

ΒΕΡΟΙΑΣ

5

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΒΕΡΟΙΑΣ

1500

Αριθ. λίστ. 3465/1962

ΛΟΡΕΛ

Βασιλειάδου
Αικατερίνη





ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΕΝ ΤΟΙΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΙΣ ΜΑΘΗΤΕΥΟΝΤΩΝ

ΥΠΟ

ΑΥΤΩΝΙΟΥ Β. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΥ

ΚΛΗΡΗΤΟΥ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ



ΑΘΗΝΗΣΙ

ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΤΗΣ ΦΙΛΟΚΑΛΙΑΣ

26 — ΟΔΟΣ ΣΟΦΟΚΛΕΟΥΣ — 26

1877

Εθνική Κεντρική Βιβλιοθήκη Αθηνών

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ἡμετέραν σφραγίδα ἐπὶ τοῦ ἐξωφύλλου
καὶ ἐπὶ τῆς παρούσης σελίδος μετὰ τῆς ἰδιοχείρου ἡμῶν ὑπογραφῆς.



$$2X + 10X = 100$$

$$100$$

$$100$$

$$\begin{array}{r} 100 \overline{) 1200} \\ \underline{400} \\ 800 \\ \underline{800} \\ 0 \end{array}$$

$$X$$

$$100 - X$$

$$X \cdot 7 = 100 - X \cdot 5$$

Αρχιμ. Απ. Ταμπεδάτος

ΤΩ

ΦΙΛΟΜΟΥΣΩ ΚΑΙ ΣΕΒΑΣΤΩ ΜΟΙ

ΚΥΡΙΩ

ΝΙΚΟΛΑΩ Ι. ΚΑΓΚΑΔΗ

ΤΗΝΔΕ ΤΗΝ ΣΥΓΓΡΑΦΗΝ

ΕΙΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΤΕΚΜΗΡΙΟΝ

ΟΦΕΙΛΟΜΕΝΩΝ ΕΥΧΑΡΙΣΤΗΣΕΩΝ

ΑΝΤΙΘΗΜΙ

$$\frac{2x}{3} - \frac{x}{4}$$

$$\frac{2x \cdot 12}{3 \cdot 12} - \frac{x \cdot 3}{4 \cdot 3}$$

$$\frac{8x \cdot 12}{3} - \frac{x \cdot 12}{4}$$

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Εἶναι γνωστὸν τοῖς πᾶσιν, ὅτι ἵνα τις γείνη κάτοχος ἐπιστήμης τινὸς πρέπει α') νὰ ἐννοήσῃ καλῶς αὐτήν, β') νὰ ἐκμάθῃ καλῶς τὰ ἐννοηθέντα καὶ γ') νὰ δύναται νὰ ἐφαρμόζῃ ἐπιτυχῶς καὶ καταλλήλως τὰ μεμαθημένα. Ἄνευ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου τὸ τρίτον εἶναι ἀδύνατον, ἄνευ δὲ τοῦ τρίτου τὰ δύο πρῶτα εἶναι ἀνωφελῆ. Ἴνα π. χ. γείνη τις καλὸς Ναυτικός, δὲν ἀρκεῖ νὰ ἐννοήσῃ καλῶς καὶ ἐκμάθῃ πῶς εὐρίσκεται τὸ μῆκος καὶ πλάτος τόπου τινός, πῶς ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου, πῶς προσδιορίζεται ἡ θέσις αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ χάρτου κτλ., ἀλλὰ πρέπει ἐπὶ τοῦ πλοίου εὐρισκόμενος καὶ ἔχων ἀνὰ χεῖρας τὸν ἐξάντα, τὸ χρονόμετρον, τὸ δρομόμετρον καὶ τὰ λοιπὰ ἀναγκαῖα τῆς Ναυτικῆς ἐργαλεία, νὰ δύναται νὰ προσδιορίζῃ ταχέως καὶ ἀσφαλῶς ἕκαστον τῶν ζητουμένων. Τοῦτ' αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν καὶ περὶ τοῦ ἐν τοῖς Γυμνασίοις διδασκομένου μαθήματος τῆς Ἀλγέβρας· δὲν ἀρκεῖ π. χ. νὰ ἐννοήσῃ τις καλῶς καὶ ἐκμάθῃ τοὺς κανόνας, καθ' οὓς ἐκτελεῖται ἡ ἀλγεβρικὴ διαίρεσις, λύεται μία ἢ πλεονέστεραι ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ μετ' ἰσαριθμῶν ἀγνώστων κτλ., ἀλλὰ καὶ πρέπει, δοθέντων δύο ἀλγεβρικῶν πολυωνύμων, μιᾶς ἢ πλεονέστερων πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων κτλ., νὰ δύναται νὰ ἐφαρμόζῃ ταχέως καὶ ἀσφαλῶς ἐπὶ τούτων τοὺς κανόνας τῶν πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου ἐκτελεστέων πράξεων, τοῦθ' ὅπερ καὶ οὐσιωδέστατον εἶναι καὶ δυσκολώτατον ἀποβαίνει εἰς τὸν μὴ καλῶς ἐπὶ πλεονέστερων καὶ καταλλήλων παραδειγμάτων ἀσκηθέντα μαθητὴν, ὥσθ' εὐφυῆς καὶ ἂν ἦναι οὗτος. Πολυετῆς πείρα παρέσχε καὶ παρέχει ἡμῖν καθεκάστην ἀναριθμήτους τούτου ἀποδείξεις.

Τὰ ἀνωτέρω εἰχόμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτε ἐπεχειρίσαμεν τὴν συγγραφὴν τῶν Ἀλγεβρικῶν ἡμῶν Μαθημάτων, ἐπειδὴ δὲ ἐσκέφθημεν ὅτι εἰς μὲν τὸν διδάσκοντα Καθηγητὴν ἀποβαίνει πολλάκις δύσκολον, ἵνα μὴ εἰπώμεν ἀδύνατον, τὸ νὰ παρέχῃ ἕκαστοτε εἰς πάντας αὐτοῦ τοὺς μαθητὰς τὰς ἀναγκαῖας ὁδηγίας ἐπὶ πολλῶν καὶ διαφόρων παραδειγμάτων πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν διδαχθεῖσων θεωριῶν, εἰς ἡμᾶς δὲ ἦτο ἐπίσης ἀδύνατον νὰ

παρενθέσωμεν ἐντὸς τοῦ κειμένου ἐπαρκῆ πρὸς τοῦτο ἀριθμὸν καταλήλων παραδειγμάτων, χωρὶς νὰ διασπάσωμεν τὴν ἀλληλουχίαν καὶ τὸν ἐπιστημονικὸν σύνδεσμον τῶν διαφορῶν τῆς Ἀλγέβρας μερῶν, ἀπεφασίσαμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ ὅλον τῆς συγγραφῆς εἰς δύο κεχωρισμένα ἀπ' ἀλλήλων μέρη, καὶ ἐν μὲν τῷ Α', τῷ καὶ ἀνὰ χεῖρας, ἐκθέτομεν μετὰ πάσης τῆς δυνατῆς ἡμῖν σαφηνείας τὰ ὑπὸ τοῦ ἐπισήμου προγράμματος πρὸς διδασκαλίαν ἀπαιτούμενα μετὰ τῶν ἀπολύτως ἀναγκαίων πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν ἐκτιθεμένων θεωριῶν παραδειγμάτων· ἐν δὲ τῷ Β' ἐφαρμόζομεν ἐπὶ πολλῶν καὶ καταλήλων παραδειγμάτων καὶ ἐπὶ πλείστων καὶ διαφορῶν προβλημάτων τὰς διαφοροὺς ἀλγεβρικὰς θεωρίας, παρέχοντες πάντοτε καθ' ὅλως ἰδιαίτερον τρόπον εἰς τοὺς διδασκομένους τὰς ἀναγκαίας ἐκάστοτε ὁδηγίας πρὸς ἀσφαλῆ καὶ ταχεῖαν ἐκτέλεσιν τῶν διαφορῶν ἐπὶ τῶν δεδομένων πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου πράξεων. Οὕτως ἐλπίζομεν ὅτι θέλομεν μεγάλως ὑποβοηθήσει τοὺς ἐπιμελεῖς μαθητὰς πρὸς ἀπόκτησιν τοῦ τρίτου καὶ ἀναγκαιοτάτου διὰ τὴν ἐκμάθησιν τῆς Ἀλγέβρας προσόντος, τοῦ ἐφαρμόζειν δηλαδὴ ταχέως καὶ ἀσφαλῶς τὰ μεμαθημένα.

Χάριν τῶν Ἑλλήνων σπουδαστῶν ἐξεδώσαμεν ἰδιαιτέρως καὶ στερεοτύπως, δι' οὗς ἐκθέτομεν ἐν τῷ προλόγῳ αὐτοῦ λόγους, πῖνακα τῶν κατὰ τὸν Καλλέτον λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 50700, ἐξεδώσαμεν δ' αὐτὸν χωριστά, ἵνα δύνανται καὶ οἱ μὴ ἔχοντες τὴν ἡμετέραν Ἀλγεβραν μαθηταὶ δι' ἐλαχίστης δαπάνης νὰ ἀποκτήσωσιν αὐτόν, οὗ ἄνευ ἢ κατανόησις τῆς χρήσεως καὶ ὠφελιμότητος τῶν λογαρίθμων ἀποδοίνει ἀδύνατος.

Ἐν Ἀθήναις, τῇ 20 Φεβρουαρίου 1877.

Α. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΣ



ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

	Σελ.
Κεφ. Α'. Προκαταρκτικαὶ τινες γνώσεις. — Ὅρισμοὶ τινες	1
Κεφ. Β'. Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις. — Ἀναγωγή τῶν ὁμοίων ὄρων. — Διάταξις καὶ βαθμὸς τῶν πολυωνύμων.	7
Κεφ. Γ'. Πολλαπλασιασμός. — Γινόμενα πολλῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.	14
Κεφ. Δ'. Διαίρεσις. — Πότε δὲν διαιρεῖται πολυώνυμον δι' ἑτέρου. . .	24
Κεφ. Ε'. Ἀλγεβρικὰ κλάσματα. — Πρόσθεσις. — Ἀφαίρεσις. — Πολλαπλασιασμός. — Διαίρεσις.	36

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Κεφ. Α'. Ὅρισμοὶ τινες. — Λύσις τῶν μὲ μίαν ἄγνωστον πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων.	43
Κεφ. Β'. Λύσις ἀλγεβρικῶν προβλημάτων. — Ἐφαρμογαὶ τινες. . . .	52
Κεφ. Γ'. Ὅρισμοὶ τινες. — Μέθοδοι πρὸς λύσιν ὁσωνδήποτε πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαριθμῶν ἀγνώστων.	60
Κεφ. Δ'. Θεωρήματα, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἐκάστη τῶν προσκεθεθεσῶν μεθόδων. — Λύσις προβλημάτων τινῶν.	76
Κεφ. Ε'. Ἀρνητικαὶ λύσεις. — Σύμβολα τοῦ ἀδυνάτου καὶ ἀπροσδιορίστου τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων.	91
Κεφ. ς'. Γενικοὶ τύποι διὰ τὴν λύσιν δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαριθμῶν ἀγνώστων. — Διασκόπησις αὐτῶν. — Περὶ ἀνισοτήτων.	114
Κεφ. ζ'. Ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ. — Ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $ax + b\psi = \gamma$. — Ἐφαρμογαί.	128

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Κεφ. Α'. Τετράγωνα καὶ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.	183
---	-----

	Σελ.
Κεφ. Β'. Ὅρισμοί τινες. — Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις. — Πολλαπλασιασμός. — Ἀπλοποιήσις. — Διαίρεσις τῶν ῥιζικῶν.	165
Κεφ. Γ'. Λύσεις τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων. — Σχέσεις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ ῥιζῶν τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων. . .	170
Κεφ. Δ'. Λύσεις προβλημάτων τινῶν ἐξαρτωμένων ἐκ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων.	181
Κεφ. Ε'. Διασκόπησις τῶν ῥιζῶν τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων καὶ προβλημάτων τινῶν ἐξαρτωμένων ἐκ τοιούτων.	190

ΒΙΒΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΠΡΟΟΔΟΙ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΗ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Κεφ. Α'. Ἀριθμητικαὶ πρόοδοι. — Γεωμετρικαὶ πρόοδοι.	199
Κεφ. Β'. Συνεχῆ κλάσματα. — Νόμος καθ' ὃν σχηματίζονται τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα. — Ἰδιότητες τῶν ἡγμένων. — Ἐφαρμογαὶ τινες τῶν συνεχῶν κλασμάτων.	214

ΒΙΒΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ, ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Κεφ. Α'. Δυνάμεις καὶ ῥίζαι τῶν μονωνύμων. — Ὅρισμοί τινες.	240
Κεφ. Β'. Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις. — Πολλαπλασιασμός. — Ἀπλοποιήσις καὶ διαίρεσις τῶν ῥιζικῶν.	244
Κεφ. Γ'. Ὑψώσεις εἰς δυνάμεις καὶ ἐξαγωγή ῥιζῶν τῶν ῥιζικῶν. — Ἀναγωγή πλειοτέρων ῥιζικῶν εἰς τὸν αὐτὸν δείκτην.	248
Κεφ. Δ'. Κλασματικοὶ ἐκθέται. — Ἀρνητικοὶ ἐκθέται.	251
Κεφ. Ε'. Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις. — Λύσεις τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως α' = β	257
Κεφ. ς'. Λογάρισμοι καὶ ἰδιότητες αὐτῶν. — Ἀρχικὸς ὁρισμὸς τῶν λογαριθμῶν. — Νεπεριανοὶ καὶ κοινοὶ λογάριθμοι.	263
Κεφ. ζ'. Ἐξήγησις καὶ χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τοῦ Καλλέτου. — Πρόβλημα πρῶτον. — Πρόβλημα δεύτερον.	275
Κεφ. η'. Ἐφαρμογαὶ τινες τῶν λογαριθμῶν εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς. — Προβλήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ. — Προβλήματα χρονολογίας.	285

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΤΙΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ. — ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΙΝΕΣ

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΤΙΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

1. Ἀλγεβρα καλεῖται τὸ μέρος τῶν Μαθηματικῶν Ἐπιστημῶν, οὗ-
τινος ἔν τῶν εἰδικωτέρων ἀντικειμένων εἶναι ἡ λύσις προβλημάτων, του-
τέστιν ἡ εὑρεσις τῶν κατὰ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος ἐκτελεστέων
ἐπὶ γνωσῶν καὶ δεδομένων ἀριθμῶν ἢ ποσῶν πράξεων πρὸς εὑρεσιν τοῦ
ζητουμένου ἢ τῶν ζητουμένων, ὅταν ταῦτα ᾖναι πλείονερα τοῦ ἑνός.
Πρὸς εὐκολωτέραν δὲ εὑρεσιν τούτων καὶ πρὸς συντομωτέραν παράστα-
σιν αὐτῶν τε καὶ τῶν ἐκτελεστέων πράξεων μεταχειρίζεται αὕτη ἴδια
σύμβολα καὶ σημεῖα· εἶναι δὲ ταῦτα

1^{ον}. Τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου $a, b, \gamma, \delta, \dots \varphi, \chi, \psi, \omega$, ἅτινα
μεταχειρίζονται πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν ἢ τῶν ποσῶν, καὶ διὰ
μὲν τῶν πρώτων γραμμάτων a, b, γ, δ κτλ. παριστῶσι συνήθως γνω-
στὰς ποσότητας, διὰ δὲ τῶν τελευταίων $\varphi, \chi, \psi, \omega$ ἀγνωστούς.

2^{ον}. Τὸ σημεῖον $+$, ὅπερ ἀπαγγέλλεται *σὺν* ἢ *πλέον* καὶ σημαίνει
πρόσθεσιν. Οὕτως ἡ παράστασις $a + b$ ἀπαγγέλλεται *a σὺν b* ἢ *a πλέον*
b, καὶ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων a καὶ b .

3^{ον}. Τὸ σημεῖον $-$, ὅπερ ἀπαγγέλλεται *πλήν* ἢ *μείον* καὶ σημαίνει
ἀφαίρεσιν. Οὕτως ἡ παράστασις $a - b$ ἀπαγγέλλεται *a πλήν b* ἢ *a μείον*
b, καὶ παριστᾷ τὴν διαφορὰν τῆς ποσότητος b ἀπὸ τῆς a .

Αἱ ἀλγεβρικαὶ ποσότητες, αἱ ἔχουσαι πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον $+$, κα-
λοῦνται *θετικάι*, αἱ δὲ φέρουσαι τὸ σημεῖον $-$ καλοῦνται *ἀρνητικάι*.

Π. χ. αἱ ποσότητες $+a$, $+b$ εἶναι θετικάι, αἱ δὲ $-a$, $-b$ ἀρνητικάι. Πᾶσα ἀλγεβρική ποσότης, οὐδὲν πρὸ αὐτῆς ἔχουσα σημεῖον, ἐννοεῖται φέρουσα τὸ σημεῖον $+$ καὶ λαμβάνεται ὡς θετική. Π. χ. ἀντὶ νὰ γράψωμεν $+a$, $+b$, γράφομεν ἀπλῶς a , b .

4^η. Τὸ σημεῖον $\times$, ὅπερ ἀπαγγέλλεται ἐπὶ καὶ σημαίνει πολλαπλασιασμόν. Οὕτως ἡ παράστασις $a \times b$ ἀπαγγέλλεται a ἐπὶ b , καὶ παρίστανται τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν a καὶ b .

Ἐνίοτε μεταχειρίζονται ἀντὶ τοῦ σημείου $\times$ μίαν τελείαν στιγμὴν, ἣν θέτουσι μεταξὺ τῶν πολλαπλασιαστέων ἀριθμῶν. Παραδείγματος χάριν ἀντὶ νὰ γράψωσιν $a \times b$, παριστῶσι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα γράφοντες $a \cdot b$. Ἄλλ' ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον πρὸς συντομωτέραν παράστασιν τῆς πράξεως ταύτης γράρουν τοὺς πολλαπλασιαστέους ἀριθμοὺς τὸν ἓνα κατόπιν τοῦ ἄλλου ἄνευ τινὸς μεταξὺ αὐτῶν σημείου. Οὕτως ἡ παράστασις ab σημαίνει τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν a καὶ b ἢ ἡ παράστασις $\dot{b}a$ σημαίνει τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν $\dot{b}$ καὶ a . Ἄν εἴχομεν νὰ παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν $\dot{b}$ καὶ 7 , ἠθέλομεν γράψαι ἢ $\dot{b} \times 7$ ἢ $\dot{b} \cdot 7$, οὐδέποτε δὲ $\dot{b}7$, ἄνευ τινὸς δηλαδὴ μεταξὺ αὐτῶν σημείου, διότι τότε ἔθελε συγχέσθαι τὸ γινόμενον τοῦ $\dot{b}$ ἐπὶ 7 μὲ τὸν ἀριθμὸν $\dot{b}7$.

Ὅταν ὁ εἰς τῶν παραγόντων γινομένου τινὸς ᾖ ἀριθμητικός, ὡς ὁ παράγων $\dot{b}$ τοῦ ἀνωτέρω γινομένου $\dot{b}a$, τότε ὁ παράγων οὗτος ὀνομάζεται μερικώτερον συντελεστής, γράφεται δὲ πάντοτε πρῶτος. Οἱ ἐν ταῖς γινομένοις $3ab$, $8ab$, $\frac{2}{3}a$ ἀριθμητικοὶ παράγοντες 8 , 3 , $\frac{2}{3}$ λέγονται συντελεσταί. Ὅταν ὁ συντελεστής ᾖ ἴσος τῇ μονάδι, τότε δὲν γράφεται. Παραδείγματος χάριν, ἡ παράστασις a ὑποτίθεται ὅτι ἔχει συντελεστὴν τὴν μονάδα.

5^η. Τὸ σημεῖον $:$, ὅπερ ἀπαγγέλλεται διὰ καὶ σημαίνει διαίρεσιν. Οὕτως ἡ παράστασις $a:b$ ἀπαγγέλλεται a διὰ b . Συνηθέστερον ἢ διαίρεσις παρίσταται διὰ τοῦ σημείου $-$, γραφομένου ἐπ' αὐτοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ ὑπ' αὐτοῦ τοῦ διαιρέτου. Οὕτως $\frac{a}{b}$ παρίστανται ὅτι καὶ $a:b$.

6^η. Τὸν ἐκθέτην, ὅστις εἶναι ἀριθμὸς γραφόμενος πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνωθεν ἐτέρου καὶ δεικνύων ποσάκις ὁ δευτερός οὗτος λαμβάνεται ὡς παράγων. Παραδείγματος χάριν, ἡ παράστασις a^3 ἀπαγγέλλεται ἄλφα τρίτη καὶ σημαίνει ὅτι ὁ ὑπὸ τοῦ a παριστώμενος ἀριθμὸς λαμβάνεται τρίς ὡς παράγων ἐν ἄλλαις λέξεσιν a^3 παρίστανται συντομώ-

τερον ὅ,τι καὶ τὸ γινόμενον $a \times a \times a$ ἢ τὸ aaa . Ἡ παράστασις θ^3 ἀπαγγέλλεται βῆτα πέμπτη καὶ παριστᾷ ὅ,τι καὶ ἡ $\theta \times \theta \times \theta \times \theta \times \theta$ ἢ $\theta\theta\theta\theta\theta$.

Τὸ γινόμενον πολλῶν ἴσων παραγόντων καλεῖται δύναμις τοῦ παράγοντος τούτου. Παραδείγματος χάριν, τὰ ἀνωτέρω γινόμενα $a \times a \times a$ καὶ $\theta \times \theta \times \theta \times \theta \times \theta$, ἢ τὰ a^3 καὶ θ^5 , καλοῦνται δυνάμεις, τὸ μὲν a^3 τοῦ παράγοντος a , τὸ δὲ θ^5 τοῦ παράγοντος θ . Οἱ ἐκθέται αὐτῶν 3 καὶ 5 παριστῶσι τοὺς βαθμοὺς τῶν δυνάμεων τούτων, ὁ μὲν 3 τῆς δυνάμεως a^3 , ὁ δὲ 5 τῆς δυνάμεως θ^5 .

Ἡ δευτέρα δύναμις ποσότητός τινος καλεῖται συνηθέστερον τετράγωνον τῆς ποσότητος ταύτης, ἡ δὲ τρίτη δύναμις κύβος αὐτῆς. Π. χ. τὸ a^2 ἀπαγγέλλεται ἄλφα δευτέρα καὶ συνηθέστερον ἄλφα τετράγωνον· τὸ a^3 ἀπαγγέλλεται ἄλφα τρίτη καὶ ἄλφα κύβος. Ὅταν ποσότης τις a δὲν ἔχῃ ἐκθέτην, ὑποτίθεται ὅτι ἔχει τὴν μονάδα, ἥτις ὅμως συνηθῶς δὲν γράφεται, καλεῖται δὲ αὕτη ἐξ ἀναλογίας πρώτη δύναμις τοῦ a , ἂν καὶ πράγματι δὲν εἴναι δύναμις, διότι δὲν παριστᾷ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἴσων αὐτῇ, ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτῆς ἐπὶ τὴν μονάδα. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν ἡ παράστασις

$$7a^3\theta^4\chi^2$$

ἀπαγγέλλεται ἑπτὰ ἄλφα κύβος, βῆτα τετάρτη, χι τετράγωνον καὶ παριστᾷ τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ a , τὴν τετάρτην τοῦ θ καὶ τὴν δευτέραν τοῦ χ .

7^{ον}. Τὸ σημεῖον $\sqrt{}$, ὅπερ καλεῖται ριζικόν καὶ σημαίνει ἐξαγωγήν ρίζης τινὸς τῆς ὑπ' αὐτὸ γραφομένης ποσότητος. Ρίζα δὲ ποσότητός τινος καλεῖται ἑτέρα τις ποσότης, ἥς δύναμις τις ἀναπαράγει τὴν δεδομένην. Ὁ ἀριθμὸς, ὅστις δεικνύει εἰς ποίαν δύναμιν πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἡ ζητούμενη ποσότης, ἵνα ἀναπαράγῃ τὴν ὑπὸ τὸ ριζικόν, καλεῖται δείκτης τοῦ ριζικοῦ καὶ γράφεται εἰς τὸ ἀνοιγμα τῆς ὑπ' αὐτοῦ σχηματιζομένης γωνίας. Π. χ. ἡ παράστασις $\sqrt[3]{a^6}$ σημαίνει ὅτι ζητεῖται νὰ ἐξαχθῇ ἡ τρίτη ρίζα τῆς ὑπορρίζου ποσότητος a^6 , τουτέστι νὰ εὑρεθῇ ἑτέρα τις ποσότης a^2 , ἥς ἡ τρίτη δύναμις $a^2 \times a^2 \times a^2$ νὰ ἀναπαράγῃ τὴν ὑπόρριζον a^6 . Ὅταν ὁ δείκτης τῶν ριζικῶν ᾖ 2, τότε οὗτος παραλείπεται ὡς εὐκόλως κατὰ συνθήκην νοούμενος. Π. χ. ἡ δευτέρα ρίζα τοῦ a^4 παρίσταται πάντοτε οὕτω $\sqrt{a^4}$ καὶ οὐχὶ οὕτω $\sqrt[2]{a^4}$.

8^{ον}. Τὸ σημεῖον $=$, ὅπερ ἀπαγγέλλεται ἴσον καὶ σημαίνει ὅτι τὰ

ἐκατέρωθεν αὐτοῦ γραφόμενα μέρη εἶναι ἴσα. Παραδείγματος χάριν, ἡ παράστασις $a + b = \gamma - \delta$ σημαίνει ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ a καὶ b εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ γ καὶ δ . Τὰ διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος συνδεόμενα μέρη καλοῦνται μέλη τῆς ἰσότητος, καὶ τὸ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ μέρος $a + b$ καλεῖται πρῶτον μέρος αὐτῆς, τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ $\gamma - \delta$ δεύτερον μέρος.

9^α. Τὰ σημεία $>$ καὶ $<$, ὧν τὸ μὲν πρῶτον $>$ ἀπαγγέλλεται μεῖζον ἢ μεγαλειότερον, τὸ δὲ δεύτερον $<$ ἔλασσον ἢ μικρότερον. Παραδείγματος χάριν, ἡ μὲν παράστασις $a > b$ ἀπαγγέλλεται ἄλλα μεγαλειότερον τοῦ βῆτα, καὶ σημαίνει ὅτι ἡ ποσότης a , ἡ εἰς τὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας αὐτοῦ γραφομένη, εἶναι μεγαλειτέρα τῆς εἰς τὴν κορυφὴν ὑπαρχούσης b ἢ δὲ παράστασις $\gamma < \delta$ ἀπαγγέλλεται γάμμα μικρότερον τοῦ δέλτα, καὶ σημαίνει ὅτι ἡ ποσότης γ , ἡ εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὑπὸ τοῦ σημείου τούτου παριστωμένης γωνίας γραφομένη, εἶναι μικροτέρα τῆς εἰς τὸ ἄνοιγμα αὐτῆς ὑπαρχούσης δ .

Ὡσαύτως, ἡ παράστασις $3a^2 - 2ab + 4b^2 > 4a^2 - 8ab + 3b^2$ ἀπαγγέλλεται τρία ἄλλα τετράγωνον, πλὴν δύο ἄλλα βῆτα, σὺν τέσσαρα βῆτα τετράγωνον μεγαλειότερον τοῦ τέσσαρα ἄλλα τετράγωνον, πλὴν ὀκτώ ἄλλα βῆτα, σὺν τρία βῆτα τετράγωνον καὶ σημαίνει ὅτι ἡ εἰς τὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας τοῦ σημείου γεγραμμένη ποσότης εἶναι μεγαλειτέρα τῆς εἰς τὴν κορυφὴν αὐτοῦ ὑπαρχούσης.

10^α. Τὰς παρενθέσεις (), ὡσάντις πρόκειται νὰ σημειωθῇ, ὅτι πρᾶξις τις πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ ἐπὶ ἐξαγομένων ἄλλων πράξεων, αἵτινες ἢ δὲν ἐξετελέσθησαν ἢ δὲν δύνανται νὰ ἐκτελεσθῶσι. Παραδείγματος χάριν, ἡ παράστασις $a - (b + 2)$ σημαίνει ὅτι ἀπὸ τῆς ποσότητος a πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα $b + 2$, ὅπερ δὲν εὐρέθῃ εἰσέτι. Ὡσαύτως, ἡ παράστασις $a - (\gamma - \delta)$ σημαίνει ὅτι ἀπὸ τῆς ποσότητος a πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορὰ $\gamma - \delta$, ἥτις δὲν δύναται νὰ εὐρεθῇ, τουτέστι δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ἀπλούστερον δι' ἑνὸς μόνου γράμματος. Ἡ παράστασις $(3a - 2b)(4a + 3b)$ σημαίνει ὅτι ἡ διαφορὰ $3a - 2b$, ἥτις δὲν δύναται νὰ εὐρεθῇ, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $4a + 3b$, ὅπερ ἐπίσης δὲν δύναται νὰ εὐρεθῇ, τουτέστι νὰ παρασταθῇ ἀπλούστερον δι' ἑνὸς μόνου γράμματος.

11^α. Τὰς ἀγκύλας [], ὡσάντις πρόκειται νὰ σημειωθῇ, ὅτι πρᾶξις τις πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ ἐπὶ ἐξαγομένων ἄλλων τινῶν πράξεων σεσημειωμένων διὰ παρενθέσεων. Π. χ., ἡ παράστασις $3\gamma \times [a - (\gamma + \delta)]$ ἢ ἀπλῶς

ἡ $3\gamma[a-(\gamma+\delta)]$ σημαίνει ὅτι τὸ 3γ πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν διαφορὰν $a-(\gamma+\delta)$, ἥτις εἶναι ἤδη σεσημειωμένη διὰ παρενθέσεων. Ὡσαύτως ἡ παράστασις $(a-\delta[2\gamma-3\delta]+4[2a-\delta])$ σημαίνει ὅτι ἡ διαφορὰ $a-\delta$, ἥτις δὲν δύναται νὰ εὕρεθῇ, πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $2\gamma-3\delta+4[2a-\delta]$, ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ ὁποίου περιέχει πράξεις πρὸς ἐκτέλεσιν σεσημειωμέναι διὰ παρενθέσεων.

12^{ον}. Τοὺς μύστακας $\{ \}$, ὁσάκις πρόκειται νὰ σημειωθῇ, ὅτι πράξις τις πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ ἐπὶ ἐξαγομένων ἄλλων πράξεων σεσημειωμένων δι' ἀγκυλῶν. Παραδείγματος χάριν ἡ παράστασις

$$(3a^2-2\delta^2)\{3\gamma[2a-(3\delta+\gamma)a+2\delta]-3\gamma\}$$

σημαίνει ὅτι ἡ διαφορὰ $3a^2-2\delta^2$ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν παράστασιν $3\gamma[2a-(3\delta+\gamma)a+2\delta]-3\gamma$, ἥτις περιέχει μετὰξὺ τῶν μερῶν αὐτῆς πράξεις σεσημειωμένας δι' ἀγκυλῶν.

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΙΝΕΣ

2. Καλεῖται ἀλγεβρική παράστασις σειρὰ τις πράξεων σεσημειωμένων διὰ τῶν ἀνωτέρω σημείων καὶ συμβόλων καὶ μόνων τούτων, ἐκτελεστέων δὲ ἐπὶ ἀριθμῶν καὶ ἐπὶ ποσοτήτων παριστωμένων διὰ γραμμάτων. Παραδείγματος χάριν τὰ ἐπόμενα

$$3a^2\delta-4\sqrt{a^3}+\frac{5a^3-8\sqrt{\delta}\gamma^3}{3a-\delta} \text{ καὶ } 4a^3\delta^3-6a^2\delta^3+\frac{3a^6-7a^2\delta^4}{4a-3\delta}$$

εἶναι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.

Αἱ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις διακροῦνται εἰς δύο μεγάλας τάξεις· εἰς ἐλλόγους ἢ ρητάς, καὶ ἀλόγους ἢ ἀρρήτους. Ἀλγεβρική τις παράστασις καλεῖται ἄλογος ἢ ἀρρήτος, ὅταν περιέχῃ ἐν ἑαυτῇ τὸ ῥιζικὸν σημείον, καὶ τοιαύτη εἶναι ἡ πρώτη τῶν ἀνωτέρω δύο· καλεῖται δὲ ἔλλογος ἢ ρητή, ὅταν δὲ περιέχῃ τοῦτο, καὶ τοιαύτη εἶναι ἡ δευτέρα αὐτῶν.

Αἱ ρηταὶ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις ὑποδιακροῦνται πάλιν εἰς ἀκεραίας καὶ κλασματικές. Ῥητὴ δὲ τις ἀλγεβρική παράστασις λέγεται ἀκεραία, ὅταν δὲν περιέχῃ ἐν ἑαυτῇ τὸ σημεῖον τῆς διαίρεσεως, τοιαύτη εἶναι, παραδείγματος χάριν, ἡ ἐξῆς $3a^3\delta^2-5a^2\delta^3+8a^2\delta\gamma$. κλασματικὴ δὲ, ὅταν περιέχῃ τοῦτο, τοιαύτη δὲ εἶναι ἡ ἐξῆς $3a^2-\frac{2\gamma^3+4\delta\epsilon^2}{5\delta}$.

Ἀλγεβρική τις ἀκεραία παράστασις λέγεται *μονώνυμος*, ὅταν δὲν

περιέχει μεταξὺ τῶν μερῶν αὐτῆς οὔτε τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως οὔτε τὸ τῆς ἀφαιρέσεως. Π. χ. αἱ παραστάσεις $3a^3b^2$, $-6a^2b^3$, $+8a^4b^3$ εἶναι μονώνυμα, διότι δὲν περιέχουσι μεταξὺ τῶν μερῶν αὐτῶν οὔτε τὸ σημεῖον $+$ οὔτε τὸ σημεῖον $-$. Ἡ ἐκ δύο μονωνύμων ἀποτελουμένη ἀλγεβρική παράστασις καλεῖται *δυνάμυς*· ἡ ἐκ τριῶν *τριώνυμος*· ἡ ἐκ τεσσάρων *τετραώνυμος*, καὶ ἐν γένει ἡ ἐκ πλειοτέρων τοῦ ἐνός *πολυώνυμος*. Τὰ ἀποτελοῦντα τὸ πολυνόμιον μονώνυμα καλοῦνται καὶ ὅροι τοῦ πολυνόμιου. Παράδ. χάριν, ἡ παράστασις $3a^3 - 5a^2b$ εἶναι δυνάμυς, ἡ δὲ $-2a^2b^2 + 4a^3b - 6b^3$ εἶναι τριώνυμος, καὶ ἡ $5a^3b^2 + 6a^2b^3 - a^3b^2 + a^5$ εἶναι ἐν γένει πολυνόμιον. Ὅροι τοῦ πρώτου πολυνόμιου $3a^3 - 5a^2b$ εἶναι οἱ $3a^3$ καὶ $-5a^2b$. οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου πολυνόμιου εἶναι οἱ $-2a^2b^2$, $+4a^3b$, $-6b^3$, καὶ οἱ ὅροι τοῦ τρίτου πολυνόμιου εἶναι οἱ $5a^3b^2$, $+6a^2b^3$, $-a^3b^2$, $+a^5$.

Ἐν παντὶ μονωνύμῳ ἡ ὁρῶ διακρίνομεν τέσσαρά τινα· $1^{\text{ον}}$ τὸ σημεῖον αὐτοῦ, ἂν τοῦτο ᾖ $+$ ἢ $-$, $2^{\text{ον}}$ τὸν συντελεστήν αὐτοῦ, $3^{\text{ον}}$ τὰ διάφορα ἐν αὐτῷ γράμματα καὶ $4^{\text{ον}}$ τοὺς ἀμοιβαίους αὐτῶν ἐκθέτας. Π. χ. τοῦ μονωνόμου $-43a^3b^2\gamma$ τὸ μὲν σημεῖον εἶναι $-$, ὁ συντελεστὴς 43, τὰ διάφορα ἐν αὐτῷ γράμματα a , b , γ καὶ οἱ ἀμοιβαῖοι αὐτῶν ἐκθέταις 3, 2 καὶ 1. Τοῦτου δὲ τεθέντος, δύο μονώνυμα ἢ ὅροι λέγονται *ὅμοιοι*, ὅταν ἔχωσι τὰ αὐτὰ γράμματα μὲ τοὺς αὐτοὺς ἀμοιβαίως ἐκθέτας. Π. χ. τὰ μονώνυμα $+7a^3b^2\chi$ καὶ $-11a^3b^2\chi$, ἅτινα ἔχουσι διάφορα σημεῖα καὶ διαφόρους συντελεστάς, εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι τὰ αὐτὰ γράμματα a , b , χ μὲ τοὺς αὐτοὺς ἀμοιβαίως ἐκθέτας, τουτέστιν ὁ ἐκθέτης 3 τοῦ a ἐν τῷ πρώτῳ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ἐκθέτην 3 τοῦ a ἐν τῷ δευτέρῳ· ὁ ἐκθέτης 2 τοῦ b ἐν τῷ πρώτῳ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ἐκθέτην 2 τοῦ b ἐν τῷ δευτέρῳ, καὶ ὁ ἐκθέτης 1 τοῦ χ ἐν τῷ πρώτῳ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ἐκθέτην 1 τοῦ χ ἐν τῷ δευτέρῳ. Ὡσαύτως τὰ μονώνυμα $-8a^2b^3d^2$ καὶ $+12a^2b^3d^2$ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι τὰ αὐτὰ γράμματα a , b , d , e μὲ τοὺς αὐτοὺς ἀμοιβαίως ἐκθέτας 2, 3, 2 καὶ 1, ἂν καὶ ἔχουσι διαφόρους συντελεστάς καὶ διάφορα πρὸ αὐτῶν σημεῖα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ. — ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ. —
ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΚΑΙ ΒΛΘΜΟΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

3. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τῶν ἀλγεβρικῶν ποσοτήτων ἢ παραστάσεων ἐκτελοῦνται κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀπλουστάτους κανόνας·

1^{ος}. *Μονώνυμον προστίθεται εἰς μονώνυμον ἢ πολυώνυμον, εἰς γραφὴν κατόπιν τοῦ δεδομένου μονωτέρου ἢ πολυωνύμου μετὰ τὸ ἴδιον αὐτοῦ σημείον.*

Παραδείγματος χάριν, ἴνα προσθέσωμεν εἰς τὸ μονώνυμον $-3a^3b^2$ τὸ μονώνυμον $4ab^4$, θέλομεν γράψαι τὸ προσθετέον μονώνυμον $4ab^4$ κατόπιν τοῦ δεδομένου $-3a^3b^2$ μετὰ τὸ σημεῖον αὐτοῦ, ὅπερ εἶναι τὸ $+$. Οὕτω $-3a^3b^2 + 4ab^4$ παριστᾷ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $-3a^3b^2$ καὶ $4ab^4$. Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ μονώνυμον $7a^2b^3$ τὸ μονώνυμον $-6a^2b$, ἠθέλομεν γράψαι τὸ δεύτερον $-6a^2b$ κατόπιν τοῦ πρώτου $7a^2b^3$ μετὰ τὸ ἴδιον αὐτοῦ σημείον. Οὕτως $7a^2b^3 - 6a^2b$ παριστᾷ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $7a^2b^3$ καὶ $-6a^2b$. Παρομοίως, ἂν εἴχομεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ πολυώνυμον $3a^2b^2 - 4ab^3 + 7a^3b$ τὸ μονώνυμον $8a^4$ ἢ τὸ μονώνυμον $-11a^2b^2$, ἠθέλομεν εὑρεῖν τὸ πολυώνυμον $3a^2b^2 - 4ab^3 + 7a^3b + 8a^4$ ἢ τὸ $3a^2b^2 - 4ab^3 + 7a^3b - 11a^2b^2$, ἅτινα θέλουσι παριστᾶν τὰ ζητούμενα ἀλγεβρικὰ ἄθροισματα.

Αἱ ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων παραδειγμάτων ἐκτελεστέαι προσθέσεις σημειοῦνται ὡς ἐξῆς· $3a^3b^2 + (4ab^4)$, $7a^2b^3 + (-6a^2b)$, $3a^2b^2 - 4ab^3 + 7a^3b + (8a^4)$, $3a^2b^2 - 4ab^3 + 7a^3b + (-11a^2b^2)$, τιθεμένων δηλαδὴ ἐντὺς παρενθέσεων τῶν προσθετέων μονωνύμων καὶ συνδεομένων μετὰ τῶν πρώτων διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως $+$.

4. Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἀποδεικνύεται λίαν εὐκόλως καθ' ὅλας αὐτοῦ τὰς μερικότητας, θεωρουμένων τῶν ἀρνητικῶν μονωνύμων ὡς ἐξαγομένων ἀδυνάτου τινὸς ἀφαιρέσεως, ἐν ᾗ ὁ ἀφαιρετέος ὑπερέχει τὸν μειωτέον κατ' αὐτὸ τὸ μονώνυμον θετικῶς λαμβανόμενον. Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς -5 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἐξῆς ἀφαιρέσεως $7 - 12$, ἐν ᾗ ὁ ἀφαιρετέος 12 ὑπερέχει τὸν μειωτέον 7 κατὰ

5. Ὁσαύτως τὸ μονώνυμον — β δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἐξῆς ἀφαιρέσεως $\beta - 2\beta$, ἐν ᾗ δ ἀφαιρετέος 2β ὑπερέχει τὸν μειωτέον β κατὰ β . Διότι, ἀφοῦ ἀπὸ τοῦ μειωτέου 7 ἀφαιρέσωμεν 7 μονάδας ἐκ τῶν 12 τοῦ ἀφαιρετέου, θέλουσι μᾶς μείνει προφανῶς 5 πρὸς ἀφαίρεσιν, τοῦθ' ὅπερ παριστῶμεν θέτοντες πρὸ τοῦ 5 τὸ σημεῖον — τῆς ἀφαιρέσεως. Ὁσαύτως, ἀφοῦ ἀπὸ τοῦ μειωτέου β ἀφαιρέσωμεν τὸ ἐν ἐκ τῶν δύο β τοῦ ἀφαιρετέου 2β , θέλει μᾶς μείνει προφανῶς ἐν β πρὸς ἀφαίρεσιν, τοῦθ' ὅπερ παριστῶμεν θέτοντες πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον — τῆς ἀφαιρέσεως. Τούτου δὲ τεθέντος, ἂς παραστήσωμεν δι' A μονώνυμόν τι ἢ πολυνώνυμον, εἰς ᾧ προτιθέμεθα νὰ προσθέσωμεν τὸ μονώνυμον β ἢ τὸ — β . Ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ A τὸ $+\beta$ ἢ τὸ β , τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θέλει προφανῶς εἶναι $A + \beta$, τουτέστιν εὐρίσκεται γραφομένου τοῦ μονωνύμου β κατόπιν τοῦ A μὲ τὸ ἴδιον αὐτοῦ σημεῖον. Ἄλλ' ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ A τὸ μονώνυμον — β , λέγομεν πάλιν ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θέλει εἶναι $A - \beta$, τουτέστιν ὅτι εὐρίσκεται γραφομένου τοῦ β κατόπιν τοῦ A μὲ τὸ ἴδιον αὐτοῦ σημεῖον. Διότι ἀντὶ νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ A τὸ — β , δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ A τὸ $\delta - 2\beta$, ὅπερ εἶναι ἴσον τῷ — β . Ἐὰν τῶρα εἰς τὸ A προσθέσωμεν ἐκ τῆς διαφορᾶς $\delta - 2\beta$ μόνον τὸν μειωτέον αὐτῆς β , τὸ εὐρεθησόμενον ἄθροισμα $A + \beta$ θέλει προφανῶς ὑπερέχει τὸ πραγματικὸν κατὰ τὸν ἀφαιρετέον αὐτῆς 2β , ἐπομένως, ἵνα εὐρωμεν τὸ ἀληθές, πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν τὸ εὐρεθὲν $A + \beta$ κατὰ 2β , ὅτε γίνεται $A + \beta - 2\beta$, ἢ, ὅπερ ταῦτό, $A - \beta$, καὶ βλέπομεν ὅτι εὐρέθη τὸ ζητούμενον ἄθροισμα γραφέντος τοῦ — β κατόπιν τοῦ A μὲ τὸ ἴδιον αὐτοῦ σημεῖον.

Πόρισμα. Ἐπειτα ἐντεῦθεν ὅτι δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν πᾶν ἀκέραιον πολυνώνυμον ὡς παριστῶν τὸ ἄθροισμα τῶν ἰδίων αὐτοῦ ὄρων. Π. χ. τὸ πολυνώνυμον $3a^3b^2 - 2a^2b^3 + 4ab^4 - 6b^5$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων αὐτοῦ $3a^3b^2 - 2a^2b^3 + 4ab^4 - 6b^5$, διότι, ἐὰν προσθέσωμεν αὐτοὺς κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἀποδειχθέντα κανόνα, θέλομεν εὐρεῖ ἄθροισμα $3a^3b^2 - 2a^2b^3 + 4ab^4 - 6b^5$, ἥτοι αὐτὸ τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πολυνώνυμον.

Ἐπειδὴ δὲ προφανῶς τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $3a^3b^2 - 2a^2b^3 + 4ab^4 - 6b^5$ δὲν μεταβάλλεται καθ' ὅποιανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προστεθῶσι ταῦτα, ἔπεται ὅτι καὶ

Ἡ ἀξία πολυνώμου τινὸς $3a^3b^2 - 2a^2b^3 + 4ab^4 - 6b^5$ δὲν μετα-

βάλλεται καθ' ὅποιανδήποτε τάξιν καὶ ἂν γραφῶσιν οἱ ὅροι αὐτοῦ.

Διὰ τοῦ πορίσματος τούτου ἀποδεικνύεται, οὕτως εἰπεῖν, ὅφ' ἑαυτοῦ δ' ἀκόλουθος 2^{ος} τῆς προσθέσεως κανὼν.

2^{ος}. Πολυώνυμον προστίθεται εἰς μονώνυμον ἢ πολυώνυμον, ἐὰν γραφῇ ἕκαστος τῶν ὅρων τοῦ προσθετέου πολυωνύμου κατόπιν τοῦ δεδομένου μονωνύμου ἢ πολυωνύμου μὲ τὸ ἴδιον αὐτοῦ σημεῖον.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα προσθέσωμεν εἰς τὸ μονώνυμον $3a^4b$ τὸ πολυώνυμον $4a^3b^2 - 5a^3b - 6a^4$, θέλομεν γράψαι κατόπιν τοῦ δεδομένου μονωνύμου $3a^4b$ ἕκαστον τῶν ὅρων $4a^3b^2$, $-5a^3b$, $-6a^4$ τοῦ προσθετέου πολυωνύμου μὲ τὸ ἴδιον αὐτοῦ σημεῖον. Οὕτως ἡ παράστασις $3a^4b + 4a^3b^2 - 5a^3b - 6a^4$ θέλει παριστᾷ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τοῦ $3a^4b$ καὶ $4a^3b^2 - 5a^3b - 6a^4$. Ὡσαύτως, ἵνα προσθέσωμεν εἰς τὸ πολυώνυμον $7a^3b - 4ab^3$ τὸ πολυώνυμον $-3a^4 + 4a^3b^2 - 5b^4$, θέλομεν γράψαι ἕκαστον τῶν ὅρων $-3a^4$, $+4a^3b^2$, $-5b^4$ τοῦ δευτέρου κατόπιν τῶν ὅρων τοῦ πρώτου μὲ τὸ ἴδιον αὐτοῦ σημεῖον· οὕτω τὸ πολυώνυμον $7a^3b - 4ab^3 - 3a^4 + 4a^3b^2 - 5b^4$ θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα.

Αἱ ἐπὶ τῶν δύο ἀνωτέρω παραδειγμάτων ἐκτελεστέαι προσθέσεις σημειοῦνται ὡς ἑξῆς

$$3a^4b + (4a^3b^2 - 5a^3b - 6a^4), \quad 7a^3b - 4ab^3 + (-3a^4 + 4a^3b^2 - 5b^4),$$

τιθεμένων δηλ. ἐντὸς παρενθέσεων τῶν προσθετέων πολυωνύμων κατόπιν τῶν εἰς αὐτὰ πρόκεινται ταῦτα γὰρ προστεθῶσι, καὶ συνδεομένων μετ' αὐτῶν διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως +.

Παρατηρητέον πρὸς τούτοις ὅτι, ὅταν μονώνυμόν τι ἢ πολυώνυμον εὐρίσκηται ἐντὸς παρενθέσεων, ὁ πρῶτος αὐτοῦ ὅρος, ἐὰν δὲν φέρῃ τὸ σημεῖον -, νοεῖται ἔχων τὸ σημεῖον +, ὅπερ χάριν συντομίας δὲν γράφεται.

3^{ος}. Μονώνυμον ἀφαιρεῖται ἀπὸ μονωνύμου ἢ πολυωνύμου, ἐὰν γραφῇ τοῦτο κατόπιν τοῦ μειωτέου μονωνύμου ἢ πολυωνύμου μὲ ἐναντίον σημεῖον.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μονωνύμου $3a^4b^2$ τὸ μονώνυμον $7a^3b^3$, θέλομεν γράψαι τὸ δεύτερον $7a^3b^3$ κατόπιν τοῦ πρώτου $3a^4b^2$ μὲ ἐναντίον σημεῖον, τουτέστι μὲ τὸ σημεῖον -, ἐπειδὴ ἔχει τὸ σημεῖον +. Οὕτω $3a^4b^2 - 7a^3b^3$ θέλει παριστᾷ τὴν ζητούμενην ἀλγεβρικὴν διαφορὰν. Ὡσαύτως, ἵνα ἀπὸ τοῦ πολυωνύμου $-2a^3b^2 + 4a^4b + 8a^5$

ἀφαιρέσωμεν τὸ μονώνυμον $-7a^3b^3$, θέλομεν γράψαι τοῦτο κατόπιν τοῦ μειωτέου πολυωνύμου μὲ ἐναντίον σημεῖον, ἥτοι μὲ τὸ σημεῖον $+$, ἐπειδὴ ἔχει τὸ σημεῖον $-$. Οὕτως ἡ παράστασις $-2a^3b^3 + 4a^4b + 8a^5 + 7a^2b^3$ παριστᾷ τὴν ζητούμενην ἀλγεβρικήν διαφορὰν.

Αἱ ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων ἐκτελεστέαι ἀφαιρέσεις σημειοῦνται ὡς ἐξῆς· $3a^4b^2 - (7a^3b^3)$, $-2a^3b^3 + 4a^4b + 8a^5 - (-7a^2b^3)$.

Β. Ἡ μόνη περίπτωσις, καθ' ἣν ὁ ἀνωτέρω τῆς ἀφαιρέσεως κανὼν ἔχει ἀνάγκην ἀποδείξεως εἶναι ἐκείνη, καθ' ἣν τὸ ἀφαιρετέον μονώνυμον εἶναι ἀρνητικόν. Ἐστω π. χ. ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ μονωνύμου ἢ πολυωνύμου A τὸ μονώνυμον $-b$. Ἐπειδὴ τὸ $-b$ εἶναι ἴσον τῇ διαφορᾷ $b - 2b$, ἐπεταὶ ὅτι θέλομεν εὑρεῖν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ἐὰν ἀντὶ τοῦ b ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ A τὴν διαφορὰν $b - 2b$. Ἀλλ' ἐν ἀπὸ τοῦ A ἀφαιρέσωμεν μόνον τὸν μειωτέον b τῆς ἀνωτέρω διαφορᾶς, ἡ εὑρεθησομένη διαφορὰ $A - b$ θέλει προφανῶς εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ζητούμενης κατὰ τὸν ἀφαιρετέον $2b$. Πρέπει λοιπὸν εἰς τὴν διαφορὰν $A - b$ νὰ προσθέσωμεν $2b$, ἵνα μὴ μεταβληθῇ τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον. Ἀλλὰ τότε εὐρίσκομεν ἄθροισμα $A - b + 2b$, ἢ, ὅπερ ταῦτό, $A + b$, τουτέστιν ὅ,τι ἠθέλομεν εὑρεῖν γράφοντες κατόπιν τοῦ μειωτέου A τὸν ἀφαιρετέον $-b$ μὲ ἐναντίον σημεῖον, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ ἀληθές τοῦ ἀνωτέρω κανόνος.

4^{ος}. *Πολυώνυμον ἀφαιρεῖται ἀπὸ μονωνύμου ἢ πολυωνύμου, ἐὰν γραφῇ ἕκαστος τῶν ὄρων αὐτοῦ κατόπιν τοῦ μειωτέου μονωνύμου ἢ πολυωνύμου μὲ ἐναντίον σημεῖον.*

Παραδείγματος χάριν, ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μονωνύμου $12a^4b$ τὸ πολυώνυμον $4a^3b^2 - 6ab^4 + 7a^5$, θέλομεν γράψαι ἕκαστον τῶν ὄρων αὐτοῦ $4a^3b^2$, $-6ab^4$, $+7a^5$ κατόπιν τοῦ $12a^4b$ μὲ ἐναντίον σημεῖον, ἥτοι τὸν πρῶτον, ὅστις ἔχει τὸ σημεῖον $+$, μὲ τὸ σημεῖον $-$ τὸν δεῦτερον, ὅστις ἔχει τὸ σημεῖον $-$, μὲ τὸ σημεῖον $+$ καὶ τὸν τρίτον, ὅστις ἔχει τὸ σημεῖον $+$, μὲ τὸ σημεῖον $-$. Οὕτως ἡ παράστασις $12a^4b - 4a^3b^2 + 6ab^4 - 7a^5$ θέλει παριστᾷ τὴν ζητούμενην ἀλγεβρικήν διαφορὰν. Ὡσαύτως, ἐν εἶχμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ πολυωνύμου $7a^3b^3 - 4a^6 + 8b^6$ τὸ πολυώνυμον $-4a^3b - 9a^4b^2 + 6ab^5$, ἠθέλομεν εὑρεῖν τὸ πολυώνυμον $7a^3b^3 - 4a^6 + 8b^6 + 4a^3b + 9a^4b^2 - 6ab^5$, ὅπερ θέλει παριστᾷ τὴν ζητούμενην διαφορὰν.

Αἱ ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω δύο παραδειγμάτων ἐκτελεστέαι ἀφαιρέσεις σημειοῦνται ὡς ἐξῆς· $12a^4b - (4a^3b^2 - 6ab^4 + 7a^5)$, $7a^3b^3 - 4a^6 + 8b^6 - (-4a^3b - 9a^4b^2 + 6ab^5)$, τιθεμένων δηλαδὴ ἐντὸς παρενθέσεων τῶν

ἀφαιρετέων πολυωνύμων κατόπιν τῶν μειωτέων καὶ συνδεομένων μετ' αὐτῶν διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφαιρέσεως —.

Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἀποδεικνύεται ἀμέσως, θεωρουμένου τοῦ ἀφαιρέτου πολυωνύμου ὡς ἀθροίσματος τῶν ἰδίων αὐτοῦ ὄρων καὶ ἐκτελουμένης τῆς ἀφαιρέσεως ἐκάστου τούτων κατὰ τὸν προηγουμένως ἀποδειχθέντα τρίτον τῆς ἀφαιρέσεως κανόνα.

6. Οἱ ἀνωτέρω περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως δοθέντες τέσσαρες κανόνες συγκεφαλαιοῦνται εὐκόλως εἰς τὸν ἑξῆς, εἰς ὃν καὶ μόνον ἠθέλομεν περιορισθῆ, ἂν δὲν ἐνομιζομεν ἀναγκαῖον διὰ τοὺς πρωτοπείρους νὰ ἐφαρμόσωμεν ἀμέσως αὐτὸν ἐπὶ τῶν διαφόρων περιπτώσεων, αἵτινες δύνανται νὰ παρουσιασθῶσι.

Ἀλγεβρική τις παράστασις προστίθεται εἰς ἑτέραν ἢ ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἑτέρας, ἔαν γραφῶσιν οἱ ὅροι αὐτῆς κατόπιν τῶν ὄρων τῆς ἐτέρας μὲ τὰ αὐτὰ ἢ μὲ ἀντίθετα σημεῖα.

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως μᾶς μένει πάντοτε νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τοῦ εὑρεθησομένου ἐξαγομένου τὴν καλουμένην ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὄρων, ἔαν ὑπάρχωσιν ἐν αὐτῷ τοιοῦτοι. Ταύτην δὲ δὲν πρέπει νὰ λησμονῶμεν, διότι πολλάκις τὰ ἐξαγόμενα ἀπλοποιούνται λίαν ἐπαισητῶς, καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν ἐκτελεσθησόμεναι νέαι πράξεις, ἔαν τοιαῦται πρὸς ἐκτέλεσιν ὑπάρχωσι, συντομεύονται μεγάλως. Ἰδοὺ δὲ εἰς τί συνίσταται ἡ καλουμένη ἀναγωγή τῶν ὁμοίων ὄρων καὶ κατὰ ποῖον κανόνα ἐκτελεῖται.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ.

7. Ὅταν ἐν τινι δεδομένῳ πολυωνύμῳ ὑπάρχωσιν ὅμοιοι ὅροι, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν αὐτοὺς δι' ἐνὸς καὶ μόνου, ἔχοντος τὴν αὐτὴν μὲ τὸ σύνολον αὐτῶν ἀξίαν, τοῦτο δὲ καλεῖται ἀναγωγή τῶν ὁμοίων ὄρων. Π. χ. οἱ τρεῖς ὅμοιοι ὅροι τοῦ πολυωνύμου $7a^3b^2 + 6a^3b^2 + 4a^3b^2$ δύνανται προφανῶς (1, 2^{ov}) νὰ ἀντικατασταθῶσι διὰ τοῦ $17a^3b^2$, ὃν εὕρισκομεν προσθέτοντες τοὺς ἔχοντας τὸ αὐτὸ σημεῖον + συντελεστάς 7, 6 καὶ 4, καὶ γράφοντες πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 17 τὸ κοινὸν εἰς αὐτοὺς μέρος a^3b^2 . Ὡσαύτως οἱ τρεῖς ὅμοιοι ὅροι τοῦ πολυωνύμου — $5ab^2 - ab^2 - 8ab^2$ δύνανται προφανῶς (1, 3^{ov}) νὰ ἀντικατασταθῶσι διὰ τοῦ — $14ab^2$, ὃν εὕρισκομεν προσθέτοντες τοὺς ἔχοντας τὸ αὐτὸ σημεῖον — συντελεστάς αὐτῶν 5, 1, 8, καὶ γράφοντες πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν — 14 τὸ κοινὸν εἰς αὐτοὺς μέρος ab^2 .

Όταν οί ἔν τινι πολυωνύμῳ ὑπάρχοντες ὅμοιοι ὅροι ἔχωσι διάφορα σημεῖα, τὴν εἰς ἓνα ὅρον ἀναγωγὴν αὐτῶν ἐκτελοῦμεν κατὰ τὸν ἐξῆς κανόνα.

Ἀνάγομεν πρῶτον εἰς ἓνα μόνον ὅρον τοὺς ὁμοίους ὅρους, τοὺς ἔχοντας πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον +, ὡσαύτως δὲ καὶ τοὺς ὁμοίους, τοὺς ἔχοντας πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον -, ἀφαιροῦμεν ἔπειτα ἀπὸ τοῦ μεγαλύτερου τῶν συντελεστικῶν τῶν εὑρεθησομένων δύο ὁμοίων ὅρων τὸν μικρότερον συντελεστήν, καὶ δίδομεν εἰς τὴν διαφορὰν αὐτῶν τὸ σημεῖον τοῦ μεγαλύτερου συντελεστοῦ γράφοντες μετ' αὐτὴν τὸ κοινὸν εἰς ἅπαντας τοὺς ὁμοίους ὅρους μέρος.

Τοὺς ὁμοίους ὅρους, π. χ., τοῦ πολυωνύμου $7a^3b^3 - 4a^3b^3 - 2a^3b^3 + 6a^3b^3 + 8a^3b^3 - 12a^3b^3$ ἀνάγομεν εἰς ἓνα $3a^3b^3$, ἀφοῦ ἀνάγομεν εἰς ἓνα $+21a^3b^3$ πρῶτον τοὺς ὅρους $+7a^3b^3$, $+6a^3b^3$, $+8a^3b^3$, τοὺς ἔχοντας πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον +, ἔπειτα εἰς ἕτερον $-18a^3b^3$ τοὺς ὅρους $-4a^3b^3$, $-2a^3b^3$, $-12a^3b^3$, τοὺς ἔχοντας πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον -, ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μεγαλύτερου συντελεστοῦ 21 τῶν εὑρεθέντων δύο ὁμοίων ὅρων $+21a^3b^3$ καὶ $-18a^3b^3$ τὸν μικρότερον συντελεστήν 18, καὶ εἰς τὴν διαφορὰν αὐτῶν 3 δώσωμεν τὸ σημεῖον + τοῦ μεγαλύτερου γράφοντες μετὰ τὸ +3 τὸ κοινὸν εἰς αὐτοὺς μέρος a^3b^3 . Διότι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς παραγράφου 4, ἡ ἀξία τῶν δεδομένων πολυωνύμων δὲν μεταβάλλεται, ἐν γραφῶσιν ἅπαντες οἱ ἔχοντες τὸ σημεῖον + ὅροι αὐτοῦ πρῶτοι καὶ μετ' αὐτοὺς οἱ ἔχοντες τὸ σημεῖον -, ὡς ἐξῆς $7a^3b^3 + 6a^3b^3 + 8a^3b^3 - 4a^3b^3 - 2a^3b^3 - 12a^3b^3$. Ἀλλ' ἀντὶ τῶν τριῶν πρώτων ὁμοίων ὅρων δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸν ἰσοδύναμον αὐτοῖς $21a^3b^3$ καὶ ἀντὶ τῶν τριῶν τελευταίων τὸν ἰσοδύναμον αὐτοῖς $-18a^3b^3$, ἡ δὲ εὑρεθησομένη τότε διαφορὰ $21a^3b^3 - 18a^3b^3$ εἶναι προφανῶς ἴση τῷ μονωνύμῳ $3a^3b^3$, ὅπερ εὐρίσκεται ὡς προείπομεν.

Ὁσαύτως καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τοὺς ὁμοίους ὅρους τοῦ πολυωνύμου $-8a^3b - a^3b + 6a^3b + 7a^3b - 25a^3b$ ἀνάγομεν εἰς ἓνα $-21a^3b$, ἐὰν ἀναγάγωμεν εἰς ἓνα $-34a^3b$ πρῶτον τοὺς ὁμοίους ὅρους $-8a^3b$, $-a^3b$, $-25a^3b$, τοὺς ἔχοντας τὸ αὐτὸ σημεῖον -, ἔπειτα εἰς ἕτερον $+13a^3b$ τοὺς ὁμοίους ὅρους $+6a^3b$, $+7a^3b$, τοὺς ἔχοντας τὸ αὐτὸ σημεῖον +, ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μεγαλύτερου συντελεστοῦ 34 τὸν μικρότερον 13, καὶ δώσωμεν εἰς τὴν εὑρεθησομένην αὐτῶν διαφορὰν 21 τὸ σημεῖον - τοῦ μεγαλύτερου, καὶ γράψωμεν τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ -21 τὸ κοινὸν εἰς αὐτοὺς μέρος a^3b .

Όταν τὸ δοθὲν πολυώνυμον περιέχῃ καὶ ὅρους ἀνομοίους, ἐκτελοῦμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν ἐν αὐτῷ ὑπαρχόντων ὁμοίων ὅρων καὶ ἀφίνομεν τοὺς ἀνομοίους ὅπως εὐρίσκονται ἐν αὐτῷ. Παρὰδ. χάριν, τὸ πολυώνυμον

$$4a^2b^3 - 7a^3b^2 - 14a^4 + 6a^3b^2 - 12a^4b + 8a^5 - 11a^2b^3 + 9a^5 + ab^4$$

ἀνάγεται εἰς τὸ ἐξῆς

$$-7a^2b^3 - a^3b^2 + 3a^5 - 12a^4b + ab^4,$$

ἀναχθέντων τῶν ἐν αὐτῷ ὁμοίων ὅρων $4a^2b^3$, $-11a^2b^3$ εἰς τὸν $-7a^2b^3$, τῶν ὁμοίων $-7a^3b^2$, $+6a^3b^2$ εἰς τὸν $-a^3b^2$, τῶν ὁμοίων $-14a^4$, $+8a^5$, $+9a^5$ εἰς τὸν $+3a^5$, καὶ γραφέντων τῶν λοιπῶν $-12a^4b$, $+ab^4$ ὅπως εὐρίσκονται ἐν τῷ πρώτῳ.

Ἄν εἶχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἐπὶ τοῦ πολυωνύμου $4a^2b - 2a^2b^2 + 3ab^3 - 4a^2b^3 + 6a^3b^2 + 8ab^3 - 7a^2b$, ἠθέλωμεν εὑρεῖν τὸ πολυώνυμον $-3a^3b - 11ab^3$, τῶν ὁμοίων ὅρων $-2a^2b^2$, $-4a^2b^3$ καὶ $+6a^3b^2$ συμμηθενιζομένων, διότι προφανῶς $+6a^3b^2$ καὶ $-6a^3b^2$ δίδει ἀθροισμα μηδέν.

ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΚΑΙ ΒΑΘΜΟΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

8. Μετὰ τὴν ἐπὶ τινος δεδομένου πολυωνύμου ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν τοὺς ὅρους τοῦ εὐρεθησομένου ἐξαγομέ-
νου οὕτως, ὥστε οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων γράμματός τινος αὐτοῦ νὰ βαίνουσιν ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον αὐξανόμενοι ἢ ἐλαττούμενοι· ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει θέλομεν ἔχει τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πολυώνυμον *διατεταγμένον* κατὰ τὰς ἀκτινοῦσας δυνάμεις τοῦ θεωρουμένου γράμματος, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ τὸ πολυώνυμον *θέλει εἶναι διατεταγμένον* κατὰ τὰς κατιού-
σας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος. II. γ., ἐν γράψωμεν τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου $5a^4b - 6a^5 + 7a^2b^3 - 3a^3b^2 + 4ab^4 - 7b^5$ ὡς ἐξῆς

$$-7b^5 + 4ab^4 + 7a^2b^3 - 3a^3b^2 + 5a^4b - 6a^5, \quad (1)$$

θέλομεν ἔχει τὸ δεδομένον πολυώνυμον *διατεταγμένον* κατὰ τὰς ἀνιού-
σας δυνάμεις τοῦ a , διότι οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι γεγραμμένοι οὕτως, ὥστε οἱ ἐν αὐτοῖς ἐκθέται τοῦ γράμματος a βαίνουνσιν ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον αὐ-
ξανόμενοι, τοῦ πρώτου αὐτοῦ ὅρου $-7b^5$, τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ γράμμα a , θεωρουμένου ὡς ἔχοντος αὐτὸ εἰς τὴν 0 δυνάμιν, ὡς θέλομεν ἀποδεί-
ξει ἐν τῷ τῆς Διαιρέσεως κεφαλαίῳ.

Ἄν ἐγράφομεν τὸ ἀνωτέρω πολυώνυμον ὡς ἐξῆς

$$-6a^5 + 5a^4b - 3a^3b^2 + 7a^2b^3 + 4ab^4 - 7b^5,$$

ἤθελομεν ἔχει τὸ αὐτὸ πολυώνυμον διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ a , διότι οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος a βαίνουνσιν ἀπὸ ὕρου εἰς ὕρον ἐλαττούμενοι.

9. Ὄταν δεδομένον πολυώνυμον περιέχῃ ἐν μόνον ἢ πλείοτερα γράμματα, ὡς π. χ. τὸ

$$8a^3 + 4a^4 + 3a^5 + 2a^6 - 5a^7, \text{ ἢ τὸ } 4a^6b - 7a^3b^4 + 6a^7 - 8ab^6$$

ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης 7 τοῦ ἐν αὐτῷ γράμματος a καλεῖται βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου ὡς πρὸς τὸ γράμμα a . Ὄταν δὲ πολυώνυμὸν τι περιέχῃ πλείοτερα γράμματα οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν ἐκάστῳ ὕρῳ ἐκθετῶν τῶν ἐν αὐτῷ γραμμάτων νὰ ᾖναι τὸ αὐτό, τότε τὸ πολυώνυμον λέγεται ὁμογενές. Π. χ. τὸ πολυώνυμον $5a^3b^2 - 3a^5 + 4a^2b^3 - 5ab^4 + 7a^4b - b^5$ εἶναι ὁμογενές, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν ἐν ἐκάστῳ αὐτοῦ ὕρῳ γραμμάτων a καὶ b εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον τῷ 5. Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι, ὅταν ὁμογενές τι πολυώνυμον, περιέχον δύο μόνον γράμματα, διαταχθῇ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ ἐνὸς τούτων, εὐρίσκεται συγχρόνως διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ ἑτέρου, καὶ ἀντιστρόφως. Τὸ ἀνωτέρω π. χ. ὁμογενές πολυώνυμον (1), ὑπερ διατάχθη κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ a , εὐρίσκεται συγχρόνως διατεταγμένον καὶ κατὰ τὰς κατιούσας τοῦ b .

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ. — ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΠΟΛΛΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

10. Τρεῖς περίπτωσεις διακρίνομεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, τὰς ἑξῆς.

1^η. Ὄταν ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς ᾖναι μονώρημα.

2^η. Ὄταν ὁ πολλαπλασιαστέος ᾖναι πολυώνυμον καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς μονώνυμον.

3^{ον}. "Οταν καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής ἦναι πολυώνυμα.

11. Ἄς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον μονώνυμου ἐπὶ μονώνυμου. Ἦ περίπτωσης αὕτη περιλαμβάνει τὰς ἐξῆς τέσσαρας·

α'.) "Οταν ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής ἔχωσι πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον +.

β'.) "Οταν ὁ πολλαπλασιαστέος ἔχη πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον - καὶ ὁ πολλαπλασιαστής τὸ σημεῖον +.

γ'.) "Οταν ὁ πολλαπλασιαστέος ἔχη πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον + καὶ ὁ πολλαπλασιαστής τὸ σημεῖον -.

δ'.) "Οταν καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής ἔχωσι πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον -.

Εἰς ἐκάστην τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων περιπτώσεων ἔχομεν νὰ διακρίνωμεν δύο τινὰ ποῖον θέλει εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ ζητουμένου γινομένου, καὶ ποῖον αὐτὸ τὸ γινόμενον ἀνεξαρτήτως τοῦ πρὸ αὐτοῦ σημείου. Ἄς ζητήσωμεν κατὰ πρῶτον ποῖον θέλει εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ ζητουμένου γινομένου, καὶ ἄς ὑποθέσωμεν πρὸς τοῦτο, ὅτι μᾶς ζητεῖται κατὰ τὴν α' περίπτωσην τὸ γινόμενον τοῦ +α ἐπὶ τὸ +β, ἢ τοῦ α ἐπὶ β, ὑπονοουμένου πρὸ αὐτῶν τοῦ σημείου +. Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ +α ἐπὶ τὸ +β θέλει εἶναι +αβ, τουτέστι θέλει ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον +, τοῦθ' ὅπερ ἐκφράζουσι συντόμως λέγοντες ὅτι + ἐπὶ + δίδει +.

Ἄν εἰχομεν κατὰ τὴν β' περίπτωσην νὰ εὗρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ -α ἐπὶ τὸ +β, ἠθέλομεν εὗρει -αβ σκεπτόμενοι ὡς ἐξῆς·

Κατὰ τὸν ὀρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον πρέπει νὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου -α, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστής +β ἐσχηματίσθῃ ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλὰ τὸ +β ἢ τὸ β ἐσχηματίσθῃ προφανῶς ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ αὕτη ἐπανελήφθῃ β φοράς. Λοιπὸν καὶ τὸ ζητούμενον γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ -α, ἀφοῦ τοῦτο ἐπαναληφθῇ β φοράς· ἐν ἄλλαις λέξεσι, πρὸς εὐρεσιν αὐτοῦ πρέπει νὰ προσθέσωμεν β φοράς τὸ -α, ὅτε θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ γενικὸν τῆς προσθέσεως κανόνα τὸ ἐξῆς ἄθροισμα· -α-α-α-α-... , τοῦ -α λαμβανομένου οὕτως ὡς ὅρου β φοράς. Ἀλλὰ κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἀναγωγῆς τῶν ὁμοίων ὅρων τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα ἀνάγεται εἰς τὸ -βα ἢ, ὅπερ ταῦτά, εἰς τὸ -αβ· διότι, ἐπειδὴ τὸ βα εἶναι ἴσον τῷ αβ, καὶ τὸ

— θα θέλει είναι ίσον τῷ — αβ. Λοιπὸν β', ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος ἔχη πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον — καὶ ὁ πολλαπλασιαστής τὸ +, τὸ ζητούμενον γινόμενον θέλει ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον —, τοῦθ' ὕπερ ἐκφράζουσι συντόμως λέγοντες ὅτι — ἐπὶ + δίδει —.

Ἄς ὑποθέσωμεν τρίτον ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ + α ἐπὶ — β. Λέγομεν ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον θέλει εἶναι τὸ — αβ. Διότι πάλιν κατὰ τὸν ὅρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον πρέπει νὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου + α ἢ α, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστής — β ἐσχηματίσθῃ ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλὰ τὸ — β σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος, ἐὰν ἀπὸ 1 ἀφαιρέσωμεν 2 καὶ τὴν εὑρεθησομένην διαφορὰν — 1 ἐπαναλάβωμεν β φορές, τουτέστι πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ β, ὅτε κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀποδειχθεῖσαν β' περίπτωσιν θέλομεν ἔχει γινόμενον — β. Λοιπὸν καὶ τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ — β θέλει εὑρεθῇ, ἐὰν ἀπὸ τοῦ πολλαπλασιαστέου α ἀφαιρέσωμεν 2α καὶ τὴν εὑρεθησομένην διαφορὰν — α ἐπαναλάβωμεν β φορές, ὅτε κατὰ τὴν αὐτὴν β' περίπτωσιν θέλομεν ἔχει γινόμενον — αβ. Λοιπὸν γ', ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος ἔχη πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον + καὶ ὁ πολλαπλασιαστής τὸ σημεῖον —, τὸ ζητούμενον γινόμενον θέλει ἔχει τὸ σημεῖον —, τοῦθ' ὕπερ ἐκφράζουσι συντόμως λέγοντες ὅτι + ἐπὶ — δίδει —.

Ἄς ὑποθέσωμεν τελευταῖον ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ — α ἐπὶ — β. Λέγομεν ὅτι τοῦτο θέλει εἶναι + αβ. Διότι κατὰ τὸν ὅρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον πρέπει νὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου — α, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστής — β ἐσχηματίσθῃ ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλὰ τὸ — β σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος, ἐὰν ἀπὸ 1 ἀφαιρέσωμεν 2 καὶ τὴν εὑρεθησομένην διαφορὰν — 1 ἐπαναλάβωμεν β φορές. Λοιπὸν καὶ τὸ γινόμενον τοῦ — α ἐπὶ — β θέλει εὑρεθῇ, ἐὰν ἀπὸ τοῦ πολλαπλασιαστέου — α ἀφαιρέσωμεν δις τὸ — α, ἥτοι τὸ — 2α, καὶ τὴν εὑρεθησομένην διαφορὰν — α — (— 2α), ἢ — α + 2α, ἢ + α ἐπαναλάβωμεν β φορές, ὅτε θέλομεν εὑρεῖ γινόμενον + αβ. Λοιπὸν δ', ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος ἔχη πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον — καὶ ὁ πολλαπλασιαστής τὸ —, τὸ ζητούμενον γινόμενον αὐτῶν θέλει ἔχει τὸ σημεῖον +, τοῦθ' ὕπερ ἐκφράζουσι συντόμως λέγοντες ὅτι — ἐπὶ — δίδει +.

12. Εὐρόντες ἀνωτέρω ποῖον θέλει εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ ζητουμένου γινομένου, ἂς ἴδωμεν τῶρα ποῖον θέλει εἶναι αὐτὸ τὸ γινόμενον ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου αὐτοῦ. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ ζητήσωμεν τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε μονωνύμων, π. χ., τοῦ $3a^3b^2$ ἐπὶ $5a^5b^7d$.

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστικὸς $3a^3b^3\gamma^3\delta$ εἶναι γινόμενον πολλῶν παραγόντων, κατὰ γνωστὸν Ἀριθμητικὸν θεώρημα τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου $3a^3b^3\gamma$ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν θέλει εὑρεθῇ, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ πρῶτος διαδοχικῶς ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ δευτέρου, ὅτε θέλομεν ἔχει $3a^3b^3\gamma \cdot 3 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot \gamma^2 \cdot \delta$. Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν ὡσαύτως ὅτι, ὡσαυδήποτε καὶ ἂν μετατεθῶσιν οἱ παράγοντες γινόμενου τινός, τὸ γινόμενον αὐτῶν δὲν μεταβάλλεται, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ τελευταῖον γινόμενον $3a^3b^3\gamma \cdot 3 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot \gamma^2 \cdot \delta$ καὶ οὕτω $3 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot b^3 \cdot \gamma \cdot \gamma^2 \cdot \delta$, ἢ, ἐκτελουμένων τῶν δυνάμενων νὰ ἐκτελεσθῶσι πράξεις, καὶ οὕτω $15a^6b^6\gamma^3\delta$. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει ἀνεξαρτήτως τῶν σημείων $3a^3b^3\gamma \times 3a^3b^3\gamma^2\delta = 15a^6b^6\gamma^3\delta$.

Παραβάλλοντες τὸ εὑρεθὲν γινόμενον $15a^6b^6\gamma^3\delta$ πρὸς ἀμφοτέρους τοὺς παράγοντας $3a^3b^3\gamma$ καὶ $3a^3b^3\gamma^2\delta$ αὐτοῦ, πορίζομεθα εὐκόλως τὸν ἐξῆς γενικὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μονώνυμου ἐπὶ μονώνυμον κανόνα·

Μονώνυμον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μονώνυμον, ἐὰν εὑρεθῇ πρῶτον τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν αὐτῶν καὶ γραφῶσι μετὰ τοῦτο τὰ κοινὰ καὶ μὴ κοινὰ αὐτῶν γράμματα κατὰ τὴν ἀλφαιβητικὴν αὐτῶν τάξιν, τὰ μὲν κοινὰ γράμματα μὲ ἐκθέτας ἴσους μὲ τὰ ἁθροίσματα τῶν ἐν τοῖς παράγουσιν ἐκθετῶν αὐτῶν, τὰ δὲ μὴ κοινὰ μὲ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας, οὓς ἔχουσιν ἐν ἑκατέρῳ τῶν παραγόντων τοῦ ζητουμένου γινόμενου.

Συνδυάζοντες τὸν κανόνα τοῦτον μὲ τοὺς περὶ σημείων δοθέντας ἀνωτέρω κανόνας θέλομεν εὑρεῖ εὐκόλως ὅτι

$$3a^3b^3\gamma \times 4a^3b^3\delta^3 = 12a^6b^6\gamma\delta^3, \quad 2b^3\gamma^2 \times (-3a^3b) = -6a^3b^4\gamma^2, \\ -5a^3b\gamma \times 2ab\delta^3 = -10a^4b^2\gamma\delta^3, \quad -4ab^3 \times (-5a^2\gamma) = 20a^3b^3\gamma.$$

13. Ὡς ὑποθέσωμεν δεύτερον, ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ πολυωνύμου $3a^3b - 4ab^2 + 7a^3 - 6b^3$ ἐπὶ τὸ μονώνυμον $4a^3b^3\gamma$. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστέος $3a^3b - 4ab^2 + 7a^3 - 6b^3$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν μονώνυμων $3a^3b$, $-4ab^2$, $7a^3$ καὶ $-6b^3$, τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν $4a^3b^3\gamma$ θέλει εὑρεθῇ προφανῶς, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστον τῶν ἀποτελούντων αὐτὸν μερῶν $3a^3b$, $-4ab^2$, $7a^3$ καὶ $-6b^3$ ἐπὶ $4a^3b^3\gamma$, καὶ προστεθῶσι τὰ οὕτως εὑρεθισόμενα κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα μερικὰ γινόμενα $12a^6b^4\gamma$, $-16a^4b^5\gamma$, $28a^6b^3\gamma$ καὶ $-24a^3b^6\gamma$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν οὕτως εὑρεθέντων μερικῶν γινόμενων εἶναι κατὰ τὸν γνωστὸν τῆς προσθέσεως

κανόνα $12a^4b^3\gamma - 16a^3b^4\gamma + 28a^5b^2\gamma - 24a^2b^5\gamma$. Ἄρα θέλομεν ἔχει
 $(3a^5b - 4ab^5 + 7a^3 - 6b^3)4a^2b^2\gamma = 12a^4b^3\gamma - 16a^3b^4\gamma + 28a^5b^2\gamma - 24a^2b^5\gamma$.

Ἐντεῦθεν δὲ πορίζομεθα εὐκόλως τὸν ἐξῆς γενικὸν κανόνα·

Πολυώνυμον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μονώνυμον, ἔαρ πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τῶν ὄρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν καὶ γραφῶσι τὸ ἔν κατόπιν τοῦ ἄλλου τὰ εὑρεθσόμενα γινόμενα μὲ τὰ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν προκύπτοντα σημεία.

14. Ἄς ὑποθέσωμεν τρίτον, ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ πολυνύμου $2a^3b - 4a^2b^2 + 7ab^3 + 3b^4$ ἐπὶ τὸ $-3ab^2 + 2a^3 - 4a^2b$. Ἐπειδὴ ὁ δεδομένος πολλαπλασιαστής $-3ab^2 + 2a^3 - 4a^2b$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $-3ab^2$, $2a^3$ καὶ $-4a^2b$, τὸ γινόμενον τοῦ δεδομένου πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν θέλει εὑρεθῇ προφανῶς, ἐν πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος ἐρ' ἕκαστον τῶν μερῶν $-3ab^2$, $2a^3$ καὶ $-4a^2b$ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ προστεθῶσι τὰ οὕτως εὑρεθσόμενα μερικὰ γινόμενα $-6a^4b^3 + 12a^3b^4 - 21a^2b^5 - 9ab^6$, $4a^6b - 8a^5b^2 + 14a^4b^3 + 6a^3b^4$, $-8a^4b^3 + 16a^3b^4 - 28a^2b^5 - 12ab^6$, ὧν τὸ ἄθροισμα εὐρίσκεται γραφομένων τῶν ὄρων τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου κατόπιν τῶν ὄρων τοῦ πρώτου μὲ τὰ ἴδια αὐτῶν σημεία. Ἐντεῦθεν δὲ ὁ ἐξῆς γενικὸς κανὼν.

Πολυώνυμον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ πολυνώνυμον, ἔαρ πολλαπλασιασθῇ τὸ πολυνώνυμον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐρ' ἕκαστον τῶν ὄρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ προστεθῶσι τὰ οὕτως εὑρεθσόμενα μερικὰ γινόμενα.

Παρατήρησις. — Εὐκόλως πᾶς τις βλέπει ὅτι καθὼς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς πολυψήφιου ἐπὶ πολυψήφιον ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μονοψήφιου ἐπὶ μονοψήφιον, οὕτως δὲ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μονοψήφιου ἐπὶ μονοψήφιον, οὕτω καὶ ἐνταῦθα, ἡ 3^η τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκερῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων περιπτώσεως ἀνάγεται εἰς τὴν 2^{αν}, αὕτη δὲ εἰς τὴν 1^{ην}, ἥτις στηρίζεται ἐπὶ τοῦ γενικοῦ ὅρισμοῦ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ ἐπὶ δύο γνωστῶν τῆς Ἀριθμητικῆς θεωρημάτων, εἰς τρόπον ὥστε ὁ δυνάμενος νὰ σχηματίζῃ ἀλανθάστως τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε μονωνύμων θέλει εὐρίσκει εὐκόλως καὶ τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε πολυνύμων, ὡς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ ὁ εὐρίσκων ἀλανθάστως τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν, εὐρίσκει εὐκόλως καὶ τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε πολυψη-

φύων ἀκολουθῶν, ἐννοεῖται οὕκοθεν, τὰ καθέκαστα τοῦ σχετικοῦ κανόνος.

15. Μετὰ τὴν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὕρεσιν τοῦ γινόμενου τῶν δεδομένων πολυωνύμων δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν ἐν αὐτῷ ὁμοίων ὅρων, ἐὰν ὑπάρχωσι τοιοῦτοι. Ἡ ἐντεῦθεν προκύπτουσα ἐπὶ τοῦ ἐξαγομένου ἀπλοποιήσις εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον σπουδαία, καὶ πρέπει πάντοτε νὰ ἐκτελῶμεν αὐτήν, ἵνα δὲ μὴ χρονοτριβῶμεν ἀναζητούντες ἐπὶ τοῦ εὗρεθησομένου ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν μερικῶν γινόμενων ἐξαγομένου τοὺς ἐν αὐτῷ ὁμοίους ὅρους, καὶ ἀποφύγωμεν συνάμα τὰ ἐντεῦθεν δυνάμενα νὰ προκύψωσιν εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀναγωγῶν λάθη, μάλιστα ὅταν τὸ γινόμενον ἔχῃ πολλοὺς ὅρους, ἀκολουθοῦμεν τὸν ἐξῆς πρὸς εὕρεσιν τῶν ὁμοίων ὅρων κανόνα.

Γράφομεν τὸ ἐν ὑπὸ τὸ ἔτεροκτὶ δεδομένα τοῦ πολυαπλαιοῦ καὶ πολυαπλοῦ πολυώνυμου, ὅπου πρῶτον διατάξωμεν αὐτὰ κατὰ τὰς ἀντιόσας ἢ κατιούσας δυνάμεις ἐνός καὶ τοῦ αὐτοῦ γράμματος (8), ἄρομεν γραμμὴν ὑποκάτω καὶ πολυαπλοῦ καὶ πολυαπλοῦ ἐξ' ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ πολυαπλοῦ, γράφομεν δὲ ὑπ' ἁλλήλα τὰ εὑρεθησόμενα μερικὰ γινόμενα οὕτως, ὥστε οἱ ὅροι, οἱ ἔχοντες τὸ γράμμα, καθ' ὃ ἐρέετο ἡ διάταξις, εἰς τὴν αὐτὴν δυνάμειν νὰ εὕρισκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθεῷ στήλῃ. Οὕτως οἱ ὅμοιοι ὅροι, ὅταν ὑπάρχωσι τοιοῦτοι, θέλουσιν εὕρισκεσθαι ἀναγκαιῶς ἐν τῇ αὐτῇ καθεῷ στήλῃ, καὶ ἡ ἀναγωγὴ αὐτῶν δὲν θέλει μᾶς παρέχει οὐδεμίαν δυσκολίαν. Τοὺς ἀρεμοίους τῶν ἐξαγομένων ὅρους, καθὼς καὶ τοὺς ἐκ τῶν ἀναγωγῶν τῶν ὁμοίων προκύπτοντας, γράφομεν ὑπὸ τὴν ὀριζόντιον γραμμὴν, ἣν ἄρομεν ὑπὸ τὸ τελευταῖον μερικὸν γινόμενον.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι μὲς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ πολυωνύμου $5a^3b^2 - 6a^2b^3 + 7ab^4 - 8a^4b - 2b^5$ ἐπὶ τὸ $-2a^2b + 4ab^2 - a^3 + 2b^3$. Τὰ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα καθέκαστα τῶν πράξεων φαίνονται ἐπὶ τῆς κάτωθεν διατάξεως

$$\begin{array}{r}
 -8a^4b + 5a^3b^2 - 6a^2b^3 + 7ab^4 - 2b^5 \\
 - a^3 - 2a^2b + 4ab^2 + 2b^3 \\
 \hline
 8a^7b - 5a^6b^2 + 6a^5b^3 - 7a^4b^4 + 2a^3b^5 \\
 + 4a^6b^2 - 10a^5b^3 + 12a^4b^4 - 4a^3b^5 + 4a^2b^6 \\
 - 32a^5b^3 + 20a^4b^4 - 24a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 \\
 - 4a^4b^4 + 10a^3b^5 - 12a^2b^6 + 4ab^7 - 4b^8 \\
 \hline
 8a^7b + 11a^6b^2 - 36a^5b^3 + 9a^4b^4 - 26a^3b^5 + 20a^2b^6 + 6ab^7 - 4b^8
 \end{array}$$

Ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης ὀριζοντίου σειρᾶς ἐγράφη ὁ δεδομένος πολλαπλασιαστέος διατχθεὶς κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ a , ἢ τὰς ἀνιούσας τοῦ b , ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ὁ πολλαπλασιαστής διατχθεὶς ὁμοιότροπως. Ἡ τρίτη σειρά παριστᾷ τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον — a^3 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Ἡ τετάρτη σειρά τὸ γινόμενον τοῦ αὐτοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον — $2a^2b$ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, γεγραμμένον ὁμῶς οὕτως, ὥστε οἱ ὅροι αὐτοῦ νὰ εὑρίσκωνται ὑπὸ τοὺς ὅρους τῆς πρώτης σειρᾶς, τοὺς ἔχοντας εἰς τὴν αὐτὴν δυνάμιν τὸ καθ' ἕν ἐγένετο ἡ διάταξις γράμματα a . Ἡ πέμπτη σειρά παριστᾷ τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν τρίτον ὅρον $4ab^2$ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ γεγραμμένον ὁμοιότροπως, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Τελευταῖον ἡ ἐβδόμη σειρά παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον μετὰ τὴν ἐπὶ τῶν μερικῶν γινομένων ἐκτέλεσιν τῶν ἀναγωγῶν τῶν ὁμοίων ὅρων, οἵτινες, ὡς εὐκόλως πᾶς τις βλέπει, εὑρίσκονται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ.

Ἄν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ πολυώνυμον $4ab^4 - 2a^4b + 3a^2b^3 - 5a^3$ ἐπὶ τὸ πολυώνυμον $-2a^3b + 3a^4 + 2ab^3$, ἠθέλομεν ἀκολουθοῦντες κατὰ γράμματα τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα διατάξει ὡς ἐξῆς τὰ καθέκαστα τῆς πράξεως,

$$\begin{array}{r}
 -5a^5 - 2a^4b + 3a^3b^3 + 4ab^5 \\
 3a^4 - 2a^3b + 2ab^3 \\
 \hline
 -15a^9 - 6a^8b + 9a^6b^3 + 12a^5b^4 \\
 + 10a^6b^2 + 4a^7b^3 - 6a^5b^4 - 8a^4b^5 \\
 - 10a^6b^3 - 4a^5b^4 + 6a^3b^6 + 8a^2b^7 \\
 \hline
 -15a^9 + 4a^8b + 4a^7b^3 - a^6b^3 + 2a^5b^4 - 8a^4b^3 + 6a^3b^6 + 8a^2b^7
 \end{array}$$

τουτέστιν, ἀφοῦ διετάξαμεν τὰ δεδομένα πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος a , ἐγράψαμεν τοὺς ὅρους ἑκάστου μερικοῦ γινομένου οὕτως, ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν μετὰξὺ αὐτῶν καὶ ὑποκάτω τοὺς ὅρους τῶν ἄλλων μερικῶν γινομένων, τῶν ἐχόντων τὸ γράμμα a τῆς διατάξεως εἰς δυνάμεις, μὴ περιχομένης ἐν αὐτοῖς.

Παρατήρησις 1. — Δὲν πρέπει νὰ νομίσῃ τις, ὅτι οἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου στήλης γραφόμενοι ὅροι, οἱ ἔχοντες τὸ καθ' ἕν ἐγένετο ἡ διάταξις γράμματα εἰς τὴν αὐτὴν δυνάμιν, εἶναι πάντοτε ὅμοιοι. Τοῦτο συμβαίνει μόνον, ὅταν τὰ πολυώνυμα ᾖναι ὁμογενῆ καὶ ἔχωσι δύο μόνον γράμματα. Ἄν εἴχομεν, παραδείγματος χάριν, νὰ πολλαπλασιάσωμεν

τὸ πολυώνυμον $3a^3b^2 - 2a^2b^2 + 4ab^3 - 2b^5$ ἐπὶ τὸ $-2a^4b + 4a^2b - 3ab^3$,
 ἠθέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς διάταξιν·

$$\begin{array}{r} 3a^3b^2 - 2a^2b^2 + 4ab^3 - 2b^5 \\ - 2a^4b + 4a^2b - 3ab^3 \\ \hline - 6a^7b^3 + 4a^6b^3 - 8a^5b^4 + 4a^4b^5 \\ + 12a^3b^3 - 8a^2b^3 + 16a^2b^4 - 8a^2b^5 \\ - 9a^4b^5 + 6a^3b^5 - 12a^2b^6 + 6ab^8 \\ \hline - 6a^7b^3 + 4a^6b^3 - 8a^5b^4 + 12a^3b^4 + 4a^4b^5 - 8a^4b^5 - 9a^4b^5 + 16a^3b^4 + 6a^4b^5 - 20a^2b^6 + 6ab^8 \end{array}$$

ἐν ᾗ οἱ ὑπὸ τὴν τρίτην, τετάρτην καὶ πέμπτην ἀνάθετον στήλην γεγραμμένοι ὅροι δὲν εἶναι ὅμοιοι, ἀν καὶ ἔχουσι τὸ καθ' ὃ ἐγένετο ἡ διάταξις γράμματα αἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει γράφονται οὗτοι κατὰ σειρὰν ὃ εἰς μετὰ τὸν ἄλλον, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀνωτέρω εὐρεθὲν ἐξαγόμενον.

Παρατήρησις 2. — "Ὅταν τὰ πρὸς πολλαπλασιασμὸν δεδομένα πολυώνυμα περιέχωσι τὸ καθ' ὃ θέλομεν νὰ διατάξωμεν αὐτὰ γράμματα εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν εἰς δύο ἢ καὶ πλείονους ὅρους, τότε ἐκτελοῦμεν τὴν διάταξιν αὐτῶν καὶ τὰ καθέκαστα τῶν λοιπῶν πράξεων κατὰ τὰς ἐν τῷ *Δευτέρῳ Μέρει* τῆς παρούσης συγγραφῆς διδομένης ὁδηγίας, ἃς δὲν ἐνομίσασαμεν κατ'ἀλληλον νὰ παρενθέσωμεν ἐνταῦθα τὸ μὲν, ἵνα μὴ διακόψωμεν τὴν συνέχειαν τοῦ κειμένου, τὸ δέ, ἵνα δυνηθῶμεν νὰ ἐξηγηθῶμεν ἐκτενέστερον καὶ σαφέστερον ἐπὶ πλείονερων παραδειγμάτων.

16. ΘΕΩΡΗΜΑ. — Ἐν παντὶ γινόμενῳ δύο ἀποιωδύρτοτε πολυωνύμων ὑπάρχουσιν ἀναγκαίως δύο τοῦλάχιστου ὅροι, οἵτινες προκύπτουσιν ἄνευ οὐδεμιᾶς ἀναγωγῆς· οὗτοι δὲ εἶναι ὁ πρῶτος καὶ τελευταῖος τοῦ γινόμενου, ὅταν τοῦτο καὶ οἱ παράγοντες αὐτοῦ ἦναι διατεταγμένοι κατὰ τὰς ἀντιθέσας ἢ κατιούσας δυνάμεις ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ γράμματος.

Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν τὰ πολυώνυμα διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις γράμματός τινος, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ γινόμενου, διατεταγμένου καθ' ὑπόθεσιν ὁμοιοτρόπως, θέλει περιέχει τὸ καθ' ὃ ἐγένετο ἡ διάταξις γράμματα εἰς ἀνωτέραν ἢ οἱ λοιποὶ αὐτοῦ ὅροι δύναμιν, ὡς γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, οἵτινες ἔχουσι τὸ γράμμα τῆς διατάξεως εἰς μεγαλύτεραν ἢ οἱ λοιποὶ αὐτῶν ὅροι δύναμιν· ἐπομένως δὲν θέλει ἔχει οὐδένα ἐν τῷ γινόμενῳ ἕτερον ὅμοιον αὐτῷ ὅρον, μεθ' οὗ νὰ ἀναχθῇ. Ὡσαύτως, ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ γινόμενου θέλει περιέχει τὸ καθ' ὃ ἐγένετο

ἡ διάταξις γράμματα εἰς κατωτέραν ἢ οἱ λοιποὶ αὐτοῦ ὅροι δύναμιν, ὡς γινόμενον τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν τελευταῖον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, οἵτινες ἔχουσι τὸ γράμμα τῆς διατάξεως εἰς μικροτέραν ἢ οἱ λοιποὶ αὐτῶν ὅροι δύναμιν· ἐπομένως δὲν δύναται νὰ ἔχη οὐδένα ἐν τῷ γινομένῳ ἕτερον ὅμοιον αὐτῷ ὅρον, μεθ' οὗ νὰ ἀναχθῇ. Ἐάν δὲ ὑποθέσωμεν τὰ πολυώνυμα διατεταγμένα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις γράμματός τινος, τότε ὁ μὲν πρῶτος ὅρος τοῦ γινομένου, διατεταγμένου καθ' ὑπόθεσιν ὁμοιοτρόπως, θέλει περιέχει τὸ γράμμα τῆς διατάξεως εἰς τὴν κατωτέραν δύναμιν, ὁ δὲ τελευταῖος εἰς τὴν ἀνωτέραν, δι' οὗς ἀνωτέρω ἐξεθέσαμεν λόγους. Λοιπὸν ἐν παντὶ γινομένῳ κτλ.

Τὰ καθέκαστα τῶν ἀνωτέρω συλλογισμῶν ἐννοοῦνται εὐκολώτερον ἐφαρμοζόμενα εἰς ἑκάτερον τῶν δύο παραδείγματων τῆς προηγουμένης παραγράφου.

ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΠΟΛΛΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

17. Καλοῦνται γινόμενα πολλῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων τὰ ἐξ-
γόμενα, ἅτινα εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην ἀλγεβρικὴν
παραστάσιν ἐπὶ τὴν δευτέραν, τὸ οὕτως εὐρεθησόμενον γινόμενον ἐπὶ τὴν
τρίτην, τὸ εὐρεθησόμενον νέον γινόμενον ἐπὶ τὴν τετάρτην, καὶ οὕτω
καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν ὑπ' ὅψιν ἅπαντας τοὺς παράγοντας τοῦ γι-
νομένου. Π. χ. τὸ γινόμενον $3a(2a^2 - b^2)(-2a + 3b)(-2a - 3b)$ πα-
ριστᾷ τὸ ἐξαγόμενον $24a^5 - 66a^3b^2 + 27ab^4$, ὅπερ εὐρίσκομεν πολλα-
πλασιάζοντες τὸν πρῶτον παράγοντα $3a$ ἐπὶ τὸν δευτέρον $2a^2 - b^2$, τὸ
οὕτως εὐρεθησόμενον γινόμενον $6a^3 - 3ab^2$ ἐπὶ τὸν τρίτον $-2a + 3b$,
τὸ εὐρεθησόμενον νέον γινόμενον $-12a^4 + 6a^3b + 18a^2b - 9ab^2$ ἐπὶ τὸν
τελευταῖον $-2a - 3b$, καὶ ἐκτελοῦντες ἐπὶ τοῦ τελευταίου γινομένου
τὰς ἀναγωγὰς τῶν ἐν αὐτῷ ὁμοίων ὅρων.

Πόρισμα. — Ἄν οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου ἦναι μονώνυμα ἔχοντα
διάφορα σημεῖα, τὸ γινόμενον αὐτῶν θέλει εἶναι μονώνυμον, ὅπερ θέλει
ἔχει τὸ σημεῖον +, ἐάν οἱ ἔχοντες τὸ σημεῖον — παράγοντες αὐτοῦ ἦναι
ἄρτιοι τὸν ἀριθμὸν, καὶ τὸ σημεῖον —, ἐάν οἱ ἔχοντες τὸ σημεῖον — πα-
ράγοντες αὐτοῦ ἦναι περιττοὶ τὸν ἀριθμὸν. Παραδείγματος χάριν, τὸ μὲν
γινόμενον $2a(-3b)(4c)(-3d)$ θέλει ἔχει τὸ σημεῖον +, διότι δύο
εἶναι οἱ παράγοντες αὐτοῦ, οἱ ἔχοντες τὸ σημεῖον —, τὸ δὲ γινόμενον
 $-2a(-b)(2c)(-d)$ θέλει ἔχει τὸ σημεῖον —, διότι περιττὸς ἀριθμὸς
παραγόντων φέρει τὸ σημεῖον —. Ἢ μὲν ἀρτίαι λοιπὸν δυνάμεις ἀρνητικοῦ

τινος μονωνύμου θέλει ἔχει τὸ σημεῖον +, ἡ δὲ περιττὴ τὸ σημεῖον —. Οὕτω, π. χ., θέλομεν ἔχει $(-a)^4 = a^4$ καὶ $(-a)^5 = -a^5$.

18. Ἐπὶ τῶν γινομένων πλειοτέρων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ἐφαρμόζονται τὰ αὐτὰ θεωρήματα καὶ πορίσματα, ἅτινα ἀπεδείξαμεν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ ἐπὶ τῶν γινομένων πλειοτέρων ἀριθμῶν. Τουτέστι

1^α. Τὸ γινόμενον πλειοτέρων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων δὲν μεταβάλλεται, ὅπωςδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, τὰ δύο γινόμενα $-3a(2b-\gamma)(-3d+2a)$, $(-3d+2a)(-3a)(2b-\gamma)$, ἅτινα σύγκεινται ἐκ τῶν αὐτῶν ἀλγεβρικῶν παραγόντων $-3a$, $2b-\gamma$, $-3d+2a$, ἀλλὰ κατ' ἄλλην τινὰ τάξιν γεγραμμένων, εἶναι ἴσα, τουτέστιν ἐκτελούμενα κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὅρισμὸν δίδουσι τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

2^α. Ἀλγεβρικὴ τις παράστασις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ γινόμενον πλειοτέρων ἄλλων, ἢ πολλαπλασιασθῇ διαδοχικῶς ἐφ' ἐκάστην τούτων.

Παραδείγματος χάριν, ἡ ἀλγεβρικὴ παράστασις $3a-b$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ γινόμενον $2ab(-3b+\gamma)(a-b)$, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ διαδοχικῶς ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων $2ab$, $-3b+\gamma$, $a-b$ αὐτοῦ.

3^α. Ἐν γινομένῳ πλειοτέρων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων δυνάμεθα τὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ πλειοτέρας τούτων διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ γινόμενον $2a(-a+b)(2a-b)(3\gamma-d)$ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας $2a$ καὶ $2a-b$ διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν $4a^2-2ab$, καὶ νὰ γράψωμεν ἀντὶ τοῦ πρώτου τὸ ἐξῆς $(4a^2-2ab)(-a+b)(3\gamma-d)$.

4^α. Γινόμενον πλειοτέρων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τινὰ ἀριθμὸν ἢ ἐπὶ ἀλγεβρικὴν τινὰ παράστασιν, ἢ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ἢ ἐπὶ τὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν.

Π. χ. ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον $3a-b(2a+b)(\gamma-a)$ ἐπὶ τὸν παράγοντα 5 ἢ ἐπὶ $2a-b$, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓνα τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου ἐπὶ 5 ἢ ἐπὶ $2a-b$. Ἐὰν μὲν λάβωμεν τὸν παράγοντα 3, θέλομεν ἔχει τὸ γινόμενον $15a-b(2a+b)(\gamma-a)$, ἢ τὸ $(6a-3b)(a-b)(2a+b)(\gamma-a)$, ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸν παράγοντα $2a+b$, θέλομεν ἔχει τὸ γινόμενον $3(a-b)(10a+5b)(\gamma-a)$, ἢ τὸ $3(a-b)(4a^2-b^2)(\gamma-a)$.

Παρατήρησις. — "Όταν θέλωμεν νά εὕρωμεν τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον τοῦ γινομένου πλειοτέρων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, πρέπει ἀφ' ἑνὸς νά ἐκτελῶμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ὄρων ἐν ἐκάστῳ μερικῷ γινομένῳ, ὅταν ὑπάρχωσι τοιοῦτοι, καὶ ἀφ' ἑτέρου πρέπει νά συνδυάζωμεν οὕτω τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου, ὥστε οἱ πρὸς εὗρεσιν τοῦ τελικοῦ ἐξαγόμενου ὑπολογισμοὶ νά ἦναι ὅσω τὸ δυνατόν ἀπλούστεροι. Π. χ. ἐν τῷ ἀνωτέρῳ γινομένῳ $3a(2a^2 - b^2)(-2a + 3b)(-2a - 3b)$ εὕρομεν πολλαπλασιασάντες κατὰ τάξιν τοὺς τρεῖς πρῶτους αὐτοῦ παράγοντας τὸ γινόμενον $-42a^4 + 6a^2b^2 + 18a^3b - 9ab^3$, ὅπερ πολλαπλασιαζόμενον καὶ ἐπὶ τὸν τελευταῖον παράγοντα $-2a - 3b$ δίδει γινόμενον ἔχον 8 ὄρους, οἵτινες ἀνάγονται εἰς μόνον τοὺς 3 τοῦ ἀνωτέρου εὗρεθέντος ἐξαγόμενου $24a^5 - 66a^3b^2 + 27ab^4$, ἐνῶ, ἂν ἐπολλαπλασιαζόμεν πρῶτον τοὺς δύο παράγοντας $-2a + 3b$ καὶ $-2a - 3b$, ἔπειτα τὸ ἀναχθὲν γινόμενον αὐτῶν $4a^2 - 9b^2$ ἐπὶ τὸ γινόμενον $6a^3 - 3ab^3$ τῶν δύο ἄλλων $3a$ καὶ $2a^2 - b^2$, ἠθέλωμεν ἔχει τελικὸν γινόμενον, ἔχον 4 μόνον ὄρους, οἵτινες ἀνάγονται εἰς τοὺς 3 τοῦ αὐτοῦ γινομένου, καὶ οὕτως οἱ ὑπολογισμοὶ καὶ πολὺ ταχύτερον ἤθελον ἐκτελεσθῇ καὶ πολὺ ἀσφαλέστερον ὡς ἐκ τούτου ἤθελον φέροι ἡμᾶς εἰς τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ. — ΠΟΤΕ ΔΕΝ ΔΙΑΙΡΕΙΤΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΝ ΔΙ' ἑτεροῦ

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

19. Καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις, τὰς ἑξῆς:

1^η. "Όταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἦναι μονώνυμα.

2^η. "Όταν ὁ διαιρετέος ἦναι πολυώνυμον καὶ ὁ διαιρέτης μονώνυμον.

3^η. "Όταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἦναι πολυώνυμα.

20. Ἐξ ὑποθέσωμεν ἐν πρῶτοις ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως μονωνύμου διὰ μονωνύμου, παραδ. χάριν, τοῦ $12a^5b^4\gamma^2$ διὰ τοῦ $4a^3b^4$. Ἐπειδὴ, κατὰ τὸν γνωστὸν τῆς διαιρέσεως ὁρισμὸν, πρέπει νά

εὐρωμεν ἑτέραν ἀλγεβορικήν παράστασιν, ἥτις πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸν διαιρέτην $4a^2b^4$ νὰ δώσῃ γινόμενον τὸν διαιρετέον $12a^5b^4\gamma^3$, συμπεραίνομεν α') ὅτι τὸ πηλίκον πρέπει νὰ ᾖ μόνωνυμον, διότι καὶ ὁ διαιρετέος εἶναι μόνωνυμον, καὶ μόνωνυμον μόνον ἐπὶ μόνωνυμον ἐὰν πολλαπλασιασθῇ δίδῃ γινόμενον μόνωνυμον β') ὅτι, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ 4 τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν συντελεστήν τοῦ πηλίκου πρέπει νὰ ᾖ ἴσον μὲ τὸν συντελεστήν 12 τοῦ διαιρετέου, ὁ συντελεστής 3 τοῦ πηλίκου εὐρίσκεται διαιρουμένου τοῦ 12 διὰ 4 γ') ὅτι, ἐπειδὴ ὁ ἐκθέτης 5 τοῦ α ἐν τῷ διαιρέτῳ πρέπει νὰ ᾖ ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τοῦ α τῶν δύο παραγόντων, καὶ ὁ εἰς τῶν παραγόντων $4a^2b^4$ ἔχει τὸ α μὲ ἐκθέτην 2, ἔπεται ὅτι ὁ ἐκθέτης τοῦ α ἐν τῷ ἑτέρῳ θέλει εὐρεθῇ, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου 5 τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῇ ὁ ἐκθέτης 2 τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ διαιρέτου δ') ὅτι, ἐπειδὴ τὸ γράμμα b ἔχει τὸν αὐτὸν ἐκθέτην ἐν τῷ διαιρέτῳ καὶ διαιρέτῳ, δὲν πρέπει νὰ εὐρίσκηται ἐν τῷ πηλίκῳ, ἢ πρέπει νὰ ἔχῃ ἐν αὐτῷ ἐκθέτην μηδέν, καὶ ε') ὅτι, ἐπειδὴ τὸ γράμμα γ δὲν εὐρίσκεται ἐν τῷ διαιρέτῳ, πρέπει νὰ εὐρίσκηται ἀναγκαστικῶς εἰς τὸ πηλίκον μὲ τὸν ἴδιον αὐτοῦ ἐκθέτην. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει:

$$\frac{12a^5b^4\gamma^3}{4a^2b^4} = 3a^3b^0\gamma^3 \text{ ἢ προτιμότερον } 3a^3\gamma^3,$$

διότι προφανῶς ἔχομεν $4a^2b^4 \times 3a^3\gamma^3 = 12a^5b^4\gamma^3$.

Ἐντεῦθεν πορίζομεθα λίαν εὐκόλως τὸν ἑξῆς κανόνα·

Ἴνα διαιρέσωμεν μονώνυμον διὰ μονώνυμον, διαιροῦμεν πρῶτον τὸν συντελεστήν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ εὐρίσκομεν τὸν συντελεστήν τοῦ πηλίκου, γράφομεν ἔπειτα πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὐρεθέντος συντελεστοῦ ἕκαστον τῶν γραμμάτων τοῦ διαιρετέου, τὰ μὲν κοινὰ εἰς τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην γράμματα μὲ ἐκθέτας ἴσους τῇ διαφορᾷ τῶν ἐκθετῶν τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τῶν ἐκθετῶν τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ διαιρετέου, τὰ δὲ μὴ κοινὰ, ὅπως εὐρίσκονται ἐν τῷ διαιρέτῳ. Ἐὰν δὲ κοινόν τι γράμμα ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην ἔρ τε τῷ διαιρέτῳ καὶ διαιρέτῳ, δὲν γράφομεν αὐτὸ εἰς τὸ πηλίκον, ἢ δίδομεν εἰς αὐτὸ τὸν ἐκθέτην 0.

Καθόσον δ' ἀφορᾷ τὸ σημεῖον τοῦ πηλίκου, ἐννοεῖται εὐκόλως ὅτι τοῦτο πρέπει νὰ ᾖ τοιοῦτον, ὥστε σύνδυαζόμενον μετὰ τοῦ σημείου τοῦ διαιρέτου νὰ δίδῃ τὸ σημεῖον τοῦ διαιρετέου· ἐν ἁλλαις λέξεις

"Όταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἔχωσιν ἀμφοτέροι τὸ σημεῖον + ἢ τὸ σημεῖον -, τὸ πηλίκον θέλει ἔχει τὸ +, διότι γνωρίζομεν ὅτι + ἐπὶ + δίδει +, καὶ + ἐπὶ - δίδει -.

"Όταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἔχωσιν ἀντίθετα σημεῖα, τὸ πηλίκον θέλει ἔχει τὸ σημεῖον -, διότι γνωρίζομεν ὅτι + ἐπὶ - δίδει -, καὶ - ἐπὶ + δίδει -.

Παραδείγματα χάριν, συνδυάζοντες τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα μὲ τὸν γνωστὸν κανόνα τῶν σημείων, θέλομεν ἔχει

$$\frac{+12x^5y^3}{+4x^2y^3} = +3x^3y, \quad \frac{-12x^5y^3}{-4x^2y^3} = +3x^3y, \quad \frac{+12x^5y^3}{-4x^2y^3} = -3x^3y, \quad \frac{-12x^5y^3}{+4x^2y^3} = -3x^3y.$$

Πόρισμα. — Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος πορίζομεθα εὐκόλως ὅτι μονώνυμον δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ μονώνυμου, τουτέστι δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὡς πηλίκον ἀκεραίαν ἀλγεβρικήν παράστασιν,

α') "Όταν ὁ συντελεστής τοῦ διαιρετέου δὲν ἦται διαιρετὸς διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου

β') "Όταν ὁ διαιρετέος ἔχῃ γράμμα τι μὲ ἐκθέτην μικρότερον τοῦ ἐκθέτου τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ διαιρέτου καὶ

γ') "Όταν ὁ διαιρέτης περιέχῃ γράμμα τι μὴ ἐμπεριεχόμενον ἐν τῷ διαιρετέῳ.

24. * Ἀς ὑποθέσωμεν δεύτερον, ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως πολυνώμου διὰ μονώνυμου. Τὴν πρᾶξιν τότε ἐκτελοῦμεν κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

"Ινα διαιρέσωμεν πολώνυμον διὰ μονώνυμου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολυνώμου διὰ τοῦ μονώνυμου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ οὕτως εὑρεθησόμενα μερικὰ πηλικά.

Διότι οὕτω θέλομεν εὑρεῖ πολυνώμον, ὅπερ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην, θέλει δώσῃ προφανῶς γινόμενον τὸν δεδομένον διαιρετέον.

* Ἄν εἴχομεν, παραδείγματος χάριν, νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυνώμον $45a^5b^3 - 21a^4b^3 + 9a^3b^3$ διὰ τοῦ μονώνυμου $3a^3b^3$, θέλομεν εὑρεῖ τὸ ζητούμενον πηλίκον διαιροῦντες ἕκαστον τῶν ὅρων $45a^5b^3$, $-21a^4b^3$, $9a^3b^3$ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου $3a^3b^3$, καὶ προσθέτοντες τὰ εὑρεθησόμενα πηλικά $5a^2$, $-7ab$, $3b^3$. Διότι οὕτως θέλομεν εὑρεῖ τὸ πολυνώμον $5a^3 - 7ab + 3b^3$, ὅπερ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $3a^3b^3$ θέλει δώσῃ προφανῶς γινόμενον τὸν δεδομένον διαιρετέον $45a^5b^3 - 21a^4b^3 + 9a^3b^3$. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει

$$\frac{45a^5b^2 - 24a^4b^3 + 9a^3b^4}{3a^3b^2} = 5a^2 - 7ab + 3b^2$$

Πόρισμα. — Συμπεραίνομεν ἐντεῦθεν ὅτι πολυώνυμον δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ μονωνύμου, ἐὰν εἷς τῶν ὅρων αὐτοῦ δὲν ᾖναι διαιρετὸς διὰ τοῦ μονωνύμου.

25. Ἄς ὑποθέσωμεν τρίτον ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου. Ἵνα ἴδωμεν πῶς θέλομεν εὑρεῖ τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ὑποθέτομεν πρὸς στιγμήν ὅτι γνωρίζομεν τὸ ζητούμενον πηλίκον. Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, καὶ ἀπεδείξαμεν προηγουμένως, ὅτι ἐν παντὶ γινομένῳ ὑπάρχουσι πάντοτε δύο τοῦλάχιστον ὅροι προκύπτοντες ἄνευ οὐδεμιᾶς ἀναγωγῆς, οὗτοι δὲ εἶναι ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος αὐτοῦ, ὅταν οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου ᾖναι διατεταγμένοι κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ γράμματος, συμπεραίνομεν ὅτι, ἐὰν διατάξωμεν τὸν διαιρετέον, τὸν διαιρέτην καὶ τὸ πηλίκον κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις ὁποιοῦδήποτε γράμματος, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρέτου θέλει εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου· ἐπομένως, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρέτου, διατεταγμένου οὕτω, διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, διατεταγμένου ὁμοιοτρόπως, θέλομεν ἀναγκαιῶς εὑρεῖ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Ἀφοῦ εὑρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ζητουμένου πηλίκου, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρέτου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα ὅρον, ὅ,τι μένει μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων θέλει εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς λοιποὺς ὅρους τοῦ πηλίκου. Ἐπομένως, ἐὰν διατάξωμεν ὁμοιοτρόπως τὴν εὑρεθησομένην διαφοράν, ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς θέλει εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶτον τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ πηλίκου. Διαιροῦντες λοιπὸν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ εὑρεθησομένου ὑπολοίπου, διατεταγμένου ὁμοιοτρόπως, διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, θέλομεν εὑρεῖ ἀναγκαιῶς τὸν πρῶτον τῶν λοιπῶν ὅρων, ἥτοι τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Ἀφοῦ εὑρωμεν οὕτω καὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου, ὅ,τι μένει μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν

ὁμοίων ὅρων θέλει εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς λοιποὺς ὅρους τοῦ πηλίκου. Ἐπομένως, ἐὰν διατάξωμεν ὁμοιοτρόπως τὸ νέον τοῦτο ὑπόλοιπον, ὁ πρῶτος ὅρος αὐτοῦ θέλει εἶναι πάλιν ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶτον τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ πηλίκου. Διαρροῦντες λοιπὸν ταῦτον διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου θέλομεν ἀναγκαιῶς εὑρεῖν τὸν τρίτον ὅρον τοῦ ζητουμένου πηλίκου, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐντεῦθεν ὁ κανὼν.

Ἴνα διαιρέσωμεν πολυώνυμον διὰ πολυωνύμου, διατάσσομεν πρῶτον ἀμφότερα κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ γράμματος, διαιροῦμεν ἔπειτα τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου καὶ εὐρίσκομεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ζητουμένου πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὐρεθέντα ὅρον, ἀφαιροῦμεν τὸ ἐδρεθησόμενον γινόμενον ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιροῦμεν πάλιν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ υπολοίπου, ἄφου προηγουμένως ἔκτελέσωμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν ἐν αὐτῷ ὁμοίων ὅρων καὶ διατάξωμεν αὐτοὺς ὁμοιοτρόπως, διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου καὶ εὐρίσκομεν οὕτω τὸν δεῦτερον ὅρον τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν πάλιν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὐρεθέντα ὅρον, ἀφαιροῦμεν τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον ἀπὸ τοῦ πρώτου υπολοίπου καὶ διαιροῦμεν πάλιν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ νέου υπολοίπου, ἄφου προηγουμένως ἔκτελέσωμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν ἐν αὐτῷ ὁμοίων ὅρων καὶ διατάξωμεν αὐτοὺς ὁμοιοτρόπως, διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου καὶ εὐρίσκομεν οὕτω τὸν τρίτον ὅρον τοῦ πηλίκου. Ἐξακολουθοῦμεν δὲ ὁμοιοτρόπως μέχρις οὗ εὑρωμεν ἅπαντας τοὺς ὅρους τοῦ ζητουμένου πηλίκου, ὅτε θέλομεν εὑρεῖν ὑπόλοιπον μηδὲν μετὰ τὴν ἀπὸ τοῦ προηγουμένου υπολοίπου ἀφαίρεσιν τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ πηλίκου, ὅταν, ἐννοεῖται ὀκθοῦν, ἡ δεδομένη πρὸς ἐκτέλεσιν διαίρεσις ᾗται δυνατὴ.

* Ἀς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $27a^7 + 20a^6b^3 - 12a^5b^4 - 35b^8 + 10a^4b^6 + 5a^2b^8$ διὰ τοῦ πολυωνύμου $-4ab^2 + 7b^3 - 6a^2b$. Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸ διαιρετέον πολυώνυμον καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὸ πολυώνυμον τοῦ διαιρέτου, ἄφου προηγουμένως διατάξωμεν αὐτὰ κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος, παραδείγματος χάριν, κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος a διαιροῦμεν ἔπειτα τὸν πρῶτον ὅρον $-12a^5b^4$ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $-6a^2b$ τοῦ διαιρέτου καὶ

εὐρίσκομεν τὸν πρῶτον ὅρον $2a^3b^2$ τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὐρεθέντα ὅρον $2a^3b^2$ τοῦ πηλίκου, καὶ τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον $-4a^4b^3 - 8a^4b^4 + 14a^3b^5$ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δεδομένου διαιρετέου, τοῦθ' ὅπερ ἐκτελεῖται γραφομένου ἐκάστου τῶν ὅρων αὐτοῦ ὑπὸ τὸν διαιρέτην μὲ ἐναντίον σημεῖον (6). Ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ εὐρίσκομεν τὸ ὑπὸ τὴν πρώτην ὀριζόντιον γραμμὴν γεγραμμένον πολυώνυμον, ὅπερ προκύπτει διατεταγμένον ὁμοιοτρόπως.

$$\begin{array}{r|l}
 -12x^5y^3 + 10x^4y^4 + 20x^3y^5 + 5x^2y^6 + 27x^2y^7 - 35y^8 & -6x^2y^5 - 4x^2y^6 + 7y^8 \\
 +12x^5y^3 + 8x^4y^4 - 14x^3y^5 & 2x^3y^2 - 3x^2y^3 + xy^4 - 5y^5 \\
 \hline
 +18x^4y^4 + 6x^3y^5 + 5x^2y^6 + 27x^2y^7 - 35y^8 & \\
 -18x^4y^4 - 12x^3y^5 + 21x^2y^6 & \\
 \hline
 -6x^3y^5 + 26x^2y^6 + 27x^2y^7 - 35y^8 & \\
 +6x^3y^4 + 4x^2y^5 - 7xy^7 & \\
 \hline
 +30x^2y^4 + 20x^2y^7 - 35y^8 & \\
 -30x^2y^6 - 20x^2y^7 + 35y^8 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Διαιροῦμεν πάλιν τὸν πρῶτον ὅρον αὐτοῦ $18a^4b^4$ διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $-6a^2b^3$ τοῦ διαιρέτου καὶ εὐρίσκομεν τὸν δεῦτερον ὅρον $-3a^2b^3$ τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὐρεθέντα ὅρον, καὶ τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον $18a^4b^4 + 12a^3b^5 - 21a^2b^6$ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου, τοῦθ' ὅπερ ἐκτελεῖται γραφομένου ἐκάστου τῶν ὅρων αὐτοῦ ὑπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον μὲ ἐναντίον σημεῖον, ὅπως φαίνεται ἐν τῇ ἀνωτέρῳ διατάξει τῶν καθ' ἕκαστα τῆς πράξεως. Ἐκτελοῦμεν ἀκολουθῶς τὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ εὐρίσκομεν τὸ ὑπὸ τὴν δευτέραν ὀριζόντιον γραμμὴν γεγραμμένον πολυώνυμον, ὅπερ προκύπτει διατεταγμένον ὁμοιοτρόπως.

Διαιροῦμεν πάλιν τὸν πρῶτον ὅρον $-6a^3b^5$ τοῦ εὐρεθέντος δευτέρου ὑπολοίπου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $-6a^2b^3$ τοῦ διαιρέτου καὶ εὐρίσκομεν τὸν τρίτον ὅρον ab^4 τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν δ' ἔπειτα τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὐρεθέντα ὅρον, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον $-6a^3b^5 - 4a^2b^6 + 7ab^7$ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου, τοῦθ' ὅπερ ἐκτελεῖται γραφομένου ἐκάστου τῶν ὅρων αὐτοῦ ὑπὸ τὸ δεῦτερον ὑπόλοιπον μὲ ἐναντίον σημεῖον. Ἐκτελοῦμεν μετὰ ταῦτα τὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ὅρων, καὶ εὐρίσκομεν τὸ ὑπὸ τὴν τρίτην ὀριζόντιον γραμμὴν γεγραμμένον πολυώνυμον, ὅπερ προκύπτει διατεταγμένον ὁμοιοτρόπως, τοῦτέστι κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ a .

Εύρισκομεν ὁμοιοτρόπως καὶ τὸν τέταρτον ὅρον — $5b^3$ τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὐρεθέντα ὅρον, καὶ τὸ εὐρεθισόμενον γινόμενον $30a^2b^3 + 20ab^4 - 35b^5$ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ τρίτου ὑπολοίπου, ἐπειδὴ δὲ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀναγωγῶν τῶν ἐν αὐτοῖς ὁμοίων ὅρων εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον 0, ἔπεται ὅτι ἡ μὲν διαιρέσις δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ ἀκριβῶς, τὸ δὲ ὑπὸ τὸν διαιρέτην γραφὲν πολυώνυμον $2a^3b^2 - 3a^2b^3 + ab^4 - 5b^5$ θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Παρατήρησις 1. — Ἐκαστος παρατηρεῖ εὐκόλως τὴν μεγίστην ὁμοιότητα, ἥτις ὑπάρχει μετὰξὺ τοῦ τρόπου τῆς ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν καὶ τοῦ τρόπου τῆς ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως δύο ἀλγεβρικῶν πολυωνύμων, καὶ προσέτι ὅτι, καθὼς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ καταδιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιά τῆς εὐρισκομένης ἐκάστοτε διαφορᾶς τόσα ἐκ τῶν λοιπῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου, ὅσα εἶναι ἀναγκαῖα, ὅπως ἡ ἀπὸ τοῦ ἀποτελεσθησομένου οὕτως ἀριθμοῦ ἀφαιρέσεις τοῦ ἀκολουθοῦ γινόμενου τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸ εὐρεθισόμενον ψηφίον τοῦ πηλίκου καταστῇ δυνατὴ· οὕτω καὶ ἐν τῇ ἐκτελέσει τῆς ἀλγεβρικῆς διαιρέσεως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιά ἐκάστης μερικῆς, οὕτως εἰπεῖν, διαφορᾶς τόσους μόνον ὅρους ἐκ τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου πολυωνύμου, ὅσοι εἶναι ἀναγκαῖοι, ὅπως οἱ ὅροι τοῦ ἀκολουθοῦ γινόμενου τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν εὐρεθισόμενον ὅρον τοῦ πηλίκου ἔχωσιν ἕκαστος τὸν μεθ' οὗ δύναται νὰ ἀναχθῇ. Παραδείγματος χάριν, ἡδυνάμεθα νὰ μὴ γράψωμεν ὑπὸ τὴν πρώτην ὀριζόντιον γραμμὴν τοὺς δύο ὅρους $27ab^7$, — $35b^8$ καὶ ὑπὸ τὴν δευτέραν τὸν ὅρον — $35b^8$, ὡς περιττοὺς ἐν τῇ ἐκτελέσει τῶν ἀναγωγῶν τῶν ὁμοίων ὅρων.

Παρατήρησις 2. — Ὅταν ὅρος τις τοῦ γινόμενου τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τινὰ ὅρον τοῦ πηλίκου δὲν ἔχῃ οὐδένα ὅμοιον ὅρον μετὰξὺ τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου, τότε πρέπει νὰ γράφηται κατὰ τοὺς κανόνες τῆς ἀναγωγῆς μὲ τὸ ἴδιον αὐτοῦ σημεῖον εἰς τὴν θέσιν, εἰς ἣν πρέπει νὰ εὐρίσκηται ἐν τῇ γενησομένη ἀκολουθίᾳ διατάξει τῆς εὐρεθησομένης διαφορᾶς. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $a^3 - b^5$ διὰ τοῦ $a - b$, βλέπομεν, ἀκολουθοῦντες κατὰ γράμμα τὸν ἀνωτέρω τῆς διαιρέσεως τῶν πολυωνύμων κανόνα, ὅτι οἱ ὅροι a^2b , ab^2 τῶν μετὰ τοῦ δεδομένου διαιρετέου καὶ τῶν εὐρισκομένων διαφορῶν ἀναγομένων πολυωνύμων — $a^3 + a^2b$, — $a^2b + ab^2$ δὲν ἔχουσιν ἀντιστοίχους ὁμοίους ὅρους, ὁ μὲν a^2b ἐν τῷ διαιρετέῳ $a^3 - b^3$, ὁ δὲ ab^2 ἐν τῇ πρώτῃ διαφορᾷ $a^2b - b^3$. Γράφομεν τότε αὐτοὺς ὑπὸ τὴν ὑπ' αὐτοὺς ἀγομένην

ορίζοντιον γραμμὴν εἰς τὴν θέσιν, εἰς ἣν πρέπει νὰ εὐρίσκωνται κατὰ τὴν γενησομένην ἀκολουθίᾳ διάταξιν τῶν διαφορῶν. Τοῦτου ἕνεκα ἐγράψαμεν ἐν τῷ κατωτέρῳ παραδείγματι τὸν μὲν a^2b ὡς πρῶτον ὄρον ἐν τῇ πρώτῃ διαφορᾷ, τὸν δὲ ab^2 ὡς πρῶτον ὄρον ἐν τῇ δευτέρᾳ διαφορᾷ, διότι τὰ πολυώνυμα τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου διετάχθησαν πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως αὐτῶν κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ a .

$$\begin{array}{r|l} a^3 - b^3 & a - b \\ -a^3 + a^2b & \\ \hline +a^2b - b^3 & \\ -a^2b + ab^2 & \\ \hline +ab^2 - b^3 & \\ -ab^2 + b^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Παρατήρησις 5. — Ὅταν ὁ διαιρετέος ἢ ὁ διαιρέτος καὶ διαιρέτης περιέχωσι τὸ καθ' ὃ διατάσσονται γράμματα εἰς πολλοὺς ὄρους εἰς τὴν αὐτὴν δυνάμιν, τότε ἡ μὲν διάταξις αὐτῶν γίνεται κατὰ τὰ περὶ τῆς περιπτώσεως ταύτης ἐν τῷ Δευτέρῳ Μέρει λεχθέντα, ἡ δὲ διαίρεσις ἀπαρράλληλως κατὰ τὸν προεκτεθέντα κανόνα, θεωρουμένων τῶν πολλαπλασιαζόντων τὰς αὐτὰς δυνάμεις τῶν καθ' ὃ γίνεται ἡ διάταξις γράμματος πολυωνύμων ὡς συντελεστῶν αὐτῶν καὶ εὐρισκομένων τῶν ὄρων τοῦ πηλίκου δι' ἰδιαίτερων μερικῶν διαιρέσεων. Ἀλλὰ περὶ τῶν καθέκαστα τῆς ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἐκτελέσεως τῶν πράξεων ἐνομήσαμεν καλὸν νὰ κάμωμεν ἰδιαίτερος λόγον μόνον ἐν τῷ Δευτέρῳ Μέρει τῆς παρούσης συγγραφῆς διὰ τοῦς ἐν τῇ 2^ῃ παρατηρήσει τῆς 15 παραγράφου ἐκτεθέντας λόγους.

ΠΟΤΕ ΔΕΝ ΔΙΑΙΡΕΙΤΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΝ ΔΙ' ΕΤΕΡΟΥ

26. Ἐκ τῶν συλλογισμῶν, δι' ὧν ἀπεδείξαμεν ἀνωτέρω τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου, πορίζομεθα εὐκόλως κατὰ ποίας περιπτώσεις πολυωνύμῳ τι δὲν εἶναι διαιρετὸν δι' ἑτέρου. Εἶναι δὲ αὗται αἱ ἐξῆς, ὑποτιθεμένων τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου διατεταγμένων κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ γράμματος.

1^{ον}. Ὅταν ὁ πρῶτος ὄρος τοῦ διαιρετέου δὲν ᾖ διαιρετὸς διὰ τοῦ πρῶτου ὄρου τοῦ διαιρέτου.

Παραδείγματος χάριν, τὸ πολυώνυμον $3a^3b - 12a^2b^2 + 6ab^3$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $2a^2b - 3ab^2$, διότι ὁ πρῶτος ὅρος $3a^3b$ δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $2a^2b$ τοῦ διαιρέτου.

2^{ov}. "Οταν καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ διαιρετέου δὲν ᾗται διαιρετὸς διὰ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Διότι, ἐν ἀντιστροφῇ ὁ τρόπος τῆς διατάξεως, οἱ πρῶτοι αὐτῶν ὅροι θέλουσι γίνεαι τελευταῖοι καὶ οἱ τελευταῖοι πρῶτοι. Π. χ. τὸ πολυώνυμον $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 8x$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $2x^3 - 5x^2$, διότι ὁ τελευταῖος ὅρος $-8x$ τοῦ πρώτου δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ τελευταίου ὅρου $-5x^2$ τοῦ δευτέρου.

3^{ov}. "Οταν ὁ πρῶτος ὅρος ὑπολοίπου τινὸς πρὸ τῆς εὐρέσεως τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ πηλίκου δὲν ᾗται διαιρετὸς διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Π. χ. τὸ πολυώνυμον $8a^4 - 7a^3b + 12a^2b^2 - 9ab^3$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $2a^2 - 4ab + 3b^2$, διότι ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα θέλομεν εὑρεῖν ὡς πρῶτον ὅρον τοῦ πρώτου ὑπολοίπου τὸν $9a^2b$, ὅστις δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ὅρου $2a^2$ τοῦ διαιρέτου.

4^{ov}. "Οταν μετὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ πηλίκου δὲν εὐρωμεν ἀμέσως ὑπόλοιπον μηδέν.

Π. χ. τὸ πολυώνυμον $14a^5 - 27a^4b + 21a^3b^2 - 7a^2b^3 - 2ab^4$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $2a^2 - 3ab + 2b^2$, διότι, ἀφοῦ εὐρωμεν τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ πηλίκου ab^2 , δὲν εὐρίσκουμεν ἀμέσως διαφορὰν μηδέν, ἀλλὰ $-10a^2b^3$.

5^{ov}. "Οταν εὐρωμεν πηλίκον ὅρον τινὰ ἔχοντα μὲν τὸ καθ' ὃ ἐρέτετο ἡ διάταξις γράμματα εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν, εἰς ἣν πρέπει νὰ ἔχῃ αὐτὸ καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ πηλίκου, ἀλλὰ διαφορὰν τοῦτου κατὰ τι τῶν ἄλλων μερῶν αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν, τὸ πολυώνυμον $2 - 3x - 5x^2 + 4x^3 - 6x^4$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $1 - 4x + 3x^2$, διότι εὐρίσκουμεν ὡς τρίτον ὅρον τοῦ ζητουμένου πηλίκου τὸν $9x^2$, ὅστις ἔχει μὲν τὸ γράμμα x εἰς ἣν δύναμιν πρέπει νὰ ἔχῃ αὐτὸ καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ ζητουμένου πηλίκου, ἀλλὰ διαφέρει τοῦτου καὶ κατὰ τὸν συντελεστήν, ὅστις εἶναι 9 ἀντὶ νὰ ᾖται 2, καὶ κατὰ τὸ σημεῖον, ὅπερ εἶναι + ἀντὶ νὰ ᾖται -.

6^{ov}. "Οταν ὁ διαιρέτης περιέχῃ εἰς ὅποιονδήποτε τῶν ὅρων αὐτοῦ γράμμα τι μὴ περιεχόμενον ἐν οὐδενὶ τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου. Ὁ δὲ λόγος τοῦτου εἶναι προφανής.

τον. Ὅταν ὁ διαιρέτης περιέχῃ γράμμα τι μὲ ἐκθέτην ἀνωτέρον τοῦ μεγαλειότερου ἐκθέτου, ὃν ἔχει τὸ αὐτὸ γράμμα ἐν τῷ διαιρετέῳ.

Διότι τότε, ἐὰν διαταχθῶσι τὰ δύο δεδομένα πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος τούτου, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου δὲν θέλει διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, διότι ὁ μὲν θέλει ἔχει προφανῶς τὸ γράμμα τῆς διατάξεως εἰς μικροτέραν δύναμιν τοῦ δέ.

27. Ὅταν διαίρεσίς τις ἀλγεβρική δὲν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ καὶ φθάνωμεν εἰς ὑπόλοιπόν τι, οὗτινος ὁ πρῶτος ὅρος δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, δυνάμεθα νὰ συμπληρώσωμεν τὸ πηλίκον προσθέτοντες εἰς τοὺς εὑρεθέντας αὐτοῦ ὅρους κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ὑπόλοιπον καὶ παρονομαστήν τὸν δεδομένον διαιρέτην. Διότι, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Α τὸν διαιρετέον, διὰ Β τὸν διαιρέτην, διὰ Π τοὺς εὑρεθέντας ὅρους τοῦ πηλίκου καὶ διὰ Υ τὸ μὴ διαιρετὸν ὑπόλοιπον, ἐπειδὴ εἰς πᾶσαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι πάντοτε ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, κῆζημένῳ κατὰ τὸ εὑρεθὲν ὑπόλοιπον, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$A = B \times \Pi + Y,$$

ἐξ ἧς, διαιροῦντες τὰ δύο μέλη διὰ Β, πορίζομεθα τὴν ἐπομένην,

$$\frac{A}{B} = \Pi + \frac{Y}{B},$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ ζητούμενον.

Τὸ μὲν πολυώνυμον Π καλεῖται συνήθως ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου, ἡ ἀτελής πηλίκον, ἡ δὲ παράστασις $\Pi + \frac{Y}{B}$ πλήρες πηλίκον.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $45x^5 - 25x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 42x + 3$ διὰ τοῦ $5x^3 - 3x + 2$, ἠθέλομεν εὑρεῖ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν δύο πρώτων δυνατῶν διαίρεσεων τὸ ἀτελὲς πηλίκον $3x^2 - 5x$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον $4x^2 - 2x + 3$, ὅπερ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ διαιρέτου $5x^3 - 3x + 2$. Ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἀνωτέρω

$$\frac{45x^5 - 25x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 42x + 3}{5x^3 - 3x + 2} = 3x^2 - 5x + \frac{4x^2 - 2x + 3}{5x^3 - 3x + 2}.$$

28. Ὅταν ἡ πρὸς ἐκτέλεσιν διαίρεσις δὲν ᾖναι δυνατὴ καὶ διατάξωμεν τὰ δεδομένα πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις γράμμα-

τὸς τινος, δυνάμεθα πάντοτε, παραδεχόμενοι ἐν ἀνάγκῃ καὶ κλασμα-
τικούς συντελεστάς, νὰ παρατείνωμεν τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως, μέχρις
οὗ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον, οὗτινος ὁ πρῶτος ὅρος νὰ περιέχῃ τὸ καθ' ὃ
ἐγένετο ἡ διάταξις γράμμα εἰς δύναμιν μικροτέραν ἐκείνης, ἣν ἔχει
τὸ αὐτὸ γράμμα εἰς τὸν διαιρέτην. Π. χ., ἂν εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ
πολυώνυμον $24x^4 - 3x^3 - 5x + 7$ διὰ τοῦ $7x^3 + x - 4$, ἠθέλομεν εὑρεῖ
πηλίκον $3x - \frac{3}{7}$ καὶ ὑπόλοιπον $-3x^2 - \frac{11}{7}x + \frac{46}{7}$, ὅπερ περιέχει τὸ
γράμμα x , κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ ὁποίου διετάχθησαν τὰ
δεδομένα πολυώνυμα, εἰς δύναμιν μικροτέραν ἐκείνης, ἣν ἔχει τὸ αὐτὸ
γράμμα ἐν τῷ δεδομένῳ διαιρέτῃ.

Πόρισμα. — Ἐπεταί ἐντεῦθεν ὅτι, ἐὰν ὁ διαιρέτης περιέχῃ τὸ καθ' ὃ
ἐγένετο ἡ διάταξις γράμμα εἰς τὴν $1^{\text{η}}$ δύναμιν, τὸ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν
τῶν δυνατῶν διαιρέσεων εὑρεθησόμενον ὑπόλοιπον δὲν θέλει περιέχει οὐ-
δόλως τὸ γράμμα τῆς διατάξεως. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ
διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $4x^3 - 2x + 5$ διὰ τοῦ $2x - 3$, ἠθέλομεν εὑ-
ρεῖ πηλίκον $2x^2 + 3x + \frac{7}{2}$ καὶ ὑπόλοιπον $\frac{31}{2}$, ὅπερ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ
 x , τουτέστι δὲν περιέχει τὸ γράμμα x , κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις
τοῦ ὁποίου ἐγένετο ἡ διάταξις.

29. ΘΕΩΡΗΜΑ. — Ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖ τῆς μορφῆς $x - a$, τοῦ
διααιρετέου ὑποτιθεμένου διατεταγμένου κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις
τοῦ x , τὸ ἀνεξάρτητον τοῦ x ὑπόλοιπον, ὅπερ εὑρίσκομεν μετὰ τὴν
ἐκτέλεσιν τῶν δυνατῶν διαιρέσεων, θέλει εἶναι αὐτὸς ὁ δεδομένος
διααιρετέος, ἐν ᾧ ἤθελε τεθῇ a ἀντὶ τοῦ x , τουτέστιν ἡ τιμὴ τοῦ x , ἡ
μηδενίζουσα τὸν διαιρέτην $x - a$.

Πρὸς ἀποδείξιν τούτου ἂς παραστήσωμεν συμβολικῶς διὰ τοῦ Φ_x τὸν
δεδομένον διααιρετέον διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ
γράμματος x , διὰ Π_x τὸ εὑρεθὲν πηλίκον καὶ διὰ Υ τὸ ἀνεξάρτητον τοῦ
 x ὑπόλοιπον. Θέλομεν ἔχει προφανῶς τὴν ἰσότητα

$$\Phi_x = (x - a)\Pi_x + \Upsilon.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἰσότης αὕτη ὑφίσταται προφανῶς ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ᾖ τῆς
ἡ εἰς τὸ x διδομένη τιμὴ, ἔπεται ὅτι θέλει ὑπάρχει καὶ ἂν ὑποτεθῇ τὸ
 x ἴσον μὲ a , ὅτε θέλομεν ἔχει, θέτοντες ἐν αὐτῇ ὅπου x τὸ γράμμα a ,

$$\Phi_a = (a - a)\Pi_a + \Upsilon,$$

ἥ, ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $a - a$ εἶναι ἴση μὲ τὸ μηδέν, τὴν ἐξῆς ἰσότητα

$$\Phi_x = \Upsilon,$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα, διότι δεικνύει ὅτι τὸ ἀνεξάρτητον τοῦ x ὑπόλοιπον Υ εἶναι αὐτὸς ὁ δεδομένος διαιρετέος Φ_x , ἐν ᾧ ἀντὶ τοῦ x ἐτέθη a , τουτέστιν ἐκείνη τοῦ x ἡ τιμὴ, ἥτις μηδενίζει τὸν δεδομένον διαιρέτην $x - a$.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἶχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $3x^3 - 2x + 4$ διὰ τοῦ $x - 2$, ἠθέλομεν εὑρεῖ ὑπόλοιπον $3.2^3 - 2.2 + 4$, τουτέστι τὸ δεδομένον πολυώνυμον $3x^3 - 2x + 4$, ἐν ᾧ ἀντὶ τοῦ x ἠθέλομεν θέσει τὴν τιμὴν αὐτοῦ 2, τὴν μηδενίζουσαν τὸν διαιρέτην $x - 2$.

Πόρισμα. — Ἐπεταὶ ἐντεῦθεν ὅτι, ὅταν Φ_x ᾖναι ἴσον μὲ τὸ μηδέν, καὶ τὸ ὑπόλοιπον Υ θέλει εἶναι μηδέν, ἐπομένως ὁ διαιρετέος Φ_x θέλει εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διαιρέτου $x - a$.

Παραδείγματος χάριν, τὸ πολυώνυμον $5x^3 - 4x^2 - 35x - 6$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $x - 3$, διότι ἐὰν θέσωμεν ἐν αὐτῷ 3 ἀντὶ τοῦ x , θέλομεν ἔχει $5.3^3 - 4.3^2 - 35.3 + 6$, ἡ τὸ $5.27 - 4.9 - 35.3 + 6$, ὕπερ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων εὐρίσκεται ἴσον τῷ μηδενί.

Κατὰ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα τὰ πολυώνυμα $x^3 - a^3$, $x^4 - a^4$ εἶναι διαιρετὰ διὰ τοῦ $x - a$, διότι ἐὰν θέσωμεν εἰς αὐτὰ a ἀντὶ τοῦ x , θέλομεν ἔχει τὰ ἐξῆς $a^3 - a^3$ καὶ $a^4 - a^4$, ἅτινα μηδενίζονται.

Ὡσαύτως, τὰ πολυώνυμα $x^4 - a^4$ καὶ $x^5 + a^5$ εἶναι διαιρετὰ διὰ τοῦ $x + a$, διότι ταῦτα γίνονται μηδέν, ἐὰν τεθῇ ἐν αὐτοῖς ἀντὶ τοῦ x ἡ τιμὴ αὐτοῦ $-a$, ἡ μηδενίζουσα τὸν διαιρέτην $x + a$. Διότι τότε θέλομεν ἔχει τὰ ὑπόλοιπα $(-a)^4 - a^4$ καὶ $(-a)^5 + a^5$, ἥ, ἐπειδὴ $(-a)^4$ εἶναι ἴσον μὲ a^4 καὶ $(-a)^5$ ἰσοῦται μὲ $-a^5$ (18, πόρ.), τὰ ἐξῆς $a^4 - a^4$ καὶ $-a^5 + a^5$, ἅτινα δίδουσιν ἐξαχόμενον μηδέν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΗΕΜΠΤΟΝ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ. — ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ. — ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ. —
ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ. — ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

30. Καλοῦνται ἀλγεβρικά κλάσματα αἱ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις τῆς μορφῆς $\frac{a}{b}$, καθ' ἃς ὁ διαιρέτης b γράφεται ὑπὸ τὸν διαιρετέον a καὶ χωρίζεται ἀπ' αὐτοῦ δι' ὀριζοντίου γραμμῆς, εἴτε εἶναι εἴτε μὴ δυνατὴ ἡ οὕτω σεσημειωμένη αὐτῶν διαίρεσις. Ὁ διαιρετέος a καλεῖται τότε ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος, ὁ διαιρέτης b παρονομαστής αὐτοῦ, ἀμφότεροι δὲ ὅροι τοῦ κλάσματος.

Τὰ ἀλγεβρικά κλάσματα, παριστῶντα ὅπως καὶ τὰ ἀριθμητικὰ τὰ ἐξαγόμενα ἀδυνάτων ἢ μὴ ἐκτελεσθεισῶν διαιρέσεων, ἀπλοποιοῦνται, ἀνάγονται εἰς τὸν αὐτὸν ἢ εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν, προστίθενται, ἀφαιροῦνται, πολλαπλασιάζονται καὶ διαιροῦνται κατὰ τοὺς αὐτοὺς ἀπαραλλάκτως κανόνας, καθ' οὓς καὶ τὰ ἀριθμητικὰ, ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ ὅροι τῶν πρώτων παριστῶσιν ὁποιασδήποτε ποσότητος, ἐνῶ οἱ ὅροι τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων εἶναι πάντοτε ἀκέραιοι ἀριθμοί, νέαι τινες περὶ τούτων ἀποδείξεις φαίνονται ἀναγκαῖαι.

31. Ἐστωσαν a καὶ b δύο ὁποιαδήποτε ποσότητες καὶ ἃς παραστήσωμεν διὰ π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς a διὰ b , θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{a}{b} = \pi, \text{ ἔξ ἧς πορίζομεθα } a = b\pi.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος ἐπὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα ρ , θέλομεν ἔχει τὴν νέαν ἰσότητα $a\rho = b\rho\pi$, ἐξ ἧς πορίζομεθα, διαιροῦντες τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ $b\rho$, τὴν ἐξῆς

$$\frac{a\rho}{b\rho} = \pi, \text{ ἢ, ἐπειδὴ } \pi = \frac{a}{b}, \text{ τὴν ἐξῆς } \frac{a\rho}{b\rho} = \frac{a}{b}.$$

Βλέπομεν δὲ ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος $\frac{a}{b}$ δὲν μεταβάλλεται πολλαπλασιάζομένων τῶν δύο ὁρῶν a καὶ b αὐτοῦ

ἐφ' ὁποιανδήποτε ποσότητα ρ · καὶ ἀντιστρόφως, διαιρουμένων τῶν δύο ὕρων $\alpha\rho$ καὶ $\beta\rho$ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha\rho}{\beta\rho}$ διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος ρ , ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται.

Πόρισμα 1. — Δυνάμεθα λοιπὸν δεδομένον ἀλγεβρικὸν κλάσμα νὰ ἀπλοποιήσωμεν ἢ νὰ ἀναγάγωμεν εἰς τὴν ἀπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν διαιροῦντες τοὺς δύο ὕρους αὐτοῦ διὰ τινος κοινοῦ αὐτῶν παράγοντος ἢ διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν. Παραδείγματος χάριν, τὸ ἀλγεβρικὸν κλάσμα $\frac{12x^4y^2}{8x^2y^3}$ ἀπλοποιεῖται, ἂν διαιρεθῶσιν οἱ δύο αὐτοῦ ὕροι διὰ τινος κοινοῦ αὐτῶν παράγοντος $2x^2$ ἢ $2ab^3$ ἢ κτλ., ἀνάγεται δὲ εἰς τὴν ἀπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν $\frac{3x^2}{2y}$, ἂν διαιρεθῶσιν οἱ δύο αὐτοῦ ὕροι διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν $4x^2y^3$.

Πόρισμα 2. — Δύο ἢ πλείότερα ἀλγεβρικὰ κλάσματα ἀνάγονται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ὅπως καὶ δύο ἢ πλείότερα ἀριθμητικά, πολλαπλασιαζομένων δηλ. τῶν δύο ὕρων ἐκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν λοιπῶν κλασμάτων. Διότι οὕτω θέλομεν ἔχει κλάσματα ἰσοδύναμα ἀμοιβαίως μὲ τὰ δεδομένα καὶ ἔχοντα κοινὸν παρονομαστήν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν. Παραδείγματος χάριν, ἵνα ἀναγάγωμεν τὰ κλάσματα

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{\gamma}{\delta}, \quad \frac{\varepsilon}{\eta}$$

εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὕρους τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ γινόμενον δη τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἄλλων, τοὺς δύο ὕρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ γινόμενον $\beta\eta$ τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἄλλων, καὶ τοὺς δύο ὕρους τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸ γινόμενον $\beta\delta$ τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἄλλων, θέλομεν δὲ οὕτως εὑρεῖν τὰ νέα κλάσματα

$$\frac{a\delta\eta}{\beta\delta\eta}, \quad \frac{\gamma\beta\eta}{\delta\beta\eta}, \quad \frac{\varepsilon\beta\delta}{\eta\beta\delta},$$

ἅτινα θέλουσιν εἶναι ἀμοιβαίως ἴσα μετὰ τὰ δεδομένα καὶ ἔχει τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, διότι τὰ γινόμενα $\beta\delta\eta$, $\delta\beta\eta$, $\eta\beta\delta$ εἶναι προφανῶς ἴσα (12).

Παρατήρησις. — Συμβαίνει πολλάκις οἱ παρονομασταὶ τῶν ἀναγῶγων κλασμάτων, ἅτινα προτιθέμεθα νὰ ἀναγάγωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, νὰ ἔχωσι κοινούς τινας παράγοντας, ὅτε εἶναι πολὺ προτιμότερον νὰ ἀναγάγωμεν αὐτὰ εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν αὐτῶν παρονο-

μαστήν. Πρὸς τοῦτο, ὡς ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς γνωρίζομεν, πρέπει νὰ εὗρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν, νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ δι' ἐνὸς ἐκάστου αὐτῶν, καὶ μὲ τὸ εὑρεθησόμενον πηλίκον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ ἀντιστοίχου κλάσματος. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἶχομεν νὰ ἀναγάγωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν τὰ ἀνάγωγα κλάσματα

$$\frac{5ab-3b^2}{3a^2(a^2-b^2)}, \quad \frac{7a\gamma+5\gamma^2}{6ab^2(a-b)}, \quad \frac{3d^2}{42a^2b(a+b)},$$

ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν $6ab^2(a-b)$, $42a^2b(a+b)$ τῶν δύο ἄλλων κτλ., δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν, ὅπερ εἶναι $42a^2b^2(a^2-b^2)$, νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ δι' ἐνὸς ἐκάστου αὐτῶν καὶ μὲ τὸ εὑρεθησόμενον πηλίκον $4b^2$ τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ πρώτου $3a^2(a^2-b^2)$ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος, μὲ τὸ πηλίκον $2a(a+b)$ τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ $6ab^2(a-b)$ τοῦ δευτέρου κλάσματος νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου, καὶ μὲ τὸ πηλίκον $b(a-b)$ τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ $42a^2b(a+b)$ τοῦ τρίτου νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ τρίτου κλάσματος. Οὕτω θέλομεν ἔχει τὰ νέα κλάσματα

$$\frac{4b^2(5ab-3b^2)}{42a^2b^2(a^2-b^2)}, \quad \frac{2a(a+b)(7a\gamma+5\gamma^2)}{42a^2b^2(a^2-b^2)}, \quad \frac{3b^2(a-b)}{42a^2b^2(a^2-b^2)},$$

ἅτινα θέλουσιν εἶναι ἀμοιβαίως ἰσοδύναμα μὲ τὰ δεδομένα καὶ ἔχει κοινὸν παρονομαστήν τὸν ἐλάχιστον πάντων τῶν δυνατῶν κοινῶν παρονομαστῶν.

Ἐπειδὴ ἡ μὲν ἀναγωγή κλάσματός τινος ἀλγεβρικοῦ εἰς τὴν ἀπλουεστάτην αὐτοῦ μορφήν προαπαιτεῖ τὴν εὑρεσιν τοῦ μεγίστου τῶν δύο αὐτοῦ ὅρων κοινῷ διαιρέτῳ, ἡ δὲ εὑρεσις τοῦ ἐλάχιστου κοινῷ πολλαπλασίου τῶν παρονομαστῶν τῶν δεδομένων κλασμάτων στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀποσυνθέσεως αὐτῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, περὶ ἀμφοτέρων δὲ τούτων πραγματεύεται ἡ Ἀνωτέρα καλουμένη Ἀλγεβρα, δὲν δυνάμεθα νὰ ὠρελώμεθα ἐκ τῆς ἐντεῦθεν εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς ἡμῶν προκυπτούσης μεγίστης ἀπλοποιήσεως, εἰ μὴ ὁσάκις τὰ μὲν δεδομένα κλάσματα ἢ εἶναι ἀνάγωγα ἢ καθίστανται εὐκόλως τοιαῦτα, ἡ δὲ τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν ἀποσύνθεσις δύναται νὰ γείνη εὐκόλως. Περὶ τού-

του, ὡς λίαν ὠφελίμου, πραγματευόμεθα ἐν ἐκτάσει καὶ ἐπὶ πολλῶν παραδειγμάτων εἰς τὸ Δεύτερον Μέρος τοῦ παρόντος συγγράμματος.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

32. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν πρὸς πρόσθεσιν τὰ ἐξῆς τῶν αὐτῶν παρονομαστῶν ἀλγεβρικὰ κλάσματα $\frac{a}{\mu}, \frac{b}{\mu}, \frac{\gamma}{\mu}$. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ π τὴν τιμὴν τοῦ πρώτου, διὰ κ τὴν τοῦ δευτέρου καὶ διὰ ρ τὴν τοῦ τρίτου, θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας $\frac{a}{\mu} = \pi, \frac{b}{\mu} = \kappa, \frac{\gamma}{\mu} = \rho$, ἐξ ὧν πορίζομεθα τὰς ἐξῆς

$$a = \mu\pi, \quad b = \mu\kappa, \quad \gamma = \mu\rho.$$

Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$a + b + \gamma = \mu\pi + \mu\kappa + \mu\rho, \quad \text{ἢ τὴν} \quad a + b + \gamma = \mu(\pi + \kappa + \rho),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα, διαιροῦντες τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ μ , τὴν ἐξῆς

$$\frac{a+b+\gamma}{\mu} = \pi + \kappa + \rho, \quad \text{ἢ τοὶ} \quad \frac{a+b+\gamma}{\mu} = \frac{a}{\mu} + \frac{b}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu}.$$

τυτέστι, τὰ ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἀλγεβρικὰ κλάσματα $\frac{a}{\mu}, \frac{b}{\mu}, \frac{\gamma}{\mu}$ προστίθενται προστιθεμένων τῶν ἀριθμητῶν αὐτῶν a, b καὶ γ , καὶ τιθεμένου ὑπὸ τὸ εὑρεθησόμενον ἄθροισμα αὐτῶν $a + b + \gamma$ παρονομαστοῦ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν παρονομαστοῦ μ .

Ἄν τὰ πρὸς πρόσθεσιν δεδομένα ἀλγεβρικὰ κλάσματα δὲν ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἀνάγομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν ἢ εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστὴν, καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν ὡς προείπομεν.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

33. Ἐστω τώρα νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος $\frac{a}{\mu}$ τὸ ἔχον τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν κλάσμα $\frac{b}{\mu}$. Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ πρῶτον διὰ π καὶ τὸ δεύτερον διὰ ρ , θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας $a = \mu\pi, b = \mu\rho$, ἃς ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη πορίζομεθα τὴν ἐξῆς

$$a - b = \mu\pi - \mu\rho, \quad \text{ἢ τὴν} \quad a - b = \mu(\pi - \rho).$$

Διαιρούντες δὲ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος διὰ μ , εὐρίσκομεν τὴν ἐξῆς

$$\frac{a-b}{\mu} = \pi - \rho, \quad \text{ἥτοι} \quad \frac{a-b}{\mu} = \frac{a}{\mu} - \frac{b}{\mu}$$

τούτέστιν, ἀλγεβρικὸν κλάσμα $\frac{b}{\mu}$ ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος $\frac{a}{\mu}$ ἔχοντος τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἐν ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς b τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ a τοῦ μειωτέου καὶ εἰς τὴν εὐρεθησομένην διαφορὰν $a-b$ δοθῇ παρονομαστὴς ὁ κοινὸς αὐτῶν παρονομαστῆς μ .

Ἄν τὰ πρὸς ἀφαίρεσιν κλάσματα δὲν ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἀνάγομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν ἢ εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν, καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν αὐτῶν ὡς προείπομεν.

Παρατήρησις. — Ἐὰν ἔν τινι ἀλγεβρικῇ παραστάσει, ἀποτελουμένη ἐκ διαφόρων ἀλγεβρικῶν κλασμάτων ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τινὰ τῶν κλασμάτων τούτων ἦναι προσθετέα, ἕτερα δὲ ἀφαιρετέα, πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν ἐν αὐτῇ σεσημειωμένων πράξεων πρέπει προφανῶς τοὺς μὲν ἀριθμητὰς τῶν προσθετέων κλασμάτων νὰ προσθέσωμεν, τοὺς δὲ ἀριθμητὰς τῶν ἀφαιρετέων νὰ ἀφαιρέσωμεν, καὶ εἰς τὸ οὕτως εὐρεθησόμενον ἐξαγόμενον νὰ δώσωμεν παρονομαστήν τὸν κοινὸν αὐτῶν παρονομαστήν. Παραδείγματος χάριν, ἡ ἀλγεβρικὴ παράστασις

$$\frac{a}{\mu} - \frac{b}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu} + \frac{\delta}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\mu}$$

ἰσοῦται τῇ

$$\frac{a-b+\gamma+\delta-\varepsilon}{\mu},$$

ἥτις ἔχει παρονομαστήν τὸν κοινὸν τῶν δεδομένων κλασμάτων παρονομαστήν μ καὶ ἀριθμητὴν τὴν παράστασιν $a-b+\gamma+\delta-\varepsilon$, ἣν εὐρίσκομεν ἐκτελοῦντες ἐπὶ τῶν ἀριθμητῶν τὰς ἐπὶ τῶν κλασμάτων, εἰς αὐτοὶ ἀνήκουσι, σεσημειωμένας πράξεις.

Ἄν τὰ τῆς δεδομένης ἀλγεβρικῆς παραστάσεως κλάσματα δὲν εἶχον τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἠθέλομεν ἀναγάγει πρῶτον αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν ἢ εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν καὶ ἐκτελέσει ἀκολούθως ἐπὶ τῶν ἀριθμητῶν τῶν εὐρεθησομένων ἰσοδυνάμων κλασμάτων τὰς πρὸ αὐτῶν σεσημειωμένας πράξεις.

Ἄν δὲ μετὰ τῶν δεδομένων κλασμάτων ὑπάρχωσι καὶ ἀκέραιαι

ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ταύτας ὡς κλάσματα, ἔχοντα παρονομαστήν τὴν μονάδα, καὶ οὕτως αἱ ἐπ' αὐτῶν σεσημειωμένοι πράξεις ἐκτελοῦνται κατὰ τοὺς προεκτεθέντας κανόνας. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν τὴν ἀλγεβρικήν παράστασιν,

$$a - \frac{\beta}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu} - \delta,$$

ἠθέλομεν θεωρήσει τὰς ἐν αὐτῇ ἀκεραίας ἀλγεβρικὰς παραστάσεις a καὶ δ , αἵτινες δυνάτον νὰ ᾖναι ὁποιαδήποτε πολυώνυμα, ὡς κλάσματα $\frac{a}{1}$ καὶ $\frac{\delta}{1}$, ἔχοντα παρονομαστήν τὴν μονάδα, ἀναγάγει ταῦτα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν μ καὶ ἐκτελέσει τὰς ἐπ' αὐτῶν σεσημειωμένας πράξεις ὡς προεἶπομεν, ὅτε θέλομεν ἔχει ἀντὶ τῆς δεδομένης τὴν ἰσοδύναμον αὐτῇ

$$\frac{a\mu - \beta + \gamma - \delta\mu}{\mu}.$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

34. Ἐς ὑποθέσωμεν τρίτον ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ κλάσματος $\frac{a}{\epsilon}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$. Ἄν παραστήσωμεν τὸ πρῶτον κλάσμα διὰ π καὶ τὸ δεύτερον διὰ ρ , θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας

$$a = \beta\pi, \quad \gamma = \delta\rho,$$

ἃς πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη πορίζομεθα τὴν ἐξῆς

$$a\gamma = \beta\delta\pi\rho.$$

Διαιροῦντες δὲ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας διὰ τοῦ γινομένου $\beta\delta$, θέλομεν ἔχει

$$\frac{a\gamma}{\beta\delta} = \pi\rho, \quad \text{ἥτοι} \quad \frac{a\gamma}{\beta\delta} = \frac{a}{\epsilon} \times \frac{\gamma}{\delta}$$

τουτέστι, τὸ κλάσμα $\frac{a}{\epsilon}$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$, πολλαπλασιαζομένων ἐπ' ἀλλήλους τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστῶν αὐτῶν καὶ διαιρουμένου τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου $a\gamma$ τῶν ἀριθμητῶν διὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου $\beta\delta$ τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

Ἄν ἀντὶ δύο εἴχομεν πλείονερα πρὸς πολλαπλασιασμὸν ἀλγεβρικὰ κλάσματα, ἠθέλομεν εὑρεῖ σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω, ὅτι τὸ γινόμενον

αὐτῶν σχηματίζεται πολλαπλασιαζομένων ἐπ' ἀλλήλους τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστῶν αὐτῶν καὶ διαιρουμένου τοῦ πρώτου γινομένου διὰ τοῦ δευτέρου. Τουτέστιν,

$$\frac{a}{b} \times \frac{\gamma}{\delta} \times \frac{\varepsilon}{\zeta} \times \frac{\eta}{\theta} = \frac{a\gamma\varepsilon\eta}{b\delta\zeta\theta}.$$

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

35. Ἄς ὑποθέσωμεν τελευταῖον, ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κλάσματος $\frac{a}{b}$ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{\gamma}{\delta}$. Λέγω ὅτι τοῦτο εὑρίσκεται πολλαπλασιαζομένου τοῦ πρώτου $\frac{a}{b}$ ἐπὶ τὸ δεύτερον $\frac{\gamma}{\delta}$, ἔχον ἀντεστραμμένους τοὺς ὅρους, τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει.

$$\frac{a}{b} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a}{b} \times \frac{\delta}{\gamma} = \frac{a\delta}{b\gamma}.$$

Διότι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{a\delta}{b\gamma}$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{\gamma}{\delta}$, θέλομεν εὑρεῖ γινόμενον τὸν διαιρετέον $\frac{a}{b}$, διότι θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προλεχθέντα

$$\frac{a\delta}{b\gamma} \times \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a\delta\gamma}{b\gamma\delta} = \frac{a}{b}.$$

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{a\delta}{b\gamma}$ εἶνε τὸ ζητούμενον πηλίκον, ὅπερ εὑρίσκεται ὡς προείπομεν, διότι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{\gamma}{\delta}$ εὑρίσκεται ἴσον τῷ δεδομένῳ διαιρετέῳ $\frac{a}{b}$.

Παρατήρησις γενική. — Μετὰ τὴν κατὰ τοὺς εὑρεθέντας κανόνας ἐκτέλεσιν ὁποιασδήποτε τῶν ἀνωτέρω ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων πράξεως, πρέπει πάντοτε νὰ ἐκτελῶμεν ἐπὶ τῶν εὑρεθησομένων ἐξαγομένων τὰς ἀναγωγὰς τῶν ἐν αὐτοῖς ὁμοίων ὅρων· διότι πολλάκις ταῦτα ἀπλοποιοῦνται σπουδαίως, καὶ οὐδέποτε πρέπει νὰ παραλείπωμεν τὴν ἐκτέλεσιν τῶν δυνατῶν ἐπὶ τῶν εὑρισκομένων ἐκάστοτε ἐξαγομένων ἀπλοποιήσεων, ἐκτὸς ἐὰν ἔχωμεν ἰδιαιτέρους πρὸς τοῦτο λόγους.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΙΝΕΣ. — ΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΜΕ ΜΙΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ
ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΙΝΕΣ

36. Καλεῖται *ισότης* πᾶσα ἀλγεβρική παράστασις, περιέχουσα μεταξὺ τῶν μερῶν αὐτῆς τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος ($1, 8^{ον}$). Παραδείγματος χάριν, αἱ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις

$$3a^3 - 5a^2b + 8ab^2 = 8a^3 - 5ab^2, \quad 4ax^2 - 5ab^2 = 7a^3$$

εἶναι ἰσότητες, διότι περιέχουσι μεταξὺ τῶν μερῶν αὐτῶν τὸ σημεῖον $=$ τῆς ἰσότητος.

Αἱ ἰσότητες διακρίνονται εἰς δύο μεγάλας τάξεις· εἰς ταυτότητας καὶ ἐξισώσεις. Ἰσότης τις λέγεται ταυτότης, ὅταν τὰ δύο αὐτῆς μέλη ᾗ ἦναι τὰ αὐτὰ ἢ καθίστανται τὰ αὐτὰ διὰ τῆς ἐκτελέσεως τῶν ἐν αὐτῇ σεσημειωμένων πράξεων. Παραδείγματος χάριν, αἱ ἰσότητες

$$3 + 2 = 3 + 2, \quad a^2 + 2ab = a^2 + 2ab, \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

εἶναι ταυτότητες, διότι τῶν μὲν δύο πρώτων τὰ δύο μέλη εἶναι τὰ αὐτά, τῆς δὲ τελευταίας καθίστανται τὰ αὐτὰ διὰ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ ἐν αὐτῇ σεσημειωμένου πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς ἀναγωγῆς τῶν ὁμοίων ὄρων ἐπὶ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου.

Ἰσότης τις λέγεται ἐξίσωσις, ὅταν τὰ δύο μέλη αὐτῆς οὔτε ᾗναι τὰ αὐτά, οὔτε καθίστανται τὰ αὐτὰ διὰ τῆς ἐκτελέσεως τῶν ἐν αὐτῇ σεσημειωμένων πράξεων, ἀλλὰ μόνον ὅταν ἐν ἡ πλειότερα γράμματα λάβωσιν ὀρισμένης τιμᾶς. Παραδείγματος χάριν, αἱ ἰσότητες

$$5x = 10, \quad 5b = 20, \quad 7x + 3y = 17, \quad 8x^2 - 5ay = 3a^2$$

εἶναι ἐξισώσεις, διότι τὰ δύο μέλη αὐτῶν δὲν εἶναι τὰ αὐτά, οὔτε καθίστανται τὰ αὐτὰ διὰ τῆς ἐκτελέσεως τῶν σεσημειωμένων πράξεων, ἀλλὰ διότι ἡ μὲν πρώτη καθίσταται ταυτότης, ὅταν ἐν αὐτῇ ἀντὶ τοῦ x τεθῇ 2· ἡ δὲ δευτέρα, ὅταν ἐν αὐτῇ ἀντὶ τοῦ β τεθῇ 4· ἡ τρίτη, ὅταν ἐν αὐτῇ ἀντὶ τοῦ x τεθῇ 2 καὶ ἀντὶ τοῦ y τεθῇ 1, καὶ ἡ τετάρτη, ὅταν ἀντὶ τοῦ x καὶ y τεθῇ ἐν αὐτῇ α .

Τὰ μὲν προσδιοριστέα γράμματα πρὸς μετατροπὴν τῶν ἐξισώσεων εἰς ταυτότητας καλοῦνται ἄγνωστοι τῆς ἐξισώσεως, αἱ δὲ τιμαὶ αὐτῶν, αἱ καθιστῶσαι τὴν ἐξίσωσιν ταυτότητα, τιμαὶ τῶν ἀγνώστων.

Λύομεν ἐξίσωσιν τινα ἢ πλειοτέρας ἐξισώσεις, ὅταν εὐρίσκωμεν τὴν τιμὴν ἢ τὰς τιμὰς τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων, τὰς ταυτοποιούσας τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις.

Δύο ἐξισώσεις λέγονται *ισοδύναμοι*, ὅταν ἡ τιμὴ ἢ αἱ τιμαὶ τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων, αἱ ταυτοποιοῦσαι αὐτάς, ᾖναι αἱ αὐταί.

Ὅταν ἐν τινι ἐξίσωσει ἢ προσδιοριστέα ποσότης πρὸς μετατροπὴν αὐτῆς εἰς ταυτότητα ᾖναι μία, τότε ἡ ἐξίσωσις λέγεται μὲ *μίαν μόνην ἀγνώστον*· ὅταν αὗται ᾖναι δύο, ἡ ἐξίσωσις λέγεται μὲ *δύο ἀγνώστους*, καὶ οὕτω καθεξῆς. Πρὸς τοῦτοις, ὅταν ἡ μὲ μίαν ἀγνώστον ἐξίσωσις δὲν ἔχῃ ὅρους κλασματικούς καὶ πᾶσαι αἱ σεσημειωμέναι πράξεις καὶ αἱ δυναταὶ ἀπλοποιήσεις ἐξετελέσθησαν, αὕτη καλεῖται τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ὅταν ἡ μεγαλειτέρα δύναμις τῆς προσδιοριστέας ἀγνώστου ᾖναι 1· τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ὅταν ἡ μεγαλειτέρα δύναμις αὐτῆς ᾖναι 2, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἡμεῖς ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ θέλομεν κάμει λόγον περὶ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ μίαν μόνην ἀγνώστον.

ΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΜΕ ΜΙΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

37. ΘΕΩΡΗΜΑ 1. — Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως τινα τὴν αὐτὴν ποσότητα, ἢ ἀγαιροῦντες ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς τὴν αὐτὴν ποσότητα, θέλομεν ἔχει νέαν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον τῇ δεδομένῃ.

Ἄς παραστήσωμεν συντομίας χάριν τὸ μὲν πρῶτον μέλος τῆς δεδομένης ἐξισώσεως, ἣν ὑποθέτομεν ἐνταῦθα τοῦ πρώτου βαθμοῦ καὶ μὲ μίαν ἀγνώστον x , διὰ A , τὸ δὲ δεύτερον μέλος αὐτῆς διὰ B . Θέλομεν ἔχει

$$A=B$$

(1).

Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη ταύτης τὴν αὐτὴν ποσότητα Γ , ἢ ἀφαιρέσωμεν Γ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς, αἱ προκύπτουσαι νέαι ἐξισώσεις

$$A + \Gamma = B + \Gamma, \quad A - \Gamma = B - \Gamma \quad (2)$$

θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμοι τῇ δεδομένῃ $A = B$, τοὔτέστιν ἡ τιμὴ α τῆς χ , ἡ ταὔτοποιοῦσα καθ' ὑπόθεσιν τὴν δεδομένην (1), θέλει ταὔτοποιεῖ καὶ τὰς (2)· καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ τιμὴ α τῆς χ ταὔτοποιῇ τὰς ἐξισώσεις (2), αὕτη θέλει ἀναγκασίως ταὔτοποιεῖ καὶ τὴν δεδομένην (1).

Διότι, πᾶσα τιμὴ α τῆς χ , ἥτις ταὔτοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν (1), καθιστᾷ τὰ δύο μέλη αὐτῆς A καὶ B τὰ αὐτά· ἐπομένως, ἐὰν εἰς τὰ αὐτὰ ποσὰ A καὶ B προσθέσωμεν τὴν αὐτὴν ποσότητα Γ ἢ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτῶν τὴν αὐτὴν ποσότητα Γ , τὰ εὗρεθησόμενα ἀθροίσματα $A + \Gamma$, $B + \Gamma$, ἢ αἱ εὗρεθησόμεναι διαφοραὶ $A - \Gamma$, $B - \Gamma$, θέλουσιν ἀναγκασίως εἶναι αἱ αὐταί, τοὔτέστιν ἡ αὐτὴ τιμὴ α τῆς χ , ἡ ταὔτοποιοῦσα τὴν ἐξίσωσιν (1), θέλει ταὔτοποιεῖ καὶ τὰς ἐξισώσεις (2). Ἀντιστρόφως, ἐὰν τιμὴ τις α τῆς χ καθιστᾷ τὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων (2) τὰ αὐτά, ἐπειδὴ προφανῶς τὸ Γ εἶναι ταὔτὸ τῷ Γ , ἔπεται ἀναγκασίως ὅτι τότε καὶ τὸ A θέλει εἶναι ταὔτὸν τῷ B , τοὔτέστιν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) ταὔτοποιεῖται διὰ τῆς αὐτῆς τιμῆς α τῆς χ . Αἱ ἐξισώσεις λοιπὸν (1) καὶ (2), αἱ διὰ τῆς αὐτῆς τιμῆς τῆς χ ταὔτοποιούμεναι, θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμοι.

Πόρισμα 1. — *Δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου μέλους ἐξισώσεώς τινα ὅρον εἰς τὸ ἕτερον, γράφοντες αὐτὸν μὲ ἐναντίον σημείον.*

Παραδείγματος χάριν, τὸν ὅρον $+3\chi$ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξισώσεως

$$7\chi - 28 = 36 + 3\chi \quad (1)$$

δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὸ πρῶτον γράφοντες αὐτὸν μὲ ἐναντίον σημείον —, οὕτω

$$7\chi - 28 - 3\chi = 36 \quad (2).$$

Διότι, ἐὰν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως (1) ἀφαιρέσωμεν 3χ , θέλομεν ἔχει τὴν ἰσοδύναμον αὐτῇ ἐξίσωσιν

$$7\chi - 28 - 3\chi = 36 + 3\chi - 3\chi,$$

ἥτις μετατρέπεται εἰς τὴν (2) μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἐν τῷ δευτέρῳ αὐτῆς μέλει δυνατῆς ἀναγωγῆς τῶν ὅρων $+3\chi$ καὶ -3χ , οἵτινες συναναιρούνται.

Ὡσαύτως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸν ὅρον -28 τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἐξίσωσως (2) εἰς τὸ δεύτερον μέρος μὲ ἐναντίον σημεῖον $+$, οὕτω

$$7x - 3x = 36 + 28 \quad (3).$$

Διότι, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἐξίσωσως (2) τὴν αὐτὴν ποσότητα $+28$, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσοδύναμον αὐτῇ ἐξίσωσιν

$$7x - 28 - 3x + 28 = 36 + 28,$$

ἥτις μετατρέπεται εἰς τὴν (3) ἀφαιζομένων τῶν ἴσων καὶ ἀντιθέτων σημείων ποσοτήτων $+28$ καὶ -28 .

Δυνάμεθα λοιπὸν, ὅταν ἐξίσωσις τις ἔχη τοὺς περιέχοντας τὴν ἄγνωστον καὶ τοὺς γνωστοὺς ὅρους εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη αὐτῆς, νὰ μεταφέρωμεν τοὺς μὲν ἐν τῷ πρώτῳ αὐτῆς μέλει, τοὺς δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ, καὶ ἐκ τῶν ὅρων τῶν ἐχόντων τὴν x νὰ σχηματίσωμεν ἓνα μόνον ax καὶ ἐκ τῶν γνωστῶν ἕτερον b , εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἀπλουστάτη μορφή πρωτοβαθμίου τινὸς ἐξίσωσως μὲ μίαν μόνον ἄγνωστον θέλει εἶναι ἡ ἐξῆς

$$ax = b,$$

τῶν a καὶ b παριστάντων ἀριθμοὺς ἢ μονώνυμα ἢ καὶ πολυώνυμα ὅποιαδήποτε.

Πόρισμα 2. — Δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν τὰ σημεία πάντων τῶν ὅρων ἐξίσωσώς τιнос καὶ θέλομεν ἔχει ἐτέραν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον τῇ δεδομένῃ.

Ἐστω, παραδείγματος χάριν, ἡ ἐξίσωσις

$$47 - 3x = 7x - 30 \quad (4).$$

Ἐὰν μεταφέρωμεν πάντας τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου αὐτῆς μέλους εἰς τὸ δεύτερον καὶ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου εἰς τὸ πρῶτον, θέλομεν ἔχει τὴν νέαν ἐξίσωσιν

$$-7x + 30 = -47 + 3x,$$

ἥς, ἐπειδὴ τὰ δύο μέλη εἶναι ἴσα, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ δεύτερον πρῶτον καὶ τὸ πρῶτον δεύτερον, ὅτε θέλομεν ἔχει τὴν ἐπομένην

$$-47 + 3x = 7x + 30,$$

ἥτις εἶναι ἡ δεδομένη (4) ἔχουσα πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς μὲ ἐναντία σημεία

38. ΘΕΩΡΗΜΑ 2. — Πολλαπλασιάζοντες ἢ διαιροῦντες τὰ δύο μέλη ἐξίσωσώς τιнос διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, πορίζομεθα νέαν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον τῇ δεδομένῃ, ὅταν ἡ ἐφ' ἣν πολλαπλασιάζουεν ἢ

ἢ δι' ἧς διαιροῦμεν ποσότης δὲν ἦναι μηδέν, οὔτε περιέχῃ τὴν αὐτὴν ἄγνωστον, ἧς τιμὴ τις δύναται τὰ μηδενίση αὐτῇ.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ἡ ἐξίσωσις

$$A=B \quad (1).$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὴν ποσότητα μ , θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς

$$A\mu=B\mu \quad (2),$$

ἥτις θέλει εἶναι ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ (1). Διότι, ὅταν αἱ παραστάσεις A καὶ B γίνωνται αἱ αὐταὶ διὰ τινος τιμῆς a τῆς x , καὶ τὰ γινόμενα τῶν αὐτῶν παραστάσεων A καὶ B ἐπὶ ὅποιανδήποτε ποσότητα μ θέλουσιν εἶναι προφανῶς τὰ αὐτά. Καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν αἱ παραστάσεις $A\mu$ καὶ $B\mu$ γίνωνται αἱ αὐταὶ διὰ τῆς τιμῆς a τῆς x , καὶ τὰ πηλίκα A καὶ B τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος μ θέλουσιν ἀναγκαίως εἶναι τὰ αὐτά. Ἐπεταὶ λοιπόν, ὅτι πᾶσα τιμὴ τῆς x , ταυτοποιοῦσα τὴν ἐξίσωσιν (1), θέλει ταυτοποιεῖ καὶ τὴν ἐξίσωσιν (2), καὶ ἀντιστρόφως. Ἄρα αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ὅμοιοτρόπως σκεπτόμενοι ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι καὶ αἱ ἐξισώσεις

$$A=B, \quad \text{καὶ} \quad \frac{A}{\mu} = \frac{B}{\mu}$$

εἶναι ἰσοδύναμοι· διότι, ταυτοποιουμένης τῆς πρώτης διὰ τινος τιμῆς a τῆς x , ταυτοποιεῖται καὶ ἡ δευτέρα διὰ τῆς αὐτῆς τιμῆς, καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν ἡ δευτέρα ταυτοποιῇται διὰ τινος τιμῆς a τῆς x , ταυτοποιεῖται καὶ ἡ πρώτη διὰ τῆς αὐτῆς τιμῆς.

Ὅταν ἡ ἐφ' ἣν πολλαπλασιάζομεν ποσότης μ ἦναι μηδέν, ἡ νέα ἐξίσωσις τρέπεται εἰς τὴν $0=0$, τουτέστι δὲν ὑπάρχει.

Ὅταν ἡ ποσότης μ περιέχῃ τὴν αὐτὴν ἄγνωστον x , ἦναι παραδείγματος χάριν $x-3$, τότε ἡ νέα ἐξίσωσις

$$A(x-3)=B(x-3)$$

ταυτοποιεῖται καὶ διὰ τῆς τιμῆς a τῆς x , δι' ἧς καθ' ὑπόθεσιν ταυτοποιεῖται καὶ ἡ δεδομένη $A=B$, καὶ διὰ τῆς τιμῆς 3 τῆς x , δι' ἧς ὁ παράγων $x-3$ γίνεται μηδέν· εἰσάγονται δηλ. νέαι λύσεις, ἐπομένως ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν εἶναι ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ.

Ὅταν ἡ δι' ἧς διαιροῦμεν ποσότης μ ἦναι μηδέν ἢ μηδενίζεται διὰ τινος τιμῆς τῆς ἐν αὐτῇ ἀγνώστου, τότε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις

$$\frac{A}{0} = \frac{B}{0}, \quad \eta \quad \frac{A}{\mu} = \frac{B}{\mu}$$

δὲν ἔχει οὐδεμίαν ἔννοιαν, ἢ δὲν ὑπάρχει διὰ τὴν τιμὴν τῆς x τὴν μηδενίζουσαν τὴν ποσότητα μ .

Πόρισμα. — Δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς δεδομένης ἐξισώσεως πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον τῶν ὅρων αὐτῆς ἐπὶ τι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἐν αὐτῇ παρονομαστῶν, ἢ προτιμότερον ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{7x}{8} + \frac{3}{4} + 2x = \frac{4}{6} - \frac{5x}{12} + 3$$

Πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον τῶν ὅρων αὐτῆς ἐπὶ 24, ὅπερ εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἐν αὐτῇ παρονομαστῶν 8, 4, 6 καὶ 12, θέλομεν ἔχει μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν δυνατῶν διαιρέσεων τὴν ἐξίσωσιν,

$$24x + 18 + 48x = 4 - 40x + 72,$$

ἥτις εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ καὶ δὲν περιέχει οὐδένα κλασματικὸν ὅρον.

Ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἕκαστον τῶν ὅρων τῆς δεδομένης ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἐν αὐτῇ παρονομαστῶν, καὶ νὰ διαιρῶμεν ἔπειτα τοὺς ἀριθμητὰς τῶν κλασματικῶν ὅρων διὰ τοῦ παρονομαστοῦ ἑκάστου, εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ προτιμότερον νὰ διαιρῶμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν καὶ μετὰ τὸ ἀντιστοιχοῦν πηλίκον νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀντιστοίχου κλάσματος, θεωροῦντες τοὺς ἀκεραίους ὅρους τῆς ἐξισώσεως ὡς κλάσματα, ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα.

Ὅταν οἱ παρονομασταὶ τῆς δεδομένης ἐξισώσεως ἦναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εὐρίσκεται εὐκόλως κατὰ τὸν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ γνωστὸν κανόνα. Ἄλλ' ὅταν οἱ παρονομασταὶ ἦναι ἐγγράμματοι ποσότητες, ὧν δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον, ἢ ὅταν ἦναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὧν ἠθέλομεν εὕρει δυσκόλως τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον, τότε δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς κοινὸν τι πολλαπλάσιον τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν καὶ ἐπὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἕκαστον τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως, ὡς προεῖπομεν. Ἡ οὕτω προκύπτουσα νέα ἐξίσωσις

δὲν θέλει ἔχει παρονομαστάς καὶ θέλει εἶναι ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ, ἀλλ' ἦτον ἀπλουστέρα ἐκείνης, ἣν ἠθέλομεν εὖρει πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη τῆς δεδομένης ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστικῶν αὐτῆς.

39. Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω ἀποδειχθέντων δύο θεωρημάτων στηριζόμενοι πορίζομεθα τὸν ἐξ ἧς πρὸς λύσιν τῶν μὲ μίαν ἄγνωστον πρωτοβάθμιων ἐξισώσεων γενικὸν κανόνα.

1^{ον}. Ἐξαλείφωμεν τοὺς παρονομαστάς τῆς ἐξισώσεως, εἰὰν ὑπάρχωσι.

2^{ον}. Ἐκτελοῦμεν τὰς σεσημειωμένας πράξεις, εἰὰν ὑπάρχωσι τοιαῦται πρὸς ἐκτέλεσιν.

3^{ον}. Μεταφέρωμεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως πάντας τοὺς περιέχοντας τὴν ἄγνωστον ὅρους καὶ εἰς τὸ δεύτερον τοὺς γνωστοὺς, ἀλλὰ σσორτες ἐκάστου τὸ σημεῖον.

4^{ον}. Ἐκτελοῦμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ὄρων, εἰὰν ὑπάρχωσι.

5^{ον}. Ἐκ τῶν ὄρων τῶν περιεχόντων τὴν ἄγνωστον, ὅταν οὔτοι δὲν δύναται διὰ τῶν ἀναγωγῶν τὰ ἀναχθῶσιν εἰς ἓνα, σχηματίζομεν ἓνα ὅρον θέτορτες τὴν ἄγνωστον κοινὸν παράγοντα εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν λοιπῶν ἐν ἐκάστῳ ὄρῳ παραγόντων αὐτῆς.

6^{ον}. Διαίρομεν τελευταῖον τὰ δύο μέλη τῆς προκύπτουσας ἐξισώσεως, ἥς ἡ γενικὴ μορφή κατὰ τὰ ἐν τῇ § 37 λεχθέντα εἶναι $ax = b$, διὰ τοῦ συντελεστοῦ a τῆς x , καὶ ἡ ἐντεῦθεν προκύπτουσα τιμὴ $\frac{b}{a}$ τῆς x , ἡ ταῦτοποιοῦσα προφανῶς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν $x = \frac{b}{a}$, θέλει ταῦτοποιεῖ ἀναγκαίως καὶ τὴν δεδομένην.

Διότι ἀπεδείχθη ὅτι, ὅταν 1^{ον} εξαλείφωμεν τοὺς παρονομαστάς, ἡ ἐντεῦθεν προκύπτουσα νέα ἐξίσωσις θέλει εἶναι ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ (38).

Ὅταν 2^{ον} ἐκτελῶμεν τὰς σεσημειωμένας πράξεις, ἡ νέα ἐξίσωσις θέλει εἶναι πάλιν ἰσοδύναμος τῇ ἐξ ἧς αὕτη προέκυψε, διότι τότε προφανῶς ἀντικαθιστῶμεν ἀντὶ τῶν ὑπαρχόντων μέρη ταῦτά (36).

Ὅταν 3^{ον} μεταφέρωμεν τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως ἀπὸ μέλους εἰς μέλος ἀλλάσσοντες τὸ σημεῖον ἐκάστου, ἡ προκύπτουσα νέα ἐξίσωσις κατὰ τὰ προαποδειχθέντα (37) θέλει εἶναι ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ.

Ὅταν 4^{ον} ἐκτελῶμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ὄρων, ἀντικαθιστῶμεν ἀντὶ πολλῶν ἓνα ἰσοδύναμον αὐτοῖς, καὶ ἡ προκύπτουσα νέα ἐξίσωσις θέλει εἶναι πάλιν ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ.

"Όταν 5^{ον} σχηματίζωμεν ἐκ τῶν περιεχόντων τὴν ἄγνωστον ὅρων ἓνα ὅρον, ὡς προείπομεν, ἡ ἐντεῦθεν προκύπτουσα ἐξίσωσις θέλει εἶναι προφανῶς πάλιν ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ.

"Όταν δὲ 6^{ον} διαιρῶμεν τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας $ax = b$ διὰ τοῦ συντελεστοῦ a τῆς ἀγνώστου, ἡ προκύπτουσα νέα ἐξίσωσις $x = \frac{b}{a}$ θέλει εἶναι ἰσοδύναμος πάλιν τῇ δεδομένῃ.

Ἀλλὰ προφανῶς ἡ ἐξίσωσις $x = \frac{b}{a}$ ταυτοποιεῖται, ἐὰν τεθῇ ἐν αὐτῇ $\frac{b}{a}$ ἀντὶ τῆς x , διότι τότε θέλομεν ἔχει τὴν ταυτότητα $\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$. Ἀρα καὶ ἡ ἀρχικῶς δεδομένη ἐξίσωσις, ἐφ' ἧς ἐξετέλεσαμεν τὰς ἀνωτέρω δυνατὰς μετατροπὰς, ἡ ἀποδειχθεῖσα ἰσοδύναμος τῇ τελευταίᾳ $x = \frac{b}{a}$, θέλει ἀναγκαίως ταυτοποιεῖσθαι διὰ τῆς αὐτῆς τιμῆς $\frac{b}{a}$ τῆς ἀγνώστου x .

40. Ἐφαρμόσωμεν τώρα τὸν ἀνωτέρω κανόνα πρὸς εὐχερεστέραν κατάληψιν αὐτοῦ εἰς τινὰ παραδείγματα, καὶ ἃς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{5x-2}{3} - 6 = \frac{4x-3}{5} \quad (1).$$

Ἐξαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν ἐξῆς

$$5(5x-2) - 6 \cdot 3 \cdot 5 = 3(4x-3) \quad (2).$$

Ἐκτελοῦντες δὲ ἐπὶ τῆς (2) τὰς ἐν αὐτῇ σεσημειωμένας πράξεις, εὐρίσκομεν

$$25x - 10 - 90 = 12x - 9 \quad (3).$$

Μεταφέροντες τοὺς περιέχοντας τὴν ἄγνωστον ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τοὺς γνωστοὺς εἰς τὸ δεύτερον, θέλομεν ἔχει

$$25x - 12x = -9 + 10 + 90 \quad (4).$$

Ἐκτελοῦντες ἐπὶ τῆς (4) τὰς ἀναγωγὰς τῶν ἐν αὐτῇ ὁμοίων ὅρων, ἔχομεν

$$13x = 91 \quad (5),$$

καὶ διαιροῦντες τὰ δύο μέλη τῆς (5) διὰ τοῦ συντελεστοῦ 13 τῆς x , εὐρίσκομεν

$$x = \frac{91}{13} = 7 \quad (6).$$

Ἡ τιμὴ λοιπὸν 7 τῆς χ , ἡ ταυτοποιοῦσα τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν (6), ἣν ἐπορίσθημεν ἐκ τῆς δεδομένης (1) κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, θέλει ταυτοποιεῖ ἀναγκαίως καὶ τὴν ἰσοδύναμον αὐτῇ ἐξίσωσιν (4). Καὶ τῷ ὄντι, θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) ἀντὶ τοῦ χ τὴν εὑρεθείσαν αὐτῆς τιμὴν 7, θέλομεν ἔχει τὴν ταυτότητα

$$\frac{35-2}{3}-6=\frac{28-3}{5}, \text{ ἢ } 11-6=5.$$

41. Ἐστω δεύτερον πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$4-\frac{\chi+3}{6}=2+\frac{9-2\chi}{3} \quad (1).$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον 6 τῶν παρονομαστικῶν 6 καὶ 3 λαμβάνομεν

$$24-(\chi+3)=12+2(9-2\chi) \quad (2).$$

Ἐκτελοῦντες ἐπὶ τῆς (2) τὰς ἐν αὐτῇ σεσημειωμένας πράξεις ἔχομεν

$$24-\chi-3=12+18-4\chi \quad (3).$$

Μεταφέροντες τοὺς ὅρους τῆς (3), τοὺς ἔχοντας τὴν χ , εἰς τὸ πρῶτον μέρος καὶ τοὺς λοιποὺς εἰς τὸ δεύτερον, ἔχομεν

$$-\chi+4\chi=12+18-24+3 \quad (4).$$

Ἐκτελοῦντες ἐπὶ τῆς (4) τὰς δυνατὰς ἀναγωγὰς λαμβάνομεν

$$3\chi=9 \quad (5).$$

Διαιροῦντες δὲ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας (5) διὰ 3 εὐρίσκομεν

$$\chi=\frac{9}{3}=3 \quad (6).$$

Ἡ εὑρεθεῖσα λοιπὸν τιμὴ 3 τῆς χ , ἡ προφανῶς ταυτοποιοῦσα τὴν ἐξίσωσιν (6), θέλει ἀναγκαίως ταυτοποιεῖ καὶ τὴν δεδομένην (1). Καὶ τῷ ὄντι, ἀντικαθιστῶντες ἐν αὐτῇ 3 ἀντὶ τῆς χ , θέλομεν ἔχει τὴν ταυτότητα

$$4-\frac{3+3}{6}=2+\frac{9-6}{3}, \text{ ἢ } 4-1=2+1.$$

42. Ἐστω τρίτον πρὸς λύσιν ἡ ἐγγράμματος ἐξίσωσις

$$\frac{2\chi+76}{2\alpha+6}-4=\frac{\chi+a}{2\alpha-6} \quad (1).$$

Πολλαπλασιάζοντας τὰ δύο μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἐν αὐτῇ παρονομαστῶν $2a+b$ καὶ $2a-b$ ἔχομεν

$$(2x+7b)(2a-b)-(2a+b)(2a-b)=(x+a)(2a+b) \quad (2).$$

Ἐκτελοῦντες ἐπὶ τῆς (2) τὰς ἐν αὐτῇ σεσημειωμένας πράξεις λαμβάνομεν

$$4ax+4ab-2bx-7b^2-4a^2-2ab+2ab+b^2=2ax+2a^2+bx+ab.$$

Μεταφέροντες καὶ ἀνάγοντες ἔχομεν

$$2ax-3bx=6a^2-13ab+6b^2 \quad (3).$$

Ἐκ τῶν περιεχόντων τὴν ἄγνωστον x ὅρων σχηματίζοντας ἓνα εὐρίσκομεν

$$(2a-3b)x=6a^2-13ab+6b^2 \quad (4).$$

Διαιροῦντες τὰ δύο μέλη τῆς (4) διὰ τοῦ συντελεστοῦ $2a-3b$ τῆς x , ἔχομεν

$$x=\frac{6a^2-13ab+6b^2}{2a-3b}=3a-2b \quad (5).$$

Ἡ τιμὴ λοιπὸν $3a-2b$ τῆς x , ἣ ταυτοποιοῦσα τὴν ἐξίσωσιν (5), θέλει ταυτοποιεῖ καὶ τὴν ἰσοδύναμον αὐτῇ (4). Καὶ τῷ ὄντι, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (4) ἀντὶ τῆς x τὴν εὑρεθεῖσαν αὐτῆς τιμὴν $3a-2b$, θέλομεν ἔχει τὴν ταυτότητα

$$\frac{6a-4b+7b}{2a+b}-4=\frac{3a-2b+a}{2a-b}, \text{ ἥτοι } 3-4=2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΛΥΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ. — ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΙΝΕΣ

ΛΥΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

43. Λύομεν ἀλγεβρικόν τι πρόβλημα, ὅταν εὑρίσκωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ζητουμένου, ἥ τὰς τιμὰς τῶν ζητουμένων, ἐὰν ταῦτα ᾖναι πλείοτερα τοῦ ἑνός, τὰς ταυτοποιούσας τὰς συνθήκας αὐτοῦ. Καλοῦνται δὲ συνθήκαι ἀλγεβρικοῦ τινος προβλήματος, αἱ ἐν τῇ ἐκφωνήσει αὐτοῦ μεταξὺ τῶν δεδομένων καὶ τῶν ζητουμένων ἀναφερόμεναι σχέσεις.

Ἡ λύσις παντὸς ἀλγεθρικοῦ προβλήματος σύγκειται ἐκ δύο διακεκριμένων μερῶν· ἐκ τῆς μορφώσεως τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος, καὶ ἐκ τῆς λύσεως αὐτῶν. Καὶ διὰ μὲν τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος ἡ Ἀλγεβρα παρέχει εἰς ὠρισμένας περιστάσεις γενικοὺς πρὸς τοῦτο κανόνας, ὡς εἶδμεν ἀνωτέρω διὰ τὴν λύσιν μιᾶς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως περιεχούσης μίαν ἄγνωστον· διὰ δὲ τὴν μόρφωσιν τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ, οὐδένα γενικὸν κανόνα δίδει αὕτη, καὶ τοῦτο διότι τὰ προβλήματα εἶναι ἄπειρα τὸν ἀριθμὸν καὶ ἐκτίθενται ἀπειροτρόπως, γενικὸς δὲ τις κανὼν δὲν δύναται νὰ συμπεριλάβῃ τοσαύτην ἀπειρίαν ἀντικειμένων, οὕτω διαφοροτρόπως δυναμένων νὰ ἐκτεθῶσι, χωρὶς νὰ καταστῇ ὅλως ἀσαφὴς καὶ ἀνεφάρμοστος. Τοῦτου ἕνεκεν ὁδηγίας μόνον θυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν ἐπιχειροῦντα τὴν λύσιν ἀλγεθρικοῦ τινος προβλήματος, εἶναι δὲ αὐταὶ αἱ ἐξῆς δύο·

1^{ον}. Πρέπει ὁ ἐπιχειρῶν τὴν λύσιν ἀλγεθρικοῦ τινος προβλήματος νὰ προσπαθῇ διὰ τῆς μετ' ἐπιστάσεως καὶ ἐπαπειλημένης ἀναγνώσεως τῆς ἐκφωνήσεως αὐτοῦ νὰ διῶδῃ ποῦά τινα πρέπει νὰ ᾧσιν ἴσα, ἵνα ἐκπληρωθῶσιν αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος.

2^{ον}. Πρέπει νὰ παραστήσῃ τὸ ζητούμενον ἢ τὰ ζητούμενα διὰ γραμμάτων, καὶ ἐπ' αὐτῶν νὰ σημειώσῃ διὰ τῶν ἀλγεθρικῶν σημείων καὶ συμβόλων ἐκείνας τὰς πράξεις, δι' ὧν θέλει πορισθῇ τὰ μέρη, αὐτὰ διεῖδεν ὅτι πρέπει νὰ ᾧσιν ἴσα πρὸς ἐκπληρωθῶσιν τῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος. Συνδέων δὲ ταῦτα πρὸς ἄλληλα διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος θέλει εὕρει τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις, ὧν ἡ λύσις δίδει τὴν τιμὴν ἢ τὰς τιμὰς τῶν ζητουμένων.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΙΝΕΣ

44. Ἵνα δὲ καταστῶμεν καταληπτότεροι, θέλομεν ἐφαρμόσει τὰς ἀνωτέρω ὁδηγίας εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων τινῶν, ἐξαρτωμένων ἐκ τῆς λύσεως μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. — Πατὴρ ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ ἀπεκρίθη· μετὰ 25 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ μου θέλει εἶναι τριπλασία ἐκείνης, ἢ οὗτος εἶχε πέντε. Ζητεῖται ποία ἡ παρούσα ἡλικία τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ.

Ἐκ τῆς μετ' ἐπιστάσεως ἀναγνώσεως τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλή-

ματος εὐρίσκομεν εύκόλως ὅτι, ἵνα ἐκπληρωθῶσιν αἱ συνθήκαι αὐτοῦ, πρέπει ἢ μετὰ 25 ἔτη ηλικία τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον ἐκείνης, ἣν οὗτος εἶχε πρὸ ἐνὸς ἔτους, τουτέστι τῆς παρούσης αὐτοῦ ηλικίας, ἐλαττωθείσης κατὰ μονάδα.

*Εστώ τώρα x ἡ παρούσα ηλικία τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ. Ἡ μὲν μετὰ 25 ἔτη ηλικία αὐτοῦ θέλει παρασταθῇ ἀλγεβρικῶς διὰ τοῦ ἀθροίσματος $x + 25$, τὸ δὲ τριπλάσιον τῆς περισυνῆς διὰ τοῦ γινομένου $3(x - 1)$. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$x + 25 = 3(x - 1),$$

ἣν λύοντες κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα εὐρίσκομεν $x = 14$. Καὶ τῷ ὄντι, τότε ἢ μετὰ 25 ἔτη ηλικία αὐτοῦ θέλει εἶναι 39, τὸ δὲ τριπλάσιον τῆς περυσινῆς, ἥτις εἶναι 13, εὐρίσκεται πολλαπλασιαζομένου τοῦ 13 ἐπὶ 3, καὶ εἶναι 39. Ἡ εὐρεθεῖσα λοιπὸν τιμὴ 14 ταῦτοποιεῖ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, ἐπομένως λύει αὐτό.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. — Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 70 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ πρώτου καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ δευτέρου προστιθέμενα νὰ ἀποτελῶσι τὸν ἀριθμὸν 20.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x τὸ πρῶτον μέρος τοῦ 70, τὸ ἕτερον μέρος αὐτοῦ θέλει παρασταθῇ προφανῶς διὰ $70 - x$, ἵνα δὲ ἐκπληρωθῶσιν αἱ συνθήκαι τοῦ προβλήματος πρέπει τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ x , ὅπερ παρίσταται διὰ $\frac{x}{3}$, καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ $70 - x$, ὅπερ θέλει παρασταθῇ διὰ $\frac{70-x}{5}$, προστιθέμενα ἀλγεβρικῶς νὰ παρέχωσιν ἄθροισμα 20· τουτέστι, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς τοῦ προβλήματος ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{3} + \frac{70-x}{5} = 20,$$

ἣν λύοντες κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα εὐρίσκομεν $x = 45$. Τὸ μὲν πρῶτον λοιπὸν μέρος τοῦ 70 εἶναι 45, τὸ δὲ ἕτερον θέλει εἶναι $70 - 45$, ἥτοι 25. Καὶ τῷ ὄντι, τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 45, ὅπερ εἶναι 15, καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 25, ὅπερ εἶναι 5, προστιθέμενα δίδουσιν ἄθροισμα τὸν ἀριθμὸν 20.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^{ον}. — Πεζὸς διανύων 5 στάδια τὴν ὥραν καταδιώκεται ὑπὸ ἱππέως ἀναχωρήσαντος 9 ὥρας μετ' αὐτὸν καὶ διανύοντος 8 στάδια τὴν ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας ὁ ἱππὸς θέλει θῇαι τὸν πεζόν;

ἵνα ὁ ἵππεύς φθάσῃ τὸν πεζόν, πρέπει προφανῶς τὸ ὕψ' αὐτοῦ διανυθισμένον διάστημα νὰ ᾔῃ ἴσον ἐκείνῳ, ὅπερ διήνυσσε προηγουμένως ὁ πεζὸς ἐπὶ 9 ὥρας ὁδεύων, πλὴν ἐκείνῳ κατὰ τὸ διάστημα, ὅπερ θέλει διανύσει οὗτος ἀφ' ἧς στιγμῆς ἤρχισεν ὁ ἵππεύς νὰ καταδιώκῃ αὐτὸν μέχρι οὗ φθάσῃ αὐτόν. Πρέπει λοιπὸν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ-
του νὰ παραστήσωμεν διὰ x τὸν ἀριθμὸν τῶν ζητούμενων ὥρων, καὶ ἐπ' αὐτοῦ νὰ σημειώσωμεν ἀλγεβρικῶς ἐκείνας τὰς πράξεις, δι' ὧν θέλομεν πορισθῇ τὰ μέρη, ἅτινα διείδωμεν ὅτι πρέπει νὰ ὦσιν ἴσα, ἵνα ἐκπληρωθῶ-
σιν αἱ συνθήκαι τοῦ προβλήματος. Πρὸς τοῦτο δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ὁ μὲν ἵππεύς, ἀφοῦ εἰς 1 ὥραν διανύει 8 στάδια, εἰς x ὥρας θέλει διανύσει $8x$, ὁ δὲ πεζός, διανύων εἰς 1 ὥραν 5 στάδια, θέλει διανύσει εἰς μὲν τὰς x ὥρας $5x$ στάδια, κατὰ δὲ τὰς 9 ὥρας, καθ' ἃς εἶχεν ἀναχωρήσει πρὸ τοῦ ἵππεως, ἕτερα 9×5 στάδια, ὥστε τὸ ὅλον τῶν ὑπὸ τοῦ πεζοῦ διανυθισμένων σταδίων θέλει εἶναι $5x + 9 \times 5$. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει κατὰ τὰ προλεχθέντα τὴν ἑξῆς ἐξίσωσιν

$$8x = 5x + 9 \times 5,$$

ἑξ ἧς πορίζομεθα $x = 15$. Καὶ τῷ ὄντι, εἰς 15 ὥρας ὁ μὲν ἵππεύς θέλει διανύσει 120 στάδια, ὁ δὲ πεζός, ὅστις εἶχεν ἤδη διανύσει 45, θέλει διανύσει καὶ ἕτερα 75, ἥτοι τὸ ὅλον 120. Καὶ ἐπειδὴ τὰ ὕψ' ἑκατέρου διανυθέντα διαστήματα εἶναι ἴσα, ἔπεται ὅτι ὁ μὲν θέλει φθάσῃ τὸν δέ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4^{ον}. — Χωρικός φέρει εἰς τὴν ἀγορὰν κάλαθον ὠῶν προτιθέμενος νὰ πωλῇσιν αὐτὰ πρὸς 4 λεπτά ἕκαστον, ἀλλὰ καθ' ὁδὸν τῷ ἐθραύσθησαν 7, καὶ υπολογίζει ὅτι ἰσολογίζει τὴν ἐκτεῦθεν προελθοῦσαν ἀπ' αὐτῶν ζημίαν, ἃν τιμῇσιν ἕκαστον τῶν μεινάντων πρὸς 5 λεπτά. Ζητεῖται πόσα ὠᾶ εἶχε κατ' ἀρχάς.

Ἔστωσαν x τὰ ὠᾶ, ἅτινα κατ' ἀρχάς ἔφερε. Μετὰ τὴν θραῦσιν τῶν 7 τῷ ἔμειναν προφανῶς $x - 7$, βλέπομεν δὲ εὐκόλως ἀναγινώσκοντες ἐπισταμένως τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ὅτι, ἵνα ἐκπληρωθῶσιν αἱ συνθήκαι αὐτοῦ, πρέπει τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων, ἅτινα ἤθελε λάβει πωλὼν ἕκαστον τῶν x ὠῶν αὐτοῦ πρὸς 4 λεπτά, νὰ ᾔῃ τὸ αὐτὸ μὲ ἐκείνο, ὅπερ ἔλαβε πωλὼν τὰ μείναντα $x - 7$ πρὸς 5 λεπτά ἕκαστον. Ἀλλὰ πωλὼν τὰ x ὠᾶ πρὸς 4 λεπτά ἕκαστον ἤθελε λάβει $4x$ λεπτά, πωλὼν δὲ τὰ μείναντα $x - 7$ πρὸς 5 λεπτά ἕκαστον ἤθελε λάβει $5x - 7$. Θέλομεν λοιπὸν, κατὰ τὰ προλεχθέντα, ἔχει τὴν ἑξῆς ἐξίσωσιν

$$4x = 5x - 7,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα εὐκόλως $x = 35$. Λοιπὸν 35 ὥα ἔφερεν ὁ χωρικός κατ' ἀρχὰς πρὸς πώλησιν. Καὶ τῷ ὄντι, τὰ 35 ὥα, πωλούμενα πρὸς 4 λεπτά ἕκαστον, ἤθελον ἀποφέρει 140 λεπτά, τὰ δὲ μείναντα 28 μετὰ τὴν θραῦσιν τῶν 7, πωλούμενα πρὸς 5 λεπτά ἕκαστον ἤθελον ἀποφέρει πάλιν 140 λεπτά· τουτέστιν ἡ συνθήκη τοῦ προβλήματος, ὅτι οὗτος ἰσο-λογίζει τὴν ἐκ τῆς θραύσεως τῶν 7 ὥων προσελθοῦσαν αὐτῷ ζημίαν, εὐρίσκεται ταῦτοποιουμένη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5^{ον}. — Κρήνη πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 6 ὥρας, δευτέρα κρήνη δύναται τὰ πληρώσῃ τὴν αὐτὴν δεξαμενὴν εἰς 8 ὥρας καὶ τρίτη κρήνη εἰς 10 ὥρας. Παρατηρήθη δὲ ὅτι, ὅταν ῥέωσι καὶ αἱ τρεῖς ὁμοῦ ἐπὶ 2 ὥρας, ἡ δεξαμενὴ χρειάζεται εἰσέτι 26 λίτρας, ἵνα πληρωθῇ. Ζητεῖται πόσων λίτρων εἶναι ἡ χωρητικότης τῆς δεξαμενῆς.

Ἵνα αἱ συνθῇκαι τοῦ παρόντος προβλήματος ἐκπληρωθῶσι, πρέπει προφανῶς τὸ ποσὸν τῶν λιτρῶν, ὑπερ θέλει ἐκρεύσει εἰς 2 ὥρας ἐκ τῆς πρώτης κρήνης, ἐκεῖνο, ὑπερ θέλει ἐκρεύσει ἐκ τῆς δευτέρας εἰς 2 ὥρας καὶ τὸ ἐκ τῆς τρίτης εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἐκρευσόμενον, προστιθέμενα νὰ ἀποτελῶσιν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ ποσοῦ τῶν λιτρῶν τῆς ὅλης χωρητικότητος τῆς δεξαμενῆς κατὰ 26 λίτρας.

Πρέπει τώρα νὰ παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον διὰ τοῦ γράμματος x , καὶ ἐπ' αὐτοῦ νὰ σημειώσωμεν ἀλγεβρικῶς ἐκείνας τὰς πράξεις, δι' ὧν θέλομεν πορισθῇ τὰ μέρη, ἅτινα διείδομεν ὅτι πρέπει νὰ ὦσιν ἴσα, ἵνα ἐκπληρωθῶσιν αἱ συνθῇκαι τοῦ προβλήματος. Πρὸς τοῦτο δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἐπειδὴ ἐκ τῆς πρώτης κρήνης ῥέουσι, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, x λίτραι εἰς 6 ὥρας, εἰς 2 ὥρας θέλουσιν ἐκρεύσει $\frac{2}{6} \cdot x$ λίτρα. Ὅσαύτως, ἐπειδὴ ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης ῥέουσι x λίτραι εἰς 8 καὶ 10 ὥρας, εἰς 2 ὥρας θέλουσιν ἐκρεύσει $\frac{2}{8} \cdot x$ καὶ $\frac{2}{10} \cdot x$. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει, κατὰ τὰ προλεχθέντα, τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος:

$$\frac{2x}{6} + \frac{2x}{8} + \frac{2x}{10} = x - 26,$$

ἢ, ἀπλοποιουμένων τῶν κλασματικῶν αὐτῆς ὁρων, τὴν ἐξῆς

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x - 26,$$

ἂν λύοντες εὐρίσκομεν $x=120$. Λοιπὸν ἐξ 120 λιτρῶν πρέπει νὰ σύγκηται ἡ χωρητικότης τῆς δεξαμενῆς, ἵνα αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος ἐκπληρωθῶσι. Καὶ τῷ ὄντι, ἐκ μὲν τῆς πρώτης κρήνης, ἐξ ἧς ἐκρέουσιν εἰς 6 ὥρας 120 λίτρας, εἰς 2 ὥρας θέλουσιν ἐκρεύσει 40· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, ἐξ ἧς ἐκρέουσιν εἰς 8 ὥρας 120 λίτρας, εἰς 2 ὥρας θέλουσιν ἐκρεύσει 30, καὶ ἐκ τῆς τρίτης θέλουσιν ἐκρεύσει εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον 24, τὸ δὲ ἄθροισμα $40+30+24$ τῶν ἐκρευσασῶν εἰς 2 ὥρας ποσοτήτων εἶναι πράγματι μικρότερον τοῦ 120 κατὰ 26.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6^{ον}. — Τρεῖς ἐργάται δύνανται νὰ ἀποπερατώσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον, ὃ μὲν 18 ὥρας ἐργαζόμενος, ὁ δεῦτερος 12 καὶ ὁ τρίτος 9. Ἄν εἰργάζοντο καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ, εἰς πόσας ὥρας ἤθελον ἀποπερατώσει τὸ αὐτὸ ἔργον;

Ἐνταῦθα, ἵνα ἐκπληρωθῶσιν αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος, πρέπει προφανῶς τὸ μέρος τοῦ ἔργου, ὅπερ θέλει ἐκτελέσει ὁ πρῶτος εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον, καὶ τὰ μέρη, τὰ ὑπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου ἐκτελεσθόμενα εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, προστιθέμενα νὰ ἀποτελῶσι τὸ ὅλον ἔργον, ὅπερ δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν διὰ τῆς μονάδος.

Ἐστω λοιπὸν x ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὥρων. Ἵνα εὐρώμεν τὰ μέρη τοῦ ἔργου 1, ἅτινα θέλει ἐκτελέσει ἕκαστος εἰς x ὥρας, σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς.

Ἐὰν ὁ πρῶτος εἰς 18 ὥρας ἀποπερατοῖ τὸ ὅλον ἔργον 1, εἰς x ὥρας θέλει ἐκτελέσει τὰ $\frac{x}{18}$ τοῦ ἔργου ($18:x=1:y$, καὶ $y=\frac{x}{18}$).

Ἐὰν ὁ δεῦτερος εἰς 12 ὥρας ἀποπερατοῖ τὸ ὅλον ἔργον 1, εἰς x ὥρας θέλει ἐκτελέσει τὰ $\frac{x}{12}$ τοῦ ἔργου ($12:x=1:y$, καὶ $y=\frac{x}{12}$).

Ἐὰν ὁ τρίτος εἰς 9 ὥρας ἀποπερατοῖ τὸ ὅλον ἔργον 1, εἰς x ὥρας θέλει ἐκτελέσει τὰ $\frac{x}{9}$ τοῦ ἔργου ($9:x=1:y$, καὶ $y=\frac{x}{9}$).

Θέλομεν λοιπὸν ἔχει, κατὰ τὰ προλεχθέντα, τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{18} + \frac{x}{12} + \frac{x}{9} = 1,$$

ἐξ ἧς परिζόμεθα $x=4$. Λοιπὸν εἰς 4 ὥρας ἐργαζόμεναι καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ θέλουσιν ἀποπερατώσει τὸ ἔργον, ὅπερ ὁ μὲν πρῶτος δύναται νὰ ἐκτελέσῃ εἰς 18 ὥρας, ὁ δὲ δεῦτερος εἰς 12 καὶ ὁ τρίτος εἰς 9.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7^{ον}. — Εἰχέ τις περιουσίαν 100000 δραχμῶν. Μέρος

ταύτης διέθεσε πρὸς ἀγορὰν οἰκίας, τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου ἐτόκισε πρὸς 4 % καὶ τὰ λοιπὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ πρὸς 5 %, ἀπολαμβάνει δὲ ἐτήσιον τόκον 3780 δραχμὰς. Ζητεῖται ἡ ἀξία τῆς οἰκίας καὶ τὰ πρὸς 4 % καὶ 5 % τοκισθέντα μέρη.

Ἐν τῇ ἐκφωνήσει τοῦ παρόντος προβλήματος ζητοῦνται τρία τινά, ἀλλ' εὐκόλως βλέπει τις ὅτι μία εἶναι κυρίως ἡ ἀγνωστος, ἐξ ἧς αἱ ἄλλαι ἐξαρτῶνται, ἡ ἀξία τῆς οἰκίας. Διότι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ταύτην ἐκ τῆς ὅλης αὐτοῦ περιουσίας τῶν 100000 δραχμῶν, καὶ λάβωμεν τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ εὑρεθησομένου ὑπολοίπου, θέλωμεν ἔχει ἀμέσως τὰ πρὸς 4 % καὶ 5 % τοκισθέντα μέρη. Πρὸς τούτοις δέ, ἵνα ἐκπληρωθῶσιν αἱ συνθήκαι τοῦ προβλήματος, πρέπει προφανῶς ὁ ἐτήσιος τόκος τοῦ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου πρὸς 4 % καὶ ὁ ἐτήσιος τόκος τῶν $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ πρὸς 5 %, προστιθέμενοι νὰ ἀποτελῶσιν ἄθροισμα 3780 δραχμὰς.

Ἐστω λοιπὸν x ἡ ἀξία τῆς οἰκίας. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς περιουσίας αὐτοῦ μετὰ τὴν ἀγορὰν τῆς οἰκίας θέλει εἶναι ἡ διαφορά $100000 - x$, ἧς τὸ μὲν $\frac{1}{3}$ εἶναι $\frac{100000 - x}{3}$, τὰ δὲ $\frac{2}{3}$ αὐτῆς $\frac{2(100000 - x)}{3}$. Ἴνα δὲ τώρα εὑρωμεν τοὺς ἐτήσιους τόκους τῶν $\frac{100000 - x}{3}$ καὶ $\frac{2(100000 - x)}{3}$ δραχμῶν πρὸς 4 % καὶ 5 %, σχηματίζομεν τὰς ἀναλογίας

$$100 : \frac{100000 - x}{3} = 4 : x', \quad 100 : \frac{2(100000 - x)}{3} = 5 : \omega,$$

$$\text{ἐξ ὧν πορίζομεθα } x' = \frac{4(100000 - x)}{300} \text{ καὶ } \omega = \frac{10(100000 - x)}{300}.$$

Θέλωμεν λοιπὸν, κατὰ τὰ προλεχθέντα, ἔχει τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος

$$\frac{4(100000 - x)}{300} + \frac{10(100000 - x)}{300} = 3780,$$

ἢν λύοντες κατὰ τὸν γνωστὸν κανὸνα εὐρίσκομεν $x = 19000$. Λοιπὸν 19000 δραχμῶν ἦτο ἡ ἀξία τῆς ἀγορασθείσης οἰκίας, καὶ τῷ ἔμειναν ἐπομένως μετὰ τὴν ἀγορὰν αὐτῆς 81000, ὧν τὸ μὲν $\frac{1}{3}$, τὸ πρὸς 4 % τοκισθέν, εἶναι 27000, τὰ δὲ λοιπὰ $\frac{2}{3}$ τὰ πρὸς 5 % τοκισθέντα, 54000.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8^{ον}. — Ἐρωτηθεὶς τις πόσας δραχμὰς ἔχει ἀπεκρίθη. Ἐὰν δώσω εἰς τινα τὸ ἥμισυ τῶν ὅσας ἔχω καὶ 1, εἰς δευτέρον τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου καὶ 2, καὶ εἰς τρίτον τὸ ἥμισυ τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ 3, θέλουσι μοὶ μείνει δραχμαὶ 5. Ζητεῖται πόσας δραχμὰς εἶχε οὗτος.

Αἱ συνθήκαι τοῦ παρόντος προβλήματος δύνανται κατὰ δύο τρόπους νὰ ἐκπληρωθῶσιν. Ὁ μὲν πρῶτος τούτων συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἐξισωσώμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅσας ἔλαβεν ὁ πρῶτος, ὁ δευτέρος, ὁ τρίτος καὶ τοῦ μείναντος ὑπολοίπου 5 μὲ ὅσας δραχμὰς οὗτος εἶχε κατ' ἀρχάς· ὁ δὲ δευτέρος, εἰς τὸ νὰ ἐξισωσώμεν μὲ 5 τὸ μείναν αὐτῷ ὑπόλοιπον μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ὅσας ἔλαβε παρ' αὐτοῦ ὁ τρίτος. Ἐπειδὴ δὲ ὁ δευτέρος οὗτος τρόπος τῆς ἐκπληρώσεως τῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος παρέχει ἀπλουστέραν πρὸς λύσιν ἐξίσωσιν, πρέπει νὰ προτιμηθῇ.

Ἐστῶσαν λοιπὸν x αἱ 2 εἶχε δραχμαί. Τὸ μὲν ἥμισυ τούτων καὶ 1, 2ς ἐδωκεν εἰς τὸν πρῶτον, θέλει παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀθροίσματος $\frac{x}{2} + 1$, τὸ δὲ μείναν αὐτῷ ὑπόλοιπον διὰ τῆς διαφορᾶς $x - \left(\frac{x}{2} + 1\right)$, ἥτις γίνεται ἀναγομένων τῶν ὅρων αὐτῆς εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν καὶ ἐκτελουμένης τῆς ἀφαιρέσεως $\frac{2x - x - 2}{2}$, ἥτοι $\frac{x - 2}{2}$.

Τοῦ πρώτου ὑπολοίπου παριστωμένου διὰ $\frac{x - 2}{2}$, τὸ μὲν ἥμισυ αὐτοῦ καὶ 2, 2ς ἔλαβεν ὁ δευτέρος, θέλει παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀθροίσματος $\frac{x - 2}{4} + 2$, τὸ δὲ μείναν αὐτῷ νέον ὑπόλοιπον διὰ τῆς διαφορᾶς $\frac{x - 2}{2} - \left(\frac{x - 2}{4} + 2\right)$, ἥτις γίνεται μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὅρων αὐτῆς εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν 4 καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς σσημειωμένης ἀφαιρέσεως $\frac{2x - 4 - x + 2 - 8}{4}$, ἥτοι $\frac{x - 10}{4}$.

Τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου παριστωμένου διὰ $\frac{x - 10}{4}$, τὸ μὲν ἥμισυ αὐτοῦ καὶ 3, 2ς ἔλαβεν ὁ τρίτος, θέλει παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀθροίσματος $\frac{x - 10}{8} + 3$, τὸ δὲ μείναν αὐτῷ ὑπόλοιπον, ὅπερ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν εἶναι δραχμαὶ 5, διὰ τῆς διαφορᾶς $\frac{x - 10}{4} - \left(\frac{x - 10}{8} + 3\right)$. Θέλομεν λοιπὸν, κατὰ τὰ προλεχθέντα, ἔχει τὴν ἐξῆς πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἐξίσωσιν

$$\frac{x - 10}{4} - \left(\frac{x - 10}{8} + 3\right) = 5,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα $x=74$. Λοιπὸν 74 δραχμὰς εἶχεν ὁ δυνάμενος νὰ δώσῃ εἰς τινὰ τὸ ἥμισυ αὐτῶν καὶ 1, ἥτοι 38· εἰς δευτέρον τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου 36 καὶ 2, ἥτοι 20· εἰς τρίτον τὸ ἥμισυ τοῦ νέου ὑπολοίπου 16 καὶ 3, ἥτοι 11, καὶ νὰ τῷ μείνωσι δραχμαὶ 5.

Νομίζομεν πρὸς τὸ παρὸν ἐπαρκῆ τὴν ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω 8 ἀλγεβρικῶν προβλημάτων γενομένην ἐφαρμογὴν τῶν πρὸς λύσιν αὐτῶν δοθεισῶν ἐν τῇ προηγουμένη παραγράφῳ ὁδηγιῶν, ὅπως ἐννοηθῇ σαφῶς ἡ χρησιμότης καὶ ὁ τρόπος τῆς χρήσεως αὐτῶν, ἐπανερχόμεθα δὲ ἐν τῷ *Δευτέρῳ Μέρει* τοῦ παρόντος συγγράμματος ἐπὶ τῆς λύσεως πλειοτέρων καὶ πολυπλοκωτέρων προβλημάτων, ἵνα οὕτως ἀποκτήσωσιν οἱ κατὰ πρῶτον σπουδάζοντες τὴν Ἀλγεβρὰν τὴν ἀναγκαίαν ἄσκησιν, ὅπως λύωσιν εὐχερῶς καὶ ἀσφαλῶς τὰ εἰς τὴν λύσιν τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ἀναγόμενα ἀλγεβρικά προβλήματα· τοῦτο δέ, διότι θεωροῦμεν τὴν ἄσκησιν ταύτην ὡς τὸ μεγαλειότερον βῆμα πρὸς εὐχερῆ κατανόησιν καὶ ἐκμάθησιν τῆς Ἀλγέβρας, ἥτις θεωρεῖται δικαίῳ τῷ λόγῳ ὡς ἡ κλεῖς, οὕτως εἰπεῖν, τῶν Μαθηματικῶν ἐπιστημῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΙΝΕΣ. — ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ ΘΣΩΝΔΗΠΟΤΕ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ
ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕΤ' ΙΣΑΡΙΘΜΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΙΝΕΣ

45. Ἐξίσωσίς τις περιέχουσα δύο ἢ πλειοτέρας ἀγνώστους λέγεται πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς ταύτας, ὅταν μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν παρονομαστῶν αὐτῆς, ἐὰν ἔχη, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων, ἐὰν ὑπάρχωσι, μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν περιεχόντων τὴν αὐτὴν ἀγνώστον ὅρων εἰς ἓνα, αὕτη εὐρίσκεται περιέχουσα ἐκάστην τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων μὴ περιεχόντων οὐδεμίαν τούτων. Παραδείγματος χάριν, ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{3x}{4} - 8 + \frac{2y}{6} = \frac{5(w-2)}{8} - 2x + \frac{4y}{3}$$

λέγεται τοῦ πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς ἐν αὐτῇ περιεχομένας ἀγνώστου χ , ψ , ω , διότι μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν ἐν αὐτῇ παρονομαστών,

$$18\chi - 192 + 8\psi = 15\omega - 2 - 48\chi + 32\psi$$

μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων,

$$18\chi - 192 + 8\psi = 15\omega - 30 - 48\chi + 32\psi$$

μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν περιεχόντων τὴν αὐτὴν ἀγνωστον ὅρων εἰς ἓνα

$$66\chi - 24\psi - 15\omega = 162,$$

αὕτη εὐρίσκεται περιέχουσα ἐκάστην τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων χ , ψ , ω εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, τῶν συντελεστῶν αὐτῶν 66, -24 , -15 μὴ περιχόντων οὐδεμίαν ἀγνωστον.

Λόγοι δὲ ἢ πλειότερας ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ μετ' ἰσαριθμῶν ἀγνώστων, ὅταν εὐρίσκωμεν τὰς τιμὰς τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων, τὰς ταῦτοποιοῦσας συγχρόνως ταύτας. Αἱ δύο δὲ ἢ αἱ πλείοτεραι ἐξισώσεις, αἱ διὰ τῶν αὐτῶν τιμῶν τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων ταῦτοποιοῦμεναι, λέγονται ἀποτελοῦσαι ἐν σύστημα ἐξισώσεων, αἱ δὲ τιμαὶ τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων, αἱ ταῦτοποιοῦσαι ταύτας, λέγονται ἀποτελοῦσαι ἐν σύστημα τιμῶν.

Δύο συστήματα ἐξισώσεων λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν αἱ τιμαὶ τῶν αὐτῶν ἀγνώστων, αἱ ταῦτοποιοῦσαι ἀμφοτέρω, ἦναι αἱ αὐταί.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ ΟΣΩΝΔΗΠΟΤΕ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕΤ' ἸΣΑΡΙΘΜΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

46. Πρὸς λύσιν ὁσωνδήποτε πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαριθμῶν ἀγνώστων ἐπενοήθησαν τρεῖς διὰφοροι μέθοδοι· ἡ καλουμένη μέθοδος τῆς συγκρίσεως, ἡ μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως καὶ ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὸν αὐτὸν συντελεστήν ἢ τῆς ἀπαλείψεως. Νομίζομεν δὲ προτιμότερον, ἀντὶ νὰ ἀποδείξωμεν ἀμέσως τὸ ἀληθές ἐκάστης τούτων ἐπὶ γενικῶν τινῶν παραδειγμάτων, νὰ ἐφαρμόσωμεν πρῶτον αὐτὰς εἰς τινὰ μερικὰ παραδείγματα, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς λύσεως δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, καὶ ἔπειτα, ὅτε ὁ μαθητὴς θέλει ἔχει προχείρους ἐν τῷ νῷ αὐτοῦ ἐκάστην τῶν πρὸς λύσιν τῶν ἐξισώσεων ἐκτελουμένων πράξεων, νὰ ἐκθέσωμεν τὰς ἀποδείξεις τούτων ἐπὶ γενικῶν τινῶν ἐξισώσεων.

47. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΣΥΓΚΡΙΣΕΩΣ. — Ἐστώσαν πρὸς λύσιν αἱ ἐξῆς δύο ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους, ἀναχθεῖσαι εἰς τὴν ἀπλουστάτην αὐτῶν μορφήν

$$5x - 3y = 9 \quad (1),$$

$$7x + 4y = 29 \quad (2).$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν εἰς ἑκατέραν τούτων τὴν ἀγνωστον y ὡς γνωστήν, καὶ λύσωμεν αὐτάς ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν ἀγνωστον x , θέλομεν ἔχει

$$x = \frac{9 + 3y}{5} \quad (3),$$

$$x = \frac{29 - 4y}{7} \quad (4).$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ τιμαὶ τῆς x καὶ y , αἱ ταῦτοποιοῦσαι τὴν ἐξίσωσιν (1), πρέπει νὰ ᾖναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς τιμὰς τῆς x καὶ y , τὰς ταῦτοποιοῦσας τὴν ἐξίσωσιν (2), τὰ δευτέρα μέλη τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) πρέπει νὰ ᾖσιν ἴσα, ἐν ἁλλαίς λέξεσι θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς μὲ μίαν μόνην ἀγνωστον y ἐξίσωσιν

$$\frac{9 + 3y}{5} = \frac{29 - 4y}{7} \quad (5),$$

ἣν λύοντες κατὰ τὸν ἐν τῇ § 39 δοθέντα κανόνα εὐρίσκομεν $y = 2$.

Ἀντικαθιστῶντες τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν 2 τῆς y εἰς ἑκατέραν τῶν δύο ἐξισώσεων (3) καὶ (4), θέλομεν ἔχει

$$x = \frac{9 + 6}{5} = 3, \text{ καὶ } x = \frac{29 - 8}{7} = 3.$$

Αἱ εὑρεθεῖσαι λοιπὸν τιμαὶ $y = 2$ καὶ $x = 3$, ταῦτοποιοῦσαι προφανῶς τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4), θέλουσι ταῦτοποιεῖ καὶ τὰς δεδομένας ἐξισώσεις (1) καὶ (2), διότι τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) ἐπορίσθημεν ἐκ τῶν (1) καὶ (2) διὰ πράξεων, ὧν ἡ ἐφαρμογὴ, κατὰ τὰ ἐν τῇ § 39 ἐκτεθέντα, παρέχει ἐξισώσεις ἰσοδυνάμους. Ἐντεῦθεν δὲ ποριζόμεθα τὸν ἐξῆς γενικὸν κανόνα.

Ἴσα λύσωμεν ἐν σύστημα δύο ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους διὰ τῆς μεθόδου τῆς συγκρίσεως, λύομεν ἑκατέραν τούτων, ἀφοῦ δώσωμεν εἰς αὐτὰς τὴν γενικὴν μορφήν $ax + by = \gamma$, ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν ἀγνωστον x ἢ y , ἐξισοῦμεν τὰς οὕτως εὑρεθησόμενας τιμὰς τῶν αὐτῶν ἀγνώστων, καὶ εὐρίσκομεν μίαν ἐξίσωσιν μὲ μίαν μόνην ἀγνωστον y ἢ x . Ἐκ ταύτης ποριζόμεθα τὴν τιμὴν τῆς

ἐν αὐτῇ ἀγνώστου, καὶ ἀντικαθιστῶντες αὐτὴν εἰς μίαν τῶν δύο δεδομένων ἐξισώσεων, ἢ προτιμότερον εἰς μίαν τῶν ἐξισώσεων, τῶν παριστωσῶν τὴν τιμὴν τῆς ἐτέρας ἀγνώστου, εὐρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν αὐτῆς.

Ἄν ἐφηρμόζομεν τὸν κανόνα τοῦτον εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λύοντες ἑκατέραν τούτων ὡς πρὸς τὴν ἀγνώστον ψ , ἠθέλομεν ἔχει τὰς ἐξῆς ἐξισώσεις,

$$\psi = \frac{-5\chi + 9}{-3} \quad \eta \quad \psi = \frac{5\chi - 9}{3} \quad (3),$$

$$\psi = \frac{29 - 7\chi}{4} \quad (4),$$

ἐξ ὧν ἠθέλομεν πορισθῇ τὴν ἐπομένην

$$\frac{5\chi - 9}{3} = \frac{29 - 7\chi}{4} \quad (5),$$

ἥτις ἤθελε μᾶς δώσει λυομένη κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα $\chi = 3$.

Ἦθέλομεν ἔπειτα ἀντικαταστήσει τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν 3 τῆς χ εἰς μίαν τῶν δύο ἐξισώσεων (1) καὶ (2), ἢ προτιμότερον εἰς μίαν τῶν (3) καὶ (4), καὶ ἠθέλομεν πορισθῇ ἐξ αὐτῆς ἀμέσως τὴν τιμὴν τῆς ψ , ἥτοι

$$\psi = \frac{15 - 9}{3} = 2, \quad \eta \quad \psi = \frac{29 - 21}{4} = 2,$$

τὸ δὲ σύστημα τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν $\chi = 3$ καὶ $\psi = 2$ θέλει προφανῶς ταῦτο ποιεῖ ἑκατέραν τῶν δεδομένων δύο ἐξισώσεων (1) καὶ (2).

48. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ. — Ἄς λάβωμεν τὸ αὐτὸ σύστημα ἐξισώσεων

$$5\chi - 3\psi = 9 \quad (1),$$

$$7\chi + 4\psi = 29 \quad (2).$$

Ἐὰν λύσωμεν τὴν πρώτην ὡς πρὸς τὴν χ , θεωροῦντες τὴν ἐν αὐτῇ ἀγνώστον ψ ὡς γνωστήν, καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὴν οὕτως εὑρεθεῖσαν ἐπομένην τιμὴν τῆς χ εἰς τὴν δευτέραν, θέλομεν ἔχει τὸ ἐξῆς σύστημα

$$\chi = \frac{9 + 3\psi}{5} \quad (3),$$

$$7\left(\frac{9 + 3\psi}{5}\right) + 4\psi = 29 \quad (4),$$

ὅπερ θέλει ταυτοποιεῖσθαι διὰ τῶν αὐτῶν τιμῶν τῆς x καὶ y : δι' ὧν καὶ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Διότι ἡ μὲν ἐξίσωσις (3) εἶναι αὐτὴ ἡ (1) μετασχηματισθεῖσα, ἡ δὲ ἐξίσωσις (4) εἶναι ἡ ἐξίσωσις (2), ἐν ᾗ ἀντὶ τοῦ x ἐτέθη ἡ τιμὴ αὐτῆς $\frac{9+3y}{5}$, ἡ ταυτοποιοῦσα τὴν ἐξίσωσιν (1), ἥτις καθ' ὑπόθεσιν πρέπει νὰ ᾖναι ἡ αὐτὴ τῇ ταυτοποιούσῃ τὴν ἐξίσωσιν (2). Ἀλλ' ἐπειδὴ οὕτως ἡ ἐξίσωσις (4) δὲν περιέχει, εἰμὴ μόνον τὴν ἀγνωστον y , δυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν ἐκ ταύτης τὴν ταυτοποιοῦσαν αὐτὴν τιμὴν αὐτῆς 2: ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (3) ἀντὶ τῆς y τὴν εὑρεθεῖσαν αὐτῆς τιμὴν 2, θέλομεν ἔχει τὴν ταυτοποιοῦσαν αὐτὴν τιμὴν τῆς x , ἥτις εἶναι $\frac{9+6}{5}$, ἥτοι 3. Λοιπὸν τὸ σύστημα τῶν τιμῶν $x=3$ καὶ $y=2$, τὸ ταυτοποιοῦν προφανῶς τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4), θέλει ἀναγκαίως ταυτοποιεῖ καὶ τὸ δεδομένον (1) καὶ (2), ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἐξ αὐτοῦ δι' ἀντικαταστάσεως εὑρεθέντι (3) καὶ (4). Ἐντεῦθεν δὲ πορίζομεθα εὐκόλως τὸν ἐξῆς κανόνα πρὸς λύσιν συστήματός τινος δύο πρωτοβάθμιων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως.

Ἴρα λύσωμεν ἔν σύστημα δύο πρωτοβάθμιων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως, ἀφοῦ πρῶτον δώσωμεν εἰς ἑκατέραν τούτων τὴν γενικὴν μορφήν $ax+by=r$, λύσωμεν τὴν ἑτέραν τούτων ὡς πρὸς τινα τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων, ὡς ἂν ἡ ἑτέρα τῶν ἀγνώστων ᾖτο γνωστὴ, καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὴν οὕτως εὑρεθησομένην τιμὴν αὐτῆς εἰς τὴν ἑτέραν, ἥτις προφανῶς δὲν θέλει τότε περιέχει τὴν ἀντικαθιστωμένην ἀγνωστον. Οὕτω θέλομεν ἔχει μίαν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν μὲ μίαν μόνην ἀγνωστον, ἥς εὐρίσκομεν εὐκόλως κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τὴν ταυτοποιοῦσαν αὐτὴν τιμὴν. Ἀντικαθιστῶμεν ἔπειτα τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τῆς ἀγνώστου ταύτης εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως, τῆς παριστώσης τὴν τιμὴν τῆς ἑτέρας, καὶ εὐρίσκομεν διὰ τῆς ἐκτελέσεως τῶν ἐν αὐτῇ σημειωμένων πράξεων καὶ τὴν τιμὴν αὐτῆς. Οὕτω θέλομεν εὑρεῖ ἔν σύστημα τιμῶν τῶν ἀγνώστων, ὅπερ θέλει ταυτοποιεῖ καὶ τὰς δύο δεδομένας ἐξισώσεις.

Ἄν ἐφαρμόσωμεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λύοντες τὴν δευτέραν ὡς πρὸς τὴν ἀγνωστον y , λαμβανομένης τῆς x ὡς γνωστῆς, θέλομεν ἔχει τὸ ἐξῆς ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ σύστημα

$$y = \frac{29 - 7x}{4} \quad (3),$$

$$5x - 3\left(\frac{29 - 7x}{4}\right) = 9 \quad (4),$$

οὕτινος ἡ μὲν ἐξίσωσις (4), λυομένη ὡς πρὸς τὴν μόνην ἐν αὐτῇ ἄγνωστον x , δίδει $x = 3$, ἡ δὲ ἐξίσωσις (3), ἐν ἣ ἀντὶ τῆς x θέλομεν θέσει τὴν εὐρεθεῖσαν τιμὴν αὐτῆς 3, τὴν ταῦτοποιοῦσαν τὴν ἐξίσωσιν (4), θέλει μᾶς δώσει

$$y = \frac{29 - 7 \cdot 3}{4} = \frac{29 - 21}{4} = 2.$$

Λοιπὸν τὸ σύστημα τῶν τιμῶν $x = 3$ καὶ $y = 2$, τὸ ταῦτοποιοῦν τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4), θέλει ταῦτοποιοῖ καὶ τὰς δεδομένας (1) καὶ (2).

49. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΕΙΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΝ. — Ἄς λάβωμεν πάλιν τὸ αὐτὸ σύστημα ἐξισώσεων

$$5x - 3y = 9 \quad (1),$$

$$7x + 4y = 29 \quad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ τὸν συντελεστὴν 4 τῆς y τῆς ἐξισώσεως (2) καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ τὸν συντελεστὴν 3 τῆς αὐτῆς ἀγνώστου y τῆς ἐξισώσεως (1), θετικῶς λαμβανόμενον, θέλομεν ἔχει τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$20x - 12y = 36 \quad (3),$$

$$21x + 12y = 87 \quad (4),$$

ὅπερ θέλει προφανῶς εἶναι ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ (1) καὶ (2), καὶ ἐν ᾧ ἡ ἀγνωστος y θέλει ἔχει τὸν αὐτὸν συντελεστὴν 12, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου λαμβανόμενον.

Ἐπειδὴ δὲ συμβαίνει ἐναυῦθα οἱ ἴσοι συντελεσταὶ τῆς y νὰ ἔχωσιν ἐναντία σημεῖα, προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4), καὶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$20x - 12y + 21x + 12y = 36 + 87,$$

ἥτις διὰ τῆς ἐκτελέσεως τῶν ἐν αὐτῇ δυνατῶν ἀναγωγῶν γίνεται

$$41x = 123, \quad (5),$$

τουτέστι μετατρέπεται εἰς ἐξίσωσιν μὴ περιέχουσαν εἰμὴ μίαν μόνην

ἄγνωστον x , ἥς τὴν ταυτοποιοῦσαν αὐτὴν τιμὴν εὐρίσκομεν ἀμέσως, καὶ ἥτις εἶναι 3. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις (5) εἶναι συνέπεια τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4), καὶ ἡ ταυτοποιοῦσα αὐτὴν τιμὴ τῆς x θέλει ἀναγκαίως ἀνήκει εἰς τὸ σύστημα τῶν τιμῶν, τῶν ταυτοποιουσῶν αὐτάς.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν εὐρεθεῖσαν τιμὴν 3 τῆς x εἰς τινὰ τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4), ἡ προτιμότερον τῶν (1) καὶ (2), παραδείγματος χάριν εἰς τὴν (1), θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$15 - 3y = 9 \quad (6),$$

ἥτις δὲν περιέχει, εἰμὴ μίαν μόνον ἄγνωστον y , καὶ λυομένη ὡς πρὸς ταύτην δίδει διὰ τὴν y τὴν ταυτοποιοῦσαν αὐτὴν τιμὴν 2. Λοιπὸν τὸ σύστημα τῶν τιμῶν $x=3$ καὶ $y=2$, τὸ ταυτοποιοῦν τὰς ἐξισώσεις (5) καὶ (6), θέλει ἀναγκαίως ταυτοποιεῖ καὶ τὰς δεδομένας (1) καὶ (2), εὐρέθη δὲ ἡ μὲν τιμὴ τῆς x διὰ τῆς ἀναγωγῆς τῶν δεδομένων ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εἰς τὰς ἰσοδυνάμους (3) καὶ (4), ἐν αἷς οἱ συντελεσταὶ τῆς y , ἀνεξαρκῆτως τοῦ σημείου αὐτῶν, εἶναι ἴσοι, ἡ δὲ τιμὴ τῆς y διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τῆς εὐρεθείσης τιμῆς 3 τῆς x εἰς τὴν ἑτέραν τῶν δεδομένων ἐξισώσεων (1) καὶ (2).

Δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν καὶ τὴν τιμὴν τῆς y κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, διὰ τῆς ἀναγωγῆς δηλ. τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εἰς ἰσοδυνάμους, ἐν αἷς ἡ ἄγνωστος x νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν συντελεστήν. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ τὸν συντελεστήν 7 τῆς ἀπαιμιπτεᾶς ἀγνώστου x , τὸν ἐν τῇ ἑτέρᾳ ἐξίσωσει (2), καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ τὸν συντελεστήν 5 τῆς αὐτῆς ἀγνώστου x , τὸν ἐν τῇ ἐξίσωσει (1). Οὕτω θέλομεν ἔχει τὸ ἰσοδύναμον τῶν δεδομένων συστήματι

$$35x - 21y = 63 \quad (3),$$

$$35x + 20y = 145 \quad (4).$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ συστήματι (3) καὶ (4) οἱ αὐτοὶ συντελεσταὶ τῆς ἀπαιμιπτεᾶς ἀγνώστου x ἔχουσι καὶ τὰ αὐτὰ σημεία, ἀφαιροῦμεν αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ πορίζομεθα τὴν ἐξίσωσιν

$$35x - 21y - 35x - 20y = 63 - 145,$$

ἥτις διὰ τῆς ἐκτελέσεως τῶν ἐν αὐτῇ δυνατῶν ἀναγωγῶν γίνεται

$$-41y = -82, \quad \text{ἢ} \quad 41y = 82 \quad (5),$$

πουτέστι μετατρέπεται εἰς ἐξίσωσιν περιέχουσαν μίαν μόνον ἄγνωστον

$$\begin{array}{r|l} 41 & y \\ \hline 41 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

ψ, ἥς εὐρίσκομεν ἀμέσως τὴν τιμὴν 2, τὴν ταυτοποιοῦσαν τὴν ἐξίσωσιν (5). Ἐπειδὴ δέ, καθ' ὃν τρόπον πορίζομεθα τὴν ἐξίσωσιν (5), αὕτη προφανῶς εἶναι συνέπεια τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4), καὶ ἡ ταυτοποιοῦσα αὐτὴν τιμὴ 2 τῆς ψ θέλει ἀναγκαίως ἀνήκει εἰς τὸ σύστημα τῶν τιμῶν, τῶν ταυτοποιοῦσων αὐτάς. Εἶναι ὅμως πολὺ προτιμότερον, ἀφοῦ εὐρωμεν διὰ τῆς ἀπαλείψεως τῆς μιᾶς ἀγνώστου τὴν τιμὴν τῆς ἑτέρας, νὰ πορίζομεθα τὴν τιμὴν τῆς δευτέρας ἐκ τινος τῶν δύο δεδομένων ἐξισώσεων δι' ἀντικαταστάσεως ἐν αὐτῇ τῆς εὐρεθείσης τιμῆς τῆς πρώτης.

Ἐντεῦθεν πορίζομεθα εὐκόλως τὸν ἐξῆς κανόνα πρὸς λύσιν ἐνὸς συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς αὐτῶν εἰς τὸν αὐτὸν συντελεστήν.

"Ἐὰν λύσωμεν ἕν σύστημα δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς αὐτῶν εἰς τὸν αὐτὸν συντελεστήν, ἀφοῦ πρῶτον δώσωμεν εἰς ἑκατέραν τούτων τὴν γενικὴν μορφήν $ax + by = γ$, πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν συντελεστήν τῆς ἀπαλειπτέας ἀγνώστου, τὸν ἐν τῇ δευτέρᾳ, θετικῶς λαμβανόμενον, καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν συντελεστήν τῆς ἀπαλειπτέας ἀγνώστου, τὸν ἐν τῇ πρώτῃ, θετικῶς λαμβανόμενον. Οὕτω θέλομεν εἶρεν ἕν σύστημα ἐξισώσεων, ἐν ᾧ οἱ συντελεσταὶ τῆς ἀπαλειπτέας ἀγνώστου θέλουσιν εἶναι, θετικῶς λαμβανόμενοι, ἀναγκαίως ἴσοι. Προσθέτομεν τότε ἡ ἀφαιροῦμεν, καθόσον οἱ συντελεσταὶ τῆς ἀπαλειπτέας ἀγνώστου θέλουσιν ἔχει ἀντίθετα ἢ τὰ αὐτὰ σημεῖα, κατὰ μέλη τὰς εὐρεθείσας ἐξισώσεις, καὶ πορίζομεθα μίαν ἐξίσωσιν μὲ μίαν μόνον ἀγνώστον, ἥς τὴν τιμὴν εὐρίσκομεν ἀμέσως ἐξ αὐτῆς. Ἀντικαθιστῶμεν ἔπειτα εἰς μίαν τῶν δύο δεδομένων ἐξισώσεων ἀντὶ τῆς ἀγνώστου ταύτης τὴν εὐρεθείσαν τιμὴν αὐτῆς, καὶ ἔχομεν ἑτέραν ἐξίσωσιν περιέχουσαν τὴν ἑτέραν μόνον ἀγνώστον, ἥς τὴν τιμὴν εὐρίσκομεν πάλιν ἀμέσως λύοντες τὴν οὕτως εὐρεθείσαν ἐξίσωσιν. Ἡ τιμὴ αὕτη τῆς δευτέρας ἀγνώστου μετὰ τῆς εὐρεθείσης τιμῆς τῆς πρώτης θέλουσιν ἀποτελεῖν σύστημα τιμῶν, ταυτοποιοῦσων τὸ δεδομένον σύστημα.

Ἐκ τῶν τριῶν προεκτεθεισῶν μεθόδων πρέπει νὰ προτιμῶμεν πάντοτε τὴν τελευταίαν, διότι δι' αὐτῆς ἀποφεύγομεν τὰς κλασματικὰς παραστάσεις, αἵτινες παρέχουσι συνήθως εἰς τοὺς μαθητὰς περισσοτέρας δυσκολίας, καθ' ὃ πολυπλοκώτεροι, ἢ καὶ πράγματι διὰ τὴν καθ' ὅποιον ἀνὰ ποτε τῶν ἀνωτέρω τριῶν μεθόδων λύσιν ὅποιονδήποτε συστήματος

δύο πρωτοβαθμίων εξισώσεων μετ' ἰσαριθμῶν ἀγνώστων ἐκτελοῦμεν τὰς αὐτὰς ἐν συνόλῳ πράξεις.

50. Πρὶν ἢ ἐκθέσωμεν τὸν γενικὸν κανόνα τῆς λύσεως ὁσωνδῆποτε πρωτοβαθμίων εξισώσεων μετ' ἰσαριθμῶν ἀγνώστων διὰ μόνης τῆς συνηθέστερον ἐν χρήσει μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὸν αὐτὸν συντελεστήν, ἣν ὀνομάζουσι συνήθως χάριν συντομίας καὶ μέθοδον τῆς ἀπαλείψεως, νομίζομεν καλὸν νὰ ἐφαρμόσωμεν συντόμως ἐκάστην τῶν τριῶν εἰς τὴν λύσιν ἐνὸς συστήματος τριῶν πρωτοβαθμίων εξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους.

Ἐστω π. χ. τὸ ἐξῆς σύστημα

$$4x - 3y + 2z = 9 \quad (1),$$

$$2x + 5y - 3z = 4 \quad (2),$$

$$5x + 6y - 2z = 18 \quad (3),$$

Ἵνα λύσωμεν αὐτὸ διὰ τῆς μεθόδου τῆς συγκρίσεως, λύομεν ἐκάστην τῶν δεδομένων εξισώσεων (1), (2), (3) ὡς πρὸς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἀγνώστον, π. χ. ὡς πρὸς τὴν z , θεωροῦντες τὰς ἄλλας δύο ἀγνώστους x καὶ y ὡς γνωστάς, καὶ εὐρίσκομεν τὰς ἐξῆς τρεῖς εξισώσεις

$$z = \frac{9 - 4x + 3y}{2} \quad (4),$$

$$z = \frac{4 - 2x - 5y}{-3} \quad (5),$$

$$z = \frac{18 - 5x - 6y}{-2} \quad (6),$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα, ἐξισοῦντες τὸ δεύτερον μέλος μιᾶς τούτων, π. χ. τῆς πρώτης, μὲ τὰ δεύτερα μέλη ἐκατέρας τῶν δύο ἄλλων, τὰς ἐξῆς δύο

$$\frac{9 - 4x + 3y}{2} = \frac{4 - 2x - 5y}{-3} \quad (7),$$

$$\frac{9 - 4x + 3y}{2} = \frac{18 - 5x - 6y}{-2} \quad (8),$$

ἐκατέρα τῶν ὁποίων δὲν περιέχει εἰμὴ δύο μόνον ἀγνώστους x καὶ y .

Ἐκτελοῦντες ἐπὶ τῶν εξισώσεων (7) καὶ (8) τὰς πρὸς ἀπλοποίησιν

αὐτῶν γνωστὰς πράξεις πορίζομεθα ἀντ' αὐτῶν τὰς ἐξῆς ἰσοδυνάμους ἐξισώσεις

$$16x + y = 35 \quad (7),$$

$$3x + y = 9 \quad (8),$$

ἃς λύοντες ὡς προεξεθέσαμεν ἀνωτέρω διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου τῆς συγ-
κρίσεως, εὐρίσκομεν τὸ σύστημα τῶν τιμῶν 2 καὶ 3 τῆς x καὶ y , τὸ
ταυτοποιῶν ταύτας.

Ἀντικαθιστῶντες τέλος εἰς μίαν ὁποιανδήποτε τῶν ἐξισώσεων (4),
(5), (6), π. χ. εἰς τὴν (4), ἀντὶ τῆς x καὶ y τὰς εὐρεθείσας αὐτῶν
τιμὰς 2 καὶ 3, εὐρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν 5 τῆς τρίτης ἀγνώστου φ

$$\varphi = \frac{9 - 8 + 9}{2} = 5.$$

Ἴνα δὲ λύσωμεν τὸ αὐτὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3)
διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως, λύομεν τὴν μίαν τούτων, π. χ.
τὴν (1), ὡς πρὸς μίαν ὁποιανδήποτε τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνῶστων, π. χ. ὡς
πρὸς τὴν ἀγνώστον φ , θεωροῦντες τὰς λοιπὰς ἐν αὐτῇ ἀγνώστους x
καὶ y ὡς γνωστὰς, καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὴν εὐρεθησομένην τιμὴν αὐτῆς
 $\frac{9 - 4x + 3y}{2}$ εἰς ἑκατέραν τῶν δύο ἄλλων (2) καὶ (3). Θέλομεν οὕτως ἔχει
τὸ ἐξῆς σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων

$$2x + 5y - 3 \left(\frac{9 - 4x + 3y}{2} \right) = 4 \quad (4),$$

$$5x + 6y - 2 \left(\frac{9 - 4x + 3y}{2} \right) = 18 \quad (5).$$

Ἡ μετὰ τὴν ἐν αὐτοῖς ἐκτέλεσιν τῶν δυνατῶν ἀπλοποιήσεων τὸ ἐξῆς

$$16x + y = 35 \quad (4),$$

$$3x + y = 9 \quad (5),$$

ὅπερ λύομεν ὡς ἐξεθέσαμεν ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ διὰ τῆς αὐ-
τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως, καὶ εὐρίσκομεν διὰ μὲν τὴν x τὴν
τιμὴν 2, διὰ δὲ τὴν y τὴν τιμὴν 3, αἵτινες ταυτοποιοῦσιν αὐτό.

Ἀντικαθιστῶντες ἔπειτα ἀντὶ τῆς x τὴν εὐρεθείσαν αὐτῆς τιμὴν 2
καὶ ἀντὶ τῆς y τὴν εὐρεθείσαν αὐτῆς τιμὴν 3 εἰς μίαν τῶν δεδομένων

τριῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3), π. χ. εἰς τὴν πρώτην, ἢ προτιμότερον εἰς τὴν ἐκ ταύτης ποιεθεῖσαν

$$g = \frac{9 - 4x + 3y}{2},$$

εὐρίσκομεν ἀμέσως καὶ τὴν τιμὴν ὅ τῆς τρίτης ἀγνώστου g .

Ἴνα δὲ τέλος λύσωμεν τὸ αὐτὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὸν αὐτὸν συντελεστήν, ἀπαλείφομεν μεταξὺ τῆς (1) καὶ (2) μίαν ὁποιανδήποτε ἄγνωστον, π. χ. τὴν g , πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 3 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 2 καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς εὐρεθησομένης ἐξισώσεως

$$12x - 9y + 6g = 27,$$

$$4x + 10y - 6g = 8,$$

ὅτε θέλομεν ἔχει μετὰ τὴν ἐπὶ τῆς εὐρεθησομένης ἀναγωγῆς τῶν ὁμοίων ὅρων τὴν ἐξῆς

$$16x + y = 35 \quad (4).$$

Ἀπαλείφομεν ὁμοιοτρόπως μεταξὺ τῆς (1) καὶ τῆς (3) τὴν αὐτὴν ἄγνωστον g , καὶ εὐρίσκομεν τὴν ἐξῆς

$$9x + 3y = 27 \quad \eta, \quad \text{ὅπερ ταὐτό,} \quad 3x + y = 9 \quad (5).$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν εὐρεθεισῶν δύο ἐξισώσεων (4) καὶ (5) διὰ τῆς αὐτῶν μεθόδου εὐρίσκομεν $x=2$ καὶ $y=3$, ἀντικαθιστώντες δὲ ἀντὶ τῆς x καὶ y τὰς εὐρεθείσας αὐτῶν τιμὰς 2 καὶ 3 εἰς μίαν ὁποιαδήποτε τῶν δεδομένων, π. χ. εἰς τὴν (3), εὐρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν ὅ τῆς τρίτης ἀγνώστου g λύοντες τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν

$$10 + 18 - 2g = 18,$$

ἥτις δὲν περιέχει εἰμὴ μίαν μόνην ἄγνωστον g .

Καὶ κατὰ τὰς τρεῖς λοιπὸν μεθόδους εὐρομεν, ὡς ἦτο ἐπόμενον, τὸ αὐτὸ σύστημα τιμῶν $x=2$, $y=3$, $g=5$, ὅπερ ταυτοποιεῖ τὸ αὐτὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3).

§1. Ἄν εἶχομεν ἓν σύστημα τεσσάρων πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαριθμίων ἀγνώστων, ἡθέλομεν πρὸς λύσιν αὐτοῦ ἀπαλείψει μεταξὺ τῆς (1) καὶ (2) μίαν ὁποιανδήποτε ἄγνωστον· μεταξὺ μιᾶς τῶν δύο πρώτων καὶ τῆς (3) τὴν αὐτὴν ἄγνωστον· μεταξὺ μιᾶς τῶν τριῶν πρώτων ἐξισώσεων καὶ τῆς (4) τὴν αὐτὴν πάλιν ἄγνωστον, καὶ ἡθέλομεν εὐρεῖ οὕτως ἓν σύστημα τριῶν νέων πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ τὰς

λοιπὰς τρεῖς ἀγνώστους. Λύοντες ὡς προεξεθέσαμεν διὰ τῆς αὐτῆς με-
θόδου τὸ δεύτερον τοῦτο σύστημα, ἠθέλομεν εὑρεῖ ἐν σύστημα τιμῶν
ταῦτοποιοῦσων αὐτό, ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς μίαν ὁποιανδήποτε τῶν
ἀρχικῶς δεδομένων ἐξισώσεων ἀνθ' ἐκάστης τῶν τριῶν ἀγνῶστων τὴν
εὑρεθεῖσαν τιμὴν αὐτῆς, ἠθέλομεν ἔχει μίαν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν πε-
ριέχουσαν μόνον τὴν τετάρτην ἀγνώστον καὶ δίδουσαν ἐπομένως καὶ
τὴν τιμὴν ταύτης.

Ἄν εἴχομεν ἐν σύστημα πέντε πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ πέντε
ἀγνώστους, ἠθέλομεν, ἀπαλείφοντες πρῶτον μεταξὺ μιᾶς ὁποιασδήποτε
τούτων καὶ ἐκάστης τῶν λοιπῶν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἀγνώστον, εὑρεῖ
οὕτως ἐν σύστημα τεσσάρων ἐξισώσεων μὲ τέσσαρας ἀγνώστους, ὕπερ
ἠθέλομεν λύσει ὡς προσέμπομεν, καὶ ἀντικαθιστῶντες ἔπειτα εἰς μίαν
ὁποιανδήποτε τῶν δεδομένων πέντε ἐξισώσεων ἀνθ' ἐκάστης τῶν τεσ-
σάρων ἀγνῶστων τὴν εὑρεθεῖσαν αὐτῆς τιμὴν, ἠθέλομεν ἔχει μίαν πρω-
τοβάθμιον ἐξίσωσιν, ἥτις λυομένη ἤθελε μᾶς δώσει καὶ τὴν τιμὴν τῆς
πέμπτης ἀγνώστου. Καὶ ἐν γένει.

Ἴνα λύσωμεν διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὸν αὐτὸν συν-
τελεσθῇ ἐν σύστημα μὲ πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαριθμῶν
ἀγνῶστων, ἀπαλείφομεν μεταξὺ μιᾶς τούτων καὶ ἐκάστης τῶν λοι-
πῶν τὴν αὐτὴν ἀγνώστον, καὶ οὕτω θέλομεν ἔχει ἐν σύστημα μ — 1
πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετὰ μ — 1 ἀγνῶστων, ἐκτὸς τῆς ἀπαλει-
φθείσης. Ἀπαλείφοντες πάλιν διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου μεταξὺ μιᾶς
τῶν μ — 1 ἐξισώσεων καὶ ἐκάστης τῶν λοιπῶν τὴν αὐτὴν ἀγνώστον,
θέλομεν εὑρεῖ ἐν σύστημα μ — 2 πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετὰ μ — 2
ἀγνῶστων, ἐκτὸς τῆς ἀπαλειφθείσης. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω θέλο-
μεν φθάσει εἰς μίαν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν μὲ μίαν μόνον ἀγνώστον,
ἥτις λυομένη θέλει μᾶς δώσει τὴν ταῦτοποιοῦσαν αὐτὴν τιμὴν τῆς
ἀγνώστου. Ἀντικαθιστῶντες τότε τὴν εὑρεθεῖσαν τῆς ἀγνώστου τι-
μὴν εἰς τὴν μίαν τῶν δύο ἐξισώσεων, ἐξ ὧν ἐπορίσθημεν τὴν τελευ-
ταίαν, θέλομεν ἔχει μίαν πάλιν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν μὲ μίαν
ἀγνώστον. Λύοντες ταύτην ὡς πρὸς τὴν περιεχομένην ἐν αὐτῇ ἀγνώ-
στου, θέλομεν εὑρεῖ καὶ τὴν ταῦτοποιοῦσαν αὐτὴν τιμὴν τῆς ἀγνώ-
στου ταύτης. Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν δύο ἀγνώ-
στων εἰς μίαν τῶν τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἐξ ὧν ἐπορίσθη-
μεν τὰς δύο προτελευταίας, θέλομεν ἔχει πάλιν μίαν πρωτοβάθμιον
ἐξίσωσιν μὲ μίαν μόνον ἀγνώστον. Ἐξ αὐτῆς θέλομεν πορισθῇ τὴν

τιμὴν τῆς τρίτης ἀγνώστου, καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς εὐρεθείσας τιμὰς τῶν τριῶν ἀγνῶστων εἰς μίαν τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων, θέλομεν εὕρει τὴν τιμὴν τῆς τετάρτης ἀγνῶστου, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν οὕτως εἰς μίαν τῶν μ ἐξισώσεων, ἐν ᾗ ἀντικαθιστῶντες τὰς εὐρεθείσας τιμὰς τῶν $\mu - 1$ ἀγνῶστων εὐρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τῆς τελευταίας ἀγνῶστου, ἀφ' ἧς ἠρξάμεθα τὴν ἀπάλειψιν.

Παρατήρησις 4. — Πρὶν ἢ ἀποδείξωμεν γενικῶς τὸ ἀληθὲς ἐκάστης τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθεισῶν τριῶν μεθόδων, παρατηροῦμεν εὐκόλως ὅτι οὐδεμία τούτων φαίνεται δυναμένη νὰ ἐφαρμοσθῇ, ἂν ἐκάστη τῶν πρὸς λύσιν δεδομένων πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων δὲν περιέχῃ τύσας ἀγνώστους, ὅσοι εἶναι ὁ ἀποτελὼν τὸ σύστημα αὐτῶν ἀριθμός· διότι τότε δὲν θέλει εἶναι δυνατόν οὔτε ἐκάστην τῶν δεδομένων ἐξισώσεων νὰ λύσωμεν ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν ἀγνώστον, οὔτε μεταξὺ μιᾶς τούτων καὶ ἐκάστης τῶν λοιπῶν νὰ ἀπαλείψωμεν τὴν αὐτὴν ἀγνώστον, καὶ τοῦτο εἴτε ἀμέσως ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν ὑπολογισμῶν ἡμῶν, εἴτε ἐν τῷ μεταξὺ. Ἀλλὰ τὸ ἀδύνατον τοῦτο εἶναι μόνον φαινόμενον· διότι, ἐπειδὴ κύριος σκοπὸς ἐκάστης τῶν ἐν χρήσει μεθόδων εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν δεδομένων ἐξισώσεων διαδοχικὴ ἀπάλειψις τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνῶστων, ἔπεται ὅτι, ὅταν αἱ πρὸς λύσιν δεδομέναι δὲν περιέχουσιν ἐκάστη τύσας ἀγνώστους, ὅσοι εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν, θέλομεν ἔχει τότε πρὸς λύσιν ἐξισώσεις μὴ περιεχούσας ἤδη τινὰς τῶν πρὸς ἀπάλειψιν ἀγνῶστων, τουτέστιν ἀπλουστέρας, εὐρισκομένας δηλ. πλησιέστερον τοῦ σκοποῦ, πρὸς ὃν διὰ τῆς ἀπαλείψεως τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνῶστων τεινομεν, ἐπομένως λυομένας ταχύτερον καὶ εὐκολώτερον, φθάνει μόνον νὰ διευθύνωμεν καλῶς τοὺς πρὸς τοῦτο ὑπολογισμοὺς ἡμῶν. Ὡς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς σύστημα τῶν 5 ἐξισώσεων μὲ 5 ἀγνώστους x, y, ω, φ, v , αἵτινες δὲν περιέχονται πᾶσαι εἰς ἐκάστην τούτων

$$2x - 3y + 4\varphi - v = -5 \quad (1),$$

$$3x - 2\omega - 3\varphi = 0 \quad (2),$$

$$5y - \omega + 4\varphi = 3 \quad (3),$$

$$7\omega - 3v = 30 \quad (4),$$

$$v + 5\omega - \varphi = 13 \quad (5).$$

Ἀπαλείφοντες μεταξὺ τῆς (1) καὶ τῆς (3) τὴν y , θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς 6^η ἐξίσωσιν

$$10x + 32\varphi - 5v - 3\omega = -16 \quad (6).$$

Ἀπαλείφοντες δὲ μεταξὺ τῆς (2) καὶ (6) τὴν χ , θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς 7^ην ἐξίσωσιν

$$126\varphi - 15v + 11\omega = -48 \quad (7).$$

Ἐὰν δὲ μεταξὺ τῆς (5) καὶ (7) ἀπαλείψωμεν τὴν φ , θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς 8^ην ἐξίσωσιν

$$111v + 644\omega = 4590 \quad (8).$$

Ἀπαλείφοντος τέλος μεταξὺ τῆς (4) καὶ (8) μίαν τῶν ἐν αὐταῖς δύο ἀγνώστων, π. χ. τὴν v , θέλομεν εὑρεῖ μίαν ἐξίσωσιν μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον ω , ἥς ἡ τιμὴ εὐρίσκεται οὕσα 3. Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν 3 τῆς ω εἰς τὴν (4), θέλομεν εὑρεῖ $v = -3$. Ἀντικαθιστῶντες πάλιν τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν v καὶ ω εἰς τὴν (5), θέλομεν εὑρεῖ $\varphi = -1$. Ὁμοιοτρόπως ἡ ἐξίσωσις (3) θέλει μᾶς δώσει τὴν τιμὴν 2 τῆς ψ καὶ ἡ (2) τὴν τιμὴν 1 τῆς χ , καὶ οὕτω θέλομεν εὑρεῖ τὸ ἐξῆς σύστημα τιμῶν

$$\chi = 1, \psi = 2, \omega = 3, \varphi = -1, v = -3,$$

ὅπερ ταῦτοποιοεῖ τὸ δεδομένον σύστημα τῶν ἀνωτέρω 5 πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἐκάστη τῶν ὁποίων δὲν εἶναι πλήρης, αἱ δὲ πρὸς τοῦτο γενόμεναι ἀπαλείψεις εἶναι πολὺ ὀλιγώτεραι τὸν ἀριθμὸν ἐκείνων, ἃς ἠθέλομεν ἐκτελέσει, ἂν τὸ δεδομένον σύστημα τῶν 5 ἐξισώσεων ἦτο πλήρες. Διότι τότε, ἵνα φθάσωμεν εἰς μίαν ἐξίσωσιν μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον, ἠθέλομεν ἐκτελέσει κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα πρῶτον 4 ἀπαλείψεις μεταξὺ τῶν δεδομένων 5 ἐξισώσεων, ἔπειτα 3 ἀπαλείψεις μεταξὺ τῶν εὑρεθησομένων 4 ἐξισώσεων, ἀκολούθως 2 ἀπαλείψεις μεταξὺ τῶν εὑρεθησομένων 3 ἐξισώσεων, καὶ τελευταῖον 1 ἀπαλείψιν μεταξὺ τῶν εὑρεθησομένων 2 τελευταίων, ἐν συνόλῳ 10 διαφοροὺς ἀπαλείψεις· ἐνῷ διὰ τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω συστήματος, εἰς ὃ ὁ γενικὸς κανὼν δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ, ἐξετελέσαμεν διὰ τῆς καταλλήλου διευθύνσεως τῶν ὑπολογισμῶν ἡμῶν μόνον 4 ἀπαλείψεις, ἡ δὲ ἐντεῦθεν προκύπτουσα ἀπλοποίησις εἶναι προφανῶς σημαντικωτάτη. Τούτου δ' ἕνεκα δίδομεν περὶ τῆς περιπτώσεως ταύτης τὰς ἀναγκαίας ὁδηγίας ἐπὶ πολλῶν καὶ διαφόρων παραδειγμάτων εἰς τὸ Δεύτερον Μέρος τῆς παρούσης συγγραφῆς.

Παρατήρησις 2. — Ὅταν διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὸν αὐτὸν συντελεστὴν ἀπαλείψωμεν μίαν ἄγνωστον μεταξὺ δύο δεδομένων πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, δὲν εἶναι πάντοτε ἀναγκαῖον νὰ πολλαπλα-

σιάζωμεν τὰ δύο μέλη ἐκατέρας τούτων ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τῆς ἀπαλειπτέας ἀγνώστου, τὸν ἐν τῇ ἐτέρᾳ, εἰμὴ ὅταν οὗτοι ᾖναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ὅταν ἔχῃ ἄλλως τὸ πρᾶγμα, τότε οἱ πρὸς ἀπαλειψίν τῶν ἀγνώστων ὑπολογισμοὶ ἀπλοποιοῦνται, διότι τότε ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη ἐκατέρας τούτων ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν συντελεστῶν τῆς ἀπαλειπτέας ἀγνώστου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τῆς πολλαπλασιαζομένης ἐξισώσεως, καὶ θέλομεν ἔχει σύστημα ἰσοδυνάμων ἐξισώσεων, ὧν οἱ συντελεσταὶ τῆς ἀπαλειπτέας ἀγνώστου θέλουσιν εἶναι ἴσοι καὶ οἱ ἐλάχιστοι πάντων τῶν δυνατῶν ἴσων. Παραδείγματός χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ ἀπαλείψωμεν τὴν y μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων

$$45x - 8y = 22 \quad (1),$$

$$-13x + 12y = -14 \quad (2),$$

ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 12 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 8, ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ 8 καὶ 12 δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλασίον αὐτῶν εἶναι 24, βλέπομεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 3, ἐπὶ τὸ πηλίκον δηλ. τῆς διαιρέσεως τοῦ 24 διὰ 8, καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 2, ἐπὶ τὸ πηλίκον δηλ. τῆς διαιρέσεως τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου 24 διὰ 12, καὶ ὅτι τότε θέλομεν πορισθῇ τὰς ἰσοδυνάμους ἐξισώσεις

$$45x - 24y = 66 \quad (3),$$

$$-26x + 24y = -28 \quad (4),$$

ὧν οἱ συντελεσταὶ τῆς y εἶναι ἴσοι καὶ οἱ ἐλάχιστοι πάντων τῶν δυνατῶν ἴσων. Οὕτως οἱ ὑπολογισμοὶ ἀπλοποιοῦνται πολλὰκις λίαν ἐπαισθητῶς καὶ δὲν πρέπει οὐδέποτε νὰ παραλείπωμεν τὴν ἀπλοποίησιν ταύτην.

Παρατήρησις 3. — Ὑπάρχει καὶ ἐτέρα δυνατὴ τῶν ὑπολογισμῶν ἀπλοποιήσις, ἂν ἐπίσης δὲν πρέπει νὰ παραλείπωμεν, ὅταν ἔχωμεν νὰ λύσωμεν σύστημά τι ὁσωνδήποτε πρωτοβάθμιων ἐξισώσεων μετ' ἰσαριθμῶν ἀγνώστων καὶ ἐφαρμόζωμεν τὸν ἀνωτέρω δοθέντα γενικὸν τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὸν αὐτὸν συντελεστὴν κανόνα, δι' οὗ δὲν ὀρίζεται ποία τῶν ἐν ταῖς δεδομέναις ἐξισώσεσιν ἀγνώστων πρέπει νὰ προτιμᾶται τῶν ἄλλων, ἐνῶ τοῦτο δὲν εἶναι ἀδιάφορον, καθόσον, ἐννοεῖται οἰκοθεν, λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν μόνον ἡ συντόμευσις καὶ ἀπλοποίησις τῶν ἐκτελουμένων ὑπολογισμῶν καὶ τῶν εὐρισκομένων ἐξαγαγμένων. Ἡ ἀπλοποίησις

αὕτη συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἀρχώμεθα τῆς ἀπαλείψεως ἀπ' ἐκείνης τῆς ἀγνώστου καὶ νὰ συνδυάζωμεν ἀνὰ δύο οὕτω τὰς δεδομένας ἐξισώσεις, ὥστε καὶ ταχύτερον ἢ ἀπάλειψις αὐτῆς νὰ ἐκτελῇται καὶ αἱ προκύπτουσαι ἐξισώσεις νὰ ᾔναι ἀπλούστεραι. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς σύστημα τῶν 4 πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων

$$5x - 3y + 4\omega - 2\varphi = 4 \quad (1),$$

$$7x + 2y - 5\omega + 3\varphi = 11 \quad (2),$$

$$3x - y - 2\omega + 2\varphi = 5 \quad (3),$$

$$4x + 3y - 7\omega + 4\varphi = 9 \quad (4),$$

δὲν πρέπει νὰ ἀρχίσωμεν ἀπαλείφοντες μεταξὺ αὐτῶν τὴν ἀγνώστον x ἢ ω · διότι, ἂν καὶ τοῦτο εἴναι ὅλως ἀδιάφορον ὡς πρὸς τὸ ἀκριβὲς τῶν εὐρεθησομένων τιμῶν τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων, καὶ οἱ πρὸς εὐρεσιν τῶν ἐκ τῆς ἀπαλείψεως προκυψουσῶν 3 ἐξισώσεων γενόμενοι ὑπολογισμοὶ θέλουσιν εἶναι διεξοδικώτεροι καὶ τὸ προκύψον σύστημα θέλει ἔχει τὰς ἐν αὐτῷ ἀγνώστους μὲ πολὺ μεγαλειτέρους συντελεστάς, τοῦθ' ὅπερ θέλει μᾶς παρέξει μεγαλειτέραν δυσκολίαν εἰς τὴν ἀπάλειψιν τῶν λοιπῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων, καὶ οὕτω καθεξῆς. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀρχίσωμεν ἀπαλείφοντες κατὰ προτίμησιν τὴν ἀγνώστον φ , ἢ προτιμότερον τὴν ἀγνώστον y , συνδυάζοντες οὕτως ἀνὰ δύο ταύταξ, ὥστε αἱ πρὸς ἀπάλειψιν τῆς y γενόμεναι πράξεις νὰ ᾔναι ὅσῳ τὸ δυνατόν συντομώτεραι. Ἐνταῦθα πρέπει προφανῶς νὰ συνδυάζωμεν πρὸς τοῦτο τὴν (1) μετὰ τῆς (4), τὴν (3) μετὰ τῆς (4) καὶ τὴν (2) μετὰ τῆς (3).

Εἰς τὸ ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀπαλείψεως προκύψον σύστημα τῶν 3 ἐξισώσεων θέλομεν ἐφαρμόσει τὰς αὐτὰς παρατηρήσεις, μέχρις οὗ φθάσωμεν οὕτως εἰς τὴν τελικὴν μὲ μίαν μόνην ἀγνώστον πρωτοβάθμιον ἐξισώσιν, ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ τὴν τιμὴν αὐτῆς τῆς ἀγνώστου καὶ διὰ τῶν καταλλήλων ἀντικαταστάσεων τὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ, ΕΦ' ΩΝ ΣΤΗΡΙΖΕΤΑΙ ΕΚΑΣΤΗ ΤΩΝ ΠΡΟΕΚΤΕΘΕΙΣΩΝ
ΜΕΘΟΔΩΝ. — ΔΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΙΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΦ' ΩΝ Κ.Τ.Λ.

52. ΘΕΩΡΗΜΑ 1. — Δοθέντος συστήματος τριος δύο πρωτοβαθμίων εξισώσεων με δύο άγνωστους, δυνατόν εστί να αντικαταστήσωμεν τὴν μίαν τούτων διὰ τῆς εξισώσεως, ἣν θέλομεν εὑρεῖ λόγοντες ἐκατέραν τούτων ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν ἄγνωστον καὶ ἐξισοῦντες τὰς οὕτως εὐρεθησομένας τιμὰς αὐτῆς, θέλομεν δὲ ἔχει οὕτω δεύτερον σύστημα ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ.

Ἄς παραστήσωμεν γενικῶς τὸ δεδομένον σύστημα (α) διὰ τῶν εξισώσεων

$$\begin{array}{l} A = A' \\ B = B' \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\} (\alpha)$$

Ἐὰν λύσωμεν ἐκατέραν τούτων ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον x , θέλομεν εὑρεῖ

$$x = A_1, \quad x = B_1,$$

λέγω δὲ ὅτι ἡ ἑτέρα τῶν δεδομένων εξισώσεων (1) καὶ (2), π. χ. ἡ (1), μετὰ τῆς εξισώσεως $A_1 = B_1$, ἣν πορίζομεθα ἐξισοῦντες τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἀνωτέρω εὐρεθεισῶν τιμῶν τῆς x , θέλει ἀποτελεῖ σύστημά τι

$$\begin{array}{l} A = A' \quad \text{ἢ} \quad x = A_1 \\ A_1 = B_1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array} \right\} (\beta)$$

(β) ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ (α).

Πρὸς ἀποδείξιν τούτου ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι, ὅταν ταῦτοποιῇται τὸ σύστημα (α), θέλει ταῦτοποιεῖσθαι καὶ τὸ σύστημα (β), καὶ ἀντιστρόφως· ὅταν ταῦτοποιῇται τὸ σύστημα (β), θέλει ταῦτοποιεῖσθαι καὶ τὸ σύστημα (α).

1^{ον}. Ὅτι τὸ σύστημα (β) εἶναι συνέπεια τοῦ συστήματος (α), τοῦτο εἶναι προφανές, διότι ἡ μὲν εξίσωσις (3) τοῦ συστήματος (β) εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ (1) τοῦ συστήματος (α), ἡ δὲ εξίσωσις (4) τοῦ αὐτοῦ συστήματος (β) προκύπτει ἐκ τῆς εξισώσεως τῶν δευτέρων μελῶν τῶν ἐκ τῶν

ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὐρεθεισῶν τιμῶν τῆς χ , αἵτινες πρέπει ἀναγκαιῶς νὰ ᾔναι αἱ αὐταί.

2^{ον}. Ὅταν ἐν σύστημα τιμῶν τῆς χ καὶ ψ ταῦτοποιῇ τὸ σύστημα (6), τὸ αὐτὸ σύστημα τιμῶν θέλει ἀναγκαίως ταῦτοποιεῖ καὶ τὸ σύστημα (α). Διότι ἡ μὲν ἐξίσωσις (3) τοῦ συστήματος (6) εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ ἐξίσώσει (1) τοῦ συστήματος (α), ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἐξίσώσει (4) ἀντὶ τοῦ A_1 ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἴσον αὐτῷ χ , αὕτη γίνεται $\chi = B_1$, τουτέστιν αὐτὴ ἡ ἐξίσωσις (2) λυθεῖσα ὡς πρὸς τὴν χ . Τὸ σύστημα λοιπὸν (α) εἶναι συνέπεια τοῦ συστήματος (6), ὅπως καὶ τὸ σύστημα (6) εἶναι συνέπεια τοῦ συστήματος (α). Ἄρα τὰ συστήματα (α) καὶ (6) εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀλλὰ ἡ ἐξίσωσις (4) τοῦ συστήματος (6), καθ' ὃν ἐπορίσθημεν αὐτὴν τρόπον, περιέχει μόνον τὴν ἄγνωστον ψ . Λοιπὸν λύοντες ταύτην ὡς πρὸς τὴν ψ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν εὐρεθησομένην αὐτῆς τιμὴν εἰς τὴν (3), θέλομεν ἔχει τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς χ , τουτέστιν ἐν σύστημα τιμῶν, ταῦτοποιουσῶν τὸ σύστημα (6). Ἄρα αἱ αὐταί τιμαὶ θέλουσι ταῦτοποιεῖ καὶ τὸ σύστημα (α), ὅπερ εὐρίσκεται οὕτω λυόμενον διὰ τῆς μεθόδου τῆς συγκρίσεως.

Ἐστω πρὸς τούτοις τὸ σύστημα (α) τῶν τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων

$$\begin{array}{l} A = A' \\ B = B' \\ \Gamma = \Gamma' \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \right\} (\alpha)$$

Ἐὰν λύσωμεν ἑκατέραν τῶν δύο πρώτων ὡς πρὸς τὴν χ , καὶ ἐξισώσωμεν τὰς εὐρεθησομένας τιμὰς αὐτῆς A_1 καὶ B_1 , θέλομεν ἔχει τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων

$$\begin{array}{l} \chi = A_1, \\ A_1 = B_1, \end{array}$$

ὅπερ ἀπεδείξαμεν ἀνωτέρω ἰσοδύναμον τῷ συστήματι

$$\begin{array}{l} A = A', \\ B = B'. \end{array}$$

Ἐπομένως, ἐὰν μετὰ τῶν δύο πρώτων συνδυάσωμεν τὴν αὐτὴν τρίτην $\Gamma = \Gamma'$, τὸ προκύπτον σύστημα

$$\begin{array}{l} \chi = A_1, \\ A_1 = B_1, \\ \Gamma = \Gamma' \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} (4) \\ (5) \\ (6) \end{array} \right\} (\beta)$$

(6) θέλει εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμον τῷ συστήματι (α).

Ἄλλ' εἰς τὴν ἐξίσωσιν (6) ὅπου χ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ ἴσον αὐτῇ A_1 , ἢ, ὅπερ ταυτὸ, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\Gamma = \Gamma'$, ὡς πρὸς τὴν χ καὶ ἀντὶ τῆς χ νὰ θέσωμεν ἐν αὐτῇ A_1 , ἡ δὲ προκύπτουσα ἐξίσωσις $A_1 = \Gamma_1$, συνδυαζομένη μετὰ τῆς (4) καὶ (5) θέλει ἀποτελεῖ τὸ αὐτὸ σύστημα (6)

$$\begin{array}{l} \chi = A_1 \\ A_1 = B_1 \\ A_1 = \Gamma_1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} (4) \\ (5) \\ (6) \end{array} \right\} (6)$$

ὅπερ ἀπεδείχθη ἰσοδύναμον τῷ (α) καὶ ἐν ᾧ αἱ ἐξισώσεις (5) καὶ (6) δὲν θέλουσι περιέχει τὴν ἄγνωστον χ .

Λύοντες τώρα ἑκατέραν τῶν ἐξισώσεων (5) καὶ (6) ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον ψ , καὶ ἐξισοῦντες τὰς εὑρεθησομένης τιμὰς αὐτῆς B_2 καὶ Γ_2 , θέλομεν ἔχει τὸ σύστημα

$$\begin{array}{l} \psi = B_2 \\ B_2 = \Gamma_2 \end{array}$$

ὅπερ θέλει εἶναι κατὰ τὰ προαποδείχθέντα ἰσοδύναμον τῷ $A_1 = B_1$ καὶ $A_1 = \Gamma_1$ καὶ ἐπομένως τὸ σύστημα

$$\begin{array}{l} \chi = A_1 \\ \psi = B_2 \\ B_2 = \Gamma_2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} (4) \\ (7) \\ (8) \end{array} \right\} (\gamma)$$

(γ) θέλει εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμον τῷ (6), ὅπερ ἀπεδείχθη ἰσοδύναμον τῷ (α). Ἄλλ' ἡ μὲν ἐξίσωσις $B_2 = \Gamma_2$ περιέχει μόνον τὴν τρίτην ἄγνωστον ω , ἡ δὲ ἐξίσωσις $\psi = B_2$, θέλει μᾶς δώσει τὴν τιμὴν τῆς ψ , τιθεμένης ἐν αὐτῇ ἀντὶ τῆς ω τῆς ἐκ τῆς ἐξισώσεως (8) εὑρεθησομένης τιμῆς αὐτῆς, καὶ ἡ ἐξίσωσις (4) τὴν τιμὴν τῆς χ , τιθεμένων ἐν τῇ παραστάσει A_1 ἀντὶ τῆς ψ καὶ ω τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν αὐτῶν. Οὕτω λοιπὸν τὸ σύστημα (γ) θέλει εὑρεθῇ ταῦτοποιούμενον, ἐπομένως καὶ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ σύστημα (α).

Ἄν εἶχμεν ἐν σύστημα 4 ἐξισώσεων, διὰ τῶν αὐτῶν συλλογισμῶν ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι, ὅπως λύομεν αὐτὸ διὰ τῆς μεθόδου τῆς συγκρίσεως, ταῦτοποιούμεν πάντοτε ἐν σύστημα ἐξισώσεων ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ, ἐπομένως λύομεν αὐτὸ τὸ δεδομένον. Ἡ μέθοδος λοιπὸν τῆς συγκρίσεως εἶναι ἀκριβὴς καὶ γενικὴ.

53. ΘΕΩΡΗΜΑ 2. — Ἐὰν ἐν τινι συστήματι ὁπωρδήποτε ἐξισώσεων λύσωμεν τὴν μίαν τούτων ὡς πρὸς τινα τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων,

καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰς λοιπὰς ἐξισώσεις ἀντὶ τῆς ἀγνώστου ταύτης τὴν εὐρεθησομένην ἴσην αὐτῇ παράστασιν, θέλομεν ἔχει νέας ἐξισώσεις, μὴ περιεχοῦσας τὴν ἀντικατασταθεῖσαν ἀγνώστην, καὶ αἰτίαι μετὰ τῆς λυθείσης ἐξισώσεως θέλουσιν ἀποτελεῖ ἐν σύστημα ἐξισώσεων ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς σύστημα τῶν τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, περιεχουσῶν τὰς τρεῖς ἀγνώστους x, y, ω .

$$\begin{array}{lcl} A=A' & (1) \\ B=B' & (2) \\ \Gamma=\Gamma' & (3) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} A=A' \\ B=B' \\ \Gamma=\Gamma' \end{array}} \right\} (\alpha)$$

Ἐάν λύσωμεν τὴν μίαν τούτων, π. χ. τὴν (1), ὡς πρὸς τινὰ τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων, π. χ. ὡς τὴν x , καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰς λοιπὰς (2) καὶ (3) ἀντὶ τῆς x , τὴν εὐρεθησομένην ἴσην αὐτῇ παράστασιν A_1 , λέγω ὅτι αἱ εὐρεθησόμεναι νέαι ἐξισώσεις $B_1=B'_1$, $\Gamma_1=\Gamma'_1$ μετὰ τῆς λυθείσης $x=A_1$ θέλουσιν ἀποτελεῖ τὸ ἐξῆς σύστημα

$$\begin{array}{lcl} x=A_1 & (4) \\ B_1=B'_1 & (5) \\ \Gamma_1=\Gamma'_1 & (6) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x=A_1 \\ B_1=B'_1 \\ \Gamma_1=\Gamma'_1 \end{array}} \right\} (\beta)$$

(β), ὅπερ θέλει εἶναι ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ (α).

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ προφανῶς νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι, καθὼς ταυτοποιουμένου τοῦ συστήματος (α), ταυτοποιεῖται ἀναγκαίως καὶ τὸ σύστημα (β), καθὼς συνέπεια τοῦ (α), οὕτω καί, ταυτοποιουμένου τοῦ συστήματος (β), ταυτοποιεῖται ἀναγκαίως καὶ τὸ σύστημα (α). Καὶ τῷ ὄντι, ὅταν ταυτοποιῇται τὸ σύστημα (β), ἐπειδὴ τότε x καὶ A_1 εἶναι ταῦτά, ἔπεται ὅτι δυνάμεθα εἰς τὰς ἐξισώσεις (5) καὶ (6) νὰ θέσωμεν x ἀντὶ τοῦ A_1 χωρὶς τὸ σύστημα (β) νὰ μεταβληθῇ. Ἀλλὰ τότε ἡ (5) καθίσταται ὅ,τι ἦτο προηγουμένως, ἦτοι $B=B'$, καὶ ἡ (6) ὅ,τι ἦτο ἐν τῷ συστήματι (α), ἦτοι $\Gamma=\Gamma'$, ἡ δὲ (4) εἶναι αὐτὴ ἡ (1) λυθεῖσα ὡς πρὸς τὴν x . Ἄρα τὸ σύστημα (α) εἶναι συνέπεια τοῦ συστήματος (β), ὅπως καὶ τὸ δεύτερον εἶναι συνέπεια τοῦ (α). Τὰ δύο λοιπὸν συστήματα (α) καὶ (β) εἶναι ἰσοδύναμα, διαφέρει δὲ τὸ (β) τοῦ (α) κατὰ τοῦτο, ὅτι αἱ ἐν αὐτῷ ἐξισώσεις (5) καὶ (6) δὲν περιέχουσι τὴν ἀγνώστην x .

Ἐάν δὲ πάλιν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (5) ὡς πρὸς τὴν y καὶ τὴν εὐ-

ρεθησομένην ἴσιν αὐτῇ παράστασιν B_2 ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (6), τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων

$$\psi = B_2 \quad (7)$$

$$\Gamma_2 = \Gamma'_2 \quad (8)$$

θέλει εἶναι κατὰ τὰ προαποδείχθέντα ἰσοδύναμον τῷ συστήματι

$$B = B'_1 \quad (5)$$

$$\Gamma_1 = \Gamma'_1 \quad (6)$$

ἐπομένως, ἐὰν εἰς ἑκάτερον τούτων τῶν συστημάτων συμπεριλάβωμεν τὴν αὐτὴν τρίτην ἐξίσωσιν $\chi = A_1$, τὰ δύο προκύπτοντα συστήματα

$$\left. \begin{array}{l} \chi = A_1 \quad (4) \\ B_1 = B'_1 \quad (5) \\ \Gamma_1 = \Gamma'_1 \quad (6) \end{array} \right\} (6) \quad \left. \begin{array}{l} \chi = A_1 \quad (4) \\ \psi = B_2 \quad (7) \\ \Gamma_2 = \Gamma'_2 \quad (8) \end{array} \right\} (\gamma)$$

(6) καὶ (γ) θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς ἄλληλα, καὶ ἐπομένως, ἐπειδὴ τὸ (6) ἀπεδείχθη ἰσοδύναμον τῷ (α), ἔπεται ὅτι καὶ τὸ (γ) θέλει εἶναι ἰσοδύναμον τῷ (α). Ἀλλὰ ἐν τῷ συστήματι (γ), ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (8) δὲν περιέχει, εἰμὴ μόνον τὴν ἄγνωστον ω , δυνάμεθα ἐκ ταύτης νὰ πορισθῶμεν τὴν ταυτοποιοῦσαν αὐτὴν τιμὴν τῆς ω , ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὴν (7) ἀντὶ τῆς ω τὴν ἐκ τῆς (8) εὑρεθείσαν αὐτῆς τιμὴν, θέλομεν ἔχει τὴν ταυτοποιοῦσαν αὐτὴν τιμὴν τῆς ψ , καὶ ἀντικαθιστῶντες τέλος εἰς τὴν (4) ἀντὶ τῆς ψ καὶ ω τὰς εὑρεθείσας αὐτῶν τιμὰς, θέλομεν ἔχει τὴν ταυτοποιοῦσαν αὐτὴν τιμὴν τῆς χ . Αἱ εὑρεθεῖσαι λοιπὸν τιμαὶ τῆς χ , ψ , ω , αἱ ταυτοποιοῦσαι τὸ σύστημα (γ), θέλουσι ταυτοποιεῖ ἀναγκαίως καὶ τὸ σύστημα (α). Ὅπως λοιπὸν λύομεν διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως σύστημά τι ἐξισώσεων, ταυτοποιοῦμεν πάντοτε ἑτερόν τι σύστημα ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ, ἐξ ὧσαν δὴποτε ἐξισώσεων καὶ ἂν σύγκηται τοῦτο.

54. ΘΕΩΡΗΜΑ 3. — Ἐὰν ἐν τινι συστήματι δύο ἐξισώσεων πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη μιᾶς τούτων ἐπὶ τινὰ ποσότητα μ , καὶ προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὴν προκύπτουσαν μετὰ τῆς ἐτέρας, θέλομεν ἔχει νέαν τινὰ ἐξίσωσιν, ἥτις μετὰ μιᾶς τῶν δεδομένων θέλει ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ.

Ἐστω π . χ . τὸ ἐξῆς σύστημα τῶν δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, τῶν περιεχουσῶν τὰς δύο ἄγνωστους χ καὶ ψ

$$\left. \begin{array}{l} A = A' \\ B = B' \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad (\alpha)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη μιᾶς τούτων, π . χ . τῆς (2),

ἐπὶ τина ποσότητα μ , καὶ προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν $B\mu = B'\mu$ μετὰ τῆς πρώτης, λέγω ὅτι ἡ προκύπτουσα νέα ἐξίσωσις $A + B\mu = A' + B'\mu$ μετὰ μιᾶς τῶν δύο πρώτων, π. χ. μετὰ τῆς (1), θέλει ἀποτελεῖ ἕτερον σύστημα

$$\begin{array}{l} A = A' \\ A + B\mu = A' + B'\mu \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (3) \end{array} \quad \begin{array}{l} (4) \\ (5) \end{array}$$

(6), ὅπερ θέλει εἶναι ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ (α).

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ προφανῶς νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι καθὼς τὸ σύστημα (6) εἶναι συνέπεια τοῦ (α), οὕτω καὶ τὸ σύστημα (α) δύναται νὰ θεωρηθῇ συνέπεια τοῦ (6). Καὶ τῷ ὄντι, ὅταν τὸ σύστημα (6) ταῦτοποιηται, ἐπειδὴ τότε A καὶ A' εἶναι τὰ αὐτά, δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτὰ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως (3), ἥτις τότε καθίσταται $B\mu = B'\mu$ ἢ $B = B'$, διαιρουμένων τῶν δύο αὐτῆς μελῶν διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος μ . Ἔπεται λοιπὸν ὅτι, ὅταν ταῦτοποιῶνται αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (3) τοῦ συστήματος (6), θέλουσι ταῦτοποιεῖσθαι καὶ αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) τοῦ συστήματος (α). Ἀρα τὰ συστήματα (α) καὶ (6) εἶναι ἰσοδύναμα.

Τούτου δὲ τεθέντος, ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ποσότητα μ οὕτως, ὥστε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις (3) νὰ μὴ περιέχῃ εἰμὴ μίαν μόνον ἀγνώστον, ἔπεται ὅτι τότε ἡ τιμὴ αὐτῆς τῆς ἀγνώστου, ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) πορίζομένη, μετὰ τῆς τιμῆς τῆς ἄλλης, τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (1) παρεχομένης, θέλουσιν ἀποτελεῖ ἐν σύστημα τιμῶν, ταῦτοποιουσῶν τὸ σύστημα (6) τῶν ἐξισώσεων, ἐπομένως καὶ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ σύστημα (α).

Ὅτι δὲ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ μ οὕτως, ὥστε ἡ ἐξίσωσις (3) νὰ μὴ περιέχῃ εἰμὴ μίαν μόνον ἀγνώστον, ἃς ὑποθέσωμεν, ἵνα καταστῶμεν ἀμέσως καταληπτοί, ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς σύστημα

$$\begin{array}{l} 3x - 5y = 4 \\ 7x + 4y = 25 \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad (x)$$

τῶν δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους x καὶ y . Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ $\frac{5}{4}$ καὶ προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν $7\frac{5}{4}x + 4\frac{5}{4}y = 25\frac{5}{4}$ μετὰ τῆς πρώτης, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$3x - 5y + 7\frac{5}{4}x + 4\frac{5}{4}y = 4 + 25\frac{5}{4}$$

ἥτις δὲν θέλει περιέχει τὴν ἄγνωστον ψ , διότι οἱ συντελεσταὶ αὐτῆς εἶναι ἴσοι καὶ ἔχουσιν ἐναντία σημεῖα.

Ἄν εἰχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους χ , ψ , ω ,

$$\begin{aligned} A &= A', \\ B &= B', \\ \Gamma &= \Gamma', \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} (1) \\ (2) \\ (3) \end{aligned} \right\} (z)$$

ἐπειδὴ ἀπεδείχθη ὅτι τὰ δύο συστήματα

$$\begin{aligned} A &= A' & (1) \\ B &= B' & (2) \end{aligned} \left\} (z') \quad \begin{aligned} A &= A' \\ A + B\mu &= A' + B'\mu \end{aligned} \left. \begin{aligned} (1) \\ (4) \end{aligned} \right\} (z')$$

(z') καὶ (z') εἶναι ἰσοδύναμα, ἔπεται ὅτι καὶ τὰ δύο συστήματα

$$\begin{aligned} A &= A' & (1) \\ B &= B' & (2) \\ \Gamma &= \Gamma' & (3) \end{aligned} \left\} (z) \quad \begin{aligned} A &= A' \\ A + B\mu &= A' + B'\mu \\ \Gamma &= \Gamma' \end{aligned} \left. \begin{aligned} (1) \\ (4) \\ (3) \end{aligned} \right\} (z)$$

(z) καὶ (z), ἅτινα πορίζομεθα ἐκ τῶν συστημάτων (z') καὶ (z') συμπεριλαμβάνοντες ἐν ἑκατέρῳ τούτων τὴν αὐτὴν τρίτην ἐξίσωσιν $\Gamma = \Gamma'$, θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἄλλ' ἐπειδὴ πάλιν τὰ δύο συστήματα

$$\begin{aligned} A &= A' & (1) \\ \Gamma &= \Gamma' & (3) \end{aligned} \left\} (z'') \quad \begin{aligned} A &= A' \\ A + \Gamma r &= A' + \Gamma' r \end{aligned} \left. \begin{aligned} (1) \\ (5) \end{aligned} \right\} (z'')$$

(z'') καὶ (z'') εἶναι ἰσοδύναμα, ἔπεται ὅτι καὶ τὰ δύο συστήματα

$$\begin{aligned} A &= A' & (1) \\ A + B\mu &= A' + B'\mu & (4) \\ \Gamma &= \Gamma' & (3) \end{aligned} \left\} (z) \quad \begin{aligned} A &= A' \\ A + \Gamma r &= A' + \Gamma' r \\ A + B\mu &= A' + B'\mu \end{aligned} \left. \begin{aligned} (1) \\ (5) \\ (4) \end{aligned} \right\} (z)$$

(z) καὶ (z), ἅτινα πορίζομεθα ἐκ τῶν συστημάτων (z'') καὶ (z'') συμπεριλαμβάνοντες ἐν ἑκατέρῳ τούτων τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν $A + B\mu = A' + B'\mu$, θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμα. Ἀλλὰ θυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν, ὡς ἀπεδείξαμεν ἀνωτέρω τὰς ποσότητας μ καὶ r οὕτως, ὥστε αἱ ἐξισώσεις (4) καὶ (5) νὰ μὴ περιέχωσιν, εἰ μὴ δύο μόνον ἀγνώστους. Ἄρα λύοντες ταύτας ὡς πρὸς τὰς ἐν αὐταῖς ἀγνώστους, ὡς προσέπομεν, καὶ ἀντικαθιστώντες τὰς εὑρεθησομένης τιμὰς αὐτῶν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $A = A'$, θέλομεν εὑρεῖ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνῶστων χ , ψ καὶ ω , τὰς ταῦτοποιούσας τὸ σύστημα (z). Ἄρα, ἐπειδὴ τὸ σύστημα (z) εἶναι ἰσοδύναμον τῷ (z), τοῦτο δὲ ἰσοδύναμον τῷ (z), αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνῶστων θέλουσι ταῦτοποιεῖ καὶ τὸ ἀρχικῶς δεδομένον σύστημα (z).

Δι' ὁμοίων συλλογισμῶν ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι, ὅπως λύομεν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὸν αὐτὸν συντελεστὴν ἐν σύστημα τέσσάρων ἢ πλειοτέρων ἐξισώσεων μετ' ἰσαριθμῶν ἀγνώστων, αὐτοποιοῦμεν πάντοτε σύστημα τι τέσσάρων ἢ πλειοτέρων ἐξισώσεων ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ. Ὁ ἀνωτέρω λοιπὸν δοθεὶς γενικὸς τῆς μεθόδου αὐτῆς κανὼν εἶναι ἀκριβής· τουτέστιν, ὅταν αὐτοποιοῦμεν τὴν τελικὴν ἐξίσωσιν, ἔπειτα τὴν μίαν τῶν δύο προηγουμένων, ἀκολουθῶς τὴν μίαν τῶν τριῶν, ἔπειτα τὴν μίαν τῶν τέσσάρων... καὶ τελευτᾶτον τὴν μίαν τῶν μ δεδομένων ἐξισώσεων, αἱ οὕτω αὐτοποιοῦμεναι ἐξισώσεις ἀποτελοῦσι σύστημα ἰσοδύναμον τῷ ἀρχικῷ δεδομένῳ.

ΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΙΝΩΝ

55. Ἄς ἐφαρμόσωμεν καὶ ἐνταῦθα ἐπὶ τινων προβλημάτων ἐξαρτωμένων ἐκ δύο ἢ πλειοτέρων πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαριθμῶν ἀγνώστων τὰς τε ἐν τῇ § 43 δοθείσας περὶ τούτου ὁδηγίας καὶ ἐκαστην τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθεισῶν πρὸς λύσιν τῶν ἐξισώσεων μεθόδων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. — Ἐρωτηθεὶς τις πόσας δραχμὰς ἔχει εἰς ἑκατέραν τῶν χεירῶν αὐτοῦ, ἀπεκρίθη. Ἐὰν ἐκ τῆς δεξιᾶς θέσω μίαν εἰς τὴν ἀριστεράν, θέλουσι τότε περιέχει ἀμφοτέραι ἴσον ἀριθμὸν δραχμῶν· ἐὰν δὲ τοῦτ' ἀντιτίαν ἐκ τῆς ἀριστερᾶς θέσω μίαν εἰς τὴν δεξιάν, αὕτη θέλει περιέχει τότε διπλάσιον ἢ ἡ ἀριστερὰ ἀριθμὸν δραχμῶν. Ζητεῖται πόσας δραχμὰς εἶχεν εἰς ἑκατέραν.

Ἐνταῦθα εἶναι δύο τὰ ζητούμενα καὶ δύο αἱ συνθήκαι, ἃς ταῦτα πρέπει νὰ ἐκπληρώσιν. Ἄς παραστήσωμεν λοιπὸν διὰ x τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν, ἃς οὗτος ἔχει ἐν τῇ δεξιᾷ αὐτοῦ χεirimί, καὶ διὰ y τὸ ποσὸν τῶν ἐν τῇ ἀριστερᾷ. Ἵνα ἐκπληρωθῇ ἡ πρώτη συνθήκη τοῦ προβλήματος, πρέπει προφανῶς ὅ,τι μένει ἐν τῇ δεξιᾷ, ἀφοῦ ἀφαιρέσῃ μίαν δραχμὴν ἐκ τῶν ὅσας ἔχει ἐν αὐτῇ, νὰ ἰσοῦται μετ' ὅσας θέλει περιέχει ἡ ἀριστερά, ἀφοῦ αὐξήσῃ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν αὐτῇ δραχμῶν κατὰ μίαν. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἐξῆς πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος

$$x - 1 = y + 1 \quad (1).$$

Ἵνα δὲ ἐκπληρωθῇ ἡ δευτέρα συνθήκη τοῦ προβλήματος, πρέπει ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν τῇ δεξιᾷ x δραχμῶν, αὐξηθεὶς κατὰ μίαν, νὰ ᾖ διπλάσιος τοῦ τῶν ἐν τῇ ἀριστερᾷ y δραχμῶν, ἐλαττωθέντος κατὰ μίαν, τουτέστι θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος

$$x + 1 = 2y - 1 \quad (2).$$

Μᾶς μένει δὲ τώρα νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς ἑκατέραν αὐτῶν τὴν γενικὴν μορφήν $ax + by = r$, καὶ θέλομεν ἔχει τὰς ἀκολουθοῦσας

$$x - y = 2 \quad (1),$$

$$x - 2y = -3 \quad (2),$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα, ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη ἀπὸ τῆς (2) τὴν (1) καὶ ἀνάγοντες, τὴν ἐξῆς

$$-y = -5, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad y = 5.$$

Ἀντικαθιστῶντες τέλος εἰς μίαν τῶν δύο ἐξισώσεων (1) καὶ (2), π. χ. εἰς τὴν (1), ἀντὶ τῆς y τὴν εὑρεθεῖσαν αὐτῆς τιμὴν 5, εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x - 5 = 2, \quad \text{ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως} \quad x = 7.$$

Λοιπὸν 7 δραχμὰς εἶχεν οὗτος ἐν τῇ δεξιᾷ αὐτοῦ χειρὶ καὶ 5 ἐν τῇ ἀριστερᾷ, εὐκόλως δὲ βεβαιοῦνται τίς, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 5 ἐκπληροῦσι τὰς δεδομένας ὑπὸ τοῦ προβλήματος συνθήκας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. — *Νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα, ὅπερ γίνεται ἴσον μὲ 2, ὅταν καὶ οἱ δύο αὐτοῦ ὅροι ἐλαττωθῶσι κατὰ 2, καὶ ἴσον μὲ 6, ὅταν οἱ δύο ὅροι αὐτοῦ ἐλαττωθῶσι κατὰ 6.*

Ἄς παραστήσωμεν διὰ x τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ζητουμένου κλάσματος καὶ διὰ y τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ. Θέλομεν προφανῶς ἔχει πρὸς ἐκπλήρωσιν τῆς πρώτης συνθήκης τοῦ δεδομένου προβλήματος τὴν ἐξῆς πρώτην ἐξίσωσιν

$$\frac{x-2}{y-2} = 2 \quad (1),$$

καὶ πρὸς ἐκπλήρωσιν τῆς δευτέρας συνθήκης τὴν ἐξῆς δευτέραν ἐξίσωσιν

$$\frac{x-6}{y-6} = 6 \quad (2).$$

Μᾶς μένει λοιπὸν πρὸς λύσιν τοῦ δεδομένου προβλήματος νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Πρὸς τοῦτο δὲ δίδομεν εἰς ἑκατέραν αὐτῶν τὴν ἀπαιτουμένην μορφήν καὶ ἔχομεν ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω τὰς ἐξῆς

$$x - 2y = -2 \quad (1),$$

$$x - 6y = -30 \quad (2),$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα εὐκολώτατα $y = 7$ καὶ $x = 12$. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν κλάσμα εἶναι $\frac{12}{7}$, τὸ ὁποῖον γίνεται $\frac{10}{5}$ ἢ 2, ὅταν οἱ ὅροι αὐτοῦ

ἐλαττωθῶσι κατὰ 2, καὶ $\frac{6}{1}$ ἢ 6, ὅταν οἱ ὅροι αὐτοῦ ἐλαττωθῶσι κατὰ 6.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^{ον}. — Νὰ εὐρεθῇ ὁ διψήφιος ἀριθμὸς, οὗτινος τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ἀποτελούντων αὐτὸν ψηφίων τὰ ἦναι 40, ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, τὰ ἀποτελεῖται ἀριθμὸς μεγαλειτέρος τοῦ ζητουμένου κατὰ 36.

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἄς παραστήσωμεν διὰ x τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ καὶ διὰ y τὸ τῶν μονάδων αὐτοῦ. Ἰνα ἐκπληρωθῇ ἡ πρώτη τοῦ προβλήματος συνθήκη, πρέπει τὸ ἄθροισμα $x+y$ νὰ ἦναι ἴσον μὲ 40, τουτέστι θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς πρώτην ἐξίσωσιν

$$x+y=40 \quad (1).$$

Ἰνα δὲ ἴδωμεν πῶς θέλομεν ἐκπληρώσει τὴν δευτέραν αὐτοῦ συνθήκην, σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς.

Ὅταν x ἦναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ καὶ y τὸ τῶν μονάδων, ἡ ἀξία τοῦ ἀριθμοῦ τούτου θέλει εἶναι $10x+y$ μονάδες· ὅταν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, τουτέστι τὸ ψηφίον y τῶν μονάδων γείνη ψηφίον δεκάδων καὶ τὸ ψηφίον x τῶν δεκάδων γείνη ψηφίον μονάδων, τότε προφανῶς ἡ ἀξία τοῦ οὕτω προκύπτοντος ἀριθμοῦ θέλει εἶναι $10y+x$ μονάδες. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, αὕτη εἶναι μεγαλειτέρα τῆς πρώτης κατὰ 36 μονάδας. Ἀρα θέλομεν ἔχει πρὸς ἐκπλήρωσιν τῆς δευτέρας συνθήκης τοῦ προβλήματος τὴν ἐξῆς δευτέραν ἐξίσωσιν

$$10x+y=10y+x-36 \quad (2),$$

ἥτις ἀναγομένη εἰς τὴν συνήθη ἀπλουστάτην αὐτῆς μορφήν γίνεται διαδοχικῶς

$$9x-9y=-36, \text{ ἢ } x-y=-4 \quad (2).$$

Θέλομεν λοιπὸν ἔχει πρὸς λύσιν τοῦ δεδομένου προβλήματος τὰς ἐξῆς δύο πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις

$$x+y=40 \quad (1),$$

$$x-y=-4 \quad (2),$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα εὐκολώτατα $x=3$ καὶ $y=7$. Λοιπὸν 37 εἶναι ὁ ζητούμενος διψήφιος ἀριθμὸς, οὗτινος τὸ μὲν ἄθροισμα $3+7$ τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι 10, ὁ δὲ προκύπτων ἀριθμὸς 73, ὅταν τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, ὑπερέχει τὸν ζητούμενον 37 κατὰ 36.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4^{ον}. — Νὰ εὑρεθῇ ὁ τριψήγιος ἀριθμός, οὗτινος τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ψηφίων τὰ ἦναι 16, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τὰ ὑπερέχῃ κατὰ 2 τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, τὰ προκύπτει ἀριθμός μικρότερος τοῦ ζητουμένου κατὰ 495.

Ἄς παραστήσωμεν διὰ x τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ, διὰ y τὸ τῶν δεκάδων καὶ διὰ ω τὸ ψηφίον τῶν μονάδων. Θέλωμεν ἔχει πρὸς ἐκπλήρωσιν τῆς πρώτης τοῦ προβλήματος συνθήκης τὴν ἑξῆς ἐξίσωσιν

$$x + y + \omega = 16 \quad (1).$$

Ἵνα δὲ ἐκπληρώσωμεν καὶ τὴν δευτέραν συνθήκην, πρέπει προφανῶς νὰ ἔχωμεν

$$y = \omega + 2 \quad (2).$$

Καθόσον δ' ἀφορᾷ τὴν ἐκπλήρωσιν τῆς τρίτης συνθήκης, σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω θέλωμεν εὑρεῖν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, οὗτινος ἡ ἀξία εἶναι $100x + 10y + \omega$ μονάδες, πρέπει νὰ ἦναι μεγαλύτερος κατὰ 495 τοῦ προκύπτοντος, ὅταν τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, τουτέστι τοῦ περιέχοντος $100\omega + 10y + x$ μονάδας. Θέλωμεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἑξῆς τρίτην ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος

$$100x + 10y + \omega = 100\omega + 10y + x + 495 \quad (3).$$

Ἵνα λοιπὸν λύσωμεν τὸ δεδομένον πρόβλημα, πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3). Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ δώσωμεν πρῶτον εἰς τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) τὴν ἀπαιτουμένην κατὰ τὸν κανόνα μορφὴν, ὅτε θέλωμεν ἔχει ἀντὶ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος τὸ ἑξῆς

$$x + y + \omega = 16 \quad (1),$$

$$y - \omega = 2 \quad (2),$$

$$x - \omega = 5 \quad (3),$$

ἔπειτα νὰ ἐξαλείψωμεν μεταξὺ τῆς (1) καὶ (2) τὴν ἄγνωστον y , ὅτε θέλωμεν ἔχει τὴν τετάρτην ἐξίσωσιν

$$x + 2\omega = 14 \quad (4)$$

καὶ μεταξὺ τῆς (4) καὶ (3) τὴν x , ὅτε θέλωμεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$3\omega = 9, \text{ ἔξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως } \omega = 3.$$

Ἀντικαθιστῶντες τέλος τὴν τιμὴν τῆς ω εἰς τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) πορίζομεθα ἀμέσως $y = 5$ καὶ $x = 8$. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμός, ὁ

ἐκπληρῶν τὰς συνθήκας τοῦ δεδομένου προβλήματος, εἶναι 853. Καὶ τῷ ὄντι, τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι 16, τὸ ψηφίον δὲ τῶν δεκάδων ὑπερέχει κατὰ 2 τὸ τῶν μονάδων, ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 358, ὅστις εἶναι πράγματι μικρότερος τοῦ ζητουμένου 853 κατὰ 495.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5^{ον}. — Ἐτόκισέ τις κεφάλαιον τι πρὸς τι ἐπιτόκιον. Ἐτερος τοκίσας 10000 δραχμὰς περισσότερον τοῦ πρώτου, καὶ πρὸς ἐπιτόκιον κατὰ δραχμὴν μεγαλείτερον, ἔλαβεν ἐτήσιον τόκον 850 δραχμὰς περισσότερον τοῦ πρώτου. Τρίτος δὲ τις τοκίσας 15000 δραχμὰς περισσότερον τοῦ πρώτου καὶ πρὸς ἐπιτόκιον κατὰ δύο δραχμὰς μεγαλείτερον, ἔλαβεν ἐτήσιον τόκον 1550 δραχμὰς περισσότερον τοῦ πρώτου. Ζητοῦνται τὰ ὑφ' ἐκάστου τοκισθέντα κεφάλαια καὶ τὰ ἐπιτόκια, πρὸς ἃ ἕκαστος ἐτόκισεν.

Τοῦ παρόντος προβλήματος τὰ ἀγνωστα, ἃν καὶ φαίνονται ὅτι εἶναι 2, εἶναι κυρίως δύο· τὸ ὑπὸ τοῦ πρώτου τοκισθὲν κεφάλαιον, καὶ τὸ ἐπιτόκιον, πρὸς ὃ οὗτος ἐτόκισεν αὐτό.

Ἐστω λοιπὸν x τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου καὶ y τὸ ἀντίστοιχον ἐπιτόκιον. Ὁ ἐτήσιος τόκος ω τοῦ κεφαλαίου x πρὸς y ἐπιτόκιον εὐρίσκεται ἐκ τῆς ἀναλογίας $100 : x = y : \omega$ καὶ εἶναι $\frac{xy}{100}$.

Τὸ ὑπὸ τοῦ δευτέρου τοκισθὲν κεφάλαιον θέλει εἶναι κατὰ τὴν δευτέραν συνθήκην τοῦ προβλήματος $x + 10000$, καὶ $y + 1$ τὸ ἐπιτόκιον, πρὸς ὃ τοῦτο ἐτοκίσθη, ὃ δὲ ἐτήσιος αὐτοῦ τόκος ω εὐρίσκεται ἐκ τῆς ἀναλογίας $100 : x + 10000 = y + 1 : \omega$ καὶ εἶναι $\frac{(x + 10000)(y + 1)}{100}$.

Τὸ ὑπὸ τοῦ τρίτου τοκισθὲν κεφάλαιον θέλει εἶναι κατὰ τὴν τρίτην συνθήκην τοῦ προβλήματος $x + 15000$, καὶ $y + 2$ τὸ ἐπιτόκιον, πρὸς ὃ τοῦτο ἐτοκίσθη, ὃ δὲ ἐτήσιος αὐτοῦ τόκος ω εὐρίσκεται ἐκ τῆς ἀναλογίας $100 : x + 15000 = y + 2 : \omega$ καὶ εἶναι $\frac{(x + 15000)(y + 2)}{100}$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ μὲν ἐτήσιος τόκος τοῦ δευτέρου εἶναι μεγαλείτερος τοῦ ἐτησίου τόκου τοῦ πρώτου κατὰ 850 δραχμὰς, ὃ δὲ ἐτήσιος τόκος τοῦ τρίτου μεγαλείτερος τοῦ ἐτησίου τόκου τοῦ πρώτου κατὰ 1550 δραχμὰς, θέλομεν ἔχει πρὸς εὐρεσιν τῶν ζητουμένων x καὶ y τὰς ἑξῆς δύο ἐξισώσεις:

$$\frac{(x + 10000)(y + 1)}{100} - \frac{xy}{100} = 850 \quad (1),$$

$$\frac{(x+15000)(y+2)}{100} - \frac{xy}{100} = 1550 \quad (2),$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν παρονομαστώων, τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων, τὴν μεταφορὰν τῶν ὅρων καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων, τὰς ἐξῆς

$$40000y + x = 75000 \quad (1),$$

$$15000y + 2x = 125000 \quad (2),$$

αἵτινες λυόμεναι κατὰ μίαν τῶν γνωστώων μεθόδων μᾶς δίδουσι τὰς ταυτοποιούσας αὐτὰς τιμὰς $x=25000$ καὶ $y=5$. Λοιπὸν ὁ μὲν πρῶτος ἐτόκισεν 25000 δραχμὰς πρὸς 5%, ὁ δεύτερος 35000 πρὸς 6% καὶ ὁ τρίτος 40000 πρὸς 7%.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6^{ον}. — Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς, ὅστις διαιρούμενος διὰ 5 ἢ διὰ 8 ὑπόλοιπον 2, διαιρούμενος διὰ 8 ἢ διὰ 5 ὑπόλοιπον 5, τὸ δὲ πηλίκον τῆς πρώτης διαιρέσεως ἢ ὑπερβαίνει τὸ τῆς δευτέρας κατὰ 3.

Ἐνταῦθα, ἂν καὶ μᾶς ζητεῖται εἰς ἀριθμὸς, κυρίως εἶναι τρία τὰ ἄγνωστα· αὐτὸς ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, τὸ πηλίκον τῆς πρώτης διαιρέσεως καὶ τὸ πηλίκον τῆς δευτέρας.

Ἐστω λοιπὸν x ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, y τὸ πηλίκον τῆς πρώτης διαιρέσεως καὶ ω τὸ τῆς δευτέρας. Ἐπειδὴ εἰς πᾶσαν διείρασιν ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ, θέλομεν ἔχει πρὸς ἐκπλήρωσιν τῆς πρώτης τοῦ δεδομένου προβλήματος συνθήκης τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$x = 5y + 2 \quad (1),$$

πρὸς ἐκπλήρωσιν δὲ τῆς δευτέρας συνθήκης τὴν ἐξῆς

$$x = 8\omega + 5 \quad (2),$$

καὶ πρὸς ἐκπλήρωσιν τῆς τρίτης τὴν ἀκόλουθον

$$y - \omega = 3 \quad (3).$$

Μᾶς μένει λοιπὸν πρὸς εὑρεσιν τοῦ ζητουμένου νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἀνωτέρω τριῶν ἐξισώσεων. Πρὸς τοῦτο ἐκ τῆς (1) καὶ (2), ἐπειδὴ x ἴσον x , πορίζομεθα ἀμέσως τὴν ἐξῆς

$$5y + 2 = 8\omega + 5, \text{ ἢ, ὅπερ ταυτὸν, τὴν ἐξῆς } 5y - 8\omega = 3, \quad (4),$$

ἀπαλείφοντες δὲ μετὰξὺ τῆς (4) καὶ (3) τὴν y εὐρίσκομεν

$$3\omega = 12, \text{ ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως } \omega = 4.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τῆς ω εἰς τὴν (2) πορίζομεθα

$\chi = 37$. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς, ὃ ἔχων τὰς ἐν τῇ ἐκφώνησει τοῦ προβλήματος ἀναφερομένας ιδιότητες, εἶναι ὁ 37.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7^{ον}. — Τρία ἀγγεῖα περιέχουσιν ὁμοῦ 18 λίτρας ὕδατος. Ἐὰν λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ πρώτῳ καὶ χύσωμεν αὐτὸ εἰς τὸ δευτέρον· ἔπειτα τὸ τέταρτον τοῦ περιεχομένου τότε ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ χύσωμεν αὐτὸ εἰς τὸ τρίτον, καὶ τέλος τὸ τρίτον τοῦ περιεχομένου τότε ἐν τῷ τρίτῳ καὶ χύσωμεν αὐτὸ εἰς τὸ πρῶτον, καὶ τὰ τρία ἀγγεῖα θέλουσι περιέχει τότε τὴν αὐτὴν ποσότητα ὕδατος. Ζητεῖται πόσας λίτρας ὕδατος περιεῖχεν ἕκαστον τῶν ἀγγείων κατ' ἀρχάς.

Ἔστωσαν χ αἱ περιεχόμεναι ἐν τῷ πρώτῳ ἀγγεῖῳ λίτραι, ψ αἱ ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ ω αἱ ἐν τῷ τρίτῳ. Κατὰ τὴν πρώτην συνθήκην τοῦ προβλήματος θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς πρώτην ἐξίσωσιν

$$\chi + \psi + \omega = 18 \quad (1).$$

Ὅταν ἐκ τοῦ πρώτου χ λάβωμεν τὸ ἥμισυ $\frac{\chi}{2}$ καὶ χύσωμεν αὐτὸ εἰς τὸ δευτέρον ψ , τότε ἐν μὲν τῷ πρώτῳ θέλει μείνει τὸ ἕτερον ἥμισυ $\frac{\chi}{2}$, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ θέλουσι περιέχεσθαι $\psi + \frac{\chi}{2}$, ἢ $\frac{2\psi + \chi}{2}$ λίτραι. Ὅταν δὲ ἐκ τοῦ δευτέρου $\frac{2\psi + \chi}{2}$ λάβωμεν τὸ τέταρτον $\frac{2\psi + \chi}{8}$ καὶ χύσωμεν αὐτὸ εἰς τὸ τρίτον ἀγγεῖον ω , τότε ἐν μὲν τῷ δευτέρῳ θέλουσι μείνει τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ $\frac{2\psi + \chi}{2}$, ἢ τοῦ $\frac{6\psi + 3\chi}{8}$, ἐν δὲ τῷ τρίτῳ ἀγγεῖῳ θέλουσι περιέχεσθαι $\omega + \frac{2\psi + \chi}{8}$, ἢ $\frac{8\omega + 2\psi + \chi}{8}$ λίτραι. Ὅταν δὲ τέλος ἐκ τοῦ τρίτου $\frac{8\omega + 2\psi + \chi}{8}$ λάβωμεν τὸ τρίτον $\frac{8\omega + 2\psi + \chi}{24}$ καὶ χύσωμεν αὐτὸ εἰς τὸ πρῶτον $\frac{\chi}{2}$, τότε ἐν μὲν τῷ πρώτῳ θέλουσι περιέχεσθαι $\frac{\chi}{2} + \frac{8\omega + 2\psi + \chi}{24}$ λίτραι, ἐν δὲ τῷ τρίτῳ θέλουσι μείνει τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{8\omega + 2\psi + \chi}{8}$, ἢ πῖνα εἶναι $\frac{8\omega + 2\psi + \chi}{12}$. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τότε καὶ τὰ τρία ἀγγεῖα περιέχουσιν ἴσον ποσὸν ὕδατος. Ἀρα θέλομεν ἔχει καὶ τὰς ἐξῆς δύο ἐξισώσεις

$$\frac{\chi}{2} + \frac{8\omega + 2\psi + \chi}{24} = \frac{6\psi + 3\chi}{8} \quad (2),$$

$$\frac{8\omega + 2\psi + \chi}{12} = \frac{6\psi + 3\chi}{8} \quad (3).$$

Πρὸς εὐρεσιν λοιπὸν τῶν ζητουμένων πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν τριῶν πρωτοβάθμιων ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) κατὰ μίαν τῶν γνωστῶν τριῶν μεθόδων, ἀφοῦ δώσωμεν πρῶτον εἰς τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) τὴν ἀπαιτουμένην πρὸς τοῦτο μορφὴν, ὅτε γίνονται

$$x - 4y + 2\omega = 0 \quad (2),$$

$$-7x - 44y + 16\omega = 0 \quad (3).$$

Εὐρίσκομεν δὲ τότε $x=6$, $y=5$ καὶ $\omega=7$. Τὸ πρῶτον λοιπὸν ἀγγεῖον περιείχε κατ' ἀρχὰς 6 λίτρας ὕδατος, τὸ δεύτερον 5 καὶ τὸ τρίτον 7.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8^{ον}. — Νὰ εὕρεθῇ ὁ τετραψήγιος ἀριθμὸς, ὁ ἔχωρ τὰς ἐξῆς ιδιότητας· α') τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν δύο πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίων αὐτοῦ νὰ ἦται ἴσον μὲ 8, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων ἴσον μὲ 9, β') τὸ ψηφίον τῶν ἐκατοντάδων νὰ ὑπερέχῃ κατὰ 2 τὸ τῶν μονάδων, καὶ γ'), ἐὰν τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ ζητουμένου κατὰ 90.

Ἐστω x τὸ ψηφίον τῶν χιλιάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ, y τὸ τῶν ἐκατοντάδων, ω τὸ τῶν δεκάδων καὶ φ τὸ τῶν μονάδων. Κατὰ μὲν τὰς συνθήκας α' θέλομεν ἔχει τὰς ἐξῆς δύο ἐξισώσεις

$$x + y = 8 \quad (1),$$

$$\omega + \varphi = 9 \quad (2),$$

κατὰ δὲ τὴν συνθήκην β' τὴν ἐξῆς

$$y - \varphi = 2 \quad (3),$$

καὶ τέλος κατὰ τὴν συνθήκην γ' τὴν ἀκόλουθον

$$1000x + 100y + 10\omega + \varphi = 1000\varphi + 100\omega + 10y + x - 90,$$

ἥτις μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν δυνατῶν ἀναγωγῶν καὶ ἀπλοποιήσεων γίνεται

$$111x + 10y - 10\omega - 111\varphi = -10 \quad (4).$$

Πρὸς εὐρεσιν λοιπὸν τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν τεσσάρων πρωτοβάθμιων ἐξισώσεων (1), (2), (3) καὶ (4) κατὰ τινὰ τῶν γνωστῶν μεθόδων, ἐνταῦθα δὲ πρέπει νὰ προτιμήσωμεν τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως, ἣν ἐφαρμόζομεν ὡς ἐξῆς·

Ἐκ μὲν τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) πορίζομεθα ἀμέσως

$$\omega = 9 - \varphi \quad \text{καὶ} \quad y = \varphi + 2$$

ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως (1), ἐν ᾗ ἀντὶ τῆς y θέτομεν τὴν εὐρεθεῖσαν αὐτῆς τιμὴν $\varphi + 2$, θέλομεν ἔχει

$$x = 6 - \varphi.$$

Ἀντικαθιστῶντες τέλος ἐν τῇ ἐξίσώσει (4) ἀντὶ τῆς ω τὸ ἴσον αὐτῇ $9 - \varphi$, ἀντὶ τῆς ψ τὸ $\varphi + 2$ καὶ ἀντὶ τῆς χ τὸ $6 - \varphi$, θέλομεν ἔχει τὴν μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον φ ἐξίσωσιν

$$441(6 - \varphi) + 40(\varphi + 2) - 40(9 - \varphi) - 444\varphi = -40,$$

ἥτις μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἐν αὐτῇ σεσημειωμένων πράξεων, μετὰ τὴν μεταφορὰν καὶ ἀναγωγὴν τῶν ἐν αὐτῇ ὁμοίων ὅρων τρέπεται εἰς τὴν ἐξῆς

$$-202\varphi = -606, \quad \text{ἐξ ἧς πορίζομεθα} \quad \varphi = 3$$

ἐπομένως $\omega = 6$, $\psi = 5$ καὶ $\chi = 3$. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τετραψήφιος ἀριθμός, ὁ ἔχων τὰς ἀνωτέρω ιδιότητες, εἶναι ὁ 3563.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΑΡΝΗΤΙΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ. — ΣΥΜΒΟΛΑ ΤΟΥ ΑΔΕΥΧΑΤΟΥ ΚΑΙ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΥ
ΤΩΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΑΡΝΗΤΙΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

56. Ὅταν λύωμεν κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας μίαν ἢ πλειοτέρας πρωτοβαθμίους ἐξίσώσεις καὶ εὐρίσκωμεν διὰ τὴν ἄγνωστον ἢ διὰ τινὰς τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων τιμὰς ἀρνητικές, εἰμεθα πεπεισμένοι ὅτι ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ τῆς ἀγνώστου ἢ τὸ εὖρεθὲν σύστημα τῶν τιμῶν τῶν ἐν ταῖς ἐξίσωσιν ἀγνώστων, θέλει ταῦτοποιεῖ τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν, ἢ τὸ δεδομένον σύστημα τῶν ἐξισώσεων. Ἀλλ' ὅταν ἡ λυθεῖσα ἐξίσωσις ἢ τὸ ταῦτοποιηθὲν σύστημα τῶν ἐξισώσεων παριστᾷ τὰς συνθήκας δεδομένου τινὸς προβλήματος, εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ εὖρεθεῖσα ἀρνητικὴ τιμὴ τοῦ ζητουμένου ἢ αἱ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τινῶν τῶν ζητουμένων δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν ἀπολύτως οὐδεμίαν πραγματικὴν σημασίαν· διότι εἴπομεν ὅτι αἱ ὑφ' ἡμῶν ὀνομασθεῖσαι ἀρνητικαὶ ποσότητες δὲν εἶναι πραγματικαὶ ποσότητες, ἀλλὰ πρέπει νὰ θεωρῶνται ὡς παριστώσαι τὰ ἐξαγόμενα ἀδυνάτων ἀφαιρέσεων. Ἰνα δὲ ἴδωμεν πῶς πρέπει νὰ ἐρμηνεύωμεν ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὰς ἀρνητικὰς τῶν προβλημάτων λύσεις, καταστήσωμεν δὲ συνάμα καὶ καταληπτότεροι, θέλομεν λάβει ὑπ' ὄψιν ἡμῶν παραδείγματά τινα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. — *Εἶχέ τις ἡλικίαν 30 ἐτῶν καὶ ἕτερος 20. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου θέλει εἶναι διπλασία τῆς τοῦ δευτέρου;*

Ἄν παραστήσωμεν διὰ x τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐτῶν, ἅτινα πρέπει νὰ παρέλθωσιν, ἵνα ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου καταστῇ διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἐξίσωσιν

$$30 + x = 2(20 + x) \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα $x = -10$, τουτέστιν εὐρίσκομεν διὰ τὴν ἀγνωστον x τιμὴν ἀρνητικὴν, καὶ πρέπει ἐπομένως νὰ εἰπωμεν ὅτι μετὰ -10 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου θέλει γέινει διπλασία τῆς τοῦ δευτέρου, τοῦθ' ὕπερ δὲν ἔχει οὐδεμίαν ἔννοιαν. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐκ τῆς εὐρεθείσης ἀρνητικῆς λύσεως, ὅτι ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος περιέχει συνθήκας μὴ δυναμένας νὰ ἐκπληρωθῶσιν.

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (1) ταῦτοποιεῖται διὰ τῆς ἀρνητικῆς τιμῆς -10 τῆς x , ἔπεται ὅτι, ἂν ἐν αὐτῇ ἀντὶ τῆς x θέσωμεν $-x$, ἡ οὕτω προκύπτουσα νέα ἐξίσωσις

$$30 - x = 2(20 - x) \quad (2)$$

θέλει ταῦτοποιεῖσθαι διὰ τῆς θετικῆς τιμῆς 10 τῆς x . Ἀλλὰ τὴν ἐξίσωσιν (2) ἠθέλομεν σχηματίσαι, ἂν εἶχομεν πρὸς λύσιν ἀντὶ τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος τὸ ἐξῆς:

Εἶχέ τις ἡλικίαν 30 ἐτῶν καὶ ἕτερος 20. Πρὸ πόσων χρόνων ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου ἦτο διπλασία τῆς τοῦ δευτέρου;

Ἐν τῷ οὐδὲν ἄλλῳ μετεβλήθη ἢ ὅ,τι ἐζητεῖτο εἰς τὸ μέλλον, ἀναφέρεται τώρα εἰς τὸ παρελθόν. Καὶ πράγματι πρὸ 10 ἐτῶν ἡ μὲν ἡλικία τοῦ πρώτου ἦτο 20, ἡ δὲ ἡλικία τοῦ δευτέρου 10, καὶ τὸ 20 εἶναι διπλάσιον τοῦ 10.

Ἐστω πρὸς τοῦτοις πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. — *Ἐργάτης τις εἰργάσθη τὸ μὲν θέρος 13 ἡμέρας, τὸν δὲ χειμῶνα 17, λαμβάνων τὸν χειμῶνα ἡμερομίσθιον κατὰ 2 δραχμὰς ὀλιγώτερον ἢ τὸ θέρος. Ἀλλὰ τὸ μὲν θέρος ἐπέστη ἔρεκα ζημιῶν κράτησιν 22 δραχμῶν, ἐντὺ τὸν χειμῶνα ἔλαβεν ἀμοιβὴν διὰ τὴν ἐξαίρετον αὐτοῦ διαγωγὴν 28 δραχμὰς, συνέβη δὲ οὕτω νὰ λάβῃ τὸ θέρος ὅσον καὶ τὸν χειμῶνα. Ζητεῖται πρὸς ποῖον ἡμερομίσθιον εἰργάσθη τὸ θέρος.*

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x τὸ θερὸν αὐτοῦ ἡμερομίσθιον, τὸ κατὰ τὸν χειμῶνα θέλει εἶναι $x - 2$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν λοιπὸν τοῦ προ-

ελάματος ὁ ἐργάτης ἔλαβε τὸ μὲν θέρος 13χ-22 δραχμάς, τὸν δὲ χειμῶνα 17(χ-2)+28, καὶ ἐπειδὴ συνέβη νὰ λάβῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν καὶ κατὰ τὰς δύο περιστάσεις, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$13\chi - 22 = 17(\chi - 2) + 28 \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα εὐκόλως $\chi = -4$. Πρέπει λοιπὸν νὰ εἰπώμεν πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος, ὅτι τὸ θερινὸν τοῦ ἐργάτου ἡμερομίσθιον ἦτο -4 δραχμαί, τοῦθ' ὕπερ οὐδεμίαν ἔχει ἔννοιαν. Ἡ εὐρεθεῖσα λοιπὸν ἀρνητικὴ τιμὴ τοῦ ζητουμένου, ἡ ταῦτοποιούσα τὴν ἐξίσωσιν (1), τὴν παριστῶσαν τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, δεικνύει ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (1) ταῦτοποιεῖται διὰ τῆς τιμῆς -4 τῆς χ , ἔπεται ὅτι, ἂν τεθῇ ἐν αὐτῇ $-\chi$ ἀντὶ τῆς χ , ἡ προκύπτουσα νέα ἐξίσωσις

$$-13\chi - 22 = 17(-\chi - 2) + 28$$

ἢ, ὕπερ ταῦτό, ἡ ἐξῆς

$$13\chi + 22 = 17\chi + 2 - 28 \quad (2),$$

ἣν πορίζομεθα ἐκ τῆς προηγουμένης ἀλλάσσοντας τὰ σημεῖα πάντων τῶν ἔρων αὐτῆς, θέλει ταῦτοποιεῖσθαι διὰ τῆς τιμῆς 4 τῆς χ . Ἀλλὰ τὴν ἐξίσωσιν (2) ἠθέλομεν σχηματίσει, ἂν εἶχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα

Ἐργάτης τις εἰργάσθη τὸ μὲν θέρος 13 ἡμέρας, τὸν δὲ χειμῶνα 17, λαμβάνων τὸν χειμῶνα ἡμερομίσθιον κατὰ 2 δραχμάς μεγαλειότερον ἢ τὸ θέρος. Ἀλλὰ τὸ μὲν θέρος ἔλαβε διὰ τὴν ἐξαιρετοῦ αὐτοῦ διαγωγὴν ἀμοιβὴν 22 δραχμῶν, ἐνῶ τὸν χειμῶνα ὑπέστη κράτησιν 28 δραχμῶν διὰ τὰς ὑπ' αὐτοῦ γενομένας ζημίας, συνεβῆ δὲ οὕτω νὰ λάβῃ τὸ θέρος ὅσον καὶ τὸν χειμῶνα. Ζητεῖται πρὸς ποῖον ἡμερομίσθιον εἰργάσθη τὸ θέρος,

ὑπερ δὲν διαφέρει τοῦ προηγουμένου, εἰμὴ κατὰ τοῦτο, ὅτι τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ χειμῶνος εἶναι μεγαλειότερον ἀντὶ νὰ ἦναι μικρότερον κατὰ 2 δραχμάς τοῦ ἡμερομισθίου τοῦ θέρους, καὶ ὅτι αἱ 22 καὶ 28 δραχμαί, ἀντὶ νὰ παριστῶσιν ἀμοιβαίως κράτησιν καὶ ἀμοιβήν, παριστῶσι τώρα τὰ ἀντίθετα, ἀμοιβήν καὶ κράτησιν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν λεχθέντων συμπεραίνομεν ὅτι,

Ὅταν εὐρίσκωμεν τιμὴν ἀρνητικὴν διὰ τὸ ζητούμενον προβλήματος τὸς τιμὸς, οὗ τὰς συνθήκας παρεστήσαμεν δι' ἐξισώσεως χωρὶς νὰ

στηριχθῶμεν πρὸς τοῦτο ἐπ' οὐδεμιᾶς ἰδίᾳς προϋποθέσεως, τότε δύναμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν μετὰ θετικότητος, ὅτι τὸ πρόβλημα περιέχει ἐν τῇ ἐκφωρήσει αὐτοῦ ἀδυνατούς πρὸς ἐκπλήρωσιν συνθήκας. Εἶδομεν δὲ ὅτι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἄρκει νὰ δώσωμεν καταλλήλως εἰς τινὰς τῶν ἐν τῇ ἐκφωρήσει τοῦ προβλήματος περιεχομένων ποσοτήτων ἀντιθέτους ἐννόλας, ἵνα ἡ προηγουμένως εὑρεθεῖσα ἀρνητικὴ τιμὴ θετικῶς λαμβανομένη παριστᾷ τὴν λύσιν τοῦ οὕτω τροποποιηθέντος προβλήματος.

Παρατήρησις. — Δὲν πρέπει νὰ νομίσῃ τις ὅτι ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ προβλήματος τινος, θετικῶς λαμβανομένη, εἶναι πάντοτε λύσις τοῦ προβλήματος, τροποποιηθέντος κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα. Ἐνίοτε συμβαίνει τὸ τροποποιηθὲν πρόβλημα νὰ ἦναι ἀδύνατον ἕνεκα ἄλλης τινὸς συνθήκης, ἣν δὲν δύναμεθα νὰ παραστήσωμεν σχηματίζοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτοῦ. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Εἴχῃ τις ἡλικίαν 20 ἐτῶν καὶ ἕτερος 25. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου θέλει εἶναι διπλασία τῆς τοῦ δευτέρου,
 ἠθέλομεν εὑρεῖ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ ζητουμένου — 30, αὕτη δὲ θετικῶς λαμβανομένη ἔπρεπε νὰ παριστᾷ τὴν λύσιν τοῦ ἐξῆς προβλήματος.

Εἴχῃ τις ἡλικίαν 20 ἐτῶν καὶ ἕτερος 25. Πρὸ πόσων χρόνων ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου ἦτο διπλασία τῆς τοῦ δευτέρου;

Ἀλλὰ καὶ πάλιν τοῦτο δὲν ὑπάρχει, διότι πρὸ 30 χρόνων προφανῶς οὐδέτερος τούτων ὑπῆρχεν ἐν τῇ ζωῇ. Ὡστε συμπεραίνομεν ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι πάντως ἀδύνατον.

Δὲν πρέπει πρὸς τοῦτοις νὰ νομίσῃ τις ὅτι, ὅσάκις λύων πρόβλημά τι εὐρίσκει διὰ τὸ ζητούμενον τιμὴν θετικὴν, αὕτη θέλει πάντοτε ταῦτο ποιεῖ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος. Πολλάκις ἡ τιμὴ τοῦ ζητουμένου ὑπόκειται εἰς ἀρρήτους τινὰς περιορισμούς, οὓς πρέπει συνάμα νὰ ἐκπληροῖ, ἵνα αἱ συνθήκαι τοῦ προβλήματος ὦσι δυναταί. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα:

Ἐρωτηθεὶς τις πόσα τέκνα ἔχει, ἀπεκρίθη ἠθέλησα σήμερον νὰ δώσω εἰς ἕκαστον τούτων ἀνὰ 5 δραχμὰς καὶ μοι ἔλειπον 8, ἔδωσα ἀκολούθως εἰς ἕκαστον ἀνὰ 2, καὶ τότε μοι ἐπερίσσευσαν 15,
 ἠθέλομεν σχηματίσαι κατὰ τὰς συνθήκας αὐτοῦ τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$5x - 8 = 2x + 15,$$

ἐξ ἧς ἠθέλομεν πορισθῇ $x = \frac{23}{3} = 7 + \frac{2}{3}$, τουτέστιν ἠθέλομεν εὔρει διὰ τὴν x τιμὴν θετικὴν· ἀλλ' ἐπειδὴ συνάμα αὕτη δὲν εἶναι καὶ ἀκεραία, ὡς τοῦτο ἀρρήτως ὑπονοεῖται, διότι δὲν εἶναι ποτὲ δυνατόν νὰ ἔχη τις 7 τέκνα καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ τέκνου, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Πολλάκις δὲ συμβαίνει οὔτε ἡ θετικὴ καὶ ἀκεραία τιμὴ τοῦ ζητούμενου νὰ ᾔηται λύσις τοῦ προβλήματος, ὑποτιθεμένου πάντοτε ὅτι παριστῶνται πιστῶς διὰ τῆς ἐξισώσεως αἱ ἐν αὐτῷ συνθήκαι. Παραδείγματός χάριν, ἂν εἶχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα·

Δύο πίθοι κενοῦνται διὰ δύο ἀρίσων κρουῶν. Ἐκ μὲν τοῦ πρώτου, οὔτινος ἡ χωρητικότης εἶναι 36 λίτρων, ρέουσιν 9 λίτραι τὴν ὥραν, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου, οὔτινος ἡ χωρητικότης εἶναι 16 λίτρων, ρέουσι 5 λίτραι τὴν ὥραν. Ζητεῖται μετὰ πόσας ὥρας θέλει μείνει ἐν ἑκατέρῳ τῶν πίδαρι ἡ αὐτὴ ποσότης ὕδατος, ἀνοιγομένων τῶν κρουῶν αὐτῶν συγχρόνως, ἠθέλομεν σχηματίσει κατὰ τὰς συνθήκας αὐτοῦ τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$36 - 9x = 16 - 5x,$$

ἐξ ἧς ἠθέλομεν πορισθῇ $x = 5$, τουτέστιν ἠθέλομεν εὔρει διὰ τὴν x τιμὴν ἀκεραίαν καὶ θετικὴν, ἥτις μολαταῦτα δὲν δύναται νὰ ᾔηται λύσις τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος προβλήματος. Διότι μετὰ 5 ὥρας θέλουσι ρεῦσαι ἐκ μὲν τοῦ πρώτου πίδαρι 45 λίτραι, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 25, ἐνῶ ὁ μὲν πρῶτος δὲν περιέχει εἰ μὴ μόνον 36 καὶ ὁ δεύτερος μόνον 16 λίτρας, ἐπομένως πρὶν ἢ παρέλθωσιν αἱ εὑρεθεῖσαι ὡς λύσις τοῦ προβλήματος 5 ὥραι, οἱ πίθοι θέλουσι κενῶθῃ ὁ εἰς μετὰ τὸν ἄλλον. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι καὶ τοῦ παρόντος προβλήματος αἱ συνθήκαι εἶναι ἄλογοι, ἂν καὶ ἐκ τῆς παριστάσεως ταύτης ἐξισώσεως προκύπτει διὰ τὴν ἀγνώστον τιμὴν θετικὴ καὶ ἀκεραία.

Ἄλλοτε πάλιν δυνατόν ἡ τιμὴ τῆς ἀγνώστου νὰ ᾔηται θετικὴ, ἀκεραία καὶ δυναμένη νὰ παριστᾷ τὸ ζητούμενον, ἀλλὰ πράγματι νὰ μὴ ταῦτοποιῇ τὰ καθέκαστα τῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος, οὔτινος τὴν λύσιν παριστᾷ. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἶχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα·

Ἐρωτηθεὶς τις πόσα τέκνα ἔχει, ἀπεκρίθη. Ἡθέλησα νὰ δώσω εἰς ἕκαστον τῶν ἀποτελούντων τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅσα ἔχω ἀνὰ

τρία μῆλα, καὶ εἶδον ὅτι μοὶ ἐπερίσσευσαν 7, ἂν δὲ εἶδιον εἰς ἑκα-
στον τοῦ ἡμίσεως αὐτῶν ἀνὰ 5, ἤθελον μοὶ περισσεύσει δύο μῆλα.
Ζητεῖται πόσα τέκνα εἶχεν οὗτος.

ἠθέλομεν πρὸς λύσιν αὐτοῦ σχηματίσει τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$\frac{3x}{2} + 7 = \frac{5x}{2} + 2,$$

ἐξ ἧς ἠθέλομεν πορισθῇ $x = 5$, τουτέστιν ἠθέλομεν εὑρεῖ διατὸ ζητού-
μενον τιμὴν θετικὴν καὶ ἀκεραίαν, ἣτις φαίνεται δυνατὴ λύσις τοῦ προ-
βλήματος, καὶ ἐν τούτοις εἶναι ἀσυμβίβαστος μὲ τὰς ἐν τῇ ἐκφωνήσει
αὐτοῦ συνθήκας. Διότι τὸ ἥμισυ τοῦ 5 εἶναι $2\frac{1}{2}$, καὶ δὲν εἶναι ποτὲ
δυνατὸν νὰ ἠθέλησεν οὗτος νὰ δώσῃ εἰς τὰ 2 καὶ ἥμισυ αὐτοῦ τέκνα
οὔτε ἀνὰ 3 μῆλα οὔτε ἀνὰ 5.

Ἐκ τῶν ἐν τῇ παρατηρήσει ταύτῃ ἐκτεθέντων πείθεται τις μετὰ πό-
σης προσοχῆς πρέπει νὰ παραβάλλῃ ὁ λύων πρόβλημά τι τὸ ἐξαγόμενον
τῆς εὐρεθείσης λύσεως μὲ τὰ καθέκαστα τῶν συνθηκῶν αὐτοῦ πρὶν ἢ
ἀποφανθῇ ὅτι ἡ εὐρεθεῖσα τιμὴ ταῦτοποιεῖ ταύτας. Τούτου ἕνεκα συμ-
βουλεύομεν τοὺς μαθητάς, ὡσάκις λύουσι πρόβλημά τι, νὰ παραβάλλωσι
πάντοτε τὴν εὐρεθεῖσαν τιμὴν μὲ τὰ καθέκαστα τῶν συνθηκῶν αὐτοῦ,
καὶ τότε μόνον νὰ ἀποφαίνωνται ὅτι αὕτη ἐκπληροῖ τὰς συνθήκας αὐ-
τοῦ, ὅταν ὅχι μόνον αὕτη ἐκπληροῖ τὰς ῥητάς καὶ ἐν τῇ ἐκφωνήσει αὐ-
τοῦ ἀναφερομένας συνθήκας, ἀλλὰ καὶ τὰς ἀρρήτους καὶ ἐξωθεν ἐννο-
ουμένας, ὅταν ἦναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσι καὶ ταιαῦται.

57. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν καὶ τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^{ον}. — Δύο ταχυδρόμοι ἀναχωροῦσι συγχρότως ὁ μὲν
ἀπὸ τοῦ σημείου Α, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ σημείου Β, ὧν ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπό-
στασις εἶναι 60 χιλιόμετρα, διευθύνονται δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος Γ,
κείμενον ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ ΑΒΧ καὶ ἀπέχον τοῦ Β κατὰ 50 χιλιό-
μετρα. Ἡ ταχύτης τοῦ ἀπὸ τοῦ Α ἀναχωροῦντος εἶναι 40 χιλιόμε-
τρα τὴν ὥραν, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ ἀπὸ τοῦ Β ἀναχωροῦντος εἶναι 6
χιλιόμετρα, καὶ ζητεῖται εἰς ποῖον σημεῖον τῆς ὁδοῦ θέλουσιν οὔτοι
συναντηθῇ.

Α
Β
Σ
Γ
Σ'
Χ

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ταχυδρό-
μοι συναπαντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Σ, καὶ ἄς παραστήσωμεν διὰ x τὴν

ἀπόστασιν ΓΣ. Ἡ ἀπόστασις ΑΣ, ἣν θέλει διανύσει ὁ ἀπὸ τοῦ Α ἀναχωρῶν ταχυδρόμος, θέλει παρασταθῇ διὰ τοῦ $110 - \chi$, καὶ ἐπειδὴ οὗτος διανύει 10 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, θέλει χρειασθῇ προφανῶς $\frac{110 - \chi}{10}$ ὥρας. Ὁσαύτως ἡ ἀπόστασις ΒΣ, ἣν θέλει διανύσει ὁ ἀπὸ τοῦ Β ἀναχωρῶν, θέλει παρασταθῇ διὰ τοῦ $50 - \chi$, καὶ ἐπειδὴ οὗτος διανύει 6 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, θέλει χρειασθῇ $\frac{50 - \chi}{6}$ ὥρας. Ἀλλ' ἵνα γένη συνάντησις, πρέπει οἱ χρόνοι $\frac{110 - \chi}{10}$ καὶ $\frac{50 - \chi}{6}$ νὰ ᾖναι ἴσοι. Ἄρα θέλο-

μεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{110 - \chi}{10} = \frac{50 - \chi}{6} \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνες $\chi = -40$.

Ἄν καὶ εὐρομεν διὰ τὴν χ τιμὴν ἀρνητικὴν, δὲν δυνάμεθα νὰ εἰπωμεν ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον· διότι εἶναι φανερόν ὅτι, ἐπειδὴ ὁ ἀπὸ τοῦ Α ἀναχωρῶν ταχυδρόμος ἔχει μεγαλειτέραν ταχύτητα τοῦ ἀπὸ τοῦ Β ἀναχωροῦντος, θέλει ἀναγκάως φθάσει ὁ μὲν τὸν δὲ εἰς τι σημεῖον τῆς ἀπροσδιορίστου ὁδοῦ ΑΒΧ. Ἡ ἀρνητικὴ λοιπὸν λύσις πρέπει νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὴν ὑφ' ἡμῶν ἀνθαιρέτως γενομένην πρὸς μὀρφωσιν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως (1) ὑπόθεσιν, ὅτι οἱ ταχυδρόμοι θέλουσι συναντηθῇ εἰς τι σημεῖον Σ, καίμενον μεταξὺ τοῦ Β καὶ Γ.

Τῷ ὄντι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάντησις αὐτῶν θέλει γένη εἰς τὸ σημεῖον Σ', καὶ παραστήσωμεν πάλιν διὰ χ τὴν ἀπόστασιν ΓΣ', θέλομεν ἔχει, σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω, τὴν ἐξῆς πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἐξίσωσιν

$$\frac{110 + \chi}{10} = \frac{50 + \chi}{6} \quad (2),$$

ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ $\chi = 40$. Θέλομεν λοιπὸν εὐρεῖ τὴν αὐτὴν τιμὴν διὰ τὴν χ , ἀλλὰ μὲ ἐναντίον σημεῖον, τοῦθ' ὅπερ ἡδυνάμεθα καὶ νὰ προΐδωμεν. Διότι ἡ ἐξίσωσις (2) εἶναι αὐτὴ ἡ ἐξίσωσις (1), ἐν ἣ ἀντὶ τῆς χ ἐτέθη $-\chi$. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν (1) δίδει πάντοτε τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, φθάνει μόνον νὰ λαμβάνωμεν τὴν τυχὸν εὐρεθησομένην ἀρνητικὴν τιμὴν τῆς χ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ σημείου Γ, ἂν πρὸς μὀρφωσιν αὐτῆς ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐκ τῶν προηγουμένων ὅτι

Ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ τῆς ἀγνώστου, ἡ ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως

τοῦ προβλήματος εὐρισκομένη, δεικνύει πολλαῖς ὅχι ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ἀλλ' ὅτι ἡμεῖς διὰ τὴν μὲν ὁρῶμεν τῆς ἐξίσωσης ὑπεθέσαμεν τι ἀδύνατον γὰρ πραγματοποιηθῇ κατὰ τὰ δεδομένα αὐτοῦ. Τότε ἡ εὐρεθεῖσα ἀρνητικὴ τιμὴ, λαμβανομένη θετικῶς καὶ κατ' ἀντίθετον φορὰν ἐκείνης, καθ' ἣν κατ' ἀρχὰς ἐλήφθη, θέλει παριστᾶ τὴν πραγματικὴν λύσιν τοῦ αὐτοῦ προβλήματος.

ΣΥΜΒΟΛΑ ΤΟΥ ΑΔΥΝΑΤΟΥ ΚΑΙ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΥ

58. Συμβαίνει πρὸς τούτοις, ὅταν λύωμεν ἐξίσωσιν τινα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ μίαν ἄγνωστον, ἢ σύστημά τι πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαριθμῶν ἄγνώστων, ἢ τελικὴ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ τὴν τιμὴν τῆς ἄγνωστου, νὰ μὴ περιέχῃ τὴν ἄγνωστον ἢ νὰ ἔχῃ καὶ τὰ δύο αὐτῆς μέλη ἴσα τῷ μηδενί. Ἵνα δὲ ἴδωμεν τί ἐκατέρω τῶν περιπτώσεων τούτων ἐκφράζει, ἃς λάβωμεν παραδείγματά τινα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. — Νὰ εὐρεθῇ ὁ ἀριθμὸς, οὗτος τὸ τρίτον αὐξηθὲν κατὰ 75 καὶ τὰ πέντε δωδέκατα ἐλαττωθέντα κατὰ 35, γὰρ ἀποτελῶσι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὅν καὶ τὰ τρία τέταρτα αὐτοῦ αὐξηθέντα κατὰ 49.

Ἄν παραστήσωμεν διὰ x τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θέλομεν ἔχει κατὰ κατὰ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{3} + 75 + \frac{5x}{12} - 35 = \frac{3x}{4} + 49, \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διαδοχικῶς

$$\begin{aligned} 4x + 40 \cdot 12 + 5x &= 9x + 49 \cdot 12, \\ 4x + 5x - 9x &= 49 \cdot 12 - 40 \cdot 12, \\ 0 &= 108. \end{aligned}$$

Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν (1), ἡ παριστῶσα τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, ἀντὶ νὰ μᾶς δώσῃ διὰ τὴν ἄγνωστον τιμὴν τινα θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν, ἤγαγεν ἡμᾶς εἰς τὴν προφανῶς ἄλογον ἰσότητα $0 = 108$. Δὲν ὑπάρχει λοιπὸν οὐδεμία τιμὴ τῆς x , οὔτε θετικὴ οὔτε ἀρνητικὴ, ἥτις νὰ ταῦτοποιῇ τὴν ἐξίσωσιν (1), ἐπομένως δὲν ὑπάρχει οὐδεὶς ἀριθμὸς, ὅστις νὰ δύναται νὰ ταῦτοποιῇ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, τὰς ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἐξίσωσης παριστωμένας.

Ὅσακις λοιπόν, ἐργαζόμενοι ἐπὶ τινας ἐξισώσεις κατὰ τοὺς ἀποδειχθέντας κανόνας, φθάνομεν εἰς τινα ἰσότητα, ἣτις γὰρ μὴ περιέχῃ τὴν ἀγνώστον καὶ τῆς ὁποίας τὸ δεύτερον μέλος γὰρ μὴ ᾗται μηδέν, πρέπει γὰρ συμπεράνωμεν ὅτι ἦτε ἐξίσωσις καὶ τὸ προβλημα, οὗτινος τὴν λύσιν παριστᾷ αὕτη, εἶναι ἄλογα ἢ ἀδύνατα.

Καὶ τῷ ὄντι, ἂν ἐν τῇ ἐξίσωσι (1) μεταφέρωμεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τὸν ὅρον αὐτῆς $\frac{3}{12}$ καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς ἐν ἑκατέρῳ αὐτῆς μέλει δυνατάς ἀναγωγάς, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{3x}{4} + 40 = \frac{3x}{4} + 49,$$

ἣτις εἶναι προφανῶς ἄλογος· διότι ὅποιονδήποτε καὶ ἂν ὑποτεθῇ τὸ x , εἶναι ἀδύνατον τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ ἀυξηθέντα κατὰ 40 νὰ ἀποτελῶσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ὃν καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ ἀυξηθέντα κατὰ 49.

Τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι ὅλως διάφορον τοῦ ἀδυνατου τῶν προηγουμένων προβλημάτων. Ἐκεῖ τὸ ἀδύνατον προέκυπτεν ὅχι διότι οὐδεμία τιμὴ τῆς ἀγνώστου ἡδύνατο νὰ ταῦτοποιήσῃ τὰς ἐξισώσεις αὐτῶν, ἀλλὰ διότι ἡ φύσις τῶν προβλημάτων, ὧν τὰς συνθήκας αὐταὶ παρίστων, ἀπῆτει ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων νὰ ᾗναι θετικάι, καὶ ὅχι ἀρνητικάι, ὡς ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων ἐξήγετο. Ἐνταῦθα τὸ ἀδύνατον εἶναι ἀπὸλυτον, τουτέστιν οὐδεμία ποσότης, οὔτε θετικὴ οὔτε ἀρνητικὴ, δύναται νὰ ταῦτοποιήσῃ τὴν τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος παριστῶσαν ἐξίσωσιν.

Ἐστω πρὸς τούτοις πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. — Ἐρωτηθεὶς τις πόσας δραχμὰς ἐκέρδησεν ἐφέτος, ἀπεκρίθη. Ἐὰν προσθέσῃς ὃ εἰς τὸ τρίτον τῶν ὅσας ἐκέρδησα τὸ παρελθὸν ἔτος, θέλεις ἔχει τὸ ἡμισὺ τῶν ὅσας ἐκέρδησα ἐφέτος· ἂλλ' ἐὰν ἀφαιρέσῃς ὃ ἐκ τοῦ τριπλασίου τοῦ ἡμίσεως τῶν ὅσας ἐκέρδησα ἐφέτος, θέλεις ἔχει ἀκριβῶς ὅ,τι ἐκέρδησα τὸ παρελθὸν ἔτος. Ζητεῖται πόσας δραχμὰς ἐκέρδησεν ἐφέτος.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν, ὃς ἐκέρδησεν ἐφέτος, καὶ διὰ y τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν, ὃς ἐκέρδησε πέρυσιν, θέλομεν ἔχει πρὸς παράστασιν τῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος τὰς ἐξῆς δύο ἐξισώσεις

$$\frac{x}{2} = \frac{\psi}{3} + 5 \quad (1),$$

$$\psi = \frac{3x}{2} - 5 \quad (2),$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα διαδοχικῶς, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἀντὶ τῆς ψ τὴν ὑπὸ τῆς (2) δεδομένην τιμὴν αὐτῆς,

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{3} \left(\frac{3x}{2} - 5 \right) + 5,$$

$$\frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{5}{3} + 5,$$

$$3x = 3x - 10 + 30,$$

$$0 = 20,$$

τουτέστι θέλομεν φθάσει εἰς μίαν ἄλογον ἰσότητα, τοῦθ' ὅπερ δεικνύει ὅτι δὲν ὑπάρχουσι τιμαὶ τῆς x καὶ ψ , αἵτινες νὰ δύνανται νὰ ταῦτοποιήσωσι συγχρόνως τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις (1) καὶ (2). Τὸ προβλημα λοιπόν, οὗτινος τὰς συνθήκας παριστῶσιν αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος ἐξισώσεις, περιέχει ἐν αὐτῷ ἀδύνατον πρὸς ἐκπλήρωσιν συνθήκας.

Καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν δώσωμεν εἰς ἑκατέραν τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) τὴν πρὸς λύσιν αὐτῶν ἀπαιτουμένην μορφήν, θέλομεν ἔχει τὰς δύο ἐξισώσεις

$$3x - 2\psi = 30 \quad (1),$$

$$3x - 2\psi = 10 \quad (2),$$

ὧν τὰ μὲν πρῶτα μέλη εἶναι τὰ αὐτά, τὰ δὲ δευτέρα διαφέρουσι κατὰ 20, τοῦθ' ὅπερ προφανῶς ἀδύνατον.

Ἐπειδὴ δὲ ἑκατέρα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εἶναι αὐτὴ καθ' ἑαυτὴν ὅχι μόνον δυνατὴ, ἀλλὰ δύναται νὰ ταῦτοποιηθῇ, ὥς θέλομεν ἰδεῖ παρακατιόντες, δι' ἀπείρων συστημάτων τιμῶν τῆς x καὶ ψ , συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ἀδύνατον συνίσταται εἰς τοῦτο μόνον, ὅτι δὲν ὑπάρχει κοινόν τι σύστημα τιμῶν τῆς x καὶ ψ , δυνάμενον νὰ ταῦτοποιῇ συγχρόνως ἀμφοτέρας, ἢ, τοῦθ' ὅπερ ταῦτό, ὅτι αἱ δύο διάφοροι τοῦ προβλήματος συνθήκαι, αἱ παριστῶμεναι ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), δὲν δύνανται νὰ συνυπάρχωσι. Τοῦτου δ' ἕνεκα ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λέγουσιν ὅτι αἱ ἐξισώσεις ἢ αἱ συνθήκαι τοῦ προβλήματος εἶναι ἀντιφατικαὶ ἢ ἀσυμβίβαστοι. Ἐκ τῶν προλεχθέντων ἔπεται λοιπόν ὅτι

Ὅσακις, λόντες σύστημά τι δύο ἢ πλειότερων ἐξισώσεων, εὐρίσκομεν τελικὴν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $0=A$, τοῦ A παριστῶντος γνωστὰς ποσότητος, πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις, ἡ αἱ ὑπ' αὐτῶν παριστῶμεται συνθήκαι τοῦ προβλήματος, εἶναι ἀντιφατικαὶ ἢ ἀσυμβίβαστοι.

59. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν καὶ τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^{ον}. — Νὰ εὐρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ αὐξήθῃ κατὰ 5, τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ αὐξηθῇ κατὰ 20 καὶ τὰ $\frac{3}{6}$ αὐτοῦ ἐλάττωθῇ κατὰ 34, νὰ ἀποτελῶσιν ἄθροισμα ἴσον τῷ διπλασίῳ αὐτοῦ ἐλάττωθῇ κατὰ 5.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{2} + 5 + \frac{2(x+20)}{3} + \frac{5(x-34)}{6} = 2(x-5) \quad (1),$$

ἣτις μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν παρονομαστῶν, τὴν μεταφορὰν καὶ ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων γίνεταί

$$0=0.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐφθάσαμεν εἰς μίαν ταυτότητα χωρὶς νὰ προσδιορίσωμεν οὐδεμίαν διὰ τὴν ἄγνωστον x τιμὴν, συμπεραίνομεν ὅτι αὕτη δύναται νὰ ᾖναι ὅποιαδήποτε, ἐπομένως ὅτι ἡ ἐξίσωσις καὶ τὸ πρόβλημα, οὕτινος τὰς συνθήκας παριστᾷ αὕτη, εἶναι ἀπροσδιόριστοι.

Καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς ἐν τῷ πρώτῳ μέλει τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως (1) σεσημειωμένας πράξεις, θέλομεν εὑρεῖ διαδοχικῶς

$$\frac{3x+30+4x+80+5x-170}{6}, \quad \frac{12x-60}{6}, \quad 2x-10, \quad 2(x-5),$$

τουτέστιν αὐτὸ τὸ δεύτερον μέλος τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως (1). Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν (1) δὲν εἶναι πράγματι ἐξίσωσις, ἀλλὰ ταυτότης, καὶ καθὼς ταυτότης θέλει ὑπάρχει ὅποιαδήποτε καὶ ἂν ᾖναι ἡ τιμὴ τῆς ἐν αὐτῇ ἄγνωστου x . Λοιπὸν

Ὅσακις, λόντες ἐξίσωσιν τινα, εὐρίσκομεν ἐν τέλει ἰσότητα, ἥς τὰ δύο μέλη νὰ ᾖναι ἴσα τῷ μηδενί, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ μὲν ἐξίσωσις εἶναι πράγματι ταυτότης, τὸ δὲ πρόβλημα, ὅστινος τὰς συνθήκας παριστᾷ αὕτη, ἀπροσδιόριστον.

Ἐστω πρὸς τούτοις πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4^{ον}. — Ἐρωτηθεὶς τις πόσας δραχμὰς ἐκέρδησεν ἐφέτος, ἀπεκρίθη. Ἐὰν προσθέσῃς 5 εἰς τὸ τρίτον τῶν ὅσας ἐκέρδησα τὸ παρελθὸν ἔτος, θέλεις ἔχει τὸ ἡμισυ τῶν ὅσας ἐκέρδησα ἐφέτος· ἀλλ' ἐὰν ἀφαιρέσῃς 15 ἐκ τοῦ τριπλασίου τοῦ ἡμίσεως τῶν ὅσας ἐκέρδησα ἐφέτος, θέλεις ἔχει ἀκριβῶς ὅ,τι ἐκέρδησα τὸ παρελθὸν ἔτος. Ζητεῖται πόσας δραχμὰς ἐκέρδησεν ἐφέτος.

Ἄν παραστήσωμεν διὰ x τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν, ἃς ἐκέρδησεν ἐφέτος, καὶ διὰ y τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν, ἃς ἐκέρδησε πέρυσι, θέλομεν ἔχει πρὸς παράστασιν τῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος τὰς ἐξῆς δύο ἐξισώσεις

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} + 5 \quad (1),$$

$$y = \frac{3x}{2} - 15, \quad (2),$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα ἀντικαθιστώντας εἰς τὴν (1) ἀντὶ τῆς y τὴν ὑπὸ τῆς (2) δεδομένην τιμὴν αὐτῆς, τὴν ἐξῆς

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{3} \left(\frac{3x}{2} - 15 \right) + 5,$$

ἣτις μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων, τὴν μεταφορὰν καὶ ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, τρέπεται εἰς τὴν ταυτότητα

$$0 = 0.$$

Συμπεραίνομεν λοιπὸν κατὰ τὰ προλεχθέντα ὅτι τὸ πρόβλημα, οὗτινος τὰς συνθήκας παριστῶσιν αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εἶναι ἀπροσδιόριστον. Καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν δώσωμεν εἰς ἑκατέραν τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) τὴν πρὸς λύσιν αὐτῶν γνωστὴν μορφήν, αὗται γίνονται

$$3x - 2y = 30 \quad (1),$$

$$3x - 2y = 30 \quad (2),$$

τουτέστιν ἀντὶ δύο διαφόρων ἐξισώσεων ἔχομεν μίαν καὶ μόνην, ἣτις δύναται νὰ ταυτοποιηθῇ κατ' ἀπείρους τρόπους. Λοιπὸν

Ὅσακις, λύοντες ἐν σύστημα δύο ἢ πλεονέκτων πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, εὐρίσκομεν ὡς τελικὴν ἐξίσωσιν τὴν ταυτότητα $0 = 0$, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σύστημα, ἐπομένως καὶ τὸ πρόβλημα, οὗτινος τὰς συνθήκας τοῦτο παριστᾷ, εἶναι ἀπροσδιόριστον.

Παρατήρησις. — Ὅταν ἔχωμεν πλεονέκτας τῶν δύο πρωτοβαθμίου

ἐξισώσεις, τὸ ἀδύνατον ἢ ἀπροσδιόριστον δὲν προκύπτει πάντοτε ἐκ τοῦ ὅτι ἡ μία τούτων εἶναι ἀσυμβίβαστος ἢ συνέπεια μιᾶς ὁποιασδήποτε τῶν ἄλλων. Ἐνίοτε τὸ ἀδύνατον ἢ ἀπροσδιόριστον προκύπτει ἐκ τοῦ ὅτι ἡ μία τούτων εἶναι ἀδύνατος ὡς πρὸς δύο ἢ πλείοτερας ὁμοῦ λαμβανομένας, ἢ εἶναι συνέπεια δύο ἢ πλείοτερων ὁμοῦ λαμβανομένων. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν ἐκάτερον τῶν δύο συστημάτων

$$3x - 2y + 3w - 5p = 48 \quad -2x + y + 3w - 2p = 40 \quad (1),$$

$$x + 3y - w + 2p = 12 \quad x + 2y - 2w + 3p = 30 \quad (2),$$

$$4x + y + 2w - 3p = 23 \quad -5x + 4y - w - p = 25 \quad (3),$$

$$2x - y - 4w + 3p = 54 \quad x + 7y - 3w + 7p = 130 \quad (4),$$

ἠθέλομεν εὑρεῖν ὅτι τὸ μὲν πρῶτον εἶναι ἀδύνατον καὶ τὸ δεύτερον ἀπροσδιόριστον. Τὸ ἀδύνατον δὲ τοῦ πρώτου προκύπτει ἐκ τοῦ ὅτι ἡ ἐξίσωσις (3) εἶναι ἀσυμβίβαστος οὐχὶ πρὸς ἐκάστην τῶν τριῶν ἄλλων, ἀλλὰ πρὸς τὰς δύο πρώτας, ὁμοῦ λαμβανομένας. Διότι, ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$4x + y + 2w - 3p = 60,$$

ἣς τὸ μὲν πρῶτον μέλος εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (3), τὸ δὲ δεύτερον διαφέρει τοῦ δευτέρου τῆς (3) κατὰ 37, τοῦθ' ὅπερ προφανῶς ἀδύνατον.

Ὡσαύτως τὸ ἀπροσδιόριστον τοῦ δευτέρου συστήματος προκύπτει οὐχὶ ἐκ τοῦ ὅτι ἡ μία τούτων εἶναι συνέπεια ὁποιασδήποτε τῶν λοιπῶν, ἀλλὰ διότι ἡ ἐξίσωσις (4) εἶναι συνέπεια τῆς (1) καὶ (2), ὁμοῦ λαμβανομένων. Διότι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 3 καὶ προσθέσωμεν τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν κατὰ μέλη μετὰ τῆς (1), θέλομεν ἔχει τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν (4).

Εἶναι νομιζομεν περιττὸν νὰ προσθέσωμεν ἐνταῦθα ὅτι εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων δυνατὸν νὰ παρουσιασθῶσι καὶ ἄλλοι λόγοι ἐκτὸς τῶν προεκτεθέντων, δι' οὓς ταῦτα νὰ ἦναι ἀδύνατα. Ἄν π. χ. ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος ἀπαιτῇ τὸ ζητούμενον νὰ ἦναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, καὶ εὕρωμεν δι' αὐτὸ τιμὴν κλασματικὴν, θέλομεν συμπεράνει ἀμέσως ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον. Ὡσαύτως, ἂν ἡ τιμὴ ἀγνώστου τινὸς πρέψει νὰ ἦναι μικροτέρα ἀριθμοῦ τινος δεδομένου, καὶ εὕρωμεν δι' αὐτὴν τιμὴν μεγαλειτέραν, θέλομεν ἐπίσης συμπεράνει ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον. Καὶ ἐν γένει, ὅσάκις ἡ ἐκφώνησις προβλήματος τινος περιέχει ῥητὰς ἢ ἀρρήτους συνθήκας, αἱ δὲν δυνάμεθα νὰ παραστήσω-

μεν δι' ἐξισώσεων, πρέπει πάντοτε μετὰ τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος νὰ ἴδωμεν, ἂν αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ταῦτο-ποιῶσι καὶ ταύτας, ἵνα ἀποφανθῶμεν μετὰ βεβαιότητος περὶ τοῦ δυνατοῦ τοῦ λυθέντος προβλήματος.

ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΙΣ

60. Ὄταν λύωμεν πρόβλημά τι, οὐτινος τὰ δεδομένα παρίστανται δι' ἀριθμῶν, εὐρίσκομεν μὲν τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώστου (καὶ ὑποθέτομεν ἐνταῦθα, ἵνα ὀρίσωμέν πως τὰς ἰδέας, ὅτι εἶναι ἐν τῷ ζητούμενῳ), τὴν ταῦτοποιοῦσαν τὰς συνθήκας αὐτοῦ, ἀλλ' αὕτη, ἐπειδὴ προκύπτει ἐκ διαφόρων ἐπὶ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος πράξεων, ὧν ἡ ἐκτέλεσις εἶναι δυνατή, δὲν περιέχει ἐν ἑαυτῇ οὐδὲν ἴχνος αὐτῶν, ἐπομένως δὲν μᾶς δεικνύει κατὰ τίνα τρόπον τὸ ζητούμενον ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν δεδομένων. Ὄταν ὅμως τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος παρίστανται διὰ γραμμάτων, ἐπειδὴ αἱ ἐπ' αὐτῶν ἐκτελεστέαι πράξεις σημειοῦνται μόνον, ἡ τιμὴ τῆς ἀγνώστου, τῆς ταῦτοποιούσης τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, θέλει ἐκφράζεσθαι διὰ τινος τύπου, ὅστις θέλει δεικνύει ποῖαι πράξεις πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν δεδομένων πρὸς ἄμεσον εὑρεσιν τοῦ ζητουμένου. Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα, οὐτινος τὰ δεδομένα παρίστανται δι' ἀριθμῶν.

Κρήνη τις δύναται νὰ πληρώσῃ δεξαμενὴν εἰς 24 ὥρας, ἐτέρα κρήνη εἰς 12 καὶ τρίτη κρήνη εἰς 8. Εἰς πόσον χρόνον καὶ αἱ τρεῖς κρήναι, ὁμοῦ ῥέουσai, θέλουσι πληρώσει τὴν αὐτὴν δεξαμενὴν;

Παριστῶντες διὰ x τὸν ζητούμενον χρόνον, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς πρὸς παράστασιν τῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{24} + \frac{x}{12} + \frac{x}{8} = 1,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν παρονομαστῶν, τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὄρων κτλ. $x=4$. Εὐρομεν λοιπὸν ὅτι μετὰ 4 ὥρας καὶ αἱ τρεῖς κρήναι, ὁμοῦ ῥέουσai, θέλουσι πληρώσει τὴν δεξαμενὴν, ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι ἀριθμοὶ 24, 12, 8, ἐφ' ὧν ἐκτελοῦνται αἱ διάφοροι πράξεις, ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ 4 δὲν περιέχει ἐν ἑαυτῇ οὐδὲν ἴχνος αὐτῶν, ἐπομένως δὲν δυνάμεθα νὰ γνωρίζωμεν κατὰ τίνα τρόπον τὸ ζητούμενον ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν δεδομένων.

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ αὐτὸ πρόβλημα, οὕτινος τὰ δεδομένα παρίστανται διὰ γραμμάτων.

Κρήνη τις δύναται νὰ πληρώσῃ δεξαμενὴν εἰς α ὥρας, ἐτέρα κρήνη εἰς β καὶ τρίτη κρήνη εἰς γ. Εἰς πόσον χρόνον καὶ αἱ τρεῖς κρήναι, ὁμοῦ ρέουσai, θέλουσι πληρώσει τὴν αὐτὴν δεξαμενὴν;

Παριστῶντες διὰ x τὸν ζητούμενον χρόνον, θέλομεν ἔχει πρὸς παράστασιν τῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{\gamma} = 1,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν παρονομαστῶν κτλ.

$$x = \frac{ab\gamma}{b\gamma + a\gamma + ab} \quad (1),$$

ἐπειδὴ δὲ αἱ ἐπὶ τῶν δεδομένων a , b , γ πρὸς εὑρεσιν τοῦ ζητουμένου x ἐκτελεστέαι πράξεις σημειοῦνται μόνον, ἡ ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξίσωσως εὑρεθεῖσα τιμὴ $\frac{ab\gamma}{b\gamma + a\gamma + ab}$ τῆς x μᾶς δεικνύει πῶς αὕτη ἐξαρτάται ἐκ τῶν δεδομένων, τουτέστι ποῖαι πράξεις πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν δεδομένων πρὸς ἄμεσον εὑρεσιν τοῦ ζητουμένου. Καὶ τῷ ὄντι, ἂν ἐν τῷ τύπῳ (1) θέσωμεν 24 ἀντὶ τοῦ a , 12 ἀντὶ τοῦ b καὶ 8 ἀντὶ τοῦ γ , θέλομεν ἔχει

$$x = \frac{24 \cdot 12 \cdot 8}{12 \cdot 8 + 24 \cdot 8 + 24 \cdot 12} = 4,$$

τουτέστι θέλομεν εὑρεῖ τὴν αὐτὴν τιμὴν 4, ἣν εὑρομεν λύσαντες τὸ προηγούμενον πρόβλημα, εἰς ὃ τὸ γενικὸν διὰ τῶν ἀνωτέρω ἀντικαταστάσεων μετετράπη.

61. Ἡ διὰ τύπου παράστασις τῆς τιμῆς τῆς ἀγνώστου, τῆς ταυτοποιούσης τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, οὕτινος τὰ δεδομένα παρίστανται διὰ γραμμάτων, δὲν ἔχει μόνον τὸ πολύτιμον πλεονέκτημα τοῦ νὰ μᾶς δεικνύῃ ποῖαι πράξεις πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος, ὅποιαδήποτε καὶ ἂν ᾖναι ταῦτα, πρὸς ἄμεσον εὑρεσιν τοῦ ζητουμένου. Πολλάκις διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου δυνάμεθα, ὑποθέτοντες ὅτι τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος λαμβάνουσι πάσας τὰς δυνατάς τιμὰς, νὰ εὑρωμεν εὐκόλως ποῖαι τούτων τῶν τιμῶν παρέχουσιν ἀξιοπαρατηρήτους τινὰς μερικότητας, ἃς ἐκ τῶν προτέρων ἢ δὲν ἡδυνάμεθα ἢ δὲν μᾶς ἦτο εὐκόλον νὰ προῖδωμεν, ἢ ἠθέλομεν ὑποβληθῇ εἰς

νέους κόπους, ἵνα σχηματίσωμεν νέαν ἐξίσωσιν καὶ εὐρώμεν τὴν εἰς ταύτας ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ ζητουμένου. Ἡ τοιαύτη τῶν τύπων τῶν γενικῶν προβλημάτων ὅφ' ἡμῶν γενομένη ἐξέτασις καλεῖται διασκόπησις τῶν προβλημάτων, ταύτην δὲ δὲν δυνάμεθα ἄλλως νὰ καταστήσωμεν καταληπτὴν ἢ ἐφαρμόζοντες αὐτὴν ἐπὶ τινος παραδείγματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. — Δύο κινητὰ K καὶ K' κινουῦνται ἴσοταχῶς ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀπροσδιορίστου εὐθείας EO καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν EO . Γνωρίζομεν ὅτι τὸ κινητὸν K ἔχει ταχύτητα τ καὶ ἔφθασεν εἰς τὸ σημεῖον A ἀριθμὸν τινα ὥρων ε πρὶν ἢ τὸ κινητὸν K' , ὅπερ ἔχει ταχύτητα τ' , φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον B , οὗτινος ἡ ἀπὸ τοῦ A ἀπόστασις α εἶναι γνωστὴ. Ζητεῖται εἰς ποῖον σημεῖον τῆς εὐθείας EO θέλουσι συναπαντηθῇ.

K			K'		
E	Σ'	A	Σ''	B	Σ
					Θ

* Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ κινητὰ K καὶ K' συναπαντῶνται εἰς τι σημεῖον Σ πρὸς τὸ μέρος EO καὶ παραστήσωμεν διὰ x τὴν ἄγνωστον ἀπόστασιν $B\Sigma$. Ἡ ἀπόστασις $A\Sigma$ θέλει τότε παρασταθῇ διὰ $\alpha + x$, οἱ δὲ χρόνοι, οὓς θέλουσι χρειασθῇ τὰ κινητὰ K καὶ K' , ἵνα διανύσωσι τὰς ἀποστάσεις $\alpha + x$ καὶ x , θέλουσιν εἶναι $\frac{\alpha+x}{\tau}$ καὶ $\frac{x}{\tau'}$. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τὸ κινητὸν K ἔφθασεν εἰς τὸ σημεῖον A τῆς ὁδοῦ ε ὥρας πρὶν ἢ τὸ K' φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον B . Λοιπὸν, ἵνα τὰ κινητὰ K καὶ K' συναντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Σ , πρέπει ὁ χρόνος $\frac{\alpha+x}{\tau}$ νὰ ὑπερέχῃ τὸν χρόνον $\frac{x}{\tau'}$ κατὰ ε . Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος

$$\frac{\alpha+x}{\tau} - \frac{x}{\tau'} = \varepsilon \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα εὐκόλως κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας

$$x = \frac{\tau'(a - \tau\varepsilon)}{\tau - \tau'} \quad (2).$$

Εὐρομεν λοιπὸν, λύσαντες τὸ ἀνωτέρω γενικὸν πρόβλημα, διὰ τὴν ἄγνωστον x τύπον τινά, ὅστις δεικνύει ποῖαι πράξεις πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος πρὸς ἄμεσον εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου. Μᾶς μένει δὲ τώρα νὰ δείξωμεν πῶς διασκοπεῖται ὁ τύπος (2), ὁ παριστῶν τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώστου.

1^{ον}. Ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς τοῦ τύπου (2) θέλουσιν εἶναι ἀμφοτέροι θετικοί, ὅταν ἔχωμεν συγχρόνως

$$\tau > \tau' \quad \text{καὶ} \quad a > \tau\epsilon,$$

τουτέστιν, ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ K ᾖναι μεγαλειτέρα τῆς τοῦ K', καὶ τὸ κινητὸν K, τὸ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον A τῆς ὁδοῦ εὐῶρας πρὶν ἢ φθάσῃ τὸ K' εἰς τὸ B, εὐρίσκεται μεταξὺ τοῦ A καὶ B, ὅταν τὸ K' ἔφθασεν εἰς τὸ B. Ἡ τιμὴ λοιπὸν τῆς χ θέλει εἶναι θετική, ἐπομένως ἡ συνάντησις τῶν κινητῶν K καὶ K' θέλει γείνει πέραν τοῦ B πρὸς τὸ μέρος BΘ τῆς ἀπροσδιορίστου εὐθείας ΕΘ. Καὶ τῷ ὄντι, ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ K ᾖναι μεγαλειτέρα τῆς τοῦ K' καὶ τοῦτο εὐρίσκεται πρὸ τοῦ σημείου B, ὅταν τὸ K' εὐρίσκηται εἰς τὸ B, ἔπεται ὅτι ἀναγκαίως τὸ K θέλει φθάσει τὸ K' πρὸς τὸ μέρος BΘ τῆς εὐθείας ΕΘ.

2^{ον}. Ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς τοῦ τύπου (2) θέλουσιν εἶναι ἀμφοτέροι ἀρνητικοί, ὅταν ἔχωμεν συγχρόνως

$$\tau < \tau' \quad \text{καὶ} \quad a < \tau\epsilon,$$

τουτέστιν, ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ K ᾖναι μικροτέρα τῆς τοῦ K' καὶ τὸ ὑπ' αὐτοῦ διανυθὲν διάστημα σε μέχρῃς οὗ τὸ K φθάσῃ εἰς τὸ B εἶναι μεγαλείτερον τοῦ a . Ἡ τιμὴ λοιπὸν τῆς χ θέλει εἶναι καὶ τότε θετική, τοῦθ' ὑπερ δεικνύει ὅτι ἡ συνάντησις τῶν κινητῶν θέλει γείνει ὡς προὔπεσθῃ πρὸς τὸ μέρος τῆς BΘ. Καὶ τῷ ὄντι, ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις $\tau\epsilon$ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς a , ἔπεται ὅτι, ὅταν τὸ κινητὸν K' φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον B, τὸ κινητὸν K εὐρίσκεται πέραν τοῦ σημείου B πρὸς τὸ μέρος τῆς BΘ, καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἐτέραν ὑπόθεσιν τὸ κινητὸν K' κινεῖται ταχύτερον τοῦ K, ἔπεται ὅτι τοῦτο θέλει ἀναγκαίως φθάσει τὸ πρὸ αὐτοῦ κινητὸν K πρὸς τὸ μέρος BΘ.

3^{ον}. Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχωμεν συγχρόνως

$$\tau < \tau' \quad \text{καὶ} \quad a > \tau\epsilon,$$

ὁ μὲν ἀριθμητὴς τοῦ τύπου (2) θέλει εἶναι θετικός, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἀρνητικός, καὶ ἐπομένως ἡ τιμὴ τῆς χ ἀρνητική, τοῦθ' ὑπερ σημαίνει κατὰ τὰ ἐν τῇ § 57 λεχθέντα, ὅτι ἡ συνάντησις ἐγένετο ἢ θέλει γείνει πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος τοῦ BΘ, ἥτοι πρὸς τὸ μέρος BE, καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου B δεικνυομένην ὑπὸ τῆς εὐρεθείσης τιμῆς τῆς χ , θετικῶς λαμβανομένης. Καὶ τῷ ὄντι, ὅταν ἡ ἀπόστασις a ᾖναι μεγαλειτέρα τῆς $\tau\epsilon$, τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ κινητὸν K εὐρίσκεται μεταξὺ τοῦ A καὶ B, ὅταν τὸ K' φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον B, καὶ ἐπειδὴ ὑποθέτο-

μεν συγχρόνως ὅτι ἡ ταχύτης τ' εἶναι μεγαλειτέρα τῆς τ , ἔπεται ὅτι τὸ κινητὸν K δὲν δύναται ποτὲ νὰ φθάσῃ τὸ πρὸ αὐτοῦ εὐρισκόμενον καὶ ταχύτερον κινούμενον K' . Ἡ συνάντησις λοιπὸν ἐγένετο ἢ θέλει γίνε-
ναι πρὶν ἢ τὸ κινητὸν K' φθάσῃ εἰς τὸ B , καὶ τούτου ἕνεκα ὁ τύπος (2) μᾶς παρέσχε διὰ τὸ ζητούμενον ἀρνητικὴν τιμὴν.

4^ο. Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν συγχρόνως

$$\tau > \tau' \quad \text{καὶ} \quad a < \tau \epsilon,$$

ὁ μὲν ἀριθμητὴς τοῦ τύπου (2) θέλει εἶναι ἀρνητικός, ὁ δὲ παρονομα-
στὴς θετικός, καὶ ἐπομένως ἡ τιμὴ τῆς χ ἀρνητικὴ, τοῦθ' ὅπερ σημαί-
νει πάλιν ὅτι ἡ συνάντησις ἐγένετο πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος τοῦ προ-
ποθεθέντος καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου B δεικνυομένην ὑπὸ τῆς
εὐρεθείσης τιμῆς τῆς χ , θετικῶς λαμβανομένης. Καὶ τῶ ὄντι, ἐπειδὴ ἡ
ἀπόστασις a ὑποτίθεται μικροτέρα τῆς $\tau \epsilon$, ἔπεται ὅτι, ὅταν τὸ κινητὸν
 K' φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον B , τὸ κινητὸν K εὕρισκται πέραν τοῦ B' πρὸς
τούτοις, ἐπειδὴ ἡ ταχύτης τ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς τ' , τὸ κινητὸν K' ,
εὐρισκόμενον τότε ὀπίσθεν τοῦ K καὶ κινούμενον βραδύτερον, δὲν θέλει
δυνήθῃ ποτε νὰ φθάσῃ αὐτὸ πρὸς τὸ μέρος τῆς $B\Theta$. Ἐπεται λοιπὸν ὅτι
ἡ συνάντησις τῶν κινήτων ἐγένετο πρὶν ἢ τὸ κινητὸν K φθάσῃ εἰς τὸ
σημεῖον B , καὶ τούτου ἕνεκα ὁ τύπος (2) μᾶς παρέσχε διὰ τὸ ζητού-
μενον τιμὴν ἀρνητικὴν.

Δυνάμεθα δὲ νὰ ἀποδείξωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας τὸ ἀκριβὲς τῆς δοθεί-
σης εἰς τὰς εὐρεθείσας κατὰ τὰς ὑποθέσεις 3^ο καὶ 4^ο ἀρνητικὰς τῆς
ἀγνώστου χ τιμὰς ἐξηγήσεως, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

Ἐν πρώτοις ἡ εὐρεθεῖσα ἀρνητικὴ τῆς ἀγνώστου τιμὴ δεικνύει κατὰ
τὰ ἐν τῇ § 57 λεχθέντα, ὅτι ἡ ὑπ' ἡμῶν γενομένη ὑπόθεσις, ὅτι τὰ
κινητὰ K καὶ K' θέλουσι συναντηθῇ πρὸς τὸ μέρος τῆς $B\Theta$, εἶναι ἀπα-
ράδεκτος, καὶ ἐπομένως ὅτι ἡ συνάντησις θέλει γίνεσθαι πρὸ τοῦ B πρὸς
τὸ μέρος BE . Τούτου τεθέντος, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν δύο τινὰ ἢ ὅτι
ἡ συνάντησις ἐγένετο πρὸ τοῦ A εἰς τὸ σημεῖον Σ' , ἢ ὅτι αὕτη θέλει
γίνεσθαι μεταξὺ τοῦ A καὶ B εἰς τὸ σημεῖον Σ'' .

Ἄς ὑποθέσωμεν πρῶτον ὅτι ἡ συνάντησις ἐγένετο εἰς τὸ σημεῖον Σ'
πρὸ τοῦ A , καὶ ἄς παραστήσωμεν διὰ χ τὴν ἀπόστασιν $B\Sigma'$. Ἡ ἀπό-
στασις $A\Sigma'$ θέλει τότε παρασταθῇ διὰ $\chi - a$, οἱ δὲ χρόνοι, οὓς θέλουσι
χρεασθῇ τὸ μὲν κινητὸν K , ἵνα φθάσῃ ἀπὸ τοῦ Σ' εἰς τὸ A , τὸ δὲ κί-
νητὸν K' , ἵνα φθάσῃ ἀπὸ τοῦ Σ' εἰς τὸ B , θέλουσι παρασταθῇ διὰ τῶν

κλασμάτων $\frac{\chi - \alpha}{\tau}$ καὶ $\frac{\chi}{\tau}$. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τὸ κινητὸν K ἔφθασεν εἰς τὸ σημεῖον A τῆς ὁδοῦ ε ὥρας πρὶν ἢ τὸ κινητὸν K' φθάσῃ εἰς τὸ B, ἔπεται ὅτι ὁ χρόνος $\frac{\chi}{\tau}$ πρέπει νὰ ᾔναι μεγαλύτερος τοῦ $\frac{\chi - \alpha}{\tau}$ κατὰ ε, ἵνα ἡ εἰς τὸ σημεῖον Σ' συνάντησις τῶν κινητῶν ᾖ ἀληθής. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{\tau'} - \frac{\chi - \alpha}{\tau} = \varepsilon \quad (3),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα

$$\chi = \frac{-\tau'(a - \tau\varepsilon)}{\tau - \tau'} \quad (4),$$

ἡ δὲ τιμὴ αὕτη τῆς χ δὲν διαφέρει τῆς ὑπὸ τοῦ τύπου (2) παρεχομένης εἰ μὴ μόνον κατὰ τὸ σημεῖον, τοῦθ' ὅπερ καὶ προεῖδομεν.

Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι ἡ συνάντησις τῶν κινητῶν γίνεται εἰς τὸ σημεῖον Σ'', τὸ κείμενον μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B, καὶ ἂς παραστήσωμεν πάλιν διὰ χ τὴν ἀπόστασιν BΣ''. Τότε ἡ μὲν ἀπόστασις AΣ'' θέλει παρασταθῇ διὰ $a - \chi$, οἱ δὲ χρόνοι, οὓς θέλουσι χρειασθῇ τὸ μὲν κινητὸν K, ἵνα φθάσῃ ἀπὸ τοῦ A εἰς τὸ Σ'', τὸ δὲ κινητὸν K', ἵνα ἀπὸ τοῦ Σ'' φθάσῃ εἰς τὸ B, θέλουσι παρασταθῇ διὰ τῶν κλασμάτων $\frac{a - \chi}{\tau}$ καὶ $\frac{\chi}{\tau}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ κινητὸν K ἔφθασεν εἰς τὸ σημεῖον A τῆς ὁδοῦ ε ὥρας πρὶν ἢ τὸ K' φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον B, ἔπεται ὅτι ὁ χρόνος $\frac{a - \chi}{\tau}$, ὃν ἐχρειάσθη τὸ κινητὸν K, ἵνα φθάσῃ ἀπὸ τοῦ A εἰς τὸ Σ'', ἢ, ὅπερ ταῦτό, ὃν ἐχρειάσθη τὸ κινητὸν K', ἵνα φθάσῃ τὸ K εἰς τὸ Σ'', καὶ ὁ χρόνος $\frac{\chi}{\tau}$, ὃν ἐχρειάσθη τὸ κινητὸν K', ἵνα φθάσῃ ἀπὸ τοῦ Σ'' εἰς τὸ B, προστιθέμενοι πρέπει νὰ ἀποτελῶσιν ἄθροισμα ε. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει κατὰ τὴν δευτέραν ταύτην ὑπόθεσιν τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{\tau'} + \frac{a - \chi}{\tau} = \varepsilon \quad (5),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα

$$\chi = \frac{-\tau'(a - \tau\varepsilon)}{\tau - \tau'} \quad (6),$$

ἡ δὲ τιμὴ αὕτη τῆς χ δὲν διαφέρει τῆς ὑπὸ τοῦ τύπου (2) δοθείσης εἰ μὴ κατὰ τὸ σημεῖον. Παρατηρητέον δὲ πρὸς τούτοις ὅτι αἱ μὲν ἐξί-

σώσεις (3) και (5) είναι αί αυταί, και ὅτι αὗται δὲν διαφέρουσι τῆς ἐξισώσεως (4) εἰ μὴ κατὰ τὸ σημεῖον τῆς χ , ταῦθ' ἄτινα συμφωνοῦσι πληρέστατα μὲ τὰ περὶ ἀρνητικῶν τῶν προβλημάτων λύσεων ἐν τοῖς προηγουμένοις λεχθέντα.

8^{ον}. Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν

$$x = x', \text{ οὐχὶ δὲ καὶ } a = \tau\epsilon,$$

τότε ὁ μὲν παρονομαστής τοῦ τύπου (2) θέλει εἶναι μηδέν, ὁ δὲ ἀριθμητής θέλει εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ἵσος καθ' ὑπόθεσιν μὲ τινα ἀριθμὸν x , εἰς τρόπον ὥστε ἡ τιμὴ τῆς χ θέλει λάβει τότε τὴν μορφήν

$$x = \frac{r}{0}.$$

Ἵνα δὲ ἐξηγήσωμεν τί δύναται νὰ παριστᾷ κλάσμα, αὐτινος ὁ παρονομαστής εἶναι 0, τοῦ ἀριθμητοῦ ὄντος διαφόρου τοῦ μηδενός, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ὅταν ὁ παρονομαστής κλάσματός τινος, οὗτινος ὁ ἀριθμητής x μένει ἀμετάβλητος, βαίνει ἐλαττούμενος, γίνεται π. χ. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, κτλ., τὸ κλάσμα βαίνει αὐξανόμενον καὶ γίνεται $10x$, $100x$, $1000x$, κτλ. Ἐπομένως, ὅταν ὁ παρονομαστής βαίνει ἐλαττούμενος μέχρις ἐκμηδενίσεως, τὸ κλάσμα θέλει βαίνει αὐξανόμενον πέραν παντὸς ὁρίου, ὥσθ' μέγα καὶ ἂν ὑποτεθῇ, τοῦθ' ὅπερ ἐκφράζουσι λέγοντες, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ποσότητός τινος διὰ τοῦ μηδενός εἶναι ἀπειρον καὶ μεταχειρίζονται πρὸς παράστασιν αὐτοῦ τὸ σύμβολον ∞ .

Ἡ παράστασις λοιπὸν $\frac{r}{0}$, ἡ παριστώσα κατὰ τὴν γενομένην ἐνταῦθα ὑπόθεσιν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, δεικνύει ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀπόστασις, ὥσθ' μεγάλη καὶ ἂν ὑποτεθῇ αὕτη, καθ' ἣν τὰ δύο κινητὰ νὰ συναντηθῶσιν ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι ἀδύνατον. Καὶ τῷ ὄντι, ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι $x = x'$, ἔπεται ὅτι τὰ κινητὰ K καὶ K' ἔχουσι τὴν αὐτὴν ταχύτητα, καὶ ἐπειδὴ πρὸς τούτοις ἡ ἀπόστασις a εἶναι διάφορος τῆς $\tau\epsilon$, ἔπεται ὅτι τὰ κινητὰ K καὶ K' , τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ταχύτητα καὶ μὴ εὐρισκόμενα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον συγχρόνως, δὲν δύνανται προφανῶς οὐδέποτε νὰ συναντηθῶσι· διότι ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀρχικὴ αὐτῶν ἀπόστασις θέλει μένει πάντοτε ἡ αὐτή.

Παρατηρητέον πρὸς τούτοις ὅτι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὁ τύπος (2)

μετατρέπεται εἰς τὴν ἰσότητα $0=r$, καθ' ἣν ἡ μὲν ἄγνωστος x ἐκλείπει, τὸ δὲ δεύτερον μέλος εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, τουτέστιν ἀπαντῶμεν, ὡς ἦτο ἐπόμενον, τὸ αὐτὸ σύμβολον τοῦ ἀδυνάτου, περὶ οὗ ἐπραγματεύθημεν προηγουμένως ἐν τῇ § 58.

6^ο. Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν συγχρόνως

$$r=r' \text{ καὶ } a=te,$$

τότε ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς τοῦ τύπου (2) θέλουσιν εἶναι μηδέν, ἡ δὲ δι' αὐτοῦ διδομένη τιμὴ τῆς x γίνεται

$$x=\frac{0}{0}.$$

Δυνάμεθα δὲ λίαν εὐκόλως νὰ ἐρμηνεύσωμεν τὴν νέαν ταύτην παράστασιν. Διότι, ἐπειδὴ εἰς πᾶσαν διαίρεσιν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον πρέπει νὰ ἰσοῦται τῷ διαιρετέῳ, εἶναι φανερόν ὅτι, ὅποιονδήποτε καὶ ἂν ὑποτεθῇ τὸ x , τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0 θέλει δώσει τὸν διαιρετέον 0 . Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι τὸ σύμβολον $\frac{0}{0}$ παριστᾷ ἐνταῦθα ἀπροσδιόριστόν τι μέγεθος. Καὶ τῷ ὄντι, ἐκ τοῦ ὅτι $r=r'$ καὶ $a=te$, ἔπεται ὅτι τὰ κινητὰ K καὶ K' ἔχουσι τὴν αὐτὴν ταχύτητα καὶ εὐρίσκονται ὁμοῦ εἰς τὸ σημεῖον B . Ἄρα θέλουσιν εἶναι πάντοτε ἡνωμένα.

Παρατηρητέον καὶ ἐνταῦθα ὅτι ὁ τύπος (2) μετατρέπεται κατὰ τὰς γενομένας ὑποθέσεις εἰς τὴν ταυτότητα $0=0$, ἥτις εἶναι κατὰ τὰ ἐν τῇ § 59 λεχθέντα τὸ σύμβολον τοῦ ἀπροσδιορίστου.

7^ο. Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ κινητὸν K' κινεῖται κατ' ἐναντίαν φορὰν τῆς ὑποτεθείσης, κατὰ τὴν φορὰν $ΘΕ$, καὶ ἂν λύσωμεν τὸ πρόβλημα κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην, θέλομεν εὐρεῖ, ὑποθέτοντες ὅτι ἡ συνάντησις αὐτῶν γίνεται εἰς τὸ σημεῖον Σ , τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$\frac{a+x}{r} + \frac{x}{r'} = e,$$

ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ

$$x = \frac{-r'(a-te)}{r+r'} \quad (7),$$

Βλέπομεν δὲ ὅτι ὁ τύπος (7) προκύπτει ἀμέσως ἐκ τοῦ τύπου (2), ἂν τεθῇ ἐν αὐτῷ $-r'$ ἀντὶ τοῦ r' . Ὅταν λοιπὸν κινητὸν τι μεταβάλλῃ τὴν φορὰν τῆς κινήσεώς του, εἶναι περιττὸν νὰ λύσωμεν ἐκ νέου τὸ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην σχηματιζόμενον πρόβλημα, ἀρκεῖ μόνον ἐν τῷ

τύπῳ νὰ μεταβάλλωμεν τὸ σημεῖον τῆς ποσότητος, τῆς παριστώσεως τὴν ταχύτητα τοῦ μεταβαλλόντος φορὰν κινήτου.

Ὁμοιοτρόπως σκεπτόμενοι θέλομεν εὑρεῖ ὅτι

Ἄν τὸ κινήτὸν K μεταβάλλῃ φορὰν, πρέπει ἐν τῷ τύπῳ (2) νὰ μεταβάλλωμεν τὸ τ εἰς $-\tau$, ἵνα ἔχωμεν τὴν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ ζητουμένου.

Ἄν ἀμφοτέρω τὰ κινήτὰ K καὶ K' μεταβάλλωσι φορὰν, πρέπει νὰ θέσωμεν ἐν τῷ αὐτῷ τύπῳ (2) $-\tau$ ἀντὶ τ καὶ $-\tau'$ ἀντὶ τοῦ τ' , καὶ θέλομεν ἔχει, χωρὶς νὰ ἤμεθα ἠναγκασμένοι νὰ σχηματίζωμεν ἐκ νέου τὴν εἰς τὴν ὑπόθεσιν ταύτην ἀντιστοιχοῦσαν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος, τὴν τιμὴν τοῦ ζητουμένου.

Ἄν τέλος τὸ κινήτὸν K ἔφθασεν εἰς τὸ σημεῖον A οὐχὶ ε ὥρας πρὶν ἢ τὸ K' φθάσῃ εἰς τὸ B , ἀλλὰ ε ὥρας μετὰ τὴν εἰς τὸ B ἄφιξιν τοῦ K' , θέλομεν ἰδεῖ ὅτι ὁ αὐτὸς τύπος (2), ἐν ᾧ ἠθέλομεν θέσει $-\varepsilon$ ἀντὶ τοῦ ε , θέλει μᾶς δώσει τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν ὑπόθεσιν ταύτην τιμὴν τοῦ ζητουμένου.

Τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα ἐξαγόμενα ἀρκοῦσι βεβαίως νὰ καταδείξωσιν εἰς πάντα τὰ πλεονεκτήματα τῆς διὰ γραμμάτων παραστάσεως τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος, τὸν τρόπον, ὃν πρέπει νὰ ἀκολουθῇ τις διασκοπῶν αὐτὸ καὶ τὰς μεγάλας εὐκολίας, ἃς παρέχει ἡ εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς εἰσαγωγή τῶν ἀρνητικῶν ποσοτήτων.

Παρατήρησις 4. — Δὲν πρέπει νὰ νομίσῃ τις ὅτι, ὁσάκις κατὰ τινὰ ὑπόθεσιν ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς κλάσματός τινος, παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ ζητουμένου, γίνονται μηδέν, τὸ πρόβλημα εἶναι πάντοτε πράγματι ἀπροσδιόριστον. Πολλὰκις συμβαίνει οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος νὰ ἔχωσι κοινόν τινα παράγοντα, ὅστις μηδενίζεται κατὰ τὴν γενομένην ὑπόθεσιν, μετὰ δὲ τὴν ἐξάλειψιν αὐτοῦ, τὸ μένον κλάσμα νὰ ἔχῃ ὀρισμένην τιμὰν τιμὴν, ἢ νὰ ἦναι 0, ἢ ἡ τιμὴ αὐτοῦ νὰ ἦναι ἄπειρος. Παραδείγματος χάριν, τὰ κλάσματα.

$$\frac{3a^2 - 3}{2a - 2},$$

$$\frac{a^2 - 2a + 1}{3a^2 - 3},$$

$$\frac{3a^2 - 3}{a^2 - 2a + 1}$$

γίνονται $\frac{0}{0}$, ἂν ὑποθέσωμεν ἐν αὐτοῖς $a=1$. Ἀλλ' ἐὰν γράψωμεν αὐτὰ ὡς ἐξῆς

$$\frac{3(a+1)(a-1)}{2(a-1)},$$

$$\frac{(a-1)^2}{3(a+1)(a-1)},$$

$$\frac{3(a+1)(a-1)}{(a-1)^2},$$

καὶ ἐξαλείψωμεν ἐκ τῶν δύο ὅρων ἐκάστου τὸν κοινὸν εἰς αὐτοὺς παράγοντα $a-1$, ὅστις ἐμηδενίζετο κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $a=1$, θέλομεν ἔχει τὰ ἐξῆς ἴσα ἀμοιβαίως τοῖς δεδομένοις

$$\frac{3(a+1)}{2}, \quad \frac{a-1}{3(a+1)}, \quad \frac{3(a+1)}{a-1},$$

ὧν τὸ μὲν πρῶτον, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $a=1$, ἰσοῦται μὲ 3, τὸ δεῦτερον γίνεταί 0 καὶ τὸ τρίτον ∞ .

Παρατήρησις 2. — Ἐπειδὴ κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{v}{\theta}$ εἶναι ἄπειρος καὶ παρίσταται διὰ τοῦ σημείου ∞ , ἐπεταὶ ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{r}{0} = \infty, \quad \text{ἐξ ἧς πορίζομεθα} \quad \frac{r}{\infty} = 0,$$

τουτέστιν, ὅταν κλάσματός τινος ὁ παρονομαστής τείρῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, ἤτοι αὐξάνῃ πέραν παντὸς δεδομένου μεγέθους, τὸ κλάσμα τοῦτο τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

Ἐπεταὶ ἐντεῦθεν ὅτι, ὅταν ἔχωμεν πρὸς λύσιν ἐξίσωσιν τινα, ἧς τὸ μὲν πρῶτον μέλος νὰ περιέχῃ τὴν ἄγνωστον εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστήν, τὸ δὲ δεῦτερον νὰ ᾖ μηδέν, δὲν πρέπει πρὸς λύσιν αὐτῆς νὰ εὗρωμεν τὴν τιμὴν ἢ τὰς τιμὰς τῆς ἀγνώστου, τὰς μηδενίζουσας μόνον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, ἀλλὰ καὶ ἐκεῖνας, δι' ὧν ὁ παρονομαστής αὐτοῦ γίνεται ἄπειρος. Παραδείγματος χάριν, πρὸς λύσιν τῆς ἐξίσωσεως

$$\frac{x+2}{x^2-4} = 0 \quad (1)$$

δὲν πρέπει νὰ ζητήσωμεν μόνον τὴν τιμὴν -2 τῆς x , τὴν μηδενίζουσαν μόνον τὸν ἀριθμητὴν $x+2$, ἀλλὰ καὶ τὰς τιμὰς $+\infty$ καὶ $-\infty$ (*), τὰς καθιστώσας ἄπειρον τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ x^2-4 . Διότι, ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ x , ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γίνεται

(*) Ἡ τιμὴ ∞ τοῦ κλάσματος $\frac{v}{\theta}$ δύναται νὰ ᾖ θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ, καθόσον ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ εἶναι ποσότης θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ. τουτέστιν, ὅταν ὁ παρονομαστής κλάσματός τινος ἐλαττωθῇ μέχρι τοῦ μηδενός, τὸ κλάσμα θέλει αὐξάνει μέχρι τοῦ θετικοῦ ἀπείρου, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ᾖ ποσότης πάντοτε θετικὴ, καὶ θέλει τείνει πρὸς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ᾖ ποσότης πάντοτε ἀρνητικὴ.

$$1 + \frac{2}{x} = 0$$

καὶ ἐὰν ἐν αὐτῇ ὑποθέσωμεν $x = \pm \infty$, οἱ μὲν ὅροι $\frac{2}{x}$ καὶ $\frac{1}{x}$ γίνονται μηδέν, τὸ δὲ μένον κλάσμα $\frac{1}{x}$ γίνεται $\frac{1}{\pm \infty}$, ἤτοι μηδέν· τουτέστι καὶ αἱ τιμαὶ $+\infty$ καὶ $-\infty$ τῆς x ταυτοποιοῦσι τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν.

Ἐπειδὴ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον αἱ ἄπειροι τὸ μέγεθος τιμαὶ τῆς ἀγνώστου δὲν ἀνήκουσιν εἰς τὸ πρόβλημα, τὸ διὰ τῆς ἐξισώσεως λυόμενον, ὁσάκις λύομεν ἐξίσωσιν τινα ἐξαλείφοντες τοὺς περιέχοντας τὴν ἀγνώστον παρονομαστὰς αὐτῆς, ὑποθέτομεν ὅτι δὲν θέλομεν νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ἀπείρους τὸ μέγεθος τιμὰς τῆς ἀγνώστου, τὰς δυναμένας νὰ ταυτοποιήσωσι τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΓΕΝΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΔΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕΤ' ἸΣΑΡΙΘΜΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ. — ΔΙΔΑΣΚΟΗΝΣΙΣ ΑΥΤΩΝ. — ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

ΓΕΝΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΔΙΑ ΤΗΝ ΚΤΛ.

62. Ἵνα εὕρωμεν τοὺς γενικοὺς τύπους τῶν τιμῶν τῆς x καὶ y συστήματός τινος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων, διδομεν πρῶτον εἰς ἑκατέραν τούτων τὴν γνωστὴν γενικὴν αὐτῆς μορφήν, καὶ λύομεν ἔπειτα τὸ εὕρεθησόμενον σύστημα τῶν δύο γενικῶν ἐξισώσεων

$$ax + by = \gamma \quad (1),$$

$$a'x + b'y = \gamma' \quad (2),$$

ἐν αἷς τὰ γράμματα $a, b, \gamma, a', b', \gamma'$ παριστῶσι πάντοτε γνωστάς ποσότητας, θετικὰς ἢ ἀρνητικὰς, κατὰ τινα τῶν τριῶν προεκτεθεισῶν μεθόδων. Ἵνα δὲ διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὸν αὐτὸν συντελεστήν ἀπαλείψωμεν τὴν ἀγνώστον y , πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο μέλη

τῆς (1) ἐπὶ β' καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ β , καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς (1) τὴν (2), ὅτε εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')x = \gamma\beta' - \beta\gamma',$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως

$$x = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} \quad (3).$$

Ἴνα δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον ἀπαλείψωμεν τὴν x , πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ α' καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (2) ἐπὶ α , καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς (2) τὴν (1), ὅτε θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')y = \alpha\gamma' - \gamma\alpha',$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως

$$y = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} \quad (4).$$

Αἱ εὐρεθεῖσαι ἰσότητες (3) καὶ (4) παριστῶσι τοὺς γενικοὺς τύπους, δι' ὧν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ἀμέσως ὅποιονδήποτε σύστημα δύο πρωτοβάθμιων ἐξισώσεων μετ' ἰσαριθμῶν ἀγνώστων, ἀφοῦ προηγουμένως δώσωμεν εἰς ἑκατέραν τούτων τὴν γενικὴν αὐτῆς μορφήν. Παραδείγματός χάριν, ἴνα εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῆς x καὶ y , τὰς ταῦτοποιοῦσας τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$3x - 7y = -15,$$

$$5x + 3y = 49,$$

ἑκατέρα τῶν ὁποίων ἔχει τὴν ἀπαιτουμένην γενικὴν μορφήν, πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους (3) καὶ (4) 3 ἀντὶ τοῦ α , -7 ἀντὶ τοῦ β , -15 ἀντὶ τοῦ γ , 5 ἀντὶ τοῦ α' , 3 ἀντὶ τοῦ β' καὶ 49 ἀντὶ τοῦ γ' , καὶ θέλομεν ἔχει:

$$x = \frac{-15 \cdot 3 + 7 \cdot 49}{3 \cdot 3 + 7 \cdot 5} = 2 \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{3 \cdot 49 + 15 \cdot 5}{3 \cdot 3 + 7 \cdot 5} = 3.$$

63. Ἐὰν παραβάλωμεν τοὺς εὐρεθέντας τύπους (3) καὶ (4) πρὸς ἀλλήλους καὶ πρὸς τὸ σύστημα τῶν δεδομένων ἐξισώσεων (1) καὶ (2), δυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν εὐκόλως τὸν ἐξῆς γενικὸν πρὸς ἄμεσον εὕρεσιν αὐτῶν κανόνα.

1^{ος}. Ὁ μὲν παρονομαστής $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ τῶν τιμῶν τῆς x καὶ y εἶναι ὁ αὐτός, σχηματίζεται δὲ ἐκ τῶν συντελεστῶν α , β , α' , β' τῶν ἀγνώστων x καὶ y , ἀφοῦ γραφῶσι τὰ γράμματα α καὶ β πρῶτον κατὰ τὴν

φυσικὴν αὐτῶν τάξιν ab , ἔπειτα κατὰ τὴν ἀντίστροφον ba , τεθῇ με-
ταξὺ τῶν γινομένων ab καὶ ba τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως —, καὶ το-
νισθῇ τὸ δεύτερον γράμμα ἑκατέρου τῶν γινομένων.

2^{ον}. Τοὺς ἀριθμητὰς τῆς χ καὶ ψ σχηματίζομεν ἀμέσως ἐκ τοῦ κοι-
νοῦ παρονομαστοῦ $ab' - ba'$, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἐν αὐτῷ διὰ μὲν
τὸν ἀριθμητὴν τῆς χ τὰ γράμματα a καὶ a' , τὰ παριστῶντα τοὺς συν-
τελεστὰς αὐτῆς, διὰ τῶν γραμμάτων γ καὶ γ' , τῶν παριστῶντων τὰ
δεύτερα μέλη τῶν δεδομένων ἐξισώσεων, διὰ δὲ τὸν ἀριθμητὴν τῆς ψ
τὰ γράμματα b καὶ b' , τὰ παριστῶντα τοὺς συντελεστὰς αὐτῆς, πάλιν
διὰ τῶν γραμμάτων γ καὶ γ' , τῶν παριστῶντων τὰ δεύτερα μέλη
τῶν ἐξισώσεων τοῦ δεδομένου συστήματος.

Παρατήρησις. — Ἐπειδὴ προφανῶς τὸ σύστημα τῶν δεδομένων γε-
νικῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν τεθῶσιν ἐν αὐταῖς
 ψ ἀντὶ τοῦ χ , b' ἀντὶ τοῦ a , b'' ἀντὶ τοῦ a' , καὶ ἀντιστρόφως, χ ἀντὶ
τοῦ ψ , a ἀντὶ τοῦ b , καὶ a' ἀντὶ τοῦ b' , ἔπεται ὅτι αὐτὸς ὁ τύπος (3),
ὁ παρέχων ἡμῖν τὴν τιμὴν τῆς χ τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1)
καὶ (2), θέλει μᾶς παράσχει ἀμέσως τὴν τιμὴν τῆς ψ τοῦ αὐτοῦ συστή-
ματος, ἐὰν θέσωμεν ἐν αὐτῷ ψ ἀντὶ τοῦ χ , b' ἀντὶ τοῦ a , b'' ἀντὶ τοῦ
 a' , καὶ ἀντιστρόφως, διότι τότε θέλομεν ἔχει

$$\psi = \frac{\gamma a' - a \gamma'}{b a' - a b'} \quad \text{ἢ, ὕπερ ταυτοῦ,} \quad \psi = \frac{a \gamma' - \gamma a'}{a b' - b a'}$$

τουτέστιν αὐτὸν τὸν τύπον (4).

ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΡΕΘΕΝΤΩΝ ΤΥΠΩΝ

64. Ἡ διασκόπησις τῶν προηγουμένων τύπων (3) καὶ (4), τῶν ἐκ
τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (1) καὶ (2) εὐρεθέντων, εἶναι μὲν δυσκο-
λωτέρα καὶ πολυπλοκωτέρα τῆς προηγουμένης ἐκτεθείσης, ὡς γενομένη
συγχρόνως ἐπὶ δύο ἀνθ' ἑνὸς τύπου, ἀλλὰ, ὡς θέλομεν ἰδεῖ ἀμέσως, πα-
ριστᾷ τὰς αὐτὰς περιπτώσεις διὰ τῶν αὐτῶν συμβόλων.

1^{ον}. Ὡς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι ὁ κοινὸς παρονομαστὴς καὶ οἱ
ἀριθμηταὶ τῶν τιμῶν τῆς χ καὶ ψ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός. Τότε οἱ
τύποι

$$\chi = \frac{\gamma b' - b \gamma'}{a b' - b a'} \quad \text{καὶ} \quad \psi = \frac{a \gamma' - \gamma a'}{a b' - b a'}$$

δίδουσι διὰ τὴν χ καὶ ψ ἕν ὠρισμένον σύστημα τιμῶν καὶ ἕν μόνον, ὅπερ θέλει ταυτοποιεῖ τὸ σύστημα τῶν ἐξ ὧν εὐρέθησαν ἐξισώσεις

$$a\chi + b\psi = \gamma, \quad a'\chi + b'\psi = \gamma'.$$

2^{ον}. Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι ὁ μὲν κοινὸς αὐτῶν παρονομαστῆς εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, οἱ δὲ ἀριθμηταὶ αὐτῶν μηδέν. Τότε θέλομεν ἔχει

$$\chi = \frac{0}{A} = 0 \quad \text{καὶ} \quad \psi = \frac{0}{A} = 0,$$

τουτέστι τὸ μόνον σύστημα τιμῶν, ὅπερ δύναται νὰ ταυτοποιήσῃ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην τὰς δύο ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι $\chi = 0$ καὶ $\psi = 0$. Καὶ τῷ ὄντι, ὅταν ἔχωμεν

$$\gamma b' - b \gamma' = 0, \quad a \gamma' - \gamma a' = 0, \quad \text{καὶ} \quad ab' - ba' \geq 0,$$

ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα, ἕνεκα τῆς τελευταίας ἀνισότητος, νὰ ἔχωμεν συγχρόνως $b = 0$, $b' = 0$, $a = 0$ καὶ $a' = 0$, θέλομεν ἔχει ἀναγκαιῶς $\gamma = 0$ καὶ $\gamma' = 0$, τουτέστι τὰ δεύτερα μέλη τῶν δεδομένων ἐξισώσεων (1) καὶ (2) θέλουσιν εἶναι 0. Πρὸς τοῦτοις, ἐπειδὴ, ἕνεκα τῆς τελευταίας ἀνισότητος $ab' - ba' \geq 0$, οἱ συντελεσταὶ a , a' , b καὶ b' δὲν εἶναι ἀνάλογοι, (διότι, ἂν εἴχομεν τὴν ἀναλογίαν $a : a' = b : b'$, ἡθέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$ ἢ τὴν ἐξῆς $ab' = ba'$, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως), τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων

$$a\chi + b\psi = 0, \quad a'\chi + b'\psi = 0,$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα $\frac{\chi}{\psi} = -\frac{b}{a}$ καὶ $\frac{\chi}{\psi} = -\frac{b'}{a'}$ δὲν δύναται νὰ ᾔῃαι προφανῶς ἴσα, εἰ μὴ μόνον ὅταν χ καὶ ψ ὑποτεθῶσιν ἀμφοτέρω ἴσα τῷ μηδενί.

3^{ον}. Ἄς ὑποθέσωμεν τρίτον ὅτι οἱ μὲν ἀριθμηταὶ τῶν τύπων (3) καὶ (4) εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, ὁ δὲ κοινὸς αὐτῶν παρονομαστῆς μηδέν. Τότε θέλομεν ἔχει

$$ab' - ba' = 0, \quad \chi = \frac{\gamma b' - b \gamma'}{0} \quad \text{καὶ} \quad \psi = \frac{a \gamma' - \gamma a'}{0},$$

τουτέστι θέλομεν εὕρει διὰ τιμὰς τῆς χ καὶ ψ τὸ σύμβολον τοῦ ἀπείρου. Καὶ τῷ ὄντι, ἐκ τῆς ὑποθεθείσης ἰσότητος $ab' - ba' = 0$ πορίζομεθα $a' = \frac{a b'}{b}$, ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) ἀντὶ τοῦ a' τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{a b'}{b}$, αὕτη γίνεται

$$\frac{a\beta'}{\beta}x + \beta'y = \gamma', \quad \eta \quad \beta'(ax + \beta y) = \beta\gamma'.$$

Βλέπομεν δὲ ὅτι τὸ μὲν πρῶτον μέλος τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εἶναι τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως (1) πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ β' . Ἄρα πρέπει καὶ τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς $\beta\gamma'$ νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ δεύτερον μέλος γ' τῆς αὐτῆς πρώτης ἐξισώσεως πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν αὐτὸν παράγοντα β' . Ἀλλ' ὅταν $\beta\gamma' = \beta'\gamma$, ὁ ἀριθμητικὴς τῆς τιμῆς τῆς x θέλει εἶναι μηδέν, τοῦθ' ὕπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Αἱ δεδομένοι λοιπὸν ἐξισώσεις (1) καὶ (2) θέλουσιν εἶναι τότε ἀσυμβίβαστοι, τοῦθ' ὕπερ ἐδείχθη ἐνταῦθα διὰ τοῦ αὐτοῦ συμβόλου, δι' οὗ καὶ προηγουμένως (58).

4^{ον}. Ἄς ὑποθέσωμεν τέταρτον ὅτι ὁ κοινὸς αὐτῶν παρονομαστῆς καὶ εἰς τῶν ἀριθμητῶν, π. χ. ὁ τῆς x , εἶναι μηδέν. Τότε θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας

$$a\beta' - \beta a' = 0 \quad \text{καὶ} \quad \gamma\beta' - \beta\gamma' = 0,$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα

$$a' = \frac{a\beta'}{\beta} \quad \text{καὶ} \quad \gamma' = \frac{\gamma\beta'}{\beta},$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὸν ἀριθμητὴν τῆς τιμῆς τῆς y ἀντὶ τοῦ a' καὶ γ' τὰ ἴσα ταῦτοις $\frac{a\beta'}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma\beta'}{\beta}$ θέλομεν ἔχει

$$ay' - \gamma a' = a \frac{\gamma\beta'}{\beta} - \gamma \frac{a\beta'}{\beta} = 0,$$

τουτέστιν αἱ τιμαὶ τῆς x καὶ y γίνονται κατὰ τὰς γενομένας ἐνταῦθα ὑποθέσεις

$$x = \frac{0}{0} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{0}{0}.$$

Ἐπεταὶ λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἀπροσδιόριστοι. Καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ a' καὶ γ' τὰ ἴσα τούτοις $\frac{a\beta'}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma\beta'}{\beta}$, αὕτη γίνεται

$$\frac{a\beta'}{\beta}x + \beta'y = \frac{\beta'\gamma}{\beta}, \quad \eta \quad \frac{\beta'}{\beta}(ax + \beta y) = \frac{\beta'}{\beta}\gamma,$$

τουτέστιν αὐτὴ ἡ ἐξίσωσις (1), ἥς τὰ δύο μέλη ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ $\frac{\beta'}{\beta}$. Λοιπὸν πάντα τὰ συστήματα τῶν τιμῶν τῆς x καὶ y , τὰ ταῦτοποιῶντα τὴν ἐξίσωσιν (1), θέλουσιν ἀναγκαίως ταῦτοποιεῖ καὶ τὴν ἐξίσωσιν (2). Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις (1) δύναται νὰ ταῦτοποιηθῇ δι' ἀπείρων

συστημάτων τιμῶν τῆς x καὶ y , διότι ἀρκεῖ νὰ δώσωμεν τιμὴν τινα ὁποιαδήποτε εἰς τὴν x καὶ θέλωμεν πορισθῇ λύοντες τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς y , τὴν αὐτοποιοῦσαν αὐτήν. Ἄρα αἱ δεδομέναι ἐξισώσεις (1) καὶ (2) κατὰ τὰς γενομένας ἐνταῦθα ὑποθέσεις εἶναι ἀπροσδιόριστοι, τοῦθ' ὅπερ κατεδείχθη ἐκ τῆς διασκόπησης τῶν τύπων (3) καὶ (4) διὰ τοῦ αὐτοῦ συμβόλου $\frac{0}{0}$.

*Ἄν εἴχομεν ὑποθέσει προηγουμένως ὅτι ὁ ἀριθμητικὴς τῆς y ἦτο μηδέν, ἠθέλωμεν ἀποδείξει ὁμοιοτρόπως, ὅτι καὶ ὁ ἀριθμητικὴς τῆς x ἦθελεν εἶναι συγχρόνως μηδέν, καὶ ἠθέλωμεν φθάσει εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα.

Β^{ον}. Ἄς ὑποθέσωμεν πέμπτον ὅτι ὁ κοινὸς παρονομαστὴς $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ εἶναι μηδέν καθὼς καὶ τὰ δεύτερα μέλη γ' καὶ γ'' τῶν δεδομένων ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Τότε θέλωμεν πορισθῇ ἐκ τῶν τύπων (3) καὶ (4)

$$x = \frac{0}{0} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{0}{0}.$$

Καὶ τῷ ὄντι, αἱ δεδομέναι ἐξισώσεις γίνονται τότε

$$\alpha x + \beta y + 0, \quad \alpha' x + \beta' y = 0,$$

καὶ λύμεναι ἀμφότεραι ὡς πρὸς τὴν y μᾶς παρέχουσι τὰς τιμὰς

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x, \quad y = -\frac{\alpha'}{\beta'}x,$$

ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν γενομένην ὑπόθεσιν $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 0$ ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$, ἔπεται ὅτι αἱ ἀνωτέρω δύο τιμαὶ τῆς y θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ὑποτεθῇ ἡ τιμὴ τῆς x . Ἄρα αἱ δεδομέναι ἐξισώσεις κατὰ τὰς γενομένας ἐνταῦθα ὑποθέσεις εἶναι πράγματι ἀπροσδιόριστοι, τοῦθ' ὅπερ κατεδείχθη διὰ τοῦ γνωστοῦ συμβόλου τοῦ ἀπροσδιορίστου $\frac{0}{0}$.

*Ἀξίον παρατηρήσεως εἶναι ἐνταῦθα τοῦτο, ὅτι ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων $\alpha x + \beta y = 0$ καὶ $\alpha' x + \beta' y = 0$ πορίζομεθα

$$\frac{x}{y} = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{καὶ} \quad \frac{x}{y} = -\frac{\alpha'}{\beta'},$$

καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 0$ ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ μὲν συστήματα τῶν τιμῶν τῆς x καὶ y , τὰ αὐτοποιοῦντα κατὰ τὰς γενομένας ὑποθέσεις τὰς δεδομένας ἐξισώσεις, εἶναι

ἄπειρα τὸν ἀριθμὸν, ὃ δὲ ἐν ἐκάστῳ τούτων λόγος τῆς χ πρὸς τὴν ψ εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{\beta}$.

60. Ὡς ὑποθέσωμεν ἕκτον ὅτι ἔχομεν $\alpha=0$, $\beta=0$, $\alpha'=0$ καὶ $\beta'=0$, χωρὶς νὰ ἔχομεν συγχρόνως $\gamma=0$ καὶ $\gamma'=0$. Τότε οἱ τύποι (3) καὶ (4) γίνονται

$$\chi = \frac{0}{0} \quad \text{καὶ} \quad \psi = \frac{0}{0},$$

τουτέστι παρέχουσιν ἀμφότεροι τὸ σύμβολον τοῦ ἀπροσδιορίστου, ἀν καὶ πράγματι δὲν ὑπάρχει τὸ ἀπροσδιόριστον, ἀλλὰ τὸ ἀδύνατον. Διότι τότε αἱ δεδομέναι ἐξισώσεις γίνονται

$$0=\gamma \quad \text{καὶ} \quad 0=\gamma',$$

καὶ βλέπομεν εὐκόλως ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ ταυτοποιηθῶσι δι' ὅποι-
σοδήποτε συστήματος τιμῶν τῆς χ καὶ ψ .

Ὅχι ἦττον καὶ κατὰ τὴν ἐξαιρετικὴν ταύτην ὑπόθεσιν οἱ τύποι (3) καὶ (4) παρέχουσι τὸ σύμβολον τοῦ ἀδυνάτου ἀντὶ τοῦ ἀπροσδιορίστου, ἀρκεῖ μόνον πρὶν ἢ ὑποθέσωμεν τοὺς συντελεστὰς α , α' , β , β' μηδέν, νὰ ὑποθέσωμεν αὐτοὺς πρῶτον ἴσους πρὸς ἀλλήλους, π. χ. ἴσους τῷ α , καὶ ἔπειτα μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τοῦ κοινοῦ εἰς τοὺς δύο ὅρους αὐτῶν πα-
ράγοντος α νὰ ὑποθέσωμεν $\alpha=0$. Διότι τότε θέλομεν ἔχει

$$\chi = \frac{\alpha(\gamma - \gamma')}{\alpha(\alpha - \alpha)} = \frac{\gamma - \gamma'}{\alpha - \alpha} = \frac{\gamma - \gamma'}{0} = \infty,$$

$$\psi = \frac{\alpha(\gamma' - \gamma)}{\alpha(\alpha - \alpha)} = \frac{\gamma' - \gamma}{\alpha - \alpha} = \frac{\gamma' - \gamma}{0} = \infty.$$

Ἡδυνάμεθα νὰ παρατείνωμεν τὴν διασκόπησιν τῶν ἀνωτέρω τύπων (3) καὶ (4) στηριζόμενοι καὶ ἐπὶ ἐτέρων ὑποθέσεων, ἀλλὰ φρονοῦμεν ὅτι τὰ περὶ τούτου λεχθέντα εἶναι ἐπαρκῆ πρὸς τὸν σκοπόν.

ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

65. Καλεῖται ἀνισότης πᾶσα παράστασις περιέχουσα μεταξὺ τῶν μερῶν αὐτῆς ἐν τῶν σημείων τῆς ἀνισότητος. Παραδείγματος χάριν, αἱ παραστάσεις $7 > 3$, $12a < 15a$, $3\chi > -7$ εἶναι ἀνισότητες, διότι περιέχουσι μεταξὺ τῶν μερῶν αὐτῶν ἐν τῶν σημείων $>$ ἢ $<$ τῆς ἀνι-
σότητος.

Τὰ διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀνισότητος συνδεόμενα μέρη καλοῦνται μέλη τῆς ἀνισότητος, καὶ τὸ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καλεῖται *πρῶτον μέλος*, τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ *δεύτερον μέλος* αὐτῆς.

Αἱ ἀνισότητες διακρίνονται εἰς δύο τάξεις· εἰς *προφανεῖς* καὶ εἰς ἀνισότητας ἐπαληθευομένας, ὅταν ἐν ἡ πλείοντα ἐν αὐταῖς ὑπάρχοντα γράμματα αὐξάνωσιν ἢ ἐλαττοῦνται ἀπὸ τινος ὁρισμένης τιμῆς, ἢ συγχρόνως οὕτως, ὥστε νὰ μετατρέπωνται αὐταὶ εἰς προφανεῖς. Παραδείγματος χάριν, αἱ ἀνισότητες $8 > 5$, $7a > 3a$ εἶναι προφανεῖς, διότι προφανῶς τὸ 8 εἶναι μεγαλειότερον τοῦ 5 καὶ τὸ 7a μεγαλειότερον τοῦ 3a, αἱ δὲ ἀνισότητες $5x > 8$, $7x + 3y < 13$ δὲν ἐπαληθεύονται εἰ μὴ ὅταν ἐν μὲν τῇ πρώτῃ τὸ γράμμα x λάβῃ τιμὰς μεγαλειτέρας τοῦ $\frac{8}{5}$, ἐν δὲ τῇ ἐτέρᾳ, ὅταν αἱ εἰς τὰ γράμματα x καὶ y διδόμεναι συγχρόνως τιμαὶ ᾗναι τοιαῦται, ὥστε ἡ ἀνισότης αὕτη νὰ μετατρέπηται εἰς προφανῆ.

Τὰ γράμματα, ὧν τὰ ὅρια ζητοῦνται, ἵνα αἱ ἐν αἷς ὑπάρχουσιν ἀνισότητες ἐπαληθεύωνται, καλοῦνται *ἄγνωστοι* τῶν ἀνισότητων. *Λύομεν* δὲ ἀνισότητα τινά, ὅταν εὐρίσκωμεν τὰ ὅρια τῶν ἀγνώστων, πέραν ἢ ἔνθεν τῶν ὁποίων αὐταὶ τρέπονται εἰς προφανεῖς.

Δύο ἀνισότητες λέγονται *ισοδύναμοι*, ὅταν τὰ ὅρια τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων, πέραν ἢ ἔνθεν τῶν ὁποίων αὐταὶ ἐπαληθεύονται, εἶναι τὰ αὐτά.

Αἱ ἀνισότητες διακρίνονται κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐν αὐταῖς περιεχομένων ἀγνώστων καὶ κατὰ τὸν βαθμὸν αὐτῶν. Αἱ ἀνισότητες, αἱ μίαν ἀγνώστον περιέχουσιν, λέγονται τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ὅταν μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν ἐν αὐταῖς παρονομαστῶν κτλ. αὐταὶ περιέχωσι τὴν ἀγνώστον εἰς τὴν πρώτην δύναμιν. Ἡμεῖς ἐνταῦθα θέλομεν πραγματευθῆ μόνον περὶ τῆς λύσεως τῶν ἀνισότητων τοῦ πρώτου βαθμοῦ, τῶν περιεχουσῶν μίαν ἀγνώστον, στήριζόμενοι ἐπὶ τῶν ἐξῆς δύο θεωρημάτων, ὧν τὸ πρῶτον εἶναι κατὰ πάντα ὅμοιον τῷ ἐν τῇ § 37 ἀποδειχθέντι.

66. ΘΕΩΡΗΜΑ 1. — Προσθέτοντες εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη ἀνισότητος τινος τὴν αὐτὴν ποσότητα ἢ ἀφαιροῦντες ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς τὴν αὐτὴν ποσότητα, θέλομεν ἔχει νέαν ἀνισότητα *ισοδύναμον* τῇ δεδομένῃ.

Ἄς παραστήσωμεν συντομίας χάριν διὰ Α τὸ πρῶτον μέλος τῆς δεδομένης ἀνισότητος καὶ διὰ Β τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς, καὶ ἄς υποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν

$$A > B$$

(1).

Λέγω ὅτι αἱ ἀνισότητες

$$A + \mu > B + \mu \quad \text{καὶ} \quad A - \mu > B - \mu \quad (2),$$

ἃς ἐπορίσθημεν ἐκ τῆς (1) προσθέσαντες καὶ ἀφαιρέσαντες ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς τὴν αὐτὴν ποσότητα μ , θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμοι. Διότι προφανῶς πᾶσα τιμὴ τῆς ἀγνώστου x , ἥτις ἐπαληθεύει τὴν ἀνισότητα $A > B$, θέλει ἐπαληθεύει καὶ τὴν $A + \mu > B + \mu$ καὶ τὴν $A - \mu > B - \mu$. Καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν τιμὴ τις τῆς x ἐπαληθεύῃ τὰς ἀνισότητας (2), ἡ αὐτὴ τιμὴ τῆς x θέλει ἐπαληθεύει καὶ τὴν ἀνισότητα (1), ἣν πορίζομεθα ἐκ τῶν ἀνισότητων (2) ἀφαιροῦντες ἢ προσθέτοντες εἰς ἄνισα τὴν αὐτὴν ποσότητα μ .

Πόρισμα 1. — Ἐπεταί ἐντεῦθεν ὅτι δυνάμεθα τὰ μεταφέρωμεν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου μέλους ἀρισότητός τινος εἰς τὸ ἕτερον ὅρον τινὰ αὐτῆς γράφοντες αὐτὸν μὲ ἐναντίον σημεῖον.

Παραδείγματος χάριν, τὸν ὅρον -7 τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἀνισότητος

$$3x + 8 < 5x - 7$$

δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὸ πρῶτον γράφοντες αὐτὸν μὲ ἐναντίον σημεῖον $+$. Διότι, ἂν προσθέσωμεν εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη αὐτῆς 7 , αὕτη μετατρέπεται εἰς τὴν ἰσοδύναμον

$$3x + 8 + 7 < 5x - 7 + 7, \quad \text{ἢ τὴν} \quad 3x + 8 + 7 < 5x.$$

Ὡσάυτως, τὸν ἐν τῷ πρῶτῳ μέλει αὐτῆς ὅρον $3x$ δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὸ δεῦτερον γράφοντες αὐτὸν μὲ ἐναντίον σημεῖον $-$. Διότι, ἂν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τελευταίας ἀνισότητος ἀφαιρέσωμεν $3x$, αὕτη τρέπεται εἰς τὴν ἰσοδύναμον αὐτῇ

$$3x + 8 + 7 - 3x < 5x - 3x, \quad \text{ἢ τὴν} \quad 8 + 7 < 5x - 3x.$$

Πόρισμα 2. — Δυνάμεθα τὰ μεταβάλλωμεν πάντα τὰ σημεῖα τῶν ὁρῶν ἀρισότητός τινος, καὶ θέλωμεν ἔχει νέαν ἀρισότητα ἰσοδύναμον τῇ δεδομένῃ, ἀρκεῖ μόνον τὰ ἀντιστρέψωμεν καὶ τὸ σημεῖον αὐτῆς.

Παραδείγματος χάριν, ἡ ἀνισότης

$$5x - 3 > -8x + 7 \quad (2),$$

ἣν πορίζομεθα ἐκ τῆς ἀνισότητος

$$-5x + 3 < 8x - 7 \quad (1)$$

μεταβαλόντες τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὁρῶν αὐτῆς καὶ ἀντιστρέψαντες καὶ τὸ σημεῖον $<$ τῆς ἀνισότητος, εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ἀνισότητι (1). Διότι, ἂν μεταφέρωμεν πάντας τοὺς ἐν τῷ πρῶτῳ μέλει τῆς ἀνισότη-

τος (1) ὅρους εἰς τὸ δεύτερον καὶ ἀντιστρόφως, θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα τὴν ἀνισότητά

$$-8\chi + 7 < 5\chi - 3, \text{ ἢ τὴν } 5\chi - 3 > -8\chi + 7.$$

67. ΘΕΩΡΗΜΑ 2. — Πολλαπλασιάζοντες ἢ διαιροῦντες τὰ δύο μέλη ἀνισότητος τιнос διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ποριζόμεθα νέαν ἀνισότητα ἰσοδύναμον τῇ δεδομένῃ, ὅταν ἡ ἐφ' ἣν πολλαπλασιάζομεν ἢ ἡ δι' ἣς διαιροῦμεν ποσότης ᾗται θετική. Ὅταν δὲ αὕτη ᾗται ἀρνητική, τότε πρέπει νὰ ἀντιστρέψωμεν τὸ σημεῖον τῆς προκυπτούσης ἀνισότητος, ἵνα αὕτη ᾗ ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ἡ ἀνισότης

$$A > B \quad (1).$$

Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$A\mu > B\mu \quad \text{καὶ} \quad \frac{A}{\mu} > \frac{B}{\mu} \quad (2),$$

ὅταν ἡ ἐφ' ἣν πολλαπλασιάζομεν ἡ δι' ἣς διαιροῦμεν ποσότης μ ᾗται θετική· καὶ

$$A\mu < B\mu \quad \text{καὶ} \quad \frac{A}{\mu} < \frac{B}{\mu} \quad (3),$$

ὅταν ἡ ἐφ' ἣν πολλαπλασιάζομεν ἡ δι' ἣς διαιροῦμεν ποσότης μ ᾗται ἀρνητική.

Ὅτι αἱ ἀνισότητες (2) εἶναι ἰσοδύναμοι τῇ (1), ὅταν ἡ ποσότης μ ᾗται θετική, τοῦτο ᾗται προφανές. Διότι διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς χ , δι' ἣν A εἶναι μείζον τοῦ B , καὶ τὸ γινόμενον $A\mu$ ἢ τὸ πηλίκον $\frac{A}{\mu}$ θέλει εἶναι μείζον τοῦ γινομένου $B\mu$ ἢ τοῦ πηλίκου $\frac{B}{\mu}$ διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς χ .

Ὅταν τὸ μ ᾗται ποσότης ἀρνητική, ἡ ποσότης $-\mu$ θέλει εἶναι θετική, καὶ ἐκ τῆς ἀνισότητος (1) θέλομεν πορισθῇ κατὰ τὰ προλεχθέντα τὰς ἰσοδυνάμους αὐτῇ

$$-A\mu > -B\mu \quad \text{καὶ} \quad -\frac{A}{\mu} > -\frac{B}{\mu},$$

αὗται δέ, ἀλλασσομένων τῶν σημείων τῶν ὅρων ἑκατέρας, γίνονται κατὰ τὸ δεύτερον πόρισμα τοῦ προηγούμενου θεωρήματος

$$A\mu < B\mu \quad \text{καὶ} \quad \frac{A}{\mu} < \frac{B}{\mu},$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ δεύτερον μέρος τοῦ περὶ οὗ ἐνταῦθα ὁ λόγος θεωρήματος.

68. Ἐπὶ τῶν δύο προηγούμενων θεωρημάτων στηριζόμενοι πορίζομεθα εὐκόλως τὸν ἐξῆς γενικὸν κανόνα τῆς λύσεως ἀνισότητός τινος τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον·

1^η. Ἐξαλείφωμεν τοὺς παρονομαστές τῆς ἀρισότητος, ἐὰν ὑπάρχωσι, καὶ ὅταν μὲν ὁ ἐφ' ὃν πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο μέλη αὐτῆς κοινὸς παρονομαστής ᾖται θετικὸς, ἀφίνομεν τὴν ἀνισότητα ὅπως ἔχη, ὅταν δὲ οὗτος ᾖται ἀρνητικὸς, ἀντιστρέφωμεν τὸ σημεῖον αὐτῆς.

2^η. Ἐκτελοῦμεν τὰς σεσημειωμένας πράξεις, ἐὰν ὑπάρχωσι τοιαῦται πρὸς ἐκτέλεσιν.

3^η. Μεταφέρωμεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀρισότητος πάντας τοὺς περιέχοντας τὴν ἄγνωστον ὅρους καὶ εἰς τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς τοὺς γνωστοὺς, ἀλλάσσοντες ἐκάστου τὸ σημεῖον.

4^η. Ἐκτελοῦμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ὄρων, ἐὰν ὑπάρχωσι.

5^η. Ἐκ τῶν περιεχόντων τὴν ἄγνωστον χ ὄρων, ὅταν οὗτοι δὲν δύναται διὰ τῶν ἀναγωγῶν νὰ ἀναχθῶσι εἰς ἓνα, σχηματίζομεν ἓνα ὅρον θέτοντες ταύτην κοινὸν παράγοντα εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν λοιπῶν ἐν ἐκάστῳ ὄρῳ παραγόντων αὐτῆς.

6^η. Διαιροῦμεν τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἀρισότητος διὰ τοῦ συντελεστοῦ τῆς ἄγνωστον, προσέχοντες νὰ ἀντιστρέφωμεν τὸ σημεῖον τῆς ἀρισότητος, ὅταν ὁ συντελεστής οὗτος ᾖται ἀρνητικὴ ποσότης, καὶ τὸ εἰς τὸ ἔτερον μέλος αὐτῆς εὐρισκόμενον πηλίκον θέλει παριστᾶ, κατὰ τὸ πρὸ αὐτοῦ ὑπάρχον σημεῖον τῆς ἀρισότητος, τὸ ὅριον ἐνθεν ἢ πέραν τοῦ ὑποίου πρέπει νὰ μεταβάλληται ἢ ἄγνωστος, ἴσα ἢ δοθεῖσα ἀρισότης ἐπαληθεύηται.

Ἔστω, παραδείγματός χάριν, πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης

$$\frac{3x-2}{4} - 5 > \frac{9(x+3)}{7} + 2 \quad (1).$$

Ἐξαλείφοντες πρῶτον τοὺς ἐν αὐτῇ παρονομαστές, πορίζομεθα

$$21(x-2) - 140 > 36(x+3) + 56.$$

Ἐκτελοῦντες ἔπειτα τὰς ἐν αὐτῇ σεσημειωμένας πράξεις, εὐρίσκομεν

$$21x - 42 - 140 > 36x + 108 + 56.$$

Μεταφέροντες τρίτον τοὺς περιέχοντας τὴν ἄγνωστον χ ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τοὺς γνωστοὺς εἰς τὸ δεύτερον, ἔχομεν

$$21x - 36x > 108 + 56 + 42 + 140.$$

Ἐκτελοῦντες δὲ τὰς ἀναγωγὰς τῶν ἐν αὐτῇ ὁμοίων ὄρων, λαμβάνομεν

$$-15x > 346,$$

καὶ διαιροῦντες τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ συντελεστοῦ —15 τῆς x , εὐρίσκομεν

$$x < \frac{346}{-15}, \quad \eta \quad x < -\frac{346}{15}.$$

Πρέπει λοιπόν, ἵνα ἡ δοθεῖσα ἀνισότης (1) ἐπαληθεύηται, αἱ τιμαὶ τῆς ἀγνώστου x νὰ ᾖναι πάντοτε μικρότεραι τοῦ $-\frac{346}{15}$.

Παρατήρησις 1. — Ἐὰν παραβάλῃ τις τὰ καθέκαστα τοῦ ἀνωτέρω δοθέντος κανόνα μὲ τὰ καθέκαστα τοῦ ἐν τῇ § 39 διὰ τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ μίαν μόνον ἀγνώστον δοθέντος, θέλει ἴδῃ ὅτι οὗτοι δὲν διαφέρουσιν εἰμὴ μόνον κατὰ τοῦτο, ὅτι πρέπει νὰ ἀντιστρέφωμεν τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος, ὡςάκις πολλαπλασιάζομεν ἢ διαιροῦμεν τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ὅτι ἡ τελικὴ ἀνισότης παρέχει ἀντὶ μιᾶς τιμῆς τῆς ἀγνώστου, ἐπαληθευούσης τὴν ἀνισότητα, τὸ μικρότερον ἢ μεγαλύτερον ὅριον τῶν ἐπαληθευουσῶν αὐτὴν τιμῶν τῆς αὐτῆς ἀγνώστου.

Παρατήρησις 2. — Ὅταν πρὸς ἐπαλήθευσιν ἀνισότητός τινος εὐρίσκωμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς ἐν αὐτῇ περιεχομένης ἀγνώστου x πρέπει νὰ ᾖναι μικρότεραι ἀρνητικοῦ τινος ἀριθμοῦ, π. χ. ὅταν εὕρωμεν τὴν τελικὴν ἀνισότητα $x < -4$, τότε πρέπει νὰ δίδωμεν εἰς τὴν x τιμὰς ἀρνητικὰς καὶ μεγαλειτέρας, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου, τοῦ εὐρεθέντος ὁρίου 4. Διότι, ὅταν αὐξάνωμεν διαδοχικῶς τὸν ἀφαιρετέον A διαφορᾶς τινος, π. χ. τῆς διαφορᾶς 5 — A , ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ θετικοῦ ἀπείρου, δίδωμεν δηλ. εἰς τὸ A διαδοχικῶς τὰς τιμὰς

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... ∞
αἱ εὐρισκόμεναι διαδοχικαὶ διαφοραὶ

5, 4, 3, 2, 1, 0, —1, —2, —3, —4, —5, —6, ... —∞
θέλουσι προφανῶς βεβαίως ἐλαττούμεναι, ἐκ δὲ τῆς τελευταίας ταύτης σειρᾶς πορίζομεθα, ὅτι πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς καὶ τὸ 0 εἶναι μεγαλύτερος παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ὅτι ἐκ δύο ἀρνητικῶν —2 καὶ —6, παραδείγματος χάριν, μεγαλύτερος εἶναι ὁ —2, ἐκεῖνος δηλ. ὅστις, θετικῶς λαμβανομένων ἀμφοτέρων, εἶναι μικρότερος τοῦ ἐτέρου.

69. Συμβαίνει πολλὰκις, ὡς θέλομεν ἰδεῖ παρακατιόντες, πρὸς ἐκ-

πλήρως τῶν συνθηκῶν προβλήματός τινος αἱ τιμαὶ τῆς αὐτῆς ἀγνώστου νὰ ὑπόκηνται εἰς τὴν ὑποχρέωσιν τοῦ νὰ ἦναι ἀκεραῖοι καὶ νὰ ἐπαληθεύωσι συγχρόνως δύο διαφόρους ἀνισότητας. Πρὸς τοῦτο, ἀφοῦ εὗρωμεν τὸ μεγαλειότερον ἢ μικρότερον ὄριον ἑκατέρας, δὲν πρέπει νὰ διδωμεν εἰς τὴν ἀγνώστον x εἰμὴ τιμὰς ἀκεραίας, περιεχομένας ἐντὸς ἀμφοτέρων τῶν εὐρεθέντων ὁρίων. Ὡς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι λύσαντες ἑκατέραν τῶν δεδομένων ἀνισοτήτων εὗρωμεν τὰς τελικὰς

$$x > 5 \quad \text{καὶ} \quad x < 11.$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὴν x εἰ μὴ τὰς ἀκεραίας τιμὰς 6, 7, 8, 9 καὶ 10, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν ὁρίων 5 καὶ 11. Διότι πᾶσα ἀκεραία τιμὴ μεγαλειτέρα τοῦ 11 ἐπαληθεύει τὴν πρώτην ἀνισότητα $x > 5$, ἀλλὰ δὲν ἐπαληθεύει τὴν δευτέραν $x < 11$. Ὡσαύτως, πᾶσα ἀκεραία τιμὴ μικροτέρα τοῦ 5 ἐπαληθεύει τὴν δευτέραν ἀνισότητα $x < 11$, ἀλλὰ δὲν ἐπαληθεύει τὴν πρώτην $x > 5$.

Ὅταν οἱ τὰ ὅρια τῆς ἀγνώστου x παριστῶντες ἀριθμοὶ ἦναι καὶ μὲν κτῷ, θετικοὶ τε καὶ ἀρνητικοί, ὁ ἐξ ὧν ἀκριβῆς προσδιορισμὸς πασῶν τῶν ἀκεραίων τιμῶν τῆς x , τῶν ἐπαληθευουσῶν ἀμφοτέρας τὰς ἀνισότητας, παρέχει πολλάκις δυσκολίας τινὰς εἰς τοὺς μὴ ἀρκοῦντως ἐξησηκημένους. Χάριν δὲ τούτων ἐκθέτομεν ἐνταῦθα ἰδίον τινα τρόπον, δι' οὗ πᾶσα πρὸς τοῦτο δυσκολία ἐκλείπει.

70. Ἐν πρώτοις, ὅταν καὶ αἱ δύο τελικαὶ ἀνισότητες ἦναι τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἔχωσι: δηλ. καὶ αἱ δύο ἢ τὸ σημεῖον $>$ ἢ τὸ $<$, εἶναι φανερόν ὅτι, ὅταν μὲν ἔχωσι τὸ σημεῖον $>$, πᾶσα ἀκεραία τιμὴ τῆς x ἀπὸ τῆς ἀμέσως μεγαλειτέρας τοῦ μεγαλειτέρου τῶν δύο εὐρεθέντων ὁρίων μέχρι τοῦ θετικοῦ ἀπείρου θέλει ἐπαληθεύει ἀμφοτέρας, ὅταν δὲ ἔχωσι τὸ σημεῖον $<$, τότε πᾶσα ἀκεραία τιμὴ τῆς x ἀπὸ τῆς ἀμέσως μικροτέρας τοῦ μικροτέρου τῶν δύο εὐρεθέντων ὁρίων μέχρι τοῦ ἀρνητικοῦ ἀπείρου θέλει ἐπαληθεύει ἀμφοτέρας. Παραδείγματος χάριν, ὅταν ἔχωμεν

$$x > -\left(4 + \frac{3}{7}\right) \quad \text{καὶ} \quad x > 1 + \frac{2}{5},$$

πᾶσα ἀκεραία τιμὴ τῆς x ἀπὸ τῆς τιμῆς 2, ἥτις εἶναι ἡ ἀμέσως μεγαλειτέρα τοῦ μεγαλειτέρου τῶν εὐρεθέντων ὁρίων $-\left(4 + \frac{3}{7}\right)$ καὶ $1 + \frac{2}{5}$, μέχρι τοῦ θετικοῦ ἀπείρου θέλει ἐπαληθεύει συγχρόνως ἀμφοτέρας· ὅταν δὲ ἔχωμεν τὰς ἀνισότητας

$$x < 2 + \frac{3}{5} \quad \text{καὶ} \quad x < -\left(7 + \frac{3}{9}\right),$$

πᾶσα ἀκεραία τιμὴ τῆς x ἀπὸ τῆς τιμῆς -8 , ἥτις εἶναι ἡ ἀμέσως μικροτέρα τοῦ μικροτέρου τῶν δύο εὐρεθέντων ὁρίων $-\left(7 + \frac{3}{9}\right)$ καὶ $2 + \frac{3}{5}$, μέχρι τοῦ ἀρνητικοῦ ἀπείρου θέλει ἐπαληθεύει συγχρόνως ἀμφοτέρως.

Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον, ὅτι αἱ τελικαὶ ἀνισότητες εἶναι ἐναντίας φορᾶς, τοιούστιν ἡ μὲν τούτων ἔχει τὸ σημεῖον $>$, ἡ δὲ τὸ σημεῖον $<$, καὶ ἵνα κατασταθῶμεν εὐληπτότεροι, ἃς λάβωμεν τὰς ἐξῆς

$$x > -\left(4 + \frac{3}{5}\right) \quad \text{καὶ} \quad x < 2 + \frac{1}{7}.$$

Ἵνα εὕρωμεν πάσας τὰς ἀκεραίας τιμὰς τῆς x , τὰς ἐπαληθεύουσας συγχρόνως ἀμφοτέρως, γράφομεν πρῶτον τὴν ἐξῆς σειρὰν

$$-\infty, \dots, -5, -4, -3, -2, -1, -0, 1, 2, 3, \dots + \infty$$

πάντων τῶν ἀρνητικῶν καὶ θετικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$ καὶ οὕτως, ὥστε νὰ περιέχωνται πρὸς τε τὸ ἀρνητικὸν αὐτῆς μέρος καὶ πρὸς τὸ θετικὸν οἱ δύο διαδοχικοὶ ἀκεραῖοι ἀριθμοί, οἱ περιέχοντες ἐκάτερον τῶν εὐρεθέντων ὁρίων. Ἐπειτα εὐρίσκομεν τοὺς δύο διαδοχικοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς -5 καὶ -4 , μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται τὸ ἀρνητικὸν ὄριον $-\left(4 + \frac{3}{5}\right)$, καὶ ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τῆς x πρέπει νὰ ᾖναι μεγαλειτέρα τούτου, λαμβάνομεν τὸν μεγαλειέτερον -4 καὶ ἄγομεν ὑπ' αὐτὸν κάθετον γραμμὴν καὶ ἔπειτα ὀριζόντιον πρὸς τὸ μέρος τοῦ $+\infty$ · διότι πάντες οἱ ἀκεραῖοι ἀριθμοί, οἱ πρὸς τὸ $+\infty$ κείμενοι, ἐπαληθεύουσι τὴν φέρουσαν τὸ σημεῖον $>$ ἀνισότητα. Εὐρίσκομεν ἀκολουθῶς καὶ τοὺς διαδοχικοὺς ἀκεραίους 2 καὶ 3 , μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται τὸ ἕτερον τῶν ὁρίων $2 + \frac{1}{7}$, ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ τῆς x πρέπει νὰ ᾖναι μικροτέρα τούτου, λαμβάνομεν τὸν μικρότερον 2 , καὶ ἄγομεν ὑπ' αὐτὸν κάθετον γραμμὴν καὶ ἔπειτα ὀριζόντιον πρὸς τὸ μέρος τοῦ $-\infty$ · διότι πάντες οἱ πρὸς τὸ μέρος τοῦτο κείμενοι ἀριθμοὶ ἐπαληθεύουσι προφανῶς τὴν φέρουσαν τὸ σημεῖον $<$ ἀνισότητα. Εἶναι

τώρα φανερόν ὅτι πάντες οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ -4 μέχρι τοῦ 2 , συμπεριλαμβανομένων καὶ τούτων, οἱ φέροντες ὑπ' αὐτοὺς διπλὴν ὀριζόντιον γραμμὴν, καὶ μόνοι οὗτοι, θέλουσιν ἐπαληθεύει συγχρόνως καὶ τὰς δύο δεδομένας τελικὰς ἀνισότητας.

Ἄν ἔχωμεν πρὸς ἐπαλήθευσιν τὰς ἀνισότητας

$$x > -\left(2 + \frac{2}{3}\right) \quad \text{καὶ} \quad x < -\left(4 + \frac{3}{8}\right),$$

θέλομεν, ὁμοιοτρόπως σκεπτόμενοι, κατασκευάσει τὸ ἐξῆς σχεδιάσμα

$$-\infty, \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty,$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ κατὰ τὴν φορὰν τῶν δεδομένων ἀνισοτήτων ἀγόμεναι ὀριζόντιοι γραμμαὶ δὲν ἔχουσιν οὐδὲν κοινὸν μέρος, συμπεραίνομεν ὅτι αὗται δὲν δύνανται νὰ ἐπαληθευθῶσι συγχρόνως δι' οὐδεμιᾶς τιμῆς τῆς x , οὔτε ἀκεραίας οὔτε κλασματικῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ. — ΑΚΕΡΑΙΑΙ ΚΑΙ ΘΕΤΙΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x + \epsilon \psi = \gamma$. — ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

71. Σύστημά τι πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων λέγεται ἀπροσδιόριστον, ὅταν, ἐκτὸς τῆς ἐν τῇ § 59 μερικῆς περιπτώσεως, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν αὐτῇ περιεχομένων διαφόρων ἀγνώστων ᾗναι μεγαλείτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀποτελουσῶν αὐτὸ ἐξισώσεων. Ὅταν π. χ. ἔχωμεν σύστημά τι 5 πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, περιχοῦσῶν 7 ἀγνώστους, τὸ σύστημα τοῦτο θέλει εἶναι ἀπροσδιόριστον, τουτέστι θέλει ταῦτοποιεῖσθαι δι' ἀπείρων διαφόρων συστημάτων τιμῶν τῶν ἐν αὐτῷ περιεχομένων ἀγνώστων. Διότι, ἐὰν δώσωμεν εἰς 2 ὅποιασδήποτε τῶν 7 ἀγνώστων δύο ὅποιασδήποτε τιμὰς, θέλομεν ἔχει τότε ἐν σύστημα 5 ἐξισώσεων μετ' ἰσαριθ-

μων ἀγνώστων, οὗ ἢ κατὰ τινὰ τῶν γνωστῶν μεθόδων λύσις θέλει μᾶς παράσχει ἐν σύστημα τιμῶν, ταυτοποιουσῶν αὐτό. Τὸ σύστημα τοῦτο τῶν τιμῶν μετὰ τῶν κατ' ἀρέσκειαν δοθεισῶν τιμῶν τῶν ἄλλων 2 ἀγνώστων θέλει ἀποτελεῖ ἐν σύστημα τιμῶν, ταυτοποιουσῶν τὸ κατ' ἀρχὰς δεδομένον σύστημα. Ἐπειδὴ δὲ προφανῶς δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς 2 ὁποιασδήποτε τῶν 7 ἀγνώστων ἄπειρα συστήματα ὅπως αὐθαирέτων τιμῶν, θέλομεν εὖρει ἄπειρα διάφορα συστήματα τιμῶν ταυτοποιουσῶν τὸ δεδομένον σύστημα τῶν ἐξισώσεων, ἢ τὸ πρόβλημα, οὕτινος τὰς διαφορὰς συνθήκας τοῦτο παριστᾷ.

Ἡ ἀπειρία τῶν διαφορῶν τούτων συστημάτων τιμῶν, τῶν ταυτοποιουσῶν ἀπροσδιόριστόν τι σύστημα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, περιερίζεται μεγάλως, ὅταν προσαπαιτῇται αἱ ἀποτελοῦσαι τὰ συστήματα ταῦτα τιμαὶ τῶν ἀγνώστων νὰ ᾖναι καὶ ἀκέραιαι, καὶ ἔτι μᾶλλον, ὅταν αἱ ἀκέραιαι αὗται τιμαὶ πρέπη νὰ ᾖναι καὶ θετικαί.

Ἡμεῖς ἐνταῦθα θέλομεν περιορισθῇ εἰς τὴν εὐρεσιν πρῶτον τῶν ἀκεραίων, ἔπειτα δὲ τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν συστημάτων, τῶν ταυτοποιούντων μίαν ἐξίσωσιν τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους, ἥς ἢ γενικὴ μορφή εἶναι, ὡς γνωστόν, $ax + by = \gamma$, τῶν γραμμάτων a, b, γ παριστάντων ἐνταῦθα γνωστούς ἀκεραίους ἀριθμούς, θετικούς ἢ ἀρνητικούς.

72. Δυνάμεθα ἐν πρώτοις νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ a, b, γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἂν δὲν ᾖσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἤθελον ἔχει μέγιστόν τινα κοινὸν διαιρέτην δ , δι' οὗ ἡδυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δεδομένης ἐξισώσεως

$$ax + by = \gamma \quad (1),$$

ὅτε ἡ μὲν προκύπτουσα νέα ἐξίσωσις ἤθελεν εἶναι ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ, τὰ δὲ πηλίκα τῶν a, b, γ διὰ δ ἤθελον εἶναι κατὰ γνωστὸν ἀριθμητικὸν θεώρημα ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

73. Δυνάμεθα δεύτερον νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι, τῶν ἀκεραίων a, b, γ ὅντων πρῶτων πρὸς ἀλλήλους, ἐὰν οἱ συντελεσταὶ a καὶ b τῶν ἀγνώστων x καὶ y δὲν ᾖναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀνεπίδεκτος συστημάτων ἀκεραίων λύσεων.

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ a καὶ b ἔχουσι κοινόν τινα παράγοντα δ . Ὅταν οἱ ἀγνώστοι x καὶ y λάβωσιν ἀκεραίας τιμὰς, δ παράγων δ , δ διαιρὼν τοὺς ἀριθμούς a καὶ b , θέλει διαιρεῖ, κατὰ γνω-

στὸν ἀριθμητικὸν θεώρημα, καὶ τὰ γινόμενα $\alpha\chi$ καὶ $\beta\psi$, ἐπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\alpha\chi + \beta\psi$, τοῦτέστι τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξίσωσως (1). Ἄρα πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον αὐτῶν δεῦτερον μέλος γ , ὅπερ ἐκφαντὶον τῆς ὑποθέσεως, διότι προϋπετέθη ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α , β καὶ γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

74. Ὡς ὑποθέσωμεν τρίτον ὅτι, τῶν α , β , γ ὄντων πρώτων πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ συντελεστής α εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν β . Λέγομεν ὅτι ὑπάρχει τότε ἐν τοῦλάχιστον σύστημα ἀκεραίων λύσεων, ταῦτο-ποιοῦν τὴν περὶ ἧς ὁ λόγος ἐξίσωσιν $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$.

Πρὸς ἀποδείξιν τοῦτου λόγουμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς τινα τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων, π. χ. ὡς πρὸς τὴν χ , καὶ ἔχομεν

$$\chi = \frac{\gamma - \beta\psi}{\alpha} \quad (2)$$

καὶ ἐὰν ὁ παρονομαστής α τοῦ κλάσματος $\frac{\gamma - \beta\psi}{\alpha}$ δὲν ᾖναι ἀριθμὸς θε-
τικὸς, μεταβάλομεν τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ, ὥτε ἡ μὲν
τιμὴ τῆς χ δὲν μεταβάλλεται, ὁ δὲ παρονομαστής τοῦ κλάσματος γί-
νεται θετικὸς.

Τοῦ α ὑποτιθεμένου ἀριθμοῦ θετικοῦ, λέγομεν ὅτι, ἐὰν δώσωμεν εἰς
τὴν ἄγνωστον ψ διαδοχικῶς τὰς ἐξῆς α τὸν ἀριθμὸν ἀκεραίας τιμᾶς

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots, \alpha - 1,$$

καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τοῦ τύπου (2) σεσημειωμέ-
νας πράξεις, θέλομεν εὑρεῖ ἀναγκάως ἀκεραίαν τινὰ τιμὴν διὰ τὴν χ ,
καὶ μίαν μόνην, ἥτις μετὰ τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς τῆς ψ θέλει ἀποτελεῖ
ἐν σύστημα ἀκεραίων τιμῶν, ταῦτοποιοῦσάν τὸν τύπον (2) ἢ τὴν ἐξί-
σωσιν (1).

Ἵνα ἀποδείξωμεν τὸ μέρος τοῦτο τῆς παρούσης προτάσεως, ἀρκεῖ
νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς ἐν τῷ τύπῳ (2) καὶ δι' ἐκά-
στην τῶν ἀνωτέρω α τιμῶν τῆς ψ σεσημειωμένης πράξεις οὕτως, ὥστε
τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων νὰ ᾖναι ἀριθμοὶ θετικοί (*), θέλομεν εὑ-

(*) Τοῦτο εἶναι πάντοτε δυνατόν, ἀρκεῖ, ὅταν τὰ πηλίκον ᾖναι ἀριθμὸς
ἀρνητικὸς, νὰ λαμβάνωμεν τὸ πηλίκον καθ' ὑπεροχὴν μονάδος, ἀνεξαρτήτως
τοῦ σημείου αὐτοῦ. Παραδείγματος χάριν, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ
—7 διὰ 3 εἶναι —2, τὸ δὲ ὑπόλοιπον —1, ἀλλ' ἐὰν λάβωμεν ὡς πηλίκον
τὸ —3, θέλομεν εὑρεῖ ὑπόλοιπον +2, ἀριθμὸν θετικόν.

ρει α διάφορα ἀπ' ἀλλήλων ὑπόλοιπα. Διότι τότε, ἐπειδὴ ἕκαστον ὑπόλοιπον ἦναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου α καὶ ταῦτα εἶναι α τὸν ἀριθμὸν, ἔπεται ὅτι ἀναγκαιῶς ἐν ἐξ αὐτῶν θέλει εἶναι 0, ὅτε ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς χ εἰς τὴν παρασχοῦσαν τὸ ὑπόλοιπον 0 ἀκεραίαν τιμὴν τῆς ψ θέλει εἶναι ἀκεραία, καὶ θέλουσιν ἀμφότεραι ταῦτοποιεῖ τὸν τύπον (2) ἢ τὴν ἐξ ἧς οὗτος προέκυψεν ἐξίσωσιν (1). Ἐὰν π. χ. ὁ α ἦναι ἴσος μὲ 7, δὲν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν 7 θετικὰ ὑπόλοιπα, διάφορα ἀπ' ἀλλήλων καὶ μικρότερα τοῦ 7, χωρὶς ἐν τούτων νὰ ἦναι ἀναγκαιῶς 0.

Ἄς υποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι εἶναι δυνατὸν δύο τοιαῦτα ὑπόλοιπα v' καὶ v'' , ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς τιμὰς ψ' καὶ ψ'' τῆς ψ , νὰ ἦναι ἴσα. Τότε θέλομεν ἔχει, καλοῦντες π' καὶ π'' τὰ ἀντιστοιχοῦντα πηλίκια τῶν διαιρέσεων, τὰς ἰσότητας.

$$\gamma - \theta\psi' = \alpha\pi' + v' \quad \text{καὶ} \quad \gamma - \theta\psi'' = \alpha\pi'' + v''$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα, ἀφαιροῦντες ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἐξαλείφοντες τὰ ὑποτεθέντα ἴσα ὑπόλοιπα v' καὶ v'' , τὴν ἐξῆς

$$\theta\psi' - \theta\psi'' = \alpha\pi' - \alpha\pi'', \text{ ἥτις γράφεται καὶ οὕτω } \theta(\psi' - \psi'') = \alpha(\pi' - \pi'').$$

Ἄλλ' ἡ τελευταία αὕτη ἰσότης εἶναι ἄτοπος· διότι, ἐπειδὴ ὁ α διαίρει προφανῶς τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ πρῶτον $\theta(\psi' - \psi'')$. Ἄλλ' ὁ α εἶναι καθ' ὑπόθεσιν ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς τὸν παράγοντα αὐτοῦ θ . Ἄρα πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον παράγοντα $\psi' - \psi''$, ὅπερ ἀδύνατον· διότι, ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ ψ' καὶ ψ'' ὑπετέθησαν ἀνωτέρω ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ α, ἡ διαφορὰ $\psi' - \psi''$ θέλει εἶναι κατ' ἰσχυρότερον λόγον μικρότερα τοῦ α. Ἄρα ἡ ἀνωτέρω ἰσότης εἶναι ἄτοπος. Ἐπεται λοιπὸν ὅτι δύο τῶν α ὑπολοίπων δὲν δύναται νὰ ἦναι ἴσα. Ἄρα ἐν τούτων εἶναι 0, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Ἐὰν καλέσωμεν η τὴν τιμὴν τῆς ψ , τὴν παρέχουσιν διὰ τὴν χ ὑπόλοιπον 0, καὶ θ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\gamma - \theta\eta$ διὰ α, θέλομεν ἔχει τότε τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων τιμῶν

$$\chi = \theta, \quad \psi = \eta,$$

τῶν ταῦτοποιουσῶν τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν (1).

75. Θέλομεν ἀποδείξει τελευταῖον ὅτι, ὅταν ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi + \theta\psi = \gamma$ ἦναι ἐπιδεκτικὴ ἐνὸς συστήματος ἀκεραίων λύσεων, ὑπάρχουσιν ἄπειρα τοιαῦτα, ταῦτοποιοῦντα αὐτήν.

Ἐστω $\chi = \theta$ καὶ $\psi = \eta$ τὸ ταῦτοποιεῖν τὴν ἐξίσωσιν (1) ἀκέριον σύστημα. Θέλομεν ἔχει τότε τὴν ταυτότητα

$$\alpha\theta + \theta\eta = \gamma \quad (3).$$

Ἀφαιρούντες δὲ κατὰ μέλη ἀπὸ τῆς ἐξίσωσως (1) τὴν ταυτότητα (3), εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$ax - a\theta + b\psi - b\eta = 0,$$

ἥτις γράφεται καὶ οὕτω

$$a(x - \theta) = -b(\psi - \eta),$$

καὶ ἐξ ἧς πορίζομεθα

$$x = \theta + \frac{-b(\psi - \eta)}{a} \quad (4).$$

Ἰνα ἡ ἐξίσωσις (4), ἥτις δὲν διαφέρει τῆς (1) εἰμὴ μόνον κατὰ τοῦτο, ὅτι ἀντὶ τοῦ γ' ἐτέθη τὸ ἴσον αὐτῷ $a\theta + b\eta$, ταυτοποιῆται διὰ τινος συστήματος ἀκεραίων τιμῶν, πρέπει προφανῶς ἡ ἀκεραία τιμὴ τῆς ψ νὰ ᾖ τοιαύτη, ὥστε ὁ ἀριθμητικὸς $-b(\psi - \eta)$ τοῦ ἐν αὐτῇ κλάσματος νὰ ᾖ διαιρετὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ a . Ἀλλὰ, ἐπειδὴ ὁ a εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς τὸν παράγοντα b , (ἄλλως ἡ ἐξίσωσις (4) δὲν ἔθελεν εἶναι ἐπιδεκτικὴ συστημάτων ἀκεραίων λύσεων), πρέπει οὗτος νὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον παράγοντα $\psi - \eta$ τοῦ γινομένου. Ἐν ἄλλαις λέξεσι πρέπει ἡ ἀκεραία τιμὴ τῆς ψ νὰ ᾖ τοιαύτη, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$\frac{\psi - \eta}{a} = \tau \quad (5),$$

τοῦ τ παριστῶντος ὁποιονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν, θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

Ἀντικαθιστῶντες τότε εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) ἀντὶ τοῦ $\frac{\psi - \eta}{a}$ τὸ ἴσον αὐτῷ τ καὶ λύοντες καὶ τὴν ἐξίσωσιν (5) ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον ψ , θέλομεν ἔχει τοὺς τύπους

$$x = \theta - b\tau \quad (6),$$

$$\psi = \eta + a\tau \quad (7),$$

οἷτινες θέλουσι παρέχει διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ τ ἐν σύστημα ἀκεραίων τιμῶν, ταυτοποιουσῶν τὴν ἐξίσωσιν (1). Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ τ δυνάμεθα νὰ δώσωμεν πάσας τὰς ἀκεραίας τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τοῦ $-\infty$ καὶ $+\infty$, ἔπεται ὅτι οἱ τύποι (6) καὶ (7) θέλουσι μᾶς δώσει ἅπαιρα συστήματα ἀκεραίων τιμῶν, ταυτοποιουσῶν τὴν ἐξίσωσιν (1), τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν. Ὅτι δὲ αἱ διὰ τῶν τύπων (6) καὶ (7) παρεχόμεναι ἀκέραιαι τιμαὶ θέλουσι ταυτοποιεῖ πάντοτε τὴν ἐξίσωσιν (1), ὁποιονδήποτε καὶ ᾖ ἡν νὰ τ, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἀποδείξωμεν καὶ ἀμέσως ἀντικαθιστῶντες ἐν αὐτῇ ἀντὶ τῆς x

καὶ ψ τὰς ἀνωτέρω τιμὰς αὐτῶν $\theta - \theta\tau$ καὶ $\eta + \alpha\tau$, ὅτε αὐτὴ γίνεται

$$a\theta - a\beta\tau + b\eta + a\beta\tau = \gamma$$

ἢ

$$a\theta + b\eta = \gamma \quad (3),$$

ἥτις εἶναι κατὰ τὴν γενομένην ὑπόθεσιν ἡ ἀνωτέρω εὐρεθεῖσα ταυτότης (3).

76. Ἐὰν παραβάλωμεν πρὸς ἄλληλα τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν

$$a\chi + b\psi = \gamma \quad (1),$$

τὸ καθ' ὑπόθεσιν ταυτοποιοῦν αὐτὴν σύστημα τῶν ἀκεραίων τιμῶν

$$\chi = \theta, \quad \psi = \eta \quad (2),$$

καὶ τοὺς ἀνωτέρω εὐρεθέντας γενικοὺς τύπους

$$\chi = \theta - \delta\tau \quad (6),$$

$$\psi = \eta + \alpha\tau \quad (7),$$

βλέπομεν εὐκόλως, ὅτι ὑπάρχει μεταξὺ αὐτῶν ἡ ἐξῆς σταθερὰ σχέσηις.

Ὅταν μᾶς δίδητε σύστημά τι (2) ἀκεραίων τιμῶν, ταυτοποιοῦσάν τὴν ἐξίσωσιν (1), εὐρίσκομεν τοὺς γενικοὺς τύπους (6) καὶ (7), ἃν εἰς μὲν τὴν δεδομένην τιμὴν η τῆς ψ προσθέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ a τῆς ἐτέρας ἀγνώστου χ ἐπὶ τινα ἀπροσδιόριστον ἀκεραῖον ἀριθμὸν τ , εἰς δὲ τὴν δεδομένην τιμὴν θ τῆς χ προσθέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ b τῆς ἐτέρας ἀγνώστου ψ , ληφθέντος μὲ ἐναντίον σημείου, ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀπροσδιόριστον ἀκεραῖον ἀριθμὸν τ .

Ἐὰν δ' ἀλλάζωμεν εἰς τοὺς τύπους (6) καὶ (7) τὸ σημεῖον τῆς τ , οὗτοι γίνονται

$$\chi = \theta + \delta\tau \quad (6),$$

$$\psi = \eta - \alpha\tau \quad (7),$$

καὶ ταυτοποιοῦσι πάντοτε τὴν ἐξίσωσιν (1).

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ὅταν ὁ συντελεστὴς b τῆς ψ λαμβάνηται μὲ τὸ ἴδιον αὐτοῦ σημεῖον, ὁ συντελεστὴς a τῆς χ πρέπει νὰ λαμβάνηται μὲ τὸ ἀντίθετον, καὶ ἀντιστρόφως.

77. Ἴνα δὲ καταστῶμεν καταληπτότεροι, ἂς ἐφαρμόσωμεν τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα ἐπὶ τινος παραδείγματος. Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι μᾶς ζητοῦνται οἱ γενικοὶ τύποι τῶν συστημάτων τῶν ἀκεραίων τιμῶν, τῶν ταυτοποιουσῶν τὴν ἐξίσωσιν

$$6\chi - 24\psi = -33 \quad (1).$$

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 6, 24 καὶ 33 δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διαιροῦμεν τὰ δύο μέλη τῆς δεδομένης ἐξίσωσης (1) διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 3, καὶ ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῇ ἐξίσωσιν

$$2x - 7y = -11 \quad (1).$$

ἥτις εἶναι ἐπιδεκτικὴ συστήματός τινος ἀκεραίων λύσεων, διότι οἱ συντελεσταὶ 2 καὶ -7 τῶν ἀγνώστων x καὶ y εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀφοῦ δ' εὗρωμεν ὡς ἀνωτέρω ἐξεθέσαμεν (74) τὸ σύστημα

$$x = -2 \quad \text{καὶ} \quad y = 1 \quad (2)$$

τῶν ἀκεραίων τιμῶν, τῶν ταυτοποιουσῶν τὴν ἐξίσωσιν (1), σχηματίζομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα τοὺς γενικοὺς τύπους

$$x = -2 + 7\tau \quad (6),$$

$$y = 1 + 2\tau \quad (7),$$

ἢ, λαμβάνοντες τὸν συντελεστὴν 2 τῆς x μὲ ἐναντίον σημεῖον, τοὺς

$$x = -2 - 7\tau \quad (8),$$

$$y = 1 - 2\tau \quad (9),$$

τοῦ τ παριστῶντος ὅποιονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμόν, θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

Καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν π. χ. δώσωμεν εἰς τὸ τ τὰς ἀκεραίας τιμὰς

$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

θέλομεν εὑρεῖ ἐκ μὲν τῶν τύπων (6) καὶ (7) τὰ συστήματα

$$x = -37, -30, -23, -16, -9, -2, 5, 12, 19, 26, 33,$$

$$y = -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11,$$

ἐκ δὲ τῶν τύπων (8) καὶ (9) τὰ συστήματα

$$x = 33, 26, 19, 12, 5, -2, -9, -16, -23, -30, -37,$$

$$y = 11, 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, -9,$$

ἅτινα δὲν διαφέρουσι τῶν ἐκ τῶν προηγουμένων τύπων δεδομένων εἰ μὴ κατὰ τὴν τάξιν, ὡς τοῦτο ἦτο ἐπόμενον.

78. Ἐκ τῶν προηγουμένων συμπεραίνομεν εὐκόλως, ὅτι πρὸς εὔρεσιν πάντων τῶν συστημάτων τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξίσωσης $ax + by = r$, ἀρκεῖ νὰ εὗρωμεν ἐν ὁποιονδήποτε τοιοῦτο $x = \theta$ καὶ $y = \eta$, καὶ νὰ σχηματίσωμεν δι' αὐτοῦ κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα τοὺς γενικοὺς τύπους

$$x = \theta - b\tau \quad \text{καὶ} \quad y = \eta + a\tau,$$

ἢ τοὺς

$$x = \theta + b\tau \quad \text{καὶ} \quad y = \eta - a\tau,$$

ἐν οἷς τὸ τ παριστᾷ πάντα ἀκέραιον ἀριθμὸν, θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

Πρὸς εὗρεσιν τοῦ συστήματος $x=\theta$ καὶ $y=\eta$ ὑπάρχουσιν ἐν χρήσει δύο διάφοροι μέθοδοι· ἡ ἐν τῇ § 74 ἐκτεθεῖσα, δι' ἧς ἀπεδείξαμεν ὅτι, ὅταν οἱ συντελεσταὶ a καὶ b τῶν ἀγνώστων x καὶ y ᾖναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὑπάρχει ἀναγκαιῶς ἐν σύστημα ἀκεραίων τιμῶν τῶν ἀγνώστων, ταῦτοποιοῦν τὴν ἐξίσωσιν $ax+by=\gamma$, καὶ ἡ ἀκόλουθος, ἣν μεταχειρίζομεθα πάντοτε, ὁσάκις οἱ συντελεσταὶ a καὶ b τῶν ἀγνώστων εἶναι ἀριθμοὶ ὁπωσοῦν μεγάλοι, ὅτε αἱ πρὸς εὗρεσιν τοῦ ζητουμένου συστήματος $x=\theta$ καὶ $y=\eta$ γενόμεναι δοκιμαὶ ἠδύναντο νὰ ᾖναι πολλαὶ καὶ ἐπίπονοι. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἶχαμεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$173x - 257y = 1891,$$

ἔπρεπε νὰ δώσωμεν εἰς τὴν y τὸ πολὺ 173 διαδοχικὰς ἀκεραίας τιμὰς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ 172, ἵνα εὕρωμεν εἰς ποίαν τούτων ἀντιστοιχεῖ ἀκεραία τις τιμὴ τῆς x , ταῦτοποιοῦσα τὸν τύπον

$$x = \frac{1891 + 257y}{173},$$

ὃν πορίζομεθα λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον x , τὴν ἔχουσιν τὸν μικρότερον συντελεστήν.

79. Ὅταν δ εἰς τῶν συντελεστῶν a καὶ b τῶν ἀγνώστων, παραδείγματος χάριν δb , ᾖναι ἴσος τῇ μονάδι, τότε ἡ ἐξίσωσις $ax+by=\gamma$ γίνεται $ax+y=\gamma$, καὶ βλέπομεν εὐκόλως ὅτι αὕτη ταῦτοποιεῖται διὰ τοῦ ἀκεραίου συστήματος $x=0$ καὶ $y=\gamma$, δι' οὗ θέλομεν σχηματίσει ἀμέσως τοὺς γενικοὺς τύπους $x=\tau$ καὶ $y=\gamma-a\tau$.

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι οὐδέτερος τῶν συντελεστῶν a καὶ b εἶναι ἴσος τῇ μονάδι, καὶ ὅτι δa εἶναι μικρότερος τοῦ b . Λύοντες τότε τὴν ἐξίσωσιν $ax+by=\gamma$ ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον x , τὴν ἔχουσιν τὸν μικρότερον συντελεστήν, ὃν δυνάμεθα πάντοτε νὰ ὑποθέσωμεν καὶ θετικὸν (74), θέλομεν ἔχει

$$x = \frac{\gamma - by}{a} \quad (2).$$

Ἄς παραστήσωμεν διὰ π καὶ ρ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ γ καὶ b διὰ a , καὶ διὰ γ' καὶ b' τὰ ἀντίστοιχα ὑπόλοιπα. Θέλομεν τότε ἔχει τὰς ἰσότητας

$$\gamma = a\pi + \gamma' \quad \text{καὶ} \quad b = a\rho + b' \quad (3),$$

ἀντικαθιστώντες δὲ εἰς τὸν τύπον (2) ἀντὶ τοῦ γ καὶ θ τὰ ἴσα αὐτοῖς $a\pi + \gamma'$, καὶ $a\rho + \theta'$, οὗτος γίνεται

$$x = \frac{a\pi + \gamma' - (a\rho + \theta')\psi}{a} = \pi - \rho\psi + \frac{\gamma' - \theta'\psi}{a} \quad (4).$$

Ὁ τύπος (4) δεικνύει ὅτι, ἵνα ἡ τιμὴ τῆς x ᾖ ἀκεραία, πρέπει ἡ εἰς τὴν ψ διδομένη ἀκεραία τιμὴ νὰ ᾖ τοιαύτη, ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{\gamma' - \theta'\psi}{a}$ νὰ ἰσοῦται μὲ τινὰ ἀπροσδιόριστον ἀκέραιον ἀριθμὸν τ . Ἄν ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι

$$\frac{\gamma' - \theta'\psi}{a} = \tau \quad (5),$$

τότε ἡ ὑπὸ τοῦ τύπου (4) διδομένη τιμὴ τῆς x θέλει γένηαι

$$x = \pi - \rho\psi + \tau \quad (a),$$

καὶ βλέπομεν εὐκόλως ὅτι πρὸς εὑρεσιν ἐνὸς συστήματος ἀκεραίων τιμῶν τῆς x καὶ ψ , ταῦτοποιοῦσθων τὴν ἐξίσωσιν (1), ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἀκεραίαν τινὰ τιμὴν τῆς ψ , ταῦτοποιοῦσαν τὸν τύπον (5), ἐν ᾧ ἡ τ ὑποτίθεται ἀκέραιός τις ἀριθμός. Ἐν ἄλλαις λέξεσι, τὸ ζήτημα μετατρέπη εἰς τὴν εὑρεσιν ἐνὸς συστήματος ἀκεραίων λύσεων τοῦ τύπου (5) ἢ, ὅπερ ταῦτό, τῆς ἐξ αὐτοῦ ποριζομένης ἐξισώσεως

$$\theta'\psi + a\tau = \gamma' \quad (5),$$

ἣτις δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς τῆς δεδομένης $a\chi + \theta\psi = \gamma$, εἰ μὴ μόνον κατὰ τοῦτο, ὅτι ὁ ἐν αὐτῇ συντελεστής θ' τῆς ψ εἶναι μικρότερος τοῦ ἐν τῇ δεδομένη συντελεστοῦ αὐτῆς θ .

Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ ἐξίσώσει (5) τὸ ὑπόλοιπον θ' εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου a , λύομεν αὐτὴν ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον ψ καὶ ἔχομεν

$$\psi = \frac{\gamma' - a\tau}{\theta'} \quad (6).$$

Καλοῦντες πάλιν π' καὶ ρ' τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ γ' καὶ a διὰ θ' , καὶ γ'' καὶ a' τὰ ἀντίστοιχα ὑπόλοιπα, καὶ ἀντικαθιστώντες ἐν τῷ τύπῳ (6) ἀντὶ τοῦ γ' καὶ a τὰ ἴσα αὐτοῖς $\theta'\pi' + \gamma''$ καὶ $\theta'\rho' + a'$, θέλομεν ἔχει

$$\psi = \frac{\theta'\pi' + \gamma'' - (\theta'\rho' + a')\tau}{\theta'} = \pi' - \rho'\tau + \frac{\gamma'' - a'\tau}{\theta'} \quad (7).$$

Ὁ τελευταῖος δὲ τύπος (7) δεικνύει ὅτι, ἵνα ἡ τιμὴ τῆς ψ ᾖ ἀκεραία, πρέπει ἡ εἰς τὴν διδομένη ἀκεραία τιμὴ νὰ ᾖ τοιαύτη, ὥστε

τὸ κλάσμα $\frac{\gamma'' - \alpha'\tau}{\delta'}$ νὰ ἰσοῦται μέ τινα ἀπροσδιόριστον ἀκέραιον ἀριθμὸν τ' . Ἄν ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι

$$\frac{\gamma'' - \alpha'\tau}{\delta'} = \tau' \quad (8),$$

τότε ἡ ὑπὸ τοῦ τύπου (7) διδομένη τιμὴ τῆς γ' θέλει γίνειν

$$\gamma' = \pi' - \rho'\tau + \tau' \quad (6)$$

καὶ βλέπομεν πάλιν εὐκόλως, ὅτι πρὸς εὐρεσιν ἐνὸς συστήματος ἀκεραίων τιμῶν τῆς γ' καὶ τ , ταυτοποιοῦσθαι τὴν ἐξίσωσιν (5), ἀρκεῖ νὰ εὐρωμεν ἀκεραίαν τινὰ τιμὴν τῆς τ ταυτοποιοῦσαν τὸν τύπον (8), ἐν ᾧ ἡ τ' ὑποτίθεται ἀκέραιός τις ἀριθμὸς. Ἐν ἄλλαις λέξεσι, τὸ ζήτημα μετετρέπη εἰς τὴν εὐρεσιν ἐνὸς συστήματος ἀκεραίων λύσεων τοῦ τύπου (8), ἢ, ὑπερ ταύτῃ, τῆς ἐξ αὐτοῦ πορίζομένης ἐξισώσεως

$$\alpha'\tau + \theta'\tau' = \gamma'' \quad (8),$$

ἥτις δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς τῆς προηγουμένης $\theta'\gamma' + \alpha\tau = \gamma'$ εἰ μὴ μόνον κατὰ τοῦτο, ὅτι ὁ ἐν αὐτῇ συντελεστής α' τῆς τ εἶναι μικρότερος τοῦ ἐν τῇ (5) συντελεστοῦ αὐτῆς α .

Καθὼς ἀνηγάγομεν τὴν εὐρεσιν ἐνὸς συστήματος ἀκεραίων τιμῶν τῆς ἐξισώσεως (1) εἰς τὴν εὐρεσιν ἐνὸς συστήματος ἀκεραίων τιμῶν τῆς ἐξισώσεως (5), καὶ τοῦτο πάλιν εἰς τὴν εὐρεσιν ἐνὸς συστήματος ἀκεραίων τιμῶν τῆς ἐξισώσεως (8), ἥτις διαφέρει τῆς (5), ὅπως ἡ (5) διαφέρει τῆς (1), ὁμοιοτρόπως σκεπτόμενοι καὶ πράττοντες θέλομεν ἀναγάγει τὴν δι' ἐνὸς συστήματος ἀκεραίων τιμῶν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (8), εἰς τὴν δι' ὁμοίου συστήματος λύσιν ἑτέρας τινὸς ἐξισώσεως, ἥτις θέλει διαφέρει τῆς (8) κατὰ τοῦτο, ὅτι ὁ ἐν αὐτῇ συντελεστής τῆς ἀγνώστου τ' θέλει εἶναι μικρότερος τοῦ ἐν τῇ (8) συντελεστοῦ θ' τῆς αὐτῆς ἀγνώστου. Ἄλλ' ἐπειδὴ οἱ διαδοχικοὶ συντελεσταὶ εἶναι τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα, ἅτινα εὐρίσκομεν διαιροῦντες πρῶτον τὸν θ διὰ τοῦ α , ἔπειτα τὸν α διὰ τοῦ εὐρεθέντος ὑπολοίπου θ' , ἔπειτα τὸ ὑπόλοιπον θ' διὰ τοῦ εὐρεθέντος νέου ὑπολοίπου α' , καὶ οὕτω καθεξῆς, ὥς εἰ ἠθέλομεν νὰ εὐρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν, καὶ ἐπειδὴ πρὸς τούτοις οἱ ἀριθμοὶ α καὶ θ ὑπετέθησαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔπεται ἀναγκαίως ὅτι ἐν τῶν διαδοχικῶς εὐρισκομένων ὑπολοίπων θέλει εἶναι ἡ μονάς. Ἀλλὰ τότε καὶ ὁ συντελεστής τῆς ἀγτιστοίχου ἀγνώστου τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, ἐξ ἧς ἐξαρτᾶται ἡ προηγουμένη μέχρι τῆς δεδομένης, θέλει εἶναι ἡ μονάς, ὅτε εὐρίσκομεν, κατὰ τὰ ἐν τῇ ἀρ-

χῆ τῆς παρούσης παραγράφου λεχθέντα, ἀμέσως ἐν σύστημα ἀκεραίων τιμῶν ταυτοποιουσῶν αὐτήν. Ἄρα θέλομεν ἔχει τότε ἐν σύστημα ἀκεραίων τιμῶν τῆς δεδομένης, δι' ὧν θέλομεν σχηματίσει ἀμέσως τοὺς γενικοὺς τύπους τῶν συστημάτων τῶν ἀκεραίων λύσεων αὐτῆς.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ., ἵνα καταστῶμεν καταληπτότεροι, τὸ ὑπόλοιπον α' ἴσον τῇ μονάδι. Τότε ἡ ἐξίσωσις (8) γίνεται ἡ τελικὴ

$$\tau + 6'\tau' = \gamma'',$$

καὶ ταυτοποιεῖται διὰ τοῦ συστήματος τῶν ἀκεραίων τιμῶν $\tau' = 0$ καὶ $\tau = \gamma''$. Ἀντικαθιστώντες δὲ ἐν τῷ τύπῳ (6) ἀντὶ τῆς τ καὶ τ' τὰς εὐρεθείσας ἀκεραίας τιμὰς αὐτῶν γ'' καὶ 0, εὐρίσκομεν διὰ τὴν ψ τὴν ἀκεραίαν τιμὴν $\pi' - \rho'\gamma''$. Ἀντικαθιστώντες τέλος ἐν τῷ τύπῳ (α) ἀντὶ τῆς ψ καὶ τ τὰς εὐρεθείσας ἀκεραίας τιμὰς αὐτῶν $\pi' - \rho'\gamma''$ καὶ γ'' εὐρίσκομεν διὰ τὴν χ τὴν ἀκεραίαν τιμὴν $\pi - \rho(\pi' - \rho'\gamma'') + \gamma''$, ἥτις μετὰ τῆς ἀντιστοίχου $\pi' - \rho'\gamma''$ τῆς ψ θέλει ἀναγκασίως ἀποτελεῖ ἐν σύστημα ἀκεραίων λύσεων τῆς δεδομένης ἐξίσωσεως $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$, ὅπου καὶ προϋπιθέμεθα νὰ εὕρωμεν.

80. Ἄς ἐφαρμόσωμεν δὲ πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπὸν τὰ ἀνωτέρω γενικῶς λεχθέντα ἐπὶ τινος μερικοῦ παραδείγματος, καὶ ἔστω

$$7\chi + 25\psi = 96 \quad (1)$$

ἡ δεδομένη ἐξίσωσις, ἥς ζητοῦνται οἱ γενικοὶ τύποι τῶν συστημάτων τῶν ἀκεραίων αὐτῆς λύσεων.

Δύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον χ , τὴν ἔχουσιν τὸν μικρότερον συντελεστήν, εὐρίσκομεν

$$\chi = \frac{96 - 25\psi}{7} = 13 - 3\psi + \frac{5 - 4\psi}{7} \quad (2).$$

Ἴνα δὲ ἡ τιμὴ τῆς χ ᾖ ἀκεραία, πρέπει ἡ εἰς τὴν ψ δεδομένη ἀκεραία τιμὴ νὰ ᾖ ταιαύτη, ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{5-4\psi}{7}$ νὰ ἰσοῦται μὲ τινὰ ὁποιονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν τ . Τιθεμένου λοιπὸν

$$\frac{5 - 4\psi}{7} = \tau \quad (5),$$

ἡ μὲν τιμὴ τῆς χ γίνεται

$$\chi = 13 - 3\psi + \tau \quad (α),$$

ἐκ δὲ τοῦ τύπου (5) πορίζόμεθα τὴν ἐξίσωσιν

$$4\psi + 7\tau = 5 \quad (β),$$

ἥς πρέπει νὰ εὕρωμεν ἐν σύστημα ἀκεραίων λύσεων, ἵνα πορισθῶμεν κατὰ τὰ προλεχθέντα ἐν τοιοῦτο σύστημα τῆς δεδομένης (1).

Λύοντες λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν (5) ὡς πρὸς τὴν ἔχουσαν τὸν μικρότερον συντελεστὴν ἄγνωστον y' εὐρίσκομεν

$$y' = \frac{5-7\tau}{4} = 1 - \tau + \frac{1-3\tau}{4} \quad (7).$$

Ἵνα δὲ ἡ τιμὴ τῆς y' ᾖ ἀκεραία, πρέπει ἡ εἰς τὴν τ δοθησομένη ἀκεραία τιμὴ νὰ ᾖναι τοιαύτη, ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{1-3\tau}{4}$ νὰ ἰσοῦται μὲ τινα ἀπροσδιόριστον ἀκέραιον ἀριθμὸν τ' . Τιθεμένου λοιπὸν

$$\frac{1-3\tau}{4} = \tau' \quad (8),$$

ἡ μὲν τιμὴ τῆς y' γίνεται

$$y' = 1 - \tau + \tau' \quad (6)$$

ἐκ δὲ τοῦ τύπου (8) πορίζομεθα τὴν ἐξίσωσιν

$$3\tau + 4\tau' = 1 \quad (8),$$

ἥς πρέπει νὰ εὕρωμεν ἐν σύστημα ἀκεραίων λύσεων, ἵνα πορισθῶμεν ἐν τοιοῦτο τῆς ἐξισώσεως (5), δι' οὗ θέλομεν πορισθῇ ὅμοιον τῆς δεδομένης ἐξισώσεως (1).

Λύοντες λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν (8) ὡς πρὸς τὴν τ , εὐρίσκομεν

$$\tau = \frac{1-4\tau'}{3} = -\tau' + \frac{1-\tau'}{3},$$

καὶ ἵνα πάλιν ἡ διὰ ταύτης διδομένη τιμὴ τῆς τ ᾖ ἀκεραία, πρέπει ἡ εἰς τὴν τ' δοθησομένη ἀκεραία τιμὴ νὰ ᾖναι τοιαύτη, ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{1-\tau'}{3}$ νὰ ἰσοῦται μὲ τινα ἀκέραιον ἀριθμὸν τ'' . Τιθεμένου λοιπὸν

$$\frac{1-\tau'}{3} = \tau'' \quad (9),$$

ἡ μὲν τιμὴ τῆς τ γίνεται

$$\tau = -\tau' + \tau'' \quad (\gamma),$$

ἡ δὲ ἐκ τοῦ τύπου (9) ποριζομένη ἐξίσωσις

$$\tau' + 3\tau'' = 1$$

εἶναι ἡ τελικὴ, διότι ὁ συντελεστὴς τῆς τ' εἶναι ἡ μονὰς καὶ ταυτοποιεῖται προφανῶς διὰ τοῦ συστήματος τῶν ἀκεραίων τιμῶν $\tau' = 1$ καὶ $\tau'' = 0$.

Ἀντικαθιστώντες τώρα εἰς τὸν τύπον (γ) ἀντὶ τῆς τ' καὶ τ'' τὰς εὐρεθείσας ἀκεραίας τιμὰς αὐτῶν 1 καὶ 0, εὐρίσκομεν $\tau = -1$, ἐκ δὲ τοῦ τύπου (6) πορίζομεθα, ἀντικαθιστώντες ἐν αὐτῷ ἀντὶ τοῦ τ καὶ τ' τὰς εὐρεθείσας τιμὰς -1 καὶ 1 αὐτῶν, $\psi = 3$. Ἀντικαθιστώντες τέλους ἐν τῷ τύπῳ (α) ἀντὶ τῆς ψ καὶ τ τὰς τιμὰς αὐτῶν 3 καὶ -1 , εὐρίσκομεν $\chi = 3$. Λοιπὸν τὸ ἀκέραιον σύστημα, τὸ ταῦτοποιεῖν τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν (1), εἶναι $\chi = 3$ καὶ $\psi = 3$. Ἐπομένως οἱ γενικοὶ αὐτῆς τύποι θέλουσιν εἶναι

$$\chi = 3 - 25\tau \quad \text{καὶ} \quad \psi = 3 + 7\tau,$$

τοῦ τ παριστῶντος πᾶντα ἀκέραιον ἀριθμὸν, θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

81. Οἱ ἐπὶ τῆς δεδομένης ἐξίσωσως $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ πρὸς εὐρεσιν τῆς τελικῆς ἐκτελούμενοι, ὡς ἀνωτέρω ἐξεθέσαμεν, ὑπολογισμοὶ δύνανται νὰ συντηρηθῶσιν ἐνίοτε ἐπαισθητῶς διὰ τινων τῶν ἐξῆς τεσσάρων δυνατῶν ἀπλοποιήσεων.

1^η. Συμβαίνει πολλάκις, ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ α , β , γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εἰς τῶν συντελεστῶν α καὶ β καὶ τὸ δεύτερον μέλος γ νὰ ἔχωσι κοινὸν τινα παράγοντα κ . Ὡς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι δ α καὶ γ ἔχουσι τὸν κοινὸν παράγοντα κ , καὶ β παραστήσωμεν διὰ α' καὶ γ' τὰ πηλίκια τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ κ . Τότε θέλομεν ἔχει $\alpha = \alpha'\kappa$ καὶ $\gamma = \gamma'\kappa$, ἡ δὲ ἐξίσωσις $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ γίνεταί

$$\alpha'\chi + \beta\psi = \gamma' \quad (1)$$

ἢ, διαιρουμένων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς διὰ κ ,

$$\alpha'\chi + \frac{\beta\psi}{\kappa} = \gamma' \quad (2).$$

Ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ α καὶ β πρέπει νὰ ᾔναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἵνα ἡ ἐξίσωσις (1) ᾖ ἐπιδεκτικὴ συστημάτων ἀκεραίων λύσεων, δ κοινὸς εἰς τὸν α καὶ γ παράγων κ δὲν δύναται νὰ διαιρῇ τὸν β , ἐπειδὴ δὲ πρέπει νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον $\beta\psi$, ἵνα ἡ ἐξίσωσις (2) ᾖ ἐπιδεκτικὴ ἀκεραίων λύσεων, πρέπει ἀναγκαίως νὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον παράγοντα αὐτοῦ ψ . Πρέπει λοιπὸν νὰ ἔχωμεν πάντοτε $\psi = \kappa\psi'$, τῆς ψ' παριστώσης ἀκεραίου τινα ἀριθμὸν, ἵνα ἡ ἐξίσωσις (2) ταῦτοποιῇται δι' ἀκεραίων συστημάτων. Τίθεμένον λοιπὸν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) ἀντὶ τῆς ψ τὸ ἴσον αὐτῇ $\kappa\psi'$, αὕτη γίνεταί

$$\alpha'\chi + \beta\psi' = \gamma' \quad (3),$$

καὶ εἶναι προφανῶς πολὺ ἀπλοστέρα τῆς δεδομένης $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$, ἐπο-

μένως θέλει φέρει ἡμᾶς ταχύτερον εἰς τὴν τελικὴν ἐξίσωσιν, ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ τὸ ταῦτοποιοῦν τὴν ἐξίσωσιν (3) σύστημα τῶν ἀκεραίων τιμῶν θ καὶ η τῆς χ καὶ ψ' , καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ ταῦτοποιοῦν τὴν ἐξίσωσιν (4) πολλαπλασιάζοντες τὴν τιμὴν η τῆς ψ ἐπὶ κ . Διότι εἴπομεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ ἐξίσωσις (3) εἶναι αὐτὴ ἡ (2), ἐν ᾗ ἀντὶ τῆς ψ ἐτέθη $\kappa\psi'$.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι

$$3\psi\chi + 11\psi = 65 \quad (1)$$

εἶναι ἡ δεδομένη ἐξίσωσις. Ἐπειδὴ ὁ συντελεστής 3 ὅ τῆς χ καὶ τὸ γνωστὸν μέλος 65 ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸν 5, διαιροῦμεν ἀμφοτέρω τὰ μέλη αὐτῆς διὰ 5, καὶ ἔχομεν

$$7\chi + \frac{11\psi}{5} = 13 \quad (2).$$

Τιθεμένου δὲ ἐν τῇ ἐξίσώσει (2) $5\psi'$ ἀντὶ τῆς ψ , τῆς ψ' παριστώσης πάντοτε ἀκέραιόν τινα ἀριθμὸν, αὕτη γίνεται

$$7\chi + 11\psi' = 13 \quad (3),$$

καὶ εἶναι πολὺ ἀπλουστέρα τῆς δεδομένης (1). Ἐπομένως, ὅταν εὕρωμεν ὅτι τὸ ἀκέραιον σύστημα $\chi = 5$ καὶ $\psi' = -2$ ταῦτοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν (3), συμπεραίνομεν ἀμέσως ὅτι τὸ ἀκέραιον σύστημα $\chi = 5$ καὶ $\psi = -10$ θέλει ἀναγκαίως ταῦτοποιεῖ τὴν δεδομένην (1).

2^a. Ὅταν τὰ ὑπόλοιπα τῶν ἐκτελουμένων διαιρέσεων, ὁσάκις λύομεν τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν ἢ τινα τῶν ἐπομένων διὰ τοῦ συντελεστοῦ τῆς ἀγνώστου ὡς πρὸς ἣν γίνεται ἡ λύσις, ᾗναι μεγαλείτερα τοῦ ἡμίσεως τοῦ διαιρέτου, ἐπειδὴ τὰ ὑπόλοιπα αὐτὰ θέλουσιν εἶναι τὸ γνωστὸν μέλος καὶ ὁ συντελεστής τῆς ἀγνώστου, ὡς πρὸς ἣν θέλομεν λύσει τὴν ἐπομένην, δυνάμεθα τότε αὐξάνοντες κατὰ μονάδα, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου, τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον νὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μικρότερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ διαιρέτου, καὶ οὕτως ἡ προκύπτουσα ἐντεῦθεν νέα ἐξίσωσις θέλει εἶναι πολὺ ἀπλουστέρα ἐκείνης, εἰς ἣν ἠθέλομεν φθάσει ἄνευ τῆς ἐκτελέσεως τῆς ἀπλοποιήσεως ταύτης. Ἄς ὑποθέσωμεν, π. χ. ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξίσωσιν

$$7\chi + 19\psi = 76 \quad (4).$$

Λύοντες ταύτην ὡς πρὸς τὴν χ ἠθέλομεν ἔχει κατὰ τὴν προηγουμένης ἐκτεθείσαν μέθοδον

$$\chi = \frac{76 - 19\psi}{7} = 10 - 2\psi + \frac{6 - 5\psi}{7},$$

καὶ παριστῶντες διὰ τ τὸ κλασματικὸν μέρος $\frac{6-5\psi}{7}$ τῆς ἀνωτέρω τιμῆς τῆς χ , ἠθέλομεν ἔχει ἀκολούθως πρὸς λύσιν τὴν ἐπομένην ἐξίσωσιν

$$5\psi + 7\tau = 6 \quad (2),$$

ἐνῶ, ἐπειδὴ τὰ ὑπόλοιπα 6 καὶ -5 τῶν διαιρέσεων τοῦ 76 καὶ -49 διὰ 7 εἶναι μεγαλείτερα, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου, τοῦ ἡμίσεως τοῦ 7, ἂν λάβωμεν ἀντὶ τῶν πηλίκων 10 καὶ -2 τὰ κατὰ μονάδα μεγαλείτερα, ἀνεξαρτήτως πάντοτε τοῦ σημείου, 44 καὶ -3 , θέλομεν ἔχει

$$\chi = \frac{76-49\psi}{7} = 44 - 3\psi + \frac{-4+2\psi}{7},$$

καὶ παριστῶντες διὰ τ τὸ κλασματικὸν μέρος $\frac{-4+2\psi}{7}$ τῆς τιμῆς ταύτης τῆς χ , θέλομεν ἔχει ἀκολούθως πρὸς λύσιν τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$2\psi - 7\tau = 4 \quad (3),$$

ἥτις προφανῶς εἶναι πολλὴ ἀπλουστέρα τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως (2).

3^η. Ἡ περὶ ἧς ἐνταῦθα ὁ λόγος τρίτη ἀπλοποιήσις εἶναι δυνατή, ὅταν ὁ γνωστὸς ὅρος καὶ ὁ συντελεστὴς τῆς ἀγνώστου ἐν τῷ ἀριθμητῇ τοῦ κλάσματος, ὅπερ ἐξισοῦμεν μὲ τινα ἀπροσδιόριστον ἀκέραιον ἀριθμὸν, ἔχωσι κοινὸν τινα παράγοντα. Ἰνα δὲ δείξωμεν καταληπτότερον εἰς τί αὕτη συνίσταται, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξῆς μερικὴν ἐξίσωσιν

$$9\chi - 29\psi = 49 \quad (1).$$

Λύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς τὴν χ θέλομεν ἔχει

$$\chi = \frac{49+29\psi}{9} = 5 + 3\psi + \frac{4+2\psi}{9} \quad (2).$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ γνωστὸς ὅρος 4 καὶ ὁ συντελεστὴς 2 τῆς ἀγνώστου ψ ἐν τῷ ἀριθμητῇ τοῦ κλάσματος $\frac{4+2\psi}{9}$, ὅπερ κατὰ τὴν γνωστὴν μέθοδον πρέπει νὰ ἐξισώσωμεν μὲ τινα ἀπροσδιόριστον ἀκέραιον ἀριθμὸν τ , ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸν 2, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἐξάγοντες αὐτὸν ἐκτὸς παρενθέσεων τὸν τύπον (2) ὡς ἐξῆς.

$$\chi = 5 + 3\psi + \frac{2(2+\psi)}{9} \quad (2).$$

Καὶ ἐπειδὴ τότε, ἵνα τὸ κλάσμα $\frac{2(2+\psi)}{9}$ ᾖ ἴσον μὲ τινα ἀπροσδιόριστον ἀκέραιον ἀριθμὸν, ἀρκεῖ ὁ παράγων $2+\psi$ τοῦ ἀριθμητοῦ νὰ ᾖ

διαίρετός διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ 9, (διότι ὁ ἕτερος παράγων αὐτοῦ 2 εἶναι ἀναγκαίως ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς τὸν 9 καὶ τοῦτο, διότι οἱ συντελεσταὶ 9 καὶ 29 τῶν ἀγνώστων x καὶ y εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους), δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὴν ἰσότητα

$$\frac{2+y}{9} = \tau \quad (3),$$

ὅτε ἡ μὲν τιμὴ τῆς x , ἡ ὑπὸ τοῦ τύπου (2) διδομένη, γίνεται

$$x = 5 + 3y + 2\tau,$$

ἡ δὲ ἐκ τοῦ τύπου (3) προκύπτουσα ἐξίσωσις

$$y - 9\tau = -2 \quad (3)$$

εἶναι ἀπλουστέρα ἐκείνης, ἣν ἠθέλομεν εὑρεῖ θέτοντες τὴν ἰσότητα

$$\frac{4+2y}{9} = \tau.$$

4^η. Ἡ τετάρτη καὶ τελευταία ἀπλοποιήσις εἶναι δυνατή, ὅταν ὁ συντελεστὴς τῆς ἀγνώστου ἐν τῷ ἀριθμητῇ τοῦ κλάσματος, ὅπερ ἐξισούμεεν μέ τινα ἀπροσδιόριστον ἀκεραῖον ἀριθμόν, ᾗναι ἴσος τῇ μονάδι. Τότε, ἀντὶ νὰ ἐξισώσωμεν αὐτὸ τὸ κλάσμα μέ τινα ἀπροσδιόριστον ἀριθμόν, ἀρκεῖ πρὸς εὑρεσιν ἐνὸς συστήματος ἀκεραίων λύσεων, νὰ ἐξισώσωμεν τὸν περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμητὴν μέ τὸ μηδὲν καὶ νὰ λύσωμεν τὴν ἐντεῦθεν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὴν ἐν αὐτῇ περιεχομένην ἄγνωστον. Παραδείγματος χάριν, ἐπειδὴ ἐν τῷ ἀνωτέρω τύπῳ (2) ὁ συντελεστὴς τῆς y ἐν τῷ παράγοντι $2+y$ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος $\frac{2+y}{9}$ εἶναι ἴσος τῇ μονάδι, ἀντὶ νὰ θέσωμεν ὡς ἀνωτέρω τὴν ἰσότητα

$$\frac{2+y}{9} = \tau \quad (3),$$

δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὴν ἐξῆς

$$2+y=0 \quad (4),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως λύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς τὴν ἐν αὐτῇ περιεχομένην ἄγνωστον y

$$y = -2 \quad (5),$$

καὶ τότε ὁ παρέχων τὴν τιμὴν τῆς x τύπος (2) γίνεται

$$x = 5 + 3y \quad (2),$$

καὶ δίδει ἀμέσως, ἀντικαθιστωμένου ἐν αὐτῷ -2 ἀντὶ τῆς y ,

$$x = -1 \quad (6).$$

Ευκόλως δὲ πᾶς τις βλέπει τὴν σπουδαιότητα τῆς 3^{ης} καὶ 4^{ης} ἀπλοποιήσεως, διότι δι' αὐτῶν εὐρομεν ἀμέσως ἐν σύστημά $x = -4$ καὶ $y = -2$ ἀκεραίων λύσεων τῆς δεδομένης ἐξίσωσως

$$9x - 29y = 49,$$

ἐνῷ ἄνευ τούτων ἠθέλομεν κατὰ τὴν γενικὴν μέθοδον ἐκτελέσει πολὺ περισσοτέρους καὶ πολυπλοκωτέρους ὑπολογισμούς.

82. Ἄς λύσωμεν προσέτι ἐφαρμόζοντες συγχρόνως πάσας τὰς δυνατὰς ἀπλοποιήσεις καὶ τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$91x + 46y = 567 \quad (1).$$

Ἐπειδὴ ὁ συντελεστής 91 τῆς x καὶ τὸ γνωστὸν μέλος 567 ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸν 7, θέτοντες ἐν τῇ ἐξίσωσει (1) κατὰ τὴν 1^{ην} ἀπλοποίησιν $7y'$ ἀντὶ τῆς y καὶ διαιροῦντες τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ 7, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$13x + 46y' = 81 \quad (2).$$

Λύοντες ταύτην ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον x , τὴν ἔχουσαν τὸν μικρότερον συντελεστήν, καὶ ἐφαρμόζοντες ἐν τῇ ἐκτελέσει τῶν διαιρέσεων καὶ τὴν 2^{αν} ἀπλοποίησιν εὐρίσκομεν

$$x = \frac{81 - 46y'}{13} = 6 - 4y' + \frac{3 + 6y'}{13} \quad (3).$$

Ἐφαρμόζοντες ἐπὶ τοῦ τύπου (3) τὴν 3^{ην} ἀπλοποίησιν θέλομεν ἔχει

$$x = 6 - 4y' + 3\left(\frac{1 + 2y'}{13}\right) \quad (3),$$

καὶ ἐξισουμένου τοῦ κλάσματος $\frac{1 + 2y'}{13}$ μὲν τινα ἀπροσδιόριστον ἀκέραιον ἀριθμὸν τ , ἡ μὲν τιμὴ τῆς x γίνεται

$$x = 6 - 4y' + 3\tau \quad (4)$$

ἐκ δὲ τῆς ἐξίσωσως

$$\frac{1 + 2y'}{13} = \tau \quad (5),$$

πορίζόμεθα λύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς τὴν ἐν αὐτῇ ἄγνωστον y'

$$y' = \frac{13\tau - 1}{2} = 6\tau + \frac{\tau - 1}{2} \quad (6).$$

Ἐφαρμόζοντες τέλος ἐπὶ τοῦ τύπου (6) τὴν 4^{ην} ἀπλοποίησιν θέλομεν ἔχει τὴν νέαν ἐξίσωσιν

$$\tau - 1 = 0 \quad (7),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως $\tau=1$, ἐπομένως κατὰ τὸν τύπον (6) $\psi'=6$, καὶ κατὰ τὸν τύπον (4), ἐν ᾧ ἀντὶ τῆς ψ' καὶ τ θέλομεν θέσει τὰς εὐρεθείσας αὐτῶν τιμὰς 6 καὶ 1, $\chi=-15$. Εὐρομεν λοιπὸν ἐν σύστημα ἀκεραίων λύσεων $\chi=-15$ καὶ $\psi'=6$ τῆς ἐξισώσεως (2), καὶ ἐπειδὴ αὕτη προέκυψεν ἐκ τῆς δεδομένης (1), τεθέντος ἐν αὐτῇ $7\psi'$ ἀντὶ τῆς ψ , ἔπεται ὅτι αἱ τιμαὶ $\chi=-15$ καὶ $\psi=7 \cdot 6$ θέλουσι παριστᾶν ἐν σύστημα ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως (1), ἧς οἱ γενικοὶ τύποι θέλουσιν εἶναι

$$\chi = -15 + 46\tau \quad \text{καὶ} \quad \psi = 42 - 91\tau,$$

τοῦ τ παριστῶντος πάντα ἀκέραιον ἀριθμὸν, θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

ΑΚΕΡΑΙΑΙ ΚΑΙ ΘΕΤΙΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ

$$\Xi\Xi\Omega\Sigma\Xi\Omega\Sigma \quad \alpha\chi + \beta\psi = \gamma$$

83. "Ἵνα εὕρωμεν ἅπαντα τὰ ἀκέραια καὶ θετικὰ συστήματα, τὰ ταῦτοποιούντα τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$, εὐρίσκομεν πρῶτον κατὰ τὰ προλεχθέντα τοὺς γενικοὺς τύπους

$$\chi = \theta - \beta\tau \quad \text{καὶ} \quad \psi = \eta + \alpha\tau \quad (2),$$

τοὺς παρέχοντας, ὅταν τὸ τ λάβῃ πάσας τὰς μεταξὺ τοῦ $-\infty$ καὶ $+\infty$ ἀκεραίας τιμὰς, ἅπαντα τὰ συστήματα τῶν ἀκεραίων τιμῶν αὐτῆς, ἔπειτα λύομεν ὡς πρὸς τὴν τ τὰς ἀνισότητας

$$\theta - \beta\tau > 0 \quad \text{καὶ} \quad \eta + \alpha\tau > 0 \quad (3),$$

αἵτινες πρέπει προφανῶς νὰ συνυπάρχωσιν, ἵνα αἱ ἴσαι τῷ πρῶτῳ αὐτῶν μέλει τιμαὶ τῆς χ καὶ ψ ᾖσι θετικαί, ὡς μεγαλειότεραι τοῦ μηδενὸς (68, παρατ. 2).

Αἱ ἀνισότητες (3) λυόμεναι ὡς πρὸς τὴν τ δίδουσι κατὰ τὰ ἐν τῇ παραγράφῳ 68 λεχθέντα

$$\tau < \frac{\theta}{\beta} \quad \text{καὶ} \quad \tau > -\frac{\eta}{\alpha} \quad (4),$$

εὐρίσκοντες δέ, καθ' ἃ ἐξεθέσαμεν ἐν τῇ § 70, τὰς ἀκεραίας τιμὰς τῆς τ , τὰς ἐπαληθευούσας συγχρόνως ἀμφοτέρως τὰς ἀνισότητας (4), καὶ ἀντικαθιστῶντες ταύτας διαδοχικῶς εἰς τοὺς τύπους (2), θέλομεν προφανῶς πορισθῆ δι' ἐκάστην τιμὴν τῆς τ ἐν σύστημα ἀκεραίων καὶ θετικῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων χ καὶ ψ , ταῦτοποιούν τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$, εἰς ἣν οἱ τύποι (2) ἀνήκουσι.

Παρατηρητέον ἐνταῦθα ὅτι, ὅταν αἱ ἀνισότητες (4) ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, φέρωσι δηλ. καὶ αἱ δύο ἢ τὸ σημεῖον $>$ ἢ τὸ σημεῖον $<$, αἱ

ἀκέραιαι τιμαὶ τῆς τ , αἱ ἐπαληθεύουσαι ἀμφοτέρως, θέλουσιν εἶναι ἀπειροὶ τὸν ἀριθμὸν (70), ἐπομένως καὶ τὰ ἀκέραια καὶ θετικὰ συστήματα τῶν τιμῶν τῆς χ καὶ ψ , τὰ ταυτοποιοῦντα τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν $a\chi + b\psi = \gamma$ θέλουσιν εἶναι ἐπίσης ἀπειρα τὸν ἀριθμὸν· ὅταν δὲ αἱ ἀνισότητες (4) ἔχωσιν ἀντίθετα σημεῖα, αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τῆς τ , αἱ δυνάμεναι νὰ ἐπαληθεύωσιν ἀμφοτέρως, θέλουσιν εἶναι ὠρισμένοι τὸν ἀριθμὸν, ἐπομένως καὶ τὰ ἀκέραια καὶ θετικὰ συστήματα τῶν τιμῶν τῆς χ καὶ ψ , τὰ ταυτοποιοῦντα τὴν ἐξίσωσιν $a\chi + b\psi = \gamma$, θέλουσιν εἶναι ἐπίσης ὠρισμένα τὸν ἀριθμὸν. Ἀλλ' αἱ ἀνισότητες (4) θέλουσιν ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον, εἴτε τὸ $>$ εἴτε τὸ $<$, ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῆς τ ἐν ταῖς ἀνισότητεσι (3) ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, εἴτε τὸ σημεῖον $+$ εἴτε τὸ σημεῖον $-$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐν τῷ σχηματισμῷ τῶν τύπων (3) ὁ μὲν εἰς τῶν συντελεστῶν a καὶ b λαμβάνεται μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅπερ ἔχει ἐν τῇ δεδομένῃ ἐξίσώσει $a\chi + b\psi = \gamma$, ὁ δὲ ἕτερος μὲ τὸ ἀντίθετον, ἔπεται ὅτι, ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῆς χ καὶ ψ ἐν τῇ ἐξίσώσει $a\chi + b\psi = \gamma$ ἔχωσι τὰ αὐτὰ σημεῖα, οἱ συντελεσταὶ τῆς τ ἐν ταῖς ἀνισότητεσι (3) θέλουσιν ἔχει ἀντίθετα, ὅταν δὲ οὗτοι ἔχωσιν ἀντίθετα σημεῖα, οἱ ἐν ταῖς ἀνισότητεσι (3) συντελεσταὶ τῆς τ θέλουσιν ἔχει τὰ αὐτά. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι·

Ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων τῆς ἐξίσωσεως $a\chi + b\psi = \gamma$ ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, αὕτη εἶναι ἐπιδεκτικὴ ὠρισμένου ἀριθμοῦ συστημάτων ἀκεραίων καὶ θετικῶν λύσεων· ὅταν δὲ οὗτοι ἦναι ἀρτιθέτων σημείων, ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ἐξίσωσις εἶναι ἐπιδεκτικὴ ἀπειρῶν τοιούτων.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

84. Ἐξαρμόσωμεν τώρα τὰ ἐν τῷ κεφαλαίῳ τούτῳ λεχθέντα εἰς τὴν λύσιν μερικῶν τινῶν προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. — Διὰ τινὰ συναρastroγὴν ἀποτελεσθεῖσαν ἐξ ἀνδρῶν καὶ γυναικῶν ἐδαπαρήθησαν 283 δραχμαί. Ἡ δὲ ἑκάστη ἀνδρα θαπάρη ἦτο 9 δραχμῶν, ἡ δὲ δὲ ἑκάστη γυναικα 5. Ζητεῖται ἐκ πόσων ἀνδρῶν καὶ ἐκ πόσων γυναικῶν ἀπετελεῖτο αὕτη.

Ἄν παραστήσωμεν διὰ χ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν ἀνδρῶν καὶ διὰ ψ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν γυναικῶν, θέλομεν ἔχει πρὸς ἐκπλήρωσιν τῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$9\chi + 5\psi = 283 \quad (1),$$

ἥς πρέπει νὰ εὐρωμεν μόνον τὰ ἀκέραια καὶ θετικὰ συστήματα, τὰ ταυτοποιοῦντα αὐτήν, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν καὶ γυναικῶν δὲν δύναται προφανῶς νὰ ᾔηται οὔτε κλασματικὸς οὔτε ἀρνητικὸς.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) κατὰ τὰ ἐν ταῖς παραγράφοις 80 καὶ 81 λεχθέντα θέλομεν ἔχει διαδοχικῶς

$$y = \frac{283 - 9x}{5} = 57 - 2x + \frac{x-2}{5} = 57 - 2x + \tau,$$

$$\frac{x-2}{5} = \tau, \quad x - 5\tau = 2.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ τελικὴ ἐξίσωσις $x - 5\tau = 2$ ταυτοποιεῖται διὰ τοῦ συστήματος $x = 2$ καὶ $\tau = 0$ τῶν ἀκεραίων τιμῶν τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων, ἡ προηγουμένη $y = 57 - 2x + \tau$, ἐν ᾗ θέλομεν ἀντικαταστήσει τὴν x καὶ τ διὰ τῶν εὐρεθεισῶν τιμῶν αὐτῶν 2 καὶ 0, μᾶς δίδει $y = 53$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σύστημα $x = 2$ καὶ $y = 53$ τῶν ἀκεραίων τιμῶν ταυτοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν (1) τοῦ προβλήματος, οἱ γενικοὶ τύποι τῶν ἀκεραίων αὐτῆς λύσεων θέλουσιν εἶναι κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα

$$x = 2 + 5\tau \quad \text{καὶ} \quad y = 53 - 9\tau \quad (2),$$

τοῦ τ παριστῶντος πάντοτε ὁποιονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν, θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

Ἵνα δὲ εὐρωμεν πάντα τὰ ἀκέραια καὶ θετικὰ συστήματα, ὡς ἀπαιτεῖ ἡ φύσις τοῦ προβλήματος, τὰ ταυτοποιοῦντα τὴν ἐξίσωσιν αὐτοῦ (1), πρέπει νὰ λύσωμεν ὡς πρὸς τὴν τ τὰς ἀνισότητας

$$2 + 5\tau > 0 \quad \text{καὶ} \quad 53 - 9\tau > 0 \quad (3),$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα κατὰ τοὺς γνωστοὺς περὶ λύσεων τῶν ἀνισοτήτων κανόνας

$$\tau > -\frac{2}{5} \quad \text{καὶ} \quad \tau < \frac{53}{9} \quad \text{ἢ} \quad \tau < 5 + \frac{8}{9} \quad (4).$$

Μᾶς μένει τώρα νὰ εὐρωμεν τὰς ἀκεραίας τιμὰς τῆς τ , τὰς ἐπαληθευούσας τὰς ἀνισότητας (4), καὶ πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦμεν τὸν ἐν τῇ παραγράφῳ 70 ἐκτεθέντα τρόπον, καθ' ὃν σχηματίζομεν τὸ ἐξῆς σχεδιάσμα

$$-\infty, \dots, -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \dots, +\infty$$

Αἱ ἀκέραιαι λοιπὸν τιμαὶ τῆς τ , αἱ ἐπαληθεύουσαι τὰς ἀνισότητας (4), εἶναι αἱ ἐξῆς: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ἐπομένως τὰ συστήματα τῶν

ἀκεραίων καὶ θετικῶν λύσεων τοῦ προβλήματος, τὰ ἐκ τῶν τύπων (2) εὐρισκόμενα, θέλουσιν εἶναι

$$x = 2, 7, 12, 17, 22, 27,$$

$$y = 53, 44, 35, 26, 17, 8.$$

Βλέπομεν δὲ ἐνταῦθα ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δυνατῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν λύσεων εἶναι περὶωρισμένος, διότι οἱ συντελεσταὶ τῆς x καὶ y τῆς ἐξίσωσως (1) ἔχουσι τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἐπάρχουσι λοιπὸν ἐν συνόλῳ ἕξ δυνατὰι λύσεις τοῦ προβλήματος, τουτέστι

1 ^η	λύσις		2	ἄνδρες καὶ	53	γυναῖκες
2 ^α	»		7	»	44	»
3 ^η	»		12	»	35	»
4 ^η	»		17	»	26	»
5 ^η	»		22	»	17	»
6 ^η	»		27	»	8	»

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. — Ἡγόρασέ τις ἀριθμὸν τινα προβάτων καὶ αἰγῶν. Δι' ἐκάστην αἶγα ἐπλήρωσεν 8 δραχμάς, δι' ἑκάστον δὲ πρόβατον 27. Ἐὰν ἐπλήρωσε διὰ τὰς αἶγας 97 δραχμάς περισσώτερον ἢ διὰ τὰ πρόβατα, πόσας αἶγας καὶ πόσα πρόβατα ἠγόρασεν οὗτος;

*Ὡς παραστήσωμεν διὰ x τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγορασθεισῶν αἰγῶν καὶ διὰ y τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγορασθέντων προβάτων. Θέλομεν ἔχει κατὰ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος τὴν ἐξίσωσιν

$$8x - 27y = 97 \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διαδοχικῶς

$$x = \frac{97 + 27y}{8} = 12 + 3y + \frac{1 + 3y}{8} = 12 + 3y + \tau,$$

$$\frac{1 + 3y}{8} = \tau, \quad 3y - 8\tau = -1,$$

$$y = \frac{8\tau - 1}{3} = 3\tau + \frac{-\tau - 1}{3} = 3\tau,$$

$$-\tau - 1 = 0, \quad \tau = -1$$

$$y = -3 \quad \text{καὶ} \quad x = 2$$

$$x = 2 + 27\tau \quad \text{καὶ} \quad y = -3 + 8\tau \quad (2)$$

$$2 + 27\tau > 0 \quad \text{καὶ} \quad -3 + 8\tau > 0 \quad (3)$$

$$\tau > -\frac{2}{27} \quad \text{καὶ} \quad \tau > \frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, +\infty$$

Πρέπει λοιπὸν πρὸς εὐρεσιν πασῶν τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως (1) νὰ δώσωμεν εἰς τὴν ἀπροσδιόριστον τ τῶν γενικῶν τύπων (2) πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ θετικοῦ ἀπείρου. Τὸ προβλημα λοιπόν, οὗτινος τὰς συνθήκας παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις (1), εἶναι ἐπιδεκτικὸν ἀπείρων λύσεων, ὡς ἡδυνάμεθα ἀμέσως καὶ νὰ προῖδωμεν, διότι οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως (1) ἔχουσιν ἐναντία σημεῖα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^{ον}. — "Ἐὰν ἀποτελέσωμεν ποσὸν ἀξίας 23 δραχμῶν ἐκ δύο εἰδῶν νομισμάτων ἀξίας 5 καὶ 7 δραχμῶν, πόσα ἐξ ἑκατέρου εἶδους πρέπει νὰ λάβωμεν πρὸς τοῦτο;

Ἄν παραστήσωμεν διὰ x τὸν ἀριθμὸν, ὃν πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ τῶν ἐχόντων ἀξίαν 5 δραχμῶν, καὶ διὰ y τὸν ἀριθμὸν, ὃν πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ τῶν ἐχόντων ἀξίαν 7 δραχμῶν, θέλομεν σχηματίσει πρὸς ἐκπλήρωσιν τῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$5x + 7y = 23 \quad (1),$$

ἥς αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις θέλουσι παριστᾷ τὸ ζητούμενον.

Λύοντες λοιπὸν κατὰ τὰς γνωστὰς μεθόδους τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν διαδοχικῶς

$$x = \frac{23 - 7y}{5} = 5 - y + \frac{-2y - 2}{5} = 5 - y + \frac{-2(y + 1)}{5} = 5 - y - 2\tau$$

$$\frac{y + 1}{5} = \tau, \quad \text{ἢ προτιμότερον} \quad y + 1 = 0,$$

ὅθεν $y = -1$ καὶ ἐπομένως $x = 5 - y = 6$.

Οἱ γενικοὶ λοιπὸν τύποι τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι

$$x = 6 - 7\tau \quad \text{καὶ} \quad y = -1 + 5\tau \quad (2),$$

ἵνα δὲ εὕρωμεν τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς αὐτῆς τιμὰς, πρέπει νὰ λύσωμεν ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον τ τὰς ἀνισότητας

$$6 - 7\tau > 0 \quad \text{καὶ} \quad -1 + 5\tau > 0 \quad (3),$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα διὰ τὴν τ

$$\tau < \frac{6}{7} \quad \text{καὶ} \quad \tau > \frac{1}{5} \quad (4).$$

Ἐπειδὴ δὲ οὐδεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ ἐπαληθεύσῃ συγχρόνως ἀμφοτέρως τὰς ἀνισότητας (4), ὡς τοῦτο φαίνεται καὶ ἐκ τοῦ ἐξῆς αὐτῶν σχεδιάσματος

$$-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, +\infty$$

συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4^{ον}. — *Νὰ εὑρωμεν ἀριθμόν, ὅστις διὰ 11 διαιρούμενος ἔσται διδὴ ὑπόλοιπον 3, διαιρούμενος δὲ διὰ 17 ἔσται παρέχῃ ὑπόλοιπον 10.*

Ἐστω Λ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 11 καὶ διὰ y τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 17, θέλομεν ἔχει πρὸς ἐκπλήρωσιν τῶν συνθηκῶν τοῦ παρόντος προβλήματος τὰς ἐξῆς ἐξισώσεις,

$$\Lambda = 11x + 3 \quad \text{καὶ} \quad \Lambda = 17y + 10 \quad (1),$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα ἀμέσως τὴν ἐξίσωσιν

$$11x + 3 = 17y + 10 \quad (2),$$

ἣς πρέπει νὰ ζητήσωμεν τὰ ταῦτοποιοῦντα αὐτὴν ἀκέραια καὶ θετικὰ συστήματα τῶν τιμῶν τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων x καὶ y .

Πρὸς τοῦτο λύομεν αὐτὴν ὡς πρὸς τὴν x καὶ εὐρίσκομεν διαδοχικῶς

$$x = \frac{17y + 7}{11} = 2y + 1 - \frac{5y + 4}{11} = 2y + 1 - \tau$$

$$\frac{5y + 4}{11} = \tau, \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{11\tau - 4}{5} = 2\tau + \frac{\tau - 4}{5} = 2\tau,$$

ὑποτιθεμένου ὅτι $\tau - 4 = 0$, ὅτε ἔχομεν $\tau = 4$, καὶ ἐπομένως $y = 8$, καὶ $x = 2y + 1 - \tau = 16 + 1 - 4 = 13$.

Οἱ γενικοὶ λοιπὸν τύποι τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι

$$x = 13 + 17\tau \quad \text{καὶ} \quad y = 8 + 11\tau,$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ κυρίως ἐνταῦθα ζητούμενον δὲν εἶναι ἡ x καὶ y , ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς Λ , ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) ἀντὶ τῆς x καὶ y τὰ ἴσα αὐταῖς $13 + 17\tau$ καὶ $8 + 11\tau$ καὶ ἔχομεν διὰ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν Λ

$$\Lambda = 11x + 3 = 11(13 + 17\tau) + 3 = 146 + 187\tau,$$

$$\Lambda = 17y + 10 = 17(8 + 11\tau) + 10 = 146 + 187\tau.$$

Εὐρομεν λοιπόν, ὡς ἦτο ἐπόμενον, διὰ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν A τὴν αὐτὴν τιμὴν $146 + 187\tau$, τοῦ τ παριστῶντος πάντα ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ θετικοῦ ἀπείρου, διότι τότε μόνον ἡ ἀνισότης $146 + 187\tau > 0$ ἐπαληθεύεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5^{ον}. — Νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, ὅστις διὰ 11 διαιροῦμενος τὰ διδὴ ὑπόλοιπον 3, διὰ 17 τὰ παρέχῃ ὑπόλοιπον 10 καὶ διὰ 37 ὑπόλοιπον 13.

Ἐστω A ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x, y καὶ ω τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 11, 17 καὶ 37, θέλομεν ἔχει ὡς ἀνωτέρω τὰς τρεῖς ἐξισώσεις

$$A = 11x + 3, \quad A = 17y + 10 \quad \text{καὶ} \quad A = 37\omega + 13 \quad (1).$$

Ἐκ τῶν δύο πρώτων πορίζομεθα τὴν ἐξίσωσιν

$$11x + 3 = 17y + 10 \quad (2),$$

εὐρομεν δὲ προηγουμένως ὅτι ὁ τύπος

$$146 + 187\tau \quad (3),$$

παριστᾷ πάντα ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν, ἐκπληροῦντα τὰς δύο πρώτας συνθήκας τοῦ δεδομένου προβλήματος. Ἵνα λοιπὸν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἐκπληρῇ καὶ τὴν τρίτην συνθήκην, πρέπει νὰ ἔχωμεν καὶ τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$146 + 187\tau = 37\omega + 13 \quad (4),$$

ἣν λύοντες κατὰ τὴν γνωστὴν μέθοδον εὐρίσκομεν διαδοχικῶς

$$\omega = \frac{133 + 187\tau}{37} = 4 + 5\tau + \frac{2\tau - 15}{37} = 4 + 5\tau + \tau'$$

$$\frac{2\tau - 15}{37} = \tau', \quad \text{καὶ} \quad \tau = \frac{37\tau' + 15}{2} = 19\tau' + 7 + \frac{-\tau' + 1}{2} = 19\tau' + 7$$

ὑποτιθεμένου ὅτι $-\tau' + 1 = 0$, ὅτε ἔχομεν $\tau' = 1$, ἐπομένως $\tau = 26$, καὶ $\omega = 4 + 5\tau + \tau' = 135$.

Οἱ γενικοὶ λοιπὸν τύποι τῶν συστημάτων τῶν ἀκεραίων τιμῶν τῆς τ καὶ ω , τῶν ταῦτοποιουσῶν τὴν ἐξίσωσιν (4), εἶναι

$$\tau = 26 + 37\theta \quad \text{καὶ} \quad \omega = 135 + 187\theta,$$

τῆς θ παριστώσης πάντα ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ θετικοῦ ἀπείρου. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἐνταῦθα μᾶς ζητεῖται κυρίως ὁ ἀριθμὸς A , ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν τελευταίαν τῶν ἐξισώσεων (1) ἀντὶ ω τὴν εὑρεθεῖσαν αὐτῆς τιμὴν $135 + 187\theta$ καὶ ἔχομεν

$$A = 37\omega + 13 = 37(135 + 187\theta) + 13 = 5008 + 6919\theta.$$

Πάντες λοιπὸν οἱ ἀριθμοί, οἱ ἐκπληροῦντες τὰς συνθήκας τοῦ παρόντος προβλήματος, παρέχονται ὑπὸ τοῦ τύπου $5008 + 6919\theta$, ἐν ᾧ ἡ θ δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν ἀκεραίαν καὶ θετικὴν τιμὴν ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ θετικοῦ ἀπείρου· διότι τότε καὶ μόνον ἐπαληθεύεται ἡ ἀνισότης $5008 + 6919\theta > 0$.

Παρατηρητέον ἐνταῦθα ὅτι ὁ μὲν ἀριθμὸς 5008 εἶναι ὁ μικρότερος τῶν ἀριθμῶν, τῶν ἐκπληρούντων τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, ὁ δὲ συντελεστὴς τῆς θ εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ $11 \times 17 \times 37$ πάντων τῶν διαιρετῶν 11, 17 καὶ 37, ὕπερ ἦτο εὐκόλον καὶ νὰ προΐδωμεν· διότι γνωρίζομεν ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ὅτι, ὅταν εἰς τὸν ἀριθμὸν 5008 προσθέτωμεν κοινόν τι πολλαπλάσιον 6919 ὁσωνδήποτε ἄλλων 11, 17, 37, τὰ διὰ τῶν διαιρετῶν 11, 17 καὶ 37 ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ δὲν μεταβάλλονται.

— — — — —

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΑΙ ΡΙΖΑΙ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ
ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΑΙ ΡΙΖΑΙ ΚΤΛ.

85. Ἐὰν κατὰ τὸν ἐν τῷ 6ῳ ἔδαφίῳ τῆς § 4 δοθέντα ὁρισμὸν τοῦ τετραγώνου καὶ κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σχηματίσωμεν π. χ. τὰ τετράγωνα τῶν μονωνύμων $5a^3b^2$, $-3a^2b^3$ καὶ τὰ τῶν κλασμάτων $\frac{2ab^2}{3\gamma^2\delta}$, $-\frac{7a^2b}{4\gamma\delta^2}$, θέλομεν ἔχει

$$(5a^3b^2)^2 = 5a^3b^2 \times 5a^3b^2 = 5^2 a^6 b^4 = 25a^6 b^4,$$

$$(-3a^2b^3)^2 = (-3a^2b^3) \times (-3a^2b^3) = (-3)^2 a^4 b^6 \gamma^6 = 9a^4 b^6 \gamma^6,$$

$$\left(\frac{2ab^2}{3\gamma^2\delta}\right)^2 = \frac{2ab^2}{3\gamma^2\delta} \times \frac{2ab^2}{3\gamma^2\delta} = \frac{2^2 a^2 b^4}{3^2 \gamma^4 \delta^2} = \frac{4a^2 b^4}{9\gamma^4 \delta^2},$$

$$\left(-\frac{7a^2b}{4\gamma\delta^2}\right)^2 = \left(-\frac{7a^2b}{4\gamma\delta^2}\right) \times \left(-\frac{7a^2b}{4\gamma\delta^2}\right) = \frac{7^2 a^4 b^2}{4^2 \gamma^2 \delta^4} = \frac{49a^4 b^2}{16\gamma^2 \delta^4}$$

βλέπομεν δὲ εὐκόλως ὅτι

1^{ον}. Τὸ τετράγωνον παντὸς μονωνύμου, ἔχοντος πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον + ἢ τὸ σημεῖον -, ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον +, καὶ σχηματίζεται, ἂν ὑψωθῇ ὁ συντελεστής αὐτοῦ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ διπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται τῶν ἐν αὐτῷ διαφόρων γραμμάτων.

2^{ον}. Τὸ τετράγωνον ἀλγεβρικοῦ τιнос κλάσματος, οὔτινος οἱ ὅροι εἶναι μονώνυμα, ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον +, ὅποιονδῆποτε καὶ ᾗ ᾗται τὸ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον, καὶ σχηματίζεται, ἂν ὑψωθῶσιν ἀμφότεροι

τεροι οὖν ὕροι αὐτοῦ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ διαιρεθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ.

86. Καλεῖται τετραγωνικὴ ρίζα ἀλγεβρικῆς τινος παραστάσεως ἑτέρα τις παράστασις, ἥς τὸ τετράγωνον παράγει τὴν δεδομένην· οὕτω τὸ μονώνυμον $5a^2b^3$ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ μονωνύμου $25a^4b^6$, διότι, ἐάν τὸ μονώνυμον $5a^2b^3$ ὑψωθῇ εἰς τὸ τετράγωνον, θέλει δώσει τὸ δεδομένον $25a^4b^6$. Ὡσαύτως τὸ κλάσμα $\frac{2a^2}{3\gamma^2\delta}$ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{4a^4}{9\gamma^4\delta^2}$, διότι τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου $\frac{2a^2}{3\gamma^2\delta}$ εἶναι $\frac{4a^4}{9\gamma^4\delta^2}$.

Ἡ πράξις, δι' ἣς εὐρίσκωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν δεδομένης τινος ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, καλεῖται ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ρίζης. Συμπεραίνωμεν λοιπὸν εὐκόλως ἐκ τῶν ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ δοθέντων κανόνων ὅτι ἀντιστρέφως,

1^η. "Ἐὰν ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν μονώνυμου τινός, ἔχοντος πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον +, πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ, νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν ἐν αὐτῷ γραμμάτων διὰ 2, καὶ νὰ θέσωμεν πρὸ τοῦ εὑρεθησόμενου ἐξαγομένου τὸ σημεῖον + ἢ -.

Παραδ. χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $25a^4b^6$ εἶναι $+5a^2b^3$ ἢ $-5a^2b^3$, διότι ἐκατέρου τούτων τὸ τετράγωνον εἶναι $25a^4b^6$, γράφεται δὲ συνήθως οὕτω $\pm 5a^2b^3$, καὶ βλέπομεν ὅτι εὐρίσκεται ἐξαγομένης τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ συντελεστοῦ 25 καὶ διαιρουμένων διὰ 2 τῶν ἐκθετῶν 4, 6 τῶν ἐν αὐτῷ γραμμάτων a, b, γ .

2^η. "Ἐὰν ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀναγώγου τινός ἀλγεβρικοῦ κλάσματος, ἔχοντος ὅρους μονώνυμα καὶ πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον +, πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἐκατέρου τῶν ὅρων αὐτοῦ καὶ νὰ δώσωμεν εἰς τὸ εὑρεθησόμενον ἐξαγόμενον τὸ σημεῖον + ἢ -.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀναγώγου ἀλγεβρικοῦ κλάσματος $\frac{9a^4b^2}{4\gamma^2\delta^4}$, ὅπερ ἔχει ὅρους μονώνυμα καὶ πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον +, εἶναι $\pm \frac{3a^2b}{2\gamma\delta^2}$ καὶ εὐρίσκεται ἐξαγομένων τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν $3a^2b, 2\gamma\delta^2$ τῶν δύο αὐτοῦ ὅρων $9a^4b^2, 4\gamma^2\delta^4$ καὶ τιθεμένων πρὸ τοῦ εὑρεθέντος ἐξαγομένου $\frac{3a^2b}{2\gamma\delta^2}$ ἀμφοτέρων τῶν σημείων + καὶ -· διότι καὶ τοῦ $+\frac{3a^2b}{2\gamma\delta^2}$ καὶ τοῦ $-\frac{3a^2b}{2\gamma\delta^2}$ τὸ τετράγωνον εἶναι $\frac{9a^4b^2}{4\gamma^2\delta^4}$.

Ἔπεται λοιπὸν ἐκ τῶν προλεχθέντων ὅτι

1^{ov}. Ἴνα μονώνυμόν τι, ἔχον πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον +, ἢ τέλειον τετράγωνον ἑτέρου μονωνύμου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ μὲρ συντελεστής αὐτοῦ ὥστε ἦναι τέλειον τετράγωνον, οἱ δὲ ἐκθέται τῶν ἐν αὐτῷ διαγώνων γραμμῶν ἀρτιοί.

2^{ov}. Ἴνα ἀνάγωνόν τι ἀλγεβρικὸν κλάσμα, ἔχον ὅρους μονώνυμα καὶ πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον +, ἢ τέλειον τετράγωνον ἑτέρου τιτὸς κλάσματος, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἀμφοτέρω οἱ ὅροι αὐτοῦ ὥστε ἦναι τέλεια τετράγωνα.

87. Ὅταν τὸ μονώνυμον ἢ τὸ ἀνάγωνον ἀλγεβρικὸν κλάσμα, ὧν ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, ἔχωσι πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον —, ἐπειδὴ κατὰ τὰ προλεχθέντα τὰ τετράγωνα τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ποσοτήτων εἶναι πάντοτε θετικά, συμπεραίνομεν ὅτι δὲν ὑπάρχει οὐδεμία ποσότης, οὔτε θετικὴ οὔτε ἀρνητικὴ, ἥς τὸ τετράγωνον νὰ παράγῃ τὴν δεδομένην. Παράδειγματος χάριν, οὐδεμία, οὔτε θετικὴ οὔτε ἀρνητικὴ ποσότης ὑπάρχει, ἥς τὸ τετράγωνον νὰ ᾖ — 4 ἢ — 9α⁴β² ἢ — $\frac{4x^2}{9y^2}$.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει αἱ τετραγωνικαὶ αὐτῶν ρίζαι σημειοῦνται μὲν οὕτω $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-9x^4y^2}$, $\sqrt{-\frac{4x^2}{9y^2}}$ καὶ ὀνομάζονται φανταστικαὶ ποσότητες, πρὸς διάκρισιν τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ποσοτήτων, αἵτινες ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ καλοῦνται πραγματικαὶ ποσότητες. Κυρίως μόνον αἱ θετικαὶ ποσότητες εἶναι πραγματικαί, ἀλλ' αὗται πρὸς διάκρισιν τῶν ἀρνητικῶν καὶ φανταστικῶν καλοῦνται μερικώτερον ἀριθμητικαὶ ποσότητες, τῶν ἀρνητικῶν καὶ φανταστικῶν καλουμένων ἀλγεβρικῶν, ὡς προκυπτουσῶν ἐκ μόνου τοῦ συνδυασμοῦ τῶν ἀλγεβρικῶν σημείων.

88. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ $a + b$ δυνάμειον τι ὅποιονδήποτε, τῶν a καὶ b παριστάντων δηλ. ὅποιονδήποτε μονώνυμον, καὶ σχηματίσωμεν κατὰ τοὺς κανόνας τοῦ ἀλγεβρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ, θέλομεν εὑρεῖ

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

τουτέστι, τὸ τετράγωνον παντὸς δυνάμειον σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου αὐτοῦ ὅρου, ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τοῦ δευτέρου καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου.

Ἴνα δὲ σχηματίσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ τριωνύμου $a + b + \gamma$, πα-

ριστῶμεν διὰ σ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων αὐτοῦ ὄρων, καὶ ἔχομεν κατὰ τὰ προλεχθέντα

$$(a+b+\gamma)^2 = (\sigma+\gamma)^2 = \sigma^2 + 2\sigma\gamma + \gamma^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)\gamma + \gamma^2$$

ἢ, ἐκτελουμένου τοῦ τετραγώνου τοῦ $a+b$,

$$(a+b+\gamma)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)\gamma + \gamma^2 \quad (2).$$

Πρὸς εὗρεσιν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐκ τεσσάρων ὄρων ἀποτελουμένου πολυωνύμου $a+b+\gamma+\delta$ παριστῶμεν πάλιν διὰ σ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων αὐτοῦ ὄρων, καὶ ἔχομεν

$$(\sigma+\delta)^2 = \sigma^2 + 2\sigma\delta + \delta^2 = (a+b+\gamma)^2 + 2(a+b+\gamma)\delta + \delta^2$$

ἢ, ἐκτελουμένου τοῦ τετραγώνου τοῦ $a+b+\gamma$,

$$(a+b+\gamma+\delta)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)\gamma + \gamma^2 + 2(a+b+\gamma)\delta + \delta^2.$$

Χωρὶς νὰ προσθῶμεν περαιτέρω, βλέπομεν εὐκόλως παραβάλλοντες πρὸς ἀλλήλας τὰς ταυτότητας (1), (2) καὶ τὴν τελευταίαν ὅτι, ὅταν εἰς τὸ δυνάμυνον $a+b$ προστεθῇ ὁ τρίτος ὄρος γ , τὸ τετράγωνον τοῦ $a+b$ ηὐξήθη κατὰ $2(a+b)\gamma$ καὶ κατὰ γ^2 . ὅταν δὲ εἰς τὸ τριώνυμον $a+b+\gamma$ προστεθῇ ὁ τέταρτος ὄρος δ , τὸ τετράγωνον τοῦ $a+b+\gamma$ ηὐξήθη πάλιν κατὰ $2(a+b+\gamma)\delta$ καὶ κατὰ δ^2 . Ἐν γένει λοιπόν, ὅταν εἰς ὅποιον-δήποτε πολυώνυμον προστεθῇ καὶ ἕτερός τις ὄρος, τὸ τετράγωνον τοῦ πολυωνύμου τούτου αὐξάνει κατὰ τὰ διπλάσια γινόμενα ἀπάντων τῶν ὄρων αὐτοῦ ἐπὶ τὸν προστεθέντα ὄρον καὶ κατὰ τὸ τετράγωνον τοῦ προστεθέντος. Ἐντεῦθεν πορίζομεθα τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

Τὸ τετράγωνον παντὸς πολυωνύμου, ὅσοσδήποτε καὶ ᾖ ἢναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὄρων αὐτοῦ, σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 1^{ου} ὄρου, ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ 1^{ου} ἐπὶ τὸν 2^{ον} καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 2^{ου} ἐκ τῶν διπλασίων γινομένων ἐκατέρου τῶν δύο πρώτων ἐπὶ τὸν 3^{ον} καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 3^{ου} ἐκ τῶν διπλασίων γινομένων ἐκάστου τῶν τριῶν πρώτων ἐπὶ τὸν 4^{ον} καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 4^{ου} ἐκ τῶν διπλασίων γινομένων ἐκάστου τῶν τεσσάρων πρώτων ἐπὶ τὸν 5^{ον} καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 5^{ου} καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐπὶ τοῦ κανόνα τούτου στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ εὕρισκωμεν ἀμέσως καὶ εὐκόλως τὸ τετράγωνον παντὸς πολυωνύμου, χωρὶς νὰ ἤμεθα ἡναγκασμένοι νὰ ἐκτελῶμεν πρὸς τοῦτο κατὰ τοὺς κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτό. Παραδείγματος χάριν, τὸ τετράγωνον τοῦ πολυωνύμου $3a^2 - 2ab + 5b^2$ διὰ τοῦ ἀνωτέρω ἀποδειχθέντος κανόνα εὕρεσκειται ἀμέσως καὶ εἶναι

$$(3a^2)^2 + 2 \cdot 3a^2 \cdot (-2ab) + (-2ab)^2 + 2 \cdot 3a^2 \cdot (5b^2) + 2 \cdot (-2ab) \cdot (5b^2) + (5b^2)^2$$

ἢ, ἐκτελουμένων τῶν σεσημειωμένων πράξεων,

$$9a^4 - 12a^3b + 4a^2b^2 + 30a^2b^3 - 20ab^4 + 25b^5,$$

καὶ ἀναγομένων τῶν ἐν αὐτῷ ὁμοίων ὅρων $4a^2b^3$ καὶ $30a^3b^2$,

$$9a^4 - 12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4.$$

89. ΘΕΩΡΗΜΑ. — Ἐν παντὶ τετραγώνῳ πολυωνύμου τινὸς ὑπάρχουσι πάντοτε τέσσαρες τοῦλάχιστον ὅροι, μὴ δυνάμενοι νὰ ἀναχθῶσι μετ' οὐδενὸς ἄλλου, εἶναι δὲ οὗτοι οἱ δύο πρῶτοι καὶ οἱ δύο τελευταῖοι αὐτοῦ ὅροι, ὅταν τοῦτο ᾖ διὰ τεταγμένον κατὰ τὰς ἀντιόσας ἢ κατιούσας δυνάμεις ὁποιοῦδήποτε γράμματος.

Ἄς παρὰστήσωμεν διὰ $a + b + \gamma + \dots + x + l$ τὸ δεδομένον πολυώνυμον, καὶ ἄς ὑποθέσωμεν τοῦτο διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ ἐν αὐτῷ γράμματος x . Τὸ τετράγωνον αὐτοῦ κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἀποδειχθέντα κανόνα θέλει εἶναι

$$a^4 + 2ab + b^2 + 2a\gamma + 2b\gamma + \gamma^2 + \dots + 2x.l + l^2,$$

λέγω δὲ ὅτι οἱ δύο πρῶτοι αὐτοῦ ὅροι a^4 καὶ $2ab$ καὶ οἱ δύο τελευταῖοι $2x.l$ καὶ l^2 δὲν δύνανται νὰ ἀναχθῶσι μετ' οὐδενὸς ἄλλου.

Διότι ἕκαστος τῶν ὅρων a^4 , $2ab$, b^2 , κτλ. τοῦ τετραγώνου, ἐπειδὴ εἶναι πάντοτε γινόμενον δύο παραγόντων, θέλει περιέχει τὸ γράμμα x τῆς διατάξεως μὲ ἐκθέτην ἴσον τῇ ἀθροίσματι τῶν ἐν ταῖς δύο τούτοις παράγουσι ἐκθετῶν αὐτοῦ. Ἀλλὰ προφανῶς ὁ μὲν ὅρος a^4 , ὡς γινόμενον τοῦ a ἐπὶ a , τοῦτέστι τῶν δύο παραγόντων, τῶν περιεχόντων τὸ γράμμα x τῆς διατάξεως εἰς τὴν ἀνωτάτην δύναμιν, θέλει ἔχει τὸ γράμμα x εἰς δύναμιν ἀνωτέραν παντὸς ἄλλου ὅρου, ἐπομένως δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλον τινὰ ὅμοιον αὐτῷ μετὰ δὲ τὸν ὅρον a^4 ὁ δεῦτερος αὐτοῦ ὅρος $2ab$ σχηματίζεται ἐκ τῶν παραγόντων a καὶ b , τῶν ἐχόντων τὸ γράμμα x τῆς διατάξεως εἰς ἀνωτέραν δύναμιν ἢ οἱ λοιποὶ γ , δ , κτλ., καὶ ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν λοιπῶν ὅρων b^2 , $2a\gamma$, $2b\gamma$, κτλ. τοῦ τετραγώνου περιέχει ἢ μόνον τὸν ἓνα τούτων ἢ καὶ οὐδένα, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ ὁ ὅρος οὗτος δὲν δύναται νὰ ἀναχθῇ μετ' οὐδενὸς ἄλλου. Ἄρα οἱ δύο πρῶτοι ὅροι a^4 καὶ $2ab$ θέλουσι προκύπτει πάντοτε ἄνευ οὐδεμιᾶς ἀναγωγῆς ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ὅρου a τῆς τετραγωνικῆς ρίζης καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον.

Ὅτι εἴπομεν περὶ τῶν δύο πρώτων ὅρων a^4 καὶ $2ab$, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ περὶ τῶν δύο τελευταίων $2x.l$ καὶ l^2 ἀντιστρέφοντες τὴν

διατάξιν, διατάσσοντας δηλ. τὸ δεδομένον πολυώνυμον $a + b + \gamma + \dots + x + l$ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ x , ὅτε ὁ μὲν l^2 θέλει περιέχει τὸ γράμμα x εἰς τὴν κατωτάτην δύναμιν, ὁ δὲ $2x.l$ εἰς τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν, ἐνῶ οἱ λοιποὶ ὅροι τοῦ τετραγώνου θέλουσι περιέχει αὐτὸ εἰς δυνάμεις ἀνωτέρας.

Καθόσον δ' ἀφορᾷ τοὺς λοιποὺς ὅρους b^2 , $2a\gamma$, $2b\gamma$, κτλ. εὐκόλως βλέπει τις ὅτι οἱ ὅροι b^2 καὶ $2a\gamma$ δύνανται νὰ ᾖναι ὅμοιοι, καὶ ἐν γένει πᾶς ὅρος μετὰ τὸν δεύτερον $2ab$ καὶ πρὸ τοῦ προτελευταίου $2x.l$ δύναται νὰ ἔχη ὅμοιον τινα ὅρον μεταξὺ τῶν λοιπῶν. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον παντὸς πολυωνύμου θέλει περιέχει τοῦλάχιστον τέσσαρας ὅρους, οἵτινες δὲν δύνανται νὰ ἀναχθῶσι μετ' οὐδενὸς ἄλλου.

Παραδ. χάριν, τὸ τετράγωνον τοῦ πολυωνύμου $2x^4 - x^3 + 2x^2 - x$, διατεταγμένου κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x , εἶναι

$$4x^8 - 4x^7 + x^6 + 8x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 4x^5 + 2x^4 - 4x^3 + x^2,$$

καὶ βλέπομεν ὅτι οἱ μὲν δύο πρῶτοι αὐτοῦ ὅροι $4x^8$ καὶ $-4x^7$ περιέχουσι τὸ γράμμα x τῆς διατάξεως εἰς διαφόρους δυνάμεις καὶ εἰς μετακλειτέρας ἢ πάντες οἱ λοιποί, οἱ δὲ δύο τελευταῖοι $-4x^3$ καὶ x^2 περιέχουσι τὸ αὐτὸ γράμμα εἰς διαφόρους δυνάμεις καὶ εἰς μικροτέρας ἢ πάντες οἱ λοιποί, ἐνῶ ὁ τρίτος ὅρος x^6 ἔχει ὅμοιον αὐτῷ τὸν τέταρτον $8x^6$, ὁ πέμπτος $-4x^5$ τὸν ἑβδομον $-4x^5$ κτλ.

90. Ἐπὶ τοῦ προαποδειχθέντος θεωρήματος στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν παντὸς πολυωνύμου, ὅταν τοῦτο ᾖναι τέλειον τετράγωνον ἑτέρου, σκεπτόμενοι ὡς ἐξῆς.

Ἐστω Π τὸ δεδομένον πολυώνυμον, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ πολυώνυμον $a + b + \gamma + \dots + x + l$, διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ ἐν αὐτῷ γράμματος x , παριστᾷ τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ρίζαν. Θέλομεν ἔχει τότε κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ § 88 τὴν ταυτότητα

$$\Pi = (a + b + \dots + x + l)^2 = a^2 + 2ab + \dots + 2xl + l^2 \quad (1).$$

Ἐπειδὴ ἡ ἰσότης (1) εἶναι ταυτότης, ἔπεται ὅτι ἂν διατάξωμεν καὶ τὸ δεδομένον πολυώνυμον Π ὅπως καὶ τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ρίζαν, τοῦτέστι κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ ἐν αὐτῷ γράμματος x , ὁ πρῶτος ὅρος αὐτοῦ θέλει εἶναι ἀναγκαίως ἴσος τῷ ὄρῳ a^2 , ἐπομένως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ a θέλει παριστᾷ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς ζητούμενης τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ Π . Λοιπὸν

Ἴνα εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ Π ,

ἄρκεῖ γὰρ ζητήσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου ὅρου αὐτοῦ, διαταχθέντος κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις ὅποιονδήποτε γράμματος.

Ἀφοῦ εὗρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον a τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης, ἐὰν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ταυτότητος (1) ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον αὐτοῦ a^2 , θέλωμεν ἔχει τὴν νέαν ταυτότητα

$$\Pi - a^2 = 2ab + \dots + 2x.l + l^2 \quad (2),$$

ἥς ὁ πρῶτος ὅρος $2ab$ τοῦ δευτέρου μέλους προκύπτει ἄνευ οὐδεμιᾶς ἀναγωγῆς ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ πρώτου ὅρου a τῆς ρίζης ἐπὶ τὸν δεύτερον. Ὁ πρῶτος λοιπὸν ὅρος τοῦ ὑπολοίπου $\Pi - a^2$ θέλει εἶναι ἀναγκαίως ἴσος τῷ $2ab$ ἐπομένως, ἐὰν διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ $2a$, ταυτέστι διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὐρεθέντος πρώτου ὅρου a τῆς τετραγωνικῆς ρίζης, θέλωμεν εὑρεῖ πηλίκον b , ταυτέστι τὸν δεύτερον ὅρον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης. Λοιπὸν

Ἀφοῦ εὗρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης, ἴνα εὗρωμεν καὶ τὸν δεύτερον ὅρον αὐτῆς, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δεδομένου πολυωνύμου Π τὸ τετράγωνον αὐτοῦ καὶ διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου, διατεταγμένου ὁμοιοτρόπως, διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὐρεθέντος πρώτου ὅρου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

Ἀφοῦ οὕτως εὗρωμεν καὶ τὸν δεύτερον ὅρον b τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ Π , ἐὰν ἀπὸ τοῦ Π ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $a + b$, θέλωμεν ἔχει τὴν νέαν ταυτότητα

$$\Pi - (a + b)^2 = 2ax + \dots + 2x.l + l^2 \quad (3),$$

ἥς ὁ πρῶτος ὅρος $2ax$ τοῦ δευτέρου μέλους δὲν δύναται νὰ ἔχῃ οὐδένα ἄλλον ὅμοιον μεταξὺ τῶν λοιπῶν, καὶ ἐπομένως θέλει εἶναι ἀναγκαίως ἴσος τῷ πρώτῳ ὅρῳ τῆς διαφορᾶς $\Pi - (a + b)^2$, διαταχθείσης ὁμοιοτρόπως. Ἐὰν διαιρέσωμεν λοιπὸν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου $\Pi - (a + b)^2$, ταυτέστι τὸν $2ax$, διὰ τοῦ $2a$, ταυτέστι διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὐρεθέντος πρώτου ὅρου a τῆς τετραγωνικῆς ρίζης, θέλωμεν εὑρεῖ πηλίκον x , ταυτέστι τὸν τρίτον ὅρον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης.

Εὐρεθέντος καὶ τοῦ ὅρου x , ἐὰν ἀπὸ τοῦ πολυωνύμου Π ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐρεθέντων τριῶν ὅρων, θέλωμεν ἔχει τὴν νέαν ταυτότητα

$$\Pi - (a + b + x)^2 = 2ad + \dots + 2x.l + l^2 \quad (4),$$

ἥς πάλιν ὁ πρῶτος ὅρος $2ad$ τοῦ δευτέρου μέλους δὲν δύναται νὰ ἔχῃ

οὐδένᾳ ὁμοίον μεταξὺ τῶν λοιπῶν, ἐπομένως θέλει εἶναι ἀναγκαίως ὁ αὐτὸς τῷ πρώτῳ ὅρῳ τῆς διαφορᾶς $\Pi - (a + b + \gamma)^3$ διαταχθείσης ὁμοιοτρόπως. Ἐάν διαιρέσωμεν λοιπὸν τὸν πρώτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου $\Pi - (a + b + \gamma)^3$, τουτέστι τὸν $2ab$, διὰ τοῦ διπλασίου $2a$ τοῦ εὐρεθέντος πρώτου ὅρου a τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ Π , θέλομεν εὑρεῖν τὸν τέταρτον ὅρον αὐτῆς, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παρατηρητέον ὅτι, ἀφοῦ πρὸς εὑρεσιν τοῦ δευτέρου ὅρου b τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης ἀφηρέσαμεν ἀπὸ τοῦ δεδομένου πολωνύμου Π τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ὅρου a καὶ διηρέσαμεν τὸν πρώτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου $\Pi - a^2$ διὰ τοῦ διπλασίου $2a$ τοῦ εὐρεθέντος πρώτου ὅρου a τῆς τετραγωνικῆς ρίζης, ἀντὶ πρὸς εὑρεσιν τοῦ τρίτου ὅρου γ νὰ ἀφαιρέσωμεν, ὡς προείπομεν, ἀπὸ τοῦ πολωνύμου Π τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος $a + b$, ἥτοι $a^2 + 2ab + b^2$, δυνάμεθα ἀπὸ τῆς εὐρεθείσης διαφορᾶς $\Pi - a^2$ νὰ ἀφαιρέσωμεν μόνον $2ab + b^2$, καὶ θέλομεν εὑρεῖν προφανῶς τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον $\Pi - (a + b)^2$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $2ab + b^2$ εἶναι γινόμενον τῶν παραγόντων $2a + b$ καὶ b , ὧν ὁ μὲν πρώτος $2a + b$ εὐρίσκεται προστιθεμένου τοῦ εὐρεθέντος δευτέρου ὅρου b εἰς τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου, ὁ δὲ δεύτερος b εἶναι αὐτὸς ὁ εὐρεθείς δεύτερος ὅρος τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης.

Ὡσαύτως, ἀντὶ μετὰ τὴν εὑρεσιν τοῦ τρίτου ὅρου γ τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ πολωνύμου Π τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος $a + b + \gamma$, ἥτοι $a^2 + 2ab + b^2 + 2a\gamma + 2b\gamma + \gamma^2$, δυνάμεθα ἀπὸ τῆς εὐρεθείσης διαφορᾶς $\Pi - (a + b)^2$ νὰ ἀφαιρέσωμεν μόνον τὸ ἄθροισμα $2a\gamma + 2b\gamma + \gamma^2$ καὶ θέλομεν εὑρεῖν προφανῶς τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον $\Pi - (a + b + \gamma)^2$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $2a\gamma + 2b\gamma + \gamma^2$ εἶναι γινόμενον τῶν παραγόντων $2a + 2b + \gamma$ καὶ γ , ὧν ὁ μὲν πρῶτος εὐρίσκεται προστιθεμένου τοῦ εὐρεθέντος τρίτου ὅρου εἰς τὸ διπλάσιον τῶν δύο πρώτων, ὁ δὲ δεύτερος γ εἶναι αὐτὸς ὁ εὐρεθείς τρίτος ὅρος τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης.

Ὅ,τι εἵπομεν περὶ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου ὅρου, δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν καὶ περὶ τοῦ τετάρτου καὶ τῶν λοιπῶν. Ἐντεῦθεν δὲ πορίζομεθα λίαν εὐκόλως τὸν ἐξῆς γενικὸν κανόνα.

91. *Ἴνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν δεδομένου πολωνύμου, διατάσσομεν αὐτὸ κατὰ τὰς ἀριούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις γράμματός τινος καὶ ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ οὕτω διαταχθέντος πολωνύμου. Εὐρίσκομεν οὕτω τὸν πρῶ-*

τὸν ὅρον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς αὐτοῦ ρίζης, ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ διαταχθέντος πολωνύμου καὶ διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὐρεθέντος πρώτου ὅρου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

Εὐρίσκομεν οὕτω τὸν δεύτερον ὅρον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης, ὃν προσθέτομεν εἰς τὸ διπλάσιον τοῦ εὐρεθέντος πρώτου ὅρου, πολλαπλασιάζομεν τὸ εὐρεθησόμενον ἄθροισμα ἐπ' αὐτὸν τὸν εὐρεθέντα δεύτερον ὅρον καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον ἀπὸ τοῦ ἤδη εὐρεθέντος πρώτου υπολοίπου. Θέλομεν ἔχει οὕτω δεύτερον ὑπόλοιπον, ὅπερ διατάσσομεν, ἐὰν ἦται ἀνάγκη, ὁμοιοτρόπως καὶ διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον αὐτοῦ πάλιν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὐρεθέντος πρώτου ὅρου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

Εὐρίσκομεν οὕτω τὸν τρίτον ὅρον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης, ὃν προσθέτομεν εἰς τὸ διπλάσιον τοῦ ἄθροισματος τῶν δύο πρώτων, πολλαπλασιάζομεν τὸ εὐρεθησόμενον ἄθροισμα ἐπ' αὐτὸν τὸν εὐρεθέντα τρίτον ὅρον καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον ἀπὸ τοῦ εὐρεθέντος δεύτερου υπολοίπου. Θέλομεν ἔχει οὕτω τρίτον ὑπόλοιπον, ὅπερ διατάσσομεν, ἐὰν ὑπάρχῃ ἀνάγκη, ὁμοιοτρόπως καὶ διαιροῦμεν πάλιν τὸν πρῶτον ὅρον αὐτοῦ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὐρεθέντος πρώτου ὅρου τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης.

Εὐρίσκομεν οὕτω τὸν τέταρτον ὅρον τῆς τετραγωνικῆς τοῦ δεδομένου πολωνύμου ρίζης, ὃν προσθέτομεν εἰς τὸ διπλάσιον τοῦ ἄθροισματος τῶν εὐρεθέντων τριῶν πρώτων, πολλαπλασιάζομεν τὸ εὐρεθησόμενον ἄθροισμα ἐπ' αὐτὸν τὸν εὐρεθέντα τέταρτον ὅρον καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον ἀπὸ τοῦ εὐρεθέντος τρίτου υπολοίπου, κτλ.

* Ἀς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι μᾶς ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πολωνύμου $34a^3b^3 + 25b^4 - 12a^3b + 9a^4 - 20ab^3$.

Διατάσσομεν πρῶτον αὐτὸ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος a , ὡς φαίνεται ὀπισθεν, καὶ ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν $3a^2$ τοῦ πρώτου ὅρου $9a^4$. Ὑψοῦμεν τὸν εὐρεθέντα πρῶτον ὅρον $3a^2$ τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης εἰς τὸ τετράγωνον, ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τοῦ δεδομένου πολωνύμου, καὶ διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον $-12a^3b$ τοῦ ὑπὸ τὴν πρώτην δριζόντιον γραμμὴν ὁμοιοτρόπως διατεταγμένου υπολοίπου διὰ τοῦ διπλασίου $6a^2$ τοῦ εὐρεθέντος πρώτου ὅρου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

Ευρίσκομεν οὕτω τὸν δεύτερον ὅρον $-2ab$ τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ῥίζης, ὃν προσθέτομεν εἰς τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ εὐρεθησόμενον ἄθροισμα $ba^2 - 2ab$ ἐπ' αὐτόν, ὡς φαίνεται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀνωτέρου παραδείγματος.

$$\begin{array}{r|l}
 9a^4 - 42a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 & 3a^2 - 2ab + 5b^2 \\
 - 9a^4 & 6a^2 - 2ab \\
 \hline
 - 42a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 & - 2ab \\
 + 42a^3b - 4a^2b^2 & \hline
 \hline
 + 30a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 & - 42a^3b + 4a^2b^2 \\
 - 30a^2b^2 + 20ab^3 - 25b^4 & 6a^2 - 4ab + 5b^2 \\
 \hline
 0 & + 5b^2 \\
 & \hline
 & 30a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4
 \end{array}$$

Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον $-42a^3b + 4a^2b^2$ ἀπὸ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου καὶ διαίρομεν τὸν πρώτον ὅρον $+30a^2b^2$ τοῦ εὐρεθησομένου δευτέρου ὑπολοίπου, διατεταγμένου ὁμοιοτρόπως, πάλιν διὰ τοῦ διπλασίου ba^2 τοῦ πρώτου ὅρου $3a^2$ τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς τοῦ πολυωνύμου ῥίζης.

Ευρίσκομεν οὕτω τὸν τρίτον ὅρον $+5b^2$ τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης, ὃν προσθέτομεν εἰς τὸ διπλάσιον $ba^2 - 4ab$ τοῦ ἄθροισματος τῶν προηγουμένως εὐρεθέντων δύο ὅρων, καὶ τὸ οὕτως εὐρεθησόμενον ἄθροισμα $ba^2 - 4ab + 5b^2$ πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτόν, ὡς φαίνεται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ αὐτοῦ παραδείγματος.

Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον $30a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$, καὶ ἐπειδὴ εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον 0, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον $3a^2 - 2ab + 5b^2$, τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τοῦ ἄθροισματος τῶν ἐκάστοτε κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὐρισκομένων ὅρων τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ῥίζης, θέλει παριστᾶ τὴν τετραγωνικὴν τοῦ δεδομένου πολυωνύμου ῥίζαν.

Τὰ καθέκαστα τῆς ἐκτελέσεως τῶν πράξεων διατάσσονται ὡς φαίνεται ἐν τῷ ἀνωτέρω παραδείγματι καὶ ἐν τοῖς ἐν τῷ *Δευτέρῳ Μέρει* τῆς παρούσης συγγραφῆς περιεχομένοις.

Παρατήρησις 1. — Ἐπειδὴ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου ὅρου $9a^4$ τοῦ ἐν τῷ ἀνωτέρω παραδείγματι δεδομένου πολυωνύμου εἶναι καὶ $+3a^2$ καὶ $-3a^2$, ἂν ἐλαμβάνομεν ὡς πρῶτον ὅρον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς τοῦ πολυωνύμου ῥίζης ἀντὶ τοῦ $+3a^2$ τὸν $-3a^2$, ἡθέλομεν εὖρει ἀκολουθοῦντες κατὰ γράμμα τὸν ἀνωτέρω κανόνα ὡς τε-

τραγωνικὴν ρίζαν τὸ πολυώνυμον $-3a^2 + 2ab - 5b^2$, ὅπερ δὲν διαφέρει τοῦ εὐρεθέντος $3a^2 - 2ab + 5b^2$ εἰ μὴ κατὰ τὸ σημεῖον, τοῦθ' ὅπερ ἠδυνάμεθα εὐκόλως καὶ νὰ προῖδωμεν· διότι γνωρίζομεν ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς αὐτῆς θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς ποσότητος εἶναι τὸ αὐτό.

Παρατήρησις 2. — Ὅταν τὸ κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις γράμματός τινος διατασσόμενον πολυώνυμον περιέχῃ τὸ γράμμα τῆς διατάξεως εἰς τὴν αὐτὴν δυνάμιν εἰς δύο ἢ πλείοτερους ὅρους, τότε ἢ μὲν διάταξις αὐτοῦ γίνεται κατὰ τὰς ἐπὶ τῆς περιπτώσεως ταύτης ἐν τῷ *Δευτέρῳ Μέρει* δοθείσας ὁδηγίας, αἱ δὲ πρὸς εὑρεσιν τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ρίζης γενόμεναι πράξεις ἐκτελοῦνται κατὰ τὸν αὐτὸν ἀπαραλλάκτως κανόνα, μὲ μόνον τὴν διαφορὰν, ὅτι μερικαὶ τινες διαιρέσεις, ἐνίοτε δὲ καὶ ἡ εὑρεσις τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης, ἐκτελοῦνται κατ' ἰδίαν ἐπὶ πολυωνύμων κατὰ τὰ ἐν τῷ *Δευτέρῳ Μέρει* ἐπὶ τῆς περιπτώσεως ταύτης ἐκτιθέμενα παραδείγματα.

92. Ἐκ τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι δεδομένον πολυώνυμον δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον

1^{ον}. Ὅταν ἦναι δυνώνυμον· διότι τὸ μὲν τετράγωνον μονωνύμου εἶναι μονώνυμον, τὸ δὲ τετράγωνον δυνωνύμου εἶναι τριώνυμον.

2^{ον}. Ὅταν ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος αὐτοῦ ὅρος, διαταχθέντος κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις ὁποιοιδήποτε τῶν ἐν αὐτῷ περιεχομένων γραμμάτων, δὲν ἦναι τέλεια τετράγωνα.

3^{ον}. Ὅταν ὁ δεύτερος καὶ ὁ προτελευταῖος ὅρος αὐτοῦ, ὅπωςδὴπατε διαταχθέντος, δὲν ἦναι διαιρετοί, ὁ μὲν διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ πρώτου ὅρου, ὁ δὲ διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ τελευταίου.

4^{ον}. Ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος ὑπολοίπου τινὸς δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὐρεθέντος πρώτου ὅρου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

8^{ον}. Ὅταν ἐν τῇ ἐκτελέσει τῆς πράξεως εὐρωμεν ὅρον τινὰ τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης ἔχοντα τὸ γράμμα τῆς διατάξεως εἰς τὴν αὐτὴν δυνάμιν, εἰς ἣν καὶ ὁ ἐκ τῶν προτέρων γνωστὸς τελευταῖος ὅρος τῆς ρίζης, χωρὶς οὗτος νὰ ἦναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν γνωστὸν ταῦτον ὅρον τῆς ρίζης ἢ χωρὶς νὰ εὐρωμεν ἀμέσως ὑπόλοιπον μηδέν.

93. Εἶναι βεβαίως ὅλως περιττὸν νὰ ἀποδείξωμεν ἐνταῦθα ὅτι, ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀλγεβρικοῦ τινος ἀναγώγου κλάσματος, ἔχοντος πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον + καὶ ἕνα τῶν ὁρῶν ἢ καὶ τοὺς δύο αὐτοῦ ὅρους πολυώνυμα, πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν κατὰ τὸν προ-

γουμενως αποδειχθέντα κανόνα την τετραγωνικὴν ρίζαν ἑκατέρου τῶν ὄρων αὐτοῦ, νὰ διαιρέσωμεν τὴν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τῆς τοῦ παρονομαστοῦ καὶ νὰ θέσωμεν πρὸ τοῦ οὕτω προκύπτοντος κλάσματος τὰ σημεῖα + καὶ -. Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀναγώγου ἀλγεβρικοῦ κλάσματος

$$\frac{4x^4 + 12x^3 - 5x^2 - 6x + 1}{4x^2 - 20x + 25}$$

ὅπερ ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον + καὶ τοὺς ὅρους πολυώνυμα, εἶναι

$$\pm \frac{2x^2 + 3x - 1}{2x - 5},$$

καὶ εὐρίσκεται ἐξαγομένων τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν ἑκατέρων τῶν ὄρων αὐτοῦ, διαιρουμένης τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τῆς τοῦ παρονομαστοῦ καὶ προτασσομένων πρὸ τοῦ οὕτω προκύπτοντος κλάσματος τῶν σημείων + καὶ -.

Ἔπεται δὲ ἐντεῦθεν, ὅτι ἀνάγωγόν τι ἀλγεβρικὸν κλάσμα δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον

1^ο. Ὅταν ἔχη πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον -, καὶ

2^ο. Ὅταν ἀμφοτέροι οἱ ὅροι αὐτοῦ δὲν ἦναι τέλεια τετράγωνα.

Παρατήρησις. Ὅταν τὸ ἀλγεβρικὸν κλάσμα, οὗτινος μᾶς ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, δὲν ἦναι ἀνάγωγον, οἱ δὲ κοινοὶ εἰς τοὺς δύο αὐτοῦ ὅρους παράγοντες δὲν ἦναι τέλεια τετράγωνα, τότε οὐδέτερος τῶν ὄρων αὐτοῦ θέλει εἶναι τέλειον τετράγωνον. Ἐν τιαυτῇ περιπτώσει, πρὶν ἢ καταστήσωμεν αὐτὸ ἀνάγωγον, δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν ὅτι τοῦτο δὲν εἶναι καὶ τέλειον τετράγωνον. Παραδείγματος χάριν, τὸ ἀλγεβρικὸν κλάσμα

$$\frac{42a^5 - 36a^3b^2 + 27ab^6}{48a^3 - 420a^2b + 75ab^2}$$

ἐπειδὴ δὲν εἶναι ἀνάγωγον καὶ ὁ κοινὸς εἰς τοὺς δύο αὐτοῦ ὅρους παράγων 3a δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, φαίνεται μὴ ὅν τέλειον τετράγωνον, ἂν καὶ καθίσταται τοιοῦτο διαιρουμένων τῶν δύο ὄρων αὐτοῦ διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν παράγοντος 3a. Διότι τότε γίνεται

$$\frac{4a^4 - 12a^2b^2 + 9b^4}{16a^2 - 40ab + 25b^2}$$

καὶ ἔχει ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ τέλεια τετράγωνα.

ἵνα καταστήσωμεν ἀλγεβρικόν τι κλάσμα ἀνάγωγον, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δύο αὐτοῦ ὅρους διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, οὗτινος, ὡς εἶπομεν ἐν τῇ παρατηρήσει τῆς παραγράφου 31, ἡ εὐρεσις εἶναι ἀντικείμενον τῆς Ἀνωτέρας Ἀλγέβρας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΙΝΕΣ. — ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ. — ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ. — ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΙΣ. — ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΙΝΕΣ

94. Ὅταν ἀλγεβρικῆς τινος παραστάσεως A , ἀκεραίας ἢ κλασματικῆς, μονωνύμου ἢ πολυνύμου, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα διὰ τινὰ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων λόγων δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ δι' ἑτέρας τινὸς ἀκεραίας ἢ κλασματικῆς, μονωνύμου ἢ πολυνύμου ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, τότε ἡ ἐξαγωγή αὐτῆς σημειοῦται μόνον διὰ τοῦ γνωστοῦ σημείου $\sqrt{}$, αἱ δὲ οὕτω προκύπτουσαι νέαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις $\sqrt{A}$ καλοῦνται *ρίζικὰ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ* ἢ καὶ ἀπλῶς *ρίζικὰ*.

Τὸ πρὸ τῆς παραστάσεως $\sqrt{A}$ ὑπάρχον σημεῖον $+$ ἢ $-$ καλεῖται *σημεῖον τοῦ ρίζικοῦ*, οὗτινος τότε λαμβάνεται μόνον ἡ ἀριθμητικὴ, τουτέστιν ἡ θετικὴ τιμὴ (87). Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὰς δύο αὐτοῦ τιμὰς, τότε προτάσσομεν αὐτοῦ καὶ τὰ δύο σημεῖα $+$ καὶ $-$ οὕτω $\pm \sqrt{A}$.

Δύο ρίζικὰ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ λέγονται *ὅμοια*, ὅταν ἔχωσι τὴν αὐτὴν ὑπὸρρίζον ποσότητα. Παραδείγματος χάριν, τὰ ρίζικὰ

$$-\sqrt{3ab}, \quad 4a^2\sqrt{3ab}, \quad (2a-3b)\sqrt{3ab}$$

λέγονται *ὅμοια*, διότι ἔχωσι τὴν αὐτὴν ὑπὸρρίζον ποσότητα $3ab$. Οἱ πρὸ τοῦ $\sqrt{3ab}$ παράγοντες -5 , $4a^2$, $2a-3b$ καλοῦνται *συντελεστὰι τοῦ ρίζικοῦ*.

95. Ὅταν ἐν τινι ἀλγεβρικῇ παραστάσει ὑπάρχωσιν ὅμοια ρίζικὰ, ταῦτα δύνανται νὰ ἀναχθῶσιν εἰς ἓν σημειουμένον ἢ καὶ ἐκτελουμένον, ὅταν τοῦτο ᾖναι δυνατόν, ἐπὶ τῶν συντελεστών αὐτῶν τῶν πρὸ αὐτῶν σεσημειωμένων πράξεων καὶ πολλαπλασιαζομένου τοῦ εὐρεθησομένου

ἐξαγομένου ἐπὶ τὸ κοινὸν ριζικόν. Παραδείγματος χάριν, ἐν τῇ ἀλγεβρικῇ παραστάσει

$$2a\sqrt{5\gamma} - 4\gamma\sqrt{7a} + 8a\sqrt{5\gamma} - \sqrt{5\gamma} + 9\delta\sqrt{7\epsilon} + 4\sqrt{5\gamma}$$

δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὰ ὅμοια ριζικά $2a\sqrt{5\gamma}$, $8a\sqrt{5\gamma}$, $-\sqrt{5\gamma}$, $4\sqrt{5\gamma}$ εἰς ἓν $(2a+8a-1+4)\sqrt{5\gamma}$ ἢ $(10a+3)\sqrt{5\gamma}$, θέτοντες τὸ κοινὸν ριζικόν $\sqrt{5\gamma}$ κοινὸν παράγοντα εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν αὐτοῦ $2a$, $8a$, -1 , 4 , ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ $10a+3$.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ

96. Αἱ περιέχουσαι ριζικά ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις προστίθενται ὅπως καὶ αἱ ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, γραφομένῳ δηλ. τῶν ἀποτελοῦντων αὐτὰς ὅρων ἐν μιᾷ ἀλγεβρικῇ παραστάσει μὲ τὰ ἴδια αὐτῶν σημεῖα.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

$$2a^3\sqrt{5b} - (4a^3 + 3b^3)\sqrt{a}, \quad 3a^2b\sqrt{a}, \quad -8\sqrt{3ab\gamma} + 8ab^2\sqrt{5b}$$

εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ παράστασις

$$2a^3\sqrt{5b} - (4a^3 + 3b^3)\sqrt{a} + 3a^2b\sqrt{a} - 8\sqrt{3ab\gamma} + 8ab^2\sqrt{5b},$$

ἢν σχηματίζομεν γράφοντες τοὺς ὅρους ἐκάστης κατόπιν τῶν ὅρων τῆς πρώτης μὲ τὰ ἴδια αὐτῶν σημεῖα.

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως μᾶς μένει πάντοτε νὰ ἐκτελέσωμεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ριζικῶν, ἂν ὑπάρχωσιν. Οὕτω τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν ἄθροισμα γράφεται καὶ ὡς ἐξῆς

$$-(4a^3 + 3b^3 - 3a^2b)\sqrt{a} + (2a^3 + 8ab^2)\sqrt{5b} - 8\sqrt{3ab\gamma}.$$

97. Αἱ περιέχουσαι ριζικά ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις ἀφαιροῦνται ὅπως καὶ αἱ ἀκέραιαι, γραφομένου δηλ. ἐκάστου τῶν ὅρων τῆς ἀφαιρέτης κατόπιν τῶν ὅρων τῆς μειωτέας μὲ ἐναντίον σημεῖον.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα ἀπὸ τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως $3a\sqrt{5b} - 4b\sqrt{2a}$ ἀφαιρέσωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν $(5a-3b)\sqrt{2a} + 7b\sqrt{3a} - (6b+2a)\sqrt{5b}$, πρέπει νὰ γράψωμεν ἕκαστον τῶν ὅρων τῆς ἀφαιρέτης κατόπιν τῆς μειωτέας μὲ ἐναντίον σημεῖον, οὕτω

$$3a\sqrt{5b} - 4b\sqrt{2a} - (5a-3b)\sqrt{2a} - 7b\sqrt{3a} + (6b+2a)\sqrt{5b},$$

καὶ θέλομεν ἔχει μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀναγωγῶν τῶν ὁμοίων ριζικῶν

$$(6b + 5a)\sqrt{5b} - (b + 5a)\sqrt{2a} - 7b\sqrt{3a}.$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ

98. Τὸ γινόμενον δύο ἢ πλεονέτερον ριζικῶν εἶναι ριζικόν, ἔχον ὑπόρριζον ποσότητα τὸ γινόμενον τῶν ὑπορρίζων ποσοτήτων τῶν δεδομένων.

Ἵνα σχηματίσωμεν π. χ. τὸ γινόμενον τῶν ριζικῶν $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{\gamma}$, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' ἀλλήλας τὰς ὑπορρίζους ποσότητας a , b , γ , καὶ τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον αὐτῶν $ab\gamma$ νὰ θέσωμεν ὑπὸ τὰ ριζικόν· τουτέστι λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{\gamma} = \sqrt{ab\gamma} \quad (1).$$

Διότι, ἐὰν ὑψώσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) εἰς τὸ τετράγωνον, θέλομεν ἔχει

$$(\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 \times (\sqrt{\gamma})^2 = (\sqrt{ab\gamma})^2,$$

ἢ τὴν ταυτότητα

$$a \times b \times \gamma = ab\gamma.$$

Ἄρα ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (1) εἶναι ἀληθής.

Ἐπεταὶ ἐντεῦθεν ὅτι, ὅταν παράγων τις a τοῦ γινομένου $ab\gamma$ ᾗναι τέλειον τετράγωνον, δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ρίζαν καὶ νὰ θέσωμεν αὐτὴν ὡς συντελεστὴν πρὸ τοῦ ριζικοῦ τοῦ γινομένου $b\gamma$ τῶν λοιπῶν· καὶ ἀντιστρόφως, δυνάμεθα νὰ εἰσαγάγωμεν τὸν συντελεστὴν ριζικοῦ τινος ὑπὸ τὸ ριζικόν πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ τὴν ὑπόρριζον ποσότητα.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ριζικόν $\sqrt{4a^2 \times 3a \times 5b}$, ἐν ᾧ ὁ παράγων $4a^2$ εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἰσοῦται τῷ $2a\sqrt{3a \times 5b}$, ὅπερ εὐρίσκομεν ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν $2a$ τοῦ $4a^2$ καὶ θέτοντες αὐτὴν ὡς συντελεστὴν πρὸ τοῦ ριζικοῦ τοῦ γινομένου $3a \times 5b$ τῶν λοιπῶν. Καὶ ἀντιστρόφως, ἵνα εἰσαγάγωμεν τὸν συντελεστὴν $2a$ τοῦ ριζικοῦ $2a\sqrt{3a \times 5b}$ ὑπὸ τὸ ριζικόν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ὑπόρριζον ποσότητα $3a \times 5b$ ἐπὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $4a^2$. Τουτέστι θέλομεν ἔχει κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις τὰς ταυτότητας

$$\sqrt{4a^2 \cdot 3a \cdot 5b} = 2a\sqrt{3a \cdot 5b}, \quad 2a\sqrt{3a \cdot 5b} = \sqrt{4a^2 \cdot 3a \cdot 5b}$$

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ

99. Ἀπλοποιούμεν δεδομένον ριζικόν, ὅταν ἐξάγωμεν πρὸ αὐτοῦ ὡς συντελεστήν τὸ γινόμενον τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν πάντων τῶν ὑπ' αὐτὸ τελείων τετραγώνων παραγόντων. Ὅταν τὸ δεδομένον ριζικὸν δὲν ᾖ ἐπιδεκτικὸν τοιαύτης τινὸς ἀπλοποιήσεως, τότε λέγεται ἀνάγω-
ρον, τοιοῦτο δὲ εἶναι π. χ. τὸ ριζικὸν $\sqrt{3ab}$. Παραδείγματος χάριν, ἀ-
πλοποιούμεν τὸ ριζικὸν $\sqrt{75a^5b^3\gamma^2}$, ἐὰν γράψωμεν πρὸ αὐτοῦ ὡς συντε-
λεστήν τὸ γινόμενον $5a^2b\gamma$ τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν πάντων τῶν ὑπ' αὐτὸ τελείων τετραγώνων παραγόντων $25, a^4, b^2, \gamma^2$. Οὕτω τὸ δεδο-
μένον ριζικὸν δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἐξῆς $5a^2b\gamma\sqrt{3ab}$, διότι ἔχομεν
κατὰ τὰ προαποδειχθέντα

$$\sqrt{75a^5b^3\gamma^2} = 5a^2b\gamma\sqrt{3ab}.$$

100. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἓνα παράγοντα τὸ γινόμενον $25a^4b^2\gamma^2$ πάντων τῶν τελείων τετραγώνων διαφόρων παραγόντων τοῦ δεδομένου ριζικοῦ $\sqrt{75a^5b^3\gamma^2}$ καὶ ὡς ἕτερον τὸ γινόμενον $3ab$ τῶν λοι-
πῶν. Λοιπὸν

Ἴτα ἀπλοποιήσωμεν δεδομένον ριζικόν, ἀποσυνθέτομεν τὴν ἐπὶ ῥι-
ζικὸν αὐτοῦ ποσότητα εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, ὧν ὁ μὲν νὰ
ᾖ τὸ γινόμενον πάντων τῶν ἐν αὐτῇ τελείων τετραγώνων παρα-
γόντων, ὁ δὲ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν, ἐξάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν
ρίζαν τοῦ πρώτου καὶ θέτομεν αὐτὴν ὡς συντελεστήν πρὸ τοῦ ριζι-
κοῦ τοῦ δευτέρου.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον θέλομεν ἔχει

$$\begin{aligned}\sqrt{18a^6b^2\gamma} &= 3a^3b\sqrt{2\gamma}, & \sqrt{108a^5b^3\gamma^2} &= 6a^2b\gamma\sqrt{3ab}, \\ \sqrt{12a^3b^2-20a^2b^3} &= \sqrt{4a^2b^2(3a-5b)} = 2ab\sqrt{3a-5b}, \\ \sqrt{3a^2b-12ab^2+12b^3} &= \sqrt{3b(a^2-4ab+4b^2)} = (a-2b)\sqrt{3b},\end{aligned}$$

101. Ἡ ἀνωτέρω τῶν ριζικῶν ἀπλοποιήσις εἶναι ἀπαραίτητος, ὅταν
ἐκτελῶμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν ἐν τινι ἀλγεβρικῇ παραστάσει εὕρισκομέ-
νων ὁμοίων ριζικῶν, διότι πολλάκις ριζικά τινα φαίνονται ἀνόμοια, ἐνῶ
καθίστανται ὅμοια μετὰ τὴν ἐπ' αὐτῶν ἐκτέλεσιν τῶν δυνατῶν ἀπλο-
ποιήσεων. Παραδείγματος χάριν, τὰ ριζικά $\sqrt{45a^3b^2\gamma}$ καὶ $\sqrt{80a^2b^4\gamma}$
φαίνονται ἀνόμοια, ἐνῶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν δυνατῶν ἀπλοποιήσεων
γίνονται ὅμοια $3a^2b\sqrt{5a\gamma}$ καὶ $4ab^2\sqrt{5a\gamma}$.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ

102. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ριζικῶν εἶναι ριζικόν, ἔχον ὑπορρίζον ποσότητα τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς ὑπορρίζου ποσότητος τοῦ διαιρετέου ριζικοῦ διὰ τῆς ὑπορρίζου ποσότητος τοῦ διαιρετέου ριζικοῦ.

Τὸ πηλίκον π. χ. τῆς διαιρέσεως τοῦ $\sqrt{a}$ διὰ τοῦ $\sqrt{b}$ εὐρίσκεται, ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν ὑπορρίζον ποσότητα a τοῦ πρώτου διὰ τῆς ὑπορρίζου ποσότητος b τοῦ δευτέρου καὶ θέσωμεν τὸ εὐρεθισόμενον πηλίκον $\frac{a}{b}$ ὑπὸ τὸ ριζικὸν σημεῖον· τουτέστι λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (1).$$

Διότι, ἐὰν ὑψώσωμεν κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) εἰς τὸ τετράγωνον, θέλομεν ἔχει

$$\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \right)^2,$$

ἢ τὴν ταυτότητα

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Ἄρα ἡ ἄνωτέρω ἰσότης (1) εἶναι ἀληθής.

103. Πολλάκις τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ὑπορρίζων ποσοτήτων a καὶ b προκύπτον κλάσμα $\frac{a}{b}$ εἶναι ἐπιδεκτικὸν ἀπλοποιήσεων, δι' ὧν καθίσταται ἐνίοτε καὶ τέλειον τετράγωνον. Παραδείγ. χάριν, θέλομεν ἔχει

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{21x^3b^5\gamma^2}}{\sqrt{6x^4b^3\gamma^3}} &= \sqrt{\frac{21x^3b^5\gamma^2}{6x^4b^3\gamma^3}} = \sqrt{\frac{7b^2}{2x\gamma}} = b\sqrt{\frac{7}{2x\gamma}}, \\ \frac{\sqrt{75x^3b^3\gamma}}{\sqrt{27ab\gamma^3}} &= \sqrt{\frac{75x^3b^3\gamma}{27ab\gamma^3}} = \sqrt{\frac{25x^2b^2}{9\gamma^2}} = \frac{5xb}{3\gamma}. \end{aligned}$$

Καὶ βλέπομεν ὅτι ἡ μὲν πρώτη ὑπορρίζος ποσότης ἠπλοποιήθη ἐπαισθητῶς, ἡ δὲ δευτέρα κατέστη διὰ τῆς ἐκτελέσεως τῶν δυνατῶν ἀπλοποιήσεων τέλειον τετράγωνον.

104. Εἶναι πολλάκις ὠφέλιμον νὰ μετατρέπωμεν δεδομένον κλάσμα, ἔχον ριζικὰ εἰς τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ, εἰς ἕτερον ἰσοδύναμον

τῷ δεδομένῳ καὶ ἔχον ῥητὸν παρονομαστὴν. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καταλλήλως ἅπαξ ἢ ἐνίοτε καὶ πολλάκις τοὺς δύο ὕρους τοῦ δεδομένου κλάσματος ἐπὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα.

Παραδείγματος χάριν, ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος $\frac{7}{2\sqrt{5}}$ καθίσταται ῥητός, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὕροι αὐτοῦ ἐπὶ $\sqrt{5}$. Διότι τότε θέλομεν ἔχει

$$\frac{7}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{2(\sqrt{5})^2} = \frac{7}{10}\sqrt{5}.$$

Ὡσαύτως, ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος $\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}$ καθίσταται ῥητός, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὕροι αὐτοῦ ἐπὶ $3\sqrt{3}+4\sqrt{2}$. Διότι τότε θέλομεν ἔχει

$$\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{7}(3\sqrt{3}+4\sqrt{2})}{(3\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{2})^2} = \frac{6\sqrt{33}+8\sqrt{14}}{13}.$$

Ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha\sqrt{b}}{\sqrt{c}+\sqrt{2x}-\sqrt{y}}$ καθίσταται ῥητός, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὕροι αὐτοῦ πρῶτον ἐπὶ τὴν παράστασιν $\sqrt{b}+\sqrt{2x}+\sqrt{y}$ καὶ ἔπειτα οἱ δύο ὕροι τοῦ προκύψοντος κλάσματος ἐπὶ τὴν $b+2x-y-2\sqrt{2xb}$.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ. — ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧ ΤΩΝ
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΚΑΙ ΡΙΖΩΝ ΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

105. Ἐξίσωσις τις μίαν μόνην περιέχουσα ἄγνωστον λέγεται τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ὅταν μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν ἐν αὐτῇ παρονομαστῶν, ἐὰν ὑπάρχωσι, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων, ἐὰν ὑπάρχωσι τοιαῦται πρὸς ἐκτέλεσιν, καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ἐν αὐτῇ

ὁμοίων ὄρων, ἐὰν ὑπάρχωσι τοιοῦτοι, ἡ ἀνωτάτη δύναμις τῆς ἐν αὐτῇ περιεχομένης ἀγνώστου εἰς ἓνα ἢ πλειότερους ὄρους ῥῖναι ἢ δευτέρα.

Ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις καλεῖται μὴ πλήρης ἢ ἀτελής, ὅταν ἀποτελῇται μόνον ἀπὸ ὄρους γνωστούς καὶ ἀπὸ ὄρους περιέχοντας τὸ τετράγωνον τῆς ἀγνώστου· ὅταν δὲ αὕτη περιέχῃ καὶ ὄρους περιέχοντας τὴν ἀγνώστον εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, τότε θέλει περιέχει πάντας τοὺς δυνατοὺς διαφοροὺς ὄρους καὶ καλεῖται πλήρης.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ a τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν περιεχόντων τὸ τετράγωνον τῆς ἀγνώστου x ὄρων, διὰ b τὸ τῶν συντελεστῶν τῶν περιεχόντων τὴν πρώτην δύναμιν αὐτῆς καὶ διὰ γ τὸ τῶν γνωστῶν αὐτῆς ὄρων, ἡ γενικὴ μορφή τῆς μὲν ἀτελοῦς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως θέλει εἶναι ἡ ἐξῆς·

$$ax^2 = \gamma,$$

τῆς δὲ πλήρους ἡ ἀκόλουθος

$$ax^2 + bx = \gamma.$$

106. Ἵνα λύσωμεν ἀτελῆ τινὰ δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $ax^2 = \gamma$, διαιροῦμεν πρῶτον τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ συντελεστοῦ a τῆς x^2 καὶ ἐξάγομεν ἔπειτα τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν δύο μελῶν τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως

$$x^2 = \frac{\gamma}{a},$$

καὶ ἔχομεν

$$x = \sqrt{\frac{\gamma}{a}}, \quad \eta \quad x = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{a}}.$$

Ἐθέσαμεν πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ τὰ δύο σημεῖα $+$ καὶ $-$, διότι γνωρίζομεν (87) ὅτι, ἂν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ ἢ τῆς ποσότητος $+x$ ῥῖναι $\frac{\gamma}{a}$, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ ἢ τῆς ποσότητος $-x$ θέλει εἶναι ὡσαύτως $\frac{\gamma}{a}$.

Αἱ τιμαὶ $+\sqrt{\frac{\gamma}{a}}$ καὶ $-\sqrt{\frac{\gamma}{a}}$ τῆς x , αἱ ταυτοποιῶσαι τὴν ἀτελῆ ἐξίσωσιν $ax^2 = \gamma$, καλοῦνται καὶ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως. Ἐὰν ἡ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν ποσότης $\frac{\gamma}{a}$ ῥῖναι ἀρνητικὴ, τότε κατὰ τὰ ἐν τῇ § 87 λεχθέντα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $ax^2 = \gamma$ θέλουσιν εἶναι φανταστικά.

Ἐστω παραδείγματος χάριν πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{9x-48}{5x} = \frac{x}{x+2} \quad (1).$$

Αὕτη μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν ἐν αὐτῇ παρονομαστῶν γίνεται

$$9x^2 - 48x + 48x - 36 = 5x^2,$$

μετὰ δὲ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀναγωγῶν τῶν ἐν αὐτῇ ὁμοίων ὅρων μετατρέπεται εἰς τὴν ἀτελῇ δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$4x^2 = 36,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διαδοχικῶς

$$x^2 = 9 \quad \text{καὶ} \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3.$$

Ἡ δεδομένη λοιπὸν ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀτελής καὶ ταυτοποιεῖται διὰ τῶν τιμῶν $+3$ καὶ -3 τῆς ἐν αὐτῇ ἀγνώστου x .

Ἐστω πρὸς τούτοις πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{2x^2}{3} - 5 + \frac{5x^2}{6} = \frac{7x^2}{12} + 28 \quad (1).$$

Αὕτη μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν ἐν αὐτῇ παρονομαστῶν γίνεται

$$8x^2 - 60 + 10x^2 = 7x^2 + 336,$$

μετὰ δὲ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν δυνατῶν ἀναγωγῶν μετατρέπεται εἰς τὴν ἀτελῇ δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$11x^2 = 396,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διαδοχικῶς

$$x^2 = \frac{396}{11} = 36, \quad \text{καὶ} \quad x = \pm\sqrt{36} = \pm 6.$$

Αἱ δύο λοιπὸν ρίζαι τῆς δεδομένης ἐξισώσεως (1) εἶναι $+6$ καὶ -6 .

Ἄν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὴν ἐγγράμματον ἐξίσωσιν

$$(a^2 + x)(a^2 - x) = (ax + 1)(ax - 1) + 2a(x^2 + a) \quad (1),$$

ἠθέλομεν πρῶτον ἐκτελέσει τὰς ἐν αὐτῇ σεσημειωμένας πράξεις κτλ. καὶ ἠθέλομεν εὐρεῖ διαδοχικῶς

$$a^4 + a^2x - a^2x - x^2 = a^2x^2 + ax - ax - 1 + 2ax^2 + 2a^2,$$

$$-x^2 - a^2x^2 - 2ax^2 = -a^4 + 2a^2 - 1,$$

$$(a^2 + 2a + 1)x^2 = a^4 - 2a^2 + 1,$$

$$x^2 = \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{a^2 + 2a + 1} = a^2 - 2a + 1, \quad x = \pm\sqrt{a^2 - 2a + 1} = \pm(a - 1)$$

Αἱ δύο λοιπὸν τιμαὶ τῆς χ , αἱ ταυτοποιοῦσαι τὴν ἀνωτέρω ἀτελῆ δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν (1), εἶναι $\alpha - 1$ καὶ $-(\alpha - 1)$ ἢ $1 - \alpha$.

107. Ὡς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ πρὸς λύσιν δεδομένη δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις εἶναι πλήρης. Πρὸς τοῦτο, ἀφοῦ πρῶτον δώσωμεν εἰς αὐτὴν τὴν μορφήν

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi = \gamma \quad (1),$$

διαιροῦμεν τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ συντελεστοῦ α τοῦ χ^2 καὶ ἔχομεν

$$\chi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\chi = \frac{\gamma}{\alpha},$$

ἢ, παριστῶντες $\frac{\beta}{\alpha}$ διὰ τοῦ γράμματος π καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}$ διὰ τοῦ γράμματος ρ ,

$$\chi^2 + \pi\chi = \rho \quad (2).$$

Προσθέτοντες ἀκολούθως, ἵνα καταστήσωμεν τὸ πρῶτον αὐτῆς μέλος τέλειον τετράγωνον, εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἐξίσωσεως (2) τὸν γινώσκον ὅρον $\frac{\pi^2}{4}$, ἔχομεν

$$\chi^2 + \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} = \rho + \frac{\pi^2}{4} \quad (3).$$

Ἐξάγοντες ἀκολούθως τὰς τετραγωνικὰς ρίζας ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξίσωσεως (3) θέλομεν ἔχει τὴν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν

$$\chi + \frac{\pi}{2} = \pm \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}} \quad (4),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως

$$\chi = -\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}} \quad (5),$$

Εὐρίσκομεν δὲ οὕτω διὰ τὴν χ δύο τιμὰς χ' καὶ χ'' ταυτοποιούσας τὴν πλήρη δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν $\alpha\chi^2 + \beta\chi = \gamma$, εἶναι δὲ αὗται

$$\chi' = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}} \quad \text{καὶ} \quad \chi'' = -\frac{\pi}{2} - \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}} \quad (6).$$

108. Ἐὰν παραβάσωμεν πρὸς ἀλλήλας τὰς ἰσότητας (2) καὶ (6), πορίζομεθα εὐκόλως τὸν ἐξῆς γενικὸν κανόνα πρὸς ἄμεσον εὕρεσιν τῶν δύο ριζῶν πάσης πλήρους δευτεροβαθμίου ἐξίσωσεως.

Ἴνα εὕρωμεν τὰς δύο τιμὰς τῆς ἀγνώστου χ , τὰς ταυτοποιούσας

τὴν ἐν ἧ ἔμπεριέχεται αὕτη πλήρη δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν, δίδομεν πρῶτον εἰς αὐτὴν τὴν μορφήν

$$x^2 + 3x = 9,$$

λαμβάνομεν ἔπειτα τὸ ἥμισυ τοῦ συντελεστοῦ π τῆς πρώτης δυνάμεως τῆς ἀγνώστου x μὲ ἐναντίον σημείον, καὶ προσθέτομεν ἢ ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ γνωστοῦ ὅρου 9, αὐξηθέντος κατὰ τὸ τετράγωνον τοῦ λεγθέντος ἡμίσεως.

Ἐστω π. x . πρὸς λύσιν ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις

$$7x^2 - 28 = 5x^3 - 6x - 8 \quad (1).$$

Μεταφέροντες εἰς τὸ πρῶτον αὐτῆς μέλος τοὺς περιέχοντας τὸ τετράγωνον καὶ τὴν πρώτην δύναμιν τῆς ἀγνώστου x ὅρους, εἰς δὲ τὸ δεύτερον τοὺς γνωστούς καὶ ἀνάγοντες, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσοδύναμον τῇ δεδομένη πλήρη δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$2x^2 + 6x = 20.$$

Διαιροῦντες ἀκολούθως τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ συντελεστοῦ 2 τοῦ x^2 , ἀνάγομεν αὐτὴν εἰς τὴν ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος ἀπαιτουμένην μορφήν

$$x^2 + 3x = 10 \quad (2).$$

Ἐφαρμόζοντες τέλος κατὰ γράμμα τὰ λοιπὰ τοῦ αὐτοῦ κανόνος, θέλομεν εὑρεῖ ἀμέσως, παρίστωντες διὰ x' τὴν μίαν τῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσως (2) καὶ διὰ x'' τὴν ἑτέραν,

$$x' = -\frac{3}{2} + \sqrt{10 + \frac{9}{4}} \quad \text{καὶ} \quad x'' = -\frac{3}{2} - \sqrt{10 + \frac{9}{4}}$$

ἢ ἐκτελούμενων τῶν σεσημειωμένων πράξεων

$$x' = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 2 \quad \text{καὶ} \quad x'' = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -5.$$

Λί δύο λοιπὸν τιμαὶ τῆς x , αἱ ταῦτοποιοῦσαι τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν (1), εἶναι 2 καὶ -5, ὡς πᾶς τις δύναται νὰ πεισθῇ ἀμέσως ἀντικαθιστῶν ἐν αὐτῇ ἀντὶ τῆς x ἑκατέραν τούτων.

Ἐστω πρὸς τούτοις ἡ ἐξίσωσις

$$3x - 5x^2 + 7 = 2x - 3x^3 - 8 \quad (1).$$

Μετὰ τὴν μετάθεσιν τῶν ὅρων, τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων κτλ. αὕτη γίνεται

$$-2x^2 + x = -15,$$

διαιρουμένων δὲ τῶν δύο μελῶν αὐτῆς διὰ τοῦ συντελεστοῦ -2 τοῦ χ^2 , αὕτη μετατρέπεται εἰς τὴν ἰσοδύναμον

$$\chi^2 - \frac{\chi}{2} = \frac{15}{2} \quad (2),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα

$$\chi' = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{15}{2} + \frac{1}{16}} \quad \text{καὶ} \quad \chi'' = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{15}{2} + \frac{1}{16}}$$

ἢ, ἐκτελουμένων τῶν σεσημειωμένων πράξεων,

$$\chi' = \frac{1}{4} + \frac{11}{4} = 3 \quad \text{καὶ} \quad \chi'' = \frac{1}{4} - \frac{11}{4} = -\frac{5}{2}.$$

Αἱ δύο λοιπὸν τιμαὶ τῆς χ , αἱ ταῦτοποιοῦσαι τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν (1), εἶναι 3 καὶ $-\frac{5}{2}$.

Ἐστω προσέτι πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\chi}{2} + \frac{3}{\chi} = \frac{\chi + 13}{3\chi}.$$

Αὕτη μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν παρονομαστώων κτλ. γίνεται διαδοχικῶς

$$3\chi^2 + 18 = 2\chi + 26,$$

$$3\chi^2 - 2\chi = 8,$$

$$\chi^2 - \frac{2}{3}\chi = \frac{8}{3},$$

$$\chi' = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{8}{3} + \frac{1}{9}} \quad \text{καὶ} \quad \chi'' = \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{8}{3} + \frac{1}{9}}$$

ἢ, ἐκτελουμένων τῶν σεσημειωμένων πράξεων,

$$\chi' = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2 \quad \text{καὶ} \quad \chi'' = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Ἐστω πρὸς λύσιν καὶ ἡ ἐγγράμματος δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις

$$-4a\chi + 3a^2 + \chi^2 = 3b^2 - 2b\chi + 8ab.$$

Μεταφέροντες καὶ ἀνάγοντες θέλομεν ἔχει ἀντὶ τῆς δεδομένης τὴν ἰσοδύναμον αὐτῇ

$$\chi^2 - (4a - 2b)\chi = -3a^2 + 8ab + 3b^2,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα

$$x' = 2a - b + \sqrt{-3a^2 + 8ab + 3b^2 + (2a - b)^2},$$

$$x'' = 2a - b - \sqrt{-3a^2 + 8ab + 3b^2 + (2a - b)^2},$$

ἢ, ἐκτελουμένων τῶν ὑπὸ τὸ ριζικὸν σεσημειωμένων πράξεων, ἀναγομένων τῶν ὑπ' αὐτὸ ὁμοίων ὅρων καὶ ἐξαγομένης τῆς τετραγωνικῆς ρίζης $\pm(a+2b)$ τοῦ προκύπτοντος πολυωνύμου $a^2 + 4ab + 4b^2$,

$$x' = 2a - b + a + 2b = 3a + b \quad \text{καὶ} \quad x'' = 2a - b - (a + 2b) = a - 3b.$$

Ἄν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξ ἧς ἐγγράμματος ἐξίσωσιν

$$\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = 2,$$

ἠθέλομεν εὑρεῖ διαδοχικῶς

$$\begin{aligned} ax - a^2 + bx - b^2 &= 2x^2 - 2bx - 2ax + 2ab \\ -2x^2 + (3a + 3b)x &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$x^2 - \frac{3}{2}(a+b)x = -\frac{1}{2}(a+b)^2$$

$$x' = \frac{3}{4}(a+b) + \sqrt{-\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{9}{16}(a+b)^2},$$

$$x'' = \frac{3}{4}(a+b) - \sqrt{-\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{9}{16}(a+b)^2},$$

ἢ, ἀναγομένων τῶν ὑπὸ τὸ ριζικὸν ὅρων εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν αὐτῶν παρονομαστῆν 16, ἐκτελουμένων τῶν δυνατῶν ἀναγωγῶν καὶ ἐξαγομένης τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ προκύπτοντος κλάσματος $\frac{(a+b)^2}{16}$,

$$x' = \frac{3}{4}(a+b) + \frac{1}{4}(a+b) = a+b, \quad x'' = \frac{3}{4}(a+b) - \frac{1}{4}(a+b) = \frac{a+b}{2}.$$

109. Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ (5) τῆς παραγράφου (107) ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ π καὶ ρ τὰ ἴσα αὐτοῖς $\frac{b}{a}$ καὶ $\frac{\gamma}{a}$, θέλομεν εἶχει

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{a^2} + \frac{b^2}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{4a\gamma + b^2}}{2a} \quad (7),$$

Ὁ οὕτως εὐρεθεὶς τύπος (7) παρέχει τὰς δύο τιμὰς τῆς ἀγνώστου x διὰ τῶν γνωστῶν ποσοτήτων a, b, γ τῆς πλήρους δευτεροβάθμιου ἐξισώσεως, τῆς ἀχθείσης εἰς τὴν μορφήν $ax^2 + bx = \gamma$, καὶ ἡδυνάμεθα, ἀντὶ τοῦ ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ ἐκτεθέντος κανόνος, νὰ σχηματίσωμεν ἕτερον, δίδοντα ἀμέσως τὰς δύο τιμὰς τῆς ἀγνώστου, ὅταν ἡ πλήρης δευτεροβάθμια ἐξίσωσις ἔχῃ τὴν ἀνωτέρω μορφήν ἀντὶ τῆς μορφῆς $x^2 + \pi x = \rho$. Ὁ μόνος λόγος, δι' ὃν τοῦτο δὲν γίνεται εἶναι ὅτι ὁ ἐντεῦθεν προκύπτων κανὼν εἶναι πολὺ πολυπλοκώτερος τοῦ προηγουμένου, καὶ τοῦτο, διότι τότε αἱ τιμαὶ τῆς x , ἀντὶ νὰ σχηματίζωνται ἐκ δύο μόνων γνωστῶν ποσοτήτων π καὶ ρ , θέλουσι περιέχει τρεῖς τοιαύτας, τὰς a, b καὶ γ .

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΚΤΛ.

110. Εἶδομεν προηγουμένως ἐν τῇ § 107, ὅτι παριστῶντες διὰ x' καὶ x'' τὰς δύο ρίζας δευτεροβάθμιου τινὸς ἐξισώσεως, ἀχθείσης εἰς τὴν μορφήν $x^2 + \pi x = \rho$, ἔχομεν

$$x' = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}} \quad \text{καὶ} \quad x'' = -\frac{\pi}{2} - \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}}.$$

Ἐπομένως θέλομεν ἔχει προσθέτοντες καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰς δύο ταύτας ἰσότητας κατὰ μέλη τὰς ἐξῆς

$$x' + x'' = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}} - \frac{\pi}{2} - \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi,$$

$$x'x'' = \left(-\frac{\pi}{2} + \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}}\right)\left(-\frac{\pi}{2} - \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \left(\rho + \frac{\pi^2}{4}\right) = -\rho,$$

τούτέστιν ὅτι

1^α. Τὸ ἄθροισμα $x' + x''$ τῶν δύο ριζῶν x' καὶ x'' πάσης δευτεροβάθμιου ἐξισώσεως, ἀχθείσης εἰς τὴν μορφήν $x^2 + \pi x = \rho$, ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν π τῆς πρώτης δυνάμεως τῆς ἀγνώστου ληθθέντα μὲ ἐναντίον σημείον.

2^α. Τὸ γινόμενον $x'x''$ τῶν αὐτῶν ριζῶν x' καὶ x'' ἰσοῦται μὲ τὸ γνωστὸν μέλος ρ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως $x^2 + \pi x = \rho$ ληθθὲν μὲ ἐναντίον σημείον.

Οἱ δύο οὗτοι κανόνες εἶναι χρησιμώτατοι, διότι δι' αὐτῶν δυνάμεθα νὰ βεβαιώμεθα εὐκόλως ἐκ τῶν ὑστέρων, ἂν αἱ εὐρεθεῖσαι ἐν τέλει δύο τιμαὶ τῆς ἀγνώστου ταυτοποιώσι πράγματι τὴν εἰς τὴν μορφήν $x^2 + \pi x = \rho$ ἀχθεῖσαν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν, ὅταν αὕτη ᾖ λίαν πολὺπλοκος, καὶ δεύτερον νὰ εὐρίσκωμεν ἐνίοτε ἀμέσως ταύτας, ὅταν ἡ εἰς τὴν γνωστὴν μορφήν ἀναχθεῖσα ἐξίσωσις ᾖ ἀπλῆ.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2 + \frac{14ab - 16b^2 + 3a^2}{4b} x = \frac{-16b^3 + 28ab^2 - 9a^3}{4b},$$

ἠθέλομεν εὑρεῖ μετὰ τινας ἀρκούντως πολυπλόκους ὑπολογισμοὺς διὰ τὴν x τὰς δύο τιμὰς

$$x' = 2b - 3a \quad \text{καὶ} \quad x'' = \frac{8b^2 - 2ab - 3a^2}{4b},$$

ἵνα δὲ πεισθῶμεν ἐκ τῶν ὑστέρων, ὅτι δὲν ὑπεπέσαμεν εἰς τι λάθος, σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν, καὶ ἐπειδὴ εὐρίσκομεν ὅτι τὸ μὲν ἄθροισμα

$$x' + x'' = 2b - 3a + \frac{8b^2 - 2ab - 3a^2}{4b} = \frac{14ab - 16b^2 + 3a^2}{4b}$$

ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν τῆς πρώτης δυνάμεως τῆς x ληφθέντα μὲ ἐναντίον σημεῖον, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν

$$x'x'' = \frac{(8b^2 - 2ab - 3a^2)(2b - 3a)}{4b} = \frac{16b^3 - 28ab^2 + 9a^3}{4b}$$

ἰσοῦται μὲ τὸ δεύτερον μέλος τῆς αὐτῆς ἐξίσωσεως ληφθὲν μὲ ἐναντίον σημεῖον, συμπεραίνομεν μετὰ θετικότητος ὅτι αἱ εὐρεθεῖσαι τιμαὶ ταυτοποιοῦσι πράγματι τὴν εἰς ἣν ἀναφέρονται ἐξίσωσιν.

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2 - 3x = 4,$$

ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι τὸ μὲν γινόμενον τῶν ταυτοποιουσῶν αὐτὴν τιμῶν τῆς x πρέπει νὰ ᾖ -4 , τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν 3 , συμπεραίνομεν ἀμέσως ὅτι αὗται θέλουσιν εἶναι 4 καὶ -1 .

111. Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας ἐξ αὐτῆς τῆς ἐξίσωσεως $x^2 + \pi x = \rho$ τὸ ἀνωτέρω τῆς § 110 θεώρημα. Τῷ ὄντι, ἡ ἐξίσωσις $x^2 + \pi x = \rho$ γίνεται, προστιθεμένου εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη αὐτῆς τοῦ ὅρου $\frac{\pi^2}{4}$,

$$x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4} = \rho + \frac{\pi^2}{4},$$

ἢ, ἐπειδὴ τὸ μὲν πρῶτον μέλος αὐτῆς εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ $x + \frac{\pi}{2}$,

τὸ δὲ δεύτερον $\rho + \frac{\pi^2}{4}$ δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ οὕτω $\left(\sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}}\right)^2$,

$$\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}}\right)^2, \quad \text{ἢ} \quad \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}}\right)^2 = 0.$$

Ἄλλ' ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εἶναι ἡ διαφορὰ δύο τετραγώνων, δύναται τοῦτο νὰ ἀποσυντεθῇ εἰς δύο παράγοντας, ὧν ὁ μὲν νὰ ᾖ τὸ ἄθροισμα, ὁ δὲ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγωνικῶν αὐτῶν ριζῶν, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$\left(x + \frac{\pi}{2} + \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}}\right) \left(x + \frac{\pi}{2} - \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}}\right) = 0 \quad (1),$$

ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ $x^2 + \pi x = \rho$, καὶ εὐρίσκεται οὕσα γινόμενον δύο πρωτοβάθμιων ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον x παραγόντων.

Ἐπειδὴ δὲ τότε μόνον δύναται τὸ γινόμενον δύο παραγόντων νὰ ᾖ ἴσον τῷ μηδενί, ὅταν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων αὐτοῦ ἢ καὶ ἀμφότεροι ᾖ μηδέν, ἔπεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (1), ἢ ἡ ἰσοδύναμος αὐτῇ $x^2 + \pi x = \rho$, ταυτοποιεῖται μόνον ὅταν ἔχωμεν

$$x + \frac{\pi}{2} + \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}} = 0 \quad \text{καὶ} \quad x + \frac{\pi}{2} - \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}} = 0,$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα λύοντες ἑκατέραν ὡς πρὸς τὴν ἐν αὐτῇ ἄγνωστον x

$$x = -\frac{\pi}{2} - \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}} \quad \text{καὶ} \quad x = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}}.$$

Οὕτως εὐρομεν καὶ κατ' ἄλλον τρόπον τὰς αὐτὰς διὰ τὴν ἄγνωστον x τιμὰς καὶ τὸν λόγον, δι' ὃν πᾶσα δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας καὶ δύο μόνον.

112. Ἐὰν ἐν τῇ ἐξίσωσει $x^2 + \pi x = \rho$ ὑποθέσωμεν $\pi = 0$, τότε αὕτη μὲν τρέπεται εἰς τὴν ἀτελῆ δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν $x^2 = \rho$, ἡ δὲ ἀνωτέρω εὐρεθεῖσα μεταξὺ τῶν ριζῶν αὐτῆς x' καὶ x'' σχέσις $x' + x'' = -\pi$ γίνεται $x' + x'' = 0$, ἐξ ἧς πορίζομεθα $x' = -x''$. Ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ

σχέσεις $x'x'' = -\rho$ μένει ἡ αὐτή. Ἐπεταὶ λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι αἱ διὰ πᾶσαν πλήρη δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν εὐρεθεῖσαι ἀνωτέρω σχέσεις

$$x' + x'' = -\pi \quad \text{καὶ} \quad x'x'' = -\rho$$

ἐφαρμόζονται καὶ διὰ πᾶσαν ἀτελῆ δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $x^2 = \rho$, καὶ δεικνύουσιν ὅτι αὕτη ἔχει πάντοτε δύο ρίζας ἴσας καὶ ἀντιθέτων σημείων, ὧν τὸ γινόμενον ἰσοῦται μὲ τὸ γνωστὸν αὐτῆς μέλος ρ , ληφθὲν μὲ ἐναντίον σημεῖον.

113. Εἰς τὴν λύσιν τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων ἀνάγεται εὐκόλως καὶ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, τῶν μὴ περιεχουσῶν μῆτε τὴν τρίτην μῆτε τὴν πρώτην δύναμιν τῆς ἀγνώστου. Τῷ ὄντι, πᾶσα τοιαύτη τεταρτοβάθμιος ἐξίσωσις δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν μορφήν

$$x^4 + \pi x^2 = \rho,$$

αὕτη δέ, ὑποτιθεμένου $x^2 = \omega$, τρέπεται εἰς τὴν ἐξῆς πλήρη δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$\omega^2 + \pi\omega = \rho.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως πορίζομεθα κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα

$$\omega = -\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}},$$

ἐπομένως, ἐπειδὴ $x^2 = \omega$,

$$x = \pm \sqrt{-\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}}}.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι πᾶσα τεταρτοβάθμιος ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $x^4 + \pi x^2 = \rho$ ἔχει τέσσαρας ρίζας ἀνὰ δύο ἴσας καὶ ἀντιθέτων σημείων.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΙΝΩΝ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΩΝ ΕΚ
ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΙΝΩΝ ΚΤΛ.

114. *Ας ἐφαρμόσωμεν χάριν ἀσκήσεως τὰ ἀνωτέρω περὶ τῆς λύσεως τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων ἐκτεθέντα εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων τινῶν, ὧν αἱ τὰς συνθήκας αὐτῶν παριστᾶσαι ἐξισώσεις εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. — Νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 12 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου νὰ ἦναι κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ διπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x τὸ ἐν τῶν δύο ζητούμενων μερῶν τοῦ 12, τὸ ἕτερον θέλει παρασταθῇ διὰ $12 - x$, καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἀνωτέραν ἐκφώνησιν τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου x^2 πρέπει νὰ ἦναι κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ διπλασίου τοῦ τετραγώνου $(12 - x)^2$ τοῦ δευτέρου, θέλομεν ἔχει τὴν παριστᾶσαν τὰς συνθήκας τοῦ δεδομένου προβλήματος ἐξισώσιν

$$x^2 = 2(12 - x)^2 - 1 \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διαδοχικῶς

$$x^2 = 2(144 - 24x + x^2) - 1,$$

$$x^2 = 288 - 48x + 2x^2 - 1,$$

$$-x^2 + 48x = 287,$$

$$x^2 - 48x = -287,$$

$$x = 24 \pm \sqrt{-287 + (24)^2},$$

$$x = 24 \pm \sqrt{289} = 24 \pm 17.$$

Αἱ δύο λοιπὸν τιμαὶ τῆς x , αἱ ταυτοποιοῦσαι τὰς συνθήκας τοῦ δεδομένου προβλήματος εἶναι $x = 24 - 17 = 7$ καὶ $x = 24 + 17 = 41$.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν $x = 7$, τότε τὸ ἕτερον μέρος $12 - x$ θέλει εἶναι $12 - 7$ ἢ 5, καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ τετράγωνον 49 τοῦ 7 εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ διπλασίου 50 τοῦ τετραγώνου 25 τοῦ 5.

Ἐὰν λάβωμεν $x = 41$, τότε τὸ ἕτερον μέρος $12 - x$ θέλει εἶναι

12—41 ή —29, και βλέπομεν πάλιν ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ 41 εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ διπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ —29. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 41 καὶ —29 δὲν δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς μέρη τοῦ 12, ἡ λύσις $x=41$, ἡ ταῦτοποιούσα τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (1), εἶναι λύσις τοῦ αὐτοῦ προβλήματος τροποποιηθέντος ὡς ἐξῆς·

Εὗρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα νὰ ᾖναι 12, καὶ τοιούτους, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου νὰ ᾖναι κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ διπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. — Ἠγόρασε τις ἀπὲν 300 δραχμῶν ἀριθμὸν τινα πῆχεων ὑφάσματος τινοῦ, ἀν δὲ ἠγόραζε μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος 5 πῆχεις περισσότερον, ἡ νέα τιμὴ τοῦ πῆχεως ἤθελεν εἶναι κατὰ 5 δραχμὰς μικροτέρα. Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑπ' αὐτοῦ ἀγορασθέντων πῆχεων.

Ἄς παραστήσωμεν διὰ x τὸν ἀριθμὸν τῶν ὑπ' αὐτοῦ ἀγορασθέντων πῆχεων. Ἐπειδὴ μὲ 300 δραχμὰς ἠγόρασε x πῆχεις, ἔπεται ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ πῆχεως θέλει εἶναι $\frac{300}{x}$. Ἄν ἠγόραζε μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν 5 πῆχεις περισσότερον, τότε ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν ἀγορασθέντων πῆχεων ἤθελεν εἶναι $x+5$, ἡ δὲ νέα τιμὴ τοῦ πῆχεως $\frac{300}{x+5}$. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἡ νέα αὕτη τιμὴ τοῦ πῆχεως ἤθελεν εἶναι κατὰ 5 δραχμὰς μικροτέρα τῆς πρώτης, θέλομεν ἔχει προφανῶς τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$\frac{300}{x} - \frac{300}{x+5} = 5 \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διαδοχικῶς

$$\begin{aligned} 300x + 1500 - 300x &= 5x^2 + 25x \\ 5x^2 + 25x &= 1500 \\ x^2 + 5x &= 300 \end{aligned}$$

$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{300 + \frac{25}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1225}{4}}.$$

ἐπομένως

$$x' = -\frac{5}{2} + \frac{35}{2} = 15 \quad \text{καὶ} \quad x'' = -\frac{5}{2} - \frac{35}{2} = -20.$$

Αἱ δύο λοιπὸν τιμαὶ τῆς x , αἱ ταῦτοποιούσαι τὴν ἀνωτέρω ἐξίσω-

σιν (4) εἶναι 15 καὶ — 20. Ἡ μὲν θετικὴ τιμὴ 15 τῆς x ταῦτοποιεῖ προφανῶς καὶ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος κατὰ τὴν δεδομένην αὐτοῦ ἐκφώνησιν, ἡ δὲ ἀρνητικὴ τιμὴ — 20, θετικῶς λαμβανομένη, θέλει ταῦτοποιεῖ κατὰ τὰ ἐν τῇ § 56 λεχθέντα τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος τροποποιηθέντος οὕτως, ὥστε νὰ παρέχῃ τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$\frac{300}{-x} - \frac{300}{-x+5} = 5,$$

ἢ, ὥπερ ταῦτό, τὴν ἐξῆς

$$\frac{300}{x-5} - \frac{300}{x} = 5,$$

ἣτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐξῆς ἐκφώνησιν·

Ἦγόρασέ τις ἀντὶ 300 δραχμῶν ἀριθμὸν τινα πῆχεων ὑφάσματος τινοῦ, ἀν δὲ μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ἠγόραζε 5 πῆχεις ὀλιγώτερον, ἡ γὰρ τιμὴ τοῦ πῆχεως ἠθελεί εἶναι κατὰ 5 δραχμὰς μεγαλειτέρα. Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑπ' αὐτοῦ ἀγορασθέντων πῆχεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^{ον}. — Ἐμπορος ἐπώλησεν ἀντὶ 96 δραχμῶν ἔρδυμα καὶ ὠφελήθη τόσας ταῖς ἑκατόν, ὅσας ἐπλήρωσε διὰ τὴν ἀγορὰν αὐτοῦ. Ζητεῖται ἀντὶ πόσῳν δραχμῶν εἶχε ἀγοράσει τὸ ἔρδυμα.

* Ἀς παραστήσωμεν διὰ x τὴν ἀξίαν τῆς ἀγορᾶς. Ἐπειδὴ ὠφελήθη τόσας ταῖς ἑκατόν, ὅσας ἐπλήρωσε διὰ τὴν ἀγορὰν αὐτοῦ, ἦτοι x , ἵνα εὕρωμεν πόσας δραχμὰς ἐκέρδησε πληρώσας x , σχηματίζομεν τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν

$$400 : x = x : y, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad y = \frac{x^2}{400}.$$

Θέλομεν λοιπὸν ἔχει κατὰ τὴν δεδομένην ἐκφώνησιν τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$x + \frac{x^2}{400} = 96 \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διαδοχικῶς

$$x^2 + 400x = 9600,$$

$$x = -50 \pm \sqrt{9600 + 2500},$$

ἐπομένως αἱ δύο τιμαὶ τῆς x , αἱ ταῦτοποιοῦσαι τὴν ἐξίσωσιν (1), εἶναι

$$x' = -50 + 110 = 60 \quad \text{καὶ} \quad x'' = -50 - 110 = -160.$$

Αἱ δύο λοιπὸν τιμαὶ τῆς x , αἱ ταῦτοποιοῦσαι τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν

(1) εἶναι 60 καὶ -160 . Ἡ μὲν θετικὴ τιμὴ 60 τῆς x ταῦτοποιεῖ προφανῶς καὶ τὰς συνθήκας τοῦ δεδομένου προβλήματος, ἡ δὲ ἀρνητικὴ τιμὴ -160 , θετικῶς λαμβανομένη, θέλει ταῦτοποιεῖ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος τροποποιηθέντος οὕτως, ὥστε νὰ παρέχῃ τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$-x + \frac{x^2}{100} = 96 \quad (2).$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ φύσις τοῦ ἀνωτέρου προβλήματος εἶναι τοιαύτη, ὥστε δὲν δύναται νὰ ὑποστῇ τροποποίησιν παρέχουσιν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (2), συμπεραίνομεν ὅτι ἡ τιμὴ -160 τῆς x , ἡ ταῦτοποιούσα τὴν ἐξίσωσιν (1), εἶναι ὅλως ξένη εἰς τὸ πρόβλημα, ἡ μᾶλλον, ὅτι ἀνήκει εἰς πρόβλημα διαφορικοῦ φύσεως καὶ παρέχον τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν (1). Τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ἐξῆς:

Νὰ εὐρεθῇ ἀριθμός, ὅστις ἀνξηθεῖς κατὰ τὸ ἑκατοστὸν τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ νὰ παρέχῃ ἄθροισμα τὸν ἀριθμὸν 96.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4^{ον}. — Ἐπληρώθησαν 96 δραχμαὶ εἰς 14 ἐργάτας, ἄνδρας καὶ γυναῖκες· ἕκαστος δὲ ἀνὴρ ἔλαβε τόσας δραχμὰς, ὅσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες, καὶ ἑκάστη γυνὴ τόσας δραχμὰς, ὅσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες. Ζητεῖται πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες.

Ἐάν παραστήσωμεν διὰ x τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνδρῶν καὶ διὰ y τὸν τῶν γυναικῶν, θέλομεν ἔχει, ἐπειδὴ ὁ ὅλικός ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν ἦτο 14, τὴν ἐξῆς πρώτην τοῦ προβλήματος ἐξίσωσιν

$$x + y = 14 \quad (1).$$

Ἰνα δὲ εὐρώμεν τὴν δευτέραν, σκεπτόμεθα κατὰ τὰς δεδομένας συνθήκας ὡς ἐξῆς:

Ἐπειδὴ εἰς ἀνὴρ ἔλαβε τόσας δραχμὰς, ὅσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες, τουτέστι y , οἱ x ἄνδρες ἔλαβον xy δραχμὰς. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ἑκάστη γυνὴ ἔλαβε τόσας δραχμὰς, ὅσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, τουτέστι x , αἱ y γυναῖκες ἔλαβον yx δραχμὰς. Ἐπειδὴ δὲ ἅπαντες οἱ ἐργάται ἔλαβον ἐν ὅλῳ 96 δραχμὰς, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς δευτέραν τοῦ προβλήματος ἐξίσωσιν

$$xy + yx = 96, \quad \text{ἢ} \quad 2xy = 96 \quad (2).$$

Ἰνα λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), λύομεν τὴν (1) ὡς πρὸς τὴν y καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) ἀντὶ τῆς y τὴν εὐρεθησομένην αὐτῆς τιμὴν $14 - x$, ὅτε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$2x(14 - x) = 96 \quad (3),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διαδοχικῶς

$$\begin{aligned} 28x - 2x^2 &= 96, \\ x^2 - 14x &= -48, \end{aligned}$$

$$x = 7 \pm \sqrt{-48 + 49} = 7 \pm 1.$$

ἐπομένως αἱ δύο τιμαὶ τῆς x , αἱ ταῦτοποιούσαι τὴν ἐξίσωσιν (3), εἶναι $x' = 8$ καὶ $x'' = 6$.

Ὅταν $x = 8$, τότε $y = 6$. ὅταν δὲ $x = 6$, τότε $y = 8$. Λοιπὸν τὸ ζήτημα εἶναι ἀπροσδιόριστον καὶ ἐπιδεκτικὸν δύο μόνον ἀντιστρόφων συστημάτων λύσεων, ὅπερ εὐκόλως ἠδυνάμεθα καὶ νὰ προσδῶμεν ἐξ αὐτῆς τῆς μορφῆς τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ (1) καὶ (2), αἵτινες μένουσιν ἀμετάβλητοι, ἐναλλασσομένων τῶν ἐν αὐταῖς γραμμάτων x καὶ y . Τοῦτου δὲ ἕνεκα ἐπροτιμήσαμεν νὰ μεταχειρισθῶμεν διὰ τὴν λύσιν αὐτοῦ δύο ἀντὶ μιᾶς ἀγνώστους, ὅτε ἠθέλομεν σχηματίσει ἀπ' εὐθείας τὴν ἐξίσωσιν (3) καὶ εὖρει διὰ τὴν x τὰς αὐτὰς τιμὰς 8 καὶ 6.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5^{ον}. — Δύο ἐργάται ἔχουσι νὰ ἐκτελέσωσιν ἔργον τι. Ἐὰν ἑκάτερος τούτων ἐξετέλει τὸ ἥμισυ τοῦ ἔργου, ἤθελον δαπαρηθῇ ἐπ' ἀμφοτέρων 25 ὥραι πρὸς ἀποπεράτωσιν αὐτοῦ. Ἀλλ' ἐὰν ἀμφοτέροι ἐργάζωνται συγχρότως, τὸ ἔργον ἀποπερατοῦται ἐντὸς 12 ὥρων. Ζητεῖται εἰς πόσας ὥρας ἑκάτερος ἐργάτης μόνος ἐργαζόμενος ἠθέλει ἀποπερατώσει τὸ ἔργον.

Ἐστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν ὥρων, καθ' ὃς ὁ εἰς τούτων ἀποπερατοῖ τὸ ἔργον, καὶ y ὁ ἀριθμὸς τῶν ὥρων, καθ' ὃς ἀποπερατοῖ τὸ αὐτὸ ἔργον ὁ ἕτερος. Ἴνα ὁ πρῶτος ἀποπερατώσῃ τὸ ἥμισυ τοῦ ἔργου, θέλει χρειασθῇ $\frac{1}{2}$ ὥρας, ἵνα δὲ ὁ δεύτερος ἀποπερατώσῃ τὸ ἕτερον ἥμισυ, θέλει χρειασθῇ $\frac{y}{2}$ ὥρας. Ὡστε θέλομεν ἔχει κατὰ τὴν πρώτην τοῦ προβλήματος συνθήκην τὴν ἐξῆς πρώτην αὐτοῦ ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 25, \quad \eta \quad x + y = 50 \quad (1)$$

Ἴνα σχηματίσωμεν κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ προβλήματος συνθήκην τὴν ἑτέραν τοῦ προβλήματος ἐξίσωσιν, σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς·

Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος εἰς x ὥρας ἀποπερατοῖ τὸ ὅλον ἔργον, ὅπερ δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν διὰ τῆς μονάδος, εἰς 12 ὥρας θέλει ἐκτελέσει τὸ μέρος $\frac{12}{x}$ αὐτοῦ ($x : 12 = 1 : \frac{12}{x}$). Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ὁ δεύτερος

εἰς ψ ὥρας ἀποπερατοῖ τὸ ὅλον ἔργον, εἰς 12 ὥρας θέλει ἐκτελέσει τὸ μέρος $\frac{12}{\psi}$ αὐτοῦ ($\psi : 12 = 1 : \frac{12}{\psi}$). Ἀλλ' εἰς 12 ὥρας καὶ οἱ δύο ἐργάται, ὁμοῦ ἐργαζόμενοι, ἀποπερατοῦσι τὸ ἔργον. Ἀρα θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς δευτέραν τοῦ προβλήματος ἐξίσωσιν

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{\psi} = 1, \quad \text{ἢ} \quad 12\psi + 12x = x\psi \quad (2).$$

Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν τῶν ζητουμένων πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Πρὸς τοῦτο δὲ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) ἀντὶ τῆς ἀγνώστου ψ τὴν ἐκ τῆς (1) ποριζομένην αὐτῆς τιμὴν $50 - x$, ὅτε θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$12(50 - x) + 12x = x(50 - x) \quad (3),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διαδοχικῶς

$$600 - 12x + 12x = 50x - x^2,$$

$$x^2 - 50x = -600,$$

$$x = 25 \pm \sqrt{-600 + 625} = 25 \pm 5.$$

ἐπομένως αἱ δύο τιμαὶ τῆς x , αἱ ταῦτοποιοῦσαι τὴν ἐξίσωσιν (3), εἶναι

$$x' = 30 \quad \text{καὶ} \quad x'' = 20.$$

Ὅταν $x = 30$, τότε $\psi = 20$ · ὅταν δὲ $x = 20$, τότε $\psi = 30$. Τὰ εὐρεθέντα ἐνταῦθα δύο συστήματα ἀποτελοῦσιν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σύστημα, διότι εἰς τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πρόβλημα εἶναι ὅλως ἀδιάφορον ποῖος τῶν δύο ἐργατῶν χρειάζεται 30 ὥρας καὶ ποῖος 20, ἵνα ἀποπερατώσῃ τὸ ὅλον ἔργον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6^{ον}. — Δύο ταχυδρόμοι ἰσοταχῶς κινούμενοι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἐκ δύο διαφόρων πόλεων Α καὶ Β, ὁ μὲν πορευόμενος ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὴν Β, ὁ δὲ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὴν Α. Συμβαίνει δὲ ὁ μὲν πρῶτος νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β τέσσαρας ὥρας μετὰ τὴν συνάντησίν των, ὁ δὲ δεύτερος νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Α ἐννέα ὥρας μετ' αὐτὴν. Ζητεῖται ὁ λόγος τῶν μεθ' ὧν οὗτοι ἐβάδιζον ταχυτήτων.

$$\overline{\begin{array}{ccc} \text{Α} & & \text{Β} \\ & \Gamma & \end{array}}$$

Ἄς παραστήσωμεν διὰ x τὴν ταχύτητα τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Α ἀναχωροῦντος, διὰ ψ τὴν τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Β, καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάντησις αὐτῶν ἐγένετο εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς κοινῆς αὐτῶν ὁδοῦ. Ἐπειδὴ ὁ μὲν πρῶτος ταχυδρόμος ἐχρειάσθη 4 ὥρας, ἵνα διανύσῃ τὴν

ἀπόστασιν ΓΒ, ὁ δὲ δεύτερος 9 ὥρας, ἵνα διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν ΓΑ, ἔπεται ὅτι θέλομεν ἔχει $ΓΒ = 4χ$ καὶ $ΓΑ = 9ψ$. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ ταχυδρομοὶ ἀνεχώρησαν συγχρόνως καὶ συνηνητήθησαν εἰς τὸ Γ, ἔπεται ὅτι ὁ χρόνος, ὃν ἐχρειάσθη ὁ πρῶτος, ἵνα διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν ΑΓ θέλει εἶναι ἴσος τῷ χρόνῳ, ὃν ἐχρειάσθη ὁ δεύτερος, ἵνα διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν ΒΓ. Ἀλλ' οὗτοι εἶναι $\frac{ΑΓ}{χ}$ ἢ $\frac{9ψ}{χ}$ καὶ $\frac{ΓΒ}{ψ}$ ἢ $\frac{4χ}{ψ}$. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{9ψ}{χ} = \frac{4χ}{ψ},$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διαδοχικῶς

$$\frac{χ^2}{ψ^2} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{χ}{ψ} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Ἡ ταχύτης λοιπὸν $χ$ τοῦ πρώτου ἦτο πρὸς τὴν ταχύτητα $ψ$ τοῦ δευτέρου, ὡς 3 πρὸς 2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7^{ον}. — Νὰ εὕρωμεν τοὺς τέσσαρας ὅρους ἀναλογίας τι-
νός, ἥς ὁ λόγος εἶναι $\frac{1}{2}$, τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων 8 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων αὐτῆς ὅρων 170.

Ἄς παραστήσωμεν διὰ $χ : ψ = ω : φ$ τὴν ζητούμενην ἀναλογίαν. Ἐπειδὴ ὁ λόγος αὐτῆς εἶναι $\frac{1}{2}$, θέλομεν ἔχει πρὸς παράστασιν τῆς συνθήκης ταύτης τὰς ἐξῆς δύο ἐξισώσεις

$$\frac{χ}{ψ} = \frac{1}{2}, \quad \text{ἢ} \quad ψ = 2χ \quad (1),$$

$$\frac{ω}{φ} = \frac{1}{2}, \quad \text{ἢ} \quad φ = 2ω \quad (2).$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων $χ$ καὶ $ω$ εἶναι ἴσον μὲ 8, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων αὐτῆς ὅρων $χ$, $ψ$, $ω$, $φ$ εἶναι ἴσον μὲ 170, θέλομεν ἔχει πρὸς παράστασιν τῶν συνθηκῶν τούτων καὶ τὰς ἀκολουθοῦσας δύο ἐξισώσεις

$$χ + ω = 8 \quad (3),$$

$$χ^2 + ψ^2 + ω^2 + φ^2 = 170 \quad (4).$$

Ἴνα εὕρωμεν λοιπὸν τὰ ζητούμενα, πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων ἐξισώσεων, ὧν ἡ τελευταία εἶναι δευτεροβάθμιος. Πρὸς τοῦτο ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) τὰς τιμὰς $2x$, $8-x$, $28-x$ τῶν ἀγνώστων y , ω , φ , ἃς πορίζομεθα ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (3) καὶ (2) λύαντες τὴν μὲν (1) ὡς πρὸς τὴν y , τὴν (3) ὡς πρὸς τὴν ω καὶ τὴν (2) ὡς πρὸς τὴν φ , ἀντικαθισταμένης ἐν αὐτῇ ἀντὶ τῆς ω τῆς ἐκ τῆς (3) εὐρεθείσης αὐτῆς τιμῆς $8-x$, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν μὲ μίαν μόνην ἀγνώστον x δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$x^2 + 4x^2 + (8-x)^2 + 4(8-x)^2 = 170 \quad (5),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διαδοχικῶς

$$x^2 + 4x^2 + 64 - 16x + x^2 + 256 - 64x + 4x^2 = 170,$$

$$10x^2 - 80x = -150,$$

$$x^2 - 8x = -15,$$

$$x = 4 \pm \sqrt{-15 + 16} = 4 \pm 1.$$

Ἐπομένως αἱ δύο τιμαὶ τῆς x , αἱ ταῦτοποιοῦσαι τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (5), θέλουσιν εἶναι

$$x' = 3 \quad \text{καὶ} \quad x'' = 5.$$

Ἄν λάβωμεν διὰ τὴν x τὴν πρώτην αὐτῆς τιμὴν 3, τότε ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει διὰ τὴν y τὴν τιμὴν 6, ἡ ἐξίσωσις (3) δίδει διὰ τὴν ω τὴν τιμὴν 5, ἡ δὲ ἐξίσωσις (2) δίδει διὰ τὴν φ τὴν τιμὴν 10. Ἡ ζητούμενη λοιπὸν ἀναλογία, ἡ ἐκπληρουσα τὰς συνθήκας τοῦ δεδομένου προβλήματος, θέλει εἶναι

$$3 : 6 = 5 : 10.$$

Ἄν δὲ λάβωμεν διὰ τὴν x τὴν δευτέραν αὐτῆς τιμὴν 5, τότε θέλομεν εὑρεῖ ἐκ τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων $y=10$, $\omega=3$ καὶ $\varphi=6$, ἐπομένως ἡ ζητούμενη ἀναλογία θέλει εἶναι

$$5 : 10 = 3 : 6,$$

ἥτις δὲν διαφέρει τῆς προηγουμένης εἰ μὴ κατὰ τὴν τάξιν τῶν δύο ἴσων αὐτῆς λόγων $3 : 6$ καὶ $5 : 10$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8^{ον}. — Δύο ἔμποροι, πωλοῦντες κατ' ἰδίαν ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος καὶ ἐπὶ διαφόρῳ τιμῇ, λαμβάνουσιν ὅμοῦ 35 δραχμὰς, τοῦ δευτέρου πωλήσαντος 3 πῆχεις περισσότερον τοῦ πρώτου. Ἀλλ' ἂν ὁ πρῶτος ἐπώλῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν πῆξεων τοῦ δευτέρου, ἤθελε λάβει 24 δραχμὰς· ἂν δὲ ὁ δεῦτερος ἐπώλῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν πῆξεων τοῦ πρώτου, ἤθελε λάβει 12,50 δραχμὰς. Ζητοῦνται οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὑφ' ἑκατέρου πωληθέντων πῆξεων.

Ἐστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑπὸ τοῦ πρώτου πωληθέντων πήχων. Ἐπειδὴ ὁ δευτέρος ἐπώλησε κατὰ τὴν ἐκφώνησιν 3 πήχεις περισσότερον τοῦ πρώτου, $x+3$ θέλει παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὑπὸ τοῦ δευτέρου πωληθέντων πήχων. Ἐπειδὴ δέ, ἂν ὁ πρῶτος ἐπώλει τὸν ἀριθμὸν $x+3$ τῶν πήχων τοῦ δευτέρου, ἤθελε λάβει 24 δραχμάς, ἔπεται ὅτι $\frac{24}{x+3}$ θέλει παριστᾷ τὴν τιμὴν, καθ' ἣν ἐπώλησεν οὗτος τοὺς x αὐτοῦ πήχεις, καὶ ἐπομένως $\frac{24x}{x+3}$ θέλει παριστᾷ τὸ ποσὸν τῶν ὑπ' αὐτοῦ εἰσπραχθεῖσων δραχμῶν. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ἂν ὁ δευτέρος ἐπώλει τοὺς x πήχεις τοῦ πρώτου, ἤθελε λάβει 12,50 δραχμάς, ἔπεται ὅτι $\frac{12,50}{x}$ θέλει παριστᾷ τὴν τιμὴν, καθ' ἣν ἐπώλησεν οὗτος τὰς $x+3$ αὐτοῦ πήχεις, καὶ ἐπομένως $\frac{12,50(x+3)}{x}$ θέλει παριστᾷ τὸ ποσὸν τῶν ὑπ' αὐτοῦ εἰσπραχθεῖσων δραχμῶν. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἔλαβον καὶ οἱ δύο ὁμοῦ 35 δραχμάς. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$\frac{24x}{x+3} + \frac{12,50(x+3)}{x} = 35 \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διαδοχικῶς

$$24x^2 + 12,50(x+3)^2 = 35x(x+3),$$

ἢ, παριστωμένων χάριν συντομίας τῶν 50 ἑκατοστῶν τῆς δραχμῆς διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{2}$ καὶ ἐκτελουμένων τῶν σεσημειωμένων πράξεων,

$$48x^2 + 25(x^2 + 6x + 9) = 70x^2 + 210x,$$

$$48x^2 + 25x^2 + 150x + 225 = 70x^2 + 210x,$$

$$3x^2 - 60x = -225,$$

$$x^2 - 20x = -75,$$

$$x = 10 \pm \sqrt{-75 + 400} = 10 \pm 5,$$

ἐπομένως αἱ δύο τιμαὶ τῆς x , αἱ ταῦτοποιοῦσαι τὴν ἐξίσωσιν (1) τοῦ προβλήματος, θέλουσιν εἶναι

$$x' = 15 \quad \text{καὶ} \quad x'' = 5.$$

Ὅταν $x = 15$, τότε $x+3 = 18$ · ὅταν δὲ $x = 5$, τότε $x+3 = 8$. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν εἶναι ἐπιδεκτικὸν δύο πραγματικῶν λύσεων 15 καὶ 18, ἢ 5 καὶ 8.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΙΝΩΝ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΩΝ ΕΚ ΤΟΙΟΥΤΩΝ

ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΚΤΛ.

115. Εὕρομεν προηγουμένως ὅτι, ὅταν ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις λάβῃ τὴν μορφήν $x^2 + \pi x = \rho$, αἱ δύο αὐτῆς ρίζαι εἶναι

$$x' = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}} \quad \text{καὶ} \quad x'' = -\frac{\pi}{2} - \sqrt{\rho + \frac{\pi^2}{4}},$$

προτιθέμεθα δὲ ἐνταῦθα νὰ ἐξετάσωμεν ποίας τιμὰς λαμβάνουσιν αὗται κατὰ τὰς διαφόρους δυνατὰς ἐπὶ τῶν γνωστῶν ποσοτήτων π καὶ ρ ὑποθέσεις.

1^η. Ὡς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι $\rho > 0$. Τότε, ἐπειδὴ ὁ ὅρος $\frac{\pi^2}{4}$ εἶναι πάντοτε θετικός, ἡ ὑπόρριζος ποσότης $\rho + \frac{\pi^2}{4}$ θέλει εἶναι θετική καὶ μεγαλειτέρα τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$. Ἡ τετραγωνικὴ λοιπὸν ρίζα αὐτῆς θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ $\frac{\pi}{2}$, ἐπομένως ἡ μὲν τιμὴ τῆς x' θέλει εἶναι θετική, διότι τὸ ριζικὸν ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον $+$, ἡ δὲ τιμὴ τῆς x'' ἀρνητική, διότι πρὸ ριζικὸν ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον $-$.

Ὅταν λοιπὸν τὸ γνωστὸν μέλος τῆς δευτεροβαθμίου ἐξίσωσεως $x^2 + \pi x = \rho$ ᾗναι θετικόν, αἱ δύο ρίζαι αὐτῆς εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἀντιθέτων σημείων.

Παραδείγματος χάριν, ἐπειδὴ τὸ γνωστὸν μέλος 3 τῆς ἐξίσωσεως $x^2 - 2x = 3$ εἶναι θετικόν, αἱ δύο ρίζαι αὐτῆς 3 καὶ -1 εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἀντιθέτων σημείων.

2^η. Ὡς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι $\rho < 0$, τουτέστιν ὅτι εἶναι ποσότης ἀρνητική. Τότε τρία τινὰ δυνατὸν νὰ συμβῶσιν. Ἡ ὑπόρριζος ποσότης $\rho + \frac{\pi^2}{4}$ δυνατὸν νὰ ᾗναι θετική, ἴση μὲ τὸ μηδὲν ἢ ἀρνητική.

Ὅταν ἡ ὑπόρριζος ποσότης $\rho + \frac{\pi^2}{4}$ ᾗναι θετική, ἐπειδὴ αὕτη εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$, ἡ τετραγωνικὴ αὐτῆς ρίζα θέλει εἶναι μικροτέρα τοῦ

$\frac{\pi}{2}$, επομένως τὰ διάφορα σημεία τῶν ῥιζικῶν δὲν δύνανται νὰ μεταβά-
λῃσι τὸ σημεῖον τοῦ πρὸ αὐτῶν ὅρου $-\frac{\pi}{2}$.

Αἱ δύο λοιπὸν τιμαὶ χ' καὶ χ'' τῆς χ θέλουσιν εἶναι τότε πραγ-
ματικαὶ καὶ θέλουσιν ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Παραδείγματος χάριν, ἐπειδὴ τὸ γνωστὸν μέλος -15 τῆς ἐξίσω-
σεως $\chi^3 - 8\chi = -15$ εἶναι ἀρνητικὸν καὶ μικρότερον τοῦ $\frac{64}{4}$, ἥτοι τοῦ
16, αἱ δύο ῥίζαι αὐτῆς 5 καὶ 3 εἶναι πραγματικαὶ καὶ τοῦ αὐτοῦ ση-
μεῖου.

Ὅταν ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης $\rho + \frac{\pi^2}{4}$ ᾖ μὴδέν, τότε καὶ αἱ τετρα-
γωνικαὶ αὐτῆς ῥίζαι θέλουσιν εἶναι μὴδέν· ἐπομένως αἱ δύο τιμαὶ χ' καὶ
 χ'' τῆς χ θέλουσιν εἶναι ἴσαι μὲ $-\frac{\pi}{2}$. Τῷ ὄντι, ὅταν ἔχωμεν $\rho + \frac{\pi^2}{4}$
 $= 0$, τότε $\rho = -\frac{\pi^2}{4}$, ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 + \pi\chi = \rho$ γίνεται

$$\chi^3 + \pi\chi = -\frac{\pi^2}{4}, \quad \eta \quad \chi^3 + \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} = 0, \quad \eta \quad \left(\chi + \frac{\pi}{2}\right)^3 = 0$$

καὶ βλέπομεν ὅτι αὕτη ταῦτοποιεῖται μόνον ὅταν $\chi + \frac{\pi}{2} = 0$, τουτέστι
μόνον ὅταν $\chi = -\frac{\pi}{2}$.

Ὅταν ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης $\rho + \frac{\pi^2}{4}$ ᾖ ἀρνητικὴ, τότε αἱ δύο τε-
τραγωνικαὶ αὐτῆς ῥίζαι θέλουσιν εἶναι φανταστικαὶ (87), ἐπομένως
καὶ αἱ τιμαὶ χ' καὶ χ'' τῆς χ , αἱ ταῦτοποιοῦσαι τὴν δεδομένην ἐξίσω-
σιν $\chi^3 + \pi\chi = \rho$, θέλουσιν εἶναι τοιαῦται. Ἰνα δὲ ἴδωμεν τίνος ἕνεκὲν
τοῦτο συμβαίνει, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν $\rho + \frac{\pi^2}{4} = -x^2$. Τότε θέλο-
μεν ἔχει $\rho = -\frac{\pi^2}{4} - x^2$, ἡ δὲ ἐξίσωσις $\chi^3 + \pi\chi = \rho$ γίνεται

$$\chi^3 + \pi\chi = -\frac{\pi^2}{4} - x^2, \quad \eta \quad \chi^3 + \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} + x^2 = 0, \quad \eta \quad \left(\chi + \frac{\pi}{2}\right)^3 + x^2 = 0,$$

τουτέστι τὸ πρῶτον αὐτῆς μέλος μετατρέπεται εἰς ἄθροισμα δύο τε-
λειῶν τετραγώνων, ὅπερ ἀδύνατον νὰ ᾖ μὴδὲν ὁποιανδήποτε θετι-
κὴν ἢ ἀρνητικὴν τιμὴν καὶ ἂν δώσωμεν εἰς τὴν χ .

3^{ον}. Ἄς ὑποθέσωμεν τρίτον ὅτι $\rho = 0$, τότε ἡ μὲν τιμὴ χ'' τῆς χ
γίνεται $-\pi$, ἡ δὲ τιμὴ χ' αὐτῆς μηδενίζεται. Καὶ τῷ ὄντι, τότε ἡ ἐξί-

σώσις $x^2 + \pi x = \rho$ γίνεται $x^2 + \pi x = 0$, ἢ $x(x + \pi) = 0$, καὶ ταῦτο-
ποιεῖται ὅταν ἢ $x = 0$ ἢ $x + \pi = 0$, ὅτε ἔχομεν $x = -\pi$.

4^{ον}. Ὡς ὑποθέσωμεν τέταρτον ὅτι $\pi = 0$. Τότε ἡ μὲν δεδομένη ἐξί-
σωσις $x^2 + \pi x = \rho$ γίνεται $x^2 = \rho$, αἱ δὲ δύο ρίζαι αὐτῆς εἶναι

$$x' = +\sqrt{\rho} \quad \text{καὶ} \quad x'' = -\sqrt{\rho}.$$

Ἐπομένως ὅταν $\rho > 0$, αἱ δύο ρίζαι αὐτῆς θέλουσιν εἶναι πραγματικάι,
ἴσαι καὶ ἀντιθέτων σημείων, τοῦθ' ὅπερ ἦτο γνωστόν· ὅταν $\rho = 0$, τότε
καὶ $x' = 0$ καὶ $x'' = 0$ · ὅταν τέλος $\rho < 0$, τότε αἱ δύο ρίζαι αὐτῆς θέ-
λουσιν εἶναι φανταστικάι.

* 116. Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀντὶ τῆς δευτεροβάθμλου ἐξισώσεως τῆς
μορφῆς $x^2 + \pi x = \rho$ ἔχομεν πρὸς λύσιν τὴν $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$. Τότε αἱ δύο
αὐτῆς ρίζαι, αἵτινες κατὰ τὰ ἐν τῇ § 109 ἐκτεθέντα εἶναι,

$$x' = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x'' = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha},$$

θέλουσιν εἶναι πραγματικάι καὶ ἄνισοι, ὅταν $\beta^2 + 4\alpha\gamma > 0$ · πραγματι-
καὶ καὶ ἴσαι, ὅταν $\beta^2 + 4\alpha\gamma = 0$, καὶ φανταστικάι, ὅταν $\beta^2 + 4\alpha\gamma < 0$.

Ἄλλ' ἐὰν ὑποθέσωμεν $\alpha = 0$, τότε ἡ μὲν τιμὴ τῆς x' γίνεται $\frac{0}{0}$, ἡ δὲ
τιμὴ τῆς x'' γίνεται $\frac{-2\beta}{0}$.

Ἡ τιμὴ $\frac{-2\beta}{0}$ κατὰ τὰ ἐν τῇ 5^ᾳ περιπτώσει τῆς § 64 λεχθέντα εἶναι
ἄπειρος, ἡ δὲ τιμὴ $\frac{0}{0}$ κατὰ τὰ ἐν τῇ 6^ᾳ περιπτώσει τῆς αὐτῆς § ἐκτε-
θέντα εἶναι τὸ σύμβολον τοῦ ἀπροσδιορίστου, ὅταν οἱ δύο μηδενιζόμενοι
ὅροι τοῦ κλάσματος δὲν περιέχωσιν ὡς κοινὸν παράγοντα τὴν ὑποτεθεῖ-
σαν ἢ τὴν καθισταμένην μηδὲν ποσότητα (64, παρατ. 4), τοῦθ' ὅπερ
καὶ συμβαίνει πράγματι ἐνταῦθα, ἂν καὶ δὲν φαίνεται ἐκ πρώτης ὀψews.

Ἵνα δὲ καταστήσωμεν τοῦτο φανερόν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο
ὅρους τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τῆς x' κλάσματος $\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ ἐπὶ
τὴν ποσότητα $-\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}$ καὶ ἔχομεν

$$x' = \frac{(-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma})(-\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma})}{2\alpha(-\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma})} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 + 4\alpha\gamma)}{2\alpha(-\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma})},$$

ἢ, ἐκτελουμένων τῶν σессημειωμένων πράξεων, ἐξαλειφομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος 2α καὶ ὑποτιθεμένου ἔπειτα $a=0$,

$$X' = \frac{\gamma}{\epsilon}.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς X' κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $a=0$ δὲν εἶναι ἀπροσδιόριστος, ἀλλὰ πραγματικὴ καὶ ἴση μὲ $\frac{\gamma}{\epsilon}$, παρίστατο δὲ ὡς τοιαύτη, διότι οἱ δύο αὐτῆς ὅροι περιεῖχον ἐγκεκρυμμένον τὸν μηδενίζομενον κοινὸν παράγοντα α.

Παρατήρησις. — Ἀξίον παρατηρήσεως εἶναι ὅτι ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $aX^2 + bX = \gamma$ εἶναι ἐπιδεκτικὴ τριῶν ἀντὶ δύο λύσεων, ὅταν $a=0$. Διότι, καθ' ὃ εἵπομεν ἐν τῇ παρατηρήσει 2 τῆς § 64, ἡ τιμὴ $\frac{-2\gamma}{0}$ θέλει εἶναι $+\infty$ ἢ $-\infty$, καθόσον ἡ μηδενίζομένη ποσότης α τείνει πρὸς τὸ μηδέν οὔσα πάντοτε θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ. Τοῦτο δὲ δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ἀπ' εὐθείας ἐξ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως $aX^2 + bX = \gamma$, ἐὰν αὕτη τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν

$$\frac{\gamma - bX}{X^2} = a$$

καὶ ὑποτεθῇ $a=0$. Διότι τότε κατὰ τὰ ἐν τῇ αὐτῇ παρατηρήσει λεχθέντα θέλομεν ἔχει ἢ $\gamma - bX = 0$, ὅτε $X = \frac{\gamma}{b}$, ἢ $X^2 = \infty$, ὅτε $X = \pm \infty$.

117. Ἐφαρμόσωμεν νῦν τὰ ἀνωτέρω καὶ ἐπὶ τῆς διασκοπήσεως γενικῶν τινῶν προβλημάτων, ἐξαρτωμένων ἐκ τῆς λύσεως δευτεροβάθμιων ἐξισώσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. — Νὰ διαιρεθῇ δεδομένη εὐθεῖα AB εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον· τουτέστιν εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεγαλύτερον τούτων νὰ ἦται μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης εὐθείας AB καὶ τοῦ ἑτέρου αὐτῆς μέρους.

$$\overline{\dot{\Gamma}' \quad \dot{\Lambda} \quad \dot{\Gamma} \quad \dot{B} \quad \dot{\Gamma}''}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ α τὴν ὅλην εὐθεῖαν AB καὶ διὰ χ τὸ μέσον ἀνάλογον αὐτῆς μέρος ΑΓ, τότε τὸ ἕτερον αὐτῆς μέρος ΓΒ θέλει παρασταθῇ διὰ τῆς διαφορᾶς $a - \chi$, καὶ θέλομεν ἔχει κατὰ τὰς συνθήκας τῆς ἀνωτέρω ἐκφωνήσεως τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν

$$a : \chi = \chi : a - \chi \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως κατὰ γνωστὸν Ἀριθμητικὸν θεώρημα τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$x^2 = a^2 - ax, \quad \text{ἢ τὴν} \quad x^2 + ax = a^2 \quad (2).$$

Ἐπειδὴ δὲ τῆς ἐξισώσεως (2) ὁ συντελεστὴς α τῆς x εἶναι ποσότης θετικὴ καθὼς καὶ τὸ γνωστὸν αὐτῆς μέλος a^2 , συμπεραίνομεν ἀμέσως ὅτι αἱ δύο ρίζαι αὐτῆς εἶναι πραγματικάι, ἄνισοι καὶ ἀντιθέτων σημείων, καὶ ὅτι ἡ ἔχουσα πρὸ αὐτῆς τὸ σημεῖον $-$ εἶναι, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου λαμβανομένη, ἡ μεγαλειτέρα. Τῷ ὄντι, ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) πορίζομεθα διαδοχικῶς

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}},$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}},$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{5}),$$

$$x' = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad \text{καὶ} \quad x'' = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Ἡ μὲν τιμὴ x' τῆς x οὖσα θετικὴ καὶ μικροτέρα τῆς a , (διότι $\sqrt{5}$ εἶναι μικρότερον τοῦ 3), προσδιορίζει τὸ μεταξὺ τῶν ἄκρων Α καὶ Β κείμενον σημεῖον Γ, ἡ δὲ τιμὴ x'' τῆς x οὖσα ἀρνητικὴ καὶ μεγαλειτέρα, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου λαμβανομένη, τῆς a προσδιορίζει κατὰ τὰ ἐν τῇ § 56 λεχθέντα πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α σημειόν τι Γ' τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἀπόστασις ΑΓ' νὰ ᾖναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὅλης εὐθείας ΑΒ καὶ τῆς ἀποστάσεως ΒΓ'. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, αὕτη ἀνήκει εἰς τὸ αὐτὸ πρόβλημα τροποποιηθὲν ὡς ἐξῆς.

Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς ἀπροσδιορίστου εὐθείας ΑΒ σημειόν τι τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἀπόστασις αὐτοῦ νὰ ᾖναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ δεδομένου μέρους αὐτῆς ΑΒ καὶ τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἐτέρου σημείου Β.

Διότι, ἐὰν ἐν τῇ ἀναλογίᾳ (1) ἡ τῇ ἐξίσώσει (2) μεταβάλωμεν τὸ x εἰς $-x$, αὗται γίνονται

$$a : -x = -x : a + x \quad \text{καὶ} \quad x^2 - ax = a^2 \quad (3),$$

βλέπομεν δὲ ὅτι, τῆς ΑΓ' παριστωμένης διὰ χ , ἡ ἀπόστασις Γ'Β θέλει παρασταθῇ διὰ $a + \chi$, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$a : \chi = \chi : a + \chi,$$

ἣτις παρέχει τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν (3).

Ἄν εἴχομεν ὑποθέσει πρὸς λύσιν τοῦ ὡς ἀνωτέρω τροποποιηθέντος προβλήματος ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον κεῖται πρὸς τὰ δεξιά τοῦ Β, εἰς τὸ Γ', καὶ παραστήσει διὰ χ τὴν ἀπόστασιν ΑΓ'', τότε ἡ ἀπόστασις ΒΓ'' ἤθελε παρασταθῇ διὰ $\chi - a$, ἐκ δὲ τῆς ἀναλογίας

$$a : \chi = \chi : \chi - a$$

ἠθέλομεν πορισθῇ τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$\chi^2 = a\chi - a^2, \quad \text{ἢ τὴν} \quad \chi^2 - a\chi = -a^2 \quad (4),$$

ἥς αἱ δύο ρίζαι εἶναι φανταστικάι, διότι τὸ γνωστὸν αὐτῆς μέλος $-a^2$ εἶναι ἀρνητικὸν καὶ μεγαλείτερον, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου λαμβανόμενον, τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεως τοῦ συντελεστοῦ a τῆς πρώτης δυνάμεως τῆς χ . Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι οὐδὲν σημεῖον πρὸς τὰ δεξιά τοῦ Β κείμενον δύναται νὰ ἐκπληροῖ τὰς συνθήκας τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος, καὶ ὅτι ἐν τῇ παρούσῃ περιπτώσει τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος εἶναι ἀπόλυτον.

Ἄν εἴχομεν παραστήσει διὰ χ τὴν ἀπὸ τοῦ Β ἀπόστασιν τοῦ ζητούμενου σημείου Γ, τῆς ἀπὸ τοῦ Α ἀποστάσεως αὐτοῦ λαμβανομένης ὡς μέσης ἀναλόγου, τότε ἡ ἀπόστασις ΑΓ ἤθελε παρασταθῇ διὰ $a - \chi$ καὶ ἠθέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$a : a - \chi = a - \chi : \chi,$$

ἐξ ἧς ἠθέλομεν πορισθῇ τὴν ἐξίσωσιν

$$(a - \chi)^2 = a\chi, \quad \text{ἢ τὴν} \quad \chi^2 - 3a\chi = -a^2 \quad (5),$$

ἥς ἀμφότεραι αἱ ρίζαι

$$\chi' = \frac{3a}{2} + \sqrt{\frac{5a^2}{4}} \quad \text{καὶ} \quad \chi'' = \frac{3a}{2} - \sqrt{\frac{5a^2}{4}},$$

εἶναι θετικάι, διότι τὸ $-a^2$ εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου τοῦ $\frac{3a}{2}$.

Ἡθέλομεν λοιπὸν εὑρεῖ τὰ δύο σημεία Γ καὶ Γ', ἅτινα ἤθελον ἐκπληροῦν τὰς συνθήκας τοῦ τροποποιηθέντος προβλήματος. Ὅτι δὲ ἠθέλομεν οὕτως εὑρεῖ τὰ αὐτὰ σημεία Γ καὶ Γ', τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν

καὶ ἀπ' εὐθείας ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ a διαδοχικῶς ἑκατέραν τῶν ἀνωτέρω ριζῶν τῆς ἐξίσωσews (5). Τῷ ὄντι, θέλομεν ἔχει

$$a - \chi' = a - \frac{3a}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{5} = -\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{5} = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1),$$

$$a - \chi'' = a - \frac{3a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. — Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς ἀπροσδιορίστου εὐθείας AB , τῆς ἐνορούσης δὲ δεδομένης ἐντάσεως καὶ ἀποστάσεως φῶτα A καὶ B , τὸ ὑπ' αὐτῶν ἐπίσης φωτιζόμενον σημεῖον, ὑποτιθεμένης γνωστῆς τῆς Φυσικῆς ἀρχῆς, ὅτι αἱ τοῦ αὐτοῦ φωτὸς ἐπὶ διαφορῶν σημείων ἐντάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τοῦ φωτὸς ἀποστάσεων τῶν σημείων.



Ἄς παραστήσωμεν διὰ δ τὴν δεδομένην τῶν φώτων A καὶ B ἀπόστασιν AB , διὰ a^2 τὴν εἰς τὴν μονάδα τῆς ἀποστάσεως ἔντασιν τοῦ φωτὸς A , διὰ b^2 τὴν εἰς τὴν μονάδα τῆς ἀποστάσεως ἔντασιν τοῦ φωτὸς B , καὶ ἅς υποθέσωμεν ὅτι τὸ ὑπ' αὐτῶν ἐπίσης φωτιζόμενον σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B .

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ τὴν ἀπόστασιν AG , ἡ ἀπόστασις $B\Gamma$ θέλει παρασταθῇ διὰ $\delta - \chi$, αἱ δὲ ἐντάσεις ε καὶ ε' , μεθ' ὧν θέλει φωτίζεσθαι τὸ σημεῖον Γ ὑπὸ τῶν φώτων A καὶ B , θέλουσι κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν ἀρχὴν τῆς Φυσικῆς εὐρεθῇ διὰ τῶν ἀναλογιών

$$4 : \chi^2 = \varepsilon : a^2 \quad \text{καὶ} \quad 4 : (\delta - \chi)^2 = \varepsilon' : b^2,$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα

$$\varepsilon = \frac{a^2}{\chi^2} \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon' = \frac{b^2}{(\delta - \chi)^2},$$

Ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη ὅτι τὸ σημεῖον Γ φωτίζεται ἰσάκεις ὑπὸ τῶν φώτων A καὶ B , αἱ ἐντάσεις ε καὶ ε' θέλουσιν εἶναι ἴσαι, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$\frac{a^2}{\chi^2} = \frac{b^2}{(\delta - \chi)^2} \quad \eta \quad \text{τὴν} \quad a^2(\delta - \chi)^2 = b^2\chi^2 \quad (1),$$

ἥς τὰ δύο μέλη εἶναι τέλεια τετράγωνα.

Ἐξάγοντες τὰς τετραγωνικάς ρίζας ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξίσωσως (1) θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$\pm a(\delta - \chi) = \pm \epsilon \chi \quad (2),$$

ἥτις, ἕνεκα τῶν πρὸ ἑκατέρου τῶν μελῶν αὐτῆς διπλῶν σημείων + καὶ −, ἀναλύεται εἰς τὰς ἐξῆς τέσσαρας

$$+a(\delta - \chi) = +\epsilon \chi, \quad +a(\delta - \chi) = -\epsilon \chi \quad (3),$$

$$-a(\delta - \chi) = +\epsilon \chi, \quad -a(\delta - \chi) = -\epsilon \chi \quad (4),$$

ὧν αἱ δύο τῆς δευτέρας σειρᾶς εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς δύο τῆς πρώτης, ἀλλασσομένων τῶν σημείων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἑκατέρας, τοῦθ' ὅπερ δὲν μεταβάλλει ταύτας. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν (1) τοῦ προβλήματος εἶναι ἐπιδεκτικὴ δύο μόνον ριζῶν χ' καὶ χ'' , αἵτινες εὐρίσκονται λυομένης ἑκατέρας τῶν ἐξισώσεων (3) ὡς πρὸς τὴν χ καὶ εἶναι

$$\chi' = \delta \cdot \frac{a}{a + \epsilon} \quad \text{καὶ} \quad \chi'' = \delta \cdot \frac{a}{a - \epsilon} \quad (5).$$

Πρὸς διασκόπησιν τῶν τύπων (5), τῶν παριστάντων τὰς αὐτοποιούσας τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος τιμὰς τῆς ἀγνώστου χ , τρία τινὰ δυνατόν νά ὑποτεθῶσι, τοῦ δ παριστάντος πάντοτε ὠρισμένον τι μέγεθος διάφορον τοῦ μηδενός· ἢ ὅτι $a > \epsilon$, ἢ ὅτι $a = \epsilon$, ἢ ὅτι $a < \epsilon$.

1^α. Ὅταν $a > \epsilon$, τουτέστιν ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ φωτὸς A ᾖναι μεγαλύτερα τῆς ἐντάσεως τοῦ φωτὸς B , τότε τὸ μὲν κλάσμα $\frac{a}{a + \epsilon}$ εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος καὶ μεγαλειότερον τοῦ $\frac{a}{2\epsilon}$ ἢ τοῦ $\frac{1}{2}$, τὸ δὲ κλάσμα $\frac{a}{a - \epsilon}$ εἶναι μεγαλειότερον τῆς μονάδος. Ἡ μὲν τιμὴ λοιπὸν χ' θέλει εἶναι μικροτέρα τοῦ δ καὶ μεγαλειτέρα τοῦ $\frac{\delta}{2}$, ἡ δὲ τιμὴ χ'' μεγαλειτέρα τοῦ δ . Τὸ πρόβλημα λοιπὸν εἶναι ἐπιδεκτικὸν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δύο ἀκεραίων καὶ θετικῶν λύσεων, καὶ ὑπάρχουσι δύο σημεῖα Γ καὶ Γ' ἐπίσης φωτιζόμενα ὑπὸ τῶν φώτων A καὶ B , τὸ μὲν Γ κείμενον μεταξὺ τοῦ A καὶ B καὶ πλησιέστερον τοῦ φωτὸς B , τὸ δὲ Γ' ἐκτὸς τῆς εὐθείας AB καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ B .

2^α. Ὅταν $a = \epsilon$, τουτέστιν ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ φωτὸς A ᾖναι ἴση τῇ τοῦ φωτὸς B , τότε θέλομεν ἔχει

$$\chi' = \delta \cdot \frac{a}{a + a} = \delta \cdot \frac{a}{2a} = \frac{\delta}{2} \quad \text{καὶ} \quad \chi'' = \delta \cdot \frac{a}{0} = \pm \infty.$$

Υπάρχει λοιπὸν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην ἓν μόνον σημεῖον ἐπίσης φωτιζόμενον καὶ κείμενον εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας AB, ὡς τοῦτο ἦτο ἐκ τῶν προτέρων φανερόν, διότι αἱ δύο ἄλλαι λύσεις $\pm \infty$ δεικνύουσιν ὅτι οὔτε πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ B οὔτε πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ A δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ σημεῖον ἐπίσης ὑπὸ τῶν ἴσης ἐντάσεως φώτων A καὶ B φωτιζόμενον.

3^{ον}. Ὅταν $a < b$, τουτέστιν ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ φωτὸς A ᾖναι μικροτέρα τῆς ἐντάσεως τοῦ φωτὸς B, τότε τὸ μὲν κλάσμα $\frac{a}{a+b}$ εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος καὶ τοῦ $\frac{a}{2a}$ ἢ τοῦ $\frac{1}{2}$, τὸ δὲ κλάσμα $\frac{a}{a-b}$ εἶναι ἀρνητικόν. Ἡ μὲν τιμὴ λοιπὸν χ' θέλει εἶναι θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ $\frac{\delta}{2}$, ἡ δὲ τιμὴ χ'' ἀρνητικὴ. Ὑπάρχουσι λοιπὸν καὶ κατὰ τὴν τρίτην ταύτην ὑπόθεσιν δύο σημεία Γ καὶ Γ'' ἐπίσης φωτιζόμενα, τὸ μὲν Γ κείμενον μεταξὺ τῶν φώτων A καὶ B καὶ πλησιέστερον τοῦ φωτὸς A, τὸ δὲ Γ'' κείμενον ἐκτὸς τῆς εὐθείας AB καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ A.



ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΠΡΟΟΔΟΙ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΗ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ. — ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

118. Καλεῖται ἀριθμητικὴ ἡ κατὰ διαφορὰν πρόοδος σειρά τις ὤρων, ἕκαστος τῶν ὁποίων διαφέρει τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ κατὰ σταθεράν τινα ποσότητα. Ἡ σταθερὰ αὕτη ποσότης, ἡ παριστιῶσα τὴν διαφορὰν δύο διαδοχικῶν ὤρων τῆς προόδου, καλεῖται λόγος τῆς προόδου, καὶ ὅταν μὲν ὁ λόγος ᾖ κατὰ ποσότης θετικὴ, οἱ ὅροι τῆς προόδου θέλουσι βαίνειν αὐξανόμενοι καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελουμένη ἀριθμητικὴ πρόοδος καλεῖται αὐξουσα, ὅταν δὲ οὗτος ᾖ κατὰ ποσότης ἀρνητικὴ, οἱ ὅροι τῆς προόδου θέλουσι βαίνειν ἐλαττούμενοι καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελουμένη ἀριθμητικὴ πρόοδος καλεῖται φθίνουσα.

Παραδείγματατος χάριν, αἱ ἐξῆς σειραὶ τῶν ὤρων

$$: a . (a + \delta) . (a + 2\delta) . (a + 3\delta) . (a + 4\delta) . (a + 5\delta) . (a + 6\delta) \dots$$

$$\div a . (a - \delta) . (a - 2\delta) . (a - 3\delta) . (a - 4\delta) . (a - 5\delta) . (a - 6\delta) \dots$$

$$\div 3 . 7 . 11 . 15 . 19 . 23 . 27 . 31 . 35 . 39 . 43 \dots$$

$$\div 48 . 44 . 40 . 36 . 32 . 28 . 24 . 20 . 16 . 12 . 8 \dots$$

ὧν ἕκαστος διαφέρει τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ κατὰ τὴν σταθεράν ποσότητα δ , $-\delta$, 4 , -4 , ἀποτελοῦσιν ἀριθμητικὰς προόδους, ἐχούσας λόγον ἢ μὲν πρώτη τὴν θετικὴν ποσότητα δ , ἢ δευτέρα τὴν ἀρνητικὴν $-\delta$, ἢ τρίτη τὸν θετικὸν ἀριθμὸν 4 καὶ ἢ τετάρτη τὸν ἀρνητικὸν -4 . Ἡ μὲν πρώτη λοιπὸν καὶ ἡ τρίτη πρόοδος, ὧν ὁ λόγος εἶναι θετικὸς, εἶναι αὐξουσαι, ἡ δὲ δευτέρα καὶ ἡ τετάρτη, ὧν ὁ λόγος εἶναι ἀρνητικὸς, εἶναι φθίνουσαι.

Πᾶσα ἀριθμητικὴ πρόοδος γράφεται, ὡς φαίνεται ἀνωτέρω, προτασ-
σομένου πρὸ τοῦ πρώτου αὐτῆς ὅρου τοῦ σημείου : καὶ χωριζομένων
ἀπ' ἀλλήλων τῶν ὅρων αὐτῆς ὑπὸ μιᾶς τελείας στιγμῆς.

119. Ἐστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος

$$\div a \cdot b \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \varepsilon \cdot \zeta \cdot \dots \cdot x \cdot \lambda \cdot \dots,$$

καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ ποσότης Δ παριστᾷ τὸν
λόγον αὐτῆς. Θέλομεν ἔχει κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα ὁρισμὸν τὰς ἐξῆς
ισότητας

$$b = a + \Delta, \quad \gamma = b + \Delta, \quad \delta = \gamma + \Delta, \quad \varepsilon = \delta + \Delta, \text{ κτλ.}$$

ἢ, ἀντικαθισταμένων εἰς μὲν τὴν δευτέραν ἀντὶ τοῦ ὅρου b τοῦ ἴσου
αὐτῷ $a + \Delta$, εἰς τρίτην ἀντὶ τοῦ γ τοῦ εὑρεθησομένου ἴσου αὐτῷ $a + 2\Delta$,
εἰς τὴν τετάρτην ἀντὶ τοῦ δ τοῦ εὑρεθησομένου ἴσου αὐτῷ $a + 3\Delta$, κτλ.,
τὰς ἐξῆς

$$b = a + \Delta, \quad \gamma = a + 2\Delta, \quad \delta = a + 3\Delta, \quad \varepsilon = a + 4\Delta, \text{ κτλ.}$$

τουτέστιν

Ὁ δεῦτερος ὅρος b πάσης ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶ-
τον ὅρον αὐτῆς a ἀυξηθέντα κατὰ τὸν λόγον Δ τῆς προόδου.

Ὁ τρίτος ὅρος γ αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον a ἀυξηθέντα κατὰ
τὸ διπλάσιον 2Δ τοῦ λόγου.

Ὁ τέταρτος ὅρος δ ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον a ἀυξηθέντα κατὰ τὸ
τριπλάσιον 3Δ τοῦ λόγου.

Ὁ πέμπτος ε ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον a ἀυξηθέντα κατὰ τὸ τετρα-
πλάσιον 4Δ τοῦ λόγου, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἐν ἐνὶ λόγῳ

Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον ἕκαστος τῶν ὅρων αὐτῆς ἰσοῦται
μὲ τὸν πρῶτον ὅρον πλέον τοσάκις τὸν λόγον, ὅσοι εἶναι οἱ πρὸ αὐ-
τοῦ ὅροι.

Ἐὰν λοιπὸν ὑποθέσωμεν ὅτι r ποριστᾷ τὴν ἀριθμητικὴν τάξιν τοῦ
ὅρου λ τῆς ἀνωτέρω προόδου, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα ἢ τὸν τύπον

$$\lambda = a + (r-1)\Delta \quad (1).$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν ὅποιανδήποτε τῶν
ἐν αὐτῷ τεσσάρων ποσοτήτων a, Δ, r, λ , ἔταν μᾶς δίδωνται αἱ τρεῖς
ἄλλαι. Ἴνα εὕρωμεν π. χ. τὸν 40ον ὅρον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου

$$\div 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 27 \cdot 31 \cdot \dots,$$

πρέπει νὰ θέσωμεν ἐν τῷ τύπῳ $\{1\}$ ἀντὶ τοῦ a τὴν τιμὴν αὐτοῦ 3,

ἀντὶ τοῦ r τὴν τιμὴν αὐτοῦ 40 καὶ ἀντὶ τοῦ Δ τὴν τιμὴν αὐτοῦ 4, καὶ θέλομεν εἶχει

$$l = 3 + (40 - 4)4 = 3 + 39 \cdot 4 = 159.$$

Ἄν δὲ μᾶς ἐζητεῖτο ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, ἥς ὁ λόγος ἦναι -4 καὶ ὁ δέκατος ὅρος 12, ἠθέλομεν ἀντικαταστήσει ἐν τῷ ἀνωτέρῳ τύπῳ 12 ἀντὶ τοῦ l , 10 ἀντὶ τοῦ r καὶ -4 ἀντὶ τοῦ Δ , καὶ ἠθέλομεν εὑρεῖ

$$a = l - (r - 1)\Delta = 12 - (10 - 1)(-4) = 12 + 36 = 48.$$

120. Ὁ αὐτὸς τύπος (1) χρησιμεύει πρὸς λύσιν καὶ τοῦ ἐξῆς προβλήματος:

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν a καὶ b , νὰ παρενθέσωμεν μεταξὺ αὐτῶν ἀριθμὸν τινα μ μέσων ἰσοδιαφύρων· τουτέστι νὰ παρενθέσωμεν μ ὁροὺς τοιοῦτους, ὥστε μετὰ τοῦ a ὡς πρῶτου καὶ τοῦ b ὡς τελευταίου νὰ ἀποτελεῶσιν ἀριθμητικὴν πρόδον.

Πρὸς τοῦτο ἅς παραστήσωμεν διὰ Δ τὸν ἄγνωστον λόγον τῆς προόδου. Ἐπειδὴ μεταξὺ τοῦ a καὶ b πρέπει νὰ παρενθεθῶσι μ ὅροι, ἔπεται ὅτι θέλομεν εἶχει ἐν ὅλῳ $\mu + 2$ ὅρους, ἐπομένως $\mu + 2$ θέλει παριστᾷ τὴν ἀριθμητικὴν τάξιν τοῦ τελευταίου ὅρου b . Πρέπει λοιπὸν ἐν τῷ ἀνωτέρῳ τύπῳ (1) νὰ θέσωμεν b ἀντὶ τοῦ l , $\mu + 2$ ἀντὶ τοῦ r καὶ νὰ λύσωμεν τὴν προκύπτουσαν ἰσότητα

$$b = a + (\mu + 2 - 1)\Delta$$

ὡς πρὸς τὸ Δ , ὅτε θέλομεν εὑρεῖ

$$\Delta = \frac{b - a}{\mu + 1}$$

Παρατήρησις.—Ἄν, δοθείσης τῆς ἀριθμητικῆς προόδου

$$\div a \cdot b \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \varepsilon \cdot \zeta \cdot \dots \cdot \kappa \cdot l \cdot \dots,$$

παρενθέτομεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μ μέσων ἰσοδιαφύρων μεταξὺ δύο διαδοχικῶν αὐτῆς ὁρῶν, ἠθέλομεν εἶχει πρὸς εὑρεσιν τῶν λόγων Δ , Δ' , Δ'' , τῶν ἀποτελεσθησομένων νέων ἀριθμητικῶν προόδων τὰς ἰσότητας

$$\Delta = \frac{b - a}{\mu + 1}, \quad \Delta' = \frac{\gamma - b}{\mu + 1}, \quad \Delta'' = \frac{\delta - \gamma}{\mu + 1}, \quad \Delta''' = \frac{\varepsilon - \delta}{\mu + 1}, \dots$$

Ἄλλ' ἐπειδὴ αἱ διαφοραὶ $b - a$, $\gamma - b$, $\delta - \gamma$, $\varepsilon - \delta$, . . . εἶναι ἴσαι, καὶ οἱ λόγοι Δ , Δ' , Δ'' , Δ''' , . . . θέλουσιν εἶναι ἴσοι· ἐπειδὴ δὲ πρὸς τοῦτοις ὁ τελευταῖος ὅρος b τῆς πρώτης θέλει εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς

δευτέρας, ἥς ὁ τελευταῖος γ' θέλει εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἀκολουθοῦ, ἥς ὁ τελευταῖος ὅρος δ' θέλει εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἐπομένης, καὶ οὕτω καθεξῆς, ἔπεται ὅτι ἡ προκύπτουσα νέα σειρά τῶν ὄρων μετὰ τὴν παρ-
 ρένθησιν τῶν μ μέσων ἰσοδιαφόρων μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὄρων τῆς
 ἀνωτέρω ἀριθμητικῆς προόδου θέλει ἀποτελεῖ νέαν ἀριθμητικὴν πρόοδον,
 ἥς ὁ λόγος θέλει εἶναι $\frac{\theta - \alpha}{\mu + 1}$.

121. Ἐστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος

$$\div \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \dots \cdot \theta \cdot \iota \cdot \kappa \cdot \lambda \cdot \dots \cdot ,$$

ἥς ὁ λόγος εἶναι Δ , καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ ἄθροισμα
 τ' αὐτῆς ὄρων ἀπὸ τοῦ πρώτου α μέχρι τοῦ r -στοῦ λ συμπεριλαμβανο-
 μένου. Παριστῶντες τὸ ζητούμενον ἄθροισμα διὰ K θέλομεν ἔχει

$$K = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots + \theta + \iota + \kappa + \lambda,$$

$$\eta \quad K = \lambda + \kappa + \iota + \theta + \dots + \delta + \gamma + \beta + \alpha,$$

γραφομένων τῶν ὄρων τῆς δευτέρας ἰσότητος οὕτως, ὥστε ὁ τελευταῖος
 λ τῆς πρώτης νὰ εὐρίσκηται ὑπὸ τὸν πρῶτον αὐτῆς ὄρον α , ὁ προτε-
 λευταῖος κ τῆς πρώτης νὰ εὐρίσκηται ὑπὸ τὸν δεύτερον ὄρον αὐτῆς β ,
 καὶ οὕτω καθεξῆς. Προσθέτοντες δὲ κατὰ μέλη τὰς δύο προηγούμενας
 ἰσότητας θέλομεν ἔχει

$$2K = (\alpha + \lambda) + (\beta + \kappa) + (\gamma + \iota) + \dots + (\iota + \gamma) + (\kappa + \beta) + (\lambda + \alpha).$$

Ἀλλὰ πάντα τὰ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ἄθροισματα τῆς τελευταίας
 ἰσότητος εἶναι τὸν ἀριθμὸν καὶ ἴσα πρὸς ἄλληλα. Διότι κατὰ τὸν ὀρι-
 σμὸν τῶν ἀριθμητικῶν προόδων θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας

$$\beta = \alpha + \Delta, \quad \gamma = \beta + \Delta, \quad \delta = \gamma + \Delta, \dots$$

$$\kappa = \lambda - \Delta, \quad \iota = \kappa - \Delta, \quad \theta = \iota - \Delta, \dots$$

ἂς προσθέτοντες κατὰ ζεύγη εὐρίσκομεν

$$\beta + \kappa = \alpha + \lambda, \quad \gamma + \iota = \beta + \kappa, \quad \delta + \theta = \gamma + \iota,$$

τουτέστιν, ὅτι τὰ ἄθροισματα $\beta + \kappa$, $\gamma + \iota$, $\delta + \theta$, .. τῶν ὄρων ἀριθ-
 μητικῆς τινος προόδου, τῶν ἰσάκεις ἀπεχρότων τῶν ἄκρων, εἶναι ἴσα
 τῷ ἄθροισματι $\alpha + \lambda$ τῶν ἄκρων.

Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$2K = (\alpha + \lambda)r, \quad \text{ἐξ ἧς πορίζομεθα} \quad K = \frac{(\alpha + \lambda)r}{2}, \quad (2)$$

τουτέστιν, ὅτι εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον τὸ ἄθροισμα K ὅσων

δήποτε αὐτῆς ὅρων r ἰσοῦται τῷ ἡμιαριθμῷ τῶν ἀκρῶν a καὶ l ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν r τῶν λαμβανομένων ὅρων.

122. Ὅταν ὁ r -στός ὅρος l τῆς προόδου δὲν ᾔναι δεδομένος, τότε εὐρίσκωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (1)

$$l = a + (r-1)\Delta$$

καὶ θέτοντες ἐν τῷ τύπῳ (2) ἀντὶ τοῦ l τὸ ἴσον αὐτῷ $a + (r-1)\Delta$, θέλωμεν ἔχει:

$$K = \frac{[2a + (r-1)\Delta]r}{2} \quad (3).$$

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἄθροισμα τῶν 50 πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου

$$\div 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \dots,$$

ἣς ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 1 καὶ ὁ λόγος 2, εὐρίσκεται ἀμέσως διὰ τοῦ τύπου (3) καὶ εἶναι

$$K = \frac{[2 + (50-1)2]50}{2} = 50^2.$$

Ὡσαύτως, τὸ ἄθροισμα τῶν 20 πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου

$$\div 83 \cdot 80 \cdot 77 \cdot 74 \cdot 71 \cdot 68 \cdot 65 \cdot 62 \cdot 59 \dots,$$

ἣς ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 83 καὶ ὁ λόγος -3 , εὐρίσκεται διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου (3) καὶ εἶναι

$$K = \frac{[2 \cdot 83 + (20-1)(-3)]20}{2} = \frac{(166 - 57)20}{2} = 1090.$$

123. Διὰ τῶν ἀνωτέρω εὐρεθέντων δύο τύπων

$$l = a + (r-1)\Delta \quad \text{καὶ} \quad K = \frac{(a+l)r}{2},$$

τῶν περιχόντων πέντε διαφόρου σημασίας ποσότητος a , Δ , l , r , K , δυνάμεθα νὰ εὐρίσκωμεν δύο ὁποιασδήποτε τούτων, ὅταν αἱ τρεῖς ἄλλαι μᾶς ᾔναι γνωσταί. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀντικαθιστῶμεν ἐν αὐτοῖς ἀντὶ τῶν τριῶν δεδομένων ποσοτήτων a , Δ , l , r , K τὰς τιμὰς αὐτῶν καὶ νὰ λύωμεν τὸ προκύπτον σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους ὡς πρὸς ταύτας κατὰ τινὰ τῶν γνωστῶν μεθόδων. Ὁ ἀκόλουθος πίναξ περιέχει τὰς λύσεις τῶν 10 διαφόρων προβλημάτων, ἅτινα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν συνδυάζοντες καθ' ἑαυτοὺς τοὺς δυνατοὺς τρόπους δύο ἐκ τῶν πέντε ποσοτήτων a , Δ , l , r , K .

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } a, \Delta, r. \\ \text{Ζητούμενα } \lambda, K. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = a + (r-1)\Delta, \quad K = \frac{[2a + (r-1)\Delta]r}{2}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } \Delta, r, \lambda. \\ \text{Ζητούμενα } a, K. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a = \lambda - (r-1)\Delta, \quad K = \frac{[2\lambda - (r-1)\Delta]r}{2}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } a, r, \lambda. \\ \text{Ζητούμενα } \Delta, K. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \Delta = \frac{\lambda - a}{r-1}, \quad K = \frac{(a+\lambda)r}{2}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } \Delta, r, K. \\ \text{Ζητούμενα } a, \lambda. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{2K - r(r-1)\Delta}{2r}, \quad \lambda = \frac{2K + r(r-1)\Delta}{2r}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } a, r, K. \\ \text{Ζητούμενα } \Delta, \lambda. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{2K - ar}{r}, \quad \Delta = \frac{2(K - ar)}{r(r-1)}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } \lambda, r, K. \\ \text{Ζητούμενα } a, \Delta. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{2K - \lambda r}{r}, \quad \Delta = \frac{2(\lambda r - K)}{r(r-1)}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } a, \Delta, \lambda. \\ \text{Ζητούμενα } r, K. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{\lambda - a + \Delta}{\Delta}, \quad K = \frac{(a+\lambda)(\lambda - a + \Delta)}{2\Delta}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } a, \lambda, K. \\ \text{Ζητούμενα } r, \Delta. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{2K}{a+\lambda}, \quad \Delta = \frac{(a+\lambda)(\lambda - a)}{2K - (a+\lambda)}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } a, \Delta, K. \\ \text{Ζητούμενα } r, \lambda. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{\Delta - 2a \pm \sqrt{(\Delta - 2a)^2 - 8\Delta K}}{2\Delta}, \quad \lambda = a + (r-1)\Delta. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } \lambda, \Delta, K. \\ \text{Ζητούμενα } r, a. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{\Delta + 2\lambda \pm \sqrt{(\Delta + 2\lambda)^2 - 8\Delta K}}{2\Delta}, \quad a = \lambda - (r-1)\Delta. \end{array} \right.$$

* Δε υποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὰ ἐξῆς προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. — Σῶμα πίπτει κατακορύφως ἐν τῷ κενῷ διατρέχει 4,9044 μέτρα εἰς τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον, εἰς ἕκαστον δὲ τῶν ἐπομένων δευτερολέπτων τὸ ὑπ' αὐτοῦ διανυόμενον διάστημα αὐξάνει κατὰ 9,8088 μέτρα. Ζητεῖται πόσων μέτρων διάστημα θέλει διατρέξει εἰς τὰ 40 πρῶτα δευτερόλεπτα.

Ἐπειδὴ τὸ σῶμα διανύει εἰς τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον 4,9044 μέτρα, εἰς ἕκαστον δὲ τῶν ἐπομένων δευτερολέπτων 9,8088 μέτρα περισσότερον, ἔπεται ὅτι τὰ ὑπ' αὐτοῦ διανυόμενα κατὰ τὰ διαδοχικά δευτερόλεπτα διαστήματα ἀποτελοῦσι τὴν ἐξῆς ἀριθμητικὴν πρόοδον

$$\div 4,9044 \cdot 4,9044 + 9,8088 \cdot 4,9044 + 2 \cdot 9,8088 \cdot \cdot ,$$

ἥς μᾶς ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν 40 πρώτων ὄρων, τοῦ πρώτου αὐ-

τῆς ὕρου ὄντος 4,9044 καὶ τοῦ λόγου 9,8088. Μᾶς δίδονται λοιπὸν $a=4,9044$, $\Delta=9,8088$, $r=10$ καὶ μᾶς ζητεῖται τὸ Κ. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει κατὰ τὸ ἀνωτέρω πρῶτον πρόβλημα

$$K = \frac{[2a + (r-1)\Delta]r}{2} = \frac{(9,8088 + 9 \cdot 9,8088)10}{2} = 490,44 \text{ μέτρα.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. — Κηπουρὸς ἔχει τὰ ποτίση 50 δένδρα κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας γραμμῆς καὶ ἀπέχοντα ἀπ' ἀλλήλων 20 μέτρα, λαμβάνει δὲ τὸ πρὸς τοῦτο δι' ἑκαστον ἀναγκαῖον ὕδωρ ἐκ τινος πηγῆς, κειμένης ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἀπεχούσης κατὰ 150 μέτρα ἀπὸ τοῦ πρώτου δένδρου. Ζητεῖται πόσα μέτρα θέλει διατρέξει ἵνα, ἀναχωρῶν κατ' ἀρχὰς ἀπὸ τῆς πηγῆς, ποτίση ἀνὰ ἓν ἐκάστοτε ἅπαντα καὶ ἐπανέλθῃ πάλιν εἰς τὴν πηγὴν.

Π Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Σ

Ἐστω Π ἡ θέσις τῆς πηγῆς καὶ Α, Β, Γ, Δ, Ε . . . τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας γραμμῆς ΠΣ κείμενα 50 δένδρα, ὧν αἱ μὲν ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, . . . εἶναι 20 μέτρων, ἡ δὲ ἀπόστασις ΠΑ εἶναι 150 μέτρων. Ἴνα ὁ κηπουρὸς ποτίσῃ τὸ δένδρον Α καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πηγὴν Π, θέλει διατρέξει δις τὴν ἀπόστασιν ΠΑ, ἥτοι 300 μέτρα· ἵνα δὲ ποτίσῃ τὸ δένδρον Β καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πηγὴν Π θέλει διατρέξει δις τὴν ἀπόστασιν ΠΒ, ἥτοι 2·170 ἢ 340 μέτρα. Ἴνα πάλιν ποτίσῃ τὸ δένδρον Γ καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πηγὴν, θέλει διατρέξει δις τὴν ἀπόστασιν ΠΓ, ἥτοι 2·190 ἢ 380 μέτρα, καὶ οὕτω καθεξῆς. Βλέπομεν λοιπὸν εὐκόλως ὅτι τὰ ὑπ' αὐτοῦ πρὸς ἄρδευσιν ἐκάστου τῶν δένδρων διανυόμενα διαστήματα ἀποτελοῦσι τὴν ἐξῆς ἀριθμητικὴν πρόοδον

$$\div 300 \cdot 340 \cdot 380 \cdot 420 \cdot 460 \cdot 500 \cdot 540 \dots,$$

ἥς μᾶς ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν 50 πρώτων ὕρων, τοῦ πρώτου αὐτῆς ὕρου ὄντος 300 καὶ τοῦ λόγου 40, Θέλομεν λοιπὸν, ὅπως καὶ διὰ τὸ προηγουμένον πρόβλημα, ἔχει

$$K = \frac{[2a + (r-1)\Delta]r}{2} = \frac{(600 + 49 \cdot 40)50}{2} = 64000 \text{ μέτρα.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^{ον}. — Κινητὸν τι διατρέχει τὴν μὲν πρώτην ἡμέραν 200 μέτρα, ἐκάστην δὲ τῶν ἐπομένων 125 μέτρα περισσότερον ἢ τὴν προτεραιάν. Ζητεῖται εἰς πόσας ἡμέρας θέλει διατρέξει 18200 μέτρα.

Ἐνταῦθα τὰ ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διανυόμενα κατὰ τὰς διαφόρους διαδοχικὰς ἡμέρας διαστήματα ἀποτελοῦσι προφανῶς τὴν ἐξῆς ἀριθμητικὴν πρόδον

$$\div 200 \cdot 325 \cdot 450 \cdot 575 \cdot 700 \cdot 825 \cdot 950 \dots,$$

ἥς μᾶς δίδεται ὁ πρῶτος ὅρος $a=200$, ὁ λόγος $\Delta=125$ καὶ τὸ ἄθροισμα $K=18200$ τῶν r πρῶτων αὐτῆς ὅρων, καὶ μᾶς ζητεῖται αὐτὸ τὸ r , ὅπερ εὑρίσκεται ἀπ' εὐθείας ὡς ἐξῆς.

Λαμβάνομεν τὸν ἀνωτέρω εὐρεθέντα τύπον (3)

$$K = \frac{[2a + (r-1)\Delta]r}{2}$$

καὶ ἀντικαθιστῶμεν ἐν αὐτῷ 200 ἀντὶ τοῦ a , 125 ἀντὶ τοῦ Δ καὶ 18200 ἀντὶ τοῦ K , ὅτε εὑρίσκομεν τὴν ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον r δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$18200 = \frac{[400 + (r-1)125]r}{2},$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διαδοχικῶς

$$36400 = 400r + 125r^2 - 125r$$

$$125r^2 + 275r = 36400$$

$$5r^2 + 11r = 1456$$

$$r^2 + \frac{11}{5}r = \frac{1456}{5}$$

$$r = -\frac{11}{10} \pm \sqrt{\frac{1456}{5} + \frac{121}{100}} = -\frac{11}{10} \pm \frac{171}{10} = 16,$$

παραβλεπομένης τῆς ἀρνητικῆς λύσεως $-\frac{91}{5}$ ὡς μὴ ἀρμοζούσης εἰς τὸ πρόβλημα. Εἰς 16 λοιπὸν ἡμέρας τὸ κινητὸν θέλει διανύσει ἐν ὅλῳ 18200 μέτρα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4^{ον}. — Νὰ εὕρωμεν πέντε ἀριθμοὺς ἀποτελοῦντας ἀριθμητικὴν πρόδον, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα νὰ ᾖ 150, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν 4750.

Ἐάν παραστήσωμεν διὰ x τὸν τρίτον ὅρον καὶ διὰ y τὸν λόγον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς ὑπ' αὐτῶν ἀποτελουμένην ἀριθμητικὴν πρόδον

$$\div x - 2y \cdot x - y \cdot x \cdot x + y \cdot x + 2y.$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται μὲ 150, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς πρῶτην αὐτοῦ ἐξίσωσιν

$$x - 2y + x - y + x + x + y + x + 2y = 150,$$

$$\frac{1}{2} \quad 5x = 150 \quad (1),$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ἐν αὐτοῖς ὁμοίων ὄρων εὐρίσκεται ὅν $5x^2 + 40y^2$, καὶ ἐπειδὴ τοῦτο κατὰ τὴν ἐκφώνησιν ἰσοῦται μὲ 4750, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς δευτέραν ἐξίσωσιν

$$5x^2 + 40y^2 = 4750 \quad (2).$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) πορίζομεθα ἀμέσως $x = 30$, ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) ἀντὶ τοῦ x^2 τὸ ἴσον αὐτῷ 30^2 , θέλομεν ἔχει

$$40y^2 = 4750 - 4500 = 250,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως

$$y^2 = 25 \quad \text{καὶ} \quad y = 5.$$

Οἱ πέντε λοιπὸν ζητούμενοι ἀριθμοὶ θέλουσιν εἶναι 20, 25, 30, 35, 40, ἐξ ὧν προφανῶς ἀποτελεῖται ἡ ἐξῆς ἀριθμητικὴ πρόοδος

$$: 20 : 25 : 30 : 35 : 40.$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

124. Γεωμετρικὴ ἢ κατὰ πηλίκον πρόοδος καλεῖται σειρά τις ὄρων, ὧν ἕκαστος διαιρούμενος διὰ τοῦ πρὸ αὐτοῦ δίδει τὸ αὐτὸ πηλίκον. Τὸ σταθερὸν τοῦτο πηλίκον καλεῖται λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου. Ὅταν ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου ᾖναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος, οἱ ὅροι αὐτῆς θέλουσι βαίνει ἀυξανόμενοι, καὶ ἡ πρόοδος καλεῖται τότε αὐξουσα· ὅταν δὲ ὁ λόγος αὐτῆς ᾖναι μικρότερος τῆς μονάδος, οἱ ὅροι τῆς γεωμετρικῆς προόδου θέλουσι βαίνει ἐλαττούμενοι, καὶ ἡ πρόοδος καλεῖται τότε φθίνουσα. Αἱ γεωμετρικαὶ πρόοδοι γράφονται προτασσόμενου πρὸ τοῦ πρώτου αὐτῶν ὅρου τοῦ σημείου :: καὶ παρεντιθεμένου μεταξὺ δύο διαδοχικῶν τοῦ σημείου : τῆς διαίρεσεως.

Παραδείγματος χάριν, αἱ ἐξῆς σειραὶ

$$:: 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : \text{κτλ.}, :: 80 : 20 : 5 : \frac{5}{4} : \frac{5}{16} : \text{κτλ.}$$

ἀποτελοῦσι γεωμετρικὰς προόδους, ὧν οἱ λόγοι εἶναι τῆς μὲν πρώτης 3, τῆς δὲ δευτέρας $\frac{1}{4}$, καὶ ἡ μὲν πρώτη εἶναι αὐξουσα, ἡ δὲ δευτέρα φθίνουσα.

125. Ἐς λάβωμεν ὅποιανδήποτε αὐξουσαν ἢ φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον

$$\therefore a : b : \gamma : \delta : \epsilon : \dots : \iota : \kappa : \lambda : \dots,$$

καὶ ἂς παραστήσωμεν διὰ π τὸν λόγον αὐτῆς. Θέλωμεν ἔχει κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τὰς ἰσότητας

$$\frac{b}{a} = \pi, \quad \frac{\gamma}{b} = \pi, \quad \frac{\delta}{\gamma} = \pi, \quad \frac{\epsilon}{\delta} = \pi, \dots$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα τὰς ἐξῆς

$$\begin{aligned} b &= a\pi, \\ \gamma &= b\pi = a\pi \cdot \pi = a\pi^2, \\ \delta &= \gamma\pi = a\pi^2 \cdot \pi = a\pi^3, \\ \epsilon &= \delta\pi = a\pi^3 \cdot \pi = a\pi^4, \\ &\dots \end{aligned}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν πρόοδον ἕκαστος τῶν ὅρων αὐτῆς ἰσοῦται μετὰ τὸν πρώτον ὅρον πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τῇ δυνάμει τοῦ λόγου, τὴν ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει πόσοι εἶναι οἱ πρὸ αὐτοῦ ὅροι. Ἐπομένως, ἂν παραστήσωμεν διὰ r τὴν τάξιν τοῦ ὅρου λ , θέλωμεν ἔχει τὴν ἰσότητα ἢ τὸν τύπον

$$\lambda = a\pi^{r-1} \quad (1).$$

Ὁ τύπος (1) παριστᾷ τὴν μεταξὺ τῶν τεσσάρων ποσοτήτων a , π , r , λ ὑπάρχουσας σταθερὰς σχέσεις, καὶ χρησιμεύει πρὸς εὗρεσιν μιᾶς τούτων, ὅταν αἱ τρεῖς ἄλλαι ἦναι δεδομέναι.

126. Ὁ αὐτὸς τύπος (1) χρησιμεύει πρὸς λύσιν καὶ τοῦ ἐξῆς προβλήματος.

Διθέντων δύο ἀριθμῶν a καὶ b , νὰ παρερθέσωμεν μεταξὺ αὐτῶν ἀριθμὸν τινα μ μέσων γεωμετρικῶν· τουτέστι νὰ παρερθέσωμεν μ ὅρους τοιοῦτους, ὥστε μετὰ τοῦ a ὡς πρώτου καὶ τοῦ b ὡς τελευταίου νὰ ἀποτελῶσι γεωμετρικὴν πρόοδον.

Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ π τὸν ζητούμενον λόγον τῆς ἀποτελεσθησομένης γεωμετρικῆς προόδου, ἐπειδὴ μεταξὺ τοῦ a καὶ b πρέπει νὰ παρεντελῶσι μ ὅροι, ἔπεται ὅτι θέλωμεν ἔχει ἐν ὅλῳ $\mu + 2$ ὅρους, ἐπομένως $\mu + 2$ θέλει παριστᾷ τὴν ἀριθμητικὴν τάξιν τοῦ τελευταίου ὅρου b . Πρέπει λοιπὸν ἐν τῷ ἀνωτέρῳ τύπῳ (1) νὰ θέσωμεν b ἀντὶ τοῦ λ , $\mu + 2$ ἀντὶ τοῦ r καὶ νὰ λύσωμεν τὴν προκύπτουσαν ἰσότητα

$$b = a\pi^{\mu+1}$$

ὥς πρὸς τὸ π, ὅτε θέλομεν ἔχει

$$\pi = \sqrt[\mu+1]{\frac{\theta}{a}}.$$

ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἵνα εὐρωμεν τὸν λόγον τῆς ἀποτελεσθησομένης γεωμετρικῆς προόδου, πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν $\mu+1$ ρίζαν τοῦ κλάσματος $\frac{\theta}{a}$.

Παρατήρησις.—“Ἄν, δοθείσης τῆς γεωμετρικῆς προόδου

$$\div a : \theta : \gamma : \delta : \varepsilon : \dots : \iota : \kappa : \lambda : \dots,$$

παρενεθέτομεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μ μέσων γεωμετρικῶν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν αὐτῆς ὄρων, ἠθέλομεν ἔχει πρὸς εὐρεσιν τῶν λόγων π, π', π'', π''' .. τῶν ἀποτελεσθησομένων νέων γεωμετρικῶν προόδων τὰς ἰσότητας

$$\pi = \sqrt[\mu+1]{\frac{\theta}{a}}, \quad \pi' = \sqrt[\mu+1]{\frac{\gamma}{\theta}}, \quad \pi'' = \sqrt[\mu+1]{\frac{\delta}{\gamma}}, \quad \pi''' = \sqrt[\mu+1]{\frac{\varepsilon}{\delta}}, \dots$$

Ἄλλ' ἐπειδὴ τὰ κλάσματα $\frac{\theta}{a}, \frac{\gamma}{\theta}, \frac{\delta}{\gamma}, \frac{\varepsilon}{\delta}, \dots$ εἶναι ἴσα, καὶ οἱ λόγοι $\pi, \pi', \pi'', \pi''', \dots$ θέλουσιν εἶναι ἴσοι· ἐπειδὴ δὲ πρὸς τούτοις ὁ τελευταῖος ὅρος θ τῆς πρώτης γεωμετρικῆς προόδου θέλει εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς δευτέρας, ἥς ὁ τελευταῖος γ θέλει εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς τρίτης, ἥς ὁ τελευταῖος δ θέλει εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς τετάρτης καὶ οὕτω καθεξῆς, ἔπεται ὅτι ἡ προκύπτουσα νέα σειρά τῶν ὄρων μετὰ τὴν παρένθεσιν τῶν μ μέσων γεωμετρικῶν μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὄρων τῆς ἀνωτέρω γεωμετρικῆς προόδου θέλει ἀποτελεῖ νέαν γεωμετρικὴν πρόδον, ἥς ὁ λόγος π θέλει εἶναι $\sqrt[\mu+1]{\frac{\theta}{a}}$

127. **ΘΕΩΡΗΜΑ.**—“Ὅταν δεδομένη γεωμετρικὴ πρόδος ᾗται αὐξουσα, οἱ ὅροι αὐτῆς θέλουσι βυίνει αὐξανόμενοι ἐπ' ἀπειρον, ὅταν δὲ ᾗται φθίνουσα, οἱ ὅροι αὐτῆς θέλουσι βυίνει ἐλαττούμενοι μέχρι τοῦ μηδενός.

Ἐστω π ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου

$$\div a : \theta : \gamma : \delta : \varepsilon : \zeta : \dots,$$

καὶ ἂς λάβωμεν τρεῖς ὁποιοῦσδήποτε διαδοχικοὺς αὐτῆς ὅρους

$$\kappa, \quad \kappa\pi, \quad \kappa\pi^2.$$

Όταν $\pi > 1$, τουτέστιν όταν ἡ δεδομένη γεωμετρικὴ πρόοδος ἦναι αὐξουσα, τότε αἱ μεταξὺ τοῦ δευτέρου καὶ πρώτου ὅρου, τοῦ τρίτου καὶ δευτέρου διαφοραὶ θέλουσιν εἶναι

$$\kappa\pi - \kappa = \kappa(\pi - 1), \quad \kappa\pi^2 - \kappa\pi = \kappa\pi(\pi - 1).$$

Ἄλλ' ἐπειδὴ $\pi > 1$, ἔπεται ὅτι καὶ $\kappa\pi > \kappa$. Ἡ δευτέρα λοιπὸν διαφορὰ $\kappa\pi(\pi - 1)$ θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς πρώτης $\kappa(\pi - 1)$. Ἄλλ' ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $\kappa(\pi - 1)$ εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ μηδενός, ἔπεται ὅτι αὕτη ἐπαρκῶς ἐπαναλαμβανομένη δύναται νὰ ἀποτελέσῃ ποσὸν μεγαλειέτερον παντὸς δεδομένου. Συμπεριπίνομεν λοιπὸν ὅτι, ἂν οἱ ὅροι τῆς δεδομένης γεωμετρικῆς προόδου ἔβαινον αὐξανόμενοι πάντες ἀπὸ τοῦ ὅρου κ κατὰ τὴν αὐτὴν ποσότητα $\kappa(\pi - 1)$, ἡθέλομεν φθάσει παρατείνοντες ἐπαρκῶς τὸν ἀριθμὸν τούτων εἰς ὅρον μεγαλειέτερον παντὸς δεδομένου ποσοῦ. Κατ' ἰσχυρότερον λοιπὸν λόγον θέλομεν φθάσει παρατείνοντες ἐπαρκῶς τὴν πρόοδον εἰς τοιοῦτον ὅρον, ἀποδείξαντες ὅτι οἱ ἀπὸ τοῦ ὅρου $\kappa\pi$ διαδοχικοὶ ὅροι ὑπερέχουσιν ἕκαστας τὸν προηγούμενον αὐτοῦ κατὰ ποσότητας μεγαλειτέρας τῆς $\kappa(\pi - 1)$.

Όταν $\pi < 1$, τουτέστιν όταν ἡ δεδομένη γεωμετρικὴ πρόοδος ἦναι φθίνουσα, τότε ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\therefore \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{\gamma} : \frac{1}{\delta} : \frac{1}{\epsilon} : \dots$$

θέλει εἶναι αὐξουσα, διότι ὁ λόγος αὐτῆς $\frac{1}{b} : \frac{1}{a}$ θέλει εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ τοῦ $\frac{1}{\pi}$, τοῦ π ὑποθεθέντος < 1 . Οἱ ὅροι λοιπὸν αὐτῆς κατὰ τὰ προαποδειχθέντα θέλουσι βαίνειν αὐξανόμενοι ἐπ' ἄπειρον, ἐπομένως οἱ ἀντίστροφοι τούτων, τουτέστιν οἱ ὅροι τῆς δεδομένης φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, θέλουσι βαίνειν ἐλαττούμενοι μέχρι τοῦ μηδενός.

128. Ἐστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\therefore a : b : \gamma : \delta : \dots : \kappa : \lambda : \dots,$$

ἥς ὁ λόγος εἶναι π , καὶ ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ ἄθροισμα r αὐτῆς ὅρων ἀπὸ τοῦ πρώτου a μέχρι τοῦ $r^{\text{ου}}$ λ συμπεριλαμβανομένου. Παριστώντες τὸ ζητούμενον ἄθροισμα διὰ K θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$K = a + b + \gamma + \delta + \dots + \kappa + \lambda \quad (4).$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος ἐπὶ τὸν λόγον π τῆς δεδομένης προόδου θέλομεν ἔχει

$$K\pi = \alpha\pi + \beta\pi + \gamma\pi + \delta\pi + \dots + \kappa\pi + \lambda\pi,$$

$$\frac{1}{2} \quad K\pi = \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \dots + \lambda + \lambda\pi \quad (5),$$

διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν γεωμετρικῶν προόδων ἔχομεν

$$\alpha\pi = \beta, \quad \beta\pi = \gamma, \quad \gamma\pi = \delta, \quad \delta\pi = \varepsilon, \quad \dots \quad \kappa\pi = \lambda.$$

Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (5) καὶ (4) εὐρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$$K\pi - K = \lambda\pi - \alpha,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως λύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον K

$$K = \frac{\lambda\pi - \alpha}{\pi - 1} \quad (2).$$

Ἴνα εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ὄρων δεδομένης γεωμετρικῆς προόδου, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν τελευταῖον ὄρον ἐπὶ τὸν λόγον, νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ εὐρεθησομένου γινομένου τὸν πρῶτον καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὴν εὐρεθησομένην διαφορὰν διὰ τοῦ λόγου ἐλαττωθέντος κατὰ μονάδα.

129. Ὅταν ὁ ὅρος λ δὲν ᾖ δεδομένος, γνωρίζομεν δὲ ὅτι κατέχει τὴν $\pi^{\pi-1}$ τάξιν, τότε δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῷ τύπῳ (2) ἀντὶ τοῦ λ τὴν ὑπὸ τοῦ τύπου (1) διδομένην αὐτοῦ τιμὴν $\alpha\pi^{-1}$ καὶ θέλομεν ἔχει ἀντὶ τοῦ τύπου (2) τὸν τύπον

$$K = \frac{\alpha\pi^{\pi} - \alpha}{\pi - 1} = \frac{\alpha(\pi^{\pi} - 1)}{\pi - 1} \quad (3).$$

Ὅταν ἡ δεδομένη γεωμετρικὴ πρόοδος ᾖ αὐξουσα, τότε $\pi > 1$, καὶ ἐπειδὴ οἱ ὅροι αὐτῆς βαίνουσιν αὐξανόμενοι ἐπ' ἄπειρον, συμπεραίνομεν ὅτι κατ' ἰσχυρότερον λόγον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θέλει τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς π τῶν λαμβανομένων ὄρων καθίσταται ἐπὶ μᾶλλον μεγαλειότερος.

Ὅταν $\pi = 1$, τότε ὁ τύπος (3) λαμβάνει τὴν μορφήν τοῦ ἀπροσδιορίστου $\frac{0}{0}$, ἥτις ἐνταῦθα εἶναι μόνον φαινομένη. Διότι, ἐπειδὴ κατὰ τὰ ἐν τῇ § 29 ἀποδειχθέντα τὸ $\pi^{\pi} - 1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\pi - 1$ καὶ δίδει πηλίκον ἐκτελουμένης τῆς διαιρέσεως

$$\pi^{\pi-1} + \pi^{\pi-2} + \dots + \pi + 1,$$

ἔπεται ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\pi^{\pi} - 1 = (\pi^{\pi-1} + \pi^{\pi-2} + \dots + \pi + 1)(\pi - 1),$$

ἐπομένως

$$K = \frac{a(\pi^{-1} + \pi^{-2} + \dots + \pi + 1)(\pi - 1)}{\pi - 1} = a(\pi^{-1} + \pi^{-2} + \dots + \pi + 1).$$

Όταν δὲ $\pi = 1$, τότε $a(\pi^{-1} + \pi^{-2} + \dots + \pi + 1)$ θέλει εἶναι ἴσον μὲ ar , διότι τὸ πολυώνυμον $\pi^{-1} + \pi^{-2} + \dots + \pi + 1$ σύγκειται προφανῶς ἐκ r ὅρων, ἕκαστος τῶν ὁποίων καθίσταται ἴσος τῇ μονάδι, ὅταν $\pi = 1$. Καὶ τῷ ὄντι, ὅταν $\pi = 1$, τότε πάντες οἱ ὅροι τῆς δεδομένης γεωμετρικῆς προόδου

$$\div a : b : \gamma : \delta : \varepsilon \dots$$

καθίστανται ἴσοι τῷ a , ἐπομένως ar θέλει προφανῶς παριστᾶ τὸ ἄθροισμα τῶν r ὅρων αὐτῆς.

Όταν $\pi < 1$, τουτέστιν ὅταν ἡ δεδομένη γεωμετρικὴ πρόοδος ᾖ φθίνουσα, τότε, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς τοῦ τύπου (2) εἶναι ἀρνητικοί, μεταβάλλομεν ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ τὰ σημεῖα καὶ ἔχομεν

$$K = \frac{a - \lambda\pi}{1 - \pi} = \frac{a}{1 - \pi} - \lambda \cdot \frac{\pi}{1 - \pi},$$

βλέπομεν δὲ ὅτι τότε τὸ ζητούμενον ἄθροισμα K σύγκειται ἐκ δύο μερῶν $\frac{a}{1 - \pi}$ καὶ $\lambda \cdot \frac{\pi}{1 - \pi}$, ὧν τὸ μὲν πρῶτον εἶναι ἀμετάβλητον, ὁσοιδήποτε καὶ ἂν ᾖναι οἱ λαμβανόμενοι ὅροι, τὸ δὲ δεύτερον $\lambda \cdot \frac{\pi}{1 - \pi}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμβανόμενων ὅρων αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον· διότι τότε κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ § 127 ὁ μὲν παράγων λ τοῦ γινομένου $\lambda \cdot \frac{\pi}{1 - \pi}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὁ δὲ ἕτερος αὐτοῦ παράγων $\frac{\pi}{1 - \pi}$ εἶναι ποσότης ἀμετάβλητος.

Τὸ ὅριον λοιπὸν, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων φθινούσης τινὸς γεωμετρικῆς προόδου, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμβανομένων αὐτῆς ὅρων αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον, εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς προόδου καὶ παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἡλαττωμένην κατὰ τὸν λόγον τῆς προόδου.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$\div 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81} : \dots,$$

ἥς ὁ λόγος εἶναι $\frac{1}{3}$, εἶναι κατὰ τὸν ἀνωτέρω εὐρεθέντα κανόνα

$$\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Ὡσαύτως, τὸ ὄριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὕρων τῆς φθινοῦσης γεωμετρικῆς προόδου

$$\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64} : \dots,$$

ἥς ὁ λόγος εἶναι $\frac{1}{2}$, εὐρίσκεται κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα καὶ εἶναι

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

130. Οἱ τύποι (1) καὶ (2) περιέχουσι πέντε διαφόρου σημασίας ποσότητας a , π , λ , r , K καὶ χρησιμεύουσιν εἰς τὸ νὰ εὐρίσκωμεν δύο ὁποιασδήποτε τούτων, ὅταν αἱ τρεῖς ἄλλαι μᾶς ἦναι γνωσταί. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀντικαθιστῶμεν ἐν αὐτοῖς ἀντὶ τῶν τριῶν δεδομένων ποσοτήτων a , π , λ , r , K τὰς τιμὰς αὐτῶν καὶ νὰ λύωμεν τὸ προκύπτον σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους ὡς πρὸς τὰς ἀγνώστους ταύτας. Ὁ ἀκόλουθος πίναξ περιέχει τὰς λύσεις τῶν 10 διαφορῶν προβλημάτων, ἅτινα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν συνδυάζοντες καθ' ὅλους τοὺς διαφοροὺς δυνατοὺς τρόπους δύο ἐκ τῶν πέντε ποσοτήτων a , π , λ , r , K .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Δεδομένα } a, \pi, r. \\ \text{Ζητούμενα } \lambda, K. \end{array} \right\} \lambda = a\pi^{v-1}, \quad K = \frac{\lambda\pi - a}{\pi - 1} = \frac{a(\pi^v - 1)}{\pi - 1}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Δεδομένα } \lambda, \pi, r. \\ \text{Ζητούμενα } a, K. \end{array} \right\} a = \frac{\lambda}{\pi^{v-1}}, \quad K = \frac{\lambda(\pi^v - 1)}{\pi^{v-1}(\pi - 1)}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Δεδομένα } a, r, \lambda. \\ \text{Ζητούμενα } \pi, K. \end{array} \right\} \pi = \sqrt[v-1]{\frac{\lambda}{a}}, \quad K = \frac{\sqrt[v-1]{\lambda^v} - \sqrt[v-1]{a^v}}{\sqrt[v-1]{\lambda} - \sqrt[v-1]{a}}.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } \pi, r, K. \\ \text{Ζητούμενα } a, \lambda. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{K(\pi-1)}{\pi^v-1}, \quad \lambda = \frac{K\pi^{v-1}(\pi-1)}{\pi^v-1}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } a, r, K. \\ \text{Ζητούμενα } \pi, \lambda. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \pi^{v-1} + \pi^{v-2} + \dots + 1 = \frac{K}{a}, \quad \lambda = a\pi^{v-1}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } \lambda, r, K. \\ \text{Ζητούμενα } \pi, a, \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{v-1} + \left(\frac{1}{\pi}\right)^{v-2} + \dots + 1 = \frac{K}{\lambda}, \quad a = \lambda \left(\frac{1}{\pi}\right)^{v-1} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } a, \pi, \lambda. \\ \text{Ζητούμενα } K, r. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} K = \frac{\lambda\pi - a}{\pi - 1}, \quad r = 1 + \frac{\log \lambda - \log a}{\log \pi}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } a, \lambda, K. \\ \text{Ζητούμενα } \pi, r. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \pi = \frac{K - a}{K - \lambda}, \quad r = 1 + \frac{\log \lambda - \log a}{\log \pi}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } a, \pi, K. \\ \text{Ζητούμενα } \lambda, r. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{a + K(\pi - 1)}{r}, \quad r = 1 + \frac{\log \lambda - \log a}{\log \pi}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Δεδομένα } \lambda, \pi, K. \\ \text{Ζητούμενα } a, r. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a = \lambda\pi - K(\pi - r), \quad r = 1 + \frac{\log \lambda - \log a}{\log \pi}. \end{array} \right.$$

Ἐκ τῶν 10 τούτων προβλημάτων τὸ μὲν πέμπτον καὶ ἕκτον, ἐν ᾧ ὡς ἄγνωστος λαμβάνεται ἀντὶ τοῦ π τὸ κλάσμα $\frac{1}{\pi}$, παρέχουσι πρὸς εὐρ-
 ρεσιν τῶν ζητουμένων ἐξισώσεις βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου, ὅταν
 τὸ r παριστᾷ ἀριθμὸν μεγαλειότερον τοῦ 3, καὶ ἡ λύσις αὐτῶν ὑπερβαί-
 νει τὰ ὅρια τῆς παρουσίας στοιχειώδους συγγραφῆς, τῶν δὲ τεσσάρων
 τελευταίων ἡ ἄγνωστος r εὐρίσκεται διὰ τῶν λογαρίθμων, περὶ ὧν θέ-
 λουμεν κάμει λόγον ἐν τῷ ἐπομένῳ βιβλίῳ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΥΝΕΧΗ ΚΛΑΣΜΑΤΑ. — ΝΟΜΟΣ ΚΑΘ' ΟΝ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΝΤΑΙ ΤΑ
 ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΗΓΜΕΝΑ

ΣΥΝΕΧΗ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

131. Καλοῦνται *συνεχῇ κλάσματα* αἱ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις τῆς
 μορφῆς

$$a + \frac{a'}{\beta + \frac{\beta'}{\gamma + \frac{\gamma'}{\delta + \kappa\tau\lambda}}}$$

τῶν γραμμάτων $a, a', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \delta, \kappa\tau\lambda$. παριστώντων ἀκεραίους καὶ θετικούς ἀριθμούς. Καὶ ὅταν μὲν ἡ τῆς ἀνωτέρω μορφῆς παράστασις περατοῦται κᾶπου, τὸ ὑπ' αὐτῆς ἀποτελούμενον συνεχὲς κλάσμα καλεῖται *πεπερασμένον*, ὅταν δὲ παρατείνεται ἐπ' ἄπειρον, τότε τὸ ὑπ' αὐτῆς ἀποτελούμενον συνεχὲς κλάσμα καλεῖται *ἀπέραντον* ἢ *ἀτελεύτητον*.

Παραδείγματος χάριν, τὸ συνεχὲς κλάσμα

$$5 + \frac{3}{4 + \frac{2}{3 + \frac{1}{2}}}$$

εἶναι πεπερασμένον καὶ παριστᾷ τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ εὐρίσκομεν ἐκτελοῦντες τὴν σειρὰν τῶν ἐξῆς πράξεων

$$3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}, \quad \frac{2}{3 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{7}{2}} = \frac{4}{7}, \quad 4 + \frac{4}{7} = \frac{32}{7},$$

$$\frac{3}{4 + \frac{2}{3 + \frac{1}{2}}} = \frac{3}{\frac{32}{7}} = \frac{21}{32}, \quad 5 + \frac{3}{4 + \frac{2}{3 + \frac{1}{2}}} = 5 + \frac{21}{32} = \frac{181}{32}.$$

132. Τὰ συνήθως ἐν χρήσει συνεχῆ κλάσματα εἶναι ἐκεῖνα, ἐν οἷς τὰ γράμματα $a', \beta', \gamma', \kappa\tau\lambda$. εἶναι ἴσα τῇ μονάδι, τουτέστι τὰ τῆς μορφῆς

$$a + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \kappa\tau\lambda}}}$$

περὶ τούτων δὲ καὶ μόνον θέλομεν ἀποκλειστικῶς κάμει λόγον ἐνταῦθα.

Οἱ ἀριθμοὶ $a, b, \gamma, \delta, \dots$ τοιούτου τινὸς συνεχοῦς κλάσματος καλοῦνται *ἀτελῆ πηλίκα*, ἕκαστος δὲ τούτων μετὰ τοῦ διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως μετ' αὐτοῦ συνδεομένου μέρους καλεῖται *πλήρης πηλίκον*. Παραδείγματα χάριν, αἱ παραστάσεις

$$a + \frac{1}{b + \kappa\tau\lambda.}, \quad b + \frac{1}{\gamma + \kappa\tau\lambda.}, \quad \gamma + \frac{1}{\delta + \kappa\tau\lambda.}, \quad \delta + \kappa\tau\lambda.$$

εἶναι τὰ καλούμενα *πλήρη πηλίκα* τοῦ ἀνωτέρω συνεχοῦς κλάσματος.

Τὰ κλάσματα $\frac{1}{b}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}, \dots$ καλοῦνται *συστατικά κλάσματα*, αἱ δὲ παραστάσεις

$$a, \quad a + \frac{1}{b}, \quad a + \frac{1}{b + \frac{1}{\gamma}}, \quad a + \frac{1}{b + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta}}}$$

ἃς σχηματίζομεν περατοῦντες τὸ συνεχὲς κλάσμα εἰς ἕκαστον τῶν ἀτελῶν αὐτοῦ πηλίκων $a, b, \gamma, \delta, \dots$, καλοῦνται *ἡγμένα κλάσματα* ἢ *ἀπλῶς ἡγμένα*.

133. Τὰ τῆς ἀνωτέρω μορφῆς συνεχῆ κλάσματα παρουσιάζονται πάντοτε εἰς ἡμᾶς, ὡςάκις θέλομεν νὰ παραστήσωμεν δι' ἀριθμῶν κλασματικὰς ἢ ἀσυμμέτρους ποσότητας ἢ ἀριθμούς, ὧν δυνάμεθα νὰ εὕρισκωμεν τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἀξίαν. Ὡς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν ποσότητός τινος A ἢ ἀριθμοῦ τινος A μὴ ἀκεραίου, καὶ ἔστω a ὁ μεγαλύντερος ἀκέραιος, ὁ περιεχόμενος ἐν αὐτῷ. Ἐπειδὴ τότε ἡ διαφορὰ $A - a$ θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος, αὕτη δύναται προφανῶς νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{B}$, τοῦ B περιστῶντος ἀριθμὸν μεγαλύντερον τῆς μονάδος. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$A = a + \frac{1}{B} \quad (1).$$

Ἀλλ' ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ B δὲν εἶναι ἀκέραιος καὶ ὅτι b περιστῶ τὸν μεγαλύντερον ἀκέραιον ἀριθμὸν, τὸν ἐμπεριεχόμενον εἰς αὐτόν, θέλομεν ἔχει σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω

$$B = b + \frac{1}{\Gamma} \quad (2),$$

τοῦ Γ παριστῶντος ἀριθμὸν μεγαλείτερον τῆς μονάδος, καὶ ὅστις, ἂν δὲν ᾖναι ἀκέραιος, θέλει μᾶς παράσχει τὴν ἰσότητα

$$\Gamma = \gamma + \frac{1}{\Delta} \quad (3),$$

τοῦ Δ παριστῶντος ἀριθμὸν μεγαλείτερον τῆς μονάδος, καὶ οὕτω καθέξῃς. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει, ἀντικαθιστῶντες εἰς μὲν τὴν ἰσότητα (1) ἀντὶ τοῦ Β τὴν ὑπὸ τῆς ἰσότητος (2) παριστωμένην τιμὴν αὐτοῦ, εἰς δὲ τὴν ἐντεῦθεν προκύπτουσαν νέαν ἰσότητα ἀντὶ τοῦ Γ τὴν ἀπὸ τῆς ἰσότητος (3) παρεχομένην τιμὴν αὐτοῦ, καὶ οὕτω καθέξῃς, πρὸς παράστασιν τῆς τιμῆς τοῦ Α τὸ ἐξῆς συνεχὲς κλάσμα

$$A = a + \frac{1}{b + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\Delta}}}$$

Ἐστω π. χ. ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{97}{78}$. Θέλομεν ἔχει σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω τὰς ἰσότητας

$$\frac{97}{78} = 1 + \frac{19}{78} = 1 + \frac{1}{\frac{78}{19}} \quad (1)$$

$$\frac{78}{19} = 4 + \frac{2}{19} = 4 + \frac{1}{\frac{19}{2}} \quad (2)$$

$$\frac{19}{2} = 9 + \frac{1}{2} \quad (3),$$

καὶ ἐπειδὴ ἐφθάσαμεν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$, οὗτινος ὁ παρονομαστής εἶναι ἀκέραιος, τοῦ ἀριθμητοῦ ὄντος ἴσου τῇ μονάδι, ἡ μὲν πρᾶξις εὐρίσκεται περατωθεῖσα, ὁ δὲ δεδομένος κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{97}{78}$ θέλει παρίστασθαι μετὰ τὴν ἐν τῇ ἰσότητι (1) καὶ τοῖς ἐπομένοις ἐκτέλεσιν τῶν δυνατῶν ἀντικαταστάσεων, διὰ τοῦ πεπερασμένου συνεχοῦς κλάσματος

$$\frac{97}{78} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2}}}$$

Ἐστω πρὸς τοῦτοις πρὸς ἐκτίμησιν ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς $\sqrt{6}$. Ἐπειδὴ ὁ 6 περιέχεται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων τετραγώνων 4 καὶ 9, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων 2 καὶ 3, παριστῶντες δὲ διὰ $\frac{1}{x}$ τὸ μικρότερον τῆς μονάδος κλάσμα, ὅπερ πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 2, ἵνα εὐρωμεν τὴν ζητούμενην τιμὴν τοῦ $\sqrt{6}$, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{x} \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως

$$\frac{1}{x} = \sqrt{6} - 2 \quad \text{καὶ ἐπομένως} \quad x = \frac{1}{\sqrt{6} - 2} \quad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\sqrt{6} - 2}$ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $\sqrt{6} + 2$ θέλομεν ἔχει ἀντὶ τῆς ἰσότητος (2) τὴν ἰσότητα

$$x = \frac{1}{\sqrt{6} - 2} = \frac{\sqrt{6} + 2}{(\sqrt{6} - 2)(\sqrt{6} + 2)} = \frac{\sqrt{6} + 2}{2} \quad (3).$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ $\sqrt{6}$ περιέχεται μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 3, ἔπεται ὅτι ἡ ὑπὸ τῆς ἰσότητος (3) παρεχομένη τιμὴ τῆς x θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ τῶν κλασμάτων $\frac{2+2}{2}$ καὶ $\frac{3+2}{2}$, ἡ μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 2 καὶ 3, καὶ δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ μικτοῦ $2 + \frac{1}{y}$, τοῦ y παριστῶντος ἀριθμὸν μεγαλύτερον τῆς μονάδος. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει κατὰ ταῦτα

$$x = 2 + \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{6} + 2}{2} \quad (3).$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος

$$2 + \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{6} + 2}{2}$$

πορίζομεθα εὐκόλως

$$\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{6} - 2}{2}, \quad \text{ἐπομένως} \quad y = \frac{2}{\sqrt{6} - 2} \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντες πάλιν τοὺς δύο ὅρους τοῦ τελευταίου κλάσματος ἐπὶ $\sqrt{6}+2$ θέλομεν ἔχει ἀντὶ τῆς ισότητος (4) τὴν ισότητα

$$\psi = \frac{2}{\sqrt{6}-2} = \frac{2(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6})^2-2^2} = \frac{2(\sqrt{6}+2)}{2} = \sqrt{6}+2 \quad (5).$$

Ἡ τιμὴ λοιπὸν τῆς ψ θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ τοῦ 4 καὶ 5, καὶ δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ μικτοῦ $4+\frac{1}{\omega}$, τοῦ ω παριστῶντος ἀριθμὸν μεγαλείτερον τῆς μονάδος. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει

$$\psi = 4 + \frac{1}{\omega} = \sqrt{6}+2 \quad (5).$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ισότητος

$$4 + \frac{1}{\omega} = \sqrt{6}+2$$

ποριζόμεθα πάλιν εὐκόλως τὴν τιμὴν τῆς ω

$$\omega = \frac{4}{\sqrt{6}-2} \quad (6),$$

ἐπειδὴ δὲ ἀνωτέρω εὑρομεν ὅτι καὶ

$$\chi = \frac{4}{\sqrt{6}-2},$$

ἔπεται ὅτι $\omega = \chi$. Ἐπειδὴ δὲ $\chi = 2 + \frac{1}{\psi}$, καὶ $\psi = 4 + \frac{1}{\omega}$ ἢ $4 + \frac{1}{\chi}$ θέλομεν ἔχει προφανῶς πρὸς παράστασιν τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ $\sqrt{6}$ τὸ ἐξῆς ἀπέραντον συνεχὲς κλάσμα

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{4}{2 + \frac{4}{4 + \frac{4}{2 + \frac{4}{4 + \chi \tau \lambda}}}}$$

τοῦ ὁποίου τὰ ἀτελῆ πηλίκα 2 καὶ 4 ἀπὸ τοῦ δευτέρου μέχρι τοῦ τρίτου, συμπεριλαμβανομένου καὶ τούτου, ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἐπ' ἄπειρον.

Παρατήρησις 1 — Εὐκόλως παρατηρεῖ τις ὅτι πρὸς τροπὴν τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος $\frac{97}{78}$, καὶ ἐν γένει ὅποιουδήποτε τοιούτου, πρέ-

πει νὰ διαιρέσωμεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ 97 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ 78, ἔπειτα τὸ 78 διὰ τοῦ εὑρεθησομένου ὑπολοίπου 19, ἔπειτα τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον 19 διὰ τοῦ εὑρεθησομένου δευτέρου ὑπολοίπου 2, καὶ οὕτω καθεξῆς· ἐν ἐνὶ λόγῳ, ἐκτελοῦμεν ἐπὶ τῶν ὅρων τοῦ ἀναγώγου κλάσματος, τοῦ πρὸς τροπὴν εἰς συνεχῆς δοθέντος, τὰς αὐτὰς πράξεις, ἃς καὶ ὅταν ζητῶμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι θέλομεν οὕτως εὑρεῖ πάντοτε ὑπόλοιπόν τι μηδέν, συμπεραίνομεν ὅτι θέλομεν φθάσει μετὰ τινὰς διαιρέσεις εἷς τι πηλίκον ἀκέραιον. Ἐπεταὶ λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι:

Πᾶς σύμμετρος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ πεπερασμένου συνεχοῦς κλάσματος.

Ἐπειδὴ δὲ ἀπεδείξαμεν ἀνωτέρω ὅτι

Πᾶρ πεπερασμένον συνεχῆς κλάσμα παριστᾷ σύμμετρον ἀριθμόν.
Συμπεραίνομεν ὅτι

Πᾶς ἀσύμμετρος ἀριθμὸς δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ἢ διὰ συνεχοῦς κλάσματος ἀτελεσιτέλου.

Παρατήρησις 2. — Ἐὰν παραβάλωμεν τὸ συνεχῆς κλάσμα

$$1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2}}}$$

ὅπερ εὑρομεν τρέψαντες τὸ κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{97}{78}$ εἰς τοιοῦτον, μὲ τὰ καθέκαστα τῶν πρὸς εὑρεσιν αὐτοῦ ἐκτελεσθεισῶν πράξεων, βλέπομες εὐκόλως ὅτι τὰ διαδοχικὰ ἀτελῆ αὐτοῦ πηλίκα 1, 4, 9, 2 εἶναι τὰ διαδοχικὰ πηλίκα 1, 4, 9, 2, ἅτινα εὐρίσκομεν ἐκτελοῦντες τὰς πρὸς εὑρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν δύο ὅρων τοῦ ὑπ' αὐτοῦ παριστωμένου ἀναγώγου κλάσματος $\frac{97}{78}$ διαδοχικὰς διαιρέσεις, ὡς τοῦτο φαίνεται ἐν τῇ ἐπομένῃ διατάξει τῶν πρὸς τοῦτο πράξεων.

97	49	2	1	0
1	4	9	2	
78	19	2	1	

Ἐπεταὶ λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι,

Ἴτα σχηματίζωμεν τὸ συνεχὲς κλάσμα, τὸ παριστῶν δεδομένον κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα, ἀρκεῖ γὰρ ἐκτελέσωμεν τὰς πρὸς εὗρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν δύο ὄρων αὐτοῦ διαιρέσεις καὶ γὰρ λάβωμεν τὰ εὐρεθησόμενα διαδοχικὰ πηλικά ἀπὸ τοῦ πρώτου μέχρι τοῦ τελευταίου ὡς ἀτελῆ πηλικά τοῦ συνεχοῦς.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα εὕρωμεν τὸ συνεχὲς κλάσμα, τὸ παριστῶν τὸ κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{1103}{887}$, ἐκτελοῦμεν τὰς πρὸς εὗρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν δύο ὄρων αὐτοῦ ἀκολουθοῦσας πράξεις,

$$\begin{array}{r|l} 1103 & 1 \mid 4 \mid 9 \mid 2 \mid 1 \mid 1 \mid 4 \\ \hline & 887 \mid 216 \mid 23 \mid 9 \mid 5 \mid 4 \mid 1 \\ \hline 216 & 23 \mid 9 \mid 5 \mid 4 \mid 1 \mid 0 \end{array}$$

καὶ εὐρίσκομεν τὰ διαδοχικὰ πηλικά 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4, δι' ὧν σχηματίζομεν τὸ ἐξῆς συνεχὲς

$$1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}}$$

οὗτινος τὰ διαδοχικὰ ἀτελῆ πηλικά εἶναι τὰ ἀνωτέρω διαδοχικῶς εὐρεθέντα.

Παρατήρησις 3. — Ἄξιον παρατηρήσεως πρὸς τούτοις εἶναι ὅτι, ἐὰν τὸ πρὸς τροπὴν εἰς συνεχὲς δεδομένον κοινὸν κλάσμα δὲν ᾖ ἀνάγωγον, τὸ συνεχὲς κλάσμα, ὅπερ εὐρίσκομεν διὰ τοῦ προηγουμένου τρόπου, εἶναι αὐτὸ τοῦτο, ὅπερ ἠθέλομεν εὔρει, ἂν μᾶς ἐδίδετο πρὸς τροπὴν τὸ ἀνάγωγον κλάσμα, τὸ ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ. Παραδείγματος χάριν, ἂν ἔχομεν πρὸς τροπὴν εἰς συνεχὲς τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{624}{1328}$, ἠθέλομεν ἐκτελέσει τὰς ἐξῆς πράξεις

$$\begin{array}{r|l} & 0 \mid 2 \mid 7 \mid 1 \mid 4 \\ \hline 624 & 1328 \mid 624 \mid 80 \mid 64 \mid 16 \\ \hline 624 & 80 \mid 64 \mid 16 \mid 0 \end{array}$$

καὶ εὕρει τὸ αὐτὸ συνεχὲς κλάσμα

$$\begin{array}{r}
 0 + \frac{4}{} \\
 2 + \frac{4}{} \\
 7 + \frac{4}{} \\
 1 + \frac{4}{4}
 \end{array}$$

ὅπερ ἠθέλομεν εὑρεῖ, ἂν ἐτρέπομεν εἰς συνεχῆς ἀντὶ τοῦ δεδομένου $\frac{624}{1328}$ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{39}{83}$. Διότι ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 624 καὶ 1328 εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 16, καὶ τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα 624, 80, 64 καὶ 16 θέλουσιν εἶναι ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 16, τὰ δὲ διαδοχικὰ πηλίκια 0, 2, 7, 1 καὶ 4 μένουσιν ἀμετάβλητα, ὥς φαίνεται καταφανῶς ἐκτελουμένων ἐκ νέου τῶν πρὸς τοῦτο πράξεων ἐπὶ τοῦ ἰσοδυναμοῦ ἀναγώγου κλάσματος $\frac{39}{83}$.

$$\begin{array}{r|rr|rr|rr}
 & 0 & 2 & 7 & 1 & 4 \\
 39 & 83 & 39 & 5 & 4 & 1 \\
 \hline
 39 & 5 & 4 & 1 & 0 &
 \end{array}$$

ΝΟΜΟΣ ΚΑΘ' ΟΝ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΝΤΑΙ ΤΑ ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΗΓΜΕΝΑ

134. Ἐστω τὸ συνεχῆς κλάσμα

$$\begin{array}{r}
 a + \frac{4}{} \\
 b + \frac{4}{} \\
 \gamma + \frac{4}{} \\
 \delta + \frac{4}{\varepsilon + \kappa\tau\lambda.}
 \end{array}$$

οὗτινος τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα κατὰ τὸν περὶ τούτων δοθέντα ἐν τῇ § 132 ὅρισμὸν εἶναι

$$a \ \eta \ \frac{a}{1}, \quad a + \frac{4}{b}, \quad a + \frac{4}{b + \frac{4}{\gamma}}, \quad a + \frac{4}{b + \frac{4}{\gamma + \frac{4}{\delta}}} \ \kappa\tau\lambda.,$$

Βλέπομεν εὐκόλως ὅτι τὸ τρίτον ἡγμένον παράγεται ἐκ τοῦ δευτέ-

ρου, ἀντικαθισταμένου ἐν αὐτῷ $\beta + \frac{1}{\gamma}$ ἀντὶ τοῦ β · ὅτι τὸ τέταρτον ἡγμένον παράγεται ἐκ τοῦ τρίτου, ἀντικαθισταμένου ἐν αὐτῷ $\gamma + \frac{1}{\delta}$ ἀντὶ τοῦ γ , καὶ οὕτω καθεξῆς· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὅτι

Πᾶν ἡγμένον τάξεως τινος παράγεται ἐκ τοῦ πρὸ αὐτοῦ, ἀντικαθισταμένου ἐν αὐτῷ ἀντὶ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ἀτελοῦς πηλίκου αὐτοῦ τοῦτο τὸ πηλίκον ἡξημένον κατὰ τὸ ἀκόλουθον συστατικὸν κλάσμα.

Ἄλλ' ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς ἐν ἐκάστῳ τῶν ἀνωτέρω ἡγμένων σεσημειωμένας πράξεις, θέλομεν εὑρεῖ ἀντ' αὐτῶν τὰ ἐξῆς κλάσματα

$$\frac{a}{1}, \frac{a\beta+1}{\beta}, \frac{(a\beta+1)\gamma+a}{\beta\gamma+1}, \frac{[(a\beta+1)\gamma+a]\delta+a\beta+1}{(\beta\gamma+1)\delta+\beta}, \text{ κτλ.}$$

ὧν τὸ μὲν τρίτον σχηματίζεται ἐκ τῶν δύο προηγουμένων, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τρίτον ἀτελὲς πηλίκον γ , καὶ προστεθῶσιν εἰς μὲν τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ δ ἀριθμητῆς τοῦ πρώτου, εἰς δὲ τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ δ παρονομαστῆς τοῦ αὐτοῦ· τὸ δὲ τέταρτον κλάσμα δ ἡγμένον σχηματίζεται ὡσαύτως ἐκ τῶν δύο προηγουμένων, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τέταρτον ἀτελὲς πηλίκον δ , καὶ προστεθῶσιν εἰς μὲν τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ δ ἀριθμητῆς τοῦ δευτέρου, εἰς δὲ τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ δ παρονομαστῆς τοῦ αὐτοῦ. Ἄν δὲ ἐσχηματίζομεν καὶ τὰ λοιπὰ διαδοχικὰ ἡγμένα, ἠθέλομεν εὑρεῖ ὡσαύτως ὅτι

Ἐκαστον ἡγμένον ἀπὸ τοῦ τρίτου σχηματίζεται ἐκ τῶν δύο προηγουμένων, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὅροι τοῦ ἀμέσως πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ θεωρούμενον ἡγμένον ἀτελὲς πηλίκον, καὶ προστεθῶσιν εἰς μὲν τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ δ ἀριθμητῆς, εἰς δὲ τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ δ παρονομαστῆς τοῦ πρὸ τοῦ προηγουμένου ἡγμένου.

Μὰς μένει δὲ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δ ἀνωτέρω εὑρεθεὶς νόμος εἶναι γενικὸς, καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ προφανῶς νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι, ὅταν οὗτος ἀληθεύῃ διὰ τρία διαδοχικὰ ἡγμένα, θέλει εἶναι ἐπίσης ἀληθὴς καὶ διὰ τὸ ἀκόλουθον.

Ἐστῶσαν λοιπὸν τέσσαρα ὁποιασδήποτε τάξεως διαδοχικὰ ἡγμένα συνεχοῦς τιнос κλάσματος

$$\frac{K}{K'}, \quad \frac{\Lambda}{\Lambda'}, \quad \frac{M}{M'}, \quad \frac{N}{N'},$$

καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μ εἶναι τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἡγμένον $\frac{M}{M'}$ ἀτελές πηλίκον, καὶ r τὸ ἀτελές πηλίκον, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἡγμένον $\frac{N}{N'}$. Ἐὰν ὁ ἀνωτέρω νόμος ἀληθεύῃ διὰ τὰ τρία πρῶτα, θέλομεν ἔχει κατὰ τοῦτον

$$\frac{M}{M'} = \frac{\Lambda\mu + K}{\Lambda'\mu + K'},$$

γνωρίζομεν δὲ ὅτι, ἵνα σχηματίσωμεν τὸ ἡγμένον $\frac{N}{N'}$, πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ πρὸ αὐτοῦ $\mu + \frac{1}{r}$ ἀντὶ τοῦ μ . Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν εἰς τὸ ἡγμένον $\frac{M}{M'}$, ἢ εἰς τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{\Lambda\mu + K}{\Lambda'\mu + K'}$, ἀντὶ τοῦ μ τὸ $\mu + \frac{1}{r}$, θέλομεν ἔχει

$$\frac{N}{N'} = \frac{\Lambda\left(\mu + \frac{1}{r}\right) + K}{\Lambda'\left(\mu + \frac{1}{r}\right) + K'} = \frac{\Lambda(\mu r + 1) + K r}{\Lambda'(\mu r + 1) + K' r} = \frac{(\Lambda\mu + K)r + \Lambda}{(\Lambda'\mu + K')r + \Lambda'}$$

ἢ, ἐπειδὴ ἔχομεν $\Lambda\mu + K = M$ καὶ $\Lambda'\mu + K' = M'$,

$$\frac{N}{N'} = \frac{Mr + \Lambda}{M'r + \Lambda'}.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ ἡγμένον $\frac{N}{N'}$ σχηματίζεται ἐκ τῶν δύο πρὸ αὐτοῦ $\frac{M}{M'}$ καὶ $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$, ὅπως καὶ τὸ ἡγμένον $\frac{M}{M'}$ ἐσχηματίσθη ἐκ τῶν δύο πρὸ αὐτοῦ $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$ καὶ $\frac{K}{K'}$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀνωτέρω ἡγμένα ὑπετέθησαν τάξεως ὁποιασδήποτε καὶ ὁ ἀνωτέρω νόμος εὑρέθη ἀληθὴς διὰ τὸ τρίτον ἡγμένον, ἔπεται ὅτι οὗτος εἶναι γενικὸς, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

135. Ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω νόμου στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν εὐκόλως καὶ ἀμέσως ἅπαντα τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα ὁποιοῦδήποτε συνεχοῦς κλάσματος. Ἐστω π. χ. τὸ συνεχὲς κλάσμα

$$1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}}}}$$

οὗτινος μᾶς ζητοῦνται ἅπαντα τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα. Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν πρῶτον τὰ δύο πρῶτα διαδοχικὰ ἡγμένα $\frac{1}{1}$ καὶ $\frac{5}{4}$, ἔπειτα γράφομεν ἐπὶ τινος ὀριζοντίου γραμμῆς τὰ διαδοχικὰ ἀτελῆ πηλικά 3, 2, 5, 2, 4, ὡς φαίνεται κάτωθεν, καὶ ὑπὸ τὸ πρῶτον ἀτελὲς πηλί-

		3	2	5	2	4
$\frac{1}{4}$,	$\frac{5}{4}$,	$\frac{16}{43}$,	$\frac{37}{30}$,	$\frac{201}{463}$,	$\frac{439}{356}$,	$\frac{1957}{1587}$,

κον 3 γράφομεν τὸ τρίτον ἡγμένον $\frac{16}{43}$, ὅπερ εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους 5 καὶ 4 τοῦ πρὸ αὐτοῦ ἡγμένου $\frac{5}{4}$ ἐπὶ 3 καὶ προσθέτοντες εἰς μὲν τὸ γινόμενον 15 τοῦ ἀριθμητοῦ τὸν ἀριθμητὴν 4, εἰς δὲ τὸ γινόμενον 12 τοῦ παρονομαστοῦ τὸν παρονομαστὴν 4 τοῦ πρώτου. Ὑπὸ τὸ ἀκόλουθον ἀτελὲς πηλίκον 2 γράφομεν τὸ τέταρτον ἡγμένον $\frac{37}{30}$, ὅπερ εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες 16 καὶ 13 ἐπὶ 2, καὶ προσθέτοντες εἰς μὲν τὸ γινόμενον 32 τοῦ ἀριθμητοῦ τὸν ἀριθμητὴν 5, εἰς δὲ τὸ γινόμενον 26 τοῦ παρονομαστοῦ τὸν παρονομαστὴν 4 τοῦ προηγουμένου ἡγμένου $\frac{5}{4}$, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου $\frac{1957}{1587}$, ὅπερ θέλει παριστᾷ τὴν ἀξίαν τοῦ δεδομένου συνεχοῦς.

* Ἄν εἴχομεν τὸ ἀκόλουθον συνεχὲς κλάσμα

$$0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}}$$

ἤθελομεν εὔρει κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τρόπον τὰ ἐξῆς αὐτοῦ ἡγμένα

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{4}{2}, \quad \frac{3}{7}, \quad \frac{4}{9}, \quad \frac{19}{43}, \quad \frac{99}{224},$$

ὣν τὸ πρῶτον εἶναι 0, διότι τὸ δεδομένον συνεχὲς δὲν ἔχει ἀκέραιον μέρος.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΗΓΜΕΝΩΝ

136. ΘΕΩΡΗΜΑ 1. — *Τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα δεδομένου συνεχοῦς κλάσματος εἶναι ἐναλλὰξ μικρότερα καὶ μεγαλείτερα τῆς ἀξίας τοῦ συνεχοῦς.*

* Ἀς παραστήσωμεν διὰ χ τὴν τιμὴν τοῦ δεδομένου συνεχοῦς. Θέλομεν ἔχει

$$\chi = a + \frac{1}{b + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \kappa\lambda.}}}$$

Τὸ πρῶτον αὐτοῦ ἡγμένον $\frac{a}{1}$ ἢ a εἶναι προφανῶς μικρότερον τοῦ χ · διότι τὸ χ ἰσοῦται τῷ a , ἡδὲ ἡμένῳ κατὰ τὸ παραλειπόμενον κλασματικὸν αὐτοῦ μέρος.

Τὸ δεύτερον αὐτοῦ ἡγμένον $a + \frac{1}{b}$ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ χ · διότι ὁ παρονομαστής b τοῦ κλάσματος $\frac{1}{b}$ εἶναι μικρότερος τοῦ b , ἡδὲ ἡμένου κατὰ τὸ μετ' αὐτὸ παραλειπόμενον μέρος τοῦ συνεχοῦς, ἐπομένως τὸ κλάσμα $\frac{1}{b}$ τὸ εἰς τὸ a προστιθέμενον, θέλει εἶναι μεγαλείτερον ἐκείνου, ὅπερ ἔπρεπε νὰ προστεθῇ, ἵνα ἀποτελεσθῇ ἡ ἀξία χ τοῦ δεδομένου συνεχοῦς

Τὸ τρίτον αὐτοῦ ἡγμένον $a + \frac{1}{b + \frac{1}{\gamma}}$ εἶναι μικρότερον τοῦ χ · διότι,

ἐπειδὴ τὸ γ εἶναι μικρότερον τοῦ $\gamma + \frac{1}{\delta + \kappa\lambda.}$, τὸ κλάσμα $\frac{1}{\gamma}$ εἶναι μεγαλείτερον ἐκείνου, ὅπερ πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸ b , ἵνα τὸ κλάσμα $a + \frac{1}{b + \frac{1}{\gamma}}$ παριστᾷ τὴν ἀξίαν χ τοῦ συνεχοῦς· ἐπειδὴ δὲ ὁ παρονομαστής

$6 + \frac{1}{\gamma}$ εἶναι μεγαλειότερος τοῦ δέοντος, τὸ εἰς τὸ α προστιθέμενον κλάσμα $\frac{1}{6 + \frac{1}{\gamma}}$ θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ δέοντος, ἐπομένως τὸ οὕτως ἀποτελούμενον τρίτον ἡγμένον εἶναι μικρότερον τῆς ἀξίας χ τοῦ δεδομένου συνεχοῦς.

Ὅμοιοτρόπως σκεπτόμενοι ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι τὸ τέταρτον ἡγμένον εἶναι μεγαλειότερον τοῦ χ , τὸ πέμπτον μικρότερον αὐτοῦ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι ἡ τιμὴ χ τοῦ συνεχοῦς περιλαμβάνεται πάντοτε μεταξὺ δύο διαδοχικῶν αὐτοῦ ἡγμένων.

137. ΘΕΩΡΗΜΑ 2.— Ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ἡγμένων εἶναι κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἡγμένων.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς λάβωμεν τρία ὅποιαδήποτε διαδοχικά ἡγμένα $\frac{K}{K'}$, $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$, $\frac{M}{M'}$, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μ εἶναι τὸ εἰς τὸ ἡγμένον $\frac{M}{M'}$ ἀντιστοιχοῦν ἀτελὲς πηλίκον. Θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἐν τῇ § 134 ἀποδειχθέντα

$$\frac{M}{M'} = \frac{\Lambda\mu + K}{\Lambda'\mu + K'}.$$

Τούτου τεθέντος, ἂς ὑπολογίσωμεν τὰς διαφορὰς ἑκατέρου τῶν διαδοχικῶν ἡγμένων $\frac{K}{K'}$, $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$, $\frac{M}{M'}$ ἀπὸ τοῦ ἐπομένου αὐτῶ. Θέλομεν ἔχει

$$\frac{\Lambda}{\Lambda'} - \frac{K}{K'} = \frac{\Lambda K' - K \Lambda'}{\Lambda' K'} = - \frac{(K \Lambda' - \Lambda K')}{\Lambda' K'},$$

$$\frac{M}{M'} - \frac{\Lambda}{\Lambda'} = \frac{\Lambda\mu + K}{\Lambda'\mu + K'} - \frac{\Lambda}{\Lambda'} = \frac{\Lambda\Lambda'\mu + K\Lambda' - \Lambda\Lambda'\mu - \Lambda K'}{\Lambda'(\Lambda'\mu + K')} = \frac{K\Lambda' - \Lambda K'}{\Lambda' M'}.$$

Εὐρέθη λοιπὸν ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{-(K\Lambda' - \Lambda K')}{\Lambda' K'}$ καὶ $\frac{K\Lambda' - \Lambda K'}{\Lambda M}$, τὰ παριστῶντα τὰς διαφορὰς τῶν διαδοχικῶν ἡγμένων, ἔχουσι παρονομαστὰς τὰ γινόμενα τῶν παρονομαστῶν τῶν ἡγμένων, καὶ ἀριθμητὰς ἴσους καὶ ἐναντίων σημείων. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος, τοῦ παριστῶντος τὴν διαφορὰν δύο διαδοχικῶν ἡγμένων, εἶναι, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου λαμβανόμενος, πάντοτε ὁ αὐτός, ὅποιαδήποτε καὶ ἂν ᾖ τὰ λαμβανόμενα διαδοχικά ἡγμένα. Ἀλλὰ, ἂν

ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἡγμένου $\alpha + \frac{1}{\epsilon}$ ἀφαιρέσωμεν τὸ πρῶτον $\frac{\alpha}{1}$, εὐρίσκομεν διαφορὰν $\frac{1}{\epsilon}$. Λοιπὸν ὁ ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου σταθερὸς ἀριθμητῆς τοῦ παριστῶντος τὴν διαφορὰν δύο διαδοχικῶν ἡγμένων κλάσματος εἶναι ἡ μονάς, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

138. ΘΕΩΡΗΜΑ 3. — *Πᾶρ ἡγμένων εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον.*

Ἄς ὑποθέσωμεν, εἰ δυνατόν, ὅτι οἱ ὅροι τοῦ ἡγμένου $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$ ἔχουσι κοινόν τινα παράγοντα π , καὶ ἔστω $\frac{K}{K'}$ τὸ πρὸ αὐτοῦ ἢ τὸ μετ' αὐτὸ ἡγμένον. Θέλωμεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα

$$\frac{\Lambda}{\Lambda'} - \frac{K}{K'} = \frac{\Lambda K' - K \Lambda'}{K' \Lambda'} = \frac{\pm 1}{K' \Lambda'},$$

τουτέστιν ἡ διαφορὰ $\Lambda K' - K \Lambda'$ θέλει εἶναι ἢ $+1$ ἢ -1 . Ἀλλ' ἐὰν ὁ π ᾖ κοινὸς παράγων τοῦ Λ καὶ Λ' , θέλει διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτῶν $\Lambda K'$ καὶ $K \Lambda'$, ἐπομένως καὶ τὴν διαφορὰν τῶν $\Lambda K' - K \Lambda'$, τουτέστι τὴν μονάδα. Ἀλλ' ἡ μονάς διὰ τῆς μονάδος μόνον διαιρεῖται. Ὁ κοινὸς λοιπὸν παράγων π δὲν δύναται νὰ ᾖ ἄλλος ἢ ἡ μονάς, ὅτε οἱ ἀριθμοὶ Λ καὶ Λ' θέλουσιν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ἐπομένως τὸ κλάσμα $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$ ἀνάγωγον, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

139. ΘΕΩΡΗΜΑ 4. — *Ἐκαστος ἡγμένων δεδομένου συνεχοῦς κλάσματος προσεγγίζει εἰς τὴν ἀξίαν τοῦ συνεχοῦς περισσότερον ἢ τὸ πρὸ αὐτοῦ ἡγμένον.*

Ἄς λάβωμεν τὰ τρία διαδοχικὰ ἡγμένα $\frac{K}{K'}$, $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$ καὶ $\frac{M}{M'}$ τοῦ δεδομένου συνεχοῦς χ , καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μ εἶναι τὸ ἀτελὲς πηλίκον, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἡγμένον $\frac{M}{M'}$. Θέλωμεν ἔχει

$$\frac{M}{M'} = \frac{\Lambda \mu + K}{\Lambda' \mu + K'} \quad (1).$$

Ἀλλ' ἐὰν ἀντὶ τοῦ ἀτελοῦς πηλίκου μ λάβωμεν τὸ πλῆρες πηλίκον

$$\mu + \frac{1}{r + \frac{1}{\sigma + \frac{1}{\rho + \kappa \lambda.}}}$$

καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (4) τὴν τιμὴν αὐτοῦ, ἣν παριστῶμεν πρὸς συντομίαν διὰ ω , εἶναι φανερόν ὅτι θέλομεν ἔχει ἀντὶ τοῦ ἡγμένου $\frac{M}{M}$ τὴν ἀξίαν χ αὐτοῦ τοῦ δεδομένου συνεχοῦς. Ἡ τιμὴ λοιπὸν χ τοῦ δεδομένου συνεχοῦς δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{\Lambda\omega+K}{\Lambda'\omega+K'}$.

Τοῦτου τεθέντος, ἵνα ἀποδείξωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, ἀρκεῖ προφανῶς νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ $\chi - \frac{K}{K'}$ εἶναι, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου λαμβανομένη, μεγαλειτέρα τῆς $\chi - \frac{\Lambda}{\Lambda'}$. Καὶ τῷ ὄντι, θέλομεν ἔχει

$$\chi - \frac{K}{K'} = \frac{\Lambda\omega+K}{\Lambda'\omega+K'} - \frac{K}{K'} = \frac{\Lambda K'\omega - K\Lambda'\omega}{K'(\Lambda'\omega+K')} = \frac{\omega(\Lambda K' - K\Lambda')}{K'(\Lambda'\omega+K')} = \frac{\pm\omega}{K'(\Lambda'\omega+K')}$$

$$\chi - \frac{\Lambda}{\Lambda'} = \frac{\Lambda\omega+K}{\Lambda'\omega+K'} - \frac{\Lambda}{\Lambda'} = \frac{K\Lambda' - \Lambda K'}{\Lambda'(\Lambda'\omega+K')} = \frac{\mp 1}{\Lambda'(\Lambda'\omega+K')}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἀφ' ἑνὸς τὸ ω εἶναι μεγαλειότερον τοῦ μ , ὅπερ εἶναι τοῦλάχιστον ἴσον τῇ μονάδι, καὶ ἀφ' ἑτέρου τὸ Λ' εἶναι μεγαλειότερον τοῦ K' , ἔπεται ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{\pm\omega}{K'(\Lambda'\omega+K')}$, τὸ παριστῶν τὴν διαφορὰν $\chi - \frac{K}{K'}$, θέλει εἶναι καὶ διὰ τοὺς δύο τοῦτους λόγους μεγαλειότερον, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου λαμβανόμενον, τοῦ κλάσματος $\frac{\pm 1}{\Lambda'(\Lambda'\omega+K')}$, τοῦ παριστῶντος τὴν διαφορὰν $\chi - \frac{\Lambda}{\Lambda'}$. Τὸ ἡγμένον λοιπὸν $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$ προσεγγίζει περισσότερο εἰς τὴν τιμὴν τοῦ συνεχοῦς χ ἢ τὸ προηγούμενόν του $\frac{K}{K'}$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Παρατήρησις 1. — Ἐπειδὴ, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ω τοῦ κλάσματος $\frac{\omega}{K'(\Lambda'\omega+K')}$ ἔχῃ τὸ σημεῖον $+$ ἢ $-$, ὁ ἀριθμητὴς 1 τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\Lambda'(\Lambda'\omega+K')}$ πρέπει νὰ φέρῃ τὸ ἀντίθετον σημεῖον $-$ ἢ $+$, συμπεραίνομεν ὅτι, ὅταν τὸ ἡγμένον $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$ ᾖ μικρότερον ἢ μεγαλειότερον τοῦ χ , τὸ πρὸ αὐτοῦ ἡγμένον $\frac{K}{K'}$ θέλει εἶναι μεγαλειότερον ἢ μικρότερον αὐτοῦ. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἀπεδείχθη καὶ οὕτως ὅτι ἡ ἀξία παντὸς συνεχοῦς περιέχεται πάντοτε μεταξὺ δύο διαδοχικῶν αὐτοῦ ἡγμένων.

Παρατήρησις 2.—Ἐπὶ τοῦ προαποδειχθέντος θεωρήματος στηριζόμενοι συμπεραίνομεν πρὸς τούτοις, ὅτι ἡ ἀξία παντὸς ἡγμένου περιλαμβάνεται πάντοτε μεταξὺ δύο ὁποιωνδήποτε πρὸ αὐτοῦ κειμένων διαδοχικῶν ἡγμένων.

Διότι, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ

$$\alpha', \beta', \gamma', \delta' \dots \epsilon', \kappa', \lambda', \dots$$

τὰ διάφορα ἡγμένα δεδομένου τινὸς συνεχοῦς χ , ἐν ὁποιονδήποτε τούτων, π. χ. τὸ α' , δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παριστῶν τὴν ἀξίαν τοῦ συνεχοῦς, περατωθέντος εἰς τὸ ἀντιστοιχοῦν αὐτῷ ἀτελὲς πηλίκον. Ἀλλ' ἀπεδείχθη ἀνωτέρω ὅτι ἡ τιμὴ κ' τοῦ συνεχοῦς, περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν αὐτοῦ ἡγμένων. Ἄρα πᾶν ἡγμένον κ' τοῦ χ περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ὁποιωνδήποτε διαδοχικῶν καὶ πρὸ αὐτοῦ κειμένων ἡγμένων.

Παρατήρησις 3.—Ἐπειδὴ τὸ συνεχὲς χ περιέχεται πάντοτε μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν αὐτοῦ ἡγμένων $\frac{\kappa}{\kappa'}$ καὶ $\frac{\lambda}{\lambda'}$, ἔπεται πρὸς τούτοις ὅτι, ἡ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ ἑκατέρου τῶν διαδοχικῶν ἡγμένων διαφορὰ εἶναι πάντοτε μικρότερα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν τῶν ἡγμένων. Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι ἡ διαφορὰ αὕτη ἰσοῦται, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου λαμβανομένη, μὲ τὸ κλάσμα $\frac{1}{\kappa' \lambda'}$. Ἄρα

Τὸ λάθος, εἰς ὃ ὑποπίπτομεν λαμβάνοντες ἀντὶ τῆς τιμῆς χ τοῦ συνεχοῦς τὸ ἡγμένον αὐτοῦ $\frac{\kappa}{\kappa'}$ ἢ τὸ ἀμέσως ἐπόμενον αὐτῷ $\frac{\lambda}{\lambda'}$, εἶναι μικρότερον τοῦ κλάσματος, τοῦ ἔχοντος ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον $\kappa' \lambda'$ τῶν παρονομαστῶν αὐτοῦ τε καὶ τοῦ ἀμέσως ἐπομένου ἡγμένου $\frac{\lambda}{\lambda'}$, ἢ αὐτοῦ τε καὶ τοῦ ἀμέσως προηγούμενου $\frac{\kappa}{\kappa'}$.

Ὅταν λαμβάνωμεν ἀντὶ τῆς τιμῆς χ τοῦ συνεχοῦς τὸ ἡγμένον αὐτοῦ $\frac{\kappa}{\kappa'}$ καὶ δὲν γνωρίζωμεν τὸ ἀμέσως ἐπόμενον αὐτῷ ἡγμένον $\frac{\lambda}{\lambda'}$, ἔπειδὴ δ' ὁ παρονομαστής αὐτοῦ λ' εἶναι μεγαλείτερος τοῦ κ' , ἔπεται ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{1}{\kappa' \lambda'}$ θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{\kappa'^2}$. Λοιπὸν δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὅτι:

Τὸ μέθος, εἰς ὃ ὑποπίπτομεν λαμβάνοντες ἀντὶ τῆς τιμῆς χ τοῦ συνεχοῦς τὸ ἡγμένον αὐτοῦ $\frac{K}{K'}$, εἶναι μικρότερον τοῦ κλάσματος, τοῦ ἔχοντος ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ λαμβανομένου ἡγμένου.

Ἐστω, παραδείγματος χάριν, τὸ συνεχές

$$3 + \frac{4}{2 + \frac{4}{1 + \frac{4}{2 + \frac{4}{4 + \frac{4}{3 + \kappa\tau\lambda.}}}}}$$

οὗτινος τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα εὐρίσκονται κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τῆς § 134 καὶ εἶναι

$$\frac{3}{1}, \frac{7}{2}, \frac{40}{3}, \frac{27}{8}, \frac{118}{35}, \frac{381}{113}, \kappa\tau\lambda.$$

Ἐὰν λάβωμεν ἀντὶ τῆς τιμῆς τοῦ δεδομένου συνεχοῦς τὸ ἡγμένον αὐτοῦ $\frac{118}{35}$, τὸ εἰς ὃ ὑποπίπτομεν μέθος θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ κλάσματος $\frac{1}{35 \times 113}$, καὶ κατ' ἰσχυρότερον λόγον μικρότερον τοῦ $\frac{1}{35}$.

Παρατήρησις 4. — Δυνάμεθα ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω ἀποδείχθέντος θεωρήματος στηριζόμενοι νὰ εὕρωμεν εὐκόλως ὅτι

Τὸ εἰς ὃ ὑποπίπτομεν μέθος λαμβάνοντες ἡγμένον τι ἀντὶ τῆς τιμῆς τοῦ συνεχοῦς εἶναι μεγαλειότερον τοῦ κλάσματος, τοῦ ἔχοντος ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν αὐτοῦ τε καὶ τοῦ ἀμέσως ἐπομένου αὐτῷ ἡγμένου.

Τῷ ὄντι, εὕρομεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ διαφορὰ $\chi - \frac{\Lambda}{\Lambda'}$ ἰσοῦται, ἀνῆξαρτήτως τοῦ σημείου λαμβανομένη, τῷ κλάσματι $\frac{1}{\Lambda'(\Lambda'\omega + K')}$, ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ τοῦ ω περιλαμβάνεται προφανῶς μεταξὺ τοῦ ἀτελοῦς πηλίκου μ καὶ $\mu + 1$, ἔπεται ὅτι ἡ διαφορὰ $\chi - \frac{\Lambda}{\Lambda'}$ θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\Lambda'(\Lambda'\mu + \Lambda' + K')}$, ὅπερ εὐρίσκομεν ἀντικαθιστῶντες ἐν τῷ κλάσματι $\frac{1}{\Lambda'(\Lambda'\omega + K')}$ ἀντὶ τοῦ ω τὴν μεγαλειτέραν αὐτοῦ τιμὴν $\mu + 1$.

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα $\Lambda' \mu + \kappa'$ ἰσοῦται τῷ παρονομαστῇ M' τοῦ ἐπομένου τῷ $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$, ἡγμένου $\frac{M}{M'}$. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει

$$x - \frac{\Lambda}{\Lambda'} > \frac{1}{\Lambda'(\Lambda' + M')},$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ ζητούμενον.

Λοιπὸν κατὰ τὰ προαποδειχθέντα τὸ εἰς θ ὑποπίπτομεν λάθος λαμβάνοντες ὡς ἀνωτέρω ἀντὶ τῆς τιμῆς x τοῦ δεδομένου συνεχοῦς τὸ ἡγμένον αὐτοῦ $\frac{118}{35}$ εἶναι μεγαλειότερον τοῦ κλάσματος $\frac{1}{35 \cdot 35 + 113}$.

140. ΘΕΩΡΗΜΑ 4. — Ὅποιονδήποτε τῶν ἡγμένων δεδομένου συνεχοῦς προσεγγίζει εἰς τὴν τιμὴν αὐτοῦ περισσότερον παρ' ὅς ἄλλου κλάσματος ἔχοντος μικρότερον παρονομαστήν.

Ἐστωσαν $\frac{\kappa}{\kappa'}$, $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$, δύο διαδοχικὰ ἡγμένα, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\Lambda}{B}$, προσεγγίζει περισσότερον εἰς τὴν τιμὴν x τοῦ συνεχοῦς ἢ τὸ ἡγμένον αὐτοῦ $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$. Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ x τοῦ συνεχοῦς περιέχεται μεταξύ τῶν ἡγμένων $\frac{\kappa}{\kappa'}$ καὶ $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$, ἔπεται ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{\Lambda}{B}$, ἵνα προσεγγίξῃ μᾶλλον τῆς τιμῆς x τοῦ συνεχοῦς ἢ τὸ ἡγμένον αὐτοῦ $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$, πρέπει ἀναγκαίως νὰ περιέχεται μεταξύ τῶν αὐτῶν ἡγμένων $\frac{\kappa}{\kappa'}$ καὶ $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$. Ἡ διαφορὰ λοιπὸν $\frac{\Lambda}{B} - \frac{\Lambda}{\Lambda'}$, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου λαμβανόμενῃ, θέλει εἶναι μικρότερα τῆς διαφορᾶς $\frac{\Lambda}{\Lambda'} - \frac{\kappa}{\kappa'}$. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει

$$\frac{\Lambda}{B} - \frac{\kappa}{\kappa'} < \frac{\Lambda}{\Lambda'} - \frac{\kappa}{\kappa'}, \quad \eta \quad \frac{AK' - KB}{BK'} < \frac{1}{K'\Lambda'}.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς $AK' - KB$ τοῦ κλάσματος $\frac{AK' - KB}{BK'}$ δὲν δύναται νὰ ᾖναι μικρότερος τῆς μονάδος, ἔπεται ὅτι, ἵνα τὸ κλάσμα τοῦτο ᾖ μικρότερον τοῦ κλάσματος $\frac{1}{K'\Lambda'}$, πρέπει ἀναγκαίως ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ BK' νὰ ᾖναι μεγαλειότερος τοῦ $K'\Lambda'$, ἢ $B > \Lambda'$. Ἴνα λοιπὸν τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\Lambda}{B}$ προσεγγίξῃ εἰς τὴν τιμὴν τοῦ συνεχοῦς περισσότερον ἢ τὸ ἡγμένον αὐτοῦ $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$, πρέπει ἀναγκαίως ὁ παρονομαστὴς αὐ-

τοῦ Β νὰ ᾔηται μεγαλύτερος τοῦ Α', τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΙΝΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

141. Τῶν συνεχῶν κλασμάτων καὶ τῶν ιδιοτήτων τῶν ἡγμένων αὐτῶν γίνονται πολλαὶ καὶ διάφοροι ἐφαρμογαί, ὧν τινας ἀναφέρομεν ἐνταῦθα.

1^η. Εἶδομεν προηγουμένως ἐν τῇ § 133 πῶς τρέπεται δοθεὶς κλασματικὸς εἰς συνεχῆς κλάσμα, ἀπεδείξαμεν δὲ καὶ ἐν τῇ § 140, ὅτι τὸ εἰς ὃ υποπίπτομεν λάθος, ὅταν λαμβάνωμεν ἡγμένον τι ἀντὶ τῆς ἀξίας τοῦ συνεχοῦς, εἶναι μικρότερον τοῦ κλάσματος, τοῦ ἔχοντος ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τοῦ λαμβανομένου ἡγμένου καὶ τοῦ ἀμέσως ἐπομένου. Ὅταν λοιπὸν ἐν τινι ὑπολογισμῷ ὑπάρχωσιν ἔν ἡ πλείοτερα κλάσματα, ἔχοντα ὅρους ἀρκούντως μεγάλους καὶ ἐπὶ τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ ἐκτελεσθῶσι διάφοροι πράξεις πρὸς εὐρεσιν τοῦ τελικοῦ ἐξαγομένου, ὅπερ δὲν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν, ἡ δὲν ἔχομεν ἀνάγκην νὰ εὕρωμεν εἰ μὴ κατὰ προσέγγισιν τινα, δυνάμεθα τότε ἀντὶ τῶν κλασμάτων τούτων νὰ λάβωμεν ἐκεῖνα αὐτῶν τὰ ἡγμένα, ἅτινα, ὄντα κατὰ πολὺ ἀπλούστερα αὐτῶν, δύνανται νὰ παράσχωσι τὴν ζητούμενην προσέγγισιν. Ὡς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἐν τινι ὑπολογισμῷ ὑπάρχει τὸ κλάσμα $\frac{86400}{20929}$. Τοῦτο τραπὲν κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον εἰς συνεχῆς παρέχει τὰ ἐξῆς διαδοχικὰ ἡγμένα

$$\frac{4}{1}, \frac{29}{7}, \frac{33}{8}, \frac{128}{31}, \frac{161}{39}, \frac{2704}{655}, \frac{2865}{694}, \frac{5569}{1349}, \frac{86400}{20929},$$

ὧν τὸ πέμπτον $\frac{161}{39}$ παριστᾷ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν μικρο-

τέραν $\frac{1}{39 \times 655}$, ἥτοι μικροτέραν $\frac{1}{25545}$. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λάβωμεν

ἀντὶ τοῦ δεδομένου κλάσματος $\frac{86400}{20929}$, οὕτινος οἱ ὅροι εἶναι λίαν μεγά-

λοι, τὸ ἡγμένον αὐτοῦ $\frac{161}{39}$, ὅπερ ἔχει ὅρους πολὺ τούτου μικροτέρους, ὅταν αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐκτελεστέαι πράξεις ᾔηται πολύπλοκοι, ἡ δὲ ζητούμενη τοῦ ἐξαγομένου προσέγγισις δὲν καθίσταται μικροτέρα ἐκείνης, εἰς

ἢν δυνάμεθα νὰ ἀρκεσθῶμεν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἐκ τῆς τοιαύτης ἀντικαταστάσεως προκύπτει λάθος εἶναι μικρότερον τοῦ κλάσματος $\frac{1}{25543}$.

Σημειωτέον ἐνταῦθα ὅτι τὸ ἡγμένον $\frac{161}{39}$, ὅπερ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντὶ τοῦ εἰς θ ἀνήκει κλάσματος $\frac{86400}{20929}$, παρέχει εἰς ἡμᾶς ἕνεκα τῆς σμικρότητος τῶν ὁρῶν αὐτοῦ εὐκρινεστέραν, κατὰ τὴν εὐρεθεῖσαν προσέγγισιν, ἰδέαν τῆς ἀξίας τοῦ δευτέρου.

2^α. Εἶδομεν ὡσαύτως ἐν τῇ § 133 πῶς τρέπονται εἰς συνεχῆ κλάσματα αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν μὴ τελείων τετραγώνων ἀριθμῶν, ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν γνωστὸν καὶ τοῦτο, ὅπερ ἀποδεικνύεται ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ Ἀλγέβρᾳ, ὅτι τὰ εἰς θ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι τρέπονται συνεχῆ κλάσματα εἶναι ἀναγκαίως περιοδικὰ, τουτέστι τὰ ἀτελῆ αὐτῶν πηλίκᾳ ἐπαναλαμβάνονται ἀπὸ τινος τούτων τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, ἅμ' ὥς μετὰ τινας πράξεις εὐρωμεν τὴν περίοδον τοῦ συνεχοῦς, εἰς θ ἡ ζητουμένη τετραγωνικὴ ῥίζα τρέπεται, θὰ δυνάμεθα τότε νὰ σχηματίζωμεν εὐκόλως ὅσαδῆποτε αὐτοῦ ἡγμένα, ἐπομένως θέλομεν οὕτως εὐρίσκει ἀμέσως δι' ἀναγῶγων κλασμάτων τὴν τιμὴν τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ῥίζης μεθ' ὅσης θέλομεν προσεγγίσεως, χωρὶς νὰ ἐκτελῶμεν τοὺς πρὸς τοῦτο ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ ἐκτεθειμένους πολυπλόκους ὑπολογισμούς.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὐρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 10 κατὰ προσέγγισιν 0,00001. Ἐπειδὴ αὕτη περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 3 καὶ 4, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{4}{x},$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα εὐκόλως

$$x = \frac{4}{\sqrt{10} - 3} = \frac{\sqrt{10} + 3}{(\sqrt{10} - 3)(\sqrt{10} + 3)} = \sqrt{10} + 3.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐρεθεῖσα τιμὴ $\sqrt{10} + 3$ τῆς x περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 6 καὶ 7, θέτοντες

$$x = \sqrt{10} + 3 = 6 + \frac{4}{y},$$

θέλομεν ἔχει

$$\psi = \sqrt{10} - 3, \text{ καὶ ἐπομένως } \psi = \frac{4}{\sqrt{10} - 3},$$

Ἄλλ' εὑρομεν ἀνωτέρω ὅτι καὶ $\chi = \frac{1}{\sqrt{10} - 3}$. Ἄρα $\psi = \chi$. Ἐπομένως θέλομεν ἔχει

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \chi \tau \lambda.}}}$$

Εὑρομεν λοιπὸν οὕτω διὰ τιμὴν τοῦ $\sqrt{10}$ τὸ ἀνωτέρω συνεχὲς περιοδικόν, οὗτινος ἡ περίοδος εἶναι 6 καὶ ἄρχεται ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἀτελοῦς πηλίκου. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ σχηματίσωμεν κατὰ τὸν ἐν τῇ § 134 εὑρεθέντα κανόνα εὐκολώτατα ὅσαδῆποτε αὐτοῦ ἡγμένα, καὶ νὰ εὑρωμεν ἀμέσως δι' ἀναγωγῶν κλασμάτων τὴν ἀξίαν τοῦ $\sqrt{10}$ καθ' οἷανδῆποτε προσέγγισιν. Ἄν λάβωμεν π. χ. τὸ τέταρτον τῶν διαδοχικῶν αὐτοῦ ἡγμένων

$$\frac{3}{4}, \frac{19}{6}, \frac{117}{37}, \frac{721}{228}, \frac{4443}{1405}, \quad \chi \tau \lambda.$$

θέλομεν ἔχει τὴν ἀξίαν τοῦ $\sqrt{10}$ κατὰ προσέγγισιν μικροτέραν τοῦ κλάσματος $\frac{1}{228 \times 1405}$, ἥτοι μικροτέραν $\frac{1}{330340}$.

Ἄν εἴχομεν πρὸς τροπὴν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς $\sqrt{2}$ καὶ $\sqrt{13}$, ἠθέλομεν εὔρει τὰ ἐξῆς συνεχῆ περιδικὰ

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \chi \tau \lambda.}}} \\ \sqrt{13} &= 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{6 + \frac{1}{4 + \chi \tau \lambda.}}}}}}} \end{aligned}$$

Ὡς αἱ περίοδοι ἄρχονται ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἀτελοῦς πηλίκου καὶ εἶναι τὸ ἀτελὲς πηλίκον 2 καὶ τὰ ἀτελῆ πηλίκα 1, 1, 1, 1, 6.

3^η. "Όταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν δι' ἀναγώγων κλασμάτων τὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν ἀσυμμέτρου τινὸς ἀριθμοῦ, δι' ὃν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐμμέσως δύο δεκαδικούς ἀριθμούς, μεταξὺ τῶν ὁποίων νὰ περιέχεται οὗτος. Ἀς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι μᾶς ζητεῖται ἡ δι' ἀναγώγων κλασμάτων προσεγγίζουσα τιμὴ τοῦ λόγου π τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, εὐρεθέντος ἐμμέσως, διὰ τῶν γνωστῶν γεωμετρικῶν μεθόδων, ὅτι οὗτος περιέχεται μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

$$3,1415926535 \quad \text{καὶ} \quad 3,1415926536.$$

Πρὸς τοῦτο τρέπομεν ἐκάτερον τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων

$$\begin{array}{r} 31415926535 \\ \hline 10000000000 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 31415926536 \\ \hline 10000000000 \end{array}$$

εἰς συνεχῆς καὶ εὐρίσκουμεν κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον διὰ μὲν τὸ πρῶτον τὰ ἀτελῆ πηλίκα

$$3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 6, 2, 13, 3, 1, 12, 3,$$

διὰ δὲ τὸ δεῦτερον τὰ ἀτελῆ πηλίκα

$$3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 45, 1, 1, 8,$$

ὧν τὰ ἑπτὰ πρῶτα εἶναι κοινά. Ἐπειδὴ δέ, ὡς θέλομεν ἀποδείξει ἐμμέσως κατωτέρω, τὰ εἰς τὰ δύο συνεχῆ κλάσματα, τὰ παριστῶντα τοὺς ἀνωτέρω δεδομένους δεκαδικούς ἀριθμούς, κοινὰ ἀτελῆ πηλίκα 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1 θέλουσιν ἀνήκει ἀναγκαίως καὶ εἰς τὸ συνεχῆς κλάσμα, ὅπερ ἠθέλομεν εὕρει, ἂν ἐγνωρίζομεν τὴν παρέχουσαν τὴν τιμὴν τοῦ π παράστασιν καὶ ἐτρέπομεν αὐτὴν εἰς συνεχῆς, ἔπεται ὅτι τὰ εἰς ταῦτα ἀντιστοιχοῦντα ἡγμένα

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{406}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317},$$

θέλουσιν εἶναι τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ π συνεχοῦς, ὧν ἕκαστον εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον καὶ παριστᾷ τὴν ἀξίαν τοῦ π ἀκριβέστερον παντὸς ἄλλου κλάσματος, ἔχοντος ὅρους μικροτέρους (140).

Τὸ δεῦτερον ἡγμένον $\frac{22}{7}$ εὐρέθη ὡς προσεγγίζουσα τιμὴ τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, εἶναι δὲ μεγαλύτερον τοῦ π , καὶ παριστᾷ τὴν τιμὴν αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν πε-

ριεχομένην μεταξὺ τῶν κλασμάτων $\frac{1}{7 \times 106}$ καὶ $\frac{1}{7(7+106)}$, ἥτοι μεταξὺ $\frac{1}{742}$ καὶ $\frac{1}{791}$.

Τὸ τέταρτον ἡγμένον $\frac{335}{113}$ εὐρέθη ὡς προσεγγίζουσα τιμὴ τοῦ αὐτοῦ λόγου ὑπὸ τοῦ Ἀδριανοῦ Μετίου, εἶναι δὲ καὶ τοῦτο μεγαλείτερον τοῦ π καὶ παριστᾷ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν περιεχομένην μεταξὺ τῶν κλασμάτων $\frac{1}{113 \times 33102}$ καὶ $\frac{1}{113(113+33102)}$, ἥτοι μεταξὺ $\frac{1}{3740526}$ καὶ $\frac{1}{3753295}$.

Μᾶς μένει λοιπὸν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι, ὅταν ποσότης τις χ περιέχεται μεταξὺ δύο ἄλλων ψ καὶ ω , τὰ εἰς τὰς δύο τελευταίας κοινὰ ἀτελῆ πηλίκα θέλουσιν εἶναι καὶ ἀτελῆ πηλίκα τῆς πρώτης. Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι τρέψαντες ἐκάστην τούτων εἰς συνεχῆς εὐρομεν

$$\psi = a + \frac{1}{\psi'}, \quad \psi' = b + \frac{1}{\psi''}, \quad \psi'' = \gamma + \frac{1}{\psi'''}, \quad \text{κτλ.}$$

$$\chi = a' + \frac{1}{\chi'}, \quad \chi' = b' + \frac{1}{\chi''}, \quad \chi'' = \gamma' + \frac{1}{\chi'''}, \quad \text{κτλ.}$$

$$\omega = a + \frac{1}{\omega'}, \quad \omega' = b + \frac{1}{\omega''}, \quad \omega'' = \gamma + \frac{1}{\omega'''}, \quad \text{κτλ.}$$

Ἐπειδὴ ἡ χ περιέχεται μεταξὺ τῆς ψ καὶ ω , αὗται δὲ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἀκέραιον μέρος a , ἔπεται ὅτι καὶ τὸ ἀκέραιον μέρος a' τῆς χ θέλει εἶναι ἀναγκαίως a . Ἐπειδὴ δὲ $a' = a$, τὸ κλάσμα $\frac{1}{\chi'}$ τῆς χ θέλει περιέχεται ἀναγκαίως μεταξὺ τῶν κλασμάτων $\frac{1}{\psi'}$ καὶ $\frac{1}{\omega'}$ τῆς ψ καὶ ω , ἐπομένως ἡ χ' θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ τῆς ψ' καὶ ω' . Ἐπειδὴ δὲ πάλιν ἡ χ' περιέχεται μεταξὺ τῆς ψ' καὶ ω' , αὗται δὲ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἀκέραιον μέρος b , ἔπεται ὅτι καὶ τὸ ἀκέραιον μέρος b' τῆς χ' θέλει εἶναι ἀναγκαίως b . Θέλομεν δὲ συμπεράνει ἐντεῦθεν, σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω, ὅτι ἡ χ'' θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ τῆς ψ'' καὶ ω'' , καὶ ἐπειδὴ αὗται ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἀκέραιον μέρος γ , ὅτι καὶ τὸ ἀκέραιον μέρος γ' τῆς χ'' θέλει εἶναι ἀναγκαίως γ , καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὰ κοινὰ λοιπὸν a , b , γ , κτλ. εἰς τὰς ποσότητας ψ καὶ ω ἀτελῆ πηλίκα θέλουσιν εἶναι καὶ ἀτελῆ πηλίκα τῆς ποσότητος χ , τῆς περιεχομένης μεταξὺ αὐτῶν, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

4^η. Διὰ τῶν ἀποδειχθεῖσων ἰδιοτήτων τῶν ἡγμένων δυνάμεθα νὰ εὐρίσκωμεν εὐκόλως ἐν σύστημα ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως

$$ax + by = \gamma \quad (1),$$

ἐν ᾗ οἱ συντελεσταὶ a καὶ b τῶν ἀγνώστων x καὶ y εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Πρὸς τοῦτο τρέπομεν τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{b}$ εἰς συνεχὲς καὶ σχηματίζομεν τὰ διαδοχικὰ αὐτοῦ ἡγμένα μέχρι τοῦ τελευταίου, ὅπερ ὡς γνωστὸν (135) θέλει εἶναι $\frac{\gamma}{b}$. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ $\frac{a'}{b'}$ τὸ προτελευταῖον ἡγμένον, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ § 137

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \pm \frac{1}{bb'}, \quad \text{ἐπομένως } ab' - ba' = \pm 1 \quad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (2) ἐπὶ $+ \gamma$ ἢ $- \gamma$, καθόσον τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς εἶναι $+1$ ἢ -1 , θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$ab'\gamma - ba'\gamma = \gamma \quad (3),$$

$$\text{ἢ τὴν} \quad -ab'\gamma + ba'\gamma = \gamma \quad (4).$$

Ὅταν ἔχωμεν τὴν ἰσότητα (3), συμπεραίνομεν ὅτι, ἐὰν ἐν τῇ ἐξίσώσει (1) θέσωμεν $x = b'\gamma$ καὶ $y = -a'\gamma$, αὕτη θέλει ταυτοποιεῖσθαι, τοὔτέστιν αἱ τιμαὶ $b'\gamma$ καὶ $-a'\gamma$ τῆς x καὶ y ἀποτελοῦσιν ἐν σύστημα ἀκεραίων αὐτῆς λύσεων, ἐξ ὧν πορίζομεθα κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τῆς § 76 τοὺς γενικοὺς αὐτῶν τύπους

$$x = b'\gamma - b\tau, \quad y = -a'\gamma + a\tau.$$

Ὅταν δὲ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα (4), συμπεραίνομεν ὅτι, ἐὰν ἐν τῇ ἐξίσώσει (1) θέσωμεν $x = -b'\gamma$ καὶ $y = a'\gamma$, αὕτη θέλει ταυτοποιεῖσθαι, τοὔτέστιν αἱ τιμαὶ $-b'\gamma$ καὶ $a'\gamma$ ἀποτελοῦσιν ἐν σύστημα ἀκεραίων αὐτῆς λύσεων, ἐξ ὧν πορίζομεθα τοὺς γενικοὺς αὐτῶν τύπους

$$x = -b'\gamma + b\tau, \quad y = a'\gamma - a\tau.$$

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ἡ ἐξίσωσις

$$261x - 82y = 117 \quad (1).$$

Τρέποντες τὸ κλάσμα $\frac{261}{82}$ εἰς συνεχὲς θέλομεν εὑρεῖ τὰ ἀτελῆ πηλίκα

$$3, \quad 5, \quad 2, \quad 7,$$

εἰς 2 ἀντιστοιχοῦσι τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{16}{5}, \quad \frac{35}{11}, \quad \frac{261}{82}.$$

Ἀφαιροῦντες δὲ ἀπὸ τοῦ τελευταίου $\frac{261}{82}$ τὸ πρὸ αὐτοῦ $\frac{35}{11}$ θέλομεν ἔχει, ἐπειδὴ τὸ $\frac{35}{11}$ εἶναι, ὡς κατέχον τάξιν περιττὴν, μικρότερον τοῦ $\frac{261}{82}$,

$$261 \times 11 - 82 \times 35 = 1,$$

ἐπομένως, πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος ἐπὶ 117, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς

$$261 \times 11 \times 117 - 82 \times 35 \times 117 = 117,$$

ἥτις μᾶς δεικνύει ὅτι ἡ δεδομένη ἐξίσωσις (1) ταυτοποιεῖται, ὅταν $x = 11 \times 117$ καὶ $y = 35 \times 117$.

Ὡσαύτως, ἂν ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξίσωσιν

$$17x + 5y = 2 \quad (1),$$

θέλομεν εὐρεῖ τρέποντες τὸ κλάσμα $\frac{17}{5}$ εἰς συνεχῆς τὰ ἡγμένα

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{7}{2}, \quad \frac{17}{5},$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα τὴν ἰσότητα

$$17 \times 2 - 5 \times 7 = -1,$$

ἥτις γίνεται, πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο μελῶν αὐτῆς ἐπὶ -2 ,

$$-17 \times 2 \times 2 + 5 \times 7 \times 2 = 2,$$

καὶ μᾶς δεικνύει ὅτι ἡ δεδομένη ἐξίσωσις (1) ταυτοποιεῖται, ὅταν $x = -2 \times 2$ καὶ $y = 7 \times 2$.



ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ, ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΙΖΑΙ ΤΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ. — ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΙΝΕΣ

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΙΖΑΙ ΤΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

142. Ἐστώσαν π. γ. τὰ μονώνυμα $2a^3b^2$ καὶ $-4a^2b$, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλωμεν νὰ σχηματίσωμεν τὴν τρίτην δυνάμιν αὐτῶν. Κατὰ τὸν ἐν τῷ ἐδαφίῳ ς' τῆς § 1 δοθέντα ὀρισμὸν τῶν δυνάμεων καὶ κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θέλωμεν ἔχει

$$(2a^3b^2)^3 = 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 = 2^3 \cdot a^9 \cdot b^6 = 8a^9b^6,$$

$$(-4a^2b)^3 = (-4a^2b)(-4a^2b)(-4a^2b) = (-4)^3 \cdot a^6 \cdot b^3 = -64a^6b^3$$

βλέπομεν δὲ εὐκόλως ὅτι

Ἴτα ὑψώσωμεν δεδομένον μονώνυμον εἰς τινα δύναμιν, πρέπει νὰ ὑψώσωμεν τὸν συντελεστήν αὐτοῦ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν ἐν αὐτῷ διαφόρων γραμμάτων ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον αἱ $r^{\sigma\tau\alpha\iota}$ δυνάμεις τῶν μονωνύμων $3a^2b^3$ καὶ $-a^3b^2\gamma$ θέλουσι παρασταθῆ ὡς ἑξῆς

$$(3a^2b^3)^v = 3^v a^{2v} b^{3v}, \quad (-a^3b^2\gamma)^v = (-1)^v a^{3v} b^{2v} \gamma^v = \pm a^{3v} b^{2v} \gamma^v,$$

ἐτέθη δὲ πρὸ τοῦ ἐξαγομένου $a^{3v} b^{2v} \gamma^v$ τὸ διπλοῦν σημεῖον $\pm$, διότι γνωρίζομεν ὅτι, ὅταν τὸ r ᾖ ἀριθμὸς ἄρτιος, ἔχομεν $(-1)^v = +1$, ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ ἀριθμὸς περιττός, τότε $(-1)^v = -1$.

Παρατήρησις. — Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δύο ἢ πλειοτέρων κλασμάτων

σχηματίζεται διαιρούμενου τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμητῶν διὰ τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν, συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι

"Ira ὑψώσωμεν δεδομένον κλάσμα εἰς τινὰ δύναμιν, πρέπει νὰ ὑψώσωμεν ἐκάτερον τῶν ὄρων αὐτοῦ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

Παραδείγματος χάριν, αἱ τρίταις δυνάμεις τῶν ἀναγῶγων κλασμάτων

$$\frac{2x^6}{3\gamma^3}, -\frac{5x^2}{7\gamma^3} \text{ παρίστανται ὡς ἑξῆς}$$

$$\left(\frac{2a^6}{3\gamma^3}\right)^3 = \frac{2^3 a^6}{3^3 \gamma^3} = \frac{8a^6}{27\gamma^3}, \quad \left(-\frac{5a^2}{7\gamma^3}\right)^3 = -\frac{125a^6}{343\gamma^3}.$$

143. Καλεῖται ἐν γένει $\mu^{\tau\eta}$ ρίζα ἀλγεβρικῆς τινος παραστάσεως ἑτέρα τις παράστασις, ἥς ἢ $\mu^{\tau\eta}$ δύναμις ἀναπαράγει τὴν δεδομένην. Παραδείγματος χάριν, αἱ τρίταις ρίζαι τῶν μονωνύμων $27a^6$ καὶ $-8a^6\gamma^3$ εἶναι τὰ μονώνυμα $3a^2$ καὶ $-2a^2\gamma$, διότι αἱ τρίταις δυνάμεις αὐτῶν ἀναπαράγουσι τὰ πρῶτα. Ὡσαύτως αἱ τρίταις ρίζαι τῶν ἀναγῶγων ἀλγεβρικῶν κλασμάτων $\frac{a^6\gamma^3}{8\gamma^{12}}$ καὶ $-\frac{64x^6}{27\gamma^{12}}$ εἶναι τὰ ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{a^2\gamma^3}{2\gamma^4}$ καὶ $-\frac{4x^2}{3\gamma^4}$, διότι αἱ τρίταις δυνάμεις αὐτῶν ἀναπαράγουσι τὰ δεδομένα.

144. Ἐκ τῶν ἐν τῇ προηγουμένη παραγράφῳ ἀποδειχθέντων κανόνων συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι

1^{ον}. "Ira ἐξαγάγωμεν τὴν $\mu^{\tau\eta}$ ρίζαν μονωνύμου τινός, πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν $\mu^{\tau\eta}$ ρίζαν τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ καὶ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν ἐν αὐτῷ διαφόρων γραμμῶν διὰ μ .

Παραδείγματος χάριν, αἱ πέμπται ρίζαι τῶν μονωνύμων $32a^{10}$ καὶ $-243a^5\gamma^{20}$ εἶναι τὰ μονώνυμα $2a^2$ καὶ $-3a\gamma^4$, ἅτινα εὐρίσκουμεν ἐξάγοντες τὰς πέμπτας ρίζας 2 καὶ -3 τῶν συντελεστῶν αὐτῶν 32 καὶ -243 καὶ διαιροῦντες διὰ 5 τοὺς ἐκθέτας 40, 15, 5 καὶ 20 τῶν ἐν αὐτοῖς διαφόρων γραμμῶν α, β, γ, δ.

2^{ον}. "Ira ἐξαγάγωμεν τὴν $\mu^{\tau\eta}$ ρίζαν ἀναγῶγον τινός ἀλγεβρικοῦ κλάσματος, πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν $\mu^{\tau\eta}$ ρίζαν ἐκατέρου τῶν ὄρων αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν, αἱ πέμπται ρίζαι τῶν ἀναγῶγων ἀλγεβρικῶν κλασμάτων $\frac{a^{15}\gamma^{30}}{32\gamma^{15}}$ καὶ $-\frac{243x^{60}}{8\gamma^{25}}$ εἶναι $\frac{a^3\gamma^6}{2\gamma^3}$ καὶ $-\frac{3x^6}{8\gamma^5}$ καὶ εὐρίσκονται ἐξαγομένον τῶν πέμπτων ριζῶν ἐκατέρου τῶν ὄρων αὐτῶν.

Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι

1^{ov}. "Ira μονώνυμόν τι ἢ ἡ $\mu^{\sigma\tau\eta}$ δύναμις ἑτέρου, πρέπει ὁ μὲν συντελεστής αὐτοῦ νὰ ᾖται τελεία $\mu^{\sigma\tau\eta}$ δύναμις, οἱ δὲ ἐκθέται τῶν ἐν αὐτῷ διαφόρων γραμμάτων νὰ ᾖται διαιρετοὶ διὰ μ .

Παραδείγματος χάριν, τὸ μονώνυμον $32a^{10}b^7$ δὲν δύναται νὰ ᾖται ἡ πέμπτη δύναμις ἑτέρου, διότι ὁ ἐκθέτης 7 τοῦ γράμματος b δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 5. Ὡσαύτως, τὸ μονώνυμον $-16a^8b^4$ δὲν δύναται νὰ ᾖται ἡ τετάρτη δύναμις ἑτέρου, διότι ὁ συντελεστής αὐτοῦ -16 , καθ' ὃ ἀρνητικός, δὲν δύναται νὰ ᾖται ἡ τετάρτη δύναμις οὐδενὸς ἀριθμοῦ.

2^{ov}. "Ira ἀνάγωγόν τι ἀλγεβρικὸν κλάσμα ἢ ἡ $\mu^{\sigma\tau\eta}$ δύναμις ἑτέρου, πρέπει ἐκάτερος τῶν ὄρων αὐτοῦ νὰ ᾖται τελεία $\mu^{\sigma\tau\eta}$ δύναμις ἑτέρου.

Παραδείγματος χάριν, τὰ κλάσματα $\frac{8x^{36}}{27\gamma^3}$, $-\frac{a^{36}}{12\gamma^{12}}$ δὲν εἶναι αἱ τρίται δυνάμεις ἑτέρων, διότι δὲν εἶναι τέλειοι κύβοι τοῦ μὲν πρώτου ὁ ἀριθμητής, τοῦ δὲ δευτέρου ὁ παρονομαστής.

Ὡσαύτως, τὰ κλάσματα $\frac{16^4a^8}{\gamma^{12}\chi^6}$ καὶ $-\frac{16a^{36}}{18\gamma^{12}}$ δὲν δύνανται νὰ ᾖται αἱ τέταρται δυνάμεις ἑτέρων, διότι τοῦ μὲν πρώτου ὁ παρονομαστής ἔχει τὸ γράμμα χ μὲ ἐκθέτην 6, μὴ διαιρετὸν διὰ 4, τὸ δὲ δεῦτερον ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον $-$.

145. Ἡ $\mu^{\sigma\tau\eta}$ ρίζα ποσότητός τινος A σημειοῦται τιθεμένης τῆς ποσότητος A ὑπὸ τὸ ριζικὸν σημεῖον καὶ τοῦ γράμματος μ ὡς δείκτου τοῦ ριζικοῦ, οὕτω $\sqrt[\mu]{A}$. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ παράστασις $\sqrt[\mu]{A}$ ἔχει μ διαφόρους τιμὰς, ὅταν δὲ ὁ μὲν δείκτης μ ᾖται ἀκεραῖος καὶ θετικὸς ἀριθμὸς, ἡ δὲ ποσότης A θετικὴ, μεταξὺ τῶν μ ριζῶν τῆς ποσότητος A ἡ τῶν μ τιμῶν τοῦ $\sqrt[\mu]{A}$ ὑπάρχει καὶ τις ἀκεραία καὶ θετικὴ καὶ μία μόνη. Ἡ ἀκεραία αὕτη καὶ θετικὴ τιμὴ τοῦ $\sqrt[\mu]{A}$ καλεῖται ἀριθμητικὴ ρίζα τῆς A , ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ριζικοῦ $\sqrt[\mu]{A}$. Ἐν τοῖς ἐπομένοις θέλομεν ὑποθέσει ὅτι δὲν πρόκειται εἰ μὴ περὶ τῶν ἀριθμητικῶν μόνον τιμῶν τῶν ριζικῶν.

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΙΝΕΣ

146. Δύο ἢ πλεονέστερα ριζικά λέγονται ὅμοια, ὅταν ἔχωσι τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ τὴν αὐτὴν ὑπόρριζον ποσότητα. Παραδείγματος χάριν, τὰ ριζικά

$$3a\sqrt[4]{5b}, \quad -(2a+3b)\sqrt[4]{5b}, \quad -6a\sqrt[4]{5b}$$

εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι τὸν αὐτὸν δείκτην 4 καὶ τὴν αὐτὴν ὑπόρριζον ποσότητα 5b.

Οἱ παράγοντες $3a$, $-(2a+3b)$, $-6a$ τοῦ ριζικοῦ $\sqrt[4]{5b}$ καλοῦνται συντελεσταὶ αὐτοῦ, ἡ δὲ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ριζικῶν ἐκτελεῖται ὅπως καὶ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, σημειουμένων δηλ. ἢ καὶ ἐκτελουμένων, ὅταν τοῦτο ᾖναι δυνατόν, ἐπὶ τῶν συντελεστῶν τῶν ὁμοίων ριζικῶν τῶν πρὸ αὐτῶν σεσημειωμένων πράξεων καὶ πολλαπλασιαζομένου τοῦ εὐρεθησομένου ἐξαγομένου ἐπὶ τὸ κοινὸν ριζικόν. Παραδείγματος χάριν, ἐν τῇ ἀλγεβρικῇ παραστάσει

$$3\sqrt[6]{5b} - 8a\sqrt[6]{3d^2} + 7\sqrt[6]{5b} + 9b\sqrt[6]{3d^2} - 12\sqrt[6]{5b} + 6a\sqrt[6]{3d^2}$$

δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὰ μὲν ὅμοια ριζικά $3\sqrt[6]{5b}$, $+7\sqrt[6]{5b}$, $-12\sqrt[6]{5b}$ εἰς ἓν $(3+7-12)\sqrt[6]{5b}$ ἢ $-2\sqrt[6]{5b}$, θέτοντες τὸ κοινὸν ριζικὸν $\sqrt[6]{5b}$ παράγοντα εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $3+7-12$ ἢ -2 τῶν συντελεστῶν αὐτοῦ, τὰ δὲ ὅμοια ριζικά $-8a\sqrt[6]{3d^2}$, $9b\sqrt[6]{3d^2}$, $-6a\sqrt[6]{3d^2}$, εἰς ἓν $(-8a+9b+6a)\sqrt[6]{3d^2}$ ἢ $(9b-2a)\sqrt[6]{3d^2}$, θέτοντες τὸ κοινὸν ριζικὸν $\sqrt[6]{3d^2}$ κοινὸν παράγοντα εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν αὐτοῦ. Οὕτως ἡ ἀνωτέρω ἀλγεβρικὴ παράστασις γράφεται ἀπλούτερα ὡς ἐξῆς

$$-2\sqrt[6]{5b} + (9b-2a)\sqrt[6]{3d^2}.$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ. — ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ. — ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΙΣ
ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ

147. Αἱ περιέχουσαι ὁποιαδήποτε ριζικά ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις προστίθενται ὅπως καὶ αἱ ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, γραφομένων δηλ. τῶν ἀποτελοῦντων αὐτὰς ὅρων ἐν μιᾷ ἀλγεβρικῇ παραστάσει μὲ τὰ ἴδια αὐτῶν σημεῖα.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

$$3a^2\sqrt[4]{5b} - 2b\sqrt[5]{3a}, \quad 3\sqrt[7]{a^3} - 4b\sqrt[5]{3a}, \quad -7a^2\sqrt[4]{5b}, \quad 2\sqrt[7]{a^3}$$

εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ παράστασις

$$3a^2\sqrt[4]{5b} - 2b\sqrt[5]{3a} + 3\sqrt[7]{a^3} - 4b\sqrt[5]{3a} - 7a^2\sqrt[4]{5b} + 2\sqrt[7]{a^3},$$

ἣν σχηματίζομεν γράφοντες τοὺς ὅρους ἐκάστης κατόπιν τῶν ὅρων τῆς πρώτης μὲ τὰ ἴδια αὐτῶν σημεῖα.

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως μᾶς μένει πάντοτε νὰ ἐκτελέσωμεν κατὰ τὴν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα τὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ριζικῶν, ἂν ὑπάρχωσι τοιαῦτα. Οὕτω τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν ἄθροισμα γίνεται μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ἐν αὐτῷ ὁμοίων ριζικῶν

$$-4a^2\sqrt[4]{5b} - 6b\sqrt[5]{3a} + 5\sqrt[7]{a^3}.$$

148. Αἱ περιέχουσαι ριζικά ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις ἀφαιροῦνται ὅπως καὶ αἱ ἀκέραιαι, γραφομένου δηλ. ἐκάστου τῶν ὅρων τῆς ἀφαιρετέας κατόπιν τῶν ὅρων τῆς μειωτέας μὲ ἀντίθετον σημεῖον.

Παραδ. χάριν, ἵνα ἀπὸ τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως $2a\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[5]{3a^3}$ ἀφαιρέσωμεν τὴν παράστασιν $(-3a + 7b)\sqrt[3]{b^2} + 7\sqrt[5]{3a^3} - 6a\sqrt[3]{b^2}$, πρέπει νὰ γράψωμεν ἕκαστον τῶν ὅρων τῆς ἀφαιρετέας κατόπιν τῶν ὅρων τῆς μειωτέας μὲ ἀντίθετον σημεῖον, οὕτω

$$2a\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[5]{3a^3} - (-3a + 7b)\sqrt[3]{b^2} - 7\sqrt[5]{3a^3} + 6a\sqrt[3]{b^2},$$

καὶ θέλομεν ἔχει μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀναγωγῶν τῶν ὁμοίων ριζικῶν

$$(11a - 7b)\sqrt[3]{b^2} - 6\sqrt[3]{3a^3}.$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ

149. Τὸ γινόμενον δύο ἢ πλειοτέρων τοῦ αὐτοῦ δείκτου ριζικῶν εἶναι ριζικὸν ἔχον δείκτην μὲν τὸν αὐτόν, ὑπόρριζον δὲ ποσότητα τὸ γινόμενον τῶν ὑπόρριζων ποσοτήτων τῶν δεδομένων.

Ἵνα σχηματίσωμεν π. χ. τὸ γινόμενον τῶν ριζικῶν $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{\gamma}$, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' ἀλλήλας τὰς ὑπόρριζους αὐτῶν ποσότητος a , b , γ , καὶ εἰς τὸ ριζικὸν τοῦ γινομένου αὐτῶν $ab\gamma$ νὰ δώσωμεν τὸν αὐτὸν δείκτην r , τοῦθ' ὅπερ παρίσταται ὡς ἑξῆς

$$\sqrt[r]{a} \times \sqrt[r]{b} \times \sqrt[r]{\gamma} = \sqrt[r]{ab\gamma} \quad (1).$$

Διότι, ἐὰν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ὑποτιθεμένης ἰσότητος (1) εἰς τὴν r δυνάμιν, θέλομεν ἔχει

$$(\sqrt[r]{a})^r \times (\sqrt[r]{b})^r \times (\sqrt[r]{\gamma})^r = (\sqrt[r]{ab\gamma})^r$$

ἢ τὴν ταυτότητα

$$a \times b \times \gamma = ab\gamma,$$

διότι προφανῶς αἱ $r^{\text{τα}}$ δυνάμεις τῶν $r^{\text{των}}$ ριζῶν τοῦ a , b , γ καὶ $ab\gamma$ εἶναι αὐταὶ αἱ ὑπόρριζοι ποσότητες a , b , γ καὶ $ab\gamma$. Ἡ ἀνωτέρω λοιπὸν ἰσότης (1) εἶναι ἀληθής, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Ἐπεταὶ ἐντεῦθεν ὅτι, ὅταν παράγων τις a τοῦ γινομένου $ab\gamma$ ᾖ τελεία δύναμις τοῦ βαθμοῦ r , δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν $r^{\text{των}}$ αὐτοῦ ρίζαν καὶ νὰ θέσωμεν αὐτὴν πρὸ τοῦ ριζικοῦ τοῦ γινομένου $b\gamma$ τῶν λοιπῶν καὶ ἀντιστρόφως, δυνάμεθα νὰ εἰσαγάγωμεν τὸν συντελεστὴν ριζικοῦ τινος, ἔχοντος r δείκτην, ὑπὸ τὸ ριζικὸν πολλαπλασιάζοντες τὴν ὑπόρριζον αὐτοῦ ποσότητα ἐπὶ τὴν $r^{\text{των}}$ δυνάμιν αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ριζικὸν $\sqrt[3]{16a^3 \cdot 3a \cdot 7b^3}$, ἐν ᾧ ὁ παράγων $16a^3$ εἶναι τελεία τετάρτη δύναμις, ἰσοῦται τῷ $2a^3 \sqrt[3]{3a \cdot 7b^3}$, ὅπερ εὐρίσκομεν ἐξάγοντες τὴν τετάρτην ρίζαν $2a^3$ τοῦ $16a^3$ καὶ θέτοντες αὐτὴν ὡς συντελεστὴν πρὸ τοῦ ριζικοῦ τοῦ γινομένου $3a \cdot 7b^3$ τῶν λοιπῶν. Καὶ ἀντιστρόφως, Ἵνα εἰσαγάγωμεν τὸν συντελεστὴν $2a^3$ τοῦ ριζικοῦ $2a^3 \sqrt[3]{3a \cdot 7b^3}$ ὑπὸ τὸ ριζικὸν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ὑπόρρι-

ζον ποσότητα ἐπὶ τὴν τετάρτην δύναμιν αὐτοῦ $16a^8$. Τουτέστι θέλομεν ἔχει κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις τὰς ταυτότητας

$$\sqrt[4]{16a^8 \cdot 3a \cdot 7b^3} = 2a^2 \sqrt[4]{3a \cdot 7b^3}, \quad 2a^2 \sqrt[4]{3a \cdot 7b^3} = \sqrt[4]{16a^8 \cdot 3a \cdot 7b^3}.$$

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ

150. Ἀπλοποιούμεν δεδομένον ριζικόν, ἔχον δείκτην r , ὅταν ἐξάγωμεν πρὸ αὐτοῦ ὡς συντελεστὴν τὸ γινόμενον τῶν $r^{\text{στῶν}}$ ριζῶν πάντων τῶν ὑπ' αὐτὸ τοῦ βαθμοῦ r παραγόντων. Ὄταν τὸ δεδομένον ριζικόν δὲν ἦναι ἐπιδεκτικὸν τοιαύτης τινὸς ἀπλοποιήσεως, τότε λέγεται ἀνάγωγον, τοιοῦτο δὲ εἶναι τὸ ριζικόν $\sqrt[3]{7a^2b^2x^2}$.

Παραδείγματος χάριν, ἀπλοποιούμεν τὸ ριζικόν $\sqrt[3]{32a^7b^3r^3}$, ἐὰν γράψωμεν πρὸ αὐτοῦ ὡς συντελεστὴν τὸ γινόμενον $2a^2br$ τῶν κυβικῶν ριζῶν πάντων τῶν ὑπ' αὐτὸ τελείων κύβων παραγόντων $8, a^6, b^3, r^3$. Οὕτω δὲ τὸ δεδομένον ριζικόν γράφεται καὶ ὡς ἐξῆς $2a^2br \sqrt[3]{4ar^2}$, διότι κατὰ τὰ προαποδείχθέντα θέλομεν ἔχει

$$2a^2br \sqrt[3]{4ar^2} = \sqrt[3]{8a^6b^3r^3 \cdot 4ar^2} = \sqrt[3]{32a^7b^3r^3}.$$

151. Ἐὰν θεωρήσωμεν ὡς ἓνα παράγοντα τὸ γινόμενον $8a^6b^3r^3$ πάντων τῶν ὑπὸ τὸ ριζικόν παραγόντων, τῶν ὄντων τελείων δυνάμεων τοῦ δείκτου τοῦ ριζικοῦ, καὶ ὡς ἕτερον τὸ γινόμενον $4ar^2$ τῶν λοιπῶν, ποριζόμεθα ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων τὸν ἐξῆς γενικὸν τῆς ἀπλοποιήσεως παντὸς ριζικοῦ κανόνα.

Ἴσα ἀπλοποιήσωμεν δεδομένον ριζικόν, ἔχον r δείκτην, ἀποσυνθέτομεν τὴν ὑπόρριζον αὐτοῦ ποσότητα εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, ὧν ὁ μὲν ra ἦναι τὸ γινόμενον πάντων τῶν ὄντων τελείων τοῦ βαθμοῦ r δυνάμεων παραγόντων, ὁ δὲ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν, ἐξάγωμεν τὴν $r^{\text{στῶν}}$ δύναμιν τοῦ πρώτου καὶ θέτομεν αὐτὴν ὡς συντελεστὴν πρὸ τοῦ ριζικοῦ τοῦ δείκτου r τοῦ δευτέρου.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον θέλομεν ἔχει

$$\sqrt[5]{96a^7b^3r^9} = \sqrt[5]{32a^6b^3r^5 \cdot 3a^2b^3r^4} = 2ar \sqrt[5]{3a^2b^3r^4}.$$

$$\sqrt[3]{16a^4b^5} - 24a^5b^4 = \sqrt[3]{8a^3b^3(2ab^2 - 3a^2b)} = 2ab \sqrt[3]{ab(2b - 3a)}.$$

152. Ἡ ἀνωτέρω ἀπλοποίησης τῶν ριζικῶν εἶναι ἀπαραίτητος, ὅταν

θέλωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν ἐν τινι ἀλγεβρικῇ παραστάσει εὐρισκομένων ὁμοίων ριζικῶν, διότι πολλάκις ριζικά τινα τοῦ αὐτοῦ δείκτου φαίνονται ἀνόμοια, ἐνῶ εἶναι ὅμοια μετὰ τὴν ἐπ' αὐτῶν ἐκτέλεσιν τῶν δυνατῶν ἀπλοποιήσεων. Παραδείγματος χάριν, τὰ ριζικά $\sqrt[3]{24a^5b^4}$ καὶ $\sqrt[3]{81a^8b}$ φαίνονται ἀνόμοια, ἐνῶ εἶναι ὅμοια μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν δυνατῶν ἀπλοποιήσεων, διότι ἔχομεν

$$\sqrt[3]{24a^5b^4} = 2ab\sqrt[3]{3a^2b} \quad \text{καὶ} \quad \sqrt[3]{81a^8b} = 3a^2\sqrt[3]{3a^2b}.$$

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ

153. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο τοῦ αὐτοῦ δείκτου ριζικῶν εἶναι ριζικόν, ἔχον δείκτην τὸν αὐτὸν καὶ ὑπορρίζον ποσότητα τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς ὑπορρίζου ποσότητος τοῦ διαιρετέου ριζικοῦ διὰ τῆς ὑπορρίζου ποσότητος τοῦ ριζικοῦ τοῦ διαιρέτου.

Λέγω π. χ. ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\sqrt[n]{a}$ διὰ τοῦ $\sqrt[n]{b}$ εἶναι τὸ ριζικόν $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, ὅπερ ἔχει τὸν αὐτὸν δείκτην n καὶ ὑπορρίζον ποσότητα τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς ὑπορρίζου ποσότητος a τοῦ πρώτου διὰ τῆς ὑπορρίζου ποσότητος b τοῦ δευτέρου. Διότι, ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὴν n δύναμιν ἐκάτερον τῶν μελῶν τῆς ὑποτιθεμένης ἰσότητος

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (1)$$

θέλωμεν ἔχει

$$\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \right)^n, \quad \eta \quad τὴν ταυτότητα \quad \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἡ ὑποτιθεμένη ἰσότης (1) εἶναι ἀληθής, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΥΨΩΣΙΣ ΕΙΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΕΞΑΓΩΓΗ ΡΙΖΩΝ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ.—ΑΝΑΓΩΓΗ ΠΛΕΙΟΤΕΡΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ ΕΙΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΔΕΙΚΤΗΝ

ΥΨΩΣΙΣ ΕΙΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΕΞΑΓΩΓΗ
ΡΙΖΩΝ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ

154. "Ινα ὑψώσωμεν δεδομένον ριζικόν εἰς δύναμιν τινα, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην τὴν ὑπόρριζον αὐτοῦ ποσότηα·

*Ὡς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν $r^{\pi\gamma\eta}$ δύναμιν τὸ ριζικόν $\sqrt[n]{a}$. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$(\sqrt[n]{a})^{\gamma} = \sqrt[n]{a^{\gamma}}.$$

Διότι, ἵνα σχηματίσωμεν τὴν $r^{\pi\gamma\eta}$ δύναμιν τοῦ $\sqrt[n]{a}$, πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον r παραγόντων ἴσων τῷ $\sqrt[n]{a}$. Ἀλλ' ἀπεδείξαμεν ἀνωτέρω ὅτι τὰ τοῦ αὐτοῦ δείκτου ριζικά πολλαπλασιάζονται, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν αἱ ὑπόρριζοι αὐτῶν ποσότητες καὶ τεθῇ τὸ γινόμενον αὐτῶν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ριζικόν. Ἀρα θέλομεν ἔχει

$$(\sqrt[n]{a})^{\gamma} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \dots = \sqrt[n]{a \cdot a \cdot a \dots} = \sqrt[n]{a^{\gamma}}.$$

155. "Ινα ἐξαγάγωμεν τὴν $\mu^{\pi\gamma\eta}$ ρίζαν δεδομένου ριζικοῦ, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ μ τὸν δείκτην αὐτοῦ.

*Ὡς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν $\mu^{\pi\gamma\eta}$ ρίζαν τοῦ ριζικοῦ $\sqrt[n]{a}$. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\mu]{a} \quad (1).$$

Διότι, ἐὰν ὑψώσωμεν ἐκάτερον τῶν μελῶν τῆς ἀνωτέρω ὑποτιθεμένης ἰσότητος πρῶτον εἰς τὴν μ δύναμιν καὶ ἔπειτα εἰς τὴν n , θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδείχθέντα

$$\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[n]{a}}\right)^{\mu} = \sqrt[n]{a}, \quad (\sqrt[n]{a})^{\gamma} = a,$$

$$(\sqrt[n\mu]{a})^{\mu} = \sqrt[n]{a^{\mu}}, \quad (\sqrt[n]{a^{\mu}})^{\gamma} = \sqrt[n\mu]{a^{\mu\gamma}} = a,$$

ἐπειδὴ δὲ αἱ αὐταὶ δυνάμεις ἐκατέρου τῶν μελῶν τῆς ἀνωτέρω ὑποτιθεμένης ισότητος (1) δίδουσι τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον a , ἔπεται ὅτι ἡ ισότης αὕτη εἶναι ἀληθής, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΠΛΕΙΟΤΕΡΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ ΕΙΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΔΕΙΚΤΗΝ

156. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ δεδομένου ριζικοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ὑψώσωμεν τὴν ὑπορρίζον αὐτοῦ ποσότητα εἰς ἀκεραίας τιὰς δύνανται καὶ πολλαπλασιάσωμεν συγχρόνως τὸν δείκτην αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν, τὸν παριστῶντα τὸν βαθμὸν τῆς δυνάμεως, εἰς ἣν ὑψώθη ἡ ὑπορρίζος αὐτοῦ ποσότης.

Λέγω π. γ. ὅτι ἡ ἀξία τοῦ ριζικοῦ $\sqrt[n]{a}$ δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ὑψώσωμεν τὸ a εἰς τὴν $m^{τ\omega}$ δυνάμιν καὶ πολλαπλασιάσωμεν συγχρόνως καὶ τὸν δείκτην αὐτοῦ n ἐπὶ m , τουτέστιν ὅτι θέλωμεν ἔχει

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m} \quad (1).$$

Διότι, ἐὰν ὑψώσωμεν ἐκάτερον τῶν μελῶν τῆς ὑποτιθεμένης ταύτης ισότητος εἰς τὴν $m^{τ\omega}$ δυνάμιν, θέλωμεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα

$$(\sqrt[n]{a})^{m\omega} = \sqrt[n]{a^{m\omega}} = a^m \quad \text{καὶ} \quad (\sqrt[nm]{a^m})^{m\omega} = a^m,$$

ἐπειδὴ δὲ αἱ $m^{τ\omega}$ δυνάμεις ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνωτέρω ὑποτιθεμένης ισότητος (1) εἶναι αἱ αὐταί, ἔπεται ὅτι ἡ ισότης αὕτη εἶναι ἀληθής, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

157. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ισότητος (1) πορίζομεθα

1^α. Ὅταν ὁ δείκτης m τοῦ ριζικοῦ καὶ ὁ ἐκθέτης m τῆς ὑπορρίζου ποσότητος ἔχωσι κοινὸν τινα παράγοντα m , δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους διὰ τοῦ κοινοῦ τούτου παράγοντος καὶ τὸ πρόκύπτειν νέον ριζικὸν $\sqrt[n]{a}$ θέλει εἶναι ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ριζικὸν $\sqrt[12]{a^9 b^6}$ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ $\sqrt[4]{a^3 b^3}$, ὅπερ εὐρίσκωμεν διαίρωντες τὸν δείκτην αὐτοῦ 12 καὶ τοὺς ἐκθέτας 9 καὶ 6 τῆς ὑπορρίζου ποσότητος $a^9 b^6$ διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν παράγοντος 3.

2^α. Ὅταν δύο ἢ πλεονέτερα ριζικὰ ἔχωσι διαφόρους δείκτας, δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν δείκτην πολλαπλασιά-

ζοιτες τὸν δείκτην ἐκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν δεικτῶν τῶν λοιπῶν καὶ ὑψοῦντες τὴν ὑπόρριζον ἐκάστου ποσότητα εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν.

Παραδείγματος χάριν, τὰ ριζικὰ $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[4]{\gamma}$ ἀνάγονται εἰς τὸν αὐτὸν δείκτην, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τοῦ μὲν πρώτου ὁ δείκτης r ἐπὶ mp καὶ ὑψωθῇ ἡ ὑπόρριζος αὐτοῦ ποσότης a εἰς τὴν mp^{rn} δύναμιν· τοῦ δευτέρου ὁ δείκτης m ἐπὶ rp καὶ ὑψωθῇ ἡ ὑπόρριζος αὐτοῦ ποσότης b εἰς τὴν rp^{mn} δύναμιν, τοῦ δὲ τρίτου ὁ δείκτης p ἐπὶ mr καὶ ὑψωθῇ ἡ ὑπόρριζος αὐτοῦ ποσότης γ εἰς τὴν mr^{pn} δύναμιν. Οὕτω θέλομεν ἔχει

$$\sqrt{a} = \sqrt[mr]{a^{mpn}}, \quad \sqrt[3]{b} = \sqrt[3rp]{b^{mnp}}, \quad \sqrt[4]{\gamma} = \sqrt[4mr]{\gamma^{pnr}}.$$

Παρατήρησις 1. — Ἐὰν οἱ δείκται r , m , p τῶν δεδομένων ριζικῶν ἔχωσι κοινούς τινας παράγοντας, τότε δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν αὐτὰ εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν αὐτῶν δείκτην, ὅπως ἀνάγομεν δύο ἢ πλεονέστερα κλάσματα εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν αὐτῶν παρονομαστήν. Παραδείγματος χάριν, τὰ ριζικὰ $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[4]{\gamma}$ ἀνάγονται εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν αὐτῶν δείκτην 24, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην 12 τοῦ πρώτου ἐπὶ 2 καὶ ὑψώσωμεν τὴν ὑπόρριζον αὐτοῦ ποσότητα a εἰς τὸ τετράγωνον· τὸν δείκτην 8 τοῦ δευτέρου ἐπὶ 3 καὶ ὑψώσωμεν τὸ b εἰς τρίτην δύναμιν, καὶ τὸν δείκτην 6 τοῦ τρίτου ἐπὶ 4 καὶ ὑψώσωμεν τὸ γ εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν. Οὕτω θέλομεν ἔχει τὰ ριζικὰ

$$\sqrt[24]{a^2}, \quad \sqrt[24]{b^3}, \quad \sqrt[24]{\gamma^4},$$

ὧν αἱ θοιρημητικαὶ τιμαὶ θέλουσιν εἶναι ἀμοιβαίως αἱ αὐταὶ μὲ τὰς τῶν δεδομένων καὶ ἅτινα ἔχουσι τὸν ἐλάχιστον κοινὸν δείκτην 24.

Παρατήρησις 2. — Ὅταν τὰ πρὸς πολλαπλασιασμὸν ἢ διαίρεσιν δεδομένα ριζικὰ δὲν ἔχωσι τὴν αὐτὴν δείκτην, τότε ἀνάγομεν αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν ἢ τὸν ἐλάχιστον κοινὸν δείκτην καὶ ἐκτελοῦμεν ἑκατέραν τῶν πράξεων τούτων κατὰ τοὺς ἐν ταῖς §§ 149 καὶ 153 δεδομένους κανόνας.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν ριζικῶν $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt[4]{ab^3}$, $\sqrt[5]{a^3b}$, ἀνάγομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν αὐτῶν δείκτην 12 καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τῶν οὕτως εὑρεθησομένων ἰσοδυνάμων ριζικῶν $\sqrt[12]{a^8b^4}$, $\sqrt[12]{a^3b^9}$, $\sqrt[12]{a^{10}b^2}$ κατὰ τὸν γνωστὸν αὐτοῦ κανόνα. Οὕτω δὲ θέλομεν ἔχει

$$\sqrt[12]{a^8 b^4} \times \sqrt[12]{a^3 b^9} \times \sqrt[12]{a^{10} b^2} = \sqrt[12]{a^{21} b^{15}} = a b \sqrt[12]{a^9 b^3} = a b \sqrt[4]{a^3 b}.$$

Ὡσαύτως, ἵνα διαιρέσωμεν τὸ ριζικὸν $\sqrt[5]{a^3 b^2}$ διὰ τοῦ ριζικοῦ $\sqrt[7]{a^4 b^3}$, ἀνάγομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν δείκτην 35 καὶ ἐπὶ τῶν οὕτως εὑρεθησομένων ἰσοδυνάμων ριζικῶν $\sqrt[35]{a^{21} b^{14}}$, $\sqrt[35]{a^{20} b^{15}}$ ἐκτελοῦμεν τὴν διαιρέσιν κατὰ τὸν γνωστὸν αὐτῆς κανόνα. Οὕτω δὲ θέλομεν ἔχει

$$\frac{\sqrt[5]{a^3 b^2}}{\sqrt[7]{a^4 b^3}} = \frac{\sqrt[35]{a^{21} b^{14}}}{\sqrt[35]{a^{20} b^{15}}} = \sqrt[35]{\frac{a^{21} b^{14}}{a^{20} b^{15}}} = \sqrt[35]{\frac{a}{b}}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΕΚΘΕΤΑΙ. — ΑΡΗΘΗΤΙΚΟΙ ΕΚΘΕΤΑΙ

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΕΚΘΕΤΑΙ

158. Ἀπεδείξαμεν προηγουμένως ἐν τῇ § 144 ὅτι, ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν $r^{\frac{\mu}{\nu}}$ ρίζαν τοῦ $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἐκθέτην μ τοῦ a διὰ τοῦ δείκτη ν τῆς ἐξακτέας ρίζης, ὅταν ἡ διαίρεσις αὕτη ἐκτελεῖται ἀκριβῶς. Οὕτω δέ, ἐὰν καλέσωμεν π τὸ πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως, θέλομεν ἔχει

$$\sqrt[\nu]{a^{\frac{\mu}{\nu}}} = a^{\frac{\pi}{\nu}} = a^{\pi}.$$

Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, αἱ παραστάσεις $\sqrt[\nu]{a^{\frac{\mu}{\nu}}}$ καὶ $a^{\frac{\pi}{\nu}}$ εἶναι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἰσοδύναμοι, ὡς ἔσαι τῇ αὐτῇ τρίτῃ a^{π} , ὅταν, ἐννοεῖται οἴκοθεν, δὲν λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν εἰ μὴ τὰς ἀριθμητικὰς αὐτῶν τιμάς. Συμφωνήθη ἀκολούθως καὶ καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ ἐκθέτης μ δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ δείκτη ν , νὰ θεωρῇται ἡ παράστασις $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, ἡ ἔχουσα ἐκθέτην κλασματικόν, ὡς παριστῶσα ὅ,τι καὶ ἡ $\sqrt[\nu]{a^{\frac{\mu}{\nu}}}$, ἣτις ἔχει δείκτην μὲν τὸν παρονομαστήν ν τοῦ κλασματικοῦ ἐκθέτου $\frac{\mu}{\nu}$, ὑπὸ ῥίζον δὲ ποσότητα τὴν αὐτὴν a μὲ ἐκθέτην ἴσον τῷ ἀριθμητῇ αὐτοῦ μ .

159. Ἡ διὰ τῆς παραστάσεως $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἀντικατάστασις τοῦ ριζικοῦ $\sqrt[\nu]{a^{\mu}}$ καθιστᾷ ἀπλουστάτους τοὺς κανόνας τῶν ἐπὶ τῶν ριζικῶν δυναμένων νὰ ἐκτελεσθῶσι διαφόρων πράξεων, καθότι, ὡς θέλομεν ἀποδείξει ἀμέσως, ἐκάστη τούτων ἐκτελεῖται ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἐκθετῶν κατὰ τοὺς αὐτοὺς ἀπαραλλάκτως κανόνας, καθ' οὓς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἐκθετῶν. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ διέλθωμεν ἀνὰ ἓν ἕκαστον τῶν προηγουμένως ἐπὶ τῶν ριζικῶν εὐρεθέντων ἐξαγομένων τῶν διαφόρων ἐπ' αὐτῶν ἐκτελουμένων πράξεων, καὶ νὰ ἴδωμεν ἂν τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα, παριστάμενα διὰ κλασματικῶν ἐκθετῶν κατὰ τὴν ἀνωτέρω γενομένην σύμβασιν, εὐρίσκωνται τὰ αὐτὰ ἐφαρμοζομένων ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἐκθετῶν τῶν πρώτων τῶν αὐτῶν κανόνων, οὓς ἔπρεπε νὰ ἐφαρμόσωμεν, ἂν οἱ ἐκθέται αὐτῶν ἦσαν ἀκεραίοι καὶ αἱ ἐκτελεστέαι πράξεις αἱ αὐταί.

160. Ἀπεδείξαμεν π. χ. προηγουμένως (149 καὶ 157) ὅτι

$$\sqrt[\nu]{a^{\mu}} \times \sqrt[\nu]{a^{\pi}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu+\pi}} \quad \text{καὶ} \quad \sqrt[\nu]{a^{\mu}} \times \sqrt[\rho]{a^{\pi}} = \sqrt[\nu\rho]{a^{\mu\rho+\nu\pi}},$$

παριστῶντες δὲ διὰ κλασματικῶν ἐκθετῶν ἕκαστον τῶν ἐν ταῖς ἀνωτέρω ἰσοτήτεσι ριζικῶν, θέλομεν ἔχει

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} \times a^{\frac{\pi}{\nu}} = a^{\frac{\mu+\pi}{\nu}} = a^{\frac{\mu}{\nu} + \frac{\pi}{\nu}}, \quad \text{καὶ} \quad a^{\frac{\mu}{\nu}} \times a^{\frac{\pi}{\rho}} = a^{\frac{\mu\rho+\nu\pi}{\nu\rho}} = a^{\frac{\mu}{\nu} + \frac{\pi}{\rho}},$$

καὶ βλέπομεν ὅτι, τὸ γινόμενον δύο κλασματικῶν δυνάμεων τῆς αὐτῆς ποσότητος a εἶναι νέα δύναμις αὐτῆς, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν κλασματικῶν αὐτῆς δυνάμεων, ὅπως καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων δυνάμεων αὐτῆς.

161. Ἀπεδείξαμεν ὡσαύτως (153 καὶ 157) ὅτι

$$\frac{\sqrt[\nu]{a^{\mu}}}{\sqrt[\nu]{a^{\pi}}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu-\pi}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\sqrt[\nu]{a^{\mu}}}{\sqrt[\rho]{a^{\pi}}} = \sqrt[\nu\rho]{a^{\mu\rho-\nu\pi}},$$

παριστῶντες δὲ διὰ κλασματικῶν ἐκθετῶν ἕκαστον τῶν ἐν ταῖς ἀνωτέρω ἰσοτήτεσι ριζικῶν, θέλομεν ἔχει

$$\frac{a^{\frac{\mu}{\nu}}}{a^{\frac{\pi}{\nu}}} = a^{\frac{\mu-\pi}{\nu}} = a^{\frac{\mu}{\nu} - \frac{\pi}{\nu}}, \quad \frac{a^{\frac{\mu}{\nu}}}{a^{\frac{\pi}{\rho}}} = a^{\frac{\mu\rho-\nu\pi}{\nu\rho}} = a^{\frac{\mu}{\nu} - \frac{\pi}{\rho}},$$

καὶ βλέπομεν ὅτι, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο κλασματικῶν δυνάμεων

νάμεωρ τῆς αὐτῆς ποσότητος α εἶναι νέα δύναμις αὐτῆς, ἔχουσα ἐκθέτην τὴν ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ὑπεροχὴν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου, ὅπως καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων δυνάμεωρ αὐτῆς.

162. Ἀπεδείξαμεν ἐπίσης ἐν τῇ § 154 ὅτι

$$(\sqrt[y]{a^{\frac{\mu}{\nu}}})^{\pi} = \sqrt[y]{a^{\frac{\mu\pi}{\nu}}},$$

παριστῶντες δὲ ἐκάτερον τῶν ἐν τῇ ἰσότητι ταύτῃ ριζικῶν διὰ κλασματικῶν ἐκθετῶν θέλομεν ἔχει

$$\left(a^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\pi} = a^{\frac{\mu\pi}{\nu}},$$

καὶ βλέπομεν ὅτι, ἵνα ὑψώσωμεν εἰς τὴν $\pi^{\text{την}}$ δύναμιν ποσότητά τινα α, ἔχουσαν κλασματικὸν ἐκθέτην, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἐκθέτην αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π, τὸν παριστῶντα τὸν βαθμὸν τῆς ζητουμένης δυνάμεως, ὅπως καὶ ὅταν ὁ ἐκθέτης αὐτῆς ᾖναι ἀκέραιος ἀριθμός.

163. Ἀπεδείξαμεν πρὸς τούτοις ἐν τῇ § 155 ὅτι

$$\sqrt[\pi]{\sqrt[y]{a^{\frac{\mu}{\nu}}}} = \sqrt[y]{a^{\frac{\mu}{\nu\pi}}},$$

παριστῶντες δὲ ἐκάτερον τῶν ἐν τῇ ἰσότητι ταύτῃ ριζικῶν διὰ κλασματικῶν ἐκθετῶν θέλομεν ἔχει

$$\left(a^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{1}{\pi}} = a^{\frac{\mu}{\nu\pi}},$$

καὶ βλέπομεν ὅτι, ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν $\pi^{\text{την}}$ ρίζαν ποσότητός τινος α, ἐχούσης κλασματικὸν ἐκθέτην, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἐκθέτην αὐτῆς διὰ π, ὅπως καὶ ὅταν οὗτος ᾖναι ἀκέραιος ἀριθμός, ἢ καί, ὅπερ ταῦτὸ

ἵνα ὑψώσωμεν τὴν παράστασιν $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ εἰς τὴν $\frac{1}{\pi}$ δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἐκθέτην αὐτῆς $\frac{\mu}{\nu}$ ἐπὶ $\frac{1}{\pi}$.

Ἄν ἐλαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἰσότητα

$$\left(\sqrt[\pi]{\sqrt[y]{a^{\frac{\mu}{\nu}}}}\right)^{\rho} = \left(\sqrt[y]{a^{\frac{\mu}{\nu\pi}}}\right)^{\rho} = \sqrt[y]{a^{\frac{\mu\rho}{\nu\pi}}},$$

ἠθέλομεν ἔχει παριστῶντες τὰ ἐν αὐτῇ ριζικὰ διὰ κλασματικῶν ἐκθετῶν

$$\left(a^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\rho}{\pi}} = a^{\frac{\mu\rho}{\nu\pi}} = a^{\frac{\mu}{\nu} \times \frac{\rho}{\pi}},$$

καὶ βλέπομεν πάλιν ὅτι, ἵνα ὑψώσωμεν τὴν παράστασιν $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ εἰς τὴν $\frac{\rho}{\pi}$ δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{\rho}{\pi}$ τὸν ἐκθέτην αὐτῆς $\frac{\mu}{\nu}$, ὅπως καὶ ὅταν ἀμφοτέρω ἦναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΕΚΘΕΤΑΙ

164. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ a^{μ} διὰ τοῦ a^{ν} παρίσταται $a^{\mu-\nu}$, ὅταν ὁ ἐκθέτης ν τοῦ διαιρετοῦ ἦναι μικρότερος ἢ ἴσος τῷ ἐκθέτῃ μ τοῦ διαιρετέου. Ἀλλ' ὅταν ὁ ν ἦναι μεγαλύτερος τοῦ μ , ὅταν π. χ. ἔχωμεν $\nu = \mu + \pi$ τότε ἡ διαφορὰ $\mu - \nu$ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς καὶ ἴσος τῷ $-\pi$. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως

$$\frac{a^{\mu}}{a^{\nu}} = \frac{a^{\mu}}{a^{\mu+\pi}} = a^{\mu-\mu-\pi} = a^{-\pi},$$

Ἀφ' ἐτέρου δὲ τὸ κλάσμα $\frac{a^{\mu}}{a^{\mu+\pi}}$ ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{a^{\mu}}{a^{\mu} \times a^{\pi}}$ γίνεταί, διαιρουμένων διὰ a^{μ} τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ, $\frac{1}{a^{\pi}}$. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητά

$$a^{-\pi} = \frac{1}{a^{\pi}} \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ὅτι, πᾶσα ποσότης a , ἔχουσα ἀρνητικὸν ἐκθέτην, δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ κλάσματος, ἔχοντος ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τὴν αὐτὴν ποσότητα a μὲ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην θετικῶς λαμβανόμενον.

Ἐκ τῆς ἰσότητος (1) πορίζομεθα εὐκόλως

$$a^{\pi} \times a^{-\pi} = 1, \quad \text{ἐπομένως} \quad a^{\pi} = \frac{1}{a^{-\pi}}.$$

Πᾶσα λοιπὸν ποσότης a , ἔχουσα ὅποιονδήποτε ἐκθέτην, θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν, δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ κλάσματος, ἔχοντος ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τὴν αὐτὴν ποσότητα a μὲ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην ἀντιθέτως λαμβανόμενον.

165. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ ἀποδείχθεισῶν ἰσοτήτων δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἴδωμεν, ὅτι οἱ κανόνες τοῦ ὑπο-

λογισμού, οἱ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν ἐκθετῶν ἀποδειχθέν-
τες, μένουσιν οἱ αὐτοὶ καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται ᾦναι ἀριθμοὶ ἀρνητικοί.

1^{ον}. Ἐὰς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ a^{μ} ἐπὶ $a^{-\nu}$. Θέλομεν ἔχει

$$a^{\mu} \times a^{-\nu} = a^{\mu} \times \frac{1}{a^{\nu}} = \frac{a^{\mu}}{a^{\nu}} = a^{\mu-\nu},$$

καὶ βλέπομεν ὅτι εὐρίσκεται προστιθεμένων τῶν ἐκθετῶν μ καὶ $-r$,
ὅπως καὶ ὅταν οὗτοι ᾦναι ἀριθμοὶ θετικοί.

2^{ον}. Ἐὰς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ $a^{-\mu}$ ἐπὶ $a^{-\nu}$. Θέλομεν ἔχει

$$a^{-\mu} \times a^{-\nu} = \frac{1}{a^{\mu}} \times \frac{1}{a^{\nu}} = \frac{1}{a^{\mu+\nu}} = a^{-(\mu+\nu)} = a^{-\mu-\nu},$$

τουτέστι τὸ ζητούμενον γινόμενον εὐρίσκεται προστιθεμένων τῶν ἀρ-
νητικῶν ἐκθετῶν $-\mu$ καὶ $-r$, ὅπως καὶ ὅταν οὗτοι ᾦναι ἀριθμοὶ
θετικοί.

3^{ον}. Ἐστω τρίτον νὰ διαιρεθῇ a^{μ} διὰ $a^{-\nu}$. Θέλομεν ἔχει ἀντικαθι-
στῶντες $a^{-\nu}$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $\frac{1}{a^{\nu}}$

$$\frac{a^{\mu}}{a^{-\nu}} = \frac{a^{\mu}}{1} \times \frac{1}{a^{\nu}} = \frac{a^{\mu}}{a^{\nu}} = a^{\mu-\nu},$$

καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εὐρίσκεται ἀφαιρουμένου ἀπὸ
τοῦ ἐκθέτου μ τοῦ διαιρετέου τοῦ ἐκθέτου $-\nu$ τοῦ διαιρετοῦ, ὅπως
καὶ ὅταν οὗτοι ᾦναι ἀριθμοὶ θετικοί.

4^{ον}. Ἐὰς ὑποθέσωμεν τέταρτον ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ πηλίκον τῆς δι-
αιρέσεως τοῦ $a^{-\mu}$ διὰ τοῦ $a^{-\nu}$. Θέλομεν ἔχει

$$a^{-\mu} : a^{-\nu} = \frac{1}{a^{\mu}} : \frac{1}{a^{\nu}} = \frac{1}{a^{\mu}} \times \frac{a^{\nu}}{1} = \frac{a^{\nu}}{a^{\mu}} = a^{\nu-\mu} = a^{-\mu+\nu},$$

καὶ βλέπομεν ὅτι εὐρίσκεται ἀφαιρουμένου τοῦ ἐκθέτου $-\mu$ τοῦ διαι-
ρέτου ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου $-\nu$ τοῦ διαιρετέου, ὅπως καὶ ὅταν οὗτοι ᾦναι
ἀριθμοὶ θετικοί.

5^{ον}. Ἐὰς ὑποθέσωμεν πέμπτον ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν $a^{-\mu\pi}$ δύ-
ναμιν τοῦ $a^{-\mu}$. Θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἀνωτέρω συμπεφωνημένα

$$(a^{-\mu})^{\pi} = \left(\frac{1}{a^{\mu}} \right)^{\pi} = \frac{1}{a^{\mu\pi}} = a^{-\mu\pi},$$

καὶ βλέπομεν ὅτι ἡ ζητούμενη $\pi^{\pi\mu}$ δύναμις τοῦ $a^{-\mu}$ εὑρίσκεται πολ-
 λαπλασιαζομένου τοῦ ἀρρητικοῦ αὐτῆς ἐκθέτου $-\mu$ ἐπὶ τὸν ἐκθέ-
 τηρ π τῆς ζητούμενης δυνάμεως, ὅπως καὶ ὅταν ὁ πρῶτος ᾖ γὰρ ἀριθ-
 μὸς θετικὸς.

6^{ον}. Ἄς ὑποθέσωμεν ἕκτον ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν $-\pi^{\pi\mu}$ δύ-
 ναμιν τοῦ a^{μ} . Θέλομεν ἔχει

$$(a^{\mu})^{-\pi} = \frac{1}{(a^{\mu})^{\pi}} = \frac{1}{a^{\mu\pi}} = a^{-\mu\pi},$$

καὶ βλέπομεν πάλιν ὅτι τὸ ζητούμενον εὑρίσκεται, ὅπως καὶ ὅταν ἡ
 ζητούμενη δύναμις ᾖ θετικὸς ἀριθμὸς.

7^{ον}. Ἄν εἴχομεν νὰ ὑψώσωμεν $a^{-\mu}$ εἰς τὴν $-\pi^{\pi\mu}$ δύναμιν, ἡθέλο-
 μεν ἔχει

$$(a^{-\mu})^{-\pi} = \left(\frac{1}{a^{\mu}}\right)^{-\pi} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{\mu}}\right)^{\pi}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{\mu\pi}}} = a^{\mu\pi},$$

καὶ βλέπομεν πάλιν ὅτι αὕτη εὑρίσκεται πολλαπλασιαζομένων τῶν
 ἐκθετῶν $-\mu$ καὶ $-\pi$, ὅπως καὶ ὅταν οὔτοι ᾖναι ἀριθμοὶ θετικοί.

8^{ον}. Ἐστω νὰ ἐξαχθῇ $-\pi^{\pi\mu}$ ρίζα τοῦ a^{μ} . Λέγω ὅτι αὕτη θέλει πα-
 ρασταθῇ διὰ $a^{\frac{\mu}{-\pi}}$, διότι ἡ $-\pi^{\pi\mu}$ δύναμις τοῦ $a^{\frac{\mu}{-\pi}}$ εἶναι a^{μ} . Διότι
 κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἔχομεν

$$\left(a^{\frac{\mu}{-\pi}}\right)^{-\pi} = a^{\frac{-\mu\pi}{-\pi}} = a^{\mu}$$

βλέπομεν λοιπὸν ὅτι αὕτη εὑρίσκεται διαιρουμένου διὰ $-\pi$ τοῦ ἐκθέ-
 του μ , ὅπως καὶ ὅταν ὁ πρῶτος ᾖναι ἀριθμὸς θετικὸς.

9^{ον}. Ἐστω νὰ ἐξαχθῇ ἡ $-\pi^{\pi\mu}$ ρίζα τοῦ $a^{-\mu}$. Λέγω ὅτι αὕτη θέλει
 παρασταθῇ διὰ $a^{\frac{-\mu}{-\pi}}$ ἢ διὰ $a^{\frac{\mu}{\pi}}$, διότι ἡ $-\pi^{\pi\mu}$ δύναμις τοῦ $a^{\frac{\mu}{\pi}}$ εἶναι
 $a^{-\mu}$. Διότι κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἔχομεν

$$\left(a^{\frac{\mu}{\pi}}\right)^{-\pi} = a^{\frac{-\mu\pi}{\pi}} = a^{-\mu},$$

καὶ βλέπομεν λοιπὸν ὅτι αὕτη εὑρίσκεται πάλιν κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα.

Σημείωσις. — Ἡ ἀνωτέρω ἀποδειχθεῖσα ταυτότης τῶν κανόνων τοῦ
 πολλαπλασιασμοῦ, τῆς διαιρέσεως, τῆς ὑψώσεως εἰς δυνάμεις καὶ τῆς

ἐξαγωγῆς τῶν ριζῶν ἐπὶ τῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν, θετικῶν τε καὶ ἀρνητικῶν ἐκθετῶν καὶ δεικτῶν, καθιστᾷ πασιφανῆ τὰ ἐν τῷ Ἀλγεβρικῷ ὑπολογισμῷ πολύτιμα καὶ πολλαπλᾶ προτερήματα τῶν ὑπὸ τοῦ Καρτεσιῦ ἐν τῇ ἐπιστήμῃ ταύτῃ εἰσαχθέντων ἐκθετῶν ἢ τῆς δι' ἐκθετῶν παραστάσεως τῶν δυνάμεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ. — ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $a^x = b$.

ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

166. Καλοῦνται ἐν γένει ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις ἐκεῖναι, ἐν αἷς ἡ προσδιοριστέα ἄγνωστος περιέχεται ὡς ἐκθέτης γνωστῶν ποσοτήτων. Παράδειγματος χάριν, αἱ ἐξισώσεις

$$a^x - b^x = \gamma, \quad a^x - b^x = \gamma^x + \delta,$$

ἐν αἷς ἡ ἄγνωστος x περιέχεται ὡς ἐκθέτης τῶν γνωστῶν ποσοτήτων a , b καὶ γ , καλοῦνται ἐκθετικά.

Ἡ ἀπλουστάτη πασῶν τῶν ἐκθετικῶν ἐξισώσεων εἶναι ἡ τῆς μορφῆς

$$a^x = b,$$

τῶν γραμμάτων a καὶ b παριστῶντων γνωστοὺς καὶ θετικοὺς ἀριθμούς. Περὶ ταύτης δὲ καὶ μόνον θέλομεν ἀσχοληθῆ ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ.

167. Πρὶν ἢ προβῶμεν εἰς τὴν ἐκθεσιν τοῦ τρόπου τῆς λύσεως τῆς περὶ ἧς ἐνταῦθα ὁ λόγος ἐκθετικῆς ἐξισώσεως $a^x = b$, ἃς ζητήσωμεν ποίας τιμᾶς λαμβάνει ἡ παράστασις a^x , ὅταν ὁ ἐκθέτης αὐτῆς x λαμβάνῃ πάσας τὰς δυνατάς τιμὰς ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τοῦ a ὄντος μεγαλειτέρου ἢ μικροτέρου τῆς μονάδος.

1^{ον}. Ὡς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι $a > 1$.

Ὅταν x εἶναι $-\infty$, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἐν τῇ § 164 συμπεφωνημένα

$$a^x = a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = 0,$$

διότι, όταν a ᾖναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος, ἡ παράστασις a^x δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εἷς τῶν ὄρων τῆς ἀϋξούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$\div a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 : \dots,$$

καί, κατὰ τὰ ἐν τῇ § 127 ἀποδειχθέντα, οὔτοι βαίνουνσιν ἀϋξανόμενοι ἐπ' ἄπειρον. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει $a^\infty = \infty$, καὶ ἐπομένως $\frac{1}{a^\infty} = 0$.

Ὅταν ἡ τιμὴ τῆς x ἐλαττοῦται ἀρνητικῶς, ἡ παράστασις a^x , ἥς ὁ ἐκθέτης εἶναι πάντοτε ἀρνητικός, θέλει βαίνειν ἀϋζανομένη. Διότι τότε θέλομεν ἔχει

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}},$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ x εἶναι ἀρνητικόν, τὸ $-x$ θέλει εἶναι θετικόν, καὶ ὅταν ὁ θετικὸς ἐκθέτης $-x$ τοῦ a ἐλαττοῦται, ἡ παράστασις a^{-x} θέλει ἐλαττοῦσθαι ἐπίσης, ἐπομένως τὸ κλάσμα $\frac{1}{a^{-x}}$ θέλει ἀϋξάνει.

Ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ x γείνη 0, τότε θέλομεν ἔχει (20)

$$a^x = a^0 = 1.$$

Ὅταν τέλος ἡ τιμὴ τῆς x βαίνειν ἀϋζανομένη ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, ἡ τιμὴ τοῦ a^x θέλει βαίνειν κατὰ τὰ προλεχθέντα ἀϋζανομένη ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ $+\infty$. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $a > 1$

ὅταν

x	γίνεται	$-\infty$	$\dots$	0	$\dots$	$+\infty$
a^x	γίνεται	0	$\dots$	1	$\dots$	$+\infty$

2^{ον}. Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι $a < 1$. Ἐὰν θέσωμεν

$$a = \frac{1}{b},$$

τοῦ b ὄντος προφανῶς μεγαλύτερου τῆς μονάδος, θέλομεν ἔχει

$$a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x} = b^{-x},$$

ἐπομένως, ὅταν ὁ ἐκθέτης x τοῦ a λαμβάνη τὰς τιμὰς $-\infty \dots 0 \dots +\infty$, ὁ ἐκθέτης $-x$ τοῦ b γίνεται $+\infty \dots 0 \dots -\infty$, καὶ ἐπειδὴ τὸ b εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα,

ὅταν

x	ᾖναι	$-\infty$	$\dots$	0	$\dots$	$+\infty$
a^x ἢ b^{-x}	γίνεται	$+\infty$	$\dots$	1	$\dots$	0

Ἡ παράστασις λοιπὸν a^x μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$ ἢ ἀπὸ τοῦ $+\infty$ μέχρι τοῦ 0, ὅταν ἡ μὲν τιμὴ τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς x μεταβάλληται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$, ἡ δὲ ποσότης a ᾗναι μεγαλειτέρα ἢ μικροτέρα τῆς μονάδος.

ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $a^x = b$

168. Τούτων τεθέντων, ἂς λάβωμεν τὴν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν $a^x = b$, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις, ὅτι a καὶ b παριστῶσιν ἀριθμοὺς μεγαλειτέρους τῆς μονάδος.

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸ x τὰς διαδοχικὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3, κτλ., θέλομεν εὑρεῖν ἢ ἀκεραίαν τινὰ δύναμιν τοῦ a ἴσην τῷ b ἢ δύο διαδοχικὰς δυνάμεις αὐτοῦ a^v καὶ a^{v+1} , μεταξὺ τῶν ὁποίων νὰ περιέχεται ὁ b . Ἐὰν συμβῇ τὸ πρῶτον, τότε ὁ ἀριθμός, ὁ παριστῶν τὸν ἐκθέτην τῆς ἴσης τῷ b δυνάμεως τοῦ a , θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη τιμὴ τῆς x , τῆς ταυτοποιούσης τὴν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν $a^x = b$. Ἐὰν τὸ δεύτερον, τότε, ἐπειδὴ ἡ ζητούμενη τιμὴ τῆς x θέλει ἀναγκαίως περιέχεσθαι μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν v καὶ $v+1$, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $x = v + \frac{1}{\psi}$, τοῦ ψ παριστῶντος ἀριθμὸν μεγαλειτέραν τῆς μονάδος, καὶ θέλομεν ἔχει

$$a^x = a^{v + \frac{1}{\psi}} = b, \quad \text{ἢ} \quad a^v \times a^{\frac{1}{\psi}} = b \quad (2).$$

Διαιροῦντες ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (2) διὰ a^v καὶ ὑποῦντες τὰ δύο μέλη τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως

$$a^{\frac{1}{\psi}} = \frac{b}{a^v}$$

εἰς τὴν ψ δύναμιν, θέλομεν ἔχει, ἐπειδὴ $\left(a^{\frac{1}{\psi}}\right)^\psi = a$, τὴν νέαν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν

$$\left(\frac{b}{a^v}\right)^\psi = a \quad (3),$$

ἐν ᾗ τὸ κλάσμα $\frac{b}{a^v}$ παριστᾷ ἀριθμὸν μεγαλειτέρον τῆς μονάδος, διότι ὑπετέθη ἀνωτέρω ὅτι ὁ b περιέχεται μεταξὺ τοῦ a^v καὶ a^{v+1} .

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (3) εἶναι ὁμοία τῇ δεδομένῃ $a^x = b$, δίδομεν πά-

λιν εἰς τὴν ψ τὰς διαδοχικὰς τιμὰς 1, 2, 3, κτλ., καὶ ἐὰν δὲν εὗρωμεν ἀκεραίαν τινὰ δύναμιν τοῦ $\frac{\theta}{\alpha'}$ ἴσην τῷ a , θέλομεν ἀναγκαίως εὑρεῖ δύο διαδοχικὰς δυνάμεις αὐτοῦ $\left(\frac{\theta}{\alpha'}\right)^\pi$ καὶ $\left(\frac{\theta}{\alpha'}\right)^{\pi+1}$, μεταξὺ τῶν ὁποίων νὰ περιέχεται ὁ a . Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εὗρομεν τὴν $\mu^{\pi+\nu}$ δύναμιν τοῦ $\frac{\theta}{\alpha'}$ ἴσην τῷ a , τότε ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς χ θέλει εἶναι

$$\chi = r + \frac{1}{\psi} = r + \frac{1}{\mu},$$

ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι εὗρομεν τὰς διαδοχικὰς δυνάμεις π καὶ $\pi+1$ αὐτοῦ, μεταξὺ τῶν ὁποίων νὰ περιέχεται ὁ a , τότε δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν $\psi = \pi + \frac{1}{\omega}$, τοῦ ω παριστῶντος ἀριθμὸν μεγαλείτερον τῆς μονάδος, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\left(\frac{\theta}{\alpha'}\right)^\psi = \left(\frac{\theta}{\alpha'}\right)^{\pi + \frac{1}{\omega}} = a, \quad \text{ἢ} \quad \left(\frac{\theta}{\alpha'}\right)^\pi \times \left(\frac{\theta}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\omega}} = a \quad (4).$$

Διαιροῦντες πάλιν ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἐξίσωσως (4) διὰ τοῦ $\left(\frac{\theta}{\alpha'}\right)^\pi$ καὶ ὑψοῦντες τὰ δύο μέλη τῆς προκυπτούσης ἐξίσωσως

$$\left(\frac{\theta}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\omega}} = \frac{a \cdot \alpha'^{\nu\pi}}{\theta^\pi}$$

εἰς τὴν ω δύναμιν, θέλομεν ἔχει τὴν νέαν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν

$$\left(\frac{a \cdot \alpha'^{\nu\pi}}{\theta^\pi}\right)^\omega = \frac{\theta}{\alpha'} \quad (5),$$

ἐν ᾗ τὸ κλσμα $\frac{a \cdot \alpha'^{\nu\pi}}{\theta^\pi}$ παριστᾷ ἀριθμὸν μεγαλείτερον τῆς μονάδος, διότι ὑπετέθη ἀνωτέρω ὅτι τὸ a περιέχεται μεταξὺ $\left(\frac{\theta}{\alpha'}\right)^\pi$ καὶ $\left(\frac{\theta}{\alpha'}\right)^{\pi+1}$.

Ἐπειδὴ πάλιν ἡ ἐξίσωσις (5) εἶναι ὁμοία τῇ δεδομένῃ $a^x = \theta$, δίδοντες εἰς τὴν ω τὰς διαδοχικὰς τιμὰς 1, 2, 3, κτλ. θέλομεν εὑρεῖ ἢ τινὰ ἀκεραίαν δύναμιν τοῦ $\frac{a \cdot \alpha'^{\nu\pi}}{\theta^\pi}$ ἴσην τῷ $\frac{\theta}{\alpha'}$, ἢ δύο διαδοχικὰς δυνάμεις αὐτοῦ $\left(\frac{a \cdot \alpha'^{\nu\pi}}{\theta^\pi}\right)^p$ καὶ $\left(\frac{a \cdot \alpha'^{\nu\pi}}{\theta^\pi}\right)^{p+1}$ μεταξὺ τῶν ὁποίων νὰ περιέχεται τὸ δεύ-

τερον μέλος αὐτῆς. Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ πρῶτον καὶ ὅτι σ παριστᾷ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ταύτης, θέλομεν ἔχει

$$x = r + \frac{1}{\psi} = r + \frac{1}{\pi + \frac{1}{\omega}} = r + \frac{1}{\pi + \frac{1}{\sigma}},$$

ἐὰν δ' ὑποθέσωμεν τὸ δεύτερον, τότε δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\omega = r + \frac{1}{\varphi}$, τοῦ φ παριστῶντος ἀριθμὸν μεγαλείτερον τῆς μονάδος, καὶ θέλομεν πορισθῇ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5) κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τρόπον ὁμοίαν τινὰ ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν, δι' ἧς θέλομεν εὑρεῖ ὁμοιοτρόπως σκεπτόμενοι ἢ ἀκεραίαν τινὰ τιμὴν διὰ τὴν φ ἢ δύο διαδοχικοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τ καὶ $\tau+1$ μεταξὺ τῶν ὁποίων νὰ περιέχεται αὕτη. Ἐὰν πάλιν ὑποθέσωμεν τὸ πρῶτον, καὶ ὅτι x ἦναι ἡ ἀκεραία αὕτη τιμὴ τῆς φ , τότε τὸ συνεχὲς κλάσμα

$$r + \frac{1}{\pi + \frac{1}{\sigma + \frac{1}{x}}}$$

θέλει παριστᾷ τὴν ζητουμένην τιμὴν τῆς x , τὴν αὐτοποιούσαν τὴν ἐξίσωσιν $x^2 = 6$. ἐὰν τὸ δεύτερον, θέτοντες $\varphi = \tau + \frac{1}{\psi}$ θέλομεν εὑρεῖ νέαν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν, ἐξ ἧς ὁμοιοτρόπως σκεπτόμενοι θέλομεν πορισθῇ ἀνάλογα ἐξαγόμενα, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐστω, παραδείγματος χάριν, ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις

$$10^2 = 20 \quad (1).$$

Ἐπειδὴ $10^1 = 10$ καὶ $10^2 = 100$, ἡ τιμὴ τῆς x περιέχεται ἀναγκαστικῶς μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 1 καὶ 2. Θέτομεν λοιπὸν ἐν αὐτῇ $x = 1 + \frac{1}{\psi}$ καὶ ἔχομεν

$$10^{1+\frac{1}{\psi}} = 20, \quad \text{ἢ} \quad 10^1 \times 10^{\frac{1}{\psi}} = 20 \quad (2).$$

Διαιροῦντες ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (2) διὰ 10 καὶ ὑψοῦντες τὰ δύο μέλη τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως $10^{\frac{1}{\psi}} = 2$ εἰς τὴν ψ δύναμιν, θέλομεν ἔχει πρὸς λύσιν τὴν νέαν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν

$$2^\psi = 10 \quad (3),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως, ἐπειδὴ $2^3=8$ καὶ $2^4=16$, ὅτι ἡ ψ περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 3 καὶ 4.

Θέτομεν λοιπὸν ἐν αὐτῇ $\psi=3+\frac{1}{\omega}$ καὶ ἔχομεν

$$2^{3+\frac{1}{\omega}}=10, \quad \eta \quad 2^3 \times 2^{\frac{1}{\omega}}=10 \quad (4).$$

Διαιροῦντες πάλιν ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως (4) διὰ 2^3 καὶ ὑψοῦντες τὰ δύο μέλη τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως $2^{\frac{1}{\omega}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$ εἰς τὴν ω δύναμιν, θέλομεν ἔχει πρὸς λύσιν τὴν νέαν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\omega}=2 \quad (5),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως, ἐπειδὴ $\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{125}{64}<2$ καὶ $\left(\frac{5}{4}\right)^4=\frac{625}{256}>2$, ὅτι ἡ ω περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 3 καὶ 4.

Θέτομεν λοιπὸν ἐν αὐτῇ $\omega=3+\frac{1}{\varphi}$ καὶ ἔχομεν

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{\varphi}}=2, \quad \eta \quad \left(\frac{5}{4}\right)^3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{\varphi}}=2 \quad (6).$$

Διαιροῦντες πάλιν τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ $\left(\frac{5}{4}\right)^3$ καὶ ὑψοῦντες ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{\varphi}}=\frac{2 \cdot 4^3}{5^3}$ εἰς τὴν φ δύναμιν, θέλομεν ἔχει πρὸς λύσιν νέαν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν, ὁμοίαν τῇ δεδομένῃ καὶ ταῖς προηγουμέναις, καὶ θέλομεν εὑρεῖ ὁμοιότροπως ἐργαζόμενοι ὅτι ἡ φ περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 2 καὶ 3. Θέτοντες λοιπὸν $\varphi=2+\frac{1}{\upsilon}$ θέλομεν ἔχει

$$x=4+\frac{4}{3+\frac{4}{3+\frac{4}{2+\frac{4}{\upsilon}}}}$$

τοῦ υ παριστῶντος ἀριθμὸν μεγαλείτερον τῆς μονάδος, προσδιοριζόμενον κατὰ τὸν προηγουμένως ἐκτεθέντα τρόπον.

Ἐάν σχηματίσωμεν τοῦ ἀνωτέρω συνεχοῦς τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα

$$\frac{4}{4}, \frac{4}{3}, \frac{43}{40}, \frac{30}{23},$$

τὸ τέταρτον ἡγμένον θέλει παριστᾷ τὴν τιμὴν τοῦ x κατὰ προσέγγισιν μικροτέραν $\frac{1}{23 \cdot 23 + 10}$, ἢ $\frac{1}{739}$.

169. Ὡς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι $a > 1$ καὶ $b < 1$. Λαμβάνομεν τότε $b' = \frac{1}{b}$ καὶ λύομεν κατὰ τὸν προηγουμένως ἐκτεθέντα τρόπον τὴν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν

$$a^x = b' \quad (1),$$

ἐν ᾗ a καὶ b' παριστῶσιν ἀριθμοὺς μεγαλειτέρους τῆς μονάδος. Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι, ἐάν ἡ τιμὴ x τῆς x ταῦτοποιῇ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (1), ἡ τιμὴ $-x$ αὐτῆς θέλει ταῦτοποιεῖ τὴν δεδομένην $a^x = b$. Διότι θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἐν τῇ § 164 λεχθέντα

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \frac{1}{b'} = b, \text{ διότι ἐλάβομεν } b' = \frac{1}{b}.$$

170. Ὡς ὑποθέσωμεν τρίτον $a < 1$ καὶ $b < 1$. Λαμβάνομεν τότε $a' = \frac{1}{a}$ καὶ $b' = \frac{1}{b}$, καὶ λύομεν κατὰ τὸν προεκτεθέντα τρόπον ἀντὶ τῆς ἐξισώσεως $a^x = b$ τὴν νέαν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν

$$a'^x = b' \quad (1),$$

ἐν ᾗ a' καὶ b' παριστῶσιν ἀριθμοὺς μεγαλειτέρους τῆς μονάδος. Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι, ἐάν ἡ τιμὴ x τῆς x ταῦτοποιῇ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (1), ἡ αὐτὴ τιμὴ x τῆς x θέλει ταῦτοποιεῖ καὶ τὴν δεδομένην $a^x = b$. Διότι θέλομεν ἔχει

$$a^x = \left(\frac{1}{a'}\right)^x = \frac{1}{b'} = \frac{1}{b}, \text{ ἢ } \frac{1}{a^x} = \frac{1}{b}, \text{ ἐπομένως } a^x = b.$$

171. Ὡς ὑποθέσωμεν τέταρτον ὅτι $a < 1$ καὶ $b > 1$. Λαμβάνομεν πάλιν $a' = \frac{1}{a}$ καὶ λύομεν κατὰ τὸν προεκτεθέντα τρόπον τὴν ἐξίσωσιν

$$a'^x = b \quad (1),$$

ἐν ᾗ a' καὶ b παριστῶσιν ἀριθμοὺς μεγαλειτέρους τῆς μονάδος. Εἶναι

δὲ φανερόν ὅτι, ἐὰν ἡ τιμὴ x τῆς χ ταῦτοποιῇ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (1), ἡ τιμὴ $-x$ αὐτῆς θέλει ταῦτοποιεῖ τὴν δεδομένην $a^x = b$. Διότι θέ-
λομεν ἔχει

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a'^x = b, \text{ διότι ἐλάβομεν } a' = \frac{1}{a}.$$

172. Εἶδομεν προηγουμένως ὅτι τὸ συνεχὲς κλάσμα, τὸ παριστῶν τὴν τιμὴν τῆς χ , τὴν ταῦτοποιοῦσαν τὴν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν $a^x = b$, θέ-
λει εἶναι ἢ πεπερασμένον ἢ ἀτελεύτητον, εὐκόλως δὲ δυνάμεθα νὰ εὑ-
ρωμεν πότε θέλει εἶναι πεπερασμένον καὶ πότε ἀτελεύτητον. Ἄς ὑπο-
θέσωμεν π. χ. ὅτι ἡ σύμμετρος τιμὴ $\frac{p}{q}$ τῆς χ ταῦτοποιεῖ τὴν δεδομέ-
νην ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν, καὶ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ a καὶ b ἀποσυντεθέντες εἰς
τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας εὐρίσκονται ἴσοι μὲ τὰ γινόμενα

$$\pi^{\alpha'} \cdot \kappa^{\beta'} \cdot \rho^{\gamma'} \dots \text{ καὶ } \pi^{\alpha''} \cdot \kappa^{\beta''} \cdot \rho^{\gamma''} \dots$$

Θέλομεν τότε ἔχει τὴν ἐξίσωσιν $a^{\frac{p}{q}} = b$, ἐξ ἧς πορίζομεθα ὑψοῦντες
τὰ δύο μέλη αὐτῆς εἰς τὴν $q^{\text{την}}$ δύνανμιν τὴν ἀκόλουθον

$$(\pi^{\alpha'} \cdot \kappa^{\beta'} \cdot \rho^{\gamma'} \dots)^q = (\pi^{\alpha''} \cdot \kappa^{\beta''} \cdot \rho^{\gamma''} \dots)^q, \quad \text{ἢ} \quad \pi^{\alpha'q} \cdot \kappa^{\beta'q} \cdot \rho^{\gamma'q} \dots = \pi^{\alpha''q} \cdot \kappa^{\beta''q} \cdot \rho^{\gamma''q} \dots$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι δύο γινόμενα πρώτων πα-
ραγόντων δὲν δύνανται νὰ ᾔναι ἴσα, χωρὶς οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ
μὲν νὰ ᾔναι οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ δὲ καὶ νὰ ἔχωσι
τοὺς αὐτοὺς ἀμοιβαίως ἐκθέτας. Ἵνα λοιπὸν ἡ ἀνωτέρω τελευταία ἰσό-
της ὑπάρχῃ, πρέπει νὰ ὑπάρχωσιν αἱ ἐξῆς

$$\pi = \pi', \quad \kappa = \kappa', \quad \rho = \rho' \dots, \quad \text{καὶ} \quad \alpha'q = \alpha''r, \quad \beta'q = \beta''r, \quad \gamma'q = \gamma''r \dots,$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα τὰς ἐξῆς

$$\frac{p}{r} = \frac{\alpha''}{\alpha'}, \quad \frac{p}{r} = \frac{\beta''}{\beta'}, \quad \frac{p}{r} = \frac{\gamma''}{\gamma'} \dots, \quad \text{ἥτοι} \quad \frac{\alpha''}{\alpha'} = \frac{\beta''}{\beta'} = \frac{\gamma''}{\gamma'} = \dots$$

Ἵνα λοιπὸν ἡ τιμὴ τῆς χ τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως $a^x = b$ ᾔ σύμμε-
τρος ἀριθμὸς, τοιούτεστιν, ἵνα τὸ παριστῶν αὐτὴν συνεχὲς ἢ πεπερασμέ-
νον, πρέπει οἱ μὲν πρῶτοι παράγοντες τοῦ b νὰ ᾔναι οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς
πρώτους παράγοντας τοῦ a , οἱ δὲ λόγοι τῶν ἐκθετῶν τῶν αὐτῶν πρῶ-
των παραγόντων νὰ ᾔναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους.

Ὅταν ἡ τιμὴ τῆς χ , ἡ ταῦτοποιοῦσα τὴν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν $a^x = b$

ἦναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, ἡ παράστασις $a^λ$ θέλει παριστᾷ τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει αὕτη, ὅταν ἡ $λ$ λαμβάνη συμμέτρους τιμὰς τεινούσας πρὸς τὴν ἀσύμμετρον αὐτῆς τιμήν. Αἱ σύμμετροι αὗται τιμαί, αἱ πρὸς τὴν ἀσύμμετρον τείνουσαι, θέλουσιν εἶναι τὰ διάφορα διαδοχικὰ ἡγμένα τοῦ συνεχοῦς, ὅπερ εὐρίσκωμεν λύοντες κατὰ τὸν προεκτεθέντα τρόπον τὴν δεδομένην ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν $a^λ = b$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ. — ΑΡΧΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ
ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ. — ΝΗΣΕΡΙΑΝΟΙ ΚΑΙ ΚΟΙΝΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

173. Ὀνομάζονται *λογάριθμοι* τῶν ἀριθμῶν οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων, εἰς ἃς πρέπει νὰ ὑψωθῇ ὁ αὐτὸς θετικὸς ἀριθμὸς a , ἵνα παραχθῶσιν οἱ πρῶτοι· εἶναι, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, αἱ τιμαὶ τῆς $λ$ τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως

$$a^λ = b,$$

ἐν ἣ ὁ μὲν ἀριθμὸς a μένει ἀμετάβλητος, ὁ δὲ b λαμβάνει πάσας τὰς δυνατὰς θετικὰς τιμὰς.

Ὁ ἀμετάβλητος ἀριθμὸς a καλεῖται *βάσις*, τὸ δὲ σύνολον τῶν κατὰ τὴν αὐτὴν βάσιν εὐρισκομένων λογαρίθμων τῶν διαφόρων ἀριθμῶν καλεῖται *σύστημα λογαρίθμων*.

Ἵνα παραστήσωμεν ὅτι $λ$ εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ b , γράφομεν τὴν ἰσότητα

$$λ = \log b, \quad \text{ἢ τὴν} \quad \log b = λ,$$

ἥτις ἀπαγγέλλεται· $λ$ ἴσος λογάριθμος b , ἢ λογάριθμος b ἴσος $λ$.

Οἱ τοῦ αὐτοῦ συστήματος λογάριθμοι ἔχουσιν ἀξιοπαρατηρήτους τιμὰς καὶ λίαν χρήσιμους ιδιότητας, εἰς ὧν τὴν ἀπόδειξιν μεταβαίνομεν.

174. Ἄς ὑποθέσωμεν πρὸς τοῦτο ὅτι $λ$, $μ$, $ω$ εἶναι οἱ λογάριθμοι

τῶν ἀριθμῶν β , γ , δ κατὰ τὸ ἔχον a βάσιν σύστημα. Θέλομεν ἔχει κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὅρισμὸν τῶν λογαρίθμων τὰς ἰσότητας

$$a^{\lambda} = \beta, \quad a^{\psi} = \gamma, \quad a^{\omega} = \delta,$$

Πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς κατὰ μέλη θέλομεν εὑρεῖ τὴν ἀκόλουθον ἰσότητα

$$a^{\lambda} \cdot a^{\psi} \cdot a^{\omega}, \quad \eta \quad a^{\lambda+\psi+\omega} = \beta\gamma\delta,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα ὅρισμὸν τῶν λογαρίθμων τὴν ἐξῆς

$$\log \beta\gamma\delta = \chi + \psi + \omega = \log \beta + \log \gamma + \log \delta.$$

δι' ἧς ἀποδεικνύεται ὅτι

Ὁ Λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν ἀποτελούντων τὸ γινόμενον παραγόντων.

175. Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας

$$a^{\lambda} = \beta \quad \text{καὶ} \quad a^{\psi} = \gamma,$$

θέλομεν εὑρεῖ τὴν ἀκόλουθον

$$\frac{a^{\lambda}}{a^{\psi}}, \quad \eta \quad a^{\lambda-\psi} = \frac{\beta}{\gamma},$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα ὅρισμὸν τῶν λογαρίθμων τὴν ἐξῆς

$$\log \frac{\beta}{\gamma} = \chi - \psi = \log \beta - \log \gamma,$$

δι' ἧς ἀποδεικνύεται ὅτι

Ὁ Λογάριθμος τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου ἐλαττωθέντα κατὰ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου, ἢ, ὅπερ ταὐτό.

Ὁ Λογάριθμος κλάσματός τινος εὐρίσκεται ἀφαιρουμένου ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ τοῦ λογαρίθμου τοῦ παρονομαστοῦ.

176. Ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὴν $r^{\text{την}}$ δύναμιν ἐκάτερον τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος $a^{\lambda} = \beta$, τοῦ r παριστῶντος ἀκέραιόν τινα ἢ κλασματικόν, θετικόν ἢ ἀρνητικόν ἀριθμὸν, θέλομεν ἔχει τὴν ἀκόλουθον

$$a^{r\lambda} = \beta^r,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα κατὰ τὸν ὅρισμὸν τῶν λογαριθμῶν τὴν ἐξῆς

$$\log \beta^r = r \chi = r. \log \beta,$$

δι' ἧς ἀποδεικνύεται ὅτι

Ὁ λογάριθμος τῆς r^{χ} δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος β εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ λογαρίθμου τοῦ β ἐπὶ τὸν ἐκθέτην r τῆς δυνάμεως, εἰς ἣν οὗτος ὑψοῦται.

177. Ἐὰν ἐξαγάγωμεν τὴν r^{χ} ρίζαν ἐκατέρου τῶν μελῶν τῆς ισότητος $\alpha^r = \beta$, θέλομεν ἔχει τὴν ἀκόλουθον

$$\sqrt[r]{\alpha^r} = \sqrt[r]{\beta},$$

ἢ, παριστωμένων τῶν ριζικῶν τῆς τελευταίας ισότητος διὰ κλασματικῶν ἐκθετῶν, τὴν ισότητα

$$\alpha^{\frac{r}{r}} = \beta^{\frac{1}{r}},$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα κατὰ τὸν ὅρισμὸν τῶν λογαριθμῶν τὴν ἐπομένην

$$\log \beta^{\frac{1}{r}} = \frac{\chi}{r} = \frac{\log \beta}{r} = \frac{1}{r} \log \beta,$$

δι' ἧς ἀποδεικνύεται ὅτι

Ὁ λογάριθμος τῆς r^{χ} ρίζης ἀριθμοῦ τινος β εἶναι ἴσος μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ λογαρίθμου τοῦ β διὰ τοῦ δείκτου r τῆς ζητουμένης ρίζης, ἢ, ἐπειδὴ ἡ r^{χ} ρίζα ἀριθμοῦ τινος δύναται κατὰ τὰ ἐν τῇ § 158 συμπεφωνημένα νὰ ὀνομασθῇ δύναμις αὐτοῦ ἔχουσα $\frac{1}{r}$ ἐκθέτην,

Ὁ λογάριθμος τῆς $\frac{1}{r}$ δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος β εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ λογαρίθμου τοῦ β ἐπὶ τὸν ἐκθέτην $\frac{1}{r}$ τῆς εἰς ἣν οὗτος ὑψοῦται δυνάμεως.

Σημείωσις. — Τὸ θεώρημα τῆς παρούσης παραγράφου ἐνομίσαμεν καλὸν νὰ ἀποδείξωμεν ἰδιαιτέρως ἐνταῦθα, ἂν καὶ εὕρισκεται ἀποδεδειγμένον ἐν τῷ ἄνωτέρῳ, ἐν ᾧ τὸ r ὑπετέθη ὅποιονδήποτε, μόνον καὶ μόνον, ἵνα ὁ μαθητὴς ἔχῃ πρόχειρον εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῶν ιδιοτήτων τῶν λογαρίθμων τὴν χρῆσιν αὐτοῦ, ὅταν πρόκηται περὶ τῶν λογαριθμῶν ἐξακτέων ριζῶν.

178. Ἐπειδὴ, ὅποιονδήποτε καὶ ἂν ᾖ τὸ α , ἔχομεν πάντοτε

$a^0=1$ καὶ $a^1=a$, ἔπεται ὅτι $\log 1=0$ καὶ $\log a=1$. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι

Ὅποιαδήποτε καὶ ᾖ a ἦται ἡ βάσις συστήματός τινος λογαρίθμων, τῆς μὲν μονάδος ὁ λογάριθμος θέλει εἶναι τὸ μηδέν, τῆς δὲ βάσεως τοῦ συστήματος ἡ μονάς.

179. Ἀπεδείξαμεν προηγουμένως ἐν τῇ § 167 ὅτι, τοῦ x μεταβαλλομένου ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$, ἡ παράστασις a^x , ὅταν μὲν ὁ a ᾖ ἀριθμὸς θετικὸς καὶ μεγαλειότερος τῆς μονάδος, βαίνει ἀυξανομένη ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, ὅταν δὲ ὁ a ᾖ ἀριθμὸς θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος, ὅτι αὕτη βαίνει ἐλαττουμένη ἀπὸ τοῦ $+\infty$ μέχρι τοῦ 0. Ἐπειδὴ δὲ πάντοτε ἔχομεν $a^0=1$, ἔπεται ὅτι

Ὅταν ἡ βάσις συστήματός τινος λογαρίθμων ᾖται μεγαλειτέρα τῆς μονάδος, οἱ μὲν μεγαλιέτεροι τῆς μονάδος ἀριθμοὶ ἔχουσι λογαρίθμους μεγαλιέτερους τοῦ 0, τουτέστι θετικοὺς, οἱ δὲ μικρότεροι τῆς μονάδος ἀριθμοὶ ἔχουσι λογαρίθμους μικροτέρους τοῦ 0, τουτέστι ἀρνητικούς. Ὅταν δὲ τοῦναντίον ἡ βάσις τοῦ συστήματος ᾖται μικροτέρα τῆς μονάδος, τότε οἱ μὲν μεγαλιέτεροι τῆς μονάδος ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἀρνητικούς λογαρίθμους, οἱ δὲ μικρότεροι θετικούς.

Ἐπειδὴ πρὸς τοῦτοις λαμβάνονται πάντοτε ὡς βάσεις τῶν διαφόρων συστημάτων τῶν λογαρίθμων ἀριθμοὶ θετικοί, ὅποιαδήποτε δὲ θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ δύναμις θετικοῦ ἀριθμοῦ ᾖται πάντοτε ἀριθμὸς θετικὸς, ἔπεται ὅτι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι λογαρίθμους.

180. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι κατεσκευάσαμεν σύστημά τι λογαρίθμων κατὰ τινα βάσιν a , καὶ ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν κατὰ τὸ σύστημα, τὸ ἔχον βάσιν ἑτερόν τινα ἀριθμὸν a' . Ἄς ὑποθέσωμεν δὲ πρὸς τοῦτο ὅτι x παριστᾷ τὸν λογάριθμον ὁποιοῦδήποτε ἀριθμοῦ b κατὰ τὴν βάσιν a , καὶ ἄς παραστήσωμεν διὰ y τὸν λογάριθμον τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ b , ὅταν ὡς βάσις τοῦ συστήματος λαμβάνηται ὁ ἀριθμὸς a' . Θέλομεν ἔχει τότε τὴν ἰσότητά

$$a^x = b,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο μελῶν αὐτῆς κατὰ τὸ ἔχον βάσιν a σύστημα

$$\log(a^x) = \log b, \quad \text{ἢ} \quad x \cdot \log a = \log b$$

ἐπομένως

$$x = \frac{\log b}{\log a} = x' \frac{1}{\log a},$$

Ἴνα λοιπὸν εὗρωμεν, ἔχοντες τοὺς λογαριθμοὺς τῶν ἀριθμῶν κατὰ τινα βάσιν α, τοὺς λογαριθμοὺς τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν κατὰ τὸ ἔχον βάσιν α' σύστημα, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς πρώτους ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{1}{\log \alpha}$, ὅπερ εὐρίσκομεν διαιροῦντες τὴν μονάδα διὰ τοῦ λογαρίθμου τῆς νέας βάσεως α', ληφθέντος ἐν τῷ πρώτῳ συστήματι.

Ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς $\frac{1}{\log \alpha}$, ἐφ' ὃν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν πάσας τοὺς λογαρίθμους τοῦ συστήματος, ἐν ᾧ λαμβάνεται ὁ λογάριθμος τοῦ α', ἵνα εὗρωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν κατὰ τὸ ἔχον βάσιν α' σύστημα, καλεῖται διαστολεός.

ΑΡΧΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

181. Ἡ θεωρία τῶν λογαρίθμων καὶ ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν ἀφείλεται εἰς τὴν μεγαλοφυΐαν τοῦ Νεπέρου, σοφοῦ Σκώττου, ζήσαντος κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ 17^{ου} αἰῶνος. Οὗτος ἔχων ὑπ' ὄψιν αὐτοῦ δύο προόδους, τὴν μὲν γεωμετρικὴν, ἀρχομένην ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἔχουσαν λόγον π κατ' ἐλάχιστον διαφέροντα ταύτης, τὴν δὲ ἀριθμητικὴν, ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ μηδενὸς καὶ ἔχουσαν λόγον ἐλάχιστόν τινα ἀριθμὸν δ, γεγραμμένας δὲ οὕτως, ὥστε οἱ τῆς αὐτῆς τάξεως ὅροι νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ὡς φαίνεται κάτωθι:

$$\div 1 : \pi^1 : \pi^2 : \pi^3 : \pi^4 : \pi^5 : \pi^6 : \pi^7 : \pi^8 : \dots$$

$$\div 0 \quad \delta \quad 2\delta \quad 3\delta \quad 4\delta \quad 5\delta \quad 6\delta \quad 7\delta \quad 8\delta \quad \dots$$

παρετήρησεν ὅτι

1^{ον}. Πολλαπλασιάζων δύο ὅποιονδήποτε ὅρους τῆς πρώτης προόδου καὶ προσθέτωρ τοὺς ἀντιστοίχους ὅρους τῆς δευτέρας, εἰλάμβανεν γινόμενα καὶ ἀθροίσματα ὅρους ἀντιστοίχους.

Παραδείγματος χάριν, τὸ μὲν γινόμενον τῶν ὅρων π^2 καὶ π^5 τῆς πρώτης προόδου εἶναι π^{2+5} ἢ π^7 , τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ὅρων 2δ καὶ 5δ τῆς δευτέρας προόδου εἶναι 7δ , καὶ βλέπομεν ὅτι οἱ ὅροι π^7 καὶ 7δ εἶναι ἀντίστοιχοι.

2^{ον}. Διαιρὼν ὅρον τινὰ τῆς πρώτης διὰ τινος τῶν ὅρων αὐτῆς καὶ ἀφαιρῶν τοὺς ἀντιστοίχους ὅρους τῆς δευτέρας, εἰλάμβανεν πηλίκα καὶ διαφορὰς ὅρους ἀντιστοίχους.

Παραδείγματος χάριν, τὸ μὲν πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ π^6 διὰ π^6 εἶναι π^{6-6} ἢ π^0 , ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἀντιστοιχῶν ὄρων 8δ καὶ 6δ εἶναι 8δ—6δ ἢ 2δ, καὶ βλέπομεν ὅτι οἱ ὅροι π^6 καὶ 2δ εἶναι ἀντίστοιχοι.

3^{ον}. Ὑψῶν ὅρον τινα τῆς πρώτης προόδου εἰς τινα δυνάμιν καὶ πολλαπλασιάξω τὸν ἀντίστοιχον τῆς δευτέρας ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως, ἐλάμβανεν δυνάμεις καὶ γινόμενα ὅρους ἀντιστοιχοῦς.

Παραδείγματος χάριν, ἡ μὲν τρίτη δύναμις τοῦ ὅρου π^6 εἶναι π^6 , τὸ δὲ γινόμενον τοῦ ἀντιστοιχοῦ εἰς τὸν π^2 ὅρου 2δ ἐπὶ τὸν ἐκθέτην 3 τῆς δυνάμεως εἶναι 6δ, καὶ βλέπομεν ὅτι τὰ εὑρεθέντα ἐξαγόμενα π^6 καὶ 6δ εἶναι ὅροι ἀντίστοιχοι.

4^{ον}. Ἐξάγων ὅποιονδήποτε ρίζαν ὅρου τινὸς τῆς πρώτης προόδου καὶ διαιρῶν τὸν ἀντίστοιχον ὅρον τῆς δευτέρας διὰ τοῦ δείκτου τῆς ἐξαχθείσης ρίζης, ἐλάμβανεν ἐξαγόμενα ὅρους ἀντιστοιχοῦς.

Παραδείγματος χάριν, ἡ μὲν τρίτη ρίζα τοῦ π^6 εἶναι π^2 , τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀντιστοιχοῦ εἰς τὸν π^6 ὅρου 6δ διὰ τοῦ δείκτου 3 τῆς ἐξαχθείσης ρίζης εἶναι 2δ, καὶ βλέπομεν ὅτι τὰ εὑρεθέντα ἐξαγόμενα π^2 καὶ 2δ εἶναι ὅροι ἀντίστοιχοι.

Ἐσκέφθη λοιπὸν ὅτι, ἂν ἐλάμβανε τὸν λόγον π τῆς γεωμετρικῆς προόδου τόσῳ ἐλίγον διαφέροντα τῆς μονάδος, ὥστε οἱ ὅροι τῆς ἀποτελουμένης γεωμετρικῆς προόδου νὰ βαίνωσιν αὐξανόμενοι ἀνεπαισθητῶς, καὶ κατεσκεύαζε δίστηλον πίνακα γράφων ἐν μὲν τῇ μιᾷ αὐτοῦ στήλῃ τοὺς ἐν τῇ γεωμετρικῇ ταύτῃ προόδῳ εὑρισκομένους ἀριθμούς, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ τοὺς ἀντιστοιχοῦς εἰς τοὺς ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, οὗς καὶ ὠνόμασε *λογαριθμούς* τῶν πρώτων, ἡδύνατο νὰ ἀναγάγῃ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀριθμῶν εἰς πρόσθεσιν τῶν λογαριθμῶν αὐτῶν· τὴν διαίρεσιν τῶν πρώτων εἰς ἀφάίρεσιν τῶν δευτέρων· τὸν σχηματισμὸν τῶν δυνάμεων εἰς πολλαπλασιασμὸν, καὶ τὴν ἐξαγωγήν τῶν ριζῶν εἰς διαίρεσιν. Τουτέστιν, ἵνα εὕρῃ π. χ. τὸ γινόμενον δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν ἡδύνατο νὰ προσθέτῃ τοὺς ἐν τῷ πίνακι λογαριθμούς αὐτῶν καὶ ὁ ἐν τῷ πίνακι ἀριθμός, ὁ ἔχων λογάριθμον τὸ εὑρεθησόμενον ἄθροισμα, ἤθελε παριστᾶ τὸ ζητούμενον γινόμενον. Ὡσαύτως, ἵνα εὕρῃ τὴν πέμπτην π. χ. ρίζαν ἀριθμοῦ τινος, ἤρκει νὰ διαιρέσῃ τὸν ἐν τῷ πίνακι λογάριθμον αὐτοῦ διὰ 5, καὶ ὁ ἐν τῷ πίνακι ἀριθμός, ὁ ἔχων λογάριθμον τὸ εὑρεθησόμενον πηλίκον, ἤθελε παριστᾶ τὴν ζητουμένην πέμπτην ρίζαν τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ.

182. Δὲν διέφυγε βεβαίως τὴν προσοχὴν τοῦ ἀναγνώστου, ὅτι αἱ

ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαι ἰδιότητες τῶν κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Νεπέρου λογαρίθμων εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς ἐν ταῖς §§ 174, 175, 176 καὶ 177 ἀποδειχθεῖσας, θεωρουμένων τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν ὡς τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων, εἰς ἃς πρέπει νὰ ὑψωθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ἵνα παραγάγῃ τοὺς πρώτους. Καὶ τῷ ὄντι, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι οἱ κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Νεπέρου λογαρίθμοι τῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων, εἰς ἃς πρέπει νὰ ὑψωθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ἵνα παραγάγῃ τοὺς ἀριθμούς, εἰς οὓς οὗτοι ἀνήκουσι. Πρὸς τοῦτο δὲ ἃς λάβωμεν πάλιν τὰς αὐτὰς προόδους

$$\div 1 : \pi^1 : \pi^2 : \pi^3 : \pi^4 : \pi^5 : \pi^6 : \dots : \pi^{\mu} : \dots$$

$$\div 0 . \delta . 2\delta . 3\delta . 4\delta . 5\delta . 6\delta . \dots \mu\delta . \dots$$

καὶ ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ὕρος $\mu\delta$ τῆς δευτέρας ἰσοῦται τῇ μονάδι. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ α τὸν ἀντίστοιχον τοῦ $\mu\delta$ ὕρον π^{μ} τῆς πρώτης, θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας

$$\mu\delta = 1 \quad \text{καὶ} \quad \pi^{\mu} = \alpha,$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα

$$\delta = \frac{1}{\mu} \quad \text{καὶ} \quad \pi = \alpha^{\frac{1}{\mu}} = \alpha^{\delta}.$$

Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν εἰς τὴν ἀνωτέρω γεωμετρικὴν πρόοδον α^{δ} ἀντὶ τοῦ π θέλομεν ἔχει τὰς ἐξῆς προόδους

$$\div 1 : \alpha^{\delta} : \alpha^{2\delta} : \alpha^{3\delta} : \alpha^{4\delta} : \alpha^{5\delta} : \alpha^{6\delta} : \dots \alpha : \dots$$

$$\div 0 . \delta . 2\delta . 3\delta . 4\delta . 5\delta . 6\delta . \dots 1 . \dots$$

ἐν αἷς βλέπομεν ὅτι οἱ κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Νεπέρου ὀνομασθέντες λογαρίθμοι τῶν ἀριθμῶν εἶναι οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων, εἰς ἃς πρέπει νὰ ὑψωθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς α , οὗτινος λογαρίθμος εἶναι ἡ μονάς, ἵνα παραγάγῃ τοὺς πρώτους.

ΝΕΠΕΡΙΑΝΟΙ ΚΑΙ ΚΟΙΝΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

183. Οἱ λογαρίθμοι, οὓς ὁ Νέπερος ἐδημοσίευσεν κατὰ τὸ 1614, ὀνομάσθησαν *Νεπεριανοὶ* καὶ *ὑπερβολικοί*, διότι παριστῶσι καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐπιφανειῶν, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν καμπύλων, τῶν καλουμένων *ισοπλειῶν* *ὑπερβολῶν*, καὶ τῶν *ἀσυμπτῶτων* αὐτῶν, αἱ δὲ πρόοδοι, ἐξ ὧν ἐπορίσθη τούτους ὁ Νέπερος εἶναι αἱ ἐξῆς

$$\begin{aligned} & \div 1 : (1+\delta)^1 : (1+\delta)^2 : (1+\delta)^3 : (1+\delta)^4 : (1+\delta)^5 : \dots \\ & \div 0 \quad \delta \quad 2\delta \quad 3\delta \quad 4\delta \quad 5\delta \quad \dots \end{aligned}$$

ἐν αἷς ὑποτίθεται ὅτι ἡ μονάς καὶ τὸ μηδὲν λαμβάνουσι κατ' ἀρχὰς τὴν αὐτὴν σμικροτάτην αὐξήσιν δ .

Ἡ βᾶσις τοῦ συστήματος τούτου τοῦ Νεπέρου, τουτέστιν ὁ ἀριθμός, ὁ ἔχων λογάριθμον τὴν μονάδα, παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ γράμματος e καὶ εὐρίσκεται ὡν ἀσύμμετρος, ἡ δὲ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς ἐνάτης δεκαδικῆς τάξεως τιμὴ αὐτοῦ εἶναι 2,718281828.

184. Οἱ ἐν χρήσει λογάριθμοι, οἱ καὶ κοινοὶ καλούμενοι, ἔχουσι βᾶσιν τὸν ἀριθμὸν 10 καὶ κατασκευάσθησαν τὸ πρῶτον κατὰ τὸ 1624 ὑπὸ τοῦ ἐν Ὁξφόρδ τότε καθηγητοῦ Briggs κατ' ἐντολὴν τοῦ Νεπέρου, ὅστις διεῖδε μὲν τὰ κατὰ τὸ ἡμέτερον τῆς ἀριθμήσεως σύστημα πολλὰ καὶ μεγάλα προτερήματα αὐτῶν, ἀλλὰ δὲν ἔζησεν, ἵνα φέρῃ ὁ ἴδιος εἰς πέρας τὴν ἐργασίαν ταύτην. Ἐν τοῖς ἐπομένοις δὲν θέλει γίνεσθαι λόγος εἰ μὴ μόνον περὶ τῶν κοινῶν λογαρίθμων.

185. Ἐπειδὴ οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ 10 εἶναι 2 καὶ 5 καὶ ἔχουσιν ἴσους τῇ μονάδι ἐκθέτας, συμπεραίνομεν, κατὰ τὰ ἐν τῇ § 172 ἀποδειχθέντα, ὅτι ἐκ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μόνον αἱ ἀκέραιαι δυνάμεις τοῦ 10 ἔχουσι συμμετρους λογαρίθμους. Τῶν λοιπῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀσύμμετροι καὶ παρίστανται κατὰ προσέγγισιν διὰ δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν

$$10^0=1, \quad 10^1=10, \quad 10^2=100, \quad 10^3=1000, \quad 10^4=10000, \dots$$

συμπεραίνομεν ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν περιεχομένων

μεταξὺ τοῦ	1	καὶ	10	περιέχονται	μεταξὺ τοῦ	0	καὶ	1
»	»	10	καὶ	100	»	»	»	1 καὶ 2
»	»	100	καὶ	1000	»	»	»	2 καὶ 3
»	»	1000	καὶ	10000	»	»	»	3 καὶ 4...

Τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου παντὸς ἀριθμοῦ καλεῖται *χαρακτηριστικόν*, εἶναι δὲ τοῦτο κατὰ τὰ προεκτεθέντα 0, ὅταν ὁ ἀριθμὸς περιέχεται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 10, τουτέστιν, ὅταν ᾖ *μονήγητος*· 1, ὅταν ᾖ *διήγητος*· 2, ὅταν ᾖ *τριήγητος*· 3, ὅταν ᾖ *τετραήγητος*, καὶ ἐν γένει

Τὸ *χαρακτηριστικόν* τοῦ λογαρίθμου παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ

ἔχει τόσας μονάδας πλὴν μιᾶς, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀποτελούντων αὐτὸν ψηφίων.

Παραδείγματος χάριν, τὰ χαρακτηριστικὰ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 354, 250087 καὶ 79643005 εἶναι 2, 5 καὶ 7, διότι ὁ μὲν ἔχει τρία ψηφία, ὁ δὲ 5 καὶ ὁ τελευταῖος ἑκτόν.

186. Ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ὁποιοῦνδήποτε ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000, κτλ., ὁ λογάριθμος τοῦ προκύπτοντος γινομένου θέλει εἶναι ἴσος, κατὰ τὰ ἐν τῇ § 174 ἀποδειχθέντα, μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ πολλαπλασιαζομένου ἀριθμοῦ, αὐξανόμενον κατὰ τὸν λογάριθμον τοῦ παράγοντος 10, 100, 1000, κτλ., τουτέστι κατὰ 1, 2, 3, κτλ. μονάδας. Ἀντιστρόφως, ὅταν διαιρῶμεν ὁποιοῦνδήποτε ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000, κτλ., ὁ λογάριθμος τοῦ προκύπτοντος πηλίκου θέλει εἶναι ἴσος, κατὰ τὰ ἐν τῇ § 175 ἀποδειχθέντα, μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρουμένου ἀριθμοῦ, ἐλαττούμενον κατὰ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου 10, 100, 1000, κτλ., τουτέστι κατὰ 1, 2, 3, κτλ. μονάδας. Τοῦ λογαρίθμου π. χ. τοῦ ἀριθμοῦ 658 ὄντος 2,8182259, θέλωμεν ἔχει

$$\log 658 = 2,8182259, \quad \log 658 = 2,8182259,$$

$$\log 6580 = 3,8182259, \quad \log 65,8 = 1,8182259,$$

$$\log 65800 = 4,8182259, \quad \log 6,58 = 0,8182259.$$

Ἔπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι

Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου παντὸς ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ὅταν οὗτος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ δύναμιν τινα τοῦ 10 ἢ διαιρῇται διὰ τινος δυνάμεως τοῦ 10, ἀρκεῖ μόνον ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει τὰ μέρη μεγαλύτερος τῆς μονάδος. Τὸ χαρακτηριστικὸν μόνον αὐτοῦ αὐξάνει ἢ ἐλαττούται κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ὁ ἐκθέτης τῆς ἐφ' ἣν πολλαπλασιάζεται ἢ δι' ἧς διαιρεῖται δυνάμει τοῦ 10.

Ἵνα εὐρωμεν λοιπὸν τὸν λογάριθμον τοῦ δεκαδικοῦ 83,504, πρέπει νὰ ζητήσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἐκ τῆς ἐξαλείψεως τῆς ὑποδιαστολῆς προκύπτοντος ἀκεραίου 83504 καὶ νὰ δώσωμεν εἰς τὸ δεκαδικὸν αὐτοῦ μέρος χαρακτηριστικὸν 1. Ὡσαύτως, Ἵνα εὐρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 1005,04, πρέπει νὰ ζητήσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀκεραίου 100504 καὶ νὰ δώσωμεν εἰς τὸ δεκαδικὸν αὐτοῦ μέρος χαρακτηριστικὸν 3.

187. Ἐάν παρατείνωμεν τὴν διὰ 10, 100, 1000, κτλ. διαίρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ 6,58, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα

$$\log 0,658 = 0,8182259 - 1 = -0,1817741,$$

$$\log 0,0658 = 0,8182259 - 2 = -1,1817741,$$

$$\log 0,00658 = 0,8182259 - 3 = -2,1817741,$$

κτλ.

κτλ.

κτλ.

καὶ βλέπομεν ὅτι οἱ εὐρεθέντες λογάριθμοι τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος δεκαδικῶν ἀριθμῶν 0,658, 0,0658, 0,00658, κτλ. εἶναι ἀρνητικοί, ὡς τοῦτο ἦτο ἐκ τῶν προτέρων γνωστόν, ἔχουσι τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος 1817741, ἀλλ' ὅτι τὸ κοινὸν δεκαδικὸν αὐτῶν μέρος εἶναι διάφορον τοῦ δεκαδικοῦ μέρους 8182259 τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 658, ὃν εὐρίσκουμεν θεωροῦντες τὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν πρώτων ὡς ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἐπειδὴ οἱ ὅλως ἀρνητικοὶ λογάριθμοι παρέχουσι δυσκολίας τινὰς εἰς τὴν ταχέϊαν ἐκτέλεσιν τῶν διαφόρων τῶν λογαρίθμων ἐφαρμογῶν, ἐκρίθη προτιμότερον νὰ μὴ ἐκτελῶνται αἱ ἀνωτέρω σεσημειωμένα ἀφαιρέσεις, ἀλλὰ νὰ σημειοῦται μόνον ἡ ἐκτέλεσις αὐτῶν κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον. Ἀντὶ νὰ γράψωσι, παραδείγματος χάριν, $0,8182259 - 1$, ἢ ὕπερ τοῦτο $-1 + 0,8182259$, γράφουσι $\bar{1},8182259$. Ὡσαύτως, ἀντὶ νὰ γράψωσι $0,8182259 - 2$, γράφωσι $\bar{2},8182259$, τουτέστι γράφουσι τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως — ὑπεράνω τοῦ ἀφαιρετέου χαρακτηριστικοῦ καὶ διατηροῦσιν ἀμετάβλητον τὸ εἰς αὐτὸ προσθετέον δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου.

188. Ἐάν παραστήσωμεν κατὰ τὸν νέον τοῦτον τρόπον τοὺς ἀνωτέρω εὐρεθέντας λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν 0,658, 0,0658, 0,00658, κτλ., θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας

$$\log 0,658 = 0,8182259 - 1 = \bar{1},8182259,$$

$$\log 0,0658 = 0,8182259 - 2 = \bar{2},8182259,$$

$$\log 0,00658 = 0,8182259 - 3 = \bar{3},8182259,$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα εὐκόλως τὸν ἐξῆς γενικὸν κανόνα·

Τὸ μὲν χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου παρτὸς μικροτέρου τῆς μονάδος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀρνητικόν καὶ ἴσον τῷ ἀριθμῷ, ὅστις παριστᾷ τὴν τάξιν τοῦ πρώτου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν σηματοῦ αὐτοῦ ψηφίου, τὸ δὲ δεκαδικὸν αὐτοῦ μέρος τοῦ λογαρίθμου

αὐτοῦ εἶναι θετικὸν καὶ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαριθμοῦ τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ὃν εὐρίσκομεν θεωροῦντες τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεδομένου ὡς ἀκέραιον ἀριθμόν.

Παραδείγματα χάριν, ὁ λογάριθμος τοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 0,0005617 θέλει ἔχει ἀρνητικὸν χαρακτηριστικὸν 4, διότι ὁ ἀριθμὸς 4 παριστᾷ τὴν τάξιν τοῦ πρώτου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν σημαντικοῦ αὐτοῦ ψηφίου 5, δεκαδικὸν δὲ μέρος 7495044, διότι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαριθμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ 5617, ὃν εὐρίσκομεν θεωροῦντες τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεδομένου ὡς ἀκέραιον ἀριθμόν, εἶναι 7495044. Οὕτω δὲ θέλομεν ἔχει

$$\log 0,0005617 = \bar{4},7495044.$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΕΞΗΓΗΣΙΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΤΟΥ ΚΑΛΛΕΤΟΥ. — ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ. — ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΕΞΗΓΗΣΙΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΤΟΥ ΚΑΛΛΕΤΟΥ

189. Οἱ μᾶλλον ἐν χρήσει καὶ οἱ τελειότεροι λογαριθμικοὶ πίνακες εἶναι ἐν Γαλλίᾳ οἱ τοῦ Καλλέτου. Οὗτοι πρὸς τοῖς ἄλλοις περιέχουσι καὶ τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ 108000, ἐπειδὴ δὲ εἶναι δυσαπόκτητοι, ἐξεδώσαμεν στερεοτύπως χάριν τῶν Ἑλλήνων σπουδαστῶν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ 50700.

190. Αἱ πέντε πρώται σελίδες τῶν ἡμετέρων πινάκων φέρουσιν ἐπιγραφὴν ΧΙΛΙΑΣ 1 καὶ περιέχουσι τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ 1200. Ὑπὸ τὸ ἀρχικὸν τῆς λέξεως Ἀριθμὸς γράμμα Α εἶναι γεγραμμένοι οἱ διαδοχικοὶ ἀριθμοί, πρὸς τὰ δεξιὰ δὲ ἐκάστου ὑπὸ τὸ γράμμα Α, ἀρχικὸν τῆς λέξεως Λογάριθμοι, τὸ δεκαδικὸν μόνον μέρος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος λογαριθμοῦ μὲ 8 δεκαδικὰ ψηφία, τοῦ χαρακτηριστικοῦ αὐτῶν εὐρισκομένου εὐκόλως καὶ ἀ-

μέσως κατὰ τὰ ἐν τῇ § 185 ἀποδειχθέντα. Οὕτω π. χ. ἐν τῇ πρώτῃ σελίδι πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ 235 ὑπάρχει γεγραμμένος ὁ ὀκταψήφιος ἀριθμὸς 37106786, ὅστις παριστᾷ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 235, οὕτινος τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 2, εἰς τρόπον ὥστε θέλομεν ἔχει ἀμέσως

$$\log 235 = 2,37106786.$$

Ἀπὸ τῆς ἑκτῆς σελίδος μέχρι τέλους ἡ διάταξις τῶν πινάκων εἶναι ἡ αὐτή, ἀλλὰ πάντῃ διάφορος καὶ πολυπλοκωτέρα τῆς προηγουμένης. Ὑπὸ τὸ γράμμα Α εἶναι γεγραμμένοι οἱ διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ 1020 μέχρι τοῦ 5069, πρὸς τὰ δεξιά δὲ αὐτῶν ἐν τῇ στήλῃ 0 ὑπάρχει γεγραμμένον τὸ δεκαδικὸν μόνον μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτῶν μὲ ἐπτὰ δεκαδικὰ ψηφία, ὧν τὰ τρία πρῶτα, ὅταν ᾖναι κοινὰ εἰς τοὺς λογαρίθμους πλειότερων διαδοχικῶν ἀριθμῶν, γράφονται ἀπαξ μόνον καὶ ὑπονοοῦνται πρὸ τῶν ἀντιστοιχοῦντων λοιπῶν τεσσάρων. Παραδείγμα-τος χάριν, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 4058, ὅστις εὑρίσκεται ἐν τῇ ἑκτῇ σελίδι τῶν πινάκων, εἶναι 0244857 καὶ ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ τριψηφίου ἀριθμοῦ 024, ὅστις εἶναι γεγραμμένος ὑπεράνω τοῦ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ 4058 ὑπάρχοντος κενοῦ, καὶ ἐκ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τετραψηφίου 4857. Ὡσαύτως τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 3567, ὅστις εὑρίσκεται ἐν τῇ 56^η σελίδι, εἶναι 5523034 καὶ ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ τριψηφίου ἀριθμοῦ 552, ὅστις εἶναι γεγραμμένος ὑπεράνω τοῦ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ 3567 ὑπάρχοντος κενοῦ, καὶ ἐκ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τετραψηφίου 3034. Ἐπειδὴ δέ, κατὰ τὰ ἐν τῇ § 186 ἀποδειχθέντα, ὅταν ἀριθμὸς τις πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ., τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ μένει ἀμετάβλητον, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ἐν τῇ στήλῃ 0 γεγραμμένον δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων τῶν ἀντιστοιχοῦντων ἀριθμῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἐφ' ὅποιανδῆποτε δύναμιν τῆς βάσεως 10 πολλαπλασιασθέντων. Παραδείγματα χάριν, τὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 40580, 405800, κτλ. εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 4058, ἐξ οὗ οἱ πρῶτοι παράγονται πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 10, 100, κτλ. Ὡσαύτως, τὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 35670, 356700, κτλ. εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 3567, ἐξ οὗ οἱ δεδομένοι παράγονται πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 10, 100, κτλ. Εὐκόλως παρατηρεῖ τις ὅτι τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθ-

μῶν τὰ δύο πρῶτα ψηφία ἐπαναλαμβάνονται ἐν τοῖς πίναξι μόνον ἀνά πάντα πέμπτον ἀριθμὸν.

Αἱ πρὸς τὰ δεξιά τῆς στήλης 0 ὑπάρχουσαι ἐννέα κάθετοι στήλαι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 περιέχουσι τὰ τέσσαρα τελευταῖα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τῶν λογαριθμῶν τῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ μὲν ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς ταῦτα ψηφίον τῆς στήλης, αἱ δὲ δεκάδες παρίστανται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῆς στήλης Α, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ὑφίζοντίως εἰς τὰ αὐτὰ ψηφία. Καθόσον δ' ἄφορᾷ τὰ τρία πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία, ταῦτα εὐρίσκονται ἢ ἐν τῇ αὐτῇ ὀριζοντίῳ στήλῃ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ἢ ὑπεράνω τοῦ πρὸς τὰ δεξιά αὐτῶν ὑπάρχοντος κενοῦ. Παραδείγματός χάριν, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαριθμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ 10527 ὑπάρχει ἐν τῇ ἑκτῇ σελίδι τῶν πινάκων καὶ εἶναι 0223046, τούτου δὲ τὰ μὲν τρία πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία 022 εὐρίσκονται ἐν τῇ στήλῃ 0 πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ 1052 τῶν δεκάδων τοῦ δεδομένου 10527, τὰ δὲ λοιπὰ τέσσαρα 3046 εὐρίσκονται ἐν τῇ καθέτῳ στήλῃ τοῦ ψηφίου 7, τοῦ παριστῶντος τὰς μονάδας τοῦ δεδομένου, ἐν τῇ ὀριζοντίῳ σειρᾷ τοῦ ἀριθμοῦ 1052 τῶν δεκάδων αὐτοῦ. Ὡσαύτως, ἵνα εὐρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαριθμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ 27654, ζητοῦμεν ἐν τῇ 40^ῃ σελίδι τῶν πινάκων τὸν ἀριθμὸν 2765 τῶν δεκάδων τοῦ δεδομένου, λαμβάνομεν τὸν τριψήφιον ἀριθμὸν 441, ὅστις εἶναι γεγραμμένος ὑπεράνω τοῦ πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ ὑπάρχοντος κενοῦ, καὶ ζητοῦμεν ἔπειτα ἐν τῇ καθέτῳ στήλῃ 4 τῶν μονάδων τοῦ δεδομένου τὸν τετραψήφιον ἀριθμὸν 7580, ὅστις εὐρίσκεται ἐν τῇ αὐτῇ ὀριζοντίῳ σειρᾷ, ἐν ἣ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων 2765 τοῦ δεδομένου, γράφομεν δὲ αὐτὸν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ προευνεθέντος τριψήφιου 441. Οὕτως ἀποτελοῦμεν τὸν ἐπταψήφιον ἀριθμὸν 4417580, ὅστις παριστᾷ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ζητουμένου λογαριθμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ 27654. Ἄν μᾶς ἐξητεῖτο τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαριθμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ 27863, ἐπειδὴ ἐν τῇ καθέτῳ στήλῃ 3 ἀπέναντι τοῦ ἀριθμοῦ 2786 ὑπάρχει κενόν, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸν ὑπὸ τὸ κενὸν τοῦτο τετραψήφιον ἀριθμὸν 0279 καὶ τὸν ἀντιστοιχοῦντα τριψήφιον 445 καὶ νὰ ἀποτελέσωμεν ἐξ αὐτῶν τὸν ἀριθμὸν 4450279, ὅστις θέλει παριστᾷ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαριθμοῦ τοῦ δεδομένου 27863. Τὰ ἐν τῇ ὀριζοντίῳ στήλῃ τοῦ ἀριθμοῦ 2786 ὑπάρχοντα κενὰ δεικνύουσιν ὅτι ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 27862 πρέπει νὰ λαμβάνωνται ὡς τρία πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία ὅχι ὁ ἀμέσως πρὸς τὰ

δεξιά τοῦ 2786 ἀντιστοιχῶν τριψήφιος ἀριθμὸς 444, ἀλλ' ὃ 445, ὃ ἀντιστοιχῶν εἰς τὸ ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν 86 ὑπάρχον κενόν. Οὕτω δὲ καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 28059 εὐρίσκεται ὁμοιότροπως ἐν τῇ αὐτῇ σελίδι καὶ εἶναι 4480722.

Ἡ τελευταία πρὸς τὰ δεξιά στήλη, ἡ ἐπιγραφομένη διαφ. καὶ γιν., τουτέστι διαφοραὶ καὶ γινόμενα, περιέχει τὰς διαφορὰς τῶν λογαριθμῶν δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν καὶ ὑφ' ἐκάστην διαφορὰν ἐν μικρῷ δι-στήλῳ πίναναι τὰ γινόμενα αὐτῆς ἐπὶ τοὺς ἐννέα διαδοχικοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς 0,1, . . 0,9 κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς ὑπὸ τοῦ τελευταίου πρὸς τὰ δεξιά ψηφίου τῆς διαφορᾶς παριστωμένης δεκαδικῆς τάξεως. Ἐν τοῖς διστήλοις πίναξιν, ὧν τὴν χρῆσιν θέλομεν ἴδει μετ' ὀλίγον, εἶναι γεγραμμένοι ἀντὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν 0,1, . . 0,9 οἱ ἀκέραιοι 1, . . 9, ἀπέναντι δὲ αὐτῶν τὰ κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἀντιστοιχοῦντα γινόμενα.

Τέλος δὲ πρὸς εὐκολίαν τῶν ἀναζητήσεων ἐπὶ κεφαλῇς ἐκάστης σελίδος, ἧς ὁ ἀριθμὸς εἶναι γεγραμμένος ὑποκάτω ἐντὺς παρενθέσεων, ὑπάρχουσι γεγραμμένα μετὰ τὸ γράμμα Α τὰ τρία πρῶτα ψηφία τοῦ πρώτου ἐν αὐτῇ περιεχομένου ἀριθμοῦ, καὶ μετὰ τὸ γράμμα Λ τὰ τρία πρῶτα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸν πρῶτον τῆς σελίδος ἀριθμόν.

Σημειώσεις. — Σημειωτέον ἐνταῦθα ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τοῦ Καλλέτου ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 50700 μέχρι τοῦ 108000 εἶναι ὁμοιότροπως διατεταγμένον, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀπὸ τοῦ 100000 μέχρι τοῦ 108000 ἀριθμῶν περιέχουσιν εἰς τὸ δεκαδικὸν αὐτῶν μέρος ὀκτὼ δεκαδικὰ ψηφία ἀντὶ ἑπτά.

191. Τὰ διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ἀπ' εὐθείας λυόμενα προβλήματα εἶναι τὰ ἑξῆς δύο:

1^{ον}. *Νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον δεδομένου ἀριθμοῦ.*

2^{ον}. *Νὰ εὕρωμεν τὸν εἰς δεδομένον λογάριθμον ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν.*

Εἰς τούτων τὴν λύσιν μεταβαίνομεν ἀμέσως ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς ἀνωτέρω περιγραφέντας λογαριθμικοὺς ἡμῶν πίνακας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ

192. Τὸ ἀνωτέρω πρῶτον πρόβλημα δυνάμεθα νὰ ἀποσυνθέσωμεν εἰς τὰ ἑξῆς τέσσαρα:

"Οταν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ᾗται ἀκέραιος καὶ εὐρίσκηται ἐντὸς τῶν πινάκων.

"Οταν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ᾗται δεκαδικὸς καὶ ὁ ὑπ' αὐτοῦ ἄνευ ὑποδιαστολῆς ἀποτελούμενος ἀκέραιος ἀριθμὸς εὐρίσκηται ἐντὸς τῶν πινάκων.

"Οταν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ᾗται ἀκέραιος καὶ δὲν περιέχεται ἐντὸς τῶν πινάκων.

"Οταν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ᾗται δεκαδικὸς καὶ ὁ ὑπ' αὐτοῦ ἄνευ ὑποδιαστολῆς ἀποτελούμενος ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εὐρίσκηται ἐντὸς τῶν πινάκων.

193. "Ας ὑποθέσωμεν κατ' ἀρχὰς τὸ πρῶτον καὶ ὅτι ὁ δεδομένος ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 25763. Ζητοῦμεν πρὸς τοῦτο ἐν τῇ στήλῃ Α τῶν πινάκων τὸν ἀριθμὸν 2576, καὶ ἀφοῦ εὕρωμεν αὐτόν, μεταβαίνομεν ὀρίζοντίως εἰς τὴν κάθετον στήλην 3 καὶ εὐρίσκομεν τὸν τετραψήφιον ἀριθμὸν 9964. Γράφομεν πρὸ τούτου τὸν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ 2576 καὶ ὑπεράνω τοῦ κενοῦ ὑπάρχοντα τριψήφιον ἀριθμὸν 410 καὶ ἀποτελοῦμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος 4109964 τοῦ ζητουμένου λογαριθμοῦ, ὅστις εἶναι 4,4109964, διότι ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εἶναι πενταψήφιος καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ πρέπει νὰ ἔχῃ χαρακτηριστικὸν 4. Οὕτω θέλομεν ἔχει $\log 25763 = 4,4109964$.

"Αν μᾶς ἐζητεῖτο ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 33887, ᾗθέλομεν ζητήσῃ ἐν τῇ στήλῃ Α τὸν ἀριθμὸν 3388 καὶ μεταβῇ ὀρίζοντίως εἰς τὴν κάθετον στήλην 7, ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀντιστοιχοῦν μέρος τῆς στήλης ταύτης εἶναι κενόν, ᾗθέλομεν λάβει τὸν ὑπ' αὐτὸ τετραψήφιον ἀριθμὸν 0334, πρὸ τοῦ ὁποίου ᾗθέλομεν γράψῃ τὸν ἐν τῇ ὀρίζοντίῳ αὐτοῦ στήλῃ ἀντιστοιχοῦντα τριψήφιον 530 καὶ ᾗθέλομεν ἔχει $\log 33887 = 4,5300334$.

194. "Ας ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι ὁ δεδομένος δεκαδικὸς ἀριθμὸς εἶναι ὁ 354,08, ὅστις θεωρούμενος ἄνευ ὑποδιαστολῆς σχηματίζει τὸν ἐντὸς τῶν πινάκων εὐρισκόμενον ἀκέραιον ἀριθμὸν 35408. "Ινα εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ δεδομένου δεκαδικοῦ, ζητοῦμεν, ὡς προεξέθεσαμεν, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαριθμοῦ τοῦ ἀκέραιου 35408, ὅπερ εἶναι 5491014, καὶ δίδομεν εἰς αὐτὸ τὸ χαρακτηριστικὸν 2, διότι ὁ δεδομένος δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἔχει τρία ψηφία εἰς τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος. Οὕτω θέλομεν ἔχει $\log 354,08 = 2,5491014$.

"Αν μᾶς ἐδίδετο ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,0040368, ὅστις ἄνευ ὑποδιαστολῆς θεωρούμενος σχηματίζει τὸν ἐντὸς τῶν πινάκων περιεχόμε-

νον ἀκέραιον 40368, ἡθέλομεν πρῶτον εὔρει τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀκεραίου 40368, ὅπερ εἶναι 6060372, καὶ δώσει εἰς αὐτὸ τὸ χαρακτηριστικὸν —3 ἢ 3, διότι τὸ πρῶτον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ δεδομένου δεκαδικοῦ κατέχει τὴν τρίτην θέσιν μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν. Οὕτω δὲ θέλομεν ἔχει λογ $0,0040368 = 3,6060372$.

195. Ἄς ὑποθέσωμεν τρίτον ὅτι ὁ δεδομένος ἀκέραιος εἶναι ὁ 254678, ὅστις δὲν εὐρίσκεται ἐντὸς τῶν πινάκων. Λαμβάνομεν ἀντὶ τοῦ δεδομένου τὸν ἀριθμὸν 25467, ὅστις εἶναι ὁ μεγαλύτερος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τῶν ἀποτελειομένων ὑπὸ τῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίων αὐτοῦ, καὶ ζητοῦμεν ἐν ταῖς πίναξι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ, ὅπερ εἶναι 4059778 καὶ διαφέρει τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἐπομένου ἀκεραίου ἀριθμοῦ 25468 κατὰ 170. Ἐπειτα λέγομεν ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 25467,8 περιέχεται μετὰ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων 25467 καὶ 25468, καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ θέλει περιέχεσθαι μετὰ τῶν δεκαδικῶν μερῶν 4059778 καὶ 4059948 τῶν λογαρίθμων αὐτῶν, οἷτινες διαφέρουσι κατὰ 170, παρδεχόμενοι δὲ ὅτι αἱ διαφοραὶ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν εἶναι κατ' ἐθελοῦν ἀνάλογοι τῶν διαφορῶν αὐτῶν, (τοῦθ' ὅπερ δὲν εἶναι μὲν μαθηματικῶς ἀληθές, προσεγγίζει ὅμως ἐπὶ τοσούτῳ τοῦ ἀληθοῦς, ὅσῳ αἱ διαφοραὶ τῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότεραι ὥς πρὸς τοὺς ὅλους ἀριθμούς), σχηματίζομεν, ἵνα εὕρωμεν κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξήσωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 25467 πρὸς εὔρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου τοῦ 25467,8, τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν

$$1 : 0,8 = 170 : x \quad (1),$$

τουτέστι λέγομεν ὅταν ἡ διαφορά τῶν ἀριθμῶν ᾖ 1, ἡ διαφορά τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων αὐτῶν εἶναι 170, ὅταν δὲ ἡ διαφορά αὐτῶν ᾖ 0,8, πόση θέλει εἶναι ἡ διαφορά x τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων αὐτῶν;

Ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία μᾶς δίδει $x = 170 \times 0,8 = 136$, ὡς τοῦτο ὑπάρχει ἐν ταῖς πίναξι ὑπὸ τὴν διαφορὰν 170 ἀπέναντι τοῦ ψηφίου 8 τοῦ ὑποκειμένου πινακιδίου. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει

δεκαδικὸν μέρος λογαρίθμου 25467 4059778

πρόσθετον διαφορὰν 170 ἐπὶ 0,8 136

δεκαδικὸν μέρος λογαρίθμου 25467,8 4059914

Ἐπομένως λογ 254678 = 5,4059914.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἵνα εὐρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ 3527689, ὅστις δὲν εὐρίσκεται ἐντὸς τῶν πινάκων, θέλομεν ζητήσῃ ἐν αὐτοῖς πρῶτον τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 35276, ὅπερ εἶναι 5474793, ἐπειτα σχηματίζει τὴν ἐξ ἧς ἀναλογίαν

$$1 : 0,89 = 423 : \chi,$$

ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ $\chi = 423 \times 0,89 = 423 \times 0,8 + 423 \times 0,09$. θέλομεν λοιπὸν ἔχει λαμβάνοντες τὰ γινόμενα τῆς διαφορᾶς 423 ἐπὶ 0,8 καὶ 0,09 ἐν τῷ ὑπ' αὐτὴν πινακιδίῳ κατὰ τὴν ὑπάρχουσαν ἐν αὐτῷ προσέγγισιν

δεκαδικὸν μέρος λογαρίθμου 35276	5474793
γινόμενον διαφορᾶς 423 ἐπὶ 0,8	98
γινόμενον διαφορᾶς 423 ἐπὶ 0,09	141
δεκαδικὸν μέρος λογαρίθμου 35276,89 . . .	5474902

$$\text{Ἐπομένως λογ } 3527689 = 6,5474902.$$

196. Ἄς ὑποθέσωμεν τέταρτον ὅτι ὁ δεδομένος δεκαδικὸς ἀριθμὸς θεωρούμενος ἄνευ ὑποδιαστολῆς δὲν εὐρίσκεται ἐντὸς τῶν πινάκων, ὡς π. χ. ὁ 35,00246. Ἵνα εὐρωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ, εὐρίσκομεν ὡς προεθέσαμεν ἀνωτέρω τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀκεραίου 3500246 καὶ διδομεν εἰς αὐτὸ χαρακτηριστικὸν 4, διότι ὁ δεδομένος δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἔχει 2 ψηφία εἰς τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος. θέλομεν λοιπὸν ἔχει

δεκαδικὸν μέρος λογαρίθμου 35002	5440929
γινόμενον διαφορᾶς 124 ἐπὶ 0,4	50
γινόμενον διαφορᾶς 124 ἐπὶ 0,06	74
δεκαδικὸν μέρος λογαρίθμου 35,00246	5440986

$$\text{Ἐπομένως λογ } 35,00246 = 1,5440986.$$

Ἄν μᾶς ἐδίδετο ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,004876543, θέλομεν ὁμοιοτρόπως εὑρεῖ πρῶτον τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀκεραίου 4876543 καὶ δώσῃ εἰς αὐτὸ χαρακτηριστικὸν —3 ἢ 3, διότι τὸ πρῶτον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ δεδομένου δεκαδικοῦ εὐρίσκεται εἰς τὴν τρίτην θέσιν μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν. θέλομεν λοιπὸν ἔχει

δεκαδικὸν μέρος λογαρίθμου 48765	6881082
γινόμενον διαφορᾶς 89 ἐπὶ 0,4	36
γινόμενον διαφορᾶς 89 ἐπὶ 0,03	27
δεκαδικὸν μέρος λογαρίθμου 0,004876543 . .	6881121

$$\text{Ἐπομένως λογ } 0,004876543 = 3,6881121.$$

Παρατήρησις. — Εἰς μὲν τὰ δύο προηγούμενα παραδείγματα παρ-
λείψαμεν τὰ μικρότερα τοῦ 5 ψηφία 1 καὶ 4 τῆς ὀγδόης δεκαδικῆς τά-
ξεως, εἰς δὲ τὸ τελευταῖον ἀντικατεστήσαμεν τὸ μεγαλειότερον τοῦ 5
ψηφίον 7 τῆς ὀγδόης δεκαδικῆς τάξεως διὰ μιᾶς μονάδος τῆς ἐβδόμης.
Ὁ λόγος τούτου εἶναι, ὅτι οἱ λογάριθμοι δίδονται κατὰ προσέγγισιν
μιᾶς μονάδος τῆς ἐβδόμης δεκαδικῆς τάξεως καὶ ἡ προσέγγισις εἶναι
βεβαίως μεγαλειτέρα, ὅταν προσθέτωμεν 3 μονάδας τῆς ὀγδόης δεκα-
δικῆς τάξεως, ἢ ὅταν παραλείπωμεν 7 μονάδας τῆς αὐτῆς δεκαδικῆς
τάξεως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

197. Τὸ δεύτερον διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων λυόμενον πρόβλη-
μα παρουσιάζει τὰς ἐξῆς δύο περιπτώσεις.

*Ὅταν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεδομένου λογαρίθμου εὐρίσκηται
ἐντός τῶν πινάκων, καὶ*

Ὅταν τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ δὲν ὑπάρχῃ ἐντός τῶν πινάκων.

198. Ἀς ὑποθέσωμεν κατ' ἀρχῆς τὸ πρῶτον καὶ ἔστω 6023096 τὸ
δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεδομένου λογαρίθμου. Ζητοῦμεν ἐν τῇ στήλῃ 0
τῶν πινάκων πρῶτον τὸν τριψήφιον ἀριθμὸν 602, καὶ ἀφοῦ εὗρωμεν
τοῦτον ἐν τῇ 65^ῃ σελίδι, ζητοῦμεν ἔπειτα ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ ἢ ἐν τινι
τῶν λοιπῶν μεταξὺ τῶν εἰς τὸν 602 ἀνηκόντων τετραψηφίων ἀριθμῶν
καὶ τὸν τετραψήφιον 3096, ὃν εὐρίσκομεν ἐν τῇ στήλῃ 3. Εἶναι φα-
νερὸν κατὰ τὰ προεκτεθέντα ὅτι ὁ ἀριθμὸς 40023, οὗτινος τὸ μὲν ψη-
φίον 3 τῶν μονάδων εὐρίσκεται ἐν τῇ καθέτω στήλῃ τοῦ τετραψηφίου
3096, αἱ δὲ δεκάδες 4002 ἀντιστοιχοῦσιν ὀρίζοντίως εἰς τὸν αὐτὸν
τετραψήφιον ἀριθμὸν 3096, θέλει ἔχει λογάριθμον ἔχοντα τὸ αὐτὸ δε-
καδικὸν μέρος 6023096. Ἐπομένως, ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δεδο-
μένου λογαρίθμου ᾖ ἐν τῶν ἐξῆς 2, 4, 5, 1, 3, 5, θέλομεν ἔχει
κατὰ τὰ ἐν ταῖς §§ 185 καὶ 188 λεχθέντα,

$$\begin{array}{ll} 2,6023096 = \log 400,23 & \overline{1},6023096 = \log 0,40023 \\ 4,6023096 = \log 40023 & \overline{3},6023096 = \log 0,0040023 \\ 5,6023096 = \log 400230 & \overline{5},6023096 = \log 0,000040023 \end{array}$$

Ἄν τὸ μὲν δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεδομένου λογαρίθμου ᾖ το 4282968,
τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν ἐν ἐκ τῶν ἐξῆς 0, 3, 5, 1, 2, 4, ἠθέλομεν

εὔρει πρῶτον ἐν τῇ 39^ᾠ σελίδι τὸν ἀριθμὸν 26810, οὗτινος τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαριθμοῦ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ δεδομένου, καὶ ἠθέλωμεν ἔχει κατὰ τοὺς γνωστούς κανόνας

$$\begin{array}{ll} 0,4282968 = \log 2,681 & \overline{4},4282968 = \log 0,2681 \\ 3,4282968 = \log 2681 & \overline{2},4282968 = \log 0,02681 \\ 5,4282968 = \log 268100 & \overline{4},4282968 = \log 0,0002681 \end{array}$$

199. Ἐὰς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεδομένου λογαριθμοῦ δὲν εὑρίσκεται ἐντὸς τῶν πινάκων καὶ ἔστω τοῦτο 5324308. Ζητοῦμεν πρῶτον ἐν τῇ στήλῃ 0 τῶν πινάκων τὸν τριψήφιον ἀριθμὸν 532, καὶ ἀφοῦ εὔρωμεν αὐτὸν ἐν τῇ 53^ᾠ σελίδι, ζητοῦμεν ἔπειτα μεταξὺ τῶν εἰς τὸν 532 ἀναφερομένων τετραψήφιων τοὺς δύο διαδοχικοὺς 4231 καὶ 4359, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ τοῦ δεδομένου λογαριθμοῦ 4308. Τοῦτου γενομένου, εὑρίσκομεν ἐν τοῖς πίναξι τὸν ἀριθμὸν 34074, τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸν μικρότερον τετραψήφιον 4231, τὴν διαφορὰν 128 αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἐπομένου 4359, καὶ τὴν μεταξὺ τούτου καὶ τοῦ δεδομένου 4308 διαφορὰν 77, καὶ σχηματίζομεν τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν

$$428 : 77 = 1 : x \quad (1),$$

τουτέστι λέγομεν ὅταν ἡ διαφορὰ τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαριθμῶν, ὧν τὰ τρία πρῶτα ψήφια ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 532, ᾗται 128, ἡ διαφορὰ τῶν ἀντιστοιχοῦντων εἰς τοὺς αὐτοὺς ἀριθμῶν εἶναι 1, ὅταν δὲ αὕτη ᾗται 77, ποία θέλει εἶναι τότε ἡ διαφορὰ x τῶν ἀντιστοιχοῦντων ἀριθμῶν.

Ἀντὶ νὰ εὔρωμεν τὴν ζητούμενην τιμὴν τῆς x ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας, ζητοῦμεν ἐν τῷ ὑπὸ τὴν διαφορὰν 128 πινακιδίῳ τὸν ἀριθμὸν 77, ἐὰν ὑπάρχῃ, καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ τὸ ἀντιστοιχοῦν ψήφιον 6, ὅπερ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ 34074, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸν μικρότερον τετραψήφιον ἀριθμὸν 4231, καὶ οὕτω σχηματίζομεν τὸν ἀριθμὸν 340746, οὗτινος τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαριθμοῦ θέλει εἶναι προφανῶς τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ δεδομένου, ἥτοι 5324308. Ἐπομένως, ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ ᾗται ἐν ἐκ τῶν ἐξῆς 0, 3, 6, 1, 3, 5, θέλωμεν ἔχει

$$\begin{array}{ll} 0,5324308 = \log 3,40746 & \overline{1},5324308 = \log 0,340746 \\ 3,5324308 = \log 3407,46 & \overline{3},5324308 = \log 0,00340746 \\ 6,5324308 = \log 3407460 & \overline{5},5324308 = \log 0,0000340746 \end{array}$$

* Ἄν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεδομένου λογαρίθμου ᾦναι 3680340, εὐρίσκωμεν ἐν τῇ στήλῃ 0 τῆς 32^α σελίδος πρῶτον τὸν τριψήφιον ἀριθμὸν 368, ἔπειτα μετὰξὺ τῶν εἰς τοῦτον ἀναφερομένων τετραψηφίων τοὺς δύο διαδοχικοὺς 0264 καὶ 0450, μετὰξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ δεδομένος 0340, οὗτινος ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ μικροτέρου 0264, εἰς ὃν ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 23336, διαφορὰ εἶναι 76, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν πινάκων 186. Ζητοῦμεν ἔπειτα ἐν τῇ πρὸς τὰ δεξιά στήλῃ τοῦ ὑπὸ τὴν διαφορὰν 186 πινακιδίου, τὸν ἀριθμὸν 76 ἢ τὸν μεγαλειότερον ἀκέραιον 74, τὸν ἐμπεριεχόμενον ἐν αὐτῷ, καὶ λαμβάνομεν τὸ ἀντιστοιχοῦν ψηφίον 4, ὑπερ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ 23336. Πολλαπλασιάζομεν ἀκολούθως τὴν μετὰξὺ τοῦ 76 καὶ 74 διαφορὰν 2 ἐπὶ 10 καὶ εὐρίσκωμεν γινόμενον 20, ἐν ᾧ περιέχεται ὁ ἀριθμὸς 19 τοῦ πινακιδίου, εἰς ὃν ἀντιστοιχεῖ τὸ ψηφίον 1, ὑπερ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ 233364, εἶναι δὲ φανερόν ὅτι ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς 2333641 θέλει ἔχει λογάριθμον, οὗτινος τὸ δεκαδικὸν μέρος θέλει εἶναι τὸ τοῦ δεδομένου 3680340. Ἐπομένως, ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ ᾦναι ἐν ἐκ τῶν ἐξῆς 3, 5, 2, 4, θέλομεν ἔχει

$$\begin{aligned} 3,3680340 &= \log 2333,641 & \overline{2},3680340 &= \log 0,02333641 \\ 5,3680340 &= \log 23336,4 & \overline{4},3680340 &= \log 0,0002333641 \end{aligned}$$

Τὰ καθέκαστα τῶν εἰς τὰ ἀνωτέρω δύο παραδείγματα ἀναφερομένων πράξεων δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν ὡς ἐξῆς, ὑποθέτοντες 3 καὶ 5 τὰ εἰς τὰ δεδομένα δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων χαρακτηριστικὰ

Δεδομένος λογάριθμος	3,5324308		
ἀριθμὸς λογαρίθμου	4,5324231		34074
εἰς διαφορὰν	77		06
² Αριθμὸς λογαρίθμου	3,5324308		3407,46
Δεδομένος λογάριθμος	5,3680340		
ἀριθμὸς λογαρίθμου	4,3680264		23336
εἰς 1 ^{ην} διαφορὰν	74		04
εἰς 2 ^{αν} διαφορὰν	2		001
² Αριθμὸς λογαρίθμου	5,3680340		23336,4

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΩΟΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΙΝΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ.—ΠΡΟ-
ΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ.—ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΧΡΕΩΔΥΣΙΑΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΙΝΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ ΕΙΣ
ΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ

200. Ἐὰς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν διὰ τῶν λογαριθμῶν
τὴν ἀξίαν τοῦ κλάσματος $\frac{7340 \times 3549}{681,8 \times 593,1}$, ὅπερ παριστῶμεν διὰ x .

Ἐκ τῆς ἰσότητος

$$x = \frac{7340 \times 3549}{681,8 \times 593,1}$$

πορίζομεθα κατὰ τὰς ἐν ταῖς §§ 174 καὶ 175 ἀποδειχθείσας ιδιότη-
τας τῶν λογαριθμῶν τὴν ἐξῆς

$$\log x = \log 7340 + \log 3549 - \log 681,8 - \log 593,1,$$

ἥτις δεικνύει ποίας πράξεις πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τῶν λογαριθμῶν
τῶν ἀριθμῶν 7340, 3549, 681,8, 593,1, ἵνα εὕρωμεν τὸν λογάριθ-
μον τοῦ x , ἐξ οὗ θέλομεν πορισθῇ διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τὴν
ζητούμενην αὐτοῦ τιμὴν, ἥτοι τὴν τοῦ δεδομένου κλάσματος. Τὰ κα-
θέκαστα δὲ τῆς ἐκτελέσεως τῶν ἀνωτέρω πράξεων δυνάμεθα νὰ δια-
τάξωμεν ὡς ἐξῆς

$$\log 7340 = 3,8656961$$

$$\log 681,8 = 2,8336570$$

$$\log 3549 = 3,5501060$$

$$\log 593,1 = 2,7731279$$

$${}^*\text{Λθροισμα} = 7,4158021$$

$${}^*\text{Λθροισμα} = 5,6067849$$

$$1^{\text{ον}} \text{ ἄθροισμα} = 7,4158021$$

$$2^{\text{ον}} \text{ ἄθροισμα} = 5,6067849$$

$$\text{Διαφορὰ ἢ } \log x = 1,8090172$$

Ἐπομένως $x = 64,42$ κατὰ προσέγγισιν ἐνὸς ἑκατοστοῦ.

201. Συνήθως, ὅταν ἐν τινι διὰ τῶν λογαριθμῶν ἐκτελουμένῳ ὑπο-
λογισμῷ ὑπάρχωσι λογάριθμοι πρὸς ἀφαίρεσιν, μεταχειρίζονται ἀντὶ
τῶν ἀφαιρετέων λογαριθμῶν τὰ ἀριθμητικὰ αὐτῶν συμπληρώματα,
δι' ὧν, ὡς θέλομεν ἀμέσως ἐκθέσει ἐνταῦθα, ἀπλοποιεῖται καὶ εὐκολύ-
νεται μεγάλως ἡ ἐκτέλεσις τῶν πράξεων.

Καλείται δὲ ἀριθμητικὸν συμπλήρωμα λογαρίθμου τινὸς a ἡ διαφορὰ $10 - a$, ἣν εὐρίσκουμεν ἀφαιροῦντες τὸν δεδομένον λογαρίθμον ἀπὸ 10 ἀκεραίας μονάδας. Παραδείγματος χάριν, τὸ ἀριθμητικὸν συμπλήρωμα τοῦ λογαρίθμου 2,5674058 εἶναι ἡ διαφορὰ $10 - 2,5674058$, ἣν εὐρίσκουμεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ 10 τὸν δεδομένον λογαρίθμον 2,5674058. Ἡ διαφορὰ αὕτη εὐρίσκεται λίαν εὐκόλως, ὡς φαίνεται ἐν τῇ ἐπομένῃ ἐκτελέσει τῆς πράξεως,

$$\begin{array}{r} 40,0000000 \\ 2,5674058 \\ \hline 7,4325942 \end{array}$$

ἀφαιρουμένου τοῦ πρώτου πρὸς τὰ δεξιὰ σημαντικοῦ ψηφίου 8 τοῦ δεδομένου λογαρίθμου ἀπὸ 10, τῶν δὲ λοιπῶν ἀπὸ 9.

Ἐὰν συμβῇ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δεδομένου λογαρίθμου νὰ ᾔηται 10 ἢ μεγαλειότερον τοῦ 10, τότε τὸ εὐρισκόμενον χαρακτηριστικὸν τοῦ ἀριθμητικοῦ αὐτοῦ συμπληρώματος θέλει εἶναι ἀρνητικόν. Παραδείγματος χάριν, τὸ ἀριθμητικὸν συμπλήρωμα τοῦ λογαρίθμου 12,5034672 εὐρίσκεται ὁμοιοτρόπως καὶ εἶναι 3,4965328, ἔχει δηλ. τὸ μὲν δεκαδικὸν αὐτοῦ μέρος θετικόν, μόνον δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν ἀρνητικόν. Ὡσαύτως, τὸ ἀριθμητικὸν συμπλήρωμα τοῦ λογαρίθμου 10,3540600 εἶναι 1,6459400 καὶ εὐρίσκεται ἀφαιρουμένου τοῦ πρώτου πρὸς τὰ δεξιὰ σημαντικοῦ ψηφίου 6 ἀπὸ 10, τῶν δὲ λοιπῶν ἀπὸ 9 καὶ παριστωμένης διὰ 1 τῆς διαφορᾶς $9 - 10$, τοῦ χαρακτηριστικοῦ 10. Ἄν εἴχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἀριθμητικὸν συμπλήρωμα τοῦ λογαρίθμου 3,5724008, οὗτινος τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι ἀρνητικόν, ἠθέλομεν εὑρεῖ τὸν ἀριθμὸν 12,4275992, οὗτινος τὸ χαρακτηριστικὸν 12 εὐρίσκεται ἀφαιρουμένου τοῦ -3 ἀπὸ 9, ὅτε ἔχομεν διαφορὰν $9 + 3$, ἥτοι 12.

Τὰ ἀριθμητικὰ συμπληρώματα τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν a , b , κτλ. θέλομεν παριστᾶ ὡς ἐξῆς Σ.λογ a , Σ.λογ b , κτλ., προτάσσοντες δηλ. τὸ ἀρχικὸν γράμμα Σ τῆς λέξεως Συμπλήρωμα πρὸ τῶν συντετμημένων ἐκφράσεων λογ a , λογ b , κτλ.

202. Τούτων τεθέντων, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τοὺς λογαρίθμους β καὶ δ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν λογαρίθμων a καὶ γ . Ἡ ζητούμενη διαφορὰ θέλει παρασταθῇ διὰ $a + \gamma - \beta - \delta$, αὕτη δὲ δύναται προφανῶς νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἐξῆς

$$a + \gamma + (10 - \beta) + (10 - \delta) - 10 - 10.$$

Ἄλλὰ κατὰ τὰ προεκτεθέντα αἱ διαφοραὶ 10—β, 10—δ παριστῶσι τὰ ἀριθμητικὰ συμπληρώματα τῶν ἀφαιρετέων λογαρίθμων β καὶ δ. Δυνάμεθα λοιπόν, ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος $a + γ$ τοὺς ἀφαιρετέους λογαρίθμους β καὶ δ, νὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸ τὰ ἀριθμητικὰ αὐτῶν συμπληρώματα καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἔπειτα ἀπὸ τοῦ εὐρεθησομένου ἐξαγομένου τοςάκις τὸν 10, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν προστεθέντων ἀριθμητικῶν συμπληρωμάτων. Ἐπειδὴ δὲ τὰ μὲν ἀριθμητικὰ συμπληρώματα τῶν λογαρίθμων εὐρίσκονται λίαν εὐκόλως, ἡ δὲ ἀφαίρεσις τῶν πολλαπλασίων τοῦ 10 ἐκτελεῖται ἐπὶ μόνου τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ ἐφ' οὗ ἐκτελεῖται λογαρίθμου, ἡ ἐν τοῖς ὑπολογισμοῖς χρῆσις τῶν ἀριθμητικῶν συμπληρωμάτων ἀντὶ τῶν ἀφαιρετέων λογαρίθμων συντομεύει μεγάλως τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀναγκαίων πρὸς εὐρεσιν τοῦ τελικοῦ ἐξαγομένου πράξεων. Παραδείγματος χάριν, ἵνα εὐρωμεν τὴν τιμὴν x τοῦ ἀνωτέρω δοθέντος κλάσματος $\frac{7340 \times 3549}{681,8 \times 593,1}$ μεταχειριζόμενοι ἀντὶ τῶν ἀφαιρετέων λογαρίθμων τὰ ἀριθμητικὰ αὐτῶν συμπληρώματα, θέλομεν πρῶτον γράψαι τὴν ἰσότητα

$\log x = \log 7340 + \log 3549 + \Sigma \log 681,8 + \Sigma \log 593,1 - 20$,
δι' ἣν θέλομεν σχηματίζει ἔπειτα τὸν ἐξῆς πίνακα τῶν ὑπολογισμῶν, οἵτινες ἐκτελοῦνται εὐκολώτερον καὶ ταχύτερον ἢ ὅπως προηγουμένως,

$$\begin{aligned}\log 7340 &= 3,8656961 \\ \log 3549 &= 3,5501060 \\ \Sigma \log 681,8 &= 7,1663430 \\ \Sigma \log 593,1 &= 7,2268721\end{aligned}$$

$$\text{Ἀθροισμα} - 20, \text{ ἥτοι } \log x = 4,8090472$$

Ἐπομένως $x = 64,42$ κατὰ προσέγγισιν ἐνὸς ἑκατοστοῦ.

Ἄν εἴχομεν νὰ εὐρωμεν τὴν τιμὴν x τοῦ κλάσματος $\frac{0,054 \times 3,2583}{0,0007 \times 18,35}$, ἡθέλομεν πρῶτον γράψαι τὴν ἰσότητα

$\log x = \log 0,054 + \log 3,2583 + \Sigma \log 0,0007 + \Sigma \log 18,35 - 20$,
καὶ ἔπειτα σχηματίζει τὸν ἐξῆς πίνακα

$$\begin{aligned}\log 0,054 &= \bar{2},7323938 \\ \log 3,2583 &= 0,5129911 \\ \Sigma \log 0,0007 &= 13,1549020 \\ \Sigma \log 18,35 &= 8,7363639\end{aligned}$$

$$\text{Ἀθροισμα} - 20, \text{ ἥτοι } \log x = 4,1366508$$

Ἐπομένως $x = 13,698$ κατὰ προσέγγισιν ἐνὸς χιλιοστοῦ.

203. Ἐς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι μᾶς ζητεῖται ἡ τιμὴ x τῆς παραστάσεως $\frac{(\sqrt[5]{146298})^4}{(\sqrt[6]{388789})^5}$, ἣτις γράφεται καὶ ὡς ἐξῆς $\frac{(146298)^{\frac{4}{5}}}{(388789)^{\frac{5}{6}}}$. Θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητά

$$\log x = \frac{4}{5} \log 146298 - \frac{5}{6} \log 388789,$$

δι' ἣν θέλομεν σχηματίσει τὸν ἐξῆς πίνακα τῶν ὑπολογισμῶν πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου

$\frac{4}{5} \log 146298$	$\frac{5}{6} \log 388789$
δεκ. λογ 14629 .. 0,1652146	δεκ. λογ 38878 .. 0,5897039
διὰ τὰ 0,8. 238	διὰ τὰ 0,9 .. 101
$\log 146298 = 5,1652384$	$\log 388789 = 5,5897140$
γινόμενον ἐπὶ 4 = 20,6609536	γινόμενον ἐπὶ 5 = 27,9485700
πηλίκον διὰ 5 = 4,1321907	πηλίκον διὰ 6 = 4,6580950

$$\frac{4}{5} \log 146298 = 4,1321907$$

$$\Sigma. \frac{5}{6} \log 388789 = 5,3419050$$

$$\text{Ἀθροισμα} - 10, \text{ ἥτοι } \log x = 1,4740957$$

Ἐπομένως $x = 0,29792$ κατὰ προσέγγισιν ἐνὸς ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ.

204. Ἐστω τρίτον πρὸς λύσιν ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις

$$\left(\frac{337}{417}\right)^x = \frac{8493}{73}.$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο μελῶν αὐτῆς θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$x (\log 337 - \log 417) = \log 8493 - \log 73,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως

$$x = \frac{\log 8493 - \log 73}{\log 337 - \log 417},$$

διὰ δὲ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων εὐρίσκομεν

$$\begin{array}{r|l}
 \text{λογ } 8493 = 3,9290611 & \text{λογ } 337 = 2,5276299 \\
 \text{λογ } 73 = 1,8633229 & \text{λογ } 417 = 2,0681859 \\
 \hline
 \text{Διαφορά} = 2,0657382 & \text{Διαφορά} = 0,4594440 \\
 & \text{20657382} \\
 \text{Ἐπομένως } \chi = & \underline{4594440}
 \end{array}$$

Ἄν θέλωμεν νὰ υπολογίσωμεν καὶ τὴν τιμὴν ταύτην τῆς χ διὰ τῶν λογαρίθμων, θέλωμεν ἔχει λογ χ = λογ 20657382 - λογ 4594440, καὶ θέλωμεν εὑρεῖ κατὰ τὰ προεκτεθέντα λογ χ = 0,6528426, ἐπομένως χ = 4,4961 κατὰ προσέγγισιν 0,0001.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ

206. Εἴπομεν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ ὅτι οἱ δανεισταὶ διακρίνουσι δύο εἰδῶν τόκους· τὸν ἀπλοῦν καὶ τὸν σύνθετον, καὶ ὅτι ὁ τόκος κεφαλαιου τινὸς καλεῖται ἀπλοῦς, ὅταν ὑπολογίζεται πρὸς τὸ ὀρισθὲν ἐπιτόκιον ἀναλόγως τοῦ χρόνου, καθ' ὃν τοῦτο ἔμεινεν εἰς τόκον, ὁσοσδήποτε καὶ ἂν ᾦναι οὗτος· σύνθετος δέ, ὅταν ὁ εἰς ὠρισμένον χρόνον μὴ πληρονόμενος τόκος τοῦ ὑπάρχοντος κεφαλαίου θεωρῇται ἐκάστοτε ὡς νέον κεφάλαιον, ἀποφέρον νέον τόκον πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Ἐὰν π. χ. τοκίσαντες 200 δραχμὰς πρὸς 5⁰/₁₀₀ κατ' ἔτος λάβωμεν δι' ἓν ἔτος τόκον 10, διὰ 2 ἔτη τόκον 20, διὰ 3 ἔτη τόκον 30 κτλ., ὁ τόκος θέλει εἶναι ἀπλοῦς· ἔαν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μὴ πληρωθεὶς εἰς τὴν ληξίν τοῦ πρώτου ἔτους τόκος 10 τῶν 200 δραχμῶν προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον, ὅπερ τότε γίνεται 210, καὶ ὁ μὴ πληρωθεὶς εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους τόκος 10,50 τῶν 210 δραχμῶν προστίθεται ἐκ νέου εἰς τὸ κεφάλαιον 210, ὅπερ τότε γίνεται 220,50, καὶ οὕτω καθέξης, ὁ εἰς τὸ τέλος χρονικοῦ τινὸς διςστήματος λαμβανόμενος τόκος θέλει εἶναι σύνθετος.

Ἡ καθ' ὠρισμένον χρόνον ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ κατάθεσις κεφαλαίου τινὸς πρὸς ὠρισμένον ἐπιτόκιον καλεῖται ἀνατοκισμὸς. Ἐὰν παραδείγματος χάριν τοκίσωμεν 500 δραχμὰς πρὸς 8⁰/₁₀₀ ἐπιτόκιον ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ ὑπολογιζομένῳ κατ' ἔτος, ἢ καθ' ἑξαμηνίαν, ἢ κτλ., ἡ τοιαύτη πρὸς τόκον διάθεσις τοῦ ἀνατοκιζομένου κεφαλαίου τῶν 500 δραχμῶν καλεῖται κατ' ἔτος, ἢ καθ' ἑξαμηνίαν ἢ κτλ. ἀνατοκισμὸς αὐτοῦ πρὸς 8⁰/₁₀₀ ἐπιτόκιον.

Συνήθως ὁ σύνθετος τόκος τῶν ἀνατοκίζομένων κεφαλαίων ὑπολογίζεται κατ' ἔτος ἢ καθ' ἑξαμηνίαν.

207. Τούτων τεθέντων, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται ὁ σύνθετος τόκος κεφαλαίου τινὸς a δραχμῶν, ἀνατοκίζομένου κατ' ἔτος πρὸς 100τ ἐπιτόκιον μετὰ r ἔτη, τοῦ τ δηλ. παριστῶντος τὸν τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος· ἢ πόσον γίνεται μετὰ r ἔτη κεφάλαιον a δραχμῶν ἀνατοκίζομενον κατ' ἔτος, τοῦ τόκου τῆς μιᾶς δραχμῆς ὄντος τ εἰς ἓν ἔτος. Ἵνα λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 1 δραχμὴ εἰς ἓν ἔτος φέρει τόκον τ , αἱ a δραχμαὶ εἰς ἓν ἔτος θέλουσι φέρεи τόκον $a\tau$. Τὸ μετὰ 1 λοιπὸν ἔτος τοκίζομενον κεφάλαιον θέλει εἶναι $a + a\tau$ ἢ $a(1 + \tau)$, τουτέστιν εὐρίσκεταιι πολλαπλασιαζομένου τοῦ δεδομένου κεφαλαίου a ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $1 + \tau$. Ἐάν δὲ παραστήσωμεν διὰ a' τὸ μετὰ ἓν ἔτος κεφάλαιον $a(1 + \tau)$, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους κεφάλαιον $a'(1 + \tau)$, ἥτοι $a(1 + \tau)(1 + \tau)$ ἢ $a(1 + \tau)^2$. Ὁμοιοτρόπως σκεπτόμενοι θέλομεν εὑρεῖ ὅτι τὸ εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους τοκίζομενον κεφάλαιον θέλει εἶναι $a(1 + \tau)^3$, τὸ εἰς τὸ τέλος τοῦ τετάρτου $a(1 + \tau)^4$, κτλ., ἐπομένως τὸ εἰς τὸ τέλος τῶν r ἐτῶν θέλει εἶναι $a(1 + \tau)^r$. Ἐάν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ K τὴν ζητούμενην μετὰ r ἔτη ἀξίαν τοῦ κατ' ἔτος ἀνατοκίζομένου πρὸς 100τ ἐπιτόκιον κεφαλαίου a , θέλομεν ἔχει τὸν ἑξῆς γενικὸν τύπον τοῦ συνθέτου τόκου

$$K = a(1 + \tau)^r \quad (1).$$

Ἐξ αὐτοῦ παριζόμεθα λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο αὐτοῦ μελῶν τὴν ἰσότητα

$$\log K = \log a + r \log (1 + \tau) \quad (2),$$

δι' ἧς εὐρίσκομεν εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων τὴν τιμὴν μιᾶς τῶν ἐν αὐτῇ τεσσάρων ποσοτήτων K , a , r καὶ τ , ὅταν μᾶς δίδωνται αἱ τιμαὶ τῶν τριῶν ἄλλων.

208. Χάριν ἀσκήσεως ἂς ἐφαρμόσωμεν αὐτὴν εἰς τὴν λύσιν ἐκάστου τῶν ἑξῆς τεσσάρων μερικῶν προβλημάτων, ἅτινα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν λαμβάνοντες διαδοχικῶς ὡς ἄγνωστον μίαν ἐκ τῶν τεσσάρων ποσοτήτων K , a , r καὶ τ .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. — Πόσον γίνεται μετὰ 15 ἔτη κεφάλαιον 7564 δραχμῶν ἀνατοκίζομενον κατ' ἔτος πρὸς 12 $\frac{0}{10}$.

Ἐπειδὴ ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς 1 ἔτος εἶναι 12, ὁ τῆς μιᾶς δραχμῆς θέλει εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ 12, ἥτοι 0,12. Ἀντικαθιστῶν

τες λοιπὸν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (2) 7564 ἀντὶ τοῦ a , 15 ἀντὶ τοῦ r καὶ 0,12 ἀντὶ τοῦ τ , θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς

$$\log K = \log 7564 + 15 \log (1,12),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων $\log K = 4,6170518$, καὶ ἐπομένως $K = 41404,90$.

Οἱ πρὸς τοῦτο ὑπολογισμοὶ ἔχουσιν ὡς ἐξῆς·

$$\begin{array}{r|l} \log 7564 = 3,8787515 & \log 1,12 = 0,04921802 \\ 15 \log (1,12) = 0,7382703 & 15 \\ \hline \log K = 4,6170518 & 15 \log (1,12) = 0,7382703 \\ & \hline & 4,6170423 = \log 41404 \\ \text{διὰ} & 95 & 0,90 \\ \hline & 4,6170518 = \log 41404,90 \end{array}$$

Σημείωσις — Ὁ λογάριθμος τοῦ 1,12 ἐλήφθη ἐνταῦθα μὲ ὀκτὼ δεκαδικὰ ψηφία, διότι τὸ γινόμενον τοῦ ὀγδόου αὐτοῦ ψηφίου 2 ἐπὶ 15 παρέχει μονάδας τῆς ἐβδόμης δεκαδικῆς τάξεως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. — Ποῖον κεφάλαιον, ἀνατοκίζομενον κατ' ἔτος πρὸς 5⁰/₀, γίνεται μετὰ παρέλευσιν 20 ἐτῶν 400000;

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (2) ὡς πρὸς τὸ $\log a$ καὶ ἀντικαθιστώντες ἐν αὐτῇ 400000 ἀντὶ τοῦ K , 20 ἀντὶ τοῦ r καὶ 0,05 ἀντὶ τοῦ τ , θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς

$$\log a = \log 400000 - 20 \log (1,05),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων $\log a = 5,1782740$, ἐπομένως $a = 150755,10$ ὡς ἐγγιστα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^{ον}. — Μετὰ πόσα ἔτη κεφάλαιον 25673 δραχμῶν ἀνατοκίζομενον κατ' ἔτος πρὸς 8⁰/₀ γίνεται 64649;

Ἐκ τῆς αὐτῆς ἰσότητος (2) πορίζομεθα εὐκόλως διὰ τῶν γνωστῶν ἀντικαταστάσεων

$$r = \frac{\log 64649 - \log 25673}{\log (1,08)},$$

διὰ δὲ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων εὐρίσκομεν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων $r = 12$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4^{ον}. — Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἀνατοκίζομεται κατ' ἔτος 25673 δραχμαὶ γίνονται 64649 μετὰ παρέλευσιν 12 ἐτῶν;

Ἐκ τῆς αὐτῆς ἰσότητος (2) πορίζομεθα διὰ τῶν γνωστῶν ἀντικαταστάσεων

$$\log (1+\tau) = \frac{\log 64649 - \log 25673}{12},$$

διὰ δὲ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων εὐρίσκουμεν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀνωτέρω σεσημειωμένων πράξεων $\log (1+\tau) = 0,0334238$, ἐπομένως $1+\tau = 1,08$ καὶ $\tau = 0,08$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τ παριστᾷ τὸν τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος, ἔπεται ὅτι τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον θέλει εἶναι 100τ, ἥτοι 8.

Παρατήρησις 1.— Ἄν τὸ πρὸς ἀνατοκισμὸν κατατεθὲν κεφάλαιον ἀνετοκίζετο καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς ὠρισμένον ἐπιτόκιον, πρὸς 8⁰/₀ παραδείγματος χάριν, ἔπρεπε νὰ εὗρωμεν τὸν τόκον τῶν 100 δραχμῶν εἰς 6 μῆνας, καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν ἔπειτα τὸν αὐτὸν τύπον (2), ἀφοῦ προηγουμένως μετατρέψωμεν τὰ ἔτη ν εἰς ἑξαμηνίας. Ἄν π. χ. μᾶς ἐζητεῖτο πόσον γίνεται μετὰ 11 ἔτη κεφάλαιον 10000 δραχμῶν ἀνατοκίζομενον καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς 8⁰/₀, ἠθέλωμεν ἔχει παριστῶντες τὸ ζητούμενον διὰ K , τὴν ἰσότητα

$$\log K = \log 10000 + 22 \log (1,04),$$

ἂν πορίζομεθα ἐκ τῆς ἀνωτέρω (2) θέτοντες 10000 ἀντὶ τοῦ a , 22 ἀντὶ τῶν r ἑτῶν καὶ 0,04 ἀντὶ τοῦ τ .

Παρατήρησις 2.— Ἡ λύσις τοῦ ἀνωτέρω 3^{ου} προβλήματος πρέπει προφανῶς νὰ παρέχῃ διὰ τὸ r , τουτέστι διὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ζητούμενων ἑτῶν, τιμὴν ἀκεραίαν, διότι κατ' ἔτος ὑπετέθη τὸ κεφάλαιον ἀνατοκίζομενον. Ὅταν λοιπὸν εὐρίσκωμεν τιμὴν κλασματικὴν, παραδείγματος χάριν, ἂν εὗρωμεν $r = 10 + \frac{3}{8}$, πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι 10 ἔτη ἀνατοκισμοῦ δὲν εἶναι ἐπαρκῆ πρὸς τὸν σκοπὸν καὶ ὅτι 11 τοιαῦτα ἔτη παρέχουσι κεφάλαιον μεγαλείτερον τοῦ δεδομένου. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἂν θέλωμεν νὰ εὗρωμεν ἀκριβῶς τὸν χρόνον, καθ' ὃν τὸ κεφάλαιον ἔρμινεν ἀνατοκίζομενον, πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Εὐρίσκομεν πρῶτον πόσον γίνεται τὸ ἀνατοκίζομενον κεφάλαιον μετὰ 10 π. χ. ἔτη, ἃν ὁ ἐν τῷ r περιεχόμενος ἀκεραῖος ᾖ 10, ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὸ εὐρεθὲν ἐξαγόμενον ἀπὸ τοῦ δεδομένου καὶ ζητοῦμεν εἰς πόσον χρόνον τὸ εὐρεθὲν ἐξαγόμενον τοκίζομενον πρὸς τὸ δεδομένον ἐπιτόκιον θέλει φέρει τόκον τὴν εὐρεθησομένην διαφοράν. Ὁ οὕτως εὐρεθεὶς χρόνος προστιθέμενος εἰς τὸν ἐν τῷ r πε-

ριεχόμενον ἀκέραιον ἀριθμὸν τῶν ἐτῶν, θέλει δώσει ἄθροισμα τὸ ζητούμενον.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι μᾶς ζητεῖται μετὰ πόσον χρόνον 10000 δραχμαὶ ἀνατοκίζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς 10⁰/₀ γίνονται 27234,30. Θέλομεν ἔχει τότε

$$r = \frac{\log 27234,30 - \log 10000}{\log (1,10)} = \frac{4351462}{413927} = 10 + \frac{211892}{413929},$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τοῦ r περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 10 καὶ 11, ἵνα εὕρωμεν ἀκριβῶς τὸν ζητούμενον χρόνον, εὕρισκόμεν πόσον γίνεται τὸ ἐκ 10000 δραχμῶν κεφάλαιον μετὰ 10 ἔτη ἀνατοκίζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 10⁰/₀, ἀφαιρούμεν τὸ εὑρεθησόμενον ἐξαγόμενον 25937,43 ἀπὸ τοῦ δεδομένου 27234,30 καὶ ζητοῦμεν εἰς πόσον χρόνον 25937,43 δραχμαὶ, τοκίζόμεναι πρὸς 10⁰/₀, φέρουσι τόκον τὴν εὑρεθησομένην διαφορὰν 1206,87. Ὁ οὕτως εὑρεθησόμενος χρόνος τῶν 6 μηνῶν προστιθέμενος εἰς τὰ 10 ἔτη ἀποτελεῖ ἄθροισμα, ὅπερ εἶναι ἀκριβῶς τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΧΡΕΩΛΥΣΙΣ

209. Καλεῖται *χρεώλυτρον* τὸ σταθερὸν πᾶσόν, ὅπερ πρέπει νὰ πληρώνωμεν εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους, ἢ ἄλλου τινὸς προσυμφωνηθέντος χρονικοῦ διαστήματος, ἵνα ἀποσβέσωμεν μετὰ τινα ἔτη, ἢ μετὰ παρέλευσιν ἀριθμοῦ τινος τοιούτων χρονικῶν διαστημάτων, ὠρισμένον χρέος, θεωρούμενον ἐπὶ κατ' ἔτος ἀνατοκισμῷ, ἢ κατὰ τὸ προσυμφωνηθὲν χρονικὸν διάστημα, πρὸς δεδομένον ἐπιτόκιον. Ἄν π. χ. πρέπει νὰ πληρώνωμεν X δραχμὰς κατ' ἔτος, ἵνα μετὰ r ἔτη ἀποσβέσωμεν χρέος a δραχμῶν, θεωρούμενον ἐπὶ κατ' ἔτος ἀνατοκισμῷ πρὸς τι ἐπιτόκιον 100τ, τὸ σταθερὸν τοῦτο ποσὸν εἶναι τὸ καλούμενον *χρεώλυτρον*.

210. Ἵνα εὕρωμεν τὸν τύπον ἢ τὴν ἐξίσωσιν, ἐξ ἧς θέλομεν πορῶσθαι τὴν τιμὴν τοῦ χρεωλύτρου X , ὅταν τὰ ποσὰ a , r καὶ τ ᾖναι δεδομένα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀντὶ νὰ πληρώνωμεν κατ' ἔτος τὸ χρεώλυτρον X εἰς τὸν δανειστὴν ἡμῶν, θέτομεν ἐκάστοτε αὐτὸ ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Τότε τὸ μὲν χρέος ἡμῶν a μετὰ r ἔτη ἀνατοκίζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 100τ θέλει γείναι $a(1+\tau)^r$, ἐνῶ τὸ μὲν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους ἀνατοκίζόμενον χρεώλυτρον X θέλει μείνει $x-1$ ἔτη ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 100τ ἐπιτόκιον καὶ θέλει γείναι

$X(1+\tau)^{v-1}$, τὸ δὲ εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους ἀνατοκίζόμενον χρεώλυτρον X θέλει μείνει $v-2$ ἔτη ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 400τ ἐπιτόκιον καὶ θέλει γείνει $X(1+\tau)^{v-2}$. Τὸ εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους ἀνατοκίζόμενον θέλει γείνει $X(1+\tau)^{v-3}$, τὸ εἰς τὸ τέλος τοῦ τετάρτου θέλει γείνει $X(1+\tau)^{v-4}$, καὶ οὕτω καθέξης μέχρι τοῦ εἰς τὸ τέλος τοῦ $v^{\text{του}}$ ἔτους πληροσυσμένου, ὅπερ θέλει μείνει X . Τὸ ἐκ τοῦ κατ' ἔτος λοιπὸν ἀνατοκισμοῦ τοῦ πληροσυσμένου χρεωλύτρου X εἰς τὸ τέλος τῶν v ἐτῶν παραχθησόμενον κεφάλαιον θέλει εἶναι

$$X(1+\tau)^{v-1} + X(1+\tau)^{v-2} + X(1+\tau)^{v-3} + \dots + X(1+\tau) + X,$$

ἢ, γραφομένων τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος κατ' ἀντίστροφον τάξιν,

$$X + X(1+\tau) + X(1+\tau)^2 + \dots + X(1+\tau)^{v-2} + X(1+\tau)^{v-1}.$$

Ἵνα λοιπὸν ἀποσβῇ διὰ τῶν χρεωλύτρων X τὸ χρέος a , πρέπει τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα νὰ ἦναι ἴσον μὲ $a(1+\tau)^v$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀποτελεῖται ἐξ ὁρῶν, οἵτινες σχηματίζουσι προφανῶς αὐξοῦσαν γεωμετρικὴν πρόσδον, ἥς ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι X , ὁ λόγος $1+\tau$ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁρῶν v . Ἄρα θέλει εἶναι ἴσον κατὰ τὸν τύπον (2) τῆς §

$$127 \text{ μὲ } \frac{X(1+\tau)^{v-1}(1+\tau) - X}{1+\tau - 1} \text{ ἢ } \frac{X[(1+\tau)^v - 1]}{\tau}, \text{ καὶ θέλομεν ἔ-}$$

χει τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὸν τύπον

$$\frac{X[(1+\tau)^v - 1]}{\tau} = a(1+\tau)^v \quad (1),$$

ἐξ οὗ πορίζομεθα τὴν ζητούμενην τιμὴν τοῦ χρεωλύτρου X

$$X = \frac{a\tau(1+\tau)^v}{(1+\tau)^v - 1} \quad (2).$$

211. Ὁ ἀνωτέρω τύπος (1), ὅστις καλεῖται καὶ τύπος τῆς χρεωλύσεως, περιέχει τέσσαρας ποσότητες X , a , v καὶ τ , καὶ χρησιμεύει πρὸς εὑρεσιν τῆς τιμῆς μιᾶς τούτων, ὅταν αἱ τρεῖς ἄλλαι ἦναι γνωσταί. Χάριν δὲ ἀσκήσεως ἂς ἐφαρμόσωμεν τοῦτον εἰς τὴν λύσιν μερικῶν προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. — Πόσον χρεώλυτρον πρέπει νὰ πληρῶνῃ τις κατ' ἔτος, ἵνα μετὰ παρέλευσιν 20 ἐτῶν ἀποσβῇ χρέος 35000 δραχμῶν, θεωρούμενον ἐπὶ κατ' ἔτος ἀνατοκισμῷ πρὸς 8^ο/10;

Πρὸς εὑρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ ζητουμένου X λαμβάνομεν πρῶτον τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο μελῶν τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος (2) καὶ ἔχομεν

$$\log X = \log a + \log \tau - r \log (1 + \tau) + \Sigma. \log [(1 + \tau)^v - 1] - 40$$

Ἀντικαθιστῶμεν ἔπειτα ἐν τῇ εὐρεθείσῃ ἰσότητι 35000 ἀντὶ τοῦ a , 0,08 ἀντὶ τοῦ τ , 20 ἀντὶ τοῦ r καὶ ὑπολογίζομεν τὴν τιμὴν τοῦ X ὡς ἑξῆς. Εὐρίσκομεν πρῶτον τὴν τιμὴν τῆς διαφορᾶς $(1 + \tau)^v - 1$, ἥτοι τοῦ $(1,08)^{20} - 1$ διὰ τῶν ἑξῆς κατ' ἰδίαν ἐκτελουμένων ὑπολογισμῶν

$$\log 1,08 = 0,0334238, \quad 20 \log (1,08) = 0,6684760,$$

$$(1,08)^{20} = \text{ἀριθμὸς ἔχων λογαριθμὸν } 0,6684760 = 4,66097,$$

$$\text{ἔπομένως } (1,08)^{20} - 1 = 3,66097.$$

Μετὰ ταῦτα ἔχομεν

$\log 35000$	4,5440680
$\log 0,08$	2,9030900
20 $\log (1,08)$	0,6684760
$\Sigma. \log [(1,08)^{20} - 1] = \Sigma. \log 3,66097$	9,4364038
* Ἀθροισμα $- 40$, ἥτοι $\log X = \dots$	3,5520378
ἀριθμὸς λογαρίθμου 4,5520352 ...	35648
διὰ τὴν διαφορὰν 26 ...	0,2

$$\text{* Ἀριθμὸς λογαρίθμου } 3,5520378 \text{ ἥτοι } X = 3564,82$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ πληρώνομεν κατ' ἔτος 3564,82 δραχμάς, ἵνα εἰς 20 ἔτη ἀποσβέσωμεν τὸ ἐκ 35000 ἐπὶ κατ' ἔτος ἀνατοκισμῷ πρὸς 8⁰/₀ χρέος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ δανεισθῇ τις ἐπὶ κατ' ἔτος ἀνατοκισμῷ πρὸς 8⁰/₀, ἵνα μετὰ 20 ἔτη ἀποσβέσῃ αὐτὸ πληρῶν χρεώλυτρον 3564,82 δραχμάς.

Πρὸς εὑρεσιν τοῦ ζητουμένου λύομεν τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) ὡς πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ ἄγνωστον a καὶ ἔχομεν τὴν ἰσότητα

$$a = \frac{X[(1 + \tau)^v - 1]}{\tau(1 + \tau)^v},$$

ἥς λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο μελῶν εὐρίσκομεν.

$$\log a = \log X + \log [(1 + \tau)^v - 1] + \Sigma. \log \tau + \Sigma. \log (1 + \tau)^v - 20$$

Ἀντικαθιστῶντες ἔπειτα ἐν τῇ ἰσότητι εὐρεθείσῃ ἀντὶ τῶν γραμμάτων X , r , τ , τὰς δεδομένας τιμὰς αὐτῶν 3564,82, 20, 0,08 καὶ

υπολογίζοντες ὡς ἀνωτέρω πρῶτον τὴν διαφορὰν $(1+\tau, -\tau, \text{ ἥτοι } (1,08)^{20} - 1, \text{ θέλομεν ἔχει}$

λογ 3564,82	3,5520378
λογ $[(1,08)^{20} - 1]$	0,5635962
Σ. λογ 0,08	44,0969100
Σ. λογ $(1,08)^{20} = \Sigma. \text{ λογ } 4,66097$..	9,3315240
* Ἀθροισμα $- 20, \text{ ἥτοι λογ } a =$	4,5440680

Ἐπομένως $a = 35000$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^{ον}. — Μετὰ πόσα ἔτη ἀποσβέννεται δάνειον 35000 δραχμῶν ἐπὶ κατ' ἔτος ἀνατοκισμῷ πρὸς 8^ο/₁₀₀ δι' ἐτησίων χρεωλῦτρων ἐκ 3564,82 δραχμῶν ἑκαστον;

Πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου λύομεν πρῶτον τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) ὡς πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ ἄγνωστον r καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς

$$(Xa - \tau)(1 + \tau)^r = X, \quad (1 + \tau)^r = \frac{X}{X - a\tau},$$

$$r \text{ λογ } (1 + \tau) = \text{λογ } X - \text{λογ } (X - a\tau), \text{ καὶ } r = \frac{\text{λογ } X - \text{λογ } (X - a\tau)}{\text{λογ } (1 + \tau)}$$

Ἀντικαθιστῶμεν ἔπειτα ἐν τῇ τελευταίᾳ ἰσότητι ἀντὶ τοῦ X, a καὶ τ τὰς δεδομένας αὐτῶν τιμὰς 3564,82, 35000, 0,08 καὶ ἔχομεν

λογ 3564,82	3,5520378
Σ. λογ $(3564,82 - 35000 \times 0,08)$...	7,1164408
* Ἀθροισμα $- 10$	0,6684786
λογ (1,08)	0,0334238

$$\text{Ἐπομένως } r = \frac{0,6684786}{0,0334238} = 20.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4^{ον}. — Πρὸς ποῖον ἐπὶ κατ' ἔτος ἀνατοκισμῷ ἐπιτόκιον πρέπει νὰ δανείσῃ τις κεφάλαιον 35000 δραχμῶν, ἵνα ἀποσβεσθῇ τὸ δάνειόν του μετὰ 20 ἔτη διὰ χρεωλῦτρων 3564,82 δραχμῶν;

Ἵνα εὐρῶμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ λύσωμεν πρῶτον τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ ἄγνωστον τ , καὶ τὴν εὐρεθησομένην τιμὴν αὐτῆς νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 100. Ἀλλ' ὁ τύπος (1) παρέχει ἐξίσωσιν τοῦ $r+1$, ἥτοι τοῦ 21 βαθμοῦ, ὡς πρὸς τὴν τ , καὶ τοιοῦτου βαθμοῦ ἐξισώσεις δὲν δυνάμεθα νὰ λύωμεν.

ΤΕΛΟΣ



ΔΗΜΟΣ