρεῖς αἱ εὐρεθεῖται μέσαι
 μεταξὺ α ε. Ὡς εἴγε εἴφεξις μέσαι ληφθῶσι τῶν α ε λ, λ ε μ, μ
 ε ν, ν ε ε, εἴονται δὲ ἑπτὰ αἱ πᾶσαι μεταξὺ τῶν α ε, αἱ δὲ αὐταὶ καὶ
 μεταξὺ τέτων μέσαι, συνάμα ταῖς ἑπτὰ προτέραις, μέσας τὰς πάσας μετα-
 ξὺ τῶν α ε παρέξῃσι πεντεκαίδεκα. Καὶ ὕτως εἰς ἄπειρον.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Πρῶτον δ' ἂν εἴη ἐνταῦθα, εἰ περὶ τῆς τῶν δυεῖν μέσων εὐρέσεως, δυεῖν
 δοθεισῶν ἀκροτήτων, βραχὺ ἄττα ἡμᾶς διελθεῖν. Εἰς μὲν οὖν τὴν τῇ Προ-
 βλήματος τῇ δὲ ἐπίλυσιν, τῇ Πλάτωνος προτρεψαμένῃ, τῶν ἂν Εἰλάδα γεω-
 μετρησάντων, ὅς τις ἔδειξεν τὴν παρ' ἑαυτῇ σπαθὴν εἰσενέγκας ἢ ἐξὶ νεανικώτα-
 τα. Κεῖνται δὲ παρ' Εὐτοκίῳ ἐν Ὑπομνήμασι (1) τοῖς εἰς τὰ Ἀρχιμήδου ποι-
 κίλοι τρόποι καταλεγόμενοι, λεπτῆς ἐπιγεννήματα φρενός, Πλάτωνος, εἰ
 Ἀρχύτα τῇ ταραντινῇ, εἰ Μεναίχμῃ, εἰ Ἐρατοσθένει, εἰ Φίλωνος τῇ Βυζαν-
 τίνῃ, εἰ Ἡρωνος, εἰ Ἀπολλωνίῃ τῇ περγαίῃ, εἰ Νικομήδῃ, εἰ Διοκλέει, εἰ
 Σπόρῃ, εἰ Πάππῃ. Οἷς δὲ εἰ ἄλλαι ἔτι προσέθεντο ὅτε Οὐερνέρας, εἰ ὁ Γρη-
 γόριος ὁ ἀπὸ ἀγ. Βικεντίῃ, εἰ Ρ'ενάτος ὁ Καρτέσιος. Εἰς ὧν δὲ μετέδωκεν
 τρεῖς μόνας τὰς τῶν λοιπῶν εὐχερεςεράς ἔδοξεν ἡμῖν ὑποδέσθαι.

Ἡ Μέθοδος ή κατὰ Πλάτωνα.

„Μεταξὺ τῶν δοθεισῶν αβ, βγ, μέσας δύο προσευρεῖν. ✠
 360. Κεῖσθωσαν αἱ αβ, βγ πρὸς ὀρθάς, εἰ προσεβεβλήθωσαν ἐπ' ἄπειρον
 πρὸς χ καὶ ψ. Εἴτα ληφθῇτωσαν γινώμονες δύο (οὕτως ὁ ἡμέτερος Κλαύ-
 διος ὁ Ρ'ίχαρδος· ὁ γάρ τοι Πλάτων ἐνὶ ἐκέχρητο φέροντι ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν
 Πλευρῶν δε πρὸς ὀρθάς ἐνεσηριγμένον τὸν γε, δι' ὅλης τῆς δε εἰρημένης Πλευ-
 ρᾶς ἀπαρεγκλίτως ἀγόμενον), καὶ διατέρη μὲν τῶν γινωμόνων ή Γωνία δ' ἐ-
 φηρμόσθω τῇ Εὐθείᾳ βχ, οὕτως ἄλλ' οὖν ὥς καὶ τὴν ἑτέραν τῶν Πλευρῶν
 χωρεῖν διὰ τῇ α· κατὰ δὲ τὸ Σημεῖον ε, κατ' ὃ ή ἑτέρα τῇ γινώμονος Πλευ-
 ρᾷ τέμνησα εἴη τὴν Εὐθείαν βψ, ἐφαρμοσθέντος τῇ δευτέρᾳ γινώμονος, χω-
 ρεῖτω ή τῇ ἑτέρᾳ Πλευρᾷ διὰ τῇ γ. Φημὶ δὴτα ὡς αἱ βδ, βε, αἱ δύο μέσαι
 εἰσὶ μεταξὺ τῶν δοθεισῶν αβ εἰ βγ. Ἐς αἱ γὰρ αβ : βδ :: βδ : βε :: βε : βγ

(1) Ὑπομν. Θεωρ. Α'. Βιβ. β'. περὶ Σφαίρας εἰ Κυλίνδρου.

Η δὲ ἀπόδειξις σαφὴς ἐκ τῆ Α. Πορίσμ. Πρωτ. Β'. Βιβλ. ε'. Τὸ γὰρ αὐτὸ Ὀρθογώνιον τριγωνόν ἐστιν, ἀπὸ δὲ τῆς ἐν τούτῳ ὁρθῆς Γωνίας Κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν κατηνέχθη ἡ δβ· ὥςτε κατὰ τὸ εἶρημ. Πόρ. αβ : βδ :: βδ : βε. Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν τῆτον λόγον κ βδ : βε :: βε : βγ. Δοθεῖσων ἄρα τῶν αβ, βγ, εὐρίηται δύο μέσαι συνεχῶς ἀνάλογον βδ, δε. Ο. Ε. Π.

Η δὲ δὴ μέθοδος αὕτη πρὸ ἀπασῶν τῶν ἄλλων ἐστὶν εὐξύνετος.

Μέθοδος ἡ κατὰ φίλωνα τὸν Βυζάντιον.

Αἱ δύο Εὐθεΐαι αβ, βγ πρὸς Γωνίαν ὁρθὴν συνεχάρωσαν, κ πληρωθήτω τὸ Ὀρθογώνιον αβγδ, κ προεκβεβλήθωσαν αἱ δα, δγ ἐπ' ἀπειρον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ τῆ αβγδ Ὀρθογωνία Διαγώνιοι βδ, αγ, ἁλλήλας τέμνυσθαι κατὰ τὸ ε· καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ ε, Διαστήματι δὲ τῷ εβ, Κύκλος γεγράφθω, ὃς ἄτε δὴ Ὀρθογωνία, κ διὰ τῶν λοιπῶν Γωνιῶν διελεύσεται τῆς γ, κ δ, κ α (1). Τῆ γὰρ Κύκλου περὶ τὸ Ὀρθογώνιον περιγράφεται (2) δυναμένη, τὰ μὲν α, β, γ, δ σημεῖα ἐπὶ τῆς Περιφερείας ἔσαι, διὰ δὲ τὰς Ὀρθὰς ὑπὸ αβγ, βγδ, αἱ αγ κ βδ Διάμετροι ἔσονται Κύκλου τῆ αὐτῆς (3), ὧν ἡ κατατομή ε τῆ Κύκλου Κέντρον. Εἰδ' ὁ Κανὼν ἔτω προσηρμόσθω ἐπὶ τῇ σημεῖα β, ὥςτε τὰς ἀπολαμβανομένας βη κ εξ ἴσας εἶναι ἀλλήλαις. Φημὶ δὴ τὰς αζ, γη, τὰς δύο μέσας τυγχάνειν μεταξύ τῶν δοθεῖσων αβ καὶ βγ· εἶναι γὰρ αβ : αζ :: αζ : γη :: γη : βγ.

Ἐπειδὴ γὰρ βη, εξ (4) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, κ αἱ ξη, βζ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· καὶ ἴσα ἄρα τὰ Ὀρθογώνια ξηβ, βζξ, τῆς αὐτῆς τῆς Ὀρθογωνίας (5) δηγ, δζα· καὶ ἔσιν οὕτως ηδ : δζ : ἀντισπεπονδότης (6) αζ : ηγ. Ἀλλ' ἐπὶ τῇ Τριγώνῳ ζηδ (διὰ τὴν βα Παράλληλον τῇ Βάσει ηδ) ηδ : δζ :: βα : αζ (7), ἄρα (8) βα : αζ :: ηδ : δζ. Αὐτίς ἐπειδὴ δέδεικται ἡδη αζ : ηγ :: βα : αζ, ἔστι δὲ βα : αζ :: ηδ : δζ, τῆς αὐτῆς (διὰ τὸ Παράλληλον εἶναι τὴν γβ τῇ βάσει δζ, ἐπὶ τῇ ηδζ Τριγώνῳ) ὡς ηγ : γβ· ἔσαι δὴ (9) κ αζ : ηγ :: ηγ : γβ. Πᾶσαι τοίνυν αἱ τέσσαρες βα, αζ, ηγ, γβ συνεχῶς ἀνάλογον εἰσὶ, κ ἐπομένως μεταξύ τῶν δοθεῖσων αβ, βγ, εὐρίηται αἱ δύο μέσαι. Ο. Ε. Ε.

Αὗται αἱ δύο μέθοδοι, καίτοι εὐφυῶς τε κ ῥαδίως τὴν εὐρεσιν ἐπιτι-

(1) ΑΑ. τῆ γ'. (2) Πόρ. τῆς Ε. τῆ δ'. (3) ΑΑ τῆ γ'. (4) Εκ κατ. (5) Α. Πόρ. τῆς Α. τῆ γ'. (6) Διὰ τὴν ΙΑ. τὴν ταύτης μὴ ἐξηγητημένην. (7) Α. Πόρ. τῆς Α. τῆ ε'. (8) ΙΑ. τῆ ε'. (9) Διὰ τὴν αὐτήν.

δεύσσαι, διὰ γεμὴν τὴν κατὰ ἀπόπειραν τῷ τε Γνώμονος καὶ τῷ Κανόνος
χρησιν, Γεωμετρικαὶ ἐκ εἰσί.

Η' Μέθοδος ἡ κατὰ Καρτέσιον.

κ. 362.

Παρασκευαζήτω τοιοῦτοι ὄργανον. Κανόνες δύο συμπεπήχθωσαν κατὰ
τὸ αὐτὸ Σημεῖον ὑ περιαγόμενοι, ὥς ἔχειν εὐχερῶς τῇ περιαγωγῇ ἀνοίγε-
σθαι, ἢ κλείεσθαι· τοῖς δὲ Κανόνιν ἐνεσηριγμένοι ἔσωσαν πλείονες γνώμονες,
ἀλλήλοισι συνημμένοι κατὰ τὰ σημεῖα β, γ, δ, ε, ζ, η, τοιῶδε νόμῳ, ὥς
τῶν Κανόνων υχ, υψ ἀπ' ἀλλήλων τῇ ἀνοιγῇ ἀπαγομένων, τὸν γνώμονα
βγ, προωθεῖν τὸν γδ τὸν ἐν τῷ Κανόνι υψ, τὸν δὲ γνώμονα γδ, προωθεῖν
τὸν δὲ τὸν ἐν τῷ Κανόνι υχ· καὶ ὡσαύτως ὑπὸ μὲν τὰ δὲ τὸν ἐξ προτελευ-
νεσθαι, ὑπὸ τέττε δὲ τὰ ἐξ τὸν ηζ, καὶ ἄτως ἐφεξῆς. Ἐν ᾧ δὲ οἱ Κανόνες υχ,
υψ συγκλειόμενοι ἀλλήλοισι προσάγονται, ἅπαντα τὰ Σημεῖα β, γ, δ, ε,
ζ, η, ἐν ἐνὶ καὶ τῷ αὐτῷ Σημεῖῳ τῷ α συμπίπτειν. Διὰ γὰρ τῷ τοιοῦδε ὄρ-
γάνῳ μεταξὺ δυεῖν δοθεισῶν, ἢ μόνον δύο, ἀλλὰ καὶ τέσσαρες, καὶ ἕξ, καὶ ὀ-
πίστας ἂν βέλοιο, ἐξευρίσκονται. Ὅπερ ἔτε διὰ τῶν Κωνικῶν τομῶν, ἐδὲ καὶ
ἑτερόντινα τῶν παρὰ τοῖς ῥηθεῖσι Γεωμέτραις εὐρημένων μεθόδων ἀνυσὸν
ὅλως.

Πρὸς εὐρεσιν μέσων δυεῖν, τριῶν δὲ Γνωμόνων, εἰς δὲ τεσσάρων, γνω-
μόνων πέντε, καὶ ἕξ.

Τῶν τοίνυν δοθεισῶν ἢ ἐλάσσων μετνηέχθω ἐπὶ τὸν Κανόνα υχ, καὶ ἔσω
αὕτη ἢ υβ· ἢ δὲ δὴ μείζων ἐπὶ τὸν ἕτερον Κανόνα τὸν υψ, καὶ ἔσω υε· καὶ
προσηρημόσθω δὴ τῶν Γνωμόνων ὁ Α'. τῷ σημείῳ β, κἀνταῦθα σηριχθήτω.
Ἀνοιγέσθωσαν δὲ οἱ Κανόνες, ἕως οὔ ἢ τὰ τρίτα Γνώμονος Πλευρὰ διέλθοι
διὰ τῷ ε. Φημὶ γὰρ ὥς ἄτως αἱ υγ καὶ υδ, εἰσὶν αἱ δύο ζητούμεναι μέσαι με-
ταξὺ τῶν δοθεισῶν υβ, υε· εἰσὶ γὰρ υβ : υγ :: υγ : υδ :: υδ : υε.

Ἡ δὲ δεῖξις κατάδηλος ἐκ τῷ Β'. Πορίσματος τῆς Η' Προτάσεως τῷ ε'.
Βιβλία. Ἐκ γὰρ τῆς τῷ ὄργάνῳ κατασκευῆς, ἢ ἐν τῷ υγδ Τριγώνῳ Γωνία
ἢ πρὸς τῷ γ, ὀρθὴ οὔσα τυγχάνει, ἀφ' ἧς ἢ γβ Κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν
υδ· ἄρα διὰ τὸ εἰρημένον Πόρ. υβ : υγ :: υγ : υδ. Αὖθις δὲ καὶ τῷ Τριγώνῳ
υδε, τῆς πρὸς τῷ δ Γωνίας ὀρθῆς ἔσης, καὶ ἀπὸ ταύτης Κάθετος ἐπὶ τὴν Βά-
σιν υε ἀγομένης τῆς δγ, ἔσαι υγ : υδ :: υδ : υε. Καὶ εἰσὶν ἄρα υβ, υγ,
υδ· υε αἱ τέσσαρες συνεχῶς ἀνάλογον· ὥστε μεταξὺ τῶν δύο δοθεισῶν υβ,
υε, εὐρηται μέσαι δύο υγ, υδ. Ο. Ε. Π.

Εἰάν δὲ μεταξὺ τῶν υβ, υη, τέσσαρες ᾧσιν αἱ ζητούμεναι μέσαι, ἀνοι-

γέσθωσαν οἱ Κανόνες, ὡς τὴν τῇ Ε'. τῶν γνωμόνων Πλευρὰν Ζη. διέρχεσθαι διὰ τῇ η, καὶ ὅτως ἔσονται αἱ υγ, υδ, υε, υζ, τέσσαρες μέσαι ἀνάλογον μεταξὺ τῶν υβ καὶ υη. Ἡ δὲ δεῖξις κατάδηλος ἐκ τῇ αὐτῇ Πορίσματος.

Ἡ δὲ δὴ Μέθοδος αὕτη, καίτοι δι' ὄργανα περαινομένη, ὁ πολλὰ πλέον τῇ Πλατωνικῇ ἐκεῖνα ἐσὶν ἐργωδέστερον, θαυμασὴ τῷ ὄντι ἐστὶ, καὶ διὰ τὸ μὴδὲν ποιεῖν κατ' ἀπόπειραν, καὶ διὰ τὸ μὴ πρὸς εὕρεσιν δυεῖν μόνων, ἀλλὰ καὶ τεσσάρων ἦν δέοι, καὶ ἐξ, καὶ ὁποσωνῶν ἐξαρκεῖν.

Διὰ δὲ τῶν δύο μέσων, τῆς ἐπιλύσεως τυγχάνει καὶ τὸ Δηλιακὸν πρόβλημα, ὁ τῇ Κύβη διπλασιασμός, καὶ Σώματα τὰ τυχόντα κατὰ λόγον τὸν δοθέντα (1) αὐξεσθαι, ἢ μειῖσθαι δύναται, καθάπερ τὰ ἐπίπεδα τῶν Σχημάτων (2) διὰ μιᾶς μέσης εὕρισκόμενης. Πρῶτος δὲ ὁ τὴν εἰς τῆτο φέρουσαν τεμὼν φέρεται ὁ Ἰπποκράτης, ὃ καὶ πάντες ἐξῆς οἱ γεωμετρήσαντες παρικολληθικότες εἰσὶ.

Καὶ περὶ μὲν τῆς τῶν δύο μεσοτήτων ἐν δυτὶ δεδομέναις ἀκρότησι θήρας τοσαῦτα. Τῶντις δὲ καὶ ἡμᾶς Γεωμετρίας ἔξιν ἐαυτῷ προσεῖναι οἶόμενος θαυμασίαν, αὐτῆς τῆς ὑπόσεως ἐπ' ἀκριβὲς ὥδη ἰκέσθαι τῇ σκοπεμένῃ, πρῶτος μὲν αὐτὸς μετὰ τοσάυτες, καὶ μόνος, γεωμετρικώτατα τὴν εὕρεσιν ἐπισκευάσασθαι ἠγχιτάμενος, πολλὰ μὲντοι παραλογισθεὶς καὶ τὸν παρὰ τοῖς εἰδόσιν ἔλεγχον μὴ διαφυγών. Τῆτον οὖν ἀπειρῶσαι ὑπὸ ἄλλων εἰς τῆτο παρορμηθέντες, αὐτοὶ τὸν ἀγῶνα ἀνεβαλόμεθα, ὅσον δὲ εὐλόγως, αὐτὴν εἰση μετιῶν τὴν ὑφ' ἡμῶν ἐκδοθεῖσαν ἀντίρρῃσιν, ἦν ἐν αὐτῷ τῷ τέλει τῇ ἀνὰ χεῖρας Βιβλίᾳ Σοὶ ὑποθήσομεν.

Π ό ρ ι σ μ α.

Εὐτεῦθεν δὲ λαβεῖν ἐνὶ τὴν μέθοδον τῇ τὸν τυχόντα λόγον τὸν κατὰ ἐλάχιστονα ἀνισότητα, ὥς οὐ δόξεις, προαγαγεῖν. Κεῖθω λόγος κατ' ἐλάχιστονα ἀνισότητα ὁ αξ πρὸς αγ, ὃν διὰ πλειόνων ὄρων δέον προαγαγεῖν. Ἐπὶ τῆς αγ ὡς ἐπὶ διαμέτρῃ, Ἡμικύκλιον γεγράφθω, ὃτινι ἀπὸ τῇ α Σημεῖα ἐνηρμόθω ἡ αβ = αξ. Προαχθήτωσαν δὲ ἐπ' ἀπειρον αἱ αβ, αγ, κατὰ τὰ Σημεῖα φ καὶ π· ἐπιζευχθήτω δὲ ἡ βγ, καὶ πρὸς ὁρθὰς ἀχθήτωσαν αἱ γδ, δε, εζ, ζη, κξ. Καὶ διὰ τὰς Ὅρθας (3) ὑπὸ αβγ,

α 363.

(1) Ὅρα τὸ Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν III. τῇ β'. (2) Ὅρα τὸ Δ. Πόρ. τῆς Κ. τῇ ε'.
(3) ΔΔ. τῇ γ'. καὶ Ὅρ. ΙΔ. τῇ α'.

αγδ, αδε, αεζ, αζη, κξ: ἔσονται (1) αἱ αβ, αγ, αδ, αε, αζ, αη, κξ: συνεχῶς ἀνάλογον.

κ. 364.

Τὸ δ' αὐτὸ λαβεῖν ἔσται, καὶ τῆς ὑπὸ αβγ Ὀρθῆς μὴ ἔστι. Συνεξά-
δωσαν γὰρ κατὰ Γωνίαν τὴν τυχεῖσαν βαγ αἱ Εὐθείαι αβ, αγ, καὶ προ-
αχθήτωσαν ὡς ἀνωτέρω κατὰ φ καὶ π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ· τῇ δὲ ὑπὸ
αβγ Γωνίᾳ ἴσαι γινέσθωσαν αἱ ὑπὸ αγδ, αδε, αεζ, κξ: Τὰ δὲ Τρίγωνα
αβγ, αγδ, αδε, κτ.: διὰ τὰς Γωνίας τὰςδε, καὶ τὴν κατὰ τὸ α κοινὴν,
Ἰσογώνια (2) ἔσται, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὁμοία (3). Ἄρα αβ : αγ : αγ : αδ
:: αδ : αε :: αε : αζ, κξ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

„Τῶν ἴσων τε, καὶ μίαν (γ) μιᾶ (ξ) ἴσην ἔχόντων Γωνίαν Παραλλή-
„λογράμμων (X καὶ Ψ), ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἰσας Γω-
„νίας (τατέσιν αγ : γβ :: ζξ : ξλ). Καὶ ὧν Παραλληλογράμμων μίαν μιᾶ
„ἴσην ἔχόντων Γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἰσας
„Γωνίας, ἴσα ἐσὶν ἐκεῖνα.

κ. 365.

Κεῖσθωσαν αἱ Πλευραὶ ὅπως ἐπ' εὐθείας, ὥστε τὰς ἰσας Γωνίας γ καὶ
ξ πρὸς τὰ ἀντίθετα εἶναι τῆς αβ Εὐθείας· καὶ διὰ τὰς Γωνίας γ καὶ ὑπὸ
λγβ τὰς δυσὶν Ὀρθαῖς (4) ἰσας, ἔσονται αἱ ὑπὸ λγβ καὶ ξ δυσὶν Ὀρ-
θαῖς ἴσαι καὶ αὐταὶ ἔνθεντοι καὶ ζξ, λγ, ἐπ' εὐθείας (5) ἔσονται κείμεναι.

Δείκν, τὸ Α'. Μέρος. Αἱ ιλ καὶ σβ προεμβαλλόμεναι συμπίπτέτωσαν
κατὰ τὸ π. Τὸ γὰρ Παραλληλόγρ. X ἐστὶ πρὸς τὸ Παραλληλόγρ. P, ὡς
αγ (6) πρὸς γβ, τό τε Ψ ὁμοίως πρὸς τὸ P (7) ὡς ζξ πρὸς ξλ· ἄλλα
καθ' ὑπόθεσιν. X καὶ Ψ ἴσα ἐσὶ, καὶ ἐπομένως (8) X : P :: Ψ : P, ἄρα (9) αγ :
γβ :: ζξ : ξλ.

Τὸ Β'. Μέρος. αγ : γβ :: ζξ : ξλ (10)· ἐστὶ δὲ αγ : γβ :: X : P (11)·
καὶ πάλιν ζξ : ξλ :: Ψ : P (12)· ἄρα (13) X : P :: Ψ : P· ὁθεν δὴ τὰ X καὶ
Ψ ἴσα (14) ἐσὶ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐντεῦθεν ἤρτηται ἡ τῶν ἀναλογιῶν κανὼνος τῇ κατ' ἀντιπεπόνθησιν

(1) B. Πόρ. τῆς H'. τῇ ζ'. (2) Θ. Πόρ. τῆς AB. τῇ α'. (3) Δ. τῇ ζ'. (4) IF.
τῇ α'. (5) ΙΔ. τῇ α'. (6) Α. τῇ ζ'. (7) Διὰ τὴν αὐτήν. (8) Z. τῇ ε'. (9) ΙΔ. τῇ ε'.
(10) Εξ ὑποθέσεως. (11) Δ. τῇ ζ'. (12) Διὰ τὴν αὐτήν. (13) ΙΔ. τῇ ε'. (14) Θ. τῇ ε'.

δείξεις, δι' οὗ ἐκ τριῶν ὁρῶν δοθέντων ὁ τέταρτος προσευρίσκεται, πολλαπλασιασμῷ τῶν δύο προτέρων ἐπ' ἀλλήλους, καὶ διαιρέσει τῆ γινομένη διὰ τῆ τρίτης, ὅθεν ἀνακύπτει ὁ ὅρος ὁ Δ'. Καθάπερ γὰρ ἐπὶ τῆ κατ' εὐθείαν χωρῆντος Κανόνος ἢ τῶν λόγων θεωρεῖται ἰσότης, οἷον ἐὰν ᾖ $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$, ἔσται $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, ἔνθα τὸ τῆ Α' διὰ τῆ Β' διαιρεθέντος πηλίκον, τῷ τῆ Γ' διὰ τῆ Δ' ἰσον τυγχάνει, ἥτοις ἐπὶ τῆ κατ' ἀντιπεπόνθησιν κανόνος θεωρεῖται ἢ τῶν Ὀρθογωνίων ἰσότης, οὕτως ὥστε τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆ Α' καὶ τῆ Β' ἰσον εἶναι τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆ Γ' καὶ τῆ Δ'. Οἷον ἐὰν ᾖσιν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ἀντιπεπονηδότες ἀνάλογον· τατέσιν (1) ἐὰν $\alpha : \gamma :: \delta : \beta$, ἔσται διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότασιν $\alpha \times \beta = \gamma \times \delta$. Καὶ τοίνυν ἐὰν τὰ γινόμενα ταῦτα ἴσα ὄντα διὰ τῆ τρίτης γ διαιρεθῶσιν, ἀνακύψει πηλίκον $\frac{\alpha \times \beta}{\gamma} = \delta$, ὅς ἐστι τῶν ὁρῶν ὁ Δ'.

Ἐνῶσαν πηλικότητες $\alpha\beta, \beta\gamma, \lambda\iota, \iota\zeta$ ἀντιπεπονηθεῖαι ἀνάλογον· ἔσται $\iota\zeta = \frac{\alpha\beta \times \beta\gamma}{\lambda\iota}$. Οἷον ἔστω $\alpha\beta$ Γραμμὴ τις ὀργειῶν 40, καὶ $\beta\gamma$ ὀργειῶν 4, ἔσται $\alpha\beta \times \beta\gamma$ ὀργειῶν 160, ἥτοι πλέθρον Ἀγγλικόν.

Ἀλλὰ προκείμενῳ δὴ πλέθρον ἕτερον ἰσον τὸ Ψ , ἢ μῆκος ὀργειῶν 16 τὸ $\iota\lambda$, καὶ ζητεῖσθω ἡ τέταρτη Πλευρὰ $\iota\zeta$. Διὰ γὰρ τὴν τῶν Ὀρθογωνίων X, Ψ , ἰσότητα, ἐπεὶ τὸ X ἐπιμηκέστερον ὢν τυγχάνει τῆ ἰσομεγέθους Ψ , ἥττον ἔσται τὸ εὖρος. Διὸ τὸ ἔλαττον μῆκος $\lambda\iota$ ἐπὶ τῆ πλέθρου Ψ , μεῖζον τὸ εὖρος $\iota\zeta$ ἀπαιτεῖ, ὥς ἡ φύσις βέλεται τῆ κατὰ τὴν ἀντιπεπόνθησιν κανόνος. Καὶ τῶν ἴσων τοίνυν Ὀρθογωνίων $\alpha\beta \times \beta\gamma$, καὶ $\lambda\iota \times \iota\zeta$ διὰ τῆς $\lambda\iota$ διαιρεθέντων, ἀνακύψει πηλίκον $\frac{\alpha\beta \times \beta\gamma}{\lambda\iota} (= \frac{40 \times 4}{16} = \frac{160}{16}) = \iota\zeta = 10$. Τὸ ἄρα πλέθρον τὸ Ψ εὖρος ἔλαχεν ὀργειῶν 10. Ο. Ε. Ε.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΕ.

„Τῶν ἴσων καὶ μίαν (γ) μιᾷ (Ξ) ἴσῃν ἐχόντων Γωνίαν Τριγώνων ($\alpha\gamma\lambda$, $\beta\gamma\beta$), ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας (τατέσιν $\alpha\gamma : \beta\gamma :: \xi\epsilon : \epsilon\lambda$).

„Καὶ ὢν μίαν μιᾷ ἴσῃν ἐχόντων Γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας, ἴσα εἰσὶν ἐκεῖνα.

(1) Ὁρ. Β. τῆς ζ'.

κ. 367.

Κείδωσαν αγ, ξβ ἐπ' εὐθείας, ὡς ἐν τῇ ἀνωτ. Προτ., καὶ ἄτως ἔσονται καὶ αἱ λγ, ξζ ἐπ' εὐθείας κείμεναι καὶ αὐταί, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ λβ, καὶ τὰ λοιπὰ τῆς δειξεως χωρήσει ὡς καὶ ἀνωτέρω.

Π ό ρ ι σ μ α.

Τὰ Παραλληλόγραμμα καὶ τὰ Τρίγωνα, ὧν αἵ τε Βάσεις καὶ τὰ ὕψη ἀντιπεπόνθασιν, ἴσα ἐσὶ, καὶ ἀνάπαλιν.

Δύλλον ἐκ τῶν προηγησαμένων δύο Προτάσεων. Ἐνθα μὲν ἐν τὰ Παραλληλόγραμμα καὶ τὰ Τρίγωνα ὀρθογώνια ἐσὶν ἀντιπεπονθότα τὰ ὕψη, καὶ τὰς Βάσεις, ἴσα εἶναι φανερόν· ἔνθα δὲ δὴ πλαγιογώνια, ἐπειδὴ καὶ ταῦτα τοῖς ὁμοσίχοις ὀρθογωνίοις τοῖς ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἡ ἰσῆς Βάσεως καὶ ἰσοῦφέςιν ἴσα (1) ἐσὶν, ἔσονται δὴ καὶ ταῦτα ἑδὲν ἦττον συνιστάμενα, εἰ τὰ ὕψη καὶ τὰς Βάσεις ἀντιπεπόνθασιν.

Καὶ ἀνάπαλιν, ἐπειδὴ τὰ ἴσα Παραλληλόγραμμά τε καὶ Τρίγωνα ὀρθογώνια ὄντα, ἀντιπεπόνθασιν τὰς Βάσεις καὶ τὰ ὕψη, τὰ δέ τοι πλαγιογώνια Παραλληλόγραμμά τε καὶ Τρίγωνα, τοῖς τὴν αὐτὴν ἡ ἴσας ἔχουσι τὰς Βάσεις καὶ ἰσοῦφέςιν ἐν ὀρθαῖς Γωνίαις ἴσα (2) ἐσὶν, ἔσονται δὴ ἀπλῶς τὰ ἴσα Παραλληλόγραμμά τε καὶ Τρίγωνα, ὁποῖά ποτ' ἂν ᾖ, ἀντιπεπονθότα τὰς τε Βάσεις καὶ τὰ ὕψη.

Σ χ ό λ ι ο ν.

κ. 368.

Ἐςω Τρίγωνα δύο αβγ, δβε, ὧν αἱ πρὸς τῷ β Γωνίαι ἄμα ληφθεῖσαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἔςωσαν δὲ καὶ αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς Γωνίας ὑπὸ αβγ, δβε, ἀντιπεπονθεῖαι· ἔσαι τὰ Τρίγωνα ταῦτα ἀλλήλοις ἴσα· Ἐὰν δὲ τὰ Τρίγωνα ἴσα ᾖ, αἱ περὶ τὰς Γωνίας αβγ, δβε Πλευραὶ ἀντιπίσονται.

Πληρῶσω γὰρ τὰ Παραλληλόγραμμα βζ, βη, καὶ διὰ τὰς πρὸς τῷ β Γωνίας τὰς δυσὶν ὀρθαῖς συνεξιστάμενας, αἱ εὐθεῖαι γβ, βε ἐπ' εὐθείας (3) ἔσονται κείμεναι· διὰ δὲ τὰς Παραλλήλους γβε καὶ δζ, αἱ ἐναλλαξ (4) ὑπὸ αβγ, βζ ἴσαι εἰσὶ· Ἐπειδὴ δὲ (5) αβ : βδ :: εβ : βγ· ἴση δὲ ἡ εβ τῇ δζ (6), ἔσαι καὶ αβ : βδ :: δζ : βγ· Ὅπερ ἐστίν, ἐπεὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας αβγ, βδζ (7) ἀντιπεπόνθασιν, τὰ Παραλληλόγραμμα (8) βη, εζ ἴσα ἐσὶ, καὶ ἐπομένως καὶ τὰ (9) τέτων ἡμίση αβγ, δβε.

(1) Λε. Λς. ΑΖ. ΑΗ. τῷ α'. καὶ Ορ. Γ. τῷ ζ'. (2) Αὐτ. (3) ΙΔ. τῷ α'. (4) ΚΖ. τῷ α'. (5) Εξ ὑποθ. (6) ΑΔ. τῷ α'. (7) Ορ. Β. τῷ ζ'. (8) ΙΔ. τῷ ζ'. (9) ΑΔ. τῷ α'.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον τῶν Τριγώνων αβγ, δβε, ἴσων ὄντων, ἡ Γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ, δβε, δυσὶν Ὁρθαῖς ἰσαμένων, αβ : βδ :: εδ : εγ. Πληρόσω γὰρ δὴ τὰ Παραλληλόγραμμα βδ, βη, ἅτινα ἔσαι (1) τῶν ἴσων Τριγώνων διπλάσια, ἡ διὰ τῆτο ἴσα, διὰ δὲ τὰς Παραλλήλους (2) γβε, δε, ἡ ἰσογώνια. Αἱ ἄρα περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευραὶ (3) ἀντιπεπόνθασιν, τετέστιν αβ : βδ :: δε ἢτοι βε : βγ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις.

„Εὰν τέσσαρες Εὐθεῖαι (αβ, ζι, ιλ, εγ) ἀνάλογον ᾧσι (τετέστιν εἰν ἢ αβ : ζι :: ιλ : εγ), τὸ Ὁρθογώνιον (X) τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον (αβ, εγ), ἴσον εἴη τῷ Ὁρθογωνίῳ (Ψ) τῷ ὑπὸ τῶν μέσων (ζι, ιλ) περιεχομένῳ.

„Καὶ εἰάν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον Ὁρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ Ὁρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες Εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Μέρος Α'. Εἰπὶ τῶν Ὁρθογωνίων X ἡ Ψ, περὶ τὰς ὀρθὰς ἡ ἐπομένως ἴσας Γωνίας τὰς β ἡ ι, ἔσιν ἕξ ὑποθ. αβ : ζι, ὥσπερ κατ' ἀντιπεπόνθῃσιν ιλ : εγ. Ἀρα τὰ (4) X ἡ Ψ ἴσα εἴη. Ο. Ε. Δ. κ. 369.

Μέρος Β'. Εἰπεὶ δὲ τὰ X καὶ Ψ τίθεται ἴσα, αἱ ἄρα (5) περὶ τὰς ἴσας Γωνίας β ἡ ι ἀντιπεπόνθασιν, αβ : ζι :: ιλ : εγ. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Κἀντεῦθεν πρὸς τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, τὸ δοθέν Ὁρθογώνιον Ψ παραβαλεῖν ῥάδιον, ληφθεῖσθαι δηλονότι αβ : ζι :: ιλ : εγ (6), καὶ τῇ Ὁρθογώνῃ X ὑπὸ αβ ἡ εγ (7) κατασκευασθέντος. Οὕτω γάρ ται τὸ X Ὁρθογώνιον ἴσον ἔσαι (8) τῷ δοθέντι Ψ, πρὸς τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ παραβεβλημένον. Τὸ δ' αὐτὸ ἡ ἄλλως ἐκτελέσεις διὰ τῶ Πορίσμ. ἡ τῇ Σχολίῃ τῆς ΜΔ'. Προτάσεως τῇ Α'. Βιβλίου. Α'.

Εἰντεῦθεν δὲ ἤρτηται ἡ ἢ τῇ κατ' εὐθεῖαν τῶν ἀναλογιῶν κανόνος ἀπὸδειξις, κατ' ὃν ἐκ τριῶν ὁρῶν δοθέντων τὸν Δ'. ἀνάλογον ἐξευρίσκομεν, ἐπιπολλαπλασιάζοντες ἐπ' ἀλλήλοις τὸν Β'. ἡ τὸν Γ', ἡ τὸ γινόμενον διαιρῶντες διὰ τῇ Α'. Διὰ γὰρ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότ., εἰάν ἢ αβ : ζι :: ιλ : εγ, Β'.

(1) Διὰ τὴν αὐτήν. (2) ΚΖ, τῇ α'. (3) ΙΔ, τῇ ε'. (4) ΙΔ, τῇ ε'. (5) Διὰ τὴν αὐτήν. (6) ΙΒ, τῇ ε'. (7) Σχολί, τῆς Μς, τῇ α'. (8) Διὰ τὴν παρῶσαν.

ἔσαι $\alpha\beta \times \beta\gamma = \zeta\iota \times \iota\lambda$. καὶ διαιρεμένων τῶν ἴσων διὰ τῆ αὐτῆ $\alpha\beta$, ἔσαι $\beta\gamma = \frac{\zeta\iota \times \iota\lambda}{\alpha\beta}$. Οὕτω καὶ ἀριθμοῖς τοῖς κειμένοις 5, 3, 10, τὸν τέταρτον εὑρεῖν δεῖσαν ἀνάλογον, ἢ τῆς κατ' εὐθεΐαν ἀναλογίας Μέθοδος ἀπαιτεῖ τὸν 3 καὶ 10 τὰς ἀριθμὸς ἐπιπολλαπλασιάζειν ἀλλήλοισ, καὶ τὸν γινόμενον 30 διὰ τῆ Α'. 5 διαιρεῖν, ὡς ἐντεῦθεν τῆ ζητούμενη 6 ἀριθμὸς ἀνακύπτωντος.

κ. 370. Γ'.

Εὐτεῦθεν δὲ καὶ ἡ πρακτικὴ Μέθοδος κατασκευάζεται, καθ' ἣν οἱ Θυροποιοὶ, καὶ τῶν τεχνιτῶν ὅσοις Ὀρθογωνίων τιῶν ἐλασσόνων χωρίων πρόκειται λαμβάνειν τὴν καταμέτρησιν. Τὸ γὰρ Ὀρθογώνιον χωρίον, Εὐθεΐαν μόριον καταμετρήσαντες, καὶ ἄνευ τῆ ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν ἀναλογισμῶ, ὅσον αὐτὸ ἔστιν ἐγνώσαν. Οἷον εἰ δύο φέρε, ὅτων ἐστὶ ποδῶν Τετραγώνων τὸ Ὀρθογώνιον $\alpha\beta\gamma\delta$ εἰπεῖν, ἀπὸ τῆς β Γωνίας τῇ Πλευρᾷ $\beta\gamma$ παραβεβλήθω ποδιαῖον μέτρον τὸ $\beta\epsilon$, ἀπὸ δὲ τῆς α Γωνίας τῆς ἐπὶ διατέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς $\alpha\beta$, δι' ἧς τῆ ποδιαίου μέτρον σπαρτίον τενέθω, προσπίπτον τῇ Πλευρᾷ $\delta\gamma$ (προεκβληθείσῃ ἢν δύο) κατὰ τὸ ζ. Ὅσων οὖν ἐστὶ ποδῶν τὸ μήκος, ἢ γὰρ ὅσων δὴ ποτε ὁποίων ὁμοίων μορίων ποδὸς ἢ Εὐθεΐα δζ, τοσούτων ποδῶν Τετραγωνικῶν, ἢ ποδὸς Τετραγωνικῶν ὁμοίων μορίων ἔσαι τὸ Ὀρθογώνιον $\alpha\beta\gamma\delta$. Διὰ γὰρ δὴ τὰς β καὶ δ Ὀρθὰς, καὶ τὰς ὑπὸ $\beta\alpha\epsilon$, δζα, τὰς ἐναλλάξ ἐν ταῖς Παραλλήλοις $\alpha\beta$, δζ, καὶ διὰ τὰς ὑπὸ $\epsilon\alpha\delta$, δαζ, τὰς ἐναλλάξ καὶ αὐτὰς ἐν ταῖς Παραλλήλοις $\epsilon\epsilon$, αδ, τὰ Τρίγωνα $\epsilon\beta\alpha$, αδζ (1) ἔσαι ὁμοία· ἐνδεντοὶ καὶ $\epsilon\beta:\epsilon\alpha::\alpha\delta:\delta\zeta$. Καὶ διὰ τὴν ἐν χερσὶ τοίνυν Πρότασιν, ἔσαι τὸ Ὀρθογ. $\epsilon\alpha \times \alpha\delta = \text{Ὀρθογωνίω } \epsilon\beta \times \delta\zeta$. Ἀλλὰ $\epsilon\alpha \times \alpha\delta$ ἐστὶ τὸ καταμετρημένον Ὀρθογώνιον, ὥπερ ἴσον εὑρίτῃ τὸ Ὀρθογώνιον $\epsilon\beta \times \delta\zeta$, οὗ ὕψος $\epsilon\beta$ τὸ ποδιαῖον, τοσούτες Τετραγωνικὰς περιέχοντος πόδας, ἢ γοῦν ποδὸς μόρια Τετραγωνικὰ, ὅτων ποδῶν εἶναι τίθεται τὸ μήκος, ἢ γὰρ ὅσων ποδὸς μερῶν ὁμοίων τὸ τῆς Βάσεως (2) δζ. Ὅσων ἄρα ποδῶν ἢ δζ τῷ μήκει, τοσούτων Τετραγωνικῶν ἔσαι ποδῶν καὶ τὸ Ὀρθογώνιον τὸ $\alpha\beta\gamma\delta$. Ο. Ε. Δ.

Εἰ δὲ τὸ $\beta\epsilon$ μέτρον διποδιαῖον τύχη, ἢ τριποδιαῖον, κτ., τὸ τῆ Ὀρθογωνίας χωρίον ἐν ποσὶ Τετραγωνικαῖς ληφθήσεται, πολλαπλασιαζομένης τῆς δζ διὰ 4, ἢ διὰ 9 καὶ: κατὰ λόγον, τετέστι διὰ τῆ Τετραγῶνα τῆ ἀριθμῶ τῶν ποδῶν, ἐξ ὧν τὸ μέτρον αὐτὸ συγκεκρότηται.

Δ'. Εἰν Εὐθεΐαι τέσσαρες $\alpha\beta$, $\zeta\iota$, $\iota\lambda$, $\beta\gamma$ ὧσιν ἀνάλογον, τὸ Τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$ τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης ὡς Βάσεως, καὶ τῆς τετάρτης ὡς ὕψους, ἴσον ἔσαι

(1) Δ. τῆ ε. (2) Εἴπεται ἐκ τῆς Δ. τῆ ε.

τῷ Τριγώνῳ ξὶλ τῷ ὑπὸ τῆς δευτέρας ὡς Βάσεως, ἢ τῆς τρίτης ὡς ὕψους. Εἰσὶ γὰρ τῶν Ὀρθογωνίων Χ καὶ Ψ (ἃ διὰ ταύτην τὴν ἐν χερσὶ Πρώτ. ἴσα τυγχάνει) (1) ἡμίσειαι. Ὅρα τὸ Σχῆμ. τῆ Πορ. τῆς ΙΔ', ἢ (ὁ ταυτόν) τὸ τῆς Ις'.

Ἐάν δύο Τρίγωνα αὐλ, ζεβ, τὰς γ ἢ ξ Γωνίας ἴσας ἔχῃ, ἢ δὲ τὸ Ε. Ὀρθογώνιον αὐ γ × γλ τὸ ὑπὸ τῶν Πλευρῶν τῆς Γωνίας γ, ἴσον τῷ Ὀρθογωνίῳ ζε β × ξβ τῷ ὑπὸ τῶν Πλευρῶν τῆς Γωνίας ξ, τὰ Τρίγωνα αὐλ, ζεβ, ἴσα ἔσται. Καὶ ἀνάπαλιν, ἐάν τὰ Τρίγωνα αὐλ, ζεβ, αἱ αἱ πρὸς τῷ γ ἢ ξ Γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἴσα ἢ, τὰ Ὀρθογώνια αὐ γ × γλ, ἢ ζε β × ξβ ἴσα ἔσται. Ταῦτο δ' αὐτὸ ἢ τοῖς ἰσογωνίοις τῶν Παραλληλογράμμων συμβαίνει. Διὰ γὰρ τὰ ἴσα Ὀρθογ. αὐ γ × γλ, ζε β × ξβ, ἔσται κατὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας αὐ γ : ζε :: ξβ : γλ. Ταύτητοι ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν Τριγώνων αὐλ, ζεβ τῶν ἰσογωνίων πρὸς γ ἢ ξ, αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευραὶ ἀντιπεπόνδασιν, τὰ Τρίγωνα αὐλ, ζεβ ἔσονται (2) ἴσα. Ο. Η. τὸ Α'.

Εἴτα ἐχέτω τὰ ἴσα Τρίγωνα αὐλ, ζεβ, τὰς πρὸς τῷ γ ἢ ξ Γωνίας ἴσας (3), ἢ ἔσονται αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευραὶ ἀντιπεπονδεῖαι ἀνάλογον, τιτέσιν αὐ γ : ζε :: ξβ : γλ. ἢ ἐπομένως κατὰ τὴνδε τὴν Πρωτ., ἔσται Ὀρθογών. αὐ γ × γλ = Ὀρθογών. ζε β × ξβ. Ο. Η. τὸ ἕτερον. Ὅρα τὰ Σχῆμ. τὰ ἐν τῇ ΙΕ'. Πρωτ.

Αὐτὰ δὲ ταῦτα ἢ περὶ τῶν ἰσογωνίων Παραλληλογράμμων ἢ ὁμοίως ἐχόντων ἀποδειχθήσεται, εἰ μόνον ἀντὶ τῆς ΙΕ'. ἢ ΙΔ'. ληφθῇ. ὅρα ἢ τὰ ἐν αὐτῇ Σχήματα.

Ἐάν ἢ Α πρὸς Β ἐν μείζονι λόγῳ ἢ Γ πρὸς Δ, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν ἁκρῶν ε'. Ὀρθογώνιον μείζον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. ἐάν δὲ ἐν ἐλάσσονι ἔλαττον.

Α'. Ἐπειδὴ γὰρ Α μείζονα λόγον ἔχει πρὸς Β, ἢ Γ πρὸς Δ, ἕτεράντι τὸ Ε (τῷ Α ἔλαττον) ἔσται πρὸς Β, ὡς Γ πρὸς Δ. ὥστε διὰ ταύτην Ε × Δ = Β × Γ. Ἀλλὰ γὰρ Ε < Α, ἄρα Α × Δ > Β × Γ.

Β'. Εἰ δὲ Α πρὸς Β ἐν ἐλάσσονι λόγῳ ἢ, ἢ Γ πρὸς Δ, ἔσται τι ἕτερον τὸ Ζ (τῷ Α μείζον) πρὸς Β = Γ : Δ. ὥστε Ζ × Δ = Β × Γ. Καὶ ἐπομένως Α × Δ < Β × Γ.

Εὕδεντοί ἐάν τῶν ἀνίσων Ὀρθογωνίων αἱ Πλευραὶ ἔτω διαταχθῶσιν, ὡς Ζ. τῷ μὲν τῶν Ὀρθογωνίων μείζονας τὰς Πλευρὰς ἐν ἁκροῖς, τὰς δὲ τῷ ἐλάττω-

(1) ΔΔ. τῷ α'. (2) ΙΕ. τῷ ε'. (3) Διὰ τὴν αὐτήν.

νος ἐν μέσοις ἐκκείσθαι, ὁ μὲν Α'. πρὸς τὸν Β'. ὅρον μείζονα τὸν λόγον ἔξει, ἢ ὁ τρίτος πρὸς τὸν Δ'.

Εἰ δὲ αἱ μὲν τῷ ἐλάσσονος Ὀρθογωνία Πλευραὶ ἐν ἄκροις, αἱ δὲ τῷ μείζονος ἐν μέσοις, ἔσαι ὁ τῷ Α'. πρὸς τὸν Β'. ὅρον λόγος ἐλάσσων, ὁ δὲ τῷ Γ'. πρὸς τὸν Δ'. μείζων.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Α'λλ' ἐνταῦθα καὶ τὸ συλλεγόμενον ἐκείνο τῷ Πτολεμαίᾳ Θεώρημα, ὡς ἐν ὁτῶν Τετραπλεύρῳ, ὃ ἂν εἰς Κύκλον ἐγγεγραμμένον ᾖ, τὸ ὑπὸ τῶν Διαγωνίων ἀγ καὶ βδ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἴσον εἰς τοῖς δυσὶν Ὀρθογωνίοις τοῖς ὑπὸ τῶν ἀντιθέτων τῷ Τετραπλεύρῳ Πλευρῶν, οἷον αβ καὶ γδ, ἢ αδ καὶ βγ, ὡς ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τῶν πρὸ ταύτης δειχθέντων ἐξηρητημένον, πρὸς τὸν ἀντικείμενον εἶναι προδέσθαι καὶ δεῖξαι.

κ. 371.

Συνεσάδω γὰρ ἡ ὑπὸ βαι ἴση τῇ ὑπὸ γαδ. Διὰ γὰρ ταύτας τὰς ἐκ κατασκευῆς ἰσθμενάς, καὶ τὰς ὑπὸ αβε, αγδ, τὰς διὰ τὸ τῇ αὐτῇ Περιφερείᾳ αδ βεθικέναι ἴσας (1) ἀλλήλαις, ἔσαι τὰ Τρίγωνα αβε, αγδ ἀλλήλοισι (2) ὅμοια, καὶ ἔτι αβ : βε :: αγ : γδ. καὶ ἐπομένως (3) Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αβ x γδ, ἴσον ἔσαι τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων αγ x βε. Παραπλησίως διὰ τὰς ὑπὸ βαι, γαδ ἴσας ἐκ κατασκ. Γωνίας, κοινῆς προσθέσεως τῆς ὑπὸ γαι, ἔσαι ἡ ὑπὸ βαγ ἴση τῇ ὑπὸ εαδ. Διὰ δὲ τὰς ὑπὸ αδε, αγβ, τὰς τῇ αὐτῇ Περιφερείᾳ αβ βεθικείας καὶ διὰ τῆτο (4) ἴσας, ἔσαι τὰ Τρίγωνα (5) αδε, αγβ ὅμοια, καὶ αδ : δε :: αγ : βγ. Ἐνδεντοὶ καὶ (6) Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αδ x βγ = Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων αγ x δε. Ἀλλὰ τὰ Ὀρθογώνια αγ x βε, καὶ αγ x δε, ἴσα εἰς (7) τῷ Ὀρθογωνίῳ αγ x βδ. Ἀρα τὸ Ὀρθογώνιον αγ x βδ τὸ ὑπὸ τῶν Διαγωνίων, ἴσον εἰς τοῖς δυσὶν Ὀρθογωνίοις τοῖς ὑπὸ τῶν ἀντιθέτων Πλευρῶν, τῷ τε ὑπὸ αβ x γδ, καὶ τῷ ὑπὸ αδ x βγ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΖ.

Εἰ δὲ αἱ τρεῖς Εὐθεῖαι (αβ, ζλ, βγ) ἀνάλογον ᾧσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων (αβ, βγ) περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ἴσον εἰς τῷ ἀπὸ τῆς μέσης (ζλ) Τετραγώνῳ.

(1) ΚΑ. τῷ γ'. (2) Θ. Πόρισμα. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (3) Διὰ τὴν ἀνὰ χοῖραν. (4) ΚΑ. τῷ γ'. (5) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (6) Διὰ τὴν παρὰ τὴν. (7) Α. τῷ β'.

Καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης Τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς Εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Μέρος Α'. Τῇ μέσῃ ΖΛ ληφθῆτω ἴση ἡ Ξ· καὶ ἐπειδὴ καδ' ὑπόθεσιν α. 372.
 $αβ : ζλ :: ζλ : βγ$, ἡ δὲ δὴ $ξ = ζλ$, ἔσαι ἡ $αβ : ζλ :: ξ : βγ$. Ὡς (1)
 τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων $αβ \times βγ$ Ὀρθογώνιον ἴσον τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν
 μέσων $ζλ \times ξ$, ταῖς τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ ΖΛ.

Μέρος Β'. Δείκνυται ὁμοίως ἐκ τῆ δευτέρᾳ μέρης τῆς ἀνωτέρω.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Ἐκ δὲ δὴ ταύτης, ἡ τῆς ΙΓ'. εὐθὺς ἐστίν, ὡς εἰν ἐν Κύκλῳ Κάθετος Α'.
 ἡ Ζγ ἐπὶ τῆς Διαμέτρῳ σαδῇ αβ, τὸ ὑπὸ αβγ Ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ
 ἀπὸ τῆς Ζγ Τετραγώνῳ. Ὁρα τὸ ἐν τῇ ΙΓ'. Σχῆμα.

Καὶ ντεῦθεν πρὸς τὴν δοδεῖσαν αβ, τὸ ἀπὸ τῆς δοδεΐσης Ζλ Τετράγωνον Β'.
 Ζξ ῥάδιον παραβαλεῖν, εὐρύοντας τὴν πρὸς τὰς αβ καὶ Ζλ τρίτην ἀνάλογον
 βγ (2), καὶ ἐκ τῆς δοδεΐσης ἡ τῆς εὐρεΐσης, Ὀρθογώνιον (3) τὸ ὑπὸ
 αβγ συστήσαντας. Ταῦτο γὰρ ἔσαι τῷ δοθέντι Τριγώνῳ Ζξ (4) ἴσον, πρὸς τὴν
 δοδεῖσαν αβ ἥδη παραβεβλημένον.

Καὶ ντενδε δὴλη ἐστὶ ἡ Μέθοδος τῆ τὸν δοθέντα λόγον αβ πρὸς Ζλ Γ'.
 περαιτέρω προαγαγεῖν, ἥτοι τῆ δυεῖν δοδεΐτων αβ ἡ Ζλ τρίτην ἀνάλογον
 προστερεῖν· εἰν ἀμέλει τις τὸ ἀπὸ τῆ ἐπομένῃ Ζλ Τετράγωνον πρὸς τὸ
 ἡγούμενον αβ παραβάλλῃ· τρίτην γὰρ ἔτω λήφεται ἀνάλογον τὴν βγ. Εἰν
 δὲ ἐπὶ ἀριθμῶν δοθῇ τις λόγος ὁποιοῦν, ὁ τρίτος ἀνάλογος εὐρεθήσεται,
 παλλαπλασιασθέντος τῆ ἐπομένῃ καδ' ἐαυτὸ, καὶ τῆ ἐντεῦθεν ἀνακύφαντος
 τῷ παλλαπλασιασμῷ διὰ τῆ ἡγούμενῃ διαιρεθέντος· Τὸ γάρ τοι πηλίκον (5)
 ἔσαι ὁ ζητούμενος τρίτος ἀνάλογον.

Εντεῦθεν δ' αὖθις ἡ Γραμμὴν ἀπρόσβατον, ἥς θάτερον τῶν περάτων ἂν δ. κ. 373.
 εἴη προσβάσιμον, καταμετρεῖν διδασκόμεθα. Ἐςω γὰρ ἀπρόσβατος Εὐθεῖα
 ἡ γζ, ἡ προαγέσθω πέρας ἀνευ πρὸς τὸ Α. Ἀγέσθω δὲ ἀπὸ τῆ γ Ση-
 μείν ἡ Κάθετος ἡ γβ, ἡ πρὸς ὁποῖον ἂν δόξη τῶν ἐπὶ τῆς Καθέτης Σημείων
 β Γνώμων ἐφημερόσθω, ἥτοι Γωνία ὀρθή συνεσάσθω ἡ ὑπὸ αβζ, ὡς εἰ ἐτέ-
 ρας μὲν τῶν Πλευρῶν βζ τὸ τῆς δοδεΐσης πέρας ζ, εἰ ἐτέρας δὲ τῆς βε τὸ
 Σημεῖον τῆς αὐτῆς προαχθείσης διοπτάνεσθαι. Εἴτα μετρεῖσθω ἡ προσβητή

(1) Διὰ τὴν ἀνωτέρ. (2) ΙΔ. τῆ α'. (3) Σχόλ. τῆς Μς. τῆ δ. (4) Διὰ τὴν ἀνὰ
 χεῖρα. (5) Ἄλλου ἐκ τῆς ΙΖ. τῆ ε'. ἡ τῆ β'. Πορ. τῆς Ις. τῆ ε'.

αγ, ϵ ἐκ τῆς ἐφεξῆς ἀναλογίας σαφὲς ἔσαι (1) ἢ ἀπρόσβατος αγ : γβ : γδ : γε. Ἐὰν οὖν τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς γβ διὰ τῆς αγ διαιρεθῇ, τὸ πηλίκον (2) δώσει τὴν ζηταμένην Εὐθείαν γε. Ο. Ε. Ε.

Ἐντεῦθεν τέως ϵ ἢ ἡν δοθῇ Ὁρθογώνιον τὸ ὑπὸ αγ ϵ γβ, τῶν τμημάτων τῆς δοθείσης αβ, ἴσον τετέσι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς γε (ὅρα τὸ Σχῆμ. τῆς ΙΓ'. Πρωτ.), ἣτις μὴ μείζων εἴη τῆς ἡμισείας τῆς αβ, ῥᾶδιον ἔσαι ἐξευρεῖν τὰς τῷ Ὁρθογώνιῳ Πλευρὰς αγ ϵ γβ. Τετέσι τὴν δοθεῖσαν αβ οὕτω διελεῖν ἐξέσαι κατὰ τὸ γ, ὥς τὸ Ὁρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν αὐτῆς τμημάτων αγ, γβ, ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς δοθείσης Εὐθείας γε, ἣτις μὴ μείζων εἴη τῆς ἡμισείας τῆς αβ. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ δοθεῖσα γε (διὰ τὴν ἐν χειρὶ Πρότασιν) μέση ἀνάλογος ἐστὶ μεταξὺ τῶν αγ ϵ γβ, ἀπὸ τῆς ἐστὶ τὰ τμήματα τῆς δοθείσης αβ, τὸ ἐνταῦθα Πρόβλημα εἰς ταυτὸ φέρει εὐεῖω, οὐπερ ὑπετέθη ἡ λύσις ἐν τῷ Σχολίῳ τῇ Β'. Πορίσματος τῆς ΙΓ'. Πρωτάσεως τῇ παρόντος Βιβλίου.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Α'.

α. 374.

„Ἐὰν Τρίγωνον οὐτίσῃ (3) τῇ αβγ, ἡ κατὰ κορυφὴν Γωνία ὑπὸ βαγ
„δίχα τμηθῇ τῇ Εὐθείᾳ δα, ἣτις τὴν Βάσιν βγ τέμνεται εἰς, κατὰ τὰ
„Τμήματα βδ ϵ δγ, ἔσαι ἡ διαφορὰ τῶν Ὁρθογωνίων, τῇ τε ὑπὸ τῶν Πλευ-
„ρῶν αβ ϵ αγ, ϵ τῇ ὑπὸ τῶν Τμημάτων τῆς Βάσεως βδ ϵ δγ, ἴση τῷ Τε-
„τραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς αδ τῆς διχοτομήσεως τὴν ὑπὸ βαγ Γωνίαν· τετέστιν
„Ὁρθογώνιον ὑπὸ βαγ — Ὁρθογώνιον ὑπὸ βδγ = αδΓ.

Γεγράφω γὰρ Κύκλος περὶ τὸ Τρίγωνον αβγ, ϵ προεκβεβλήσω ἡ αδ, ὥς ἐκ τῆς Περιφέρειαν προσπεσεῖν κατὰ τὸ ε· καὶ ἐπιζευχθεῖσης τῆς εγ ἐν τῷ Τρίγωνῳ αεγ, διὰ τῇ Σημεῖα δ ἀχθήτω πρὸς τὴν Βάσιν εγ παράλληλος ἡ δζ· ἔσαι γὰρ τὰ αδζ ϵ αεγ Τρίγωνα (4) ὅμοια. Ἀλλὰ γὰρ διὰ τὰς ὑπὸ εαδ, εαγ (5) τὰς ἴσας, ϵ τὰς ὑπὸ αβδ, αεγ, τὰς ἐν τῷ αὐτῷ Τμήματι αβεγ, ϵ ἐπομένως ϵ αὐτὰς (6) ἴσας, ϵ τὰ Τρίγωνα αβδ, αεγ, ϵ αὐτὰ (7) ἐσιν ὅμοια, τὰ ἄρα Τρίγωνα αβδ, αδζ ὅμοια ἐστὶ, καὶ αβ : αδ : αδ : αζ· Ταύτητοι διὰ τὴν ἐν χειρὶ Πρότασιν τὸ βαζ Ὁρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ αδ Τετραγώνῳ· ἀλλ' (8) αδ : αζ :: δε : ζγ, ἄρα αβ : αδ :: δε : ζγ.

(1) Α. Πόρ. τῆς Η. τῇ ε'. (2) Διὰ τὸ ἀνωτ. Γ. Πόρ. (3) Ὅρα Ἀριθμητ. καθολ. Σελ. 103. τῆς Α' ἐκδόσεως. (4) Α. Πόρ. τῆς Δ. τῇ ε'. (5) Εἰς ὑποθ. (6) ΚΑ. τῇ γ'. (7) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῇ α'. ϵ τὴν Δ. τῇ ε'. (8) Β. τῇ ε'.

Καὶ (1) Ὁρθογών. βα × ζγ = Ὁρθογ. αδε = (2) Ὁρθογωνίω βδγ. Ἀμ-
 φω δὲ τὰ Ὁρθογώνια, τότε ὑπὸ βαζ, καὶ τὸ ὑπὸ βα × ζγ, τινέσι (3) τὸ
 ὑπὸ βαγ = αδτ + βδγ. Καὶ ἀφαιρεθέντος τούτων ἑκατέρωθεν τῷ Ὁρθογωνίῳ
 βδγ, ἔσται βαγ — βδγ = αδτ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Εἴαν τῷ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ Τριγώνῳ αβγ ἡ κατὰ κορυ-
 φὴν Γωνία α. δίχα τμηθῇ δι' Εὐθείας τῆς αε τῆς Κύκλῳ μὲν τῷ αὐτῷ
 ἐνηρμοσμένης, τὴν δὲ Βάσιν κατὰ τὸ δ. τεμνήσῃς, ἔσται βα : αδ :: εα : αγ.
 Τὰ γὰρ βαδ, εαγ Τρίγωνα ὅμοια ἔσιν, ὡς ἐκ τῷ προληφθέντος Σχολίου
 κατάδηλον ἐστὶ.

Σ χ ό λ ι ο ν Β'.

Καὶ τῷ ἐφεξῆς δὲ Προβλήματος, τῷ ἐν τοῖς Σφαιρικοῖς ἐκ ἀχρήσ-
 τυγχάνοντος, ἐκ τῶν προαποδεδειγμένων ληφθεῖν ἂν ἡ επίλυσις. Ἐστὶ
 δὲ τὸ Πρόβλημα τοῦτον.

„Κύκλῳ δοθέντος τῷ ζδμ, διὰ δυοῖν Σημεῖων β καὶ γ τῶν ἐν αὐτῷ,
 „Περιφέρειαν Κύκλῳ ἑτέρῳ ἀγαγεῖν, ἣτις ἂν τὴν τῷ δοθέντος Κύκλῳ Περι-
 „φέρειαν δίχα τέμνῃ.

Διὰ τὰ Κέντρα α καὶ τῷ ἑτέρῳ τῶν δοθέντων Σημεῖων β, ἀχθήτω Εὐ-
 θεῖα μὴ πεπερασμένη βαμε. ἀχθήτω δὲ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α Κάθετος αδ, καὶ
 ἐπεξεύχθω ἡ βδ. Ἐν δὲ τῷ Τριγώνῳ αβδ, διὰ τὴν ὑπὸ βαδ Ὁρθὴν, ἔσται ἡ
 ὑπὸ αβδ (4) ὀξεία. Ἐπὶ δὲ τῆς βδ ἤχθω πρὸς ὀρθάς ἡ δε, ἣτις διὰ τὰς
 ὑπὸ αβδ, βδε, τὰς δυεῖν Ὁρθῶν ἔσται (5) ἐλάσσονα, διατεμεῖ τὴν μὴ πε-
 περασμένην βαμε, οἷον κατὰ τὸ ε. Διὰ μὲν οὖν τῶν Σημεῖων βγε, εἴαν Κύκ-
 λος γραφῇ ὁ βρε (6), λέγω ὅτι τελεωθήσεται τὸ ζητούμενον.

Ἀχθήτω γὰρ ἡ τῷ ἤδη καταγραφέντος Κύκλῳ βρε ὑποτείνουσα, διὰ τῷ
 Κέντρῳ α τῷ δοθέντος Κύκλῳ χωρῶσα, καὶ ἐφ' ἑτέρας τῶν Περιφερειῶν το-
 μῆς η, δηλ. ἡ καφ. Ἀχθήτω δὲ καὶ ἡ τῷ δοθέντος Κύκλῳ ζδμ Διάμετρος
 καὶ διὰ τῆς αὐτῆς τῶν Περιφερειῶν τομῆς η.

Ἐπειδὴ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας τῷ Τριγώνῳ βδε, ἡ Κάθετος ἤχθῃ δα
 ἐπὶ τῆς Βάσεως βε, ἔσονται (7) αβ, αδ, αε ὅμοιαι. Ὅθεν δὴ διὰ τὴν παρῶσαν

α. 375.

(1) Ιε. τῷ ε'. (2) Λε. τῷ γ'. (3) Α. τῷ β'. (4) Ε. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (5)
 Σχόλ. τῆς ΑΔ. τῷ α'. (6) Ε. τῷ δ'. (7) Α. Πόρ. τῆς Η. τῷ ε'.

Πρότ. Ὁρθογών. βαε = αδ^T, τετέσι διὰ τὰς τῆ δοθέντος Κύκλου ζῆμα ἴσας
 Ἡμιδιαμέτρους αδ, αη, αζ, ἔσαι τὸ Ὁρθογών. βαε = Ὁρθογ. ηαζ. Ἐπεὶ
 δὲ ἐν τῷ Κύκλῳ ἔρε, αἱ Εὐθείαι βε, ηφ ἀλλήλας τέμνουσι κατὰ τὸ α, ἔσαι
 (1) Ὁρθογ. βαε = Ὁρθογ. ηαφ. Ὡς τὸ Ὁρθογ. ηαζ = Ὁρθογ. ηαφ.
 καὶ ἐπομένως (2) αζ = αφ, τὰ τε Σημεῖα ζ καὶ φ συμπεσάνται, καὶ τό γε
 τόξον ζῆ (3) τῷ τόξῳ ζῆ ἴσον ἐστί. Ο. Ε. Ε.

Σ χ ό λ ι ο ν Γ'.

κ. 376.

Εν ὁτῶν Κύκλῳ, οὗ Διάμετρος ἡ αβ, καὶ τῶν τόξων αγ, αδ, ὁρθὰ Ἡ-
 μίτονα ἐσὶ τὰ γε, δζ, Ἡμίτονα δὲ πλάγια τὰ αε, αζ, Ὑποτεινέσθαι δὲ αἱ αγ,
 αδ, ἔσαι αε πρὸς αζ ὡς αγ^T : αδ^T. Τετέσι τὰ πλάγια τῶν Ἡμιτόνων εἰ-
 σὶν ὡς τὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν Ὑποτεινέσθων.

Ἀχθεισὼν γὰρ τῶν βδ, βγ, ἔσονται (4) βα, αγ, αε :: καὶ (5) πα-
 ραπλησίως βα, αδ, αζ ::, ἄρα (6) βα × αζ = αδ^T, καὶ βα × αε = αγ^T.
 Ἀλλὰ (7) αε : αζ :: βα × αε : βα × αζ, ἄρα αε : αζ :: αγ^T : αδ^T.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΗ.

„Ἀπὸ τῆς δοθείσης Εὐθείας (ρε), τῷ δοθέντι Πολυγώνῳ εὐθυγράμ-
 μῳ (βπ) ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον Εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

κ. 377.

Τὸ δοθὲν Πολύγωνον βπ εἰς Τρίγωνα ἀναλύσας, ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐ-
 θέας ρσ, ποιήσον Γωνίας (8) τὰς ρ καὶ ξ ἴσας ταῖς Γωνίαις β καὶ α· συμπε-
 σάνται δὲ (9) αἱ Πλευραὶ κατὰ τὸ χ· Πάλιν ἐπὶ τῆς χσ σύνητον Γωνίαν τὰς
 υ καὶ ι ἴσας ταῖς Γωνίαις τ καὶ γ, καὶ συνελεύσονται αἱ Πλευραὶ κατὰ τὸ
 ψ· Λέγω κτ.

Ἐπειδὴ γὰρ αἱ Γωνίαι ρ καὶ ξ ἴσαι ταῖς β καὶ α ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ
 αἱ ε καὶ κ (10) ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις. Ἐπειδὴ δὲ (11) καὶ υ καὶ τ συνιστάν-
 ται, ἔσαι καὶ ὅλη ἡ ευ = ὅλη τῇ κτ. Ὡσαύτως δὲ ἐπεὶ ξ καὶ ι = ταῖς α
 καὶ γ ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ ἡ ὅλη ξι τῇ ὅλη αγ ἴση ἔσαι. Καὶ ἐπειδὴ αἱ
 υ καὶ ι ταῖς τ καὶ γ ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ (12) ψ καὶ π ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις.
 Τὰ ἄρα Πολύγωνα ρψ καὶ βπ ἰσογώνια ἐσὶ· Λοιπὸν οὖν δεῖξαι, ὅτι καὶ

(1) ΑΒ. τῆ γ'. (2) Α. τῆ ε'. (3) Ὁρ. Κ. τῆ α'. (4) Β. Πόρ. τῆς Η. τῆ ε'. (5) Διὰ τὸ αὐτό. (6) Διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας. (7) Α. τῆ ε'. (8) ΚΓ. τῆ α'. (9) ΙΖ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῆ α'. καὶ τὸ Σχόλ. τῆς ΑΑ. τῆ αὐτῆς. (10) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῆ α'. (11) Εκ κατασ. (12) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῆ α'.

τὰς Πλευρὰς ἀνάλογον· ρσ:σχ::(1) βζ:ζλ· καὶ πάλιν σχ:σψ::ζλ:ζπ (2). Ἄρα ἡ δι' ἴσιν (3) ρσ:σψ::βζ:ζπ, κτ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐντεῦθεν δὴ ἡ τὰς Γεωγραφικὰς, ἡ Χωρογραφικὰς, ἡ Γεωδαιτικὰς πί-
νακας, ἡ τὰς ἀγρῶν, ἡ χωρῶν, ἡ οἰκοδομημάτων ἰχνογραφίας διαγράφειν
μεθοδεύομεθα· Οὐδὲν γὰρ ἄλλο οἱ τῶν τοιούτων καταγραφεῖς ποιῶντες εἰσιν,
ἢ τὰ μεγάλα τῶν Σχημάτων πρὸς τὰ βραχύτερα μὲν, ὅμοια δὲ ἀνάγοντες·
τῷ δ' ὅπερ ἡ ἐν χερσὶ Πρότασις ποιεῖν ὑποτίθησι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΘ.

„Τὰ ὅμοια Τρίγωνα (X, Ψ) ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων
„(τατέστι τῶν τὰς ἴσας Γωνίας ὑποτείνουσῶν) Πλευρῶν ἀγ ἡ ζι.

Τατέστιν ἐὰν (4) ἡ ἀγ:ζι::ζι:απ τρίτην, τὸ Τρίγωνον X ἐστὶ πρὸς τὸ
Τρίγωνον Ψ, ὡς ἀγ πρῶτη πρὸς ἀπ τὴν τρίτην ἀνάλογον. Ὅρα τὸν Γ'. Ὅρισμ.
τῷ Ε'. Βιβλίου.

κ. 378

Ἐπειδὴ τὰ X ἡ Ψ ὅμοια ἐστὶ, (5) βα:ιλ::αγ:ιζ· Ἀλλ' ἐκ κατα-
σκευῆς ἀγ:ιζ::ιζ:απ, ἄρα (6) βα:λι::ιζ:απ· Ἄρα (τῆς βπ ἐπιζευχ-
θείσης) ἐπὶ τῶν Τριγώνων πβα ἡ Ψ, αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς Γωνίας α ἡ ι
τὰς (διὰ τὸν Ὅρισμ. τῶν ὁμοίων Τριγώνων) ἴσας, ἀντιπεπόνθασιν, ὥστε (7)
τὰ παβ ἡ Ψ ἴσα ἐστὶν· Ἀλλὰ τὸ X πρὸς τὸ πβα ἐστὶν (8) ὡς Βάσις ἀγ πρὸς
Βάσιν ἀπ, ἄρα ἡ X πρὸς Ψ, ὡς ἀγ πρὸς ἀπ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κ.

„Τὰ ὅμοια Πολύγωνα (αβγδε, ζηδικ) διαιρεῖται Α'. εἰς τε ὅμοια Τρί-
„γωνα (Φ, Σ ἡ Π, Τ ἡ Ρ, Υ) ἡ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος· Β'. ἡ ὁμόλογα
„τοῖς ὅλοις· Καὶ Γ'. Πολύγωνον πρὸς Πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔ-
„χει, ἢ περ ἡ ὁμόλογος Πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον Πλευρὰν (αβ, ζη),
„τατέστιν ἢ περ αἱ μεταξὺ τῶν ἴσων Γωνιῶν β, η, ἡ βαε, ηζι ἔχουσι πρὸς
„ἀλλήλας.

κ. 379

Μέρος Α'. Ἐπειδὴ τὰ Πολύγωνα ὅμοια ἐστὶ (9), πάντως ἡ ἴσογώνια·

(1) Δ. τῷ ε'. (2) Διὰ τὴν αὐτήν. (3) ΚΒ. τῷ ε'. (4) ΙΑ. τῷ ε'. (5) Δ. τῷ ε'.
(6) ΙΑ. τῷ ε'. (7) ΙΕ. τῷ ε'. (8) Α. τῷ ε'. (9) Δ. Ὅρ. τῷ ε'.

καὶ τῶν ἐν τέτοις Γωνιῶν ἡ μὲν α ἴση τῇ ζ , ἡ δὲ β τῇ η , ἡ δὲ γ τῇ θ , ἡ δὲ δ τῇ ι , ἡ δὲ ϵ τῇ κ . Ἐπεὶ δὲ (1) $\alpha\beta : \beta\gamma :: \zeta\eta : \eta\theta$, αἵ τε β καὶ η Γωνίαι ἴσαι, δῆλον (2) ὡς ὅμοια ἐστὶ τὰ Τρίγωνα ϕ καὶ σ . Παραπλησίως ὅμοια δειχθήσονται εἶναι καὶ τὰ ρ καὶ τ . Εἴτα ἐπεὶ αἱ ὑπὸ $\beta\gamma\delta$, καὶ ὁλοχερεῖς, καὶ ἐν καὶ αἱ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρέμεναι ὑπὸ $\beta\gamma\alpha$, καὶ $\zeta\eta$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ $\alpha\gamma\delta$ καὶ $\zeta\theta$ ἴσαι δὴ πᾶ ἔσονται. Ὡσαύτως δεῖξω καὶ τὰς ὑπὸ $\alpha\delta\gamma$ καὶ $\zeta\theta$ συνιστάσθαι ἀλλήλαις. ὥστε καὶ ἡ τρίτη (3) ὑπὸ $\gamma\alpha\delta$ τῇ τρίτῃ ὑπὸ $\theta\zeta\iota$ ἴση ἔσται. Καὶ τοίνυν (4) καὶ τὰ π καὶ τ Τρίγωνα ὅμοια ἐστὶ καὶ αὐτά. Δῆλον ἄρα τὸ Α'.

Μέρος Β'. Ἐπειδὴ ὅμοια τὰ Φ καὶ Σ , ὁ λόγος τῶν Φ πρὸς τὸ Σ διπλασίων (5) ἔσται τῶν λόγων τῆς $\gamma\alpha$ πρὸς τὴν $\theta\zeta$. Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ λόγος τῶν Π πρὸς τὸ Γ διπλασίων ἔσται τῶν λόγων τῆς $\gamma\alpha$ πρὸς τὴν $\theta\zeta$. Ἀρα (6) $\Phi : \Sigma :: \Pi : \Gamma$. Ὡσαύτως δεῖξω $\Pi : \Gamma :: \rho : \tau$. Τοιγαρὲν (7) ὡς ἐν τῶν ἡγαμένων Φ πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων Σ , οὕτω πάντα ἅμα τὰ ἡγόμενα Φ , Π , ρ πρὸς πάντα τὰ ἐπόμενα Σ , Γ , τ ἅμα, ὅπερ ἐστίν, ὅτω τὸ Πολύγωνον πρὸς τὸ Πολύγωνον. Ο. Η. τὸ Β'.

Μέρος Γ'. Ὁ λόγος τῶν Φ πρὸς τὸ Σ (8) διπλασίων ἐστὶ τῶν λόγων $\alpha\beta$ πρὸς $\zeta\eta$. Ἀλλ' ὁ λόγος τῶν Πολυγώνων πρὸς τὸ Πολύγωνον φθάσαι ἐδείχθη ἴσος τῷ λόγῳ τῶν Φ πρὸς τὸ Σ . ἄρα καὶ ὁ λόγος τῶν Πολυγώνων πρὸς τὸ Πολύγωνον διπλασίων ἐστὶ τῶν λόγων τῆς $\alpha\beta$ πρὸς τὴν $\zeta\eta$. Ο. Η. τὸ Γ'.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α.

Α'. Ἀπαντὰ τὰ κανονικὰ τῶν Σχημάτων, οἷα τὰ ἰσόπλευρα Τρίγωνα, καὶ τὰ Τετράγωνα, καὶ τὰ Πεντάγωνα, καὶ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλα ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν Πλευρῶν. Τὰ γὰρ κανονικὰ πάντα ἀλλήλοις ὅμοια, ὡς δῆλον ἐκ τῶν Α'. Ο'ρ. τῆς ε'.

Β'. Καὶ εἴαν ᾧσι τρεῖς Εὐθεῖαι ἀνάλογον, ἔσται ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ὡς τὸ τυχὸν ἐπίπεδον Σχήμα (εἴτε Τρίγωνον ἢ, εἴτε Τετράπλευρον, εἴτε Πολύγωνον ὅποιον) τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, πρὸς τὸ ὅμοιον Σχήμα καὶ ὁμοίως καταγεγραμμένον τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. Ἡ γὰρ ἔσται τῶν ἀναλόγων Εὐθειῶν ἡ Α'. πρὸς τὴν Γ', ὡς ὁποιοῦν τῶν ἐπιπέδων Σχημάτων τὸ ἀπὸ τῆς Β', πρὸς τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως καταγεγραμμένον τὸ ἀπὸ τῆς Γ'. Κατὰ γὰρ τὸν Γ'. τῆς Ε'. Ὁρίσμων, τῶν τριῶν ἀναλόγων ἡ Α'. ἐστὶ πρὸς τὴν Γ'. ἐν λόγῳ διπλα-

(1) Διὰ τὸν αὐτόν. (2) ε'. τῆς ε'. (3) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῆς α'. (4) Α. τῆς ε'. (5) Διὰ τὴν αὐτὴν, (6) ΑΒ. τῆς ε'. (7) ΒΒ. τῆς ε'. (8) Διὰ τὴν αὐτὴν.

σίονι τῆς Α'. πρὸς τὴν Β', ἢ τῆς Β'. πρὸς τὴν Γ'. Οὕτως διὰ τὴν ΙΘ'. ἢ τὴν παρῶσαν Κ'. δῆλον τὸ προτεθέν.

Εἰν' ἐφ' οἷσις δὲ ποτε Σχήμασιν ὁμοίοις, αἱ Πλευραὶ αβ, ζη (ὄρα τὸ Γ'. Σχ. τῆς Προτ.) αἱ μεταξύ τῶν ἴσων Γωνιῶν δῆλαι ὦσι, ἢ ὁ λόγος ὁ τῶν Σχημάτων ἔσαι κατάδηλος. Οἷον ἔσω αβ δυοῖν ποδῶν, ἢ ζη ποδῶν ἕξ, καὶ γινέσθω 2 : 6 :: 6 : 18. Ἐῖσαι γάρτοι τὸ ἔλαττον (1) τῶν Σχημάτων πρὸς τὸ μείζον ὡς 2 πρὸς 18, ταύτης ὡς 1 πρὸς 9. Εὑρίσκεται δὲ ὁ τρίτος ἀνάλογον ἀριθμὸς (2), τῷ δευτέρῳ τῶν δοθέντων κατ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος, ἢ τῷ γινόμενῳ διὰ τῷ Α'. διαιρεμένος.

Ἐκ τῆς αὐτῆς δὲ ταύτης Προτάσεως ἢ ἡ ἀρίστη μέθοδος ἐπιφέρεται, τῷ δ. τὸ δοθέν ὁποῖον εὐθύγραμμον Σχῆμα προσαύξειν, ἢ ἀπομεινῶν κατὰ λόγον τὸν δοθέντα.

Οἷον ἐδελήσας Πεντάγωνον οὗ Πλευρὰ ἢ αβ, ἕτερον συστήσασθαι πενταπλάσιον Πεντάγωνον, μεταξύ τῶν ὁρῶν τῷ δοθέντος λόγῳ αβ πρὸς βγ εὐρεῖ (3) μέσσην ἀνάλογον τὴν βχ, καὶ ἀπ' αὐτῆς ποίησον (4) Πεντάγωνον τῷ δοθέντι ὁμοῖον. τὸ γὰρ ταῦτο πενταπλὺν ἔσαι τῷ δοθέντος.

Διὰ γὰρ τὸ Β'. Πόρ. τῆς ἐν χερσὶ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ Πεντάγωνον εἰς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βχ, ὡς ἢ αβ πρώτη πρὸς τὴν βγ τρίτην.

Ἦδη δὲ ἐπεὶ ἢ ὁ τῶν Κύκλων λόγος διπλασίῳ ἐστὶ τῷ λόγῳ τῶν Διαμέτρων, ὡς δειχθήσεται ἐν τῇ Β'. Προτ. τῷ ΙΒ'. Βιβλίῳ, αὕτη ἢ πρᾶξις ἢ πρὸς τὰς Κύκλους αὐτὰς ἐπαρκέσει.

Τῶν ὁποῖων ὁμοίων Σχημάτων εἰδὼς τὸν λόγον, εἴσῃ δὴ ἢ τὸν λόγον ὃν ἔχουσιν αἱ τέτων Πλευραὶ, αἱ μεταξύ τῶν ἴσων Γωνιῶν προτεινόμεναι. Αὗται γὰρ ἐν ὑποδιπλασίῳ λόγῳ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας τῷ ὃν ἔχει τὰ Σχήματα.

Οἷον ἔσω τὸ Φ, Π, Ρ πρὸς τὸ Σ, Τ, Υ (ὄρα τὸ Σχ. τῆς Κ'). ὡς 4 πρὸς 9. Μεταξὺ δὲ 4 ἢ 9 ἀριθμὸς μέστος ἀνάλογον εὐρεθήτω ὁ 6, ὃ τελεῖται (5) τῆς Τετραγωνικῆς ὑπεξαγομένης ῥίζης ἀπὸ τῷ ἀριθμῷ $36 = 4 \times 9$. Καὶ ἐπεὶ δὲ 4, 6, 9 ::, τὰ δὲ τοῖς Σχήματι Φ, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς 4 πρὸς 9, ἔσονται αἱ ἐκείνων ὁμόλογοι Πλευραὶ (6) ὡς 4 πρὸς 6, ταυτὸν εἰπεῖν ὡς 2 πρὸς 3.

Κάντευσεν εὐθύνην ἐστὶ τὰς ἀπαιδευτῶς οἰομένους, τὰς τῶν ὁμοίων Σχη- ε'.

(1) Β. Πόρ. ταύτης. (2) Γ. Πόρ. τῆς ΙΖ. τῷ ε'. (3) ΙΓ. τῷ ε'. (4) ΙΗ. τῷ ε'.
(5) Δῆλον ἐκ τῆς ΙΖ. τῷ ε'. (6) Πόρ. Β. τῆς παρῶσ.

μάτων λόγους ἐπίσης χωρεῖν τοῖς λόγοις τῶν ἐν ἐκείνοις Πλευρῶν. Ἐὰν γὰρ δυοῖν ἢ μόνον Τριγώνων ὁμοίων, ἀλλὰ καὶ Τετραγώνων, Πενταγώνων, Ἑξαγώνων, κξ: (ἢ καὶ Κύκλων), αἱ Πλευραὶ (εἰτ' οὖν αἱ Διάμετροι) ὥσι πρὸς ἀλλήλας ὡς 2 πρὸς 1, τὰ Σχήματα αὐτὰ, τατέσι τὰ ὑπὸ τῶν Σχημάτων περιειλημμένα χωρία ἔτονται ὡς 4 πρὸς 1. Καὶ ἐὰν αἱ Πλευραὶ ὥσιν ὡς 3 πρὸς 1, τὰ Σχήματα ἔσαι ὡς 9 πρὸς 1, ἐν διπλασίονι· δηλονότι λόγῳ τῇ τῶν Πλευρῶν ἢ τῶν Διαμέτρων. Εἰσὶ γὰρ 4, 2, 1 :: ὁμοίως δὲ καὶ 9, 3, 1 ::.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

α. 381.

Ἐπειδὴ τῶν Τετραγώνων Ε, Κ ὁ λόγος διπλασίων ἐστὶ τῇ λόγῳ τῶν Πλευρῶν ξρ, συ, ταύτητοι ὁ λόγος ὁ διπλασίων τῶν ξρ φέρε καὶ συ, διὰ τῇ λόγῳ ξρ^Τ πρὸς συ^Τ συνεχῶς εἴωθεν ἐπισημαίνεσθαι. Οἷον ἐὰν ἐπὶ τῶν Πλευρῶν ξρ καὶ συ, συσαδῶσιν ὁποιοῦν ποτε Σχήματα, ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα, ἐπειδὴ αὐτὰ ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων Πλευρῶν ξρ, συ, ἔσονται πρὸς ἀλλήλα ὡς Τετράγωνον τὸ Ε πρὸς Τετράγωνον τὸ Κ, ὅπερ ἔσιν ὡς ξρ^Τ: πρὸς συ^Τ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΑ.

α. 382.

„Τὰ τῷ αὐτῷ Εὐθύγραμμῳ (γ) ὁμοία, καὶ ἀλλήλοις ὁμοία (α, β) εἰσὶ. Δῆλον ἐκ τῇ Α'. Οἷσμι. τῇ ζ', καὶ τῇ Α'. Α'ξιόμ. τῇ Α', καὶ τῇ ΙΑ'. τῇ Ε'.

Ἐπειδὴ γὰρ τότε α καὶ τὸ β, ἑκατέρῳ δηλονότι τῷ Σχήματι τῷ αὐτῷ γ ὁμοίῳ ἔσόν, ἑκατέρῳ δὴπε ἔσεσθον τῷ αὐτῷ καὶ ἰσογωνίῳ ἀνάλογον ἔχοντε, καὶ τὰς περὶ τὰς ἰσας Γωνίας Πλευρὰς ταῖς τῇ γ. Καὶ ἰσογωνίῳ ἄρα τῷ α καὶ β Τριγώνῳ καὶ ἀλλήλοιν, καὶ ἀνάλογον ἔχοντε τὰς περὶ τὰς ἰσας Γωνίας Πλευρὰς, καὶ δὴ καὶ ὁμοίῳ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΒ.

„Ἐὰν τέσσαρες (ἢ πλείους) Εὐθεῖαι (ζι, λπ, καὶ ξρ, συ) ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν Εὐθύγραμμα ὁμοιά τε, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα
„(Α, Β, καὶ Ε, Κ) ἀνάλογον ἔσαι· καὶ ἀνάπαλιν

„Καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν Εὐθύγραμμα (Α, Β, καὶ Ε, Κ) ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἦ, καὶ αὐταὶ αἱ Εὐθεῖαι (ζι, λπ, καὶ ξρ, συ) ἀνάλογον ἔσονται.

α. 383.

Η' δεῖξις τῇ Α'. Μέρες ἐκ τῇς ΛΔ'. τῇ Ε'. ἐστὶ σαφής· Ἐπειδὴ γὰρ

οἱ λόγοι $A : B$ ἢ $E : K$ (1) εἰσὶ διπλασίονες τῶν λόγων $\zeta : \lambda\pi$ ἢ $\xi\rho$:
 συ· οἱ δὲ (2) ἴσοι, καὶ οἱ ἄλλοι ἄρα.

Τὸ δέ τοι B' . Μέρος, ἢ αὐτὸ δῆλον ἐκ τῆς $\Delta E'$. τῇ E' . Ἐπειδὴ γὰρ
 ἴσοι οἱ λόγοι ὅ,τε $A : B$ ἢ ὁ $E : K$ · διπλασίονες δὲ (3) οὗτοι εἰσὶ τῶν
 λόγων $\zeta : \lambda\pi$ ἢ $\xi\rho$: συ, ἔσονται δὴ ἢ ἐκεῖνοι ἀλλήλοις ἴσοι.

Πορίσματα.

Κάντεῦθεν τὴν ἀρχὴν οἶδεν ἡ μέθοδος τῇ πολλαπλασιάζειν τε, ἢ δια- Α'.
 ρεῖν τὰς ρίζας τὰς τετραγωνεῖς. Ἐὰν γὰρ ἐπ' ἀλλήλαις πολλαπλασιασθῶ-
 σιν αἱ ποσότητες, αἷς τὰ ἐπίσημα τῶν ριζῶν προσήπται, τῷ δέ τοι γινο-
 μένῳ ἐπισημειωθῇ τὸ τῆς αὐτῆς ρίζης Σημεῖον, τῶν δοθεισῶν ἔτω ριζῶν
 ἀνακύψει τὸ παραγόμενον. Οἷον κείδωσαν $\sqrt{5}$ ἢ $\sqrt{3}$, αἷς χρὴ ἐπιπολλα-
 πλασιάσαι, φημὶ δὴ ὡς τὸ γινόμενον ἐστὶ $\sqrt{15}$ · ὅρος γὰρ δὴ πολλαπλα-
 σιασμῷ οὗτος, τὸ τὴν μονάδα εἶναι πρὸς τὸν πολλαπλασιάζοντα (φέρει $1 :$
 $\sqrt{3}$), ὡς ὁ πολλαπλασιαστέος ($\sqrt{5}$) πρὸς τὸ παραγόμενον. Ὡς τε διὰ τὴν
 ἀνὰ χειρὸς Πρότασιν, τὸ ἀπὸ μονάδος Τετράγωνον ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆ
 πολλαπλασιασῆ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆ πολλαπλασιασῆ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆ παρα-
 γομένης. Τῷτο δὲ ἐστίν, εἴπερ ἀντὶ τῇ Παραγομένῃ ἀριθμῷ τεθῇ τὸ π , ἔσαι
 $1 : 3 :: 5 : \pi^T$ · ἀλλ' $1 : 3 :: 5 : 15$, ἄρα $\pi^T = 15$, καὶ ἐπομένως $\pi = \sqrt{15}$.

Λύθις εἰ δέοι $\sqrt{15}$ διελθεῖν διὰ $\sqrt{5}$, πηλίκον ἔσαι $\sqrt{3}$, διαιρημένα
 δηλονότι τῇ 15 διὰ 5 , ἢ πρὸ τῆ πηλίκου 3 τῇ ἐπιστήμῃ τῆς ρίζης προτασσο-
 μένῃ· ὅρος γὰρ διαιρέσεως τὸν διαιρέτην ἔχειν πρὸς τὸν διαιρετέον, ὡς ἡ μο-
 νὰς πρὸς τὸ πηλίκον· Ὡς τε διὰ τὴν παρῶσαν Πρότασιν, τὸ Τετράγωνον τὸ
 ἀπὸ τῆ διαιρέτης, ἐστὶ πρὸς τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆ διαιρετέας, ὡς τὸ ἀπὸ
 μονάδος Τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆ πηλίκου. Τετέστιν εἰαν ἀντὶ τῆ πηλίκου
 τεθῇ λ , ἔσαι $5 : 15 :: 1 : \lambda^T$ · ἀλλ' $5 : 15 :: 1 : 3$, ἄρα $\lambda^T = 3$, ἢ ἐπο-
 μένως $\lambda = \sqrt{3}$.

Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ $αβ$ τμηθῇ ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ γ , τὸ Ὄρθογών. τὸ B. κ. 384.
 ὑπὸ τῶν Τμημάτων $αγ$, $γβ$ περιεχόμενον, μέσον ἀνάλογον ἐστὶ μεταξὺ τῶν
 ἀπὸ τῶν Τμημάτων αὐτῶν Τετραγώνων. Καὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης $αβ$ ἢ
 τῇ ἑτέρῃ τῶν Τμημάτων $αγ$, ἢ $γβ$ περιεχόμενον Ὄρθογώνιον, μέσον ἀνά-
 λογον ἐστὶ μεταξὺ τῶν Τετραγώνων, τῇ τε ἀπὸ τῆς ὅλης $αβ$, ἢ τῇ ἀπὸ
 τῆ εἰρημένης Τμήματος $αγ$ ἢ $γβ$. Καταγραφέντος γὰρ ὡς ἐπὶ Διαμέτρῃ τῆς

(1) ΙΘ. ἢ Κ. τῇ ζ'. (2) ΕΞ. ὑπο2. (3) Διὰ τὰς ἀνωτ.

$\alpha\beta$, τῇ Ἡμικυκλίᾳ $\alpha\zeta\beta$, καὶ ἀχθείσης ἐπὶ τὴν Διάμετρον Καθεύτω τῆς $\gamma\zeta$, εἰάν πληρωθῇ τὸ ὀρθογώνιον Τρίγωνον $\alpha\zeta\beta$, εὐδὴλον ὅτι (1) $\alpha\gamma : \gamma\zeta :: \gamma\zeta : \gamma\beta$, ἄρα διὰ ταύτην $\alpha\gamma^T : \gamma\zeta^T :: \gamma\zeta^T : \gamma\beta^T$. Τατέσιν (2) $\alpha\gamma^T : \alpha\gamma\beta :: \alpha\gamma\beta : \gamma\beta^T$.

Ἀλλὰ γὰρ (3) $\beta\alpha : \alpha\zeta :: \alpha\zeta : \alpha\gamma$. ὥστε $\beta\alpha^T : \alpha\zeta^T :: \alpha\zeta^T : \alpha\gamma^T$. Ἀρα (4) $\beta\alpha^T : \beta\alpha\gamma :: \beta\alpha\gamma : \alpha\gamma^T$. Τὸν αὐτὸν δὲ δῆπε τρόπον καὶ $\alpha\beta^T : \alpha\beta\gamma :: \alpha\beta\gamma : \beta\gamma^T$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΓ.

„Τὰ ἰσογώνια Παραλληλόγραμμα (X, Ψ) λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν Πλευρῶν (τατέσι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν Πλευρῶν $\alpha\gamma : \gamma\beta$, καὶ $\lambda\gamma : \gamma\zeta$).

κ. 385.

Ὅπερ ἐστίν, εἰάν γένηται $\gamma\beta : \Xi :: \lambda\gamma : \gamma\zeta$, ἔσται (5) $X : \Psi :: \alpha\gamma : \Xi$. Ὅρα τὰ ἡμῖν ἀποδεδειγμένα Βιβλ. Ε'. Μέρ. Γ'. Ἀριθ. ΙΓ', καὶ τὰ ἐν Ὁρ. Ε'. τῇ ε'. Βιβλία.

Κεῖσθωσαν γὰρ αἱ $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ οὕτως ἐπ' εὐθείας, ὥστε τὰς ἰσας Γωνίας ὑπὸ $\alpha\gamma\lambda$, $\beta\gamma\zeta$ ἐπὶ τὰ ἀντίθετα τῆς $\alpha\beta$ Εὐθείας ἀφορᾶν, καὶ οὕτως (6) ἔσονται αἱ $\gamma\lambda$, $\gamma\zeta$ ἐπ' εὐθείας καὶ αὐταὶ κείμεναι.

Συμπιπτεύωσαν οὖν αἱ $\iota\lambda$, $\sigma\beta$ κατὰ τὸ π'. Καὶ τοίνυν τὸ X Παραλληλόγραμμον (7) ἐστὶ πρὸς τὸ Παραλληλόγραμμον P, ὡς $\alpha\gamma$ πρὸς $\gamma\beta$, τὸ δὲ P πρὸς τὸ Ψ (8) ὡς $\lambda\gamma$ πρὸς $\gamma\zeta$ (τατέσιν ὡς $\gamma\beta$ πρὸς Ξ). Ὡς (9) δι' ἴσου $X : \Psi :: \alpha\gamma : \Xi$. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Α. Ἐκ ταύτης οὖν καὶ τῆς ΔΔ' τῇ Α'. δῆλον, ὅτι τὰ Τρίγωνα τὰ μίαν (οἷον τὴν πρὸς τῷ γ) ἰσην Γωνίαν ἔχοντα, λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν Πλευρῶν $\alpha\gamma : \gamma\beta$, καὶ $\lambda\gamma : \gamma\zeta$ τῶν περὶ τὰς ἰσας Γωνίας.

Β'. Ὅτι τὰ Ὀρθογώνια, καὶ δὴ (10) καὶ τὰ ὁποιαδήποτε Παραλληλόγραμμα, λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων Βάσεως πρὸς Βάσιν, καὶ ὕψους πρὸς ὕψος. Ὡσαύτως δ' ἄντις εἰσβαλεῖν ἔχει καὶ περὶ τῶν Τριγώνων (11) τῶν τε ὀρθογωνίων καὶ ὁποιωνῶν ἄλλων.

(1) Α. Πόρ. τῆς Η. τῇ ε'. (2) Α. Πόρ. τῆς ΙΖ. τῇ ε'. (3) Β. Πόρ. τῆς Η. τῇ ε'. (4) Διὰ τὴν ΙΖ. τῇ ε'. (5) Διὰ τὸν Ε'. Ὁρισμ. τῇ ε'. (6) ΙΓ'. ΙΔ. τῇ α'. (7) Α. τῇ ε'. (8) Διὰ τὴν αὐτήν. (9) ΚΒ. τῇ ε'. (10) ΑΕ. καὶ Ας. τῇ α', καὶ Ὁρ. Γ. τῇ ε'. (11) Ὁρισμ. Γ. τῇ ε'. καὶ ΑΖ. καὶ ΑΗ. τῇ α'.

Δῆλον δὲ ὅτι ὅπως ἢ τῶν Τριγώνων ἢ τῶν Παραλληλογράμμων ἀνάλογια παρίσταται. Ἐξώσαν γὰρ Παραλληλόγραμμα τὰ Χ ἢ Ψ, ἢ τῶν Βάσεις αἱ αγ, γβ, ὑψὲς δὲ τὰ γλ, γζ. Καὶ γινέσθω (1) ὡς γλ ὑψος, πρὸς ὑψος τὸ γζ, οὕτω τῶν Βάσεων ἢ ἐτέρω γβ πρὸς Ξ. Ἐσται γὰρ δὴ τὸ Παραλληλόγραμμον Χ πρὸς τὸ Παραλληλόγραμμον Ψ, ὡς αγ πρὸς Ξ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΔ.

„Παντὸς Παραλληλογράμμου (σζ) τὰ περὶ τὴν Διάμετρον (αβ) Παραλληλόγραμμα (γλ, ξι), ὁμοία ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ ἢ ἀλλήλοις, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀμέλειται τὰς ὁμολόγους Πλευράς, ἥτοι ἐπ' εὐθείας κειμέναις, ἢ παραλλήλως γῶν ἔχοντα.

Διὰ τὴν ΚΖ'. τῆ Α'. ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ ὑπὸ βγε, βτα, καὶ αἱ ὑπὸ βλε, βζα. Διὰ τὴν αὐτὴν δὲ ἢ ἢ ὑπὸ γελ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γιζ, τατέ- (1) (διὰ τὴν αὐτ.) τῇ ὑπὸ σαζ. ἢ δὲ δὴ κατὰ τὸ β ἢ τῷ ὅλῳ σζ, ἢ τῷ μέρει γλ κοινῇ ἴσα ἐσὶν. Ὡς τε τότε ὅλον σζ, ἢ τὸ μέρος γλ, ἰσογώνια ἀλλήλοις ἐσὶ. Λοιπὸν δ' ἂν εἴη καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας Πλευράς ἔχειν ἀνάλογον.

Ἐπειδὴ τοίνυν ἐπὶ τῶν Τριγώνων βγε, βτα, παράλληλός ἐστιν ἢ γε πρὸς τὴν σα, ἔσται (2) βγ : γε :: βσ : σα, καὶ γε : εβ :: σα : αβ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ταῖς Τριγώνοις ελβ, αζβ, ἢ ελ παράλληλός ἐστι πρὸς τὴν αζ, ἔσται εβ : ελ :: αβ : αζ, καὶ (3) δι' ἴσιν ἄρα γε : ελ :: σα : αζ. Τὰ ἄρα (4) γλ ἢ σζ, τότε μέρος δηλαδὴ ἢ τὸ ὅλον ὁμοία ἐσὶ. Ὡσαύτως δὲ δείξω ἢ τὸ ξι ὁμοιον τυγχάνειν τῷ ὅλῳ σζ. Ἀρα (5) τὰ γλ ἢ ξι ἢ ἀλλήλοις ὁμοία ἐσὶ.

Ἐπεὶ δὲ ἢ τῶν Πλευρῶν αἱ ὁμολόγοι, ἥτοι ἐπ' εὐθείας κείμεναι εἰσὶν ὡς αἱ βγ ἢ βσ, αἵτε βλ ἢ βζ, ἢ γῶν πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι εἰσὶν, ὡς αἱ γε ἢ σα, αἵτε ελ ἢ αζ, δηλονότι τὰ Παραλληλόγραμμα γλ ἢ σζ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἐσὶ. Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον ἢ τὰ ξι ἢ σζ Παραλληλόγραμμα ὁμοίως ἀναγεγράφθαι, ἢ ἐπομένως ἢ τὰ γλ ἢ ξι, δειχθήσεται. Α. Η. Δ.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἐξέσω δὴ τῇ ἐκτεθείσῃ προτάσει Προβλήματα δύο παρασυνάψαι,

(1) 18. τῆ ε'. (2) Α. Πόρισμ. τῆς Α. τῆ ε'. (3) ΚΒ. τῆ ε'. (4) Ὁ. Α. τῆ ε'. (5) ΚΔ. τῆ ε'.

α πολλὴν ἔχοντα ἐστὶν ἐν τοῖς Κωνικοῖς τὴν συντέλειαν. Τέτων τὸ μὲν Α'. πρὸς τὴν Ε' ἄλλειψιν τείνει, τὸ δὲ Β'. πρὸς τὴν Υ' περβολήν.

Π ρ ό β λ η μ α Α'.

κ. 387.

„Τριῶν δοθεισῶν Εὐθειῶν α, β, γ, ὧν ἡ τρίτη γ τῆς πρώτης α ἐλάσσων ἐστὶ, καὶ Ὁρθογωνία τῇ δεξὶ συσφαθέντος ὑπὸ τε τῆς πρώτης α = δε, καὶ τῆς δευτέρας β = εζ, τῇ δευτέρᾳ ἑτερον Ὁρθογώνιον παραβαλεῖν, εὖρος ἔχον τῇ τρίτῃ γ ἴσον, καὶ ἐλλείπον Ὁρθογωνίῳ ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένῳ, τῷ ὑπὸ τε τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας συσφαθέντι Ὁρθογωνίῳ.

Ἀχθεΐσης τῷ Ὁρθογωνίῳ ἐκ τῆς Διαμέτρου δζ, ἀπὸ τῆς δε Πλευρᾶς, ἣτις τῇ πρώτῃ α ἴση ἐστὶν, ἀφαιρεθῆτω ἐν ἴσῃ τῇ τρίτῃ γ. Διὰ δὲ τῆς ἁχθῆτω καὶ παράλληλος τῇ Πλευρᾷ εζ, συμπίπτουσα τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ θ. Διὰ δὲ τῆς θ ἁχθῆτω δι παράλληλος τῇ Πλευρᾷ δε, συμπίπτουσα τῇ εζ κατὰ τὸ ι. Λέγω δὲ ὡς αὐτως ἐτελέσθω τὸ ἐπιταχθεῖν. τὸ γὰρ κειθ Ὁρθογών. τὸ ζητούμενον ἦν. Ἐὰν γὰρ προεκβληθῶσιν αἱ καὶ ιθ, ὡς συντελεσθῆναι τὰ Ὁρθογώνια ιλ, ημ. ἐπεὶ τὰ ἐκ καὶ ιλ Ὁρθογώνια περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ὄντα ἐστὶν, ὁμοιά τε (1) ἔσαι ἀλλήλοις, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα. Συσφαθέντος τοίνυν τῇ Ὁρθογωνίᾳ ἐκ ὑπὸ τε τῆς πρώτης α, καὶ τῆς δευτέρας β τῶν δεδομένων, ἦτοι τῇ ὑπὸ δε καὶ εζ, παραβέβληται δὲ τῇ δευτέρᾳ εζ ἑτερον Ὁρθογώνιον. τῆτο δὲ ἦν τὸ κη ἔχον μὲν εὖρος τὸ κη τῇ τρίτῃ γ ἴσον, ἐλλείπον δὲ Ὁρθογωνίῳ τῷ ιλ, ὁμοίῳ τε ὄντι καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένῳ αὐτῷ τῷ ἐκ, τῷ ὑπὸ τε τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας τῶν δοθεισῶν συσφαθέντι. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό β λ η μ α Β'.

κ. 388.

„Τριῶν δοθεισῶν Εὐθειῶν α, β, γ, καὶ Ὁρθογωνία συσφαθέντος τῇ δεξὶ ὑπὸ τε τῆς πρώτης α ἦτοι δε, καὶ τῆς δευτέρας β ἦτοι εζ, τῇ δευτέρᾳ ἑτερον Ὁρθογώνιον παραβαλεῖν, εὖρος μὲν ἔχον τῇ τρίτῃ γ ἴσον, ὑπερέχον δὲ Ὁρθογωνίῳ, ὃ ἂν ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον ἦ, τῷ ὑπὸ τε τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας συσφαθέντι.

Ἀχθεΐσης τῷ Ὁρθογωνίῳ ἐκ τῆς Διαμέτρου δζ, προεκβεβλήσθω ἡ δε ἐς γε τὸ η, ὥστε εἶναι τὴν προσκειμένην ἐν τῇ τρίτῃ τῶν δοθεισῶν γ ἴσην. Καὶ διὰ τῆς ἁχθῆτω καὶ τῇ Πλευρᾷ εζ παράλληλος, συμπίπτουσα τῇ Δια-

(1) Διὰ ταύτην τὴν ἐν χειρῶν.

μέτρῳ δὲ προεκβληθείσῃ καὶ αὐτῇ κατὰ τὸ θ, καὶ συμπληρώσω τὸ Ὀρθογώνιον ειθι. Φημι δὲ ὡς οὕτως ἔσαι τετελεσμένον τὸ ἐπιταχθέν· προεκβληθείσων γὰρ τῶν θι, δι, κζ, πληρωθέντων τε τῶν Ὀρθογωνίων ημ, λι, ἐπειδὴ τὰ εκ, λι Ὀρθογώνια περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον εἰν, ἔσονται (1) ὁμοία τε ἀλλήλοις καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα. Ὡς συζαθέντος τῷ Ὀρθογωνίῳ εκ ὑπό τε τῆς πρώτης δε, καὶ τῆς δευτέρας εζ τῶν δεδομένων, τῇ δευτέρᾳ εζ Ὀρθογώνιον ἕτερον παρεβλήθῃ τὸ ηι, ὃ εὖρος μὲν τὸ ει ἴσον τῇ τρίτῃ γ, ὑπεροχὴ δὲ ἡ κατὰ τὸ Ὀρθογώνιον λι, ὅπερ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον ἐστὶ τῷ Ὀρθογωνίῳ εκ, τῷ ὑπό τε τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας τῶν δοθέντων συζαθέντι. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΕ.

„Τῷ δοθέντι Εὐθύγραμμῳ (Β) ὁμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι (Α) ἴσον
„τὸ αὐτὸ συζήσασθαι.

„Τῷ ἐκὶν δυοῖν εἰδῶν δοθέντων (Α καὶ Β), τρίτον παραβαλεῖν τῷ μὲν ἴσον
„(εἶον τῷ Α), τῷ δ' ὁμοιον (εἶον τῷ Β).

„Καὶ πολλῶν δὲ δοθέντων εἰδῶν, οὐ χαλεπὸν παραβαλεῖν εἶδος πᾶσι
„μὲν ἴσον, ἐνὶ δὲ τῷ τυχόντι ἐξ αὐτῶν ὁμοιον.

Ἐπὶ τῆς γζ πλευρᾷ τῷ Εὐθύγραμμῳ Β, ὃ τὸ ὁμοιον ζητούμενον ἐστὶ, καὶ 389.
συνεστάθω Ὀρθογώνιον τὸ Π (2) ἴσον τῷ Β· εἴτα ἐπὶ τῆς ζσ (3) Ὀρθογώνιον τὸ Ρ ἴσον τῷ Α· Καὶ δῆλον ὅτι (4) γζ καὶ ζι ἐπ' εὐθείας κείμεναι εἰσί. Μεταξὺ δὲ τῶν γζ καὶ ζι μέτῃ εὐρεθῇτω (5) ἀνάλογος ἡ ζλ, καὶ ἐπ' αὐτῆς (6) Εὐθύγραμμον ὁμοιον τῷ δοθέντι Β· Ἐσαι δὲ τῷ αὐτῷ καὶ ἴσον τῷ δοθέντι Α.

Ἐπειδὴ γὰρ ἐκ κατασκευῆς αἱ τρεῖς γζ, ζλ, ζι ἀνάλογον εἰσί, τὸ Εὐθύγραμμον Β ἐστὶ πρὸς τὸ αὐτῷ ὁμοιον, τὸ ἀπὸ τῆς ζλ (7), ὡς γζ πρὸς ζι, τῷ ἐκὶν (8) ὡς Π πρὸς Ρ· Καὶ ἐναλλάξ τοῖνον ὡς Εὐθύγραμμον Β πρὸς Εὐθύγραμμον Π, οὕτως Εὐθύγραμμον τὸ ἀπὸ ζλ πρὸς Εὐθύγραμμον Ρ. Ἀλλὰ γὰρ ἐκ κατασκ. τὸ Β Εὐθύγραμμον ἴσον τῷ Π, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ζλ, ὃ τῷ Β ὁμοιον ἦ, ἴσον τῷ Ρ, ἦτοι (ἐκ κατασκ.) τῷ δοθέντι Α. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κς.

„Εἰ ἀνὸ Παραλληλόγραμμου (βδ) Παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ (τὸ

(1) Διὰ τὴν Πρότ. (2) ME. τῷ α'. (3) Διὰ τὴν αὐτήν. (4) ΙΔ. τῷ α'. (5) ΙΓ. τῷ ε'. (6) ΙΒ. τῷ ε'. (7) Β. Πόρ. τῆς Κ. τῷ ε'. (8) Α. τῷ ε'.

„ζν) ὁμοίον τε τῷ ὅλῳ, καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν Γωνίαν ἔχον (τὴν α) αὐτῷ,
 „περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ἐστὶ τῷ ὅλῳ.

κ. 390.

Εἰπεζεύχθωσαν αἱ αε, γε· καὶ εἰμὴ ἢ αεγ μία Διάμετρος ἐστὶ κοινὴ τῶν
 βδ καὶ ζν, ἔσω δὲ τῇ βδ Διάμετρος Εὐθεΐα ἄλλη ἢ αηγ, τέμνουσα τὴν ζε κα-
 τὰ τὸ η· ἢ χθω δὲ καὶ τῇ Εὐθείᾳ αζ παράλληλος ἢ ηθ. Τὰ τοίνυν Παραλ-
 ληλόγραμμα ζθ καὶ βδ εἰσὶν περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον αηγ, καὶ ταῦτι δέ-
 τοι (1) καὶ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα· Καὶ ὥσπερ ἄρα βα πρὸς αδ (2),
 οὕτω τοι καὶ ζα πρὸς αθ· Ἀλλὰ γὰρ καὶ βα : αδ :: αζ : αν, ἐπεὶ τὰ βδ καὶ ζν
 ὅμοια (3) εἰσὶν· ἄρα ζα : αθ :: ζα : αν. Ὅπερ ἄτοπον.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

κ. 391. Α.

Εὐτεῦθεν δὴ τὴν σύνθεσιν τῶν κινήσεων, ἣτις ἐστὶν ἀναλογιζόμεθα. Κινεί-
 θω γὰρ κατὰ τὸ αὐτὸ τῷ χρόνῳ Σῶμα τὸ α, δυνάμει μὲν τῇ αζ πρὸς Εὐ-
 θεΐαν τὴν αζ, δυνάμει δὲ τῇ ασ πρὸς Εὐθεΐαν τὴν ασ (οὕτω δηλ. ὡς μόνη
 μὲν τῇ αζ δυνάμει μόνην Εὐθεΐαν βαίνειν ἂν τὴν αζ, μόνη δὲ αὐτῇ ασ τὴν
 ασ, ἐν χρόνῳ τῷ δοθέντι), πληρέθω δὲ τὸ Παραλληλόγραμμα ασβζ· Τῇ
 τοίνυν τῶν δυνάμεων εἰς ταυτὸ συνελεύσει, τὸ Σῶμα α τὴν Διαγώνιον αβ,
 κατὰ χρόνον τὸν δοθέντα φανερόν ὅτι διελεύσεται. Γενήσεται γὰρ τῷ Σώ-
 ματι α παραπλησίως τὰ τῆς κινήσεως, καθάπερ εἶγε, ἐν ᾧ ὁμαλῇ τῇ κι-
 νήσει ἀπὸ τῆ α ἐπὶ τὸ σ σπεύδει μεταφερόμενον, κατ' Εὐθεΐαν τὴν ασ, προίει
 δὲ καὶ αὐτὴ ἢ ασ Εὐθεΐα, αἰ παράλληλος ἑαυτῇ χωρῆσα, κατὰ κίνησιν ὡ-
 σαύτως ὁμαλὴν ἐν τῷ αὐτῷ τῷ χρόνῳ, τῷ ἐφ' ἑαυτῆς Σημεῖω α τὴν αζ Εὐ-
 θεΐαν περαίνουσα. Οὕτω γάρ τοι ἑκάτερος τῶν κινήματων ὁ διορισμός, ὁ μὲν
 κατὰ σβ, ὁ δὲ κατὰ ζβ ἅμα διασωθήσονται. Ταύτητοι ἐν ᾧ τὸ Σῶμα α,
 ἐν πηλίκῳ τῷ χρόνῳ (οἷον τεταρτημορίῳ) ἐς γ' ἐπὶ τὸ ξ ἀφίξεται, τηλικῆτον
 καὶ τῆς ασ (τετέσι τεταρτημόριον) διερχόμενον, ἐν τῷ αὐτῷ ἢ ασ ἐπὶ τὴν δέ-
 σιν ιγ μετενεχθήσεται, καὶ τὸ ἐπ' αὐτῆς Σημεῖον α τεταρτημόριον ἐπίσης
 διαδραμεῖται ἀπὸ τῆς Εὐθείας αζ, ἐν ἴσῳ (τεταρτημορικῷ δηλ.) τῷ δοθέντος
 χρόνῳ τῷ Διαστήματι, ὥς (4) εἶναι σα : αζ :: ξα : αδ· Οὐ χάριν καὶ τῆς ξλ
 παραλλήλου ἀχθείσης τῇ αζ, καὶ τεμνύσης τὴν ιγ κατὰ τὸ ε, τὰ Παραλλη-
 λόγραμμα σζ καὶ ξ ὅμοια (5) τυγχάνειν ἀλλήλοις καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμέ-
 να, τὸ δὲ Σῶμα α ὑφ' ἑκατέρας τῆς κινήσεως, ἐν πέρατι τῷ αὐτῷ τεταρτη-
 μορίῳ τῷ δοθέντος χρόνῳ, ἐπὶ τὸ Σημεῖον ε ἀφικνεῖσθαι. Ἐπεὶ δέ τοι τὰ Πα-

(1) ΚΔ. τῇ ε'. (2) Ορ. Α. τῇ ε'. (3) ΚΔ. ὑπό. (4) ΙΒ. τῇ ε'. (5) Ορ. Α. τῇ ε'.

ραβηλογράμμα ταῦτα ἡ Γωνίαν ἔχει κοινὴν τὴν α, δυνάμει τῆς ἐν χερσὶ Προτάσεως, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον εἰσὶ τὴν αβ, τότε κατὰ τὸ εἰρησμένον Σῶμα ἐπὶ τῆς Διαγωνίᾳ αβ ταύτης ἐστὶ. Καὶ τὸν αὐτὸν τέτον τρόπον τὸ Σῶμα, ἐν πηλικωτῇ ἄλλῃ τῇ δοθέντος χρόνῳ μορίῳ, εὐρεθήσεται πα τῆς Εὐθείας αβ, κατὰ δὲ τὸ τῷ χρόνῳ πέρας ἐν τῷ Σημείῳ κείμεται β. Ὡς τε τῇ τῶν ἄνω ἔχαστων δυνάμεων συνελεύσει, τὸ Σῶμα α τὴν Διαγώνιον αβ βήσεται, καὶ ὃν ἂν χρόνον, μόνῃ μὲν τῇ ας δυνάμει Εὐθεῖαν τὴν ας, μόνῃ δὲ τῇ αζ τὴν αζ ἰδίᾳ ἐκλιεύσει.

Χωρεῖται τοῖνον Σῶμα τὸ τυχὸν ἐν χρόνῳ τῷ τυχόντι Εὐθεῖαν τὴν δα, δυνάμει τῇ δα. Τὸ γυν αὐτὸ ἰσοχρονῶς τὴν αξ = δα κατὰ τὸν αὐτὸν ἂν διηρισμὸν χωρήσειεν, εἰμήτινι ἑτέρᾳ δυνάμει ἀπήγετο διεργόμενον. Ὡς εἰ τὸ κατὰ τὸ α Σῶμα ἀπὸ τῆς κατὰ τὸν αξ διηρισμὸν κινήσεως ἐκτρέπομενον, ἐν χρόνῳ τῷ αὐτῷ Εὐθεῖαν τὴν ας διαγράφει, ἄχθεισῃς τῆς ξε ἢ τῇ Παραβηλογράμμῃ ξι πληρωθέντος, φανερόν (1) ὅτι τὸ Σῶμα τὴν ας Εὐθεῖαν ἀχθήσεται, τῇ συνελεύσει δυεῖν δυνάμεων, τῆς μὲν ἐνέσης δα ἢ αξ, τῆς δὲ ἐπιγιγνομένης αὐτῷ Σώματι ὄντι ἐν τῷ α, κατὰ διηρισμὸν τὸν τῆς Εὐθείας αὐ.

Διὸ ἡ ἀνάπαλιν, ἐάντι Σῶμα δυνάμει τῇ αβ διαγράφον εἴη Εὐθεῖαν τὴν αβ, παραπλήσιον ἂν εἴη, ὥς εἶγε ἡ τὴν αὐτὴν ἔβαιεν αβ ἐν χρόνῳ τῷ αὐτῷ, τῇ συνελεύσει δυεῖν δυνάμεων, αἱ ἀνάλογοι εἶεν ταῖς Πλευραῖς αζ, ας Παραβηλογράμμῃ τινός τῃ σζ, οὗ Διαγωνίος ἂν εἴη ἡ αβ, ἡ αἵτινες κατ' αὐτὰς τὰς Πλευρὰς αζ, ας τύχοιεν διευθυνομένοι.

Εὐτεῦθεν δὴ μετὰ τὸ περικλεῖς Νεύτωνος εἰσβάλλομεν, ὥς τὰ ὑπὸ τῶν περὶ Κέντρα τινὰ ἀκίνητα τῶν δυνάμεων περιεγομένων Σωμάτων καταγραφόμενα χωρία, ἴσεται μὲν ἐν ἐπιπέδοις ἀκινήτοις, ἐστὶ δὲ ἡ τοῖς χρόνοις ἀνάλογον. Διαιρείτω γὰρ δὴ ὁ χρόνος εἰς μέρη ἴσα, ἡ κατὰ μὲν τὸ Α' τῷ χρόνῳ μέρος διερχέτω τὸ Σῶμα τῇ ἐνέσῃ οἱ δυνάμει Εὐθεῖαν τὴν αβ. Τὸ αὐτὸ οὖν Σῶμα, κατὰ γε τὸ Β' μέρος τῶ χρόνου, εἰ μὴδὲν ἦν τὸ προσιστάμενον, εὐθὺ πρὸς τὸ κ ἐχώρησεν ἂν, Εὐθεῖαν καταγράφαν τὴν βκ ἴσην τῇ αβ, ἔτω δὲ ὥς τε τῶν ἀκτῶν ἐπὶ τὸ κέντρον ἀχθεισῶν, ἴσα (2) εἶναι τὰ ἐμβαδὸν ασβ, σβκ. Ἀλλὰ γὰρ τῷ Σώματι κατὰ τὸ β γεγονότι ἐπενεργεῖτω ἐπικεντρώσις δυνάμεις προσβολῇ μᾶ, ἀλλ' εὐτόνῳ, ἀπὸ μὲν τῆς βκ ἐκκλίνει, τὴν δὲ βγ ἀχθῆναι αὐτὸ ἐπέλυσεν· καὶ φανερόν ὅτι τῆς ἐπικέντρου ἐνταῦθα δυ-

(1) Α. Πόρ. ταύτ. (2) ΑΗ. Βιβλ. α'.

κ. 393.

νάμεως πρὸς τὴν ἐνῆσαν ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν βκ ἐχάσης, τῇ Παραλληλο-
 γραμμῇ βγδκ τὸ Σῶμα βήσεται τὴν βδ (1) τὴν Διαγώνιον, καὶ τῇ δευτέρᾳ
 χρονικῇ παραρρέυταντος μορίου, κείσεται κατὰ τὸ δ, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ
 μετὰ τῇ προτέρᾳ Τρίγωνῳ σαβ. Ἀλλ' ἐπεξεύχσω ἡ σδ, ἢ τὸ χωρίον, τῆς
 ἀκτίνος ἐπὶ τὸ κέντρον ἀχθείτης, τατέσι τὸ Τρίγωνον σβδ (2) ἴσον ἔσαι
 τῷ Τρίγωνῳ σβκ, τατέσι (3) τῷ Τρίγωνῳ τῷ πρώτῳ σαβ. Παραπλησίῳ
 τῷ λόγῳ ἐν τῷ τρίτῳ τῇ χρόνῳ μορίῳ, τὸ Σῶμα ἀπὸ τῇ δ ἐπὶ τὸ ε ἂν
 μετασταίῃ τῇ αὐτῷ περιέσῃ δυνάμει κινούμενον, ὡς εἶναι τὴν δε ἴσην τῇ δβ.
 Ἀλλ' εἴγε δυνάμεις ἐπίκεντροι, εἴτε μείζων, εἴτ' οὖν ἐλάττωσαν ἐπενεργή-
 σασα αὐτῇς κατὰ τὸ δ πρὸς τὸ σ ὥσπειν, εὐρεθείη ἂν αὐτῇς τὸ Σῶμα ἐπὶ
 τι Σημεῖον θ τῆς θε παραλλήλου ἕσης τῇ σδ, τὴν Διαγώνιον ὁμοίως θθ
 κατὰ τὸ τρίτον τῇ χρόνῳ διαπεραιούμενον· καὶ τῆς ἀκτίνος θσ ἐπὶ τὸ κέν-
 τρον ἀχθείσης, ἔσαι τὸ Τρίγωνον σθδ, ἐπὶ τῇ αὐτῇ ἐπιπέδῳ μετὰ τῇ Τε-
 τραπλευρᾷ σαβδ, τῷ Τρίγωνῳ σδε (4), κατὰ ἢ τοῖς λοιποῖς σβδ, σαβ
 ἴσον. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, τῆς ἐπικέντροι δυνάμεως κατ' ἀκολουθίαν ἐπι-
 δρᾶν νοημένης κατὰ τῶν Σημεῖων θ, ο, μ, ξ, τὸ Σῶμα ἐν ἐκάστῳ τῶν
 χρονικῶν μορίων τὰς Διαγωνίας θο, ομ, μξ διαδραμεῖται, τὰς ἐπὶ τῇ αὐ-
 τῇ ἐπιπέδῳ ἕσας, ἢ ἔει τὰ Τρίγωνα τοῖς προτέροις Τρίγωνοις ἴσα κατα-
 γραφήσεται, ἢ ἕτως ἐν ἴσοις μὲν τοῖς χρόνοις, ἐπιπέδῳ δὲ τῷ αὐτῷ, χω-
 ρία ἴσα διαπεραιωθήσεται, ὡς εἶναι τὰ ἀδροίσματα τῶν χωρίων σαδσ, σαξτ
 τοῖς τῶν χρόνων ἀνάλογον. Αὐξανεμένα τοίνυν τῇ ἀριθμῷ, ἢ μειωμένα τῇ εὐρε-
 τῇ τῶν Τρίγωνων ἐπ' ἄπειρον, ἢ τάτων ἐσχάτη περίμετρος αβδθμξ κξ:
 Γραμμῆτις ἔσαι καμπυλῇ, ἀφ' ἧς τὰ ἐν τῷ ἀκινήτῳ ἐπιπέδῳ περιγραφόμενα
 χωρία, τοῖς χρόνοις ἔει χωρήσει ἀνάλογον. Ο. Ε. Δ.

Ε.

Εντεῦθεν ἔτι μετὰ τῇ αὐτῇ Νεύτωνος ἐπιφέρομεν, πάντα τὰ κατὰ καμ-
 πύλην τινὰ κινούμενα Σώματα, ἢ τὰ περίτι Κέντρον οἷον τὸ σ χωρία (ὅρα τὸ
 ἄνωτ. Σχῆμα) τοῖς χρόνοις ἀνάλογον καταγράφοντα, ὑπότινος ἐπικέντροι
 δυνάμεως ἐπὶ αὐτὸ δὴ τὸ Κέντρον σπενδέσης διηλεκτῶς ἐπείγεσθαι. Ἐπει-
 δὴ γὰρ τὸ Σῶμα τῇ ἐνάτῃ δυνάμει, ἴσας τὰς Εὐθείας αβ, βκ, ἐν ἴσοις
 τοῖς χρόνοις σταθεύειν οἷον εἶναι, ἐπιξευχθεῖσιν τῶν σα, σβ, σκ, ἴσα ἔσαι
 (5) τὰ Τρίγωνα βτα, σβκ. Ἐπεὶ δέτοι τὸ Σῶμα ἐξ ὑποθέσεως ἴσα τὰ
 ἐμβαδὸν σαβ, σδβ ἰσοχρονίως καταγράφει, συνεξισωθήσεται ἀλλήλοις καὶ
 τὰ Τρίγωνα σαβ, σδβ. Ταύτητοι ἢ τὰ Τρίγωνα σβκ, σβδ ἴσα ἀλλήλοις.

(1) Διὰ τὸ Α. Πόρ. ταύτ. (2) ΑΖ. τῇ ε'. (3) ΑΞ. Α. τῇ ε'. (4) ΑΖ. τῇ ε'. (5) ΑΗ. τῇ ε'.

ἔσαι, καὶ ὡς ἐπὶ τῆς βάσεως ἱσάμενα τῆς αὐτῆς σβ, τὰ Σημεῖα δ ἔκ, ἐπὶ Εὐθείας κείμενα ἔξει τῆς αὐτῆς δι (1), ἥτις ἂν εἴη αὐτῇ τῇ βάσει παραλλήλος. Εὐθεντοὶ ἀχθεῖσθαι τῆς δι Παραλλήλου πρὸς τὴν κβ, ἔσονται μὲν αἱ βκ, βγ τῇ Παραλληλογράμμῳ κγ Πλευραὶ, ἔσαι δὲ ἡ βδ Διαγώνιος. Ὡς τὸ Σῶμα ἀπὸ τῆς Εὐθείας αβκ ἐκκλίνειν κατὰ τῇ Σημεῖον β, ἔκ τὴν Διαγώνιον βδ καταγράφον, ἐν ᾧ ἂν χρόνῳ τὴν Πλευρὰν βκ διήλθεν, εἰμή τις καινὴ αὐτῷ κατὰ τὸ β ὄντι ἐνεγίνετο δύναμις, ἐπειχθήσεται δὴ κατ' αὐτὸ τὸ β Σημεῖον (2) δυνάμει τῇ βγ, τῇ σπενδάσῃ ἐπὶ τὸ σ, ὃ τὸ κέντρον εἶναι τίθεται τῶν δυνάμεων. Καὶ ἄτως ἐφεξῆς καὶ τοῖς λοιποῖς τῶν Σημεῖων δ, θ, ο, μ, ξ, ο, Ε, Δ.

Ἐπειδὴ τοῖνυν ἐπὶ τῇ τῶν πρωτευόντων πλανητῶν συζήματος, τῶν ἀκ- 5.
τίνων πρὸς τὸν ἥλιον ἀγομένων, ἕξι τὰ χωρία τοῖς χρόνοις εἰσὶν ἀνάλογον, εἴα δὴ περὶ τοῖς ἀστρονομῶσιν εἰς προδηλότατον, φανερόν ὡς οἱ πλάνητες πρὸς αὐτὸν τυγχάνωσι τὸν ἥλιον ἐπειγόμενοι δυνάμει διηνεκὶ πρὸς τὸν φωστῆρα σπενδάσῃ. Ὡς αὐτῶς δὲ καὶ περὶ τῶν δευτερευόντων ἐν πλάνησι συλλογιστέον, ὡς γε πρὸς τὰς αὐτῶν ἐκάστη προέχοντας.

Κεῖσθαι τῇ Παραλληλογράμμῳ βγελ Διάμετρος ἡ βε, ἡ προεκβληθεῖ- Z. κ. 394.
σῶν τῶν γε, λε, γινέσθω Παραλληλόγραμμον τὸ αξει, τῷ Παραλληλογράμμῳ βλεγ ὁμοίον τε, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον, διάμετρον ἔχον τὴν αε. Φημὶ δὲ ὅτι τῶν Παραλληλογράμμων γλ, ξι, αἱ Διάμετροι βε, αε ἐπ' εὐθείας κείμεναι εἰσὶ. Προεκβληθεῖσθαι γὰρ ἔκ τῶν βγ, αξ, καὶ τῶν βλ, αι, πληρέσθω Παραλληλόγραμμον τὸ σζ· καὶ ἐπειδὴ (3) γε:ει:: λε:εξ, ἔσαι (4) ἔκ γι:ισ:: λξ:ξε, ἡ (5) ἐναλλάξ γι:λξ:: ισ:ξε, τριτέστι (6) σα:αζ:: ξα:αι. Τὰ τοῖνυν Παραλληλόγραμμα σζ, ξι, ἀλλήλοισ τε (7) ὁμοία ἐσὶ, ἡ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἡ κοινὴν ἔχοντα Γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, ὥς (8) ἡ περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ἴσεται. Ὡς αὐτῶς δὲ δειχθήσεται ἡ τὰ σζ, γλ Παραλληλόγραμμα περὶ τὴν αὐτὴν εἶναι Διάμετρον ἡ αὐτά. Ὡς δὴλον τὰς αε, εβ Διαμέτρους μέρη τῆς ὀλικῆς Διαμέτρου αβ τυγχάνειν, ἡ ἐπομένως ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι. H.

Ἐὰν Τρίγωνα δύο αξε, εγβ, τὰς δύο Πλευρὰς αξ, ξε, ταῖς δυσὶ Πλευραῖς εγ, γβ ἀνάλογον ἔχοντα, κατὰ μίαν Γωνίαν τὴν ὑπὸ ξεγ ἴ-
τω συσφαθῶσιν, ὡς τὰς ὁμολόγους Πλευρὰς παραλλήλους ἔχειν κείμενας, τὰ

(1) 10. τῇ α'. (2) Α. Πόρι τῆς παρὰ σ. (3) Εξ ὑποθ. (4) IH. τῇ ε'. (5) Ις. τῇ ε'. (6) ΑΔ. τῇ α'. (7) Ορ. Α. τῇ ε'. (8) Διὰ ταύτην τὴν ἐν χειρῇ.

τέσι τὴν μὲν αὖ τῇ εγ, τὴν δὲ ξε τῇ γβ, ἔξει ἡ τὰς λοιπὰς τῶν Πλευρῶν αε ἡ εβ ἐπ' εὐθείας κειμένας. Προεκβληθεῖσιν γὰρ τῶν ξε ἡ γε, ἡ ταύταις Παραλλήλων ἀχθεῖσιν τῶν αι, βλ, πληρόσω δὴ τὰ Παραλληλόγραμμα ξι, γλ, ἃ διὰ τὰς Παραλλήλους ξα, γι, βλ, ἡ αι, ξλ, γβ, ἔσαι (1) ἰσογῶνια ἡ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, διὰ δὲ τὰς ἀνάλογον αὖ : ξε :: εγ : γβ, ἡ ὁμοία (2). Ἐνθεντοὶ διὰ τὸ πρὸ τῆς Πόρισμα, ἡ τῶν αἰ Διαγώνιοι αε, εβ ἐπ' εὐθείας κείμεναι εἰσίν. Ο. Ε. Δ.

Τὸ δὲ Πόρισμα τῆτο τὴν ΑΒ'. τῇ ζ'. ἡμῖν παρέστησιν, ἣν τῇ Συγγραφῆως ὑπερδραμόντος, αὐτοὶ ἐκ τῆς ἐν χερσὶ ταύτης Κζ', ἡ τῇ Ζ'. τῶν μετ' αὐτὴν Πορισμάτων, ἀμέσως ἐπιφερομένην ἀποκαταξῆσαι ἐνταῦθα ἐδικαιώσαμεν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΖ.

„ Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν Εὐθείαν (αβ) παραβλλόμενων Παραλληλογράμμων (αδ, αζ), ἡ ἐλλειπόντων εἶδеси Παραλληλογράμμοις (γε, ιδ) ὁμοίοις τε, ἡ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας (τῆς αβ) ἀναγεγραμμένῳ (αδ), μέγιστον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβλλόμενον Παραλληλόγραμμον (αδ), ὁμοιον δὲ τῷ ἐλλείμματι (γε).

κ. 395.

Παραβεβλήσασαν παρὰ τὴν Εὐθείαν αβ δίχα τετμημένην κατὰ τὸ γ, Παραλληλόγραμμα τότε αγδλ, ἡ ὁποῖον ἄλλο τὸ αἰζη, ἐλλείποντα εἶδеси Παραλληλογράμμοις, τὸ μὲν γβεδ, τὸ δὲ ιβδζ, ὁμοίοις τε ἡ ὁμοίως κειμένοις τῷ αδ, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς αβ. Λέγω δὲ ὅτι τὸ Παραλληλόγραμμον αδ τῷ Παραλληλογράμμῳ αζ μείζον ἐστὶ.

Τῆς δὲ δὴ Προτάσεως ταύτης δύο ἂν εἶεν αἱ διαφοραί, ἧτοι γὰρ τῷ Παραλληλογράμμῳ αζ ἡ Βάσις αι τῆς αγ ἡμισείας μείζων, ἢ γὰρ ἐλάσσων.

Κεῖσθω δὲ μείζων (ὡς ἐπὶ τῷ ἀνωτ. καταγραφέντος Σχήματος). Καὶ ἐπειδὴ τὰ Παραλληλόγραμμα γε, ιδ, κοινὴν ἔχει Γωνίαν τὴν ὑπὸ γβε, εἴτ' οὖν τὴν ὑπὸ ιβδ, ὁμοία τε (3) ἡ ὁμοίως κείμενα ἐστίν, εἰσὶ δὲ πε (4) ἡ περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον βδ. Διὸ προεκβληθείσης τῆς ιζ ἐπὶ τὸ κ, ἔσαι τὸ γζ = τῷ (5) ζε. Κοινῇ γὰρ προσεθείσθω τὸ ιδ, ἡ ἔσαι γδ = ιε. Ἀλλὰ διὰ τὴν δίχα κατὰ τὸ γ τετμημένην αβ, ἔσιν ηγ = γδ (6), ἄρα καὶ ηγ = ιε. Προσεθείσθω κοινὸν τὸ γζ, ἡ ἔσαι αζ = γζ + ιε.

(1) ΚΖ. τῇ α'. (2) Α. Ορ. τῇ ζ'. (3) Εξ ὑποδ. (4) Διὰ τὴν ἀνωτ. (5) ΜΓ. τῇ α'. (6) Ας. τῇ α'.

ἀλλὰ γε (τατέσιν (1) αδ, διὰ τὰς ἴσας Βάσεις αγ, γβ) μείζον τῆς γζ + ιε, ἄρα αδ μείζον τῆς αζ.

Αἰ. ἔσω δὴ ἡ αὐτὴ ἐλάσσων τῆς αγ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ Παραλληλόγραμμα γε, ιδ, κοινὴν ἔχει Γωνίαν τὴν ὑπὸ γβε, εἴτ' οὖν τὴν ὑπὸ ιβθ, καὶ ὅμοια (2) ἐστὶ καὶ ὁμοίως κείμενα, περὶ τὴν αὐτὴν (3) Διάμετρον ἐστὶ βδζ. Ἀχθήτω τοῖνυν ἡ Διάμετρος, καὶ καταγραφῆτω τὸ Σχήμα, καὶ διὰ τὰς ἴσας αγ, γβ (4) ἴσαι ἔσονται αἱ λδ, δε. Ὅθεν δὴ καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα (5) ηδ, δθ ἴσα καὶ αὐτὰ ἔσαι. Ὡς τὸ Παραλληλόγραμμον δθ ἐστὶ τῷ Παραλληλογράμμῳ ηκ μείζον. Ἀλλὰ μὲν (6) δθ = δι, ἄρα τὸ δι μείζον ἐστὶ τῷ ηκ. Κοινὴν προσεθείδω τὸ ακ, καὶ ἔγω τὸ Παραλληλόγραμμον αδ τῷ Παραλληλογράμμῳ αζ μείζον ἔσαι.

Πάντων τοῖνυν τῶν παρὰ τὴν Εὐθείαν παραβαλλομένων Παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδει Παραλληλογράμμοις, ὁμοιοῖτε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον Παραλληλόγραμμον, ὁμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐς τὴν παρὰ τὴν αὐτὴν Εὐθείαν αβ παραβεβλημένα Παραλληλόγραμμα αζ, ατ, ἐλλείποντα Παραλληλογράμμοις τοῖς ιδ, πρ, ὁμοιοῖτε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ αδ ἢ γε, τῷ παρὰ τὴν ἡμίσειαν τῆς αβ, οὕτως ἀλλ' οὖν ὥς εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν Εὐθειῶν ιβ + πβ = αβ, τατέσιν ὥς εἶναι απ = ιβ, καὶ γι = γπ. Φημι δὴ ὅτι τὰ Παραλληλόγραμμα αζ, ατ ἴσα ἐστί.

Διὰ γὰρ τὰς ἴσας αγ, γβ, καὶ τὰς ἴσας ὁμοίως πγ, γι, ἔσονται καὶ (7) ην = νδ, καὶ ξν = νζ. Κατὰ τῶν Τριγώνων ζετ, διὰ τὰς Εὐθείας νδ, δλ τὰς ταῖς Πλευραῖς τξ, ζξ Παραλλήλους, ἔσαι (8) ζδ = δτ, καὶ ξλ = λτ. Ἐνθεντοι διὰ τὴν τῶν Βάσεων ἰσότητα (9) ἔσαι νλ = νε, καὶ νλ = νκ, καὶ ἐπομένως ξλ = ζε = (10) ζγ = (11) ξγ, καὶ 2ξλ, τατέσι ξΓ = 2ξγ, τατέσι ξι. Κοινὴν προσεθείδω τὸ αξ, καὶ ἔσαι ατ = αζ. Ο. Ε. Δ.

Εἰν παρὰ τὴν Εὐθείαν αβ παραβληθῇ Παραλληλόγραμμα ἴσα τὰ β.

(1) Διὰ τὴν αὐτ. (2) Διὰ τὴν ὑπόθ. (3) Διὰ τὴν ἀνωτ. (4) ΑΔ. τῷ α'. (5) Αε. τῷ α'. (6) ΜΓ. τῷ α'. (7) Διὰ τὴν ΑΔ. τῷ α'. (8) Β. τῷ ε'. (9) Αε. τῷ α'. (10) ΜΓ. τῷ α'. (11) Αε. τῷ α'.

ατ, αζ, ἔλλείποντα Παραλληλογράμμοις ιθ, πρ, τῷ Παραλληλογράμμῳ αδ, εἴτ' οὖν γε, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς αβ ἀναγραφομένῳ ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ, ἔσαι ιβ + πβ = αβ, τετέστιν απ = ιβ. Προεκβληθείσης γὰρ τῆς ικ ἐπὶ τὸ μ, διότι (1) ατ = αζ, ἀφαιρεθέντος τῷ κοινῷ αξ, ἔσαι τὸ ητ = πζ = (2) θμ· ἄρα (3) καὶ ηξ = ζθ, καὶ (4) ἐπομένως απ = ιβ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΗ.

„Παρά τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν (αβ), τῷ δοθέντι Εὐθύγραμμῳ (γ) ἴσον „Παραλληλόγραμμον (αι) παραβαλεῖν, ἔλλειπον εἶδει Παραλληλογράμμῳ „(ξν) ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι (δ). Δεῖ δὴ τὸ διδόμενον Εὐθύγραμμον (γ), „ὃ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ (ς) μείζον εἶναι (τῷ αη) τῷ ἀπὸ τῆς ἡμι- „σείας (τῆς αβ δηλ.) παραβαλλομένῳ, ὁμοίων ὄντων, τῷ τε ἀπὸ τῆς ἡμι- „σείας παραβαλλομένῳ (αη), καὶ τῷ ἐλλείματι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας (εζ), „καὶ τῷ (δ), ὃ δεῖ ὅμοιον (ξν) ἔλλειπειν τ, Παραλληλογράμμῳ.

κ. 398.

Δίχα τετμήσω ἡ αβ κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπὶ τῆς αε (6) συνεχάσω τῷ δοθέντι Παραλληλογράμμῳ δ ὁμοίον Παραλληλόγραμμον τὸ αη, καὶ πληρῶσω τὸ Παραλληλόγραμμον αζ· ἔτω δὲ ἔσαι καὶ τὸ εζ τῷ αη, καὶ ἐπομένως τῷ δοθέντι δ ὁμοίον· ἔσαι δὲ τὸ αὐτὸ εζ τῷ αη καὶ ὁμοίως κείμενον καὶ ἴσον· Ἐπεὶ δέ τοι ὡς ὁ διορισμός βάζεται, τὸ αη ἐκ ἑλαττον ἐστὶ τῷ Εὐθύγραμμῳ γ, ἔσαι δὴ περὶ αὐτῷ ἢ αὐτῷ μείζον· Καὶ εἰ μὲν αη = γ, ἐγένετο ἤδη τὸ ζητηθέν· Παρὰ γὰρ τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθύγραμμῳ γ ἴσον παρεβλήθη Παραλληλόγραμμον τὸ αη, ἔλλειπον εἶδει Παραλληλογράμμῳ τῷ εζ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ.

Εἰ δὲ τὸ αη Παραλληλόγραμμον τῷ Εὐθύγραμμῳ γ μείζον εἴη, εὐρεθήτω δὴ (7) ἡ ὑπεροχὴ τῷ αη ἢ τῷ εζ ἢ ὑπὲρ τὸ γ· καὶ τῇ μὲν ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ εζ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον συνεχάσω (8) Παραλληλόγραμμον τὸ κλ, κοινὴν ἔχον Γωνίαν μετὰ τῷ εζ τὴν πρὸς τῷ η· καὶ οὕτω τὰ Παραλληλόγραμμα εζ, κλ, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ηιβ (9) εἰσὶ. Προεκβληθήτω δὴ ἡ κὶ πρὸς τὸ μ καὶ ν, ἡ δὲ λὶ πρὸς τὸ ξ, καὶ ἔσαι τὰ Παραλληλόγραμμα ξν, εζ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ηιβ, καὶ ἐπομένως (10) ὁμοία, ὥστε (11) καὶ τὸ ξν ὁμοίον ἐστὶ τῷ δοθέντι δ· Ἐπειδὴ δὲ κλ ἐστὶν ἢ ὑπεροχὴ τῷ

(1) Εξ ὑπ. (2) ΜΓ. τῷ α'. (3) Α. τῷ ε'. (4) ΑΔ. τῷ α'. (5) Διὰ τὴν πρὸ ταύτ. (6) ΙΗ. τῷ ε'. (7) Διὰ τὸ Πόρ. τῆς ΜΕ. τῷ α'. (8) Διὰ τὴν ΚΕ. τῷ ε'. (9) Κς. τῷ ε'. (10) ΕΔ. τῷ ε'. (11) ΚΔ. τῷ ε'.

Παραλληλογράμμω εζ, ὑπὲρ τὸ δοθέν Εὐθύγραμμον γ, εἴαν ἀπὸ τῆ Παραλληλογράμμω εζ ἀφαιρεθῇ τὸ κλ, ἔσαι τὸ λοιπὸν ἴσον τῷ γ. Καὶ ἔσαι τοῖνον τὸ Εὐθύγραμμον γ ἴσον τοῖς Παραλληλογράμμοις εν, ιζ ἅμα ληφθεῖσι, τατέσι (διὰ (1) τὸ εν = ακ, καὶ (2) ιζ = ει) ἴσον τῷ Παραλληλογράμμω αι. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθύγραμμῳ γ ἴσον Παραλληλόγραμμον παρεβλήθη τὸ αι, ἐλλείπον εἶδει Παραλληλογράμμῳ τῷ ξν, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ. Ο. Ε. Π.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐκ τῆς δευτέρας ὑποθέσεως καὶ τῆ Α'. τῶν Πορισμάτων τῆς ἀνωτέρω α. 399.
Προτ., καὶ ἄλλῃσι μέθοδοις ἀνακύπτει τῆς κατασκευῆς τῆ Προβλήματος. Α' μέλειται εἴαν ἐπὶ τῆς δοθείσης αβ, συζαθέντων ὡς πρότερον τῶν αι, εζ τῷ δοθέντι δ ὁμοίων, προσεβληθῶσιν ἥτε τῆ εζ Πλευρὰ ει, καὶ ἡ Διαγώνιος βη, καὶ περὶ ταύτην ἐν Γωνίᾳ, ἥτις ἂν εἴη τῇ ὑπὸ ειζ ἀντίθετος κατὰ κορυφήν, γένηται (3) Παραλληλόγραμμον σιηπ, ἴσον τῇ ὑπεροχῇ τῆ αι, εἴτ' οὖν τῇ εζ ὑπὲρ τὸ Εὐθύγραμμον γ, καὶ τῷ ειζβ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἐνθεντοὶ γάρ τὸ στ ὁμοιον ἔσαι καὶ ὁμοίως κείμενον, καὶ δὴ (4) καὶ ἴσον τῷ κλ ἐν τῇ κατασκευῇ τῇ ἀνωτέρω. Προσεβληθιστῶν τοίνυν τῶν αδ, βζ, πσ, πτ, πληρῶς τὰ Παραλληλόγραμμα απ, φρ, καὶ ἔσαι (5) φρ ὁμοιον τῷ εζ, καὶ ἐπομένως καὶ τῷ δοθέντι δ, διὰ δὲ τὰ στ καὶ κλ ὁμοία ὄντα, καὶ ὁμοίως κείμενα καὶ ἴσα, ἔσαι σιη = ηλ, τατέσι (6) φρ = εξ· ὁθεν δὴ (7) αφ = ξβ, καὶ (8) απ = αι = γ. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθύγραμμῳ γ ἴσον Παραλληλόγραμμον παρεβλήθη τὸ απ, ἐλλείπον εἶδει Παραλληλογράμμῳ τῷ φρ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Εἴαν τὸ δοθέν Παραλληλόγραμμον δ Τετράγωνον ᾗ, τὸ Πρόβλημα οὕτως ἐξελεγχθήσεται. Α'. α. 400.

„Παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθύγραμμῳ γ ἴσον
„Ὀρθογώνιον παραβαλεῖν ἐλλείπον Τετραγώνῳ· Καὶ παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν παραβληθήσεται Ὀρθογώνιον τὸ αι, ἐλλείπον Τετραγώνῳ τῷ ξν, ᾗ

(1) Α. τῆ α'. (2) ΜΓ. τῆ α'. (3) ΚΕ. τῆ ε'. (4) Α'Ε. Α. τῆ α'. (5) ΚΔ. τῆ ε'. (6) ΑΔ. τῆ ε'. (7) Α'Ε. Γ. τῆ α'. (8) Α. Πόρ. τῆς ἀνωτ.

Ορθογώνιον τὸ ἀπ' ἐλλείπον Τετραγώνῳ τῷ φρ'. Εὐθύνεται ἐπεὶ διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς Προτ. ταύτης, ἢ γὰν τὴν ἐν τῷ Σχολίῳ, τὸ Ορθογώνιον αἰ συνάμα τῷ Τετραγώνῳ κλ, ἢ (ὁ ταυτόν ἐστὶ) τὸ Ορθογώνιον ἀπ' συνάμα τῷ Τετραγώνῳ στ, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ αη, ἢ τῷ εζ, φανερόν ὅτι ἡ Ε'. Πρότασις τῆς Β'. Βιβλία, ἐκ ταύτης τῆς ΚΗ'. τῆς ε'. ἀμέσως ἐπιφέρεται. Οὕτω γὰρ ἐστὶ προτιθεμένη ἡ τῆς Β'. πέμπτη.

„Εἰ ἂν ἡ Εὐθεία ἡ αβ εἰς ἴσα τετμημένη αε, εβ, καὶ εἰς ἄνισα αξ, εβ, ἢ αφ, φβ, τὸ ὑπὸ τῶν ἁνίσων Τμημάτων περιεχόμενον Ορθογώνιον αη, ἢ ἀπ, μετὰ τῇ ἀπὸ τῆς μεταξὺ εζ, ἢ εφ Τετραγώνῳ κλ, ἢ στ, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αε, ἢ εβ. Αὕτη γὰρ δὴ ἡ Πρότασις τῆς ἐν χερσὶν ΚΗ'. ἢ ἐν μέρει ληφθεῖσα ὑπόθ. δηλ. τῇ τὸ δοθέν Παραλληλόγρ. εἶναι Τετράγρ. ἐστὶ, περὶ ἧς ἐν τῷ Πορίσματι εἰρηται.

Β'. Δοθείσης τῆς Εὐθείας αβ καὶ τῆς Εὐθυγράμμου γ, διὰ ταύτης τῆς ΚΗ'. καὶ τῇ μετ' αὐτὴν Σχολίῳ, ληφθήσεται ἡ εβ, ἢ φβ Πλευρὰ τῆς Τετραγώνου, ᾧ ἐλλείπει τὸ Ορθογώνιον αη, ἢ ἀπ, τὸ τῷ Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον, καὶ παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ παραβεβλημένον. Ἀντὶ γὰρ τῆς ἀγνωσμένης πηλικότητος κείσθω υ, καὶ αν = αβ × υ, καὶ ξν = υΤ. ὥστε αη = αν — ξν = αβ × υ — υΤ = γ. Τὸ δ' αὐτὸ ἐπαχθήσεται καὶ ἢν ὑποτεθῇ υ = φβ, ἔσται γὰρ ἀπ = αε — φε = αβ × υ — υΤ = γ. Καὶ τῆτο δὴ τὸ πρῶτον τυγχάνει (1) τῶν διατεθειμένων Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων εἶδος, ὅπερ ἐκ τῆς ΚΗ'. ταύτης οἱ πάλαι τῶν Γεωμετρῶν ἐπελύνοντο, πηλικότητα ἐξευρίσκοντες ἀγνωσμένην τὴν ξβ, ἢ φβ παραβολῇ Ορθογωνία τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴση, παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, εἶδει Τετραγώνῳ ἐλλείποντος. Πρόδηλον δὲ ὡς τὸ πρῶτον ταύτῃ εἶδος διττῆς ἐστὶν ἐπίδεκτικὸν ἐπίλυσεως, τὸ γάρτοι υ ἦτοι διὰ τῆς ξβ, ἢ διὰ τῆς φβ ἔχει ἀν' ἀναπτύσσεσθαι, ὧν ἡ μὲν ξβ διὰ τῆς ἐν τῇ προτάσει, ἡ δὲ φβ διὰ τῆς ἐν τῷ Σχολίῳ κατασκευῆς ἐξευρεθήσεται. Δῆλον δὲ καὶ ἐκ τῆς Β'. Πορίσματ. τῆς ΚΖ'. Προτ., ὡς αἱ δύο ἐκεῖναι πηλικότητες ἀμα ληφθεῖσαι ξβ + φβ, τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ αβ ἴσαι εἶσι. Διὸ ἂν εἰς εὐρεσὶν ἑκατέρας διττῆς ἐστὶ κατασκευῆς χρεῖα, θατέρως γὰρ εὐρεθείσης, οἷον τῆς ξβ, καὶ ἡ ἑτέρα, τετέστιν ἡ αξ, εἴτ' οὖν ἡ φβ ἔσται κατάδηλος.

Γ'. Καὶ ἡ Μέθοδος δὲ, ἢ χρῆσθαι εἰώθατιν οἱ νεώτεροι εἰς τὴν τῶν ἐξισώσεων τῇ τοιοῦτε εἶδος ἐπίλυσιν, ἐκ τῆς κατασκευῆς καὶ αὐτῇ τῆς ἐν χερσὶν

(1) Ὅρα Οὐγγρέδα κλεῖδα Μαθηματ. Κ. ις. ἀριθμ. 2.

ΚΗ'. ἐπάγεται. Ἐπεὶ γὰρ $υ$ ἦτοι $φβ = αξ$ ἔστιν, ἢ $ξβ$, καὶ $αξ = \frac{1}{2} αβ + εξ$, καὶ $εξ = κι$, καὶ διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ΚΗ'. Πρωτ. $κι^T = εβ^T - γ = (1) \frac{1}{2} αβ^T - γ$, ἔσαι $κι$, ἢ $εξ = \sqrt{\frac{1}{4} αβ^T - γ}$. Καὶ ὅρα ἔσαι:

$$H' \text{ τοι } αξ = \frac{1}{2} αβ + \sqrt{\frac{1}{4} αβ^T - γ}.$$

$$H'' \text{ ξβ} = \frac{1}{2} αβ - \sqrt{\frac{1}{4} αβ^T - γ}.$$

Ὡς ἐπὶ τῇ ἐξισώσει $αβ \times υ - υ^T = γ$, ἢ μέθοδος ἐστὶ $\frac{1}{2} αβ + \sqrt{\frac{1}{4} αβ^T - γ} = υ$. Ὅρα Οὐγγρέδιον ἔνθα ἄνωτ.

Ἐνδεντοὶ ἐπὶ τῇ ἐξισώσει $αβ \times υ - υ^T = γ$, δοθείσης τῆς Εὐθείας Δ. κ. 401. $αβ$, καὶ τῆς Εὐθυγράμμου $γ$, εὐχερέστερον εὐρεθήσεται ἡ $υ$, εἰν τῷ Εὐθυγράμμῳ $γ$ ἴσον (2) Τετράγωνον συνασθῇ, οὗτινος Πλευρὰ ἐκ τῆς τοιαύτης κατασκευῆς εὐρισκομένη εἴη $ω$, ἢ δὴ περὶ ἀπὸ τῆς μεσαιτάτης τῆς δοθείσης $αβ$ Κάθετος ἀχθεῖν ἴση ἢ $εχ$, καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ $χ$, Διαστήματι δὲ τῷ $χε = \frac{1}{2} αβ$, τόξον Κύκλου καταγραφεῖν τέμνον τὴν $αβ$ κατὰ τὸ $ξ$. Τηνικαῦτα γὰρ αἱ $αξ$, $ξβ$, ἔσονται αἱ δυνάμεις τῆς $υ$. Καὶ γὰρ $υ = (3) \frac{1}{2} αβ \pm \sqrt{\frac{1}{4} αβ^T - γ}$. Ἀλλ' ἐκ κατασκ. ἔσι $χε^T = \frac{1}{4} αβ^T$, καὶ $χε^T = γ$, ὅρα $εξ^T$ ἦτοι (4) $χε^T - χε^T = \frac{1}{4} αβ^T - γ$. Ὅρα $εξ = \sqrt{\frac{1}{4} αβ^T - γ}$, καὶ $αξ = \frac{1}{2} αβ + εξ = \frac{1}{2} αβ + \sqrt{\frac{1}{4} αβ^T - γ}$, ὥσπερ δὴ καὶ $ξβ = \frac{1}{2} αβ - εξ = \frac{1}{2} αβ - \sqrt{\frac{1}{4} αβ^T - γ}$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΘ.

„Παρά τὴν δοθείσαν Εὐθεῖαν (αβ), τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ (γ) ἴσον „Παραλληλόγραμμου (αι) παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἶδει Παραλληλογράμμου (μλ) ὁμοίῳ τῷ δοθέντι (δ).

Δίχα τετμήσω ἡ $αβ$ κατὰ τὸ $ε$, καὶ ἐπὶ τῆς $εβ$ Εὐθείας (5) συνεσάσω Παραλληλόγραμμον τῷ δοθέντι δ' ὁμοιον τὸ $βεζη$. τοῖς δὲ δὴ $γ$ καὶ $εη$ ἄμα ληφθεῖσιν ἴσον, τῷ δὲ $ζεβη$ ὁμοιον, καὶ ὁμοίως κείμενον γνέσθω (6) Παραλληλόγραμμον τὸ $ζηκθ$, κοινὴν ἔχον σὺν ἐκείνῳ Γωνίαν τὴν πρὸς τῷ $ζ$. Ἔσονται (7) τοίνυν τὰ Παραλληλόγραμμα $εη$, καὶ περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον $Ζβι$. Προεκβληθήτωσαν δὴ αἱ $αβ$, $ηβ$, ἐπὶ $λ$ καὶ $μ$. καὶ ἐπειδὴ ὁμοιον τὸ $εη$ τῷ δ' ἐκ κατασκευῆς, καὶ μὴν (8) καὶ τῷ $μλ$, ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον εἰσὶ τὰ $εη$, $μλ$, ἔπεται δὴ πᾶς (9) καὶ τὸ $μλ$ αὐτὸ τῷ δ' ὁμοιον εἶναι. Προεκβληθείσης οὖν τῆς $μκ$, πληρέσθω τὸ Παραλληλόγραμμον $αμ$, καὶ ἔσαι $ακ$ (10) $= κβ =$

(1) Γ. Πόρις. τῆς Δ. τῆς β'. (2) ΙΔ. τῆς β'. (3) Γ. Πόρ. τῆς παρῆς. (4) ΜΖ. τῆς α'. (5) ΙΗ. τῆς ε'. (6) ΚΕ. τῆς ε'. (7) Κς. τῆς ε'. (8) ΚΔ. τῆς ε'. (9) ΚΔ. τῆς ε'. (10) Δς. τῆς α'.

(1) βδ. Εάν οὖν τοῖς ἴσοις κλ, βδ, κοινὸν προσεθῇ τὸ κλ, ἔσαι αἱ Παραλληλόγραφοι ἴσον τοῖς Παραλληλογράμμοις κλ καὶ βδ ἅμα ληφθεῖσι. Τὸ δέτοι κδ (τετέσιν εη + κλ + βδ) ἴσον ἐστὶ τοῖς εη + γ ἐκ κατασκευῆς, ἀφαιρεθέντος ἄρα τῷ κοινῷ εη, ἔσαι $\gamma = \eta\lambda + \beta\delta = \alpha\iota$. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα Εὐθείαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον Παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ αἱ, ὑπερβάλλον εἶδει Παραλληλογράμμῳ τῷ μλ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι δ. Ο. Ε. Π.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α.

κ. 403. Α'.

Εάν ἡ τὸ Παραλληλόγραμμον δ Τετραγώνον, αἰτεῖται τὸ Πρόβλημα „παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον Ὀρθογώνιον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον Τετραγώνῳ.“ Επεὶ δὲ διὰ τὴν κατασκ. Ὀρθογώνιον τὸ αἱ συνάμα τῷ Τετραγώνῳ εη, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγ. κδ, εὐδὴλον ὡς ἡ ζ'. τῶν τῷ Β'. Βιβλίου Προτάσεων, ἐκ ταύτης τῆς ΚΘ'. τῷ ζ'. ἀμέσως ἂν ἐπαχθεῖ. Αὕτη γὰρ ἐκεῖνη. „Εάν Εὐθεῖα ἡ αβ δίχα ἢ τετμημένη κατὰ τὸ ε, προσεθῇ δέ τις αὐτῇ Εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ βλ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ αλ καὶ τῆς προσκειμένης βλ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἥτοι τὸ αἱ, μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας Τετραγώνῳ εη, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ κδ, τῷ ἀπὸ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ελ, ἢ καὶ ἀναγραφέντι.“ Οὐδὲν οὖν ἕτερον ἢ τῷ Β'. ἕκτη προτίθησι Πρότασις, ἢ τὸν κατὰ τὴν ΚΘ'. τῷ ζ'. διορισμὸν, ὃν ἡ ἐν τῷ Πορίσματι ὑπόθεσις βάλεται.

Β'.

Δοθείσης τῆς αβ καὶ τῷ Εὐθυγράμμῳ γ, διὰ τῆς ἐν χειρὶ Προτάσ. εὔρον οἱ πάλαι τῶν Γεωμετρῶν τὰς αλ, λι, ὑφ' ὧν τὸ αἱ Ὀρθογώνιον τὸ ἴσον τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ περιέχεται, καὶ ὃ παρὰ τὴν δοθεῖσαν αβ οὕτω παραβαλεῖν δεῖ, ὡς ὑπερβάλλειν εἶδει Τετραγώνῳ. Αἱ γεμῆν Πλευραὶ αὗται παρὰ τοῖς ὕστερον ἀναλύσαις (2) διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν κατὰ τὸ Β'. καὶ Γ'. εἶδος διατεθειμένων Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων ἐξευρίσκονται. Εάν γὰρ ἀντὶ τῆς Πλευρᾶς λι τεθῇ ε, ἔσαι $\mu\lambda = \varepsilon^2$, καὶ $\alpha\mu = \varepsilon \times \alpha\beta$. ὡς αἱ τετέσιν τὸ $\gamma = \varepsilon^2 + \varepsilon \times \alpha\beta$, ὃ τὸ τρίτον ἐστὶ τῶν Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων εἶδος, καδ' ὃ διὰ τῆς παρόσης Προτάσ. ἐξευρίσκεται τὸ ε, τετέσιν ἡ βλ, ἥτοι ἡ λι, παραβολῇ Ὀρθογωνίᾳ τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴση, παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν αβ, καὶ ὑπερβάλλοντος Τετραγώνῳ. Εὐρεθείσης δὲ τῆς Πλευρᾶς λι, ἥτοι ε, δήλη ἅμα ἔσαι καὶ ἡ ἑτέρα Πλευρὰ αλ = $\alpha\beta \times \varepsilon$, ἣν οἱ νεώτεροι εὐρεῖν ἐπιτηδεύονται τῇ κατὰ τὸ Β'. εἶδος ἀναλύσει τῆς ἐξισώσεως.

(1) ΜΓ. τῷ α'. (2) Ὅρα Οὐγγρέδ. ἐν Κλειδί Κ'. Ιζ'. Ἰριζμ. Θ.

Καὶ τὸτο δὲ τὸ Β'. εἶδος τῶν διατεθειμένων Τετραγωνικῶν ἑξισώσεων, Γ'. εὐρεθίσεων διὰ τὸ ἄνωτ. Πόρ. τῶν τῆ Ορθογωνίαι (τῇ Εὐθυγράμμῳ γ ἴση, παρὰ τὴν δοθεῖσαν αβ παραβεβλημένη, καὶ ὑπερβάλλοντος εἶδει Τετραγώνῳ) Πλευρῶν αλ, λι, οὕτω κατασκευάζεσθαι δύναται.

Ἀναγεγράφθω δὴ (1) τὸ ἀπὸ τῆς αλ, εἴτ' ἐν τῆς ιφ Τετράγωνον ιφπρ, οὗ ἂν μέρος εἴη τὸ Ορθογώνιον αι. Καὶ ἐπειδὴ αλ = ιρ, καὶ βλ = λι, ἔσαι (2) λρ = αβ. Ἐὰν οὖν ἀπὸ τῆς αλ τεθῇ α, ἔσαι τὸ φρ = α^Τ, καὶ αρ = α × αβ. Ἐνθεντοι αι, εἴτ' οὖν γ = (φρ — αρ) = α^Τ — α × αβ. Καὶ τὸτο τὸ τῶν Τετραγωνικῶν ἑξισώσεων Β'. εἶδος, ὃ δεῖ διὰ τῆ παρόντος Παρίσματος κατασκευάζειν.

Καὶ τῶν Νεωτέρων δὲ αἱ μέθοδοι (3) (τετάρτοι $\sqrt{\frac{1}{4} \alpha \beta^T + \gamma + \frac{1}{2} \alpha \beta} = \alpha$, καὶ $\sqrt{\frac{1}{4} \alpha \beta + \gamma - \frac{1}{2} \alpha \beta} = \varepsilon$), δι' ὧν ἕκ μὲν τῆς ἑξισώσεως α^Τ — α × αβ = γ εὐρίσκεται τὸ α, ἕκ δὲ τῆς ἑξισώσεως ε^Τ + ε × αβ = γ εὐρίσκεται τὸ ε, κατασκευῇ τῆς ἀνά χεῖρας Προτάσ. ἐπαχθῆναι δύναται. Ἐπειδὴ γὰρ εβ = $\frac{1}{2} \alpha \beta$, ἔσαι εη = (4) $\frac{1}{4} \alpha \beta^T$, διὰ δὲ τὴν τῆς παρήσ. κατασκευὴν κδ = εη + γ = $\frac{1}{4} \alpha \beta^T + \gamma$, καὶ τὸτο ἡ Πλευρὰ κι, εἴτ' οὖν ἡ ελ = $\sqrt{\frac{1}{4} \alpha \beta^T + \gamma}$, ἥπερ εἰν ἡ αε, ἡ γὰρ $\frac{1}{2} \alpha \beta$ προσεθῇ, ἔσαι αλ ἥτοι α = $\sqrt{\frac{1}{4} \alpha \beta^T + \gamma} + \frac{1}{2} \alpha \beta$. Ἐὰν οὖν ἀπὸ ελ = $\sqrt{\frac{1}{4} \alpha \beta^T + \gamma}$ ἀφαιρεθῇ εβ, ἥτοι $\frac{1}{2} \alpha \beta$, ὑπολειφθήσεται βλ, εἴτ' οὖν ε = $\sqrt{\frac{1}{4} \alpha \beta^T + \gamma} - \frac{1}{2} \alpha \beta$.

Ἐκ τούτων δὲ τῶν μεθόδων ἐφ' ἑκατέρας τῆς ἑξισώσεως, εἴτε τῆς α^Τ — Ε. κ. 404. α × αβ = γ, εἴτε τῆς ε^Τ + ε × αβ = γ, δοθείσης τῆς Εὐθείας αβ, καὶ τῇ Εὐθυγράμμῳ γ, εὐχερέστερον ἐξευρίσκονται αἱ α καὶ ε, εἰν τῇ Εὐθυγράμμῳ γ Τετράγωνον ἴσον (5) κατασκευασθῇ, ἥπερ ἡ ἐντεῦθεν εὐρίσκομένη Πλευρὰ εἴη ν, ἥπερ ἀπὸ τῆ μεσαιτάτα τῆς Εὐθείας αβ Κάθετος ἀχθεῖν εξ, καὶ ἐπιζευχθεῖν ξβ, ἥ δὴπερ ἴση ἐπὶ τῆς εβ προσεβληθείσης ληφθεῖν ἡ ελ. ἔσαι γὰρ αλ = α, καὶ βλ = ε. Ἐπειδὴ γὰρ εξ^Τ = (6) γ, ἔσαι εβ^Τ + εξ^Τ = $\frac{1}{4} \alpha \beta^T + \gamma$ = (7) ξβ^Τ = ελ^Τ. Ὡς ελ (8) = $\sqrt{\frac{1}{4} \alpha \beta^T + \gamma}$, καὶ αλ = (9) $\frac{1}{2} \alpha \beta + \sqrt{\frac{1}{4} \alpha \beta^T + \gamma} = \alpha$, καὶ βλ = (10) $\sqrt{\frac{1}{4} \alpha \beta^T + \gamma} - \frac{1}{2} \alpha \beta = \varepsilon$.

(1) Μς. τῇ α'. (2) Λ'ξ. Γ. τῇ α'. (3) Ὅρα Οὐγγρεδ. εὐδα ἄνωτ. (4) Γ. Πόρ. τῆς Δ. τῇ β'. (5) Λ. τῇ β'. (6) Ε'κ κατ. (7) ΜΓ. τῇ α'. (8) Δξ. ι'. (9) Δξ. β'. (10) Δξ. γ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Λ.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεΐαν (αβ) ἔτω τεμεῖν, ὡς εἶναι τὴν ὅλην αβ πρὸς
 „τὸ ἕτερον τῶν Τμημάτων αγ, ὡς τὸ αὐτὸ ἐστὶ Τμήμα πρὸς τὸ λοιπὸν (γβ).
 „Τετέστιν (ὡς οἱ Γεωμέτραι φασὶ) τὴν δοθεῖσαν Εὐθεΐαν πεπερασμένην
 „ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

α. 405.

Ἐπὶ τῆς Εὐθείας αβ ἀναγραφῆτω Τετράγωνον τὸ αβτζ, καὶ παρὰ τὴν
 Εὐθεΐαν ζα, τῷ Τετραγώνῳ ζβ παραβληθῆτω (1) ἴσον Ὀρθογώνιον τὸ ζελι,
 ὑπερβάλλον εἶδει αλ τῷ ζβ ὁμοίῳ· τὸ γὰρ αλ Τετράγωνον ἐστίν· Ἐπεὶ δὲ
 $ζλ = ζβ$, κοινῇ ἀφαιρεθέντος τῆ ζγ, ἔσαι αλ = ξβ, διὰ δὲ τὰς Ὀρθὰς
 καὶ ἐπομένως ἴσας Γωνίας ὑπὸ ξγβ, αγλ (2), ἔσαι ξγ : γλ :: αγ : γβ.
 Ἀλλὰ (3) ξγ = αζ = αβ, καὶ γλ = αγ, ἄρα αβ : αγ :: αγ : γβ· Γέγονε
 τοίνυν τὸ ζητούμενον.

Α λ λ ω ς.

α. 406.

Διὰ τὴν ΙΑ'. τῆ Β'. ἔτω τέμε τὴν αβ κατὰ τὸ γ, ὡς τὸ Ὀρθογώνιον
 τὸ ὑπὸ αβ, γβ, ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ αγ· Οὕτω γὰρ ἔσαι τε-
 τελεσμένον κτ.

Ἐσαι γὰρ διὰ τὴν ΙΖ'. αβ : αγ :: αγ : γβ.

Τῆς δὲ τομῆς ταύτης θαυμασία ἡ δύναμις εἰς τὴν τῶν Κανονικῶν σχη-
 μάτων ἐγγράφην καὶ παράθεσιν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΑ.

α. 407.

„Ἐν τοῖς Ὀρθογωνίοις Τριγώνοις (αγβ), τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν Γωνίαν
 „ὑποτείνουσας Πλευρᾶς εἶδος (ζ) ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν πε-
 „ριεχουσῶν Πλευρῶν εἶδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις (κ καὶ λ).

Ἡ κατὰ τὸ Α'. Βιβλίον ΜΖ'. ἐπὶ τῇ παρόντος καθολικεύεται.

Ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας γ καθεῖσθω Κάθετος ἡ γξ· ἐπεὶ δὲ αἱ τρεῖς
 αβ, βγ, βξ (4) ἀνάλογον εἰσὶν, ἔσαι ζ πρὸς τὸ αὐτῷ ὁμοιον κ, ὡς (5)
 αβ πρώτη πρὸς βξ τρίτην. Πάλιν ἐπειδὴ (6) βα, αγ, αξ, τρεῖς ἀνάλογον
 εἰσὶν, ἔσαι ζ πρὸς τὸ αὐτῷ ὁμοιον λ, ὡς βα πρώτη πρὸς αξ τρίτην· Ἐπεὶ
 τοίνυν ζ πρὸς κ ὡς αβ πρὸς βξ, καὶ ζ πρὸς λ ὡς αβ πρὸς αξ, ἔσαι καὶ ζ πρὸς

(1) ΚΘ. τῆ ζ'. (2) ΙΔ. τῆ ζ'. (3) ΙΔ. τῆ α'. (4) Πόρ. Β'. τῆς Η. τῆ ζ'. (5)
 Β. Πόρ. τῆς Κ. τῆ ζ'. (6) Β. Πόρ. τῆς Κ. τῆ ζ'.

κ καὶ λ ἅμα ληφθέντα, ὡς αβ (1) πρὸς βξ καὶ αξ ἅμα ληφθείσας. Ἀλλὰ μὴν ἢ αβ ταῖς δυσὶ βξ, αξ ἴση ἐσίν, ἄρα καὶ τὸ ζ τοῖς δυσὶ κ καὶ λ ἴσον ἐστὶ. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Ἐκ ταύτης δὲ τῆς Προτάσεως καὶ Σχημάτων ὁποσωνῶν καὶ ὁποίωνῶν ὁμοίων πλήθει, ἐντι ληφθήσεται ἴσον τε καὶ ὅμοιον παραπλησίᾳ μεθόδῳ τῇ κατὰ τὸ Α'. Πρόβλημα τὸ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΜΖ'. τῇ Α', δι' ἣ ἐποιοιστὲν Τετραγώνοις ἴσον ἐν ἀνεγράφει, πλὴν ὅσον ἐν τῇ ἀποδείξει ἀντὶ τῆς ΜΖ'. τῇ Α'. ληπτέον τὴν ΛΑ'. τῇ ε'.

Τῷ δ' αὐτῷ λόγῳ, καὶ διὰ τῇ Β'. Προβλήματος τῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐκείνῳ Σχολίῳ, δοθήσεται καὶ ἡ τῶν ὁμοίων Σχημάτων ὁμοία ἥσα διαφορά· τατέσιν ὅ μόνον συνάπτεσθαι δύναται, ἀλλὰ καὶ ἀφαιρεῖσθαι τὰ Σχήματα τὰ ὁμοία ἀπ' ἀλλήλων, ὅποια ποτ' ἂν ᾖ, τὸ ἔλαττον δηλονότι ἀπὸ τῆ μείζονος, καθάπερ ἐν τῷ εἰρημένῳ Σχολίῳ καὶ τὰ Τετράγωνα ἀλλήλοισ τε συνάπτεται καὶ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεῖται.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΑΒ.

Οὐδὲν ἑδὲ χρήσιμον ἐστὶν ἐν αὐτῇ, ἑδὲ λόγῳ ἄξιον· Ὑπετέθη δὲ ὅμως ἡμῖν ἀνωτέρω ἐν τῷ Η'. Πορίσματι τῶν μετὰ τὴν Κε'. Πρότασιν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΑΓ.

„Ἐν τοῖς ἴσοις Κύκλοις, ἢ τῷ αὐτῷ, αἱ Γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς Περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν (ακγ, ζηδ), εἴαν τε πρὸς τοῖς Κέντροις (ὡς αἱ αβγ, ζεδ), εἴαν τε πρὸς ταῖς Περιφερείαις (ὡς αἱ αργ, ζσδ) ὥσι βεβηκεῖται· ἔτι δὲ καὶ οἱ Τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς Κέντροις συνιστάμενοι.

Τὸ γὰρ περὶ τῶν πρὸς τοῖς Κέντροις Γωνιῶν, καὶ δὴ καὶ τὸ περὶ τῶν Τομέων παραπλησίῳ λόγῳ δειχθήσεται, ὃ καὶ ἐπὶ τῆς Α'. Προτάσ. τῇ παρόντος Βιβλίου ἐδείχθη τὰ τὸ αὐτὸ ἔχοντα ὕψος Τρίγωνα εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ Βάσεις, εἰμὴ ὅτι ἀντὶ τῆς ἐκείσε ληφθείσης ΛΗ'. Προτάσ. τῇ Α'. Βιβλίου, ληπτέον ἐνταῦθα τὴν ΚΘ'. τῇ Γ., καὶ ἀντὶ δὲ τῇ ε' ἐκείσε τῇ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῇ Τριγώνῳ δεζ, δετέον ἐνταῦθα ξ, ὃπερ ἢ κατὰ κορυφὴν Γωνία ἐπισημαίνεται τῆς τε Γωνίας καὶ τῇ Τομέως δεζ, ἀντὶ δὲ τῶν ἐν ἐκείνοις Τριγώνων,

(1) ΚΔ. τῇ ε'.

ληφθῆναι ὥς αἱ πρὸς τοῖς Κέντροις β καὶ ξ Γωνίαι, καὶ δὴ καὶ οἱ Τομεῖς, καὶ τελευταῖον ἀντὶ τῶν ἐν ἐκείνοις Βάσεων, ὥς αἱ Περιφέρειαι.

Ὅσακις γὰρ μόνιον ὁποιοῦν τρίτημόριον φέρε τὸ δὴ, τῆς Περιφερείας δζ, περιέχεται ἐν τῇ Περιφερείᾳ αγ, τοσάκις τὸ ὅμοιον μόνιον, οἷον τὸ ὑπὸ δξη, τῆς ὑπὸ δξζ Γωνίας ἔσαι περιεχόμενον ἐν τῇ Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβγ. Διὸ δὲ ὅτι καὶ ὁποιοῦν ποτε ἕτερον μόνιον τῆς Περιφερείας δζ, καὶ τῆς Γωνίας ὑπὸ δξζ, ἐν τῇ Περιφερείᾳ αγ, καὶ τῇ Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβγ ἰσαριθμῶς αἰεὶ περιέχεται. Κατὰ ἄρα τὸ γνῶρισμα τῶν ἴσων λόγων τὸ παρὰ Τακυνετίῳ, ἔσαι ἡ ὑπὸ αβγ Γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ δξζ Γωνίαν, ὥς ἡ Περιφέρεια αγ πρὸς τὴν Περιφέρειαν δζ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸν Τομέα αβγ εἶναι πρὸς τὸν Τομέα δξζ, ὥς ἡ Περιφέρεια αγ πρὸς τὴν Περιφέρειαν δζ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ Γωνίαι ρ καὶ σ ἡμίσειαι (1) εἰσὶ τῶν πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνιῶν ὑπὸ αβγ, ζξδ, τὸ περὶ τέτων δεδειγμένον καὶ περὶ ἐκείνων ἔσαι.

Πορίσματα.

κ. 409. Α'. Ἡ πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνία ὑπὸ βαγ ἐστὶ πρὸς τὰς τέσσαρας Ὀρθάς, ὥς ἡ Περιφέρεια βγ ἐφ' ἣ βέβηκε, πρὸς τὴν ὅλην Περιφέρειαν.

Ἐπειδὴ γὰρ τὰς τέσσαρας Ὀρθάς, τατέσι (2) πάσας τὰς περὶ τὸ αὐτὸ Κέντρον α Γωνίας καταμετρεῖ ὅλη ἡ τῇ Κύκλῳ Περιφέρεια, τὴν μίαν ἄρα ὀρθὴν Γωνίαν, ἥτοι τὴν ὑπὸ βαζ, καταμετρήσει τῆς ὅλης Περιφερείας τὸ τεταρτημόριον βζ. Ἀλλὰ γὰρ ὥς ἔχει ἡ ὑπὸ βαγ Γωνία πρὸς τὴν Ὀρθὴν ὑπὸ βαζ, ὅτω (διὰ ταύτην τὴν ΛΓ.) καὶ ἡ Περιφέρεια βγ πρὸς τὸ τεταρτημόριον βζ, ἄρα (3) ἡ ὑπὸ βαγ ἐστὶ πρὸς τὰς τέσσαρας Ὀρθάς, ὥς τὸ τόξον βγ ἐστὶ πρὸς τὰ τέτταρα τεταρτημόρια, τατέσι πρὸς τὴν ὅλην Περιφέρειαν.

κ. 410. Β'. Τῶν ἀνίσων Κύκλων αἱ Περιφέρειαι ιλ, βγ, αἱ ἴσαι ὑποτείνεσαι τὰς Γωνίας, εἴτε τὰς πρὸς τῷ Κέντρῳ, οἷαι αἱ ὑπὸ ιαλ καὶ βαγ, εἴτε τὰς πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ὅμοιαι εἰσὶ καὶ ἀνάπαλιν.

Πρῶτον καὶ γὰρ κείθωσαν αἱ ἴσαι Γωνίαι πρὸς τοῖς Κέντροις καὶ ἡ Περιφέρεια ιλ ἐστὶ πρὸς τὴν ἰδίαν ὅλην Περιφέρειαν, ὥς (4) ἡ ὑπὸ ιαλ Γωνία, τατέσιν ἡ ὑπὸ βαγ πρὸς τέτταρας Ὀρθάς· ἥτε Περιφέρεια βγ ἐστὶ πρὸς τὴν ἰδίαν αὐτῆς ὅλην Περιφέρειαν (5), ὥς ἡ αὐτὴ Γωνία ἡ ὑπὸ βαγ πρὸς τέτταρας

(1) Κ. τῇ γ'. (2) Διὰ τὸ Γ'. Πόρ. τῆς ΙΓ. τῇ α'. μετὰ τῇ Σχολ. τῆς ΚΓ. τῇ α'.

(3) ΚΔ. τῇ ε'. (4) Διὰ τὸ Α'. Πόρ. (5) Διὰ τὸ Α'. Πόρ.

Οὐδαίς· Ἀρα ἡ ἰλ (1) ἐστὶ πρὸς τὴν ἰδίαν ὅλην Περιφέρειαν, ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν ἰδίαν, καὶ ἐπομένως (2) αἱ Περιφέρειαι ἰλ καὶ βγ ὅμοιαι εἰσὶ.

Εἰν δὲ αἱ ἴσαι Γωνίαι ξ καὶ κ πρὸς ταῖς Περιφερείαις ὥστι, κείθωσαν δὴ κ. 411.
ἐπὶ τῶν αὐτῶν Περιφερειῶν βεβηκεῖται, καὶ Γωνίαι πρὸς τοῖς κέντροις ἔσται αἱ
ὑπὸ ἰαλ, βαγ, καὶ (3) ἔσονται καὶ αὗται ἴσαι. Οὐδεν (διὰ τὸ Α' μέρος) τὰ
τόξα, τατέσιν αἱ Περιφέρειαι ἰλ καὶ βγ ὅμοιαι εἰσὶ.

Καὶ ἀνάπαλιν. Τῶν ἀνίσων Κύκλων αἱ ὅμοιαι Περιφέρειαι βγ καὶ ἰλ ὑ-
ποτείνουσι Γωνίας ἴσας, καὶντε πρὸς τοῖς Κέντροις αὗται ὥσι, καὶντε πρὸς ταῖς
Περιφερείαις· Ὡς ἐξ αὐτῶν δὴ τῶ Σχήματος, καὶ τῆς Κ'. τῆ Γ'. Βιβλίῳ κα-
τάδηλον ἐστὶ.

Ἡμιδιάμετροι δύο αβ καὶ αγ, ἀπὸ τῶν ὁμοκέντρων Περιφερειῶν τόξα α' Γ'.
πολαμβάνουσιν ὅμοια τὰ ἰλ, βγ. Τῷ δ' ὅπερ εὐδὴλον ἐστὶν ἐκ τῆ Β'. Πορίσματος.

Ἡγμένων τῶν Εὐθειῶν βγ, ἰλ, τὰ Τμήματα βκγ, ιξλ, ἃ δεκτικά Α'. κ. 412.
ἴσων ἐστὶ Γωνιῶν τῶν κ, ξ, ὅμοια ἐστὶ· καὶ ἀνάπαλιν.

Διὰ γὰρ τὸ Β'. Πόρισμα, αἱ Περιφέρειαι βγ, ἰλ, καὶ ἐπομένως καὶ αἱ
βκγ καὶ ιξλ ὅμοιαι εἰσὶ· Ἀρα (4) καὶ τὰ Τμήματα βκγ, ιξλ ὅμοια ἐστὶ.

Εἴτι καὶ τὰ ἀπεναντίον Τμήματα, διὰ τὰς βγ καὶ ἰλ ὁμοίας Περιφερείας,
καὶ αὐτὰ ὅμοια ἐστὶ.

Ἀνάπαλιν δὲ, τὰ ὅμοια Τμήματα βκγ, ιξλ, δεκτικά ἐστὶ Γωνιῶν ἴσων
τῶν κ καὶ ξ. Διὰ γὰρ (5) τὰς ὁμοίας Περιφερείας βκγ, ιξλ, αἱ ἀπεναντίον
Περιφέρειαι βγ, ἰλ ὅμοιαι ἔσονται, αἵτε Γωνίαι κ καὶ ξ αἱ ἐπ' αὐταῖς βε-
βηκεῖται ταῖς Περιφερείαις (6) ἀλλήλαις ἴσαι.

Εἴτι αἱ ἐν τοῖς Τμήμασι βγ, ἰλ Γωνίαι, τῶν ἴσων Γωνιῶν κ καὶ ξ (7)
παραπληρώματα ἐστὶ πρὸς δύο Οὐδαίς, καὶ διὰ τῷτο ἴσαι.

Τὰ ὅμοια Τμήματα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας, ἢ τῶν ἴσων, ἴσα ἀλ- Ε'.
λήλοις ἐστὶ. Δῆλον ἐκ τῆ ἀνωτ. Πορίσματος, καὶ ἐκ τῆ Σχολίᾳ τῆς ΚΑ'. τῆ
Γ', καὶ ἐκ τῆ Ζ'. Ἀξιῶμ. τῆ Α'. Βιβλίῳ· Περιέχει δὲ ταῦτὶ τὸ Πόρισμα
τὰς Προτάσεις, τήν τε ΚΓ'. καὶ ΚΔ'. τῆ Γ'. Βιβλίῳ, αἱ δὲ μὲν Τακτικὸς πα-
ρέλιπεν, αὐτοὶ δὲ ἀνείλημμεθα· Ἡ γὰρ τοι ἐν ἐκείνοις ΚΓ'. ἔτως ἐκφέρεται
,,εἴωθεν. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας δύο Τμήματα Κύκλου ὅμοια καὶ ἀνίστα οὐ
,, συζαδῆσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· Ἡ δὲ ΚΔ'. ἔτω· ,,Τὰ ἐπὶ ἴσων Εὐθειῶν
,, ὅμοια Τμήματα Κύκλων ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

(1) Διὰ τὴν ΙΑ. τῆ ε'. (2) Οὐ. Α. τῆ ε'. (3) Διὰ τὴν Κ. τῆ γ'. καὶ τὸ ε'. Δ'ε.
τῆ α'. (4) Α. Ορίσμ. Βιβλ. ε'. (5) Οὐ. Α. τῆ ε'. (6) Β. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (7) ΚΑ. τῆ γ'.

ς. Ἐκ ταύτης δ' ἔτι τῆς Προτάσ. καὶ τῶν ἐξ αὐτῆς Πορισμάτων, ῥᾶτα εἰληπται τὰ τῆς πράξεως τῆ συνιστᾶν, καὶ καταμετρεῖν τὰς Γωνίας, ὅπερ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΚΓ'. τῇ Α'. Βιβλίῳ πλατύτερον ἀνεπτύχθη.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐνταῦθα δὲ γενομένοις, τὸ ἐν τῷ Δ'. Βιβλίῳ ἡμῖν ὑποχρεθὲν ἀποτιτέον· ἐπηγγέλλετο γὰρ ἐν ἐκείνοις ἡ τῆς Γ'. Προτάσεως τῇ ΓΓ'. τῶν χοιχείων ἀποδείξεις. Ἐχει γὰρ τὸ θεωρήμα ἔτω.

„Ἐὰν εἰς Κύκλον Πεντάγωνον ἰσοπλευρον ἐγγραφῇ (τὸ αβγδε), ἡ τῇ Πενταγώνῳ Πλευρὰ (αβ) δύναται τῇ τε τῇ Ἑξαγώνῳ, καὶ τῇ τῇ Δεκαγώνῳ, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφομένων.

κ. 413.

Ἀρχείσης γὰρ τῆς Διαμέτρου αη, καὶ τῆς Ἡμιδιαμέτρου ζβ, ἀπὸ τῆς Κέντρος ζ ἀχθήτω Κάθετος πρὸς αβ ἡ ζθ, ἣτις προεκβληθεῖσα προσπιπτέτω τῇ τῇ Κύκλῳ Περιφερείᾳ κατὰ τὸ κ. Αὕτη δὲ καὶ τὸ τόξον ακβ (τατέσι (1) τὸ πεμπτημόριον τῆς ὅλης Περιφερείας) δίχα τεμεῖ (2) κατὰ τὸ κ. Ἐπιζευχθήτωσαν αἱ βκ, κα, καὶ ἐπειδὴ ακ τῆς ὅλης Περιφερείας δεκατημόριον ἐστίν, ἔσαι ἡ ακ Εὐθεῖα (3) πλευρὰ τῇ Δεκαγώνῳ τῇ κανονικῇ (τατέσι τῇ ἰσοπλεύρῳ τε καὶ ἰσογωνίῳ) τῇ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφεσθαι δυναμένῃ. Ἀπὸ γὰρ τῆς Κέντρος ζ Κάθετος ἀχθήτω ἐπὶ τὴν ακ ἡ ζν, ἣτις προεκβαλλομένη προσπιπτέτω τῇ Περιφερείᾳ τῇ Κύκλῳ κατὰ τὸ μ. Αὕτη δὲ τὸ τόξον ακμ δίχα τέμνεται ἔσαι κατὰ τὸ μ, καὶ τεμεῖ δὲ καὶ τὴν τῇ Πενταγώνῳ Πλευρὰν βα κατὰ τὸ λ. Ἐπιζευχθήτω ἡ κλ. διὰ γὰρ τὰς Ἡμιπεριφερείας αβη καὶ αεη, αἱ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ μὴν καὶ διὰ τὰ τόξα αβγ, αεδ τὰ ἀλλήλοις καὶ αὐτὰ ἴσα, ἔσαι τὸ τόξον γη τῇ τῇ τόξῳ γηδ ἡμίσεια, ἡ γὰρ καὶ τῇ ακβ. Ἐνθεντοί Τόξ: γη = Τόξ: ακ = 2 Τόξ: κμ. ὁμοίως δὲ καὶ Τόξ: γβ = Τόξ: αβ = 2 Τόξ: βκ. Ἄρα γη + γβ τὰ συναμφότερα Τόξα = 2 Τόξ: κμ + 2 Τόξ: κβ, τατέσι τὸ Τόξον βγη = 2 Τόξ: βκμ. ὥστε καὶ Γωνία ἡ ὑπὸ βζη = (4) 2 Γωνίαις βζμ. Ἀλλὰ γὰρ ἐπὶ τῇ Τριγώνῳ αβζ, ἡ ἐκτὸς Γωνία ἡ ὑπὸ βζη = (5) ταῖς ὑπὸ αβζ καὶ βαζ ἅμα ληφθείσαις, τατέσι (διὰ τὰς αζ καὶ βζ ἴσας ἕσας) (6) = 2 Γων: αβζ = 2 Γων: βαζ, ἥτοι (διὰ τὰ ἀνωτ.) = 2 Γωνίαις βζμ, ἡ λζβ. ἐν ἄρα τοῖς Τριγώνοις λζβ, ζαβ, διὰ τὰς ὑπὸ βζλ καὶ βαζ ἴσας ἕσας, καὶ τὴν πρὸς τῷ β κοινὴν, ἔσαι δὲ (7) καὶ ἡ ὑπὸ βλζ = βζα,

(1) Κς. τῇ γ'. (2) Α. τῇ γ'. (3) ΚΖ. τῇ γ'. (4) ΑΓ. τῇ ε'. (5) ΑΒ. τῇ α'.
(6) Ε. τῇ α'. (7) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῇ α'.

καὶ ἐπομένως (1) $\alpha\beta : \beta\gamma :: \gamma\delta : \delta\lambda$ ταύτητοι (2) καὶ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ $\alpha\beta\lambda = \beta\gamma\tau$. Ἦδη οὖν ἐπὶ τῶν Τριγώνων $\alpha\lambda\nu$, $\kappa\lambda\nu$, διὰ τὰς πρὸς τῷ ν Ὀρθάς, ἢ τὰς $\alpha\nu$, $\nu\kappa$ (3) ἴσας ἔσται, ἢ διὰ τὴν $\lambda\nu$ κοινὴν τυγχάνουσαν, ἔστιν (4) $\alpha\lambda = \lambda\kappa$, ἢ ἡ ὑπὸ $\lambda\alpha\kappa = \alpha\kappa\lambda$, ἄρα ἐπὶ τῶν Τριγώνων $\beta\alpha\kappa$, $\kappa\alpha\lambda$, διὰ τε τὴν πρὸς τῷ α κοινὴν, ἢ τὰς ὑπὸ $\alpha\beta\kappa$ ἢ $\alpha\kappa\lambda$ ἴσας ἔσται, ἔστι (5) ἢ ἡ ὑπὸ $\alpha\kappa\beta = \alpha\lambda\kappa$, καὶ τὰ Τρίγωνα $\beta\alpha\kappa$, $\kappa\alpha\lambda$ ἔσται ὅμοια. Ὅθεν $\beta\alpha : \alpha\kappa :: \kappa\alpha : \alpha\lambda$, καὶ Ὀρθογώνιον τὸ $\beta\alpha\lambda = \alpha\kappa\tau$. Ἀλλ' Ὀρθογών. $\alpha\beta\lambda +$ Ὀρθογών. $\beta\alpha\lambda =$ (6) $\alpha\beta\tau$, ἄρα $\alpha\beta\tau = \beta\gamma\tau + \alpha\kappa\tau$. Ἀλλὰ $\beta\gamma$ τῷ Κύκλῳ Ἡμιδιάμετρος ἐστὶ, ἢ ἐπομένως (7) Πλευρὰ τῆ κανονικῆς Ἐξαγώνου τῆ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένη, ἥτε $\alpha\kappa$ Πλευρὰ τῆ κανονικῆς Δεκαγώνου τῆ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένη. Ἄρα τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τῆ Πενταγώνου τῆ κανονικῆς, ἴσων τοῖς Τετραγώνοις, τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τῆ κανονικῆς Ἐξαγώνου, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς τῆ Δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγράφεσθαι νομένων, ἅμα ληφθεῖσιν. Ο. Ε. Δ.

Τῶν σοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΒ'.

Ἡ μὲν δὲ Ζ'.

Τῶν ἑξ προεκτεθεῖσι Βιβλίοις τρία ἔτι τὰ σοιχεῖα τῶν Ἀριθμῶν περιέχοντα, τὸ Ζ', ἢ Η', ἢ Θ'. ὁ Εὐκλείδης παρασυνάπτει, προσιδεῖς ἢ Γ', ἐν ᾧ περὶ τῶν ἀσυμμέτρων αὐτῷ πληκιοτήτων γίνεται λόγος. Αὐτοὶ δὲ ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἀμέσως ἐπὶ τὰ στερεὰ μεταβαίνουмен, τὴν περὶ Ἀριθμῶν ἐν μέρει ἐνσησάμενοι πραγματεύου. ἐπεὶ ἢ τοῖς μαθητιώσιν φήθῃμεν εὐχερесеῖραν ἔστω τὴν τάξιν ἔσεσθαι τῆς διδασκαλίας, εἰ μόνον αὐτοῖς τὰ πρὸς τὴν τῶν Γεωμετρικῶν προτεθεῖν σοιχείωσιν, μὴ ὑφ' ἑτέρας μεταξὺ θεωρίας τῆς ἐκεί-

(1) Δ. τῆ ε'. (2) ΙΖ. τῆ ε'. (3) Γ. τῆ γ'. (4) Δ. τῆ δ'. (5) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῆ δ'. (6) Β. τῆ β'. (7) Α. Πόρ. τῆς ΙΕ. τῆ δ'.

νων εἰσηγήσεως διακοπτομένης. Τὰς μέντοι ἐν τῷ παρόντι καὶ τῷ ἐφεξῆς Βιβλίῳ Προτάσεις ἀνακαλόμενοι, ἔχ' ἑβδομον ἔδε ὕψους τὰ Βιβλία ἐπιγραψόμεθα, ἐνδέκατον δὲ καὶ δωδέκατον, ὡς ἂν μή τις σύγχυσις ἐπακολουθεῖν ἐν ταῖς τῶν Προτάσεων ἀνακλήσῃ, τῆς κατ' Εὐκλείδην (τυνῆθας ἤδη καταστάσης ἅπασιν) τάξεως ἡμῖν διασφερομένης.

Διμερές δὲ πῶς ἐστὶ τὸ παρὸν Βιβλίον· ἐν αὐτῷ γὰρ πρὸ πάντων οἱ πρῶτοι οἰοῦντι θεμέλιοι προκαταβάλλονται, οἷς ἅπαντα ἡ περὶ τῶν Στερεῶν, τετέστι τῶν Σωμάτων ἐφήδρασαι διδασκαλία, μετὰ ταῦτα δὲ ὡς ἐν μέρει Β' τῶν Παραλληλεπιπέδων τὰ πάδη προτίθενται.

Τὰς γὰρ πρωτίτας τῶν στερεῶν ἀρχὰς ἡ ΙΑ'. τῶν στοιχείων ὑποτίθῃσι Βίβλος, ὧν ἄνευ τὰ πάδη τῶν Σωμάτων ἀγνοῦντας, τινάλλως μοχθεῖν εἰκὸς περὶ πολλὰ τῶν μαθηματικῶν πραγματειῶν εἶδη. Τὰ τε γὰρ κατὰ τὸν Θεοδόσιον Σφαιρικά, καὶ τὰ τῆς σφαιρικῆς ὡσαύτως Τριγωνομετρίας, ναιμὴν καὶ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας τὰ πλεῖστα, καὶ τὰ τῆς Στατικῆς, καὶ τὰ τῆς Γεωγραφίας, τῇ θεωρίᾳ τῶν στερεῶν ἐπερεῖδεται, καὶ ὅσα δὲ μικρὸν ἀπαντᾷ δυσχερέστερα, ἔντε τοῖς Γνωμωνικοῖς καὶ ταῖς τῷ Κῶνι τομαῖς, καὶ τοῖς Ἀερονομικοῖς, καὶ Διοπτρικοῖς, καὶ Ὀπτικοῖς, τῶν κατὰ τὰ στερεῶν ἀρχῶν ἀκριβῶς νοημένων, ῥαδίῳ καθίσταται καὶ μᾶλλον εὐξύνετα. Ὡς οἱ ἐν τῷ πραγματεύεσθαι περὶ τῶν Γεωμετρικῶν στοιχείων τὸ ἀνά χειρας καὶ τὸ μετ' αὐτὸ Βιβλίον παρατρέχοντες, κολοβὴν καὶ πάντῃ ἀτελεῖ τῆς Γεωμετρίας δῆλοι εἰσὶ ποιεῖσθαι τὴν εἰσηγήσιν.

Ὁ ρ ι σ μ ο ι.

- Α'. Στερεόν ἐστὶ τὸ μήκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.
 Β'. Στερεὴ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.
 κ. 414. Γ'. Εὐθεία (αβ) πρὸς ἐπίπεδον (γγ) ὀρθή ἐστι (τετέστι Κάθετος), ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς Εὐθείας (γα), καὶ ὅσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένης ἐπιπέδῳ (γγ) πρὸς ὀρθὰς (ὑπὸ βαγ, βαγ) ᾗ.
 κ. 415. Δ'. Εἰς ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν (τετέστι Κάθετον) ἐστὶν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι (λπ) Εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾧσι.
 κ. 416. Ε'. Εὐθεία πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, ὅταν ἀπὸ τῆς μετεώρου πέρατος τῆς Εὐθείας (λ) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Κάθετος ἀχθῇ ἡ λξ, καὶ ἀπὸ τῆς γενομένης Σημεῖς ξ, καὶ ἀπὸ τῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος ζ τῆς Εὐθείας λζ, Εὐθεῖα ἐπι-

ξευχθῇ ἢ ξζ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα Γωνία ὑπὸ λζε, ὑπὸ τῆς ἀχθείσης ἢ τῆς ἐφεσώσης, ταύταις ἢ ὑπὸ ξζλ.

Ἐπιπέδα (ρε) πρὸς ἐπίπεδον λπ κλίσις ἐστίν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα Γω- ς. κ. 417. νία (αβγ) ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθῶς τῇ κοινῇ τομῇ (ξε) ἀγομένων (αβ ἢ γβ) πρὸς τῷ αὐτῷ Σημείῳ (β) ἐν ἐκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ζ. ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσι.

Παραπλησίως δέ, Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον, ἢ ἕτερα πρὸς ἕτερον, ἢ τὸ αὐτό, εἰάν αἱ εἰρημέναι (ἐν τῷ Ε'. Ο'ρισ.) τῶν κλίσεων Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσι.

Παράλληλα ἐπίπεδα ἐστὶ τὰ, ὅσον ἂν καὶ προαχθεῖν, ἴσοις ἀείποτε Η'. ἀπ' ἀλλήλων ἀφεσώτα τοῖς διαζήμασι.

Η' (ὡς Εὐκλείδ. ὥριστο) τὰ ἀσύμπτωτα.

Ὅμοια στερεὰ Σχήματα (εὐδύγραμμα) ἐστὶ, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων Θ'. περιεχόμενα ἴσων τὸ πλήθος.

Στερεὰ γωνία ἐστίν ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύο ἐπιπέδων Γωνιῶν (βαγ, Γ. κ. 418. γαξ, βαξ) περιεχομένη, μὴ ἔσῳν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἐνὶ Σημείῳ συνισαμένων.

Ἰσται δὲ Γωνίαι στερεαὶ εἰσιν αἱ (ἣν ἐν ἀλλήλοις ἐντεθῶσιν) ἐφαρμόζασθαι. ΙΔ.

Καθάπερ γὰρ Γωνία ἐπίπεδος ἐστίν ἡ τῶν Γραμμῶν κλίσις, οὕτως οὖν στερεὰ ἐστὶ Γωνία ἡ τῶν Γωνιῶν κλίσις τῶν ἐπιπέδων. Καὶ περὶ ἀμφοῖν τοίνυν ἐπίσης σύλλογιζέον. Ο'ρα τὸ Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν Ις. τῷ Γ'.

Πρίσμα ἐστὶ Σχήμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ξζε, αβγ παράλληλά τε ἐστὶ, ἢ ἴσα, ἢ ὅμοια. ΙΒ. κ. 419.

Παραλληλεπίπεδον ἐστὶ Σχήμα στερεὸν, ὑπὸ Τετραπλεύρων ἀπεναντίον παραλλήλων περιεχόμενον. ΙΓ'. κ. 420.

Εἰάν ὑπὸ ἑξ ἐπιπέδων ἀπεναντίον παραλλήλων Τετραγώνων τὸ στερεὸν ἢ περιεχόμενον, Κύβος ἐστὶ. ΙΔ'.

Ἰσάτε ἢ ὅμοια στερεὰ Σχήματα ἐστὶ, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιε- ΙΕ'. χόμενα ἴσων τῷ πλήθει ἢ τῷ μεγέθει.

Τῆτον δὲ τὸν Ο'ρισμόν, ὅς δέκατός ἐστι τὸν ἀριθμὸν παρ' Εὐκλείδει παρελελείπει μὴ καλῶς ποιήσας ὁ Τακτικὸς, ἢ διὰ τῆτο μὴ πάντοτε ἀκριβῶς τὰς ἀποδείξεις τῆς ΚΕ'. ἢ ΚΗ'. τῶν προτάσεων ἀποδεδικώς.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

κ. 421. „Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέντι (τὸ αγ) ἔκ ἔσιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ
 „ἐπιπέδῳ (ξε), μέρος δέτι (γβ) ἐν τῷ μετεώρῳ.

Εἴςι καδ' αὐτὸ τὸ λεγόμενον ἐκφάνες, ἐννοήσασι τί δή ποτε ἐσὶν ἐπί-
 πεδον, καὶ τὴν εὐθεῖαν Γραμμὴν. Οὔρα Οὔρισμ. Ζ'. καὶ Δ'. τῆς Α'. Βιβλία.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β.

„Πᾶν Τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐσὶν ἐπιπέδῳ. Καὶ δύο Εὐθεῖαι τέμνεσθαι ἀλ-
 „λήλας ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ.

κ. 422. Τὸ Α'. μέρος καδ' αὐτὸ δῆλον, ὅθεν γὰρ ἄλλο τὸ Τρίγωνον, ἢ ἐπί-
 πεδος Ἐπιφάνεια ὑπὸ τριῶν Εὐθειῶν περιεχομένη. Κἀντεῦθεν δὴ καὶ ἐκ τῆς
 ἀνωτ. Πρωτ. εὐδῆλον καὶ τὸ Β'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

κ. 423. „Εἴαν δύο ἐπίπεδα (αβ, γδ) τέμνη ἄλληλα, ἢ (εζ) κοινὴ αὐτῶν το-
 „μὴ Εὐθεῖα ἐστί.

Φανερόν ἐκ τῆς ὁρίσμεως τῆς ἐπιπέδου. Εἴςιν ἄλλ' οὖν καὶ ἡτῶ δεῖκνύειν·
 εἰ μὴ γὰρ Εὐθεῖα ἢ κοινὴ τομὴ εζ, ἀγέσθω ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου γδ Εὐθεῖα
 επζ, ἐπὶ δὲ τῆς αβ Εὐθεῖα εξζ· καὶ αἱ δύο τοῖνον εξζ, επζ Εὐθεῖαι πε-
 ριέξουσιν χωρίον, ὅπερ ἄτοπον.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

κ. 424. „Εἴαν Εὐθεῖα (βα) δύο Εὐθείαις (γαχ, ζασ) τεμνάσαις ἀλλήλας,
 „πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν ἐπισαδῇ, καὶ τῷ δὲ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς
 „ὁρθὰς ἔσται.

Ἄλλ' εἰμὴ, ἑτέρατις ἄρα Εὐθεῖα ἢ βπ τῷ διὰ τῶν Εὐθειῶν χαγ, σαζ
 πρὸς ὁρθὰς ἐφιστάδω, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ απ, καὶ ταύτη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζαγ ἀ-
 γέσθω κάθετος ἢ ξπ, ἢ δὴ προεκβληθεῖσα ἐξ ἀνάγκης τεμεῖ τινα τῶν Εὐ-
 θειῶν γαχ, ζασ, ἢ ἑκατέραν, ὅπῃ ποτ' ἂν ἦ τέως τὸ Σημεῖον π. Εἴαν γὰρ
 ἢ Εὐθεῖα πξ τῇ ἑτέρᾳ τῶν Εὐθειῶν, ὅσον τῇ ζασ παράλληλος ἦ, ἢ πξ τὴν
 ἑτέραν (1) τεμεῖ γαχ· εἰδ' ὁδετέρᾳ παράλληλος ἦ, τεμεῖ (2) ἑκατέραν. Τε-

(1) Β. Πόρ. τῆς Σχολ. τῆς μετὰ τὴν ΑΔ. τῆς α'. (2) Α. Πόρισμα ἢ Σχολ. μετὰ τὴν
 ΑΔ. τῆς α'.

μνέτω τοίνυν τὴν γαχ κατὰ τὸ ξ, ἢ ἐπιζευχθήτω ἢ βξ· ἢ ἐπειδὴ ἢ ὑπὸ
βαξ Γωνία (ἐξ ὑποθ.) ὀρθή ἔσται ἐς,

Ἔσται Τετράγ. βξ = (1) Τετραγ. βα }
Τετραγ. αξ }

Α' ἂν ἐπειδὴ ἢ βπ ὀρθή τίθεται ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ ζαγ, ἢ ἐπομένως (2)
Ὁρθὴν συνίστησι μετὰ τῆς απ τὴν ὑπὸ βπα,

Ἔσιν ἄρα Τρετάγ. βα = (3) Τετραγ. βπ }
Τετραγ. απ }

Ἐπεὶ δὲ ἢ ὑπὸ απξ ἐκ καταστ. Ὁρθή ἔσται ἐς.

Τετράγ. αξ = (4) Τετραγ. ξπ }
Τετραγ. απ }

Ἀ'ρα Τετράγ. βξ = Τετραγ. βπ }
Τετραγ. ξπ }
Τετραγ. απ }

Ἀ'ρα Τετράγ. βξ μείζον ἐστὶ τῶν Τετραγ. βπ ἢ ξπ, ἢ ἐπομένως
(5) ἢ ὑπὸ βπξ ἂν ἔσιν Ὁρθή. Οὐκ ἄρα ἢ βπ ὀρθή ἐσιν (6) ἐπὶ τῷ ἐ-
πιπέδῳ γαζ· ὥστε δῆλον τὸ προτεθέν.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐκ τῆς τεθέντος ὡς ἢ βπ ὀρθή ἐσιν ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ ζαγ, ὁρθῶς
ἐδείχθη τὴν βπ μὴ εἶναι ὀρθὴν ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ τέτα. Ἐνθεντοί ἢ τῇ ἀ-
ποφάσει τῆς θεωρήματος, ἢ τῆς θεωρήματος αὐτῆς ἀλήθεια κατ' ὀρθὴν
δείξιν κατεσκευάσθη. Ἡ δὲ δέξις αὕτη κατὰ γὰρ τὸ ἐσιῶδες Γωάννης Κλερ-
μαντίς ἐστὶ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

„Εὰν Εὐθεία (αβ) τρισὶν Εὐθείαις (βα, γα, ζα) ἀπτομέναις ἀλλή-
λων, πρὸς ὁρθάς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς (τῆς Σημεῖς δηλ. α) ἐπισαθῇ, αἱ
τρεῖς Εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ.

Ἔστω γὰρ εἰ δυνατόν, ἢ μία τέτων βα ἐν ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ρξ, τῷ α. 425.
τέμνοντι τὸ λπ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ αἱ λοιπαὶ δύο γα, ζα, Εὐθεῖαι τῇ αξ· Ε-

(1) MZ. τῆ α'. (2) Ὁρ. Γ. τῆ ια'. (3) Διὰ τὴν MZ. τῆ α'. (4) MZ. τῆ α'. (5)
Δ. Πόρ. τῆς MZ. τῆ α'. (6) Δῆλον ἐκ τῆς Γ. Ὁρίσμ. τῆ ια'.

πειδὴ τοίνυν ἡ ρα (ἐξ ὑποθ.) πρὸς ὀρθὰς ἐφίσταται ἐπὶ τῶν δύο γα, ζα, ἐπὶ τῇ ἐπιπέδῳ λπ ὀρθῇ (1) ἔσαι. Ὡς ἐπειδὴ ἡ αξ ὀρθὴν συνίστησι (2) τὴν ὑπὸ ραξ· ἔστι δὲ (ἐξ ὑποθ.) καὶ ἡ ὑπὸ ραβ ὀρθῇ, αἱ ἄρα ὑπὸ ραβ ραξ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὅπερ ἄτοπον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ς.

κ. 426. „Εἴαν δύο Εὐθεΐαι (αβ, γδ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (εζ) πρὸς ὀρθὰς ᾧσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ Εὐθεΐαι.

Αἰτεῖσθαι εἶχεν ὡς καὶ αὐτὸ δῆλον, ἀλλ' ἔμπης καὶ ἔτις ἂν ἀποδείχθῃ.

Ἐπιζευχθεΐσθαι τῆς βδ, ἀγέσθω ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζε ἡ δὴ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βδ, καὶ ἴση τῇ βα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, ηα, ηβ. Αἱ μὲν οὖν Εὐθεΐαι βδ, δη ταῖς βδ, βα (3) ἴσαι εἰσίν· αἱ τε ὑπὸ βδ η (4), δβα εἰσὶν ὀρθαί. Ἄρα (5) αἱ αδ καὶ βη ἴσαι εἰσὶν. Τὰ τοίνυν Τρίγωνα αβη, ηδα ἰσόπλευρα ἔστι, καὶ ἐπομένως αἱ ὑπὸ αβη, αδη (6) ἴσαι. Ἀλλ' αβη ὀρθῇ (7) ἔστιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αδη. Ἀλλὰ γὰρ εἰσὶν ὀρθαὶ καὶ ἡ ὑπὸ βδ η, καὶ ἡ ὑπὸ γδ η, ἡ μὲν ἐκ κατασκευῆς, ἡ δὲ ἐκ τῆ Γ'. Ὁρισμῶ. Ἄρα ἡ Εὐθεΐα ηδ ταῖς τρισὶ γδ, αδ, βδ πρὸς ὀρθὰς ἐφίσταται· ὥς αἱ γδ, καὶ αδ, καὶ βδ, ἐν ἐνὶ καὶ τῷ αὐτῷ (8) εἰσὶν ἐπιπέδῳ. Ἀλλὰ μὲν καὶ αἱ αβ, καὶ αδ, καὶ βδ (9) ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ, ἄρα αἱ αβ, γδ, ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ εἰσίν. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ὑπὸ αβδ, γδβ εἰσὶν (10) ὀρθαί, ἔσονται (11) αἱ αβ, γδ παράλληλοι. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

κ. 427. „Ἡ τὰς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ Εὐθεΐας (αβ, γδ) τέμνουσα (εζ) ἐν τῷ αὐτῷ, ἐν ᾧ καὶ αὐταί, ἔστιν ἐπιπέδῳ.

Αἰτεῖσθαι δύναται, δειχθεῖν δ' ἂν τῷ βελομένῳ ᾧδε.

Δειχθεῖν δ'
ἂν καὶ διὰ τῆς
Β. τοῦ πα-
ρόντος.

Εἰμὴ γὰρ, ἐπεζεύχθω ἡ εηζ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐκείνῳ, καὶ δὴ αἱ δύο εζ, εηζ χωρὶον περιέξωσιν· ὅπερ (12) ἄτοπον.

Ἀλλως: Τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ αἱ Εὐθεΐαι αβ, γδ, τεμνέσθω ὑφ' ἑτέρας ἐπιπέδου διὰ τῶν Σημείων ε καὶ ζ. Καὶ εἰ μὴ ἔστιν ἡ Εὐθεΐα εζ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν αβ, γδ, ἐκ ἔσαι ἡ εζ κοινὴ τομὴ. Ἐς τοίνυν ἡ εηζ· καὶ δὴ εηζ (13) Εὐθεΐά τις ἔσαι, καὶ αἱ δύο Εὐθεΐαι εζ καὶ εηζ περιέξωσιν χωρὶον· ὅπερ ἄτοπον.

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Γ. Ὁρ. ια'. (3) Ἐκ κατ. (4) Ὁρ. Γ. τῇ ια'. (5) Δ. τῇ α'. (6) Η. τῇ α'. (7) Γ. Ὁρισμ. τῇ ια'. (8) Διὰ τὴν ἀνωτ. (9) Β. τῇ ια'. (10) Ὁρ. Γ. τῇ ια'. (11) ΚΘ. τῇ α'. καὶ Ὁρ. Δς. τῇ α'. (12) Δς. ιγ'. (13) Γ. τῇ ια'.

Π ό ρ ι σ μ α .

Εντεῦθεν ἔπεται ὡς ἡ εζ ἢ τὰς παραλλήλους αβ, γδ τέμνουσα, ἐν τῷ αὐτῷ σὺν αὐταῖς ἐσὶν ἐπιπέδῳ. Αἰ γὰρ αἱ παράλληλοι (1) ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἰσὶ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Εάν ἡ ἑτέρα (αβ) τῶν παραλλήλων (αβ, γδ) ἐπιπέδῳ τινὶ (τῷ εζ) πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ ἡ λοιπὴ (γδ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. κ. 428.

Εἶχε μὲν αἰτεῖσθαι, δεῖσαν δὲ, ἅτῳ δειχθεῖν, κατὰπερ ἡ ζ'. Ἐπιζευχθεῖσιν γὰρ τῶν βδ, αδ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ εζ, ἀχθήτω ἡδ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βδ, καὶ ἴσῃ τῇ βα, καὶ ἐπιζευχθεῖσιν καὶ τῶν ηα, ηβ, δειχθήσεται ὡς ἐπὶ τῆς ζ'. Προτάσ., ὡς ἡδ καὶ τῇ αδ πρὸς ὀρθὰς ἐσιν· ὥς τε ἡ ηδ (2) πρὸς ὀρθὰς ἐπιστήσεται ἐπὶ τῇ ἐπιπέδῳ αβδ, τατέσιν (3) ἐπὶ τῇ γδβα· ἐνθεντοὶ ἡ ὑπὸ γδῃ (4) ὀρθὴ ἦστα ἐστίν· Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ γδβ ὀρθὴ ἐσιν (ἐπεὶ μετὰ τῆς ὑπὸ αβδ ὀρθῆς Ὄρθας δύο (5) συνίστησιν), ἡ ἄρα γδ (6) πρὸς ὀρθὰς ἐσιν ἐπὶ τῇ ἐπιπέδῳ ηδβ, ἡτοὶ τῇ εζ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Αἱ τῇ Εὐθείᾳ (γδ) τῇ αὐτῇ παράλληλοι (αβ, εζ), καὶ μὴ ἦσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. κ. 429.

Ἐχοὶ μὲν ἂν αἰτεῖσθαι, δεικτέα γεμῖν.

Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν παραλλήλων αβ, γδ, ἀχθήτω ἡκ κάθετος ἐπὶ τῆς γδ· ὡσαύτως δὲ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν παραλλήλων εζ, γδ, ἀχθήτω ἡκ κάθετος ἐπὶ τὴν γδ, καὶ ἐπιζευχθήτω ἡ ηδ· Ἀρ' οὖν (7) ἡ Εὐθεῖα γκ ὀρθὴ ἐσιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ηκδ· καὶ ἐπειδὴ αἱ αη, εθ, παράλληλοι εἰσὶ πρὸς τὴν γκ, ἔσονται δὴ (8) αἱ αη, εθ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῇ ἐπιπέδῳ ηκδ· Ἀρα (9) αἱ αη, εθ παράλληλοι εἰσὶν. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ι.

„Εάν δύο Εὐθεῖαι (αγ, βγ) ἀπτόμεναι ἀλλήλων, παρὰ δύο Εὐθείας (δζ, εζ) ἀπτομένας ἀλλήλων ὧσι (παράλληλοι αἱ Α'. ταῖς Β'. δηλ.) μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας Γωνίας (τὰς γ καὶ ζ) περιέξωσι. κ. 430.

(1) Ὁρ. Ας. τῷ α'. (2) Δ. τῷ ια'. (3) Διὰ τὸ ἀνωτ. Πόρ. (4) Γ. Ὁρ. ια'. (5) ΚΖ. τῷ α'. (6) Δ. τῷ ια'. (7) Δ. τῷ ια'. (8) Η. τῷ ια'. (9) ζ. τῷ ια'.

Γινέσθωσαν αἱ γα, γβ ἴσαι ταῖς ζδ, ζε, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ δε, αβ, καὶ αἱ δα, ζγ, εβ· ἐπειδὴ τοῖνον αἱ αγ, ζδ παράλληλοι εἰσὶ, καὶ ἴσαι, καὶ αἱ αδ, γζ (1) ἴσαι τε εἰσὶ καὶ παράλληλοι· Ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ βε, γζ, παράλληλοί τε εἶναι καὶ ἴσαι ἀποδειχθήσονται· ὥστε καὶ αἱ αδ, βε (2) παράλληλοί τε εἰσὶ καὶ (3) ἴσαι· τοιγαρὲν (4) ἴσαι αἱ αβ, δε. Ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τῶν Τριγώνων βαγ, εδζ, αἱ τρεῖς ταῖς τρισὶ Πλευραῖς ἴσαι εἰσὶν ἐκάστη ἐκάστη, φανερόν ὅτι αἱ Γωνίαι γ καὶ ζ (5) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

κ. 431.

„ Ἀπὸ τῆ δοθέντος Σημεῖα μετεώρα (γ) ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον (αβ), ὃ μὴ ἔχοι πέρας, κάθετον εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐπὶ τῆ ἐπιπέδου αβ ἀχθήτω ἄπειρος ἡ τυχεύουσα δζ, πρὸς ἣν κάθετος ἀπὸ τῆ γ καθεῖσθω (6) ἡ γε, ἐπὶ τὴν αὐτὴν δὲ κάθετος ἀφείσθω ἀπὸ τῆ ἐπ' αὐτῆς ε (7) ἡ εμ· Εἴτα ἐπὶ τὴν αμ πρὸς ὀρθὰς (8) καθεῖσθω ἀπὸ τῆ γ ἡ γη· λέγω δὴ τὴν γη πρὸς ὀρθὰς ἐφίστασθαι ἐπὶ τῆ ἐπιπέδου αβ.

Διὰ τῆ η ἀχθήτω καὶ παράλληλος τῇ δζ.

Ἐκ τῆς κατασκευῆς οὖν ἡ δε πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἐπὶ τὰς γε καὶ εμ· ὥστε ἡ δε (9) ὀρθὴ ἐστὶν ἐπὶ τῆ ἐπιπέδου γεμ, καὶ δὴ (10) καὶ ἡ δι· ἄρα ἡ γη (11) πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἐπὶ δι· Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ἡ γη πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκε καὶ ἐπὶ τὴν εμ, ἡ ἄρα γη (12) ὀρθὴ ἐστὶν ἐπὶ τῆ ἐπιπέδου αβ. Ο. Η. τὸ προτεθέν.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἡ ὀρθὴ γη ἀπὸ τῆ μετεώρα Σημεῖα γ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον αβ, ἐστὶν ἡ ἀπασῶν ἐλαχίστη τῶν Εὐθειῶν, ὅσαι δὴποτε ἀπὸ τῆ αὐτῆς Σημεῖα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀγεσθαι δύνανται. Ἀχθήτω καὶ γὰρ ἀπὸ τῆ αὐτῆς Σημεῖα ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὅποια δὴποτε Εὐθεῖα ἄλλη, φέρε ἡ γε, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ εη· Ἐπὶ γὰρ τῆ γεη Τριγώνου, ἡ ὑπὸ εηγ (13) ὀρθὴ Γωνία ἐστίν· ὥστε ἡ ὑπὸ γεη ἐστὶν (14) ὀξεία· ἐνθεντοὶ ἡ γε Πλευρὰ τῆς Πλευρᾶς γη μείζων (15) ἐστὶ· Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον δευχθήσεται καὶ ὁ-

(1) ΛΓ. τῆ α'. (2) Διὰ τὴν ἀνωτ. (3) Α' Ε. α'. (4) ΛΓ. τῆ α'. (5) Η. τῆ α'. (6) ΙΒ. τῆ α'. (7) ΙΑ. τῆ α'. (8) ΙΒ. τῆ α'. (9) Δ. τῆ ια'. (10) Η. τῆ ια'. (11) Ο' ρ. Γ. τῆ ια'. (12) Δ. τῆ ια'. (13) Ο' ρ. Γ. τῆ ια'. (14) Ε. Πόρ. τῆς ΔΒ. τῆ α'. (15) ΙΘ. τῆ α'.

ποιασθῆν ἄλλης Πλευρᾶς, τῆς ἀπὸ τῆ μετεώρου Σημεῖα γ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἀγομένης, τὴν Ὄρθην γη εἶναι ἐλάσσονα.

Π ρ ο τ α σ ι ς ΙΒ.

„Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ (εζ) ἀπὸ τῆ πρὸς αὐτῷ δοθέντος Σημεῖα (α) πρὸς ὀρθὰς εὐθεΐαν Γραμμὴν ἀναστήσαι. κ. 432.

Ἀπὸ τῆ τυχόντος μετεώρου Σημεῖα δ, ὃ τῷ ὑποκείμενῳ εζ ἐπιπέδῳ ὑπερκείμενον ἦ, καθεῖσθω ἡ δβ (1) ἐπ' αὐτὸ τὸ ἐπίπεδον ὀρθή, καὶ ἐπιζευχθεΐσης τῆς βα, ἀχθήτω ἡ αγ παράλληλος τῇ δβ· φημὶ δὴ ὡς ἄτως ἐτελέσθῃ τὸ ἐπιταχθέν· Ἡ δὲ δεΐξις σαφὴς ἐκ τῆς Η'.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Πρακτικῶς δὲ ἀπὸ τῆ δοθέντος Σημεῖα κ, ἐπὶ τῆ ἐπιπέδῳ εζ, κάθετος ἀνίσταται, ἐὰν ὁ Γνώμων ξαν, τῇ μὲν κατ' αὐτὸν ὀρθῇ Γωνία κ, τῷ δοθέντι Σημεῖῳ, τῇ δὲ Πλευρᾷ ξκ, τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἔτω προσαρμοδῇ, ὡς ἐπὶ τῆ ἐπιπέδῳ τὴν ξκ Πλευρὰν τῆ Γνώμονος περὶ τὴν κν ἀκινητῶσαν περιάγεσθαι ἔχειν. Ἡ γάρτοι κατὰ τὴν Πλευρὰν κν ἀγομένη Εὐθεΐα, τῷ ὑποκείμενῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τῆ πρὸς αὐτῷ δοθέντος Σημεῖα κ ἔσαι (2) ὀρθή.

Π ρ ο τ α σ ι ς ΙΓ.

„Ἀπὸ τῆ Σημεῖα (γ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (αβ) δύο Εὐθεΐαι (δγ, εγ) πρὸς ὀρθὰς ἐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. κ. 433.

Εἰεν γὰρ ἂν ἄλλως (διὰ τὴν ζ') παράλληλοι, ὅπερ ἀδύνατον.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἐκ ταύτης οὖν τῆς Προτάς. δειχθῆναι δύναται καὶ ἡ ΛΗ'. τῆ παρόντος ΙΑ', ἣν ὁ Τακνέτιος παρέδραμεν, ἄτως ἔχουσιν.

„Εἰ ἂν ἐπίπεδον (ζρ) πρὸς ἐπίπεδον (βε) ἕτερον ὀρθὸν ἦ, καὶ ἀπότινος Σημεῖα (λ) τῶν ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων (ζρ), ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον (βε) κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς (χρ) πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη Κάθετος. κ. 434.

Ἀχθήτω γὰρ ἀπὸ τῆ λ Σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς χρ κάθετος ἡ λπ, ἔσαι δὴ (3) αὕτη τῷ ἐπιπέδῳ βε ὀρθή· ἀλλὰ διὰ τὴν παρεῖσαν Πρότ.

(1) Διὰ τὴν ἀνατ. (2) Δ. τῆ ια'. (3) Ὁρ. Δ. τῆ ζ'.

ἀπὸ τῆ αὐτῆς Σημεῖα λ, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ βξ δύο Εὐθεῖαι πρὸς ὁρθὰς οὐκ ἀνασῆσκονται, ἄρα ἡ λπ Εὐθεῖα, ἣτις μόνη ἀπὸ τῆς λ Σημεῖα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ξβ πρὸς ὁρθὰς ἀχθῆναι δύναται, πεσεῖται (1) ἐπὶ τῆς κοινῆς τῶν ἐπιπέδων τομῆς χρ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

κ. 435. „Πρὸς ἃ ἐπίπεδα (ζη, λπ) ἡ αὐτὴ Εὐθεῖα (αβ) ὀρθὴ ἐστὶ, παράλληλα ἐστὶ τὰ ἐπίπεδα.

Ἐπὶ θατέρῃ τῶν ἐπιπέδων ζη ληφθῆτω Σημεῖον τὸ τυχόν γ, καὶ δι' αὐτῆς ἀχθῆτω γε παράλληλος πρὸς τὴν αβ, ἀπαντῶσα τῷ ἐπιπέδῳ λπ κατὰ τὸ ε. Ἐστὶ γυν ἡ γε (2) ὀρθὴ πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα ζη καὶ λπ. Ἐὰν δὲ ἐπιζευχθῶσιν αἱ Εὐθεῖαι αγ, βε, ἔσονται αἱ Γωνίαι α καὶ β (3) ὀρθαί. Ἄρα αἱ αγ, βε (4) παράλληλοι εἰσὶ, τὸ δὲ αγβε Παραλληλόγραμμον, ἡ δὲ γε, ἣτις εἰδείχθη πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα ὀρθὴ ἦσα, ἴση ἐστὶ (5) τῇ αβ. Ὡσαύτως δείξω, καὶ ὅσαι ἂν ἀχθῶσι πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα ὀρθαί, ἀπάσας ἴσας εἶναι. Τοιγαρὺν (6) τὰ ἐπίπεδα εἰσὶ παράλληλα. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΕ.

κ. 436. „Ἐὰν δύο Εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων (βα, γα), παρὰ δύο Εὐθεῖας, ἀπτομένας ἀλλήλων (εδ, ζδ) παράλληλοι ᾖσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ᾖσαι, παράλληλα ἐστὶ τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Ἀπὸ τῆς α ἀχθῆτω αη ὀρθὴ πρὸς τὸ εζ ἐπίπεδον (7), ἀγέσθωσαν δὲ καὶ αἱ ηθ, ηι παράλληλοι πρὸς τὰς δε, δζ. καὶ ἔσονται αἱ αὐταὶ παράλληλοι (8) καὶ πρὸς τὰς αβ, αγ. Ἐπειδὴ τοίνυν αἱ ὑπὸ ιηα, θηα εἰσὶν (9) ὀρθαί, ἔσονται καὶ αἱ ὑπὸ γαη (10) βαη ὀρθαί. Ἦ' ἄρα ηα ἡ πρὸς τὸ εζ ἐπίπεδον ὀρθὴ ἦσα, καὶ πρὸς τὸ βγ (11) ὀρθὴ ἐστὶ. Τὰ ἄρα βγ, εζ (12) ἐπίπεδα παράλληλα εἰσὶν. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις.

κ. 437. „Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα (αβ, γδ) ὑπὸ ἐπιπέδα τινὸς τέμνηται, (τῆς εδζη), αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ (εδ, ηζ) παράλληλοι εἰσὶ.

(1) Εκ κατασκ. (2) Η τῆ ια'. (3) Γ. Ὁρισμ. τῆ ια'. (4) ΚΘ. τῆ α'. (5) ΑΔ. τῆ α'. (6) Η. Ὁρισμ. τῆ ια'. (7) ΙΔ. τῆ ια'. (8) Θ. τῆ ια'. (9) Γ. Ὁρισμ. τῆ ια'. (10) ΚΖ. τῆ α'. (11) Δ. τῆ ια'. (12) Διὰ τὴν ἄνω.

Α'λ' εἰμὴ, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ τέμνοντι ἔσαι, συμπεσῶνται κατὰ τι σημεῖον τὸ 1 (1). Ὡς ἐπειδὴ ὅλαι δε, ζη εἰσιν (2) ἐν τοῖς ἐπιπέδοις αβ, γδ προσεβληθεῖσι, καὶ τὰ γε ἐπίπεδα προσεβληθέντα συμπεσῶνται κατὰ τὸ 1· ὅπερ ἄτοπον ἐστίν, ἄτε κατὰ τῇ Η'. τῶν Ὁρίσμων τῇ παρόντος φερόμενον.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Εἰάν δυοῖν ἐπιπέδων αζ, βζ, αἱ μετὰ τρίτῃ ἐπίπεδα τῇ αε κοινὰ τομαὶ αδ, βε ὥτι παράλληλοι, ἔσαι καὶ ἡ δι' ἀλλήλων τῶν αζ, βζ κοινὴ τομὴ γζ ταῖς αδ, βε παράλληλος. Τεμνέσθωσαν γὰρ τὰ τρία ταῦτα ἐπίπεδα ἐπιπέδοις παράλληλοις τοῖς αβγ, δεζ, καὶ ἔσονται (3) αβ, βγ, γα, ταῖς δε, εζ, ζδ παράλληλοι τῶν τριῶν ἐκάσῃ ἐκάσῃ· ὥς (4) ἡ ὑπὸ αβγ = δεζ, καὶ βαγ = εδζ. Ἀλλὰ γὰρ (διὰ τὸ Παράλληλόγραμμον αε) αβ = δε (5), τοιγαρὶν (6) βγ = εζ, καὶ γα = ζδ. Παράλληλος δὲ τυγχάνειν τὰς βγ, εζ, καὶ τὰς γα, ζδ φάσαν εἰδείχθῃ, ἄρα (7) ἡ γζ καὶ ταῖς αδ καὶ βε παράλληλος ἐστίν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΖ.

„Εἰάν δύο Εὐθεῖαι βδ, ηδ ὑπὸ παράλληλων ἐπιπέδων τέμνονται, εἰς τὰς αὐτὰς λόγους τμηθῆσονται. κ. 439.

„Α'χθήτωσαν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις φξ καὶ τυ, αἱ Εὐθεῖαι βη, δδ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ βδ διήκῃσα διὰ τῇ ἐπίπεδῳ ρσ κατὰ τὸ ζ, ἐπεξεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ζγ, ζι. Τὸ γὰρ διὰ τῇ Τριγώνῳ βδδ ἐπίπεδον τέμνον τὰ παράλληλα τῶν ἐπιπέδων, κοινὰς τομὰς ποιεῖται τὰς ζγ, δδ (8) παράλληλος· ὥς βγ : γδ : : βζ : ζδ (9). Πάλιν τὸ Τρίγωνον βηδ τέμνον τὰ παράλληλα τῶν ἐπιπέδων, τομὰς ποιεῖται (10) τὰς βη, ζι παράλληλος· ἄρα ηι : ιδ : : βζ : ζδ (11), ταῦτα (ὡς δέδεικται) ὡς βγ : γδ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΗ.

„Εἰάν Εὐθεῖα (ζε) ἐπιπέδῳ τινὶ (αβ) πρὸς ὁρθὰς ᾗ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (αβ) πρὸς ὁρθὰς ἔσαι. κ. 440.

Α'γέσθω διὰ τῆς ζε ἐπίπεδον, οἷον τὸ ηγ, κοινὴν ἔχον τομὴν μετὰ τῇ αβ τὴν γδ· ἐν αὐτῷ δὲ ἀχθήτωσαν κάθετοι πρὸς τὴν γδ κοινὴν το-

(1) Α. Πόρ. μετὰ τὴν ΑΔ τῇ α'. (2) Α. τῇ ια'. (3) Διὰ ταύτην. (4) Ι. τῇ ια'. (5) ΑΔ. τῇ α'. (6) Κς. τῇ α'. (7) ΑΓ. τῇ α'. (8) Διὰ τὴν ἀνωτ. (9) Β. τῇ ε'. (10) Διὰ τὴν ἀνωτ. (11) Β. τῇ ε'.

μὴν αἱ κθ· καὶ ἐπεὶ ἡ ζε (1) ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὴν γδ, ἔσονται αἱ κθ (2) παράλληλοι πρὸς τὴν ζε· τίθεται δὲ ἡ ζε ὀρθὴ εἶναι τῷ ἐπιπέδῳ αβ· ἄρα καὶ αἱ κθ ὀρθαὶ (3) εἰσὶ τῷ ἐπιπέδῳ αβ· ὥς τε τὸ ἐπίπεδον γη (4) τῷ ἐπιπέδῳ αβ ὀρθὸν ἐστὶ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΘ.

κ. 441.

„Εὖν δύο ἐπίπεδα (μζ, ηδ) τέμνοντα ἄλληλα, ἐπιπέδῳ τινὶ (αβ) πρὸς ὁρθὰς ᾗ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ (κλ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (αβ) πρὸς ὁρθὰς ἔσται.

Ἐπεὶ δὲ τὸ μζ ἐπίπεδον ὀρθὴν ἔχει λαχόν τὴν θέσιν ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ αβ, δῆλον (5) ὡς ἀπὸ τῆς λ δυνατόν Κάθετον ἀχθεῖναι ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ αβ, ἐν ἐπιπέδῳ τῷ μζ, ἥτις ἂν ἀμέλει ἐν τῷ μζ ἐπιπέδῳ ἀχθεῖται, κάθετος εἶναι ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς εζ. Ὡσαύτως δὲ διὰ τὸ ὀρθὸν τίθεσθαι καὶ τὸ ηδ τῷ αβ (6) ἀχθεῖν ἂν καὶ τῷ ηδ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τῆς αὐτῆς σημείῃς λ, Κάθετος ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ τῷ υποκειμένῳ αβ· Ἀλλὰ γὰρ ἀπὸ τῆς λ σημείῃς (7), μία ἂν ἀχθεῖν μόνη ὀρθὴ τῷ αβ· Ἀρ' ἐπ' ἀνάγκης τὴν ἀπὸ λ ὀρθὴν τῷ αβ, ἐν ἀμφότεροις εἶναι τοῖς ἐπιπέδοις τῷ τε μζ, καὶ τῷ ηδ, καὶ ταύτην εἶναι ἐπομένως τὴν τούτων κοινὴν τομὴν, τετέστι τὴν λκ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κ.

κ. 442.

„Εὖν σφραγὶς Γωνία (α) ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων Γωνιῶν περιέχεται (βαγ, γαδ, δαβ), δύο ὁποιαῖαν τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσὶ πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Εὖν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι ἴσαι ἄλλήλαις ὥςτι, δῆλον τὸ εἰρημένον· Εὖν δὲ ἄνιστοι, ἔστω δὲ μεγίστη τέτων ἡ ὑπὸ βαδ, καὶ ἔσται καὶ οὕτω δυεῖν τῶν λοιπῶν ἐλάσσων ἅμα εἰλημμένων. Ἀφαιρέσω γὰρ ἀπὸ τῆς μεγίστης ὑπὸ βαδ ἡ ὑπὸ βαε ἴση τῇ ὑπὸ βαγ, γινέσθωσάν τε ἴσαι αἱ αγ, αε, διὰ δὲ τῆς ἀγέωδω Εὐθείᾳ, ἀπαντῶσα ταῖς αβ, αδ κατὰ τὰ β καὶ δ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ βγ, δγ· Καὶ ἐπεὶ (8) αἱ ὑπὸ βαε, βαγ ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ Πλευραὶ βα, αε ἴσαι ταῖς Πλευραῖς βγ, αγ, καὶ αἱ Βάσεις βε, βγ ἴσαι (9) ἔσονται καὶ αὐταί· Ἀλλὰ γὰρ βγ, γδ μείζονες (10) εἰσὶ τῆς βδ, ἀφαιρεθείσων ἄρα τῶν ἴσων βε, βγ, ἡ γδ μείζων τῆς εδ· Ἀλλ' αἱ Πλευραὶ εα, αδ, ἴσαι ταῖς Πλευραῖς (11) γα, αδ· ἄρα ἡ ὑπὸ γαδ (12) μείζων τῆς ὑπὸ εαδ· Ἐδείχθη δὲ ἡ ὑπὸ βαγ

(1) Εἰς ὑποθ. καὶ διὰ τὸν Γ. Ὅρισμ. τῆς ια'. (2) ΚΘ. τῆς α'. (3) Η. τῆς ια'. (4) Δ. Ὅρισμ. τῆς ια'. (5) Ὅρ. Δ. τῆς ια'. (6) Διὰ τὸν αὐτ. (7) ΙΓ. τῆς ια'. (8) Εἰς κατ. (9) Δ. τῆς α'. (10) Κ. τῆς α'. (11) Εἰς κατ. (12) ΚΕ. τῆς α'.

ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ βαε. Αἱ δὲ δύο ἄρα ἅμα βαγ, γαδ, μείζονες εἰσὶ τῆς ὅλης ὑπὸ βαδ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΑ.

Ἀπαντα ἑρεὰ Γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων, ἢ τεσσάρων Ὀρθῶν περιέχεται. Ἐς ὧ Γωνία ἑρεὰ ἢ α, ταῖς δὲ Γωνίαις ταῖς ἐπιπέδοις ὑφ' ὧν αὐτὴ περιέχεται, ὑποτεινέωσαν αἱ Εὐθεῖαι βγ, γδ, δε, εζ, ζβ, ἐν ἐνὶ κ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ αἱ πᾶσαι εἶναι ὑποτιθέμεναι. Τάτα οὖν γινομένη, Πυραμὶς συ-
 σαθῆσεται (1), ἥς ἡ Βάσις ἐστὶ τὸ Πολύγωνον βγδεζ, κορυφή δὲ ἡ α, πλευ-
 ραὶ δὲ τοσαῦτα Τρίγωνα η, θ, ι, κ, λ, ὅσαι αἱ ἐπίπεδοι Γωνίαι αἱ συνι-
 σῶσαι τὴν ἑρεάν α. Ἡ δὲ μὲν ἔν ἐπειδὴ αἱ δύο Γωνίαι ὑπὸ αβζ κ βγδ (2)
 μείζονες εἰσὶ τῆς ὑπὸ ζβγ, καὶ αἱ δύο αγκβ, αγκδ μείζονες τῆς ὑπὸ βγδ, κ
 ἔτιω εἰρεξῆς, ἔσονται τῶν Τριγώνων η, θ, ι, κ, λ, αἱ περὶ τὴν Βάσιν Γω-
 νίαι ἅμα ληφθεῖσαι, ἅπασων ἅμα τῶν Γωνιῶν τῆς Βάσεως β, γ, δ, ε, ζ
 μείζονες. Ἀλλ' αἱ τῆς Βάσεως Γωνίαι συνάμα τέσσαρσιν Ὀρθαῖς, δις τοσαύ-
 τας συναποτελεῖσιν (3) Ὀρθὰς, ὅσαι εἰσὶν αἱ Πλευραὶ, ἢ (ὁ ταυτόν ἐστίν)
 ὅσα τὰ Τρίγωνα. Ἀρα πᾶσαι αἱ τῶν Τριγώνων περὶ τὴν Βάσιν Γωνίαι συνά-
 μα τέσσαρσιν Ὀρθαῖς, συναποτελεῖσιν Ὀρθὰς πλέον, ἢ δις τοσαύτας, ὅσα
 τὰ Τρίγωνα. Ἀλλ' αἱ αὐταὶ Γωνίαι αἱ περὶ τὴν Βάσιν, συνάμα ταῖς Γωνίαις
 ὑφ' ὧν περιέχεται ἡ ἑρεὰ, συναποτελεῖσι δις τοσαύτας Ὀρθὰς (4), ὅσα τὰ
 Τρίγωνα. Αἱ ἄρα Γωνίαι ὑφ' ὧν ἡ ἑρεὰ Γωνία α περιέχεται Ὀρθῶν τεσ-
 σάρων ἐλάσσονες εἰσὶ. Ο. Ε. Δ.

90. 443.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐκ ταύτης τε κ τῆς πρὸ αὐτῆς ἀπόχρη εἰσβαλεῖν, ὡς ἐκ τριῶν ἐπιπέ-
 δων Γωνιῶν, αἱ ἂν ὧσιν Ὀρθῶν τεσσάρων ἐλάσσονες, εἰ μόνον αἱ δύο τῆς λοι-
 πῆς μείζονες ὧσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, Γωνία ἑρεὰ συνίστασθαι δύναται.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἐκ δὲ τῆς αὐτῆς ταύτης κατασκευάζεται κ τὸ διαβόητον Θεώρημα, ὅτι
 τῶν ἐπιπέδων Σχημάτων κανονικῶν ὄντων καὶ ἴσων, τρία μόνον εἰσὶν ἅττα
 Σῶμα κανονικὸν περιέχειν δύναται. ἀμέλειται τῶν μὲν ἴσοπλευρῶν Τριγώ-

(1) Ὁρα Α. Ὁρ. τῇ β'. (2) Διὰ τὴν ἀνωτ. (3) Ε. Θεώρ. τῇ Σχολίᾳ τῇ μετὰ τὴν
 ΑΒ. τῇ α'. (4) Διὰ τὴν ΑΒ. τῇ α'.

νων, ἤτοι 4, ἢ 8, ἢ 20, τῶν δὲ Τετραγώνων 6, τῶν δὲ Πενταγώνων 12· ὥςτε πέντε μόνα ἀριθμεῖσθαι τὰ κανονικὰ Σώματα, ἡ Πυραμὶς ἢ ὑπὸ 4, τὸ Ὀκτάεδρον τὸ ὑπὸ 8, τὸ Εἰκοσάεδρον τὸ ὑπὸ 20 ἰσοπλευρῶν Τριγώνων περιεχόμενον, ὅτε Κυβὸς ὁ ὑπὸ Τετραγώνων 6, καὶ τὸ Δωδεκάεδρον τὸ ὑπὸ 12 Πενταγώνων ἰσοπλευρῶν τε καὶ ἰσογωνίων περατόμενον. Ὅτι δὲ Σῶμα τεταγμένον τε καὶ κανονικὸν λέγεται τὸ ὑπὸ ἐπιπέδων κανονικῶν καὶ ἀλλήλοις ἴσων περιοριζόμενον, φανερόν.

Δείκν. Ἐκ δυοῖν ἰσοπλευρῶν Τριγώνων, Γωνία σερεὰ συσφαθῆναι ἔδύναται. Τρία γὰρ ἐπὶ τῷ τῷ τετράγωνα (1) ἀπαιτεῖται.

Υπὸ τριῶν οὖν ἰσοπλευρῶν Τριγώνων εἰς ἓν σημεῖον συνιόντων, Γωνία σερεὰ συνίστασθαι δύναται ἢ τῆς Πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἢ τῆς Ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἢ τῆς Εἰκοσάέδρου, ἐπεὶ τῶν τῶν ἰσοπλευρῶν Τριγώνων Γωνιῶν, 3 ληφθεῖσθαι, καὶ 4, καὶ 5, ὁρθῶν τεσσάρων ἐλάσσονες εἰσὶν, ὡς ἐκ τῆς IB'. Πορίσματος τῆς AB'. τῆς A'. συνάγεται.

Ἐπεὶ δέ τοι τρεῖς πενταγωνικαὶ Γωνίαι (2) τεσσάρων Ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσὶ, Πεντάγωνον τρία εἰς ταυτὸ συνιόντα σημεῖον, Γωνίαν σερεὰν τῇ τῶν Δωδεκαέδρου συναποτελεῖν δύναται.

Ὡς δὲ καὶ ὑπὸ τριῶν Τετραγώνων εἰς ἓν σημεῖον συνιόντων Γωνίαν κυβικὴν συσφαθῆναι δυνατόν, κατ' αὐτὸ δῆλον· ὥςτε πέντε τὰ συνιστάμενα κανονικὰ Σώματα.

Ὅτι δὲ παρὰ ταῦτα ἄλλο ἂν συσφαθῇ κανονικὸν Σῶμα, ἔγωγε δέκνυνται.

Αἱ ἔξ τῶν ἰσοπλευρῶν Τριγώνων Γωνίαι συναποτελεῖσι 4 Ὀρθὰς, ἢ γὰρ μία τριτημόρια δύο (3) Ὀρθῆς, καὶ ἐκ τῆς ἀκολουθεῖ αἱ ἔξ δυοκαίδεκα τριτημόρια Ὀρθῆς δώσασιν, ταυτὸν εἰπεῖν Ὀρθὰς τέσσαρας. Ταύτητοι ὑπὸ ἑξ ἰσοπλευρῶν Τριγώνων Γωνία σερεὰ ἐκ ἂν συσφαθῇ· πολλῷ δὲ μᾶλλον ἐκ ἂν ἐκ πλειόνων.

Υπὸ τεσσάρων Τετραγώνων Γωνίαν σερεὰν μὴ ἔχειν ἂν συσφαθῆναι κατ' αὐτὸ δῆλον, πολλῷ δὲ μᾶλλον μὴ ἐκ πλειόνων.

Γωνίαι πενταγωνικαὶ 4 Ὀρθῶν τεσσάρων μείζονες εἰσὶ, τῶν γὰρ ἑκάστη ἑξ πεμπτημέρια ὁρθῆς (4) περιεπλήροισιν. Υπὸ ἄρα τεσσάρων Πενταγώνων Γωνία σερεὰ συσφαθῆναι ἀδυνατεῖ, πολλῷ δὲ μᾶλλον ὑπὸ πλειόνων.

Ἄλλ' ἂν ἔξ ἄλλων ὁποίων κανονικῶν Σχημάτων, Γωνία ἂν σερεάτις

(1) Ὁρ. I. τῆς ια'. (2) Ὡς δῆλον ἐκ τῆς A. Πορ. τῆς ΙΑ. τῆς δ'. (3) IB. Πόρ. τῆς AB. τῆς α'. (4) A. Πόρ. τῆς ΙΑ. τῆς δ'.

συζαίη· Τρεῖς γὰρ ἑξαγωνικαὶ Γωνίαι, τέσσαρσιν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἢ γὰρ μία τέσσαρα τριτημόρια Ὀρθῆς περιείληφεν (1)· ὥστε αἱ τρεῖς τριτημόρ. Ὀρθῆς 12, ταυτὸν εἰπεῖν Ὀρθὰς 4· Οὐκ ἄρα ἐκ τριῶν ἑξαγώνων συζαίη ἄντις Γωνία σερεά· πολλῷ οὖν μᾶλλον ἢ ἂν ἐκ πλειόνων.

Ἐπεὶ δὲ αἱ τρεῖς ἑξαγωνικαὶ Γωνίαι 4 Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, αἱ τρεῖς ἄρα Γωνίαι ὁποιωνῶν ἄλλων Σχημάτων τῇ ἑξαγώνῳ μείζονων ὄντων, οἷον αἱ τρεῖς τῇ ἑπταγώνῳ, ἢ τῇ ὀκταγώνῳ, κξ: ὁρθῶν τεσσάρων μείζονες ἔσονται· Καὶ δῆλον ἄρα ὡς τῶν κανονικῶν Σχημάτων τὰ λοιπὰ πάντα, ἀνεπιτηδείως ἔχει πρὸς τὴν τῆς σερεᾶς Γωνίας σύστασιν, καὶ παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε ἂν ἄλλο Σῶμα κανονικὸν δοθήσεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΒ.

„Ἐὰν ᾧσι τρεῖς Γωνίαι ἐπίπεδοι (α, β, γ), ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσὶ πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι Εὐθείαι (αδ = αε = βζ = βη = γδ = γι), δυνατόν ἔστι ἐκ τῶν ἐπιζευγνυσθῶν (δε, ζη, θι) τὰς ἴσας Εὐθείας Τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐὰν αἱ ἐπιζευγνύσθαι Εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾧσιν, εὐδὴλον ἐστὶν ἐξ αὐτῶν Τρίγωνον δυνατόν εἶναι συστήσασθαι· Ἐὰν δὲ ἄνισοι, καὶ τῶν μεγίστη μὲν ἢ δε ἐλάσσων εἴη τῶν λοιπῶν δύο ζη + θι, δυνατόν καὶ ἄτως ἐξ αὐτῶν Τρίγωνον (2) συστήσασθαι. Ἐστὶ δὲ ἐλάσσων· ἐπὶ γὰρ τῆς γδ συνέσπασθω Γωνία ἢ ὑπὸ θγκ ἴση τῇ β, καὶ ἔσω γκ = γδ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ κθ, κι· διὰ γὰρ τὰς κγ, γδ, αἱ ταῖς βζ, βη ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ τὴν ὑπὸ κγδ = β, ἔσται (3) καὶ κθ = ζη. Ἐπεὶ δὲ β + θγι, ταυτὸν εἰπεῖν ἢ ὑπὸ κγι (4) μείζων τυγχάνει (5) τῆς Γωνίας α, αἱ δὲ Πλευραὶ κγ, γι, ταῖς Πλευραῖς δα, αε ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω, ἄρα ἢ Βάσις κι τῆς Βάσεως δε μείζων (6) ἔσται ἐστὶν· Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν Πλευρῶν κθ + θι (τετρεζί ζη + θι) μείζον ἐστὶ (7) τῆς κι, καὶ ἐπομένως πολλῷ μείζον τῆς δε. Ἀρα κτ:

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἐσὼ Τρίγωνον τρία ἰσοσκελῆ (ὡς ἐπὶ τῇ ἀνωτ. Σχήμ.) αδε, βζη, γθι, ὧν τὰ σκέλη αδ, αε, βζ, βη, γδ, γι ἀλλήλοισι ἴσα εἰσὶ, καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν Γωνίαι α, β, γ ἅμα ληφθεῖσαι τεσσάρων Ὀρθῶν ἐλάσσονες, ἀλλ'

(1) Β. Πόρ. τῆς ΙΕ. τῇ δ'. (2) ΚΒ. τῇ α'. (3) Δ. τῇ α'. (4) Ε' κατ. (5) Ε' ἐπὶ. (6) ΚΔ. τῇ α'. (7) Κ. τῇ α'.

ἔτιωσ ὥς τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντα μεταλαμβανομένας, ὑπὸ δὲ τῶν βάσεων αὐτῶν δε, ζη, δι Τρίγωνον (1) τὸ λμν συνασθαι, ἔχον ἐν αὐτῷ τὴν μὲν λμ = δε, τὴν δὲ μν = ζη, τὴν δὲ νλ = δι· ἐφ' ὧν ἂν νοοῖντο δύο τῶν ἰσοσκελῶν Πλευραὶ αἱ προτεχθεῖς ἀλλήλαις εἰς Εὐθείαν μίαν συνιέναι, ἀμέλειτοι τὰς μὲν γι καὶ αδ εἰς τὴν φλ, τὰς δὲ αε καὶ βζ εἰς τὴν φμ, τὰς δὲ βη καὶ γδ εἰς τὴν φν, συνασμένῃς τῆς κατὰ τὸ φ σφραῖς Γωνίας ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων Γωνιῶν α, β, γ, καὶ συνεξισμενῶν ἀλλήλαις τῶν φλ, φμ, φν. Τῶν οὕτω προτεθέντων, εἰς περὶ τὸ Τρίγωνον λμν (2) Κύκλος περιγραφῆ, ἡ κάθετος φξ, ἡ ἀπὸ τῆς σφραῖς Γωνίας ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον τῆ Κυκλῆ καταγομένη, ἐπ' αὐτὸ τὸ Κέντρον πεσεῖται.

Τῶν γὰρ ξλ, ξμ, ξν ἡγμένων, ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων Τριγώνων ξφλ, ξφμ, ξφν, ἔσσι (3) $\phi\lambda^T = \phi\xi^T + \lambda\xi^T$, καὶ $\phi\mu^T = \phi\xi^T + \mu\xi^T$, καὶ $\phi\nu^T = \phi\xi^T + \nu\xi^T$. Καὶ εἰς τοῖνυν ἀπὸ ἐκάστη τῶν ἰσῶν Τετραγώνων (4) $\phi\lambda^T$, καὶ $\phi\mu^T$, καὶ $\phi\nu^T$, ἀφαιρεθῇ τὸ $\phi\xi^T$, καταλειφθήσεται τὰ $\lambda\xi^T$, καὶ $\mu\xi^T$, καὶ $\nu\xi^T$ ἀλλήλοις ἴσα, ὥς καὶ αἱ ξλ, ξμ, ξν ἴσαι ἔσονται Εὐθεῖαι· καὶ ἐπομένως ὁ διὰ λ, καὶ μ, καὶ ν διῶν κύκλος, τὸ Κέντρον ἔχει (5) κατὰ τὸ ξ.

Ἡ δὲ τῆς Προτάσεως ἀλήθεια σαφής, καὶ ὀξυγώνιον ἢ τὸ λμν Τρίγωνον, καὶ ὀρθογώνιον, καὶ τέως ἀμβλυγώνιον. Ὅρα τὸ Σχόλ. τῆς Β'. Πρωτ. τῆ Δ'. Βιβλία, καὶ παράδει τὰ ἐκείσε ἐν ἀριθμ. Β'. Σχήματα τοῖς ἐνταῦθα προκειμένοις τρισί.

Π ό ρ ι σ μ α .

Τῶν τοιούτων ἰσοσκελῶν Τριγώνων αδε, βζη, γδι τεθέντων, εἰς τῶν κατ' αὐτὰ βάσεων Τρίγωνον τὸ λμν συνασθῇ, ἔσσι τῶν ἰσῶν σκελῶν ὅποιον ὅσον τὸ αδ, ἢ τὸ αε, ἢ τὸ βζ, καὶ μείζον τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆ Κυκλῆ περὶ τὸ Τρίγωνον τὸ λμν περιγεγραμμένη. Καὶ γὰρ αδ (6) = φλ, καὶ ἐπὶ τῆ ὀρθογωνίας Τριγώνου ξφλ, ἡ πλευρὰ φλ ἡ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν Γωνίαν, μείζον ἐστὶ (7) τῆς ξλ τῆς ὑποτείνουσας (8) τὴν ὀξείαν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΓ.

α. 444.445. „Εκ τριῶν Γωνιῶν ἐπιπέδων (α, β, γ), ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες

(1) Διὰ τὴν ἐν χειρὶ ταύτην καὶ τὴν ΚΒ. τῆ α'. (2) Β. τῆ δ'. (3) ΜΕ. τῆ α'. (4) Α'Ξ. ΙΕ. τῆ α'. (5) Θ. τῆ γ'. (6) Ε'κ κατ. (7) ΙΘ. τῆ α'. (8) Β. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῆ α'.

„εἰσὶ πάντα μεταλαμβανόμενα (1), σφραγὴν Γωνίαν συστήσασθαι. Δεῖ δὲ (2)
 „τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάχιστους εἶναι.

Γινέσθωσαν ἅπασαι αἱ τῶν Γωνιῶν Πλευραὶ (τετάρτην αἱ αδ, αε, βδ, βη, γδ, γι) ἀλλήλαις ἴσαι· καὶ ἐπιζευχθεῖσιν τῶν δε, ζη, δι, συνεχίσθω (3) Τρίγωνον τὸ λμν, ὅστις ἂν αἱ Πλευραὶ λμ, μν, νλ, ταῖς δε, ζη, δι ἴσαι εἶεν, ἐκάστη ἐκάστη, καὶ περὶ τὸ Τρίγωνον (4) Κύκλος γεγράφθω, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ ξλ. Καὶ ἐπειδὴ τῶν Γωνιῶν α, β, γ ἐκάστη τῶν Πλευρῶν τῆς ἡμιδιαμέτρου ξλ (5) μείζων ὅσα ἐστίν, ἔσαι ἡ τὸ αδ^τ μείζον τῇ ξλ^τ. Εὐρεθήτω τοῖνον (6) Πλευράτις ξφ Τετραγώνη, ᾧ ἂν τὸ αδ^τ ὑπερέχοι τὸ ξλ^τ, καὶ ἀπὸ τῆς Κέντρος ξ ἀνιστάθω (7) ξφ, τῷ ἐπιπέδῳ τῆς Κυκλῆς ὀρθῇ, ἐπεζεύχθωσάν τε αἱ φλ, φμ, φν. Λέγω δὲ ὡς ἐγένετο τὸ ζητούμενον.

Ἐπειδὴ γὰρ ἡ ξ Γωνία ἐπὶ τῇ ξφλ Τριγώνῳ ὀρθῇ, ἔσαι φλ^τ = (8) φξ^τ + ξλ^τ = αδ^τ (9), καὶ φλ = αδ. Τὸν αὐτὸν τρόπον δεῖχθήσεται, ὅτι ἡ φμ = αε. Ἐπεὶ δὲ ἡ λμ = δε, ἔσαι (10) ἡ ὑπὸ λφμ Γωνία = Γωνία τῇ α. Ὁσαύτως δεῖχθήσεται ὡς ἡ ὑπὸ μφν = β, καὶ ἡ ὑπὸ νφλ = γ. Γέγονε τοῖνον τὸ ζητούμενον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΔ.

„Τὰ ἐπίπεδα τὰ τὸ Παραλληλεπίπεδον περιέχοντα, Α'. Παραλληλό-
 „γραμμα εἰσὶ. Β'. τὰ ἀπεναντίον ὅμοια. Γ'. καὶ ἴσα.

Μέρος Α'. Τὸ ἐπίπεδον αζ τὸ τέμνον τὰ ἐπίπεδα βδ, ζδ, τὰ ἐκ τῆ
 Η. Ὄρισμ. παράλληλα, ποιεῖ (11) τὰς βα, ζε τομὰς παραλλήλους. Πά-
 λιν τὸ ἐπίπεδον αζ τὸ τέμνον τὰ ἐπίπεδα αδ, βη, τὰ ἐκ τῆ Η. Ὄρι-
 σμ. παράλληλα, ποιεῖται τὰς τομὰς (12) αε, βδ παραλλήλους· ὥστε τὸ
 βαεζ παραλληλόγραμμον εἶσι. Τῷ δ' αὐτῷ τέτῳ λόγῳ ἡ τὰ λοιπὰ τῶ
 Παραλληλεπίπεδα ἐπίπεδα παραλληλόγραμμα ὄντα δεῖχθήσεται.

Μέρος Β'. Ἐπειδὴ κατὰ τὸ Α'. Μέρος αἱ αβ, βγ, παράλληλοι εἰσὶ
 ταῖς εζ, ζη, ἔσονται δὲ (13) αἱ ὑπὸ αβγ ἡ εζη ἴσαι ἀλλήλαις. Τὰ ἄρα
 Παραλληλόγραμμα βδ ἡ ζδ ἰσογώνια (14) εἰσὶ. Ταύτητοι ἐπεὶ ἡ αἱ Πλευ-
 ραὶ τέτοις ἐναλλάξ ἴσαι εἰσὶ (15), τετάρτην ἡ μὲν αβ = εζ, ἡ δὲ βγ =

κ. 446.

(1) Ἐκ τῆς Κ. τῇ ια'. (2) Ἐκ τῆς ΚΔ. τῇ ια'. (3) ΚΒ. τῇ ια'. ἡ ΚΒ. τῇ α'. (4) Ε. τῇ δ'. (5) Διὰ τὸ Πόρ. τὸ τῇ ἀνατ. Σχολία. (6) Κατὰ τὸ Β. Πρόβλημα τῇ Σχο-
 λίᾳ τῇ μετὰ τὴν ΜΖ. τῇ α'. (7) ΙΒ. τῇ ια'. (8) ΜΖ. τῇ α'. (9) Ἐκ κατασκευ. (10)
 Η. τῇ α'. (11) Ις. τῇ ια'. (12) Διὰ τὴν αὐτ. (13) Ι. τῇ ια'. (14) ΚΖ. ἡ ΑΔ. τῇ α'.
 (15) ΑΔ. τῇ α'.

ζη, ἢ δὲ γδ = ηδ, καὶ ἢ δα = δε, ὁμοία δὴ πᾶ (1) ἔσαι τὰ ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα βδ, ζδ. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ τῶν ἀπεναντίον τὰ λοιπὰ εἶναι ὁμοία.

Μέρος Γ'. Δῆλον αὐτὸ ἔκτε τῶν Α'. Μέρους, καὶ τῆς Δ'. ἢ τῆς Η'. τῶν Α'.

Ἐπιζευχθεῖσιν γὰρ τῶν αγ, εη, ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν Τριγώνων αβγ, εζη, αἱ Πλευραὶ αβ, βγ, ταῖς Πλευραῖς εζ, ζη, ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ ἴσαι εἰσὶν (2), ἥτε ὑπὸ αβγ τῇ ὑπὸ εζη (3) ἴση, καὶ Βάσις αγ Βάσει εη ἴση (4) ἔσαι, καὶ Τρίγωνον τὸ αβγ Τριγώνῳ τῷ εζη ἴσον. Ἀλλὰ τὰ ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα βδ, ζδ τῶν Τριγώνων (5) ἐκείνων διπλασίονα εἰσὶ, ἔσαι τὰ Παραλληλόγραμμα ἴσα. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ δύο ὁποιαῦν τῶν ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἶναι.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

κ. 447. Α'. Τὸ Παραλληλεπίπεδον αβ, ἢ καὶ Πρίσμα ὁποιοῦν ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γδ τεμνόμενον τῶν τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις ασ, ρβ παραλλήλων, τομὴν ποιεῖται τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις ὁμοίαν τε καὶ ἴσην. Δειχθήσεται δὲ ὡς περ εὑρίσκειται τῆς Προτάσ. ἀνωτ. τὸ Β'. καὶ τὸ Γ'.

Β'. Τῇ δ' αὐτῇ τομῇ τὰ περατύντα Παραλληλόγραμμα αζ, σζ, κτ: διαίρεθήσεται εἰς μέρη (6) Παραλληλόγραμμα τὰ αν, γζ, καὶ σν, δζ, κξ: ὁμοία (7) τοῖς μέρεσι σδ, δβ, εἰς δὲ πᾶσα Εὐθεῖα τῶν κατὰ τὰς Πλευρὰς, οἷον ἢ σβ, τῇ αὐτῇ τομῇ κατατέμνεται.

Γ'. Καὶ παρὰ ταῦτα, εἰν τὸ σρεῖον τὸ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλων τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τμηθὲν, παραλληλεπίπεδον ἦ, τὰ Παραλληλόγραμμα μέρη τὰ ἀλλήλοις ἀντίθετα, εἰς δὲ διατέμνονται τὰ ἀπεναντίον. πλευρικὰ Ἐπίπεδα, ὁμοιά τε (8) ἔσονται καὶ ἴσα.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΕ.

κ. 448. „Εἰν σρεῖον Παραλληλεπίπεδον (αβ), ἢ καὶ Πρίσμα ὁποιοῦν, ἐπιπέδῳ (γδ) τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσαι ὡς ἢ „Βάσις εδ πρὸς τὴν Βάσιν δζ, ἥτω τὸ σρεῖον αδ πρὸς τὸ σρεῖον γβ.

Δείκνυται τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς καὶ ἢ Α'. τῶν ζ'.

(1) Σχόλ. τῆς Ζ. τῶν ε', καὶ Ὁρ. Α. τῶν ζ'. (2) ΑΔ. τῶν α'. (3) Ι. τῶν ια'. (4) Δ. τῶν α'. (5) ΑΔ. τῶν α'. (6) Ε' καὶ τῶν Α. Μέρους τῆς Προτ. (7) Α. τῶν ζ'. καὶ Ὁρ. Ζ. τῶν ε'. (8) Β. καὶ Γ. Μέρους τῆς Προτ.

Διαιρεθῆτω ἡ δὲ Εὐθεΐα εἰς ἴσα ὅποσαδήποτε μέρη, ὅσον εἰς τέτταρα δη. ηδ, δι, ιβ' καὶ ἐπὶ τῆς Βάσεως δζ, διὰ τῶν σημείων τῶν διαιρέσεων η, δι, ι, ἀχθῆτωσαν Εὐθεΐαι ηκ, δλ, ιμ, ταῖς τῆς Βάσεως δζ ἀπεναντίον Πλευραῖς δν, βζ, παράλληλοι. Καὶ ἔτως ἡ Βάσις εἰς τέτταρα (1) ὁμοιά τε, ἢ ἴσα (2) Παραλληλόγραμμα διαιρεθῆσεται τὰ δκ, ηλ, διμ, ιζ, δι' ὧν δὴ τῶν Πλευρῶν ηκ, δλ, ιμ, διερχέσθωσαν τὰ ἐπίπεδα ηξ, δφ, ιπ, τοῖς τῷ σερεῦ ἐπιπέδῳ γβ ἀπεναντίον ἐπιπέδοις γδ, ρβ παράλληλα. Καὶ ἔτω διαιρεθῆσεται ἐκεῖνο εἰς ἐπίπεδα σερεῦ τέτταρα, τὰ δε, ηφ, δπ, ιρ, ὧν ἕκασον (3) ὁμοίοις τε, ἢ ἴσοις πλήθει τε ἢ μεγέθει ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἐστὶ, ἢ διὰ τῷτο ἀλλήλοισ (4) ἴσα τυγχάνει. Ταύτητοι τὸ ἐπίπεδον δκ, ἢ τὸ σερεὸν δε εἰσὶ τῶν ἐπομένων τῶν δζ ἢ γβ μόρια (5) ὅμοια. Ἀφ' ἡρῆσθω τοίνυν ἡ Εὐθεΐα δη ἀπὸ τῆς δσ ὁσάκις ἂν ἐξῇ, ὅσον δις, ἢ ὑπολειφθῆσεται στ τῆς δη ἐλάσσων· ἀπὸ δὲ δὴ τῶν σημείων τῶν διαιρέσεων υ ἢ τ, ἀχθῆτωσαν Εὐθεΐαι, ταῖς τῆς Βάσεως εδ Πλευραῖς ταῖς ἀπεναντίον εσ, νδ παράλληλοι, ἢ δι' αὐτῶν ἀχθῆτω τὰ ἐπίπεδα τοῖς ἀπεναντίον τῷ σερεῦ αδ ἐπιπέδοις ασ, γδ παράλληλα. Καὶ ἐπειδὴ αἱ δυ, υτ, τῇ δη ἑκάτερα ἴση ἐσὶν, ἔσαι (6) ἢ τὰ Παραλληλόγραμμα νυ, υχ, τῷ Παραλληλογράμμῳ δκ ὁμοιόν τε, ἢ ἴσον ἑκάτερον· καὶ δὴ ἢ ἑκάτερον τῶν σερεῶν γυ, υφ, τῷ σερεῦ δε (ἄτε δὴ ὁμοίοις (7) τε ἢ ἴσοις πλήθει τε ἢ μεγέθει ἐπιπέδοις περιεχόμενα) (8) ἴσον. Ἀλλὰ γὰρ διὰ τὴν στ Εὐθεΐαν, ἣτις τῆς δη ἐλάσσων ἐσὶν, ἔσαι ἢ ἡ Βάσις ετ τῆς Βάσεως δκ ἐλάσσων (9), ἢ τὸ σερεὸν ατ τῷ σερεῦ δε ἑλαττον (ἐὰν γὰρ τῶν σερεῶν τέτων, ἐπὶ ἐπιπέδων ἴσων ὄντων τῶν ασ, γδ, ἐντὸς θάτερον θάτερον συσαθῆναι ὑποτεθῇ, διὰ τὴν στ ἐλάσσονα ἦσαν τῆς δη, τὸ σερεὸν ατ μέρει τινὶ μόνον τῷ σερεῦ δε συνεξισωθῆσεται). Ὅσάκις τοίνυν τὸ ἐπίπεδον δκ περιέχεται ἐν τῷ ἡγμένῳ δε, τοσάκις ἢ τὸ σερεὸν δε ἐν τῷ ἡγμένῳ δα ἔσαι περιεχόμενον. Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον δεῖξαι δυνατόν, ὅσα δὴ ποτε τῶν ἐπομένων (τῆς τε βάσεως δζ ἢ τῷ σερεῦ γβ) ὁμοιαμόρια ἐν τοῖς ἡγμένοις (τῇ τε βάσει εδ ἢ τῷ σερεῦ αδ) ἰσαρίθμως ἐμπεριέχεσθαι. Ἄρα (10) βάσις εδ πρὸς βάσιν δζ, ὡς τὸ σερεὸν αδ πρὸς τὸ σερεὸν γβ. Ο. Ε. Δ.

(1) KZ. τῷ α'. ἢ Σχολ. τῆς Z. τῷ ε'. μετὰ τῷ Α'. Ὁρ. τῷ ε'. (2) Λζ. τῷ α'. (3) KZ. τῷ ια'. μετὰ τῶν Πορ. (4) IE. Ὅρισ. τῷ ια'. (5) Z. Ὁρ. τῷ ε'. (6) Διὰ τὰ ἐν (1) ἢ (2) ἀνωτ. σημειωθ. (7) Διὰ τὴν ἀνωτ. μετὰ τῶν Πορ. (8) Ὁρ. IE. τῷ ια'. (9) Α. τῷ ε'. (10) Διὰ τὸ τῶν ἴσων λόγων γνώρισμ. τὸ ἐν τοῖς Ὅρισμ. τῷ ε'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κς.

κ. 450.

„Πρὸς τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (αβ), καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ Σημείῳ (α), τῇ „δοθείσῃ σφραγῇ Γωνία (γδεζ) ἴσην σφραγῇ Γωνίαν συστήσασθαι (τὴν αδιλ).

Σημεῖωσαι ὅτι τῶν γραμμάτων δι' ὧν ἡ σφραγῇ Γωνία εἰώθεν ἐπισημαίνεσθαι, τὸ πρῶτον τασσόμενον ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ Σημεῖον, ἐν ᾧ ἡ Γωνία κείται· οὕτως ἡ σφραγῇ Γωνία αδιλ ἐστὶ πρὸς τῷ α, καὶ ἡ γδεζ ἐστὶ πρὸς τῷ γ.

Α'πὸ τῆ τυχόντος σημείου ζ τῶν ἐπὶ τῆς Εὐθείας γζ, ἄγε (1) τὴν ζη, τῷ ἐπιπέδῳ ὅγε ὁρθήν, καὶ ἐπίξενον Εὐθείας τὰς δζ, ζε, εη, ηδ, ηγ, καὶ ποιήσον τὴν αθ = γδ, καὶ Γωνίαν τὴν ὑπὸ θαι = ὅγε, καὶ τὴν αι = γε· ἐν δὲ τῷ θαι ἐπιπέδῳ ποιήσον Γωνίαν τὴν ὑπὸ θακ = Γωνία τῇ ὑπὸ δγη, καὶ ακ = γη. Εἵτα ἀνάξησον (2) τὴν κλ ὁρθήν τῷ ἐπιπέδῳ θαι, καὶ ἔσω κλ = ηζ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ αλ. Οὕτω γὰρ ἔσαι ἡ σφραγῇ Γωνία αδιλ ἴση τῇ δοθείσῃ γδεζ· ἐπιξενούχθων γὰρ τῶν θκ, ικ, θλ, ιλ, διὰ τὰς θα, ακ, αἱ ταῖς δγ, γη ἴσαι εἰσὶν ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ, καὶ τῇ ὑπὸ θακ καὶ δγη ἴσαι ἕσας, ἔσαι (3) καὶ ἡ θκ = δη. Παραπλησίως δὲ τῇ παραδέσει τῶν Τριγώνων ιακ, εγη, δειχθήσεται (4) κι = ηε· καὶ ἐπὶ τῶν Τριγώνων θκλ, δηζ (5) δειχθήσεται θλ = δζ· καὶ ἐπὶ τῶν Τριγώνων ικλ, εηζ, ἡ ιλ = εζ· καὶ ἐπὶ τῶν Τριγώνων ακλ, γηζ, ἡ αλ = γζ· Τὰ τοῖνυν Τρίγωνα αθλ, γδζ ἀλλήλοις ἰσόπλευρα ἐστὶ, καὶ δὴ (6) καὶ ἰσογώνια· ὅθεν ἡ ὑπὸ θαλ = δγζ. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον, καὶ τοῖς ἰσοπλευροῖς Τριγώνοις αιλ, γεζ, ἡ ὑπὸ λαι = ζγε, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ βαι = δγε (7). Εὐγένετο ἄρα τὸ ζητούμενον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΖ.

κ. 451.

„Α'πὸ τῆς δοθείσης Εὐθείας (αβ), τῷ δοθέντι σφραγῇ Παραλληλεπίπεδῳ „(γδ) ὁμοίον τε, καὶ ὁμοίως κείμενον σφραγῇ Παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Εν Γωνίαις ἐπιπέδοις βαθ, θαι, βαι, αἱ ἴσαι ἂν εἶεν ταῖς ζγε, εγη, ζγη, συνεσάσθω Γωνία σφραγῇ ἡ α (8) τῇ σφραγῇ Γωνία γ ἴση. Εἴτι δὲ ἔσω (9) ζγ : γε :: βα : αθ, καὶ γε : γη :: αθ : αι· Καὶ ὅτως ἔσαι δι' ἴσα (10) ζγ : γη :: βα : αι. Πληρώθω δὲ τὸ Παραλληλεπίπεδον ακ· τῆτο γὰρ ὁμοιον ἔσαι τῷ δοθέντι.

(1) Διὰ τὴν ΙΑ. τῇ ΙΑ'. (2) ΙΒ. τῇ ΙΑ'. (3) Δ. τῇ Α'. (4) ΑΞ. Γ. καὶ Δ. Πρὸτ. τῇ Α'. (5) Διὰ τὸν Γ. Ορ. τῇ ΙΑ'. καὶ Δ. Πρὸτ. τῇ Κ'. (6) Η. τῇ Α'. (7) Εκ κατασκευῆς. (8) Διὰ τὴν ἀνωτ. (9) ΙΒ. τῇ Σ'. (10) ΚΒ. τῇ Ε'.

Ἐκ γὰρ τῆς κατασκευῆς τὰ Παραλληλόγραμμα $\beta\theta$, $\zeta\epsilon$, καὶ $\theta\iota$, $\epsilon\eta$, καὶ $\beta\iota$, $\zeta\eta$ ὅμοια ἐσὶ, καὶ τῶν τὰ ἀπεναντίον (1) ἐκείνων τοῖς ἀπεναντίον· Ὡς τὰ $\delta\epsilon$ ἐπίπεδα τῷ $\zeta\epsilon\theta\epsilon$ $\alpha\kappa$, τοῖς $\epsilon\zeta$ ἐπιπέδοις τῷ $\zeta\epsilon\theta\epsilon$ γδ ὅμοια ὄντα ἐσὶ, καὶ ἐπομένως (2) τὰ $\zeta\epsilon\theta\alpha$ $\alpha\kappa$, γδ ὅμοια ἐσὶ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΗ.

„Ἐὰν $\zeta\epsilon\theta\epsilon$ ὁ παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς Διαγωνίας
 „($\alpha\gamma$, $\epsilon\eta$) τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ $\zeta\epsilon\theta\epsilon$ ὑπὸ τῷ
 „ἐπιπέδῳ. κ. 452.

Ἐπειδὴ (3) $\beta\eta$ καὶ $\beta\epsilon$ Παραλληλόγραμμα ἐσὶν, αἱ $\gamma\eta$, $\alpha\epsilon$ παράλληλοι εἰσὶ τῇ αὐτῇ $\beta\zeta$. Ἄρα καὶ πρὸς ἀλλήλους παράλληλοι εἰσὶ (4), καὶ ἐπομένως ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσται εἰσὶν· ὥς αἱ $\epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\alpha\iota$ $\alpha\gamma$, $\epsilon\eta$ (5) ἐν ἐνὶ καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἰσὶ. Ἡ δὲ ὡς τῷ δι αὐτῶν ἐπιπέδῳ, τέμνεται τὸ παραλληλεπίπεδον εἰς δύο Πρίσματα ἴσα, ὥδε πως δεικνυμι.

Νοεῖσθω τὸ Πρίσμα $\alpha\epsilon\eta\gamma\delta\theta$, ἐπὶ τῷ ἰδίῳ ἐπιπέδῳ $\epsilon\alpha\gamma\eta$ ἥτω κείμενον, ὡς τὰς Γωνίας δ , θ , ἔχειν ἀποκλινάσας πρὸς τὰς Γωνίας β , ζ , καὶ φανερόν ὡς ἔτι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων $\beta\alpha\delta\gamma$, $\zeta\epsilon\theta\eta$ κείσεται, καὶ τέως δὲ μετὰ τὴν ἐφάρμοσιν συμπεσεῖται μὲν τὸ δ τῷ β , συμπεσεῖται δὲ τὸ θ τῷ ζ , ἐπὶ τὸ αὐτό. Πιπτεύω γὰρ εἰ δυνατόν τὸ δ ἔξω τῷ β , οἷον κατὰ τὸ ν' ἢ μὲν οὖν ὑπὸ $\beta\alpha\gamma =$ (6) $\delta\gamma\alpha$. ἀλλ' ἢ ὑπὸ $\delta\gamma\alpha = \gamma\alpha\gamma$ (ἢ γὰρ αὕτη Γωνία ἐσὶν). Ἄρα αἱ $\beta\alpha\gamma$ καὶ $\gamma\alpha\gamma$ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαι, ὅπερ ἄτοπον. Συμπεσεῖται τοίνυν τὸ δ Σημεῖον τῷ β , καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ θ τῷ ζ , ὥς τὸ Πρίσμα $\alpha\epsilon\eta\gamma\delta\theta$ προσεφαρμόζεται τῷ Πρίσματι $\alpha\gamma\eta\epsilon\zeta\beta$, καὶ ἐπομένως (7) ἴσα ἐσὶ.

Αὕτη ἡ κατὰ Τακτικόν δειξις, τοῖς μὲν ὀρθοῖς τῶν Παραλληλεπιπέδων, ὧν ἀμέλει τὰ κατὰ πλευρὰν ἐπίπεδα ταῖς βάσεσι πρὸς ὀρθὰς ἴσεται, προσήκοντα ἐσὶ· τυχὸν δὲ καὶ ἐνός τινος, ἢ δευτέρου εἶδους τῶν πλαγίων ἢκ ἀλλοτρίως ἔχει· Ἐπειδὴ μὲντοι ἐν ταῖς ἐφεξῆς Προτάσεσι τὰδετε, καὶ τῷ μετὰ τόδε Βιβλίῳ, ἐπὶ τὰ Παραλληλεπίπεδα καθόλου ὅπως ἂν καὶ ἔχοι, ὑποτίθεται ἡ δειξις ἐκτεταμένη, ἐπ' ἀνάγκης ἐστὶν ἐπὶ τὸν κατ' Εὐκλείδην συλλογισμὸν ἀναδραμεῖν, δι' οὗ ἐπ' ἀκριβὲς ἀποδείκνυται, πάντα πάντῃ τὰ παραλληλεπίπεδα, τὰ ἐπιπέδῳ τῷ $\alpha\eta$, κατὰ τὰς Διαγωνίας τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων

(1) ΚΑ. τῷ $\iota\alpha'$. (2) Ὅρισμ. Θ. τῷ $\iota\alpha'$. (3) ΚΑ. τῷ $\iota\alpha'$. (4) Διὰ τὴν Θ. τῷ $\iota\alpha'$.
 (5) Ζ. τῷ $\iota\alpha'$. (6) ΚΖ. τῷ α' . (7) Α' ἔξ.

αγ, εἴ τεμνόμενα, δίχα (ὅπερ ἐστὶν εἰς Πρίσματα δύο ἰσά τε ἀλλήλοις ὄντα, καὶ δὴ καὶ ὁμοία) διατέμνεσθαι.

Τρίγωνον γὰρ Τριγώνω ἴσον τὸ αβγ τῷ αδγ (1), καὶ (διὰ τὴν ἰσότη-
τα τῶν Γωνιῶν (2) β καὶ δ, καὶ τῶν (3) βαγ, δγα, καὶ τῶν βγα, δαγ) ὁμοιον
(4). Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ τὰ εζη, εζη Τρίγωνα ἰσά τε καὶ ὁμοία ἐστὶν
ἴσα δὲ δὴ καὶ ὁμοία (5) καὶ τὰ ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα αζ καὶ γδ, καὶ ἔτι
τὰ βη καὶ αδ· τὸ δὲ αη ἀμφοῖν κοινόν· Τὰ ἄρα Πρίσματα αβγ καὶ αδγ καὶ
ἐπὶ ὁμοίων τε καὶ ἴσων πλήθειτε καὶ μεγέθει ἐπιπέδων περιεχόμενα, ὁμοία τε
ἐστὶν (6) ἀλλήλοις καὶ ἰσά. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΘ. καὶ Λ.

κ. 452.

„Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ὄντα (εζη), καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ διὰ
τῆς ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις (εζη, ηαξλ) τυγχάνοντα σφραγίσαντα Παραλ-
ληλεπίπεδα (Ζεαηκιμγ καὶ Ζεβδλξιμ), ἴσα ἀλλήλοις ἐσὶ.

Ἦτοι γὰρ μεταξὺ τῶν κατὰ πλευρὰν παραλλήλων ἐπιπέδων εαξλ καὶ
ζηλὶ ὀφίσσεται, ἢ ὅχι· Ἐξω δὲ τὸ Α'. ἐν γὰρ τῆς ΚΔ'. τῷ παρόντος καὶ τῆς
Η'. τῷ Α'. Βιβλίῳ, δῆλον ὅτι τὰ Τρίγωνα αεβ, γμξ, καὶ τὰ ηζδ, κλ ἰσό-
πλευρά τε εἰσὶν ἀλλήλοις καὶ ἰσογώνια· Ταύτητοι ὡς ἐπὶ τῆς προλαβέσης,
δειχθήσεται τὰ Πρίσματα γμξλκ, αεβδζη ἀλλήλοις ἐπιτιθέμενα συνεφαρ-
μόζειν τε, καὶ ἴσα (7) τυγχάνειν· Καὶ κοινὴ ἄρα τῷ σφραγίσαντι Ζεβδκιμγ
προσεδέντος, τὰ ὅλα Παραλληλεπίπεδα Ζεαηκιμγ, Ζεβδλξιμ ἴσα εἶναι. Ο. Ε. Δ.

Ἄλλως. Ἐν τοῖς Παραλληλογράμμοις αεμγ, βεμξ αἱ ἀπεναντίον Πλευ-
ραὶ (8) ἴσαι ἀλλήλαις, τατέσιν αε = γμ, βε = ξμ, αγ = εμ = βξ, καὶ ἀρ-
θείσης τῆς κοινῆς βγ, αβ = γξ· ἄρα τὰ αβε, γξμ Τρίγωνα, ἀλλήλοις
ισόπλευρά ἐσὶ, καὶ ἐπομένως (9) ἴσα. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ τὰ Τρίγω-
να ζηδ, κλ ἴσα ἀλλήλοις εἶναι, τὰ δὲ ἀπεναντίον τῶν Παραλληλεπιπέδων
ἐπίπεδα ἴσα (10) καὶ αὐτά, τατέσιν αζ = γι, καὶ βδ = ξι, καὶ ακ = ει = βλ·
διὸ καὶ τῷ κοινῷ βκ ἀφαιρεμένῳ, ἔσκει αδ = γλ. Τοιγαρὶν τὰ Πρίσματα αεβ
δζη καὶ γμξλκ, ὡς ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων καὶ ἴσων πλήθειτε καὶ μεγέθει πε-
ριεχόμενα (11), ἴσα ὄντα ἐσὶ· κοινὴ δὲ τούτοις προσεδέντος τῷ σφραγίσαντι Βά-
σις ἡ ζμ, καὶ ἐπίπεδον ταύτῃ ἀπεναντίον τὸ βκ, τὰ ὅλα Παραλληλεπίπεδα
Ζεαηκιμγ, Ζεβδλξιμ ἴσα ἔσκει. Ο. Ε. Δ.

(1) ΑΔ. τῷ Α'. (2) Διὰ τὴν αὐτὴν. (3) ΚΖ. τῷ Α'. (4) Δ. τῷ Ζ'. (5) ΚΔ. τῷ ΙΑ'. (6)
Ορ. ΙΕ. τῷ ΙΑ'. (7) ΑΞ. Ζ'. (8) ΑΔ. τῷ Α'. (9) Η. τῷ Α'. (10) ΚΔ. τῷ ΙΑ'. (11) ΙΕ. Ορ. τῷ ΙΑ'.

Α'Χ' ἔπερ ἄρα τὸ Παραλληλεπίπεδον ἔχπειμιρ, μὴ μεταξὺ εἴη τῶν α. 454.
 αὐτῶν πλευρικῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῷ Παραλληλεπίπεδῳ ἑαυηκγμι,
 ἐπεὶ ἐξ ὑποθ. ηκ, αγ, ρπ, χφ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ
 ὄντι πρὸς τὴν Βάσιν εζιμ, αἱ ρφ κ' πχ τεμνέτωσαν τὴν μὲν ηκ κατὰ θ καὶ
 λ, τὴν δὲ αγ κατὰ β κ' ξ, ἐπεξεύχθωσαν δὲ εβ, με, ζθ, ιλ. Καὶ ἦτω
 ῥᾶσα δειχθῆσεται, ὡς τὰ ἐπίπεδα οἷς τὸ σερεὸν ζεβθλέμι περιέχεται Πα-
 ραλληλόγραμμα, ἐσὶν ἀπεναντίον ἀλλήλοις παράλληλα· τὰ γὰρ ἀπεναντίον
 ἐπίπεδα τὰ Τετράπλευρα τῷ σερεῷ τέτα, ἐν τοῖς αὐτοῖς εἰσιν ἐπιπέδοις, ἐν
 οἷς κ' τὰ ἀπεναντίον τῶν παραλληλεπιπέδων αζιγ κ' πζιρ, κ' ἐπομένως (1)
 παράλληλα ἐσὶ. Τῷ γὰρ σερεῷ βζιξ τὰ ἀπεναντίον Τετράπλευρα βεμε-
 θζιλ, ἐν τοῖς αὐτοῖς εἰσιν ἐπιπέδοις, ἐν οἷς τὰ ἀντίθετα αγμε κ' ηκζ ἐπί-
 πεδα τῷ Παραλληλεπίπεδῳ αζιγ· Καὶ πάλιν τῷ αὐτῷ σερεῷ βζιξ τὰ ἀ-
 πεναντίον Τετράπλευρα βεζθ κ' μελι, εἰσιν ἐν τοῖς αὐτοῖς ἐπιπέδοις, ἐν οἷς κ'
 τὰ ἀντίθετα πεζχ κ' μιρ τῷ Παραλληλεπίπεδῳ πζιρ· Ἐστὶ δὲ τὸ Παραλλη-
 λόγραμμα εἰ τῷ τε σερεῷ ἐκείνῳ κ' τοῖς παραλληλεπιπέδοις κοινόν· τὸ δὲ
 Τετράπλευρον βεζθ ἐσὶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ὃ τῷ εἰ (ἐξ ὑποθ.) παράλληλον
 ἐστὶ, ὁλὸν ἄρα ὅτι τὸ σερεὸν βζιξ ὑπὸ ἐπιπέδων Τετραπλεύρων, ὧν τὰ ἀ-
 πεναντίον ἀλλήλοις παράλληλα, περιεχόμενον· Καὶ τοῖνον παραλληλεπιπέδῳ
 τυγχάνοντι (2) τῷ σερεῷ ἐκείνῳ, ἐπεὶ (διὰ τὸ Α'. μέρος) τὰ Παραλληλεπί-
 πεδα ἔχπειμιρ κ' ἑαυηκγμι ἴσα ἐστὶ, φανερόν ὅτι κ' ἀλλήλοις ταῦτα ἴσα
 ἐσὶ. Ο. Ε. Δ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Παραπλησία ἐσὶν ἡ Πρότασις αὕτη τῇ ΛΕ'. τῷ Α'. Βιβλίῳ, ταῦτα περὶ
 τῶν σερεῶν, οἷς ἐκείνη περὶ τῶν ἐπιπέδων κατασκευάζουσα. Ἐνθεντοὶ κ' κατὰ
 τὰς λοιπὰς διαφορὰς παραπλησίως ἐκείνη ἀποδειχθήσεται.

Π ρ ὅ τ α σ ι ς ΛΑ.

„Τὰ ἐπὶ ἴσων Βάσεων ὄντα τῶν (αξ κ' εη) σερεῶν Παραλληλεπίπεδα, α. 455.
 „κ' ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (σ), ἴσα ἀλλήλοις ἐσὶ.

Ἐχέτω δὴ τὰ Παραλληλεπίπεδα πρῶτον τὰς Πλευρὰς καθεύτας ταῖς βάσεσι
 καὶ τοῖνον παρὰ τὴν ζη Πλευρὰν προσεβεβλημένην, παραβληθῆτω Παραλλη-
 λόγραμμα ηκμθ τῷ Παραλληλογράμμῳ αξ ἴσον τε κ' ὁμοιον· καὶ πληρωμέ-

(1) ΚΔ. τῷ ια. (2) Θρ. ΙΓ. τῷ ια.

νε τῇ Παραλληλογράμῳ ημερ, αἱ Εὐθεΐαι φη, ρη προεξαχθεῖσαι ἀπαν-
τάτωσαν τῇ κθ κατὰ τὰ Σημεῖα π κ λ. Ἦδη μὲν οὖν νοείδωσαν ἐπὶ τῶν
ηκ, ηπ, ηφ, ἐφεσάναι Παραλληλεπίπεδα, ὧν αἱ Πλευραὶ κάθεται εἰς τὰς
βάσεις, κ ὧν ὕψος κοινόν τὸ σ. καὶ δὴ τὸ σερεὸν εἴς ἐς πρὸς τὸ σερεὸν
ηρσ, ὡς εἰ πρὸς ηφ (1). τατέσι (τῶν εη, αξ ἐξ ὑποθ. ἴσων ὄντων) ὡς αξ
πρὸς ηφ. ἦτοι (ἐκ κατασκευῆς) ὡς ηκ πρὸς ηφ, τατέσιν (2) ὡς ηπ πρὸς ηφ,
τατέσιν (3) ὡς σερεὸν ηρσ πρὸς τὸ αὐτὸ σερεὸν ηρσ. Ἐπειδὴ τοίνυν τὰ σε-
ρεὰ εἴς κ ηρσ, τὸν αὐτὸν ἔχοντα εἰς λόγον πρὸς τὸ σερεὸν ηρσ, ἔσαι τὸ
(4) εἴς σερεὸν κ τῷ ηρσ ἴσον, τατέσι τῷ σερεῶ (5) ηκσ. τατέσιν (ἐπεὶ
αἱ Βάσεις ηκ, αξ ὁμοιοῖτε εἰς (6) κ ἴσαι) τῷ σερεῶ (7) αξσ. Ο. Η. τὸ προ-
τεθέν. Δι' ὅλη δὲ τῇ τοιούτῃ Συλλογισμῶ τὰ σερεὰ ἐλήφθη ὁρθά.

Εἴτα ἐχέτω τὰ δοθέντα Παραλληλεπίπεδα εἴς, αξσ, τὰς Πλευρὰς
ταῖς βάσεσιν εἰς κ αξ πλαγίας. καὶ γινέσθω ἐπὶ εη, αξ Πραλληλεπίπεδα,
ὧν ἂν αἱ Πλευραὶ ταῖς βάσεσιν ὁρθαὶ εἴεν, ἐν ὑψώματι τῷ κατὰ τὴν σ. ταῦτ'
οὖν ἴσα τοῖς πλαγίοις ἔσαι διὰ τὴν ΚΘ'. ἢ τὴν Λ'. Ὡς ἐπειδὴ τὰ ὁρθὰ
Παραλληλεπίπεδα (διὰ τὸ Α'. μέρος) ἀλλήλοις ἴσα ἐσίν, ἔσαι κ τὰ πλαγία
ἴσα. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΒ.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα σερεὰ Παραλληλεπίπεδα εἰς πρὸς ἄλ-
ληλα ὡς αἱ Βάσεις.

κ. 456.

Ἐςωσαν Βάσεις ηξ κ α, κοινόν δὲ ὕψωμα τὸ κ. καὶ παρὰ τὴν γξ πα-
ραβληθῆτω (8) Παραλληλόγραμμον ξθ ἴσον τῷ δοθέντι α, ἐν Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ
ξγθ ἴσῃ τῇ δοθείσῃ η.

Ἐπὶ γυν τῶν εγ, ξθ, νοείδω Παραλληλεπίπεδα ἐφιστάμενα, ἐν ὑψώ-
ματι τῷ κ. τὰ δὲ, μέρη ἔσαι τῇ αὐτῇ Παραλληλεπιπέδῳ θεκ. Καὶ ἔσαι τοί-
νυν (9) Παραλληλεπίπεδον ξθκ πρὸς Παραλληλεπίπεδον ξηκ, ὡς Βάσις ξθ
πρὸς Βάσιν ξη, τατέσιν (10) ὡς Βάσις α πρὸς Βάσιν ξη. Ἀλλὰ τῶν Βάσεων
ξθ κ α ἴσων ὄσων, τὰ Παραλληλεπίπεδα ξθκ κ ακ (11) ἴσα ἐσίν. Ἄρα
Παραλληλεπίπεδον τὸ ακ εἰς πρὸς Παραλληλεπίπεδον τὸ ξηκ, ὡς Βάσις α
πρὸς Βάσιν ξη. Ο. Ε. Δ.

(1) ΚΕ. τῇ ια'. (2) ΛΕ. τῇ α'. (3) ΚΕ. τῇ ια'. (4) Θ. τῇ ε'. (5) ΚΘ. τῇ ια'.
(6) Ε'κ κατασ. (7) Ο'ρ. ΙΕ. τῇ ια'. (8) ΜΔ. τῇ α'. (9) ΚΕ. τῇ ια'. (10) Ε'κ κατ.
(11) Διὰ τὴν ἀνωτ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Τὸ ἐνταῦθα περὶ τῶν Παραλληλεπίπεδων ἀποδειχθέν, ἐν τῷ ἐφεξῆς
 Β'. Βιβλ. Πρωτ. ζ'. περὶ τῶν Πυραμίδων, καὶ ἐν τῷ Α'. Πορίσμ. μετὰ τὴν
 Θ'. Πρωτ. περὶ παντὸς Πρίσματος, καὶ ἐν τῇ ΙΑ. Προτάσει περὶ τῶν Κώ-
 νων, καὶ τῶν Κυλίνδρων ἀποδειχθήσεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΓ.

„Τὰ ὅμοια στερεὰ Παραλληλεπίπεδα (θα καὶ γμ) πρὸς ἄλληλα ἐν τρι- α. 457.
 ,πλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων Πλευρῶν (αβ, βγ).

Εἴσω Παραλληλεπίπεδα αθ, γμ ὅμοια, καὶ πάντα δῆτα τὰ ἐπ' αὐτῶν
 ἐπίπεδα ὅμοια (1) ἔσαι, καὶ ἐπομένως αβ : βγ :: εβ : βξ (2), καὶ ζβ : βη
 :: εβ : βξ. ἔτι δὲ καὶ αἱ Γωνίαι (3) τῶν ἐπιπέδων ἔσονται ἴσαι. Ταχθήτω-
 σαν οὖν ἄνω τὰ στερεὰ αθ, γμ, ὡς τὰς μὲν ἴσας Γωνίας ὑπὸ γβξ, αβε,
 ἀντιθέτως κατὰ κορυφὴν κεῖσθαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, τὰς δὲ Πλευρὰς αβ,
 γβ ἐπ' εὐθείας, καὶ δὴ (4) καὶ τὰς εβ, ξβ, καὶ τὰς ζβ, ηβ, ὁμοίως αὐτὰς
 ἐπ' εὐθείας. Ἐπὶ γὰρ τῶν ἐπιπέδων εγ καὶ γξ νοεῖσθω στερεὰ ἐφεσώτα, τὸ
 μὲν κβ συνιστῶν μετὰ τῇ στερεῇ θα ἐν παραλληλεπίπεδον, τὸ δὲ φξ συν-
 ιστῶν ὁμοίως καὶ αὐτὸ μετὰ τῇ κβ ἐν παραλληλεπίπεδον, τότε φξ καὶ αὐτὸ
 μετὰ τῇ γμ συνιστῶν ἐν παραλληλεπίπεδον. Τὸ τοίνυν στερεὸν θα εἰς πρὸς
 τὸ στερεὸν κβ (5), ὡς αε πρὸς εγ, τατέσιν (6) ὡς αβ πρὸς βγ, τατέσιν (ὡς
 ἐξ ὑποθ. ἀνωτέρω δέδεικται) ὡς εβ πρὸς βξ, ἥτοι (7) ὡς εγ πρὸς γξ. ὁ-
 πέρ εἰσιν (8) ὡς τὸ αὐτὸ στερεὸν κβ, πρὸς τὸ στερεὸν φξ. ὥστε συνεχίζεται ὁ
 αὐτὸς λόγος ἐπὶ τῶν τριῶν στερεῶν θα, κβ, φξ. Ἦδη δὲ τὸ στερεὸν κβ εἰς
 πρὸς τὸ στερεὸν φξ, ὡς Βάσιν εγ πρὸς Βάσιν γξ, τατέσιν ὡς εβ πρὸς βξ,
 ὁ ταυτὸν εἰσιν, ὡς ζβ πρὸς βη (9), ἥτοι ὡς τὸ ἐπίπεδον ζγ πρὸς τὸ ἐπίπε-
 δον γη, τῆτο δὲ εἰσιν, ὡς τὸ αὐτὸ αὐτίς στερεὸν φξ πρὸς τὸ στερεὸν γμ. Τὰ
 ἄρα τέτταρα στερεὰ θα, κβ, φξ, γμ συνεχῶς ἀνάλογον εἰσὶ καὶ τοίνυν ὁ
 λόγος τῇ Α'. θα πρὸς τὸ Δ'. γμ, τριπλασίον (10) εἰς τῇ λόγῳ τῇ Α'.
 θα, πρὸς τὸ Β'. κβ, τατέσι (11) τῇ λόγῳ αε πρὸς εγ, τατέσι τῇ λόγῳ (12)
 τῶν ὁμολόγων Πλευρῶν αβ : βγ. Ο. Ε. Δ.

(1) Θ. Ο'ρ. ια'. (2) Ο'ρ. Α. τῷ ζ'. (3) Αὐτ. (4) ΙΓ. καὶ ΙΔ. τῷ α'. (5) ΚΕ. τῇ
 ια'. (6) Α. τῷ ζ'. (7) Διὰ τὴν αὐτήν. (8) ΚΕ. τῇ ια'. (9) Ἀνωτ. ἐδείχθη ἐξ ὑποθ.
 (10) Ο'ρ. Ι. τῷ ε'. (11) ΚΕ. τῇ ια'. (12) Α. τῷ ζ'.

Α' λ λ ω ς.

- κ. 458. Τῶν ὁμοίων Παραλληλογράμμων $\theta\alpha$, $\pi\sigma$, ἔωσαν ὁμόλογοι Πλευραὶ αἱ $\alpha\beta$ καὶ $\rho\sigma$, $\epsilon\beta$ καὶ $\tau\sigma$, $\zeta\beta$ καὶ $\upsilon\sigma$. Φημί δὴ ὅτι τὸ $\varsigma\epsilon\pi\epsilon\acute{o}\nu$ $\theta\alpha$ ἐστὶ πρὸς τὸ $\varsigma\epsilon\pi\epsilon\acute{o}\nu$ $\pi\sigma$, ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῆς $\alpha\beta$ πρὸς τὴν $\rho\sigma$.
- κ. 459. Προεκβληθήτωσαν αἱ $\alpha\beta$, $\epsilon\beta$, $\zeta\beta$, ἐπὶ γ , ξ , η , ὥστε εἶναι τὰς $\beta\gamma$, $\beta\xi$, $\beta\eta$, ἴσας ταῖς $\rho\sigma$, $\tau\sigma$, $\upsilon\sigma$ ἴσας ἐκάστην ἐκάσῃ, καὶ πληρόσω τὸ Παραλληλόγραμμον $\gamma\xi$, καὶ τὸ Παραλληλεπίπεδον $\gamma\mu$. καὶ διὰ τὴν ὑπὸ $\xi\beta\gamma = (1)$ $\alpha\beta\epsilon = (2)$ $\rho\sigma\tau$, καὶ διὰ τὰς $\beta\gamma$, $\xi\beta$, τὰς ταῖς Πλευραῖς $\rho\sigma$, $\tau\sigma$ ἴσας (3) ἐτέραν ἐτέραν, τὰ Παραλληλόγραμμα $\xi\gamma$, $\rho\tau$, ὁμοιάτε ἔσαι καὶ (4) ἴσα. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ὁμοιάτε ἔσαι καὶ ἴσα, καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα $\gamma\eta$ καὶ $\rho\upsilon$, καὶ μὴν καὶ τὰ $\xi\eta$, $\tau\upsilon$. Ἐνθεντοὶ καὶ τὰ τέτοις ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα (ἦτοι τὰ τοῖς ὁμοίοις καὶ ἴσοις ἀντίθετα ἐπ' ἀμφοῖν τῶν Παραλληλεπίπεδων) (5) ὁμοιάτε ἀλλήλοις καὶ ἴσα ἔσαι. Καὶ εἰσὶν ἄρα τὰ $\varsigma\epsilon\pi\epsilon\acute{o}\nu$ $\pi\sigma$, $\gamma\mu$ (6) ὁμοιάτε καὶ ἴσα. διὸ δὴ τὰ $\varsigma\epsilon\pi\epsilon\acute{o}\nu$ $\theta\alpha$, $\gamma\mu$ (7) ὁμοία καὶ αὐτὰ ἔσαι, ὥστε $\alpha\beta : \beta\gamma :: \epsilon\beta : \beta\xi :: \zeta\beta : \beta\eta$. Ἐπὶ τοίνυν τῶν Βάσεων $\epsilon\gamma$, $\gamma\xi$, πληρόσω τὰ Παραλληλεπίπεδα $\beta\kappa$, $\phi\xi$, ἰσοῦψῃ τῷ παραλληλεπίπεδῳ $\alpha\theta$, καὶ ἔσαι $\alpha\beta : \beta\gamma$ ἢ πρὸς $\rho\sigma$ (8) :: $\epsilon\beta : \beta\xi$, ἢ $\sigma\tau ::$ καὶ $\zeta\beta : \beta\eta$, ἢ $\sigma\upsilon$. τατέσιν (9) $\alpha\epsilon : \epsilon\gamma :: \epsilon\gamma : \gamma\xi :: \zeta\gamma : \gamma\eta$. ἦτοι (10) $\alpha\theta : \beta\kappa :: \beta\kappa : \phi\xi :: \phi\xi : \gamma\mu$, ἦτοι $\pi\sigma$. Ἄρα (11) $\alpha\theta$ ἐστὶ πρὸς $\pi\sigma$, ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῷ $\alpha\theta$ πρὸς τὸ $\beta\kappa$. Ἄλλαν μὲν $\alpha\theta : \beta\kappa ::$ (12) $\alpha\epsilon : \epsilon\gamma ::$ (13) $\alpha\beta : \beta\gamma$, ἢ $\rho\sigma$. ἄρα (14) τὸ $\varsigma\epsilon\pi\epsilon\acute{o}\nu$ $\alpha\theta$ ἐστὶ πρὸς τὸ ὁμοιον $\varsigma\epsilon\pi\epsilon\acute{o}\nu$ $\pi\sigma$, ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῆς Πλευρᾶς $\alpha\beta$ πρὸς τὴν αὐτῆς ὁμόλογον Πλευρὰν $\rho\sigma$. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

- Α'. Ἐνθεντοὶ ἐὰν τέσσαρες ᾖσιν Εὐθεῖαι συνεχῶς ἀνάλογον, ὡς ἔχει ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, ὅπως ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α'. Παραλληλεπίπεδον, πρὸς τὸ Παραλληλεπίπεδον τὸ ὁμοίον τε, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον τὸ ἀπὸ τῆς Β'. Διὸ ἐπὶ τῶν ὁμοίων Παραλληλεπίπεδων $\alpha\theta$, $\gamma\mu$, δοθεισῶν τῶν ὁμολόγων Πλευρῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, εὐρεθήσεται ὁ ἐκείνων πρὸς ἄλληλα λόγος. ἐὰν γὰρ γένηται $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, χ , ψ ::, ἔσαι $\theta\alpha : \gamma\mu :: \alpha\beta : \psi$. Ταύτητοι καὶ τῶν

(1) IE. τῷ α'. (2) Eξ ὑποθ. καὶ Ορ. Α. τῷ ζ'. (3) Eκ κατασ. (4) Α'ε. ζ'. (5) KA. τῷ ια'. (6) IE. Ορ. ια'. (7) Eξ ὑποθ. καὶ Ορ. Θ. τῷ ια'. (8) Eκ κατ. (9) Α. τῷ ε'. (10) KE. τῷ ια'. (11) Ορ. Ι. τῷ ε'. (12) KE. τῷ ια'. (13) Α. τῷ ζ'. (14) ΙΑ. τῷ ε'.

σερεῶν $\beta\alpha$, γμ δοθέντων, $\epsilon\zeta$ τῇ $\beta\alpha$ τῆς τυχάσης Πλευρᾶς ταχθείσης $\alpha\beta$, ἡ $\beta\alpha$ τέρμινος τῶν σερεῶν ὁμόλογος Πλευρᾶ $\beta\gamma$, ἐστὶν ἡ τῶν δύο μέσων (1) ἀναλόγων προτέρη, τῶν μεταξὺ $\alpha\beta$ καὶ ψ .

B'.

Καὶ τεύθεν λίαν σφραλλόμενοι ἀπελέγχονται, οἱ τῶν ὁμοίων σερεῶν τὸν λόγον ἴσον εἶναι ἡγόμενοι τῷ τῶν Πλευρῶν. Οὐ γὰρ δὴ ὁ ἀπὸ τῆς διπλασίας Γραμμῆς κύβος διπλασίος ἐστίν, οὐταπλάσιος δὲ τῇ ἀπὸ τῆς ἀπλῆς· οὐδὲ ὁ ἀπὸ τῆς τριπλῆς τριπλῆς, εἰκοσαπλῆς δὲ καὶ ἑπταπλῆς· ἐπεὶ 1, 2, 4, 8 $\div$, καὶ 1, 3, 9, 27 $\div$. Οἰμοίως δὲ καὶ περὶ πάντων τῶν ὁμοίων σερεῶν ὑποληπτέον, ὡς ἐφεξῆς δῆλον ἔσται.

Γ'.

Ἐκ τέτων δὲ ἡρτηται καὶ τὸ τεθρυλλημένον ἐκεῖνο περὶ τῆς διπλασιασμῆς τῆς κύβου Πρόβλημα, περὶ ᾧ κατωτέρω ἐν τέρματι τῇ IB'. Βιβλίον, ἐν οἷς καὶ ἡ μέθοδος ὑποτεθείσεται, ἥπερ ἡ τῆς Κύβου, καὶ ἡ τῶν ὁποίων ἐκείνων ἀπλῶς ὁμοίων σερεῶν αὐξήσεις ἢ μείωσεις, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον τελεῖται.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Α'.

Τῶν Κύβων σερεῶν ὄντων παραλληλεπιπέδων ὁμοίων ἀλλήλοις, καὶ ἐπομένως ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῶν ἰδίων Πλευρῶν εἶναι νομμένων, ἅπας λόγος, ἐν ὁποιασδήποτε πηλικότησι τριπλασίων ὢν, διὰ τῶν Κύβων τῶν αὐτῶν ἐκείνων πηλικότητων ἐπιστημαίνεσθαι εἶωθεν, ὅσον ὁ τριπλασίων λόγος τῇ A πρὸς B, ἔτως ἐκτίθεσθαι φιλεῖ $AK : BK$.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Β'.

Τὸ ἐνταῦθα περὶ τῶν παραλληλεπιπέδων δειχθέν ἐν τῇ IB'. Βιβλ. Πρωτ. Η'. περὶ τῶν Πυραμίδων, καὶ ἐν τῇ Β'. Πορίσματος τῆς Θ'. τῇ αὐτῇ περὶ τῶν Πρισμαίων, καὶ ἐν τῇ IB'. Πρωτ. περὶ τῶν Κώνων καὶ τῶν Κυλίνδρων, καὶ ἐν τῇ IH'. περὶ τῶν Σφαιρῶν.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΔΔ.

„τῶν ἴσων σερεῶν παραλληλεπιπέδων (πσ, γκ) ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι (τατέσιν ὡς ἔχει βάσις ρτ πρὸς βάσιν ζκ, ἔτως ἀντιτρόφως ὕψος τὸ ζγ πρὸς ὕψος τὸ συ)· καὶ ὢν σερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

κ. 460.

(1) Ὡς τὴν II. τῇ ε'.

Μέρος Α'. Εἴωσαν δὴ πρῶτον αἱ πρὸς τὴν βάσιν Πλευραὶ ὁρθαί. Καὶ εἰ τῶν σερεῶν πσ, γκ τὰ ὕψη ἴσα τεθῇ, τὸ προτεθέν δῆλον· ἰσοῦψῃ γὰρ ὄντα, ἔσαι (1) τὰ παραλληλεπίπεδα ὡς αἱ βάσεις. Ἐκεῖνα δὲ (2) ἴσα, καὶ αἱ βάσεις ἄρα, καὶ ὁ αὐτὸς ἕως ἔσαι λόγος ὁ κατ' ἰσότητα τῶν ὕψων Α'. καὶ Β'. τῷ κατ' ἰσότητα τῶν Βάσεων Β' τε καὶ Α'.

Εἰ δὲ ἄνισα, ἀπὸ τῆ μείζονος ζγ ἀποτετμήσθω ἡ ζε ἴση τῇ συ, καὶ διὰ τῆ ε ἀρχθῇτω τὸ ἐπίπεδον ελ παράλληλον τῷ ζκ. Ἡ μὲν οὖν Βάσις ρτ ἐστὶ πρὸς τὴν Βάσιν ζκ, ὡς τὸ σερεὸν (3) πσ πρὸς τὸ σερεὸν εκ· τετέστιν (ἐπεὶ ἴσα ἐξ ὑποθ. ἐστὶ τὰ σερεὰ πσ, γκ) ὡς τὸ σερεὸν γκ πρὸς τὸ σερεὸν εκ, ἦτοι (4) ὡς γη πρὸς ει, τῆτο δὲ ἐστὶν (5) ὡς γζ πρὸς εζ, καὶ ἐπομένως (6) ὡς γζ ἀντιστρόφως πρὸς τὴν υσ. Ο. Ε. Δ.

Α' καὶ Β' Εἴωσαν δὴ αἱ Πλευραὶ πρὸς τὰς βάσεις πλαγιάζεσαι, καὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν Βάσεων ἀνισάθωσαν ἐν ὕψει τῷ αὐτῷ Παραλληλεπίπεδα ὁρθὰ, καὶ τέτοις (7) ἴσα ἔσαι τὰ Παραλληλεπίπεδα τὰ πλάγια· ἐπεὶ δὲ τὰ ὁρθὰ (διὰ τὸ ἄνωτ.) ἀντιπεπόνθασιν τὰς βάσεις καὶ τὰ ὕψη, ἀντιπείσονται δὴ καὶ κεῖνα. Ο. Ε. Δ.

Μέρος Β'. Εἴωσαν αἱ πλευραὶ ταῖς βάσεσιν ὁρθαί, καὶ τὰ ὕψη ἴσα. Καὶ ἐπειδὴ αἱ βάσεις καὶ τὰ ὕψη (8) ἀντιπεπόνθασιν, διὰ γε τὴν τῶν τῶν ἰσότητα συνισωθήσονται καὶ κεῖνα, καὶ (9) ἐπομένως καὶ αὐτὰ Παραλληλεπίπεδα.

Εἴτα ἔσω τὰ ὕψη ἄνισα, καὶ αἱ πλευραὶ ταῖς βάσεσιν ὁρθαί, καὶ ἀπὸ τῆς μείζονος γζ ληφθῇτω ἴση τῇ υσ ἡ εζ. Τὸ γὰρ σερεὸν πσ ἐστὶ πρὸς τὸ σερεὸν εκ, ὡς (10) ρτ πρὸς ζκ, τετέστιν (11) ὡς γζ πρὸς υσ, ἦτοι (12) ὡς γζ πρὸς εζ· ὅπερ ἐστὶν (13) ὡς γη πρὸς ει, ἦτοι (14) ὡς σερεὸν γκ πρὸς τὸ αὐτὸ σερεὸν εκ· τὰ ἄρα σερεὰ πσ καὶ γκ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον πρὸς τὸ αὐτὸ εκ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Ο. Ε. Δ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πλάγια τῶν Παραλληλεπιπέδων, τοῖς ἐπὶ ἴσων βάσεων ἰσοῦψέσιν ὁρθοῖς (15) ἴσα ὄντα ἐστὶ, καὶ κεῖνα ἄρα, εἰ ἀντιπεπόνθασιν τὰς βάσεις καὶ τὰ ὕψη, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α.

Τὰ περὶ τῶν Παραλληλεπιπέδων ἀποδειχθέντα ἐν Προτ. ΚΘ. Α. ΛΑ.

(1) ΑΒ. τῆ ια'. (2) Εξ ὑποθ. (3) ΑΒ. τῆ ια'. (4) ΚΕ. τῆ ια'. (5) Α. τῆ ε'. (6) Εκ κατ. (7) Α. τῆ ια'. (8) Εξ ὑποθ. (9) ΑΑ. τῆ ια. (10) ΑΒ. τῆ ια'. (11) Εξ ὑποθ. (12) Εκ κατ. (13) Α. τῆ ε'. (14) ΚΕ. τῆ ια'. (15) Α. τῆ ια'.

ΛΒ. ΛΓ. ΛΔ. αὐτὰ ταῦτα προσήκοντα εἰς καὶ τοῖς τριγωνικοῖς Πρίσμασιν, ἅττα ἡμίση τῶν παραλληλεπιπέδων ὄντα εἶναι, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ΚΗ'. Προτάσεως. Καὶ τοίνυν

Τὰ Τριγωνικά πρίσματα, ὧν ἴσα τὰ ὕψη, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ Βά- Α'. α. 461.
σεις καὶ ἐπομένως εἰν ἴσας ἔχοντα ἢ τάς τε βάσεις καὶ τὰ ὕψη, καὶ ἀλλή-
λοις αὐτὰ ἴσα εἶναι.

Εἰ ἂν ᾖ ὁμοία, τότε ὁ λόγος τριπλασίων εἶναι τῷ λόγῳ τῶν πλευρῶν Β.
τῶν ἀπεναντίον τῶν ἴσων Γωνιῶν καὶ ἐπομένως τὰ τῆς ΛΓ'. Προτ. Πορίσ-
ματα καθεύνοις προσεπανάκοντα εἶναι.

Καὶ εἰ ἂν ἴσα, ἀντιπεπόνθασιν τὰς Βάσεις καὶ τὰ ὕψη καὶ εἰ ἀντιπεπόνθασιν Γ.
τὰς Βάσεις καὶ τὰ ὕψη, ἴσα εἶναι.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Τὸ δὲ τοι ἐνταῦθα ἐν Προτ. ΛΔ'. περὶ τῶν Παραλληλεπιπέδων ἀπο-
δειχθὲν, δειχθήσεται ἐν τῷ ΙΒ'. Βιβλ. Προτ. Θ'. καὶ περὶ τῶν Πυραμι-
δων, καὶ ἐν τῷ Γ'. Πορίσματ. τῆς Θ'. περὶ παντός Πρίσματος, καὶ ἐν τῇ
ΙΕ'. Προτ. περὶ τῶν Κῶνων, καὶ τῶν Κυλίνδρων.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΕ.

Διεξοδικωτάτη οὖσα ὑπεργεῖ εἰς δεῖξιν τῇ ἐφεξῆς, ἣν αὐτοὶ καὶ
ταύτης χωρὶς ἀποδείξομεν.

Π ρ ό τ α σ ι ς Λς.

„Εἰ ἂν τρεῖς Εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν (α, β, γ), τὸ ἐκ τῶν τριῶν σφαιρὸν α. 462.
„Παραλληλεπίπεδον (δθ), ἴσον εἰς τῷ ἀπὸ τῆς μέσης (β) σφαιρῷ παραλληλε-
„πίπεδῳ (ιν), ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογώνιῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἡ τῷ Παραλληλεπίπεδῳ δθ βάσις εδ, ἐχέτω Πλευράν τὴν εζ = α, καὶ
τὴν ἐτέραν Πλευράν εδ = γ, τὴν δὲ δὴ τῇ βάσει ἐφισταμένην Πλευράν εη =
τῇ μέσῃ β, καὶ ὅτως εἶναι τὸ δθ Παραλληλεπίπεδον ἐκ τῶν τριῶν α, β, γ.
Εἴτα τῷ Παραλληλεπίπεδῳ ιν αἱ τρεῖς πλευραὶ λχ, ιχ, χμ (καὶ ἐπομένως καὶ
αἱ λοιπαὶ) ἴσαι εἴπωσαν τῇ μέσῃ β. ἢ δὲ κατὰ τὸ χ σφαιρᾷ Γωνία τότε τῇ
κατὰ τὸ ε σφαιρᾷ Γωνίᾳ ἐκείνῃ ἴση γινέσθω, καὶ ὅτως εἶναι τὸ ιν παραλληλε-
πίπεδον ἀπὸ τῆς μέσης β, καὶ ἰσογώνιον τῷ προτέρῳ φημι δὲ ὅτι καὶ ἴσον.

Επειδὴ γὰρ ἐξ ὑποθ. καὶ κατασκ. ὡς ζε : λχ, ὅτως ἀντιστρόφως ιχ :

Ο ο

δε, ἔσονται αἱ Βάσεις (1) δὲ καὶ ἰσάι ἀλλήλαις. Ἀλλὰ γὰρ καὶ αἱ σερεαὶ Γωνίαι αἱ πρὸς τῷ ε, καὶ τῷ χ ἰσάι εἰσιν, ἐὰν ἄρα ἐντὸς ἀλλήλων τεθῶσι, προσεφαρμόσασι (2), καὶ διὰ τὴν ἰσότητά των Εὐθειῶν εἰ καὶ χμ, τὰ Σημεῖα μ καὶ η εἰς ταυτὸ συμπεσῶνται. Καὶ τὸ αὐτὸ ἄρα ἔσται ἐκατέρῃ των σερεῶν πρὸς κάθετον ὕψος, ἀμέλειτοι ἀπὸ των συνιόντων σημείων μ καὶ η ἐπὶ τὴν ὑποκειμένην βάσιν· ὥς (3) τὰ σερεὰ δθ, ἰν ἰσα εἰσί. Ο. Ε. Δ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Σημειωτέον δὲ ἐνταῦθα τῷ δ' ὃ μέγιστον τυγχάνει τὴν χρῆσιν, ὥς ἐκ τριῶν Εὐθειῶν ἡπερ ἔτυχεν ἐπ' ἀλλήλαις (4) ἀγομένων, ἰσομέγεθες αἰεὶ τὸ σερεὸν Παραλληλεπίπεδον ὀρθὸν ὄν (τετέστιν ὑπὸ ὀρθογωνίων ἐπιπέδων περιεχόμενον) ἀνακύπτει.

αβγ.

γαβ.

βγα.

1

2

3

Εἴτα των σεριχείων τὰ μὲν πρῶτα δύο τὴν Βάσιν παρίσῃσι, τὸ δὲ τρίτον τὸ ὕψος. Παραθῶμεν οὖν τὸ πρῶτον των Σχημάτων τῷ δευτέρῳ.

Βάσις αβ πρὸς βάσιν γα (διὰ τὴν Α' τῆς ε'), ὥς β Πλευρὰ πρὸς γ Πλευράν, τετέστιν ἀντιερόφως ὥς β ὕψος πρὸς γ ὕψος. Ἀρα διὰ τὴν ΔΔ'.

$$\alpha\beta\gamma = \gamma\alpha\beta.$$

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δείξει, καὶ τὸ Α'. τῷ Γ', καὶ τὸ Γ'. τῷ Β'. ἴσα τυγχάνειν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΖ.

„Εὰν τέσσαρες Εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾶσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν Παραλληλεπίπεδα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται. Καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν σερεὰ Παραλληλεπίπεδα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾦ, καὶ αὐταὶ αἱ Εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Δῆλον ἐκ τῆς ΔΔ'. τῆς Ε'. Βιβλία. Οἱ γὰρ των Παραλληλεπιπέδων λόγοι, διὰ τὴν ΛΓ'. τῆς παρόντος, ἔσονται τριπλασίονες των λόγων, οὓς αἱ Εὐθεῖαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, καὶ οἱ (ἐξ ὑποθ.) ἴσοι εἰσὶ.

Τὸ δὲ ἀνάπαλιν δῆλον αὖθις ἐκ τῆς ΔΕ'. τῆς Ε'. Οἱ γὰρ λόγοι των Παραλληλεπιπέδων (ἐξ ὑποθ.) ἴσοι εἰσὶ, τριπλασίονες (5) ὄντες των ἃς ἔχουσι

(1) ΛΔ. τῆς ε'. (2) ΛΔ. ὅς. ια'. (3) ΛΔ. τῆς ια'. (4) ὅρα τὸ Α. Σχόλ. τῆς Μ. τῆς ια'. (5) ΛΓ. τῆς ια'.

λόγους αὐτοὺς ὁμολογοῦν τῶν Πλευρῶν, ἀφ' ὧν τὰ ὅμοια Παραλληλεπίπεδα ὁμοίως ἀναγράφεται καὶ ἐπομένως τῶν τοιούτων Πλευρῶν οἱ λόγοι (1) ἔσονται ἴσοι.

Ἡ δὲ Πρότασις ἀληθεύει, ἐφ' ὁποίων ἐκ τῶν ὁμοίων καθόλου ἐκτινομένη· πάντα γὰρ τριπλασίονα ἔχει τὸν λόγον τῷ λόγῳ τῶν κατ' αὐτὰ πλευρῶν, ὡς ἐν τῷ Β'. Βιβλ. δῆλον γενήσεται.

Π ό ρ ι σ μ α.

Εὐτεῦθεν τὴν μέθοδον ἀρνούμεθα τῇ τῶν Κυβικῶν τῶν ριζῶν πολλαπλασιάζειν καὶ διαιρεῖν. Ἐὰν γὰρ ἐπ' ἀλλήλαις πολλαπλασιασθῶσιν αἱ ὑπὸ τοῖς Κυβικοῖς ριζικοῖς σημείοις πηλικότητες, καὶ τῷ γινομένῳ σημείῳ Κυβικῆς ρίζης προταχθῇ, δοθήσεται ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν Κυβικῶν ριζῶν παραγόμενον. Οἷον ἔστω $\sqrt{5^3}$ πολλαπλασιαστέον ἐν $\sqrt{4^3}$, καὶ παραγόμενον ἔσται $\sqrt{20^3}$. ὡς γὰρ ὁ τῷ πολλαπλασιασμῷ βέλεται λόγος, ἢ μονὰς ἐστὶ πρὸς τὸν πολλαπλασιασμὸν, ἦτοι $1 : \sqrt{4^3}$, ὡς ὁ πολλαπλασιαστέος (τετέστι $\sqrt{5^3}$) πρὸς τὸ ἀνακύπτειν. Ἄρα (διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότ.) ὁ τῆς μονάδος Κύβος ἔσται πρὸς τὸν Κύβον τῷ πολλαπλασιασμῷ, ὡς ὁ τῷ πολλαπλασιαστέῳ Κύβος πρὸς τὸν τῷ παραγόμενον. τετέστιν ἐὰν ἀντὶ τῷ γινομένῳ ὑποτεθῇ Γ, ἔσται δὴ $1 : 4 :: 5 : \Gamma^3$, ἀλλὰ $1 : 4 :: 5 : 20$, ἄρα $\Gamma^3 = 20$, καὶ $\Gamma = \sqrt{20^3}$. Παραπλησίως κατὰ τὸν τῆς διαιρέσεως ὅρον δειχθήσεται, ὅτι $\sqrt{20^3}$ ἐὰν διαιρεθῇ διὰ $\sqrt{5^3}$, πηλίκον δώσει $\sqrt{4^3}$. Ὅρα τὸ Α'. Πρότ. τῆς ΚΒ'. τῷ ε'.

Καὶ ἐν γένει τῶν ριζικῶν πηλικότητων, ὁποιασάν ἂν εἴεν τάξεις, ἦτοι εἶδης, τὰ γινόμενα ἢ τὰ πηλίκα λαμβάνεται πολλαπλασιασμῷ, ἢ διαιρέσει τῶν ὑπὸ τοῖς ριζικοῖς σημείοις πηλικότητων, καὶ προσεπισημειώσῃ τῶν αὐτῶν ριζικῶν σημείων, ἐπὶ τοῖς γινομένοις αὐτοῖς διὰ τῷ πολλαπλασιασμῷ, ἢ τοῖς πηλικοῖς διὰ τῆς διαιρέσεως.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΗ.

Ταύτην φθάσαντες ἀνωτέρω ἀπεδείξαμεν, ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΙΓ'. τῷ παρόντος Βιβλίου Πρότασιν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΘ.

Ἐὰν ἐκ τῶν Παραλληλεπίπεδων (αβ) τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων (αγ, δβ), α. 463.

(1) ΔΕ. τῷ ε'.

„αὶ Πλευραὶ (αε, ζγ, αζ, εγ, ε δθ, ηβ, δη, θβ) δίχα τμηθῶσι, διὰ
 „δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα (ιλπξ, φκμρ) ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ (στ) τῶν
 „ἐπιπέδων, εἰ ἢ τῷ σερρεῖ παραλληλεπιπέδῳ Διάμετρος (αβ) δίχα τέμνῃ-
 „σιν ἀλλήλας.

Ἀρχήτωσαν Εὐθεῖαι αὐτῶν, σγ, τδ, τβ, εἰς διὰ τὰς δίχα τετμημένας
 δη, θβ, εἰ δθ, ηβ, εἰ τὴν ρφ Εὐθεῖαν τὴν ταῖς δη, θβ παράλληλον, εἰ
 τὴν Εὐθεῖαν ξπ τὴν ταῖς δθ, ηβ (1), διαιρεθήσεται τὸ ηθ Παραλληλό-
 γραμμον εἰς τέσσαρα Παραλληλόγραμμα ἴσα, τῶτε ὅλῳ εἰς ἀλλήλους
 (2) ὁμοιάτε, εἰ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα· διὸ τὰ ξρ εἰς φπ ἐπιτεθέντα ἀλ-
 λήλους ἐφαρμόσει, εἰ δτ = τβ (3). Ἐτι τὰ Παραλληλόγραμμα ξρ, φπ,
 ἔχοντα Γωνίας τὰς ὑπὸ ξδρ, φβπ κοινὰς, μετὰ τῷ ηθ ὁμοίᾳ αὐτοῖς ὄντος
 Παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον (4) εἰσὶν· ὁθεν ἡ δτβ (5)
 Γραμμὴ εὐθεῖα ἐστίν· ὡσαύτως εἰς ἡ ασγ εὐθεῖα ἐστίν, εἰ ασ = σγ· Ἡ δὲ
 μὲν οὖν ἡ αδ παράλληλός τε εἰς ἡ ἐστὶ τῇ ζη (6), ἢ τε ζη παράλληλός τε
 εἰς ἡ ἐστὶ τῇ γβ, ἄρα (7) αὐτῶν γβ παράλληλοί τε εἰσὶν ἀλλήλαις καὶ
 ἴσαι· ταύτητοι εἰς αὐτῶν αγ, δβ, αὐτὰς ἐπιζευγνύσας, παράλληλοί τε
 εἰσὶ (8) εἰς ἡ ἴσαι ἀλλήλαις· διὸ εἰ αὐτῶν ἡμίσειαι ασ, βτ ἴσαι ἔσονται.
 Παρὰ ταῦτα δὲ αὐτῶν στ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσὶν ἐπιπέδῳ (9) αγκυρῶν· ὥστε ἐπὶ
 τῶν Τριγώνων ασυ, βτυ, διὰ τὰς ὑπὸ αυσ, βυτ, τὰς κατὰ κορυφὴν ἀντι-
 κειμένας, εἰ κατ' ἀκολουθίαν (10) ἴσας, εἰ διὰ τὰς ἐναλλάξ ὑπὸ ασυ, βτυ
 ἴσας εἰς αὐτὰς (11) ἴσας, εἰ διὰ τὰς ασ, βτ Πλευράς, ἴσας εἰς αὐτὰς ἀ-
 ποδειχθεῖσαι, καὶ τὰ λοιπὰ πάντα (12) ἴσα ἔσονται, καὶ συ = υτ, καὶ αυ
 = υβ· Ἡ ἄρα κοινὴ τομὴ στ, εἰ ἡ Διάμετρος αβ δίχα τέμνῃσιν ἀλλήλας.
 Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐπὶ παντός οὖν Παραλληλεπιπέδῳ, ἀπασαὶ αὐτῶν Διάμετροι δίχα τέμ-
 νουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον υ.

Π ρ ο τ α σ ι ς Μ.

α. 464. „Ἐὰν ᾖ δύο Πρίσματα τριγωνικὰ ἰσοῦψῃ (αβζηξγ εἰς κλφρχπ), καὶ

(1) ΑΓ. τῷ α'. (2) ΚΖ. εἰ ΑΔ. τῷ α'. εἰ Ορ. Α. τῷ ε'. (3) Α'Ε. Ζ'. εἰ Α'. (4)
 Κς. τῷ ε'. (5) Ορ. ΑΖ. τῷ α'. (6) ΚΔ. τῷ α'. εἰ ΑΔ. τῷ α'. (7) Θ. τῷ α'. εἰ Α'Ε.
 α'. (8) ΑΓ. τῷ α'. (9) Πόρ. τῷ Ζ. τῷ α'. (10) ΙΕ. τῷ α'. (11) ΚΖ. τῷ α'. (12)
 Κς. τῷ α'.

τὸ μὲν ἔχει βάσιν Παραλληλόγραμμον (ΕΒ), τὸ δὲ Τριγώνον (ικλ), δι-
πλάσιον δὲ ἢ τὸ Παραλληλόγραμμον τῷ Τριγώνῳ, ἴσα ἔσσι τὰ Πρίσματα.

Εἴαν γὰρ πληρωθῇ τὰ Παραλληλεπίπεδα κρ καὶ γδ, ἔσαι (1) αὐτὰ ἴσα,
διὰ τὴν τῶν βάσεων γα, μκ, καὶ τὴν τῶν ὑψῶν ἰσότητά. τοιγαρὺν καὶ τὰ
καδ' ἡμίσειαν (2) αὐτῶν Πρίσματα ἔσονται ἴσα. Ο. Ε. Δ.

Εἰσὶ γὰρ τὰ δύο ταῦτα τριγωνικὰ Πρίσματα, παραλληλεπιπέδων ἴσων,
ταῖς διαγωνίοις τετμημένων, ἡμίσειαι, τοσάτω μόνον διαφέροντα, ὅτι ἐπὶ δι-
τὲρς ἡ τομή κατὰ τὴν Διαγώνιον τῆς βάσεως τελεῖται, ἐπὶ δὲ διττὲρς ἢ χ
ἴτως.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Α'.

Εκ τῶν εἰς τόδε ἀποδεδειγμένων, σαφὲς ἡ τῶν τριγωνικῶν Πρισμάτων
καταμέτρησις, καὶ τῶν τετραγωνικῶν, ὧν τὰ ἀπεναντίον τετραγωνικὰ ἐπίπε-
δα παράλληλα ἐσὶ, τατέσι τῶν Παραλληλεπιπέδων, τῷ ὕψος δηλονότι διὰ
τῆς βάσεως πολλαπλασιασμῷ ἀγομένε. Οἷον εἴαν ἡ τὸ ὕψος ποδ. 10, ἡ δὲ
βάσις ποδ. τετραγ. 100 (καταμετρηθῇσεται δὲ ἡ βάσις διὰ τῆ Σχολ. τῆς
Δς. ἢ τῆς ΜΑ' τῆ Α'), πολλαπλασιαζέσθω 10 διὰ 100, καὶ ἀνακύψει 1000,
οἷτινες εἰσὶ πόδ. κυβικοί, ἐξ ὧν τὸ σφῆρόν τῷ Πρίσματι συγκεκρότηται.

Ἡ δὲ δεῖξις προχειροτάτη. Καθάπερ γὰρ τὸ Ὀρθογώνιον, ἔτῳτοι καὶ
τὸ ὀρθὸν Παραλληλεπίπεδον παράγεται ἐκ τῷ ὕψος ἐπιπολλαπλασιαζομένη
τῇ βάσει. Τοιγαρὺν καὶ ἅπαν ὅποιον Παραλληλεπίπεδον παράγεται ἐκ τῷ
ὕψος ἐπιπολλαπλασιαζομένη τῇ βάσει, ὅτι (διὰ τὴν ΔΑ') ἴσον ἐσὶ τῷ ὀρ-
θῳ Παραλληλεπιπέδῳ, τῷ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως κατισταμένῳ, καὶ ἐν τῷ ἴσῳ
ὕψωματι.

Εἴτα ἐπεὶ τὸ ὅλον Παραλληλεπίπεδον παράγεται ἐκ τῷ ὕψος τῇ ὅλῃ
βάσει ἐπιπολλαπλασιαζομένη, φανερόν ὡς ἡ τῷ Παραλληλεπιπέδῳ ἡμίσεια
(τὸ τριγωνικὸν δηλονότι Πρίσμα διὰ τὴν ΚΗ') παραγόμενον ἔσαι ἐκ τῷ ὕ-
ψος τῷ ἐπιπολλαπλασιαζομένη τῇ ἡμίσειᾳ τῆς βάσεως, τατέσι τῷ Τριγώ-
νῳ ιλκ (ὄρα τὸ ἄνωτ. Σχήμα).

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Β'.

Διὰ τὸ τὰ πολύγωνα Πρίσματα εἰς τριγωνικὰ ἀναλύεσθαι ἔχειν. ἢ
γὰρ καὶ εἰς Τριγωνικὰ, ὧν ἡ τε βάσις καὶ τὸ ὕψος ἴσα (3) ἀποκαθίσταται, ὅσα

(1) ΔΑ. τῆ ια'. (2) ΚΗ. τῆ ια'. (3) ΚΕ. τῆ ε'.

δή ποτε περὶ τῶν τριγωνικῶν Πρισμαμάτων ἐν τοῖς Πρίσμασι τῆς ΔΔ'. Πρωτ. παραδίδεται, καὶ ἐν τῷ Α'. Σχολ. τῆς δὲ τῆς Μ'. Προτάσ., ἅπαντα ἀληθεύει περὶ ὁποίων πολυγωνίων Πρισμαμάτων λεγόμενα. Δόξαν μὲν τοι τῷ Τακνείῳ, ἐκ τῶν ἐν τῷ ΙΒ'. Βιβλ. περὶ Πυραμίδων ἀποδεικνυμένων, ἅπαντα ἐπιφέρειν ἐκεῖνα, περιττὸν ἡμᾶς ἀλλαχόθεν ταῦτα πειρωμένους ἐπάγειν, τοῖς πρωτοπειροῖς βραδύτερον ἀσχολεῖν.

Τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΒ'.

Ἡμῖν δὲ Η'.

Ο περ ἐν τοῖς πρὸ τῆς δε βιβλίοις διὰ φροντίδος ἡμῖν ἐγένετο, τὴν τῶν μαθηματικῶν στοιχείων ἐκθεσιν, ῥηοτέραν τε παραχρῆν καὶ ἐπιτομωτέραν, τάς μάλιστα ἐπιμελητέον ἡμῖν ἂν εἴη ἐπὶ τῇ ἐν χερσὶ ΙΒ'. ἐν ᾧ τὰ πραγματευόμενα τῶν ἀναγκαιωτάτων τυγχάνοντα, ἀπαγορεύειν πολλῶν τὰς πρωτοπειρίας, παρὰ τὸ τῶνδείξεων διεξοδικὸν καὶ ἐργῶδες παραίτια γίνεται, εἰς ἀπόγνωσιν μονομαχίαν τέρας ἐμβάλλοντα· πρόθεσις δὲ ἡμῖν τὸ τραχὺ ἐξομαλίζοντας τῆς εἰσηγήσεως, μηδὲ τῆς κατὰ τὰς Γεωμέτρίας ἀκριβοῦς τῶνδείξεων ἀποσήσεσθαι. Πότερον δ' ἄρα κατὰ σκοπὸν πρᾶξι χωρήσαν ἡμῖν τὸ ἐγχείρημα, ὃ μετιῶν ἐπιγνώσεται, εἰ ταῦτα δὴ τὰ ἡμέτερα πρὸς τὰ ὑπὸ τῇ Εὐκλείδῃ εἰς πλάτος ἐκτεταμένα, παραδέσθαι μὴ κατοκνήσεις.

Ὑποθέμενος οὖν ὁ Εὐκλείδης ἐν τῷ πρὸ τέρας Βιβλ. τὰ τῶν στερεῶν στοιχεία, καὶ τῶν εὐχερεσέρων ἐν σώμασιν, ὡς ἐπιφανείαις ἐπιπέδοις πεπερατωμένων ὀριστάμενος τὰ μέτρα, ἐπὶ τῇ παρόντι ΙΒ', τὰ ὑπὸ κυρτῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα στερεά, οἷοι Κυλίνδροι τε εἰσὶ καὶ Κῶνοι, καὶ Σφαῖραι διασκέπτεται, καὶ ταῦτα πρὸς ἄλληλα παρατίθησι, καὶ τέτων τὰ μέτρα προσδιορίζεται. Ἀνυσιμώτατον δὲ τὸ παρὸν Βιβλίον ὁμολογεῖται, ὡς περιέχον τὰς ἀρχάς, αἷς οἱ ἐνδοξότατοι τῶν Γεωμετρῶν καὶ πρὸ πάντων ὁ Ἀρχιμήδης τὰς δευλῶν ἐκεῖνας περὶ τε Κυλίνδρου, καὶ Κῶνος, καὶ Σφαίρας ἀποδείξεις ἐπινοδόμησαν.

Ὅ ρ ι σ μ ο ι.

Πυραμὶς ἐστὶ σχῆμα σφαιρὸν (ψλ) ἐπιπέδοις τριγωνικοῖς (αλγ, γλζ, Δ. κ 465. γλβ, βλα) περιεχόμενον, ἀπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου (ψ) πρὸς ἐνὶ σημείῳ λ) συνεσῶς.

Τὸ μὲν οὖν ἐπίπεδον ψ, Βάσις λέγεται· ἐστὶ δὲ ἦτοι Τρίγωνον, ἢ Τετράγωνον, ἢ ὅποιον ἄλλο Εὐθύγραμμον, ἀφ' οὗ τῶν Πλευρῶν ἑκάστη τὰ Τρίγωνα ἀνεγείρεται, τὰ εἰς τὸ αὐτὸ συνιόντα σημεῖον τὸ λ, ὃ Κορυφή λέγεται.

Καθάπερ τὸ Τρίγωνον ἐν τοῖς εὐθύγραμμοις τῶν ἐπιπέδων Σχημάτων, ἔστωι κ ἡ τριγωνικὴ Πυραμὶς ἡ ἀπὸ Τριγώνου βάσεως συνεσῶσα, ἐν τοῖς σφαιροῖς τὸ πρῶτισον ἐστὶ κ ἀπλῆστατον.

Εἰ ἂν ἔξω τῷ ἐπιπέδῳ Κύκλῳ τινὸς (γλ) ληφθῇ τι Σημεῖον τὸ (α), ἀφ' Β'. κ. 466. ἢ Εὐθεΐα τι ἀχθεῖν μὴ πεπερασμένη ἡ αζ, ἀπτομένη τῷ Κύκλῳ κατὰ τὸ γ, ἢ δὴ, μένοντος κατὰ χώραν τῷ α, περὶ τὴν τῷ Κύκλῳ Περιφέρειαν περιεγόμενῃ αγζ, αὐτόσε πάλιν ἐπανελθοι, ὅθεν κινεῖσθαι τὸ πρῶτον ἤρξατο, ἢ μὲν ἐπιφάνεια ἡ ὑπὸ τῆς Εὐθεΐας αγζ περιγεγραμμένη, Κωνικὴ καλεῖται ἐπιφάνεια, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῆς κ τῷ Κύκλῳ γλ περιελημμένον Σῶμα, Κῶνος.

Κορυφή δὲ τῷ Κῶνῳ ἡ κατὰ τὸ α.

Βάσις δὲ τῷ Κῶνῳ ὁ Κύκλος γλ.

Ἄξων δὲ τῷ Κῶνῳ ἡ Εὐθεΐα αβ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ Κέντρον τῆς Βάσεως ἐπιζευγνυμένη.

Πλευρὰ δὲ τῷ Κῶνῳ ἡ αγ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν Περιφέρειαν τῆς Βάσεως ἀγόμενη, ἣν ὅλην εἶναι ἐν αὐτῇ τῇ τῷ Κῶνῳ ἐπιφανείᾳ, ἐξ αὐτῆς τῆς τῷ Κῶνῳ γενέσεως δῆλον.

Κῶνος ὁρθός ἐστιν, ἢ ὁ ἄξων (αβ) πρὸς ὁρθὰς ἐφίσταται τῇ Βάσει.

κ. 467.

Κῶνος δὲ σκαληνός, ἦτοι πλάγιος, οὗ ὁ ἄξων αβ ἐφεσῶς ἐστὶ τῇ Βάσει μὴ πρὸς ὁρθὰς.

Γεννᾶσθαι δὲ ἔτι νοεῖται ὁ ὁρθὸς Κῶνος ὑπὸ Τριγώνῳ ὁρθογωνίῳ τῷ γβα, τῷ περὶ τὴν ἐτέραν (αβ) τῶν τὴν ὁρθὴν Γωνίαν περιεχουσῶν Πλευρῶν περιεγόμενῳ.

Εἰ ἂν περὶ δύο Κύκλους ἴσῃτε κ παραλλήλῳ (γλ, ξπ), Εὐθεΐα μὴ πε- Γ'. κ. 468. περασμένη (ἢ γεζ) περιαχθῇ, ὥς οὗ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπανελθοι, ὅθεν κινεῖσθαι τὴν ἀρχὴν ἤρξατο, ἔστω ὥς κινεμένη, ἐαυτῇ τε κ τῇ ἐπιζευγνυύτῃ τὰ τῶν Κύκλων κέντρα Εὐθεΐα βα παραλλήλος αἰεὶ εἶναι, ἢ μὲν ἐπιφάνεια ἡ ὑπὸ τῆς Εὐθεΐας (γεζ) περιγεγραμμένη, ἐπιφάνεια καλεῖται Κυλινδρική, τὸ δὲ

ὑπὸ ταύτης τῆς ἐπιφανείας, καὶ τῶν διπλῶν κυκλικῶν Βάσεων περιειλημμένον
σφαιρὸν, Κύλινδρος.

Βάσεις τῆ Κυλίνδρου εἰσὶν οἱ Κύκλοι (γλ, ξπ).

ἈΨων δὲ τῆ Κυλίνδρου ἡ Εὐθεΐα (αβ), ἡ τὰ Κέντρα ἐπιζευγνύουσα.

Πλευρὰ δὲ τῆ Κυλίνδρου ἡ Εὐθεΐα (ξη), ἡ ἐν τῇ τῆ Κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ
ἔσται, καὶ τῆς διττῆς Βάσεως ἀπτομένη.

Κύλινδρος δὲ ὀρθός ἐστιν, εἴαν ὁ ἈΨων ἐπὶ τῆς βάσεως πρὸς ὀρθὰς ἐφεστώσῃ.

Κύλινδρος δὲ σκαλινός, εἴαν ὁ ἈΨων αὐτῇ πρὸς τὴν βάσιν μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾗ.

Γενᾶται δὲ ὁ Κύλινδρος ὁ ὀρθὸς ὑπὸ Ὀρθογωνίας (ξηβ), τῇ περὶ τὴν
μῆαν τῶν ἐν αὐτῷ Πλευρῶν (αβ) περιαγομένη.

κ. 469. Δ'. Κῶνοι καὶ Κύλινδροι ὅμοιοι εἰσὶν, ὧν οἱ ἈΨονες ακ, ψξ, καὶ αἱ τῶν βάσεων
Διάμετροι βζ, πρὸς ἀνάλογον εἰσὶν, ὧν τε οἱ ἈΨονες ἐπὶ τῶν βάσεων ἦτοι
ὀρθοὶ εἰσὶν, ἢ ἐπίσης ἐγκυκλιμένοι.

Ε'. Σφαῖρα ἐστὶ σφαιρὸν ὑπὸ μιᾶς κυρτῆς ἐπιφανείας περιειλημμένον, πρὸς ἣν
ἀπασαι αἱ ἀπότινος τῶν ἐντὸς Σημεῖα ἀγόμεναι Εὐθεΐαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

Τὸ δὲ ἐντὸς ἐκεῖνο σημεῖον Κέντρον καλεῖται.

Σφαῖρας δὲ Διάμετρος, ἡ διὰ τῆ Κέντρου ἀγομένη καὶ ἐπὶ τὴν ἐπιφά-
νειαν ἐκατέρωθεν περατομένη.

Γενᾶται δὲ ἡ Σφαῖρα, ἡμικυκλίᾳ περὶ τὴν Διάμετρον αὐτῇ μένουσαν
ἀγόμενη.

ς'. Μεγέθη δὲ εἰς Σχήματα ἅττα ἐγγράφεσθαι, ἢ περιγράφεσθαι λέγε-
ται, τατέσι Σχήματα ἐλάσσονα ἢ μείζονα, εἰς σχήματι ἀποτελεωτῶν λέ-
γεται, εἴαν τῇ εἰς ὃ ἀπολήγει ἐγγραφόμενα ἢ περιγραφόμενα, ποσότητι
τέως, οἷα σφῆν δοθείσης ἐλάσσονι, διαφέρειν ἔχωσι.

Εἴαν οὖν τὰ εἰς τι ἐγγραφόμενα ἔλλειπῃ ἐκεῖνα, ἔλλείψει οἷα σφῆν δο-
θείσης ἐλάσσονι, τὰ ἐγγραφόμενα εἰς ἐκεῖνο ἀπολήγειν εἰρήσεται· καὶ εἴαν
τὰ περιγραφόμενα ὑπερβάλλῃ ἐκεῖνο ὑπεροχῇ, οἷα σφῆν ὁμοίως δοθείσης ἐλάσ-
σονι, τὰ περιγραφόμενα ὡσαύτως εἰς αὐτὸ ἐκεῖνο ἀποτελεωτῶν εἰρήσεται.

κ. 470. Ζ'. Εἴαν γένηται Τρίγωνον τὸ βαγ ἐν Ἡμικυκλίῳ βδλγ, ἐπὶ δὲ τῶν Πλευ-
ρῶν βα, αγ, ὡς ἐπὶ διαμέτρων, ἡμικύκλιᾳ ἐλάσσονα καταγραφῇ τὰ βνα,
αμγ, τὰ καμπυλόγραμμα τῶν Σχημάτων βδαν, αλγμ, τὰ ἐκτὸς μὲν ὑπὸ
τῆς Ἡμιπεριφερείας τῆ ἐλάσσονος κύκλου, ἐντὸς δὲ ὑπὸ τῆ τόξου τῆ μείζονος
περατάμενα, ἀπὸ τῆ ἐξευρόντος αὐτὰ, Μηνίσκοι σύζυγοι Ἰπποκράτους τῆ Χίε
κατονομάζονται.

Εἴαν τὰ τόξα βδα, αλγ ἴσα ᾗ, τεταρτημόρια δηλονότι τῆς τῆ μείζο-

νος Κύκλος Περιφερείας τυγχάνοντα, καλείσθωσαν οἱ τοιοῦτοι Μηνίσκοι τεταρτημοριοί.

Ἐάν ἡ Εὐθεία εἰ ἀγομένη, τὰ τῷ τεταρτημορίῳ Μηνίσκῳ τόξα ἀνάλογον τέμνη κατὰ τὰ Σημεῖα ε' καὶ η', ὥστε εἶναι τὸ τόξον βε πρὸς τὸ τόξον εα, ὡς τὸ τόξον βη πρὸς τὸ τόξον ηα, καλείσθων τὰ ἐμβλῶν αει, βει, ἀπόμοιραι τῷ Μηνίσκῳ τῷ τεταρτημορίῳ.

Τῷ Μηνίσκῳ, ἢ τῷ αὐτῷ Τετραγώνῳ ἀπόμοιρα λέγεται, ἐάν ταύτη ἦ ἴσον εὐθύγραμμον Σχῆμα συσταθῇναι ἔχη.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Τὰ ἐν τοῖς Κύκλοις ὅμοια Πολύγωνα πρὸς ἄλληλα εἰσίν, ὡς τὰ ἀ-
„πὸ τῶν Διαμέτρων (αζ, ιγ) Τετράγωνα, καὶ δὴ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν Ἡμιδια-
„μέτρων (αψ, ιχ), τῷ τῷ τοιαῦτα Πολύγωνα, ἐν διπλασίονι λόγῳ
„εἰσὶ τῶν Διαμέτρων, ἢ τῶν Ἡμιδιαμέτρων τῶν Κύκλων, ἐν οἷς ἐκεῖνα εἰσὶ.

κ. 471.

Ἀρχήτωσαν αἱ αξ, ζβ, ιρ, λγ· ἐπεὶ οὖν τὰ Πολύγωνα ὑποτίθε-
ται ὅμοια, ἴσαι ἔσονται (1) αἱ ὑπὸ ξβα, ρλι, καὶ αἱ Πλευραὶ ξβ, βα,
ταῖς Πλευραῖς ρλ, λι ἀνάλογον· ὥστε ἐπὶ τῶν Τριγώνων ξαβ, ριλ, αἱ
(2) πρὸς τοῖς ξ καὶ ρ σημείοις Γωνίαι ἴσαι εἰσίν· ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ βζα καὶ λγι,
αἱ ταῖς αὐταῖς Περιφερείαις βα, λι βεβηκεῖται, ἴσαι (3) εἰσίν· Αἱ δὲ ὑπὸ
ζβα, γλι, ἐν τοῖς Ἡμικυκλίοις εἰσὶ, καὶ ἐπομένως (4) ὁρθαὶ καὶ ἴσαι· ἄρα
καὶ αἱ λοιπαὶ ὑπὸ βαζ, λιγ (5) καὶ αὐταὶ ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἰσογώνια ἄρα ὄν-
τα τὰ Τρίγωνα ζαβ, γιλ, ἔσαι (6) καὶ ὅμοια· Ἡ δὲ ἐπεὶ (ἐξ ὑποθ.)
τὰ Πολύγωνα ὅμοια εἰσίν, ἔσαι αὐτὰ πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ διπλασίονι
(7) τῷ λόγῳ τῶν Πλευρῶν βα, λι, ὥστε διὰ τὰ δειχθέντα, ἐν διπλασίονι
λόγῳ τῷ τῶν Διαμέτρων αζ, ιγ, καὶ ἐπομένως καὶ (8) τῶν Ἡμιδιαμέτρων.
Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Αἱ τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις ὁμοίων Πολυγώνων Περίμετροι εἰσὶ πρὸς ἀλ- Α.
λήλας ὡς αἱ Διάμετροι.

Ἐπειδὴ γὰρ ἐδείχθη $αβ : λι :: αζ : ιγ$, καὶ $ξβ$ ἔσαι πρὸς $ρλ :: αζ :$
 $ιγ$, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων Πλευρῶν ὁμοίως. Καὶ τοίνυν (9) πᾶσαι ἅμα αἱ

(1) Ο. ε. Α. τῷ ε'. (2) ε. τῷ ε'. (3) ΚΑ. τῷ γ'. (4) ΑΑ. τῷ γ'. (5) Θ. Πόρ.
τῷ ΑΒ. τῷ α'. (6) Α. τῷ ε'. (7) Κ. τῷ ε'. (8) ΙΕ. τῷ ι'. (9) ΙΒ. τῷ ε'.

πλευραὶ πρὸς πάσας ἅμα, ταῖς Περιμέτρος πρὸς Περιμέτρον, ἔσονται ὡς αὐτὴ πρὸς γ.

4. Τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις ὁμοίων Εὐθυγράμμων, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν Κύκλων Διάμετροι.

Λ ἦ μ μ α.

„Τὰ ἐν τῷ Κύκλῳ Πολύγωνα εἰς τὸν Κύκλον ἀποτελεωτά.

96. 472.

Εἰς γγραφίτῳ Τετράγωνον τὸ αβγδ, καὶ ἐγγραφέν, ἐπεὶ ἡμίσεια (1) εἰς τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸν Κύκλον, μείζον ἔσαι δὴ πῃ τῆς ἡμισείας τῷ Κύκλῳ· καὶ εἰ τοίνυν αὐτὸ ἀπὸ τῷ Κύκλῳ ἀφαιρεθῇ, πλέοντι τῆς ἡμισείας ἀφαιρεθήσεται. Εἴτα ἡ τῶν τόξων δίχα τετμημένων κατὰ ε, κ, ι, δ, ἐγγραφίτῳ Οἰκτάγωνον, καὶ κατὰ τὸ ε ἀπτεῶδω τῷ Κύκλῳ ἡ ζι, ἡ πρὸς αὐτὴν προεκβαλλόμεναι προσπιπτέτωσαν αἱ βγ ἡ δα, κατὰ τὰ Σημεῖα η ἡ ζ· καὶ ἔσαι δὴ τὸ γζ παραλληλόγραμμον (2), ἡ ἐπεὶ τὸ Τρίγωνον γεα (3) ἡμίσεια εἰσὶν, ἔσαι αὐτὸ πλέοντι τῆς ἡμισείας τῷ τμήματος γεα. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἡ τὰ Τρίγωνα ακδ, διβ, κξ: τῶν κατ' αὐτὰ τμημάτων, πλέοντι τῆς ἡμισείας εἰσὶν ἕκασον μὲν ἕκασον, πάντα δὲ πάντων· καὶ τῶν ἄρα Τριγώνων ἀπὸ τῶν τμημάτων ἐκείνων, ταυτὸν δ' εἰπεῖν ἀπὸ τῷ λοιπῷ τῷ Κύκλῳ ἀφαιρεθέντων, πλέοντι τῆς ἡμισείας ἀφαιρεθήσεται. Παραπλησίῳ δὲ τῷ λόγῳ, ἡ εἴπερ ἐφεξῆς τῷ Κύκλῳ Πολύγωνα ἐγγραφείη, διπλῷ τῷ ἀριθμῷ τῶν Γωνιῶν πληθυνόμενα, ἀπὸ τῷ λοιπῷ τῷ Κύκλῳ, ὑπὲρ τὴν ἡμίσειαν αἰ ἀφαιρεῖσθαι ἀποδείχθήσεται· καὶ ἔσαι ἄρα τελευταῖον τὸ λοιπὸν (4) παντὸς τῷ δοθέντος ἔλαττον. Εὐδεντοὶ τὰ ἐγγραφόμενα Πολύγωνα ἐξείψει τῷ Κύκλῳ, πληκίότητι οἰασθὲν δοθείσης ἐλάττωσι· ὅπερ ἔστιν, εἰς τὸν Κύκλον τέως ἀποτελεωθήσεται (5). Ο. Ε. Δ.

Μετέω δὲ ἂν τῆς ἐκτελείσης διαφερέσῃ ἔχοι ἂν ἀποδείχθῃναι, ὅτι ἡ τὰ εἰς τὸν Κύκλον περιγραφόμενα Πολύγωνα, εἰς αὐτὸν ἐκείνον τέως ἡ ἀπολήξασιν· ἐπεὶ μέντοι ἡ τόδε πρὸς τοῖς ἄλλοις, ἡ δὴ ἡ τὸ προληφθὲν Λήμμα ἔχ ἦττον, ἐν τῇ Γ'. Προτάσει τῶν ἀρχιμηδείων Θεωρημάτων διελιπται, περιττὸν ἐνταῦθα περὶ τὰτε τὸ πλείω ὑποσυνάφαι ἐκρίναμεν.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β.

„Οἱ Κύκλοι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Διαμέτρων Τετρά-

(1) Σχόλ. ε. ἡ Ζ. τῷ δ'. (2) Πόρ. ΚΖ. ΚΗ. ἡ ΚΘ τῷ γ'. (3) ΜΑ. τῷ α'. (4) ἄλλον ἐκ τῷ Α. Λήμ. τῷ Σχολ. τῷ μετὰ τὴν ΙΔ. τῷ ε'. (5) Ὅρ. ε. τῷ β'.

„γωνα, ἢ ὡς ἂν τῷ αὐτῷ ἰσοδυναμῶς ἐξείποις, ὁ τῶν Κύκλων λόγος διπλασίον ἐστὶ τῶν Διαμέτρων.

Τῶν ὁμοίων Πολυγώνων τῶν εἰς τὰς Κύκλους ἀεὶ καὶ ἀεὶ ἐγγεγραφομένων, ὁ λόγος διπλασίον ἐστὶ (1) τῶν Διαμέτρων, τὰ δ' ἄνω ἐγγεγραφομένα τοῖς Κύκλοις Πολύγωνα, εἰς αὐτὰς τέως (2) καὶ ἀπολήγασιν· ἄρα (διὰ τὸ ἐπόμενον καθόλου Πόρισμα) καὶ ὁ τῶν Κύκλων λόγος τῶν Διαμέτρων διπλασίον ἐστὶ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα καθόλου.

„Εἰ τὰ ἐν δυόμισι Σχήμασιν (Α, Β) ἐγγεγραφομένα εἰς αὐτὰ τέως καὶ ἀπολήγασιν, ὅν ἂν λόγον ἔχοιε πρὸς ἄλληλα τὰ ἐγγεγραφομένα, τὸν αὐτὸν τῶν ἐξεί καὶ τὰ ἐν αἷς Σχήματα.

Ἐξω λόγος Χ πρὸς Ψ, ὅν τὰ ἐγγεγραφομένα ἀεὶ ἔχει πρὸς ἄλληλα. Εἰ Ρ μὴ τοῖνον ὁ τῶν σχημάτων Α, Β λόγος ὁ αὐτός ἐστὶ τῷ Χ πρὸς Ψ, ὅν ἀεὶ ἔχει τὰ τοῖς σχήμασιν ἐγγεγραφομένα, ἔξω δὲ Α'. ὁ λόγος τῶ Α πρὸς τὸ Β, μείζων τῶ λόγῳ Χ πρὸς Ψ· καὶ ἄλλη τις ἄρα Πηλικότης ἢ Ρ ἐλάσσων ἢσα τῶ σχήματος Α, ἔσαι πρὸς τὸ σχῆμα Β ὡς Χ πρὸς Ψ· καὶ ἐπειδὴ τὰ ἐγγεγραφομένα (ἐξ ὑποθ.) εἰς τὰ Α καὶ Β ἀπολήγασιν τελευτῶντα, ἔσονται τινα τοῖς Α καὶ Β σχήμασιν ἐγγεγραφομένα, ἅττα ἂν τῶν ἐλλείποι (3) ἐλάσσονι πηλικότητι, ἢ τὸ Ρ ἐλλείπον ἐστὶ τῶ Σχήματος Α. Ἐξωσαν οὖν ἐκεῖνα Γ καὶ Ζ· τοιγαρὲν τὸ Γ μείζων ἔσαι τῶ Ρ· καὶ δὲ τὸ Γ ἔσαι πρὸς τὸ Β, ἐν λόγῳ μείζονι (4) ἢ τὸ Ρ πρὸς τὸ Β, τατέσι (καθ' ἑκάστην ἐτίθετο) ἢ τὸ Χ πρὸς τὸ Ψ, ἦτοι (διὰ τὴν ὑπόθ.) τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ· Ἐπειδὴ τοῖνον τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἐν μείζονι λόγῳ ἐστὶν ἢ πρὸς τὸ Ζ, ἔσαι τὸ Β σχῆμα ἐλαττον τῶ αὐτῷ (5) ἐγγεγραφομένῳ Ζ, τὸ ὅλον τῶ ἰδία μέρει. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὁ λόγος Β πρὸς Α, μείζων ἢ ἂν εἴη τῶ Ψ πρὸς Χ, (τατέσιν ὅτι (6) ἀδύνατον εἶναι τὸν λόγον Α πρὸς Β ἐλάσσονα τῶ λόγῳ Χ πρὸς Ψ)· ὁ ἄρα λόγος Α πρὸς Β, ἴσος ἐστὶ τῷ λόγῳ Χ πρὸς Ψ. Ο. Ε. Δ.

Παραπλησίᾳ δὲ τῇ μεθόδῳ ἀποδειχθήσεται, καὶ Σχήματα δύο τὸν αὐτὸν πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν, ὅν ἀεὶ ἔχει τὰ περιγεγραφομένα, καὶ εἰς ἐκεῖνα τέως ἀπολήγοντα· οὕτως

(1) Α. τῷ ἰβ'. (2) Διὰ τὸ Λημ. (3) Ο'ρ. ε'. τῷ ἰβ'. (4) Η. τῷ ε'. (5) Ι. τῷ ε'. (6) Κς τῷ ε'.

ΓΖ Εἴσω ὁ λόγος Χ πρὸς Ψ, ὃν τὰ περιγραφόμενα αἰεὶ ἔχει πρὸς ἄλλη-
 ΑΒΧΨ λα. Εἰ μὴ οὖν ὁ λόγος τῶν σχημάτων Α πρὸς Β, ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ Χ πρὸς
 Ρ Ψ, ὃν αἰεὶ ἔχειν νοεῖται τὰ εἰς τὰ σχήματα περιγραφόμενα, ἔσω ὁ λόγος
 Α πρὸς Β πρῶτον μείζων τῷ λόγῳ Χ πρὸς Ψ. Καὶ ἔσαι τοίνυν τὸ Α πρὸς
 ἄλλο τι Μέγεθος τὸ Ρ, ὃ μείζον εἴη ἐκείνου, ὡς Χ πρὸς Ψ· καὶ ἐπειδὴ τὰ
 περιγραφόμενα καθ' ὑπόθ. εἰς τὰ σχήματα Α καὶ Β ἀπολήγοντα τελευτᾷ,
 ἔσονται τινα τοῖς σχήμασιν Α καὶ Β περιγραφόμενα, ἅττα αὐτὰ ὑπερέχει
 πληκρότητι (1) ἐλάσσονι, ἥς τὸ Ρ ὑπερέχει τὸ σχῆμα Β. Εἴσω γὰρ ἐκεῖ-
 να τὰ Γ καὶ Ζ, καὶ τὸ ἄρα Ζ ἔλαττον ἔσαι τῷ Ρ· ὥς (2) ὁ λόγος Α πρὸς
 Ζ, μείζων ἔσαι τῷ λόγῳ Α πρὸς Ρ, τατέσι τῷ λόγῳ Χ πρὸς Ψ, ἦτοι Γ
 πρὸς Ζ. Ἐπειδὴ τοιγαρὴν ὁ λόγος Α πρὸς Ζ, μείζων ἐστὶ τῷ λόγῳ Γ πρὸς Ζ,
 τὸ σχῆμα Α μείζον (3) ἔσαι τῷ εἰς αὐτὸ περιγραφόμενῳ Γ, τὸ μέρος τῷ
 ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ λόγος τῷ Α πρὸς Β μείζων ἂν εἴη τῷ λό-
 γῳ Χ πρὸς Ψ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸν λόγον Β πρὸς Α,
 μὴ εἶναι τῷ Ψ πρὸς Χ μείζονα, καὶ ἐπομένως (4) τὸν λόγον Α πρὸς Β, μὴ
 ἐλάσσονα εἶναι τῷ λόγῳ Χ πρὸς Ψ. Εἴπερ τοίνυν ὁ λόγος τῷ Α πρὸς Β,
 ὅς μείζων ἐστίν, ὅδ' ἐλάσσων τῷ λόγῳ Χ πρὸς Ψ, ἔσαι αὐτῷ ἴσος. Ο.Ε.Δ.

Πορίσματα τῆς Β'.

Προτάσεως.

- Α. Ὡς οὖν Κύκλος πρὸς Κύκλον, ἔτω Πολύγωνον τὸ ἐν ἐκείνῳ πρὸς Πο-
 λύγωνον τὸ ἐν τούτῳ, ἐκάτερα γὰρ ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν Διαμέτρων εἰσὶ
 τῶν Κύκλων.
- Β. Ἐντι οἱ Κύκλοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν οἰκείων (5)
 Ἡμιδιαμέτρων, τατέσιν (6) ὡς τὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἀκτίνων.
- Γ. Καὶ τῶν Κύκλων δὲ, ὧν αἱ Διαμέτροι, ἢ αἱ Ἡμιδιάμετροι δῆλαι, ἐν-
 τεύθῃεν ὁ λόγος ἐπιγνωθήσεται, τῇ εὐρέσει δηλονότι (7) τῆς ἐπὶ τῶν δο-
 δεισαῶν Διαμέτρων τρίτης ἀνάλογον, πρὸς ἣν ἢ τῷ Α'. Κύκλῳ Διάμετρος τὸν
 αὐτὸν (8) ἔξει λόγον, ὃν ὁ Α'. αὐτὸς Κύκλος πρὸς τὸν Β'. Οἶον ἔσω δὴ ἢ
 τῷ Α'. Κύκλῳ Διάμετρος ποδ. 4, ἢ δὲ τῷ Β'. ποδ. 6, καὶ ἐπεὶ 4, 6, 9 συνε-
 χῶς ἀνάλογον (9) εἰσὶν, ἔσαι ὁ Α'. Κύκλος πρὸς τὸν Β', ὡς 4 πρὸς 9.

(1) Ὁρ. 5. τῷ β'. (2) Η. τῷ ε'. (3) Ι. τῷ ε'. (4) Κς. τῷ ε'. (5) ΙΕ. καὶ ΛΔ. τῷ
 ε'. (6) Σχόλιον μετὰ τὴν Κ. τῷ ε'. (7) ΙΔ. τῷ ε'. (8) Διὰ ταύτ. καὶ τὸν Ι. Ὁρ. τῷ ε'.
 (9) Γ. Πόρ. τῆς ΙΖ. τῷ ε'.

Εὐτεῦθεν δέ τοι καὶ τὸν τυχόντα Κύκλον, κατὰ λόγον τὸν δοθέντα αὐ- Δ.
 ξειν, ἢ μείων ἐξέσαι, ὡς ἀνωτέρω (1) σεσημειώται. Οἷον προκείτω δὴ Κύ-
 κλον καταγράψειν, ὅς ἂν εἴη θατέρω δοθέντος πενταπλάσιος· ἔστω δέ τοι ἡ
 τῷ δοθέντος Ἡμιδιάμετρος αβ. Ταύτης οὖν μεταξὺ καὶ τῆς Εὐθείας βγ, ἥτις
 ἂν εἴη πενταπλάσιον τῆς αβ, εὐρεθήτω δὴ μέση ἀνάλογος ἡ βχ· Ὁ τοίνυν
 Κύκλος, ὅς ἂν Διασήματι τῷ κατὰ τὴν βχ καταγραφείη, ἔσται τῷ δοθέντος
 Κύκλου πενταπλάσιος.

Εἰ ἂν τέτταρες εὐθεῖαι ᾧσιν ἀνάλογον, τὰ εὐθύγραμμα τῶν Σχημάτων Ε.
 τὰ ὁμοία τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀπὸ τῶν δύο προτέρων, τοῖς ἐπὶ τῶν
 δύο ὑσέρων, ὡς ἐπὶ διαμέτρων ἢ ἡμιδιαμέτρων Κύκλοις ἀνάλογον εἰσὶ. Τῶν
 γὰρ δοθεισῶν ἀνάλογον ἔστων, καὶ δὴ καὶ τῶν εὐθυγράμμων Σχημάτων, καὶ
 τῶν Κύκλων (2) ἐν λόγῳ ὄντων διπλασίονι τῷ λόγῳ τῶν αὐτῶν Εὐθειῶν,
 ἔσονται δὴ περὶ καὶ τὰ Εὐθύγραμμα (3) τοῖς Κύκλοις ἀνάλογον.

Εἴ τι δὲ ἀνάπαλιν, εἰ ἂν Σχήματα δύο εὐθύγραμμα ὅμοια δυτὶ Κύ- Ε΄.
 κλοις ἀνάλογον ἢ, ἔσονται αἱ τῶν Εὐθυγράμμων ὁμόλογοι πλευραὶ ταῖς
 τῶν Κύκλων διαμέτροις ἀνάλογον· Ἐπειδὴ γὰρ οἱ τῶν Σχημάτων, καὶ τῶν
 Κύκλων λόγοι ἴσοι ἀλλήλοις τυγχάνουσι, διπλασίονες (4) ὄντες τῶν λό-
 γων, ὅς ἔχουσιν αἵτε ὁμόλογοι πλευραὶ, καὶ αἱ διάμετροι πρὸς ἀλλήλας, ἔ-
 σονται δὴ (5) καὶ οἱ λόγοι ἔτσι ἀλλήλοις ἴσοι.

Εὐνθεντοὶ εἰ ἂν τῷ δοθέντι Κύκλῳ Α ἴσον Τετράγωνον δοθῇ τὸ Π, εὐ- Ζ΄.
 ρεθήσεται Τετράγωνον ἕτερον τὸ Χ, ὅπερ ἂν ἐτέρῳ ὁτῶσιν Κύκλῳ Γ ἴσον
 εἴη. Ἐπειδὴ γὰρ ἐξ ὑποθ. Α πρὸς Π, ὡς Γ πρὸς Χ, ἔσται καὶ ἐναλλάξ Α:
 Γ :: Π : Χ· καὶ ἐπομένως (6) ἡ Ἡμιδιάμετρος τῷ Κύκλῳ Α πρὸς τὴν Ἡμι-
 διάμετρον τῷ Γ, ὡς ἡ Πλευρὰ τῷ Τετραγώνῳ Π πρὸς τὴν τῷ Χ. Ἐπεὶ δὲ αἱ
 τῶν Κύκλων Ἡμιδιάμετροι, καὶ ἡ τῷ Τετραγώνῳ Π Πλευρὰ δέδονται, εὐρεθή-
 σεται δὴ (7) ἡ Πλευρὰ τῷ Τετραγώνῳ Χ, καὶ ἐπομένως (8) καὶ αὐτὸ τὸ Χ Τε-
 τράγωνον. Τὸ δ' ἐν τῷ δε τῷ Πορίσματι περὶ τῶν Τετραγώνων ῥηθέν, τὸ αὐ-
 τὸ καὶ περὶ ὁποίων ἄλλων σχημάτων ἀλλήλοις ὁμοίων (9) εἰρημένον ἔστω.

Ὁ ἐπὶ τῆς Ὑποτείνουσας αβ τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ αβγ Κύκλος, ἴσος Ἡ'. κ. 473.
 ἐστὶ τοῖς δυτὶ Κύκλοις, τοῖς ἐπὶ τῶν αγ, βγ Πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν τὴν
 ὀρθὴν Γωνίαν· Εἰ ἂν γὰρ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας γ, ἐπὶ τὴν Ὑποτείνουσαν κά-

(1) Ὅρα Δ. Πόρ. τῆς Κ. τῇ ε΄. (2) Κ. τῇ ε΄. καὶ Β. τῇ ιβ΄. (3) ΑΔ. τῇ ε΄. (4) Κ. τῇ ε΄. καὶ Β. τῇ ιβ΄. (5) ΑΕ. τῇ ε΄. (6) Διὰ τὸ Ε. Πόρ. (7) ΙΒ. τῇ ε΄. (8) Μς. τῇ α΄. (9) ΙΒ. καὶ Ι. τῇ ε΄.

Ζετος κατενεχθῆ ἢ γξ, ἔσονται αβ, αγ, αξ (1) ::, καὶ ὡσαύτως αβ, γβ, βξ (2) ::, ὥς ὁ ἐπὶ τῆς αβ Κύκλος πρὸς τὰς ἐπὶ αγ, γβ, ὡς ὁ (3) ἐπὶ αβ πρὸς τὰς αξ, βξ· καὶ ἐπομένως ὁ Κύκλος ὁ ἐπὶ αβ (4) πρὸς τὰς λοιπὰς Κύκλους ἅμα ληφθέντας, ἐστὶν ὡς αβ πρὸς αξ + ξβ· ἐπεὶ δὲ αβ = αξ + ξβ, ἔσαι καὶ ὁ ἐπὶ τῆς αβ Κύκλος δυτὶ τοῖς λοιποῖς ἅμα ληφθεῖσιν ἴσος.

Θ'. Εὐνθεντοὶ δοθεισῶν τῶν Διαμέτρων κύκλων ὠντινωνῶν, ῥάδιον ἐστὶ τό, τε ἄθροισμα, καὶ τὴν διαφορὰν τῶν Κύκλων ἀποδεῖναι, τετέσι Κύκλον εὐρεῖν, ὃν ἂν ὁποσοισῶν πλήθειτε καὶ μεγέθει δοθεῖσι Κύκλοις ἴσος ἦ, ἢ γῶν Κύκλον καταγράψαι, ὃ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὠντινωνῶν ἀνίσων Κύκλων διαφορᾷ ἴσον εἴη· τῇ αὐτῇ ἐκείνῃ, δηλονότι μεθόδῳ, δι' ἧς τῶν Τετραγώνων τό, τε ἄθροισμα, καὶ ἡ διαφορὰ παρίσταται, ἐν τῷ Σχολίῳ τῆς ΜΖ' Πρωτ. τῆ Α'. Βιβλίας· πλὴν ὅσον ἐν τῇ ἀποδείξει ἀντὶ τῆς ΜΖ'. τῆ Α', ληπτέον τὸ Η'. Πόρ. τῆ Β'. τῆ ΙΒ'.

κ. 474. Γ'. Κἀντεῦθεν καὶ τὸν τῶν συζύγων Μηνίσκων τετραγωνισμόν, ὃν πρῶτον Ἰπποκράτης ὁ Χῖος διδάξας φέρεται, δυνατόν λαβεῖν· ἔσω γὰρ γαβ Τρίγ. ὀρθογών., καὶ βαγ Ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς Διαμέτρου βγ, καὶ βνα Ἡμικύκλ. ἐπὶ τῆς αβ, καὶ αμγ ἐπὶ τῆς αγ, καὶ ἔσαι τοῖνυν τὸ Ἡμικύκλ. βαγ, τοῖς Ἡμικύκλ. βνα καὶ αμγ (5) ἅμα ληφθεῖσιν ἴσον. Εἰάν οὖν τὸ ἀμφοτέρωτε κοινὸν χωρίον ἀφαιρεθῇ, τετέσι τὰ Τμήματα βα, αγ, ὑπολειφθήσονται οἱ δύο Μηνίσκοι βνα, αμγ, οἱ ὑπὸ τῶν κυκλικῶν γραμμῶν περατέμενοι, τῷ εὐθυγράμμῳ Τριγώνῳ βαγ ἴσοι. Εἰάν δὲ ἡ βα Εὐθεῖα ἦσιν ἢ τῇ αγ, τετέσιν εἶν ὥσιν οἱ Μηνίσκοι τεταρτημοριοὶ, ἀχθείσης καδέτα τῆς αξ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν βγ, ἔσαι τὸ μὲν βαξ Τριγώνον ἴσον τῷ Μηνίσκῳ βνα, τὸ δὲ γξα ἴσον τῷ Μηνίσκῳ γμα. Ο. Ε. Ε.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Α'.

κ. 475. Τὰ τῶν Κύκλων ὅμοια Τμήματα αβξ, ιλρ, εἰσὶν ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν Διαμέτρων, καὶ δὴ καὶ ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν Εὐθειῶν αξ, ιρ, αἱ τὰ τῶν Τμημάτων ὑποτείνουσαι τόξα. Τῶν γὰρ τόξων αβξ, ιλρ, δίχα τμηθέντων κατὰ τὰ β καὶ λ, ἐπιζευχθεῖσιν τε τῶν αβ, βξ, καὶ ιλ, λρ, διὰ τὰ διχοτομηθέντα τόξα, αἱ ὑποτείνουσαι (6) ἔσονται ἴσαι, τετέσιν αβ = ξβ, καὶ ιλ = ρλ, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ αβξ (7) = ιλρ· ὥς τε τὰ Τρίγωνα (8) αβξ, ιλρ ὁ-

(1) Α. Πόρ. τῆς Η. τῆς ζ'. (2) Αὐτ. (3) Διὰ ταύτ. τὴν Πρωτ. καὶ Ορ. Γ. τῆς ε'. (4) ΚΑ. τῆς ε'. (5) Η. Πόρ. ταύτ. (6) ΚΖ. τῆς γ'. (7) Β. Πόρ. τῆς ΛΓ. τῆς ζ'. (8) ζ. τῆς ε'.

μοια εἰσὶν· ἐπομένως δὲ (1) ἐν λόγῳ διπλασίονι εἰσὶ τῶν Πλευρῶν $\alpha\beta$ ἢ $\iota\lambda$, ἢ γὰρ (2) τῶν διαμέτρων $\alpha\zeta$, $\iota\gamma$, τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις, ἢ ἢ τῶν ὑποτείνουσων $\alpha\epsilon$, $\iota\rho$. Τῷ δὲ συνεχεῖ τῶν τόξων $\alpha\beta$, $\beta\epsilon$, ἢ $\iota\lambda$, $\lambda\rho$ διχασμῷ, πολυγωνα Σχήματα ὅμοια αὖτε ἐγγραφήσεται τοῖς τμήματι, ἢ ἐπὶ βάσεων τῶν αὐτῶν $\alpha\epsilon$, $\iota\rho$, ἃ τέως εἰς αὐτὰ τὰ τόξα ἀπολήγει· Τοιγαρὲν καὶ τὰ τόξα αὐτὰ (3) $\alpha\beta\epsilon$, $\iota\lambda\rho$ εἰσὶν ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν διαμέτρων $\alpha\zeta$, $\iota\gamma$, ἢ τῶν ὑποτείνουσων $\alpha\epsilon$, $\iota\rho$. Ο. Ε. Δ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Β΄.

Τῷ τετραγωνισμῷ τῶν ἐποικωνῶν μὲν συζύγων Μηνίσκων ἄμα, τῶν δὲ τεταρτημορικῶν ἢ χωρὶς, ἐν τῷ Γ. Πορίσματι ὑποτεθέντος, ἐξέστω δὴ ἢ ἄλλ' ἅττα περὶ τῷ τεταρτημορικῷ Μηνίσκῳ, περίτε τῷ τετραγωνισμῷ τῆς ἀπομοίρας τῷ αὐτῷ, ἢ περὶ τῆς μεθόδου τῆς κατατομῆς αὐτῷ, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον ὑποσυνάψαι.

Πληρώσω ὁ τῷ τεταρτημορικῷ Μηνίσκῳ ἐλάσσων Κύκλος, ἢ τῆτε ἢ Περιφέρεια διελεύσεται διὰ τῷ Κέντρῳ ξ τῷ μείζονος Κύκλου. Ἐὰν οὖν κατὰ τὸ ἐξώτερον τῷ Μηνίσκῳ τόξον βνα, ληφθῇ τυχρὸν σημείου τὸ ε, ἢ ἐπιζευχθῇ ἢ ἢ ε, αὕτη τεμεῖ τὰ τῷ Μηνίσκῳ ἑκάτερα τόξα ἀνάλογον, κατὰ τὰ σημεῖα ε ἢ δ, ἢ διὰ τῆτο τὸν Μηνίσκον τεμεῖ κατὰ διττὴν ἀπόμοιραν (4) τὴν μὲν αεδ, τὴν δὲ βεδ. Ἐπειδὴ γὰρ ἢ ὑπὸ βξε Γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ μὲν τῷ μείζονος κύκλου εἰσὶ, πρὸς δὲ τὴν περιφέρειαν τῷ ἐλάσσονος, τὸ τόξον βε (5) εἶναι δις τοσούτων μοιρῶν, ὅσων τὸ βδ· καὶ ἐπομένως ἢ Ἡμιπεριφέρεια βεα εἰσὶ πρὸς τὸ τεταρτημορίον βδα, ὡς τὸ τόξον βε πρὸς τὸ τόξον βδ, τατέσιν (6) ὡς τόξον εα πρὸς τόξον δα· καὶ ἐναλλάξ τόξον βε πρὸς τόξον εα, ὡς τόξον βδ πρὸς τόξον δα.

Ἐὰν τὰ τόξα εβ, εα ἴσα ἢ, τατέσιν εὰν τὸ σημεῖον ε συμπίσῃ τῷ ν, ἢ. α. 477. τῷ μεσαιτάτῳ σημείῳ τῷ ἡμικυκλίῳ βνα, αἱ εὐθεῖαι νβ, να ἐπιζευγνύμεναι, πληρώσῃσι τὸ Τετράγωνον ναεβ, τὸ εἰς τὸν ἐλάσσονα κύκλον ἐγγεγραμμένον, τῷ δὲ μείζονος Κύκλῳ ἐφάψονται κατὰ τὰ σημεῖα α ἢ β. Ἐπειδὴ γὰρ ἢ βνα Ἡμιπεριφέρεια τῷ ἐλάσσονος κύκλου, δίχα τέτμηται κατὰ τὸ ν, ἔσονται αἱ Εὐθεῖαι νβ, να, τεταρτημορικῶν τόξων ὑποτείνεσαι, ἥτοι (7) πλευ-

(1) ΙΘ. τῷ ε'. (2) Β. Πόρ. τῆς Α. τῷ ιβ'. (3) Διὰ τὸ κατὰ τὴν Πόρ. (4) Ο' α. Ζ. τῷ ιβ'. (5) Ε' π. τῷ Α. Πορίσμ. τῆς Ε. Πρὸς. τῷ δ'. (6) Ιε. ἢ Ζ. τῷ ε'. (7) ε. τῷ δ'.

ραὶ τῷ Τετραγώνῳ, ὃ ἐν τῷ ἐλάχιστονι κύκλῳ δύναται ἐγγραφεῖναι· διὰ δὲ τὰς ἰσας τῷ μείζονος κύκλου ἡμιδιαμέτρους βξ, αξ, ἔσονται καὶ αὐταὶ αἱ ἡμιδιαμέτροι ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ βξα, αἱ λοιπαὶ δύο τῷ Τετραγώνῳ πλευραὶ, τῷ ἐν τῷ ἐλάχιστονι Κύκλῳ δυναμένῳ ἐγγράφεσθαι. Ἐπεὶ δὲ ἅπαν Τετράγωνον (1) ἐστὶν ὀρθογώνιον, αἱ ὑπὸ νβξ, ναξ ὀρθαὶ ἔσονται, καὶ ἐπομένως αἱ εὐθεῖαι νβ, να, τῷ μείζονος Κύκλου (2) ἐφάπτονται.

Γ. Ἐὰν δὲ τὰ τόξα εβ, εα (ὅρα τὸ Σχ. τῷ Α'. Πορ.) ἄνισα ᾖ, καὶ αἱ ὑποτείνουσαι εβ, εα ἄνισοι ἔσονται· καὶ ἐὰν μὲν ἡ εα μείζων ᾖ τῆς εβ, διὰ τὴν ὑπὸ βεα τὴν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ὀρθὴν ᾖσαν, ἡ ὑπὸ εβα (3) ἡμισείας ὀρθῆς μείζων ἔσται, ἡ δὲ ὑπὸ εαβ ἡμισείας ὀρθῆς ἐλάσσων. Ἐνδεῖντοί ηἱ ὑπὸ εαξ (τετέστιν ἡ ὑπὸ εαβ ἡμισείας ὀρθῆς τῇ βαξ ἐπαυξηθεῖσα) ἔσαι ὀρθῆς ἐλάχιστων· καὶ τοίνυν ἡ εα τεμείπει τὸ τεταρτημορικὸν τόξον βδα τῷ μείζονος Κύκλου (4), οἷον κατὰ τὸ η'.

Δ. Ἐπιζευχθεῖσα οὖν ἡ Εὐθεῖα βη, αὕτη τῷ ὀρθογώνῳ Τριγώνῳ βεη βάσις ἢ αὐτὴ, καὶ τῷ βδῇ τόξῳ ὑποτείνουσα ἔσαι, ὡς δῆλον· αἱ δὲ ὑπὸ εηβ, εβη ἔσονται ἰσαι, τετέστιν ἑκατέρω ἡμισείας ὀρθῆς· διὰ γὰρ τὰς ὑπὸ αηβ, εηβ, τὰς (5) δυσὶν ὀρθαῖς ἰσας, καὶ τὴν ὑπὸ αηβ τὴν ἐν τῷ τεταρτημορικῷ τμήματι (6) ἡμιόλειον ᾖσαν ὀρθῆς, ἔσαι ἡ ὑπὸ εηβ ἡμισείας ὀρθῆς, καὶ διὰ τὴν ὑπὸ ηεβ ὀρθὴν τυγχάνουσαν, ἔσαι (7) καὶ ἡ ὑπὸ εβη ἡμισείας καὶ αὐτὴ ὀρθῆς.

Ε. Ἡ Βάσις βη τῷ ὀρθογώνῳ ἰσοσκελεῖ Τριγώνῳ εβη, ὑπὸ τῆς ἐξ εὐθείας δίχατε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται· ἡ γὰρ ὑπὸ βεξ τῇ ἐπὶ τῷ τεταρτημορικῷ τόξῳ βξ τῷ ἐλάχιστονος Κύκλου (8) ἡμισείας ἐστὶν ὀρθῆς· διὸ καὶ ἡ ὑπὸ βεη ὀρθὴ ὑπὸ τῆς εὐθείας βξ δίχα τέμνεται. Ἀλλὰ γὰρ ἡ ὑπὸ βεη ἐστὶν ἡ τῷ ἰσοσκελεῖ κατὰ κορυφὴν Γωνία, ταύτητοι ἡ ἐκείνην διχοτομήσα Εὐθεῖα (9), ἡ αὐτὴ καὶ τὴν Βάσιν βη κατὰ τὸ ζ δίχα τεμεῖ, καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς δὲ καὶ κάθετος ἔσαι.

ς. Τὰ τοίνυν Τρίγωνα βζε, ηζε, ἀλλήλαις τε καὶ τῷ ὅλῳ βεη, καὶ διὰ καὶ τῷ βξα Τριγώνῳ ὅμοια ἐστὶν· ἅπαντα γὰρ ἐστὶ Τρίγωνα ὀρθογώνια τε καὶ ἰσοσκελελῆ, οἷα Τετραγώνων ἡμίση.

ζ. Ἐπειδὴ ἡ βζ ἐπὶ τῆς δξ (ἥτις τῷ μείζονος κύκλου ἡμιδιάμετρος τυγχάνει) πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν, ἔσαι (10) αὕτη ὀρθὸν Ἡμίτονον τῷ τόξῳ βδ, καὶ ἐπομένως (11) ἡ διπλάσιος τῆς βζ, ἥτοι ἡ βη, ἔσαι ὑποτείνουσα τῷ διπλασίῳ τόξῳ.

(1) Ὁρ. ΑΒ. τῷ α'. (2) Ις. τῷ γ'. (3) ΙΗ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (4) Ις. τῷ γ'. (5) ΙΓ. τῷ α'. (6) Α. Πόρ. τῆς Η. καὶ τῆς Θ. τῷ δ'. (7) ς. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (8) Α. Πόρ. τῆς Η. καὶ τῆς Θ. τῷ δ'. (9) Αριθ. Γ. τῷ Σχολίῳ τῆς Κς. τῷ α'. (10) Ὁρ. Ι. τῷ γ'. (11) Πόρ. τῆς Α. τῷ γ'.

ἐκ τῆ βδ, τατέσι τῆ βδη. Ἀνωτέρω δὲ (ἐν ἀριθμ. Α΄.) ἐδείκνυτο, ὅτι τὸ βε τόξον τὸ ἐν τῷ ἐλάχιστοι Κύκλῳ, δις τοσούτων μοιρῶν ἐστίν, ὅσων τὸ βδ τὸ ἐν τῷ μείζονι. Τὸ ἄρα βδη τόξον (τὸ διπλάσι, δηλον. τῆ βδ), ὁμοίον ἐστὶ (1) τῷ τόξῳ βε, καὶ τὸ Τμήμα βη, ὁμοίον τῷ Τμήματι βε.

Ἡ δὲ τῆ Μηνίσκου ἀπόμοιρα βεδ, ἴση ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ βεζ. H.

Τὰ γὰρ ὅμοια Τμήματα βε, βη εἰσὶν (2) ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν Διαμέτρων βα, βγ· τατέσιν (3) ὡς 1 : πρὸς 2· ἐνθεντοὶ ἡ ἡμίσεια τῆ Τμήματος βδζ τῷ τμήματι βε ἴση ἔσται. Ἐὰν τοίνυν ἀπὸ τῆς βεδ ἀπομοίρας ἀφαιρεθῇ τὸ Τμήμα βε, καὶ τὸ τήτῳ ἴσον, προσεθῇ ἡ τῆ Τμήματος ἡμίσεια βδζ, συζησεται Τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ βεζ τῇ ἀπομοίρᾳ βεδ ἴσον, καὶ ἐπομένως (4) τετραγωνίζεται ἡ ἀπόμοιρα βεδ τῆ τεταρτημορικῆ Μηνίσκου.

„Τὸν τεταρτημορικὸν Μηνίσκον ἀδβν, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον (οἷον G.
„τὸν φπ πρὸς πρ) εἰς ἀπομοίρας διελεῖν τὰς αεδ, βεδ, ἐκατέρωστε τῶν
„μερίδων τὸν τετραγωνισμὸν ἀποδῆναι.

Ἡ Διάμετρος αβ τῆ ἐλάχιστος Ἡμικυκλίᾳ αεβ, διαιρεῖσθω (5) κατὰ τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ 1, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἡμικυκλίῳ, ἀπὸ τῆ σημεία 1 ἀνιστάσθω τῇ Διαμέτρῳ βα κάθετος ἡ ιε, ἀπὸ δὲ τῆ ε ἐπὶ τὸ ξ, ὁ Κέντρον ἐστὶ τῆ μείζονος Κύκλου, ἐπιζευχθεῖσα ἡ εξ, κατατεμεῖ τὸν Μηνίσκον ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ· τὰ γὰρ ὅμοια Τρίγωνα (6) βαξ, βεζ, εἰσὶν ἐν διπλασίονι (7) λόγῳ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αβ, βε, τατέσι (διὰ τὰς αβ, βε, βι $\div$ (8)) ὡς (9) αβ : βι· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ιε, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ (10) ἔσται τὸ βαξ Τρίγωνον πρὸς τὸ Τρίγωνον βιξ, διὰ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ πρὸς τὸ ξ. Ἐπειδὴ τοίνυν τὸ Τρίγωνον βαξ, πρὸς ἐκάτερον τῶν Τριγώνων βεζ, βιξ τὸν αὐτὸν (11) ἔχει λόγον, ἔσται τὸ Τρίγων. (12) βιξ = τῷ Τριγ. βεζ = (13) τῇ ἀπομοίρᾳ βεδ· ἄλλ' ὅλος ὁ Μηνίσκος τῷ Τριγώνῳ βαξ (14) ἴσος ἐστὶ, καὶ ὅτως ἡ ἀπόμοιρα εαδ τῷ Τριγώνῳ (15) αἰξ ἴσεται· τὸ δέ τοι Τρίγωνον αἰξ πρὸς τὸ Τρίγωνον βιξ (16), ὡς αἰ πρὸς βι, τατέσιν ὡς φπ πρὸς πρ. Ὁ ἄρα Μηνίσκος ὁ τεταρτημορικὸς ἐν τῷ δοθέντι διατέμενεται λόγῳ, καὶ ἄλλῳ τρόπῳ ὁ τῆς μερίδος βεδ τετραγωνισμὸς

(1) Ὁρ. Α. τῆ ε΄. (2) Σχόλ. τῆς Α. τῆ παρ. (3) Διὰ τὸ Σχόλ. τῆς Κ. τῆ ε΄· καὶ τὸ Α. Πόρ. τῆς ΜΖ. τῆ α΄. (4) Η. Ὁρ. τῆ β΄. (5) Θ. τῆ ε΄. (6) Αρ. ε. τῆς παρ. (7) ΙΘ. τῆ ε΄. (8) Β. Πόρ. Η. τῆ ε΄. (9) Ι. Ὁρ. τῆ ε΄. (10) Α. τῆ ε. (11) ΙΔ. τῆ ε΄. (12) Θ. τῆ ε΄. (13) Αρ. Δ. Η. τῆ παρ. (14) Πόρ. Ι. ταύτ. (15) Αξ. Γ. τῆ α΄. (16) Α. τῆ ε΄.

ἀποδίδεται. Ὅθεν δὴ τὴν αὐτὴν μερίδα καὶ τῷ Τριγώνῳ βίξ, καὶ δὴ καὶ τὴν μερίδα τὴν ἑτέραν αὖθις τῷ τριγώνῳ αἰξ ἴσιν τυγχάνειν, δηλονότι ἐγένετο, καὶ δίδεται ἄρα ἀμφοῖν τῶν μερίδων ὁ τετραγωνισμός.

κ. 478. Γ'. Ἀμφοῖν δὲ τῶν Κύκλων πληρωθέντων αβγ καὶ αξβν, ἀχθήτω πρὸς τὴν Διάμετρον τῷ ἐλάσσονος αβ, παράλληλος ἡ Διάμετρος τῷ μείζονος εζ, καὶ ταύτῃ πρὸς ὁρθὰς ἑτέρα αὖθις Διάμετρος τῷ αὐτῷ μείζονος Κύκλῳ ἡ γδ, ἥτις προεκβληθεῖσα, τόν τε Μηνίσκον ανβ δέχα τεμεῖ εἰς τὰς μερίδας ανδ καὶ βνδ, τὰς ἀλλήλαις ἴσας, καὶ τὸ Τρίγωνον αξβ εἰς δύο ἴσα Τρίγωνα τὰ αδξ, βδξ, τὰ τῷ ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις ὅμοια. Φημὶ δὴ ὅτι τῷ μηνοειδῶς χωρὶς ἀξιβεγζα τὰ κέρατα αηξ καὶ βίξε, τοῖς τριγώνοις αδξ, βδξ, καὶ (1) ἐπομένως ταῖς τῷ τεταρτημορικῷ Μηνίσκῳ μερίσιν ανδ, βνδ, ἴσα εἰσὶν ἑκάτερον ἑκατέρῳ. Ἐπεὶ δὲ γὰρ $αβΓ = (2) αξΓ + βξΓ = 2 αξΓ$, ἔσαι (3) τὸ Τμήμα αδβ τῷ Τμήματι αηξ διπλῶν, τὸ δ' ἡμισυ ἐκεῖνα αδδ ἴσον τῷ Τμήματι αηξ. τὰ δ' εἰάν ἀπὸ τῶν ὀκτημορίων τῷ μείζονος κύκλῳ ἀφαιρεθῇ, τετέστιν ἀπὸ τῷ αεδ καὶ αεζ, καταλειφθήσεται ἴσα τὰ αδξ καὶ αηξΖ. ὁμοίως δὲ δεῖξω ὅτι καὶ τὸ βδξ = βίξε· καὶ τετραγωνίζεται ἄρα τὰ τῷ ῥηθέντος μηνοειδῶς χωρὶς κέρατα αηξΖ καὶ βίξε.

ΙΑ'. Τῶν αὐτῶν τεθέντων, ἐν τῷ ἐλάσσονι Κύκλῳ πληρῶσω τὸ Τετράγωνον βναξ· καὶ Κέντρῳ τῷ ν, Διαστήματι δὲ τῷ νβ, ἢ τῷ να = (4) εβ ἢ ξα, γεγράφω Τόξον τεταρτημορικὸν τὸ βλα, καὶ ἔσαι βλαξ Μηνίσκος τεταρτημορικός, τῷ Μηνίσκῳ βναδ ὁμοίος τε καὶ ἴσος· ἐνθεντοὶ καὶ τῷ Τριγώνῳ βνα ἢ βξα (5) ἐξισωθήσεται. Ἀλλὰ τὰ κέρατα βίξε καὶ αηξΖ ἅμα ληφθέντα, τῷ αὐτῷ Τριγώνῳ (6) συνεξισῶνται· τὸ ἄρα μικτόγραμμον χωρὶς βλαζε, τῷ διττῷ Τριγώνῳ βξα, ταυτὸν εἶπεῖν τῷ Τετραγώνῳ βναξ, ἴσον εἶναι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ. καὶ Δ.

Διεξοδικαί τε εἰσὶ καὶ τοῖς Νεανίσκοις δυσχερεῖς, καὶ πρὸς ἑδὲν εὐχρηστῆσαι, ἢ πρὸς τὸ δι' αὐτῶν τὴν Ε'. ἀποδειχθῆναι, ἣν αὐτοὶ καὶ τέτων ἀνευ πολλῷ ῥᾶδιον ἀποδείξομεν.

(1) Ἀριστ. Θ. τῷ παρόντι. Σχολ. (2) ΜΖ. τῷ α'. (3) Διὰ τὸ Α. Σχολ. ταύτ. καὶ Σχολ. τῆς Κ. τῷ ε'. (4) Ὅρ. ΑΒ. τῷ α'. (5) Ι. Πόρ. ταύτ. (6) Ἀριστ. Γ'.

Πρὸς τὴν Ε'. Πρότασιν.

Λ η μ μ α Α'.

„Εάν δύο Πυραμίδες τριγωνικαί, ἐπιπέδοις τμηθῶσι (τοῖς $\xi\sigma\epsilon$, $\rho\chi\psi$) κ. 479.
 „πρὸς τὰς βάσεις ($\alpha\beta\gamma$, $\iota\upsilon\pi$) παραλλήλοις, ἀνάλογον (κατὰ ϵ καὶ ψ), ἔ-
 „σονται ($\xi\sigma\epsilon$, $\rho\chi\psi$) πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις ($\alpha\gamma\beta$, $\iota\pi\upsilon$).

Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα $\xi\sigma\epsilon$, $\alpha\beta\gamma$ παράλληλα εἰσὶ, τέμνονται δὲ ὑπὸ ἐπι-
 πέδων $\beta\zeta\gamma$, $\alpha\zeta\beta$, $\alpha\zeta\gamma$, ἔσονται αἱ κοιναὶ τομαὶ $\sigma\epsilon$, $\beta\gamma$, καὶ $\xi\sigma$, $\alpha\beta$, καὶ $\xi\epsilon$,
 $\alpha\gamma$ (1) παράλληλοι. Ἀρα αἱ ὑπὸ $\xi\sigma\epsilon$, $\alpha\beta\gamma$, καὶ $\sigma\epsilon$, $\beta\alpha\gamma$, καὶ $\xi\epsilon\sigma$, $\alpha\gamma\beta$,
 ἑκάστη ἑκάστη (2) ἴσαι εἰσὶ. διὸ αἱ τομαὶ $\xi\sigma\epsilon$, $\alpha\beta\gamma$, εἰσὶν (3) ὅμοιαι. τὸν
 αὐτὸν τρόπον ὁμοίως εἶναι δεῖξω καὶ τὰς τομὰς $\rho\chi\psi$, $\iota\upsilon\pi$. Ὡς ὁ λόγος τῆς
 τομῆς $\alpha\beta\gamma$ πρὸς τὴν $\xi\sigma\epsilon$, διπλασίον (4) ἐστὶ τῷ λόγῳ τῆς πλευρᾶς $\beta\gamma$ πρὸς
 τὴν πλευρὰν $\sigma\epsilon$, καὶ ὁ λόγος τῆς τομῆς $\iota\upsilon\pi$ πρὸς τὴν $\rho\chi\psi$, διπλασίον ἐστὶ
 τῷ λόγῳ τῶν Πλευρῶν $\iota\upsilon\pi$ πρὸς $\chi\psi$. Ἀλλ' οἱ λόγοι $\beta\gamma : \sigma\epsilon$, καὶ $\iota\upsilon\pi : \chi\psi$,
 οἱ αὐτοὶ εἰσὶν (ἐστὶ γὰρ $\beta\gamma : \sigma\epsilon :: \gamma\zeta : \epsilon\zeta$ (5), τατέστιν ἐξ ὑποθ. ὡς $\pi\lambda$
 πρὸς $\psi\lambda$, ἦτοι (6) ὡς $\iota\upsilon\pi$ πρὸς $\chi\psi$), τοιγαρὶν ὁ λόγος $\alpha\beta\gamma$ πρὸς $\xi\sigma\epsilon$ (7)
 ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ λόγῳ $\iota\upsilon\pi$ πρὸς $\rho\chi\psi$. Ο. Ε. Δ.

Λ η μ μ α Β'.

„Τὰ ἐν τῇ Πυραμίδι ($\psi\gamma\alpha\zeta$) τρίγωνον ἔχουσα τὴν βάσιν εἰς ἄπειρον ἐγ- κ. 480.
 „γραφόμενα Πρίσματα, εἰς αὐτὴν τὴν Πυραμίδα ἀποτελευντὰ.

Διαιρεθῆτω ἡ τῆς Πυραμίδος πλευρὰ εἰς ὅσων μέρη ἴσα ἀλλήλοις $\alpha\beta$,
 $\beta\eta$, καὶ $\eta\zeta$. διὰ δὲ β καὶ η , γενομένων τῶν τομῶν $\beta\epsilon\pi$ καὶ $\eta\delta\upsilon$ τῇ βάσει $\psi\alpha\gamma$ πα-
 ραλλήλων, ἐγγεγραμμένα νοείδω τῇ Πυραμίδι Πρίσματα τριγωνικά τὰ $\beta\epsilon\pi$
 $\mu\alpha\epsilon$ καὶ $\eta\delta\upsilon\kappa\beta\epsilon$, ὧν ἕξω τῆς Πυραμίδος προσεβληθέντων, νοείδω περὶ τὴν
 Πυραμίδα περιγεγραμμένα Πρίσματα $\gamma\iota\beta\alpha$, $\pi\chi\iota\beta$, καὶ $\nu\theta\zeta\eta$. Ὑπεροχαί δὲ τῶν
 περιγεγραμμένων ὑπὲρ τὰ ἐγγεγραμμένα, εἰσὶ τὰ $\epsilon\sigma\epsilon\alpha$ $\iota\mu$, $\chi\kappa$, $\delta\eta$, ἅπερ
 ἅμα ληφθέντα ἴσα ἐστὶ τῷ Πρίσματι $\gamma\iota\beta\alpha$ καὶ γὰρ τὸ μὲν $\eta\delta\upsilon = \delta\beta$ (8),
 καὶ ἐπομένως $\delta\eta + \chi\kappa = \pi\chi\iota\beta$, τατέστι (9) $\mu\epsilon\beta\alpha$. τὰ ἄρα τρία $\delta\eta + \chi\kappa +$
 $\iota\mu = \gamma\iota\beta\alpha$. Ἐάν οὖν ἡ $\alpha\zeta$ Πλευρὰ εἰς ἄπειρον διαιρεθῇ, καὶ ὁ τῶν Πρισμάτων
 ἀριθμὸς ἐπ' ἄπειρον πληθυνθῇ, ἡ $\alpha\beta$ γενήσεται (10) οἰκιστὴν δοθείσης ἐλάσ-

(1) ἴ. $\tau\tilde{\epsilon}$ $\iota\alpha'$. (2) ἴ. $\tau\tilde{\epsilon}$ $\iota\alpha'$. (3) Δ . $\tau\tilde{\epsilon}$ ϵ' . (4) IO . $\tau\tilde{\epsilon}$ ϵ' . (5) Δ . Πόρ. τῆς Δ .
 $\tau\tilde{\epsilon}$ ϵ' . (6) $\Delta\iota\tau$. (7) $\Delta\Delta$. $\tau\tilde{\epsilon}$ ϵ' . (8) KE . $\tau\tilde{\epsilon}$ $\iota\alpha'$. (9) $\Delta\iota\alpha$ τὴν αὐτ. (10) EK $\tau\tilde{\epsilon}$ B .
 $\Delta\eta\mu$. $\tau\tilde{\epsilon}$ $\Sigma\chi\omega\lambda$. μετὰ τὴν IA . $\tau\tilde{\epsilon}$ ϵ' .

σων· ἄρα καὶ τὸ Πρίσμα γίβη γενήσεται τέως παντός τῷ δοθέντος ἔλαττον (1). Τῶν ἄρα περιγεγραμμένων Πρισμάτων (πολλῶ δὲ μᾶλλον τῆς Πυραμίδος φγαζ, ἥτις μέρος ἔσται ἐκ τῶν περὶ αὐτὴν περιγραφομένων Πρισμάτων) ἡ ὑπεροχὴ ὑπὲρ τὰ ἐγγεγραμμένα Πρίσματα, γενήσεται παντός δοθέντος ἔλαττων· καὶ ἐπομένως τὰ ἐγγεγραμμένα Πρίσματα εἰς αὐτὴν τέως (2) τὴν Πυραμίδα ἀποτελεωτῶντα λήξουσιν. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

κ. 481.

„Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔσται Πυραμίδες, καὶ τριγῶνας ἔχουσαι Βάσεις, καὶ πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ Βάσεις (απρ, εσχ).“

Κεῖσθω δὴ τὰ ἴσα ὕψη τῶν Πυραμίδων εἶναι τὰ αφ, εψ, ὧν εἰς μέρη ἴσα μεγέθει τε καὶ πλήθει τμηθέντων, καὶ διὰ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων, γενομένων τομῶν παραλλήλων ταῖς Βάσεσι, νοεῖσθω ἑκατέρω τῶν Πυραμίδων Πρίσματα ἐγγεγραφεῖναι τριγωνικὰ ἰσοπληθῆ τε, καὶ ἰσοῦψα. Ἦδη μὲν οὖν ἐπεὶ τὰ Πρίσματα λα, ιε, ἰσοῦψα ὄντα ἐσὶν, ἔσται τὸ λα Πρίσμα πρὸς τὸ ιε, ὡς Βάσις (3) λξβ πρὸς Βάσιν ινκ, τετέστιν (4) ὡς Βάσις πρὸς Βάσιν σεχ. Τὸν αὐτὸν τρόπον δεῖξω ἑκάστα τῶν Πρισμάτων τῶν ἐν τῇ Πυραμίδι παρὰ ἐγγεγραμμένων, εἶναι πρὸς ἑκάστα τῶν ἐν τῇ σφεχ, ὡς ἡ Βάσις παρὰ πρὸς τὴν Βάσιν σεχ. Ἄρα (5) καὶ ἅμα πάντα πρὸς ἅμα πάντα, ὡς Βάσις πρὸς Βάσιν· καὶ ἐπειδὴ αὐτὰ (6) ἀπολήγει τέως εἰς αὐτὰς τὰς Πυραμίδας, ἔσονται καὶ αὐταὶ (7) ὡς αἱ Βάσεις. Ο. Ε. Δ.

Ἦ μὲν οὖν ἀποδοδεῖσα δεῖξις ὑποτίθεται τὰς αφ καὶ εψ Πλευρὰς ἴσας ἔσται, αὐτὰ τῶν Πυραμίδων τὰ ὕψη παριστῶν, καὶ ἐπομένως ταῖς Βάσεσι παρὰ σεχ εἶναι ὁρδὰς. Τὰ ἴσα δὲ ἡ δεῖξις αὕτη δυνήσεται, καὶ ὅπως ἂν ἔχειν πλαγιασμὸν πρὸς τὰς Βάσεις αἱ ἴσαι Πλευραὶ ὑποτεθεῖεν, νοημένων δηλονότι ἀφ' ἑκατέρας τῶν κορυφῶν φ καὶ ψ καθέτων ἐπὶ τὰς βάσεις, καὶ τέτων εἰς ἴσα πλήθει τε καὶ μεγέθει τεμνομένων, καὶ διὰ τῶν διαιρέσεων ἐπιπέδων ἀγομένων παραλλήλων ταῖς Βάσεσιν, ἃ δὲ καὶ τὰς Εὐθείας φα, ψε διατεμῶσιν (8) εἰς μέρη ταῖς ἐν ταῖς Καθέτοις ὁμοιά τε, καὶ ἰσαρίθμα· καὶ ἅττα καὶ Βάσεις Πρισμάτων γενήσονται ἰσαρίθμων τε καὶ ἰσοῦψων, τῶν ἐν ἑκατέρω τῇ Πυραμίδι ἐγγεγραμμένων· διὸ δὲ καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον τὰ τῆς δεξέως προελύσεται, ὡς εἶπερ αἱ Εὐθεῖαι φα, ψε, ταῖς Βάσεσι παρὰ σεχ καθετοὶ εἶεν.

(1) Δῆλον ἐκ τῆς ΚΕ. τῇ ια'. (2) Ο. ς. τῇ ιβ'. (3) Α. Πόρ. τῆς ΑΔ. τῇ ια'. (4) Λῆμ. Α'. (5) ΙΒ. τῇ ι'. (6) Διὰ τὸ Λῆμ. (7) Καθόλου Πόρισμα, μετὰ τὴν Ε. τῇ ιβ'. (8) ΙΖ. τῇ ια'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ς.

„Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔσται Πυραμίδες, καὶ πολυγώνους ἔχουσαι Βά- ρ. 482.
σεις, πρὸς ἀλλήλαις εἰσὶν ὡς αἱ Βάσεις (αβ, γδε).

Ἀναλυθήτωσαν αἱ Βάσεις εἰς τὰ α, β καὶ γ, δ, ε, Τρίγωνα, αἱ δὲ Πυραμίδες εἰς τριγωνικάς Πυραμίδας· καὶ δὴ ἡ Πυραμὶς αχ εἰς πρὸς τὴν Πυραμ. ξψ, ὡς (1) α πρὸς ξ, καὶ ἡ Πυραμὶς βχ πρὸς τὴν Πυραμίδα ξψ, ὡς β (2) πρὸς ξ· Ἄρα αἱ Πυραμίδες ἅμα αχ καὶ βχ, τετέστιν ἡ ὅλη αβχ πρὸς τὴν Πυραμίδα ξψ, ὡς α καὶ β ἅμα (3) πρὸς ξ. Παραπλησίω τῷ λόγῳ ἡ Πυραμὶς αβχ εἰς πρὸς τὴν Πυραμίδα ζψ, ὡς α, β (4) πρὸς ζ, καὶ πάλιν ἡ αβχ εἰς πρὸς τὴν γψ (5), ὡς α, β πρὸς γ· Ἄρα ἡ αβχ (6) εἰς πρὸς τὰς τρεῖς ἅμα ξψ, ζψ, γψ, τετέστι πρὸς ἑλὴν τὴν Πυραμίδα ξζγψ, ὡς α, β πρὸς ξ, ζ, γ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐντεῦθεν ἔπεται τὰς Πυραμίδας, ὧν ἴσαι αἱ βάσεις, καὶ τὰ ὕψη, ἴσαι ἀλλήλαις εἶναι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Πᾶσα Πυραμὶς τριτημόριον εἰς Πρίσματος, ἔχοντος τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος ἴσα,

Η' κατ' Εὐκλείδην εἰπεῖν „πᾶν Πρίσμα τρίγωνον ἔχον Βάσιν, διαι- ρεῖται εἰς τρεῖς Πυραμίδας ἴσαις ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἔχουσαι.

Ἐςω πρῶτον Πυραμὶς τριγωνικὴ ἡ βηαγ ἴση τήν τε βάσιν καὶ τὸ ὕψος ρ. 483.
τῷ Πρίσματι βαγδεξ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ βδ, αξ, αζ· τὰ τοίνυν Τρί- γωνα βδγ, βδε (7) ἴσα· Ἄρα ἡ πυραμὶς βδγα, τῇ πυραμίδι βδεα (8) ἴση εἰς· Διὰ τὴν αὐτὴν δὲ αἰτίαν καὶ ἡ Πυραμὶς ξεαζ ἴση εἰς τῇ Πυραμίδι ξβαζ, τετέστι τῇ Πυραμίδι βδεα, εἰσὶ γὰρ ἄμφω ἡ αὐτή· τοίνυν καὶ αἱ βδ γα καὶ ξεαζ ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα βδγα, ξεαζ, ξβαζ, ἦτοι βδεα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· καὶ ἐπομένως αἱ τρεῖς ἅμα τῆς μιᾶς, τετέστι τῆς βδγα εἰσὶ τριπλασίονες. Ἀλλὰ μὲν αἱ τρεῖς συγκροτᾷσι τὸ Πρίσμα βαγδεξ, τὸ ἄρα Πρίσμα τῆς Πυραμίδος βδγα, τετέστι (9) τῆς βηαγ εἰς τριπλάσιον. Ο. Ε. Δ.

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Διὰ τὴν ἀνωτ. (3) ΚΔ. τῷ ε'. (4) Διὰ τὴν ἀνωτ. καὶ τὴν ΚΔ. τῷ ε'. (5) Διὰ τὰς ῥηθ. (6) ΚΔ. τῷ ε'. (7) ΔΔ. τῷ α'. (8) Πόρ. ἀνωτ. (9) Πόρ. ἀνωτ.

κ. 484.

Α'ζ' ἔσω Πυραμίδες ὁποιαδήποτε, ἔχαστα βάσιν τε καὶ ὕψος τὰ αὐτὰ συν τῷ Πρίσματι αεζθ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ βγ, βξ, βε, καὶ αἱ νι, νη, νθ. Ἀναλύσας οὖν τὸ μὲν Πρίσμα εἰς τριγωνικά Πρίσματα, τὴν δὲ Πυραμίδα εἰς τριγωνικὰς Πυραμίδας, ὅφει τὸ προτεθέν ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως. Ἐκαστον γὰρ τῶν μερῶν τῆ πολυγωνίας Πρίσματος, τριπλάσιον ἔσαι ἐκάστης μέρους τῆς πολυγωνίας Πυραμίδος (τατέσιν ἕκαστον τριγωνικὸν Πρίσμα ἐκάστης τριγωνικῆς Πυραμίδος ἔσαι τριπλάσιον), καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολυγωνίον Πρίσμα, ὅλης τῆς πολυγωνίας Πυραμίδος τριπλάσιον ἐστί. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

κ. 485.

„Αἱ ὅμοιαι Πυραμίδες (ξαγβ, κθιν) ἐν τριπλατίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (αβ, θν).“

Ἐχέτωσαν Α' τὴν βάσιν τρίγωνον, καὶ δὴ τῶν Παραλληλογράμμων αμ καὶ θπ πληρεμένων, ἐπὶ τέτων ἀνιστάθω Παραλληλεπίπεδα τὰ αη, θλ, ἐν ὑψώματι τῷ τῶν Πυραμίδων, ἅττα, τῶν πυραμίδων ὁμοίων ὑποτιθεμένων, καὶ αὐτὰ ὅμοια (1) ἐσὶν· ἀχθῆτωσαν δὲ καὶ εζ, ρφ, καὶ διὰ τῶν εζ, γβ, καὶ τῶν ρφ, ιν, τμηθῆσεται (2) τὰ Παραλληλεπίπεδα εἰς Πρίσματα δύο ἀλλήλοις ἴσα, ὧν ἐκάτερον χωρὶς τριπλάσιον (3) ἐσὶν ἐκατέρας τῶν Πυραμίδων ξαγβ, κθιν· ὥστε ἐκάτερον ἅμα, τατέσιν ὅλα τὰ Παραλληλεπίπεδα αη, θλ, ἑξαπλάσια εἶναι τῶν Πυραμίδων. Αἱ τοίνυν Πυραμίδες τοῖς παραλληλεπιπέδοις ἀνάλογον εἰσὶν· ἀλλὰ τέτων ὁ λόγος (4) τριπλασίων ἐστὶ τῷ λόγῳ τῶν πλευρῶν αβ, θν, ἄρα ἡκείνων. Ο. Ε. Δ.

κ. 486.

Ὡς εἶπερ αἱ ὅμοιαι Πυραμίδες τῶν πολυγωνίων τύχωσιν, ἀναλυέτωσαν εἰς τριγώνους αρ, βρ, γρ, καὶ ξκ, εκ, ζκ, καὶ ῥᾶσα δειχθήσεται τὴν μὲν (5) αρ ὁμοίαν εἶναι τῇ ξκ, τὴν δὲ βρ τῇ εκ, τὴν δὲ γρ τῇ ζκ. Διὰ γὰρ τὰ ὅμοια Τρίγωνα (6) α καὶ ξ, καὶ μιρ, ψφκ (7), ἔσαι (8) δμ : μι :: ψυ : ψφ, καὶ μι : μρ :: ψφ : ψκ· ἄρα (9) δμ : μρ :: ψυ : ψκ, καὶ ἀνὰ πάλιν (10) μρ : μδ :: ψκ : ψυ· τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται καὶ μδ : ρδ :: ψυ : υκ, ἄρα (11) μρ : ρδ :: ψκ : υκ, καὶ (12) ὅμοια ἄρα ἐσὶ τὰ Τρίγωνα μρδ, ψκυ· ἐνθεντοὶ καὶ αἱ πυραμίδες αρ, ξκ αἱ ὑπὸ τῶν ὁμοίων Τριγώνων τῷ πλήθει ἴσων περιεχόμεναι, ὅμοιαι (13) εἰσὶν. Ὡσαύτως διὰ τὰ ὁ-

(1) Θ. Ορ. ια'. (2) ΚΗ. τῆ ια'. (3) Διὰ τὴν ἀνωτ. (4) ΑΓ. τῆ ια'. (5) Ἐκ τῆς Κ. καὶ Ε. τῆ ε'. (6) Κ. τῆ ε'. (7) Ορ. Θ. τῆ ια'. (8) Ορ. Α. τῆ ε'. (9) ΚΒ. τῆ ε'. (10) Σχόλ. τῆς ΙΕ. τῆ ε'. (11) ΚΒ. τῆ ε'. (12) Ε. τῆ ε'. (13) Ορ. Θ. τῆ ια'.

μοια Τρίγωνα β ή ε, ή γ ή ζ, δειχθήσεται τὰ Τρίγωνα δχρ, υσκ, ὅμοια ἀλλήλοις εἶναι, κἀντεῦθεν ἡ τὴν Πυραμίδα βρ ὁμοίαν τῇ εκ, καὶ τέως ἡ τὴν γε ὁμοίαν τῇ ζκ. Ἀρ' οὖν διὰ τὸ Α'. μέρος ὁ λόγος τῶν Πυραμίδων αρ, εκ, τριπλασίων ἐστὶ τῷ λόγῳ τῆς ιμ πρὸς τὴν ψφ· καὶ ὁ λόγος τῶν Πυραμίδων βρ, εκ, τριπλασίων ἐστὶ τῷ λόγῳ τῆς μχ πρὸς τὴν ψσ, τετέστιν αὖτις τῷ λόγῳ ιμ πρὸς φψ· ἡ ὁ λόγος τῶν πυραμίδων γε, ζκ τριπλασίων ἐστὶ τῷ λόγῳ χπ πρὸς στ, τετέστιν αὖτις τῷ ιμ πρὸς φψ· καὶ ἐπεὶ τοῖνυν ὁ λόγος ἐκάστης πρὸς ἐκάστην, τριπλασίων ἐστὶ τῷ λόγῳ ιμ πρὸς φψ, ἡ ὁ λόγος ἄρα (1) ἀπασῶν πρὸς ἀπάσας (τετέστιν ὁ λόγος τῆς ὅλης Πυραμίδος αβγε πρὸς τὴν ὅλην Πυραμίδα ξεζκ) τριπλασίων ἔσται τῷ λόγῳ τῆς πλευρᾶς ιμ πρὸς τὴν πλευρὰν φψ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Καὶ εἰάν ἄρα ὧσι τέτταρες εὐδεῖαι συνεχῶς ἀνάλογον, ἔσται ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, ὡς ἡ ἐπὶ τῆς πρώτης Πυραμὶς πρὸς τὴν ἐπὶ τῆς δευτέρας ὁμοίαντε, ἡ ὁμοίως ἀναγεγραμμένην. Καὶ εἰάν ἄρα δεδομένοι ὧσι τῶν ὁμοίων πυραμίδων αβγε, ξεζκ, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ μχ, ψσ, γενομένων (ὅρα τὸ ἀνωτ. Σχῆμ.) συνεχῶς ἀνάλογον τῶν μχ, ψσ, η, θ, ἔσται Πυραμὶς ἡ αβγε πρὸς Πυραμίδα τὴν ξεζκ, ὡς ἡ μχ πρὸς τὴν θ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Τῶν ἴσων Πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐκείναι ἴσαι εἰσὶ.

Μέρος Α'. Ἐςωσαν πρῶτον αἱ ἴσαι Πυραμίδες τρίγωνοι βαγξ, θκνλ, καὶ πληρωθέντων τῶν Παραλληλογράμμων βε, θρ, ἐπὶ τέτων ἀνισάκῳ Παραλληλεπίπεδα τὰ βζ, θφ· ἔσονται δὲ ταῦτα (ὡς ἐπὶ τῆς Η'. ἡμῖν ἀποδεδεικται) τῶν ἐξ ὑποθ. ἴσων Πυραμίδων ἑξαπλασίονα, ἡ ἐπομένως ἀλλήλοις ἴσα. Εἰσὶ δὲ τῶν Παραλληλεπιπέδων τέτων ὕψη τὰ βα, θκ, ἅττα καὶ τῶν Πυραμίδων, βάσεις δὲ αἱ βε, θρ διπλασίονες (2) τῶν βάσεων τῶν Πυραμίδων βγξ, θνλ, διό δὴ ἡ πρὸς ταύτας ἀνάλογον· ἐπεὶ δὲ ἔν δια τὴν τῶν Παραλληλεπιπέδων ἰσότητα, ἔστιν ὡς βε πρὸς θρ, ἔτως (3) ἀντιστρόφως θκ πρὸς βκ, ἔσται δὴ πῃ ἡ βάσις βγξ πρὸς βάσιν θνλ, ὡς θκ ὕψος πρὸς βα ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Ὡς εἶπερ αἱ ἴσαι Πυραμίδες πολυγωνίαι τὰς Βάσεις ἔχουσι, τῶν αὐτῶν

α. 487.

(1) ΙΒ. τῷ ε. (2) ΑΔ. τῷ ε. (3) ΑΔ. τῷ ια.

μενόντων ὑψών (1), μεταμορφώσων εἰς τριγώνους, καὶ ἔσονται αὐταὶ (2) ἐκεῖναις ἴσαι· ἀλλ' αἱ ἔτι μεταμορφώσονται Πυραμίδες, διὰ τὰ ἤδη δειχθέντα, ἀντιπεπόνθασιν τὰς βάσεις καὶ τὰ ὑψη· ἄρα καὶ ὅσοι πολύγωνοι αἱ Πυραμίδες ἀντιπεπονθείας ἔχουσι τὰς βάσεις τοῖς ὑψέσιν. Ο. Ε. Δ.

Μέρος Β'. Ἐὰν αἱ Βάσεις τριγωνικαὶ ᾖσιν, ἐπεὶ ἤδη τίθεται βγξ : θνλ : : θκ : βα, ἔσαι καὶ βε : θρ : : θκ : βα· ὥστε τὰ Παραλλήλεπίπεδα βζ, θφ (3) ἴσα εἰσὶ, καὶ ἐπομένως καὶ τὰ τέτων ἐκτιμώρια ἀλλήλοις ἴσα ἐσὶ, ταῦτάς τε αἱ πυραμίδες βαγξ, θκλ. Ο. Ε. Δ.

Ἐὰν δὲ Πυραμίσι πολυγωνίαις τὰς βάσεις ἐχέσταις, ἀντιπεπονθεῖαι ᾖσιν αἱ βάσεις τοῖς ὑψέσιν, μεταμορφώσων ἐκεῖναι εἰς βάσεις τριγώνους (4) τὰς βγξ, θνλ, ἴσας ταῖς πολυγωνίαις, καὶ ἔσαι δὲ βγξ πρὸς θνλ, ὡς θκ πρὸς βα. Οὕτω δέ τοι αἱ τριγωνικαὶ Πυραμίδες, κατὰ τὰ δεδειγμένα, ἔσονται ἴσαι· τοιγαρὶν καὶ αἱ πολύγωνοι Πυραμίδες, αἱ ταῖς τριγωνικαῖς (5) ἴσαι εἰσὶ καὶ αὐταὶ ἀλλήλαις ἐκ τῆ ἀκολούθου ἔσονται ἴσαι.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Τὰ κατὰ τῶν Πυραμίδων ἀποδειχθέντα ἐν Προτ. ζ', καὶ Η', καὶ Θ', αὐτὰ ταῦτα προσήκοντα ἐσὶ καὶ οἰοισδήποτε Πρίσμασι, διὰ τὸ ταῦτα (6) τριπλασίονα εἶναι τῶν Πυραμίδων, τῶν βάσιν τε καὶ ὑψος τὰ αὐτὰ ἐχασῶν.

Α'. Τὰ ἰσοῦψῃ Πρίσματα ἀναλόγως ἔχει ταῖς βάσεσιν, τῆτο γὰρ δὴ περὶ τῶν Πυραμίδων ἐδείχθη Πρ. ζ'.

Β'. Τῶν ὁμοίων Πρισμάτων ὁ λόγος τριπλασίων ἐσὶ τῷ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τῆτο γὰρ δὴ καὶ περὶ τῶν Πυραμίδων ἐδείκνυτο ἐν Προτ. Η', καὶ δοθεισῶν τοίνυν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν ὁμοίων Πρισμάτων, εὐρεθήσεται τῶν Πρισμάτων αὐτῶν ὁ πρὸς ἀλλήλα λόγος, ὃν τρόπον ἀνωτ. καὶ περὶ τῶν Πυραμίδ. ἐλέγετο (7).

Γ'. Τῶν ἴσων Πρισμάτων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὑψέσιν, καὶ οἷς δὲ ἀντιπεπόνθασιν, ἐκεῖνα ἴσα· τὸ αὐτὸ γὰρ καὶ περὶ τῶν Πυραμ. δέδεικται Πρ. Θ'.

Θαυμάζειν δέ μοι ἐπεισιν, ὅτι ταῦτα ὁ Εὐκλείδης παρέδραμεν, ἃ τῶν περὶ τὰ εὐθύγραμμα Στερεὰ θεωρημένων ἐσὶ τὰ κυριώτατα.

(1) ΚΕ. τῷ ζ'. (2) Πόρ. τῆς ζ'. Πρότ. τῷ ιβ'. (3) ΑΔ. τῷ ια'. (4) ΚΕ. τῷ ζ'. (5) Πόρ. τῆς ζ'. τῷ ιβ'. (6) Ζ. τῷ ιβ'. (7) Πορ. τῆς Η'.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

Ἐκ τῶν ἄχρι τῆς δε ἀποδειχθέντων ἐπαχθίζεται ἡ καταμέτρησις οἶων-
δήποτε Πρισμαίων ἢ Πυραμίδων.

Τὸ γάρτοι σφαιρὸν τῆ Πρίσματος παράγεται, ὑπό γε τῆ ὕψους ἐπὶ τὴν
Βάσιν πολλαπλασιαζομένη· τὸ δὲ τῆς Πυραμίδος, ὑπὸ τῆ τριτημορίου τῆ ὕψους
ἐπὶ τὴν βάσιν πολλαπλασιαζομένη.

Ἐὰν τῆ Πρίσματος ὕψους τετὴ ποδ. εἶναι 5, ἡ δὲ Βάσις ἢ 25 ποδ.
τετραγ., πολλαπλασιασθέντων τῶν 25 διὰ τῶν 5, ἀνακύψασι πόδ. 125
κυβικοί, ἐξ ὧν τὸ τῆ Πρίσματος σφαιρὸν συγκεκρότηται.

Ἐῶ γὰρ δὴ Πρίσμα πολύγωνον τὸ αβ, οὗ τῇ βάσει αε, νοεῖσθω ἴσον κ. 488.
τὸ Τρίγωνον βγ, ἐφ' ᾧ Πρίσμα τὸ βε ἰσοῦψές τῷ αβ· ἔσονται οὖν (1)
τὰ βε, αβ Πρίσματα ἀλλήλοις ἴσα· Ἀλλὰ τὸ βε πρίσμα παράγεται (2) ὑ-
πὸ τῆ κατ' αὐτὸ ὕψους αε, διὰ τῆς βάσεως βγ πολλαπλασιαζομένη· ἄρα ἢ
τὸ αβ Πρίσμα, ὑπὸ τῆ κατ' αὐτὸ ὕψους (ὅπερ ἴσον τίθεται τῷ τῆ Πρίσματος
βε) παράγεται διὰ τῆς βάσεως αε πολλαπλασιαζομένη.

Κάντεῦθεν δὲ, ἢ ἐκ τῆς Ζ'. δῆλον ἢ θάτερον· τῆτο δὲ ἦν ὅτι τὸ σφαιρὸν
τῆς Πυραμίδος συνίσταται ὑπὸ τῆ τριτημορίου τῆ ὕψους πολλαπλασιαζομένη διὰ
τῆς βάσεως.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.

Ἡ τῆς κολήρης Πυραμίδος ἀβγ εσο καταμέτρησις ἔκτε τῆ ὕψους γε, ἢ κ. 489.
τῶν παραλλήλων βάσεων αβγ, ξε, ἢ τῶν ἐπ' αὐταῖς ὁμολόγων Πλευρῶν
βγ, σε.

Γινὰ ληφθῇ τὸ εζ ὕψους τῆ ἐλλείποντος μέρους εσξζ, διὰ τὴν ὁμοιότητα
τῶν Τριγώνων βγζ, σεζ, ἔσαι βγ : σε :: γζ : εζ, καὶ ἐν διαιρ. βγ — σε :
σε :: γζ — εζ : εζ· ἢ δοθεισῶν τοίνυν τῶν βγ, σε, ἢ γε, εὐρεθήσεται ἡ
εζ· καὶ αὕτη μὲν ἡ δεῖξις τὸ ὕψους ὑποτίθῃσι κάθετον ὅν τῇ Πλευρᾷ τῆς
πυραμίδος εἰς ταυτὰ συμπίπτειν· Ἀλλ' ὅπως ἂν ἢ πίπτειν ὑποτεθεῖν ἡ Κά-
θετος, τὸ ἐπίπεδον ξε (προεκβληθὲν εἰ δέοι), τότε ὕψους τῆς Πυραμίδος, ἢ
τὴν πλευρὰν αὐτῆς ζγ ὁμοίως τεμεῖ, ὡς αἰεὶ εἶναι βγ — σε : σε, ὡς τὸ
τῆς κολήρης ὕψους Πυραμίδος, πρὸς τὸ τῆ μέρους ὕψους τῆ ἐλλείποντος· Καὶ τῆ-
τα τοίνυν τῆ ὕψους οὕτως εὐρεθέντος τὸ τριτημόριον, τῇ βάσει ἐπιπολλα-

(1) Α. Πέρ. ταύτ. (2) Σχόλ. Α. τῆς Μ. τῆ ια'.

πλασιασθὲν τῇ ἐλάσσονι ἔσσε, δώσει τὸ σερρὸν τῷ μέρει ἔσσε² τῷ ἐλλείπον-
τος. Ἡ' δὲ τῷ ὕψει τῷ ἐλλείποντος μέρει τῆς κολήρας Πυραμίδος προσεθῇ, τὸ
ὑψος αὐτῆς τῆς κολήρας τό γε ὄν, παρέσαι δὴ τὸ τῆς ὀλοχερῆς Πυραμίδος ὕ-
ψωμα, οὗ τὸ τριτημόριον ἐπὶ τῇ μείζονι βάσει αβγ ἐπιπολλαπλασιασθὲν,
τῆς ὅλης πυραμίδος παρέξει τὸ σερρὸν, ἀφ' οὗ, τῷ ἐλλείποντος ἀφαιρεμένον, τὸ
τῆς Κολήρας μόνον ὑπολειφθήσεται.

Λήμμα πρὸς τὴν ἐφεξῆς Γ.

„Αἱ τε Πυραμίδες καὶ τὰ Πρίσματα, τὰ τοῖς Κῶνις καὶ τοῖς Κυλίνδροις εἰς
„ἀπειρον ἐγγραφόμενα, εἰς τὰς Κῶνας αὐτὰς καὶ τὰς Κυλίνδρους ἀποτελεωσίν.

Δείκνυται ὡς περ τὸ Λήμμα τὸ πρὸ τῆς Β'. Προτάσεως, διὰ τε τῆς ε'.
Προτ. δηλονότι, καὶ τῇ Α' Πορίσμ. τῇ μετὰ τὴν Θ'. εἴπερ ἀμέλει καθάπερ ἐν
ἐκείνοις τὰ τῷ Κύκλῳ ἐγγεγραμμένα ἐπίπεδα, ἥτοι ἐν ταῖς τῆς Πυρα-
μίδος καὶ τὰ Πρίσματα, ἅττα ἐπὶ τῶν τοιούτων ἐπιπέδων, ὡς ἐπὶ βάσεων ἐπι-
στάμενα ἦ, ἀπὸ τε τῶν Κῶν καὶ τῶν Κυλίνδρων ἀφαιρεθῇ.

Πρότασις Γ.

„Πᾶς Κῶνος Κυλίνδρος τρίτον μέρος ἐστὶ, τῷ τὴν αὐτὴν Βάσιν ἔχον-
„τος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον.

κ. 490.

Ἐπὶ τῆς Βάσεως γλ, ἐγγεγραμμένον νοείτω Πολύγωνον κανονικὸν
ὁποσωνῶν πλευρῶν, καὶ ἐπ' αὐτῷ ὡς ἐπὶ Βάσεως, τῷ μὲν Κῶνῳ Πυραμὶς,
τῷ δὲ Κυλίνδρῳ Πρίσμα· καὶ ἔσαι δὴ (1) ἡ Πυραμὶς τριτημόριον τῆς Πρίσ-
ματος. Ἐὰν δὲ αὖτις ἐγγραφῇ τῷ Κύκλῳ Πολύγωνον διπλάσιον τὰς πλευ-
ρας, ἐπ' αὐτῷ δὲ τῷ Πολυγώνῳ ἐγγραφῇ Πυραμὶς μὲν τῷ Κῶνῳ, Πρίσ-
μα δὲ τῷ Κυλίνδρῳ, ἔσαι αὖτις ἡ Πυραμὶς τριτημόριον ἥσα τῇ Πρίσμα-
τος. τῇ δ' ἥτω δὲ γενήσεται ἐς αἰ. Καὶ ἐπεὶ οὖν αἱ μὲν Πυραμίδες εἰς τὸν
Κῶνον (2), τὰ δὲ Πρίσματα εἰς τὸν Κύλινδρον ἀποτελεωσίν, ἔσαι δὴ καὶ
ἡ Κῶνος τριτημόριον τῆς Κυλίνδρου (3). Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον.

Σημειωτέον δὲ, ὡς αὐτῆς καὶ αἱ μετ' αὐτὴν δύο Προτάσεις, ὅτι μόναι
τοῖς ὀρθοῖς Κῶνις καὶ Κυλίνδροις, ἀλλὰ καὶ τοῖς ὁπωσὺν πλαγίοις ἀνέχου.

(1) Ζ. τῇ β'. (2) Διὰ τὸ ἀνατ. Λήμμα. (3) Διὰ τὸ καθόλου Πορίσμ.

σαι εἰσιν, εἰ καὶ τὰ σχήματα ὁρθὰς μόνον παρίστανται· ἐπιφέρονται γὰρ ἐξ ὧν ἔχουσι πάθη αἵτε Πυραμίδες, καὶ τὰ Πρίσματα, οὐ τὰ ὁρθὰ μόνον, ἀλλὰ καὶ τὰ οἰονδήποτε τρόπον πλαγιάζοντα.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

„Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (βαζ, πχρ) ὄντες Κῶνοι καὶ Κύλινδροι, πρὸς κα. 491.
„ἀλλήλους εἰσιν, ὡς αἱ βάσεις (γλ, σε).

Αἱ Πυραμίδες, αἱ τοῖς ἰσοῦσιν Κῶνοις ἐγγεγραμμέναι, εἰσιν (1) ὡς αἱ βάσεις. Ἀλλ' αἱ Πυραμίδες εἰς τὰς Κῶνας τέως ἀποτελεωτῶσιν (2)· ἄρα καὶ οἱ Κῶνοι (3) εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· Ἐπειδὴ δὲ οἱ τῶν Κῶνων Κύλινδροι, τῶν τὴν αὐτὴν Βάσιν ἐχόντων, καὶ ὕψος ἴσον, τριπλάσιοι εἰσιν, ἔσονται δὴπε καὶ αὐτοὶ ὡς αἱ Βάσεις. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Τὸν αὐτὸν δὲ δειχθήσεται τρόπον, καὶ τὰ Πρίσματα, καὶ τὰς Κυλινδρῶν, ὧν ἴσον τὸ ὕψος, τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ταῖς Βάσεσι· μάλλον δὲ καὶ ὅποιανδήποτε Σώματα κυλινδροειδῆ, ἀλλήλοις ἰσοῦσιν, ἢ ἴσα δηλ. ἐξ ὅποιων ἐπιπέδων, ἐπὶ τῷ αὐτῷ πολλαπλασιαζομένων ὕψει παραγόμενα, εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ Βάσεις. Ὡσαύτως δὲ καὶ περὶ τῶν Πυραμίδων καὶ τῶν Κῶνων τῶν ἰσοῦσιν, ναιμὴν καὶ τῶν ὅποιωνδήποτε Κωνοειδῶν συλλογιστέον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΒ.

„Οἱ ὅμοιοι Κῶνοι καὶ Κύλινδροι (βαζ, πφρ) πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλα-
„σίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι Διαμέτρων (βζ, πρ).

Ὅρα τὰ ἐν τῇ Γ'. καὶ ΙΑ'. Πρωτ. Σχήματα.

Ταῖς τῶν ὁμοίων Κῶνων βάσεσιν ἐγγεγράφω Πολύγωνα κανονικὰ ὁμώνυμα, καὶ διὰ τῆς ὁμοιᾶς (εἰ δὲ οἱ ὅμοιοι Κῶνοι τῶν σκαληνῶν τύχωσιν, ἢ τῶ ταῖς κατ' αὐτὰς βάσεσι τὰ Πολύγωνα ἐγγεγράφω, ὡς τὴν κλίσιν τῶν Ἀξόνων τὴν αὐτὴν ἔχειν θέσιν, ὡς πρὸς τὰς πλευράς, ἢ τὰς Γωνίας ἐκατέρου τῶν Πολυγώνων), ἐπὶ δὲ ταύτῃ τῶν Πολυγώνων Πυραμίδες ἀνεσάδωσαν τοῖς Κῶνοις ἐγγεγραμμέναι· λέγω δὲ ὅτι καὶ αὐταὶ ὅμοιαι ἔσονται, ὅ καὶ δεῖξαι οὐ δύσχερες· ὥς τε ταύτων ὁ λόγος τριπλασίων ἂν εἴη (4) τῷ λόγῳ τῶν Πλευρῶν

(1) 5. τὰ ἰβ'. (2) Λήμμα τὸ πρὸ τῆς Γ'. (3) Καθόλου Πόρισμα. (4) Η. τὰ ἰβ'.

βλ, πε, τατέσι (1) τῇ λόγῃ τῶν Διαμέτρων βζ, πρ' Εὐθεντοί ἐπεὶ αἱ Πυραμίδες (2) εἰς τὰς Κῶνας ἀποτελευτῶσιν, ἔσαι ὁ τῶν Κῶνων λόγος (3) τριπλασίῳ τῇ λόγῃ τῶν Διαμέτρων βζ, πρ. Ο. Ε. Δ.

Περὶ δὲ τῶν Κυλίνδρων ἂν ἦττον σαφὲς τὸ λεγόμενον, ὧν οἱ Κῶνοι τὸ τρίτον μέρος εἰσὶ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Προαγομένη δὲ τῇ λόγῃ τῶν Διαμέτρων βζ, πρ, τῶν ἐν ταῖς βάσεσι τῶν ὁμοίων Κῶνων, ἢ Κυλίνδρων, διὰ τῶν ὄρων η, θ, ὥς εἶναι βζ: πρ :: η: θ, ἔσαι (4) ὡς βζ πρὸς θ, ὅτως ὁ Κῶνος βαζ πρὸς τὸν Κῶνον πφρ, καὶ ὅτως ὁ Κύλινδρος βμ πρὸς τὸν Κύλινδρον ρι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ.

κ 492.

„Εὰν Κύλινδρος (βι) ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι (τῷ ρλ) τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις (βπ, γι), ἔσαι ὡς ὁ Κύλινδρος (βλ) πρὸς τὸν Κύλινδρον (ρι), ὅτως ὁ Αἴξων (αξ) πρὸς τὸν Αἴξονα (εξ).

Δείκνυται ὡς ἡ Α'. τῇ ε'.

Τὸ δὲ Θεώρημα ἔχῃ ἡμῖς καὶ περὶ τῆς Ἐπιφανείας ἀληθεύον ἐστὶ.

Εὰν γὰρ ὁ Αἴξων εξ εἰς ὁσαυδή ποτε μέρη ἴσα διαιρεθῇ, καὶ διὰ τῶν διαιρέσεων ἐπίπεδα ἀχθῇ ταῖς βάσεσι ρλ, γι παράλληλα, διαιρεθῇ δὲ καὶ ὁ Κύλινδρος, καὶ δὴ καὶ ἡ κυλινδρική Ἐπιφάνεια ρι, εἰς μέρη ἰσάριθμα τοῖς εἰς ἅπερ ὁ Αἴξων εξ διήρηται, ὧν ἕκαστον ἐν τῇ τῇ εξ Ἀξονος μερῶν ἀντὶ Ἀξονος ἔχοι, ἔσονται οἱ ἰσοῦφεις Κύλινδροι, καὶ ἐκ τῆ ἀκολούθου, οἱ εἰς ἃς διήρηται ὁ Κύλινδρος ρι (5), ὡς αἱ Βάσεις, τατέσιν ἀλλήλοις ἴσοι. Ὅτι δὲ καὶ αἱ κυλινδρिकाὶ Ἐπιφάνειαι, εἰς ἃς ἡ τῇ ρι Κυλινδρική Ἐπιφάνεια διαιρεῖται, ἴσαι καὶ αὐταὶ ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερόν ἐκ τῆς ἀκριβοῦς ἐφαρμοσέως, ἐξ ἧς ἂν ἦττον καὶ ἡ τῶν Κυλινδρῶν ἰσότης ἐλέγχεται. Τοιγαρὶν ὅτε Κύλινδρος, καὶ ἡ κατ' αὐτὸν Ἐπιφάνεια, εἰς μόρια κατατέμενεται τοῖς εἰς ἅπερ διαιρεῖται ὁ Αἴξων εξ ὅμοια. Εὰν τοίνυν καὶ ἀπὸ τῆς Αἴξονος ξα, τὸ τῇ Αἴξονος εξ ὑποτεθέν μόνιον ἀφαιρεθῇ ὁσάκις ἂν ἐξῇ, διὰ δὲ τῶν σημείων τῶν ἐπιζευγνύοντων τὰ μόρια, ἐπίπεδα ἀχθῇ τοῖς ἀπεναντίον βπ, ρλ παράλληλα, πρόδηλον ὅτι τοσάκις ἐν τῷ ἡγαμένῳ Αἴξονι αξ, τὸ μόνιον τῇ ἐπομένῃ Αἴξονος εξ περιεχόμενον

(1) Β. Πόρ. τῆς Α. τῇ ιβ'. (2) Αἴμ. τὸ πρὸ τῆς Ι. τῇ ιβ'. (3) Πόρ. καθόλου. (4) Ὁρισμ. Ι. τῇ ε'. (5) ΙΑ. τῇ ιβ'.

κείσεται, ὅσῃς ἐν τῷ ἡγαμένῳ βλ Κυλίνδρῳ, ἢ τῇ κυλινδρικῇ Ἐπιφανείᾳ, τὸ ὅμοιον μῶριον τῷ ἐπομένῳ Κυλίνδρῳ, ἢ τῇ κυλινδρικῇ Ἐπιφανείᾳ ρι. Ἀρα ὁ Ἀΐων αξ (1) ἐστὶ πρὸς τὸν Ἀΐωνα ξξ, ὡς ὁ Κύλινδρος βλ πρὸς τὸν Κύλινδρον ρι, ἢ ἔως ἡ κυλινδρικὴ Ἐπιφάνεια βλ πρὸς τὴν κυλινδρικὴν Ἐπιφάνειαν ρι. Ο. Ε. Δ.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἡ δὲ Πρότασις ἔδεν ἡττον χώραν ἔχει κατὰ τῶν πλαγίων Κυλίνδρων, ἢ ἐπὶ τῶν ὀρθῶν. Κατ' ἐκείνων γὰρ τὰ τῷ Ἀΐωνος μῶρια ξξ, ὁμοίαν ἔχουσι τὴν ἐπὶ τὰς ἰδίας Βάσεις κλίσιν, ἐν τοῖς Κυλίνδροις, εἰς ἃ κατατέμνεσθαι ὑποτίθεται ὁ Κύλινδρος ρι ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τῶν ταῖς βάσεσι παραλλήλων. Ταύτητοι ἔξω τὰ τυχόντα ἐντεθέντα ἀλλήλοις προσεφαρμόσει, καὶ ἔτω τὰ τε Κυλίνδρια ταῦτα, καὶ τῶν ἐπὶ αὐτῶν Ἐπιφανείᾳ, μῶρια ἔσσι ὅμοια τῶν τε Κυλίνδρων, καὶ τῇ κατ' αὐτὸν Ἐπιφανείᾳ ρι, τοῖς μῶριοις τῷ Ἀΐωνος ξξ ἰσάριθμα· καὶ ἐπομένως ἀπὸ τῷ Κυλίνδρῳ, ἢ τῇ κυλινδρικῇ Ἐπιφανείᾳ βλ, τοσάκις ληφθῆναι δυνάμενα, ὅσῃς καὶ τὰ τῷ Ἀΐωνος μῶρια τῷ ξξ, ἀπὸ τῷ Ἀΐωνος ξα· ἔνθεντοι ἡ αὐτὴ ὅλως ἔσσι ἀπόδειξις καὶ τῷ Κυλίνδρῳ μὴ ὀρθῷ, πλαγιωτέρῳ δὲ τυγχάνουτος.

Π ό ρ ι σ μ α.

Κάντεῦθεν τῷ Κυλίνδρῳ δι' ἐπιπέδων τεμνομένων παραλλήλων ταῖς βάσεσι, ἔσσι τὰ μέρη βλ, ρι, τοῖς αὐτῶν ὕψεσιν ἀνάλογον. Ἐὰν γὰρ ὁ Κύλινδρος τῶν ὀρθῶν ἢ, τὸ πρᾶγμα κατ' αὐτὸ δῆλον, τὰ γὰρ ὕψη ἔστω αὐτὰ τῷ Ἀΐωνος τυγχάνει τὰ Τμήματα αξ, ξξ· εἰ δὲ δὴ πλάγιος, ἀγέῳω Εὐθεῖα ταῖς βάσεσι καθετός, καὶ φανερόν ὅτι ὁμοίως τῷ Ἀΐωνι καὶ αὐτὴ ὑπὸ τῷ παραλλήλῳ ταῖς βάσεσιν ἐπιπέδῳ κατατμηθήσεται (2). Καὶ ἐπομένως ἐπεὶ τὰ μέρη βλ, ρι εἰσὶν (3) ὡς τὰ Τμήματα τῷ Ἀΐωνος, ἔσονται δὲ καὶ ὡς τὰ Τμήματα τῇ Καθετῇ, τῆτέστιν ὡς τὰ αὐτῶν ἐκείνων ὕψη. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

Οἱ ἐπὶ ἴσων Βάσεων (ηθ, μπ) ὄντες Κῶνοι τε καὶ Κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη (σξ, λψ). κ. 493.

Ἀποτετμήσω ἀπὸ τῷ ὑψηλοτέρῳ Κυλίνδρῳ αρ, Κύλινδρος ὁ αξ, ἔ-

(1) Διὰ τὸ τῶν ἴσων λόγων γινώσκοντα. (2) ΙΖ. τῷ ια'. (3) Διὰ τὸ Σχόλ. τῆς παρέσ.

χων ὕψος τὸ λε ἶσον τῷ σζ, καὶ ἔτι οἱ Κύλινδροι αξ, γι (1) ἔσονται ἴσοι· ἐπειδὴ δὲ ὁ Κύλινδρος αξ ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλινδρον αρ, ὡς (2) λε πρὸς λψ, ἔσαι (ἐπεὶ λε (3) καὶ σζ ἴσαι εἰσίν) ὡς σζ πρὸς λψ. Ο. Ε. Δ.

Τῶ τοίνυν Κυλίνδρῳ γι πρὸς τὸν Κύλινδρον αρ ἔχαντος, ὡς ἔχει ἡ σζ πρὸς τὴν λψ, καὶ τὸ τριτημόριον τῆ γι Κυλίνδρου, πρὸς τὸ τριτημόριον τῆ αρ, τατέσιν (4) ὁ γζτ Κῶνος πρὸς τὸν αψβ, ἔσαι ὁμοίως ὡς σζ πρὸς λψ.

Παρατηρητέον δὲ τοῖς νεανίσκοις, ὡς ἡ τῆς Προτάσεως τῆς δε ἀπόδειξις, καὶ τοῖς Κῶνοις τε καὶ τοῖς Κυλίνδροις, οἱ ἂν ἐκπεπτωκότες εἶεν τῆς ὀρθότητος.

Π ὁ ρ ι σ μ α.

Ἀληθεὺς δὲ τὸ θεώρημα κατὰ τῶν Πρισμάτων, καὶ δὴ καὶ τῶν Πυραμίδων, ἢτε ἀπόδειξις παραπλησιωτάτη. Ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν Πρισμάτων ἐκ τῆ Α'. Πορίσμ. τῆς Θ'. Πρωτ. τῆ ΙΒ' Βιβλίας, καὶ τῆς ΚΕ'. Πρωτ., καὶ ἐκ τῆ Α'. Πορ. τῆς ΚΔ' τῆ ΙΑ'. Περὶ δὲ τῶν Πυραμίδων ἐκ τέττα, καὶ τῆς Ζ' τῆ ΙΒ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΕ.

„Τῶν ἴσων Κῶνων καὶ Κυλίνδρων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ Βάσεις τοῖς ὕψε-
σι, καὶ ἀνάπαλιν.

κ. 494.

Δεῖκν. ὁμοίως τῇ ΛΔ' τῆ ΙΑ', εἰμὴ ὅτι, ἀντὶ τῆς ΑΒ'. καὶ ΚΕ'. τῶν ἐκείσε ἀναφερομένων, ληπτέον ἐνταῦθα τὴν ΙΑ' καὶ ΙΓ', ἢ τὴν ΙΔ' τῆ ΙΒ'.

Μέρος Α'. Ὁρθοὶ πρῶτον οἱ Κύλινδροι ὑποτιθέμενοι, εἰς ὧσιν ἰσοῦ-
φείς, φανερόν ὅτι αὐτοῖς καὶ αἱ Βάσεις (διὰ τὴν τῶν Κυλίνδρων κατ' ὑπόφ. ἰσότητα) ἔσονται (5) ἴσαι ὅθεν ἔτις ἀληθεύει τὸ προτεθέν.

Εἶδε δὴ τέτων τὰ ὕψη ἀνίστως ἔχει, ἀπὸ τῆ μείζονος λψ ληπτέον τὸ λε, ἶσον τῷ πγ ἐλάσσονι, διὰ δὲ τῆ ε ἀκτέον τὸ ἐπίπεδον χξ, παράλλη-
λον πρὸς τὸ μπ· καὶ τότε δὴ ἡ Βάσις μπ ἐστὶ πρὸς τὴν Βάσιν υτ (6), ὡς ὁ
Κύλινδρος αξ πρὸς τὸν Κύλινδρον ζδ, τατέσιν (ἐπεὶ οἱ Κύλινδροι αρ, ζδ, ἴσοι
εἶναι ὑποτίθενται) ὡς ὁ Κύλινδρος αξ πρὸς τὸν Κύλινδρον αρ, τατέσιν (7) ὡς
τὸ ὕψος λε πρὸς τὸ ὕψος λψ· καὶ (διὰ τὰς λε καὶ πγ ἴσας ἔσας) ἀντιστρόφως,
ὡς τὸ ὕψωμα πγ πρὸς τὸ ὕψωμα λψ. Ο. Ε. Δ.

Ἀλλ' ἔςωσαν δὴ οἱ Κύλινδροι, ὡς ἂν βέλαιοι πλάγιοι, ἀνισάθωσαν δὲ
ἐπὶ τῶν αὐτῶν Βάσεων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ὕψει Κύλινδροι ὀρθοί, καὶ τέτοις ἴσοι

(1) ΙΔ. τῆ ΙΒ'. καὶ Σχόλ. Ι. τῆ ΙΒ'. (2) Πορ. ἀνωτ. (3) Ε'κ κατ. (4) Ι. τῆ ΙΒ'.
(5) ΙΔ. τῆ ΙΒ'. (6) Διὰ τὴν αὐτ. (7) ΙΔ. τῆ ΙΒ'.

(1) ἔσονται οἱ πλάγιοι· καὶ ἐπειδὴ οἱ ἴσοι Κύλινδροι ὁρθοὶ τυγχάνοντες, ἀντιπεπονθείας ἔχουσι τὰς Βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ οἱ πλάγιοι ἴσοι ὄντες, ὁμοίως καὶ αὐτοὶ ἀντιπείσονται. Ο. Ε. Δ.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ οἱ ἴσοι Κῶνοι τῶν ἰσῶν (2) Κυλίνδρων, οἷς ἴσαι αἱ Βάσεις καὶ τὰ ὕψη, τριτημόρια εἰσὶ, καὶ τέτοις ἄρα αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἀντιπείσονται.

Μέρος Β'. Ἀλλὰ γὰρ ἔσω τῶν ὁρθῶν Κυλίνδρων τὰ ὕψη ἄνισα· ἀπὸ δὲ τῷ μείζονος λψ, ληφθήτω τῷ ἐλάσσονι πρ ἴσον τὸ λε, καὶ διὰ τῷ ε ἄχ-
θήτω ἐπίπεδον τὸ χξ τῇ Βάσει παράλληλον· Ο' μὲν οὖν Κύλινδρος αξ ἐστὶ
πρὸς τὸν Κύλινδρον ζδ (3), ὡς μπ πρὸς υτ, τετέστιν ἐξ ὑποθ. ὡς πγ (4), ἢ
γβν λε πρὸς λψ, ἢ ὡς (5) αξ πρὸς αρ· ἄρ' οὖν οἱ Κύλινδροι (6) αρ καὶ ζδ
ἴσοι εἰσὶ· Καὶ ἐπεὶ οἱ πλάγιοι τῶν Κυλίνδρων τοῖς ὁρθοῖς ἴσοι εἰσιν, ὧν ἴσα
τὰ ὕψη καὶ αἱ Βάσεις (7)· καὶ ἔτσι ἄρα, εἴπερ αὐταῖς ἀντιπεπόνθασιν αἱ Βά-
σεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι ἔσονται. Ο. Ε. Δ.

Οἷτε Κῶνοι τριτημόρια ὄντες (8) τῶν Κυλίνδρων τῶν ἰσοῦψῶν τε καὶ ἐπὶ
Βάσεων ἰσῶν, εἴγε αὐτοῖς ἀντιπεπόνθασιν αἱ Βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἔσονται
καὶ αὐτοὶ ἀλλήλοις ἴσοι. Ο. Ε. Δ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐπεὶ μὴδὲ ἡμῖν ὁ Εὐκλείδης περὶ λόγων συνθέτε τῷ ἐν τοῖς Σώμασιν,
ὑποθέμενος φέρεται, καὶ τῆτον αὐτοὶ διὰ βραχέων ἐνταῦθα δεῖξαι πρῶτον ἂν
εἶναι ἡγάμεθα.

Α'. Κύλινδρος πρὸς Κύλινδρον, καὶ Πρίσμα πρὸς Πρίσμα, λόγον εἰσὶν ἔ-
χοντα σύνθετον ἐκ τῶν λόγων τῶν τε Βάσεων, καὶ τῶν ὕψων.

Ἐξωσαν (ὄρα τὰ ἀνωτ. Σχήμ.) Κύλινδροι ζδ καὶ αρ, ἀπὸ δὲ τῷ ὕψηλο-
τέρῳ αρ (ἐπὶ γὰρ τῶν ἰσοῦψῶν αὐτόθεν δηλον (9)) ἀποτετμήσθω αξ, ἰσοῦ-
ψῆς ὧν τῷ ζδ· ἔσω δὲ καὶ ὡς Βάσις υτ πρὸς Βάσιν μπ, ἔτω ζν πρὸς χ, καὶ
ὡς ὕψος νδ, ἢτοι βξ πρὸς ὕψος τὸ βρ, ἔτω χ πρὸς ψ· Δεῖ δὲ δεῖξαι ὡς ὁ
Κύλινδρος ζδ ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλινδρον αρ, ὡς ζν πρὸς τὸν ψ· ὁ γὰρ Κύλ.
ζδ ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλ. αξ, ὡς (10) ἡ Βάσις υτ πρὸς τὴν Βάσιν μπ, τετέστιν
(11) ὡς ζν πρὸς χ· ὁ δὲ Κύλ. αξ ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλ. αρ, ὡς (12) βξ πρὸς
βρ, τετέστιν ὡς (13) χ πρὸς ψ· τοιγαρὲν (14) δι ἴσα Κύλ. ζδ πρὸς Κύλ. αρ,
ὡς ζν πρὸς ψ.

(1) ΙΔ. τῷ ιβ'. (2) Ι. τῷ ιβ'. (3) Ι. τῷ ιβ'. (4) Εκ κατ. (5) ΙΔ. τῷ ιβ'. (6)
Θ. τῷ ε'. (7) ΙΔ. τῷ ιβ'. (8) Ι. τῷ ιβ'. (9) ΙΔ. τῷ ιβ'. (10) ΙΔ. τῷ ιβ'. (11) Εκ
κατ. (12) ΙΔ. τῷ ιβ'. (13) Εκ κατ. (14) ΚΒ. τῷ ε'.

Περὶ δὲ τῶν Πρισμάτων ὡσαύτως δειχθήσεται, ἀλλ' ἐκ τῆς Α' Πορίσματος Θ', καὶ ἐκ τῆς Πορίσματος τῆς ΙΔ' Προτάσεως.

Β'. Καὶ Κῶνος δὲ πρὸς Κῶνον, καὶ Πυραμὶς πρὸς Πυραμίδα, λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων Βάσεως πρὸς Βάσιν, καὶ ὕψους πρὸς ὕψος.

Εἰσὶ γὰρ τῶν τε (Ι) Κυλίνδρων, καὶ τῶν Πρισμάτων τριτημόρια.

Καὶ ταῦτα δὲ πάντα ἐπὶ τῶν πλαγίων Σωμάτων ἔχῃ ἡκιστα χῶραν ἔχει, ἢ ἐπὶ τῶν ὀρθῶν, ὡς ἐξ ὧν φθάσαντες ἔφημεν ἐς ἰὴν δῆλον.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις. καὶ ΙΖ.

Αἱ Προτάσεις αὗται ἀπασῶν ἴσαι διεξοδικώταται πρὸς ἄνδρα συντελεῖσθαι, ἢ πρὸς τὸ δι' αὐτῶν τὴν ΙΗ'. Πρότασιν δεικνυθῆναι, ἣν αὐτοὶ εὐχερεστέρα ταῦ μεθόδῳ ἀποδείξομεν.

Λήμμα πρὸς τὴν ἐφεξῆς ΙΗ'.

„Οἱ Κύλινδροι οἱ εἰς τὸ Ἡμισφαίριον ἐγγραφόμενοι, εἰς αὐτὸ τῆτο
„καὶ ἀπολήγασιν.

α. 495.

Ἐξω φψυ μέγιστον τῶν ἐπὶ τῆς Ἡμισφαίριος Ἡμικύκλιον, καὶ τῆτος Ἡμιδιάμετρος ἡ αψ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς Διαμέτρος φυ· τετμήσω δὲ ἡ ωψ εἰς μέρη ἴσα τὰ αμ, μν, νψ, καὶ ἀχθειςῶν διὰ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων μ, ν, καθέτων κξ·, ἐγγραφέσω εἰς τὸ Ἡμικύκλιον Ὀρθογώνια ξβρκ, εδδσ, ὧν ἔπειτα ἔξω τῆς Κύκλου προεκτελέσωμεν, νοείσω περὶ τὸ Ἡμικύκλιον περιγεγραφέμενα Ὀρθογώνια ζτυφ, λοβξ, πχδε, καὶ ἔσαι πάντα ἰσοῦψῃ. Αἱ δὲ ὑπεροχαὶ τῶν περιγεγραμμένων ὑπὲρ τὰ ἐγγεγραμμένα, εἰσὶ τὰ ἐπίπεδα ζκ, λσ, χε, οθ, τρ, αὐτὰ δὲ ἅμα ληφθέντα τὸ Ὀρθογώνιον ζτυφ συγκροτεῖ. Ἐπειδὴ γὰρ χε = δσ, ἔσονται λσ, οθ, χε ἅμα, ἴσα τῷ Ὀρθογώνιῳ λβ, ταῖς τε τῷ ξρ· ἐνθεντοὶ εἰς ἑκατέρωθεν προαῖτες τὰ ἐπίπεδα ζκ, τρ, ἔσονται ἅμα πάντα ζκ, λσ, χε, οθ, τρ, ἴσα τῷ Ὀρθογώνιῳ ζτυφ. Ἡδὴ μὲν οὖν εἰς ἡμικύκλιον μετὰ τῶν Ὀρθογώνιων περὶ τὴν Ἡμιδιάμετρον αψ μένασαν περιάγεσθαι, τὰ ἐγγεγραμμένα Ὀρθογώνια εδ, ξρ, Κυλίνδρους ἀποκυήσασιν εἰς τὸ Ἡμισφαίριον ἐγγεγραμμένους, τὰ δὲ περιγεγραμμένα Κυλίνδρους περιγεγραμμένους, ἀλλήλοισι τε ἐπικειμένους. Καὶ ὡς περὶ δὴ ἡ τῶν περιγεγραμμένων ὑπεροχὴ ὑπὲρ τὰ ἐγγεγραμμένα Ὀρθογώνια, ἣν Ὀρθογώνιον τὸ ζυ, ἄνωτοι καὶ ἡ τῶν περιγεγραμμένων Κυλίνδρων ὑπεροχὴ

(Ι) Ι. καὶ Ζ. καὶ Η. τῷ α.

ὑπὲρ τὰς ἐγγεγραμμένους, ὁ Κύλινδρος ἔσαι ὁ ἀπὸ τῆς Ὀρθογωνίας ζυ ἀπο-
κυϊσκόμενος· Ἀλλὰ τὸ τῆς τοιαύτης Κυλίνδρου ὕψος γενήσεται παντὸς δοθέντος
ἑλάττον· διὸ δὴ καὶ ὁ Κύλινδρος αὐτὸς παντὸς δοθέντος (1) καταστήσεται ἐλάτ-
των, εἰ τῆς Διαμέτρου εἰς αἰ πλείω πέρατος ἀνευ διαιρεμένης, ὁ τῶν Ὀρ-
θογωνίων, κἢ τευθεὺς ὁ τῶν Κυλίνδρων ἀριθμὸς εἰς ἄπειρον πληθύνοιτο. Ἀρα
ἢ τῶν εἰς τὸ Ἡμισφαίριον περιγραφομένων Κυλίνδρων (πολλῶ δὲ μᾶλλον ἢ
αὐτῇ τῇ Ἡμισφαίρει, ὁ τῶν περιγραφομένων Κυλίνδρων μέρος τυγχάνει ὄν),
ὑπὲρ τὰς ἐγγεγραμμένους Κυλίνδρους ὑπεροχή, παντὸς δοθέντος μεγέθους ἐλάτ-
των τέως γενήσεται· Ὅθεν οἱ εἰς τὸ Ἡμισφαίριον ἐς ἄπειρον ἐγγεγραφόμενοι
Κύλινδροι, εἰς αὐτὸ τῆτο τέως (2) καὶ ἀπολήγῃσι. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἀποδειχθήσεται, καὶ τὰς εἰς τὸν Κῶνον, ἢ τὸ
Κωνοειδές, ἢ τὸ Σφαιροειδές, καὶ ἐγγεγραφομένους Κυλίνδρους, εἰς αὐτὰ ταῦ-
τα τὰ Σχήματα τέως ἀποτελεσθῶν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΗ.

„Αἱ Σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰσίων Διαμέ-
τρων (βκ, ρψ). κ. 496.

Τῶν Ἡμιδιαμέτρων αβ, υρ, εἰς ὅσα ἂν δόξῃ μέρη ἴσατε καὶ ἰσάριθμα
διαιρεμένων, καὶ διὰ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων, καθέτων ἀγομένων, καὶ
νοσέσθω ἐν ταῖς μεγίστοις τῶν Σφαιρῶν Ἡμικυκλίοις ἐγγεγραμμένα εἶναι Ὀρ-
θογωνία ἀριθμῶ ἴσα, περὶ τὰς Ἡμιδιαμέτρους αβ, υρ μενύσας περιαγόμενα,
καὶ Κυλίνδρους ἐν ἑκατέρῳ τῷ Ἡμισφαίριῳ ἰσοπληθεῖς συνισῶντα, ἀλλήλοισι
ἐπικειμένους· καὶ ἐπειδὴ κγ : γζ :: γζ : γβ (3), ἔσαι ὁ λόγος κγ πρὸς γβ,
διπλασίων τῇ λόγῳ (4) κγ πρὸς γζ, ἢ, ὁ ταυτὸν ἔσαι, τῇ λόγῳ γζ πρὸς
γβ. Παραπλησίως δὲ καὶ ὁ λόγος ψε : ερ, διπλασίων ἐστὶ τῇ λόγῳ χε πρὸς
ερ· ἀλλ' ἐκ κατασκ. κγ : γβ :: ψε : ερ, ἄρα (5) καὶ ζγ : βγ :: χε : ερ·
ἀλλ' αὖτις ἐκ κατασκ. βγ : γε :: ρε : ερ, τοιγαρὶν δι' ἴσιν (6) ζγ : γε :: χε
: ερ· ὥστε οἱ Κύλινδροι (7) ζλ καὶ χπ ὅμοιοι ἀλλήλοισι εἰσὶ, καὶ ἐπομένως (8)
τάτων ὁ λόγος τριπλασίων ἐστὶ τῇ λόγῳ τῶν Διαμέτρων ζι, χο, ἢ γὰρ τῶν
Ἡμιδιαμέτρων ζγ, χε, τῶν ἐν ταῖς βάσεσιν· ἀλλ' ὁ λόγος ζγ πρὸς χε,

(1) ἄλλον ἐκ τῆς ΙΑ. τῆς ΙΒ'. (2) Ὅρ. ε. τῆς ΙΒ'. (3) Α. Πόρ. τῆς ΙΓ. τῆς ε'. (4)
Ὅρ. Ι. τῆς ε'. (5) ΑΒ. τῆς ε'. (6) ΚΒ. τῆς ε'. (7) Ὅρ. Δ. τῆς ΙΒ'. (8) ΙΒ. τῆς ΙΒ'.

27 $\div$ · καὶ ἐν γένει, εἰ μεταξὺ α καὶ ε μεσότητις δύο δέοι λαβεῖν τὰς μ καὶ ν , ἔσαι $\mu = \sqrt{\alpha^T \varepsilon^3}$, καὶ ἔσαι $\nu = \sqrt{\varepsilon^T \alpha^3}$.

Ἐπειδὴ γὰρ τὸ ὑπὸ α καὶ ε ὀρθογώνιον, μέσον (1) εἶν ἀνάλογον τῶν ἀπ' αὐτῶν Τετραγώνων, ἔσαι δὴ α^T , $\alpha\varepsilon$, $\varepsilon^T \div$. Ἀ'χθήτωσαν οὖν τὰ τρία ταῦτα ἐπίπεδα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ α , καὶ ἀναφυήσονται (2) σερεὰ συνεχῶς ἀνάλογον τὰ α^K , $\alpha^T \varepsilon$, $\varepsilon^T \alpha \div$ (3). Ἀ'χθήτωσαν δὲ πάλιν τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα ἐπὶ ὕψος τὸ ε , καὶ ἔσονται $\alpha^T \varepsilon$, $\varepsilon^T \alpha$, $\varepsilon^K \div$ · τὰ ἄρα τέτταρα σερεὰ α^K , $\alpha^T \varepsilon$, $\varepsilon^T \alpha$, ε^K συνεχῶς ἀνάλογον εἰσὶ, καὶ ἐπομένως αἱ τέτων κυβικαὶ ρίζαι α , $\sqrt{\alpha^T \varepsilon^3}$, $\sqrt{\varepsilon^T \alpha^3}$, ε συνεχῶς (4) ἀνάλογον εἰσὶ καὶ αὐταί· καὶ ἐπεὶ ἐξ ὑποθ. α , μ , ν , $\varepsilon \div$, ἔσαι $\mu = \sqrt{\alpha^T \varepsilon^3}$, καὶ $\nu = \sqrt{\varepsilon^T \alpha^3}$.

Ἐὰν δὲ ὁ Α'. ὁρος ᾗ 1, ἐξαίρεθείσης τῆς Κυβικῆς ρίζης ἀπὸ τῶν ἑτέρων τῶν ἄκρων, ληφθήσεται τῶν δύο μεσοτήτων ἡ προτέρα, τὸ δ' ἀπὸ ταύτης Τετραγώνον, ἔσαι τῶν δύο μέσων ἡ ὑτέρα· ἐὰν γὰρ ᾗ $\alpha = 1$, ἔσαι $\alpha^T = 1$ · ἐνθεντοὶ $\alpha^T \varepsilon = 1 \times \varepsilon = \varepsilon$, καὶ $\sqrt{\alpha^T \varepsilon^3}$ (τατέσι μ) $= \sqrt{\varepsilon^3}$ · καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον $\sqrt{\varepsilon^T \alpha^3}$ (τατέσι ν) $= \sqrt{\varepsilon^3} = (5) \sqrt{\varepsilon^3} \times \sqrt{\varepsilon^3}$.

Οἷον μεταξὺ 1 καὶ 125, μέσοι ἀριθμοὶ εἰσιν οἱ 5 καὶ 25· ἔσαι γὰρ $\sqrt{125^3} = 5$, καὶ $5 \times 5 = 25$ · εἰσὶ δὲ 1, 5, 25, 125 $\div$ · ἐνθεντοὶ ἐὰν ἀντὶ τῆς δοθέντος Κύβου τεθῇ 1, ληφθήσεται ἡ τῆς Κύβου Πλευρὰ, ὅς ἐστι διπλάσιος ἢ τῆς δοθέντος, τῆς τῆς δυαδικῆς ἀριθμῆς Κυβικῆς ρίζης ἐξαίρεμένης· ὁ καδ' αὐτὸ μὲν εὐδηλον ἐστίν, ὅτι ἡκιστα καὶ ἐκεῖνα ἐπιφερόμενον, ὅτι $\sqrt{2^3}$ ἐστὶ τῶν μεταξὺ 1 καὶ 2 τῶν μέσων ὁ πρότερος.

(1) Β. Πόρ. τῆς ΚΒ. τῆς ζ'. (2) ΑΒ. τῆς ια'. (3) Σχόλ. τῆς Αδ. τῆς ια'. (4) Σχόλ. Α. τῆς ΑΓ. τῆς ια', καὶ ΑΕ. τῆς ε'. (5) Πόρ. τῆς ΑΖ. τῆς ια'.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΚ ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΕΞ ΑΩΤΕΥΘΕΝΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ἢτοι

ὄρων τινῶν ἀναπτύξεις.

Ε' $\epsilon\omega$ δὲ Κύκλος $\beta\epsilon\gamma\eta$, ἢ Κέντρον α , Διάμετρος δὲ $\beta\gamma$, πρὸς ὁρθὰς ὑπὸ α. 1.
τῆς $\epsilon\eta$ τεμνομένη κατὰ τὸ δ , ἀπὸ δὲ τῶ Κέντρου ἀχθῆτωσαν Ἡμιδιάμετροι
 $\alpha\epsilon$, $\alpha\eta$. Τῶτων ἦτω κειμένων.

Α'. Τομεὺς τῆς Σφαίρας ἐσὶν, ὁ ὑπὸ τῶ κυκλικῶ Τομέως $\alpha\epsilon\gamma\eta$, ἢ
 $\gamma\alpha\eta$ $\alpha\epsilon\beta\eta$, τῶ περὶ τὴν Διάμετρον $\beta\gamma$ περιηγμένῃ, γινόμενος.

Β'. Τμήμα, εἴτ' οὖν μοῖρα Σφαίρας ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῶ κυκλικῶ Τμήμα-
τος $\epsilon\gamma\eta$, ἢ $\gamma\alpha\eta$ $\epsilon\beta\eta$, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον $\beta\gamma$ περιηγμένῃ, κατα-
γραφόμενον.

Γ'. Τῆς σφαιρικῆς μοίρας $\epsilon\beta\eta$ Κορυφή ἐστὶ, τὸ κατὰ τὴν ἀκίνητον διά-
μετρον πέρας β . Βάσις δὲ ὁ ὑπὸ τῆς $\epsilon\eta$ Εὐθείας καταγραφόμενος Κύκ-
λος. Ἀΐων δὲ τὸ τμήμα τῆς διαμέτρου $\beta\delta$, τὸ ἀπὸ τε τῆς κορυφῆς, ϵ ,
 ϵ τῶ τῆς βάσεως Κέντρου δ ἀπολαμβανόμενον.

Δ'. Τῆς σφαιρικῆς μοίρας, ἢ τῶ ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένῃ Σώματος,
ἢ Κῶνα ἐπιφάνειαν εἰπὼν, ἄνευ δὲ τῆς βάσεως εἰρηκέναι ἀεὶ δῆλος ἔσται
καὶ Κυλίνδρου δὲ ἐπιφάνειαν ἢν εἶπω, παραπλησίως ἄνευ τῆς βάσεως νοη-
θήσεται, εἰμὴ τὸ ὀλίκῳ προσκείτο, ὥς ἐν οἷς ϵ αἱ βάσεις συμπαρελήφ-
θησαν.

Καὶ περὶ Κυλίνδρων δὲ λέγοντι ϵ Κῶνων μόνοι οἱ ὀρθοὶ νοηθήσονται.

Α' ΞΙΩΜΑΤΑ.

Α'. Ἡ τῶ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῃ Πολυγώνῃ περίμετρος, τῆς α. 2.
τῶ Κύκλου περιφερείας ἐλάσσων ἐστὶ.

Β'. Ἡ τῶ περὶ τὸν Κύκλον περιγεγραμμένῃ Πολυγώνῃ περίμετρος,
τῆς τῶ Κύκλου περιφερείας μείζων ἐστὶ.

ἄπειρον Πλευρῶν ἐγγράφεσθαι τε καὶ περιγράφεσθαι νομένων· ἂν ἢ καὶ ἡ τῆς περιγεγραμμένης περιμέτρου ὑπεροχή ὑπὲρ τὴν ἐγγεγραμμένην, παντὸς μεγέθους δοθέντος ἐλάσσων τέως καθίσταται· καὶ πολλῷ δὴ μᾶλλον ἄρα (1) ἢ τῆς περιγεγραμμένης περιμέτρου ὑπὲρ τὴν τῷ Κύκλῳ Περιφέρειαν ὑπεροχή, ἢ τε τῆς ἐγγεγραμμένης περιμέτρου ἀπὸ τῆς αὐτῆς περιφέρειας ἔλλειψις, παντὸς δοθέντος μεγέθους ἐλάσσονες ἔσονται. Ὡς ἢ τε ἐγγεγραμμένη καὶ ἡ περιγεγραμμένη, ἀμφοτέραι αἱ περιμέτροι, εἰς τὴν περιφέρειαν τέως (2) αὐτὴν ἀπολήγῃσι. Ο. Η. τὸ Α'. Ταῦτα δὲ ἐπὶ πλεόν πειρᾶσθαι κατασκευάζειν περὶ τὸν, ὡς αὐτόθεν τὸ δῆλον ἔχοντα.

Μέρος Β'. Ἐπεὶ δέ τοι δέδεικται τὴν τῆς Πλευρᾶς ζι ὑπὲρ τὴν ἐγ ὑπεροχὴν, παντὸς, ὅπερ ἂν δοθῇ, μεγέθους γίνεσθαι τέως ἐλάσσονα (καὶ γὰρ ζι : ἐγ = ια : γα)· καὶ ἡ τῆς ἀπὸ ζι Τετραγώνου ὑπὲρ τὸ ἀπὸ τῆς ἐγ ὑπεροχὴ, ἔσαι τέως παντὸς δοθέντος ἐλάσσων. Ἀλλὰ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ ζι Τετραγώνου, πρὸς τὸ ἀπὸ ἐγ Τετραγώνου, ὅπως ἔχει (3) καὶ τὸ περιγεγραμμένον Πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον Πολύγωνον· καὶ ἡ τῆς περιγεγραμμένης τοῦτον Πολυγώνου ὑπὲρ τὸ ἐγγεγραμμένον ὑπεροχὴ, παντὸς ἔσαι τῷ δοθέντος μεγέθους ἐλάσσων· καὶ πολλῷ ἄρα ἐλάσσων ἔσαι ἢ τε τῷ περιγεγραμμένῳ ὑπὲρ τὸν Κύκλον ὑπεροχὴ, καὶ ἡ τῆς ἐγγεγραμμένης ἀπὸ τῷ Κύκλῳ ἔλλειψις· Ἐνδεῖντο καὶ τὰ εἰς τὸν Κύκλον τε καὶ περὶ τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένα τε καὶ περιγεγραμμένα Πολύγωνα, ἐπ' αὐτὸν (4) τέως τὸν Κύκλον ἀποτελεῦται. Ο. Η. τὸ ἕτερον.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

κ. 2.

„Τὸ περὶ τὸν Κύκλον περιγεγραμμένον κανονικὸν (5) Πολύγωνον ζιντε, ἴσον ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῷ Πολυγώνῳ περίμετρος, ὕψος δὲ ἡ τῷ Κύκλῳ ἡμιδιάμετρος.

„Τὸ δὲ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένον κανονικὸν Πολύγωνον ἴσον ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Πολυγώνῳ περίμετρος, ὕψος δὲ ἡ Κάθετος αο, ἡ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ ἐπὶ μιᾷς τῶν πλευρῶν ἡστισομένη ἀγόμενη.

Μέρος Α'. Ἡ ἡμιδιάμετρος αβ ἢ πρὸς τὴν ἐπαφὴν ἡγμένη, κάθετος ἐστὶ (6) πρὸς τὴν Α' πτομένην ιζ. Ἐὰν ἂν ἀχθῶσιν αἱ αζ, αι, αν, κξι, καὶ τὸ

(1) Α'ε. Α'. καὶ Β'. (2) Ορ. ζ. Βιβλ. ιβ'. (3) Κ. τῷ ζ'. Βιβλ. καὶ τὸ Σχόλ. τὸ μετ' αὐτῆν. (4) Ο'ρισμ. ζ' τῷ Ιβ' Βιβλ. (5) Ο'ρ. Γ. τῷ δ'. (6) ΙΗ. τῷ γ'.

Πολύγωνον εἰς Τρίγωνα ἀναλυθῆ, ἔσαι δὴ ἡ $\alpha\beta$ ἡμιδιάμετρος τῶν Τριγώνων ἀπάντων ὕψος κοινόν, ὅθεν δὴ ἴσα εἶναι φανερόν καὶ τὰ Τρίγωνα. ὥστε τὸ Τρίγωνον τὸ τὴν βάσιν ἴσην ἔχον τῷ τῶν Πλευρῶν ζ , $\iota\upsilon$, $\nu\tau$, καὶ $\kappa\epsilon$: ἀξοίματι, ὕψος δὲ τὸ $\alpha\beta$, ἴσον ἅπασιν (1) ἔσαι, τατέσιν ὅλῳ τῷ Πολυγώνῳ, ὃ περιγέγραπται.

Μέρος Β'. Παραπλησίως δὲ καὶ τὸ Β'. δείκνυται.

Τῶν γὰρ δὴ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Πλευρῶν ἴσων ἀλλήλαις οὐσῶν, καὶ αἱ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α Κάθετοι (2) ἔσονται ἴσαι· ταύτητοι καὶ τὰ εἰς α τὸ ἐγγεγραμμένον Πολύγωνον ἀναλύεται, Τρίγωνα πάντα (3), ἴσα ἀλλήλοις ἐσὶ καὶ παραπλησίως τοίνυν χωρεῖ τὰ τῆς δείξεως, ὥσπερ ἀνωτέρω.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Α'. Ἐντεῦθεν καὶ τὸ τῷ κανονικῷ Πολυγώνῳ, τῷ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, ἢ περιγεγραμμένῳ χωρίον εὔρεῖν ἐστί, τὴν ἀπὸ τῷ Κέντρῳ (4) ἐπὶ μίαν ἡντιναῦν τῶν Πλευρῶν κάθετον, διὰ τῆς ἡμιπεριμέτρου πολλαπλασιάζουσι.

Β'. Ἐπεὶ δέ τοι τὰ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένα τε καὶ περιγεγραμμένα Πολύγωνα, ἐπ' αὐτὸν δὴ τὸν κύκλον, αἵτε τῶν Πολυγώνων περίμετροι, ἐπὶ τὴν τῷ Κύκλῳ τέως περιφέρειαν (5) ἀπολήγουσιν, εὔρεθήσεται ἔτι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῷ Κύκλῳ, τῆς ἡμιδιαμέτρου διὰ τῆς ἡμιπεριφερείας πολυπλασιαζομένης.

Γ'. Καὶ ἔστιν ἄρα ὁ Κύκλος ἴσος Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῇ τῷ Κύκλῳ περιφερεία ἴση Εὐθεΐα, ὕψος δέ γε ἡ ἡμιδιάμετρος· ἀνακύπτει μὲν γὰρ (6) τὸ Τριγώνον χωρίον ἐκ τῆς ἡμιβάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος πολλαπλασιαζομένης. Ὡσαύτως δὲ δῆλον, καὶ τὸν τῷ Κύκλῳ τομέα ἴσον εἶναι Τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῷ Κύκλῳ ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ Εὐθεΐα, ἡ τῷ τῷ τομέως τόξῳ ἴση· τὸ γὰρ δὴ Πόρισμα τὸ δε ἐκ τῶν αὐτῶν ἀρχῶν, ἐν τῇ ἐφεξῆς Προτάσει πλατύτερον κατασκευαθήσεται.

Δ'. Τῶν ἰσοπεριμέτρων Σχημάτων ὁ Κύκλος τὸ περιεκτικώτατον· ἔστω γὰρ τῷ τυχόντος Πολυγώνῳ (οἷον δὴ Τετραγώνῳ) περίμετρος εἰδη ἴση τῇ περιφερείᾳ τῷ Κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ $\alpha\zeta$, καὶ οὗ τὸ κέντρον ζ τῷ τῷ Κύκλῳ κέντρῳ εἰς ταυτὸ γίνεται, ὅς ἂν εἰς τὸ Τετράγωνον ἐγγραφείη, ἢ περὶ αὐτὸ περιγραφείη, τὸ εἰδη. Φημὶ τοίνυν ὡς τὸ τῷ Κύκλῳ χωρίον τῷ κατὰ τὸ Πολύγωνον μείζον ἐστί.

α. 7.

(1) Ἐκ τῆς Α. τῷ ζ . (2) $\iota\delta$. τῷ γ . (3) ΑΗ. τῷ α . (4) Διὰ τὴν παρῶν καὶ τὸ Σχόλ. τῆς ΜΑ. τῷ α . (5) Διὰ τὴν Γ'. (6) Σχόλ. τῆς ΜΑ. τῷ α .

Τὸ γὰρ δὴ τῆ Κύκλου, ἴσον ἐστὶ (1) Τριγώνῳ, ὃ βάσις μὲν ἡ Περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ Ἡμιδιάμετρος ζα· τὸ δὲ τῆ Πολυγώνου, ἴσον ἐστὶ Τριγώνῳ (2), ὃ βάσις μὲν ἡ τῆ Πολυγώνου περίμετρος, ἡ τῇ τῆ Κύκλου περιφέρειᾳ (καθ' ὑπόθεσιν) ἴση, ὕψος δὲ ἡ Κάθετος ζο, ἡ ἀπὸ τῆ Κέντρος ἐπὶ τὴν τῆ Πολυγώνου πλευρὰν ἀγομένη. Ταύτης οὖν ἐλάσσονος αἰεὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆ Κύκλου ὅσης, εὐδὴλον ὡς τὸ τῆ Πολυγώνου χωρίον, τῆ κατὰ τὸν κύκλον τυγχάνει ἔλαττον. Ο. Ε. Δ.

Παραπλησίως δὲ καὶ τῶν ἴσων τὰς ἐπιφανείας σερεῶν, ἡ Σφαῖρα δειχθήσεται οὕσα τὸ περιεκτικώτατον.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

„Πᾶς Κύκλος ἴσος ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆ Κύκλου ἐστὶ περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ ἡμιδιάμετρος.

κ. 8.

Τῶν κανονικῶν Πολυγώνων τὰ περὶ τὸν Κύκλον περιγραφόμενα, καὶ τὰ Τρίγωνα, οἷς αἱ μὲν βάσεις ἴσαι ταῖς τῶν Πολυγώνων περιμέτροις εἰσὶ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ τῆ Κύκλου ἡμιδιαμέτρῳ (3), αἰεὶ ἴσα ἐσὶ. Ἀλλὰ μὲν τὰ περὶ τὸν Κύκλον ἐς ἄπειρον περιγραφόμενα Πολύγωνα, εἰς τὸν Κύκλον τέως αὐτὸν (4) ἀπολήγουσιν· ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ Τρίγωνα (ὡς αὐτίκα δειχθήσεται) τὰ βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν τῆ περιγεγραμμένη Πολυγώνου περίμετρον, ὕψος δὲ τὴν τῆ Κύκλου ἡμιδιάμετρον αβ ἐπίγε τὸ Τρίγωνον, ὃ βάσις μὲν ἡ Περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ αβ Ἡμιδιάμετρος· ὁ ἄρα Κύκλος (5) καὶ τὸ Τρίγωνον, ὃ βάσις μὲν ἡ Περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ αβ Ἡμιδιάμετρος, ἴσα ἐσὶ.

Ὡς δὲ τὰ ὑπὸ τε τῆς περιμέτρου τῆ Πολυγώνου, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆ Κύκλου Τρίγωνα, ἐπὶ τὸ ὑπὸ τε τῆς περιφέρειας, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου ἐστὶν ἀπολήγον, ὥδε δεικνύμι.

Τὰ ὑπὸ τε τῆς περιμέτρου τῆ περιγεγραμμένη Πολυγώνου, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆ Κύκλου αβ Τρίγωνα, ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς περιφέρειας τε καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου αβ Τρίγωνον, ὡς ἡ βάσις (6) πρὸς τὴν βάσιν, τατέσιν ὡς ἡ τῆ Πολυγώνου περίμετρος πρὸς τὴν Περιφέρειαν, κοινῇ τῇ ὕψει αὐτοῖς τυγχάνοντες· ἡ δὲ δὴ τῆ Πολυγώνου περίμετρος, ἐπ' αὐτὴν δὴ τὴν περιφέρειαν τέως (7) ἀποτελεστέα· καὶ τὰ Τρίγωνα ἄρα εἰς τὸ Τρίγωνον αὐτὸ ἀπολήξουσιν.

(1) Πόρ. Γ'. (2) Ἐκ τῆς Προτ. τῆς ἐν χειρσί. (3) Διὰ τὴν πρὸ ταύτ. (4) Γ. Πρὸτ. τῇ παρόντ. (5) Α. τῇ παρόντ. (6) Α. τῇ ε'. (7) Γ. τῶν Ἀρχιμ.

Πορίσματα.

Α'. Ἐκ δὲ τῆς παρήσις, καὶ τῆς ΜΑ' τῇ α' Βιβλίᾳ, μᾶλλον δὲ ἐκ ταύ-
τις, καὶ τῇ Πορίσμ. τῇ μετὰ τὴν ΜΒ' τῇ α' Βιβλ. φανερόν, ὅτι τὸ Ὀρ-
θογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἢ γὰρ τὸ ὑπὸ τῆς
διαμέτρου καὶ τῆς τεταρτημορίου περιφερείας, ἢ τέως τὸ ὑπὸ τε τῇ τεταρ-
τημορίᾳ τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ὁλοχερῆς περιφερείας, ἴσον τῷ Κύκλῳ ἐστὶ
τὸ δὲ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου, καὶ τῆς ὅλης περιφερείας, ἢ
γὰρ τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας, διπλάσιον τῷ Κύκλῳ ἐστὶ
τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ὅλης διαμέτρου, καὶ τῆς ὅλης περιφερείας, τετραπλάσιον τῷ
Κύκλῳ ἐστὶ.

Β'. Ἐστὶ δὲ ὁ Κύκλος πρὸς τὸ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον Τετράγωνον, α. 9.
ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια γδε πρὸς τὴν διάμετρον· πρὸς δὲ δὴ τὸ Τετράγωνον
τὸ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον ἔστιν, ὡς τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας πρὸς
τὴν διάμετρον, ἢ γὰρ ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν δις διάμετρον· πρὸς δὲ
τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου, ὡς ἡ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον.

Τὸ γὰρ Ὀρθογώνιον, τὸ ὑπὸ τε τῆς ἡμιπεριφερείας γδε, καὶ τῆς ἡμι-
διαμέτρου γα, ἥτοι γζ (τῆτέστιν (1) αὐτὸς ὁ Κύκλος), ἐστὶ πρὸς τὸ Ὀρθογώ-
νιον γζη, τὸ ὑπὸ ζη καὶ ης (ὁπερ ἐστὶ (2) πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸν
Τετράγωνον), ὡς (3) ἡ γδε ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ζη, ἢ γὰρ τὴν γε διά-
μετρον. Ο. Η. τὸ Α'.

Ταύτητοι ἔστιν ὁ Κύκλος πρὸς τὸ δις Ὀρθογώνιον ηζγε, τῆτέστι πρὸς τὸ
ΖΘ Τετράγωνον τὸ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον, ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια γδε,
πρὸς τὴν δις διάμετρον γε. Ο. Η. τὸ Β'.

Καὶ ἄτως ἔστιν ὁ Κύκλος πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῇ περιγεγραμμένῃ περὶ
αὐτὸν Τετραγώνῳ, τῆτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου Τετράγωνον, ὡς ἡ
ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον, εἴτεν ὡς ἡ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμε-
τρον. Ο. Η. τὸ Γ'.

Γ'. Ἐκ τῇ Α'. πορίσματος, διὰ τεταρτημορίᾳ μηχανικῶς ἐνὶ λαβεῖν Ὀρ-
θογώνιον, ἢ Τετράγωνον ἴσον Κύκλῳ, ὃς ἂν ἀπὸ τῆς αὐτῆς τῷ τεταρτημο-
ρίῳ ἡμιδιαμέτρου ἢ καταγεγραμμένον· κἀντεῦθεν ὁ Κύκλος παντὸς τετραγω-
νισμοῦ μηχανικῶς ληφθήσεται. Τὸ γὰρ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τεταρτημορίου
τόξου (4), καὶ τῆς διαμέτρου, ὅθεν δὴ καὶ τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς μέσης (5)

(1) Α. Πόρ. (2) Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν ε' καὶ Ζ'. τῇ δ'. (3) Α. τῇ ε'. (4) Πόρ. Α'.
(5) ΙΓ. καὶ ΙΖ. τῇ ε'.

ἀναλόγῃ, τῆς μεταξὺ τῆς τόξε καὶ τῆς διαμέτρου, τῷ ἀπὸ τῆς αὐτῆς τῷ τεταρτημορίῳ ἡμιδιαμέτρῳ Κύκλῳ συνεξισῶνται. Διὸ δὴ ἐκ τῆς, καὶ ὁποῦν ἑτέρῳ δοθέντι Κύκλῳ ὁρθογώνιον, ἢ τετράγωνον ἰσον τεθείσεται, διὰ τῆς Ζ' πορίσματος τῆς Β' Προτ. τῆς β' Βιβλ.

Μηχανικῶς δὲ ληφθήσεται ἡ τῷ τεταρτημορικῷ τόξῳ ἰση Εὐθεΐα, νήματος ἢ χαρτὴς τῷ τόξῳ προσαρμοζομένη, ἢ καὶ τῆς τόξε αὐτῆς ἐπὶ τινὶ ἐπιπέδῳ πρὸς κανόνα κυλισμένη.

Π ρ ό τ α σ ι ς ς.

„Παντὸς Κύκλου ἡ περιφέρεια τὴν κατ' αὐτὸν διάμετρον, ἔλαττον μὲν ἢ τρεῖς σὺν ἐπτημορίῳ (ἦτοι $\frac{1}{8}$), πλέον δὲ ἢ τρεῖς σὺν $\frac{7}{8}$ περιεπύκνωσε.

Τῷτο δὴ τὸ θεώρημα ἀποδειξόμενος, πολύγωνα ἅττα τῶν τεταγμένων ὁ Ἀρχιμήδης προσείληψε, τὸ μὲν περὶ τὸν Κύκλον περιγεγραμμένον, τὸ δὲ εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένον, πλευρῶν 96 ὃν ἑκάτερον· εἴτ' ἀπέδειξεν, ὡς αἱ μὲν 96 πλευραὶ τῆς περὶ τὸν κύκλον, περιέχεται εἰπὶ τὴν κατ' αὐτὸν διάμετρον ἥττον ἢ τρεῖς καὶ $\frac{1}{8}$, ἐξ οὗ ἐπόμενον ἐστὶ τὴν περιφέρειαν, ὡς ἐκείνων ἦσαν ἐλάσσονα, ἔλαττον ἔτι τῆς διαμέτρου περιεκτικὴν εἶναι ἢ τρεῖς καὶ $\frac{1}{8}$. αἱ δὲ δὴ τῆς εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένης 96 πλευραὶ (καὶ δὴ καὶ ἡ περιφέρεια, ἥτις ἐκείνων μείζων ἐστὶ) τὴν κατὰ τὸν Κύκλον διάμετρον πλέον ἢ τρεῖς καὶ $\frac{7}{8}$ περιέχασιν. ἄλλ' ἢ γε τῆς τοιῆς δειξίς, πλατυτέρα ἢ ὥστε ἐπὶ τῆς παρόντος ἐξερεχθῆναι, δόξειεν ἄν.

Ἀλλὰ γὰρ ἐπεὶ λόγῃ τῆς παντὸς ἄξιον ἐστὶ τὸ θεώρημα, ὡς καὶ βίβλον περὶ αὐτῆς ὅλην τὸν Ἀρχιμήδην συγγεγραφεῖναι, ἀνατασκέυασον ἡμῶς τοῖς τῶν Γεωμετρικῶν Διασώταις, παραλειφθῆναι ἐν ταῖς, ἃς ἂν ὁρθῶς ἔχειν μοι δοκεῖ. Ταύτητοι καὶ τὴν ἀρχιμήδειον τέττα κατασκευὴν, ἣν τοῖς τῆς μεγάλης Βαρρόβιος εἰχοντες ἴχουσιν ἐκτιδέμεθα, λαβὼν ἔχε.

κ. 10.

Μέρος Α'. Ἡ παντὸς Κύκλου περίμετρος, τὸ τριπλὴν τῆς αβ διαμέτρου ὑπερέχει ὑπεροχῇ ἐλάσσονι, ἢ κατὰ τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς αὐτῆς διαμέτρου.

Ἐστω γ τὸ τῆς Κύκλου κέντρον, καὶ αδ (τῇ ἡμιδιαμέτρῳ αγ ἰση (1)) πλευρὰ τῆς Ἐξαγώνου τῆς κανονικῆς, ὥστε ἂν τῷ Κύκλῳ ἐγγράφοιτο· καὶ ἔσαι ἡ ὑπὸ αγδ (2) ἐκτιμώριον τεττάρων ὁρθῶν. Δίχα δὴ τετμήσθω ἡ ὑπὸ αγδ διὰ τῆς γε ἀχθείσης, ὡς ἢς καὶ ἡ αδ (3) δίχα τε καὶ πρὸς ὁρθὰς κατὰ

(1) Πόρ. Α. τῆς ΙΕ. τῆς δ'. (2) Κς. τῆς γ'. καὶ Α. Πόρ. τῆς ΔΓ. τῆς ε'. (3) Α' εἰς Γ. τῆς Σχολ. τῆς Κς. τῆς α'.

τὸ σ τμηθήσεται. Προαχθήτω δὲ ἡ γε, εἰς ὃ ἀπαντήσῃ τῇ εα ἀπτομένη τῇ Κύκλῳ κατὰ τὸ α· καὶ κατὰ συνεχῆ τῶν πρὸς τῷ γ Γωνιῶν διχοτομίαν, ἀχθήτωσαν πρὸς τὴν ἀπτομένην αἱ γζ, γη, γθ, γκ, ὡς εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ αγκ = 2 αγε = 4 αγζ = 8 αγη = 16 αγθ = 32 αγκ. Εἴη δ' ἂν ἄτως ἡ ὑπὸ αγθ (ἦτοι αἱ 2 ὑπὸ αγκ) = $\frac{1}{96}$ (τῷ τῶν ἐννενηκοσὸν ἑκτημόριον) τῶν τεσσάρων ὀρθῶν· καὶ εἰς ἐπὶ τῆς ἀπτομένης προαχθείσης ληφθῇ αλ = ακ, καὶ ἐπιζευχθῇ γλ, ἔσαι αγκ = ακ (1). Ταύτητοι καὶ λγκ τῆς ακ Γωνίας διπλασίων, τῷ τῶν ἐπὶ τῇ ὑπὸ αγθ, ἦτοι $\frac{1}{96}$ τεττάρων ὀρθῶν. Ἡ δὲ δὴ λκ Εὐδεία τῇ τεταγμένη σχήματος, οὗ πλευραὶ ἐξ ἐπὶ ἐννενηκόντα, ὃ ἂν περὶ τὸν Κύκλον περιγραφείη, Πλευρὰ οὖσα ἐσὶν· ὥστε καὶ ἡ λκ ἐννενηκοντάκις ἐξάκις ληφθείσα, τῆς τῇ Κύκλῳ περιφερείας (2) μείζων ἔσαι. Εἰ τοίνυν δειχθείη τὰς 96 λκ ἅμα ἐλάσσονας εἶναι τῆς τρις ληφθείσης διαμέτρου αβ σὺν $\frac{1}{2}$ · ἔσαι δὴ πάντως καὶ ἡ τῇ Κύκλῳ περιφέρεια ἐλάσσων τῆς τρις ληφθείσης διαμέτρου αὐτῇ σὺν $\frac{1}{2}$.

Ὁμοίων ὄντων τῶν Τριγώνων γεα, γασ (3), ἔσαι γε : εα :: γα : ασ· ἀλλὰ γα = (4) 2 ασ, ἄρα γε = 2 εα· ἐπεὶ δέ τοι ἡ ὑπὸ αγε δίχα τέτμηται διὰ τῆς γζ (5), ἔσαι εγ : γα :: εζ : ζα· καὶ ἐν συνεδίσει εγ + γα : γα :: εα : ζα, καὶ ἐναλλάξ εγ + γα : εα :: γα : ζα· ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ ζγ + γα : ζα :: γα : ηα, καὶ ηγ + γα : ηα :: γα : θα, καὶ τελευταῖον θγ + γα : θα :: γα : κα.

Κεῖθω εγ = 306, ἔσαι εγ^T = 93636, ἡ δὲ δὴ (6) εα = 153· ὥστε εα^T = 23409, καὶ γα^T = (εγ^T (7) — εα^T = 93636 — 23409) 70227· ἀλλὰ $\sqrt{70225} = 265$ · ἄρα γα μείζων ἐστὶν ἢ ὅσον 265· καὶ εγ + γα μείζων ἢ 306 + 265 = 571· Ἐπεὶ δέ τοι εγ + γα : εα :: γα : ζα· ὁ δὲ λόγος εγ = γα : εα (8) μείζων ἐστὶ τῇ λόγῳ 571 πρὸς 153· ἔσαι δὴ (9) καὶ ὁ λόγος γα πρὸς ζα, μείζων τῇ λόγῳ 571 πρὸς 153, τῷ τῶν (εἰς τὸ ἐκάτερον τῶν ἀριθμῶν διὰ 8 πολυπλασιάσαι) τῇ λόγῳ 4568 πρὸς 1224· Ἐάν οὖν ζα = 1224 ὑποτεθῇ, ἔσαι (10) ἡ γα μείζων ἢ ὅσον 4568.

Κεῖθω τοίνυν ζα = 1224, καὶ ἔσαι ζα^T = 1498176· καὶ ἐπεὶ γα μείζων ἢ 4568, ἔσαι γα^T μείζων ἢ ὁ ἀριθμὸς 20866624· διὸ δὴ γζ^T = ζα^T + αγ^T μείζων ἔσαι, ἢ 1498176 + 20866624, τῷ τῶν ἢ 22364800· ἀλλὰ

(1) Δ. τῷ α'. (2) Α' Ε. Β. τῶν Α' σχημ. (3) Η. τῷ ε'. (4) Ως ἀνωτ. (5) Γ. τῷ ε'. (6) Ως ἀνωτ. (7) Β. Πρόβλ. μετὰ τὴν ΜΖ. τῷ α'. (8) Η. τῷ ε'. (9) Σχολ. τῆς ΙΑ. τῷ ε'. (10) Ι. τῷ ε'.

μὴν $\sqrt{22363441} = 4729$. ἄρα $\zeta\gamma$ μείζων ἢ 4729 , καὶ $\zeta\gamma + \gamma\alpha$ μείζων ἢ $4729 + 4568$, τατέσιν ἢ 9297 . Καὶ ἐπειδὴ $\zeta\gamma + \gamma\alpha$ πρὸς $\zeta\alpha$ ἐστὶν ὡς $\gamma\alpha$ πρὸς $\eta\alpha$. ὁ δὲ τοι λόγος $\zeta\gamma + \gamma\alpha$ πρὸς $\zeta\alpha$, μείζων ἐστὶν ἢ 9297 πρὸς 1224 . ἔσαι κ ὁ λόγος $\gamma\alpha$ πρὸς $\eta\alpha$, μείζων τῷ 9297 πρὸς 1224 . ὥστε εἶγε $\eta\alpha = 1224$ ὑποτεθεῖη, ἔσαι $\gamma\alpha$ μείζων ἢ 9297 .

Κείθω τοίνυν $\eta\alpha = 1224$, καὶ ἔσαι $\eta\alpha^T = 1498176$. καὶ ἐπειδὴ $\gamma\alpha$ μείζων ἢ 9297 , ἔσαι $\gamma\alpha^T$ μείζων ἢ 86434209 . καὶ ἄτω $\gamma\eta^T = \eta\alpha^T = \gamma\alpha^T$, μείζων ἔσαι ἢ $1498176 + 86434209$, τατέσι μείζων ἢ 87932385 . ἄλλὰ $\sqrt{87928129} = 9377$. ἄρα ἡ $\gamma\eta$ μείζων ἐστὶν ἢ 9377 , καὶ $\eta\gamma + \gamma\alpha$, μείζων ἢ $9377 + 9297$, ἦτοι μείζων ἢ 18674 . Καὶ ἐπεὶ περ $\eta\gamma + \gamma\alpha : \eta\alpha :: \gamma\alpha : \theta\alpha$. ὁ δὲ δὴ λόγος $\eta\gamma + \gamma\alpha : \eta\alpha$ μείζων τῷ 18674 πρὸς 1224 , τατέσιν (εἰ τις ἐκατέρω τὴν ἡμίσειαν λάβοι) τῷ λόγῳ 9337 πρὸς 612 , ἔσαι ἄρα κ ὁ λόγος $\gamma\alpha$ πρὸς $\theta\alpha$, μείζων τῷ λόγῳ 9337 πρὸς 612 . Εἴπερ οὖν τεθεῖη $\theta\alpha = 612$, ἔσαι $\gamma\alpha$ μείζων 9337 .

Κείθω τοίνυν $\theta\alpha = 612$, κ ἔσαι $\theta\alpha^T = 374544$. ἐπεὶ δὲ ἡ $\gamma\alpha$ μείζων 9337 , ἔσαι $\gamma\alpha^T$ μείζων 87179569 , καὶ ἄτω $\gamma\theta^T = \theta\alpha^T + \gamma\alpha^T$ μείζων ἔσαι $374544 + 87179569$, τατέσι μείζων 87554113 . Ἀλλὰ $\sqrt{87553449} = 9357$. ἄρα ἡ $\gamma\theta$ μείζων ἐστὶν ἢ 9357 . καὶ $\theta\gamma + \alpha\gamma$ μείζων ἔσαι ἢ $9357 + 9337$. ἀμέλειτοι μείζων ἢ 18694 . Καὶ ἐπεὶ $\theta\gamma + \gamma\alpha : \theta\alpha :: \gamma\alpha : \kappa\alpha$. ὅτε λόγος $\theta\gamma + \gamma\alpha : \theta\alpha$ μείζων ἐστὶ τῷ λόγῳ 18694 πρὸς 612 , εἴτ' οὖν (ἐκατέρω ἡμισευθέντος) τῷ λόγῳ 9347 πρὸς 306 , ἔσαι δὴ κ ὁ λόγος $\gamma\alpha$ πρὸς $\kappa\alpha$ μείζων τῷ λόγῳ 9347 πρὸς 306 . Ἐὰν τοίνυν ὑποτεθεῖ $2\alpha\kappa$ (ὅπερ ἐστὶ $\lambda\kappa$) $= 306$, ἔσαι $2\alpha\gamma$ ἦτοι $\alpha\beta$ μείζων 9347 . ὅτε λόγος $\alpha\beta$ πρὸς 9347 , μείζων ἔσαι τῷ λόγῳ $\lambda\kappa$ πρὸς 306 . καὶ ἐπομένως ὁ λόγος $3\frac{1}{2}\alpha\beta$ πρὸς $3\frac{1}{2} \times 9347 = 29376\frac{1}{2}$, μείζων ἔσαι (1) τῷ λόγῳ $96\lambda\kappa$, πρὸς $96 \times 306 = 29376$. Οὗτος δὲ ὁ ἔσχατος λόγος ἰσότητος τυγχάνει ὢν, διὰ τὸ εἶναι $96\lambda\kappa = 29376$. ἄρα $3\frac{1}{2}\alpha\beta$ μείζων ἢ $29376\frac{1}{2}$, κ ἔστι δὲ μείζων ἢ 29376 , τατέσιν ἢ $96\lambda\kappa$. Ἡ τῷ τεταγμένη ἄρα Πολυγώνη (ὡς πλευραὶ 96) τῷ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένη περίμετρος, κ πολλῶν δὴ μᾶλλον ἢ τῷ Κύκλῳ αὐτῇ (περὶ ὃν τὰ τοιούδε Πολύγωνον περιγέγραπται) περιφέρεια, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κατὰ τὸν αὐτὸν κύκλον $3\frac{1}{2}$ διαμέτρου. Ο. Ε. Δ.

(1) ΙΕ. τῷ ε'.

Μέρος Β.

„Η τῇ Κύκλου περιφέρεια, τὴν τῇ αὐτῇ Κύκλου διάμετρον αβ τρίς
„ληφθεῖσαν, ὑπερέχει ὑπεροχῇ μείζονι, ἢ ὅσον $\frac{1}{71}$ μόρια τῶν ἐκ τῆς αὐ-
„τῆς διαμέτρου.

Ἐξω δὲ τόξον τὸ ἀδ τῆς ὅλης τῇ Κύκλου περιφέρειας ἐκτημόριον· συ-
νεχῆ δὲ διχοτομήσει γινέσθω τὸ τόξον $αδ = 2 αε, = 4 αζ = 8 αη =$
 $16 αθ$, καὶ ἔσαι τὸ τόξον $αθ \frac{1}{56}$ τῆς ὅλης περιφέρειας· ἀχθήτωσαν δὲ
εὐθεῖαι βδ, βε, βζ, βη, βθ, καὶ εὐθεῖαι αδ, αε, αζ, αη, αθ. Ἐσαι δὲ
αθ Πλευρὰ τῇ κανονικῇ σχήματος τῇ ἐκ πλευρῶν ἑξ ἐπὶ ἐννεήκοντα, ὁ-
περ ἂν εἰς τὸν κύκλον ἐγγράφοιτο, καὶ ἔπερ ἡ περίμετρος 96 αθ, τῆς τῇ
Κύκλου περιφέρειας ἐλάσσων ἐστὶ (1). Τεμνέτωσαν οὖν ἀλλήλας αἱ εὐθεῖαι
αδ, βε ἐνθα τὸ κ· διὰ δὲ τὰς ὑπὸ εβα, εαδ, τὰς ἐπὶ ἴσων τόξων, καὶ ἐ-
πομένως (2) ἴσαι, καὶ τὴν πρὸς τῷ ε κοινὴν, τὰ Τρίγωνα αβε, καε (3)
ἔσαι ὅμοια· ἐνθεντοι $αβ : ακ :: βε : εα$. Καὶ ἐν τῷ Τριγώνῳ αβδ, διὰ τὴν
κατὰ τὸ β Γωνίαν, τὴν δίχα τεμνομένην (4) ὑπὸ τῆς Εὐθείας βκ, ἔσαι
(5) $δβ : βα :: δκ : κα$ · καὶ ἐν συνθέσει $δβ + βα : βα :: δα : κα$ · καὶ ἐ-
ναλλὰξ $δβ + βα : δα :: βα : κα ::$ (6) $βε : εα$. Ὡσαύτως δὲ ἀποδειχθή-
σεται $εβ + βα : εα :: βζ : ζα$ · καὶ $ζβ + βα : ζα :: βη : ηα$ · καὶ $ηβ +$
 $βα : ηα :: βη : ηα$.

Κείσθω οὖν $βα = 1560$, καὶ ἔσαι $βα^T = 2433600$ · καὶ $δα =$ τῇ ἡμι-
διάμετρον (7) $αγ = 780$ · ὥστε $δα^T = 608400$, καὶ $δβ^T = βα^T - δα^T =$
 1825200 . Ἀλλὰ $\sqrt{1825201} = 1351$ · καὶ τοίνυν δβ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ 1351
καὶ $δβ + βα$ ἐλάσσων ἢ $1351 + 1560 = 2911$ · Ἐνθεντοι ὁ λόγος 2911
πρὸς 780, τετέστιν (εἰ τῶν ἀριθμῶν ἐκάτερος διὰ 100 πολλαπλασιασθῇ)
ὁ λόγος 291100 πρὸς 78000, μείζων ἐστὶ τῇ λόγῳ δβ + βα πρὸς δα, ἢ-
τοι τῇ βε πρὸς εα· Ἐὰν ἂν ὑποτεθῇ $εα = 78000$, ἔσαι βε ἐλάσσων 291100.

Κείσθω τοίνυν $εα = 78000$, καὶ ἔσαι $εα^T = 6084000000$ · καὶ ἐπει-
δὴ βε ἐλάσσων ἢ 291100, ἔσαι $βε^T$ ἑλαττον ἢ 84739210000· καὶ $βα^T$
 $= βε^K + εα^T$, ἑλαττον ἢ 90823210000· Ἀλλὰ μὲν $\sqrt{90826890625} =$
301375· ἄρα βα ἐλάσσων ἐστὶν ἢ 301375, καὶ $εβ + βα$ ἐλάσσων ἢ 291100
† 301375 = 592475· Ταύτητοι ὁ λόγος 592475 πρὸς 78000, τετέστιν

(1) Ἀ. ε. α. τῶν Ἀρχιμ. (2) ΚΘ. Βιβλ. Γ. (3) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῇ α. καὶ Πρὸτ.
Δ. τῇ ε. (4) ΚΘ. τῇ γ. (5) Γ. τῇ ε. (6) Ως ἄνωτ. (7) Α. Πόρις. τῆς ΙΒ. τῇ δ.

(εἴτις τὰς ἀριθμούς διὰ 324 διελόμενος, τὰ ἐντεῦθεν πηλικά διὰ 11 ἐπιπολλαπλατιάσει) ὁ λόγος 20053 πρὸς 2640, τῇ λόγῃ εβ + βα πρὸς εα, τατέσι τῇ βζ πρὸς ζα μείζων ἔσαι· καὶ εἰ τοίνυν θεήμεν ζα = 2640, ἔσαι δὴ βζ ἐλάσσων ἢ 20053.

Κεῖθω τοίνυν ζα = 2640, καὶ ἔσαι ζα^T = 6969600· καὶ ἐπειδὴ βζ ἐλάσσων ἐστὶ 20053, ἔσαι βζ^T ἔλαττον ἢ 402122809, καὶ βα^T = βζ^T + ζα^T ἔλαττον ἢ 409092409· Ἀλλὰ $\sqrt{409131529} = 20227$ · ἄρα βα ἐλάσσων ἢ 20227, καὶ ζβ + βα ἐλάσσων 40280· ὥστε ὁ λόγος 40280 πρὸς 2640, τατέσιν (εἴτις ἐκάτερον διέλοι διὰ 40, ἐπιπολλαπλασιάσει δὲ τὰ ἐντεῦθεν ἀνακύπτοντα πηλικά διὰ 6) ὁ λόγος 6042 πρὸς 396, μείζων ἐστὶ τῇ λόγῃ ζβ + βα πρὸς ζα, τατέσι τῇ βη πρὸς ηα· Ἐὰν οὖν τεθῇ ηα = 396, ἔσαι βη ἐλάσσων ἢ 6042.

Κεῖθω τοίνυν ηα = 396, καὶ ἔσαι ηα^T = 156816· καὶ ἐπειδὴ βη ἐλάσσων ἐστὶν ἢ 6042, ἔσαι βη^T ἔλαττον ἢ 36505764, καὶ βα^T = βη^T + ηα^T ἔλαττον ἢ 36662580· Ἀλλὰ $\sqrt{36663025} = 6055$ · ἄρα βα ἐλάσσων ἐστὶν ἢ 6055, καὶ βη + ηα ἐλάσσων ἢ 12097· Ἐνθεντοὶ ὁ λόγος 12097 πρὸς 396, τατέσιν (ἐκάτερον διπλασιασθέντος) ὁ λόγος 24194 πρὸς 792 μείζων ἐστὶ τῇ λόγῃ ηβ + βα πρὸς ηα, ἥτοι τῇ λόγῃ βδ πρὸς δα· Ἐὰν οὖν τεθῇ δα = 792, ἔσαι βδ ἐλάσσων ἢ 24194.

Κεῖθω τοίνυν δα = 792, καὶ ἔσαι δα^T = 627264, καὶ ἐπειδὴ βδ ἐλάσσων ἢ 24194, ἔσαι βδ^T ἔλαττον ἢ 585349636· καὶ βα^T = βδ^T + δα^T ἔλαττον ἢ 585976900· Ἀλλὰ $\sqrt{585978849} = 24207$ · ἄρα ἡ βα ἐλάσσων ἐστὶν ἢ 24207· ὅτε λόγος αδ πρὸς αβ, μείζων ἐστὶ τῇ λόγου 792 πρὸς 24207· τατέσιν (ἐκάτερον διαιρεθέντος διὰ 3) μείζων τῇ λόγου 264 πρὸς 8069· καὶ ἐπομένως ὁ λόγος 96 αδ πρὸς αβ, μείζων ἐστὶ τῇ λόγῃ 96 × 264 = 25344 πρὸς 8069· καὶ ἐπειδὴ 25344, τατέσι 25344 × 1, ὑπερέχει 25343 $\frac{2}{3}$, ὅπερ ἐστὶν 8069 × 3 $\frac{1}{3}$, ἔσαι (1) ὁ λόγος 25344 πρὸς 8069 μείζων τῇ λόγῃ 3 $\frac{1}{3}$ πρὸς 1· ὅθεν δὴ (2) ὁ λόγος 96 αδ πρὸς αβ μείζων ἐστὶ τῇ λόγῃ 3 $\frac{1}{3}$ πρὸς 1· Καὶ τοίνυν (3) τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων μείζων τῇ ὑπὸ τῶν μέσων, τατέσιν 96 αδ, ἥτις ἐστὶν ἡ περιμέτρος τῆ Πολυγώνου, ὅπερ ἂν εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφοιτο, καὶ ἐπομένως ἡ τῇ Κύκλῳ, εἰς ὃν ἂν ἐγγράφοιτο περιφέρεια, μείζων ἔσαι ἢ 3 $\frac{1}{3}$ ἢ διάμετρος αβ. Ο. Ε. Δ.

(1) Ζ. Πόρ. τῆς Ις. τῇ ε'. (2) Σχόλ. τῆς Ιδ. τῇ ε'. (3) ε. Πόρ. τῆς Ις. τῇ ε'.

Ὡς εἴπερ ἤδη εἰς Πολύγωνα τῶν πολυπλευροτέρων ἔτι τὸν κατὰ τὴν Γεωμετρίαν λογιτμὸν ἐπεκτείνουμεν, τὰ τεθέντα ὅρια ἔτι καὶ ἔτι ἂν μᾶλλον συσείλαι ἔχοιμεν πέρατος ἄνευ, καὶ ἐς ἄπειρον ἔστω τῆς ἀληθοῦς ἀναλογίας ἐγγυὺς ἵεναι, ὃ δὴ καὶ γέγονε Λεδόλφω τῷ Κεῦσονίῳ, καὶ Γκριμπεργέρῳ, καὶ Μετίῳ, καὶ Σνελλίῳ, καὶ ἄλλοις.

Ἐπεὶ δὲ δὴ (ὄρα Σχ. 2.) ἡ ἀπτομένη μοιρῶν 36 διὰ 10 πολλαπλασιαζομένη, τὴν τῇ περιγεγραμμένῃ Πενταγώνῳ περίμετρον δίδωσι, τὸ δέ τοι ἡμίτονον μοιρῶν 36 διὰ 10 πολλαπλασιαζόμενον, τὴν τῇ ἐγγεγραμμένῃ παρέχεται· ὡσαύτως δὲ ἡ μὲν τῆς ἡμιμοίρας ἀπτομένη διὰ 720 πολλαπλασιαζομένη, τὴν τῇ περιγεγραμμένῃ Πολυγώνῳ, οὗ πλευραὶ 360, τὸ δέ τοι ἡμίτονον τῆς ἡμιμοίρας διὰ 720 ἐπιπολλαπλασιαζόμενον τὴν τῇ ἐγγεγραμμένῃ, οὗ ὁμοίως πλευραὶ 360, περίμετρον συγκροτεῖ, καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον, εὐδὴλον ὅπως ἐκ τῶν καταγεγραμμένων ἤδη πινάκων τῶν τε ἡμιτόνων, καὶ τῶν ἀπτομένων, οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ εὐρεθῆναι δυνήσονται.

Κατάλογος τῶν εἰς τόδε εὐρημένων ἐπισημοτέρων Ἀναλογιῶν.

Πρώτη γοῦν ἡ κατ' Ἀρχιμήδην οὕτως ἔχουσα.

Διάμετρος 7.

Περιφέρεια 22 μείζων τῆς ἀληθοῦς.

Διάμετρος 71.

Περιφέρεια 223 ἐλάσσων τῆς ἀληθοῦς.

Καὶ γὰρ $22 = 3 \frac{1}{2}$ · καὶ $223 = 3 \frac{1}{71}$.

Οἱ μὲν οὖν λόγοι 22 πρὸς 7, καὶ 223 πρὸς 71, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπόμενον ἀναγόμενοι (ὃ δὴ γίνεταί, καθ' ὃν δὴ λόγον καὶ τὰ ἀριθμητικὰ τῶν κλασμάτων, ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομασίην ἀνακαλεῖται), λόγους δώσῃσι τὰς ἐφεξῆς δὴ τάς τε 1562 πρὸς 497, καὶ 1561 πρὸς 497.

Καὶ τεθείσης τοίνυν τῆς διαμέτρου μερῶν 497.

Ἔσται ἡ ὑπερπίπτουσα τῆς ἀληθοῦς περιφέρεια 1562.

Ἡ δὲ εἴσω πίπτουσα, καὶ τῆς ἀληθοῦς ἐλάσσων 1561.

Ὡς ἐκατέρα τῆς ἀκριβοῦς ἀληθεύσεως διενήνοχε πιλικότητι ἐλάσσουσι τῆς, ἥπερ ἂν εἴη τῆς ὅλης διαμέτρου $497 \frac{1}{71}$.

Ἐάν δὲ οἱ λόγοι 7 πρὸς 22, καὶ 71 πρὸς 223 ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπόμενον ἐπαναχθῶσι, προκύψῃσι δὴ οἱ λόγοι οὗτοι 1561 πρὸς 4906, καὶ 1562 πρὸς 4906.

Καὶ τεθείσης τοίνυν τῆς περιφερείας μερῶν 4906.

Ἔσται ἡ μὲν ἐλάττω ἀστα τῆς ἀληθοῦς διάμετρος 1561.

U u

Η δέ τοι μείζων 1562.

Ὡς ἐκατέρᾳ τῆς ἀκριβῶς ἀληθεύσεως διαμέτρου διενήνοχε πηλικότητι ἐλάσσονι τῆς, ἢ περ ἂν εἴη τῆς ὅλης περιφερείας 4968.

Ἦν δὲ δὴ Μέτιος παρέδωκεν ἀναλογίαν, μακρῶ τῆς κατ' Ἀρχιμήδην πρὸς ἀκρίβειαν ἐς διαφέρεισα κατ' ἡν,

Η μὲν Διάμετρος 113.

Η δὲ Περιφέρεια 355.

Ἀπασῶν γὰρ τῶν ἐν βραχέσιν ἀριθμοῖς παριζαμένων, ἔδερμα τῆ ἀληθῆς γίνεται ἐγγυτέρω. Ταύτη γὰρ τῆς διαμέτρου ὑποτεθείσης 10,000,000 προκύπτει ἡ περιφέρεια 31,415,929, ἡ δὲ τῆς ἀληθῆς κατὰ γε τὸν πρῶτον χαρακτήρα 9, διαφέρει ὑπεροχῇ μικρόντι μείζονι, ἢ ὅσον ἐς τῆς διαμέτρου δύο δεκατημυλλιομέρια.

Ἀλλὰ γὰρ ἐκατέρας μακρῶ τυγχάνει ἀκριβεστέρα, ἡ δισσή ἐκείνη ἡ κατὰ Λαδόλφον τὸν Κεϋσόνιον, ὧν τῆς μὲν οἱ ὅροι χαρακτῆροσι συγκείμενοι εἰσι 21, τῆς δὲ 36.

Διάμετρος.

100,00000,000000,000000.

Περιφέρεια ἡ μείζων τῆς ἀληθῆς.

314,159265,358979,323847.

Περιφέρεια ἐλάσσων τῆς ἀληθῆς.

314,159265,358979,323846.

Ἦ δὲ ἀμφοῖν τῶν περιφερειῶν διαφορὰ τῆς διαμέτρου ἐν ἐς μόνιον, οὗ παρονομασῆς ἀριθμὸς ἐκ μονάδος καὶ 20 σημείων τῆ μηδενὸς συγκροτάμενος· ἐνθεντοι καὶ ἐκατέρᾳ τῆς ἀληθῆς περιφερείας διενήνοχεῖα ἐς, πηλικότητι τῆ ρηθέντος μορίᾳ ἐλάσσονι· ἀμέλειτοι ἑκατοντάκις μυλλιονάκις μυλλιονάκις μυλλιοσῶ.

Διάμετρος.

100000,000000,000000,000000,000000,000000.

Περιφέρεια μείζων τῆς ἀληθῆς.

314159,265358,979323,846264,338327,950289.

Περιφέρεια ἐλάσσων τῆς ἀληθῆς.

314159,265358,979323,846264,338327,950288.

Ἦ δὲ ἀμφοῖν τῶν περιφερειῶν διαφορὰ, ἐν αἷς ἡ ἀληθῆς μεσιτεύει, τῆς διαμέτρου μόνιον ἐσίν, οὗ παρονομασῆς ἀριθμὸς ἐκ μονάδος καὶ 35 χαρακτῆρων μηδενικῶν συγκροτάμενος· ὃ δὲ μόνιον πρὸς γε τὴν διάμετρον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς τὴν ὅλην γῆν ψάμμα κόκκος. Οὐδὲ γὰρ ὑπὸ τοσούτων ἡ τῆς

γῆς Σφαῖρα Φάσμων συνολᾶται, ὅσα δὴ ποτε τῶν τηλικύτων μορίων ἢ διαμέτρος περιέχει.

Εἰς κενὸν ἂν ᾖ ἄντις προσωτέρω χωρήσεις, καὶ εἰς ἄπειρον χωρεῖν δυνατόν, εἰς γεωμετρικῶς συλλογιζόμενος, κατὰ τὴν ὑπὸ Σνελλίου παραδοθεῖσαν πρόχειρον μέθοδον, τὸν λόγον προαγαγεῖν ἐδελήσεις.

Τεθείσης γὰρ δὴ τῆς περιφερείας μερῶν.

1, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000.

Ἔσαι δὲ ἡ διάμετρος ὅτι ἔγγιστα μερῶν.

0, 318309, 886183, 790671, 537767, 926745, 028724.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α .

Ἐπειδὴ ἐν ἀριθμοῖς ἦττον ἀκριβέσιν εἰσὶν ἡ τῷ Κύκλῳ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον, ὡς 22 πρὸς 7, ἔσαι δὲ ὁ Κύκλος ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, πρὸς τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, ὡς 11 πρὸς 7· πρὸς δέ γε τὸ περιγεγραμμένον, ὡς 11 πρὸς 14· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον, ὡς 22 πρὸς 7· ἃ δὴ πάντα ἐκ τῷ Β'. Πορ. τῆς πρὸ ταύτης Προτ. ἐπόμενα εἰσὶ.

Ἐπεὶ δὲ ἐν ἀριθμοῖς ἀκριβεσέροισι, ἡ τῷ Κύκλῳ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον λόγον ἔχει, ὃν 355 πρὸς 113· ἔσαι δὲ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ὁ Κύκλος πρὸς μὲν τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, ὡς 355 πρὸς 226· πρὸς δὲ τὸ περιγεγραμμένον ὡς 355 πρὸς 452· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον, ὡς 355 πρὸς 113.

Ἐὰν δὲ ἄντι τῆς περιφερείας ὑποτεθῇ μονὰς, πέντε τῶν μηδενικῶν σημείων ἑαυτῇ ἐπόμενα φέρῃσα, ἔσαι ὁ Κύκλος πρὸς μὲν τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ὡς 100000 πρὸς 63662· πρὸς δὲ τὸ περιγεγραμμένον ὡς 100000 πρὸς 127324· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ὡς 100000 πρὸς 31831 ὡς ἔγγιστα.

Ἐὰν δὲ τελευταίῃν ἄντι τῆς διαμέτρου ὑποτεθῇ μονὰς, πέντε τῶν μηδενικῶν σημείων ἐπόμενα φέρῃσα, ἔσαι ὁ Κύκλος πρὸς μὲν τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ὡς 157080 πρὸς 100000· πρὸς δὲ τὸ περιγεγραμμένον ὡς 78540 πρὸς 100000· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ὡς 314159 πρὸς 100000, ὅτι ἔγγιστα.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Αἱ δὲ δὴ τῆς ἐκτεθείσης ἀναλογίας ἐπισημύονται ἐπικαρπία, εἰσὶν αἷδε αἱ ἐφεξῆς.

„Εὐρεσις τῆς Διαμέτρου ἐκ τῆς περιφερείας.

Μιᾶς τινος τῶν ἐκτεθεισῶν ἀναλογιῶν, ὁ τῶν ὄρων μείζων πρῶτος τετάχθω, δεύτερος δὲ ὁ ἐλάττω· κείθω δὲ εἰς τρίτον ὄρον ἡ περιφέρεια· Τῶν δὲ τριῶν τετῶν κειμένων ὄρων, κατὰ τὴν χρυστὴν ἀκρίαν μέθοδον, ζητεῖσθω ὁ τέταρτος ἀνάλογον, ὅς δὴ ἡ ζητημένη ἔσται διάμετρος.

Οἷον εἰ τεθείη ἡ τῷ μεγίστῃ κατὰ γῆν Κύκλῳ περιφέρεια, μίλλιον εἶναι τῶν κατὰ Βέλγας ὠρικῶν 8640, ἢ ζητηθείη ἡ τῆς γῆς ἐντεῦθεν διάμετρος, ὕτως οἱ ὅροι τετάσσονται.

$$355 : 113 :: 8640 :$$

Καὶ ἐπιπολλαπλασιασθέντος τῷ Β' τῶν ὄρων διὰ τῷ Γ', ἢ τῷ ἀνακύπτοντος διὰ τῷ πρώτῳ διαιρεθέντος, μίλλια πρόεισι Βελγικὰ 2750 $\frac{1}{4}$ εἰς τὴν γῆς διάμετρον.

„Σεσημειώσθω, ὅτι ἐξηπατῆσθαι πεφώραται ὁ Τακνέτιος ἐν τέτοις, „τῇ περιμέτρῳ τῆς γῆς μίλλια Βελγικὰ 8640 ἀποδός. Ἐκ γὰρ τῆς κατὰ „Σνέλλιον καταμετρήσεως, τῆς περιμέτρου μίλλια Βελγικὰ 6840 (ὡς ἔστι μα- „δεῖν παρὰ Οὐαρενίῳ) περιεχάσης, οὗτος ἔλαβε τὰς ἑκατοντάδας ἢ χιλιά- „δας ἀντιμετασέσας. Ἀλλὰ γὰρ ἐκ τῶν κατὰ Σνέλλιον ἀριθμῶν, ἐξέσαι τοῖς „μαθητιῶσι γυμνασίας χάριν καὶ ἑαυτοὺς ἀναλογίσασθαι, ὅσητις ἐξ ἐκείνου „δοθέντος ἡ τῆς γῆς ἀν εἴη διάμετρος.

„Εὐρεσις τῆς Περιφερείας ἐκ τῆς Διαμέτρου.

Μιᾶς τινος τῶν ἐκτεθεισῶν Ἀναλογιῶν ὁ ἐλάττω ὄρος πρῶτος τετάχθω, ὁ δὲ μείζων δεύτερος· ἡ δὲ δοθεῖσα διάμετρος εἰς τρίτον ὑποκείσθω· Κάν- τέτων δὴ τῶν τριῶν δοθέντων ὁ τέταρτος ἀνάλογον ζητεῖσθω· οὗτος γὰρ δώ- σαι τὴν ζητημένην περιφέρειαν.

Οἷον εἴπερ ἡ τῆς γῆς διάμετρος μίλλια Βελγικὰ ὠρικὰ περιέχουν ὑπο- τεθείη 2750 $\frac{1}{4}$, ζητηθείη δὲ ἡ περίμετρος, οὕτως οἱ ὅροι τετάσσονται.

$$113 : 355 :: 2750 \frac{1}{4} :$$

Καὶ ἐπιπολλαπλασιασθέντος μὲν τῷ Β' διὰ τῷ Γ', διαιρεθέντος δὲ τῷ παραγομένῳ διὰ τῷ Α', προσελύσεται μίλλια Βελγικὰ 8640, εἰς τὴν γῆς περίμετρον.

Ὡς δὲ βραχύτι λίαν ἡ περίμετρος αὕτη τῆς ἀληθοῦς ὑπερπίπτει, εἰρη- ται ἡμῖν ἀνωτέρω· ὑπεροχὴ γὰρ δηλονότι μικρῶ μείζον, ἢ ὅσον τῆς κατὰ γῆν ἡμιδιαμέτρου δύο ἐστὶ δεκαμυλλιοσημόρια, τατέσιν 9 περίπε, ἢ 10 ποσὶ Ρουλανδικοῖς, ἐξ ὧν 18000 τὸ ὠρικὸν συνίσταται μίλλιον. Ἐὰν δὲ τῶν κατὰ Λεδόλφον ἀναλογιῶν, ἢ τῇ προτέρᾳ (ἧς οἱ ὅροι ἐκ χαρακτηήρων εἰ σύγ-

κενται)· χρησώμεθα, εὐρεθήσεται ἡ περίμετρος ἀνεπαριούτως τῆς ἀληθοῦς διαφέρειν, ὃ μόνον τῆς διαμέτρου τεθείσης μιλίων Βελγικῶν 2750, ὅση ἡ τῆς γῆς, ἀλλὰ καὶ ἢν ἡ διάμετρος αὐτὴ ὑποτεθείη, ἑκατὸν εἶναι μιλιαίων ἐκ μιλίων τῶν αὐτῶν, ὅση τυχὸν ἡ τῷ σφαιρώματος διάμετρος ἐστί. Ταύτης γὰρ δὴ κειμένης προκύψει ἡ περιφέρεια τῆς ἀληθοῦς διεννηνοχεῖα πηλικότιτι ἐλάσσονι, ἢ ὅσον ποδὸς Ρ'ουλανδικῆς ἑκατοσὸν μιλιοσημόριον. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῇ εὐρέσει τῆς περιμέτρου τῆς γῆς, τῇ κατ' Ἀρχιμήδην ἀναλογίᾳ χρησώμεθα, ἢ τῶν περιφερειῶν διαφορὰ τῆς γε τῆς ἀληθοῦς μείζονος, καὶ τῆς ἐλάσσονος, ὑπὲρ τὰ 5 Βελγικὰ μίλια ἔσαι. Διὸ δὲ τῇ κατ' Ἀρχιμήδην ἀναλογίᾳ, ὅτι μὴ ἐπὶ βραχυτάτῃ μεγέθει, ἦκιστα χρῆσέον· χρῆσέον δὲ μάλλον τῇ κατὰ Μέτιον ὡς λυσιτελεστέρα, ἅτε δὲ καὶ ἐξ ὅρων οὐ πάνυ πολλῶν συγκειμένη, καὶ πλέον ἢ χιλιάκις πρὸς ἀκρίβειαν διαφερέσῃ.

„Ἡ τῷ Κύκλῳ καταμέτρησις.

Ἡ ἡμιδιάμετρος τῇ ἡμιπεριφερείᾳ ἐπιπολλαπλασιαζομένη, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Κύκλου παρέχεται· ὡς δὴλον ἐκ τοῦ Α' Πορίσμ. τῆς ε'. τοῦ παρόντος Βιβλ. Προτάσεως.

Οἷον εἰάν τὴν τῆς γῆς ἡμιδιάμετρον μιλίων οὖσαν (τῷ κλάσματος ἀμελημένῳ) Βελγικῶν 1375, διὰ τῆς ἡμιπεριμέτρου τῆς γῆς πολλαπλασιάσωμεν, ταῦτέστι διὰ μιλίων Βελγικῶν 4320, προκύψει δὲ μίλια Βελγικὰ τετράγωνα 5,940000, εἰς τὸν τῆς γῆς Κύκλον μέγιστον. Ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ κυκλικῆς εὐρέθεντος χωρίου ἀπὸ τοῦ ἀληθοῦς λαμβάνεται, εἴπερ ἡ τῆς εὐρεθείτης ἡμιπεριφερείας ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ἀληθοῦς διαφορὰ, ἐπὶ τὴν δοθείσαν ἡμιδιάμετρον ἐπιπολλαπλασιάζοιτο· ἢ γὰρ, εἴπερ ἡ διαφορὰ τῆς εὐρεθείτης ἡμιδιαμέτρου ἀπὸ τῆς ἀληθοῦς, ἐπὶ τὴν δοθείσαν ἡμιπεριφέρειαν ἐπιπολλαπλασιάζοιτο.

„Ἡ τῷ Κυκλικῷ τομέως εἰς β, ἢ εγ, ἢ

κ. λ.

„Δοθείσης τῆς τοῦ Κύκλου ἡμιδιαμέτρου αε,

„Καὶ τῇ κατὰ τὸν τομέα τέξει εβ, εγ, καταμέτρησις.

Γινέσθω ὡς 113 πρὸς 355, ὅτως (1) ἡ δοθείσα ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν τοῦ Κύκλου ἡμιπεριφέρειαν. Εἴτα ὡς αἱ μοῖραι 360 πρὸς τὰς μοῖρας τοῦ δοθέντος τόξου, ὅτως (2) ἡ ἡμιπεριφέρεια ἢ ἡδη ἐξευρεθείσα, πρὸς τὴν τῇ κατὰ τὸν τομέα τόξου ἡμίσειαν εβ, ἢ εγ. Τότε οὖν διὰ τῆς δοθείτης ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιασθέντος (3), τὸ τοῦ ζητούμενου τομέως ἐμβαδὸν ἀνακύψει.

(1) ΙΕ. τοῦ ε'. (2) Διὰ τὴν αὐτήν. (3) Γ. Πόρ. τῆς Δ. τοῦ παρόντος, καὶ Εχ. τῆς ΜΔ. τοῦ α'.

Καὶ εἴαν τὸ ἐμβαδὸν τῆ εὐθυγράμμου Τριγώνου αεγ, τῷ μείζονι τομῇ αεβη προσεδῇ, ἢ γῶν ἀπὸ τῆ ἐλάσσονος αεγῆ ἀφαιρεθῇ, παρέσαι τὸ τῆ Κύκλου τμήμα ἥτοι τὸ μείζον ἐδῆβ, ἢ τὸ ἐλάττον ἐδῆγ· τὸ δὲ τῆ δε τῆ Τριγώνου ἐμβαδὸν (1) ἐστὶ τὸ ὀρθογώνιον αδ x δε· ἐστὶ δὲ ἢ ἐδ (2) ἡμίτονον, καὶ αδ συνημίτονον τῆ τόξε εβ, εἴτ' οὖν τῆ εγ· Ἐκ τῶν τῆ Τμήματος ἄρα δοθέντων τόξων εβῆ, ἢ εγῆ, καὶ τῆς βάσεως εῆ, ἢ γῶν ἔκτε τῆς ἡμιδιαμέτρου εα, καὶ τῆς βάσεως εῆ δοθεισῶν, ἢ τέως ἔκτε τῆς ἡμιδιαμέτρου εα, καὶ τῆ τόξε εβῆ, ἢ γῶν εγῆ, εὐρεθήσονται αἱ ἐδ καὶ δε, ἐξ ὧν δὴ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆ Τριγώνου εαῆ. Ἀλλὰ γὰρ δὴ τὰ τοιαῦτα παρὰ τῆς Τριγωνομετρίας μάλισα ζητητέα.

„Η' τῶν Κυλίνδρων, καὶ τῶν Κώνων καταμέτρησις.

Ταύτην δὴ ὧδε προτίθημι, ὡς ἐκ τῆς τῆ Κύκλου καταμετρήσεως ἡρτιμένην· Ἀπας οὖν Κύλινδρος, καὶ πᾶν Πρίσμα παράγεται ἐκ τῆ ὕψους ἐπὶ τὴν βάσιν πολυπλασιαζομένου, ὁ δέτοι Κῶνος καὶ ἡ Πυραμὶς ἐκ τριτημορίου τῆ ὕψους διὰ τῆς βάσεως πολυπλασιαζομένη· τριτημόριον γὰρ τῶν τε Κυλίνδρων, καὶ τῶν Πρισμάτων εἰσὶ, τῶν βάσιν τε καὶ ὕψος ἴσων, κατὰ τὴν Γ' καὶ Ζ' τῆ 1β'. Βιβλία.

Ἐςω τοίνυν βάσις Κυλίνδρου, ἢ Κῶνος ποδῶν οὔσα 50 τετραγώνων, τὸ δὲ ὕψος ποδ. 100· καὶ πολλαπλασιασθέντων δὲ 100 διὰ 50, προκύψουσι πόδες Κυβικαὶ 5000 εἰς τὸ τῆ Κυλίνδρου σφαιρόν· πολλαπλασιασθέντων δὲ τριτημορίου τῆ ὕψους 100, τατέσι διὰ 33 $\frac{1}{3}$ τῶν 50, προκύψουσι πόδες Κυβικοὶ 1666 $\frac{2}{3}$ εἰς τὸ σφαιρόν τὸ τῆ Κῶνος.

α. 12.

„Καταμέτρησις Κῶνος κολοβῆ νηξ, δοθεισῶν τῶν παραλλήλων βάσεων 22 καὶ 33, καὶ τῆ ὕψους 10.

Εἰς ἐπίλυσιν τῆ προτεθέντος προβλήματος τὸ Λήμμα τὸ ἐφεξῆς προσληπτέον.

Ὅν ἔχει λόγον ἢ τῶν ἐν ταῖς βάσεσιν ἡμιδιαμέτρων διαφορὰ νυ — πδ, πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἡμιδιάμετρον πδ, τὸν αὐτὸν καὶ τὸ ὕψος τῆ κολοβῆς Κῶνου νδ, πρὸς τὸ ὕψος τῆ ἐνδέοντος δο. Ἀχθείσης γὰρ ἐπὶ τῆ νυο Τριγώνου τῆς δι Εὐθείας παραλλήλης πρὸς τὴν αν, ἔσαι (3) υἱ : ιν :: νδ : δο· ἀλλὰ διὰ τὸ παραλληλόγραμμον νδπ, ἔσαι (4) ιν = πδ, καὶ ἐπομένως ιω = νυ — πδ· δῆλον ἄρα τὸ προτεθέν.

(1) Σχόλ. Μ.Ε. τῆ α'. (2) Ο.ε. Γ. τῆ γ'. καὶ Α. Πόρ. τῆς Γ. τῆ γ'. (3) Β. τῆ ε'. (4) Α.Ε. τῆ α'.

Καὶ τοίνυν τῶν τριῶν δοθέντων, ῥᾶρα ὁ τέταρτος δο εὐρεθήσεται, ὅπερ ἐστὶ τὸ ὕψος τὸ τῇ ἐνδέοντος πορ. οὗ δὲ ὕψους τριτημόριον, εἴγε ἐπὶ τὴν βάσιν σσ ἐπιπολλαπλασθεῖν, δώσει δὴ πᾶ τὸ ἐνδέον πορ. Ἐῖτα ἐὰν τὸ τριτημόριον τῶν εὐθειῶν οδ + δυ, τατέσι τῇ ὕψους τριτημόριον τῇ Κῶνι ὀλοχεροῦς, ἐπιπολλαπλασιασθῇ διὰ τῆς βάσεως ζζ, δώσει δὲ τὸν Κῶνον ὀλοχερῇ νοξ. ἀφ' οὗ ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ ἐνδέον πορ, ὑπολειφθήσεται ὁ Κῶνος ὁ κολοβὸς νπεξ.

Σημειωτέον ἀλλ' οὖν, ὡς οὐ μόνον ἐπὶ τῆς τῇ ὀρθῆς, ἀλλ' οὐδὲν ἥττον καὶ πὶ τῆς τῇ σκαληνῇ κολοβῇ Κῶνι καταμετρήσεως, ἢ ἀπόδειξις συντελέσει, ὡς δῆλον ἐξ ὧν ἐν τοῖς περὶ τῆς κολοβῆς Πυραμίδος καταμετρήσεως, ἐν τῷ ΙΒ' τῶν σοιχείων εἴρεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Αἱ τῶν Κύκλων περιφέρειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ διάμετροι, ἢ αἱ ἡμιδιάμετροι. α. 13.

Τῶν γὰρ ὁμοίων πολυγώνων τῶν εἰς τὰς Κύκλους ἐγγράφεσθαι δυναμένων ἐπ' ἀπειρον, αἱ περιμέτροι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ διάμετροι (1) αζ, ιγ. Ἀλλὰ μὲν αἱ περιμέτροι τέως ἐπ' αὐτάς δὲ (2) τὰς περιφερείας ἀποτελεωσιν. ἄρα καὶ αἱ περιφέρειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ διάμετροι. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Ἡ τῇ Πρίσματος ἐπιφάνεια, τῇ τε εἰς τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένη, καὶ τῇ ἐγγεγραμμένῃ, ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῇ κυλίνδρου πλευρᾷ, ἢ δὲ βάσει ἴση τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τῇ Πρίσματος. α. 14.

Μέρος Α'. Ἡ τῇ περιγεγραμμένῃ Πρίσματος ἐπιφάνεια ἄπτεται τῇ κυλίνδρου κατὰ τὰς Εὐθείας εα, ιζ, κξ, αἵτινες εἰσὶ τῇ κυλίνδρου πλευραῖ· αἱ δὲ (τῇ κυλίνδρου ἐξ ὑποθ. ὀρθῆς ὄντος) ἐπὶ τῇ κατὰ τὴν βάσιν ἐπιπέδῳ (3) ὀρθαὶ εἰσὶ, καὶ ἐπομένως καὶ πρὸς τὰς γη, ημ, κξ: εὐθείας (4) πρὸς ὀρθὰς ἐφελήκασιν· εἰσὶ δὲ καὶ ἀλλήλαι ἴσαι, ὥστε μίαιτις ὁποιαῦν τῶν τῇ κυλίνδρου πλευρῶν ἀπάντων τῶν ὀρθογωνίων γξ, ξμ, μθ, κξ, κοινὸν ὕψωμα ἐσὶ· καὶ τοίνυν ἡ τῇ περιγεγραμμένῃ Πρίσματος ἐπιφάνεια, ἴση (5) ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τε τῆς περιμέτρου τῆς κατὰ τὸ Πρίσμα βάσεως, καὶ τοῦ κατ' αὐτὸ τὸ πρίσμα, ἢ γὰρ τὸν Κύλινδρον ὕψους, εἴτ' οὖν τῆς πλευρᾶς, περιεχομένῳ.

(1) Πόρ. Α. τῆς Α. τῇ ιβ'. (2) Γ. τῇ παρόντι. (3) Ο'ρ. Γ. τῇ ιβ'. καὶ Πρώτ. Η. τῇ ια'. (4) Ο'ρ. Γ. τῇ ια'. (5) Κατὰ τὴν Α. τῇ ε'.

Ὡς αὐτως δὲ δέικνται καὶ τὸ Β' Μέρος. Ἡ γὰρ τῇ ἐγγεγραμμένῃ Κυλίνδρῳ πλευρὰ βδ, ἢ κί, ἢ πο, κξ: κοινὸν τυγχάνει παραπλησίως ὕψος τῶν ὀρθογωνίων βδικ, ικοπ, α' τὴν τῇ ἐγγεγραμμένῃ Πρίσματος συνίστησιν ἐπιφάνειαν.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Ἡ τῆς τεταγμένης πυραμίδος, τῆς περὶ τὸν ὀρθὸν Κῶνον περιγεγραμμένης ἐπιφάνεια, ἴση ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς πυραμοειδὸς βάσεως περίμετρος ζβλδ, ὕψος δὲ ἡ τῇ Κῶνῃ πλευρὰ βη.

„Ἡ δὲ τῆς τεταγμένης πυραμίδος, τῆς εἰς τὸν ὀρθὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένης ἐπιφάνεια, ἴση ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς πυραμοειδὸς βάσεως περίμετρος, ὕψος δὲ ἡ κάθετος βξ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τῆς βάσεως ἀγομένη πλευρὰν.

96. 15.

Ἀχθήτωσαν ἐπὶ τὰς ἐπαφὰς η, κ, μ, αἱ εὐθεῖαι βη, βκ, βμ· καὶ ἔσονται αἱ εὐθεῖαι αὗται τῇ Κῶνῃ πλευραὶ, καὶ ἐκ τῆς ἀκολουθεῖ ἴσαι. Ἐπεὶ δὲ ὁ Α' ξων βα ὀρθός ἐστι (1) πρὸς τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ζκδ, ἔσαι δὲ (2) καὶ τὸ ηβα ἐπίπεδον, ἐπὶ τῇ ἐπιπέδῳ ζκδ ὀρθόν· ὥστε ἡ θη (3) κάθετος ἐστὶ πρὸς τὴν αη, ἣτις ἐστὶν ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ζκδ καὶ ηβα· καὶ ἐπομένως ἡ θη (4) ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ηβα, κἀντεῦθεν καὶ κάθετος (5) πρὸς τὴν βη· καὶ ἡ τῇ Κῶνῃ ἄρα πλευρὰ ηβ, ὕψος τῇ Τριγώνῳ ζβθ ἴσα ἐστὶ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἡ τῇ Κῶνῃ πλευρὰ, ὕψος ἔσαι καὶ τῶν λοιπῶν θβλ, λβδ, κξ: . Ἀρ' οὖν τὸ Τρίγωνον τὸ ὑπὸ τε τῆς περιμέτρου ζβλδ, καὶ τῆς τῇ Κῶνῃ πλευρᾶς συνιστάμενον, ἴσον ἐστὶ (6) τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν Κῶνον περιγεγραμμένης, ἐξαιρουμένης τῆς βάσεως. Ο. Η. τὸ Α'.

Παραπλησία δὲ καὶ ἡ τῇ Β' Μέρει ἐστὶν ἀπόδειξις.

Κείδωσαν γὰρ αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως, τῆς κατὰ τὴν κανονικὴν ἐγγεγραμμένην πυραμίδα, ταῖς πλευραῖς τῆς περιγεγραμμένης παράλληλοι· καὶ τεμνέτω ἡ πλευρὰ γι τὸ ἐπίπεδον ηβα κατὰ τὸ ο, καὶ ἐπεξεύχτω ἡ οβ· καὶ ἔσαι ἡ γι πρὸς τὸ ἐπίπεδον αοβ (7) ὀρθή, καὶ ἐπομένως πρὸς γε τὰς εὐθείας αο, βο, τὴν τε ἀπὸ τῆς κέντρος τῆς βάσεως, καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῇ Κῶνῃ (8) κάθετος· ἀλλ' ἀπασαὶ αἱ τοιαύτε εὐθεῖαι αο, αἱ ἀπὸ τῆς κέντρος πρὸς ὁποῖανδήποτε τῶν τῆς πολυγώνου τεταγμένης βάσεως πλευρῶν κάθε-

(1) Ε'ξ ὑποθ. (2) ΙΗ. τῇ ια'. (3) ΙΗ. τῇ γ'. (4) Κατὰ τὸν Δ. Ὁρ. τῇ ια'. (5) Γ. Ὁρισμ. τῇ ια'. (6) Ἰήλον ἐκ τῆς Δ. τῇ ε'. (7) Η. τῇ ια'. (8) Γ. Ὁρ. τῇ ια'.

τοι, ἴσαι (1) εἰσὶ, καὶ ἐπομένως ἐν ἅπασι τοῖς Τριγώνοις βαο, διὰ τε τὸν ἄξο-
να βα κοινόν τε ὄντα, καὶ πρὸς τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ὀρθῶς ἐφεσηκότα, καὶ
πᾶσαι αἱ Πλευραὶ αο ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶ· (2) ἔσονται δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι πᾶσαι
βο ἀλλήλαις ἴσαι· Καὶ πάντα τοῖνον τὰ Τρίγωνα, ἐξ ὧν ἡ τῆς ἐγγεγραμμέ-
νης Πυραμίδος συνίσταται ἐπιφάνεια, τὸ αὐτὸ ἔχει ὕψος, τὴν κάθετον ἀμέ-
λειτοι βο, τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς β ἐκάστω Τριγώνῳ ἐπὶ τὴν βάσιν· καὶ ἅμα
ληφθέντα (3) (ταυτὸν δ' εἰπεῖν ἡ τῆς ἐν τῷ ὀρθῷ Κῶνῳ ἐγγεγραμμένης Πυ-
ραμίδος ἐπιφάνεια) ἐξιστᾶται Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς κατὰ τὴν ἐγγε-
γραμμένην Πυραμίδα βάσεως περίμετρος, ὕψος δὲ ἡ κάθετος βο. Ο. Η. τὸ Β'.

Α' Ἰσως. Ἐπειδὴ τὰ Τρίγωνα, ἐξ ὧν ἡ τῆς ἐγγεγραμμένης Πυραμίδος
ἐπιφάνεια σύγκεται, ἀντὶ βάσεων ἔχει, τὰς τῆς τεταγμένης Πολυγώνου, ὃ
τῇ τῆς Κῶνα βάσει ἐγγράφεται, πλευρὰς, αἱ ἴσαι εἰσὶν, ἀντὶ δὲ σκελῶν τὰς
αὐτῆς τῷ ὀρθῷ Κῶνῳ ἴσας ἀλλήλαις πλευρὰς, ἔσαι δὲ τὰ τοιαῦτα Τρίγωνα
ἀλλήλοισι ἰσοπλευρὰ (4) καὶ ἰσογώνια, καὶ (ἄτε δὴ ἀλλήλοισι (5) προσημαρμό-
ζοντα) ἰσοῦψῃ. Ταῦτητοι ὡς πρότερον, τὸ τρίγωνον τὸ ὑπὸ τῷ κοινῷ ὕ-
ψει, καὶ ταῖς ἀπάντων τῶν Τριγώνων βάσει τὴν βάσιν ἴσην ἔχον, ἐξισταμέ-
νην δηλονότι τῇ τῆς ἐγγεγραμμένης Πολυγώνου περιμέτρῳ, τοῖς τοιοῖσιδε
Τριγώνοις, ταυτὸν δὲ εἰπεῖν, τῇ τῆς ἐγγεγραμμένης Πυραμίδος ἐπιφανείᾳ (6)
ἴσον εἶναι.

Π ρ ό τ α σ ι ς I.

„Η' τῆς τεταγμένης Πρίσματος, τῆς περὶ τὸν ὀρθὸν Κύλινδρον περιγε-
γραμμένης ἐπιφάνειας, ἀπολήγει (7) τέως εἰς αὐτὴν τῆς Κυλίνδρου τὴν ἐπι-
φάνειαν· καὶ ἡ τῆς τεταγμένης Πυραμίδος, τῆς περὶ τὸν ὀρθὸν Κῶνον περι-
γεγραμμένης ἐπιφάνειας, εἰς αὐτὴν τέως τὴν τῆς Κῶνα ἐπιφάνειαν ἀποτελεῖται.

Μέρος Α'. Αἱ τῶν τεταγμένων Πρίσμάτων τῶν περὶ τὸν Κύλινδρον πέ-
ρατος ἀνευ περιγραφομένων, καὶ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραφομένων ἐπιφάνειαι, διαφο-
ρὰν τέως ἔχει πρὸς ἀλλήλας, οἷα σὺν δοθείσης ἐλάσσονα, ἢ πᾶσι δὴλον ἐκ τῆς
Η', καὶ τῆς Γ' τῆς παρόντος. Πολλῷ οὖν μᾶλλον ἢ τῆς περιγεγραμμένης Πρίσ-
ματος ἐπιφάνεια, τῆς αὐτῆς τῆς Κυλίνδρου ἐπιφανείας, περὶ ὅν περιγέγραπται,
τῆς τῆς τε περιγεγραμμένης καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης μεσιτεύσεως, διαφορᾷ διοίσει,
οἷα σὺν δοθείσης ἐλάσσονα· καὶ ἀποτελεῖται ἄρα (8) ἡ τῆς Πρίσματος,
εἰς τὴν τῆς Κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, αἰετὶ μείον καὶ μείον ταύτην ὑπερέχουσα.

(1) ΙΔ. τῷ γ'. (2) Δ. τῷ α'. (3) Δῆλον ἐκ τῆς Α. τῷ ζ'. (4) Η. τῷ α'. (5)
Η. Α' εἰς τῷ α'. (6) Δῆλον ἐκ τῆς Δ. τῷ ζ'. (7) Ο' ρ. σ. τῷ ιβ'. (8) Ο' ρ. σ. τῷ ιβ'.

κ. 15.

Μέρος Β'. Ως αὐτῶς δειχθήσεται ἐκ τῆς Θ' ἢ τῆς Γ' τῆ παρόντος.

Σεσημειώσω, ὡς ἐπὶ τῶν σχημάτων αἱ ἡμίσεις τῶν τε Κυλίνδρων καὶ τῶν Κώνων διχοτομημένων παρίστανται, ἐφ' ᾧ μὴ τὴν τῶν γραμμῶν πληθύν σὺγχυσιν ἐμποιοῖν. Νοητέον γεμῖν τὰς Κυλίνδρους ἢ τὰς Κώνας ὀλοχερεῖς, ὧν τὰς μὲν τὰ Πρίσματα, τὰς δὲ αἱ Πυραμίδες περιγραφόμεναι περιέχουσιν, οὕτω γὰρ ἢ μᾶλλον σαφές, τὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας περιγραφόμενας, μείζονας εἶναι, ἐκ τῆ Β' τῶν Α'ξιωμάτων.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Α'.

Τῶν ἐφεξῆς τεττάρων προτάσεων, καὶ τινων τῶν ἐξ ἐκείνων ἐπαγομένων Πορίσμάτων, διεξοδικωτέραν τὴν δεῖξιν ἐπιδεχομένων, καὶ καθ' ὃν δὴ τρόπον διετάχθησαν ἢ δυσχερεστέραν, ἢ ἀχαρίτι ποιήσαιν τοῖς νεανίσκοις ἔδοξα, εἰ τὰς γε προτάσεις ἐκείνας, ἢ πάντα τὰ ἐξ ἐκείνων ἐπιφερόμενα πορίσματα, μεθόδῳ τινὶ κατὰ φύσιν τε ἐχέσῃ, ἢ ταύτῃ δὴ ἢ προχειροτέρῃ, ἐκ τῆς Ι' ταύτης Προτάσεως ἐπαγάγοιμι.

Πορίσματα ἐκ τοῦ Α' Μέρους τῆς Ι' Προτ. ἐπαγόμενα.

κ. 16.

Α'. Ἐντεῦθεν ἔπεται, τὴν τῆ ὀρθῆ Κυλίνδρου ἐπιφάνειαν γδ, ἴσην εἶναι ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ γβ τῆς τῆ Κυλίνδρου πλευρᾶς, ἢ βνδο τῆς περιφερείας τῆς βάσεως· αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῶν πρισμάτων, τῶν περὶ τὸν Κύλινδρον πέ-
ρατος ἄνευ περιγραφομένων, ἴσαι ἄει εἰσὶν (1) ὀρθογωνίαις, τοῖς ὑπὸ τῆς τῆ Κυλίνδρου πλευρᾶς, ἢ τῶν κατὰ τὰς πρισματικὰς βάσεις περιμέτρων περιεχο-
μέναις· Α'λλ' αἱ τοιαῦται πρισματικαὶ ἐπιφάνειαι, εἰς τὴν κυλινδρικήν (2) τέως ἐπιφάνειαν, αἵτε τῶν πρισματικῶν βάσεων περίμετροι εἰς τὴν περιφέρειαν (3) τῆς τῆ Κυλίνδρου βάσεως ἀπολήγουσιν· ἄρα ἡ τῆ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια (4) ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τε τῆς τῆ Κυλίνδρου πλευρᾶς, ἢ τῇ τῆς βάσεως πε-
ριφερείᾳ περιεχομένῳ.

Α'λλως. Προσηρμόσω τῇ τῆ Κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ χάρτης ὀρθογωνίου τοῦ σχήμα, οὗ ὕψος μὲν τὸ τῆ Κυλίνδρου, βάσις δὲ ἴση τῇ τῆς βάσεως τῆ Κυλίνδρου περιφερείᾳ, ἢ ὅγε χάρτης ἢ ἡ τῆ κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἀλλήλοις προ-

(1) Η. τῆ παρ. (2) Κατὰ τὴν παρ. (3) Γ. τῆ παρ. (4) Α. τῆ παρ.

σεφαρμόσασσι, διὸ δὴ (1) καὶ ἰσωθῆσονται. Ἐς δὲ τὸ Α' πόρ. τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως.

Β'. Ἐντεῦθεν τὰ προσήκοντα τοῖς ὀρθογωνίοις, ἢ ταῖς τῶν ὀρθῶν Κυλίνδρων ἐπιφανείαις προσήκει, εἴπερ εἰς ὕψι μὲν τοῖς ὀρθογωνίοις ὑποτάσσιν αἱ τῶν Κυλίνδρων πλευραὶ, ἀντὶ δὲ βάσεων αἱ τῶν κυλινδρικῶν βάσεων περιφέρειαι, καί ποτε δὲ ἢ αἱ διαμέτροι, αἱ τῶ κατὰ τὰς περιφερείας τὸν αὐτὸν λόγον (2) σώζουσαι. Ταῦτητοι

1. Αἱ κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι αἱ ἰσοῦσαι (3), εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν βάσεων διαμέτροι. Ἐς δὲ τὸ β' Πόρ. τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως.

2. Αἱ ἴσας ἔχουσαι τὰς βάσεις, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας (4), ὡς αἱ τῶν Κυλίνδρων πλευραὶ. Ἐς δὲ τὸ γ' Πόρ. τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως.

3. Αἱ ὅμοιαι οὖσαι, ἔσονται (5) ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν διαμέτρων τῶν ἐν ταῖς βάσεσιν. Ἐς δὲ τὸ δ' Πόρ. τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως.

4. Ὅποια δὲ ποτε δὲ, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας (6) ἐν λόγῳ συνδέτω ἐκ τῶν λόγων τῶν τε πλευρῶν, καὶ τῶν διαμέτρων. Ἐς δὲ τὸ ε' Πόρ. τῆς ΙΑ' Προτάσεως ἐφεξῆς.

5. Καὶ ἴσαι τυγχάνουσιν, ἀντιπεπόνθασιν (7) τὰς πλευρὰς καὶ τὰς διαμέτρους τῶν βάσεων· καὶ εἴπερ ἀντιπεπόνθασιν, ἴσαι εἰσὶν. Ἐς δὲ τὸ ς' τῆς ἐφεξῆς ΙΑ'.

6. Ἐὰν δὲ ἡ πλευρὰ ἐπὶ τὴν τῆς βάσεως περιφέρειαν πολλαπλασιασθῇ, προκύψει δὴ (8) τὸ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας χωρίον. Ἐς δὲ τὸ ζ' Πόρ. τῆς προτ. τῆς ἐφεξῆς.

Γ'. Ἡ τῇ ὀρθῇ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια γδ, εἰς πρὸς τὴν βάσιν βν, ὡς ἡ τῇ Κυλίνδρου πλευρὰ βγ πρὸς βο, ὅ τὸ τεταρτημόριον ἐστὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως· ἡ γὰρ τῇ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια (9) ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς βγ ἢ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως περιεχομένῳ. Ἀλλ' ἡ τῇ Κυλίνδρου βάσις (10) ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ βο, τεταρτημορίῳ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως, ἢ τῆς κατ' αὐτὴν περιφερείας· ἡ ἄρα τῇ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια (11) ὡς βγ πρὸς βο. Ἐς δὲ ἡ ιβ' Πρότ. τῶν κατωτέρω.

Δ'. Ἐνθεντοι ἡ τῇ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια ηκ, τῇ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένη, οὐπερ ἀμέλει τὸ ὕψος ηκ, ἴσον ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως

κ. 17.

(1) Αξ.Ζ. τῇ α'. (2) Ζ. τῇ παρ. (3) Α. τῇ ς'. καὶ Ζ. τῇ παρ. (4) Α. Πόρ. τῆς Α. τῇ ς'. (5) Κ. τῇ ς'. ἢ Ζ. τῇ παρ. (6) ΚΓ. τῇ ς'. (7) ΙΔ. τῇ ς'. (8) Εχθλ. τῆς ΑΔ. τῇ α'. (9) Διὰ τὸ Α. Πόρ. ἀνωτ. (10) Διὰ τὸ Α. Πόρ. τῆς Ε. τῇ παρ. (11) Α. τῇ ς'.

νη, τετραπλάσιων ἐστὶ τῆς βάσεως, τετέστι διπλάσιων ἀμφοῖν τῶν βάσεων. Διὰ γὰρ τὰς νκ = νη, ἔσαι ἡ Κυλινδρική ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν, ὡς νκ πρὸς $\frac{1}{4}$ νκ, τετέστιν ὡς 4 πρὸς 1, ὅπερ ἐστὶ τετραπλῆ τῆς βάσεως· καὶ ἐπομένως πρὸς ἀμφοτέρας τὰς βάσεις ὡς 4 πρὸς 2· ὅπερ ἐστὶ διπλάσιων τῶν βάσεων. Ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆ Κυλίνδρου εκ, τῇ περὶ τὸ ἡμισφαίριον περιγεγραμμένη, διπλάσιων ἐστὶ τῆς βάσεως, ἥτοι ἀμφοτέραις ταῖς βάσεσιν ἴση· Ἐὰν δὲ ἡ τῆ Κυλίνδρου πλευρὰ τεταρτημόριον ἢ τῆς κατὰ τὴν βάσιν διαμέτρου, ἢ τῆ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση ἔσαι τῇ βάσει. Ἐστὶ δὲ τὸ Πόρ. τὸ ἐκ τῆς IB' Προτ. ἐπιφερόμενον.

κ. 18.

Ε'. Ἐςω θη μέση ἀνάλογος, μεταξύ τῆς αβ ἡμιδιαμέτρου τῆς βάσεως, καὶ τῆς 2 βγ, ἥτοι τῆς τῆ Κυλίνδρου πλευρᾶς δις ληφθείσης, καὶ ἔσαι δὴ ὁ Κύκλος ὁ ἀπὸ ἡμιδιαμέτρου τῆς ηθ, ἴσος τῇ τῆ Κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ γδ· διὰ γὰρ τὰς αβ, ηθ, 2 βγ ::, ἔσαι ἡ βάσις βν πρὸς τὸν κύκλον ηπθ, ὡς (1) αβ πρὸς 2 βγ, τετέστιν ὡς $\frac{1}{2}$ αβ πρὸς βγ· ὅπερ ἐστὶν, ὡς (2) ἡ βάσις βν πρὸς τὴν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν γδ· ἄρ' οὖν (3) ὁ Κύκλος ηπθ τῇ τῆ Κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστίν· Αὕτη δὲ ἡ ἐφεξῆς ἐστὶ Πρότασις.

Πορίσματα ἐκ τῆ Β' Μέρους τῆς Προτάσ. ἐπιφερόμενα.

κ. 19.

ζ'. Ἡ τῆ ὀρθῆς Κώνης ἐπιφάνεια γβδ, ἐστὶν ἴση Τριγώνῳ, τῷ ὑπὸ βη τῆς τῆ Κώνης πλευρᾶς, ὡς ὕψους, καὶ ὑπὸ τῆς κατὰ τὴν βάσιν τῆ Κώνης περιφέρειᾶς γη, ὡς βάσεως περιεχομένη· τῶν γὰρ Πυραμίδων τῶν περὶ τὸν κῶνον πέραςτος ἀνευ περιγραφομένων αἱ ἐπιφάνειαι, ἡεὶ ἴσαι εἰσὶ (4) Τριγώνοις, ὧν ἡ μὲν βη τῆ Κώνης πλευρὰ τὸ ὕψος, αἱ δὲ τῶν κατὰ τὰς Πυραμίδας βάσεων περίμετροι εζ, αἱ βάσεις εἰσὶν. Ἀλλ' αἱ μὲν τοιαῖδε τῶν Πυραμίδων ἐπιφάνειαι (5), ἐπὶ τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν, αἱ δὲ τῶν κατὰ τὰς Πυραμίδας βάσεων περίμετροι, ἐπὶ τὴν κατὰ τὴν βάσιν τῆ Κώνης (6) περιφέρειαν τέως ἀπολήγουσιν· ἡ ἄρα τῆ Κώνης ἐπιφάνεια (7) ἴση ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῆ κώνης πλευρὰ, βάσις δὲ ἡ κατὰ τὴν αὐτῇ βάσιν περιφέρεια.

Αἰώως. Τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ προσηρημόθω χάρτης, κυκλόθεν πάντη ἐκείνην περιαμπέχων, ὁ δέτοι χάρτης κατ' ἐπίπεδον ἐκτανθεὶς, εἶδος ἔξει το-

(1) Β. Πόρ. τῆς IB. τῆ IB'. (2) Διὰ τὸ Γ. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (3) Θ. τῆ ε. (4) Θ. τῆ παρ. (5) Κατὰ ταύτ. (6) Κατὰ τὴν Γ. τῆ παρ. (7) Κατὰ τὴν Α. τῆ παρ.

μέωι Κύκλῳ, οὗ ἡ μὲν ἀκτὶς τῇ τῷ Κώνῃ πλευρᾷ, τὸ δὲ τόξον τῇ περιφε-
ρείᾳ τῆς τῷ Κώνῃ βάσεως (1) ἴση ἔσται. Ἀλλ' ὁ τομεὺς αὐτός (2) ἴσος ἐστὶ
Τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῷ τομέως ἀκτὶς, βάσις δὲ εὐθεῖα, τῷ τῷ τομέως
τόξῳ ἴση τυγχάνεσθαι, ἢ ὁ ταυτὸν ἔσιν, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῷ Κώνῃ πλευρᾷ,
βάσις δὲ ἡ κατὰ τὴν βάσιν τῷ Κώνῃ περιφέρεια· ἡ ἄρα τῷ Κώνῃ ἐπιφάνεια,
τῷ αὐτῷ Τριγώνῳ (3) ἴση ἔσται. Ἐστὶ δὲ τὸ Α' Πόρ. τῆς ΙΓ' Προτ.

Ζ'. Ἐνθεντοὶ καὶ τὰ τοῖς τριγώνοις προσήκοντα, ταῖς τῶν ὀρθῶν Κώνων
ἐπιφανείαις προσήκει, εἴγε εἰς ὕψη μὲν τῶν τριγώνων, ὑποτεθεῖεν αἱ τῶν
Κώνων πλευраί, εἰς δὲ βάσεις, αἱ τῶν κωνικῶν βάσεων περιφέρειαι, εἴτ' οὖν
(4) αἱ ἡμιδιάμετροι· ὥς

1. Τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν αἱ ἴσαι τὰς πλευρὰς ἔχουσιν (5) ὡς
αἱ τῶν βάσεων διάμετροι.

2. Καὶ εἰάν αἱ τῶν Κώνων βάσεις ἴσαι ᾖσιν, ἔσονται (6) αἱ ἐπιφά-
νειαί ὡς αἱ πλευραί.

3. Καὶ αἱ ὅμοιαι ἐπιφάνειαί, ἐν διπλασίονι (7) λόγῳ εἰσὶ τῶν διαμέ-
τρων τῶν ἐν ταῖς βάσεσι.

4. Καὶ ὅποιαδήποτε ληφθεῖσαι (8), εἰσὶν ἐν λόγῳ συνδέτῳ ἕκτε τῷ
λόγῳ τῶν πλευρῶν, καὶ τῷ ἐκ τῶν διαμέτρων τῶν ἐν ταῖς βάσεσι.

5. Καὶ αἱ ἴσαι οὔσαι, τὰς τε πλευρὰς (9) καὶ τὰς τῶν διαμέτρων βά-
σεις ἀντιπεπόνθασιν· Αἱ δὲ ἥτως ἀντιπεπονθεῖσαι ἴσαι εἰσὶ.

6. Τελευταῖον δὲ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια λαμβάνεται (10), ἐπιπολλαπλα-
σιαζομένης τῆς τῷ Κώνῃ πλευρᾷ διὰ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς βάσεως. Τὰ
δε εἰσὶ τὰ Πορισμάτια Β', Γ', Δ', Ε', ς, καὶ Ζ' τῆς ΙΓ' Προτάσεως.

Η'. Η' τῷ ὀρθῷ Κώνῃ ἐπιφάνεια γβδ ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν, ὡς ἡ τοῦ
Κώνῃ πλευρᾷ βγ, πρὸς τὴν τῆς βάσεως διάμετρον αγ· ἔστι μὲν γὰρ ἡ
τῷ Κώνῃ ἐπιφάνεια (11) ἴση ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς πλευρᾷ βγ καὶ τῆς
ἡμιπεριφερείας τῆς βάσεως περιεχομένῳ. Ἀλλὰ καὶ ἡ τῷ Κώνῃ βάσις (12)
ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου αγ, καὶ τῆς αὐτῆς ἡμιπερι-
φερείας· ἄρα (13) ἡ τῷ Κώνῃ ἐπιφάνεια ἔσται πρὸς τὴν βάσιν τῷ αὐτῷ,
ὡς βγ πρὸς αγ. Ἐστὶ δὲ ἡ ΙΔ' τῶν ἐπομένων.

(1) Ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Κώνῃ, καὶ τῆς τομέως τῷ Κύκλῳ. (2) Γ'. Πόρ. τῆς Δ. τῆς
παρ. (3) Δ'. Ζ. καὶ Α. τῆς α'. Βιβλ. (4) Ζ. τῆς παρ. (5) Α. τῆς ς. (6) Α. Πόρ. τῆς
Α. τῆς ς. (7) ΙΘ. τῆς ς. (8) Β. Πόρ. τῆς ΚΓ. τῆς ς. (9) ΙΒ. τῆς ς. (10) Σχόλ. τῆς
ΜΑ. τῆς α'. (11) Κατὰ τὸ ς. Πόρ. τῶν ἀνατ. καὶ τὸ Πόρ. τῆς ΜΒ. τῆς α'. (12) Α. Πό-
ρισμ. τῆς Ε. τῆς παρ. (13) Α. τῆς ς.

- κ. 20. Θ'. Κἀντεῦθεν 1. ἡ τῆ ὀρθῆ Κῶνα ἐπιφάνεια, τῆ ὑπὸ ἰσοπλευρῆ Τριγώνου περὶ τὴν κάθετον ακ περιαγομένη, τὴν γένεσιν ἔχοντος, τῆς βάσεως φτ διπλασίῳ ἐστίν· ἡ γὰρ βκ τῆ Κῶνα πλευρὰ, τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς βάσεως· αβ διπλασίῳ ἐστίν.
- κ. 17. 2. Η' τῆ Κῶνα ἐπιφάνεια, τῆ ὑπὸ ὀρθογωνίου ἰσοσκελῆς Τριγώνου εβδ, περὶ τὴν κάθετον αβ περιαγομένη, τὴν γένεσιν ἔχοντος, ἔστι πρὸς τὴν βάσιν, ὡς ἡ ἐν τῷ τετραγώνῳ διαγώνιος βδ, πρὸς τὴν πλευρὰν δα.
- κ. 17. 3. Η' τῆ ὀρθῆ κυλίνδρου ἐπιφάνεια ηκ, ἔστι πρὸς τὴν τῆ ὀρθῆ Κῶνου ηβν, τῆ ἴσιν τήν τε βάσιν καὶ τὸ ὕψος ἔχοντος, ὡς ἡ τῆ κυλίνδρου πλευρὰ νκ πρὸς $\frac{1}{2}$ βν, τὴν ἡμίσειαν τῆ Κῶνα πλευρὰν. Ἐστὶ μὲν γὰρ ἡ ἐπιφάνεια ηβν πρὸς τὴν βάσιν μι (1), ὡς βν πρὸς νφ, τατέστι πρὸς $\frac{1}{2}$ νη, ἥτοι ὡς $\frac{1}{2}$ βν πρὸς $\frac{1}{4}$ νη. Ἀλλ' ἡ βάσις μι ἐστὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ηκ, ὡς (2) $\frac{1}{4}$ νη πρὸς νκ· ἡ ἄρα (3) ἐπιφάνεια ηβν ἐστὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ηκ, ὡς $\frac{1}{2}$ βν πρὸς νκ· καὶ ἀνάπαλιν (4) ἡ τῆ κυλίνδρου ἐπιφάνεια ηκ, πρὸς τὴν τῆ Κῶνα ηβν, ὡς ἡ τῆ κυλίνδρου πλευρὰ νκ, πρὸς τὴν ἡμίσειαν πλευρὰν τῆ Κῶνα $\frac{1}{2}$ βν. Ταῦτα δὲ εἰσὶ πορίσμ. Α', Β', καὶ Γ' τῆς ΙΔ' Προτάσεως τῶν ἐφεξῆς.
- κ. 21. Γ'. Ἐςωσαν αγ, ολ, γβ $\div$, καὶ ἔσται ὁ ἀπὸ τῆς ολ ὡς ἀπὸ ἡμῶν διαμέτρου Κύκλος, ἴσος τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ γβδ. Η' γὰρ τῆ Κῶνα βάσις γη (5), ἐστὶ πρὸς τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν γβδ, ὡς αγ πρὸς γβ, τατέστιν (6) ὡς ἡ αὐτὴ βάσις τῆ Κῶνα πρὸς τὸν κύκλον οπλ· καὶ ταίνυν (7) ὁ Κύκλος οπλ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἔσται. Ἐστὶ δὲ ἡ τῶν ἐφεξῆς ΙΕ'.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν .

Τούτοις προσείθεμεν προτάσεις δύο ἐκ τῶν τῆ Γαλλιλαίου ληφθείσας.
 „ Α'. Οἱ κύλινδροι, ὧν αἱ ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς
 „ αἱ διαμέτροι τῶν βάσεων ἐπ' εὐθείας, ἢ γὰρ ὡς τὰ ὕψη τῶν κυλίνδρων
 „ ἀντιπεπονδότης.

Οἱ γὰρ κύλινδροι (8) εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις καὶ τὰ ὕψη, τατέστιν (9) ἐν διπλασίῳ λόγῳ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων, καὶ ἐν ἀπλῷ λόγῳ τῶν ὕψοτήτων. Ἀλλὰ γὰρ αἱ κυλινδρिकाὶ ἐπιφάνειαι εἰσὶν (10) ὡς αἱ διαμέτροι τῶν

(1) Η. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (2) Γ. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (3) ΚΒ. τῆ ε'. (4) Σχολ. τῆς Ις. τῆ ε'. (5) Η. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (6) Β. Πόρ. τῆς Β. τῆ β'. (7) Θ. τῆ ε'. (8) Δ'. Α. ἐν τῷ Σχολ. τῆς ΙΕ. τῆ β'. (9) Β. τῆ β'. (10) Β. Πόρ. ἀρ. Δ' τῆς Ι. τῆ παρ.

βάσεων, ἢ τὰ ὕψη τῶν κυλίνδρων· οἱ ἄρα κύλινδροι εἰσὶν ὡς αἱ τῶν βάσεων διαμέτροι, ἢ αἱ ἐπιφάνειαι (ἐὰν γὰρ ὁ τῶν διαμέτρων λόγος συντεθῇ τῷ λόγῳ τῷ ἐκ τῶν διαμέτρων ἢ τῶν ὕψων συνθέντῳ, ἀνακύψει δὴ ὁ λόγος ὁ σύνθετος, ἔκτε τῇ διπλασίονος λόγῳ τῶν διαμέτρων, καὶ ἐκ τῇ ἀπλοῦ τῶν ὕψων). Καίπερ ἴσαι τοῖνον αἱ ἐπιφάνειαι ὑποτιθέμεναι εἰσὶν, ἔσονται οἱ κύλινδροι (1) ὡς αἱ τῶν βάσεων διαμέτροι ἐπ' εὐθείας, ἢ γὰρ (2) ὡς τὰ ὕψη ἀντιπεπονθότως.

Ἀλλως. Ἐς τὸ ὕψος τὰ A, α , τῶν δὲ βάσεων διαμέτροι B, β , καὶ ἔσονται αἱ ἐπιφάνειαι ὡς (3) AB ἢ $\alpha\beta$, αἱ δὲ βάσεις (4) ὡς BB καὶ $\beta\beta$, οἱ δέ τοι κύλινδροι (5) ὡς ABB ἢ $\alpha\beta\beta$ · ἄλλ' ἐξ ὑποθέσ. αἱ κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶ, τατέστιν $AB = \alpha\beta$, ἄρα (6) $A : \alpha :: \beta : B$ · καὶ πολλαπλασιασμῷ τῶν ἡγεμένων διὰ BB , ἢ τῶν ἐπομένων διὰ $\beta\beta$, ἔσαι (7) $ABB : \alpha\beta\beta :: BB\beta : B\beta\beta ::$ (8) $B : \beta$, ἢ (9) $\alpha : A$.

Β'. Τῶν ἴσων κυλίνδρων $\zeta\delta$, $\alpha\rho$, αἱ ἐπιφάνειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ τῶν ὑψοτήτων· ταῦτα δὲ ἔστιν, ἐὰν μεταξὺ τῶν ὑψοτήτων $\nu\delta$, $\beta\rho$, μέσῃ τις ἀνάλογος τεθῇ ἡ π , ἔσαι (10) $\nu\delta$ πρὸς π (ἢ γὰρ π πρὸς $\beta\rho$), ὡς ἡ τῇ κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια $\zeta\delta$, πρὸς τὴν τῇ κυλίνδρῳ ἐπιφάνειαν $\alpha\rho$. κ. 22.

Διὰ γὰρ τὰς $\beta\rho$, π , $\nu\delta$ ἔσαι $\pi^T : \nu\delta^T$ (11) :: $\beta\rho : \nu\delta$ · ὡς (12) $\nu\tau : \mu\phi :: \zeta\nu^T : \alpha\beta^T$ · καὶ (13) $\pi : \nu\delta :: \zeta\nu : \alpha\beta$, τατέστιν (14) ὡς ἐπιφάν. $\zeta\delta$ πρὸς ἐπιφάνειαν $\alpha\rho$ · Ἀλλὰ $\nu\delta$ (ἦτοι $\beta\rho$) ἐστὶ πρὸς $\beta\rho$ (15), ὡς ἡ ἐπιφάνεια $\alpha\rho$, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν $\alpha\rho$ · ἄρα (16) δι' ἴσα $\pi : \beta\rho$ (ἦτοι $\nu\delta : \pi$) :: ἐπιφάν. $\zeta\delta$: ἐπιφάν. $\alpha\rho$.

Ἀλλως. Ἐὰν μεταξὺ τῶν ὑψοτήτων A, α τεθῇ μ μέση ἀνάλογος, ὥστε δὲ B, β τῶν βάσεων διαμέτροι ὡς ἀνωτέρω, ἔσονται αἱ βάσεις ὡς BB , $\beta\beta$, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ὡς AB , $\alpha\beta$, οἱ δὲ κύλινδροι ὡς ABB , $\alpha\beta\beta$ · καὶ ἐπεὶ οἱ κύλινδροι ἴσοι εἰσὶ, τατέστιν $ABB = \alpha\beta\beta$, ἔσαι $AB : \alpha\beta :: \beta : B$ · καὶ ὅτι (17) $\beta\beta : BB :: A : \alpha$, ἔσαι (18) $\beta : B :: A : M$, καὶ $AB : \alpha\beta :: A : M$. Ο. Ε. Δ.

- (1) Γ. Ορ. τῷ ε'. ἢ Ορ. Ε. τῷ ε'. (2) Ἀρ. 5. τῷ β'. Πορ. τῆς Ι. Προτ. τῇ παρ. (3) Ἀρ. 4. Πορ. Β. τῆς Ι. τῇ παρ. (4) Β. τῷ β'. (5) Ἀρ. Α. ἐν τῷ Σχολ. μετὰ τὴν ΙΕ. τῷ β'. (6) Ιε. τῷ ε'. (7) Δ. τῷ ε'. ἢ γὰρ Αἰμ. Α. τῷ β'. μέρος τῷ ε'. Βιβλ. (8) ΙΕ. τῷ ε'. (9) Ως ἀνωτ. (10) Ορ. Ι. τῷ ε'. (11) Σχολ. τῆς Κ. τῷ ε'. (12) ΙΕ. τῷ β'. (13) ΑΕ. τῷ ε'. (14) Ἀρ. Ι. τῷ β'. Πορ. τῆς Ι. τῇ παρ. (15) Ἀρ. Β. τῷ β'. Πορίσμ. τῆς Ι. τῇ παρ. (16) ΚΒ. τῷ ε'. (17) ΙΕ. τῷ β'. (18) Ορ. Ι. τῷ ε'. ἢ Σχολ. τῆς Κ. τῷ ε'.

Π ό ρ ι σ μ α.

Κάντεῦθεν τὸ ὑπέρβραχυ τῶν μορίων, ἐξ ὧν τὰ φυσικὰ τῶν σωμάτων σύγκειται, ὁπώσῃ τῇ διανοίᾳ ἐφικέσθαι ἐσίν· Ἐῶ ζδ κύλινδρος ἀργυρᾶς, περιεχρυσωμένος κατ' ἄκραν τὴν ἐπιφάνειαν, χρυσοῖς ὑμέσι περιεκαλυμμένην· ὃν δὴπε κύλινδρον οἱ χρυσοχοῶντες εἰς χρυσὸν μίτον, ἀμύδιτον ὅσου μήκος ἐλαύνουσιν. Ἐῶι μὲν γὰρ τὸ ὕψος τῆς κυλίνδρου ζδ, πρὸς τὸ μήκος τῆς μίτης, ὡς 1 πρὸς 115600, ἐν οἷς ἡ μέση ἀνάλογον, εἴτ' οὖν 115600 ἐστὶ 340· καὶ οὕτως ὁ χρυστὴς ὑμῆν, ὑφ' ἧς περικαλύπτεται ἡ τῆς μίτης ἐπιφάνεια, 340κις λεπτοτέρα τῆς χρυσῆς ὑμένας, ὑφ' οὗ ἡ τῆς κυλίνδρου ἐπιφάνεια ζδ περιεκαλύπτο. Ὅρα Ρ'ωαήλτ. φυσ. μέρ. Α' Κεφ. Θ' Τμήμ. ΙΑ'.

Λῆμμα πρὸς τὸ ἐξῆς.

κ. 23. Ἐῶσαν αβ, γδ, εζ ἀνάλογον· καὶ ἔσω ἡ κβ ἡμίσεια τῆς αβ, ἡ δὲ εη διπλασίον τῆς εζ, καὶ ὅτως ἔσονται καὶ αἱ κβ, γδ, εη ἀνάλογον.

Ἡ γὰρ κβ εὐθεία ἐστὶ πρὸς τὴν αβ, ὡς (1) ἡ εζ πρὸς τὴν εη· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ κβ καὶ εη (2), ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογώνιῳ τῷ ὑπὸ αβ καὶ εζ· Ἀλλὰ γὰρ τόδε (3) ἴσον ἐστὶ τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ γδ, ἄρα καὶ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ κβ καὶ εη, ἴσον ἐστὶ τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ γδ· καὶ τοῖνυν (4) κβ, γδ, εη ἀνάλογον εἰσὶ.

Ἀλλως. κβ : αβ :: (5) εζ : εη· ἀλλ' αβ : γδ :: (6) γδ : εζ, ἄρα ἐξ ἴσου τεταραγμένως (7) κβ : γδ :: γδ : εη.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

κ. 18. „Ο' Κύκλος ὁ ἀπὸ ἡμιδιαμέτρου τῆς ηθ, ἣτις ἂν μέση ἀνάλογον „εἴη μεταξὺ τῆς τε τῆς ὀρθῆς κυλίνδρου πλευρᾶς βγ, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς „βάσεως βδ, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ κυλινδρική.

Νοείδωσαν τοῖς Κύκλοις αβν, ηπθ περιγεγραμμένα εἶναι ὁμοειδῆ τεταγμένα πολύγωνα, καὶ διὰ τῆτο ὅμοια τὰ νμ καὶ ρσ· ἐπὶ δὲ τῆ νμ πολυγώνου βεξηκέναι τὸ Πρίσμα τὸ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον. Ἐπειδὴ ἂν βδ, ηθ, βγ,

(1) ΙΕ. τῆ ε'. (2) Ις. τῆ ε'. (3) ΙΖ. τῆ ε'. (4) ΙΖ. τῆ ε'. (5) ΙΕ. τῆ ε'. (6) Εξ. ὑποβ. (7) ΚΓ. τῆ ε'.

ἀνάλογόν εἰσι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἀνάλογον ἔσονται καὶ αἱ αὐτὲς (ἢ αν), $\Delta\eta$, καὶ $2\beta\gamma$, διὰ τὸ Δῆμμα· καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς αν, καὶ τῆς περιμέτρου τῶ Πολυγώνου καὶ περιεχόμενον Τρίγωνον ἴσον τῷ περιγεγραμμένῳ Πολυγώνῳ καὶ (1)· τὸ δὲ ὑπὸ τῆς βγ (ἢ ε2), καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου καὶ Ὀρθογώνιον, τῷ ἑξί (2) τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου καὶ, καὶ τῆς διπλασίας τῆς βγ Τρίγωνον, ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῷ περὶ τὸν Κύλινδρον περιγεγραμμένῳ Πρίσματι (3). Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῆς αν, καὶ τῆς περιμέτρου καὶ περιεχόμενον Τρίγωνον, ἑξί πρὸς τὸ Τρίγωνον τὸ ὑπὸ τῆς αὐτῆς περιμέτρου καὶ, καὶ τῆς διπλασίας τῆς βγ περιεχόμενον, ὡς ἡ αν πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς βγ· ἄρα καὶ τὸ Πολύγωνον καὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῷ περὶ τὸν Κύλινδρον περιγεγραμμένῳ Πρίσματι ἔσται, ὡς ἡ αν πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς βγ (4). Ἐπεὶ δὲ ἤδη δέδεικται, ὅτι αἱ αν, $\Delta\eta$, $2\beta\gamma$ ἀνάλογον εἰσὶν· ὁ λόγος ἄρα τῆς αν πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς βγ, διπλασίῳ ἑξί τῷ λόγῳ τῆς αν πρὸς τὴν $\Delta\eta$ (5). Τὸ Πολύγωνον ἄρα καὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῷ Πρίσματι λόγον ἔχει διπλασίονα τῷ τῆς αν πρὸς τὴν $\Delta\eta$. Διπλασίονα δὲ λόγον τῷ τῆς αν πρὸς τὴν $\Delta\eta$, ἔχει καὶ τὸ Πολύγωνον καὶ πρὸς τὸ αὐτῷ ὅμοιον $\Delta\eta\sigma$, ὡς ῥᾶσα συνάγεται ἐκ τῆς Α'. τῇ ΙΒ'. (ἀχθεῖσθαι γὰρ τῆς $\xi\sigma$, τὰ Τρίγωνα ανκ, $\Delta\eta\sigma$, ἐπεὶ ἔχει τὰς ὑπὸ ανκ, $\Delta\eta\sigma$ γωνίας ὀρθὰς, καὶ τὰς ὑπὸ ανκ, $\Delta\eta\sigma$ ἡμισείας τῶν ἐν τοῖς ὁμοίοις κανονικοῖς Πολυγώνοις, ἔσται ἰσογώνια τε καὶ ὅμοια· καὶ ἡ αν : $\Delta\eta$:: αν : $\Delta\eta$. Ἀλλὰ τὰ Πολύγωνα λόγον ἔχει διπλασίονα τῶν κατὰ τὰς Κύκλους, εἰς ἃς ἐγγράφεται, ἡμιδιαμέτρων ανκ, $\Delta\eta$ (6)· διπλασίονα ἄρα ἔξει (7) καὶ τῶν κατὰ τὰς Κύκλους, περὶ ἃς περιγράφεται, ἡμιδιαμέτρων αν, $\Delta\eta$). Ἀρα τὸ Πολύγωνον καὶ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τε τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Πρίσματος, καὶ πρὸς τὸ Πολύγωνον $\Delta\eta\sigma$ · ἴση ἄρα τῷ Πολυγώνῳ ἢ τῷ Πρίσματι ἐπιφάνεια (8). Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δεῖχθήσεται, ὅτι Πρισματικαὶ ἐπιφάνειαι ἄλλαι ἐπ' ἄλλαις εἰς ἄπειρον περὶ τὸν Κύλινδρον περιγεγραφομέναι, ἔσονται αἰεὶ ἴσαι Πολυγώνοις ἄλλοις ἐπ' ἄλλοις εἰς ἄπειρον περὶ τὸν Κύκλον περιγεγραφομένοις. Ἐπεὶ δὲ τέως ἀπολήγῃσιν αἱ μὲν Πρισματικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς τὴν τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνειαν (9), τὰ δὲ Πολύγωνα εἰς τὸν Κύκλον $\Delta\eta$ (10)· ἡ τῷ Κυλίνδρῳ ἄρα ἐπιφάνεια ἔσται ἴση τῷ Κύκλῳ $\Delta\eta$. Ο. Ε. Δ.

Ἐκ τῆς ἐξαιρέσεως τῆς Θεωρήματος ἔξεται λαβεῖν Κύκλον Κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ ἰσόμενον.

(1) Δ. τῷ παρ. (2) Πρίσμα. τῆς MB. τῷ α'. (3) Η. τῷ παρ. (4) Α. τῷ ε'. (5) Ορισμ. Ι. τῷ ε'. (6) Α. τῷ ιβ'. (7) ΙΔ. τῷ ε'. (8) Θ. τῷ ε'. (9) Α. τῷ παρ. (10) Γ. τῷ παρ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Α'. Η' τῷ ὀρθῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν Ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς τῷ Κυλίνδρῳ πλευρᾶς βγ, καὶ τῆς κατὰ τὴν βάσιν περιφερείας περιεχομένην.

Ἐστὶ γὰρ ὡς δέδεικται ἀνωτέρω ἡ διπλασία τῆς γβ πρὸς τὴν δι, ὡς ἡ αὐτὴ δι πρὸς τὴν βα, ἢ αὐτὸ τῷ τῷ ἐστὶν ὡς ἡ περιφέρεια π, πρὸς τὴν περιφέρειαν βν (1). Τὸ Τρίγωνον ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης, τῷ ἐστὶ τῆς διπλῆς βγ, καὶ τῆς τετάρτης, τῷ ἐστὶ τῆς περιφερείας βν περιεχόμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ Τριγώνῳ, τῷ ὑπὸ τῆς δευτέρας δι, καὶ τῆς τρίτης, τῷ ἐστὶ τῆς περιφερείας π (2). Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῆς δι καὶ τῆς περιφερείας π Τρίγωνον ἴσται τῷ τῷ κύκλῳ, (3) τῷ ἐστὶ τῇ τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνειᾳ (4). ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῆς διπλῆς βγ, καὶ τῆς περιφείας βν Τρίγωνον, τῷ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῆς βγ, καὶ τῆς περιφερείας βν Ὀρθογωνίον (5), ἴσον ἔσται τῇ τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνειᾳ. Ο. Ε. Δ.

Δῆλον ἄρα ἐκ τῷ Πορίσματος τούτου, ὅτι αἱ τῶν Ὀρθογωνίων ιδιότητες κοιναὶ εἰσὶ καὶ πρὸς τὰς ἐπιφάνειας τῶν ὀρθῶν Κυλίνδρων. Ὁθεν ἔστω

κ. 26. 27. Β'. Αἱ ἰσοῦψεῖς Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι βμ, ξν, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι βζ, ξρ.

Τὰ γὰρ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν γλ, σε, καὶ τῶν ἀλλήλαις ἴσων εὐθειῶν ζμ, εν περιεχόμενα Ὀρθογώνια, οἷς ἐξισῶνται αἱ Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι (6), εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις (7), τῷ ἐστὶν ὡς αἱ περιφέρειαι γλ, σε, ἢ τοι ὡς αἱ διάμετροι βζ, ξρ (8).

Γ'. Αἱ Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι γι, αρ, ὧν αἱ βάσεις ἴσαι, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ ὑψή τι, βρ.

Τὰ γὰρ ὑπὸ ἴσων καὶ ὑπόθεσιν περιφερειῶν δι, μξ, καὶ πλευρῶν τῶν τι, βρ περιεχόμενα Ὀρθογώνια, οἷς αἱ Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι ἐξισῶνται (9), εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τι, βρ (10).

κ. 26. 27. Δ'. Αἱ ὅμοιαι Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι βμ, ρι, λόγον ἔχουσι διπλασίονα, ἢ περ ἔχουσιν αἱ τῶν βάσεων διάμετροι βε, ξρ.

Ἐὰν γὰρ τεθῶσιν οἱ Κύλινδροι ὅμοιοι, ἔσται ἡ μζ πρὸς τὴν ιξ, ὡς ἡ βζ πρὸς τὴν ξρ (11), τῷ ἐστὶν ὡς περιφέρεια γλ πρὸς τὴν περιφέρειαν σε (12). Τοιγαρὲν καὶ τὰ Ὀρθογώνια, τὰ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν γλ, σε, καὶ τῶν πλευρῶν

(1) Ζ. τῷ παρ. (2) Πόρ. Δ. τῆς Ις. τῷ ε'. (3) Ε. τῷ παρ. (4) Διὰ τὴν ταρῶσαν. (5) Πόρ. τῆς ΚΔ. τῷ α'. (6) Πορ. Α'. (7) Δ. τῷ ε'. (8) Πρωτ. Ζ'. καὶ Σχημ. 27 καὶ 28 τῷ ΙΒ'. (9) Πορ. Α'. (10) Α. τῷ ε'. (11) Ὅρισμ. Δ. τῷ ιβ'. (12) Ζ. τῷ παρ.

μζ, ιξ περιεχόμενα, ὁμοία ἔσται (1), καὶ λόγον ἔξει διπλασίονα, οὗ περ ἔχει ἡ μζ πρὸς τὴν ιξ (2), τῷτ' ἔσιν ἡ βζ πρὸς τὴν ξρ. Ἀρα καὶ αἱ Κυλινδρिकाὶ ἐπιφάνειαι, κτ.

Ε'. Αἱ Κυλινδρिकाὶ ἐπιφάνειαι (βμ, ρι) λόγον ἔχουσι (3) πρὸς ἀλλήλας καὶ τὸ αὐτό. τὸν συγκείμενον ἔκτε τῷ λόγῳ τῶν πλευρῶν (ζμ, ιξ), καὶ τῷ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων (βζ, ξρ).

ς'. Εἰάν αἱ Κυλινδρिकाὶ ἐπιφάνειαι (αρ, ζδ) ὥσιν ἀλλήλαις ἴσαι, ἔσται καὶ 29. 30. ὡς ἡ διάμετρος αβ πρὸς τὴν διάμετρον ζν, ἥτως ἐν ἀντιπεπονηθήσει τὸ ὕψος ζη πρὸς τὸ ὕψος ρβ (4), καὶ ἀνάπαλιν.

Ζ'. Εἰ τῷ αὐτῷ πρώτῳ Πορίσματος πορίζεται τελευταῖον ἡ τῆς Κυλινδρικής ἐπιφανείας καταμέτρησις, εἰάν δηλονότι τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν τῆς βάσεως περιφέρειαν πολλαπλασιασθῇ. Εἰάν, φέρε, τεθῇ τὸ μὲν ὕψος ποδῶν 20, ἡ δὲ τῆς βάσεως περιφέρεια ποδῶν 6· πολλαπλασιασθέντων τῶν 20 ποδῶν διὰ τῶν 6, προκύψουσι τετραγωνικοὶ πόδες 120 εἰς τὴν τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνειαν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΒ'.

Η' τῷ ὀρθῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν αβν, ὡς ἡ τῷ Κυλίνδρῳ πλευρὰ (γβ) πρὸς τὴν βο, τεταρτημόριον ἦσαν τῆς κατὰ τὴν βάσιν διαμέτρου. κα. 24, 25.

Εἴσω ἡ θη μέσον λόγον ἔχουσα τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων βγ καὶ βδ· ἡ τις μέσον λόγον ἔξει (5) (9) καὶ τῶν βα (ἢ αν) 2βγ· ὁ κύκλος ἄρα θπὶ ὁ ἀπὸ ἀκτίνος τῆς θη, ἴσος ἐστὶ τῇ καμπύλῃ ἐπιφανείᾳ τῷ Κυλίνδρῳ γδ (6). Ἀλλ' ὁ κύκλος θπὶ πρὸς τὴν τῷ Κυλίνδρῳ βάσιν αβν, λόγον ἔχει διπλασίονα τῷ, ὃν ἔχει ἡ θη πρὸς τὴν αν (7), τῷτ' ἔστι τὸν αὐτόν, ὃν ἡ διπλασία τῆς βγ πρὸς τὴν ἐκ τῷ κέντρῳ βα (8), ἥτοι ἡ βγ πρὸς τὴν βο, τεταρτημόριον ἦσαν τῆς διαμέτρου· ἄρα καὶ ἡ Κυλινδρική ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν αβν, ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν βο, τεταρτημόριον ἦσαν τῆς διαμέτρου βδ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Η' ἐπιφάνεια Κυλίνδρου, ὅς ἔχει τὴν πλευρὰν ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, ἐστὶ τετραπλασία τῆς βάσεως. Εἰάν δὲ ἡ τῷ Κυλίνδρῳ πλευρὰ ᾗ τεταρτημόριον τῆς βάσεως ἴση, ἡ Κυλινδρική ἐπιφάνεια ἔσται ἴση τῇ βάσει. Δηλον ἐκάτερον ἐκ τῆς Προτάσεως.

(1) Ὁρισμ. Α. τῷ ε'. (2) Ι. τῷ ε'. (3) ΚΓ. τῷ ε'. καὶ ζ'. τῷ παρόν. (4) ΙΔ. τῷ ε'. (5) Διὰ τὸ Λημ. τὸ εἰς τὴν ΙΔ'. (6) ΙΑ. τῷ παρόντος. (7) Πορ. τῆς Β. τῷ ιβ'. (8) Διὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ τὸν Ι'. Ὁρισμ. τῷ ε'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ'.

κ. 32. 31.

Ο Κύκλος, ὃ ἢ ἐκ τῆ κέντρου ολ μέσον ἔχει λόγον τῆς τῆ ὀρθῆς Κώνης πλευρᾶς βγ, ἢ τῆς κατὰ τὴν βάσιν τῆ Κώνης διαμέτρου αγ, ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ Κώνης ἐπιφανείᾳ.

Νοεῖσθω περὶ μὲν τὰς κύκλους αγθ, οπλ, Πολύγωνα κανονικά, ἢ ὅμοια περιγεγραμμένα τὰ εζ, νι· ἐπὶ δὲ τῆ Πολυγώνου εζ Πυραμὶς ἀνεσπόμενη, ἣτις ἔσται περὶ τὸν Κῶνον περιγεγραμμένη.

Ἐπειδὴ ἔν ἐξ ὑποθέσεως ἡ αγ, ἢ ἡ αθ ἐστὶ πρὸς τὴν ολ, ὡς ἡ αὐτὴ ολ πρὸς τὴν βγ· ὁ λόγος ἄρα τῆς αθ πρὸς τὴν βγ διπλασίων ἔσται τῆ τῆς αθ πρὸς τὴν ολ (1). Ἀλλ' ὡς ἡ αθ πρὸς τὴν βγ, ὕτω τὸ ὑπὸ τῆς αθ, ἢ τῆς περιμέτρου εζ Τρίγωνον, πρὸς τὸ Τρίγωνον τὸ ὑπὸ τῆς βγ ἢ τῆς αὐτῆς περιμέτρου εζ· ὁ λόγος ἄρα τῆ ὑπὸ τῆς αθ, ἢ τῆς περιμέτρου εζ Τρίγωνου, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς βγ, ἢ τῆς αὐτῆς περιμέτρου εζ Τρίγωνον, διπλασίων ἐστὶ τῆ τῆς αθ πρὸς τὴν ολ. Ἐστὶ δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς αθ, ἢ τῆς εζ περιμέτρου Τρίγωνον, ἴσον τῷ Πολυγώνῳ εζ (2)· τὸ δὲ ὑπὸ τῆς βγ, ἢ τῆς αὐτῆς περιμέτρου εζ, ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς περιγεγραμμένης Πυραμίδος (3). Ὁ λόγος ἄρα τῆ Πολυγώνου εζ πρὸς τὴν τῆς Πυραμίδος ἐπιφάνειαν, ἐστὶν ὡσάυτως διπλασίων τῆ λόγου τῆς αθ πρὸς τὴν ολ. Ἀλλὰ μὲν ἢ ὁ λόγος τῆ Πολυγώνου εζ πρὸς τὸ ἐκ κατασκευῆς αὐτῷ ὅμοιον Πολύγωνον ιν, διπλασίων (4) ἐστὶ τῆ λόγου τῆς αθ πρὸς τὴν ολ (ὡς δεικνύται ἐκ τῶν εἰς τὴν δεξιὴν τῆς ΙΑ'. τῆ παρόντος παραληφθέντων)· τὸ Πολύγωνον ἄρα εζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τε τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Πυραμίδος, ἢ πρὸς τὸ Πολύγωνον ιν· ἴση ἄρα τῷ Πολυγώνῳ ἢ τῆς Πυραμίδος ἐπιφάνεια (5). Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δειχθήσεται, ὅτι ἐπιφάνειαι Πυραμίδων ἐπ' ἀπειρον μᾶλλον ἢ μᾶλλον πολυγώνων περὶ τὸν Κῶνον περιγεγραφομένων, ἔσονται αἰ ἴσαι Πολυγώνοις ἐπ' ἀπειρον περὶ τὸν Κύκλον οπλ περιγεγραφομένοις. Ἐπεὶ δὲ ἔχατον ἀπολήγῃσιν αἱ μὲν τῶν Πυραμίδων ἐπιφάνειαι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆ Κώνης (6)· τὰ δὲ Πολύγωνα εἰς τὸν Κύκλον οπλ (7)· ἢ ἐπιφάνεια ἄρα τῆ Κώνης (8) ἴση τῷ Κύκλῳ οπλ. Ο. Ε. Δ.

Ἐκ τῆ ἐξαιρέτε τῆς Θεωρήματος ἐξέσται λαβὴν Κύκλον Κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ἰσόμενον.

(1) Ὁρισμ. Ι. τῆ ε'. (2) Δ. τῆ παρόντος. (3) Θ. τῆ παρόντος. (4) Συνάγεται ἐκ τῆς Α'. τῆ ιβ'. (5) Θ. τῆ ε'. (6) Ι. τῆ παρόντος. (7) Γ. τῆ παρόντος. (8) Α. τῆ παρόντος.

Πορίσματα.

Α'. Η τῷ ὀρθῷ Κώνῃ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῷ κ. 31. 32. Κώνῃ πλευρᾷ (βγ), βάσις δὲ ἡ τῆς βάσεως περιφέρεια (γδ).

Εἴσω γὰρ ἡ ολ μέσον ἔχουσα λόγον τῆς τῷ Κώνῃ πλευρᾷ βγ, ἢ τῆς κατὰ τὴν βάσιν ἡμιδιαμέτρου αγ. Καὶ ἐπεὶ ἡ περιφέρεια γδ ἐστὶ πρὸς τὴν περιφέρειαν π, ὡς ἡ ἀκτὶς αγ πρὸς τὴν ολ ἀκτῖνα (1), τῷτ' ἐστὶν ὡς ἡ ολ πρὸς τὴν βγ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν· τὸ Τρίγωνον ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης, τῷτ' ἐστὶ τῆς περιφερείας γδ, ἢ τῆς τετάρτης βγ, ἴσον ἔσαι τῷ Τριγώνῳ, τῷ ὑπὸ τῆς δευτέρας, τῷτ' ἐστὶ τῆς περιφερείας π, ἢ τῆς τρίτης ολ (2), τῷτ' ἐστὶ (3) τῷ Κύκλῳ οπλ, τῷτ' ἐστὶ (4) τῇ Κωνικῇ ἐπιφανείᾳ βγδ. Ο. Ε. Δ.

Δηλον ἐκ τῶνδε τῶν Πορίσματος, ὅτι αἱ Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ὑπόκεινται τοῖς τῶν Τριγώνων νόμοις. Οὔτεν

Β'. Αἱ Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι (βαζ, ξχρ), ὧν αἱ πλευραὶ (βα, ξχ) ἴσαι, κ. 26. 27. εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι (βζ, ξρ).

Γ'. Καὶ αἱ γζτ, αφβ, ὧν αἱ βάσεις ἴσαι, εἰσὶν ὡς αἱ πλευραὶ (γζ, αφ). κ. 28. 29.

Δ'. Αἱ δὲ ἀλλήλαις ὅμοιαι (βαζ, ξρφ) λόγον ἔχουσι διπλασίονα, οὗ κ. 26. 27. περ αἱ τῶν βάσεων διάμετροι.

Ε'. Καὶ οἵαυδήποτε ἐν γένει λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας τὸν συγκεῖμενον σχ. τὸ αὐτ. ἔκτε τῷ λόγῳ τῶν πλευρῶν (βα, ξρ), ἢ τῷ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων (βζ, ξρ).

ς'. Τῶν ἴσων Κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ ταῖς διαμέτροις τῶν βάσεων· ἢ ὧν δὲ ἀντιπεπόνθασιν, ἐκείναι ἴσαι.

Δείκνυται ταῦτα πάντα ἐκ τῆ πρώτης Πορίσματος, ὥσπερ δὲ ἢ ἀνωτέρω τὰ περὶ τῆς Κυλινδρικῆς ἐπιφανείας Πορίσματα δέδεικται ἐκ τῆ ἐκείσε πρώτου Πορίσματος.

Ζ'. Μετρηθήσεται τελευταῖον ἡ τῷ Κώνῃ ἐπιφάνεια, εἴαν ἡ πλευρὰ γζ κ. 30. ἐπὶ τὴν ἡμιπεριφέρειαν τῆς βάσεως πολλαπλασιασθῇ. Οἷον εἴαν ὧσιν ἡ μὲν πλευρὰ ποδῶν 5, ἡ δὲ τῆς βάσεως περιφέρεια ποδῶν 20· πολλαπλασιασθέντων 5 διὰ 10, προκύψουσι τετραγωνικοὶ πόδες 50 εἰς τὴν τῷ Κώνῃ ἐπιφάνειαν. Πρόδηλος δὲ ὁ τῆςδείξεως λόγος ἐκ τῆ αὐτῆς πρώτης Πορίσματος.

(1) Ζ. τῷ παρόν. (2) Πόρ. Δ. τῆς Ις. τῷς ζ'. (3) Ε. τῷ παρόν. (4) Ε. τῷ παρόν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

κ. 31. 32. Η τῇ ὀρθῇ Κώνη ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν, ὡς ἡ πλευρὰ (βγ) πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον (αγ).

Ἐχέτω ἡ λο μέσον λόγον τῆς τε πλευρᾶς βγ, καὶ τῆς κατὰ τὴν βάσιν ἡμιδιαμέτρου αγ· καὶ ἔσται ὁ λόγος τῆς βγ πρὸς τὴν αγ, διπλασίων τῇ τῆς ολ πρὸς τὴν αγ (1). ὁ δὲ κύκλος ὁ ἀπὸ ἀκτίνος τῆς ολ ἐστὶν ἵσος τῇ Κωνικῇ ἐπιφανείᾳ γβδ (2). Ἀλλ' ὁ λόγος τῆς τε πρὸς τὴν τῇ Κώνη βάσιν αγδ, ἐστὶ διπλασίων τῇ τῆς ολ πρὸς τὴν αγ (3), καὶ ἐπομένως ὁ αὐτὸς τῷ τῆς βγ πρὸς τὴν αγ· καὶ ἡ Κωνικὴ ἄρα ἐπιφάνεια γβδ ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν αγο, ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν αγ. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

κ. 54. Α'. Η' ἐπιφάνεια Κώνη, ὅς ἂν ἐκ Τριγώνου ἰσοπλεύρου περὶ κάθετον τὴν κα περιενεχθέντος εἴη γεγενημένος, ἐστὶ διπλασία τῆς βάσεως (Ξτ).

Ἐστὶ καὶ γὰρ ἡ πλευρὰ κβ ἴση τῇ βδ, καὶ ἐπομένως διπλασία τῆς κατ' αὐτὴν ἡμίσεως, τῇ τ' ἐστὶ τῆς αβ, ἥτις ἐστὶν ἡμιδιάμετρος τῆς βάσεως.

κ. 48. Β'. Η' ἐπιφάνεια Κώνη, ὅς ἂν ἐκ Τριγώνου ὀρθογωνίου, καὶ ἰσοσκελῆς (τῇ εβδ) εἴη γεγενημένος, ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν, ὡς ἡ ἐν τῷ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν.

Ἀχθείσης γὰρ τῆς καθεύτου βα, ἡ ὀρθὴ γωνία β δίχα τμηθήσεται (4)· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἡ ὑπὸ αβδ· ἐστὶ δὲ ὀρθῆς ἡμίσεια καὶ ἡ ὑπὸ αδβ (5)· ἡ ἄρα αδ ἴση τῇ βα (6). Τοιγαρὶν ἡ μὲν βδ ἐστὶ διάμετρος, ἡ δὲ αδ πλευρὰ τῇ Τετραγώνῳ ακ· ἐστὶ δὲ ἡ αδ ἡμιδιάμετρος τῆς βάσεως πτ, ἅτε τῆς καθεύτου αβ δίχα τεμνέσης τὴν εδ (7)· ἐκ τούτων ἄρα καὶ τῆς παρούσης ΙΔ'. δῆλον τὸ Πόρισμα.

κ. 48. Γ'. Η' Κυλίνδρου ὀρθῇ ἐπιφάνεια (θκ) πρὸς τὴν Κώνη ὀρθῇ ἐπιφάνειαν (θβν), ἐστὶν ὡς ἡ πλευρὰ τῇ Κυλίνδρου πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς τῇ Κώνη πλευρᾶς.

Ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τῇ ὀρθῇ Κώνη θβν ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν μι, ὡς ἡ πλευρὰ βν πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον ξν (8), τῇ τ' ἐστὶν ὡς ἡ ἡμίσεια τῆς πλευρᾶς βν πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς διαμέτρου θν. Ἐστὶ δὲ ἡ βάσις μι πρὸς

(1) Ο'ρ. Ι. τῇ ε'. (2) ΙΓ. τῇ παρόντος. (3) Β. τῇ ιβ'. (4) Σχολ. Α'. τῆς Κς. τῇ ια'. (5) Πορ. ΙΑ'. τῆς ΛΒ. τῇ α'. (6) ζ'. τῇ α'. (7) Σχολ. Α'. τῆς Κς. τῇ α'. (8) ΙΔ. τῇ παρόντος.

τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Κυλίνδρου $\theta\kappa$, ὡς τὸ τεταρτημόριον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν $\nu\kappa$ πλευρὰν τῆς Κυλίνδρου (1). δι' ἴσων ἄρα ἡ Κωνικὴ ἐπιφάνεια $\theta\beta\nu$ πρὸς τὴν Κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν $\nu\kappa$, ὡς ἡ ἡμίσεια πλευρὰ τῆς Κῶνος πρὸς τὴν τῆς Κυλίνδρου πλευρὰν $\nu\kappa$. Ο. Ε. Δ.

Λήμμα εἰς τὴν ἐξῆς.

Ἐν Τριγώνῳ τῷ $\nu\pi\upsilon$ ἡχθω παρὰ τὴν $\nu\upsilon$ ἡ $\xi\delta$. Λέγω δὲ, ὅτι τὸ ὑπὸ $\alpha\kappa$. 34.
τῶν $\pi\nu$, $\nu\upsilon$ Ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $\pi\zeta$, $\xi\delta$, συνάμα τῷ ὑπὸ τῆς $\nu\zeta$,
ἢ συναμφοτέρῃ τῆς $\nu\upsilon$, $\xi\delta$.

Ἦχθω ἐπὶ τὴν πλευρὰν $\pi\nu$ κάθετος ἡ $\alpha\nu$, ἴση τῇ $\nu\upsilon$, καὶ συμπληρώσω τὸ Ὀρθογώνιον $\nu\theta$. Ἦχθω δὲ ἢ ἡ διάμετρος $\pi\alpha$. ἀπὸ δὲ τῆς σημείας ξ ἡχθω παρὰ τὴν $\alpha\nu$ ἡ $\xi\epsilon$, ἢ τεμνέτω τὴν $\pi\alpha$ κατὰ τὸ β . διὰ δὲ τῆς β ἡχθω ἡ $\gamma\zeta$ παράλληλος τῇ $\nu\pi$. Ἐπειδὴ ἂν ἡ $\alpha\nu$ ἐστὶν ἐκ κατασκευῆς ἴση τῇ $\nu\upsilon$ (ἢ (2) $\alpha\nu : \xi\beta :: \nu\pi : \xi\pi$) :: $\nu\upsilon : \xi\delta$), δῆλον ὅτι (3) ἢ ἡ $\xi\beta$ ἴση ἐστὶ τῇ $\xi\delta$. διὰ δὲ ταῦτα τὸ Ὀρθογώνιον, $\nu\theta$ ἴσον τῷ $\pi\nu\theta$. τότε $\zeta\xi$ ἴσον τῷ $\pi\xi\delta$. Λέγεται ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὰ Ὀρθογώνια $\theta\beta$, $\epsilon\gamma$, $\beta\nu$ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς $\nu\zeta$, ἢ συναμφοτέρῃ τῆς $\alpha\nu$, $\xi\beta$, τὰτ' ἐστὶ τῆς $\nu\zeta$, ἢ συναμφοτέρῃ τῆς $\nu\upsilon$, $\xi\delta$ περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ. Ὅπερ ἐστὶ πρόδηλον. εἴγε τὸ ὑπὸ τῆς $\xi\nu$, ἢ συναμφοτέρῃ τῆς $\nu\alpha$, $\xi\beta$ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ἐξισῶται τοῖς τρισὶν Ὀρθογωνίοις, λέγω δὲ τῷ τε ὑπὸ τῶν $\nu\zeta$, $\gamma\alpha$ (τὰτ' ἐστὶ τῷ χωρίῳ $\epsilon\gamma$), ἢ τῷ ὑπὸ τῶν $\nu\zeta$, $\nu\gamma$ (τὰτ' ἐστὶ τῷ χωρίῳ $\beta\nu$), ἢ τῷ ὑπὸ τῶν $\nu\zeta$, $\xi\beta$, τὰτ' ἐστὶ τῷ αὐτῷ χωρίῳ $\beta\nu$, ἐπομένως δὲ ἢ τῷ $\beta\theta$, ὅπερ ἐστὶν ἴσον τῷ $\beta\nu$. Δῆλον ἄρα τὸ προτεθέν.

Πρότασις ΙΕ'.

Ἐὰν Κῶνος ὀρθὸς Ἐπιπέδῳ τῷ $\xi\sigma\rho$ παραλλήλῳ τῇ βάσει $\nu\theta\sigma$ τμηθῇ, λέ- α . 35. 36.
γω ὅτι ὁ Κύκλος $\theta\eta\mu$, ὃ ἡ ἐκ τῆς Κέντρου $\theta\eta$ μέσον λόγον ἔχει τῇ τῆς πλευ-
ρᾶς μέρῃ $\nu\zeta$, ἢ συναμφοτέρῃ τῆς τῶν Κύκλων $\xi\sigma\rho$, $\nu\theta\sigma$ ἡμιδιάμετρον $\xi\delta$, $\nu\upsilon$,
ἴσος ἐστὶ τῇ Κωνικῇ ἐπιφάνειᾳ, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων Κύκλων $\xi\sigma\rho$, $\nu\theta\sigma$.

Ἐχέτω δὲ τὸν μέσον λόγον ἡ μὲν $\theta\zeta$ τῆς $\pi\nu$ ἢ τῆς $\nu\upsilon$. ἡ δὲ $\theta\kappa$ τῆς $\pi\zeta$
ἢ τῆς $\xi\delta$. καὶ διὰ τῶν $\theta\zeta$, $\theta\kappa$, καταγεγράφθωσαν Κύκλοι οἱ $\theta\zeta\lambda$, $\theta\kappa\tau$. Ἐσέ-
ται δὲ ὁ μὲν $\theta\kappa\tau$ ἴσος τῇ κωνικῇ ἐπιφάνειᾳ $\xi\pi\rho$ (4). ὁ δὲ $\theta\zeta\lambda$ ἴσος τῇ ἐπι-
φανείᾳ $\nu\theta\sigma$. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν $\pi\nu\upsilon$ Ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν $\pi\zeta\delta$ συνάμα

(1) IB , τῆς παρόντος. (2) Πορ. Α'. τῆς Δ. τῆς Ε'. (3) IA ἢ Θ . σὺν τοῖς Σχολ.
τῆς Ζ. τῆς Ε'. (4) IG , τῆς παρόντος.

τῷ ὑπὸ τῆς νξ, ἢ συναμφοτέρη τῆς νυ, ξδ (1) περιεχομένῳ Ὀρθογώνιῳ. Ἐπεὶ δὲ ἐκ κατασκευῆς ἡ μὲν θζ μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἐν ταῖς πν, νυ, ἡ δὲ θκ ἐν ταῖς πξ, ξδ. Ἄρα τὸ μὲν ὑπὸ τῶν πνυ Ὀρθογώνιον ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς θζ Τετραγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν πξδ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς οκ (2). Καὶ ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως ἡ θη μέσον ἔχει λόγον τῆς τε ξν, ἢ συναμφοτέρη τῆς ξδ, νυ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ξν, ἢ συναμφοτέρη τῆς ξδ, νυ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς θη Τετραγώνῳ· τὸ ἀπὸ τῆς θζ ἄρα Τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θη, θκ Τετραγώνοις· καὶ ἐπεὶ οἱ Κύκλοι εἰσὶν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων Τετράγωνα (3), ἔσεται δὴ ὁ Κύκλος θλζ τοῖς δυσὶ Κύκλοις θκτ, θημ ἴσος. Ἀλλ' ὁ Κύκλος θλζ ἐστὶν ἴσος τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ νπο (4)· ἄρα ἢ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια νπο, ἴση τοῖς δυσὶ Κύκλοις θκτ, θημ. Ἀλλὰ τὸ μέρος ξπρ τῆς ὅλης ἐπιφανείας νπο ἴσται τῷ Κύκλῳ θκτ (5)· λοιπὸν ἄρα τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων Κύκλων φφ, σσ ἐναπολαμβανόμενον τῆς Κωνικῆς ἐπιφανείας, ἴσον ἐστὶ τῷ λοιπῷ Κύκλῳ θημ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Τὸ μέτρον ἄρα τῆς μεταξὺ δύο Κύκλων ἐναπολαμβανομένης Κωνικῆς ἐπιφανείας, ἀποφέρεται ἐκ τῶν κατὰ τὰς παραλλήλων Κύκλους δοθεισῶν ἡμιδιαμέτρων (νυ, ξδ), ἢ τῆς κατὰ τὴν Κωνικὴν ταύτην ἐπιφάνειαν πλευρᾶς (νξ)· εἰάν δηλονότι τὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων ἄθροισμα νυ+ξδ ἐπὶ τὴν πλευρὰν νξ πολλαπλασιασθῇ, ἀπὸ δὲ τῆ προκύπτοντος ἢ τετραγωνικῇ ρίζᾳ ἐξαχθῇ. Ἔσεται γὰρ δὴ ὡς 113 πρὸς 355, ὅπως ἡ ρίζα πρὸς τὸν τέταρτον ὅρον, ὅτινος πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὴν ρίζαν, προκύψει ἡ ζητούμενη ἐπιφάνεια. Δείκνυται δὲ τῷτο ἔκτε τῆς ΙΖ'. τῆς ζ', καὶ ἐκ τῆ Σχολίης τῆς ζ'. τῆ παρόντος, ἢ δὴ ἢ ἐκ τῆς ΙΕ'. τῆς ιε'. (περὶ δὲ τῶν παραληφθέντων ἀριθμῶν ὅρα τὰ ἐν τῷ σχολίῳ τῆς ζ'. εἰρημμένα)

Λήμμα εἰς τὴν ἐξήκ.

κ. 37.

Αἱ εὐθεῖαι (βη, γθ), αἱ ἴσα τόξα ἐν Κύκλῳ ἐναπολαμβάνουσαι τὰ βγ, ηθ, παράλληλοι εἰσὶ.

Ἀχθείσης γὰρ τῆς γη, ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως τὰ τόξα βγ, ηθ ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, ἢ αἱ ὑπὸ βηγ, θγη ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται (6). Αἱ εὐθεῖαι ἄρα βη, γθ, παράλληλοι εἰσὶν (7). Ο. Ε. Δ.

(1) Ἐκ τῆς Λήμματος. (2) ΙΖ. τῆς ζ'. (3) Πορ. Β'. τῆς Β. τῆς ιβ'. (4) ΙΓ. τῆς παρόντος. (5) Διὰ τὴν αὐτὴν ΙΓ. (6) ΚΘ. τῆς γ'. (7) ΚΗ. τῆς α'.

Σχόλιον. Ἐντεῦθεν πορίζεται ῥάσις μέθοδος τῇ ἀπὸ τινος δοθέντος σημείν τῷ β τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ γθ παράλληλον ἀγαγεῖν τὴν βη· ὡς ἐν τῇ ΛΑ' τῷ Α'. σεσημείωται.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις.

Ἐγγεγράφω εἰς Κύκλον σχῆμα κανονικὸν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον, ἢ τὸ πλήθος τῶν πλευρῶν μετρείδω ὑπὸ τετραδὸς (α)· καὶ ἀπὸ τῆς διαμέτρου πέρατος εἰχθῶ ἡ εβ τὰς μὲν ἐλάσσας τῶν ἡμίσεων τῇ πολυγώνῃ πλευρῶν ὑποτείνουσα· τὰς δ' ἐπίσης τῇ σημείν α παρ' ἐκάτερα ἀφισαμέναις γωνίας ἐπιξευγνύωσαν εὐθεῖαι αἱ βη, γθ, δζ. Λέγω ὅτι τὸ ὀρθογωνίον τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου αε καὶ τῆς ὑποτευμένης εβ περιεχόμενον, ἴσον ἔσται τῷ ὑπομειστικῷ τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματος πλευρᾷ (τῆς αβ, ἢ τῆς βδ, ἢ ἡστισσοῦν ἄλλης) καὶ ἀπασῶν τῶν τὰς γωνίας ἐπιξευγνυσῶν εὐθειῶν βη, γθ, δζ ἅμα ληφθεῖσιν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἦχθωσαν αἱ εὐθεῖαι γη, δθ· καὶ ἐπειδὴ αἱ βη, γθ, δζ τόξα ἴσα ἐναπολαμβάνουσι τὰ βγ, ηθ, γδ, δζ (1), ἔσονται ἀλλήλαις παραλλήλοι (2)· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ταῦτα παράλληλοι εἶσι καὶ αἱ βα, γη, δθ, εζ. Ἄπαντα ἄρα τὰ Τρίγωνα βακ, κηλ, λγμ, μδν, νδο, οζε ἰσογώνια (3)· ἐνθεντοι ὡς ἡ βκ πρὸς κα, ἥτως ἡ ηκ πρὸς κλ· ὡς δὲ ἡ ηκ πρὸς κλ, ἥτως ἡ γμ πρὸς μλ· ὡς δὲ ἡ γμ πρὸς μλ, ἥτως ἡ δμ πρὸς μν· ὡς δὲ ἡ δμ πρὸς μν, ἥτως ἡ δο πρὸς ον· ὡς δὲ ἡ δο πρὸς ον, ἥτως ἡ ζο πρὸς σε· ὡς ἄρα (4) ἐν τῶν ἡγεμένων, τῶν ἔστιν ἡ βκ πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, τῶν ἔστι τὴν κα, ἥτως ἅπαντα τὰ ἡγεμένα ἦτοι αἱ βκ, κη, γμ, μδ, δο, οζ (τῶν ἔστι πᾶσαι αἱ ἐπιξευγνύουσαι βη, γθ, δζ) πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα, ἦτοι τὰς ακ, κλ, λμ, μν, νο, οε τῶν ἔστι πρὸς τὴν διάμετρον αε. Ἀλλ' ὡς ἡ βκ πρὸς κα, ἥτως ἡ εβ πρὸς βα (5)· ὡς ἄρα ἅπασαι αἱ βη, γθ, δζ ἅμα ληφθεῖσιν, πρὸς τὴν αε, ἥτως ἡ εβ

(α) Τὸ τετράδος βάλεται μετρεῖσθαι τὰς πλευρὰς τοῦ Πολυγώνου, διὰ τὸ τοῦ Κυκλε κινημένη περὶ τὴν αε διάμετρον πᾶσας τὰς πλευρὰς κατὰ Κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανείων· χρησίμη ἐσομένη αὐτῷ τοιοῦτε ἐν ταῖς ἐξῆς· μὴ γὰρ ὑπὸ τετραδὸς μετρημένων τῶν πλευρῶν τοῦ Πολυγώνου, καὶ ἀρτιόπλευρον ἢ, οὐ πᾶσας δυνατόν κατὰ Κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανείων, ὡς κατανοῆσαι ἔξεστιν ἐκ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν· δύο γὰρ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς παραλλήλως οὖσας, κατὰ Κυκλιυδρικής φέρεσθαι ἐπιφανείας συμβαίνει· ὅπερ οὐ χρησίμους πρὸς τὰ ἐξῆς.

(1) Κε'. τοῦ Γ'. (2) Λημμ. προηγ. (3) ΚΖ'. καὶ ΙΕ'. καὶ Πορ. Θ'. τῆς ΑΒ'. τοῦ Α'. (4) ΙΒ'. τοῦ Ε'. (5) Πορ. Γ'. τῆς Η'. τοῦ ζ'.

πρὸς τὴν βα. Τὸ Ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ὑπὸ πασῶν τῶν ἐπιζευγνύσων βη, γδ, δὲ ὁμῶς εἰλημμένων καὶ τῆς βα περιεχόμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αε, εβ περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ (1). Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Α'. Πᾶσαι αἱ τὰς γωνίας τῆ Πολυγώνου ἐπιζευγνύσων βη, γδ, δὲ δίχα καὶ πρὸς ὁρθὰς τέμνονται ὑπὸ τῆς διαμέτρου αε. Ἐπεὶ γὰρ ἐν τοῖς Τριγώνοις βακ, ηακ αἱ πλευραὶ βα, ακ εἰσὶν ἴσαι ταῖς πλευραῖς αη, ακ· ἴσαι δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ α γωνίαι (2)· ἔσεται δὴ καὶ ἡ βκ ἴση τῇ κη (3)· καὶ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ κ γωνίαι ἀλλήλαις ἴσαι, καὶ διὰ ταῦτα ὁρθαί (4). Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δειχθήσεται, ὅτι καὶ οἰαδήποτε ἄλλῃ ἐπιζευγνύσῃ γδ διχοτομηθήσεται ὑπὸ τῆς διαμέτρου κατὰ τὸ μ, ὥς εἶναι τὴν γμ ἴσην τῇ μδ, καὶ τὰς πρὸς τῷ μ γωνίας ὁρθὰς.

Β'. Ἐὰν ἡ τὰς γωνίας ἐπιζευγνύσῃ γδ, διάμετρος ᾗ τῆ Κύκλου, ἡ ὑπὸ τῆς ἐπιζευγνύσεως εὐθείας, καὶ τῆς προσεχεσάτης τῇ διαμέτρῳ πλευρᾷ τῆ ἐγγεγραμμένης Σχήματος περιεχομένη Γωνία γδη ἔσεται ὀξεία. Ἀχθείσῃς γὰρ τῆς γη, ἡ ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ γωνία γηδ ὁρθὴ ἔσται (5)· ἡ ὑπὸ γδη ἄρα ὀξεία (6).

Εἰ δὲ ἡ τὰς γωνίας ἐπιζευγνύσῃ ἐλάσσων ᾗ τῆς διαμέτρου, οἷα ἡ βη, ἡ ἐν τῷ ἐλάσσονι Τμήματι ὑπὸ τῆς τῆ ἐγγεγραμμένης Σχήματος πλευρᾷ αβ, καὶ τῆς ἐπιζευγνύσεως βη συνισαμένη Γωνία αβη ὀξεία ἔσται (7)· ἡ γὰρ ἐπὶ τῇ τόξῳ βη ἐπιβεβηκεῖα γωνία ἐν μείζονι Τμήματι ἔσται τῷ αβη.

Γ'. Ἐστω Τμήμα Κύκλου τὸ γαδ ἥτοι Ἡμικύκλιον, ἡ Ἡμικυκλίῳ ἐλάσσον, ὑπὸ τῆς ἐπιζευγνύσεως γδ περαττέμενον. Αἱ ἐγγυτάτω τῆς ἐπιζευγνύσεως πλευραὶ τῆ ἐγγεγραμμένης Σχήματος γβ, δη, ὅσον ἀπόχρη ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ Τμήμα γαδ περαιτέρω τῶν σημείων β καὶ η προεκβληθεῖσαι, συμπεσῶνται ἀλλήλαις, καὶ Τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἐπὶ τῆς γδ ὡς βάσεως ποιήσασιν, ἢ ἡ κορυφὴ ἔσεται πρὸς τινὶ σημείῳ τῆς διαμέτρου εα, περαιτέρω τῆ α προεκβληθείσης.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ βγδ, γδη, ἐλάσσας εἰσὶ δυσὶν ὁρθῶν (8)· αἱ πλευραὶ γβ, δη, προεκβληθεῖσαι ἐπὶ τὰ πρὸς τὰ β, η, συμπεσῶνται ἀλλήλαις (9). Ἐπεὶ δὲ καὶ τὰ τόξα βαηδ, γβη, ἀλλήλοισι ἴσα, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται καὶ αἱ ὑπὸ βγδ, γδη (10)· καὶ αἱ πλευραὶ γβ, δη συμπεσῶσαι,

(1) Ις. τοῦ ε'. (2) ΚΘ. τοῦ γ'. (3) Δ. τοῦ α'. (4) Ὁρισμ. ΙΔ. τοῦ α'. (5) ΛΑ. τῆ γ'. (6) Πορ. Δ. τῆς λβ. τῆ α'. (7) ΛΑ. τῆ γ'. (8) Πορ. Β. τῆς παρέσης. (9) Σχόλ. τῆς ΛΑ. τῆ α'. (10) ΚΘ. τῆ γ'.

Τρίγωνον ἰσοσκελές ἐπὶ βάσεως τῆς γδ ποιήσῃσι (1). Καὶ ἐπειδὴ ἡ βάσις δίχα, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς αμ (2)· προεκβληθεῖσα ἄρα ἡ μα, διὰ τῆς τε Τριγώνου κορυφῆς διελύσεται (3).

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΖ.

Εἴαν ἐν Κύκλῳ τμήματι τῷ δαζ, ἢ ἡ βάσις δζ κάθετος ἔξηκεν ἐπὶ τὴν α. 38.
διάμετρον αοε, Σχήμα ἰσόπλευρον, καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγραφῇ, ἀχθῇ δὲ ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ καὶ ἡ εὐθεῖα εβ· τὸ ὑπὸ τῆς εβ, καὶ τῆς τῆς διαμέτρον μέρους αο, ὅς ἐστιν ἄξων τῷ τμήματος, περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἴσον ἔσται τῷ ὑπὸ μιᾶς τῶν τε ἐγγεγραμμένα Σχήματος πλευρῶν, καὶ ἀπασῶν τῶν τὰς γωνίας ἐπιζευγυσθῶν βη, γδ μετὰ τῆς αο ἡμισείας τῆς βάσεως δζ ἅμα ληφθεῖσῶν περιεχομένῳ Ὀρθογώνιῳ.

Ἡ δὲ δέξις ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ τῆς προηγουμένης (ἐστὶ γὰρ αβ:βε::ακ:κβ::λκ:κη::λμ:μγ::νμ:μδ::νο:οδ. Ἀρα αβ:βε::ακ+κλ+λμ+μν+νο:βη+κη+γμ+μδ+οδ· τετ' ἐστὶν αβ:βε::αο:βη+γδ+δο· καὶ βε×αο=αβ×(βη+γδ+δο.)

Σχόλιον. Εἴαν Τμήμα Κύκλου τὸ δαζ, Σχήμα ἀρτιόπλευρόν τε, καὶ ἰσό- α. 41.
πλευρον ἐγγεγραμμένον τὸ δαδζ δέχεται ἔτως, ὡς τὰς δύο ἀπεναντίον πλευράς δη, ζδ, παραλλήλαι εἶναι ἀλλήλαις τε, καὶ τῷ Α'ξονι αο, δῆλον ὅτι τὸ τοιαῦτον Σχήμα περὶ τὸν Α'ξονα αο (κατὰ τὰ ἐφεξῆς Δήμματα) Περιεχθὲν, Κυλινδρικήν ἀπογεννήσει ἐπιφάνειαν, ἢ Κωνικήν.

Δήμματα εἰς τὴν ἐξῆς.

Α. Εἴαν εἰς μέγιστον Κύκλον Σφαῖρας σχῆμα κανονικὸν περὶ τὸν Α'ξο- α. 37.
να αε συνιστάμενον ἐγγραφῇ (ἢ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρεῖσθαι ὑπὸ τετραδός), τῷ δὲ Α'ξονος μένοντος, ὁ Κύκλος μετὰ τῷ Σχήματος περιεγόμενος αὐτόσε πάλιν ἐπανεέλθῃ, ὅθεν ἤρξατο κινεῖσθαι· λέγω ὅτι εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγραφήσεται Σῶμα ἐπιφανείαις ὀρθῶν Κῶνων περιελημμένον.

Αἱ μὲν γὰρ Εὐθεῖαι βα, ηα, καὶ δε, ζε, ὀλοχερεῖς ἐπιφανείας Κῶνων ὀρθῶν καταγράφουσιν (4), αἱ δὲ γβ, δι καὶ δζ, γδ προεκβληθεῖσαι, κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς Διαμέτρον αε ἐφ' ἐκάτερα προεκβληθείσης, καὶ πρὸς ὀρθάς τε καὶ δίχα τὰς ἐπιζευγυσθῆσαι τεμνάσης, συμπεσῶνται (5)· καὶ κατα-

(1) ε. τῷ α'. (2) Πορ. Α. τῆς παρέσης. (3) Σχολ. Δ. τῆς κς. τῷ α'. (4) Ὅρισμ. Β. τῷ β'. (5) Πορισμ. Γ. τῆς ις. τῷ παρόντος.

γράφουσιν ἄρα καὶ αὐταὶ ὀρθῶν Κώνων ἐπιφανείας, ἐναπολαμβανομένας μεταξὺ παραλλήλων Κύκλων, ὧν τὰς περιφερείας αἱ τῶν Γωνιῶν β, γ, δ κορυφαί ἐν τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ καταγράφουσι.

Β. Σφαιρικῶς Τμήματος, ὃ Ἀΐων ἡ αο, ἔσω τομὴ μεγίστη ἡ δαζ· ἐν ἣ Σχήμα ἀρτιόπλευρόν τε, καὶ ἰσόπλευρον πλὴν τῆς βάσεως, ἐγγεγραμμένον ἔστω, ὡς μηδεμίαν τῶν αὐτῶν πλευρῶν παράλληλον εἶναι τῷ Ἀΐωνι αο. Ἐάν οὖν τὸ τοιαῦτο Σχῆμα μετὰ τῷ Τμήματι, εἰς ὃ ἐγγεγραπταί, περὶ τὸν Ἀΐωνα αο περιενοχθῇ, λέγω ὅτι εἰς τὸ σφαιρικὸν Τμήμα ἐγγραφήσεται Σῶμα ὑπὸ Κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον.

Δείκνυται δὲ ὡς ἐν τῷ προτέρῳ Λήμματι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΗ'.

κ. 37. Τῶν αὐτῶν κειμένων τῷ πρώτῳ Λήμματι· ἐὰν ἀπὸ τῆς πέρας τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὸ τῆς πλευρᾶς τῷ ἐγγεγραμμένῳ Σχήματι τῆς προσεχέσασθαι τῇ διαμέτρῳ εὐθείᾳ ἡ εβ ἀχθῇ, λέγω ὅτι πάσαις ταῖς Κωνικαῖς ἐπιφανείαις ταῖς εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμέναις ἴσος ἐστὶ Κύκλος, ὃ ἡ ἐκ τῶ κέντρου (Ι) δύναται τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου αε καὶ τῆς ὑποτείνουσας εβ περιεχόμενον, τῷ εἶναι, ὃ ἡ ἐκ τῶ κέντρου (Ι) μέση εἶναι ἀνάλογον τῆς τε Διαμέτρου αε, καὶ τῆς Ὑποτείνουσας εβ.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ εὐθεῖαι βη, γδ, δζ ἴσαι εἰσὶ ταῖς εὐθείαις βκ, γμ, δο δις ληφθείσαις (Ι)· τὸ Ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ὑπὸ μιᾶς τῶν τῶ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ Σχήματος πλευρῶν (τῆς αβ δηλονότι, ἡ βγ, ἡ γδ, ἡ δε) καὶ ἀπασῶν τῶν τὰς γωνίας ἐπιζευγνυσῶν βη, γδ, δζ ἅμα ληφθεῖσῶν περιεχόμενον, ἴσον ἔσται τῷ ὑπὸ τῶν αβ, βκ, τῷ τε ὑπὸ τῆς βγ, καὶ τῆς συγχειμένης ἐκ τῶν βκ, καὶ γμ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς γδ, καὶ τῆς συγχειμένης ἐκ τῆς γμ, καὶ δο, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν δε, δο περιεχομένῳ Ὀρθογώνιῳ (2)· οὕτω γὰρ ληφθήσεται δις ἐκάστη τῶν εὐθειῶν βκ, γμ, δο. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῆς αβ, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυσῶν ἅμα ληφθεῖσῶν βη, γδ, δζ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αεβ περιεχομένῳ Ὀρθογώνιῳ (3), τῷ εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς Ι τετραγώνῳ (4)· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Ι τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τῆς αβ, καὶ βκ, ὑπὸ τῆς βγ, καὶ τῆς συγχειμένης ἐκ τῶν βκ, γμ, ὑπὸ τῆς γδ, καὶ τῆς συγχειμένης ἐκ τῶν γμ, δο· ὑπὸ τῆς δε, καὶ τῆς δο περιεχομένοις Ὀρθογώνιοις. Ἐάν

(1) Πορισμ. Α. τῆς ις· τῆ παρόντος. (2) Προτ. Β. τῆ β'. (3) Ις. τῆ παρόντος.

(4) Εξ ὑποθέσεως.

δὲ γένωνται ἤδη τῶν μὲν $\alpha\beta$, ϵ $\beta\kappa$, μέση ἀνάλογον ἢ Π . τῆς δὲ $\beta\gamma$ καὶ τῆς συγχειμένης ἐκ τῶν $\beta\kappa$, $\gamma\mu$, ἢ Ξ . τῆς τε $\gamma\delta$ ϵ τῆς συγχειμένης ἐκ τῶν $\gamma\mu$, $\delta\sigma$, ἢ ρ . ϵ τῶν $\delta\epsilon$, $\delta\sigma$, ἢ Σ . ἔσται δὴ τὰ ἀπὸ τῶν Π , Ξ , ρ , Σ τετράγωνα τοῖς εἰρημένοις ὀρθογωνίοις ἴσα (1). δέδεικται δὲ ἤδη τοῖς ὀρθογωνίοις τέτοις ἴσον ϵ τὸ ἀπὸ τῆς I τετράγωνον. Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς I ἴσον ἔσαι τοῖς ἀπὸ τῶν Π , Ξ , ρ , Σ τετράγωνοις. Ἐπεὶ δὲ οἱ κύκλοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῆς κέντρου τετράγωνα (2). ϵ ὁ ἀκτῖνι ἄρα τῇ I γραφεὶς κύκλος ἴσος ἔσαι πᾶσι τοῖς κύκλοις, ὧν ἀκτῖνες αἱ Π , Ξ , ρ , Σ , ὅμῃ ληφθεῖσιν. Ἀλλ' οἱ ἀπὸ τῶν ἀκτῖνων Π , Σ γραφόμενοι κύκλοι ἴσοι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ τῶν πλευρῶν $\alpha\beta$, $\epsilon\delta$ παραγομέναις κωνικαῖς ἐπιφανείαις. μέση γὰρ ἐστὶν ἀνάλογον ἢ Π τῆς τε $\alpha\beta$ πλευρᾶς τῆς $\kappa\omega\nu\eta$ ϵ τῆς $\beta\kappa$ ἀκτίνος τῆς βάσεως (3). Ἐὰν δὲ ἢ μέση ἀνάλογον ϵ τῶν $\epsilon\delta$, $\delta\sigma$. καὶ ὁ ἀπὸ ἀκτίνος τῆς Ξ γραφόμενος κύκλος ἴσος ἔσαι τῷ Τμήματι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ δύο παραλλήλων κύκλων, ὧν διάμετροι αἱ $\gamma\delta$, $\beta\eta$. ϵ γὰρ ϵ ἢ Ξ μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῆς τε $\beta\gamma$ ϵ τῆς συγχειμένης ἐκ τῶν $\beta\kappa$, $\gamma\mu$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ταῦτα ϵ ὁ κύκλος ὁ ἀκτῖνι τῇ ρ , ἴσος ἔσαι τῷ Τμήματι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων, ὧν διάμετροι αἱ $\gamma\delta$, $\delta\zeta$. Ὁ κύκλος ἄρα ὁ ἀπὸ ἀκτίνος τῆς I γραφόμενος ἴσος ἔσαι πάσαις ἅμα ληφθεῖσαις ταῖς κωνικαῖς ἐπιφανείαις ταῖς εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμέναις, ὅ ἔδει δεῖξαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΘ'.

Κειμένων δὲ τῶν αὐτῶν τῷ δευτέρῳ Λήμματι, ἀχθεῖσιν τε ὡσαύτως τῆς $\epsilon\beta$ ἀπὸ τῆς πέρατος τῆς διαμέτρου $\alpha\epsilon$ ἐπὶ τὸ πέρας τῆς προσεχέσας τῇ διαμέτρῳ πλευρᾶς $\alpha\beta$, λέγω ὅτι πάσαις ταῖς εἰς τὸ σφαιρικὸν Τμήμα $\delta\alpha\zeta$ ἐγγεγραμμέναις ἐπιφανείαις, ἴσος ἐστὶ κύκλος, ὃ ἢ ἐκ τῆς κέντρου μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῆς ὑποτείνουσας $\epsilon\beta$ ϵ τῆς κατὰ τὸ Τμήμα ἄξονος $\alpha\sigma$. κ. 38.

Ἡ δὲ δεῖξις τὰ μὲν ἄλλα ἢ αὐτὴ τῇ τῆς προηγμένης, πλὴν ὅσον ἀντὶ τῆς $I\epsilon'$. ληπτέον εἰς τῆς τὴν $I\zeta'$.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κ'.

Αἱ εἰς σφαῖραν ἐγγεγραμμέναι κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν ἀπολήγουσιν.

(1) $I\zeta$. τῆς ϵ' . (2) Πόρισμα. Β. τῆς β. τῆς $\epsilon\beta$. (3) Διὰ τὸ αὐτὸ πόρισμα. (4) $I\Gamma$. τοῦ παρ.

κ. 39.

Εἴσω δοθεῖσα ἐπιφάνεια ὁσονδηποτῶν ἐλαχίστη ἢ Χ. Δῆλον ἔν, ὅτι δυ-
κατόν ἐστι δοθῆναι ἐντὸς τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἀγέθ' ἑτέραν ὁμόκεντρον ἐ-
πιφάνειαν ταύτης ἐλλείψουσιν ποσότητι ἐλάσσονι πάσης δοθείσης τῆς Χ. Εἰ κα-
τέρων δὴ ἐπιπέδῳ διὰ τῷ κέντρῳ τμηθεῖσῶν, ἔσωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ ἀγέθ',
δπλμ· ἢ χθω ἢ διάμετρος αδε· καὶ ἀπτέδῳ τῷ κύκλῳ κατὰ τὸ δ ἢ νξ· εἰ ἂν
τὸ τόξον αε δίχα τμηθῇ κατὰ τὸ γ· καὶ ἑκάτερον τῶν τμημάτων δίχα αὖθις
ὑποτμηθῇ (ἐν δέ γε τῷ 18 σχήματι τριχοτομητέον τὸ τεταρτημορικὸν τόξον
αγ, ὃ δὴ καὶ αὐτὸ γενήσεται κατὰ τὸ Γ'. Πόρισμα τῆς ΙΕ'. τῷ Δ'), ἄχρις
ὅτε ληφθῇσεται τέως τόξον τὸ αβ ἔλαττον τῷ αν (1), δῆλον ὅτι εἰ ἂν ὑπο-
τείνῃ τὸ τόξον ἢ αβ, ἢ ἐφάψεται τῆς περιφερείας δπλμ, ἀλλ' ἔσεται πλευ-
ρὰ τῷ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἀγθε ἐγγεγραμμένῃ ἰσοπλεύρῃ, καὶ ἀρτιοπλεύ-
ρῃ σχήματος, καὶ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετραδὸς μετῶνται, καὶ ἡ ἀδεμία τέτων τῆς περι-
φερείας δπλμ ἐφάπτεται. Εἰ ἂν ἔν περὶ τὴν διάμετρον αε τὰ πάντα περιενεχ-
θῇ, φανερόν, ὅτι εἰς τὴν ἐκτὸς σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἐγγρα-
φῇσονται, αἵτινες τὴν ἑτέραν ὁμόκεντρον σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν περιέξωσι, καὶ
ἐπομένως μείζονες αὐτῆς ἔσονται (2)· καὶ ἐπεὶ ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια δπλμ
ἐλλείπει τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἀγέθ' ποσότητι ἐλάσσονι πάσης δοθείσης
τῆς Χ· πολλῷ δὴ μᾶλλον ἐλάσσονι ποσότητι τῆς δοθείσης Χ ἐλλείψουσιν αἱ
κωνικαὶ ἐπιφάνειαι τῆς αὐτῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἀγέθ' (3)· ἀπολήγουσιν
ἄρα εἰς τὴν ἀγέθ' ἐπιφάνειαν, ὃ ἔδει δεῖξαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΑ'.

κ. 41.

Αἱ εἰς σφαιρικὸν τμήμα τὸ δαζ ἐγγεγραμμέναι κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς αὐ-
τὴν τὴν τῷ σφαιρικῷ τμήματος ἐπιφάνειαν ἀπολήγουσιν.

Δείκνυται τοῖς αὐτοῖς σχεδὸν τῇ προηγουμένη συλλογισμοῖς.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΒ'.

κ. 40.

Δέδεικται ἐν τῇ ΙΗ'. ὅτι ὁ κύκλος, ὃ ἢ ἐκ τῷ κέντρῳ μέσῃ ἀνάλογόν ἐστι
τῆς τε διαμέτρου αε καὶ τῆς εὐθείας εβ τῆς ἀγομένης ἀπὸ τῷ πέρας τῆς διαμέτρου
αε ἐπὶ τὸ πέρας τῆς τῷ σχήματος πλευρᾶς αβ τῆς προσεχέσσης τῇ διαμέ-
τρῳ, ἴσος ἐστι πάσαις ταῖς εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμέναις κωνικαῖς ἐπιφα-

(1) Λημ. Β. σχολ. μετὰ τὴν ια'. τῷ ε'. (2) Α' ξίωμ. μ. γ'. τῷ παρόντος. (3) Ο' ξίωμ.
ε. τῷ ιβ'.

θείαις. Νῦν δὲ λέγω ὅτι ὁ κύκλος ἕτος ἀπολήγει τελευταῖον εἰς κύκλον, οὗ ἢ ἐκ τῆς κέντρης ἐστὶν ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος αε (1).

Εἴαν γὰρ πλείους αἰεὶ καὶ μᾶλλον πλείους εἰς ἄπειρον πλευραὶ εἰς τὸν μέγιστον ἐγγραφῶσι κύκλον (αἴτῃ περὶ τὴν αε περιενεχθεῖσαι, κωνικὰς ἀπογεννώσιν ἐπιφανείας), δῆλον ὅτι ἡ αβ πλευρὰ γενήσεται τελευταῖον πάσης δοθείσης εὐθείας ἐλάσσων· καὶ ἡ διαφορὰ τῶν αε, βε γενήσεται δὴ καὶ αὕτη πάσης δοθείσης ἐλάσσων· καὶ πολλῶν δὴ μᾶλλον ἐλάσσονι ποσότητι πάσης δοθείσης διοίσει τῆς αε ἢ τὸν μέσον λόγον ἔχουσα τῶν αε, εβ, ἥτις αἰεὶ ἐστὶ μείζων τῆς εβ. Καὶ ὁ κύκλος ἄρα, ὃ ἢ ἡμιδιάμετρος μέσῃ ἀνάλογον εἴη τῶν αε, εβ, ποσότητι πάσης δοθείσης ἐλάσσονι διοίσει τῷ κύκλῳ, ὃ ἢ ἡμιδιάμετρος ἢ αε, τῷτ' ἐστὶν εἰς αὐτὸν ἀπολήξει (2). Ο' ἔδει δεῖξαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΓ'.

Δέδεικται ἐν τῇ ΙΘ'. ὅτι ὁ κύκλος, οὗ ἢ ἐκ τῆς κέντρης μέσῃ ἐστὶν ἀνάλογον τῆς ὑποτείνουσιν εβ καὶ τῆς κατὰ τὸ Τμήμα ἄξονος αο, ἕτος ἐστὶ πάσαις ταῖς εἰς τὸ σφαιρικὸν τμήμα διὰ τὸ ἐγγεγραμμέναις κωνικῇς ἐπιφανείαις. Νῦν δὲ λέγω, ὅτι ὁ Κύκλος ἕτος ἀπολήγει εἰς Κύκλον, ὃ ἢ ἡμιδιάμετρος ἐστὶν ἢ αδ, ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῷ Τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἡγμένη τῷ Κύκλῳ δεξν, ὅς ἐστι βάσις τῷ Τμήματος.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ εβ ἀπολήγει τελευταῖον εἰς τὴν αε, ὡς δῆλον ἐκ τῆς προηγμένηςδείξεως, δῆλον ὅτι καὶ ἡ μέσῃ ἀνάλογον τῶν εβ, αο, ἀπολήξει τελευταῖον εἰς τὴν μέσῃ ἀνάλογον τῶν αε, αο, τῷτ' ἐστὶν εἰς αὐτὴν τὴν αδ (3). Καὶ ὁ Κύκλος ἄρα, οὗ ἢ ἐκ τῆς κέντρης μέσῃ ἐστὶν ἀνάλογον τῶν εβ, αο, ἀπολήξει εἰς τὸν Κύκλον, ὃ ἢ ἡμιδιάμετρος ἢ αδ. Ο' ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα εἰς τὴν ἐξῆς.

Εἴαν ἡ Διάμετρος διπλασία ᾗ τῆς Διαμέτρῳ, ὁ Κύκλος ἔσται τετραπλασίου τῷ Κύκλῳ.

Δείκνυται ἐκ τῆς Β'. τῷ ΙΒ', καὶ τῷ Γ'. Ορίσμη τῷ Ε'. (ἢ ἐκ τῷ Γ'. Πορίσματος τῆς Β'. τῷ ΙΒ').

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΔ'.

Πάσης Σφαίρας ἢ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν αὐτῇ.

(1) Ορίσμ. ε. τῷ β'. (2) Ορίσμ. ε. τῷ β'. (3) Πορίσμ. Β. τῆς δ'. τῷ ε'.

Τὸ ἐξαίρετον τῆ Ἀρχιμήδους τῆτο Θεώρημα ῥῆτα ἂν ἀποδείξαιμεν ἐν τῶν ἤδη κειμένων, καὶ προαποδειχθέντων ἄνωσι.

Ἐν μεγίστῳ Κύκλῳ τῆς σφαίρας νοείδω περὶ τὴν διάμετρον αε Σχήμα κανονικὸν ἐγγεγραμμένον (ἢ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετραδὸς μετρεῖσθαι), ὃ περὶ τὴν αε περιεχθὲν, ἀπογεννήσει Κωνικὰς ἐπιφανείας εἰς τὴν Σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ἐγγεγραμμένας· καὶ ἡχθῶ ἡ εβ. Δέδεικται δὴ (1), ὅτι πᾶσαι αἱ Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι, αἱ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμέναι, ἴσαι εἰσὶ Κύκλῳ, ἢ ἡ ἐκ τῆ Κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῶν αεβ Ὀρθογώνιον, τῶν ἔσιν, ἢ ἡ Ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῶν αε, εβ. (Ὅπερ συμβαίνει αἰεὶ ὅσον ἂν τῶν ἐγγραφῶν εἰς ἄπειρον ἐχώμεθα)· ἐπεὶ δὲ αἱ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμέναι Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἀπολήγασιν τελευταῖον τῆς Σφαίρας, ἡς ἡ ἐκ τῆ Κέντρου μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῶν αε, εβ (2)· ὁ δὲ Κύκλος, ὃν τι νισθάνται αἱ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι, ἀπολήγει εἰς Κύκλον, ἢ ἡ Ἡμιδιάμετρος ἐστὶν ἡ αε, τῶν ἔσιν ἡ τῆς Σφαίρας διάμετρος (3)· ἡ τῆς Σφαίρας ἄρα ἐπιφάνεια ἴση ἔσται Κύκλῳ, ἢ ἡ Ἡμιδιάμετρος ἡ αε, τῶν ἔσιν (4) τετραπλασίῳ τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ (αγεθ) τῶν ἐν αὐτῇ· ὃ ἔδει δεῖξαι.

Ὅ τὰ Ἀρχιμήδους μετιῶν εἴτεται ὅσον ἐπιτομωτέρα, καὶ σαφεστέρα τῆς τῆ Ἀρχιμήδους δείξεως ἐστὶν, ἥ περ αὐτοὶ ἐν τῷ παρόντι Θεωρήματι ἐχρητάμεθα.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Α'. Ἐκ τῆ ἐξαίρετα, καὶ θαυμασίῃ τῆδε Θεωρήματος, ὃ κλέος αἰδίου περιεποίησατο Ἀρχιμήδει παρὰ πᾶσι τοῖς Γεωμέτραις, ἔνεστι λαβεῖν Κύκλον ἴσον τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ· οὗτος δὲ ἐστὶν, ἢ ἡ Ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ τῆς Σφαίρας διαμέτρῳ, ἢ ἢ ἡ Διάμετρος διπλασία τῆς τῆς Σφαίρας διαμέτρου.

Β'. Ἐντέυθεν καὶ ἐκ τῆς Β'. τῆ IB'. μετὰ τῆς IE'. τῆ E'. δῆλον, ὅτι αἱ τῶν Σφαιρῶν ἐπιφάνειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ἐν λόγῳ διπλασίου τῶν ἐν αὐταῖς Ἡμιδιαμέτρων.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ρᾶσι ἤδη ἐστὶν ἡ καταμέτρησις τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τῆς ἀπασῶν τῶν καμπύλων τὰ πρωτεῖα φερέσης. Ὁ τρόπος δὲ ταύτης διττός.

Α'. Μὲν γὰρ μετρεῖσθαι Κύκλος ὁ μέγιστος τῆς Σφαίρας, ὡς παραδέδο-

(1) IH. τῆ παρόντος. (2) K. τῆ παρ. (3) KB. τῆ παρ. (4) Διὰ τὸ προηγ. Λήμ.

ται ἐν τῷ μετὰ τὴν ζ'. τῷ παρόντος Σχολίῳ, ἢ πεπολλασιάζω διὰ 4. Οἷον εἰν εὐρεθῇ ἢ τῷ κατὰ γῆν μεγίστη Κύκλῳ ἐπιφάνεια τετραγωνικὰ μίλλα Ω'ρικὰ, εἴτ' ἔν Βελγικὰ περιέχοντα 5. 940000, ὁ ἀριθμὸς ἕως τετραπλασιασθεῖς, δίδωσι τετραγωνικὰ μίλλα Βελγικὰ 23. 760000, εἰς τὴν τῆς γῆν Σφαίρας ἐπιφάνειαν.

Β'. Δὲ ἡ τῆς Σφαίρας διάμετρος πολλαπλασιασθεῖσα διὰ τῆς περιφέρειας τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν αὐτῇ, δίδωσι τὴν τῆς Σφαίρας ἐπιφάνειαν. Οἷον εἴπερ ἡ τῆς Γῆς διάμετρος μίλλα Βελγικὰ ὥρικὰ περιέχειν ὑποτεθεῖν 2750 $\frac{1}{4}$, ἢ δὲ τῷ κατ' αὐτὴν μεγίστου Κύκλου περιφέρεια 8640 (1), οἱ δύο ἅτοι ἀριθμοὶ, ἀμελημένῳ τῷ κλάσματι, πολλαπλασιασθέντες ἐπ' ἀλλήλους, δώσουσι πάλιν τετραγωνικὰ μίλλα ὥρικὰ 23. 760000 εἰς τὴν ὅλην τῆς γῆν Σφαίρας ἐπιφάνειαν.

Τὰ δὲ τῆς δειξέως πρόδηλα ἐν τῷ Α'. Πρίσματος τῆς Ε'. τῷ παρόντος. Τὸ γὰρ ὑπὸ τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν διαμέτρου, ἢ τῆς τῷ κατ' αὐτὴν μεγίστου Κύκλου περιφέρειας περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἐστὶ, διὰ τὸ εἰρημένον Πόρισμα, τετραπλάσιον τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ.

(Περὶ δὲ τῶν ἐν τῷ παρόντι Σχολίῳ παραληφθέντων ἀριθμῶν ὅρα τὰ ἐν τῷ μετὰ τὴν ζ'. τῷ παρόντος Σχολίῳ εἰρημένα).

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΕ'.

Πάσης Σφαιρικῆς μοίρας (δαζ) ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ Κύκλῳ, ἢ ἡμιδιαμέτρος ἐστὶν εὐθεῖα (ἢ ἀδ) ἡ ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν μοῖραν κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἡγμένη τῷ Κύκλῳ (δοζ), ὅς ἐστι βάσις τῆς μοίρας.

Μέρος Α'. Ἐν μεγίστης τομῆς μοίρα Σχῆμα νοεῖσθω ἐγγεγραμμένον περὶ τὸν Α'ξονα αο ἰσόπλευρόν τε, ἢ ἀρτίόπλευρον χωρὶς τῆς βάσεως (ἢ μηδεμίαν πλευρὰ ἔσω (2) παράλληλος τῷ Α'ξονι), ὃ περὶ τὴν αο περιεπεχθὲν, Κωνικὰς ἐν τῇ μοίρᾳ ἐπιφανείας ἐγγράψει· ἢ χθω δὲ ἢ ἢ εβ ὁμοίως τοῖς πρότερον (3). Πᾶσαι ἔν αἱ εἰς τὸ Τμήμα ἐγγεγραμμέναι Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι, ἴσαι εἰσὶ Κύκλῳ, ἢ ἢ ἐκ τῷ Κέντρῳ μέσῃ ἐστὶν ἀνάλογον τῆς εὐθείας εβ, ἢ τῷ κατὰ τὸ Τμήμα Α'ξονος αο (4). Τῆτο δὲ συμβήσεται ἐσσεῖ, ἐπαναλαμβανόμενων τῶν ἐγγραφῶν εἰς ἀπειρον. Τοιγαρὲν, ἐπεὶ καὶ αἱ εἰς τὸ Τμήμα εγγραφόμεναι Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς Σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν Τμήματος ἀπολή-

3. 41.

(1) Ὅρα ὅτι δὲν σελ. 340. (2) Ὅρα Σχολ. τῆς ΙΖ. τῷ παρόντος. (3) ΙΗ. ἢ ΙΘ. τῷ παρόντος. (4) ΙΘ. τῷ παρόντος.

γῶσιν (1), ὅτε Κύκλος, ἢ ἡ ἐκ τῆς Κέντρος μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῶν εβ, αο, εἰς Κύκλον, ἢ ἡμιδιάμετρος ἡ αδ, ἀποτελεῖται (2). ἢ ἡ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας ἄρα ἐπιφάνεια δαζ, ἴση ἔσται Κύκλῳ, ἢ ἡμιδιάμετρος ἡ αδ (3). Ὅ' ἔδει δεῖξαι.

Μέρος Β'. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς ε τῆς ἐλάσσονος Σφαιρικῆς μοίρας δεζ ἢ χθω ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως εὐθεῖα ἡ εδ, ἢ ἐπεξεύχθω ἡ αδ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ αδε γωνία ἐστὶν ὀρθή (4). ὁ ἀπὸ ἀκτίνος ἄρα τῆς αε γραφόμενος Κύκλος, ἔσται ἴσος τοῖς ἀπὸ τῶν αδ, εδ, γραφομένοις ἅμα ληφθεῖσιν (5). Ἀλλ' ὁ μὲν ἀπὸ τῆς αε Κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ὅλῃ Σφαιρικῇ ἐπιφανείᾳ (6), ὁ δ' ἀπὸ τῆς αδ, ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος μοίρας δαζ (7). ὁ ἄρα ἀπὸ τῆς εδ Κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς ἐλάσσονος μοίρας δεζ.

Ταῦτὶ τὸ δεύτερον ἐστὶν ἐκ τῶν λόγων ἀξίων τῇ Ἀρχιμήδους εὐρέσεων, ὅπερ ἡμεῖς (ὥσπερ δὴ ἢ τὸ προηγούμενον) πολὺ δὴ μᾶλλον ἐπιταμώτερον, ἢ σαφέστερον, ἢ περ αὐτὸς Ἀρχιμήδης, ἐδείξαμεν.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν δοθείσης τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν διαμέτρου αε, ἢ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας δαζ Ἀ'ξονος αο (ἢ δοθέντων τῇ Ἀ'ξονος αο, ἢ τῆς κατὰ τὴν βάσιν Ἡμιδιαμέτρου οδ), εὐρίσκεται ἡ αδ ἡμιδιάμετρος Κύκλου, ὅς ἐστιν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας, ἢ ἐντεῦθεν ἡ καταμέτρησις τῆς κατὰ τὴν Σφαιρικὴν μοῖραν ἐπιφανείας. Ἐπεὶ γὰρ εἰσὶ αε, αδ, αο $\div$ (8), ἔσται δὴ ἡ αδ = $\sqrt{\alpha\delta \times \alpha\sigma}$ (9) (ἢ ἐπειδὴ τὸ Τρίγωνον αοδ ἐστὶν Ὀρθογώνιον, ἔσται αδ = $\sqrt{\alpha\sigma^2 + \delta\sigma^2}$) (10). Ὅθεν εἰν γένηται ὡς 113 πρὸς 355, ἔτις ἡ αδ πρὸς τέταρτον ὄρον. ἄτος ὁ τέταρτος πολλαπλασιασθεὶς διὰ τῆς αδ, δώσει ἐμβαδὸν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας ἴσον. Δείκνυται ἐκ τῆς παρῆς, ἢ ἐκ τῆς μετὰ τὴν ε'. Σχολία σὺν τῇ ΙΕ'. τῇ Ε'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κ ε'.

96. 42.

Ἡ ἐπιφάνεια τῇ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένη ὀρθὴ Κυλίνδρου ἡ πσυ, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ. Καὶ εἰάν ὁ Κύλινδρος, ἢ ἡ Σφαῖρα Ἐπιπέδοις ὀρθοῖς ἐπὶ τὸν Ἀ'ξονα βθ τμηθῶσιν, ἕκαστον Τμήμα τῆς Κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκάσῳ τμήματι τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἔσται ἴσον.

Μέρος Α'. Ἐπεὶ γὰρ ἡ τῇ Κυλίνδρου πλευρὰ ἡ π ἴση ἐστὶ τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ πσ (11), ἔσται ἡ Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἡ σ τετραπλασία τῆς βά-

(1) Κ. τῇ παρόντος. (2) ΚΓ. τῇ παρόντος. (3) Β. τῇ παρόντος. (4) ΑΓ. τῇ γ'. (5) Πορίσμ. Η'. τῆς Β. τῇ β'. (6) Ἄλλον ἐκ τῆς ΚΔ. τῇ παρόντος. (7) Ἄλλον ἐκ τῆς πρώτης μέρους τῆς παρῆς. (8) Πορίσμ. Β'. τῆς Η. τῇ ε'. (9) ΙΖ. τῇ ε'. (10) ΜΖ. τῇ α'. (11) Β' ἐξ ὑποθέσεως.

σεως (1), τῷ ἐστὶ τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ τῇ εἰς τὸν Κύλινδρον ἐγγεγραμμένη. Τετραπλάσια δὲ τῆς τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ καὶ ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια (2)· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τῷ Κυλίνδρῳ ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Σφαίρας. Ὅ· εἶδει δεῖξαι.

Μέρος Β'. Η' χθωσαν εὐθεῖαι αἱ βο, ρθ. Ἐπεὶ ἡ γωνία βοθ ἐστὶν ὀρθὴ ἐν Η' μικκυλίᾳ (3), καὶ ἡ ογ καθετος ἐπὶ τὴν βο· ἡ ἄρα βο μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῆς βο, καὶ βγ (4), τῷ ἐστὶ τῆς ιτ, καὶ τῆς ιι. Ὁ Κύκλος ἄρα, ὁ ἀπὸ ἀκτίνος τῆς βο, ἴσος ἐστὶ, τῇ Κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ ιτ (5)· ἐστὶ δὲ ἴσος καὶ τῷ τμήματι τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας οβκ (6)· ἡ Κυλινδρικὴ ἄρα ἐπιφάνεια ιτ, ἴση τῇ Σφαιρικῇ βοκ.

Ἐπεὶ δὲ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ταῦτα καὶ ἡ Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ιχ, ἐστὶν ἴση τῇ Σφαιρικῇ ξοκ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ Κυλινδρικὴ ιχ λοιπῇ τῇ Σφαιρικῇ ξοκ, τῇ μεταξὺ δύο παραλλήλων Κύκλων ἴση ἐστὶ. Καὶ τὸ αὐτὸ δειχθήσεται περὶ πάντων τῶν Τμημάτων.

Πόρισμα. Ἐντέυθεν ἄλλον, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Κυλίνδρου περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένη, διπλάσια ἐστὶ τῆς βάσεως.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΖ.

Τὰ Σφαιρικῆς ἐπιφανείας Κύκλοις παραλλήλοις τετμημένῃς τμήματα, λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὅν τὰ τμήματα τῆς διαμέτρου (βγ, γδ, δα, αε, εζ, ζθ), πρὸς τὰς Κύκλους τῆς παραλλήλης ταῖς εὐθείαις. α. 42.

Ἐπεται ἐκ τῶ προηγουμένου. Τὰ γὰρ τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τμήματα οβκ, ξοκ, μεξν κτ., ἴσα ἐστὶ τοῖς Κυλινδρικοῖς ιτ, ιχ, λν κτ. (7). Ἀλλὰ ταῦτα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὅν τὰ τῷ Ἀξονος τμήματα βγ, γδ, δα (8)· καθεῖνα ἄρα, Ὅ· εἶδει δεῖξαι.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἐντέυθεν γινώσκειται ὁ τῶν Ζωνῶν, καὶ Κλιμάτων πρὸς ἄλληλα λόγος. Ἐχαι γὰρ πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τῷ Ἀξονος τμήματα, ἃ περ γινώσκειται ἐκ τῶ Πίνακος τῶν Η'μιτόνων.

Ἐκ τῆς αὐτῆς δὲ καὶ ἡ τῶν τμημάτων τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας πορίζεται

(1) Πορισμ. τῆς ΙΒ. τῷ παρόντος. (2) ΚΔ. τῷ παρόντος. (3) ΛΑ. τῷ γ'. (4) Πορισμ. Β'. τῆς Η. τῷ ε'. (5) ΙΔ. τῷ παρόντος. (6) Ἐκ τῆς προηγουμένης. (7) Ἐκ τῆς προηγουμένης. (8) ΙΓ. τῷ β'.

καταμέτρησις. Ἐπεὶ γὰρ ἐκ τῆ Σχολίᾳ τῆς ΚΔ', ἥ τε ὅλη τῆς Σφαίρας γινώσκεται ἐπιφάνεια, καὶ ὁ τῶν τμημάτων πρὸς ἄλληλα λόγος, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ λόγῳ τῶν τῆ Α'ξονος τμημάτων· φανερόν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς σφαίρας γνωσθήσεται.

Γίγνεται δ' ἐτι ὡς τὰ τέτταρα προηγύμενα Θεωρήματα, καὶ πάντα τὰ ἐπόμενα, ἐξαίσια τε ἐστὶ, καὶ θαυμάσια, καὶ ἂν ἂν εἴποις ὅσων σπαθὴν εἰς τὴν τέτων κατάληψιν καταβλητέον ἐστὶ τὰς Γεωμετρῶντας.

Λήμμα εἰς τὴν ἐξῆς.

κ. 43. Ἐὰν Ἐπίπεδον (τὸ ξν) Σφαίρας ἐφάπτεται κατὰ τὸ ο, ἡ ἀπὸ τῆ Κέντρος τῆς Σφαίρας ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἀγομένη εὐθεῖα (αο), κάθετος ἐστὶ τῷ ἐφαπτομένῳ Ἐπιπέδῳ.

Τετμήθωσαν τό τε ἐπιφάνειον Ἐπίπεδον, καὶ ἡ Σφαῖρα διὰ τε τῆ Κέντρος α, καὶ τῆ τῆς ἀφῆς σημείου ο δυοῖν Ἐπιπέδοις (ὧν τομὴ ἔσται ἡ αο), ἄτινα ἐν μὲν τῇ Σφαίρᾳ Κύκλος ἀπογεννώσιν τὰς οθ, οδ, ἐν δὲ τῷ Ἐπιπέδῳ νξ εὐθείας τὰς γο, ιο, αἵ τινες τῶν Κύκλων κατὰ τὸ σημεῖον ο συνεφάφονται (1). Ἡ ἄρα αο κάθετος ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν ιο, γο (2)· ἐπομένως δὲ καὶ τῷ Ἐπιπέδῳ νξ (3). Οὗ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι Σφαῖρα ἐπ' ἀκριβὲς λεῖα ἐν Ἐπιπέδῳ ὀριζοντεῖ ἐπ' ἀκριβὲς λείῳ τῷ νξ τῆς Γῆς κατὰ τὸ ο ἐπιφάνουσι τεθεῖσα, ἡ σήσεται, εἰμὴ κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς ο γενομένη. Οἷον ἐὰν Σφαῖρα ἐν τῷ σημείῳ ι τεθῇ, αὕτη δὲ διὰ τε τὴν αὐτῆς βαρύτητα, καὶ τὴν τῆ Ἐπιπέδου ἐπίκλισιν ἐπὶ τὸ σημεῖον ο γενήσεται. Ἀχθεῖται γὰρ τῆς αἰ, ἡ τὴν ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ αοι ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα πλευρὰ αἰ, μείζων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς αο (4). Διὰ τοι τότο ἡ Σφαῖρα μᾶλλον ἀφέστηκε τῆ Κέντρος ἐν τῷ ι ἔστα, ἢ περ ἐν τῷ ο. Οὐκ ἄρα σήσεται ἐν τῷ ι, ἀλλὰ καταβήσεται ἐπὶ τὸ ο. Ἀλλως γὰρ ἂν ἂν ἔχοιμεν ἀποδείξαι τὴν τῶν ρευσῶν κατάβασιν, ἅτε μὴν τὴν εἰς σφαιροειδῆ ἐπιφάνειαν αὐτῶν διαμόρφωσιν.

Λήμμα εἰς τὴν Γ'. συνέπειαν τῆ ἐπομένῃ Σχολίᾳ. Ἐζώσαν ο, π, ξ, τριῶν Κύκλων περιφέρειαι, καὶ ρ, σ, τ, τέτων ἡμιδιάμετροι· καὶ κείῳ ρ — σ = τ· ἔσεται δὲ ο — π = ξ.

Ἐστὶ γὰν ο : π :: ρ : σ (5)· καὶ π : ξ :: σ : τ· ἄρα ο — π : ξ :: ρ — σ : τ (6). Ἀλλὰ ρ — σ = τ, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα καὶ ο — π = ξ (7).

(1) Ὅρισμ. Β. τῆ γ'. (2) ΙΗ. τῆ γ'. (3) Δ. τῆ ια'. (4) ΙΘ. καὶ Πορίσμ. Ε. τῆς ΑΒ. τῆ α'. (5) Ζ. τῆ παρόντος. (6) Πορίσμ. Β. τῆς ΚΒ. τῆ ε'. (7) Ὅρισμ. Ε. τῆ α'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΗ'.

Πᾶσα Σφαῖρα ἴση ἐστὶ Κέντρῳ (τῷ φο), ἢ τὸ μὲν ὕψος (κα) ἴσον ἐστὶ τῇ α .44 45.46 ἡμιδιαμέτρῳ τῆς Σφαίρας· ἢ δὲ βάσις (φ) ἴση τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ.

Νοεῖσθω περὶ τὴν Σφαῖραν σῶμάτι πολυέδρον περιγεγραμμένον, ἢ τὰς σφαιρᾶς γωνίας Ἐπίπεδα ἕτερα τῆς Σφαίρας ἐπιφάνοντα ἀποτεμνέτω· οὗ γενομένη, σῶμα ἕτερον πολυέδρον περιλαμβάνον τὴν Σφαῖραν ἀπογεννήσεται τῷ προτέρῳ ἔλαττον, ἐκ πλειόνων τε γωνιῶν συνιστάμενον καὶ ἐπιφάνειαν ἔχον ἐκ πλειόνων καὶ ἔλαττόνων Ἐπιπέδων τῆς Σφαίρας ἐπιφανόντων συγκειμένην. Ἐὰν δὲ τῷ πολυέδρῳ τῷ αἰ σφαιρᾶς γωνίαι Ἐπιπέδοις ἑτέροις ἐπιφάνουσι τῆς Σφαίρας αὐτῆς ἀποτμηθῶσιν, καὶ τῷ ἐντεῦθεν ἀπογεγεννημένῳ πολυέδρῳ αἱ γωνίαι ὁμοίως ἀποτμηθῶσιν, καὶ ἔτις ἐπ' ἄπειρον· γενήσεται τέως, ὥς τὸ μὲν πολυέδρον ὑπερέχειν τῆς Σφαίρας σφαιρῶ παντὸς δοθέντος ἀλάσσοι· τὴν δὲ τῷ ἐπιφάνειαν τὴν ἐξ Ἐπιπέδων ἐπιφανόντων ἀπείρων, καὶ ἔλαττόνων καὶ δὴ καὶ πλειόνων (ὡς εἶπον) συγκειμένην, ὑπερέχειν ὡσαύτως τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας Ἐπιπέδῳ παντὸς δοθέντος ἀλάσσοι. Ὅπερ ἔχει μὲν ἐκάτερον ἀποδειχθῆναι, διὰ τὸ εἶναι δὲ καθ' αὐτὸ πρόδηλον, αἰτεῖσθω τέως συντομίας χάριν. Τῶν δ' ἕτω κατασκευαζόντων, τὸ Θεώρημα συντεθήσεται τῶτον τὸν τρόπον.

Τὸ ἤδη ἐκκείμενον πολυέδρον ἐκ Πυραμίδων σύγκεται, ὧν κορυφὴ μὲν κοινὴ τὸ Κέντρον ἐστὶ τῆς Σφαίρας· βάσεις δὲ τὰ ἐπιφάνοντα Ἐπίπεδα, ἐξ ὧν ἢ τῷ πολυέδρῳ σύγκεται ἐπιφάνεια. καὶ ἐπεὶ αἱ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α ἐπὶ τὴν ἐπαρὴν ἐκάστῃ Ἐπιπέδῳ ἡγμέναι εὐθεῖαι κάθετοί εἰσιν ἐκάστῳ Ἐπιπέδῳ (1), δῆλον ὅτι πᾶσαι αἱ Πυραμίδες, ἐξ ὧν σύγκεται τὸ πολυέδρον, ἴσον ἔξουσιν ὕψος, αὐτὴν δηλονότι τὴν αβ, ἣτίς ἐστι τῆς Σφαίρας ἡμιδιαμέτρος. Ἐὰν ἄρα ἤδη τεθῇ Ἐπίπεδον τὸ Χ τῇ τῷ πολυέδρῳ ἐπιφανείᾳ ἴσον, καὶ ἐπ' αὐτῇ Πυραμὶς ἀνεσταμένη ὀρθή, ὕψος ἔχουσα τὴν εὐθεῖαν μν ἴσην τῇ τῆς Σφαίρας ἡμιδιαμέτρῳ αβ· φανερόν ἐστι πᾶσαι αἱ εἰρημέναι Πυραμίδες, τῶν ἐστὶν ὅλον τὸ πολυέδρον ἴσον ἔσθαι τῇ Πυραμίδι νΧ (2). Καὶ τῷ αὐτῷ τρόπῳ δείκνυται ὅτι πάντα τὰ τὴν Σφαῖραν περιλάμβανοντα λοιπὰ πολυέδρα, τὰ ἐκ τῆς ἀποτμήσεως τῶν σφαιρῶν γωνιῶν ἄλλα ἐπ' ἄλλοις εἰς ἄπειρον ἀπογεννώμενα, ἔσονται αἰ ἴσα ταῖς Πυραμίδι (νΧ), ὧν τὸ μὲν ὕψος (μν) ἴσον τῇ τῆς Σφαίρας ἡμιδιαμέτρῳ· ἢ δὲ βάσις (Χ) ἴση ταῖς ἐπιφανείαις τῶν τὴν Σφαῖραν περιλαμ-

(1) Προηγ. Λήμμα. (2) Δῆλον ἐκ τῆςδείξεως τῆς ε'. τῷ β'.

βανόντων πολυέδρων. Ἐπεὶ δὲ τὰ μὲν πολυέδρα ἀπολήγει τέως εἰς τὴν Σφαῖραν, ὡς ἀνωτέρω εἶπον, αἱ δὲ Πυραμίδες (νΧ) ἀποτελευτῶσιν, ὡς μικρῶ ὕψερρον δειχθήσεται, εἰς τὸν Κῶνον. Ἡ Σφαῖρα (1) ἄρα ἴση ἔσται τῷ Κῶνῳ. Ὅ" ἔδει δείξαι.

Ὅτι δὲ αἱ Πυραμίδες νΧ (2) ἀποτελευτῶσιν εἰς Κῶνον, δειχθήσεται ἕτως. Αἱ τῶν πολυέδρων ἐπιφανεῖαι ἀπολήγουσιν εἰς τὴν τῆς Σφαίρας ἐπιφανείαν, ὡς ἤτληται ἀνωτέρω. Ἐπεὶ δὲ αἱ βάσεις Χ τῶν Πυραμίδων νΧ ὑπόκεινται ἡεὶ ταῖς ἐπιφανείαις τῶν πολυέδρων ἵται· ἡ δὲ βᾶσις φ τῆς Κῶνης φρ ἐστὶν ἐξ ὑποθέσεως ἴση τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ· ἄρα καὶ αἱ βάσεις Χ ἀπολήξουσιν εἰς τὴν βάσιν φ· καὶ ἐπομένως, ὡς αἱ Πυραμίδες νΧ πρὸς τὸν ἐξ ὑποθέσεως ἰσοῦψῃ Κῶνον, ἕτως ἡ βᾶσις Χ πρὸς τὴν βάσιν φ (3)· αἱ Πυραμίδες ἄρα εἰς τὸν Κῶνον ἀπολήξουσιν.

Ἡ ἐκτεθειμένη ἡμῖν ἀπόδειξις τῆς τε παράσης, καὶ τῆς ἐπομένης προτάσεως πολὺ τι διενήνοχε τῆς τῆς Ἀρχιμήδους, ἥτις καὶ τοὶ πολλοὶν τινα ὀξύτητα τῷ ἀνδρὶ ἐμφάνισα καὶ ἐπίνοιαν· ἐστὶν ὁμως σχοινοτενὴς τις καὶ δυσχερὲς αὐτῇ· παραλαμβάνεται γὰρ ἐν αὐτῇ δύο τινὰ ὡς ὁμολογώμενα, καὶ προτάσεις ἑνδεκα καὶ πολλὰ ἄλλα, ὧν ἐκεῖναι ἐξήρτηνται. Αὐτὸ δὲ τὸ Θεώρημα ἅτῳ προτίθουσιν Ἀρχιμήδης. Πᾶσα Σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ Κῶνη, βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τῆς Κέντρος τῆς Σφαίρας.

Πόρισμα. Ἐντέυθεν δῆλον ὅτι τὸ Ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι Κῶνης βασιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ· ὕψος δὲ τὴν ἐκ τῆς Κέντρος αὐτῆς τῆς Σφαίρας.

Τὸ Πόρισμα τόδε εἰς τὴν Α'. προβάλλεται ὁ Τακνέτιος. Α' καὶ εἰς τὴν τᾶτα δεῖξιν λαμβάνει τῷ θ' ὅπερ μόλις ἐστὶ καὶ αὐτῆς τῆς Προτάσεως σαφέστερον. Ὅτι δηλαδὴ τὸ Ἡμισφαίριον ἴσον ἐστὶ Κῶνῳ ἔχοντι, ὕψος μὲν τὴν ἐκ τῆς Κέντρος τῆς Σφαίρας, βάσιν δὲ Κύκλον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Ἡμισφαίριος ἴσον. Ὅ" δὴ καὶ αὐτὸ εὐκόλως, καὶ αὐτὴ δὴ αὐτὴ ἡ Α'. ἔχῃ ἤττον, ἐξ αὐτῆς τῆς ΚΗ' συναγεται. Δέον ἔνῃ τὴν Α'. ἐνταῦθα μετακομίσαντας εἰς Πόρισμα μεταβαλεῖν τὸ προειρημένον, ἢ γὰρ τῆς Προτάσεως κατὰ χώραν μενάσης, τὴν ἀπόδειξιν ἑτεροίως μεταρρυθμίσαι.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν .

Ἐκ τῆς ἐξαιρέτε τῆς δε Θεωρήματος ἡ τῆς ἐν τοῖς σερεοῖς εὐγενεστάτη Σχή-

(1) Α. τῷ παρόντος. (2) Ὅρισμα ε'. τοῦ ἱβ'. (3)

μάτος πορίζεται καταμέτρησις. Εάν γὰρ τὸ ἔκτιμόριον τῆς διαμέτρου, ἢ τὸ τριτημόριον τῆς Ἡμιδιαμέτρου διὰ τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν ἐπιφανείας, γνωσκομένης ἤδη ἐκ τῆ Σχολίης τῆς ΚΔ'. πολλαπλασιασθῇ, προκύπτει τὸ τῆς Σφαίρας σφαιρὸν. Οἷον εἰ εὐρεθῇ ἡ μὲν τῆς κατὰ γῆν Σφαίρας ἐπιφάνεια Τετραγωνικὰ μίλλια ὠρικά περιέχουσα 23,760000· ἡ δὲ Ἡμιδιάμετρος μίλλων ἴσα ὠρικών 1375, ἢ τὸ τριτημόριον ἐστὶ 458 $\frac{1}{3}$. Τῆτο δὲ πολλαπλασιασθὲν, ἀμειλιθέντος τῆ Κλάσματος, δώσει Κυβικὰ τετραγωνικὰ μίλλια ὠρικά 10882,080000 εἰς τὸ τῆς γῆν Σφαίρας σφαιρὸν. (Περὶ δὲ τῶν ἀριθμῶν τῶντων ὅρα τὰ ἐν τῷ μετὰ τὴν ζ'. τῆ παρόντος σημειωθέντα Σχολίῳ).

Εἴπερ γὰρ ἡ Σφαῖρα ἴση ἐστὶ Κῶνῳ, ἢ ὕψος μὲν ἢ ἐκ τῆ Κέντρος τῆς Σφαίρας, βάσις δὲ ἡ τῆς Σφαίρας αὐτῆς ἐπιφάνεια (1), τὸ δὲ τῆ Κῶνῳ σφαιρὸν προκύπτει ἐκ τῆ τριτημορίου τῆ ὕψους, τῆτ' ἐστὶ τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν ἡμιδιαμέτρου (2), πολλαπλασιαζομένης διὰ τῆς βασέως, τῆτ' ἐστὶ διὰ τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν ἐπιφανείας· καὶ τὸ τῆς Σφαίρας ἄρα σφαιρὸν προκύπτει ἐκ τῆ τριτημορίου τῆς Ἡμιδιαμέτρου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν πολλαπλασιαζομένη.

Δοθεῖσάν δὲ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς περιφέρειας, εὐρεθήσεται τὸ τῆς Σφαίρας σφαιρὸν, εἰ τὸ ἔκτιμόριον τῆς περιφέρειας ἐπὶ τὸ Τετράγωνον τῆς διαμέτρου πολλαπλασιασθῇ. Ἡ', ἄλλως, εἰ τὸ Τετράγωνον τῆς διαμέτρου διαιρεθῇ διὰ 6· τὸ δὲ πηλίκον διὰ τῆς περιφέρειας πολλαπλασιασθῇ· τὸ αὐτὸ γὰρ καὶ ἄτω προκύπτει γινόμενον, ὡς εἴπερ ἐπολλαπλασιάζετο τὸ τῆς διαμέτρου ἔκτιμόριον ἐπὶ τὴν τῆς Σφαίρας περιφέρειαν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΘ'.

Παντὶ τομεῖ Σφαίρας ἴσος ἐστὶ Κῶνος, ὁ ὕψος μὲν ἔχων ἴσον τῇ ἐκ τῆ Κέντρος τῆς Σφαίρας· βάσιν δὲ ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆ σφαιρικῆς Τομέως.

Εἴσω πρῶτον τομεὺς Ἡμισφαιρίᾳ ἐλάσσων (ὁ αεγδ). Περὶ δὲ τὸν Τομέα νοείδω σῶμα πολυέδρον εὐθύγραμμον περιγεγραμμένον. Εάν ἔν ὁ λοιπὸς ἅπας συλλογισμὸς ὁμοίως τοῖς προηγουμένοις διατεθῇ, τῷ αὐτῷ τρόπῳ συντεθήσεται, ἢ συναχθήσεται τὸ ζητούμενον· δεικτέον δὲ τῆτο μόνον, ἔξ ἧ ἅπας ὁ τῆς δειξέως ἡρτῆται λόγος, ὅτι ἡ τῆ πολυέδρου ἐπιφάνεια, ἡ ἐξ Ε' πιπέδων πανταχόθεν τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας εγδ' ἐπιφανούντων συγκεκλιμένη, μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας εγδ'· ὅπερ ἄτω γενήσεται. Νοοῦν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ εγδ' προσεθῆναι ἑτέρα ἴση καὶ ὁμοία, ὑπὸ Ε' πιπέδων ἐπιφανούντων ὁμοίως τοῖς

κ. 47.

(1) ΚΗ. τοῦ παρόντος. (2) ζ. τοῦ παρόντος σελ. 342.

πρότερον περιλαμβανομένη· ἔσται δὴ ὅλη ἢ ἐκ τῶν Ε'πιπέδων συγκειμένη ἐπιφάνεια, τῆς Σφαιρικῆς ὅλης μείζων (1)· καὶ ἡ ἡμίτεια ἄρα τῆς ἐκ τῶν Ε'πιπέδων συγκειμένης, μείζων ἔσται τῆς ἡμισείας τῆς Σφαιρικῆς εὐθ.

Ε'ξω δεύτερον τομεὺς μείζων Η'μισφαίρις ὁ αεβθ. Συναμρότερος ἄρα ὁ Τομεὺς ἴσος ἐστὶ Κώνω, ἢ ὕψος μὲν ἢ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσις δὲ ὅλη ἢ ἐπιφάνεια (2)· τὰτ' ἔστι δυοὶ Κώνοις, ὧν τὸ μὲν ὕψος ταῦτον, βάσεις δὲ ἴσαι τοῖς τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τμήμασιν εὐθ, εβθ. Α'λλ' ὁ εἰς τῶν Τομέων, ὅς ἐστιν ἐλάσσων Η'μισφαίρις, τὰτ' ἔστιν ὁ αεγθ, ἴσος ἐστὶ, διὰ τὸ πρῶτον μέρος τῆςδείξεως, Κώνω, ἢ ὕψος μὲν ἢ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσεις δὲ ἢ ἐπιφάνεια εὐθ· ὁ ἕτερος ἄρα αεβθ ἴσος ἐστὶ τῷ λοιπῷ Κώνω, οὗ ὕψος μὲν ἢ Η'μιδιάμετρος· βάσις δὲ ἢ λοιπὴ ἐπιφάνεια εβθ. Ο' ἔδει δεῖξαι.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ε'πεὶ ἡ μὲν ἐπιφάνεια εὐθ ἴση ἐστὶ Κύκλῳ, ἢ ἀκτὶς ἢ γθ (3)· ἡ δὲ εβθ ἴση Κύκλῳ, ἢ ἀκτὶς ἢ βθ· ἔσονται ἄρα οἱ Τομεῖς αεγθ, αεβθ ἴσοι Κώνοις, ὧν ὕψος μὲν ἢ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσεις δὲ Κύκλοι, ὧν ἡμιδιάμετροι αὐτὴ γθ, βθ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

α. 47. Ε'ντεῦθεν πορίζεται ἡ τε τῶν Τομέων καὶ ἡ τῶν τμημάτων τῆς Σφαίρας καταμέτρησις· τῶν μὲν τομέων εἰς (2) τὸ τρίτημόριον τῆς Η'μιδιαμέτρου πολλαπλασιασθῇ διὰ τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τῶν Τομέων, γινωσκομένης ἤδη ἐκ τῆς ΚΖ (ἢ ἐκ τῆ Πορίσματος τῆς ΚΕ), ἢ διὰ τῆ Κύκλου, ἢ ἀκτὶς ἢ γθ, ἢ βθ. Τῶν δὲ τμημάτων, εἰς μετρηθῇ ὁ Κώνος εαθ, καὶ ἀφαιρεθῇ μὲν τῆ Τομέως, εἴπερ ἐλάσσων ἐστὶν Η'μισφαίρις, προσεθῇ δὲ αὐτῷ μείζονι ὄντι Η'μισφαίρις.

α. 42. Τὸ δὲ μεταξὺ δύο κύκλων παραλλήλων ἢ μὴ παραλλήλων ἑναπολαμβανόμενον Τμήμα μᾶλλον μετρηθήσεται, εἰς τὰ τμήματα ξβρ, μβν γνωσθέντα ἤδη, ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεθῇ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α'.

α. 48. Τὸ Η'μισφαίριον (εοβθ) διπλάσιόν ἐστι Κώνω (τῆ εβθ) ἔχοντος βάσιν καὶ ὕψος ταῦτά τῷ Η'μισφαίριῳ.

(1) Α'ξιωμα. Γ. τοῦ παρόντος. (2) ΚΗ. τοῦ παρόντος. (3) ΚΕ. τοῦ παρόντος. (4) Δῆλον ἐκ τῆ Σχολ. τῆς 6.

Ο Κῶνος γὰρ ὁ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην τῇ τῷ Ἡμισφαίριῳ ἐπιφανείᾳ εὐβδ· ὕψος δὲ ἴσον τῇ Ἡμιδιάμετρον $\alpha\beta$, ἐςὶ πρὸς Κῶνον τὸν εὐβδ, ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν (1)· τὰτ' ἐστὶν ὡς ἡ τῷ Ἡμισφαίριῳ ἐπιφάνεια εὐβδ, πρὸς τὸν μέγιστον Κύκλον πτ. Ἐπεὶ ἂν ἡ τῷ Ἡμισφαίριῳ ἐπιφάνεια εὐβδ, διπλασία ἐςὶ τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ (2)· ἄρα καὶ ὁ Κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν εὐβδ, ὕψος δὲ τὴν Ἡμιδιάμετρον $\alpha\beta$, διπλασίος ἐςὶ τῷ Κῶνῳ εὐβδ. Ἀλλὰ τὸ Ἡμισφαίριον ἐστὶν ἴσον Κῶνῳ, ἢ ὕψος μὲν ἡ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσις δὲ ἡ Ἡμισφαιρική ἐπιφάνεια εὐβδ (3), διπλασίον ἄρα τὸ Ἡμισφαίριον τῷ Κῶνῳ εὐβδ. Οὐκ ἔδει δεῖξαι.

Καὶ ἄλλως. Ἐπεὶ οἱ ἰσοῦψεῖς Κῶνοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ βάσεις (4), ἔσεται δὴ ὁ Κῶνος, ἢ ὕψος μὲν ἡ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ ἴση τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ, πρὸς τὸν Κῶνον, ἢ ὕψος μὲν τὸ αὐτὸ, βάσις δὲ ἴση τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ, ὡς 4 πρὸς 1 (5). Ἐπεὶ δὲ ὁ πρότερος Κῶνος ἐστὶν ἴσος τῇ Σφαίρᾳ (6), ἡ Σφαῖρα ἄρα πρὸς τὸν ὑπερον Κῶνον ἔσται ὡς 4 πρὸς 1. Τὸ ἄρα Ἡμισφαίριον πρὸς τὸν ὑπερον Κῶνον ἐστὶν ὡς 2 πρὸς 1· ἀλλ' ὁ ὑπερος Κῶνος ἔχει ταῦτά καὶ ὕψος καὶ βάσιν τῷ Ἡμισφαίριῳ· τὸ Ἡμισφαίριον ἄρα διπλασίον ἐςὶ Κῶνῳ ἔχοντος, τότε ὕψος καὶ τὴν βάσιν ταῦτά τῷ Ἡμισφαίριῳ.

Πόρισμα. Κῶνος ὁ εὐβδ, καὶ ἡμισφαίριον τὸ εὐβδ, καὶ Κύλινδρος ὁ εκ, ὧν ὕψος καὶ βάσις κοινά, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλα, ὡς 1, 2, 3. Ἐστὶ γὰρ ὁ Κῶνος πρὸς μὲν τὸ Ἡμισφαίριον, ὡς 1 πρὸς 2 (διὰ τὴν παρῶσαν)· πρὸς δὲ τὸν Κύλινδρον, ὡς 1 πρὸς 3 (διὰ τὴν Γ. τῷ ΙΒ').

Π ρ ό τ α σ ι ν ΛΑ'.

Εὰν Σφαῖρα ἐπιπέδῳ τῷ ΙΞΘτ μὴ διόντι μὲν διὰ τῷ Κέντρῳ α, τέμνοντι δὲ πρὸς ὁρθὰς τὴν διάμετρον βοκ, εἰς δύο Τμήματα τὰ ιλβθ, ισκθ, ἔτω τμήθῃ, ὥστε γενέσθαι ὡς τὸ ὕψος οβ τῷ Τμήματος ιλβθ, πρὸς τὴν τῆς σφαίρας Ἡμιδιάμετρον $\alpha\beta$, ἔτω τὸ ὕψος οκ τῷ ἑτέρῳ Τμήματος ισκθ, πρὸς ἑτέραν τὴν κν· ὡς δὲ τὸ ὕψος οκ τῷ Τμήματος ισκθ, πρὸς τὴν Ἡμιδιάμετρον ακ, ἢ $\alpha\beta$, ἔτω τὸ ὕψος βο τῷ ἑτέρῳ Τμήματος ιλβθ, πρὸς ἑτέραν τὴν βδ. Λέγω

Α'. Ὅτι οἱ Κῶνοι ινθ, ιδθ, ὧν ὕψη μὲν αἱ ον, οδ· βάσις δὲ κοινὴ ὁ Κύκλος ιξθτ, ἴσοι ἔσονται τοῖς Σφαιρικοῖς τμήμασι.

α. 52.

(1) ΙΑ. τῷ Γ. (2) ΚΔ. τῷ παρόντος. (3) Ἐπεται ἐκ τῆς ΚΗ. τῷ παρόντος. (4) ΙΑ. τῷ ιβ'. (5) ΚΔ. τῷ παρόντος. (6) ΚΗ. τῷ παρόντος.

Β'. Ὅτι τὰ Τμήματα λόγον ἔχει τὸν αὐτὸν, ὃν αἱ εὐθεῖαι δο, νο.

Γ'. Ὅτι τὸ Τμήμα ἰσχύει εἶναι πρὸς τὸν εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον μέγιστον Κῶνον ικθ, ὡς ἡ νο πρὸς τὴν κο. Τότε ἕτερον Τμήμα ιλβθ, πρὸς τὸν εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον μέγιστον Κῶνον ιβθ, ὡς ἡ δο πρὸς τὴν βο.

Μέρος Α'. Τετμήθωσαν ἡ τε Σφαῖρα καὶ οἱ Κῶνοι ἐπιπέδῳ, διὰ τῆς Διαμέτρου βκ· καὶ γεγεννηθῶσαν ἐν μὲν τῇ σφαίρᾳ Κύκλος μέγιστος ὁ βλκθ· ἐν δὲ τοῖς Κῶνοις Τρίγωνα τὰ βιδθ, ικθ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἕξ ὑποθέσεως ἡ Διάμετρος βοκ ἐπὶ τὸν Κύκλον ξτ, ἡ γωνία ιοβ εἶναι ὀρθή (1). Ὀρθή δὲ καὶ ἡ ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ ὑπὸ βικ (2)· ἄρα, ἐπεὶ ἐν τῷ Τριγώνῳ βικ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας κατήχθῃ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν βκ ἡ εὐθεῖα ιο, ἔσεται δὴ ἡ ιβ πρὸς τὴν ιο, ὡς ἡ βκ πρὸς πρὸς τὴν κι (3). Ὁ διπλασίον ἄρα λόγος τῆς βι πρὸς τὴν ιο, ἴσος ἐστὶ τῷ διπλασίονι λόγῳ τῆς βκ πρὸς τὴν κι· τὰτ' ἐστὶν (ἐπεὶ (4) αἱ βκ, κι, κο συνεχῶς ἀνάλογον) ἴσος τῷ λόγῳ τῆς βκ πρὸς τὴν κο.

Ἐπεὶ πάλιν ἕξ ὑποθέσεως ὡς ἡ οκ, πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον αβ, ἕτως ἡ οβ πρὸς τὴν βδ· ἔσεται δὴ ἀνάπαλιν μὲν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν βο, ἕτως ἡ αβ πρὸς τὴν οκ· ἐναλλάσσοντι δὲ ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν αβ, ἕτως ἡ βο πρὸς τὴν βκ· καὶ συντιθέντι, ὡς ἡ δα πρὸς τὴν βα, ἕτως ἡ βκ πρὸς οκ. Ἀλλ' ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ὁ λόγος τῆς βκ πρὸς τὴν οκ ἐστὶ διπλασίον, τὰ τῆς βι πρὸς τὴν ιο, καὶ ἐπομένως ἴσος τῷ λόγῳ τῶν Κύκλων τῶν ἀκτίσι ταῖς βι, ιο γραφομένων (5)· ἔσεται δὴ ἄρα ἡ δα πρὸς τὴν αβ, ὡς ὁ Κύκλος, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ βι, πρὸς τὸν Κύκλον, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ ιο· καὶ ὁ Κῶνος, ὃ ὕψος μὲν ἡ δα, βάσις δὲ ὁ Κύκλος, ὃ ἀκτὶς ἡ ιο, τὰτ' ἐστὶν ὁ ξτ, ἴσος τῷ Κῶνῳ, ὃ ὕψος μὲν ἡ βα· βάσις δὲ ὁ ἀπὸ ἀκτίνος τῆς βι Κύκλος (6), τὰτ' ἐστὶ τῷ Σφαιρικῷ τομεῖ αιβο (7). Κοινῇ δὲ προσκειμένη τὰ Κῶνους ιαθ, ἔσεται δὴ συναμφοτέρων ὅ, τε τομεὺς αιβθ καὶ ὁ προσκειμένος Κῶνος ιαθ, ἴσος συναμφοτέρῳ τῷ Κῶνῳ· τὰτ' ἐστὶ τὸ σφαιρικὸν Τμήμα ιλβθ ἴσον δυὶ Κῶνοις, ὧν ὁ μὲν, ἔχει βάσιν μὲν τὸν Κύκλον ξι, ὕψος δὲ τὴν εὐθεῖαν δα· ὁ δὲ, ὕψος μὲν τὴν οβ, βάσιν δὲ τὸν αὐτὸν Κύκλον ξτ. Ἀλλ' οἱ δύο ἔτσι Κῶνοι συνισῶσι τὸν Κῶνον ιδθ (8)· τὸ Σφαιρικὸν ἄρα Τμήμα ιλβθ, ἴσον ἐστὶ τῷ Κῶνῳ ιδθ. Ὅν' ἔδει δεῖξαι.

Διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται ὅτι καὶ τὸ σφαιρικὸν Τμήμα ἰσχύει, ἴσον ἐστὶ

(1) Ὁρίσμ. Γ. τῷ ια'. (2) ΛΑ. τῷ γ'. (3) Πόρισμ. Γ. τῆς Η. τῷ ε'. (4) Πόρισμ. Η. τῆς Η. τῷ ε'. (5) Πόρισμ. Η. τῆς Β. τῷ ιβ'. (6) ΙΕ. τοῦ ιβ'. (7) ΚΘ. τοῦ παρόντος. (8) Δείκνυται ἐκ τῆς ΙΔ. τῷ ιβ'. καὶ τῆς ΚΔ. τῷ ε'.

τῷ Κώνῳ ινθ· πλὴν ὅσον ὁ προσκείμενος ἐν τῷ προτέρῳ Κώνῳ ιαθ, ἐντῷ-
δα ἐστὶν ἐφαιρετέος.

(Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶ $\kappa\iota : \iota\omicron :: \kappa\beta : \beta\iota$ (1)· ἔσται δὲ $\kappa\iota^2 : \iota\omicron^2 :: \kappa\beta^2 : \beta\iota^2$ (2) :: $\kappa\beta : \beta\iota$ (3)· ἐστὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως $\nu\kappa : \alpha\beta (= \kappa\alpha) :: \kappa\omicron : \omicron\beta$ · καὶ συντιθέντι $\nu\alpha : \alpha\kappa :: \kappa\beta : \beta\omicron :: \kappa\iota^2 : \iota\omicron^2$ (4) :: Κύκλ., ἢ ἀκτὶς- $\kappa\iota$:Κύκλ., ἢ ἀκτὶς $\iota\omicron (= \text{Κύκλ. } \xi\tau)$ · ἄρα ὁ Κώνος, ἢ ὕψος ἡ $\nu\alpha$, καὶ βάσις ὁ $\xi\tau = \text{Κώνω}$, ἢ ὕψος ἡ $\alpha\kappa$ καὶ βάσις ὁ ἀπὸ ἀκτίνος τῆς $\kappa\iota$ Κύκλος (5) = τῷ σφαιρικῷ Τομεῖ αικθ (6). Ἀλλ' ὁ Κώνος, ἢ ὕψος ἡ $\nu\alpha$ καὶ βάσις ὁ $\xi\tau$, ἐστὶν ἴσος τοῖς δυσὶ Κώνοις ἅμα ληφθεῖσιν, ὧν ὁ μὲν ὕψος μὲν ἔχει τὴν $\nu\omicron$, βάσιν δὲ τὸν Κύκλον $\xi\tau$ · ὁ δὲ, ὕψος μὲν τὴν $\omicron\alpha$ βάσιν δὲ τὸν αὐτὸν $\xi\tau$ (7), τὰτ' ἔστι τοῖς Κώνοις ινθ, ιαθ· ὁ δὲ σφαιρικός Τομεὺς αικθ, ἴσος ἐστὶ τῷ σφαιρικῷ Τμήματι ισκθ καὶ τῷ Κώνῳ ιαθ ἅμα ληφθεῖσιν· κοινῇ δὲ ἀρθέντος τῷ Κώνου ιαθ, ὁ λοιπὸς Κώνος ινθ = τῷ λοιπῷ σφαιρικῷ Τμήματι ισκθ. Ο. Ε. Δ.)

Τὸ Β'. Μέρος δῆλον ἐκ τῆ Α'. Οἱ γάρτοι Κώνοι ιδθ, ινθ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ $\delta\omicron$, $\nu\omicron$ (8), ἄρα καὶ τὰ ἴσα τοῖς Κώνοις Τμήματα ιλβθ, ισκθ λόγον ἔχουσιν, ὅν αἱ $\delta\omicron$, $\nu\omicron$.

Δῆλον δὲ αὐτόθεν καὶ τὸ Γ'. Ὡς γὰρ ὁ Κώνος ιδθ πρὸς τὸν ινθ, οὕτως ἡ $\delta\omicron$ πρὸς τὴν $\nu\omicron$ (9)· καὶ τὸ ἴσον ἄρα τῷ Κώνῳ ιδθ, Τμήμα ιλβθ, ἐστὶ πρὸς τὸν Κώνον ιβθ, ὡς ἡ $\delta\omicron$ πρὸς τὴν $\beta\omicron$. Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ Τμήμα ισκθ ἐστὶ πρὸς τὸν Κώνον ικθ, ὡς ἡ $\nu\omicron$ πρὸς τὴν $\kappa\omicron$.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἐκ τῆ πρώτης μέρης τῆ παρόντος Θεωρήματος πορίζεται, καὶ ἑτέρα ἐχ' ἡ-
τον εὐμήχανος τῶν σφαιρικῶν Τμημάτων καταμέτρησις. Ἐὰν δελονότι οἱ Κώνοι ιδθ, ινθ μετρηθῶσιν· ὅπερ γενήσεται ἐὰν τὸ τριτημόριον τῶν εὐθειῶν $\delta\omicron$, $\nu\omicron$ ἐπὶ τὸν $\xi\tau$ Κύκλον πολλαπλασιασθῇ (10).

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΒ'.

Πᾶς Κύλινδρος ὀρθός (9κ) ἡμιόλιός ἐστι τῆς Σφαίρας, περὶ ἣν περιγέ-
γραπται· ἢ τε ἐπιφάνεια αὐτῆ μετὰ τῶν βάσεων ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας
τῆς Σφαίρας.

α. 48.

(1) Πόρισμ. Β'. τῆς Η. τῆς ζ'. (2) ΛΔ. τῆς ε'. καὶ Σχόλ. τῆς Κ. τῆς ζ'. (3) Πόρισμ. Β'. τῆς Η. τῆς ζ'. (4) Πορ. Β'. τῆς Β. τῆς ιβ'. (5) ΙΕ. τῆς ιβ'. (6) ΚΘ. τῆ παρόντος. (7) ΚΔ. τῆς ε'. καὶ ΙΔ. τῆς ιβ'. (8) Δ. τῆς ιβ'. (9) Διὰ τὴν αὐτήν. (10) Ὅρα τὸ μετὰ τὴν ζ'. Σχόλιον.

Εἶς ἂν Ἀξων κοινὸς τῇ τε σφαίρᾳ καὶ τῷ Κυλίνδρῳ ὁ βξ. Εἰς δὲ τὸ Ἡμισφαίριον εοβδ ἐγγεγραμμένῳ Κῶνος μέγιστος ὁ εβδ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν Κύλινδρος εκ (ἡμισυς τῆ ὅλης θκ) τριπλάσιός ἐστι τῆ Κῶνος εβδ (1). Τὸ δὲ Ἡμισφαίριον διπλάσιον τῆ αὐτῆς Κῶνος (2), δηλὸν ὅτι ὁ Κύλινδρος εκ ἐστὶ πρὸς τὸ Ἡμισφαίριον, ὡς 3 πρὸς 2· ἄρα καὶ ὁλος ὁ Κύλινδρος θκ ἐστὶ πρὸς ὅλην τὴν σφαῖραν ξεβδ, ὡς 3 πρὸς 2· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Ἐπεὶ δὲ πάλιν· ἡ τῆ Κυλίνδρου πλευρὰ κν, ἐστὶν ἴση τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ θν· ἔσται δὴ ἡ τέταρτη ἐπιφάνεια χωρὶς μὲν τῶν βάσεων τετραπλασία (3), μετὰ δὲ τῶν βάσεων, τῆς ἐστὶν ὅλη ἡ τῆ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἑξαπλασία τῆς βάσεως μι, ἥτις ἐστὶν ἴση τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ. Ἀλλ' ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια ἐστὶ τετραπλασία τῆς μεγίστης κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ· ἡ ὅλη ἄρα ἐπιφάνεια τῆ Κυλίνδρου θκ, ἐστὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Σφαίρας, ὡς 6 πρὸς 4, τῆς ἐστὶν ὡς 3 πρὸς 2· ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

Ὁ Κύλινδρος ἄρα ὁ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἡμιόλιός ἐστι τῆς Σφαίρας· ἥ τε ἐπιφάνεια αὐτῆς μετὰ τῶν βάσεων, ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας. Ὅν ἔδει δεῖξαι.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Α'. Κύλινδρος ὁρθὸς ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος, αὐτὴ τε ἡ Σφαῖρα, καὶ Κῶνος ὁ βάσιν καὶ ὕψος ἔχων ταῦτά τῷ Κυλίνδρῳ, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς 3, 2, 1. Ἐστὶ γὰρ ὁ Κύλινδρος (διὰ τὴν παρῆσάν) πρὸς μὲν τὴν Σφαῖραν ὡς 3 πρὸς 2· πρὸς δὲ τὸν Κῶνον, ὡς 3 πρὸς 1 (10. τῆ 1β.)· ἄρα κτ. Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ εἰσὶν ἔτι ἡ ἐπιφάνεια τῆ περὶ τὸ Ἡμισφαίριον περιγεγραμμένου Κυλίνδρου, μετὰ τῆς βάσεως τῆς ἐπιφανύσεως τῆς Ἡμισφαίριος, ἥ τε τῆς Ἡμισφαίριος ἐπιφάνεια, καὶ ἡ ἑκατέρω κοινὴ βάση. Ἐπεὶ γὰρ ἥ τε τῆ Κυλίνδρου καὶ ἡ τῆς Ἡμισφαίριος ἐπιφάνεια διπλάσια ἐστὶ τῆς βάσεως (4)· ἔσται δὴ ἡ τε Κυλίνδρου μετὰ τῆς βάσεως τῆς ἐπιφανύσεως, πρὸς τὴν ἑτέραν βάση, ὡς 3 πρὸς 1· ὃθεν δηλὸν τὸ προτεθέν.

Β'. Ὁθεν ὁ Κύλινδρος θκ χωρὶς τῆς εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης Σφαίρας (τῆς ἐστὶ τὸ τῆ Κυλίνδρου σφαιρὸν κενὸν τῆς Σφαίρας, τὸ ἔξωθεν μὲν ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς Κυλίνδρου ἐπιφανείας, ἔσωθεν δὲ ὑπὸ τῆς κούλης σφαιρικῆς περατέμενον), ἴσον ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κῶνῳ θβν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Κύλινδρος ἐστὶ πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην Σφαῖραν, ὡς 3 πρὸς 2· πρὸς τὸ κυλιν-

(1) 1. τῆ 1β. (2) Α. τῆ παρόντος. (3) Πορίσμ. τῆς 1β. τῆ παρόντος. (4) Κε-
τῆ παρόντος μετὰ τῆς Πορίσματος.

δρικὸν ἄρα σφαιρὸν κενὸν τῆς Σφαίρας, ἔσται ὡς 3 πρὸς 1· τῷτ' ἔστιν ὡς αὐτὸς ὁ Κύλινδρος πρὸς τὸν Κῶνον 3βν (1)· καὶ ἐπομένως τὸ ἐκεῖνο σφαιρὸν ἴσον τῷ Κῶνῳ.

Γ'. Τὸ τῷ Κυλίνδρῳ σφαιρὸν κενὸν Ἡμισφαίριον (τῷτ' ἔστιν ὁ Κύλινδρος ἐκ, χωρὶς τῷ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένῳ Ἡμισφαίριῳ εοβδ), ἴσον ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κῶνῳ εβδ. Τότε γὰρ σφαιρὸν καὶ ὁ Κῶνος τριτημόριόν ἐστι τῷ Κυλίνδρου εκ (2).

Δ'. Ἐὰν Κῶνος ὁ καὶ Κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένος τῷ νη, ἔχη τὴν μὲν κορυφὴν ἐν τῷ Κέντρῳ α τῷ εἰς τὸν Κύλινδρον ἐγγεγραμμένῳ Ἡμισφαίριῳ μοβ· τὴν δὲ βάσιν ην, τῇ βάσει τῷ Ἡμισφαίριῳ παράλληλόν τε καὶ τῷ Ἡμισφαίριῳ ἐπιφάυσαν κατὰ τὴν κορυφὴν β· ἀφαιρεθῇ δὲ τῷ Κυλίνδρῳ τὸ Ἡμισφαίριον, καταλειφθήσεται σφαιρὸν Κυλινδρικὸν κενὸν Ἡμισφαίριον, ἴσον Κῶνῳ τῷ ηαν ἔχοντι βάσιν τὴν αὐτὴν τῷ Κυλίνδρῳ τὴν ην. Δείκνυται ἐκ τῷ Γ'. Πορίσματος.

Ε'. Ἐὰν Κῶνος καὶ σφαιρὸν ὅπως ἔχον ἑκάτερον Ε'πιπέδῳ τινὶ τριῶσι τῷ λχ παραλλήλῳ τῇ βάσει ην, γενήσεται ἐν μὲν τῷ Κῶνῳ, Κύκλος ὁ ΑΕ· ἐν δὲ τῷ σφαιρῷ ἐπίπεδον δακτυλιακὸν τὸ ξλχρ, κατὰ πάντα ἀλλήλοις ἰσοῦμενα. Α'χθείσης γὰρ τῆς ἐν τῇ σφαίρᾳ Ἡμιδιαμέτρου αρ· ἔσται $αρ^2 = αδ^2 + δρ^2$ (3)· ἐπεὶ δὲ ἡ αβ, ἴση ἐστὶ τῇ βν, ἴση ἄρα καὶ ἡ αδ τῇ δε (4)· καὶ δὴ καὶ αἱ αρ, αν, δχ ἀλλήλαις ἴσαι (5). Τοιγαρὺν τὸ ἀπὸ τῆς δχ, ἴσον συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν δε, δρ· καὶ Κύκλος ὁ ἀπὸ δχ, ἴσος συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν δρ, δε Κύκλῳ (6)· ἀφαιρεθὲν δὲ ἑκατέρωθεν τῷ ἀπὸ τῆς δρ Κύκλῳ· λείπεται τὸ Δακτυλιακὸν ἐπίπεδον ξλχρ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δε Κύκλῳ.

ς'. Τὰ Τμήματα οἷσθ' ἵνα Κῶνος καὶ Κυλινδρικῶ σφαιρῷ χωρὶς τῷ ἐν αὐτῷ Ἡμισφαίριῳ, τὰ μεταξὺ ἐπιπέδων ἀλλήλοις παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενα, ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις· ἴσος γὰρ ὁ Κῶνος τῷ σφαιρῷ· ἴση δὲ καὶ ἡ τῷ Κῶνῳ κυκλικὴ τομὴ ΑΕ, τῷ τῷ σφαιρῷ δακτυλιακῷ Ε'πιπέδῳ ξλχρ. Ἐὰν ἄρα τὸ Ε'πίπεδον λχ ἐπὶ τὰ ἄνω, ἢ τὰ κάτω παραλλήλως αἰετῇ τῇ βάσει ἐνεχθῇ, ἀπογεννήσκει αἰετῇ Τμήματα τῷ τε Κῶνῳ καὶ τῷ Κυλινδρικῷ σφαιρῷ ἀλλήλοις ἴσα.

Ζ'. Ἐκ τῆς καταμετρήσεως ἄρα τῷ Κῶνῳ καὶ τῷ Κυλινδρικῷ σφαιρῷ χωρὶς τῷ ἐν αὐτῷ Ἡμισφαίριῳ πορίζεται καταμέτρησις (7)· ἐκ τε τῆς κολοβῆς Κῶνος ΑΕκ, ἢ τῷ δακτυλιακῷ Τμήματος ἔξιορχικ, τῷ μεταξὺ τῶν αὐτῶν Ε'πιπέ-

(1) I. τῷ β'. (2) Δείκνυται ὁμοίως τῷ Β'. Πορίσματι διὰ τῷ 42 Σχήματος. (3) ΜΖ. τῷ α'. (4) Πορ. Α'. τῆς Δ. τῷ ε'. (5) Ορίσμ. Β. τῷ β'. καὶ Πρότ. ΑΔ. τῷ α'. (6) Πορίσμ. Β'. τῆς Β. τῷ β'. καὶ Πρότ. ΚΔ. τῷ ε'. (7) Σχόλ. τῆς ε. τῷ παρόντος.

δων ιτ, λχ ἑναπολαμβανομένη (ι). Καὶ εὐτεῦθεν ἑτέρα ἀποφέρεται μέθοδος τῇ οἰαδήποτε τῆς Σφαίρας τμήματα καταμετρεῖν.

Οἷον εἰάν ζητῆται ἡ καταμέτρησις τῶ μεταξὺ τῶν παραλλήλων Ἐπιπέδων ξρ, οκ ἑναπολαμβανομένη Τμήματος ξοκρ, ἀφηρήσῃ τῷ Κυλίνδρῳ λτ ὁ κολοβὸς Κῶνος οΑΕκ. Εἰάν δὲ ζητῆται ἡ τῶ μεταξὺ τῶν παραλλήλων Ἐπιπέδων μν, ξρ ἑναπολαμβανομένη Τμήματος μέξρ, ὑφήρῃσῃ τῷ Κυλίνδρῳ μχ ὁ Κῶνος ΑαΕ.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ὅσον Ἀρχιμήδης τῷ παρόντι ἐπιγράλλετο Θεωρήματι, ἀπόδειξις ἐστίν, ὅτι τῷ ἰδίῳ τάφῳ Σφαῖραν εἰς Κύλινδρον ἐγγεγραμμένην ἐπιθέσθαι ἡξίωσε· καὶ τῷτο ἴσως δι' ὅ,τι τὸν αὐτὸν λογικὸν λόγον ἔντε τοῖς σώμασι τῷτοις καὶ ταῖς, ὑφ' ὧν αὐτὰ τὰ σώματα περιέχεται, ἐπιφανείαις ἐνορῶν, ταύτην μᾶλλον, ἢ τινα ἄλλην τῶν τοσούτων αὐτῇ καὶ τηλικέτων εὐρέσεων ἡγάσατο. Τοιαύτη μὲν τοι ταυτότης παθῶν ἔντε δακτυλίοις καὶ δακτυλίων ἐπιφανείαις δέδεικται καὶ ἡμῖν αὐτοῖς ἐν τῷ Δ'. Βιβλίῳ τῶν κυλινδρικῶν καὶ δακτυλιακῶν (Προτ. 13. 14. 15.)· καὶ μὴν ἄλλα καὶ ἐπὶ τῆς Σφαίρας αὐτῆς καὶ ἕτερον εὐρίηται ἡμῖν, ἃχ ἥττον ἐπισημον· τῷτο δὲ ἐστίν, ὅτι ὥσπερ ἡ Σφαῖρα λόγον ἔχει πρὸς τὸν αὐτὴν περιλαμβάνοντα ὀρθὸν Κύλινδρον, κατὰ τε τὸ σερεὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν (ὅς ἐστι ἐξ ἀνάγκης ἰσοπλευρος), ὃν ὁ 2 πρὸς τὸν 3· ἔτι καὶ ἡ αὐτὴ λόγον ἔχει πρὸς τὸν περιλαμβάνοντα ἰσοπλευρον Κῶνον, κατὰ τε τὸ σερεὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὃν ἔχει ὁ 4 πρὸς τὸν 9· ἐξ οὗ δὴ ἔπεται ὅτι ὁ ἡμισόλιος λόγος, ὁ μεταξὺ Σφαίρας καὶ Κυλίνδρου εὐρημένος τῷ Ἀρχιμήδει, ὑπάρχει μεταξὺ τριῶν σωμάτων κατὰ συνέχειαν, Σφαίρας δηλονότι, Κυλίνδρου καὶ ἰσοπλεύρου Κῶνου· καὶ ἐκατέρω τὴν ἀπόδειξιν μετὰ καὶ ἄλλων ἡμετέρων Θεωρημάτων (ἐξ ὧν τρανώτερον ἢ τῆς Σφαίρας θαυμασία φύσις γινώσκεται) ἐν τρισὶ καὶ ἑκατο Πρωτάσεσι περιλαμβανομένων, ὑποσυνάφωμεν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΑΓ'.

κ. 53.

Πάσης Σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῇ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένη ἰσοπλεύρου Κυλίνδρου.

Εἴσω Σφαῖρα ἡ αδβικ, καὶ ἐν αὐτῇ Τετράγωνον ἐγγεγραμμένον τὸ ακλδ· ὑφ' οὗ περιενοχθέντος, καταγράφεται Κύλινδρος ἰσοπλευρος ὁ αδλκ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένος· ἡχθω ἡ αλ, ἣτις ἐστὶ διάμετρος κοινὴ τῇ τε Σφαί-

(1) Αὐτόστιν.

ρα καὶ τῷ Τετραγώνῳ. Ἐπεὶ ἔν τὸ ἀπὸ τῆς αλ Τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ἀλλήλων ἴσων ακ, καὶ Τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν (1), ἐνὸς ἄρα τῷ ἀπὸ ακ ἔσαι διπλάσιον. Τοιγαρὲν καὶ Κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον αλ, διπλάσιός ἐστι τῷ περὶ τὴν ακ (2), τῷτ' ἐστὶ τῷ γν. Ἀλλὰ τῷ περὶ τὴν αλ Κύκλῳ τετραπλασία ἐστὶν ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια (3). διάμετρος γάρ τῆς Σφαίρας ἡ αλ, καὶ ὁ περὶ αὐτὴν Κύκλος μέγιστος τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ· ἡ τῆς Σφαίρας ἄρα ἐπιφάνεια ὀκταπλασία ἐστὶ τῷ γν Κύκλῳ· ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται ἴση τῇ ακ ἡ λκ, ἡ κυλινδρική ἄρα ἐπιφάνεια αὐτῇ τετραπλασία ἐστὶ τῷ γν Κύκλῳ (4)· ἡ τῆς Σφαίρας ἄρα, ἐπεὶ δέδεικται ὀκταπλασία τῷ αὐτῷ Κύκλῳ, ἔσται δὲ διπλασία τῆς τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφανείας. Ὅ" ἔδει δεῖξαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΔ.

Πάσης Σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια πρὸς ὅλην τὴν τῷ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένην ἰσοπλευρῶν Κυλίνδρῳ ἐπιφάνειαν ἐστὶν, ὡς 4 πρὸς 3. κ. 53.

Κειμένων γάρ τῶν αὐτῶν τῇ προηγουμένη, ἐπεὶ ἡ τῷ Κυλίνδρου πλευρὰ λκ, ἐστὶν ἐξ ὑποθέσεως ἴση τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ακ, ἔσται δὲ ἡ τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια γλ τετραπλασία τῆς βάσεως γν (5). ὅλη ἄρα ἡ τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια πρὸς συναμφοτέρων τὴν βάσιν γν, σλ, ἐστὶν ὡς 6 πρὸς 2. Δέδεικται δὲ ἐν τῇ προηγουμένη, ὅτι ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν μίαν τῶν βάσεων, ὡς 8 πρὸς 1· πρὸς συναμφοτέρων ἄρα ἔσαι, ὡς 8 πρὸς 2· πρὸς ὅλην ἄρα τὴν τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνειαν ἔσαι, ὡς 8 πρὸς 6· τῷτ' ἐστὶ, ὡς 4 πρὸς 3. Ὅ" ἔδει δεῖξαι.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Α'. Ὅλη ἡ τῷ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένη ὀρθὴ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια, ἐστὶ πρὸς ὅλην τὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἰσοπλευρῶν κυλίνδρῳ ἐπιφάνειαν, ὡς 2 πρὸς 1. Ἐστὶ γάρ ἡ μὲν τῷ περιγεγραμμένῳ πρὸς τὴν τῆς Σφαίρας, ὡς 6 πρὸς 4 (6)· ἡ δὲ τῆς Σφαίρας πρὸς τὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ὡς 4 πρὸς 3· διὰ τὴν παρῶσαν· δι' ἴση ἄρα ἡ τῷ περιγεγραμμένῳ πρὸς τὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ὡς 6 πρὸς 3· ἢ ὡς 2 πρὸς 1.

(Ὡς αὐτῶς ἡ τῆς περὶ ἰσόπλευρον Κύλινδρον περιγεγραμμένης Σφαίρας ἐπιφάνεια, διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς εἰς τὸν αὐτὸν Κύλινδρον ἐγγε-

(1) ΜΖ. τῷ α'. (2) Πορ. Ε'. τῆς Β. τῷ β'. (3) ΚΔ. τῷ παρόντος. (4) Διὰ τὸ Πορ. τῆς ΙΒ. τῷ παρόντος. (5) Πορ. τῆς ΙΒ. τῷ παρόντος. (6) ΑΒ. τῷ παρόντος.

γραμμένης Σφαίρας. Ὡς περὶ δὴ καὶ αὕτη διπλασία ἐστὶ τῇ μεγίστῃ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ περιγεγραμμένῃ Σφαίρᾳ· εἰσὶ γὰρ ἡ τῆς περιγεγραμμένης Σφαίρας ἐπιφάνεια, καὶ ὅλη ἡ τῇ Κυλίνδρῳ καὶ ἡ τῆς ἐγγεγραμμένης Σφαίρας, πρὸς τὸν μεγίστον Κύκλον τῶν ἐν τῇ περιγεγραμμένῃ Σφαίρᾳ, ὡς 4 καὶ 3 καὶ 2 πρὸς 1 (1).

Β'. Ὅλη ἡ τῇ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένη ὀρθὴ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια, ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, περὶ ἣν ὁ κύλινδρος περιγέγραπται, καὶ ὅλη ἡ τῇ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένη ἰσοπλευρὴ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια εἰσὶν ἐν ἀρμονικῇ ἀναλογίᾳ, τῶν ἑξῆς ὡς 6, 4, 3.

Τρία δὲ ποσὰ εἰσὶν ἀρμονικῶς ἀνάλογον, ἐὰν γένηται τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, ὡς ἡ διαφορὰ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας, πρὸς τὴν διαφορὰν τῆς δευτέρας καὶ τῆς τρίτης. Οἷον ἐὰν ᾖ 6 πρὸς 3, ὡς 6 — 4 πρὸς 4 — 3 (:: 2 : 1)· ἔσονται 6, 4, 3 ἀρμονικῶς ἀνάλογον.

κ. 53.

Σχόλιον. Ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος Κύλινδρος ἐστὶ, πρὸς ὁμοίον, εἴτ' ἢν ἰσόπλευρον Κύλινδρον εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένον, ὡς ἡ ἐν τῷ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς· ἢ, ὅπερ ἐστὶ ταῦτόν, ὡς ἡ διάμετρος τῇ Κύκλῳ πρὸς τὸ ἡμίχρδον 45 μοιρῶν. Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ ἐστὶ καὶ σφαῖρα ἡ περὶ Κύλινδρον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένη, πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην.

Μέρος Α'. Καταχθειςτῶν γὰρ ἐν τῷ Ὀρθογωνίῳ ἰσοσκελεῖ Τριγώνῳ ἀκλ τῶν καθέτων κξ, ξρ· ἔσται δὴ καὶ τὰ Τρίγωνα αξκ, αρξ Ὀρθογωνία τε καὶ ἰσοσκελεῖ (2)· καὶ αἱ αλ, ακ, αξ, αρ συνεχῶς ἀνάλογον (3)· καὶ ἡ αρ = $\frac{1}{2}$ ακ (4)· ἐστὶ δὲ ἡ μὲν αλ, διάμετρος τῆς βάσεως τῇ περιγεγραμμένῃ Κυλίνδρῳ· ἡ δὲ ακ, διάμετρος τῆς βάσεως τῇ ἐγγεγραμμένῃ Κυλίνδρῳ· διὰ τὴν ὁμοιότητα ἄρα τῶν Κυλίνδρων ἔσται ὁ περιγεγραμμένος πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον, ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῇ τῇ τῶν αλ, ακ (5)· τῶν ἑξῆς ὡς αλ πρὸς αρ (= $\frac{1}{2}$ ακ) (6). Ἀλλ' ἡ μὲν αλ ἐστὶ διάμετρος τῇ τε Κύκλῳ αξβκ, καὶ τῇ Τετραγώνῳ δκ· ἡ δὲ ακ, πλευρὰ τῇ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῃ Τετραγώνῳ· τῶν ἑξῆς χωρὴν μοιρῶν 90 εἰς Κύκλον τὸν βκ, ἡ δὲ ἡμίσεια τῆς ακ, ἡμίχρδον 45 μοιρῶν (7). Ὁ περιγεγραμμένος ἄρα Κύλινδρος πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον, ὡς ἡ ἐν τῷ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς, ἢ ὡς ἡ τῇ Κύκλῳ διάμετρος πρὸς ἡμίχρδον τὸ μοιρῶν 45.

(1) Διὰ τὴν παρῶσαν καὶ τὴν ΑΒ. καὶ τὴν ΚΔ. τῇ παρόντος. (2) Η. τῇ ε'. (3) Πόρ. Β. τῆς Η. τῇ ε'. (4) Σχόλ. Α'. τῆς Κξ. τῇ α'. (5) ΙΒ. τῇ ιβ'. (6) Ὁρισμ. Ι. τῇ ε'. (7) Πόρ. Α'. τῆς Γ. τῇ γ'.

Μέρος Β'. Καὶ ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ ἐστὶ καὶ σφαῖρα, περὶ Κύλινδρον ἰσό-
πλευρον περιγεγραμμένη, πρὸς τὴν εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένην. Διάμετρος
γὰρ τῆς περὶ τὸν ἰσόπλευρον Κύλινδρον ἀλλοι περιγεγραμμένης Σφαῖρας θα
ἐστὶν ἢ αλ· ἡ δὲ τῆς ἐγγεγραμμένης διάμετρος ἐστὶν ἰση τῇ διαμέτρῳ τῆς βά-
σεως τῆς Κυλίνδρου, τῇτ' ἐστὶ τῇ ακ· ἡ περιγεγραμμένη ἄρα σφαῖρα πρὸς τὴν
ἐγγεγραμμένην, ἔσεται ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῇ τῆς αλ πρὸς ακ (1)· τῇτ'
ἐστὶν ὡς ἡ αλ πρὸς αρ ἢ πρὸς $\frac{1}{2}$ ακ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα τῆς ἡγμένης Σχολίᾳ. Ἡ σφαῖρα ἐστὶ πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγε-
γραμμένον ἰσόπλευρον Κύλινδρον, ὡς ἡ τετραπλασία τῆς ἐν τῷ Τετραγώνῳ
διαμέτρου πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευρᾶς· ἢ ὡς ἡ τετραπλασία τῆς δια-
μέτρου τῆς Κύκλου πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευρᾶς τῆς εἰς τὸν Κύκλον ἐγγε-
γραμμένης Τετραγώνου.

Ἐστὶ γὰρ διὰ τὸ ἡγόμενον Σχόλιον ἡ περὶ τὸν ἰσόπλευρον Κύλινδρον
περιγεγραμμένη σφαῖρα πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην, ὡς ἐν τῷ Τετρα-
γώνῳ ἡ τριπλῇ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν· ἢ ὡς ἡ τετραπλασία τῆς
διαμέτρου πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς πλευρᾶς. Α' Ζ' ἡ εἰς τὸν Κύλινδρον ἐγγε-
γραμμένη σφαῖρα ἐστὶ πρὸς αὐτὸν τὸν Κύλινδρον, ὡς 2 πρὸς 3 (2)· ἢ ὡς ἡ δι-
πλασία τῆς τῷ Τετραγώνῳ πλευρᾶς, πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς τῷ αὐτῷ Τε-
τραγώνῳ πλευρᾶς. Ἀ' ρα ἡ περὶ τὸν ἰσόπλευρον Κύλινδρον περιγεγραμμένη
σφαῖρα ἐστὶ, πρὸς αὐτὸν τὸν Κύλινδρον (τῇτ' ἐστὶν ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν εἰς αὐ-
τὴν ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον Κύλινδρον), ὡς ἡ τετραπλασία τῆς ἐν τῷ Τε-
τραγώνῳ διαμέτρου πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευρᾶς· ἢ, ὃ εἰς ταῦτόν ἤκει,
ὡς ἡ τετραπλασία τῆς διαμέτρου τῆς Κύκλου, πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευ-
ρᾶς τῆς εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένης Τετραγώνου.

Π ρ ό τ α σ ι ς Λ Ε'.

Οἰασθῶν Σφαιρικῆς μοίρας ἡ ἐπιφάνεια ιλβθ, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς εἰς κ. 53, ἢ 52.
αὐτὴν ἐγγεγραμμένης μεγίστης Κώνης ιβθ λόγον ἔχει, ὅν ἡ τῆς Κώνης πλευρὰ βθ,
πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον θο.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ τῆς μοίρας ιλβθ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ Κύκλῳ, ἢ Ἡμιδιάμετρος
ἡ βθ (3), ἔσεται ὁ λόγος ταύτης πρὸς τὸν Κύκλον ζτ, τῇτ' ἐστὶν τὴν βάσιν
αὐτῆς τε καὶ τῆς Κώνης, διπλασίῳ τῇ λόγῳ τῆς βθ πρὸς θο (4)· τῇτ' ἐστὶ τῆς

(1) ΙΗ. τῇ ιβ'. (2) ΑΒ. τῇ παρόντος. (3) ΚΕ. τῇ παρόντος. (4) Πορ. Β'. τῆς
Β. τοῦ ιβ'.

Κωνικῆς ἐπιφανείας $\text{ιβ}\beta$, πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν $\xi\tau$ (1)· φανερόν ἄν ὅτι ὡς ἡ ἐπιφάνεια $\text{ιλ}\beta\beta$, πρὸς τὴν Κωνικὴν ἐπιφάνειαν $\text{ιβ}\beta$, ἔτως ἡ αὐτὴ Κωνικὴ $\text{ιβ}\beta$, πρὸς τὴν Βάσιν $\xi\tau$ (2)· ὡς δὲ ἡ Κωνικὴ $\text{ιβ}\beta$, πρὸς τὴν βάσιν $\xi\tau$, ἔτως ἡ $\beta\beta$ πρὸς τὴν $\beta\theta$ (3)· ὡς ἄρα ἡ τῆς Μοίρας ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένην Κωνικὴν $\text{ιβ}\beta$, ἔτως ἡ $\beta\beta$ πρὸς τὴν $\beta\theta$. Οἷον δεῖξαι.

Πόρισμα. Ἐκ τῆς δειξέως τῆς παράσης Προτάσεως δῆλον, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια $\tau\theta$ εἰς Τμήμα σφαίρας ἐγγεγραμμένη μεγίστη Κῶν μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῆς $\tau\theta$ Τμήματος ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐκατέρω κοινῆς βάσεως.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δς.

%. 48. Ἡ $\tau\theta$ Ἡμισφαίρις ἐπιφάνεια ($\epsilon\theta\beta\delta$), πρὸς μὲν τὴν $\tau\theta$ ἐγγεγραμμένου μεγίστη ἢ ὀρθῇ Κῶν ἐπιφάνειαν ($\epsilon\beta\delta$) λόγον ἔχει, ὃν ἐν τῷ Τετραγώνῳ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν· πρὸς δὲ τὴν $\tau\theta$ περιγεγραμμένην ὁμοίαν, ὃν ἐν τῷ Τετραγώνῳ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον.

%. 49. Μέρος Α'. Προδὴλον ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς προηγουμένης Προτάσεως. Οἶασι γὰρ μοίρας, ἐπομένως δὲ καὶ $\tau\theta$ Ἡμισφαίρις ἢ ἐπιφάνεια $\epsilon\theta\beta\delta$, ἐστὶ πρὸς τὴν αὐτῇ ἐγγεγραμμένην Κωνικὴν, ὡς ἡ $\beta\delta$ πρὸς τὴν $\delta\alpha$ · ἐστὶ δὲ ἡ μὲν $\beta\delta$ διάμετρος· ἡ δὲ $\delta\alpha$, πλευρὰ $\tau\theta$ Τετραγώνου $\beta\alpha\delta\kappa$ · ἄρα κτ.

Μέρος Β'. Ἐς ὧ περὶ Κύκλον, ὃ Κέντρον τὸ α , ἡμιτετράγωνον περιγεγραμμένον τὸ $\epsilon\beta\gamma$ · ὃ περὶ τὸν Α'ξονα $\alpha\beta$ περιεσφαιρόμενος, γεγεννηθῶ Κῶνος περὶ τὸ Ἡμισφαίριον περιγεγραμμένος. Ἐπεὶ ἄν τὸ ἀπὸ τῆς $\epsilon\gamma$ διπλάσιον ἐστὶ $\tau\theta$ ἀπὸ τῆς $\epsilon\beta$, ἢ τῆς $\beta\iota$ (4)· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ Κύκλος, ὃ διάμετρος ἡ $\epsilon\gamma$, $\tau\theta$ Κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ $\beta\iota$, $\tau\theta$ ἐστὶ $\tau\theta$ Κύκλῳ $\eta\theta\delta\iota$ (5)· διπλάσιος δὲ $\tau\theta$ αὐτῷ Κύκλῳ ἐστὶ καὶ ἡ ἐπιφάνεια $\tau\theta$ εἰς τὸν Κῶνον $\epsilon\beta\gamma$ ἐγγεγραμμένη Ἡμισφαίρις (6)· ὁ Κύκλος ἄρα, ὃ διάμετρος ἡ $\epsilon\gamma$, ἴσος ἐστὶ τῇ $\tau\theta$ Ἡμισφαίρις ἐπιφανείᾳ. Τοιγαρὶν ἐπεὶ ἡ $\tau\theta$ Κῶν ἐπιφάνεια $\epsilon\beta\gamma$, ἐστὶ πρὸς τὸν Κύκλον, ὃ διάμετρος ἡ $\epsilon\gamma$, $\tau\theta$ ἐστὶ πρὸς τὴν αὐτῇ βάσιν, ὡς ἡ πλευρὰ $\beta\epsilon$ πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον $\alpha\epsilon$ (7), ἔσται δὲ καὶ πρὸς τὴν $\tau\theta$ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένην Ἡμισφαίρις ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ $\epsilon\beta$ πρὸς τὴν $\alpha\epsilon$, $\tau\theta$ ἐστὶν ὡς ἡ ἐν τῷ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν αὐτῇ πλευράν· καὶ ἡ ἐπιφάνεια $\tau\theta$ Ἡμισφαίρις πρὸς τὴν περιγεγραμμένην Κωνικὴν, ὡς ἡ πλευρὰ $\tau\theta$ Τετραγώνου πρὸς τὴν Διαγώνιον. Οἷον δεῖξαι.

(1) ΙΔ . $\tau\theta$ παρόντος. (2) Ὁρισμ. ΙΓ . $\tau\theta$ ϵ . (3) ΙΔ . $\tau\theta$ παρόντος. (4) Πορ. Α'. τῆς ΜΖ . $\tau\theta$ α . (5) Πορ. Ε'. τῇ Β. $\tau\theta$ β . (6) ΚΔ . $\tau\theta$ παρόντος. (7) ΙΔ . $\tau\theta$ παρόντος.

Πόρισμα. Ἐὰν περὶ Κῶνον ὀρθογώνιον τὸν εβδ Ἡμισφαίριον περιγραφῇ, κ. 49.
 καὶ εἰς αὐτὸν ἕτερον ἐγγραφῇ, ἔσται ἡ τῷ Κῶνι ἐπιφάνεια μέση ἀνάλογον
 τῆς ἐπιφανείας τῷ περιγεγραμμένῳ Ἡμισφαίριῳ, καὶ τῆς τῷ ἐγγεγραμμένου.
 Ἐστὶ γὰρ ἥτε τῷ περιγεγραμμένῳ Ἡμισφαίριῳ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῷ Κῶνι,
 καὶ ἡ τῷ Κῶνι πρὸς τὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος
 πρὸς τὴν πλευράν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΖ΄.

Πάσης Σφαίρας τό τε σφαιρὸν καὶ ἡ ἐπιφάνεια λόγον ἔχει, πρὸς τὸν περὶ κ. 49. 50.
 αὐτὴν περιγεγραμμένον τετράγωνον κωνικὸν Ρόμβον, ὃν ἡ ἐν τῷ τετραγώνῳ
 πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον.

Περὶ τὸν μέγιστον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ Κύκλον κβδ, περιγεγράφω τε-
 τράγωνον τὸ εβγζ, ἐξ ἧ περι τὸν Α΄ξονα βε περιερχθέντος, γεγεννηθῶ
 Ρόμβος τὴν σφαῖραν περιλαμβάνων. Καὶ γενέσθω ὡς ἡ τῷ τετραγώνῳ πλευ-
 ρὰ εβ (Σχῆμα 49.), πρὸς τὴν αὐτὴν διάμετρον εγ, οὕτως ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ
 (Σχῆμα 50.)· ὡς δὲ ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ, ὅπως ἡ Ξ πρὸς τὴν Ο· καὶ ἔσται δὴ
 ὁ λόγος τῆς Σ πρὸς τὴν Ο, τριπλασίον τῷ λόγῳ τῆς Σ πρὸς τὴν Ρ (1),
 τῷτ' ἔστι τῆς εβ πρὸς τὴν εγ· ὁ δὲ τῆς Ο πρὸς τὴν Ρ, διπλασίον τῷ τῆς Ο
 πρὸς τὴν Ξ, ἢ τῆς Ρ πρὸς τὴν Σ, τῷτ' ἔστι τῆς εγ πρὸς τὴν εβ· καὶ ἐπομένως
 ἡ Ο πρὸς τὴν Ρ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εβ (2)· διπλασία ἄρα
 ἡ Ο αὐτῆς τῆς Ρ (3). Τάτων δὴ ἔτω κατασκευασάντων, νενόησω περὶ τὸν
 κωνικὸν Ρόμβον σφαῖρα περιγεγραμμένη ἡ εβγζ· καὶ ἔσται δὴ ἡ σφαῖρα κβδ
 πρὸς τὴν εβγζ, ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῷ τῆς διαμέτρου δι (ἢ εβ), πρὸς τὴν
 εγ διάμετρον (4), τῷτ' ἔστιν ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ (ὅπερ δέδεικται ἀνωτέρω)· ἔστι
 δὲ ἡ σφαῖρα εβγζ, πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον κωνικὸν Ρόμβον, ὡς
 2 πρὸς 1 (5)· τῷτ' ἔστιν ὡς ἡ Ο πρὸς τὴν Ρ (ὅπερ δέδεικται ἀνωτέρω). Δι' ἴσου
 ἄρα ἡ σφαῖρα κβδ, ἐστὶ πρὸς τὸν αὐτὸν Ρόμβον, ὅς ἐστι περὶ αὐτὴν περιγε-
 γραμμένος, ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ, τῷτ' ἔστιν ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ πλευρὰ εβ
 πρὸς τὴν διάμετρον εγ· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

(Δείκνυται δὲ τὸ αὐτὸ καὶ ἐκ μόνης τῆς ἐποπτείας τῷ 49 Σχήματος
 Διὰ τὸ εἶναι γὰρ τὰ Τρίγωνα εβα, εαβ, εβγ ὀρθογώνια ἔχοντα τὴν
 πρὸς τῷ ε γωνίαν κοινὴν, ἔσονται δὴ αἱ εδ, εα, εβ, εγ συνεχῶς ἀνά-

(1) Πόρισμα. 1. τῷ ε'. (2) Σχόλ. τῆς Κ. τῷ ε'. (3) Σχόλ. τῆς ε. καὶ Ζ. τῷ ε'. (4)
 ΙΗ. τῷ β'. (5) Δ. τῷ παρόντος.

λογον (1). ἢ ὁ λόγος τῆς εδ πρὸς εγ, τριπλασίον τῆ τῆς εβ πρὸς εγ (2). Ἐστὶ δὲ ἡ μὲν εἰς τὸν κωνικὸν Ῥόμβον ἐγγεγραμμένη σφαῖρα, πρὸς τὴν περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένην ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῆ τῶν διαμέτρων εβ, εγ (3), τῷτ' ἔστιν ὡς ἡ εδ πρὸς εγ· ἡ δὲ περιγεγραμμένη πρὸς τὸν Ῥόμβον, περὶ ὃν περιγέγραπται, ὡς 2 πρὸς 1 (4). ἢ ὡς ἡ εγ πρὸς εα. Δι' ἴσα ἄρα ἡ ἐγγεγραμμένη σφαῖρα πρὸς τὸν Ῥόμβον, εἰς ὃν ἐγγέγραπται, ἢ (ὁπέρ ἐστι ταύτην) ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον Ῥόμβον, ὡς ἡ εδ πρὸς εα· τῷ τ' ἔστιν ὡς ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον ἐν τῷ τετραγώνῳ ηδ).

Ἐκ δὲ τῆ Β'. μέρεος τῆς προηγουμένης φανερόν, ὅτι ἡ τῆ Η'μισφαίρειά ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένην Κῶνα εβγ, ἢ ἐπομένως ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας ηδδ, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆ Ῥόμβου εβγζ, ἐστὶν ὡς ἡ πλευρὰ ἐν τῷ τετραγώνῳ πρὸς τὴν διάμετρον. Πάσης ἄρα Σφαίρας τό, τε σερεὸν ἢ ἡ ἐπιφάνεια, ἐστὶ πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον τετραγώνου κωνικὸν Ῥόμβον (εβγζ), ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον. Ο' ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα Α'. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ κωνικὸν ἰσόπλευρον Ῥόμβον περιγεγραμμένης σφαίρας, ἢ ἐπιφάνεια τῆ Ῥόμβου, περὶ ὃν ἡ σφαῖρα περιγέγραπται, ἢ ἡ ἐπιφάνεια τῆς εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης σφαίρας ἔχουσι συνεχῶς τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν. Δῆλον δὲ ἔκτε τῆς προηγουμένης ἢ τῆς παρούσης.

Β'. Ἡ μὲν τῆς περὶ Ῥόμβον κωνικὸν ἰσόπλευρον περιγεγραμμένης Σφαίρας ἐπιφάνεια, διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς εἰς τὸν αὐτὸν Ῥόμβον ἐγγεγραμμένης Σφαίρας· ἡ δὲ τῆ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένη Κωνικῆ ἰσοπλεύρου Ῥόμβου, διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένης ὁμοίᾳ Ῥόμβου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ Ῥόμβον περιγεγραμμένης Σφαίρας, ἢ τε τῆ Ῥόμβου, ἢ ἡ τῆς εἰς τὸν Ῥόμβον ἐγγεγραμμένης Σφαίρας εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ εγ, εβ, εα· ἢ ἔτι ἡ ἐπιφάνεια τῆ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένης Ῥόμβου, ἢ ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, ἢ ἡ τῆς εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένης Ῥόμβου εἰσὶν ὡσαύτως, ὡς αἱ εγ, εβ, εα, φανερόν ὅτι ἐν ἑκάτέρᾳ τῇ πτώσει ἡ ἐπιφάνεια τῶν περιγεγραμμένων σωμάτων ἔσται πρὸς τὴν τῶν ἐγγεγραμμένων, ὡς ἡ εγ πρὸς τὴν εα, ἢ ὡς 2 πρὸς 1.

Γ'. Ο' κωνικὸς ἰσόπλευρος Ῥόμβος ἐστὶν πρότερος τῶν δύο μέσων ἀνάλο-

(1) Πορίσμ. μετὰ τὸ Σχόλ. τῆς ΙΓ. τῆ ε'. (2) Ορίσμ. ΙΘ. τῆ δ'. (3) ΙΗ. τῆ ιβ'. (4) Δ. τῆ παρόντος.

γον τῆς τε εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης, καὶ τῆς περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένης Σφαίρας, ὡς ἐν τῇ δεξιᾷ τῷ πρώτῳ μέρει τῆς παρέσης δέδεικται· ἡ γὰρ ἐγγεγραμμένη τῷ Ρόμβῳ Σφαῖρα, ὁ Ρόμβος, καὶ ἡ περιγεγραμμένη εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ Σ, Ρ, Π ἐν τῷ 50 Σχήματι· ἢ ὡς αἱ εθ, εα, εγ, ἐν τῷ 49.

Δ'. Δῆλον ἔτι ἐκ τῆς αὐτῆς δεξιᾶς (ἢ καὶ ἐκ τῆς Δ'. τῇ παρόντος), ὅτι α. 49.
ἡ Σφαῖρα εἰς διπλασία τῇ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένῃ κωνικῇ τετραγώνῳ Ρόμβῳ.

Ε'. Ἡ περὶ Ρόμβον κωνικὸν τετράγωνον περιγεγραμμένη Σφαῖρα εβγζ, εἰς πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην σφαῖραν ηθδι, ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος εγ πρὸς τὴν εθ ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς εβ, ὡς δῆλον ἐκ τῆς εἰρημένης δεξιᾶς· ἐν δὲ τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰς καὶ ὁ περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένος κωνικὸς τετράγωνος Ρόμβος, πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ὁμοιον Ρόμβον· ἐστὶ γὰρ (διὰ τὴν ΔΖ'. ταύτην) ὁ μὲν περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένος κωνικὸς τετράγωνος Ρόμβος, πρὸς αὐτὴν τὴν σφαῖραν, ὡς ἡ εγ πρὸς τὴν εβ· ἡ δὲ σφαῖρα πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον τοιαῦτον Ρόμβον, ὡς α πρὸς ι· ἢ ὡς ἡ εβ πρὸς τὴν εθ (Πορ. Δ'. τῆς παρ.)· δι' ἴσην ἄρα ὁ Ρόμβος ὁ περιγεγραμμένος πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον, ὡς ἡ εγ πρὸς τὴν εθ (ΚΒ'. τῇ ε').

ς'. Τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει Ρόμβος κωνικὸς τετράγωνος περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένος, πρὸς Ρόμβον ὁμοιον εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένον· καὶ Κύλινδρος ἰσόπλευρος περὶ οἰανδὴ τινὰ ἄλλην σφαῖραν περιγεγραμμένος, πρὸς Κύλινδρον ὁμοιον εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένον, καὶ σφαῖρα, περὶ Κύλινδρον ἰσόπλευρον ἢ Ρόμβον κωνικὸν τετράγωνον περιγεγραμμένη, πρὸς ἑτέραν εἰς τὸν αὐτὸν Κύλινδρον ἢ τὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένην. Εἰσὶ γὰρ ἅπαντα πρὸς ἄλληλα ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς· ὡς δῆλον ἔκτε τῶ προηγουμένῳ Πορίσματος τῆς παρέσης, καὶ ἐκ τῶ Σχολίου τῆς ΔΔ'. τῇ παρόντος.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΗ'.

Η' ἐπιφάνεια οἷα σῶν Σφαιρικῆς μοίρας (βθκδ), Κῶνον ἰσόπλευρον (τὸν α. 54.
βκδ) περιλαμβανέσης, διπλασία εἰς τῆς τῇ περιλαμβανομένης Κῶνος ἐπιφανείας.

Δῆλον καὶ τῷτο ἐκ τῆς ΔΕ'. Ε'στὶ γὰρ ἡ τῆς μοίρας βθκδ ἐπιφάνεια, πρὸς τὴν τῇ ἐγγεγραμμένῃ Κῶνῃ ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ βκ πρὸς τὴν βα (ι)· ὑπόκειται δὲ ὁ Κῶνος βκδ ἰσόπλευρος· ἢ ἄρα κβ ἴση τῇ βδ· καὶ ἐπομένως διπλασία τῆς

(ι) ΔΕ. τῇ παρόντος.

βα· ἡ τῆς μοίρας ἄρα ἐπιφάνεια βδκδ, διπλασία ἐς τῆς ἐπιφανείας τῆ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένης Κώνη βκδ. Οἱ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Α'. Οἱ αὐτοὶ δὲ διπλάσιος λόγος τηρεῖται, καὶ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις τῆς τε τὸν ἰσόπλευρον Κῶνον περιλαμβανέσης σφαιρικῆς μοίρας, καὶ τῆς Κώνη, καὶ τῆς βάσεως τῆς Κώνη. Δῆλον δὲ ἔκ τε τῆς παρήσης καὶ ἐκ τῆς Πορίσματος τῆς ΔΕ'.

Β'. Ἡ τῆς Κῶνον ἰσόπλευρον περιλαμβανέσης σφαιρικῆς μοίρας ἐπιφάνεια, ἐστὶ πρὸς ὅλην τὴν τῆς περιλαμβανομένης Κώνη ἐπιφάνειαν, ὡς 4 πρὸς 3.

Αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῆς τε τὸν ἰσόπλευρον Κῶνον περιλαμβανέσης σφαιρικῆς μοίρας, καὶ τῆς περιλαμβανομένης Κώνη, καὶ τῆς τῆς Κώνη βάσεως εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς 4, 2, 1 (Πόρισμα. Α'). ὁθεν δῆλον τὸ Πόρισμα.

Γ'. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐστὶ, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆς εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένης ἰσοπλεύρου Κυλίνδρου, ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἰσόπλευρον Κῶνον περιλαμβανέσης σφαιρικῆς μοίρας, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆς αὐτῆς Κώνη· τῷτ' ἔστιν ὡς 4 πρὸς 3. Δῆλον ἔκ τε τῆς ΔΔ'. τῆς παρόντος καὶ ἐκ τῆς Β'. Πορίσματος τῆς παρήσης.

Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ ἐστὶν ὅλη ἡ ἐπιφάνεια Κυλίνδρου ὁρθῆς περὶ Ἡμισφαίριον περιγεγραμμένη, πρὸς ὅλην τὴν τῆς Ἡμισφαίριος ἐπιφάνειαν. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ἢ τε Κυλινδρική (1) καὶ ἡ Ἡμισφαιρική (2) διπλασία τῆς βάσεως, ἔσσεται δὴ ὅλη μὲν ἡ κυλινδρική τετραπλασία τῆς βάσεως· ἡ δὲ ἡμισφαιρική μετὰ τῆς βάσεως τριπλασία τῆς αὐτῆς βάσεως· ὅλη ἄρα ἡ τῆς Κυλίνδρου ἔσται, πρὸς ὅλην τὴν τῆς Ἡμισφαίριος, ὡς 4 πρὸς 3.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΘ'.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆς εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένης ἰσοπλεύρου Κώνη λόγον ἔχει, ὃν ὁ 16 πρὸς 9.

κ. 54.

Ἐς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τὸ φ· εἰς δὲ τὴν σφαῖραν Κῶνος ἰσόπλευρος ἐγγεγραμμένος ὁ βκδ· καὶ ἄξων κοινὸς τῇ τε σφαίρᾳ καὶ τῷ Κῶνι ὁ κφαο. Ἐὰν ἔν τμηθῶσι διὰ τῆς ἄξωνος ἢ τε Σφαῖρα καὶ ὁ Κῶνος, γενήσεται ἐν μὲν τῇ Σφαίρᾳ Κύκλος μέγιστος ὁ οβκδ· ἐν δὲ τῷ Κῶνι Τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ βκδ, αὐτὸς ἢ μία πλευρὰ βαδ διάμετρος ἔσται τῆς τῆς Κώνη βάσεως ζτ· καὶ ἐπεὶ ὁ τῆς Κώνη ἄξων καὶ ἐστὶ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ζτ, ἔσεται ἡ γωνία καο ὁρθή (3)· διὰ δὲ τῷτο τὸ ἀπὸ τῆς βα τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν καο ὁρθογωνίῳ (4).

(1) Πόρισμα. τῆς Κε. τῆς παρόντος. (2) ΚΑ. τῆς παρόντος. (3) Ορίσμη. Γ. τῆς ια'. (4) Πόρι. Β'. τῆς ΙΖ. τῆς ε'.

Επειδὴ δὲ ἡ τῆ ἰσοπλεύρου Τριγώνου πλευρὰ τεταρτημόριον τῆ ἄξονος ἀποτεμένει τὴν αο (1), ἔσται δὴ τὸ ὑπὸ τῶν καὶ ὀρθογώνιον, τῷτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς βα τετράγωνον, τριπλάσιον τῆ ἀπὸ τῆς αο τετραγώνου (2). Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου φο τετράγωνον, ἐπεὶ ἐστὶ τετραπλάσιον τῆ ἀπὸ τῆς αο τετραγώνου (3), ἔσται δὴ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου βα τετράγωνον, ὡς 4 πρὸς 3· ἄρα καὶ ὁ κύκλος οβκδ ἔστι πρὸς τὸν κύκλον ξτ, ὡς 4 πρὸς 3 (4)· ἔστιν ἄρα ὁ τετράκις κύκλος οβκδ, τῷτ' ἔστιν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δθ (5) πρὸς τὸν κύκλον ξτ, ὡς 16 πρὸς 3· ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆ ἰσοπλεύρου Κώνη βκδ ἐπιφάνεια, χωρὶς μὲν τῆς βάσεως πρὸς τὸν κύκλον ξτ, τῷτ' ἔστι πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν, ὡς 2 πρὸς 1 (6)· μετὰ δὲ τῆς βάσεως, τῷτ' ἔστιν ὅλη ἡ τῆ Κώνη βκδ πρὸς τὴν βάσιν, τῷτ' ἔστι τὸν κύκλον ξτ, ὡς 3 πρὸς 1, ἢ ὡς 9 πρὸς 3· καὶ ἐπεὶ δεδεικται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐστὶ πρὸς τὸν αὐτὸν κύκλον, ὡς 16 πρὸς 3· ἔσται δὴ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆ ἰσοπλεύρου Κώνη, ὡς 16 πρὸς 9. Οἷον δεῖξαι.

Πόρισμα. Δῆλον ἄρα ἐκ τῆς παρούσηςδείξεως, ὅτι ἡ τῆ εἰς Σφαῖραν ἐγγεγραμμένη ἰσοπλεύρη Κώνη βάσις ξτ, ἔχει πρὸς τὸν μέγιστον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον δθ, ὡς 3 πρὸς 4.

(Ἀλλως. Επειδὴ ἡ τῆ ἰσοπλεύρου Τριγώνου πλευρὰ βδ, τεταρτημόριον τῆ ἄξονος ἀποτεμένει τὴν αο (7)· ἔσται δὴ ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια βοδ τεταρτημόριον τῆς ἐπιφανείας τῆς ὅλης σφαίρας (8)· καὶ ἐπομένως ἡ λοιπὴ βδκδ ἴση τρισὶ τεταρτημορίοις· εἰάν ἄρα ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τεδθ ἴση 16· ἔσται ἡ βδκδ ἴση 12· ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια βδκδ ἐστὶ διπλασία τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας βκδ (9), καὶ ἐστὶ δὴ πρὸς αὐτὴν ὡς 12 πρὸς 6· ὅλη ἄρα ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν Κωνικὴν βκδ, ὡς 16 πρὸς 6. Επειδὴ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τῆ Κώνη βκδ (ὅντος ἰσοπλεύρου), διπλασία ἐστὶ τῆς βάσεως ξτ (10), φανερόν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆ Κώνη χωρὶς δηλονότι τῆς βάσεως, ἐστὶ πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆ Κώνη, ὡς 2 πρὸς 3, ἢ ὡς 6 πρὸς 9. Δι' ἴσιν ἄρα ὅλη ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, πρὸς ὅλην τὴν τῆ ἐγγεγραμμένη ἰσοπλεύρου Κώνη ἐπιφάνειαν, ὡς 16 πρὸς 9. Οἷον δεῖξαι.)

(1) Πόρ. Ε'. τῆς ΙΕ. τῇ ε'. (2) Α. τῇ ε'. (3) Πόρ. Γ'. τῆς Α. τῇ β'. (4) Πόρ. Β'. τῆς Β. τῇ β'. (5) ΚΔ. τῇ παρόντος. (6) Πόρ. Α'. τῆς ΙΗ. τῇ παρόντος. (7) Πόρ. Ε'. τῆς ΙΕ. τῇ δ'. (8) ΚΖ. τῇ παρόντος. (9) Πρὸτ. προηγ. (10) Πόρ. Α'. τῆς ΑΗ. τῇ παρόντος.

α. 55.

Η' τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια πρὸς ὅλην τὴν τῇ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένην ἰσοπλεύρῃ Κώνῃ ἐπιφάνειαν λόγον ἔχει, ὃν ὁ 4 πρὸς 9.

Εἴσω περὶ τὸν μέγιστον τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ κύκλον βπμ, Τρίγωνον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένον τὸ δοζ, ἐξ ἧς περὶ τὸν Α'ξωνα οαβ περιεχθέντος, ἀπογεγεννηθῶ Κώνῃς ἰσόπλευρος περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένης· περὶ δὲ τὸ ἰσόπλευρον Τρίγωνον δοζ περιγεγράφῃ κύκλος ὁ νδλοζ, ὃς ἔσται τῷ προτέρῳ ὁμόκεντρος (1), καὶ προσκεββλήθῃ ὁ Α'ξων οαβ ἐπὶ τὸ ν. Ἐπεὶ ἔν ἡ βν τεταρτημόριόν ἐστι τῇ Α'ξωνος ον (2), φανερόν ὅτι ἡ ον διπλασία ἐστὶ τῆς κβ· Τοιγαρᾶν, ἐπεὶ ὁ τῶν κύκλων λόγος ἐστὶ διπλασίων τῇ τῶν διαμέτρων (3)· ἔσται δὴ ὁ κύκλος βπμ, πρὸς τὸν κύκλον νδλοζ, ὡς 1 πρὸς 4· Προδεδείκται δὲ ἐν τῇ προτέρᾳ δεῖξει τῆς προηγουμένης, ὅτι ὁ κύκλος νδλοζ ἐστὶ πρὸς τὸν κύκλον ξτ, ὃς ἐστὶ βάσις τῇ εἰς τὴν σφαῖραν λζ ἐγγεγραμμένῃ ἰσοπλεύρῃ Κώνῃ, ὡς 4 πρὸς 3. Δι' ἴτην ἄρα ὁ κύκλος βπμ πρὸς τὸν κύκλον ξτ, ὡς 1 πρὸς 3 (4)· ἐστὶ δὲ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῇ Κώνῃ δοζ, τριπλασία τῇ κύκλῳ ξτ (5)· ὅλη ἄρα ἡ τῇ Κώνῃ ἐπιφάνεια ἐνεαπλασία ἐστὶ τῇ κύκλῳ βπμ· ἄλλὰ τῇ κύκλῳ βπμ τετραπλασία ἐστὶν ἡ τῆς σφαίρας τπ ἐπιφάνεια (6)· ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῇ ἰσοπλεύρῃ Κώνῃ δοζ ἔσται πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, περὶ ἣν περιγέγραπται, ὡς 9 πρὸς 4. Ο' ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Α'. Δήλον ἐκ τῆςδείξεως ταύτης, ὅτι ὁ τῇ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένην ἰσοπλεύρῃ Κώνῃ Α'ξων βο, ἡμιολιός ἐστι τῆς τῆς σφαίρας διαμέτρου βκ, τῷτ' ἐστὶν ὡς 3 πρὸς 2.

Β'. Δήλον δ' ἐστὶ ἐκ τῆς αὐτῆςδείξεως, ὅτι ἡ τῇ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένη ἰσοπλεύρῃ Κώνῃ δοζ βάσις ξτ, ἡμιολία ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς βάσεως τῇ περὶ τὴν αὐτὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένῃ Κυλίνδρῳ· ἐστὶ γὰρ ὁ ξτ πρὸς τὸν βπμ, ὡς 3 πρὸς 1· ἄρα ὁ ξτ πρὸς τὸν δις βπμ, ὡς 3 πρὸς 2.

Γ'. Η' τῇ ἰσοπλεύρῃ Κώνῃ δοζ ἐπιφάνεια ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῇ περὶ τὴν αὐτὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένῃ Κυλίνδρῳ· ἐστὶ γὰρ ἐκεῖνη μὲν, διπλασία τῇ ξτ κύκλῳ (7)· αὕτη δὲ, τετραπλασία τῇ βπμ (8)· ἡ κωνικὴ ἄρα ἐπιφάνεια ἔσται πρὸς τὴν κυλινδρικὴν, ὡς δις 3 πρὸς τετράκις 1· τῷτ' ἐστὶν ὡς 6 πρὸς 4· ἢ ὡς 3 πρὸς 2.

(1) Σχόλ. τῆς ΙΓ. καὶ ΙΔ τῷ δ'. (2) Πόρ. Ε'. τῆς ΙΕ. τῷ δ'. (3) Β. τῷ ιβ'. (4) ΚΕ. τῷ ε'. (5) Πόρισμ. Α'. τῆς ΙΔ. τῷ παρόντος. (6) ΚΔ. τῷ παρόντος. (7) Πόρ. Α'. τῆς ΛΔ. τῷ παρόντος. (8) Κς. καὶ ΚΔ. τῷ παρόντος.

Δ'. Ο' μέγιστος κύκλος (βπμ) τῆς εἰς Κῶνον ἰσόπλευρον (τὸν δοζ) ἐγγεγραμμένης Σφαίρας, ἡ ἐπιφάνεια τῆς αὐτῆς Σφαίρας, ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς Κῶνης (δοζ), εἰς ὃν ἡ Σφαῖρα ἐγγέγραπται, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ τὸν αὐτὸν Κῶνον περιγεγραμμένης Σφαίρας ὑλλοζ, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς 1, 4, 9, 16· τὰ τ' ἐσὶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4. Δῆλον ἐκ τῆς ΚΔ', ἐκ τῆς παράσης, καὶ ἐκ τῆς ΛΘ'. τῶ παρόντος.

Ε'. Ο'θεν δοθείσης τῆς κατὰ τὴν ἐγγεγραμμένην Σφαῖραν διαμέτρου αβ, εὐχερῶς καταγραφῆσονται Κύκλοι ταῖς εἰρημέναις ἐπιφανείαις ἴσοι. Αἱ γάρτοι ἀκτῖνες τῶν τοιούτων Κύκλων ἔσονται 2αβ, 4αβ (1)· καὶ τὰ μέτρα τῶν κατ' ἐκείνας ἐπιφανειῶν αὐτίκα γνωδῆσονται.

ς'. Ἐπεὶ ἡ τῆς περὶ Κῶνον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένης Σφαίρας διάμετρος ον, διπλασία ἐστὶ τῆς κατὰ τὴν ἐγγεγραμμένην Σφαῖραν διαμέτρου κβ, ἔσεται δὴ ἡ περιγεγραμμένη Σφαῖρα ὀκταπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης· ἐν λόγῳ δηλονότι τριπλασίονι τῶν διαμέτρων (2)· ἢ ὡς ὁ κύβος τῆς δυνάδους πρὸς τὸν κύβον τῆς μονάδος (3).

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΑ'.

Ὅλη ἡ τῆς περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένη ἰσοπλεύρα Κῶνου ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τῆς ὅλης ἐπιφανείας τῆς εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένης ὁμοῖα Κῶνης. κ. 55.

Ὅλη γὰρ ἡ τῆς περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένη ἰσοπλεύρα Κῶνη δοζ ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν τῆς Σφαίρας, περὶ ἣν περιγέγραπται ἐπιφάνειαν, ὡς 9 πρὸς 4 (4)· ἡ δὲ τῆς Σφαίρας πρὸς τὴν τῆς εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένης ὁμοῖα Κῶνης σκτ, ὡς 16 πρὸς 9 (5). Δι' ἴση ἄρα τεταραγμένως (6), ὅλη ἡ τῆς περιγεγραμμένης ἰσοπλεύρα Κῶνη ἐπιφάνεια, πρὸς ὅλην τὴν τῆς ἐγγεγραμμένου ὁμοῖα Κῶνης, ὡς 16 πρὸς 4, ἢ ὡς 4 πρὸς 1. Ο' ἔδει δεῖξαι.

Παραπλησίῳ δὲ τρόπῳ δεικνύται, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ Κῶνον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένης Σφαίρας τετραπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας, τῆς εἰς τὸν αὐτὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένης Σφαίρας. Δῆλον ἐκ τῆς Δ'. Πορίσματος τῆς προηγουμένης.

(1) Πόρ. Β'. τῆς Β. τῆς β'. (2) ΙΗ. τῆς β'. (3) Σχόλ. τῆς ΛΓ. τῆς ι'. (4) Διὰ τὴν προηγουμένην. (5) ΛΘ. τῶ παρόντος. (6) ΚΓ. τῆς ε'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΒ'.

Η Σφαῖρα πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον Κῶνον βκυ εἶναι, ὡς 32 πρὸς 9.

κ. 56.

Τετμήσθω ἡ σφαῖρα καὶ ὁ Κῶνος βκυ, διὰ τῆ κοινῆς Α'ξονος κο ἐπιπέδῳ ποιῶντι ἐν μὲν τῇ Σφαῖρᾳ Κύκλον μέγιστον τὸν οζκι· ἐν δὲ τῷ Κῶνῳ Τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ βκυ. Διὰ δὲ τῶ κέντρῳ α διήχθω ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐπὶ τὸν Α'ξονα οκ, ἀποτεμνον Ἡμισφαίριον τὸ ζκι, εἰς ὃ νενοήσθω Κῶνος μέγιστος ἐγγεγραμμένος ὁ ζκι. Ἐπεὶ ἂν ἡ τῆ ἰσοπλεύρου Τριγωνῶν πλευρὰ βγ ἀποτεμνῇ τῷ Α'ξονος οκ τεταρτημόριον τὴν οπ (1), ἔσται δὴ ἡ πκ πρὸς τὴν ακ, ὡς 3 πρὸς 2, τῷ εἶναι, ὡς 9 πρὸς 6. Δεδεικται δὲ ἐν τῇ ΛΘ', ὅτι ἡ βάσις ζτ εἰς πρὸς τὸν κύκλον οζκι, τῷ εἶναι πρὸς τὴν βάσιν νδ, ὡς 3 πρὸς 4, εἴτ' ἂν ὡς 6 πρὸς 8· ἐπεὶ ἄρα, ὁ λόγος τῶ Κῶνος βκυ πρὸς τὸν ζκι Κῶνον σύγκειται (2), ἔκ τε τῶ λόγῳ τῶ ὕψους πκ πρὸς τὸ ὕψους ακ (τῷ εἶναι τῶ 9 πρὸς 6), καὶ ἐκ τῶ λόγῳ τῆς βάσεως ζτ πρὸς τὴν βάσιν νδ (τῷ εἶναι τῶ 6 πρὸς 8), ἔσται δὴ ὁ Κῶνος βκυ πρὸς τὸν Κῶνον ζκι, ὡς 9 πρὸς 8. Ἐπεὶ δὲ ἡ Σφαῖρα γθ εἰς τετραπλάσια τῶ Κῶνος ζκι (3). Ὁ ἰσόπλευρος ἄρα Κῶνος βκυ εἶναι πρὸς τὴν Σφαῖραν γθ, ὡς 9 πρὸς 32. Ο' ἔδει δεῖξαι.

Α'λλως. πκ πρὸς ακ, ὡς 3 πρὸς 2, ἢ ὡς 9 πρὸς 6· καὶ ἐπεὶ εἶναι ζτ πρὸς γθ, ὡς 3 πρὸς 4 (4), ἢ ὡς 9 πρὸς 8· ἔσται ζτ πρὸς 4γθ, ὡς 6 πρὸς 32· ὁ Κῶνος ἄρα, οὗ ὕψους μὲν πκ, βάσις δὲ ζτ, τῷ εἶναι ὁ Κῶνος βκυ πρὸς τὸν Κῶνον, ὃ ὕψους μὲν ακ βάσις δὲ 4γθ, τῷ εἶναι (5) πρὸς τὴν Σφαῖραν γθ ἐν λόγῳ εἰς συγκειμένῳ, ἔκ τε τῶ λόγῳ τῶ 9 πρὸς 6, καὶ τῶ 6 πρὸς 32 (6), ἢ ὡς 9 πρὸς 32 (7).

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΓ'.

κ. 55.

Κῶνος ἰσόπλευρος ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος, ὀκταπλάσιός ἐστι Κῶνα ὁμοῖα τῷ εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένῳ.

Ε'ωςαν δύο Κῶνοι ἰσόπλευροι οἱ σκτ, δοξ ὁ μὲν, ἐγγεγραμμένος εἰς τὴν Σφαῖραν, ὁ δὲ, περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένος· καὶ Α'ξων κοινός ὁ οκβ. Διὰ δὲ τῆ Α'ξονος τετμήσθωσαν ἐπιπέδῳ τῶν τε Κῶνων ἐκάτερος καὶ ἡ Σφαῖρα· καὶ

(1) Πόρ. Ε'. τῆς ΙΕ. τῷ δ'. (2) Σχόλ. Β'. τῆς ΙΕ. τῷ ιβ'. (3) Α. τῷ παρόντος.
(4) Πορ. τῆς ΛΘ. τῷ παρόντος. (5) ΚΗ. τῷ παρόντος. (6) Σχόλ. Β'. τῆς ΙΕ. τῷ ιβ'.
(7) Ὁρισμ. Ε. τῷ ε'.

ἔσονται αἱ Τομαὶ αὐτῶν Τρίγωνα δύο ἰσόπλευρα, καὶ Κύκλοι μέγιστοι ὁ βπμ. Περὶ τὸ Τρίγωνον δοξ νενοήσω Κύκλος περιγεγραμμένος ὁ νδοξ· καὶ ὁ Α'ξων οκβ προεκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ν. Ἐπεὶ ἔν ἡ τῷ ἰσοπλεύρῳ Τρίγωνῳ πλευρὰ δξ, ἀποτεμένει τῷ Α'ξωνος ον τεταρτημόριον τὴν νβ (1), δῆλον ὅτι ἡ νο διπλασία ἐστὶ τῆς βκ. Ὡς αὐτως ἐπεὶ ἡ τῷ ἐτέρῳ ἰσοπλεύρῳ Τρίγωνῳ πλευρὰ στ ἀποτέμνει τῷ Α'ξωνος βκ τεταρτημόριον τὴν βγ (2), ἔσεται ὡς ἡ νο πρὸς τὴν οβ, ἔτις ἡ βκ πρὸς τὴν κγ· καὶ ἐν ἐναλλάσσοντι ὡς ἡ νο πρὸς τὴν βκ, ἔτις ἡ οβ πρὸς κγ· διπλασία δὲ ἡ νο τῆς βκ, διπλασία ἄρα καὶ ἡ οβ τῆς κγ. Διὰ τὸ εἶναι δὲ τὰ Τρίγωνα δοξ, σκτ ὅμοια, ἔσονται δὲ καὶ αἱ τῶν κωνικῶν βάσεων διάμετροι δξ, στ ἐν λόγῳ διπλασίῳ (3). Τοιγαρὺν ἐπεὶ οἱ Κῶνοι δοξ, σκτ εἰσὶν ὅμοιοι (4), καὶ ὁ λόγος αὐτῶν (5) τριπλασίῳ τῷ λόγῳ τῶν διαμέτρων δξ, στ, αἵτινες εἰσὶ ὡς 2 πρὸς 1· ἔσεται δὲ ὁ Κῶνος δοξ πρὸς τὸν Κῶνον σκτ, ὡς 8 πρὸς 1. Ὅ" εἶδει δεῖξαι.

Α'λλως. Α'χθιστῶν τῶν εὐθειῶν δν, σβ ἐπεὶ ἐστὶν ἡ γωνία δοξ, ἴση τῇ σκτ (6), ἄρα καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν δον, σκβ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· καὶ αἱ οδν, κσβ ὀρθαὶ (7), καὶ τὰ Τρίγωνα δον, σκβ ὅμοια (8), καὶ ἐπομένως δο : σκ : ον : κβ :: 2 : 1 (9)· ἄρα ἡ δξ (= δο) : στ (= σκ) :: 2 : 1· καὶ οἱ ἰσόπλευροι Κῶνοι, ἐπεὶ εἰσὶν ὅμοιοι, ἔσονται ὡς 8 πρὸς 1· εἰσὶ γὰρ 8, 4, 2, 1 ---.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἰσόπλευρος Κῶνος ἐστὶ πρὸς τὸν εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένον ὅμοιον Κῶνον, ὡς ἡ περὶ Κῶνον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένη Σφαῖρα πρὸς τὴν εἰς τὸν αὐτὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένην, τῇ ἐστὶν ὡς 8 πρὸς 1. Δῆλον ἔκ τε τῆς παρήσης καὶ τῇ ε'. Πορίσματος τῆς Μ'.

Καὶ ἐν γένει ἐπεὶ τὰ οἰονδήτινος εἶδους ὅμοια σώματα τὰ δυνάμενα περὶ Σφαῖραν περιγραφῆναι ἢ εἰς αὐτὴν ἐγγραφῆναι, ἔχει τὰς διαμέτρους ἢ τὰς πλευρὰς ταῖς διαμέτροις τῶν ἐγγεγραμμένων, ἢ περιγεγραμμένων Σφαιρῶν ἀνάλογον, καὶ ἐστὶ πρὸς ἀλλήλα ἐν λόγῳ τριπλασίῳ μὲν κατὰ γὰρ τὰ σφαιρὰ, διπλασίῳ, δὲ κατὰ τὰς ἐπιφανείας τῷ λόγῳ τῶν ὁμολόγων διαμέτρων, ἢ πλευρῶν· διὰ ταῦτα δὲ (10) ὃν λόγον ἔχει ἡ περὶ σῶμα οἰονδήποτε περιγε-

(1) Πόρισμ. Ε. τῆς ΙΒ. τῇ δ'. (2) Πόρ. τὸ αὐτό. (3) Δ. τῇ ε'. (4) Ὅρισμ. Δ. τῇ β'. (5) ΙΒ. τῇ β'. (6) Πόρισμ. τῆς Ε. τῇ α'. (7) ΔΔ. τῇ γ'. (8) Πόρ. Ε. τῆς ΑΒ. τῇ α'. καὶ Πρωτ. Δ. τοῦ ε'. (9) Δῆλον ἐκ τῆς δεξιῆς τῆς Μ. τοῦ παρόντος, (10) ΔΔ. καὶ Ις. τῇ ε'.

γραμμένη Σφαῖρα, πρὸς τὴν εἰς τὸ αὐτὸ σῶμα ἐγγεγραμμένην, τὸν αὐτὸν ἔξει καὶ τὸ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένον σῶμα, πρὸς τὸ εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένον ὁμοιον σῶμα. Ὅν δὲ λόγον ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ ὁσὸνδήποτε σῶμα περιγεγραμμένης Σφαίρας, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς εἰς τὸ αὐτὸ σῶμα ἐγγεγραμμένης Σφαίρας, τὸν αὐτὸν ἔξει καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένα σώματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένα ὁμοίου σώματος.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΔ'.

α. 55. Τῆς Σφαίρας τότε σφαιρὸν καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἐστὶ, πρὸς τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένα ἰσοπλεύρου Κῶνα (δοξ), ὡς 4 πρὸς 9.

Ἐστὶ γὰρ ἡ μὲν Σφαῖρα $\tau\pi$, πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσοπλευρον Κῶνον $\sigma\kappa\tau$, ὡς 32 πρὸς 9 (1). Ἄτος δὲ πρὸς τὸν περὶ τὴν αὐτὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένον ὁμοιον Κῶνον $\delta\omicron\zeta$, ὡς 1 πρὸς 8 (2), τὰτ' ἔστιν ὡς 9 πρὸς 72. Δι' ἴσιν ἄρα ἡ Σφαῖρα $\tau\pi$, πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον ἰσοπλευρον Κῶνον $\delta\omicron\zeta$, ὡς 32 πρὸς 72. τὰτ' ἔστι (διαμετρήντος ἑκάτερου τῶν $\delta\omicron\zeta$ διὰ 8), ὡς 4 πρὸς 9.

Αἴτω. Ἡ Σφαῖρα ἐστὶ πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσοπλευρον Κῶνον, ὡς 32 πρὸς 9 (3). ὁ δὲ ἐγγεγραμμένος πρὸς τὸν περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένον, ὡς 1 πρὸς 8 (4). τὰτ' ἔστιν ὡς 4 πρὸς 32. Δι' ἴσιν ἄρα τετραγμένως (5) ἡ Σφαῖρα, πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον ἰσοπλευρον Κῶνον, ὡς 4 πρὸς 9.

Δέδεικται δὲ ἐν τῇ Μ'. Ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, ἐστὶ πρὸς ἑλὴν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένα ἰσοπλεύρου Κῶνα, ὡς 4 πρὸς 9. Τῆς Σφαίρας ἄρα τότε σφαιρὸν καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένα ἰσοπλεύρου Κῶνα, ὡς 4 πρὸς 9. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ὅπερ ἄρα ἔχει θαυμάσας ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τῇ Σφαίρᾳ, καὶ τῶ τὴν Σφαῖραν περιλαμβάνοντι Κυλίνδρῳ, τὰτ' αὐτὸ δέδεικται ἤδη καὶ ἡμῖν ἐπὶ τῆς Σφαίρας καὶ τῆς τὴν Σφαῖραν περιλαμβάνοντος ἰσοπλεύρου Κῶνα. Ὅτι δηλαδὴ ἐνυπάρχει καὶ τοῖς σφαιροῖς ὁ αὐτὸς λογικὸς λόγος, ὅσπερ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις

(1) MB. τῶ παρόντος. (2) Πρωτ. προηγ. (3) MB. τῶ παρόντος. (4) ΜΓ. τοῦ παρόντος. (5) ΚΓ. τοῦ ε'.

τάτων τῶν σωμάτων· ὡς γὰρ ἐκεῖνος ἔδειξεν ὅτι ἡ Σφαῖρα ἐστὶ, πρὸς τὸν Κύλινδρον κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 2 πρὸς 3· ἔτι δὲ καὶ ἡμῖν δέ-
δεικται, ὅτι ἡ Σφαῖρα ἐστὶ πρὸς τὸν τὴν Σφαῖραν περιλαμβάνοντα ἰσόπλευρον
Κῶνον, ὡς 4 πρὸς 9, κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν.

Εὐτεῦθεν δὲ τὸν αὐτὸν λόγον τῶν ἐστὶ τὸν ἡμιόλιον, ὃν παρέδωκεν Ἀρ-
χιμήδης ὑπάρχειν μεταξύ Σφαίρας καὶ Κυλίνδρου, συνεχίζεσθαι κατὰ τε τὸ σφαι-
ρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ἀπὸ τῆ περιγεγραμμένη ἰσοπλευροῦ Κῶνου μέχρι τῆς
Σφαίρας εὐμαρῶς ἀποδείξαντες, τέλος ἤδη τῷ συγγραμματικῷ ἐπιθήσομεν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΕ΄.

Κῶνος ἰσόπλευρος περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος, καὶ Κύλινδρος ὁρθός κα. 57.
περὶ τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ὡσάυτως περιγεγραμμένος, καὶ αὐτὴ ἡ Σφαῖρα, περὶ
ἣν ὅ,τε Κῶνος καὶ ὁ Κύλινδρος περιγεγράφεται, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον κα-
τὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, τῶν ἐστὶ τὸν ἡμιόλιον.

Διὰ μὲν γὰρ τὴν ΑΒ΄ τῆ παρόντος, ὁ ὁρθὸς Κύλινδρος ὁ τὴν Σφαῖραν
περιλαμβάνων, ἐστὶ πρὸς τὴν Σφαῖραν κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν,
ὡς 3 πρὸς 2, ἢ ὡς 6 πρὸς 4. Διὰ δὲ τὴν προηγμένην ΜΔ΄, ὁ περὶ τὴν
Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἰσόπλευρος Κῶνος βαδ, ἐστὶ πρὸς τὴν Σφαῖραν κα-
τὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 9 πρὸς 4. Ὁ αὐτὸς ἄρα Κῶνος ἐστὶ πρὸς
τὸν Κύλινδρον, κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 9 πρὸς 6. Τὰ τρία
ἄρα ταῦτα σώματα ὁ Κῶνος δηλαδὴ, ὁ Κύλινδρος καὶ ἡ Σφαῖρα λόγον ἔχει
πρὸς ἄλληλα, ὃν οἱ ἀριθμοὶ 9, 6, 4· τῶν ἐστὶ τὸν ἡμιόλιον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Μς΄.

Ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἰσόπλευρος Κῶνος, πρὸς τὸν περὶ τὴν κα. τὸ αὐτό.
αὐτὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένον ὁρθὸν Κύλινδρον τὸν αὐτὸν ἔχει ἡμιόλιον
λόγον, κατὰ τε τὰ σφαιρὰ καὶ τὰς ἐπιφανείας, ὅλας τε καὶ τὰς ἀπλᾶς, καὶ δὴ καὶ
κατὰ ὕψος καὶ τὰς βάσεις.

Πρόδηλος ἡ Πρότασις ὅσον μὲν ἦκει εἰς τὰς ὀλικὰς ἐπιφανείας καὶ τὰ σφαι-
ρὰ, ἐκ τῆς προηγμένης Προτάσεως· ὅσον δ' ἦκει εἰς τὰς ἀπλᾶς ἐπιφανείας,
ἐκ τῆ Γ΄. Πορίσματος τῆς Μ΄. τῆ παρόντος· περὶ δὲ τὰ ὕψος καὶ τὰς βάσεις
ἐκ τῆ Α΄, καὶ Β΄. Πορίσματος τῆς αὐτῆς Μ΄.

Τ έ λ ο ς.

Π α ρ ο ρ ά μ α τ α.

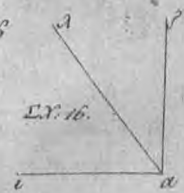
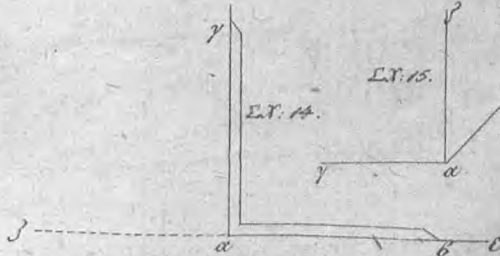
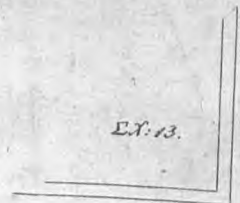
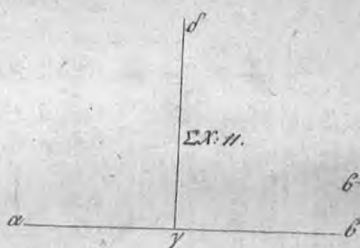
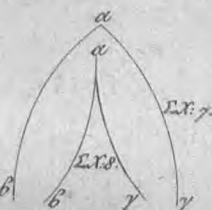
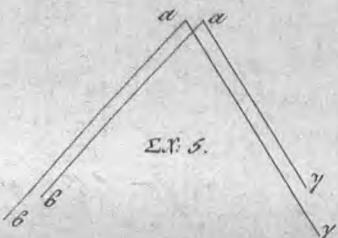
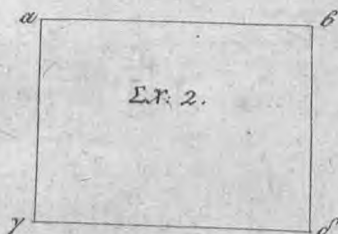
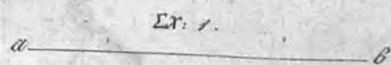
Σελ. σίχ.

10	22	δψ Γρ. αψ
αὐτ.	32	δδ Γρ. δα
11	8	όποσαισάν Γρ. όποσαισάν
12	2	έφεξής· Γρ. έφεξής· ΔΒ.
23	9	δηλ Γρ. δκλ
αὐτ.	σημ.	(12) ή (13) ή Γρ. κ'
29	3	αβ Γρ. αδ
41	1	εζη Γρ. εζκ
50	18	τῷ τρίτῳ Γ. τῷ αὐτῷ τρίτῳ
55	1	ἀντὶ (10) Γρ. (2), ή ἀντὶ (2) Γρ. (3) καὶ καθεξής· πρό- δεσ δε ἐν τῇ σημειώσει, (12) Σχόλ. μετὰ τὴν ΔΔ.
57	28	(εζ) Γρ. (βζ)
59	1	ή βζ Γρ. ή βζα
60	21	αβ Γρ. ^{αβ} τ
αὐτ.	σημ.	(6) Α'ζ. 15'. Γρ. ΜΖ' Βιβλ. α'
61	15	ἔσαι βζ Γρ. ἔσαι ^{βζ} τ
62	15	τὸ ή Γρ. ή τὸ
71	5	7 × 1 Γρ. 3 × 7
77	σημ.	(2) τῶ α' Γρ. τῶ β'
84	14	γβ Γρ. γζ
84	σημ.	(2) Βιβλ. α'. Γρ. Βιβλ. β'
85	σημ.	(3) τῶ α' Γρ. τῶ β'
91	18	ή Γρ. β
99	20	ασ Γρ. αο
100	σημ.	(3) τῶ α' Γρ. τῶ γ'
109	32	εδ Γρ. εαδ
113	23	πρὸς τῇ Γρ. πρὸς τῇ αὐτῇ
117	23	βη Γρ. βκ
118	25	βηγ Γρ. βκγ
122	27	σημεῖον Γρ. σημεῖον β
αὐτ.	σημ.	(11) τῶ α' Γρ. τῶ γ'
123	1	βγ Γρ. γβλ
128	23	χρήσει Γρ. ἐν χρήσει
150	12	κύκλῳ, Γρ. κύκλῳ ἡμιδια- μέτρῳ,

Σημ. Ἀντὶ θατέρᾳ Γρ. ἀπανταχῶς ἡ ἐτέρα· ή ἀντὶ θατέρᾳς Γρ. τῆς ἐτέρας· ή ἀντὶ
θατέραν Γρ. τὴν ἐτέραν· καὶ ἀντὶ θατέρον Γρ. τὸν ἕτερον.

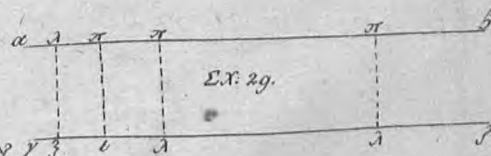
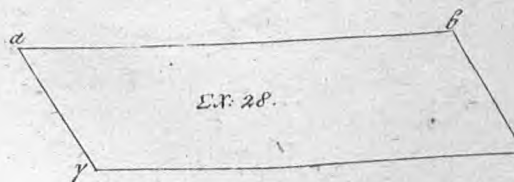
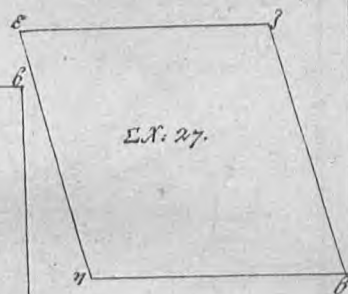
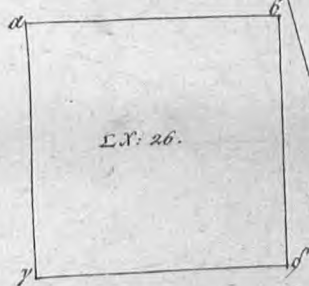
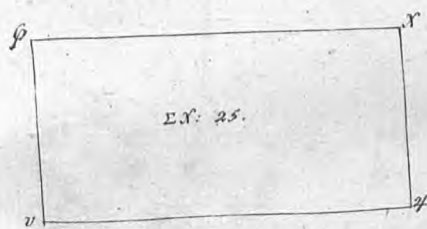
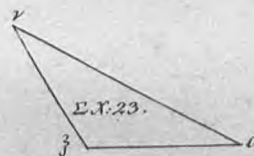
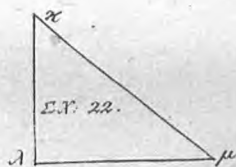
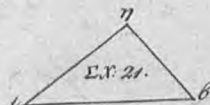
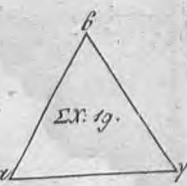
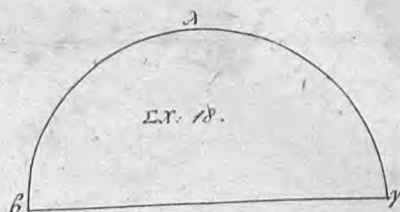
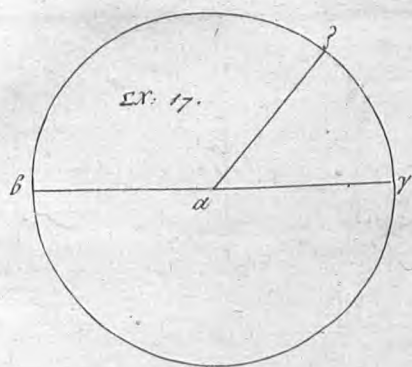
Σελ. σίχ.

159	22	ή· περὶ Γρ. ή· περὶ Ἀλγο- ρίθμῳ, ή
161	31	τεταγμένως Γρ. τεταραγ- μένως
165	26	αὐτὸ Γρ. αὐτὸ ἔτως
173	27	τῶν Γρ. τῶν ὅλων
181	4	ξ:1 Γρ. ζ:1
185	26	βζ Γρ. βζι
186	17	τῶν Γρ. τῶν τῶν
197	26	⁸ / ₃ Γρ. ⁸ / ₃
204	19	αεΓρ. δε. ή βα: αγ.: δα: αε
205	3	βγ Γρ. βλ
209	25	γωνία Γρ. Γωνία (1),
215	4	πρ Γρ. λρ
231	σημ.	(2) τῶ α' Γρ. τῶ ε'
244	30	ξ Γρ. ξι
250	13	τ, Γρ. περιττεύει
253	16	$\sqrt{\frac{1}{4}}$ αβ Γρ. $\sqrt{\frac{1}{4}}$ αβ ^τ
254	32	αβ × ε Γρ. αβ + ε
255	12	$\sqrt{\frac{1}{4}}$ αβ Γρ. $\sqrt{\frac{1}{4}}$ αβ ^τ
274	21	σῶμα, Γρ. σῶμα ἐδὲν,
283	18	περιεχόμενον Γρ. περιεχο- μενον ἐσί.
αὐτ.	23	ταῦτα Γρ. ταῦτά
294	16	τῆς κατὰ Γρ. τῆ κατὰ
297	σημ.	(1) Ο'ρ. Α' Γρ. (1) Ο'ρ. Β'
304	21	τῶ ἐπὶ Γρ. ή ἐπὶ
310	σημ.	(2) ΚΗ Γρ. Κ
αὐτ.	αὐτ.	(5) τῶ ε' Γρ. τῶ ε'
314	26	ή Γρ. ό
319	7	πρ Γρ. πγ
320	2	ἐκ Γρ. ἐκ
323	25	αὐτῆς Γρ. αὐτῇ
325	16	κορυφῆς, ή, Γρ. κορυφῆς β,
334	7	ηα ^τ = Γρ. ηα ^τ +
335	29	βε ^τ Γρ. βε ^τ
378	27	ξι Γρ. ξτ
385	15	τριπλῇ Γρ. διπλῇ.

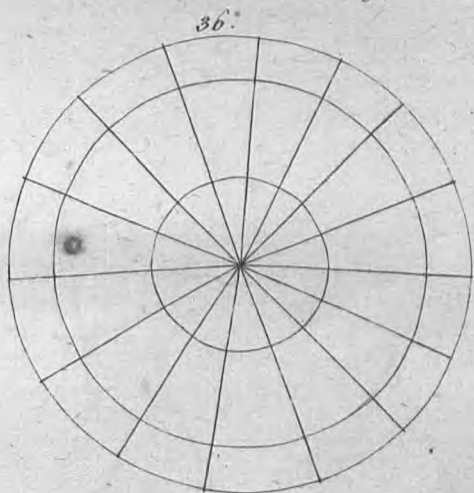
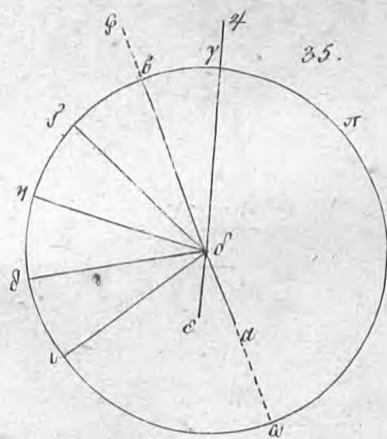
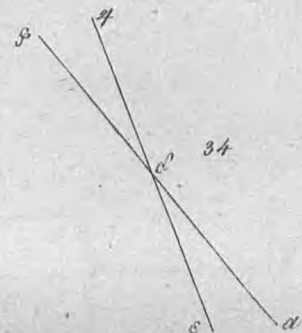
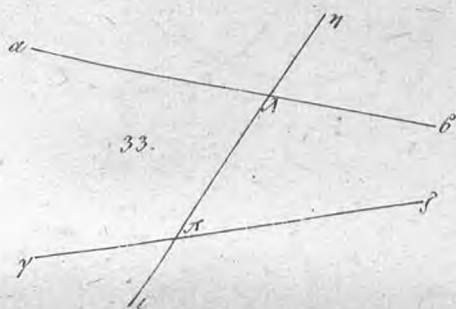
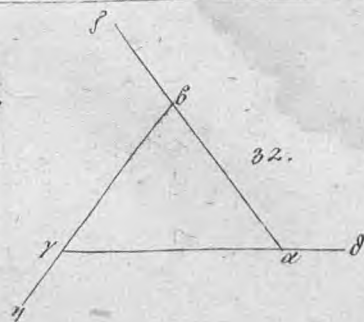
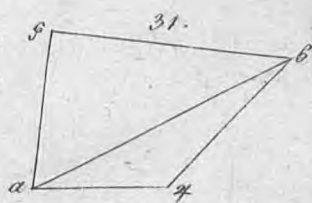
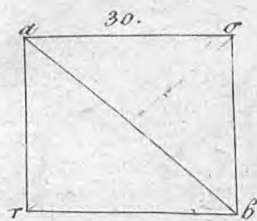


Εργασία του Κ. Ε. Νικολάου

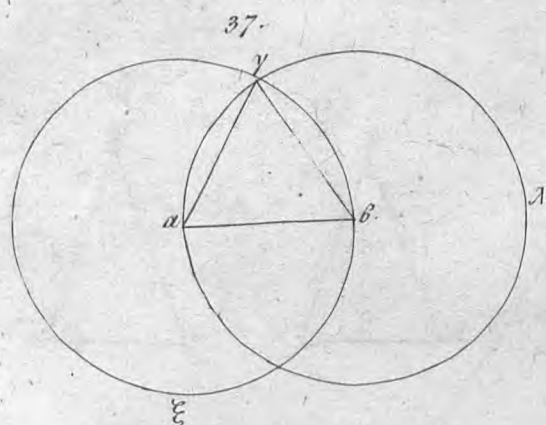
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



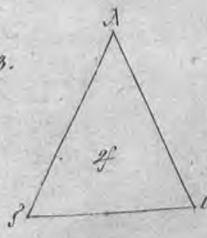
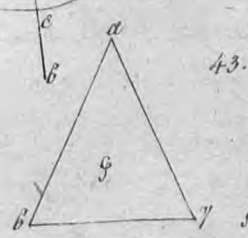
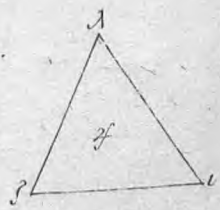
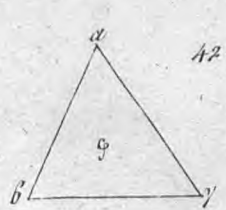
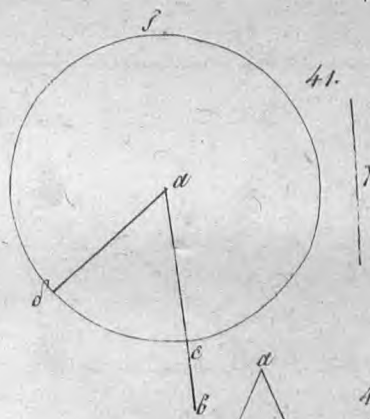
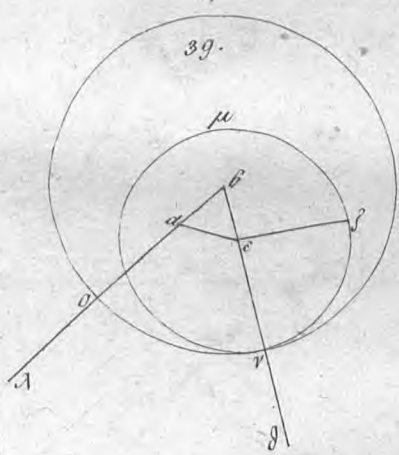
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



38.



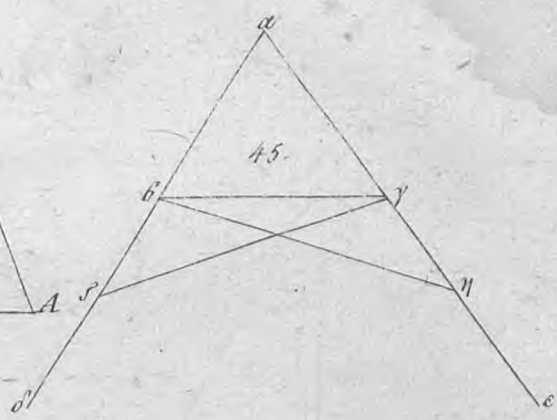
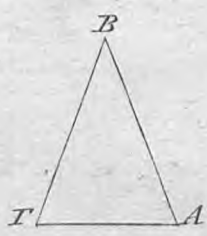


The page contains several faint, hand-drawn geometric diagrams. In the upper right, there is a circle with a horizontal diameter and a vertical line passing through its center. To the right of the circle is a small, handwritten letter 'P'. Below this, in the middle right, is a diagram of a circle with a vertical diameter and a horizontal line segment extending from the center to the right. At the bottom right, there is a diagram of a triangle with a horizontal base and a vertical line segment extending from the top vertex to the base. The paper is aged and shows signs of wear, including stains and discoloration.

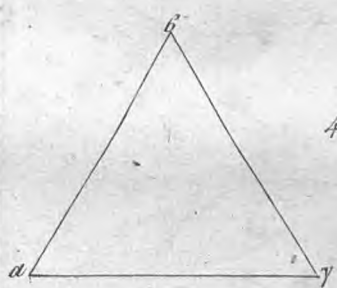
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



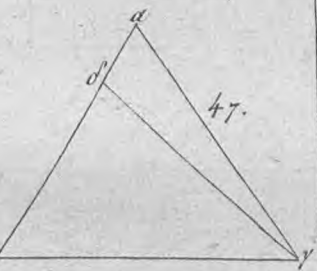
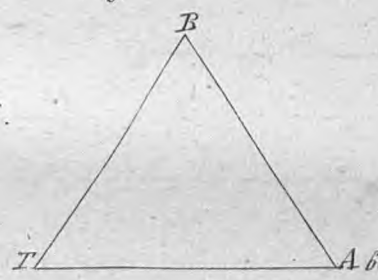
44.



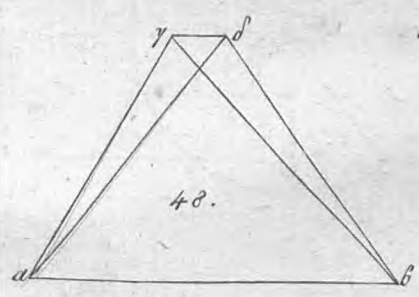
45.



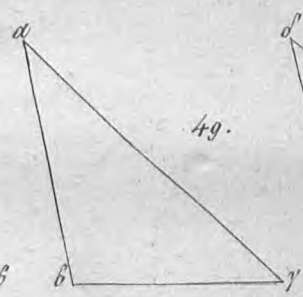
46.



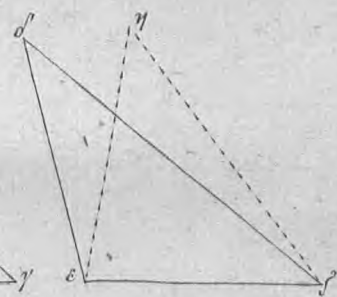
47.



48.



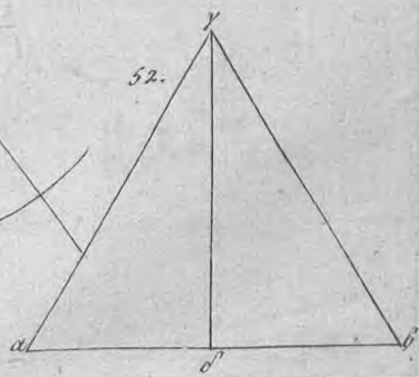
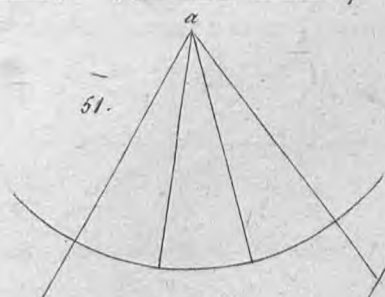
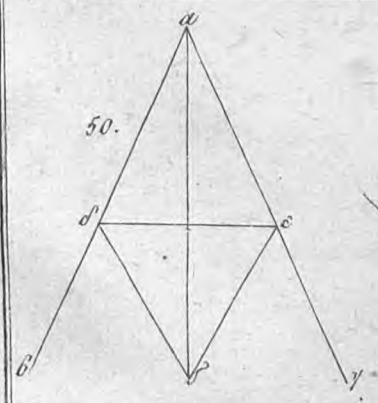
49.



50.

51.

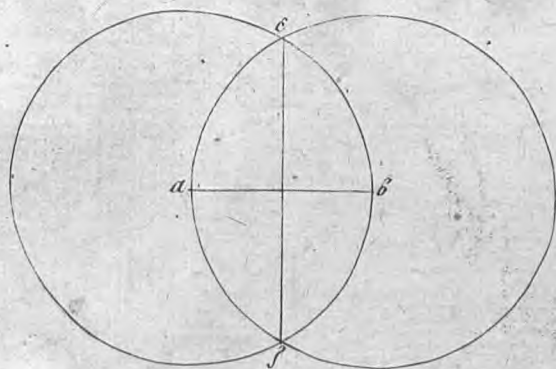
52.



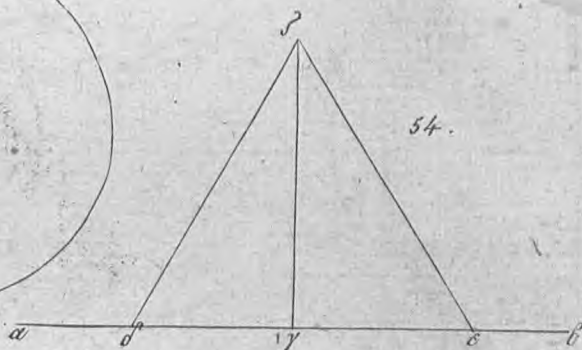


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

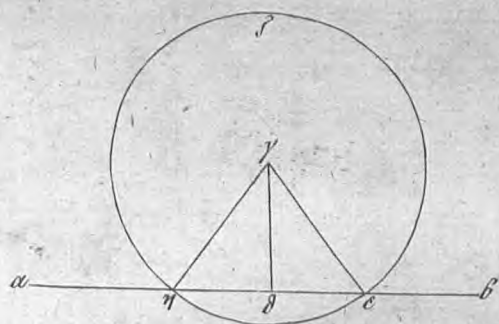
53.



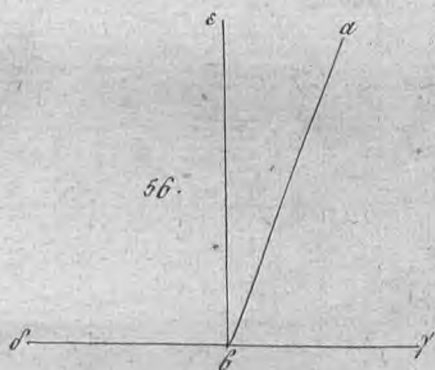
54.



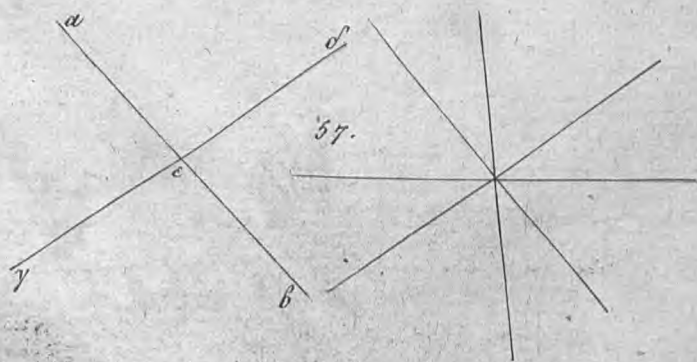
55.



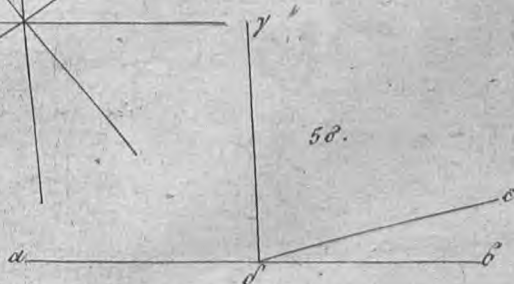
56.



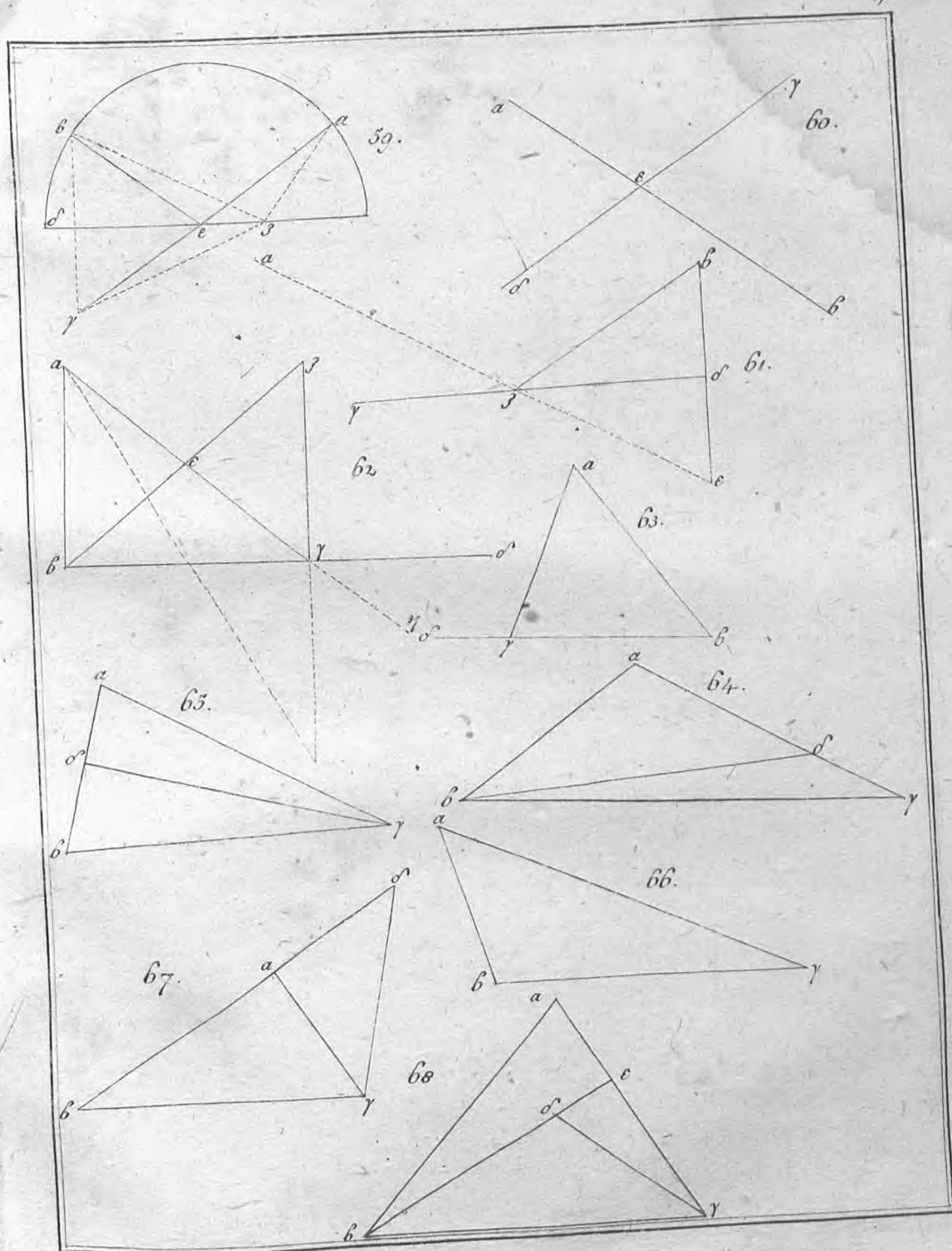
57.



58.



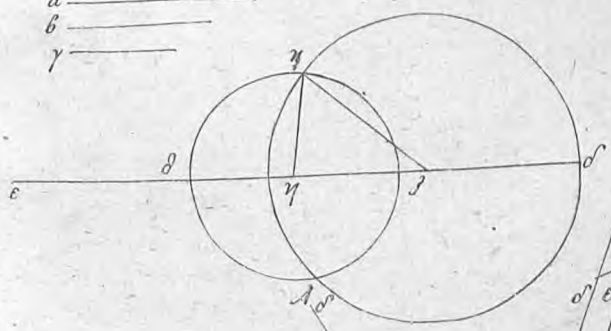
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



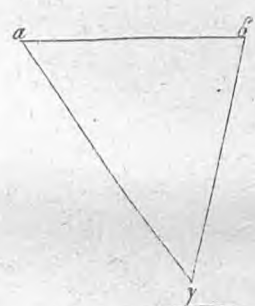
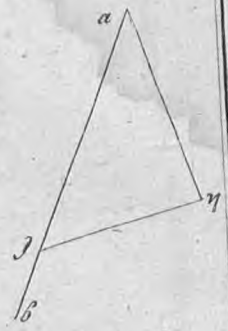
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

a —————
b —————
γ —————

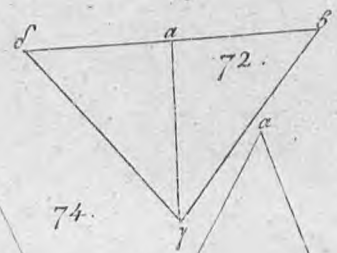
69.



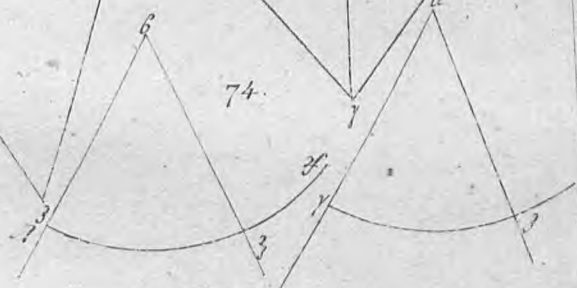
70.



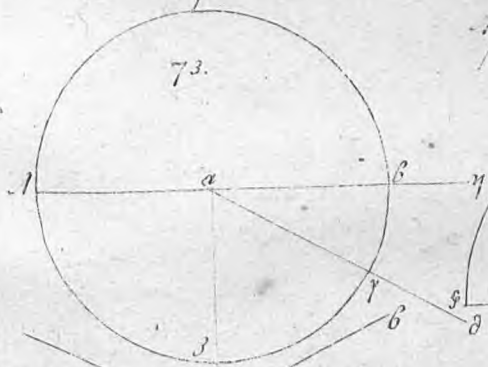
71.



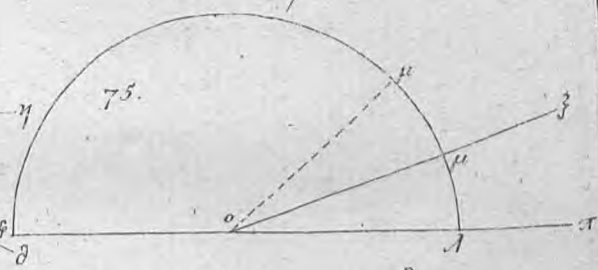
72.



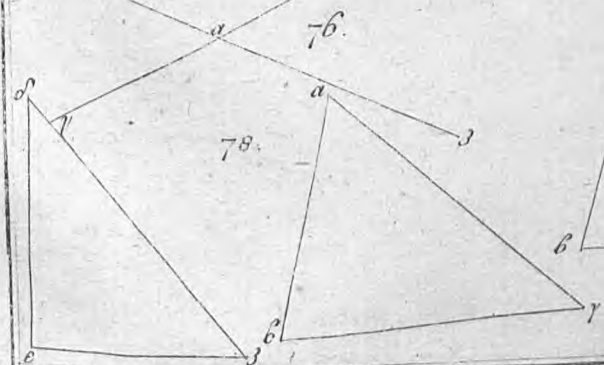
74.



73.

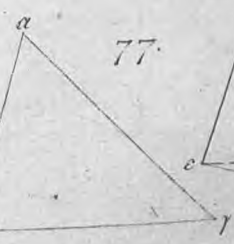


75.

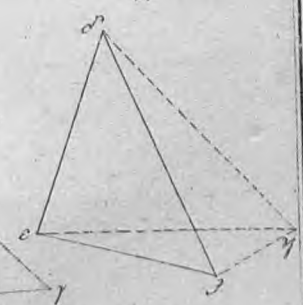


76.

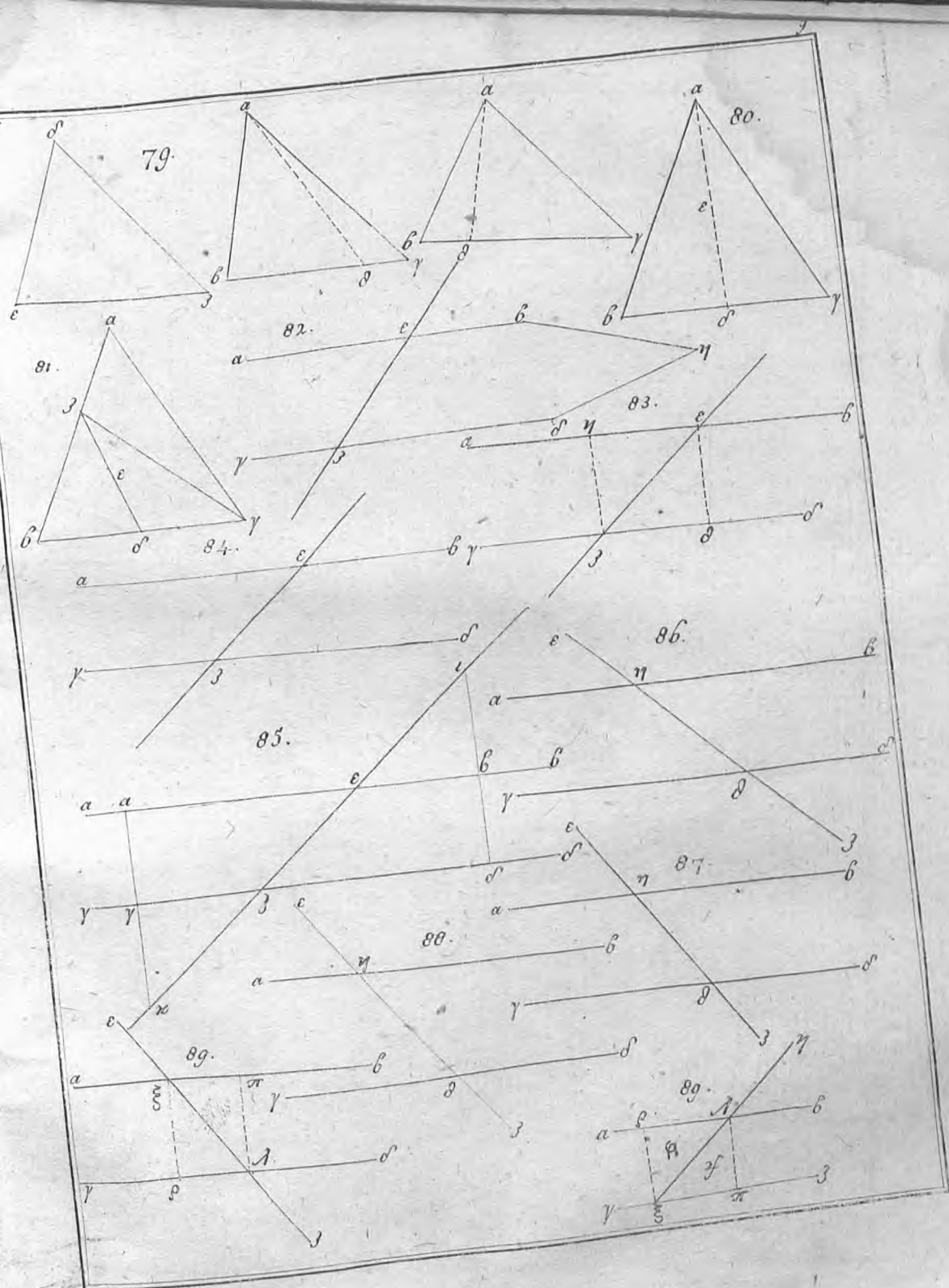
78.



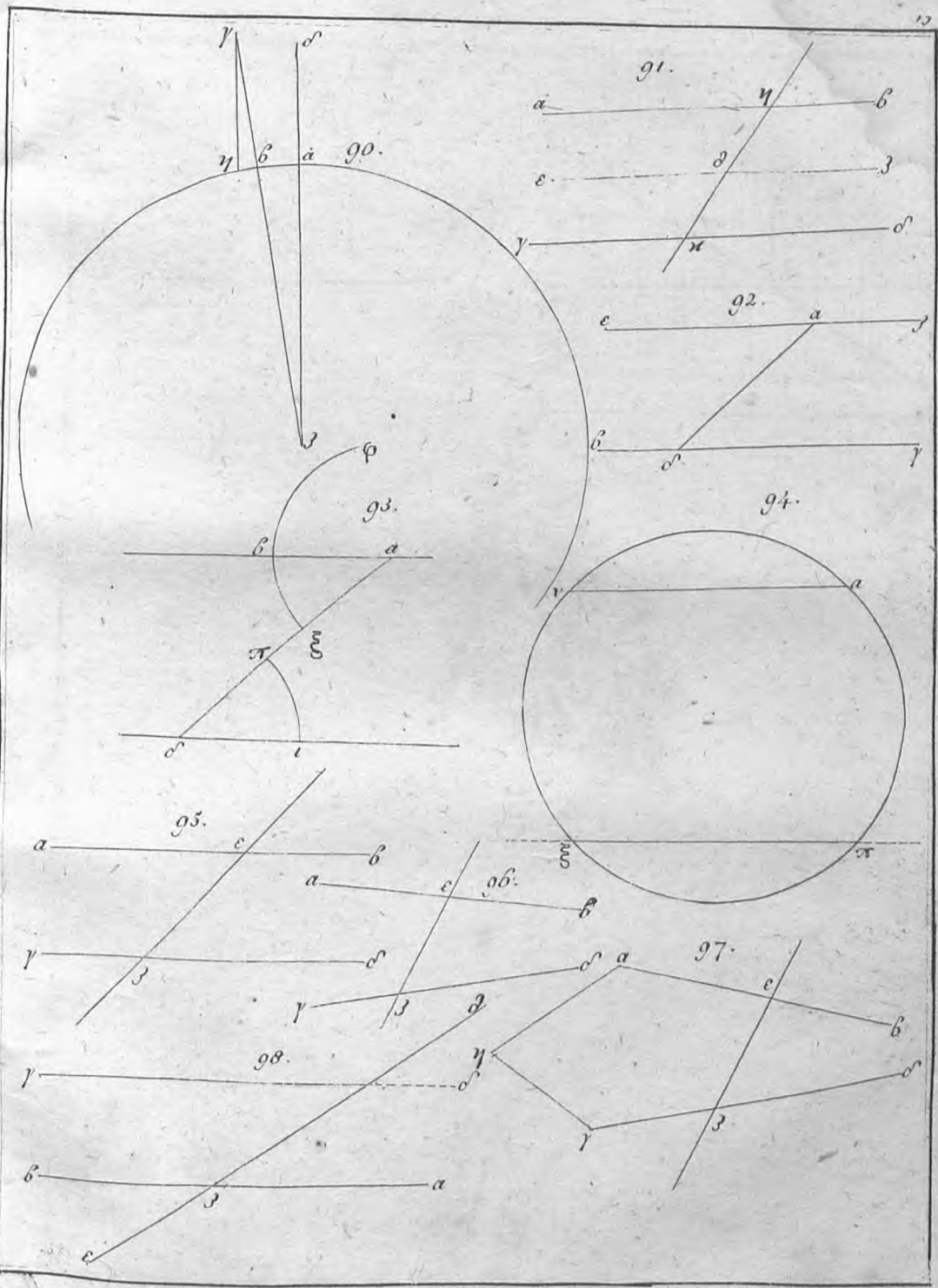
77.



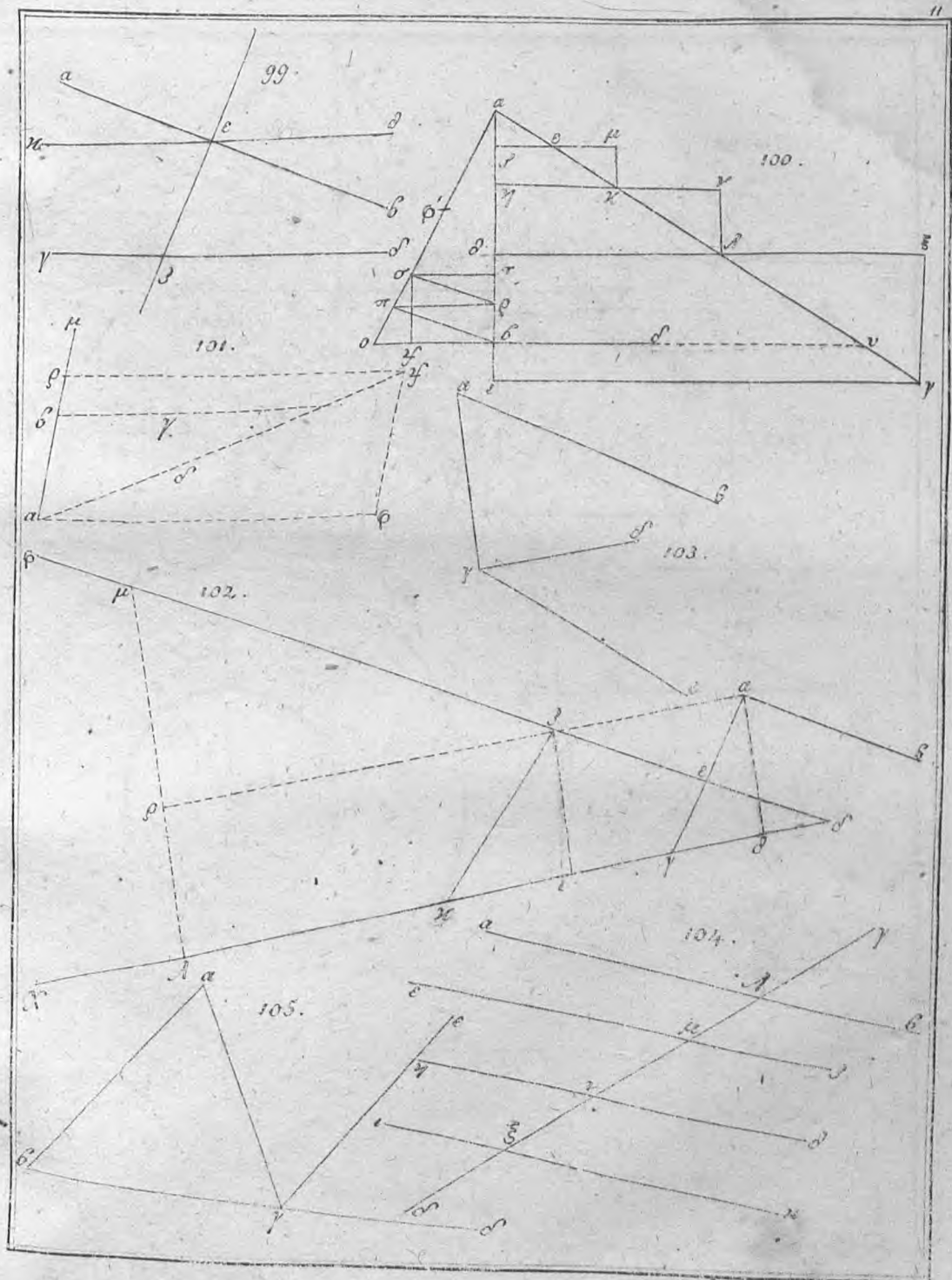
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



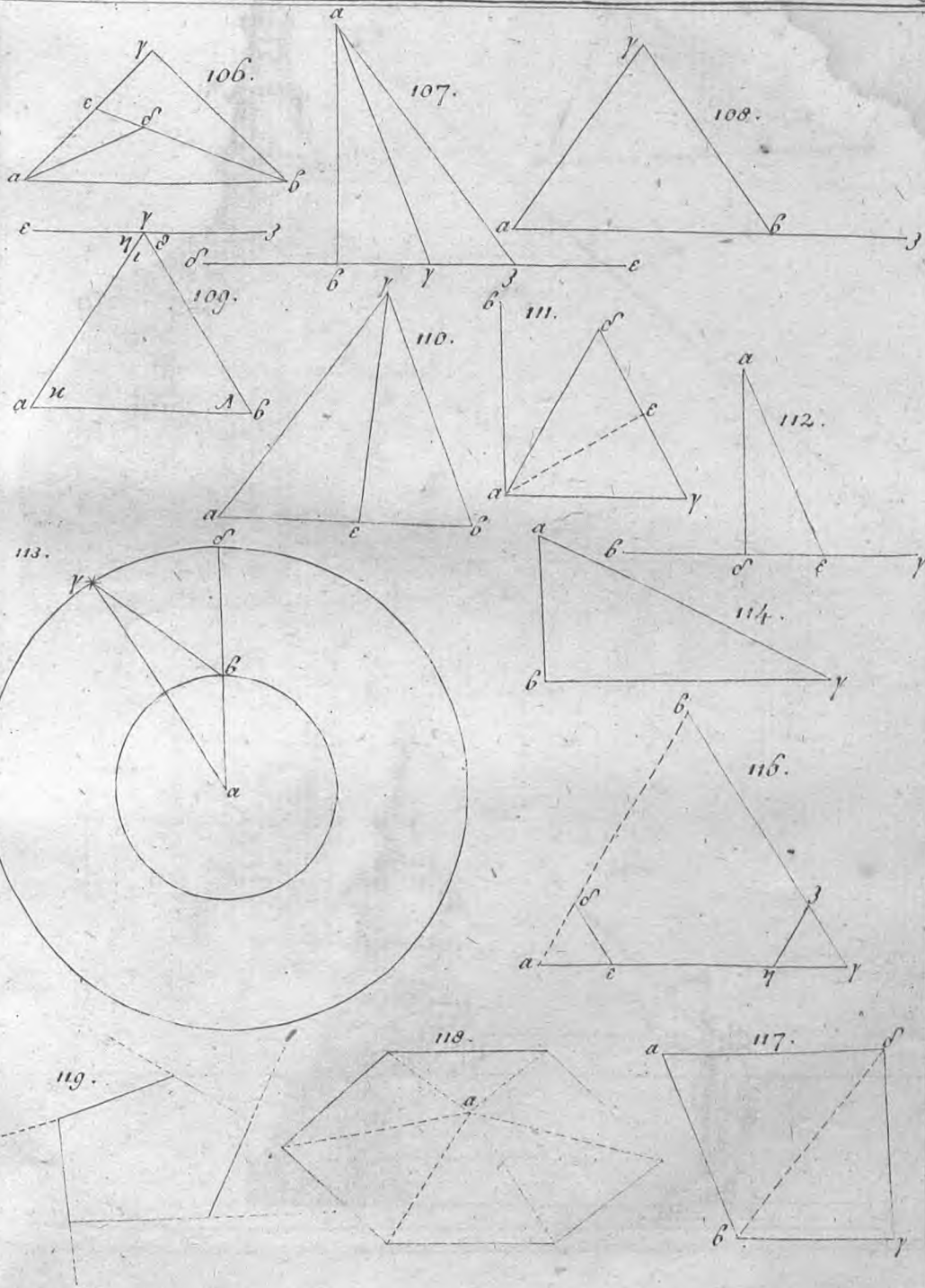
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



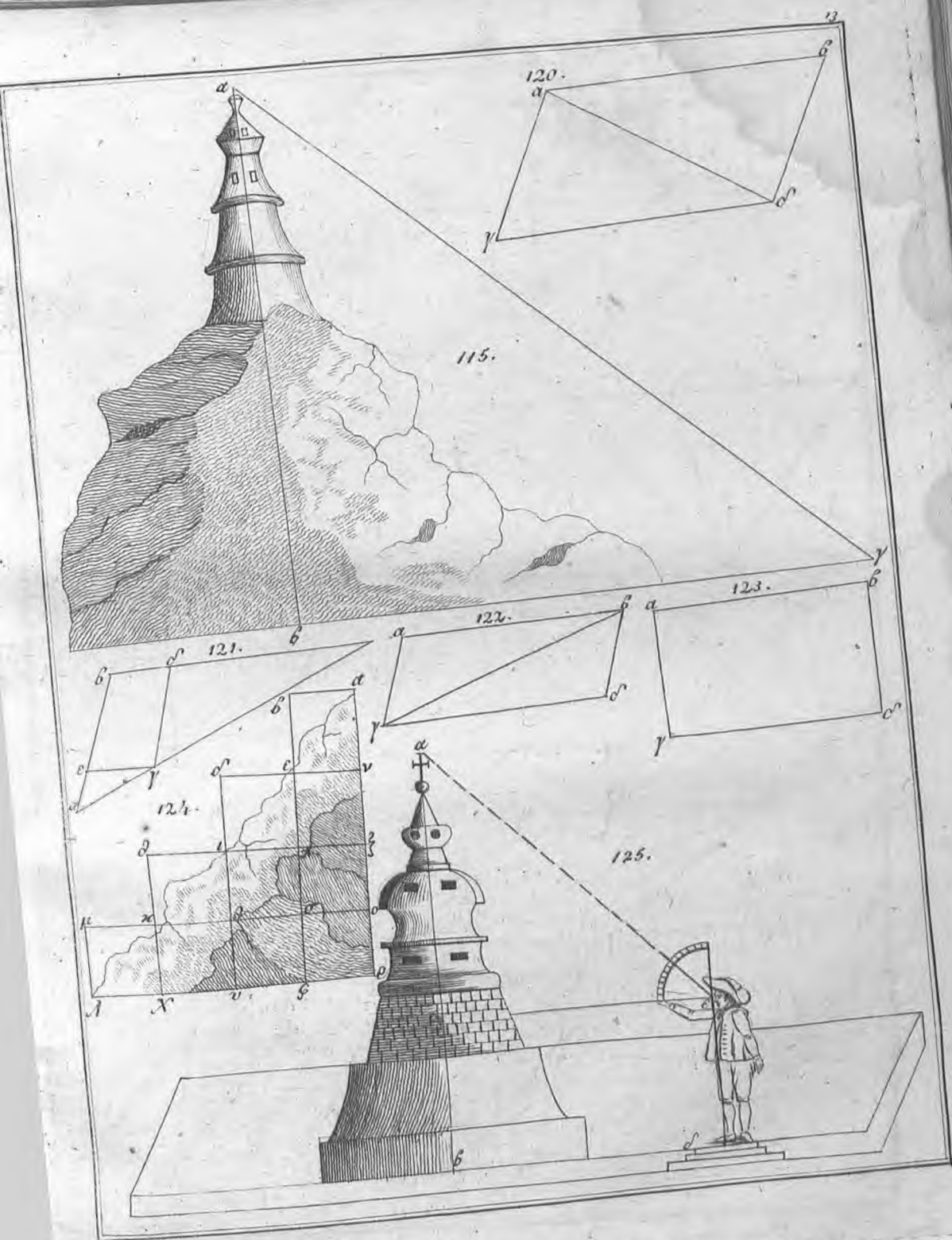
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

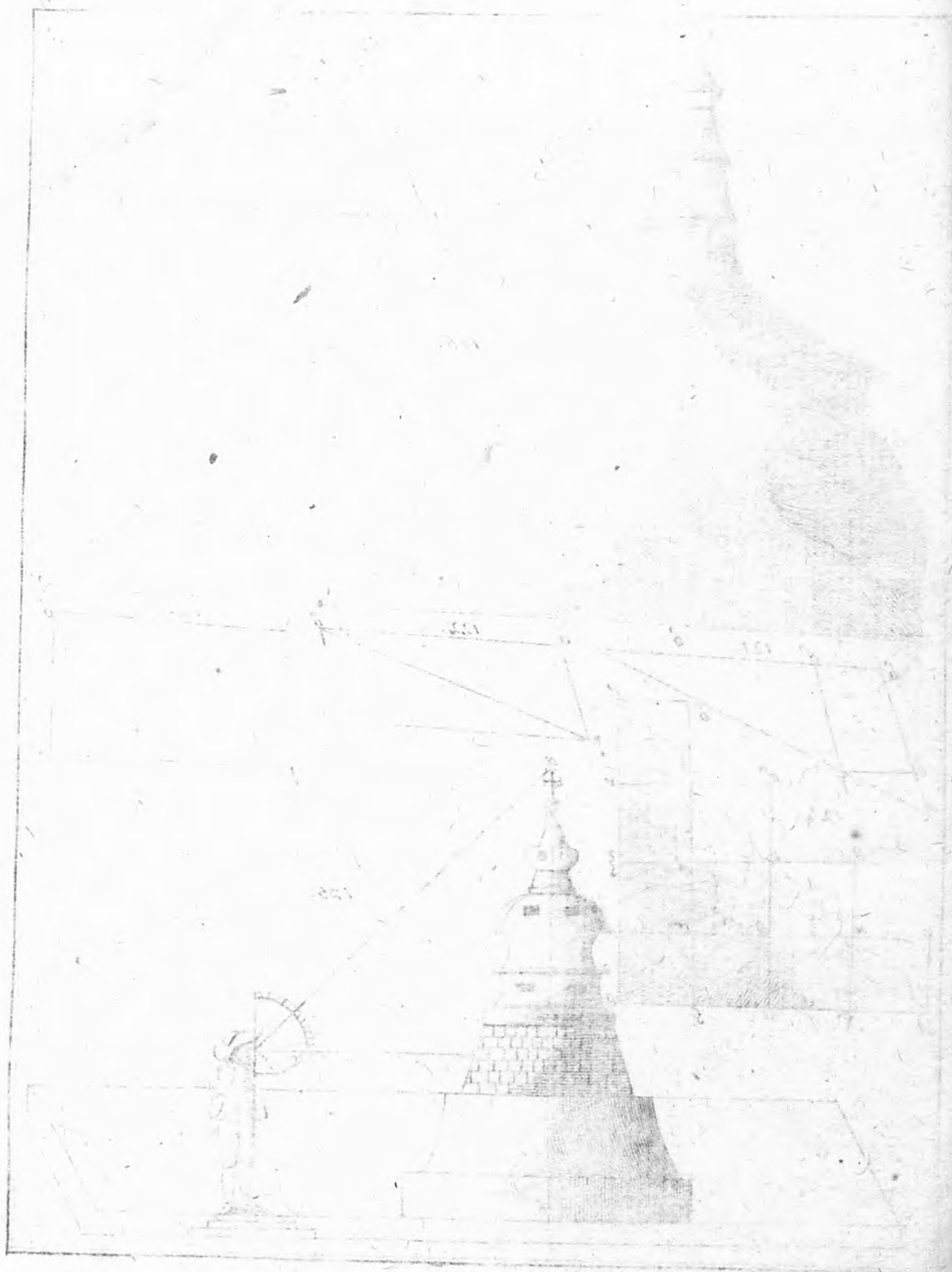


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

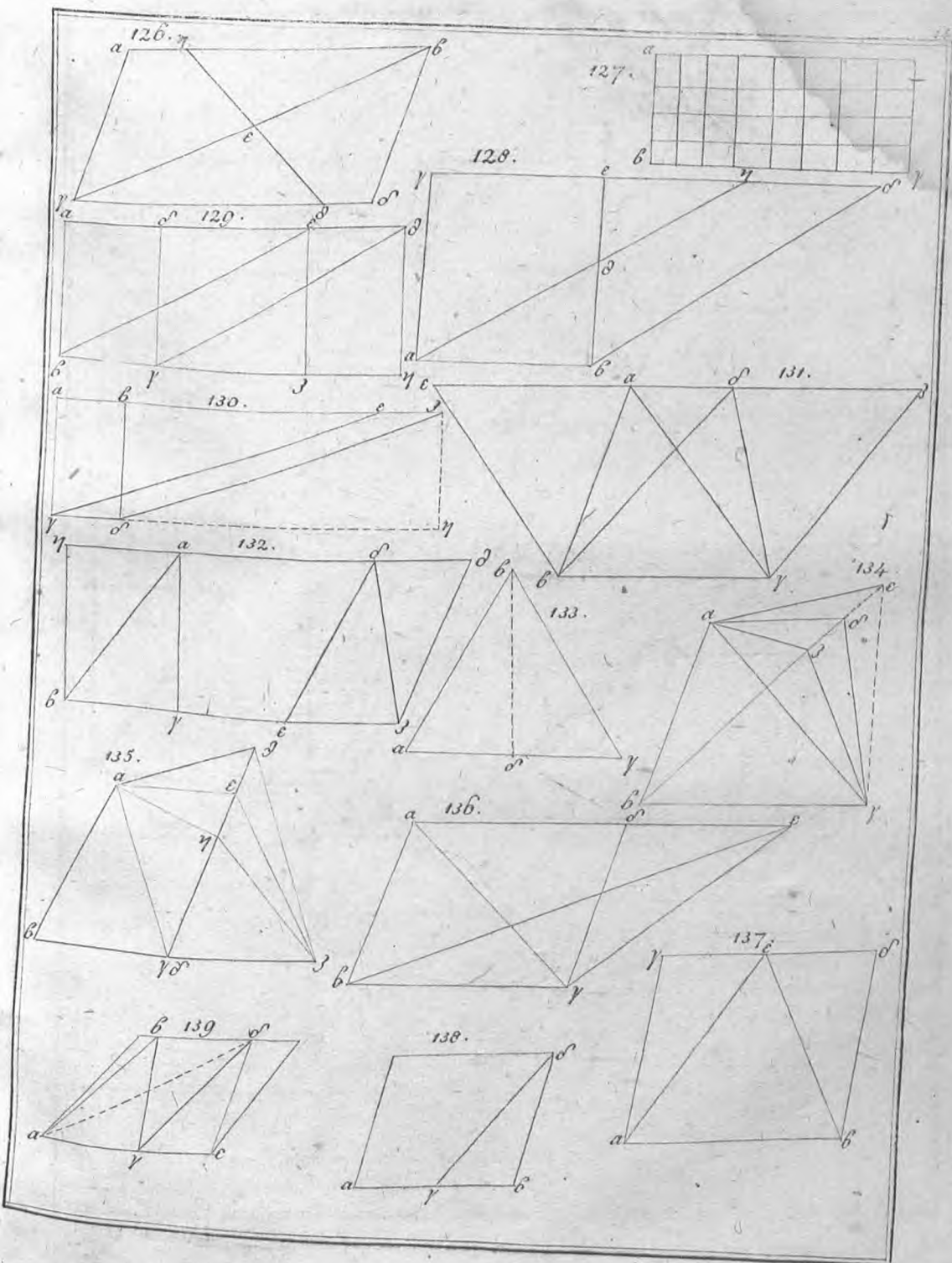






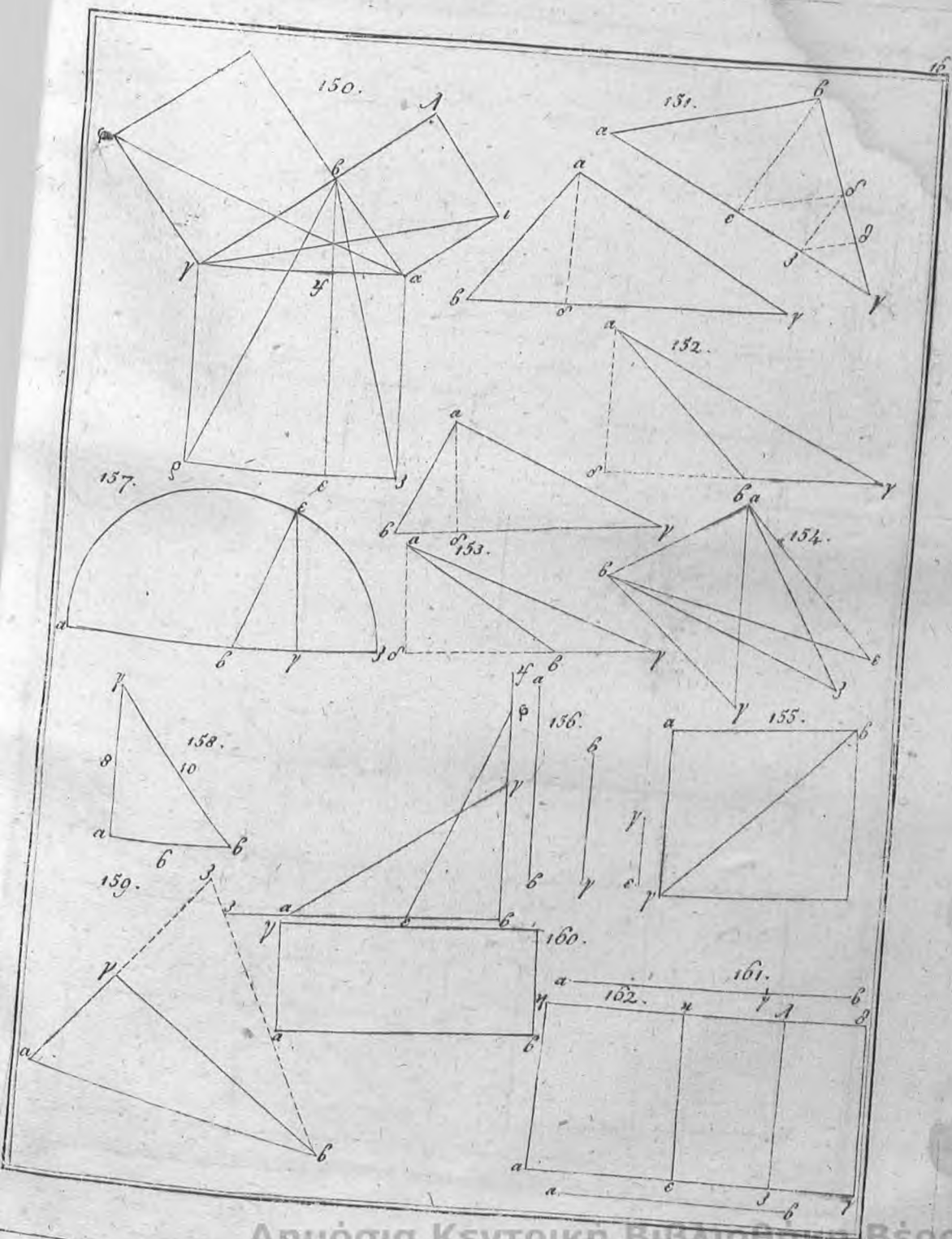


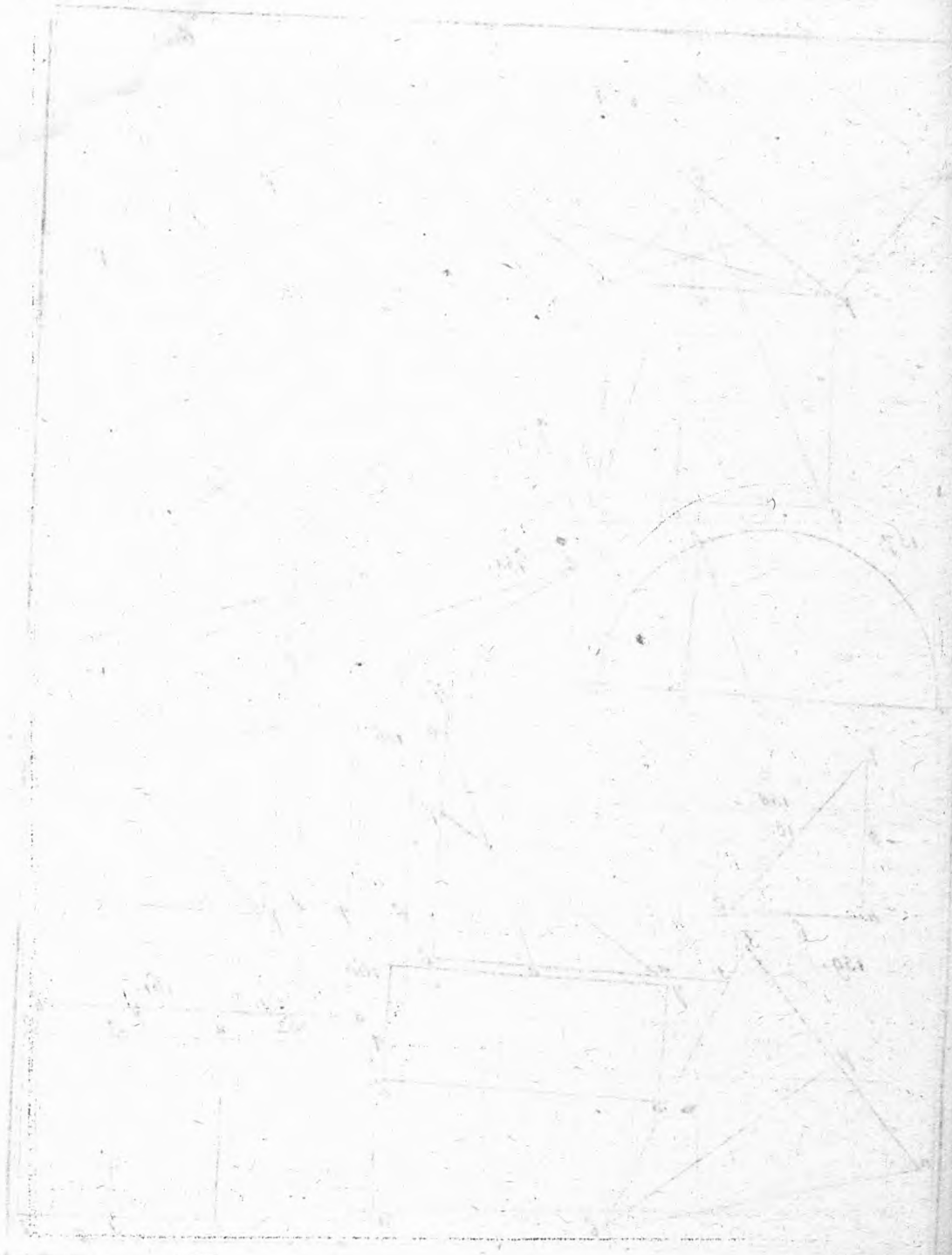
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



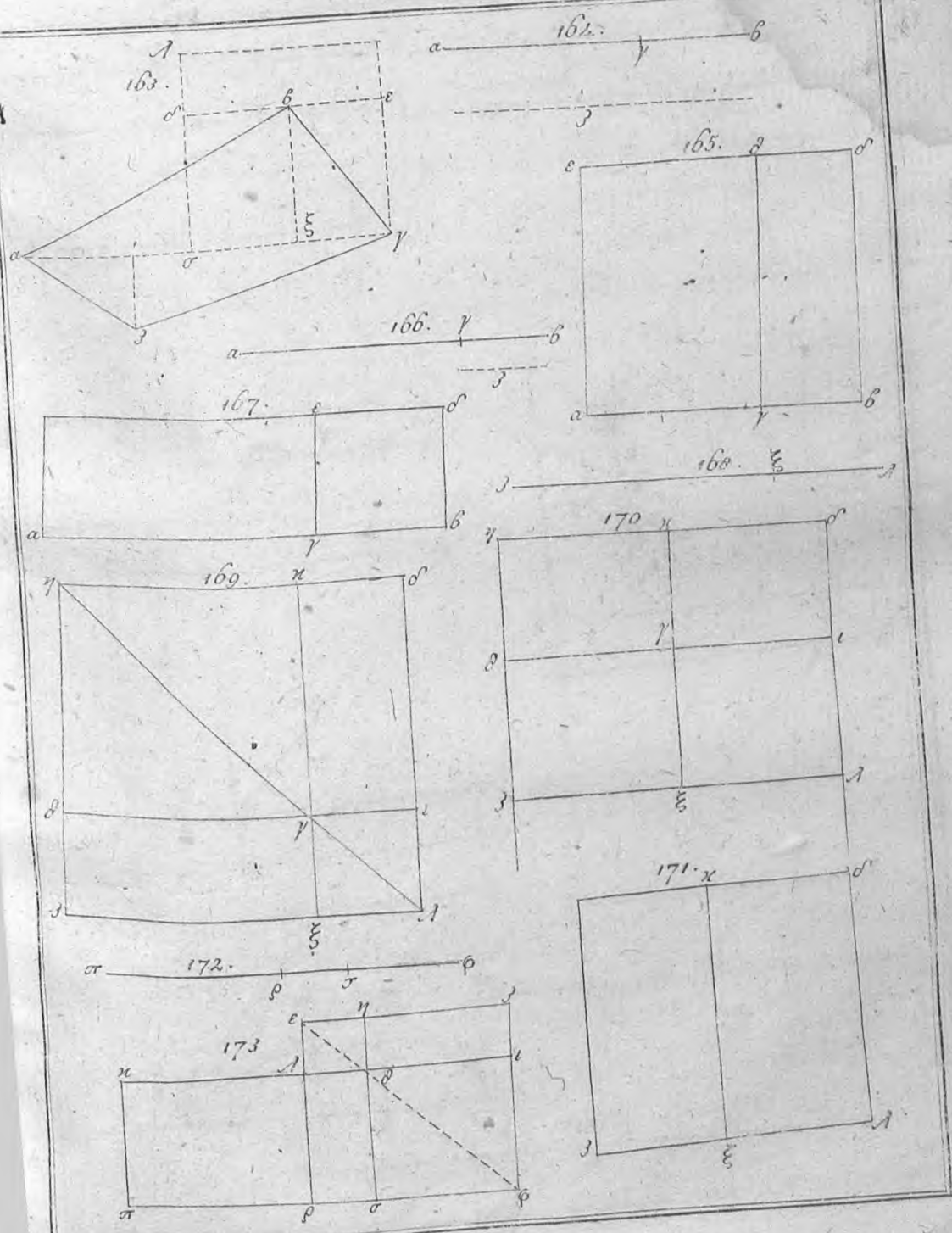
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

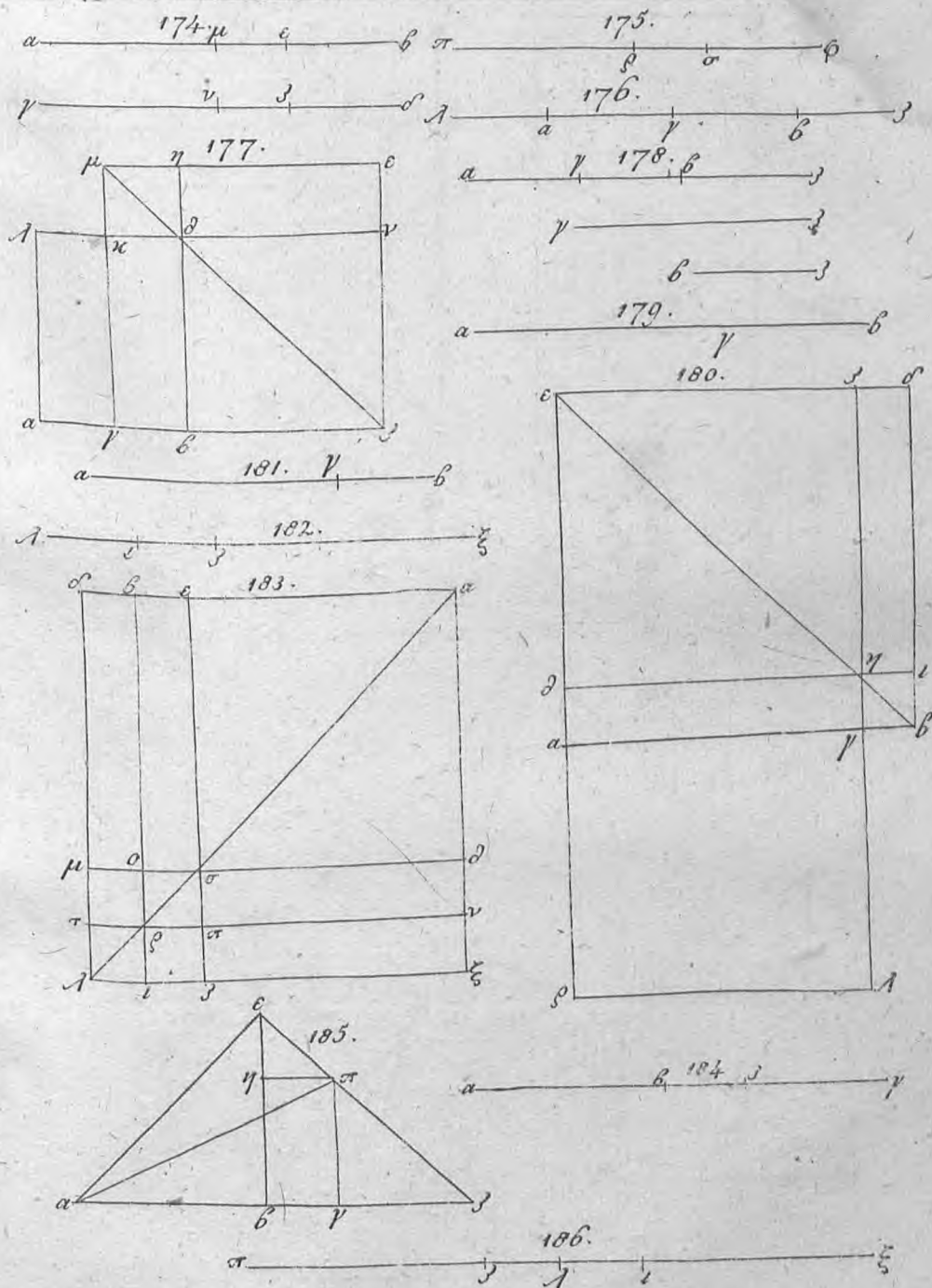




Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

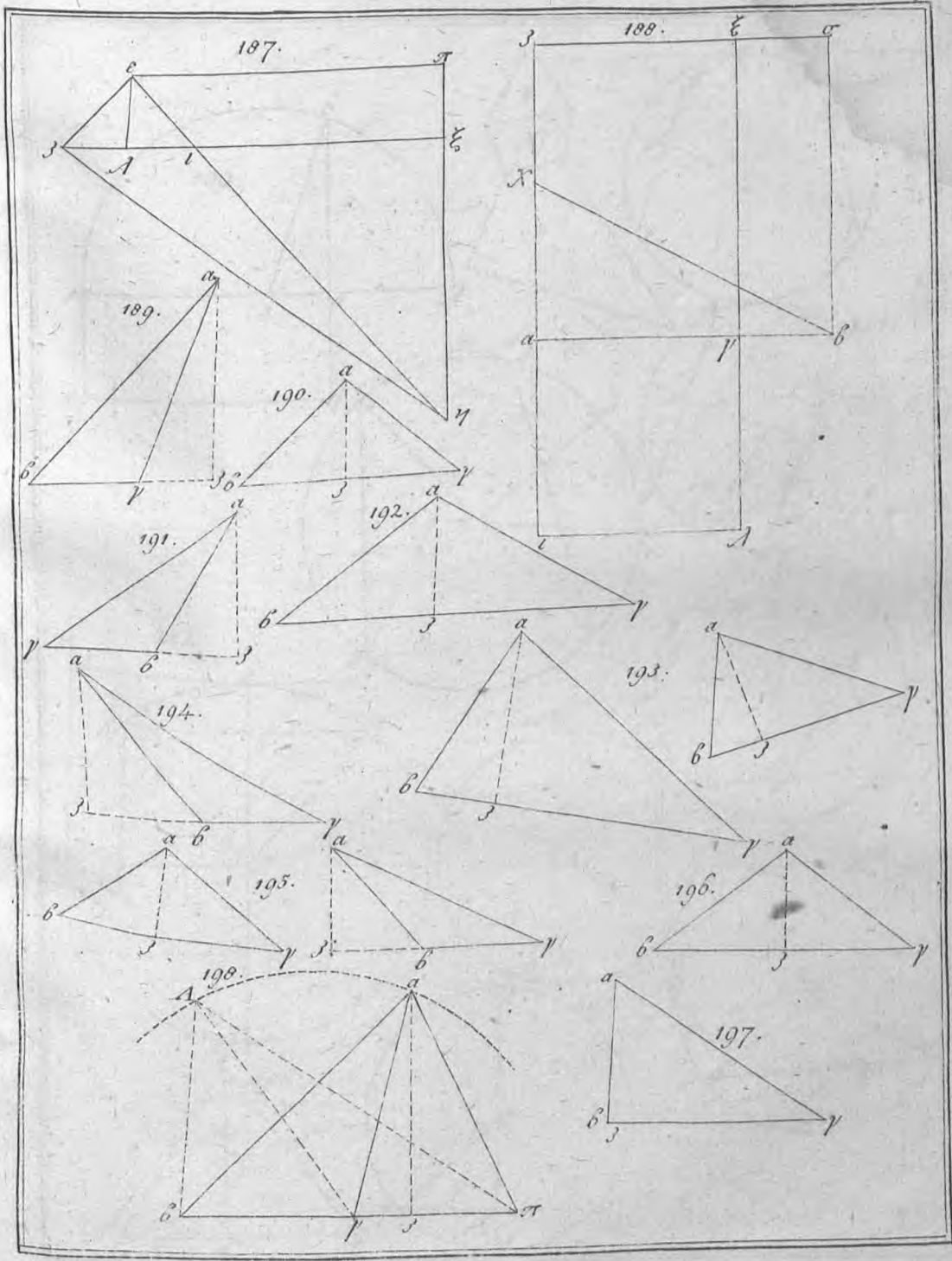


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



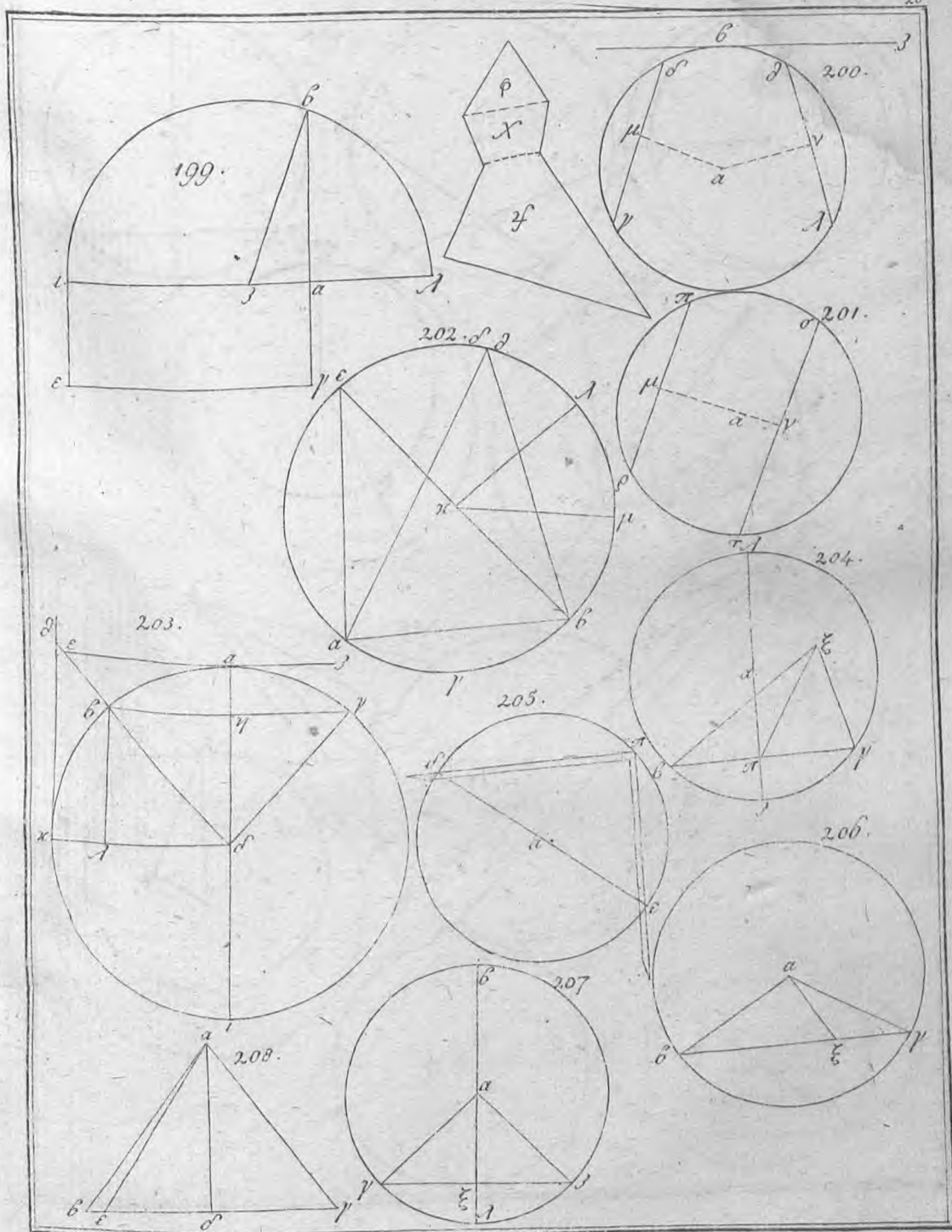


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



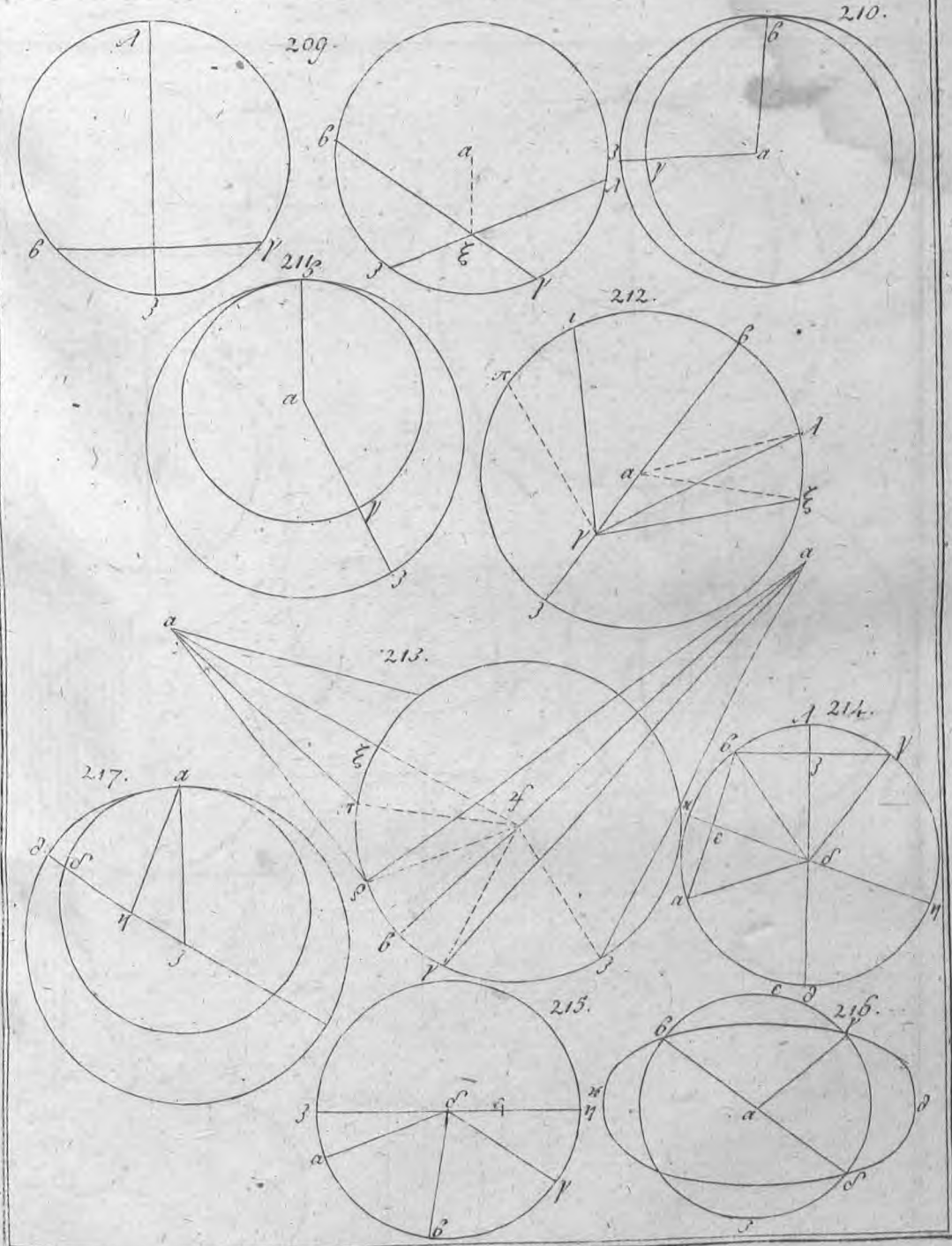


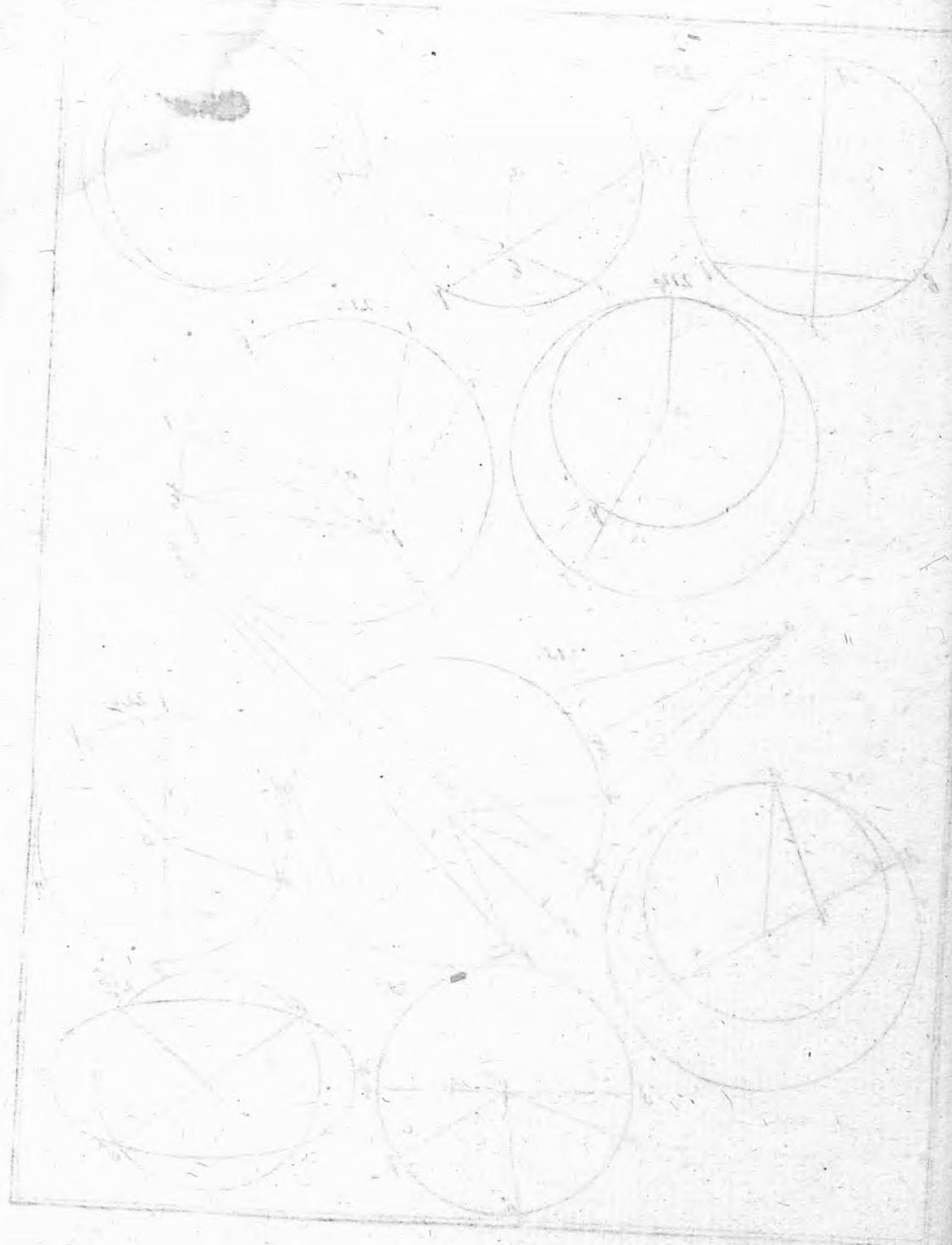
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



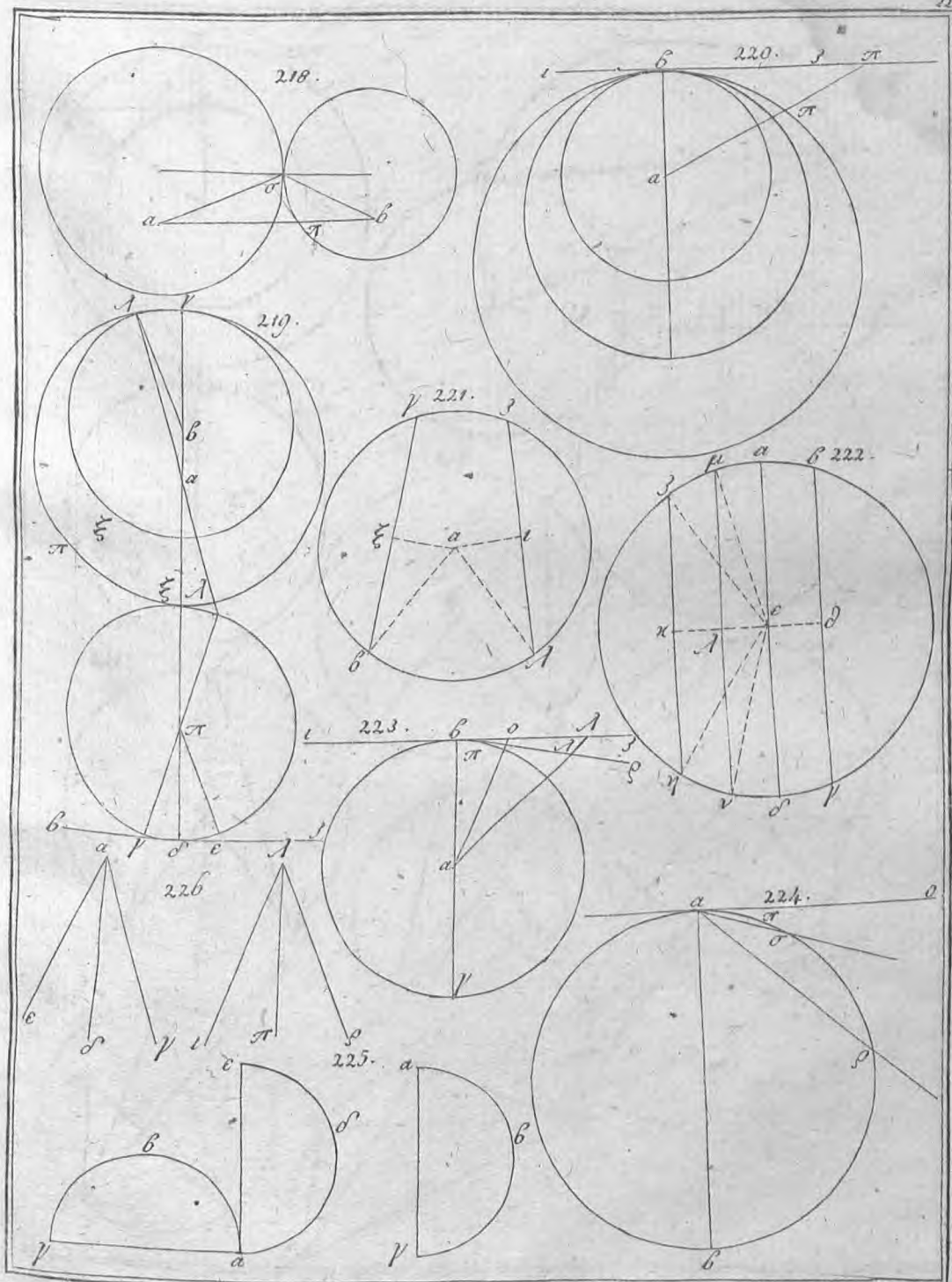


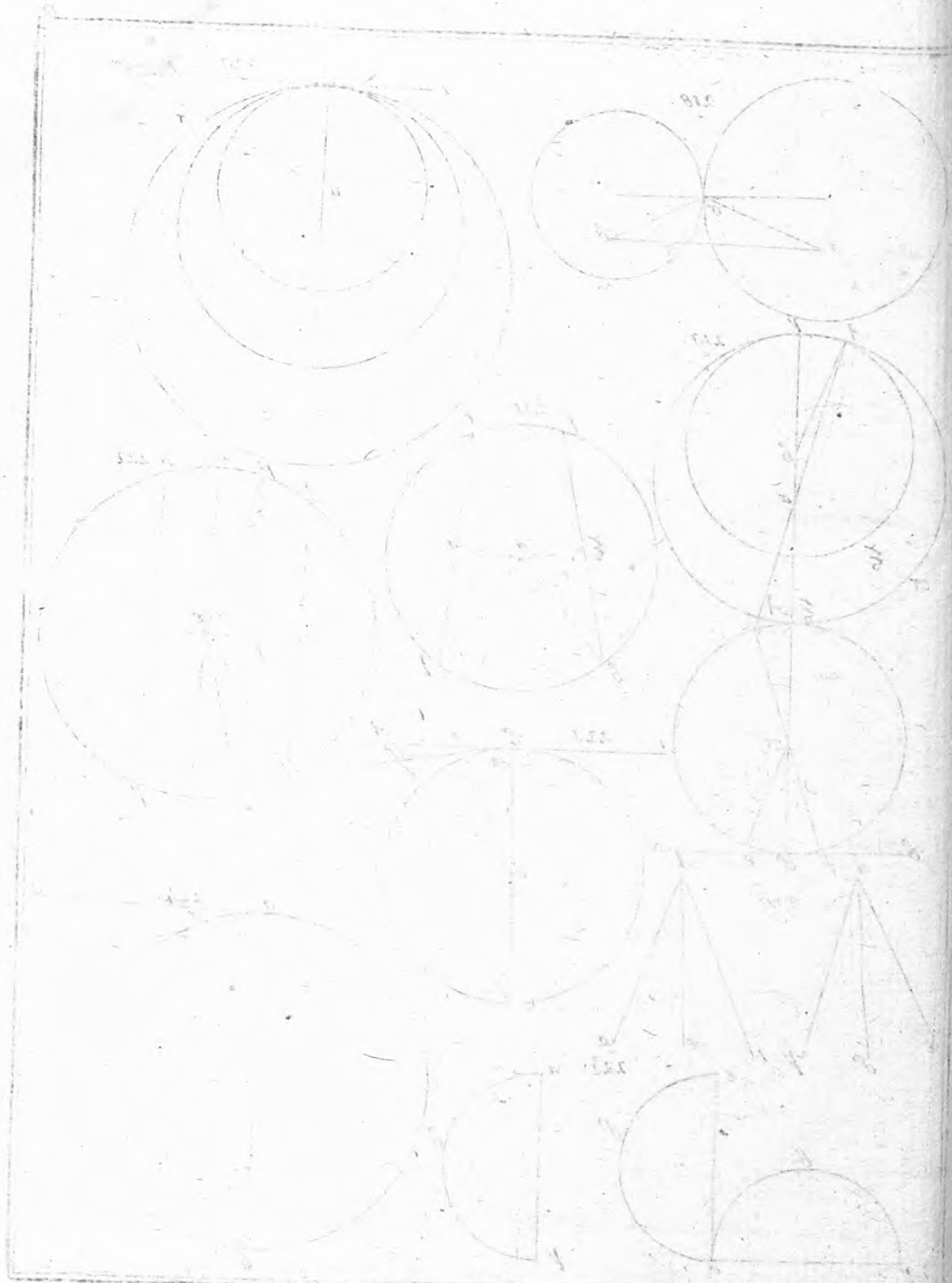
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

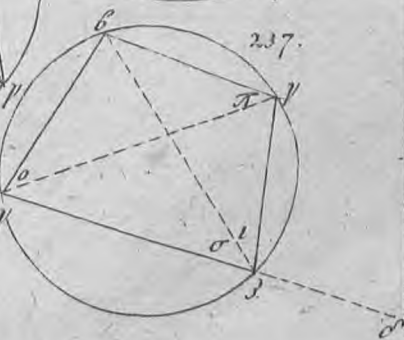
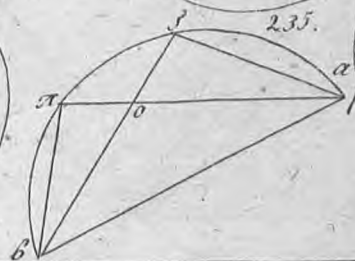
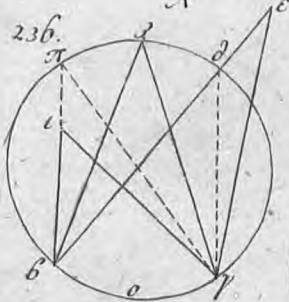
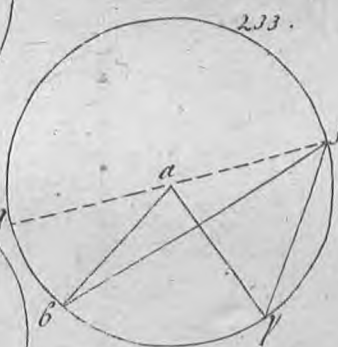
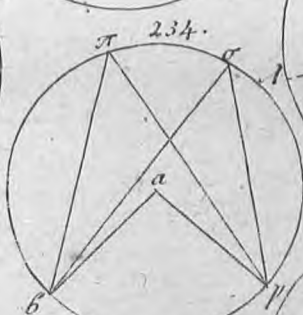
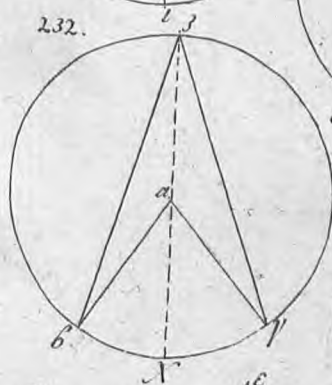
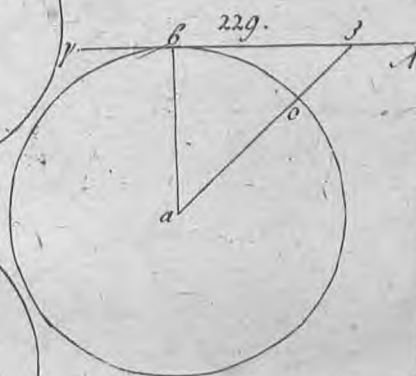
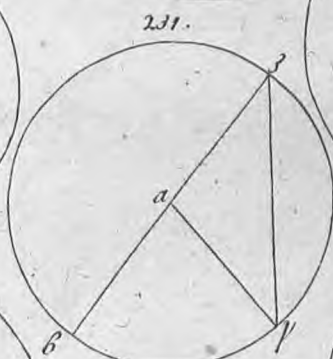
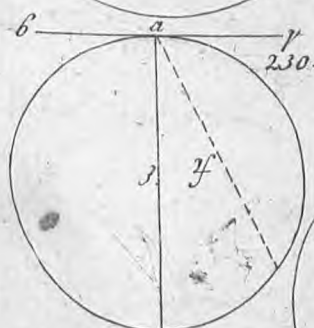
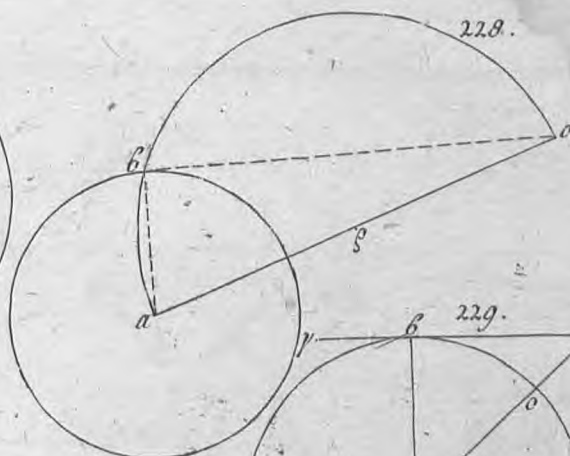
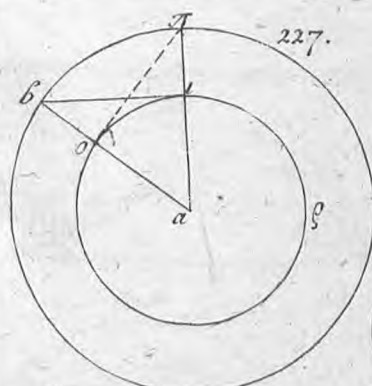




Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

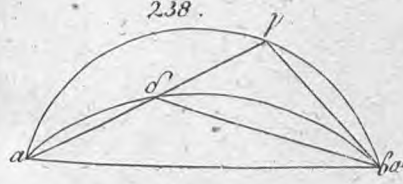




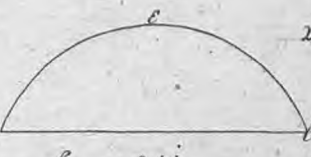


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

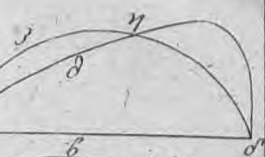
238.



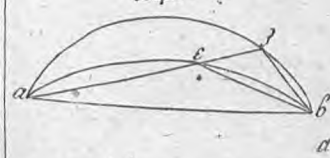
ε



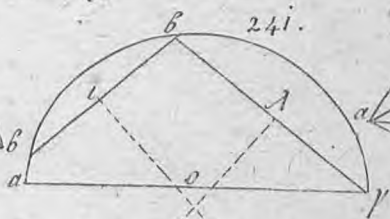
239.



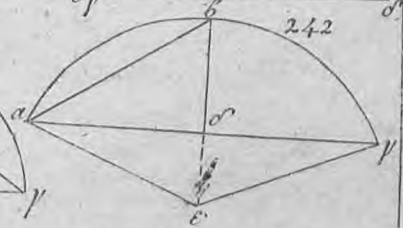
240.



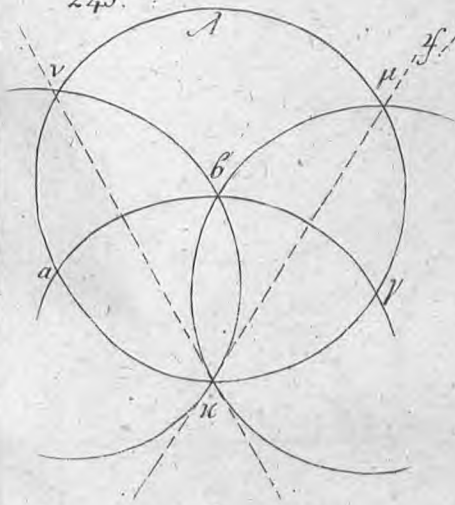
241.



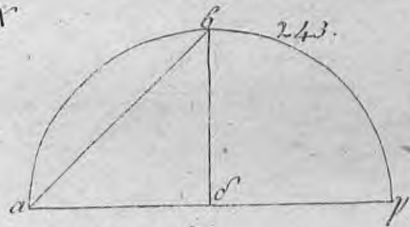
242.



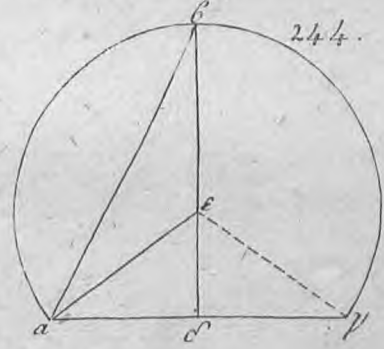
245.



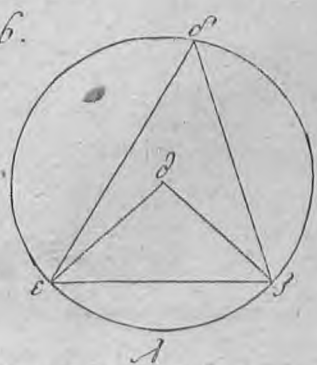
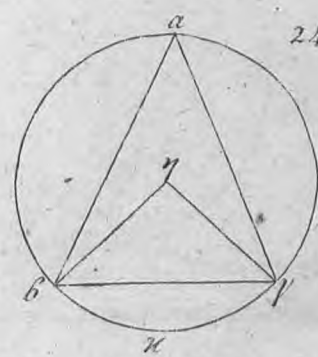
243.



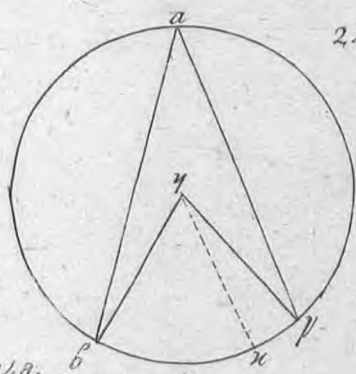
244.



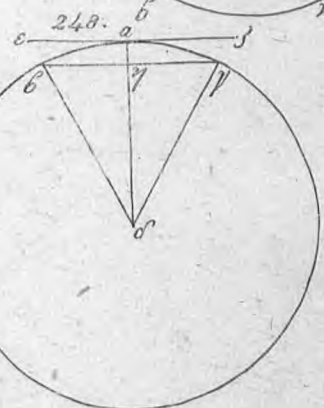
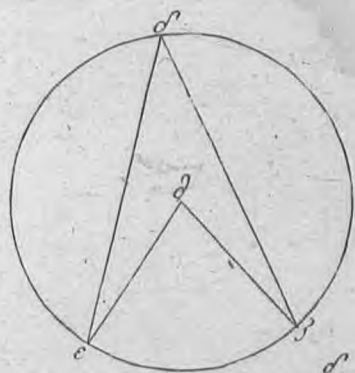
246.



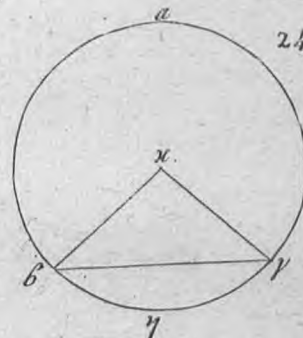
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



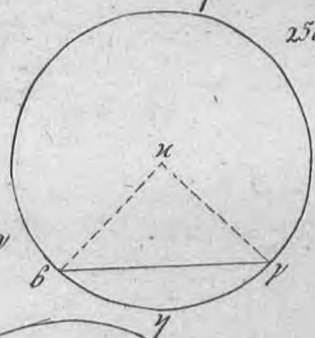
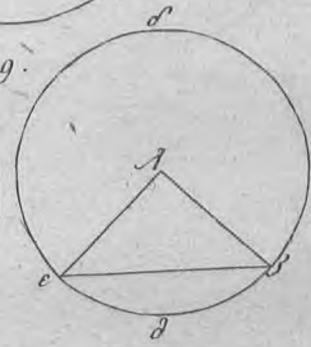
247.



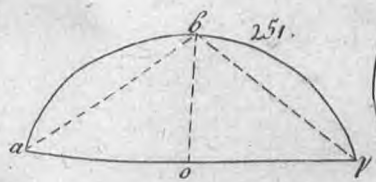
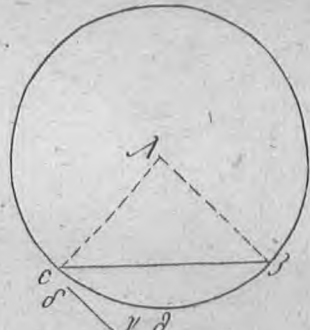
248.



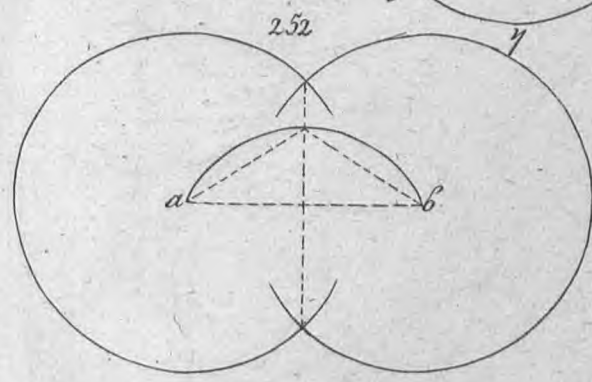
249.



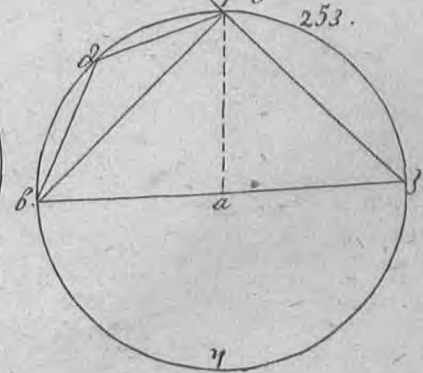
250.



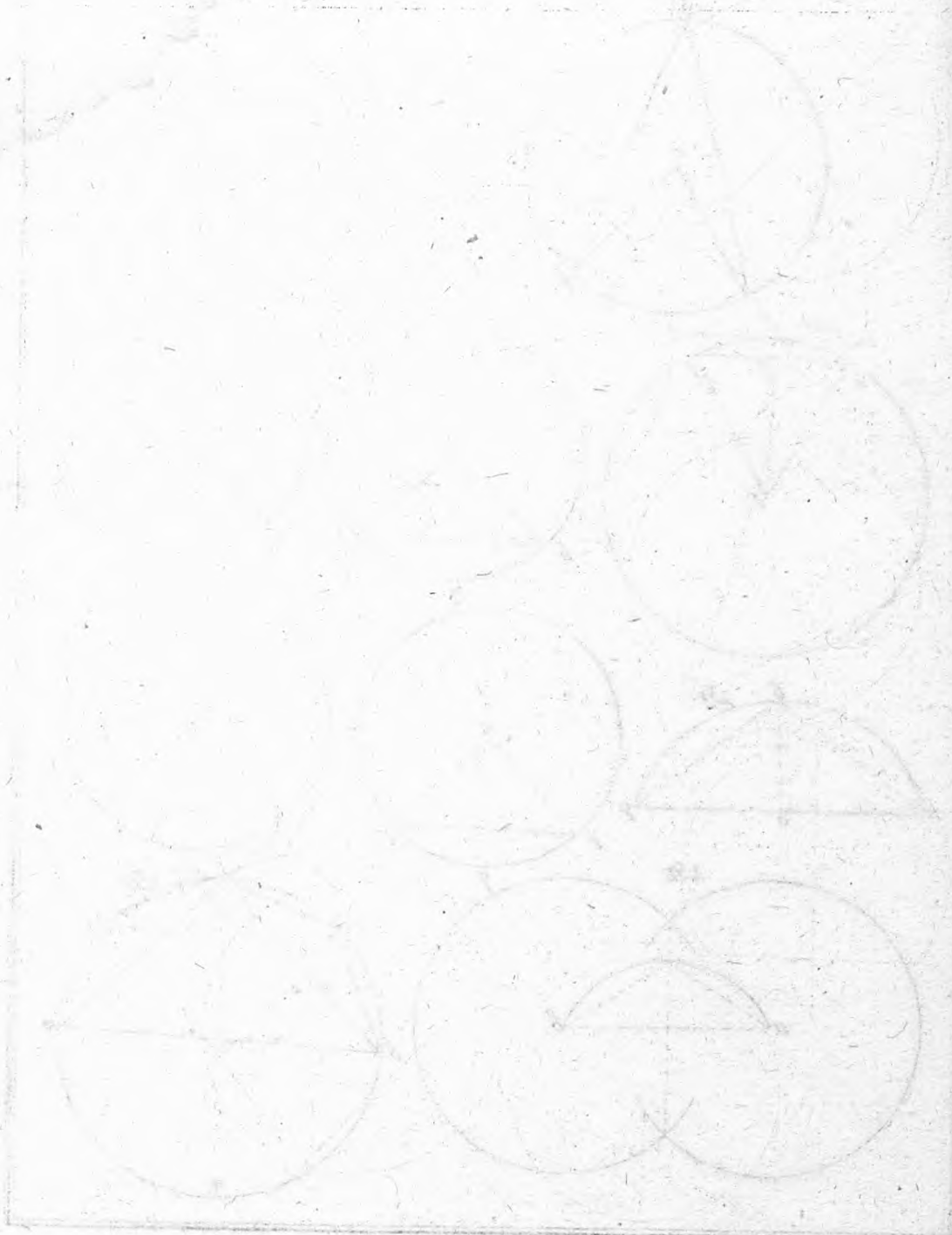
251.



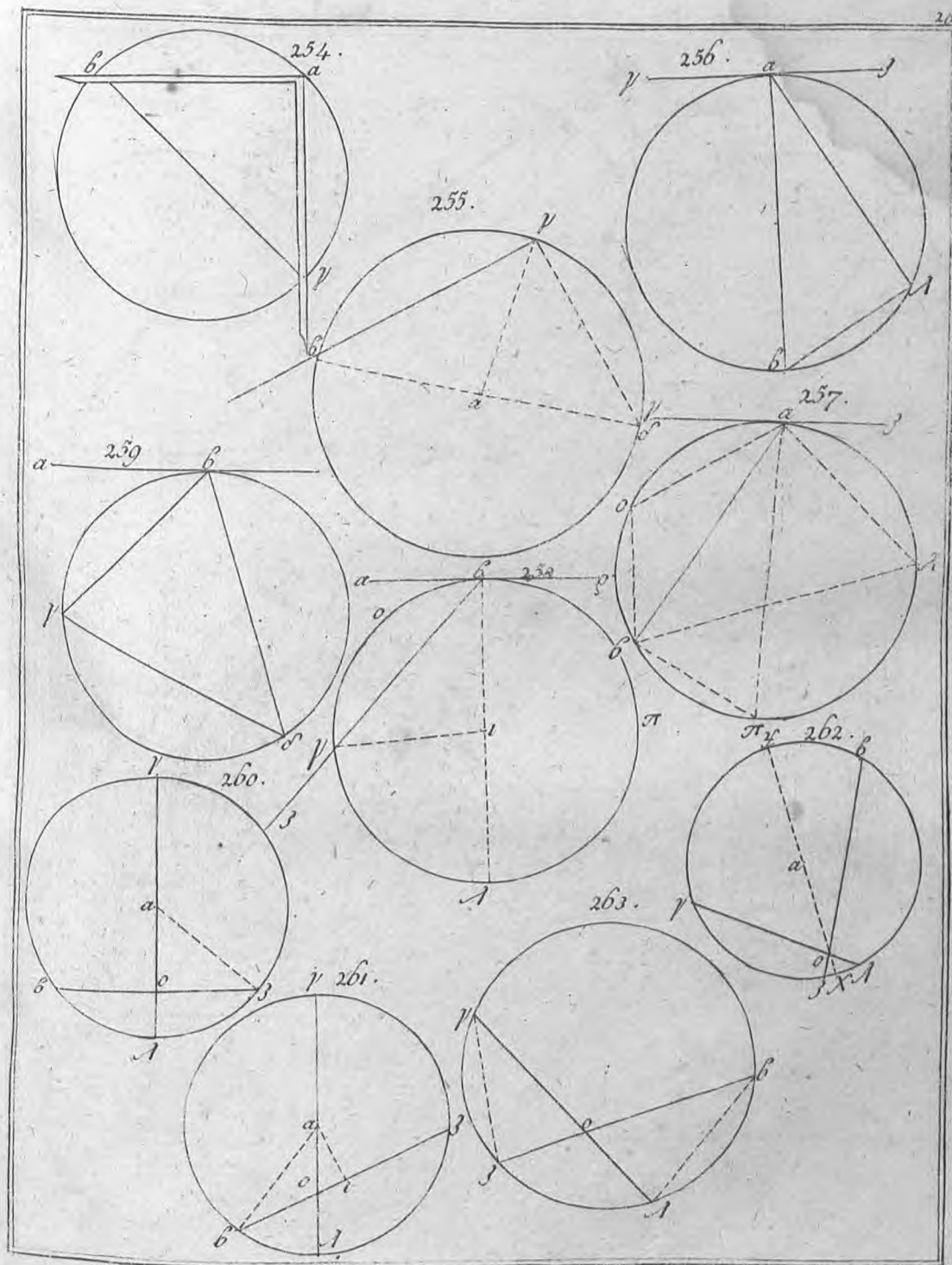
252.



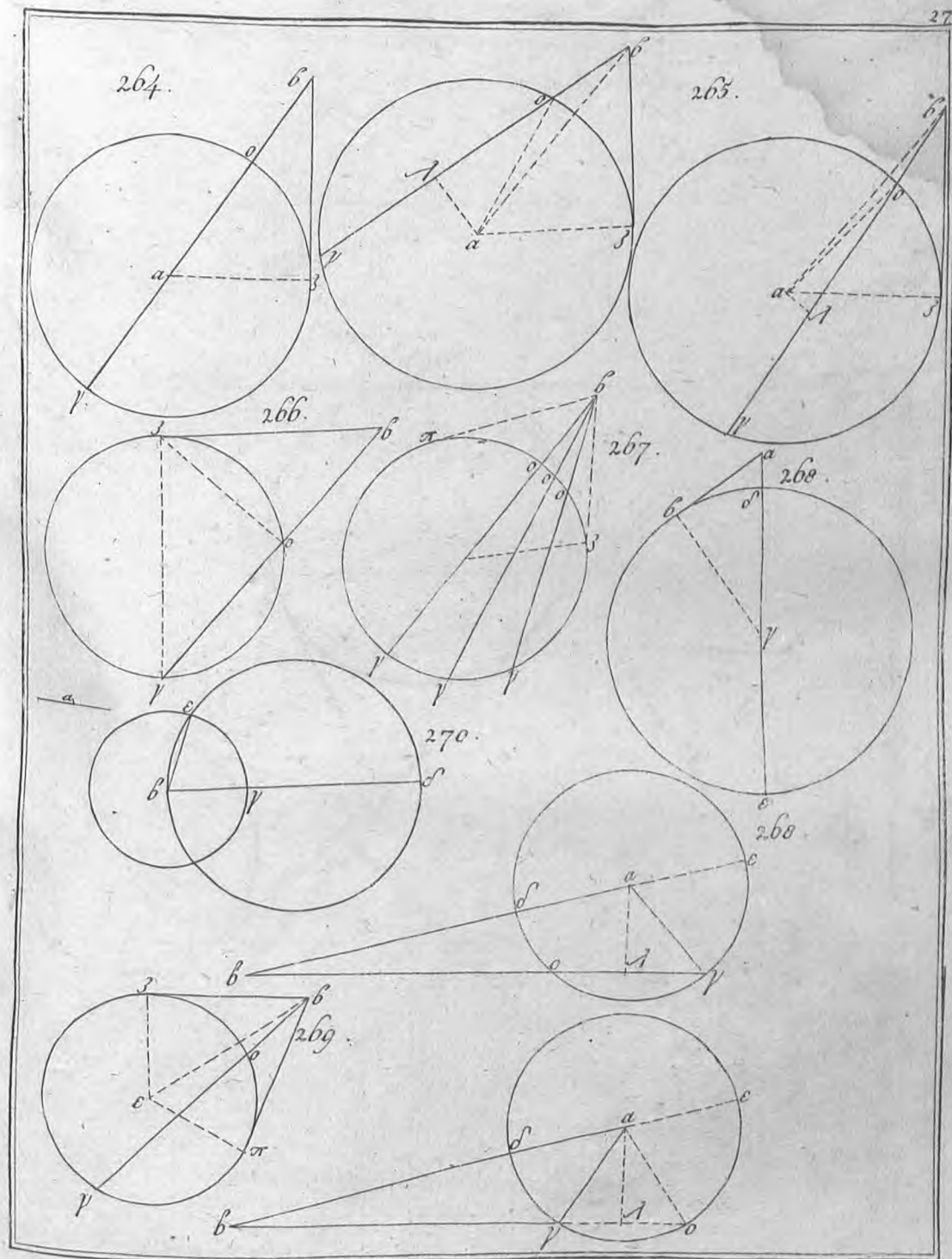
253.



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

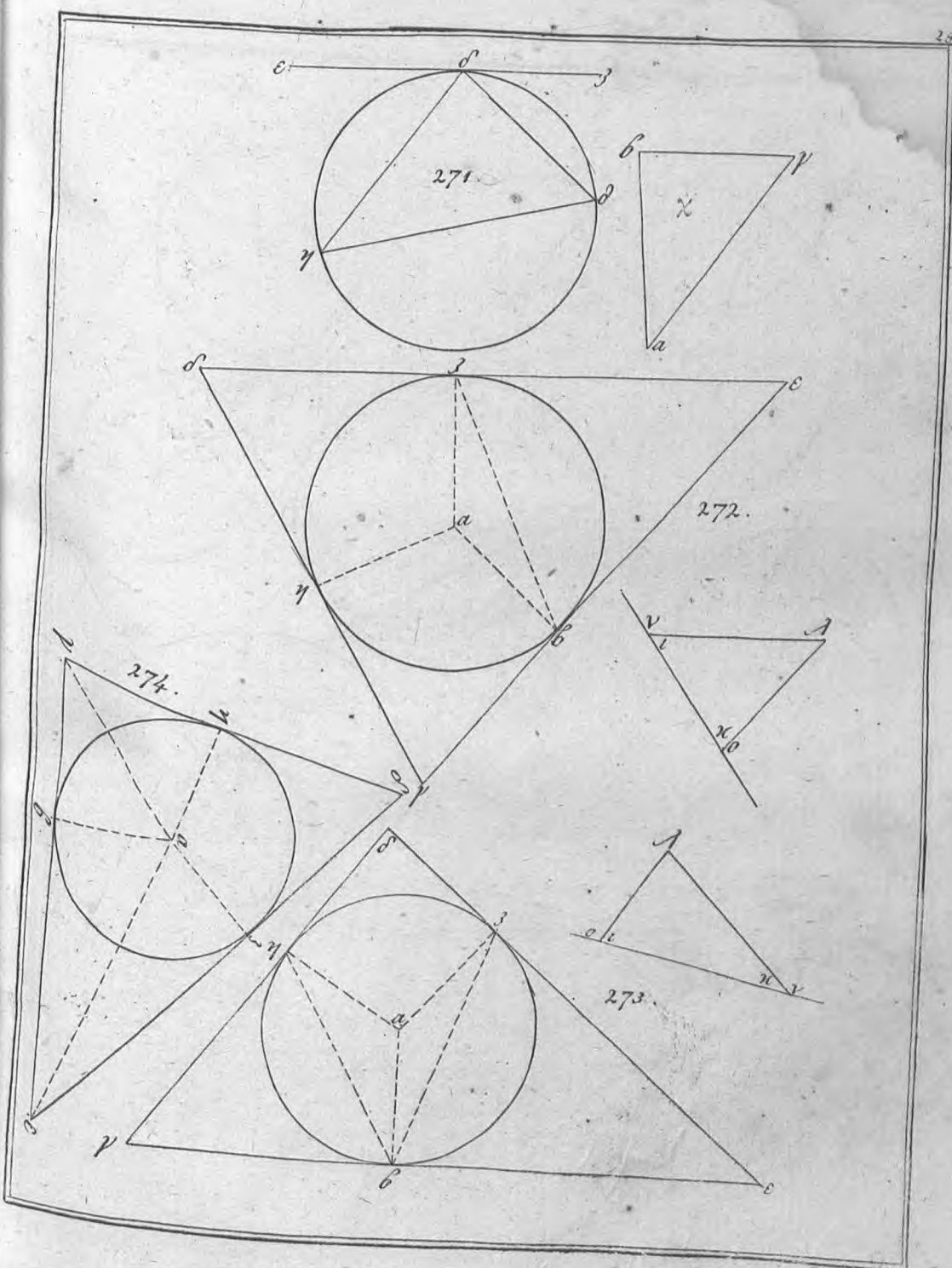


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



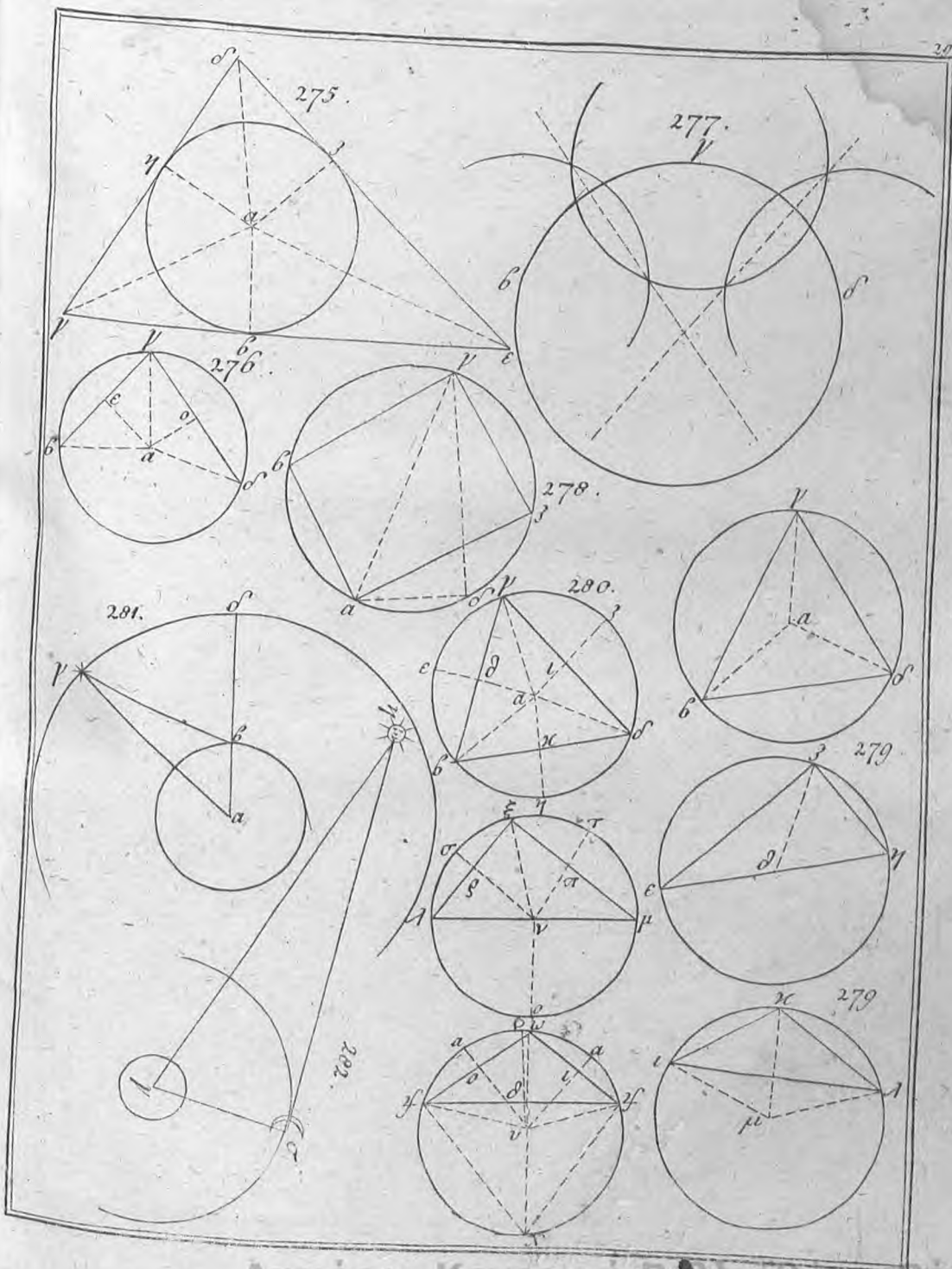


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

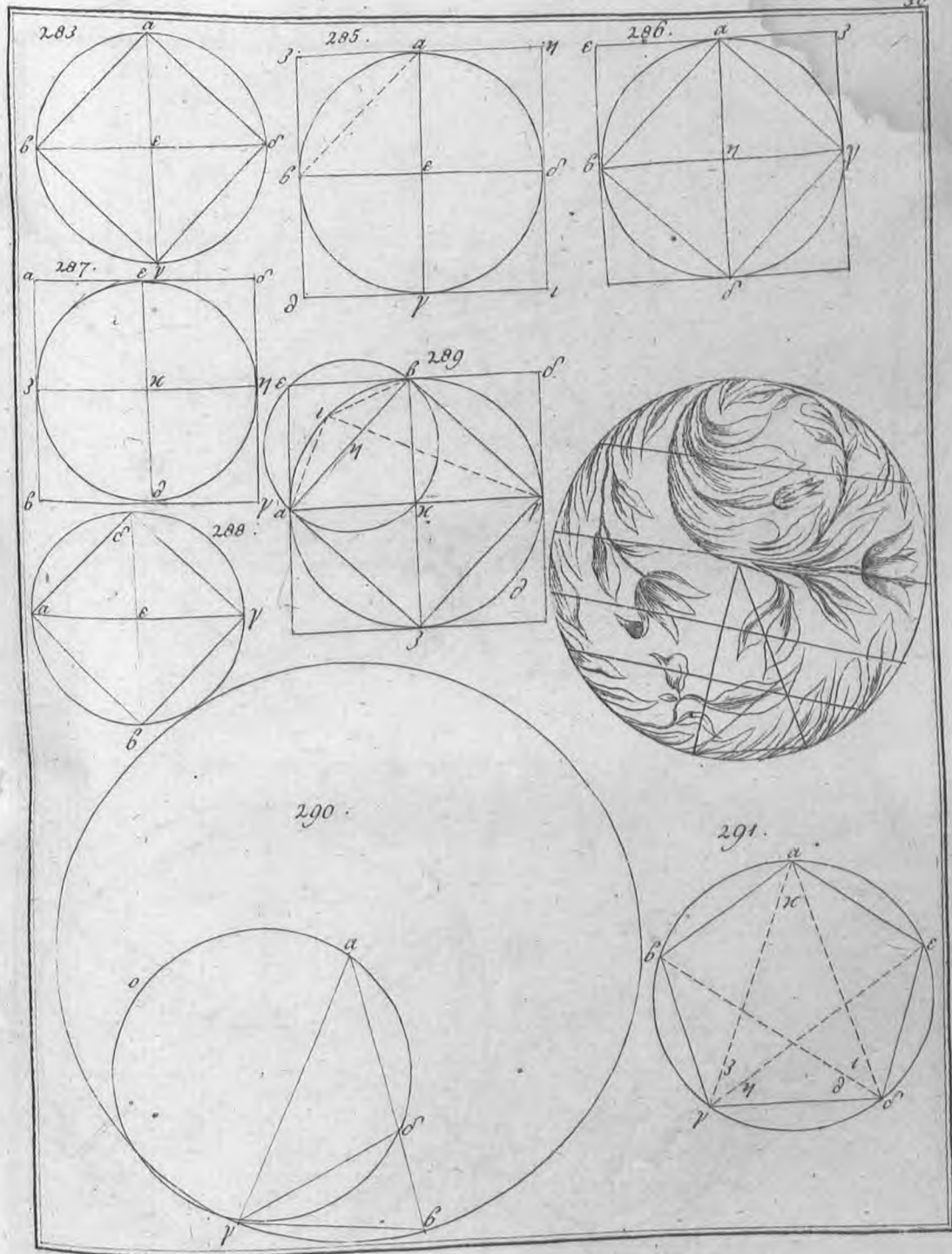


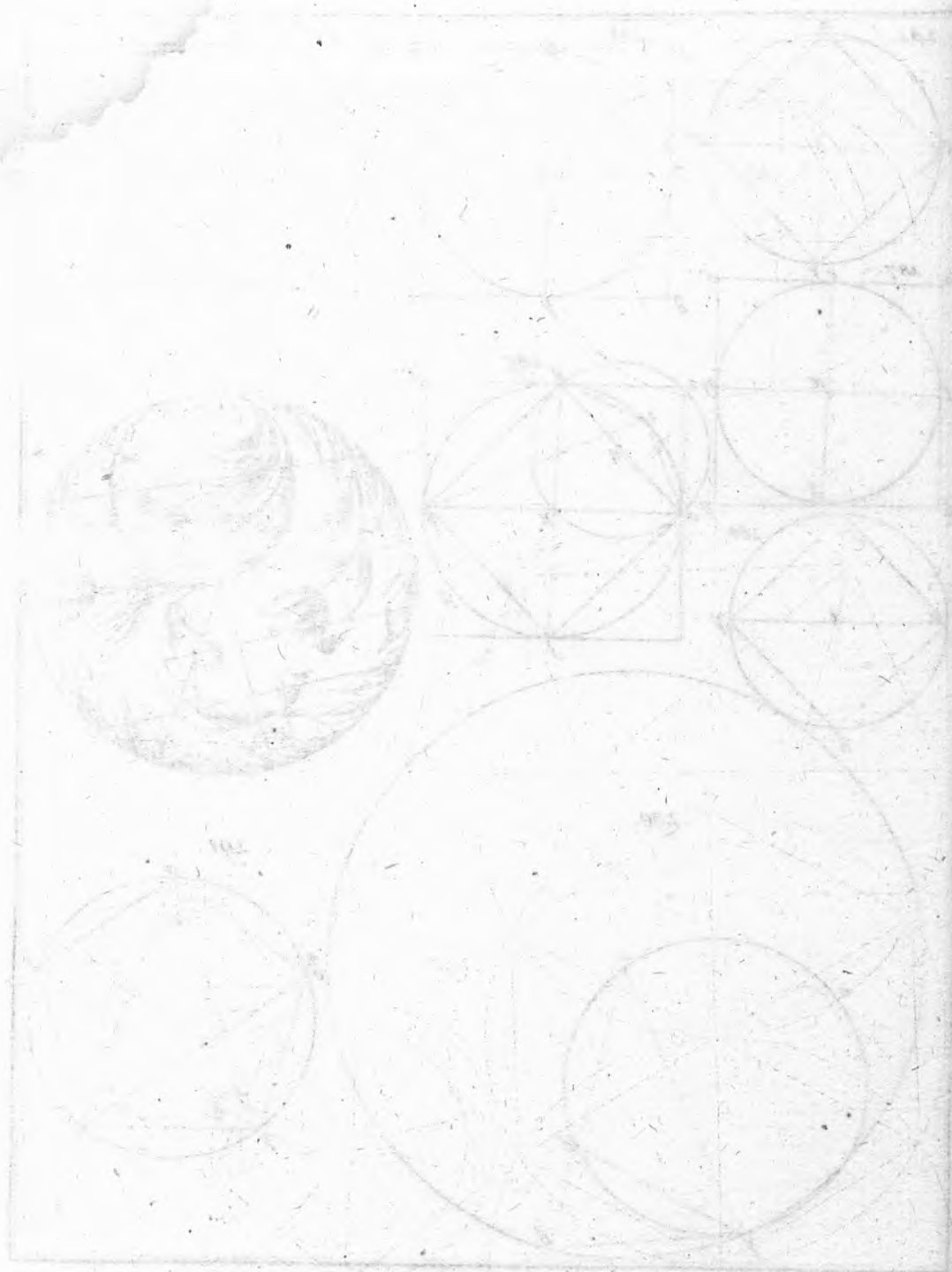


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



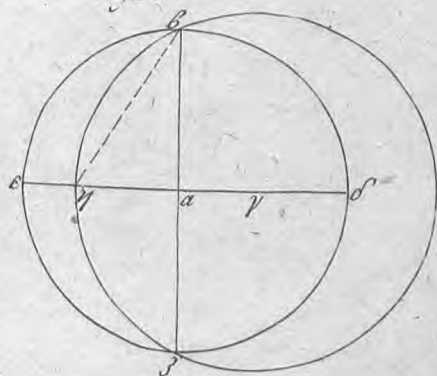
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



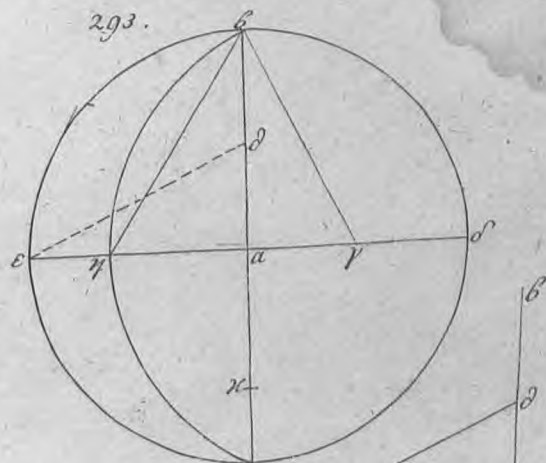


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

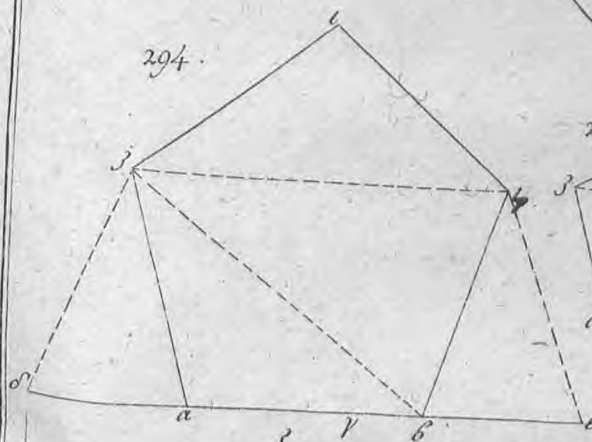
292.



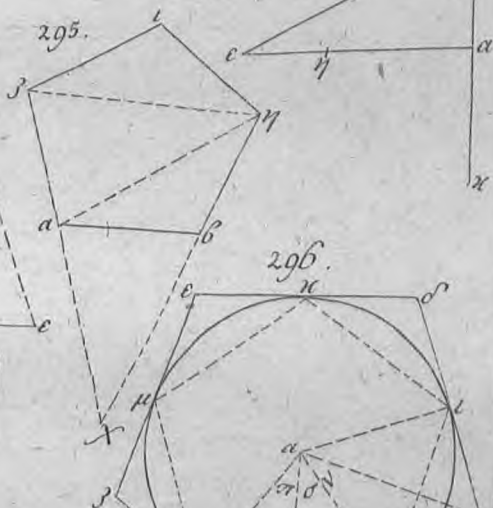
293.



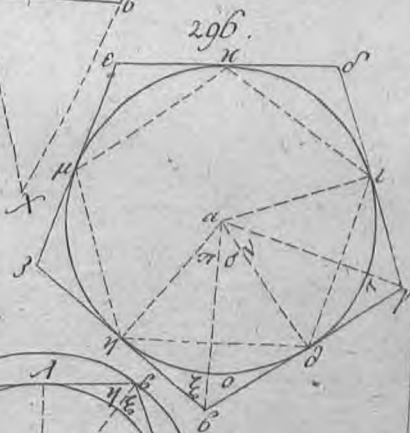
294.



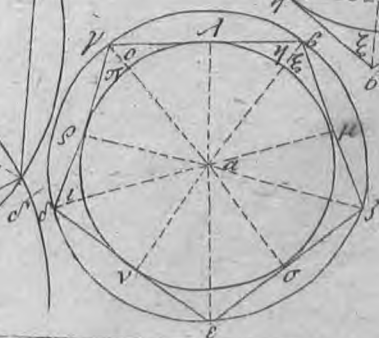
295.



296.

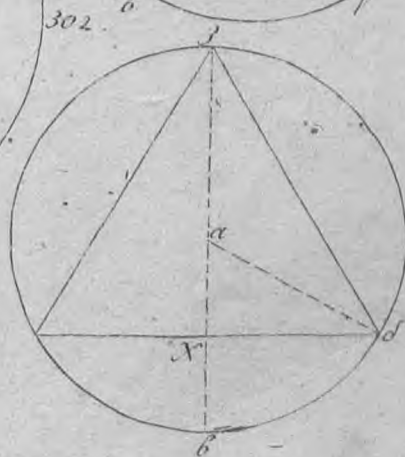
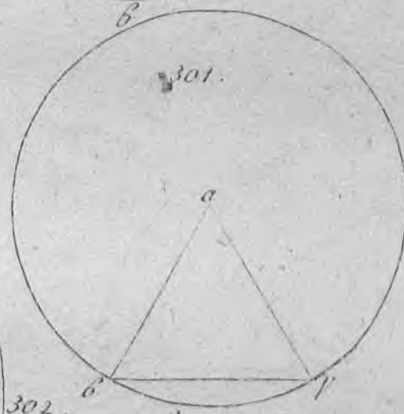
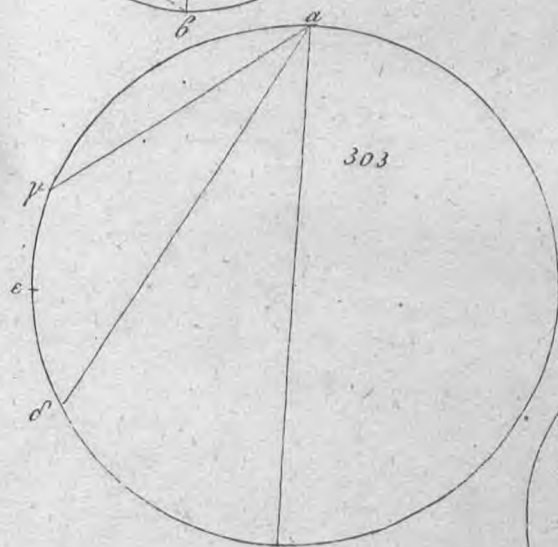
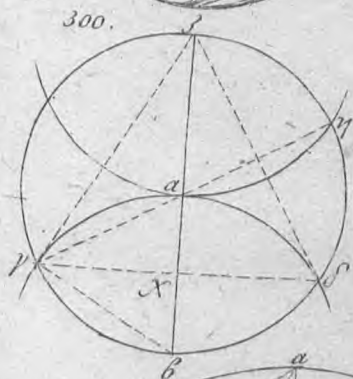
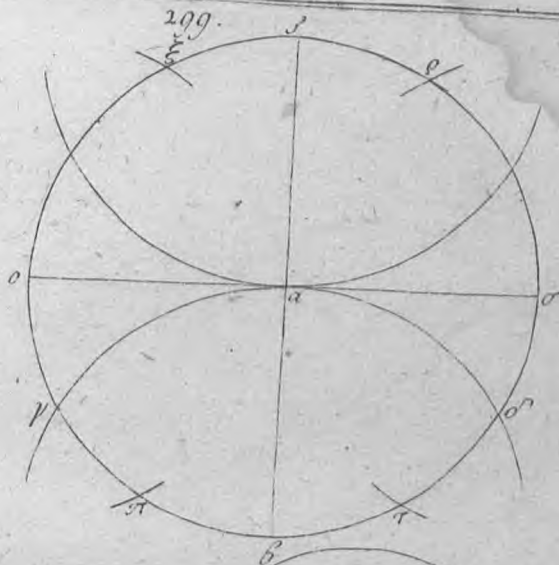


298.

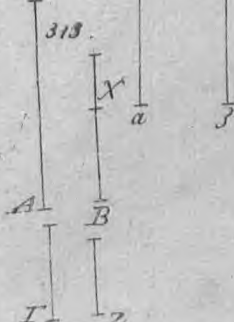
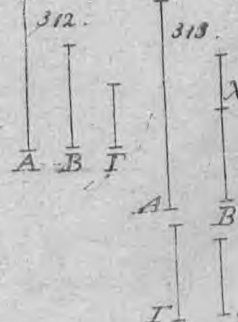
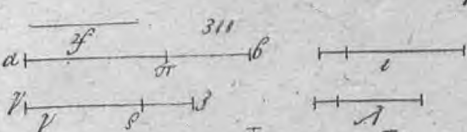
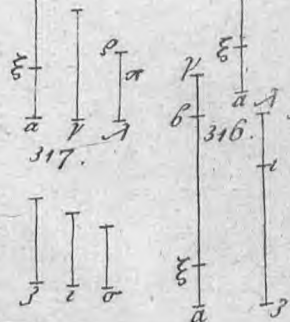
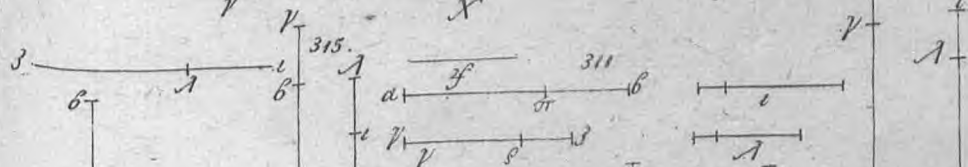
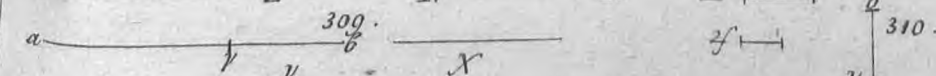
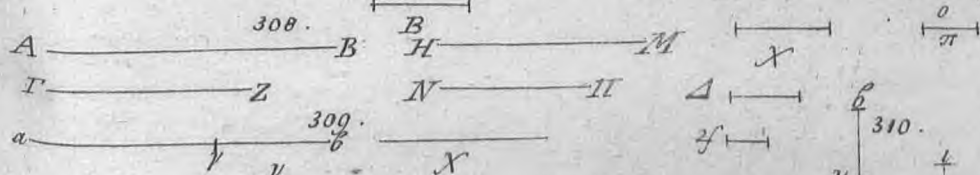
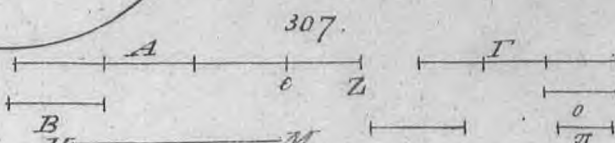
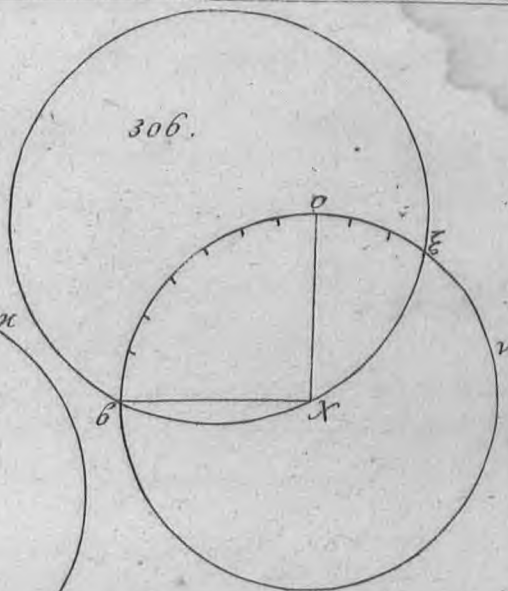
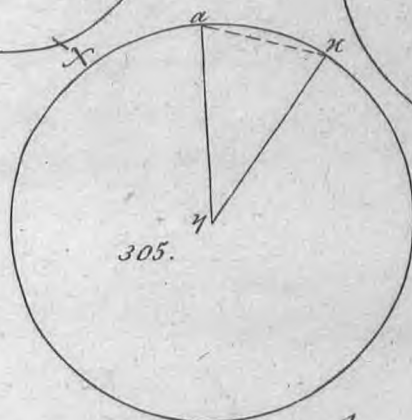
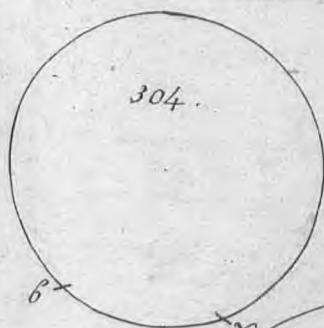


297.

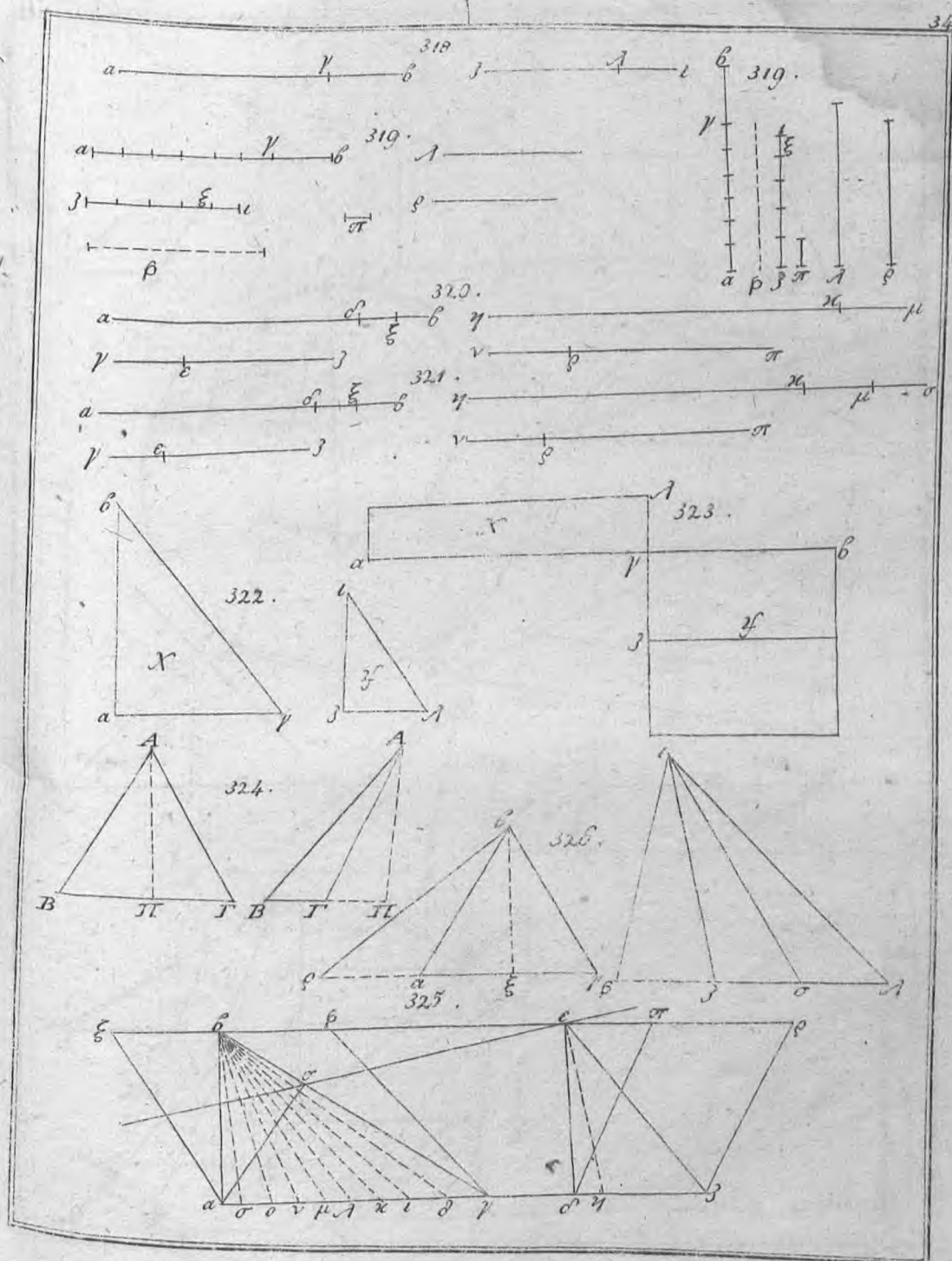
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

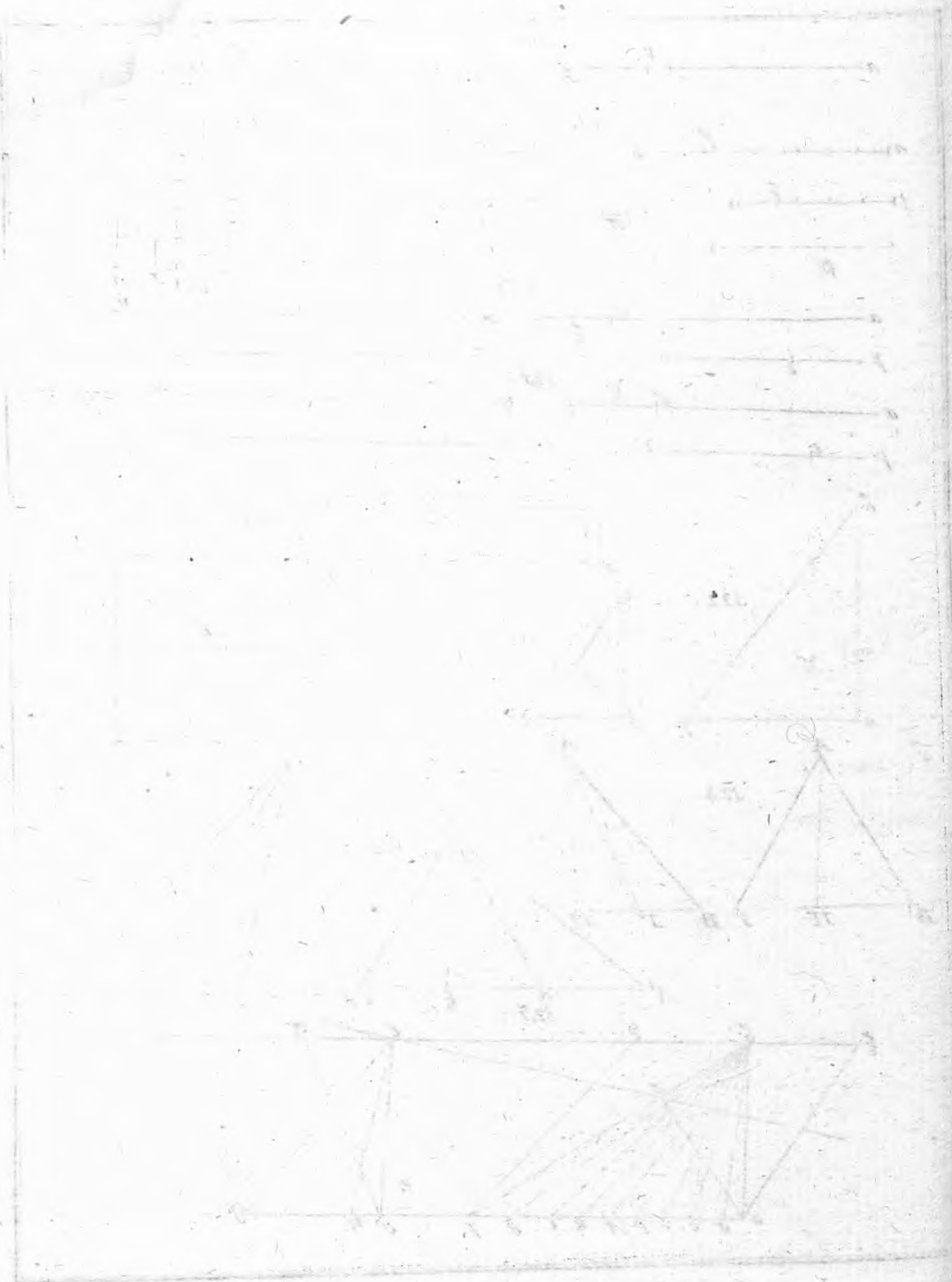


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

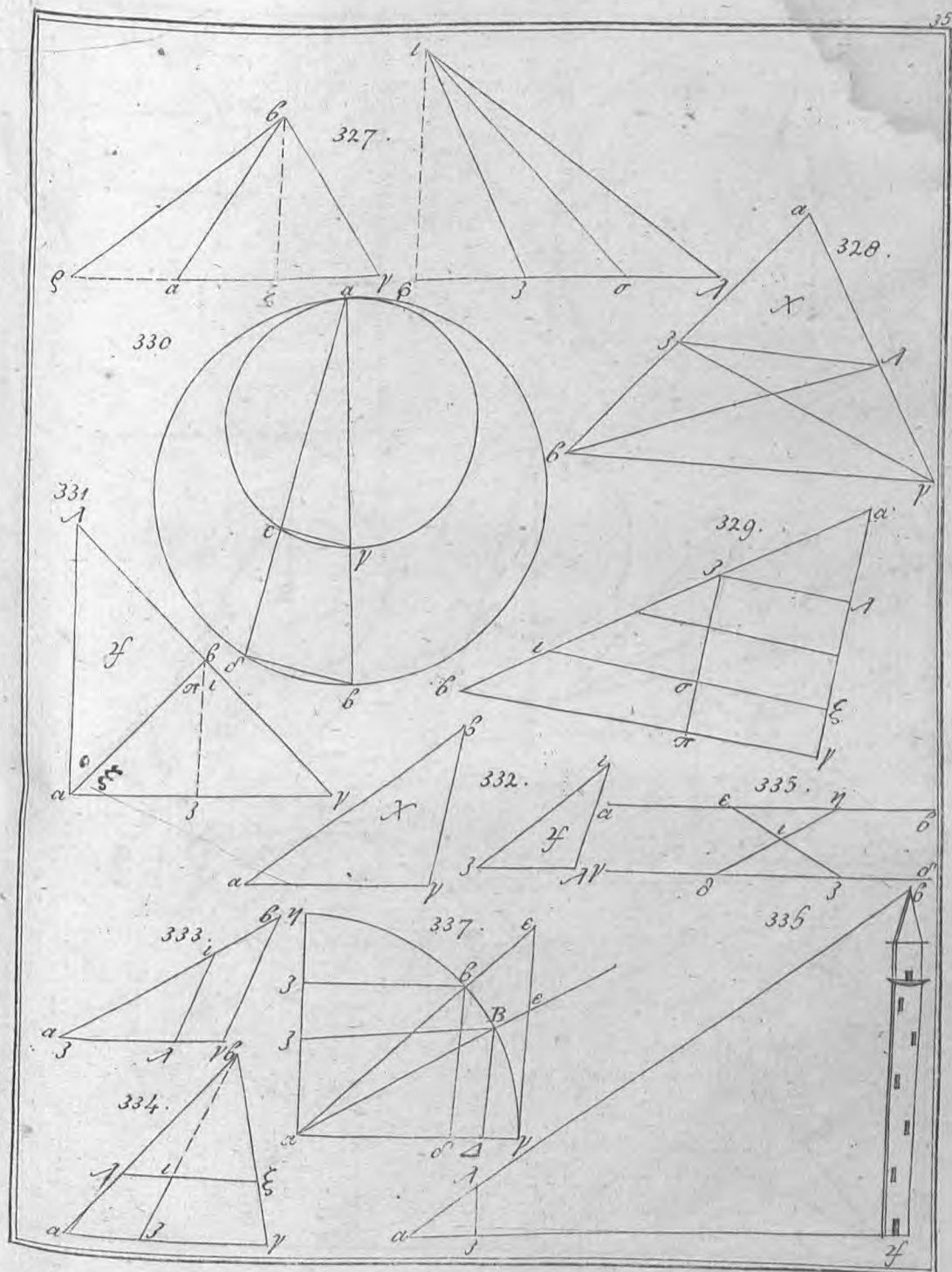


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



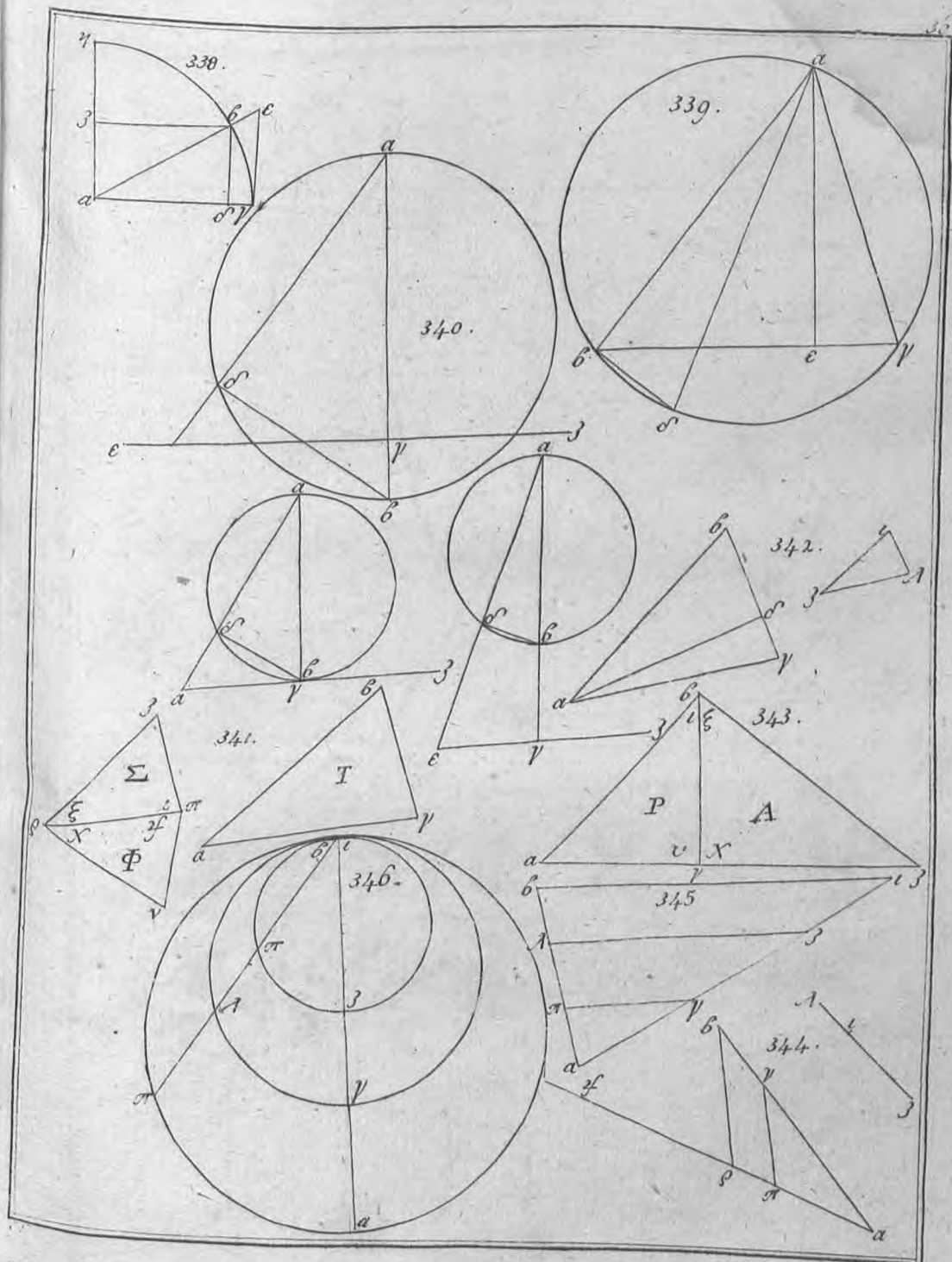


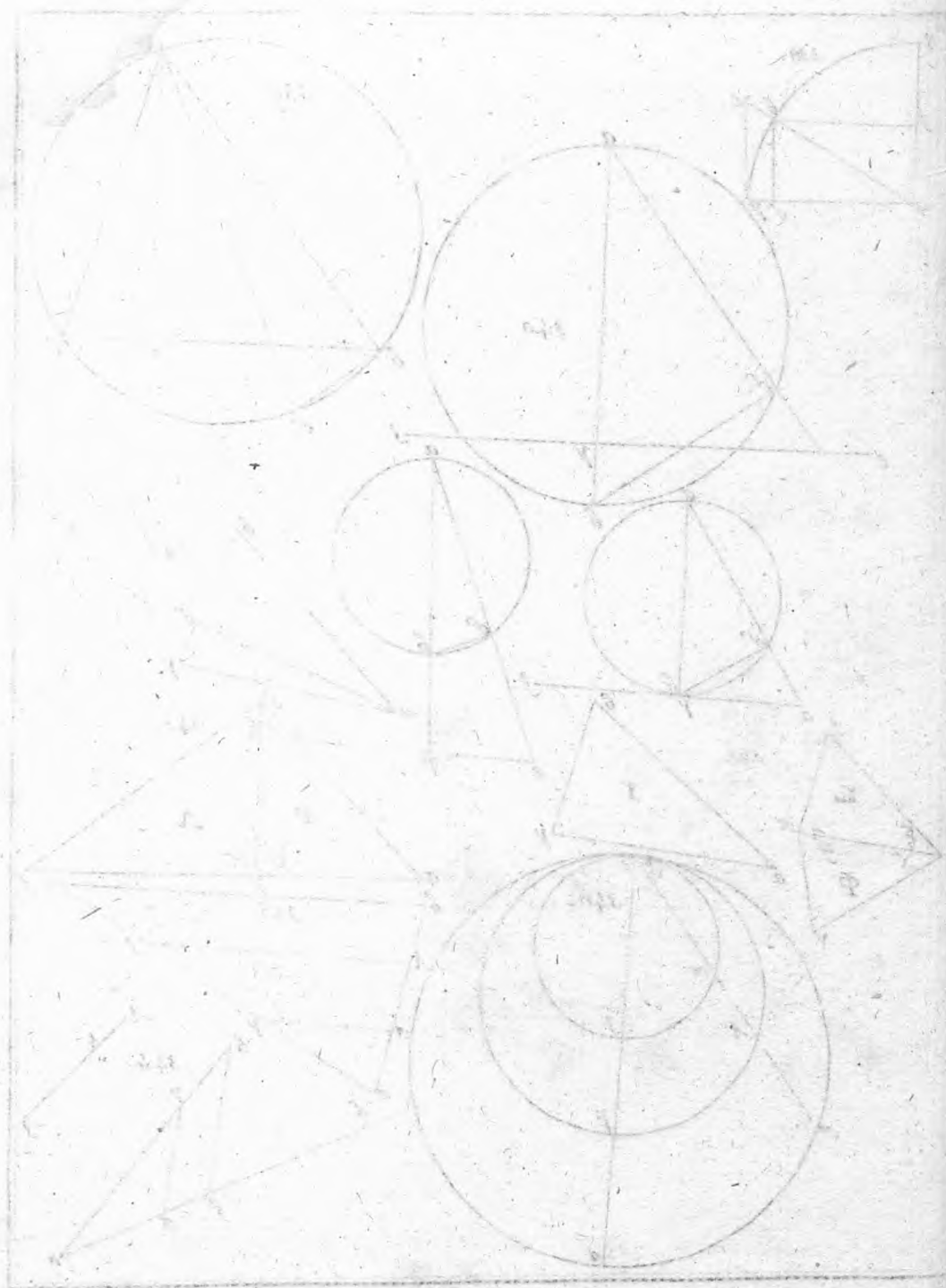
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



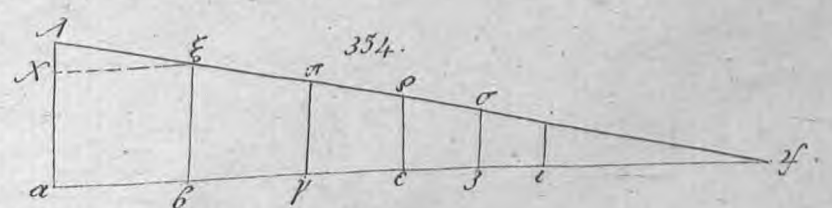
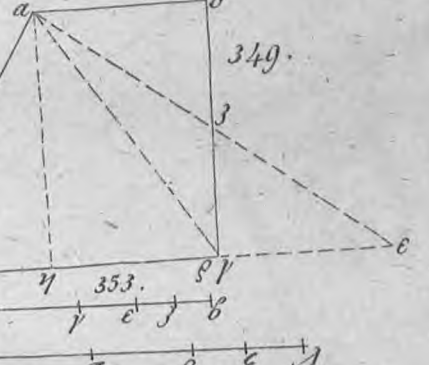
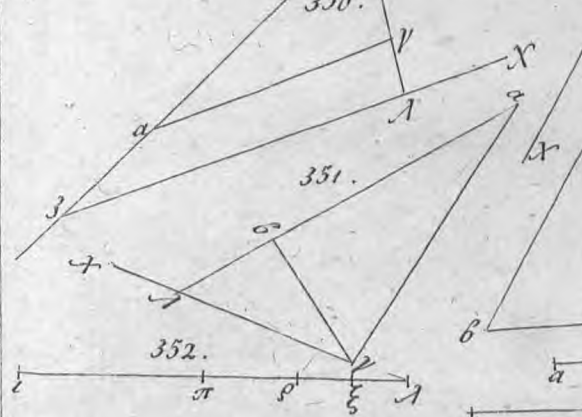
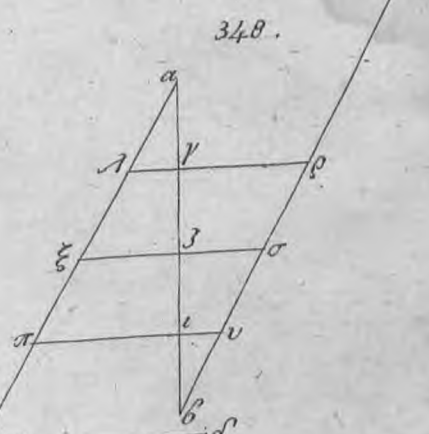
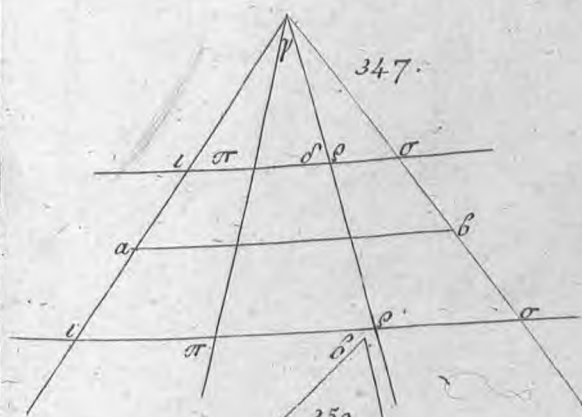
A faint, large-scale geometric diagram is visible in the background of the page. It features a central circle with several intersecting lines, including a horizontal line passing through the center and a vertical line. There are also diagonal lines and smaller circles or arcs, suggesting a complex geometric construction or a map projection. The lines are thin and light, blending into the aged, textured paper.

Δημόσια Κέντρικη Βιβλιοθήκη Βέροιας

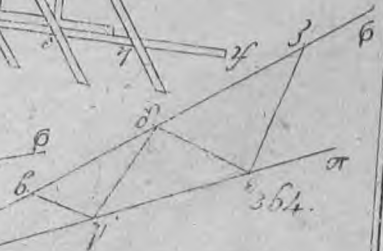
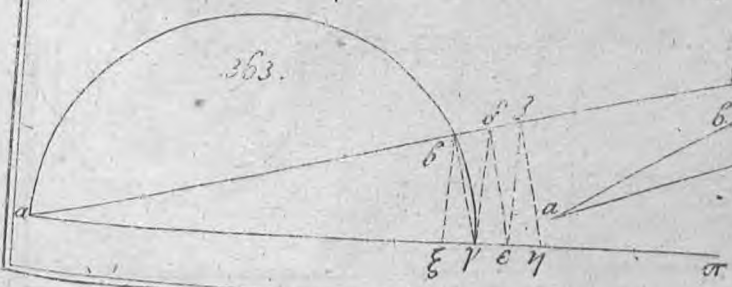
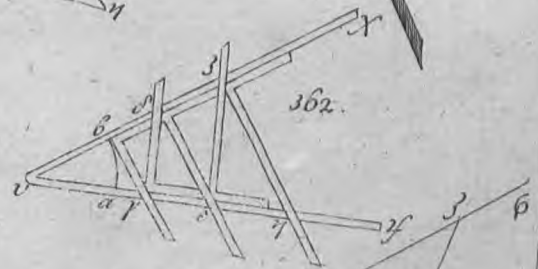
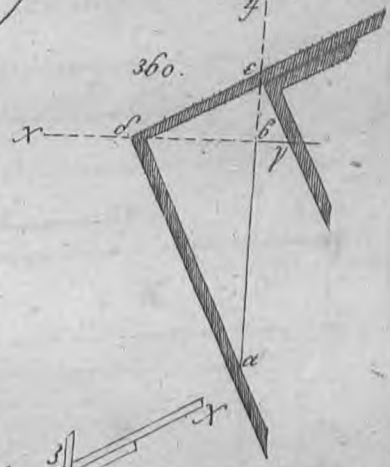
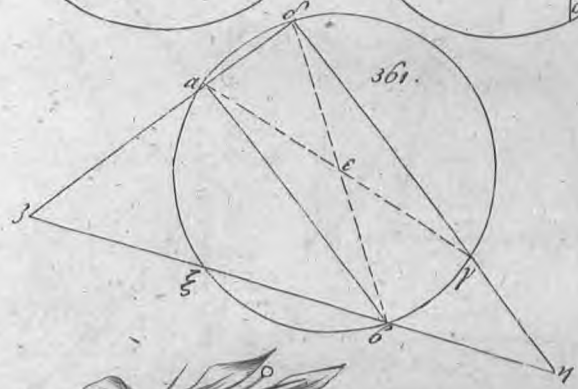
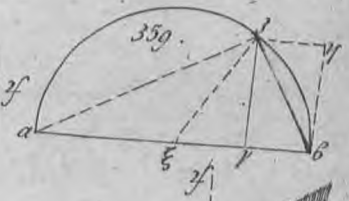
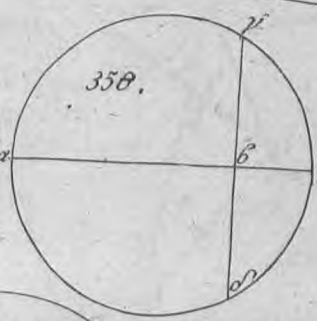
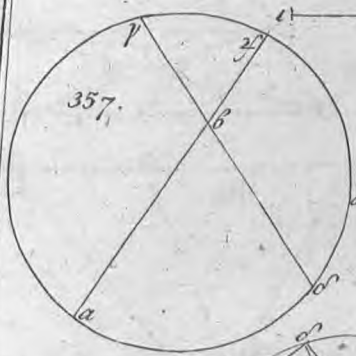
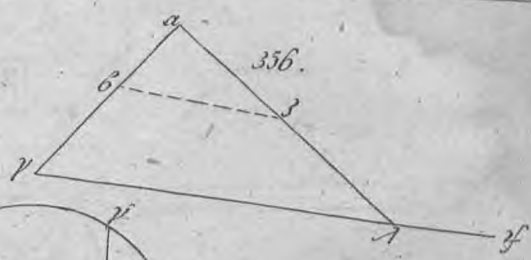
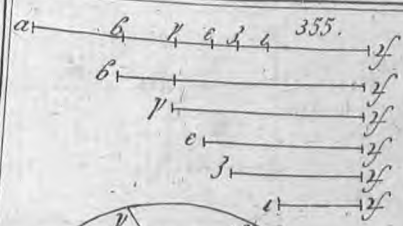


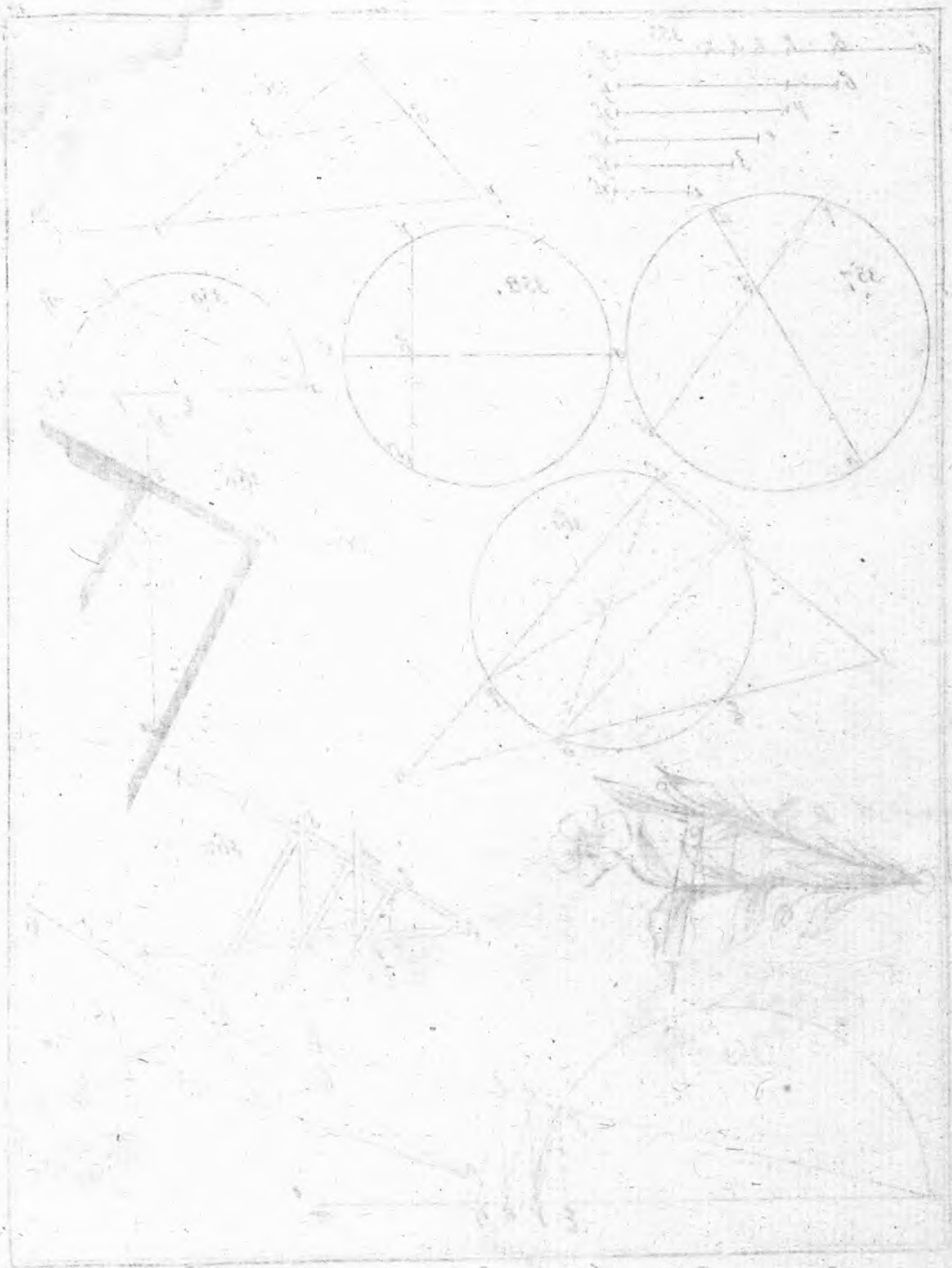


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

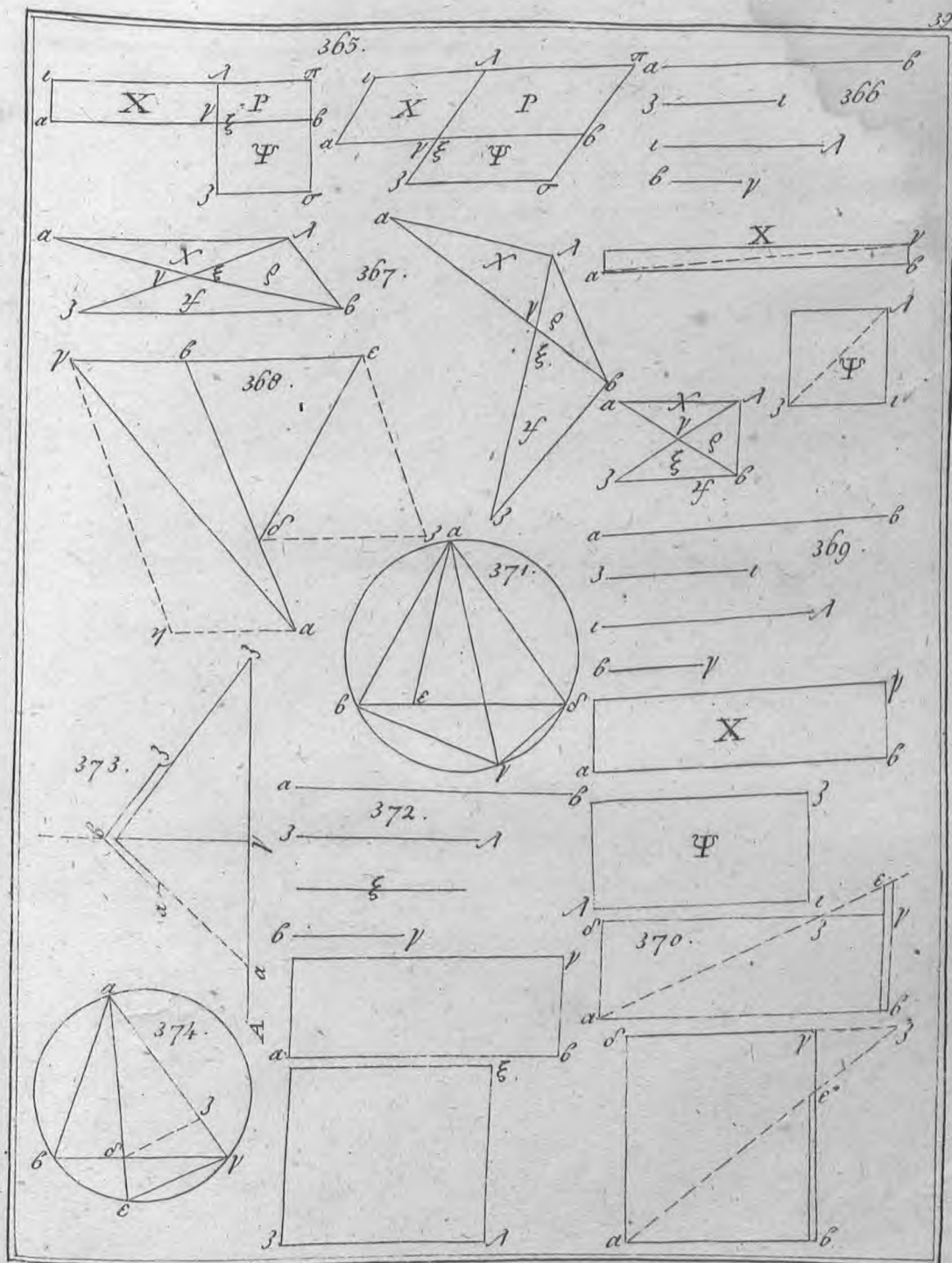


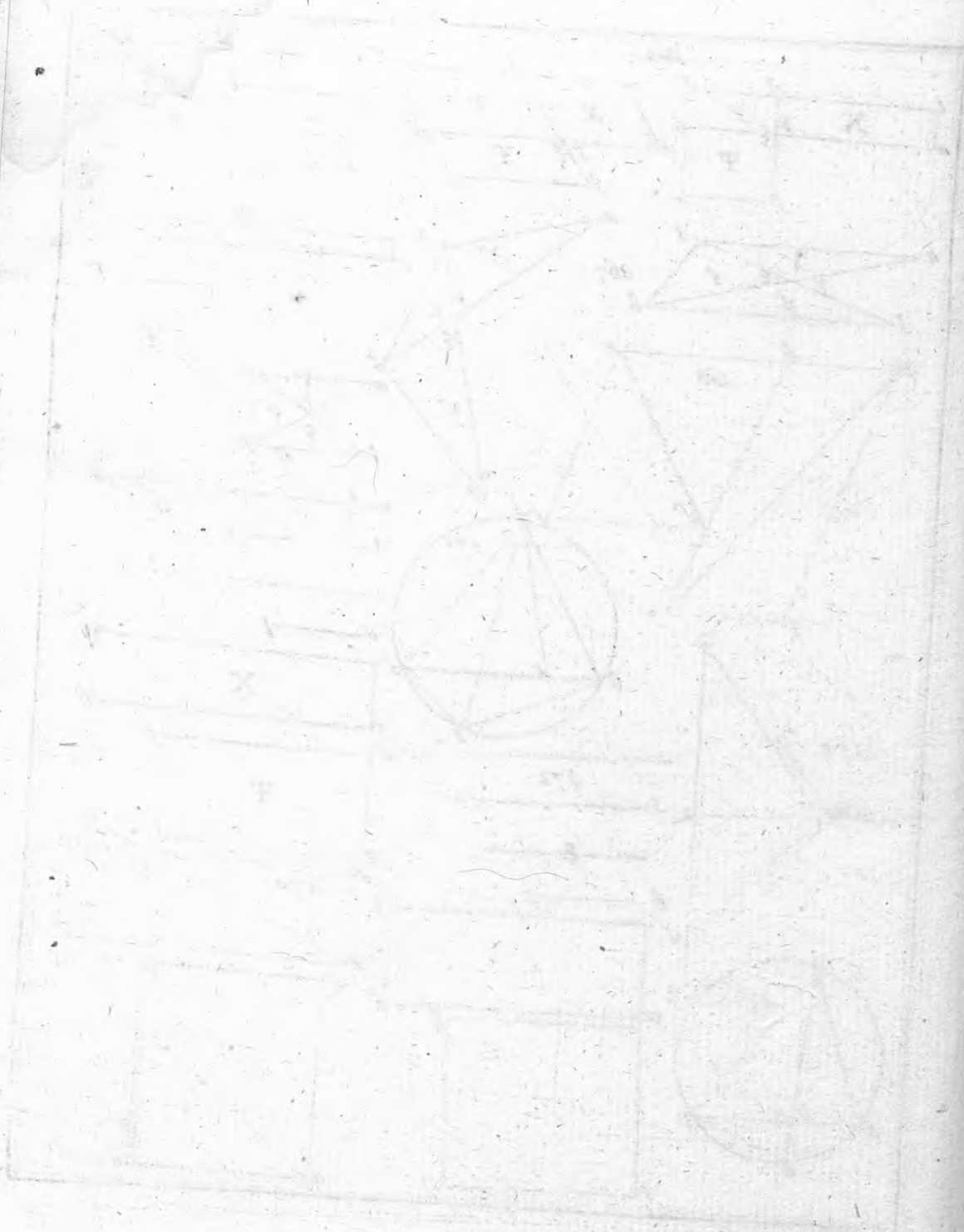
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



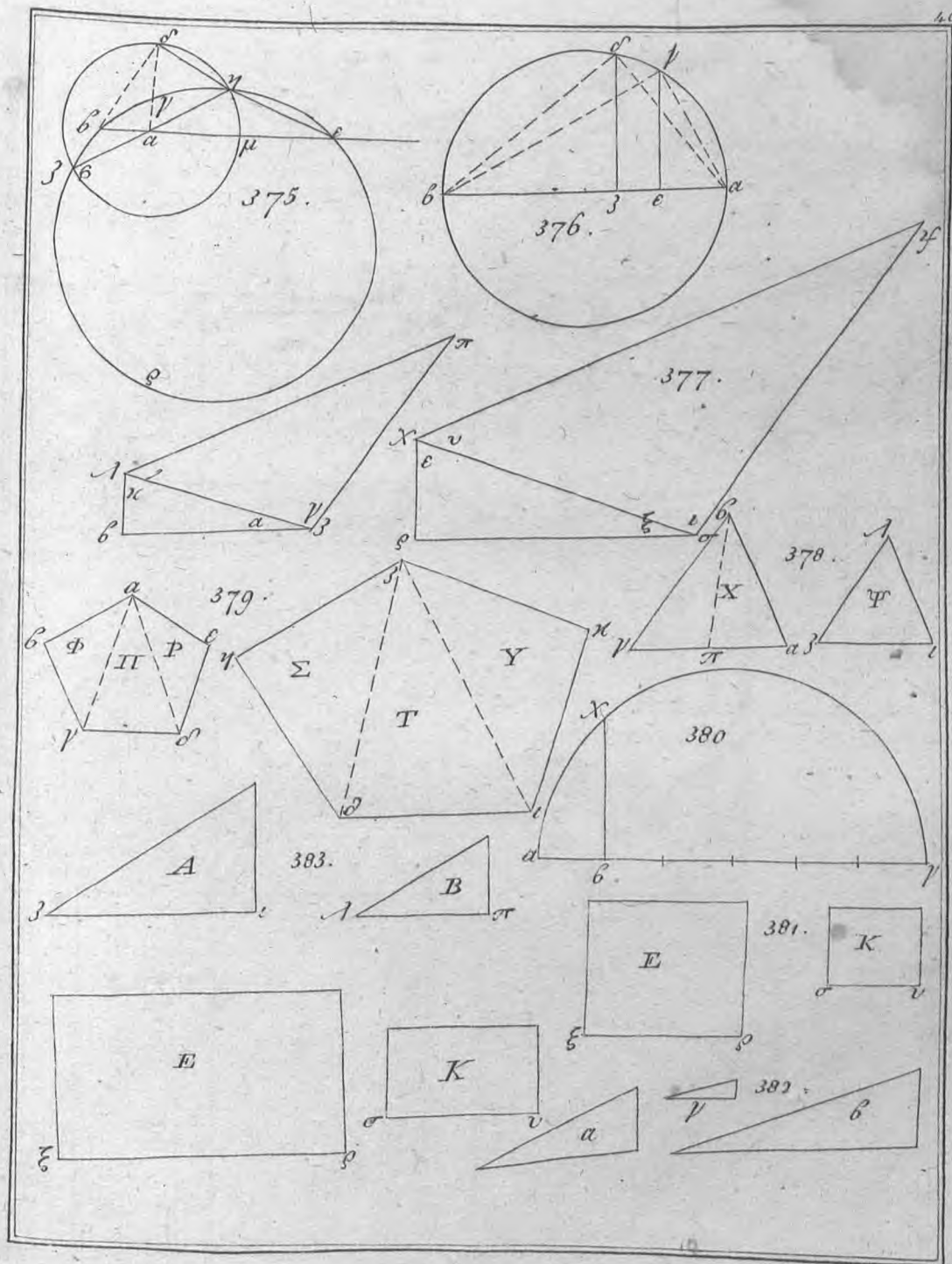


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



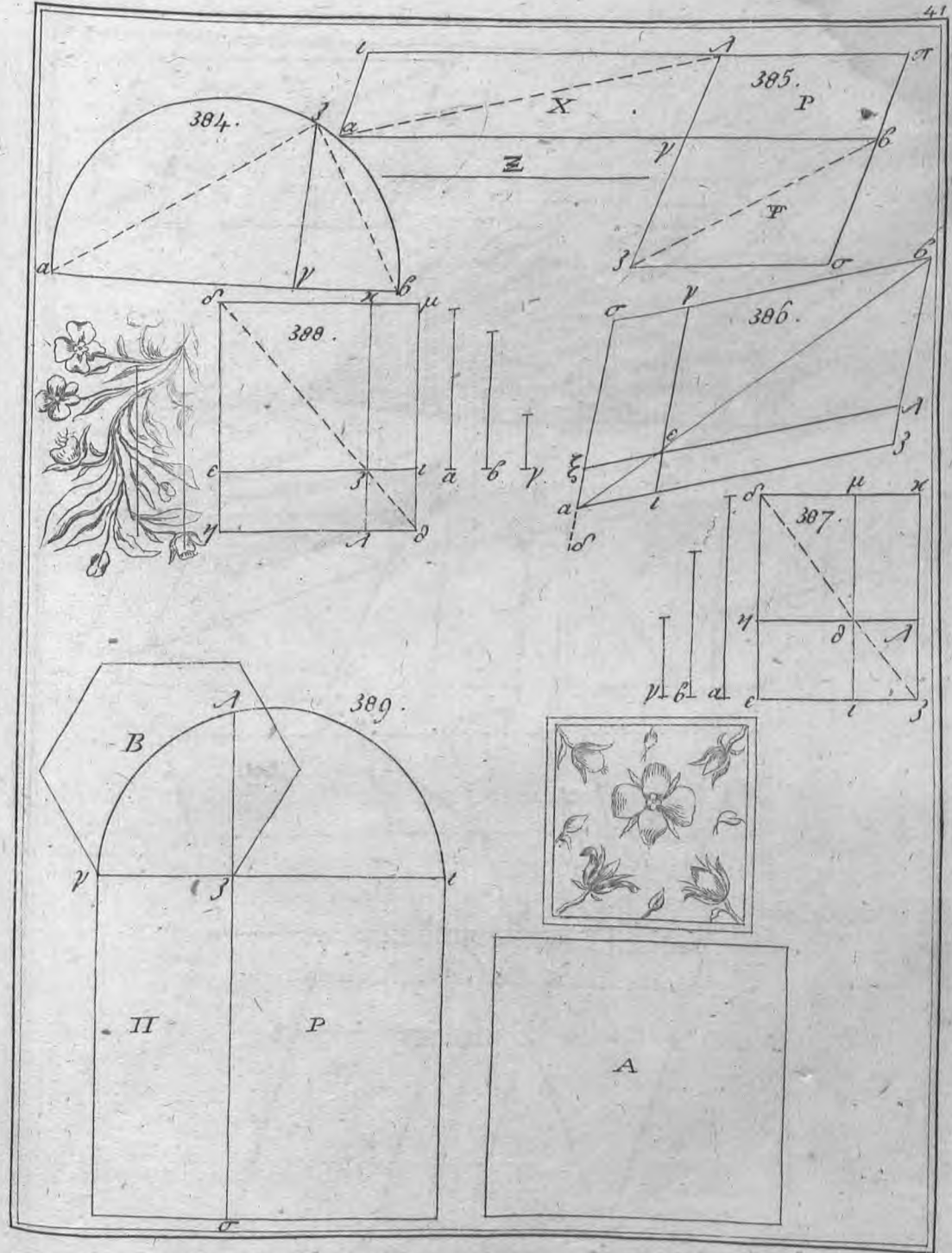


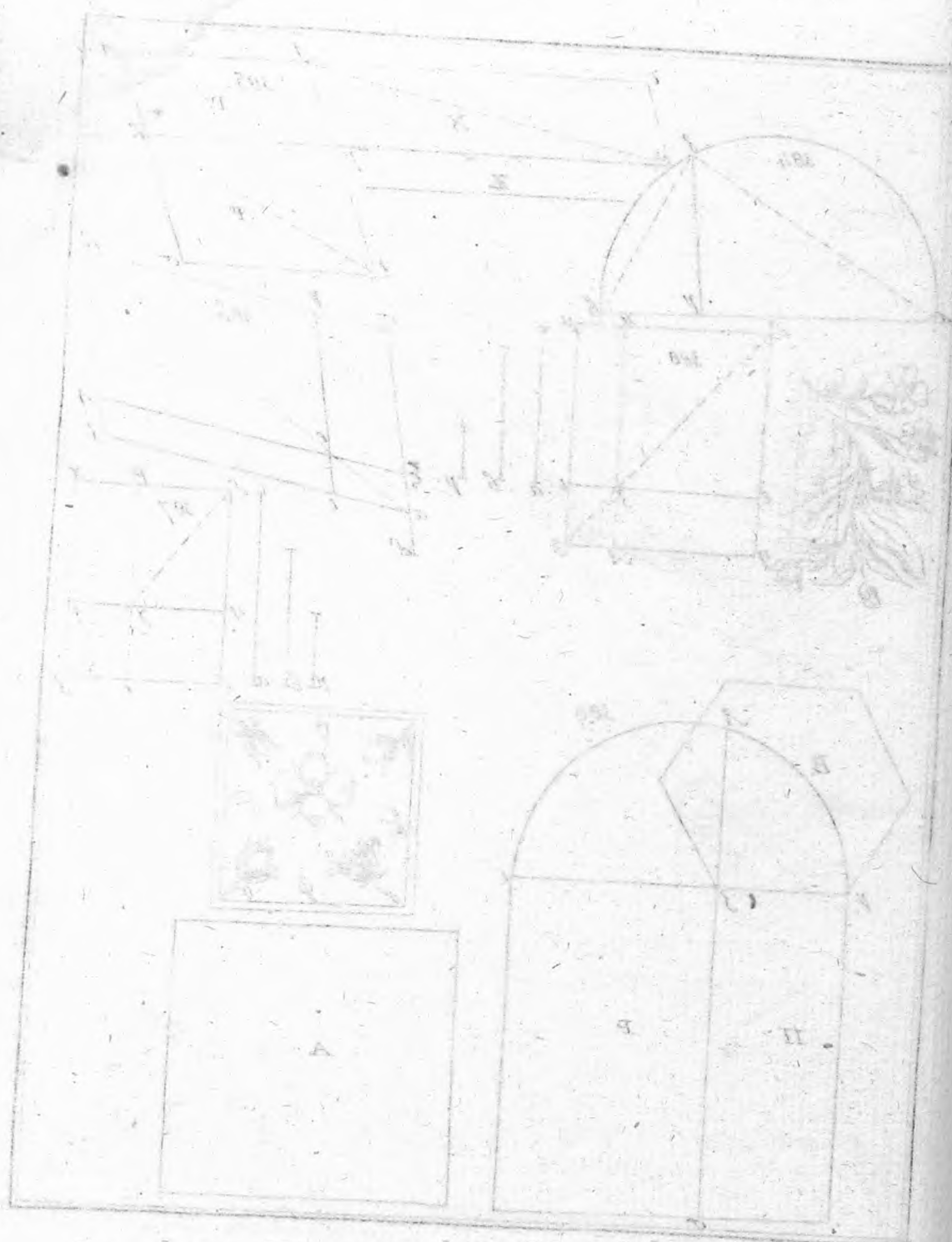
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



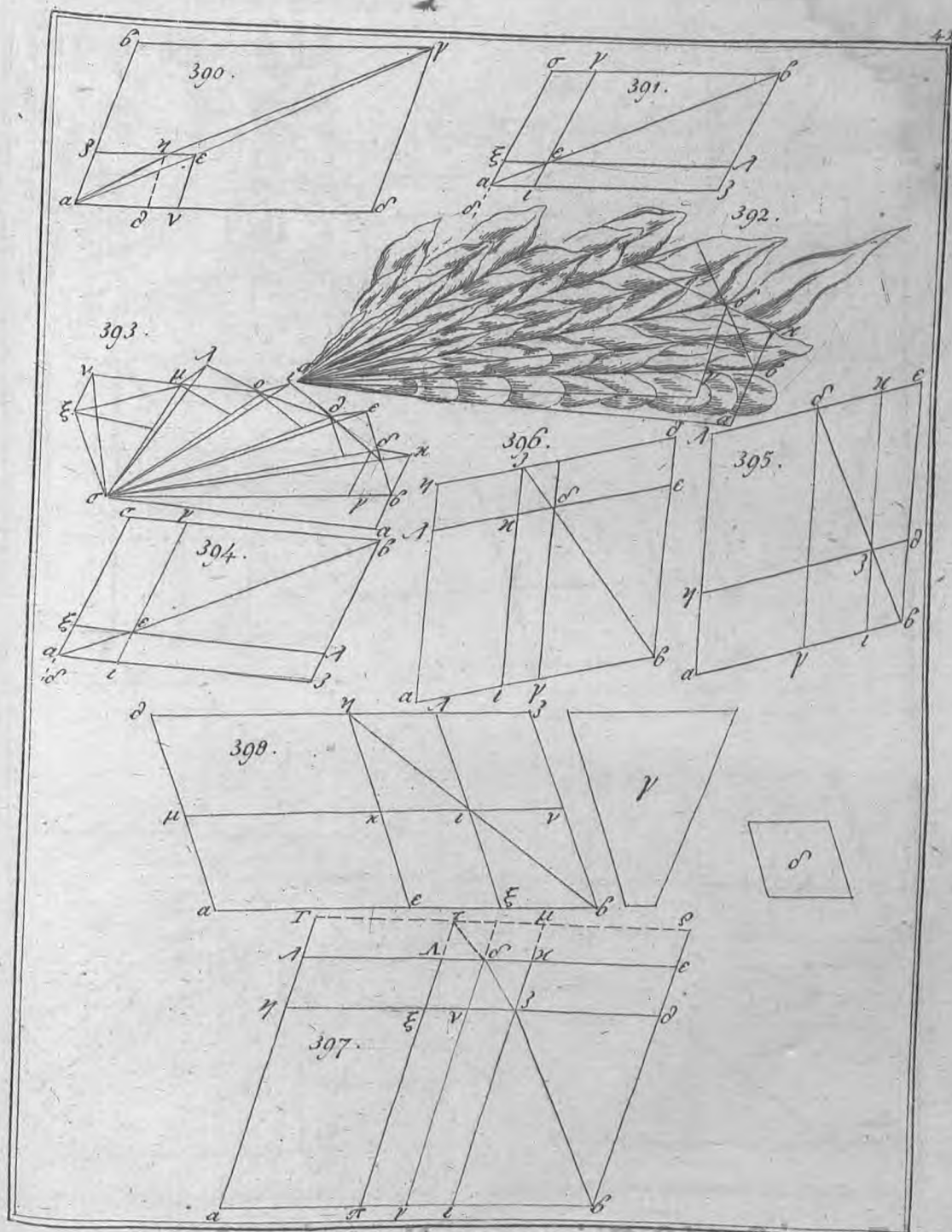
The page contains several faint, hand-drawn geometric diagrams. In the upper right, there is a circle with internal lines and points, possibly representing a sphere or a celestial body. Below it, on the right side, is a complex diagram of intersecting lines and points, resembling a geometric proof or construction. On the left side, there are several smaller, less distinct diagrams, including what appears to be a triangle and some intersecting lines. The entire page is framed by a faint rectangular border.

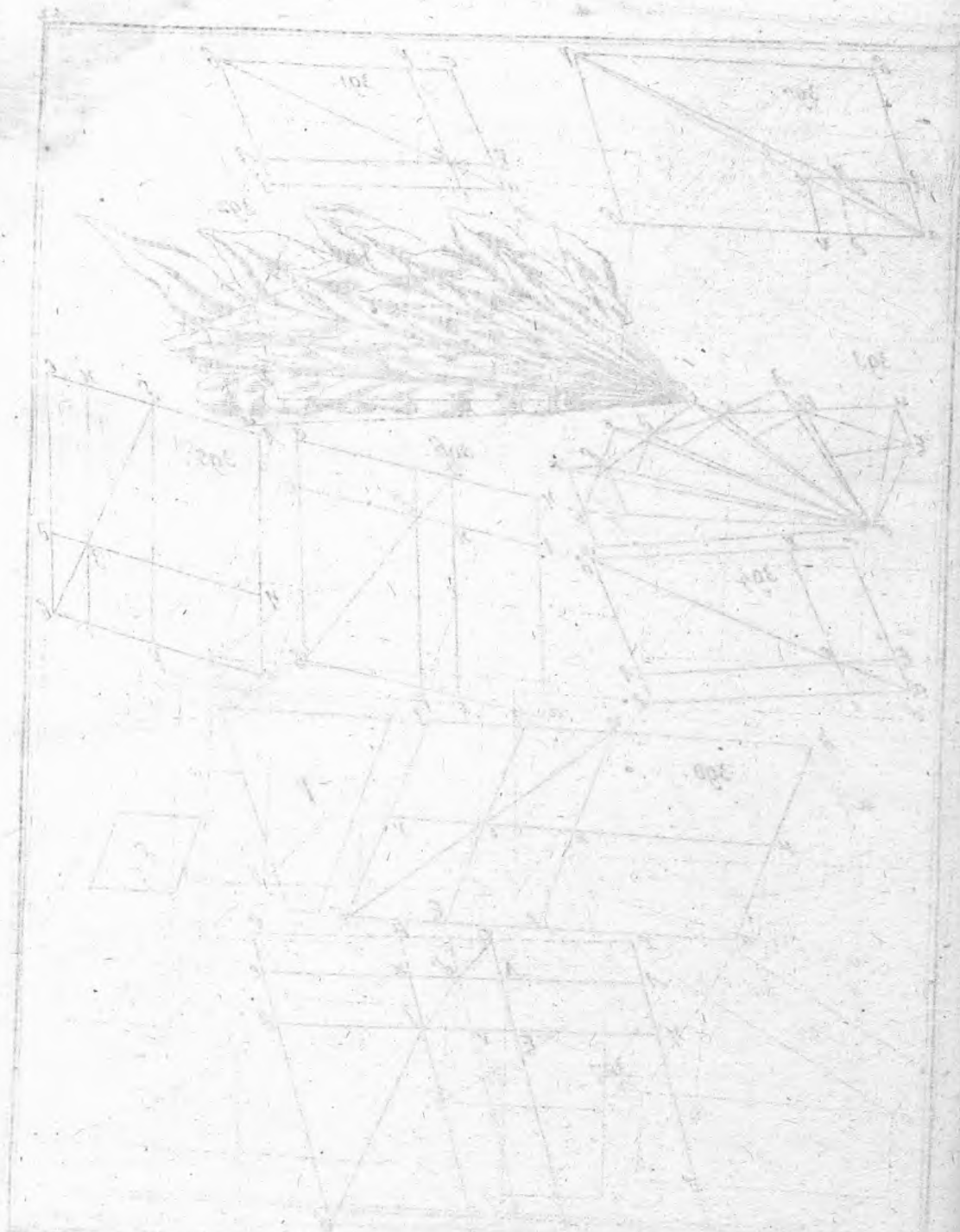
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



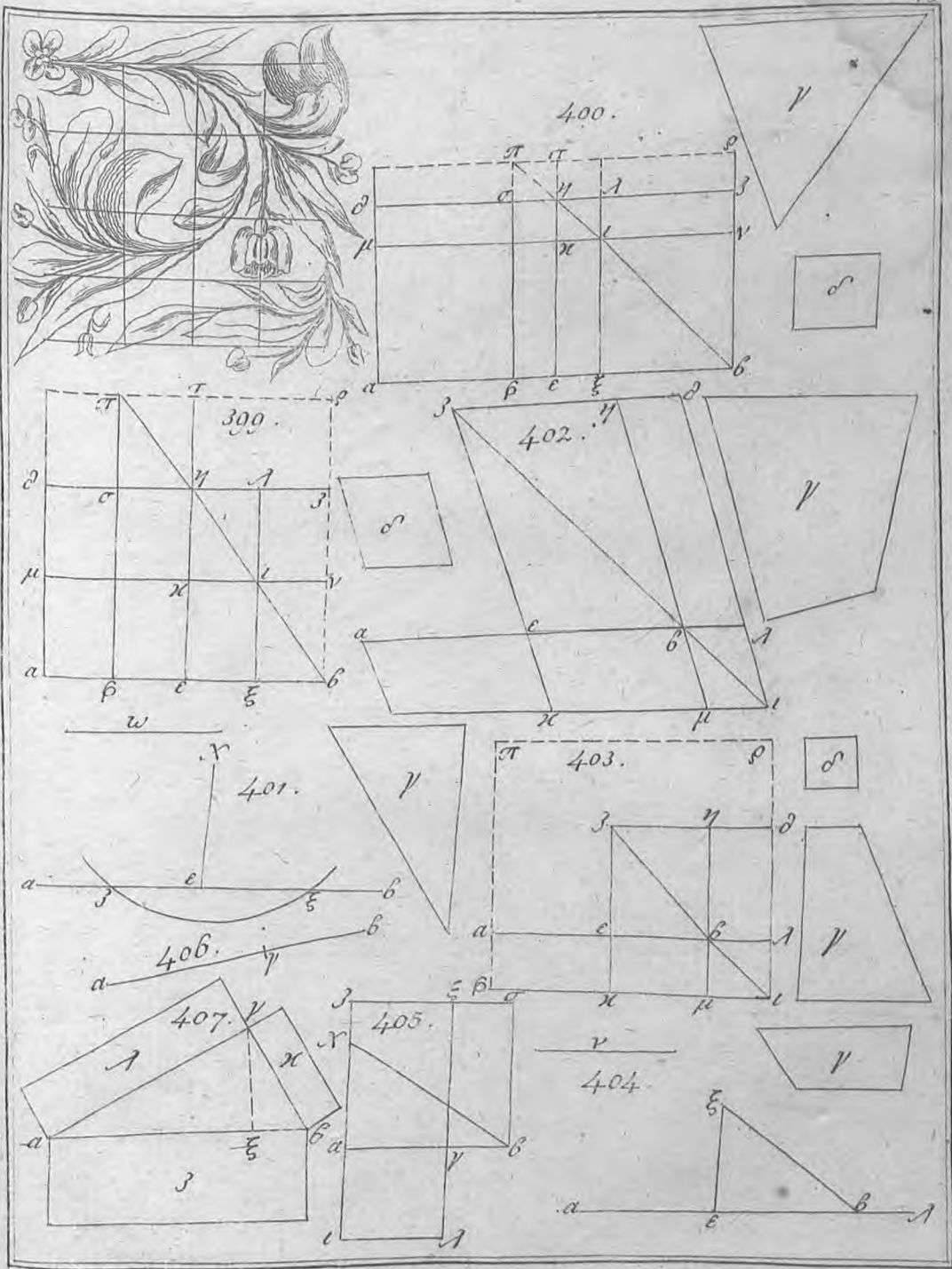


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

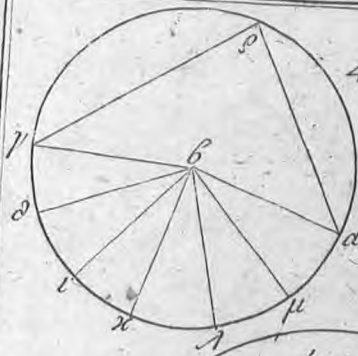




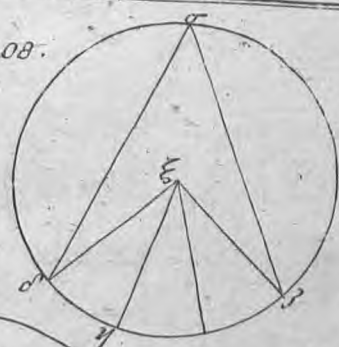
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



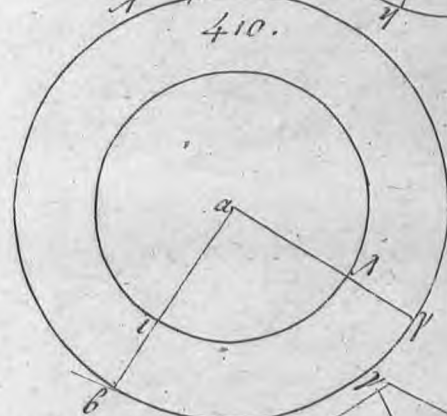
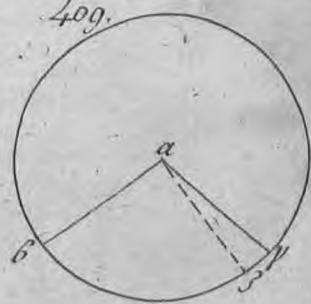
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



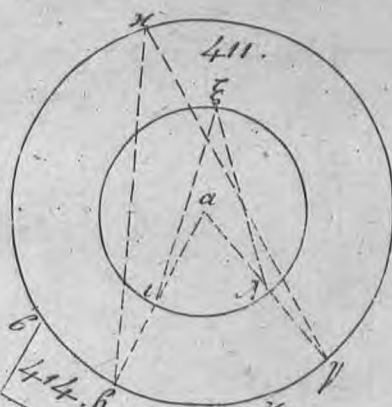
408.



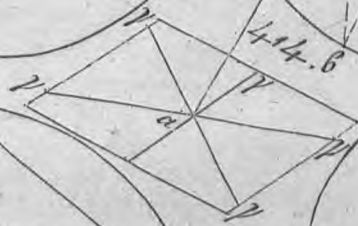
409.



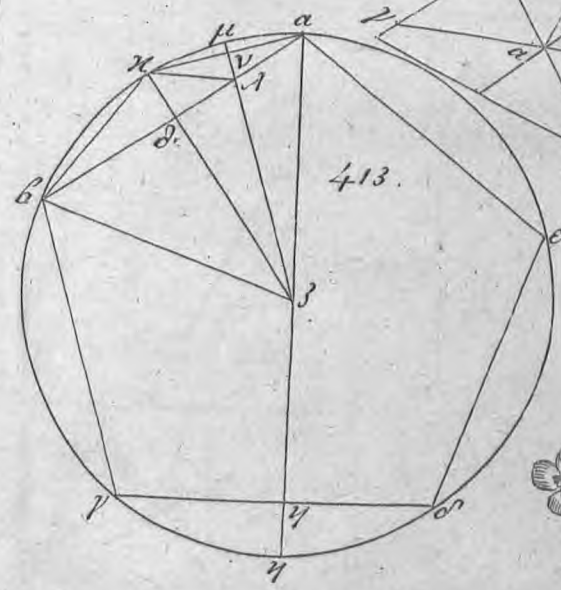
410.



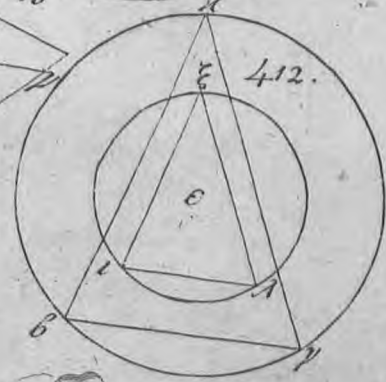
411.



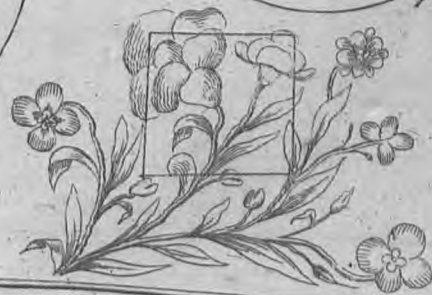
414.6

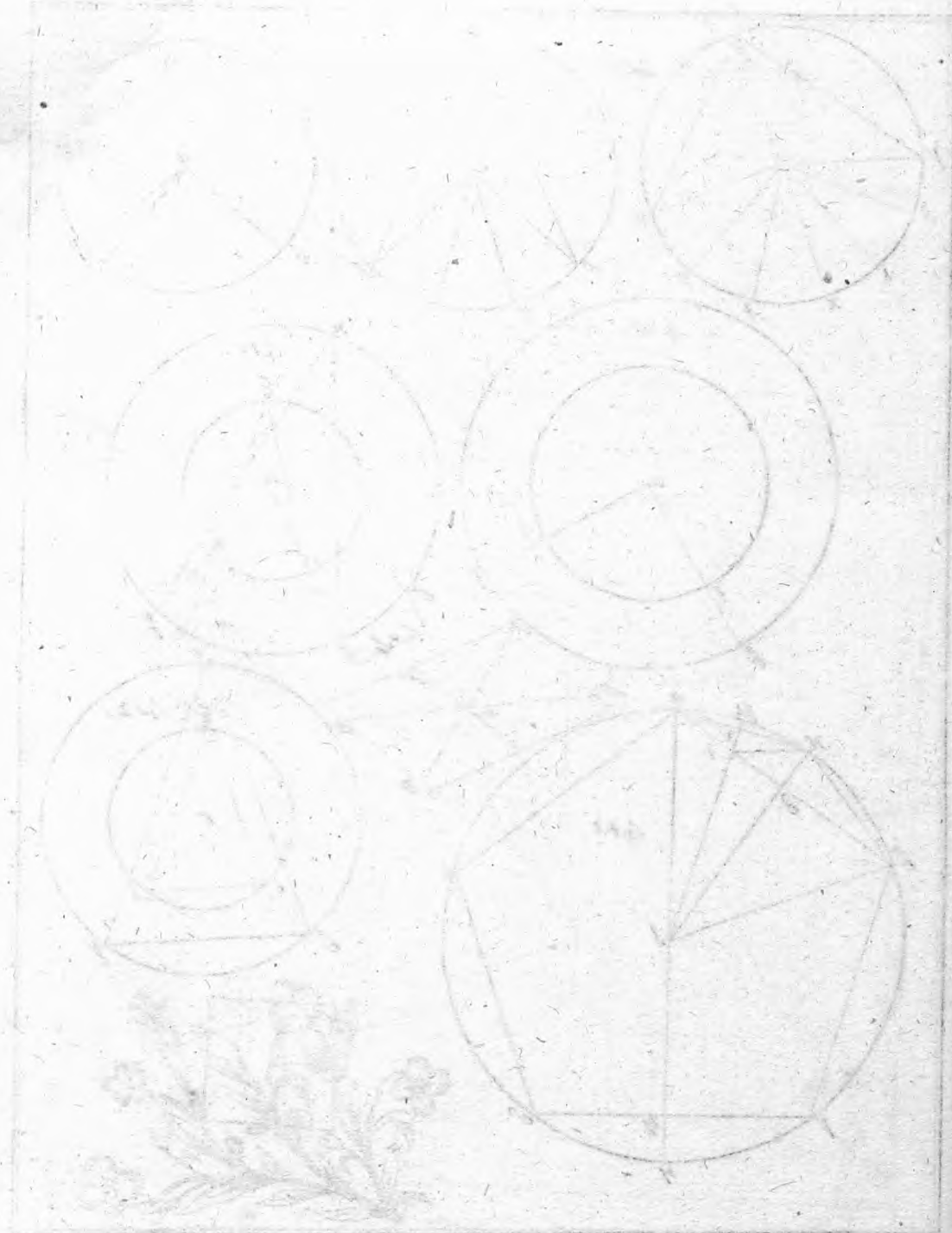


413.



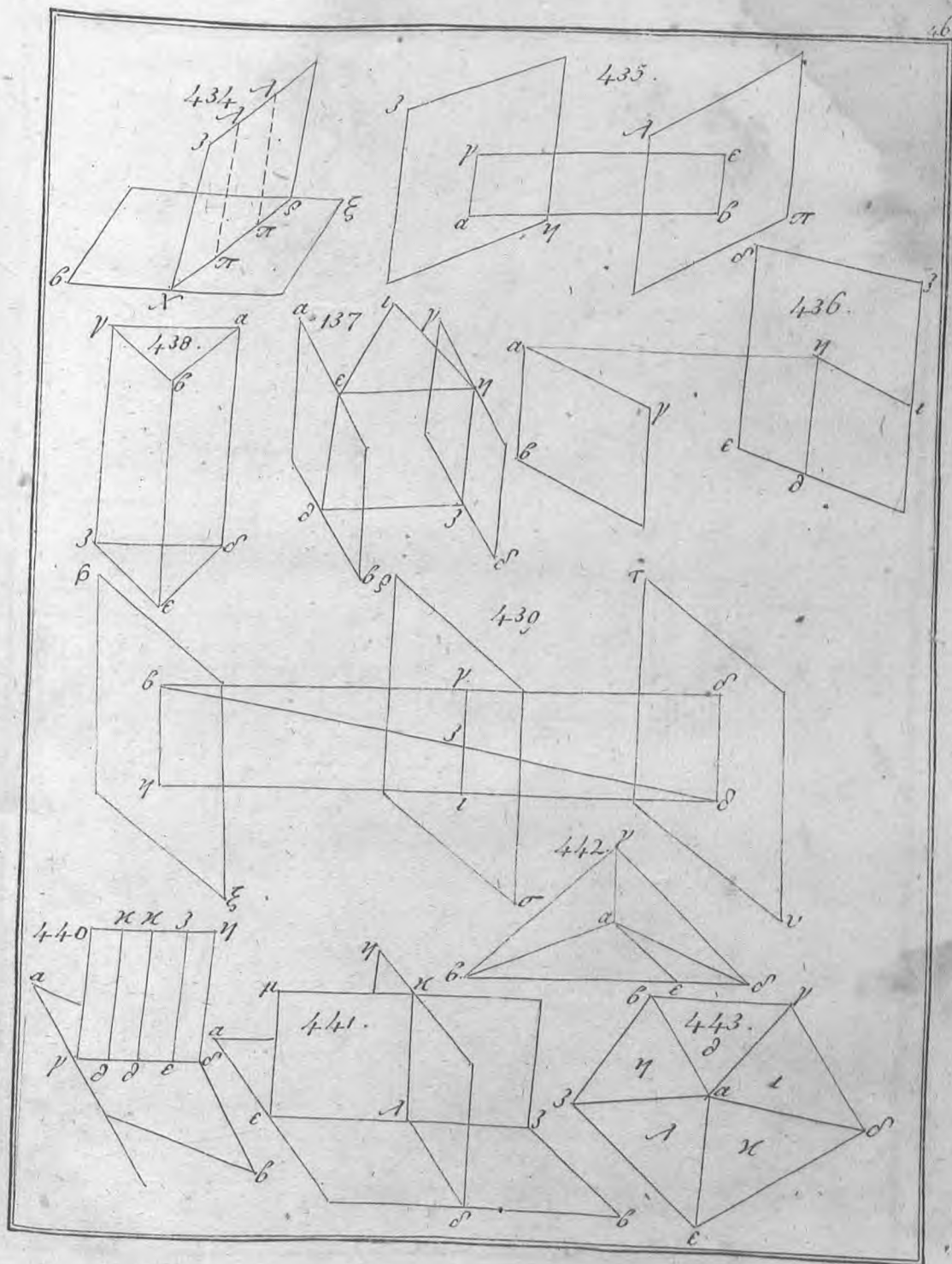
412.





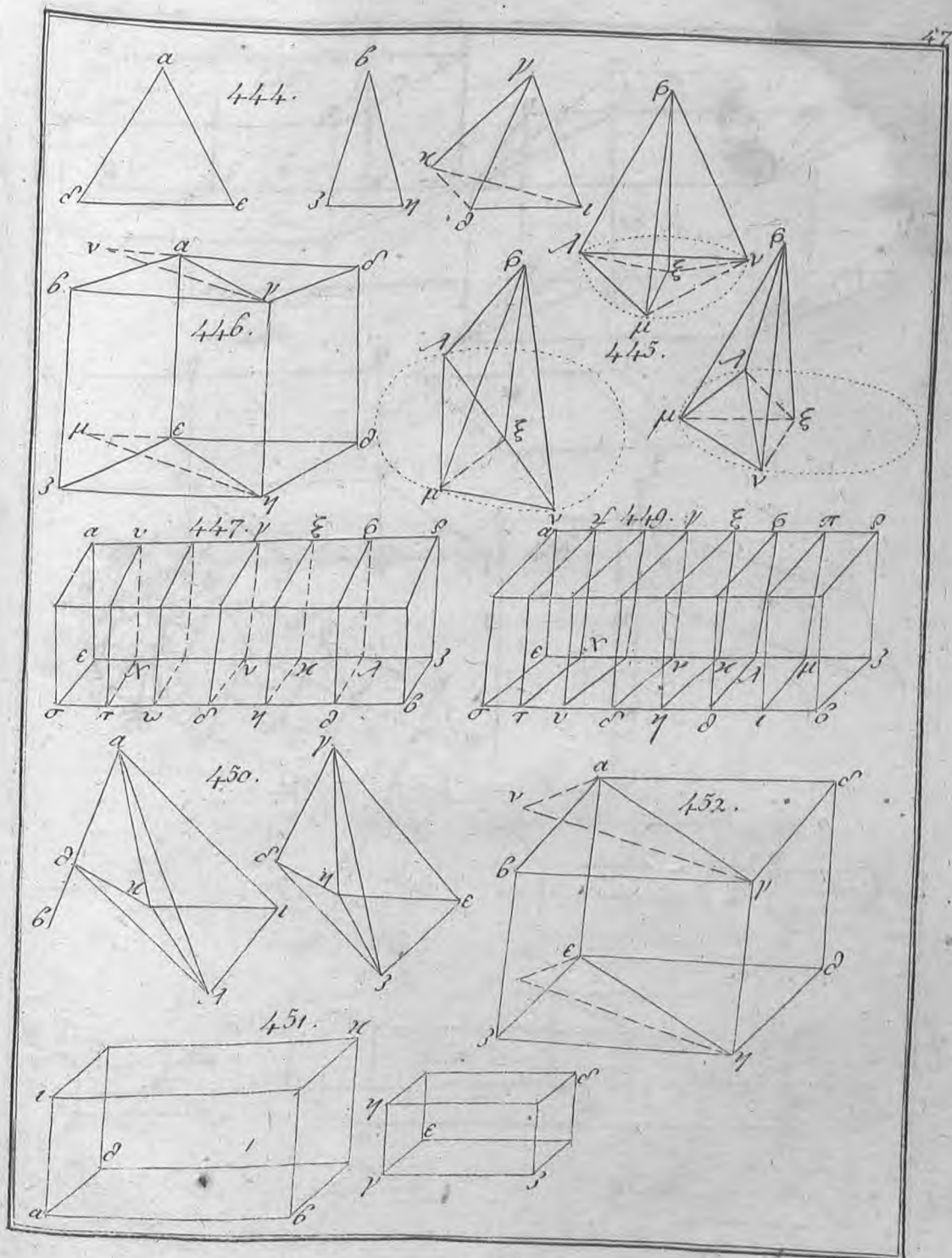
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

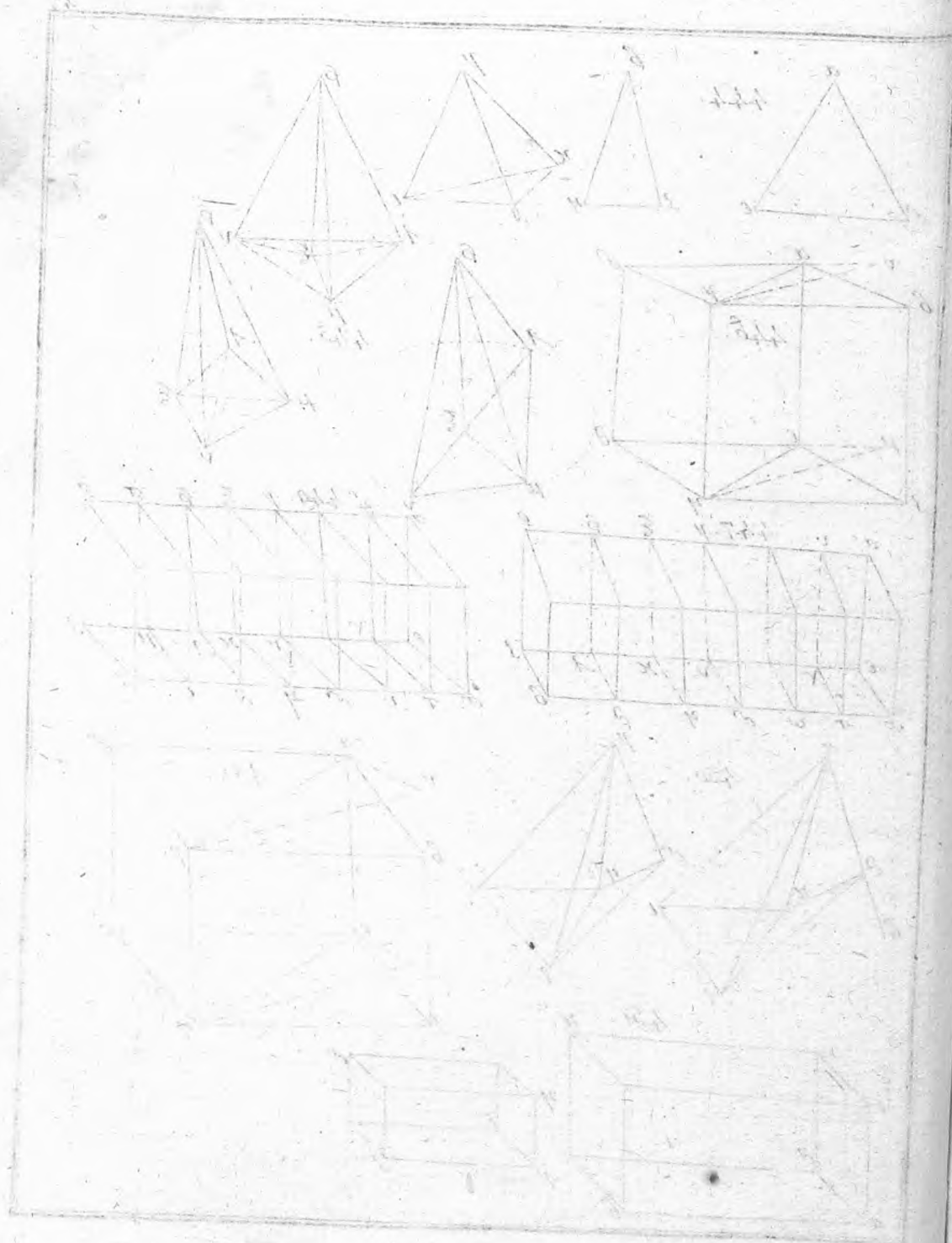
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

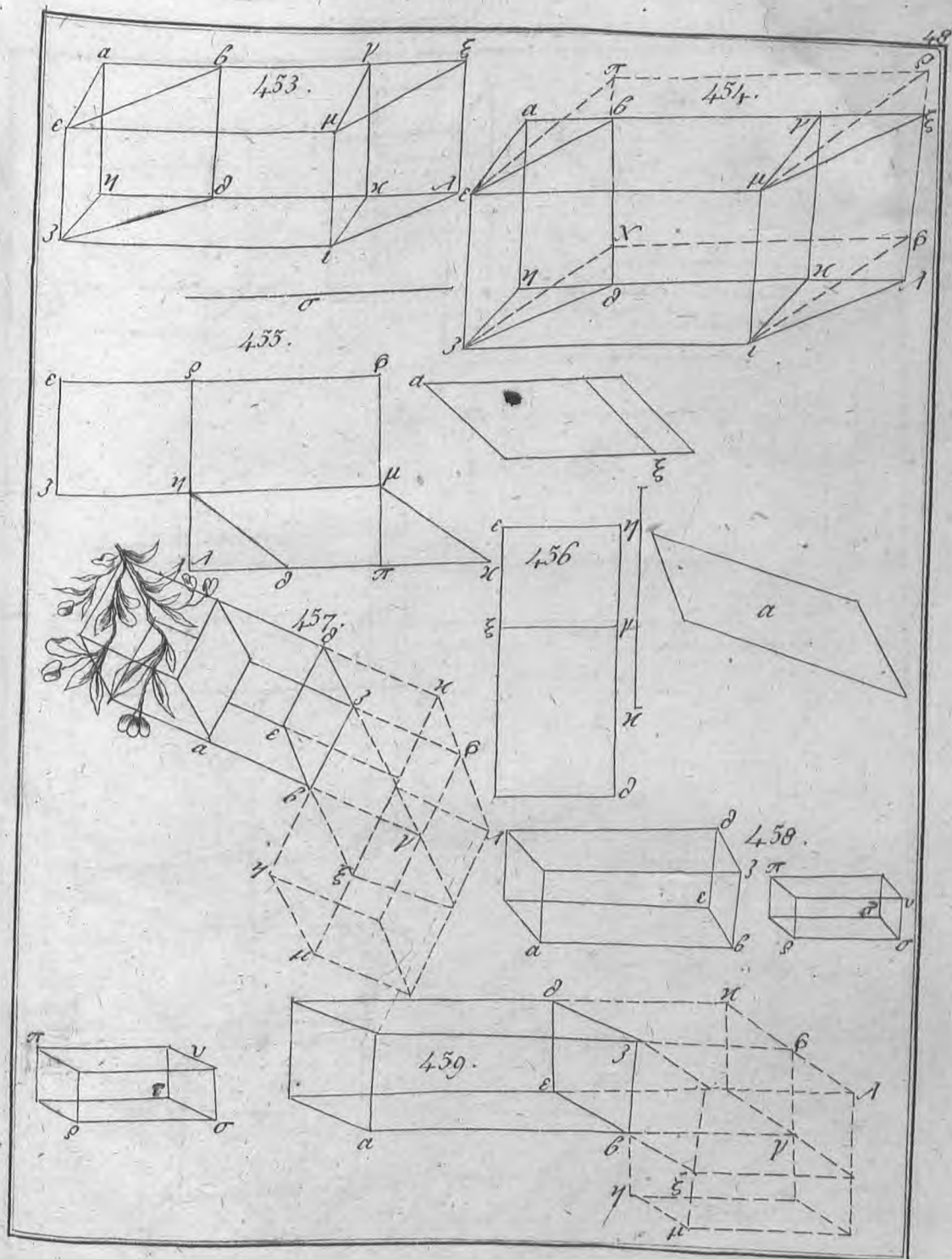




Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

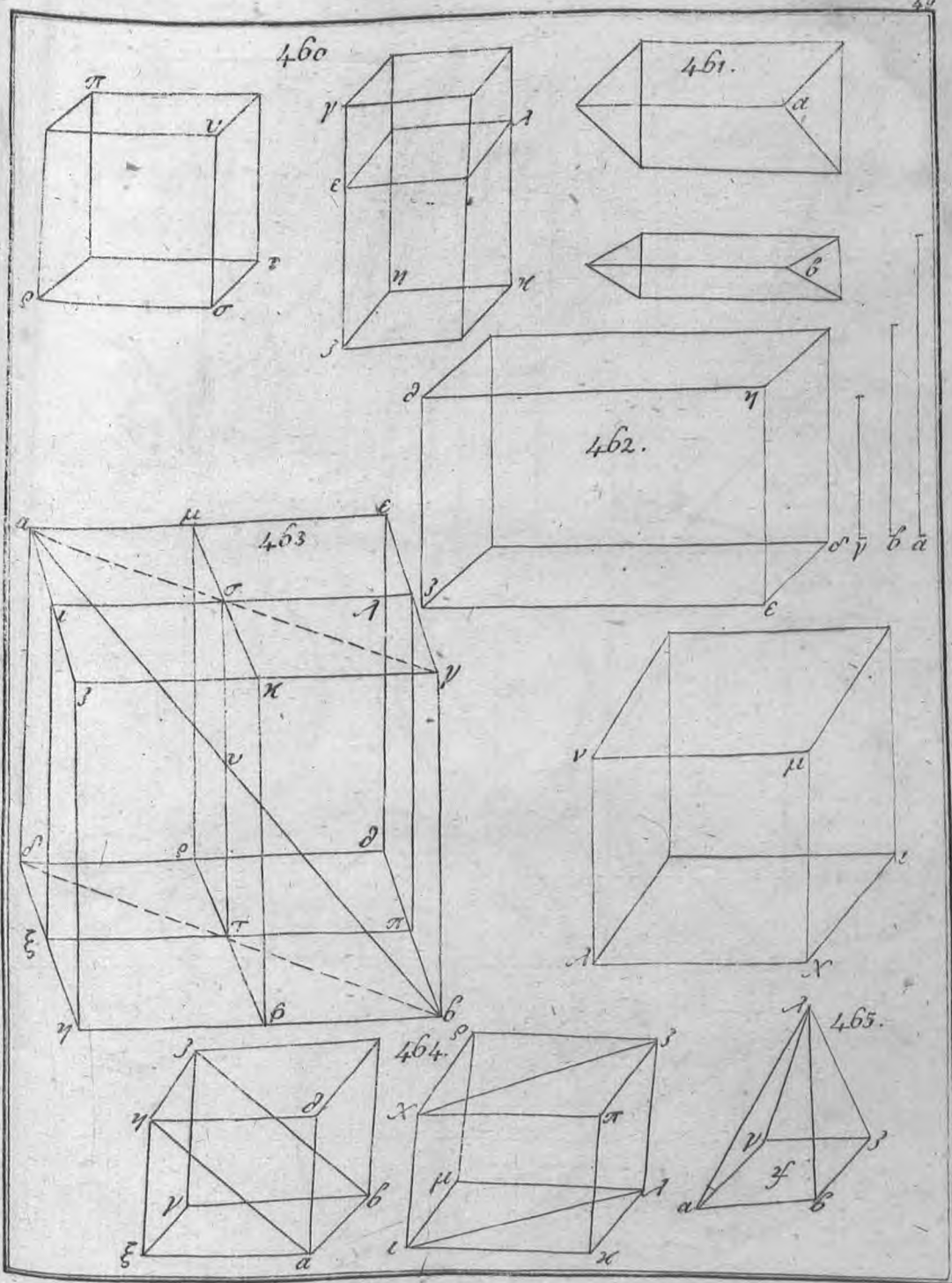


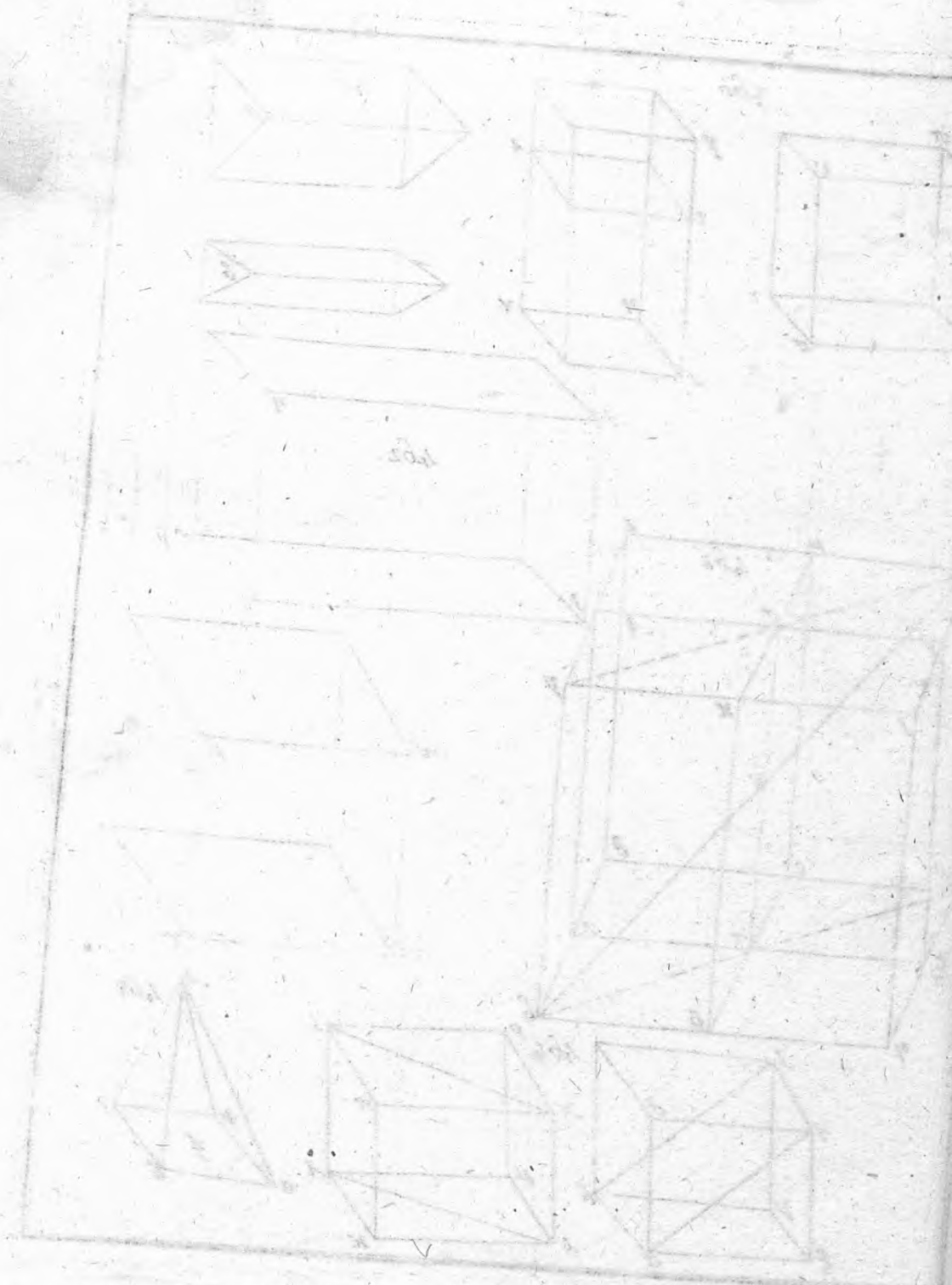




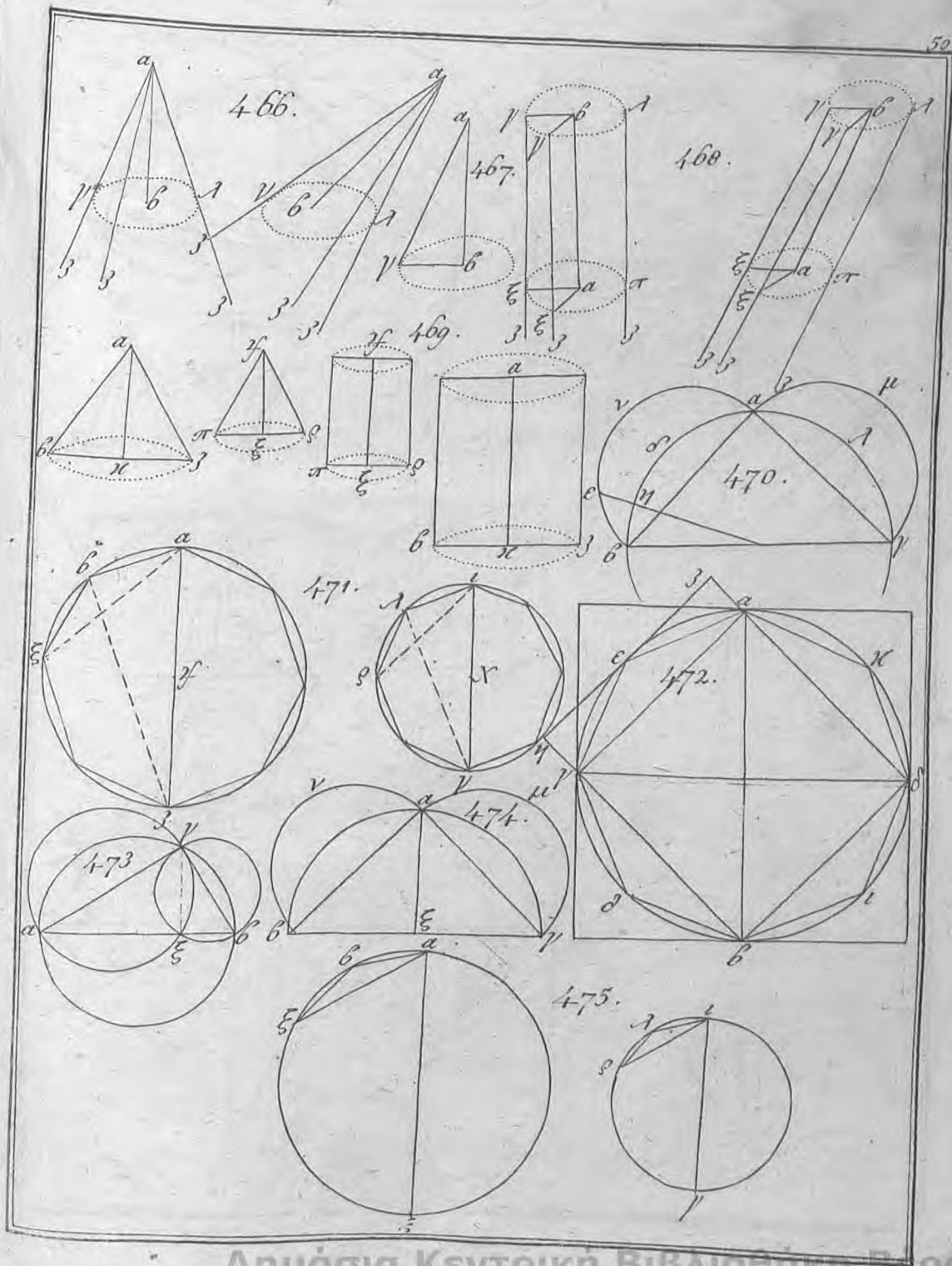


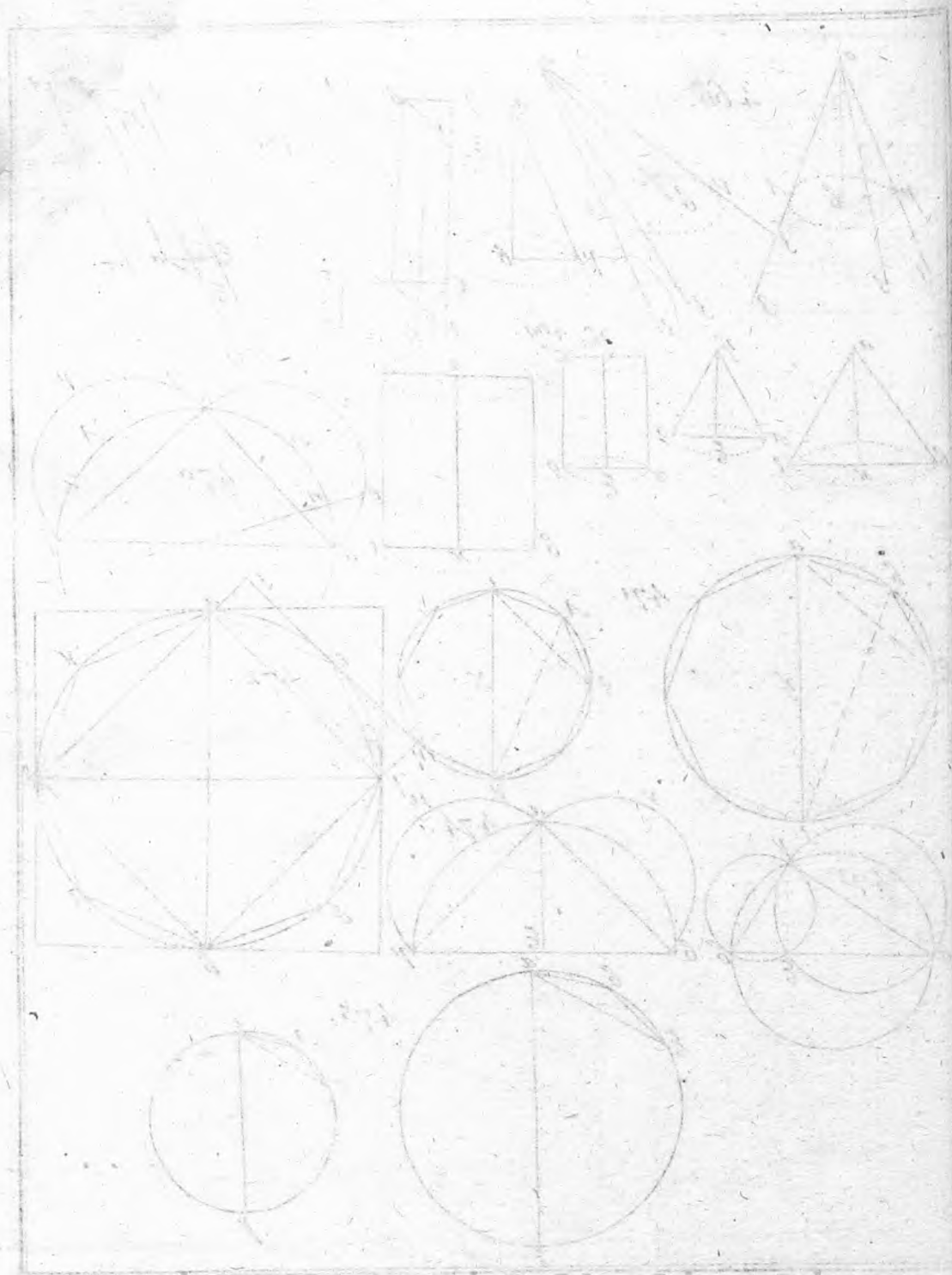
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

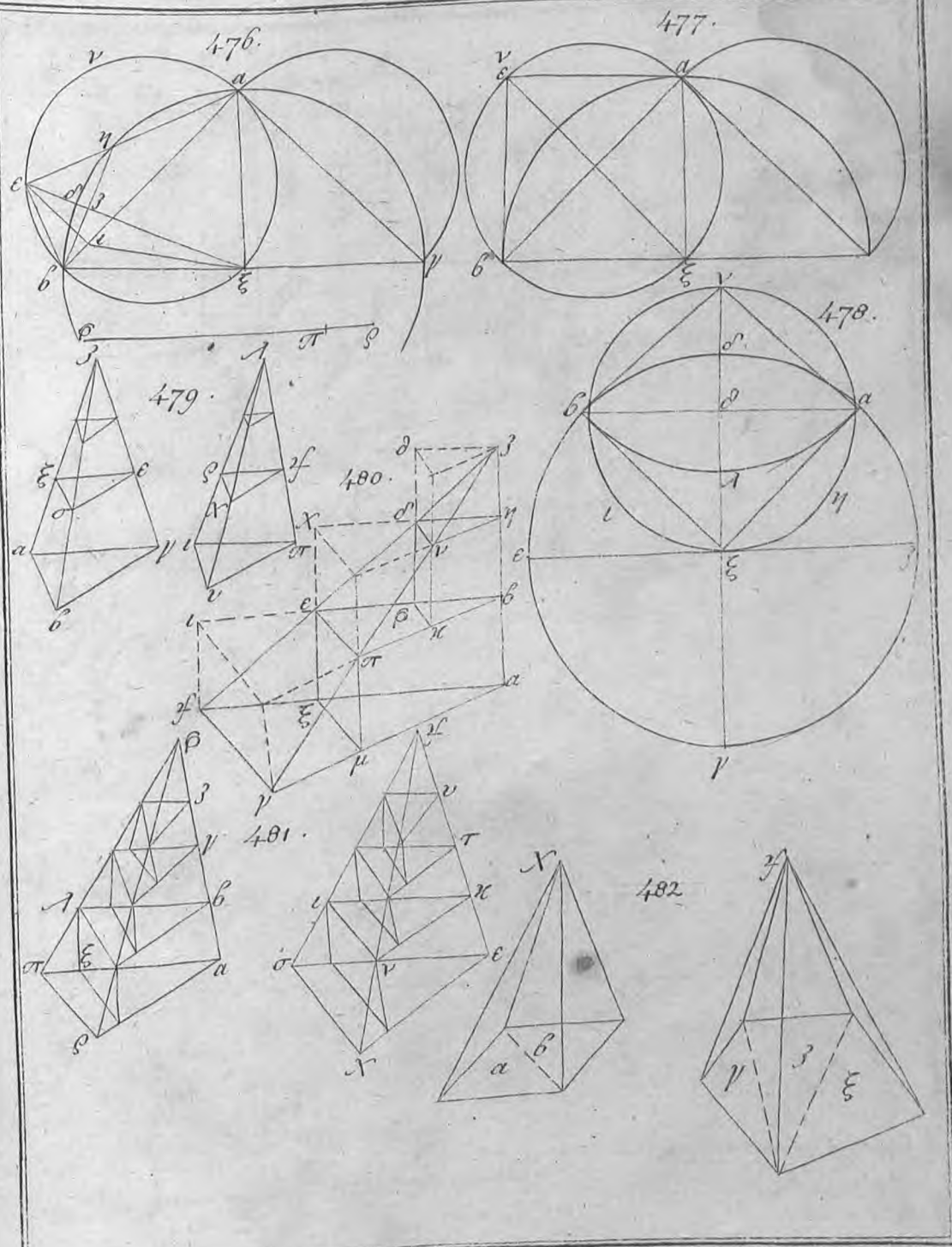


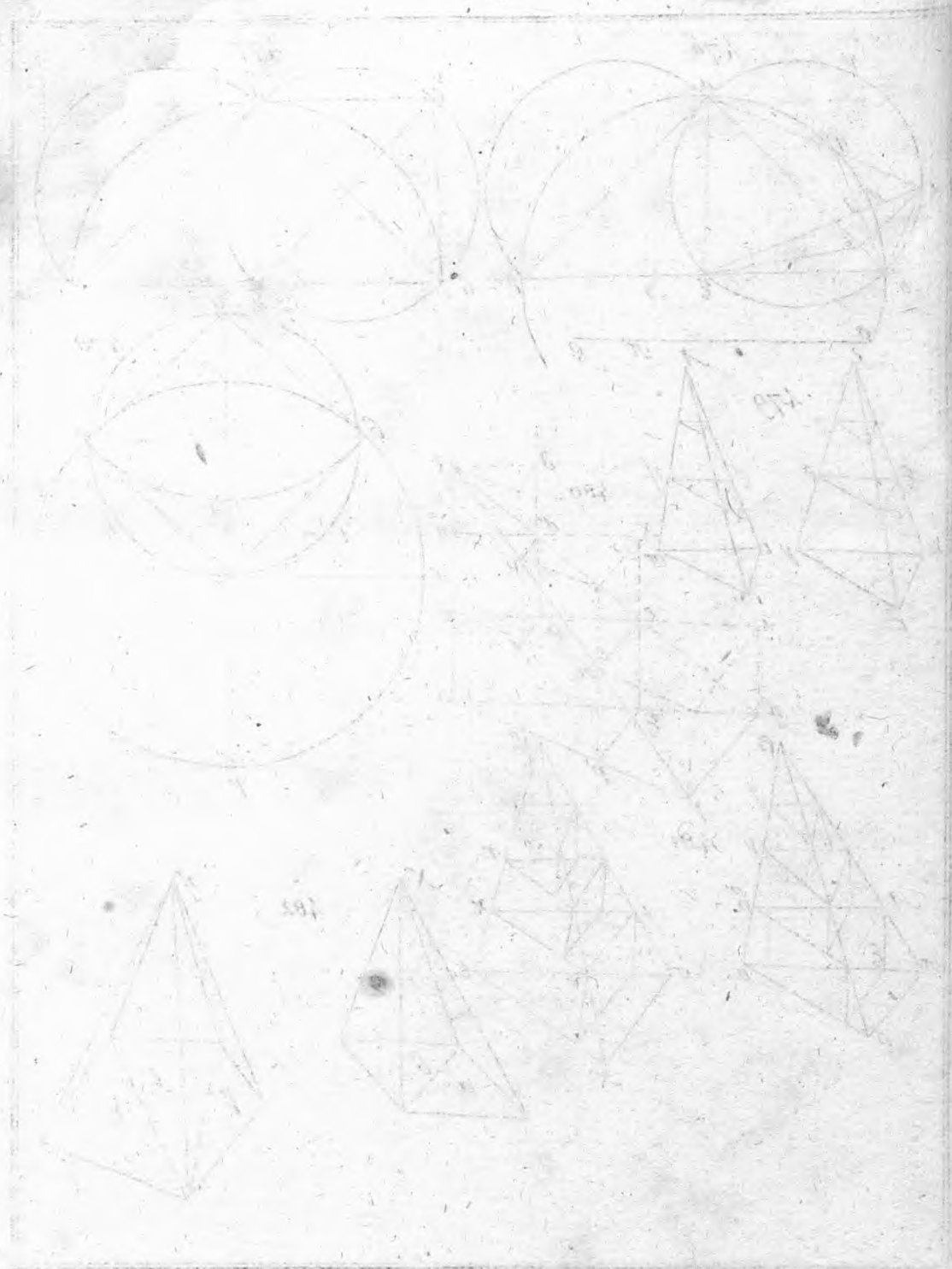


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

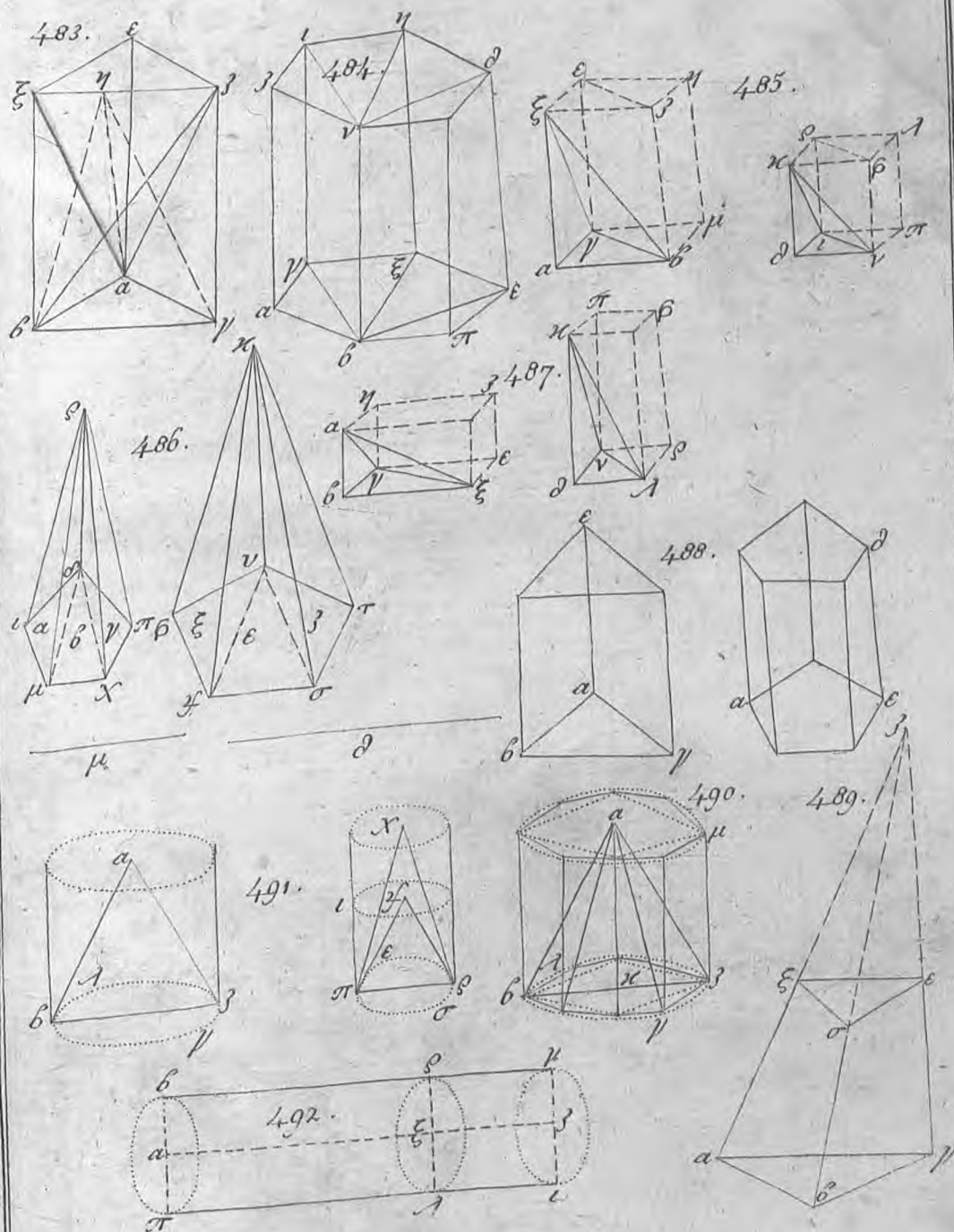




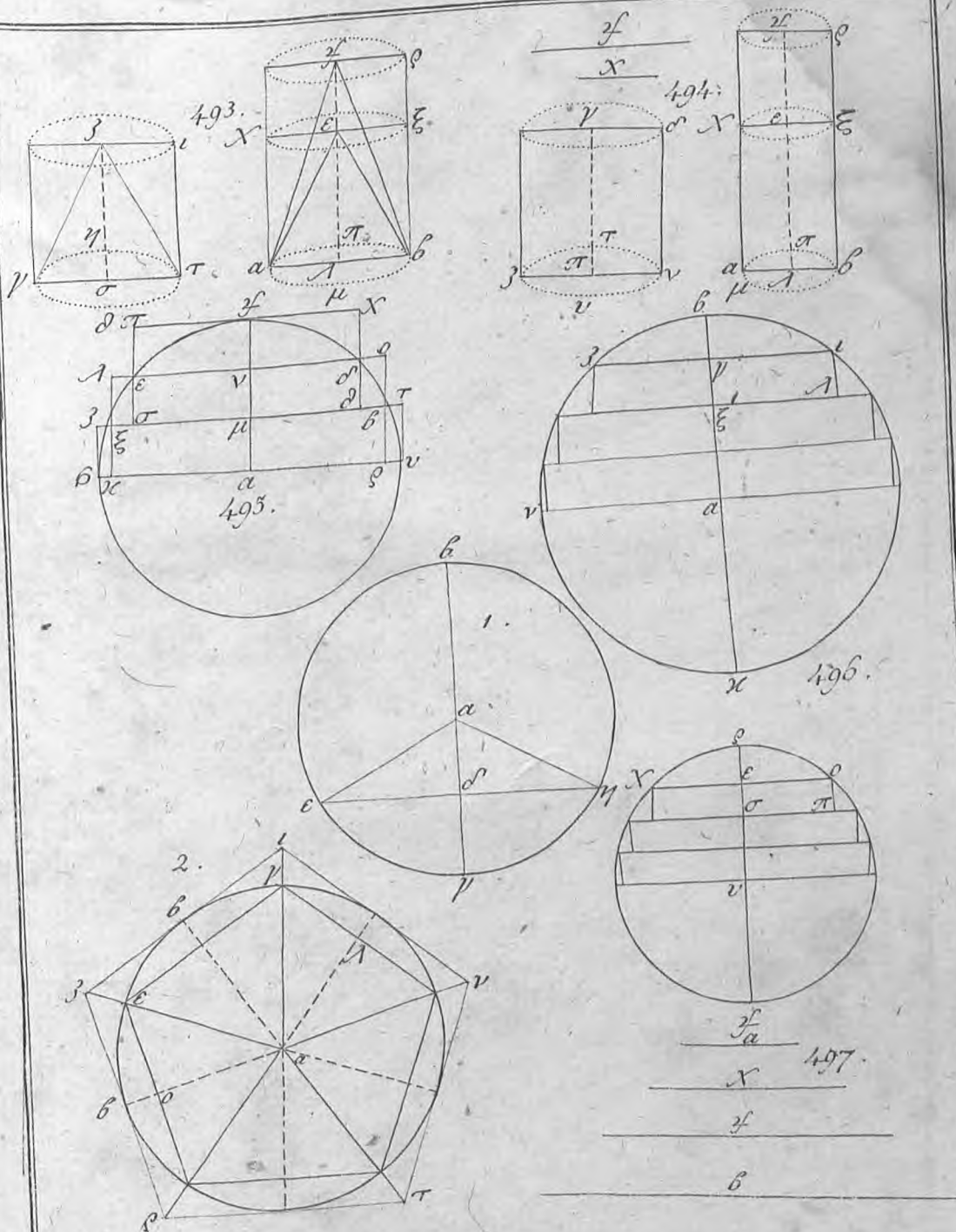




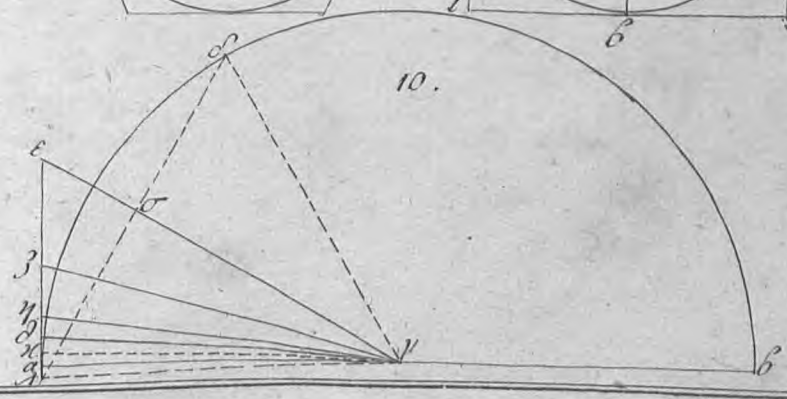
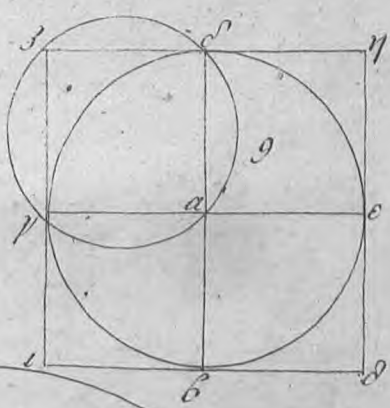
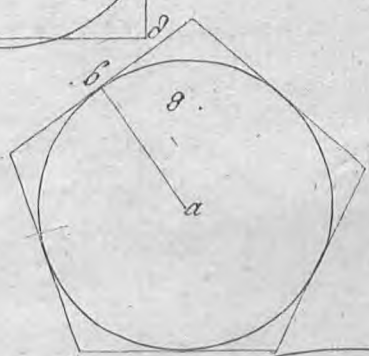
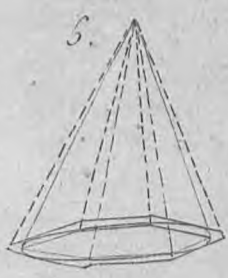
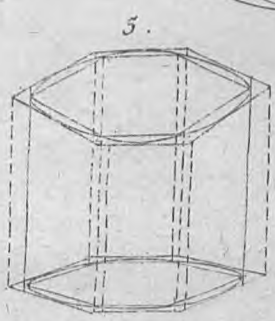
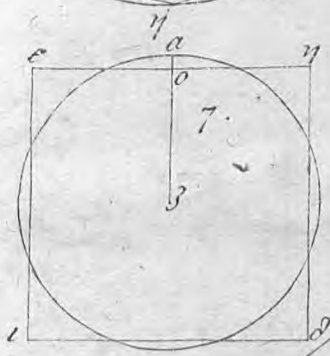
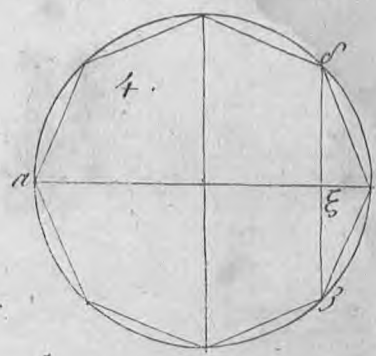
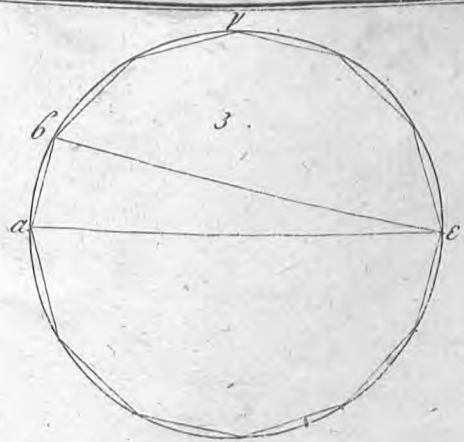
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



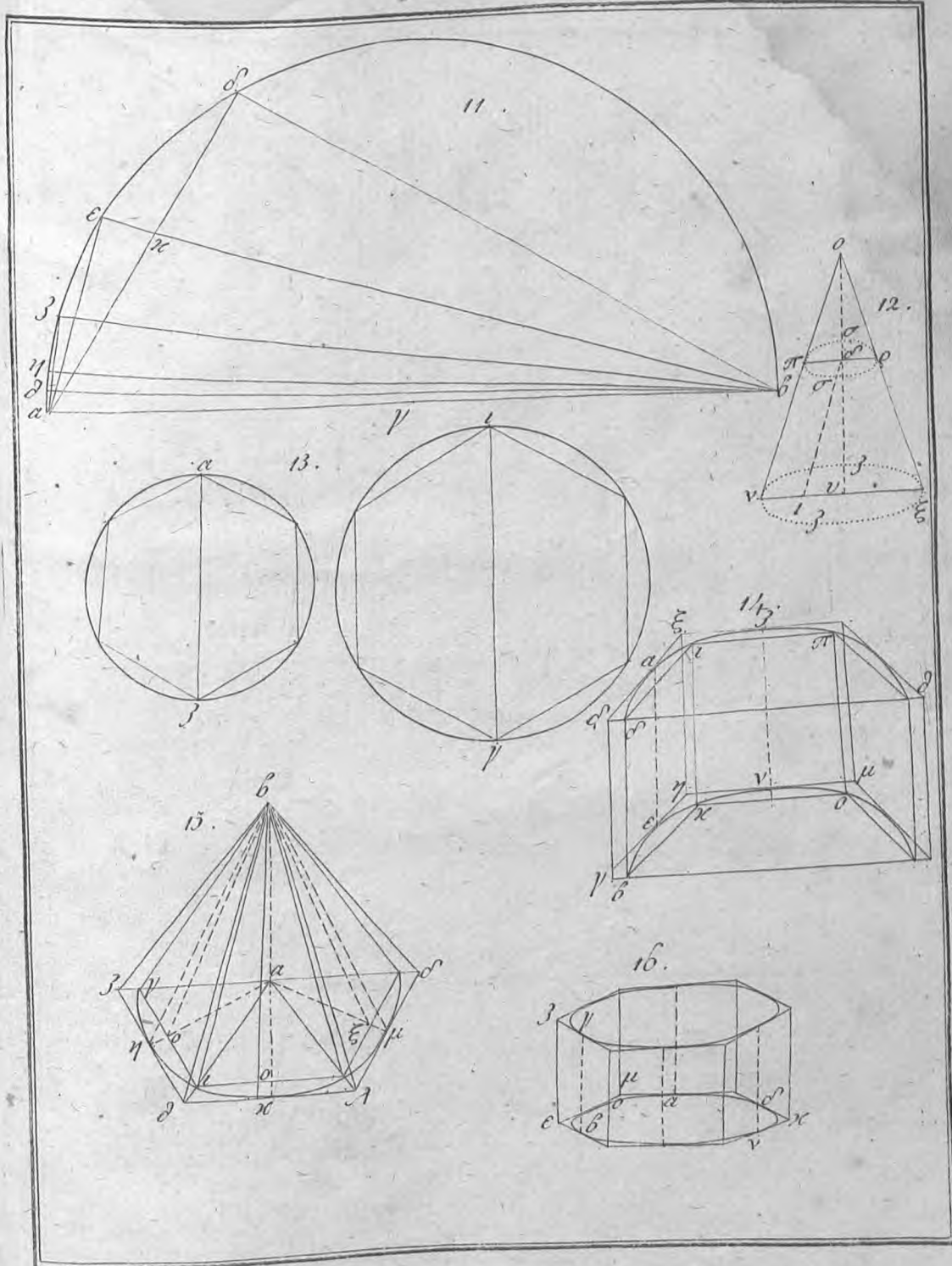
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

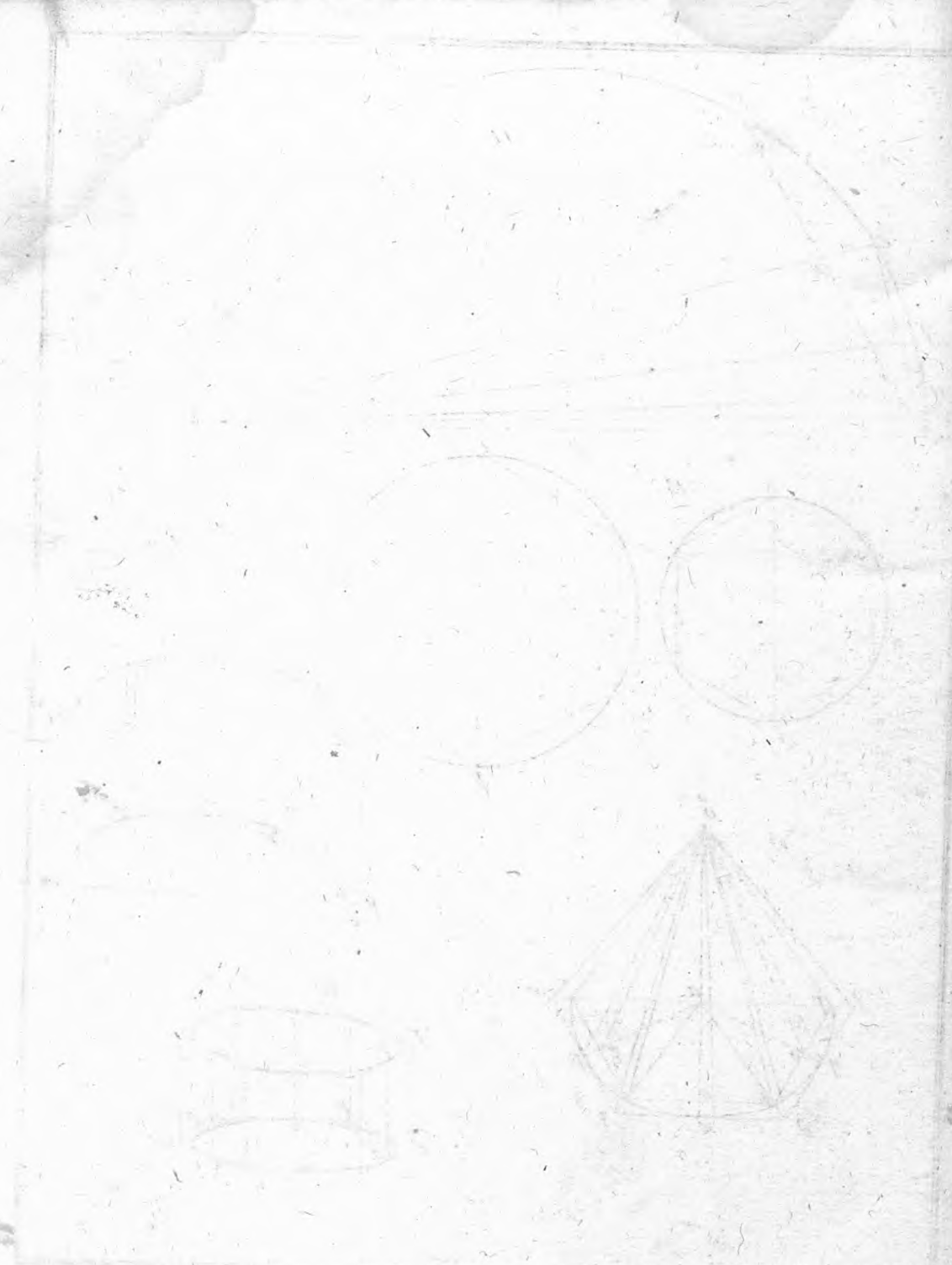


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



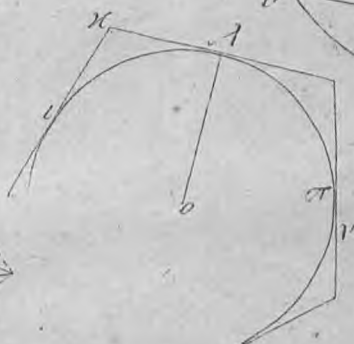
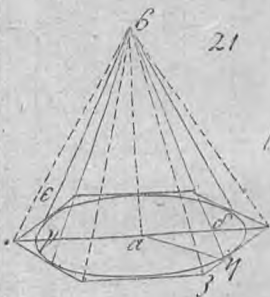
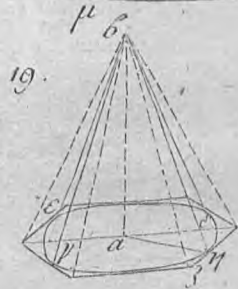
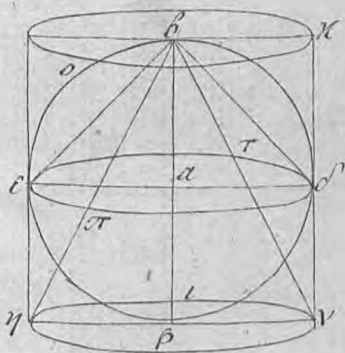
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



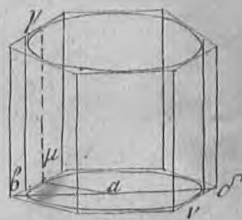
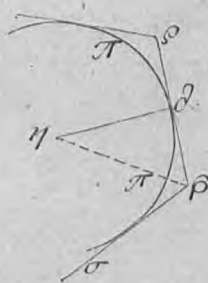


Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

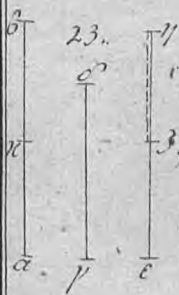
17.



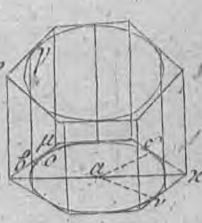
18.



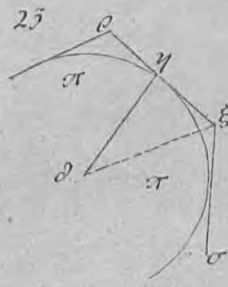
23.



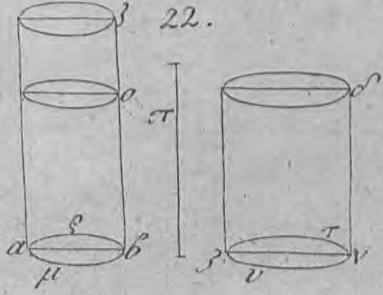
24.



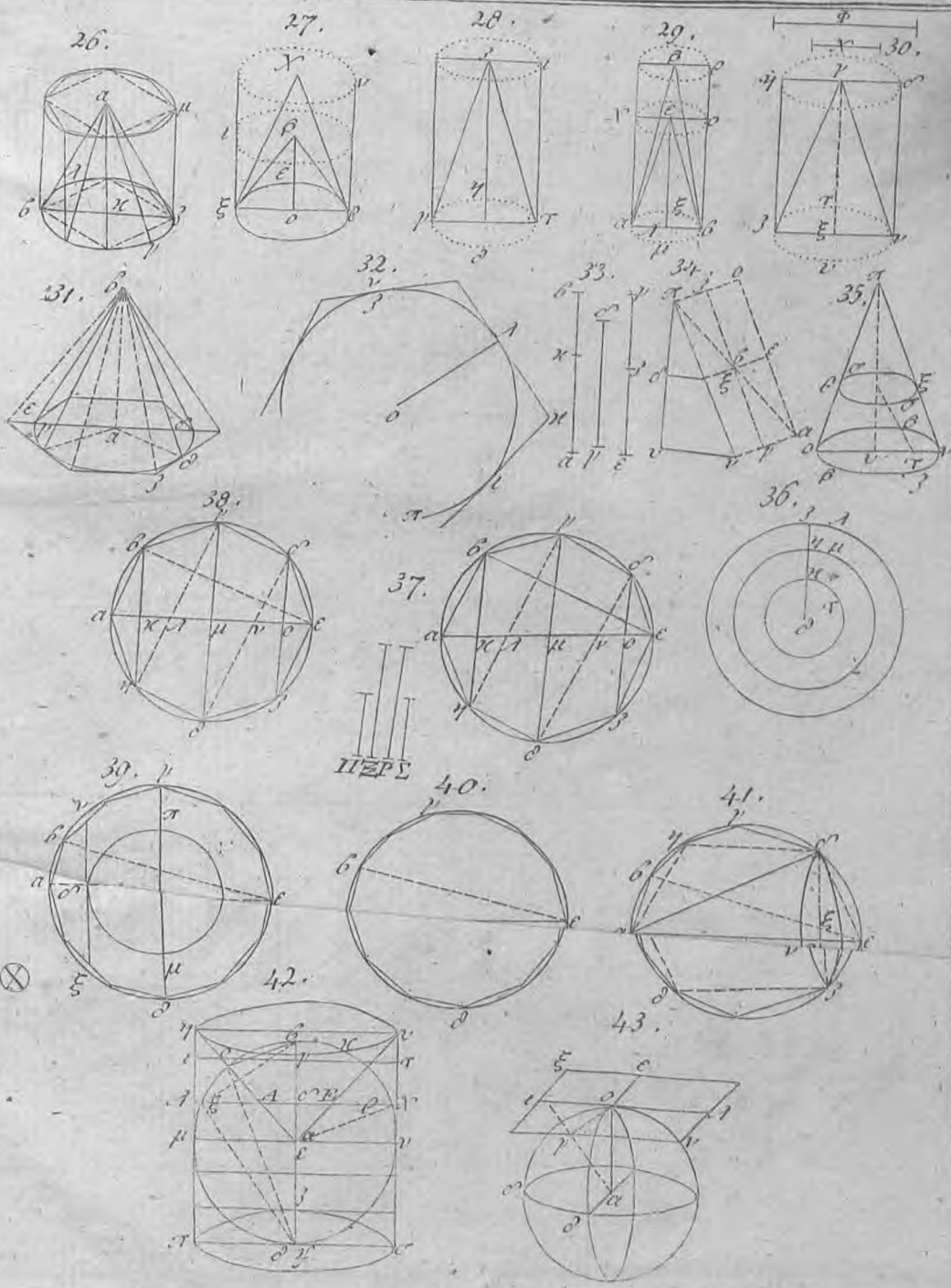
25.

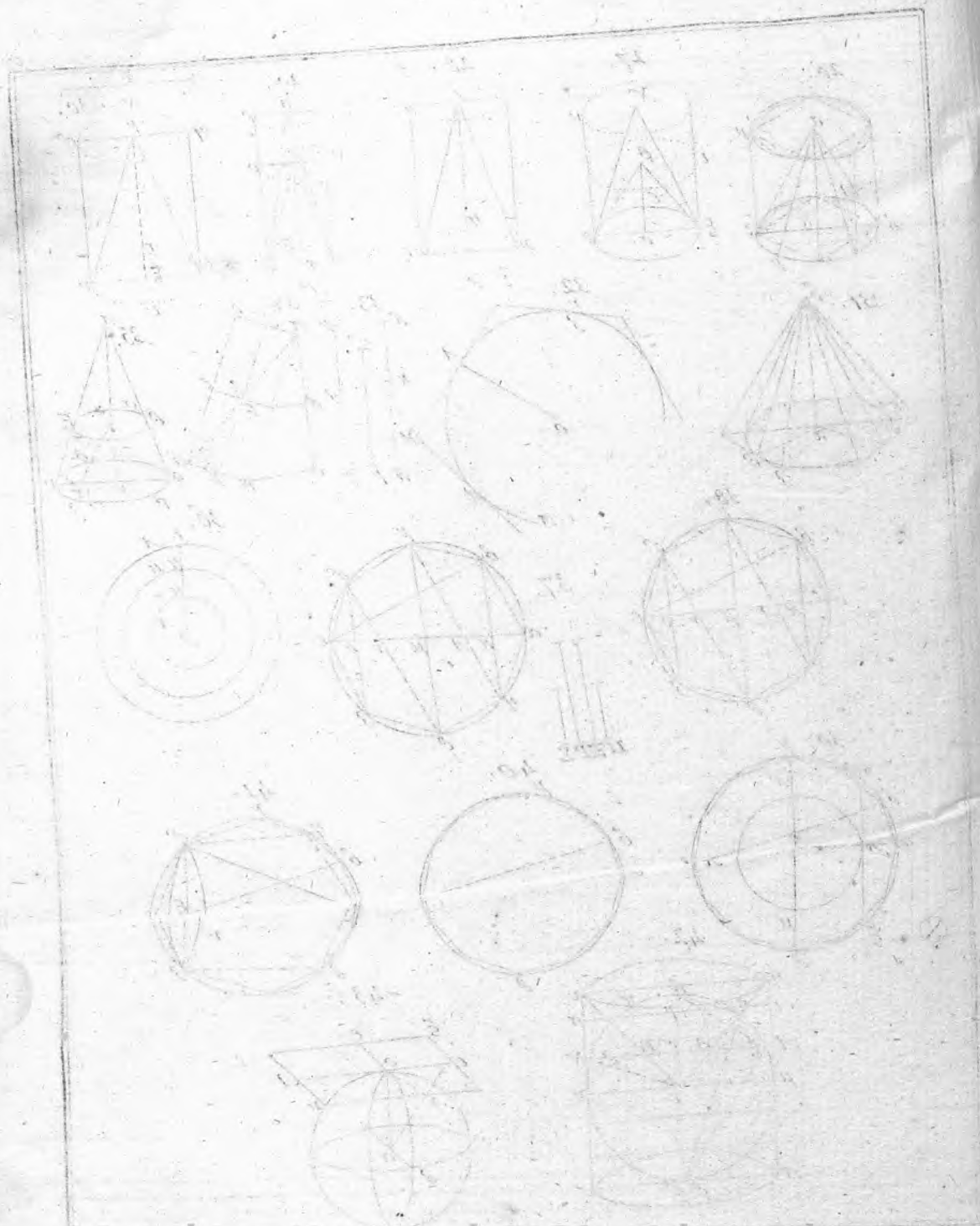


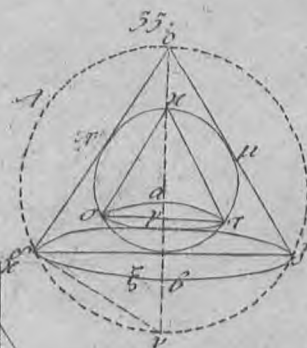
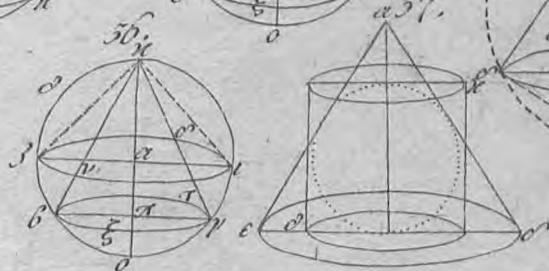
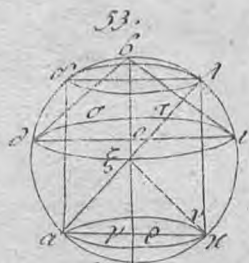
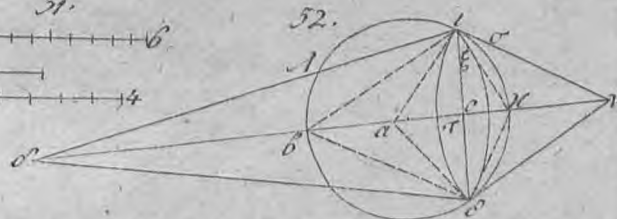
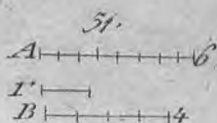
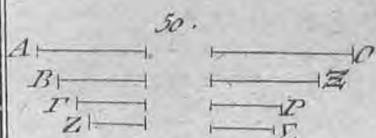
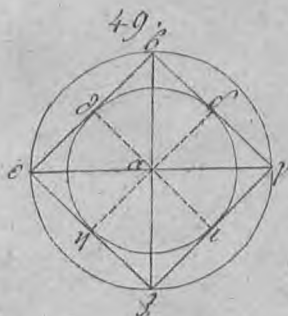
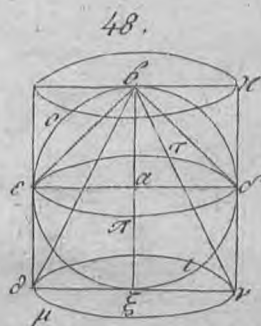
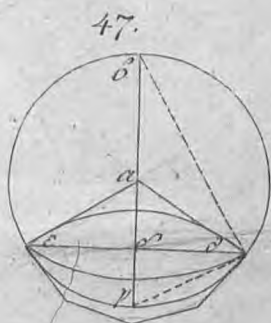
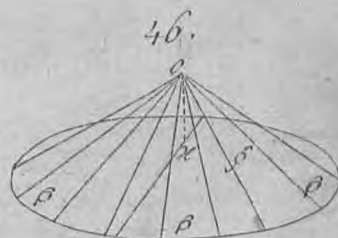
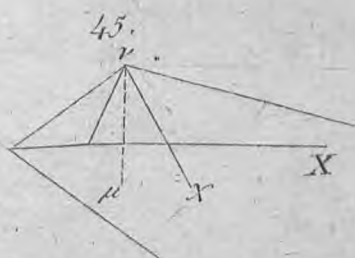
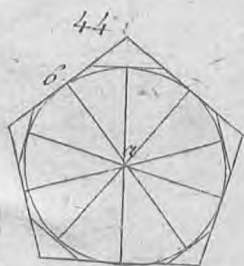
22.



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας







KINHTE BIBΛIOΘΗKH BEPOΪAS

[illegible]

500

ΤΑ

Τακουέτιος, Α.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

αριθ. χρ. 711

Ημερομηνία
έπιστροφής

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟΝ



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

