

ΗΚΗ ΒΕΡΟΙΑΣ

920

Ε

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΒΕΡΟΙΑΣ

1000
mad.

Αριθ. εισ 3822

Δωρεά: Υπουργείου
Kardamyli

Πολύσμου και Επιστημών



GRVER00476

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΕΥΟΝΤΩΝ ΕΙΣ ΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ
ΣΧΟΛΕΙΑ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Χ. ΒΑΦΑ,

Ἐτι μᾶλλον ἐπιδιωρωμένη

Ἐκδίδεται τὸ πέμπτον.

-
- » Φερε λάβωμεν τοῦτο τὸ κοινόν, ὃ πᾶσαι προ-
 - » χοῶνται τέχναι τε καὶ διάνοιαι καὶ ἐπιστήμαι,
 - » ὃ καὶ παντὶ ἐν πρώτοις ἀνάγκη μανθάνειν, ἄ-
 - » ριθμόν τε καὶ λογισμόν. »

(Πλάτ. Πολιτ. Βιβλ. Ζ΄.)

Τιμᾶται Δραχ. 1: 80.



Αγγέλιος Λεωργίου
ἐν Βερόσῳ.

ὁμοῦ καὶ ἡμεῖς

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ. Ἀπομνημονεύματα

1854.

Γράφω ὁ ἴδιος
ἡμεῖς

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη

ἔκδοσις

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΒΛΙΟΘΗΚΗ

+500 ΒΕΡΟΙΑΣ

Λοιπ. εἰς

3822/63

ΔΩΡΕΑ

ΚΑΝΟΝ
ΓΕΩΡΓΙΑ

δύσκολα.

την συνταξιν καὶ ἐκδοσιν σειρᾶς στοιχειωδῶν μαθηματικῶν βιβλίων.

Καὶ ὁ μὲν πρῶτος οὗτος τόμος αὐτῆς, ὅστις ἐκδίδεται τώρα τὸ πέμπτον, ἐμπεριέχει ὅσα τῆς ἀριθμητικῆς ἔκρινα ἀναγκαῖα καὶ ὠφέλιμα νὰ μανθάνωσιν οἱ εἰς τὰ Ἑλληνικὰ τῆς Ἑλλάδος σχολεῖα φοιτῶντες, τουτέστιν ὅλον αὐτῆς τὸ πρακτικὸν μέρος ἀρκετὰ τέλειον, τοῦ θεωρητικοῦ ἀποχωρισθέντος εἰς τὸν τρίτον τόμον τῆς σειρᾶς, ὅστις ἐντὸς ὀλίγου ἐκδίδεται τὸ τρίτον.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀριθμητικὴ αὕτη, ἥ τε πρακτικὴ καὶ ἡ θεωρητικὴ, διαφέρει τῶν ἄλλων τῶν παρ' ἡμῖν κατὰ πολλὰ, παρακκλῶ τοὺς μέλλοντας νὰ διδάξωσι τὸν τόμον τοῦτον νὰ μελετήσωσι πρότερον τὴν θεωρητικὴν μετὰ προσοχῆς καὶ ἂν μὲν πεισθῶσιν ὅτι εἶναι δικαιολογημένοι αἱ μεταβολαὶ, τότε νὰ ἐπιχειρήσωσι νὰ τὸν διδάξωσιν, ἀλλὰ συμμορφούμενοι καθ' ὅλα μὲ τὰ ἐν αὐτῷ, ἐὰν δὲ μὴ, εἶναι ὀρθότερον νὰ ἐκλέξωσι ἄλλην τινά. Διότι εἶναι πολὺ δυσάρεστον τὰ διὰ μακροῦ χρόνου, πολλῶν πόνων καὶ σκέψεως οὐκ ὀλίγης γινόμενα πρὸς βελτίωσιν τῆς ἐπιστήμης, τυχόντα φιλαυτίκας μὴ σκεφθεῖσθαι, νὰ μὴ μεταδίδωνται ὅποια εἶναι, καὶ τὸ χειρότερον, ἀλλοιωμένα ν' ἀποδίδωνται εἰς τὸν συγγραψαντα.

ΠΙΝΑΞ

ΤΩΝ ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΚΕΦ. Α'. Περὶ ἀριθμῶν.	
Τί εἶναι ἀριθμὸς καὶ περὶ ὀνοματολογίας τῶν ἀριθμῶν.	5
Περὶ γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.	9
Περὶ κλασματικῶν καὶ μικτῶν ἀριθμῶν.	11
Περὶ λήψεως τῶν ἐν τῷ Α. κεφαλαίῳ.	13
ΚΕΦ. Β'. Περὶ πράξεων ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν	
Περὶ προσθέσεως ἀκεραίων.	14
Περὶ ἀφαιρέσεως ἀκεραίων.	16
Περὶ δοκιμῆς τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως.	18
Προβλήματα εἰς λύσιν	19
Περὶ πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίων ἐπὶ ἀκεραίους ἀριθμούς.	21
Περὶ διαιρέσεως ἀκεραίων δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν.	26
Περὶ λόγου καὶ ἀναλόγων ἀριθμῶν.	33
Προβλήματα εἰς λύσιν.	34
Περὶ διαιρετῶν καὶ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.	37
Περὶ λήψεως τῶν ἐν τῷ Β. κεφαλαίῳ.	39
ΚΕΦ. Γ'. Περὶ πράξεων ἐπὶ ἀκεραίων, κλασματικῶν καὶ μικτῶν ἀριθμῶν.	
Τροπὴ ἀκεραίων καὶ μικτῶν εἰς κλασματικούς καὶ τ' ἀνάπαλιν.	41
Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως κλασματικῶν καὶ μικτῶν ἀριθμῶν δι' ἀκεραίων.	—
Περὶ τροπῆς ἑτερωνύμων κλασματικ. εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους.	44
Περὶ ἀγωγῆς κλασματικ. εἰς ἄλλους ἰσοδυνάμους τῶν μὲ μικροτέρους ὄρους.	45
Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσ. κλασματικ. καὶ μικτ. ἀριθμῶν.	46
Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως ἀριθμῶν διὰ κλα- σματικῶν καὶ μικτῶν.	47
Προβλήματα εἰς λύσιν.	50
Περὶ λήψεως τῶν ἐν τῷ Γ. κεφαλαίῳ.	52

ΚΕΦ. Δ'. Περὶ πράξεων ἐπὶ τῶν συμμιγῶν.	
Τί εἶναι συμμιγῆς ἀριθμὸς καὶ τί διαφέρει ἀκεραίου.	53
Περὶ τροπῆς συμμιγοῦς εἰς ἓνα ἰσοδύναμον ἀριθμὸν μικροτέρως τινὸς μονάδος του, καὶ τ' ἀνάπαλιν.	54
Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως συμμιγῶν.	56
Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως συμμιγῶν.	56
Περὶ ληψίς τῶν ἐν τῷ Δ'. κεφαλαίῳ.	61
ΚΕΦ. Ε'. Περὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν.	
Τί εἶναι δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ καὶ πῶς γράφονται.	61
Περὶ τροπῆς κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.	63
Περὶ πράξεων ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν.	64
Δεκαδικὸν σύστημα μέτρων καὶ σταθμῶν.	66
Περὶ ληψίς τῶν ἐν τῷ Ε'. κεφαλαίῳ.	68
ΚΕΦ. Σ'. Περὶ τετραγώνου καὶ τετραγωνικῆς ρίζης.	
Τί εἶναι τετράγωνον, τί τετραγωνικὴ ρίζα καὶ διακρίσεις τῶν ἀριθμῶν εἰς τετραγώνους καὶ μὴ.	—
Περὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.	70
Περὶ ληψίς τῶν ἐν τῷ Σ'. κεφαλαίῳ.	75
ΚΕΦ. Ζ'. Περὶ ἀναλογιῶν καὶ μεθόδων.	
Περὶ ἀναλογιῶν.	—
Περὶ μεθόδου τῶν τριῶν.	78
Περὶ πολλαπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.	81
Περὶ μεθόδου τοῦ μερίζειν εἰς ἀνάλογα.	84
Περὶ ληψίς τῶν ἐν τῷ Ζ'. κεφαλαίῳ.	86

ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Τι εἶναι ἀριθμὸς καὶ περὶ ὀνοματολογίας τῶν ἐριθμῶν.

1. **Ο**ΝΟΜΑΖΕΤΑΙ μὲ τὸ ὄνομα εἷς, μία, ἓν, ἃ) πρᾶγμα τι φυσικὸν ἢ τεχνητὸν, ὅταν θεωρῇται μόνον του, καὶ ὅχι μὲ ἄλλο ὁμοίον του μαζί, οἷον εἷς ἄνθρωπος, μία χειλιδὼν, ἓν δένδρον—εἷς πίναξ, μία οἰκία, ἓν βιβλίον κτλ' καθὲν δὲ τούτων εὐκόλως διακρίνεται ὅτι εἶναι ἓν· β') πρᾶγμα τι προσδιορισμένον κατὰ κοινὴν συνθήκην, οἷον εἷς τὴν Ἑλλάδα βάρος, ὅσον εἶναι τὸ ὀνομαζόμενον ὀκά, μῆκος, ὅσον εἶναι τὸ λεγόμενον πῆχυς, καιρὸς, ὅσον εἶναι τὸ λεγόμενον ἡμερονύκτιον, καὶ ἄλλα, τὰ ὅποια θέλομεν ἰδεῖ κατωτέρω. Τὸ ἓν λέγεται κάποτε καὶ μονάς.

Τὸ ἓν λέγεται μὲν συγκεκριμένον, ὅταν συνοδεύηται μὲ τὸ ὄνομα πράγματος, οἷον ἓν μῆλον, μία θύρα, κτλ' ὁπότε νοοῦμεν τὸ πρᾶγμα τί εἶναι καὶ ὅτι εἶναι ἓν. Λέγεται δὲ ἀφηρημένον, ὅταν δὲν ἔχῃ ὄνομα πράγματος μαζὶ του, οἷον ἓν, ὁπότε εἶναι ἀπροσδιόριστον τί πρᾶγμα εἶναι αὐτὸ τὸ ἓν, καὶ εἴμπαρσι νὰ ᾔναι ὁποιοδῆποτε.

1. ἓν καὶ ἓν ὀνομάζεται	δύο
ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν, ἢ δύο καὶ ἓν	τρία
ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν, ἢ τρία καὶ ἓν	τέσσαρα
ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν, ἢ τέσσαρα καὶ ἓν	πέντε
ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν, ἢ πέντε καὶ ἓν	ἕξ
ὡσαύτως ἕξ καὶ ἓν	ἐπτά
ἐπτά καὶ ἓν	ὀκτώ
ὀκτώ καὶ ἓν	ἐννέα
ἐννέα καὶ ἓν	δέκα

Ὅλα ταῦτα, ἦτοι τὸ δύο, τὸ τρία . . . τὸ δέκα εἶναι ἀριθμοί· καὶ γενικῶς ἀριθμὸς ὀνομάζεται μονάδων συλλογὴ, τῆς ὁποίας εἶναι προσδιορισμένον τὸ πόσαι εἶναι αὐταί. Ὅταν δὲ ᾔναι ἀπροσδιόριστον τὸ πόσαι εἶναι αἱ μονάδες, λέγεται ἡ συλλογὴ πολλὰ ἢ πληθος.

Ὁ δέκα, ὅστις εἶναι ἀριθμὸς καὶ ὅχι ἓν, θεωρεῖται κατὰ συνθήκην ὡς ἓν, ὡς μονάς, καὶ τότε λέγεται δεκάς, οἱ δὲ λοιποὶ εἶναι ἀριθμοὶ μονάδων.

Καὶ ἂν μὲν ἡ μονάς τοῦ ἀριθμοῦ ᾔναι ὡρισμένον τι πρᾶγμα, οἷον δένδρον, οἰκία κτλ. ὁ ἀριθμὸς λέγεται συγκεκριμένος, οἷον, δύο πῆχεις, τρεῖς ὀκάδες,

τέσσαρες ἄνθρωποι, πέντε δένδρα κτλ. ὅποτε νοοῦμεν καὶ πῶσαι εἶναι αἱ μονάδες καὶ τί εἶναι ἡ μονάς. Ὁ πρῶτος εἶναι ἀριθμὸς πήχεων, ὁ δεῦτερος ἀριθμὸς ὀκάδων κτλ. Ἄν δὲ ἡ μονάς ᾖ καὶ ὁποιαδήποτε ἡ ἀπροσδιόριστος, ὁ ἀριθμὸς ὀνομάζεται ἀφηρημένος, οἷον, τρία, ἑπτὰ, δέκα, τῶν ὁποίων τί εἶναι ἡ μονάς μένει ἀπροσδιόριστον (*).

Τέσσαρα παράθυρα, τέσσαρες πήχεις, τέσσαρες ὀκάδες εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ἀλλὰ διαφόρων μονάδων· τέσσαρα δὲ παράθυρα, ἑπτὰ παράθυρα, δέκα παράθυρα εἶναι διάφοροι ἀριθμοὶ τῆς αὐτῆς μονάδος.

Β. Ἄλλοι ἀριθμοὶ μεγαλύτεροι τοῦ δέκα ὀνομάζονται κατὰ σειρὰν οὕτως, Ἐνδεκα, δώδεκα, δέκα τρία, δέκα τέσσαρα, δέκα πέντε . . . δέκα ἑννέα, δύο δεκάδες ἢ μονολεῖξί εἰκοσιν—εἰκοσιν ἔν, εἰκοσι δύο, εἰκοσι τρία . . . εἰκοσιν ἑννέα, τρεῖς δεκάδες ἢ τριάκοντα—τριάκοντα ἔν, τριάκοντα δύο . . . τριάκοντα ἑννέα, τέσσαρες δεκάδες ἢ τεσσαράκοντα—τεσσαράκοντα ἔν, τεσσαράκοντα δύο . . . τεσσαράκοντα ἑννέα, πέντε δεκάδες ἢ πενήκοντα—πεντήκοντα ἔν, πενήκοντα δύο . . . πενήκοντα ἑννέα, ἕξ δεκάδες ἢ ἑξήκοντα—ἑξήκοντα ἔν . . . ἑξήκοντα ἑννέα, ἑπτὰ δεκάδες ἢ ἑβδομήκοντα—ἑβδομήκοντα ἔν . . . ἑβδομήκοντα ἑννέα, ὀκτὼ δεκάδες ἢ ὀγδοήκοντα—ὀγδοήκοντα ἔν, . . . ὀγδοήκοντα ἑννέα, ἑννέα δεκάδες ἢ ἑννεήκοντα—ἑννεήκοντα ἔν . . . ἑννεήκοντα ἑννέα, δέκα δεκάδες ἢ ἑκατόν.

Τῶν ἁρμόνων τούτων οἱ μὲν δέκα, εἰκοσι, τριάκοντα . . . ἑννεήκοντα ἢ ἄλλως, μία δεκάς, δύο δεκάδες . . . ἑννέα δεκάδες, ὀνομάζονται ἀριθμοὶ δεκαδίων διότι μονάς αὐτῶν εἶναι ὅχι ἀμέσως τὸ ἔν, ἀλλὰ ὁ δέκα ἢ ἡ δεκάς· οἱ δὲ λοιποὶ εἶναι ὅλοι σύνθετοι ἐξ ἀριθμοῦ τινος δεκαδίων καὶ ἀριθμοῦ τινος μονάδων. Ὁ δ' ἑκατόν, ἂν καὶ ᾖ καὶ ἀριθμὸς καὶ ὅχι ἔν, θεωρεῖται ὁμῶς κατὰ συνθήκην ὡς ἔν, ὅς ἐστι μονάς, καὶ τότε λέγεται ἑκατοντάς.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἡ κατάληξις κοντα σημαίνει δεκάδας, ἦτοι τριάκοντα εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τρεῖς δεκάδες κτλ. Κοινῶς δὲ λέγομεν συντομωτέρως, τριάντα, σαράντα, πενήντα, . . . ἑννεήντα.

Δ. Ἄλλοι ἀριθμοὶ μεγαλύτεροι τοῦ ἑκατόν ὀνομάζονται κατὰ σειρὰν οὕτως, ἑκατόν ἔν, ἑκατόν δύο . . . ἑκατόν ἑννέα, ἑκατόν δέκα, ἑκατόν ἑνδεκα, . . . ἑκατόν εἰκοσιν, ἑκατόν εἰκοσι ἔν . . . ἑκατόν ἑννεήκοντα ἑννέα, δύο ἑκατοντάδες ἢ μονολεῖξί διακόςια—διακόςια ἔν, διακόςια δύο . . . διακόςια ἑννεήκοντα ἑννέα, τρεῖς ἑκατοντάδες ἢ τριακόςια—τριακόςια ἔν, τριακόςια δύο . . . τριακόςια ἑννεήκοντα ἑννέα, τέσσαρες ἑκατοντάδες ἢ τετρακόςια, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ ἑνεακόςια ἑννεήκοντα ἑννέα· ὁ δὲ ἀκόλουθος λέγεται δέκα ἑκατοντάδες ἢ μονολεῖξί χίλια.

Τούτων τῶν ἀριθμῶν οἱ μὲν ἑκατόν, διακόςια . . . ἑνεακόςια, ἢ ἄλλως, μία

(*) Περὶ τῶν ὀνομάτων ἀφηρημένων καὶ συγκεκριμένων ἰδὲ τὸν Θεωρ. Αριθμ. ἐν Καρ. Α.

ἐκατοντάς, δύο ἐκατοντάδες . . . ἑννέα ἐκατοντάδες, ὀνομάζονται ἀριθμοὶ ἑκατοντάδων, διότι μόνος αὐτῶν εἶναι ἡ ἐκατοντάς, ἀλλ' ὅχι τὸ ἐν ἢ ἡ δεκάς· οἱ δὲ λοιποὶ εἶναι σύνθετοι ἐκ τινος ἀριθμοῦ ἑκατοντάδων καὶ τινος ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ ἐκατόν, δηλ. εἶναι σύνθετοι οἱ μὲν ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἑκατοντάδων καὶ ἀριθμοῦ τινος μονάδων, οἷον ὁ διακόσια τρία, οἱ δὲ ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἑκατοντάδων καὶ ἀριθμοῦ τινος δεκάδων, οἷον ὁ τριακόσια τεσσαράκοντα, οἱ δὲ ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἑκατοντάδων, ἀριθμοῦ τινος δεκάδων καὶ ἀριθμοῦ τινος μονάδων, οἷον ἑπτακόσια ἑξομήκοντα τέσσαρα.

Ὁ δὲ χίλια θεωρεῖται κατὰ συνθήκην ὡς ἐν, ὡς μόνος, καὶ τότε λέγεται χιλιάς.

Παρατηροῦμεν δὲ καὶ ἐδῶ ὅτι ἡ κατάληξις κόσια σημαίνει ἑκατοντάδας, ἦτοι τριακόσια εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τρεῖς ἑκατοντάδες, κτλ.

σημ. α'. Τὸ ἐν ἢ ἡ μόνος λέγεται ἀρχικὴ καὶ πρώτη τάξις, ὁ δέκα ἢ ἡ δεκάς λέγεται μόνος δεύτερᾳ τάξει, καὶ ὁ ἐκατόν ἢ ἡ ἐκατοντάς ὀνομάζεται μόνος τρίτης τάξεως.

σημ. β'. Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ χίλια συνήθως λεγόνται γενικῶς ἀριθμοὶ ἀπλῶν μονάδων.

β. Ἄλλοι ἀριθμοὶ μεγαλύτεροι τοῦ χίλια λέγονται κατὰ σειρὰν οὕτω, χίλια ἐν, χίλια δύο, χίλια τρία, . . . χίλια ἑννεακόσια ἑννεήκοντα ἑννέα,

δύο χιλιάδες, δύο χιλιάδες

τρεῖς χιλιάδες, τρεῖς χιλιάδες

τέσσαρες χιλιάδες,
πέντε χιλιάδες,
ἑξ χιλιάδες,
ἑπτὰ χιλιάδες,

ἐν, δύο, τρία, . . . ἑννεακόσια ἑννεήκοντα ἑννέα.
ἐννεακόσια ἑννεήκοντα
ἑννέα χιλιάδες.

χίλια χιλιάδες ἢ μονολεξεῖ ἑκατομμύριον ἢ καὶ μελιόνιον (*).

Τούτων τῶν ἀριθμῶν οἱ μὲν ἀριστεροί, χίλια, δύο χιλιάδες, τρεῖς χιλιάδες, . . . ἑννεακόσια ἑννεήκοντα ἑννέα χιλιάδες, ὀνομάζονται ἀριθμοὶ χιλιάδων, διότι μόνος αὐτῶν εἶναι ἡ χιλιάς, καθὼς τῶν μικροτέρων τοῦ χίλια μόνος εἶναι ἡ ἀρχικὴ ἦτοι ἡ τῆς πρώτης τάξεως· ὅλοι δὲ οἱ ἄλλοι εἶναι σύνθετοι ἐκ τινος ἀριθμοῦ χιλιάδων καὶ ἐξ ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ χίλια, ἦτοι ἀριθμοῦ ἀπλῶν μονάδων, οἷον πεντακόσια τριάκοντα ἑξ χιλιάδες ἑπτακόσια ὀγδοήκοντα δύο. Τὸ δὲ ἑκατομμύριον θεωρεῖται κατὰ συνθήκην ὡς ἐν, ὡς μόνος.

Καὶ οἱ μὲν χίλια, δύο χιλιάδες, . . . ἑννέα χιλιάδες εἶναι ἀριθμοὶ μονάδων χιλιάδος, καὶ ἡ χιλιάς μόνος τετάρτης τάξεως· οἱ δὲ δέκα χιλιάδες, εἴκοσι χι-

(*) Περὶ τῶν ὀνομάτων τούτων ἰδὲ τὴν Θεωρ. Ἀριθμ. ἐν Κεφ. Α'.

λιάδες . . . ἑννεήκοντα χιλιάδες εἶναι ἀριθμοὶ δεκάδων χιλιάδος, καὶ ἡ δεκάς χιλιάδος, Ἑλληνιστὶ λεγομένη μυριάς, ὀνομάζεται μονάς πέμπτης τάξεως· οἱ δὲ ἑκατὸν χιλιάδες, διακόσια χιλιάδες . . . ἑνεακόσiai χιλιάδες εἶναι ἀριθμοὶ ἑκατοντάδων χιλιάδος, καὶ ἡ ἑκατοντάς χιλιάδος μονάς ἑκτης τάξεως· οἱ δὲ λοιποὶ ἀριθμοὶ χιλιάδων εἶναι σύνθετοι ἐκ τούτων τῶν ἀριθμῶν, οἷον, πεντακόσια τριάκοντα ὀκτώ χιλιάδες.

6. Ἄλλοι ἀριθμοὶ μεγαλύτεροι τοῦ ἑκατομμυρίου ὀνομάζονται κατὰ σειράν οὕτως, ἑν ἑκατομμύριον ἑν, ἑν ἑκατομμύριον δύο, ἑν ἑκατομμύριον τρία . . . ἑν ἑκατομμύριον ἑνεακόσiai ἑννεήκοντα ἑνέα χιλιάδες ἑνεακόσiai ἑννεήκοντα ἑνέα.

δύο ἑκατομμύρια, δύο ἑκατομμύρια

ἑν, δύο, τρία, . . . ἑνεακόσiai ἑννεήκοντα ἑνέα χιλιάδες ἑνεακόσiai ἑννεήκοντα ἑνέα.

τρία ἑκατομμύρια
τέσσερα ἑκατομμύρια
πέντε ἑκατομμύρια

ἑνεακόσiai ἑννεήκοντα
ἑνέα ἑκατομμύρια.

χίλια ἑκατομμύρια ἡ μονολεξεὶ διλιόνιον, ὅστις θεωρεῖται κατὰ συνθήκην ὡς ἑν, ὡς ἑνός.

Τούτων τῶν ἀριθμῶν οἱ ἀριστεροί, ἑν ἑκατομμύριον, δύο ἑκατομμύρια . . . ἑνεακόσiai ἑννεήκοντα ἑνέα ἑκατομμύρια λέγονται ἀριθμοὶ ἑκατομμυρίων, διότι μονάς αὐτῶν εἶναι τὸ ἑκατομμύριον, καθὼς τῶν προηγουμένων μονάς εἶναι ἡ χιλιάς. Καὶ οἱ μὲν ἑν ἑκατομμύριον, δύο ἑκατομμύρια . . . ἑνέα ἑκατομμύρια εἶναι ἀριθμοὶ μονάδων ἑκατομμυρίου, οἱ δέκα εἴκοσι . . . ἑννεήκοντα ἑκατομμύρια εἶναι ἀριθμοὶ δεκάδων ἑκατομμυρίου, οἱ δὲ ἑκατὸν διακόσια . . . ἑνεακόσiai ἑκατομμύρια εἶναι ἀριθμοὶ ἑκατοντάδων ἑκατομμυρίου· οἱ δὲ λοιποὶ εἶναι σύνθετοι ἐκ τούτων. Καὶ ἡ μὲν μονάς ἑκατομμυρίου εἶναι μονάς ἐβδόμης τάξεως, ἡ δὲ δεκάς ἑκατομμυρίου μονάς ὀγδόης τάξεως, ἡ δὲ ἑκατοντάς ἑκατομμυρίου μονάς ἑνάτης τάξεως. Ὅλοι δὲ οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ εἶναι σύνθετοι ἐξ ἀριθμοῦ τινος μικροτέρου τοῦ ἑκατομμυρίου, ἥτοι ἀριθμοῦ ἀπλῶν μονάδων, ἡ ἀριθμοῦ χιλιάδων, ἡ ἀριθμοῦ χιλιάδων καὶ ἀπλῶν μονάδων, οἷον διακόσια τριάκοντα ἑπτὰ ἑκατομμύρια πεντακόσiai ἑννεήκοντα χιλιάδες ἑκατὸν εἴκοσιν ὀκτώ.

Ἐκ δὲ τῶν εἰρημένων νοεῖται εὐκόλως καὶ πῶς ὀνομάζονται κατὰ σειράν οἱ

ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ διλιονίου ἕως εἰς τὸν χίλια διλιόνια, ἕστις λέγεται τριλιόνιον, κτλ.

Σημ. Ἡ μονάς, ἡ χιλιάς, τὸ ἑκατομμύριον, τὸ διλιόνιον κτλ. ὀνομάζονται πρωτεύουσαι μονάδες, ἡ δὲ μονάς πάλιν, ἡ δεκάς, καὶ ἡ ἑκατοντάς καὶ τῶν ἀπλῶν μονάδων καὶ τῶν χιλιάδων κτλ. λέγονται δευτερεύουσαι μονάδες. Καὶ ἑκάστης μὲν πρωτεύουσας μονάδος οἱ ἀριθμοὶ εἰναι ἐννεακόντες ἐννεήκοντα ἐννέα καὶ ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὀνόματα ἐν, δύο, τρία, κτλ. μέχρι τοῦ ἐννεακόντος ἐννεήκοντα ἐννέα. Ἐκάστης δὲ δευτερεύουσας μονάδος οἱ ἀριθμοὶ εἰναι ἐννέα καὶ ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὀνόματα ἐν, δύο, τρία, . . . ἐννέα, συνωδευμένα ὑπὸ τῆς λέξεως μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες, ἡ ἔχοντα, ὅταν μὴ ᾖναι δεκάδες, τὴν καταλήξιν κούτα, ὅταν δὲ ᾖναι ἑκατοντάδες τὴν καταλήξιν κούσια. Εἶναι δὲ ὠφελιμώτατον νὰ μὴ τις καλᾷ τὰ ὀνόματα τῶν μικροτέρων τοῦ χίλια ἀριθμῶν, διότι αὐτὰ συνωδευμένα μὲ τὰ ὀνόματα τῶν πρωτεύουσων μονάδων ἀποτελεῖσι τὰ ὀνόματα ὅλων τῶν ἀριθμῶν. Π. χ. ὁ ἐβδόμηκοντα πέντε ἑκατομμύρια τετρακόσια τριακοντα ὀκτὼ χιλιάδες πεντήκοντα ἑπτὰ μονάδες ἔχει τὸν ἐβδόμηκοντα πέντε, τὸν τετρακόσια τριακοντα ὀκτὼ καὶ τὸν πεντήκοντα ἑπτὰ, ἀλλ' ὁ μὲν εἶναι ἑκατομμύρια, ὁ δὲ χιλιάδες, ὁ δὲ μονάδες.

Περὶ γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.

7. Οἱ ἀριθμοὶ σχεδὸν πάντοτε γράφονται διὰ τινων σημείων, τὰ ὁποῖα κοινῶς ὀνομάζονται ἀραβικοὶ χαρακτῆρες ἢ ἀραβικὰ ψηφία (*). Τὰ ψηφία ταῦτα εἶναι 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, σημαίνουσι δὲ κατὰ σειρὰν ὅτι σημαίνουσιν αἱ λέξεις τίποτε, ἐν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα· ὀνομάζονται δὲ τὸ μὲν 0 μηδενικὸν καὶ ἀσήμαντον ψηφίον, τὰ δὲ 1, 2, . . . 9 σημαντικὰ ψηφία. Κείμενα δὲ ταῦτα ἐν κατόπιν τοῦ ἄλλου παριστάνουν μονάδας διαφόρων τάξεων, ἤγουν ἐάν μὲν ᾖναι εἰς τὴν δευτέραν θέσιν πρὸς ἀριστερά, παριστάνουν μονάδας δευτέρας τάξεως ἥτοι δεκάδας, ἐάν δὲ ᾖναι εἰς τὴν τρίτην, μονάδας τρίτης τάξεως ἥτοι ἑκατοντάδας κτλ.

Οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν κατὰ σειρὰν ἀπὸ τῆς μονάδος ἕως εἰς τὸν ἐννεακόντα ἐννεήκοντα ἐννέα γράφονται οὕτως,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19			
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29			
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39			
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49			
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59			
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69			
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79			
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89			
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99			
100	101	102	...	109	110	111	...	120	...	130	...	199
200	201	202	...	209	210	211	...	220	...	230	...	299
300	301	302	...	309	310	311	...	320	...	330	...	399
400	401	402	.	.	.	.	.	.	.	.	.	499
500	501	502	.	.	.	.	.	.	.	.	.	599
600	601	602	.	.	.	.	.	.	.	.	.	699
700	701	702	.	.	.	.	.	.	.	.	.	799

(*) Περὶ τοῦ ὀνόματος ἀραβικὰ ἰδὲ τὴν Θεωρητ. Ἀριθ. ἐν Κεφ. Α'.

800	801	802	.	.	.	.	.	.	.	.	.	899
900	901	902	.	.	.	.	.	.	.	.	.	999

Τούτων δὲ οἱ μὲν ἕως εἰς τὸν ἑννέα, ἦτοι οἱ ἀριθμοὶ τῶν μονάδων εἶναι γραμμένοι μὲ ἓν ψηφίον, καὶ ὀνομάζονται μονοψήφιοι. Οἱ δὲ ἀπὸ τοῦ δέκα ἕως εἰς τὸν ἑννενηήκοντα ἑννέα εἶναι γραμμένοι μὲ δύο ψηφία, τῶν ὁποίων τὸ δεξιὸν παριστάνει μονάδας καὶ τὸ ἀριστερὸν ἦτοι τὸ εἰς τὴν δευτέραν θέσιν δεκάδας, ὀνομάζονται δὲ διψήφιοι. Καὶ οἱ μὲν εἰς τὴν ἀριστερὰν στήλην ἀπὸ τοῦ 10 ἕως εἰς τὸν 90 παριστάνουσι τοὺς ἀριθμοὺς τῶν δεκάδων, διότι εἰς μὲν τὴν δευτέραν θέσιν εἶναι σημαντικὸν ψηφίον, εἰς δὲ τὴν πρώτην θέσιν εἶναι 0· οἱ δὲ δεξιὰ τούτων παριστάνουσιν ἀριθμοὺς συνθέτους ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων. Οἱ ἀπὸ τοῦ ἑκατὸν ἕως εἰς τὸν ἑννεακόσια ἑννεήκοντα ἑννέα εἶναι γραμμένοι μὲ τρία ψηφία, τῶν ὁποίων τὸ ἀριστερὸν ἦτοι τὸ εἰς τὴν τρίτην θέσιν παριστάνει ἑκατοντάδας, τὸ μεσαῖον δεκάδας καὶ τὸ δεξιὸν μονάδας, ὀνομάζονται δὲ τριψήφιοι. Καὶ εἰς μὲν τὴν ἀριστερὰν στήλην ἀπὸ τοῦ 100 μέχρι τοῦ 900 σημαίνουν ἀριθμοὺς ἑκατοντάδων, διότι τὰ 1, 2, . . . 9 εἶναι εἰς τὴν τρίτην θέσιν, εἰς δὲ τὴν θέσιν τῶν δεκάδων καὶ μονάδων εἶναι 0· οἱ δὲ δεξιὰ τούτων σημαίνουν ἀριθμοὺς συνθέτους ἢ ἐξ ἑκατοντάδων καὶ μονάδων, ἂν ᾖναι 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων, ἢ ἐξ ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων, ἂν ᾖναι 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων, ἢ ἐξ ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ μονάδων, ἂν ᾖναι καὶ τὰ τρία ψηφία σημαντικά.

Σημ. Τὰ μὲν ψηφία σημαίνουν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, ἢ δὲ θέσις αὐτῶν τὴν τάξιν τῶν μονάδων. Π. χ. τὸ 5, ὅπου καὶ ἂν εὕρηθῃ, σημαίνει πεντε, ἀλλ' εἰς τὴν δευτέραν θέσιν ἂν σημαίνει δεκάδας πεντε, εἰς τὴν τρίτην ἑκατοντάδας κτλ.

8. Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος σημαίνουν χιλιάδας, ἐὰν δεξιὰ τῶν ᾖναι γραμμένα ἢ 000, ὡς 1 000, 2 000, 3 000, ... 9 000, 10 000, 11 000, ... 99 000, 100 000, 101 000 999 000, ἢ τρία ὅποιαδήποτε ψηφία, τὰ ὅποια παριστάνουν ἀριθμὸν ἀπλῶν μονάδων, ὡς 4 580, 38 003, 530 738.

Οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ τοῦ πίνακος παριστάνουσιν ἑκατομμύρια, ἐὰν ᾖναι δεξιὰ τῶν γραμμένα 00 ψηφία. Καὶ ἂν μὲν τὰ 00 δεξιὰ εἶναι μηδενικά, ὡς 6 000000, 12 000000, 374 000000, τότε εἶναι ἀριθμοὶ μόνον ἑκατομμυρίων· ἂν δὲ ᾖναι σημαντικά ἢ ὅλα ἢ τινὰ, τὰ τρία δεξιὰ παριστάνουν ἀριθμὸν μονάδων, τὰ ἀριστερὰ τούτων τρία ἀριθμὸν χιλιάδων, καὶ τὰ ἔτι ἀριστερώτερα, ἢ ἓν εἶναι ἢ δύο ἢ τρία, παριστάνουσιν ἑκατομμύρια, ὡς 5 308 290, 78 046 093.

Ἐὰν δὲ ᾖναι δεξιὰ τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν ἑννέα ψηφία, παριστάνουσιν αὐτοὶ διλινία κτλ.

Ἵστε βλέπετε τις ὅτι οἱ αὐτοὶ προγραμμένοι μικρότεροι τοῦ χίλια ἀριθμοὶ σημαίνουν καὶ χιλιάδας καὶ ἑκατομμύρια, ἐὰν μόνον ᾖναι γραμμένοι εἰς τὴν θέσιν τὴν ὁποίαν ἤδη εἴπομεν.

9. Μετὰ ταῦτα εἶναι εὐκόλον καὶ νὰ γράφῃ τις ἀπαγγελλόμενον ἀριθμὸν ὅ-

ποιονδήποτε καὶ ν' ἀπαγγέλλῃ γραμμένον. Ἀς γραφῇ π. χ. ὁ τριάκοντα πέντε χιλιάδες τετρακόσια ἐξήκοντα δύο. Ὁ τριάκοντα πέντε κατὰ τὸν ἀνωτέρω πίνακα γράφεται οὕτω 35, ἀλλὰ διὰ νὰ ᾔῃαι χιλιάδες, πρέπει νὰ ἔχῃ τρία ψήφια δεξιὰ τοῦ ὁ τετρακόσια ἐξήκοντα δύο ὡσαύτως 462· ἂν λοιπὸν οὗτος γραφῇ δεξιὰ τοῦ 35, θέλει εἶσθαι γραμμένος ὁ ἀνωτέρω ἀπαγγελλόμενος ἀριθμὸς οὕτω 35462. Ἀς γραφῇ καὶ ὁ τριακόσιαι εἰκοσι χιλιάδες ἐβδόμηκοντα ὀκτώ. Ὁ τριακόσιαι εἰκοσι γράφεται οὕτω 320, ἀλλὰ διὰ νὰ ᾔῃαι χιλιάδες, πρέπει νὰ ἔχῃ δεξιὰ τοῦ τρία ψήφια· ἐπειδὴ δὲ ὁ ἐβδόμηκοντα ὀκτὼ γράφεται οὕτως 78 μὲ δύο ψήφια, δεξιὰ δὲ τοῦ 320 πρέπει νὰ ᾔῃαι τρία, γράφεται ἀριστερὰ τοῦ 78 ἂν 0, καὶ ὁ 078 γράφεται δεξιὰ τοῦ 320· ὥστε ὁ ἀπαγγελλόμενος ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι γραμμένος οὕτως 320 078. Ἐπομένως ὁ πεντακόσιαι χιλιάδες ἐννέα γράφεται οὕτω 500 000, ὁ ἐπτά χιλιάδες τριακόσια οὕτω 7,300, κτλ.

Γενικὸς κανὼν. α'. Διὰ νὰ γραφῇ ἀπαγγελλόμενος ἀριθμὸς, πρῶτον γράφεται ὁ τῆς ἀνωτάτης πρωτεύουσας μονάδος ἀριθμὸς, ὅστις εἰμπορεῖ νὰ ᾔῃαι μονοψήφιος ἢ διψήφιος, ἢ τριψήφιος· ἔπειτα δεξιὰ τούτου γράφεται ὁ τῆς ἀμέσως κατωτέρας πρωτεύουσας μονάδος ἀριθμὸς, ἂν ὑπάρχῃ, καὶ ἂν ᾔῃαι τριψήφιος· ἂν ὅμως δὲν ὑπάρχῃ, γράφονται τρία μηδενικά, ἢ ἂν ὑπάρχῃ μὲν, ἀλλ' ᾔῃαι μονοψήφιος ἢ διψήφιος, γράφονται πρῶτον 00 ἢ ἂν 0 καὶ ἔπειτα αὐτός· δεξιὰ τούτου πάλιν γράφεται ὁ τῆς ἀμέσως κατωτέρας πρωτεύουσας μονάδος ἀριθμὸς ὡς ἤδη εἵπομεν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀπλῶν μονάδων.

β'. Διὰ ν' ἀπαγγελλῇ δὲ γραμμένος ἀριθμὸς, ἀφοῦ ἐκ δεξιῶν πρὸς ἀριστερά χωρισθῇ εἰς τμήματα ἐκ τριῶν ψηφίων καθέν, καὶ προσδιορισθῇ οὕτω τίνος πρωτεύουσας μονάδος ἀριθμὸν περικλύει τὸ ἀριστερὸν τμήμα, τὸ ὅποιον εἰμπορεῖ νὰ ᾔῃαι μονοψήφιος ἢ διψήφιος ἢ τριψήφιος, ἀπαγγέλλεται πρῶτον τοῦτο ὡς ἂν ᾔῃαν ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ χίλια, εἰς δὲ τὸ τέλος λέγεται ἡ πρωτεύουσα μονάς τοῦ· ἔπειτ' ἀπαγγέλλεται ὡσαύτως τὸ ἀμέσως πρὸς δεξιὰν τοῦ τμήματος, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι τοῦ δεξιοῦ τμήματος τῶν ἀπλῶν μονάδων.

Κατὰ τοῦτον τὸν κανὼνα ὁ 47360403 ἀπαγγέλλεται τεσσαράκοντα ἐπτά ἑκατομμύρια πεντακόσιαι ἐξήκοντα χιλιάδες τετρακόσια τρία· ὁ 9038006 ἀπαγγέλλεται ἐννέα ἑκατομμύρια τριάκοντα ὀκτὼ χιλιάδες ἑξ' ὁ 370000600 εἶναι τριακόσια ἐβδόμηκοντα ἑκατομμύρια ἑξακόσια.

Εἶναι καλὸν νὰ γίνηται πολὺ γύμνασις μάλιστα εἰς τὸ νὰ γράφηται ἀπαγγελλόμενος ἀριθμὸς.

Περὶ κλασματικῶν καὶ μικτῶν ἀριθμῶν.

10. Ἐάν τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν λάθωσι κατάληξιν τιν, τινὰ δὲ στον, γίνονται (ἐκ τοῦ δύο δευτέρου ἢ ἤμισυ) ἐκ τοῦ τρία τρίτον, ἐκ τοῦ τέσσαρα τέταρτον, καὶ ἐφεξῆς πέμπτον, ἕκτον, ἐβδόμον, ὀγδοον (") ἑννατον, δέκατον, ἐν-

(") Τὸ δευτέρον, τὸ ἐβδόμον καὶ τὸ ὀγδοον ἔχουν καταληξίν ἄλλην.

δέκατον, δωδέκατον, δέκατον τρίτον, δέκατον τέταρτον . . . εικοστόν, εικοστόν, πρώτον . . . τριακοστόν . . . τεσσαρακοστόν, τεσσαρακοστόν πρώτον . . . πενήτηκοστόν . . . ἑξηκοστόν . . . ἑβδομηκοστόν . . . ὀγδοηκοστόν . . . ἑννεηκοστόν . . . ἑκατοστόν . . . διακοσιοστόν . . . τριακοσιοστόν . . . ἑνεακοσιοστόν . . . χιλιοστόν κτλ. Ταῦτα ὅμως δὲν σημαίνουν πλεον τοὺς ἀριθμοὺς τοῦς ὁποίους εἶπομεν ἄνωτέρω, ἀλλὰ σημαίνουν μέρος ἢ πρᾶγμα τοῦ ὁποιοῦδήποτε, θεωρουμένου ὡς μονάδος ἢ μὴ, ἢ ἀριθμοῦ. Ἐάν πρᾶγμα τι μερισθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ ἐν τῶν δύο λέγεται ἡμισυ αὐτοῦ· ἐάν μερισθῇ εἰς τρία ἴσα μέρη, τὸ ἐν τῶν τριῶν λέγεται τρίτον μέρος· αὐτοῦ· ἐάν μερισθῇ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, τὸ ἐν τῶν τεσσάρων λέγεται τέταρτον αὐτοῦ, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἡ μονάς εἶναι ἡμισυ τοῦ δύο, τρίτον τοῦ τρία, τέταρτον τοῦ τέσσαρα, πέμπτον τοῦ πέντε . . . δέκατον τοῦ δέκα . . . εικοστόν τοῦ εἰκοσι . . . ἑκατοστόν τοῦ ἑκατόν . . . χιλιοστόν τοῦ χίλια κτλ.

Ἀλλὰ καὶ μονάδα τινα, οἶον, τὸν πῆχυν ἐάν μερίσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ ἐν τῶν δύο εἶναι ἡμισυ τοῦ πήχεως· ἐάν τὸν μερίσωμεν εἰς τρία ἴσα μέρη, τὸ ἐν τῶν τριῶν εἶναι τρίτον τοῦ πήχεως κτλ.

Δύο ἡμίσεα τοῦ πήχεως ἰσοδυναμοῦν μὲ τὸν πῆχυν, τρία τρίτα τοῦ πήχεως ἰσοδυναμοῦν μὲ τὸν πῆχυν, ὡσαύτως τέσσαρα τέταρτα, πέντε πέμπτα . . . δέκα δέκατα κτλ.

14. Τὸ ἡμισυ μονάδος τινὸς, τὸ τρίτον αὐτῆς, τὸ τέταρτον, τὸ πέμπτον κτλ. θεωρεῖται καὶ αὐτὸ ὡς μονάς, ἥτις ὀνομάζεται κλασματικὴ μονάς. Εἶναι φανερόν ὅτι κλασματικαὶ μονάδες εἶναι πολλόταται, ὅσοι εἶναι οἱ ἀριθμοί.

Τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν τοιούτων μονάδων εἶναι αὐτὰ τὰ προηγούμενα, οἶον δύο ἡμίσεα, ἢ δύο δεύτερα, τρία δεύτερα κτλ.—δύο τρίτα, τρία τρίτα, τέσσαρα τρίτα κτλ.—δύο τέταρτα, τρία τέταρτα, τέσσαρα τέταρτα, πέντε τέταρτα κτλ. Τὸ δύο, τὸ τρία, τὸ τέσσαρα κτλ. εἶναι ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ δεύτερον τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον κτλ. εἶναι ὄνομα τῆς μονάδος.

Οἱ ἀριθμοὶ τῶν κλασματικῶν μονάδων λέγονται κλασματικοὶ ἀριθμοί, οἱ δὲ προηγούμενοι πρὸς ἀντιδιαστολὴν λέγονται ἀκέραιοι. Ὁ ὀκτώ ὀκτᾶδες εἶναι ἀκέραιος, ὁ δὲ ὀκτὼ δέκατα τῆς ὀκτᾶς εἶναι κλασματικός. Καὶ ὁ μὲν ὀκτὼ ἦτοι ὁ ἀριθμὸς λέγεται ἀριθμητῆς (") τοῦ κλασματικοῦ, ὁ δὲ δέκατα τῆς ὀκτᾶς ἦτοι ἡ κλασματικὴ μονάς λέγεται παρονομαστής τοῦ κλασματικοῦ, οἱ δύο δὲ κοινῶς λέγονται ὅροι τοῦ κλασματικοῦ.

Κλασματικὴ τις μονάς γράφεται ἢ ἂν γραφθῇ ὑπὸ τὴν 1 γραμμὴ καὶ ὑποκάτω ὁ ἀρμόδιος ἀριθμός, οἶον, τὸ ἡμισυ, τὸ τρίτον, κτλ. κατὰ σειρὰν γράφονται οὕτω, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, κτλ. ἢ ἂν γραφθῇ μόνον τὸ 2, τὸ 3, μὲ τὸ ὄν ἐπάνω του, οἶον 2ον, 3ον, 4ον, 5ον, 6ον, κτλ. Οἱ δὲ κλασμα-

(*) Περὶ τοῦ κλασματικοῦ, ἀριθμητῆς καὶ παρονομαστής ἰδὲ Θεωρ. Αριθμητικὴν ἐν κεφ. Α'.

τικοί αριθμοὶ γράφονται, ἐὰν γραφθῇ ὑπὸ τὴν ἀριθμητὴν ὁ παρονομαστής καὶ χωρισθῶσι διὰ γραμμῆς, οἷον $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{8}$, κτλ., τὰ ὅποια σημαίνουν δύο πέμπτα, τρία πέμπτα κτλ.

13. Ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, οἷον $\frac{5}{6}$, λέγεται μερικώτερον κλάσμα. Τὰ $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{8}$ εἶναι κλάσματα.

14. Μικτὸς δὲ ἀριθμὸς λέγεται ὁ σύνθετος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος, οἷον $7\frac{3}{4}$, $20\frac{7}{8}$.

15. Οἱ ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι ἴσαι ἢ καὶ ὅμοιαι μόνον, καὶ διὰ τοῦτο ἔχουν τὸ αὐτὸ ὄνομα, λέγονται ὁμώνυμοι, οἷον 7 πῆγεις καὶ 12 πῆγεις—6 δεκάδες καὶ 9 δεκάδες—16 βιβλία, καὶ 10 βιβλία— $\frac{3}{4}$ τοῦ πῆγους καὶ $\frac{7}{8}$ τοῦ πῆγους— $\frac{9}{10}$ τῆς δραχμῆς καὶ $\frac{9}{10}$ τῆς δραχμῆς—4 δεκάδες καὶ 7 δεκάδες—8 ἑκατοντάδες καὶ 4 ἑκατοντάδες. Ἐκεῖνοι δὲ τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι ἄνισοι, λέγονται ἑτερόνυμοι ἀριθμοὶ, οἷον 8 πῆγεις καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ πῆγους—8 δραχμ. καὶ 9 λεπτὰ $\frac{8}{7}$ καὶ $\frac{3}{6}$ — $\frac{9}{12}$ τοῦ πῆγους καὶ $\frac{8}{10}$ τοῦ πῆγους—8 δεκάδες καὶ 5 ἑκατοντάδες κτλ.

Περίληψις τῶν ἐν τῷ πρώτῳ κεφαλαίῳ δι' ἐρωτήσεων.

Πόσων εἰδῶν μονάδες εἶναι; Ποῖαι εἶναι αἱ κατὰ κοινὴν συνθήκην προσδιορισμέναι; Ὁ δίκαι, ὁ ἑκατὸν, ὁ χίλια κτλ. ὅποια μονάδες εἶναι; Τὰ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον κτλ. ὅποια μονάδες εἶναι; Ποῖαι εἶναι αἱ πρωτεύουσαι μονάδες καὶ ποῖαι αἱ δευτερεύουσαι; Τί διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων; Ποῖα μονάδα ὀνομάζεται ἀρχικὴ, καὶ πόσαι εἶναι ἀρχικαὶ μονάδες; Τί διαφέρουν αἱ ἄλλαι μονάδες ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν; (Ὅτι ἡ ἀρχικὴ μονάδα νοεῖται ἀπολύτως, ἀσχετῶς, αἱ δὲ ἄλλαι σχετικῶς πρὸς τὴν ἀρχικὴν). Πόσαι μονάδες τάξιώς τινος ἀποτελοῦν μιαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως;—Πόσαι μονάδες πρωτεύουσαι ἀποτελοῦν μιαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως; Τί εἶναι ἀριθμοί; Τί εἶναι πολλὰ ἢ πλῆθος καὶ τί διαφέρει τοῦ ἀριθμοῦ; Ἡ ἀρχικὴ μονάδα εἶναι ἀριθμός; Τί εἶναι συγκριμένος καὶ τί ἀφηρημένος ἀριθμός; Τί εἶναι ἀκεραῖος, τί εἶναι κλασματικὸς καὶ τί μικτὸς ἀριθμός; Τί διαφέρουν ἀπ' ἀλλήλων; Τί εἶναι ἄπλητος ἀκεραῖος ἀριθμός καὶ τί σύνθετος; Ποῖοι εἶναι ἄπλοοι; Τί σημαίνουν αἱ καταλήξεις κοντα καὶ κόσια; Ποῖοι εἶναι ἀριθμοὶ μονάδων, ἀριθμοὶ δεκάδων, ἀριθμοὶ ἑκατοντάδων, καὶ πόσοι εἶναι; Ποῖοι εἶναι ἀριθμοὶ ἁπλῶν μονάδων, ἀριθμοὶ χιλιάδων, ἀριθμοὶ ἑκατομμυρίων κτλ., καὶ πόσοι εἶναι; Πόσαι τάξεις μονάδων εἶναι εἰς τοὺς ἀριθμούς καὶ τῶν ἁπλῶν μονάδων, καὶ τῶν χιλιάδων, καὶ τῶν ἑκατομμυρίων κτλ.; Ποῖοι εἶναι ὁμώνυμοι καὶ ποῖοι εἶναι ἑτερόνυμοι ἀριθμοί; Τί σημαίνουν τὰ σημειωτικὰ ψήφια; Ποῦθεν διακρίνομεν ὅτι αὐτὰ σημαίνουν μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας ἢ ἁπλῶν μονάδων, ἢ χιλιάδων, ἢ ἑκατομμυρίων κτλ.; Τί χρησιμεύει τὸ 0; Ποῖοι εἶναι μονοψήφιοι ἀριθμοί, ποῖοι εἶναι διψήφιοι, κτλ.; Ποίους ἡξυῶν τις καλῶς νὰ γράφῃ δύναται εἴπειτα καὶ ὅλους τοὺς ἄλλους νὰ γράφῃ ὀρθῶς; Γράψε ὅλους τοὺς διψήφιους ἀπαγγελλομένους ἀτάκτως; Γράψε ὅλους τοὺς τριψήφιους ἀτάκτως ἀπαγγελλομένους; Γράψε ὅποιονδήποτε ἀπαγγελλόμενον ἀριθμόν; Πῶς ἀπαγγέλλεται γραμμένος διὰ ψηφίων ἀριθμός ὅποιοςδήποτε; Πῶς γράφεται κλασματικὴ μονάς καὶ πῶς κλασματικὸς ἀριθμός; Τί σημαίνει ὁ ἀριθμητὴς καὶ τί ὁ παρονομαστής; Πῶς ἀπαγγέλλεται ἑκατόντος; Πῶς ὀνομάζονται κοινῶς οἱ δύο; Τί εἶναι κλάσμα; Μὲ πόσας κλασματικὰς μονάδας ὁποῖοςδήποτε ἰσοδυναμεῖ ἡ ἀρχικὴ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΠΕΡΙ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Περὶ προσθέσεως ἀκεραίων.

16. Πρόσθεσις ἀριθμοῦ εἰς ἄλλον ἀριθμὸν εἶναι πράξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐνό-
νται αἱ μονάδες τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ μετὰ τὰς τοῦ δευτέρου εἰς ἓνα τρίτον ἀ-
ριθμὸν ὅστις θέλει ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ὁ εἰς καὶ ὁ ἄλλος χωριστὰ,
καὶ ὅστις ὀνομάζεται ἄθροισμα ἢ κεφάλαιον τῶν δύο πρώτων.

Οἱ εἰς πρόσθεσιν ἀριθμοὶ πρέπει νὰ ᾖναι πάντοτε ὁμώνυμοι, καὶ τὸ ἄθροισμά
των δὲν εἶναι μετὰ αὐτοὺς ὁμώνυμον.

17. Μονοψήφιος ἀριθμὸς προσθέτεται εἰς ἄλλον μονοψήφιον ἢ καὶ πολυψή-
φιον, ἐὰν προστεθῶσιν ἀπὸ μίαν αἱ μονάδες τοῦ πρώτου εἰς τὸν δευτέρον καὶ
ἀπ'αγγελθῶσι κατὰ σειρὰν τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν· ὁ εἰς τὸ τέλος προκύπτων
ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων.

Ἀλλὰ διὰ νὰ μάθωσιν οἱ ἀσχάριοι νὰ εὐρίσκωσιν εὐθὺς τὸ ἄθροισμα, τίθεται
ὁ ἀκόλουθος πίναξ ὀνομαζόμενος.

Προπαίδεια τῆς προσθέσεως.

2 καὶ 1	3 καὶ 1	5 καὶ 1	7 καὶ 1	9 καὶ 1
2 — 2	4 — 2	6 — 2	8 — 2	10 — 2
2 — 3	5 — 3	7 — 3	9 — 3	11 — 3
2 — 4	6 — 4	8 — 4	10 — 4	12 — 4
2 — 5	7 — 5	9 — 5	11 — 5	13 — 5
2 — 6	8 — 6	10 — 6	12 — 6	14 — 6
2 — 7	9 — 7	11 — 7	13 — 7	15 — 7
2 — 8	10 — 8	12 — 8	14 — 8	16 — 8
2 — 9	11 — 9	13 — 9	15 — 9	17 — 9
3 καὶ 1	4 καὶ 1	6 καὶ 1	8 καὶ 1	10 καὶ 1
3 — 2	5 — 2	7 — 2	9 — 2	11 — 2
3 — 3	6 — 3	8 — 3	10 — 3	12 — 3
3 — 4	7 — 4	9 — 4	11 — 4	13 — 4
3 — 5	8 — 5	10 — 5	12 — 5	14 — 5
3 — 6	9 — 6	11 — 6	13 — 6	15 — 6
3 — 7	10 — 7	12 — 7	14 — 7	16 — 7
3 — 8	11 — 8	13 — 8	15 — 8	17 — 8
3 — 9	12 — 9	14 — 9	16 — 9	18 — 9

Εἴτε μονάδας εἴτε δε-
κάδας εἴτε ἑκατοντάδας
καὶ παριστάνουν οἱ εἰς πρόσ-
θεσιν ἀριθμοὶ, τὸ κεφά-
λαιόν των θέλει εἶσθαι πάν-
τοτε ὁ εἰς τὸν πίνακα ἀ-
ριθμὸς, ἀλλὰ θέλει εἶσθαι
ὁμώνυμος μετὰ τοὺς εἰς
πρόσθεσιν ἀριθμούς· οἷον 5
μονάδες καὶ 8 μονάδες 13
μονάδες, 5 δεκάδες καὶ 8
δεκάδες 13 δεκάδες, 5 ἑ-
κατοντάδες καὶ 8 ἑκατον-
τάδες 13 ἑκατοντάδ. κλ.

Ἐὰν δὲ ζητῆται τὸ ἄ-
θροισμα πολλῶν μονοψη-
φίων ἀριθμῶν, ᾗτοι ὁ ἀ-
ριθμὸς ὅστις ἔχει τόσας
μονάδας, ὅσας ἔχουσιν οἱ
πολλοὶ ἀριθμοὶ χωριστὰ,

πρέπει νὰ γείνωσι πολλαὶ προσθέσεις μία κατόπιν τῆς ἄλλης. Ἀς εὐρεθῇ τὸ
κεφάλαιον π. χ. τοῦ 6 καὶ 8 καὶ 4 καὶ 5. Πρῶτον λέγομεν 6 καὶ 8 14· ἔπειτα
14 καὶ 4 18, διότι 14 καὶ 4 εἶναι 18 καὶ 4 καὶ 4, ἢ 18 καὶ 8, ἢ 18 τελευ-
ταῖον 18 καὶ 5 23, διότι 18 καὶ 5 εἶναι 23 καὶ 8 καὶ 5, ἢ 23 καὶ 13, ἢ 23

καὶ 10 καὶ 3, ἢ 23. Τὸ ἄθροισμα τοῦ 7 καὶ 5 καὶ 6 καὶ 8 καὶ 3 εἶναι 29. — Τὸ ἄθροισμα τοῦ 9 καὶ 4 καὶ 2 καὶ 5 καὶ 6 καὶ 7 εἶναι 33.

18. Πολυψηφιοὶ δὲ ἀριθμοὶ δύο ἢ περισσότεροι προσθέτονται οὕτως· Γράφεται ὁ εἰς ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῶν νὰ ἦναι εἰς μίαν στήλην, (ἐπομένως καὶ αἱ δεκάδες τῶν θέλουν εἰσθαι εἰς μίαν ἄλλην στήλην, καὶ αἱ ἑκατοντάδες τῶν παρομοίως κτλ.), ὑποκάτω αὐτῶν σύρεται γραμμὴ καὶ ἔπειτα προσθέτονται αἱ μονάδες τῶν· καὶ ἂν μὲν ἦναι τὸ ἄθροισμά των μικρότερον τοῦ 10 γράφεται ὑπὸ τὰς μονάδας, ἐὰν δὲ ἦναι μεγαλύτερον τοῦ 9, τότε ὑπὸ τὰς μονάδας γράφεται μόνον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ἀθροίσματος, αἱ δὲ δεκάδες προσθέτονται εἰς τὰς δεκάδας· τὸ αὐτὸ τοῦτο γίνεται καὶ εἰς τὰς δεκάδας καὶ εἰς τὰς ἑκατοντάδας κτλ.

Ὁ δὲ οὕτως εὐρισκόμενος ἀριθμὸς θέλει εἰσθαι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν εἰς πρόσθεσιν ἀριθμῶν.

Ἄς προστεθῇ 55472 εἰς τὸν 2514. Ἀφοῦ γράψωμεν τὸν 5472 ὑπὸ 2514 ὡς ἤδη εἶπομεν καὶ ἀντικρὺ φαίνεται, λέγομεν 2 καὶ 4 6 μονάδες, καὶ τὰς γράφομεν ὑπὸ τὰς μονάδας· ἔπειτα 7 καὶ 4 8 δεκάδες, καὶ τὰς γράφομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας· ἔπειτα 4 καὶ 5 9 ἑκατοντάδες, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας· τελευταίον 5 καὶ 2 7 χιλιάδες καὶ τὰς γράφομεν ὑπὸ τὰς χιλιάδας. Ὁ δὲ 7986 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν.

		6000	
	3425	500	3210
63059	4539	30	573
5820	4023	8	2015
68879	8978	6538	5798

Ἄς προστεθῇ καὶ ὁ 6598 εἰς τὸν 7969· 8 καὶ 9 17 μονάδες, ἢ μία δεκάς καὶ 7 μονάδες· γράφομεν 7 ὑπὸ τὰς μονάδας, καὶ προσθέτομεν τὴν 1 δεκάδα εἰς τὰς δεκάδας λέγοντες 1 καὶ 9 10 καὶ 6 46 δεκάδες, ἢ 1 ἑκατοντάς καὶ 6 δεκάδες· γράφομεν 6 ὑπὸ τὰς δεκάδας, καὶ προσθέτομεν τὴν 1 ἑκατοντάδα εἰς τὰς ἑκατοντάδας λέγοντες 1 καὶ 5 6 καὶ 9 15 ἑκατοντάδες, ἢ 1 χιλιάς καὶ 5 ἑκατοντάδες· γράφομεν 5 ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας, καὶ προσθέτομεν τὴν 1 χιλιάδα εἰς τὰς χιλιάδας λέγοντες 1 καὶ 6 7 καὶ 7 14 χιλιάδες, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς χιλιάδας. Ὁ δὲ 14567 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν.

Ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 9879, 674, 4798;

Τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων εἶναι 21 μονάδες, ἢ 2 δεκάδες καὶ 1 μονάς γράφεται 1 ὑπὸ τὰς μονάδας, προσθέτονται αἱ 2 δεκάδες εἰς τὰς δεκάδας καὶ γίνεται ἄθροισμα τῶν δεκάδων 25 δεκάδες ἢ 2 ἑκατοντάδες καὶ 5 δεκάδες γράφεται 5 ὑπὸ τὰς δεκάδας, προσθέτονται

9879
674
4798

15351

αί 2 εκατοντάδες εἰς τὰς εκατοντάδας καὶ γίνεται ἄθροισμα τῶν εκατοντᾶδων 23 εκατοντάδες, ἡ 2 χιλιάδες καὶ 3 εκατοντάδες· τελευταῖον γράφεται 3 ὑπὸ τὰς εκατοντάδας, προσθέτονται αἱ 2 χιλιάδες εἰς τὰς χιλιάδας καὶ γίνεται ἄθροισμα τῶν χιλιάδων 15 χιλιάδες, αἱ ὁποῖαι γράφονται ὑπὸ τὰς χιλιάδας. Ὁ δὲ 15351 εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

	60357	9898	
38047	4987	989	78030
6409	97848	788	60380
83640	8459	6978	3800
99879	39876	5689	740
<u>227975</u>	<u>241527</u>	<u>24342</u>	<u>142950</u>

Περὶ ἀφαιρέσεως ἀκεραίων.

19. Ἀφαιρέσεις ἀριθμοῦ ἀπ' ἄλλου ἀριθμοῦ εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἐκβάλλονται τόσαι μονάδες, ὅσας ἔχει ὁ πρῶτος. Ἀφοῦ δὲ γείνη ἡ ἀφαίρεσις, προκύπτει τρίτος ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ὁ μεγαλῆτερος περισσοτέρας τοῦ μικροτέρου, ἢ οὗτος ὀλιγωτέρας τοῦ μεγαλητέρου. Ὁ τρίτος οὗτος ἀριθμὸς λέγεται ὑπόλοιπον ἢ ὑπερρχή ἢ καὶ διαφορά. Ὁ μεγαλῆτερος ἀριθμὸς, ἀπὸ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ ἐκβάλλωνται αἱ μονάδες, λέγεται ἀφαιρετέος, ὁ δὲ ἄλλος, ὅστις δεικνύει πόσαι πρέπει νὰ ἐκβάλλωνται, λέγεται ἀφαιρέτης. (*).

Ὁ ἀφαιρετέος καὶ ὁ ἀφαιρέτης πρέπει νὰ ᾖναι ὁμώνυμοι, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν παρομοίως.

20. Ἀριθμὸς μονοψήφιος ἀφαιρεῖται ἀπ' ἄλλου μονοψηφίου, ἢ καὶ διψηφίου μικροτέρου τοῦ 19, ἔχοντος δὲ ψηφίον μονάδων μικρότερον τοῦ ἀφαιρέτου, ἐὰν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἀφαιρεθῶσιν ἀνὰ μίαν τόσαι μονάδες, ὅσας ἔχει ὁ πρῶτος καὶ ἀπαγγελθῶσι κατὰ σειρὰν οἱ μένοντες ἀριθμοί. Ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ὑπόλοιπον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀριθμῶν.

Ἀλλὰ διὰ νὰ μάθωσιν οἱ ἀρχάριοι νὰ εὐρίσκωσιν εὐθὺς τὴν διαφορὰν, θέτομεν τὸν ἀντικρὺ πίνακα, ὅστις λέγεται προπαίδεια τῆς ἀφαιρέσεως.

Ὅποιαςδὴποτε δὲ τάξεως μονάδας καὶ ἂν παριστάνωσιν ὁ ἀφαιρετέος καὶ ὁ ἀφαιρέτης τοῦ πίνακος, τὸ ὑπόλοιπον θέλει εἶσθαι πάντοτε ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς τοῦ πίνακος, ἀλλὰ ὁμώνυμος μὲ τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἀφαιρέτην, οἷον 7 δεκάδες ἀπὸ 9 δεκάδων 2 δεκάδες κτλ.

Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι τόσον, ὥστε προστιθέμενον εἰς τὸν ἀφαιρέτην ἀποτελεῖ ἄθροισμα ἴσον μὲ τὸν ἀφαιρετέον.

(*) Ἰδὲ Θωρ. Ἀριθμ. ἐν Κεφ. Β'. περὶ τοῦ ἀφαιρετέος καὶ ἀφαιρέτης κτλ. Βεροίας

Προπαιδεύει τῆς Ἀφαιρέσεως.

0 ἀπὸ 0 πλουσιότε ἀριθμοῦ πρὸς ἀφαιρέθη μέ- νει αὐτὸς ὁ ἴδιος ἀριθμὸς, ὡς 0 ἀπὸ 2 2, 0 ἀπὸ 3 3 κτλ.											
1	ἀπὸ	1	0	4	ἀπὸ	4	0	7	ἀπὸ	7	0
1	—	2	1	5	—	5	1	7	—	8	1
1	—	3	2	6	—	6	2	7	—	9	2
1	—	4	3	7	—	7	3	7	—	10	3
1	—	5	4	8	—	8	4	7	—	11	4
1	—	6	5	9	—	9	5	7	—	12	5
1	—	7	6	10	—	10	6	7	—	13	6
1	—	8	7	11	—	11	7	7	—	14	7
1	—	9	8	12	—	12	8	7	—	15	8
1	—	10	9	13	—	13	9	7	—	16	9
2	ἀπὸ	2	0	5	ἀπὸ	5	0	8	ἀπὸ	8	0
2	—	3	1	6	—	6	1	8	—	9	1
2	—	4	2	7	—	7	2	8	—	10	2
2	—	5	3	8	—	8	3	8	—	11	3
2	—	6	4	9	—	9	4	8	—	12	4
2	—	7	5	10	—	10	5	8	—	13	5
2	—	8	6	11	—	11	6	8	—	14	6
2	—	9	7	12	—	12	7	8	—	15	7
2	—	10	8	13	—	13	8	8	—	16	8
2	—	11	9	14	—	14	9	8	—	17	9
3	ἀπὸ	3	0	6	ἀπὸ	6	0	9	ἀπὸ	9	0
3	—	4	1	7	—	7	1	9	—	10	1
3	—	5	2	8	—	8	2	9	—	11	2
3	—	6	3	9	—	9	3	9	—	12	3
3	—	7	4	10	—	10	4	9	—	13	4
3	—	8	5	11	—	11	5	9	—	14	5
3	—	9	6	12	—	12	6	9	—	15	6
3	—	10	7	13	—	13	7	9	—	16	7
3	—	11	8	14	—	14	8	9	—	17	8
3	—	12	9	15	—	15	9	9	—	18	9

ως ἀφαιρούνται αἱ ἑκατοντάδες ὡς αἱ μονάδες καὶ αἱ δεκάδες, καὶ οὕτως ἐφε-
ξῆς ἕως εἰς τὰς ἀριστερὰς μονάδας των. Ὁ οὕτω δ' εὐρισκόμενος ἀριθμὸς εἶναι
ἡ διαφορὰ των δύο πολυψηφίων.

Ἄς ἀφαιρέθῃ δ 7356 ἀπὸ τοῦ 9698.

Ἄφου γραφθῶσιν αἱ ἀριθμοὶ ὡς ἤδη εἶπομεν καὶ ἀντικρὺ φαίνονται, 9698
λέγομεν 6 ἀπὸ 8 2 μονάδες, αἱ ὅποιαι γράφονται ὑπὸ τὰς μονάδας· 7356
ἐπεὶτα 5 ἀπὸ 9 4 δεκάδες, αἱ ὅποιαι γράφονται ὑπὸ τὰς δεκάδας· 2342
ἀκολουθῶς 3 ἀπὸ 6 3 ἑκατοντάδες, αἱ ὅποιαι γράφονται ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας·
τελευταίον 7 ἀπὸ 9 2 χιλιάδες, καὶ γράφονται ὑπὸ τὰς χιλιάδας. Ὁ δὲ 2342
εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

7496	5689	6789	9805
253	3046	4200	304
7243	2643	5589	9501

Ἄς ἀφαιρέθῃ καὶ δ 4658 ἀπὸ τοῦ 8594. Βιβλιοθήκη Βεροῦτος

(ΠΡΑΚΤ. ΑΡΙΘ. ΒΑΦΑ).

Ἐδὼ ἐπειδὴ αἱ 4 μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν 8 τοῦ ἀφαιρετοῦ, αὐξάνονται κατὰ 10 γίνονται 14, 8 δὲ ἀπὸ 14 6 μονάδες, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς μονάδας. Ἐπειτα ἐπειδὴ ἠύξισαμεν τὰς 4 μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ 10, πρέπει ἢ ν' ἀφαιρέσωμεν 5 ἀπὸ 8 δεκάδων, ὀλιγοστεύοντες τὰς 9 κατὰ 1, ἢ ν' ἀφαιρέσωμεν 6 ἀπὸ 9 δεκάδων, αὐξάνοντες τὰς 5 δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ μίαν δεκάδα· οὕτως ἔχομεν ὑπόλοιπον 3 δεκάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας. Ἐπειτα ἐπειδὴ καὶ αἱ 5 ἑκατοντάδες τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν 6 τοῦ ἀφαιρετοῦ, ἀφαιρούμεν 6 ἀπὸ 15, καὶ ἔχομεν ὑπόλοιπον 9 ἑκατοντάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας. Τελευταίον ἀφαιρούμεν ἢ 4 ἀπὸ 7, ἢ 5 ἀπὸ 8, διότι πρότερον ἠύξισαμεν κατὰ 10 τὰς ἑκατοντάδας τοῦ ἀφαιρετέου, ἔχομεν ὑπόλοιπον 3 χιλιάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς χιλιάδας· καὶ ὁ 3936 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

7923	304	47365	5462	60050
3658	258	3876	937	36467
4267	46	43489	4525	23583

ΣΗΜ. Ὅταν ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι 0, τὸ δεξιὸν δι' αὐτοῦ ψηφίον [δὲν αὐξάνη κατὰ 10, τὸ μὲν 0 λογίζεται 10, τὸ δὲ ἀμέσως ἀριστερὸν αὐτοῦ ψηφίον νοεῖται ὀλιγοστευμένον κατὰ 1. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ὅταν αὐξάνη μὲν κατὰ 10 τὸ δεξιὸν τοῦ 0 ψηφίου, ἀλλὰ γίνῃται ἡ ἀφαίρεσις ἀφ' αὐτοῦ αὐξήθη κατὰ 1 τὸ ὑπὸ τοῦ 0 ψηφίου τοῦ ἀφαιρετοῦ. Ἄν δὲ κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ὀλιγοστευώμεν τὸ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ 1, τὸ 0 λογίζεται 9 κτλ. Ἰδὲ τ' ἀνωτέρω παραδείγματα.

22. Παλλοὶ ἀριθμοὶ ἀφαιροῦνται ἀφ' ἐνὸς κατὰ δύο τρόπους, ἢ ἀφαιρεῖται δὴλ. εἰς τῶν πολλῶν ἀπὸ τοῦ ἀφαιρετέου, ἔπειτα ἄλλος ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου, καὶ ἄλλος ἀπὸ τοῦ νέου ὑπολοίπου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· μέχρι τοῦ τελευταίου, ἢ τὸ προτιμότερον, προσθέτονται ὅλοι οἱ μέλλοντες ν' ἀφαιρεθῶσιν ἀριθμοὶ, καὶ τὸ ἄθροισμὰ τῶν ἐπειτ' ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ ἀφαιρετέου.

Ἄς ἀφαιρεθῶσιν οἱ 36, 72, 68 ἀπὸ τοῦ 364.

		564
	Ἰδοὺ ἡ πράξις κατὰ τοὺς δύο τρόπους	36
		528
		72
		456
		68
		388

364
476
388

36
68
72
476

Περὶ δοκιμῆς τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως.

23. Ὀνομάζεται οὕτω πράξις, ἥτις γίνεται πρὸς ἐπιβεβαίωσιν ἂν ἡ πρόσθεσις ἢ ἡ ἀφαιρέσις ἔγινε χωρὶς λάθος, καὶ ἐπομένως ἂν ὁ εὐρημένος διὰ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἀριθμὸς ᾖ ὁ ζητούμενος.

Καὶ ἡ μὲν πρόσθεσις δοκιμάζεται δι' ἄλλης προσθέσεως τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν

γινομένης ἐξ ἀριστερῶν πρὸς δεξιὰ, καὶ ἀφαιρέσεως τοῦ δευτέρου κεφαλαίου ἀπὸ τοῦ πρώτου· καὶ ὅταν τὸ ὑπόλοιπον ᾖναι **0**, σημεῖον ὅτι ἡ πρόσθεσις εἶχε γείνηται χωρὶς λάθος, καὶ ὅτι τὸ πρῶτον κεφάλαιον ἦτον τὸ ζητούμενον. Π. χ. ἀφ’ οὗ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ **678, 732, 58, 395**, εὐρίσκεται κεφάλαιον **1863**. Πρὸς δοκιμὴν τὴν αὐτὴν προσθέτονται αἱ ἑκατοντάδες, τὸ κεφάλαιον **16** ἀφαιρείται ἀπὸ τῶν **18** ἑκατοντάδων τοῦ πρώτου κεφαλαίου καὶ μένουσιν **2** ἑκατοντάδες, αἱ ὅποιαὶ γράφονται ὑπὸ τὸ **8**, δεξιὰ δὲ γράφεται τὸ **6** καὶ γίνονται **26** δεκάδες. Τώρα προσθέτονται αἱ δεκάδες, τὸ ἄθροισμα **24** ἀφαιρείται ἀπὸ **26** καὶ μένουσιν **2** δεκάδες, αἵτινες γράφονται ὑπὸ τὸ **6**, δεξιὰ δὲ γράφονται αἱ **2** μονάδες. Τελευταίον προσθέτονται αἱ μονάδες καὶ τὸ κεφάλαιον **23** εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἤδη γραμμένον **23**· ὥστε ὑπόλοιπον εἶναι **0**, καὶ ἐπομένως **1863** εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα καὶ ἡ πρόσθεσις ἔγινε χωρὶς λάθος.

Ἡ δὲ ἀφαίρεσις δοκιμάζεται διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ ὑπολοίπου εἰς τὸν ἀφαιρέτην· καὶ ὅταν τὸ ἄθροισμα ᾖναι ἴσον μὲ τὸν ἀφαιρέτην, σημεῖον ὅτι ἡ ἀφαίρεσις εἶχε γείνηται χωρὶς λάθος κτλ.

Ἰδοὺ παράδειγμα.

6495
3857
2638
6495

Πρόβλημα εἰς Λύσει.

24. Ὅταν ἐκφράζηται ὅτι ζητεῖται ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι συσχετισμένος μὲ ἄλλους ἀριθμοὺς γνωστοὺς, λέγομεν ὅτι προτείνεται πρόβλημα ἀριθμητικόν. Ὅταν δὲ ἀσχολώμεθα εἰς τὸ νὰ καταλάβωμεν ποίαν πρᾶξιν ἀριθμητικὴν πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον, καὶ τὴν ἐκτελῶμεν, λέγομεν ὅτι λύομεν τὸ πρόβλημα. Τῶν ἀκολουθῶν προβλημάτων ἡ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἢ κεφάλαιον τῶν γνωστῶν, ἢ διαφορὰ αὐτῶν· διὰ τοῦτο πρέπει ἢ νὰ προστεθῶσιν οἱ γνωστοί, ἢ ν’ ἀφαιρεθῶσιν ὁ εἰς ἀπὸ τοῦ ἄλλου. Εἰς τινὰ δὲ πρέπει νὰ γείνη καὶ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

1 Παιδίον ἡγάρασεν ἀδάκην **78** λεπτά, ἀνταβιβάσκειν **30** λεπτά. Ἰλλυνηκὴν ἱστορίαν **123** λεπτά, πόσα λεπτά εἴδωκεν ὅλα; — **108**.

2. Ὁ Δημήτριος εἶχε κῆρυκα καρύδια, τῶν ὑπολοίπων **15** εἴδωκεν εἰς τινὰ τυμβωχικὴν του, **8** εἰς ἄλλον, καὶ αὐτοῖς ἐκράδασεν **7**· πόσα εἶχεν ὅλα; — **30**.

3 Ἄνθρωπός τις ἐπώλησεν ἀγέλας **96** δραχμ., ἔπαιον δὲ **120** δραχμ., σῖτον δὲ **381** δραχμ., καὶ βοῦτυρον **253** δραχμ., πόσα δραχμὰς εἴλαθεν ὅλα; — **1013**.

4. Ἄνθρωπός τις μὲ χρῆσται **592** δραχμ., ἄλλος τις μὲ χρῆσται **2175** δραχμ., τρίτος μὲ χρῆσται **7284**, ἄλλος **938** καὶ ἄλλος **1725**· πόσα δραχμὰς μὲ χρῆσταιν ὅλα; ὅλα; — **13014**.

5 Ἡ γάτα χαράριον **6784** δραχμ., καὶ πωλήσας αὐτὸ ἐκράδα **584** δραχμὰς, πόσα δραχμὰς τὸ ἐπώλησα; — **7368**.

6. Ἀγροῖ τις εἶναι **800** πηχυαῖα τετραγώνων, ἄλλος εἶναι **638** πηχ. καὶ τρίτος **796** πηχ., τετρ. πόσα πηχυαῖα τετραγώνων εἶναι τὰ τρία ὅλα; — **1934**.

(Τί εἶναι πηχυαῖον τετραγώνων;)

7. Ἄνθρωπός τις ἡγάρασε τέσσαρα μεριδία πορτογαλίων, τὸ μὲν **1811** το δὲ **1930**, τὸ δὲ **2156** τὸ δὲ **2210** ποσὴν εἶναι τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν πορτογαλίων;

8. Εἰς περιβολίον εἶναι διαφόρων εἶδου· δένδρα, ἔχουν 384 μιλίαι, 983 βόσκιαι, 1533 ἀμυγδαλαί καὶ 3701 συκαμινίαι· πόσα εἶναι ὅλα ταῦτα τὰ δένδρα;

9. Ὁ μικρότερος δύο ἀριθμῶν εἶναι 7871, ἡ δὲ διαφορά των εἶναι 597· τίς εἶναι ὁ μεγαλύτερος;

10. Δικαιοθεὶς τις κάμποςας δραχμὰς ἀπέδωκε μὲν 7632, χρεωστὴ δὲ ἀκόμ. 24635· πόσαι δρ. ἰδανίσθη;

11. Πατὴρ ἀποθνήσκων ἀφῆκε τῆς μὲν θυγατρὸς του 17616 δραχ., τοῦ δὲ υἱοῦ του 1800 δραχ., περισσότερον παρ' ὅσας εἰς τὴν κορὴν του· πόσαι δραχ. ἀφῆκεν εἰς τὸν υἱὸν του, καὶ πόση ἦτον ἡ χρηματικὴ κατάστασις του;

12. Τα ἔμπροσθεν τέτταρτα βοθίου ζυγίζων 68 ἀκάδες καθὲν, τὰ ὀπίσθεν ζυγίζων 62 ὀκ. καθὲν, τὸ δέριμα του ζυγίζει 12 ὀκ. καὶ δέκα ὀκ. τὸ λιπὸς του· πόσα ζυγίζων ὅλα ὅμοι;

13. Τὸ πρῶτον ἔτος τῆς πρώτης Ὀλυμπιάδος συμπίπτει μὲ τὸ 776ον ἔτος Π. Χ. πόσα ἔτη εἶναι ἔκτοτε μέχρι τοῦ 1856; (Τί εἶναι Ὀλυμπιάς;)

14. Τίσπαρες ἀδελφοὶ ἀπὸ τὴν κληρονομίαν, τὴν ὁποίαν ἐκληρονόμησαν, ἀφοῦ ἐπλήρωσαν 1467 δρ. χρυσ., μοιρασθέντες τα ἐπίλοιπα, ἔλαβον καθείς 4768 δρ. πόσας δραχμὰς ἐκληρονόμησαν;

15. Ο κάρδς Γουλφορδ Ἀγγλος, ὅστις ἐβούλετο ἐκδοθῆναι Ἑλληνικὴν εἰς τὴν Κέρκυραν τὸ 1823 ἀπέθανε τὸ 1828 ἐτῶν 63· πόσα ἔτη εἶναι ἀφοῦ ἐγεννήθη ὁ εὐεργετικώτατος οὗτος ἀνὴρ ἑως σήμερον;

16. Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν συντροφίαν, καὶ ὁ μὲν ἔβαλεν εἰς τὸ κοινὸν ταμεῖον 12320 δρ., ὁ δὲ 35784, ὁ δὲ 26298· ἐκείρισαν δὲ ὁ μὲν 6269 δρ., ὁ δὲ 17892, ὁ δὲ 13249· πόσον ἦτον ὅλων τὸ κεφάλαιον, καὶ πόσον ὅλων τὸ κέρδος;

17. Ἐκ μὲν τῶν τριῶν τάξεων τοῦ ἐν Ἀθῆναις Ἑλληνικοῦ σχολείου ἡ μὲν ἔχει 180 μαθητὰς, ἡ δὲ 140, ἡ δὲ 100· ἐκ δὲ τῶν τριῶν τάξεων τοῦ γυμνασίου ἡ μὲν ἔχει 192 μαθητὰς, ἡ δὲ 116, ἡ δὲ 104· πόσοι εἶναι ὅλοι οἱ μαθηταὶ τῶν δύο σχολείων;

18. Ὁ Ἰανουάριος, μάρτιος, μαῖος, ἰούλιος, αὐγούστος ὀκτώβριος καὶ δεκεμβριος, ἔχουν 31 ἡμέρας καθεὶς, ὁ ἀπρίλιος, ἰούνιος, Σεπτέμβριος καὶ νοέμβριος ἔχουν 30 ἡμέρας καθεὶς, ὁ δὲ Φεβρουάριος ἔχει 28 ἡμέρας καὶ κατὰ τέταρτον ἔτος 29· πόσας ἡμέρας ἔχει τὸ ἔτος;

19. ἔχει τις εἰς τὰ ταμεῖον του 6358 δρ. δίδει δὲ 2794 δρ. καὶ ἀγοράζει οἰκόπεδον· πόσαι δρ. τοῦ μένου;—3564.

20. Ἠγόρασε τις οἶκον 36742 δραχμ., καὶ τὴν ἐπώλησεν εἰς ἄλλον 45798 δραχμὰς· πόσας ἐκέρδισεν;—9056.

21. Ἀνὴρ τις εἶναι 58 ἐτῶν, ἡ δὲ γυνὴ του 42 ἐτῶν· πόσον ἐτῶν μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀνὴρ;—16.

22. Δικαιοθεὶς τις 384 δρ. ἀπέδωκεν ὅλας πλὴν 73· πόσας ἀπέδωκεν;

23. Ἐμπορος, ὅστις εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔτους εἶχε 15680 δρ. ἔμεινε εἰς τὸ τέλος μὲ 12892· πόσας ἔχασεν;

24. Ματαπράτης ἐπώλησε σταφύλια 734 δρ. κερδίσας 175· πόσον τὰ εἶχεν ἀγοράσει;

25. Ἡ περιουσία τινὸς εἶναι 8360 δρ., ἀλλὰ χρεωστὴ 3500 δρ. ἀφοῦ πληρώσει τὰ χρεὶν του πόσαι θίλουν τοῦ μείνει;

26. Ἐάν τις ἔχῃ εἰσόδηκα ἐτήσιον 3600 δρ. καὶ τούτων διαπαντ εἰς τροφὴν του 1200, εἰς ἐνδυμασίαν του 600, εἰς ἐνοίκιον 720, εἰς ἀγορὰν βιβλίων 400 καὶ εἰς ἑκτακτὰ πράγματα 250, πόσαι δραχμαὶ τοῦ μένου;

27. Ἐπώλησε ποιμὴν τις 684 πρόβατα, καὶ εἶχεν ἀκόμ. 708· πόσα εἶχεν εἰς τὴν ἀρχὴν.

28. Ἀγρός καὶ τὰ ἐπ' αὐτοῦ κτίρια τιμῶνται 50000 δρ. τὰ δὲ κτίρια μόνα ἀξίζων 22300 δραχ., πόσον ἀξίζει ἡ γῆ.

29. Πόσας μονάδας πρέπει νὰ προσθήσῃ τις εἰς 258642, διὰ νὰ γένη 1487645;

30. Τίς ἀριθμὸς μὲ τοὺς 2330, 3250, 4484 ἀποτελεῖ ἀθροισμα ἴσον μὲ 10000;

31. Ὁ μεγαλύτερος δύο ἀριθμῶν εἶναι 1374, καὶ ἡ διαφ. των εἶναι 891· τίς εἶναι ὁ μικρότερος;

32. Τὸ κεφάλαιον δύο ἀριθμῶν εἶναι 678, ὁ δὲ μικρότερος αὐτῶν 260, τίς εἶναι ὁ μεγαλύτερος;

33. Παιδίον 8 ὥρας τοῦ ἡμερονικτοῦ κοιμᾶται, 5 ὥρας παίζει, μίαν ὥραν τρώγει, 5 ὥρας ἀκροάζεται τα μαθήματά του, τὰς δὲ λοιπὰς μελετᾷ αὐτὰ· πόσας ὥρας μελετᾷ;

34. Ἡ Ἑλληνικὴ ἐπανάστασις ἤρχισε τὸ 1821, ἕως ἐφ' ἧς πόσα ἔτη εἶναι ἔκτοτε;

- 35 Γεωργός τις πωλήσας τὸν αἶτόν του 784 δραχ. τὸν οἶνόν του 473 δραχ. καὶ τὴν κριθήν του 249 δραχ. ἤγοράσας 112 δραχ. τυρὸν, 249 δρ. βούτυρον, 375 δρ. φρούρεματα· πόσαι δρ. τοῦ ἔμειναν;
- 36 Ἡ Ἀμερική ἀνεκαλύφθη τὸ 1492, πόσα ἔτη εἶναι ἐκτοτε ἕως τώρα;
37. Γέρων ὄστις τὸ 1820 ἦτον 75 ἐτῶν, πότα ἐγεννήθη;
38. Ἐνῶ τοῦ ἐν Ἀθήναις Ἑλληνικοῦ σχολείου καὶ γυμνασίου οἱ μαθηταὶ εἶναι 832, τοῦ δὲ Ἑλληνικοῦ σχολείου εἶναι 420, οἱ τοῦ γυμνασίου πόσοι εἶναι;
39. Τέσσαρες ἄνθρωποι ἠγόρασαν οἰκίαν τινα, καὶ ὁ μὲν ἔδωκε 12000 δραχ. ὁ δὲ 3320 δραχμας ὀλιγώτερον τοῦ πρώτου, ὁ δὲ 1330 δρ. περισσότερον τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ τελευταῖος 6378 δρ. ὀλιγώτερον παρ' ὅσας ἔδωκαν ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ὁμοῦ· πόσας δραχ. ἔδωκε καθείς τῶν τριῶν τελευταίων καὶ πόσον ἐτιμήθη ἡ οἰκία;

Σημ. Παρόμοια μὲ ταῦτα, τὰ προβλήματα νὰ γείνωσι πολλὰ ἄλλα πρὸς γύμνασιν πλείοτεραν.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίων ἐπὶ ἀκεραίους ἀριθμούς.

25. Καθὼς ἐὰν προστεθῇ εἰς 1 ἄλλο 1, γίνεται ὁ ἀριθμὸς 2, καὶ ἐὰν εἰς τὸν 2 προστεθῇ ἄλλο 1, γίνεται ὁ ἀριθμὸς 3 καὶ καθέξης, οὕτω καὶ εἰς τὸν 2 ἐὰν προστεθῇ ὁ 2, γίνεται ὁ ἀριθμὸς 4, καὶ εἰς τὸν 4 ἂν προστεθῇ ὁ ἀριθμὸς 2, γίνεται ὁ ἀριθμὸς 6, καὶ οὕτω ἐφεξῆς· οὕτω καὶ εἰς τὸν 3 ἂν προστεθῇ ὁ 3, γίνεται ὁ ἀριθμὸς 6, καὶ εἰς τὸν 6 ἂν προστεθῇ ὁ 3, γίνεται 9 κτλ· καὶ γενικῶς ἐὰν εἰς ἀριθμὸν ὁποιοῦνδήποτε προστεθῇ αὐτὸς ὁ ἴδιος, γίνεται ἄλλος ἀριθμὸς, καὶ εἰς τοῦτον ἂν προστεθῇ ὁ πρότερον προστεθείς, γίνεται ἄλλος καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ὅταν προσθέτηται ὁ 2 εἰς τὸν 2, λέγεται ὅτι διπλασιάζεται ὁ 2, ὁ δὲ 4, ὅστις εἶναι δις 2, λέγεται διπλάσιος τοῦ 2· ὅταν δὲ προσθέτηται ὁ 2 εἰς τὸν 2 καὶ πάλιν εἰς τὸν διπλάσιόν του 4, λέγεται ὅτι τριπλασιάζεται ὁ 2, ὁ δὲ 6, ὅστις τότε εἶναι τρίς 2, λέγεται τριπλάσιος τοῦ 2. Ἐκ δὲ τούτων νοεῖται καὶ τί σημαίνει τετραπλασιάζεται ὁ 2 καὶ τετραπλάσιος τοῦ 2, πενταπλασιάζεται ὁ 2 καὶ πενταπλάσιος τοῦ 2, καὶ ἀορίστως πολλαπλασιάζεται ὁ 2 καὶ πολλαπλάσιος τοῦ 2.

Ὅ,τι εἵπομεν περὶ τοῦ 2 ἀρμόζει λεγόμενον καὶ περὶ ὁποιοῦνδήποτε ἄλλου ἀριθμοῦ.

Ἡ δὲ πράξις, διὰ τῆς ὁποίας διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, τετραπλασιάζεται, καὶ ἀορίστως πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς ὁποιοῦνδήποτε, λέγεται διπλασιασμός, τριπλασιασμός, τετραπλασιασμός, καὶ ἀορίστως πολλαπλασιασμός τοῦ ἀριθμοῦ. Εἶναι δὲ διπλασιασμός, τριπλασιασμός, καὶ ἀορίστως πολλαπλασιασμός ἀριθμοῦ ἡ πράξις, κατὰ τὴν ὁποίαν γίνεται ὁ 2 ὁ 3 ἢ ὁποιοῦνδήποτε ἄλλος ἀριθμὸς ἀπὸ τὴν μονάδα, γινομένη ἐπὶ αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ. Αὕτη δὲ ἐδῶ εἶναι ἐπανειλημμένη πρόσθεσις.

Ἀντὶ δὲ τοῦ διπλασιάζεται ἀριθμὸς συνηθέστερα λέγουν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2 ὁ ἀριθμὸς, ἀντὶ τοῦ τριπλασιάζεται λέγουν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 3 κτλ. Πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς ἐπὶ 10 σημαίνει δεκαπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς, πολλα-

πλασιάζεται ἐπὶ 20 σημαίνει εἰκοσαπλασιάζεται. Ἡ φράσις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ εἶναι προτιμότερα πολλάκις, μάλιστα ὅταν ὁ ἀριθμὸς, ὅστις προσδιορίζει τὸν πολλαπλασιασμὸν, ᾗναι μεγάλος. Π. χ. εἶναι ἀπλουστέρα καὶ ἐπομένως προτιμότερα ἢ φράσις πολλαπλασιάζεται ὁ 25 ἐπὶ 673 παρὰ τὴν ἐξακοσιαεβδομηκοντατριπλασιάζεται ὁ 25.

Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς, ὅστις μέλλει νὰ πολλαπλασιασθῇ, λέγεται πολλαπλασιαστέος· ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις δεικνύει τί πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου πρέπει νὰ σχηματισθῇ, λέγεται πολλαπλασιαστής, καὶ οὗτος ἔχει τὴν ἐπὶ πρὸ αὐτοῦ· ὁ δὲ γινόμενος ἀριθμὸς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὀνομάζεται γινόμενον. Ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος λέγονται κοινῶς παράγοντες τοῦ γινομένου. Λέγουν προσέτι γινόμενον ἀριθμὸς ἐπὶ ἄλλον, ἢ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἢ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀριθμῶν, ἢ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον, ἢ δύο παραγόντων. Οἱ ἀρχαῖοι πρέπει νὰ συνειθίσουν καλὰ τὰς ὀνομασίας ταύτας. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμώνυμον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, διότι γίνεται ἐξ αὐτοῦ.

26. Μονοψήφιος ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλον μονοψήφιον, ἐὰν ὁ πρῶτος προσεθῇ εἰς ἑαυτὸν, ἔπειτα εἰς τὸν διπλάσιον, καὶ οὕτω καθεξῆς· ἕως νὰ γείνη ὁ ζητούμενος καὶ δεικνύμενος ὑπὸ τοῦ ἄλλου ἀριθμοῦ πολλαπλάσιος.

Ἀλλὰ διὰ ἀπαλλαγῶσιν οἱ ἀρχαῖοι ἀπὸ τὸν κόπον τοῦτον, θέτομεν τὸν ἑξῆς πίνακα, ὅστις ἐμπεριέχει ἔτοιμα τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, καὶ ὅστις ὀνομάζεται

Ποιταίδια τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ.

Ὅταν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων ᾗναι 0, καὶ τὸ γινόμενον ᾗναι 0.											
1	εἰ	4	4	2	—	8	46	5	εἰ	5	25
1	—	2	2	2	—	9	18	5	—	6	30
1	—	3	3	3	εἰ	3	9	5	—	7	35
1	—	4	4	3	—	4	12	5	—	8	40
1	—	5	5	3	—	5	15	5	—	9	45
1	—	6	6	3	—	6	18	6	εἰ	6	36
1	—	7	7	3	—	7	21	6	—	7	42
1	—	8	8	3	—	8	24	6	—	8	48
1	—	9	9	3	—	9	27	6	—	9	54
2	εἰ	2	4	4	εἰ	4	16	7	εἰ	7	49
2	—	3	6	4	—	5	20	7	—	8	56
2	—	4	8	4	—	6	24	7	—	9	63
2	—	5	10	4	—	7	28	8	εἰ	8	64
2	—	6	12	4	—	8	32	8	—	9	72
2	—	7	14	4	—	9	36	9	εἰ	9	81

Εἰς τὰς πρώτας στήλας τοῦ πίνακος τούτου εἶναι οἱ πολλαπλασιαστέοι, εἰς τὰς δευτέρας οἱ πολλαπλασιασται καὶ εἰς τὰς τρίτας τὰ γινόμενα αὐτῶν. Ἀλλ' εἰμποροῦν νὰ θεωρῶνται ὡς πολλαπλασιασται καὶ οἱ τῶν πρώτων στηλῶν ἀριθμοί, καὶ ὡς πολλαπλασιαστέοι οἱ τῶν δευτέρων στηλῶν, καὶ τότε πρέπει νὰ λέγῃ τις π. χ. 3 εἰ 2 ἀντὶ 2 εἰ 3, 4 εἰ 2 ἀντὶ 2 εἰ 4 κτλ· οἱ δὲ τῶν τρίτων στηλῶν εἶναι καὶ τότε τὰ γινόμενά των. Σύντομα ἀπὸ δύο ἀριθμοῦς μονοψηφίους ὅποιος καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἄλλον, παράγει γινόμενον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν.

Ὅπως δὴποτε τάξεως μονάδας καὶ ἂν παριστάνῃ ὁ πολλαπλασιαστέος, τοιαύτας παριστάνει καὶ τὸ

γινόμενον, καὶ τόσας, ὅσαι εἶναι εἰς τὸ γινόμενον τοῦ πέντατος. Π. χ. 6 μονάδες ἐπὶ 7 42 μονάδες, 6 δεκάδες ἐπὶ 7 42 δεκάδες, 6 ἑκατοντάδες ἐπὶ 7 42 ἑκατοντάδες, κτλ.

Σημ. Ὅταν μαθαίνον τὴν προπαίδειαν ταύτην, ἀπὸ τῆς ἐπὶ μεταχειρίζονται τὸν ἥχον ὡς γράφεται ἢ ἀντι αἶ, ἢ εἰ ἑλληνικῶν κατ' ἑλληνισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Τοῦτο τὸ εἰ μεταχειρίζοντο ἀνωτέρω.

27. Πολυψήφιος δὲ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μονοψήφιον οὕτω· Γράφεται ὁ πολλαπλασιασμοῦ ὑπὸ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ σφραγίζεται ὑποκάτω γραμμῇ. Ἐπειτα πολλαπλασιάζονται ἐπὶ τὸν μονοψήφιον πολλαπλαστήν πρῶτον αἱ μονάδες τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ τὸ γινόμενον, ἂν ᾖ μικρότερον τοῦ 10, γράφεται ὑπὸ τὰς μονάδας τῶν, ἂν δὲ ᾖ μεγαλύτερον τοῦ 9, ὑπὸ τὰς μονάδας τότε γράφεται μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων, ὃ δὲ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων προσθίσσεται ὕστερα εἰς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων. Ἐπειτα πολλαπλασιάζονται αἱ δεκάδες, αἱ ἑκατοντάδες κτλ. τοῦ πολυψηφίου ἐπὶ τὸν μονοψήφιον, καὶ ὑπὸ τὴν γραμμὴν γράφονται τὰ γινόμενα, ὡς εἶπομεν περὶ τοῦ γινομένου τῶν μονάδων. Ὁ δὲ οὕτως εὐρισκόμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ πολυψηφίου ἐπὶ τὸν μονοψήφιον ἀριθμὸν.

Ἄς πολλαπλασιασθῇ ὁ 6384 ἐπὶ 8.

Ἀφοῦ γραφῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἤδη εἶπομεν καὶ ἀντικρὺ φαίνονται, 6384 λέγομεν 4 εἰς 8 32 μονάδες ἤτοι 3 δεκάδες καὶ 2 μονάδες· γράφομεν 2 8 ὑπὸ τὰς μονάδας, τὰς δὲ 3 δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν 31072 δεκάδων λέγοντες 8 εἰς 8 64 δεκάδες καὶ 3 67 δεκάδες, ἤτοι 6 ἑκατοντάδες καὶ 7 δεκάδες· γράφομεν 7 ὑπὸ τὰς δεκάδας, τὰς δὲ 6 ἑκατοντάδας προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἑκατοντάδων λέγοντες 3 εἰς 8 24 ἑκατοντάδες καὶ 6 30 ἑκατοντάδες, ἤτοι 3 χιλιάδες καὶ 0 ἑκατοντάδες· γράφομεν 0 ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας, προσθέτομεν δὲ τὰς 3 χιλιάδας εἰς τὸ γινόμενον τῶν χιλιάδων λέγοντες 6 εἰς 8 48 χιλιάδες καὶ 3 51 χιλιάδες, τὰς ὁποίας γράφομεν ὅλας ἀριστερὰ τοῦ 0, διότι δὲν εἶναι ἄλλος ἀριθμὸς νῦν πολλαπλασιασθῇ. Ὁ δὲ 51072 εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 6384 ἐπὶ 8, ἤτοι τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ 6384.

Ἄς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4 ὁ 4006, ὅστις ἔχει μηδενικὰ εἰς τὴν μέσσην.

Λέγομεν 6 εἰς 4 24 μονάδες, γράφομεν 4 ὑπὸ τὰς μονάδας· 4006 ἔπειτα 4 εἰς 0 0 δεκάδες, καὶ γράφομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας μόνον τὰς 4 δύο δεκάδας τοῦ προτέρου γινομένου· ἔπειτα 4 εἰς 0 0 ἑκατοντάδες, 16024 τὸ ὅποιον γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας· τελευταῖον 4 εἰς 4 16, τὰς ὁποίας γράφομεν ἀριστερὰ τοῦ 0.

Ἄς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 9 ὁ 5700, ὅστις ἔχει μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος.

Λέγομεν 9 εἰς 0 0 μονάδες, καὶ γράφομεν 0 ὑπὸ τὰς μονάδας· ἔπειτα 9 εἰς 0 0 δεκάδες, καὶ γράφομεν 9 ὑπὸ τὰς δεκάδας· ἔπειτα 7 εἰς 9 63 ἑκατοντάδες, καὶ γράφομεν 3 ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας· τελευταῖον 54300 5 εἰς 9 45 χιλιάδες, καὶ 6 51 χιλιάδες, καὶ γράφομεν 51 ἀριστερὰ τοῦ 3.

Εἶδὼ βλέπει τις ὅτι πολλαπλασιάζεται ὁ παριστανόμενος ὑπὸ τῶν σημαν-
τικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, καὶ
δεξιὰ τοῦ γινομένου θέτονται ὅσα μηδενικά ἔχει ὁ πολλαπλασιαστέος δεξιὰ τοῦ.

74098	5990	695782	683000	7006
6	7	5	3	2
444588	41510	3478910	2049000	44012

28. Πολυψήφιος δὲ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλον πολυψήφιον οὕτω·
Γράφεται ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον ὁ πολλαπλασιαστής ὡς εἰς τὴν πρόσθε-
σιν καὶ σύρεται γραμμὴ ὑποκάτω. Ἐπειτα πολλαπλασιάζεται ὁ πολλαπλασια-
στέος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὡς ἤδη εἵπομεν,
καὶ γράφεται τὸ γινόμενον ὑπὸ τὴν γραμμὴν· ἔπειτα πολλαπλασιάζεται πάλιν
ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὡς
ἤδη εἵπομεν, καὶ γράφεται τὸ γινόμενον ὑπὸ τὸ πρῶτον ἀπὸ τῶν δεκάδων καὶ
ἄριστερά· ἔπειτα πολλαπλασιάζεται πάλιν ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ τὸν ἀριθ-
μὸν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ γράφεται τὸ γινόμενον ὑπὸ
τὰ προηγούμενα ἀπὸ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πρώτου καὶ ἄριστερά, καὶ οὕτω
καθεξῆς ἕως νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ἐπὶ τὰς ἄριστεράς
μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· τελευτηλὸν προσθέτονται τὰ εὑρημένα ΜΕΡΙΚΑ
γινόμενα, καὶ τὸ ἄθροισμὰ των θέλει εἶσθαι τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυψηφίων
ἀριθμῶν.

Ὡς πολλαπλασιασθῇ ὁ 6754 ἐπὶ 598.

Ἀπὸ τοῦ γραφθῶσιν ὡς φαίνονται ἀντικρὺ, πολλαπλασιάζομεν τὸν
6754 ἐπὶ τὰς 8 μονάδας τοῦ 598 καὶ γράφομεν τὸ γινόμενον 54032
ὑπὸ τὴν γραμμὴν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν 6754 ἐπὶ 9, τὸν
ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τοῦ 598, καὶ τὸ πρῶτον δεξιὸν ψηφίον 6 τοῦ
γινομένου 60786 τὸ γράφομεν ὑπὸ τὰς 3 δεκάδας τοῦ πρώτου
καὶ τὰ ἄλλα ἄριστερά αὐτοῦ, ἐνῶ τὰ εὐρίσκομεν· ἔπειτα πολ-
λαπλασιάζομεν τὸν 6754 ἐπὶ 5, τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ 598, καὶ
γράφομεν τὸ πρῶτον δεξιὸν ψηφίον 0 τοῦ γινομένου 33770 ὑπὸ τὰς 0 ἑκατον-
τάδας τοῦ πρώτου καὶ τὰ ἄλλα ἄριστερά αὐτοῦ, ἐνῶ τὰ εὐρίσκομεν. Τελευταίον
προσθέτομεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ὡς εἶναι γεγραμμένοι, καὶ τὸ ἄθροισμὰ των
4038892 εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 6754 ἐπὶ 598.

Ἰδοὺ καὶ ἄλλο παράδειγμα.

947328
8543
2841984
3789312
4736640
7578624

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη 8093023104

29. Ἄς πολλαπλασιασθῇ ὁ 6478 ἐπὶ 50403, ὅστις ἔχει μηδενικά εἰς τὴν μέσσην.

	6478
Ὁ πολλαπλασιαστής πολλαπλασιάζεται μόνον ἐπὶ τὰ σημαν- τικά ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ 6478	50403
ἐπὶ τὰς 4 ἑκατοντάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ γράφεται ὑπὸ τὸ	19434
πρῶτον γινόμενον ἀπὸ τῶν ἑκατοντάδων καὶ ἀριστερά, καὶ	25912
τὸ γινόμενον τοῦ 6478 ἐπὶ τὰς 5 δεκάδας χιλιάδος τοῦ πολ- πλασιαστοῦ γράφεται ὑπὸ τὰ πρῶτα ἀπὸ τῶν δεκάδων χιλιάδος καὶ ἀριστε- ρά, ὡς φαίνεται ἀνωτέρω.	32390
	326510634

30. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής ἔχῃ μηδενικά εἰς τὸ τέλος, τότε πολλαπλασιάζεται ὁ πολλαπλασιαστής μόνον ἐπὶ τὰ σημαντικά ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου θέτονται ὅσα μηδενικά ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.

Κατὰ ταῦτα ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, ἂν δεξιὰ τοῦ τεθῇ 0, ἐπὶ 100, ἂν τεθῶσι 00, ἐπὶ 1000, ἂν τεθῶσι 000, κτλ' οἷον, ἂν δεξιὰ τοῦ 78 τεθῇ 0, 00, 000 κτλ, γίνεται 780, ὅστις εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ 78, 7800, ὅστις εἶναι ἑκατονταπλάσιος τοῦ 78, 78000, ὅστις εἶναι χιλιοπλάσιος κτλ.

Ἄς πολλαπλασιασθῇ ὁ 7846 ἐπὶ 3800.

Πολλαπλασιάζεται ὁ 7846 ἐπὶ 38 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου	7846
298148 θέτονται 00, ὅσα ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.	3800

62768

23538

29814800

5600

420

412

224

2352000

Ἄς πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ 5600 ἐπὶ 420.

Ἀφοῦ πολλαπλασιασθῶσι τὰ σημαντικά ψηφία τοῦ 5600 ἐπὶ τὰ σημαντικά ψηφία τοῦ 420 ἔγουν ὁ 56 ἐπὶ 42, δεξιὰ τοῦ γινομένου 2352 θέτονται 000, τὰ 00, διότι εἶναι τόσα εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ τὸ 0, διότι 0 εἶναι εἰς τὸν πολλαπλασιαστήν.

31. Ἀπὸ δύο ἀριθμοὺς ἀκεραίους ὁποιοὺςδήποτε ὅποιος καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἄλλον παράγει γινόμενον τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Π. χ. ἡ πολλαπλασιασθῇ ὁ 635 ἐπὶ 7382, ἡ πολλαπλασιασθῇ ὁ 7382 ἐπὶ 635, προκύπτει γινόμενον ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ὡς ἐδῶ φαίνεται

635	7382	72
7382	635	56
4270	36910	432
5080	22146	360
1905	44292	4032
4445	4687570	24
4687570		46128

32. Όταν ἦναι πολλοὶ ἀριθμοὶ νὰ πολλαπλασιασθῶσι, πρῶτον πολλαπλασιάζονται δύο ὁποιοιδήποτε, ἔπειτα πολλαπλασιάζεται τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐπὶ τρίτον τινὰ, ἔπειτα πολλαπλασιάζεται τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἐπὶ τέταρτον τινὰ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου.

Οὕτω πολλαπλασιάζονται ἀντικρὺ οἱ τέσσαρες οὔτοι ἀριθμοὶ 24, 72, 56, 18.

8064

96768

48

774144

96768

4741824

Περὶ διαιρέσεως ἀκεραίων δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν.

33. Εἵπομεν εἰς τὸν ἀριθ. 10 τί ὀνομάζεται μέρος ἡμῖς, τρίτον, τέταρτον κτλ. πράγματις τινος ἢ μονάδος. Ἀλλὰ καὶ ἀριθμὸς τις εἰμπορεῖ νὰ ἦναι μέρος ἄλλου ἀριθμοῦ ἢ ἡμῖς, ἢ τρίτον, ἢ τέταρτον κτλ. Π. χ. ὁ 2 εἶναι ἡμῖς τοῦ 4, τρίτον τοῦ 6, τέταρτον τοῦ 8 κτλ' ὁ 3 εἶναι ἡμῖς τοῦ 6, τρίτον τοῦ 9, τέταρτον τοῦ 12 κτλ' καὶ ἀορίστως ἀριθμὸς τις εἰμπορεῖ νὰ ἦναι πολλοστόν τι μέρος ἄλλου ἀριθμοῦ, ἐὰν πολλάκις ὁ πρῶτος ἐπαναλαμβάνομενος ἀποταλῇ τὸν δεύτερον, ἢ ἄλλως, ἂν ὁ δεύτερος ἦναι πολλαπλάσιος τοῦ πρώτου.

Πολτάκις εἶναι χρεια νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ἦναι πολλοστόν τι μέρος ἄλλου γνωστοῦ ἀριθμοῦ, ἡγουν ἡμῖς ἢ τρίτον ἢ τέταρτον κτλ. Τοιοῦτος δὲ ἀριθμὸς εὑρίσκεται διὰ τινος πράξεως, ἥτις ὀνομάζεται διαίρεσις, καὶ ἐδῶ θέλομεν εἰπεῖ πῶς ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις, καὶ ἐπομένως πῶς εὑρίσκεται ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ἦναι πολλοστόν τι μέρος ἄλλου γνωστοῦ ἀριθμοῦ. Καὶ ὅταν μὲν ἐκτελῇται ἡ διαίρεσις πρὸς εὑρεσιν τοῦ ἡμίσεος ἀριθμοῦ τινος, λέγομεν ὅτι διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς διὰ τοῦ 2, ὅταν δὲ ἐκτελῇται ἡ διαίρεσις πρὸς εὑρεσιν τοῦ τρίτου, λέγομεν ὅτι διαιρεῖται διὰ τοῦ 3 ὁ ἀριθμὸς κτλ. Διαιρεῖται ἀριθμὸς τις διὰ τοῦ 10 ἢ τοῦ 20 σημαίνει ὅτι ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις πρὸς εὑρεσιν τοῦ δεκάτου ἢ τοῦ εἰκοστοῦ τοῦ ἀριθμοῦ.

Ὁ ἀριθμὸς, ὅστις πρόκειται νὰ διαιρεθῇ, ἢ τοῦ ὁποίου πολλοστόν τι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ, λέγεται διαιρετέος· ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις προσδιορίζει τί πολλοστόν πρόκειται νὰ εὑρεθῇ, λέγεται διαιρετής, καὶ ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὴν διὰ· ὁ δὲ εὑρισκόμενος διὰ τῆς διαιρέσεως ἀριθμὸς λέγεται πηλίκον. Λέγουν προσέτι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρετοῦ, ἢ πηλίκον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρετοῦ, ἢ καὶ πηλίκον δύο ἀριθμῶν.

Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι τοιοῦτον πολλοστόν τοῦ διαιρετέου, ὅποῖον πολλοστόν τοῦ διαιρετοῦ εἶναι ἡ μονάς. Ὅταν π. χ. πρόκηται νὰ διαιρεθῇ ὁ 45 διὰ τοῦ 9, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ἕννατον τοῦ 45, διότι καὶ ἡ 1 εἶναι ἕννατον τοῦ 9, κτλ.

Ἔτι δὲ τὸ πηλίκον εἶναι ὁμώνυμον μὲ τὸν διαιρετέον.

34. Πρῶτον εἶναι ἀνάγκη νὰ μάθωσιν οἱ ἀρχαριοὶ ποῖοι ἀριθμοὶ εἶναι ἢ τὰ

ισα τῶν μικροτέρων ἀριθμῶν τοῦ 20, ἢ τὰ τρίτα τῶν μικροτέρων τοῦ 30, τὰ τέταρτα τῶν μικροτέρων τοῦ 40 κτλ, ἕως εἰς τὰ ἔννατα τῶν μικροτέρων τοῦ 90. Πρὸς τοῦτο θέτομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ὅστις ὀνομάζεται

Προπαίδεια τῆς Διαιρέσεως.

Τὸ ἥμισυ τοῦ 0 εἶναι 0, τὸ τρίτον τοῦ 0 εἶναι 0, κτλ. τὸ ἔννατον τοῦ 0 εἶναι 0.											
Τὸ ἥμ. τοῦ 1	εἶναι	$\frac{1}{2}$	Τὸ 5 ^{ον} τοῦ 4	εἶναι	$\frac{5}{8}$	Τὸ 7 ^{ον} τ. 49	εἶναι	7			
— 2 —		4	— 5 —		4	— 56 —		8			
— 4 —		2	— 10 —		2	— 63 —		9			
— 6 —		3	— 15 —		3	Τὸ 8 ^{ον} τοῦ 4	εἶναι	$\frac{1}{8}$			
— 8 —		4	— 20 —		4	— 2 —		$\frac{2}{8}$			
— 10 —		5	— 25 —		5	— 3 —		$\frac{3}{8}$			
— 12 —		6	— 30 —		6	— 4 —		$\frac{4}{8}$			
— 14 —		7	— 35 —		7	— 5 —		$\frac{5}{8}$			
— 16 —		8	— 40 —		8	— 6 —		$\frac{6}{8}$			
— 18 —		9	— 45 —		9	— 7 —		$\frac{7}{8}$			
Τὸ 3 ^{ον} τοῦ 1	εἶναι	$\frac{1}{3}$	Τὸ 6 ^{ον} τοῦ 4	εἶναι	$\frac{3}{2}$	— 8 —		4			
— 2 —		$\frac{2}{3}$	— 2 —		$\frac{1}{2}$	— 16 —		2			
— 3 —		4	— 3 —		$\frac{3}{2}$	— 24 —		3			
— 6 —		2	— 4 —		$\frac{4}{2}$	— 32 —		4			
— 9 —		3	— 5 —		$\frac{5}{2}$	— 40 —		5			
— 12 —		4	— 6 —		4	— 48 —		6			
— 15 —		5	— 12 —		2	— 56 —		7			
— 18 —		6	— 18 —		3	— 64 —		8			
— 24 —		7	— 24 —		4	— 72 —		9			
— 24 —		8	— 30 —		$\frac{3}{2}$	Τὸ 9 ^{ον} τοῦ 4	εἶναι	$\frac{1}{9}$			
— 27 —		9	— 36 —		6	— 2 —		$\frac{2}{9}$			
Τὸ 4 ^{ον} τοῦ 1	εἶναι	$\frac{1}{4}$	— 42 —		7	— 3 —		$\frac{3}{9}$			
— 2 —		$\frac{2}{4}$	— 48 —		8	— 4 —		$\frac{4}{9}$			
— 3 —		$\frac{3}{4}$	— 54 —		9	— 5 —		$\frac{5}{9}$			
— 4 —		4	Τὸ 7 ^{ον} τοῦ 4	εἶναι	$\frac{7}{4}$	— 6 —		$\frac{6}{9}$			
— 8 —		2	— 2 —		$\frac{1}{4}$	— 7 —		$\frac{7}{9}$			
— 12 —		3	— 3 —		$\frac{3}{4}$	— 8 —		$\frac{8}{9}$			
— 16 —		4	— 4 —		$\frac{4}{4}$	— 9 —		4			
— 20 —		5	— 5 —		$\frac{5}{4}$	— 18 —		2			
— 24 —		6	— 6 —		$\frac{6}{4}$	— 27 —		3			
— 28 —		7	— 7 —		4	— 36 —		4			
— 32 —		8	— 14 —		2	— 45 —		5			
— 36 —		9	— 21 —		3	— 54 —		6			
Τὸ 5 ^{ον} τοῦ 1	εἶναι	$\frac{1}{5}$	— 28 —		4	— 63 —		7			
— 2 —		$\frac{2}{5}$	— 35 —		5	— 72 —		8			
— 3 —		$\frac{3}{5}$	— 42 —		6	— 81 —		9			

Εἰς τὰς πρώτας στήλας τοῦ πίνακος τούτου εἶναι οἱ διαιρεταί, εἰς τὰς δευτέρας οἱ διαιρετέοι καὶ εἰς τὰς τρίτας τὰ πηλίκων αὐτῶν.

α. Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου βλέπει τις α.) ὅτι, ὅταν ὁ διαιρετέος ᾖ μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι κλάσμα τῆς μονάδος ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην· β.) ὅτι, ὅταν ὁ διαιρετέος ᾖ ἴσος μὲ τὸν διαιρέτην, τὸ πηλίκον εἶναι 1. γ.) ὅτι, ὅταν ὁ διαιρετέος ᾖ μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου, ἀλλὰ μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 1 καὶ μικρότερον τοῦ 10, ἔχουν μονοψήφιος ἀριθμός.

Σημ. Πολλοὶ ἀριθμοί, οἱ ὅποιοι εἶναι διαιρετοὶ μεγαλύτεροι τοῦ διαιρέτου τῶν, δὲν ἐτέθησαν εἰς τὸν πίνακα, οὐδὲ τὰ πηλίκων τῶν, διότι εἶναι εὐκόλως νὰ τὰ εὕρῃ τις κατὰ μᾶλλον τὸν πίνακα. Π. X. ὅταν ᾖ εὐρὴ τις ὅτι τὸ 4ον τοῦ 12 εἶναι 3, εὐκόλως ἐννοεῖ ὅτι τὸ 4ον τοῦ 13 θέλει εἶσθαι 3 $\frac{1}{3}$ · τὸ 4ον τοῦ 14 θέλει εἶσθαι 3 $\frac{2}{7}$ · τὸ 4ον τοῦ 15 θέλει εἶσθαι 3 $\frac{3}{5}$ · οὕτω καὶ περὶ τῶν λοιπῶν. Ἡ συμπλήρωσις αὕτη ἀφίθη εἰς τὸν διδάσκοντα. Ὅλα δὲ αὐτὰ τὰ πηλίκων εἶναι μικτοὶ ἀριθμοί.

β. Εἶναι φανερόν καὶ ἐκ τοῦ πίνακος (τοῦλάχιστον τώρα μόνον περὶ τῶν ἀκεραίων πηλίκων) ὅτι τὸ πηλίκον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην παράγει γινόμενον τὸν διαιρετέον. Ἄλλως δὲ εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ πέμπτον π. χ. τοῦ 30 πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 5 ἢ πενταπλασιαζόμενον πρέπει νὰ παράξῃ τὸν 30· διότι τοῦτο σημαίνει πέμπτον τοῦ 30. Καὶ περὶ ἄλλων δὲ ὡσαύτως.

γ. Εἶναι προσέτι φανερόν ὅτι, ἂν διαιρεθῇ διαιρετέος τις διὰ τοῦ πηλίκου του, θέλει εὐρεθῇ ὁ διαιρέτης, π. χ. τὸ 8ον τοῦ 40 εἶναι 5· ἀντιστρόφως τὸ 5ον τοῦ 40 εἶναι 8, τὸ ὅποιον βλέπει τις εἰς τὸ μέρος, ὅπου εἶναι τὰ πέμπτα.

δ. Ἐὰν οἱ διαιρετέοι ᾖν δεκάδες, ἢ ἑκατοντάδες, κτλ. τὰ πηλίκων θέλουν εἶσθαι τὰ αὐτὰ, ἀλλὰ ὁμώνυμα μὲ τοὺς διαιρετέους· π. χ. τὸ 4ον τοῦ 24 εἶναι 6, καὶ τὸ 4ον τῶν 24 δεκάδων εἶναι 6 δεκάδες, καὶ τὸ 4ον τῶν 24 ἑκατοντάδων εἶναι 6 ἑκατοντάδες.

35. Πολυψήφιος ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ μονοψηφίου οὕτω. Γράφεται ὁ διαιρέτης· δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, σύρεται μεταξύ των γραμμὴ καὶ ἄλλη ὑπὸ τὸν διαιρέτην. Ἐπειτα διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου κατὰ τὸν πίνακα ὁ διὰ τοῦ ἐνὸς ἀριστεροῦ ψηφίου τοῦ διαιρετέου παριστανόμενος ἀριθμὸς, ἂν ᾖν μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου ἢ ἴσος, εἰ δὲ μὴ, διαιρεῖται ὁ διὰ τῶν δύο ἀριστερῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου παριστανόμενος ἀριθμὸς, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου γράφεται ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ πολλαπλασιάζεται ἐπ' αὐτὸν, τὸ γινόμενον γράφεται ὑπὸ τὸν διαιρεθέντα ἀριθμὸν, ἀφαιρεῖται ἀπ' αὐτοῦ, καὶ δεξιὰ τοῦ υπολοίπου γράφεται τὸ ψηφίον τοῦ διαιρετέου τὸ ἀμέσως μετὰ τὸν διαιρεθέντα ἀριθμὸν. Ἐπειτα ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου γράφεται δεξιὰ τοῦ προγραμμένου πηλίκου καὶ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τὸ γινόμενον γράφεται ὑπὸ τὸν διαιρεθέντα ἀριθμὸν, ἀφαιρεῖται ἀπ' αὐτοῦ καὶ δεξιὰ τοῦ υπολοίπου γράφεται τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ

διαιρετέου. Ἐπειτα πάλιν διαιρεῖται ὁ νέος ἀριθμὸς κτλ, ἕως νὰ γραφθοῦν καὶ αἱ μονάδες τοῦ διαιρετέου καὶ νὰ διαιρεθῇ καὶ ὁ τελευταῖος αὐτὸς ἀριθμὸς. Ὁ δὲ ὑπὸ τὸν διαιρέτην γραμμένος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἦτοι τὸ ζητούμενον πολλοστὸν τοῦ διαιρετέου.

Ἄς διαιρεθῇ ὁ 8945 διὰ τοῦ 5, ἦτοι ἄς εὑρεθῇ τὸ ὕον τοῦ 8945.

Ἀφοῦ γραφθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἤδη εἶπομεν καὶ ἀντικρὺ φαί-
νονται, διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου 5 τὸν ἀριστερὸν ἀριθμὸν
8 χιλιάδας, (διότι ὁ 8 παριστάνει μονάδας περισσότερας τῶν τοῦ
διαιρέτου 5), ἦγουν λέγομεν τὸ ὕον τῶν 8 χιλιάδων εἶναι 1
χιλιάς καὶ κάτι· γράφομεν μόνον τὸ ἀκέραιον 1 ὑπὸ τὸν διαι-
ρέτην τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 5, γράφομεν τὸ γινόμενον
5 χιλιάδας ὑπὸ τὰς 8 χιλιάδας, ἀφαιροῦμεν 5 ἀπὸ 8 καὶ μέ-
νουν 3, δεξιὰ δὲ τοῦ 3 γράφομεν τὰς 9 ἑκατοντάδας τοῦ
διαιρετέου καὶ γίνονται 39 ἑκατοντάδες. Τώρα λέγομεν πάλιν
τὸ ὕον τῶν 39 ἑκατοντάδων εἶναι 7 ἑκατοντάδες καὶ κάτι· γράφομεν τὸ ἀκέ-
ραιον 7 δεξιὰ τοῦ προγραμμένου πηλίκου 1, πολλαπλασιάζομεν 7 ἐπὶ τὸν διαι-
ρέτην 5, γράφομεν τὸ γινόμενον 35 ἑκατοντάδας ὑπὸ τὸν 39 καὶ τὸ ἀφαιροῦ-
μεν, δεξιὰ δὲ τοῦ υπολοίπου 4 γράφομεν τὰς 4 δεκάδας καὶ γίνονται 44 δε-
κάδες. Τώρα πάλιν λέγομεν τὸ ὕον τῶν 44 δεκάδων εἶναι 8 δεκάδες καὶ κάτι·
γράφομεν τὸ ἀκέραιον 8 δεξιὰ τοῦ 7, τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέ-
την 5, γράφομεν τὸ γινόμενον 40 ὑπὸ τὸν 44, ἀφαιροῦμεν 40 ἀπὸ 44, δεξιὰ
τοῦ υπολοίπου 4 δεκάδες γράφομεν τὰς 5 μονάδας τοῦ διαιρετέου καὶ γί-
νονται 45 μονάδες. Τελευταῖον τὸ ὕον τῶν 45 μονάδων εἶναι σωστὰ 9 μονά-
δες, γράφομεν 9 δεξιὰ τοῦ 8, τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 5, γράφομεν τὸ γινό-
μενον 45 ὑπὸ τὸν 45, ἀφαιροῦμεν καὶ μένει 0. Λοιπὸν ὁ ὑπὸ τὸν διαιρέτην
γραφθεὶς ἀριθμὸς 4789 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον ἦγουν τὸ ὕον τοῦ 8945.

Σημ. ὁ 8, ὁ 39, ὁ 44 καὶ ὁ 45 ὀνομάζονται μερικοὶ διαιρετέου.

Ἄς διαιρεθῇ καὶ ὁ 58462 διὰ τοῦ 8, ἦγουν ἄς εὑρεθῇ τὸ ὕον τοῦ 58462.

Ἐδῶ διαιροῦνται πρῶτον αἱ 58 χιλιάδες διὰ 8, διότι τὸ ἐν
ἀριστερὸν ψηφίον 5 τοῦ διαιρετέου παριστάνει μονάδας ὀλι-
γώτερας τῶν τοῦ διαιρέτου 8. Τὸ πηλίκον εἶναι 7 χιλιάδες καὶ
μένουν 2· ἀφοῦ δὲ γραφθῶσι δεξιὰ τοῦ υπολοίπου 2 αἱ 4 ἑκα-
τοντάδες τοῦ διαιρετέου, διαιρεῖται ὁ 24 διὰ 8 καὶ τὸ πηλί-
κον εἶναι σωστὰ 3 χωρὶς νὰ μείνῃ υπόλοιπον. Γράφονται ὁ-
ποκάτω καὶ αἱ 6 δεκάδες τοῦ διαιρετέου· ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι
αἱ 6 ὀλιγώτεροι τῶν τοῦ διαιρέτου 8, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον μετὰ τὸ 3,
ἔπειτα γράφομεν καὶ τὰς δύο μονάδας τοῦ διαιρετέου δεξιὰ τῶν 6 δεκάδων,

καὶ διαιροῦντες **62** διὰ **8** ἔχομεν πηλίκον **7**, τὸ ὅποιον γράφομεν δεξιὰ τοῦ **0**, καὶ ὑπόλοιπον **6**· διαιροῦντες καὶ **6** διὰ **8** γράφομεν τὸ πηλίκον $\frac{6}{8}$ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιὰ τῶν **7** μονάδων. Λοιπὸν τὸ **8**ον τοῦ **58462** εἶναι **7307** $\frac{6}{8}$.

Πάντοτε πρέπει νὰ γράφωμεν **0** εἰς τὸ πηλίκον, ὁσάκις, ἀφοῦ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ υπολοίπου ἐν ψηφίον τοῦ διαιρέτου, ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου. Ἐπειτα γράφεται καὶ ἄλλο ψηφίον καὶ ἐξακολουθεῖ ἡ διείρεσις ὡς ἤδη εἴπομεν. Ἐάν δὲ μείνῃ εἰς τὸ τέλος ἀριθμὸς μονάδων μικρότερος τοῦ διαιρέτου, ὡς ἀνωτέρω ὁ **6**, ὅστις λέγεται κατάλοιπον τῆς διαιρέσεως, διαιρεῖται καὶ αὐτὸς κατὰ τὸν πίνακα, καὶ τὸ πηλίκον, τὸ ὅποιον εἶναι κλάσμα, γράφεται δεξιὰ τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου.

Ἐάν δὲ, ἀφοῦ ψηφίον τι τοῦ πηλίκου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τὸ γινόμενον δὲν τὸ γράψωμεν ὑπὸ τὸν διαιρεθέντα ἀριθμὸν καὶ ὕστερον νὰ τὸ ἀφαιρέσωμεν, ἀλλὰ τὸ ἀφαιρέσωμεν εὐθύς, τότε ἡ πράξις γίνεται ὀγλιγορώτερα.

Π. χ. εἰς τὴν τελευταίαν διείρεσιν, ἀφοῦ πολλαπλασιασθῇ ὁ **7** ἐπὶ **8**, τὸ γινόμενον **56** εὐθύς· τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ **58** καὶ μένουσιν **2**, τοῦτο δὲ τὸ **2** γράφομεν ὑπὸ τὸ **58**. Ἰδοὺ ἡ πράξις ὅλη.

	24	7307 $\frac{6}{8}$
Νὰ διαιρεθῶσι τὰ γινόμενα διὰ τῶν πολλαπλασιασμάτων		
τῶν παραδειγμάτων τοῦ 27 ἀριθμοῦ, ἐτι δὲ καὶ οἱ ἐξῆς	62	
ἀριθμοὶ πρὸς γύμνασιν.	6	
648305 7	5480357 4	94328 3
92645	4370089 $\frac{1}{4}$	31442 $\frac{3}{4}$

36. Διὰ νὰ διαιρῇ τις πολυψήφιον ἀριθμὸν δι' ἄλλου πολυψηφίου, πρέπει ν' ἀρχίσῃ ἀπὸ τοῦ νὰ διαιρῇ διαιρετὸν μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, ἤγουν ἀριθμὸν ὅστις νὰ ἔχῃ ἰσάριθμα ψηφία μὲ τὸν διαιρέτην, ἂν μόνον ᾖναι μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου, ἢ νὰ ἔχῃ ἐν ψηφίον περισσότερον τοῦ διαιρέτου, ἂν τὸ ἀριστερόν του παριστάνῃ ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ διὰ τοῦ ἀριστεροῦ ψηφίου τοῦ διαιρέτου παριστανόμενου.

α. Ἄς διαιρεθῇ ὁ **975** διὰ τοῦ **325**, ἥτοι ἄς εὑρεθῇ τὸ **325**ον τοῦ **975**.

Πρῶτον διαιρεῖται ὁ ἀριστερὸς **9** τοῦ διαιρέτου διὰ τοῦ ἀριστεροῦ **3** τοῦ διαιρέτου, διότι εἶναι μεγαλύτερος ἀριθμὸς, ἤγουν λέγομεν τὸ **3**ον τοῦ **9** εἶναι **3**· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν **3** ἐπὶ τὸν διαιρέτην ὅλον καὶ τὸ γινόμενον **975** τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρέτου **975**· καὶ ἐπειδὴ μένει κατάλοιπον **0**, ὁ **3** εἶναι σωστὰ τὸ ζητούμενον πηλίκον ἥτοι τὸ **325**ον τοῦ **975**.

β'. Ἄς διαιρεθῇ ὁ **5915** διὰ τοῦ **845**, ἥτοι ἄς εὑρεθῇ τὸ **845**ον τοῦ **5915**.

Ἐδῶ διαιρεῖται ὁ διὰ τῶν δύο ἀριστερῶν ψηφίων τοῦ διαιρέτου παριστανόμενος ἀριθμὸς **59** διὰ τοῦ ἀριστεροῦ τοῦ διαιρέτου **8**, διότι τὸ ἐν ἀριστερὸν ὁ παριστάνει ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ ἀριστεροῦ **8** τοῦ διαιρέτου, ἤγουν λέγομεν τὸ **8**ον τοῦ **59** εἶναι **7** καὶ κατὰ πολλαπλασιάζομεν τὸν **7** ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέ-

την, καὶ τὸ γινόμενον 5913 ἀφαιρούμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου καὶ μένει 0. Λοιπὸν 7 εἶναι τὸ 845ον τοῦ 5913.

γ'. Ἀς διαιρεθῇ ὁ 55456 διὰ τοῦ 6932, ἥτοι ἄς εὑρεθῇ τὸ 6932ον τοῦ 55456.

Διαιρεῖται ὁ 55 διὰ τοῦ 6 ὡς ἤδη εἶπομεν καὶ εὐρίσκεται 9 καὶ κατ' ἄλλα πολλαπλασιαζόμενος ὁ 9 ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην παράγει γινόμενον 62388, μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου· λοιπὸν δὲν εἶναι 9 τὸ ζητούμενον πηλίκον. Τώρα πολλαπλασιάζεται ὁ 8, ὁ κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ 9, ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην· καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον εἶναι 55456, ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον, ἀφαιρεῖται ἀπ' αὐτοῦ καὶ μένει 0· λοιπὸν 8 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Σημ. ὅτι ὁ 9 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην παράγει γινόμενον μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου ἤμπορούσε νὰ πληροφορηθῇ τις καὶ ἂν ἐπολλαπλασίαζε τὸν 9 ἐπὶ μόνον τὰ δύο ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου, τὸν ἀριθμὸν 69 διότι τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι 621, ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ ἐκ τῶν τριῶν ἀριστερῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ 554· ἐκ δὲ τούτου εἶναι φανερόν ὅτι καὶ ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ 9 ὅλως παράγει γινόμενον μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου 55456. αὕτη δ' ἡ δοκιμὴ εὐκόλυνει τὴν πρᾶξιν, καὶ εἶναι καλὴ νὰ τὴν μεταχειρίζομεθα πάντοτε.

δ'. Ἀς διαιρεθῇ ὁ 5256 διὰ τοῦ 584.

Ἐδῶ τὸ 5ον τοῦ 52 εἶναι 10. Ἀλλ' ὅταν ὁ διαιρετέος ᾖ καὶ μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου, ἀλλὰ μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, ποτὲ τὸ πηλίκον δὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 9. Ἀλλ' ἐδῶ ὁ 5256 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 584 καὶ μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ 5840. Λοιπὸν τὸ πηλίκον δὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 9, ἥτοι δὲν εἶναι ὁ 10 τὸν ὅποιον ἤθαμεν. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τὸν 9 ἐπὶ τὸν διαιρέτην· καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 5256 εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον, καὶ ἀφαιρούμενον δίδει 0 ὑπόλοιπον, ὁ 9 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

ε'. Ἀς διαιρεθῇ ὁ 709 διὰ τοῦ 94.

Τὸ 9ον τοῦ 70 εἶναι 7, τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 94 εἶναι 658, μικρότερον τοῦ διαιρετέου 709, καὶ ἀφαιρούμενον ἀπ' αὐτοῦ ἀφίνει κατάλοιπον 51. Τώρα πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ 51 διὰ τοῦ 94. Ἀλλὰ τὸ 94ον τοῦ 51 εἶναι κλάσμα· ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον 51 καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην 94, ἔχουν τὸ κλάσμα $\frac{51}{94}$ (34)· λοιπὸν τὸ ζητούμενον πηλίκον ἥτοι τὸ 94ον τοῦ 709 εἶναι ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $7\frac{51}{94}$.

37. Πολυψήφιος ἀριθμὸς ὅποιοςδήποτε διαιρεῖται δι' ἄλλου πολυψηφίου μικροτέρου του, ὅπως διαιρεῖται καὶ διὰ μονοψηφίου (35)· ἔχουν πρῶτον διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου, ὡς ἤδη εἶπομεν, μέρος τοῦ διαιρετέου ἀπὸ τ' ἀριστερὰ του ψηφία συγκείμενον, καὶ ἀπὸ τόσα ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, ἂν ᾖ καὶ μεγαλύτερον αὐτοῦ, εἰδὲ μὴ καὶ ἀπὸ ἐν περισσότερον. Ἐπειτα δεξιὰ τοῦ υπολοίπου γράφεται τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὡς ὁ πρότερον, ἂν ᾖ καὶ μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου, εἰδὲ μὴ, πρῶτον τίθεται 0 εἰς τὸ πηλίκον, καὶ ἔπειτα γράφεται καὶ ἄλλο ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρεῖται ὁ προκύπτων ἀριθμὸς, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἄς διαιρεθῇ ὁ 5082272 διὰ τοῦ 643, ἥτοι ἄς εὑρεθῇ τὸ 643ον τοῦ 5082272.

Πρῶτον διαιρεῖται ὁ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τετραψήφιος ἀριθμὸς 5082 διὰ τοῦ διαιρέτου (διότι ὁ τριψήφιος 508 εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου), ἦγουν λέγομεν τὸ 6ον τοῦ 50 εἶναι 8 καὶ κάτω· ἀλλὰ πολλαπλασιάζοντες τὸν 8 ἐπὶ τὰ 2 ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου, τὸν ἀριθμὸν 64, εὐρίσκομεν γινόμενον 512, μεγαλύτερον ἀριθμὸν τοῦ 508, διὰ τοῦτο γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην 7 καὶ τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην, τὸ δὲ γινόμενον 4504, ὡς μικρότερον τοῦ 5082, ἐνῶ τὸ εὐρίσκομεν, τὸ γράφομεν ὑπὸ τὸν 5082, καὶ τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ, δεξιά δὲ τοῦ ὑπολοίπου 581 γράφομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 2 τοῦ διαιρετέου.

Διαιροῦμεν τώρα τὸν ἀριθμὸν 5812 διὰ τοῦ διαιρέτου, διότι εἶναι μεγαλύτερος αὐτοῦ, ἦγουν λέγομεν τὸ 6ον τοῦ 58 εἶναι 9 καὶ κάτω· πολλαπλασιάζομεν τὸν 9 ἐπὶ τὰ δύο ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ γινόμενον 576 εἶναι μικρότερον τοῦ 581, διὰ τοῦτο γράφομεν 9 εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιά τοῦ 7 καὶ τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην, τὸ γινόμενον 5787 τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 5812 καὶ δεξιά τοῦ ὑπολοίπου 25 γράφομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου.

Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 257 εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου· διὰ τοῦτο γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον δεξιά τοῦ 9. Γράφομεν ἔπειτα καὶ τὰ τελευταῖον ψηφίον 2 τοῦ διαιρετέου δεξιά τοῦ 257 καὶ διαιροῦμεν τὸν 2572 διὰ τοῦ διαιρέτου ὡς πρότερον, γράφομεν τὸ πηλίκον 4 εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιά τοῦ 0, τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον 2572 ἀπὸ τοῦ 2572, ἔχομεν κατὰλοιπον 0. Λοιπὸν ὁ 7904 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Σημ. ὁ 5082, ὁ 5812, ὁ 257 καὶ ὁ 2572 ὀνομαζονται μερικοὶ διαιρετέοι.

4038918|598

6754 $\frac{80}{808}$

326510634|6478

50403

8093023104|8543

947328

38. Ἡ πράξις γίνεται ὀλιγωρότερα, ἐάν ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ ἡ ἀφαίρεσις τοῦ γινομένου ἀπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου γείνωσι συγχρόνως, ὡς ἐδῶ λέγομεν.

Ἄς διαιρεθῇ ὁ 3928 διὰ τοῦ 864.

Τὸ 8ον τοῦ 39 εἶναι 4 καὶ κάτω· γράφομεν 4 ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ τὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην οὕτως· λέγομεν 4 εἰς 4 16, καὶ εὐθὺς ἀφαιροῦμεν 16 ἀπὸ 18 (νοοῦντες τὸ 8 18) 2, τὸ ὅποιον γράφομεν ὑπὸ τὸ 8. Ἐπειτα 4 εἰς 6 24, καὶ ἕνα 25 (διότι ἀφηρέσαμεν

3928|864

472 $\frac{472}{864}$

ἀπὸ 18), 25 ἀπὸ 32 (νοοῦντες τὸ 2 32) 7, τὸ ὅποιον γράφομεν ὑπὸ τὸ 2. Τελευταῖον 4 εἰς 8 32 καὶ 3 35 (διότι ἀφηρέσαμεν ἀπὸ 32), 35 ἀπὸ 39 4, τὸ ὅποιον γράφομεν ὑπὸ τὸ 9. Ἐπειτα διαιροῦμεν καὶ τὸ 472 διὰ τοῦ 864, καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον $\frac{472}{864}$ εἰς τὸ πηλίκον δεξιά τοῦ 4.

Πρὸς γύμνασιν οὕτω νὰ ἐκτελεσθῶσιν ὅλοι αἱ προηγούμεναι διαιρέσεις. ἴδου καὶ ἄλλη οὕτω γινόμενη.

4687370|7382

25837 $\frac{635}{7382}$

36910

0

39. Ὅταν ἔχωσι μηδενικά εἰς τὸ τέλος καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης, πρῶτον διαγράφονται τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει ὁ ἔχων τὰ ὀλιγώτερα, καὶ οἱ μετὰ τοῦτο μένοντες ἀριθμοὶ διαιροῦνται ὡς ἀνωτέρω. Ἀντὶ λοιπὸν νὰ διαιρεθῇ ὁ 2352000 διὰ τοῦ 4200, ἀφοῦ διαγραφῶσιν 00 καὶ ἀπὸ τοὺς δύο, μένει νὰ διαιρεθῇ 23520 διὰ τοῦ 42, καὶ εὐρίσκεται πηλίκον 560.

40. Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 10 ἢ τοῦ 100 κτλ, ἐάν ὑπὸ τὸ ἐν δεξιὸν ψηφίον του ἢ ὑπὸ τὰ δύο κτλ. τεθῇ παρονομαστής ὁ 10 ἢ ὁ 100 κτλ.

Ἄς διαιρεθῇ ὁ 5694 διὰ 10, ἥτοι ἄς εὑρεθῇ τὸ δέκατον τοῦ 5694. Τὸ δέκατον εἶναι $569 \frac{4}{10}$. Ὡσχύτως τὸ ἑκατοστὸν αὐτοῦ εἶναι $65 \frac{94}{100}$ τὸ χιλιοστὸν αὐτοῦ εἶναι $5 \frac{94}{1000}$. Ταῦτα εὐρίσκονται ἂν ἐκτελέσῃ τις τὴν διαίρεσιν ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν.

41. Συνήθως ἡ διαίρεσις δοκιμάζεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, καὶ ἂν τὸ γινόμενον ᾖ ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον, σημεῖον ὅτι ἡ διαίρεσις εἶχε γείνει χωρὶς λάθος καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς.

Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς δοκιμάζεται διὰ τῆς διαίρεσεως τοῦ γινομένου διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἂν τὸ πηλίκον ᾖ ἴσον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, σημεῖον ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶχεν ἐκτελεσθῇ χωρὶς λάθος καὶ τὸ γινόμενον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς. Ἀλλ' αἱ τοιαῦται δοκιμαὶ δὲν εἶναι ἀξιοσύσταται, διότι ὑπόκεινται καὶ αὐταὶ εἰς λάθος. Τὰ αὐτὰ λέγομεν καὶ περὶ τῆς δοκιμῆς τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως.

Πρὸς γύμνασιν νὰ δοκιμασθῶσιν οὕτως ὅλοι αἱ προηγούμενοι πολλαπλασιασμοὶ καὶ διαιρέσεις.

Περὶ Λόγου καὶ ἀναλόγου ἀριθμῶν.

42. Λόγος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς τρίτος γινόμενος ἐκ τῆς μὲνίδος, ὅπως ὁ εἰς τῶν δύο ἀριθμῶν γίνεται ἐκ τοῦ ἄλλου. Π. χ. ὁ 12 εἶναι τρις 4, ἥτοι 4 καὶ 4 καὶ 4· λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς 3 εἶναι ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 4. Ἡ ἀντιστρόφως ὁ 4 εἶναι τρίτον τοῦ 12· λοιπὸν τὸ $\frac{1}{3}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ 4 πρὸς τὸν 12. (ΠΡΑΚΤ. ΑΡΙΘ. ΒΑΦΑ).

ὡσαύτως 5 εἶναι ὁ λόγος τοῦ 20 πρὸς τὸν 4, τὸ δὲ $\frac{1}{2}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ 4 πρὸς τὸν 20.

Σμ. α. Ἐδὼ βλέπει τις ὅτι ἄλλος εἶναι ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 4, καὶ ἄλλος ὁ τοῦ 4 πρὸς τὸν 12. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ προσδιορίζηται πάντοτε τίς λόγος ζητεῖται, π. χ. ὁ τοῦ 12 πρὸς τὸν 4, ἢ ὁ τοῦ 4 πρὸς τὸν 12.

Σμ. β. Ἀπὸ μὲν τούτων ὁρῶν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ὁ λόγος τοῦ γινομένου πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον, ἀπὸ δὲ τούτων ὁρῶν τῆς διαιρέσεως ὁ διαιρετὴς εἶναι ὁ λόγος τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸ πηλίκον.

43. Ὁ λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον εὐρίσκεται ἂν διαιρεθῇ ὁ πρῶτος διὰ τοῦ δευτέρου, τοῦ ἔχοντος πρὸ αὐτοῦ τὴν πρῶτον.

Π. χ. τίς εἶναι ὁ λόγος τοῦ 672 πρὸς τὸν 56; Διαιροῦμεν τὸ 672 διὰ τοῦ 56, καὶ τὸ πηλίκον 12 εἶναι ὁ ζητούμενος λόγος, ἤγουν ὁ 672 εἶναι δωδεκάκις 56. Τίς εἶναι ὁ λόγος τοῦ 5 πρὸς τὸν 8; Διαιροῦντες τὸν 5 διὰ τοῦ 8 ἔχομεν $\frac{5}{8}$ · λοιπὸν ὁ λόγος τοῦ 5 πρὸς τὸν 8 εἶναι $\frac{5}{8}$, ἤγουν ὁ 5 εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ 8. Τελευταῖον τίς εἶναι ὁ λόγος τοῦ 38 πρὸς τὸν 7; Διαιροῦντες τὸν 38 διὰ τοῦ 7 ἔχομεν $5\frac{3}{7}$, καὶ οὗτος εἶναι ὁ λόγος τοῦ 38 πρὸς 7, δηλ. ὁ 38 εἶναι πεντάκις 7 καὶ $\frac{3}{7}$ τοῦ 7.

Σμ. Ἐκ τούτου φανερόν ἐστι ὁ λόγος εἶναι ἀκέραιος ἢ κλάσμα ἢ μικτὸς ἀριθμὸς.

44. Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ὁ λόγος ᾖ ἴσος μὲ τὸν λόγον δύο ἄλλων ἀριθμῶν, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ὀνομάζονται ἀνάλογοι, ἢ οἱ δύο πρῶτοι ἀνάλογοι τῶν δύο δευτέρων, ἢ ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δύο δευτέρους. Π. χ. ὁ λόγος τοῦ 36 πρὸς τὸν 12 εἶναι 3, καὶ ὁ λόγος τοῦ 24 πρὸς τὸν 8 εἶναι πάλιν 3· λοιπὸν ὁ λόγος τοῦ 36 πρὸς τὸν 12 εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ 24 πρὸς τὸν 8· λοιπὸν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ 36, 12, 24, 8, τῶν ὁποίων νοεῖται κατὰ λόγον ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δευτέρον καὶ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον, καὶ ὅτι οἱ δύο λόγοι εἶναι ἴσοι, εἶναι ἀνάλογοι, ἢ οἱ δύο 36 καὶ 12 εἶναι ἀνάλογοι τῶν δύο 24 καὶ 8.

Προβλήματα εἰς λύσιν.

45. Τῶν ἀκολουθῶν προβλημάτων οἱ ἀριθμοὶ, ἐὰν ᾖναι τρεῖς, εἶναι συσχετισμένοι ὥς οἱ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ οἱ τῆς διαιρέσεως ἀριθμοὶ, ἤγουν εἰς ἀριθμὸς εἶναι τοιοῦτον πολλαπλάσιον ἄλλου, ὅσας μονάδας ἔχει τρίτος ἀριθμὸς, ἢ εἰς ἀριθμὸς εἶναι τοιοῦτον πολλοστὸν ἄλλου, ὅποῖον πολλοστὸν τρίτου ἀριθμοῦ εἶναι ἡ μονὰς αὐτοῦ. Καὶ ἂν μὲν ἄγνωστος ᾖναι ὁ πολλαπλάσιος τοῦ ἄλλου, πρὸς εὐρεσίν του πολλαπλασιάζεται ὁ ἄλλος ἐπὶ τὸν τρίτον ἂν δὲ ἄγνωστος ᾖναι τὸ πολλοστὸν τοῦ ἄλλου, πρὸς εὐρεσίν του διαιρεῖται ὁ ἄλλος διὰ τοῦ τρίτου. Ἄν δὲ ἄγνωστος ᾖναι ὁ τρίτος, ᾗται ὁ λόγος τοῦ ἐνὸς πρὸς τὸν ἄλλον, πάλιν διαιρεῖται ὁ πρῶτος διὰ τοῦ δευτέρου. Ἐκ δὲ τῶν τριῶν ἀριθμῶν τῶν προβλημάτων δύο εἶναι πάντοτε ὁμοειδῆς, ἤγουν εἶναι ἀριθμοὶ τοῦ αὐτοῦ πράγματος, οἷον ἀριθμοὶ ἐκάδων, ἢ ἀριθμοὶ πῆχεων κτλ· ὁ δὲ τρίτος εἶναι ἑτεροειδὴς πρὸς τοὺς δύο ἄλλους, ἤγουν εἶναι ἀριθμὸς ἄλλου πράγματος, καὶ οὗτος εἶναι ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων. Ὡστε, ἔταν ἄγνωστος ᾖναι ὁ ἑτεροειδὴς πρὸς τοὺς δύο

ἄλλους, εἶναι πάντοτε λόγος αὐτῶν, καὶ εὐρίσκεται διὰ τῆς διαίρεσως· τότε πρέπει καλὰ νὰ προσδιορισθῇ τίς τῶν δύο ὁμοειδῶν πρέπει νὰ ᾖναι διαιρετός. Εἰς δὲ τὰς ἄλλας περιπτώσεις, πολλαπλασιαστέος καὶ διαιρετός εἶναι ὁ ὁμοειδής τοῦ ἀγνώστου. Εἶναι δὲ καὶ τινὰ προβλήματα πολυπλοκώτερα καὶ ἔχοντα πλειοτέρους τῶν τριῶν ἀριθμούς· τότε πρέπει νὰ γείνωσι πλειότεραι πράξεις πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου.

1. Κομμάτιον τσόχας 75 πύχων μακρὺ πρὸς 24 δραχ. τὸν πύχον πόσον ἀξίζει; — ἂ π. 1800 δρ
2. 100 κομμάτια μαλλίνου ὑφάσματος πρὸς 678 δρ. τὸ ἐν, πόσον ἀξίζει; — δρ. 67800.
3. Ποσὸν εἶλα πληρώσει διὰ 76 σάκκου, ἄλευρον, ἐνῷ ὁ σάκος τιμᾶται 65 δραχ.; — 4940 δρ.
4. Εἰπώλησι τις 273 σιδηρὰ κραββάτια πρὸς 43 δρ. τὸ ἐν, πόσας δρ. ἔλαβε;
5. Εἰς περιβόλιον εἶναι 35 σειραὶ δένδρων, εἰς ἑκάστην δὲ σειράν εἶναι 84 δένδρα· πόσα εἶναι ὅλα τὰ δένδρα; — δένδρα 2940.
6. Εἰς σιμαίαν πινὰ εἶναι 5 σειραὶ ἄστρον· ἑκάστη ἀνὰ 8 ἄστρον· πόσα εἶναι τὰ εἰς τὴν σιμαίαν ἄστρον;
7. Ἐχὼ 845 ἀντίτυπα βιβλίου τινος, καθὲν δὲ τούτων ἔχει 345 σελίδας· πόσαι εἶναι ὅλων αἱ σελίδες;
8. Χωράφιον τὸ μὲν μήκος εἶναι 245 πύχων, τὸ δὲ πλάτος· 68 πύχων· πόσον πηχυαίων τετραγώνων εἶναι ὅλον τὸ χωράφιον;
9. 23 ἄνθρωποι ἡγόρασαν ὑποστατικόν τι καὶ ἐπλήρωσε καθείς 3800 δραχ. πόσον ἀξίζει τὸ ὑποστατικόν; — 95000 δραχ.
10. 12 παιδία κτίσαντες οἰκίαν ἔλαβον ἑκάστην ἐπαίτην ἀνὰ 15 λεπτά· πόσα λεπτὰ ἔλαβον ἡ ἐπαίτης;
11. 235 κτίσται κτίσαντες οἰκίαν ἔλαβον ἑκάστην χρῆματα, τὰ ὅποια μοιρασθέντες ἔλαβον μερίδιον καθείς 548 δρ. πόσα ἦσαν τὰ χρῆματα ὅλα;
12. Πόσοι στρατιῶται εἰμποροῦν νὰ καταλύσουσιν εἰς στρατῶνα ἔχοντα 45 δωμάτια, τῶν ὁποίων καθὲν χωρεῖ 20 στρατιώτας;
13. 135 ἄξιωματικοί, οἵτινες μισθοδοτοῦνται ὁ εἰς μὲ τὸν ἄλλον ἀνὰ 250 δραχμ., τὸν μῆνα, πόσας δραχμὰς λαμβάνουσιν κατὰ μῆνα ἀπὸ τῶ ταμείου;
14. Ταχυδρομοί τις ὁδοπορῶν 8 σταδία τὴν ὥραν εἰς 14 ὥρας, πόσα στάδια θέλει διδύσει; (Τὸ στάδιον ἰσοδυναμεῖ μὲ 1000 πύχας).
15. Ἀτμοπλοῖον διαπλεῖν 11 μίλια τὴν ὥραν εἰς 24 ἡμερονύκτιον πόσα μίλια θέλει διεπλεύσει;
264. (Τὸ μίλιον τοῦτο ὑποτίθεται ἰσοδυναμῶν μὲ 1834 πύχας). Πόσους πύχας λοιπὸν διαπλεῖ τὸ ατμοπλοῖον εἰς μίαν ὥραν καὶ πόσους εἰς 24 ἡμερονύκτιον;
16. Ἡ γῆ κινεῖται περὶ τὸν ἥλιον 109904 σταδία τὴν ὥραν· πόσα στάδια διατρεχεῖ ἡ γῆ εἰς 365 ἡμέρας;
17. 75 σκαφεῖς ἦναι ἐν ἀδελᾷ τινι εἰς 18 ἡμέρας· πόσοι σκαφεῖς ἦθελον τὸν πλοῦν εἰς μίαν ἡμέραν; ἢ εἰς πόσας ἡμέρας εἰς σκαφεῖς ἦθελε τὸν ἀνορύξει μόνος τοῦ; — 1350.
18. Εἰς 30 ἡμέρας 95 ἄνθρωποι τρώγουν 1275 ὀκάδας ἄρτου· εἰς 1 ἡμέραν πόσοι ἄνθρωποι, ἴσα μὲ τοὺς πρῶτους τρώγοντας, εἰμποροῦν νὰ φάγουν τὸν αὐτὸν ἄρτον; ἢ εἰς πόσας ἡμέρας 100 ἄνθρωποι ἦθελε φάγει τὸν αὐτὸν ἄρτον;
19. Πρὸς ἐνδυμασίαν ἀνθρώπων τινῶν ἐκρεμάσθησαν 245 πύχας τσόχας 3 πύχων πλατείας ἀπ' ἄλλην τσόχαν 1 πύχ. πλατείας πόσοι πύχ. χρειάζονται πρὸς ἐνδυμασίαν τῶν αὐτῶν ἀνθρώπων; — 735.
20. Ἡ ὀκά ἰσοδυναμεῖ κατὰ τὸ βάρος μὲ 400 δράμια· 68 ὀκάδες μὲ πόσα δράμια ἰσοδυναμοῦν; — 27200 δράμ.
21. Τὸ ἡμερονύκτιον ἰσοδυναμεῖ μὲ 24 ὥρας, ἡ ὥρα ἰσοδυναμεῖ μὲ 60 λεπτά· μὲ πόσα λεπτὰ ἰσοδυναμοῦν 94 ἡμερονύκτια; — 135360.
22. Τὸ πενταδραχμον ταλλάρον ἀξίζει 5 δραχμὰς, ἡ δραχμὴ ἀξίζει 100 λεπτά. 203 ταλλάρα μὲ πόσα λεπτὰ ἰσοδυναμοῦν;

23. Ἡ ὀργυιά εἶναι μῆκος ἴσον μὲ 6 πόδας, ὁ πός· εἶναι μῆκος ἴσον μὲ 12 δακτύλους, καὶ ὁ δακτύλος εἶναι μῆκος ἴσον μὲ 12 γραμμὰς· 64 ὀργυιαί μὲ πόσους πόδας, μὲ πόσους δακτύλους, καὶ μὲ πόσας γραμμὰς εἶναι ἰσομήκεις;

24. 1 δραχμὴ εἰς ἕν ἔτος φέρει κέρδος ἢ τόκον 8 λεπτά· 450 δρ. εἰς 3ν ἔτος πόσα λεπτά φέρουν τόκον; ἢ εἰς 6 ἔτη μία δραχμὴ πόσον τόκον φέρει; ἢ ἐπὶ 450 δρ. εἰς 6 ἔτη πόσον τόκον φέρουσιν;

25. Ποῖον εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 12, 20 καὶ 74; Ποῖον εἶναι τὸ γινόμενον τῶν 6, 17,

24, καὶ 520; ἢ ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποῖου παράγοντες εἶναι οἱ 4, 13 καὶ 7.

26. Μὲ 6148 δραχ. ἡγόρασε τις 124 ἀσκὺς ἐλαίου· πόσον ἀξίζει ὁ εἰς ἀσκός; — 82 δρ.

27. 35 βοδία ἐπωλήθησαν 2835 δραχ. πόσον ἀξίζει τὸ ἕν βοδίον; — 81 δραχ.

28. Εἰς 312 κιθῶτια ἴσα ἐμπεριέχονται 17408 ἐλάδες τσαῖ· πόσαι ἐλάδες εἶναι εἰς καθὴν κιθῶτιον;

29. Οἱ κάτοικοι χωρίου τινὸς εἶναι 1740, καὶ δὲ οἰκίαι αὐτοῦ εἶναι 145· πόσοι ἄνθρωποι κατοικοῦν εἰς ἑκάστην οἰκίαν;

30. Μὲ 2896 δραχ. πόσους ἀσκὺς ἐλαίου ἀγοράζει τις πρὸς 52 δραχ. τὸν ἀσκόν; — 248.

31. Εἰς 312 βοδία ἐπωλήθησαν 2835 δραχ. πρὸς 81 δραχμὴν τε ἕν· πόσα ἦσαν αὐτά; — 35.

32. Ἐάν 17408 ἐλάδες τσαῖ εἶναι διαμοιρασμένον εἰς κιθῶτια ἀνὰ 34 ἐλάδας εἰς καθὴν, εἰς πόσα κιθῶτια εἶναι διαμοιρασμένον;

33. 1740 εἶναι οἱ κάτοικοι χωρίου τινος, κατοικοῦν δὲ ἀνὰ 12 εἰς ἑκάστην οἰκίαν· πόσαι εἶναι αἱ οἰκίαι τοῦ χωρίου;

34. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 6584, ὁ δὲ εἰς τῶν παραγόντων τοῦ εἶναι 488· τίς εἶναι ὁ ἄλλος παράγων;

35. Πόσα λεμονία εἶναι τὸ 78ν τῶν 18096 λεμονίων;

36. Ἄνθρωποι τινες ἐχρεώσθουν 18950 δραχ. τὰς ὁποίας ἐπλήρωσαν ὅσωντες καθείς ἀνὰ 25 δρ. πόσαι ἦσαν αὐτοί; ἢ ἂν οἱ ἄνθρωποι ἦσαν 738, πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσε καθείς;

37. Τίς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 135 παράγει γινόμενον τὸν ἀριθμὸν 808710; ἢ ἐπὶ τίνα ἀριθμὸν πολλαπλασιαζόμενος ὁ 64 παράγει τὸ 704.

38. 245 ἄνθρωποι ἐκέρδισαν 12340 δρ. πόσαι ἀνέχουν εἰς ἕνα ἑκαστὸν αὐτῶν;

39. Ὁ μνηστὴς μισθὸς τάγματός τινος στρατιωτῶν εἶναι 12600 δραχμαί. πόσαι εἶναι οἱ στρατιῶται τοῦ τάγματος, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἑκάστος λαμβάνει ἀνὰ 16 δραχμὰς τὸν μῆνα;

40. Ἐάν ὁ ἀριθμὸς 4608 νοηθῇ ὅτι σύγκειται ἀπὸ πολλῶν 72· ἀπὸ πόσων 72 σύγκειται; Ἐάν τῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 25 προβλημάτων ἀγνωστος μὲν θεωρηθῇ εἰς τῶν γνωστῶν, γνωστὸς δὲ ὁ ἀγνωστος, τρέπεται καθὴν εἰς δύο ὅμοια μὲ τὰ ἀπὸ τοῦ 26 μέχρι τοῦ 40. Π. χ. τὸ 1 μεταβάλλεται εἰς τὰ

41. Κομματίον τούτου· 75 πύγων μακρὸν ἀξίζει 1800 δραχμὰς· πόσον ἀξίζει ὁ εἰς πῦγος;

42. Ἐάν ὁ πῦγος τούτου τινὸς τιμᾶται 24 δραχμὰς, μὲ 1800 δραχμὰς πόσους πῦγ· ἀγοράζει τις; Τὸ 9 μεταβάλλεται εἰς τὰ

43. 25 κτηματία ἡγόρασαν ὑποστατικὸν τι ἀντὶ 95000 δραχ. πόσα ἔδωκε καθείς;

44. Ἄνθρωποι τινες ἡγόρασαν ὑποστατικὸν ἀντὶ 95000 δραχμ. πληρώσαντες καθείς ἀνὰ 3500 δρ. πόσοι ἦσαν αὐτοί;

Τὸ 14 μεταβάλλεται εἰς τὰ

45. Ἐάν ταχυδρόμος εἰς 14 ὥρας ὁδοπορῇ 112 στάδια, εἰς μίαν ὥραν πόσα στάδια ὁδεύει;

46. Ταχυδρόμος, ὅστις ὁδοπορεῖ 8 στάδια τὴν ὥραν, 112 στάδια εἰς πόσα; ἡμέρας θέλει τὰ διατρίξει;

Τὸ 17 μεταβάλλεται εἰς τὰ

47. Ἐάν αὐλακὰ τινα 1330 σκαφεῖς τὸν ἥλιοξαν εἰς μίαν ἡμέραν, 75 σκαφεῖς τὸν αὐτὸν εἰς πόσας ἡμέρας θέλουν τὸν ἀνυρῆξει;

48. Ἐάν 1330 σκαφεῖς ἥλιοξαν αὐλακὰ τινα εἰς μίαν ἡμέραν, εἰς 18 ἡμέρας πόσοι σκαφεῖς εἰμπεροῦν γὰ τὸν ἀνυρῆξιν;

Τὸ 20 μεταβάλλεται εἰς τὰ

49. 27200 σκαφεῖς τοιοῦτοι μὲ 68 ἐλάδας· μὲ πόσα δράμματα τοιοῦτα εἶναι ἑκά;

80. Εάν 400 δράχμια ισοβαρύν με 1 ὀκάν, 27200 δράχμια με πόσας ὀκάδας ισοβαρύν;
 Ἐὰ δὲ τοῦτου ἴνυσθ' τις πῶς θέλει μεταβάλλει καὶ τὰ λεπτὰ.
 Ἀντιστρόφως, καὶ τὰ ἀπὸ τοῦ 26 μέχρι τοῦ 40 προβλήματα μεταβάλλονται εἰς ἄλλα παρόμοια μὲ
 τὰ ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 25 Π. χ. τὸ 26 τρέπεται εἰς τοῦτο,
 51. Εάν εἰς ἀσκὸς ἐλαίου τιμᾶται 52 δραχμαί, 124 ἀσκοὶ πόσον ἀξίζουν;
 Οὕτως καὶ τὰ ἄλλα.
 52. Εάν τις φυλάττῃ 80 λεπτά τὴν ἡμέραν ἀφ' ὧσα κερδίζει, πόσον θέλει ἔχει εἰς ἓν ἔτος; καὶ
 πόσα θέλει ἔχει εἰς 24 ἔτη;
 53. Αἰὶκὰ νὰ δώσῃ τις 50000 δραχμαί πρὸς εἰς τὴν δεκαετῇ κόρην του τὴν ἵππειαν θέλει ὁ-
 πανδρεύσει εἰς τὸ εἰκοστὸν ἔτος τῆς ἡλικίας της πόσας δρ. κατὰ μῆνα πρέπει νὰ θέτῃ κατὰ μέρος.
 54. Εἰς σχολεῖον τι εἶναι 5 τετραὶ θρανίων ἀνὰ 3 θρανία ἑκάστη, ἑκατὸν δὲ θρανίων χωρὶ 7 μαν-
 ῆτας· προσέτι εἶναι 3 θρανία χωροῦντα ἀνὰ 10 μαθητὰς ἑκαστὸν, καὶ ἐν ἄλλῃ, ὅπου εἰμποροῦν νὰ
 καθίσουν 14 μαθηταί· πόσους μαθητὰς χωρεῖ τὸ σχολεῖον τοῦτο;
 55. Πόσας ὀκάδας βουτύρου ἀξίζοντες ἢ δραχ. τὴν ὀκάν πρέπει νὰ δώσῃ εἰς ἀγοράν 23 κιβωτίων
 τασί πρὸς 30 δραχμαί τὸ κιβώτιον;
 56. Εἰς περιβολίον εἶναι 70 μύληαι, τῶν ἵππων ἑκάστη καρποφορεῖ 35 ὀκάδας μῆλα, πωλούμενα
 πρὸς 25 λεπτά τὴν ὀκάν, 41 βοδαικινεῖαι καρποφοροῦσαι ἑκάστη ἀνὰ 20 ὀκάδας βοδαικίνα, πωλούμενα
 πρὸς 60 λεπτά τὴν ὀκάν, καὶ 40 πορτογαλεῖαι καρποφοροῦσαι ἑκάστη ἀνὰ 100 πορτογαλίας, ἑκατὸν-
 τῶν ἵππων πωλεῖται 2 λεπτά· πόσον δραχμῶν εἰσυδήμα ἔχει ἐκ τούτων ὁ κύριος τοῦ περιβολίου;
 57. 100 δραχμαί εἰς ἓν ἔτος φέρουν τόκον 12 δραχ. 2380 εἰς 7 ἔτη πόσον τόκον φέρουσιν;
 Ἐπειδὴ αἱ 100 δραχ. φέρουν τόκον 12 εἰς ἓν ἔτος, ἢ 1 ἥτοι τὸ ἑκατοστὸν
 τῶν 100 θέλει φέρεи τὸ ἑκατοστὸν τῶν 12, ἤγουν τὸ 100ον τῶν 1200 λεπ. ἥτοι
 12 λεπ. αἱ δὲ 2380 θέλουν φέρεи τόκον εἰς ἓν ἔτος 2380 φοράς 12 λεπ. ἥτοι
 30960 λεπτὰ, καὶ εἰς 7 ἔτη ὁ τόκος θέλει εἶσθαι ἑπτάνικς 30960, ἤγουν 216720
 ἢ $2167 \frac{20}{100}$, ἢ τέλος 2167 δραχ. καὶ 20 λεπτά.
 58. 642 δραχ. ἱστέρον τόκον εἰς ἓν ἔτος 36 δραχ. 12672 δρ. πόσον τόκον φέρουσιν εἰς τὸν αὐτὸν
 χρόνον;
 59. Ἀνέμισέ τις οἶνον τριῶν τιμῶν 240 ὀκάδας πρὸς 40 λεπτά τὴν ὀκάν, 150 ὀκάδας πρὸς 50 λεπ.
 τὴν ὀκάν, καὶ 330 ὀκάδας πρὸς 25 λεπτά τὴν ὀκάν· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκάν τοῦ μίγματος,
 διὰ νὰ συνάξῃ ὅσα χρήματα ἤθελε λάβει, ἂν ἐπώλει τὸν οἶνον τῶν τριῶν τιμῶν χωριστά;
 Ὅλος ὁ οἶνος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν 240, 150 καὶ 330 ὀκάδων, ἤγουν 740
 ὀκάδες. Ἄν ἐπώλει χωριστὰ καθένα ἤθελε λάβει διὰ τὸν πρῶτον 240 φοράς 40
 λεπτά, ἤγουν 9600 λεπ. διὰ τὸν δεύτερον 150 φοράς 50, ἤγουν 7500, καὶ διὰ
 τὸν τρίτον 330 φοράς 25 ἤγουν 8250 λεπτὰ· λοιπὸν ἤθελε λάβει ὅλα λεπτά
 25850. Ἀλλ' ἐάν αἱ 740 ὀκάδες ἀξίζουσιν 25850 λεπ. ἢ μία ἀξίζει τὸ 740ον τοῦ
 25850, ἥτοι σχεδὸν 35 λεπτά.
 60. 6 κτίσται ἐκτίσαν τοῖχόν τινα εἰς 48 ἡμέρας· 24 κτίσται εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελαν τὸν κτίσει;
 ἢ εἰς 12 ἡμέρας πόσον κτίσται ἤθελαν κτίσει τοῖχον, τὸν ἵπποιον 56 κτίσται ἐκτίσαν εἰς 7 ἡμέρας;
 ἰδοὺ τὸ 17 καὶ 47 προβλήματα.

Περὶ διαιρετῶν καὶ περὶ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

46. Ὀνομάζεται ἀριθμός τις διαιρέσιμος ἢ διαραιτὸς δι' ἄλλου, ὅταν τὸ πη-
 λίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου ᾖναι ἀκέραιον· ὁ δὲ ἄλλος ἥτοι ὁ δεύτερος
 λέγεται διαιρέτης τοῦ πρώτου εἰς μερικωτέραν σημασίαν. Π. χ. ὁ 24 εἶναι διαι-

ρέσιμος διὰ τοῦ 8, ἡ δὲ 8 εἶναι διαιρέτης τοῦ 24, διότι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 24 διὰ 8 εἶναι ἀκαίρετος ἀριθμὸς, ὁ 3· ὡσαύτως ὁ 48 εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ 12, ἡ δὲ 12 εἶναι διαιρέτης τοῦ 48. Ὁ δὲ 27 δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ 4, ἡ δὲ 4 δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ 27, διότι τὸ πηλίκον τῶν εἶναι ὄχι ἀκέραιος, ἀλλὰ μικτὸς ἀριθμὸς ὁ $6\frac{3}{4}$.

Πᾶς ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι πολλαπλάσιος ἄλλου, εἶναι διαιρέσιμος δι' αὐτοῦ, ἢ ἄλλως, πᾶς ἀριθμὸς εἶναι διαιρέτης ὅλων τῶν πολλαπλασίων του. Οἱ πολλαπλάσιοι τοῦ 5 π. χ. εἶναι 10, 15, 20, 25 κτλ· ὅλων λοιπὸν τούτων ὁ 5 εἶναι διαιρέτης.

Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι διαιρέτης ἑαυτοῦ, διότι πηλίκον του εἶναι ἡ μονάς. Ἡ μονάς εἶναι διαιρέτης ἐνὸς ἐκάστου ἀριθμοῦ, καὶ πηλίκον εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς. Τὸ πηλίκον τοῦ 6 διὰ 1 εἶναι αὐτὸς ὁ 6.

47. Ἄρτιοι μὲν ὀνομάζονται οἱ ἀριθμοί, ὅσων τὸ δεξιὸν ψηφίον, τὸ τῶν μονάδων, εἶναι 0 ἢ 2 ἢ 4 ἢ 6 ἢ 8· περιττοὶ δὲ, ὅσων τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι 1 ἢ 3 ἢ 5 ἢ 7 ἢ 9.

Σημ. Εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν οἱ μὲν ἄρτιοι λέγονται ζυγοί, οἱ δὲ περιττοὶ μονοί.

Ὁ 2 εἶναι διαιρέτης ὅλων τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν.

Ὁ 3 εἶναι διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν, ὅσων αἱ τῶν διαφόρων τάξεων μονάδες ὡς μονάδες ἀπλαί θεωροῦμεναι, ἀποτελοῦν ἄθροισμα διαιρέσιμον διὰ 3· ὡσαύτως καὶ ὁ 9. π. χ. τῶν 6954, 5376, 634278 εἶναι διαιρέτης ὁ 3, τῶν 756, 45279, 421857 εἶναι διαιρέτης καὶ ὁ 3 καὶ ὁ 9.

Ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν, ὅσων τὰ δύο δεξιὰ ψηφία ἀποτελοῦν ἀριθμὸν διαιρέσιμον διὰ 4, ὅσον τῶν 428, 5616, 2536 κτλ.

Ὁ 5 εἶναι διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν, ὅσων τὸ δεξιὸν ψηφίον, τὸ τῶν μονάδων, εἶναι 0 ἢ 5, ὅσον τοῦ 10, 15, 20 κτλ.

Ὁ 6 εἶναι διαιρέτης τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν, ὅσοι εἶναι διαιρέσιμοι διὰ 3, ὅσον τῶν 564, 78234 κτλ.

48. Πολλοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν κανένα διαιρέτην ἄλλον παρὰ τὸν ἑαυτὸν του ἑκαστος καὶ τὴν μονάδα· τοιοῦτοι εἶναι οἱ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 κτλ. Οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ ὀνομάζονται πρωτότυποι. Ἄλλοι δὲ ἔχουσιν ἑκαστὸς δύο ἢ πλείους διαιρέτας, ὅσον οἱ 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24 κτλ. Οὗτοι ὀνομάζονται παράγωγοι ἢ διαιρέσιμοι.

49. Ἀριθμὸς τις εἰμπορεῖ νὰ ᾖ διαιρέτης δύο ἢ πλείω ἀριθμῶν· ὅσον ὁ 6, ὅστις εἶναι διαιρέτης τοῦ 24 καὶ τοῦ 36· ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν, οὗτοι δὲ λέγονται συνδιαίρετοί. Ἀλλ' εἶναι καὶ ἀριθμοί, οἵτινες δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν διαιρέτην παρὰ τὴν μονάδα, ὅσον οἱ 5 καὶ 8, οἱ 8 καὶ 15, οἱ 8 καὶ 25 κτλ· οἱ τοιοῦτοι ὀνομάζονται ἀσυνδιαίρετοι.

50. Δύο ἀριθμοὶ δυνατὸν νὰ ἔχουν πολλοὺς κοινούς διαιρέτας, ὅσον ὁ 24 καὶ

ὁ 36· διότι ὁ μὲν 24 ἔχει διαιρέτας αὐτοῦ τοὺς 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, ὁ δὲ 36 ἔχει τοὺς 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36· ἐκ τούτων δὲ κοινοὶ διαιρέται τοῦ 24 καὶ τοῦ 36 εἶναι οἱ 1, 2, 3, 4, 6, 12. Ὁ δὲ μεγαλύτερος τῶν κοινῶν διαιρετῶν δύο ἢ πλείοτέρων ἀριθμῶν λέγεται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Τοῦ 24 καὶ τοῦ 36 ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι 12.

Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν εὐρίσκεται οὕτω· Διαιρεῖται ὁ μεγαλύτερος τῶν δύο ἀριθμῶν διὰ τοῦ μικροτέρου, καὶ ἂν δὲν μείνῃ κατάλοιπον, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν· ἂν δὲ μείνῃ, διὰ τούτου διαιρεῖται ὁ μικρότερος τῶν δύο ἀριθμῶν, καὶ ἂν μὲν δὲν μείνῃ κατάλοιπον, αὐτὸ τὸ πρῶτον κατάλοιπον εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν· ἂν δὲ μείνῃ, διὰ τούτου τοῦ δευτέρου καταλοίπου διαιρεῖται τὸ πρῶτον κατάλοιπον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἕως νὰ εὐρεθῇ κατάλοιπόν τι, τὸ ὅποιον νὰ ᾔναι διαιρέτης τοῦ πρὸ αὐτοῦ καταλοίπου, καὶ αὐτὸ θέλει εἶσθαι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν. Ἰδοὺ παραδείγματα, ὅπου βλέπει τι· καὶ πῶς διατάσσονται οἱ ἀριθμοὶ εἰς τὴν πρᾶξιν.

$$\begin{array}{r|l} 9 & \\ \hline 4122 & 458 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 14 \\ \hline 2408 & 784 \\ \hline & 224 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 & 8 \\ \hline 840 & 340 & 160 \\ \hline & 20 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 20 & 1 & 2 \\ \hline 755 & 248 & 12 & 8 \\ \hline & 42 & 8 & 4 \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ \hline 624 & 440 & 184 & 72 & 40 & 32 \\ \hline & 184 & 72 & 40 & 32 & 8 \\ \hline & & & 8 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 & 4 & 1 & 3 \\ \hline 483 & 232 & 19 & 4 & 3 \\ \hline & 49 & 42 & 3 & 1 & 0 \\ \hline & & & 4 & & \end{array}$$

Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ τελευταίου παραδείγματος εἶναι ἀσυνδιαίρετοι, διότι δὲν ἔχουν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην παρά τὴν μονάδα.

Περὶληψίς τῶν ἐν τῷ δευτέρῳ κεφαλαίῳ δι' ἐρωτήσεων.

Πόσαι πράξεις γίνονται ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ πῶς ὀνομάζονται; Τί εἶναι πρόσθεσις ἀριθμοῦ εἰς ἄλλον ἀριθμὸν; Τί εἶναι ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἀπ' ἄλλου ἀριθμοῦ; Τί εἶναι διπλασιασμός, τριπλασιασμός, καὶ ἀορίστως πολλαπλασιασμός ἀκεραίου ἐπὶ ἄλλον ἀριθμὸν ἀκεραίων; Τί εἶναι διαιρέσις ἀριθμοῦ ἀκεραίου δι' ἄλλου ἀριθμοῦ ἀκεραίου; Τί διαφέρει ἡ ἀφαίρεσις τῆς προσθέσεως; Τί διαφέρει τῆς προσθέσεως ὁ πολλαπλασιασμός ἐπὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν; Τί διαφέρει ἡ διαιρέσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ; Τί ὀνομάζεται ἄθροισμα ἢ κεφάλαιον δύο ἢ πλείοτέρων ἀριθμῶν, καὶ διὰ τίνας πράξεις εὐρίσκεται; Τί ὀνομάζεται ὑπόλοιπον ἢ διαφορά δύο ἀριθμῶν, καὶ διὰ τίνας πράξεις εὐρίσκεται; Τί λέγεται ἀφαιρετός καὶ τί ἀφαιρέτης; Τί λέγεται γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἢ πλείοτέρων, καὶ διὰ τίνας πράξεις εὐρίσκεται; Τί λέγεται πολλαπλασιαστέος καὶ τί πολλαπλασιαστής; Ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου γίνε-

ται τὸ γινόμενον ἢ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ; Πῶς γίνεται; Τί λέγεται πηλίκον δύο ἀριθμῶν, καὶ διὰ τίνος πράξεως εὐρίσκεται; Τί λέγεται πολλαπλὸς μέρος ἀριθμοῦ τίνος; Τὸ πηλίκον εἶναι πολλαπλὸν τοῦ διαιρέτου ἢ τοῦ διαιρέτου, καὶ τί πολλαπλόν; Τί λέγεται διαιρετός καὶ τί διαιρέτης; Τί λέγεται λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον ἢ λόγος δύο ἀριθμῶν, καὶ διὰ τίνος πράξεως εὐρίσκεται; Τίς εἶναι ὁ λόγος τοῦ γινόμενου πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον ἢ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ πρὸς τὸ γινόμενον; Τίς εἶναι ὁ λόγος τοῦ διαιρέτου πρὸς τὸ πηλίκον, ἢ τοῦ πηλίκου πρὸς τὸν διαιρέτην; Διπλῆς Εἰσοὶ καὶ ὁποῖοι ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι; Ποιοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ὁμοειδῆς καὶ ποιοὶ ἑτεροειδῆς; Οἱ εἰς πρόσθεσιν καὶ εἰς ἀφαιρέσιν ἀριθμοὶ εἶναι ὁμώνυμοι ἢ ἑτερόνυμοι; ὁμοειδῆς ἢ ἑτεροειδῆς; Τὸ κεφάλαιον καὶ ἡ διαφορά εἶναι ὁμώνυμοι καὶ ὁμοειδῆς μὲ τοὺς εἰς πρόσθεσιν ἢ εἰς ἀφαιρέσιν ἀριθμοὺς ἢ ὅχι; Τὰ γινόμενα μὲ ποῖον εἶναι ὁμώνυμον καὶ ὁμοειδῆς, μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον ἢ μὲ τὸν πολλαπλασιαστήν; Τὸ πηλίκον μὲ τὸν διαιρέτην εἶναι ὁμώνυμον καὶ ὁμοειδῆς ἢ μὲ τὸν διαιρέτην; Ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁμοειδῆς μὲ αὐτοὺς ἢ ἑτεροειδῆς;—Πῶς προστίθενται δύο ἢ πλεῖστοι μονοψήφιοι ἀριθμοί; Πῶς πολλαπλασιάζεται μονοψήφιος ἐπὶ μονοψήφιον; Πῶς ἀφαιρεῖται μονοψήφιος ἀπὸ μονοψήφιου ἢ διψήφιου μικροτέρου τοῦ 18; Πῶς διαιρεῖται διὰ μονοψήφιου ἄλλος ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρέτου, ἴσος μὲ αὐτὸν, ἢ μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου καὶ μικρότερος τοῦ πολλαπλασίου του, καὶ ποῖος ἀριθμὸς εἶναι τὸ πηλίκον κατὰ τὰς τρεῖς περιπτώσεις; Εἰπέ τὴν προπαίδειαν τῆς πρόσθεσεως, τὴν τῆς ἀφαιρέσεως, τὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τὴν τῆς διαιρέσεως; Πῶς γράφονται πολυψήφιοι ἀριθμοί, ὅταν μὲλλον νὰ προστεθῶν ἢ ν' ἀφαιρεθῶν; Ποῦθεν ἀρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν ἢ τὴν ἀφαιρέσιν; Τί κάμνομεν ὅταν τὸ κεφάλαιον τῶν μονάδων ἢ τῶν δεκάδων κτλ. ᾖναι μικρότερον τοῦ 10; καὶ τί ὅταν ᾖναι μεγαλύτερον τοῦ 19; Τί κάμνομεν εἰς τὴν ἀφαιρέσιν, ὅταν ψῆφιος τι ἀφαιρέτου ᾖναι μικρότερον τοῦ ὑπ' αὐτὸ ψήφiou τοῦ ἀφαιρέτου, καὶ τί ὅταν ᾖναι 0; Πῶς ἀφαιρούμεν πολλοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ ἑνὸς αἵλου; Πῶς δοκιμάζεται ἡ πρόσθεσις καὶ πῶς ἡ ἀφαιρέσις; Τί εἶναι δοκιμὴ; Εἶναι ἀλάνθαστος; Πῶς πολλαπλασιάζεται πολυψήφιος ἀριθμὸς ἐπὶ μονοψήφιον; Πῶς πολλαπλασιάζεται πολυψήφιος ἀριθμὸς ἐπὶ πολυψήφιον; Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής ᾖναι ἀριθμὸς δεκάδων ἢ ἑκατοντάδων κτλ., τὸ γινόμενον ποῦθεν ἀρχίζομεν νὰ τὸ γράψωμεν; Πῶς πολλαπλασιάζομεν, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής ἔχῃ κενὰ εἰς τὸ τέλος; Πῶς πολλαπλασιάζονται πολλοὶ ἀριθμοὶ ἐπ' ἀλλήλους; Εἰμπορεῖ τις νὰ πολλαπλασιάζῃ ὅποιον θελῇ δύο ἀριθμῶν ἀκεραίων ἐπὶ τὸν ἄλλον; Πῶς διαιρεῖται πολυψήφιος ἀριθμὸς διὰ μονοψήφιου ἢ καὶ διὰ πολυψήφιου; Ποῦς λέγεται μερικὸς διαιρετός καὶ ποῦς μερικὸν πηλίκον; Πόσα μονάδας πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ μερικὸς διαιρετός ὡς πρὸς τὰς τοῦ διαιρέτου; Πότε μερικὸν τι πηλίκον εἶναι κλάσμα, ἴσον μὲ τὴν μονάδα, καὶ πότε ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 10; Ἄν τύχῃ μερικὸς τις διαιρετός νὰ ἔχῃ ὀλιγωτέρας μονάδας ἀπὸ τὰς τοῦ διαιρέτου, τί γράφομεν εἰς τὸ πηλίκον; Ἀφ' οὗ διαιρεθῇ τὸ ἔν ἢ τὰ δύο ἀριστερὰ ψήφια τοῦ μερικοῦ διαιρέτου διὰ τοῦ ἀριστεροῦ τοῦ διαιρέτου, πῶς πληροφοροῦμεθα ἂν τὸ πηλίκον ᾖναι μερικὸν τι πηλίκον; Πῶς ἐκτελεῖται ὀλιγωρότερα ἢ διαιρέσεις; Πῶς διαιρεῖται ἀριθμὸς διὰ 10, 100, κτλ.; Πῶς γίνεται ἡ διαιρέσις, ὅταν ἔχουν μὴδενικά εἰς τὸ τέλος καὶ ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρέτος; Πῶς δοκιμάζεται ὁ πολλαπλασιασμός καὶ πῶς ἡ διαιρέσις; Εἶναι ἀλάνθαστος αὕτη ἡ δοκιμὴ καὶ ἐπομένως ἀξιοσυστάτος; Ποῖος ἀριθμὸς ἀκεραῖος λέγεται διαιρέσιμος δι' ἄλλου ἀκεραίου, καὶ ποῖος λέγεται διαιρέτης ἄλλου; Ποῖων ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης ἄριθμος τις; Ποῖος λέγεται ἄρτιος ἀριθμὸς καὶ ποῖος περιττός; Ποῖων ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης ὁ 2, ὁ 3, ὁ 4, ὁ 5, ὁ 6, ὁ 9; Ποῖος ἀριθμὸς λέγεται πρωτότυπος καὶ ποῖος παράγωγος; Ποῖος ἀριθμὸς λέγεται κοινὸς διαιρέτης δύο ἄλλων; Ποιοὶ ἀριθμοὶ λέγονται συνδιαιρέτοι καὶ ποιοὶ ἀσυνδιαιρέτοι; Ποῖος ἀριθμὸς ὀνομάζεται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν; Πῶς εὐρίσκεται ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν; Ὅταν μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν εὐρίσκηται ἢ μόνος, ὅποιοι εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί;—Ὅταν προτείνονται ἀριθμητικὸν πρόβλημα, τί ζητεῖται; Τί λέγεται λύσις τοῦ προβλήματος; Πῶς καταλαμβάνει τις ποῖαν ἢ ποῖας πράξεις πρέπει νὰ ἐκτελέσῃ ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν πρὸς εὐρίσκειν τοῦ ζητουμένου;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΠΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ, ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΙΚΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Τροπή ἀκεραίων καὶ μικτῶν εἰς κλασματικούς καὶ τ' ἀνὰ πάλιν.

51. Εἴπομεν (ἀριθ. 10—13) τί εἶναι κλασματική μονάς, τί εἶναι κλασματικός ἀριθμός, καὶ μερικώτερον τί εἶναι κλάσμα, πῶς γράφεται κλασματικός ἀριθμός, τίνες λέγονται ὅροι τοῦ κλασματικοῦ, τί σημαίνει ὁ ἀριθμητής καὶ τί σημαίνει ὁ παρονομαστής· διὰ τοῦτο παραπέμπομεν ἐκεῖ τὸν ἀναγνώστην περὶ αὐτῶν ὅλων. Ἐδῶ δὲ προσθέτομεν τὰ ἐξῆς.

Πᾶς ἀριθμός ἀκέραιος ἢ μικτός εἴμπορεῖ νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν. Καὶ ἀκέραιος μὲν τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον δεδομένον κλασματικόν, ἐάν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ κλασματικοῦ, καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον τεθῇ παρονομαστής ὁ τοῦ κλασματικοῦ παρονομαστής. Π. χ. τρέπεται ὁ 4 εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν ἔκτων, ἐάν πολλαπλασιασθῇ ὁ 4 ἐπὶ 6 καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον 24 τεθῇ παρονομαστής ὁ 6· οὕτως ἔχομεν $\frac{4}{1} = \frac{24}{6}$ ἰσοδύναμον μὲ 4 μονάδας. Ὡσαύτως εὐρίσκεται ὅτι ὁ 9 ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{36}{4}$, ὁ 5 ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{25}{5}$ κτλ.

Μικτός δὲ ἀριθμός τρέπεται εἰς κλασματικόν ἰσοδύναμον, ἐάν ὁ ἀκέραιός του πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ γινόμενον προστεθῇ ὁ ἀριθμητής τοῦ κλάσματος, καὶ ὑπὸ τὸ κεφάλαιον τεθῇ παρονομαστής ὁ τοῦ κλάσματος παρονομαστής. Π. χ. ὁ $5\frac{2}{3}$ τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν ἐνάτων, ἀφοῦ ὁ 5 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3, εἰς τὸ γινόμενον 15 προστεθῇ ὁ ἀριθμητής 2, καὶ ὑπὸ τὸ κεφάλαιον 17 τεθῇ παρονομαστής ὁ 3, καὶ ὁ $5\frac{2}{3}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{17}{3}$. Ὡσαύτως εὐρίσκεται ὅτι ὁ $6\frac{4}{5}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{34}{5}$, ὁ $9\frac{3}{7}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{63}{7}$ κτλ.

52. Ἀντιστρόφως πᾶς κλασματικός ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητής εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ἀκέραιον ἢ μικτὸν ἀριθμὸν. Πρὸς τοῦτο δὲ διαιρεῖται ὁ ἀριθμητής διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ πηλίκον ἢ ἀκέραιον εἶναι ἢ μικτὸν, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν. Π. χ. ὁ $\frac{24}{6}$ τρέπεται οὕτως εἰς τὸν ἰσοδύναμον ἀκέραιον 4, ὁ $\frac{8}{3}$ τρέπεται εἰς τὸν ἰσοδύναμον 2, ὁ $\frac{25}{7}$ τρέπεται εἰς τὸν ἰσοδύναμον μικτὸν $3\frac{4}{7}$ κτλ.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως κλασματικῶν καὶ μικτῶν ἀριθμῶν δι' ἀκεραίων.

53. Κλασματικός ἀριθμός πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον διττῶς, ἢ ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον τεθῇ ὁ παρονομαστής του· ἢ ἂν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστής του διὰ τοῦ ἀκεραίου, καὶ τὸ πηλίκον τεθῇ παρονομαστής ὑπὸ τὸν ἀριθμητήν του. Ὁ δὲ κατὰ τὸν ἕνα ἢ τὸν

ἄλλον τρόπον εὐρισκόμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ γινόμενόν των, τὸ ὁποῖον εἶναι τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ κλασματικοῦ, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής.

Ἄς πολλαπλασιασθῇ ὁ $\frac{5}{12}$ ἐπὶ 4, ἤτοι ἂς εὑρεθῇ τὸ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{5}{12}$.

α. Πολλαπλασιάζεται ὁ 5 ἐπὶ 4, καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον 20 τίθεται παρονομαστής ὁ 12· ὁ δὲ $\frac{20}{12}$ ἢ ὁ $4\frac{2}{3}$ εἶναι τὸ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{5}{12}$.

β. Διαιρεῖται ὁ 12 διὰ 4, καὶ τὸ πηλίκον 3 τίθεται παρονομαστής ὑπὸ τὸν 5· ὁ δὲ $\frac{5}{3}$ ἢ $1\frac{2}{3}$ εἶναι τὸ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{5}{12}$. (Κατωτέρω 57 θέλομεν ἰδεῖ ὅτι τὸ $\frac{5}{3}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{20}{12}$).

Ἰσαύτως εὐρίσκεται τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{5}{6}$ ἐπὶ 3, ἤτοι τὸ τριπλάσιον τοῦ $\frac{5}{6}$ εἶναι $\frac{5 \cdot 3}{6}$ ἢ $\frac{5}{2}$ ἢτοι $2\frac{1}{2}$. Τὸ $\frac{5}{2}$ ἐπὶ 2 ἢ τὸ διπλάσιον τοῦ $\frac{5}{2}$ εἶναι $\frac{5 \cdot 2}{2}$ ἢ $\frac{5}{1}$ ἢτοι 5.

Σημ. Ὁ μὲν πρῶτος τρόπος εἶναι πάντοτε δυνατός, ὁ δὲ δεύτερος μόνον ὅταν ὁ παρονομαστής ᾖ διαιρέσιμος διὰ τοῦ ἀκεραίου πολλαπλασιαστοῦ, καὶ τότε εἶναι προτιμυτέος τοῦ πρώτου. Διὰ τοῦτο ὁ $\frac{5}{6}$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 6 μόνον κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον· διότι ὁ 6 δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ 5.

54. Μικτὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον διττῶς· α. Πολλαπλασιάζεται τὸ κλάσμα του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαστὴν, καὶ τὸ γινόμενον ἂν ᾖ μεγαλῆτερον τῆς μονάδος, τρέπεται εἰς ἀκέραιον ἢ μικτόν (52), ἔπειτα πολλαπλασιάζεται τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαστὴν, καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτονται καὶ αἱ προκύψασαι ἀκέραιαι μονάδες, ἂν προέκυψαν, ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ κλάσματος. Ὁ αὕτω προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

β. Τρέπεται ὁ μικτὸς εἰς κλασματικόν (51), καὶ ἔπειτα ὁ κλασματικὸς οὗτος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ὡς ἤδη εἶπομεν (53).

Ὁ δὲ κατὰ τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον τρόπον εὐρισκόμενος ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ μικτοῦ ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής.

α. Τὸ ἐξαπλάσιον τοῦ $7\frac{5}{6}$ εἶναι $42\frac{25}{6}$ ἢ $45\frac{5}{6}$.

β. Τὸ ἐξαπλάσιον τοῦ $7\frac{5}{6}$ εἶναι ἐξαπλάσιον τοῦ $\frac{42 \cdot 6}{6}$ ἢτοι $\frac{252}{6}$ ἢ $45\frac{5}{6}$. Ἰσαύτως τὸ ἐννεαπλάσιον τοῦ $12\frac{3}{4}$ εἶναι $114\frac{3}{4}$. — Τὸ $5\frac{2}{3}$ ἐπὶ 7 παράγει $39\frac{2}{3}$. — Τὸ γινόμενον τοῦ $4\frac{3}{7}$ ἐπὶ 6 εἶναι $26\frac{2}{7}$.

Σημ. Εἶναι προτιμυτέος ὁ πρῶτος τρόπος.

55. Κλασματικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἀκεραίου διττῶς· ἢ ἂν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς του διὰ τοῦ ἀκεραίου, καὶ ὑπὸ τὸ πηλίκον τεθῇ παρονομαστής ὁ τοῦ κλασματικοῦ παρονομαστής· ἢ ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, καὶ τὸ γινόμενον τεθῇ παρονομαστής ὑπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ. Ὁ δὲ κατὰ τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον τρόπον εὐρισκόμενος ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι τοιοῦτον πολλοστὸν τοῦ κλασματικοῦ, ὅ,τι πολλοστὸν τοῦ ἀκεραίου εἶναι ὁ μὲν.

Ας διαιρεθῇ $\frac{1}{7}$ διὰ 4, ῥητοὶ 2· εὗρεθῇ τὸ 4ον τοῦ $\frac{1}{7}$.

α. Διαιρεῖται ὁ 12 διὰ 4, καὶ ὑπὸ τὸ πηλίκον 3 τίθεται παρονομαστῆς ὁ 7· ἔχουμεν οὕτω $\frac{3}{7}$ τὸ ὁποῖον εἶναι τέταρτον τοῦ $\frac{1}{7}$.

β. Πολλαπλασιάζεται ὁ 7 ἐπὶ 4, καὶ τὸ γινόμενον 28 τίθεται παρονομαστῆς ὑπὸ τὸν 12· ἔχουμεν οὕτω $\frac{12}{28}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τέταρτον τοῦ $\frac{1}{7}$. (Θέλομεν μετ' ὀλίγον ἰδεῖ ὅτι $\frac{12}{28}$ εἶναι ἰσοδύναμοι ἀριθμοί).

Ἐξαύτως τὸ 3ον τοῦ $\frac{1}{9}$ εἶναι $\frac{1}{3}$ ἢ $\frac{16}{48}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα· $\frac{1}{3}$ διαιρεθὲν διὰ 3 δίδει πηλίκον $\frac{1}{9}$ ἢ $\frac{16}{48}$.

Σημ. Ὁ μὲν δεύτερος τρόπος εἶναι πάντοτε δυνατός, ἡ δὲ πρῶτος μόνον ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ᾖ διαιρέσιμος διὰ τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου, καὶ τότε εἶναι προτιμυτέος. Οὕτως ὁ $\frac{1}{5}$ διαιρεῖται διὰ 5 μόνον κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον, διότι ὁ 7 δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ 5.

56. Μικτὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἀκεραίου διττῶς.

α. Διαιρεῖται ὁ ἀκέραιος διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ ἐάν δὲ μείνῃ κατάλοιπον, διαιρεῖται καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ· ἂν δὲ μείνῃ κατάλοιπον, τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν (51), ἐνόνεται μὲ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ, καὶ ἔπειτα διαιρεῖται καὶ ὁ κλασματικὸς οὗτος διὰ τοῦ ἀκεραίου (55). Τὸ ἀκέραιον πηλίκον καὶ τὸ κλασματικὸν πηλίκον ὁμοῦ ἀποτελοῦν τὸ ζητούμενον πηλίκον.

β. Τρέπεται ὁ μικτὸς εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν καὶ διαιρεῖται ἔπειτα οὗτος διὰ τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου ὡς ἤδη εἶπομεν (55).

Ὁ δὲ κατὰ τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον τρόπον εὕρισκόμενος ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι τοιοῦτον πολλοστὸν τοῦ μικτοῦ, ὅ,τι πολλοστὸν τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου εἶναι ἡ μονάς του.

Τὸ ἕκτον τοῦ 18 $\frac{1}{6}$ εἶναι α. $3 \frac{1}{6}$, β. εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ $\frac{18 \cdot 6}{6}$, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{17}{6}$ ἢ $3 \frac{1}{2}$ · Ἐξαύτως $8 \frac{1}{2}$ διαιρεθὲν διὰ 3 δίδει $2 \frac{2}{3}$ ἢ $\frac{7}{3}$ διὰ 3, ἔχουν $\frac{7}{9}$ ἢ $2 \frac{2}{3}$. Τὸ $9 \frac{1}{2}$ διὰ 4 ῥητοὶ τὸ 4ον τοῦ $9 \frac{1}{2}$ εἶναι $2 \frac{1}{4}$.

Σημ. Ὁ πρῶτος τρόπος εἶναι προτιμυτέος.

57. Ὡς δύο ἡμίτεα τῆς μονάδος εἶναι αὐτὴ ἡ μονάς, ἢ τρία τρίτα τῆς μονάδος εἶναι αὐτὴ ἡ μονάς, ἢ τέσσαρα τέταρτα τῆς μονάδος εἶναι αὐτὴ ἡ μονάς, κτλ. οὕτω καὶ δύο ἡμίτεια ὁποιοῦδήποτε ἀριθμοῦ, ἢ τρία τρίτα αὐτοῦ ἢ τέσσαρα τέταρτα αὐτοῦ κτλ. εἶναι αὐτὸς ὁ ἴδιος ἀριθμός. Καὶ πάλιν, ὡς τὸ ἡμισυ τῶν δύο μονάδων εἶναι ἡ μονάς, τὸ τρίτον τῶν τριῶν μονάδων εἶναι πάλιν ἡ μονάς, τὸ τέταρτον τῶν τεσσάρων μονάδων εἶναι ἡ μονάς κτλ. οὕτω καὶ τὸ ἡμισυ τοῦ διπλασίου ὁποιοῦδήποτε ἀριθμοῦ, ἢ τὸ τρίτον τοῦ τριπλασίου, ἢ τὸ τέταρτον τοῦ τετραπλασίου του, κτλ. εἶναι αὐτὸς ὁ ἴδιος ἀριθμός.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν ὅτι, ἐάν ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἄλλον ἀκέραιον, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου, θέλει προκύψει πάλιν ὁ αὐτὸς ἀριθμός· ἢ ἂν ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς διαιρεθῇ δι' ἄλλου ἀκεραίου, καὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον, πάλιν θέλει προκύψει ὁ αὐτὸς πρῶτος ἀριθμός. Π. χ. ὁ 6 ἐάν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 8 παρά-

γει 48, οὗτος δὲ ἂν διαιρεθῇ διὰ 8, προκύπτει πάλιν 6. ἢ ὁ 30 ἂν διαιρεθῇ διὰ 5, προκύπτει ὁ 6, οὗτος δὲ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5 παράγει πάλιν τὸν 30.

Ὡσπύτως καὶ κλασματικὸς ἀριθμὸς ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀκέραιον, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκέραιου, θέλει προκύψῃ ἰσοδύναμος ἄλλος.

Ἀλλὰ ἂ. πολλαπλασιάζεται κλασματικὸς, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς του, καὶ διαιρεῖται τὸ γινόμενον ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής του, διὰ τοῦτο, ὅταν πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστής ἐνταυτῷ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, καὶ τίθεται τὸ δεύτερον γινόμενον παρονομαστής ὑπὸ τὸ πρῶτον, ὁ οὕτω προκύπτων κλασματικὸς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν πρῶτον.

β'. Ἐπειδὴ διαιρεῖται κλασματικὸς ἀριθμὸς, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς του, καὶ πολλαπλασιάζεται, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστής του, διὰ τοῦτο, ὅταν διαιρηθῇ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστής ἐνταυτῷ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, καὶ τὸ δεύτερον πηλίκον τίθεται ὑπὸ τὸ πρῶτον, ὁ οὕτω προκύπτων κλασματικὸς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν πρῶτον.

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν τοῦ $\frac{2}{3}$ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι ἐπὶ 2, 3, 4, 5, κτλ. προκύπτουσι τὰ $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, κτλ. τὰ ὅποια εἶναι ὅλα ἰσοδύναμα μὲ τὸ $\frac{2}{3}$. Τοῦ δὲ $\frac{3}{4}$ ἐὰν διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ 2, 3, 4, κτλ. προκύπτουσι τὰ $\frac{1.5}{8}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{9}{16}$, κτλ. τὰ ὅποια εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὸ $\frac{3}{4}$.

Περὶ τροπῆς ἑτερώνυμων κλασματικῶν εἰς ἰσοδυνάμους ὁμώνυμους.

58. Ὁμώνυμοι λέγονται δύο ἢ πλείότεροι κλασματικοί, ἐὰν σύγκηνται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος, ἥγουν ἐὰν ἔχωσιν ὅλοι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, οἷον $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ κτλ. ἑτερώνυμοι δὲ, ἐὰν ἔχωσι διαφόρους παρονομαστές, οἷον $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ (ἰδὲ καὶ 45).

ἂ. Δύο κλασματικοὶ ἑτερώνυμοι τρέπονται πάντοτε εἰς δύο ἄλλους ἰσοδυνάμους ὁμώνυμους ἔχοντας παρονομαστήν τὸ γινόμενον τῶν δύο παρονομαστῶν. Τρέπονται δὲ οὕτω, πολλαπλασιάζονται οἱ μὲν δύο ὅροι τοῦ πρώτου κλασματικοῦ ἐπὶ τὸν δεύτερον παρονομαστήν, οἱ δὲ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν πρῶτον παρονομαστήν.

Κατὰ τοῦτο, τὰ $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$ τρέπονται εἰς τὰ ὁμώνυμα $\frac{15}{32}$, $\frac{24}{32}$, τῶν ὁποίων τὸ μὲν $\frac{15}{32}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{5}{8}$, τὸ δὲ $\frac{24}{32}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{3}{4}$ (57) ὁ δὲ παρονομαστής 32 εἶναι γινόμενον τῶν δύο παρονομαστῶν 8 καὶ 4.

Ὡσαύτως οἱ $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{5}{6}$ τρέπονται εἰς τοὺς $\frac{35}{24}$ καὶ $\frac{25}{24}$.

Σημ. Ὅταν ὁ μεγαλύτερος τῶν παρονομαστῶν ᾖ διαιρέσιμος διὰ τοῦ μικρότερου, τότε τρέπεται μόνον ὁ ἔχων τὸν μικρότερον παρονομαστήν εἰς ἄλλον ἰσοδύναμόν του καὶ ὁμώνυμον μὲ τὸν ἔχοντα τὸν μεγαλύτερον παρονομαστήν. Τρέπεται δὲ οὕτω, διαιρεῖται ὁ μεγαλύτερος παρονομαστής διὰ τοῦ μικρότερου, καὶ ἐπὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι τοῦ ἔχοντος τὸν μικρότερον παρονομαστήν. Τῶν $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{3}{4}$, ἐπειδὴ ὁ 8 εἶναι διαιρέσιμος διὰ 4, τρέπεται μόνον τὸ $\frac{5}{8}$ εἰς $\frac{5}{4}$ ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ 8 διὰ 4 ὅταν ἐπὶ 2. Τοῦτο εἶναι προτιμητέον, ὅταν ᾖ δυνατὸν.

Β'. Τρεῖς ἢ πλείότεροι ἑτερώνυμοι κλασματικοὶ τρέπονται πάντοτε εἰς ἰσοδύναμους ὁμώνυμους, ἔχοντας παρονομαστὴν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν. Τρέπονται δε οὕτω, πολλαπλασιάζονται οἱ μὲν δύο ὅροι τοῦ πρώτου κλασματικοῦ ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, οἱ δὲ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου πάλιν ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἄς τραπῶσι τὰ $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{5}$ εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα.

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{2}{5}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον 45 τῶν δύο ἄλλων παρονομαστῶν 5 καὶ 9, καὶ τὸ $\frac{2}{5}$ τρέπεται οὕτως εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 5}$. Ἐπειτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{3}{5}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον 72 τῶν δύο ἄλλων παρονομαστῶν 8 καὶ 9, καὶ οὕτω τρέπεται τὸ $\frac{3}{5}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 8}$. Τελευταίον πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{6}{5}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον 40 τῶν δύο ἄλλων παρονομαστῶν 8 καὶ 5, καὶ οὕτω τρέπεται τὸ $\frac{6}{5}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 5}$. Ταῦτα δὲ τὰ νέα κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα, καὶ ὁ παρονομαστής των εἶναι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παρονομαστῶν 8 καὶ 5 καὶ 9.

Ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{5}$ τρέπονται εἰς ταῦτα $\frac{1088}{1250}$, $\frac{1080}{1250}$, $\frac{948}{1250}$, $\frac{708}{1250}$.

Σημ. Ὃταν μεγαλύτερος τῶν παρονομαστῶν ᾖ διαιρέσιμος δι' ἑνὸς ἐκάστου τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, τότε τρέπεται ἕν ἐκάστου τῶν ἐχόντων τούτους κλάσματα εἰς ἄλλο ἰσοδύναμόν του καὶ ὁμώνυμον μὲ τὸ ἔχον τὸν μεγαλύτερον παρονομαστήν. Τρέπεται δὲ ὡς εἴπομεν εἰς τὴν προηγουμένην σημείωσιν.

Ἄς τραπῶσι π. χ. τὰ $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{10}{24}$ εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα. Διαιρεῖται ὁ 24 διὰ τοῦ 12 καὶ ἐπὶ τὸ πηλίκον 2 πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{7}{12}$, οὕτω τρέπεται τὸ $\frac{7}{12}$ εἰς $\frac{14}{24}$. Ἐπειτα διαιρεῖται ὁ 24 διὰ 4, καὶ ἐπὶ τὸ πηλίκον 6 πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{5}{4}$ · οὕτω τρέπεται τὸ $\frac{5}{4}$ εἰς $\frac{15}{12}$. Ἀντὶ λοιπὸν τῶν τριῶν ἑτερώνυμων κλασμάτων ἔχομεν τὰ ἰσοδύναμά των ὁμώνυμα $\frac{14}{24}$, $\frac{15}{12}$, $\frac{10}{24}$. Τοῦτο εἶναι προτιμητέον, ὅταν ᾖναι δυνατόν.

Οὕτω τρέπονται τὰ $\frac{8}{21}$, $\frac{9}{21}$, $\frac{12}{21}$, $\frac{14}{21}$ εἰς ταῦτα $\frac{32}{63}$, $\frac{36}{63}$, $\frac{37}{63}$, $\frac{18}{63}$.

Περὶ ἀγωγῆς κλασματικῶν εἰς ἄλλους ἰσοδύναμους των μὲ μικροτέρους ὅρους.

59. Ἐάν κλασματικοῦ τινος ἀριθμοῦ διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ διαιρέτου των, καὶ ὑπὸ τὸ τοῦ ἀριθμητοῦ πηλίκον τεθῇ παρονομαστής τὸ πηλίκον τοῦ παρονομαστοῦ, προκύπτει κλασματικὸς ἰσοδύναμος μὲ τὸν πρῶτον (57, Β') καὶ μὲ μικροτέρους ὅρους· π. χ. τοῦ $\frac{24}{36}$ ἂν διαιρεθῶσιν οἱ ὅροι διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου των 2 κτλ. ἄγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{12}{18}$. Καὶ τούτου πάλιν ἂν διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου των 2 κτλ. ἄγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{6}{9}$. Καὶ τούτου πάλιν ἂν διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου των 3 κτλ. ἄγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{2}{3}$. Ὡστε ὁ $\frac{24}{36}$ κατὰ σειρὰν ἄγεται εἰς τὰ ἰσοδύναμά του $\frac{12}{18}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{2}{3}$.

Σημ. Τὸ $\frac{2}{3}$, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι ἀσυνδιαίρετοι, δὲν ἄγεται εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὴ μικροτέρους ὅρους, καὶ δια τούτου λέγεται ἀνάγωγον.

Ἀλλ' ἤθελεν ἀχθῆ τὸ $\frac{2}{3}$ ἀμέσως εἰς τὸ $\frac{2}{5}$, ἐὰν ἤθελεν εὐρεθῇ πρῶτον ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 24 καὶ 36 (50), καὶ ἔπειτα διὰ τούτου, ὅστις εἶναι 12, ἤθελεν διαιρεθῇ ἅπας οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{2}{3}$.

Ἀφοῦ εὐρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ὁρῶν καὶ διαιρεθῶσιν οὗτοι δι' αὐτοῦ, τὸ $\frac{2}{3}$ ἄγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{2}{5}$. Τὸ $\frac{7}{108}$ ἄγεται ὡσαύτως εἰς τὸ $\frac{1}{18}$. Τὸ $\frac{2}{108}$ εἰς τὸ $\frac{1}{54}$. Τὸ $\frac{2}{108}$ εἰς τὸ $\frac{1}{54}$. Τὸ δὲ $\frac{2}{108}$ εἶναι ἀνάγωγον, διότι οἱ ὅροι του ἔχουν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην παρὰ τὴν μονάδα, ἡγοῦν εἶναι ἀσυνδιαίρετοι. (Περὶ τούτων ἰδὲ εἰς τὸν ἀριθμ. 50).

Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως κλασματικῶν καὶ μικτῶν ἀριθμῶν.

60. Κλασματικὸς ἀριθμὸς προστίθεται εἰς ἄλλον ὁμώνυμόν του κλασματικόν, ἐὰν προστεθῇ ὁ εἰς ἀριθμητὴς εἰς τὸν ἄλλον, καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα τεθῇ ὁ κοινὸς παρονομαστής των.

Κατὰ τοῦτο προστίθεται τὸ $\frac{4}{9}$ εἰς τὸ $\frac{7}{9}$, ἐὰν προστεθῇ ὁ 4 εἰς τὸν 7, καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμά των 11 τεθῇ ὁ παρονομαστής των 9· ὁ δὲ $\frac{1}{10}$ ἢ $\frac{1}{10}$ εἶναι τὸ ἄθροισμά των. Διότι, ὡς 4 καὶ 7 κάμνουν 11, οὕτω καὶ 4 ἑννατα καὶ 7 ἑννατα κάμνουν 11 ἑννατα, ἡγοῦν $\frac{11}{9}$. Ὡσαύτως $\frac{1}{9}$ καὶ $\frac{1}{9}$ ἀποτελοῦν ἄθροισμα $\frac{2}{9}$ ἢ $\frac{2}{9}$ καὶ $\frac{1}{9}$ καὶ $\frac{1}{9}$ ἀποτελοῦν ἄθροισμα $\frac{2}{9}$ ἢ $\frac{2}{9}$.

Αὗτο δὲ ἑτερόνυμοι κλασματικοὶ πρῶτον πρέπει νὰ τρέπωνται εἰς ἰσοδύναμους ὁμώνυμους (58), καὶ ἔπειτα προσθέτονται οὗτοι ὡς ἤδη εἵπομεν.

Οὕτω τὰ $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{5}{8}$ τρέπονται πρῶτον εἰς τὰ ἰσοδύναμά των $\frac{14}{16}$ καὶ $\frac{10}{16}$ καὶ ταῦτα ἔπειτα προστιθέμενα ἀποτελοῦν ἄθροισμα $\frac{24}{16}$ ἢ $1 \frac{8}{16}$ ἢ $1 \frac{1}{2}$. Ὡσαύτως τὸ ἄθροισμα τῶν $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{1}{4}$ εὐρίσκεται ὅτι εἶναι $\frac{4}{4}$ ἢ 1 .

61. Μικτὸς δ' ἀριθμὸς προστίθεται εἰς ἄλλον μικτόν, ἢ ὡς ἀκέραιος προστίθεται εἰς ἀκέραιον, δηλ. ἐὰν προσεβῇ τὸ ἐν κλάσμα εἰς τὸ ἄλλο, ἔπειτα ὁ ἀκέραιος εἰς τὸν ἀκέραιον, καὶ προστεθῶσιν ἔτι εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων ὅσαι μονάδες προκύψωσιν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων, ἐὰν προκύψωσιν· ἢ ἀφοῦ τραπῶσιν οἱ μικτοὶ εἰς κλασματικούς, καὶ οὗτοι ἔπειτα προστεθῶσιν ὡς ἤδη εἵπομεν.

Οὕτω τῶν ἀριθμῶν $7 \frac{1}{9}$ καὶ $6 \frac{2}{9}$ ἀφοῦ προστεθῶσι τὰ κλάσματα, εὐρίσκεται $\frac{10}{9}$ ἢ $1 \frac{1}{9}$ · ἔπειτα λέγομεν 4 καὶ 6 7 καὶ 7 14· ὁ δὲ $14 \frac{1}{9}$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν μικτῶν. Ἡ τρέπεται ὁ μὲν $7 \frac{1}{9}$ εἰς τὸν $\frac{67}{9}$, ὁ δὲ $6 \frac{2}{9}$ εἰς τὸν $\frac{56}{9}$ · ἔπειτα ὁ $\frac{123}{9}$ τρέπεται εἰς $\frac{13}{9}$, καὶ οὗτος προστιθέμενος εἰς τὸν $\frac{67}{9}$ δίδει $\frac{80}{9}$ ἢ $8 \frac{8}{9}$. Ὡσαύτως τὸ ἄθροισμα τῶν $4 \frac{3}{7}$ καὶ $3 \frac{2}{7}$ εὐρίσκεται ὅτι εἶναι $7 \frac{5}{7}$ ἢ $7 \frac{1}{7}$.

Σημ. Ἐκ δὲ τούτων ἐνοεῖται εὐκόλως πῶς προστίθεται καὶ κλάσμα εἰς ἀκέραιον, καὶ ἀκέραιος εἰς μικτόν, καὶ κλάσμα εἰς μικτόν.

62. Κλασματικὸς ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπ' ἄλλου ὁμώνυμου τοῦ μεγαλητέρου,

ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δευτέρου, καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν τῶν τεθῇ ὁ παρονομαστής τῶν.

Κατὰ τοῦτο ἀπὸ τοῦ $\frac{8}{12}$ ἀφαιρεῖται ὁ $\frac{5}{12}$, ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ 5 ἀπὸ τοῦ 8, καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν τῶν τεθῇ ὁ 12· ὁ δὲ $\frac{3}{12}$ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κλασματικῶν. Διότι, ὡς 5 ἀπὸ 8 μένουσι 3, οὕτω καὶ 5 δωδέκατα ἀπὸ 8 δωδεκάτων μένουσι 3 δωδέκατα ἢ $\frac{3}{12}$. Ὡσαύτως $\frac{8}{9}$ ἀπὸ $\frac{5}{9}$ μένουσι $\frac{3}{9}$ · $\frac{12}{10}$ ἀπὸ $\frac{17}{10}$ μένουσι $\frac{5}{10}$ ἢ $\frac{1}{2}$.

Οἱ δὲ ἑτερόνυμοι κλασματικοὶ πρῶτον πρέπει νὰ τρέπωνται εἰς ὁμωνύμους, καὶ ἔπειτα ἀφαιρεῖται ὁ εἰς ἀπὸ τοῦ ἄλλου ὡς εἴπομεν.

Οὕτως ἀφαιρεῖται τὸ $\frac{3}{10}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{8}{10}$, ἀφοῦ τραπῶσιν εἰς τὰ ἰσοδύναμά τῶν $\frac{16}{20}$ καὶ $\frac{6}{20}$ · τούτων δὲ ἡ διαφορὰ εἶναι $\frac{10}{20}$ ἢ $\frac{1}{2}$. Ὡσαύτως εὐρίσκεται ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{7}{9}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{13}{9}$ εἶναι $\frac{6}{9}$.

Ἄς ἀφαιρεθῇ ὁ $\frac{5}{6}$ ἀπὸ τοῦ 6. Μία τῶν μονάδων τοῦ 6 τρέπεται εἰς $\frac{6}{6}$, ἀπὸ τούτου ἀφαιροῦνται $\frac{5}{6}$ καὶ μένουσι $\frac{1}{6}$ · λοιπὸν 5 $\frac{1}{6}$ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{5}{6}$ ἀπὸ 6. Ὡσαύτως $\frac{6}{9}$ ἀπὸ 4 $\frac{3}{9}$ ἢ 3 $\frac{1}{3}$.

63. Μικτὸς ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπ' ἄλλου μικτοῦ, ἢ ὡς ἀκέραιος ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀκεραίου, δηλ. ἂν ἀφαιρεθῇ τὸ κλάσμα πρῶτον ἀπὸ τοῦ κλάσματος, ἔπειτα ὁ ἀκέραιος ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου· ἢ ἂν τραπῶσι καὶ οἱ δύο εἰς κλασματικούς ἰσοδυνάμους, καὶ ἀφαιρεθῶσιν οὕτοι ὁ εἰς ἀπὸ τοῦ ἄλλου ὡς ἤδη εἴπομεν.

Ἄς ἀφαιρεθῇ ὁ 5 $\frac{5}{9}$ ἀπὸ τοῦ 9 $\frac{3}{4}$. Τὸ $\frac{8}{9}$ ἀπὸ $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{8}$, τὸ 5 ἀπὸ 9 $\frac{4}{9}$ · λοιπὸν 4 $\frac{7}{9}$ εἶναι ἡ ζητούμενη διαφορὰ. ἢ ὁ 5 $\frac{5}{9}$ τρέπεται εἰς $\frac{50}{9}$, ὁ 9 $\frac{3}{4}$ εἰς $\frac{27}{4}$ · $\frac{50}{9}$ δὲ ἀπὸ $\frac{27}{4}$ $\frac{180}{36}$ ἢ 4 $\frac{7}{9}$.

Ἐὰν δὲ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου ᾖ μικρότερον τοῦ κλάσματος τοῦ ἀφαιρέτου, αὐξάνεται κατὰ μίαν μονάδα τοῦ ἀκεραίου του, τραμμένην εἰς κλασματικὸν ὁμώνυμον ἀριθμόν· ἀλλὰ τότε ὁ ἀκέραιος πρέπει νὰ σμικρύνηται κατὰ 1. Οὕτως εὐρίσκεται 2 $\frac{5}{7}$ ἀπὸ 7 $\frac{3}{8}$ δίδει ὑπόλοιπον 4 $\frac{37}{8}$.

Σημ. Ἐκ τούτων εἶναι φανερόν πῶς ἀφαιρεῖται καὶ ἀκέραιος ἀπὸ μικτοῦ, καὶ μικτὸς ἀπὸ ἀκεραίου, καὶ κλάσμα ἀπὸ μικτοῦ.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως ἀριθμῶν διὰ κλασματικῶν καὶ μικτῶν.

64. Πολλαπλασιασμός ὁποιοῦδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ κλασματικὸν εἶναι πρᾶξις σύνθετος ἐκ διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλασματικοῦ, καὶ ἐκ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ εὐρισκομένου πηλίκου ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ.

ἀ. Ἄς πολλαπλασιασθῇ ἀκέραιος 12 ἐπὶ $\frac{3}{4}$. Πρῶτον διαιρεῖται ὁ 12 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 4 τοῦ κλασματικοῦ, ἔπειτα τὸ πηλίκον 3 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν 3 τοῦ κλασματικοῦ, καὶ ὁ οὕτω προκύπτων 9 εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 12 ἐπὶ $\frac{3}{4}$. Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι τὸ γινόμενον 9 δὲν εἶναι πολλαπλά-

σιον τοῦ πολλαπλασιαστέου **12**, ὡς ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής ᾖναι ἀκέραιος, ἀλλ' εἶναι πολλαπλάσιον πολλοστοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ ὠρισμένως, εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετάρτου τοῦ **12**, ὡς ὁ πολλαπλασιαστής $\frac{3}{4}$ εἶναι τρία τέταρτα τῆς μονάδος. Δοιπὸν πολλαπλασιάζεται ὁ **12** ἢ ὁποιοσδήποτε ἄλλος ἀριθμὸς ἐπὶ $\frac{3}{4}$ σημαίνει εὐρίσκεται ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ᾖναι τὰ τρία τέταρτα τοῦ **12** ἢ ὁποιοσδήποτε ἄλλου. Πολλαπλασιάζεται δὲ ὁ **12** ἢ ἄλλος τις ἐπὶ $\frac{5}{6}$ σημαίνει εὐρίσκεται ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ᾖναι τὰ πέντε ἕκτα τοῦ **12** ἢ τοῦ ἄλλου, δηλ. γίνεται ἐπὶ τοῦ **12** ἡ αὐτὴ πράξις, κατὰ τὴν ὁποίαν γίνεται ὁ πολλαπλασιαστής ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Τίς ἀριθμὸς εἶναι τὰ $\frac{4}{7}$ τοῦ **12**; Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εὐρίσκεται ὡς ἤδη εἵπομεν δηλ. διαιρεῖται ὁ **12** διὰ **7**, καὶ τὸ πηλίκον γράφεται $\frac{12}{7}$ ὡς κλασματικός· τὴν πολλαπλασιάζεται τὸ πηλίκον $\frac{12}{7}$ ἐπὶ **4** (**53**), καὶ εὐρίσκεται γινόμενον $\frac{48}{7}$, ἢ ἀφοῦ τραπῇ εἰς μικτὸν, **6** $\frac{6}{7}$, ὅστις εἶναι τὰ $\frac{4}{7}$ τοῦ **12**.

Ἐκ δὲ τούτου βλέπει τις ὅτι, ἀντὶ νὰ διαιρῇ πρῶτον τὸν ἀκέραιον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάζῃ τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν, δύναται νὰ πολλαπλασιάζῃ πρῶτον τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Τοῦτο, ὡς ἀπλούστερον συγχνῶτατα, εἶναι τὸ κοινότερον.

Οὕτως εὐρίσκεται ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ **9** ἐπὶ $\frac{5}{7}$ ἔσται τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ **9** εἶναι **6** $\frac{3}{7}$. Τὸ γινόμενον τοῦ **10** ἐπὶ $\frac{1}{4}$ ἔσται τὰ $\frac{1}{4}$ τοῦ **10** εἶναι **47** $\frac{3}{4}$. Τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ **6** εἶναι **4** $\frac{3}{8}$.

Β'. Ἀς πολλαπλασιασθῇ ὁ κλασματικός $\frac{5}{8}$ ἐπὶ $\frac{5}{8}$. Διαιρεῖται πρῶτον ὁ $\frac{5}{8}$ διὰ **9** (**55**), καὶ τὸ πηλίκον $\frac{5}{72}$ ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ **5** (**53**), καὶ ἔχομεν γινόμενον $\frac{25}{72}$, ἔσται ὁ $\frac{25}{72}$ εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ $\frac{5}{8}$.

Ἐκ δὲ τούτου βλέπει τις ὅτι, διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ κλασματικός ἐπὶ κλασματικόν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ἐνὸς ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἄλλου, καὶ ὁ παρονομαστής τοῦ ἐνὸς ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου, καὶ νὰ τίθηται τὸ δεῦτερον γινόμενον παρονομαστής ὑπὸ τὸ πρῶτον.

Οὕτως εὐρίσκεται ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{7}{9}$ ἐπὶ $\frac{5}{6}$, ἔσται τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ $\frac{7}{9}$ εἶναι $\frac{35}{54}$ ἢ $\frac{7}{18}$. Τὰ $\frac{5}{9}$ τοῦ $\frac{4}{11}$ εἶναι $\frac{40}{99}$.—Τὰ $\frac{9}{13}$ τοῦ $\frac{7}{7}$, ἔσται τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{7}{7}$ ἐπὶ $\frac{9}{13}$ εἶναι $\frac{63}{13}$.

Γ'. Μικτὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλασματικόν, ἐὰν τραπῇ ὁ μικτὸς εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ οὗτος ἔπειτα πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν κλασματικόν ὡς ἤδη εἵπομεν.

Οὕτως εὐρίσκεται ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ **6** $\frac{5}{4}$ ἐπὶ $\frac{7}{8}$ ἔσται τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ **6** $\frac{5}{4}$ εἶναι **5** $\frac{35}{32}$.—Τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ **4** $\frac{2}{3}$ εἶναι $\frac{26}{21}$ ἢ **4**.

65. Ὅποιοσδήποτε ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μικτὸν, ἐὰν ὁ μικτὸς τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν καὶ ἐπὶ τοῦτον ἔπειτα πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος ὡς ἤδη εἵπομεν.

Οὕτως εὐρίσκεται γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ $4 \frac{2}{3}$ ὃ 27 $\frac{2}{3}$. — Γινόμενον τοῦ $\frac{7}{8}$ ἐπὶ $2 \frac{4}{5}$ 5 $2 \frac{4}{5}$. — Γινόμενον τοῦ $5 \frac{2}{3}$ ἐπὶ $7 \frac{2}{3}$ ὃ 41 $\frac{4}{9}$.

66. Πολλοὶ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ πολλαπλασιάζονται ἐπ' ἀλλήλους, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμηταὶ των ἐπ' ἀλλήλους καὶ οἱ παρονομασταὶ των ὡσαύτως, καὶ τεθῇ τὸ δεύτερον γινόμενον ὑπὸ τὸ πρῶτον.

Οὕτως εὐρίσκεται γινόμενον τῶν $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, ὃ $\frac{50}{84}$, ἢ $\frac{5}{14}$.

ΣΗΜ. Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν μὲν ὁ πολλαπλασιαστής ᾖ αἰρετικὸς τῆς ἀκεραίας μονάδος, τότε καὶ τὸ γινόμενον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πολλαπλασιαστέου· ὅταν δὲ ὁ πολλαπλασιαστής ᾖ μικρότερος τῆς ἀκεραίας μονάδος, ᾖτοι κλάσμα, τότε καὶ τὸ γινόμενον εἶναι μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου.

67. Διαιρέσεις ὁποιοῦδήποτε ἀριθμοῦ διὰ κλασματικοῦ εἶναι πρᾶξις σύνθετος ἐκ διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλασματικοῦ, καὶ ἐκ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ εὐρισκομένου πηλίκου ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ κλασματικοῦ.

Π. γ. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸν 15 διὰ τοῦ $\frac{2}{3}$, διαιροῦμεν πρῶτον τὸν 15 διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ 3, καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸ πηλίκον 5 ἐπὶ τὸν παρονομαστήν 4, καὶ ἔχομεν πηλίκον τοῦ 15 διὰ $\frac{2}{3}$ τὸν ἀριθμὸν 20. Ἄν δὲ ἀναστρέψωμεν τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου $\frac{2}{3}$, ἤγουν γράψωμεν τὸν ἀριθμητὴν 3 παρονομαστήν, καὶ τὸν παρονομαστήν 4 ἀριθμητὴν, τότε εὐρίσκεται τὸ πηλίκον 20, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ 15 ἐπὶ $\frac{3}{2}$ κατὰ τοὺς προειρημένους κανόνας· διότι οὕτως θέλει διαιρεθῇ ὁ 15 διὰ 3, καὶ τὸ πηλίκον θέλει πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4. Εἶναι δὲ τὸ πηλίκον τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ 15, ἐπομένως μεγαλύτερον τοῦ 15. Λοιπὸν γενικῶς, διαιρεῖται ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς διὰ κλασματικοῦ, ἐὰν ἀναστραφῇ τοὺς ὅρους ὁ κλασματικὸς διαιρέτης, καὶ ἔπειτα ἐπὶ τοῦτον πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς κατὰ τοὺς περὶ πολλαπλασιασμοῦ κανόνας (64).

α. Τὸ πηλίκον τοῦ 8 διὰ $\frac{4}{5}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ $\frac{5}{4}$, ἥτοι εἶναι τὰ $\frac{5}{4}$ τοῦ 8, ἤγουν ὁ 10—9 διὰ $\frac{5}{7}$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ 9 ἐπὶ $\frac{7}{5}$ ἥτοι 12 $\frac{3}{5}$, ὅστις εἶναι τὰ $\frac{7}{5}$ τοῦ 9.

β'. Τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{4}{5}$ διὰ $\frac{3}{7}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{7}{3}$, ἥτοι $\frac{28}{15}$ ἢ 1 $\frac{13}{15}$ — $\frac{13}{7}$ διὰ $\frac{3}{5}$ εἶναι 2 $\frac{6}{7}$.

γ'. Τὸ πηλίκον τοῦ $4 \frac{5}{6}$ διὰ $\frac{2}{3}$ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ $4 \frac{5}{6}$ ἐπὶ $\frac{3}{2}$ ἥτοι ὁ 7 $\frac{4}{3}$ —3 $\frac{2}{3}$ διὰ $\frac{3}{7}$ εἶναι 2 $\frac{20}{16}$.

68. Ὅποιοιςδήποτε ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ μικτοῦ, ἐὰν τραπῇ ὁ μικτὸς εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν, καὶ ἔπειτα ἐπὶ τοῦτον ἀνεστραμμένον τοὺς ὅρους πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρετέος ἀριθμὸς.

Οὕτως εὐρίσκεται ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ 6 διὰ $5 \frac{3}{4}$ εἶναι τὸ 2 $\frac{24}{23}$ —Πηλίκον τοῦ $\frac{7}{9}$ διὰ $3 \frac{8}{9}$ εἶναι ὁ $\frac{42}{507}$ —Πηλίκον τοῦ $4 \frac{2}{3}$ διὰ $5 \frac{3}{4}$ εἶναι ὁ $\frac{16}{9}$.

Σημ. παρατηροῦντες τ' ἀνωτέρω παραδείγματα βλέπομεν ὅτι, ὅταν μὲν ὁ διαιρέτης ᾖ αἰρετικὸς τῆς ἀκεραίας μονάδος, τὸ πηλίκον εἶναι τότε μικρότερον τοῦ διαιρέτου· ὅταν δὲ ὁ διαιρέτης ᾖ μικρότερος τῆς μονάδος, ᾖτοι κλάσμα, τότε τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου.

69. Καθὼς ὁ λόγος ἀριθμοῦ ἀκεραίου πρὸς ἄλλον ἀκέραιον εὐρίσκεται διὰ διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου, οὕτω καὶ ὅποιονδήποτε ἀριθμοῦ πρὸς ὅποιονδήποτε ἄλλον ἀριθμὸν ὁ λόγος εὐρίσκεται διὰ διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος λόγος.

Πρὸς εὐρεσιν λοιπὸν τοῦ λόγου τοῦ $\frac{4}{5}$ πρὸς τὸν 3 διαίρεται ὁ $\frac{4}{5}$ διὰ 3, καὶ τὸ πηλίκον $\frac{4}{15}$ ἢ $\frac{1}{4}$ εἶναι ὁ ζητούμενος λόγος, ἦτοι ὁ $\frac{4}{15}$ εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 3—Ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸ $\frac{3}{4}$ εὐρίσκεται ὅτι εἶναι 16, ἤγουν ὁ 12 εἶναι ἴσος μὲ 16 φορές $\frac{3}{4}$.—Ὁ λόγος τοῦ $\frac{5}{7}$ πρὸς τὸ $\frac{2}{3}$ εἶναι $\frac{15}{14}$, ἤγουν ὁ $\frac{5}{7}$ εἶναι τὰ $\frac{15}{14}$ τοῦ $\frac{2}{3}$ κτλ. Καὶ περὶ τῶν μικτῶν ὡσαύτως.

Προβλήματα εἰς Δύσιν.

70. Ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς τῶν ἀκολουθῶν προβλημάτων ἢ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν, ἢ εἶναι τοιοῦτον πολλαπλασίον τοῦ ἑνὸς τῶν γνωστῶν, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος, ἢ εἶναι τοιοῦτον πολλαπλὸν τοῦ ἑνὸς τῶν γνωστῶν, ὅποιον πολλαπλὸν τοῦ ἄλλου εἶναι ἡ μονὰς του, ἢ εἶναι ἴσος μὲ τόσα καὶ τοιαῦτα πολλαπλά τοῦ ἑνὸς τῶν γνωστῶν, ὅσα καὶ ὅποια πολλαπλά τῆς μονάδος του εἶναι ὁ ἄλλος ἢ εἶναι ἴσος μὲ τόσα καὶ τοιαῦτα πολλαπλά τοῦ ἑνὸς τῶν γνωστῶν, ὅσα καὶ ὅποια πολλαπλά τῆς μονάδος του εἶναι ὁ ἄλλος ἀνεστραμμένος τοὺς ὅρους κλασματικὸς, ἢ εἶναι ὁ λόγος τοῦ ἑνὸς τῶν γνωστῶν πρὸς τὸν ἄλλον, ἢ τελευταῖον εἶναι τί ἐστὶ συνθετώτερον. Διὰ ταῦτα θέλει εὐρεθῇ διὰ μίας ἢ πλείοτερον πράξεων ἀπὸ τὰς εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο ἐξηγηθείσας· μικρά δὲ προσοχὴ θέλει δείξει τίς πράξεις καὶ ἐπὶ τίνων ἀριθμῶν πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ.

1. Παιδίον ἔδωκεν εἰς ἕνα τῶν συμμαθητῶν τοῦ τὰ $\frac{2}{5}$ ἐνὸς πορτογαλίου, εἰς ἄλλον τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ, καὶ εἰς τρίτον $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ· τί μέρος τοῦ πορτογαλίου ἔδωκεν εἰς τοὺς συμμαθητάς του; Καὶ ἂν ἔφαγεν αὐτὸς τὸ ἐπίλοιπον, τί μέρος τοῦ πορτογαλίου ἔφαγεν;

2. Τριῶν κομματίων ὑφάσματος τὸ μὲν εἶναι μακρὸν πῆχει $7\frac{3}{4}$, τὸ δὲ $13\frac{1}{6}$, τὸ δὲ $13\frac{1}{8}$ πόσον πῆγεον εἶναι καὶ τὰ τρία ὁμοῦ;

3. Με τί ἰσοδυναμοῦν τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{3}{4}$ ἐνὸς πῆγεως τσόχας, τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ αὐτοῦ καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ δύο πῆγεων;—πῆγ. $1\frac{53}{120}$.

4. Εἰς σάκκον τινά εἶναι σίτος $\frac{2}{3}$ ἐνὸς κοίλου, εἰς ἄλλον σάκκον εἶναι $\frac{3}{4}$ ἐνὸς κοίλου· πόσον περισσότερος σίτος εἶναι εἰς τὸν ἕνα παρ' εἰς τὸν ἄλλον; καὶ εἰς ποῖον εἶναι περισσότερος;

5. Ποῖον τῶν δύο κλασμάτων $\frac{7}{9}$ καὶ $\frac{4}{5}$ εἶναι μεγαλύτερον; καὶ πόσον;

6. Τὰ $\frac{1}{10}$ τοῦ ἡμερονυκτίου ἐργάζεται τις καὶ τὰ $\frac{3}{10}$ κοιμᾶται· περισσότερον ἐργάζεται ἢ περισσότερον κοιμᾶται; καὶ πόσον περισσότερον; $\frac{1}{10}$ ἢ $\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας.

7. Εἰς βαρέλιον ἦτον 145 ὀκάδες οἶνου, τούτων δ' ἐπωλήθησαν εἰς τινα ὀκ. $35\frac{3}{4}$ εἰς ἄλλον 24 $\frac{3}{10}$ καὶ εἰς τρίτον 30 $\frac{6}{10}$ πόσαι ὀκάδες ἔμειναν;—34 $\frac{1}{10}$.

8. Ἡγόρασέ τις κομματίον ὑφάσματος $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχους μακρὸν πρὸς $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς τὸν πήχυν πόσον τῆς δραχμῆς ἐπλήρωσεν; — $\frac{1}{8}\frac{5}{8}$.
9. Σάκκος ἀλεύρου ἀξίζει 48 δραχμ. τὰ $\frac{9}{10}$ αὐτοῦ πόσον ἀξίζουν; δρ. 27.
10. Τῶν $\frac{8}{10}$ τῆς δραχμῆς, τὰ ὅποια εἶχέ τις, διένειμεν εἰς ἐπαίτας τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῶν πόσον μέρος τῆς δραχμῆς ἔδωκεν εἰς τοὺς ἐπαίτας καὶ πόσον τοῦ ἔμειναν;
11. 12 μανδήλια πρὸς $\frac{7}{8}$ τοῦ πενταδράχμου τὸ καθὲν πόσον ἀξίζουν;
12. Ἐργάτης τις λαμβάνει ἡμερομίσθιον δραχ. $2\frac{1}{2}$ εἰς 9 ἡμέρας πόσας δραχμὰς θέλει λάβει;
13. Ἐπωλήθησαν ὑπὸ τινος εἰς ἄλλον τὰ $\frac{3}{4}$ ἀγροῦ τινος, καὶ τούτων τὰ $\frac{4}{9}$ εἰς τρίτον, καὶ τούτων πάλιν τὰ $\frac{7}{12}$ εἰς τέταρτον· τί μέρος τοῦ ἀγροῦ ἡγόρασεν ὁ τέταρτος; — $\frac{7}{86}$.
14. Ὀδοιπορῶν τις στάδια $6\frac{3}{4}$ τὴν ὥραν, $9\frac{1}{2}$ ὥρας πόσα στάδια θέλει δοιοπορήσει;
15. Πόσα λεπτά εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{8}$ τῶν $\frac{6}{9}$ τῆς δραχμῆς; — λεπτά 34 $\frac{1}{4}$.
16. 6 πήχεις ὑφάσματος ἀξίζουν $\frac{3}{5}$ τοῦ πενταδράχμου, ὁ εἰς πήχυς πόσον τοῦ πενταδράχμου ἀξίζει; — $\frac{1}{10}$ ἢ δρ. $\frac{1}{2}$.
17. Οἰκογενεὰ τις καίει 12 $\frac{3}{4}$ ὀκάδας ἐλαίου εἰς 18 ἡμέρας· πόσον καίει τὴν ἡμέραν; πόσον τὸν μῆνα; καὶ πόσον τὸ ἔτος; Ἡ μίαν ὀκάν· εἰς πόσον καιρὸν τὴν καίει;
18. Ἐὰν μοιράσῃ τις $\frac{4}{5}$ μιᾶς δραχμῆς εἰς 8 παιδία, πόσα θέλει δώσει εἰς ἑκαστον, καὶ μὲ πόσα λεπτά ἰσοδυναμεῖ αὐτό;
19. Εἰς πτωχοῦς τινας ἐμοίρασέ τις 9 δραχμὰς, δίδων εἰς ἑκαστον $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς· πόσοι ἦσαν οἱ πτωχοί; — 12.
20. Ἐὰν μὲ πεντάδραχμα $4\frac{3}{5}$ ἀγοράζῃ τις ἓνα πήχυν τσόχας, μὲ 37 πεντάδραχμα πόσους πήχεις θέλει ἀγοράσει;
21. Τὸ σάκχρι πωλεῖται $\frac{3}{10}$ τοῦ πενταδράχμου τὴν ὀκάν· μὲ $\frac{4}{5}$ τοῦ πενταδράχμου πόσον ζάχαρι ἀγοράζει τις. Ἡ $\frac{7}{12}$ τῆς ὀκᾶς πόσον τοῦ πενταδράχμου ἀξίζει;
22. Χρειάζονται $2\frac{3}{4}$ κοιλὰ κριθῆς, διὰ νὰ σπείρῃ τις ἐν ἀργυρίῳ τετραγώνον χωραφίον· πόσα κοιλὰ χρειάζονται διὰ νὰ σπείρῃ χωράφιον 45 $\frac{4}{9}$ ἀργυρίων τετραγώνων;
23. Δαπανᾷ οἰκογενεὰ τις $\frac{4}{18}$ τῆς ὀκᾶς βουτύρου τὴν ἡμέραν· εἰς πόσα ἡμέρας θέλει δαπανᾷ οἰκᾶδας 12 $\frac{1}{2}$;
24. Ἐὰν $6\frac{1}{2}$ πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 3 δραχμὰς, $9\frac{1}{4}$ πήχεις πόσον ἀξίζουν; δρ. $4\frac{7}{10}$, ἢ περίπου δρ. 4 λεπτά 27.
25. Ἐὰν $\frac{3}{4}$ ὀκᾶς ἐλαίου ἀξίζουν $\frac{7}{8}$ τῆς δραχμῆς 42 $\frac{1}{2}$ ὀκάδες ἐλαίου πόσον ἀξίζουν; — δρ. 49 $\frac{7}{12}$.
- Τὰ $\frac{7}{12}$ τῆς δραχμῆς μὲ πόσα λεπτά ἰσοδυναμοῦν;

26. Πόσαι ὀκάδες τυρίου πρὸς δρ. $2 \frac{3}{8}$ τὴν ὁκτὸν πρέπει νὰ ἰσοθῶσιν ἀντὶ $15 \frac{1}{2}$ κοιλῶν σίτου πρὸς δραχμὰς $4 \frac{2}{5}$ τὸ $\frac{1}{2}$ κοιλόν;—ὀκάδ. $30 \frac{1}{10}$.

27. ὄντος τοῦ πλάτους τσόχας $1 \frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως χρειάζονται $12 \frac{6}{8}$ τοῦ πήχεως δι' ἐν ἐπανωφόρεμα· ἄλλης τσόχας πλατείας $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὸ αὐτὸ ἐπανωφόρεμα;

28. Κοράσιόν τι ἐργαζόμενον ὥρας $4 \frac{1}{2}$ καθημέραν ἐκέντησε μανδύλιόν τι εἰς 15 ἡμέρας· ἐν ἤθελεν ἐργάζεσθαι ὥρας $7 \frac{1}{2}$ καθημέραν, εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελε τὸ τελειώσει; ἢ ἂν ἤθελε νὰ τὸ κεντήσῃ εἰς ὅκτὼ ἡμέρας, πόσας ὥρας ἔπρεπε νὰ ἐργάζεται τὴν ἡμέραν;

29. Εὑωλήθησαν εἰς δημοπρασίαν $24 \frac{3}{8}$ πήχεις τσῆτι $15 \frac{1}{2}$ δραχμὰς, $4 \frac{2}{5}$ πήχεις τσόχας δρ. $35 \frac{2}{5}$, 8 μανδύλια μεταξωτὰ δρ. $30 \frac{1}{2}$, καὶ 9 ζεύγη ὑποδημάτων δρ. $75 \frac{5}{8}$. Ὀλίον τούτων τῶν δραχμῶν ὁ κήρυξ λαμβάνει τὰ $\frac{1}{16}$ καὶ τῶν ὑσσι μένουν ὁ ἐπιστάτης τῆς δημοπρασίας λαμβάνει τὰ $\frac{1}{16}$. Πόσαι δρ. θέλουν μείνει εἰς τὸν κύριον τῶνπραγματειῶν· πόσον ἐτιμήθη τὸ τσῆτι τὸν πήχυν καὶ ἡ τσόχα; πόσον ἐτιμήθη τὸ μανδύλιον, καὶ πόσον τὸ ζεύγος τῶν ὑποδημάτων;

Περὶ ἰσότητος τῶν ἐν τῷ τρίτῳ Κεφαλαίῳ δι' ἐρωτήσεων.

Πῶς πρέπει ἀκέραιος ἀριθμὸς εἰς κλασματικὸν ἰσοδύναμον, καὶ τάνάπαλιν; Πῶς πρέπει μικτὸς ἀριθμὸς εἰς ἓνα κλασματικὸν ἰσοδύναμον, καὶ τάνάπαλιν; Μὴ πόσα δεῦρα ἰσοδυναμεῖν 5 μονάδες; Μὴ ποῦν ἀριθμὸν ἀκέραιον ἢ μικτὸν ἰσοδυναμοῦν δεκαπέντε τέταρτα; Τί εἶναι ἑτερόνυμοι καὶ τί ἑτερόνυματοι κλασματικοί; Κατὰ πόσους καὶ ποίους τρόπους τρέπονται δύο ἑτερόνυμοι κλασματικοί εἰς ἄλλους ἰσοδύναμους ἑτερόνυμους; Τίς τῶν δύο εἶναι γενικός; Κατὰ πόσους καὶ ποίους τρόπους τρέπονται πλείοντεροι τῶν δύο ἑτερόνυμοι κλασματικοί εἰς ἄλλους ἰσοδύναμους ἑτερόνυμους; Τίς τῶν δύο εἶναι γενικός; Τίς ὁ προτιμώτερος; ὅταν ἦναι δυνατός; Διὰ τίνος πράξεως εὐρίσκεται κλασματικὸς ἰσοδύναμος μὲ ἄλλον, ἀλλ' ἔχων μικρότερος ὅρους; Διὰ τίνος ἀριθμοῦ διαίρωνται οἱ δύο ὅροι του; Εἶναι πάντοτε δυνατόν ἡ ἀγωγή αὕτη; Διὰ τί; Τί εἶναι ἀνάγωγος κλασματικός; Ὅποιοι εἶναι οἱ ὅροι τοῦ ἀναγώγου; Διὰ ἢ ἤχη κλασματικός εἰς ἰσοδύναμον ἀνάγωγον, διὰ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαίρωνται οἱ ὅροι του; Ὅποιοι ἀνάγκη νὰ ἦναι οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί, διὰ νὰ ἦναι δυνατόν νὰ προσθέτῃνται καὶ νὰ ἀφαιρῶνται; Πῶς προσθέτῃνται; Διὰ τί; Πῶς ἀφαιρῶνται ἢ πῶς ἀφαιρῶνται οἱ ἑτερόνυμοι; Πῶς προσθέτῃνται ἢ πῶς ἀφαιρῶνται μικτοὶ ἀριθμοί, ἢ ἀκέραιος καὶ κλάσμα, ἢ ἀκέραιος καὶ μικτός, ἢ κλάσμα καὶ μικτός;—Κατὰ πόσους τρόπους πολλαπλασιάζεται κλασματικὸς ἀριθμὸς ἐπὶ ἀκέραιον; ἢ μικτὸς ἀριθμὸς ἐπὶ ἀκέραιον; Ποῖος εἶναι πάντοτε δυνατός; Ποῖος εἶναι προτιμωτέος, ὅταν ἦναι δυνατός; Τὸ γινόμενον εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ πολλαπλασιαστέου; Τί πολλαπλάσιον εἶναι; Κατὰ πόσους τρόπους διαίρεται κλασματικὸς ἀριθμὸς δι' ἀκέραιον; ἢ μικτὸς ἀριθμὸς δι' ἀκέραιον; Ποῖος εἶναι πάντοτε δυνατός; Ποῖος εἶναι προτιμωτέος δυνατός ὢν; Τὸ πηλίκον εἶναι πολλοστὸν τοῦ διαιρετέου; Τί πολλοστὸν εἶναι; Κλασματικός, ὅστις ἔχει ἀριθμητὴν διπλάσιον ἢ τριπλάσιον κτλ. τοῦ ἀριθμητοῦ ἄλλου κλασματικοῦ, ἢ ἔχει ἀριθμητὴν ἡμισὺ ἢ τρίτον κτλ. τοῦ ἀριθμητοῦ ἄλλου κλασματικοῦ, εἶναι πολλαπλάσιον ἢ πολλοστὸν τοῦ ἄλλου κλασματικοῦ; Τί πολλαπλάσιον ἢ τί πολλοστὸν εἶναι; Κλασματικός, ὅστις ἔχει παρονομαστὴν διπλάσιον ἢ τριπλάσιον κτλ. ἢ ἡμισὺ ἢ τρίτον κτλ. τοῦ παρονομαστοῦ ἄλλου κλασματικοῦ, τί πολλαπλάσιον ἢ τί πολλοστὸν εἶναι; Πῶς εὐρίσκεται ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ἦναι πολλαπλάσιος τῆς ἢ πολλοστὸν τοῦ ἄλλου κλασματικοῦ ἀριθμοῦ; Πῶς εὐρίσκεται κλασματικὸς ἀριθμὸς ἰσοδύναμος μὲ ἄλλον κλασματικόν, διὰ τί; Αριθμὸς, ὅστις εἶναι δύο ἡμισὺ ἄλλου, ἢ τρία τρίτα αὐτοῦ κτλ. εἶναι ἰσοδύναμος μὲν ἄλλου, μεγαλύτερος ἢ μικρότερος; Διὰ τί;—Ὁ πολλαπλασιασμός ποιοῦν δύνῃται ἀριθμοῦ ἐπὶ κλασματικόν ὅποιον πράξιν εἶναι; καὶ τί διαφέρει τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἀκέραιον;

Πῶς ἄλλως λέγομεν ἀντὶ τοῦ πολλαπλασιαζόμεν ἐπὶ κλασματικόν; Πῶς πολλαπλασιάζεται ἀκέραιος ἐπὶ κλασματικόν, κλασματικὸς ἐπὶ κλασματικόν, καὶ μικτὸς ἐπὶ κλασματικόν; Πῶς πολλαπλασιάζεται ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἢ μικτὸς ἐπὶ μικτόν; Ὅποσον εἶναι τὸ γινόμενον πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον; Ἡ διαιρέσις ὅποιουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ κλασματικοῦ ὅποιον πράξις εἶναι; καὶ τί διακρίνει τῆς διαιρέσεως δι' ἀκέραιου, καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ κλασματικόν; Πῶς διακρίνεται ὅποιουδήποτε ἀριθμὸς, ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἢ μικτὸς διὰ κλασματικοῦ; Πῶς διακρίνεται ὅποιουδήποτε ἀριθμὸς διὰ μικτοῦ; Ὅποσον εἶναι τὸ πηλίκον πρὸς τὸν διαιρέτεον; Πῶς καταλαμβάνεται ὅτι πρὸς λύσιν τοῦ δαίνος προβλήματος ἀνάγκη νὰ γίνηῃ ἡ δεῖνα πράξις τῶν ἐν τούτῳ τῷ κεφαλαίῳ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ.

Τί εἶναι συμμιγῆς ἀριθμὸς καὶ τί διαφέρει ἀκεραίου.

74. Τοῦ αὐτοῦ πράγματος, οἷον τοῦ μήκου, τοῦ βάρους, τοῦ χρόνου, κτλ. εἶναι πολλαὶ μονάδες εἰς χρῆσιν, ἄλλαι μεγαλύτεραι τῆς ἀρχικῆς καὶ ἴση ἐκώσθη μὲ ἀριθμόν τινα μονάδων ἀρχικῶν, καὶ ἄλλαι μικρότεραι καὶ ἴση ἐκάστη μὲ πολλοστών τι τῆς ἀρχικῆς μονάδος.

Ἡ ἡμέρα (τὸ ἡμερονύκτιον) εἶναι ἀρχικὴ μονὰς τοῦ χρόνου· τὸ ἔτος εἶναι ἄλλη μονὰς μεγαλύτερα καὶ ἴση μὲ **365** ἡμέρας, ἀνὰ τέταρτον δὲ ἔτος ἴση μὲ **366**· ἡ ὥρα εἶναι μονὰς μικροτέρα καὶ ἴση μὲ τὸ $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας, ἢ ἄλλως, ἡ ἡμέρα εἶναι ἴση μὲ **24** ὥρας· τὸ λεπτόν εἶναι $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας καὶ $\frac{1}{1440}$ τῆς ἡμέρας τοῦ δευτέρου λεπτοῦν εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ, μὲ $\frac{1}{86400}$ τῆς ὥρας, καὶ μὲ $\frac{1}{86400}$ τῆς ἡμέρας.

Ἐνίοτε εἶναι εἰς χρῆσιν καὶ ἡ ἐβδομάς, ἥτις εἶναι ἴση μὲ **7** ἡμέρας, καὶ ὁ μῆν, ὅστις λογίζεται ἴσος μὲ **30** ἡμέρας.

Ἡ ὀκά εἶναι ἀρχικὴ μονὰς τοῦ βάρους· ὁ στατήρ (τὸ καντάρι) εἶναι ἄλλη μονὰς ἴση μὲ **44** ὀκάδας· τὸ δράμι, ἄλλη μονὰς ἴση μὲ τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκάς, ἢ ἡ ὀκά εἶναι ἴση μὲ **400** δράμια.

Ἡ δραχμὴ εἶναι ἀρχικὴ μονὰς τῶν νομισμάτων· τὸ πεντάδραχμον ἴσον μὲ **5** δραχμάς· τὸ χρυσοῦν ὀθώνιον ἴσον μὲ **20** δραχμάς ἢ μὲ **4** πεντάδραχμα· τὸ λεπτόν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐκατοστόν τῆς δραχμῆς.

Ἡ ὀργυῖα, ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκου· ὁ πούς, $\frac{1}{6}$ τῆς ὀργυῖας· ὁ δάκτυλος, $\frac{1}{12}$ τοῦ ποδὸς καὶ $\frac{1}{12}$ τῆς ὀργυῖας· ἡ γραμμὴ, $\frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου $\frac{1}{144}$ τοῦ ποδὸς, $\frac{1}{864}$ τῆς ὀργυῖας.

Ἀριθμὸς, ὅστις σύγκειται ἐξ ἄλλων ἀριθμῶν διαφόρων μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος, λέγεται συμμιγῆς, οἷον Ὀδργ. 8ποδ. 6δάκ. 3γραμ. ἢ 8ἔτη 245ἡμ. 15ῶρ. 9λεπ. κτλ.

Τὰ ὀνόματα τῶν διαφόρων μονάδων συνειθίζου νὰ τὰ γράφουν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ ὀλίγον δεξιὰ, ὅχι ὀλόκληρα, οἷον Ὀδργ. 8ποδ. 5δάκ. 3γραμ.

Διαφέρει δὲ συμμιγῆς ἀκεραίου μόνον κατὰ ταῦτα, α'. ὅτι αἱ διαφοροὶ μονάδες τοῦ εἶναι ἄλλη ἄλλης ἄλλο πολλοστὸν, ἢ ἄλλη ἄλλης ἄλλο πολλαπλάσιον, καὶ ὅχι τὸ αὐτὸ, ὡς ἡ μονάς, ἡ δεκάς, ἡ ἑκατοντάς, αἵτινες εἶναι κατὰ σειρὰν ἄλλη ἄλλης τὸ αὐτὸ πολλαπλάσιον ἢ πολλοστόν· β'. ὅτι διακρίνονται εἰς τὴν γραφὴν οἱ ἀριθμοὶ τῶν διαφορῶν μονάδων ὅχι ἀπλῶς διὰ τῆς θέσεως, ὡς τοῦ ἀκεραίου, ἀλλὰ διὰ τοῦ ἐπιτεθειμένου ὀνόματος τῶν μονάδων· καὶ γ'. ὅτι εἶναι πάντοτε συγκεκριμένος ὁ συμμιγῆς. Μικτοῦ δὲ ἀριθμοῦ διαφέρει ὁ συμμιγῆς καθότι εἶναι συνθετώτερος, ὅτι γράφεται διαφορετικῶς, καὶ ὅτι εἶναι πάντοτε συγκεκριμένος.

Διὰ ταῦτα αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις καθίστανται δυσκολώτεραι, καὶ ἀνάγκη ἐν συντόμῳ νὰ διαλάβωμεν καὶ περὶ αὐτῶν τ' ἀναγκαϊότερα.

Περὶ τροπῆς συμμιγῆος εἰς ἓνα ἰσοδύναμον ἀριθμὸν μικροτέρας τινὸς μονάδος τοῦ, καὶ τ' ἀνάπαλιν.

72. Ἄν καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν 45 ἐξεθέσαμεν προβλήματα τοιαῦτα, καὶ πρέπει νὰ ἦναι γνωστὸν πῶς γίνονται αὗται αἱ τροπαί, μολοντοῦτο ἐπαναλαμβάνομεν αὐτὰ ἐδῶ τελειότερα.

Ἀς τροπῇ ὁ 34 ἡμ. 8 ὥρ. 15 λεπ. εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν λεπτῶν.

Ἐπειδὴ ἡ 1 ἡμ. ἰσοδυναμεῖ μὲ 24 ὥρ. αἱ 34 ἡμ.	34 ἡμ. 8 ὥρ. 15 λεπ.
ἰσοδυναμοῦν μὲ 34 φορὰς 24 ὥρ. λοιπὸν πρέπει νὰ	24
πολλαπλασιασθῶσιν αἱ 24 ὥρ. ἐπὶ 34, ἢ ὁ 34 ἐπὶ	136
24, καὶ τὸ γινόμενον εἶναι 816 ὥρ. Προσθέτομεν	68
τώρα εἰς τὰς 816 καὶ τὰς 8 ὥρ. καὶ τὸ ἄθροισμα	816
824 ὥρ. ἰσοδυναμεῖ μὲ 34 ἡμ. καὶ 8 ὥρ. Ὡσαύτως	8
ἐπειδὴ 1 ὥρ. ἰσοδυναμεῖ μὲ 60 λεπ. αἱ 824 ὥρ. ἰσο-	824 ὥρ
δυναμοῦν μὲ 824 φορὰς 60 λεπ. λοιπὸν πρέπει	60
νὰ πολλαπλασιασθῶν τὰ 60 λεπ. ἐπὶ 824, ἢ ὁ	49440
824 ἐπὶ 60, καὶ τὸ γινόμενον εἶναι 49440 λεπ.	45
Προσθέτοντες καὶ τὰ 15 λεπ. ἔχομεν ἄθροισμα	49455
49455 λεπ. ἰσοδύναμον μὲ 34 ἡμ. 8 ὥρ. 15 λεπ.	

Σημ. Ὁ 49455 λεπ. εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν κλασματικὸν $\frac{49455}{1440}$ τῆς ἡμέρας· διότι τὸ 1 λεπτόν εἶναι $\frac{1}{1440}$ τῆς ἡμέρας, καὶ ἐπομένως τὰ 49455 λεπτ. εἶναι $\frac{49455}{1440}$ τῆς ἡμέρας.

Ἐκ τούτου βλέπει τις ὅτι τρέπεται συμμιγῆς ἀριθμὸς εἰς ἓνα ἰσοδύναμον ἀριθμὸν μικροτέρων τοῦ μονάδων οὕτω· Πρῶτον πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριστερὸς ἀριθμὸς τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ ἀριθμὸν, ὅστις νὰ ἔχη τόσας μονάδας, μὲ ὅσας ἀμέσως μικροτέρας τῆς ἰσοδυναμεῖ μία μονάς τοῦ ἀριστεροῦ ἀριθμοῦ, καὶ εἰς

τὸ γινόμενον προστίθεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀμέσως μικροτέρων μονάδων τοῦ συμμιγούς· ἔπειτα τὸ ἄθροισμα τοῦτο πολλαπλασιάζεται ὡσαύτως ἐπὶ ἀριθμὸν, ὅστις νὰ ἔχῃ τόσας μονάδας, μὲ ὅσας ἀμέσως μικροτέρας τῆς ἰσοδυναμεῖ μία μονὰς τοῦ ἀθροίσματος, καὶ προστίθεται εἰς τὸ γινόμενον ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀμέσως μικροτέρων μονάδων τοῦ συμμιγούς, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἰδὸν καὶ ἄλλα παραδείγματα.

12πεν. 4δρ. 50λεπ.	6ζατ. 8ζκ. 150δρ.	48εργ. 3πλδ. 9δακ.
<u>5</u>	<u>44</u>	<u>6</u>
60	24	108
<u>4</u>	<u>24</u>	<u>3</u>
64δρ.	8	111ποδ.
<u>100</u>	<u>272ζκ.</u>	<u>12</u>
6400	400	222
<u>50</u>	<u>108800</u>	<u>111</u>
6450λεπ.	150	9
	<u>108950δρ.</u>	<u>1341δακ.</u>

73. Ἄς τραπῶσι τὰ 49455λεπ. τῆς ὥρας εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν ἰσοδύναμον. Ἐπειδὴ 1440 λεπτὰ ἰσοδυναμοῦν μὲ μίαν ἡμέραν, εἶναι φανερόν ὅτι, ἀπὸ ὅσας φορὰς 1440 λεπτὰ σύγκεινται τὰ 49455λεπ. μὲ τόσας ἡμέρας ἰσοδυναμοῦν. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ἀπὸ ποσάκις 1440 σύγκειται ὁ 49455, ἤτοι τὸν λόγον τοῦ 49455 πρὸς τὸν 1440, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον διὰ τοῦ δευτέρου. Εὕρισκομεν λοιπὸν πηλίκον 34ῆμ. καὶ $\frac{495}{1440}$ τῆς ἡμέρας, ἤτοι 495λεπ. Πάλιν, ἐπειδὴ 60 λεπτὰ ἰσοδυναμοῦν μὲ μίαν ὥραν, εἶναι φανερόν ὅτι, ἀπὸ ὅσας φορὰς 60 σύγκεινται τὰ 495 λεπτὰ, μὲ τόσας ὥρας ἰσοδυναμοῦν, ἔχουν μὲ τόσας ὥρας, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ λόγος τοῦ 495 πρὸς τὸν 60, καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ 495 διὰ τοῦ 60, διὰ νὰ εὕρεθουν. Εὕρισκομεν λοιπὸν πηλίκον 8 ὥρας καὶ $\frac{15}{60}$ τῆς ὥρας, ἤτοι 15 λεπτὰ. Λοιπὸν τὰ 49455λεπ. ἰσοδυναμοῦν μὲ 34ῆμ. 8ῶρ. 15λεπ.

Ἐκ τούτου εὐκόλως ἐννοεῖ τις ὅτι, διὰ νὰ τραπῶσι 6450λεπ. τῆς δραχμῆς εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν ἰσοδύναμον, πρέπει νὰ διαιρεθῶσι τὰ 6450 διὰ 500, καὶ ἔπειτα τὸ κατάλοιπον 450λεπ. διὰ τοῦ 100· καὶ οὕτως εὕρεσκειται ὅτι 6450 ἰσοδυναμοῦν μὲ 12πεν. 4δρ. 50λεπ. Τὰ δὲ 108950δραμ. πρέπει νὰ διαιρεθῶσι διὰ 17600, καὶ τὸ κατάλοιπον 3350δρ. διὰ 400 καὶ οὕτως εὕρεσκειται ὅτι 108950δρ. ἰσοδυναμοῦν μὲ 6ζατ. 8ζκ. 159δρ.

Ἄς τραπῶσι τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἡμέρας εἰς ὥρας καὶ λεπτὰ.

Ἐπειδὴ ἡ ἡμέρα ἰσοδυναμεῖ μετ' 24 ὥρ. εἰμποροῦμεν νὰ νοήσωμεν τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἡμέρας ὡς $\frac{2}{3}$ τῶν 24 ὥρ. τὰ δὲ $\frac{2}{3}$ τῶν 24 ὥρ. εὐρίσκονται (64 ἄ.) ὅτι ἰσοδυναμοῦν μετ' 14 ὥρ. $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ὥρα ἰσοδυναμεῖ μετ' 60 λεπ. τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας νοοῦνται $\frac{2}{3}$ τῶν 60 λεπτῶν· τὰ δὲ $\frac{2}{3}$ τῶν 60 λεπ. ἰσοδυναμοῦν μετ' 24 λεπ. Λοιπὸν τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἡμέρας ἰσοδυναμοῦν μετ' 14 ὥρ. 24 λεπ.

Ὡσαύτως τὰ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀργυιᾶς εἶναι τὸ αὐτὸ μετ' τὰ $\frac{1}{8}$ τῶν 6 ποδ. τὰ ὅποια ἰσοδυναμοῦν μετ' 3 ποδ. καὶ $\frac{1}{8}$ τοῦ ποδός. Τὰ δὲ $\frac{1}{8}$ τοῦ ποδός ἰσοδυναμοῦν μετ' τὰ $\frac{1}{8}$ τῶν 12 δακτύλων, ἥτοι μετ' 9 δακ. Λοιπὸν $\frac{1}{8}$ τῆς ὀργ. ἰσοδυναμοῦν μετ' 3 ποδ. 9 δακτ.

Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως συμμιγῶν.

74. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν ἐκτελεῖται ὡς ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἀκεραίων. Ἀλλ' ἐπειδὴ τῶν συμμιγῶν αἱ διάφοροι μονάδες εἶναι ὅχι τὸ δέκατον ἢ μία τῆς ἄλλης ἢ τὸ δεκαπλάσιον, ὡς τῶν ἀκεραίων αἱ μονάδες, ἀλλ' ἄλλοι πολλοὶ στόν, ἢ κυλλαπλάσιον, διὰ τοῦτο γίνονται ἐλίγον δυσκολώτερα.

Ἀνθρωπὸς τις ἐδάνευσεν εἰς μὲν τὸν Γεώργιον 38 πεντ. 2 δρ. 35 λεπ. εἰς δὲ τὸν Κωνσταντῖνον 54 πεντ. 4 δρ. 75 λεπ. εἰς δὲ τὸν Σωκράτην 24 πεντ. 3 δρ. 50 λεπ. πόσα ἐδάνευσεν ὅλα;

Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ ζητούμενον. Ἀφοῦ λοιπὸν γραφθῶσιν ὡς ἐδῶ

38 πεν.	2 δρ.	35 λεπ.
54	4	75
24	3	50
118	0	60

φαίνονται προσθέτομεν τὰ λεπτὰ καὶ τοῦ ἀθροίσματος 160 τὰ μὲν 60 γράφομεν ὑπὸ τὰ λεπτὰ, τὰ δὲ 100 ἰσοδυναμοῦν μετ' ἑμίαν δραχμὴν καὶ τὴν προσθέτομεν εἰς τὰς δραχμὰς. Οὕτως ἔχομεν 10 δραχ. αἱ ὅποια ἀποτελοῦν δύο πεντάδραχμα· γράφομεν λοιπὸν 0 ὑπὸ τὰς δρ. καὶ προσθέτομεν ἔπειτα τὰ δύο πεντάδραχμα εἰς τὰ λοιπὰ πεντάδραχ. Οὕτως ἔχομεν ἄθροισμα 118 πεν. 0 δρ. 60 λεπ. λοιπὸν τόσα ἐδάνευσεν.

Ἐμελλέ τις νὰ κτίσῃ τοῖχον 35 ὀργ. 4 πόδ. 9 δακ. 4 γρ. ἀλλ' ἔκτισε μόνον ἓν μέρος τοῦ ἴσου μετ' 12 ὀργ. 5 πόδ. 7 δακ. 10 γρ. πόσας ἔχει νὰ κτίσῃ ἀκόμη;

Πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ὁ δεῦτερος ἀριθμὸς ἀπὸ 35 ὀργ. 4 πόδ. 9 δακ. 4 γρ. τοῦ πρώτου διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ ζητούμενον. Ἀ-

35	4	9	4
12	5	7	10
22	5	1	6

φοῦ λοιπὸν γραφθῶν ὡς φαίνονται, ἀφαιροῦμεν 10 γρ. ὅχι ἀπὸ τῶν 4, ἀλλὰ ἀπὸ 16, ἀφοῦ ἐνώσωμεν μετ' τὰς 4 ἓνα τῶν 9 δακ. ἢ 12 γρ. γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον 6 ὑπὸ τὰς γραμμὰς. Ἐπειτ' ἀφαιροῦμεν 7 δακ. ἀπὸ 8 καὶ γράφομεν 1 ὑποκάτω. Ἐπειτ' ἀφαιροῦμεν 5 πόδ. ὅχι ἀπὸ τῶν 4, ἀλλ' ἀπὸ 10 πόδ. ἀφοῦ ἐνώσωμεν 1 ὀργ. ἢ 6 πόδ. μετ' τοὺς 4, καὶ γράφομεν ὑποκάτω τὸ ὑπόλοιπον 5. Τελευταῖον ἀφαιροῦμεν 12 ὀργ. ἀπὸ 34 καὶ μένουσιν 22 ὀργ. Λοιπὸν μέλλει νὰ κτίσῃ ἀκόμη 22 ὀργ. 5 πόδ. 1 δακ. 6 γρ.

25ς	28δκ.	350δρ.	32ήμ.	20ῶρ.	45λ.	15ῶρ.	4πόδ.	11δζκ.
6	39	280	9	22	50	6	5	9
9	42	350	7	18	40	10	3	8
8	24	200	6	19	56	5	5	10
54	3	380	57	10	41	39	2	2
34πεν.	3δρ.	66λεπ.	12ς.	15δκ.	300δρ.	8ήμ.	10ῶρ.	25λεπ.
28	3	78	6	35	250	3	22	40
5	4	88	5	24	50	4	11	45

Νὰ προστεθῶσι τῆς ἡμέρας εἰς 12ῶρ. 25λεπ. Πρῶτον τρέπονται τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ἡμέρας εἰς 14ῶρ. 24λεπ. (73), καὶ αὐταὶ προστίθενται εἰς τὰς 12ῶρ. 25λεπ.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως συμμιγῶν.

75. Συμμιγῆς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον καὶ διαιρεῖται δι' ἀκέραιου, ὅπως πολλαπλασιάζεται καὶ διαιρεῖται ἀκέραιος δι' ἀκέραιου.

Ἐάν μὲ ἓν πεντάδραχμον ἀγοράζῃ τις ἀγρὸν 6δργ. 3ποδ. 8δακ. μὲ 15πεντ. πόσον ἤθελεν ἀγοράσει;

Φανερόν ὅτι ἤθελεν ἀγοράσει δεκαπεντάκις 6δρ. 3π. 8δ.

Πρῶτον πολλαπλασιάζονται οἱ 8 δάκτυλοι 6δρ. 3π. 8δ. 120|12
ἐπὶ 15 καὶ εὐρίσκεται 120, ἔπειτα οἱ 3 πό- 45 | 10
δες καὶ εὐρίσκεται 45, τελευταῖον αἱ 6δργ. 90 45 120
καὶ εὐρίσκεται 90. Μετὰ ταῦτα τρέπονται οἱ 99 4 0 55|6
120δὰκ. εἰς 10πόδ. σωστά (73), οἷτινες προσθένται εἰς τοὺς 9
45 πόδας, καὶ τὸ ἄθροισμα 55πόδ. τρέπεται (73) εἰς 9δργ. καὶ 1πόδ. ὅστις
γράφεται ὑπὸ τοὺς πόδας. Τελευταῖον αἱ 9δργ. προσθένται εἰς τὰς 90δργ. καὶ
οὕτως ἔχομεν γινόμενον 99δργ. 1πόδ.

24ήμ.	18ῶρ.	40λεπ.
		56
1344	1008	2240
1387	13	20

2240	60
440	60
20	37
	1008
	1045
	24
	85
	43
	13
2400	100
	24
	128
	152
	5
	2
	30

50πεντ.	4δρ.	75λεπ.
		32
		450
		225
1600	128	2400
1630	2	0

Μὲ 15 πεντάδραχμα ἡγόρασέ τις ἄγρον 99 ὀργ. 1 ποδ. μὲ ἓν πεντάδραχμ. πόσον ἀγοράζει;

Ἐπειδὴ τὸ ἓν πεντάδραχμον εἶναι τὸ δέκατον πέμπτον τῶν 15 πεντ. διὰ τοῦ θέλει ἀγοράσει τὸ δέκατον πέμπτον τῶν 99 ὀργ. 1 ποδ. καὶ πρέπει νὰ διαιριθῇ αἱ 99 ὀργ. 1 πόδ. διὰ 15.

Πρῶτον διαιροῦνται αἱ 99 ὀργ. διὰ 15, καὶ εὐρίσκεται πηλίκον 6 ὀργ. καὶ κατάλοιπον 9 ὀργ., αἵτινες τρέπονται (72) εἰς 54 πόδ., εἰς τοὺς ὁποίους προσθέτεται καὶ ὁ 1 ποὺς τοῦ διαιρετέου. Ἐπειτα διαιροῦνται οἱ 55 πόδ. διὰ 15, καὶ εὐρίσκεται πηλίκον 3 πόδ. καὶ κατάλοιπον 10 πόδ., αἵτινες τρέπονται εἰς 120 δακ. Τελευταῖον διαιροῦνται καὶ οἱ 120 δακ. διὰ 15, καὶ εὐρίσκεται σωστὰ πηλίκον 8 δακ. Λοιπὸν μὲ ἓν πεντάδραχμον ἀγοράζει τις ἄγρον 6 ὀργ. 3 ποδ. 8 δακ.

$$\begin{array}{r}
 99 \text{ ὀργ. } 1 \text{ πόδ. } 15 \\
 \underline{90} \qquad \qquad \qquad 6 \text{ ὀρ. } 3 \text{ πόδ. } 8 \text{ δακ.} \\
 9 \\
 \underline{6} \\
 54 \\
 \underline{45} \\
 9 \\
 \underline{45} \\
 40 \\
 \underline{42} \\
 120 \\
 \underline{120} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1387 \text{ ἡμ. } 13 \text{ ὥρ. } 20 \text{ λεπ. } 56 \\
 \underline{267} \\
 43 \\
 \text{ἐπὶ } 24 \\
 \underline{472} \\
 86 \\
 43 \\
 \underline{1045} \\
 485 \\
 37 \\
 \text{ἐπὶ } 60 \\
 \underline{2220} \\
 20 \\
 \underline{2240} \\
 224 \\
 \underline{\quad} \\
 0
 \end{array}$$

$$24 \text{ ἡμ. } 18 \text{ ὥρ. } 40 \text{ λεπ.}$$

$$\begin{array}{r}
 1639 \text{ πεν. } 2 \text{ ὀρ. } 32 \\
 \underline{30} \qquad \qquad \qquad 50 \text{ πεν. } 4 \text{ ὀρ. } 75 \text{ λεπ.} \\
 \text{ἐπὶ } 5 \\
 \underline{450} \\
 2 \\
 \underline{452} \\
 24 \\
 \text{ἐπὶ } 100 \\
 \underline{2400} \\
 224 \\
 \underline{160} \\
 160 \\
 \underline{\quad} \\
 0
 \end{array}$$

76. Συμμιγῆς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλασματικὸν ἢ μικτὸν, καὶ διαιρεῖται διὰ κλασματικοῦ ἢ μικτοῦ, ὡς ἀκέραιος ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ κλασματικοῦ ἢ μικτοῦ (64, 65, 67, 68).

Καὶ ἂν μὲν ὁ πολλαπλασιασθῆς ᾖ κλασματικὸς, πολλαπλασιάζεται ὁ συμμιγῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ ὡς

ἤδη εἶπομεν· ἂν δὲ ἦναι μικτός, τρέπεται πρῶτον εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ ἔπειτα ἐπὶ τοῦτον πολλαπλασιάζεται ὁ συμμιγῆς. Ἰδού παραδείγματα.

Ἄς πολλαπλασιασθῇ ὁ 25 πεν. 3 δρ. 80 λεπ. ἐπὶ $\frac{8}{9}$, ἦγουν ἂς εὑρεθῶσι τὰ $\frac{8}{9}$ τοῦ συμμιγῆος.

$$\begin{array}{r} 25 \text{ πεν. } 3 \delta\rho. 80 \text{ λεπ.} \\ 8 \\ \hline 200 \quad 24 \quad 640 \\ \hline 206 \quad 0 \quad 409 \\ 26 \\ 8 \\ \hline 22 \text{ πεν. } 4 \delta\rho. 48 \text{ λεπ. } \frac{8}{9} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 640 \overline{) 100} \\ 40 \overline{) 6} \\ 24 \\ \hline 305 \\ 6 \end{array}$$

Ἄς πολλαπλασιασθῶν καὶ 12 ἡμ. 6 ὥρ. 25 λεπ. ἐπὶ $3 \frac{2}{3}$. Τρέπεται ὁ $3 \frac{2}{3}$ εἰς $\frac{17}{6}$, ἐπὶ 100 πολλαπλασιάζεται ὁ 12 ἡμ. 6 ὥρ. 25 λεπ. ἐπὶ 17, καὶ τὸ γινόμενον 208 ἡμ. 13 ὥρ. 5 λεπ. διαιρεῖται διὰ 5· οὕτως εὑρίσκεται γινόμενον ὁ 41 ἡμ. 17 ὥρ. 1 λεπ.

Ἄς διαιρεθῇ ὁ 9 στατ. 24 ὀκ. 120 δρ. διὰ $\frac{5}{8}$. Ἀναστρέφονται οἱ ὅροι τοῦ $\frac{5}{8}$, καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ὁ συμμιγῆς ἐπὶ $\frac{8}{5}$, ἦγουν πολλαπλασιάζεται ὁ 9 στατ. 24 ὀκ. 120 δρ. ἐπὶ 8, τὸ γινόμενον 76 στατ. 14 ὀκ. 160 δρ. διαιρεῖται διὰ 5, καὶ προκύπτει τὸ ζητούμενον πηλίκον 15 στατ. 11 ὀκ. 272 δρ. Οὕτως ἂν διαιρεθῇ ὁ 15 ὥρ. 5 π. 8 δ. διὰ $\frac{3}{4}$, προκύπτει πηλίκον 21 ὥρ. 4 π. 6 δ. 8 γρ.

77. Συμμιγῆς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλον συμμιγῆ, ἐὰν οὗτος ὁ πολλαπλασιαστής τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν (72 σημ.), καὶ ἐπὶ τοῦτον τὸν κλασματικὸν πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος συμμιγῆς ὡς ἤδη εἶπομεν.

Σίγκκος ἀλεύρου 2 στ. 26 ὀκ. 200 δρ. πρὸς 3 πεν. 4 δρ. 50 λεπ. τὸν στατῆρα πόσον ἀξίζει;

Πρὸς εὑρεσιν τῆς ἀξίας τῶν 2 στ. 26 ὀκ. 200 δρ. εἶναι φανερόν ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 3 πεντ. 4 δρ. 50 λεπ. ἐπὶ τὸν 2 στ. 26 ὀκ. 200 δρ. Τρέπομεν λοιπὸν τὸν πολλαπλασιαστήν 2 στ. 26 ὀκ. 200 δρ. εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν δραμίων ἥτοι εἰς 45800 δρ. γράφομεν παρνομαστήν ὑποκάτω τὸν 17600, διότι τόσα δράμια ἰσοδυναμοῦν μὲ ἓνα στατῆρα (72 σημ.), καὶ ἔχομεν $\frac{45800}{17600}$ ἢ $\frac{458}{176}$.

Τώρα πολλαπλασιάζομεν τὸν 3 πεν. 4 δρ. 50 λεπ. ἐπὶ 458, τὸ γινόμενον 1876 πεν. 1 δρ. τὸ διαιροῦμεν διὰ 176, καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τοῦ ἀλεύρου 10 πεν. 0 δρ. 74 λεπ. περίπου.

3 πεν.	4 δρ	50 λεπ.
1374	1832	22900
412		
1786	1	[176
26		10 πεν. 0 δρ. 74 λεπ.
ἐπὶ 5		
431	22900	100
ἐπὶ 100		229
43100		1832
780		20615
76		1 412

Εἰς μίαν ὥραν ὁδοιπόρος τις ὁδεύει 524 ὄργ. 4 ποδ., εἰς 12 ὥρ. 40 λεπ. πόσον θέλει ὁδοιπορήσει;

Καὶ ἐδῶ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 524 ὄργ. 4 ποδ. ἐπὶ 12 ὥρ. 40 λεπ. ὁ 12 ὥρ. 40 λεπ. ἰσοδυναμεῖ μὲ 760 λεπ. ἢ $\frac{760}{60}$ τῆς ὥρας, ἢ $\frac{13}{3}$ ἢ $\frac{5}{6}$. Τὸ γινόμενον τοῦ 524 ὄρ. 4 ποδ. ἐπὶ 38 εἶναι 19937 ὄργ. 2 ποδ. καὶ τὸ πηλίκον τούτου διὰ 3 εἶναι 6645 ὄργ. 4 πόδ 8 δ.

78. α. Συμμιγῆς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἄλλου συμμιγοῦς ἑτεροειδοῦς ἀφοῦ οὗτος τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν, ἀναστραφῶσιν οἱ ὅροι τοῦ καὶ ἐπὶ τοῦτον πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρετέος συμμιγῆς ὡς ἤδη εἴπομεν.

Οἰκογένειά τις ἐδαπάνησε 2 στ. 12 ὀκ. 300 δρ σακχάρως εἰς 3 μην. 8 ἡμ. πόσον ἔρχεται τὸν μῆνα ἢ ἡμέραν, καὶ πόσον τὴν ἡμέραν;

Πρὸς εὑρεσιν τούτου πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς διὰ τοῦ δευτέρου. Ὁ 3 μην. 8 ἡμ. ἀποτελεῖ 98 μ. ἢ $\frac{98}{24}$ τοῦ μηνὸς ἢ $\frac{49}{12}$. Ἀναστρέφομεν τοὺς ὅρους τούτου, καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\frac{12}{49}$ τὸν 2 στ 12 ὀκ. 300 δρ. ὡς ἀνωτέρω, εὐρίσκομεν ὅτι ἐδαπανοῦσε τὸν μῆνα 30 ὀκ. 336 δρ. Διαιροῦντες δὲ τοῦτον διὰ 30, εὐρίσκομεν ὅτι ἐδαπανοῦσε τὴν ἡμέραν 1 ὀκ. 11 δρ. $\frac{1}{2}$.

Χωράφιον 12 ὄρ. 2 π. ἐπωλήθη 30 δρ. 75 λ. πόσον ἀξίζει ἡ ὄργυιά;

Ὅσον παρίστανει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 30 δρ. 75 λ. διὰ τοῦ 12 ὄρ. 2 π. Τοῦτο δὲ εἶναι 2 δρ. 50 λ. σχεδόν.

β'. Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ᾖναι ὁμοειδεῖς, τρέπονται καὶ οἱ δύο εἰς ἰσοδύναμους ἀριθμοὺς τῆς αὐτῆς μικροτάτης μονάδος, καὶ ἔπειτα διαιρεῖται ὁ διαιρετέος διὰ τοῦ διαιρέτου ὡς ἀκέραιος δι' ἀκεραίου, τὸ δὲ πηλίκον θέλει εἶσθαι ὅποιον προσδιορίζεται εἰς τὸ πρόβλημα.

Μὲ 30 πεν. 2 δρ. 25 λε, πόσους πήχεις τσόχας ἀγοράζει τις πρὸς 3 πεν. 4 δρ. 50 λε. τὸν πῆχυν;

Ἀπὸ ὅσους ἀριθμοὺς ἴσους μὲ τὸν δεῦτερον ἀριθμὸν σύγκειται ὁ πρῶτος, δηλαδὴ ὅσας μονάδας ἔχει ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεῦτερον, τόσους πηγχεῖ ἀγοράζει. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ πρῶτος διὰ τοῦ δευτέρου.

Τρέπεται λοιπὸν ὁ μὲν 30 πεν. 2 δρ. 25 λ. εἰς 15225 λεπ. ὁ δὲ 3 πεν. 4 δρ. 50 λ. εἰς 1950 λεπ. Τὸ δὲ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου εἶναι 7 πηχ. $\frac{1}{2}$.

4 δκ. 50 δρ. ἐλαίου ἀξίζει ἐν πεντάδραχμον, πόσον ἀξίζουν 2 στ. 28 δκ;

Πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ 2 σ. 28 δκ. διὰ 4 δκ. 50 δρ. ἢ ὁ 46400 δρ. διὰ 1650 δρ., καὶ τὸ πηλίκον εἶναι 28 πεν. 60 λε. περίπου.

Περίληψις τῶν ἐν τῷ τετάρτῳ κεφαλαίῳ δι' ἐρωτήσεων.

Πόσαι εἶναι αἱ διάφοροι μονάδες, μὲ τὰς ὁποίας μετροῦμεν τὰ μήκη ἢ τοὺς χρόνους, ἢ ζυγίζομεν τὰ βάρη, καὶ πόσαι εἶναι αἱ νομισματικαί; Πῶς ὀνομάζεται ἐκάστη; Τί πολλαπλάσιον εἶναι ἡ μία τῆς ἄλλης, ἢ τί πολλαπλόν; Τί εἶναι συμμιγῆς ἀριθμός; Πῶς γράφεται, ὅτοι πῶς διακρίνονται αἱ διάφοροι μονάδες τούτοις; Τι διαφέρει ἀκεραίου ἀριθμοῦ ὁ συμμιγῆς; καὶ τί διαφέρει μικτοῦ;—Πῶς τρέπεται συμμιγῆς εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν μονάδων τῶν μικροτάτων του; Πῶς τρέπεται ἀριθμὸς μικροτέρων μονάδων εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ; Πῶς τρέπεται κοινὸς κλασματικὸς ἀριθμὸς εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ;—Πῶς προσθετοῦνται καὶ πῶς ἀφαιροῦνται συμμιγῆς ἀριθμοί; Πῶς προστίθεται κλάσμα εἰς συμμιγῆ; Πῶς πολλαπλασιάζεται συμμιγῆς ἐπὶ ἀκεραίου, ἢ ἐπὶ κλασματικόν, ἢ ἐπὶ μικτόν, ἢ ἐπὶ ἄλλον συμμιγῆ; Πῶς διακρίνεται συμμιγῆς δι' ἀκεραίου ἢ διὰ κλασματικοῦ, ἢ διὰ μικτοῦ, ἢ διὰ ἄλλου συμμιγῆς ἑτεροειδούς ἢ ἑμοειδούς; Πῶς πολλαπλασιάζεται ἀκέριος, ἢ κλασματικὸς, ἢ μικτὸς ἐπὶ συμμιγῆ; Πῶς διακρίνεται ἀκέριος, ἢ κλασματικὸς, ἢ μικτὸς διὰ συμμιγῆ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Τί εἶναι δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ καὶ πῶς γράφονται.

79. Ἐὰν μεταχειρισθῶμεν μόνον ταύτας τὰς κλασματικὰς μονάδας, τὸ δέκατον τῆς ἀρχικῆς, τὸ ἑκατοστὸν αὐτῆς, τὸ χιλιοστὸν αὐτῆς, τὸ δέκατον τοῦ χιλιοστοῦ, τὸ ἑκατοστὸν τοῦ χιλιοστοῦ (*), τὸ ἑκατομμυριοστὸν κτλ. ἐκάστη τούτων εἶναι τῆς ἀμέσως μεγαλητέρας τῆς δέκατον μέρος, τῆς δὲ ἀμέσως μικροτέρας τῆς δεκαπλασία, ὡς αἱ μονάδες τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ, καὶ λέγονται δεκαδικαὶ μονάδες. Καὶ τὰ κλάσματα, τῶν ὁποίων μονὰς εἶναι μία τούτων τῶν δεκαδικῶν, οἷον $\frac{5}{10}$ δέκατα, ἢ ὡς συνήθως λέγονται, δεκατημόρια, $\frac{24}{100}$ ἑκατοστὰ ἢ ἑκατοστημόρια, $\frac{384}{1000}$ χιλιοστὰ ἢ χιλιοστημόρια κτλ, ὀνομάζονται δεκαδικά.

Σημ. Πᾶς ἀκέριος ἀριθμὸς εἶναι κυρίως δεκαδικός. Ὃταν δὲ ὁμοῦ μὲ ἀκέριον ᾖναι καὶ κλάσμα δεκαδικόν, οἷον 24 μονάδες $\frac{72}{100}$ ἑκατοστημόρια ἢ $\frac{24}{100}$ ὁ ἀριθμὸς τότε εἶναι μικτὸς δεκαδικός, ἢ ἀπλῶς δεκαδικός· διότι ὁ 24 $\frac{72}{100}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν $\frac{2472}{1000}$ (51)· ὡσαύτως ὁ $\frac{275}{10}$ εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμός.

80. Τὰ δεκαδικὰ κλάσματα γράφονται συνήθως ἄνευ παρονομαστοῦ, ἀλλ' ἀντὶ

(*) Περὶ τῶν ὀνομάτων τούτων ἰδὲ Θ. Α. ἐν Κεφ. Α.

τούτου τίθεται **0** καὶ δεξιά του ὑποδιαστολή, ἔπειτα ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος. Τὰ δεκατημόρια γράφονται μὲ ἓν ψηφίον δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς, οὕτως
0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9.

Τὰ ἑκατοστημόρια γράφονται μὲ δύο δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς, οὕτως
0,01, 0,02, 0,03..... 0,09, 0,10, 0,11, 0,12..... 0,19, 0,20, 0,21, 0,22..... 0,29, 0,30, 0,31..... 0,90, 0,91..... 0,99.

Τὰ χιλιοστημόρια γράφονται μὲ τρία ψηφία δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς. οὕτως
0,001, 0,002, 0,003... 0,009, 0,010, 0,011... 0,099, 0,100, 0,101... 0,110, 0,111... 0,200, 0,201... 0,999.

Τὰ δέκατα τοῦ χιλιοστημορίου γράφονται μὲ τέσσαρα ψηφία, δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς οὕτως
0,0001, 0,0002... 0,0010... 0,0099, 0,0100... 0,0999, 0,1000, 0,1001... 0,1009, 0,1010, 0,1011... 0,9999.

Ὡς οὕτως τὰ ἑκατοστά τοῦ χιλιοστημορίου γράφονται μὲ πέντε ψηφία δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς, τὰ ἑκατομμυριοστημόρια ἢ μιλιοιστημόρια γράφονται μὲ 25 ψηφία, κτλ.

Σημ. Οἱ ἀρχαῖοι πρέπει νὰ μάθωσι καλὰ τοῦτου, τοὺς πίνακας συμπληρωμένους ἐντελῶς.

Ἐὰν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἦναι μεγαλήτερος τῆς μονάδος, οἷον **6345** ἑκατοστημόρια ἢ $\frac{6345}{100}$, ἀφίεται τὸ ὄνομα ἑκατοστημόρια ἢ ὁ παρονομαστής **100**, καὶ τίθεται ὑποδιαστολή μετὰ τοῦ **3** καὶ τοῦ **4**, ὥστε νὰ μείνουν δύο ψηφία δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς διότι τὰ ἑκατοστημόρια γράφονται μὲ δύο ψηφία δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς· καὶ ἔχομεν **63,45** ὅστις ἢ θεωρεῖται ὡς **6345** ἑκατοστημόρια, ἢ ὡς **63** μονάδες **45** ἑκατοστημόρια, ἢ γουν $\frac{6345}{100}$ ἢ **63** $\frac{45}{100}$.—Ὡς οὕτως **274** δεκατημόρια ἢ $\frac{274}{10}$ γράφεται οὕτως **27,4**—**5782** χιλιοστημόρια ἢ $\frac{5782}{1000}$ γράφεται **5,782**, ὅστις γράφεται καὶ **5** $\frac{782}{1000}$.

Ὅταν δὲ ἀπαγγέλληται χωριστὰ ὁ ἀκέραιος καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα, τότε γράφεται πρῶτον ὁ ἀκέραιος καὶ δεξιά του ἡ ὑποδιαστολή, ἔπειτα γράφεται τὸ δεκαδικὸν κλάσμα ὡς ἤδη εἵπομεν· **42** μονάδες **35** ἑκατοστημόρια γράφεται οὕτως **42,35**—**6** μονάδες **72** χιλιοστημόρια γράφεται οὕτως **6,072**.—**42** μονάδες **9** δέκατα χιλιοστημορίου γράφεται οὕτως **42,0009**, ὅστις γράφεται καὶ οὕτως $\frac{420009}{100000}$ ἢ **42** $\frac{9}{100000}$.

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς γραμμένος διὰ ψηφίων ἀπαγγέλλεται διττῶς, ἢ ὅλος ὡς ἀκέραιος, εἰς δὲ τὸ τέλος λέγεται τὸ ὄνομα τῆς μικροτάτης δεκαδικῆς μονάδος ἢτοι τῆς δεξιάς, ἢ χωριστὰ τὸ πρὸς ἀριστεράν τῆς ὑποδιαστολῆς μέρος του ἢτοι τὸ ἀκέραιον, καὶ χωριστὰ ἔπειτα τὸ δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς ὡς ἀκέραιον, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦτου λέγεται τὸ ὄνομα τῆς μικροτάτης μονάδος του ἢτοι τῆς δεξιάς. Ἡ δὲ μονὰς αὕτη προσδιορίζεται πάντοτε ἐκ τῆς θέσεως τοῦ δεξιοῦ ψηφίου. Κατὰ ταῦτα ὁ **52,724** ἀπαγγέλλεται **52** μονάδες **724** χιλιοστημόρια, ἢ

52724 χιλιοστημόρια· διότι τὸ δεξιὲν ψῆφion 4, ἔχον τὴν τρίτην θέσιν δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς, παριστάνει χιλιοστημόρια — Ὁ **4,0384** εἶναι 4 μονάδες 384 δέκα τὰ χιλιοστημίου, ἢ **40384** δέκατα χιλιοστημίου.

81. Ὅταν δεκαδικὸς ἀριθμὸς, οἷον **5,74**, προσλάβῃ ἕν ἢ πλείοντα μηδενικά, δὲν πολλαπλασιάζεται γινόμενος **5,740**, ἢ **5,7400** κτλ. διότι τὰ σημαντικά του ψήφια παριστάνουν ὅ,τι παριστάνουν καὶ εἰς τὸν **5,74**. ἀλλ' ἐνῷ ἦτον ἀριθμὸς ἑκατοστημίων τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν χιλιοστημίων ἢ δεκάτων χιλιοστημίων κτλ. Ὡσαύτως **56,4** καὶ **56,40**, καὶ **56,400** κτλ. παριστάνουν τὸ αὐτό.

Διὰ τοῦτο ἑτερόνυμοι δεκαδικοὶ ἀριθμοί, οἷον **4,7**, **9,35**, **15,384**, τρέπονται εἰς ἰσοδύναμους ὁμωνύμους, ἐὰν εἰς μὲν τὸν πρῶτον τεθῶσι **00**, εἰς δὲ τὸν δεύτερον τεθῇ **0**, ὥστε νὰ ἔχωσιν ὅλοι τρία ψήφια δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς. Οὕτως ἔχομεν **4,700**, **9,350**, **15,384**, οἵτινες εἶναι ὅλοι ἀριθμοὶ χιλιοστημίων.

Περὶ τροπῆς κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.

82. Τρέπεται κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν οὕτω· Γράφεται ὁ παρονομαστής δεξιά τοῦ ἀριθμητοῦ σύρεται γραμμὴ μεταξὺ αὐτῶν καὶ ὑπὸ τὸν παρονομαστὴν ὡς εἰς διαίρεσιν, εἰς δὲ τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου γράφεται **0**, ἔπειτα δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ τίθεται **0** καὶ διαιρεῖται ὁ προκύπτων διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ μὲν πηλίκον τίθεται δεξιά τοῦ **0**, τοῦ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου, δεξιά δὲ τοῦ καταλοίπου τίθεται ἄλλο **0** καὶ διαιρεῖται ὁ προκύπτων διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν πηλίκον τίθεται δεξιά τοῦ προεωρημένου πηλίκου, δεξιά δὲ τοῦ καταλοίπου τίθεται καὶ ἄλλο **0**, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἕως νὰ μὴ μείνῃ κατάλοιπον, ἢ ὅσον ἂν θελῇ τις.

Οὕτω τρέπεται τὸ $\frac{3}{4}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του **0,75**

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 4} \\ 20 \overline{) 0,75} \\ 70 \overline{) 8} \\ 60 \overline{) 0,75} \\ 40 \overline{) 0,75} \\ 220 \overline{) 50} \\ 200 \overline{) 0,44} \end{array}$$

Τὸ $\frac{7}{8}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του **0,75**

$$\begin{array}{r} 20 \overline{) 0,75} \\ 70 \overline{) 8} \\ 60 \overline{) 0,75} \\ 40 \overline{) 0,75} \\ 220 \overline{) 50} \\ 200 \overline{) 0,44} \end{array}$$

Τὸ $\frac{32}{50}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του **0,44**

$$\begin{array}{r} 220 \overline{) 50} \\ 200 \overline{) 0,44} \end{array}$$

Τὸ $\frac{12}{13}$ εἰς τὸ **092307692...**

$$\begin{array}{r} 120 \overline{) 13} \\ 30 \overline{) 0,92307662...} \end{array}$$

Ἐδῶ βλέπει τις ὅτι, ὅσον καὶ ἂν προχωρήσῃ ἡ διαίρεσις, ποτὲ δὲν θέλει εὑρεθῇ διαιρετέος διαιρέσιμος διὰ τοῦ **13**. Εἰς τοιαύτην περίπτωσιν κρατεῦνται δύο ἢ τρία μόνον ψήφια τοῦ πηλίκου, τὰ δὲ ἄλλα παραιτοῦνται, καὶ τότε τὸ δεκαδικὸν κλά-

$$\begin{array}{r} 40 \\ 100 \\ 90 \\ 120 \\ 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ 100 \\ 90 \\ 120 \\ 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ 100 \\ 90 \\ 120 \\ 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ 100 \\ 90 \\ 120 \\ 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ 100 \\ 90 \\ 120 \\ 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ 100 \\ 90 \\ 120 \\ 30 \end{array}$$

Βιβλιοθήκη Βερόνης

σμα είναι σχεδὸν ἰσοδύναμον μετὰ τὸ κοινόν. Ἐδῶ π. γ. τὸ 0,923 εἶναι σχεδὸν ἰσοδύναμον μετὰ τὸ $\frac{1}{1.1}$, ἢ ἄλλως εἶναι μείον χιλιοστημορίου ἰσοδύναμον μετὰ τὸ $\frac{1}{1.1}$. Τὸ δὲ 0,92 εἶναι μείον ἑκατοστημορίου ἰσοδύναμον μετὰ τὸ $\frac{1}{1.1}$, διότι τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ 0,92 εἶναι ἑκατοστημόρια.

Νὰ τραπῇ τὸ $\frac{8}{7}$ εἰς δεκαδικὸν μείον χιλιοστημορίου ἰσοδύναμον σημαίνει νὰ εὑρεθῇ δεκαδικὸν μετὰ τρία ψηφία καὶ τοιοῦτον εἶναι τὸ 0,714.

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 7} \\ 10 \overline{) 0,714} \\ 30 \end{array}$$

Περὶ πράξεων ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν.

83. Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως. Αἱ δύο αὗται πράξεις ἐκτελοῦνται ἐπὶ δεκαδικῶν ἀπαράλλακτα ὡς ἐπὶ τῶν ἀκεραίων. Πρέπει δὲ νὰ προσέχωμεν ὅχι μόνον νὰ γράφωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τὸν ἓνα ὑπὸ τὸν ἄλλον κατὰ τὰς τῶν μονάδων τῶν, ἀλλὰ καὶ νὰ θέτωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μεταξὺ τῶν μονάδων καὶ δεκατημορίων τοῦ κεφαλαίου ἢ τῆς διαφορᾶς. Οἱ δὲ πρὸς ἀφαίρεσιν ἑτερόνυμοι ἀριθμοὶ εἶναι προτιμότερον νὰ τρέπωνται πρότερον εἰς ὁμωνύμους (81) καὶ ἔπειτα νὰ γίνηται ἡ ἀφαίρεσις.

Παραδείγματα.

28,34	642,795	42,5800	58,0346
9,7642	74,27	35,8493	45,4900
348,003	9,8457	6,7307	42,5446
94,9825	98,752		
<u>484,0897</u>	<u>825,6627</u>		

84. Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως. Πολλαπλασιάζεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἐπὶ μὲν 10, ἐὰν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ τοῦ μίαν θέσιν πρὸς δεξιὰν, ἐπὶ δὲ 100, ἐὰν ἡ ὑποδιαστολὴ μετατεθῇ δύο θέσεις πρὸς δεξιὰν, ἐπὶ δὲ 1000, ἐὰν τρεῖς κτλ. Κατὰ ταῦτα, ἐὰν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ τοῦ ἀριθμοῦ 58,4938 πρὸς δεξιὰν μίαν ἢ δύο ἢ τρεῖς θέσεις κτλ. προκύπτει ὁ 584,938, ὅστις εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ πρώτου, ἢ ὁ 5849,38, ὅστις εἶναι ἑκατονταπλάσιος τοῦ πρώτου, ἢ ὁ 58493,8, ὅστις εἶναι χιλιοπλάσιος κτλ.

Ἀντιστρόφως, διαιρεῖται δεκαδικὸς ἀριθμὸς διὰ 10, ἢ 100, ἢ 1000 κτλ. ἐὰν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ τοῦ πρὸς ἀριστερὰν μίαν θέσιν ἢ δύο ἢ τρεῖς κτλ. Οὕτως ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 4578,2 προκύπτει ὁ 457,82 ὅστις εἶναι τὸ δέκατον τοῦ πρώτου, ὁ 45,782 ὅστις εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ πρώτου κτλ.

Καὶ ἀκέραιος ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 10, ἐὰν τεθῇ ὑποδιαστολὴ μεταξὺ τῶν μονάδων καὶ δεκάδων του, διὰ 100, ἐὰν τεθῇ ὑποδιαστολὴ μεταξὺ τῶν δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων, κτλ. Οὕτως ὁ 4789 τρέπεται εἰς 478,9, ὅστις εἶναι τὸ δέκατον τοῦ ἀκεραίου, ἢ εἰς 47,89, ὅστις εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ ἀκεραίου κτλ. (ἰδὲ καὶ 40).

85. Όταν δὲ ἡ ὁ πολλαπλασιαστέος ᾖναι δεκαδικός, ἡ ὁ πολλαπλασιαστής, καὶ οἱ δύο παράγοντες, πολλαπλασιάζεται ὁ εἰς ἐπὶ τὸν ἄλλον ὡς ἂν ᾖσαν ἀκέραιοι, ἀλλ' εἰς τὸ γινόμενον τίθεται ὑποδιαστολὴ εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ ᾖναι δεξιά αὐτῆς τόσα ψηφία, ὅσα εἶναι τὰ δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς ψηφία καὶ εἰς τοὺς δύο ὁμοῦ παράγοντας.

Παραδείγματα.

45.67	845	62,578
37	9,34	4,92
34969	3380	425456
13704	2535	563202
1689,79	7605	250342
	7892,30	307,88376
6,63	ἐπὶ 0,235	παράγει 1,55805
0,274	ἐπὶ 0,08	παράγει 0,02192
0,0036	ἐπὶ 0,00024	παράγει 0,000001344

Παρατηροῦμεν ὅτι ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ 274 ἐπὶ 8 ἔχει τέσσαρα ψηφία, δεξιά δὲ τῆς ὑποδιαστολῆς πρέπει νὰ ᾖναι πέντε, διὰ τοῦτο ἐτέθη χριστερὰ τοῦ γινομένου 2192 ἐν 0, καὶ ἐπειτα τὸ 0. Εἰς δὲ τὸ τελευταῖον διὰ τὸν ἴδιον λόγον ἐτέθησαν 00000.

86. α'. Όταν ὁ διαιρετέος ἔχῃ δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς πλείονερα ψηφία παρὰ τὸν διαιρέτην, διαιρεῖται ὁ διαιρετέος διὰ τοῦ διαιρέτου ὡς ἂν ᾖσαν ἀκέραιοι καὶ οἱ δύο, ἀλλ' εἰς τὸ πηλίκον τίθεται ὑποδιαστολὴ εἰς θέσιν τοιαύτην, ὥστε νὰ ᾖναι δεξιά αὐτῆς τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρετέος πλείονερα τοῦ διαιρέτου.

Παραδείγματα.

1689,79 37	307,88376 4,92	0,02192 0,08
209 45,67	4268 62,578	2192 8
247	2843	59 0,274
259	3837	32
0	3936	
	0	

β'. Όταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἔχουν ἰσάριθμα ψηφία δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς, διαιρεῖται ὁ εἰς διὰ τοῦ ἄλλου ὡς ἂν ᾖσαν ἀκέραιοι, καὶ τὸ πηλίκον, ὅποιον προκύπτει ἐκ τῆς πράξεως, εἶναι τὸ ζητούμενον.

Παραδείγματα.

7892.30 9,34	0,6432 0,0024
426 3 845	
46 70	6432 24
0	163 268
	192
	0

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βέροιας

γ'. Όταν ὁ διαιρετέος ἔχῃ δεξιά τῆς υποδιαστολῆς ὀλιγώτερα ψηφία παρὰ τὸν διαιρέτην, θέτονται πρῶτον δεξιά τοῦ διαιρέτου μηδενικά τόσα, ὥστε νὰ ἔχῃ δεξιά τῆς υποδιαστολῆς ὅσα ψηφία ἔχει καὶ ὁ διαιρέτης, καὶ ἔπειτα διαιρεῖται ὁ εἰς διὰ τοῦ ἄλλου ὡς ἂν ἦσαν ἀκέραιοι.

Παραδείγματα.

478,9|59,32

84,54|2,3954

0,27|0948

$$\begin{array}{r} 47892 \overline{) 5932} \\ 364 \overline{) 8} \quad \frac{364}{3932} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 845400 \overline{) 23954} \\ 426780 \overline{) 35} \quad \frac{7010}{23954} \\ 7010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2700 \overline{) 948} \\ 8040 \overline{) 0,284} \\ 4360 \end{array}$$

Εἰς ταύτας τὰς διαιρέσεις εὐρίσκουσι κλάσμα δεκαδικὸν ἀντὶ τῶν κοινῶν $\frac{364}{3932}$ καὶ $\frac{7010}{23954}$. Πρὸς τοῦτο δὲ θέτεται 0 δεξιά τῶν καταλοίπων 364 καὶ 7010, καὶ διαιροῦνται διὰ τῶν διαιρετῶν, τὸ δὲ πηλίκον θέλει εἶσθαι δεκατημόρια, καὶ οὕτως ἐξακολουθεῖ ἡ πράξις ὅσον ἂν θέλῃ τις. Με ἄλλας λέξεις, τὸ κλάσμα $\frac{364}{3932}$ τρέπεται εἰς δεκαδικόν (82).

Ἰδού καὶ ἄλλο παράδειγμα, ὅπου βλέπει τις καὶ πῶς διαιρεῖται ἀκέραιος διὰ δεκαδικοῦ.

45824,72

$$\begin{array}{r} 45800 \overline{) 2,12} \\ 21080 \overline{) 18,52} \\ 12040 \\ 6800 \\ 4856 \end{array}$$

Τὸ πηλίκον 48 52..., εἶναι μείον 0,01
ἰσοδύναμον μὲ τὸ ζητούμενον.

Σημ. Ἐκ τῶν προηγουμένων εἶναι φανερόν πῶς γίνεται ὁ πολλαπλασιασμός ἢ ἡ διαίρεσις, ὅταν ὁ εἰς τῶν ἀριθμῶν ᾖ δεκαδικὸς καὶ ὁ ἄλλος κλασματικὸς ἢ μικτός.

Δεκαδικὸν σύστημα μέτρων καὶ σταθμῶν.

87. Εἶναι διατεταγμένον νὰ ἐμβῶσιν εἰς χρῆσιν βαθμηδὸν καθ' ὅλην τὴν Ἑλλάδα αἱ ἐξῆς δεκαδικαὶ μονάδες, αἵτινες ἐπονομάζονται βασιλικαί.

Μονάδες μήκους. Πήχυς, ἀρχικὴ μονάς· παλάμη, δέκατον τοῦ πήχεως· δάκτυλος, δέκατον τῆς παλάμης· καὶ ἑκατοστὸν τοῦ πήχεως· γραμμή, δέκατον τοῦ δακτύλου, ἑκατοστὸν τῆς παλάμης, καὶ χιλιοστὸν τοῦ πήχεως. Σταδιον, ἴσον μὲ 1000 πήχεις· σχοινίς, ἴσθ' μὲ 10 στάδια ἢ μὲ 10000 πήχεις.

Μονάδες ἐπιφανείας. Πηχυαῖον τετράγωνον, ἀρχικὴ μονάς· στρέμμα, ἴσον μὲ 100 τετράγωνα πηχυαῖα.

Μονάδες στερεῶν καὶ βευστῶν. Λίτρα, ἀρχικὴ μονάς· κοτύλη, δέκατον τῆς λίτρας· μύστρον, δέκατον τῆς κοτύλης καὶ ἑκατοστὸν τῆς λίτρας· κύβος, δέκατον τοῦ μύστρου, ἑκατοστὸν τῆς κοτύλης καὶ χιλιοστὸν τῆς λίτρας. Κοιλὸν, ἴσον μὲ 100 λίτρας.

Μονάδες βάρους. Δραχμή, ἀρχικὴ μονάς· ὀβολός, δέκατον τῆς δραχμῆς· κόκ-

κος, δέκατον τοῦ ὀβολου καὶ ἑκατοστὸν τῆς δραχμῆς. Μνᾶ, ἴση μὲ 4500 δραχμᾶς (*)· τάλαντον, ἴσον μὲ 100 μνᾶς· τόνος, ἴσος μὲ 40 τάλαντα, καὶ μὲ 4000 μνᾶς (**).

88. Θέτομεν ἐδῶ πρὸς ἡματὰ τινα περὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

1. Εὐετοῦθι ἡ εταξὺ δ ο φρουσιών διάστημα μὲ τὰ νέα μέτρα καὶ εὐρέθη ὅτι εἶναι 45^{τάδ.} 54^{πῆχ.} 6^{παλ.} 8^{δακ.} πῶς θέλει γραφῆθῃ ὁ ἀριθμὸς οὗτος; — Ἀπόκρ. πῆχ. 45054,68.

2. Ὁ ἀριθμὸς 49578,245 παριστάνει μῆκος μετρημένον μὲ τὰ νέα μέτρα, πόσα νέα μέτρα εἶναι; — Ἀπόκρ. 49^{τάδ.} 578^{πῆχ.} 245^{γρα.} ἢ 4^{σχοιν.} 9^{τάδ.} 578^{πῆχ.} 2^{παλ.} 48^{ακ.} 5^{γραμ.} ἢ 49578245^{γραμ.}

3. 28^{λίτ.} 4^{κοτ.} 7^{μύτρ.} 5^{κυβ.} ἐλαίου πῶς γράφεται; Ἀπ. 28,475.

4. Ὁ ἀριθμὸς 4567,25 παριστάνει σίτον μετρημένον μὲ τὰ νέα μέτρα, πόσον εἶναι; Ἀπόκρ. 45^{κοιλ.} 57^{λίτ.} 2^{κοτ.} 5^{μυρ.}

5. Σάκκος ὀρύζιον ζυγίζει 74^{μνᾶς} 6^{τρ.} ὀβουλ. πῶς θέλει γραφῆθαι ὁ ἀριθμὸς οὗτος; — Ἀπόκρ. 74^{μν.} 64^{ὀβ.}

6. Ὁ ἀριθμὸς 45694^{μν.} 274^{κοκ.} ἰσοδυναμεῖ μὲ 45^{τόν.} 6^{τάλαν.} 94^{μν.} 2^{δρ} 7^{ὀβ.} 4^{ἀοκ.}

7. Ὁ βασιλικὸς πῆχυς ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,513 τῆς ὀργυιᾶς μείον 0,001, πῆχ. 24,358 μὲ ποῖον συμμετρεῖται ἀριθμὸν ὀργυιῶν κτλ. ἰσοδυναμεῖ;

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἰσοδυναμεῖ μὲ 24 φορές 0,513 τῆς ὀργυιᾶς καὶ $\frac{358}{1000}$ τῶν 0,513 τῆς ὀργυιᾶς· λοιπὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 0,513 ἐπὶ 24,358. Τὸ γινόμενον εἶναι ὀργ. 12.495654 ἢ μὲ μικρόν τι λάθος 12,5 ἢ 12^{ὀργ} $\frac{5}{10}$, ἢ 12^{ὀργ} 3^{ποδ.} διότι $\frac{5}{10}$ τῆς ὀργυιᾶς εἶναι 3^{ποδ.} (73). Λοιπὸν πῆχεις 24,358 ἰσοδυναμοῦν σχεδὸν μὲ 12^{ὀργ.} 3^{ποδ.}

8. Ἀντιστρόφως ἡ ὀργυιά ἰσοδυναμεῖ μὲ πῆχ. 1,949 μείον 0,001, 6^{ὀργ.} 4^{πόδ.} 7^{δακ.} μὲ πόσους πῆχεις ἰσοδυναμοῦν;

Καὶ ἐδῶ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 1,949 ἐπὶ τὸν συμμετρεῖται, διὰ νὰ εὐρεθῇ τὸ ζητούμενον. Οἱ 4^{πόδ.} 7^{δακ.} ἰσοδυναμοῦν μὲ $\frac{85}{100}$ τῆς ὀργυιᾶς, ἢ ἂν τραπῇ εἰς δεκαδικὸν κλάσμα (82) τὸ $\frac{85}{100}$, ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,764 μείον 0,001· λοιπὸν αἱ 6^{ὀργ.} 4^{πόδ.} 7^{δακ.} ἰσοδυναμοῦν μὲ ὀργ. 6,764 μείον 0,001. Τώρα πολλαπλασιάζεται ὁ 1,949 ἐπὶ 6,764, καὶ τὸ γινόμενον εἶναι πῆχ. 13,183036 ἢ 13,183 μείον 0,001.

Ἰσχυρῶς ἠξεύρων τις ὅτι ἡ βασιλικὴ μνᾶ ἰσοδυναμεῖ μὲ ὀκτὼ 1,1719 ἢ μὲ 468 $\frac{3}{4}$ παλαιὰ δράμια, καὶ ὅτι ἡ ὀκτὰ ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,8533 τῆς μνᾶς, εἴμπορεῖ νὰ προσδιορίσῃ μὲ πόσας ὀκάδας κτλ. ἰσοδυναμεῖ ἀριθμὸς τις μῶν καὶ τ' ἀνάπαλιν.

(*) Ἐδῶ δὲν ἐνυλάχθη ἡ δεκαδικὴ σχέσηις·

(**) Περὶ τοῦ πῆχους καὶ τῶν λοιπῶν μονάδων ἰδὲ Θ. Α. ἐν κεφ. Α'.

Ἐτι σημειούμεν ὅτι ὁ βασιλικὸς πῆχυς ἰσοδυναμεῖ με πῆχυν τῆς Κωνσταντινουπόλεως (ἐνδαξέ) 4,5432, (ἀρσχίν) 4,495, ἡ δ' ἐνδεξέ: ἰσοδυναμεῖ με 0,648 τοῦ βασιλικοῦ πήχεως, καὶ ὁ ἀρσχίν με 0,669 τοῦ αὐτοῦ βασιλικοῦ.

Ἡ βασιλικὴ λίτρα ἰσοδυναμεῖ με 0,03015 τοῦ παλαιοῦ κοιλοῦ, τὸ δὲ παλαιὸν κοιλὸν με λίτρας 33, 166.

Ἰδοὺ καὶ τινὰ ἄλλα προβλήματα εἰς λύσιν.

9. Πήχεις τσῆτι 25, 75 πρὸς δρ. 1,20 τὸν πῆχυν πόσον ἀξίζουσιν; — Ἀπόκρ. δρ. 30,90.

10. Πόσων πηχυκίων τετραγώνων εἶναι γήπεδον, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν μήκος εἶναι πήχεις 14,25, τὸ δὲ πλάτος πήχεις 6,38; — Ἀπόκρ. 90,915.

11. Κοιλὰ σίτου 26,58 ἀξίζουσιν 23 πεντ. 3δρ, 75 λεπ, πόσον ἀξίζει τὸ κοιλόν; (ὁ 23 πεντ. 3δρ. 75 λεπ. ἰσοδυναμεῖ με δρ. 418,75). — δρ. 4,46.

12. 40 μν 24δρ. 48 καφε διενεμήθη εἰς κάμποσους ἔμπορους καὶ ἐπῆρεν ἕκαστος ἀνά 10 μν. 6δρ, 12' πόσοι ἦσαν ἔμποροι; — Ἀπόκρ. 4.

Σημ. Πρὸς γύμνασιν νὰ τεθῶσιν εἰς τινὰ προβλήματα τῶν ἀριθμῶν 45 καὶ 70 δεκαδικοί ἀριθμοὶ ἀντὶ τῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν ἢ μικτῶν, καὶ νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἔπειτα αἱ ἀναγκαῖαι πράξεις.

Περίληψις τῶν ἐν τῷ πέμπτῳ κεφαλαίῳ δι' ἐρωτήσεων.

Τινες κλασματικαὶ μονάδες λέγονται δεκαδिकाί; διατί; Τινες ὀνομάζονται δεκαδικοὶ ἀριθμοί; δεκαδικὰ κλάσματα; Πῶς γράφονται γενικῶς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα; καὶ πῶς ἰδίως τὰ δεκατημόσια; τὰ ἑκατοστημόρια; τὰ χλιοστημόρια κτλ; Πῶς γράφονται αἱ μεγαλύτεραι τῆς ἀρχικῆς μονάδος, δεκαδικοί, ἔτσι αἱ μικτοί; Γραμμένους δεκαδικούς, ὅστις νὰ ἔχῃ ἐν ὑψίῳ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, ἡ δύο, ἢ τρία, ἢ τεσσαρα κτλ. τινος δεκαδικῆς μονάδος ἀριθμός εἶναι; Πῶς ἀπαγγέλλεται δεκαδικὸς ἀριθμός; Τί παθαίνει δεκαδικὸς μικτός ἢ δεκαδικὸν κλάσμα, ὅταν δεξιὰ τοῦ θετώνται ἓν ἢ πλεονέστερα μηδενικά; Πῶς τρέπονται ἑτερόνυμοι δεκαδικοὶ εἰς ἰσοδύναμους ὁμωνύμους; Πῶς τρέπεται κοινὸν κλάσμα εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν; Εἶναι ταῦτο δυνατόν πάντοτε ἢ ἔχει; Τί γίνεται ὅταν ἦναι ἀδύνατον νὰ τραπῇ κοινὸν κλάσμα εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν; Τί σημαίνει ἡ φράσις, δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι μείον ἑκατοστημόριον, ἢ μείον ἑκατοστημόριον, κτλ, ἰσοδύναμον με κοινόν; — Πῶς προσθέτονται καὶ πῶς ἀφαιροῦνται δεκαδικοὶ ἀριθμοί; Πῶς πολλαπλασιάζεται καὶ πῶς διαιρεῖται δεκαδικὸς ἀριθμός διὰ 10, διὰ 100, διὰ 1000, κτλ; Τί παθαίνει δεκαδικός, ὅταν μετατιθεταὶ ἡ ὑποδιαστολή πρὸς δεξιὰ ἢ πρὸς ἀριστερά μιαν θέσιν, ἢ δύο κτλ. Πῶς πολλαπλασιάζεται δεκαδικὸς ἐπὶ δεκαδικόν; Πῶς διαιρεῖται δεκαδικὸς διὰ δεκαδικόν, καὶ ὅταν ἔχῃ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ἰσαριθμὰ ψηφία καὶ ὅταν ὁ εἰς ἔχῃ πλεονέστερα τοῦ ἄλλου; — Ποῖα δεκαδικὰ μονάδες μήκους ἐπιφανείας, βάρους κτλ εἶναι εἰς χρῆσιν; πῶς λέγονται; Ἡ δραχμή, βάρος, εἶναι δεκαδικὴ πρὸς τὴν μνάν; Κατὰ ποίους τρόπους γράφονται αἱ ἀριθμοὶ τῶν μονάδων τούτων; Ἀριθμός τις παλαιῶν μονάδων με τίνα νέων μονάδων ἀριθμὸν ἰσοδυναμεῖ, καὶ τ' ἀνάπαλιν; Τί χρειάζεται νὰ ἤξεύρῃ τις πρὸς λύσιν τοιούτων προβλημάτων;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ. (*)

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ.

Τί εἶναι τετράγωνον, τί τετραγωνικὴ ρίζα, καὶ περὶ διακρίσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς τετράγωνους καὶ μῆ.

89. Ἀριθμὸς ὁποιοσδήποτε λέγεται τετράγωνον ἄλλου ἀριθμοῦ, ἐὰν ἦναι γι-

(*) Ὁ διδάσκων δύναται νὰ παραστήσῃ τὸ κεφάλαιον τοῦτο, ἂν δὲν ὀλῃ χρειασθῇ εἰς τοὺς διδασκόμενους, ἢ ν' ἀναβάλῃ τὴν ἐξήγησιν αὐτοῦ.

νόμενον τοῦ ἄλλου ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντο, ἢ γινόμενον δύο ἴσων ἀριθμῶν μὲ τὸν ἄλλον· ἀντιστρόφως δὲ ὁ ἕτερος τῶν δύο ἴσων παραγόντων τοῦ τετραγώνου λέγεται τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ, Π. χ. ὁ 4, ὅστις εἶναι γινόμενον τοῦ 2 ἐπὶ 2 εἶναι τετράγωνον τοῦ 2, ὁ δὲ 2 τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 4· ὡσαύτως ὁ μὲν 9 εἶναι τετράγωνον τοῦ 3, ὁ δὲ 3 τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 9, ὡσαύτως ἔτι ὁ 16, θεωρούμενος ὡς γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ 4, εἶναι τετράγωνον τοῦ 4, ὁ δὲ 4 εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 16 — Ἐάν ὁ $\frac{9}{4}$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{4}{9}$, παράγει $\frac{9}{16}$ · λοιπὸν ὁ $\frac{9}{16}$ εἶναι τετράγωνον τοῦ $\frac{3}{4}$, οὗτος δὲ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{9}{16}$ κτλ.

9. Τὸ τετράγωνον παντὸς ἀριθμοῦ εὐρίσκεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτὸν. Οὕτως δὲ πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον τῶν

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, κτλ.

εὐρίσκομεν 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, κτλ.

Ἐκ τούτων δὲ βλέπομεν ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης γραμμῆς εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τῆς δευτέρας καὶ ἀντιστρόφως αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας γραμμῆς εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τῆς πρώτης. Ἐπειτα παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἄλλοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 2, 3 - 5, 6, 7, 8 - 10, 11, 12, 13, 14, 15, κτλ. οἵτινες εἶναι μετὰ τῶν τῆς δευτέρας γραμμῆς ἀριθμῶν, δὲν εἶναι τετράγωνα ἀκεραίων ἀριθμῶν ὥς μὴ δυνάμενοι νὰ παραχθῶσι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἴσων ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἀποδεικνύεται δὲ ἐν τῷ Συμπληρώματι τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅστις δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ᾖ τετράγωνον οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ.

Ἐκ τούτου λοιπὸν ἡ διάκρισις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰς τετραγώνους καὶ μὴ τετραγώνους. Ὁ 64 εἶναι τετράγωνον τοῦ 8, οἱ δὲ 65, 66, 67, 68, 69, ... 80 δὲν εἶναι τετράγωνον οὐδενὸς ἀριθμοῦ· καὶ βλέπει καθέ τις ὅτι οἱ μὴ τετράγωνοι εἶναι πολὺ περισσότεροι παρὰ τοὺς τετραγώνους. Οὕτω δὲ διακρίνονται καὶ οἱ ἄλλοι οἱ μὴ ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ μὴ τετράγωνοι ἀριθμοὶ τετραγωνικὰς ρίζας δὲν ἔχουσιν ἄλλους ἀριθμούς, ἐξ ἀνάγκης ἐκλαμβάνεται ὡς ρίζα τετραγωνικὴ ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ ἢ ὀλίγον τι μικροτέρου τοῦ μὴ τετραγώνου, ἢ ὀλίγον τι μεγαλητέρου, καὶ αὕτη ὀνομάζεται προσεγγίζουσα τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ. Π. χ. ὁ 40 δὲν εἶναι τετράγωνος, ὡς προσεγγίζουσα δὲ αὐτοῦ τετραγωνικὴ ρίζα ἐκλαμβάνεται ὁ 6, ὅστις εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 36, ἢ ὁ 7, ὅστις εἶναι τετραγ. ρίζα τοῦ 49. Κατωτέρω δὲ θέλομεν ἰδεῖ πῶς εὐρίσκεται ἄλλος ἀριθμὸς πλησιέστερος εἰς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ μὴ τετραγώνου, ἢ τῆς τετραγωνικῆς ρίζας ἄλλου ἀριθμοῦ πλησιέστερου εἰς τὸν μὴ τετράγωνον.

Περὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

91. Ἐξαγωγή τετραγωνικῆς ρίζης ὀνομάζεται ἡ πράξις, διὰ τῆς ὁποίας εὐρίσκεται τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ.

Ὦν μονοψηφίῳ καὶ διψηφίῳ ἀκεραίων ἑξήκων εἶδομεν ἤδη ποία εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα. Τριψηφίου δὲ τετραψηφίου ἀριθμοῦ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα εὐρίσκεται ὡς ἐφεξῆς λέγομεν.

Ὡς εὐρέθη ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ τετραψηφίου ἀριθμοῦ 2916
Γράφεται δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ γραμμὴ καὶ ζόντις. 2916 34
ὡς ἡ διχίρσιν καὶ ὡς ἀντικρὺ φέρεται. Ἐπειτα παρα- 41.6 104
ροῦμεν ὅτι ὁ ἀμέσως πρὸ 29 μικρότερος τετράγωνος ἀριθ- 416 4
μὸς εἶναι ὁ 25, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι 5.
γράφομεν τοῦτον τὸν 5 δεξιὰ τῆς γραμμῆς. Μετὰ ταῦτα ἀφαιροῦμεν τὸ τετρά-
γωνόν του 25 ἀπὸ τοῦ 29, δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 4 γράφομεν ἑξῆς δύο ψηφία
τοῦ ἀριθμοῦ, ἦτοι τὸν 16, τοῦ δὲ ἀποταλουμένου ἀριθμοῦ 416 παραιτοῦντες τὸ
δεξιὸν ψηφίον 6 διχίροῦμεν τὸν ἀριστερόν 41 διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ 5 (τοῦ δε-
ξιὰ τῆς γραμμῆς γραφθέντος) ἦτοι διὰ τοῦ 10, τὸ δὲ πηλίκον 4 γράφομεν δε-
ξιὰ τοῦ διαιρέτου 10 καὶ ὑποκάτω, πολλαπλασιάζομεν τὸν 104 ἐπὶ 4 καὶ τὸ
γινόμενον 416 ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 416 τοῦ ὑπὸ τὸν ἀριθμόν 2916. Ἐπειδὴ δὲ
τὸ κατάλοιπον εἶναι 0, τὸ 4 εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης, τὸ ὁποῖον
γράφεται δεξιὰ τοῦ 5, καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2916 εὐρέθη οὕτως ὅτι εἶναι 54.

Ὡσαύτως εὐρίσκεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα καὶ τοῦ τριψηφίου 329. Ἐδῶ
παρατηρεῖται ποῖον εἶναι τὸ ἀμέσως μικρότερον τοῦ μονοψηφίου 3.29 23
3 τετράγωνον καὶ ὅχι τοῦ διψηφίου ὡς εἰς τὸ προηγούμενον. 42.9 43
εἶναι δὲ 4, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ρίζα 2 γράφεται δεξιὰ 42.9 3
τῆς γραμμῆς, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἀνωτέρω καὶ ἀντικρὺ φαίνονται. 429

Παραδείγματα πρὸς γήμνασιν.

8 41 29	46 24 68	12.25 5
44.1 49	102.4 128	32.5 65
441 9	1024 8	325 5
0 441	0 1024	0 325
7 55 27	9.48 30	6.42 25
35.3 48 47	4.8 6	24.2 46 45
329 8 7		225 6 5
24 384 329		47 276 225
84 59 91	42.97 65	99.76 99
478	72	475

Τῶν μὲν τριῶν πρώτων παραδειγμάτων οἱ ἀριθμοὶ εἶναι τετράγωνοι καὶ ἡ

ρίζα των εὑρέθη ἀκριβῶς· διότι τὸ μετὰ τὴν τελευταίαν ἀφαίρεσιν κατὰλοιπον εἶναι 0. Τῶν δὲ ἄλλων ὧν οἱ ἀρ'μοὶ δὲν εἶναι τετράγωνοι, διότι τὸ μετὰ τὴν τελευταίαν ἀφαίρεσιν κατὰλοιπον δὲν εἶναι 0, ἀλλ' ἀριθμὸς τις· ἡ δὲ εὑρεθεῖσα ρίζα εἶναι προσεγγίζουσα, ἥτοι εἶναι μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ρίζης.

Ἐκ δὲ τοῦ τετάρτου καὶ ἑαυτοῦ παραδείγματος μανθάνομεν ὅτι, ὅταν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως πολλαπλασασθῇ ἐφ'ἑαυτὸ καὶ ἐπὶ τὸ διπλάσιον τοῦ προεureθέντος ψηφίου τῆς ρίζης παράγῃ γινόμενον μεγαλύτερον τοῦ ἀριθμοῦ, ἀπὸ τοῦ ὅπου μέλλει νὰ ἀφαιρεθῇ, αὐτὸ τὸ πηλίκον δὲν εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης, ἀλλ' ἄλλος ἀριθμὸς κατὰ μονάδα μικρότερος, καὶ διὰ τοῦτο δοκιμάζεται αὐτὸς, ὡς πρότερον τὸ πηλίκον.

Ἐκ δὲ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τελευταίου παραδείγματος μανθάνομεν ὅτι, ὅταν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ᾖναι μεγαλύτερον τοῦ 9, εἶναι περιττὸν νὰ δοκιμάζωμεν αὐτὸ, ἥτοι νὰ γράψωμεν δεξιὰ τὸ διπλάσιον τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ρίζης καὶ ὑποκάτω καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν, διότι ποτὲ τὸ ζητούμενον ψηφίον τῆς ρίζης δὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 9, ἀλλὰ τότε ἀρχίζομεν ἀπὸ τοῦ 9 νὰ δοκιμάζωμεν.

Τελευταίον ἔκ τοῦ πέμπτου παραδείγματος μανθάνομεν ὅτι ὅταν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πηλίκον εἶναι μικρότερον μιᾶς ἀκεραίας μονάδας, τότε δεξιὰ τοῦ προεureθέντος ψηφίου τῆς ρίζης ἀνάγκη νὰ γράψωμεν 0· διότι τότε ἡ ζητούμενη ρίζα ἀριθμὸν μονάδων δὲν ἔχει.

92. Πενταψηφίου δὲ καὶ ἑξαψηφίου ἀριθμοῦ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα εὐρίσκεται ὡς ἐφεξῆς λέγομεν.

Ἄς ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἑξαψηφίου **322624**.

Πρώτον παραιτοῦντες τὰ δύο δεξιὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, ἥτοι τὸν **24**, τὸν ὅποιον ἀποχωρίζομεν διὰ στιγμῆς εὐρίσκομεν ὡς ἄνωτέρω εἶπομεν τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ ἀριστεροῦ τετραψηφίου ἀριθμοῦ **3226**, τὸ ὅποιον εἶναι **56**, καὶ μένει κατὰλοιπον **90**. Ἐπειτα γράφομεν δεξιὰ τοῦ κατὰλοιπου **90** τὸν πρότερον παραιτηθέντα ἀριθμὸν **24**, τοῦ δὲ ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ **9024** παραιτοῦντες τὸ δεξιὸν ψηφίον **4**, τὸν ἀριστερὸν **902** διαιροῦμεν

32.26.24	568
72 6	406
63 6	6
902 4	636
902 4	4128
0	8
	9024

διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ προεureθέντος μέρους τῆς ρίζης ἥτοι διὰ τοῦ **412** καὶ δοκιμάζομεν τὸ πηλίκον **8**, ἥτοι τὸ γράφομεν δεξιὰ τοῦ **412** καὶ ὑποκάτω καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν **4128** ἐπὶ **8**. Επειδὴ τὸ γινόμενον **9024** ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ διαιρεθέντος **902** ἔχοντος καὶ τὸ παραιτηθὲν ψηφίον **4**, ἥτοι ἀπὸ τοῦ **9024**, ἀφίνει **0** κατὰλοιπον, ὁ **8** εἶναι τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης, ἥτοι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ **322624** εὑρέθη οὕτως ὅτι εἶναι σωστὰ **568**.

Ἄν ὅμως τὸ γινόμενον τοῦτο ᾖτον μεγαλύτερον τοῦ **9024**, ἐπρεπε νὰ ἐλαττωθῇ κατὰ μονάδα τὸ πηλίκον καὶ ἔπειτα νὰ δοκιμασθῇ καὶ αὐτό. Ἐάν δὲ ᾖτο

μικρότερον, γράφεται μὲν τὸ πηλίκον δεξιά τοῦ προερευθέντος ἤδη μέρους τῆς ρίζης, ἀλλ' ἢ οὕτως εὑρεθεῖσα ρίζα εἶναι προσεγγίζουσα ἥτοι εἶναι τὸ ἀκέραιον μόνον μέρος τῆς ζητούμενης, ὃ δὲ ἀριθμὸς τοῦ ὑπολοίπου ζητεῖται ἡ ρίζα δὲν εἶναι τετράγωνος.

Ἴδου καὶ ἄλλα παραδείγματα.

3.49.69	874
24.9	28
224	8
256.9	224
2569	367
0	7

2569

97.64.32	988
166.4	488
1504	8
1 603.2	4504
15744	
288	1968
	8
15744	

52.25.24	142
32.5	142
28.4	2
4 12.1	284
288.4	1442
1237	2
	2884
1.24.73	441
2.4	21
21	1
37.3	21
221	
152	221
	1
	221

Ἐκ δὲ τούτων καθέως ἑννοεῖ πῶς εὑρίσκεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἐπταψηφίου ἢ ὀκταψηφίου ἀριθμοῦ, ἐνεαψηφίου ἢ δεκαψηφίου κτλ. Ἴδου παραδείγματα.

5.49.90.25	2344
1.49	43
1.29	3
209.0	129
185.6	464
2342.5	4
23425	1856
0	4685 κτλ.

89.07.64.27	9438
80.7	184
73.6	4
716.4	736
5649	1883
151527.7	3
150944	5649
583	18868
	8

150944

93. Ὄταν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ἀριθμοῦ ᾖναι 2, 3, 7, 8, ἢ ἂν ᾖναι 5 τὸ δὲ τῶν δεκάδων δὲν ᾖναι 2, ἢ ὅταν ἔχῃ μηδενικά εἰς τὸ τέλος ἐν ἢ τρία ἢ πέντε κτλ, ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν εἶναι τετράγωνος, καὶ ἂν ᾖναι χρεῖα νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ τοῦ ρίζα, θέλει εὑρεθῇ προσεγγίζουσα τις τετραγωνικὴ ρίζα. Εἴπομεν ἤδη ἀνωτέρω πῶς εὑρίσκεται τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς προσεγγίζουσας τετραγωνικῆς ρίζης, τὸ ὅποιον διαφέρει τῆς σωστῆς ὀλιγώτερον μιᾶς ἀκεραίας μο-

νάδος. Ἄν ὁμοίως θέλῃ τις προσεγγίζουσιν, ἥτις νὰ διαφέρῃ τῆς σωστῆς ὀλιγώτερον μιᾶς κλασματικῆς μονάδος, ὅσον $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{10}$, κτλ. τότε πρέπει νὰ ἐκτελέσῃ τέσσαρας πράξεις, ἥγουν πρῶτον νὰ τετραγωνίσῃ τὸν παρονομαστήν τῆς κλασματικῆς μονάδος, ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσῃ τὸν ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ ρίζα, ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ, μετὰ ταῦτα νὰ εὑρῇ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ γινόμενου, καὶ τελευταίον νὰ διαιρέσῃ αὐτὸ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλασματικῆς μονάδος. Π. γ. ὁ 238 δὲν εἶναι τετράγωνος, διότι εἶναι 8 τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του. Ἄς εὑρεθῇ λοιπὸν προσεγγίζουσα τετραγ. ρίζα αὐτοῦ, ἥτις νὰ διαφέρῃ τῆς σωστῆς ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{12}$. Τὸ τετράγωνον τοῦ 12 εἶναι 144, τὸ γινόμενον τοῦ 238 ἐπὶ 144 εἶναι 34272, τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ρίζης τούτου εἶναι 185, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 12 εἶναι 15 $\frac{2}{3}$. Οὗτος δὲ ὁ ἀριθμὸς διαφέρει τῆς σωστῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 238 ὀλιγώτερον $\frac{1}{12}$.

Σημ. Συντομώτερα, ἂν καὶ ἀσφαλῶς, λέγουν, προσεγγίζουσιν ρίζαν μείον $\frac{1}{12}$ ἀντὶ προσεγγίζουσιν ρίζαν διαφέρουσαν τῆς σωστῆς ὀλιγώτερον $\frac{1}{12}$. Ἡ ρίζα τοῦ 75 μείον $\frac{1}{12}$ εἶναι $\frac{31}{12}$ ἢ 8 $\frac{7}{12}$ ἢ 8 $\frac{1}{2}$. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 24 μείον 0.01 ἢ μείον $\frac{1}{100}$ ὥσαυτίως εὐρίσκεται 4.89. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ὅταν ἡ κλασματικὴ μονάς ᾖ δεκαδική, ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ ἐκτελοῦνται σύντομα, καταντοῦν δὲ εἰς τὸ νὰ θέτῳται δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ δις τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει ὁ παρονομαστής τῆς κλασματικῆς μονάδος. Διὰ τοῦτο συνηθέστερον εὐρίσκονται ρίζαι μείον δεκάτου ἢ ἑκατοστοῦ, ἢ χιλιοστοῦ κτλ.

91. Ὅταν δὲ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων δὲν ᾖ ἐν τῶν προσηρημένων, δὲν ἡξεύρομεν ἂν ὁ ἀριθμὸς ᾖ τετράγωνον ἢ ὄχι, καὶ ἀνάγκη νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐν τῷ ἀρ. 91 καὶ 92 ἐκτεθεῖσαν πράξιν. Ἀφοῦ δ' ἐκτελεσθῇ αὕτη καὶ μείνητε κατάλοιπον, τότε μνησθήσομεν ὅτι δὲν εἶναι τετράγωνον ὁ ἀριθμὸς. Ἀλλὰ τότε δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀπκαθαίσωμεν τὴν πράξιν ὡς ἐν ἀρ. 93, ἀλλὰ θέτομεν δύο μηδενικά δεξιά τοῦ καταλοίπου, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πράξιν ὡς ἐν ἀρ. 91 καὶ 92, καὶ οὕτως εὐρίσκομεν ἀριθμὸν τινα δεκατημορίων, τὸ ὅποιον γράφομεν δεξιά τῆς ρίζης, ἀφοῦ πρῶτον γράψωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν. Ἄν θέλωμεν δὲ, καὶ εἰς τὸ νῦν κατάλοιπον δεξιά γράφομεν ἄλλα δύο μηδενικά καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πράξιν· οὕτω δ' εὐρίσκομεν καὶ ἀριθμὸν ἑκατοστημορίων κτλ. Ἡ δὲ τοιαύτη ρίζα θέλει εἶσθαι προσεγγίζουσα μείον δεκάτου ἢ ἑκατοστοῦ κτλ.

Π. γ. ἐν ἀρ. 91 εὐρέθη 99 ἀκέραιον μέρος τῆς ρίζης τοῦ 9976 καὶ κατάλοιπον 175. Δεξιά τούτου θέτομεν 00 καὶ διαιροῦμεν τὸν 1750 διὰ τοῦ διπλασίου τῆς ρίζης 99 ἥτοι τοῦ 198, δοκιμάζοντες δὲ τὸ πηλίκον 8, εὐρίσκομεν ὅτι εἶναι σωστὸν, μένει δὲ κατάλοιπον 1596. Λοιπὸν ἡ ρίζα τώρα εἶναι 99,8 μείον δε-

κάτου. Θέτομεν πάλιν 60 δεξιά τοῦ καταλαίπου 1596 καὶ διαίρομεν τὸν 15960 διὰ τοῦ διπλασίου τῆς ρίζης ἤτοι τοῦ 1996, χωρὶς νὰ προσέχωμεν εἰς τὴν ὑποδιαστολὴν· οὕτως εὐρίσκομεν ἑκατοστημόρια τῆς ρίζης 7, καὶ ἡ ρίζα εἶναι 99,87 μείον ἑκατοστημορίου κτλ.

95. Κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, ἔχοντος τοὺς δύο τοῦ ὅρου τετράγωνα, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα εὐρίσκεται ἂν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ, ἔπειτα ἡ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τοῦτ' ἡ δευτέρα παρονομαστής ὑπὸ τὴν πρώτην. Π. γ. τοῦ $\frac{81}{144}$ ἡ τετραγ. ρίζα οὕτως εὐρίσκεται $\frac{9}{12}$ ἀκριβῶς. Ἀλλὰ σπανιώτατα συμβαίνει νὰ ᾖ οἱ δύο ὅροι τοῦ τετράγωνο. Ὅταν δὲ οἱ ὅροι τοῦ κλασματικοῦ δὲν ᾖ τετράγωνοι, εὐρίσκεται προσεγγίζουσα ρίζα αὐτοῦ διττῶς· ἡ εὐρίσκεται ρίζα προσεγγίζουσα μείον τῆς κλασματικῆς μονάδος τοῦ κλασματικοῦ, καὶ πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν παρονομαστήν, τοῦ γινομένου εὐρίσκεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα μείον ἀκεραίας μονάδος, ἤτοι τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτῆς, καὶ τοῦτο διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλασματικοῦ· ἢ, ἂν ζητῇται προσεγγίζουσα ρίζα μείον ἄλλης τινὸς κλασματικῆς μονάδος, ἐκτελοῦνται αἱ ἐν ἀρ. 93 ἐκτεθεῖσαι τέσσαρες πράξεις.

Π. γ. ἂς εὐρεθῇ ἡ τετραγ. ρίζα τοῦ $\frac{19}{17}$ μείον $\frac{1}{17}$, ἢ $\frac{1}{17}$.

α. Πολλαπλασιάζεται ὁ 19 ἐπὶ 17, τοῦ γινομένου 221 προσεγγίζουσα ρίζα μείον μονάδος εἶναι 14, καὶ ἡ ζητούμενη ρίζα τοῦ $\frac{19}{17}$ μείον $\frac{1}{17}$ εἶναι $\frac{14}{17}$.

β. Τὸ τετράγωνον τοῦ 9 εἶναι 81, τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{19}{17}$ ἐπὶ 81 εἶναι (53, α) $\frac{1539}{17}$, ἢ 61 $\frac{1}{17}$, παριτεῖται δὲ τὸ κλάσμα καὶ εὐρίσκεται ἡ τετραγ. ρίζα τοῦ ἀκεραίου 61 μείον μονάδος, ἥτις εἶναι 7, αὕτη δὲ διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 9, καὶ ἔχομεν $\frac{7}{9}$ τετραγ. ρίζαν τοῦ $\frac{19}{17}$ μείον $\frac{1}{17}$. Ὡπότεως εὐρίσκεται τετρ. ρίζα τοῦ $\frac{7}{18}$ μείον $\frac{1}{18}$ ὁ $\frac{89}{18}$ ἢ $\frac{4}{18}$.—Ἡ τοῦ $\frac{29}{18}$ μείον $\frac{1}{18}$ εἶναι $\frac{139}{18}$ ἢ 5 $\frac{1}{18}$.—Ἡ τοῦ $\frac{1}{18}$ μείον 0,004 ἢ $\frac{1}{1000}$ εἶναι $\frac{888}{1000}$ ἢ 0,888.—Ἡ τοῦ $\frac{319}{18}$ μείον 0,01 ἢ $\frac{1}{100}$ εἶναι $\frac{488}{100}$ ἢ 4,88.—Ἡ τοῦ $\frac{4}{7}$ μείον $\frac{1}{7}$ εἶναι $\frac{5}{7}$.—Ἡ τοῦ $\frac{12}{10}$ μείον $\frac{1}{10}$ εἶναι $\frac{11}{10}$.

Οἱ δὲ μικτοὶ καὶ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ πρῶτον τρέπονται εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς, καὶ τούτων ἔπειτα ἐξάγεται ἡ τετραγ. ρίζα ὡς ἤδη εἶπομεν.

96. Τῶν δὲ δεκαδικῶν κλασμάτων ἡ μικτῶν, τῶν ὁποίων ἡ ρίζα εὐρίσκεται πάντοτε μείον δεκαδικῆς μονάδος, ἤτοι 0,1, ἢ 0,01 κτλ. τὰ δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς ψηφία ἀνάγκη νὰ κατασταθοῦν δις τόσα, ὅσα θέλει ἔχει· ἡ ρίζα, ἡγουν ἂν ζητῇται ρίζα μείον δεκάτου πρέπει νὰ ἔχη δύο ψηφία δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς, ἂν μείον ἑκατοστοῦ, τέσσαρα, ἂν μείον χιλιοστοῦ, ἕξ κτλ. Διὰ τοῦτο πρῶτον, ἂν μὲν ἔχη ὀλιγώτερα τῶν ὅσα χρειάζονται, συμπληροῦνται διὰ μηδενικῶν, ἂν δὲ πλείυτερα, παρκαμeloῦνται τὰ περιττά· ἔπειτα ἐξάγεται ἡ ρίζα αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ ὡς ἀκεραίου θεωρουμένου κατὰ τὰ ἐν ἀρ. 91 καὶ 92, καὶ τέλος εἰς τὴν ρίζαν τίθεται ὑποδιαστολὴ εἰς τὴν ἀρμοδίαν θέσιν.

Οὕτως εὐρίσκεται ρίζα τοῦ 3,425 μείον $\frac{1}{100}$ ὁ 4,85—ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 8,743 μείον 0,001 εἶναι 2,956—ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 3,475 μείον $\frac{1}{10}$ εἶναι 4,8—ἡ τοῦ 31,027 μείον 0,001 εἶναι 5,570.

Περὶ τῆς ἐν τῷ ἑκτῷ κεφαλαίῳ δι' ἐρωτήσεων.

Τὶς ἀριθμὸς ὀνομάζεται τετράγωνον ἄλλου ἀριθμοῦ; τὶς ἀριθμὸς ὀνομάζεται τετραγωνικὴ ρίζα ἄλλου; Ἐάν ἀριθμὸς τις ᾖ τετράγωνον ἄλλου, τί εἶναι ὁ δευτέρως τοῦ πρώτου; Ἐκαστος ἀριθμὸς ἔχει τετράγωνον; Πῶς εὐρίσκεται; Ποιοὶ ἀριθμοὶ εἶναι τετράγωνοι τῶν 1, 2, 3, . . . 9; Ἐκαστος ἀριθμὸς ἀκέραιος ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν ἄλλον ἀριθμὸν; Πῶς διακρίνονται οἱ ἀριθμοὶ ἐκ τούτου; Τί ὀνομάζεται προσεγγίζουσα ρίζα; Εἶναι γνωστὸν τίνες ἀριθμοὶ εἶναι τετράγωνοι καὶ τίνες ὄχι; Τί ἡξευρόμεν περὶ τούτου; Τί λέγεται ἐξαγωγή τετραγωνικῆς ρίζης; Τίνων ἀριθμῶν τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι ὁ 1, 2, . . . 9; Πῶς ἐξαγεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀκεραίου ἀριθμοῦ τριψηφίου ἢ τετραψηφίου, πενταψηφίου ἢ ἑξαψηφίου κτλ. Πῶς εὐρίσκεται τὸ πρῶτον ἀριστερὸν ψηφίον τῆς ρίζης; Πῶς εὐρίσκεται τὸ δευτέρον, τὸ τρίτον κτλ. Πῶς δοκιμάζεται ἕκαστον πηλίκον ἂν ᾖ ψηφίον τῆς ρίζης; Δοκιμάζεται ποτὲ πηλίκον μεγαλύτερον τοῦ 9; Ἐκ τίνος σημείου μανθάνομεν ὅτι ἀριθμὸς τις εἶναι τετράγωνον καὶ ἐκ τίνος ὅτι δὲν εἶναι; Πότε ἡ ρίζα εἶναι σωστὴ καὶ ποτὲ προσεγγίζουσα, καὶ πόσον προσεγγίζουσα; Πότε γράφομεν 0 ὡς ψηφίον τι τῆς ρίζης; Τί σημαίνει ρίζα προσεγγίζουσα μὲν μονάδος ἀκέραιας ἢ μὲν κλασματικῆς τινος μονάδος; Πόσαι καὶ ποῖαι πράξεις πρέπει νὰ γίνωνται πρὸς εὐρεσιν ρίζης προσεγγίζουσας μὲν κλασματικῆς τινος μονάδος; Ὅταν πρῶτον εὐρίσκηται τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ρίζης καὶ θέλωμεν δεκατημόρια ἢ ἑκατοστημόρια κτλ., τί κάνομεν; Πῶς εὐρίσκεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κλασματικοῦ ἀριθμοῦ ἔχοντος τοὺς δύο ἑνὸς τοῦ τετράγωνου; Κατὰ πόσους τρόπους εὐρίσκεται ρίζα προσεγγίζουσα κλασματικοῦ; Πότε αἱ πράξεις εἶναι συντομώτεραι; ὅταν ἡ κλασματικὴ μονάς ᾖ οὐσιαστικὴ ἢ ὅταν ᾖ δεκαδική; Πῶς εὐρίσκεται ἡ τετραγ. ρίζα τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ἢ τῶν μικτῶν δεκαδικῶν; Πῶς ἐξάγεται ἡ τετραγ. ρίζα τῶν μικτῶν ἢ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ ΚΑΙ ΜΕΘΩΔΩΝ.

Περὶ ἀναλογιῶν.

97. Εἶπομεν εἰς τὸν ἀριθμ. 42 ὅτι λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον εἶναι τρίτος ἀριθμὸς, ὅστις γίνεται ἐκ τῆς μονάδος, ὅπως ὁ πρῶτος ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τοῦ δευτέρου, καὶ ὅστις ἐπομένως, ὅταν ᾖ γνωστὸς, δείχνει πῶς ὁ πρῶτος γίνεται ἐκ τοῦ δευτέρου ὅταν δὲ ᾖ ἄγνωστος εὐρίσκεται διὰ τῆς διαίρεσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου.

Ἐάν θέλωμεν νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἀριθμὸς τις πρέπει νὰ νοῆται γινόμενος ἐξ ἄλλου, ἤτοι τὸν λόγον αὐτῶν, μεταξὺ τῶν δύο γράφομεν δύο στιγμάς :, ἢ γράφομεν τὸν δευτέρον ὑπὸ τὸν πρῶτον καὶ μεταξὺ τῶν γραμμῶν. Οὕτως ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς 4 γράφεται 12:4, ἢ $\frac{12}{4}$, διότι ὁ λόγος εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ 4. Ὁ 12 καὶ ὁ 4 λέγονται ὅροι τοῦ λόγου, ὁ μὲν 12 ἡγούμενος, ὁ δὲ 4 ἐπόμενος. — Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ ἡγουμένου διὰ τοῦ ἐπομέ-

νου, ὁ ἡγούμενος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐπομένου, καὶ τοῦ πληκίου, ἦτοι τοῦ λόγου.

98. Εἴπομεν ἔτι εἰς τὸν ἀριθ. 44 ὅτι τέσσαρες ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι, ἐὰν ὁ λόγος δύο ἐκ τῶν τεσσάρων ᾗναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἄλλων δύο, οἷον οἱ τέσσαρες οὗτοι: 30:6, 20:4. Διὰ τὴν σημειωθῆ δεῖ ὅτι οἱ δύο λόγοι εἶναι ἴσοι, τίθενται μεταξὺ τῶν δύο λόγων τέσσαρες στιγμαὶ οὕτω 30:6:20:4. Ἡ ἰσότης δύο λόγων λέγεται ἀναλογία. Ὁ ἀριστερὸς λόγος λέγεται πρῶτος, ὁ δὲ δεξιὸς δεύτερος. Ἡ ἀναλογία ἀπαγγέλλεται οὕτω, 30 πρὸς 6 ὡς 20 πρὸς 4, ἢ ὁποιον λόγον ἔχει ὁ 30 πρὸς τὴν 6, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ὁ 20 πρὸς τὴν 4.

Οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας λέγονται κατὰ σειρὰν πρῶτος, δεύτερος, τρίτος, τέταρτος. Ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος εἶναι ἡγούμενοι, ὁ μὲν πρῶτος ἡγούμενος, ὁ δὲ δεύτερος· ὁ δεύτερος καὶ ὁ τέταρτος εἶναι ἐπόμενοι, ὁ μὲν πρῶτος ἐπόμενος, ὁ δὲ δεύτερος. Ἐστὶ δὲ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τέταρτος λέγονται ἄκροι ὅροι ἢ ἄκρα, ὁ δὲ δεύτερος καὶ τρίτος μέσοι ὅροι ἢ μέσα τῆς ἀναλογίας. Ἐκαστος ὅρος ἀναλογίας λέγεται τέταρτος ἀνάλογος τῶν τριῶν ἄλλων.

99. Τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων πάσης ἀναλογίας εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων. Π. χ. τῆς 20:5:12:3 τὸ γινόμενον τοῦ 20 καὶ τοῦ 3 εἶναι 60, ἀλλὰ καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 5 καὶ τοῦ 12 εἶναι 60.

Γίνεται δὲ φανερόν ἐκ τούτου, ὅτι ὁ πρῶτος ἡγούμενος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐπομένου καὶ τοῦ λόγου (97), καὶ ἐπομένως τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι γινόμενον τῶν δύο ἐπομένων καὶ τοῦ πρώτου λόγου. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ δεύτερος ἡγούμενος εἶναι γινόμενον τοῦ ἐπομένου του καὶ τοῦ λόγου, τὸ γινόμενον τῶν μέσων εἶναι καὶ αὐτὸ γινόμενον τῶν δύο ἐπομένων καὶ τοῦ δευτέρου λόγου. Λοιπὸν, ἐπειδὴ καὶ οἱ δύο λόγοι εἶναι ἴσοι, τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων πρέπει νὰ ᾗναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, ὡς γινόμενα καὶ τὰ δύο τριῶν καὶ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

100. Πάσης ἀναλογίας εἰμποροῦμεν νὰ συµμεταθέσωμεν τοὺς μέσους ἢ τοὺς ἄκρους, καὶ μετὰ τὴν συµμετάθεσιν οἱ ὅροι θέλουσιν εἶσθαι ἀνάλογοι. Π. χ. τῆς 30:10:9:3 ἐὰν μὲν συµμεταθέσωμεν τοὺς μέσους ἔχομεν 30:9:10:3, ἐὰν δὲ συµμεταθέσωμεν τοὺς ἄκρους, ἔχομεν 3:10:9:30. Διότι μετὰ τὴν συµμετάθεσιν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, διότι εἶναι τὸ ἐν καὶ τὸ ἄλλο τὰ αὐτὰ μὲ τὰ τῆς πρώτης ἀναλογίας· ἀλλὰ ταύτην τὴν ιδιότητα ἔχουσι μόνον αἱ ἀναλογίαι· λοιπὸν καὶ αἱ δύο τελευταῖαι εἶναι ἀναλογίαι.

101. Ἐὰν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι πάσης ἀναλογίας πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὰ προκύψοντα γινόμενα ἢ κηλικά θέλουσιν εἶσθαι ἀνάλογα πρὸς τοὺς δύο τελευταίους ὅρους αὐτῆς. Π. χ. ἐκ τῆς 24:6:

36:9, ἐὰν μὲν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο πρότεροι ὄροι ἐπὶ **3** θέλει προκύψει ἡ **72:18:36:9**.

ἐὰν δὲ διαιρεθῶσι διὰ **3**, θέλει προκύψει ἡ **8:2:36:9**.

Διότι ὁ λόγος **24:6** γράφεται καὶ οὕτω $\frac{24}{6}$, καὶ ἡξυρόμεν (**57**) ὅτι ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὄροι τοῦ $\frac{24}{6}$ διὰ **3**, προκύπτουσιν $\frac{8}{2}$ ἢ $\frac{8}{2}$, οἱ ὅποιοι εἶναι ἰσοδύναμοι μετὰ τὸν $\frac{24}{6}$, δηλ. ὁ λόγος **72:18** ἢ ὁ λόγος **8:2** εἶναι ἴσος μετὰ τὸν λόγον **24:6**, καὶ ἐπομένως ἴσος μετὰ τὸ **36:9**. Λοιπὸν αἱ δύο εὐρεθεῖσθαι μετὰ τὸν πολλαπλασιασμόν ἢ μετὰ τὴν διαίρεσιν εἶναι ἀναλογίαν.

102 Ἐὰν οἱ δύο ἡγούμενοι πάσης ἀναλογίας πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ αριθμοῦ, τὰ προκύψοντα γινόμενα ἢ πηλίκαι καὶ οἱ ἐπόμενοι τῆς ἀναλογίας ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν. Π. χ. ἐκ τῆς **24:4:30:5**, ἐὰν μὲν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἡγούμενοι

ἐπὶ **2** θέλει προκύψει ἡ **48:4:60:5**.

ἐὰν δὲ διαιρεθῶσι διὰ **3**, θέλει προκύψει ἡ **8:4:10:5**.

Διότι ἐὰν τῆς **24:4:30:5** συμμετατε-

θῶσιν οἱ μέσοι, προκύπτει ἡ **24:30:4:5**.

Ἀλλ' εἰδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἐκ ταύτης τῆς ἀναλογίας διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ **2**, ἢ διαίρεσιν διὰ **3** τῶν δύο πρώτων ὄρων προκύπτει ἡ **48:60:4:5**, ἢ ἡ **8:10:4:5**.

Ἐὰν δὲ τούτων συμμεταθέσωμεν τὰ μέσα,

προκύπτουν αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος

48:4:60:5.

8:4:10:5.

Σημ. Διὰ μὲν τῆς διαίρεσιν ἢ τῶν δύο πρώτων ὄρων ἢ τῶν δύο ἡγουμένων ἀναλογίας τινὸς διὰ τοῦ αὐτοῦ αριθμοῦ, ὅταν ἔχωσι κοινὸν διαίρετην, καταγράφονται οἱ ὄροι αὐτῆς μικρότεροι, τὸ ὅποιον εἶναι ὑφέλιμον, ὡς θέλομεν ἰδεῖ μετ' ὀλίγον. Διὰ δὲ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πολλάκις τρέπομεν ἀναλογίαν, τῆς ὁποίας οἱ ὄροι εἶναι κλασματικοί, εἰς ἄλλην, τῆς ὁποίας οἱ ὄροι εἶναι ἀκέραιοι, καὶ οὕτως εὐκολύνομεν τὰς πράξεις. Π. χ. ἡ ἀναλογία $\frac{7}{8}:\frac{4}{3}::\frac{5}{6}:\chi$ τρέπεται εἰς ταύτην **7:4::5:\chi**.

ἀφοῦ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο πρώτοι ὄροι ἐπὶ **3**, καὶ ἔπειτα οἱ δύο ἡγούμενοι ἐπὶ **6**.

103 Ὄταν ὁ τελευταῖος ἢ ὁ τέταρτος ὄρος ἀναλογίας τινὸς ᾗναι ἄγνωστος καὶ οἱ ἄλλοι τρεῖς ᾗναι γνωστοί, εὐρίσκεται ὁ τέταρτος ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο μέσοι καὶ διαιρεθῇ τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ πρώτου. Τῆς **6:2::30:\chi** (χ σημαίνει τὸ ἄγνωστον) ὁ τέταρτος εὐρίσκεται ἐὰν τὸ γινόμενον **60** τῶν μέσων διαιρεθῇ διὰ τοῦ **6**, καὶ ἔχομεν πηλίκον **10**. Λοιπὸν ὁ τέταρτος ὄρος εἶναι **10**. Διότι τὸ γινόμενον **60** τῶν μέσων εἶναι ἀνταυτῷ γινόμενον καὶ τῶν

ἄκρων τὸ δὲ γινόμενον τῶν ἄκρων διαιρούμενον διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου, τοῦ πρώτου, δίδει πηλίκον τὸν ἄλλον ἄκρον ἥτοι τὸν τέταρτον. (Ἰδε τὸ 36 καὶ τὸ 42 πρόβλ. τοῦ ἀριθ. 45). Ὄταν δὲ ἄγνωστος ᾖ αἱ τις τῶν μέσων, εὐρίσκεται ἔκκον πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ἄκροι καὶ διαιρεθῇ τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ ἄλλου μέσου.

Σημ. Ἀναλογία, πῶς ὁποῖας μέσοι ὄροι εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, οἷον ἡ 36:12 :: 12:4, λέγεται συνεχῆς ἢ κἀλλιον ταυτέματος, ὁ δὲ αὐτὸς μέσος, οἷον ἐδῶ ὁ 12, λέγεται μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν. Ὁ δὲ μέσος ἀνάλογος δύο ἀριθμῶν εὐρίσκεται ἔκκον πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ἀριθμοί, καὶ τοῦ γινομένου αὐτῶν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα. Οὕτως εὐρίσκεται ὅτι μέσος ἀνάλογος τοῦ 96 καὶ 6 εἶναι ὁ 24, διότι 96:24 :: 24:6, κτλ.

Περὶ μεθόδου τῶν τριῶν.

164. Ὄταν προβλήματός τις οἱ γνωστοὶ ἀριθμοὶ ᾖναι τρεῖς καὶ ζητῆται τέταρτος, δύο δὲ τῶν τριῶν γνωστῶν ᾖναι ὁμοειδεῖς, ἥτοι αἱ μονάδες των παριστάνουν τὸ αὐτὸ πρᾶγμα, ὁ δὲ τρίτος ᾖναι ὁμοειδὴς μὲ τὸν ἄγνωστον καὶ συσχετισμένος μὲ τὸν ἕνα τῶν δύο γνωστῶν ὁμοειδῶν, ὅπως ὁ ἄγνωστος μὲ τὸν ἄλλον, καὶ ἔτι ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων ὁμοειδῶν ᾖναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ τρίτου καὶ τοῦ ἀγνώστου, λύεται καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο κατ' ἄλλην διαφορετικὴν μέθοδον παρ' ἐκείνην, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐλύθησάν τινα τοῦ ἀριθ. 45 (ἰδε σημ. β').

Τὸ 58 πρόβλημα τοῦ ἀριθ. 45, δηλ. 642δρ. ἔφεραν τόκον εἰς ἕν ἔτος 36δρ, 12572δρ. πόσον τόκον φέρουσιν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, ἔχει τρεῖς γνωστοὺς καὶ ἕνα ἄγνωστον· αἱ 642δρ καὶ αἱ 12572δρ εἶναι ὁμοειδεῖς ἀριθμοί, αἱ δὲ 36δρ εἶναι τόκος, καὶ διὰ τοῦτο ὁμοειδὴς μὲ τὸν ἄγνωστον τόκον· εἶναι δὲ συσχετισμένος ὁ 36 μὲ τὸν 642, ὡς ὁ ἄγνωστος μὲ τὸν 12572· διότι φανερόνουν τὸ κέρδος ὁ μὲν 36 τῶν 642δρ, ὁ δὲ ἄγνωστος τῶν 12572δρ. Προσέτι ὁ λόγος τοῦ 12572 πρὸς τὸν 642, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τόκων των, διότι διπλάσιος ἢ τριπλάσιος κτλ τοῦ 642 ἀριθμὸς δραχμῶν φέρει τόκον διπλάσιον ἢ τριπλάσιον κτλ τοῦ τόκου 36, οἱ τέσσαρες λοιπὸν οὗτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι, καὶ εἰμποροῦν νὰ διαταχθῶσιν εἰς ἀναλογίαν οὕτω 12572:642 :: χ:36, (χ σημαίνει τὸν ἄγνωστον), ἢ οὕτω 642:12572 :: 36:χ.

Τοιοῦτον εἶναι καὶ τὸ ἐξῆς, 12ἰκ. σακχάρως ἀζίζουν 18δρ, 4ἰκ. τοῦ αὐτοῦ σακχάρως πόσον ἀζίζουν:

Τὸ δὲ 60 πρόβλ. τοῦ ἀριθ. 45, δηλ. 6 κτίσται ἔκτισαν τοίχον τινα εἰς 48 ἡμέρας, 24 κτίσται εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελαν τὸν κτίσει; κατὰ μὲν τ' ἄλλα ὁμοιάζει μὲ τὰ προηγούμενα, διαφέρει δὲ κατὰ τοῦτο, ὅτι, ἐνῶ 6 κτίσται ἔκτισαν τὸν τοίχον εἰς 48 ἡμέρας, διπλάσιος τοῦ 6 ἀριθμὸς κτιστῶν ἢ τριπλάσιος κτλ δὲν ἤθελαν τὸν κτίσει εἰς διπλάσιον τοῦ 48 ἀριθμὸν ἡμερῶν ἢ τριπλάσιον

κτλ, ἀλλ' ἐξεναντίας εἰς τὸ ἥμισυ τῶν 48 ἡμερῶν ἢ εἰς τὸ τρίτον κτλ. Λοιπὸν ὁ λόγος τοῦ 24 πρὸς τὸν 6 δὲν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ ἀγνώστου πρὸς τὸν 48, ἀλλ' ἀντιστρόφως εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ 48 πρὸς τὸν ἀγνώστον. Εἰμποροῦν λοιπὸν καὶ οὗτοι νὰ διαταχθῶσιν εἰς ἀναλογίαν οὕτως, 24:6::48:χ.

Τῶν δύο πρώτων προβλημάτων οἱ ἀριθμοὶ λέγονται κατ' εὐθείαν ἀνάλογοι, τοῦ δὲ τελευταίου ἀντιστρόφως ἀνάλογοι.

Τῷ πρώτῳ προβλήματι οἱ δύο συσχετιζόμενοι ἀριθμοὶ 642 καὶ 36, ἦτοι αἱ δραχμαὶ αἵτινες κερδίζουσιν καὶ τὸ κέρδος αὐτῶν, λέγονται σύστοιχοι, ὡσαύτως καὶ οἱ ἄλλοι δύο, ὁ 12572 καὶ ὁ ἀγνώστος. Καὶ τοῦ τρίτου δὲ ὁ 6 καὶ ὁ 48, ἦτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν κτιστῶν καὶ αἱ ἡμέραι, κατὰ τὰς ὁποίας ἔκτισαν τὸν τοίχον, λέγονται σύστοιχοι, καὶ ὁ 24 δὲ καὶ ὁ ἀγνώστος ὡσαύτως.

Μετὰ ταῦτα ἰδοὺ πῶς λύνονται τὰ τριαῦτα προβλήματα.

Σημεῖνεται ὁ ἀγνώστος διὰ χ καὶ ἀριστερὰ τοῦ γράφεται ὁ ὁμοειδὴς τοῦ ἔπειτα, ἐὰν μὲν οἱ ἀριθμοὶ ἦναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογοι, γράφονται ἀριστερὰ τῶν δύο ἄλλων γραμμένων οἱ ἄλλοι δύο κατὰ τὴν τάξιν τῶν συστοίχων των, ἦτοι ὁ σύστοιχος τοῦ χ ἐπόμενος ἢ δεύτερος καὶ ὁ σύστοιχος τοῦ ἄλλου ἡγούμενος ἢ πρῶτος· ἐὰν δὲ οἱ ἀριθμοὶ ἦναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, τότε γράφονται οἱ ἄλλοι δύο κατὰ τὰξιν ἀντίστροφον τῆς τῶν συστοίχων των, ἤγουν ὁ σύστοιχος τοῦ χ ἡγούμενος ἢ πρῶτος καὶ ὁ ἄλλος δεύτερος ἢ ἐπόμενος. Ἐπειτα πολλαπλασιάζονται οἱ μέσοι καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ πρώτου· ὁ δὲ προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι ὁ ζητούμενος.

Αὕτη ἡ μέθοδος λέγεται τῶν τριῶν, διότι εἶναι μέθοδος κατὰ τὴν ὁποίαν διατάσσονται εἰς ἀναλογίαν ὁμοῦ μὲ τὸν ἀγνώστον οἱ τρεῖς γνωστοὶ ἀριθμοὶ τοῦ προβλήματος, καὶ ἔπειτα ἐκ τούτων προσδιορίζεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως ὁ ἀγνώστος.

Σημ. α'. Ἐπειδὴ εἶναι εὐκάλον νὰ γνωρισθῶσι τίνες εἶναι ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ καὶ τίνες σύστοιχοι, ἡ δυσκολία μένει μόνον εἰς τὸ νὰ καταλάβῃ τις ἂν οἱ ἀριθμοὶ ἦναι ἀνάλογοι ἢ ὄχι, καὶ ἂν ἦναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογοι ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι. Ταῦτα δὲ γίνονται γνωστὰ ἐὰν παρατηρηθῇ ὅτι διπλάσιος ἢ τριπλάσιος κτλ τοῦ πρώτου τῶν γνωστῶν ὁμοειδῶν, ἔχει σύστοιχον διπλάσιον ἢ τριπλάσιον κτλ τοῦ συστοίχου τοῦ πρώτου, ἢ ἔχει σύστοιχον τὸ ἥμισυ ἢ τὸ τρίτον κτλ αὐτοῦ, ὡς ἀνωτέρω ἐκόμαμεν. Κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν οἱ ἀριθμοὶ τοῦ προβλήματος εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογοι, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ἀντιστρόφως ἀνάλογοι.

Σημ. β'. Εἰς τὸν ἀριθμὸν 45 τὸ 58 πρόβλημα λύεται οὕτως. Ἐπειδὴ 642 δραχμαὶ ἐκέρδισαν 36, μία δραχμὴ, ἣτις εἶναι τὸ $\frac{1}{642}$ τοῦ 642 θέλει κερδίσει τὸ $\frac{1}{642}$ τῶν 36 ἦτοι $\frac{36}{642}$, καὶ 12572δρ. ἐπομένως θέλουν κερδίσει 12572 φο-

ρας $\frac{16}{11}$. Τὸ δὲ 60 αὐτῶς. Ἐπειδὴ 6 κτίσται ἔκτισαν τὸν τοῖχον εἰς 48 ἡμέρας, ὁ εἰς κτίστης, ὅστις εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ 6, ἤθελε τὸν κτίσει εἰς 6 ὥρας 48, ἥτοι εἰς 288 ἡμέρας, οἱ δὲ 24 κτίσται ἤθελαν τὸν κτίσει εἰς τὸ $\frac{1}{24}$ τῶν 288 ἡμερῶν.

1. Ἴππος, ὅστις ὁδοιπορεῖ 60 στάδια εἰς 6 ὥρ. πόσα στάδια θέλει διατρέξει εἰς 15 ὥρας;

$$6\text{ ὥρ.} : 15 : : 60\text{ στ.} : \chi\text{ στ.}$$

καὶ ἀφοῦ διαιρεθοῦν οἱ ἡγούμενοι διὰ 6, $1 : 15 : : 10 : \chi$, ὅθεν χ ἴσον μὲ 150 στ.

2. Μὲ 144 δρ. ἡγοράσθησαν 9 σάκκοι σίτου, μὲ 720 δρ πόσοι σάκκοι θέλουν ἀγορασθῆ;

$$144\text{ δρ.} : 720\text{ δρ.} : : 9\text{ σάκ.} : \chi\text{ σάκ.}$$

καὶ ἀφοῦ διαιρεθῶσιν οἱ ἡγούμενοι διὰ 9, καὶ ἔπειτα αἱ δύο πρώτοι ὁροὶ διὰ 16, $1 : 45 : : 4 : \chi$, ὅθεν χ ἴσον μὲ 45 σάκκους.

3. Οἰκογένεια ἐκ 10 ἀνθρώπων τρώγει 150 ὅκ ψωμὶ εἰς ἓνα μῆνα, πόσας ὁκάδας θέλει τρώγει, ἐὰν αὐξηθῇ εἰς 30 ἀνθρώπους;

4. Κτίριόν τι ἐκτίσθη εἰς 8 μῆνας ἀπὸ 120 ἐργάταις, ἄλλο παρόμοιον εἰς δύο μῆνας πόσοι ἐργάται θέλουν τὸ κτίσει;

$$2\text{ μην.} : 8\text{ μην.} : : 120\text{ ἐργ.} : \chi\text{ ἐργ.}$$

$$\text{ἢ } 1 : 4 : : 120 : \chi, \text{ ὅθεν } \chi \text{ ἴσον μὲ } 480\text{ ἐργ.}$$

5. Πλοῖον διαπλέον 20 στάδια τὴν ὥραν φθάνει ἀπὸ νήσου εἰς ἄλλην εἰς 12 ὥρας· ἄλλο πλοῖον, τὸ ὁποῖον διαπλέει 15 στάδια τὴν ὥραν, εἰς πόσας ὥρας θέλει διαπεράσει τὸ αὐτὸ διάστημα;

$$15\text{ στ.} : 20\text{ στ.} : : 12\text{ ὥρ.} : \chi$$

$$\text{ἢ } 1 : 4 : : 4 : \chi, \text{ ὅθεν } \chi \text{ εἶναι ἴσον μὲ } 16\text{ ὥρ.}$$

6. Σωλὴν τις ἀδειάζει· δεξαμενὴν γεμάτην ὕδατος εἰς 10 ὥρας· πόσοι σωλῆνες, τῆς αὐτῆς διαμέτρου ἤμελαν τὴν ἀδειάζει εἰς 24 λεπτά;

$$24\text{ λεπ.} : 600\text{ λεπ.} : : 1\text{ σωλ.} : \chi\text{ σωλ.}$$

$$1 : 25 : : 1 : \chi, \text{ ὅθεν } \chi \text{ ἴσον μὲ } 25\text{ σωλ.}$$

7. Ἐὰν $\frac{1}{12}$ τῆς μνᾶς σακχάρως ἀξίζωσι $\frac{6}{10}$ ἀνὸς πενταδράχμου, πόσον ἀξίζουν ἀναλόγως $\frac{9}{12}$ τῆς μνᾶς;

$$\frac{1}{12} : \frac{9}{12} : : \frac{6}{10} : \chi, \text{ ὅθεν } \chi \text{ ἴσον μὲ } \frac{9 \cdot 6 \cdot 10}{6 \cdot 9 \cdot 12} \text{ ἢ δρ. } 4,66.$$

8. Τὰ $\frac{7}{10}$ πλοιαρίου τινὸς ἀξίζουν 250 δραχμαί, πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{10}$ αὐτοῦ;

$$\frac{7}{10} : \frac{3}{10} : : 250\text{ δρ.} : \chi\text{ δρ.}$$

$$14 : 3 : : 250 : \chi, \text{ ὅθεν } \chi \text{ ἴσον μὲ } 53,57.$$

9. Φρουρὰ ἐξ 1200 στρατιωτῶν ἔχει ζωοτροφία· διὰ 9 μῆνας· ἐὰν αὐξηθῇ ἡ φρουρὰ κατὰ 400 στρατιώτας, πόσον καιρὸν θέλουν τοὺς ἐξορκέσει αἱ ζωοτροφίαι; Ἡ πόσον πρέπει νὰ τρώγῃ καθημέραν ἕκαστος, διὰ νὰ τοὺς ἐξορκέσουν αἱ

ζωοτροφίαι 12 μῆνας; (ἐκαστος τῶν 1200 ἐτρωγε καθημέραν 200δρ ψωμί κτλ. τὰ ὅποια ὅλα ὁμοῦ υποθέτονται 1).

10. Βρόσις βέουσα ὥρας $3\frac{2}{3}$ γεμίζει δεξαμενὴν, τὴν ὁποίαν ἄλλη βρούσις γεμίζει εἰς ὥρας $4\frac{1}{3}$; αἱ δύο ὁμοῦ εἰς πόσας ὥρας ἤθελον τὴν γεμίσει; (Ἡ δεξαμενὴ χωρεῖ 300 ἐκάδας, αἱ ὅποιαι υποθέτονται ὡς 1).

$$3\frac{2}{3} : 1\omega\rho : : 4\delta\epsilon\zeta : \chi\delta\epsilon\zeta$$

Ἡ πρώτη εἰς 1 ὥραν γεμίζει $4\frac{2}{3} : 1 : : 1 : \chi$
 τὰ $\frac{5}{17}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἡ δευτέρα εἰς 1 ὥραν γεμίζει τὰ $\frac{3}{14}$ τῆς δεξαμενῆς. Αἱ δύο ὁμοῦ γεμίζουν εἰς 1 ὥραν τὰ $\frac{12\frac{1}{3}}{338}$ τῆς δεξαμενῆς; λοιπὸν τὴν ὅλην δεξαμενὴν ($\frac{12\frac{1}{3}}{338} : 1\delta\epsilon\zeta : : 1\omega\rho : \chi$) γεμίζουν εἰς ὥρας $\frac{7\frac{2}{3}}{12\frac{1}{3}}$, ἥτοι εἰς 1ῶρ $\frac{117}{121}$ ἢ σχεδὸν εἰς 2ῶρ.

Περὶ πολλῶν ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

105. Ἄλλων προβλημάτων οἱ γνωστοὶ ἀριθμοὶ εἶναι πέντε, ἢ ἑπτὰ, κτλ, καὶ εἷς ἄγνωστος, ἀποτελοῦν δὲ δύο σειρὰς συστοίχων ἢ συσχετισμένων ὁμοίως, καὶ ἀνὰ δύο ὁμοειδεῖς, ἥτοι εἰς τις τῆς μιᾶς σειρᾶς εἶναι ὁμοειδῆς μὲ ἓνα τινὰ τῆς δευτέρας σειρᾶς, δύο δὲ ὁποιοιδήποτε ὁμοειδεῖς εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὸν ἄγνωστον καὶ τὸν ὁμοειδῆ του ἢ κατ'εὐθείαν ἢ ἀντιστρόφως. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἐξῆς πρόβλημα,

20 σκαφεῖς 12 ὥρας καθημέραν ἐργαζόμενοι εἰς 15 ἡμέρας ἐσκαψαν ἀγρὸν 30 πήγων μακρὸν καὶ 10 πήγ. πλατύν' 35 σκαφεῖς πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται τὴν ἡμέραν διὰ νὰ σκάψωσιν εἰς 8 ἡμέρας ἄλλον ἀγρὸν 40 πήγ μακρὸν καὶ 6 πήγ πλατύν;

Εἰς τὴν πρώτην εἶναι οἱ σύστοιχοι, 20σκ, 12ῶρ, 15ῆμ, 30μῆκ, 10πλ.
 εἰς τὴν δευτέραν εἶναι οἱ ὁμοειδεῖς των. 35, χ, 8, 40, 6.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λήγεται οὕτως, ἀφοῦ κατετάχθησαν οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἄνω φαίνονται. Γράφεται ὁ ἄγνωστος χ καὶ ἀριστερὰ του ὁ ὁμοειδῆς του, ἔπειτα ἀριστερὰ των γράφονται ἄλλοι δύο ὁμοειδεῖς;

$$35σκ \quad 20σκ : : 12ῶρ : \chi\omega\rho$$

ὁποιοιδήποτε, οἷον οἱ 20σκ 35σκ, γράφονται δὲ κατὰ τὰξιν ἀντίστροφον τῆς τῶν 12 καὶ χ' διότι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι αὐ-

$$8ῆμ : 15ῆμ$$

$$30μῆκ : 40μῆκ$$

$$10πλ : 6πλ$$

τῶν' ἔπειτα ὑποκάτω τῶν 35 καὶ 20 γράφονται οἱ ἄλλοι δύο ὁμοειδεῖς 15ῆμ, 8ῆμ, καὶ αὐτοὶ κατὰ τὰξιν ἀντίστροφον τῆς τῶν 12 καὶ χ' διότι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι αὐτῶν' ἔπειτα γράφονται οἱ ἄλλοι δύο ὁμοειδεῖς 30μῆκ καὶ 40μῆκ κατὰ τὴν τάξιν τῶν 12 καὶ χ' διότι εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογοι αὐτῶν' τελευταῖον γράφονται ὑποκάτω καὶ οἱ ἄλλοι δύο 10πλ καὶ 6πλ κατὰ τὴν τάξιν τῶν 12 καὶ χ' διότι εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογοι αὐτῶν' ἔπειτα διαιροῦνται οἱ

δύο πρώτοι ὅροι διὰ τῶν κρινῶν διαιρετῶν τῶν καὶ οὕτως εὐρίσκονται αἱ ἐξῆς.
 Τελευταίον πολλαπλασιάζονται ὅλοι οἱ πρώτοι ὅροι $7 : 4 :: 12 : \chi$
 ἐπ' ἀλλήλους καὶ ὅλοι οἱ δεύτεροι ὡσαύτως, γρά- $8 : 45$
 φονται δὲ τὰ γινόμενα 840 καὶ 720 ὑποκάτω, καὶ $3 : 4$
 δεξιὰ γράφονται καὶ οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι $12 : \chi$. $5 : 3$

Ἐκ δὲ τῆς ἀναλογίας ταύτης, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν οἱ $840 : 720 :: 12 : \chi$
 δύο ἡγούμενοι διὰ 12 , καὶ οἱ δύο πρώτοι ὅροι διὰ 40 , εὐρίσκομεν $7 : 72 :: 4 : \chi$,
 ὅθεν χ ἴσον μὲ $10\omega\rho \frac{2}{3}$, ἢ $10\omega\rho 17\lambda\epsilon\pi$ σχεδόν.

Ἐκ τούτου καταλαμβάνει τις πῶς λύεται καὶ πᾶν ἄλλο ὅμοιον πρόβλημα.

Ἰδοῦναι πρὸς γύμνασι.

1. 400 δραχμαὶ φέρουν τόκον 12 - $400 : 4580 :: 12 : \chi$
 δραχμᾶς εἰς ἓν ἔτος, 4580 δραχμαὶ $4 : 5$
 εἰς 5 ἔτη πόσον τόκον θέλουν φέρει; $4 : 458 :: 6 : \chi$

2. 400 δραχ φέρουν τόκον 8 δραχ $8 : 1240 :: 400 : \chi$
 εἰς ἓν ἔτος, πόσαι δραχμαὶ εἰς 3 ἔτη $3 : 4$
 θέλουν φέρει τόκον 1240 ; $3 : 340 :: 50 : \chi$

3. 400 δραχ φέρουν τόκον 9 δρ $4580 : 400 :: 4 : \chi$
 εἰς ἓν ἔτος, 4580 δρ εἰς πόσα ἔτη θέ- $9 : 4452$
 λουν φέρει τόκον 4452 δρ; $4122 : 44520 :: 4 : \chi$

4. Ἐάν 2570 δρ εἰς 5 ἔτη ἔφεραν τόκον 978 δραχ, 400 δραχ εἰς ἓν ἔτος πό-
 σον τόκον θέλουν φέρει;

5. 145 δραχ εἰς δύο ἔτη ἔφεραν τόκον 38 δραχ, 4372 δραχ εἰς 4 ἔτη πό-
 σον τόκον θέλουν φέρει;

6. Ἀγοράσας τις πραγματείας 840 δρ τὰς ἐπώλησε κερδίσας $12 \frac{1}{2}$ τὰς 400 ,
 πόσας δραχμᾶς ἐκέρδισεν; $400 : 840 :: 12 \frac{1}{2} : \chi$

7. Ἠγόρασεν ὁ ἀνταποκριτὴς μου πραγματείας δραχ $2544,25$, μὲ συμφωνίαν
 νὰ λάβῃ μεσιτικὸν 8 τὰς 400 , πόσας δραχμᾶς θέλει εἶσθαι τὸ μεσιτικόν του;

8. 540 δραχ πρὸς 8 δραχ τὰς 400 $400 : 540 :: 8 : \chi$
 τὸ ἔτος πόσον τόκον φέρουν εἰς 4 μῆ- $12\mu\eta\nu : 4 \frac{18}{30}$
 νας καὶ 48 ἡμέρας; $5 : 54 :: 4 : \chi$

9. 72 δραχ πρὸς 12 τὰς 400 τὸ ἔτος $12 : 4 \frac{18}{30}$
 πόσον τόκον φέρουν εἰς 24 ἡμέρας;

Ὁ τόκος τῶν 72 δραχ. εἰς ἓν ἔτος εἶναι δραχ. $8,64$, εἰς μίαν ἡμέραν εἶναι
 τὸ $\frac{1}{255}$ τῶν $8,64$ ἥτοι λεπτ. $2 \frac{1}{5}$ περίπου, καὶ εἰς 24 ἡμέρας εἶναι 24 φορές
 $2 \frac{1}{5}$, ἥτοι 53 λεπτά.

10. Δανείζει τις 870 δρ. πρὸς 12 τὰς 100 τὸ ἔτος, εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους πόσας δραχμὰς θέλει λάβει;

Θέλει λάβει τὰς 870 καὶ τὸν τόκον των, ὅστις εἶναι δραχ. 104,40· λοιπὸν θέλει λάβει 974,40.

Πόσας δραχμὰς θέλει λάβει εἰς τὸ τέλος 4 ἐτῶν;

Θέλει λάβει τὰς 870 καὶ 4 φορὰς τὸν τόκον 104,40 ἥγουν 1287,60.

11. Ἐὰν μέλλῃ νὰ πληρώσῃ τις εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους, ἀρχίζοντος ἀπὸ σήμερον, δραχμὰς 974,40, διότι σήμερον ἔλαβε δανεικὰς κάμποσας δραχμὰς μὲ τόκον πρὸς 12 τὰς 100, πόσας δραχμὰς ἔδανείσθη σήμερον;

Τόσας ἔλαβεν, ὅσαι ὁμοῦ μὲ τὸν τόκον των ἀποτελοῦσι 974,40 δηλ. 870.

112 : 974, 40 :: 100 : χ.

12. Ἐὰν μέλλῃ τις νὰ πληρώσῃ εἰς τὸ τέλος 4 ἐτῶν ἀπὸ σήμερον δραχμὰς 1287,60, διότι ἔδανείσθη σήμερον κάμποσας δραχ. πρὸς 12 τὰς 100, πόσας δραχ. ἔδανείσθη;

Τόσας ἔδανείσθη, ὅσαι ὁμοῦ μὲ τὸν τόκον τῶν 4 ἐτῶν ἀποτελοῦσι 1287,60 ἥγουν 870.

148 : 1287,60 :: 100 : χ.

13. Μέλλω νὰ λάβω εἰς 3 ἔτη 12750 δραχ., ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχω χρεῖαν συγκατατίθεμαι νὰ λάβω τώρα τόσας μόνον, ὅσαι ὁμοῦ μὲ τῶν τριῶν ἐτῶν τόκον των πρὸς 6 τὰς 100 ν' ἀποτελέσουν τὰς 12750 δραχ. τὸν δὲ τόκον αὐτῶν νὰ τὸν ζημιωθῶ· πόσας δραχμὰς θέλω λάβει;

14. Χρεωστῇ τις νὰ μὲ δώσῃ εἰς 5 ἔτη 4735 δραχ. ἀλλ' εὐχαριστοῦμαι νὰ τοῦ ἀφήσω 6 τὰς 100 καὶ νὰ μοῦ δώσῃ τώρα τὰς λοιπὰς· πόσας θέλει μοῦ δώσει;

Πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῶν 4735 δραχ. ὁ πέντε ἐτῶν τόκος των πρὸς 6 τὰς 100 καὶ ὅσαι μείνουν, τόσας θέλει μοῦ δώσει.

15. Ἐὰν ὁδοιπορῇ τις 728 στάδια εἰς 13 ἡμέρας, ὁδοιπορῶν 7 ὥρας τὴν ἡμέραν, πόσα στάδια θέλει ὁδοιπορήσῃ εἰς 12 ἡμέρας

13 : 12 :: 728 : χ.

ἀνὰ 10 ὥρας τὴν ἡμέραν;

7 : 10

16. 6. κτίσται κτίζουσι τοῖχον 15 πήχεων μακρὸν, 10 πήχεων ὑψηλὸν καὶ 8 παλαμῶν χονδρὸν εἰς 25 ἡμέρας· 24 κτίσται εἰς πόσας ἡμέρας θέλουν κτίσει ἄλλον τοῖχον 50 πήχεων μακρὸν, 22 πήχεων ὑψηλὸν καὶ 12 παλαμῶν χονδρὸν;

17. 4 θερίζται ἔλαβαν δραχ. 22,80 εἰς τρεῖς ἡμέρας· πόσοι θερίζονται ἔλαβον δραχ. 547,20 εἰς 15 ἡμέρας κατὰ τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον;

18. Ἐὰν 56 ὀκαῖδες ψωμὶ ἀρκῶσιν εἰς 7 ἀνθρώπους 14 ἡμέρας, πόσον ψωμὶ θέλει ἀρκέσαι εἰς 24 ἀνθρώπους 3 ἡμέρας;

19. 9 ἄνθρωποι εἰς 5 μῆνας δαπανῶσι 450 πεντάδραχμα, 14 ἄνθρωποι εἰς 8 μῆνας πόσα θέλουν δαπανῆσαι ἀναλόγως;

Μέθοδος τοῦ μερίζειν εἰς ἀνάλογα.

106. Ἄλλων προβλημάτων ἡ λύσις συνίσταται εἰς τὸ νὰ μερισθῇ ἀριθμὸς τις γνωστὸς εἰς δύο ἢ τρεῖς ἢ τέσσαρας κτλ. γνωστούς. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Τρεῖς ποιμένες· ἐνοικίεσαν λειβάδιον ἀντὶ 450 δρ. ἔχοντες ὁ μὲν 200 πρόβατα, ὁ δὲ 250, ὁ δὲ 400· πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προβάτων του;

Εἶναι φανερόν ὅτι ὅποιον λόγον ἔχουσι τὰ 200 πρόβατα πρὸς τὰ 250, τοιοῦτον λόγον θέλουν ἔχει καὶ τὰ χρήματα, τὰ ὅποια θέλουν πληρώσει οἱ δύο πρώτοι· καὶ ὅποιον λόγον ἔχουν τὰ 200 πρόβατα πρὸς τὰ 400, τοιοῦτον λόγον θέλουν ἔχει καὶ τὰ χρήματα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου. Τὰ τρία δὲ μερίδια τῶν χρημάτων πρέπει ν' ἀποτελοῦν ἄθροισμα ἴσον μὲ 450 δραχ.

Τὸ πρόβλημα λύεται οὕτω· πρῶτον προσθέτονται οἱ ἀριθμοὶ 200 καὶ 250 καὶ 400 καὶ ἔχομεν 850· ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἐπὶ 200 καὶ τὸ γινόμενον 90000 διαιρεῖται διὰ τοῦ ἄθροίσματος 850· ἔπειτα πάλιν ὁ 450 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 250 καὶ τὸ γινόμενον 112500 διαιρεῖται διὰ τοῦ ἄθροίσματος 850· τελευταῖον πολλαπλασιάζεται ὁ 450 ἐπὶ 400 καὶ τὸ γινόμενον 180000 διαιρεῖται πάλιν διὰ 850.

Οὕτως εὐρίσκεται ὅτι ὁ ἔχων τα 200 πρόβατα πρέπει	405,88
νὰ πληρώσῃ δραχ. 405,88, ὁ δὲ ἔχων τὰ 250 πρέπει νὰ	432,35
δώσῃ δραχμὰς 432,35, ὁ δὲ ἔχων τὰ 400 πρέπει νὰ	211,77
δώσῃ δραχ. 211,77.	450,00

Τὸ δὲ ἄθροισμά των εἶναι 450 δραχ.

Ἐκ τούτων ἐννοεῖται πῶς λύονται καὶ τὰ ἀκόλουθα, τὰ ὅποια ὁμοιοῦζον μὲ τὸ ἀνωτέρω.

1. Τέσσαρες ἐργάται ἔλαβον 584 δρ. ἐργασθέντες ὁ μὲν 12 ἡμέρας, ὁ δὲ 20 ἡμέρ. ὁ δὲ 8 ἡμέρ. ὁ δὲ 30 ἡμέρ. Πόσας δραχμὰς θέλει λάβει ἕκαστος ἀναλόγως τῶν ἡμερῶν τοῦ ἔργου του.

Πολλαπλασιάζεται ὁ 584 ἐπὶ 12, ἔπειτα ἐπὶ 20, ἔπειτα ἐπὶ 8, καὶ ἔπειτα ἐπὶ 30, καὶ διαιρεῖται ἕκαστον γινόμενον διὰ τοῦ ἄθροίσματος 70.

2. Ἀγρὸς τοῦ ὁποῖου τὸ μὲν $\frac{1}{2}$ τέταρτον ἀνήκει εἰς τὸν Γεώργιον, τὰ δὲ ἄλλα τρία τέταρτα εἰς τὸν Βασίλειον, ἐπωλήθη 56 δραχ. πόσας δραχ. θέλει λάβει ὁ Γ. καὶ πόσας ὁ Β;
ὁ Γ. 44, ὁ Β. 42.

3. Ἡγόρασαν δύο τινὲς βαμβάκι, καὶ ὁ μὲν ἐπλήρωσε 600 δραχ. ὁ δὲ 800 δρ. πωλήσαντες δὲ εὐθὺς τὸ βαμβάκι ἐκέρδισαν 200· πόσας θέλει λάβει ὁ εἰς

καὶ πόσας ὁ ἄλλος; Ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ 600 πρὸς 800 εἶναι ὅσος μὲ τὸν λόγον τοῦ 6 πρὸς 8, θέλουν μερισθῇ αἱ 200 δραχμ. εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τοῦ 6 καὶ τοῦ 8. Τοῦτο εὐκολύνει τὴν πράξιν.

4. Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν συντροφίαν, καὶ ὁ μὲν κατέθεσε 2500 δρ. ὁ δὲ 4000 ὁ δὲ 6500, εἰς δὲ τὸ τέλος τριῶν ἐτῶν λογαριασθέντες εὗρηκαν ὅτι ἐκέρδισαν 5000 δραχμ. πόσαι ἀνήκουν εἰς καθέναν;

Ἐδῶ θέλουν μερισθῇ αἱ 5000 δρ. εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν 25, 40 καὶ 65.

5. Δύο ἔμποροι ἐφόρτωσαν πλοῖον μὲ 500 ἀσκούς ἐλαίου, τῶν ὁποίων αἱ 350 ἀνήκον εἰς τὸν ἕνα καὶ οἱ λοιποὶ εἰς τὸν ἄλλον, εἰς τρικυρίαν δὲ ἐδιάσθησαν νὰ ρίψωσιν εἰς τὴν θάλασσαν 400 ἀσκούς· πόσον ἐζημιώθη καθεὶς τῶν ἐμπόρων; ὁ μὲν 70, ὁ δὲ 30.

6. Ὁ Κωνσταντῖνος ἐχρεωκόπησε, χρεωστῶν εἰς μὲν τὸν Γ. 780 δραχ. εἰς δὲ τὸν Δ. 460 δρ. εἰς δὲ τὸν Β. 750 δρ. ἔχει δὲ μόνον 600 δρ. πόσας δραχμάς θέλει λάβει ἕκαστος τῶν δανειστῶν; Ὁ μὲν Γ. 234, ὁ δὲ Δ. 438, ὁ δὲ Β. 228.

7. Ὁ Γ. ἤρχισεν ἐμπόριον μὲ 4750 δρ. καὶ μετὰ 2½ μῆνας συμπαραλαμβάνει καὶ τὸν Α. σύντροφόν του, ὅστις κατέθεσεν 7400, καὶ μετὰ 4 μῆνας συνενόηται μὲ αὐτοὺς καὶ ὁ Ζ, ὅστις καταθέτει 10000 δρ. Εἰς 30 μῆνας, ἀφοῦ ἤρχισεν ὁ Γ. τὸ ἐμπόριον, εὗρηκαν ὅτι τὸ κέρδος τῶν ἦτον 8000 δρ. πόσας θέλει λάβει ἕκαστος;

Ἐδῶ ἐπειδὴ καὶ τὰ χρήματα τῶν συνεταίρων εἶναι διάφορα καὶ οἱ χρόνοι, διότι ὁ Γ. ἦτον εἰς τὸ ἐμπόριον 30 μῆνας, ὁ Α. 24 μῆνας, ὁ Ζ. 20 μῆνας μόνον πρέπει νὰ μοιρασθῶν αἱ 8000 εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν γινομένων τῶν χρημάτων ἑκάστου ἐπὶ τοὺς μῆνας, ἡγουν ἀνάλογα τῶν 142500, 177600, 200000, ἢ τῶν 1425, 1776, 2000.

8. Πατὴρ τῆς ἀποθνήσκων διέταξε νὰ μοιρασθῶσι τὴν περιουσίαν του ἐκ 12570 οἱ τέσσαρες υἱοὶ του οὕτως, ὥστε ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ τὸ διπλάσιον τοῦ πρωτοτόκου, ὁ τρίτος τὸ ἥμισυ τῶν ὅσα θέλουν λάβει οἱ δύο πρῶτοι, καὶ ὁ νεώτερος τὸ τετραπλάσιον τοῦ τρίτου· πόσας δρ. θέλει λάβει ἕκαστος;

Αἱ 12570 δραχ. πρέπει νὰ μερισθῶσιν εἰς τέσσαρα μέρη ἀνάλογα τῶν κρηθ-
μῶν 1, 2, $\frac{3}{2}$, 6, ἢ τῶν 2, 4, 3, 12.

Ἄλλα τινὰ προβλήματα.

1. Ἀνεμίχθησαν 400 οὐκάδες οἴνου πρὸς 30 λεπτά τὴν οὐκάν, 250 οὐκ. πρὸς 45 λεπ. τὴν οὐκάν καὶ 125 οὐκάδ. πρὸς 70 λεπτά τὴν οὐκάν· πόσον πρέπει νὰ πωλῇται ἡ οὐκά τοῦ μίγματος, διὰ νὰ συναχθῶσιν ὅσαι δραχμαὶ ἤθελαν συναχθῇ, ἂν ἐπωλεῖτο χωριστὰ ὁ ἕκαστος τιμῆς οἴνου;

τὰ γινόμενα προσθέτονται καὶ τὸ ἄθροισμα 32000 λεπ. 775 32000 διαιρείται διὰ τοῦ ἀθροίσματος 775 τῶν ἀριθμῶν τῶν ὁκάδων· τὸ πηλίκον εἶναι ἡ ζητούμενη ἀξία τῆς ὁκάς τοῦ μίγματος.

2. Ἐχει τις τριῶν εἰδῶν σακχάρους, τοῦ πρώτου εἶδους 45 ὁκάδας πρὸς δρ. 1,50 τὴν ὁκάν, τοῦ δευτέρου εἶδους 80 ὁκ. πρὸς δραχ. 1,30, καὶ τοῦ τρίτου 24 ὁκάδ. πρὸς δραχ. 1,35· ἂν τ' αναμίξῃ εἰς ἓν, πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὁκάν τοῦ μίγματος;

3. Ἐμέτρησέ τις τὸ μῆκος ἀγροῦ εἰς τρία διάφορα μέρη, καὶ τὸ εὗρηκεν εἰς μὲν τὸ πρῶτον 50 πήχεων, εἰς δὲ τὸ δεύτερον 48 πήχ. εἰς δὲ τὸ τρίτον 51 πήχ. πόσον πρέπει νὰ λογιζῇται τὸ μῆκος τοῦ ἀγροῦ;

Ὅσον εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν 50, 48 καὶ 51 πήχ. ἔχουν 49 $\frac{2}{3}$ τοῦ πήχεως.

4. Εἰς 300 ὁκάδας οἴνου ἀξιζοντος 50 λεπτά τὴν ὁκάν, προσετέθησαν 40 ὁκ. ὕδατος, πόσον πρέπει νὰ πωλῇται ἡ ὁκά τοῦ μίγματος;

Περίληψις τῶν ἐν τῷ ἐκδόμῳ κεφαλαίῳ δι' ἐρωτήσεων.

Τί εἶναι λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον; Πῶς εὐρίσκεται; Πῶς σημειώνεται; Τί λέγονται ὄροι τοῦ λόγου; Ποῦς λέγεται ἡγρούμενος καὶ ποῦς ἐπόμενος; Ποιοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι καὶ πῶς ἀνάγκη νὰ ᾖναι; Τί εἶναι ἀναλογία; Πῶς σημειώνεται ἡ ἀναλογία; Πῶς ἐναρμολύονται οἱ διάφοροι ὄροι τῆς ἀναλογίας; Τί λέγεται τέταρτος ἀναλογος; Το γινόμενον τῶν ἁκρῶν ἀναλογίας εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων; Διαιτί; Πῶς εὐρίσκεται εἰς τῶν τεσσάρων ὄρων ἀναλογίας, ἂν ᾖναι ἄγνωστος καὶ οἱ ἄλλοι τρεῖς γνωστοί; Διαιτί; Πῶς σημειώνεται ὁ ἄγνωστος; Ποία ἀναλογία λέγεται ταυτομέσος; Τίς ἀριθμὸς λέγεται μέσος ἀνάλογος δύο ἄλλων; Πῶς εὐρίσκεται ὁ μέσος ἀνάλογος; Ποίαι μεταθέσεις δυνατόν νὰ κάμνωμεν ἐπὶ τῶν ὄρων ἀναλογίας, ὥστε νὰ διαμενοῦν πάντοτε οἱ ἀριθμοὶ ἀνάλογοι; Διαιτί; Ποσους καὶ ποίους ὄρους ἀναλογίας δυνατόν νὰ πολλαπλασιασῶμεν ἢ νὰ διαιρῶμεν ἑνταυτῷ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὥστε τὰ γινόμενα ἢ τὰ πηλίκια νὰ ᾖναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἄλλους; Διαιτί; Εἰς τί χρησιμεύουν αἱ διακρίσεις ἢ οἱ πολλαπλασιασμοὶ οὗτοι; Τί λέγεται μέθοδος τῶν τριῶν; Ποία προβλήματα λύνονται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν; Ποιοὶ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν λέγονται σύστοιχοι; Πόσα ζεύγη συστοίχων εἶναι καὶ πόσα ἑρμειδῶν; Ποιοὶ ἀριθμοὶ λέγονται κατ' εὐθείαν ἀνάλογοι; καὶ ποιοὶ ἀντιστρέφως ἀνάλογοι; Πόθεν διακρίνει τις ὅτι οἱ ἀριθμοὶ προβλήματός τινος εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι ἢ ἀντιστρέφως; Πῶς διατάσσονται οἱ ἀριθμοὶ προβλήματος εἰς ἀναλογίαν; Τί κάμνομεν ἔπειτα πρὸς εὐρεσιν τοῦ ἀγνώστου; Τί διαφέρει ἡ μέθοδος αὕτη ἀπὸ τῆς μεθόδου κατ' ἑν λύνονται εἰς τὸν ἀριθμὸν 43;—Τί εἶναι πολλαπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν; καὶ τί διαφέρει τῆς ἀπλῆς; Πῶς λύνονται κατὰ τὴν πολλαπλὴν μέθοδον τῶν τριῶν καὶ δι' αὐτῆς δυνατόν νὰ λυθῶσι προβλήματα;—Τί εἶναι μέθοδος τοῦ μερίζειν εἰς ἀνάλογα; Πῶς ἀριθμὸς μερίζεται εἰς ἄλλους ἀριθμοὺς ἀνάλογους πρὸς ἄλλους δεδομένους; Ποία προβλήματα λύνονται κατὰ ταύτην τὴν μέθοδον; Τί διαφέρει αὕτη τῶν δύο προτέρων;—Πῶς λύνονται τὰ προβλήματα τῆς ἀναμίξεως; καὶ τί εἶναι ἀναμίξεως προβλήματα;

500

ΒΑ Βάφας. Χ.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ἀριθ. χρ. 3822

Ημερομηνία
πιστοφής

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟΝ



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

[illegible]

No 3

τὸν ἀριθμὸν 43;—Τί εἶναι πολλαπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν; καὶ τί διαφέρει τῆς ἀπλῆς; Πῶς λύνεται κατὰ τὴν πολλαπλὴν μέθοδον τῶν τριῶν τὰ δι' αὐτῆς, δυνάμενα νὰ λυθῶσι προβλήματα; — Τί διαφέρει τοῦ μερίζειν εἰς ἀνάλογα; Πῶς ἀριθμὸς μερίζεται εἰς ἄλλους ἀριθμοὺς ἀνάλογους πρὸς τοὺς δεδομένους; Ποῖα προβλήματα λύνονται κατὰ ταύτην τὴν μέθοδον; Τί διαφέρει αὕτη τῶν δύο ἄλλων;—Πῶς λύνονται τὰ προβλήματα τῆς ἀναμίξεως; καὶ τί εἶναι ἀναμίξεως προβλήματα;



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

ρείται
η του-

ος δρ.
ρίτου
η την

εν εις
ον 51

ον 49

40 εκ.

λόγους;
γκη να
ς ανα-
νόμενον
οί άλλ-
ς αριθ-
δυνα-
Διατί;
διά του
Είς τί
α προ-
τοιχί;
; και
εύθειαν
μεν ε-
ται εις
ύονται
είναι
άλλους
προ-

500

ΒΑ Βάφας, Χ.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

αριθ. χρ. 3822

Ημερομηνία
πιστροφής

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟΝ



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΔΗΜΟΣΙΑ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας