



SISMANOGLIO
MEGARÒ

1907

SISMANOGLOU

ΕΜΠΟΡΙΚΟΣ
ΟΔΗΓΟΣ
ΥΠΟ
Ι. ΤΑΚΩΒΙΔΟΥ

ΤΗ ΕΓΚΡΙΣΕΙ ΚΑΙ ΑΔΕΙΑ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ
ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ



ΕΝ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥΠΟΛΕΙ

1880

ΤΥΠΟΙΣ ΑΔΕΛΦ. ΑΓΓΕΛΙΔΩΝ ΕΜΙΝ ΟΝΟΥ ΒΑΛΙΔΕ-ΧΑΝΙ
ΠΑΝΣΙΟΝ ΤΗΣ ΓΕΦΥΡΑΣ 16.

ΤΩ,

ΕΥΓΕΝΕΣΤΑΤΩ,

ΚΑΙ

ΦΙΛΟΓΕΝΕΣΤΑΤΩ,

ΚΥΡΙΩ, ΚΥΡΙΩ,

ΞΤΕΦΑΝΩ, ΖΑΦΕΙΡΟΠΟΥΛΩ,

ΞΕΒΑΣΤΩ, ΜΟΙ ΠΡΟΣΤΑΤΗ, ΚΑΙ ΕΥΕΡΓΕΤΗ,

ΤΗΝ ΒΙΒΛΟΝ

ΤΗΝΔΕ

ΑΝΑΤΙΘΕΜΑΙ

ΕΥΓΝΩΜΟΞΥΝΗΣ ΤΕΚΜΗΡΙΟΝ.

SISMANOGLIO
MECARIO

Εβαλέ μου Σπύρε!

Καὶ νῦν ἐκζητοῦν ἐγὼ νῦν ποῦ εἶναι,
τὴν βίβλον τὰς τῶν ἀνελικῶν τῶ οὐ ἐγὼ ἐγὼ
ἐν τῇ αἰσθητῇ τῶν μαθητῶν, οὐκ
τῇ οὐ γενναία γενναία καὶ γενναία
ἐκζητοῦν.

Δὲν οὐκ οὐκ ἐγὼ, ἐκζητοῦν
ἀλλ', τὴν ἀνελικῶν τὰς τῶν ἀνελικῶν
ἐν τῇ αἰσθητῇ τῶν μαθητῶν, οὐκ
ἐν τῇ αἰσθητῇ τῶν μαθητῶν, οὐκ
ἐν τῇ αἰσθητῇ τῶν μαθητῶν.

Εν Κωνσταντινῇ, τῇ 15. Ιανουαρίου 1880.

Ο Λυγγογείας.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

Ἡ παντελής παρ' ἡμῖν ἑλλειψις εὐμεθόδου ἐμπορικοῦ ἐγχειριδίου ὅπως διδάξῃ τὴν εἰς τὸ ἐμπόριον προωρισμένην ὁμογενῆ νεολαίαν καὶ καταρτίσῃ αὐτὴν ἀξίαν τοῦ προορισμοῦ τοῦ ἀληθοῦς ἐμπορίου, μὲ παρώτρυνεν εἰς τὴν ἐκπόνησιν καὶ ἐκδοσιν τοῦ παρόντος βιβλίου.

Καὶ ὄντως τὰ παρ' ἡμῖν ἐμπορικὰ ἐκπαιδευτήρια παντελῶς ἀμοιροῦντ' μεθοδικῆς καὶ λυσιτελοῦς διδασκαλίας τῶν ἐμπορικῶν μαθημάτων, ἑλλείψει βεβαίως καταλλήλων πρὸς τοῦτο συγγραμμάτων. Τὰ δὲ μέχρι τοῦδε ἐν ταῖς παρ' ἡμῖν ἐμπορικαῖς σχολαῖς διδασκόμενα μαθήματα οὐδεμίαν ἐπιστημονικὴν ἔχουσι χροιάν, περιοριζόμενα σχεδὸν ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν θεωρίαν καὶ μηχανικὴν διδασκαλίαν τῆς Διπλογραφίας, μέρους τοῦ Ἑμπορικοῦ καὶ Ναυτικοῦ Δικαίου, τῆς Θεωρητικῆς Ἐμπνευματολογίας καὶ τινων ἄλλων θεωρητικῶν καὶ ἐπουσιωδῶν μαθημάτων τῶν ἐμμέσως πῶς μόνον τεινόντων εἰς τὴν μόρφωσιν τῆς εἰς τὸ ἐμπόριον προορισθείσης νεολαίας, ἥτις βεβαίως δεῖται μεθοδικωτέρως καὶ λυσιτελεστέρας εἰς τὸν πρακτικὸν ἐμπορικὸν βίον διδασκαλίας. Τίς δὲ ἀγνοεῖ ὅτι μαθηταὶ τελειόφοιτοι καὶ εἰς τὰ ἀνώτερα τῶν Μαθηματικῶν μαθήματα ἐγκύψαντες, εἰς τὴν Θεωρητικὴν Ἀριθμητικὴν, Γεωμετρίαν, Ἀλγεβρὰν, Τριγωνομετρίαν κλ., ἀμοιροῦσι καὶ αὐτῶν τῶν στοιχειωδεστέρων ὑπολογισμῶν; Ποῖος μαθητὴς εἰσερχόμενος εἰς τὸ ἐμπορικὸν στάδιον δὲν ἐφιλοδωρήθη διὰ τοῦ ἐπιθέτου σχολαστικὸς παρ' ἀνθρώπων κεκτημένων ἐλαχίστας, ἵνα μὴ εἴπω οὐδεμίαν, γνώσεις; Τίς τούτων δὲν ἐνεπαίχθη ὡς ἀεροβατῶν καὶ τῶν πρὸ τῶν ποδῶν του πραγμάτων ἐν παντελεῖ ἀγνοίᾳ διατελῶν; Τίς πταίει; Ὁ μαθητὴς, ἢ ὁ ἔμπορος ὅστις ἔχει ἐνώπιόν του προλύτην τῶν ὑψηλοτέρων Μαθη-

ματικῶν προσκόπτοντα καὶ εἰς τοὺς ἀπλουστάτους ὑπολογισμοὺς, οὓς αὐτὸς διὰ τῆς πείρας τῶν πραγμάτων ἐξέμαθε, χωρὶς ποτε νὰ ἀνοίξῃ οὐδὲ ἐν βιβλίον; Τὸ τοιοῦτο συμβαίνει, διότι ἐλλείπουν παρ' ἡμῖν σχολεῖα δυνάμενα νὰ μορφώσωσι τὴν νεολαίαν ἐπὶ τὸ πρακτικώτερον, ὡς καὶ συγγράμματα κατ'ἀλληλα πρὸς ἐπιτυχίαν τοῦ πρακτικοῦ σκοποῦ, ὅνπερ καὶ μόνον ὀφείλει κυρίως νὰ ἐπιδιώκῃ πᾶσα ἐμπορικὴ σχολή, ὡς τοῦτο γίγνεται παρ' ἄλλοις ἔθνεσιν, ἐν οἷς κατηρτίσθη εὐδοκίμως ἡ πρακτικὴ σπουδὴ τῶν Ἐμπορικῶν, διότι παρ' αὐτοῖς ὡς κύριον καὶ σπουδαιότατον μάθημα θεωροῦνται αἱ πρακτικαὶ ἐμπορικαὶ γνώσεις, οἷαι εἰσὶν αἱ ἐν τῷ ΕΜΠΟΡΙΚῷ ΟΔΗΓῳ γραφόμεναι. Πρὸς τοῦτο ἠκολουθήσαμεν ἐν τῷ παρόντι συγγράμματι τὸ ἐν ἐνεργείᾳ πρόγραμμα τῶν ἐν Μασσαλίᾳ καὶ Παρισίοις ἀνωτάτων Ἐμπορικῶν Σχολῶν, ὧν αὐτόπται ἐγείναμεν, διακούσαντες τὰ ἐν αὐταῖς παραδιδόμενα μαθήματα, προσεθέσαμεν δὲ εἰς αὐτὰ καὶ ὅσα ἐξ ἰδίας πείρας ἐκτησάμεθα ἐν τῷ πρακτικῷ βίῳ.

Αἱ πρῶται γνώσεις ὧν χρῆζει πᾶς ἔμπορος οἷαςδήποτε τάξεως καὶ ἐφ' ὧν στηρίζονται αἱ βάσεις τῆς Λογιστικῆς σχηματίζουσι τὸ περιεχόμενον τοῦ πρώτου μέρους. Εἰς τοῦτο τὸ κεφάλαιον ἐκθέτομεν ἐπὶ τὸ ἀπλούστερον, ἀποσοδοῦντες πᾶσαν θεωρίαν ὅλως διόλου ἄσχετον ταῖς γνώσεσι τοῦ ἐμπορίου, ὅλους τοὺς πρακτικοὺς ὑπολογισμοὺς, ὧν ποιεῖται χρῆσιν καὶ ὁ ἀδεέστερος τῶν Μαθηματικῶν ἔμπορος εἰς τὰς ἐμπορικὰς τοῦ πράξεως, ἀρχόμενοι ἀπὸ τὰς τέσσαρας πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς. Ἰδίᾳ πραγματευόμεθα ἐν αὐτῷ περὶ τῶν ἐν Κωνστανπόλει συνηθεστάτων πρακτικῶν λ/σμῶν μετὰ καὶ ἐκτενεστάτων καὶ ποικίλων αὐτῶν ἐφαρμογῶν, τῶν μετατροπῶν διαφόρων μέτρων σταθμῶν καὶ νομισμάτων ξένων τε καὶ ἐγχωρίων, εὐθυσιαστικοῦ τιμήματος νομισμάτων, καὶ νομισματικῶν διαφορῶν, ἐκθέτοντες συνάμα ἐν ἐκτάσει τὰ περὶ τῆς μεθόδου τοῦ τόκου ἐπὶ τοῖς $\frac{\%}{100}$ ἥτις θεωρεῖται καὶ εἶναι πράγματι ἡ ψυχὴ σχεδὸν ὅλων τῶν ἐμπορικῶν ὑπολογισμῶν, τὰς διαφόρους μεθόδους ὧν χρῆσιν ποιούμεθα πρὸς εὔρεσιν τοῦ τόκου, τὰ περὶ ἀναβολῆς τῆς ἡμέρας τῆς πτώσεως, τὰ περὶ τῶν κατ'ἀναλογίαν διανομῶν τοῦ εὐθυσιαστικοῦ τιμήματος, τὰ περὶ διανομῆς φύρας καὶ ξένων ὑλῶν ἐπὶ ἐμπορευμάτων, τὰ περὶ πινάκων ἀνατοκισμοῦ, συνθέτων ὑφαίρεσεων, ἐτησίων δακτυλίων, χρεωλυσίας, καὶ τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῶν ἐπὶ προβλημάτων.

Εἰς τὸ δεύτερον Μέρος ἐκτίθενται ὅλαι αἱ πρῶται ἐμπορικαὶ πράξεις, αἵτινες χρησιμεύουσιν εἰς τὴν ἐπαλήθευσιν τῶν ἐμπορικῶν ἐργασιῶν, καὶ ἐπὶ τῶν ὁποίων θεμελιούται ἡ καθαυτὴ Διπλογραφικὴ τέχνη· ἐν αὐτῷ βλέπει ὁ σπουδαστὴς τὸν τρόπον καθ' ὃν λογαριάζονται καὶ συντάσσονται τιμολόγια, λ/σμοὶ ἀγορᾶς καὶ πωλήσεως, ἀγωγιαστήρια, ναυλοσυμφωνητικὰ, φορτωτικὰ κτλ., διδάσκεται τοὺς τύπους καὶ τὰ ὑποδείγματα τῶν συναλ/κῶν, συναλ/κῶν κατὰ διαταγὴν, συναλ/κῶν εἰς διαμολὴν, ἐπισυναλ/κῶν καὶ λ/σμῶν ἐπιστροφῆς, ἀποταγῶν, γραμματίων εἰς διαταγὴν, γραμματίων ἀπλῶν καὶ ἀλληλεγγύων, γραμματίων τῷ φέροντι, τραπεζικῶν γραμματίων, ἐπιταγῶν κτλ., εὐρίσκει πᾶν ὅ,τι σχετίζεται εἰς τὰ ἐμπορικὰ γραμμάτια· ταῦτα δ' εἰσὶν ἡ προθεσμία, ἡ διαταγὴ, ἡ ἀξία, ἡ ἀποδοχὴ, ἡ διπισθογράφησις, ἡ διαμαρτύρησις, ἡ πρόβλεψις, ἡ σύστασις, ἡ τριτεγγύησις, τὸ ἀξιοχρεω κτλ., εἶτα τὰ περὶ προεξοφλήσεως καὶ διαπραγματεύσεως ἐμπορικῶν γραμματίων, περὶ γραμματιολογίου, μέσου ὅρου τῆς πτώσεως, ἀντιστρόφου μεθόδου τῆς εὔρεσεως μέσου ὅρου τῆς πτώσεως καὶ τέλος τὰ περὶ ἀμφιβαρῶν τοκοφόρων λ/σμῶν, περιλαμβανομένων ἐν αὐτοῖς πασῶν τῶν μεθόδων μετὰ καὶ ἐφαρμογῶν αὐτῶν ἐπὶ παραδειγμάτων.

Εἰς τὸ τρίτον Μέρος πραγματευόμεθα θεωρητικῶς τε καὶ πρακτικῶς περὶ συναλλαγῶν, συναλλακτικῶν ἀντιπαραβολῶν, περὶ σημειομένου πινακίου· ἐν γένει δὲ, περὶ ὅλων τῶν τραπεζικῶν ἐργασιῶν αἵτινες καθίστανται ἐν τῇ ἀγορᾷ μας ἀπὸ ἡμέρας εἰς ἡμέραν σπουδαιότεραι. Τὸ κεφάλαιον τοῦτο βασίζεται ἐπὶ τῶν τελευταίων μεταβολῶν αἵτινες ἐπῆλθον εἰς τὴν οἰκονομολογικὴν κόσμον.

Πρὸς ἐπαλήθευσιν δὲ τῶν λογαριασμῶν μετεχειρίσθημεν τὴν συνηθισμένην μέθοδον.

Τὸ κεφάλαιον τοῦτο συσταίνομεν ἰδίᾳ εἰς Τραπεζίτας, ὑπαλλήλους Τραπεζῆς καὶ ἐν γένει εἰς πάντας ὅσοι καταγίνονται εἰς Τραπεζικὰς ἐργασίας. Εἶναι δὲ οὕτω πως ἐκτεθειμέναι ὅλαι αἱ τραπεζικαὶ ἐργασίαι, ὥστε ὁ τὰ ἐν αὐτῷ διαλαμβανόμενα κατέχων, ὅπως δεῦρ, καθίσταται τέλειος λογιστὴς εἰς τὸ εἶδος τοῦτο. Κατεβάλαμεν πᾶσαν δυνατὴν προσπάθειαν ὥπως ἐκθέσωμεν τὰ περὶ τραπεζικῶν ἐργασιῶν ἐπὶ τὸ πρακτικώτερον καὶ ἐπὶ τὸ ἐκτενέστερον χωρὶς νὰ παραλείψωμεν τι σχετιζόμενον εἰς αὐτάς, καὶ οὐκ ὀλίγας ἐφαρμογὰς

αὐτῶν ἐπονησάμεθα ἐπὶ πλείστον πρακτικῶν παραδειγμάτων βασιζομένων ἐπὶ τῆς ἰδίας πείρας, ἣν ἐκτησάμεθα ἐν τῷ πρακτικῷ βίῳ.

Δὲν φοβούμεθα δὲ νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ κεφάλαιον τοῦτο συνετάχθη ἐπὶ τὸ τελειώτερον καὶ ἐπιστημονικώτερον, καὶ ὅτι, ὀλίγιστα τῶν Εὐρωπαϊκῶν συγγραμμάτων ἀμφιβάλλομεν ἐὰν ἐπραγματεύθησαν μὲ τὴν σαφήνειαν καὶ πλῆθος τύπων καὶ παραδειγμάτων τὰς τραπεζιτικὰς ἐργασίας, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐσχάτως γενομένων μεταβολῶν εἰς τὸ οἰκονομολογικὸν σύστημα.

Οἱ Εἰκονικοὶ λογαριασμοὶ περὶ ὧν ὠμιλήσαμεν ἐν ἐκτάσει καὶ καθ' ὅλας τὰς προσιτὰς μεθόδους μετὰ καὶ ἐφαρμογῶν αὐτῶν ἐπὶ ποικίλων παραδειγμάτων καὶ πινάκων, ὡς καὶ αἱ ἰσότητες ἐν ἐμπορεύμασι προσετέθησαν ἐν εἴδει προσαρτήματος, ὅπερ τὴν μεγίστην παρέχει εὐχέρειαν εἰς ὅλους τοὺς ἐμπόρους, οἵτινες, ἀφοῦ ἐκμάθωσι τὸν τρόπον καθ' ὃν καταστρώνονται οἱ πίνακες τοῦ εὐθειαςτικῆς τιμήματος, δύνανται νὰ σχηματίσωσιν οἱ ἴδιοι τοιοῦτους πίνακας ἐφ' οἷον οἷον οἷον οἷον καὶ νὰ θελήσωσιν ἐμπορεύματος, οὕτω δὲ νὰ γνωρίσωσιν ἀμέσως τὴν θέσιν τῆς ἀγορᾶς των ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀγορὰν εἰς ἣν πρόκειται νὰ πωλήσωσιν ἢ νὰ ἀγοράσωσιν τὰ στοχαζόμενα ἐμπορεύματα. Εἶναι δὲ καὶ πασίδηλον ὅτι οἱ πίνακες οὗτοι μεγίστας παρέχουσιν εὐκολίας εἰς τοὺς ἐμπόρους, καθόσον δι' αὐτῶν ἀποφεύγουσιν οὗτοι νέους ὑπολογισμοὺς δι' ἐκάστην μεταβολὴν τῶν συναλλαγῶν, τοῦ ναύλου καὶ τῶν ἀσφαλίσεων.

Τέλος πρὸς χρῆσιν τῶν τε τραπεζιτῶν καὶ τῶν ἐμπόρων προσεθέσαμεν πινάκια συναλλαγῶν τῶν κυριωτέρων ἐμπορικῶν πόλεων, ὡς καὶ πινάκια δεικνύοντα τὸ πληρωθησόμενον τέλος χαρτοσήμου ἐπὶ τῶν ἐμπορικῶν γραμματίων.

Σκοπὸς λοιπὸν τοῦ ἡμετέρου πονήματος εἶναι νὰ χορηγήσωμεν τῷ σπουδαστῇ ὅσον τὸ δυνατόν ἀκριβεῆς γνώσεις πασῶν τῶν ἐμπορικῶν καὶ τραπεζιτικῶν ἐργασιῶν, ἐξαιρουμένων τῶν τοῦ χρηματιστηρίου πράξεων, ὡς καὶ τῶν περὶ χρυσῶν καὶ ἀργυρῶν ὑλῶν, ὧν τὸν μηχανισμόν θέλομεν σπουδάζει ἐν ἰδιαιτέροις συγγράμμασι. Τοιοῦτου δ' ὄντος τοῦ σκοποῦ ὃν προϋθετέμεθα, νομίζομεν ὅτι τὸ διὰ πρώτην ἤδη

φορὰν εἰς τὴν γλῶσσάν μας ἐκδιδόμενον τοῦτο βιβλίον, ἀναπληρώσει σπουδαίαν ἑλλειψιν παρ' ἡμῶν, καὶ χρησιμεύσει οὐχὶ μόνον εἰς τὴν μαθητιῶσαν νεολαίαν ἡμῶν, ἀλλὰ καὶ εἰς πάντας τοὺς ἐπαγγελλομένους τὸν ἔμπορον ἢ τὸν τραπεζίτην, εἰς τοὺς ἐμπορικοὺς ὑπαλλήλους, μεσίτας κλ. *

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΚΑΙ ΤΡΟΠΟΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ.

Αἱ ἐμπορικαὶ γνώσεις διδάσκονται ἐν ταῖς Εὐρωπαϊκαῖς Ἐμπορικαῖς Σχολαῖς εἰς τρία ἔτη.

Ἐξασκήσεις εἰς τὴν πρακτικὴν Ἀριθμητικὴν καὶ Στοιχειώδεις γνώσεις τῆς Διπλογραφίας, ἀποτελοῦσι τὰ μαθήματα τοῦ πρώτου ἔτους.

Εἰς τὸ δεύτερον ἔτος διδάσκεται σχεδὸν ὅλον τὸ περιεχόμενον τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου, ὡς καὶ αἱ ἐν γένει ἀρχαὶ καὶ ἐφαρμογαὶ τῆς τε Ἀπλογραφίας καὶ τῆς Διπλογραφίας ἐπὶ παραδειγμάτων.

Ὁ διδάσκων προβάλλει εἰς τοὺς μαθητὰς ἀπ᾽ τῆς ἐξομαχίας ζητήματα ποικίλα σχετιζόμενα μὲ τὰ προηγούμενα μαθήματα. Τὰ ζητήματα ταῦτα δεόν νὰ λύωνται ὑπὸ τῶν μαθητῶν ἐπὶ παρουσίᾳ τοῦ διδάσκοντος. Διὰ τῆς συχνῆς καὶ ἐπιτυχοῦς λύσεως τῶν ἐκάστοτε προτεινομένων ζητημάτων, οἱ σπουδασταὶ οὐ μόνον γίνονται κάτοχοι τῶν ὅσων ἀναγινώσκουσιν ἢ διδάσκονται, ἀλλ' ἐξασκοῦνται καὶ εἰς τὴν εὐχερῆ σύνταξιν τῶν διαφορῶν λ/σμῶν καὶ τὴν ἐκ τοῦ προχείρου κατάστρωσιν, μετὰ τῆς ἀπαιτουμένης τάξεως καὶ ἀκριβείας, τῶν διαφορῶν τύπων τιμολογίων, συναλλαγματικῶν, γραμματιολογίων, ἀμφιβαρῶν τοκοφόρων λ/σμῶν κτλ. κτλ.

* ΣΗΜ. Ἐν τῷ κεφαλαίῳ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΥΝΤΕΤΜΗΜΕΝΑΙ κατὰ τὴν μετατροπὴν τῶν Γράσειων Μεταλλικῶν Πενταρίων καὶ Ἑξαρίων εἰς λίρας καὶ τὰν ἀπαλιν, ὑπελόγησamen ἐπὶ τῶν τιμῶν τῆς ἐποχῆς, καθ' ἣν τὸ βιβλίον ἦν ὑπὸ τὰ πιστήρια· ἀλλ' ἐπειδὴ μετὰ ταῦτα, Αὐτοκρατορικῶς Διατάγματι, ἐπῆλθεν ὑποτίμησις εἰς τὰ νομίσματα ταῦτα, ὁ σπουδαστὴς δύναται νὰ ἀντικταστήσῃ τὰς τιμὰς ἐκεῖνας διὰ τῶν ἡμερησίων.

Ἐν τῷ τρίτῳ ἔτει διδάσκονται τὰ ἑξῆς :

α'. Λ/σμοὶ Μετοχικῆς ἑταιρείας. (Θεωρία καὶ ἐφαρμογὴ τῆς Διπλο-
γραφικῆς καταστιχώσεως τῶν ἐγγραφῶν, τῆς τε ἀπλῆς μετοχικῆς ἑται-
ρείας ὡς καὶ τῆς μετὰ τῶν ἑταίρων.) Ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιπτώσει
γίνεται χρῆσις τῆς μεθόδου ἐν ἣ αἱ ὑπὸ τῶν συνεταίρων γινόμεναι πρά-
ξεις ἀπερνῶνται δι' ἀπλῆς τινος ἐγγραφῆς, καλουμένης μοιρομεροῦς
(*borgne*) εἰς τὴν χρέωσιν ἢ εἰς τὴν πίστωσιν κατὰ τὰς περιστάσεις.

Μετοχικοὶ λ/σμοὶ Τραπεζῆς.

β'. Γενικαὶ γνώσεις ἐπὶ διαφορῶν λ/σμῶν τοῦ τε Ἐμπορίου καὶ τῆς
Τραπεζῆς μετὰ καὶ ἐφαρμογῶν αὐτῶν.

γ'. Ἀντιπληρωμαὶ (*remboursements*).

δ'. Ἀνανέωσις συμβολαίου δανείου (*renouvellement*).

ε'. Θεωρία καὶ πράξεις Διπλογραφίας ἐφηρμοσμένης εἰς τὴν Τράπεζαν.

στ'. Ἀσφάλεια ἐν γένει ναυσιβλαβία, ἐπαλήθευσις ναυσιβλαβίας,
βαθμολογία ναυσιβλαβίας, εἰρμοὶ ναυσιβλαβίας (*series*), ἐγκατάλειψις,
ἀπαλλαγή (*franchise*), κανονισμὸς ναυσιβλαβιῶν κτλ. κτλ.

ζ'. Χρυσαῖ καὶ ἀργυραῖ ὕλαι πάντων τῶν κρατῶν, καὶ ἀντιπαραβο-
λαὶ ἐπ' αὐτῶν.

η'. Θεωρία χρηματιστηρίου, μετοχαὶ (*obligations*), θεσμοὶ χρημα-
τιστηρίου, πράξεις χρηματιστηρίου ἥτοι ἀγορασταὶ εἰς, μεσαίαν τιμὴν
(*marchés au cours moyen*), ἀγορασταὶ τοῖς μετρητοῖς (*marchés au comptant*), ἀγορασταὶ ὑπὸ προθεσμίαν, μεταφοραὶ πληρώνοντος
τοῦ πωλητοῦ (*reports*), μεταφοραὶ πληρώνοντος τοῦ ἀγοραστοῦ (*de-
ports*), μεταφοραὶ ἐπὶ βραδείᾳ (*reports sur prime*), συμψήφισις
(*compensation*), ἐκκαθάρισις (*liquidation*), ἀντιπαραβολαὶ ἐπὶ μετο-
χῶν καὶ χρεωγράφων μὲ συναλλαγὰς συνδυασμένας, διάφοροι συνδυα-
σμοὶ τῆς ἐν τῷ χρηματιστηρίῳ κερδοσκοπίας, χρεώγραφα πάντων τῶν
Κρατῶν κτλ. κτλ.

θ'. Λογάρισμοι, θεωρία συνθέτων τόκων καὶ χρεωλυσίας, πίναξ χρεω-
λυσίας δανείου διὰ μετοχῶν (*emprunt par obligations*).

ι'. Ἰσόβιοι πρόσοδοι (*rentes viagères*), ἀσφάλεια ἐπὶ ζωῆς (*assu-
rances sur la vie*), χρεώγραφα ἀποτίσιμα μετὰ βραδείου διὰ περιο-
δικῶν κληρώσεων.

Κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο, ὅτε τὰ μαθήματα διαρκοῦσιν ἐπὶ δύο ὥρας

καθ' ἑκάστην, οἱ μαθηταὶ ἀποτελοῦντες διαφόρους ἐμπορικοὺς οἴκους,
καταγίνονται ἐπὶ τὴν μίαν ὥραν εἰς πάσας τὰς ἐμπορικὰς ἐργασίας μετα-
χειριζόμενοι τὰ ἀπαιτούμενα βιβλία τοῦ τε Ἐμπορίου καὶ τῆς Τραπε-
ζῆς καθ' ὅλα τὰ Διπλογραφικὰ συστήματα, ὥστε εὐρίσκοντο πράγ-
ματι εἰς ἐμπορικὰ ἢ τραπεζιτικὰ γραφεῖα.

Τοιοῦτον εἶναι τὸ πρόγραμμα τῶν Εὐρωπαϊκῶν Ἐμπορικῶν Σχολῶν
καὶ εὐχόμεθα ὅπως τύχη πληρεστάτης ἐφαρμογῆς καὶ εἰς τὰς ἡμε-
τέρας Ἐμπορικὰς Σχολὰς.

Ἐν Κωνσταντινουπόλει, τῇ 12 Ἰουνίου 1880.

Ὁ συγγραφεὺς

Ι. ΙΑΚΩΒΙΔΗΣ.

Ἦδὲν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν παρὰ πόδας ὑπογραφήν θεωρεῖται κλοπιμαῖον
καὶ καταδιώκεται.

ΣΥΝΤΕΤΜΗΜΕΝΩΝ ΕΞΗΓΗΣΙΣ.

PBfl.	φιορίνιον τῶν Κάτω Χωρῶν.
Rm/ M.	{ ῥάιχσμαρκ, (νέον Μάρκον τοῦ Γερμανικοῦ Κράτους).
4 ⁸ fl.	
	φιορίνιον Αὐστριακόν, (τοῦ νομισματικοῦ τύπου τῶν 45= <i>au pied de 45</i>).
52 1/2 fl.	φιορίνιον Νοτίου Γερμανίας τοῦ νομισματικοῦ τύπου τῶν 52 1/2 = <i>au pied de 52 1/2</i>).
£	λίρα Ἀγγλική.
/S/	γρόσιον Ἰσπανικόν.
/S/ (Δ)	δολλάριον.
Δ. χρ.	δολλάριον χρυσοῦν.
P.	ρούβλιον.
Ρούβλ. α.	ρούβλιον ἀργυροῦν.
Λοθ.	λίρα Ὄθωμανική.
Φρ.	φράγκον.
Τάλ.	τάλληρον.
Γρ.	γρόσιον.
1/M	εἷς μῆν.
2/M	δύο μῆνες.
3/M	τρεῖς μῆνες.
Γρ/α	γραμμᾶτια.
Συναλ/κῆ	συναλλαγματική.
Συναλ/γῆ	συναλλαγή.
Ἐπισυναλ/κῆ	ἐπισυναλλαγματική.
Λ/σμὸς	λογαριασμός.
Ὀκ.	ὀκάς.
Ἡμ.	ἡμέρα.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

ΕΜΠΟΡΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ.

1. Ἀπλοποιήσεις. Πᾶσα μέθοδος σκοποῦσα τὴν ἀπλοποίησιν τῶν δύο τούτων πράξεων, τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως, εἶναι ἐκτενὴς καὶ ἐπίπονος. Καθόσον ἀφορᾷ τὰς πράξεις ταύτας ἡ μόνη ἀπλοποιήσις συνίσταται εἰς τὸ ἀποκτεῖν τὴν λογιστικὴν λεγομένην ικανότητα, πρὸ πάντων εἰς τὴν πρόσθεσιν, διὰ τῆς ἐπιμόνου ἀσκήσεως.

2. Ἡ βάσανος τῶν δύο τούτων ἀριθμητικῶν πράξεων γίνεται εἰς μὲν τὴν πρόσθεσιν διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῶν προστεθησομένων ἀριθμῶν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω· εἰς δὲ τὴν ἀφαιρέσιν διὰ τῆς προσθέσεως τῆς διαφορᾶς εἰς τὸν ἀφαιρετέον.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ.

3. Πρὸς εὐχερῆ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκτέλεσιν πρῶτιστα καὶ μάλιστα ἀπαιτεῖται ἡ ἐκ στήθους ἐκμάθησις τοῦ Πυθαγορικοῦ πίνακος ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 12.

ΠΥΘΑΓΟΡΙΚΟΣ ΠΙΝΑΞ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

4. Απλοποιήσεις. α. Δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν τὸν Πυθαγορικὸν πίνακα μέχρι τοῦ 19, βασιζόμενοι ἐπὶ τοῦ ἐξῆς κανόνα :

Κανὼν. Προσθέτομεν τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον, θέτομεν ἓν μηδενικὸν εἰς τὰ δεξιά τοῦ ἐξαγομένου, εἰς ὃ προσθέτομεν τὸ γινόμενον τῶν δύο ψηφίων τῶν ἀπλῶν μονάδων.

Παράδειγμα. Πολλαπλασιασθήτω ὁ 19 ἐπὶ 18.

$$19 \times 8 = 27 + 0 = 270 + 72 = 342.$$

β'. Ἡς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ., ἔαν τεθῶσι 0, 00, 000 κτλ. μηδενικά εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον· οὕτως

$$1285 \times 1000 = 1285000.$$

γ'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 5 ἔαν θέσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον ἓν 0 καὶ τοῦ γινομένου λάβωμεν τὸ ἥμισυ· διότι $\frac{10}{2} = 5$

$$\text{π. χ. } 872 \times 5 = \frac{8720}{2} = 4360.$$

δ'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $3 \frac{1}{3}$ ἔαν θέσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον ἓν 0 καὶ τοῦ γινομένου λάβωμεν τὸ $\frac{1}{3}$ · διότι $3 \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ οὕτως

$$999 \times 3 \frac{1}{3} = \frac{9990}{3} = 3330.$$

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐπὶ $33 \frac{1}{3}$ — $333 \frac{1}{3}$ — $3333 \frac{1}{3}$ κτλ. προσθέτοντες 00 — 000 — 0000 κτλ.

ε'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 11 ἔαν προσθέσωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς τὸ δεκαπλάσιον αὐτοῦ· διότι $11 = 10 + 1$. π. χ. $872 \times 11 = 8720 + 872 = 9592$.

στ'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 12 ἔαν θέσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον ἓν 0 καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέσωμεν τὸ διπλάσιον αὐτοῦ· διότι $12 = 10 + 2$ · οὕτως

$$872 \times 12 = 8720 + 1744 = 10464.$$

ζ'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $12 \frac{1}{2}$ ἔαν θέσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον δύο 0 καὶ τοῦ γινομένου λάβωμεν τὸ $\frac{1}{2}$ · διότι $12 \frac{1}{2} = \frac{100}{8}$ · οὕτως

$$872 \times 12 \frac{1}{2} = \frac{87200}{8} = 10900.$$

η'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $14 \frac{2}{7}$ ἔαν θέσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον δύο 0 καὶ τοῦ γινομένου λάβωμεν τὸ $\frac{1}{7}$ · διότι $14 \frac{2}{7} = \frac{100}{7}$ · οὕτως

$$875 \times 14 \frac{2}{7} = \frac{87500}{7} = 12500$$

θ'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 15 ἔαν θέσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον ἓν 0 καὶ τοῦ γινομένου λάβωμεν τὸ ἥμισυ, καὶ προσθέσωμεν· διότι $15 = 10 + 5$ · οὕτως

$$872 \times 15 = 8720 + 4360 = 13080.$$

ι'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $16 \frac{2}{3}$ ἔξν τοῦ ἑκατονταπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ-λάβωμεν τὸ $\frac{1}{6}$. διότι $16 \frac{2}{3} = \frac{100}{6}$. οὕτως

$$876 \times 16 \frac{2}{3} = \frac{87600}{6} = 14600.$$

ια'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 25 ἔξν θέσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον δύο 0 καὶ τοῦ σχηματιζομένου γινομένου λάβωμεν τὸ $\frac{1}{4}$. διότι $\frac{100}{4} = 25$. οὕτως

$$872 \times 25 = \frac{87200}{4} = 21800.$$

ιβ'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 35 ἔξν προσθέσωμεν εἰς τὸ ἐπὶ 25 γινόμενον τὸ δεκαπλάσιον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. διότι $35 = 25 + 10$. οὕτως

$$872 \times 35 = \frac{87200}{4} + 8720 = 30520$$

ή ἀκόμη ἔξν πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ 70 καὶ τοῦ γινομένου λάβωμεν τὸ $\frac{1}{2}$. διότι $35 = \frac{70}{2}$.

ιγ'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 45, ἔξν πολλαπλασιάζωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 90 καὶ τοῦ γινομένου λάβωμεν τὸ $\frac{1}{2}$. διότι $45 = \frac{90}{2}$.

ιδ'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 50 ἔξν θέσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον δύο 0 καὶ τοῦ γινομένου λάβωμεν τὸ $\frac{1}{2}$. διότι $50 = \frac{100}{2}$. οὕτως

$$872 \times 50 = \frac{87200}{2} = 43600$$

ιε'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 75 ἔξν θέσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον δύο 0 καὶ ἐκ τοῦ σχηματιζομένου γινομένου ἀφαιρέσωμεν τὸ τέταρτον ἐαυτοῦ. διότι $75 = \frac{1}{4}$ τοῦ 100. οὕτως

$$872 \times 75 = 87200 - 21800 = 65400.$$

ιστ'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 98 ἔξν θέσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον δύο 0 καὶ ἐκ τοῦ γινομένου ἀφαιρέσωμεν τὸ διπλάσιον τοῦ πολλαπλασιαστέου. διότι $98 = 100 - 2$. οὕτως

$$872 \times 98 = 87200 - 1744 = 85456.$$

ιζ'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 99 ἔξν θέσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον δύο 0 καὶ ἐκ τοῦ γινομένου ἀφαιρέσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον. διότι $99 = 100 - 1$. οὕτως

$$872 \times 99 = 87200 - 872 = 86328.$$

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐπὶ 999—9999—99999 κτλ., προσθέτοντες 000—0000—00000 κτλ. καὶ ἐκ τοῦ σχηματιζομένου γινομένου ἀφαιροῦντες ἅπαξ τὸν πολλαπλασιαστέον.

ιη'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 101 ἔξν θέσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον δύο 0 καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον. διότι $101 = 100 + 1$. οὕτως

$$872 \times 101 = 87200 + 872 = 88072.$$

ιβ'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 120—130—140 κτλ. ἔξν προσθέσωμεν εἰς μὲν τὸν πολλαπλασιαστέον πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ 10 τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ 2—3—4 κτλ. εἰς δὲ τὸ ὀλίγον ἄθροισμα ἐν 0. οὕτως

$$1825 \times 120 = 18250 + 3650 = 21900.$$

κ'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 125 ἔξν θέσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον τρία 0 καὶ τοῦ γινομένου λάβωμεν τὸ $\frac{1}{8}$. διότι $125 = \frac{1000}{8}$. οὕτως

$$872 \times 125 = \frac{872000}{8} = 109000.$$

κβ'. Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 225 ἔξν ἀποτυνθέσωμεν αὐτὸν εἰς 125 καὶ 100, καὶ οὕτω προῖδωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.

κβ'. Ὅποταν οἱ παράγοντες λήγωσιν εἰς μηδενικὰ, τότε αὐτὰ παραλείπονται εἰς τὸν ὑπολογισμόν, γράφονται δὲ μόνον εἰς τὰ δεξιά τοῦ γινομένου. οὕτως

$$\begin{aligned} 8720 \times 2400 &= 872 \times 10 \times 24 \times 100 \\ &= 872 \times 24 \times 1000 \\ &= 20928000 \end{aligned}$$

κγ'. Ὅποταν τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ᾧσιν ὅλα τὰ αὐτὰ, πολλαπλασιάσον τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τόσα 9, ὅσα ψηφία περιέχει ὁ πολλαπλασιαστής, καὶ τοῦ γινομένου λάβε τόσον μέρος, καθόσον ἐν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐμπεριέχεται εἰς τὸν 9. οὕτως,

πολλαπλασιασθήτω ὁ 467993 ἐπὶ 6666

4679930000

467993

4679762007

γινόμενον ἐπὶ 9999· οὕτινος λαμβάνομεν τὰ $\frac{2}{3}$ · διότι ὁ 6 εἶναι τὰ $\frac{6}{9}$ ἢ $\frac{2}{3}$ τοῦ 9.

$$\frac{2}{3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} \end{array} \right\} = \begin{array}{r} 559920669 \\ 559920669 \end{array}$$

4449841338 γινόμενον τοῦ 467993 ἐπὶ 6666.

οὕτω λοιπὸν πολλαπλασιάζομεν

ἐπὶ 11-111-1111 κτλ. ἐάν τοῦ ἐπὶ 99-999-9999 κτλ. γινόμεν. λάβωμεν τὸ $\frac{1}{9}$

» 22-222-2222 » » » 99-999-9999 » » » τὰ $\frac{2}{9}$

» 33-333-3333 » » » 99-999-9999 » » » » $\frac{3}{9}$ ἢ $\frac{1}{3}$

καὶ οὕτω καθεξῆς.

κδ'. Πολλαπλασιασθήτω ὁ ἀριθμὸς 678425 ἐπὶ 56447. Ὁ πολλαπλασιασμὸς οὗτος ἐκτελεῖται διὰ τριῶν μόνων μερικῶν γινόμενων ἀντὶ πέντε· διότι ὁ πολλαπλασιαστὴς ἀποσυντίθεται εἰς 56 χιλιάδας, 14 ἑκατοντάδας καὶ 7 μονάδας. Οἱ ἀριθμοὶ 14 καὶ 56 εἶναι καὶ οἱ δύο πολλαπλάσιοι τοῦ 7. Τῷ ὄντι

$$14 = 7 \times 2$$

$$56 = 14 \times 4$$

Κατὰ συνέπειαν ἔχοντες τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 7, εἶνα εὗρωμεν καὶ τὸ ἐπὶ 14, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ πρῶτον μερικὸν γινόμενον ἐπὶ 2· ἀλλὰ τότε τὸ δεύτερον τοῦτο μερικὸν γινόμενον ὃν πραγματικῶς γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 14 δεκάδας, τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιά ψηφίον αὐτοῦ πρέπει νὰ γράφηται ὑπὸ τὰς δεκάδας. Πρὸς εὗρεσιν δὲ τοῦ γινόμενου ἐπὶ 56, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ β'. μερικὸν γινόμενον ἐπὶ 4 καὶ νὰ γράψωμεν τὸ α. πρὸς τὰ δεξιά ψηφίον αὐτοῦ ὑπὸ τὰς χιλιάδας· διότι τὸ γ'. μερικὸν γινόμενον παρίστησι τὸ γινόμενον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἐπὶ 56 χιλιάδας· οὕτως,

678425

56447

4748975

9497950

37991800

38091528475

ΒΑΣΑΝΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

β. Οἱ ἔμποροι ὅπως βεβαιωθῶσιν ἐάν πολλαπλασιασμὸς τις ἐγένετο ἄνευ λάθους καταφεύγουσι πάντοτε εἰς τὴν διὰ τοῦ 9 βάσανον.

Βάσανος διὰ τοῦ 9. Προσθέτομεν τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἀπολύτως θεωρούμενα, διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διὰ τοῦ 9 καὶ τὸ ὑπόλοιπον γράφομεν εἰς μίαν τῶν γωνιῶν σταυροῦ +

Προσθέτομεν ἐπίσης τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀπολύτως θεωρούμενα, διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ 9 καὶ τὸ ὑπόλοιπον γράφομεν εἰς τὴν ἀντίθετον γωνίαν τοῦ σταυροῦ.

Πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο ὑπόλοιπα καὶ εὗρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ γινόμενου, ἀπολύτως θεωρουμένων· τὸν εὗρεθησόμενον ἀριθμὸν γράφομεν εἰς μίαν τῶν ἐτέρων γωνιῶν τοῦ σταυροῦ.

Τὸ αὐτὸ ποιούμεθα καὶ διὰ τὸ γενικὸν γινόμενον· προσθέτομεν δηλ. τὰ ψηφία αὐτοῦ, ἀπολύτως θεωρούμενα, διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ 9. Ἐάν μὲν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἦ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ εὗρεθὲν τρίτον ὑπόλοιπον, ἢ πρᾶξις εἶναι ἀλάνθαστος, εἰ δὲ μὴ, τὸ ἐξαγόμενον εἶναι ἐσφαλμένον καὶ πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἐκ νέου τὸν πολλαπλασιασμόν· οὕτως

678425

56447

4748975

9497950

37991800

38091528475

$$\begin{array}{r} 57 \\ 75 \\ \hline \end{array}$$

α'. Πολλαπλασιαστέος,

6 καὶ 7, 13 πλὴν 9, 4 καὶ 8, 12 πλὴν 9, 3 καὶ 4, 7 καὶ 2, 9 πλὴν 9, 0 καὶ 5, 5 ὑπόλοιπον πολλαπλασιαστέου,

β'. Πολλαπλασιαστής,

5 καὶ 6, 44 πλὴν 9, 2 καὶ 1, 3 καὶ 4, 7 καὶ 7, 14 πλὴν 9, 5 ὑπόλοιπον πολλαπλασιαστοῦ,

Πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο ὑπόλοιπα ἐπ' ἀλλήλα· οὕτως $5 \times 5 = 25$ καὶ λέγομεν 2 καὶ 5 = 7.

γ'. Γινόμενον,

3 καὶ 8, 11 πλὴν 9, 2 καὶ 0, 2 καὶ 9, 11 πλὴν 9, 2 καὶ 1, 3 καὶ 5, 8 καὶ 2, 10 πλὴν 9, 1 καὶ 8, 9 πλὴν 9, 0 καὶ 4, 4 καὶ 7, 11 πλὴν 9, 2 καὶ 5, 7 ὑπόλοιπον γινόμενου.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινόμενου συμφωνεῖ μετὰ τὸν εὐρεθέντα ἀριθμὸν 7, ἄρα ἡ προῆξίς εἶναι ὀρθή.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ.

6. Ἀπλοποιήσεις. α'. Διαίρομεν διὰ 10—100—1000 κτλ. ἐκ παραλείψωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρετής.

β'. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δὲν μεταβάλλεται, ὅποταν πολλαπλασιάζωμεν ἢ διαιρέσωμεν τὸν τε διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, λέγομεν ὅτι τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου ληγόντων εἰς μηδενικὰ, δυνάμεθα νὰ ἐξελείψωμεν ἴσα μηδενικὰ ἐξ ἀμφοτέρων· οὕτως

$$892700000 : 120000 = 89270 : 12 = 7439.$$

γ'. Ὅποταν οἱ δύο ὅροι διαιρέσεως τινος ἔχωσιν ἓνα ἢ πλείους κοινούς παράγοντας, παραλείπομεν αὐτούς· τότε δὲ ἔχομεν δύο ἀριθμούς ἀπλουστερούς, ὧν τὸ πηλίκον θὰ ᾖ τὸ αὐτὸ τῶν δύο πρῶτονθεντων ἀριθμῶν.

Ἐστω ἡ παράστασις,

$$\frac{20 \times 12 \times 12 \times 736}{5 \times 4 \times 21 \times 92} \text{ ἥτις δύναται νὰ τεθῇ καὶ ὑπὸ τὴν ἐξῆς μορφήν}$$

$$\frac{20}{4 \times 5} \times \frac{12}{3 \times 4} \times \frac{12}{2 \times 2} \times \frac{736}{92 \times 8}$$

ἐν ᾗ παραλείποντες τοὺς κοινούς παράγοντας, ἔχομεν τὴν ἀπλουστεράν παράστασιν,

$$\frac{4 \times 3 \times 8}{2}$$

ἢ ἀκόμη διαιρέσει τῶν δύο ὁρῶν διὰ 2,
 $2 \times 3 \times 8 = 48,$
 Τὸ ζητούμενον λοιπὸν πηλίκον εἶναι 48.

δ'. Διαίρομεν διὰ 5 ἐκ διπλασιάζωμεν τὸν διαιρετέον καὶ ἐκ τοῦ γινόμενου παραλείψωμεν ἓν ψηφίον· οὕτως

$$8890 : 5 = \frac{8890 \times 2}{10} = \frac{17780}{10} = 1778.$$

ε'. Διαίρομεν διὰ $12 \frac{1}{2}$ ἐκ πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ 8 καὶ ἀποχωρίζωμεν ἐκ τοῦ γινόμενου δύο ψηφία· οὕτως

$$98900 : 12 \frac{1}{2} = 98900 \times 8 : 100 = \frac{791200}{100} = 7912.$$

στ'. Διαίρομεν διὰ 15 ἐκ διαιρέσωμεν τὸ διπλάσιον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ 10 καὶ τοῦ πηλίκου λάβωμεν τὸ $\frac{1}{3}$ · διότι $15 = \frac{30}{2} = \frac{3 \times 10}{2}$. οὕτως

$$9990 : 15 = \frac{9990 \times 2}{10} : 3 = \frac{1998}{3} = 666.$$

ζ'. Διαίρομεν διὰ 20, 30, 40, 600, 2000 κτλ. ἐκ διαιρέσωμεν μόνον διὰ τοῦ σημαντικοῦ ψηφίου καὶ ἀποχωρίζωμεν ἐκ τοῦ πηλίκου τόσα ψηφία ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης· οὕτως

$$8972 : 40 = \frac{897,2}{4} = 224,3.$$

η'. Διαίρομεν διὰ 25 ἐκ τετραπλασιάζωμεν τὸ ἑκατοστὸν αὐτοῦ· οὕτως

$$2750 : 25 = 27,50 \times 4 = 110$$

θ'. Διαίρομεν διὰ $33 \frac{1}{3}$ ἐκ πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ 3 καὶ διαιρέσωμεν διὰ 100· οὕτως

$$2750 : 33 \frac{1}{3} = \frac{2750 \times 3}{100} = \frac{8250}{100} = 82,50.$$

ι'. Διαίρομεν διὰ 35 ἐκ διπλασιάζωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ 70· διότι $35 = \frac{70}{2}$ οὕτως.

$$3780 : 35 = \frac{3780 \times 2}{70} = \frac{7560}{70} = \frac{756}{7} = 108.$$

ια'. Διαίρομεν διὰ 45 ἐκ διπλασιάζωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 90· διότι $45 = \frac{90}{2}$. οὕτως

$$98190 : 45 = \frac{98190 \times 2}{90} = \frac{196380}{90} = \frac{19638}{9} = 2182$$

ιβ'. Διαιρούμεν διὰ 50 ἐὰν διπλασιάζωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν δι' 100· οὕτως

$$88650 : 50 = \frac{88650 \times 2}{100} = \frac{177300}{100} = 1773.$$

ιγ'. Διαιρούμεν δι' 125 ἐὰν πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ 8 καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ 1000· οὕτως

$$88650 : 125 = \frac{88650 \times 8}{1000} = \frac{709200}{1000} = 709,2.$$

ιδ'. Διαιρεθῆτω 6 2736 διὰ τοῦ 72.

Διαιρούμεν τὸν μὲν 2736 δι' 8, τὸ δὲ πηλίκον δι' 9· διότι $8 \times 9 = 72$. οὕτως

$$2736 : 8 = 342$$

καὶ $342 : 9 = 38$ ζητούμενον πηλίκον.

ιε'. Διαιρούμεν δι' 99 ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον διὰ τοῦ 100, τὸ δ' οὕτως εὑρεθῆσόμενον πηλίκον ἐπίσης διὰ τοῦ 100, καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως οὗ εὑρωμεν ἀριθμὸν ὅσον τὸ δυνατὸν ἀσήμενον, καὶ προσθέσωμεν ὅλα τὰ εὑρεθέντα πηλίκια· οὕτως $92765422 : 9$

$$\begin{array}{r|l} 927654 & 22 \\ 9276 & 5422 \\ 92 & 765422 \\ 0, & 92765422 \\ 0, & 0092765422 \\ \hline 937024 & 4644 \end{array}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁμοιοτρόπως ἐκτελεῖται πᾶσα διαίρεσις δι' ἀριθμοῦ συγχευμένου ἐξ οἰουδήποτε ἀριθμοῦ τῶν χαρακτῆρων 9, ὡς 999, 9999, 99999 κτλ.

ΒΑΣΑΝΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

7. Διὰ τοῦ 9.

Ὅποταν διαίρεσις τις δὲν καταλείπη ὑπόλοιπον, τότε διὰ τὴν ἐπαλήθευσιν τῆς πράξεως ποιούμεθα χρῆσιν τῆς διὰ τοῦ 9 βασάνου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τῶν δύο ὁρῶν, τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου, καὶ ἐπὶ τοῦ πηλίκου.

Ἐὰν δὲ ἡ διαίρεσις καταλείπη ὑπόλοιπον, ἀφαιρούμεν αὐτὸ ἀπὸ

τὸν διαιρετέον· ἡ διαφορά θὰ ᾖ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον· οὕτως

$$\begin{array}{r|l} 97.8.4. & 16 \\ 18 & 644 \\ 24 & \\ \hline & 8 \text{ ὑπόλοιπον.} \end{array}$$

Βάσανος.

$$\begin{array}{r} 9784 \\ - 8 \\ \hline 9776 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 614 \\ 46 \\ \hline 3666 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 614 \\ 9776 \end{array}$$

$$\text{γινόμενου} = \frac{82}{27}$$

α.) 6 καὶ 1, 7 καὶ 1, 8

β.) 1 καὶ 6, 7

γ.) 9 καὶ 7, 16 πλὴν 9, 7 καὶ 7, 14 πλὴν 9, 5 καὶ 6, 11 πλὴν 9, 2

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

8. Κατὰ α'. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν τὰ μέρη ποσοῦ τινος, διαιρεῖ καὶ ὁλόκληρον τὸ ποσόν.

Κατὰ β'. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν τὸ ἄθροισμα καὶ ἓν τῶν μερῶν ποσοῦ τινος, διαιρεῖ καὶ τὸ ἕτερον μέρος αὐτοῦ.

Κατὰ γ'. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν ἓν τῶν μερῶν ποσοῦ τινος χωρὶς νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἕτερον, δὲν δύναται νὰ διαιρέσῃ καὶ τὸ ποσόν.

9 Διὰ τοῦ 2, ἀριθμὸς τις διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, ἐν ᾗ ἔναι ἄρτιος οὕτως $872 : 2 = 436$ καὶ $870 : 2 = 435$

10. Διὰ τοῦ 5, πᾶς ἀριθμὸς καταλήγων εἰς 0 ἢ εἰς 5· οὕτως $870 : 5 = 174$ καὶ $875 : 5 = 175$.

11. Διὰ τοῦ 4, πᾶς ἀριθμὸς καταλήγων εἰς δύο μηδενικά ἢ πᾶς

ἀριθμὸς οὐτινος τὰ δύο τελευταῖα ψηφία ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4· π. χ. ἔστω δὲ 87232 διὰ 4 ἀποχωρίζοντες τὰ δύο τελευταῖα ψηφία ἔχομεν

$$87232 - 87200 + 32.$$

Τὸ α'. μέρος 87200 διαιρεῖται διὰ 4· ἐν λειπὸν διαιρῆται καὶ τὸ β'. μέρος 32 διὰ 4, ὁλόκληρος· ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 4. Καὶ τῷ ὄντι δὲ 87232 διαιρεῖται διὰ 4, καθόσον δὲ 32 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4.

12. Διὰ τοῦ 25, πᾶς ἀριθμὸς κατὰλήγων εἰς 25, 50, 75 ἢ εἰς δύο 0.

13. Διὰ τοῦ 8 καὶ 125, πᾶς ἀριθμὸς κατὰλήγων εἰς τρία 0 ἢ πᾶς ἀριθμὸς οὐτινος τὰ τρία τελευταῖα ψηφία ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν δι' 8 ἢ 125. Ἐστω δὲ ἀριθμὸς 76324,

ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἀποσυντίθεται εἰς 76000 + 324,

ὁ 76000 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 8,

ὁ 324 εἶναι ἐπίσης διαιρετὸς διὰ τοῦ 8,

ἔρα δὲ δοθεὶς ἀριθμὸς 76324 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 8.

Ἐστω δὲ ἀριθμὸς 872250 ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ τοῦ 125, καθόσον καὶ τὰ δύο μέρη 872000 καὶ 250 εἶναι διαιρετὰ δι' 125.

14. Διὰ τοῦ 9, πᾶς ἀριθμὸς, οὐτινος τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων, ἀπολύτως θεωρουμένων, διαιρεῖται διὰ 9· οὕτως δὲ 2439 εἶναι διαιρετὸς διὰ 9· διότι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ψηφίων τοῦ (2+4+3+9) 18 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 9.

15. Διὰ τοῦ 3, πᾶς ἀριθμὸς, οὐτινος τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων, ἀπολύτως θεωρουμένων, διαιρεῖται διὰ 3. Οὕτως δὲ 432 διαιρεῖται διὰ 3· διότι 4+3+2 = 9 ὅπερ εἶναι διαιρετὸν διὰ 3.

16. Διὰ τοῦ 11, πᾶς ἀριθμὸς, οὐτινος τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς περιττῆς ἀπὸ τῆς δεξιᾶς τάξεως ἐλαττωθὲν διὰ τοῦ ἄθροισματος τῶν ψηφίων τῆς ἀρτίας τάξεως, διαιρεῖται διὰ 11.

Ἐστω δὲ ἀριθμὸς 282438

$$8+4+8=20 \text{ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς περιττῆς τάξεως,}$$

$$3+2+2=9 \text{ " " " " ἀρτίας " }$$

καὶ 20—9 = 11, ὅπερ διαιρεῖται διὰ 11· ἔρα καὶ ὁ προταθεὶς ἀριθμὸς 282438 διαιρεῖται διὰ τοῦ 11.

17. Εἰς τούτους τοὺς θεμελιώδεις χαρακτηριστῆρας τῆς διαιρετότητος δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν καὶ τοὺς ἐξῆς πέντε:

1 ^ο	Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 6 ἐν διαιρῆται διὰ 2 καὶ 3,
2 ^ο	" " " " 15 " " " 3 " 5,
3 ^ο	" " " " 48 " " " 2 " 9,
4 ^ο	" " " " 33 " " " 3 " 11,
5 ^ο	" " " " 45 " " " 5 " 9.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΠΡΩΤΟΤΥΠΟΥΣ ΑΥΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ.

Ἀριθμοὶ πρῶτοι.—Ἀριθμοὶ πρῶτοι μεταξύ των.

18. Ἀριθμὸς τις λέγεται πρῶτος, ὅταν δὲν ἔχη ἄλλον διαιρέτην εἰμὴ τὸν ἑαυτὸν τοῦ καὶ τὴν μονάδα· ὡς

3, 7, 13, 49.

19. Δύο ἀριθμοὶ λέγονται πρῶτοι μεταξύ των, ὅταν δὲν ἔχωσιν ἄλλον διαιρέτην εἰμὴ τὴν μονάδα· ὡς

12 καὶ 17 6 καὶ 11.

20. Ἵνα ἀναλύσωμεν διδομένον τινα ἀριθμὸν εἰς τοὺς πρῶτους αὐτοῦ παράγοντας, ἀκολουθοῦμεν τὸν ἐξῆς κανόνα:

Κανὼν. Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν δι' ἐκάστου τῶν πρῶτων ἀριθμῶν ὑψημένων κατὰ φυσικὴν αὐτῶν σειρὰν ἕως οὗ ἡ διαίρεσις δώσῃ διὰ πηλίκον τὴν μονάδα· ἐν δὲ τὸ μετὰ τὴν διὰ τινος πρῶτου ἀριθμοῦ διαίρεσιν πηλίκον δὲν διαιρῆθῃ διὰ τοῦ κατόπιν πρωτοτύπου, τότε ἀρίνομεν αὐτὸν, καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀκολουθοῦ τοῦ.

Παράδειγμα.

145800	2
72900	2
36450	2
18225	3
6075	3
2025	3
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

Οἱ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς καθέτου κείμενοι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι· δύ-
ναι δὲ νὰ γραφῶσιν ὑπὸ τὴν ἐξῆς μορφήν:

$$145800 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

ἢ

$$145800 = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^2.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οἱ ἀριθμοὶ 3, 6 καὶ 2 οἱ πρὸς τὰ ἄνω τῶν πρῶ-
των ἀριθμῶν εὐρισκόμενοι καλοῦνται ἐκθέται.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ.

21. Ἀριθμὸς τις διαιρετὸς διὰ πολλῶν ἄλλων καλεῖται *κοινὸν πολλαπλάσιον*.

Τὸ μικρότερον ὅλων τῶν κοινῶν πολλαπλασίων λέγεται *ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον*.

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον πολλῶν ἀριθμῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν πρῶτων παραγόντων τῶν ἀριθμῶν τούτων μὲ τοὺς μεγαλητέρους αὐτῶν ἐκθέτας.

22. Ζητεῖται τὸ ἀπλούστερον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 360, 336 καὶ 900.

360	336	900	2
180	168	450	2
90	84	225	2
45	42	75	2
15	21	25	3
5	7	5	3
1	1	1	5

τὸ ἀπλούστερον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ.

23. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν δύο ἄλλους καλεῖται *κοινὸς διαιρέτης*. Ὁ μεγαλήτερος τῶν κοινῶν διαιρετῶν δύο ἢ πλειόνων ἀριθμῶν λέγε-
ται *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης*.

24. Πρὸς εὑρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν ἀκο-
λουθοῦμεν τὸν ἐξῆς κανόνα:

Κανὼν. Διαιροῦμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ μικροτέρου,
καὶ ἐὰν μὲν ἡ διαίρεσις δὲν ἀφίγη κατ'ἀλοιπον, ὁ μικρότερος ἀριθμὸς

εἶναι ὁ μ. κ. δ., εἰ δὲ μὴ, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου
καὶ οὕτω καθ'ἐξῆς· διαιροῦμεν ἕκαστον διαιρέτην διὰ τοῦ ἀντιστοι-
χοῦντος ὑπολοίπου, ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς διαίρεσιν ἄνευ καταλοίπου·
τότε δὲ ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶναι ὁ μ. κ. δ.

Ὅσκις εὐρίσκωμεν 1 δι' ὑπόλοιπον, λέγομεν ὅτι οἱ δεδομένοι
ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐστῶσαν οἱ ἀριθμοὶ 496 καὶ 68.

$$\begin{array}{r|l} 496 & 7 \overline{) 3 \overline{) 2 \overline{) 2}} \\ 20 \overline{) 68} & 8 \overline{) 4} \\ \hline & 4 \overline{) 0} \end{array}$$

ὁ ζητούμενος μ. κ. δ. εἶναι 4.

25. Πρὸς εὑρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πλειόνων ἀριθμῶν
ποιούμεθα χρῆσιν τοῦ ἐξῆς κανόνος:

Κανὼν. Κατατάσσωμεν αὐτοὺς κατὰ τῆς μεγέθους ἀυξανομένην·
ζητοῦμεν κατ' ἀρχῆς τὸν μ. κ. δ. τῶν δύο μικροτέρων ἀριθμῶν, ἔ-
πειτα τοῦ εὑρεθέντος μ. κ. δ. καὶ τοῦ τρίτου ἀριθμοῦ, μετὰ ταῦτα
τοῦ εὑρεθέντος μ. κ. δ. καὶ τοῦ τετάρτου, καὶ οὕτω καθ'ἐξῆς· ὁ τε-
λευταῖος μ. κ. δ. θὰ ᾖ ὁ ζητούμενος μ. κ. δ.

Ἐστῶσαν οἱ ἀριθμοὶ 504, 756, 1260 καὶ 2038.

$$\begin{array}{r|l} 756 & 4 \overline{) 2} \\ 252 \overline{) 504} & 2 \overline{) 252} \\ \hline & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1260 & 5 \\ 0 \overline{) 252} & 2 \overline{) 252} \\ \hline & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2038 & 8 \overline{) 6} \\ 42 \overline{) 252} & 6 \overline{) 42} \\ \hline & 0 \end{array}$$

252 εἶναι ὁ μ. κ. δ. 252 εἶναι ὁ μ. κ. δ. 42 εἶναι ὁ μ. κ. δ.
τῶν 504 καὶ 756 τῶν 504, 756, καὶ 1260 τῶν 504, 756, 1260, καὶ 2038.

ΠΕΡΙ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

26. Κλάσμα ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς καλεῖται ὁ συγκεκριμένος ἀπὸ
ἐν ἢ πλείονα ἴσα μέρη μονάδος.

Εἰς παράστασιν κλάσματός τινος χρῶμεθα δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν,
καλουμένων ὁρων τοῦ κλάσματος· τοῦ παρονομαστοῦ, ἐκφράζοντος τὰ
μέρη εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ μονάς, καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ, παριστῶντος τὸν

ἀριθμὸν ὅστις ἐλήφθη ἐκ τῶν μερῶν. Γράφονται δὲ ὁ μὲν ἀριθμητὴς ἄνωθεν, ὁ δὲ παρονομαστὴς κάτωθεν ὀρίζοντι γραμμῇ· ὡς $\frac{5}{6}$.

27. Κλάσμα ἔχον τὸν ἀριθμητὴν μικρότερον τοῦ παρονομαστοῦ του καλεῖται γνήσιον· ὡς $\frac{3}{4}$,

28. Κλάσμα, οὗτινος ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ του, λέγεται νόθον ἢ καταχρηστικόν· ὡς $\frac{5}{2}$.

29. Ὅποτεν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματός τινος ἢ ἴσος τῷ παρονομαστῇ, τὸ κλάσμα ἰσοφαρίζει μιᾷ ἀκεραίᾳ μονάδι· ὡς $\frac{7}{7} = 1$.

30. Κλάσμα συγκείμενον ἀπὸ ἀκεραίας καὶ κλασματικῆς μονάδας καλεῖται μικτόν· ὡς $3 \frac{5}{9}$.

31. Κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν λέγονται ὁμώνυμα· ἑτερώνυμα δὲ τὰ διέφορον παρονομαστὴν ἔχοντα· οὕτως

$$\frac{3}{5} \text{ καὶ } \frac{4}{5} \text{ εἰσὶ κλάσματα ὁμώνυμα}$$

$$\frac{3}{8} \text{ καὶ } \frac{7}{9} \text{ » » ἑτερώνυμα.}$$

32. Ἐκ τοῦ ὀρισμοῦ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν πορίζομεθα τὰ ἑξῆς:

1^ο. Ἐκ δύο ὁμώνυμων κλασμάτων τὸ μεγαλύτερον ἀριθμητὴν ἔχον εἶναι μεγαλύτερον· ὡς τῶν κλασμάτων $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{4}{6}$ μεγαλύτερον εἶναι τὸ $\frac{5}{6}$ · καθόσον ὁ ἀριθμητὴς του 5 εἶναι μείζων τοῦ ἄλλου.

2^ο. Ἐκ δύο κλασμάτων τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν ἔχόντων, τὸ μικρότερον παρονομαστὴν ἔχον εἶναι μεγαλύτερον· ὡς $\frac{8}{15}$ καὶ $\frac{8}{11}$ · τὸ $\frac{8}{11}$ εἶναι μείζων ἢ τὸ $\frac{8}{15}$ · καθόσον ὁ παρονομαστής του 11 εἶναι μείων ἢ 15.

Ἀρχαὶ τῶν κλασμάτων.

33. 1^ο. Πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ ἀριθμητοῦ κλάσματός τινος διὰ τινος ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα ὁλόκληρον πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται δι' αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ· οὕτως

$$\frac{4}{9} \times 8 = \frac{4 \times 8}{9} \text{ ὅπερ εἶναι 8κις μείζων ἢ τὸ } \frac{4}{9},$$

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{4 : 2}{5} \text{ » » τὸ } 1/2 \text{ τοῦ } \frac{4}{5}.$$

2^ο. Πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ παρονομαστοῦ κλάσματός τινος διὰ τινος ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα ὁλόκληρον διαιρεῖται ἢ πολλαπλασιάζεται ἐπ' αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν· οὕτως

$$\frac{4}{7} \text{ ἐπὶ } 6 = \frac{4}{7 \times 6} \text{ ὅπερ εἶναι 6κις μείων ἢ τὸ } \frac{4}{7}.$$

$$\frac{4}{10} \text{ διὰ } 5 = \frac{4}{10 : 5} \text{ » » 5κις μείζων ἢ τὸ } \frac{4}{10}.$$

3^ο. Ἡ τιμὴ κλάσματός τινος δὲν μεταβάλλεται, ὅποτεν πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν οἱ ὅροι αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ οὕτως

$$\frac{4}{6} \times 2 = \frac{4 \times 2}{6 \times 2} \text{ ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ } \frac{4}{6}.$$

$$\frac{4}{6} : 2 = \frac{4 : 2}{6 : 2} \text{ » » » » } \frac{4}{6}.$$

ΤΡΟΠΗ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΕΙΣ ΚΛΑΣΜΑ ΚΑΙ ΤΑΝΑΠΑΛΙΝ.

34. Ἀκέραιος τρέπεται εἰς κλάσμα, ἐὰν θέσωμεν ὑπ' αὐτὸν τὴν μονάδα ὡς παρονομαστὴν· ὡς $22 = \frac{22}{1}$, ἢ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ συγχρόνως διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· ὡς

$$9 = \frac{9 \cdot 3}{3} = \frac{27}{3}$$

35. Κλάσμα τρέπεται εἰς ἀκέραιον, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· οὕτως $\frac{18}{3} = 6$. Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς δὲν διαιρῇται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς μικτόν ἀριθμόν· οὕτως,

$$\frac{22}{7} = 3 \frac{1}{7}$$

36 Μικτὸν κλάσμα τρέπεται εἰς νόθον, ἔκν πολλαπλασιάζωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν, εἰς τὸ οὕτω γινόμενον προσθέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα θέσωμεν τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος· οὕτως

$$3 \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 4}{5} = \frac{15 + 4}{5} = \frac{19}{5}$$

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΙΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

37. Ἵνα ἀπλοποιήσωμεν κλάσμα τι, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου· τὴν τήν δὲ οἱ δύο ὅροι θὰ ᾖσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ τὸ κλάσμα θὰ ᾖ ἀπλούστερον, καθόσον ἀποδεικνύεται ὅτι κλάσμα, οὔτενος οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι ἀνάγνωστον.

Ἐστω τὸ κλάσμα $\frac{13794}{23958}$

	1	1	2	4	4
23958	13794	10164	3630	2904	726
10164	3630	2904	726	0	

Οὕτω, ἔχοντες τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην 726, πρὸς εὑρεσιν κλάσματος ἰσοδυνάμου τῷ $\frac{13794}{23958}$ διαιροῦμεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ 726, καὶ εὐρίσκομεν

$$\frac{19}{33} \text{ κλάσμα ἰσοδυναμοῦν τῷ } \frac{13794}{23958}$$

ΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ Εἰς Τὸν Αὐτὸν Παρονομαστήν.

38 Ἵνα συγκρίνωμεν τὴν ἀξίαν δύο κλασμάτων, φέρομεν αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· τότε δὲ τὸ μεγαλύτερον ἀριθμητὴν ἔχον κλάσμα θὰ ᾖ ἔχῃ ἀξίαν μεγαλειτέραν.

Κατ'ὴν. Δύο κλάσματα ἄγονται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἔκν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὅροι τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ δευτέρου καὶ οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ πρώτου· οὕτω

$$\frac{5}{7} \text{ καὶ } \frac{8}{9} \text{ δίδουσι } \frac{5 \cdot 9}{7 \cdot 9} \text{ καὶ } \frac{8 \cdot 7}{9 \cdot 7} \text{ ἢ } \frac{45}{63} \text{ καὶ } \frac{56}{63}$$

Κατ'ὴν. Κλάσματα πλείω τῶν δύο ἄγονται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἔκν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὅροι ἐκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν πλὴν τοῦ ἰδικοῦ του·

οὕτω	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{1}{4} =$	$\frac{1 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 5} =$	$\frac{135}{540}$		
$\frac{1}{9} =$	$\frac{1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 5} =$	$\frac{60}{540}$		
$\frac{2}{3} =$	$\frac{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 5}{4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 5} =$	$\frac{360}{540}$		
$\frac{3}{5} =$	$\frac{3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 3}{4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 5} =$	$\frac{324}{540}$		

39 Ὅποτεν ὁ μεγαλύτερος παρονομαστής διαιρῆται ἀκριβῶς δι' ἐκάστου τῶν παρονομαστῶν, χρώμεθα αὐτοῦ ὡς ἀπλουστέρου πολλαπλασίον· οὕτω,

Κλάσματα προθαθέντα	Πηλίκον τοῦ 12 δι' ἐκάστου παρονομαστοῦ	Ἀποτελέσματα
$\frac{1}{2}$	6	$\frac{6}{12}$
$\frac{2}{3}$	4	$\frac{8}{12}$
$\frac{4}{6}$	2	$\frac{8}{12}$
$\frac{5}{12}$	1	$\frac{5}{12}$

40. Ἐστωσαν ἔτι τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$$

Ἐπειδὴ ἐν αὐτοῖς ὁ παρονομαστής δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, λαμβάνομεν ὡς ἀπλούστερον πολλαπλάσιον τὸν 30, ὡς δυνάμενον νὰ διαιρεθῇ δι' ὅλων τῶν παρονομαστῶν· καὶ εὐρίσκομεν,

$$\frac{10}{30}, \frac{24}{30}, \frac{25}{30}.$$

Πρόσθεσις κλασμάτων.

41. Ἐπειδὴ ποσὰ ἑτεροειδῆ δὲν εἶναι ἐπιδεκτικὰ προσθέσεως, διὰ τοῦτο προσθέτομεν δύο ἢ πλείω κλάσματα, ἔκν, ἄγοντες αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς των, παρονομαστήν ὑπογράφοντες εἰς τὸ ἄθροισμα τὸν κοινὸν παρονομαστήν· οὕτω

$$\frac{5}{8} + \frac{5}{9} = \frac{27}{72} + \frac{40}{72} = \frac{27+40}{72} = \frac{67}{72}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κλάσμα προστίθεται εἰς ἀκέραιον, ἐάν γραφῇ πλη-
σίον τοῦ ἀκεραίου ἄνευ οὐδενὸς σημείου· οὕτω $12 + \frac{2}{3} = 12 \frac{2}{3}$.

42. Ἐάν ὑπάρχωσι μικτὰ κλάσματα, προσθέτομεν τὰ κλάσματα,
ἐξέχομεν τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτῶν, ἐάν ὑπάρχη, καὶ τὸ προσθέτομεν
εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ δοθέντος κλάσματος· οὕτω

$$19 \frac{4}{5} + \frac{46}{45}$$

$$\alpha'). \frac{4}{5} + \frac{46}{45} = \frac{42+46}{45} = \frac{28}{15} = 1 \frac{13}{15}$$

$$\beta'). 19 + 1 \frac{13}{15} = 20 \frac{13}{15} \text{ ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.}$$

Ἀφαιρέσεις κλασμάτων.

43. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα τι ἀπὸ ἕτερον, καθιστῶμεν καὶ
τὰ δύο ὁμώνυμα ὡς εἰς τὴν πρόσθεσιν, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν
ἐπὶ τῶν ἀριθμητῶν· οὕτω

$$\frac{4}{7} - \frac{5}{11} = \frac{44-35}{77} = \frac{9}{77}$$

44. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζο-
μεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος, ἀφαιροῦμεν
ἐκ τοῦ γινομένου τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὴν δια-
φορὰν ὑπογράφομεν παρονομαστήν, τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσμα-
τος· οὕτω

$$29 - \frac{6}{7} = \frac{203-6}{7} = \frac{197}{7}$$

45. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν κλάσμα ἀπὸ ἕτερον μικτὸν, δι-
κρίνομεν πᾶς ἐξῆς δύο περιπτώσεις:

1^η τὸ ἀφαιρετέον κλάσμα εἶναι μικρότερον τοῦ μειωτέου,

2^η » » » » μεγαλύτερον » »

Ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ ἀκέραιον ἀπὸ
ἀκέραιον καὶ κλάσμα ἀπὸ κλάσμα· οὕτω

$$16 \frac{3}{4} - 11 \frac{5}{12}$$

$$16 - 11 = 5$$

$$\text{καὶ } \frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{24}{52} \text{ ὅθεν}$$

$$16 \frac{3}{4} - 11 \frac{5}{12} = 5 \frac{24}{52}$$

Ἐν δὲ τῇ δευτέρῃ, προσθέτομεν εἰς μὲν τὸ μειωτέον κλάσμα τὸν
κοινὸν παρονομαστήν, εἰς δὲ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀφαιρετέου μικτοῦ,
μίαν μονάδα· οὕτω

$$16 \frac{3}{4} - 11 \frac{5}{12}$$

$$\eta \ 16 \frac{20}{52} - 11 \frac{39}{52} = 16 \frac{20+52}{52} - (11+1) \frac{39}{52} = 16 \frac{72}{52} - 12 \frac{39}{52} = 4 \frac{33}{52}$$

Πολλαπλασιασμός κλασμάτων.

46. Κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον καὶ πάλιν, ἐάν
πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ
ὑπὸ τὸ γινόμενον τεθῇ ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος· οὕτω

$$5 \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\text{καὶ } \frac{4}{9} \times 8 = \frac{4 \times 8}{9} = \frac{32}{9}$$

47. Κλάσματα πολλαπλασιάζονται ἐπ' ἀλλήλα, ἐάν πολλαπλασιασθῇ
ἀριθμητὴς ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστής ἐπὶ παρονομαστήν· οὕτω

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{3 \times 5}{4 \times 9} = \frac{15}{36}$$

Ὅποτεν ὁ εἰς τῶν παραγόντων ἢ καὶ οἱ δύο ᾖναι μικτοὶ ἀριθμοί,
τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς· οὕτω

$$5 \times 3 \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3 \times 3 \times 2}{3} = 5 \times \frac{11}{3} = \frac{5 \times 11}{3} = \frac{55}{3}$$

$$\text{καὶ } 3 \frac{1}{2} \times 2 \frac{3}{4} = \frac{7}{2} \times \frac{11}{4} = \frac{7 \times 11}{2 \times 4} = \frac{77}{8}$$

Διαιρέσεις κλασμάτων.

48. Εἰς τὴν διαιρέσιν τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν διακρίνομεν τρεῖς
περιπτώσεις,

1^ο Διαίρεσιν κλάσματος διὰ κλάσματος,

2^ο „ „ δι' ἀκεραίου,

3^ο „ ἀκεραίου διὰ κλάσματος.

1^ο Ὡς διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφουμεν τοὺς ὁροὺς τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν τὰ κλάσματα ἐπ' ἀλλήλα· οὕτω

$$\frac{5}{8} : \frac{2}{4} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{2} = \frac{5 \times 4}{8 \times 2} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}.$$

2^ο καὶ 3^ο. Ὡς διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου καὶ τὰν ἀπάλιν, μετατρέπομεν τὸν ἀκέραιον διαιρέτην ἢ διαιρέτην, εἰς κλάσμα ἔχον διὰ παρονομαστήν τὴν μονάδα· τότε δ' ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος· οὕτω

$$6 : \frac{2}{3} = \frac{6}{1} : \frac{2}{3} = \frac{6}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{6 \times 3}{1 \times 2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$\frac{5}{6} : 9 = \frac{5}{6} : \frac{9}{1} = \frac{5}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{5 \times 1}{6 \times 9} = \frac{5}{54}$$

49. Ἡ διαίρεσις τῶν μικτῶν ἀριθμῶν οὐδεμίαν παρουσιάζει δυσκολίαν· καθόσον τρεπομένων αὐτῶν εἰς κλασματικούς, εὐρίσκομεν μίαν τῶν προτεθεισῶν περιπτώσεων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ διαιρέτης ἐκφράζει πάντοτε τὸ αὐτὸ εἶδος τῆς μονάδος ὅπερ καὶ τὸ ζητούμενον.

ΠΕΡΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

50. Δεκαδικὰ κλάσματα λέγονται κλάσματα ἔχοντα διὰ παρονομαστήν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπ' ὅσωνδήποτε 0.

$$\text{ὥς } \frac{6}{10}, \frac{7}{100}, \frac{12}{1000}.$$

51. Μικτὰ δεκαδικὰ κλάσματα καλοῦνται τὰ ἀπὸ ἀκέραιον καὶ δεκαδικὸν κλάσμα συγκείμενα· ὥς 6,92 ὅπερ ἰσοῦται μὲ

$$6 + \frac{9}{10} + \frac{2}{100} = 6 + \frac{90}{100} + \frac{2}{100} = 6 + \frac{92}{100} = 6 \frac{92}{100}$$

Ὅσῳκις λείψῃ τὸ ἀκέραιον μέρος, θέτομεν ἐν 0· οὕτω 0,36.

Ἀγωγή τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

52. Κατ' αὐτὸν. Ὡς τρέψωμεν ἑτερονόμους δεκαδικούς κλασματικούς εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνόμους, προσθέτομεν εἰς τὸ τέλος ἐκάστου τόσα μηδενικά ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἔχωμεν πρὸς τὰ δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς ψηφία τόσα, ὅσα ἔχει ὁ ἔχων περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία· διότι ἡ προσθήκη ἢ ἡ ἀφαίρεσις μηδενικῶν ἀπὸ τοῦ τέλους δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλει τὴν ἀξίαν τοῦ κλάσματος· καθόσον τοῦτο πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· π. χ.

Ἑτερόνομοι.

0,6

0,25

0,02

6,035

19,2

0,3026

Ὁμωνόμοι.

0,6000

0,2500

0,0200

6,0350

19,2000

0,3026

Τροπὴ ἀκεραίου καὶ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.

53. Κατ' αὐτὸν. Ἀκέραιος μεταβάλλεται εἰς δεκαδικὸν κλάσμα ἐὰν τε-
θῇ μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ καὶ χωρισθῇ δι' ὑποδιαστολῆς.

54. Κατ' αὐτὸν. Ὡς τρέψωμεν κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικόν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, προσθέτοντες ἐκάστοτε ἐν 0 διὰ τὰ δέκατα, ἐν διὰ τὰ ἑκατοστὰ, ἐν διὰ τὰ χιλιοστὰ κ. τ. λ.

Εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τούτου ἀπαντῶνται τρεῖς περιπτώσεις,

1^ο Εὐρίσκομεν ὠρισμένον τι δεκαδικὸν κλάσμα,

2^ο Εὐρίσκομεν δεκαδικὸν κλάσμα, οὕτινος ψηφία τινα ἐπαναλαμβάνονται καὶ προβαίνουσιν εἰς τὸ ἄπειρον καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν· τότε δὲ ἡ περίοδος ἀρχεται ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ τὸ κλάσμα καλεῖται περιοδικὸν κλάσμα ἀπλοῦν.

3^ο Εὐρίσκομεν δεκαδικὸν κλάσμα, οὕτινος ψηφία τινα ἐπαναλαμβάνονται καὶ προβαίνουσιν εἰς τὸ ἄπειρον καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν· ἀλλ' ἐνταῦθα ἡ περίοδος δὲν ἀρχεται εὐθὺς μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν, τὰ δὲ κλάσμα καλεῖται κλάσμα περιοδικὸν σύνθετον.

Παραδείγματα

$$\alpha'. \frac{15}{40} = 0,375$$

$$\begin{array}{r} 150 \overline{) 40} \\ 300 \overline{) 0,375} \\ 200 \\ 0 \end{array}$$

$$\beta'. \frac{11}{13} = 0,846153 \quad \text{περιοδικόν ἀπλοῦν.}$$

$$\gamma'. \frac{73}{74} = 0,986486 \quad \text{» σύνθετον.}$$

55. Ἦν κλάσμα τι τριπλῆ εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς ἰσοδύναμον· πρέπει ὁ παρονομαστής του, ἀναχθεῖ εἰς τὴν ἀπλουστάτην του μορφὴν, νὰ μὴν ἔχη ἄλλους πρώτους παράγοντας ἐκτὸς τῶν 2 καὶ 5.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς τὴν ἐφαρμογὴν ὁσάκις ἀπαντῶμεν κλάσματα περιοδικὰ ἀπλὰ ἢ σύνθετα, λαμβάνομεν μόνον τρία ἢ τέσσαρα ψηφία, παραλείποντες ὅλα τ' ἄλλα.

Πρόσθεσις καὶ ἀφαιρέσις δεκαδικῶν κλασμάτων.

56. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων γίνεται ὅπως καὶ εἰς τὰ ἀκέραια, ἐνθυμούμενοι μόνον ὅτι ὀφείλομεν πρῶτον νὰ καταστήσωμεν αὐτὰ ὁμώνυμα διὰ τῆς προσθήκης μηδενικῶν, ἐκ δὲ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τοῦ κατὰλοιπῶς νὰ χωρίσωμεν τόσα ψηφία δεκαδικὰ, ὅσα ἔχει ἕκαστος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν· οὕτω

$$\begin{array}{r} \text{Πρόσθεσις:} \left\{ \begin{array}{l} 42,005 \\ 6,2 \\ 18 \\ 58,00006 \end{array} \right. \begin{array}{l} = 42,00500 \\ = 6,20000 \\ = 18,00000 \\ = 58,00006 \end{array} \\ \hline 124,20506 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Ἀφαιρέσις} \left\{ \begin{array}{l} 892,002 \\ 0,000892 \end{array} \right. \begin{array}{l} = 892,002000 \\ = 0,000892 \end{array} \\ \hline 892,001108 \end{array}$$

Πολλαπλασιασμοὶς δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

57. Ὁ πολλαπλασιασμοὶς τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν γίνεται ὅπως καὶ εἰς τὰ ἀκέραια, ἐνθυμούμενοι ὅτι ὀφείλομεν νὰ χωρίσωμεν ἐκ τοῦ γινομένου τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες· οὕτω

$$\begin{array}{r} 892,6 \\ 8 \\ \hline 7140,8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 907,02 \\ 6,12 \\ \hline 181404 \\ 90702 \\ \hline 544212 \\ \hline 5550,9624 \end{array}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ὅσάκις τὸ σχηματιζόμενον γινόμενον δὲν ἔχη τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων ὅν περ οἱ δύο παράγοντες, ἀναπληροῦμεν τὰ ἐλλείποντα διὰ μηδενικῶν· οὕτω

$$\begin{array}{r} 0,00006 \\ 0,004 \\ \hline 0,0000024 \end{array}$$

58. Δεκαδικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ., ἐὰν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ ἐν ἡ δύο ἢ τρία κτλ. ψηφία πρὸς τὰ δεξιά· οὕτω

$$\begin{array}{rcl} 5,6 \times 10 & = & 56 \\ 5,6 \times 100 & = & 560 \\ 5,6 \times 1000 & = & 5600 \\ 5,6 \times 10000 & = & 56000 \end{array}$$

59. Ὅσάκις εἰς τῶν παραγόντων εἶναι ἀκέραιος λήγων εἰς μηδενικά, τὸ γινόμενον μένει ἀμετάβλητον, ἐὰν ὑπάρχωσιν ἰσάριθμα τῶν δεκαδικῶν μηδενικά· ἐὰν δὲ τὰ μηδενικά ᾖναι μείω ἢ τὰ δεκαδικὰ, τὸ γινόμενον φέρει εἰς τὸ τέλος τοῦ τὸν ὑπερβάλλοντα ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν, καὶ, ἐὰν τοῦναντίον τὰ μηδενικά ᾖσι πλείω ἢ τὰ δεκαδικὰ, τὸ γινόμενον φέρει εἰς τὸ τέλος τοῦ τὸν περισσεύοντα ἀριθμὸν τῶν μηδενικῶν· οὕτω

$$92,52 \times 500 = 9252 \times 5 = 46260$$

$$92,52 \times 10 = \frac{9252 \times 5}{10} = 4626$$

$$92,52 \times 5000 = 9252 \times 50 = 462600$$

ΒΑΣΑΝΟΣ. Ἡ βέλτανο; τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν γίνεται ἀπαράλλακτος ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων.

Διαίρεσις δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

60. α) Δεκαδικὸς διαιρεῖται δι' ἀκεραίου, ἐν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως ἀποχωρίζωμεν ἀπὸ τοῦ πηλίκου τόσα δεκαδικὰ ὅσα ἔχει ὁ διαιρετέος· οὕτω

$$\begin{array}{r} 96,72 \overline{) 24} \\ 4,03 \end{array}$$

64. β'). Ἀκέραιος διαιρεῖται διὰ δεκαδικοῦ, ἐν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ διαιρετέου προστεθῶσι τόσα μηδενικά, ὅσα ψηφία δεκαδικὰ ἔχει ὁ δεκαδικὸς διαιρετής, καὶ διαιρεθῇ ὁ εἰς διὰ τοῦ ἄλλου ὡς νὰ ᾔσαν ἀκέραιοι· οὕτω

$$\begin{array}{r} 370 \\ 9,25 \overline{) 37000} \end{array} \quad \begin{array}{r} 925 \\ 40 \overline{) 37000} \end{array}$$

62. γ'). Δεκαδικὸς διαιρεῖται διὰ δεκαδικοῦ, ἐν καταστήσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ὁμωνύμους καὶ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ὡς καὶ ἐπὶ ἀκεραίων· οὕτω

$$\begin{array}{r} 892,5 \\ 1,25 \overline{) 892,5} \end{array} \quad \begin{array}{r} 892,50. \\ 125 \overline{) 892,50} \\ 475 \\ 500 \\ 0 \end{array}$$

Ὅσάκις ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι ἀκριβής, εἰς τὸ κατάλοιπον προσθέτομεν μηδενικόν, καὶ τὸ εὐρεθησόμενον πηλίκον θὰ ᾔ μικτὸν δεκαδικὸν κλάσμα· οὕτω

$$\begin{array}{r} 892,5 \\ 2,25 \overline{) 892,5} \end{array} \quad \begin{array}{r} 892,50. \\ 225 \overline{) 892,50} \\ 2475 \\ 4500 \\ 4500 \\ 0 \end{array}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν τὸ πηλίκον πρέπει πάντοτε νὰ ἔχῃ τόσα ψηφία δεκαδικὰ, καθ' ὅσα ὑπερβαίνει ὁ διαιρετέος τὸν διαιρέτην.

Κλάσματα κλασμάτων.

63. Κλάσματα κλασμάτων ὀνομάζομεν τὸ συγκείμενον ἐκ δύο ἢ πλειόνων κλασμάτων συνδεομένων διὰ τοῦ μεριστικοῦ ἄρθρου τῶν, ἰσοφαρίζοντος πρὸς τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· οὕτω τὰ $\frac{5}{7}$ τῶν $\frac{8}{11}$ τῶν $\frac{9}{13}$.

Πρὸς εὐρεσιν τῶν εἰς κλάσματα κλασμάτων ἀναγερομένων ζητημάτων ποιούμεθα χρῆσιν τῶν διαφόρων τῆς ἀριθμητικῆς περὶ κλασματικοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως κανόνων.

Παραδείγματα.

α. Εὐρεῖν τὰ $\frac{5}{7}$ τῶν $\frac{8}{11}$ τῶν $\frac{9}{13}$

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὰς ἐπὶ ἀριθμητὰς καὶ παρονομαστὰς ἐπὶ παρονομαστὰς, καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν διὰ τοῦ τῶν παρονομαστῶν.

$$\frac{5}{7} \times \frac{8}{11} \times \frac{9}{13} = \frac{5 \times 8 \times 9}{7 \times 11 \times 13} = \frac{360}{1001}$$

β'. Ποῖα ἡ ἀξία τοῦ $\frac{5}{6}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{8}{9}$;

Κατὰ τὰ λεχθέντα ἔξομεν,

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{5 \times 3 \times 8}{6 \times 4 \times 9}$$

ἢ ἀπαλείψει τῶν κοινῶν παραγόντων

$$\frac{5 \times 1 \times 2}{2 \times 4 \times 9} = \frac{5}{9}$$

γ'. Ποῖα ἡ ἀξία τοῦ $\frac{1}{3}$ τῶν $\frac{4}{5}$ τῶν $\frac{7}{11}$ τοῦ 16;

Διαιρετέον τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ τοῦ ἀκεραίου διὰ τοῦ τῶν παρονομαστῶν· οὕτω,

$$\frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{7}{11} \times 16 = \frac{1 \times 4 \times 7 \times 16}{3 \times 5 \times 11} = \frac{448}{165}$$

δ'. Ληφθῆτωσαν τὰ $\frac{3}{8}$ τῶν $\frac{9}{11}$ τῶν 2 $\frac{3}{7}$ τῶν $\frac{11}{13}$ τῶν 17 $\frac{10}{13}$.

Τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς καὶ εἶτα ἐφαρμόζομεν τὰ ἐν τοῖς προηγουμένοις λεχθέντα· οὕτω,

$$\begin{aligned} & \frac{5}{8} \times \frac{9}{15} \times \frac{2^3}{7} \times \frac{11}{13} \times \frac{17^{10}}{23} = \\ & = \frac{5}{8} \times \frac{9}{15} \times \frac{17}{7} \times \frac{11}{13} \times \frac{410}{23} = \\ & = \frac{5 \times 9 \times 17 \times 11 \times 410}{8 \times 15 \times 7 \times 13 \times 23} = \\ & = \frac{3 \times 17 \times 11 \times 410}{8 \times 7 \times 13 \times 23} = \frac{230010}{46744} \end{aligned}$$

ε'. Διαireθήτωσαν τὰ $\frac{2}{7}$ τῶν $\frac{5}{9}$ διὰ $\frac{3}{11}$ τῶν $\frac{1}{53}$.

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμητάς τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τοὺς παρονομαστὰς τοῦ διαιρέτου, καὶ τοὺς παρονομαστὰς τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τοὺς ἀριθμητάς τοῦ διαιρέτου καὶ διαιροῦμεν τὸ πρῶτον γινόμενον διὰ τοῦ δευτέρου· οὕτω,

$$\frac{2}{7} \times \frac{5}{9} : \frac{3}{11} \times \frac{1}{53} = \frac{2 \times 5 \times 11 \times 53}{7 \times 9 \times 3 \times 1} = \frac{5830}{489}$$

στ'. Διαireθήτω δὲ 19 διὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$ τῶν $\frac{9}{11}$.

Διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἀκεραίου ἐπὶ τοὺς παρονομαστὰς τοῦ διαιρέτου διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμητῶν τοῦ αὐτοῦ ὅρου· οὕτω,

$$19 : \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{9}{11} = \frac{19 \times 3 \times 7 \times 11}{2 \times 5 \times 9} = \frac{49 \times 7 \times 11}{2 \times 5 \times 3} = \frac{4463}{30}$$

ζ'. Διαireθήτωσαν τὰ $\frac{5}{7}$ τῶν $\frac{9}{11}$ διὰ $\frac{3}{5}$ τῶν $\frac{13}{37}$.

Τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν καὶ ἐφαρμόζομεν τὰ ἐν τοῖς προηγουμένοις λεχθέντα· οὕτω,

$$\frac{5}{7} \times \frac{9}{11} : \frac{3}{5} \times \frac{13}{37} = \frac{38 \times 9 \times 5 \times 37}{7 \times 11 \times 3 \times 13} = \frac{38 \times 3 \times 5 \times 37}{7 \times 11 \times 13} = \frac{21090}{1001}$$

η'. Διαireθήτωσαν τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ 11 διὰ $\frac{1}{5}$ τῶν $\frac{3}{5}$ τῶν $\frac{11}{13}$ τοῦ 2. Κατὰ τὰ ἐκτεθέντα εὐρίσκομεν,

$$\begin{aligned} \frac{5}{7} \times 11 : \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{11}{13} \times 2 &= \frac{38 \times 11 \times 4 \times 5 \times 13 \times 1}{7 \times 3 \times 50 \times 2} \\ &= \frac{38 \times 11 \times 2 \times 13}{7 \times 3 \times 10} = \frac{38 \times 11 \times 13}{7 \times 3 \times 5} \\ &= \frac{5434}{105} \end{aligned}$$

Περὶ συνθέτων κλάσμάτων.

64. Σύνθετα κλάσματα δυναμίζονται τὰ ἔχοντα τὸν ἀριθμητὴν ἢ τὸν παρονομαστὴν ἢ καὶ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους κλάσμα· οὕτω,

$$\tauὰ \frac{3}{5}, \frac{41}{7/13} \text{ καὶ } \frac{2/9}{3/67} \text{ λέγονται σύνθετα κλάσματα.}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρὸς εὐρεσιν τῶν εἰς τὰ σύνθετα κλάσματα ἀναφερομένων ζητημάτων ποιούμεθα χρῆσιν τῶν διαφορῶν τῆς ἀριθμητικῆς περὶ κλασματικοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως κανόνων.

α'. Ποία ἡ ἀξία τοῦ $\frac{5/7}{9}$;

Διαίρεσον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ γινομένου τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ τὸν ἀκεραῖον· οὕτω,

$$\frac{5/7}{9} = \frac{5}{7 \times 9} = \frac{5}{63}.$$

β'. Ποία ἡ ἀξία τοῦ $\frac{7}{5/2}$;

Διαίρεσον τὸ γινόμενον τοῦ ἀκεραίου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος· οὕτω,

$$\frac{7}{5/2} = \frac{7 \times 2}{5} = \frac{14}{5} = 2 \frac{4}{5}.$$

γ'. Ποία ἡ ἀξία τοῦ $\frac{3/11}{5/13}$;

Διαίρεσον τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος τοῦ παρονομαστοῦ διὰ τοῦ γινομένου τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος τοῦ παρονομαστοῦ· οὕτω,

$$\frac{3/11}{5/13} = \frac{3 \times 13}{5 \times 11} = \frac{39}{55}.$$

δ'. Ποία ἡ ἀξία τοῦ $\frac{8 \frac{2}{11}}{3 \frac{5}{13}}$;

Τρέψον τοὺς μικτοὺς εἰς κλασματικούς ἰσοδυνάμους καὶ ἐφάρμοσον τὰ ἐν τῷ τρίτῳ παραδείγματι λεχθέντα· οὕτω,

$$\frac{8 \frac{3}{11}}{3 \frac{5}{13}} = \frac{91/11}{41/13} = \frac{91 \times 13}{41 \times 11} = \frac{4183}{484} = 2 \frac{213}{484}.$$

ε'. Ποία ἡ ἀξία τοῦ $\frac{7 \text{ τῶν } 2 \frac{1}{7} \text{ τῶν } \frac{3}{5}}{4 \frac{7}{13} \text{ τῶν } \frac{9}{11} \text{ τοῦ } 3}$;

Ἀφοῦ τρέψῃς τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς ἐν τε τῷ ἀριθμητῇ καὶ ἐν τῷ παρονομαστῇ ἐφάρμοσον τὰ ἐν τοῖς προηγουμένοις παραδείγμασιν ἐκτεθέντα· οὕτω,

$$\frac{7 \times 2 \frac{1}{7} \times \frac{3}{5}}{4 \frac{7}{13} \times \frac{9}{11} \times 3} = \frac{7 \times \frac{15}{7} \times \frac{3}{5}}{21/13 \times \frac{9}{11} \times 3} = \frac{7 \times 15 \times 3 \times 13 \times 11 \times 1}{4 \times 7 \times 5 \times 20 \times 9 \times 3} = \frac{13 \times 11}{20 \times 3} = \frac{143}{60}.$$

Περὶ ἐμπορικῶν κλασμάτων.

65. Κλάσματα ἐμπορικὰ καλοῦνται τὰ ἔχοντα διὰ παρονομαστήν τὸν 2 ἢ δυνάμιν τινὰ τοῦ 2· ὡς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{32}$...

Τὰ ἐμπορικὰ κλάσματα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς δεκαδικὰ, ὧν ἡ γνῶσις συντελεῖ τὰ μέγιστα εἰς τὴν ἀπλοποίησιν τῶν λογαριασμῶν.

66. Πᾶς λογιστὴς οὐρεῖται νὰ γνωρίζῃ ἐκ στήθους τὸν ἐξῆς πῖνακα, ὃν ἐσχηματίσαμεν κατὰ τὰ μᾶλλον ἐν χρήσει εἰς τὴν ἐμπορίαν κλάσματα, μέχρι διτλ. τοῦ $\frac{1}{8}$.

Ὅγδοον	Τέταρτον	Δεύτερον	Κλάσματα δεκαδικὰ
1			0,125
2	1		0,25
3			0,375
4	2	1	0,50
5			0,625
6	3		0,75
7			0,875
8	4	2	1

Δυνάμει τοῦ πῖνακος τούτου προκειμένου νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν τινὰ ἐπὶ 0,125, λαμβάνομεν τὸ ὕψος αὐτοῦ· διότι $0,125 = \frac{1}{8}$ · οὕτως

$$996784 : 0,125 = \frac{996784}{\frac{1}{8}} = 996784 \times 8 = 7974272$$

Ἐὰν ζητῇται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ δι' 0,125, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 8 οὕτω,

$$\frac{996784}{0,125} = 996784 \times 8 = 7974272$$

Ὅσῳκις πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ νὰ διαιρέσωμεν δεδομένον τινὰ ἀριθμὸν δι' 1,25—12,5—125 κτλ. διαιροῦμεν ἢ πολλαπλασιάζομεν καὶ ἐνταῦθα ἐπὶ 8, ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 1,25—12,5—125 κτλ. 10κις, 100κις, 1000κις, κτλ. μεγαλῆτεροι τοῦ 0,125, ἀνάγκη καὶ τὸ εὐρεθησόμενον ἐξαχόμενον νὰ ᾖ 10κις, 100κις, 1000κις κτλ. μεγαλείτερον μὲν, ἢν πρόκειται περὶ πολλαπλασιασμοῦ, μικρότερον δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογία, προκειμένου περὶ διαιρέσεως· οὕτω,

$$8160 \times 1,25 = 10200$$

$$8160 : 8 = 1020$$

$$\text{καὶ } 1020 \times 10 = 10200.$$

$$8160 : 1,25 = 6528$$

$$8160 \times 8 = 65280$$

$$\text{καὶ } 65280 : 10 = 6528.$$

$$8160 : 125 = 65,28.$$

$$8160 \times 8 = 65280$$

$$\text{καὶ } 65280 : 1000 = 65,28.$$

$$8160 : 12,5 = 652,80$$

$$8160 \times 8 = 65280$$

$$\text{καὶ } 65280 : 100 = 652,80$$

$$8160 \times 1250 = 10200000$$

$$8160 : 8 = 1020$$

$$\text{καὶ } 1020 \times 10000 = \underline{\underline{10200000.}}$$

$$8160 : 1250 = 6,528$$

$$8160 \times 8 = 65280$$

$$\text{καὶ } 65280 : 10000 = \underline{\underline{6,5280}}$$

67. Καὶ ἡ τῶν ὑποπλασίων μερῶν χρησιμότης εἰς τὴν ἐμπορίαν εἶναι ἀναντίρρητος· διότι καὶ ἡ γνῶσις αὐτῶν παρέχει μεγίστας συντομίας εἰς τοὺς ἐμπορικοὺς λογαριθμοὺς.

Ἔστω χάριν ἀσκήσεως ὁ ἐπόμενος πίναξ.

Πίναξ ὑποπλασίων με ἀριθμητικὴν μονάδα.

Εἰκοστὸν τέταρτον	Δωδέκατον	Ἑκτον	Τρίτον	Ὑποπλάσια
— 1 —				$\frac{1}{1}$
— 2 —	— 1 —			$\frac{1}{2}$
— 3 —				$\frac{1}{3}$
— 4 —	— 2 —	— 1 —		$\frac{1}{4}$
— 5 —				$\frac{1}{5}$
— 6 —	— 3 —			$\frac{1}{6}$
— 7 —				$\frac{1}{7}$
— 8 —	— 4 —	— 2 —	— 1 —	$\frac{1}{8}$
— 9 —				$\frac{1}{9}$
— 10 —	— 5 —			$\frac{1}{10}$
— 11 —				$\frac{1}{11}$
— 12 —	— 6 —	— 3 —		$\frac{1}{12}$
— 13 —				$\frac{1}{13}$
— 14 —	— 7 —			$\frac{1}{14}$
— 15 —				$\frac{1}{15}$
— 16 —	— 8 —	— 4 —	— 2 —	$\frac{1}{16}$
— 17 —				$\frac{1}{17}$
— 18 —	— 9 —			$\frac{1}{18}$
— 19 —				$\frac{1}{19}$
— 20 —	— 10 —	— 5 —		$\frac{1}{20}$
— 21 —				$\frac{1}{21}$
— 22 —	— 11 —			$\frac{1}{22}$
— 23 —				$\frac{1}{23}$
— 24 —	— 12 —	— 6 —	— 3 —	$\frac{1}{24}$

68. Εἰς τὴν ἀποσύνθεσιν τῶν κλασμάτων πᾶς λογιστὴς ὀφείλει νὰ βασισθῇ ἐπὶ τῶν ἑξῆς:

α'. Ὅπόταν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος ᾖ μείζων ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ παρονομαστοῦ διὰ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἀριθμητοῦ ληπτέον ὡς ἀρετηρίαν τὸ ἥμισυ τοῦ παρονομαστοῦ. οὕτως εἰς τὴν ἀποσύνθεσιν τοῦ $\frac{13}{21}$ ἄρχισον ἀπὸ $\frac{12}{21}$, ὅπερ ἐστὶ τὸ $\frac{1}{2}$.

β'. Ὅπόταν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος ᾖ μείων ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ παρονομαστοῦ, ληπτέον διὰ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἀριθμητοῦ κατὰ προτίμησιν τὸν ἀριθμὸν ἐκείνον, ὅστις διαίρων τὸν παρονομαστὴν δίδει διὰ πηλίκον τὸν 2 ἢ πολλαπλασίον τι τοῦ 2. οὕτως εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ $\frac{10}{21}$ ἄρχισον ἀπὸ $\frac{6}{21}$, ὅ ἐστὶ $\frac{1}{4}$.

γ'. Εἰς τὰς ἀποσυνθέσεις τῶν ἐπιλοίπων μερῶν τοῦ ἀριθμητοῦ δεόν νὰ γίνηται χρῆσις τῶν πολλοστῶν, ἐὰν τοῦτο ᾖναι δυνατόν, χωρὶς νὰ προστρέχη τις εἰς τὰ ὑποπλάσια μέρη τοῦ ἀρχικοῦ κλάσματος. οὕτως, προκειμένου περὶ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ $\frac{17}{21}$, ἀνάλυσον τὸ κλάσμα εἰς $\frac{12}{21} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21}$ ἢ ὅπερ ταυτὸν εἰς $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21}$. ληφθέντος δὲ τοῦ $\frac{1}{2}$ τοῦ προταθέντος ἀριθμοῦ, προσθετέον εἰς αὐτὸ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου ($\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ τοῦ $\frac{1}{2}$), εἴτα δὲ τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ δευτέρου γινομένου ($\frac{1}{21} = \frac{1}{6}$ τοῦ $\frac{1}{21}$ ἢ $\frac{1}{21} = \frac{1}{6}$ τοῦ $\frac{1}{6}$).

Παραδείγματα.

Πολλαπλασιασθήτω ὁ 372 ἐπὶ $\frac{3}{12}$.

$$\begin{array}{l|l} \frac{3}{12} & \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \text{ τοῦ } 372 = 62 \\ & \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \text{ » } 372 \text{ ἢ } \frac{1}{2} \text{ τοῦ } = 34 \\ & 372 \times \frac{3}{12} = 93 \end{array}$$

Πολλαπλασιασθήτω ὁ 492 ἐπὶ $\frac{7}{12}$.

$$\begin{array}{l|l} \frac{7}{12} & \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ τοῦ } 492 = 246 \\ & \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \text{ » } 492 \text{ ἢ } \frac{1}{6} \text{ τοῦ } = 44 \\ & 492 \times \frac{7}{12} = 287 \end{array}$$

Πολλαπλασιασθήτω ὁ 82896 ἐπὶ $\frac{11}{12}$.

$$\begin{array}{l|l} \frac{11}{12} & \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ τοῦ } 82896 = 41448 \\ & \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ » } 82896 \text{ ἢ τὸ } \frac{1}{2} \text{ τοῦ } = 20724 \\ & \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \text{ » } 82896 \text{ » » } \frac{1}{3} \text{ » } = 13816 \\ & 82896 \times \frac{11}{12} = 75988 \end{array}$$

Πολλαπλασιασθήτω ὁ 828 $\frac{5}{6}$ ἐπὶ 208

$$\begin{array}{l|l} \frac{5}{6} & \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ τοῦ } 208 \\ & \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ » } 208 \\ & 828 \frac{5}{6} \times 208 = 172397 \frac{1}{3} \end{array}$$

Πολλαπλασιασθήτω ὁ 907, 2 ἐπὶ $72 \frac{17}{24}$.

$$\begin{array}{l|l} & 907,2 \\ & 72 \\ & 1814,4 \\ & 63504 \\ \frac{17}{24} & \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \text{ τοῦ } 907,2 = 453,6 \\ & \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \text{ » } 907,2 \text{ ἢ τὸ } \frac{1}{3} \text{ τοῦ } = 151,2 \\ & \frac{1}{24} = \frac{1}{24} \text{ » } 907,2 \text{ » » } \frac{1}{4} \text{ » } = 37,8 \\ & 63964 \end{array}$$

Πολλαπλασιασθήτω ὁ 1892 $\frac{7}{8}$ ἐπὶ $372 \frac{11}{12}$.

Πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου ἢ ὀφείλομεν νὰ πρέψωμεν τὸ κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς δεκαδικὸν κατὰ τὸν πίνακα τῶν ἐμπορικῶν κλασμάτων, καὶ τότε θὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἐπὶ μικτὸν ὡς

εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἢ δέον ν' ἀκολουθήσωμεν τὴν ἐξῆς μέθοδον:

$$\begin{array}{r}
 1892 \\
 372 \\
 \hline
 3784 \\
 43244 \\
 5676
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ τοῦ } 372 \quad 186 \\
 \frac{7}{8} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ » } 372 = \frac{1}{2} \text{ τοῦ } \rightarrow 93 \\ \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \text{ » } 372 = \frac{1}{2} \text{ » } \rightarrow 46,50 \end{array} \right. \\
 \frac{11}{12} \left\{ \begin{array}{l} \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ τοῦ } 4892 \quad 946 \\ \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ » } 4892 = \frac{1}{2} \text{ τοῦ } \rightarrow 473 \\ \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \text{ » } 4892 = \frac{1}{3} \text{ » } \rightarrow 315,33 \frac{1}{3} \end{array} \right. \\
 \hline
 705883,83 \frac{1}{3}
 \end{array}$$

Ἀσκήσεις.

Πολλαπλασιασθήτω	δ	368700	ἐπὶ	0,625	(0,625 = $\frac{5}{8}$)
»	»	3897200	»	8,75	(0,875 = $\frac{7}{8}$)
Διαιρεθήτω	»	426800	διὰ	625	
»	»	3928275	»	37,5	(0,375 = $\frac{3}{8}$)
»	»	3928275	»	375	

Ληφθήτωσαν τὰ $\frac{11}{12}$ τοῦ 4879000.

ΠΕΡΙ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

69. Συμμιγεῖς λέγονται ἐκεῖνοι οἱ ἀριθμοὶ, αἵτινες σύγκεινται ἐξ ἄλλων ἀκεραίων ἀριθμῶν διαφόρων μονάδων, ὧν ἐκάστη εἶναι ὠρισμένην ὑποπλάσιον τῆς προηγούμενης· οὕτω τὰ Τούρκικὰ βάρη ἀποτελοῦσι συμμιγεῖς ἀριθμούς· διότι 1 στατήρ = 44 δακάς καὶ 1 δακάς = 400 δραμίαις· ἐπίσης τὰ νομίσματα τῶν Ἀνατολικῶν Ἰνδιῶν ἀποτελοῦσι συμμιγεῖς ἀριθμούς· δότι 1 ρουπὶ = 16 ἀνας καὶ 1 ἀνα = 12 πίκαις.

Ἐστω ὁ συμμιγῆς Στ. 6—32—180

ὁ ἀριθμὸς οὗτος δύναται νὰ τεθῇ καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν

$$6 \text{ στ.} + \frac{32}{44} \text{ στ.} + \frac{180}{44+100} \text{ στ.}$$

Ἡ κλασματικὴ αὕτη παράστασις λυομένη κατὰ τοὺς κανόνας τῆς κλασματικῆς προσθέσεως μᾶς ἄγει εἰς τὸ ἐξῆς συμπέρασμα.

Ἰνα τρέψωμεν τὴν ἀνωτέραν ὑποδιαίρεσιν συμμιγοῦς τινος εἰς τὴν κατωτέραν αὐτοῦ μονάδα καὶ τὴν ἀπάλιν, δίδομεν εἰς τὸν συμμιγῆ τὴν προσήκουσαν κλασματικὴν μορφήν, τρέπομεν τὸ μικτὸν κλάσμα εἰς νότον, καὶ τότε ὁ μὲν ἀριθμητὴς τοῦ νότου κλάσματος, παραλειπομένου τοῦ παρονομαστοῦ του, ἐκφράζει τὴν κατωτέραν μονάδα, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαίρεσεως τὴν ἀνωτέραν· οὕτως

Στ. 6—32—180

$$\begin{aligned}
 \text{Στ. } 6 + \frac{32}{44} + \frac{180}{44+100} &= \frac{264+32}{44} + \frac{180}{44+100} = \frac{296 \times 400 + 180}{47600} \\
 &= \frac{118400+180}{47600} = \frac{118580}{47600}
 \end{aligned}$$

οὗτινος ὁ μὲν ἀριθμητὴς 118580 εἶναι δράχμια, τὸ δὲ πηλίκον

$$\frac{118580}{47600} = 6,7375 \text{ εἶναι στατῆρες.}$$

Ἐστω ἔτι ὁ συμμιγῆς £ 28—16—5

1 £ (λίρα ἀγγλική) = 20 σεληνίοις καὶ 1 σελήνιον = 12 δηνάριοις· ὁ προταθεὶς συμμιγῆς τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν,

$$£ 28 + \frac{16}{20} + \frac{5}{20 \times 12}$$

ἐκτελέσει τῶν πράξεων ἔξομεν

$$\frac{560+16}{20} + \frac{5}{20 \times 12} = \frac{576}{20} + \frac{5}{20 \times 12} = \frac{6869}{240}$$

οὗτινος ὁ μὲν ἀριθμητὴς 6869 εἶναι δηνάρια, τὸ δὲ πηλίκον

$$\frac{6869}{240} = 28,6208^{33} \text{ εἶναι } £.$$

Πρὸς ταύταις ταῖς κυριωτέραις ἀναγωγαῖς θέτομεν χάριν ἀσκήσεως καὶ τὰς ἐξῆς κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀναγωγὴν ὀνομάζομεν τὴν πρᾶξιν, δι' ἣς μεταβάλλομεν ἀριθμὸν τινα ἀπὸ μιᾶς εἰς ἄλλην μονάδα τοῦ αὐτοῦ συστήματος· εἶναι δὲ αὕτη δύο εἰδῶν, κατιοῦσα καὶ ἀνιοῦσα.

Ἀναγωγή τις λέγεται κατιοῦσα, ὅταν ὁ ἀριθμὸς μεταβάλλεται ἀπὸ μιᾶς εἰς ἄλλην μονάδα ἀνωτέραν· οὕτως,

$$1 \text{ στατῆρ} = 44 \text{ δακ.} = 17600 \text{ δραμίαις.}$$

Λέγεται δὲ αὕτη ἀνιοῦσα, ὅταν ὁ ἀριθμὸς μεταβάλλεται ἀπὸ μιᾶς εἰς ἄλλην μονάδα ἀνωτέραν· οὕτως,

$$17600 \text{ δράμια} = 44 \text{ δακ.} = 1 \text{ στατῆρ.}$$

1^ο Ἀναχθῆτω τὸ $\frac{1}{18}$ τοῦ στατῆρος εἰς κλάσμα δραμίων.

$$\frac{1}{18} \times 44 = \frac{44}{18} \text{ δακ., καὶ}$$

$$\frac{44}{18} \times 400 = \frac{17600}{9} \text{ δραμίου}$$

2^ο Ἀναχθῆτωσαν τὰ $\frac{38}{39}$ τοῦ στατῆρος εἰς ἀκέραιον κατωτέρας μονάδος.

$$\frac{38}{39} \times 44 = \frac{1672}{39} = 42 \frac{34}{39} \text{ δακ., καὶ}$$

$$\frac{34}{39} \times 400 = \frac{13600}{39} = 348 \frac{28}{39} \text{ δρ.}$$

$$\text{ἔθεν } \frac{38}{39} \text{ στ.} = 42 \text{ δακ. καὶ } 348 \frac{28}{39} \text{ δρ.}$$

3^ο Ἀναχθῆτωσαν τὰ 0,16 τοῦ στατῆρος εἰς ἀκέραιον κατωτέρας μονάδος.

$$0,16 \times 44 = 7,04 \text{ δακ., καὶ}$$

$$0,04 \times 400 = 16 \text{ δραμίαις}$$

$$\text{ἔθεν } 0,16 \text{ στ.} = 7 \text{ δακ. } 7 \text{ δακ. καὶ } 16 \text{ δρ.}$$

4^ο Ἀναχθῆτωσαν τὰ $\frac{6}{11}$ δακ. εἰς κλάσμα στατῆρος.

$$\frac{6}{11} : 44 = \frac{6}{41 \times 44} = \frac{6}{1804} = \frac{3}{902} \text{ στατῆρος.}$$

Πρόσθεσις συμμιγῶν.

70. Συμμιγεῖς ἀριθμοὶ προστίθενται, ἐὰν γραφῶσιν οἱ προσθετέοι οὕτως, ὥστε τὰ εἶδη τῶν μονάδων νὰ ᾖναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ προστεθῇ ἕκαστον εἶδος χωριστὰ, ἀρχόμενοι ἀπὸ τὰ δεξιά ἢ τοῦ κατωτάτου εἶδους. Ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἐκάστοτε ἄθροισμα ἔμπεριέχωνται μονάδες ἀνωτέρου εἶδους, ἐξάγομεν αὐτὰς καὶ προσθέτομεν εἰς τὰς μονάδας τοῦ ἀνωτέρου εἶδους· οὕτω

$$\begin{array}{r} 20 \quad 12 \\ \text{£ } 122 \overline{) 18} \quad 2 \\ \text{» } 45 \quad 2 \quad 11 \\ \text{» } 0 \quad 12 \quad 1 \\ \hline \text{£ } 138 \quad 13 \quad 2 \end{array}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν δηνარიῶν εἶναι 14· ἐπειδὴ δὲ 14 δηνάρια = 1 σελ. καὶ 2 δηνάρια, τὰ μὲν 2 δηνάρια ἐγράψαμεν ὑπὸ τὰ δηνάρια, τὸ δ' 1 σελήνιον προσεθέσαμεν εἰς τὰ σελήνια, ἅτινα μὲν ἔδωκαν δι' ἄθροισμα 33 σελήνια, καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἐξῆλξαντες τὴν ἔμπεριεχομένην 1 £ (1 £ = 20 σελ.), ἐγράψαμεν τὸ μὲν κατ' ἄλοιπον 13 ὑπὸ τὰ σελήνια, τὴν δὲ 1 £ προσεθέσαμεν εἰς τὰς £.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ α'. Εἰς τοὺς ἔμπορικὸς λογαριασμοὺς εἴθισται νὰ τίθεται μετὰ τὸ ἐκάστον εἶδος τῶν μονάδων τῶν συμμιγῶν τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως—, καὶ νὰ προτάσσεται ἡ ὀνομασία μόνη τῆς ἀνωτέρας μονάδος· ὡς £ 2—16—3.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ β'. Πολλὰκις τὰ σελήνια χωρίζονται ἀπὸ τὰ δηνάρια διὰ πλάγιαν τινος γραμμῆς· οὕτω 13 σελήνια καὶ 7 δηνάρια γράφονται $\frac{13}{7}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ γ'. Οἱ ἐπὶ τῶν ἐλλειψοειδῶν γραμμῶν κείμενοι ἀριθμοὶ 20 καὶ 12 δηλοῦσι τὰς ὑποδιαίρέσεις τῶν μονάδων τοῦ συμμιγοῦς.

Ἀφαιρέσεις συμμιγῶν.

71. Συμμιγεῖς ἀριθμοὶ ἀφαιροῦνται, ἐὰν γραφῇ ὁ ἀφαιρετέος ὑπὸ

τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τοῦ νὰ κατέχωσι τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ ἀφαιρεθῇ ἕκαστον εἶδος χωριστῶς. Ὅπόταν δὲ εἶδος τι τοῦ ἀφαιρετέου ᾖ μείζον τοῦ τοῦ μειωτέου, δανειζόμεθα μίαν μονάδα ἀπὸ τὸ ἀμέσως προηγούμενον εἶδος τοῦ μειωτέου, ἀναλύομεν αὐτὴν εἰς τὰς ἐξ ὧν συνίσταται κατωτέρας μονάδας, ἐφ' ὧν προσθέτομεν καὶ τὰς ὑπαρχούσας καὶ ἀφαιροῦμεν οὕτω,

$$\begin{array}{r} \alpha.) \quad \begin{array}{r} 20 \quad 12 \\ \text{£ } 182 \text{—} 18 \text{—} 5 \\ \text{» } 106 \text{—} 7 \text{—} 3 \\ \hline \text{διαφορὰ } \text{£ } 76 \text{—} 11 \text{—} 2 \end{array} \\ \\ \beta.) \quad \begin{array}{r} \text{£ } 105 \text{—} 11 \text{—} 9 \\ \text{» } 86 \text{—} 17 \text{—} 8 \\ \hline \text{διαφορὰ } \text{£ } 18 \text{—} 14 \text{—} 1 \end{array} \end{array}$$

Ἐν τῇ β.) ἀφῆρέσαμεν 8 δηνάρια ἀπὸ 9 καὶ τὴν διαφορὰν 1 ἐγγράψαμεν ὑπὸ τὰ δηνάρια· ἀλλ' ἐπειδὴ ἐπρόκειτο νὰ ἀφαιρεθῶσι 17 σελήνια ἀπὸ 11, καὶ δὲν ἀφαιρεῖται ὁ 17 ἀπὸ τὸν 11, ἐδανείσθημεν ἀπὸ τὰς £ 105 μίαν £, ἣν τρέψαντες εἰς 20 σελήνια καὶ προσθέσαντες εἰς αὐτὰ τὰ ὑπάρχοντα 11, εὔρομεν ἄθροισμα 31, ἐξ οὗ ἀφαιρέσαντες τὰ 17, ἔσχομεν κατ'ἀλοιπὸν 14 σελήνια, ὅπερ ἐγγράψαμεν ὑπὸ τὰ σελήνια· τότε ἀφῆρέσαμεν τὰς 86 £ ἀπὸ τὰς £ 104· διότι αἱ £ 105 ἔμειναν 104.

Ἔστω ἔτι τὸ παράδειγμα,

$$\begin{array}{r} 44 \quad 400 \\ \text{Στ. } 18 \text{—} 16 \text{—} 218 \\ \text{» } 6 \text{—} 32 \text{—} 300 \\ \hline \text{ἔχομεν Στ. } 11 \text{—} 27 \text{—} 318. \end{array}$$

Πολλαπλασιασμοὶ συμμιγῶν.

72. 1^ο Ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μονοψήφιος.

Πολλαπλασιασθήτωσαν £ 72—16—8 ἐπὶ 8.

$$\begin{array}{r} \text{£ } 72 \text{—} 16 \text{—} 8 \\ 8 \\ \hline \text{£ } 576 \text{—} 128 \text{—} 64 \\ \hline \text{£ } 582 \text{—} 13 \text{—} 4 \text{ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.} \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῇ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαστήν, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν κατωτέρων μονάδων, τῶν δηνარიῶν, καὶ εὐρίσκομεν £ 576—128—64. Ἄλλ' ἐπειδὴ ὁ 64 εἶναι=5 σελήνιοις καὶ 4 δηνάριοις, τὰ μὲν 4 δηνάρια γράφομεν ὑπὸ τὰ δηνάρια, τὰ δὲ 5 σελήνια προσθέτομεν εἰς τὰ σελήνια καὶ ἔχομεν 133 σελήνια, ἅτινα περιέχουσι 6 £ καὶ 13 σελήνια, τὰ 13 λοιπὸν γράφομεν ὑπὸ τὰ σελήνια, τὰς δὲ 6 £ προσθέτομεν εἰς τὰς £ 576.

2^ο Ὁ πολλαπλασιαστὴς ἔχει πλείω τοῦ ἐνὸς ψηφίου.

Πολλαπλασιασθήτωσαν £ 82 8 5 ἐπὶ 72.

$$\begin{array}{r} \text{£ } 82 \quad 8 \quad 5 \\ 72 \\ \hline 164 \\ 574 \\ \hline 44 \quad 5 \\ 44 \quad 5 \\ \hline 12 \\ 5 \quad 4 \\ 1 \\ \hline \text{εἰκονικὸν γινόμενον} \\ 1 \quad 2063 \\ 0 \quad 3045 \\ \hline \text{τὸ γινόμενον εἶναι } \text{£ } 5934 \quad 5078 \end{array}$$

Πολλαπλασιασθήτωσαν £ 132—12—7 ἐπὶ 642,35.

£ 132—12—7

642,35

$$\begin{array}{r}
 20 \\
 12 \mid 10 \\
 \quad 2 \\
 \\
 12 \\
 7 \mid 6 \\
 \quad 1 \\
 \hline
 6 \ 60 \\
 39 \ 6 \\
 264 \\
 528 \\
 792 \\
 \\
 324 \ 175 \\
 64 \ 235 \\
 \\
 32 \ 1175 \text{ γινόμενον εἰκονικὸν} \\
 16 \ 05875 \\
 2 \ 67646
 \end{array}$$

τὸ γινόμενον εἶναι £ 85194 34521.

Πολλαπλασιάζομεν τὴν ἀνωτέστην μονάδα 132 ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 642,35 καὶ γράφομεν τὰ πέντε μερικὰ γινόμενα. Ἐπειδὴ δὲ πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ δ 12 ἐπὶ 642,35 ἀποσυνθέτομεν αὐτὸν εἰς ὑποπλάσια τοῦ 20 (1 £=20 σελ.) δηλ. εἰς 10 καὶ 2 καὶ λέγομεν, ἐὰν ἀντὶ 10 (ἐν τῶν ὑποπλασίων τοῦ 20) εἴχομεν 20 σελήνια ἦτοι 1 £, τὸ γινόμενον ἤθελεν εἶσθαι 642,35· ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν 10 μόνον σελ. ἦτοι 1/2 τοῦ 20, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ 642,35 καὶ γράφομεν τὸν 324,175 ὑπὸ τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 642,35 ἐπὶ 2 (τὸ ἕτερον τῶν ὑποπλασίων τοῦ 20), λαμβάνομεν τὸ 1/10 αὐτοῦ ($2 = \frac{20}{10}$), εὐρίσκομεν διὰ γινόμενον 2 σεληνίων τὸν 64,235, ὅνπερ γράφομεν ὑπὸ τὰ ἄλλα μερικὰ γινόμενα.

Ἵνα δὲ εὐρώμεν τὸ γινόμενον τοῦ 642,35 ἐπὶ 7 δηνάρια, ἀποσυνθέτομεν τὸν 7 εἰς μέρη ὑποπλάσια τοῦ 12 (1 σελήνιον=12 δηνάρια), εἰς 6 καὶ 1, καὶ λέγομεν, ἐὰν ἀντὶ τοῦ 6 εἴχομεν 12 δηνάρια, τὸ γινόμενον ἤθελεν εἶσθαι $642,35 \times 12$ δηνάρια, ἢ ὅπερ ταῦτόν, $642,35 \times 1$ σελήνιον· ἀλλ' ἀγνοοῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ $642,35 \times 1$

σελήνιον, γνωρίζομεν δὲ μόνον τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 2 σελήνια (=64,235), ἀναγκαζόμεθα λοιπὸν νὰ λάβωμεν τὸ 1/2 τοῦ ἐπὶ 2 σελ. γινόμενου ($\frac{64,235}{2} = 32,1175$), τὸ δὲ γινόμενον τοῦτο 32,475 ἀποκαλοῦμεν εἰκονικὸν καὶ τὸ διαγράφομεν, καθόσον μεταχειρίζομεθα αὐτὸ χάριν εὐκολίας.

Γνωστοῦ λοιπὸν ὄντος τοῦ εἰκονικοῦ γινόμενου, λαμβάνομεν τὸ 1/2 αὐτοῦ, καὶ εὐρίσκομεν διὰ γινόμενον ἐπὶ 6 δηνάρια, 16,05875.

Πρὸς εὐρεσιν τέλους τοῦ ἐπὶ 1 δην. γινόμενου, λαμβάνομεν τὸ 1/6 τοῦ 16,05875 καὶ εὐρίσκομεν 2,67646.

Μετὰ ταῦτα ἀθροίζομεν ὅλα τὰ μερικὰ γινόμενα, χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸ εἰκονικὸν γινόμενον, καὶ εὐρίσκομεν γενικὸν γινόμενον £ 85194,34521.

3^ο Καὶ οἱ δύο παράγοντες εἶναι συμμιγεῖς ἀριθμοί

$$\begin{array}{ll}
 1 \text{ καντάριον ἀγγλικὸν} & = 4 \text{ κουάρτερ} \\
 1 \text{ κουάρτερ} & = 28 \text{ λίτρας ἀγγλικαῖς.}
 \end{array}$$

Παράδειγμα. Ἐν καντάριον ἐμπορεύματός τινος ἀξίζει £ 70—8—7, πόσας £ θέλουσιν ἀξίσει καντάρια 482—3—21;

$$\begin{array}{r}
 \text{Καντ. ἀγγλ. } 482-3-21 \\
 \text{£ } 70-8-7 \\
 \hline
 33740-0-0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 20 \\
 8 \mid 4 \\
 \quad 4 \\
 \\
 12 \\
 7 \mid 6 \\
 \quad 1 \\
 \quad 4 \\
 \\
 3 \mid 2 \\
 \quad 1 \\
 \\
 28 \\
 24 \mid 7 \\
 \quad 7 \\
 \quad 7 \\
 \hline
 96-8-0 \\
 96-8-0 \\
 24-2-0 \text{ γινόμενον εἰκονικὸν} \\
 \\
 12-1-0 \\
 2-0-2 \\
 \\
 35-4-3 \\
 17-12-2 \\
 \\
 4-8-1 \\
 4-8-0 \\
 4-8-0 \\
 \hline
 \text{£ } 34012-17-8
 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὸν 482 ἐπὶ ὁλόκληρον τὸν πολλαπλασιαστὴν £ 70—8 (ἀποσυνθέτοντες τὸν 8 εἰς πολλοστὰ τοῦ 20=4 καὶ 4) —7 (ἀναλύοντες αὐτὸν εἰς μέρη ὑποπλάσια τοῦ 12=6 καὶ 1).

Πολλαπλασιάζομεν ὁλόκληρον τὸν πολλαπλασιαστὴν ἐπὶ 3 κουζότερ, ἀποσυνθέτοντες αὐτὰ εἰς 2 καὶ 1, μέρη ὑποπλάσια τοῦ 4.

Τέλος πολλαπλασιάζομεν τὰς £ 70—8—7 ἐπὶ 21 λίτρας, ἀποσυνθέτοντες τὸν 21 εἰς 7, 7 καὶ 7 μέρη ὑποπλάσια τοῦ 28.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Προκειμένου περὶ πολλαπλασιασμοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ, γράφομεν ὧς πολλαπλασιαστὴν ἐκείνην τὴν ποσότητα, ἥτις ἐκφράζει· τὰ εἶδη τῆς ζητουμένης μονάδος.

Ἔτερον παράδειγμα.

Κντ. ἀγγλ. 32—3—11	
£	6—7—5 $\frac{5}{8}$
20	192—0—0
7 $\left \begin{array}{l} 5 \\ 2 \end{array} \right.$	8—0—0 3—4—0
12	
5 $\left \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array} \right.$	0—10—8 0—2—8
$\frac{5}{8} \left \begin{array}{l} \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \end{array} \right.$	0—1—4 0—0—4
4	
3 $\left \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right.$	3—3—9 1—11—11
28	
11 $\left \begin{array}{l} 7 \\ 4 \end{array} \right.$	0—7—11 0—4—7
£ 209—7—2.	

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΩΝ.

73. Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν συμμιγῶν ἀπαντῶσι δύο περιπτώσεις,

1ον Οἱ δύο ὅροι, διαιρετέος καὶ διαιρέτης, εἶναι ὁμοειδεῖς.

2ον » » » , » » » , » ἑτεροειδεῖς.

Περὶπτωσης πρώτη. Ὅσάκις οἱ προτιθέμενοι συμμιγεῖς εἶναι ὁμοειδεῖς, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο εἰς τὸ εἶδος τῆς κατωτέρας αὐτῶν μονάδος, καὶ οὕτω διαιροῦμεν ἀκέραιον δι' ἀκεραίου.

Παράδειγμα. Ἐμπορος Βομβάης διαπραγματεύεται συναλ/κὴν ἐκ £ 450—2—9 ἐπὶ συναλλαγῇ σελ. $\frac{1}{11}$ ἀνὰ ρουπλί. Ζητεῖται πόσα ρούπια θέλει εἰσπράξει οὗτος.

Λύσις.

£ 450—2—9 = 408033 δηνάρια	
0—1—11 = 23 »	
ἔθεν 408.0.3.3.	23
460	4697,087 ὡς ἔγγιστα.
223	
463	
200	
460	

καὶ τῷ ὄντι Ρουπλί 4697,087 πρὸς £ 0—1—11 δίδουσι £ 450—2—9.

Ἔτερον παράδειγμα. Ἐμπορος Κωνσταντινουπόλεως χρεωστεῖ εἰς ἔμπορον Λονδίνου γρόσια 42594,73· ποῦτον εἶναι τὸ χρέος του εἰς £, ὅταν ἡ συναλλαγὴ ᾖ 110 γρ. διὰ 4 £;

$$\frac{42594,73}{410} = £ 387,225 \text{ ἢ } £ 387—4—6$$

Καὶ τῷ ὄντι

$$\begin{array}{r}
 \text{£ } 387-4-6 \\
 110 \\
 \hline
 3870 \\
 3870 \\
 \hline
 20 \\
 4 \overline{) 4} \\
 12 \\
 6 \overline{) 6} \\
 \hline
 2 \text{ } 75 \\
 \hline
 42594 \text{ } 75
 \end{array}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αὕτη ἡ περίπτωσις ἀπαντᾷ συχνότατα εἰς τὰ ζη-
τήματα τῶν συναλλαγῶν (*changes*).

Περίπτωσις δευτέρα. Ὁ τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἑτε-
ροειδεῖς.

α. ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος,

Διανεμηθῇ τὸ ποσὸν τῷ £ 122634-5-3 μεταξὺ 25 ἀνθρώπων.

$$\text{£ } 122.6.3.4-5-3 \mid 25$$

$$226 \quad \text{£ } 4905-7-5 \text{ ὡς ἔγγιστα.}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{κατάλοιπον £} \quad 134 \\
 9 \\
 20 \\
 \hline
 180 \\
 5 \\
 \hline
 185 \\
 10 \\
 12 \\
 \hline
 120 \\
 3 \\
 \hline
 123
 \end{array}$$

Διαιροῦμεν τὸν 122634 διὰ 25 καὶ εὐρίσκομεν πηλίκον μὲν 4905,
κατάλοιπον δὲ 9, ὅπερ τρέπομεν εἰς σελήνια πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ
20 καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὰ ὑπάρχοντα 5 σελήνια, τὸ
ἄθροισμα 185 διαιροῦμεν δι' 25 καὶ εὐρίσκομεν πηλίκον μὲν 7, κατὰ-
λοιπον δὲ 10 ὅπερ τρέπομεν εἰς δηνάρια, πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 12
(1 σελ.=12 δην.), καὶ εἰς τὸ γινόμενον δην. 120 προσθέτομεν τὰ
ἤδη ὑπάρχοντα 3 δηνάρια, καὶ διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα 123 δι' 25.

Σύστημα Ἀγγλικόν. Ὁ διαιρέτης τίθεται εἰς τὰ ἀριστερά.
25) £ 122.6.3.4-5-3 (£ 4905 ἂ μερικὸν πηλίκον

$$\begin{array}{r}
 - 100 \\
 226 \\
 - 225 \\
 \hline
 134 \\
 - 125 \\
 \hline
 9 \\
 \times 20 \\
 \hline
 180 \\
 + 5 \\
 \hline
 185 \\
 25) \text{ σελ. } 185 \quad (\text{σελ. } 7 \text{ β' μερικὸν πηλίκον}) \\
 - 175 \\
 \hline
 10 \\
 \times 12 \\
 \hline
 120 \\
 + 3 \\
 \hline
 123 \\
 25) \text{ δην. } 123 \quad (\text{δην. } 5 \text{ γ' μερικὸν πηλίκον}) \\
 \hline
 125
 \end{array}$$

Τὸ ζητούμενον λό. πὸν πηλίκον εἶναι £ 4905-7-5 ὡς ἔγγιστα.

β'. Ὁ διαιρέτης εἶναι δεκαδικός.

Ἵνα διαιρέσωμεν συμμιγῇ διὰ δεκαδικοῦ, διαγράφομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρέτου, καὶ ἀφοῦ προσθέσωμεν εἰς ἕκαστον εἶδος τῶν μονάδων τοῦ διαιρέτου τόσα μηδενικά, ὅσα ψηφία δεκαδικὰ περιέχει ὁ διαιρέτης, ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν· οὕτω,

Καντάρια ἀγγλικά 312-3-12 διὰ 45, 12 δίδουσι

$$\begin{array}{r}
 \text{Καντ. ἀγγλ. } 31200-300-1200 \overline{)4512} \\
 \text{—} \quad 27072 \quad \text{Καντ. ἀγγλ. } 6-3-20 \frac{1}{2} \\
 \hline
 \quad 4128 \\
 \times \quad 4 \\
 \hline
 \quad 16512 \\
 + \quad 300 \\
 \hline
 \quad 16812 \\
 \text{—} \quad 13536 \\
 \hline
 \quad 3276 \\
 \times \quad 28 \\
 \hline
 \quad 26208 \\
 \quad 6552 \\
 \hline
 \quad 91728 \\
 + \quad 1200 \\
 \hline
 \quad 92928 \\
 \text{—} \quad 9024 \\
 \hline
 \quad 26880 \\
 \quad 22560
 \end{array}$$

γ'. Καὶ οἱ δύο ὅροι εἶναι συμμιγῆς.

£ 911-9-6 διὰ Καντ. ἀγγλ. 94-1-22.

Τρέπομεν τὸν συμμιγῇ διαιρέτην εἰς ἀκέραιον καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν· τότε δὲ τὸ πηλίκον θὰ ᾖ ἡ τιμὴ τῆς κατωτάτης μονάδος τοῦ διαιρέτου, τῶν λίτρων· ἵνα δὲ εὐρώμεν τὴν τιμὴν τῆς ἀνωτάτης μονάδος, τοῦ κανταρίου, πολλαπλασιάζομεν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῆς κατωτάτης μονάδος τὸν ἐμπεριεχόμενον εἰς τὴν ἀνωτάτην· οὕτω

Καντ. ἀγγλ. 94-1-22=λίτραις ἀγγλ. 10242.

ἔθεν

$$\begin{array}{r}
 \text{£ } 944-9-6 \overline{)10242} \\
 \times \quad 20 \quad \text{£ } 0-1-9,358 \text{ ἢ } \text{£ } 0-1-9 \frac{3}{8} \\
 \hline
 \quad 18220 \\
 + \quad 9 \\
 \hline
 \quad 18229 \\
 \text{—} \quad 10242 \\
 \hline
 \quad 7987 \\
 \times \quad 12 \\
 \hline
 \quad 13974 \\
 \quad 7987 \\
 \hline
 \quad 95844 \\
 + \quad 6 \\
 \hline
 \quad 95850 \\
 \text{—} \quad 92178 \\
 \hline
 \quad 36720 \\
 \text{—} \quad 30726 \\
 \hline
 \quad 59940 \\
 \text{—} \quad 51210 \\
 \hline
 \quad 87300 \\
 \quad 81936
 \end{array}$$

Τὸ εὑρεθὲν πηλίκον £ 0—1—9 $\frac{3}{8}$ εἶναι ἡ τιμὴ 1 λίτρας. Ἵνα λοιπὸν εὐρώμεν τὴν τιμὴν 1 κανταρίου πολλαπλασιάζομεν τὸ πηλίκον ἐπὶ 4×28 (1 καντ.=4 κουάρτερ καὶ 1 κουάρτερ=28 λίτραις)=442· οὕτω

$$\begin{array}{r}
 \text{£ } 0 \quad 1 \quad 9 \frac{3}{8} \\
 442 \\
 \hline
 \text{Σελ. 412}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 42 \\
 9 \overline{)63} \quad 56 \\
 \quad 3 \quad 28 \\
 \hline
 \frac{3}{8} \overline{) \frac{2}{8} = \frac{1}{4}} \quad 2 \quad 4 \\
 \quad \frac{1}{8} \quad 1 \quad 2 \\
 \hline
 \text{Σελ. 499 } 6 \\
 \text{ἢ } \text{£ } 9 \quad 19 \quad 6
 \end{array}$$

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν £ 944—9—6 διὰ καντ. 94—1—22 εἶναι £ 9—19—6.



ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΥΝΤΕΤΜΗΜΕΝΑΙ

Τροπὴ συμμιγῶν εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς, ἀγοραῖα ζητήματα καὶ ἐφαρμογαὶ αὐτῶν.

74 α'. Πῶς τρέπονται παράδες εἰς ἑκατοστὰ γροσίου καὶ τὰ ἀνάπαλιν.

Μετατρέπομεν τοὺς παράδας εἰς ἑκατοστὰ τοῦ γροσίου, ἔαν λάβωμεν $2\frac{1}{2}$ φορὰς τὸ ποσὸν τῶν δοθέντων παράδων· διότι $40+40+20=100$ · οὕτω

18 παράδες $=18+18+9=45$ ἑκατοστοὺς· ὅθεν γρόσια 422 καὶ 18 παράδες θὰ γραφῶσι δεκαδικῶς γρόσια 422,45.

3 παράδες $=3+3+1\frac{1}{2}=07\frac{1}{2}$ ἑκατοστοὺς ἢ 075 χιλιοστοὺς,
4 » $=4+4+2=04$ »
11 » $=11+11+5\frac{1}{2}=27\frac{1}{2}$ » » 275 » .

Τὰ δὲ ἑκατοστὰ τοῦ γροσίου μετατρέπονται εἰς παράδας, ἔαν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 40· οὕτω,

$47\frac{1}{2}$ ἑκατοστὰ $=0,47\frac{1}{2}\times 40=19$ παράδας.

β'. Πῶς τρέπονται δράμια εἰς χιλιοστὰ δακάδος καὶ τὰ ἀνάπαλιν.
Μετατρέπομεν τὰ δράμια εἰς χιλιοστὰ τῆς δακάδος, ἔαν λάβωμεν $2\frac{1}{2}$ φορὰς τὸ ποσὸν τῶν δοθέντων δραμίων· διότι $400+400+200=1000$ · οὕτω,

170 δράμια $=170+170+85=425$ χιλιοστοὺς.

Ὅθεν δακάδες 222 καὶ δράμια 170 θὰ γραφῶσι δεκαδικῶς δακάδες 222,425.

17 δράμια $=17+17+8\frac{1}{2}=42\frac{1}{2}$ χιλιοστ. ἢ 425 δεκάκις χιλιοστοὺς

40 » $=40+40+5=25$ »

3 » $=3+3+1\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$ » » 75 » »

δακάδες 162 καὶ 3 δράμια $=$ δακάσιν 162,0075

» 162 » 30 » $=$ » 162,075

» 162 » 300 » $=$ » 162,75.

Τὰ δὲ χιλιοστὰ τῆς δακάδος μετατρέπονται εἰς δράμια, ἔαν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 400· οὕτω,

$0,425$ δακάδος $=0,425\times 400=170$ δραμίοις.

$0,0075$ » $=0,0075\times 400=3$ » .

γ'. Πῶς τρέπονται δακάδες εἰς ἑκατοστὰ τοῦ στατηῆρος καὶ τὰ ἀνάπαλιν.

Πρὸς τοῦτο προσθέτομεν 2 μηδενικὰ εἰς τὰς δακάδας, καὶ τὸν προκύψοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ 44· οὕτω,

26 δακάδες $=2600:44=59\frac{1}{11}$ ἑκατοστοὺς.

Τὰ δὲ ἑκατοστὰ τοῦ στατηῆρος μετατρέπονται εἰς δακάδας, ἔαν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 44, τὸ δὲ γινόμενον διαιρεθῇ δι' 100· οὕτω,

$59\frac{1}{11}$ ἑκατοστὰ $=\frac{59\frac{1}{11}\times 44}{100}=26$ δακάσι.

δ'. Μετατροπὴ ἀγιαρίων ἐλαίου Ἀδραμυντίου εἰς δακάδας, καὶ τὰ ἀνάπαλιν.

Μετατρέπομεν ἀγιάρια εἰς δακάδας, ἔαν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 925, τὸ δὲ γινόμενον διαιρέσωμεν δι' 400· διότι 1 ἀγίαριον $=$ δακάσιν 9 καὶ δραμίοις 100· οὕτω,

1100 ἀγιάρια $=\frac{1100\times 925}{400}=11\times 925=10175$ δακάσιν.

Αἱ δὲ δακάδες τρέπονται εἰς ἀγιάρια, ἔαν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 400, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 925· οὕτω,

10175 δακάδες $=1017500:925=1100$ ἀγιαρίοις.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅσάκις ἡ διαίρεσις δὲν δύναται νὰ ᾖ ἀκριβής, διαιροῦμεν τὸ κατ'ἄλοιπον δι' 100, καὶ εὐρίσκομεν δεκάδας· οὕτω,

$$3000 \text{ δεκάδες} = 300000 : 925 = \text{ἀγίαρ. } 324$$

$$\text{καὶ } \frac{300}{925} = \text{ἀγίαρ. } 324 \text{ καὶ } 3 \text{ δεκάσι.}$$

ε'. Μετατροπὴ λαγηνίων ἐλαίου Κυδωνιῶν καὶ Μιτυλήνης εἰς δεκάδας καὶ τὰνράπαλιν.

Μετατρέπονται λαγήνια εἰς δεκάδας, ἐὰν διαιρεθῶσι διὰ 0,16, ἢ ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 6,25· διότι 1 λαγήνιον = δεκάσιν 6 $\frac{1}{4}$.

Αἱ δὲ δεκάδες τρέπονται εἰς λαγήνια, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 0,16· οὕτω,

$$\text{Ὁκάδες } 2516 = 2516 \times 0,16 = 402,56 \text{ λαγηνίοις.}$$

Τὰ ἑκατοστὰ τοῦ λαγηνίου μετατρέπονται εἰς δράμια, ἢ δεκαδικὸν ἀριθμὸν δεκάδος, ἐὰν εἰς τὸ τέλος αὐτῶν τεθῶσι 2 μηδενικά καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιρεθῇ διὰ 4· οὕτω

$$16 \text{ ἑκατοστὰ λαγηνίου} = 5600 : 4 = 1400 \text{ δραμίοις ἢ } 3 \frac{1}{2} \text{ δεκάσι.}$$

στ'. Μετατροπὴ ἀγιαρίων εἰς λαγήνια καὶ τὰνράπαλιν.

Μετατρέπομεν ἀγιάρια εἰς λαγήνια, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1,48· διότι 1 ἀγίαριον = 1,48 λαγηνίοις· οὕτω,

$$250 \text{ ἀγιάρια} = 250 \times 1,48 = 370 \text{ λαγηνίοις.}$$

Τὰ δὲ λαγήνια τρέπονται εἰς ἀγιάρια, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 100, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ δι' 148· οὕτω,

$$777 \text{ λαγήνια} = 77700 : 148 = 525 \text{ ἀγιαρίοις.}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅσάκις τὸ γινόμενον δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 148, τὸ κατ'ἄλοιπον τρέπεται εἰς δεκάδας, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 0,0625· οὕτω

$$\text{λαγήνια } 240 = 24000 : 148 = 162 \frac{24}{148} \text{ ἀγιαρίοις} = 162 \text{ ἀγιαρίοις}$$

$$\text{καὶ } 24 \times 0,0625 \text{ δεκάσι} = 162 \text{ ἀγίαρ. καὶ } 1 \frac{1}{2} \text{ δεκάσι.}$$

ζ'. Μετατροπὴ χιλιογράμμων εἰς δεκάδας καὶ τὰνράπαλιν.

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὰ χιλιόγραμμα ἐπὶ 78 καὶ ἐκ τοῦ

γινομένου ἀποκόπτομεν δύο ψηφία ὡς δεκαδικά· διότι 78 δεκάδες = 100 χιλιογράμμοις κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν· οὕτω

$$\text{χιλιόγραμμα } 118 \frac{1}{2} \text{ ἰσοφარίζουσι πρὸς δεκάδας } 92,43$$

$$\begin{array}{r} 118 \frac{1}{2} \\ 78 \\ \hline 944 \\ 826 \\ 39 \\ \hline 92,43 \end{array}$$

Καὶ ἀντιστρόφως· ἵνα τρέψωμεν δεκάδας εἰς χιλιόγραμμα, πολλαπλασιάζομεν αὐτάς ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν δι' 78· οὕτω,

$$\text{Ὁκάδες } 9243 = \frac{9243}{78} = 118 \frac{1}{2} \text{ χιλιογράμμοις.}$$

η'. Πῶς τρέπονται λίτραι ρωσικαὶ εἰς ἑκατοστὰ ποντίου καὶ τὰνράπαλιν.

Μετατρέπομεν λίτρας ρωσικὰς ἢ τοὶ 40στὰ ποντίου εἰς ἑκατοστὰ τοῦ ποντίου, ἐὰν λάβωμεν 2 $\frac{1}{2}$ φορές τὸ ποσὸν τῶν δοθειτῶν λίτρων· διότι 40 + 40 + 20 = 100· οὕτω,

$$12 \text{ λίτραι Ῥωσικαὶ} = 12 + 12 + 6 = 30 \text{ ἑκατοστοῖς ποντίου.}$$

Ἰσὺν, πούτια 418 καὶ λίτραι 12 γράφονται δεκαδικῶς πούτια 418,30.

$$3 \text{ λίτραι} = 3 + 3 + 1 \frac{1}{2} = 07 \frac{1}{2} \text{ ἑκατοστοῖς ἢ } 075 \text{ χιλιοστοῖς}$$

$$3 \frac{1}{2} \text{ » } = 3 \frac{1}{2} + 3 \frac{1}{2} + 1 \frac{3}{4} = 08 \frac{3}{4} \text{ » } \text{ » } 087 \frac{1}{2} \text{ » } \text{ ἢ } 0875 \text{ δεκ. χιλ.}$$

$$13 \text{ » } = 13 + 13 + 6 \frac{1}{2} = 32 \frac{1}{2} \text{ » } \text{ » } 325 \text{ »}$$

Τὰ δὲ ἑκατοστὰ τοῦ ποντίου μετατρέπονται εἰς λίτρας Ῥωσικὰς, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 40· οὕτως,

$$67 \frac{1}{2} \text{ ἑκατοστὰ ποντίου} = 0,67 \frac{1}{2} \times 40 = 27 \text{ λίτραις Ῥωσικαῖς.}$$

θ'. Πῶς τρέπονται Κονάρτερ καὶ λίτραι εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν Καρταρίων.

Τὰ ἀγγλικὰ βάρη σπανίως μετατρέπονται εἰς δεκαδικά· διότι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον προτιμῶμεν τὴν εἰς λίτρας μετατροπὴν. Ἵνα δὲ με-

πατρέψωμεν αὐτὰ εἰς δεκαδικούς, δέον γὰρ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ἐξῆς σχέσεις:

	4	κουάρτες	=	1	Καντ. άγγλ.
δix	1	»	=	0,25	» »
	2	»	=	0,50	» »
	3	»	=	0,75	» »

	1 κουζότερ	ή	28 λίτραι	=	0,25	Καντ. ἀγγλ.
δικά λίτρας	{		1 λίτρα	=	0,0089	» »
			14 λίτραι	=	0,125	» »
			7 »	=	0,0625	» »
			21 »	=	0,1875	» »

ι'. Πῶς τρέπονται καρτάρια ἀγγλικά εἰς ἑκατοστὰ τόκον καὶ τὰ
ράπαλι.

Μετατρέπομεν τὰ καντάρια εἰς ἑκατοστὰ τοῦ τόνου, ἔχον πολλὰ-
πλασιάζωμεν αὐτὰ ἐπὶ 0,05· διότι

1 Καντόριο = $\frac{1}{20}$ τόγγου $\eta \frac{5}{100} = 0,05$ τόγγου.

οὐδ' ἔτι,

$$8 \text{ Καντόρια} = 8 \times 0,05 = 40 \text{ εκατοστοίς του τόγγου.}$$

Τὰ δὲ ἑκατοστὰ τοῦ τόγγου μετατρέπονται εἰς Κοντάρια, ἔχον δια-
ρεθῶσι διὰ 0,05· οὕτω,

$$0,40 \text{ τόννου} = \frac{0,40}{0,05} = 8 \text{ Κανταρίους.}$$

ια'. Πῶς τρέπονται ρούπια εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν πηχέως καὶ τὰ
τάπαλιν.

Μετατρέπομεν τὰ ρούπια ἤτοι τὰ 8^α τοῦ πήχεως εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν πήχεως, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν πίνακα τῶν ἐμπορικῶν κλασμάτων. οὕτω,

7 ρούπια ἀντιστοιχοῦσι, κατὰ τὸν ῥηθέντα πίνακα, εἰς 0,875.

ἔθεν,

22 πήχεις καὶ 7 ξούπια γράφονται πήχεις 22,875.

3 1/2 βούτια πρὸς ποῖον δεκαδικὸν ἀριθμὸν πᾶν πρὸς ἰσοφαιζουσι;

Κατὰ τὸν πίνακα $\frac{3}{8}$ $= 0,375$

$$1/8 = 0,125$$

$$\begin{array}{rcl} \text{καί } & & \\ \theta\omicron\varsigma\nu & & \text{καί } \frac{1/2}{8} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\quad 1/8 \quad} = 0,125 \\ & & \frac{\rho\omicron\upsilon\pi\iota\alpha \ 3^{1/3}}{} = 0,0625 \\ & & \underline{\hspace{1cm}} \\ & & = 0,4375 \text{ πήχ.} \end{array}$$

Δεκαδικὸς δὲ ἀριθμὸς πῆχως μετατρέπεται εἰς ρούπια, εἴαν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 8· εὖτως.

$$0,875 \times 8 = 7 \text{ ρουπλόις,}$$

$$0,4375 \times 8 = 3\frac{1}{2} \quad \text{»}$$

β'. Μετατροπὴ μέτρων Γαλλικῶν εἰς μικροὺς ἐμπορικοὺς πηχyeis
Κωνσταντινουπόλεως καὶ τὰ ῥάπανα.

1 Γαλλικὸν μέτρον = 1,5432 τοῦ μικροῦ πήχους τῆς K/πόλεως.
ἔθεν 1 μικρὸς πήχυς K/πόλεως = 0,648 τοῦ Γαλλικοῦ μέτρον.

γ'. Μετατροπή μέτρων Γαλλικῶν εἰς μεγάλους ἐμπορικοὺς πη-
γεις Κ/πόλεως καὶ τὰν ἁπάλιν.

1 Γαλλικὸν μέτρον = $1\frac{1}{2}$ πήχεσι κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν.

ὅθεν 8 Γαλλικὰ μέτρα = $8 + 4 = 12$ πήχεςιν ἢ βράτσαις.

Καὶ ἀντιστρόφως: μία βράτσα=0,669 τοῦ Γαλλικοῦ μέτρου.

ιδ' Ὡς τρέπονται σεληνια καὶ δηνάγια εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν
£ καὶ τὰν ἀπαλιν.

1ον Σε.λήνιον.

$$1 \text{ σελ.ήν.ογ} = 1/_{100} \text{ £ } \frac{7}{100} = 0,05 \text{ £.}$$

ἵνα λοιπὸν τρεψώμεν σελήνια εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν & πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 0,05· οὕτως,

11 σελήνια = $11 \times 0,05 = 55$ εκατοστοί; τῆς £.

2ον Δηνάσαι.

12 δηνάρια ἢ 1 σελήγιον = 0,05 £

$$\text{όθεν 1 δηνάριον} = \frac{0,05}{12} = 0,00416 \text{ £}$$

καὶ εἰς τὴν ἐφαρμογὴν 1 » = 0,0042 £.

ἵνα λοιπὸν τρεψώμεν διηγήρια εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν L , ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰ ἐπὶ 0,0042, ἥ νὰ ἀποσταθίσωμεν τὸν ἐξῆς πίνακα, ὡς τοῦτο ποιοῦσιν οἱ λογισταὶ ἐν Εὐρώπῃ.

δην. 1 = 0,0042 £	δην. 7 = 0,0292 £
» 2 = 0,0084 »	» 8 = 0,0333 »
» 3 = 0,0125 »	» 9 = 0,0375 »
» 4 = 0,0167 »	» 10 = 0,0416 »
» 5 = 0,208 »	» 11 = 0,0458 »
» 6 = 0,250 »	» 12 = 0,05 »

Παράδειγμα. Ἐστω ὁ συμμιγῆς £ 1029-16-11.

Κατὰ τὰ λεχθέντα ἔχομεν,

$$\begin{array}{rcl} \text{£ } 1029,80 & (16 \times 0,05 = 0,80) \\ \text{» } 0,0458 & (11 \text{ δην.} = 0,0458) \\ \hline \text{£ } 1029,8458 & \text{ὅπερ ἔστιν ὁ ζητούμενος δεκαδικός.} \end{array}$$

Καὶ ἀντιστρόφως· μετατραπήτωσαν £ 1029,8458 εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν £.

Διαιροῦμεν τὰ δύο πρῶτα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ διὰ 5 καὶ εὐρίσκομεν σελήνια.

Ἐὰν δὲ ἡ διαίρεσις δὲν δύναται νὰ ᾖ ἀκριβής, προσκολλῶμεν τὸ κατ'ἀλοιπον εἰς τὰ ἐπόμενα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους καὶ ζητοῦμεν κατὰ νοῦν εἰς ποῖον ἀριθμὸν δηναρίων τοῦ πίνακος ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμός· ὁπόταν δὲ ἡ διαίρεσις δὲν ἀφίση κατ'ἀλοιπον, ζητοῦμεν ἀπ' εὐθείας τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν δηναρίων τοῦ ὑπολειπομένου μέρους τοῦ δεκαδικοῦ.

Ὡστε ὁ προταθεὶς δεκαδικὸς £ 1029,8458 μετατρέπεται εἰς συμμιγῆ, ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{rcl} \text{£ } 1029-16 & (\frac{84}{5} = 16 \text{ καὶ } 4 \text{ ὑπολοίπων}) \\ \text{» } \text{ » } - \text{ » } - 11 & (0,0458 = 11 \text{ δηναρίους}) \\ \hline \text{£ } 1029-16-11 & \text{ὅπερ ἔστιν ὁ ζητούμενος συμμιγῆς.} \\ \text{Ἐστω ἔτι ὁ συμμιγῆς £ } 2177-18-9 & \\ \text{£ } 2177,90 & (18 \times 0,05 = 0,90 \text{ £}) \\ \text{» } 0,0375 & (9 \text{ σελήνια} = 0,0375 \text{ »}) \\ \hline \text{£ } 2177,9375 & \text{ἔσται ὁ ζητούμενος δεκαδικός.} \end{array}$$

Μετατραπήτωσαν αὖ £ 312,8556 εἰς συμμιγῆ.

$$\begin{array}{rcl} \text{£ } 312-17 & (85 : 5 = 17 \text{ σελινίοις}) \\ \text{» } \text{ » } - \text{ » } - 1 & (0,0042 = 1 \text{ δηνάριον}). \\ \hline \text{£ } 312-17-1 & \text{ὅστις εἶναι ὁ ζητούμενος συμμιγῆς} \end{array}$$

κατὰ προσέγγισιν δηναρίων· διότι ἀντὶ 0,0056 ἐλάβομεν 0,0042.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. Εἰς πᾶσαν πρᾶξιν ἐπὶ ἀγγλικῶν νομισμάτων δεόν νὰ εὐρεθῶσι πάντοτε τέσσαρα ψηφία δεκαδικά, χωρὶς ποτὲ νὰ διακοπῇ αὕτη εἰς ἑκατοστὰ ἢ χιλιοστὰ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ δηνάρια μετατρέπονται εἰς ἑκατοστὰ σεληνίου, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν, ἐπὶ 8 καὶ εἰς τὸ γινόμενον προστεθῇ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ποσοῦ τῶν δηναρίων, τὰ δὲ ἑκατοστὰ τοῦ σεληνίου μετατρέπονται εἰς δηνάρια, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 12 καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ δι' 100· οὕτως,

$$6 \text{ δηνάρια} = 6 \times 8 + \frac{6}{3} = 48 + 2 = 50 \text{ ἑκατοστοῦ σεληνίου.}$$

$$\text{καὶ } 0,50 \text{ σεληνίου} = 0,50 \times 12 : 100 = 6 \text{ δηναρίους.}$$

ισ'. Μετατροπὴ ἀγγλικῶν νομισμάτων εἰς φράγκα.

Ἐπεὶ δὲ ἡ τιμὴ μιᾶς £ περιστρέφεται περὶ τὰ 25 φράγκα, διὰ τοῦτο ἵνα μετατρέψωμεν £ καὶ σελήνια εἰς φράγκα, λαμβάνομεν ὡς βᾶσιν τὸν 25 καὶ διὰ τὰ δεκαδικὰ ἀκολουθοῦμεν τὸν παρὰ ποδας πίνακα. Ὅσον δ' ἀφορᾷ τὰ δηνάρια προσθέτομεν αὐτὰ εἰς τὸ ἐξαγόμενον, ἀφοῦ κατ' ἀρχὰς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 40 καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέσωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ ποσοῦ τῶν δηναρίων· διότι 1 δηνάριον = 0,40 $\frac{1}{2}$ τοῦ φράγκου περίπου.

Πίναξ.

25	= $\frac{400}{4}$
0,25	= 4 $\frac{0}{100}$ ἐπὶ B
0,025	= 4 $\frac{0}{100}$ » »
0,03	= 2 $\frac{0}{100}$ » »
0,10	= 4 $\frac{0}{100}$ » A.
0,01	= 4 $\frac{00}{100}$ » »
0,005	= $\frac{1}{2}$ $\frac{00}{100}$ »

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀποκαλοῦμεν A τὸ ἐπὶ 100 γινόμενον ἀριθμοῦ
τινος, B δὲ τὸ ἐπὶ 25 ἀκεραίας μονάδας.

Παράδειγμα. Μετατραπήτωσαν εἰς φράγκα £ 741—18—8 ἐπὶ
συναλλαγῇ φράγκων 25,40 διὰ 1 £.

Λύσις. Μετατρέπομεν κατὰ πρῶτον τὸν συμμιγῆ εἰς δεκαδικὸν
παραλείποντες τὰ δηνάρια, καὶ ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ
25 καὶ 0,40 κατὰ τὸν ἄνωθι πίνακα· οὕτω

$$£ 741-18-8 = £ 741,90$$

ᾧθεν

$$£ 741,90 \times \frac{100}{4} = \frac{74190}{4} = A.$$

$$\begin{array}{l} 0,25 = 1 \frac{0}{100} \text{ ἐπὶ } B. \\ 0,40 \left\{ \begin{array}{l} 0,25 = 2 \frac{0}{100} \text{ » » } \\ 0,10 = 1 \frac{0}{100} \text{ » } A. \end{array} \right. \end{array}$$

$$188,475$$

$$37,095$$

$$74,190$$

$$\text{προῖδον παραλειφθέντων 8 δηνάρων (80+4)} \quad 0,84$$

$$£ 741-18-8 \text{ ἐπὶ } 25,40 = \text{φρ. } 48845,10$$

Πολλαπλασιασθήτωσαν £ 2009-15-7 ἐπὶ φρ. 25,35 $\frac{7}{8}$

$$2009,75 \times \frac{100}{4} = \frac{200975}{4} = A.$$

$$50243,75 = B = \text{γινόμενον ἐπὶ } 25$$

$$\begin{array}{l} 0,25 \\ 0,40 \\ 0,35 \frac{7}{8} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \frac{00}{100} \text{ ἐπὶ } A. \\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ » » } \\ \frac{1}{8} \text{ » » } \end{array} \right. \end{array}$$

$$502,4375$$

$$200,975$$

$$10,04875$$

$$5,024375$$

$$2,5121875$$

$$\text{προῖδον παραλειφθέντων δηνά-} \\ \text{ρίων 7 (7 \times 10 + 3 \frac{1}{2} = 73 \frac{1}{2})} \quad 0,735$$

$$\text{φρ. } 50965,4923425$$

καὶ εἰς τὴν ἐξαρμογὴν φρ. 50965,00.

Πολλαπλασιασθήτωσαν £ 645-12-11 ἐπὶ φρ. 24,97 $\frac{1}{2}$

$$£ 645,60 \times \frac{100}{4} = \text{φρ. } 16140$$

$$- 0,02 \frac{1}{2} = \text{ » } - 16,14$$

$$16123,86$$

$$\text{προῖδον παραλειφθέντων 11 δηνάρων} \quad 4,15^s$$

$$£ 645-12-11 \text{ ἐπὶ } 24,97 \frac{1}{2} = \text{φρ. } 16125,01^s$$

ιστ'. Μετατροπὴ κρεῖτσαρίων εἰς ἑκατοστὰ τοῦ γιορινίου καὶ τὰρά-
παλιρ. Μετατρέπομεν τὰ κρεῖτσαρία ἥτοι τὰ 60στὰ εἰς ἑκατοστὰ τοῦ
γιορινίου, ἔαν ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κρεῖτσαρίων προσθέσωμεν τὸ ἥμισυ
αὐτοῦ σὺν τῷ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἡμίσεως· διότι $60+30+10=100$. οὕτως,
24 κρεῖτσαρία = $24+12+4=40$ ἑκατοστοὺς γιορινίου.

Τὰ δὲ ἑκατοστὰ τοῦ γιορινίου μετατρέπονται εἰς κρεῖτσαρία, ἔαν
πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰ ἐπὶ 60· οὕτω,
0,40 γιορ. = $0,40 \times 60 = 24$ κρεῖτσαρίοις.

ιζ'. Μετατροπὴ ἀνας εἰς Ρουπί.

Μετατρέπομεν τὰ ἀνας εἰς ρουπί (ρουπί=νόμισμα Ἀγγλικῶν Ἰν-
διῶν=16 ἀνας), ἔαν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰ ἐπὶ 0,0625· οὕτως

$$\text{ἀνας } 10 = 0,625 \text{ ρουπί,}$$

$$\text{ » } 8 = 0,0625 \times 8 = 0,5 \text{ ρουπί.}$$

Ὡσαύτως ρουπί 43 $\frac{3}{4}$ γράφονται ρουπί 43—12.

ιη'. Μετατροπὴ Μετζιτιέδων εἰς λίρας καὶ τὰράπαλιρ.

Γνωστῆς οὖσης τῆς τιμῆς τῆς ὀθωμανικῆς λίρας εἰς γρόσια Μετζι-
τιέδος, τρέπομεν Μετζιτιέδας εἰς λίρας ὀθωμανικὰς, πολλαπλασιάζοντες
αὐτοὺς ἐπὶ 20 καὶ τὸ γινόμενον διακοῦντες διὰ τῆς δοθείσης τιμῆς.
οὕτω,

Μετζιτιέδες 4240 πρὸς γρ. 406 (1 λίρα ὀθωμανικὴ χρυσῇ=406
γρόσιοις εἰς Μετζιτι) φέρουσι

$$\frac{4240 \times 20}{406} = 800 \text{ λίραις ὀθωμανικαῖς.}$$

Καὶ ἀντιστρόφως, τρέπομεν λίρας ὀθωμανικὰς εἰς Μετζιτιέδας,

πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς λίρας εἰς Μετζίτι καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦντες διὰ 20· οὕτω,

$$\text{£} 800 \text{ πρὸς γρ. } 106 \text{ φέρουσι } \frac{800 \times 106}{20} = 4240 \text{ Μετζίτ.}$$

ιθ'. Μετατροπὴ γροσίων Μεταλλικῶν, Πενταρίων καὶ Ἑξαρίων εἰς λίρας καὶ τὰνράπαλιν.

Ἵνα τρέψωμεν γρόσια μεταλλικὰ, πεντάρια καὶ ἑξάρια εἰς λίρας ὁθωμανικὰς, διαιροῦμεν αὐτὰ διὰ τῆς τιμῆς τῆς λίρας· οὕτω,

$$\text{γρ. μεταλλ. } 29875 \text{ πρὸς γρ. } 119 \frac{1}{2} \text{ τὴν Λοθ.} = \frac{29875}{119 \frac{1}{2}} = 250 \text{ λίρ ὁθωμ.}$$

$$\text{» πεντάρια } 1753 \text{ » » } 117 \text{ » » } = \frac{1753}{117} = 15 \text{ » »}$$

$$\text{» ἑξάρια } 4740 \text{ » » } 118 \frac{1}{2} \text{ » » } = \frac{4740}{118 \frac{1}{2}} = 40 \text{ » »}$$

Καὶ ἀντιστρόφως, Ἵνα τρέψωμεν λίρας ὁθωμανικὰς εἰς γρόσια μεταλλικὰ, πεντάρια καὶ ἑξάρια, πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ ἐπὶ τὴν τιμὴν τὴν ἔχει ἡ λίρα πρὸς αὐτὰ τὰ νομίσματα· οὕτω,

$$\text{λίρ ὁθ. } 250 \text{ πρὸς γρ. } 119 \frac{1}{2} \text{ φέρουσι } 250 \times 119 \frac{1}{2} = 29875 \text{ γρ. μεταλλ.}$$

$$\text{» » } 15 \text{ » » } 117 \text{ » } 15 \times 117 = 1753 \text{ » πεντάρ.}$$

$$\text{» » } 40 \text{ » » } 118 \frac{1}{2} \text{ » } 40 \times 118 \frac{1}{2} = 4740 \text{ » ἑξάρια}$$

Πώλησις καὶ ἀγορὰ Μεταλλικῶν. Ὅσακις δίδομεν ἢ λαμβάνομεν λίρας, μετζίτια, ἑξάρια καὶ πεντάρια λογαριάζομεν αὐτὰ ἀνὰ σειρὰς ὧν ἑκάστη περιέχει ἑκατὸν κομμάτια τῶν ἄνω νομισμάτων, σχηματίζοντες τέσσαρας ἢ πέντε κατὰ βούλησιν στοίβας ἐξ 25 ἢ 20 κομματίων ἑκάστην. Ἡ τῶν μεταλλικῶν ὁμῶς ἀγοραπωλησία παρουσιάζουσα δυσκολίας εἰς τὸ μέτρημα διὰ τὸ ἐπίπνον γίνεται διὰ ζυγίου. πρὸς τοῦτο ἐνθέτουσιν αὐτὰ ἐντὸς σακκίων, ὧν ἕκαστον περιέχει χίλια γρόσια μεταλλικὰ ἢ γρόσια μεταλλικὰ $999 \frac{1}{2}$, ἀφαιρουμένων 20 παρχῶν δι' ἑξίαν τοῦ περικλείοντος αὐτὰ σακκίου, καὶ μετρώσιν ἐν μόνον σακκίον· ἀφοῦ δὲ βεβαιωθῶσι περὶ τῆς ἀκριβοείας τῶν ἐν αὐτῷ περιεχομένων γροσίων, ζυγίζουσι τὰ λοιπὰ σακκία, θέτοντες εἰς τὴν μίαν τῶν πλαστίγγων τοῦ πρὸς ταύτην τὴν χρῆσιν ζυγοῦ τὸ μετρηθὲν σακκίον καὶ εἰς τὴν ἄλλην τὰ λοιπὰ ἀμέτρητα σακκία ἀνὰ ἓν. Ἐὰν δὲ σακκίον τι παρουσιάζῃ ἐπαισθητὴν ἑλλειψιν ἢ ἔαν ὑπάρχῃ ὑποψία

μήπως ἐμπεριέχωνται καὶ κίβδηλα (κάλπικα) ἢ δι' ἄλλην τινα αἰτίαν τότε προβαίνουν εἰς τὸ μέτρημα τοῦ τοιοῦτου σακκίου ὡς ἐξῆς:

Ἀρχίζουσι νὰ μετρώσιν ἀνὰ 100 παρχῶν ἢ $2 \frac{1}{2}$ γρόσια ὀνομαζόμενα ἐν ΧΕΡΙ καὶ προβαίνουν μέχρι τοῦ 400· διότι 400 χέρια ἀποτελοῦσι γρόσια μεταλλικὰ $400 \times 2 \frac{1}{2} = 1000$, ἅτινα εἶναι καὶ τὸ περιεχόμενον τοῦ σακκίου.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἐν τινι σακκίῳ περιεχόμενα μεταλλικὰ δύνανται νὰ περιέχωσι εἰκοσάραις (20 παρχῶν), γροσάρια (40 παρχῶν) καὶ ἑξηντάρια (60 παρχῶν), τὰ ἐν λόγῳ 400 χέρια δύνανται νὰ λάβωσι τὰς ἐξῆς φάσεις διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν ἐν αὐτοῖς περιεχομένων νομισμάτων:

5	εἰκοσάραις	ἀποτελοῦσιν ἓν χέρι
3	» καὶ 1 γροσάρι	» » »
2	» » 1 ἑξηντάρι	» » »
1	εἰκοσάρι » 2 γροσάρια	» » »

Ὡστε τρέπομεν χέρια εἰς γρόσια, πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν χερίων ἐπὶ $2 \frac{1}{2}$ · οὕτω,

$$\text{χέρια } 80 \text{ περιέχουσι γρόσια } 80 \times 2 \frac{1}{2} \quad \text{ἢ κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν}$$

$$\text{» } 80 \text{ » » } 80 + 80 + 40 = 200 \text{ γροσίοις.}$$

Καὶ ἀντιστρόφως, τρέπομεν γρόσια μεταλλικὰ εἰς χέρια, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ γρόσια διὰ $2 \frac{1}{2}$ · οὕτω,

$$\text{γρόσια } 200 \text{ ἀποτελοῦσι χέρια } \frac{200}{2,5} = 80 \text{ χερίοις.}$$

η'. Μετατροπὴ ταμειακῶν γροσίων χαρτονομίσματος εἰς λίρας καὶ τὰνράπαλιν.

Ἵνα τρέψωμεν ταμειακὰ γρόσια χαρτονομίσματος εἰς λίρας ὁθωμανικὰς, διαιροῦμεν αὐτὰ διὰ τῆς τιμῆς τῆς λίρας· οὕτω, γρόσια 18000 εἰς χαρτονομίσμα φέρουσι, πρὸς γρ. 900 τὴν Λοθ., 20 λίρας ὁθωμανικὰς.

Καὶ ἀντιστρόφως, Ἵνα τρέψωμεν λίρας ὁθωμανικὰς εἰς ταμειακὰ γρόσια χαρτονομίσματος, πολλαπλασιάζομεν αὐτὰς ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς λίρας· οὕτως,

20 λίραι πρὸς γρόσια 900 φέρουσι 48000 γρόσια ταμειακὰ εἰς χαρτονομίσματα.

κα'. Μετατροπὴ ἀγοραίων γροσίων χαρτονομίσματος εἰς λίρας καὶ τὰν ἀπαλιν.

Ἵνα πρέψωμεν ἀγοραῖα γρόσια χαρτονομίσματος εἰς λίρας ὀθωμανικὰς, ὁπότεν δίδηται ἡ τιμὴ τῆς λίρας εἰς ταμειακὰ γρόσια, διαιροῦμεν τὸ ἑκατονταπλάσιον τῶν ἀγοραίων γροσίων διὰ τοῦ γινομένου τῆς τιμῆς τῆς λίρας ἐπὶ 130· οὕτω, γρόσια ἀγοραῖα 4680 πρὸς γρ. 900 τὴν ὀθωμανικὴν λίραν φέρουσι

$$\text{Λοθ. } \frac{4680 \times 100}{900 \times 130} = \frac{468}{9 \times 13} = \frac{52}{13} = 4 \text{ λίραις ὀθωμαν.}$$

Καὶ ἀντιστρόφως, Ἵνα πρέψωμεν λίρας ὀθωμανικὰς εἰς ἀγοραῖα γρόσια χαρτονομίσματος, πωλλαπλασιάζομεν αὐτὰς ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς λίρας εἰς ταμειακὰ γρόσια πωλλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ 1,3· οὕτω λίραι ὀθωμ. 4 πρὸς γρ. 900 = $900 \times 1,3 \times 4 =$ με 4680 γρ. ἀγοραῖα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ταμειακὰ γρόσια ἀποκαλοῦμεν τὴν τιμὴν τοῦ χαρτονομίσματος εἰς ἑκατοστάρια ὧν ἕκαστον εὐγκεῖται ἐξ 100 ἀκριβοῦς γροσίων· ἀγοραῖα δὲ λέγομεν τὰ γρόσια, ὁπότεν τὸ ἑκατοστάριον χαρτονομίσμα τιμᾶται κυκλοφοροῦν πρὸς 130 γρόσια χάρτινα.

κβ' Μετατροπὴ χαρτίνων καρποδόλων εἰς λίρας ὀθωμανικὰς καὶ τὰν ἀπαλιν.

Μετατρέπομεν χάρτινα καρπόβολα εἰς λίρας ὀθωμανικὰς, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν τῶν καρποδόλων διὰ τῆς τιμῆς τῆς λίρας εἰς καρπόβολα· οὕτω,

κατὰ τὴν πώλησιν 3500 χαρτίνων καρποδόλων εἰσπράττομεν, ὁπότεν ἡ ἀξία ἢ $8 \frac{1}{2}$ χάρτινα καρπόβολα εἰς τὴν λίραν, ὀθωμαν. λίρας:

$$\frac{3500}{8 \frac{1}{2}} = 411,7645 \text{ λίρ. ὀθωμαν.}$$

Καὶ ἀντιστρόφως, Ἵνα πρέψωμεν λίρας ὀθωμανικὰς εἰς χάρτινα καρπόβολα, πωλλαπλασιάζομεν αὐτὰς ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς· οὕτω, κατὰ τὴν ἀγορὰν 400 λίρ. ὀθωμαν., ὁπότεν ἡ ἀγορὰ ἢ 9 καρπόβολα χάρτινα εἰς τὴν λίραν, πληρώσωμεν

$$400 \times 9 = 3600 \text{ χαρτίνοις καρποδόλοις.}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν ἀγορὰν ἡ λίρα τιμᾶται ἀπὸ $6 \frac{1}{2}$ ἕως 11 ἑκατοστάρων χαρτονομίσματος, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν πίνακὰ πῶς δεικνύοντα ἐν ταύτῳ τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν τῆς λίρας εἰς τε τὸ βωσσικὸν καὶ τουρκικὸν χαρτονομίσμα, λαμβάνοντες ὡς βᾶσιν τὰ 1000 καρπόβολα χάρτινα, ἢ ἑκατοστάρια χαρτονομίσματος· οὕτω,

Τιμὴ τῆς λίρας εἰς καρπόβολα, ἢ ἑκατοστάρια χαρτονομίσματος.	Ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ εἰς λίρας ὀθωμαν. διὰ 1000 καρπόβολα ἢ ἑκατοστ. χαρτονομίσματος.
6,50	453,846150
6,75	448,148148
7	442,857142
7,25	437,931034
7,50	433,333333
7,75	429,032258
8	425
8,25	421,212121
8,50	417,647058
8,75	414,285714
9	411,111111
9,25	408,108108
9,50	405,263157
9,75	402,564102
10	400
10,25	397,569756
10,50	395,238095
10,75	393,023256
11	390,909090

Κατὰ τὸν πίνακα τοῦτον 1000 χάρτινα καρπόβολα ἢ 1000 ἑκατοστάρια χαρτονομίσματος ἰσοπαρίζουσιν, ὁπόταν ἡ λίρα ἔχη 7,25 λ. χ. καρπόβολα, ἢ ἑκατοστάρια, πρὸς λίρας ὀθωμανικὰς 137,934034, ἢ εἰς γρόσια καθαρὰ 13793,1034, ἢ εἰς γρόσια 13793 καὶ παράδας 4,136.

Δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ εὗρωμεν, δυνάμει τοῦ πίνακος τούτου τὴν εἰς λίρας ὀθωμανικὰς ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν 1—10—100—10000—100000 κτλ. καρποβόλων χαρτίνων, ἢ ἑκατοσταρίων χαρτονομίσματος, ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς τῶν ἀριθμῶν τοῦ πίνακος τρεῖς, δύο καὶ μίαν θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἢ μίαν, δύο κτλ. θέσεις πρὸς τὰς δεξιὰς· οὕτω

ὁπόταν ἡ λίρα ἔχη 7,25 καρπόβολα, ἢ ἑκατοστάρια εἰσπράξωμεν κατὰ τὴν πώλησιν,

λίρας Ὀθωμαν. 0,13793...	δι' 1	καρπόβολον ἢ 1	ἑκατοστάρια
» » 1,37931...	» 10	καρπόβολα » 10	ἑκατοστάρια
» » 13,79310...	» 100	» » 100	»
» » 137,931034	» 1000	» » 1000	»
» » 1379,31034	» 10000	» » 10000	»
» » 13793,1034	» 100000	» » 100000	»
» » 137931,034	» 1000000	» » 1000000	»

κτλ.

Τοῦ πίνακος τούτου χρῆσιν ποιούμεθα καὶ δι' οἰονδήποτε ἀριθμὸν καρποβόλων, ἢ ἑκατοσταρίων δι' ἅπλου τινος πολλαπλασιασμοῦ. οὕτω, τῆς λίρας τιμωμένης ἀντὶ 8 1/2 καρποβόλων, ἢ 8 1/2 ἑκατοσταρίων, θέλομεν μετρήσει, κατὰ τὴν ἀγορὰν 6500 καρποβόλων χαρτίνων, ἢ 6500 ἑκατοσταρίων χαρτονομίσματος, λίρας ὀθωμανικὰς 764,705877 ὡς ἑξῆς:

ἐὰν διὰ 1000 καρπ. ἢ ἑκατ. πρὸς 8 1/2 πληρώνομεν κατὰ τὸν πίνακα Δοθ. 117,647038

» 6500 » » » » πληρώσωμεν λίρας ὀθωμ.

$$117,647038 \times 6,5 = 764,705877.$$

Ἐὰν δὲ ἀγοράζωμεν 95 καρπόβολα ἢ 95 ἑκατοστάρια εἰς τὴν τιμὴν τῶν 8 1/2, θέλομεν πολλαπλασιάσει τὸν ἀριθμὸν τοῦ πίνακος ἐπὶ 0,095· διότι $95 = 0,095 \times 1000$ · οὕτω,

δι' 95 καρπόβ. ἢ ἑκατοστ. πληρώσωμεν λίρ. ὀθ.

$$117,647038 \times 0,095$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἠδυνάμεθα νὰ περιλάβωμεν εἰς τὸν ἄνωθι ἐκτεθέντα πίνακα ὅλας τὰς ἀλλοιώσεις εἰς ἃς ὑπόκειται τὸ ποσὸν τῶν χαρτίνων καρποβόλων, ἢ τῶν ἑκατοσταρίων τοῦ χαρτονομίσματος διὰ μίαν λίραν ὀθωμανικὴν ἕνεκα τῆς μᾶλλον ἢ ἥττον ζητήσεως ἣν εὐρίσκουσι τὰ νομίσματα ταῦτα· ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ σχηματισμὸς τοῦ πίνακος εἶναι τοῖς πᾶσιν ἐφικτὸς διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν εἰς τὴν μετατροπὴν τῶν χαρτίνων καρποβόλων εἰς λίρας εἰρημένων ἐπὶ τῇ βᾶσει τῶν 1000, περιορίσθημεν εἰς τοὺς ἐν τῷ πίνακι ἀριθμούς.

κγ'. Μετατροπὴ χαρτίνων καρποβόλων εἰς Μεδζιτιέδας καὶ τὰν ἀπαλιν.

Μετατρέπομεν χάρτινα καρπόβολα εἰς Μεδζιτιέδας, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δοθέντα καρπόβολα ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς λίρας εἰς γρόσια Μεδζιτιέδος, καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τῆς τιμῆς τῆς λίρας εἰς καρπόβολα πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ 20· οὕτω,

κατὰ τὴν ἀγορὰν 2500 χαρτίνων καρποβόλων θέλομεν μετρήσει, ὁπόταν ἡ ἀγορὰ ᾖ 7 καρπόβολα πρὸς τὴν λίραν, καὶ ἡ λίρα τιμᾶται

$$\text{ἀντὶ } 106 \text{ γροσίων εἰς Μεδζιτιέν, } \frac{2500 \times 106}{7 \times 20} = 1892,857 \text{ Μεδζιτιέδας ἢ Μεδζιτιέδας } 1892 \frac{3}{4} \text{ καὶ } 2 \text{ γρόσια Μεδζιτιοῦ.}$$

Καὶ ἀντιστρόφως, ἵνα τρέψωμεν Μεδζιτιέδας εἰς χάρτινα καρπόβολα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ταμειακὰ γρόσια τῶν δοθέντων Μεδζιτιέδων ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς λίρας εἰς καρπόβολα, καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῆς τιμῆς τῆς λίρας εἰς Μεδζιτι· οὕτω

πόσα χάρτινα καρπόβολα κáμνουν 1800 Μεδζιτιέδες, ὁπόταν ἡ ἀγορὰ ᾖ 8 1/2 καρπόβολα πρὸς τὴν λίραν, καὶ ἡ λίρα τιμᾶται ἀντὶ 107 1/2 γροσίων Μεδζιτιοῦ;

$$\frac{1800 \times 20 \times 8 \frac{1}{2}}{107 \frac{1}{2}} = 2846,54 \text{ χαρτ. καρποβ.}$$

κδ'. Μετατροπὴ γροσίων μεταλλικῶν, πενταγρίων, ἑξαγρίων καὶ ταμειακῶν χαρτονομίσματος εἰς Μεδζιτιέδας καὶ τὰν ἀπαλιν.

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζωμεν τὰ δεδομένα γρόσια ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς λίρας εἰς Μεδζιτιέν, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τῆς τιμῆς τῆς

λίρας εἰς τὰ διάφορα ταῦτα νομίσματα πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ 20. οὕτως, ὁπόταν ἡ λίρα τιμᾶται ἀντὶ

γροσίων 106 $\frac{1}{2}$	εἰς Μεδζίτι
» 119 $\frac{3}{8}$	» μεταλλικὰ
» 117 $\frac{3}{4}$	» πεντάρια
» 118 $\frac{3}{4}$	» ἐξάρια
» 780	» ταμειακὰ χαρτονομίσματα

εἰσπράζωμεν, κατὰ τὴν πώλησιν 16000 γροσίων ἐκ τῶν νομισμάτων τούτων,

$$\frac{16000 \times 106 \frac{1}{2}}{119 \frac{3}{8} \times 20} = \text{Μεδζ. 713,717.}$$

$$\frac{16000 \times 106 \frac{1}{2}}{117 \frac{3}{4} \times 20} = \text{» 723,558.}$$

$$\frac{16000 \times 106 \frac{1}{2}}{118 \frac{3}{4} \times 20} = \text{» 717,473.}$$

$$\frac{16000 \times 106 \frac{1}{2}}{780 \times 20} = \text{» 109,23}$$

Καὶ ἀντιστρόφως, ἵνα τρέψωμεν Μεδζιτιέδας εἰς γρόσια τούτων τῶν νομισμάτων, πολλαπλασιάζομεν τὰ ταμειακὰ γρόσια τῶν Μεδζιτιέδων ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς λίρας εἰς αὐτὰ τὰ γρόσια, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τῆς τιμῆς τῆς λίρας εἰς γρόσια Μεδζιτιέδος. οὕτως 6500 Μεδζιτιέδες δίδουσι κατὰ τὰς ἀνωθι διατιμήσεις τῶν νομισμάτων,

$$\frac{6500 \times 20 \times 119 \frac{3}{8}}{106 \frac{1}{2}} = \text{γρ. 145714 εἰς μεταλλικὰ}$$

$$\frac{6500 \times 20 \times 117 \frac{3}{4}}{106 \frac{1}{2}} = \text{» 143732,40 » πεντάρια}$$

$$\frac{6500 \times 20 \times 118 \frac{3}{4}}{106 \frac{1}{2}} = \text{» 144953 » ἐξάρια}$$

$$\frac{6500 \times 20 \times 780}{106 \frac{1}{2}} = \text{» 952112,67 » ταμειακὰ χαρτονομ.$$

καί. Μετατροπὴ ἀγοραίων γροσίων χαρτονομίσματος εἰς Μετζιτιέδας καὶ τὰν ἁπάντων.

ἵνα τρέψωμεν ἀγοραῖα γρόσια χαρτονομίσματος εἰς Μετζιτιέδας, ὁπόταν ἦναι γνωστὴ ἡ τιμὴ τῆς λίρας εἰς ταμειακὰ γρόσια, ἀκολου.

θοῦμεν τὸν αὐτὸν τρόπον, ὃν καὶ εἰς τὴν μετατροπὴν ταμειακῶν γροσίων χαρτονομίσματος εἰς Μετζιτιέδας, τὸ ἐξαγόμενον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν δι' 130. οὕτως,

ὁπόταν ἡ λίρα τιμᾶται

ἀντὶ γροσίων 106 $\frac{1}{2}$ εἰς Μετζιτιέδας, καὶ

» » 980 » ταμειακὰ χαρτονομίσματος,

θέλομεν μετρήσει, κατὰ τὴν ἀγορὰν 16792 γροσίων ἀγοραίων χαρτονομίσματος,

$$\frac{16792 \times 106 \frac{1}{2} \times 100}{980 \times 20 \times 130} = \text{Μεδζιτιέδας 70,186.}$$

Καὶ ἀντιστρόφως, ἵνα τρέψωμεν Μετζιτιέδας εἰς ἀγοραῖα γρόσια χαρτονομίσματος, ἀκολουθοῦμεν τὸν αὐτὸν τρόπον, ὃν καὶ εἰς τὴν μετατροπὴν Μετζιτιέδων εἰς ταμειακὰ γρόσια, τὸ ἐξαγόμενον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 130 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν δι' 100. οὕτω, Μεδζιτιέδες 800 κατὰ τὰς ἀνωθι διατιμήσεις δίδουσι

$$\frac{800 \times 980 \times 20 \times 130}{106 \frac{1}{2} \times 100} = \text{μὲ ἀγοραῖα γρόσια 191399.}$$

καί. Μετατροπὴ 20φραγκον, £ καὶ πωλίου αὐτοκρατορικοῦ εἰς Μετζιτιέδας καὶ τὰν ἁπάντων.

ἵνα τρέψωμεν 20φραγκα, £ καὶ πώλια αὐτοκρατορικὰ εἰς Μετζιτιέδας, πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ ἐπὶ τὰς τιμὰς τῶν εἰς γρόσια καὶ οὕτως εὐρίσκομεν λίρας ὁθωμανικὰς, ἃς μετατρέπομεν εἰς Μετζιτιέδας, πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς λίρας εἰς γρόσια Μεδζιτιέδος καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦντες διὰ 20×100. οὕτως,

ὁπόταν ἡ λίρα ὁθωμ. τιμᾶται ἀντὶ γροσίων 106 μὲ Μεδζίτι, καὶ

1 20φραγκον ἰσοφαιζῇ πρὸς γρόσια 87 $\frac{1}{4}$

1 £ » » » 109 $\frac{1}{2}$

1 πώλιον αὐτοκρ. » » » 89 $\frac{1}{4}$

θέλομεν μετρήσει, κατὰ τὴν ἀγορὰν 910 ἐκ τούτων τῶν νομισμάτων,

$$\frac{910 \times 87 \frac{1}{4} \times 106}{20 \times 100} = 4208,0675 \text{ Μετζιτιέδας διὰ 910 20φραγκα}$$

$$\frac{910 \times 109 \frac{1}{2} \times 106}{20 \times 100} = 5284,185 \text{ » » 910 £}$$

$$\frac{910 \times 89 \frac{1}{4} \times 106}{20 \times 100} = 4304,5275 \text{ » » 910 πώλια.}$$

Καὶ ἀντιστρόφως, ἵνα τρέψωμεν Μεδζιτιέδους εἰς 20φραγκα, £ καὶ πώλια, διαιροῦμεν τὰ ταμειακὰ γρόσια τῶν Μεδζιτιέδων διὰ τῆς τιμῆς τῆς ὀθωμαν. λίρας εἰς γρόσια Μεδζιτιέδος πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὴν τιμὴν τῶν νομισμάτων τούτων εἰς γρόσια καθαρὰ· οὕτω

Μεδζιτιέδες 800 κατὰ τὰς ἄνωθι διατιμήσεις θέλουσι μᾶς δώσει

$$\frac{800 \times 20 \times 100}{87 \frac{1}{4} \times 106} = 173... 20\text{φραγκα}$$

$$\frac{800 \times 20 \times 100}{109 \frac{1}{2} \times 106} = 137,8478 \text{ £ } \text{ ἢ } \text{£ } 137-16-11$$

$$\frac{800 \times 20 \times 100}{89 \frac{1}{4} \times 106} = 169,12... \text{ πώλια.}$$

α΄. Μετατροπὴ 20φράγκων, £ καὶ πωλίων αὐτοκρατορικοῦ εἰς μεταλλικὰ καὶ τὰνράπαλιν.

Ἴνα τρέψωμεν 20φραγκα, £ καὶ πώλια εἰς μεταλλικὰ, πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ ἐπὶ τὴν τιμὴν των εἰς γρόσια, τὸ δὲ γινόμενον ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς λίρας εἰς μεταλλικὰ καὶ διαιροῦμεν τὸ ὅλον δι' 100. οὕτω, κατὰ τὴν ἀλλαγὴν 720 ἐκ τῶν νομισμάτων τούτων, θέλομεν λάβει, ὅποταν ἡ ὀθωμανικὴ λίρα τιμᾶται ἀντὶ 117 γροσίων μεταλλικῶν, καὶ

1 20φράγκων	ισοαφρίζει	πρὸς	87 $\frac{1}{4}$	γρόσια καθαρὰ
1 £	»	»	108 $\frac{3}{8}$	»
1 πώλιον	»	»	89 $\frac{3}{8}$	»

$$\frac{720 \times 87 \frac{1}{4} \times 117}{100} = 73394,10 \text{ γρ. μεταλλικὰ διὰ 720 20φρ.}$$

$$\frac{720 \times 108 \frac{3}{8} \times 117}{100} = 91293,10 \text{ » » » 720 £}$$

$$\frac{720 \times 89 \frac{3}{8} \times 117}{100} = 75289,50 \text{ » » » 720 πώλια.}$$

Καὶ ἀντιστρόφως, ἵνα τρέψωμεν μεταλλικὰ γρόσια εἰς 20φραγκα, £ καὶ πώλια, διαιροῦμεν τὰ μεταλλικὰ γρόσια διὰ τῆς τιμῆς τῆς λίρας εἰς μεταλλικὰ, τὸ δὲ πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 100 καὶ

διαίρομεν διὰ τῆς τιμῆς τῶν νομισμάτων τούτων εἰς γρόσια καθαρὰ· οὕτω,

μεταλλικὰ γρόσια 19850 κατὰ τὰς ἄνωθι διατιμήσεις θέλουσι μᾶς δώσει

$$\frac{19850}{117} = 169,658 \text{ καὶ } \frac{169,658 \times 100}{87 \frac{1}{4}} = 194,729 \text{ 20φραγκα}$$

$$\frac{19850}{117} = 169,658 \text{ καὶ } \frac{169,658 \times 100}{108 \frac{3}{8}} = 156,5471 \text{ £ ἢ £ } 156-10-11$$

$$\frac{19850}{117} = 169,658 \text{ καὶ } \frac{169,658 \times 100}{89 \frac{3}{8}} = 189,872 \text{ πώλια.}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὴν αὐτὴν μέθοδον ἀκολουθοῦμεν καὶ διὰ τὴν μετατροπὴν 20 φράγκων, £ καὶ πωλίων εἰς γρόσια πενταρίων καὶ ἑξαρίων καὶ τὰνράπαλιν.

ΕΥΘΕΙΑΣΤΙΚΟΝ ΤΙΜΗΜΑ Η ΣΤΗΣΙΜΟΝ.

75. Εὐθειαςτικὸν τμήμα λίρας ὀθωμαν. εἰς γρόσια Μεδζιτιέδος.

Ὅσκις μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ 1 Μεδζιτιέδος εἰς γρόσια καὶ ἡ τιμὴ τῆς λίρας εἰς γρόσια Μεδζιτιέδος, εὐρίσκομεν τὸ εὐθειαςτικὸν τμήμα ἢ τὸ στήσιμον τῆς λίρας εἰς γρόσια, πολλαπλασιάζοντες τὴν εἰς γρόσια Μεδζιτιέδος τιμὴν τῆς λίρας ἐπὶ τὸ πενταπλάσιον τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς Μεδζιτιέδος εἰς γρόσια, καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενον ἀποκόπτοντες δύο ψηφία ὡς δεκαδικὰ· οὕτως,

ὅποταν ἡ λίρα ἔχῃ 106 $\frac{1}{2}$ γρόσια εἰς Μεδζιτι, καὶ ὁ Μεδζιτιές τιμᾶται ἀντὶ 21 γροσίων ἢ τιμὴ ἢ τὸ στήσιμον τῆς λίρας εἰς γρόσια θὰ ᾖ:

$$\frac{106 \frac{1}{2} \times 105}{100} = 111,825 \text{ γρ. ἢ γρ. } 111 \text{ καὶ παρ. } 33.$$

Εὐθειαςτικὸν τμήμα Μεδζιτιέδος εἰς γρόσια λίρας.

Γνωστῆς οὖσης τῆς τιμῆς τῆς λίρας εἰς γρόσια, καὶ τῆς τιμῆς αὐτῆς εἰς γρόσια Μεδζιτιέδος, εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ Μεδζιτιέδος, διαίροντες τὸ ἑκατονταπλάσιον τῆς εἰς γρόσια τιμῆς τῆς λίρας διὰ τῆς εἰς γρόσια Μεδζιτιέδος τιμῆς αὐτῆς, καὶ τοῦ πηλίκου λαμβάνοντες τὸ $\frac{1}{100}$ · οὕτως,

ὅποταν ἡ λίρα ἔχῃ γρ. 176,55 καὶ ἡ τιμὴ αὐτῆς ἢ 107 γρόσια εἰς

Μεδζιτιέν, εὐρίσκομεν τὴν εἰς γρόσια τιμὴν τοῦ Μεδζιτιέδος ὡς ἑξῆς:

$$\frac{179,55 \times 100}{107} = 165, \text{ καὶ}$$

$$\frac{165}{5} = 33 \text{ γρόσια.}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Τὴν αὐτὴν μέθοδον ἀκολουθοῦμεν καὶ πρὸς εὐρε-
σιν τῆς τιμῆς τοῦ Μεδζιτιέδος εἰς Μεταλλικὰ, Πεντάρια, Ἑξάρια χαλ-
κονόμισμα, ταμειακὰ γρόσια χαρτονομίσματος καὶ ἀγοραῖα γρόσια
χαρτονομίσματος· οὕτως,
ὅποταν ἡ λίρα τιμᾶται ἀντὶ 106 1/2 γροσίων εἰς Μεδζιτιέν, καὶ ἡ
τιμὴ αὐτῆς ᾗ,

γρόσια 119 1/4 εἰς Μεταλλικὰ

» 117 1/2 » Πεντάρια

» 118 » Ἑξάρια

» 450 » Χαλκονόμισμα

» 700 » Ταμειακὰ γρόσια χαρτονομίσματος.

» 910 » ἀγοραῖα » »

τὸ εὐθειαςτικὸν τίμημα τοῦ Μεδζιτιέδος θὰ ᾗ,

$$\frac{119 \frac{1}{4} \times 100}{106 \frac{1}{2} \times 5} = \text{γρ. } 22,394.. \text{ εἰς Μεταλλικὰ}$$

$$\frac{117 \frac{1}{2} \times 100}{106 \frac{1}{2} \times 5} = \text{» } 22,065.. \text{ » Πεντάρια}$$

$$\frac{118 \times 100}{106 \frac{1}{2} \times 5} = \text{» } 22,459... \text{ » Ἑξάρια}$$

$$\frac{450 \times 100}{106 \frac{1}{2} \times 5} = \text{» } 84,307.. \text{ » Χαλκονόμισμα}$$

$$\frac{700 \times 100}{106 \frac{1}{2} \times 5} = \text{» } 131,455.. \text{ » Ταμειακὰ γρόσια χαρτονομίσματος}$$

$$\frac{910 \times 100}{106 \frac{1}{2} \times 5} = \text{» } 172,77 \text{ » Ἀγοραῖα » »}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ζητῇται τὸ στήσιμον τοῦ Μεδζιτιέδος εἰς ἀ-
γοραῖα γρόσια χαρτονομίσματος, γνωστῆς οὔσης τῆς τιμῆς τῆς λίρας

εἰς ταμειακὰ γρόσια, τότε ὁ 100 τοῦ ἀριθμητοῦ ἀντικαθίσταται διὰ
130. οὕτως,

Ὅποταν ἡ ἀντικαταλλαγὴ (agio) τῆς λίρας ᾗ 6 1/2 γρόσια καὶ
ἡ τιμὴ αὐτῆς ᾗ 700 γρόσια ταμειακὰ, τὸ στήσιμον τοῦ Μεδζιτιέδος
θὰ ᾗ εἰς ἀγοραῖα γρόσια χαρτονομίσματος,

$$\frac{700 \times 130}{106 \frac{1}{2} \times 5} = 172,77 \text{ γρ. ἀγορ. χαρτονομίσματος.}$$

Εὐθειαςτικὸν τίμημα ἡ στήσιμον τοῦ Μεδζιτιέδος εἰς £, 20φραγ-
κον καὶ πώλιον ἀννοκρατορικόν.

Γνωστῆς οὔσης τῆς τιμῆς τῆς £, τοῦ 20φράγκου καὶ τοῦ αὐτο-
κρατορικῶ πωλίου εἰς γρόσια ὡς καὶ τῆς ἀντικαταλλαγῆς τῆς λίρας,
ὀρίζομεν τὸ τίμημα τοῦ Μεδζιτιέδος, ἔαν πολλαπλασιάζωμεν τὰς
τιμὰς τῶν μνησθέντων νομισμάτων ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς λίρας εἰς γρό-
σια Μεδζιτιέδος, καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ 500· οὕτως,
ὅποταν ἡ λίρα τιμᾶται ἀντὶ 106 γρ. Μεδζιτιέδος, καὶ

1 £ ἰσοφαρίζει πρὸς 110 γρόσια

4 20φράγκον » » 87 »

1 πώλιον » » 89 1/2 »

τὸ τίμημα τοῦ Μεδζιτιέδος θὰ ᾗ

$$\frac{110 \times 106}{500} = \text{γρ. } 21,412 \text{ εἰς £}$$

$$\frac{87 \times 106}{500} = \text{» } 18,444 \text{ » 20φρ.}$$

$$\frac{89 \frac{1}{2} \times 106}{500} = \text{» } 18,974 \text{ » πώλ.}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Τὴν αὐτὴν μέθοδον ἀκολουθοῦμεν καὶ ὅταν ζη-
τῇται τὸ στήσιμον τοῦ Μεδζιτιέδος εἰς Καρπόβολα νέα, δεύτερα καὶ
παλαιὰ ἢ Αἰκατερίνης, ἅτινα πωλοῦνται 6 ἀντὶ μιᾶς ὀθωμανικῆς
λίρας· οὕτως, ὅποταν ἡ ἀντικαταλλαγὴ τῆς λίρας ᾗ 7 γρόσια, καὶ

6 Καρπόβολα νέα ἰσοφαρίζωσι πρὸς 95 γρόσια.

6 » » δεύτερα » » 91 1/2 »

6 » παλαιὰ (Αἰκατερίνης) » » 87 »

τὸ τίμημα ἡ τὸ στήσιμον τοῦ Μεδζιτιέδος θὰ ᾗ:

$$\frac{95 \times 107}{500} = \text{γρ. } 20,33 \text{ εἰς Καρπόβολα νέα}$$

$$\frac{91\frac{1}{2} \times 107}{500} = \text{» } 19,581 \text{ » » δεύτερα, καὶ}$$

$$\frac{87 \times 107}{500} = \text{» } 18,618 \text{ » » παλαιὰ ἢ Αἰκατερίνης,}$$

ΝΟΜΙΣΜΑΤΙΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΙ.

Οὕτως ἀποκαλοῦμεν τὰς διαφορὰς αἵτινες προκύπτουσιν ἐκ τῆς συγκρίσεως ταμειακῶν γροσίων πρὸς γρόσια καθαρὰ κατὰ συνέπειαν, ὅποτε μὲς δίδεται ἡ ἀγοραία τιμὴ νομισματός τινος, ὁρεῖσθαι ἐν πρώτοις νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ταμειακὴν αὐτοῦ τιμὴν, καὶ εἶτα νὰ προβῶμεν εἰς τὴν κατὰ διαφορὰν σύγκρισιν.

1^ο Τίς ἡ νομισματικὴ διαφορὰ Μεδζιτιέδων 800, ὅποτε ἡ ἀντικαταλλαγὴ τῆς λίρας ἢ $6\frac{1}{2}$ γρόσια;

ἀ. Μεδζ. 800 ἰσοφαιρίζουσι πρὸς $800 \times 20 = 16000$ ταμειακοῦς γρ.

β'. Ταμ. γρ. 16000 πρὸς γρ. $406\frac{1}{2}$ τὴν λίραν φέρουσι $\frac{16000}{406\frac{1}{2}} = 150,23^{47}$ λίρας ἢ 15023, 47 γρ. καθ., καὶ εἰς τὴν ἐφαρμογὴν γρ. καθ. 15023,50.

ἔθεν

Μεδζ. 800 φέρουσι ταμειακὰ	Γρ. 16000
» 800 πρὸς $406\frac{1}{2}$ φέρουσι καθαρὰ	» 15023,50
εὐρίσκουμεν διὰ νομισματικὴν διαφορὰν	Γρ. 978,50

2^ο Ἀγοράσας ἐλπίρουμεν τι ἐπλήρωσα γρ. 8795 μὲ Μεδζιτι πρὸς 32 γρόσια· ποίαν νομισματικὴν διαφορὰν θέλω ἀπεράσει εἰς τὰ βιβλία μου, ὅποτε ἡ λίρα τιμᾶται ἀντὶ 107 γροσίων καὶ $8\frac{1}{2}$ παρὰδων μὲ Μεδζιτι;

ἀ'. Γρόσια 8795 μὲ Μεδζιτιέν πρὸς 32 γρόσια ἰσοφαιρίζουσι

$$\frac{8795 \times 20}{32} = 5496,875 \text{ γρ. μὲ Μεδζιτιέν πρὸς γρ. } 20.$$

β'. Ταμ. γρ. 5496,875 πρὸς γρόσια 107 καὶ παρ. $8\frac{1}{2}$ ἢ γρ.

107,2125 τὴν λίραν φέρουσι $\frac{5496,875}{107,2125} = 51,27^{08}$ λίρ. ἢ γρ. 5127,08 καὶ εἰς τὴν ἐφαρμογὴν γρ. καθ. 5127.

ἔθεν

Γρόσια 8795	φέρουσι ταμειακὰ Γρ. 5496,875
» 5496,875 πρὸς 107,2125	» καθαρὰ » 5127, »

ἡ ζητούμενη νομισματικὴ διαφορὰ εἶναι Γρ. 369,875

3^ο Τίς ἡ νομισματικὴ διαφορὰ 8000 ταμειακῶν γροσίων χαρτονομίσματος, ὅποτε ἡ λίρα τιμᾶται ἀντὶ 440 γροσίων ταμειακῶν;

Ταμ. γρ. 8000 πρὸς γρ. 440 τὴν λίραν φέρουσι $\frac{8000}{440} = 18,40909$ λίρας ἢ γρ. καθ. 1840,909 καὶ εἰς τὴν ἐφαρμογὴν γρ. καθ. 1841.

ἔθεν

Ταμειακὰ	Γρ. 8000
Καθαρὰ	» 1841
ἡ ζητούμενη νομισματικὴ διαφορὰ ἔσται	Γρ. 6159

4^ο Κατὰ τὴν παραλαβὴν ἐμπορεύματος τινος ἐξωδεδύθησαν γρόσια ἀγοραῖα χαρτονομίσματος 6892, ὁρίσαι τὴν νομισματικὴν διαφορὰν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι $5\frac{1}{2}$ ἑκατοστήρια ἰσοφαιρίζουσι πρὸς 1 λίραν.

ἀ'. Ἀγοραῖα γρόσια 6892 φέρουσι $\frac{6892 \times 100}{430} = 5304,538 \dots$ καὶ εἰς τὴν ἐφαρμογὴν 5304,50 γρόσια ταμειακὰ.

β'. Γρ. Ταμ. 5304,50 πρὸς $5\frac{1}{2}$ ἑκατοστήρια τὴν λίραν φέρουσι $\frac{5304,50 \times 100}{550} = 963,999 \dots$ καὶ εἰς τὴν ἐφαρμογὴν 964 γρόσια καθαρὰ.

ἔθεν

Ταμειακὰ	Γρ. 5304,50
Καθαρὰ	» 964, »
ἡ νομισματικὴ διαφορὰ εἶναι	Γρ. 4337,50

5^ο Τίς ἡ νομισματικὴ διαφορὰ 8000 γροσίων εἰς πεντήρια, ὅποτε ἡ λίρα τιμᾶται $417\frac{1}{3}$ γρόσια εἰς πεντήρια;

8000 γρ. πρὸς 117 $\frac{1}{8}$ τὴν λίραν φέρουσι λίρας $\frac{8000}{117 \frac{1}{8}} = 68,303$ ἢ γρ. καθ. 6830,30, καὶ εἰς τὴν ἐφαρμογὴν γρ. καθ. 6830,25.

ὅθεν

Γρόσια εἰς πεντάρια	8000
8000 γρ. πρὸς 117 $\frac{1}{8}$ φέρουσι καθαρὰ γρόσια	6830,25

ἄρα ἡ ζητούμενη νομισματικὴ διαφορὰ εἶναι	Γρ. 1169,75
---	-------------

6^ο Τίς ἡ νομισματικὴ διαφορὰ 850 ἐξάρων, ὁπόταν ἡ λίρα ἰσοφαρίζῃ πρὸς 116 $\frac{7}{8}$ γρόσια εἰς ἐξάρια;

α'. 850 ἐξάρια ἀποτελοῦσι Γρ. 5400

β'. 5400 γρ. πρὸς 116 $\frac{7}{8}$ φέρουσι $\frac{5400}{116 \frac{7}{8}} = 43,6363$ λίρας ἢ γρ. καθ. 4363,63 καὶ εἰς τὴν ἐφαρμογὴν γρ. καθ. 4363,50.

ὅθεν

ἐξάρια 850 ἀποτελοῦσι	Γρ. 5400
5400 γρ. πρὸς 116 $\frac{7}{8}$ φέρουσι καθαρὰ	» 4363,50
ἡ ζητούμενη νομισματικὴ διαφορὰ εἶναι	Γρ. 736,50.

7^ο Τίς ἡ νομισματικὴ διαφορὰ 350 ἀριθμητικῶν χερσίων μεταλλικῶν, ὁπόταν ἡ λίρα τιμᾶται ἀντὶ γροσίων 118;

α'. Χέρια ἀριθμητικὰ 350 φέρουσι γρ. $(350 + 350 + 175) = \gamma\rho. 875$

β'. Γρ. 875 πρὸς 118 γρ. τὴν λίραν φέρουσι $\frac{875}{118} = 7,4152$ λίρας ἢ γρ. καθ. 741,62 καὶ εἰς τὴν ἐφαρμογὴν γρ. καθ. 741,50.

ὅθεν

χέρια ἀριθμ. μεταλλ. 350 δίδουσι	Γρ. 875
Γρ. 875 πρὸς 118 φέρουσι καθαρὰ	» 741,50
ἡ ζητούμενη νομισματικὴ διαφορὰ ἔσται	Γρ. 133,50

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

Πρόβλημα α'. Ἐμπορὸς Κωνσταντινουπόλεως ἐπώλησεν ἔλαια δακτύλων καθαρῶν 4389 πρὸς γρ. 4 τὴν ὀκλὴν μὲ μεδζίτι πρὸς 24. ἔαν

θελήσῃ νὰ λάβῃ παρὰ τοῦ ἀγοραστοῦ λίρας ὀθωμ. χρυσῆς, πόσας Λοθ. θέλει εἰσπράξῃ ὁπόταν ἡ λίρα ἔχῃ διαφορὰν 6 $\frac{1}{2}$ γρόσια πρὸς τὸ μεδζίτι;

Λύσις. Ὁκτάδες $4389 \times 4 = \gamma\rho. 17556$ μὲ μεδζίτι πρὸς 24. ταῦτα δὲ τὰ 17556 γρ. δίδουσι μεδζιτιέδας ἀργυροῦς $\frac{17556}{24} = 856$ οὗς τρέπομεν εἰς Λοθ. πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 20 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦντες διὰ 106 $\frac{1}{2}$ οὕτω

M. ἀργ. 836 = Λοθ. $\frac{836 \times 20}{106 \frac{1}{2}} = \text{Λοθ. } 156,99,53$ ἢ γρόσια 15699,53 καὶ εἰς τὴν ἐφαρμογὴν γρ. 15699,50 εἰς Λοθ. πρὸς 100 γρ.

Πρόβλημα β'. Ἐμπορὸς Κωνσταντινουπόλεως ἐπώλησεν ὑφαντὰ τι πρὸς γρ. 74 τὸν πῆχυν μὲ μεδζίτι πρὸς γρ. 28. Πρὸς πόσα, εἰς γρόσια καθαρὰ (Λοθ. = γροσίοις 100), ἀντιστοιχεῖ ὁ πῆχυς, ὁπόταν ἡ Λοθ. ἔχῃ 106 $\frac{1}{2}$ γρόσια εἰς μεδζίτι;

Λύσις. Ἵνα λύσωμεν τὸ πρόβλημα ἐκτελοῦμεν τὰς ἐξῆς ἐργασίας:

$$\frac{71 \times 20 \times 100}{28 \times 106 \frac{1}{2}} = \text{Γροσίοις } 47,649 \text{ εἰς Λοθ. πρὸς } 100 \text{ γρ.}$$

Πρόβλημα γ'. Ἐμπορὸς ἐπώλησε 15 ὀκτάδας ἐλαίου πρὸς γρ. 6 καὶ 16 παράδας τὴν ὀκλὴν μὲ μεδζίτι πρὸς γρ. 24. Πόσα γρόσια καθαρὰ εἰσέπραξε καὶ ποία εἶναι ἡ νομισματικὴ διαφορὰ, ὁπόταν ἡ ἀντικαταλλαγὴ (agio) τῆς λίρας ᾖ 6 $\frac{1}{2}$ γρόσια;

Λύσις. Ἐὰν διὰ 1 ὀκλὴν εἰσπράττῃ γρ. 6 καὶ παρ. 16 ἢ γρ. 6,40
» 15 ὀκτάδας εἰσπράττει » $15 \times 6,40 = \gamma\rho. 96$ εἰς

μεδζίτι πρὸς 24, ἢ γρ. $\frac{96 \times 20}{24} = \gamma\rho. 94,42$ εἰς μεδζίτι πρὸς 20 γρ.

ἥτινα πρὸς γρ. 106 $\frac{1}{2}$ τὴν λίραν φέρουσι καθ. γρόσια $\frac{94,42 \times 20}{106 \frac{1}{2}} = 85,84$ καὶ εἰς τὴν ἐφαρμογὴν καθ. γρ. 85,75.

ὅθεν

Γρόσια μὲ μεδζίτι πρὸς 20 γρ.	94,42 ἢ 94,50
» καθαρὰ	85,75
ἡ ζητούμενη νομισματικὴ διαφορὰ εἶναι	Γρ. 5,75

Πρόβλημα δ'. Ἐγοράσαμεν 10 σάκκους ὀρυζίου Γένουδας πρὸς φρ. 42 $\frac{1}{2}$ τὸν σάκκον. Πόσα γρόσια καθαρὰ πληρώσωμεν, ὁπόταν ἡ λίρα ὀθωμ. ἰσοφαρίζῃ πρὸς φρ. 23;

Λύσις. Δι' 4 σάκκων πληρώνομεν φρ. 42 $\frac{1}{2}$.
διὰ 10 σάκκους πληρώσωμεν » 42 $\frac{1}{2}$ $\times$ 10 = φρ. 425

ἔτινα τρέπομεν εἰς καθαρὰ γρόσια ὡς ἑξῆς:

φρ. 23 ἰσοραρίζουσι πρὸς γρ. 400

» 425 ἰσοραρίζουσι » » $\frac{425 \times 100}{23} = \text{Γρ. } 1847,75.$

Πρόβλημα ε'. Ἐπωλήσαμεν 49 σάκκους ὀρυζίου Ἀγγλίας πρὸς γρ. 170 τὸν σάκκον μὲ λίρ. ὀθωμ. πρὸς γρ. 400, θέλομεν δὲ πληρωθῇ τὴν ὀλικὴν ἀξίαν τοῦ ὀρυζίου εἰς Μεδζιτιὰς, πότους Μεδζιτιέδης θέλομεν εἰσπράξει, ὁπόταν ἡ ἀντικαταλλαγὴ τῆς λίρας (agio) ᾖ γρ. 6 καὶ παρ. 43;

Λύσις. Δι' 4 Σάκκων πληρωνόμεθα γρ. 170

διὰ 49 Σάκκους πληρωθήσόμεθα γρ. 170 $\times$ 49 = γρ. 3230.

ἔτινα τρέπομεν εἰς Μεδζιτιέδης κατὰ τὰ ἤδη ἐκτεθέντα ὡς ἑξῆς:

$\frac{32,30 \times 106,325}{20} = \text{Μεδζ. } 174 \frac{1}{2}$ καὶ 4 γρ. Μεδζιτιεδάκια.

Πρόβλημα στ'. Ἐγοράσθησαν 32 Σάκκοι Σάπωνος ζυγίζοντες ὁκάδας 1996 $\frac{1}{2}$ πρὸς γρ. 4 $\frac{3}{4}$, τὴν ὁκάν μὲ λίρ. ὀθωμ. πρὸς γρ. 440. Ποία εἶναι ἡ ὀλικὴ ἀξία τῶν 32 Σάκκων εἰς καθαρὰ γρόσια;

Λύσις. 1 ὁκά τιμᾶται Γρ. 4 $\frac{3}{4}$.

1996 $\frac{1}{2}$ ὁκάδες θέλουσι τιμᾶσθαι γρ. 1996 $\frac{1}{2}$ $\times$ 4 $\frac{3}{4}$ = 9483 γροσίοις εἰς λίρ. ὀθωμ. πρὸς 440 γρ.

Ἵνα δὲ εὐρωμεν καὶ τὰ καθαρὰ γρόσια πολλαπλασιάζομεν τὸν 9483 ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν δι' 440· οὕτω

$\frac{9483 \times 100}{440} = \text{Γρ. καθ. } 6773,75.$

Πρόβλημα ζ'. Ἐμπορος Μιτυλήνης ἐπώλησε 1050 κοιλὰς ῥοβίου πρὸς γρ. 26 τὸ κοιλὸν μὲ Μεδζιτι πρὸς 32 $\frac{1}{2}$ γρ., 500 κοιλὰς καλαμ-βοκίου πρὸς γρ. 23 $\frac{3}{8}$ τὸ κοιλὸν μὲ Μεδζ. πρὸς γρ. 32 καὶ 2853 $\frac{1}{2}$ ὁκάδας ἀνασονίου πρὸς γρ. 7 καὶ παρ. 7 $\frac{1}{2}$ τὴν ὁκάν μὲ Μεδζ. πρὸς γρ. 33. Ζητεῖται

α') πόσοι Μεδζιτιέδες ἀργυροῦ ἔσται τὸ προϊόν τῶν τριῶν τούτων πωλήσεων μὲ Μεδζιτιὲν πρὸς γρ. 32, καὶ

β') πόσας λίρας ὀθωμ. εἰσπράξει, ὁπόταν ἀλλάξῃ τοὺς εἰσπραχθέν-τας Μεδζιτιέδας πρὸς γρ. 107 καὶ παρ. 23 $\frac{1}{2}$ τὴν Λοθ.;

Λύσις.

Λ/σμός ὀλικῆς ἀξίας Ῥοβίου.

Κοιλὰ 1050 πρὸς γρ. 26 = 1050 $\times$ 26 = 27300 Γρ. μὲ Μεδζ. πρὸς 32 $\frac{1}{2}$. Ἵνα δὲ εὐρωμεν τὴν ἀξίαν τῶν 1050 κοιλῶν μὲ Μεδζιτιὲν πρὸς 32 γρόσια, λέγομεν,

κοιλὰ 1050 πρὸς γρ. 26 μὲ Μεδζ. πρὸς 32 $\frac{1}{2}$ γρ. ἀξίζουσι Γρ. 27300

» » » » » » » 1 » » $\frac{27300}{32 \frac{1}{2}}$

καὶ » » » » » » » 32 » » $\frac{27300 \times 32}{32 \frac{1}{2}}$

= Γρ. 26880.

Λ/σμός ὀλικῆς ἀξίας Καλαμβοκίου.

Κοιλὰ 500 πρὸς γρ. 23 $\frac{3}{8}$ μὲ Μεδζ. πρὸς 32 = γρ. 500 $\times$ 23 $\frac{3}{8}$ = Γρ. 44687 $\frac{1}{2}$.

Λ/σμός ὀλικῆς ἀξίας Ἀνασονίου.

Ὀκάδες 2853 $\frac{1}{2}$ πρὸς Γρ. 7 καὶ 7 $\frac{1}{2}$ παρ. μὲ Μεδζ. πρὸς 33 γρ. τιμῶνται Γρ. 2853 $\frac{1}{2}$ $\times$ 7,4875 = Γρ. 20509 $\frac{1}{2}$, ἔτινα τρέπο-μεν εἰς Γρ. μὲ Μεδζ. πρὸς γρ. 32 ὡς ἑξῆς:

Ὀκ. 2853 $\frac{1}{2}$ πρὸς 7,4875 μὲ Μεδζ. πρὸς 33 τιμῶνται Γρ. 20509 $\frac{1}{2}$

» » » 4 » » $\frac{20509 \frac{1}{2}}{33}$

καὶ » » » 32 » » $\frac{20509 \frac{1}{2} \times 32}{33}$

= Γρ. 49888.

Ἵστε εὐρίσκομεν

κοιλὰ 1050 ῥοβίου μὲ Μεδζ. πρὸς γρ. 32 τιμῶνται Γρ. 26880

» 500 καλαμβοκίου » » » 32 » » 41687,50

ὁκάδ. 2853 $\frac{1}{2}$ ἀνασονίου » » » 32 » » 49888 »

ὀλικὸν ἄθροισμα Γρ. 58455,50

ἔτινα διαιροῦντες διὰ 32 λαμβάνομεν Μεδζ. 4826,734.

Ἵνα δὲ εὐρίσωμεν τὴν ὑπὸ τοῦ ἐμποροῦ εἰσπραχθῆσόμενον ποσὸν εἰς καθαρὰ γρόσια κατὰ τὴν ἀλλαγὴν τῶν 1826,734 Μεδζιτιέδων, πολ-

πλασιάζομεν τὸ εκατονταπλάσιον τοῦ 1826,734 ἐπὶ 20, καὶ τὸ ἐξα-
γόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 107,5875· οὕτω,

$$\frac{100 \times 1826,734 \times 20}{107,5875} \text{ Γρ. καθ. } 33958.$$

Πρόβλημα η'. Ἐμπορος πρόκειται νὰ πληρώσῃ ναῦλον δι' ἀγί-
ρια 2445 ἐλαίου ἀποσταλέντος ἐξ Ἀδρυαντινῆς πρὸς γρόσια 44 τὸ
καντάρι μὲ Μεδζιτιὲν πρὸς 33 γρόσια. Πόσα Μεδζιτία θέλει πληρώσῃ
οὗτος;

Λύσις. Ἐπειδὴ 4 ἀγίριον ἰσοφαιρίζει πρὸς δακάδας 9 $\frac{1}{4}$,
2445 ἀγίρια ἰσοφαιρῶσιν πρὸς δακάδας $2445 \times 9 \frac{1}{4} = 19563 \frac{3}{4}$.

$$\text{αἵτινες φέρουσι καντάρια } \frac{19563 \frac{3}{4}}{44} = 444,63.$$

ὁ πληρωθεὶς ναῦλος ὅλ' ἦ

$$\text{Γρ. } 444,63 \times 44 = \text{Γρ. } 4890,93$$

ἅτινα δίδουσι πρὸς γρ. 33 τὸ Μεδζ., Μεδζιτιέδας

$$\frac{4890,93}{33} = 148,21.$$

Πρόβλημα θ'. Ἐπωλήσαμεν 3 κομμάτια καναβάτζας Ἀγγλίας
τῶν 40 νιάρδων πρὸς δηνάρια 40 $\frac{1}{8}$ τὴν νιάρδαν· πόσας £ θέλωμεν
εἰσπράξαι;

Λύσις. Ἐκαστον κομμάτιον ὅν 40 νιάρδων τὰ 3 κομμάτια ὅλ'
ἔχουσιν νιάρδας $40 \times 3 = 120$.

καὶ ἐὰν διὰ 1 νιάρδαν λαμβάνωμεν δην. 40 $\frac{1}{8}$ ἢ δην. 40,125

$$\text{» } 120 \text{ νιάρδας θέλωμεν λάβει δην. } 120 \times 40,125 = 1213$$

$$\text{ἅτινα φέρουσι } £ \frac{1213}{240} = £ 5,0625 = £ 5-4-3.$$

Πρόβλημα ι'. Ἐμπορος Κωνσταντινουπόλεως ἠγόρασεν 4 κιβώτιον
Ἰνδικοῦ ζυγίζον καθαρὰ χιλιόγραμμα 175 πρὸς φρ. 36 τὸ χιλιό-
γραμμα.

Ζητοῦνται,

α') πόσα φράγκα θέλει πληρώσῃ,

β') πόσους Μεδζιτιέδας θέλει πληρώσῃ, ἐὰν, ἐλλείψῃ φράγκων, ἢ
πληρωμὴ πρόκειται νὰ γίνῃ ἐξ Μεδζιτιέδας, γνωρίζοντες ὅτι τὸ μὲν
20 φράγκον ἰσοφαιρίζει πρὸς γρ. 87,25 κατὰ τὴν ἡμερησίαν διατίμησιν,
ἢ δὲ λίρα ὀθωμ. τιμᾶται ἀντὶ γρ. 106 $\frac{1}{2}$ μὲ Μεδζιτιὲν, καὶ

γ') πόσας δακάδας ἀποδίδουσι τὰ 175 χιλιόγραμμα.

Λύσις.

Πληρωμὴ εἰς φράγκα.

Ὁ ἔμπορος θέλει πληρώσῃ φρ. $175 \times 36 = \text{φρ. } 6300$.

Πληρωμὴ εἰς Μεδζιτιέδας.

Ἐπειδὴ 20 φράγκα $= 87 \frac{1}{4}$ γρόσιας

$$1 \text{ φράγκον} = \frac{87 \frac{1}{4}}{20}$$

$$\text{καὶ } 6300 \text{ φράγκα} = \frac{87 \frac{1}{4} \times 6300}{20} = \text{Γρ. } 27483 \frac{3}{4}$$

$$\text{ἅτινα πρὸς } 106 \frac{1}{2} \text{ φέρουσι Μεδζ. } \frac{27483 \frac{3}{4} \times 106 \frac{1}{2}}{20} = 1463 \frac{1}{2}.$$

Ἀπόδοσις εἰς δακάδας.

Ἐπειδὴ 100 χιλιόγραμμα $=$ δακύν 78

$$1 \text{ χιλιόγραμμον} = \frac{78}{100}$$

$$\text{καὶ } 175 \text{ χιλιόγραμμα} = \frac{78 \times 175}{100} = 136 \frac{1}{2}.$$

Πρόβλημα ιβ'. ἠγοράσαμεν 20 βασιλικά λινεάλου ζυγίζοντα μικτῶς
καντάρια Ἀγγλικά 77—3—2, τῆς ἀποσταθμίσως οὗσης καντάρια
Ἀγγλικά 42—2—13, πρὸς σελάνια 27—6 τὸ Ἀγγλ. καντ. Πόσας
λίρας ὀθωμ.ν. πληρώσωμεν, ὅποτεν ἡ £ ἰσοφαιζῇ πρὸς γρ. 109 $\frac{1}{2}$;

Λύσις.

Μικτὸν βάρος καντ. Ἀγγλ. 77—3—2

Ἀποστάθμησις » » 42—2—13

Καθαρὸν βάρος καντ. Ἀγγλ. 65—0—17 ἢ κ. Ἀγγλ. 65,4543

ἅτινα ἐπειδὴ ὁ ἀποσταθμισμὸς ἐπὶ σελ. 27—6 ἢ £ 1—7—6
τρέπομεν τὰς £ 1—7—6 εἰς δεκαδικόν, καὶ πολλαπλασιάζομεν δε-
καδικόν ἐπὶ δεκαδικόν· οὕτω

$$£ 1-7-6 = £ 1,375$$

ὅθεν $65,4543 \times 1,375 = £ 90,5830 = £ 90-14-8$, αἵτινες πρὸς
γρ. 109 $\frac{1}{2}$ φέρουσι $90,5830 \times 109 \frac{1}{2} = \text{γρ. } 9843$, ἤτοι λίρας ὀθω-
μανικὰς 98,43.

Πρόβλημα ιβ'. Ἐπωλήσαμεν τοῦς μετρητοῦς 3 βαρέλια βαρύτιδος ζυγίζοντα κατὰ τὸ ζυγολόγιόν μας,

καντ. Ἀγγλ. 9—3—22 ἀποσταθμίσις κουάρτερ 2—2

» » 9—2—20 » » 2—4

» » 10—0—14 » » 2—8

πρὸς παράδας 38 $\frac{1}{2}$ τὴν ὀκλὴν εἰς Μεδζίτι ἀργυροῦν πρὸς γρ. 24. Ζητεῖται τί ποσὸν θέλομεν συνάξει εἰς λίρας ὀθωμανικὰς πρὸς γρ. 100, ὁπόταν ἡ διαφορὰ τοῦ νομίσματος ἦ γρ. 6 καὶ παρ. 23 $\frac{1}{2}$, καὶ 18 καντάρια Τουρκικὰ ἰσοφαρίζουσι πρὸς 1 τόννον ἢ 20 καντ. Ἀγγλικὰ

Λύσις.

Μικτὰ βάρη.

Ἀποσταθμίσεις.

Καντ. Ἀγγλ. 9—3—22

Κουάρτερ 2—2

» » 9—2—20

» 2—4

» » 10—0—14

» 2—8

Καντ. Ἀγγλ. 29—3—0

Καντ. Ἀγγλ. 4—2—14

Ἀποσταθμ. » » 1—2—14

Καθαρὸν βάρος » » 28—0—14 ἢ καντ. Ἀγγλ. 28,125

ἅτινα τρέπομεν εἰς καντ Τουρκ. ὡς ἑξῆς:

ἐάν 20 καντάρια Ἀγγλ. ἰσοφαρίζουσι πρὸς 18 καντ. Τουρκ.

1 » » ἰσοφαρίσει » $\frac{18}{20}$ » »

καὶ 28,125 » ἰσοφαρίζουσι » $\frac{18 \times 28,125}{20}$ »

= καντ. Τουρκ. 25,3125

ἢ ὀκλάς, $25,3125 \times 44 =$ ὀκλάς 1113 $\frac{3}{4}$

ὅθεν

Ἐπειδὴ 1 ὀκλὰς τιμᾶται κατὰ τὴν ἐκφώνησιν παρ. 38 $\frac{1}{2}$ ἢ γρ. 0,9625

$1113 \frac{3}{4}$ ὀκλάδες θέλουσι τιμᾶσθαι γρ. $1113 \frac{3}{4} \times 0,9625 =$ γρ. 1072

μὲ Μεδζίτι πρὸς 24 γρόσια, ἥτοι Μεδζίτια ἀργυρᾷ $\frac{1072}{24} = 44,667$ ὡς

ἔγγιστα, ἅτινα πρὸς γρ. 106,5875 τὴν λίραν φέρουσι Λοθ. $\frac{44,667 \times 20}{106,5875}$

= Λοθ. 8,38,12 ἥτοι γρόσια καθαρὰ 838,12 καὶ εἰς τὴν ἐφαρμογὴν γρ. καθαρὰ 838.

Πρόβλημα ιγ'. Πόσας λίρας ὀθωμανικὰς θέλωμεν πληρώσει διὰ ναῦλον Σόδας ash 55° ἐπὶ τόννων 21—4—3—11 πρὸς σελήνια 20 τὸν τόννον καὶ ἐπὶ ναυλον 10 $\frac{1}{10}$; (1 £ = Γρ. 110 $\frac{1}{8}$).

Λύσις. Μετατρέπομεν τὸν συμμιγῆ εἰς δεκαδικὸν ὡς ἑξῆς:

Καντ. ἀγγλ. 4—3—11 = 4,8479

καὶ καντ. ἀγγλ. $4,8479 =$ τόννοις $4,8479 \times 0,05 = 0,242395$

ὅθεν

τόννοι 21—4—3—11 = τόννοις 21,242395.

Ἐπειδὴ δὲ συνεφωνήθη νὰ πληρώσωμεν 20 σελήνια ἢ 1 £ ἀνὰ τόννον, λέγομεν τόννοι 21,242395 πρὸς 1 £ δίδουσι £ 21,242395 ἐφ' ᾧ προσθέτομεν 10 $\frac{1}{10}$ δι' ἐπὶ ναυλον, καὶ ἔχομεν

£ 21,242395

+ 10 $\frac{1}{10}$ ἐπὶ $\nearrow$ » 2,1242395

£ 23,3666345

ἢ £ 23—7—4

αἵτινες πρὸς γρ. 110 $\frac{1}{8}$ τὴν £ φέρουσι γρ. $23,3666 \times 110 \frac{1}{8} =$ γρόσια 2573 $\frac{1}{4}$ ἥτοι λίρας ὀθωμανικὰς 25,73 $\frac{1}{4}$.

Πρόβλημα ιδ'. Ὁ ἐν Λονδίνῳ ἀνταποκριτής μας κ. Lang μᾶς εἰδοποιεῖ ὅτι τὰ 22500 φρ., ἅτινα τῷ εἶχομεν στείλει, τῷ ἔδωκαν £ 873—15—8. Εὐρεῖν τὴν συναλλαγὴν.

Λύσις. Πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου διαιροῦμεν τὰ 22500 φρ. διὰ £ 873—15—8, ἀφοῦ κατὰ πρῶτον μετατρέψωμεν τὸν συμμιγῆ εἰς δεκαδικὸν οὕτω,

£ 873—15—8 = £ 873,7833.

ὅθεν

$\frac{22500}{873,7833} =$ φρ. 25,75 ἡ ζητούμενη συναλλαγή.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ.

77. Λόγον ἀποκαλοῦμεν τὸ ἐκ τῆς συγκρίσεως δύο ἀριθμῶν προκύπτων.

Δύο ἀριθμοὶ συγκρίνονται πρὸς ἀλλήλους ἢ δι' ἀφαιρέσεως ἢ διὰ

διαίρεσεως· ὥστε λόγος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἡ διαφορὰ ἢ τὸ πηλίκον αὐτῶν.

Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν λέγεται λόγος κατὰ διαφορὰν ἢ ἀριθμητικὸς, σημειοῦται δὲ διὰ μιᾶς στιγμῆς (·) ἢ δι' ὀριζοντείου γραμμῆς (—). οὕτω $7.3=4$ ἢ $7-3=4$, ἀνέγνωθι 7 πρὸς 3 ἴσον 4 καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις· ὁ εὗρεθείς ἀριθμὸς 4 εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς λόγος.

Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν καλεῖται λόγος γεωμετρικὸς ἢ κατὰ πηλίκον, ἢ ἀπλῶς λόγος, σημειοῦται δὲ διὰ δύο στιγμῶν (:) ἢ δι' ὀριζοντείου γραμμῆς ἐν εἵδει κλάσματος· οὕτω $8:4=2$ ἢ $\frac{8}{4}=2$ ἀνέγνωθι 8 πρὸς 4 ἴσον 2 καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις· ὁ ἀριθμὸς 2 εἶναι ὁ γεωμετρικὸς λόγος.

Οἱ δύο συγκρινόμενοι ἀριθμοὶ λέγονται ὅροι τοῦ λόγου· ὁ μὲν πρῶτος ἡγούμενος, ὁ δὲ δεύτερος ἐπόμενος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐνταῦθα μόνον περὶ τοῦ γεωμετρικοῦ λόγου ἀσχολησόμεθα.

78. Εἴπομεν ὅτι ὁ γεωμετρικὸς λόγος τίθεται καὶ ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν, ἄρα πᾶσα ἀρχὴ ἐφαρμοζομένη εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα ἐφαρμόζεται καὶ ἐνταῦθα· ὅθεν λέγομεν ὅτι

α'. Πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ ἡγουμένου (ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος) λόγου τινος διὰ τινος ἀριθμοῦ, ὁ λόγος πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· οὕτω,

$$\frac{6}{2}=3 \text{ λόγος.}$$

διαιρέσει τοῦ 6 διὰ 2 ἔχομεν $\frac{6:2}{2}=\frac{3}{2}$ λόγος, ὅπερ εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ α. λόγου 3

πολλα/σμοῦ » 6 ἐπὶ 2 » $\frac{6 \times 2}{2}=\frac{12}{2}=6$ », » » τὸ διπλάσιον » » 3

β'. Πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ ἐπομένου (παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος) λόγου τινος διὰ τινος ἀριθμοῦ, ὁ λόγος διαιρεῖται ἢ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· οὕτω,

$$\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \text{ λόγος.}$$

διαιρέσει τοῦ 12 διὰ 6 ἔχομεν $\frac{4}{12:6}=\frac{4}{2}=2$ λόγος, ὅπερ εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ α. λόγου $\frac{1}{3}$

πολλα/σμοῦ » 12 ἐπὶ 5 » $\frac{4}{12 \times 5}=\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$ », » » πέμπτον » » $\frac{1}{5}$

γ'. Πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τῶν δύο ὁρῶν λόγου τινος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὁ λόγος δὲν ἀλλοιοῦται· οὕτω

$$\frac{16}{8}=2 \text{ λόγος}$$

διαιρέσει διὰ 4 ἔχομεν $\frac{16:4}{8:4}=\frac{4}{2}=2$, ὁ αὐτὸς λόγος

πολλα/σμοῦ ἐπὶ 4 » $\frac{16 \times 4}{8 \times 4}=\frac{64}{32}=2$, » » »

79. **ΑΝΑΛΟΓΙΑ** καλεῖται ἡ ἰσότης δύο λόγων· οὕτω

$$18:2=27:3 \text{ ἢ } \frac{18}{2}=\frac{27}{3}$$

Οἱ ἀριθμοὶ 18, 2, 27 καὶ 3 λέγονται ὅροι τῆς ἀναλογίας.

Ο' πρῶτος καὶ ὁ τέταρτος καλοῦνται ἄκροι ὅροι τῆς ἀναλογίας ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος » μέσοι » » »

80. Ἀναλογία, ἥς οἱ δύο μέσοι εἶναι ἴσοι, καλεῖται συνεχής· ὁ δὲ μέσος αὐτῆς λέγεται μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων· οὕτω

$$18:6=6:2 \text{ ἀναλογία συνεχής.}$$

ὁ 6 εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν 18 καὶ 2.

81. Ἀναλογία, ἥς ἡ αὐξήσις συνεπιφέρει αὐξήσιν, ἢ ἥς ἡ ἐλάττωσις συνεπιφέρει ἐλάττωσιν, καλεῖται ὀρθὴ ἢ εὐθεῖα.

Παράδειγμα. Ἡ τιμὴ ὑφάσματος τινος κοπέντος ἀπὸ τεμάχιον μεταβάλλεται κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καθ' ὃν καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος. Ἐκ δύο ἐμπόρων ὁ ἀγοράζων δύο ἢ τρεῖς μέτρα περισσότερον τοῦ ἄλλου, θὰ πληρώσῃ δύο ἢ τρεῖς φορές περισσότερα χρήματα ἢ ὁ ἄλλος.

82. Ἀναλογία ἥς ἡ αὐξήσις συνεπιφέρει ἐλάττωσιν καὶ ἡ ἐλάττωσις αὐξήσιν, λέγεται ἀντίστροφος.

Παράδειγμα. Ὁ ἀριθμὸς τῶν πρὸς τελειοποίησιν ἔργου τινος χρησιμευουσῶν ἡμερῶν εἶναι ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ τῶν καθ' ἑκάστην ἐνασχολουμένων ὥρων. Ἐργάτης τις 2 ἢ 3 ὥρας περισσότερον ἐργαζόμε-

νος τὴν ἡμέραν, τελειώνει τὴν ἐργασίαν του εἰς 2 ἢ 3 φορές ὀλιγο-
τέρας ἡμέρας.

Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

83. Ἐνταῦθα ἐκθέσωμεν τὰς θεμελειώδους ιδιότητες τὰς τυγχανούσας πολλάκις εἰς τὴν ἐφαρμογὴν.

1ον Τὸ γινόμενον τῶν ἀκρῶν ἴσον ἐστὶ τῷ γινόμενῳ τῶν μέσων.
οὕτως ἐκ τῆς ἀναλογίας $18:2 = 27:3$.

ποριζόμεθα κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν

$$18 \times 3 = 2 \times 27.$$

Ἐπὶ ταύτης τῆς θεμελιώδους ἀρχῆς βασιζόμενοι δυνάμεθα νὰ εὐ-
ρωμεν τὸν ἕνα τῶν ὄρων ἀναλογίας τίνος, ὅποτεν οἱ τρεῖς ἄλλοι ᾔναι
γνωστοί· οὕτως εἰς τὴν ἀναλογίαν

$$24: 7 = 27: x$$

$$x = \frac{7 \times 27}{21} = \frac{189}{21} = 9.$$

ὥστε, ἵνα εὕρωμεν ἓνα τῶν ἄκρων, πρῶτον ἢ τέταρτον ὄρον, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο μέσους καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου.

Ἐστω ἔτι ἡ ἀναλογία $24:7 = x:9$
 ἐξ ἧς περιζόμεθα κατὰ τὴν ἄνω ἀρχὴν

$$x = \frac{21 \times 9}{7} = \frac{189}{7} = 27$$

Πρὸς εὐρεσιν λοιπὸν ἐνὸς τῶν μέσων, δευτέρου ἢ τρίτου ὅρου, πολυπλασιάζομεν τοὺς δύο ἄκρους, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου.

2ον Τέσσαρες ἀριθμοί, ὧν τὸ γινόμενον τῶν ἁκρῶν ἴσον ἐστὶ τῷ γι-
νομένῳ τῶν μέσων, σχηματίζουσιν ἀναλογίαν. Ὅστω 24, 7, 33, 11 σχη-
ματίζουσιν ἀναλογίαν· διότι $24 \times 11 = 7 \times 33$. ἡ δὲ ἀναλογία οὕτως ἔστι
 $24 : 7 = 33 : 11$.

3ον Πάσης ἀναλογίας οἱ ὅροι συμμετατίθενται τρισσῶς:

α'. συμπεταθῇ τῶν ἄλλων,

61. » » μέσων,

γ' συναλλαγῇ τῶν ἄκρων εἰς μέσα.

⁹¹Ἐστω ἡ ἀναλογία

$$21: 7=33: 11$$

α' συµμεταθέσει τῶν ἄκρων 11: 7=33: 21 ἐν ᾗ γινόμεσων=γιν. ἄκρων.

6, » » μέσων 21:33 = 7:41 » » » » = » »

γ' συναλλ. τῶν ἄκρ. εἰς μέσα 7:24=44:33 » » » » = » »

4ον Ὅταν πολλαπλασιάζωμεν πολλὰς ἀναλογίας, ὅρον ἐφ' ὅρον, κατὰ τὴν τάξιν ἣν κατέχουσι, τὰ γινόμενα αὐτῶν ἀποτελοῦσι νέαν ἀναλογίαν.

Ἔστωσαν αἱ ἀναλογίαι

$$6:3=8:4$$

$$4:2=10:5$$

$$3:2 = 6:4$$

$$9:3=24:7$$

ἐξ ὧν λαμβάνομεν κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν τὴν
ἐξ ἧς ἀναλογίαν,

$$6 \times 4 \times 3 \times 9 : 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 8 \times 10 \times 6 \times 21 : 4 \times 5 \times 4 \times 7.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἐπὶ ταύτης τῆς ιδιότητος στηρίζεται ἡ λύσις τῶν εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν ἀναφερομένων ζητημάτων, περὶ ἧς ἀναπτύξωμεν παρακατιόντες.

Εἰς Ὅταν δύο ἀναλογίαι ἔχωσι κοινόν τινα λόγον, οἱ ἄλλοι λόγοι συνιστῶσιν ἀναλογία.

Ἔστωσαν αἱ ἀναλογίαι

$$4 : 2 = 6 : 3$$

$$4:2=24:12.$$

ἐξ ὧν κατὰ τὴν ἀρχὴν «τὰ ἐνὶ τρίτῳ ἴσα καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα»
τῆς ἀριθμητικῆς, πορίζομεθα

$$6:3=24:12$$

Βον Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὥρων ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸν δεύτερον, ὃν λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων ὥρων πρὸς τὸν τέταρτον.

²⁷Ἐστω ἡ ἀναλογία 21: 7=36: 12

ἐξ ἧς πορίζομεθα κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν,

$$\alpha'. \quad 24+7: 7=36+12: 12$$

$$e'. \quad 24-7: 7=36-12: 12$$

Τὴν εἰς σειράν τινα ἵστων λόγων τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμ.
πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπομένων, ὡς εἰς ἡγούμενος πρὸς τὸν
του. οὕτως

ἐκ τῶν ἴσων λόγων $16 : 8 = 12 : 6 = 14 : 7$.

ποριζόμεθα $16 + 12 + 14 : 8 + 6 + 7 = 14 : 7$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἰδιότης αὕτη ἐφαρμόζεται εἰς τὰς μεθόδους τῆς ἐταιρίας, τῆς μίξεως κτλ.

Περὶ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

84. Μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται ἡ μέθοδος, δι' ἧς εὐρίσκουμεν τὸν ἄγνωστον τέταρτον ὅρον διὰ τῶν τριῶν ἄλλων γνωστῶν.

85. Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι ἀπλή, ὁπόταν ἔχωμεν μίαν καὶ μόνην ἀναλογίαν· λέγεται δὲ σύνθετος, ὁπόταν ἔχωμεν πλείους τῆς μιᾶς ἀναλογίας.

86. Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι εὐθεῖα ἢ ἀντίστροφος, ὁπόταν ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ἀναλογία ἢ εὐθεῖα ἢ ἀντίστροφος.

87. Βάσανος τῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Ἵνα δοκιμάσωμεν τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, λαμβάνομεν τὴν εὐρεθεῖσαν ἀξίαν τοῦ ἀγνώστου μεταξὺ τῶν γνωστῶν καὶ θεωροῦμεν ἓνα τῶν γνωστῶν ὡς ἄγνωστον.

Εὐθεῖα μέθοδος τῶν τριῶν

88. Πρόβλημα. Ἐμπορος ἠγόρασε 15 ὀκάδας μετᾶξῃς πρὸς 50 δραχμαῖς τὴν ὀκάν· Ζητεῖται τί ἐπλήρωσε;

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἔχομεν,

$$\begin{array}{cc} 1 \text{ ὀκ.} & 50 \text{ δρ.} \\ 15 & x \end{array}$$

ἀντιπροσμενόμενων τῶν ὀκάδων, ἀντιπροσμενόμεναι καὶ αἱ δραχμαί· ἄρα ὁ λόγος τῶν δύο τῆς αὐτῆς φύσεως γνωστῶν ὁρων ἰσούται τῷ λόγῳ τῶν δύο ἄλλων· ὅθεν ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν,

$$1 : 15 = 50 : x$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν

$$x = \frac{15 \times 50}{1} = 750 \text{ δραχμαῖς.}$$

Ἀντίστροφος μέθοδος τῶν τριῶν.

Πρόβλημα. 20 ἐργάται ἐκτίσαν τοῖχον εἰς 40 ἡμέρας· πόσοι

ἐργάται χρειάζονται διὰ νὰ κτίσωσι τὸν αὐτὸν τοῖχον εἰς 16 ἡμέρας;

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἔχομεν,

$$\begin{array}{cc} 20 \text{ ἐργ.} & 40 \text{ ἡμ.} \\ x & 16 \end{array}$$

ὅσον περισσότεραι εἶναι αἱ ἡμέραι τόσον ὀλιγώτεροι ἐργάται θέλουσι χρειασθῇ· ἄρα ὁ λόγος τῶν ἡμερῶν εἶναι εἰς ἀντίστροφον λόγον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἀναλογίαν,

$$16 : 40 = 20 : x$$

ἐξ ἧς

$$x = \frac{40 \times 20}{16} = \frac{800}{16} = 50 \text{ ἐργάταις}$$

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

90. Πρόβλημα. 20 κτῖσται ἐργαζόμενοι ἀνὰ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν ἐχρειάσθησαν 15 ἡμέρας διὰ νὰ κτίσωσι τοῖχόν τινα 600 πήχεων μήκους· πόσοι κτῖσται χρειάζονται διὰ νὰ κτίσωσιν εἰς 6 ἡμέρας τοῖχον 900 πήχεων μήκους, 5 ὥρας τὴν ἡμέραν ἐργαζόμενοι;

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἔχομεν,

$$\begin{array}{cccc} 20 \text{ κτ.} & 8 \text{ ὥρ.} & 15 \text{ ἡμ.} & 600 \text{ πήχ.} \\ x & 5 & 6 & 900 \end{array}$$

Ἵνα ὁρίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x , σύρομεν μίαν γραμμὴν ὀριζόντιον, ἀνωθεν τῆς ὁποίας γράφομεν τὰς εἰς εὐθὺν τῷ x λόγον οὕσας ποσότητας, κατωθεν δὲ αὐτῆς τὰς ἀντίστροφον αὐτῷ λόγον ἐχούσας· ὁ ἀντίστοιχος τοῦ x ἀριθμὸς εὐρίσκεται πάντοτε εἰς τὸν ἀριθμητήν. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἐν τῷ ἀριθμητῇ εὐρισκομένους ἀριθμοὺς καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν τοῦ παρονομαστοῦ ἀριθμῶν.

$$\begin{aligned} \text{Ὡστε} \quad x &= \frac{20 \times 8 \times 15 \times 900}{5 \times 6 \times 600} = \frac{40 \times 8 \times 3 \times 9}{3 \times 6} = \frac{5 \times 8 \times 9}{3} \\ &= 5 \times 8 \times 3 = 120 \text{ κτῖσταις.} \end{aligned}$$

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ ΤΟΣΑ ΤΟΙΣ 100 (%).

91. Μέθοδος τοῦ τόσα τοῖς ἑκατὸν λέγεται ἡ μέθοδος, ἐν ἣ ἡ προσδιορίζεται ἡ τιμὴ εἰς τὰ ἑκατὸν σπανίως δὲ εἰς τὰ χίλια.

Ἡ παράστασις $\frac{\circ}{100}$, ἣν μεταχειρίζομεθα συνηθέστατα εἰς τὰς ἐμπο-
ρικὰς πράξεις, μεθερμηνεύεται διὰ τῶν λέξεων τοῖς ἑκατὸν· οὕτως
 $2 \frac{\circ}{100}$ δηλοῦν δύο τοῖς ἑκατὸν.

Ἡ ἔκφρασις τόσον τοῖς $\frac{\circ}{100}$ παρουσιάζουσα μέρος τι (ἀριθμὸν τινα
οἰονδῆποτε) τῶν ἑκατὸν, δύναται καλλίστα νὰ παρασταθῇ καὶ δεκα-
δικῶς καὶ ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν, ὡς φαίνεται εἰς τὸν παρὰ πόδας
πίνακα.

Λέξεις	Παραστάσεις		
	Συμβολικαὶ	Δεκαδικαὶ	Κλασματικαὶ
1 τοῖς ἑκατὸν	$1 \frac{\circ}{100}$	0,01	$\frac{1}{100} = \frac{1}{100}$
2 »	$2 \frac{\circ}{100}$	0,02	$\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$
4 »	$4 \frac{\circ}{100}$	0,04	$\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$
5 »	$5 \frac{\circ}{100}$	0,05	$\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$
8 »	$8 \frac{\circ}{100}$	0,08	$\frac{8}{100} = \frac{2}{25}$
10 »	$10 \frac{\circ}{100}$	0,10	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$
20 »	$20 \frac{\circ}{100}$	0,20	$\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$
25 »	$25 \frac{\circ}{100}$	0,25	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
50 »	$50 \frac{\circ}{100}$	0,50	$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}$ »	$1\frac{1}{2} \frac{\circ}{100}$	$0,00\frac{1}{2}$	$\frac{1\frac{1}{2}}{100} = \frac{1}{200}$
$\frac{3}{4}$ »	$\frac{3}{4} \frac{\circ}{100}$	$0,00\frac{3}{4}$	$\frac{\frac{3}{4}}{100} = \frac{3}{400}$
$12\frac{1}{2}$ »	$12\frac{1}{2} \frac{\circ}{100}$	$0,12\frac{1}{2}$	$\frac{12\frac{1}{2}}{100} = \frac{1}{8}$

92. Εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τοῦ τόσον τοῖς ἑκατὸν διαφαίνονται
πέντε μέρη ἢ στοιχεῖα. Ἡ τίμησις, ἡ ἀξία, ἡ βάσις, τὸ ἄθροισμα καὶ
ἡ διαφορά.

Ἡ τίμησις εἶναι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς ὅστις δηλοῦ πόσα ἑκατοστὰ
ἀριθμοῦ τινος πρόκειται νὰ ληρθῶσιν, ὡς $2 \frac{\circ}{100}$ ἢ 0,02.

Ἡ ἀξία εἶναι τὸ μέρος ἀριθμοῦ τινος, ὅπερ ὑποδεικνύεται διὰ τῆς
τιμῆσεως, ὡς τὸ 12 εἶναι ἡ ἀξία τοῦ 200 πρὸς $6 \frac{\circ}{100}$.

Ἡ βάσις εἶναι ὁ ἀριθμὸς ἐφ' οὗ πρόκειται νὰ ληρθῇ τὸ τόσον τοῖς
ἑκατὸν, ὡς τοῦ 200 τὸ $6 \frac{\circ}{100}$.

Τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ ποσὸν ὅπερ εὐρίσκεται προσθέσει τῆς ἀξίας
εἰς τὴν βάσιν, ὡς ὁ ἀριθμὸς 212 εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ 200 πρὸς
 $6 \frac{\circ}{100}$ ($200+12$).

Ἡ διαφορά εἶναι τὸ κατ'ἄλοιπον ὅπερ εὐρίσκεται ἀφαιρέσει τῆς
ἀξίας ἀπὸ τῆς βάσεως, ὡς ὁ ἀριθμὸς 188 εἶναι ἡ διαφορά τοῦ 200
πρὸς $6 \frac{\circ}{100}$ ($200-12$).

Ἵνα ὀρίσωμεν τὰ πέντε ταῦτα στοιχεῖα ποιούμεθα χρῆσιν τῆς με-
θόδου τῶν τριῶν, ἥτις τὸν μηχανισμόν ἐσπουδάζσαμεν ἐν τοῖς προη-
γουμένοις.

Ἐφαρμογαὶ τῆς μεθόδου τοῦ τόσον τοῖς $\frac{\circ}{100}$
ἐπὶ λ/σμῶν ἀμοιβῶν καὶ ὑφέσεων.

Πρόβλημα α'. Ληρθήτωσαν $2\frac{1}{2} \frac{\circ}{100}$ ἐπὶ £ 1016—11—8.

£ 1016—11—8
» 1016—11—8
» 508—5—10
£ 25 41—9—2
20
820
9
8 29
12
58
29
348
2
3 50

ἤτοι $2 \frac{1}{2} \%$ ἐπὶ £ 1016—11—8 = £ 25—8—3 $\frac{1}{2}$.

Ἐπανελάθωμεν τὰς £ 1016—11—8, $2 \frac{1}{2} \%$ φορές, καὶ εὗρομεν ἄθροισμα £ 2544—9—2.

Διηρέσαμεν τὴν ἀνωτέραν μονάδα τοῦ ἀθροίσματος 2544 δι' 100 καὶ ἔσχομεν 25,44· τὴν 0,44 τῆς £ ἐτρέψαμεν εἰς σελήνια, πολλαπλασιάζσαντες ἐπὶ 20, εἰς δὲ τὸ γινόμενον 820 προσεθέσαμεν τὰ ὑπάρχοντα 9 σελήνια, καὶ εὗρομεν 829, ἅτινα διαιρέσαντες δι' 100 ἐλάβωμεν 8 σελήνια καὶ 0,29 τοῦ σεληνίου· ἐτρέψαμεν τὴν 0,29 σελ. εἰς δηνάρια, πολλαπλασιάζσαντες ἐπὶ 12, εἰς δὲ τὸ γινόμενον 348 προσεθέσαμεν τὰ ὑπάρχοντα 2 δηνάρια, καὶ τὸ ἄθροισμα 350 διαιρέσαντες δι' 100 εὗρομεν δηνάρια 3 $\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα β'. Ἐπὶ τίνος τιμολογίου ἐκ δρ. 6250 παραχωρεῖται ὑπερτίς τις ἐκ $2 \frac{3}{8} \%$. Εὗρεῖν τὸ καθαρόν προϊόν τοῦ τιμολογίου.

$$\begin{array}{r|l}
 2 \frac{3}{8} \% & \begin{array}{l} 4 \frac{0}{0} \\ 4 \frac{0}{0} \\ 4 \frac{0}{0} = 1 \frac{1}{2} \frac{0}{0} \\ 1 \frac{1}{8} \frac{0}{0} = 1 \frac{1}{1} \frac{0}{0} \end{array} \\
 \hline
 & \begin{array}{l} \text{ἐπὶ 6250} \\ \text{» 6250} \\ \text{» } \longrightarrow 31,25 \\ \text{» } \longrightarrow 7,8125 \end{array} \\
 \hline
 & 62,5 \\
 & 62,5 \\
 & 31,25 \\
 & 7,8125 \\
 \hline
 & 164,0625
 \end{array}$$

τῆς ἄλλας λοιπὸν οὐσίας 164,0625 τὸ καθαρόν προϊόν τοῦ τιμολογίου ὅτι ἦ

$$6250 - 164,0625 = \text{δραχμαὶς } 6085,9375.$$

Πρόβλημα γ'. Ἐμπορὸς τις ἐπώλησεν ἐμπόρευμα ζυγίζον καντ. ἀγγλ. 255—3—8 πρὸς σελήνια 59—5 $\frac{7}{8}$ τὸ καντάρι μὲ ὑπερτίς $2 \frac{1}{2} \%$ καὶ ἐπὶ συναλλαγῇ τῶν φρ. 25,55 διὰ 1 £. Ζητεῖται τὸ εἰς φράγκα εἰσπραχθῆσόμενον ποσόν.

$$\begin{array}{r}
 \text{Καντ. Ἀγγλ.} \quad 255-3-8 \\
 \text{Σελήν.} \quad 59-5 \frac{7}{8} \\
 \hline
 2295 \\
 1275
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 12 & \\
 \hline
 5 & 4 \quad 85-0 \\
 & 4 \quad 21-3 \\
 & \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad 40-7 \\
 \frac{7}{8} & \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad 5-4 \\
 & \frac{1}{8} \quad 2-8 \\
 4 & 2 \quad 29-8 \\
 3 & 4 \quad 14-10 \\
 28 & 7 \quad 3-8 \\
 8 & 4 \quad 0-6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{ὑπερτίς } 2 \frac{1}{2} \frac{0}{0} \\
 \text{Σελ. } 15248-6 \\
 \text{» } 15248-6 \\
 \text{» } 7609-3 \\
 \hline
 \text{Σελ. } 380 \quad 46-3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Σελήν. } 15248-6 \\
 \text{ὅλική τιμὴ ἐμπόρευματος Σελήν. } 15248-6 \\
 \text{ὑπερτίς } 2 \frac{1}{2} \frac{0}{0} \quad \text{» } 380-3 \\
 \text{Καθαρόν προϊόν} \quad \text{Σελήν. } 14838-4 \\
 \text{ἢ } £ 741-18-4
 \end{array}$$

$$\text{ὅθεν } £ 741-18-4$$

$$\begin{array}{r|l}
 12 & \\
 \hline
 92 & \\
 46 & \\
 \hline
 552 & \\
 3 & \\
 \hline
 555 & \\
 \hline
 20 & \\
 48 & 40 \quad 12 \quad 775 \\
 & 5 \quad 6 \quad 3875 \\
 & 2 \quad 2 \quad 5530 \\
 & 4 \quad 4 \quad 2775 \\
 42 & \\
 4 & 1 \quad 0 \quad 26645 \\
 \hline
 \text{φρ. } 18955 & 84445
 \end{array}$$

Πρόβλημα δ'. Έμπορός τις έλαβε τιμολόγιόν τι διὰ 400 σάκ-
κους κακάο καθαροῦ βάρους καντ. Άγγλ. 525-3-9 πρὸς σελήνια
45 % τὸ καντάρι μὲ προσζόφλησιν 7 %₁₀ %.

Ζητεῖται

α. τὸ ποσὸν τοῦ τιμολογίου, κόστος (τιμὴ) ναῦλος καὶ ἀσφάλεια,
ὁπόταν ὁ ναῦλος ᾖ πρὸς 25 σελήνια ἀνὰ τόννον πᾶν 20 καντ. ἐπὶ
μικτῶν καντ. 549, ἡ ἀμοιβὴ πρὸς 45 %₁₀, ἡ ἀσφάλεια πρὸς 1 %₁₀₀
ἐπὶ ποσοῦ προσζοφληθέντος καὶ κῶξημένου κατὰ 40 %₁₀, τὸ δὲ ἀσφα-
λιστικὸν ἔγγραφον 2 σελήνια,

β. τὸ εἰς φράγκα ποσὸν τοῦ ἐν λόγῳ τιμολογίου, ὁπόταν ἡ ἐπὶ Λον-
δίνου συναλλαγὴ ᾖ φρ. 25,53 ¹¹/₁₆ διὰ 4 £.

Λύσις.

Λογαριασμὸς ἀξίας.

Λογαριασμὸς προσζοφλήσεως

Καντ. Άγγλ. 525-3-9
£ 0-45-9
Σελ. 2623
2400

£ 1202-16-8
7
8419-16-8
601- 8-4

⁸/₁₆
⁹/₁₆ | ¹/₁₆

75- 3-6
90 96- 8-6

20
4920
8
49 28
42

Σελ. 24056-8
£ 1202-16-8

56
28
336
6
3 42

12
9 | 6
3
4
3 | 2
1
28
9 | 7
2

ἤτοι £ 90-19-3.

Ά/σμος ναύλου
Καντ. 20=£ 1,25

» 1= » ^{1,25}/₂₀

καὶ » 549= » ^{1,25x549}/₂₀
=£ 34-6-3.

Ά/σμος ἀμοιβῆς
45 %₁₀ ἐπὶ £ 34-6-3

£ 34-6-3
45

5 | 14-13-9

20
280
43
2 93
42
1416
9
44 25

ἤτοι £ 3-9-44

Ά/σμος ἀσφαλείας

1 ³/₄ %₁₀₀ ἐπὶ £ 1223-1-1

1223-1-1

³/₄ | ¹/₂
1 | ¹/₄ 644-10-6
305-15-3

2 140-6-10

20

2800

6

2 | 806

12

1612

806

9672

40

9 682

ἐπομένως θέλωμεν ἔχει,

Καντ. Άγγλ. 525-3-9 πρὸς σελ. 45 %₁₀
προσζοφλήσεις πρὸς 7 %₁₆ %

£ 1202-16-8

» 90-19-3

£ 1144-17-5

"Εξοδα.

Ναῦλος πρὸς 25 σελ. ἀνὰ τόννον ἐπὶ Κ. 549 £ 34-6-3

Άμοιβὴ πρὸς 45 %₁₀

» 3-2-44 » 39-9-2

Άσφάλεια πρὸς ³/₄ %₁₀₀

£ 2-2-9

Άσφαλιστικὸν ἔγγραφον

» 0-2-0 » 2-4-9

Κόστος (τιμὴ) ναῦλος καὶ ἀσφάλεια 400 Σακ. κακάο £ 1453-11-4

αἵτινες ἐπὶ συναλλαγῇ τῶν φρ. 25,53 ¹¹/₁₆ διὰ 1 £ φέρουσι φρ.

29458 ¹/₂ ὡς ἐξῆς:

Πρόβλημα ι'. Ἐμπορὸς τις ἐπώλησε πρὸς 12 % ζημίαν ἐμπορεύματα ἀξίας Γρ. 30000. Ζητεῖται τὸ προῖον τῆς πωλήσεως καὶ τὸ ποσὸν τῆς ζημίας.

α'.) Ζημία ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς

Γρ. 100 ἐπωλήθησαν διὰ Γρ. 88

$$» 30000 » » » x = \Gamma\rho. \frac{30000 \times 88}{100} = \Gamma\rho. 26400$$

τιμὴ πωλήσεως Γρ. 26400

» ἀγορᾶς » 30000

Ζημία Γρ. 3600

β'.) Ζημία ἐπὶ τῆς πωλήσεως

Γρ. 112 ἐπωλήθησαν διὰ Γρ. 100

$$» 30000 » » » x = \frac{3000000}{112} = \Gamma\rho. 26785,70$$

ἔθεν

πώλησις

Γρ. 26785,70

ἀγορᾶς

» 30000, »

ζημία

Γρ. 3214,30

Πρόβλημα ια'. Ἐμπορὸς πρόκειται νὰ πληρώσῃ τελωνειακὸν δικαίωμα πρὸς 8 % ἐπὶ 6800 ἐλαιόλ. ἐκτιμωμένου πρὸς γρόσια 6 τὴν ὀκτὼ. Πόσα γρόσια θέλει μετρήσῃ, τῆς ὑφέσεως τοῦ τελωνειακοῦ δικαίου οὗτος 40 % ;

$$\text{Λύσις. Ὁκτάδες 6800 πρὸς γρ. 6} = \Gamma\rho. 40800$$

$$8 \% \text{ ἐπὶ } \longrightarrow = \Gamma\rho. 3264$$

μεῖον 10 % τὴν ὑφασιν » 326,40

τὸ πληρωθησόμενον τελωνειακὸν δικαίωμα εἶναι Γρ. 3937,60

Ἀλλ' εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τὸ πρόβλημα λύεται ὡς ἑξῆς.

Διαιροῦμεν τὴν ἀξίαν τοῦ ἐλαίου διὰ 1000 καὶ τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον ἐξαχόμενον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 72 (9×8). οὕτω

$$40,8 \times 72 = \Gamma\rho. 2937,60 \text{ τελωνειακὸν δικαίωμα.}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Εἰς τὰ τοιούτου εἴδους ζητήματα πάντοτε ὡς πολλαπλασιαστὴς λαμβάνεται τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 9 ἐπὶ τὸ

ἐπιτόκιον τοῦ τελωνειακοῦ δικαίου οὕτω, ποῖον τὸ πληρωθησόμενον τελωνειακὸν δικαίωμα ἐπὶ ἐμπορεύματος ἀξίας Γρ. 12000 πρὸς 4 %, μεῖον 10 % ὑφέσεως ;

Ἀπάντησις. $4 \times 9 = 36$, ἔθεν

$$36 \times 12 = \Gamma\rho. 432.$$

ΠΕΡΙ ΤΟΚΟΥ.

93. Τόκος καλεῖται τὸ κέρδος ὅπερ ἀποφέρει δεδανεισμένη τις ποσότη χρημάτων.

94. Ἡ δανειζομένη ποσότης λέγεται κεφάλαιον.

95. Ὁ τόκος ἐξαρτᾶται ἐκ τριῶν στοιχείων :

τοῦ κεφαλαίου,

τοῦ χρόνου καθ' ὃν διαρκεῖ τὸ δάνειον, καὶ

τοῦ ἐπιτοκίου.

96. Ὁ τόκος εἶναι ἀπλοῦς, ὁπόταν ἡ δανειζομένη ποσότης δὲν μεταβάλλεται καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ χρόνου. Εἶναι δὲ οὗτος συνηθετός, ὁπόταν εἰς τὸ τέλος ἐκάστης μονάδος τοῦ συμπεφωνημένου χρόνου, εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους λ. χ., προστίθεται ὁ τόκος εἰς τὸ κεφάλαιον, καὶ ἐπιφέρει καὶ ὁ τόκος τόκον.

97. Ἐπιτόκιον λέγεται ἡ τιμὴ τοῦ τόκου πρὸς τόσον τοῖς %.

98. Τοκαριθμούς ὀνομάζομεν τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τῆς ἡμέρας.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅσάκις τὸ κεφάλαιον εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμὸς, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν παραλείπεται τὸ δεκαδικὸν μέρος, ἂν τοῦτο ᾖ μικρότερον τοῦ 0,50. ἂν δὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος ὑπερβαίνῃ τὸν 0,50 αὐξάνομεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ κεφαλαίου κατὰ μίαν μονάδα.

99. Πρὸς εὑρεσιν τοῦ τύπου τοῦ τόκου σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἐστώσαν Κ κεφάλαιον, ε ἐπιτόκιον καὶ x ἡμέραι.

$$\delta \text{ τόκος δρ. 1 δι' ἓν ἔτος ἢ διὰ 360 ἡμέρας θὰ ᾖ } \frac{\epsilon}{100}$$

$$» » » » » 1 \text{ ἡμέραν } = \frac{\epsilon}{100 \times 360} = \frac{\epsilon}{36000}$$

$$» » » Κ. » 1 » = \frac{Κ \epsilon}{36000}$$

$$» » » » » x \text{ ἡμέρας } = \frac{Κ \epsilon x}{36000}$$

ἵνα λοιπὸν εὐρωμεν τὸν τόκον κεφαλαίου τινος ἐπὶ ἀριθμὸν τινα ἡμερῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον ἐπὶ τὸν χρόνον, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 36000.

100. Εἰς τὸν γενικὸν τύπον τοῦ τόκου $\tau = \frac{K \cdot x}{36000}$ ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ x τὰ ἐπιτόκια 4, $4\frac{1}{2}$, 5, 6 καὶ 9, πορίζομεθα τὰς ἐξῆς συντάξεις μεθόδους πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ τόκου.

Αὐτὸν ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΔΙΑΙΡΕΤΩΝ.

πρὸς 4 %	$\tau = \frac{K \cdot x \cdot 4}{36000} = \frac{K \cdot x}{9000} = \frac{\text{Τοκάριθμοι}}{9000} = \frac{\frac{100}{\text{Τοκάριθμοι}}}{90}$
» 4 $\frac{1}{2}$ %	$\tau = \frac{K \cdot x \cdot 4\frac{1}{2}}{36000} = \frac{K \cdot x}{8000} = \frac{\text{Τοκάριθμοι}}{8000} = \frac{\frac{100}{\text{Τοκάριθμοι}}}{80}$
» 5 %	$\tau = \frac{K \cdot x \cdot 5}{36000} = \frac{K \cdot x}{7200} = \frac{\text{Τοκάριθμοι}}{7200} = \frac{\frac{100}{\text{Τοκάριθμοι}}}{72}$
» 6 %	$\tau = \frac{K \cdot x \cdot 6}{36000} = \frac{K \cdot x}{6000} = \frac{\text{Τοκάριθμοι}}{6000} = \frac{\frac{100}{\text{Τοκάριθμοι}}}{60}$
» 9 %	$\tau = \frac{K \cdot x \cdot 9}{36000} = \frac{K \cdot x}{4000} = \frac{\text{Τοκάριθμοι}}{4000} = \frac{\frac{100}{\text{Τοκάριθμοι}}}{40}$

Ὡστε, δασάκις τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4, $4\frac{1}{2}$, 5, 6 καὶ 9, προσδιορίζομεν τὸν τόκον, σχηματίζοντες τοὺς τοκάριθμους καὶ διαιροῦντες τοὺς μὲν τοκάριθμους διὰ 100, τὰ δὲ πηλίκων διὰ τῶν ἀριθμῶν 90, 80, 72, 60 καὶ 40, οὓς ἀποκαλοῦμεν εἰς τὸ ἐμπόριον σταθεροὺς διαιρέτας.

Παραδείγματα.

8000 δρ. πρὸς 4 % εἰς 106 ἡμέρας ὅπόσον τόκον φέρουσι;

$$\frac{8000 \times 106}{100} = \frac{848000}{100} = \frac{8480}{90} = \frac{848}{9} = \text{δρ. } 94,22\ldots$$

7000 δρ. πρὸς 6 % ἐπὶ 82 ἡμέρας ὅπόσον τόκον φέρουσι;

$$\frac{7000 \times 82}{100} = \frac{574000}{100} = \frac{5740}{60} = \frac{574}{6} = \text{δρ. } 95,66\ldots$$

Βον ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΗΜΕΡΩΝ.

Λάβωμεν ἤδη τοὺς τύπους τῶν σταθερῶν διαιρετῶν καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτοὺς ἀντὶ τοῦ x τοὺς ἀριθμοὺς 90, 80, 72, 60 καὶ 40. τότε δὲ ἐξομεν

πρὸς 4 %	$\tau = \frac{K \cdot x}{9000} = \frac{K \cdot 90}{9000} = \frac{K}{100} = \frac{1}{100} K$
» 4 $\frac{1}{2}$ %	$\tau = \frac{K \cdot x}{8000} = \frac{K \cdot 80}{8000} = \frac{K}{100} = \frac{1}{100} K$
» 5 %	$\tau = \frac{K \cdot x}{7200} = \frac{K \cdot 72}{7200} = \frac{K}{100} = \frac{1}{100} K$
» 6 %	$\tau = \frac{K \cdot x}{6000} = \frac{K \cdot 60}{6000} = \frac{K}{100} = \frac{1}{100} K$
» 9 %	$\tau = \frac{K \cdot x}{4000} = \frac{K \cdot 40}{4000} = \frac{K}{100} = \frac{1}{100} K$

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων πορίζομεθα ὅτι,

90	ἡμέραι πρὸς 4 %	δίδουσι τόκον 1 % ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου
80	» 4 $\frac{1}{2}$ %	» » 1 % » » »
72	» 5 %	» » 1 % » » »
60	» 6 %	» » 1 % » » »
40	» 9 %	» » 1 % » » »

Παραδείγματα.

Πόσος ὁ τόκος τῶν 128724 δρ. πρὸς 6 % ἐπὶ 70 ἡμέρας;

60	ἡμέραι πρὸς 6 % = 1 % ἐπὶ 128724	= δρ. 1287,24
40	» » 6 % = $\frac{1}{6}$ % »	= » 214,54
70	ἡμερῶν ὁ ζητούμενος τόκος εἶναι	δρ. 1501,78

Ποῦτος ὁ τόκος τῶν 16780 δρ. ἐπὶ 110 ἡμέρας πρὸς 4 % ;
 90 ἡμέραι πρὸς 4 % = 1 % ἐπὶ 16780 = δρ. 167,80
 15 » » 4 % = 1/6 » → = » 27,96
 5 » » 4 % = 1/3 » → = » 9,32
 110 ἡμερῶν ὁ ζητούμενος τόκος εἶναι δρ. 205,08

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ μέθοδος τῶν ἡμερῶν ἀπλοποιεῖ τὰ μέγιστα τοὺς λ/σμούς.

Γον ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΜΗΝΩΝ.

Εἶδομεν ἤδη ὅτι 60 ἡμέραι πρὸς 6 % φέρουσι τόκον 1 % ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου· ἐπειδὴ δὲ παρὰ τοῖς ἐμπορείοις ὁ μὴν σύγκειται ἐκ 30 ἡμερῶν, ἄρα δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν ὅτι,

2 μῆνες πρὸς 6 % δίδουσι τόκον 1 % ἐπὶ τοῦ Κεφαλαίου.

Ἄρα ὁ τόκος κεφαλαίου οἴουδ' ἥποτε ἐπὶ ἀριθμὸν τινα μηνῶν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος πρὸς 6 %, παρουσιάζεται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τῶν μηνῶν· οὕτω

8/ Μ. πρὸς 6 % δίδουσι 4 % (= 1/2 τοῦ 8) ἐπὶ τοῦ Κ.

3/ Μ. » 6 % » 1 1/2 % (= 1/2 τοῦ 3) » » Κ.

Παραδείγματα.

Ποῦτος ὁ τόκος δρ. 12620 πρὸς 6 % ἐπὶ 7/ Μ ;

7/ Μ. πρὸς 6 % = 3 1/2 % ἐπὶ 12620 = δρ. 441,70

Ποῦτος ὁ τόκος δρ. 14840 πρὸς 6 % ἐπὶ 5/ Μ ;

5/ Μ. πρὸς 6 % = 2 1/2 % ἐπὶ 14840 = δρ. 371

Δον ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΒΑΣΕΩΣ 6.

Ὅσάκις πρόκειται νὰ εὕρωμεν τόκον κεφαλαίου τινος εἴτε ἐπὶ ἀριθμὸν τινα ἡμερῶν εἴτε ἐπὶ ἀριθμὸν τινα μηνῶν, πρέπει πάντοτε νὰ λάβωμεν ὡς βᾶσιν τὸ ἐπιτόκιον 6, οἴανδ' ἥποτε καὶ ἢ τὸ δοθὲν ἐπιτόκιον, οἴανδ' ἥποτε καὶ ἢ ἡ μέθοδος, ἣν πρόκειται ν' ἀκολουθήσωμεν.

Παραδείγματα.

Ποῦτος ὁ τόκος 80000 δρ. πρὸς 6 1/2 % ἐπὶ 33 ἡμέρας ;
 60 ἡμέραι πρὸς 6 % = 1 % ἐπὶ 80000 = 800
 30 » (1/2 τοῦ 60) = 1/2 τοῦ → 400
 3 » (1/10 τοῦ 30) = 1/10 » → 40
 33 » πρὸς 6 % = 440
 — » » 1 1/2 % = 1/12 τοῦ → 36,66
 33 » » 6 1/2 % = δρ. 476,66

Ποῦτος ὁ τόκος δρ. 928938,75 πρὸς 3 1/4 % ἐπὶ 3/ Μ ;

3/ Μ πρὸς 6 % = 1 1/2 % (= 1/2 τοῦ 3) % ἐπὶ Κ. = 13934,07

» 3 % = 1/2 τοῦ → 6967,035

» 1 1/4 % = 1/12 » → 580,58 ;

3 1/4 % ὁ ζητούμενος τόκος εἶναι δρ. 7547,62

Εον ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΤΟΣΟΝ ΤΟΙΣ ΕΚΑΤΟΝ ΤΗΝ ΗΜΕΡΑΝ.

Τινὲς τῶν Τραπεζῶν λαμβάνουσιν ὡς βᾶσιν εἰς τινὰς τῶν λ/σμῶν τῶν τὸν τόκον ὃν φέρουσι 100 ἐπὶ 1 ἡμέραν.

Οὕτω λ. γ. ἡ Ἐθνικὴ Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος, ποιουμένη χρῆσιν τοῦ ἐπιτοκίου 9 % τὸ ἔτος διὰ τοὺς ἀμφιβαρεῖς τοκοφόρους λ/σμούς της, λαμβάνει ὡς βᾶσιν τὰ 2 1/2 λεπτὰ τὰς 1000 δραχμὰς τὴν ἡμέραν.

Καὶ τῶ ὄντι

δρ. 1000 εἰς 360 ἡμέρας φέρουσι δρ. 9

» 1000 » 1 ἡμέραν » » 9/360 = δρ. 0,025 ἢ 2 1/2 λεπ.

Κατὰ ταύτην τὴν μέθοδον εὐρίσκουμεν τὸν τόκον, ἐὰν σχηματίσωμεν τοὺς τοκαρίθμους, παραλείψωμεν τὰ τέσσαρα ψηφία αὐτῶν καὶ τὸ ἐξαγόμενον πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2 1/2.

Παράδειγμα. Ποῦτος ὁ τόκος δρ. 8380 πρὸς 2 1/2 λεπτὰ τὴν ἡμέραν ἐπὶ 95 ἡμέρας ;

8380 × 95 = 796100 τοκαρίθμοι

796100 : 1000 = 79,61

ἔθεν

$$79,61 \times 2 \frac{1}{2} = \begin{cases} 79,61 \\ 79,61 \\ 39,805 \end{cases}$$

δρ. 199,025 εἶναι ὁ ζητούμενος τόκος

401. Οἱ Ἀγγλοι θεωροῦσι τὸ ἔτος ὡς συγκείμενον ἐκ 365 ἡμερῶν διὸ πρὸς εὐρεσιν τοῦ τόκου ποιοῦνται χρῆσιν τοῦ μαθηματικοῦ τύπου τοῦ τόκου

$$\tau = \frac{K \cdot \epsilon \cdot \omega}{36500},$$

ὅνπερ ἀπλοποιοῦσι πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ 2.

ἔθεν

$$\text{τύπος τόκου ἐμπορικὸς κατ' Ἀγγλους} \quad \tau = \frac{K \cdot \epsilon \cdot \omega \cdot 2}{73000}$$

$$\eta \tau = \frac{\text{Τοκᾶριθμοί. ε. 2.}}{73000}$$

Ὅσῳ δὲ θελήσωσι νὰ ποιοῦνται χρῆσιν τῆς μεθόδου τῶν σταθερῶν διαιρετῶν μεταχειρίζονται τοὺς ἐξῆς σταθεροὺς διαιρέτας:

διὰ 3 %	τὸν σταθερὸν διαιρέτην	12167	ἀντὶ τοῦ	12000
» 4 %	»	9125	»	9000
» 4 1/2 %	»	8441	»	8000
» 5 %	»	7300	»	7200

Μόλα ταῦτα εἶναι προτιμότερον νὰ ποιῶμεθα πάντοτε χρῆσιν τοῦ τύπου

$$\tau = \frac{\text{Τοκᾶριθμοί. ε. 2.}}{73000}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ α'. Ὁ τόκος ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ δίδεται ὑπὸ τοῦ μαθηματικοῦ τύπου $\tau = \frac{K \cdot \epsilon \cdot \omega}{100}$, ἐν ᾧ πρὸς εὐρεσιν τοῦ τόκου πολλαπλασιάζεται τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον, ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται δι' 100.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ β'. Ὁ τόκος ἀριθμοῦ τινος μηνῶν ὀρίζεται καὶ

διὰ τοῦ μαθηματικοῦ τύπου $\tau = \frac{K \cdot \epsilon \cdot \omega}{1200}$, ἐν ᾧ πρὸς εὐρεσιν τοῦ τόκου, πολλαπλασιάζεται τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ 1200.

Πίναξ σταθερῶν διαιρετῶν.

1 % = 360	2 % = 180	3 % = 120	4 % = 90	5 % = 72	6 % = 60
1 1/8 % = 320	2 1/4 % = 160	3 1/2 % = 108	4 1/2 % = 84	5 5/8 % = 64	8 1/2 % = 48
1 1/4 % = 288	2 1/2 % = 144	3 3/4 % = 96			9 % = 40
1 2/3 % = 270	2 2/3 % = 135				10 % = 36
1 1/2 % = 240					12 % = 30
1 2/3 % = 246					15 % = 24
1 7/8 % = 192					18 % = 20

Περὶ τοῦ συνθέτου κεφαλαίου.

402. Σύνθετον κεφάλαιον καλεῖται κεφάλαιον συνεπτυγμένον μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ.

Ἐστῶσαν

K, καθαρὸν κεφάλαιον

τ, τόκος

ε, ἐπιτόκιον

ω, χρόνος

K + τ, σύνθετον κεφάλαιον

Ἵνα ὀρίσωμεν τὸ καθαρὸν κεφάλαιον K, λέγομεν:
σύνθετον κεφάλαιον 100 + ε εἰς 1 ἔτος = 100 καθαρ. κεφαλ.

» » 100 + ε.ω » ω ἔτη = 100 » »

» » K + τ = K » »

ἔθεν

$$K = \frac{(K + \tau) 100}{100 + \epsilon \cdot \omega} \text{ δι' ἔτη}$$

διὰ παρομοίας σκέψεως εὐρίσκομεν

$$K = \frac{[K+\tau] 1200}{1200 + \epsilon. x} \text{ διὰ μῆνας}$$

$$\text{καὶ } K = \frac{[K+\tau] 36000}{36000 + \epsilon. x} \text{ δι' ἡμέρας.}$$

103. Ὅσakis ζητεῖται τὸ σύνθετον κεφάλαιον γνωστῶν ὄντων τῶν ἄλλων στοιχείων χρώμεθα τῶν τύπων :

$$K + \tau = \frac{K [100 + \epsilon. x]}{100} \text{ δι' ἔτη}$$

$$K + \tau = \frac{K [1200 + \epsilon. x]}{1200} \text{ διὰ μῆνας}$$

$$K + \tau = \frac{K [36000 + \epsilon. x]}{36000} \text{ δι' ἡμέρας.}$$

104. Παραθέτομεν ἔτι καὶ τοὺς τύπους δι' ὧν προσδιορίζεται ὁ τόκος τοῦ συνθέτου κεφαλαίου ἢ ἡ ἐσωτερικὴ λεγομένη ὑφαιρέσις· οὕτω,

$$\tau = \frac{[K+\tau] \epsilon. x}{100 + \epsilon. x} \text{ δι' ἔτη}$$

$$\tau = \frac{[K+\tau] \epsilon. x}{1200 + \epsilon. x} \text{ διὰ μῆνας}$$

$$\tau = \frac{[K+\tau] \epsilon. x}{36000 + \epsilon. x} \text{ δι' ἡμέρας.}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως ποιοῦνται χρῆσιν πολλὰ ἔθνη· οἱ Γάλλοι μεταχειρίζονται αὐτὴν τότε μόνον ὁπόταν ὑπάρχῃ εἰδικὴ ἐπὶ τούτῳ σύμβασις.

Παραδείγματα.

Λον Ἐτοκισθὴν ποσὸν τι δραχμῶν πρὸς $7 \frac{1}{2} \%$ · μετὰ 213 ἡμέρας ἔδωκε διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον δρ. 18800. Εὐρεῖν τὸ τοκισθὲν ποσόν.

$$K = \frac{[K+\tau] 36000}{36000 + \epsilon. x} = \frac{18800 \times 36000}{36000 + 7 \frac{1}{2} \times 213} = \text{δρ. } 18001,25$$

Βον Ποῦον εἶναι τὸ ὀριστικὸν κεφάλαιον τῶν δρ. 18000 πρὸς 6% ἐπὶ 7 μῆνας ;

$$K + \tau = \frac{K [1200 + \epsilon. x]}{1200} = \frac{1800 [1200 + 6 \times 7]}{1200} = \text{δρ. } 18630.$$

Γον Κεφάλαιόν τι τοκισθὲν πρὸς $4 \frac{1}{2} \%$ ἐπὶ 11 ἔτη ἔδωκε 16000 δρ. διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον. Εὐρεῖν τὸν τόκον.

$$\tau = \frac{[K+\tau] \epsilon. x}{100 + \epsilon. x} = \frac{16000 \times 4 \frac{1}{2} \times 11}{100 + 4 \frac{1}{2} \times 11} = \text{δρ. } 5297,65$$

Δον Κεφάλαιόν τι τοκισθὲν πρὸς 9% τὸ ἔτος ἐπὶ 12 ἔτη ἔδωκε σύνθετον κεφάλαιον ἐκ δρ. 22922. Εὐρεῖν τὸ τοκισθὲν κεφάλαιον.

$$K = \frac{[K+\tau] 100}{100 + \epsilon. x} = \frac{22922 \times 100}{100 + 9 \times 12} = \text{δρ. } 11020,20$$

Ε ν Γραμμάτιόν τι πληρωτέον μετὰ 7 μῆνας ἔδωκε διὰ προεξόφλησιν δρ. 410. Ποῦον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον εἰς ὃ προεξωφλήθη τὸ γραμμάτιον, ὁπόταν ἡ ὀνομαστικὴ αὐτοῦ ἀξία ᾖ δρ. 18000;

Ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου	δρ. 18000
προεξόφλησις	» 410
πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου	δρ. 17590

Πρόκειται τώρα νὰ ζητήσωμεν τὸ ἐπιτόκιον, εἰς ὃ προεξοφλήθην τὸ ἐκ δρ. 17590 γραμμάτιον ἔδωκε προεξόφλησιν 410 δρ. ἐπὶ 7 μῆνας· οὕτως,

$$\text{Ἐκ τοῦ τύπου } K = \frac{[K+\tau] 1200}{1200 + \epsilon. x} \text{ συνάγομεν}$$

$$\epsilon = \frac{1200 \times \tau}{K. x} = \frac{1200 \times 410}{17590 \times 7} = \text{δρ. } 3,99^{577}$$

ΣΤον Γραμμάτιόν τι πληρωτέον μετὰ 127 ἡμέρας, προεξοφλήθην πρὸς 7% ἔδωκε διὰ προεξόφλησιν 1020 δρ. Ζητεῖται τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου.

$$\text{Ἐκ τοῦ τύπου } \tau = \frac{[K+\tau] \epsilon. x}{36000 + \epsilon. x} \text{ συνάγομεν}$$

$$K = \frac{36000 \times \tau}{\epsilon. x} = \frac{36000 \times 1020}{7 \times 127} \text{ δρ. } 41304,83$$

Ζων Γραμμάτιον τι ἐκ δρ. 16000 προσεξωφλήθην πρὸς 9 % ἔδωκε
 διὰ προσεξοφλήσιν δρ. 18. Ζητητέον πόσας ἡμέρας πρὸ τῆς προθεσμίας
 προσεξωφλήθη τὸ γραμμάτιον.

Ὄνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου	δρ.	16000
προεξόφλησις	»	18
πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου	δρ.	15982

Πρόκειται να εύρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν, κατὰ τὴν δ.ἀρ-
κειαν τοῦ ὁποῖου δρ. 15982 πρὸς 9 % παρῆξαν 18 δρ. διὰ προεξό-
φλησιν.

Εκ τού τύπου
$$K + \tau = \frac{K[36000 + \varepsilon \cdot x]}{36000}$$

εuryσχομεν $x = \frac{36000 \times \pi}{\epsilon \cdot \kappa}$

καὶ ἀντικαταστήσει $x = \frac{36000 \times 18}{9 \times 15982} = 41 \frac{1}{2}$.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΑΝΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΗΜΕΡΑΣ ΤΗΣ ΠΤΩΞΕΩΣ.

408. Ὡς φαίνεται ἐν τοῖς προσεκτεθεῖσι σχήμασι τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἶναι τὸ εὐρεῖν τὸ ἐπὶ μετρητοῖς ποσὸν, γνωστοῦ ὄντος τοῦ ὑπὸ προθεσμίαν ποσοῦ.

Ἀλλὰ δυνάμεθα κάλλιστα νὰ στρέψωμεν τὸ ζήτημα καὶ νὰ ἐρωτήσωμεν ποῖον θὰ ᾖ τὸ ὑπὸ προθεσμίαν ποσόν, γνωστοῦ ὄντος τοῦ ἐπὶ μετρητοῖς ποσοῦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ἡ περίπτωσις αὕτη ἀπαντᾷ συχνότατα εἰς τὰ ἑμπαιρικά ζητήματα, κυρίως δὲ ὁπόταν θελήσωμεν ν' ἀναβάλωμεν τὴν πληρωμὴν τιμολογίου τινος εἰς ἐποχὴν ἀπομεμακρυσμένην.

³¹ Ἐστω τὸ ἐξ ἧς πρόβλημα,

Ὁ ἐν Μασσαλίᾳ ἀνταποκριτής μας κ. Νάσας μᾶς ἐπιστέλλει τιμολόγιον ἐκ φρ. 48925,80 πληρωτέων τοῖς μετρητοῖς. Διὰ δὲ τὴν πληρωμὴν τοῦ τιμολογίου μᾶς ἐπιτρέπει νὰ μετακαλέσωμεν ἐπ' αὐτοῦ συναλλαγματικὴν πληρωθησομένην μετὰ 3 μῆνας. Ποῦτον θὰ ᾖ τὸ ποσὸν

τῆς συναλλαγματικῆς, ὁπόταν τὰ πρὸς ἑξῆς αὐτῆς ἀπαιτούμενα
ἔξοδα ᾧσι

τόκος πρὸς 7 $\frac{0}{10}$ τὸ ἔτος,

μεσιτεία πωλήσεως πρὸς $\frac{1}{8} \frac{0}{0}$,

χαρτόσημον πρὸς 1 $\frac{1}{2}$ 0/100,

προμήθεια τραπ ζης πρὸς $1\frac{1}{2}\%$;

Ἀύσις α'.

Τὸ ζητούμενον ποσὸν τῆς συναλλαγματικῆς πρέπει νὰ ᾖ τοιοῦτον, ὥστε ἡ συναλ/κὴ προεξοφληθεῖσα νὰ δώσῃ τὸ ποσὸν τοῦ τιμολογίου. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

ὑποθέτομεν τὴν μετὰ 3/Μ πληρωθησομένην συναλ/κὴν συγκειμένην ἐξ 400 φρ. καὶ ζητοῦμεν τὸ ἐπὶ μετρητοῦ ποσόν. Εἶναι φανερόν ὅτι πρὸς εὗρεσιν τοῦ ποσοῦ τούτου πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ 400 (ποσὸν τῆς μετὰ 3/Μ πληρωθησομένης συναλ/κῆς) ὅλα τὰ ἔξοδα (τόκον, μεσιτεῖαν πωλήσεως κτλ.), τοῦθ' ὅπερ μᾶς ἄγει εἰς τὸν ἐξ' ἧς ὑπολογισμὸν, ἐὰν διὰ νὰ εἰσάγωμεν τοῖς μετρητοῖς φρ. [100-τ] πρέπει νὰ ἐκδώσωμεν συν/κὴν ἐκ φρ. 400

» » » » » » 1 » » » » 100
» 2x 100
100-г

και » » » » » K » » » » $\frac{K100}{100-\tau}$

διὰ x παριστάνομεν τὸ ζητούμενον ποσὸν (ποσὸν συναλ/κῆς)

» K » » γνωστὸν » (πρὸς τιμολογίαν)

τὰ ἔξοδα (τόκον, μεσιτείαν, χαρτόσ. καὶ προμ.ήθειαν).

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν εὑρεθέντα τύπον τὰ γράμματα διὰ τῶν
ἐν τῷ προβλήματι γνωστῶν ἀριθμῶν, ῥητοί.

Κ δὲ	48923,80	
τ	1,75	τόκον 3/Μ πρὸς 7 %
»	0,425	μεριττεῖαν πωλήσεως
	0,45	χαρτότητον
	0,50	προμήθειαν τραπέζης
	<u>2,525</u>	

ἔχομεν

$$x = \frac{48925,80 \times 100}{100 - 2,525} = \text{φρ. } 50193,18$$

ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον ποσὸν τῆς συναλ/κῆς.

Ὁ δὲ κανονισμὸς, ὃν ὁλὰ πέμψωμεν τῷ ἀνταποκριτῇ μας Ναας ἔξει τὸν ἐξῆς τύπον.

Κανονισμός.

Προῖδν τιμολογίου		φρ. 48925,80
Τόκος 3/4	πρὸς 7 % τὸ ἔτος	» 878,38
Μεσιτεία	» 1/8 %	» 62,74
Χαρτόσημον	» 1 1/2 %	» 75,29
Προμήθεια	» 1/2 %	» 250,97
		φρ. 50193,18

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πῶς λογιστῆς δέον νὰ ἀποστηθίσῃ τὸν τύπον

$$x = \frac{K \cdot 100}{100 - \tau}, \quad \text{ὅν ἀποκαλοῦμεν ΤΥΠΟΝ ΣΥΝΘΕΤΟΝ.}$$

Λύσις β'.

Δυνάμεθα πρὸς τοῦτοις νὰ ζητήσωμεν τὸ ποσὸν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ ἤδη γνωστὸν ποσὸν πρὸς εὑρεσιν τοῦ ζητούμενου.

Πρὸς τοῦτο δὲ ἀναλογιζόμεθα ὡς ἐξῆς.

Ἐὰν ἡ ἐξοφλητέα ποσότης ᾦν φρ. (100-τ), τὸ ζητούμενον ποσὸν ὁλὰ ᾦν φρ. 100 καὶ ἔπρεπε νὰ προσθέσωμεν εἰς φρ. (100-τ) τὸ ποσὸν τ. ὅθεν

ἂν εἰς φρ. (100-τ) προσθέσωμεν	τ
» » 1 (ὁ »	$\frac{\tau}{100 - \tau}$
καὶ » » K » »	$\frac{K\tau}{100 - \tau}$

Ἀντικαθιστῶντες ἤδη τὰ γράμματα διὰ τῶν τιμῶν, ἔχομεν

$$\psi = \frac{K\tau}{100 - \tau} = \frac{48925,80 \times 2,525}{100 - 2,525} = \text{φρ. } 1267,38.$$

Καὶ τῷ ὄντι

Προῖδν τιμολογίου	φρ. 48925,80
Τόκος καὶ ἐξόδα	» 1267,38
Ποσὸν συναλλαγματικῆς	φρ. 50193,18

ἐξαγόμενον σύμφωνον τῷ διὰ τοῦ συνθέτου τύπου εὑρεθέντι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ τύπος $\psi = \frac{K\tau}{100 - \tau}$ καλεῖται τύπος τοῦ τόσον τοῖς %.

Λύσις γ'.

Τὸ ζητούμενον ποσὸν τῆς συναλ/κῆς εὐρίσκεται καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, ἔὰν δηλ. λάβωμεν τόσα τοῖς % ὅχι μόνον ἐπὶ τοῦ γνωστοῦ ποσοῦ ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τοῦ τόσα τοῖς % τῶν τόσων τοῖς % μέχρις οὗ καταλήξωμεν εἰς ἀριθμὸν ἐλαχίστης ἀξίας· οὕτω,

ποσὸν τοῦ τιμολογίου	φρ. 48925,80
2,525 % ἐπὶ	» 1235,37
2,525 % »	» 31,49
2,525 % »	» 0,80
2,525 % »	» 0,02
ποσὸν συναλλαγματικῆς	φρ. 50193,18

ἐξαγόμενον σύμφωνον τῷ διὰ τῶν δύο προηγουμένων μεθόδων εὑρεθέντι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ τελευταία αὕτη μέθοδος εἶναι προτιμωτέρα τῶν ἄλλων, ὁπόταν τὸ τόσον τοῖς % παρίσταται ὑπὸ τῶν 1, 1 1/2, 2.

Αὗται εἰσὶν αἱ μόναι μέθοδοι, δι' ὧν δυνάμεθα ἀσφαλῶς νὰ φθῶ-
σωμεν εἰς τὸ ζητούμενον.

106. Ἡ μέθοδος, ἣν κακῶς ποιούμενοι, ἀκολουθοῦσι τινὰ τῶν ἐμπορικῶν καταστημάτων δὲν ἔχεται ἀκριβείας, ὥς τοῦτο φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος.

Πρόβλημα. Ἡγοράσαμεν διὰ λ/σμὸν τοῦ ἐν Λονδίνῳ κ. *Lan* 150 σάκκους κακῶ ἀξίζοντας κατὰ τὸ τιμολόγιόν μας £ 612—5—11 τοῖς μετρητοῖς. Διὰ τὸ ποσὸν τοῦτο τοῦ τιμολογίου πρόκειται νὰ μετακληθῇ συναλ/κὴ τρίμηνης. Ποῖον θὰ ᾖ τὸ ποσὸν τῆς τοιαύτης συναλ/κῆς, ὁπόταν τὸ ἐπιτόκιον ᾖ 4 %;

Κατὰ τινὰς τῶν ἐμπόρων ἡ ζητούμενη συναλ/κὴ συνίσταται ἐκ τοῦ γνωστοῦ ποσοῦ ἠδῆ κημένου κατὰ τοὺς τόκους τῶν 3/M. πρὸς 4 %· οὕτω

Ποσὸν τιμολογίου	£ 612—5—11
τόκος 3/M. πρὸς 4 %	» 6—2—5
Ποσὸν συναλ/κῆς	£ 618—8—4

Λέγομεν ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι ἐσφαλμένον· διότι, ἐὰν παρουσιάσωμεν τὴν ἐκ £ 618—8—4 συναλ/κὴν εἰς τραπεζίτην τινὰ πρὸς διαπραγματεύσειν, θέλομεν εἰσπράξει £ 612—4—8 ὡς ἑξῆς:

Ὀνομαστικὴ ἀξία συναλ/κῆς	£ 618—8—4
τόκος 3/M. πρὸς 4 %	» 6—3—8
πραγματικὴ ἀξία τῆς συναλ/κῆς	£ 612—4—8
ὅθεν τὸ ἐπὶ μετρητοῖς τιμολόγιον ὃν ἐκ	£ 612—5—11
ἡ δὲ πραγματικὴ ἀξία τῆς συναλ/κῆς οὕσα ἐκ	» 612—4—8
ἐπιφέρει διαφορὰν ἐκ	£ 0—1—3

Ἡ διαφορὰ αὕτη προέρχεται ἐκ τούτου ὅτι ἡμεῖς μὲν ἐλάβομεν τοὺς τόκους τῶν 3/M. ἐπὶ τοῦ ποσοῦ τοῦ τιμολογίου (£ 612—5—11), ἐνῶ δὲ τραπεζίτης ἀφῆρεσε τοὺς τόκους τῶν 3/M. ἀπὸ τοῦ ποσοῦ τῆς εἰς αὐτὸν παρουσιασθείσης συναλ/κῆς (£ 618—8—4), ποσοῦ συγκεκριμένου ἐκ τοῦ ἐξαγομένου τοῦ τιμολογίου ἠδῆ κημένου κατὰ τοὺς τόκους οὓς προσεθέσαμεν.

Ἵνα ὦμεν λοιπὸν ἀκριβεῖς εἰς τοὺς λ/σμούς, δεῖλομεν νὰ ποιῶμεθα χρῆσιν μιᾶς τῶν προτεθεισῶν μεθόδων.

Οὕτω λ. χ. λαμβάνοντες τὸν σύνθετον τύπον $x = \frac{K 100}{100 - r}$ εὐρίσκομεν $x = \frac{[£ 612 - 5 - 11] 100}{99} = £ 618 - 9 - 7$ ποσὸν τῆς μετὰ 3/M. πληρωθησομένης συναλ/κῆς.

Καὶ πῶς ἔντι, ἐὰν παρουσιάσωμεν εἰς τραπεζίτην τινὰ συναλλαγματικήν ἐκ £ 618—9—7, ὁ τραπεζίτης θὰ δώσῃ τοῖς μετρητοῖς £ 612—5—11 ὡς ἑξῆς:

Συναλ/κὴ	£ 618—9—7
—τόκου 3/M. πρὸς 4 %	» 6—3—8
	£ 612—5—11

ὅπερ εἶναι καὶ πράγματι τὸ ποσὸν τοῦ τιμολογίου.

Πρόβλημα. Τὴν 15 ἀπριλίου ἐγχειρίζομεν εἰς ἐμπορὸν τινὰ τιμολόγιον συμποσούμενον εἰς

φρ. 14237,45 ἀξία τοῖς μετρητοῖς,
καὶ ἕτερον τιμολόγιον συμποσούμενον εἰς
φρ. 55917,30 ἀξία 15 μαΐου.

Ποῖον θὰ ᾖ τὸ ἐξαγόμενον μιᾶς μόνης συναλ/κῆς ἣν θὰ μετακαλέσωμεν ἐπὶ τοῦ ἀνταποκριτοῦ μας διὰ τῆς 15 ἰουλίου, ὁπόταν τὰ εἰς ἀντιπληρωμὴν σχετικὰ ἔξοδα εἰσὶ

τόκος	πρὸς 6 %
χαρτόσημον	» 1 1/2 %
μεσιτεία διαπραγματεύσεως	» 1/8 %

Λύσις. Ἐν πρώτοις εὐρίσκομεν τὴν εἰς μετρητὰ ἀξίαν τοῦ εἰς τὰς 15 μαΐου ἀπαιτητέου ποσοῦ τοῦ β'. τιμολογίου, ἀφαιροῦντες ἐκ τοῦ ποσοῦ τόκον 1/M πρὸς 6 %· οὕτω,

φρ. 55917,30 τιμολόγιον διὰ τῆς 15 Μαΐου
» 279,58 τόκος 1/M. πρὸς 6 %

φρ. 55637,72 ἀξία τοῖς μετρητοῖς,

ἥτινα προσθέτοντες εἰς τὸ ποσὸν τοῦ πρώτου τιμολογίου λαμβάνομεν τὸ ὅλικόν ποσὸν τῶν δύο τιμολογίων ἀξία τοῖς μετρητοῖς,

φρ. 14237,43 α. τιμολόγιον

» 55637,72 β. »

φρ. 69875,17 αξία τοῖς μετρητοῖς.

Ἵνα εὕρωμεν λοιπὸν τὸ προϊόν τῆς μετακλητικῆς, λαμβάνομεν τὸν σύνθετον τύπον $x = \frac{K \cdot 100}{100 - \tau}$, εἰς ὃν ἀντικαθιστῶμεν τὰ γράμματα διὰ τῶν ἀξιών των, ἥτοι τὸ K διὰ 69875,17 καὶ τὸ τ διὰ 4,775, καὶ πορίζομεθα

$$x = \frac{69875,17 \times 100}{100 - 4,775} = \text{φρ. } 74137,85.$$

Κατορισμός.

Ἐξαγόμενον δύο τιμολογίων

φρ. 69875,17

Τόκος πρὸς 6 %

» 4067,06

Χαρτόσημον πρὸς 4 1/2 %

» 406,70

Μεστειὰ διαπραγματεύσεως πρὸς 1/8 %

» 88,92

φρ. 74137,85

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΡΙΖΕΙΝ ΕΙΣ ΑΝΑΛΟΓΑ.

407. Οὕτως ὀνομάζουσιν οἱ μαθηματικοὶ τὴν μέθοδον, δι' ἧς εὕρισκousι τὰ ἀνάλογα μέρη δεδομένων ἀριθμῶν εἰς ἀριθμὸν τινα δεδομένον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ δεδομένος ἀριθμὸς, ὅστις πρόκειται νὰ διαιρεθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα καλεῖται *μεριστέος*. οἱ δὲ δεδομένοι ἀριθμοί, εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ μερισθῇ ὁ μεριστέος, καλοῦνται *ὁμόλογοι*.

408. Ἡ μέθοδος τοῦ ἀναλόγου μερισμοῦ εἶναι μὲν ἀπλή, ὅταν οἱ ὁμόλογοι ᾖναι ἐνὸς εἴδους, σύνθετος δὲ ὅταν οὗτοι ᾖσι δύο ἢ καὶ τριῶν εἰδῶν.

α'. Ἀπλή μέθοδος.

409. Διὰ νὰ εὕρωμεν ἕκαστον μερίδιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν

μεριστέον ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχον ὁμόλογον, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὁμολόγων· οὕτω

Μερισθήτω ὁ 6000 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 4, 5 καὶ 7.

Ὅμολογοι	Μεριστέος	
4		= 24000 : 16 = 1500
5	6000	= 30000 : 16 = 1875
7		= 42000 : 16 = 2625
16		6000

410. Πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων τῶν ὁμολόγων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὰ ἐξαγόμενα δὲν μεταβάλλονται, ἐνῶ ἡ πρᾶξις ἀπλοποιεῖται.

411. Ὅταν οἱ ὁμόλογοι ᾖναι κλασματικοὶ ἢ μικτοί, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους, καὶ, ἀφίνοντες τοὺς παρονομαστές, μεταχειριζόμεθα ὡς ὁμολόγους μόνους τοὺς ἀριθμητάς.

412. Πολλάκις ἀναγκαζόμεθα νὰ μερίσωμεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν βοηθούμενοι προσωρινῶς ὑφ' ἐνὸς ἢ πλείονων ἀριθμῶν κατ' ἐκλογὴν ἢ κατὰ προαίρεσιν ληφθέντων.

Πρόβλημα. Ἀνθρώπος τις ἄφησεν εἰς 4 υἱούς του κληρονομίαν ἐξ 80000 φρ. καὶ παρήγγειλε νὰ διαμερισθῇ ἡ κληρονομία ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ τῶν ἡλικιῶν 4, 7, 9 καὶ 15. Ζητεῖται τὸ ἀναλογοῦν μέρος ἑκάστου.

Σημειοῦμεν διὰ 1 τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου· τότε δὲ θέλομεν ἔχει κατὰ τὴν ἐκφώνησιν,

Μερίδιον τοῦ α'. Μερίδιον τοῦ β'. Μερίδιον τοῦ γ'. Μερίδιον τοῦ δ'.

1	1/7	1/9	1/15
ἔστω μέρη ἀνάλογα εἰσὶ,			
1/1	7/1	9/1	15/1
ἢ 1	7	9	15

Ὡστε ὁ ἀριθμὸς 80000 θὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 1, 7, 9 καὶ 15.

ὅθεν

$$\begin{array}{l} 1 \times 80000 : 32 = 80000 : 32 = 2500 \\ 7 \times 80000 : 32 = 560000 : 32 = 17500 \\ 9 \times 80000 : 32 = 720000 : 32 = 22500 \\ 15 \times 80000 : 32 = 1200000 : 32 = 37500 \\ \hline 32 \qquad \qquad \qquad 80000 \end{array}$$

Πρόβλημα. Τὸ ἐνεργητικὸν πτωχεύσαντός τινος, ἀφαιρέσει ὅλων τῶν ἐξόδων τῆς ἐκκαθαρίσεως, σύγκειται ἐξ 80000 φρ. Ὁ πτωχεύσας χρεωστεῖ εἰς 4 ἐμπόρους ὡς ἐξῆς,

40000	εἰς	τὸν	πρῶτον
34000	»	»	δεύτερον
27000	»	»	τρίτον
19000	»	»	τέταρτον.

Ζητεῖται τὸ ἀναλογοῦν μέρος ἐκάστου πιστωτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐνεργητικοῦ. Τὸ ἄθροισμα τῶν πιστώσεων εἶναι 120000. ὅθεν πίστωσης 1 φρ.

$$\text{ὅλ' ἔχῃ δικαίωμα εἰς } \frac{80000}{120000} = 0,66666666$$

πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐκάστην πίστωσιν ἐπὶ 0,66666666.

$$\begin{array}{l} \text{Μέρισμα τοῦ α'. } 0,66666666 \times 40000 = 26666,66 \\ \text{» » β'. } \quad \quad \quad \times 34000 = 22666,67 \\ \text{» » γ'. } \quad \quad \quad \times 27000 = 18000, \text{ »} \\ \text{» » δ'. } \quad \quad \quad \times 19000 = 12666,28 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 80000 \end{array}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ πηλίκου πρέπει νὰ ᾖ πολυψήριον κατὰ τὴν σπουδαιότητα ἢ τὸ ἀσήμαντον τοῦ χρέους.

β'. *Σύνθετος μέθοδος.*

143. *Πρόβλημα.* Τρεῖς ποιμένες ἐνοικίασαν λαβράδιόν τι διὰ φράγκα 600.

ὁ α'. ἔστειλε 10 βόας ἐπὶ 40 ἡμέρας
ὁ β'. » 75 » » 4 »
ὁ γ'. » 25 » » 20 »

τί ἐπλήρωσεν ἕκαστος;

Λύσις.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \text{ βόες ἐπὶ } 40 \text{ ἡμέρας} = 400 \text{ βόες ἐπὶ } 1 \text{ ἡμ.} = 4 \\ 75 \text{ » » } 4 \text{ » } = 300 \text{ » » } 1 \text{ » } = 3 \\ 25 \text{ » » } 20 \text{ » } = 500 \text{ » » } 1 \text{ » } = 5 \end{array} \right\} = 12$$

Ἐὰν 12 ἀξίζουσι 600

$$1 \text{ ἀξίζει } \frac{600}{12}$$

$$\text{καὶ } 4 \text{ ἀξίζουσι } \frac{600 \times 4}{12} = 200$$

$$3 \text{ » } \frac{600 \times 3}{12} = 150$$

$$5 \text{ » } \frac{600 \times 5}{12} = 250$$

600.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΙΑΣ.

144. Εἰς τὴν μέθοδον τῆς εταιρίας ὑπάρχοντα τὰ προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται νὰ διαμοιρασθῇ εἰς δύο ἢ περισσοτέρους εταίρους ἢ ἕκ τινος κοινῆς ἐπιχειρήσεως προκύπτουσα ὠφέλεια ἢ ζημία ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων ἐκάστου καὶ τοῦ χρόνου καθ' ὃν τὸ κεφάλαιον ἐκάστου ἔμεινεν εἰς τὴν εταιρίαν.

Εἶναι δὲ αὕτη ἀπλὴ μὲν, ὁπόταν αἱ καταβολαὶ πραγματοποιῶνται ταυτοχρόνως, σύνθετος δὲ, ὅταν αἱ καταβολαὶ κατατίθενται εἰς διαφοροὺς χρόνους.

Ἀπλὴ μέθοδος τῆς εταιρίας.

145. Ἵνα λύσωμεν ζήτημά τι ἀναφερόμενον εἰς τὴν ἀπλὴν μέθοδον τῆς εταιρίας στηριζόμεθα ἐπὶ τῆς ιδιότητος,

«Εἰς σειράν ἴσων λόγων τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπομένων, ὡς ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἐπόμενον αὐτοῦ».

Κατ'αὐτὸν. Πρὸς εὐρεσιν τοῦ ἀναλογοῦντος εἰς ἕκαστον τῶν συνεταίρων μέρους, πολλαπλασιάζομεν τὴν μερικὴν κατάρθεσιν ἐκάστου ἐπὶ τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημίαν, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν καταθέσεων.

Πρόβλημα. Τρεῖς ἔμποροι συνεταίρισθέντες ἐκέρδισαν ἐκ τινος ἐπιχειρήσεως 60000 δραχμὰς· τὸ μὲν κεφάλαιον τοῦ α'. ἦν 25000, τὸ τοῦ β'. 18000 καὶ τὸ τοῦ γ'. 7000. Ζητεῖται τὸ κέρδος ἐκάστου.

$$\begin{array}{rcll} 25000 & \text{ἢ} & 25 & \delta\theta\epsilon\nu & \alpha' = \frac{6000 \times 25}{50} = 3000 \\ 18000 & \text{»} & 18 & & \beta' = \frac{6000 \times 18}{50} = 2160 \\ 7000 & \text{»} & 7 & & \gamma' = \frac{6000 \times 7}{50} = 840 \\ \hline & & 50 & & 6000. \end{array}$$

Ὅστε λέγομεν ὅτι,

ὁσάκις οἱ χρόνοι εἶναι ἴσοι, τὰ μέρη εἰσὶν ἀνάλογα ταῖς καταβολαῖς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ κέρδος ἐπολλαπλασιάσθη, ὡς φαίνεται εἰς τοὺς ἄνω λογαρισμοὺς, ἐπὶ 25, 18 καὶ 7 ἀντὶ 25000, 18000 καὶ 7000· τοῦτο δὲ, διότι διηρέσαμεν χάριν εὐκολίας τοὺς ὁμολόγους ἀριθμοὺς (τὰς καταβολὰς) διὰ 1000 κατὰ τὴν ἀρχὴν, πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων τῶν ὁμολόγων ἀριθμῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, οὐδεμίαν ἀλλοίωσιν ἐπέρχεται εἰς τὰ ἐξαγόμενα.

Σύνθετος μέθοδος τῆς ἐταιρείας.

116. Ἵνα δρῶμεν τὸ μερίδιον ἐκάστου συνεταίρου ἐκ τοῦ κέρδους ἢ τῆς ζημίας κεφαλαίων κατατεθέντων εἰς ἄνισα χρονικὰ διαστήματα, σχηματίζομεν τοὺς τοκαριθμούς τῶν ἐταιρικῶν καταβολῶν καὶ περιεχόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀπλῆς μεθόδου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τοκαριθμὸν ἀποκαλοῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου ἐκάστου συνεταίρου ἐπὶ τὸν χρόνον, καθ' ὃν μένει τὸ κεφάλαιον τοῦτο εἰς τὴν ἐταιρίαν.

Πρόβλημα. Τρεῖς ἔμποροι συνεταίρισθέντες ἐκέρδισαν ἐν συνόλῳ 4000 δραχμὰς· ὁ μὲν α'. εἶχε καταθέσει 3000 δραχμὰς ἐπὶ 4/Μ, ὁ δὲ β'. 4000 δραχμὰς ἐπὶ 5/Μ καὶ ὁ γ'. 7000 δρ. ἐπὶ 7/Μ. Ζητεῖται τὸ κέρδος ἐκάστου.

$$\left. \begin{array}{l} 3000 \text{ ἐπὶ } 4/M = 12000 \text{ ἐπὶ } 1/M = 12 \\ 4000 \text{ » } 5/M = 20000 \text{ » } 1/M = 20 \\ 7000 \text{ » } 7/M = 49000 \text{ » } 1/M = 49 \end{array} \right\} = 81$$

ἔθεν

$$\text{Μερίδιον τοῦ α'} = \frac{4000 \times 12}{81} = 592,60$$

$$\text{» β'} = \frac{4000 \times 20}{81} = 987,65$$

$$\text{» γ'} = \frac{4000 \times 49}{81} = 2419,75$$

4000

Ὅστε δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν ὅτι

ὅταν αἱ καταθέσεις ᾖναι ἄνισοι, τὰ μέρη εἰσὶν ἀνάλογα τοῖς τοκαριθμοῖς.

Πρόβλημα. Ἐμπορὸς ἀρχεται ἐπιχειρήσεώς τινος μὲ κεφάλαιον 35000 δρ., 7/Μ ὕστερον λαμβάνει ἀπὸ κεφαλαιοῦχόν τινα 50000 δρ., 8/Μ ὕστερότερον λαμβάνει παρὰ τρίτου κεφαλαιοῦχου 70000 δρ. Εἰς τὸ τέλος τῶν 4 ἐτῶν ἡ ἐπιχείρησις ἔδωκε κέρδος ἐκ δρ. 90000. Συνεφωνήθη δὲ ὥστε ὁ πρῶτος νὰ λάβῃ ἀμοιβὴν τινα ἐκ 4%. Ζητεῖται τὸ μερίδιον ἐκάστου.

Ολικὸν κέρδος δρ. 90000

Ἀμοιβὴ 4% » 3600

ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι δρ. 86400

τὸ κεφάλαιον τοῦ α'. κατετέθη εἰς τὴν ἐταιρίαν ἐπὶ 4 ἔτη = 48/Μ

» » » β'. » » » » μετὰ 7/Μ = 41/Μ

» » » γ'. » » » » 15/Μ = 33/Μ

$$\left. \begin{array}{l} 35000 \text{ ἐπὶ } 48/M = 1680000 \text{ ἐπὶ } 1/M = 168 \\ 50000 \text{ » } 41/M = 2050000 \text{ » } 1/M = 205 \\ 70000 \text{ » } 33/M = 2310000 \text{ » } 1/M = 231 \end{array} \right\} = 604$$

$$\alpha' = \frac{86400 \times 168}{604} = \text{δρ. } 24031,80$$

$$\beta' = \frac{86400 \times 205}{604} = \text{» } 29324,50$$

$$\gamma' = \frac{86400 \times 231}{604} = \text{» } 33043,70$$

$$\text{δρ. } 86400$$

$$\text{ἀμοιβὴν » } 3600$$

$$\text{τὸ ὅλικόν κέρδος δρ. } 90000$$

Πρόβλημα. Τρεῖς ἔμποροι συνεταίρισθέντες ἐκέρδισαν ἐν συνόλῳ 30000 δρ., ὁ μὲν α' κατέθεσε 15000 δρ. εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς ἐταιρείας καὶ 6000 δρ. μετὰ 6/M, ὁ β' κατέθεσεν 22000 δρ. καὶ μετὰ 5/M. ἔλαβεν ἀπὸ τὴν ἐταιρίαν 4000 δρ., ὁ τρίτος κατέθεσεν 26000 δρ. καὶ μετὰ 7/M ἀπέσυρεν 6000 δρ., 3/M δὲ μετὰ ταῦτα ἔδωκεν 7000 δρ. Ἡ ἐταιρία διήρκεσεν 20/M. οἱ τρεῖς συνεταῖροι εἶχον συμφωνήσει ὥστε ὁ τρίτος νὰ λάβῃ 6% ἀμοιβὴν ἐπὶ τοῦ ὀλικοῦ κέρδους. Ζητεῖται τὸ κέρδος ἐκάστου συνεταίρου.

$$\text{Ὅλικόν κέρδος δρ. } 30000$$

$$\text{Ἀμοιβὴ } 6\% \text{ » } 1800$$

$$\text{Μεριστέος ἀριθμὸς δρ. } 28200$$

Αἰ 15000 δρ. τοῦ α'. ἔμειναν εἰς τὴν ἐταιρίαν 6/M., ἔπειτα δὲ ἡδ-
ξήθησαν κατὰ 6000 δρ. Τὸ νέον κεφάλαιον 21000 δρ. ἔμεινεν ἐπὶ 14/M.

Αἰ 22000 δρ. τοῦ β'. ἔμειναν εἰς τὴν ἐταιρίαν ἐπὶ 5/M, ἔπειτα δὲ
ἡλαττώθησαν κατὰ 4000 δρ. Τὸ νέον κεφάλαιον 18000 δρ. ἔμεινεν
ἐπὶ 14/M.

Αἰ 26000 δρ. τοῦ τρίτου ἡλαττώθησαν μετὰ 7/M εἰς 20000 δρ.,
αἵτινες ἔμειναν εἰς τὴν ἐταιρίαν ἐπὶ 3/M., μετὰ τὸ τέλος τῶν ὁποίων
αἰ 20000 δρ. ἡδξήθησαν εἰς 27000 δρ. ἐπὶ 10/M.

Κατὰ ταῦτα θέλομεν ἔχει

$$\left. \begin{array}{l} \alpha'. \left\{ \begin{array}{l} 15000 \text{ ἐπὶ } 6/M. = 90000 \text{ ἐπὶ } 1/M. \\ 21000 \text{ » } 14/M. = 294000 \text{ » } 1/M. \end{array} \right\} = 384 \\ \beta'. \left\{ \begin{array}{l} 22000 \text{ » } 5/M. = 110000 \text{ » } 1/M. \\ 18000 \text{ » } 14/M. = 270000 \text{ » } 1/M. \end{array} \right\} = 380 \\ \gamma'. \left\{ \begin{array}{l} 26000 \text{ » } 7/M. = 182000 \text{ » } 1/M. \\ 20000 \text{ » } 3/M. = 60000 \text{ » } 1/M. \\ 27000 \text{ » } 10/M. = 270000 \text{ » } 1/M. \end{array} \right\} = 512 \end{array} \right\} = 1276$$

καὶ

$$\alpha' = \frac{28200 \times 384}{1276} = \text{δρ. } 8486,52$$

$$\beta' = \frac{28200 \times 380}{1276} = \text{» } 8398,42$$

$$\gamma' = \frac{28200 \times 512}{1276} = \text{» } 11315,36$$

$$\text{δρ. } 28200$$

$$\text{ἀμοιβὴ » } 1800$$

$$\text{δρ. } 30000.$$

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ.

417. Ἡ μέση τιμὴ πολλῶν ποσοτήτων εἶναι τὸ πηλίκον, ὅπερ
λαμβάνομεν διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων τούτων διὰ τοῦ
ἀριθμοῦ αὐτῶν· οὕτως ἡ μέση τιμὴ τῶν ἀριθμῶν 9,12,18,20,25 εἶναι

$$\frac{9+12+18+20+25}{5} = 17.$$

418. Τὰ ζητήματα τῆς μέσης τιμῆς ἐφαρμόζονται κατὰ μέγα
μέρος εἰς τὸ ἐμπόριον.

Οὕτω δι' αὐτῆς ὀρίζομεν τὸ μέσον κῆρος καθαρότητος τῶν μετάλ-
λων, τὸ μέσον ἐπιτόκιον τῶν εισοδημάτων, τὴν μέσην τιμὴν τῶν δη-
μοσίων χρεωγράφων, τὴν τιμὴν οἰουδήποτε μίγματος· διότι καὶ

αὕτη θεωρεῖται ὡς μέση τιμὴ εἰς τὰς ἀναμίξεις, τὴν μέσην τιμὴν τοῦ σίτου ἢ τοῦ ἀλεύρου.

Πρόβλημα α'. Ἐπωλήθησαν 3000 κοιλὰ σίτου πρὸς 8 δρ. τὸ κοιλὸν, 3500 κοιλὰ πρὸς 10 δρ. καὶ 8000 κοιλὰ πρὸς 13 δρ. Ποία εἶναι ἡ μέση τιμή;

$$\begin{array}{rcl} 3000 \text{ κοιλὰ πρὸς } 8 \text{ δρ.} & = & 24000 \\ 3500 \text{ » » } 10 \text{ »} & = & 35000 \\ 8000 \text{ » » } 13 \text{ »} & = & 104000 \\ \hline 14500 & & 163000 \end{array}$$

$$\frac{163000}{14500} = \text{δρ. } 11,241^3 \text{ ἡ μέση τιμὴ τοῦ κοιλοῦ τοῦ σίτου.}$$

Ἐὰν δὲ τώρα θελήσωμεν νὰ μάθωμεν τὴν τιμὴν τῆς ὀκτάδος τοῦ ἄρτου, διαιροῦμεν τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν δρ. 11,241³ διὰ 20· διότι 1 κοιλὸν = 20 ὀκτάσιν· οὕτω

$$\frac{11,241^3}{20} = \text{δρ. } 0,562 \text{ ἀξία μιᾶς ὀκτάδος.}$$

Πρόβλημα β'. Ἐμπορὸς τις ἠγόρασεν εἰσοδήματα 1000 φρ. πρὸς 400 φρ., 1500 φρ. πρὸς 112 καὶ 1200 φρ. πρὸς 115. Εὗρεῖν τὴν μέσην τιμὴν τῶν διαφόρων τούτων εἰσοδημάτων ἀγορασθέντων εἰς διαφόρους τιμὰς.

$$\begin{array}{rcl} 1000 \text{ φρ. πρὸς } 100 & = & 100000 \\ 1500 \text{ » » } 112 & = & 168000 \\ 1200 \text{ » » } 115 & = & 138000 \\ \hline 3700 & & 406000 \end{array}$$

$$\frac{406000}{3700} = \text{φρ. } 109,73.$$

Πρόβλημα γ'. Λαχεῖὸν τι σύγκειται ἐκ 4000 γραμματίων πρὸς 8 δρ. ἕκαστον. Ὁ α'. ἀριθμὸς κερδίζει τὸν μεγαλύτερον κλῆρον ἐκ 10000 δρ., οἱ τρεῖς κερδίζουν κλῆρον ἐκ 5000 δρ. ἕκαστος, ἄλλοι τριᾶκοντα ἐκ 200 δρ. ἕκαστος, καὶ ἄλλοι ἑξακόσιοι κερδίζουν κλῆρον

ἐξ 20 δρ. ἕκαστος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῶν λαχείων οὐδέν· κερδίζει κλῆρον. Εὗρεῖν τὸ ἐφ' ἑκάστου κλήρου προσγενησόμενον κέρδος.

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ λαχεῖον} & \times & 10000 = 10000 \\ 3 \text{ λαχεῖα} & \times & 5000 = 15000 \\ 30 \text{ »} & \times & 200 = 6000 \\ 600 \text{ »} & \times & 20 = 12000 \\ 3366 \text{ »} & \times & 0 = 0 \\ \hline 4000 \text{ λαχεῖα} & & 43000 \end{array}$$

$$\frac{43000}{4000} = \text{δρ. } 10,75.$$

Τὸ κέρδος θὰ ᾖ δρ. 10,75 — 8 = δρ. 2,75 εἰς ἕκαστον τῶν 4000 λαχείων ἢ ἐν συνόλῳ 2,75 × 4000 = δρ. 11000.

Πρόβλημα δ'. Ἐμπορὸς τις ἐδανείσθη χρήματα εἰς διάφορα ἐπιτόκια, ὡς 8 % , 7 % , 6 % καὶ 5 % , ποῖον εἶναι τὸ μεσαῖον ἐπιτόκιον;

$$\frac{8+7+6+5}{4} = \frac{26}{4} = 6 \frac{1}{2} \text{ μεσαῖον ἐπιτόκιον.}$$

Πρόβλημα ε'. Ἐμπορὸς τις κατέθεσεν εἰς τὸκον 66000 δρ. πρὸς 5 % , 70000 δρ. πρὸς 4 $\frac{3}{4}$ % καὶ 182000 δρ. πρὸς 4 $\frac{1}{2}$ % . ποῖον εἶναι τὸ μεσαῖον ἐπιτόκιον τοῦ ἐτησίου εἰσοδήματός του;

$$\begin{array}{rcl} 66000 \text{ ἀποφέρουσι } 0,05 & & 3300 \\ 70000 \text{ » } 0,0475 & & 3325 \\ 182000 \text{ » } 0,045 & & 8190 \\ \hline 318000 & & 14815 \end{array}$$

$$\text{ἔθεν } 100 \text{ » } \frac{14815}{3180} = \text{δρ. } 4,66 \text{ ὡς ἔγγιστα.}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΜΙΞΕΩΣ.

119. Μέθοδος ἀναμίξεως καλεῖται ὁ τρόπος, δι' οὗ δρίζομεν τὴν τιμὴν τῆς μονάδος μίγματος τινος, ἢ τὸ μέρος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου τῶν ἀναμιγνυμένων πραγμάτων διὰ ν' ἀπητελέσωμεν ἓν ὅλον.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἔπεται ὅτι αἱ μέθοδοι τῆς ἀναμίξεως εἰσὶ δύο, ἀπ.λῇ μὲν ὁπόταν πρόκειται νὰ ὁρισθῇ ἡ μεσαία τιμὴ πολλῶν πραγμάτων, εἶδους μὲν τοῦ αὐτοῦ ἀλλὰ τιμῶν διαφόρων, σύνθετος δὲ ὁπόταν πρόκειται νὰ ὁρισθῶσιν αἱ ἐκ δύο ἢ πλείονων διαφόρων τιμῶν ληφθησόμεναι ποσότητες, ὧν ἡ τιμὴ εἶναι γνωστὴ ἐκ τῶν προτέρων.

Ἀπ.λῇ μέθοδος ἀναμίξεως.

420. Πρόβλημα. Οἰνοπώλης ἀνέμιξεν 420 λίτρας οἴνου πρὸς φρ. 0,50, 90 λίτρας πρὸς 0,40 φρ. καὶ 30 λίτρας ὕδατος, πωλεῖ δὲ τὴν λίτραν πρὸς 0,50 φρ. πόσον κερδίζει ἀνὰ ἐκάστην λίτραν;

$$\begin{array}{rcl} 420 \text{ λίτραι} & \text{πρὸς} & 0,50 = 0,50 \times 420 = 60 \text{ φρ.} \\ 90 \text{ » } & \text{» } & 0,40 = 0,40 \times 90 = 36 \text{ »} \\ 30 \text{ » ὕδατος} & & = 0 \\ \hline 240 & & 96 \text{ φρ.} \end{array}$$

$$\text{ὁθεν 1 λίτρα} = \frac{96}{240} = 0,40 \text{ φρ.}$$

Ὡστε ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος εἶναι 0,40. Ἐπειδὴ δὲ ὁ οἰνοπώλης πωλεῖ τὴν λίτραν τοῦ μίγματος πρὸς 0,50 φρ., ἄρα κερδίζει (0,50—0,40) 0,10 φρ. ἀνὰ ἐκάστην λίτραν.

Ἀντίθετος ἀνάμιξις.

421. Ἐνταῦθα παρουσιάζονται δύο περιπτώσεις.

1ον Ἐχομεν δύο ποιότητας πρὸς ἀνάμιξιν.

2ον Ἐχομεν ποιότητας πρὸς ἀνάμιξιν πλείους τῶν δύο.

Περίπτωσης α'. Ἐμπορὸς τις ἔχει δύο εἶδη σίτου, τιμωμένου τοῦ μὲν 48 τοῦ δὲ 40, καὶ ζητεῖ νὰ μάθῃ, πόσον πρέπει νὰ ἀναμίξῃ ἐξ ἑκατέρου διὰ νὰ πωλήσῃ τὸ μῖγμα πρὸς 42 φρ.

$$42 \left\{ \begin{array}{l} 48 \text{ ζημία } 6 \text{ } \swarrow \text{ 2 μέρη τοῦ α'. (6} \times \text{2=12 ζημία)} \\ 40 \text{ κέρδος } 2 \text{ } \searrow \text{ 6 » » β'. (2} \times \text{6=12 κέρδος).} \end{array} \right.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εὐρόμεν τὰς διαφορὰς τῶν δοθεισῶν τιμῶν καὶ τῆς

μέσης, μετετοπίσαμεν αὐτὰς οὕτως, ὥστε τὸ κέρδος τοῦ ἐνὸς συμψηφίσῃ τὴν ζημίαν τοῦ ἄλλου.

Περίπτωσης β'. Ἐχομεν ποιότητας πρὸς ἀνάμιξιν πλείους τῶν δύο.

Τὰ εἰς ταύτην τὴν περίπτωσιν ὑπαγόμενα ζητήματα ἐπιδέχονται ἀπείρους λύσεις.

Πρόβλημα. Ἐμπορὸς τις ἔχει διαφόρων εἰδῶν σῖτον, τιμώμενον τὸν μὲν 22, τὸν δὲ 24, τὸν δὲ 17, τὸν δὲ 12, τὸν δὲ 10, τὸν δὲ 7 δραχμὰς τὸ κοιλόν· πόσον μέρος πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἶδους διὰ νὰ πωλήσῃ τὸ μῖγμα εἰς τὴν μεσαίαν τιμὴν τῶν 15 δρ. τὸ κοιλόν;

$$\begin{array}{l} 22-7 \text{ ζημία } 14 = \frac{14}{7} = 2 \text{ μέρη τοῦ α'. εἶδους} \\ 24-6 \text{ » } 18 = \frac{18}{6} = 3 \text{ » » β'. »} \\ 17-2 \text{ » } 12 = \frac{12}{2} = 6 \text{ » » γ'. »} \\ \hline 44 \\ 15 \left\{ \begin{array}{l} 12-3 \text{ κέρδος } 6 = \frac{6}{3} = 2 \text{ » » δ'. »} \\ 10-5 \text{ » } 30 = \frac{30}{5} = 6 \text{ » » ε'. »} \\ 7-8 \text{ » } 8 = \frac{8}{8} = 1 \text{ » » στ'. »} \end{array} \right. \\ \hline 44 \end{array}$$

Καὶ τῶ ὕντι

$$\begin{array}{rcl} 2 \text{ μέρη τοῦ α'. εἶδους} & \text{πρὸς δρ.} & 22 = 44 \\ 3 \text{ » » » » » » } & & 24 = 63 \\ 6 \text{ » » » » » » } & & 17 = 102 \\ 2 \text{ » » » » » » } & & 12 = 24 \\ 6 \text{ » » » » » » } & & 10 = 60 \\ 1 \text{ » » » » » » } & & 7 = 7 \\ \hline 20 \text{ μέρη ἐν συνόλῳ} & = & 300 \end{array}$$

$$\text{καὶ 1 μέρος} = \frac{300}{20} = \text{δρ. 15.}$$

Εύρομεν τὰς διαφορὰς μεταξὺ τῶν διαφόρων τιμῶν καὶ τῆς τιμῆς τοῦ μίγματος 15· ἐθεωρήσαμεν αὐτὰς ὡς διαιρέτας διαιρετέων ληφθέντων κατ' ἀρέσκειαν μὲ μόνην ταύτην τὴν συνθήκην ὅτι οἱ κατ' ἀρέσκειαν ληφθέντες διαιρετέοι τῶν καλλιτέρων ποιότητων πρέπει ν' ἀποτελέσωσιν ἄθροισμα (44) ἴσον τῷ ἄθροίσματι (44) τῶν διαιρετέων τῶν κατωτέρων ποιότητων.

Ἑτέρα λύσις.

15	22 κέρδη	3+5+8=16	πρὸς 22=352
	21 »	3+5+8=16	» 21=336
	17 »	3+5+8=16	» 17=272
	12 ζημίαι	2+6+7=15	» 12=180
	10 »	2+6+7=15	» 10=150
	7 »	2+6+7=15	» 7=105
	Κοιλὰ	93	1395

$$\text{καὶ Κοιλῶν } 1 = \frac{1395}{93} = \delta\rho. 15.$$

Εύρομεν τὰς μεταξὺ τῶν κατωτέρων ποιότητων καὶ τῆς μέσης τιμῆς ὑπαρχούσας διαφορὰς, καὶ ἐγγράψαμεν αὐτὰς ἄντικρυ τῶν καλλιτέρων ποιότητων, τὰς δὲ τῶν καλλιτέρων ποιότητων ἄντικρυ τῶν κατωτέρων ποιότητων, καὶ προσθέσαμεν ὅλας τὰς μερικὰς διαφορὰς.

Ὑποθεθείσθω ἤδη ὅτι ἡ ποσότης τοῦ μίγματος ὠρίσθη 100 κοιλὰ λ. χ., τότε λέγομεν

ἐὰν ἐπὶ 20 κοιλῶν (ἴδε τὴν ἀ. λύσιν) ἔπρεπε νὰ λάβωμεν 2 ἀπὸ τὸ ἀ. εἶδος

$$\begin{array}{ccc} \text{» } 1 \text{ κοιλῶ} & \text{» } & \text{» } \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \end{array}$$

$$\text{καὶ ἐπὶ } 100 \text{ κοιλῶν} \quad \text{ἔπρεπε νὰ λάβωμεν } \frac{100}{10} = 10$$

$$\text{παρομοίως σκεπτόμενοι εὐρίσκομεν διὰ τὸ β'. εἶδος; } \frac{3 \times 100}{20} = 15$$

$$\text{» } \gamma'. \text{ » } \frac{6 \times 100}{20} = 30$$

$$\text{» } \delta'. \text{ » } \frac{2 \times 100}{20} = 10$$

$$\text{» } \epsilon'. \text{ » } \frac{6 \times 100}{20} = 30$$

$$\text{» } \sigma\tau'. \text{ » } \frac{1 \times 100}{20} = 5$$

$$\text{Κοιλὰ} \quad \underline{100}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΚΡΑΜΑΤΟΣ.

122. Κράμα καλεῖται ἡ ἀναμίξις ὀρευστῶν καὶ μετάλλων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐνταῦθα ἀσχοληθήσομεθα ἀποκλειστικῶς περὶ τῆς τῶν μετάλλων ἀναμίξεως.

123. Ἐπειδὴ δὲ τὰ κράματα εἶναι μίγμα μετάλλων συγχωνευθέντων, ἄρα πᾶσα ἀρχὴ ἐφαρμοζομένη εἰς τὴν μέθοδον τῆς ἀναμίξεως ἐφαρμόζεται καὶ ἐνταῦθα, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι ἐνταῦθα ἡ τιμὴ ἀντικαθίσταται διὰ κύρους καθαρότητος (ὅρα τὸ κεφάλαιον τοῦ μετρικοῦ συστήματος).

Πρόβλημα α'. Συνεχωνεύθησαν τρεῖς ῥάβδοι ἀργύρου, ἡ πρώτη ὑπὸ κύρος καθαρότητος 0,980 ἐζύγισε 1200 γραμμάρια, ἡ δευτέρα ὑπὸ κύρος καθαρότητος 0,880 ἐζύγισε 1020 γραμμάρια καὶ ἡ τρίτη ὑπὸ κύρος καθαρότητος 0,820 ἐζύγισε 2 χιλιόγραμμα. Ζητεῖται τὸ κύρος καθαρότητος τοῦ κράματος ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἄργυρον.

Λύσεις.

ἡ 1η ῥάβδος ζυγ. γρ. 1200 περιέχει 0,980 × γρ. 1200 = 1176 γρ. καθ. ἀργ.

ἡ 2α » » » 1020 » 0,850 × » 1020 = 867 » » »

ἡ 3η » » » 2000 » 0,820 × » 2000 = 1640 » » »

Μίγμα ζυγίζον Γρ. 4220 περιέχει 3683 » » »

καὶ » 1 » $\frac{3683}{4200} = 0,8727.$ » » »

τὸ ζητούμενον λοιπὸν κύρος καθαρότητος εἶναι 0,8727 τοῦ καθαροῦ ἀργύρου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Συνήθως τὸ κύρος καθαρότητος εὐρίσκεται κατὰ προσέγγισιν ἐνὸς χιλιοστοῦ.

Πρόβλημα 6'. Ῥάβδος χρυσοῦ με κύρος καθαρότητος 0860 ζυγίζει χιλιόγρ. 6,380. Ποῦν βάρος πρέπει νὰ δυνάσωμεν διὰ νὰ ὑψώσωμεν τὸ κύρος καθαρότητος εἰς 0,920 ;

Λύσεις.

ἡ με κύρος καθαρότητος 0,860 ῥάβδος ζυγίζει χιλιόγρ. 6,380

ὁ περιεχόμενος καθαρὸς χρυσοῦς = $0,860 \times 6,380 =$ » 5,4868

ὁ » χαλκὸς χιλιόγρ. 0,8932

τὸ βάρος τῆς με κύρος καθαρότητος 0920 ῥάβδου = $\frac{5,4868}{0,920} = 5,9639.$

Ὅθεν πρέπει νὰ ἀποσύρωμεν τῆς ῥάβδου χαλκὸν $6,380 - 5,9639 = 0,4161.$

χιλιόγρ. 0,8932 χαλκοῦ περιέχονται εἰς χιλιόγρ. 6,380

» 0,4161 » » » $\frac{6,380 \times 0,4161}{0,8932} = 2,9724$

βάρος προστεθησόμενον εἰς ῥάβδον με κύρος καθαρότητος 0,860.

Καὶ τῷ ὄντι

τὸ δυνάτισθὲν μέρος θὰ μείνῃ χιλιόγρ. $2,9721 - 0,4161 =$ χιλιόγρ. 2,5560

τὸ μὴ δυνάτισθὲν μέρος εἶναι » $6,380 - 2,9721 =$ » 3,4079

βάρος νέας ῥάβδου χιλιόγρ. 5,9639

καὶ $\frac{5,4868}{5,9639} = 0,920$ κύρος καθαρότητος νέας ῥάβδου.

Πρόβλημα γ'. Ἐχομεν ἕξ ῥάβδους με κύρος καθαρότητος 0,930 — 0,940 — 0,870 — 0,820 — 0,770 καὶ 0,620· κατὰ ποίαν σχέσιν πρέπει νὰ τὰς ἀναμείξωμεν διὰ νὰ λάβωμεν μίαν μόνην ῥάβδον ὑπὸ κύρος καθαρότητος 0,850;

$930 - 80 \text{ ἢ } 8 \text{ } 24 = \frac{24}{8} = 3$ μέρη τῆς α ῥάβδου

$940 - 60 \text{ » } 6 \text{ } 18 = \frac{18}{6} = 3$ » » β' »

$870 - 20 \text{ » } 2 \text{ } 12 = \frac{12}{2} = 6$ » » γ' »

54

850

$820 - 30 \text{ » } 3 \text{ } 15 = \frac{15}{3} = 5$ » » δ' »

$770 - 80 \text{ » } 8 \text{ } 16 = \frac{16}{8} = 2$ » » ε' »

$620 - 230 \text{ » } 23 \text{ } 23 = \frac{23}{23} = 1$ » » στ' »

54

Καὶ τῷ ὄντι

Χιλιογράμματα 3 περιέχουσι $0,930 \times 3 =$ χιλιογράμματα 2,79

» 3 » $0,940 \times 3 =$ » 2,73

» 6 » $0,870 \times 6 =$ » 5,22

» 5 » $0,820 \times 5 =$ » 4,10

» 2 » $0,770 \times 2 =$ » 1,54

» 4 » $0,620 \times 4 =$ » 0,62

20

Χιλιογρ. 17

Ὅθεν $1 \text{ ράβδος μίγματος} = \frac{17}{20} = 0,850$ τοῦθ' ὅπερ ἐ-
στὶ τὸ δοθέν κῦρος καθαρότητος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἐὰν πρόκειται νὰ εὗρωμεν διὰ τῶν ἐξ τούτων
ράβδων νέαν μὲ κῦρος καθαρότητος 0,850 ζυγίζουσιν 5 χιλιόγραμμα
λ. χ., ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 5 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 3—
3—6—5—2—4· οὕτω,

$$3 \times 5 : 20 = \frac{15}{20} = 0,75 \text{ χιλιόγρ.}$$

$$3 \times 5 : 20 = \frac{15}{20} = 0,75 \quad »$$

$$6 \times 5 : 20 = \frac{30}{20} = 1,50 \quad »$$

$$5 \times 5 : 20 = \frac{25}{20} = 1,25 \quad »$$

$$2 \times 5 : 20 = \frac{10}{20} = 0,50 \quad »$$

$$1 \times 5 : 20 = \frac{5}{20} = 0,25 \quad »$$

5 χιλιόγραμμα.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΑΤ' ΑΝΑΛΟΓΙΑΝ ΔΙΑΝΟΜΩΝ.

124. Αἱ κατ' ἀναλογίαν διανομαὶ χρησιμεύουσι κατὰ τὰς ἐξῆς
περιστάσεις.

1^ο Ὅσάκις ἀγοράζομεν συλλήβδην (χονδρικῶς) διάφορα ἐμπορεύ-
ματα.

2^ο Ὅπόταν τὰ ἐμπορεύματα ᾗναι βεβλαμμένα καὶ θελήσωμεν νὰ
καταστρώσωμεν τὴν κατ' ἀναλογίαν ἀξίαν αὐτῶν.

3^ο Ὅσάκις ὑπάρχει σύγχυσις διαφόρων μερίδων, ὧν τὰ σημεῖα ἐξη-
λείφθησαν ἢ ἀνεμίσχθησαν.

4^ο Ὅσάκις φορτίον τι ἀνήκον εἰς πολλοὺς ἀγοραστὰς δίδει ἀκα-
θαρσίας ἢ φύραν, ἥτις πρέπει νὰ διανεμηθῇ κατ' ἀναλογίαν κατὰ τῶν
διαφόρων ἀγοραστῶν.

Αἱ τρεῖς πρῶται περιπτώσεις ἀφορῶσιν εἰς τὴν κατ' ἀναλογίαν δια-
νομήν τοῦ εὐθειαςτικοῦ τιμήματος μεταξὺ πολλῶν σημείων τοῦ αὐτοῦ
ἐμπορεύματος ἀνήκοντος εἰς ἓνα ἔμπορον.

Ἡ δὲ τετάρτη τῶν περιπτώσεων ἀφορᾷ τοῦναντίον εἰς τὴν κατ'
ἀναλογίαν διανομήν τῶν ἐμπορευμάτων μεταξὺ πολλῶν ἐνδιαφερο-
μένων.

I. Περὶ τῆς κατ' ἀναλογίαν διανομῆς τοῦ εὐθειαςτικοῦ τιμήματος.

125. Πᾶς λ/σμὸς τῆς κατ' ἀναλογίαν διανομῆς περιέχει τὰ ἐξῆς
ἐξ στοιχείων:

τὸν λ/σμὸν τῆς ἀποδόσεως,
» » » συγκρίσεως,
» » » ἐκτιμήσεως,
» » » διανομῆς,
» » τοῦ εὐθειαςτικοῦ τιμήματος, καὶ
» » τῆς ἐπαληθεύσεως.

Σκοπὸς πάντων τῶν λ/σμῶν τούτων εἶναι νὰ διανέμη τὴν τιμὴν ἐμ-
πορεύματος ἐπὶ τῶν διαφόρων ποιότητων ἐξ ὧν ἀποτελεῖται.

Λον. Εἰς τὸν λ/σμὸν τῆς ἀποδόσεως ζητεῖται τὸ καθαρὸν βάρος
ἐκάστου σημείου (*marque*) μετὰ τὴν ἔκπτωσιν τῶν ἀπὸ τῆς τιμῆς
ἀφαιρεθησομένων ὑφέσεων· αἱ ὑφέσεις τῆς τιμῆς δύνανται πάντοτε νὰ
ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ τῶν ὑφέσεων τοῦ βάρους· τὸ δὲ ἀποτέλεσμα
εἶναι τὸ αὐτὸ, καὶ μᾶς δίδει τὸν ἀληθῆ καὶ πραγματικὸν ἀριθμὸν τοῦ
βάρους (χιλιογράμμου λ. χ.) ἐκάστου σημείου, πωληθησομένου εἰς τὴν
μεσαίαν τιμὴν τοῦ τύπου.

Λαμβάνομεν ὡς τύπον τὸ πολυπληθέστερον σημεῖον (*marque*),
ἀνάγομεν ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα ἐν σχέσει πρὸς τὸν τύπον· τοῦτο δὲ
εἶναι ἀντικείμενον τοῦ λ/σμοῦ τῆς συγκρίσεως.

Βον καὶ Γον. Ὁ λ/σμὸς τῆς συγκρίσεως μᾶς ὑποδεικνύει ὅτι, ἐὰν
ὅλα τὰ σημεῖα χωριστὰ ἀνήγοντο ἐν σχέσει πρὸς τὸν τύπον, τὰ μὲν
ἐξ αὐτῶν θὰ ἤξιζον τόσων τοῖς % ὀλιγώτερον, τὰ δὲ τόσων τοῖς %

περισσότερον. Τοῦτο δὲ μᾶλλον ἔχει εἰς τὸν λ/σμον τῆς ἐκτιμήσεως διότι ὅσα μὲν σημεία ἀξίζουν ὀλιγώτερον τοῦ τύπου πρέπει νὰ ἐλαττωθῶσι κατὰ τόσα τοῖς $\frac{0}{10}$, ὅσα δὲ ἀξίζουν περισσότερο τοῦ τύπου, πρέπει νὰ ἀυξηθῶσι κατὰ τόσα τοῖς $\frac{0}{10}$. Οὕτω δὲ πρᾶττοντες εὐρίσκουμεν ἀριθμὸν τινα βάρους προκύψαντα ὑπὸ τοῦ λ/σμοῦ τῆς ἐκτιμήσεως· ἐπὶ τούτου τοῦ βάρους στηριζόμενοι καταστρώνομεν τὸν λ/σμον τῆς διακομῆς.

Δυν. Εἰς τὸν λ/σμον τῆς διακομῆς εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν ἐκάστου σημείου, ὑποθέτοντες αὐτὸ σύμφωνον πρὸς τὸν τύπον, οὕτως ὥστε νὰ ἐπανεύρωμεν τὴν ὑπὸ τοῦ λ/σμοῦ τοῦ εὐθειαςτικοῦ τιμήματος προσδιορισθεῖσαν ὀλικὴν τιμὴν.

Ευν. Διὰ τοῦ λ/σμοῦ τοῦ εὐθειαςτικοῦ τιμήματος δρίζομεν τὴν τιμὴν τῆς μονάδος τῆς πωλήσεως ἐν σχέσει πρὸς τὸ πραγματικὸν βᾶρος καὶ τὴν σχετικὴν ἢ κατ' ἀναλογίαν τιμὴν.

ΣΤον. Σκοπὸς τοῦ λ/σμοῦ τῆς ἐπαληθεύσεως εἶναι νὰ ἐξελέγξῃ ὅλους τοὺς προηγουμένους λ/σμούς, ἐπιβεβαιούμενοι ὅτι ἡ τιμὴ, εἰς ἣν πωλοῦμεν ἕκαστον σημεῖον, συγκρινομένη εἰς τὴν τιμὴν τοῦ σημείου τοῦ τύπου, θὰ δώσῃ τὰς αὐτὰς διαφορὰς, αἵτινες προσδιορίσθησαν εἰς τὸν λ/σμον τῆς συγκρίσεως.

Παράδειγμα. Ἐμπορος Χάβρης ἠγόρασε συλλήβδην εἰς δημοπρασίαν 1500 σάκκους ὀρυζίου ἀξίζοντας ἐν Χάβρη £ 1430—8—8. Κατὰ τὴν ἀφίξιν τοῦ ἐμπορεύματος εἰς Χάβρην ὁ πραγματογνώμων μεσείτης τοὺς διήρσεσε εἰς 8 σημεία,

τὸ σημεῖον	Α.	ἐκ σάκκων	175	ζυγίζει	χιλιόγραμμα	19750
»	Γ.	»	150	»	»	17375
»	Γ.	»	240	»	»	28050
»	Δ.	»	135	»	»	12300
»	Ε.	»	350	»	»	33450
»	ΣΤ.	»	170	»	»	18950
»	Ζ.	»	165	»	»	18120
»	Η.	»	145	»	»	14305
			1500			162300

Καταστρωθήτωσαν οἱ λ/σμοὶ τῆς ἀποδόσεως καὶ τοῦ εὐθειαςτικοῦ τιμήματος. γνωρίζοντες ὅτι

Α	ἀξίζει	$\frac{7}{8} \frac{0}{10}$	πλέον	ἢ ὁ Ε,
Β	»	$8 \frac{0}{10}$	μεῖον	ἢ ὁ Γ,
Γ	»	$1 \frac{1}{2} \frac{0}{10}$	»	ἢ ὁ Α,
Δ	»	$\frac{3}{4} \frac{0}{10}$	πλέον	ἢ ὁ ΣΤ,
Ε	»		εἶναι ὁ τύπος	
ΣΤ	»	$2 \frac{1}{2} \frac{0}{10}$	μεῖον	ἢ ὁ Η,
Ζ	»	$5 \frac{0}{10}$	»	ἢ ὁ Δ,
Η	»	$\frac{9}{16} \frac{0}{10}$	»	ἢ ὁ Β.

ἡ ἀποστάθμησις εἶναι	$2 \frac{0}{10}$
ἡ ὕφεσις	» $2 \frac{0}{10}$
ἡ μεσιτεία καὶ τὰ ἐξόδα εἶναι	$1 \frac{1}{2} \frac{0}{10}$
ἡ συναλλαγή	» $1 \text{ £} = 25,25 \text{ φρ.}$

Εξ τὴν ἐ- φαρμογὴν	4500	175 A.	150 B.	210 F.	135 Δ.	350 E.	170 ET.	165 Z.	145 H.
153535	462300	19750	17375	28050	12300	33450	48950	48120	14305
18683 1/2	3246	395	347 1/2	561	246	669	379	362,4	286,4
16436 3/4	459054	19355	17027,50	27489	12054	32781	18574	17757,6	44048,9
26535	3181,08	387,4	340,55	549,78	241,08	655,62	371,42	355,152	280,378
11635 3/4	153872,92	18967,90	16686,95	26939,22	11812,92	32125,38	18199,58	17402,448	13738,522
31643 1/2	2338, »	284,52	250,30	404,08	177,19	481,88	272,99	261,037	206,078
17926 1/2	153534,92	18683,381	16436,65	26535,14	11635,73	31643,50	17926,59	17141,411	13532,444
17141 1/2									
13532 1/2									

Λογαριασμὸς ἀποδόσεως.

Λ/σμοὶ Συγκρίσεως.

A	$\alpha\epsilon\zeta\epsilon\iota$	$7/8\%$	$+ \eta$	E	$= 7/8\%$	$+ \eta$	δ	E
B	»	$-8\Gamma + 4 1/2 A + 7/8 E$			$= 5 5/8\%$	—	»	» E
Γ	»	$-4 1/2 - 7/8 E$			$= 2 3/8\%$	—	»	» E
Δ	»	$+ 3/4 - 2 1/2 + 9/16 - 8 + 4 1/2 + 7/8$			$= 6 13/16\%$	—	»	» E
ΣΤ	»	$-2 1/2 + 9/16 - 8 + 4 1/2 + 7/8$			$= 7 9/16\%$	—	»	» E
Z	»	$-5 + 3/4 - 2 1/2 + 9/16 - 8 + 4 1/2 + 7/8$			$= 14 13/16\%$	—	»	» E
H	»	$+ 9/16 - 8 + 4 1/2 + 7/8$			$= 5 1/16\%$	—	»	» E

Λ/σμοὶ Ἐκτιμῆσεως

A	=	χιλιόγραμμα	18683,50					
		$+ 7/8\%$	163,50	χιλιόγρ.	18847	ἐν σχέσει	πρὸς	E
B	=	χιλιόγραμμα	16436,75					
		$- 5 5/8\%$	924,50	»	15512,25	»	»	»
Γ	=	χιλιόγραμμα	26535,50					
		$- 2 3/8\%$	630,25	»	25905,25	»	»	»
Δ	=	χιλιόγραμμα	11635,73					
		$- 6 13/16\%$	792,75	»	10843,50	»	»	»
E	=	τύπος		»	31643,50	»	»	»
ΣΤ	=	χιλιόγραμμα	17926,50					
		$- 7 9/16\%$	1355,50	»	16571,50	»	»	»
Z	=	χιλιόγραμμα	17141,50					
		$- 14 13/16\%$	2024,75	»	15116,75	»	»	»
H	=	χιλιόγραμμα	13532,50					
		$- 5 1/16\%$	685,50	»	12847,50	»	»	»
					χιλιόγρ.	147286,25		

Λ/σμός διανομής.

$$A = \frac{36118,45 \times 18847}{147286,25} = \text{φρ. } 4621,75$$

$$B = \frac{36118,45 \times 15512,25}{147286,25} = \text{φρ. } 3804,75$$

$$Γ = \frac{36118,45 \times 25905,25}{147286,25} = \text{φρ. } 6352,70$$

$$Δ = \frac{36118,45 \times 10843}{147286,25} = \text{φρ. } 2659,70$$

$$E = \frac{36118,45 \times 31643,50}{147286,25} = \text{φρ. } 7759,75$$

$$\Sigma T = \frac{36118,45 \times 16571}{147286,25} = \text{φρ. } 4063,75$$

$$Z = \frac{36118,45 \times 15116,75}{147286,25} = \text{φρ. } 3707,75$$

$$H = \frac{36118,45 \times 12847,50}{147286,25} = \text{φρ. } 3150,50$$

$$\text{φρ. } 36118,45$$

Λ/σμός εύθειαςτικοῦ τιμήματος.

$$A = 18683,50 \text{ ὅθεν } 100 \text{ χιλιογρ.} = \frac{4621,75 \times 100}{18683,50} = \text{φρ. } 24,737$$

$$B = 16436,75 \text{ ὅθεν } \text{ » } \text{ χιλιογρ.} = \frac{3804 \times 100}{16436,75} = \text{φρ. } 23,143$$

$$Γ = 26535,75 \text{ ὅθεν } \text{ » } \text{ χιλιογρ.} = \frac{6352,70 \times 100}{26535} = \text{φρ. } 23,9406$$

$$Δ = 11635,75 \text{ ὅθεν } \text{ » } \text{ χιλιογρ.} = \frac{2659 \times 100}{11635,75} = \text{φρ. } 22,851$$

$$E = 31643,50 \text{ ὅθεν } \text{ » } \text{ χιλιογρ.} = \frac{7759,75 \times 100}{31643 \frac{1}{2}} = \text{φρ. } 24,5224$$

$$\Sigma T = 17926,50 \text{ » } \text{ » } \text{ χιλιογρ.} = \frac{4063,75 \times 100}{17926,50} = \text{φρ. } 22,6679$$

$$Z = 17141,50 \text{ ὅθεν } 100 \text{ χιλιογρ.} = \frac{3707 \times 100}{17141,50} = \text{φρ. } 21,6250$$

$$H = 13532,50 \text{ ὅθεν } \text{ » } \text{ χιλιογρ.} = \frac{3150 \frac{1}{2} \times 100}{13532 \frac{1}{2}} = \text{φρ. } 23,2809$$

153535 χιλιογράμματα.

Λ/σμός επαληθεύσεως.

$$A = \frac{24,737 \times 100}{24,5224} = 100,875$$

$$B = \frac{23,143 \times 100}{24,5224} = 94,375$$

$$Γ = \frac{23,9406 \times 100}{24,5224} = 97,625$$

$$Δ = \frac{22,851 \times 100}{24,5224} = 93,1875$$

$$E = 100 \quad 100 \text{ τύπος}$$

$$\Sigma T = \frac{22,6679 \times 100}{24,5224} = 92,4375$$

$$Z = \frac{21,625 \times 100}{24,5224} = 88,1875$$

$$H = \frac{23,2809 \times 100}{24,5224} = 94,9375$$

II.

Διανομή φύρας και ἀκαθαρσιῶν.

126. Τρεῖς ἔμποροι ἐφόρτωσαν ἐπὶ τινος πλοίου Καντ. ἀγγλ. 2650—2—7 ὀρυζίου ἅτινα ἐχρηγήτησαν εἰς τὴν παράδοσιν χιλιογράμματα 134648,375.

δ α εἶχε Καντ. ἀγγλ. 1300

δ β' » » » 750—2—7

δ γ' » » » 600

Καντ. ἀγγλ. 2650—2—7

Εὐρεῖν τὸ ἀντιστοιχοῦν βάρος εἰς τὸ Καντ ἀγγλ.

134648,575

2650—2—7

Ἀλλ' ὁ α' ἔλαβε χιλιόγρ. 65000

ὁ β' » » 37200

ὁ γ' » » 29680

χιλιόγρ. 131880

Νῦν ζητεῖται τὸ ποσὸν ὅπερ ἔπρεπε νὰ λάβῃ ἕκαστος μετὰ τὴν πραγματικὴν ἀπόδοσιν.

ὁ α' Καντ ἀγγλ. 1300—0—0 $\times$ 50,80 = χιλιόγρ. 66040

ὁ β' » » 750—2—7 $\times$ 50,80 = » 38128,575

ὁ γ' » » 600—0—0 $\times$ 50,80 = » 30480

Ἐν συνόλῳ

χιλιόγρ. 134648,575

Ἐκτὸς τοῦ βάρους ὅπερ παρεδόθη εἰς τοὺς τρεῖς ἐμπόρους ὑπάρχουσι χιλιόγραμμα 2768,575 ἀκαθαρσιῶν, ἅστινας πρέπει νὰ διανεύωμεν εἰς αὐτοὺς. Πρὸς τοῦτο εὐρισκομεν τὴν διαφορὰν ἣτις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ βάρους ὅπερ ἔπρεπε νὰ λάβωσι καὶ τοῦ βάρους ὅπερ ἔλαβον.

Ὅθεν

ὁ α' θὰ ἔχῃ 66040—65000=1040

ὁ β' » » 38128,575—37200= 928,575

ὁ γ' » » 30480—29680= 800

Ἐν συνόλῳ χιλιόγραμμα 2768,575

Βάρος ἀποδόσεως χιλιόγραμμα 134648,575

» παραδόσεως » 131880,575

Ἀκαθαρσίαι χιλιόγραμμα 2768,575

Ἔτερον παράδειγμα. Τέσσαρες ἐμποροὶ ἐφόρτωσαν ἐπὶ τινος πλοίου Καντ. ἀγγλ. 6300—2—14 ὄρυζιου.

τὸ τιμολόγιον τοῦ α' φέρει Καντ. ἀγγλ. 1500—1—7

» » » β' » » 1600—0—0

» » » γ' » » 2110—4—7

» » » δ' » » 1090—0—0

Καντ. ἀγγλ. 6300—2—14

ὁ α' ἔλαβε χιλιόγρ. 74115

ὁ β' » » 79100

ὁ γ' » » 103830

ὁ δ' » » 53600

χιλιόγρ. 310645

ὑπάρχουσι δὲ ἀκαθαρσίαι ἐκ χιλιόγρ. 5646,375

Καταστρωθῆτω ἡ διανομή.

Καντ. ἀγγλ. 6300—2—14 = χιλιόγρ. 316291,375

» » 1 = » $\frac{316291,375}{6300-2-14}$ = χιλ. 50,20

Κατὰ τὴν ἀπόδοσιν ταύτην

ὁ α' ἔπρεπε νὰ λάβῃ Καντ. Ἀγγλ. 1500—1—7 $\times$ 50,20 = χιλ. 75315,68⁷⁵

ὁ β' » » » » » 1600—0—0 $\times$ 50,20 = » 80320

ὁ γ' » » » » » 2110—4—7 $\times$ 50,20 = » 105937,68⁷⁵

ὁ δ' » » » » » 1090—0—0 $\times$ 50,20 = » 54718

χιλ. 316291,375

ἡ δὲ διανομή τῶν ἀκαθαρσιῶν θὰ ᾖ ὡς ἑξῆς:

ὁ α' θὰ λάβῃ χιλιόγρ. 75315,68⁷⁵ — 74115 = χιλιόγρ. 1200,68⁷⁵

ὁ β' » » » 80320 — 79100 = » 1220

ὁ γ' » » » 105937,68⁷⁵ — 103830 = » 2107,68⁷⁵

ὁ δ' » » » 54718 — 53600 = » 1118

Ἐν συνόλῳ

χιλιόγρ. 5646,375

Πρόβλημα. Ἐμπορὸς τις ἔλαβε φορτίον ἐκ 30000 Κοιλῶν σίτου,

οὕτως τὸ εὐθραϊστικὸν τίμημα (στήσιμον) εἶναι δρ. 125500, συμπεριλαμβανομένου τοῦ ναύλου καὶ τῶν ἐξόδων,

τὰ $\frac{1}{8}$ τοῦ φορτίου εἶναι εἰς ὑγιᾶ κατάστασιν,

τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι βεβλαμμένον,

οὕτως

τὸ $\frac{1}{8}$ πρὸς 8%

» $\frac{1}{8}$ » 20%

» $\frac{1}{6}$ » 25%

τὰ δὲ $\frac{3}{10}$ » 40%

λαμβάνοντες ὑπὸ ὄψιν τὰ γενικὰ ἔξοδα καὶ τὸ ἐλπιζόμενον κέρδος ἐξ 20% , ποῖον θὰ ᾖ τὸ ἐλάχιστον τῆς τιμῆς τῆς πωλήσεως ἐκάστου μέρους ἀνὰ κοιλόν;

Τιμὴ τῆς ἀγορᾶς δρ. 125500

+ 20% τὸ μέλλον ὄφελος » 25100

Τιμὴ τῆς πωλήσεως δρ. 150600

τὰ $\frac{1}{8}$ τοῦ φορτίου διατελοῦντα εἰς ὑγιᾶ κατάστασιν = Κοιλ. 26250

τὸ $\frac{1}{8}$ = 1250 πρὸς 8% = » 1150

» $\frac{1}{8}$ = 750 » 20% = » 600

» $\frac{1}{6}$ = 625 » 25% = » 468,75

τὰ $\frac{3}{10}$ = 1125 » 40% = » 675

Κοιλ. 29143,75

Πρόκειται τώρα νὰ διανεμηθῇ δ 150600 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 26250, 1150, 600, 468 $\frac{3}{4}$ καὶ 675.

οὕτως,

26250 $\times$ 150600 : 29143 $\frac{3}{4}$ = δρ. 135646,57

1150 $\times$ 150600 : 29143 $\frac{3}{4}$ = » 5942,61

600 $\times$ 150600 : 29143 $\frac{3}{4}$ = » 3100,49

468 $\frac{3}{4}$ $\times$ 150600 : 29143 $\frac{3}{4}$ = » 2422,25

675 $\times$ 150600 : 29143 $\frac{3}{4}$ = » 3488,08

29143 $\frac{3}{4}$ δρ. 150600, »

ἡ δὲ τιμὴ τοῦ κοιλοῦ ἐκάστου τῶν μερῶν θὰ ᾖ

$\alpha' = \frac{135646,57}{26250} = \delta\rho. 5,16^{74}$

$\beta' = \frac{5942,61}{1250} = \text{» } 4,76^{20}$

$\gamma' = \frac{3700,49}{750} = \text{» } 4,23^{06}$

$\delta' = \frac{2422,25}{625} = \text{» } 3,87^{86}$

$\epsilon' = \frac{3488,08}{1125} = \text{» } 3,10^{04}$

ΠΕΡΙ ΑΠΟΔΟΣΕΩΣ ΣΙΤΗΡΩΝ ΚΑΙ ΤΟΥ ΤΡΟΠΟΥ ΚΑΘ' ΟΝ ΚΑΝΟΝΙΖΕΤΑΙ ΑΥΤΗ ΕΠΙ ΤΗΣ ΒΑΣΕΙ ΔΟΚΙΜΑΣΙΩΝ.

127. Ἀπόδοσις (Resa) λέγοντες ἐννοοῦμεν τὸ ποσὸν τοῦ σίτου ὅπερ παραδίδεται ὑπὸ τοῦ πλοιάρχου εἰς τὸν ἔμπορον διὰ τὸ φορτωθὲν φορτίον εἰς ξένον μέτρον ἢ κοιλόν.

Κανονίζεται δὲ αὕτη ὅταν εὗρωμεν τὸ καθαρὸν βάρος τῶν κατὰ διαφορὰς ἐποχὰς τῆς ἐκφορτώσεως τοῦ σίτου γεμισθέντων σάκκων καὶ διαιρέσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μέτρων

Παράδειγμα. Ὁ μ. Ψάθης ἐπώλησεν εἰς τὸν κ. Βάλαμον σιτοφορτίον ἐξ 6000 κοιλῶν πρὸς 20 ὁκάδας ἑκάστον κοιλὸν Κων/πόλεως.

Κατὰ τὴν παράδοσιν τοῦ φορτίου ἐγένοντο αἱ ἐξῆς δοκιμασίαι ἐπὶ 60 σάκκων πληρωθέντων εἰς διαφορὰς ἐποχὰς κατὰ τὴν ἐκφόρτωσιν. ἑκάστος σάκκος περιεῖχε 3 $\frac{1}{2}$ κοιλὰ κατὰ τὴν στάθμησιν.

Αἱ γενόμεναι δοκιμασίαι ᾗσαν ὡς ἐξῆς.

15	σάκκοι ἐξύγισαν Ὀκάδ.	1040	ἀποσταθμ.	Ὀκάδ.	9.50
13	»	»	»	»	8.75
20	»	»	»	»	13.25
11	»	»	»	»	7
60					<u>38.50</u>

Ὅθεν Μικτὸν βάρος Ὀκάδ. 4168
Ἀποστάθμησις » 38.50

τὸ καθαρὸν βάρος θὰ ᾖ Ὀκάδ. 4129.50

Ἴνα λοιπὸν προσδιορίσωμεν τὸ καθαρὸν βάρος ἐκάστου κοιλοῦ λέ-
γομεν,

$$\text{Ἐὰν } 210 \text{ κοιλὰ (60 σάκκοι ἀνὰ } 3\frac{1}{2} \text{ κοιλὰ)} = \text{Ὀκζδ. } 4129\frac{1}{2}$$

$$1 \text{ κοιλὸν ἰσοφαρίζει πρὸς Ὀκζδὰς } \frac{4129\frac{1}{2}}{210} = \text{Ὀκ. } 19,6642.$$

ὥστε βλέπομεν ὅτι

τοῦ συμφωνηθέντος βάρους ὄντος

Ὀκζδ. 20

τοῦ δὲ παραδοθέντος »

» 19,6642

λείπουσιν ἐξ ἐκάστου κοιλοῦ

Ὀκζδ. 0,3358

τὸ δὲ ὀλικὸν ἔλλειμμα τοῦ σιτοφορτίου θὰ ᾖ Ὀκ. $6000 \times 0,3358 =$
Ὀκζδ. 2014,80 ἢ κοιλὰ 1000,74. ἄρα ὁ κ. Βάλαμος θὰ πληρώσῃ
μόνον κοιλὰ 5899,26 ἀντὶ τῶν 6000.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΣΥΝΕΖΕΥΓΜΕΝΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ.

128. Ἡ συνεζευγμένη μέθοδος, ἥ καὶ ὑπὸ τῶν Ἀγγλων καὶ Γερ-
μανῶν μέθοδος τῆς ἀλύσεως καλουμένη, εἶναι ἑνωσις δύο ἢ περισσοτέ-
ρων μεθόδων τῶν τριῶν. ὥστε εἶναι σύνθετος τις μέθοδος τῶν τριῶν,
ἐξ ἧς πορίζομεθα τὸν ἄγνωστον ἀπὸ σειρὰν τινὰ ἰσοτήτων ἢ σχέσεων
ἐξαρτωμένων τῶν μὲν ἀπὸ τῶν δέ.

Κατ'ὼν. Ἡ πρώτη ἰσότης τῆς συνεζευγμένης μεθόδου ἐκφράζει τὴν
πρότασιν τοῦ λυθησομένου προβλήματος,

ὁ 1ος ὅρος τῆς ἰσότητος ταύτης ἐκφράζει τὸν ἄγνωστον

ὁ 2ος » » » » τὴν ποσότητα ἐν σχέ-

σει πρὸς τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν τὸν ἄγνωστον.

Διὰ τὰς ἀκολουθούσας ἰσότητας πρέπει

ὁ 1ος ὅρος ἐκάστης σχέσεως νὰ ᾖ ἀκριβὲς τῆς αὐτῆς φύσεως, ἥ καὶ

ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς προηγουμένης σχέσεως, καὶ

ὁ 2ος ὅρος νὰ ᾖ ποσότης τις ἐκφραζομένη εἰς τὴν πρότασιν, ἢ ποσότης
τις ἣν ἡ φύσις τῆς προτάσεως μᾶς ἐπιτρέπει νὰ εὕρωμεν εὐκόλως.

Ἡ συνεζευγμένη μέθοδος λαμβάνει πέρας, ὁπόταν, ἀφοῦ θέσωμεν
πάσας τὰς ἐν τῷ ζητήματι σχέσεις, λάβωμεν διὰ τελευταῖον ὅρον
μονάδας τῆς αὐτῆς φύσεως ἥ καὶ ὁ ἄγνωστος.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀποτελέσματος διαίρομεν τὸ γινόμενον τῶν ἐπο-
μένων διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἡγουμένων.

Πρόβλημα α'. Ἐλαίου ἀγορασθέντος ἐν Κωνσταντινουπόλει πρὸς
6 γρόσια τὴν ὀκάν, πόσον τιμᾶται ὁ τόννος ἐν Λονδίῳ, γνωστοῦ
ὄντος ὅτι 78 ὀκάδες ἰσοφαρίζουσι πρὸς 100 χιλιόγραμμα, $50\frac{3}{4}$
χιλιόγραμμα ἰσοῦνται μὲ 1 καντ. ἀγγλ. συναλλαγὴ Κωνσταντινουπό-
λεως ἐπὶ Μασσαλίας φρ. 23 καὶ συναλλαγὴ Μασσαλίας ἐπὶ Λονδίνου
φρ. 25,50;

x £ δι' 1 τόννον

Ἐὰν 1 τόννος = 20 καντ. ἀγγλ.

» 1 Κ. ἀγγλ. = $50\frac{3}{4}$ χιλιόγρ.

» 100 χιλιόγρ. = 78 ὀκάδες

» 1 ὀκά = 6 γρόσια

» 100 γρόσια = 23 φράγκα

» 25,50 φράγκα = 1 £

$$x = \frac{20 \times 50\frac{3}{4} \times 78 \times 6 \times 23}{100 \times 100 \times 25,50} = \text{£ } 42,7547 \text{ ἢ } \text{£ } 42-15-1.$$

Πρόβλημα β'. Ἠγοράσαμεν ἐν Παλαιᾷς Φώκαις ἄλας ὀκάδας
246800, πόσα Μεδζίτια θέλομεν πληρώσει πρὸς μεταφορὰν αὐτῶν,
ἐὰν τὰ λεμβικὰ καὶ τὰ ἀχθοφορικὰ συνεφωνήθησαν πρὸς 41 παράδας
ἀνὰ κοιλόν;

1 Μεδζίτι περιέχει 24 γρόσια, καὶ

1 κοιλὸν » 36 ὀκάδας.

Λύσις.

x Μεδζίτια διὰ 246800 ὀκάδας

Ἐὰν 36 ὀκάδες = 1 κοιλῶ

» 1 κοιλὸν = 1,025 γροσ.

» 24 γρόσ. = 1 Μεδζ.

$$x = \frac{246800 \times 1,025}{36 \times 24} = \text{Μεδζ. } 292,80.$$

129. Εἰς συνεζευγμένην τινὰ μέθοδον δόξαις ἀπαντῶμεν κλασματι-
κὸν ἀριθμὸν, πρὸς εὐχερῆ ὑπολογισμὸν, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἀκέραιον
πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀκέραιον τῆς κλασματικῆς ἰσότητος ἐπὶ τὸν
παρονομαστήν τοῦ κλασματικοῦ.

Παράδειγμα. Ὁ ἄρτος ἀξίζει ἐν Παρισίοις φρ. 0,45 τὸ χιλιόγραμ-
μον, ἡ αὐτὴ ποιότης τοῦ ἄρτου ἀξίζει ἐν Λονδίῳ 2 $\frac{1}{4}$ δηνάρια ἡ ἀγ-
γλικὴ λίτρα βάρους. Ζητεῖται

- 1ον. Εἰς ποίαν πόλιν ὁ ἄρτος εἶναι ἀκριβώτερος,
- 2ον. Ποία εἶναι ἡσχέσις τῆς ἐν Λονδίῳ τιμῆς πρὸς τὴν ἐν Παρισίοις,
- 3ον. Ποία εἶναι ἡσχέσις τῆς ἐν Παρισίοις τιμῆς πρὸς τὴν ἐν Λον-
δίῳ· (ἀπλοποίησον τὰς σχέσεις ταύτας οὕτως ὥστε ὁ πρῶτος ὅρος ἐ-
κέστης ἐξ αὐτῶν νὰ παρουσιάζεται δι' 100).
- 4ον. Κατὰ πόσον τοῖς $\%$ ὑπερέχει ἡ μικρότερα τιμὴ τῆς
μεγαλητέρας, καὶ
- 5ον. Κατὰ πόσον τοῖς $\%$ ἡ μικρότερα τιμὴ εἶναι κατωτέρα τῆς με-
γαλητέρας,

$$1 \text{ £} = \text{φρ. } 25,25 \text{ καὶ } 220,46 \text{ λίτραι βάρους} = 100 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

- 1ον. $x \text{ φρ. δι' } 1 \text{ χιλιόγρ.}$
- Ἐὰν 100 χιλ. = 220,46 λίτραις βάρους
- » 1 λίτρ. βάρ. = $\frac{1}{220,46}$ δηνάρια
- » 240 δηνάρια, = 1 £
- » 1 £ = 25,25 φρ.

$$x = \frac{220,46 \times 9 \times 25,25}{100 \times 240 \times 4} = \text{φρ. } 0,5218$$

ὁ ἄρτος λοιπὸν ἀξίζει ἀκριβώτερον ἐν Λονδίῳ ἢ ἐν Παρισίοις.

$$2ον. \text{ Σχέσις τιμῆς Λονδίνου πρὸς τιμὴν Παρισίων } \frac{5218}{4500}$$

$$\text{ὅθεν } \frac{5218}{4500} = \frac{100}{x} \text{ καὶ } x = \frac{450000}{5218} = 86,23$$

ὅπερ δηλοῦ ὅτι 100 φρ. ἄρτος ἐν Λονδίῳ θέλει πωληθῇ διὰ φρ. 86,23
ἐν Παρισίοις.

$$3ον. \text{ Σχέσις τιμῆς Παρισίων πρὸς τιμὴν Λονδίνου } \frac{4500}{5218}$$

$$\text{ὅθεν } \frac{4500}{5218} = \frac{100}{x} \text{ καὶ } x = \frac{521800}{4500} = 115,95$$

ὅπερ δηλοῦ ὅτι 100 φρ. ἄρτος ἐν Παρισίοις θέλει πληρωθῇ διὰ φράγκα
115,95 ἐν Λονδίῳ.

4ον. Ἡ διαφορὰ τῶν τιμῶν εἶναι

$$\text{φρ. } 0,5218 - 0,45 = \text{φρ. } 0,0718.$$

$$0,45 : 0,0718 = 100 : x$$

$$x = 15,95$$

τοῦτο δηλοῦ ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ Λονδίνου ὑπερβάλλει τὴν τιμὴν τῶν Παρι-
σίων κατὰ 15,95 $\%$

$$5ον. 0,5218 : 0,0718 = 100 : x$$

$$x = \text{φρ. } 13,75$$

ὅτι δηλ. ἡ τιμὴ τῶν Παρισίων εἶναι μικρότερα τῆς τιμῆς τοῦ Λονδί-
νου κατὰ 13,75 $\%$.

Παράδειγμα 6'. Ἐμπορὸς τις ἐπώλησεν 7 κομμάτια τῶν 40 υἱ-
αρδῶν Καναδάζου Ἀγγλίας πρὸς δην. 7 $\frac{5}{8}$ τὴν υἱάρδα. Ἐπειδὴ δὲ
πρόκειται νὰ πληρωθῇ εἰς φράγκα θέλει νὰ μάθῃ πόσα φράγκα θέλει
εἰσπράξει, ὁπόταν ἡ μὲν £ ἰσοφασίη πρὸς γρ. 109 $\frac{3}{4}$, ἡ δὲ λίρα Ὁ-
θωμανικὴ ἰσοδυναμῇ μὲ φρ. 23 ;

$x \text{ φρ.}$	διὰ 280 υἱάρδας
Ἐὰν 1 υἱάρδα	= 7 $\frac{5}{8}$ δηνάρια
» 240 δηνάρ.	= 1 £
» 1 £	= 109 $\frac{3}{4}$ γρ.
» 100 γρ.	= 23 φρ.

$$x = \frac{280 \times 61 \times 439 \times 23}{8 \times 240 \times 4 \times 100} = \text{φρ.}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐφαρμογὴν ἐκτενεστάτην τῆς μεθόδου ταύτης ποιη-
σόμεθα εἰς τὰ κεφάλαια «Συναλλαγαι» καὶ «Ἰσότητες ἐν Ἐμπορεύ-
μασιν».

ΠΕΡΙ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ.

130. Ἀνατοκισμὸς καλεῖται σύνθετος τόκος· οἱ τόκοι εἶναι σύν-
θετοι, ὁπόταν μετὰ ὁρισμένον τι χρονικὸν διάστημα προστίθενται οἱ
τόκοι εἰς τὸ κεφάλαιον διὰ νὰ ἀποτελέσωσι νέον κεφάλαιον, ὅπερ
ὡσαύτως παράγει τόκον κατὰ τὸ ἐπόμενον χρονικὸν διάστημα.

131. Τὰ εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν ἀναφερόμενα ζητήματα λύονται εὐχερέστατα διὰ τῶν λογαρίθμων, περὶ ὧν θέλομεν πραγματευθῆ εἰς τὸ περὶ χρηματιστηρίου κεφάλαιον. Ὅσοι δὲ ἀγνοοῦσι τὸν μηχανισμόν τῶν λογαρίθμων, δύνανται νὰ ποιῶνται χρῆσιν τῆς συνεζευγμένης μεθόδου καὶ τῶν ἐξῆς πινάκων, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ πίνακες οὗτοι δὲν δίδουσιν ἀπ' εὐθείας τοὺς συνθέτους τόκους, ἀλλ' ἀπλῶς τὸ κεφάλαιον μιᾶς μονάδος τοῦ κεφαλαίου, λ. χ. τὸ κεφάλαιον μιᾶς δραχμῆς ἡϋξημένον κατὰ τοὺς συνθέτους τόκους.

Παράδειγμα. Κεφάλαιόν τι ἐκ 4500 δραχμῶν, πόσον γίνεται εἰς τὸ τέλος 8 ἐτῶν ἀνατοκίζόμενον πρὸς 6 %;

x δρ. γίνονται εἰς τὸ τέλος 8 ἐτῶν	4500 δρ. μετρητὰ
Ἐάν 1 δρ. μετρητὰ γίνεται	1,08 εἰς τὸ τέλος τοῦ 1ου ἔτους
Ἐάν 1 δρ. εἰς τὸ τέλος τοῦ 1ου ἔτους	1,08 εἰς τὸ τέλος τοῦ 2ου ἔτους
Ἐάν 1 δρ. εἰς τὸ τέλος τοῦ 2ου ἔτους	1,08 εἰς τὸ τέλος τοῦ 3ου ἔτους
Ἐάν 1 δρ. εἰς τὸ τέλος τοῦ 3ου ἔτους	1,08 εἰς τὸ τέλος τοῦ 4ου ἔτους
Ἐάν 1 δρ. εἰς τὸ τέλος τοῦ 4ου ἔτους	1,08 εἰς τὸ τέλος τοῦ 5ου ἔτους
Ἐάν 1 δρ. εἰς τὸ τέλος τοῦ 5ου ἔτους	1,08 εἰς τὸ τέλος τοῦ 6ου ἔτους
Ἐάν 1 δρ. εἰς τὸ τέλος τοῦ 6ου ἔτους	1,08 εἰς τὸ τέλος τοῦ 7ου ἔτους
Ἐάν 1 δρ. εἰς τὸ τέλος τοῦ 7ου ἔτους	1,08 εἰς τὸ τέλος τοῦ 8ου ἔτους

$$x = 4500 \times (1,06)^8 = \text{δρ. } 7172,346.$$

Ἡ συνεζευγμένη μέθοδος, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ παραδείγματος, ἔχει, ἐξαιρουμένου τοῦ προτεθέντος ζητήματος, τόσους λόγους ὅσα εἶναι τὰ ἐν τῷ προβλήματι προτεινόμενα ἔτη.

Πίναξ τοῦ ἀνατοκισμοῦ.

Ἔτη	2 1/2 %	3 %	3 1/2 %	4 %	4 1/2 %
1	1,025000	1,030000	1,035000	1,040000	1,045000
2	1,050625	1,060900	1,071225	1,081600	1,092025
3	1,076891	1,092727	1,108718	1,124864	1,141166
4	1,103813	1,125509	1,147523	1,169859	1,192519
5	1,131408	1,159274	1,187686	1,216653	1,246182
6	1,159693	1,194052	1,229255	1,265349	1,302260
7	1,188686	1,229874	1,272279	1,315932	1,360862
8	1,218403	1,266770	1,316809	1,368569	1,422101
9	1,248863	1,304773	1,362897	1,423312	1,486095
10	1,280085	1,343916	1,410399	1,480244	1,552969
11	1,312087	1,384234	1,459970	1,539454	1,622853
12	1,344889	1,425761	1,511069	1,601032	1,695884
13	1,378511	1,468534	1,563956	1,665074	1,772196
14	1,412974	1,512590	1,618695	1,731676	1,851945
15	1,448298	1,557967	1,675349	1,800944	1,935282
16	1,484506	1,604706	1,733986	1,872981	2,022370
17	1,521618	1,652848	1,794676	1,947901	2,113377
18	1,559659	1,702433	1,857489	2,025817	2,208478
19	1,598650	1,753506	1,922501	2,106849	2,307860
20	1,638616	1,806141	1,989789	2,191123	2,411714
21	1,679582	1,860295	2,059431	2,278768	2,520241
22	1,721571	1,916103	2,131512	2,369919	2,633652
23	1,764614	1,973587	2,206144	2,464716	2,752166
24	1,808726	2,032794	2,283328	2,563304	2,876014
25	1,853944	2,093778	2,363245	2,665836	3,005435
26	1,900293	2,156591	2,445959	2,772470	3,140679
27	1,947800	2,221289	2,531567	2,883369	3,282040
28	1,996495	2,287928	2,620172	2,998703	3,429700
29	2,046407	2,356566	2,711878	3,118651	3,584036
30	2,097568	2,427262	2,806794	3,243398	3,745318
31	2,150007	2,500080	2,905031	3,373133	3,913857
32	2,203757	2,575083	3,006708	3,508059	4,089980
33	2,258851	2,652335	3,111942	3,648381	4,274029
34	2,315322	2,731905	3,220860	3,794316	4,466360
35	2,373205	2,813862	3,333590	3,946089	4,667346
36	2,432535	2,898278	3,450266	4,103933	4,877376
37	2,493349	2,985227	3,571025	4,268090	5,096858
38	2,555682	3,074783	3,696044	4,438843	5,326216
39	2,619574	3,167027	3,825372	4,616366	5,565895
40	2,685064	3,262038	3,959260	4,801024	5,816360

Συνέχεια τοῦ πίνακος τοῦ ἀνατοκισμοῦ.

ἔτη	5 %	6 %	7 %	8 %
1	1,050000	1,060000	1,070000	1,080000
2	1,102500	1,123600	1,144900	1,166400
3	1,157625	1,191016	1,225043	1,259712
4	1,215506	1,262477	1,310796	1,360489
5	1,276282	1,338226	1,402552	1,469328
6	1,340096	1,418519	1,500730	1,586874
7	1,407100	1,503630	1,605782	1,713824
8	1,477455	1,593848	1,718186	1,850930
9	1,551328	1,689479	1,838459	1,999003
10	1,628885	1,790848	1,967151	2,158925
11	1,710339	1,898299	2,104852	2,331639
12	1,795856	2,012497	2,252192	2,518170
13	1,885649	2,132928	2,409845	2,719624
14	1,979932	2,260904	2,578534	2,937194
15	2,078928	2,396558	2,759032	3,172169
16	2,182875	2,540352	2,952164	3,425943
17	2,292018	2,692773	3,158815	3,700018
18	2,406619	2,854339	3,379932	3,996020
19	2,526950	3,025600	3,616528	4,315701
20	2,653298	3,207136	3,869685	4,660957
21	2,785963	3,399564	4,140562	5,033834
22	2,925261	3,603537	4,430402	5,436540
23	3,071524	3,819750	4,740530	5,871464
24	3,225100	4,048935	5,072367	6,341181
25	3,386355	4,291871	5,427433	6,848475
26	3,555673	4,549383	5,807353	7,396353
27	3,733456	4,822346	6,213868	7,988062
28	3,920429	5,111687	6,648838	8,627106
29	4,116136	5,418388	7,114257	9,317275
30	4,321942	5,743491	7,612255	10,062657
31	4,538040	6,088104	8,145113	10,867669
32	4,764942	6,453387	8,715271	11,737083
33	5,003189	6,840590	9,325340	12,676050
34	5,253348	7,251025	9,978114	13,690134
35	5,516015	7,686087	10,676582	14,785344
36	5,791816	8,147252	11,423942	15,968172
37	6,081407	8,636087	12,223618	17,245626
38	6,385477	9,154252	13,079271	18,625276
39	6,704751	9,703508	13,994820	20,115298
40	7,039989	10,285718	14,974458	21,724522

Ἵνα λύσωμεν τὸ προηγούμενον παράδειγμα δυνάμει τοῦ πίνακος τούτου, παρατηροῦμεν ὅτι 1 δραχμὴ ἀνατοκίζομένη πρὸς 6 % γίνεται εἰς τὸ τέλος 8 ἐτῶν δραχμαὶ 1,593848. ὅθεν τὸ προταθὲν κεφάλαιον 4,500 δρ. θέλει γίνεαι εἰς τὸ τέλος τῶν 8 ἐτῶν

$$\delta\rho. 1,593848 \times 4500 = \delta\rho. 7172,316.$$

ἐξαγόμενον ἴσον τῷ διὰ τῆς συνεζευγμένης μεθόδου εὑρεθέντι.

$$\text{Ὅθεν οἱ σύνθετοι τόκοι εἶναι} \quad \delta\rho. 2672,316$$

$$\text{ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τοὺς ἀπλοῦς τόκους} \quad \text{»} \quad 2460, \text{ »}$$

$$\text{ἐκ τούτων θέλωμεν εὑρεῖ τοὺς τόκους τῶν τόκων} \quad 512,316$$

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΝ.

432. Αἱ σύνθετοι ὑφαιρέσεις λεγόμεναι εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἀνατοκισμοῦ.

Πρόβλημα. Ἐμπορὸς τις ἔχει νὰ εἰσπράξῃ εἰς 6 ἔτη δραχμὰς 7172,316. Τί ποσὸν πρέπει νὰ πληρωθῇ τώρα, ὅπερ ἀνατοκίζομενον πρὸς 6 % ἐπὶ 8 ἔτη νὰ τῷ φέρῃ 7172,316 ;

x δρ. (ἀξία τοῖς μετρητοῖς) διὰ 7172,316 πληρωτέας εἰς 8 ἔτη.

Ἐὰν 1,06 δρ. πληρωτέαι εἰς 8 ἔτη = δρ. 1 πληρωτέα εἰς 7 ἔτη

» 1,06 δρ. » εἰς 7 ἔτη = δρ. 1 » εἰς 6 ἔτη

» 1,06 δρ. » εἰς 6 ἔτη = δρ. 1 » εἰς 5 ἔτη

» 1,06 δρ. » εἰς 5 ἔτη = δρ. 1 » εἰς 4 ἔτη

» 1,06 δρ. » εἰς 4 ἔτη = δρ. 1 » εἰς 3 ἔτη

» 1,06 δρ. » εἰς 3 ἔτη = δρ. 1 » εἰς 2 ἔτη

» 1,06 δρ. » εἰς 2 ἔτη = δρ. 1 » εἰς 1 ἔτη

» 1,06 δρ. » εἰς 1 ἔτη = δρ. 1 » μετρητὰ

$$x = \frac{7172,316}{(1,06)^8} = \delta\rho. 4500.$$

Πίναξ τῶν συνθέτων ὑψαιρέσεων.

Ἔτη	2 %	2 1/2 %	3 %	3 1/2 %
1	0,980392	0,975619	0,970373	0,966183
2	0,961169	0,951814	0,942596	0,933510
3	0,942322	0,928599	0,915141	0,904943
4	0,923845	0,905951	0,889187	0,871422
5	0,905731	0,883854	0,862609	0,844973
6	0,887971	0,862297	0,837484	0,813501
7	0,870560	0,841255	0,813091	0,785991
8	0,853490	0,820747	0,789409	0,759412
9	0,836733	0,800728	0,766417	0,733731
10	0,830348	0,784198	0,744094	0,708919
11	0,894263	0,762445	0,722421	0,684946
12	0,778493	0,743556	0,704380	0,661784
13	0,773932	0,725420	0,680034	0,639403
14	0,757873	0,707727	0,661448	0,617782
15	0,743015	0,690466	0,644862	0,596891
16	0,728446	0,673625	0,623167	0,576706
17	0,714153	0,657195	0,603017	0,557204
18	0,709159	0,641166	0,587393	0,538362
19	0,676434	0,625523	0,570286	0,520156
20	0,672971	0,610271	0,553676	0,502567
21	0,659776	0,593336	0,537349	0,485572
22	0,648839	0,580855	0,524893	0,469131
23	0,634156	0,566697	0,506692	0,453286
24	0,624721	0,552873	0,491934	0,437938
25	0,609531	0,539391	0,477606	0,423148

(Συνέχεια τοῦ πίνακος τῶν συνθέτων ὑψαιρέσεων).

Ἔτη	4 %	4 1/2 %	5 %	6 %
1	0,964538	0,956937	0,952381	0,943396
2	0,924556	0,915730	0,907029	0,889996
3	0,888996	0,867296	0,863837	0,839619
4	0,854804	0,828561	0,822702	0,792097
5	0,821927	0,802451	0,783526	0,747258
6	0,790314	0,767895	0,746215	0,704960
7	0,759917	0,724828	0,710681	0,665037
8	0,730690	0,703185	0,676839	0,627412
9	0,702586	0,672904	0,644608	0,594898
10	0,675564	0,643927	0,613913	0,558394
11	0,649580	0,616498	0,584679	0,526787
12	0,624597	0,579663	0,536837	0,496969
13	0,600574	0,564271	0,530321	0,468839
14	0,577475	0,539372	0,505068	0,442301
15	0,555264	0,5166720	0,481017	0,417266
16	0,533908	0,494469	0,458111	0,393646
17	0,513373	0,473176	0,436296	0,371364
18	0,493628	0,452800	0,415520	0,350313
19	0,474642	0,433301	0,395734	0,330513
20	0,456386	0,414642	0,376839	0,311804
21	0,438834	0,396787	0,358942	0,294154
22	0,421935	0,379700	0,341849	0,277504
23	0,405726	0,363349	0,325671	0,261797
24	0,390161	0,347703	0,310068	0,246978
25	0,375117	0,337730	0,295303	0,232998

Κατὰ τὸν πίνακα τοῦτον 1 δραχμὴ πληρωτέα εἰς 8 ἔτη πρὸς 6 % δίδει κατὰ τὴν σύνθετον ὑφαίρεσιν δρ. 0,627512 ἀξία τοῖς μετρητοῖς·

ἔθεν

ἡ παροῦσα ἀξία τῶν δρ. 7172346 εἶναι

$$\text{δρ. } 7271,316 \times 0,627412 = \text{δρ. } 4500.$$

ΠΕΡΙ ΕΤΗΣΙΩΝ ΔΑΝΕΙΣΜΑΤΩΝ.

(Des placements annuels).

133. Ἐνταῦθα πραγματευόμεθα περὶ τῶν ἐξῆς δύο περιπτώσεων :

1ον· Ζητοῦμεν τὸ κεφάλαιον, ὅπερ σχηματίζεται ὑπὸ εἰσοδήματος πληρωτέου εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους καὶ κεφαλαιοποιουμένον ἐπὶ ἀνατοκισμῷ.

2ον· Ζητοῦμεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν εἰσοδήματος πληρωτέου καθ' ὅρισμένον τι χρονικὸν διάστημα εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους.

Πρὸς τοῦτο δὲ ποιούμεθα χρῆσιν τῶν ἐξῆς δύο πινάκων, ὧν ὁ πρῶτος σχηματίζεται ἐκ τῆς διαδοχικῆς προσθέσεως τῶν ψηφίων τοῦ πίνακος τοῦ ἀνατοκισμοῦ, ὁ δὲ δεύτερος ἐκ τῆς διαδοχικῆς προσθέσεως τῶν ψηφίων τοῦ πίνακος τῶν συνθέτων ὑφαίρέσεων.

I Πίναξ.

Ἔτη	3 %	3 1/2 %	4 %
1	1,030000	1,035000	1,040000
2	2,090900	2,106225	2,121600
3	3,183627	3,214943	3,246464
4	4,309136	4,362466	4,416323
5	5,468440	5,547152	5,632976
6	6,662462	6,776407	6,898295
7	7,892336	8,048686	8,214227
8	9,159105	9,365495	9,582796
9	10,463877	10,728392	11,006108
10	11,807792	12,138991	12,486352
11	13,192025	13,598961	14,025806
12	14,617785	15,110030	15,626838
13	16,086318	16,673986	17,291912
14	17,598906	18,292681	19,023588
15	19,156872	19,968030	20,824532
16	20,761577	21,702016	22,697513
17	22,414423	23,496692	24,645413
18	24,116855	25,354181	26,671230
19	25,870360	27,276682	28,778079
20	27,676470	29,266471	30,969202
21	29,536763	31,325903	33,247970
22	31,452865	33,457415	35,617889
23	33,426450	35,663530	38,082605
24	35,459243	37,946858	40,645909
25	37,553020	40,310103	43,311745

1 Πραξ.

Ἔτη	4 1/2 %	5 %	6 %
1	1,043000	1,050000	1,060000
2	2,137025	2,152500	2,183600
3	3,278191	3,310125	3,374616
4	4,470710	4,525631	4,637093
5	5,716892	5,801913	5,975319
6	7,019152	7,142008	7,393838
7	8,380014	8,549109	8,897468
8	9,802115	10,026564	10,491316
9	11,288210	11,577893	12,180793
10	12,841179	13,206787	13,971643
11	14,464032	14,917127	15,869942
12	16,159913	16,712983	17,882138
13	17,932109	18,598632	20,015066
14	19,784054	20,578564	22,285970
15	21,719336	22,657492	24,682528
16	23,741706	24,840366	27,222880
17	25,855083	27,132385	29,915653
18	28,063561	29,539004	32,769992
19	30,371421	32,065954	35,795592
20	32,783135	34,719252	39,002727
21	35,303376	37,505214	42,402290
22	37,937028	40,430475	46,005827
23	40,689194	43,501999	49,825576
24	43,565208	46,727099	53,874510
25	46,570643	50,113454	58,166380

Πρόβλημα. Πατήρ τις θέλων νὰ προικήσῃ θυγατέρα του 6 ἐτῶν καταθέτει κατ' ἔτος 3600 δραχμὰς πρὸς 4 1/2 %. Ποῦτον θὰ ᾖ τὸ ποσὸν τῆς προικὸς, δόποταν ἡ θυγάτηρ γίνῃ εἰκοσαστής;

Λύσις

Τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐτῶν ὄντος $20 - 6 = 14$
 τοῦ ἔτησιου δανείσματος $= 3600$
 τοῦ ἐπιτοκίου $= 4 \frac{1}{2}$

λέγομεν ὅτι, ἐπειδὴ κατὰ τὸν πίνακα καταθέτων τις 1 δρ. κατ' ἔτος εἰς ἀνατοκισμὸν πρὸς 4 1/2 % ἐπὶ 14 ἔτη λαμβάνει κερῶλαιον δρ. 19,784054, ἡ ζητούμενη προῖξ θέλει σύγκεισθαι ἐκ

$$\text{δρ. } 19,784054 \times 3600 = \text{δρ. } 71222,59^{14}.$$

II Πίναξ.

Έτη	3 %	3 1/2 %	4 %
1	0,9708737	0,9664836	0,9615385
2	1,9434696	1,8996944	1,8860946
3	2,8286144	2,8016374	2,7750910
4	3,7170936	3,6730800	3,6298952
5	4,5797076	4,5450536	4,4518223
6	5,4171922	5,3285548	5,2421368
7	6,2302841	6,1145463	6,0020546
8	7,0196936	6,8739586	6,7327448
9	7,7864408	7,6076903	7,4354315
10	8,5302051	8,3166099	8,1109957
11	9,2526268	9,0015565	8,7607766
12	9,9540071	9,6633408	9,3853736
13	10,6349590	10,3027459	9,9859477
14	11,2960773	10,9205287	10,5634228
15	11,9379397	11,5174204	11,1186873
16	12,5641073	12,0941273	11,6525955
17	13,1661243	12,6513322	12,1659687
18	13,7535196	13,1896942	12,6595968
19	14,3238063	13,7098310	13,1342392
20	14,8774827	14,2124180	13,5906261
21	15,4150326	14,6979901	14,0294603
22	15,9369257	15,1651420	14,4514162
23	16,4436182	15,6184289	14,8571429
24	16,9355525	16,0563873	15,2472648
25	17,4131587	16,4795355	15,6223825

(Συνέχεια του II πίνακος).

Έτη	4 1/2 %	5 %	6 %
1	0,9559368	0,9523810	0,9733962
2	1,8726677	1,7594104	1,8333926
3	2,7489643	2,7232480	2,6730119
4	3,5775256	3,5430595	3,4651092
5	4,3799766	4,3294767	4,2123674
6	5,1478723	5,0756924	4,9173279
7	5,8727008	5,7863734	5,5823850
8	6,5758859	6,4632128	6,2077974
9	7,2487903	7,1078217	6,8016959
10	7,8927180	7,7217349	7,3600907
11	8,5089167	8,3064132	7,8868782
12	9,0983806	8,8632516	8,3838476
13	9,6628522	9,3955730	8,8526866
14	10,2028251	9,8986409	9,2949876
15	10,7195455	10,3796580	9,7122507
16	11,2140148	10,8377696	10,1053970
17	11,6871912	11,2740662	10,4772614
18	12,1399916	11,6895869	10,8276032
19	12,5732934	12,0853209	11,1581182
20	12,9879363	12,4622103	11,4699229
21	13,3847236	12,8214527	11,7640778
22	13,7644243	13,1630026	12,0415824
23	14,1277734	13,4885739	12,3033792
24	14,4764767	13,4885739	12,5503572
25	14,8082071	14,0939449	12,7833554

Κατὰ τὸν πίνακα τοῦτον εἰσὸδημά τι ἐκ 1 δρ., πληρονόμενον ἐπὶ 40 ἔτη, εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους, εἰς 4 % εἰς ἀνατοκισμόν, ἔχει παροῦσαν ἀξίαν ἐκ δρ. 8,4409957· ὥστε ἐτήσιόν τι εἰσὸδημα ἐκ 2000 δραχμῶν, ἀσφαλισμένον ἐπὶ 40 ἔτη, θέλει ἔχει διὰ παροῦσαν ἀξίαν

$$\delta\rho. 8,4409957 \times 2000 = \delta\rho. 16224.99^{14}$$

ΠΕΡΙ ΧΡΕΩΛΥΣΙΑΣ.

(De l' amortissement).

434. Εἰς τὰ ἐτήσια δανείσματα σχηματίζομεν κεφάλαιόν τι, εἰς τὰ χρεώλυτρα (annuités) τοῦναντίον ἀποσβέννυμεν κεφάλαιόν τι.

435. Ἡ πρῆξις ἦν συνομολογοῦμεν ὅπως ἀπαλλαγῶμεν τοῦ χρέους μας δι' ἐτησίων ἴσων πληρωμῶν, ὀνομάζεται *χρεωλύσις*, τῇ δὲ ἐτησίως πληρονόμενον ποσὸν *χρεώλυτρον*.

436. Ὁ τύπος τοῦ χρεώλυτρον εἶναι

$$\alpha = \frac{A(1+\tau)^n}{[1+\tau]^n - 1} \quad \text{ἢ} \quad A(1+\tau)^n \frac{\tau}{[1+\tau]^n - 1}$$

δι' α παριστάνομεν τὸ χρεώλυτρον

δι' Α » τὸ δανεισθέν κεφάλαιον

διὰ ν » τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐτῶν

διὰ τ » τὸ ἐπιτόκιον 1 δραχμῆς.

Ὁ τύπος αὗτος σύγκειται ἐκ δύο μερῶν

$$A(1+\tau)^n \quad \text{καὶ} \quad \frac{\tau}{[1+\tau]^n - 1}$$

ὧν τὸ πρῶτον $A(1+\tau)^n$ εὐρίσκεται διὰ τοῦ ἀνωτέρω τεθέντος πίνακος τοῦ ἀνατοκισμοῦ, τὸ δὲ δεύτερον μέρος $\frac{\tau}{[1+\tau]^n - 1}$ ὅπερ καὶ λέγεται *ἐπιτόκιον τῆς χρεωλύσεως*, ὁρίζεται διὰ τοῦ ἐπομένου πίνακος· ὥστε πολλαπλασιάζοντες τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πίνακος τοῦ ἀνατοκισμοῦ ἐπὶ τὸ τοῦ πίνακος τῆς χρεωλύσεως εὐρίσκομεν τὸ χρεώλυτρον

Πίναξ χρεωλύσεως.

ἔτη	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	0,492011	0,491400	0,490196	0,488998	0,487805	0,486618	0,485437
3	0,323530	0,321934	0,320349	0,318774	0,317209	0,315655	0,314110
4	0,239027	0,237251	0,235489	0,233743	0,232012	0,230294	0,228591
5	0,188355	0,186481	0,184627	0,182792	0,180975	0,179176	0,177397
6	0,154598	0,152608	0,150762	0,148878	0,147017	0,145179	0,143363
7	0,130106	0,128154	0,126610	0,124701	0,122820	0,120964	0,119135
8	0,112156	0,110477	0,108528	0,106609	0,104722	0,102864	0,101036
9	0,098434	0,096946	0,094993	0,092573	0,090690	0,088849	0,087022
10	0,087231	0,085922	0,084140	0,081379	0,079594	0,077668	0,075868
11	0,078077	0,076884	0,074632	0,072248	0,070389	0,068571	0,066793
12	0,070462	0,069262	0,066532	0,064666	0,062825	0,061029	0,059277
13	0,064030	0,062837	0,060144	0,058273	0,056456	0,054684	0,052960
14	0,058526	0,057335	0,054639	0,052820	0,051024	0,049279	0,047585
15	0,053767	0,052585	0,049820	0,048114	0,046342	0,044626	0,042963
16	0,049611	0,048433	0,045619	0,044015	0,042370	0,040784	0,039252
17	0,045953	0,044781	0,041919	0,040418	0,038869	0,037342	0,035845
18	0,042769	0,041607	0,038693	0,037237	0,035746	0,034329	0,032957
19	0,039814	0,038657	0,035619	0,034207	0,032745	0,031350	0,029924
20	0,037216	0,036063	0,033032	0,031876	0,030423	0,028979	0,027485
21	0,034872	0,033723	0,030619	0,029501	0,027996	0,026465	0,025005
22	0,032747	0,031603	0,028499	0,027346	0,025971	0,024471	0,023046
23	0,030814	0,029675	0,026573	0,025362	0,024137	0,022670	0,021278
24	0,029047	0,027913	0,024817	0,023587	0,022471	0,021036	0,019679
25	0,027498	0,026369	0,023279	0,022039	0,020952	0,019549	0,018227

№	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6
25	0,027128	0,025674	0,021012	0,022139	0,020032	0,015319	0,018227
26	0,023538	0,021203	0,022567	0,021021	0,019564	0,018493	0,016904
27	0,021564	0,022832	0,021239	0,019719	0,018292	0,016932	0,015697
28	0,023293	0,021603	0,020043	0,018321	0,017123	0,015814	0,014593
29	0,022145	0,020445	0,018880	0,017415	0,016016	0,014769	0,013580
30	0,021019	0,019371	0,017830	0,016392	0,015051	0,013803	0,012619
31	0,019209	0,018372	0,016855	0,015412	0,014132	0,012917	0,011792
32	0,019047	0,017442	0,015949	0,014563	0,013280	0,012095	0,011002
33	0,018136	0,016572	0,015103	0,013745	0,012490	0,011335	0,010273
34	0,017322	0,015760	0,014315	0,012982	0,011755	0,010630	0,009598
35	0,016539	0,014998	0,013577	0,012270	0,011072	0,009975	0,008974
36	0,015804	0,014284	0,012887	0,011606	0,010434	0,009366	0,008395
37	0,015112	0,013613	0,012240	0,010984	0,009840	0,008800	0,007837
38	0,014459	0,012982	0,011632	0,010402	0,009284	0,008272	0,007338
39	0,013844	0,012388	0,011061	0,009836	0,008765	0,007780	0,006894
40	0,013262	0,011827	0,010523	0,009349	0,008262	0,007320	0,006462
41	0,012712	0,011298	0,010017	0,008862	0,007895	0,006894	0,006039
42	0,011192	0,010793	0,009549	0,008409	0,007395	0,006413	0,005533
43	0,011698	0,010325	0,008665	0,007581	0,006616	0,005761	0,005006
44	0,011230	0,009878	0,008263	0,007202	0,006262	0,005431	0,004701
45	0,010785	0,009453	0,008263	0,007202	0,006262	0,005431	0,004701
46	0,009363	0,009051	0,007882	0,006845	0,005928	0,005122	0,004415
47	0,009961	0,008669	0,007522	0,006507	0,005614	0,004831	0,004148
48	0,009578	0,008306	0,007181	0,006189	0,005318	0,004559	0,003898
49	0,009213	0,007962	0,006858	0,005887	0,005040	0,004302	0,003664
50	0,008866	0,007634	0,006530	0,005602	0,004777	0,004061	0,003444

№	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6
50	0,008866	0,007634	0,006530	0,005602	0,004777	0,004061	0,003444
51	0,008534	0,007322	0,006256	0,005332	0,004529	0,003835	0,003239
52	0,008217	0,007024	0,005982	0,005077	0,004295	0,003622	0,003046
53	0,007915	0,006741	0,005719	0,004835	0,004073	0,003421	0,002866
54	0,007226	0,006171	0,005169	0,004305	0,003564	0,002932	0,002696
55	0,007349	0,006213	0,005221	0,004388	0,003667	0,003055	0,002537
56	0,007084	0,005966	0,005030	0,004181	0,003480	0,002887	0,002388
57	0,006831	0,005732	0,004789	0,003985	0,003303	0,002729	0,002247
58	0,006638	0,005550	0,004608	0,003799	0,003136	0,002580	0,002116
59	0,006396	0,005294	0,004388	0,003622	0,002978	0,002440	0,001992
60	0,006146	0,005089	0,004202	0,003434	0,002828	0,002307	0,001876
61	0,005919	0,004892	0,004024	0,003256	0,002686	0,002182	0,001766
62	0,005744	0,004750	0,003892	0,003134	0,002552	0,002064	0,001664
63	0,005517	0,004525	0,003692	0,002998	0,002424	0,001953	0,001567
64	0,005328	0,004353	0,003535	0,002861	0,002304	0,001847	0,001476
65	0,005146	0,004188	0,003390	0,002730	0,002189	0,001748	0,001394
66	0,004991	0,004030	0,003249	0,002606	0,002089	0,001654	0,001310
67	0,004803	0,003879	0,003145	0,002488	0,001978	0,001565	0,001235
68	0,004612	0,003734	0,002986	0,002375	0,001880	0,001482	0,001163
69	0,004486	0,003595	0,002863	0,002267	0,001787	0,001402	0,001096
70	0,004337	0,003461	0,002745	0,002165	0,001699	0,001328	0,001033
71	0,004193	0,003333	0,002633	0,002068	0,001616	0,001257	0,000974
72	0,004054	0,003210	0,002525	0,001975	0,001536	0,001190	0,000918
73	0,003921	0,003092	0,002422	0,001886	0,001461	0,001127	0,000865
74	0,003792	0,002978	0,002323	0,001802	0,001390	0,001067	0,000815
75	0,003668	0,002869	0,002229	0,001721	0,001322	0,001010	0,000769

Έτη	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6
75	0,003668	0,002869	0,002229	0,001721	0,001322	0,001010	0,000769
76	0,006348	0,002765	0,002139	0,001644	0,001237	0,000936	0,000725
77	0,003433	0,002664	0,002032	0,001571	0,001196	0,000906	0,000683
78	0,003322	0,002567	0,001969	0,001501	0,001138	0,000838	0,000644
79	0,003213	0,002471	0,001890	0,001434	0,001082	0,000812	0,000607
80	0,003112	0,002385	0,001814	0,001371	0,001030	0,000769	0,000573
81	0,003012	0,002299	0,001741	0,001310	0,000980	0,000729	0,000540
82	0,002916	0,002216	0,001672	0,001252	0,000932	0,000690	0,000509
83	0,002823	0,002137	0,001605	0,001197	0,000887	0,000654	0,000480
84	0,002733	0,002060	0,001541	0,001144	0,000844	0,000619	0,000453
85	0,002647	0,001987	0,001479	0,001093	0,000803	0,000587	0,000427
86	0,001563	0,001916	0,001420	0,001045	0,000764	0,000556	0,000402
87	0,002482	0,001848	0,001364	0,000999	0,000727	0,000527	0,000380
88	0,002404	0,001782	0,001310	0,000955	0,000692	0,000499	0,000358
89	0,002328	0,001719	0,001258	0,000913	0,000659	0,000473	0,000338
90	0,002256	0,001658	0,001208	0,000873	0,000627	0,000448	0,000319
91	0,002185	0,001599	0,001160	0,000835	0,000597	0,000424	0,000283
92	0,002117	0,001543	0,001114	0,000798	0,000568	0,000402	0,000267
93	0,002051	0,001488	0,001070	0,000763	0,000541	0,000381	0,000252
94	0,001987	0,001436	0,001028	0,000730	0,000515	0,000361	0,000238
95	0,001926	0,001385	0,000987	0,000698	0,000490	0,000342	0,000224
96	0,001866	0,001337	0,000949	0,000667	0,000466	0,000324	0,000211
97	0,001809	0,001290	0,000911	0,000638	0,000444	0,000307	0,000199
98	0,001753	0,001245	0,000875	0,000610	0,000423	0,000291	0,000188
99	0,001699	0,001201	0,000841	0,000584	0,000402	0,000276	0,000177
100	0,001647	0,001159	0,000808	0,000558	0,000383	0,000261	0,000167

Πρόβλημα α'. Ἐμπορὸς τις θέλει νὰ πληρώσῃ χρέος ἐκ δρ. 25000 εἰς 7 πληρωμὰς ἐτησίαις ἴσας, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος πρὸς 4 %· ποῖα εἶναι ἡ ἀξία τοῦ χρεωλύτρου ;

Λύσις.

Τοῦ τύπου τοῦ χρεωλύτρου ὄντος

$$a = A (1 + \tau)^n \frac{\tau}{[1 + \tau]^n - 1}$$

ἀντικαταστήσει τῶν γραμμάτων διὰ τῶν προταθεισῶν τιμῶν ἔχομεν

$$a = 25000(1,04)^7 \frac{0,04}{[1,04]^7 - 1}$$

ἢ τὸ μὲν $25000(1,04)^7$ (κατὰ τὸν πίνακα τοῦ ἀνατοκ.) = 32898,30

τὸ δὲ $\frac{0,04}{[1,04]^7 - 1}$ (» » » τῆς χρεωλυσ.) = 0,12661.

Ὅθεν κατὰ τὰ λεγθέντα

$$32898,30 \times 0,12661 = \text{δρ. } 4165,25.$$

τοῦθ' ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον χρεώλυτρον

Πρόβλημα β' Βιομηχανικὴ τις ἐταιρεία ἐδανείσθη 80000 δραχμὰς χρησιμευσούσας εἰς ἐπιχείρησιν τινα· θέλει δὲ νὰ ἀποσβέσῃ τὸ χρέος τῆς εἰς 20 ἔτη τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος πρὸς 5 %· ποῖον ὀκτὴ τὸ ποσὸν τοῦ χρεωλύτρου ;

Λύσις.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τοῦ χρεωλύτρου $a = A(1 + \tau)^n \frac{\tau}{[1 + \tau]^n - 1}$ τὰ γράμματα διὰ τῶν τιμῶν τῶν, ἔχομεν

$$a = 80000(1,05)^{20} \frac{0,05}{[1,05]^{20} - 1}$$

ἢ εἰς τὸ μὲν $80000[1,05]^{20}$ [κατὰ τὸν πίνακα τοῦ ἀνατοκισμοῦ] = 2122638,40

τὸ δὲ $\frac{0,05}{[1,05]^{20} - 1}$ [» » » τῆς χρεωλυσίας] = 0,030243

πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο εὑρεθέντα ποσὰ ἐπ' ἄλληλην, εὐρίσκομεν διὰ χρεώλυτρον

$$2122638,49 \times 0,030243 = \text{δρ. } 64194,95.$$

137. Ὅσακις τὸ δάνειον (*emprunt*) γίνεται εἰς τράπεζάν τινα ἢ εἰς ἐταιρίαν τινα, τὸ εὑρεθὲν χρεώλυτρον πρέπει νὰ ἀυξηθῇ κατ' ὁρισμένον

τι ποσὸν παρουσιάζον τὰ ἔξοδα τῆς διαχειρίσεως, ὅπερ φυσικῶς τῷ λόγῳ δὲν ἀποφέρει τόκον,

Λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὴν ἐταιρίαν τῆς ἐγγείου πιστώσεως τῆς Γαλλίας (*Société du Crédit foncier de France.*)

ΕΓΓΕΙΟΣ ΠΙΣΤΩΣΙΣ ΤΗΣ ΓΑΛΛΙΑΣ. Ἡ ἐταιρία αὕτη τῆς ἐγγείου πιστώσεως δανεῖζει χρήματα λαμβάνουσα ὑποθήκας ἐπὶ τοῖς ἐξῆς ὅροις :

Ἄρθρον 59. Τὸ χρεώλυτρον πληρώνεται τοῖς μετρητοῖς· περιέχει δὲ,

1ον. τὸν τόκον, 2ον. τὴν χρεωλυσίαν ὠρισμένην ὑπὸ τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τῆς διαρκείας τοῦ δανείου, 3ον. τὴν ἐτήσιον ἐπινέμησιν (*allocation*) διὰ δικαίωμα προμηθείας καὶ ἔξοδα διαχειρίσεως.

Ἡ ἐτήσιος ἐπινέμησις δι' ἔξοδα διαχειρίσεως εἶναι 60 ἑκατοστὰ ἀνὰ 100 φράγκα.

Ἄρθρον 60. Τὰ χρεώλυτρα πληρώνονται καθ' ἑξαμηνίαν εἰς ἐποχὰς ὠρισμένας ὑπὸ τοῦ διοικητικοῦ συμβουλίου.

Τὸν καιρὸν καθ' ὃν γίνεται τὸ δάνειον, ἡ ἐταιρία κρατεῖ ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου τὸν τόκον καὶ τὴν ἐπινέμησιν διὰ τὸν χρόνον ὅστις μέλλει νὰ παρέλθῃ μέχρι τῆς πρώτης ἑξαμηνιαίας διορίας.

Πιναξ χρεωλυσίας τῆς ἐγγείου πιστώσεως τῆς Γαλλίας.

Ἐπιτόκιον χρεωλύτρου δανείου 100 φρ. πρὸς 5 %.							
Διάρκεια τοῦ δανείου	Χρεώλυτρα πληρωτέα ἐξ ἡμισείας καὶ καθ' ἑξαμηνίαν.	Διάρκεια τοῦ δανείου	Χρεώλυτρα πληρωτέα ἐξ ἡμισείας καὶ καθ' ἑξαμηνίαν.	Διάρκεια τοῦ δανείου	Χρεώλυτρα πληρωτέα ἐξ ἡμισείας καὶ καθ' ἑξαμηνίαν.	Διάρκεια τοῦ δανείου	Χρεώλυτρα πληρωτέα ἐξ ἡμισείας καὶ καθ' ἑξαμηνίαν.
Ἔτη	Φράγκα	Ἔτη	Φράγκα	Ἔτη	Φράγκα	Ἔτη	Φράγκα
10	13,429426	23	7,965352	36	6,616834	49	6,088070
11	12,523320	24	7,801200	37	6,558446	50	6,060000
12	11,782564	25	7,661612	38	6,503912	51	6,038144
13	11,153750	26	7,544894	39	6,452928	52	6,015278
14	10,617587	27	7,389598	40	6,405210	53	5,993692
15	10,155528	28	7,374486	41	6,360510	54	5,973306
16	9,753662	29	7,168490	42	6,318596	55	5,954044
17	9,401350	30	7,070680	43	6,279266	56	5,934838
18	9,090316	31	6,980252	44	6,242332	57	5,918625
19	8,814024	32	6,896498	45	6,207618	58	5,902343
20	8,567248	33	6,818798	46	6,174974	59	5,880939
21	8,345752	34	6,746602	47	6,144252	60	5,870000
22	8,146074	35	6,679424	48	6,115324		

ἵνα ποιώμεθα χρῆσιν τοῦ πίνακος τούτου, διαιροῦμεν τὸ δανεισθὲν ποσὸν δι' 100, καὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ χρεώλυτρον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐτῶν ὧν δεόμεθα πρὸς ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους μας.

Παράδειγμα. Ἐδανείσθην ἐκ τῆς ἐγγείου πιστώσεως φρ. 20,000 πόσα φράγκα θέλω πληρώσει κατ' ἔτος ὅπως ἀποσβέσω τὸ χρέος τοῦτο χρεωλυτικῶς ἐπὶ 15 ἔτη ;

Ἐὰν τὸ πληρωτέον χρεώλυτρον δι' 100 φρ. ἐπὶ 15 ἔτη ᾖ 40,155528

» » » 20000 » θέλει εἶσθαι

$$\frac{40,155528 \times 20000}{100} = 40,155528 \times 200 = \text{φρ. } 2031,1056.$$

ἵνα δὲ ἐξασκηθῶμεν πρὸς ἀνεύρεσιν ἐκάστου τῶν ἐν τῷ πίνακι χρεωλύτρων, διαιροῦμεν ἕκαστον ἀριθμὸν διὰ 2, καὶ διπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐτῶν διὰ νὰ εὕρωμεν χρονικὰ διαστήματα ἐξαμηνία. Ἄς λάβωμεν διὰ παράδειγμα τὸ τρίτον χρεώλυτρον.

Πρὸς ἀπαλλαγὴν δανείου 100 φρ. εἰς 12 ἔτη, πληρώνομεν εἰς τὴν ἐταιρίαν φρ. 5,891282 καθ' ἐκάστην ἐξαμηνίαν. Τὸ ποσὸν τοῦτο σύγκειται

ἀπὸ φρ. 2,50 τόκον 100 φρ.

» 0,30 ἔξοδα διαχειρίσεως

» 3,091282 ποσὸν, ὅπερ, σὺν τοῖς κεφαλαιοποιουμένοις καθ' ἐκάστην ἐξαμηνίαν τόκοις πρόκειται νὰ ἀποσβέσῃ τὸ χρέος εἰς τὸ τέλος 12 ἐτῶν, ἢ 24 ἐξαμηνίων.

Τὸ ποσὸν τοῦτο τῶν φρ. 3,091282 δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\alpha = \frac{A\tau}{[1+\tau]^n} \text{ ἢ } A \frac{\tau}{[1+\tau]^n}$$

ἐν ᾧ πολλαπλασιάζεται τὸ δανεισθὲν ποσὸν A ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον τῆς ρεωλυσίας ἢ τοκοχρεωλύσειν $\frac{\tau}{[1+\tau]^n}$

$$A = 100, \quad n = 24 \text{ καὶ } \tau = 0,025$$

