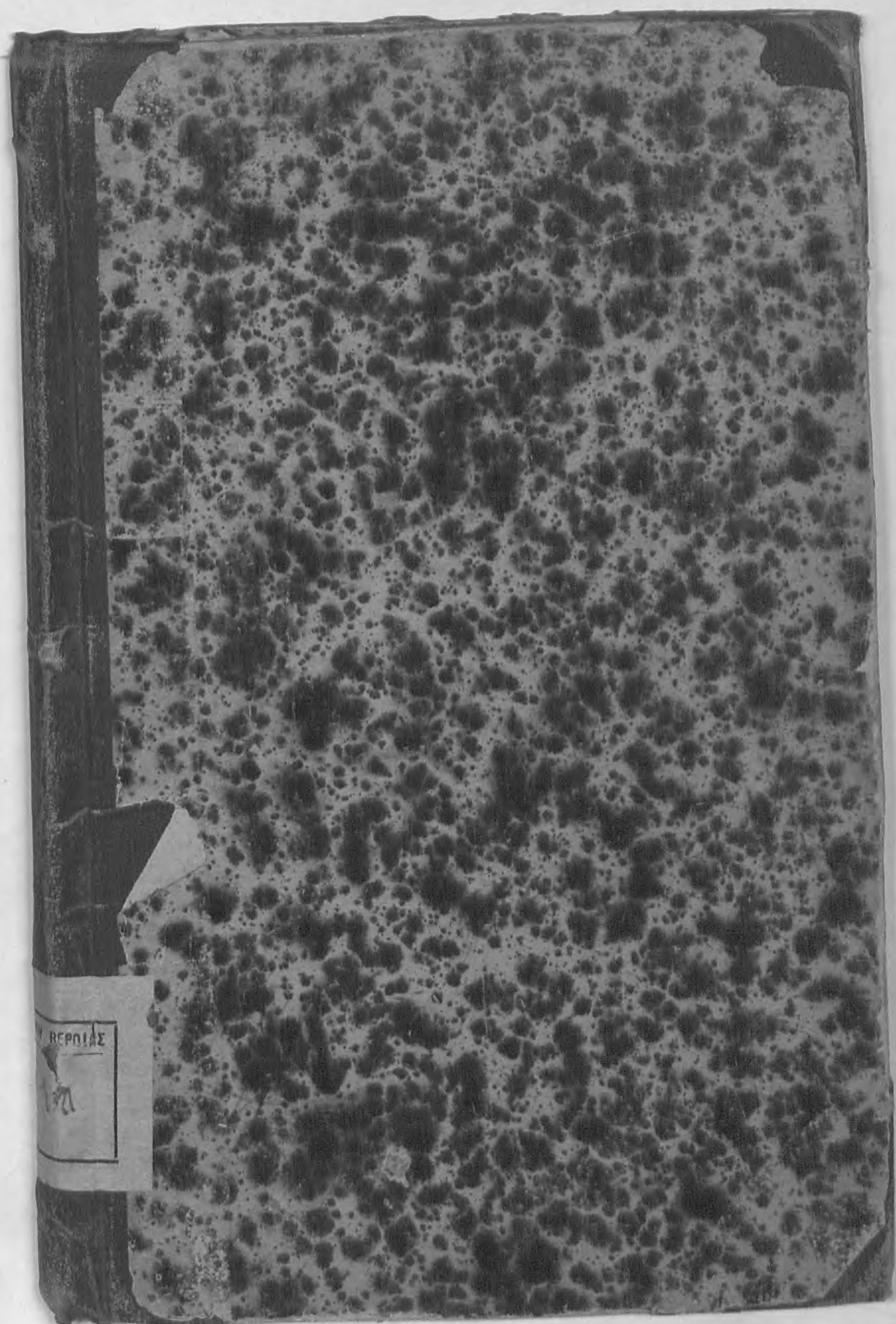




Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΒΕΡΟΙΑΣ

1500

Αριθ. τ. 384 / 63

ΔΟΥΚΗΣ Κωνσταντίνος

Παυλίδης

GRICROOLIT

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΕΝ ΤΟΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΟΙΣ ΣΧΟΛΕΙΟΙΣ ΜΑΘΗΤΕΥΟΝΤΩΝ

ΥΠΟ

ΑΝΤΩΝΙΟΥ Β. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ.

ΚΑΤ' ΕΓΚΡΙΣΙΝ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΤΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΕΜΠΤΗ
Ἐπεξεργασμένη.



Α. Κ.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,
ΤΥΠΟΙΣ ΠΡΟΟΔΟΥ
(Ὁδὸς Ἑρμοῦ, Ἀριθ. 176).

1882.

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βέροιας

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Γεώργιος Ζ. Καντίνης

ΤΟΙΣ ΦΙΛΟΙΣ

Α. ΣΟΥΛΗ ΚΑΙ Α. ΦΥΤΑΛΗ,

Α. Β. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΣ.

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

Κωνσταντίνος Σ. Παπαδόπουλος

ΠΑΤΗΣΤΕ ΔΕ ΕΝ ΤΩ ΟΥΝ

ΕΥΧΗΡΙΣΤΙΑ



ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

Τὸ παρόν, ἂν καὶ συνετάχθη κατὰ τὸ ἐπίσημον πρόγραμμα τοῦ ἐπὶ τῆς Δημοσίας Ἐκπαιδεύσεως Ὑπουργείου, ἴσως φανῇ εἰς τινὰς λίαν ἐκτεταμένον πρὸς τὸν σκοπὸν. Ἀλλ' ἐὰν λάβωσιν οὗτοι ὑπ' ὄψιν α) ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ ὅλου ὑπάρχουσιν 7 σελίδες περιέχουσai προβλήματα πρὸς λύσιν, β') ὅτι εἰς τὸ τέλος ἐκάστου κεφαλαίου ἐτέθησαν 2 περίπου σελίδες περιέχουσai ζητήματα πρὸς ἄσκησιν, γ') ὅτι τὸ σύγγραμμα συνετάχθη κατ' ἐρωταπόκρισιν, ὅπερ οὐκ ὀλίγον ἐπαυξάνει τὸν ὄγκον αὐτοῦ, καὶ δ') ὅτι μετὰ τὴν εἰς ἐκάστην ἐρώτησιν ἀπάντησιν ὑπάρχει ἐπεξηγήσεις τῆς ἀπαντήσεως ἐφηρμοσμένη ἐπὶ δύο, τριῶν καὶ πολλάκις τεσσάρων παραδειγμάτων· ἐάν, λέγω, λάβωσι ταῦτα πάντα ὑπ' ὄψιν, θέλουσι πεισθῇ ὅτι τὸ ἐκτεταμένον τοῦ ἔργου δὲν προέρχεται ἐκ πλησμονῆς ὕλης, ἀλλ' ἐξ ἀναλύσεως τῆς ὑπαρχούσης· ἐνόμισα δὲ τὴν τοιαύτην ἀνάλυσιν ἀναγκαίαν, ὅπως δυνηθῶσιν οἱ μαθητοὶ νὰ ἐννοήσωσι τὰ καθ' ἕκαστα τῆς Ἀριθμητικῆς, ἥτις, ὡς γνωστόν, εἶναι ἡ βάσις τῶν Μαθηματικῶν ἐπιστημῶν.

Συνέταξα τὸ ἔργον τοῦτο κατ' ἐρωταπόκρισιν διὰ δύο λόγους· α) διότι φρονῶ ὅτι ἐν τῷ συνεχεῖ λόγῳ δὲν δύνανται οἱ τῶν Ἑλληνικῶν Σχολείων μαθηταὶ νὰ διακρίνωσι καλῶς τὰς διαφόρους ιδέας, αἵτινες ἐκτίθενται ἐν αὐτῷ, ἐνῶ ἐν τῇ κατ' ἐρωταπόκρισιν ἐκθέσει καὶ αἱ μερικώτεραι περιπτώσεις διευκρινίζονται σαφέστερον, καὶ β') διότι οὕτω δύναται ὁ διδάσκων νὰ παραλείπῃ εὐκόλως εἰς τὴν πρώτην τοῦ μαθήματος παράδοσιν, ὡσάκις κρίνει τοῦτο ἀναγκαῖον, τὰ μέρη τοῦ

κειμένου, τὰ περιέχοντα τὰς ἀποδείξεις θεωρημάτων τινῶν, χωρὶς νὰ πάθῃ ἢ τοῦ ὅλου συνέχειαν.

Ἐξέθεσα τὰ καθ' ἕκαστα οὕτως, ὅπως νομίζω ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζῃ αὐτὰ ὁ μέλλων νὰ μεταβῇ εἰς Γυμνάσιον μαθητής. Ἐν Γαλλίᾳ οἱ ἐκ τῶν Γυμνασίων ἐξερχόμενοι δεκαοκταετῆς περίπου νέοι οὐ μόνον γνωρίζουσιν ἐντελῶς ὅσα μαθηματικά εἶναι προσδιωρισμένα νὰ παραδίδωνται ἐν τοῖς ἡμετέροις γυμνασίοις, ἀλλ' ἀκόμη μαθάνουσι τὴν Φυσικὴν, ἀρχὰς Χημείας, στοιχειώδη Μηχανικὴν, μέρος τῆς περιγραφικῆς Γεωμετρίας, μέρος τῆς δισδιαστάτου Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας κτλ., ἐνῶ δυστυχῶς ἐν Ἑλλάδι οὐ μόνον οὐδεὶς ἐκ τοῦ Γυμνασίου ἐξερχόμενος τόσα γνωρίζει, ἀλλὰ πολλάκις οἱ Καθηγηταὶ δὲν δύνανται, ἔνεκα τῆς μὴ καταλλήλου προπαρασκευῆς τῶν μαθητῶν, οὐδ' αὐτὰ τὰ ἐν τῷ προγράμματι τῶν Γυμνασίων προσδιωρισμένα πρὸς παράδοσιν νὰ διδάξωσι, καὶ τὸ λυπηρότατον πάντων, ἐκ τῶν 280 περίπου κατ' ἔτος ἐκ τῶν Γυμνασίων ἀπολυομένων μόλις οἱ 30 λαμβάνουσιν ὡς πρὸς τὰ Μαθηματικὰ βαθμὸν καλόν. Μήπως οἱ Γάλλοι εἶναι εὐφυέστεροι τῶν Ἑλλήνων; ἢ μήπως οἱ ἀπόγονοι ἐκείνων, οἵτινες πρῶτοι ἔθεσαν τὰς βάσεις τῶν Μαθηματικῶν ἐπιστημῶν, δὲν εἶναι σήμερον ἐπιδεκτικοὶ μαθηματικῆς, οὕτως εἰπεῖν, ἐκπαιδεύσεως; Βεβαίως οὔτε τὸ ἓν οὔτε τὸ ἄλλο δυνατόν νὰ ὑποτεθῇ. Ὁ μόνος δὲ λόγος, κατ' ἐμὲ κριτὴν, τῆς τηλικαύτης διαφορᾶς εἶναι, ὅτι οἱ μὲν Γάλλοι εἰσερχόμενοι εἰς τὸ Γυμνάσιον οὐ μόνον γνωρίζουσι καλῶς ὅσα ἀπαιτοῦνται νὰ γνωρίζωσι καὶ οἱ ἐκ τῶν ἡμετέρων Σχολαρχείων ἀπολυόμενοι, ἀλλὰ μαθάνουσι καὶ οὐκ ὀλίγων θεωρημάτων τῆς Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς τὰς ἐπιστημονικὰς ἀποδείξεις, ἡμεῖς δὲ οἱ ἐν Ἑλλάδι συγγράφοντες νομίζομεν τοὺς Ἕλληνας μαθητὰς ἀνικάνους εἰς τὸ νὰ ἐννοήσωσι καὶ αὐτῶν τῶν ἀπλῶν Ἀριθμητικῶν πράξεων τὰς ἐπιστημονικὰς ἀποδείξεις. Πῶς λοιπόν, τοῦ πράγματος θεωρουμένου ἐν γένει, ἀφοῦ ἐπὶ τρία ὅλα ἔτη εἰς τὰ Ἑλληνικὰ Σχολεῖα οὐδὲν ἄλλο ἔμαθεν ὁ μαθητὴς ἢ νὰ ἐκτελῇ μόνον

μηχανικῶς Ἀριθμητικὰς πράξεις, πῶς, λέγω, εἶναι δυνατόν οὗτος, εἰσερχόμενος εἰς Γυμνάσιον, νὰ ἐννοήσῃ καὶ ἐκμάθῃ ἐπιστημονικῶς εἰς διάστημα ὀκτὼ περίπου μηνῶν τὴν Θεωρητικὴν Ἀριθμητικὴν; Πῶς δὲ ἄνευ τῆς γνώσεως τῆς Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς εἶναι ποτε δυνατόν νὰ ἐννοήσῃ τὰ λοιπὰ τῶν Μαθηματικῶν μέρη; Τούτου ἕνεκα κατ' ἐμὲ πάντοτε κριτὴν, συμβαίνει ὅ,τι προεῖπον· καὶ τὸ δυστύχημα θὰ ἦτο μικρόν, ἂν ἐπρόκειτο περὶ μαθήματός τινος διδασκομένου χάριν πολυτελείας· ἀλλὰ προκειμένου περὶ τῶν Μαθηματικῶν, ἅτινα εἶναι ἡ βάσις ὅλων τῶν βιομηχανικῶν, οὕτως εἰπεῖν, τεχνῶν καὶ ἐπιστημῶν, εἰς ἃς ἡ Εὐρώπη ὀφείλει σήμερον τὰ πλούτῃ καὶ τὸ μεγαλεῖόν της, ἡ ἐκ τῆς τοιαύτης αὐτῶν καταστάσεως ἐθνικὴ ζημία εἶναι σπουδαία.

Ἄν δὲ ἡτύχησα, ἔστω καὶ κατὰ τι μόνον, νὰ ἐπιτύχω τοῦ σκοποῦ, ὃν προεθέμην συγγράφων τὸ παρόν, θέλω νομίσει ἀρκοῦσαν ἀμοιβὴν τὸ ὅτι δὲν ἐκοπίασα εἰς μάτην.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 1 Ἰουνίου 1868.

Α.ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΣ.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

	Σελ.
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ, Α' Ἀριθμησις	9
» Β' Πρόσθεσις καὶ ἀφαιρέσις	16
» Γ' Πολλαπλασιασμός	25
» Δ' Διαίρεσις	40
» Ε' Περὶ διαιρετότητος	60
» Σ' Περὶ κλασμάτων	65
» Ζ' Περὶ τῶν τεσσάρων ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν πράξεων.	76
» Η' Περὶ συμμιγῶν.	90
» Θ' Περὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν.	121
» Ι' Περὶ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῶν μέτρων καὶ σταθμῶν	136
» ΙΑ' Περὶ λόγων καὶ ἀναλογιῶν	138
» ΙΒ' Ἐφαρμογαὶ τῶν ἀναλογιῶν	145
ΣΥΛΛΟΓΗ προβλημάτων πρὸς λύσιν.	162

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ.

1. Τί καλεῖται ΜΟΝΑΣ;

Πᾶν ἀντικείμενον ἢ ὃν αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ θεωρούμενον. Παραδείγματος χάριν, τὸ πρόβατον, τὸ ἄνθος, ἡ ἀμαξία, τὸ δένδρον, ὁ ἄνθρωπος, τὸ μῆλον, τὸ ζῶον, ἡ οἰκία εἶναι μονάδες.

2. Τί λέγεται ΑΡΙΘΜΟΣ;

Ἀριθμὸς καλεῖται πᾶσα λέξις, δι' ἧς προσδιορίζομεν τὴν πληθὺν ὁσωνδήποτε ὁμοειδῶν μονάδων. Παραδείγματος χάριν, ὅταν λέγωμεν εἰς ἄνθρωπος, πέντε δένδρα, δέκα μῆλα, αἱ λέξεις εἰς, πέντε, δέκα, δι' ὧν προσδιορίζομεν τὴν πληθὺν τῶν μονάδων ἄνθρωπος, δένδρον, μῆλον, λέγονται ἀριθμοί.

3. Πότε ἀριθμὸς τις λέγεται ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟΣ;

Ὅταν μετ' αὐτοῦ συναπαγγέλλωμεν καὶ τὸ εἶδος τῶν μονάδων, ὡν τὴν πληθὺν παριστᾷ, ὡς π. χ. ὅταν λέγωμεν δύο ζῶα, δέκα πρόβατα, τρεῖς πῆχεις.

4. Πότε ἀριθμὸς τις λέγεται ΑΦΗΡΗΜΕΝΟΣ;

Ὅταν δι' αὐτοῦ παριστῶμεν ἀπλῶς τὴν πληθὺν τῶν μονάδων, ἀλλ' οὐχὶ καὶ τὸ εἶδος αὐτῶν. Π. χ. ὅταν λέγωμεν τρία, πέντε, δώδεκα, χωρὶς νὰ προσδιορίσωμεν καὶ τί τρία, τί πέντε, τί δώδεκα, οἱ ἀριθμοὶ τρία, πέντε, δώδεκα λέγονται ἀφηρημένοι.

5. Τί λέγεται ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ;

Ἀριθμητικὴ λέγεται ἡ ἐπιστήμη τῶν ἀριθμῶν.

6. Ποῖον τὸ ἀντικείμενον τῆς ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ;

Ἡ ἀπαρχή καὶ ἡ γράφη τῶν ἀριθμῶν.

ΑΠΑΓΓΕΛΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

7. Πῶς ἐσχημάτισαν τοὺς ἀριθμοὺς ;

Διὰ τῆς διαδοχικῆς ἐπαναλήψεως τῆς μονάδος, ὡς ἐξῆς :

τὴν μονάδα	ὠνόμασαν	.	.	.	.	.	.	ἕν,
εἰς τὸν ἓν	προσθέσαντες	μίαν	μονάδα	ἐσχημάτισαν	τὸν	ἀριθμ.	δύο,	
εἰς τὸν δύο	»	»	»	»	»	»	τρία,	
εἰς τὸν τρία	»	»	»	»	»	»	τέσσαρα,	
εἰς τὸν τέσσαρα	»	»	»	»	»	»	πέντε,	
εἰς τὸν πέντε	»	»	»	»	»	»	ἕξ,	
εἰς τὸν ἕξ	»	»	»	»	»	»	ἐπτά,	
εἰς τὸν ἐπτά	»	»	»	»	»	»	ὀκτώ,	
εἰς τὸν ὀκτώ	»	»	»	»	»	»	ἐννέα,	
εἰς τὸν ἐννέα	»	»	»	»	»	»	δέκα,	

ὃν ἐκάλεσαν δεκάδα ἢ μονάδα δευτέρας τάξεως. Φθάσαντες εἰς τὸν ἀριθμὸν δέκα, ἤρχισαν ν' ἀριθμῶσι κατὰ δεκάδας ὡς καὶ καθ' ἀπλᾶς μονάδας, εἶπον δηλ.

μία δεκάς	.	.	.	.	.	.	.	δέκα,
δύο δεκάδες	.	.	.	.	.	.	.	εἴκοσι,
τρεις δεκάδες	.	.	.	.	.	.	.	τριακότα,
τέσσαρες δεκάδες	.	.	.	.	.	.	.	τεσσαράκοτα,
πέντε δεκάδες	.	.	.	.	.	.	.	πεντήκοτα,
ἕξ δεκάδες	.	.	.	.	.	.	.	ἑξήκοτα,
ἐπτά δεκάδες	.	.	.	.	.	.	.	ἐβδομήκοτα,
ὀκτώ δεκάδες	.	.	.	.	.	.	.	ὀγδοήκοτα,
ἐννέα δεκάδες	.	.	.	.	.	.	.	ἐννεήκοτα,
δέκα δεκάδες	.	.	.	.	.	.	.	ἐκατόν.

Τὸν ἀριθμὸν ἐκατόν, ὅστις σύγκειται ἐκ δέκα δεκάδων, ὅπως καὶ ὁ δέκα σύγκειται ἐκ δέκα μονάδων, ὠνόμασαν ἐκατοντάδα ἢ μονάδα τρίτης τάξεως. Ἐκ δὲ τοῦ ἐκατόν, ἀριθμοῦντες καθ' ἐκατοντάδας ὅπως καὶ κατὰ δεκάδας καὶ καθ' ἀπλᾶς μονάδας, ἐσχημάτισαν τοὺς ἐξῆς ἀριθμούς :

ἐκατόν, διακόσια, τριακόσια, τετρακόσια, πεντακόσια,
ἑξακόσια, ἑπτακόσια, ὀκτακόσια, ἑννεακόσια, χίλια.

Τὸν ἀριθμὸν χίλια, ὅστις σύγκειται ἐκ δέκα ἐκατοντάδων, ὅπως καὶ ὁ ἐκατόν ἐκ δέκα δεκάδων, ὠνόμασαν μονάδα τετάρτης τάξεως. Ἀριθμοῦντες πάλιν κατὰ χιλιάδας, ὡς καὶ καθ' ἐκατοντάδας, κτλ. ἐσχημάτισαν τὰς μονάδας τῆς πέμπτης, ἑκτης, ἐβδόμης, ὀγδόης, ἐνάτης, δεκάτης κτλ. τάξεως, ἃς ὠνόμασαν

δεκάδα χιλιάδων, εκατοντάδα χιλιάδων, εκατομμύριον, δεκάδα εκατομμυρίων, εκατοντάδα εκατομμυρίων, δισεκατομμύριον, κτλ.

8. Πῶς διὰ τῶν ἀνωτέρω ὀνομάτων ἀπαγγέλλομεν πάντα ἀριθμούς;

1ον. Πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ δέκα ἔχει ἴδιον ὄνομα.

2ον. Ἄν εἶχομεν ν' ἀπαγγείλωμεν ἀριθμὸν τινα περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ δέκα καὶ εκατὸν, ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων αὐτοῦ ἔπειτα καὶ τὸ τῶν μονάδων του. Π. χ., ἂν ὁ ἀριθμὸς περιεῖχε πέντε δεκάδας καὶ ὀκτὼ μονάδας, ἠθέλωμεν εἶπει πρὸς ἀπαγγελίαν αὐτοῦ: πεντήκοτα ὀκτώ. Ἐξαιροῦνται οἱ ἀριθμοί, οἱ συγκείμενοι ἐκ μιᾶς δεκάδος καὶ μιᾶς ἢ δύο μονάδων, οἵτινες ἀπαγγέλλονται ἑνδεκα, δώδεκα ἀντὶ δέκα ἓν, δέκα δύο.

3ον. Ἄν ὁ πρὸς ἀπαγγελίαν ἀριθμὸς περιεῖχeto μεταξὺ τοῦ εκατὸν καὶ χίλια, ἔτοι μεταξὺ τῶν μονάδων τῆς τρίτης καὶ τετάρτης τάξεως, ἠθέλωμεν ἀπαγγεῖλει πρῶτον τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εκατοντάδων αὐτοῦ, ἔπειτα καὶ τὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ μικροτέρου τοῦ εκατὸν ὡς προερέθη. Π. χ. ἂν ὁ ἀριθμὸς περιεῖχε τρεῖς εκατοντάδας καὶ ὁ μικρότερος τοῦ εκατὸν ἀριθμὸς ἦτο ὁ ἐξήκοτα τέσσαρα, ἠθέλωμεν εἶπει τριακόσια ἐξήκοτα τέσσαρα.

4ον. Ἄν περιεῖcheto μεταξὺ τοῦ χίλια καὶ τοῦ εκατομμυρίου, ἠθέλωμεν ἀπαγγεῖλει πρῶτον τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν χιλιάδων αὐτοῦ καὶ ἔπειτα τὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ μικροτέρου τοῦ χίλια. Π. χ. ἂν ὁ ἀριθμὸς περιεῖχε τριακοσίας εἴκοσι ἐπτὰ χιλιάδας καὶ ὁ μικρότερος τοῦ χίλια ἀριθμὸς ἦτο ὁ εκατὸν πεντήκοτα τρία, ἠθέλωμεν εἶπει τριακόσιαι εἴκοσι ἐπτὰ χιλιάδες καὶ εκατὸν πεντήκοτα τρία.

5ον. Ἄν ὁ ἀριθμὸς περιεῖcheto μεταξὺ τοῦ ἐνὸς εκατομμυρίου καὶ ἐνὸς δισεκατομμυρίου, ἠθέλωμεν ἀπαγγεῖλει πρῶτον τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐκατομμυρίων αὐτοῦ, καὶ ἔπειτα τὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ μικροτέρου τοῦ ἐνὸς εκατομμυρίου, ὡς προερέθη. Καὶ οὕτω καθεξῆς.

9. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω περὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν λεχθέντων τί παρατηροῦμεν;

Ὅτι ἐν τῇ ἀπαγγελίᾳ τῶν ἀριθμῶν μεταχειρίζομεθα μόνον τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων τῆς

πρώτης, τετάρτης, ἐβδόμης, δεκάτης, κτλ. τάξεως, ἔτοι τῶν

μονάδων, χιλιάδων, εκατομμυρίων, δισεκατομμυρίων, κτλ.

10. Πῶς ὠνομάσθησαν διὰ τοῦτο αἱ μονάδες αὗται καὶ ποία ἡ πρὸς ἀλλήλας σχέσις αὐτῶν;

᾽Ονομάσθησαν ἀρχικαὶ μονάδες, ἡ δὲ πρὸς ἀλλήλας σχέσις αὐτῶν εἶναι, ὅτι ἐκάστη τούτων εἶναι *χιλιάκις* μεγαλειτέρα τῆς ἀμέσως προηγούμενης. Π. χ. ἡ χιλιάς περιέχει *χιλίας* μονάδας, τὸ ἑκατομμύριον *χιλίας* χιλιάδας, τὸ δισεκατομμύριον *χιλία* ἑκατομμύρια, κτλ.

ΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

11. Πόσοι χαρακτῆρες εἶναι ἀναγκαῖοι διὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν;

Οἱ ἐξῆς δέκα, οἵτινες καὶ *ψηφία* καλοῦνται,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0,
ἔν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτὰ, ὀκτώ, ἑνέα, μηδέν.

12. Διὰ τί μόρον δέκα;

Διότι ἕκαστος ἀριθμὸς σύγκειται ἐξ ἀριθμοῦ τινος μονάδων διαφόρων τάξεων, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τάξεώς τινος δὲν δύναται νὰ ᾔναι μεγαλειότερος τοῦ ἑνέα· διότι, κατὰ τὰ περὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν λεχθέντα, δέκα μονάδες τάξεώς τινος ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας. Μεταχειριζόμεθα δ' ὡς δέκατον ψηφίον καὶ τὸ 0 μόνον πρὸς παράστασιν ἑλλειπουσῶν μονάδων τάξεώς τινος. Διὰ τοῦτο τὰ ἑνέα πρῶτα ψηφία, τὰ παριστῶντα τοὺς ἑνέα ἀρχικοὺς ἀριθμοὺς, καλοῦνται *σημαντικὰ ψηφία*, πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ψηφίου 0, ὅπερ αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ οὐδὲν σημαίνει, τουτέστι εἶναι ψηφίον ἀσημαντον.

13. Πῶς κατορθοῦται διὰ δέκα μόρον ψηφίων νὰ γράφωται ἅπαντες οἱ ἀριθμοί;

Διὰ τῆς ἐξῆς συνθήκης·

Πᾶν ψηφίον γεγραμμένον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου τινὸς παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, τοῦ πρώτου πρὸς τὰ δεξιὰ παριστῶντος πάντοτε ἁπλᾶς μονάδας.

14. Ἐξηγήθητε σαφέστερον ἐπὶ τινῶν παραδειγμάτων.

Ἐὰς ὑποθέσωμεν πρῶτον ὅτι θέλομεν νὰ γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν *εἴκοσι ἑπτὰ*, ὅστις σύγκειται ἐκ 2 δεκάδων καὶ 7 μονάδων. Πρὸς τοῦτο γράφομεν 27.

Διότι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω συνθήκην, τὸ 2 παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως τῶν ὑπὸ τοῦ 7 παριστωμένων, καὶ ἐπειδὴ τὸ 7, ὡς πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον, παριστᾷ ἁπλᾶς μονάδας, τὸ 2 θέλει παριστᾷ δεκάδας, ἐπομένως ὁ ἀριθμὸς 27 παριστᾷ τὸν ἐκ 2 δεκάδων καὶ 7 μονάδων συγκεείμενον ἀριθμὸν.

2ον. Ὡσαύτως, ἵνα γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν πεντακόσια ἑβδομήκοντα τρία, γράφομεν

573.

Ἐγράψαμεν 3 πρὸς παράστασιν τῶν τριῶν μονάδων, πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ 7 πρὸς παράστασιν τῶν ἑπτὰ δεκάδων καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ πάλιν τούτου 5 πρὸς παράστασιν τῶν πέντε ἑκατοντάδων. Ἄν εἶχομεν πρὸς γραφὴν τὸν ἀριθμὸν πεντακόσια τρία, ἠθέλομεν γράψαι

503.

τουτέστι μὴδὲν μετὰ τὸ ψηφίον 3, διότι ὁ δεδομένος ἀριθμὸς δὲν περιέχει δεκάδας.

3ον. Πρὸς γραφὴν τοῦ ἀριθμοῦ ὀκτακόσιαι πέντε χιλιάδες καὶ διακόσιαι ἑβδομήκοντα τρεῖς μονάδες γράφομεν

805 273,

ἥτοι πρῶτον 805 πρὸς παράστασιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν χιλιάδων, ἔπειτα 273 πρὸς παράστασιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τοῦ πρὸς γραφὴν δεδομένου ἀριθμοῦ. Ἄν εἶχομεν πρὸς γραφὴν τὸν ἀριθμὸν ὀκτακόσιαι πέντε χιλιάδες, ἑβδομήκοντα τρεῖς μονάδες, ἠθέλομεν γράψαι

805 073,

ἥτοι 0 πρὸ τοῦ 73, διότι ὁ δεδομένος ἀριθμὸς δὲν περιέχει ἑκατοντάδας.

4ον. Πρὸς γραφὴν τοῦ ἀριθμοῦ τρία δισεκατομμύρια, ὀκτὼ χιλιάδες καὶ ἑκατὸν ἐξήκοντα μονάδες ἠθέλομεν γράψαι

3 000 008 160,

ἥτοι πρῶτον 3 πρὸς παράστασιν τῶν τριῶν δισεκατομμυρίων, ἔπειτα 000 πρὸς παράστασιν τῶν ἐλλειπόντων ἑκατομμυρίων, ἔπειτα 008 πρὸς παράστασιν τῶν ὀκτὼ χιλιάδων, ἀφ' ὧν ἐλλείπουσι δεκάδες καὶ ἑκατοντάδες χιλιάδων, καὶ τελευταῖον 160 πρὸς παράστασιν τῶν ἑκατὸν ἐξήκοντα μονάδων, ἀφ' ὧν ἐλλείπουσιν αἱ ἀπλᾶι μονάδες.

15. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποῖον ΓΕΝΙΚΟΝ ΚΑΝΟΝΑ πρὸς γραφὴν ὁποιοῦδήποτε ἀπαγγελλομένου ἀριθμοῦ ἐξάγομεν; — Τὸν ἐξῆς·

Πρὸς γραφὴν ὁποιοῦδήποτε ἀριθμοῦ, ἀπαγγελλομένου κατὰ τὰ περὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν λεχθέντα, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν, τὸν παριστῶντα τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης ἀρχικῆς μονάδος, ἔπειτα πρὸς τὰ δεξιὰ τούτου τὸν ἀριθμὸν, τὸν παριστῶντα τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἐπομένης ἀρχικῆς μονάδος, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἐὰν ὁ πρὸς γραφὴν ἀριθμὸς δὲν περιέχῃ μονάδας ἀρχικῆς τινος μονάδος, γράφομεν τρία μηδενικὰ εἰς τὴν θέσιν τούτων, ἐὰν δὲ αἱ ἀπαγγελλομεναι μονάδες ἀρχικῆς

τινος μονάδος γράφονται δι' ενός ἢ δύο ψηφίων, ἀναπληροῦμεν τὰ ἐλλείποντα δύο ἢ ἐν ψηφία διὰ μηδενικῶν.

Παραδείγματος χάριν ὁ ἀριθμὸς ἐβδομήκοντα τρία τετράκις ἑκατομμύρια, δέκα τρεῖς χιλιάδες καὶ πέντε μονάδες γράφεται

73 000 000 000 013 005

Ἐγράψαμεν πρῶτον 73 πρὸς παράστασιν τῶν τετράκις ἑκατομμυρίων, ἐν τριψήφιον τμήμα μηδενικῶν 000 διὰ τὰ ἐλλείποντα τρισεκατομμύρια, ἕτερον τριψήφιον τμήμα διὰ τὰ ἐλλείποντα δισεκατομμύρια, καὶ ἕτερον διὰ τὰ ἐλλείποντα ἑκατομμύρια, τελευταῖον, ἐπειδὴ ὁ μὲν ἀριθμὸς 13 τῶν χιλιάδων γράφεται διὰ δύο ψηφίων καὶ ὁ τῶν 5 μονάδων δι' ενός, πρὸς συμπλήρωσιν τῶν τριψηφίων τμημάτων προσθεῖσαμεν ἐν 0 πρὸς τὰ ἀριστερά τοῦ 13 καὶ δύο 0 πρὸς τὰ ἀριστερά τοῦ 5, καὶ ἔγραψαμεν τὰ οὕτως ἀποτελεσθέντα τριψήφια τμήματα 013, 005 τὸ ἐν κατόπιν τοῦ ἄλλου κατὰ τὴν τάξιν τῶν ἀρχικῶν μονάδων, ὡς παριστῶσι.

16. Πῶς ἀπαγγέλλομεν ἀριθμὸν τινα γεγραμμένον διὰ ψηφίων;

Χωρίζομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς τμήματα τριψήφια ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν, (τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερά τμήμα δυνατόν νὰ περιέχῃ δύο ἢ καὶ ἐν μόνον ψηφίον), ἔπειτα ἀπαγγέλλομεν κατὰ σειράν, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερά τμήματος, ἐν ἑκάστῳ τῶν τμημάτων μετὰ τοῦ ὀνόματος τῶν ἀρχικῶν μονάδων, ὡς τοῦτο ὡς ἐκ τῆς θέσεώς του παριστᾷ.

Παραδείγματος χάριν ὁ ἀριθμὸς

72 500 000 024

ἀπαγγέλλεται 72 δισεκατομμύρια, 500 ἑκατομμύρια καὶ 24 μονάδες.

Ὡσαύτως ὁ ἀριθμὸς

25 000 030 000 540 006

ἀπαγγέλλεται 25 τετράκις ἑκατομμύρια, 30 δισεκατομμύρια, 540 χιλιάδες καὶ 6 μονάδες.

17. Ἐν παντὶ ἀριθμῷ ἑκάστον τῶν ψηφίων αὐτοῦ πόσας τιμὰς ἔχει;

Δύο· μίαν ἀπόλυτον καὶ μίαν σχετικὴν. Π. χ. ἐν τῷ ἀριθμῷ 2546 τὰ ψηφία 2, 5, 4, 6, αὐτὰ καθ' ἑαυτὰ θεωρούμενα, παριστῶσι τὰς ἀπολύτους αὐτῶν τιμὰς, ὅταν δὲ θεωρῶμεν τὸ 2 ὡς παριστῶν χιλιάδας, τὸ 5 ὡς παριστῶν ἑκατομτάδας, τὸ 4 ὡς παριστῶν δεκάδας καὶ τὸ 6 ὡς παριστῶν μονάδας, αἱ τιμαὶ 2 χιλιάδες, 5 ἑκατομτάδες, 4 δεκάδες καὶ 6 μονάδες εἶναι αἱ ἐν τῷ ἀριθμῷ 2546 σχετικαὶ τῶν ψηφίων 2, 5, 4, 6, τιμαί. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ τιμὴ ἑκάστου ψηφίου,

λαμβάνομένου ἀνεξαρτήτως τῆς ἐν τῷ ἀριθμῷ θέσεώς του, καλεῖται ἀπόλυτος, ἡ αὐτὴ δὲ τιμὴ, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς ὡς ἐκ τῆς θέσεως τοῦ ψηφίου ἀξίας αὐτοῦ, καλεῖται σχετική.

18. Ἐὰν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἀριθμοῦ τινα γράψωμεν ἐν ἡ πλείοτερα μηδενικά, μεταβάλλεται ἡ ἀξία τοῦ ἀριθμοῦ ;

Ὅχι. Παράδειγματος χάριν, ἡ 5 γράψω ἢ 05 ἢ 005 ἢ 0005 κτλ., ἡ ἀξία τοῦ ἀριθμοῦ 5 δὲν μεταβάλλεται, διότι αἱ οὕτω γραφόμεναι μονάδες τῶν ἐπομένων τάξεων (δεκάδων, ἑκατοντάδων κτλ.) εἶναι μηδέν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμὸς

20 542 ;

(Εἴκοσι χιλιάδες, πεντακόσιοι τεσσαράκοντα δύο μονάδες).

II. Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμὸς

10 025 404 ;

(Δέκα ἑκατομμύρια, εἴκοσι πέντε χιλιάδες καὶ τετρακόσιοι τέσσαρες μονάδες).

III. Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμὸς

32 000 025 003 ;

(Τριάκοντα δύο δισεκατομμύρια, εἴκοσι πέντε χιλιάδες καὶ τρεῖς μονάδες).

IV. Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμὸς

254 000 040 305 402 ;

(Διακόσια πενήκοντα τέσσαρα τρισεκατομμύρια, δέκα ἑκατομμύρια, τριακόσιοι πέντε χιλιάδες καὶ τετρακόσιοι δύο μονάδες).

V. Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμὸς

2 500 230 000 400 000 ;

(Δύο τετράκις ἑκατομμύρια, πεντακόσια τρισεκατομμύρια, διακόσια τριάκοντα δισεκατομμύρια καὶ τετρακόσιοι χιλιάδες).

VI. Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμὸς

76 000 000 000 000 020 035 ;

(Ἑβδομήκοντα ἕξ πεντάκις ἑκατομμύρια, εἴκοσι χιλιάδες καὶ τριάκοντα πέντε μονάδες).

VII. Πῶς γράφεται ὁ ἀριθμὸς εἴκοσι τέσσαρες χιλιάδες καὶ ὀκτὼ μονάδες ;

(24 008).

VIII. Πῶς γράφεται ὁ ἀριθμὸς δύο ἑκατομμύρια, δέκα τέσσαρες χιλιάδες καὶ ἑκατὸν πέντε μονάδες ;

(2 014 105).

ΙΧ. Πῶς γράφεται ὁ ἀριθμὸς δέκα ἑπτὰ ἑκατομμύρια, ἑκατὸν ἐννέα χιλιάδες καὶ τριάκοντα τέσσαρες μονάδες ;

(17 409 034).

Χ. Πῶς γράφεται ὁ ἀριθμὸς πεντακόσια τρία τρισεκατομμύρια, ὀκτακόσια δύο ἑκατομμύρια, εἴκοσι χιλιάδες καὶ τρεῖς μονάδες ;

(503 000 802 020 003).

ΧΙ. Πῶς γράφεται ὁ ἀριθμὸς τριακόσια δέκα τρισεκατομμύρια, ἑκατὸν ὀκτὼ δισεκατομμύρια, τριάκοντα ἑπτὰ ἑκατομμύρια, πέντε χιλιάδες καὶ δώδεκα μονάδες ;

(310 108 037 005 012).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ.

19. Τί εἶναι ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ;

Πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς εὐρίσκομεν ἀριθμὸν περιέχοντα τόσας μονάδας, ὅσαι περιέχονται εἰς δύο ἢ πλείους δεδομένους ἀριθμούς.

Παραδείγματος χάριν, ἂν μᾶς ἐδίδοντο οἱ ἀριθμοὶ 2, 5 καὶ 8, καὶ μᾶς ἐζήτητο τρίτος 15, περιέχων τόσας μονάδας, ὅσαι περιέχονται καὶ εἰς τοὺς τρεῖς δεδομένους ἀριθμούς, ἡ πρᾶξις δι' ἧς εὐρίσκομεν τὸν τρίτον τοῦτον 15, καλεῖται πρόσθεσις.

20. Πῶς ὀνομάζονται οἱ πρὸς πρόσθεσιν δεδομένοι ἀριθμοὶ, πῶς ὁ ζητούμενος καὶ ποῖον τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως ;

Οἱ πρὸς πρόσθεσιν δεδομένοι ἀριθμοὶ καλοῦνται προσθετέοι, ὁ ζητούμενος ἄθροισμα ἢ κεφάλαιον, τὸ δὲ σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ ἐξῆς +, ὅπερ ἀπαγγέλλεται σὺν ἢ πλέον, καὶ τίθεται μεταξὺ τῶν προσθετέων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, $2 + 5 + 8$ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 2, 5 καὶ 8, καὶ ἀπαγγέλλεται 2 σὺν 5 σὺν 8 ἢ 2 πλέον 5 πλέον 8.

21. Πῶς εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα δύο μονοψήφιων ἀριθμῶν, τοῦ 5 καὶ 5 λόγου χάριν ;

Προσθέτοντες διαδοχικῶς εἰς τὸν 5 τοσάκις τὴν μονάδα, ὁσάκις αὐτὴ περιέχεται εἰς τὸν 3. Πρὸς τοῦτο δὲ λέγομεν, κατὰ τὰ περὶ ἀριθμήσεως λεχθέντα, 5 καὶ 1 κάμουν 6· 6 καὶ 1 κάμουν 7· 7 καὶ 1 κάμουν 8. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα εἶναι 8, διότι 8 εὗρομεν ἀφοῦ προσθέσαμεν εἰς τὸν 5 τοσάκις τὴν μονάδα, ὁσάκις αὕτη περιέχεται εἰς τὸν προσθετέον ἀριθμὸν 3.

22. Πῶς εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τριῶν ἢ καὶ πλειοτέρων μονοψηφίων ἀριθμῶν, τῶν 2, 5, 8 καὶ 9 λόγου χάριν;

Προσθέτοντες εἰς τὸν πρῶτον 2 διαδοχικῶς ἀνὰ μίαν μίαν τὰς μονάδας τοῦ δευτέρου 5, ἔπειτα εἰς τὸ οὕτως εὐρεθησόμενον ἄθροισμα 7 ἀνὰ μίαν μίαν τὰς μονάδας τοῦ τρίτου 8, καὶ τελευταῖον εἰς τὸ οὕτως εὐρεθησόμενον ἄθροισμα 15 ἀνὰ μίαν μίαν τὰς μονάδας τοῦ τετάρτου 9. Ὁ οὕτως εὐρεθησόμενος ἀριθμὸς 24 θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 2, 5, 8 καὶ 9.

23. Πῶς ἐκθέτομεν συνήθως καὶ συντομώτερον τὰ τῆς πράξεως;

Ὡς ἐξῆς· λέγομεν 2 καὶ 5 κάμουν 7 καὶ 8 κάμουν 15 καὶ 9 κάμουν 24, ἢ ἀπλούστερον 2 καὶ 5... 7 καὶ 8... 15 καὶ 9... 24.

24. Πῶς προσθέτομεν δύο ἢ πλειοτέρους πολυψηφίους ἀριθμούς, τοὺς 254 καὶ 552 λόγου χάριν;

Ὡς ἐξῆς· γράφομεν τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθετῇ στήλῃ, ἄγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν τελευταῖον καὶ ἔπειτα λέγομεν ἀρ- 234
χόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν 4 μονάδες καὶ 2 μονάδες κάμουν 352
6 μονάδας, γράφομεν 6 εἰς τὴν στήλῃν τῶν μονάδων· 3 δε- 586
κάδες καὶ 5 δεκάδες κάμουν 8 δεκάδας, γράφομεν 8 ἐν
τῇ στήλῃ τῶν δεκάδων· 2 ἑκατοντάδες καὶ 3 ἑκατοντάδες κάμουν
5 ἑκατοντάδας, γράφομεν 5 ἐν τῇ στήλῃ τῶν ἑκατοντάδων. Τὸ ζητού-
μενον λοιπὸν ἄθροισμα τῶν δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι ὁ ἀριθμὸς 586,
διότι αὐτὸν εὗρομεν προσθέσαντες τὰ ἀθροίσματα τῶν μονάδων, δεκά-
δων καὶ ἑκατοντάδων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

25. Πῶς ἐκθέτομεν συνήθως καὶ συντομώτερον τὰ τῆς πράξεως;

Λέγομεν 4 καὶ 2... 6, γράφομεν 6 ὑπὸ τὰς μονάδας· 5 καὶ 3... 8,
γράφομεν 8 ὑπὸ τὰς δεκάδας· 3 καὶ 2... 5, γράφομεν 5 ὑπὸ τὰς ἑκα-
τοντάδας. Ἡ καὶ ἀπλούστερον 4 καὶ 2... 6, γράφομεν 6· 5 καὶ 3... 8,
γράφομεν 8· 3 καὶ 2... 5, γράφομεν 5.

26. Ἐκθέσατέ μοι τὰ τῆς πράξεως καὶ ἐπὶ τῆς προσθέσεως τῶν ἐξῆς ἀριθμῶν 5878, 2506, 493, 6742.

Γράφομεν αὐτοὺς οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὐρί-

σκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, καὶ ἄγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν τελευταῖον, ἔπειτα λέγομεν 2 καὶ 3... 5 καὶ 6... 11 καὶ 8..

19, γράφομεν 9 καὶ κρατοῦμεν 4· 4 τὸ κρατοῦμενον καὶ 5878

4... 5 καὶ 9... 14 καὶ 0.. 14 καὶ 7.. 21, γράφομεν 1 καὶ 2506

κρατοῦμεν 2· 2 τὰ κρατούμενα καὶ 7.. 9 καὶ 4.. 13 καὶ 493

5.. 18 καὶ 8... 26, γράφομεν 6 καὶ κρατοῦμεν 2· 2 τὰ 6742

κρατούμενα καὶ 6.. 8 καὶ 2.. 10 καὶ 5.. 15, γράφομεν 15. 15619

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα εἶναι ὁ ἀριθμὸς 15619.

27. Διὰ τί εὐρόντες ὡς ἄθροισμα τῶν μονάδων 19, ἐγράψατε 9 ἐν τῇ στήλῃ τῶν μονάδων καὶ προσθέσατε 1 εἰς τὴν ἀκόλουθον στήλην τῶν δεκάδων ;

Διότι 19 μονάδες περιέχουσι 1 δεκάδα καὶ 9 μονάδας, ἔπρεπε λοιπὸν νὰ γράψωμεν 9 ἐν τῇ στήλῃ τῶν μονάδων καὶ νὰ προσθέσωμεν τὴν 1 δεκάδα εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων. Ὡσαύτως, εὐρόντες ὡς ἄθροισμα τῶν δεκάδων 21, ἐγράψαμεν 1 ἐν τῇ στήλῃ τῶν δεκάδων καὶ προσεθέσαμεν 2 ἐν τῇ στήλῃ τῶν ἑκατοντάδων· διότι 21 δεκάδες περιέχουσι 2 ἑκατοντάδας καὶ 1 δεκάδα, ἔπρεπε λοιπὸν νὰ γράψωμεν 1 ἐν τῇ στήλῃ τῶν δεκάδων καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰς 2 ἑκατοντάδας ἐν τῇ στήλῃ τῶν ἑκατοντάδων. Τὸν αὐτὸν λόγον θέλομεν δώσει καὶ διὰ πᾶν μεγαλύτερον τοῦ 9 ἄθροισμα τῶν ψηφίων στήλης τινός, ἐκτὸς τοῦ ἀθροίσματος 15 τῆς τελευταίας στήλης, ὅπερ ἐγράψαμεν ὁλόκληρον καὶ οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες αὐτοῦ 5 νὰ εὐρίσκωνται ἐπὶ τῆς τελευταίας τῶν ἀριθμῶν καθέτου στήλης.

28. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποῖον ΓΕΝΙΚΟΝ ΚΑΝΟΝΑ τῆς προσθέσεως ἐξάγομεν ; — Τὸν ἐξῆς·

1ον. Γράφομεν τοὺς προσθετέους ἀριθμοὺς οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ.

2ον. Ἄγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν τελευταῖον ἀριθμὸν, καὶ ὑπὸ τὴν γραμμὴν γράφομεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, ὅπερ εὐρίσκομεν ὡς ἐξῆς·

Προσθέτομεν τὰ ψηφία τῆς πρώτης πρὸς τὰ δεξιὰ στήλης, καὶ ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ᾖ μικρότερον τοῦ 10, γράφομεν αὐτὸ ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ, ἐὰν δὲ ᾖ μεγαλύτερον τοῦ 9, γράφομεν μόνον τὰς μονάδας αὐτοῦ, αἵτινες δυνατόν νὰ ᾖ καὶ 0, καὶ κρατοῦμεν τὰς δεκάδας, ἵνα προσθέσωμεν αὐτὰς εἰς τὰς δεκάδας τῆς δευτέρας στήλης.

Ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρι τῆς τελευταίας στήλης, ἀλλὰ τότε, ἐὰν εὐρωμεν ἄθροισμα μεγαλύτερον τοῦ 9, γράφομεν τὸν ἀριθμὸν, τὸν παριστῶντα τὸ εὐρεθὲν ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς στήλης ταύτης καὶ τῶν κρατούμενων τῆς προηγουμένης, οὕτως, ὥστε αἱ μονά-

δες τοῦ ἀθροίσματος νὰ εὐρίσκωνται ἐπὶ τῆς τελευταίας στήλης. Ἐὰν δὲ τὸ εὐρεθὲν ἀθροισμα ᾖ μικρότερον τοῦ 10, γράφομεν τὸ παριστῶν αὐτὸ ψηφίον ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ.

Ὁ οὕτως ὑπὸ τὴν γραμμὴν εὐρεθεὶς ἀριθμὸς θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον ἀθροισμα.

ΠΕΡΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

29. *Τι εἶναι ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ;*

Ἀφαιρέσεις εἶναι πράξεις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τὸσας μονάδας, ὅσας περιέχει ἕτερός τις ἐπίσης δεδομένος ἀριθμὸς.

Παραδείγματος χάριν, ἂν μᾶς ἐδίδετο ὁ ἀριθμὸς 15, καὶ μᾶς ἐζητεῖτο νὰ ἐλαττώσωμεν αὐτὸν κατὰ 8, ἡ πράξις, δι' ἧς ἠθέλομεν ἐκτελέσει τὴν τοιαύτην ἐλάττωσιν, καλεῖται ἀφαίρεσις.

30. Πῶς ὀνομάζεται ὁ ἐλαττωθησόμενος ἀριθμὸς καὶ πῶς ὁ δεικνύων κατὰ πόσας μονάδας πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ;

Ὁ ἐλαττωθησόμενος ἀριθμὸς καλεῖται μειωτέος, ἐκεῖνος δέ, ὅστις δεικνύει κατὰ πόσας μονάδας πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ, καλεῖται ἀφαιρετέος.

Π. χ. ὅταν μᾶς ζητῇται νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 25 τὸν ἀριθμὸν 13, ὁ ἀριθμὸς 25 εἶναι ὁ μειωτέος, καὶ ὁ 13 ὁ ἀφαιρετέος.

31. Πῶς ὀνομάζεται τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως;

Διαφορά, ἢ ὑπόλοιπον, ἢ ὑπεροχή. Π. χ. ἐὰν ἀφαιροῦντες ἀπὸ 12 τὸν ἀριθμὸν 5 εὕρωμεν 7, ὁ 7 καλεῖται διαφορά, ἢ ὑπόλοιπον, ἢ ὑπεροχή.

32. Διὰ τίνας σημείου παρίσταται ἡ ἀφαίρεσις;

Διὰ τοῦ ἐξῆς —, ὅπερ ἀπαγγέλλεται μείον ἢ πλήν, καὶ τίθεται μεταξὺ τοῦ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου, προτασσομένου τοῦ μειωτέου. Π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν 23 καὶ 14, γράφομεν 23—14, ὅπερ ἀναγινώσκομεν 23 μείον 14, ἢ 23 πλήν 14.

33. Κατὰ ποῖον ΚΑΝΟΝΑ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν δύο ὑποίων δὴποτε ἀριθμῶν; — Κατὰ τὸν ἐξῆς:

1ον Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, καὶ ἄγομεν ὑπὸ τὸν ἀφαιρετέον γραμμὴν.

2ον. Ἀρχόμεθα τῆς πράξεως ἀπὸ τῶν δεξιῶν, καὶ ἀφαιροῦμεν πρῶτον τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν μονάδων τοῦ μειωτέου, ἔπειτα τὰς δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν δεκάδων τοῦ μειωτέου,

τάς εκατοντάδας τοῦ μὲν ἀπὸ τῶν εκατοντάδων τοῦ δέ, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν τὸ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ᾖναι μικρότερον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ψηφίου τοῦ μειωτέου, γράφομεν τὴν διαφορὰν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἐν ᾗ ὑπάρχει γεγραμμένον καὶ τὸ ἀφαιρούμενον ψηφίον.

Ἐὰν τὸ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ᾖναι ἴσον μὲ τὸ ἀντιστοιχοῦν ψηφίον τοῦ μειωτέου, γράφομεν μηδὲν ὑπὸ τὴν γραμμὴν.

Ἐὰν τὸ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ᾖναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ψηφίου τοῦ μειωτέου, αὐξάνομεν τὸ ψηφίον τοῦ μειωτέου κατὰ μίαν δεκάδα, καὶ ἀπὸ τοῦ αποτελουμένου ἀθροίσματος ἀφαιρούμεν τὸ τοῦ ἀφαιρετέου. Τὴν οὕτως εὑρεθησομένην διαφορὰν γράφομεν πάλιν ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἐν ᾗ ὑπάρχει καὶ τὸ ἀφαιρούμενον ψηφίον, ἀλλὰ, ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ ζητούμενη τῶν δεδομένων ἀριθμῶν διαφορὰ, αὐξάνομεν κατὰ μίαν μοράδα τὸ ἀμέσως ἐπόμενον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου.

34. Ἐφαρμόσατε τὸν ἀνωτέρω κανόνα εἰς τινὰ παραδείγματα.

Ἄς υποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται ἡ διαφορὰ 867—462. Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον 462 ὑπὸ τὸν μειωτέον 867 οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, καὶ ἄγομεν ὀριζόντιον γραμμὴν, ἔπειτα λέγομεν 2 ἀπὸ 7... 867
5, γράφομεν 5 ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ ἐν τῇ στήλῃ τῶν 462
μονάδων 6 ἀπὸ 6...0, γράφομεν 0 ἐν τῇ στήλῃ τῶν δεκά- 405
δων 4 ἀπὸ 8...4, γράφομεν 4 ἐν τῇ στήλῃ τῶν εκατοντά-
δων. Εἶναι φανερόν ὅτι ὁ ὑπὸ τὴν γραμμὴν εὑρεθεὶς ἀριθμὸς 405 παρι-
σταῖ τὴν ζητούμενην διαφορὰν διότι εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν
5 μονάδων, 0 δεκάδων καὶ 4 εκατοντάδων τῶν μονάδων 7 καὶ 2,
τῶν δεκάδων 6 καὶ 6 καὶ τῶν εκατοντάδων 8 καὶ 4 τῶν δεδομένων
ἀριθμῶν 867 καὶ 462.

2ον. Πρὸς εὑρεσιν τῆς διαφορᾶς 8264—3726 γράφομεν τοὺς ἀριθ-
μούς, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, ἔπειτα λέγομεν ἔπειδὴ 6 ἀπὸ 4 δὲν ἀφαι-
ρεῖται, προσθέτομεν εἰς τὸν 4 μίαν δεκάδα καὶ λέγομεν 6 ἀπὸ 14... 8264
8, γράφομεν 8. Ἐπειδὴ πύξίσσαμεν τὸν μειωτέον 8264 κα-
τὰ μίαν δεκάδα, ἡ, ὅπερ ταυτό, κατὰ μίαν μονάδα τῆς 3726
δευτέρας τάξεως, πρέπει, ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ ζητούμενη 4538
διαφορὰ, νὰ αὐξήσωμεν καὶ τὸν ἀφαιρετέον 3726 κατὰ μίαν
δεκάδα, ἡ κατὰ μίαν μονάδα τῆς δευτέρας τάξεως ἐ-
πομένως ἀντὶ νὰ εἴπωμεν 2 ἀπὸ 6 λέγομεν 3 ἀπὸ 6...3 καὶ γράφομεν 3.

Ἐπειδὴ δὲ 7 ἀπὸ 2 πάλιν δὲν ἀφαιρεῖται, διὰ τοῦτο λέγομεν 7 ἀπὸ 12...5 καὶ γράφομεν 5. Ἐπειδὴ δὲ πάλιν ἠξήσαμεν τὸν μειωτέον κατὰ μίαν δεκάδα τῆς τρίτης τάξεως ἢ κατὰ μίαν μονάδα τῆς τετάρτης τάξεως, διὰ τοῦτο μεταβαίνοντες εἰς τὴν τετάρτην στηλὴν λέγομεν 3 καὶ 1...4 ἀπὸ 8...4, γράφομεν 4. Ἡ ζητούμενη λοιπὸν διαφορά εἶναι ὁ ἀριθμὸς 4538.

3ον. Ἄς ἐκθέσωμεν μετὰ πάσης τῆς δυνατῆς συντομίας τὰ τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως καὶ ἐπὶ τοῦ ἐξῆς παραδείγματος.

Λέγομεν 5 ἀπὸ 6...1' 3 ἀπὸ 10...7' 9 καὶ 1...10	
ἀπὸ 10...0' 2 καὶ 1...3 ἀπὸ 5...2' 4 ἀπὸ 13...9' 9	20035006
καὶ 1...10 ἀπὸ 10...0' 0 καὶ 1...1 ἀπὸ 10...9' 0 καὶ	942935
1...1 ἀπὸ 2...1.	19092071

35. Διὰ τὴν ἐν τῷ τρίτῳ παραδείγματι μετὰ τὸ τελευταῖον ψηφίον 9 τοῦ ἀφαιρετέου 942935 εἴπετε 0 καὶ 1...1 ἀπὸ 10...9' 0 καὶ 1...1 ἀπὸ 2...1;

Ὑπεθέσαμεν οὕτως ὅτι πρὸ τοῦ 9 ὑπῆρχον δύο 0, ὅτι δηλαδὴ οἱ ἀριθμοὶ ἤτο γεγραμμένοι ὡς φαίνεται ἀντικρὺ, καὶ τοῦτο, διότι γνωρίζομεν, ὅτι ὁσαυδήποτε μηδενικὰ καὶ ἀν

γραφῶσι πρὸς τὰ ἀριστερὰ ὁποιοῦδήποτε ἀριθμοῦ, ἢ ἀξία τοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται (18), ἐπομένως	20035006
οὔτε ἡ ζητούμενη διαφορά. Ἐπειδὴ δὲ τὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἀφαιρετέου μηδενικὰ εὐκόλως ὑπεννοοῦνται, οὐδέποτε γράφονται.	00942935
	19092071

ΒΑΣΑΝΟΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

36. Τί λέγεται ΒΑΣΑΝΟΣ πράξεώς τινος;

Βάσανος πράξεώς τινος καλεῖται ἐτέρα πράξις, δι' ἧς βεβαιούμεθα περὶ τῆς ἀκριβείας τῶν ἐξαγομένων τῆς πρώτης.

37. Κατὰ πόσους τρόπους ἐκτελεῖται ἡ βάσανος τῆς προσθέσεως;

Κατὰ δύο τρόπους· ἢ γράφομεν τοὺς προσθετέους ἀριθμούς κατ' ἄλλην τινὰ τάξιν, καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν

πράξιν, ἢ, ἂν εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτοντες τὰ ψηφία τῶν διαφόρων στηλῶν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω,	2586
ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν ἀρχόμενοι ἐκ τῶν	327
κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Π. χ. ἂν εἶχομεν πρὸς πρόσθεσιν τοὺς ἀριθμοὺς 2586, 327, 10049 καὶ ἐγράφομεν αὐτοὺς πρὸς πρόσθεσιν ὡς	10049
υπάρχουσι γεγραμμένοι ἀνωτέρω, κατὰ μὲν τὸν πρῶτον τρόπον τῆς ἐκ-	12962

τελέσεως τῆς βασάνου ἔπρεπε νὰ γράψωμεν αὐτοὺς κατ' ἄλλην τινὰ τάξιν, λόγου χάριν κατὰ τὴν ἐξῆς 10049, 2586, 327, καὶ νὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν πράξιν ὅπως καὶ προηγουμένως, κατὰ δὲ τὸν δεύτερον τρόπον τῆς ἐκτελέσεως τῆς βασάνου ἔπρεπε, ἂν εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 12962 προσθέσαντες ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, (εἰπόντες δηλαδὴ 6 καὶ 7.. 13 καὶ 9...22, γράφομεν 2 καὶ κρατοῦμεν 2' 2 τὰ κρατούμενα καὶ 8 10 καὶ 2...12 καὶ 4...16, γράφομεν κτλ.), νὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν πράξιν προσθέτοντες ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, (νὰ εἴπωμεν δηλ. 9 καὶ 7...16 καὶ 6...22, γράφομεν 2 καὶ κρατοῦμεν 2' 2 τὰ κρατούμενα καὶ 4...6 καὶ 2...8 καὶ 8...16, γράφομεν κτλ.).

38. Δύνασθε νὰ εἰπητε τὸν λόγον, δι' οὗ πράττοντες ὡς ἄνωτέρω βεβαιούμεθα περὶ τῆς ἀκριβείας τοῦ εὐρεθέντος ἀθροίσματος;

‘Ο λόγος τούτου εἶναι ὁ ἐξῆς’

Πολλάκις συμβαίνει, προσθέτοντες δύο μονοψήφious ἀριθμοὺς ἢ εἰς τινὰ ἀριθμὸν ἕτερον μονοψήφιον, ν' ἀπατώμεθα εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἐκ τινος ἀπροσεξίας, νὰ λέγωμεν π. χ. 5 καὶ 8...14, καὶ νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ αὐτὸ λάθος ἐν τῇ αὐτῇ πράξει· μεταβάλλοντες δὲ ἢ τὴν τάξιν τῶν προσθετέων ἀριθμῶν ἢ τὸν τρόπον τῆς εὐρέσεως τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων, δὲν θέλομεν ἔχει τοὺς αὐτοὺς πρὸς πρόσθεσιν ἀριθμοὺς, ἐφ' ὧν ἐξ ἀπροσεξίας ἐσφάλαμεν, ἐπομένως πολὺ πιθανὸν νὰ μὴ ὑποπέσωμεν εἰς τὸ αὐτὸ λάθος, καὶ οὕτω θέλομεν παρατηρήσει τὸ πρῶτον. Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ προσθέτων λέγει 5 καὶ 8...14, καὶ ὅτι εἶχε πρὸς πρόσθεσιν τοὺς κάτωθεν ἀριθμοὺς, οὓς προσθέτει ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Τὸ πρῶτον λοιπὸν ψηφίον 7 ἤθελεν εἶναι λανθασμένον. Τώρα, ἂν ἐπαναλάβῃ τὴν πρόσθεσιν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, θέλει εἰπεῖ 6 καὶ 8...14 23565 καὶ 5...19' θέλει λοιπὸν ἀμέσως παρατηρήσει τὸ λάθος 56078 του, καὶ ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι καὶ κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον τοῦ προσθέτειν ἤθελε σφάλει, εἶναι πολὺ πιθανὸν 39576 149217 τὸ λάθος νὰ ᾔται διάφορον τοῦ πρώτου, ὅπερ φέρει εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, εἰς τὸ νὰ καταδείξῃ δηλ. ὅτι τὸ γραφὲν ψηφίον 7 δὲν εἶναι ὀρθόν, καὶ ἐπομένως νὰ ἐπιστήσῃ τὴν προσοχὴν τοῦ προσθέτοντος εἰς τοῦτο.

39. Πῶς ἐκτελοῦμεν τὴν βάσανον τῆς ἀφαιρέσεως;

Προσθέτομεν τὸν ἀφαιρετέον εἰς τὸ εὐρεθὲν ὑπόλοιπον, καὶ ἂν ὡς ἄθροισμα εὕρωμεν τὸν μειωτέον, εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἀφαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

40. Διὰ τί οὕτω;

Διότι τὸ ὑπόλοιπον δεικνύει κατὰ πόσας μονάδας ὑπερέχει ὁ μειωτέος τὸν ἀφαιρετέον, ἐπομένως, ἐὰν εἰς τὸν ἀφαιρετέον προστεθῇ ἡ ὑπεροχή αὕτη τοῦ μειωτέου, πρέπει ἀναγκαιῶς νὰ εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα αὐτὸν τὸν μειωτέον.

41. Ἐντεῦθεν ποῖος νέος ὁρισμὸς τῆς ἀφαιρέσεως ἐξάγεται;
Ὁ ἐξῆς:

Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πράξις, δι' ἧς δοθέντος τοῦ ἄθροίσματος δύο μερῶν καὶ ἐνὸς τούτων, εὐρίσκεται τὸ ἕτερον.

Π. χ., ἐὰν ἀφαιρέσαντες 8 ἀπὸ 17 εὕρωμεν διαφορὰν 9, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $8 + 9$ πρέπει νὰ ᾖ ἵσον μὲ 17, βλέπομεν ὅτι ὁ μειωτέος 17 εἶναι ἄθροισμα δύο μερῶν 8 καὶ 9, καὶ ὅτι, ζητούμενης τῆς διαφορᾶς $17 - 8$, μᾶς δίδεται τὸ ἄθροισμα 17 τῶν δύο μερῶν 8 καὶ 9, καὶ τὸ ἐν τούτων, τὸ 8, καὶ μᾶς ζητεῖται τὸ ἕτερον 9.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Πρόσθεσις	Βάσανος τῆς προσθέσεως.
2540023	9863254
10632987	2540023
9863254	11987632
11987632	10632987
35023896	35023896
Ἀφαίρεσις	Βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως.
85460376	9001284
9001284	76459092
76459092	85460376

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Ποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5640, 4505, 609;
(10554).

II. Ποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 8700, 600, 201, 997005;
(1006504).

III. Δοθέντων τῶν ἀριθμῶν

8976502, 7652540, 5500985, 960054, 6002009,

καὶ εὐρεθῇ

- 1ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων καὶ τοῦ πέμπτου.
(22610851).
- 2ον. Τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου, τετάρτου καὶ πέμπτου.
(14594603).
- 3ον. Τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου, τρίτου καὶ πέμπτου.
(18478394).
- 4ον. Τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν πέντε ἐκτὸς τοῦ δευτέρου.
(18438448).
- 5ον. Τὸ ἄθροισμα πάντων ἐκτὸς τοῦ τετάρτου καὶ πέμπτου.
(20108925).
- IV. *N*ὰ εὐρεθῇ ἡ διαφορὰ 8505—5674.
(4829).
- V. *N*ὰ εὐρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 100205, 90402.
(9804).
- VI. *N*ὰ εὐρεθῇ ἡ διαφορὰ 25400526—97655.
(25302691).
- VII. *N*ὰ εὐρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 15411025, 9410245.
(4000778).
- VIII. *N*ὰ εὐρεθῇ ἡ διαφορὰ 50200254—599896.
(29800358).
- IX. *N*ὰ εὐρεθῇ ἡ διαφορὰ 8545000554—54999405.
(8488000949).
- X. *Δοθέντων* τῶν ἀριθμῶν
876002578, 95400454, 87525864, 20005450, 15450254,
9700254, 8125542, 4554002, 1632547, 750257,
να εὐρεθῇ
- 1ον. Ἡ διαφορὰ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου.
(780601924).
- 2ον. Ἡ διαφορὰ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου.
(8074593).
- 3ον. Ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τρίτου ἀπὸ τοῦ ἐξδόμου.
(9202319).
- 4ον. Ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου ἀπὸ τοῦ
ἀθροίσματος τῶν τριῶν τελευταίων.
(176009509).
- 5ον. Ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου ἀπὸ τοῦ
ἀθροίσματος τοῦ ἐξδόμου καὶ ὀγδόου.
(883530264).

6ον. Ἡ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δευτέρου, πέμπτου καὶ ἐνάτου καὶ τῆς διαφορᾶς τοῦ τρίτου καὶ δεκάτου διαφορά.

(23887634).

7ον. Ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δευτέρου καὶ τῶν τριῶν τελευταίων ἀπὸ τῆς διαφορᾶς τοῦ τρίτου καὶ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τετάρτου, ἕκτου καὶ ἐβδόμου.

(52620626).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

42. *Τί ἐστὶν ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ;*

Πολλαπλασιασμός ἐστὶν πράξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν σχηματίζομεν ἐκ τοῦ πρώτου τρίτον, ὅπως ὁ δεύτερος ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος.

Παραδείγματος χάριν, ἂν μᾶς ἐδίδοντο πρὸς πολλαπλασιασμόν οἱ δύο ἀριθμοὶ 8 καὶ 5, κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὀρισμὸν πρέπει ἐκ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ 8 νὰ σχηματίζομεν τρίτον, ὅπως ὁ δεύτερος ἀριθμὸς 5 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 5 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ αὕτη ἐπανελήφθη πεντάκις, ἔπεται ὅτι καὶ ὁ τρίτος θὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ 8, ἀφοῦ οὗτος ἐπαναληφθῇ πεντάκις. Πρὸς εὑρεσιν λοιπὸν τοῦ ζητουμένου τρίτου θέλομεν προσθέσει τὸν 8 πεντάκις εἰς ἑαυτόν. Εὐρίσκομεν δ' οὕτω τὸν ἀριθμὸν 40.

Ὡσαύτως, ἂν μᾶς ἐδίδοντο πρὸς πολλαπλασιασμόν οἱ ἀριθμοὶ 4 καὶ 7, κατὰ τὸν αὐτὸν ὀρισμὸν πρέπει ἐκ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ 4 νὰ σχηματίζομεν τρίτον, ὅπως ὁ δεύτερος 7 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 7 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ αὕτη ἐπανελήφθη ἑπτάκις, ἔπεται ὅτι καὶ ὁ τρίτος θὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ 4, ἀφοῦ οὗτος ἐπαναληφθῇ ἑπτάκις. Πρὸς εὑρεσιν λοιπὸν τοῦ ζητουμένου τρίτου πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὸν 4 ἑπτάκις εἰς ἑαυτόν. Εὐρίσκομεν δ' οὕτω τὸν ἀριθμὸν 28.

43. Πῶς καλοῦνται οἱ δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ καὶ πῶς ὁ ζητούμενος τρίτος ;

Ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν καλεῖται πο.λ.λ.α.π.λ.α.σ.ια.σ.τ.έ.ο.ς, ὁ δεύτερος ὀνομάζεται πο.λ.λ.α.π.λ.α.σ.ια.σ.τ.ή.ς καὶ ὁ ζητούμενος τρίτος καλεῖται γινόμενος. Ὁ πολλαπλασιαστής καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς καλοῦνται, ὅμοῦ λαμβανόμενοι, καὶ παρηγορτεες τοῦ γινομένου. Παραδείγματος χάριν, ἐν τοῖς δυσὶν ἀνωτέρω παραδείγμασιν οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 4 εἶναι οἱ πο.λ.λ.α.π.λ.α.σ.ια.σ.τ.έ.ο.ι, οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 7 οἱ πο.λ.λ.α.π.λ.α.σ.ια.σ.τ.αί, καὶ οἱ εὑρεθέντες τρίτοι 40 καὶ 28 τὰ γινόμενα αὐτῶν.

44. Διὰ τί καλοῦνται ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ τοῦ γινομένου ;

Διότι ἐξ αὐτῶν παράγεται τὸ γινόμενον· ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅστις πρὸς παρὰγωγὴν τοῦ γινομένου ἐπαναλαμβάνεται, καὶ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὅστις δεικνύει ποσάκις οὗτος πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ.

45. Ποῖον τὸ σημεῖον τοῦ πο.λ.λ.α.π.λ.α.σ.ια.σ.μοῦ ;

Τὸ ἐξῆς $\times$, ὅπερ ἀπαγγέλλεται ἐπὶ, καὶ τίθεται μετὰξὺ τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, προτασσομένου τοῦ πολλαπλασιαστέου. Π. χ., ἐὰν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 3, γράφομεν 7×3 καὶ ἀπαγγέλλομεν 7 ἐπὶ 3.

46. Πόσας ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ διακρίνομεν εἰς τὸν πο.λ.λ.α.π.λ.α.σ.ια.σ.μὸν τῶν ἀριθμῶν ;—Τὰς ἐξῆς τρεῖς·

1ον. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς ᾖναι ἀριθμοὶ μονοψήφιοι.

2ον. Ὅταν ὁ μὲν πολλαπλασιαστής ᾖναι πολ.υ.ψ.ή.φ.ι.ο.ς, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς μονοψήφιος.

3ον. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής ᾖναι ὅποιοςδήποτε καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς πολ.υ.ψ.ή.φ.ι.ο.ς.

ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ

Πολλαπλασιασμός μονοψηφίου ἐπὶ μονοψηφίου.

47. Πῶς εὐρίσκεται τὸ γινόμενον ἐν τῇ ΠΡΩΤῇ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ ;

Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς ᾖναι μονοψήφιοι, τὸ γινόμενον εὐρίσκεται προστιθεμένου εἰς ἑαυτὸν τοῦ πολλαπλασιαστέου τοσάκις, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ πολλαπλασιαστὴς. Π. χ., ἂν εἶχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 7 ἐπὶ 3, ἠθέλωμεν εἶπαι· ἐπεὶ δὲ ὁ πολλαπλασιαστὴς 3 ἐσχηματίσθη ἐπαναληφθεὶς τρίς τῆς μονάδας, καὶ τὸ ζητούμενον γινόμενον θὰ εὑρεθῇ, ἀφοῦ ἐπαναληφθῇ τρίς ὁ πολλαπλασια-

στέος. Θέλομεν λοιπὸν πρὸς εὐρεσιν τοῦ γινόμενου εἶπει 7 καὶ 7... 14 καὶ 7... 21. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν γινόμενον εἶναι 21, διότι 21 εὗρομεν ἀφοῦ προσεθέσαμεν τὸν 7 τρίς.

Ὡσαύτως, ἂν μᾶς ἐζητεῖτο τὸ γινόμενον τοῦ 9 ἐπὶ 5, ἠθέλομεν εἶπει· ἐπειδὴ ὁ 5 περιέχει πεντάκις τὴν μονάδα, καὶ τὸ γινόμενον θὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ 9, ἀφοῦ οὗτος ἐπαναληφθῇ πεντάκις. Πρὸς τοῦτο δὲ λέγομεν 9 καὶ 9... 18 καὶ 9... 27 καὶ 9... 36 καὶ 9... 45. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν 45, ὃν εὗρομεν ἐπαναλαβόντες τὸν 9 πεντάκις, θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον 9×5 .

Ἐν μὲν τῷ πρώτῳ παραδείγματι 7 καὶ 3 ἦσαν αἱ παράγοντες τοῦ γινόμενου 21, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ 9 καὶ 5 οἱ παράγοντες τοῦ γινόμενου 45.

48. Δὲν ὑπάρχει ΠΙΝΑΞ τις, δι' οὗ εὐρίσκομεν ἀμέσως τὰ γινόμενα δύο ὁποιωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν;

Μάλιστα· ὁ καλούμενος πίναξ τοῦ Πυθαγόρου.

49. Ποῖος οὗτος καὶ πῶς κατασκευάζεται;

Ὁ ἐξῆς·

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

ὃν κατασκευάζομεν ὡς ἀκολούθως.

Σχηματίζομεν πρῶτον τετράγωνόν τι καὶ ἐντὸς αὐτοῦ εἰς ἴσας ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις ἄγομεν 8 ὀριζοντίους καὶ 8 καθετοὺς γραμμάς. Οὕτω σχηματίζονται ἐννέα ὀριζόντιοι στήλαι καὶ ἐννέα κάθετοι.

Γράφομεν ἐν τῇ πρώτῃ ὀριζοντίῳ στήλῃ κατὰ σειράν τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς ἀριθμοὺς. Ἡ πρώτη λοιπὸν ὀριζόντιος στήλη περιέχει τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 1.

Ἐν τῇ δευτέρῃ ὀριζοντίῳ στήλῃ γράφομεν τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ

τὸν ἀριθμὸν 2 οὕτως, ὥστε ἕκαστον γινόμενον νὰ εὑρίσκηται ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 2 παρήγαγεν αὐτό. Παραδείγμα-
τος χάριν, τὸ 6 ὑπὸ τὸν 3, διότι 3 ἐπὶ 2 δίδει 6· τὸν 10 ὑπὸ τὸν 5,
διότι 5 ἐπὶ 2 δίδει 10, κτλ.

Ἐν τῇ τρίτῃ ὀριζοντίῳ στήλῃ γράφομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον
τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ἐν τῇ τετάρτῃ ὀριζοντίῳ στήλῃ γράφομεν κατὰ τὸν αὐτὸν πάλιν
τρόπον τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 4, καὶ ἐξακολου-
θοῦμεν οὕτω, μέχρις οὗ γράψωμεν ἐν τῇ ἐνάτῃ καὶ τελευταίᾳ ὀριζον-
τίῳ στήλῃ τὰ γινόμενα τῶν αὐτῶν ἐννέα ἀριθμῶν ἐπὶ 9. Οὕτω σχηματί-
ζομεν τὸν ἀνωτέρω πίνακα τοῦ Πυθαγόρου.

50. Πῶς εὑρίσκομεν τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν
ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 5... 9;

Προσθέτοντες ἕκαστον τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν εἰς ἑαυτὸν τοσά-
κις, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ πολλαπλασιαστής. Παραδείγματος χάριν,
ἐὰν θέλωμεν νὰ γράψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τῆς ἑκτῆς ὀριζοντίου στήλης,
προσθέτομεν τὸν 1 ἑξάκις καὶ γράφομεν 6 ἐν τῇ πρώτῃ καθετῇ στή-
λῃ· τὸν 2 πάλιν ἑξάκις καὶ γράφομεν 12 ἐν τῇ δευτέρᾳ καθετῇ στή-
λῃ· τὸν 3 πάλιν ἑξάκις καὶ γράφομεν 18 ἐν τῇ τρίτῃ καθετῇ στήλῃ,
καὶ οὕτω καθεξῆς.

51. Πῶς διὰ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος εὑρίσκομεν ἀμέσως τὰ γινό-
μενα δύο ὁποιοῦνδήποτε μονοψήφιων ἀριθμῶν;

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι θέλομεν νὰ εὑρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ 5.
Ζητοῦμεν πρὸς τοῦτο τὸν ἀριθμὸν, ὅστις ὑπάρχει καὶ ἐν τῇ ὀγδόῃ κα-
θετῇ στήλῃ καὶ ἐν τῇ πέμπτῃ ὀριζοντίῳ. Ὁ κοινὸς εἰς τὰς δύο τάξεις

στήλας ἀριθμός 40 θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν 8 καὶ 5.

Διότι, καθ' ὃν τρόπον ἐσχηματίσθη ὁ πίναξ, ἡ ὀρθὴ καθετος στήλη περιέχει τὰ γινόμενα τοῦ 8 ἐπὶ τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς ἀριθμοὺς, ἐπομένως καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ 5. Ὡσαύτως ἡ πέμπτη ὀριζόντιος στήλη περιέχει τὰ πενταπλάσια τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν, ἐπομένως καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ 8. Λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ 5 πρέπει νὰ ὑπάρχῃ καὶ ἐν τῇ ὀρθῇ καθετῷ στήλῃ καὶ ἐν τῇ πέμπτῃ ὀριζοντίῳ. Ἀλλ' αἱ δύο ἀνωτέρω στήλαι ἔχουσι μόνον τὸν ἀριθμὸν 40 κοινόν. Ἀρα ὁ ἀριθμός 40 θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ 5.

Ἄν μᾶς ἐζητεῖτο τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 3, ἠθέλομεν πρὸς εὐρεσιν αὐτοῦ ζητῆσαι τὸν ἀριθμὸν 21, τὸν ὑπάρχοντα ἐν τῇ ἐβδόμῃ καθετῷ στήλῃ καὶ ἐν τῇ τρίτῃ ὀριζοντίῳ. Διότι ἡ μὲν ἐβδόμη καθετος στήλη περιέχει τὰ γινόμενα τοῦ 7 ἐπὶ τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς ἀριθμοὺς, ἐπομένως καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 3, ἡ δὲ τρίτη ὀριζόντιος στήλη περιέχει τὰ τριπλάσια τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν, ἐπομένως καὶ τὸ τριπλάσιον τοῦ 7. Λοιπὸν ὁ ἀριθμός 21, ὅστις μόνος εἶναι κοινὸς καὶ εἰς τὰς ἀνωτέρω δύο στήλας, θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 3.

52. Πάντοτε, ὁσάκις ζητοῦμεν τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, καταφεύγομεν εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα;

Ὅχι, ἀλλ' ἀφοῦ κατασκευάσωμεν ἅπας αὐτόν, ὡς εἵπομεν ἀνωτέρω, τὸν ἀποστηθίζομεν, καὶ τότε εὐρίσκομεν ἐκ μνήμης τὸ γινόμενον δύο ὁποιοῦνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ.

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

53. Πῶς πολλαπλασιάζομεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον; Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ ἄγομεν ὑπὸ τοῦτον ὀριζόντιον γραμμὴν. Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, καὶ τὰς μὲν μονάδας τοῦ γινομένου γράφομεν ἐν τῇ καθετῷ τῶν μονάδων στήλῃ, τὰς δὲ δεκάδας, ἐὰν τὸ εὐρεθὲν γινόμενον ᾖναι μεγαλύτερον τοῦ ἐννέα, προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν. Ἐὰν τὸ οὕτως εὐρεθὲν ἄθροισμα τῶν δεκάδων ᾖναι μεγαλύτερον τοῦ ἐννέα, γράφομεν πάλιν τὰς μονάδας τούτου τοῦ ἄθροίσματος ἐν τῇ καθετῷ τῶν δεκάδων στήλῃ καὶ

προσθέτομεν τὰς δεκάδας αὐτοῦ εἰς τὸ γινόμενον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοσιτάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν δοθέντα πολλαπλασιαστήν.

Ἐξακολουθοῦμεν ὡς προεξέθεσamen μέχρι τοῦ γινομένου τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον μετὰ τῶν κρατουμένων τοῦ προηγουμένου ἀθροίσματος γράφομεν οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες αὐτοῦ νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ καθέτῳ στήλῃ τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστέου.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ	8625
πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολυψήφιον ἀριθμὸν 8625 ἐπὶ	3
τὸν μονοψήφιον 3. Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστήν 3 ὑπὸ	25875
τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἄγομεν ὑποκάτω	
γραμμὴν, καὶ ἔπειτα λέγομεν· 5 ἐπὶ 3...15, γράφομεν 5 ἐν τῇ στήλῃ	
τῶν μονάδων καὶ κρατοῦμεν 1 δεκάδα· 2 ἐπὶ 3...6 καὶ 1 τὸ κρατοῦ-	
μενον 7, γράφομεν 7 ἐν τῇ στήλῃ τῶν δεκάδων· 6 ἐπὶ 3...18, γρά-	
φομεν 8 ἐν τῇ τρίτῃ στήλῃ καὶ κρατοῦμεν 1· 8 ἐπὶ 3...24 καὶ 1 τὸ	
κρατοῦμενον 25, γράφομεν τὸν 25 οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες αὐτοῦ 5	
νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ στήλῃ τοῦ τελευταίου ψηφίου 8 τοῦ πολλαπλα-	
σιαστέου.	

54. Δύνασθε νὰ μοὶ ἀποδείξητε, ὅτι οὕτω πρᾶττοντες εὐρίσκομεν πραγματικῶς τὸ ζητούμενον γινόμενον·

Μάλιστα. Διότι κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει νὰ σχηματίζωμεν ἐκ τοῦ δοθέντος πολλαπλασιαστέου 8625 τρίτον ἀριθμόν, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστής 3 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλ' ὁ πολλαπλασιαστής 3 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ αὕτη ἐπανελήφθη τρίς. Λοιπὸν καὶ τὸ ζητούμενον γινόμενον πρέπει νὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 8625, ἐπαναλαμβανομένου τούτου τρίς, ἥτοι προστιθεμένου τρίς εἰς ἑαυτόν.

Ἄς ζητήσωμεν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν ἴσων τῷ πολλαπλασιαστέῳ 8625. Κατὰ τὸν γενικὸν τῆς προσθέσεως κανόνα (24) γράφομεν τὸν 8625 ὡς φαίνεται ἀντικρὺ, καὶ	8625
λέγομεν· 5 πλέον 5 πλέον 5...15, γράφομεν 5 καὶ κρα-	8625
τοῦμεν 1. Ἀλλὰ 5 πλέον 5 πλέον 5, ἥτοι ὁ 5 τρίς λαμ-	8625
βανόμενος δίδει ἄθροισμα τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 3. Δυ-	25875
νάμεθα λοιπὸν, ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν τὸν 5 τρίς, νὰ πολ-	
πλασιάσωμεν τὸν 5 ἐπὶ 3, καὶ νὰ γράψωμεν τὰς μὲν 5 μονάδας	
τοῦ γινομένου 15 ἐν τῇ στήλῃ τῶν μονάδων, τὴν δὲ μίαν δεκάδα	

αὐτοῦ νὰ κρατήσωμεν, ἵνα προσθέσωμεν αὐτὴν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων.

Ἴνα δὲ εὐρώμεν τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων, πρέπει νὰ εἰπώμεν 2 π.λέον 2 π.λέον 2...6 καὶ 4 τὸ κρατούμενον 7, γράφομεν 7. Ἀλλὰ 2 π.λέον 2 π.λέον 2, ἥτοι ὁ 2 τρίς λαμβανόμενος δίδει ἄθροισμα τὸ γινόμενον τοῦ 2 ἐπὶ 3. Δυνάμεθα λοιπὸν ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν τὸν 2 τρίς, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 2 ἐπὶ 3, καὶ εἰς τὸ εὑρεθὲν γινόμενον 6 νὰ προσθέσωμεν τὴν 4 δεκάδα τοῦ προηγουμένου γινομένου 15. Οὕτω δὲ καὶ ἐπράξαμεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κανόνα.

Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὴν τρίτην στήλην πρέπει κατὰ τὸν τῆς προσθέσεως κανόνα νὰ εἰπώμεν 6 π.λέον 6 π.λέον 6...18, γράφομεν 8 καὶ κρατοῦμεν 4. Ἀλλὰ πάλιν 6 π.λέον 6 π.λέον 6, ἥτοι ὁ 6 τρίς λαμβανόμενος δίδει ἄθροισμα τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 3. Δυνάμεθα λοιπὸν, ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν τὸν 6 τρίς, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 6 ἐπὶ 3, νὰ γράψωμεν τὰς μονάδας 8 τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου 18 ἐν τῇ τρίτῃ στήλῃ καὶ νὰ κρατήσωμεν τὴν 4 δεκάδα, ἵνα προσθέσωμεν αὐτὴν εἰς τὸ ἄθροισμα τῆς ἐπομένης στήλης. Τοῦτο δὲ καὶ ἐπράξαμεν κατὰ τὸν δοθέντα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κανόνα.

Τελευταῖον, μεταβαίνοντες εἰς τὴν τελευταίαν στήλην πρέπει νὰ εἰπώμεν, κατὰ τὸν κανόνα τῆς προσθέσεως 8 π.λέον 8 π.λέον 8...24 καὶ 4 τὸ κρατούμενον 25, γράφομεν 25. Κατὰ τὸν κανόνα δὲ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶπομεν 8 ἐπὶ 3...24 καὶ 4 τὸ κρατούμενον 25, καὶ ἐγράψαμεν τὸν 25 οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες αὐτοῦ 5 νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ καθεύτῃ στήλῃ τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστέου. Λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι εὐρομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον 25875 καὶ κατὰ τοὺς δύο κανόνας, καὶ ὅτι ὁ κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον χρησιμεύει μόνον πρὸς σύντομον ἐκτέλεσιν τῆς διαδοχικῆς εἰς ἑαυτὸν προσθέσεως τοῦ δεδομένου πολλαπλασιαστέου, ἢ δ' ἐντεῦθεν προκύπτουσα εὐκολία εἶναι λίαν πολέτιμος.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον σκεπτόμενοι ἠθέλομεν ἀποδείξει, ὅτι ὁ ἀνωτέρω κανὼν εἶναι ἀληθὴς ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν ᾖ το ὁ δεδομένος πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ μονοψήφιος πολλαπλασιαστής.

Παράδειγμα δεύτερον.—Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ πολυψηφίου 580143062 ἐπὶ τὸν μονοψήφιον ἀριθμὸν 5. Θέλομεν εὑρεῖ καὶ διὰ τῆς προσθέσεως καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον ὡς φαίνεται ὀπισθεν.

Διὰ τῆς προσθέσεως	καὶ	διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ
580143062		580143062
580143062		5
580143062		2900745310
580143062		
580143062		
2900745310		

ΤΡΙΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ.

Πολλαπλασιασμὸς ὁποιοῦδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ πολυψήφιον.

55. Πῶς ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ὁποιοῦδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν πολυψήφιον;

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, καὶ ἄγομεν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστὴν γραμμὴν. Γράφομεν ἔπειτα ὑπὸ τὴν γραμμὴν τὰ γινόμενα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐφ' ἕκαστον τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες ἐκάστου γινομένου νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἐν ᾗ καὶ τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐφ' ὃ πολλαπλασιάσαντες τὸν πολλαπλασιαστέον εὗρομεν τὸ γραφόμενον γινόμενον. Ἄγομεν τέλος γραμμὴν ὑποκάτω καὶ προσθέτομεν τὰ οὕτω γεγραμμένα μερικὰ γινόμενα. Ὁ ἐκ τῆς προσθέσεως ταύτης προκύπτων ἀριθμὸς θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν δεδομένων.

Παραδείγματος χάριν, ἂς υποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 1257 ἐπὶ 342.

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν 342 ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον 1257 ὡς προείπομεν, ἄγομεν γραμμὴν, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐφ' ἕκαστον τῶν σημαντικῶν ψηφίων 2, 4, 3 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Τὰ οὕτως εὐρεθέντα γινόμενα 2514, 5028, 3771 γράφομεν οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες ἐκάστου νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἐν ᾗ καὶ τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὸ παρασχὼν τὸ γραφόμενον γινόμενον. Παραδείγματος χάριν, τὸ πρῶτον γινόμενον 2514 ἐγράφη οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες αὐτοῦ 4 νὰ εὐρίσκωνται ὑπὸ τὸ ψηφίον 2 τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· τὸ δεύτερον γινόμενον 5028 ἐγράφη ὡσαύτως οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες αὐτοῦ 8 νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ

1257

342

2514

5028

3771

429894

καθέτω στήλῃ, ἐν ᾗ καὶ τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐφ' ὃ πολλαπλασιάσαντες τὸν πολλαπλασιαστὸν εὕρομεν τὸ γραφόμενον γινόμενον 5028. Παρομοίως τὸ τρίτον γινόμενον 3774 ἐγγράφη οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες αὐτοῦ 1 νὰ εὐρίσκωνται ὑπὸ τὸ ψηφίον 3 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐφ' ὃ πολλαπλασιασθεὶς ὁ πολλαπλασιαστὸς παρήγαγε τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος γινόμενον.

Ἄγουμεν ἔπειτα γραμμὴν ὑπὸ τὸ τελευταῖον μερικὸν γινόμενον καὶ προσθέτομεν. Ὁ ἀριθμὸς 429894, ὁ τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν γινομένων παριστῶν, εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ 4257 ἐπὶ 342.

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4136 ἐπὶ 20034, ἠθέλομεν γράφει αὐτοὺς ὡς εἶπομεν ἀνωτέρω, καὶ πολλαπλασιάσει τὸν πολλαπλασιαστὸν 4136 ἐφ' 4136
 ἕκαστον τῶν *σημαντικῶν* ψηφίων 4, 3, 2 τοῦ πολ- 20034
 λαπλασιαστοῦ 20034, τὰ δὲ εὐρεθησόμενα μερικὰ γι- 16544
 νόμενα 16544, 12408, 8272 ἠθέλομεν γράφει οὕτως, 12408
 ὥστε αἱ μονάδες 4, 8, 2 ἑκάστου νὰ εὐρίσκωνται ὑπὸ 8272
 τὸ ἀντιστοιχοῦν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Τὸ ἄ- 82860624
 θροισμα 82860624 τῶν οὕτω γεγραμμένων μερικῶν
 γινομένων θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν δεδομένων ἀ-
 ριθμῶν.

Κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα, ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθ-
 μὸν 7 ἐπὶ 3125, ἠθέλομεν γράφει αὐτοὺς ὡς εἶπομεν ἀ-
 νωτέρω, καὶ πολλαπλασιάσει τὸν πολλαπλασιαστὸν 7 ἐφ' 7
 ἕκαστον τῶν *σημαντικῶν* ψηφίων 5, 2, 1, 3 τοῦ πολλα- 3125
 πλασιαστοῦ 3125. Ἐπειτα ἠθέλομεν γράφει τὰ εὐρεθη- 35
 σόμενα μερικὰ γινόμενα 35, 14, 7, 21 οὕτως, ὥστε αἱ 14
 μονάδες 5, 4, 7, 1 ἑκάστου νὰ εὐρίσκωνται ὑπὸ τὸ ἀντι- 7
 στοιχοῦν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Τὸ ἄθροισμα 21
 21875 τῶν οὕτω γεγραμμένων μερικῶν γινομένων θέλει 21875
 παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 7 ἐπὶ τὸν
 πολυψήφιον ἀριθμὸν 3125.

56. *Δύνασθε νὰ μοὶ ἀποδείξητε τὸν ἀνωτέρω κανόνα;*

Μάλιστα, καὶ πρὸς τοῦτο ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητοῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ 9 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 236.

Ἐκτελοῦντες τὴν πράξιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα εὐρίσκο-
 μεν ὡς γινόμενον 2124. Ἐὰν λοιπὸν ἀποδείξωμεν ὅτι οὐ μόνον τὸ αὐ-
 τὸ γινόμενον θέλομεν εὑρεῖ ἐφαρμόζοντες ἐπὶ τοῦ γινομένου 9×236 τὸν

ὀρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἀλλὰ καὶ ὅτι πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ προσ-
τίθενται οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, θέ-
λομεν συμπεράνει ὅτι ὁ κανὼν εἶναι ἀληθὴς καθ' ὅλα αὐ-
τοῦ τὰ μέρη.

Καὶ τῷ ὄντι, κατὰ τὸν ὀρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ	9
τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου	236
9, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστής 236 ἐσχηματίσθῃ ἐκ τῆς μο-	54
νάδος. Ἀλλ' ὁ πολλαπλασιαστής 236 ἐσχηματίσθῃ ἐκ τῆς	27
μονάδος, ἀφοῦ αὕτη ἐλήφθῃ πρῶτον ἐξάκις, ἔπειτα τρια-	18
κορτάκις καὶ τελευταῖον διακοσιάκις, καὶ εἰς τὸ ἐξαπλάσιον αὐτῆς	2124
προσέτιθῃ τὸ τριακορταπλάσιον καὶ διακοσιαπλάσιον. Λοιπὸν καὶ τὸ	
ζητούμενον γινόμενον θέλει παραχθῇ ἐκ τοῦ 9, ἀφοῦ ληφθῇ τὸ ἐξα-	
πλάσιον αὐτοῦ, τὸ τριακορταπλάσιον καὶ τὸ διακοσιαπλάσιον, καὶ	
προσθεθῶσιν ἔπειτα τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα.	

Τὸ ἐξαπλάσιον τοῦ 9, ἥτοι 9×6 , ἰσοῦται μὲ...	54 μονάδας.
Τὸ τριακορταπλάσιον τοῦ 9, ἥτοι 9×30 , ἰσοῦται	
μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 9 ἐπὶ 30, ἢ μὲ τὸ γινόμενον τοῦ	
9 ἐπὶ 3 δεκάδας, ἥτοι μὲ 27 δεκάδας, ἢ μὲ	270 μονάδας.
Ὡσαύτως τὸ διακοσιαπλάσιον τοῦ 9, ἥτοι 9×200 ,	
ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 9 ἐπὶ 200, ἢ μὲ τὸ γι-	
νόμενον τοῦ 9 ἐπὶ 2 ἑκατορτάδας, ἥτοι μὲ 18 ἑκα-	
τορτάδας, ἢ μὲ	1800 μονάδας.
Λοιπὸν ὁ 9 λαμβανόμενος 236 φορές παράγει τὸν	
ἀριθμὸν	2124 μονάδας,
ὅστις παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ 9 ἐπὶ 236.	

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι οὐ μόνον εὗρομεν τὸ αὐτὸ γινόμενον
2124, ἀλλὰ καὶ τὸν κανὼνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀκολουθοῦντες καὶ
τὸν ὀρισμὸν αὐτοῦ ἐφαρμόζοντες προσθέσαμεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομέ-
νου τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς 54, 270, 1800 καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.
Λοιπὸν ὁ κανὼν εἶναι ἀληθὴς καθ' ὅλα αὐτοῦ τὰ μέρη.

57. Ἀποδείξατέ μοι συντόμως τὸν αὐτὸν κανὼνα καὶ ἐπὶ ἐτέρου
τινὸς παραδείγματος.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 1254
ἐπὶ 307.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ	1254
γενικὸν κανὼνα εὕρισκόμεν, διατάσσοντες τὰ τῆς πρᾶ-	307
ξεως ὡς φαίνεται ἀντικρῶ, διὰ τὸ ζητούμενον γινόμενον	8778
τὸν ἀριθμὸν 384978.	3762
	384978

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστὸν ἐπτάκις καὶ τριακοσιᾶκις καὶ εἰς τὸ ἐπταπλάσιον αὐτοῦ νὰ προσθέσωμεν τὸ τριακοσιαπλάσιον.

Ἀλλὰ 1254×7 ἰσοῦται μὲ 8778 μονάδας
καὶ 1254 ἐπὶ 300 , ἥτοι 1254 ἐπὶ 3 ἑκατομ-
δας, ἰσοῦται μὲ 3762 ἑκατομτάδας, ἢ μὲ 376200 μονάδας.
Λοιπὸν 1254×307 ἰσοῦται μὲ 384978 μονάδας.
καὶ βλέπομεν ὅτι οὐ μόνον εὗρομεν τὸν αὐτὸν ἀ-
ριθμὸν, ἀλλὰ καὶ ὅτι πρὸς τοῦτο προσθέσαμεν τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς,
 8778 , 376200 καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Ὡσαύτως, ἂν μᾶς ἐζητεῖτο τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 580254 ἐπὶ 30072 , ἠθέλομεν εὗρεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 17449308072 καὶ

κατὰ τὸν κανόνα	καὶ	κατὰ τὸν ὁρισμὸν.
580254	Ἡ φαινομένη διαφορὰ	580254
30072	ὡς ἐκ τῆς ἐλλείψεως τῶν	30072
<u>4460502</u>	πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δευ-	<u>4460502</u>
4064757	τέρου καὶ τρίτου μερικοῦ	40647570
<u>1740753</u>	γινόμενου μηδενικῶν εἰ-	<u>17407530000</u>
17449308072	ναι ἀνέπαρκτος διότι ἡ	17449308072

προσθήκη τῶν μηδενικῶν δὲν μεταβάλλει προφανῶς τὸ ζητούμενον ἀ-
φροισμα, διὰ τοῦτο καὶ παραλείπονται πάντοτε ταῦτα ἐν τῇ κατὰ τὸν
κανόνα ἐκτελέσει τῆς πράξεως.

ΜΕΡΙΚΑΙ ΤΙΝΕΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ.

58. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος ἔχῃ ἐν ἡ πλείωτερα μηδενικά πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, πῶς εὐρίσκομεν συντομώτερον τὸ γινόμενον;

Πολλαπλασιάζομεν μόνον τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν τελευταίων μηδενικῶν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν δεδομένον πολλαπλασιαστήν, καὶ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὐρεθησομένου γινόμενου τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ὁ δεδομένος πολλαπλασιαστέος. Ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 5602000 ἐπὶ 423 , πολλαπλασιάζομεν μόνον τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν τελευταίων μηδενικῶν ἀριθμὸν 5602 ἐπὶ τὸν δεδομένον πολλαπλασιαστήν 423 , γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ οὕτως εὐρεθησομένου γινόμενου

2369646 τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει ὁ δεδομένος πολλαπλασιαστέος, ἦτοι τρία. Ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς 2369646000 θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ἦσαύτως, ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4503200 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 201, πρὸς εὔρεσιν τοῦ γινομένου πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν 45032 ἐπὶ 201, καὶ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου 9051432 δύο μηδενικά. Ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς 905143200 θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον γινόμενον.

59. Πόθεν πορίζομεθα τὸν ἀνωτέρω ΜΕΡΙΚΟΝ ΚΑΝΟΝΑ;

Ἐξ αὐτοῦ τοῦ γενικοῦ κανόρος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Τῷ ὄντι, ἐὰν ζητήσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 5602000 ἐπὶ 423, καὶ τὸ αὐτὸ γινόμενον κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα μερικὸν κανόνα,

5602000	5602
423	423
46806000	46806
44204000	44204
22408000	22408
2369646000	2369646000

βλέπομεν ὅτι εὐρίσκομεν τὸ αὐτὸ γινόμενον 2369646000 καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον εὑρέθη συντομώτερον, διότι δὲν ἐπανελάβαμεν πεντάκις τὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πολλαπλασιαστέου ὑπάρχοντα μηδενικά, ἀλλὰ ἅπαξ μόνον. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὁ ἀνωτέρω μερικὸς κανὼν εἶναι ὁ γενικὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κανὼν συντομώτερον ἐκτελούμενος.

60. Πῶς εὐρίσκομεν συντομώτερον τὸ γινόμενον, ὅταν ὁ δεδομένος πολλαπλασιαστής ἔχῃ ἐν ἡ πλείοτερα μηδενικά πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ;

Πολλαπλασιάζομεν τὸν δεδομένον πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν τελευταίων μηδενικῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀριθμὸν, καὶ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ οὕτως εὑρεθησομένου γινομένου τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ὁ δεδομένος πολλαπλασιαστής. Ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2534 ἐπὶ τὸν 7600, πρὸς εὔρεσιν τοῦ γινομένου αὐτῶν πολλαπλασιάζομεν τὸν 2534 ἐπὶ τὸν 76 καὶ γράφομεν δύο μηδενικά πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου 192584= . Ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς 19258400 θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ὡσαύτως, ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 250034 ἐπὶ τὸν 120000, πρὸς εὐρεσιν τοῦ γινομένου αὐτῶν πολλαπλασιάζομεν τὸν 250034 ἐπὶ 12 καὶ γράφομεν τέσσαρα μηδενικά πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὐρεθησομένου γινομένου 3000408. Ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς 30004080000 θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον.

61. Πόθεν πορίζομεθα τὸν ΜΕΡΙΚΟΝ ΚΑΝΟΝΑ;

Ἐξ αὐτοῦ τοῦ γενικοῦ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κανόνας. Τῷ ὄντι, ἐὰν ζητήσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 563021 ἐπὶ τὸν 24000 καὶ κατὰ τοὺς δύο κανόνας

$$\begin{array}{r} 563021 \\ 24000 \\ \hline 2252084 \\ 1126042 \\ \hline 13512504000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 563021 \\ 24 \\ \hline 2252084 \\ 1126042 \\ \hline 13512504000 \end{array}$$

βλέπομεν ὅτι εὐρίσκομεν τὸ αὐτὸ γινόμενον καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι κατὰ τὸν δεύτερον, ἀντὶ τοῦ δεδομένου πολλαπλασιαστοῦ 24000, ἐγράψαμεν μόνον τὸν ἀριθμὸν 24, ὅστις ἔχει ὀλιγώτερα ψηφία.

62. Πῶς εὐρίσκομεν συντομώτερον τὸ γινόμενον, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής ἔχωσι πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῶν μηδενικά;

Πολλαπλασιάζομεν μόνον τοὺς πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν τελευταίων μηδενικῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ ἀριθμούς, καὶ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ οὕτως εὐρεθησομένου γινομένου τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο ἡμοῦ παράγοντες. Ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς θέλει παριστᾷ τὸ γινόμενον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 253000 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 1400, πρὸς εὐρεσιν τοῦ γινομένου αὐτῶν πολλαπλασιάζομεν μόνον τοὺς ἀριθμούς 253 καὶ 14, καὶ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 3542 πέντε μηδενικά, ἥτοι ὅσα ἔχει ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῶν. Ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς 3542000000 θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ὡσαύτως, ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμούς 30250000 καὶ 20300, πρὸς εὐρεσιν τοῦ γινομένου αὐτῶν πολλαπλασιάζομεν μόνον τοὺς 3025, καὶ 203, καὶ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὐρεθησομένου γινομένου αὐτῶν 614075 ἑξ μηδενικά, ἥτοι ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο

δεδομένοι ἀριθμοί. Ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς 614075000000 θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον γινόμενον.

63. Πόθεν πορίζομεθα τὸν ἀνωτέρω ΜΕΡΙΚΟΝ ΚΑΝΟΝΑ;

Ἐκ τῶν δύο προηγουμένων μερικῶν κανόνων. Διότι, ἂν εἴχομεν πρὸς πολλαπλασιασμὸν τοὺς ἀριθμοὺς 53000 καὶ 2700, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς 53000 ἔχει πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ μηδενικά, πρέπει κατὰ τὸν πρῶτον μερικὸν κανόνα, πρὸς εὐρεσιν τοῦ γινομένου 53000×2700 , νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 53 ἐπὶ 2700, καὶ νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ εὐρεθησομένου γινομένου τρία μηδενικά. Ἀφ' ἐτέρου, πρὸς εὐρεσιν τοῦ γινομένου 53×2700 , ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς 2700 ἔχει πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ μηδενικά, πρέπει κατὰ τὸν δεύτερον μερικὸν κανόνα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 53×27 καὶ νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ γινομένου δύο μηδενικά. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι πρὸς εὐρεσιν τοῦ γινομένου 53000×2700 ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 53 καὶ 27, καὶ νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ γινομένου αὐτῶν τὸ ὅλον πέντε μηδενικά, (δύο πρὸς τὰ δεξιά τοῦ γινομένου 53×27 καὶ τρία πρὸς τὰ δεξιά τοῦ οὕτως ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ 143100).

Τὸ γινόμενον τοῦ 53 ἐπὶ 27 εἶναι 1431. Ἐὰν γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ δύο μηδενικά, εὐρίσκομεν τὸ γινόμενον τοῦ 53 ἐπὶ 2700, καὶ ἐὰν πάλιν γράψωμεν πρὸς δεξιά τοῦ 143100 τρία μηδενικά, ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 143100000, ὅστις θέλει παριστᾶ τὸ γινόμενον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν 53000 καὶ 2700.

ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ.

64. Τί καλεῖται ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ;

Τὸ ἐξαγόμενον ὅπερ εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἀριθμὸν τινα ἐπὶ δεύτερον, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὸ γινόμενον, π. χ., $5 \times 7 \times 3 \times 4$ παριστᾶ τὸ ἐξαγόμενον 420, ὅπερ εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον ἀριθμὸν 5 ἐπὶ 7, τὸ γινόμενον αὐτῶν 35 ἐπὶ 3, τὸ νέον γινόμενον 105 ἐπὶ 4.

Ὡσαύτως τὸ γινόμενον $2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 6$ παριστᾶ τὸ ἐξαγόμενον 720, ὅπερ εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον παράγοντα 2 ἐπὶ 3, τὸ γινόμενον αὐτῶν 6 ἐπὶ 5, τὸ νέον γινόμενον 30 ἐπὶ 4, καὶ τὸ τρίτον γινόμενον 120 ἐπὶ 6.

Παράγοντες τοῦ γινομένου $5 \times 7 \times 3 \times 4$ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 5, 7, 3, 4, τοῦ δὲ γινομένου $2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 6$ οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5, 4, 6.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

2504	350298	89002564	5800200607
7	6	9	5
<u>17528</u>	<u>2101788</u>	<u>801023076</u>	<u>29001003035</u>
8504	1250083	257602546	
325	23009	300033	
<u>42320</u>	<u>11250747</u>	<u>772807638</u>	
17008	3750249	4288012730	
25512	2500166	772807638	
<u>2763800</u>	<u>28763159747</u>	<u>77294446734938</u>	
2356000	13002	8540000	
337	1380000	72900	
<u>16492</u>	<u>404016</u>	<u>7686</u>	
11780	39006	1708	
7068	13002	5978	
<u>841092000</u>	<u>47942760000</u>	<u>622566000000</u>	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Ποῖα τὰ γινόμενα τῶν ἀριθμῶν 254, 5007, 820051 ἐπὶ 9;
(2286, 27064, 7380279).

II. Ποῖα τὰ γινόμενα τοῦ ἀριθμοῦ 25456 ἐπὶ 10, 100, 1000, 10000;

(254360, 2543600, 25436000, 254360000).

III. Δοθέντων τῶν ἀριθμῶν

832005, 340020, 1800036, 957090,

τὰ εὐρεθῶσι

1ον. Τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου 1800036 ἐπὶ τὸν τέταρτον.

(1622634452000).

2ον. Τὰ γινόμενα τοῦ δευτέρου 340020 ἐφ' ἑκάτερον τῶν λοιπῶν.

(612048240720, 325399140000).

3ον. Τὰ γινόμενα τοῦ πρώτου 832005 ἐφ' ἑκάστον τῶν λοιπῶν.

(282898340100, 1497638952180, 796228785000).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

65. *Τί εἶναι ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ;*

Διαίρεσις εἶναι πράξις, δι' ἧς δεδομένων δύο ἀριθμῶν εὐρίσκομεν τρίτον δεικνύοντα ποσάκις ὁ δεύτερος τῶν δεδομένων ἐμπεριέχεται ἐν τῷ πρώτῳ.

Παραδείγματος χάριν, ἐάν μᾶς δοθῶσιν οἱ δύο ἀριθμοὶ 37 καὶ 5, καὶ μᾶς ζητηθῇ τρίτος, ὅστις νὰ δεικνύῃ ποσάκις ὁ δεύτερος 5 ἐμπεριέχεται ἐν τῷ πρώτῳ 37, ἡ πράξις, δι' ἧς ὁ ζητούμενος τρίτος εὐρίσκεται, καλεῖται *διαίρεσις*.

66. *Πῶς ὀνομάζεται ὁ ΠΡΩΤΟΣ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, πῶς ὁ ΔΕΥΤΕΡΟΣ καὶ πῶς ὁ ζητούμενος ΤΡΙΤΟΣ;*

Ὁ πρῶτος ὀνομάζεται *διαιρέτέος*, ὁ δεύτερος *διαιρέτης*, καὶ ὁ ζητούμενος τρίτος *πηλίκον*.

67. *Διὰ τίτος σημείου σημειόσεται ἡ διαίρεσις;*

Διὰ τοῦ ἐξῆς :: ὅπερ ἀπαγγέλλεται νὰ διαιρεθῇ διὰ, ἢ ἀπλῶς διὰ, καὶ τίθεται μετὰξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου προτασσομένου τοῦ διαιρετέου. Παραδείγματος χάριν, ἡ παράστασις 23 : 5 ἀπαγγέλλεται 23 νὰ διαιρεθῇ διὰ 5 ἢ ἀπλῶς 23 διὰ 5.

68. *Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τῆς διαιρέσεως ὀρισμοῦ ποῖον πρὸς εὔρεσιν τοῦ πηλίκου τρόπον πορίζομεθα ἀμέσως;*

Τὸν ἐξῆς :: ἵνα ἴδωμεν ποσάκις ὁ διαιρέτης ἐμπεριέχεται ἐν τῷ διαιρετέῳ, ἀρκεῖ προφανῶς νὰ εὕρωμεν ποσάκις ὁ διαιρέτης δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου. Τότε τὸ ζητούμενον πηλίκον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν, τὸν δεικνύοντα ποσάκις ἡ τοιαύτη διαδοχικὴ τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ διαιρετέου καὶ τῶν διαδοχικῶν ὑπολοίπων ἀφαιρέσεις ἐγένετο.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 23 διὰ 5. Πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 23 τὸν διαιρέτην 5, ἔπειτα ἀπὸ τῆς εὐρεθισομένης διαφορᾶς 18 πάλιν τὸν ἀριθμὸν 5, ἀπὸ τῆς δευτέρας διαφορᾶς 13 ἀφαιροῦμεν πάλιν τὸν 5, ἀπὸ τῆς νέας διαφορᾶς 8 πάλιν τὸν διαιρέτην 5, μέχρις οὗ εὕρωμεν διαφορὰν 3, ἀφ' ἧς ὁ 5 δὲν δύναται ν' ἀφαιρεθῇ, ὡς μεγαλείτερος. Ἐπειδὴ

δὲ ἡ διαφορὰ 3 εὐρέθη ἀφοῦ ὁ διαιρέτης 5 ἀφῆρέθη τετράκις ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 23, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ 5 ἐμπεριέχεται τετράκις ἐν τῷ 23, ἥτοι ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι ὁ ἀριθμὸς 4.

69. Πῶς ὀνομάζεται ἡ τελευταία διαφορὰ, ἀφ' ἧς ὁ διαιρέτης δὲν δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ;

Ἐπολοιπον τῆς διαιρέσεως. Ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι ἡ διαφορὰ 3 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 23 διὰ 5. Ἄν εἶχομεν νὰ διαιρῶμεν τὸν ἀριθμὸν 33 διὰ 7, ἠθέλομεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶπει· 7 ἀπὸ 33...26· 7 ἀπὸ 26...19· 7 ἀπὸ 19...12· 7 ἀπὸ 12...5· 7 ἀπὸ 5 δὲν ἀφαιρεῖται. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν πηλίκον εἶναι 4 (διότι ὁ 7 ἀφῆρέθη τετράκις ἀπὸ τοῦ 33), τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 5 (διότι μετὰ τὴν τελευταίαν ἀφαίρεσιν ἔμεινεν ὁ ἀριθμὸς 5, ἀφ' οὗ ὁ 7 δὲν δύναται ν' ἀφαιρεθῇ).

70. Μεταχειρίζομεθα πάντοτε τὸν ἀνωτέρω τρόπον πρὸς εὑρεσιν τοῦ πηλίκου;

Οὐδέποτε. Πρῶτον, διότι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον, ὅταν ταῦτο ᾖ ἐστὼ καὶ μονοψήφιος ἀριθμὸς, διὰ τρόπου συντομωτέρου, καὶ δεύτερον, διότι ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθειὸς τρόπος εἶναι σχεδὸν ἀκατόρθωτος, ὅταν ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρέτης καὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον ᾖ πολυψήφιοι ἀριθμοί. Ἄν π. χ. εἶχομεν νὰ διαιρῶμεν τὸν ἀριθμὸν 27540025638 διὰ τοῦ 5723, πρὸς εὑρεσιν τοῦ πηλίκου ἔπρεπε νὰ ἀφαιρῶμεν διαδοχικῶς τὸν διαιρέτην 5723 πλέον ἢ 4000000 φοράς, ὅπερ σχεδὸν ἀκατόρθωτον.

71. Πῶς λοιπὸν εὐρίσκομεν συνήθως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν;

Πρὸς τοῦτο θέλομεν διακρίνει δύο περιπτώσεις.

1ον. Ὅταν τοῦ διαιρετέου ὄντος ἰσοιουδῇποτε, ὁ διαιρέτης ᾖ καὶ μονοψήφιος.

2ον. Ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖ καὶ πολυψήφιος, τοῦ διαιρετέου ὄντος ἀναγκαιῶς πολυψήφιον.

ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ.

Διαιρέσις ὁποιοῦδήποτε ἀριθμοῦ διὰ μονοψηφίου.

72. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει πόσα τιτὰ δυνατὸν νὰ συμβῶσι;

Δύο· τὸ ζητούμενον πηλίκον δυνατὸν νὰ ᾖ καὶ ἀριθμὸς μονοψήφιος ἢ πολυψήφιος.

73. Πῶς βεβαιούμεθα δοθέντος τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου, ὅτι τὸ πηλίκον θέλει εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος ;

Γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου διαιρετέου ἐν 0, καὶ ἐὰν ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς ᾖναι μεγαλείτερος τοῦ δεδομένου διαιρετέου, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος, ἐὰν τούναντίον ὁ προκύπτων ἀριθμὸς ᾖναι μικρότερος τοῦ δεδομένου διαιρετέου, τὸ πηλίκον θέλει εἶναι ἀριθμὸς πολυψήφιος.

Παραδείγματος χάριν, ἂν μᾶς ἐδίδετο ὡς διαιρετέος ὁ ἀριθμὸς 73 καὶ ὡς διαιρέτης ὁ ἀριθμὸς 8, ἵνα βεβαιωθῶμεν ἂν τὸ πηλίκον θέλει εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος ἢ πολυψήφιος, γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου 8 ἐν 0. Ἐπειδὴ δὲ ὁ οὕτω σχηματιζόμενος ἀριθμὸς 80 εἶναι μεγαλείτερος τοῦ δεδομένου διαιρετέου 73, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος. Διότι, γράψαντες πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 8 ἐν μηδενικόν, ἐσχηματίσαμεν ἀριθμὸν δεκαπλάσιον τοῦ δεδομένου διαιρετέου. Ἐπειδὴ δὲ ὁ οὕτω σχηματισθεὶς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλείτερος τοῦ δεδομένου διαιρετέου 73, ἔπεται ὅτι ὁ διαιρέτης 8 περιέχεται ὀλιγώτερον ἢ δεκάκις ἐν τῷ διαιρετέῳ 73, ἥτοι ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὁ ἀριθμὸς, ὁ δεικνύων ποσάκις ὁ 8 ἐμπεριέχεται ἐν τῷ 73, εἶναι μικρότερος τοῦ 10, ἐπομένως ἀριθμὸς μονοψήφιος.

Τούναντίον, ἂν μᾶς ἐδίδετο ὡς διαιρετέος ὁ ἀριθμὸς 95 καὶ ὡς διαιρέτης ὁ 8, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 80, ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τῆς πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 8 προσθήκης τοῦ μηδενός εἶναι μικρότερος τοῦ 95, ἔπεται ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ἢ δεκά, ἢ ἀριθμὸς μεζῶν τοῦ 10, ἐπομένως πολυψήφιος.

74. Πῶς εὐρίσκωμεν τὸ πηλίκον, ὅταν τοῦτο ᾖναι ἀριθμὸς μονοψήφιος ;

Διὰ τοῦ πίνακος τοῦ Πυθαγόρου. Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 34 διὰ 8. Ζητοῦμεν ἐν τῇ ὀγδῳῇ καθέτῳ στήλῃ τοῦ πίνακος, ἥτις περιέχει τὰ γινόμενα τοῦ 8 ἐπὶ τοὺς ἑννέα ἀρχικοὺς ἀριθμοὺς, ποῖον εἶναι τὸ μεγαλίτερον γινόμενον τοῦ διαιρετέου 8, τὸ περιεχόμενον ἐν τῷ διαιρετέῳ 34, καὶ εὐρίσκωμεν τὸν ἀριθμὸν 32 ὁ πρῶτος δὲ ἐν τῇ ὀριζοντίῳ στήλῃ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 32 ὑπάρχων ἀριθμὸς 4 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ὡσαύτως, ἂν εἶχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 57 διὰ 6, θέλωμεν ζητήσει ἐν τῇ ἑκτῇ καθέτῳ στήλῃ τὸ μεγαλίτερον γινόμενον 54 τοῦ 6, τὸ ἐμπεριεχόμενον ἐν τῷ δεδομένῳ διαιρετέῳ 57 ὁ πρῶτος δὲ ἐν τῇ ὀριζοντίῳ στήλῃ τοῦ 54 καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ ὑπάρχων ἀριθμὸς 9 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Οὕτως ἐν τῇ διαιρέσει τοῦ 34 διὰ 8 εὐρομεν *πηλίκον* 4 καὶ ὑπόλοιπον 2, ἐν δὲ τῇ διαιρέσει τοῦ 57 διὰ 6 εὐρομεν *πηλίκον* 9 καὶ ὑπόλοιπον 3.

75. Πάντοτε καταφεύγομεν εἰς τὸν πίνακα τοῦ Πυθαγόρου, ὅπως εὐρομεν τὰ *πηλικά* τῶν τοιούτων διαιρέσεων;

Ἐπειδὴ γνωρίζομεν ἐκ στήθους τὸν ἀνωτέρω τοῦ Πυθαγόρου πίνακα, εἶναι ὅλως περιτὸν νὰ καταφεύγωμεν εἰς τοῦτον. Σχηματίζομεν ἐν τῷ νῷ ἡμῶν τὰ γινόμενα τοῦ δεδομένου διαιρέτου ἐπὶ τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς ἀριθμούς, καὶ βλέπομεν ἂν ὁ δοθεὶς διαιρετέος ᾖ ἴσος μέ τι ἐκ τούτων ἢ περιέχεται μεταξύ δύο τινῶν. Ἐὰν ᾖ ἴσος μέ τι ἐκ τῶν γνωστῶν γινόμενων, τότε ὁ ἀριθμός, ἐφ' ᾗν πολλαπλασιάσαντες τὸν δεδομένον διαιρέτην εὐρομεν ὡς γινόμενον τὸν διαιρετέον, παριστᾷ τὸ *πηλίκον* τῆς διαιρέσεως, τὸ δὲ ὑπόλοιπον θέλει εἶναι 0. Ἐὰν περιέχεται μεταξύ δύο τινῶν, τότε ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἔδωκε γινόμενον τὸ μικρότερον τῶν γινόμενων, μεταξύ τῶν ὁποίων εὐρέθη περιεχόμενος ὁ διαιρετέος, εἶναι τὸ ζητούμενον *πηλίκον*, ἡ δὲ μεταξύ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ γινόμενου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν *πηλίκον* διαφορὰ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

76. Πῶς εὐρίσκομεν τὸ *πηλίκον*, ὅταν τοῦτο ᾖ ἀριθμὸς πο-
λυψήφιος;

Ἄς υποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3458 διὰ 4.

Γράφομεν τὸν διαιρετέον 3458 καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὸν διαιρέτην 4, χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ καθέτου γραμμῆς, καὶ ἄγομεν ὀριζάντιον γραμμὴν ὑπὸ τὸν διαιρέτην.

Ἐπειδὴ ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου ψηφίου 3 τοῦ διαιρετέου παριστώμενος ἀριθμός εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, διαιρούμεν τὸν ἐκ τῶν δύο πρώτων ψηφίων ἀποτελούμενον ἀριθμὸν 34 διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ εὐρίσκομεν 8
ὡς πρῶτον ψηφίον τοῦ *πηλίκου*.

3458	4
32	864
25	
24	
48	
46	
2	

Γράφομεν 8 ὑπὸ τὸν διαιρέτην, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν ψηφίον, καὶ γράφομεν τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον 32 ὑπὸ τὸν 34, ἄγομεν γραμμὴν ὑποκάτω καὶ ἀφαιροῦμεν. Εὐρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 2.

Πολλαπλασιάζομεν πάλιν τὸν διαιρέτην 4 ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν ψηφίον 6 γράφομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν 24 ὑπὸ τὸν διαιρεθέντα ἀριθμὸν 25 καὶ ἀφαιροῦμεν. Εὐρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 1 πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὁποίας καταβιβάζομεν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 8 τοῦ διαιρετέου.

Διαιροῦμεν τὸς οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν 18 πάλιν διὰ τοῦ διαιρέτου 4, καὶ εὐρίσκομεν τὸ τρίτον ψηφίον τοῦ πηλίκου 4, ὅπερ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν ἄλλων δύο.

Πολλαπλασιάζομεν πάλιν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν ψηφίον 4, γράφομεν τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον 16 ὑπὸ τὸν διαιρεθέντα ἀριθμὸν 18 καὶ ἀφαιροῦμεν. Εὐρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 2, ἥτις παριστᾷ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, ὃ δὲ ὑπὸ τὸν διαιρέτην 4 γραφεῖς ἀριθμὸς 864 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ὡσαύτως, ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 9314 διὰ 5, γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου 9314 τὸν διαιρέτην 5, χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ καθέτου γραμμῆς, καὶ ἄγομεν ὀριζόντιον γραμμὴν ὑπὸ τὸν διαιρέτην.	<table border="0"> <tr><td>9314</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>1862</td></tr> <tr><td>43</td><td></td></tr> <tr><td>40</td><td></td></tr> <tr><td>34</td><td></td></tr> <tr><td>30</td><td></td></tr> <tr><td>44</td><td></td></tr> <tr><td>40</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td></tr> </table>	9314	5	5	1862	43		40		34		30		44		40		4	
9314	5																		
5	1862																		
43																			
40																			
34																			
30																			
44																			
40																			
4																			

Ἐπειδὴ ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου ψηφίου 9 τοῦ διαιρετέου 9314 παριστώμενος ἀριθμὸς εἶναι μεγαλειότερος τοῦ διαιρέτου 5, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὐρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον 1 τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὸν διαιρέτην, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπ' αὐτό, καὶ γράφομεν τὸ γινόμενόν των 5 ὑπὸ τὸν διαιρεθέντα ἀριθμὸν 9. Ἀφαιροῦμεν τὸ 5 ἀπὸ τοῦ 9 καὶ εὐρίσκομεν διαφορὰν 4, πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὁποίας πάλιν καταβιβάζομεν τὸ δεύτερον ψηφίον 3 τοῦ διαιρετέου.

Διαιροῦμεν πάλιν τὸν οὕτω σχηματιζόμενον ἀριθμὸν 43 διὰ τοῦ διαιρέτου 5, καὶ γράφομεν τὸ εὐρεθησόμενον πηλίκον 8 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὐρεθέντος πρώτου ψηφίου 1.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν ψηφίον 8, γράφομεν τὸ γινόμενόν των 40 ὑπὸ τὸν διαιρεθέντα ἀριθμὸν 43 καὶ ἀφαιροῦμεν. Εὐρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 3, πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὁποίας καταβιβάζομεν καὶ τὸ τρίτον ψηφίον 1 τοῦ διαιρετέου.

Διαιροῦμεν πάλιν τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν 31 διὰ τοῦ δεδομένου διαιρέτου 5 καὶ γράφομεν τὸ εὐρεθησόμενον πηλίκον 6 πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν δύο εὐρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου.

Πολλαπλασιάζομεν πάλιν τὸν διαιρέτην 5 ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν ψηφίον 6,

γράφομεν τὸ γινόμενόν των 30 ὑπὸ τὸν διαιρεθέντα ἀριθμὸν 31 καὶ ἀφαιροῦμεν. Εὐρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 1, πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποίας καταβιβάζομεν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 4 τοῦ διαιρετέου.

Διαιροῦμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν 14 πάλιν διὰ τοῦ διαιρέτου, γράφομεν τὸ εὐρεθισόμενον πηλίκον 2 πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν λοιπῶν καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπ' αὐτό.

Ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενόν των 10 ἀπὸ τοῦ διαιρεθέντος 14 εὐρίσκομεν διαφορὰν 4, ἥτις παριστᾷ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, ὃ δὲ ὑπὸ τὸν διαιρέτην ἀριθμὸς 1862 τὸ πηλίκον.

Παρομοίως ἐν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 21684 διὰ τοῦ 7, γράφομεν αὐτοὺς ὡς

21684	7
21	3097
068	
63	
54	
49	
5	

προείπομεν, ἔπειτα διαιροῦμεν τὸν 21 διὰ τοῦ 7 καὶ εὐρίσκομεν πηλίκον 3. Γράφομεν 3 εἰς τὸ πηλίκον καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν 7 ἐπὶ 3. Ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν 21 ἀπὸ τοῦ 21, καὶ εὐρίσκομεν διαφορὰν 0.

Καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἐπόμενον ψηφίον 6 τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιροῦμεν τὸν 6 διὰ τοῦ 7. Ὡς περὶ ὃ 7 δὲν εἰσέρχεται εἰς τὸν 6, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ καταβιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 6 τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 8 τοῦ διαιρετέου.

Ὁ ἀριθμὸς 68 διὰ 7 διαιρούμενος δίδει πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 5. Γράφομεν λοιπὸν 9 εἰς τὸ πηλίκον, καὶ καταβιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 5 καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 4 τοῦ διαιρετέου.

Ὁ ἀριθμὸς 54 διὰ 7 διαιρούμενος δίδει πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 5. Γράφομεν λοιπὸν 7 εἰς τὸ πηλίκον καὶ 5 ὑπόλοιπον.

Τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι ὃ ὑπὸ τὸν διαιρέτην 7 γραφείας ἀριθμὸς 3097, τὸ δὲ τελευταῖον ὑπόλοιπον 5 τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

77. Πῶς καλοῦνται οἱ ἀριθμοί, οἵτινες διαιρούμενοι διὰ τοῦ διαιρέτου δίδουσι τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου;

Μερικοὶ διαιρετέοι. Λόγου χάριν, ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι οἱ ἀριθμοὶ

21,	6,	68,	54,
-----	----	-----	-----

οἵτινες διαιρεθέντες διὰ τοῦ διαιρέτου 7 παρέσχον τὰ ψηφία

3,	0,	9,	7
----	----	----	---

τοῦ ζητουμένου πηλίκου 3097, εἶναι οἱ μερικοὶ διαιρετέοι.

Ὁ 21, ὅστις παρέσχε τὸ πρῶτον ψηφίον 3 τοῦ πηλίκου, καλεῖται πρῶτος μερικὸς διαιρετέος. Ὁ 6, ὅστις παρέσχε τὸ δεύτερον ψηφίον 0 τοῦ πηλίκου, καλεῖται δεύτερος μερικὸς διαιρετέος. Ὁ 68, ὅστις

ἔδωκε τὸ τρίτον ψηφίον 9 τοῦ πηλίκου, καλεῖται τρίτος μερικός διαιρετός, κτλ.

78. Ἐκθέσατέ μοι γενικῶς τὸν ΚΑΝΟΝΑ τῆς διαιρέσεως.

Ἵνα διαιρέσωμεν πολυψήφιον διὰ μονοψηφίου, διαιροῦμεν τὸ πρῶτον πρὸς τ' ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἐὰν ᾖται μεγαλειότερον τοῦ διαιρέτου, ἢ, ἐὰν ᾖται μικρότερον, τὸν ἀριθμὸν, τὸν ἀποτελούμενον ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίων τοῦ διαιρετέου, διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ εὐρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν διαιρέσαντες διὰ τοῦ διαιρέτου εὐρομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου.

Πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, διαιροῦμεν τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ εὐρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, ὅπερ δυνατὸν νὰ ᾖται καὶ 0.

Πολλαπλασιάζομεν πάλιν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον, ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενόν των ἀπὸ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου, καὶ καταβιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου.

Σχηματίζομεν οὕτω τὸν τρίτον μερικὸν διαιρετόν, ὃν, κτλ.

Ὁ οὕτως ὑπὸ τὸν κοινὸν διαιρέτην γραφεὶς ἀριθμὸς παριστᾷ τὸ ζητούμενον πηλίκον, τὸ δὲ τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

79: Ἀποδείξατέ μοι τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὁ ἀνωτέρω κανὼν εἶναι ἀληθής, ἀρκεῖ βεβαίως ν' ἀποδείξωμεν ὅτι, ἐκτελοῦντες τὴν πράξιν ὡς προεγράθη, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δεδομένου διαιρετέου τοσάκις τὸν διαιρέτην, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ὡς πηλίκον εὐρισκόμενος ἀριθμὸς, καὶ πρὸς τούτοις ὅτι μετὰ τὴν τοιαύτην ἀφαίρεσιν εὐρίσκομεν διαφορὰν αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Πρὸς τοῦτο ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 875 διὰ τοῦ 3. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα, εὐρίσκομεν πηλίκον 291 καὶ ὑπόλοιπον 2.

Ὁ πρῶτος μερικός διαιρετός 8, ὅστις διαιρεθεὶς διὰ τοῦ διαιρέτου 3 παρίσχει τὸ πρῶτον ψηφίον 2 τοῦ πηλίκου, παριστᾷ ἑκατοτάδας. Ἀφαιροῦντες λοιπὸν ἀπ' αὐτοῦ τὸ γινόμενον 6 τοῦ διαιρέτου 3 ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 2, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 6 ἑκατοτάδας, ἥτοι τὸν ἀριθμὸν 600. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ

διαίρετον 3 ἐπὶ 2 ἑκατοντάδας ἢ 200. Οὕτως εὐρίσκομεν ὡς διαφορὰν τὸν ἀριθμὸν 275.

$$\begin{array}{r|l} 875 & 3 \\ 6 & 291 \\ \hline 27 & \\ 27 & \\ \hline 05 & \\ 3 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 875 & 3 \\ 600 & 200 \\ \hline 275 & 90 \\ 270 & 4 \\ \hline 5 & 291 \\ 3 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Ὁ δεύτερος μερικὸς διαιρετέος 27, ὅστις διαιρεθεὶς διὰ τοῦ διαίρετου 3 παρέσχε τὸ δεύτερον ψηφίον 9 τοῦ πληκίου, παριστᾷ δεκάδας. Ἀφαιροῦντες λοιπὸν ἀπ' αὐτοῦ τὸ γινόμενον 27 τοῦ διαίρετου 3 ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν ψηφίον 9, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς εὐρεθείσης πρώτης διαφορᾶς 275 τὸν ἀριθμὸν 270, ἥτοι 27 δεκάδας. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαίρετου 3 ἐπὶ 9 δεκάδας ἢ 90. Οὕτως εὐρίσκομεν νέαν διαφορὰν τὸν ἀριθμὸν 5.

Ὁ τρίτος μερικὸς διαιρετέος 5, ὅστις διαιρεθεὶς διὰ τοῦ διαίρετου 3 παρέσχε τὸ τρίτον ψηφίον 1 τοῦ πληκίου, παριστᾷ μονάδας. Ἀφαιροῦντες λοιπὸν ἀπ' αὐτοῦ τὸ γινόμενον 3 τοῦ διαίρετου ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν ψηφίον 1, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς εὐρεθείσης δευτέρας διαφορᾶς τὸν ἀριθμὸν 3, ἥτοι 3 μονάδας. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαίρετου 3 ἐπὶ 1 μονάδα. Οὕτως εὐρίσκομεν τρίτην διαφορὰν 2, ἥτις ὡς μικροτέρα τοῦ διαίρετου, δὲν διαιρεῖται ὑπ' αὐτοῦ.

Βλέπομεν λοιπὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι ἐκτελοῦντες τὴν πράξιν κατὰ τὸν δοθέντα κανόνα ἀφηρέσαμεν ἀπὸ τοῦ δεδομένου διαιρετέου 875 πρῶτον τὸ γινόμενον τοῦ διαίρετου 3 ἐπὶ 2 ἑκατοντάδας, ἥτοι ἐπὶ 200, δεύτερον ἀπὸ τῆς εὐρεθείσης διαφορᾶς 275 τὸ γινόμενον τοῦ διαίρετου 3 ἐπὶ 9 δεκάδας, ἥτοι ἐπὶ 90, καὶ τρίτον, ἀπὸ τῆς νέας διαφορᾶς 5 τὸ γινόμενον τοῦ διαίρετου 3 ἐπὶ 1 μονάδα, ἥτοι 3. Λοιπὸν ἀφηρέσαμεν οὕτως ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαίρετου 3 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 291. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς 291 παριστᾷ ποσάκις ὁ διαίρετης 3 ἐμπεριέχεται ἐν τῷ δεδομένῳ διαιρετέῳ, ἥτοι τὸ ζητούμενον πληκίον.

Ἡ τελευταία διαφορὰ 2, ἡ μικροτέρα τοῦ διαίρετου, παριστᾷ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

Διὰ τοῦ ἀνωτέρω λοιπὸν δοθέντος κανόνος εὐρίσκομεν πραγματικῶς τὸ ζητούμενον πληκίον· διότι εὐρίσκομεν ἀριθμὸν δεικνύοντα ποσάκις ὁ διαιρετέος ἐμπεριέχεται ἐν τῷ διαιρετέῳ.

80. Ἀποδείξατέ μοι συντομώτερον τὸν αὐτὸν κανόνα καὶ ἐπὶ ἐτέρον τινὸς παραδείγματος.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 1773 διὰ τοῦ διαιρέτου 7. Ἐκτελοῦντες τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν κανόνα εὐρίσκομεν πηλίκον 253 καὶ ὑπόλοιπον 2, ὡς φαίνεται κάτωθι.

$$\begin{array}{r|l} 1773 & 7 \\ 14 & 253 \\ \hline 37 & \\ 35 & \\ \hline 23 & \\ 21 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1773 & 7 \\ 1400 & 200 \\ \hline 373 & 50 \\ 350 & 3 \\ \hline 23 & 253 \\ 21 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Ὁ πρῶτος μερικός διαιρετέος 17 παριστᾷ ἑκατοστάδας. Ἀφαιροῦντες ἀπ' αὐτοῦ τὸ γινόμενον 14 τοῦ διαιρέτου 7 ἐπὶ 2, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ὅλου διαιρετέου 14 ἑκατοστάδας, ἥτοι τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 200.

Ὁ δεύτερος μερικός διαιρετέος 37 παριστᾷ δεκάδας. Ἀφαιροῦντες ἀπ' αὐτοῦ τὸ γινόμενον 35 τοῦ διαιρέτου 7 ἐπὶ 5, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς εὐρεθείσης διαφορᾶς 373 τὸν ἀριθμὸν 350, ἥτοι τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 50.

Ὁ τρίτος μερικός διαιρετέος 23 παριστᾷ μονάδας. Ἀφαιροῦντες ἀπ' αὐτοῦ τὸ γινόμενον 21 τοῦ διαιρέτου 7 ἐπὶ 3 ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς δευτέρας διαφορᾶς 21 μονάδας, ἥτοι τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 3.

Λοιπὸν ἀφῆρσάμεν οὕτως ἀπὸ τοῦ δεδομένου διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 7 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 253, καὶ ἐπειδὴ εὗρομεν διαφορὰν τὸν ἀριθμὸν 2, μικρότερον τοῦ 7, ἔπεται ὅτι ὁ διαιρέτης 7 ἐμπεριέχεται 253 μόνον φορές ἐν τῷ διαιρετέῳ 1773. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς 253 παριστᾷ τῷ ὄντι τὸ ζητούμενον πηλίκον, καὶ ἡ κατὰ τὸν δοθέντα κανόνα ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως εἶναι ἀκριβής.

81. Διὰ τὴν καταβιβάσθητε ψηφίον τι τοῦ διαιρετέου καὶ εὑρεθῆτε ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ διαιρέτου, θέτετε 0 εἰς τὸ πηλίκον;

Διότι, ὡς ἐκ τῆς ἀνωτέρω γενομένης ἀποδείξεως καταφαίνεται, τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου πρέπει νὰ παριστᾷ μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως μὲ τὰς τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου. Πρέπει λοιπὸν πρὸς τοῦτο νὰ ἀκολουθῇται ὑπὸ τόσων ψηφίων, ὅφ' ὅσων καὶ ὁ πρῶτος μερικός διαιρετέος, ἥτοι δι' ἕκαστον καταβιβαζόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου νὰ γράφωμεν ψηφίον τι εἰς τὸ πηλίκον. Ὅταν λοιπὸν ὁ ἀποτελούμενος μερικός διαιρετέος ᾖναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, πρέπει ἀναγκαίως

νὰ γράψωμεν μηδὲν εἰς τὸ πηλίκον καὶ νὰ καταβιβάζωμεν καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 8569 διὰ 8, τὸ πρῶτον ψηφίον 1 τοῦ πηλίκου πρέπει νὰ παριστᾷ χιλιάδας, ἥτοι νὰ ἀκολουθῇται ὑπὸ τριῶν ἄλλων ψηφίων, καθὼς ὁ πρῶτος μερικὸς διαιρετέος ἔχει τρία ψηφία μετ' αὐτόν. Ἐπομένως ἂν, καταβιβάζαντες τὸ πρῶτον ψηφίον 5 καὶ εὐρόντες ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ διαιρέτου 8, δὲν ἐγράφωμεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, ἠθέλωμεν εὔρει ὡς πηλίκον ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ 1074, τὸν ἀριθμὸν 174, ἐν ᾧ τὸ πρῶτον αὐτοῦ ψηφίον 4, ἀντὶ νὰ παριστᾷ χιλιάδας, θέλει παριστᾷ ἑκατοντάδας.

$$\begin{array}{r|l} 8569 & 8 \\ \hline 8000 & 1074 \\ \hline 569 & \\ \hline 560 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

Ἡδυνάμεθα πρὸς συντομωτέραν ἀπόδειξιν τῶν ἀνωτέρω νὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ πρῶτος μερικὸς διαιρετέος 8 παριστᾷ χιλιάδας, λοιπὸν καὶ τὸ πηλίκον 1 πρέπει νὰ παριστᾷ χιλιάδας. Ὁ τὸ δεύτερον σηματικὸν ψηφίον τοῦ πηλίκου παρέχων μερικὸς διαιρετέος 569 παριστᾷ δεκάδας, λοιπὸν τὸ δεύτερον σηματικὸν ψηφίον πρέπει νὰ παριστᾷ δεκάδας, καὶ ἐπειδὴ τὸ προηγούμενον 4 παριστᾷ χιλιάδας, πρέπει νὰ γράψωμεν πρὸ τοῦ 7 ἀναγκαίως 0, ἄλλως τὸ πρῶτον ψηφίον 1 ἠθελε παριστᾷ ἑκατομμύριας, ὅπερ δὲν ἔχει οὕτως.

Ἐσαύτως, ἂν εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4200023 διὰ 4, ἠθέλωμεν διατάξει καὶ ἐκτελέσει τὰ τῆς πράξεως ὡς φαίνεται ἀπέναντι. Βλέπομεν δέ, ὅτι ἐγράψαμεν μετὰ τὸ πρῶτον ψηφίον 3 τοῦ πηλίκου τέσσαρα 0, διότι ὁ πρῶτος μερικὸς διαιρετέος 42 παριστᾷ ἑκατομμύριας χιλιάδων, καὶ ὁ τελευταῖος 23 ἀπλᾶς μονάδας, ἔπρεπε λοιπὸν νὰ γραφῶσι πέντε ψηφία μετ' αὐτό, καὶ ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μετ' αὐτὸ σηματικὸν ψηφίον τοῦ πηλίκου παριστᾷ ἀπλᾶς μονάδας, ἐγράφησαν τέσσαρα 0.

$$\begin{array}{r|l} 4200023 & 4 \\ \hline 42 & 300005 \\ \hline 000023 & \\ \hline 20 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Ἡδυνάμεθα κατὰ τὸν κατ'οἶκον νὰ θεωρήσωμεν ὡς μερικοὺς διαιρετέους τοὺς ἀριθμοὺς

12, 00, 000, 0000, 00002, 000023,
οἵτινες διαιρεθέντες διὰ τοῦ διαιρέτου 4 παρέσχον τὰ ψηφία
3, 0, 0, 0, 0, 5
τοῦ πηλίκου 300005.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ

Διαιρέσεις πολυψηφίου ἀριθμοῦ διὰ πολυψηφίου.

82. Πόσα τινὰ δυνατὸν νὰ συμβῶσιν εἰς τὴν διαιρέσειν πολυψηφίου ἀριθμοῦ διὰ πολυψηφίου;

Δύο· τὸ πηλίκον δυνατὸν νὰ ᾖ ἀριθμὸς μονοψήφιος ἢ ἀριθμὸς πολυψήφιος.

83. Πῶς βεβαιούμεθα ὅτι τὸ πηλίκον δύο δεδομένων ἀριθμῶν εἶται μονοψήφιος ἢ πολυψήφιος;

Γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου διαιρέτου $\epsilon\gamma 0$, καὶ ἐάν ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς ᾖ μεγαλείτερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον· ἐάν δὲ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς ᾖ μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τότε τὸ πηλίκον θέλει εἶναι πολυψήφιον.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἶχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3853 διὰ τοῦ 962, ἐπειδὴ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 9620 ἐκ τῆς προσθήκης $\epsilon\gamma 0$ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου 962 εἶναι μεγαλείτερος τοῦ δεδομένου διαιρέτου 3853, ἔπεται ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 3853 διὰ 962 εἶναι μονοψήφιον. Διότι ὁ 9620 εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ διαιρέτου 962, ἐπειδὴ δὲ τὸ δεκαπλάσιον τοῦ διαιρέτου εἶναι μεγαλίτερον τοῦ διαιρέτου, ἔπεται ὅτι ὁ διαιρέτης περιέχεται ὀλιγώτερον ἢ δεκάκις ἐν τῷ διαιρέτῳ, ἥτοι ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 10, ἐπομένως ἀριθμὸς μονοψήφιος.

Ὡσαύτως, ἂν εἶχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 17623, διὰ τοῦ 1763, ἐπειδὴ ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς 17630 ἐκ τῆς προσθήκης $\epsilon\gamma 0$ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου 1763 εἶναι μεγαλίτερος τοῦ δεδομένου διαιρέτου, ἔπεται ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος.

* Ἄν εἶχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 876325 διὰ τοῦ 7632, ἐπειδὴ ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς 76320 ἐκ τῆς προσθήκης $\epsilon\gamma 0$ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου 7632 εἶναι μικρότερος τοῦ δεδομένου διαιρέτου 876325, τὸ πηλίκον θέλει εἶναι ἀριθμὸς πολυψήφιος.

Διότι ὁ ἀριθμὸς 76320 παριστᾷ τὸ δεκαπλάσιον τοῦ δεδομένου διαιρέτου, ἐπειδὴ δὲ τὸ δεκαπλάσιον τοῦ διαιρέτου εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου 876325, ἔπεται ὅτι ὁ διαιρέτης περιέχεται πλέον ἢ $\epsilon\gamma 10$ ἐν τῷ δεδομένῳ διαιρέτῳ, ἥτοι ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς μεγαλίτερος τοῦ 9, ἐπομένως πολυψήφιος.

84. Ἀφοῦ βεβαιωθῶμεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος, πῶς εὐρίσκομεν αὐτό;

Λαμβάνομεν τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ δεδομένου διαιρέτου, χωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου τόσα ψηφία, ὅφ' ὧσιν ἀκολουθεῖται τὸ ληφθὲν ψηφίον ἐν τῷ διαιρέτῃ, καὶ διαιροῦμεν τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρέτου ἀριθμὸν διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου. Τὸ εὑρεθὲν πηλίκον θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μείζον τοῦ ζητουμένου.

Ἵνα βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον, καὶ ἐὰν εὕρωμεν γινόμενον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρέτου, τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ἐὰν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ᾖναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου, τότε πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν κατὰ μίαν μονάδα μικρότερον ἀριθμὸν, καὶ ἐὰν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ᾖναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρέτου, ὁ δοκιμαζόμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ἐὰν πάλιν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ᾖναι μείζον τοῦ διαιρέτου, δοκιμάζομεν τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον ἀριθμὸν, καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις οὗ εὕρωμεν γινόμενον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

Ὁ ἀριθμὸς, ὅφ' ὃν πολλαπλασιάσαντες τὸν διαιρέτην εὕρωμεν τὸ ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρέτου γινόμενον, εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Παραδείγματος χάριν, ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 7734 διὰ 824. Λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ψηφίον 8 τοῦ διαιρέτου 824 καὶ χωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου 7734 δύο ψηφία, ὅσα δηλαδὴ ἔχει ὁ διαιρέτης 824 μετὰ τὸ πρῶτον αὐτοῦ ψηφίον 8. Διαιροῦμεν τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρέτου 7734 μένοντα ἀριθμὸν 77 διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου 8 τοῦ διαιρέτου, καὶ εὐρίσκομεν πηλίκον 9, ὅπερ θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μείζον τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Ἵνα βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην 824 ἐπὶ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 9 καὶ εὐρίσκομεν γινόμενον 7389, ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ δεδομένου διαιρέτου 7734. Λοιπὸν 9 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

* Ἄς ὑποθέσωμεν πρὸς τούτοις, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 51234 διὰ τοῦ 7825. Λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ψηφίον 7 τοῦ διαιρέτου 7825, χωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου 51234 τρία ψηφία, ὅσα δηλαδὴ ἔχει ὁ διαιρέτης 7825 μετὰ τὸ πρῶτον αὐτοῦ ψηφίον 7, καὶ διαιροῦμεν τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρέτου μένοντα ἀριθμὸν 51 διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου 7 τοῦ διαιρέτου. Τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 7 εἶναι ἢ ἴσον ἢ μείζον τοῦ ζητουμένου.

Ἵνα βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην

7825 ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν πηλίκον 7, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αὐτῶν 54775 εἶναι μεγαλείτερον τοῦ διαιρέτου 51234, τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 7.

Δοκιμάζομεν διὰ τοῦτο τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ 7 ἀριθμὸν 6, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αὐτοῦ 46950 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 7825 εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου 51234, ἔπεται ὅτι 6 εἶναι τὸ ἀληθὲς ψῆφίον τοῦ πηλίκου.

Ἐστω πρὸς τούτοις νὰ διαιρεθῇ ὁ 3763 διὰ τοῦ 492. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα κανόνα διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 37 διὰ τοῦ 4, καὶ εὐρίσκομεν πηλίκον 9, ὅπερ εἶναι ἴσον ἢ μείζον τοῦ ζητουμένου.

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 4428 τοῦ διαιρέτου 492 ἐπὶ 9 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου 3763, τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 9.

Δοκιμάζομεν τὸν 8. Καὶ ἐπειδὴ πάλιν τὸ γινόμενον 3936 τοῦ διαιρέτου 492 ἐπὶ 8 εἶναι ἀριθμὸς μεγαλείτερος τοῦ διαιρέτου, δοκιμάζομεν τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ 8, ἥτοι τὸν 7.

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 3444 τοῦ διαιρέτου 492 ἐπὶ 7 εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρέτου, 7 εἶναι τὸ ἀληθὲς ψῆφίον τοῦ πηλίκου.

Ἄν εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 1755 διὰ τοῦ 195, ἠθέλομεν εὐρεῖ διαιροῦντες κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τὸν ἀριθμὸν 17 διὰ τοῦ 1, πηλίκον 17, ἀριθμὸν δηλαδὴ μεγαλείτερον τοῦ 9. Ἐν τῇ αὐτῇ περιπτώσει, ἐπειδὴ ἐβεβαιώθημεν προηγουμένως ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος, δοκιμάζομεν ἀμέσως τὸν μεγαλείτερον μονοψήφιον ἀριθμὸν 9.

Τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 195 ἐπὶ 9 εἶναι 1755, ἀριθμὸς ἴσος τῷ διαιρέτῳ. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς 9 παριστᾷ τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ἡ ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων ἐκτέλεσις τῆς πράξεως διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

7734		821	51234		7825	3763		492	1755		195
7389		9	46950		6	3444		7	1755		9
345			4284			319			0		

Αἱ διαφοραὶ 345, 4284, 319, 0 παριστῶσι τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως.

85. Πῶς ἐκτελούμεν τὴν διαίρεσιν δύο πολυψήφιων, ὅταν τὸ πηλίκον ᾖ ἀριθμὸς πολυψήφιος;

Ἀπαρallάκτως, ὅπως καὶ ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖ μονοψήφιος.

Τουτέστιν, ἀφοῦ γράψωμεν τὸν διαιρέτην πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαι-

ρετέου κτλ., χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἀπαιτοῦνται, ὅπως ὁ δι' αὐτῶν παριστώμενος ἀριθμὸς ᾗ μεγαλείτερος μὲν τοῦ διαιρέτου, μικρότερος ὅμως τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ.

Διαιροῦμεν τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου χωρισθέντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου ὡς προεξεθέσαμεν, καὶ εὐρίσκομεν τὸ *πρῶτον* ψηφίον τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ χωρισθέντος πρώτου μερικοῦ διαιρετέου.

Πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον μετὰ τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον τῶν λοιπῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου καὶ διαιροῦντες τὸν οὕτω σχηματιζόμενον *δεύτερον* μερικὸν διαιρετέον διὰ τοῦ διαιρέτου, εὐρίσκομεν τὸ *δεύτερον* ψηφίον τοῦ πηλίκου, ὅπερ δυνατόν νὰ ᾖ καὶ 0, ἐάν ὁ δεύτερος μερικὸς διαιρετέος ᾖ μικρότερος τοῦ διαιρέτου.

Πολλαπλασιάζομεν πάλιν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον τοῦ πηλίκου, ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀπὸ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου, καὶ καταβιβάζοντες πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, σχηματίζομεν τὸν *τρίτον* μερικὸν διαιρετέον.

Διαιροῦμεν τοῦτον πάλιν διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ εὐρίσκομεν τὸ *τρίτον* ψηφίον τοῦ πηλίκου, ὅπερ δυνατόν νὰ ᾖ καὶ 0, ἂν ὁ τρίτος μερικὸς διαιρετέος ᾖ μικρότερος τοῦ διαιρέτου.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην κτλ.

Ἐξακολουθοῦμεν οὕτω τὴν πράξιν, μέχρις οὗ καταβιβάζσωμεν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Εὐρίσκομεν τότε διαιροῦντες τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ πηλίκου, καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ τελευταίου μερικοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον ἔχομεν τὸ *ὑπόλοιπον* τῆς πράξεως.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν πολυψήφιον ἀριθμὸν 37625 διὰ τοῦ 287.

Πρῶτος μερικὸς διαιρετέος εἶναι ὁ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου ἀριθμὸς 376, ὅστις εἶναι μεγαλείτερος μὲν τοῦ διαιρέτου 287, μικρότερος ὅμως τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ 2870.

Διαιροῦντες τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον 376 διὰ τοῦ διαιρέτου 287 εὐρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον 1 τοῦ πηλίκου.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην 287 ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 1, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν 287 ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρε-

τέου 376. Εύρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 89, πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὁποίας καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον μετὰ τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον 376 ψηφίον 2 τῶν λοιπῶν ψηφίων 2 καὶ 5 τοῦ διαιρετέου 37625, καὶ σχηματίζομεν οὕτω τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 892.

$$\begin{array}{r|l} 37625 & 287 \\ \hline 287 & 131 \\ \hline 892 & \\ \hline 864 & \\ \hline 315 & \\ \hline 287 & \\ \hline 28 & \end{array}$$

Διαιροῦντες πάλιν τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 892 διὰ τοῦ διαιρέτου 287 εὐρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον 3 τοῦ πηλίκου.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν ψηφίον 3, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν 864 ἀπὸ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου. Εὐρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 31 πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὁποίας καταβιβάζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον 5 τοῦ διαιρετέου.

Διαιροῦντες τὸν οὕτως ἀποτελούμενον τρίτον μερικὸν διαιρετέον 315 διὰ τοῦ διαιρέτου εὐρίσκομεν τὸ τρίτον καὶ τελευταῖον ψηφίον 1 τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Ἡ μείνισα διαφορὰ 28 μετὰ τὴν ἀπὸ τοῦ τελευταίου μερικοῦ διαιρετέου 315 ἀφαιρέσιν τοῦ γινομένου 287 τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 1 τοῦ πηλίκου 131 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

2ον. Ἄς ὑποθέσωμεν πρὸς τούτοις ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2192347 διὰ τοῦ 543.

Ἐνταῦθα πρῶτος μερικὸς διαιρετέος εἶναι ὁ 2192, ὅστις διαιρούμενος διὰ τοῦ διαιρέτου 543 δίδει τὸ πρῶτον ψηφίον 4 τοῦ πηλίκου.

$$\begin{array}{r|l} 2192347 & 543 \\ \hline 2172 & 4037 \\ \hline 2034 & \\ \hline 1629 & \\ \hline 4057 & \\ \hline 3801 & \\ \hline 256 & \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν ψηφίον 4, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν 2172 ἀπὸ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου 2192. Εὐρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 20, πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὁποίας καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον μετὰ τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον 2192 ψηφίον 3 τῶν λοιπῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου.

Σχηματίζομεν οὕτω τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 203, ὅστις εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου 543. Γράφομεν διὰ τοῦτο 0 ὡς δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, καὶ καταβιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 4 τοῦ διαιρετέου.

Σχηματίζομεν οὕτω τὸν τρίτον μερικὸν διαιρετέον 2034, ὅστις διαιρούμενος διὰ τοῦ διαιρέτου δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 405.

Γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὐρεθέντος ὑπολοίπου 405 καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 7 τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιροῦμεν τὸν τελευταῖον μερικὸν διαιρετέον 4057 διὰ τοῦ διαιρέτου. Εὐρίσκομεν οὕτω πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 256, ὅπερ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Ὁ ὑπὸ τὸν διαιρέτην γραφεὶς ἀριθμὸς 4037 παριστᾷ τὸ ζητούμενον πηλίκον.

86. Πῶς ἀποδεικνύεται ὁ ἀνωτέρω κανὼν;

Ἐπειδὴ ὁ ἀνωτέρω κανὼν οὐδόλως διαφέρει τοῦ δοθέντος διὰ τὴν διαίρεσιν πολυψηφίου διὰ μονοψηφίου, οὐδεμιᾶς ἰδιαιτέρας χρῆζει ἀποδείξεως. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν καὶ ἐπὶ τῆς περιπτώσεως ταύτης τὸν αὐτὸν ἀπαραλλάκτως τρόπον τοῦ σκέπτεσθαι, θέλομεν ἰδεῖ ὅτι, ἐκτελοῦντες τὴν πράξιν ὡς ἀνωτέρω ἐρέθη, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τοσάκις τὸν διαιρέτην, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ ὑπὸ τὸν διαιρέτην ὡς πηλίκον γραφόμενος ἀριθμὸς, καὶ πρὸς τούτοις, ὅτι μετὰ τὴν τοιαύτην ἀφαίρεσιν εὐρίσκομεν ὡς διαφορὰν αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Παραδείγματος χάριν, ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 87632 διὰ 65.

87632	65	87632	65
65	1348	65000	1000
226		22632	300
495		49500	40
313		3132	8
260		2600	1348
532		532	
520		520	
12		12	

Ὁ πρῶτος μερικὸς διαιρετέος 87 παριστᾷ χιλιάδας ἐπομένως καὶ τὸ πηλίκον 1 τῆς διαίρεσεως τῶν 87 χιλιάδων διὰ τοῦ διαιρέτου 65 θέλει παριστᾷ χιλιάδας.

Ἀφαιροῦντες λοιπὸν ἀπὸ 87 τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ 1, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 87632 τὸν ἀριθμὸν 65000, ἥτοι τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 65 ἐπὶ 1 χιλιάδα.

Ὁ δεύτερος μερικὸς διαιρετέος 226 παριστᾷ ἑκατοστάδας, ἐπομένως καὶ τὸ πηλίκον 3 τῆς διαίρεσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ διαιρέτου θέλει παριστᾷ ἑκατοστάδας.

Ἀφαιροῦντες λοιπὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου 226 τὸ

γινόμενον 195 τοῦ διαιρέτου 65 ἐπὶ 3, ἀφαιρούμεν 19500 ἀπὸ τῆς εὐρεθείσης διαφορᾶς 22632, ἔσται τὸ γινόμενον τοῦ 65 ἐπὶ 3 *εκατοντάδας*.

Ὁ τρίτος μερικός διαιρετέος 313 παριστᾷ *δεκάδας*, ἐπομένως καὶ τὸ πηλίκον 4 τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ διαιρέτου θέλει παριστᾷ *δεκάδας*.

Ἀφαιροῦντες λοιπὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου μερικοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον 260 τοῦ διαιρέτου 65 ἐπὶ 4, ἀφαιρούμεν 2600 ἀπὸ τῆς εὐρεθείσης νέας διαφορᾶς 3132, ἔσται τὸ γινόμενον τοῦ 65 ἐπὶ 4 *δεκάδας*.

Τελευταῖον, ὁ τέταρτος μερικός διαιρετέος 532 παριστᾷ *μονάδας*, ἐπομένως καὶ τὸ πηλίκον 8 τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ διαιρέτου θέλει παριστᾷ *μονάδας*.

Ἀφαιροῦντες λοιπὸν ἀπὸ τοῦ τετάρτου μερικοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον 520 τοῦ διαιρέτου 65 ἐπὶ 8, ἀφαιρούμεν ἀπὸ τῆς τελευταίας διαφορᾶς 532 τὸ γινόμενον τοῦ 65 ἐπὶ 8 *μονάδας*. Εὐρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 12, ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ διαιρέτου, ὅστις θέλει παριστᾷ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ἐκτελοῦντες τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν κανόνα, ἀφαιρούμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 87632 *τοσάκις* τὸν διαιρέτην 65, ὅσας *μονάδας* περιέχει ὁ ὑπὸ τὸν διαιρέτην γραφεὶς ἀριθμὸς 1348, καὶ πρὸς τούτοις ὅτι ἡ μένουσα διαφορὰ εἶναι ἡ αὐτή. Ἄρα ὁ κανὼν εἶναι ἀληθὴς καθ' *ὅλη* αὐτοῦ τὰ μέρη. Λέγομεν καθ' *ὅλη* αὐτοῦ τὰ μέρη, διότι καὶ ἂν μερικός τις διαιρετέος ἦτο μικρότερος τοῦ διαιρέτου, εὐκόλως παρατηρεῖ τις ὅτι πρέπει νὰ τεθῇ 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ νὰ καταβιβασθῇ καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΒΑΣΑΝΟΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

87. Πῶς ἐκτελοῦμεν τὴν βάσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ;

Διαιρούμεν τὸ εὐρεθὲν γινόμενον διὰ τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ ἐάν εὐρωμεν ὑπόλοιπον 0 καὶ πηλίκον τὸν πολλαπλασιαστήν, ἀποφαινόμεθα ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐγένετο ἄνευ λάθους.

88. Καὶ διατί;

Διότι, κατὰ τὸν ὀρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὸ γινόμενον περιέχει ἀκριβῶς *τοσάκις* τὸν πολλαπλασιαστέον, ὅσας *μονάδας* ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής. Ἔπεται λοιπὸν ὅτι, ἐάν τὸ γινόμενον ληθῇ ὡς διαιρετέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος ὡς διαιρέτης, τὸ πηλίκον, ὡς δεικνύον

ποσάκις ὁ διαιρέτης περιέχεται ἐν τῷ διαιρετέῳ, θέλει εἶναι ἴσον τῷ πολλαπλασιαστῇ, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως πρέπει νὰ ᾖ 0.

Παραδείγματος χάριν, ἂν πολλαπλασιάσαντες τὸν ἀριθμὸν 2543 ἐπὶ 241 εὗρωμεν γινόμενον 612863, ἵνα ἴδωμεν, ἂν ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐγένετο ἄνευ λάθους, διαιροῦμεν τὸ γινόμενον 612863 διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 2543, καὶ ἐὰν εὗρωμεν πηλίκον τὸν πολλαπλασιαστὴν 241 καὶ ὑπόλοιπον 0, ἀποφαινόμεθα ὅτι ἡ πράξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐγένετο ἀλανθάτως.

Πολλαπλασιασμὸς.

$$\begin{array}{r} 2543 \\ 241 \\ \hline 2543 \\ 10272 \\ 5086 \\ \hline 612863 \end{array}$$

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

$$\begin{array}{r|l} 612863 & 2543 \\ 5086 & 241 \\ \hline 40426 & \\ 40472 & \\ \hline 2543 & \\ 2543 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

89. Πῶς ἐκτελοῦμεν τὴν βάσανον τῆς διαιρέσεως ;

Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὗρεθὲν πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενόν των προσθέτομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως. Ἐὰν ὡς ἄθροισμα εὗρωμεν τὸν διαιρέτεον, ἀποφαινόμεθα ὅτι ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

90. Καὶ διατί ;

Διότι εἵπομεν ὅτι τὸ μὲν πηλίκον δεικνύει ποσάκις ὁ διαιρέτης ἐμπεριέχεται εἰς τὸν διαιρέτεον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον παριστᾷ ὅτι μένει ἀφοῦ ἀπὸ τοῦ διαιρέτου ἀφαιρεθῇ ποσάκις ὁ διαιρέτης, ὅσας μονάδας περιέχει τὸ πηλίκον. Ἐπεταὶ λοιπὸν ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενόν των προσθέσωμεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον, πρέπει ἀναγκαίως, ἂν ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους, νὰ εὗρωμεν ὡς ἄθροισμα τὸν διαιρέτεον.

Π. χ., ἐὰν διαιρέσαντες τὸν ἀριθμὸν 876327 διὰ τοῦ 5409 εὗρωμεν πηλίκον 162 καὶ ὑπόλοιπον 59, ἵνα ἴδωμεν ἂν ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην 5409 ἐπὶ τὸ εὗρεθὲν πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν 876258 προσθέτομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον 69. Ἐὰν ὡς ἄθροισμα εὗρωμεν τὸν διαιρέτεον 876327, ἀποφαινόμεθα ὅτι ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἀλανθάτως.

876327	5409	5409
5409	162	162
33542		10818
32454		32454
10887		5409
10818		876258
69		69
		876327

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

876000251	5	135102030	7
5	475200050	7	49300290
37		65	
35		63	
26		21	
25		21	
10		0020	
10		44	
00025		63	
25		63	
4		00	

87632	9543	163423	19876	64320089	8765432
86887	9	159008	8	61358024	7
1745		4415		2962065	

125442	623	7443571	8254	27345600	503257
1246	201	74286	901	2516285	54
832		14971		2182750	
623		8254		2013028	
209		6717		169722	

876030025	75432	15432007314	851203
75432	11613	851203	18129
421710		6949977	
75432		6809624	
462780		4103533	
452592		851203	
101882		2523304	
75432		1702406	
264505		8208954	
226296		7660827	
38299		548127	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Ποῖα τὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν
87652, 54590, 765524, 1789002

διὰ 7;

(12518, 7770, 109331, 255571.)
(6, 0, 4, 5.)

II. Ποῖα τὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν
100254, 8765002, 754520, 5870005

διὰ 8625;

(11, 1016, 110, 680.)
(5379, 2, 5570, 5003.)

III. Ποῖα τὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν
1760425700, 6014057562, 15105776008

διὰ 50055;

(58632, 200304, 503040.)
(0, 37, 8.)

IV. Ποῖα τὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν
8765254, 125456278, 9005254786

διὰ 40000;

(876, 12345, 900325.)
(3254, 6278, 4786.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΙΑΙΡΕΤΩΝ 2, 3, 4, 5, 8, 9, 25, 125 ΚΑΙ ΤΟΥ
ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ.

91. *Πότε ἀριθμός τις λέγεται ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ἑτέρου;*

Ὅταν ὁ δεύτερος διαιρούμενος διὰ τοῦ πρώτου δίδῃ ὑπόλοιπον 0.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 3 εἶναι διαιρέτης τοῦ 21, διότι ὁ 21 διαιρεθεὶς διὰ 3 δίδει ὑπόλοιπον 0. Ὁ 5 εἶναι διαιρέτης τοῦ 15, διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 15 διὰ 5 εἶναι 0. Ὁ 21 εἶναι διαιρέτης τοῦ 63, διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 63 διὰ 21 εἶναι 0.

Ἀντιστρόφως οἱ ἀριθμοί, οἵτινες διαιρούμενοι διὰ τινος ἄλλου δίδουν ὑπόλοιπον 0, καλοῦνται διαιρετοὶ δι' αὐτοῦ. Οὕτως ὁ 15 λέγεται ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 5, ὁ 63 διαιρετὸς διὰ 21.

92. *Πῶς ἄλλως ὀνομάζονται οἱ διαιρέται ἀριθμοῦ τινος;*

Καὶ παράγοντες αὐτοῦ. Οὕτως ὁ 3, ὅστις εἶναι διαιρέτης τοῦ 15, καλεῖται καὶ παράγων τοῦ 15. Ὁ 7, ὅστις εἶναι διαιρέτης τοῦ 35, καλεῖται καὶ παράγων τοῦ 35. Οἱ 5 καὶ 6, οἵτινες εἶναι διαιρέται τοῦ 60, καλοῦνται καὶ παράγοντες τοῦ 60.

93. *Διὰ τί καλοῦνται καὶ παράγοντες;*

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ διαιρέτου εἶναι 0, ὁ διαιρούμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἐπομένως ὁ διαιρέτης εἶναι καὶ παράγων τοῦ διαιρουμένου ἀριθμοῦ.

Παραδείγματος χάριν, ἐπειδὴ ὁ 5 εἶναι διαιρέτης τοῦ 35, ὁ 35 εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ τὸ πηλίκον 7, ἐπομένως, κατὰ τὰ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ λεχθέντα, ὁ 5 εἶναι παράγων τοῦ 35. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ὁ 21 εἶναι διαιρέτης τοῦ 84, ὁ 84 εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 21 ἐπὶ τὸ πηλίκον 4, ἐπομένως ὁ 21 εἶναι παράγων τοῦ 84.

94. *Ποιοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ΑΡΤΙΟΙ;*

Ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι ἢ 0, ἢ 2, ἢ 4, ἢ 6, ἢ 8. Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 160, 242, 1564, 2736, 3008 λέγονται ἄρτιοι, διότι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτῶν εἶναι ἐν ἐκ τῶν ἐξῆς 0, 2, 4, 6, 8.

95. Ποιοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ΠΕΡΙΤΤΟΙ;

Ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι 1, ἢ 3, ἢ 5, ἢ 7, ἢ 9.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 24, 173, 567, 325, 1299 εἶναι περιττοί, διότι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτῶν εἶναι ἐν ἐκ τῶν ἐξῆς 1, 3, 5, 7, 9.

96. Ποιοὶ ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2;

Πάντες οἱ ἄρτιοι ἀριθμοί, οἱ λήγοντες δηλ. εἰς 0, ἢ 2, ἢ 4, ἢ 6, ἢ 8.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 240, 564, 128, 3426, 1002, εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, διότι εἶναι ἄρτιοι.

97. Ποιοὶ ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3;

Ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν (17) τῶν σημαντικῶν αὐτοῦ ψηφίων ἀποτελεῖ ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 3.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 36 εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, διότι τὸ ἄθροισμα 9 τῶν ἀπολύτων τιμῶν 3 καὶ 6 τῶν σημαντικῶν αὐτοῦ ψηφίων εἶναι διαιρετὸν διὰ 3. Ὡσαύτως, ὁ ἀριθμὸς 4002 εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, διότι τὸ ἄθροισμα 6 τῶν ἀπολύτων τιμῶν 4 καὶ 2 τῶν σημαντικῶν αὐτοῦ ψηφίων εἶναι διαιρετὸν διὰ 3. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἱ ἀριθμοὶ 125004, 2370234 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3.

98. Ποιοὶ ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 4;

Ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὰ δύο πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῶν ψηφία ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 242 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, διότι ὁ ἀριθμὸς 42, ὁ ἀποτελούμενος ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸς διὰ 4. Ὡσαύτως, ὁ ἀριθμὸς 2572 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, διότι ὁ ἀριθμὸς 72, ὁ ἀποτελούμενος ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸς διὰ 4. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἱ ἀριθμοὶ 3204, 47024, 5608, 930256 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 4.

99. Ποιοὶ ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 5;

Οἱ λήγοντες εἰς 0 ἢ 5.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 440 εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, διότι λήγει εἰς 0. Ὁ ἀριθμὸς 35 εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, διότι λήγει εἰς 5. Ὡσαύτως οἱ ἀριθμοὶ 2400, 3025, 460200, 27345 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 5, διότι λήγουσιν εἰς 0 ἢ 5.

100. Ποιοὶ ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 8;

Ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὰ τρία πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῶν ψηφία ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 234420 εἶναι διαιρετὸς διὰ 8, διό-

τι ὁ ἀριθμὸς 120, ὁ ἀποτελούμενος ὑπὸ τῶν τριῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ, εἶναι διαιρετὸς διὰ 8. Ὡσαύτως, ὁ ἀριθμὸς 563024 εἶναι διαιρετὸς διὰ 8, διότι ὁ ἀριθμὸς 024 ἢ 24, ὁ ἀποτελούμενος ὑπὸ τῶν τριῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ, εἶναι διαιρετὸς διὰ 8. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἱ ἀριθμοὶ 273016, 125408, 987624 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 8.

101. Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 9;

Ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν σημαντικῶν αὐτῶν ψηφίων ἀποτελεῖ ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 9.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 855 εἶναι διαιρετὸς διὰ 9, διότι τὸ ἄθροισμα 18 τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν σημαντικῶν αὐτοῦ ψηφίων 8, 5 καὶ 5 εἶναι διαιρετὸν διὰ 9. Ὡσαύτως, ὁ ἀριθμὸς 3003012 εἶναι διαιρετὸς διὰ 9, διότι τὸ ἄθροισμα 9 τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν σημαντικῶν αὐτοῦ ψηφίων 3, 3, 1 καὶ 2 εἶναι διαιρετὸν διὰ 9. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἱ ἀριθμοὶ 543213, 3002540085 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 9.

102. Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 25;

Ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὰ δύο πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφία ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 25.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 12575 εἶναι διαιρετὸς διὰ 25, διότι ὁ ἀριθμὸς 75, ὁ ἀποτελούμενος ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ, εἶναι διαιρετὸς διὰ 25. Ὡσαύτως, ὁ ἀριθμὸς 7250 εἶναι διαιρετὸς διὰ 25, διότι ὁ 50 εἶναι διαιρετὸς διὰ 25. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἱ ἀριθμοὶ 31200, 35725 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 25, διότι οἱ ἀριθμοὶ 00 καὶ 25 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 25.

103. Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 125;

Ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὰ τρία τελευταῖα ψηφία ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 125.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 15250 εἶναι διαιρετὸς διὰ 125, διότι ὁ ἀριθμὸς 250, ὁ ἀποτελούμενος ὑπὸ τῶν τριῶν τελευταίων ψηφίων, εἶναι διαιρετὸς διὰ 125. Ὡσαύτως ὁ ἀριθμὸς 178625 εἶναι διαιρετὸς διὰ 125, διότι ὁ 625 εἶναι διαιρετὸς διὰ 125. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἱ ἀριθμοὶ 87000, 135125 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 125, διότι οἱ 000, 125 εἶναι διαιρετοὶ δι' αὐτοῦ.

ΠΕΡΙ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ.

104. Πότε ἀριθμὸς τις καλεῖται ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ δύο ἀλλῶν;
Ὅταν ᾖναι διαιρέτης καὶ τῶν δύο.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 3 λέγεται κοινὸς διαιρέτης τοῦ 15 καὶ 21

ὅτι ὁ 15 καὶ 21 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3. Ὡσαύτως, ὁ 7 λέγεται κοινὸς διαιρέτης τοῦ 35 καὶ 56, διότι εἶναι διαιρέτης ἀμφοτέρων.

105. Πῶς καλεῖται ὁ μεγαλύτερος τῶν κοινῶν διαιρετῶν δύο ἀριθμῶν;

Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 2, 3 καὶ 6 εἶναι οἱ κοινοὶ διαιρέται τοῦ 12 καὶ 18, καὶ ὁ μεγαλύτερος τούτων 6 καλεῖται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

Ὡσαύτως οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 4, 6, 12 εἶναι κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 24 καὶ 36, ὁ δὲ μεγαλύτερος τούτων 12 λέγεται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

106. Πῶς εὐρίσκωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν;

Διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου, καὶ ἐὰν εὐρωμεν ὑπόλοιπον 0, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Ἐὰν δὲν εὐρωμεν ὑπόλοιπον 0, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ εὐρεθέντος ὑπολοίπου, καὶ ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως ᾖ 0, τότε τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς δευτέρας διαιρέσεως δὲν ᾖ 0, διαιροῦμεν πάλιν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον διὰ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου, καὶ ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς τρίτης ταύτης διαιρέσεως ᾖ 0, τότε τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἐὰν πάλιν τὸ ὑπόλοιπον τῆς τρίτης διαιρέσεως δὲν ᾖ 0, διαιροῦμεν κτλ.

Ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις οὗ εὐρωμεν ὑπόλοιπον διαιρέσεώς τινος 0. Ὁ διαιρέτης τότε τῆς τελευταίας διαιρέσεως εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν 225 καὶ 135.

	1	1	2
225	135	90	45
135	90	90	
90	45	0	

Διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον 225 διὰ τοῦ μικροτέρου 135, καὶ ἐπειδὴ δὲν εὐρωμεν ὑπόλοιπον 0, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον 135 διὰ τοῦ εὐρεθέντος ὑπολοίπου 90.

Ἐπειδὴ πάλιν τὸ εὐρεθὲν ὑπόλοιπον δὲν εἶναι 0, διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον 90 διὰ τοῦ εὐρεθέντος δευτέρου υπολοίπου 45.

Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον τῆς τρίτης ταύτης διαιρέσεως εἶναι 0, ὁ διαιρέτης αὐτῆς 45 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν 225 καὶ 135.

Ὡσαύτως, πρὸς εὐρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ἀριθμῶν 2100 καὶ 1716 διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον 2100 διὰ τοῦ μικροτέρου 1716, καὶ ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον δὲν εἶναι 0, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον 1716 διὰ τοῦ υπολοίπου 384.

	1	4	2	7	2
2100	1716	384	180	24	12
1716	1536	360	168	24	
384	180	24	12	0	

Ἐπειδὴ εὐρομεν πάλιν ὑπόλοιπον 180 διάφορον τοῦ 0, διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον 384 διὰ τοῦ δευτέρου υπολοίπου 180.

Ἐπειδὴ τὸ νέον ὑπόλοιπον δὲν εἶναι 0, διαιροῦμεν τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον 180 διὰ τοῦ εὐρεθέντος τρίτου υπολοίπου 24.

Ἐπειδὴ πάλιν τὸ νέον ὑπόλοιπον δὲν εἶναι 0, διαιροῦμεν τὸ τρίτον ὑπόλοιπον διὰ τοῦ εὐρεθέντος τετάρτου 12, καὶ ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως εἶναι 0, ὁ τελευταῖος διαιρέτης 12 εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν 2100 καὶ 1716.

Ἡ πράξις διατάσσεται καὶ ἐκτελεῖται ὡς φαίνεται ἐν τοῖς ἀνωτέρω παραδείγμασιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Διὰ ποίων ἐκ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, 8, 9, 25, 125 εἶναι διαιρετὸς ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν

126, 22056;

(Ὁ 126 διὰ τοῦ 2, 3 καὶ 9. Ὁ 22056 διὰ τοῦ 2, 3, 4 καὶ 8).

II. Διὰ ποίων ἐκ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸς ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν

23, 105, 1236, 2475, 1003005, 30004250;

(Ὁ 23 δι' οὐδενός. Ὁ 105 διὰ τοῦ 3 καὶ 5. Ὁ 1236 διὰ τοῦ 2, 3 καὶ 4. Ὁ 2475 διὰ τοῦ 3, 5, 9 καὶ 25. Ὁ 1003005 διὰ τοῦ 3, 5 καὶ 9. Ὁ 30004250 διὰ τοῦ 2, 5, 25 καὶ 125).

III. Ποῖος ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 60 καὶ 36 ;
(Ὁ 4.)

IV. Ποῖος ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 3168 καὶ 60 ;
(Ὁ 12.)

V. Ποῖος ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 14058 καὶ 3168 ;
(Ὁ 99.)

VI. Ποῖος ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 111475 καὶ 14555 ;
(Ὁ 49.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ

107. Τί καλεῖται ΠΟΣΟΝ ἢ ΜΕΓΕΘΟΣ ;

Πᾶν ἐπιδεκτικὸν αὐξήσεως ἢ ἐλαττώσεως. Π. χ. τὰ μήκη, αἱ ἐπιφάνειαι, αἱ γραμμαί, τὰ βάρη κτλ. εἶναι ποσὰ ἢ μεγέθη.

108. Πῶς μετροῦνται τὰ μεγέθη ;

Λαμβάνεται πρὸς τοῦτο μέγεθός τι τοῦ αὐτοῦ εἶδους κατ' ἀρέσκειαν, ἀλλ' ἐντελῶς ὠρισμένον, καὶ πρὸς τοῦτο, ὡς μονάδα, συγκρίνεται τὸ πρὸς καταμέτρησιν δοθὲν μέγεθος.

Π. χ., ἐὰν θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν μῆκός τι, λαμβάνομεν ἕτερον μῆκος κατ' ἀρέσκειαν ὡς μονάδα, λόγου χάριν τὸν πῆχυν, καὶ πρὸς τοῦτον συγκρίνομεν τὸ πρὸς καταμέτρησιν δοθὲν μῆκος.

109. Ὅταν τὸ πρὸς καταμέτρησιν μέγεθος περιέχῃ ἀπαξ ἢ πολ-
λάκις τὸ ὡς μονάδα ληφθὲν μέγεθος, πῶς καλεῖται τὸ ἐξαγόμε-
νον τῆς συγκρίσεως ;

Ἀριθμὸς ἀκέραιος. Π. χ. Ἐὰν μῆκός τι περιέχῃ ἐπτάκις τὸ ὡς μονάδα ληφθὲν μῆκος, ὁ ἀριθμὸς 7, ὁ τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως παριστῶν, λέγεται ἀκέραιος.

Μέχρι τοῦδε ἐγένετο ἀποκλειστικῶς λόγος περὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθ-
μῶν.

110. Ὅταν τὸ πρὸς καταμέτρησιν δοθὲν μέγεθος περιέχῃ ἅπαξ ἢ πολλακίς πολλοστὸν τι μέρος τῆς μονάδος, πῶς καλεῖται τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως;

Κλασματικός ἀριθμὸς ἢ κλάσμα. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν βάρους τι περιέχῃ πεντάκις τὸ ἑβδομον τῆς ὁκάδος, ὁ ἀριθμὸς πέντε ἑβδομα, ὁ τὸ ἐξαγόμενον παριστῶν, λέγεται κλάσμα ἢ κλασματικός ἀριθμὸς.

111. Πῶς παριστῶμεν πᾶν κλάσμα;

Γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει ποσάκις τὸ πολλοστὸν τῆς μονάδος περιέχεται ἐν τῷ δεδομένῳ μεγέθει, καὶ ὑπ' αὐτὸν ἐκείνον ὅστις δεικνύει ποῖον πολλοστὸν μέρος τῆς μονάδος περιέχεται, καὶ μετὰ τὴν τῶν δύο τούτων ἀκροαίων ἀριθμῶν ἀγομεν ὀριζόντιον γραμμὴν.

Παραδείγματος χάριν, πρὸς παράστασιν τοῦ κλάσματος πέντε ἑβδομα γράφομεν

$$\frac{5}{7}.$$

Πρὸς παράστασιν δὲ τοῦ κλάσματος ὀκτὼ δέκατα τρίτα γράφομεν

$$\frac{8}{13}.$$

Ἐγράψαμεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 8, οἵτινες παριστῶσι πόσα πολλοστὰ μέρη τῆς μονάδος περιέχει τὸ συγκρινόμενον μέγεθος, καὶ ὑπ' αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς 7 καὶ 13, οἵτινες παριστῶσι ποῖα πολλοστὰ μέρος τῆς μονάδος περιέχει, καὶ ἐχωρίσαμεν τοὺς μὲν ἀπὸ τῶν δὲ διὰ γραμμῆς ὀριζοντίου.

112. Πῶς καλεῖται ὁ ἀριθμὸς, ὁ παριστῶν πόσα πολλοστὰ μέρη τῆς μονάδος περιέχει τὸ συγκρινόμενον μέγεθος;

Ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος.

113. Πῶς καλεῖται ὁ ἀριθμὸς, ὁ παριστῶν ποῖον πολλοστὸν μέρος τῆς μονάδος περιέχεται ἐν τῷ δεδομένῳ μεγέθει;

Παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος.

114. Πῶς καλοῦνται ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς ὁμοῦ λαμβανόμενοι;

Ὅροι τοῦ κλάσματος.

Π. χ., ἐν τῷ κλάσματι $\frac{13}{27}$ ἀριθμητὴς εἶναι ὁ ἀριθμὸς 13, παρονομαστὴς ὁ ἀριθμὸς 27, καὶ ὅροι τοῦ κλάσματος ὁ 13 καὶ 27.

115. Πῶς ἀπαγγέλλομεν κλάσμα τι;

Ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν του, ἔπειτα τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ ὡς τακτικὸν ἀριθμὸν.

Π. χ., τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ ἀπαγγέλλεται τρία τέταρτα. Τὸ κλάσμα $\frac{17}{29}$ ἀπαγγέλλεται δέκα ἐπτὰ εἰκοστὰ ἔννατα. Τὸ κλάσμα $\frac{196}{386}$ ἀπαγγέλλεται ἑκατὸν εἰκοσι πέντε τριακοσιουσὶ ὀγδοηκοσιὰ ἕκτα.

Ἐξαιρεῖται τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$, ὅπερ ἀπαγγέλλεται ἐν δεύτερον καὶ ἡμισυ.

ΠΕΡΙ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

116. Πότε κλάσμα τι εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος ;

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ᾖναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ του.

Παραδείγματος χάριν, τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{11}{11}$, $\frac{17}{18}$ εἶναι μικρότερα τῆς μονάδος, διότι ἑκάστου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ του· ὁ 5 μικρότερος τοῦ 7, ὁ 8 μικρότερος τοῦ 9, ὁ 3 μικρότερος τοῦ 11, ὁ 17 μικρότερος τοῦ 18.

117. Πότε κλάσμα τι εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα ;

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ᾖναι ἴσος μὲ τὸν παρονομαστήν του.

Παραδείγματος χάριν, ἑκάστου τῶν κλασμάτων $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{18}{18}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{2}{2}$ εἶναι ἴσον τῇ μονάδι, διότι ἑκάστου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ἴσος μὲ τὸν παρονομαστήν του.

118. Πότε κλάσμα τι εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος ;

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ᾖναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ του.

Παραδείγματος χάριν, ἑκάστου τῶν κλασμάτων $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{18}{7}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{133}{112}$ εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος, διότι ἑκάστου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ του· ὁ 3 μεγαλύτερος τοῦ 2, ὁ 5 μεγαλύτερος τοῦ 4, ὁ 18 μεγαλύτερος τοῦ 7, κτλ.

119. Ποῖοι ἀριθμοὶ καλοῦνται ΜΙΚΤΟΙ ;

Οἱ συγκεῖμενοι ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς $4 + \frac{2}{3}$ λέγεται μικτός, διότι σύγκειται ἐκ τοῦ ἀκεραίου 4 καὶ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$. Ὀσαύτως ὁ ἀριθμὸς $1 + \frac{6}{11}$ λέγεται μικτός, διότι σύγκειται ἐκ τοῦ ἀκεραίου 1 καὶ τοῦ κλάσματος $\frac{6}{11}$.

120. Πῶς τρέπομεν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν ;

Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ αὐτοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θέτομεν παρονομαστήν τὸν τοῦ κλάσματος. Ὅ οὕτω προκύπτων κλασματικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἴσος τῷ δεδομένῳ μικτῷ.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα τρέψωμεν τὸν μικτὸν $2 + \frac{6}{7}$ εἰς ἰσοδύνα-

μον κλασματικόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιόν του 2 ἐπὶ τὸν παρονομαστήν 7, εἰς τὸ γινόμενόν των 14 προσθέτομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ εὑρεθησόμενον ἄθροισμα 19 θέτομεν παρονομαστήν τὸν τοῦ κλάσματος, ἦτοι τὸν 7. Ὁ οὕτω προκύπτων κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{19}{7}$ εἶναι ἴσος τῷ δεδομένῳ μικτῷ.

Ὡσαύτως, ὁ μικτὸς $3 + \frac{1}{11}$ εἶναι ἴσος τῷ κλασματικῷ $\frac{34}{11}$. Ὁ μικτὸς $21 + \frac{8}{8}$ εἶναι ἴσος τῷ $\frac{173}{8}$, κτλ.

121. Ἀποδείξατέ μοι τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Ἄς υποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν $3 + \frac{4}{5}$ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν.

Ὁ ἀκέραιος 3 παριστᾷ τρεῖς μονάδας. Ἀλλὰ μία μονάς εἶναι ἴση μὲ πέντε πέμπτα. Ἄρα 3 μονάδες ἰσοῦνται μὲ δεκαπέντε πέμπτα. Ἐχομεν πρὸς τούτοις καὶ τέσσαρα πέμπτα. Λοιπὸν ὁ μικτὸς $3 + \frac{4}{5}$ περιέχει δεκαπέντε πέμπτα καὶ τέσσαρα πέμπτα τῆς μονάδος, ἦτοι τὸ ὅλον δεκαεννέα πέμπτα, ἐπομένως εἶναι ἴσος τῷ κλάσματι $\frac{19}{5}$, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα.

122. Ὅταν ἔχωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν μεγαλείτερον τῆς μονάδος, πῶς τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἰσοδύναμον μικτὸν;

Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, καὶ εἰς τὸ εὑρεθησόμενον πηλίκον προσθέτομεν κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως καὶ παρονομαστήν τὸν τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ. Ὁ οὕτως ἀποτελούμενος μικτὸς εἶναι ἴσος τῷ δεδομένῳ κλασματικῷ.

Παραδείγματος χάριν, πρὸς τροπὴν τοῦ κλασματικοῦ $\frac{17}{5}$ εἰς μικτὸν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ 17 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του 5, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 2. Εἰς τὸν 3 προσθέτομεν κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον 2 καὶ παρονομαστήν τὸν τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ, ἦτοι τὸν 5. Ὁ οὕτω προκύπτων μικτὸς $3 + \frac{2}{5}$ εἶναι ἴσος τῷ δεδομένῳ κλασματικῷ $\frac{17}{5}$. Διότι, ἐὰν τρέψωμεν τὸν μικτὸν $3 + \frac{2}{5}$ εἰς κλασματικόν, θέλομεν εὑρεῖ $\frac{17}{5}$.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου τρέποντες εἰς μικτοὺς τοὺς κλασματικοὺς

$$\frac{7}{63}, \quad \frac{127}{183}, \quad \frac{852}{2317}, \quad \frac{1008}{4023}$$

εὑρίσκομεν

$$1 + \frac{1}{9}, \quad 9 + \frac{10}{183}, \quad 3 + \frac{151}{2317}, \quad 2 + \frac{199}{4023}.$$

123. Ἐὰν διπλασιάσωμεν, τριπλασιάσωμεν, τετραπλασιάσωμεν κτλ. τὸν ἀριθμητὴν κλάσματός τινος, τὸ κλάσμα ποῖαν μεταβολὴν πάσχει;

Ἐάν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ διπλασιασθῇ, τὸ κλάσμα διπλασιάζεται· ἔάν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος τριπλασιασθῇ, τὸ κλάσμα τριπλασιάζεται, κτλ.

Παραδείγματος χάριν, ἐάν διπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν 3 τοῦ κλάσματος $\frac{3}{7}$ τὸ νέον κλάσμα $\frac{6}{7}$ εἶναι διπλάσιον τοῦ δεδομένου $\frac{3}{7}$. Ἐάν τριπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν του, τὸ νέον κλάσμα $\frac{9}{7}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ δεδομένου $\frac{3}{7}$, κτλ.

124. Διὰ τί ;

Διότι τὸ μὲν κλάσμα $\frac{3}{7}$ παριστᾷ μέγεθος περιέχον τρεῖς τὸ ἑβδόμου τῆς μονάδος, τὸ δὲ $\frac{6}{7}$ παριστᾷ μέγεθος περιέχον ἑξάκις τὸ ἑβδόμου τῆς μονάδος, ἐπομένως διπλάσιον τοῦ πρώτου. Λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{6}{7}$ εἶναι διπλάσιον τοῦ $\frac{3}{7}$.

Ὡσαύτως, τὸ κλάσμα $\frac{9}{7}$ παριστᾷ μέγεθος περιέχον ἐννεάκις τὸ ἑβδόμου τῆς μονάδος, ἐπομένως τριπλάσιον τοῦ παριστάντος μέγεθος περιέχον τρεῖς τὸ ἑβδόμου τῆς μονάδος. Λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{9}{7}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{3}{7}$.

125. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν κλάσματος τινος διὰ 2, 3, 4 κτλ., τὸ κλάσμα ποῖαν μεταβολὴν πάσχει ;

Ἐάν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν του διὰ 2, τὸ κλάσμα γίνεται τὸ ἥμισυ· ἐάν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν του διὰ 3, τὸ κλάσμα γίνεται τὸ τρίτον· ἐάν διὰ 4, τὸ τέταρτον, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Παραδείγματος χάριν, ἐάν διαιρέσωμεν διὰ 2 τὸν ἀριθμητὴν 12 τοῦ κλάσματος $\frac{12}{17}$, τὸ νέον κλάσμα $\frac{6}{17}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου $\frac{12}{17}$. Ἐάν διαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ 3, τὸ νέον κλάσμα $\frac{4}{17}$ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρώτου $\frac{12}{17}$. Διότι τὸ κλάσμα $\frac{4}{17}$ γίνεται ἐκ τοῦ $\frac{6}{17}$ διπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ 6. Λοιπὸν κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶναι διπλάσιον τοῦ $\frac{6}{17}$. Ἀντιστρόφως τὸ $\frac{6}{17}$ θέλει εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{12}{17}$.

Ὡσαύτως, τὸ κλάσμα $\frac{12}{17}$ γίνεται ἐκ τοῦ $\frac{4}{17}$ τριπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ 4. Λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{4}{17}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{12}{17}$. Ἀντιστρόφως τὸ $\frac{4}{17}$ θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{12}{17}$, κτλ.

126 Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν κλάσματος τινος ἐπὶ 2, 3, 4 κτλ., ποῖαν μεταβολὴν πάσχει τὸ κλάσμα ;

Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν του ἐπὶ 2, τὸ κλάσμα γίνεται τὸ ἥμισυ, ἥτοι δις μικρότερον· ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν του ἐπὶ 3, τὸ κλάσμα γίνεται τὸ τρίτον, ἥτοι τρεῖς μικρότερον, κτλ.

Παραδείγματος χάριν, ἐάν τοῦ κλάσματος $\frac{7}{10}$ πολλαπλασιάσωμεν τὸν

παρονομαστήν 5 ἐπὶ 2, τὸ νέον κλάσμα $\frac{7}{10}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{7}{5}$. Ἐὰν τοῦ αὐτοῦ κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν ἐπὶ 3, τὸ νέον κλάσμα $\frac{7}{15}$ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{7}{5}$.

127. Ἀποδείξατέ μοι τὰ ἀνωτέρω.

Διότι τὸ μὲν κλάσμα $\frac{7}{5}$ παριστᾷ μέγεθος περιέχον 7κις τὸ πέμπτου τῆς μονάδος, τὸ δὲ κλάσμα $\frac{7}{10}$ παριστᾷ μέγεθος περιέχον 7κις τὸ δέκατον τῆς μονάδος. Ἀλλ' ἐὰν ἕκκον πέμπτου τῆς μονάδος διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἡ μονὰς προφανῶς θέλει περιέχει 10 ἴσα μέρη, ἐν ἄλλαις λέξεσι, τὸ δέκατον τῆς μονάδος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πέμπτου. Λοιπὸν τὰ 7 δέκατα θέλουσιν εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 7 πέμπτων, τουτέστι τὸ κλάσμα $\frac{7}{10}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{7}{5}$.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ κλάσμα $\frac{7}{15}$ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{7}{5}$, διότι τὸ δέκατον πέμπτου τῆς μονάδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πέμπτου, ἐπομένως καὶ τὰ 7 δέκατα πέμπτα τῆς μονάδος θέλουσιν εἶναι τὸ τρίτον τῶν 7 πέμπτων.

128. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστήν κλάσματός τιнос διὰ 2, 3, 4 κτλ., ποῖαν μεταβολὴν πάσχει τὸ κλάσμα;

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστήν του διὰ 2, τὸ κλάσμα γίνεται διπλάσιον· ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστήν του διὰ 3, γίνεται τριπλάσιον, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$, ὅπερ εὐρίσκομεν διαιροῦντες τὸν παρονομαστήν 12 τοῦ κλάσματος $\frac{5}{12}$ διὰ 2, εἶναι διπλάσιον τοῦ $\frac{5}{12}$. Τὸ κλάσμα $\frac{5}{4}$, ὅπερ εὐρίσκομεν διαιροῦντες διὰ 3 τὸν παρονομαστήν 12 τοῦ $\frac{5}{12}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{5}{12}$ κτλ.

129. Διὰ τί;

Διότι, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ, τὸ κλάσμα $\frac{5}{12}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{5}{6}$. Λοιπὸν καὶ ἀντιστρόφως τὸ $\frac{5}{6}$ θέλει εἶναι διπλάσιον τοῦ $\frac{5}{12}$.

Ὁσαύτως, τὸ κλάσμα $\frac{5}{4}$ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{5}{12}$, διότι παράγεται ἐκ τούτου πολλαπλασιαζομένου τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ 4 ἐπὶ 3. Λοιπὸν καὶ ἀντιστρόφως τὸ κλάσμα $\frac{5}{12}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{5}{4}$.

130. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους κλάσματός τινος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ποῖαν μεταβολὴν πάσχει τὸ κλάσμα;

Οὐδεμίαν.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{7}{11}$ ἐπὶ 2 ἢ 3 ἢ 4 κτλ., τὰ νέα κλάσματα $\frac{14}{22}$, $\frac{21}{33}$, $\frac{28}{44}$, κτλ. θέλουσιν εἶναι ἴσα μὲ τὸ δεδομένον $\frac{7}{11}$.

Ὡσαύτως, ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{36}{48}$ διὰ 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ κτλ., τὰ προκύπτοντα κλάσματα $\frac{18}{24}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{9}{12}$, κτλ. θέλουσιν εἶναι ἴσα μὲ τὸ δεδομένον $\frac{36}{48}$.

131. Ἀποδείξατέ μοι τὰ ἀνωτέρω

Διότι, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος $\frac{7}{11}$ ἐπὶ 2, τὸ νέον κλάσμα $\frac{14}{11}$ γίνεται διπλάσιον τοῦ $\frac{7}{11}$. Ἐὰν τώρα πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{14}{11}$ ἐπὶ 2, τὸ νέον κλάσμα $\frac{14}{22}$ γίνεται τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{14}{11}$. Λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{7}{11}$ ἀφ' ἐνὸς ἐγένετο διπλάσιον καὶ ἀφ' ἑτέρου αὐτὸ τὸ διπλάσιον ἐγένετο τὸ ἥμισυ.

Ἄρα δὲν μετεβλήθη.

Ὡσαύτως τὸ κλάσμα $\frac{21}{33}$, ὅπερ εὐρίσκωμεν πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{7}{11}$ ἐπὶ 3, εἶναι ἴσον τῷ $\frac{7}{11}$. Διότι κατὰ τὰ προαποδειχθέντα τὸ $\frac{21}{11}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{7}{11}$ καὶ τὸ $\frac{21}{33}$ τὸ τρίτον τοῦ $\frac{21}{11}$. Ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{21}{33}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{7}{11}$.

Παρομοίως, τὸ κλάσμα $\frac{18}{24}$, ὅπερ εὐρίσκωμεν διαιροῦντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{36}{48}$ διὰ 2, εἶναι ἴσον τῷ $\frac{36}{48}$. Διότι, διαιρουμένου τοῦ ἀριθμητοῦ 36 διὰ 2, τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{18}{48}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{36}{48}$. Ἀλλὰ διαιρουμένου καὶ τοῦ παρονομαστοῦ 48 διὰ 2, τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{18}{24}$ εἶναι διπλάσιον τοῦ $\frac{18}{48}$. Λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{18}{24}$ ἀφ' ἐνὸς ἐγένετο τὸ ἥμισυ, καὶ ἀφ' ἑτέρου αὐτὸ τὸ ἥμισυ ἐδιπλασιάσθη. Ἄρα ἐμείνεν ἀμετέβλητον.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τὰ κλάσματα

$$\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}$$

εἶναι ἴσα τῷ κλάσματι $\frac{2}{3}$. Ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{3}, \frac{6}{9}, \frac{12}{18}, \frac{18}{27}$$

εἶναι ἴσα τῷ κλάσματι $\frac{2}{3}$.

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΙΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

132. Πότε ἀπλοποιούμεν κλάσμα τι;

Ὅταν εὐρίσκωμεν δεύτερον κλάσμα ἴσον μὲ τὸ δεδομένον καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους.

Παραδείγματος χάριν, δοθέντος τοῦ κλάσματος $\frac{36}{48}$, ἐὰν εὕρωμεν δεύτερον κλάσμα $\frac{18}{24}$, ἴσον τῷ δεδομένῳ καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους, τότε λέγομεν ὅτι τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{36}{48}$ ἠπλοποιήθη.

133. Πότε ἀνάγωμεν δοθὲν κλάσμα εἰς τὴν ἀπλοῦστατὴν αὐτοῦ μορφήν;

Ὅταν εὐρίσκωμεν ἕτερον κλάσμα, ἴσον μὲ τὸ δεδομένον καὶ μὴ δυνάμενον ν' ἀναχθῇ εἰς ἀπλουστέραν μορφήν.

Παραδείγματος χάριν, δοθέντος τοῦ κλάσματος $\frac{36}{48}$, ἐὰν εὕρωμεν ἕτερον κλάσμα $\frac{3}{4}$, ἴσον μὲ τὸ δεδομένον καὶ μὴ δυνάμενον νὰ ἀναχθῇ εἰς ἀπλουστέραν μορφήν, τότε λέγομεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{36}{48}$ ἤχθη εἰς τὴν ἀπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν $\frac{3}{4}$.

134. Πῶς ἀνάγομεν κλάσμα τι εἰς ἀπλουστέραν μορφήν καὶ πῶς εἰς τὴν ἀπλουστάτην;

Ἵνα ἀναγάγωμεν κλάσμα τι εἰς ἀπλουστέραν μορφήν, ἀρκεῖ προφανῶς νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους διὰ τινος κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{90}{45}$ διὰ 5, εὐρίσκομεν δεύτερον κλάσμα $\frac{6}{9}$, ἴσον μὲ τὸ δεδομένον καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους.

Ἵνα δὲ ἀναγάγωμεν κλάσμα τι εἰς τὴν ἀπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν, πρέπει νὰ εὕρωμεν κλάσμα, ἴσον μὲ τὸ δεδομένον καὶ μὴ δυνάμενον νὰ ἀναχθῇ εἰς ἀπλουστέραν μορφήν.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν, δοθέντος τοῦ κλάσματος $\frac{30}{45}$, εὕρωμεν ἕτερον κλάσμα $\frac{2}{3}$, ἴσον μὲ τὸ δεδομένον $\frac{30}{45}$ καὶ μὴ δυνάμενον νὰ ἀναχθῇ εἰς ἀπλουστέραν μορφήν, τότε λέγομεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{30}{45}$ ἤχθη εἰς τὴν ἀπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν.

Ὡσαύτως, δοθέντος τοῦ κλάσματος $\frac{84}{140}$, τὰ μὲν κλάσματα $\frac{42}{70}$, $\frac{21}{35}$, $\frac{14}{20}$, ἄτινα εἶναι ἴσα τῷ δεδομένῳ καὶ ἔχουσιν ὅρους μικροτέρους, παριστῶσιν ἀπλουστέρας αὐτοῦ μορφάς, τὸ δὲ κλάσμα $\frac{6}{5}$, ὅπερ εἶναι ἴσον τῷ δεδομένῳ $\frac{84}{140}$ καὶ δὲν ἐπιδέχεται οὐδεμίαν ἀπλοποίησιν, παριστᾷ τὴν ἀπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν.

135. Πῶς ἀπλοποιοῦμεν κλάσμα τι καὶ πῶς εὐρίσκομεν τὴν ἀπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν;

Ἵνα ἀπλοποιήσωμεν κλάσμα τι, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ τινος κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{28}{70}$ διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 2, τὸ κλάσμα γίνεται $\frac{14}{35}$ καὶ ἀπλοποιεῖται.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἀπλουστάτην κλάσματός τινος μορφήν, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{28}{70}$ διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 14, ὅστις εὐρί-

σκεται ὡς εἵπομεν ἐν τῇ παραγράφῳ 106, τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{2}{5}$ παριστᾷ τὴν ἀπλουστάτην τοῦ δεδομένου $\frac{28}{70}$ μορφήν.

436. Πῶς καλεῖται τὸ μὴ ἐπιδεκτικὸν οὐδεμιᾶς ἀπλοποιήσεως κλάσμα;

Κλάσμα ἀνάγωγον.

Παραδείγματος χάριν, τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{25}{29}$ λέγονται ἀνάγωγα, ὡς μὴ ἐπιδεκτικὰ οὐδεμιᾶς ἀπλοποιήσεως.

437. Ὄταν ἀνάγωγος κλάσμα τι εἰς τὴν ἀπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν εὗρωμεν παρονομαστήν τοῦ ἀναγώγου κλάσματος τὴν μονάδα, τότε μὲ τί εἶναι ἴσον τὸ δοθὲν κλάσμα;

Μὲ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ εὐρεθέντος ἀναγώγου κλάσματος.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἀναγάγωμεν τὸ κλάσμα $\frac{12}{4}$ εἰς τὴν ἀπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν, εὐρίσκομεν τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{3}{1}$, ὅπερ γράφομεν διὰ μόνου τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ 3.

Διότι τὸ κλάσμα $\frac{3}{1}$, σημαίνει ὅτι ἡ μονὰς ἐλήφθη τρεῖς, ἥτοι εἶναι ἴσον τῷ ἀκεραίῳ ἀριθμῷ 3.

Ἀντιστρόφως, πᾶς ἀκεραῖος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος κλάσματι ἔχοντι παρονομαστήν τὴν μονάδα. Οὕτως ὁ 5 εἶναι ἴσος τῷ κλάσματι $\frac{5}{1}$, ὁ 7 ἴσος τῷ κλάσματι $\frac{7}{1}$, ὁ 13 ἴσος τῷ κλάσματι $\frac{13}{1}$.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ Εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν

438. Πῶς φέρονται δύο κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν;

Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ δευτέρου, καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ πρώτου.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα φέρωμεν τὰ δύο κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους 3 καὶ 4 τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν παρονομαστήν 7 τοῦ δευτέρου κλάσματος, καὶ τοὺς δύο ὅρους 5 καὶ 7 τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν 4 τοῦ πρώτου. Οὕτω τὸ μὲν πρῶτον κλάσμα $\frac{3}{4}$ γίνεται $\frac{21}{28}$, τὸ δὲ δεύτερον $\frac{5}{7}$ γίνεται $\frac{20}{28}$, κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν 28 καὶ ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ πρῶτα. Τουτέστι, τὸ κλάσμα $\frac{21}{28}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{3}{4}$ (διότι ἐπολλαπλασιάσαμεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 7, ἐπομένως ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν μετεβλήθη), καὶ τὸ κλάσμα $\frac{20}{28}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{5}{7}$ (διότι ἐπολλαπλασιάσαμεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 4, ἐπομένως ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν μετεβλήθη).

Ἵσαύτως, τὰ δύο κλάσματα

$$\frac{6}{11}, \quad \frac{4}{9}$$

ἀναγόμενα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν γίνονται

$$\frac{84}{99}, \quad \frac{44}{99}$$

καὶ εὐκόλως παρατηρεῖ τις ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{84}{99}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{6}{11}$, τὸ δὲ κλάσμα $\frac{44}{99}$ ἴσον τῷ $\frac{4}{9}$.

139. Πῶς ἀνάγομεν τρία ἢ πλεότερα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν;

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἐκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν λοιπῶν κλασμάτων.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα ἀναγάγωμεν τὰ τρία κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους 2 καὶ 3 τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον 35 τῶν παρονομαστῶν 5 καὶ 7 τῶν ἄλλων κλασμάτων $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{6}{7}$, ἔπειτα τοὺς δύο ὅρους 4 καὶ 5 τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον 21 τῶν παρονομαστῶν 3 καὶ 7 τῶν ἄλλων κλασμάτων $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{6}{7}$, καὶ τελευταῖον τοὺς δύο ὅρους 6 καὶ 7 τοῦ κλάσματος $\frac{6}{7}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον 15 τῶν παρονομαστῶν 3 καὶ 5 τῶν ἄλλων κλασμάτων $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{5}$. Οὕτω τὸ πρῶτον κλάσμα $\frac{2}{3}$ γίνεται $\frac{70}{105}$, τὸ δευτερον $\frac{4}{5}$ γίνεται $\frac{84}{105}$ καὶ τὸ τρίτον $\frac{6}{7}$ γίνεται $\frac{90}{105}$, βλέπομεν δὲ ὅτι τὰ τρία νέα κλάσματα $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$ ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν 105 καὶ εἶναι ἀμυνθαίως ἴσα μὲ τὰ δεδομένα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$.

Ἵσαύτως, τὰ τρία κλάσματα

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{2}{9}$$

ἀναγόμενα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν γίνονται

$$\frac{86}{108}, \quad \frac{135}{108}, \quad \frac{24}{108}$$

Ἄν εἴχομεν νὰ φέρωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{3}$$

ἠθέλομεν, πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους ἐκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων, εὔρει τὰ κλάσματα

$$\frac{48}{120}, \quad \frac{60}{120}, \quad \frac{90}{120}, \quad \frac{40}{120}$$

ἅτινα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν 120 καὶ εἶναι ἀμυνθαίως ἴσα μὲ τὰ δεδομένα. Τουτέστι, τὸ κλάσμα $\frac{48}{120}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{2}{3}$, τὸ κλάσμα $\frac{60}{120}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{90}{120}$ εἶναι ἴσον τῷ κλάσματι $\frac{3}{4}$ καὶ τὸ $\frac{40}{120}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{1}{3}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Πῶς παρίσταται τὰ δύο τρίτα, τὸ ἥμισυ, τὸ τέταρτον, τὰ πέντε εἰκοστὰ πρῶτα, τὰ ἑνδεκά εκατομμυριοστὰ τέταρτα τῆς μο-
ράδος ;

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{21}, \frac{11}{1000004}\right).$$

II. Τί παριστᾷ τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$;

(Ὅτι ἡ μονὰς διηρέθη εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη καὶ τὸ μέγεθος, οὗτινος τὸ μέτρον παριστᾷ τὸ δοθέν κλάσμα $\frac{5}{7}$, περιέχει πεντάκις τὸ $\frac{1}{7}$ αὐτῆς.)

III. Τί παριστᾷ τὸ κλάσμα $\frac{9}{25}$;

(Ὅτι τὸ μέγεθος, οὗτινος τὸ μέτρον παριστᾷ, περιέχει ἑννεάκις τὸ $\frac{1}{25}$ τῆς μονάδος).

IV. Νὰ τραπῶσιν εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς οἱ μικτοὶ

$$1 + \frac{2}{3}, 5 + \frac{7}{11}, 8 + \frac{8}{22}, 101 + \frac{6}{11}, 53 + \frac{9}{101}.$$

$$\left(\frac{5}{3}, \frac{62}{11}, \frac{179}{22}, \frac{1117}{11}, \frac{5355}{101}\right).$$

V. Νὰ τραπῶσιν εἰς μικτοὺς οἱ κλασματικοὶ

$$\frac{5}{2}, \frac{13}{7}, \frac{108}{15}, \frac{825}{73}, \frac{10254}{325}.$$

$$\left(2 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{6}{7}, 7 + \frac{3}{15}, 11 + \frac{22}{73}, 31 + \frac{179}{325}\right).$$

VI. Νὰ εὐρεθῶσιν αἱ ἀπλούστεραι καὶ ἡ ἀπλουστάτη μορφή τοῦ κλάσματος $\frac{18}{30}$.

$$\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{3}{5}\right).$$

VII. Νὰ εὐρεθῶσιν αἱ ἀπλούστεραι καὶ ἡ ἀπλουστάτη μορφή τοῦ κλάσματος $\frac{60}{84}$.

$$\left(\frac{5}{7}, \frac{20}{28}, \frac{15}{21}, \frac{10}{14}, \frac{5}{7}\right).$$

VIII. Ποία εἶναι ἡ ἀπλουστάτη μορφή τῶν κλασμάτων $\frac{42}{540}, \frac{315}{6615}, \frac{180}{60}$;

$$\left(\frac{7}{90}, \frac{7}{15}, \frac{1}{3}, 3\right).$$

IX. Πῶς παρίσταται κλασματικῶς οἱ ἀκέραιοι 2, 5, 1, 11 ;

$$\left(\frac{2}{1}, \frac{5}{1}, \frac{1}{1}, \frac{11}{1}\right).$$

X. Νὰ ἀναχθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}, \frac{5}{11}$ εἰς τὸν αὐτὸν παρονο-
μαστήν.

$$\left(\frac{22}{33}, \frac{15}{33}\right).$$

XI. Νὰ ἀναχθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν τὰ κλάσματα

$$\frac{5}{11}, \frac{2}{5}, \frac{6}{7}.$$

$$\left(\frac{175}{385}, \frac{154}{385}, \frac{330}{385}\right).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ.

140. Πῶς προσθέτομεν δύο ἢ πλείότερα κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν ;

Προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν, καὶ ὑπὸ τὸ εὐρεθησόμενον ἄθροισμα γράφομεν παρονομαστήν τὸν κοινὸν τῶν δεδομένων κλασμάτων παρονομαστήν.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἄθροισμα $\frac{2}{3} + \frac{5}{3}$ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρονομαστήν κλασμάτων $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{5}{3}$ εὐρίσκουμεν, ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν 2 καὶ 5 καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμά των 7 γράψωμεν παρονομαστήν τὸν κοινὸν τῶν δεδομένων κλασμάτων παρονομαστήν 3. Τουτέστι τὸ ἄθροισμα $\frac{2}{3} + \frac{5}{3}$ εἶναι ἴσον τῷ κλάσματι $\frac{7}{3}$.

Ὡσαύτως, ἵνα εὐρώμεν τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{6}{7}$ τῶν κλασμάτων $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{6}{7}$, ἅτινα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν 1, 3, 6 καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμά των 10 γράφομεν παρονομαστήν τὸν κοινὸν τῶν δεδομένων κλασμάτων παρονομαστήν 7. Τουτέστι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι ἴσον τῷ κλάσματι $\frac{10}{7}$.

141. Διὰ τί οὕτως;

Ὁ λόγος τούτου εἶναι προφανής. Διότι $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{5}{3}$ τῆς μονάδος προστιθέμενα δίδουσι προφανῶς ἄθροισμα $\frac{7}{3}$ τῆς μονάδος. Ὡσαύτως $\frac{1}{7}$ καὶ $\frac{3}{7}$ καὶ $\frac{6}{7}$ τῆς μονάδος προστιθέμενα δίδουσι προφανῶς ἄθροισμα $\frac{10}{7}$ τῆς μονάδος.

142. Πῶς προσθέτομεν δύο ἢ πλείότερα κλάσματα διαφόρων παρονομαστῶν ;

Φέρομεν πρῶτον τὰ πρὸς πρόσθεσιν κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, καὶ ἔπειτα προσθέτομεν, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, τὰ τοῦ αὐτοῦ παρονομαστοῦ κλάσματα. Τὸ ἄθροισμα τῶν νέων κλασμάτων θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ζητούμενον.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα προσθέσωμεν τὰ δύο κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{7}$, φέρομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τῶν εὐρεθέντων κλασμάτων $\frac{14}{21}$ καὶ $\frac{12}{21}$ προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς 14 καὶ 12, καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 26 γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν 21.

Τουτέστι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν δύο κλασμάτων $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{7}$ εἶναι $\frac{20}{21}$.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{14}{21}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{2}{3}$ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{12}{21}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{4}{7}$, ἔπεται ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\frac{14}{21} + \frac{12}{21}$ θελεῖ εἶναι ἴσον τῷ ζητούμενῳ ἀθροίσματι $\frac{2}{3} + \frac{4}{7}$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $\frac{14}{21} + \frac{12}{21}$ εἶναι ἴσον τῷ κλάσματι $\frac{26}{21}$. Ἄρα θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{26}{21}$$

τοῦ σημείου = ἀπαγγελλομένου ἴσον καὶ σημαίνοντος ὅτι τὰ ἑκατέρωθεν αὐτοῦ κείμενα μέρη εἶναι ἴσα.

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{13}$, πρὸς εὑρεσιν τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν φέρομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, καὶ εὐρίσκομεν τὰ κλάσματα $\frac{65}{130}$, $\frac{78}{130}$, $\frac{110}{130}$, ἔπειτα προσθέτομεν τὰ τοῦ αὐτοῦ παρονομαστοῦ κλάσματα ὡς εἴπομεν προηγουμένως, καὶ εὐρίσκομεν ἄθροισμα $\frac{253}{130}$, ὅπερ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν δεδομένων κλασμάτων. Τουτέστι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{11}{13} = \frac{253}{130}$$

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου, ἂν εἴχομεν πρὸς πρόσθεσιν τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{9}{11}$, ἠθέλομεν εὑρεῖ ἄθροισμα τὸ κλάσμα $\frac{3819}{924}$.

143. Πῶς προσθέτομεν δύο ἢ πλείονες μικτοὺς;

Κατὰ δύο τρόπους.

Ἡ τρέπομεν πρῶτον τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς, καὶ προσθέτομεν ἔπειτα τὰ εὑρεθησόμενα κλάσματα,

Ἡ προσθέτομεν πρῶτον τοὺς ἀκεραίους τῶν δεδομένων μικτῶν, ἔπειτα τὰ κλάσματα αὐτῶν, καὶ τελευταῖον εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων προσθέτομεν τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα τῶν κλασμάτων.

Παραδείγματός χάριν, ἵνα προσθέσωμεν τοὺς μικτοὺς $2 + \frac{3}{4}$ καὶ $3 + \frac{1}{5}$ κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον, τρέπομεν αὐτοὺς πρῶτον εἰς κλασματικούς $\frac{11}{4}$, $\frac{16}{5}$, ἔπειτα προσθέτομεν τὰ εὑρεθέντα κλάσματα $\frac{11}{4}$ καὶ $\frac{16}{5}$, καὶ εὐρίσκομεν ἄθροισμα $\frac{119}{20}$ ἢ, ἐξαγομένων τῶν ἐν τῷ κλασματικῷ $\frac{119}{20}$ περιεχομένων ἀκεραίων μονάδων, $5 + \frac{19}{20}$.

Κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους 2 καὶ 3, καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{1}{5}$, ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμα 5 τῶν ἀκεραίων προσθέτομεν τὸ ἄθροισμα $\frac{19}{20}$ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{1}{5}$ καὶ εὐρίσκομεν τὸν μικτὸν ἀριθμὸν $5 + \frac{19}{20}$, ὅστις παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων.

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν πρὸς πρόσθεσιν τοὺς μικτοὺς $1 + \frac{2}{3}$, $4 + \frac{1}{2}$, $8 + \frac{5}{7}$, ἠθέλομεν κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον τρέψαι αὐτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους

μους κλασματικούς $\frac{5}{7}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{61}{7}$, καὶ ἔπειτα εὑρεῖ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\frac{625}{42}$
ἢ $14 + \frac{37}{42}$.

Κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον ἠθέλωμεν προσθέσει πρῶτον τοὺς ἀκεραῖ-
ους 1, 4 καὶ 8, ἔπειτα τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{7}$ καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα 13
τῶν ἀκεραίων προσθέσει τὸ ἄθροισμα $\frac{79}{42}$ τῶν κλασμάτων. Ἡθέλωμεν δὲ
εὑρεῖ καὶ οὕτω τὸ αὐτὸ ἄθροισμα $13 + \frac{79}{42}$ ἢ $14 + \frac{37}{42}$.

144. Ποῖος τῶν δύο ἀνωτέρω τρόπων εἶναι προτιμότερος ;

Ὁ δεύτερος, ὡς συντομώτερον ἐκτελούμενος.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

145. Πῶς ἀφαιροῦμεν ἀπὸ κλάσματος κλάσμα ἔχον τὸν αὐτὸν
παρονομαστήν ;

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου κλάσματος τὸν ἀριθ-
μητὴν τοῦ ἀφαιρετέου κλάσματος, καὶ εἰς τὴν εὑρεθησομένην διαφορὰν
δίδομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{13}{17}$ τὸ
κλάσμα $\frac{5}{17}$, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ 13 τοῦ μειωτέου κλάσμα-
τος $\frac{13}{17}$ τὸν ἀριθμητὴν 5 τοῦ ἀφαιρετέου κλάσματος $\frac{5}{17}$, καὶ εἰς τὴν εὑ-
ρεθησομένην διαφορὰν 8 δίδομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν 17. Ἡ ζη-
τούμενη λοιπὸν διαφορὰ θέλει εἶναι $\frac{8}{17}$, ἐν ἄλλαις λέξεσι, θέλωμεν ἔχει
τὴν ἰσότητα

$$\frac{13}{17} - \frac{5}{17} = \frac{13-5}{17} = \frac{8}{17}.$$

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{8}$ τὸ κλά-
σμα $\frac{3}{8}$, ἠθέλωμεν εὑρεῖ διαφορὰν $\frac{5-3}{8}$, ἢ $\frac{2}{8}$, ὅπερ παρίσταται συνήθως ὡς
ἔξῃς :

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

146. Διατί ἐκτελοῦμεν οὕτω τὴν ἀφαίρεσιν, ὅταν τὰ κλάσματα
ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν ;

Ὁ λόγος τούτου εἶναι προφανέστατος. Τὸ νὰ ἀφαιρέσωμεν π. χ. ἀπὸ
τοῦ κλάσματος $\frac{5}{8}$ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ σημαίνει νὰ ἐλαττώσωμεν τὰ πέντε ὀ-
γδοα κατὰ τρία ὀγδοα, καὶ πρὸς τοῦτο πρέπει προφανῶς ν' ἀφαιρέσω-
μεν τρία ἀπὸ πέντε, ἢ δὲ διαφορὰ αὐτῶν δύο παριστᾷ ὀγδοα, τοῦθ' ὀ-
περ ἀποδεικνύει τὸ ἀληθὲς τοῦ ἀνωτέρω κανόνος.

147. Πῶς ἀφαιροῦμεν ἀπὸ κλάσματος κλάσμα ἔχον διάφορον
παρονομαστήν ;

Φέρομεν πρῶτον τὰ δύο κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν,
καὶ ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὴν ἀφαίρεσιν ἐπὶ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρο-
νομαστήν κλασμάτων ὡς προεβρέθη.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{6}$ τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$, φέρομεν πρῶτον τὰ δύο κλάσματα $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{3}{7}$ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν 42, ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{35}{42}$ τὸ κλάσμα $\frac{18}{42}$ ὡς προείπομεν, καὶ εὐρίσκομεν διαφορὰν $\frac{17}{42}$.

Τὰ καθέκαστα τῆς πράξεως παρίστανται συνήθως ὡς ἑξῆς:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{7} = \frac{35}{42} - \frac{18}{42} = \frac{35-18}{42} = \frac{17}{42}.$$

Ὡσαύτως ἂν εἶχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{11}{17}$ τὸ κλάσμα $\frac{9}{20}$ ἠθέλομεν εὑρεῖ διαφορὰν $\frac{169}{340}$.

$$\frac{11}{17} - \frac{9}{20} = \frac{220}{340} - \frac{151}{340} = \frac{220-151}{340} = \frac{69}{340}.$$

148. Πῶς ἀφαιροῦμεν ἀπὸ δεδομένου ἀκεραίου δεδομένον κλάσμα;

Τρέπομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, ἔχοντα παρονομαστήν τὸν τοῦ δεδομένου κλάσματος παρονομαστήν, καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν ὡς προεῖρήθη.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου 5 τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$, τρέπομεν τὸν ἀκέραιον 5 εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν ἰσοδύναμον, καὶ εὐρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{35}{7}$, ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{35}{7}$ τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$ ὡς προείπομεν. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει

$$5 - \frac{3}{7} = \frac{35}{7} - \frac{3}{7} = \frac{35-3}{7} = \frac{32}{7}.$$

Ὡσαύτως, ἂν εἶχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου 1 τὸ κλάσμα $\frac{5}{9}$, ἠθέλομεν εὑρεῖ διαφορὰν $\frac{4}{9}$. Διότι ἔχομεν

$$1 - \frac{5}{9} = \frac{9}{9} - \frac{5}{9} = \frac{9-5}{9} = \frac{4}{9}.$$

149. Πῶς ἀφαιροῦμεν δεδομένον μικτὸν ἀπὸ μικτοῦ;

Κατὰ δύο τρόπους,

Ἡ τρέπομεν πρῶτον τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδύναμους κλασματικούς, καὶ ἐκτελοῦμεν ἔπειτα ἐπὶ τῶν εὐρεθησομένων κλασματικῶν τὴν ἀφαίρεσιν ὡς προείπομεν,

Ἡ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου τοῦ μειωτέου μικτοῦ τὸν ἀκέραιον τοῦ ἀφαιρετέου μικτοῦ, ἔπειτα ἀπὸ τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου μικτοῦ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου μικτοῦ, καὶ εἰς τὴν διαφορὰν τῶν ἀκεραίων προσθέτομεν καὶ τὴν διαφορὰν τῶν κλασμάτων.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $4\frac{6}{7}$ ἀφαιρέσωμεν τὸν μικτὸν $2\frac{3}{5}$, τρέπομεν κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδύναμους κλασματικούς $\frac{34}{7}$ καὶ $\frac{13}{5}$, ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{34}{7}$ τὸ κλάσμα $\frac{13}{5}$ ὡς προείπομεν.

Κατὰ τὸν δεῦτερον τρόπον ἀφαιροῦμεν πρῶτον ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου 4 τοῦ μειωτέου μικτοῦ $4\frac{6}{7}$ τὸν ἀκέραιον 2 τοῦ ἀφαιρετέου μικτοῦ

$2 + \frac{3}{5}$, ἔπειτα ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{6}{7}$ τοῦ μειωτέου μικτοῦ τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ τοῦ ἀφαιρετέου μικτοῦ, καὶ τελευταῖον προσθέτομεν εἰς τὴν διαφορὰν 2 τῶν ἀκεραίων 4 καὶ 2 τὴν διαφορὰν $\frac{9}{35}$ τῶν κλασμάτων $\frac{6}{7}$ καὶ $\frac{3}{5}$. Τὸ ἄθροισμα $2 + \frac{9}{35}$ θέλει παριστᾷ τὴν ζητούμενὴν διαφορὰν.

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $7 + \frac{2}{3}$ τὸν μικτὸν $5 + \frac{7}{11}$, ἠθέλομεν εὑρεῖ ἐκτελοῦντες τὴν πράξιν κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον διαφορὰν τὸ κλάσμα $\frac{6}{33}$, κατὰ δὲ τὸν δεῦτερον τρόπον ἠθέλομεν εὑρεῖ τὸν μικτὸν $2 + \frac{1}{33}$, καὶ βλέπομεν ὅτι ἡ κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον εὑρεθεῖσα διαφορὰ $\frac{6}{33}$ εἶναι ἴση τῷ μικτῷ $2 + \frac{1}{33}$, ὡς ἦτο ἐπόμενον.

150. Ποῖος τῶν δύο ἀνωτέρω τρόπων εἶναι προτιμότερος;

Ὁ δεῦτερος, ὡς συντομώτερον ἐκτελούμενος.

151. Ἐὰν συμβῇ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου μικτοῦ γὰ ἦναι μικρότερον τοῦ κλάσματος τοῦ ἀφαιρετέου μικτοῦ, τότε, ἐπειδὴ ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων δὲν εἶναι δυνατὴ, τί πράττομεν;

Αὐξάνομεν κατὰ μίαν μονάδα τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου μικτοῦ, καὶ τότε ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων εἶναι δυνατὴ, ἀλλ' ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ ζητούμενη διαφορὰ, αὐξάνομεν ὡσαύτως κατὰ μίαν μονάδα καὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ ἀφαιρετέου μικτοῦ.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ζητοῦμεν ν' ἀφαιρέσωμεν κατὰ τὸν δεῦτερον τρόπον ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $7 + \frac{1}{5}$ τὸν μικτὸν $4 + \frac{2}{3}$.

Ἐπειδὴ ἀπὸ $\frac{1}{5}$ δὲν ἀφαιροῦνται $\frac{2}{3}$ (διότι τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{5}$), αὐξάνομεν κατὰ μίαν μονάδα τὸ κλάσμα $\frac{1}{5}$ καὶ γίνεται $\frac{6}{5}$, ἔπειτα ἀπὸ τοῦ $\frac{6}{5}$ ἀφαιροῦμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ καὶ εὐρίσκομεν διαφορὰν $\frac{8}{15}$, ἣν προσθέτομεν οὐχὶ εἰς τὴν διαφορὰν 3 τῶν ἀκεραίων 7 καὶ 4, ἀλλ' εἰς τὴν διαφορὰν 2 τῶν ἀκεραίων 7 καὶ 5· τουτέστιν εἰς τὴν διαφορὰν ἣν εὐρίσκομεν ἀφοῦ πρῶτον αὐξήσωμεν καὶ τὸν ἀκέραιον 4 τοῦ ἀφαιρετέου μικτοῦ κατὰ μίαν μονάδα.

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $9 + \frac{2}{7}$ τὸν μικτὸν $3 + \frac{4}{5}$, ἠθέλομεν εἰπεῖ·

Ἐπειδὴ ἀπὸ $\frac{2}{7}$ δὲν ἀφαιροῦνται $\frac{4}{5}$, αὐξάνομεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$ κατὰ μίαν μονάδα, ἥτοι κατὰ $\frac{7}{7}$ καὶ γίνεται $\frac{9}{7}$.

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{9}{7}$ τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$, καὶ εὐρίσκομεν διαφορὰν $\frac{17}{35}$.

Ἐπειτα λέγομεν 3 καὶ 4...4 ἀπὸ 9...5. Λοιπὸν ἡ ζητούμενη διαφορὰ τῶν μικτῶν $9 + \frac{2}{7}$ καὶ $3 + \frac{4}{5}$ εἶναι $5 + \frac{17}{35}$.

Παρομοίως, ἂν εἴχομεν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $8 + \frac{3}{11}$ τὸν μικτὸν $2 + \frac{5}{7}$, ἠθέλομεν εἶπει·

Ἐπειδὴ ἀπὸ $\frac{5}{11}$ δὲν ἀφαιροῦνται $\frac{5}{7}$, αὐξάνομεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{11}$ κατὰ μίαν μονάδα καὶ γίνεται $\frac{4}{11}$.

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{14}{11}$ τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ καὶ εὐρίσκομεν διαφορὰν $\frac{4}{77}$.

Ἐπειτα λέγομεν 2 καὶ 1...3 ἀπὸ 8...5. Λοιπὸν ἡ ζητούμενη διαφορὰ τῶν μικτῶν $8 + \frac{3}{11}$ καὶ $2 + \frac{5}{7}$ εἶναι $5 + \frac{4}{77}$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

152. Πῶς πολλαπλασιάζομεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον ;

Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, καὶ εἰς τὸ εὐρεθιζόμενον γινόμενον δίδομεν παρονομαστὴν τὸν τοῦ δεδομένου κλάσματος.

Π. χ., ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ ἐπὶ 3, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ 3, καὶ εἰς τὸ γινόμενόν των 6 δίδομεν παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος 5. Ὡστε ἔχομεν

$$\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}.$$

Ὡσαύτως ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{11}$ ἐπὶ 8, ἠθέλομεν εὔρει οὕτω τὸ γινόμενον $\frac{56}{11}$.

153. Ἀποδείξατέ μοι τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητοῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ κλάσματος $\frac{7}{9}$ ἐπὶ 4. Κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου $\frac{7}{9}$, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστής 4 ἐσχηματίσθῃ ἐκ τῆς μονάδος. Ἄλλ' ὁ 4 ἐσχηματίσθῃ ἐκ τῆς μονάδος προστεθείσης ταύτης τετράκις εἰς ἑαυτήν. Λοιπὸν καὶ τὸ ζητούμενον γινόμενον πρέπει νὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἀφοῦ αὗτος ἐπαυληθῇ τετράκις, ἥτοι ἐὰν εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα

$$\frac{7}{9} + \frac{7}{9} + \frac{7}{9} + \frac{7}{9}.$$

Ἀλλὰ τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα εἶναι ἴσον τῷ κλάσματι $\frac{7+7+7+7}{9}$

ἢ τῷ $\frac{7 \times 4}{9}$. Λοιπὸν, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{9}$ ἐπὶ 4, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ 7 ἐπὶ 4, καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον αὐτῶν 7×4 νὰ γράψωμεν παρονομαστὴν τὸν παρονομαστὴν 9 τοῦ πολλαπλασιαστέου κλάσματος $\frac{7}{9}$.

154. Ἐὰν ὁ παρονομαστής τοῦ πολλαπλασιαζομένου κλάσμα-

τος ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πῶς ἄλλως εὐρίσκουμεν τὸ ζητούμενον γινόμενον;

Διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀκεραίου, καὶ γράφομεν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον παρονομαστὴν ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν.

Π.χ., ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ ἐπὶ 4, ἐπειδὴ ὁ 8 διαιρεῖται διὰ 4, διαιροῦμεν τὸν μὲν διὰ τοῦ 8, καὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 2 γράφομεν παρονομαστὴν ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν 3. Οὕτως εὐρίσκομεν

$$\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{2}.$$

Διότι κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{3}{8}$ ἐπὶ 4 ἦθελεν εἶναι $\frac{12}{8}$ ἢ $\frac{3}{2}$, καθισταμένου τοῦ κλάσματος $\frac{12}{8}$ ἀπλουστεροῦ διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ διὰ 4, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸν προηγούμενον κανόνα.

Ὡσαύτως, τὸ γινόμενον τοῦ κλάσματος $\frac{3}{28}$ ἐπὶ 7 εἶναι $\frac{3}{4}$. Τὸ γινόμενον τοῦ κλάσματος $\frac{4}{18}$ ἐπὶ 5 εἶναι $\frac{4}{9}$.

155. Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀκέραιοι ἐπὶ κλάσμα;

Ὅπως καὶ κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον.

Παραδείγματος χάριν, πρὸς εὑρεσιν τοῦ γινομένου τοῦ ἀκεραίου 7 ἐπὶ $\frac{3}{14}$, πολλαπλασιάζομεν τὸν 7 ἐπὶ 3, καὶ εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν 21 δίδομεν παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος 14, καὶ εὐρίσκομεν οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{21}{14}$. Ἡ διαιροῦμεν, ἐπειδὴ διαιρεῖται, τὸν 14 διὰ 7, καὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 2 γράφομεν ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν 3. Οὕτως εὐρίσκομεν $\frac{3}{2}$, ὅπερ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{3}{14}$.

156. Πῶς ἀποδεικνύεται ὁ ἀνωτέρω δοθεὶς κανὼν;

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ $\frac{2}{3}$. Κατὰ τὸν ὀρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον πρέπει νὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 5, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστής $\frac{2}{3}$ ἐσχηματίσθῃ ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλ' ὁ $\frac{2}{3}$ ἐσχηματίσθῃ ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ ἐπανελήφθῃ δις τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῆς. Λοιπὸν καὶ τὸ γινόμενον πρέπει νὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 5, ἀφοῦ ἐπαναληφθῇ δις τὸ τρίτον αὐτοῦ. Ἀλλὰ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ παραγράφῳ 126 τὸ τρίτον τοῦ 5 ἢ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{1}$ εἶναι $\frac{5}{3}$, καὶ τὸ $\frac{5}{3}$ ἐπαναλαμβανόμενον δις γίνεται $\frac{5 \times 2}{3}$ ἢ $\frac{10}{3}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ὁ ἀκέραιος 5 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ

τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$, ὅπως τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 5.

157. Πῶς πολλαπλασιάζομεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα;

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς ἀριθμητὰς τῶν δεδομένων κλάσμάτων, ἔπειτα τοὺς παρονομαστὰς αὐτῶν, καὶ σχηματίζομεν κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ ἐπὶ τὸ $\frac{3}{4}$, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς ἀριθμητὰς τῶν 5 καὶ 3, ἔπειτα τοὺς παρονομαστὰς τῶν 7 καὶ 4, καὶ σχηματίζομεν κλάσμα $\frac{15}{28}$, ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον 15 τῶν ἀριθμητῶν 5 καὶ 3, καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον 28 τῶν παρονομαστῶν 7 καὶ 4.

Ὡσαύτως, τὸ γινόμενον τοῦ κλάσματος $\frac{8}{9}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{7}{11}$ εἶναι $\frac{56}{99}$. Τὸ γινόμενον τοῦ κλάσματος $\frac{5}{8}$ ἐπὶ $\frac{1}{9}$ εἶναι $\frac{5}{72}$. Τὸ γινόμενον τοῦ κλάσματος $\frac{1}{20}$ ἐπὶ $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{3}{100}$ ἢ $\frac{1}{33\frac{1}{3}}$.

158. Ἀποδείξατέ μοι τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Καὶ ὁ ἀνωτέρω κανὼν στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἴνα πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, πρέπει κατὰ τὸν ὁρισμὸν νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου $\frac{5}{7}$, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς $\frac{3}{4}$ ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλ' ὁ πολλαπλασιαστὴς $\frac{3}{4}$ ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ ἐλήφθη δις τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς. Λοιπὸν πρὸς εὑρεσιν τοῦ ζητούμενου γινομένου πρέπει νὰ λάβωμεν δις τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ $\frac{5}{7}$. Ἀλλὰ, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ παραγράφῳ 126, τὸ τρίτον τοῦ $\frac{5}{7}$ εἶναι $\frac{5}{21}$, τὸ δὲ $\frac{5}{21}$ ἐπαναλαμβάνεται δις, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2. Λοιπὸν τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ κλάσματος $\frac{5}{7}$ ἐπὶ τὸ $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{10}{28}$, καὶ βλέπομεν ὅτι ἔχει ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον 10 τῶν ἀριθμητῶν 5 καὶ 2 καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον 28 τῶν παρονομαστῶν 7 καὶ 4.

159. Πῶς πολλαπλασιάζομεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον;

Τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ εὑρεθησόμενον κλάσμα ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ὡς εἴπομεν ἐν τῇ παραγράφῳ 152.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν μικτὸν $2 + \frac{3}{8}$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 4, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν $\frac{19}{8}$, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ κλάσμα $\frac{19}{8}$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 4. Εὐρίσκομεν οὕτω γινόμενον $\frac{38}{2}$ ἢ 19 .

Ὡσαύτως, τὸ γινόμενον τοῦ μικτοῦ $3 + \frac{7}{9}$ ἐπὶ 8 εἶναι $\frac{374}{9}$ ἢ $41 + \frac{4}{9}$. Τὸ γινόμενον τοῦ μικτοῦ $1 + \frac{3}{7}$ ἐπὶ 11 εἶναι $\frac{140}{7}$ ἢ 20 .

160. Πῶς πολλαπλασιάζομεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα;

Τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν κλάσμα ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ὡς εἴπομεν ἐν τῇ παραγράφῳ 152.

ζομεν τὸ εὐρεθσόμενον κλάσμα ἐπὶ τὸ δοθὲν κλάσμα ὡς εἵπομεν ἐν τῇ παραγράφῳ 157.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν μικτὸν $2 + \frac{7}{11}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ εὐρεθὲν κλάσμα $\frac{30}{11}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$. Εὐρίσκομεν οὕτω γινόμενον $\frac{87}{44}$, ἢ $1 + \frac{43}{44}$.

Ὡσαύτως τὸ γινόμενον τοῦ μικτοῦ $4 + \frac{3}{7}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ εἶναι $\frac{155}{48}$, ἢ $3 + \frac{30}{48}$. Τὸ γινόμενον τοῦ μικτοῦ $7 + \frac{1}{5}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{11}$ εἶναι $\frac{108}{55}$, ἢ $1 + \frac{53}{55}$.

161. Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀκέραιον ἢ κλάσμα ἐπὶ μικτὸν;

Τρέπομεν πρῶτον τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἢ τὸ δοθὲν κλάσμα ἐπὶ τὸν εὐρεθσόμενον κλασματικόν ὡς προείπομεν.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον 8 ἐπὶ τὸν μικτὸν $2 + \frac{1}{5}$, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν $\frac{11}{5}$, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν 8 ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν κλάσμα $\frac{11}{5}$. Εὐρίσκομεν οὕτω γινόμενον $\frac{88}{5}$, ἢ $17 + \frac{3}{5}$.

Ὡσαύτως, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$ ἐπὶ τὸν μικτὸν $4 + \frac{5}{6}$, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν $\frac{29}{6}$, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$ ἐπὶ τὸν εὐρεθέντα κλασματικόν $\frac{29}{6}$. Εὐρίσκομεν οὕτω γινόμενον $\frac{87}{42}$, ἢ $2 + \frac{3}{14}$, ἢ $2 + \frac{1}{4}$.

162. Πῶς πολλαπλασιάζομεν μικτὸν ἐπὶ μικτὸν;

Τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδύναμους κλασματικούς, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὰ εὐρεθσόμενα κλάσματα ὡς εἵπομεν ἐν τῇ παραγράφῳ 157.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν μικτὸν $1 + \frac{2}{7}$ ἐπὶ τὸν μικτὸν $3 + \frac{1}{4}$, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο εἰς κλασματικούς, καὶ πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὰ εὐρεθσόμενα κλάσματα $\frac{9}{7}$ καὶ $\frac{13}{4}$. Εὐρίσκομεν οὕτω γινόμενον τὸ κλάσμα $\frac{117}{28}$, ἢ $4 + \frac{5}{28}$.

Ὡσαύτως, τὸ γινόμενον τοῦ μικτοῦ $5 + \frac{1}{7}$ ἐπὶ τὸν μικτὸν $1 + \frac{3}{8}$ εἶναι $\frac{399}{56}$, ἢ $7 + \frac{4}{56}$, ἢ $7 + \frac{1}{14}$. Τὸ γινόμενον τοῦ μικτοῦ $8 + \frac{7}{12}$ ἐπὶ τὸν μικτὸν $3 + \frac{2}{7}$ εἶναι $\frac{2389}{84}$, ἢ $28 + \frac{17}{84}$.

ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΠΛΕΙΟΤΕΡΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

163. Τί καλεῖται γινόμενον πλειοτέρων κλασμάτων;

Τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸ πρῶτον κλά-

σμα ἐπὶ τὸ δεύτερον, τὸ εὐρεθσόμενον γινόμενον ἐπὶ τὸ τρίτον, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸ τέταρτον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{7}{8} \times \frac{1}{6}$ παριστᾷ τὸ ἐξαγόμενον $\frac{56}{720}$, ὅπερ εὐρίσκωμεν πολλαπλασιάζοντες τὸ πρῶτον κλάσμα $\frac{2}{3}$ ἐπὶ τὸ δεύτερον $\frac{4}{5}$, τὸ εὐρεθὲν γινόμενον $\frac{8}{15}$ ἐπὶ τὸ τρίτον $\frac{7}{8}$, τὸ γινόμενον αὐτῶν $\frac{56}{120}$ ἐπὶ τὸ τέταρτον $\frac{1}{6}$. Εὐρίσκωμεν οὕτω γινόμενον τὸ κλάσμα $\frac{56}{720}$, ἢ $\frac{7}{90}$.

Ὡσαύτως, τὸ γινόμενον $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{8}{1} \times \frac{7}{4}$ παριστᾷ τὸ ἐξαγόμενον $\frac{21}{5}$, ὅπερ εὐρίσκωμεν πολλαπλασιάζοντες τὸ πρῶτον κλάσμα $\frac{1}{2}$ ἐπὶ τὸ δεύτερον, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸ τρίτον, καὶ τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸ τέταρτον. Εὐρίσκωμεν οὕτω γινόμενον τὸ κλάσμα $\frac{168}{40}$, ἢ $\frac{21}{5}$, ἢ $4 + \frac{1}{5}$.

164. "Οταν μᾶς εἴπῃ τις νὰ εὕρωμεν, παραδείγματος χάριν, ΤΑ $\frac{2}{3}$ ΤΟΥ 8, ἢ ΤΩΝ $\frac{5}{7}$, ἢ ΤΟΥ μικτοῦ $4 + \frac{1}{7}$, ποῖαν πράξιν θὰ ἐκτελέσωμεν;

Πολλαπλασιασμόν. Τουτέστι θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 8 ἐπὶ $\frac{2}{3}$, ἵνα εὕρωμεν τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 8. Ὡσαύτως, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ $\frac{5}{7}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$, ἵνα εὕρωμεν τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$. Παρομοίως, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μικτὸν $4 + \frac{1}{7}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$, ἵνα εὕρωμεν τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μικτοῦ $4 + \frac{1}{7}$.

165. Διὰ τί πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν πολλαπλασιασμόν καὶ ὄχι διαιρέσειν, ὡς ἐκ πρώτης ὀψευς φαίνεται;

Διότι τὸ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 8, σημαίνει προφανῶς νὰ σχηματίσωμεν ἐκ τοῦ 8 τρίτον ἀριθμόν, ὅπως τὰ $\frac{2}{3}$ ἐσχηματίσθησαν ἐκ τῆς μονάδος, ὅπερ εὐρίσκεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὡσαύτως, τὸ νὰ εὕρωμεν τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$ σημαίνει νὰ σχηματίσωμεν ἐκ τοῦ $\frac{5}{7}$ τρίτον ἀριθμόν, ὅπως τὰ $\frac{2}{3}$ ἐσχηματίσθησαν ἐκ τῆς μονάδος. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ἡ ἐκτελεστέα πρὸς τοῦτο πράξις πρέπει νὰ ᾖ πολλαπλασιασμός καὶ ὄχι διαιρέσις.

166. "Οταν μᾶς εἴπῃ τις νὰ εὕρωμεν π. χ. ΤΑ $\frac{5}{6}$ ΤΩΝ $\frac{2}{7}$ ΤΟΥ 11, τί θέλομεν πράξει πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου;

Πρέπει προφανῶς, κατὰ τὰ προλεχθέντα, νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ 11, καὶ ἔπειτα τὰ $\frac{5}{6}$ τῶν εὐρεθέντων $\frac{2}{7}$ τοῦ 11. Τουτέστι νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 11 ἐπὶ $\frac{2}{7}$, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν $\frac{22}{7}$ ἐπὶ $\frac{5}{6}$. Εὐρίσκωμεν οὕτω $\frac{110}{21}$.

Ὡσαύτως, τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{6}{9}$ τῶν $\frac{8}{15}$ εὐρίσκεται, ἐὰν σχηματισθῇ τὸ γινόμενον $\frac{8}{15} \times \frac{6}{9} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ.

167. Πῶς διαιροῦμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου ;

Κατὰ δύο τρόπους·

Ἡ πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκεραῖον, ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἐὰν ᾗται διαιρετός.

Παραδείγματος χάριν, πρὸς εὑρεσιν τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ κλάσματος $\frac{6}{5}$ διὰ 3, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστήν αὐτοῦ 5 ἐπὶ 3, καὶ εὐρίσκομεν $\frac{6}{15}$, ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ 6, ἐπειδὴ οὗτος εἶναι διαιρετός, διὰ 3 καὶ εὐρίσκομεν ἐξαγόμενον τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$.

Ἐσαύτως, ἵνα διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{8}{13}$ διὰ 4, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστήν τοῦ 13 ἐπὶ 4, ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ 8 διὰ 4. Εὐρίσκομεν οὕτω, πολλαπλασιάζοντες μὲν τὸν παρονομαστήν, διὰ πηλίκον τὸ κλάσμα $\frac{8}{52}$, διαιροῦντες δὲ τὸν ἀριθμητὴν, τὸ κλάσμα $\frac{2}{13}$, ὅπερ προφανῶς εἶναι ἴσον τῷ $\frac{8}{52}$.

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κλάσματος $\frac{7}{8}$ διὰ 5 εἶναι κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα $\frac{7}{40}$. Ἐσαύτως τὰ πηλίκια τῆς διαιρέσεως τοῦ κλάσματος $\frac{11}{17}$ διὰ 2, 7, 11 εἶναι $\frac{11}{34}$, $\frac{11}{119}$, $\frac{11}{187}$.

168. Ἀποδείξατέ μοι τὸν ἀνωτέρω κανόνα

Τὸ ζητούμενον πηλίκον, κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς διαιρέσεως, πρέπει νὰ ᾖναι τοιοῦτον, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ παράγῃ τὸν διαιρετόν. Ἀλλ' εὐκόλως παρατηρεῖ πᾶς τις ὅτι, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν τὸν παρονομαστήν κλάσματός τινος ἐπὶ τινὰ ἀριθμόν, εὐρίσκομεν δεύτερον κλάσμα, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν δίδει τὸ πρῶτον κλάσμα. Ἐσαύτως, ὅταν διαιρῶμεν τὸν ἀριθμητὴν κλάσματός τινος διὰ τινος ἀριθμοῦ, εὐρίσκομεν δεύτερον κλάσμα, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν παράγει τὸ πρῶτον κλάσμα.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν τοῦ κλάσματος $\frac{5}{6}$ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν ἐπὶ 3, σχηματίζομεν τὸ κλάσμα $\frac{5}{18}$, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ 3 εἶναι $\frac{15}{18}$ ἢ $\frac{5}{6}$, τουτέστι τὸ πρῶτον κλάσμα. Λοιπὸν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κλάσματος $\frac{5}{6}$ διὰ 3 εἶναι $\frac{5}{18}$, ὅπερ εὐρίσκεται ὡς προείπομεν.

Ἐσαύτως, ἐὰν τοῦ κλάσματος $\frac{8}{11}$ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ 4,

εὐρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{11}$, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ 4 εἶναι τὸ δοθέν κλάσμα $\frac{8}{11}$. Λοιπὸν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κλάσματος $\frac{8}{11}$ διὰ 4 εἶναι $\frac{2}{11}$, ὅπερ εὐρίσκεται ὡς προείπομεν.

169. Πῶς διαιροῦμεν δεδομένον ἀκέραιον διὰ κλάσματος;

Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος, καὶ διαιροῦμεν τὸ εὐρεθησόμενον γινόμενον διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δεδομένου κλάσματος.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου 7 διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{8}$, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον 7 ἐπὶ τὸν παρονομαστήν 8, καὶ διαιροῦμεν τὸ εὐρεθὲν γινόμενον 56 διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ 5. Εὐρίσκομεν οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{56}{5}$, ὅπερ παριστᾷ τὸ ζητούμενον πηλίκον· διότι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{5}{8}$ εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{56 \times 5}{40}$, ἢ τὸ $\frac{7}{1}$, ἢ ὁ διαιρετέος 7.

Ὡσαύτως, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 11 διὰ $\frac{11}{10}$ εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{11 \times 19}{45}$, διότι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{10}{11}$ εἶναι

$$\frac{11 \times 19 \times 15}{15 \times 19} \text{ ἢ } \frac{11}{1}, \text{ ἢ ὁ διαιρετέος } 11.$$

170. Πῶς διαιροῦμεν κλάσμα διὰ κλάσματος;

Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρετέου κλάσματος ἐπὶ τὴν παρονομαστήν τοῦ διαιρέτου, καὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ εὐρεθησομένου νέου κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρέτου.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ διὰ τοῦ $\frac{3}{7}$, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν 2 τοῦ διαιρετέου κλάσματος $\frac{2}{3}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστήν 7 τοῦ διαιρέτου $\frac{3}{7}$, καὶ τὸν παρονομαστήν 3 τοῦ νέου κλάσματος $\frac{14}{3}$ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν 5 τοῦ διαιρέτου. Εὐρίσκομεν οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{14}{15}$, ὅπερ παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{2}{3}$ διὰ τοῦ $\frac{3}{7}$. Διότι τὸ γινόμενον $\frac{14}{15} \times \frac{3}{7}$ τοῦ πηλίκου $\frac{14}{15}$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{7}$ δίδει τὸν διαιρετέον $\frac{2}{3}$.

Ὡσαύτως, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κλάσματος $\frac{8}{11}$ διὰ τοῦ $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{32}{33}$, διότι τὸ γινόμενον $\frac{32}{33} \times \frac{3}{4}$ εἶναι ἴσον τῷ διαιρετέῳ $\frac{8}{11}$.

171. Πῶς ἐκθέτομεν συντομώτερον τοὺς δύο ἀνωτέρω κανόνας;

Λέγοντες ὅτι ἀκέραιος ἢ κλάσμα διαιρεῖται διὰ κλάσματος, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον ἢ τὸ κλάσμα ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντεστραμμένον.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα διαιρέσωμεν τὸν ἀκέραιον 5 ἢ τὸ κλάσμα $\frac{5}{3}$ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{7}{6}$, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον 5 ἢ

τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{6}{7}$, ὅπερ εἶναι τὸ δοθὲν $\frac{7}{8}$ ἔχον ἀντεστραμμένους τοὺς ὄρους. Εὐρίσκομεν δὲ οὕτω τὰ αὐτὰ πηλίκια $\frac{30}{7}$ καὶ $\frac{19}{21}$, ἅτινα καὶ ἐφαρμόζοντες τοὺς ἀνωτέρω κανόνας.

172. Πῶς διαιροῦμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου ἢ διὰ κλάσματος;

Τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ διαιροῦμεν τὸν εὐρεθιζόμενον κλασματικὸν διὰ τοῦ ἀκεραίου ἢ διὰ τοῦ κλάσματος κατὰ τοὺς ἀνωτέρω δοθέντας κανόνας.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα διαιρέσωμεν τὸν μικτὸν $2 + \frac{1}{5}$ διὰ τοῦ ἀκεραίου 3 ἢ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{4}{7}$, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ διαιροῦμεν τὸν εὐρεθέντα κλασματικόν $\frac{11}{5}$ διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ $\frac{4}{7}$. Εὐρίσκομεν δὲ οὕτω τὰ πηλίκια $\frac{11}{15}$, $\frac{77}{20}$.

Ὡσαύτως, τὰ πηλίκια τῆς διαιρέσεως τοῦ μικτοῦ $3 + \frac{2}{5}$ διὰ 7, $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{11}$ εἶναι $\frac{17}{35}$, $\frac{51}{105}$, $\frac{187}{30}$.

173. Πῶς διαιροῦμεν ἀκέραιον ἢ κλάσμα διὰ μικτοῦ;

Τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ διαιροῦμεν τὸν ἀκέραιον ἢ τὸ κλάσμα διὰ τοῦ εὐρεθισομένου κλασματικοῦ ὡς προεῖρήθη.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα διαιρέσωμεν τὸν ἀκέραιον 7 ἢ τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ διὰ τοῦ μικτοῦ $1 + \frac{2}{3}$, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν $\frac{5}{3}$, καὶ διαιροῦμεν τὸν ἀκέραιον 7 ἢ τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ διὰ τοῦ εὐρεθέντος κλασματικοῦ $\frac{5}{3}$, ὡς προείπομεν. Εὐρίσκομεν δὲ οὕτω τὰ πηλίκια $\frac{21}{5}$ καὶ $\frac{21}{40}$.

174. Πῶς διαιροῦμεν δεδομένον μικτὸν διὰ μικτοῦ;

Τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδύναμους κλασματικούς, καὶ διαιροῦμεν τοὺς εὐρεθισομένους κλασματικούς, ὡς διαιροῦμεν κλάσμα διὰ κλάσματος (170).

Παραδείγματος χάριν, ἵνα διαιρέσωμεν τὸν μικτὸν $2 + \frac{1}{3}$ διὰ τοῦ μικτοῦ $3 + \frac{5}{7}$, τρέπομεν ἀμφοτέρους εἰς ἰσοδύναμους κλασματικούς $\frac{7}{3}$, $\frac{26}{7}$ καὶ διαιροῦμεν τὸν πρῶτον $\frac{7}{3}$ διὰ τοῦ δευτέρου $\frac{26}{7}$. Εὐρίσκομεν οὕτω $\frac{49}{26}$, ὅπερ παριστᾷ τὸ πηλίκιον τῆς διαιρέσεως τοῦ μικτοῦ $2 + \frac{1}{3}$ διὰ τοῦ μικτοῦ $3 + \frac{5}{7}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Ποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{17}{7}$, $\frac{9}{7}$;

$$(\frac{38}{7} \text{ ἢ } 4 + \frac{4}{7}).$$

II. Ποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{11}$;

$$(\frac{487}{231} \text{ ἢ } 2 + \frac{25}{231}).$$

III. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν μικτῶν $2 + \frac{5}{6}$, $3 + \frac{4}{9}$, $4 + \frac{1}{2}$.
 $(7 + \frac{7}{9})$

IV. Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{11}$ τὸ κλάσμα $\frac{3}{11}$.
 $(\frac{2}{11})$

V. Νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $5 + \frac{2}{7}$ τὰ κλάσματα $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{11}$ καὶ οἱ μικτοὶ $3 + \frac{2}{5}$, $4 + \frac{1}{11}$, $4 + \frac{5}{7}$.
 $(\frac{298}{63}, \frac{97}{21}, \frac{157}{35}, \frac{365}{77}, 4 + \frac{15}{17}, 3 + \frac{3}{7})$

VI. Ποῖα τὰ γινόμενα τοῦ κλάσματος $\frac{7}{12}$ ἐπὶ τοὺς ἀκεραίους 2, 3, 5, 6 καὶ ἐπὶ τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{8}{11}$;
 $(\frac{7}{9}, \frac{7}{4}, \frac{35}{12}, \frac{7}{2}, \frac{7}{20}, \frac{1}{6}, \frac{14}{33})$

VII. Ποῖα τὰ γινόμενα τοῦ ἀκεραίου 11 ἐπὶ τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{8}{31}$ καὶ ἐπὶ τοὺς μικτοὺς $2 + \frac{1}{3}$, $3 + \frac{5}{11}$, $8 + \frac{2}{7}$;
 $(\frac{22}{3}, 5, \frac{88}{13}, \frac{77}{3}, 38, \frac{638}{7})$

VIII. Ποῖα τὰ γινόμενα τοῦ μικτοῦ $2 + \frac{3}{5}$ ἐπὶ τοὺς ἀκεραίους 3, 7, ἐπὶ τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$ καὶ ἐπὶ τὸν μικτὸν $4 + \frac{2}{9}$;
 $(\frac{39}{5}, \frac{91}{5}, \frac{26}{15}, \frac{13}{5}, \frac{13}{3})$

IX. Πῶς παρίσταται τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 7, τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ 11, τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{2}{3}$ τοῦ 5, τὰ $\frac{6}{11}$ τῶν $\frac{3}{5}$ τοῦ $\frac{3}{13}$;
 $(7 \times \frac{2}{3}, 11 \times \frac{5}{6}, 5 \times \frac{2}{7} \times \frac{3}{4}, \frac{8}{13} \times \frac{3}{5} \times \frac{6}{11})$

X. Πῶς παρίσταται τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ 8, τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{9}$ τοῦ 11, τὰ $\frac{4}{11}$ τῶν $\frac{5}{3}$ τῶν $\frac{12}{19}$ τοῦ $\frac{11}{17}$;
 $(8 \times \frac{5}{7}, 11 \times \frac{5}{9} \times \frac{2}{3}, \frac{11}{17} \times \frac{12}{19} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{11})$

XI. Ποῖα τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ κλάσματος $\frac{7}{15}$ διὰ τῶν ἀκεραίων 3, 5, 8 καὶ τῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{5}$;
 $(\frac{7}{45}, \frac{7}{75}, \frac{7}{120}, \frac{7}{10}, \frac{49}{75}, \frac{7}{12})$

XII. Ποῖα τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου 7 διὰ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{7}{13}$ καὶ τῶν μικτῶν $2\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{5}$, $8\frac{2}{11}$;
 $(\frac{28}{3}, \frac{77}{8}, 13, 3, \frac{85}{16}, \frac{77}{90})$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

175. Ποιοι ἀριθμοὶ καλοῦνται ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ;

Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοί, οἱ συγκείμενοι ἐκ διαφόρων μερῶν διαφόρων μονάδων, ἔχουσιν ὀρισμένην καὶ γνωστὰς πρὸς ἀλλήλας σχέσεις.

Παραδείγματος χάριν, ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς

2 τάληρα 3 δραχμαὶ 82 λεπτά

λέγεται συμμιγής, διότι σύγκειται ἐκ διαφόρων μερῶν διαφόρων μονάδων (τάληρων, δραχμῶν, λεπτῶν), αἵτινες ἔχουσιν ὀρισμένην καὶ γνωστὰς πρὸς ἀλλήλας σχέσεις· γνωρίζομεν δηλ. ὅτι 5 δραχμαὶ ἰσοδυναμοῦσι μὲ 1 τάληρον, καὶ 100 λεπτὰ μὲ 1 δραχμήν.

Ὡσαύτως, ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς

3 στατήρες 22 οκάδες 253 δράμια

λέγεται συμμιγής, διότι σύγκειται ἐκ διαφόρων μερῶν διαφόρων μονάδων (στατήρων, οκάδων, δραμίων), αἵτινες ἔχουσιν ὀρισμένην καὶ γνωστὰς πρὸς ἀλλήλας σχέσεις· γνωρίζομεν δηλ. ὅτι 400 δράμια ἰσοδυναμοῦσι μὲ 1 οκάδα, καὶ 44 οκάδες μὲ 1 στατήρα.

Παρομοίως, ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς

25 ἡμέραι 12 λεπτὰ πρῶτα

λέγεται συμμιγής, διότι σύγκειται ἐκ διαφόρων μερῶν διαφόρων μονάδων (ἡμερῶν, λεπτῶν πρῶτων), αἵτινες ἔχουσιν ὀρισμένην καὶ γνωστὰς πρὸς ἀλλήλας σχέσεις· γνωρίζομεν δηλ. ὅτι 1440 λεπτὰ πρῶτα ἰσοδυναμοῦσι μὲ 1 ἡμέραν.

Οἱ ἀνωτέρω συμμιγεῖς γράφονται συντομώτερον ὡς ἐξῆς·

2τάλ.	3δραχ.	82λεπ.
3στατ.	22όκ.	253δράμ.
25ήμ.	12λ.π.	

176. Ποῖται εἶναι αἱ ὠρισμέναι πρὸς ἀλλήλας σχέσεις τῶν κυριωτέρων παρ' ἡμῶν ἐν χρήσει μονάδων;

Αὗται εἶναι αἱ ἐξῆς.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΒΑΡΟΥΣ.

Ὁκάς, ἥτις θεωρεῖται ὡς ἀρχικὴ μονάς. Στατήρ, ὅστις περιέχει 44 ὀκάδας. Δράμιον, ὅπερ εἶναι τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκάδος. Ὅθεν ἔχομεν

$$1\text{στατ.} = 44\text{όκ.} = 17600\text{δράμ.}$$

$$1 = 400$$

ΜΟΝΑΔΕΣ ΧΡΟΝΟΥ.

Ἡμέρα, ἥτις θεωρεῖται καὶ ὡς ἀρχικὴ μονάς. Ὡρα, ἥτις εἶναι $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας. Λεπτὸν πρῶτον, ὅπερ εἶναι τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας. Λεπτὸν δευτέρον, ὅπερ εἶναι τὸ $\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ. Ὅθεν ἔχομεν

$$1\text{ήμ.} = 24\text{ὥρ.} = 1440\text{λ.π.} = 86400\text{λ.δ.}$$

$$1 = 60 = 3600$$

$$1 = 60$$

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΗΚΟΥΣ.

Ὁργυιά, ἥτις θεωρεῖται καὶ ὡς ἀρχικὴ μονάς. Πούς, ὅστις εἶναι τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς. Δάκτυλος, ὅστις εἶναι τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ποδός. Γραμμὴ, ἥτις εἶναι τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου. Ὅθεν ἔχομεν

$$1\text{ὀρ.} = 6\text{πόδ.} = 72\text{δάκ.} = 864\text{γραμ.}$$

$$1 = 12 = 144$$

$$1 = 12$$

ΜΟΝΑΔΕΣ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ.

Δραχμή, ἥτις θεωρεῖται καὶ ὡς ἀρχικὴ μονάς. Πεντάδραχμος, ὅπερ περιέχει 5 δραχμάς. Ὁθώρειον, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ 4 πεντάδραχμα. Λεπτόν, ὅπερ εἶναι τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς. Ὅθεν ἔχομεν

$$16\theta. = 4\text{ πεντ.} = 20\delta\rho\alpha\chi. = 2000\lambda\epsilon\pi\tau.$$

$$4 = 5 = 500$$

$$4 = 400$$

ΤΡΟΠΗ ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΙΣ ΜΟΝΑΔΑΣ ΤΗΣ ΕΝ ΑΥΤῳ
ΚΑΤΩΤΑΤΗΣ ΥΠΟΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

477. Πῶς τρέπομεν δεδομένον συμμιγῆ εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης υποδιαίρεσεως ;

Τρέπομεν πρῶτον τὰς μονάδας τῆς ἐν τῷ δεδομένῳ συμμιγῇ ἀνωτάτης υποδιαίρεσεως εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας, προσθέτομεν ἔπειτα εἰς ταύτας καὶ τὰς ἐν τῷ συμμιγῇ ὑπαρχούσας μονάδας τῆς αὐτῆς υποδιαίρεσεως, ἐὰν ὑπάρχωσι. Τρέπομεν ἀκολουθῶν τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας υποδιαίρεσεως, καὶ προσθέτομεν εἰς ταύτας καὶ τὰς ἐν τῷ συμμιγῇ ὑπαρχούσας μονάδας τῆς αὐτῆς υποδιαίρεσεως, ἐὰν ὑπάρχωσιν. Ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὰς μονάδας τῆς ἐν τῷ συμμιγῇ ὑπαρχούσης τελευταίας υποδιαίρεσεως. Ἐὰν εἰς ταύτας προσθέσωμεν καὶ τὰς ἐν τῷ συμμιγῇ ὑπαρχούσας μονάδας τῆς τελευταίας υποδιαίρεσεως, θέλομεν εὑρεῖ ἀριθμὸν μονάδων τῆς αὐτῆς υποδιαίρεσεως ἰσοδύναμον μὲ τὸν δοθέντα συμμιγῆ. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου τρέπεται ὁ δοθεὶς συμμιγῆς εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης υποδιαίρεσεως.

Παραδείγματος χάριν, ἂς υποθέσωμεν ὅτι προτιθέμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ

2 ἡμ.

5 ὥρ.

8 λ.π.

εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης υποδιαίρεσεως, ἥτοι εἰς λεπτά πρῶτα.

Τρέπομεν πρῶτον τὰς 2 ἡμέρας εἰς ὥρας, καί, ἐπειδὴ 1 ἡμέρα περιέχει 24 ὥρας, εὐρίσκομεν 48 ὥρας, εἰς ἃς προσθέτομεν καὶ τὰς ἐν τῷ συμμιγῇ ὑπαρχούσας 5 ὥρας. Εὐρίσκομεν οὕτως ἄθροισμα 53 ὥρας, ἃς τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας υποδιαίρεσεως, ἥτοι εἰς λεπτά πρῶτα. Ἐπειδὴ δὲ 1 ὥρα περιέχει 60 λεπτά πρῶτα, εὐρίσκομεν, πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν 53 ἐπὶ 60, ὅτι 53 ὥραι ἰσοδυναμοῦσι μὲ 3180 λεπτά πρῶτα. Εἰς ταῦτα προσθέτομεν καὶ τὰ ἐν τῷ συμμιγῇ ὑπάρχοντα 8 λεπτά πρῶτα, καὶ εὐρίσκομεν ἄθροισμα 3188 λεπτά πρῶτα. Λοιπὸν ὁ δεδομένος συμμιγῆς

2 ἡμ.

5 ὥρ.

8 λ.π.

ἐτράπη οὕτως εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως, καὶ εὐρέθη ἰσοδύναμος μὲ 3188 λεπτὰ πρῶτα.

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ

5ὥρ.

0πόδ.

8δάκ.

9γραμ.

εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως, ἥτοι εἰς γραμμάς, ἠθέλομεν τρέψει πρῶτον τὰς 5 ὀργυιάς εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαίρεσεως, ἥτοι εἰς πόδας, καὶ εὐρεῖ 30 τοιούτους. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ δεδομένῳ συμμιγῇ δὲν ὑπάρχουσι πόδες, τρέπομεν τοὺς εὐρεθέντας 30 πόδ. εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαίρεσεως, ἥτοι εἰς δακτύλους, καὶ εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν 30 ἐπὶ 12, 360 δακτύλους, εἰς οὓς προσθέτομεν καὶ τοὺς ἐν τῷ συμμιγῇ ὑπάρχοντας 8. Τὸ εὐρεθὲν ἄθροισμα 368 τρέπομεν πάλιν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαίρεσεως, ἥτοι εἰς γραμμάς, καὶ εὐρίσκομεν 4416 γραμμάς, εἰς ἃς προσθέτομεν καὶ τὰς ἐν τῷ συμμιγῇ ὑπάρχουσας 9. Τὸ οὕτως ἀποτελούμενον ἄθροισμα 4425 γραμμάς παριστᾷ τὸν δεδομένον συμμιγῆ 5ὥρ. 0πόδ. 8δάκ. 9γραμ. τραπέντα εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως.

178. Πῶς συνήθως διατάσσομεν τὰ τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως;

Ὡς ἐξῆς

2 ἡμ.	5 ὥρ.	8 λ.π.	5 ὥρ.	0 πόδ.	8 δάκ.	9 γρ.
24			6			
48 ὥρ.			30			
5			12			
53			360 δάκ.			
60			8			
3180 λ.π.			368			
8			12			
3188			336			
			368			
			4416 γραμ.			
			9			
			4425			

Γράφομεν πρῶτον τὸν δεδομένον συμμιγῆ καὶ ὑπὸ τὰς μονάδας τῆς

ἐν αὐτῷ ἀνωτάτης ὑποδιαίρεσεως τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαίρεσεως περιέχει ἡ ἀνωτάτη τοῦ συμμιγοῦς μονάς. Πολλαπλασιάζομεν ταύτας ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, καὶ εἰς τὸ εὐρεθὲν γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὰς ἐν τῷ συμμιγῇ ὑπαρχούσας μονάδας τῆς αὐτῆς ὑποδιαίρεσεως. Ὑπὸ τὸ εὐρεθὲν ἀθροίσμα γράφομεν πάλιν τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας περιέχει μία μονάς τοῦ ἀθροίσματος, πολλαπλασιάζομεν κτλ.

Τὰ καθέκαστα τῆς πράξεως φαίνονται ἐν τοῖς ἀνωτέρω παραδείγμασι καθὼς καὶ ἐν τοῖς ἐπομένοις.

500.	3τάλ.	2δραχ.	48λεπ.	12ττατ.	27ὀκ.	153δράμ.
4				44		
20τάλ.				48		
3				48		
23				528ὀκ.		
5				27		
115δραχ.				555		
2				400		
117				222000δράμ.		
100				153		
11700 λεπ.				222153		
48						
11718						

ΤΡΟΠΗ ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΝ
ΔΕΔΟΜΕΝΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ.

179. Πῶς τρέπομεν δοθέντα συμμιγῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν δεδομένης μονάδος;

Τρέπομεν πρῶτον τὸν δοθέντα συμμιγῇ εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως ὡς προεῖπομεν, καὶ ὑπὸ τὸν εὐρεθέντα ἀριθμὸν ὡς ἀριθμητὴν γράφομεν παρονομαστὴν τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως περιέχει ἑκείνη ἡ μονάς τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς, εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὁποίας πρόκειται νὰ τραπῇ οὗτος.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ

5 ἡμ.

8 ὥρ.

49 λεπ.

εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ἡμέρας.

Τρέπομεν πρῶτον τὸν ἀνωτέρω συμμιγῆ εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως, καὶ εὐρίσκομεν 7699 λεπτὰ πρῶτα. Ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν δὲ 7699 ὡς ἀριθμητὴν γράφομεν παρονομαστὴν τὸν ἀριθμὸν 4440, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως, ἥτοι λεπτὰ πρῶτα, περιέχει ἡ μονὰς ἡμέρα, εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὁποίας πρόκειται νὰ τραπῇ ὁ δεδομένος συμμιγῆς. Οὕτω δὲ θέλωμεν ἔχει

5 ἡμ.

8 ὥρ.

$$49 \text{ λ. π.} = \frac{7699}{4440} \text{ τῆς ἡμέρας.}$$

Ἄν ἠθέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν αὐτὸν συμμιγῆ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὥρας, ἔπρεπεν ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 7699 ὡς ἀριθμητὴν νὰ γράψωμεν παρονομαστὴν τὸν ἀριθμὸν 60, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως περιέχει ἡ μονὰς ὥρα, εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὁποίας πρόκειται νὰ τραπῇ ὁ δεδομένος συμμιγῆς. Τουτέστιν ἠθέλωμεν ἔχει

5 ἡμ.

8 ὥρ.

$$49 \text{ λ. π.} = \frac{7699}{60} \text{ τῆς ὥρας.}$$

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ

5 δθ

2 δάλ.

1 δραχ.

24 λεπ.

εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ ταλῆρου, ἠθέλωμεν εὑρεῖ τὸ κλάσμα $\frac{11124}{2000}$ τοῦ ταλῆρου, τοῦ ὁποίου ὁ μὲν ἀριθμητὴς παριστᾷ τὸν δεδομένον συμμιγῆ τραπέντα εἰς λεπτὰ, ὁ δὲ παρονομαστὴς 500 ἰσοῦται μὲ 1 τάληρον, τραπέν εἰς μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως, ἥτοι εἰς λεπτὰ. Ὅθεν ἔχομεν

5 δθ.

2 δάλ.

1 δραχ.

$$24 \text{ λεπ.} = \frac{11124}{2000} \text{ τοῦ ταλῆρου.}$$

Ὁ οὗτος συμμιγῆς, ἂν ἐτρέπετο εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ ὀθωρείου, ἠθελεν εἶναι ἴσος μὲ τὸ κλάσμα $\frac{11124}{2000}$ τοῦ ὀθωρείου. Ἄν δὲ ἐτρέπετο εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς δραχμῆς, ἠθέλωμεν ἔχει

5 δθ.

2 δάλ.

1 δραχ.

$$24 \text{ λεπ.} = \frac{11124}{100} \text{ τῆς δραχμῆς.}$$

Παρομοίως, ἂν τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ

2 πῶδ.

5 δακ.

9 γραμ.

εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὀργυιᾶς, τοῦ ποδὸς καὶ τοῦ δακτύλου, θέλομεν, ἀκολουθοῦντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα, εὑρεῖ

$$2\text{πόδ.} \quad 5\delta\acute{\alpha}\kappa. \quad 9\gamma\rho\alpha\mu\mu.=\frac{357}{864} \text{ τῆς ὀργυιᾶς,}$$

$$2\text{πόδ.} \quad 5\delta\acute{\alpha}\kappa. \quad 9\gamma\rho\alpha\mu\mu.=\frac{357}{144} \text{ τοῦ ποδός,}$$

$$2\text{πόδ.} \quad 5\delta\acute{\alpha}\kappa. \quad 9\gamma\rho\alpha\mu\mu.=\frac{357}{12} \text{ τοῦ δακτύλου.}$$

ΤΡΟΠΗ ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ

ΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΝ ΣΥΜΜΙΓΗ.

180. Πῶς τρέπομεν δεδομένον κλασματικὸν δεδομένης μονάδος εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῇ;

Ἵνα τρέψωμεν δοθέντα κλασματικὸν δεδομένης μονάδος εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῇ, διαιροῦμεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Τὸ εὑρεθισόμενον πηλίκον, ὅπερ δυνατόν νὰ ᾖ καὶ 0, θέλει προφανῶς παριστᾷ μονάδας τῆς αὐτῆς ὑποδιαίρεσεως μὲ τὰς τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ.

Ἐὰν μείνῃ ὑπόλοιπον, τρέπομεν αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρως ὑποδιαίρεσεως, καὶ διαιροῦμεν πάλιν ταύτας διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος. Τὸ εὑρεθισόμενον πηλίκον, ὅπερ δυνατόν νὰ ᾖ καὶ 0, θέλει παριστᾷ μονάδας τῆς αὐτῆς ὑποδιαίρεσεως.

Ἐὰν μείνῃ πάλιν ὑπόλοιπον, τρέπομεν αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρως ὑποδιαίρεσεως, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πράξιν, ὡς ἀνωτέρω, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὴν κατωτάτην τοῦ ζητουμένου συμμιγοῦς ὑποδιαίρεσιν. Τότε ἂν μείνῃ πάλιν ὑπόλοιπον, προσθέτομεν εἰς τὰς μονάδας τῆς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸ εὑρεθὲν ὑπόλοιπον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην, καὶ τὸ σύνολον τῶν εὑρεθέντων πηλίκων μετὰ τοῦ τελευταίου κλάσματος θέλει παριστᾷ συμμιγῇ ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ κλασματικῷ.

Ἄς υποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ τρέψωμεν τὸν κλασματικὸν $\frac{17}{8}$ τῆς ὀργυιᾶς εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῇ.

Γράφομεν τὸν ἀριθμητὴν 17 ὡς διαιρετέον καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τούτου τὸν παρονομαστὴν 8 ὡς διαιρέτην, καὶ διαιροῦμεν τὸν διαιρετέον διὰ τοῦ διαιρέτου. Εὐρίσκομεν πηλίκον 2, ὅπερ θέλει παριστᾷ προφανῶς ὀργυιάς, καὶ ὑπόλοιπον 1 ὄρ.

Τρέπομεν τὸ ὑπόλοιπον 1 ὥρ. εἰς μονάδας τῆς ἡμέρας κατωτέρας ὑποδιαιρέσεως, ἥτοι εἰς πόδας, καὶ διαιροῦμεν τοὺς εὐρεθέντας 6 πόδας διὰ τοῦ διαιρέτου 8. Εὐρίσκομεν πηλίκον 0 καὶ ὑπόλοιπον 6 πόδας. Τρέπομεν τοὺς 6 πόδας εἰς μονάδας τῆς ἡμέρας κατωτέρας ὑποδιαιρέσεως, ἥτοι εἰς δακτύλους. Εὐρίσκομεν οὕτω 72 δακτύλ., οὓς διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου 8, καὶ λαμβάνομεν πηλίκον 9 δακ. καὶ ὑπόλοιπον 0. Ὁ ὑπὸ τὸν διαιρέτην 8 γραφεὶς συμμιγῆς ἀριθμὸς 2 ὥρ. 0 πόδ. 9 δακ. εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμος τῷ δεδομένῳ κλασματικῷ $\frac{17}{8}$ τῆς ὀργυιᾶς.	<table border="0"> <tr><td>17 ὥρ.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">8</td></tr> <tr><td>16</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">2 ὥρ. 0 πόδ. 9 δακ.</td></tr> <tr><td>4</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>6</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>6 πόδ.</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>42</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>72 δακ.</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>72</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>0</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> </table>	17 ὥρ.	8	16	2 ὥρ. 0 πόδ. 9 δακ.	4		6		6 πόδ.		42		72 δακ.		72		0		
17 ὥρ.	8																			
16	2 ὥρ. 0 πόδ. 9 δακ.																			
4																				
6																				
6 πόδ.																				
42																				
72 δακ.																				
72																				
0																				

2ον. Ἄς ὑποθέσωμεν πρὸς τούτοις, ὅτι προτιθέμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν κλασματικὸν $\frac{23}{9}$ τῆς ἡμέρας εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ.

Γράφομεν τὸν ἀριθμητήν 23 καὶ τὸν παρονομαστήν 9 ὡς προσείπομεν, καὶ διαιροῦμεν τὸν μὲν διὰ τοῦ δέ. Εὐρίσκομεν οὕτω πηλίκον 2, ὁπερ παριστᾷ ἡμέρας, καὶ ὑπόλοιπον 5 ἡμ.	<table border="0"> <tr><td>23 ἡμ.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">9</td></tr> <tr><td>18</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">2 ἡμ. 13 ὥρ. 20 λ.π.</td></tr> <tr><td>5</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>24</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>120 ὥρ.</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>9</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>30</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>27</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>3</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>60</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>180 λ.π.</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>18</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td>00</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> </table>	23 ἡμ.	9	18	2 ἡμ. 13 ὥρ. 20 λ.π.	5		24		120 ὥρ.		9		30		27		3		60		180 λ.π.		18		00		
23 ἡμ.	9																											
18	2 ἡμ. 13 ὥρ. 20 λ.π.																											
5																												
24																												
120 ὥρ.																												
9																												
30																												
27																												
3																												
60																												
180 λ.π.																												
18																												
00																												
Τρέπομεν τὸ ὑπόλοιπον 5 ἡμέρας εἰς ὥρας, καὶ διαιροῦμεν τὰς εὐρεθείσας 120 ὥρ. διὰ τοῦ διαιρέτου. Εὐρίσκομεν οὕτω πηλίκον 13 ὥρ. καὶ ὑπόλοιπον 3 ὥρας, ἃς τρέπομεν εἰς λεπτὰ πρῶτα.																												
Διαιροῦντες τὰ 180 λ.π. διὰ τοῦ διαιρέτου 9 εὐρίσκομεν πηλίκον 20 λ.π. καὶ ὑπόλοιπον 0.																												

Λοιπὸν ὁ δοθεὶς κλασματικὸς $\frac{23}{9}$ τῆς ἡμέρας εἶναι ἰσοδύναμος τῷ συμμιγεῖ 2 ἡμ. 13 ὥρ. 20 λ.π.

3ον. Ἐστω νὰ τραπῇ ὁ κλασματικὸς $\frac{5}{7}$ τοῦ ὥθωρου εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ.

Διαιρούμεν τὸν ἀριθ-
μητὴν 500. διὰ τοῦ πα-
ρονομαστοῦ 7, καὶ εὐρί-
σκομεν πηλίκον 000. καὶ
ὑπόλοιπον 500.

Τρέπομεν τὰ 5 00.
εἰς τὰ *λίτρα*, καὶ διαι-
ροῦμεν τὰ εὐρεθέντα 20
τάλ. διὰ τοῦ διαιρέτου
7. Εὐρίσκομεν οὕτω πη-
λίκον 2τάλ. καὶ ὑπόλοι-
πον 6τάλ., ἅτινα τρέ-
πομεν εἰς *δραχμάς*.

Διαιρούμεν τὰς εὐρε-
θείσας 30δραχ. διὰ τοῦ
διαιρέτου, καὶ εὐρίσκομεν πηλίκον 4δραχ. καὶ ὑπόλοιπον 2δραχ. ἃς τρέ-
πομεν εἰς *λεπτά*.

Διαιροῦντες τὰ εὐρεθέντα 200λεπ. διὰ τοῦ διαιρέτου 7 εὐρίσκομεν
πηλίκον 28λεπ. καὶ ὑπόλοιπον 4.

Ἐπειδὴ ἐφθάσαμεν εἰς τὴν κατωτάτην ὑποδιαίρεσιν καὶ μᾶς ἔμεινε
καὶ ὑπόλοιπον, προσθέτομεν εἰς τὸ πηλίκον τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ καὶ ὁ ἀριθμὸς
2τάλ. 4δραχ. 28λεπ. $+\frac{4}{7}$, ὁ συγκεείμενος ἐκ τοῦ συμμιγῶς 2τάλ. 4δραχ.
28λεπ. καὶ τοῦ κλάσματος $\frac{4}{7}$ τοῦ λεπτοῦ, θέλει εἶναι ὁ ἰσοδύναμος τῷ
δοθέντι κλασματικῷ $\frac{5}{7}$ τοῦ ὁπωριεῖου.

4ον. Ἄν εἴχομεν νὰ τρέψωμεν εἰς ἰσοδυνάμους συμμιγεῖς τοὺς κλα-
σματικοὺς $\frac{1}{10}$ τῆς ὀργυιᾶς, $\frac{1}{11}$ τοῦ στατηῆρος, $\frac{7}{10}$ τῆς ἡμέρας, $\frac{1}{12}$ τοῦ
ταλήρου, ἠθέλομεν εὐρεῖ, ἀκολουθοῦντες τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα,

$$\begin{aligned}\frac{1}{10} \text{ τῆς ὀργυιᾶς} &= 1 \text{ ὀρ.} \quad 1 \text{ πόδ.} \quad 1 \text{ δακ.} \quad 5 \text{ γραμ.,} \\ \frac{1}{11} \text{ τοῦ στατηῆρος} &= 1 \text{ στατ.} \quad 4 \text{ ὀκ.,} \\ \frac{7}{10} \text{ τῆς ἡμέρας} &= 40 \text{ ὥρ.} \quad 30 \text{ λεπ.,} \\ \frac{1}{12} \text{ τοῦ ταλήρου} &= 4 \text{ δρχ.} \quad 58 \text{ λ.} \quad + \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ

181. Πῶς προσθέτομεν δύο ἢ πλείοτέρους ὁμοειδεῖς συμμιγεῖς;

Γράφομεν τὸν ἓνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς ὑποδιαίρεσεως νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, καὶ ἀρχόμεθα τῆς προσθέσεως ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς πρώτης πρὸς τὰ δεξιὰ ὑποδιαίρεσεως.

Ἐὰν εὐρωμεν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς ὑποδιαίρεσεως ταύτης περιέχει μία μονὰς τῆς ἀμέσως προηγούμενης, γράφομεν τοῦτο ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ.

Ἐὰν τὸ εὐρεθὲν ἄθροισμα ᾖ μὲν μεγαλειότερον τοῦ περι οὗ ὁ λόγος ἀριθμοῦ, ἐξάγομεν ἐξ αὐτοῦ τὰς περιεχομένας μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαίρεσεως, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ, τὰς δὲ ἐξαχθείσας μονάδας προσθέτομεν εἰς τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαίρεσεως.

Ἐὰν πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαίρεσεως μετὰ τῶν κρατουμένων τῆς προηγούμενης ᾖ μὲν μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς ὑποδιαίρεσεως ταύτης περιέχει μία μονὰς τῆς ἀμέσως προηγούμενης, γράφομεν τοῦτο ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Ἄλλ' ἔὰν τὸ περι οὗ ὁ λόγος ἄθροισμα ᾖ μὲν μεγαλειότερον, ἐξάγομεν πάλιν ἐξ αὐτοῦ τὰς περιεχομένας μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαίρεσεως, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ, τὰς δὲ ἐξαχθείσας μονάδας προσθέτομεν εἰς τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαίρεσεως καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν, πρὸς εὐρεσιν τοῦ ἄθροίσματος τῶν ἐξῆς συμμιγῶν

23 ἡμ.	17 δρ.	25 λ. π.	36 λ. δ.
5	0	53	28
	24	20	3
29	45	39	7

γεγραμμένων οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς ὑποδιαίρεσεως νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, προσθέτομεν πρῶτον τὰς μονάδας τῆς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως, ἥτοι τὰ δεύτερα λεπτά.

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα 67 τῶν δευτέρων λεπτῶν εἶναι μεγαλειότερον τοῦ ἀριθμοῦ 60, ὅστις δεικνύει μὲ πόσα δευτερόλεπτα ἰσοδυναμεῖ 1 πρῶτον λεπτόν, ἐξάγομεν τὰ ἐν τῷ ἄθροίσματι 67 περιεχόμενα πρῶτα λεπτά, καὶ εὐρίσκομεν 1 πρῶτον λεπτόν καὶ ὑπόλοιπον 7 δεύτερα λεπτά.

Γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον 7 ἐν τῇ στήλῃ τῶν δευτερολέπτων, καὶ προσθέτομεν τὸ κρατούμενον 1 λ.π. εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων λεπτῶν τῆς ἐπομένης στήλης.

Ἐπειδὴ πάλιν εὑρομεν ἄθροισμα 99 λ.π., ὅπερ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἀριθμοῦ 60, ὅστις δεικνύει πόσα πρῶτα λεπτὰ περιέχει 1 ὥρα, ἐξάγομεν τὰς ἐν τῷ ἄθροισματι 99 λ.π. περιεχομένας ὥρας, καὶ εὐρίσκομεν 1 ὥρ. καὶ ὑπόλοιπον 39 λ.π.

Γράφομεν 39 ἐν τῇ στήλῃ τῶν πρώτων λεπτῶν, καὶ προσθέτομεν τὴν 1 ὥραν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ὥρῶν τῆς ἐπομένης στήλης.

Ἐπειδὴ πάλιν εὑρομεν ἄθροισμα 39 ὥρ., ὅπερ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἀριθμοῦ 24, ὅστις δεικνύει μὲ πόσας ὥρας ἰσοδυναμεῖ 1 ἡμέρα, ἐξάγομεν τὰς ἐν τῷ ἄθροισματι 39 ὥρ. περιεχομένας ἡμέρας, καὶ εὐρίσκομεν 1 ἡμ. καὶ ὑπόλοιπον 15 ὥρ.

Γράφομεν 15 ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὥρῶν, καὶ προσθέτομεν τὴν 1 ἡμ. εἰς τὸ ἄθροισμα τῆς στήλης τῶν ἡμερῶν. Εὐρίσκομεν οὕτως ἄθροισμα 29 ἡμ., ὅπερ γράφομεν ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ.

Ὁ ὑπὸ τὴν γραμμὴν εὑρεθεὶς συμμιγῆς

29 ἡμ. 15 ὥρ. 39 λ.π. 7 λ.δ.

παριστᾷ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν δεδομένων συμμιγῶν.

2ον. Ἄς υποθέσωμεν πρὸς τούτοις ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξῆς συμμιγῶν, γεγραμμένων ὡς προεῖρήθη·

37 ὥρ.	4 πόδ.	10 δάκ.	1 γραμ.
	3	2	2
3	2	11	
	5	9	6
42	4	8	9

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα 9 τῶν γραμμῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ 12, ὅστις δεικνύει πόσας γραμμάς περιέχει 1 δάκτυλος, γράφομεν αὐτὸ ἐν τῇ στήλῃ τῶν γραμμῶν.

Τὸ ἄθροισμα 32 τῶν δακτύλων εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἀριθμοῦ 12, ὅστις δεικνύει μὲ πόσους δακτύλους ἰσοδυναμεῖ 1 ποῦς. Ἐξάγομεν τοὺς ἐν τῷ ἄθροισματι 32 δακ. περιεχομένους πόδας, καὶ εὐρίσκομεν 2 πόδ. καὶ ὑπόλοιπον 8 δακ.

Γράφομεν 8 ἐν τῇ στήλῃ τῶν δακτύλων καὶ προσθέτομεν τοὺς 2 πόδ. εἰς τὸ ἄθροισμα τῆς στήλης τῶν ποδῶν. Εὐρίσκομεν οὕτως ἄθροισμα

16πόδ., ὅπερ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἀριθμοῦ 6, τοῦ δεικνύοντος μὲ πό-
σους πόδας ἰσοδυναμεῖ 1 ὄργυιά.

Ἐξάγομεν τὰς ἐν τῷ ἀθροίσματι 16πόδ. περιεχομένας ὄργυιάς, καὶ
εὐρίσκομεν 2ὄρ. καὶ ὑπόλοιπον 4πόδ.

Γράφομεν 4 ἐν τῇ στήλῃ τῶν ποδῶν, προσθέτομεν τὰς 2ὄρ. ἐν τῇ
στήλῃ τῶν ὄργυιῶν, καὶ τὸ εὐρεθὲν ἄθροισμα 42 ὄρ. γράφομεν ἐν τῇ
αὐτῇ στήλῃ.

Ὁ συμμιγῆς ἀριθμὸς 42ὄρ. 4πόδ. 8δάκ. 9γραμ. παριστᾷ τὸ ζητού-
μενον ἄθροισμα τῶν δεδομένων συμμιγῶν.

3ον. Ἄν εἴχομεν πρὸς πρόσθεσιν τοὺς ἐξῆς συμμιγεῖς, γεγραμμένους
κατὰ τὸν δοθέντα ἀνωτέρω κανόνα,

2τάλ.	3δραχ.	93λεπ.	37στατ.	0άκ.	200δρ.
1	0	74			250
	2	86	5	0	325
14	4	27		39	53
49	1	80	42	41	28

ἠθέλομεν εὑρεῖ ὡς ἄθροισμα αὐτῶν τοὺς ὑπὸ τὰς γραμμάς γεγραμμένους
συμμιγεῖς

19τάλ.	1δραχ.	80λεπ.,	42στατ.	41άκ.	28δρ.
--------	--------	---------	---------	-------	-------

182. Ἄν οἱ πρὸς πρόσθεσιν ὁμοειδεῖς συμμιγεῖς περιέχῃσι καὶ
κλασματικὰ μέρη τῆς αὐτῆς κατωτάτης αὐτῶν ὑποδιαίρεσεως, τότε
πῶς εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν;

Προσθέτομεν πρῶτον τὰ τῆς αὐτῆς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως κλά-
σματα, καὶ ἐκ τοῦ εὐρεθέντος ἀθροίσματος ἐξάγομεν τὰς μονάδας τῆς
αὐτῆς ὑποδιαίρεσεως, εἰς ὑπάρχουσι.

Γράφομεν ἔπειτα τὸ μὲν κλάσμα ἐν τῇ στήλῃ τῶν κλασμάτων, καὶ
προσθέτομεν τὰς ἐξαχθεῖσας μονάδας εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων, εἰς
ἃς τὰ κλάσματα ἀνήκουσι.

Τὰ λοιπὰ τῆς πράξεως ἐκτελοῦνται προφανῶς ὡς προεῖρήθη.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα προσθέσωμεν τοὺς ἐξῆς συμμιγεῖς, γεγραμ-
μένους κατὰ τὸν τῆς προσθέσεως κανόνα,

5ὄρ.	2πόδ.	8δάκ.	9γραμ.	+ $\frac{4}{5}$
	4	7	2	+ $\frac{8}{11}$
		3	7	+ $\frac{1}{2}$
6	1	7	8	+ $\frac{3}{110}$

προσθέτομεν πρῶτον τὰ κλάσματα $\frac{4}{3}, \frac{6}{11}, \frac{1}{2}$, καὶ εὐρίσκομεν ἄθροισμα $\frac{223}{110}$ τῆς γραμμῆς, ἥτοι 2 γραμ. καὶ $\frac{3}{110}$ τῆς γραμμῆς.

Γράφομεν τὰ $\frac{3}{110}$ τῆς γραμμῆς ἐν τῇ στήλῃ τῶν κλασμάτων, καὶ προσθέτομεν τὰς 2 γραμ. εἰς τὸ ἄθροισμα τῆς στήλης τῶν γραμμῶν. Μετὰ ταῦτα ἐξακολουθοῦμεν τὴν πράξιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα, καὶ εὐρίσκομεν ἄθροισμα τὸν ὑπὸ τὴν γραμμὴν συμμιγῇ.

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν πρὸς πρόσθεσιν τοὺς ἐξῆς συμμιγεῖς,

15 ἡμ.	0 ὥρ.	2 λ. π.	18 λ. δ.	$+\frac{2}{3}$
	5	0	13	
3	7	19	53	$+\frac{1}{5}$
18	12	30	24	$+\frac{13}{15}$

ἠθέλομεν προσθέσει πρῶτον τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}, \frac{1}{5}$, καὶ τὸ εὐρεθὲν αὐτῶν ἄθροισμα $\frac{13}{15}$ τοῦ δευτερολέπτου γράψει, ὡς μικρότερον ἐνὸς δευτερολέπτου, ἐν τῇ στήλῃ τῶν κλασμάτων. Μετὰ ταῦτα ἠθέλομεν ἐξακολουθήσει τὴν πράξιν ὡς εἶπομεν ἀνωτέρω.

* Ἄν εἴχομεν πρὸς πρόσθεσιν καὶ τοὺς ἐξῆς συμμιγεῖς,

5 στάλ.	2 δραχ.	7 λεπ.	$+\frac{13}{19}$	2 στατ.	3 ὀκ.	23 δράμ.	$+\frac{5}{12}$
1	0	2		1	5	50	$+\frac{2}{7}$
4	4	12	$+\frac{3}{4}$	4	0	3	
10	3	22	$+\frac{53}{76}$	7	8	76	$+\frac{57}{77}$

ἠθέλομεν εὑρεῖ ὡς ἄθροίσματα τοὺς ὑπὸ τὰς γραμμάς γεγραμμένους συμμιγεῖς.

183. * Ἄν τὰ κλασματικὰ μέρη τῶν δεδομένων συμμιγῶν ᾖναι διαφόρων μορᾶδων, τότε πῶς εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν;

Τρέπομεν πρῶτον πάντα τὰ κλάσματα τῶν δεδομένων συμμιγῶν εἰς συμμιγεῖς, καὶ ἔπειτα προσθέτομεν αὐτοὺς ὡς προελέχθη.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν συμμιγῇ ὥρ. 3 λ. π. 22 λ. δ. τὸν συμμιγῇ 15 ὥρ. $+\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας.

Πρὸς τοῦτο τρέπομεν τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας εἰς συμμιγῇ, καὶ εὐρίσκομεν 4 λ. π. 48 λ. δ., καὶ ἔπειτα προσθέτομεν εἰς τὸν δεδομένον συμμιγῇ ὥρ. 3 λ. π. 22 λ. δ. τὸν συμμιγῇ 15 ὥρ. 4 λ. π. 48 λ. δ.

Ὡσαύτως, ἂν εἶχμεν πρὸς πρόσθεσιν τοὺς ἐξῆς συμμιγεῖς γεγραμμένους κατὰ τὸν περὶ προσθέσεως κανόνα,

2πόδ.	3δάκ.	5γραμ.	$+\frac{3}{7}$	2πόδ.	3δάκ.	2γραμ.	$+\frac{3}{7}$
$\frac{3}{8}$					4	9	$+\frac{3}{8}$
4	$\frac{3}{8}$			4	0	7	$+\frac{3}{8}$
3	8	7	$+\frac{3}{85}$	3	8	7	$+\frac{3}{85}$

ἠθέλομεν πρῶτον τρέψει τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ποδὸς εἰς συμμιγῆ 4δακ. 9γραμ. $+\frac{3}{8}$, δευτέρον τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ δακτύλου εἰς συμμιγῆ, καὶ τελευταῖον προσθήσει τοὺς συμμιγεῖς, ὡς φαίνεται ἐν τῷ παραδείγματι.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ

184. Πῶς ἀφαιρεῖται ἀπὸ συμμιγοῦς ἕτερος συμμιγῆς ;

Ἐπειδὴ οἱ πρὸς ἀφαίρεσιν συμμιγεῖς πρέπει ἀναγκαίως νὰ ᾖναι ὁμοειδεῖς, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς ὑποδιαίρέσεως νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἔπειτα ἄγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἀρχόμεθα τῆς πράξεως ἀπὸ τῶν δεξιῶν.

Ἀφαιροῦμεν τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τοῦ ἀφαιρετέου ὑποδιαίρέσεως ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τοῦ μειωτέου ὑποδιαίρέσεως, εἰ μὴ ἡ ἀφαίρεσις ᾖναι δυνατὴ, καὶ γράφομεν τὴν διαφορὰν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ.

Ἐὰν αἱ μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου ᾖναι περισσότεραι τῶν ἀντιστοιχουσῶν μονάδων τοῦ μειωτέου, τότε, ἵνα ἡ ἀφαίρεσις κατασταθῇ δυνατὴ, δανειζόμεθα μίαν μονάδα ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαίρέσεως τοῦ μειωτέου, τρέπομεν αὐτὴν εἰς μονάδας τῆς κατωτέρας ὑποδιαίρέσεως, καὶ προσθέτομεν αὐτὰς εἰς τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς ὑποδιαίρέσεως τοῦ μειωτέου. Οὕτως ἡ ἀφαίρεσις καθίσταται δυνατὴ, καὶ γράφομεν τὴν εὐρεθησομένην διαφορὰν ὡς προείπομεν. Ἄλλ' ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ ζητούμενη τῶν συμμιγῶν διαφορὰ, πρέπει, μεταβαίνοντες εἰς τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαίρέσεως τοῦ ἀφαιρετέου, νὰ ἀυξήσωμεν ταύτας κατὰ μίαν ὡσαύτως μονάδα.

Ἐξακολουθοῦμεν ὡς προείπομεν, μέχρις οὗ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τῶν διαφορῶν μονάδων τοῦ μειωτέου τὰς ἀντιστοίχους μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου.

Ὁ οὗτος δὲ ὑπὸ τὴν γραμμὴν γραφόμενος συμμιγῆς θέλει προφανῶς παριστᾶ τὴν ζητουμένην διαφορὰν.

Π. χ., ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν πρὸς ἀφαιρέσιν τοὺς συμμιγεῖς

14 ὀρ.	2 πόδ.	8 δάκ.	7 γραμ.
3	5	2	9
10	3	5	10

γεγραμμένους κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα.

Ἐπειδὴ 9 γραμ. δὲν ἀφαιρῶνται ἀπὸ 7 γραμ., δανειζόμεθα 1 δάκ., ὃν τρέπομεν εἰς 12 γραμμ., καὶ προσθέτομεν αὐτὰς εἰς τὰς 7 γραμμ. τοῦ μειωτέου. Οὕτως εὐρίσκομεν ἄθροισμα 19 γραμ., ἀφ' ὧν, ἀφαιροῦντες τὰς 9 γραμ., λαμβάνομεν διαφορὰν 10 γραμ., ἃς γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐν τῇ αὐτῇ τῶν γραμμῶν καθετῇ στήλῃ.

Ἐπειδὴ ἠύξισαμεν τὸν μειωτέον κατὰ 1 δάκ., πρέπει, ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ ζητουμένη διαφορὰ, νὰ αὐξήσωμεν καὶ τὸν ἀφαιρετέον κατὰ 1 δάκ. Διὰ τοῦτο μεταβαίνοντες εἰς τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν ὑποδιαίρεσιν, λέγομεν 2 δάκ. καὶ 1 δάκ. . . . 3 δάκ. ἀπὸ 8 δάκ. . . . 5 δάκ. Γράφομεν λοιπὸν 5 ἐν τῇ στήλῃ τῶν δακτύλων, καὶ μεταβαίνομεν εἰς τὴν ἀμέσως προηγουμένην ὑποδιαίρεσιν.

Ἐπειδὴ πάλιν 5 πόδ. δὲν ἀφαιρῶνται ἀπὸ 2 πόδ., δανειζόμεθα 1 ὀρ., ἣν τρέπομεν εἰς 6 πόδ., καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος 8 πόδ. ἀφαιροῦμεν τοὺς 5 πόδ. Εὐρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 3 πόδ., οὗς καὶ γράφομεν ἐν τῇ στήλῃ τῶν ποδῶν.

Μεταβαίνοντες τελευταῖον εἰς τὰς ὀργυιας προσθέτομεν εἰς τὰς 3 ὀρ. τοῦ ἀφαιρετέου 1 ὀρ., καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 4 ὀρ. ἀπὸ 14 ὀρ. Εὐρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 10 ὀρ., ἃς καὶ γράφομεν ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὀργυιῶν.

Ὁ οὕτως ὑπὸ τὴν γραμμὴν γραφεῖς συμμιγῆς

10 ὀρ.	3 πόδ.	5 δάκ.	10 γραμ.
--------	--------	--------	----------

παριστᾶ προφανῶς τὴν ζητουμένην διαφορὰν.

185. Ἐκθέσατέ μοι συντομώτερον τὰ τῆς πράξεως καὶ ἐπὶ ἐτέρων τειῶν παραδειγμάτων.

Ἔστωσαν πρὸς ἀφαιρέσιν οἱ ἑξεῖς συμμιγεῖς, γεγραμμένοι κατὰ τὸν κανόνα,

23 ἡμ.	12 ὀρ.	17 λ. π.	58 λ. δ.
8	0	19	30
15	11	58	28

Λέγομεν·

30λ.δ. ἀπὸ 58λ.δ. . . . 28λ.δ., γράφομεν 28.

19λ.π. ἀπὸ 17λ.π. δὲν ἀφαιροῦνται· δανειζόμεθα 1ῶρ., ἣν τρέπομεν εἰς 60 λ.π., καὶ προσθέτομεν ταῦτα εἰς τὰ ὑπάρχοντα 17λ.π. Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ εὑρεθησομένου ἀθροίσματος 77λ.π. τὰ 19λ.π. εὐρίσκομεν 58λ.π. Γράφομεν λοιπὸν 58.

0ῶρ. καὶ 1ῶρ. . . . 1ῶρ. ἀπὸ 12ῶρ. . . . 11ῶρ. Γράφομεν 11.

8ήμ. ἀπὸ 23ήμ. . . . 15ήμ. Γράφομεν 15.

Ἡ ζητουμένη διαφορὰ τῶν δεδομένων συμμιγῶν εἶναι ὁ συμμιγῆς

15ήμ. 11ῶρ. 58λ.π. 28λ.δ.

2ον Ἐστῶσαν πρὸς τούτοις πρὸς ἀφαίρεσιν οἱ συμμιγεῖς

27ῶθ. 0τάλ. 2δραχ. 18λεπ.

3 2 4 8

23 1 3 10

Λέγομεν·

8λεπ. ἀπὸ 18λεπ. . . . 10λεπ. Γράφομεν 10.

4δραχ. ἀπὸ 2δραχ. δὲν ἀφαιροῦνται.

2δραχ. καὶ 5δραχ. . . . 7δραχ. Ἀφαιροῦντες 4δραχ. ἀπὸ 7δραχ. εὐρίσκομεν διαφορὰν 3δραχ. Γράφομεν λοιπὸν 3.

2τάλ. καὶ 1τάλ. . . . 3τάλ. ἀπὸ 0τάλ. δὲν ἀφαιροῦνται.

0τάλ. καὶ 4τάλ. . . . 4τάλ. Ἀφαιροῦντες 3τάλ. ἀπὸ 4τάλ. εὐρίσκομεν διαφορὰν 1τάλ. Γράφομεν 1.

3ῶθ. καὶ 1ῶθ. . . . 4ῶθ. ἀπὸ 27ῶθ. . . . 23ῶθ. Γράφομεν 23.

Ἡ ζητουμένη διαφορὰ τῶν δεδομένων συμμιγῶν εἶναι ὁ συμμιγῆς

23ῶθ. 1τάλ. 3δραχ. 10λεπ.

186. Ὅταν οἱ πρὸς ἀφαίρεσιν συμμιγεῖς περιέχωσι καὶ κλάσματικὰ μέρη τῆς αὐτῆς ὑποδιαίρεσεως ἢ διαφόρων ὑποδιαίρεσεων, τότε πῶς εὐρίσκομεν τὴν ζητουμένην διαφορὰν αὐτῶν;

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐξῆς ἀφαίρεσιν.

27ήμ. 5ῶρ. 32λ.π. 24λ.δ. $+\frac{2}{7}$

3 0 50 13 $+\frac{5}{6}$

24 4 42 10 $+\frac{19}{42}$

Ἀφαιροῦμεν πρῶτον τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$ τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{7}$ τῆς αὐτῆς ὑποδιαίρεσεως τοῦ μειωτέου. ἐπειδὴ δὲ $\frac{5}{6}$ δὲν ἀφαι-

ροῦνται ἀπὸ $\frac{2}{7}$, αὐξάνομεν τὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ δευτερολέπτου κατὰ 1 δευτερόλεπτον τραπὲν εἰς ἑβδομα τῆς μονάδος. Οὕτω τὰ $\frac{2}{7}$ γίνονται $\frac{9}{7}$, ἀφ' ὧν ἀφαιροῦντες $\frac{8}{8}$ εὐρίσκομεν διαφορὰν $\frac{10}{8}$, ἣν γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐν τῇ στήλῃ τῶν κλασμάτων.

Ἐπειδὴ προσεθέσαμεν εἰς τὸν μειωτέον 1λ.δ., ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορὰ, πρέπει νὰ αὐξήσωμεν κατὰ 1λ.δ. καὶ τὸν ἀφαιρετέον. Τούτου ἕνεκα λέγομεν 14λ.δ. ἀπὸ 24λ.δ. . . . 10λ.δ., καὶ γράφομεν 40 ἐν τῇ στήλῃ τῶν δευτέρων λεπτῶν.

Μεταβαίνομεν μετὰ ταῦτα εἰς τὰ πρῶτα λεπτά, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν πράξιν ὡς προείπομεν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὁ ὑπὸ τὴν γραμμὴν γεγραμμένος συμμιγῆς παριστᾷ τὴν ἐν τῇ προκειμένη περιπτώσει ζητούμενην διαφορὰν.

2ον. Ἴνα ἐκτελέσωμεν τὴν ἐξῆς ἀφαίρεσιν

ὑόρ.	2πόδ.	7δᾶκ.
1	0	$9 + \frac{2}{3}$
4	1	$9 + \frac{1}{3}$

λαμβάνομεν 1 δάκτυλον, ὃν τρέπομεν εἰς τρίτα τῆς μονάδος, καὶ ἀπὸ τῶν εὐρεθέντων $\frac{8}{3}$ ἀφαιροῦμεν τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀφαιρετέου. Εὐρίσκομεν διαφορὰν $\frac{1}{3}$, ἣν γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐν τῇ στήλῃ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$.

Μεταβαίνοντες εἰς τὴν στήλην τῶν δακτύλων προσθέτομεν 1δᾶκ. εἰς τοὺς 9δᾶκ., καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 10δᾶκ. δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ 7δᾶκ., λαμβάνομεν 1ποδ., ὃν τρέπομεν εἰς 12δᾶκ. κτλ.

Ὁ ὑπὸ τὴν γραμμὴν γεγραμμένος συμμιγῆς παριστᾷ τὴν ἐν τῇ παρούσῃ περιπτώσει ζητούμενην διαφορὰν.

3ον. Ἄν εἴχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐξῆς ἀφαίρεσιν,

22στατ.	13όκ.	52δράμ.	22στατ.	13όκ.	52δράμ.
1	$\frac{2}{3}$		1	0	$266 + \frac{2}{3}$
21	12	$185 + \frac{1}{3}$	21	12	$185 + \frac{1}{3}$

ἔπρεπε πρῶτον νὰ τρέψωμεν τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς δακίδος τοῦ ἀφαιρετέου εἰς συμμιγῇ 0όκ. 266δράμ. $+ \frac{2}{3}$, καὶ ἔπειτα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μειωτέου τὸν συμμιγῇ 1στατ. 0όκ. 266δράμ. $+ \frac{2}{3}$.

Ἐκτελοῦντες τὴν τελευταίαν ἀφαίρεσιν ὡς προείπομεν εὐρίσκομεν διαφορὰν τὸν ὑπὸ τὴν γραμμὴν γεγραμμένον συμμιγῆ 21 στατ. 12 ὀκάδ. 185 δράμ. + $\frac{1}{8}$.

Ὡσαύτως, ἂν εἶχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς ἐξῆς ἀφαίρεσεις,

15 ὀθ.	0 τάλ.	2 δραχ.	17 ἡμ.	0 ὄρ.	4 λ. π.	8 λ. δ. + $\frac{2}{9}$
$\frac{5}{7}$			44	$\frac{4}{11}$		
14	1	2 + $\frac{5}{7}$	15	23	42	19 + $\frac{19}{83}$

ἠθέλομεν πρῶτον τρέψει τοὺς κλασματικούς $\frac{5}{7}$ τοῦ ὀθωνίου καὶ $\frac{4}{11}$ τῆς ὥρας εἰς ἰσοδύναμους συμμιγεῖς, καὶ ἔπειτα ἐκτελέσει τὴν ἀφαίρεσιν ὡς προείπομεν.

Οἱ ὑπὸ τὰς γραμμάς γεγραμμένοι συμμιγεῖς παριστῶσι τὰς ζητούμενας διαφοράς.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΠΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

187. Πῶς πολλαπλασιάζομεν δεδομένον συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον; Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστέον συμμιγῆ καὶ ὑπὸ τὰς μονάδας τῆς κατωτάτης αὐτοῦ υποδιαίρεσεως τὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαστήν, καὶ ἄγομεν ὑποκάτω ὀριζόντιον γραμμὴν.

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰς μονάδας τῆς κατωτάτης τοῦ συμμιγούς υποδιαίρεσεως ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, καὶ ἐὰν εὐρωμεν γινόμενον μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς υποδιαίρεσεως ταύτης περιέχει μία μονὰς τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, γράφομεν τοῦτο ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ ἐν τῇ αὐτῇ καθετῇ στήλῃ. Ἐὰν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος γινόμενον ᾖ αἰ μεγαλῆτερον, ἐξάγομεν τὰς ἐν αὐτῇ περιεχομένας μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας υποδιαίρεσεως, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν, τὰς δὲ ἐξαχθείσας μονάδας προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς υποδιαίρεσεως τοῦ συμμιγούς ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.

Πράττομεν καὶ ἐπὶ τοῦ εὐρεθησομένου ἀθροίσματος ὅ,τι καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου, κτλ.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 2 ἡμέρ. 8 ὥρ. 13 λ. π. 12 λ. δ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 8, γράφομεν αὐτοὺς ὡς ἐξῆς.

2ήμ.	8ῶρ.	13λ.π.	12λ.δ.
			8
48	47	45	36

ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὰ 12λ.δ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 8, καὶ εὐρίσκομεν γινόμενον 96λ.δ., ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς 96 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ 60, ὅστις δεικνύει μὲ πόσα δευτερόλεπτα ἰσοδυναμεῖ 1λ.π., ἐξάγομεν τὰ ἐν τοῖς 96λ.δ. περιεχόμενα πρῶτα λεπτά, καὶ εὐρίσκομεν 1λ.π. καὶ ὑπόλοιπον 36λ.δ.

Γράφομεν 36 ἐν τῇ στήλῃ τῶν δευτερολέπτων, καὶ προσθέτομεν τὸ κρατούμενον 1λ.π. εἰς τὸ γινόμενον 104λ.π. τῶν 13λ.π. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 8.

Ἐπειδὴ τὸ εὐρεθὲν ἄθροισμα 105 εἶναι πάλιν μεγαλύτερον τοῦ ἀριθμοῦ 60, ὅστις δεικνύει μὲ πόσα λεπτά πρῶτα ἰσοδυναμεῖ 1ῶρ., ἐξάγομεν τὰς ἐν τοῖς 105λ.π. περιεχομένας ὥρας, καὶ εὐρίσκομεν 1ῶρ. καὶ ὑπόλοιπον 45λ.π.

Γράφομεν 45 ἐν τῇ στήλῃ τῶν πρώτων λεπτῶν, καὶ προσθέτομεν τὴν 1ῶρ. εἰς τὸ γινόμενον 64ῶρ. τῶν 8ῶρ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 8.

Ἐπειδὴ πάλιν τὸ εὐρεθὲν ἄθροισμα 65 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀριθμοῦ 24, ὅστις δεικνύει μὲ πόσας ὥρας ἰσοδυναμεῖ 1ήμ., ἐξάγομεν τὰς ἐν ταῖς 65ῶρ. περιεχομένας ἡμέρας, καὶ εὐρίσκομεν 2ῆμέρας καὶ ὑπόλοιπον 17ῶρας.

Γράφομεν 17 ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὡρῶν, προσθέτομεν τὰς 2ήμ. εἰς τὸ γινόμενον 16ήμ. τῶν 2ήμ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 8, καὶ εὐρίσκομεν ἄθροισμα 48 ἡμέρας.

Γράφομεν 48 ἐν τῇ στήλῃ τῶν ἡμερῶν.

Ὁ οὕτως ὑπὸ τὴν γραμμὴν γεγραμμένος συμμιγής

48ήμ.	17ῶρ.	45λ.π.	36λ.δ.
-------	-------	--------	--------

παριστᾷ προφανῶς τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ἄν εἴχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ τοὺς ἐξῆς πολλαπλασιασμοὺς

7ῶθ.	3τάλ.	0δραχ.	23λεπ.	1στατ.	23δκ.	5δράμ.
------	-------	--------	--------	--------	-------	--------

9

11

69	3	2	7	16	33	55
----	---	---	---	----	----	----

ἠθέλομεν εὐρεῖ, ἀκολουθοῦντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα, γινόμενα τοὺς ὑπὸ τὰς γραμμάς γεγραμμένους συμμιγεῖς.

188. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος περιέχῃ καὶ κλασματικὰ μέρη, πῶς εὐρίσκομεν τὸ γινόμενον;

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι προτιθέμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς 50θ. 2τάλ. 3δραχ. 27λεπ. $+\frac{4}{7}$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 6.

$$\begin{array}{r} 50\theta. \quad 2\acute{\alpha}\lambda. \quad 3\delta\rho\alpha\chi. \quad 27\lambda\epsilon\pi. + \frac{4}{7} \\ \hline 6 \\ 33 \quad 3 \quad 4 \quad 65 \quad + \frac{4}{7} \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ τοῦ λεπτοῦ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν 6, ἐκ τοῦ γινομένου $\frac{24}{7}$ τοῦ λεπτοῦ ἐξάγομεν τὰ ἐμπεριεχόμενα λεπτά, καὶ εὐρίσκομεν 3λεπ. καὶ ὑπόλοιπον $\frac{3}{7}$ τοῦ λεπτοῦ.

Γράφομεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$ ἐν τῇ αὐτῇ ὑπὸ τὴν γραμμὴν τοῦ κλάσματος στήλῃ, καὶ προσθέτομεν τὰ 3λεπ. εἰς τὸ γινόμενον τῶν 27λεπ. τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 6.

Τὰ λοιπὰ τῆς πράξεως ἐκτελοῦνται ὡς προεῖρήθη.

Ἦσαύτως, ἂν εἴχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν ἐξῆς πολλαπλασιασμόν

$$\begin{array}{r} 8\theta\rho. \quad 5\pi\acute{o}\delta. \quad 3\delta\acute{\alpha}\kappa. \quad 7\gamma\rho\alpha\mu. + \frac{5}{9} \\ \hline 42 \\ 106 \quad 3 \quad 7 \quad 6 \quad + \frac{5}{9} \end{array}$$

ἠθέλομεν εὕρει γινόμενον τὸν ὑπὸ τὴν γραμμὴν συμμιγῆ.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΔΙ' ΑΚΕΡΑΙΟΥ.

189. Πῶς διαιροῦμεν συμμιγῇ δι' ἀκεραίου ;

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι προτιθέμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς 18ήμ. 5ῶρ. 2λ.π. διὰ τοῦ ἀκεραίου 7.

Γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τὸν διαιρέτην καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ καθέτου καὶ ὀριζοντίου γραμμῆς, ὡς φαίνεται ἐν τῷ ἀπέναντι παραδείγματι.

Διαιροῦμεν πρῶτον τὰς μονάδας 18ήμ. τῆς ἀνωτάτης τοῦ συμμιγοῦς ὑποδιαιρέσεως διὰ τοῦ διαιρέτου 7, καὶ εὐρίσκομεν πηλίκον 2ήμ. καὶ ὑπόλοιπον 4ήμ.

Γράφομεν 2ήμ. εἰς τὸ πηλίκον καὶ τρέπομεν τὸ ὑπόλοιπον 4ήμ. εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαιρέσεως, ἥτοι εἰς ὥρας. Προσθέτομεν εἰς τὰς εὔρεθείσας 96 ὥρ. καὶ τὰς ἐν τῷ συμμιγῇ ὑπαρχούσας 5, καὶ εὐρίσκομεν ἄθροισμα 101 ὥρ.

18ήμ.	5ῶρ.	2λ.π.	7
14			2ήμ. 14ῶρ. 26λ.π.
4			
24			
96ῶρ.			
5			
101			
7			
31			
28			
3			
60			
180λ.π.			
2			
182			
14			
42			
42			
0			
7ῶρ. 5πόδ. 0δάκ. 9γραμ.			23
6			0ῶρ. 2πόδ. 0δάκ. 6γρ. + $\frac{15}{23}$
42πόδ.			
5			
47			
46			
1			
12			
12δάκ.			
12			
24			
12			
144γραμ.			
9			
153			
138			
15			

Διαιροῦμεν τὰς 101 ῶρ. πάλιν διὰ τοῦ διαιρέτου,
καὶ εὐρίσκουμεν πηλίκον 14ῶρ. καὶ ὑπόλοιπον 3ῶρ.

Γράφομεν 14 ῶρ. εἰς τὸ πηλίκον, τρέπομεν τὸ ὑπό-
λοιπον 3ῶρ. εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑπο-
διαιρέσεως, ἥτοι εἰς λεπτά πρῶτα, καὶ προσθέτομεν
εἰς ταῦτα καὶ τὰ ἐν τῷ συμμιγῇ ὑπάρχοντα 2λ.π.
Εὐρίσκουμεν οὕτως ἄθροισμα 182λ.π., ἅτινα διαιροῦν-
τες πάλιν διὰ τοῦ διαιρέτου εὐρίσκουμεν πηλίκον 26λ.π.
καὶ ὑπόλοιπον 0.

Γράφομεν 26λ.π. εἰς τὸ πηλίκον καὶ ὁ ἀποτελού-
μενος συμμιγῆς 2ήμ. 14ῶρ. 26λ.π. παριστᾷ τὸ ζητού-
μενον πηλίκον τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς 18ήμ. 5ῶρ.
2λ.π. διὰ τοῦ ἀκεραίου 7.

Ὡσαύτως, ἂν εἶχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῇ
7ῶρ. 5πόδ. 0δάκ. 9γραμ. διὰ τοῦ ἀκεραίου 23, ἠθέ-
λομεν διατάξει καὶ ἐκτελέσει τὰ τῆς πράξεως ὡς φαί-
νεται ἐν τῷ κάτωθι παραδείγματι.

Προσθετέον ἐνταῦθα ὅτι, ἂν ὁ ἀνωτέρω δοθεὶς συμ-
μιγῆς 7ῶρ. 5πόδ. 0δάκ. 9γραμ. περιεῖχε καὶ τὸ κλά-
σμα $\frac{5}{7}$ τῆς γραμμῆς, ἠθέλομεν διαιρέσει καὶ τοῦτο διὰ
τοῦ διαιρέτου 23 καὶ τὸ εὐρεθησόμενον πηλίκον $\frac{5}{161}$
προσθέσει εἰς τὸ κλάσμα $\frac{15}{23}$. Τότε ἠθέλομεν εὑρεῖ διὰ
πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς 7ῶρ. 5πόδ.
0δάκ. 9γραμ. + $\frac{5}{7}$ διὰ τοῦ ἀκεραίου 23 τὸν συμμιγῇ
2πόδ. 0δάκ. 6γρμ. + $\frac{110}{161}$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΠΙ ΚΛΑΣΜΑ ΚΑΙ ΜΙΚΤΟΝ

190. Πῶς πολλαπλασιάζομεν συμμιγῇ ἐπὶ κλάσμα;

Ὅπως καὶ ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα. Πολλαπλασιάζομεν δηλαδὴ τὸν συμμιγῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῇ 2στατ. 23όκ. 47δράμ. ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸν δοθέντα συμμιγῇ ἐπὶ 5, καὶ τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον 12στατῆρ. 27όκ. 235δράμ. διαιροῦμεν διὰ 8. Τὸ εὑρεθησόμενον πηλίκον 1στατ. 25όκ. 479 δράμ. $+\frac{3}{8}$ θέλει παριστᾶ προφανῶς τὸ γινόμενον τοῦ δεδομένου συμμιγούς ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$.

191. Πῶς πολλαπλασιάζομεν συμμιγῇ ἐπὶ μικτόν;

Τρέπομεν τὸν μικτόν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν δεδομένον συμμιγῇ ἐπὶ τὸ εὑρεθησόμενον κλάσμα ὡς προείπομεν.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῇ 5όθ. 2τάλ. 3δραχ. ἐπὶ τὸν μικτόν $2+\frac{1}{5}$, τρέπομεν τὸν μικτόν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν $\frac{11}{5}$, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν δοθέντα συμμιγῇ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{11}{5}$ ὡς προείπομεν. Εὐρίσκομεν οὕτω γινόμενον τὸν συμμιγῇ 14όθ. 2τάλ. 3δραχ. 80λεπ.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΔΙΑ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΜΙΚΤΟΥ

192. Πῶς διαιροῦμεν συμμιγῇ διὰ κλάσματος;

Ὅπως καὶ ἀκέραιον διὰ κλάσματος. Πολλαπλασιάζομεν δηλαδὴ τὸν συμμιγῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, καὶ διαιροῦμεν τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα διαίρῃσωμεν τὸν συμμιγῇ 5όρ. 3πόδ. 2δάκ. διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{9}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{9}{5}$, ὅπερ εἶναι τὸ δοθὲν $\frac{9}{5}$ ἔχον τοὺς ὅρους ἀντεστραμμένους. Τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον 9όρ. 5πόδ. 8δάκ. 4γρμ. $+\frac{4}{5}$ θέλει προφανῶς παριστᾶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ δεδομένου συμμιγούς 5όρ. 3πόδ. 2δάκ. διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{9}$.

193. Πῶς διαιροῦμεν συμμιγῇ διὰ μικτοῦ;

Ὅπως καὶ ἀκέραιον διὰ μικτοῦ. Τρέπομεν δηλαδὴ τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ διαιροῦμεν τὸν δεδομένον συμμιγῇ διὰ τοῦ εὑρεθησομένου κλασματικοῦ ὡς προείπομεν.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῇ 3 ἡμ. 13 ὥρ. διὰ τοῦ μικτοῦ $1 + \frac{2}{3}$, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν $\frac{5}{3}$, καὶ διαιροῦμεν τὸν δοθέντα συμμιγῇ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{3}$.

Ἐκτελοῦντες τὴν πράξιν ὡς προείπομεν εὐρίσκομεν πηλίκον τὸν συμμιγῇ 2 ἡμ. 3 ὥρ.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΠΙ ΣΥΜΜΙΓῃ

194. Πῶς πολλαπλασιάζομεν συμμιγῇ ἐπὶ συμμιγῇ;

Τρέπομεν τὸν συμμιγῇ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἐκείνης αὐτοῦ τῆς ὑποδιαίρεσεως, πρὸς τὴν μονάδα τῆς ὁποίας ἀναφέρεται ὁ δεδομένος πολλαπλασιαστέος, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸν εὑρεθησόμενον κλασματικόν, ὅπως εἴπομεν ὅτι πολλαπλασιάζεται συμμιγῇ ἐπὶ κλάσμα.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῇ 5 ὥρ. 2 πόδ. ἐπὶ τὸν συμμιγῇ 2 ὥρ. 3 λ.π. 8 λ.δ., πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸν πολλαπλασιαστήν 2 ὥρ. 3 λ.π. 8 λ.δ. εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἐκείνης τῆς ὑποδιαίρεσεως, πρὸς τὴν μονάδα τῆς ὁποίας ἀναφέρεται ὁ δεδομένος πολλαπλασιαστέος 5 ὥρ. 2 πόδ., καὶ ἐπὶ τὸ εὑρεθησόμενον κλάσμα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον.

Ἄν ἔχωμεν π. χ. νὰ λύσωμεν τὸ ἐξῆς ζήτημα·

Ἐργάτης σκάπτει 5 ὥρ. 2 πόδ. εἰς 1 ὥραν· πόσον μῆκος θέλει σκάψει οὗτος εἰς 2 ὥρ. 3 λ.π. 8 λ.δ.;

πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει προφανῶς νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῇ 5 ὥρ. 2 πόδ. ἐπὶ τὸν συμμιγῇ 2 ὥρ. 3 λ.π. 8 λ.δ., καὶ ἐπειδὴ ἡ μονὰς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πρὸς ἣν, ὡς ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ ζητήματος, ἀναφέρεται ὁ πολλαπλασιαστέος 5 ὥρ. 2 πόδ. εἶναι ἡ 1 ὥρα, τρέπομεν τὸν πολλαπλασιαστήν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὥρας, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸ εὑρεθησόμενον κλάσμα $\frac{7888}{9600}$, ὅπως εἴπομεν ὅτι πολλαπλασιάζεται συμμιγῇ ἐπὶ κλάσμα.

Ἄν ἀντὶ τοῦ προηγουμένου ζητήματος εἴχομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἐξῆς,

Ἐργάτης σκάπτει ὕδρ. 2^πόδ. εἰς 1 ἡμέραν πόσον μῆκος θέλει σκάψει οὗτος εἰς 2^ωρ. 3^λ.π. 8^λ.δ.;

τότε, κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα, ἔπρεπε νὰ τρέψωμεν τὸν πολλαπλασιαστὴν 2^ωρ. 3^λ.π. 8^λ.δ. εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν $\frac{7388}{86400}$ τῆς ἡμέρας, καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{7388}{86400}$ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον συμμιγῇ ὕδρ. 2^πόδ.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῇ ἐπὶ συμμιγῇ, πρέπει νὰ λάβωμεν ἀναγκαίως ὑπ' ὄψιν τὸ ζήτημα, διὰ τὴν λύσιν τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν τοιοῦτον πολλαπλασιασμόν, καὶ νὰ διακρίνωμεν τὴν μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πρὸς ἣν ἀναφέρεται ὁ δεδομένος πολλαπλασιαστέος.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΔΙΑ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ.

195. Πόσαι περιπτώσεις διακρίνονται εἰς τὴν διαίρεσιν συμμιγῶς διὰ συμμιγῶς;

Αἱ ἐξ ἧς δύο·

1ον Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ διαιρέτης ᾖναι συμμιγεῖς ὁμοειδεῖς.

2ον Ὅταν ὁ συμμιγῆς τοῦ διαιρετέου ᾖναι ἑτεροειδῆς πρὸς τὸν συμμιγῇ τοῦ διαιρέτου.

196. Πῶς εὐρίσκομεν τὸ ζητούμενον πηλίκον, ὅταν οἱ συμμιγεῖς ᾖναι ὁμοειδεῖς;

Τρέπομεν καὶ τοὺς δύο εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτοῖς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως, καὶ διαιροῦμεν τὰς μονάδας τοῦ διαιρετέου συμμιγῶς διὰ τῶν μονάδων τοῦ συμμιγῶς τοῦ διαιρέτου. Τὸ προκύπτον κλάσμα θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῇ 2^ημ. 3^ωρ. διὰ τοῦ ὁμοειδοῦς αὐτῷ συμμιγῶς ὕδρ. 3^λ.π., τρέπομεν καὶ τὸν συμμιγῇ τοῦ διαιρετέου καὶ τὸν συμμιγῇ τοῦ διαιρέτου εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτοῖς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως, ἥτοι εἰς λεπτά πρῶτα, καὶ διαιροῦμεν τὰ 3060 λεπτά πρῶτα τοῦ διαιρετέου διὰ τῶν 303 λεπτῶν πρῶτων τοῦ διαιρέτου. Τὸ πηλίκον $\frac{3060}{303}$ θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον. Τούτῃστιν, ἂν τὸ ζητούμενον πηλίκον ᾖναι π. χ. ὀθωρεία, τὸ κλάσμα $\frac{3060}{303}$ θέλει εἶναι κλασματικὸς ἀριθμὸς τοῦ ὀθωρείου· ἂν τὸ ζητούμενον πηλίκον ᾖναι ὀκάδες, τὸ κλάσμα $\frac{3060}{303}$ θέλει εἶναι κλασματικὸς ἀριθμὸς

τῆς δακάδος· ἂν τὸ ζητούμενον πηλίκον ᾦναι πόδες, τὸ κλάσμα $\frac{3000}{303}$ θέλει εἶναι κλασματικός ἀριθμὸς τοῦ ποδός, κτλ.

Ὡσαύτως, ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς 3 ὀρ. 5πόδ. διὰ τοῦ συμμιγοῦς 2ὀρ. 0πόδ. 2δάκτυλ. 9γραμμ., τρέπομεν καὶ τοὺς δύο εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτοῖς κατωτάτης υποδιαίρεσεως, ἥτοι εἰς γραμμάς, καὶ διαιροῦμεν τὰς 3312 γραμμάς τοῦ διαιρετέου διὰ τῶν 1761 γραμμῶν τοῦ διαιρέτου. Τὸ πηλίκον $\frac{3312}{1761}$ θέλει παριστᾶ τὸ ζητούμενον. Τοῦτέστιν, ἂν τὸ ζητούμενον ᾦναι ὥραι, τὸ κλάσμα $\frac{3312}{1761}$ θέλει εἶναι κλασματικός ἀριθμὸς τῆς ὥρας· ἂν τὸ ζητούμενον ᾦναι τάληρα, τὸ κλάσμα $\frac{3312}{1761}$ θέλει εἶναι κλασματικός ἀριθμὸς τοῦ τάληρου, κτλ.

197,* Πῶς διαιροῦμεν συμμιγὴ διὰ συμμιγοῦς ἑτεροειδοῦς;

Τρέπομεν τὸν συμμιγὴ τοῦ διαιρετέου εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἐκείνης αὐτοῦ τῆς υποδιαίρεσεως, πρὸς τὴν μονάδα τῆς ὁποίας ἀναφέρεται τὸ ζητούμενον πηλίκον, καὶ διὰ τοῦ οὕτως εὑρεθησομένου κλασματικοῦ διαιροῦμεν τὸν συμμιγὴ τοῦ διαιρετέου, ὅπως εἴπομεν ὅτι διαιρεῖται συμμιγῆς διὰ κλάσματος.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα διαιρέσωμεν τὸν συμμιγὴ 125ὀρ. 5πόδ. 8δάκ. διὰ τοῦ ἑτεροειδοῦς αὐτῷ 5ὀρ. 8λ.π. 13λ.δ., πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγὴ 5ὀρ. 8λ.π. 13λ.δ. εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἐκείνης αὐτοῦ τῆς υποδιαίρεσεως, πρὸς τὴν μονάδα τῆς ὁποίας ἀναφέρεται τὸ ζητούμενον πηλίκον, καὶ διὰ τοῦ οὕτως εὑρεθησομένου κλάσματος νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγὴ 125ὀρ. 5πόδ. 8δάκ. Ἄν π. γ. ἔχωμεν νὰ λύσωμεν τὸ ἐξῆς ζήτημα·

Ἐργάτης εἰς 5ὀρ. 8λ.π. 13λ.δ. ἔσκαψεν 125ὀρ. 5πόδ. 8δάκ., πόσας ἡμέρας σκάψει οὗτος εἰς 1 ὥραν;

πρέπει προφανῶς πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγὴ 125ὀρ. 5πόδ. 8δάκ. διὰ τοῦ ἑτεροειδοῦς αὐτῷ 5ὀρ. 8λ.π. 13λ.δ., καὶ πρὸς τοῦτο, ἐπειδὴ ἡ μονάς, πρὸς ἣν ἀναφέρεται τὸ ζητούμενον πηλίκον, εἶναι ἡ ὥρα, τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὥρας, καὶ διαιροῦμεν τὸν διαιρετέον διὰ τοῦ οὕτως εὑρεθησομένου κλάσματος $\frac{18403}{3600}$.

Ἄν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς ζήτημα·

Ἐργάτης εἰς 5ὀρ. 8λ.π. 13λ.δ. ἔσκαψεν 125ὀρ. 5πόδ. 8δάκ., πόσας ἡμέρας σκάψει οὗτος εἰς 1 ἡμέραν;

ἔπρεπε πάλιν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγὴ 125ὀρ. 5πόδ. 8δάκ. διὰ τοῦ ἑτεροειδοῦς αὐτῷ 5ὀρ. 8λ.π. 13λ.π. δ.,

ἀλλ' εἰς τὴν παρούσαν περίπτωσιν, ἐπειδὴ ἡ μονάς, πρὸς ἣν ἀναφέρεται τὸ ζητούμενον πηλίκον, εἶναι ἡ ἡμέρα, ἠθέλομεν τρέψει τὸν συμμιγῆ τοῦ διαιρέτου εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ἡμέρας, καὶ διὰ τοῦ οὕτως εὑρεθησομένου κλάσματος $\frac{18493}{86400}$ διαίρῃται τὸν διαιρετέον 125 ὅρ. ὑπόδ. 8 δακ.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς ἑτεροειδοῦς πρέπει νὰ λαμβάνωμεν ἀναγκαίως ὑπ' ὄψιν τὸ ζήτημα, διὰ τὴν λύσιν τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν τοιαύτην διαίρεσιν, καὶ νὰ διακρίνωμεν ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως αὐτοῦ τὴν μορὰν τοῦ διαιρέτου, πρὸς ἣν ἀναφέρεται τὸ ζητούμενον πηλίκον.

**ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΠΙ ΑΚΕΡΑΙΟΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ
ΜΕΘΟΔΟΝ ΤΩΝ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΩΝ.**

198. Πότε ἀριθμὸς τις λέγεται ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ ἢ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ ἑτέρου;

Ἀριθμὸς τις λέγεται πολλαπλασίον ἑτέρου, ὅταν ᾖναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἑτέρου τούτου. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 30, ὡς διαιρετὸς διὰ τοῦ 2, 3, 5, 6, λέγεται πολλαπλασίον τοῦ 2, 3, 5, 6.

Ἀντιστρόφως, οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5, 6, οἱ διαιροῦντες ἄνευ ὑπολοίπου τὸν 30, λέγονται ὑποπολλαπλασία τοῦ 30.

Ὡσαύτως, ὁ ἀριθμὸς 4 λέγεται πολλαπλασίον τῶν κλασμάτων $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, διότι διαιρούμενος δι' ἐκάστου τούτων δίδει πηλίκον 8, 24, 16, ἥτοι ἀκεραίους ἀριθμούς. Ἀντιστρόφως τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ λέγονται ὑποπολλαπλασία τοῦ 4.

199. Πῶς εὐρίσκομεν τὸ γινόμενον δεδομένου συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον κατὰ τὴν καλουμένην ΜΕΘΟΔΟΝ ΤΩΝ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΩΝ;

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητοῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς 8 ὄργυαι ὑπόδ. 10 δάκ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 14 κατὰ τὴν λεγομένην μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασιῶν.

Γράφομεν ὑπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης ὑποδιαίρεσεως τοῦ πολλαπλασιαστέου συμμιγοῦς τὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαστήν, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὰς 8 ὄρ. ἐπὶ 14. Εὐρίσκομεν γινόμενον 112 ὄρ., ἃς γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὀργυιῶν.

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τοὺς 4πόδ. ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 14, ἀποσυνθέτομεν αὐτοὺς εἰς τὰ μέρη 3πόδ. καὶ 1πόδ., ἅτινα εἶναι ὑποπολλαπλάσια τῆς ὀργυιᾶς, ἥτις περιέχει 6 πόδας.

		8ὀρ.	4πόδ.	10δακ.
		14		
		412		
4πόδ.	{	3πόδ.	7	
		1	2	2
	{	6δακ.	4	4
10δακ.	{	3	0	3
		1	0	4
			123	4
				8

Ἐπειδὴ 3πόδ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 6 ποδῶν, ἡ τῆς 1 ὀργυιᾶς, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ 14 θέλει εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς 1 ὀργυιᾶς ἐπὶ 14, ἥτοι τὸ ἥμισυ τῶν 14 ὀργυιῶν. Λαμβάνομεν λοιπὸν τὸ ἥμισυ 7 τοῦ 14, καὶ γράφομεν 7 ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὀργυιῶν ἀπέναντι τῶν 3ποδ.

Ἐπειδὴ 1 πούς εἶναι τὸ τρίτον τῶν 3ποδ., τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 14 θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ προηγουμένου. Λαμβάνομεν λοιπὸν τὸ τρίτον τῶν 7ὀρ. καὶ εὐρίσκομεν 2ὀρ. 2πόδ. Γράφομεν ἀπέναντι τοῦ 1 ποδ. ἐν μὲν τῇ στήλῃ τῶν ὀργυιῶν 2, ἐν δὲ τῇ στήλῃ τῶν ποδῶν 2.

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τοὺς 10δακ. ἐπὶ 14, ἀποσυνθέτομεν αὐτοὺς εἰς τὰ μέρη 6δακ., 3δακ., καὶ 1δακ., ἅτινα εἶναι ὑποπολλαπλάσια τοῦ ποδός (διότι εἰς πούς περιέχει 12 δακτύλους καὶ οἱ ἀριθμοὶ 6, 3, 1 εἶναι ὑποπολλαπλάσια τοῦ 12), καὶ ἔπειτα λέγομεν

Ἐπειδὴ 6δακ. εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ 1 ποδός, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ 14 θέλει εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ 1ποδ. ἐπὶ 14. Διὰ τοῦτο λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου 2ὀρ. 2ποδ., τοῦ γεγραμμένου ἀπέναντι τοῦ 1ποδ., καὶ εὐρίσκομεν 1ὀρ. καὶ 1πόδ. Γράφομεν λοιπὸν ἀπέναντι τῶν 6δακ. ἐν μὲν τῇ στήλῃ τῶν ὀργυιῶν 1, ἐν δὲ τῇ στήλῃ τῶν ποδῶν 1.

Ἐπειδὴ πάλιν 3δακ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 6δακ., πρὸς εὔρεσιν τοῦ γινομένου τῶν 3δακ. ἐπὶ 14 πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ προηγουμένου γινομένου. Λαμβάνομεν λοιπὸν τὸ ἥμισυ τοῦ 1ὀρ. 2ποδ. καὶ εὐρίσκομεν 0ὀρ. 3πόδ. 6δακ. Γράφομεν ἀπέναντι τῶν 3δακ. ἐν μὲν τῇ στήλῃ τῶν ὀργυιῶν 0, ἐν δὲ τῇ στήλῃ τῶν ποδῶν 3, καὶ 6 ἐν τῇ στήλῃ τῶν δακτύλων.

Ἐπειδὴ 1δακ. εἶναι τὸ τρίτον τῶν 3δακ. λαμβάνομεν τὸ τρίτον τοῦ

ἀπέναντι τῶν 3δακ. γεγραμμένου συμμιγοῦς 0ὄρ. 3πόδ. 6δάκ. Εὐρίσκομεν οὕτω 0ὄρ. 1πόδ. 2δακ., ὅπερ γράφομεν ὡς φαίνεται εἰς τὴν ἀνωτέρω τῶν καθέκαστα τῆς πράξεως διάταξιν.

Ἄγομεν τέλος ὀριζόντιον γραμμὴν, καὶ προσθέτοντες τοὺς κατὰ τὸν κανόνα τῆς προσθέσεως γεγραμμένους συμμιγεῖς εὐρίσκομεν ἄθροισμα τὸν συμμιγῆ 123ὄρ. 1πόδ. 8δακ., ὅστις παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον, εὐρεθὲν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

200. Ἐφαρμόσατε τὴν αὐτὴν μέθοδον καὶ ἐπὶ ἐτέρων τινῶν παραδειγμάτων.

1ον. Ἐστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγῆς 24ἡμ. 49ὄρ. 46λ.π. 44λ.δ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 36.

		24ἡμ.	49ὄρ.	46λ.π.	44λ.δ.
		36			
		426			
		63			
49ὄρ.	{	42ὄρ.	48		
		6	9		
		4	4	12	
46λ.π.	{	30λ.π.	0	18	
		15	0	9	
		4	0	0	36
44λ.δ.	{	20λ.δ.	0	0	12
		20	0	0	12
		4	0	0	3
		785	16	2	24

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰς 24ἡμ. ἐπὶ 36, καὶ γράφομεν τὰ μερικὰ γινόμενα 426 καὶ 63 ἐν τῇ καθέτῳ τῶν ἡμερῶν στήλῃ.

Ἀποσυνθέτομεν ἔπειτα τὰς 49ὄρ. εἰς τὰ μέρη 42ὄρ., 6ὄρ. καὶ 1ὄρ., ἅτινα εἶναι ὑποπολλαπλασία τοῦ ἀριθμοῦ 24, ὅστις δεικνύει πόσας ὥρας περιέχει 1ἡμέρα. Ἰνα δὲ εὐρωμεν τὸ γινόμενον τῶν 42ὄρ. ἐπὶ 36 σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἄν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 24ὄρ. ἐπὶ 36, ἠθέλομεν εὑρεῖ γινόμενον 36ἡμ., τώρα, ὅτε πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν 42ὄρ. ἐπὶ 36, θέλομεν προφανῶς εὑρεῖ τὸ γινόμενον 18ἡμ., ἥτοι τὸ ἥμισυ τῶν 36ἡμ., διότι 42 ὄρ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 24 ὄρ. Γράφομεν λοιπὸν 18 ἐν τῇ στήλῃ τῶν ἡμερῶν καὶ ἀπέναντι τῶν 42ὄρ.

Ἐπειδὴ 6ὄρ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 12ὄρ., τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ 36 θέλει εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ προηγούμενου, ἥτοι 9ἡμ. Γράφομεν λοιπὸν 9 ἐν τῇ στήλῃ τῶν ἡμερῶν καὶ ἀπέναντι τῶν 6ὄρ.

Ἐπειδὴ 1 ὥρ. εἶναι τὸ ἔκτορ τῶν 6 ὥρ., θέλομεν εὔρει γινόμενον τὸ ἔκτορ τῶν 9 ἡμ., ἥτοι 1 ἡμ. 12 ὥρ. Γράφομεν λοιπὸν ἀπέναντι τῆς 1 ὥρ. ἐν τῇ στήλῃ τῶν ἡμερῶν 1 καὶ 12 ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὥρῶν.

Μεταβαίνομεν ἀκολούθως εἰς τὰ 46 λ.π., ἅτινα ἀποσυνθέτομεν εἰς 30 λ.π., 15 λ.π. καὶ 1 λ.π. καὶ λέγομεν

Ἐπειδὴ 30 λ.π. εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς 1 ὥρ., λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπέναντι τῆς 1 ὥρ. γεγραμμένου γινομένου 1 ἡμ. 12 ὥρ. Εὐρίσκομεν οὕτω τὸν συμμιγῆ 0 ἡμ. 18 ὥρ., ὃν γράφομεν καταλλήλως.

Ἐπειδὴ 15 λ.π. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 30 λ.π., λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ προηγουμένου γινομένου 0 ἡμ. 18 ὥρ. Εὐρίσκομεν τὸν συμμιγῆ 0 ἡμ. 0 ὥρ., ὃν γράφομεν ὡς φαίνεται ἐν τῷ παραδείγματι.

Ἐπειδὴ 1 λ.π. εἶναι τὸ δέκατορ πέμπτου τῶν 15 λ.π. λαμβάνομεν τὸ δέκατορ πέμπτου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος γινομένου, καὶ εὐρίσκομεν τὸν ἀπέναντι τοῦ 1 λ.π. γεγραμμένου συμμιγῆ 0 ἡμ. 0 ὥρ. 36 λ.π.

Μεταβαίνομεν τέλος καὶ εἰς τὰ 44 λ.δ., ἅτινα ἀποσυνθέτομεν εἰς 20 λ.δ., 20 λ.δ. καὶ 4 λ.δ., καὶ λέγομεν

Ἐπειδὴ τὰ 20 λ.δ. εἶναι τὸ τρίτον τοῦ 1 λ.π., λαμβάνομεν τὸ τρίτον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος γινομένου, ὅπερ ἐπαναλαμβάνομεν δις, ὡς φαίνεται ἐν τῷ ὅπεσθεν παραδείγματι.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ 4 λ.δ. εἶναι τὸ πέμπτου τῶν 20 λ.δ., λαμβάνομεν τὸ πέμπτου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος γινομένου, ὅπερ γράφομεν κτλ.

Προσθέτοντες τὰ κατὰ τὸν κανόνα τῆς προσθέσεως γεγραμμένα μερικὰ γινόμενα εὐρίσκομεν ἄθροισμα τὸν συμμιγῆ 78 ὥρ. 46 ὥρ. 2 λ.π. 24 λ.δ., ὅστις παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον, εὑρεθὲν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

2ον. Ἐστω πρὸς τούτοις νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγῆς 25 στατ. 26 ὀκ. 260 δράμ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 30.

			25 στατ.	26 ὀκ.	260 δράμ.
			30		
			750		
26 ὀκ.	{	22 ὀκ. . . .	15		
		4	2	32	
	{	200	0	15	
260 δράμ.	{	50	0	3	300
		10	0	0	300
			768	7	200

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς 25 στατ. ἐπὶ 30, καὶ γράφομεν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον 750 ἐν τῇ στήλῃ τῶν στατήρων.

Ἀποσυνθέτομεν τὰς 26ὀκ. εἰς 22ὀκ. καὶ 4ὀκ.

Ἐπειδὴ 22ὀκ. εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ 1στατ., λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ 15 τῶν 30στατ., ὅπερ γράφομεν ἀπέναντι τῶν 22 ὀκ.

Ἐπειδὴ 4ὀκ. εἶναι τὸ ἐνδέκατον τοῦ 1στατ., λαμβάνομεν τὸ ἐνδέκατον τῶν 30στατ., καὶ εὐρίσκομεν 2στατ. 32ὀκ.

Ἀποσυνθέτομεν τελευταῖον τὰ 260δράμ. εἰς 200δράμ., 50δράμ. καὶ 10δράμ.

Ἐπειδὴ 200δράμ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς 1ὀκ., ἢ τὸ ὀγδοον τῶν 4ὀκ., λαμβάνομεν τὸ ὀγδοον τοῦ ἀπέναντι τῶν 4ὀκ. γεγραμμένου συμμιγοῦς, ὅπερ γράφομεν ὡς φαίνεται ἀνωτέρω.

Ἐπειδὴ τὰ 50δράμ. εἶναι τὸ τέταρτον τῶν 200δραμ., λαμβάνομεν τὸ τέταρτον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος συμμιγοῦς.

Ἐπειδὴ τέλος τὰ 10δράμ. εἶναι τὸ πέμπτον τῶν 50δραμ., λαμβάνομεν τὸ πέμπτον τοῦ συμμιγοῦς 3ὀκ. 300δράμ.

Ἀθροίζοντες τὰ κατὰ τὸν κανόνα τῆς προσθέσεως γεγραμμένα μερικὰ γινόμενα εὐρίσκομεν ἄθροισμα τὸν συμμιγῆ 768στατ. 7ὀκ. 200δράμ., ὅστις παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον εὐρεθὲν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασιῶν.

3ον. Ἄν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 4ὀθ. 3τάλ. 2δρ. 75λεπ. ἐπὶ 24.

		4ὀθ.	3τάλ.	2δρ.	75λεπ.
		24			
		96			
3τάλ.	{	2τάλ.	42		
		4	6		
2δρ.	{	1δρ.	4	0	4
		4	4	0	4
75λεπ.	{	50λεπ.	0	2	2
		25	0	1	1
		417	4	4	

ἠθέλομεν, ἀποσυνθέτοντες τὰ μέρη 3τάλ., 2δρ., 75λεπ. ὡς φαίνεται ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι καὶ σκεπτόμενοι ὡς προείπομεν, εὕρει διὰ γινόμενον τὸν συμμιγῆ 117ὀθ. 1τάλ. 1δρ.

ΣΗΜ. Ἐκαστον τῶν μερῶν δεδομένου τινὸς συμμιγοῦς δύναται πολλάκις νὰ ἀποσυντεθῇ κατὰ διαφόρους τρόπους εἰς μέρη ὑποπολλαπλασία αλλήλων καὶ τῆς ὁμέως ἀνωτέρας ὑποδιαίρεσεως, καὶ ἐνίοτε, ἵνα εὐκολώτερον καὶ συντομώτερον φθάσῃ τις πρὸς τὸν σκοπόν, ἡ ἐκλογὴ δὲν εἶναι ἀδιάφορος. Μικρὰ τις ἀσκήσις καὶ ὀλίγαι τινὲς ἐπὶ τινων παραδειγμάτων ὁδηγίαι τοῦ διδάσκοντος δύνανται εὐκόλως νὰ ἀναπληρώσωσιν ὅ,τι δὲν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ἡμεῖς ἐνταῦθα ἐν ὀλίγοις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν συμμιγῶν 5ῶρ. 2πόδ. 9δᾶκ. 8γρ. 5πόδ. 10δᾶκ. 11γρ., 15ῶρ. 0πόδ. 2δᾶκ. 5γρ.

(19ῶρ. 2πόδ. 11δᾶκ.)

II. Ποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν συμμιγῶν 15ῆμ. 8ῶρ. 11λ.π. 44λ.δ., 15ῶρ. 8λ.π. 14λ.δ., 54ῆμ. 0ῶρ. 52λ.π. 27λ.δ.,

(68ῆμ. 0ῶρ. 13λ.π. 24λ.δ.)

III. Εἰς τὸν συμμιγῆ 5στατ. 5ῶκ. ἡ προστεθῶσι 2στατ. καὶ $\frac{3}{4}$ τῆς ὁκάδος.

(5στατ. 5ῶκ. 300δράμ.)

IV. Νὰ προστεθῶσι 5ῶθ. 3τάλ. 2δρ., 2τάλ. καὶ $\frac{3}{5}$ τῆς δραχμῆς, 1ῶθ. καὶ $\frac{4}{9}$ τοῦ ταλήρου.

(7ῶθ. 1τάλ. 4δρ. 82λεπ. + $\frac{3}{5}$.)

V. Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ συμμιγοῦς 18ῶρ. 5πόδ. 2δᾶκ. 9γρ. ὁ συμμιγῆς 5ῶρ. 4πόδ. 7δᾶκ. 5γρ.

(14ῶρ. 4πόδ. 7δᾶκ. 6γρ.)

VI. Νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ συμμιγοῦς 45ῶκ. 120δρ. τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ στατήρος.

(13ῶκ. 386δράμ. + $\frac{2}{3}$.)

VII. Νὰ ἀφαιρεθῶσι τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ ταλήρου ἀπὸ τῶν $\frac{5}{8}$ τοῦ ὀθωνείου.

(2τάλ. 0δρ. 35λεπ. + $\frac{5}{7}$.)

VIII. Νὰ εὐρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς 5ῶρ. 4πόδ. 8δᾶκ. 4γρ. ἐπὶ 9, κατὰ τὸν κοινὸν τρόπον καὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασιῶν.

(5ῶρ. 0πόδ. 3δᾶκ.)

IX. Ποῖα τὰ γινόμενα τοῦ συμμιγοῦς 5ῆμ. 2ῶρ. 5λ.π. ἐπὶ τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$;

(2ῆμ. 1ῶρ. 23λ.π. 20λ.δ., 2ῆμ. 4ῶρ. 55λ.π.)

X. Ποῖα τὰ γινόμενα τοῦ συμμιγοῦς 5ῆμ. 2ῶρ. 5λ.π. ἐπὶ τοὺς μικτοὺς $2 + \frac{1}{6}$, $7 + \frac{3}{11}$;

(6ῆμ. 16ῶρ. 30λ.π. 50λ.δ., 22ῆμ. 10ῶρ. 47λ.π. 16λ.δ. + $\frac{4}{11}$.)

XI. Ποῖα τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς 5ῆμ. 2ῶρ. διὰ τῶν ὁμοειδῶν αὐτῶ 7ῶρ. 8λ.π., 15ῆμ. 0ῶρ. 2λ.π., 5λ.π. 2λ.δ.;

($\frac{7320}{428}$, $\frac{7320}{18722}$, $\frac{439200}{182}$.)

XII. Ποῖα τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς 7ῶρ. 2πόδ. 5δᾶκ. διὰ τῶν ὁμοειδῶν αὐτῶ 8ῶρ. 5πόδ., 2πόδ. 7δᾶκ. 5γρ., 10δᾶκ. 7γρ.;

($\frac{531}{612}$, $\frac{6372}{375}$, $\frac{6372}{127}$.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'

ΠΕΡΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

201. Ποῖα καλοῦνται ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ ΜΕΡΗ;

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς 10, 100, 1000, 10000 κτλ. ἴσα μέρη, καὶ λάβωμεν ἀριθμὸν τινα ἐξ αὐτῶν, τὰ λαμβανόμενα μέρη καλοῦνται δεκαδικὰ τῆς μονάδος μέρη.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν λάβωμεν 5 δέκατα, 1 ἑκατοστὸν, 3 χιλιοστὰ κτλ., τὰ ληφθέντα δέκατα, ἑκατοστὰ, χιλιοστὰ κτλ. καλοῦνται δεκαδικὰ τῆς μονάδος μέρη.

202. Ποῖοι ἀριθμοὶ λέγονται ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ;

Οἱ συγκείμενοι ἐκ δεκαδικῶν τῆς μονάδος μερῶν, εἴτε περιέχουσιν εἴτε μὴ ἀκεραίας μονάδας.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς

23 μονάδες 5 δέκατα 2 χιλιοστὰ

λέγεται δεκαδικός, διότι περιέχει δέκατα καὶ χιλιοστὰ, ἅτινα εἶναι δεκαδικὰ τῆς μονάδος μέρη.

Ὡσαύτως οἱ ἀριθμοὶ

0 μονάδες, 7 ἑκατοστὰ, 0 μονάδες 3 ἑκατοστὰ 5 δεκάκις χιλιοστὰ εἶναι δεκαδικοί, διότι περιέχουσιν ἑκατοστὰ, δεκάκις χιλιοστὰ, ἅτινα εἶναι δεκαδικὰ τῆς μονάδος μέρη.

203. Πῶς καλοῦνται τὰ διάφορα δεκαδικὰ τῆς μονάδος μέρη καὶ ποῖα ἡ μεταξὺ τῶν σχέσις;

Τὰ δέκατα καλοῦνται μονάδες τῆς πρώτης δεκαδικῆς τάξεως· τὰ ἑκατοστὰ μονάδες τῆς δευτέρας δεκαδικῆς τάξεως· τὰ χιλιοστὰ μονάδες τῆς τρίτης δεκαδικῆς τάξεως, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἡ δὲ μεταξὺ τῶν σχέσις εἶναι ἡ αὐτὴ μετὰ τὴν τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν· τουτέστιν ἐκάστη μονὰς δεκαδικῆς τινος τάξεως εἶναι τὸ δέκατον τῆς ἀμέσως προηγούμενης. Παραδείγματος χάριν, τὸ ἑκατοστὸν εἶναι τὸ δέκατον τοῦ δεκάτου ($\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$)· τὸ χιλιοστὸν εἶναι τὸ δέκατον τοῦ ἑκατοστοῦ ($\frac{1}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{1000}$)· τὸ δεκάκις χιλιοστὸν εἶναι τὸ δέκατον τοῦ χιλιοστοῦ ($\frac{1}{10} \times \frac{1}{1000} = \frac{1}{10000}$), καὶ

οὕτω καθεξῆς. Ἡ δὲ μονάς τῆς πρώτης δεκαδικῆς τάξεως εἶναι τὸ δέκατον τῆς μονάδος.

201. "Ενεκα τῆς ἀνωτέρω σχέσεως τῶν μονάδων τῶν διαφόρων δεκαδικῶν τάξεωι πῶς γράφομεν ἀπλούστερον τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς;

Ἀπαρallάκτως ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους, τουτέστι γράφομεν πρῶτον τὰς ἀκεραίαις αὐτῶν μονάδας, ἐὰν ἔχωσιν, ἔπειτα τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων, μετὰ τοῦτο τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν, μετὰ τοῦτο τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐὰν ἐλλείπωσι μονάδες δεκαδικῆς τινος τάξεως, γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν, ἵνα δὲ διακρίνωμεν τὰς ἀκεραίαις μονάδας τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τῶν δεκαδικῶν αὐτοῦ μερῶν, χωρίζομεν αὐτὰς δι' ὑποδιαστολῆς.

Παραδείγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

27 μονάδες 5 δέκατα 3 ἑκατοστὰ 2 χιλιοστὰ
γράφεται ἀπλούστερον ὡς ἐξῆς·

27,532.

Ἐγράψαμεν πρῶτον τὰς ἀκεραίαις αὐτοῦ μονάδας 27 καὶ μετὰ ταύτας ὑποδιαστολῆν, μετὰ δὲ τὴν ὑποδιαστολὴν ἐγράψαμεν τὸ ψηφίον 5 τῶν δεκάτων, μετὰ τοῦτο τὸ ψηφίον 3 τῶν ἑκατοστῶν, καὶ μετὰ τοῦτο τὸ ψηφίον 2 τῶν χιλιοστῶν.

Ὡσαύτως, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

0 μονάδες 2 δέκατα 3 χιλιοστὰ
γράφεται ὡς ἐξῆς·

0,203.

Ἐπειδὴ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν περιεῖχεν ἀκεραίαις μονάδας, ἐγράψαμεν 0 πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς, ἔπειτα 2 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάτων, μετὰ τοῦτο 0, διότι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν περιέχει ἑκατοστὰ, ἥτοι μονάδας τῆς δευτέρας δεκαδικῆς τάξεως, καὶ τελευταῖον 3 πρὸς παράστασιν τῶν χιλιοστῶν.

Παρομοίως, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

35 μονάδες 9 χιλιοστὰ 5 ἑκατοστάκις χιλιοστὰ
γράφεται ἀπλούστερον ὡς ἐξῆς·

35,00905.

Ἐτέθησαν μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν δύο 0, διότι δὲν ὑπάρχουσι μονάδες τῆς πρώτης καὶ δευτέρας δεκαδικῆς τάξεως. Ἐτέθη ὡσαύτως 0 μετὰ τὰ χιλιοστὰ, διότι δὲν περιέχει ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δεκάκις χιλιοστὰ, τουτέστι μονάδας τῆς τετάρτης δεκαδικῆς τάξεως.

ΠΩΣ ΑΠΑΓΓΕΛΛΕΤΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΑΙ ΠΩΣ ΓΡΑΦΕΤΑΙ
ΑΠΑΓΓΕΛΛΟΜΕΝΟΣ

205. Κατὰ πόσους τρόπους ἀπαγγέλλεται δεδομένος δεκαδικὸς ἀριθμός;

Κατὰ τέσσαρας, τοὺς ἑξῆς·

1ον. Ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸν πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς ἀκέραιον ἀριθμόν, ἔπειτα ἐν ἑκαστῷ τῶν δεκαδικῶν αὐτοῦ ψηφίων μετὰ τοῦ ὀνόματος τῆς τάξεως τῶν μονάδων, ὡς παριστᾷ.

Παραδείγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός

23,254

ἀπαγγέλλεται· 23 μονάδες, 2 δέκατα, 5 ἑκατοστὰ, 4 χιλιοστὰ.

Ὡσαύτως ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός

0,907

ἀπαγγέλλεται· 0 μονάδες, 9 δέκατα, 0 ἑκατοστὰ, 7 χιλιοστὰ.

2ον. Ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ δεδομένου δεκαδικοῦ, ἔπειτα ὁλόκληρον τὸν ὑπὸ τῶν δεκαδικῶν αὐτοῦ ψηφίων ἀποτελούμενον ἀριθμὸν μετὰ τοῦ ὀνόματος τῶν μονάδων τῆς δεκαδικῆς τάξεως, ἢν παριστᾷ τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον αὐτοῦ..

Παραδείγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός

34,107

ἀπαγγέλλεται· 34 μονάδες καὶ ἑκατὸν ἑπτὰ χιλιοστὰ. Διότι 1 δέκατον εἶναι ἴσον μὲ 10 ἑκατοστὰ ἢ μὲ 100 χιλιοστὰ, ὑπάρχουσι δὲ καὶ 7 ἀκόμῃ χιλιοστὰ, ὥστε τὸ ὅλον τῶν χιλιοστῶν εἶναι 107.

Ὡσαύτως, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός

0,3208

ἀπαγγέλλεται· 0 μονάδες καὶ τρεῖς χιλιάδες διακόσια ὀκτὼ δεκάκις χιλιοστὰ. Ἀπηγγείλαμεν πρῶτον τὰς 0 ἀκεραίας αὐτοῦ μονάδας, ἔπειτα τὸν ἀριθμὸν 3208 ὡς ἀκέραιον, καὶ εἰς τὸ τέλος προσθέσαμεν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τῆς δεκαδικῆς τάξεως, ἣν τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ 8 παριστᾷ, ἥτοι δεκάκις χιλιοστὰ.

3ον. Ἀπαγγέλλομεν ὁλόκληρον τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὡς ἀπλοῦν ἀκέραιον, καὶ εἰς τὸ τέλος προσθέτομεν τὸ ὄνομα τῆς τάξεως τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου.

Παραδείγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός

15,27

ἀπαγγέλλεται· χίλια πεντακόσια εἴκοσι ἑπτὰ ἑκατοστὰ. Ἀπηγγείλα-

μεν ὁλόκληρον τὸν ἀριθμὸν 1527 ὡς ἀκέραιον, καὶ εἰς τὸ τέλος προσε-
θέσαμεν τὸ ὄνομα ἑκατοστὰ τῶν μονάδων, ἃς τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν
αὐτοῦ ψηφίον 7 παριστᾷ.

Ἵσαστύως, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

0,003704

ἀπαγγέλλεται· τρεῖς χιλιάδες ἑπτακόσια τέσσαρα ἑκατομμυριοστὰ. Ἀ-
πηγγείλαμεν ὁλόκληρον τὸν ἀριθμὸν 3704 ὡς ἀκέραιον, καὶ εἰς τὸ τέ-
λος προσεθέσαμεν τὸ ὄνομα ἑκατομμυριοστὰ τῶν μονάδων, ἃς τὸ τε-
λευταῖον δεκαδικὸν αὐτοῦ ψηφίον 4 παριστᾷ.

4ον. Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ περιέχῃ
πολλὰ ψηφία, χωρίζομεν αὐτὰ εἰς τμήματα τριψήφια ἀρχόμενοι
ἀπὸ τῆς ὑποδιαστολῆς καὶ βαίνοντες πρὸς τὰ δεξιά (τὸ τελευ-
ταῖον τμήμα δυνατόν νὰ περιέχῃ 2 ἢ καὶ 1 μόρον ψηφίων). Ἀ-
παγγέλλομεν ἔπειτα πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκεραίων τοῦ δεκα-
δικοῦ ἀριθμοῦ μονάδων, ἔπειτα ἐν ἑκαστῶν τῶν τμημάτων μετὰ
τοῦ ὀνόματος τῆς τάξεως τῶν μονάδων, ἃς τὸ τελευταῖον ψηφίον
τοῦ ἀπαγγελλομένου τμήματος παριστᾷ.

Παραδείγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

3,025 340 208 37

ἀπαγγέλλεται· 3 μονάδες, 25 χιλιοστὰ, 340 ἑκατομμυριοστὰ, 208
δισεκατομμυριοστὰ καὶ 37 ἑκατοστὰ τοῦ δισεκατομμυριοστοῦ. Ἀ-
πηγγείλαμεν πρῶτον τὰς ἀκεραίας αὐτοῦ μονάδας 3, ἔπειτα ἐν ἑκαστῶν
τῶν τμημάτων 025, 340, 208, 37 μετὰ τοῦ ὀνόματος τῶν μονάδων
χιλιοστὰ, ἑκατομμυριοστὰ, δισεκατομμυριοστὰ, ἑκατοστὰ τοῦ δισε-
κατομμυριοστοῦ, ἃς τὸ τελευταῖον ἐκάστου ψηφίον 5, 0, 8, 7 παριστᾷ.

Ἵσαστύως, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

37,203 427 2

ἀπαγγέλλεται· 37 μονάδες, 203 χιλιοστὰ, 427 ἑκατομμυριοστὰ
καὶ 2 δέκατα τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ.

206. Πῶς γράφεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀπαγγελλόμενος κατὰ
τὸν 4ον τρόπον;

Γράφομεν πρῶτον τὰς ἀπαγγελθείσας ἀκεραίας μονάδας, ἔπειτα ὑπο-
διαστολὴν καὶ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ἐν ἑκαστῶν τῶν ἀπαγγελλομένων
ψηφίων οὕτως, ὥστε νὰ κατέχῃ ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν τὴν θέσιν
τῶν δεκαδικῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ.

Π. χ., ἐν μᾶς ἐδίδετο πρὸς γραφὴν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 13 μονά-
δες, 5 δέκατα, 6 χιλιοστὰ καὶ 8 ἑκατομμυριοστὰ, ἠθέλομεν γράψαι

13,506008.

Ἐγράψαμεν πρῶτον τὰς ἀκεραίας αὐτοῦ μονάδας 13, ἔπειτα ὑποδιαστολὴν καὶ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν 5, ἵνα παριστᾷ τὰ ἀπαγγελθέντα 5 δέκατα· μετὰ τὸ ψηφίον 5 ἐγράψαμεν 0, διότι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν περιέχει ἑκατοστὰ· μετὰ τὸ 0 ἐγράψαμεν 6 πρὸς παράστασιν τῶν περιεχομένων 6 χιλιοστῶν· ἔπειτα δύο 0, διότι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν περιέχει δεκάκις χιλιοστὰ οὔτε ἑκατοντάκις χιλιοστὰ· καὶ τέλος μετὰ τὰ δύο 0 ἐγράψαμεν 8 πρὸς παράστασιν τῶν ἑκατομμυριοστῶν τοῦ δεδομένου δεκαδικοῦ.

Ὡσαύτως, ἂν μᾶς ἐδίδετο πρὸς γραφὴν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3 ἑκατοστὰ καὶ 8 δεκάκις χιλιοστὰ, ἠθέλομεν γράψαι

0,0308.

Ἐγράψαμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἀκεραίων μονάδων, ἔπειτα ὑποδιαστολὴν, καὶ μετὰ ταύτην 0 πρὸς παράστασιν τῶν δεκάτων, 3 πρὸς παράστασιν τῶν ἑκατοστῶν, 0 πρὸς παράστασιν τῶν χιλιοστῶν καὶ 8 πρὸς παράστασιν τῶν δεκάκις χιλιοστῶν.

207. Πῶς γράφεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀπαγγελλόμενος κατὰ τὸν 2ον τρόπον;

Γράφομεν πρῶτον τὰς ἀπαγγελθείσας ἀκεραίας μονάδας καὶ μετ' αὐτὰς τὸν ἀπαγγελθέντα ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ αὐτοῦ μέρους οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον νὰ παριστᾷ δεκαδικὰς μονάδας τῆς ἀπαγγελθείσης τάξεως.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα γράψωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 35 μονάδας καὶ 527 δεκάκις χιλιοστὰ, γράφομεν

35,0527.

Ἐγράψαμεν πρῶτον τὰς ἀκεραίας μονάδας 35, ἔπειτα τὸν ἀπαγγελθέντα ἀριθμὸν 527 οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον 7 νὰ παριστᾷ δεκάκις χιλιοστὰ, καὶ πρὸς τοῦτο ἦτον ἀναγκαῖον νὰ γράψωμεν ἐν 0 μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν.

Ὡσαύτως, ἂν εἶχομεν πρὸς γραφὴν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 309 ἑκατομμυριοστὰ, ἠθέλομεν γράψαι

0,000309.

Ἐπειδὴ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν περιεῖχεν ἀκεραίας μονάδας, ἐγράψαμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τούτων, ἔπειτα ἐγράψαμεν τὸν ἀπαγγελθέντα ἀριθμὸν 309 οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ 9 νὰ παριστᾷ ἑκατομμυριοστὰ, καὶ πρὸς τοῦτο ἔπρεπε νὰ γράψωμεν τρία 0 μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν.

208. Πῶς γράφεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀπαγγελλόμενος κατὰ τὸν 3ον τρόπον;

Γράφομεν τὸν ἀπαγγελλθέντα ἀριθμὸν ὡς ἂν ἦτο ἀπλοῦς ἀκέραιος, ἔπειτα θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ νὰ παριστᾷ δεκαδικὰς μονάδας τῆς ἀπαγγελλθείσης τάξεως.

Π. χ., πρὸς γραφὴν τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 328 ἑκατοστὰ, θέτομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον 328, ἔπειτα θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον 8 νὰ παριστᾷ ἑκατοστὰ.

3,28.

*Ἄν εἴχομεν πρὸς γραφὴν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 52326 ἑκατομμυριοστὰ, ἠθέλομεν πρῶτον γράψαι τὸν ἀριθμὸν 52326, ἔπειτα θέσει τὴν ὑποδιαστολὴν οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ 6 νὰ παριστᾷ ἑκατομμυριοστὰ.

0,052326.

209*. Πῶς γράφεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀπαγγελλόμενος κατὰ τὸν ἑκὼν τρόπον ;

Γράφομεν πρῶτον τὰς ἀκεραίας αὐτοῦ μονάδας, ἔπειτα ἐν ἑκάστον τῶν ἀπαγγελλομένων τμημάτων οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον νὰ κατέχῃ τὴν θέσιν τῶν σὺν αὐτῷ ἀπαγγελλομένων δεκαδικῶν μονάδων.

Παραδείγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3 μονάδες, 25 χιλιοστὰ, 203 ἑκατομμυριοστὰ καὶ 7 τρισεκατομμυριοστὰ γράφεται

3,025 203 000 007.

*Εγγράψαμεν πρῶτον τὰς ἀκεραίας αὐτοῦ μονάδας 3, ἔπειτα τὸν ἀριθμὸν 25 χιλιοστὰ οὕτως, ὥστε τὸ ψηφίον 5 νὰ κατέχῃ τὴν θέσιν τῶν χιλιοστών, μετὰ τὰ χιλιοστὰ ἐγγράψαμεν τὰ ἀπαγγελλθέντα 203 ἑκατομμυριοστὰ καὶ μετὰ ταῦτα τὸ ψηφίον 7 οὕτως, ὥς νὰ παριστᾷ τρισεκατομμυριοστὰ.

*Ὡσαύτως, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 123 ἑκατομμυριοστὰ καὶ 76 τρισεκατομμυριοστὰ γράφεται

0,000 123 000 076.

*Εγγράψαμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἀκεραίων μονάδων, ἔπειτα τὸν ἀριθμὸν 123 οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον 3 νὰ κατέχῃ τὴν θέσιν τῶν σὺν αὐτῷ ἀπαγγελλθεισῶν δεκαδικῶν μονάδων, ἦτοι τὴν θέσιν τῶν ἑκατομμυριοστών, καὶ μετὰ ταῦτα τὸν ἀριθμὸν 76 οὕτως, ὥστε τὸ ψηφίον 6 νὰ παριστᾷ τρισεκατομμυριοστὰ.

210. *Ἄν γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ δεκαδικοῦ τιμὸς ἀριθμοῦ ἐν ἡ πλείοτερον μηδενικά, μεταβάλλεται ἡ ἀξία αὐτοῦ ;

Οὐδόλως· διότι αἱ γραφόμεναι δεκαδικαὶ μονάδες τῶν ἀκολουθῶν τάξεων εἶναι 0.

Παραδείγματος χάριν, οί δεκαδικοί αριθμοί

37,025, 37,0250, 37,02500, κτλ.

είναι ισοδύναμοι, διότι εἰς τὸν δεύτερον ἐγράφησαν 0 δεκάκις χιλιοστά, εἰς δὲ τὸν τρίτον 0 δεκάκις χιλιοστά καὶ 0 ἑκατοστάκις χιλιοστά, κτλ.

ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΤΙΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΔΙΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ.

211. Πῶς παριστῶμεν δεδομένον δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ κοινοῦ κλάσματος ;

Ἐὰν γράψωμεν τὸν δεδομένον δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἄνευ ὑποδιαστολῆς ὡς ἀριθμητὴν καὶ ὑπὸ τοῦτον, ὡς παρονομαστὴν, τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία περιέχει τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεδομένου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Παραδείγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 2,04 παρίσταται διὰ τοῦ κοινοῦ κλάσματος

$$\frac{204}{100}$$

οὗτινος ὁ ἀριθμητὴς 204 εἶναι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 2,04 ἄνευ ὑποδιαστολῆς, καὶ ὁ παρονομαστὴς 100 ἡ μονάδα ἀκολουθουμένη ὑπὸ δύο 0, ἥτοι ὑπὸ τόσων, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δεδομένου δεκαδικοῦ 2,04.

Ὡσαύτως, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,00105 παρίσταται διὰ τοῦ κοινοῦ κλάσματος

$$\frac{105}{100000}$$

οὗτινος ὁ ἀριθμητὴς 105 εἶναι ὁ δεδομένος δεκαδικὸς 0,00105 ἄνευ ὑποδιαστολῆς, καὶ ὁ παρονομαστὴς 100000 ἡ μονάδα ἀκολουθουμένη ὑπὸ πέντε 0, διότι 5 δεκαδικὰ ψηφία περιέχει τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεδομένου δεκαδικοῦ 0,00105.

Παρομοίως, οί δεκαδικοί αριθμοί

0,01, 43,251, 8,0007, 0,000043

παρίστανται ἀμοιβαίως διὰ τῶν κοινῶν κλασμάτων

$$\frac{1}{100}, \frac{43251}{10000}, \frac{80007}{100000}, \frac{43}{10000000}$$

212. Ἀποδείξατέ μοι τὴν ἀνωτέρω κατὰ.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀνωτέρω κανόνος εἶναι ἀπλουστάτη.

Ἐστω π. χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,27. Εἴπομεν ὅτι οὗτος κατὰ τὸν 3ον τρόπον ἀπαγγέλλεται 327 ἑκατοστά, τουτέστιν εἶναι ἴσος τῷ κλάσματι

$$\frac{327}{100}$$

213. Πῶς καλοῦνται μερικώτερον τὰ παριστῶντα δεκαδικούς ἀριθμούς κλάσματα ;

Δεκαδικὰ κλάσματα. Παραδείγματος χάριν τὰ κλάσματα

$$\begin{array}{r} 127 \quad 253 \quad 560023 \quad 13254003 \\ 100 \quad 10000 \quad 1000 \quad 100000 \end{array}$$

τὰ παριστῶντα τοὺς δεκαδικούς ἀριθμούς,

1,27, 0,0253, 560,023, 132,54003,

καλοῦνται μερικώτερον δεκαδικὰ κλάσματα.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

214. Πῶς προσθέτομεν δύο ἢ πλείονους δεκαδικούς ἀριθμούς ;

Ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους. Γράφομεν δηλ. αὐτοὺς τὸν ἓνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἢ, ὅπερ ταῦτό, αἱ ὑποδιαστολαὶ αὐτῶν νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, καὶ προσθέτομεν αὐτοὺς ὡς εἰ ἦσαν ἀκεραιοί. Θέτομεν μετὰ ταῦτα εἰς τὸ εὐρεθησόμενον ἄθροισμα ὑποδιαστολὴν ἐν τῇ καθέτῳ τῶν ὑποδιαστολῶν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν στήλῃ.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα προσθέσωμεν τοὺς δεκαδικούς ἀριθμούς 37,0254, 0,102568, 135,026, γράφομεν αὐτοὺς ὡς προείπομεν, εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 172,153968 καὶ θέτομεν ὑποδιαστολὴν ἐν τῇ καθέτῳ τῶν ὑποδιαστολῶν στήλῃ, ὡς φαίνεται ἀντικρῶ.

37,0254

0,102568

135,026

172,153968

215. Πῶς ἀφαιροῦμεν ἀπὸ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δεδομένον δεκαδικόν ;

Ὅπως καὶ ἀπὸ ἀκεραίου ἀκέραιον, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι πρέπει, ἐάν ὁ μειωτέος ἔχῃ ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον, νὰ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐλλείποντα διὰ μηδενικῶν, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ θέσωμεν εἰς τὴν εὐρεθησομένην διαφορὰν ὑποδιαστολὴν ἐν τῇ καθέτῳ τῶν ὑποδιαστολῶν στήλῃ.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 37,24 τὸν 2,0586, γράφομεν αὐτοὺς οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἀναπληροῦμεν διὰ μηδενικῶν τὰ ἐλλείποντα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ μειωτέου, καὶ εἰς τὴν εὐρεθεῖσαν διαφορὰν 35,1814 θέτομεν ὑποδιαστολὴν ἐν τῇ καθέτῳ τῶν ὑποδιαστολῶν στήλῃ.

37,2400

2,0586

35,1814

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

216. Πῶς πολλαπλασιάζομεν δεκαδικόν ἐπὶ δεκαδικόν ;

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, τοὺς ἀποτελουμένους ἐκ τῆς ἐξαλείψεως τῶν ὑποδιαστολῶν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ἔπειτα πρὸς τὰ δεξιά τοῦ εὐρεθησομένου γινομένου χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς τόσα ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο δεδομένοι δεκαδικοί ἀριθμοί.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 13,05 ἐπὶ τὸν 12,3, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμούς 1305 καὶ 123, τοὺς ἀποτελουμένους ἐκ τῆς ἐξαλείψεως τῶν ὑποδιαστολῶν, καὶ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ εὐρεθησομένου γινομένου αὐτῶν 160515 χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς τρία ψηφία ὡς δεκαδικά. Εὐρίσκομεν οὕτω τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 160,515, ὅστις παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ὡσαύτως, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,02 ἐπὶ τὸν 9,37, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμούς 2 καὶ 937, τοὺς ἀποτελουμένους ἐκ τῆς ἐξαλείψεως τῶν ὑποδιαστολῶν, καὶ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ εὐρεθησομένου γινομένου 1874 χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς τέσσαρα ψηφία ὡς δεκαδικά. Εὐρίσκομεν οὕτω τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,1874, ὅστις παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον.

217. Ἀποδείξατέ μοι τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Ἐξω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,25 ἐπὶ τὸν 1,073. Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,25 εἶναι ἴσος τῷ δεκαδικῷ κλάσματι $\frac{25}{100}$. Ὡσαύτως, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 1,073 εἶναι ἴσος τῷ δεκαδικῷ κλάσματι $\frac{1073}{1000}$. Λοιπὸν τὸ γινόμενον $0,25 \times 1,073$ θέλει εἶναι ἴσον τῷ γινόμενῳ $\frac{25}{100} \times \frac{1073}{1000}$. Ἀλλὰ κατὰ τὰ λεχθέντα ἐν τῇ παραγράφῳ 157 τὸ γινόμενον $\frac{25}{100} \times \frac{1073}{1000}$ εὐρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμούς 25 καὶ 1073 καὶ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενόν των 26825 διὰ τοῦ γινομένου 100000 τῶν παρονομαστῶν 100 καὶ 1000. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει

$$0,25 \times 1,073 = \frac{25}{100} \times \frac{1073}{1000} = \frac{26825}{100000} = 0,26825,$$

ὅπερ ἀποδεικνύει τὸν ἀνωτέρω κανόνα· διότι βλέπομεν ὅτι τὸ εὐρεθὲν γινόμενον 0,26825 ἐσχηματίσθη, ἀπὸ τοῦ πολλαπλασιάσασθαι τοὺς ἀριθμούς 25 καὶ 1073, ἤτοι τοὺς δεκαδικοὺς θεωρουμένους ἀνευ ὑποδια-

στολῆς, καὶ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ γινομένου αὐτῶν ἐχωρίσαμεν τόσα ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅσα μηδενικά ἔχει ὁ παρονομαστής 100000, ἥτοι ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχουσι καὶ οἱ δύο δεδομένοι δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

218. Ἄν εἴχομεν τὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικόν τινα ἀριθμὸν ἐπὶ 10 ἢ 100 ἢ 1000 ἢ κτ.λ., ὑπάρχει ἀπλοποιήσις τῆς τοῦ ἀνωτέρω κατάρτου ;

Μάλιστα· διότι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου γινομένου ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὅφ' ὅσων μηδενικῶν ἀκολουθεῖται ἡ μονὰς τοῦ ἀριθμοῦ, ἐφ' ὃν πολλαπλασιάζομεν.

Τὸ γινόμενον, π. χ., τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 0,25461 ἐπὶ 100 εὐρίσκεται, ἐὰν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ αὐτοῦ δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιά. Διότι ἔχομεν κατὰ τὰ προλεχθέντα:

$$0,25461 \times 100 = \frac{25461}{100000} \times 100 = \frac{25461}{1000} = 25,461.$$

Ὡσαύτως, τὸ γινόμενον τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 15,03 ἐπὶ 1000 εὐρίσκεται, ἐὰν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ αὐτοῦ τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ δεξιά. Ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχουσι παρὰ μόνον δύο, ἀναπληροῦμεν τὰς ἐλλειπούσας διὰ μηδενικῶν καὶ εὐρίσκομεν 15030. Διότι ἔχομεν

$$15,03 \times 1000 = \frac{1503}{100} \times 1000 = 1503 \times 10 = 15030.$$

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

219. Πόσας περιπτώσεις διακρίνομεν εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ;

Τὰς ἑξῆς πέντε·

1ον. Ὅταν ὁ διαιρετέος ᾖ δεκαδικὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος.

2ον. Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ᾖναι δεκαδικοὶ ἀριθμοί, ἀλλ' ὁ διαιρέτης ἔχῃ ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία ἀπὸ τὸν διαιρετέον.

3ον. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ ὅσα καὶ ὁ διαιρετέος δεκαδικὰ ψηφία.

4ον. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία ἀπὸ τὸν διαιρετέον.

5ον. Ὅταν ὁ διαιρετέος ᾖναι ἀριθμὸς ἀκέραιος τοῦ διαιρέτου ὄντος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

220. Ὑπάρχει δι' ἐκάστην περίπτωσιν ἰδιαιτέρας τις κατὰ πρὸς εὐρεσιν τοῦ πηλίκου ;

Μάλιστα.

221. Δὲν ὑπάρχει ὁδηγία τις, δι' ἧς τὰ δοθέντα τὰ ἀναπληρῶμεν τοὺς πολλοὺς κανόνας, οἵτινες εὐκόλως λησμονοῦνται;

Μάλιστα ἡ ἐξῆς

“Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν διαιρέσιν τινὰ ἐπὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν, θεωροῦμεν ἀντὶ τῶν δεκαδικῶν τὰ ὅσα αὐτοῖς δεκαδικὰ κλάσματα, καὶ εὐρίσκομεν τὸ ζητούμενον πηλίκον ἐφαρμόζοντες ἐπ' αὐτῶν τοὺς περὶ διαιρέσεως τῶν κλασμάτων γνωστοὺς κανόνας.

“Ὡς ἐφαρμόσωμεν τώρα τὴν ἀνωτέρω ὁδηγίαν εἰς ἐκάστην τῶν πέντε δυνατῶν περιπτώσεων.

1ον. Ἐστω νὰ διαιρεθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 16,75 διὰ τοῦ ἀκεραίου 25. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω ὁδηγίαν θέλομεν ἔχει

$$16,75 : 25 = \frac{1675}{100} : 25 = \frac{1675}{100} \times \frac{1}{25} = \frac{67}{100} = 0,67.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι πρὸς εὑρεσιν τοῦ πηλίκου 0,67 ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 1675, ὅστις εἶναι ὁ δεδομένος δεκαδικὸς θεωρούμενος ἄνευ ὑποδιαστολῆς, διὰ τοῦ διαιρέτου 25, καὶ νὰ χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ εὑρεθησομένου πηλίκου 67 τόσα ψηφία ὡς δεκαδικὰ, ὅσα ἔχει ὁ δεδομένος διαιρέτης.

2ον. Ἐστω νὰ διαιρεθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,4284 διὰ τοῦ δεκαδικοῦ 3,4, ὅστις ἔχει ὀλιγώτερον δεκαδικὰ ψηφία ἀπὸ τὸν διαιρέτην. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει

$$0,4284 : 3,4 = \frac{4284}{10000} : \frac{34}{10} = \frac{4284}{10000} \times \frac{10}{34} = \frac{126}{100} = 0,126.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι πρὸς εὑρεσιν τοῦ πηλίκου 0,126 ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4284 διὰ τοῦ 34, ἥτοι τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς θεωρουμένους ἄνευ ὑποδιαστολῆς, καὶ νὰ χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ πηλίκου αὐτῶν 126 τόσα ψηφία ὡς δεκαδικὰ, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης περισσότερα ἀπὸ τὸν διαιρέτην.

3ον. Ἐστω νὰ διαιρεθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,192 διὰ τοῦ δεκαδικοῦ 0,024. Θέλομεν ἔχει

$$0,192 : 0,024 = \frac{192}{1000} : \frac{24}{1000} = \frac{192}{1000} \times \frac{1000}{24} = \frac{8}{1} = 8.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι πρὸς εὑρεσιν τοῦ πηλίκου 8 ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 192 καὶ 24, ἥτοι τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς θεωρουμένους ἄνευ ὑποδιαστολῆς.

4ον. Ἐστω νὰ διαιρεθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 35,4 διὰ τοῦ δεκαδι-

κοῦ 0,27, ὅστις ἔχει περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία ἀπὸ τὸν διαιρετέον. Θέλομεν ἔχει

$$35,4 : 0,27 = \frac{354}{10} : \frac{27}{100} = \frac{354}{10} \times \frac{100}{27} = \frac{3540}{27} = 130.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ἵνα εὗρωμεν τὸ πηλίκον, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ διαιρετέου *ἐν* μηδέν, διὰ νὰ ἔχη τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων μὲ τὸν διαιρέτην, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ἄνευ ὑποδιαστολῆς ἀριθμούς, ὡς προσείπομεν.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀκέραιος 7 διὰ τοῦ δεκαδικοῦ 0,25. Θέλομεν ἔχει

$$7 : 0,25 = 7 : \frac{25}{100} = \frac{7 \times 100}{25} = \frac{700}{25} = 28.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου πηλίκου πρέπει νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ διαιρετέου 7 τόσα μηδενικά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης 0,25, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν 700 διὰ τοῦ διαιρέτου, θεωρουμένου ἄνευ ὑποδιαστολῆς.

Πᾶς τις εὐκόλως βλέπει, ὅτι εἶναι δυσκολώτατον νὰ ἐνθυμηται ἐκ στήθους τοὺς ἀνωτέρω πέντε κανόνας, ἀλλ' ὅτι δύναται πάντοτε, ἐφαρμόζων τὴν ἀνωτέρω ὁδηγίαν, καὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον ἀσφαλῶς νὰ εὕρῃ καὶ τὸν πρὸς τοῦτο κανόνα εὐκόλως νὰ ἐξάγῃ.

222. **Ἀν εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν τινα ἀριθμὸν διὰ 10 ἢ 100 ἢ 1000 ἢ 10000 κτλ., πῶς ἠθέλομεν εὕρει ἀμέσως τὸ πηλίκον;*

Μεταθέτοντες μίαν, δύο, τρεῖς, τέσσαρας κτλ. θέσεις τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἀριστερά.

Παραδείγματος χάριν, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 425,03 διὰ 10 εἶναι 42,503 καὶ εὕρσκεται μετατιθεμένης τῆς ὑποδιαστολῆς κατὰ μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἀριστερά. *Ἀν εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 100, ἠθέλομεν εὕρει πηλίκον 4,2503, τοῦτέστι τὸν δεδομένον δεκαδικὸν ἀριθμὸν, ἐν ᾧ ἡ ὑποδιαστολή μετατέθη δύο θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, κτλ.

Διότι κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἠθέλομεν ἔχει

$$425,03 : 10 = \frac{42503}{100} : 10 = \frac{42503}{1000} = 42,503.$$

Ὁσαύτως

$$425,03 : 100 = \frac{42503}{100} : 100 = \frac{42503}{10000} = 4,2503.$$

223. **Ἀν ὁ διαιρούμενος δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχη ἀρκετὰ ψηφία*

γία εἰς τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστο-
λῆς, τότε τί πρᾶττομεν;

Ἀναπληροῦμεν πρῶτον τὰ ἐλλείποντα διὰ μηδενικῶν, καὶ ἔπειτα μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀ-
ριθμὸν 3,025 διὰ 1000, ἔπρεπε νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν
τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά· ἐπειδὴ δὲ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχει
ἀρκετὰ ψηφία εἰς τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος, ἀναπληροῦμεν τὰ ἐλλείπον-
τα διὰ μηδενικῶν, ἥτοι γράφομεν πρῶτον ἀντὶ τοῦ δεδομένου δεκαδι-
κοῦ τὸν ἴσον αὐτῷ 003,025, καὶ ἔπειτα μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστο-
λὴν τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά. Εὐρίσκομεν οὕτω πηλίκον τὸν δεκα-
δικὸν ἀριθμὸν 0,003025.

Ὡσαύτως, τὰ πηλικά τῆς διαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

0,354, 0,0089, 1,00732

διὰ 10000 εὐρίσκονται ὡς προείπομεν καὶ εἶναι

0,0000354, 0,00000089, 0,000100732.

ΤΡΟΠΗ ΤΩΝ ΚΟΙΝΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ Εἰς ἰσοδύναμους
ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ.

224. Πῶς τρέπομεν κοινὸν κλάσμα εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν
ἀριθμὸν;

Γράφομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ὡς διαιρετέου καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τού-
του τὸν παρονομαστὴν τοῦ ὡς διαιρέτην, θέτομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ
ὑποδιαστολὴν.

Γράφομεν ἔπειτα ἐν 0 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιροῦμεν
τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου.

Τὸ οὕτως εὐρεθησόμενον πηλίκον γράφομεν μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν
καὶ ἐὰν μείνῃ ὑπόλοιπον, γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τούτου πάλιν ἐν 0.

Διαιροῦμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ
γράφομεν τὸ εὐρεθησόμενον πηλίκον πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ προηγουμένου.

Ἐὰν μείνῃ ὑπόλοιπον, γράφομεν πάλιν πρὸς τὰ δε-
ξιὰ τούτου ἐν 0, καὶ διαιροῦμεν τὸν οὕτως ἀποτελού-
μενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ οὕτω καθεξῆς.

70		8
64		0,875

Παραδείγματος χάριν, ἵνα τρέψωμεν τὸ κοινὸν κλά-
σμα $\frac{7}{8}$ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, γράφομεν τοὺς ὅρους
αὐτοῦ ὡς προείπομεν, ἔπειτα 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ ὑπο-
διαστολὴν.

60
56
40
40
0

Γράφομεν $\epsilon\gamma 0$ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ἀριθμητοῦ 7 καὶ διαιροῦμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν 70 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 8. Εὐρίσκομεν πηλίκον 8 καὶ ὑπόλοιπον 6.

Γράφομεν 8 εἰς τὸ πηλίκον μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ $\epsilon\gamma 0$ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ὑπολοίπου 6.

Διαιροῦμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν 60 πάλιν διὰ τοῦ διαιρέτου 8, γράφομεν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 7 μετὰ τὸ προηγούμενον καὶ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ὑπολοίπου 4 πάλιν $\epsilon\gamma 0$.

Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 40 διὰ 8 καὶ εὐρίσκομεν πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 0. Οὕτω τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{7}{8}$ ἐτράπη εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν 0,875.

225. Πάντοτε τὰ κλάσματα τρέπονται εἰς ἰσοδύναμους δεκαδικὸς ἀριθμοὺς;

Ὁχι. Πολλάκις, ὅσῳ καὶ ἂν παρατείνωμεν τὴν πράξιν, δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0.

Παραδείγματός χάριν, τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{2}{7}$ δὲν τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, ὅσῳ καὶ ἂν παραταθῇ ἡ διαίρεσις.

226. Πῶς βεβαιούμεθα ὅτι κοινὸν τι κλάσμα δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀριθμὸν;

Ὅταν μετὰ τινὰ ἀριθμὸν διαιρέσεων εὕρωμεν ὑπόλοιπόν τι ἴσον μὲ τι προηγούμενως εὑρεθὲν ὑπόλοιπον, ἀποφαινόμεθα ὅτι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος κοινὸν κλάσμα δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀριθμὸν.

Παραδείγματός χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ τρέψωμεν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{5}{7}$, παρατηροῦμεν ὅτι μετὰ τινὰ ἀριθμὸν διαιρέσεων εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον 5, ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ τι ἐκ τῶν προηγούμενων. Ἄλλ' εἶναι φανερόν ὅτι, εἰάν παρατείνωμεν τὴν πράξιν, θέλομεν εὐρίσκει τὰ αὐτὰ πηλίκα καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἐπ' ἀπειρον, ἐπομένως οὐδέποτε θέλομεν εὑρεῖ ὑπόλοιπον μηδέν. Λοιπὸν τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{5}{7}$ δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀριθμὸν.

Ὡςαύτως τὰ κοινὰ κλάσματα $\frac{8}{11}$, $\frac{9}{13}$ δὲν τρέπονται εἰς ἰσοδύναμους δεκαδικούς ἀριθμούς, διότι ἐκτελοῦντες τὴν πράξιν ὡς προείπομεν

50	7
49	0,714285
10	
7	
30	
28	
20	
14	
60	
56	
40	
35	
5	

80	11	90	13
77	0,72 ...	78	0,692307 ...
30		420	
22		117	
8		30	
.		26	
.		40	
.		39	
.		400	
.		91	
.		9	

βλέπομεν ὅτι εὐρίσκομεν διὰ μὲν τὸ κλάσμα $\frac{8}{11}$ μετὰ δύο διαιρέσεις ὑπόλοιπον προϋπάρχον 8, διὰ δὲ τὸ κλάσμα $\frac{9}{13}$ μετὰ ἑξ διαιρέσεις ὑπόλοιπον προϋπάρχον 9.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Δοθέντων τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

5,025, 1,005, 0,0015, 0,0105,

να εὐρεθῶσι

1ον. Τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν τέταρτον.

(0,00004365).

2ον. Τὰ γινόμενα τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ τέταρτον.

(0,0013039, 0,0105315).

3ον. Τὰ γινόμενα τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, τρίτον καὶ τέταρτον.

(3,034075, 0,0039325, 0,0317625).

II. Δοθέντων τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

157,054, 0,25, 0,00005, 125,0076,

να εὐρεθῶσι

1ον. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου.

(593,8 + $\frac{2}{3}$ τοῦ δεκάτου).

2ον. Τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τῶν δύο πρώτων διὰ τοῦ τρίτου.

(2741080, 4600).

3ον. Τὰ πηλίκια τῆς διαιρέσεως τῶν τριῶν πρώτων διὰ τοῦ τετάρτου.

$$(1 + \frac{140464}{1230076}, \frac{2300}{1230076}, \frac{5}{1230076} \text{ τοῦ δεκάτου}).$$

III. Νὰ τραπῶσι τὰ κοινὰ κλάσματα

$$\frac{8}{83}, \frac{13}{40}, \frac{11}{16}$$

εἰς ἰσοδυνάμους δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

$$(0,625, 0,325, 2,6875).$$

IV. Δύνανται τὰ τραπῶσιν εἰς ἰσοδυνάμους δεκαδικοὺς ἀριθμούς τὰ κοινὰ κλάσματα

$$\frac{5}{14}, \frac{2}{15}, \frac{7}{28}, \frac{11}{18}$$

(Ὅχι· διότι μετὰ τινὰς διαιρέσεις εὐρίσκωμεν προϋπάρχοντα ὑπόλοιπα).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΔΕΚΑΔΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΘΜΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ

Εἶδομεν προηγουμένως μετὰ πόσης εὐκολίας ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν αἱ διάφοροι ἀριθμητικαὶ πράξεις, καὶ ὅτι αὗται δὲν διαφέρουσι τῶν ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰμὴ κατὰ τοῦτο, ὅτι μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῶν πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον καταλλήλως τὴν ὑποδιαστολὴν, δι' ἧς διακρίνονται αἱ ἀκέραιαι μονάδες ἀπὸ τῶν δεκαδικῶν αὐτῆς μερῶν. Τούναντίον δὲ αἱ ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν διάφοροι ἀριθμητικαὶ πράξεις οὐ μόνον μετὰ πλείστης ὅσης δυσκολίας ἐκτελοῦνται, ἀλλὰ καὶ εἰς πλείστα λάθη δυνατὸν νὰ ὑποπέσῃ ὁ ὑπολογίζων. Τούτου ἕνεκα ἡ Γαλλικὴ Κυβέρνησις πρώτη καὶ μετ' αὐτὴν διάφοροι ἄλλαι Κυβερνήσεις, ἐν αἷς καὶ ἡ ἡμετέρα, εἰσήγαγον διὰ τὰς κοινωνικὰς τοῦ βίου ἀνάγκας τὸ καλούμενον δεκαδικὸν σύστημα τῶν μέτρων καὶ σταθμῶν· τουτέστι σύστημα, ἐν ᾧ αἱ διάφοροι μονάδες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας τὴν αὐτὴν σχέσιν, καὶ πρὸς τούτοις ἐκάστη τούτων εἶναι τὸ δέκατον τῆς ἀμέσως προηγουμένης καὶ δεκαπλασία τῆς ἀμέσως ἐπομένης.

Τὰ ὀνόματα τῶν διαφορῶν τούτων μονάδων εἶναι τὰ ἑξῆς·

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΗΚΟΥΣ

Βασιλικός πήχυς, ὅστις λαμβάνεται ὡς ἀρχικὴ μονὰς καὶ εἶναι ἴσος μὲ τὸ Γαλλικὸν μέτρον, ὅπερ ὡς γνωστὸν εἶναι τὸ $\frac{1}{10000000}$ τοῦ διὰ τῆς πόλεως τῶν Παρισίων διερχομένου μεσημβρινοῦ.

Παλάμη ἥτις εἶναι τὸ δέκατον τοῦ πήχεως.

Δακτύλος, ὅστις εἶναι τὸ δέκατον τῆς παλάμης, ἢ τὸ ἑκατοστὸν τοῦ πήχεως.

Γραμμὴ, ἥτις εἶναι τὸ δέκατον τοῦ δακτύλου, ἢ τὸ ἑκατοστὸν τῆς παλάμης, ἢ τὸ χιλιοστὸν τοῦ πήχεως.

Στάδιον, ὅπερ ἰσοῦται μὲ 1000 βασιλικούς πήχεις.

Σχοινίς, ἥτις εἶναι δεκαπλασία τοῦ σταδίου, ἐπομένως περιέχει 10000 βασιλικούς πήχεις.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Βασιλικός τετραγωνικὸς πήχυς, ὅστις εἶναι τετράγωνον, οὗτινος ἡ πλευρὰ ἰσοῦται τῷ βασιλικῷ πήχει.

Στρέμμα, ὅπερ περιέχει 1000 τετραγωνικοὺς βασιλικούς πήχεις.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΒΑΡΟΥΣ

Δραχμή, ἥτις λαμβάνεται ὡς ἀρχικὴ μονὰς καὶ ἰσοῦται τῷ Γαλλικῷ γράμμῳ.

Ὄβολος, ὅστις εἶναι τὸ δέκατον τῆς δραχμῆς.

Κόκκος, ὅστις εἶναι τὸ δέκατον τοῦ ὀβολου, ἢ τὸ ἑκατοστὸν τῆς δραχμῆς.

Μνᾶ, ἥτις περιέχει 1500 δραχμάς. (Ἐνταῦθα, ὡς πᾶς τις βλέπει, δὲν ἐτηρήθη δυστυχῶς ἡ δεκαδικὴ σχέσις).

Τάλαντον, ὅπερ περιέχει 100 μνᾶς.

Τόρος, ὅστις ἰσοῦται μὲ 10 τάλαντα ἢ μὲ 1000 μνᾶς.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΟΓΚΟΥ ἢ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΟΣ

Αἷτρα, ἥτις ἰσοῦται τῷ ὄγκῳ τῆς κυβικῆς παλάμης, ταυτέστι τῷ ὄγκῳ κύβου, οὗτινος πλευρὰ εἶναι ἡ παλάμη.

Κοτύλη, ἥτις εἶναι ἴση μὲ τὸ δέκατον τῆς λίτρας.

Μύστρον, ὅπερ εἶναι τὸ δέκατον τῆς κοτύλης ἢ τὸ ἑκατοστὸν τῆς λίτρας.

Κύβος, ὅστις εἶναι τὸ δέκατον τοῦ μύστρου ἢ τὸ ἑκατοστὸν τῆς κοτύλης ἢ τὸ χιλιοστὸν τῆς λίτρας.

Κοιλόν, ὅπερ περιέχει 100 λίτρας.

Ἄν καὶ παρῆλθον 42 περίπου ἔτη ἀφ' οὗτο ἐξεδόθη τὸ Βασιλικὸν

διάταγμα, τὸ διατάσσει τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ ἀνωτέρου δεκαδικοῦ συστήματος τῶν μέτρων καὶ σταθμῶν, δυστυχῶς αὕτη δὲν καταρθώθη εἰσέτι πλήρως. Ἡ κυβέρνησις, ἥτις ἤθελεν εἶναι ἀρκετὰ ἰσχυρά, ὥστε νὰ ἐπιβάλῃ τὴν ἄμεσον εἰσαγωγὴν τοῦ ἀνωτέρου συστήματος διορθοῦσα κατὰ τι αὐτό, ἤθελεν ἀναντιρρόπως προσφέρει εἰς τὸ ἔθνος μεγίστην καὶ ἀνεκτίμητον ἐκδοῦλευσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ'

ΠΕΡΙ ΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

227. *Τί καλεῖται ΛΟΓΟΣ δύο ἀριθμῶν ;*

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μὲν διὰ τοῦ δέ.

Παραδείγματος χάριν, λόγος τοῦ ἀριθμοῦ 12 πρὸς τὸν ἀριθμὸν 4 εἶναι τὸ πηλίκον 3 τῆς διαιρέσεως τοῦ 12 διὰ 4.

Ὡσαύτως, ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ 15 πρὸς τὸν ἀριθμὸν 3 εἶναι τὸ πηλίκον 5 τῆς διαιρέσεως τοῦ 15 διὰ 3.

228. *Πῶς παρίσταται ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν, π. χ., τοῦ 12 πρὸς τὸν 4 ;*

Καθ' ἓνα τῶν ἐξῆς δύο τρόπων·

$$\frac{12}{4} \text{ ἢ } 12:4,$$

καὶ ὅταν μὲν ὁ λόγος γράφηται κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον, ἀπαγγέλλεται 12 διὰ 4, ὅταν δὲ γράφηται κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον, ἀπαγγέλλεται συνήθως 12 πρὸς 4.

229. *Τί καλεῖται ΑΝΑΛΟΓΙΑ ;*

Ἰσότης, ἐν ἣ τὰ διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος συνδεόμενα μέρη παριστῶσι λόγους δύο ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 4 εἶναι 3, ὡσαύτως καὶ ὁ λόγος τοῦ 15 πρὸς τὸν 5. Ἄν λοιπὸν γράψω τὴν ἰσότητα

$$\frac{12}{4} = \frac{15}{5}, \text{ ἢ τὴν } 12:4 = 15:5,$$

ἡ ἰσότης αὕτη καλεῖται ἀναλογία.

230. *Πῶς ἀπαγγέλλεται ἀναλογία τις γεγραμμένη κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον, π. χ. ἡ ἀναλογία*

$$12:4 = 15:5;$$

Αὕτη ἀπαγγέλλεται

12 πρὸς 4 ὡς 15 πρὸς 5.

231. Πῶς δομαζονται μερικώτερον οἱ ἀριθμοί, οἱ ἀποτελοῦν-
τες ἀναλογίαν τιρά;

Ἔστω π. χ. ἡ ἀναλογία

$$8:2=12:3.$$

Οἱ ἀποτελοῦντες αὐτὴν τέσσαρες ἀριθμοί 8, 2, 12, 3 καλοῦνται ὅροι αὐτῆς.

Ὁ πρῶτος 8 καὶ ὁ δεύτερος 2 καλοῦνται ὅροι τοῦ πρώτου λόγου.

Ὁ τρίτος 12 καὶ ὁ τέταρτος 3 καλοῦνται ὅροι τοῦ δευτέρου λόγου.

Ὁ πρῶτος 8 καὶ ὁ τέταρτος 3 καλοῦνται ἄκροι.

Ὁ δεύτερος 2 καὶ ὁ τρίτος 12 καλοῦνται μέσοι.

Ὁ πρῶτος 8 καὶ ὁ τρίτος 12 καλοῦνται ἡγούμενοι.

Ὁ δεύτερος 2 καὶ ὁ τέταρτος 3 καλοῦνται ἐπόμενοι.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

232. Ἀποδείξατέ μοι ὅτι εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μετὰ τὸ γινόμενον τῶν μέσων.

Ἔστω ἀναλογία τις

$$9:2=18:4.$$

Λέγομεν ὅτι τὸ γινόμενον 9×4 τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μετὰ τὸ γινόμε-
νον 2×18 τῶν μέσων. Διότι, ἂν παραστήσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν
κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{9}{2} = \frac{18}{4}.$$

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος
ἐπὶ τὸν παρονομαστήν 4 τοῦ δευτέρου, καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέ-
ρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν 2 τοῦ πρώτου, θέλομεν ἐκ ταύτης
πορισθῇ τὴν ἐξῆς

$$\frac{9 \times 4}{8} = \frac{18 \times 2}{8}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο κλάσματα $\frac{9 \times 4}{8}$ $\frac{18 \times 2}{8}$ εἶναι ἴσα, καὶ ἔχου-
σι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν 8, ἔπεται ὅτι οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν εἶναι ἴ-
σοι, τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$9 \times 4 = 18 \times 2,$$

ἥτις παριστᾷ ὅτι τὸ γινόμενον 9×4 τῶν ἄκρων 9 καὶ 4 εἶναι ἴσον
μετὰ τὸ γινόμενον 18×2 τῶν μέσων 18 καὶ 2.

233. Ἀποδείξατέ μοι τὸ ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου θεωρήματος· τουτέστιν ὅτι, ἂν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἦται ἶσον μὲ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἀναλογίαν, ἐν ἣ ἄκροι αὐτῆς νὰ ἦναι οἱ παράγοντες τοῦ ἐνὸς γινομένου καὶ μέσοι οἱ παράγοντες τοῦ ἑτέρου.

Ἐστω τὸ γινόμενον 4×7 ἶσον τῷ γινομένῳ 2×14 . Λέγομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν

$$4 : 2 = 14 : 7,$$

ἐν ἣ ἄκροι εἶναι οἱ παράγοντες 4 καὶ 7 τοῦ ἐνὸς τῶν γινομένων καὶ μέσοι οἱ παράγοντες 2 καὶ 14 τοῦ ἑτέρου.

Διότι, ἂν διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς δεδομένης ἰσότητος

$$4 \times 7 = 2 \times 14$$

διὰ τοῦ γινομένου 7×2 , ὅπερ σχηματίζομεν λαμβάνοντες τὸν παράγοντα 7 ἀπὸ τὸ ἐν γινόμενον καὶ τὸν παράγοντα 2 ἀπὸ τὸ ἕτερον, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{4 \times 7}{7 \times 2} = \frac{2 \times 14}{7 \times 2}, \text{ ἢ τὴν } \frac{4}{2} = \frac{14}{7}.$$

Ἄλλ' ἡ τελευταία ἰσότης, ὡς παριστῶσα τὴν ἰσότητα δύο λόγων, εἶναι ἡ ἀναλογία

$$4 : 2 = 14 : 7,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

234. Ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω θεωρημάτων τί ποριζόμεθα ;

1ον. Ὅτι δεδομένης ἀναλογίας τινὸς δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν ὅπως θέλωμε τοὺς ὅρους αὐτῆς καὶ νὰ ἔχωμεν νέας ἀναλογίας, ἀρκεῖ μόνον νὰ προσέχωμεν, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων νὰ ἦναι ἶσον τῷ γινομένῳ τῶν μέσων.

Παραδείγματος χάριν, τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας $4 : 2 = 14 : 7$ δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν κατὰ ὁκτῶ διαφόρους τρόπους τοὺς ὅρους αὐτῆς καὶ νὰ ἔχωμεν νέας ἀναλογίας, ὡς ἐξῆς·

$$4 : 2 = 14 : 7 \qquad 14 : 7 = 4 : 2$$

$$4 : 14 = 2 : 7 \qquad 14 : 4 = 7 : 2$$

$$2 : 4 = 7 : 14 \qquad 7 : 14 = 2 : 4$$

$$2 : 7 = 4 : 14 \qquad 7 : 2 = 14 : 4$$

διότι βλέπομεν ὅτι δι' ἐκάστην τῶν ἀνωτέρω ὁκτῶ ἀναλογιῶν ἔχομεν τὴν ἰσότητα $28 = 28$.

2ον. Ὅτι δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ νὰ διαιρέσωμεν ἓνα τῶν ἄκρων καὶ ἓνα τῶν μέσων τῆς αὐτῆς ἀναλογίας δι' ὅποιονδήποτε ἀριθμοῦ, καὶ νὰ ἔχωμεν πάλιν νέαν ἀναλογίαν.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3 ἓνα τῶν ἄκρων καὶ ἓνα τῶν μέσων τῆς ἀναλογίας

$$5 : 4 = 10 : 8,$$

θέλομεν ἔχει νέαν ἀναλογίαν

$$15 : 4 = 30 : 8.$$

διότι ὑπάρχει ἡ ἰσότης

$$15 \times 8 = 4 \times 30.$$

Ὡσαύτως, ἂν διαιρέσωμεν τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας ἓνα τῶν ἄκρων καὶ ἓνα τῶν μέσων διὰ 2, θέλομεν ἔχει νέαν ἀναλογίαν

$$5 : 2 = 10 : 4.$$

διότι ὑπάρχει ἡ ἰσότης

$$5 \times 4 = 2 \times 10.$$

235. Ἀποδείξατέ μοι ὅτι εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὄρων αὐτῆς ἔχει λόγον πρὸς τὸν πρώτον ἢ τὸν δεύτερον, ὡς τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων ὄρων αὐτῆς πρὸς τὸν τρίτον ἢ τὸν τέταρτον.

Ἐστω ἡ ἀναλογία

$$12 : 3 = 16 : 4 \quad (\alpha)$$

λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ὡσαύτως

$$12 + 3 : 12 = 16 + 4 : 16 \quad (1)$$

$$12 - 3 : 12 = 16 - 4 : 16 \quad (2)$$

$$12 + 3 : 3 = 16 + 4 : 4 \quad (3)$$

$$12 - 3 : 3 = 16 - 4 : 4 \quad (4)$$

Διότι, ἐὰν παραστήσῃ τις τὰς ἀνωτέρω ἀναλογίας κλασματικῶς, θέλει ἶδει ὅτι οἱ λόγοι αὐτῶν εἶναι ἴσοι ὡς αὐξηθέντες ἢ ἐλαττωθέντες κατὰ ἀριθμοὺς ἴσους. Λόγου χάριν, ἡ ἀναλογία (1) δίδει τὴν ἰσότητα

$$1 + \frac{3}{12} = 1 + \frac{4}{16},$$

διότι γνωρίζομεν ἐκ τῆς ἀναλογίας (α) ὅτι $\frac{3}{12} = \frac{4}{16}$.

Ὡσαύτως, ἡ ἀναλογία (2) παρέχει τὴν ἰσότητα

$$1 - \frac{3}{12} = 1 - \frac{4}{16},$$

διότι πάλιν γνωρίζομεν ἐκ τῆς ἀναλογίας (α) ὅτι $\frac{3}{12} = \frac{4}{16}$.

Παρομοίως ἡ ἀναλογία (3) παρέχει τὴν ἰσότητα

$$1 + \frac{12}{3} = 1 + \frac{16}{4},$$

διότι πάλιν ἐκ τῆς δεδομένης ἀναλογίας (α) ἔχομεν $\frac{12}{3} = \frac{16}{4}$.

Καὶ τελευταίαν ἡ ἀναλογία (4) γράφεται

$$\frac{12}{3} - 1 = \frac{16}{4} - 1,$$

καὶ ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ἀληθής, διότι ἐκ τῆς δεδομένης ἀναλογίας (α) γνωρίζομεν ὅτι $\frac{1^2}{3} = \frac{1^6}{4}$.

*236. Ἀποδείξατέ μοι ὅτι εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἐπομένων, ὡς ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἐπόμενόν του.

Ἐστω ἡ ἀναλογία

$$12 : 16 = 3 : 4 \quad (\alpha)$$

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῆς ἀναλογίας

$$12 : 3 = 16 : 4 \quad (\epsilon)$$

ἢν πορίζομεθα ἐκ τῆς δεδομένης (α) διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων αὐτῆς, τὸ προηγούμενον θεώρημα κατὰ γράμμην, θέλωμεν πορισθῇ τὰς κατωτέρω τέσσαρας ἀναλογίας

$$12 + 3 : 12 = 16 + 4 : 16 \quad (1),$$

$$12 - 3 : 12 = 16 - 4 : 16 \quad (2),$$

$$12 + 3 : 3 = 16 + 4 : 4 \quad (3),$$

$$12 - 3 : 3 = 16 - 4 : 4 \quad (4),$$

ἐξ ὧν διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων πορίζομεθα τὰς ἀναλογίας

$$12 + 3 : 16 + 4 = 12 : 16,$$

$$12 - 3 : 16 - 4 = 12 : 16,$$

$$12 + 3 : 16 + 4 = 3 : 4,$$

$$12 - 3 : 16 - 4 = 3 : 4,$$

δι' ὧν ἀποδεικνύεται τὸ ἀνωτέρω θεώρημα.

*237. Ἀποδείξατέ μοι, ὅτι εἰς πᾶσαν σειρὰν ἴσων λόγων τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐπομένων, ὅν καὶ ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἐπόμενόν του.

Ἐστω ἡ σειρά τῶν ἴσων λόγων

$$3 : 2 = 6 : 4 = 15 : 10 \quad (\alpha)$$

λέγω ὅτι θέλωμεν ἔχει ἐκ ταύτης

$$3 + 6 + 15 : 2 + 4 + 10 = 15 : 10 \quad \text{ἢ} = 6 : 4 \quad \text{ἢ} = 3 : 2.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν ἐκ τῆς σειράς (α) τὴν ἀναλογίαν

$$3 : 2 = 6 : 4 \quad (1),$$

ἐξ ἧς κατὰ τὰ ἀποδείχθέντα ἐν τῇ § 236 πορίζομεθα

$$3 + 6 : 2 + 4 = 6 : 4 \quad (2).$$

Ἐν τῇ ἀναλογίᾳ (2) δυνάμεθα ἀντὶ τοῦ λόγου 6 : 4 νὰ θέσωμεν τὸν ἴσον αὐτῇ 15 : 10, καὶ τότε θέλωμεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$3 + 6 : 2 + 4 = 15 : 10 \quad (3),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ὡσαύτως κατὰ τὸ θεώρημα 236 τὴν ἐξῆς

$$3+6+15 : 2+4+10=15 : 10 \quad (4).$$

Ἀλλ' ὁ λόγος 15 : 10 εἶναι ἴσος τῷ 6 : 4 καὶ τῷ 3 : 2. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει

$3+6+15 : 2+4+10=15 : 10$ ἢ $6 : 4$ ἢ $3 : 2$,
τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ ἀνωτέρω θεώρημα.

238. Ἀποδείξατέ μοι, ὅτι τὰ γινόμενα τῶν ὁμοταγῶν ὄρων δύο ἢ πλεονέκρων ἀναλογιῶν ἀποτελοῦσι νέαν ἀναλογία.

Ἐστώσαν, παραδείγματος χάριν, αἱ τρεῖς ἀναλογίαι

$$2 : 3 = 4 : 6 \quad (1),$$

$$5 : 7 = 15 : 21 \quad (2),$$

$$9 : 10 = 18 : 20 \quad (3),$$

λέγω, ὅτι ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὁμοταγεῖς αὐτῶν ὄρους, θέλομεν ἔχει νέαν ἀναλογία

$$2 \times 5 \times 9 : 3 \times 7 \times 10 = 4 \times 15 \times 18 : 6 \times 21 \times 20.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἃς περὶστέσωμεν κλασματικῶς τὰς ἀνωτέρω δεδομένας ἀναλογίας. Θέλομεν ἔχει

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad (1),$$

$$\frac{5}{7} = \frac{15}{21} \quad (2),$$

$$\frac{9}{10} = \frac{18}{20} \quad (3).$$

Ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων εἶναι ἴσα μὲ τὰ δευτέρα, ἔπεται ὅτι καὶ τὸ γινόμενον τῶν πρώτων μελῶν θέλει εἶναι ἴσον τῷ γινόμενῳ τῶν δευτέρων, τουτέστι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{9}{10} = \frac{4}{6} \times \frac{15}{21} \times \frac{18}{20}$$

ἢ, κατὰ τὰ ἐν τῇ § 163 λεχθέντα, τὴν ἰσότητα

$$\frac{2 \times 5 \times 9}{3 \times 7 \times 10} = \frac{4 \times 15 \times 18}{6 \times 21 \times 20}$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα, διότι αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἐξῆς

$$2 \times 5 \times 9 : 3 \times 7 \times 10 = 4 \times 15 \times 18 : 6 \times 21 \times 20.$$

239. Ἐὰν τις τῶν ὄρων ἀναλογίας τινὸς ᾗται ἀγνωστος, πῶς εὐρίσχομεν αὐτόν;

Ἐάν ὁ ἀγνωστος ὅρος ᾗται εἷς τῶν ἄκρων πολλαπλασιάζομεν τοὺς γνωστοὺς μέσους καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενόν των διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου.

Ἐάν ὁ ἀγνωστος ὅρος ᾗται εἷς τῶν μέσων, πολλαπλασιάζομεν τοὺς

γνωστούς ἄκρους καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενόν των διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου.

Ἐστω, παραδείγματος χάριν, ἡ ἀναλογία

$$4 : 3 = 8 : \chi,$$

ἐν ᾗ ὁ ἄγνωστος ὅρος χ εἶναι ἄκρος. Πρὸς εὐρεσιν αὐτοῦ πολλαπλασιάζομεν τοὺς γνωστούς μέσους 3 καὶ 8 καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενόν των 24 διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου 4. Τὸ πηλίκον 6 τῆς διαιρέσεως θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος ἄκρος χ .

Ἄν εἴχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$4 : 7 = \chi : 21,$$

ἐν ᾗ ὁ ἄγνωστος ὅρος χ εἶναι μέσος, πρὸς εὐρεσιν αὐτοῦ πολλαπλασιάζομεν τοὺς γνωστούς ἄκρους 4 καὶ 21, καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενόν των 84 διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου 7. Τὸ πηλίκον 12 τῆς διαιρέσεως θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος μέσος χ .

240. Ἀποδείξατέ μοι, ὅτι τὸ οὕτως εὐρισκόμενον πηλίκον παριστά τὸν ζητούμενον ὅρον.

Ἐστω ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία

$$4 : 3 = 8 : \chi.$$

Ἐπειδὴ εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$4 \times \chi = 3 \times 8.$$

Διαιροῦντες τὰ δύο μέλη ταύτης διὰ τοῦ 4, θέλομεν ἔχει τὴν νέαν ἰσότητα

$$\chi = \frac{3 \times 8}{4},$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ ὀρθόν τοῦ ἀνωτέρω δοθέντος κανόνος.

Ὡσαύτως ἐκ τῆς ἀναλογίας

$$4 : 7 = \chi : 21$$

ποριζόμεθα τὴν ἰσότητα

$$4 \times 21 = 7 \times \chi,$$

ἐξ ἧς, διαιρουμένων τῶν δύο μελῶν αὐτῆς διὰ 7, ποριζόμεθα τὴν ἐξῆς

$$\chi = \frac{4 \times 21}{7},$$

ἥτις καὶ ἀποδεικνύει τὸ ζητούμενον, ὅτι δηλ. ὁ ἀνωτέρω δοθείς κανὼν πρὸς εὐρεσιν τοῦ ἀγνώστου μέσου εἶναι ἀληθής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ'

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

ΑΠΑΝ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

241. Ποῖα προβλήματα λύονται διὰ τῆς ΑΠΑΝΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ;

Ἐκεῖνα τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ ζητούμενον εἶναι εἰς τῶν ὄρων ἀναλογίας τινός, τῆς ὁποίας οἱ τρεῖς ἄλλοι ὄροι εἶναι γνωστοί.

Δύο ἐκ τῶν γνωστῶν ὄρων παριστῶσι τὰς δύο τιμὰς ποσοῦ τινος, ὁ δὲ τρίτος γνωστός μετὰ τοῦ ζητουμένου παριστῶσι τὰς δύο ἀντιστοιχούς τιμὰς ἐτέρου ποσοῦ, πρὸς ὃ τὸ πρῶτον ὑποτίθεται ἀνάλογον κατ' εὐθεῖαν ἢ ἀντιστρόφως.

242. Τί ἐννοοῦμεν λέγοντες ὅτι δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα;

Ὅτι τὰ ποσὰ ταῦτα εἶναι οὕτω πως συνδεδεμένα πρὸς ἄλληλα, ὥστε δύο ὁποιαδήποτε τιμαὶ τοῦ ἐνὸς νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον ἢ ἀντίστροφον λόγον μὲ τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τοῦ ἐτέρου.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Α καὶ Α' τὰς δύο τιμὰς τοῦ ἐνὸς ποσοῦ καὶ διὰ Β καὶ Β' τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τοῦ ἐτέρου ποσοῦ, τὰ ποσὰ ταῦτα θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα, ἐὰν ἔχωμεν μίαν τῶν ἐξῆς δύο ἰσοτήτων

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \quad \eta \quad \frac{A}{A'} = \frac{B'}{B}.$$

Ὅταν ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'},$$

τὰ ποσὰ λέγονται κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα, ὅταν δὲ ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης

$$\frac{A}{A'} = \frac{B'}{B},$$

τὰ ποσὰ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα, διότι οἱ λόγοι $\frac{B}{B'}$ καὶ $\frac{B'}{B}$ εἶναι ἀντίστροφοι, σύγκεινται δηλ. ἐκ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἀντιστρόφως γεγραμμένων.

243. Πῶς βεβαιούμεθα ὅτι δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα;

Λαμβάνομεν μίαν ὁποιαδήποτε τιμὴν τοῦ ἐνὸς ποσοῦ καὶ τὴν ἀντίστοιχον εἰς ταύτην τιμὴν τοῦ ἐτέρου, ἔπειτα ὑποθέτομεν ὅτι ἡ πρώτη τιμὴ ἔγεινε διπλασία, καὶ παρατηροῦμεν, ἐὰν ἡ μεταξὺ των σχέσις

ἦναι τοιαύτη, ὥστε ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ δευτέρου νὰ γίνηται διπλάσια ἢ τὸ ἥμισυ. Ἐὰν τοῦτο συμβαίῃ, τότε τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

244. "Οταν ἔχωμεν δύο ἀνάλογα ποσά, πῶς βεβαιούμεθα ὅτι ταῦτα εἶναι κατ' εὐθείαν ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα ;

"Οταν ἡ μεταξὺ των σχέσις ἦναι τοιαύτη, ὥστε αὐξανόμενου τοῦ ἐνὸς ποσοῦ νὰ αὐξάνῃ καὶ τὸ ἕτερον, πρὸς ὃ τὸ πρῶτον ὑποτίθεται ἀνάλογον, τότε τὰ ποσὰ εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα.

"Οταν δὲ ἡ μεταξὺ των σχέσις ἦναι τοιαύτη, ὥστε αὐξανόμενου τοῦ ἐνὸς ποσοῦ νὰ ἐλαττοῦται τὸ ἕτερον, πρὸς ὃ τὸ πρῶτον ὑποτίθεται ἀνάλογον, τότε τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

245. Ἐξηγήθητε σαφέστερον ἐπὶ παραδειγμάτων.

Ἐστω πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

1ον. Ἡγόρασέ τις μὲ 50 δραχμὰς 10 πήχεις τσόχας· πόσους πήχεις τῆς αὐτῆς τσόχας ἤθελεν ἀγοράσει μὲ 80 δραχμὰς ;

Ἐνταῦθα ἔχομεν δύο ποσά, πήχεις τσόχας καὶ δραχμὰς, τὰ ὅποια εἶναι ἀνάλογα· διότι εἶναι φανερόν ὅτι, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων ἐγίνετο διπλάσιος, ἦτοι 20, ὁ ἀριθμὸς τῶν πληρωθησομένων δραχμῶν ἦθελε γίνεαι διπλάσιος, ἦτοι 100. Πρὸς τούτοις τὰ ποσὰ εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα, διότι αὐξανόμενου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν δραχμῶν αὐξάνει.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ χ τὸν ἀριθμὸν τῶν ζητούμενων πήχεων, ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{50}{80} = \frac{10}{\chi} \quad \text{ἢ τὴν } 50 : 80 = 10 : \chi, \quad (1)$$

τουτέστιν ὁ λόγος $\frac{50}{80}$ τῶν δύο τιμῶν τῶν δραχμῶν εἶναι ἴσος τῷ

λόγῳ $\frac{10}{\chi}$ τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῶν πήχεων.

Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον χ εἶναι εἰς τῶν ὁρῶν ἀναλογίας τινός (1), τῆς ὁποίας οἱ τρεῖς ἄλλοι ὅροι εἶναι γνωστοί, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν λεγομένην ἀπλὴν μέθοδον τῶν τριῶν. Ἡ δὲ τιμὴ 16 τῆς χ εὐρίσκεται κατὰ τὰ λεχθέντα ἐν τῇ § 230 πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο μέσων καὶ διαιρουμένου τοῦ γινομένου τούτων 800 διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου 50.

2ον. Εἰς 20 ἡμέρας 400 στρατιῶται ἔφαγον ποσότητά τινα ἄρ-

του· πόσοι στρατιῶται ἤθελον χρειασθῇ διὰ νὰ φάγωσι τὴν αὐτὴν ποσότητα τοῦ ἄρτου εἰς 16 ἡμέρας ;

Ἐνταῦθα τὰ δύο δεδομένα ποσὰ εἶναι στρατιῶται καὶ ἡμέραι.

Ἐπειδὴ δέ, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν γείνη διπλάσιος, ὁ απαιτούμενος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν γίνεται τὸ ἥμισυ, τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἀντιστρόφως· διότι, αὐξανόμενου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στρατιωτῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἐλαττοῦται.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ χ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν στρατιωτῶν, ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{46}{20} = \frac{400}{\chi}, \text{ ἢ τὴν } 46 : 20 = 400 : \chi \quad (1),$$

τουτέστιν, ὁ λόγος $\frac{46}{20}$ τῶν δύο τιμῶν τῶν ἡμερῶν εἶναι ἴσος τῷ ἀν-

τιστρόφῳ λόγῳ $\frac{400}{\chi}$ τῶν ἀντιστοιχοῦσάν τιμῶν τῶν στρατιωτῶν.

Ἐπειδὴ πάλιν τὸ ζητούμενον χ εἶναι εἰς τῶν ὄρων ἀναλογίας τινός (1), τῆς ὁποίας οἱ τρεῖς ἄλλοι ὅροι εἶναι γνωστοί, τὸ προβλήματα ἀνάγεται εἰς τὴν ἀπλὴν μέθοδον τῶν τριῶν. Ἡ δὲ τιμὴ 125 τῆς χ εὑρίσκεται διαιρουμένου τοῦ γινομένου 2000 τῶν μέσων διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου 16.

246. Ὅταν ἐπιχειρῶμεν τὴν λύσιν ζητήματός τινος ἀναγομένου εἰς τὴν ἀπλὴν μέθοδον τῶν τριῶν, πῶς συνήθως διατάσσομεν τὰ τῆς πράξεως ;

Ἔστωσαν πρὸς λύσιν τὰ ἐξῆς προβλήματα.

1ον. Εἰς 18 ἡμέρας 25 ἐργάται ἐκτίσαν οἰκίαν τινα· πόσοι ἐργάται ἤθελον χρειασθῇ, ἵνα κτίσωσι τὴν αὐτὴν οἰκίαν εἰς 10 ἡμέρας ;

ἐργάται	ἡμέραι
25	18
χ	10

Γράφομεν ἐπὶ τινος ὀριζοντίου γραμμῆς τὰ εἶδη τῶν δύο δεδομένων ποσῶν ἐργάται καὶ ἡμέραι, ἔπειτα ὑπὸ τὴν λέξιν ἡμέραι γράφομεν τὰς δύο δεδομένας τιμὰς αὐτῶν 18 καὶ 10, καὶ ὑπὸ τὴν λέξιν ἐργάται τὴν δεδομένην τιμὴν αὐτῶν 25 καὶ τὴν ζητούμενην χ οὕτως, ὥστε αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς τὰς πρώτας τιμαὶ νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ ὀριζοντίῳ στήλῃ, ὡς φαίνεται ἀνωτέρω. Τοῦτου δὲ γενομένου, σχηματίζομεν τὴν ἀναλογίαν

$$10 : 18 = 25 : \chi,$$

ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ τὴν ζητούμενην τιμὴν τοῦ χ , πράττοντες ὡς ἐξ ἧς.

Γράφομεν πρῶτον ὡς τέταρτον ὅρον τὸ ζητούμενον χ καὶ πρὸ αὐτοῦ ὡς τρίτον τὸν σύστοιχόν του 25, ἔπειτα παρατηροῦμεν ἂν τὰ ὑποτιθέμενα ἀνάλογα ποσὰ ἦναι κατ' εὐθειαν ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ἐπειδὴ ἐνταῦθα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, διότι θὰ χρειασθῶσι περισσότεροι ἐργάται, ἵνα κτίσωσι τὴν οἰκίαν εἰς ὀλιγωτέρας ἡμέρας, γράφομεν ὡς πρῶτον ὅρον τῆς ἀναλογίας τὴν τιμὴν τῶν ἡμερῶν, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν τιμὴν χ τῶν ἐργατῶν, καὶ ὡς δεύτερον, τὴν σύστοιχον αὐτῆς 18. Οὕτως ἐσχηματίσαμεν τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν, ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν ζητούμενην τιμὴν 45 τῶν ἐργατῶν.

2ον. Διὰ 12 στρατιώτας ἐχρειάσθημεν 71 πῆχεις τσόχας πρὸς κατασκευὴν ἐνδυμάτων πόσους πῆχεις ἠθέλομεν χρειασθῇ διὰ 27 στρατιώτας;

στρατιῶται	πῆχεις
12	71
27	χ

Κατατάσσομεν πρῶτον τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος ὡς προείπομεν παριστῶντες διὰ χ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν πῆχεων, ἔπειτα σχηματίζομεν τὴν ἀναλογίαν

$$12 : 27 = 71 : \chi$$

γράφοντες πρῶτον τὸ ζητούμενον χ , ἔπειτα τὸν σύστοιχόν του 71, καὶ ἐπειδὴ τὰ ὑποτιθέμενα ἀνάλογα ποσὰ στρατιῶται καὶ πῆχεις εἶναι κατ' εὐθειαν ἀνάλογα (διότι, ἀυξανόμενου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στρατιωτῶν, καὶ ὁ ἀπαιτούμενος πρὸς ἐνδυμασίαν αὐτῶν ἀριθμὸς τῶν πῆχεων πρέπει νὰ αὐξηθῇ), γράφομεν τὸν 27, ἥτοι τὴν εἰς τὸ χ ἀντίστοιχον τιμὴν, ὡς δεύτερον ὅρον καὶ τὸν σύστοιχόν του 12 ὡς πρῶτον. Οὕτω σχηματίζομεν τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν, ἐξ ἧς πορίζομεθα τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν πῆχεων $= 159\frac{3}{4}$.

247. "Ὅταν αἱ δεδομέναι τιμαὶ ἦναι ἀριθμοὶ συμμιγεῖς, τότε πῶς πρέπει νὰ διατάσσωμεν τὰ τῆς πράξεως, ἵνα μὴ ὑποπέσωμεν εἰς λάθην;

"Ἐστωσαν π. χ . πρὸς λύσιν τὰ ἐξ ἧς προβλήματα.

1ον. Ἡγόρασέ τις 2ὀρ. 3πόδ. τσόχας ἀρτί 23δραχ. 75λεπ., μὲ πόσας δραχμὰς ἠθέλει ἀγοράσει 5πόδ. 6δάκ. τῆς αὐτῆς τσόχας;

μήκη	δραχμαὶ
2ὀρ. 3πόδ.	23δραχ. 75λεπ.
5πόδ. 6δάκ.	χ

Κατατάσσομεν πρῶτον τὰ δεδομένα ὡς προείπομεν, ἔπειτα σχηματίζομεν σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω τὴν ἐξ ἧς ἀναλογίαν

$$2\text{όρ. } 3\text{πόδ.} : 5\text{πόδ. } 6\text{δακ.} = 23\text{δραχ. } 75\text{λεπ.} : \chi,$$

ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ τὴν ζητούμενην τιμὴν τῶν δραχμῶν χ . Ἀλλ' ἐνταῦθα, ἐπεὶ οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας εἶναι συμμιγεῖς ἀριθμοὶ καὶ χρειάζεται μεγίστη προσοχὴ πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων, εἶναι ἀναγκαῖον, ἀφοῦ κατατάξωμεν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος ὡς ἀνωτέρω, νὰ ἀκολουθήσωμεν τὰς ἐξ ἧς ὁδηγίας

Αον. Τρέπομεν τοὺς ὁμοειδεῖς συμμιγεῖς 2όρ. 3πόδ., 5πόδ. 6δακ. εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτοῖς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως, ἥτοι εἰς δακτύλους, καὶ εὐρίσκομεν 180 καὶ 66 δακτύλους.

Βον. Τρέπομεν τὸν συμμιγῆ 23δραχ. 75λεπ. εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν ἐκείνης τῆς ὑποδιαίρεσεως, πρὸς τὴν μονάδα τῆς ὁποίας ἀναφέρεται ἡ ζητούμενη τιμὴ τοῦ χ . Ἐνταῦθα, ἐπεὶ ζητεῖται νὰ παριστᾷ τὸ χ δραχμας, τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν τῆς δραχμῆς καὶ εὐρίσκομεν $\frac{2375}{100}$ τῆς δραχμῆς.

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀνωτέρω ὁδηγιῶν ἀντὶ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας θέλομεν ἔχει τὴν ἐξ ἧς

$$180 : 66 = \frac{2375}{100} : \chi,$$

θέτοντες ἀντὶ τῶν συμμιγῶν τοὺς ἀνωτέρω εὐρεθέντας ἀριθμούς. Οὕτω πρὸς εὔρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ χ θέλομεν ἐκτελέσει τὰς πρὸς τοῦτο πράξεις ἐπὶ ἀφηρημένων ἀριθμῶν, ὅπερ λίαν ἀπλούστερον, δὲν πρέπει ὅμως καὶ νὰ λησμονήσωμεν, ὅτι ὁ εὐρεθόμενος διὰ τὴν τιμὴν τοῦ χ ἀριθμὸς $\frac{209}{24}$ θέλει παριστᾷ δραχμας.

2ον. Ὑπόρασέ τις 2όκ. 125δράμ. μετὰξὺς ἀντὶ 2όθ. 3τάλ., μὲ πόσα τέλῃρα θὰ ἀγοράσῃ 325δράμ. ;

$$2\text{όκ. } 125\text{δράμ.}$$

$$2\text{όθ. } 3\text{τάλ.}$$

$$325\text{δράμ.}$$

χ

Κατατάσσομεν πρῶτον τὰ δεδομένα τοῦ ζητήματος ὡς ἀνωτέρω, ἔπειτα πρὶν ἢ σχηματίσωμεν τὴν ἀναλογίαν, ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ τὴν τιμὴν τοῦ χ , ἐκτελοῦμεν τὰς ἀνωτέρω δύο ὁδηγίας. Πρὸς τοῦτο τρέπομεν τοὺς συμμιγεῖς 2όκ. 125δράμ. καὶ 325δράμ. εἰς δράμια, καὶ εὐρίσκομεν 925 καὶ 325 δράμια· ἔπειτα τὸν συμμιγῆ 2όθ. 3τάλ. εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν τοῦ τέλῃρου, διότι ζητεῖται τὸ χ νὰ παριστᾷ τέλῃρα, καὶ εὐρίσκομεν $\frac{11}{11}$ ἢ 11 τέλῃρα. Τούτων γενομένων, σχηματίζομεν τὴν ἀναλογίαν

$$925 : 325 = 11 : \chi,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα

$$\chi = \frac{143}{87} \text{ τοῦ ταλῆρον, ἥτοι } 3\text{τάλ. } 4\delta\rho\alpha\chi. \text{ } 32\lambda\epsilon\pi. + \frac{16}{87}.$$

3ον. Ὡρολόγιόν τι καθυστερεῖ 2λ.π. 13λ.δ. εἰς 5ῶρ. 5λ.π., εἰς πόσας ἡμέρας θέλει καθυστερήσει 12ῶρ. 5λ.π.;

$$3\tilde{\omega}\rho. \quad 5\lambda.\pi. \quad 2\lambda.\pi. \quad 15\lambda.\delta.$$

$$\chi \quad 12\tilde{\omega}\rho. \quad 3\lambda.\pi.$$

Τρέπομεν πρῶτον ὡς προείπομεν τοὺς ὁμοειδεῖς συμμιγεῖς 2λ.π., 15λ.δ. καὶ 12ῶρ. 3λ.π. εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτοῖς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως, ἥτοι εἰς λεπτὰ δεύτερα, καὶ τὸν συμμιγῆ 3ῶρ. 5λ.π. εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν τῆς ἡμέρας, διότι μᾶς ζητεῖται νὰ παριστᾷ τὸ χ ἡμέρας. Οὕτως ἔχομεν

$$\begin{array}{r} \chi\rho\acute{o}\nu\omicron\iota \\ 185 \\ 1440 \end{array}$$

χ

καθυστερήσεις

$$435$$

$$43380$$

Τούτων δὲ γενομένων, σχηματίζομεν τὴν ἀναλογίαν

$$435 : 43380 = \frac{185}{1440} : \chi,$$

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν λίαν εὐκόλως τὴν ζητούμενην τιμὴν τῶν ἡμερῶν

$$\chi = \frac{8047}{210} \text{ τῆς ἡμέρας, ἥτοι } 44\eta\mu. \text{ } 6\tilde{\omega}\rho. \text{ } 46\lambda.\pi. \text{ } 40\lambda.\delta.$$

248. Ὑπάρχουσιν ἀπλοποιήσεις τιτές, δι' ὧν πορίζομεθα συντομώτερον τὴν τιμὴν τῆς χ ἐκ τῆς περιεχοῦσης ταύτης ἀναλογίας;

"Ὅταν ὁ γνωστὸς ἄκρος καὶ οἱ μέσοι ἔχωσι κοινούς τινας παράγοντας, τοὺς ἐξαλείφομεν πρὶν ἢ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν μέσων καὶ διαίρῃσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου. Οὕτως αἱ πρὸς εὔρεσιν τῆς ἀγνώστου πράξεις ἀπλοποιοῦνται ὡς ἐκτελούμεναι ἐπὶ μικροτέρων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, πρὸς εὔρεσιν τῆς τιμῆς τῆς χ ἐκ τῆς προηγουμένης ἀναλογίας, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἓνα τῶν ἄκρων καὶ ἓνα τῶν μέσων, ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 1440 καὶ ἔχομεν ἀντὶ τῆς πρώτης ἀναλογίας τὴν ἐξῆς:

$$435 \times 1440 : 43380 = 185 : \chi$$

διαιροῦντες ἔπειτα τοὺς δύο πρώτους ὅρους ταύτης διαδοχικῶς διὰ 10, 9 καὶ 2, εὐρίσκομεν

$$435 \times 144 : 4338 = 185 : \chi,$$

$$45 \times 144 : 482 = 185 : \chi,$$

$$15 \times 72 : 241 = 185 : \chi,$$

καὶ τελευταῖον διαιροῦντες τὸν πρῶτον καὶ τρίτον διὰ 5 ἔχομεν

$$3 \times 72 : 241 = 37 : \chi,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα συντομώτερον τὴν ἀνωτέρω εὐρεθεῖσαν τιμὴν τῆς χ ,

$$\chi = \frac{8917}{216}.$$

Ὡσαύτως, ἂν εἶχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{5}{9} : \frac{2}{7} = \frac{35}{3} : \chi,$$

ἠθέλομεν, ἐκτελοῦντες διαδοχικῶς πάσας τὰς δυνατὰς ἀπλοποιήσεις, εὐ-
ρει τὴν ἐξῆς:

$$1 : 6 = 1 : \chi,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως καὶ εὐκολώτατα τὴν τιμὴν 6 τῆς χ .

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ.

249. Ποῖα προβλήματα λύονται διὰ τῆς λεγομένης ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ;

Ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ τιμὴ τοῦ ζητουμένου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μετα-
βολῆς ποσῶν πλειοτέρων τοῦ ἐνός, πρὸς ἃ τὸ ζητούμενον ὑποτίθεται
ἀνάλογον.

Παραδείγματος χάριν ἂν εἶχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα:

Εἰς 18 ἡμέρας 50 ἐργάται, 10 ὥρας ἐργαζόμενοι τὴν ἡμέραν,
ἔσκαψαν τάφρον 75 μέτρων τὸ μῆκος· εἰς πόσας ἡμέρας 25 ἐρ-
γάται, 8 ὥρας ἐργαζόμενοι τὴν ἡμέραν, θὰ σκάψωσι τάφρον 50
μέτρων τὸ μῆκος;

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τοῦ ζητουμένου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μεταβολῆς τοῦ ἀ-
ριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργασιμῶν ὥρῶν καὶ τοῦ μή-
κου τῆς τάφρου, ἐκ τῆς μεταβολῆς δηλαδή ποσῶν πλειοτέρων τοῦ ἐ-
νός, πρὸς ἃ ὑποτίθεται τὸ ζητούμενον ἀνάλογον, τὸ πρόβλημα λύεται
διὰ τῆς λεγομένης συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

250. Πῶς λύονται τὰ τοιοῦτον εἶδους προβλήματα διὰ τῆς συν-
θέτου μεθόδου τῶν τριῶν;

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα:

ἡμέραι	ἐργάται	ὥραι	μῆκη
18	30	10	75
χ	25	8	50

Γράφομεν πρῶτον ἐπὶ τινος ὀριζοντίου γραμμῆς τὰ εἶδη τῶν δεδομέ-
νων ποσῶν ἡμέραι, ἐργάται, ὥραι, μῆκη, ἔπειτα ὑφ' ἑκάστον τούτων
τὰς δύο δεδομένας τιμὰς ἐκάστου, παριστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ ζητου-
μένου διὰ χ , ἀλλ' οὕτως ὥστε αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ νὰ εὐρίσκωνται

ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὀριζοντίου σειρᾶς, ὡς φαίνεται ἀνωτέρω, ἔνθα αἱ τιμαὶ 30, 40, 75 τῶν ἐργατῶν, ὥρῶν καὶ μήκους, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὴν τιμὴν 18 τῶν ἡμερῶν, ἐτέθησαν ἐπὶ τῆς πρώτης ὀριζοντίου σειρᾶς, αἱ δὲ τιμαὶ 25, 8, 50 τῶν ἐργατῶν, ὥρῶν καὶ μήκους, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὴν ζητουμένην τιμὴν χ τῶν ἡμερῶν, ἐτέθησαν ἐπὶ τῆς δευτέρας ὀριζοντίου γραμμῆς. Τούτων δὲ γενομένων, εὐρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν τῆς ἀγνώστου χ πράττοντες ὡς ἑξῆς:

$$\left. \begin{array}{l} 25 : 30 \\ 8 : 40 \\ 75 : 50 \end{array} \right\} = 18 : \chi. \quad (4)$$

Γράφομεν ὡς φαίνεται ἀνωτέρω χ ὡς τέταρτον ὅρον ἀναλογίας τινὸς καὶ πρὸ αὐτοῦ τὸν σύστοιχόν του 18, ἔπειτα τὸ σημεῖον $\left\{ \right.$ πρὸ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος. Μετὰ ταῦτα λαμβάνομεν τὰς δύο τιμὰς 30 καὶ 25 τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν καὶ λέγομεν:

Ἐπειδὴ, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πρὸς ἀνασκαφὴν τῆς τάφρου ἡμερῶν ἐλαττοῦται, τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, καὶ ἐπομένως θέτομεν ὡς πρῶτον ὅρον τὸν ἀντίστοιχον 25 τοῦ χ καὶ ὡς δεύτερον τὸν σύστοιχον 30 τοῦ 25.

Μεταβαίνοντες εἰς τὰς ἐργασίμους ὥρας λέγομεν:

Ἐπειδὴ πάλιν, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργασίμων ὥρῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πρὸς ἀνασκαφὴν τῆς τάφρου ἡμερῶν ἐλαττοῦται, τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα καὶ ἐπομένως θέτομεν ὡς πρῶτον ὅρον τὸν ἀντίστοιχον 8 τοῦ χ καὶ ὡς δεύτερον τὸν σύστοιχον 40 τοῦ 8.

Τελευταῖον μεταβαίνοντες εἰς τὰ μήκη τῆς τάφρου λέγομεν:

Ἐπειδὴ, αὐξανομένου τοῦ μήκους τῆς τάφρου, αὐξάνει καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πρὸς ἀνασκαφὴν αὐτῆς ἡμερῶν, τὰ ποσὰ εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα, καὶ ἐπομένως θέτομεν ὡς δεύτερον ὅρον τὸν ἀντίστοιχον 50 τοῦ χ καὶ ὡς πρῶτον τὸν σύστοιχον 75 τοῦ 50.

Πρὸς εὔρεσιν δὲ τῆς τιμῆς τοῦ χ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους τῆς ἀνωτέρω παραστάσεως, καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$25 \times 8 \times 75 : 30 \times 40 \times 50 = 18 : \chi,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν τιμὴν τῆς χ πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο μέσους καὶ διαιροῦντες τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου.

2ον. Ὅδοιπὸρος τις βαδίζων 5 ὥρας τὴν ἡμέραν καὶ διατρέχων

8 στάδια τὴν ὥραν ἐφθασεν εἰς τινὰ πόλιν εἰς 12 ἡμέρας· ἂν ἤθελε καὶ φθάσῃ εἰς τὴν αὐτὴν πόλιν εἰς 9 ἡμέρας διατρέχων 10 στάδια τὴν ὥραν, πόσας ὥρας ἔπρεπε καὶ βαδίξῃ τὴν ἡμέραν;

ἡμέραι	ὥραι	ταχύτητες
12	5	8
9	χ	10

Γράφομεν πρῶτον τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος ὡς προείπομεν καὶ ὡς φαίνεται ἀνωτέρω, ἔπειτα πρὸς εὐρεσιν τῆς ζητουμένης τιμῆς χ πράττομεν ὡς ἐξῆς.

$$\left. \begin{array}{l} 10 : 8 \\ 9 : 12 \end{array} \right\} = 5 : \chi \quad (1)$$

Γράφομεν χ ὡς τέταρτον ὅρον ἀναλογίας τινὸς καὶ πρὸ αὐτοῦ τὸν σύστοιχόν του 5 καὶ τὸ σημεῖον $\left\{ \right.$ πρὸ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος, ἔπειτα λαμβάνομεν τὰς δύο τιμὰς 8 καὶ 10 τῶν ταχυτήτων καὶ λέγομεν· Ἐπειδὴ, αὐξανομένης τῆς ταχύτητος, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὥρων, καθ' ἃς πρέπει νὰ βαδίξῃ καθ' ἡμέραν, ἵνα φθάσῃ πρὸς τὸν σκοπὸν του, ἐλαττοῦται, τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, καὶ ἐπομένως θέτομεν ὡς πρῶτον ὅρον τὸν ἀντίστοιχον 10 τοῦ χ καὶ ὡς δεῦτερον τὸν σύστοιχον 8 τοῦ 10.

Μεταβαίνοντες εἰς τὰς ἡμέρας λέγομεν·

Ἐπειδὴ, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὥρων, καθ' ἃς πρέπει νὰ βαδίξῃ καθ' ἡμέραν, ἵνα φθάσῃ πρὸς τὸν σκοπὸν του, ἐλαττοῦται, τὰ ποσὰ εἶναι πάλιν ἀντιστρόφως ἀνάλογα, καὶ ἐπομένως θέτομεν ὡς πρῶτον ὅρον τὸν ἀντίστοιχον 9 τοῦ χ καὶ ὡς δεῦτερον τὸν σύστοιχον 12 τοῦ 9.

Τούτων δὲ γενομένων, ἐκ τῆς παραστάσεως (1) πορίζομεθα τὴν ἀναλογίαν

$$10 \times 9 : 8 \times 12 = 5 : \chi,$$

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ χ.

251. Δεῖ ὑπάρχουσιν ἀπλοποιήσεις τινές, δι' ὧν εὐρίσκομεν ταχύτερον τὴν τιμὴν τοῦ ζητουμένου χ;

Δινάμεθα νὰ ἐξαλειψώμεν πρὶν ἢ σχηματίσωμεν τὰ γινόμενα τῶν ὁμοταγῶν ὁρων, τοὺς κοινούς εἰς τοὺς ἄκρους καὶ μέσους παράγοντας, καὶ οὕτως ἡ τιμὴ τοῦ χ εὐρίσκεται ταχύτερον. Π. χ. πρὸς λύσιν τοῦ πρῶτου προβλήματος εὐρομεν τὴν παράστασιν

$$\begin{array}{lcl}
 25 : 30 & \left. \begin{array}{l} \text{αὕτη δὲ διὰ τῆς ἐξα-} \\ \text{λείψεως τῶν κοινῶν εἰς} \\ \text{τοὺς ἄκρους καὶ μέσους} \\ \text{παραγόντων γίνεται} \end{array} \right\} = 18 : \chi, & \begin{array}{l} 1 : 1 \\ 1 : 1 \\ 1 : 1 \end{array} \left. \right\} = 18 : \chi,
 \end{array}$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν ἀπλουστάτην ἀναλογίαν

$$1 : 1 = 18 : \chi,$$

ἥτις μᾶς δίδει ἀμέσως διὰ τὴν ζητουμένην τιμὴν $\chi = 18$ ἡμέραι.

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου προβλήματος εὗρομεν τὴν παράστασιν

$$\begin{array}{lcl}
 40 : 8 & \left. \begin{array}{l} \text{αὕτη δὲ διὰ τῶν δυνατῶν} \\ \text{ἀπλοποιήσεων γίνεται} \end{array} \right\} = 5 : \chi, & \begin{array}{l} 1 : 4 \\ 3 : 4 \end{array} \left. \right\} = 1 : \chi,
 \end{array}$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως τὴν ἀναλογίαν

$$3 : 16 = 1 : \chi,$$

ἥτις μᾶς δίδει

$$\chi = \frac{16}{3} \text{ τῆς ὥρας, ἥτοι ὥρ. } 20\lambda\pi.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ

252. Τί καλεῖται ΕΠΙΤΟΚΙΟΝ;

Τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ δανειζὼν 100 δραχμὰς μετὰ ἐν ἔτος. Ἐὰν ᾖ καθ' ὑπόθεσιν 4 δραχμαί, τοῦτο σημειοῦται συντομώτερον $4\frac{0}{10}$ καὶ ἀπαγγέλλεται 4 ταῖς 100.

253. Τί καλεῖται ΤΟΚΟΣ;

Τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ δανειζὼν χρηματικόν τι ποσόν, καλούμενον κεφάλαιον, μετὰ τινὰ χρόνον.

254. Πότε ὁ τόκος καλεῖται ἀπλοῦς καὶ πότε σύνθετος;

Ὁ τόκος λέγεται ἀπλοῦς, ὅταν ὁ μὴ πληρωθεὶς τόκος ἐκάστου παρελθόντος ἔτους δὲν προστίθεται εἰς τὸ τοκίζόμενον κεφάλαιον, ἀλλὰ τὸ κεφάλαιον μένει ἀμετάβλητον, ἥτοι ὅταν ὁ τόκος ᾖ ἀνάλογος τοῦ χρόνου. Ὁ τόκος λέγεται σύνθετος, ὅταν εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους ὁ μὴ πληρωθεὶς τόκος τοῦ κεφαλαίου προστίθεται εἰς αὐτὸ τὸ κεφάλαιον, καὶ ἐπομένως φέρει καὶ αὐτὸς τόκον εἰς τὸ ἀκόλουθον ἔτος.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν αἱ διακόσαι δραχμαὶ μετὰ ἐν ἔτος φέρωσι τόκον καθ' ὑπόθεσιν 10 δραχμὰς, μετὰ δύο ἔτη 20 δραχμὰς, μετὰ τρία ἔτη 30 δραχμὰς κτλ., τότε ὁ τόκος λέγεται ἀπλοῦς. Ἐὰν ὅμως προσθέσωμεν τὸν μὴ πληρωθέντα τόκον τοῦ ἐνὸς ἔτους 10 δραχμὰς εἰς τὸ κεφάλαιον, καὶ ὑπολογίσωμεν διὰ τὸ ἐρχόμενον ἔτος τὸν τόκον τοῦ

κεφαλαίου 210 κτλ., τότε ὁ τόκος λέγεται σύνθετος. Περὶ τοῦ συνθέτου τόκου δὲν θέλομεν κάμει λόγον ἐνταῦθα.

255. *Εἰς πᾶν πρόβλημα τόκου πόσα τινα διακρίνομεν ;*

Τέσσαρα· τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον, τὸν τόκον τοῦ κεφαλαίου, τὸ ἐπιτόκιον, ἤτοι τὸ πρὸς πόσον ταῖς $\frac{0}{10}$ ἐδανείσθη, καὶ τὸν χρόνον, ἤτοι ἐπὶ πόσον χρόνον ἔμεινεν ἐπὶ τόκῳ τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον. Ὅταν δὲ τρία τούτων ἦναι γνωστά, εὐρίσκομεν τὸ τέταρτον διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι

1ον. Ἐδάνεισέ τις 2500 δραχμὰς πρὸς $\frac{5}{10}$ ἐπὶ 3 ἔτη καὶ 7 μῆρας, καὶ μᾶς ζητεῖται πόσον τόκον ἔλαβε.

Πρὸς εὑρεσιν τοῦ ζητουμένου κατατάσσομεν πρῶτον τὰ δεδομένα ὡς εἴπομεν ἐν τῇ συνθέτῳ μεθόδῳ τῶν τριῶν,

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
100	1	5
2500	$3 + \frac{7}{12}$	χ

μετὰ ταῦτα σκεπτόμενοι κατὰ τὰ ἐκεῖσε λεχθέντα θέλομεν ἔχει

$$\left. \begin{array}{l} 100 : 2500 \\ 1 : 3 + \frac{7}{12} \end{array} \right\} = 5 : \chi, \quad \left. \begin{array}{l} \text{ἢ γενομένων τῶν} \\ \text{δυνατῶν ἀπλοποι-} \\ \text{ήσεων} \end{array} \right\} = 5 : \chi, \quad \left. \begin{array}{l} 1 : 25 \\ 12 : 43 \end{array} \right\} = 5 : \chi,$$

ἐκ τῆς τελευταίας δὲ παραστάσεως πορίζομεθα τὴν ἀναλογίαν

$$12 : 25 \times 43 = 5 : \chi,$$

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν

$$\chi = 447 \text{ δραχμαὶ καὶ } 91 \text{ λεπτὰ ὡς ἔγγιστα.}$$

2ον. Ἐδάνεισέ τις 3500 δραχμὰς καὶ μετὰ 17 μῆρας ἔλαβε τόκον 225 δραχμὰς· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐδάνεισε ;

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
3500	$\frac{17}{12}$	225
100	1	χ

$$\left. \begin{array}{l} 3500 : 100 \\ \frac{17}{12} : 1 \end{array} \right\} = 225 : \chi, \quad \left. \begin{array}{l} \text{ἢ γενομένων τῶν} \\ \text{δυνατῶν ἀπλο-} \\ \text{ποιήσεων} \end{array} \right\} = 45 : \chi, \quad \left. \begin{array}{l} 7 : 1 \\ 17 : 12 \end{array} \right\} = 45 : \chi,$$

$$7 \times 17 : 12 = 45 : \chi, \quad \text{ἐξ ἧς } \chi = 4,54 \text{ ὡς ἔγγιστα.}$$

3ον. Ἐδάνεισέ τις κεφάλαιόν τι πρὸς $\frac{5}{10}$ καὶ μετὰ 8 μῆρας ἔλαβε τόκον 175 δραχμὰς· ἐκ πόσων δραχμῶν συνέκειτο τὸ ὑπ' αὐτοῦ δανεισθὲν κεφάλαιον ;

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
400	4	5
χ	$\frac{8}{12}$	475
$\frac{8}{12} : 4$	$\left. \begin{array}{l} \text{ἢ γενομένων τῶν} \\ \text{δυνατῶν ἀπλο-} \\ \text{ποιήσεων} \end{array} \right\} = 100 : \chi,$	$4 : 3$
$5 : 475$		$4 : 475$
$4 : 3 \times 475 = 10 : \chi, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \chi = 5250.$		

4ον. Ἐδάρεισέ τις 4000 δραχμὰς πρὸς 7,43⁰/₀ καὶ ἔλαβε μετὰ τινα χρόνον 450 δραχμὰς τόκον· ἐπὶ πόσον χρόνον ἔμειρε τὸ κεφάλαιόν του εἰς τόκον;

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
400	4	7,43
4000	χ	450
4000 : 400	$\left. \begin{array}{l} \text{ἢ γενομένων τῶν} \\ \text{δυνατῶν ἀπλο-} \\ \text{ποιήσεων} \end{array} \right\} = 1 : \chi,$	4 : 4
7,43 : 450		743 : 373
$\chi = \frac{375}{743}$ τοῦ ἔτους, ἢ 6 μῆνες ὡς ἔγγιστα.		

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

256. Τί καλεῖται ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ;

Τὸ ποσόν, καθ' ὃ ἐλαττοῦται ἡ ἀξία γραμματίου τινός, προεξοφλουμένου πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας.

257. Πόσων εἰδῶν ὑφαιρέσεις ὑπάρχουσι;

Δύο· ἐξωτερικὴ καὶ ἐσωτερικὴ.

258. Τί λέγεται ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ τί ἐσωτερικὴ;

Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις λέγεται ὁ τόκος τῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, ἀφ' ἧς ἡμέρας προεξοφλεῖται τοῦτο μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας του, υπολογιζόμενος πρὸς συμφωνηθέν τι ἐπιτόκιον.

Παραδείγματος χάριν, ἐάν ἡ ἀξία τοῦ προεξοφλουμένου γραμματίου ᾖ 1000 δραχμῶν, ἡ λήξις τῆς προθεσμίας του ἔν ἔτος καὶ τὸ πρὸς προεξόφλησιν συμφωνηθέν ἐπιτόκιον 10, ὁ τόκος τῶν 1000 δραχμῶν εἰς ἔν ἔτος πρὸς 10⁰/₀ λέγεται ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ εὗρεσις τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαίρεσεως εἶναι ἀπλοῦν ζήτημα τόκου, περὶ οὗ ἐγένετο λόγος προηγουμένως.

Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις καλεῖται ὁ τόκος, ὃν ἤθελε φέρει πρὸς τι συμφωνηθέν ἐπιτόκιον ἡ πρὸς προεξόφλησιν τοῦ γραμματίου πληρονομένη

χρηματική ποσότης, ἀφ' ἧς ἡμέρας πληρόνεται αὕτη μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας τοῦ γραμματίου.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 1000 δραχμῶν, ἡ λήξις τῆς προθεσμίας του ἐν ἔτος καὶ τὸ πρὸς προεξόφλησιν συμφωνηθὲν ἐπιτόκιον 10, ἂς ὑποθέσωμεν δὲ πρὸς τούταις, ὅτι ὁ προεξοφλητὴς μᾶς ἔδωκεν Α δραχμὰς· ὁ τόκος τῶν Α δραχμῶν πρὸς 10 $\frac{0}{100}$ εἰς ἐν ἔτος λέγεται ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.

259. Πῶς εὐρίσκεται ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις;

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις πρὸς 8 $\frac{0}{100}$ γραμματίου 1000 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 9 μῆνας.

Εὐρίσκομεν πρῶτον τὸν τόκον 6 τῶν 100 δραχμῶν πρὸς 8 $\frac{0}{100}$ εἰς 9 μῆνας, προσθέτομεν αὐτὸν εἰς τὰς 100 δραχμὰς καὶ σχηματίζομεν τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν, παριστῶντες διὰ χ τὴν ζητούμενην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν,

$$106 : 1000 = 6 \cdot \chi \quad (1)$$

τούτέστι λέγομεν· διὰ 106 δραχμὰς πληρωτέας μετὰ 9 μῆνας ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις πρὸς 8 $\frac{0}{100}$ εἶναι 6 δραχμαί, διὰ 1000 δραχμὰς πληρωτέας μετὰ 9 ἐπίσης μῆνας ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις πρὸς 8 $\frac{0}{100}$ πόση θέλει εἶναι;

Ἐκ τῆς ἀναλογίας (1) πορίζομεθα $\chi = 56,60$ ὡς ἔγγιστα. Λοιπὸν ὁ προεξοφλητὴς πρέπει νὰ κρατήσῃ 56,60 ἀπὸ τῶν 1000 δραχμῶν, καὶ νὰ μᾶς δώσῃ ἐπομένως 943,40. Καὶ τῷ ὄντι, ὁ τόκος τῶν 943,40 δραχμῶν πρὸς 8 $\frac{0}{100}$ μετὰ 9 μῆνας εἶναι 56,60, καὶ τοῦτο ἐκαλέσαμεν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν.

2ον. Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις πρὸς 10 $\frac{0}{100}$ γραμματίου 3000 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ 18 μῆνας;

Ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν μετὰ 8 μῆνας πρὸς 10 $\frac{0}{100}$ εἶναι 15 δραχμαί. Πρὸς εὔρεσιν λοιπὸν τῆς ζητούμενης ἐσωτερικῆς ὑφαίρεσεως, κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα, σχηματίζομεν τὴν ἀναλογίαν

$$115 : 3000 = 15 : \chi,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα $\chi = 391,30$ ὡς ἔγγιστα. Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τῶν 3000 δραχμῶν τὰς 391,30 καὶ ζητήσωμεν τὸν τόκον τῆς διαφορᾶς 2608,70 πρὸς 10 $\frac{0}{100}$ μετὰ 18 μῆνας, θέλομεν εὔρει 391,30 δραχμὰς, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ ἀληθὲς τοῦ ἀνωτέρω δοθέντος κανόνος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΙΑΣ

260. Ποῖα λέγονται προβλήματα εταιρίας;

Ἐκεῖνα, ἐν οἷς πρόκειται νὰ μερισθῇ τὸ ἕκ τινος ἐπιχειρήσεως προκύπτον κέρδος ἢ ζημία ἀναλόγως τοῦ χρηματικοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον ἕκαστος συνέταιρος κατέθεσεν, ἢ ἀναλόγως τοῦ καταβληθέντος ὑφ' ἑκάστου χρηματικοῦ ποσοῦ καὶ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν ὑπῆρχε κατατεθειμένον ἐν τῇ ἐπιχειρήσει, ἂν οἱ καταβαλόντες δὲν κατέβαλον ταῦτοχρόνως τὰ κεφάλαιά των.

261. Πῶς λύονται τὰ τοιοῦτου εἶδους προβλήματα;

Ἔστω π. χ. πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα·

Τρεῖς ἔμποροι κατέβαλον ταῦτοχρόνως διὰ τίνα ἐπιχείρησιν, ὃ μὲν 5000 δραχμάς, ὁ δὲ 3000 καὶ ὁ τρίτος 2000, καὶ μετὰ τινα χρόνον ἐκέρδησαν 700 δραχμάς· πόσας θέλει λάβει ἕκαστος ἀναλόγως τοῦ κεφαλαίου, ὃπερ εἶχε καταθέσει;

Πρὸς εὔρεσιν τοῦ ζητουμένου πράττομεν ὡς ἐξῆς·

α	5000	$700 \times 5000 = 3500000$	40000
			350 μερίδιον τοῦ α
β'	3000	$700 \times 3000 = 2100000$	40000
			210 μερίδιον τοῦ β'
γ'	2000	$700 \times 2000 = 1400000$	40000
			140 μερίδιον τοῦ γ'
	10000		

Προσθέτομεν πρῶτον τὰ καταβληθέντα ὑφ' ἑκάστου κεφάλαια, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸ μεριστέον κέρδος 700 ἐπὶ τὸ ὑπὸ τοῦ πρώτου καταβληθὲν κεφάλαιον 5000 καὶ διαιροῦμεν τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον 3500000 διὰ τοῦ ἀθροίσματος 10000 τῶν καταβληθέντων κεφαλαίων. Τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον πηλίκον 350 θέλει παριστᾷ τὸ μερίδιον τοῦ α.

Πρὸς εὔρεσιν τοῦ μεριδίου τοῦ β' πολλαπλασιάζομεν πάλιν τὸ μεριστέον κέρδος 700 ἐπὶ τὸ καταβληθὲν ὑπ' αὐτοῦ κεφάλαιον 3000, καὶ διαιροῦμεν τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον 2100000 πάλιν διὰ τοῦ ἀθροίσματος 10000 τῶν καταβληθέντων κεφαλαίων. Τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον πηλίκον 210 θέλει παριστᾷ τὸ μερίδιον τοῦ β'.

Πρὸς εὔρεσιν τοῦ μεριδίου τοῦ γ' πολλαπλασιάζομεν ὡσαύτως τὸ μεριστέον κέρδος 700 ἐπὶ τὸ καταβληθὲν ὑπ' αὐτοῦ κεφάλαιον 2000,

καὶ διαιροῦμεν τὸ εὐρεθισόμενον γινόμενον πάλιν διὰ τοῦ ἀθροίσματος 10000 τῶν καταβληθέντων κεφαλαίων. Τὸ οὕτως εὐρεθισόμενον πηλί-
κον 140 θέλει παριστᾷ τὸ μερίδιον τοῦ γ'.

Καὶ τῷ ὄντι, ἀφοῦ τὸ ἄθροισμα τῶν κεφαλαίων 10000 ἔφερε κέρδος 700 δραχμᾶς, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ τὸ μερίδιον τοῦ α , θέλομεν ἔχει προφανῶς τὴν ἀναλογίαν

$$10000 : 5000 = 700 : \chi,$$

$$\text{ἐξ ἧς εὐρίσκομεν } \chi = \frac{700 \times 5000}{10000}, \text{ ἥτοι } 350 \text{ δραχμᾶς.}$$

Ὡσαύτως, παριστῶντες διὰ χ τὸ μερίδιον τοῦ β , θέλομεν ἔχει

$$10000 : 3000 = 700 : \chi,$$

$$\text{ἐξ ἧς εὐρίσκομεν } \chi = \frac{700 \times 3000}{10000}, \text{ ἥτοι } 210 \text{ δραχμᾶς.}$$

Παρομοίως, παριστῶντες διὰ χ τὸ μερίδιον τοῦ γ', θέλομεν ἔχει

$$10000 : 2000 = 700 : \chi,$$

$$\text{ἐξ ἧς εὐρίσκομεν } \chi = \frac{700 \times 2000}{10000}, \text{ ἥτοι } 140 \text{ δραχμᾶς.}$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ τὸ ἐξῆς πρόβλημα

2ον. Διὰ τὴν κατασκευὴν τείχους τινὸς εἰργάσθησαν 4 ἐργάται.
Ὁ α εἰργάσθη 5 ἡμέρας, ὁ β 7 ἡμέρας, ὁ γ' 5 ἡμέρας, καὶ ὁ δ' 6 ἡμέρας, μετὰ δὲ τὴν ἀποπεράτωσιν τοῦ ἔργου ἔλαβον ὅλοι ὁμοῦ 210 δραχμᾶς· πόσας θέλει λάβει ἕκαστος τούτων ἀναλόγως τῶν ἡμερῶν, καθ' ἃς εἰργάσθη;

α'	}	5	210 × 5 = 1050	}	$\frac{21}{50 \text{ μερίδιον τοῦ } \alpha}$
β'	}	7	210 × 7 = 1470	}	$\frac{21}{70 \text{ μερίδιον τοῦ } \beta'}$
γ'	}	3	210 × 3 = 630	}	$\frac{21}{30 \text{ μερίδιον τοῦ } \gamma'}$
δ'	}	6	210 × 6 = 1260	}	$\frac{21}{60 \text{ μερίδιον τοῦ } \delta'}$
		21			

Ἐπολλαπλασιάσαμεν, ὡς πᾶς τις βλέπει ἐν τῇ ἀνωτέρῳ διατάξει τῶν πράξεων, τὸ μεριστέον ποσὸν 210 ἐφ' ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν, 5, 7, 3, 6, καὶ διηρέσαμεν τὰ εὐρεθέντα γινόμενα 1050, 1470, 630, 1260

διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 21, ὅστις παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5, 7, 3, 6, εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ὁποίων ἔπρεπε νὰ μερισθῇ τὸ ποσόν τῶν 210 δραχμῶν. Τὰ οὕτως εὑρεθέντα πηλικά 50, 70, 30 καὶ 60 παριστῶσι τὰ ζητούμενα μερίδια ἐνὸς ἐκάστου.

3ον. Τρεῖς ἔμποροι κατέβαλον διὰ τινα ἐπιχειρήσιν. Ὁ ἀ κατέβαλε 5000 δραχμάς, ὁ β' 2000 καὶ ὁ γ' 4000, ἀλλὰ τὰ κεφάλαια τοῦ ἀ ἔμειναν 4 ἔτη πρὸς ἀποπεράτωσιν τῆς ἐπιχειρήσεως, τὰ τοῦ β' ἔμειναν 5 ἔτη καὶ τὰ τοῦ γ' 2 ἔτη. Ἄν ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως προέκυψε κέρδος 6000 δραχμῶν, πόσας θέλει λάβει ἕκαστος ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων, ἃ κατέθεσε, καὶ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν ταῦτα ἔμειναν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει;

Ἵνα εὐρωμεν τὰ ζητούμενα πράττομεν ὡς ἐξῆς·

$$\begin{array}{l} \alpha' \left\{ \begin{array}{l} 3000 \times 4 = 12000, \quad 6000 \times 12000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 30000 \\ \hline 2400 \text{ μερίδιον τοῦ } \alpha' \end{array} \\ \\ \beta' \left\{ \begin{array}{l} 2000 \times 5 = 10000, \quad 6000 \times 10000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 30000 \\ \hline 2000 \text{ μερίδιον τοῦ } \beta' \end{array} \\ \\ \gamma' \left\{ \begin{array}{l} 4000 \times 2 = 8000, \quad 6000 \times 8000 \\ \hline 30000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 30000 \\ \hline 1600 \text{ μερίδιον τοῦ } \gamma' \end{array} \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰ ὑφ' ἐκάστου καταβληθέντα κεφάλαια ἐπὶ τὸν χρόνον, καθ' ὃν ἔμειναν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει, καὶ μερίζομεν ἔπειτα τὸ κέρδος ἀναλόγως τῶν εὑρεθησομένων γινομένων, ὡς τοῦτο φαίνεται ἐν τῷ ἀνωτέρω παραδείγματι, ἔνθα ἐμερίσκαμεν τὸ κέρδος 6000 ἀναλόγως τῶν γινομένων 3000×4 , 2000×5 , 4000×2 τῶν κεφαλαίων 3000, 2000, 1000 ἐπὶ τὰ ἔτη 4, 5, 2.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ τὸ ἐξῆς πρόβλημα·

4ον. Δύο ἐργάται πρὸς κατασκευὴν ἔργου τιρὸς εἰργάσθησαν ὁ μὲν 7 ἡμέρας, ὁ δὲ 5. Ὁ πρῶτος εἰργάζετο 6 ὥρας τῇ ἡμέρᾳ, ὁ δὲ δεύτερος 4, καὶ ἔλαβον ὅμοῦ 56 δραχμάς. Πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν καὶ τῶν ὥρῶν, καθ' ἃς εἰργάζετο;

$$\begin{array}{l} \alpha' \left\{ \begin{array}{l} 7 \times 6 = 42 \quad 42 \times 56 = 2352 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 62 \\ \hline 37,93 \text{ μερίδιον τοῦ } \alpha' \end{array} \\ \\ \beta' \left\{ \begin{array}{l} 5 \times 4 = 20 \quad 20 \times 56 = 1120 \\ \hline 62 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 62 \\ \hline 18,07 \text{ μερίδιον τοῦ } \beta' \end{array} \end{array}$$

Εύρίσκομεν οὕτω 37,93 δραχμὰς διὰ τὸ μερίδιον τοῦ α' καὶ 18,07 διὰ τὸ μερίδιον τοῦ β'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΙΞΕΩΣ.

262. Ποῖα προβλήματα λύονται διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναμίξεως;

Ἐκεῖνα ἐν οἷς μᾶς δίδονται αἱ ποσότητες καὶ αἱ τιμαὶ διαφόρων ποιότητων πράγματός τινος καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ μίγματος τούτων.

263. Πῶς λύονται τὰ τοιούτων εἶδους προβλήματα;

Ἐστω π. χ. πρὸς λύσιν τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Ἔχομεν τριῶν εἰδῶν οἴνους· ἐκ τοῦ πρώτου εἶδους 50 οκάδας ἀξίας 70 λεπτῶν, ἐκ τοῦ δευτέρου 60 οκάδας ἀξίας 40 λεπτῶν καὶ ἐκ τοῦ τρίτου 30 οκάδας ἀξίας 20 λεπτῶν. Ἐὰν ἀναμίξωμεν τὰς ἀνωτέρω ποσότητας, πόσον πρέπει νὰ τιμήσωμεν τὴν οκάδα τοῦ κράματος;

Πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου πράττομεν ὡς ἐξῆς·

α' εἶδους	50,	$50 \times 70 = 3500$	
β' »	60,	$60 \times 40 = 2400$	$6500 \mid 140$
γ' »	30,	$30 \times 20 = 600$	$\mid 46 \text{ λεπ. ὡς ἔγγ.}$
	140	6500	

Προσθέτομεν πρῶτον τὰς ἀναμιχθείσας ποσότητας τῶν οκάδων 50, 60, 30, ἔπειτα τὰ γινόμενα τούτων ἐπὶ τὴν ἀξίαν ἐκάστου εἶδους, καὶ διαιροῦμεν τὸ τελευταῖον ἄθροισμα 6500 διὰ τοῦ πρώτου ἄθροισματος 140. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 46 θέλει παριστᾷ τὴν ἀξίαν τῆς οκάδος τοῦ κράματος.

Διότι τὸ κράμα περιέχει 140 οκάδας καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ εἶναι 6500 λεπτὰ. Λοιπόν, ἐὰν 140 οκάδες τιμῶνται 6500 λεπτὰ, ἡ μία οκάς θέλει τιμᾶσθαι τὸ $\frac{1}{140}$ τῶν 6500 λεπτῶν, ἥτοι 46 λεπτὰ ὡς ἔγγιστα.

$$140 : 1 = 6500 : \chi.$$

2ον. Ἐμπορὸς ἔχει δύο εἰδῶν σίτους· ἐκ τοῦ πρώτου εἶδους 45 κοιλὰ ἀξίας 5,50 ἑκάστου, καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου 60 κοιλὰ ἀξίας 7,25. Ἐὰν ἀναμίξῃ πάντα ταῦτα, πόσον πρέπει νὰ τιμήσῃ τὸ κοιλὸν τοῦ μίγματος;

4 εἶδους	45,	$45 \times 5,50 = 247,50$	682,50	405
5 " "	60,	$60 \times 7,25 = 435$		
	405	682,50		

6,05 τὸ κοιλόν.

ΣΥΛΛΟΓΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ.

1. Πατήρ τις ἔδωσεν εἰς τὸν μικρότερόν του υἱὸν τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς δραχμῆς, εἰς δὲ τὸν μεγαλύτερον τὰ $\frac{3}{5}$ · τί μέρος τῆς δραχμῆς τῷ ἔμεινε;

$$(T\alpha \frac{3}{10}) - \S\S 142, 148 (*).$$

2. Ἀμπελών τις διενεμήθη μεταξὺ τριῶν γεωργῶν ὡς ἑξῆς. Ὁ πρῶτος ἔλαβε τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ἀμπελώνος, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{4}{15}$ καὶ ὁ τρίτος τὸ λοιπὸν τοῦ ἀμπελώνος. Τί μέρος τοῦ ὅλου ἀμπελώνος ἔλαβεν ὁ τρίτος;

$$(T\alpha \frac{34}{120}) - \S\S 142, 148.$$

3. Ἐκ δύο ἐμπόρων ὁ μὲν ἔλαβε τὰ $\frac{7}{23}$ τοῦ κέρδους, ὁ δὲ τὰ $\frac{8}{25}$. Ζητεῖται τίς ἐκ τῶν δύο ἔλαβε περισσότερον καὶ τί μέρος τοῦ κέρδους ἔμεινεν;

$$(\text{Ὁ δεύτερος, ἔμεινεν δὲ } \frac{216}{575} \text{ τοῦ κέρδους}) - \S\S 147, 142, 148.$$

4. Ἐκ 40 δραχμῶν, ἃς εἶχε τις, ἔδωσεν εἰς τινα φίλον του 3 δραχμὰς καὶ $\frac{4}{7}$ τῆς δραχμῆς, καὶ εἰς δεύτερον 2 δραχμὰς καὶ $\frac{5}{8}$ τῆς δραχμῆς. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν;

$$(3 \text{ δραχμαὶ καὶ } \frac{4}{56} \text{ τῆς δραχμῆς}) - \S\S 143, 148.$$

5. Πατήρ ἔδωσεν εἰς τινα θυγατέρα του τὰ $\frac{2}{3}$ κτήματός τινος. Μετὰ τινα ἔτη ἡ θυγάτηρ του προικίζουσα τὴν κόρην της ἔδωσεν ἐκ τῆς προ-

(*) Οἱ ἐντὸς τοῦ σημείου () ὑπάρχοντες ἀριθμοὶ παριστῶσι τὸ ζητούμενον, οἱ δὲ μετὰ τὰ σημεῖα § § ἀναφέρονται εἰς τὰς παραγράφους τοῦ κειμένου, τὰς δεικνύουσαι τὰς ἐκτελεστέας πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου πράξεις, καὶ χρησιμεύουσιν, ἵνα διευκολύνωσι τὰς σκέψεις τοῦ ἐπιχειροῦντος τὴν λύσιν τοῦ πρὸς δ ἀναφέρονται προβλήματος.

κός της τὰ $\frac{5}{7}$. Τί μέρος τοῦ ἀρχικοῦ κτήματος ἔλαβεν ἡ δεύτερον προεισθεῖσα;

(Τὰ $\frac{10}{21}$)—§§ 157, 164.

6. Πατήρ τις ἀποθανὼν ἄφησε 4 υἱοὺς καὶ περιουσίαν 400000 δραχμῶν ὡς κληρονομίαν. Ἐξ αὐτῆς διὰ διαθήκης τοῦ ἄφησε τὰ $\frac{1}{25}$ εἰς τὸν πρῶτόν του υἱόν, τὰ $\frac{3}{20}$ εἰς τὸν δεύτερον, τὰ $\frac{9}{50}$ εἰς τὸν τρίτον καὶ τὰ μείναντα εἰς τὸν τέταρτον. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος;

(Ὁ πρῶτος ἔλαβε 16000, ὁ δεύτερος 45000, ὁ τρίτος 48000 καὶ ὁ τέταρτος 51000)—§§ 155, 164, 24, 33.

7. Τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κέρδους ἐπιχειρήσεώς τινος ἀνέβησαν εἰς 45000 δραχμὰς· πόσον κέρδος προέκυψεν ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως;

(112500 δραχμαὶ)—§ 169.

8. Τέσσαρες ἐργάται ἀνέλαβον τὴν οἰκοδόμησιν οἰκίας τινός, καὶ μετὰ τὴν ἀποπεράτωσιν τοῦ ἔργου διενεμήθησαν τὴν πληρωμὴν ὡς ἑξῆς. Ὁ πρῶτος ἔλαβε τὰ $\frac{2}{7}$, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{3}{8}$, ὁ τρίτος τὰ $\frac{3}{11}$ τοῦ πρὸς κατασκευὴν τῆς οἰκίας συμφωνηθέντος χρηματικοῦ ποσοῦ, ὁ δὲ τέταρτος 970 δραχμὰς. Ἐκ πόσων δραχμῶν συνέκειτο ἡ δοθεῖσα αὐτοῖς πρὸς κατασκευὴν τῆς οἰκίας πληρωμή;

(Ἐξ 6160 δραχμῶν)—§§ 142, 148, 169.

9. Σφαῖρα ἐλαστική, ἀφθεῖσα ἐξ ὕψους τινός, κατέπεσεν ἐπὶ ὀριζοντίου ἐκ μαρμάρου ἐπιπέδου. Παρατηρήθη δ' ὅτι ἀναπηδήσασα ἀνέβη εἰς τὰ $\frac{9}{8}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ ἀφέθη. Ἐκ πόσων μέτρων ὕψους ἀφέθη, ἐὰν ὅποτεθῃ ὅτι ἀνέβη εἰς τὴν πρώτην τῆς ἀναπήδησιν εἰς ὕψος 9 μέτρων;

(Ἐκ 15 μέτρων)—§ 169.

10. Σφαῖρα ἐλαστική, ἀφθεῖσα ἐξ ὕψους τινός, κατέπεσεν ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου καὶ ἔκαμε τρεῖς ἀναπηδήσεις. Παρατηρήθη δ' ὅτι εἰς ἐκάστην ἀναπήδησιν ἔφθανεν εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ κατέπιπτε, καὶ ὅτι τὸ ὕψος τῆς τρίτης ἀναπηδήσεως ἦτο 8 μέτρων. Πόσων μέτρων ἦτο τὸ ἀρχικόν ὕψος, ἐξ οὗ ἀφέθη;

(343 μέτρων)—§§ 163, 166, 169.

11. Ἡγόρασέ τις 12 πήχεις τσόχας πρὸς 2δρ. 25λεπ. τὸν πᾶν πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν;

(28δρ. 20λεπ.)—§§ 187 ἢ 199.

12. Ἐργάτης τις ἔσκαψε 2ὀρ. 3πόδ. εἰς μίαν ἡμέραν· πόσων μῆκος θέλει σκάψει εἰς 23 ἡμέρας;

(57ὀρ. 3πόδ.)—§§ 187 ἢ 199.

13. Ἐμπορὸς τις ἡγόρασε 12 στατ. 3ὀκ. 253δράμ. τυροῦ πρὸς 32 δραχμὰς τὸν στατήρα· πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσε;

(386δραχ. 64λεπ. ὡς ἔγγιστα)—§§ 194 ἢ 247.

14. Ἠγόρασέ τις 3 πήχεις καὶ $\frac{2}{6}$ τοῦ πήχεως τσόχας μὲ 160. 2τάλ. 3δραχ. Πρὸς πόσον ἡγόρασε τὸν πήχυν;

(1τάλ. 4δραχ. 71λεπ. περίπου)—§§ 193 ἢ 247.

15. Πρὸς ἀγορὰν 5 ὀκάδων καὶ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκάδος μετὰξῃς ἐπληρώσαμεν 1360. 3τάλ. 2δραχ. Πρὸς πόσον ἐπληρώσαμεν τὴν ὀκάδα;

(260. 2τάλ. 1δραχ. 55λεπ. ὡς ἔγγιστα)—§§ 197 ἢ 247.

16. Ὅδοιπὸρος τις διέτρεξε 53ὀρ. 4πόδ. 2δακ. εἰς 1ῶρ. καὶ 32λ.π. Πόσον διέτρεξεν εἰς 1ῶρ.;

(15ὀρ. 2πόδ. 8δακ. 7γγραμ. ὡς ἔγγιστα)—§§ 197 ἢ 247.

17. Ἀντὶ 7δραχ. 75λεπ. ἡγοράσαμεν 12 πήχεις καὶ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως ὑφάσματός τινος· πόσους πήχεις ἠθέλομεν ἀγοράσαι ἀντὶ 1δρ.;

(1 πήχυν καὶ $\frac{37}{8}$ τοῦ πήχεως)—§§ 197 ἢ 247.

18. Μὲ 1τάλ. ἡγοράσαμεν 2ὀκ. 373δράμ. τυροῦ· μὲ πόσα τάληρα θέλομεν ἀγοράσαι 53ὀκ.;

(18τάλ. 0δραχ. 37λεπ. περίπου)—§§ 196 ἢ 247.

19. Εἰς 1ῶρ. κινητόν τι ἰσοταχῶς κινούμενον διατρέχει 2ὀρ. 3πόδ. 5δακ. Εἰς πόσας ὥρας θέλει διατρέξει 125ὀρ. 2πόδ. 9δακ. 2γγραμ.;

(48ῶρ. 49λ.π. 40λ.δ. ὡς ἔγγιστα)—§§ 196 ἢ 247.

20. Ἠγόρασέ τις 3 ὀκάδας ζακχάρεως πρὸς 2,65 τὴν ὀκάδα, 5 ὀκάδας κρέατος πρὸς 1,45 καὶ 7 ὀκάδας τυροῦ πρὸς 1,05· πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν;

(22,55 δραχμὰς)—§§ 216, 214.

21. Ἐπληρώσαμεν διὰ 11,25 μέτρα τσόχας 124,20 δραχμὰς· πρὸς πόσον ἐπληρώσαμεν τὸ μέτρον;

(11,04 δραχμὰς)—§ 221, 3ον.

22. Μὲ 9,43 δραχμὰς ἡγοράσαμεν $7 + \frac{2}{3}$ ὀκάδας ἐλαίου· πρὸς πόσον ἡγοράσαμεν τὴν ὀκάδα;

(1,23 δραχμὰς)—§§ 120, 126, 214, 1ον.

23. Εἰς 18 ἡμέρας 27 ἐργάται ἔκτισαν οἰκίαν τινά· εἰς πόσας ἡμέρας 81 ἐργάται ἤθελον κτίσει τὴν αὐτὴν οἰκίαν;

(6 ἡμέρας)—§ 246.

24. Διὰ τὴν ἐνδυμασίαν τριῶν λόχων, συγκειμένου ἐκάστου ἐκ 240 ἀνδρῶν, ἐχρειάσθησαν 3600 πήχεις τσόχας· πόσοι πήχεις ἤθελον χρειασθῇ διὰ 500 ἀνδρας;

(2500 πήχεις)—§ 246.

25. Φρουρά 700 στρατιωτῶν εἶχε τροφὰς διὰ 30 ἡμέρας· ἂν ἡ φρουρὰ συνέκειτο ἐκ 300 στρατιωτῶν, ἐπὶ πόσας ἡμέρας ἤθελον ἐπαρκέσει αἱ ὑπάρχουσαι τροφαί;

(70 ἡμέρας)—§ 246.

26. Ὁρολόγιον καθυστερεῖ 5λ.π. εἰς 4ῶρ. Μετὰ παρέλευσιν πόσου χρόνου θέλει καθυστερήσει 12ῶρ.;

(Μετὰ παρέλευσιν 576 ὥρων)—§ 247.

27. Ὁρολόγιον καθυστερεῖ 5λ.π. εἰς 4ῶρ. καὶ δεικνύει ἀκριβῶς μεσημβρίαν μετὰ παρέλευσιν πόσου χρόνου θέλει πάλιν δεικνύει τὸν ἀληθῆ χρόνον;

(Μετὰ παρέλευσιν 576 ὥρων)—§ 247.

28. Ἠγόρασέ τις $7 + \frac{2}{3}$ πήχεις τσόχας ἀντὶ 75 δραχμῶν· πόσους πήχεις ἤθελον ἀγοράσει μὲ 100 δραχμὰς;

($10 + \frac{2}{3}$ πήχεις)—§§ 120, 246.

29. Ἐπληρώσαμεν 260. 3τάλ. πρὸς ἀγορὰν 2ῶρ. 4ποδ. ὑφάσματος· μὲ πόσα ὀθώνεια ἤθέλομεν ἀγοράσει 7ῶρ. 2πόδ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

(760. 2τάλ. 1δραχ. 25λεπ.)—§ 247.

30. Βιβλίον τι σύγκειται ἐξ 25 τυπογραφικῶν φύλλων καὶ ἐκάστη αὐτοῦ σελὶς περιέχει 32 στίχους· ἂν ἐκάστη αὐτοῦ σελὶς περιεῖχε 40 στίχους, ἐκ πόσων τυπογραφικῶν φύλλων θὰ συνέκειτο τὸ βιβλίον;

(Ἐξ 20 τυπογραφικῶν φύλλων)—§ 246.

31. Εἰς 8 ἡμέρας 50 ἐργάται, 10 ὥρας ἐργαζόμενοι τὴν ἡμέραν, ἔ-

σκαψαν τάφρον 16 μέτρων τὸ μῆκος· 75 ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας, 8 ὥρας ἐργαζόμενοι τὴν ἡμέραν, ἤθελον σκάψει τάφρον 12 μέτρων τὸ μῆκος;

(Εἰς 5 ἡμέρας)—§ 250.

32. Εἰς 28 μῆνας 500 δραχμαὶ ἔφεραν τόκον 80 δραχμάς· μετὰ πόσους μῆνας 700 δραχμαὶ θὰ φέρωσι τόκον 160 δραχμάς;

(Μετὰ 40 μῆνας)—§ 250.

33. Ἐδάνεισέ τις 3000 δραχμάς πρὸς 6⁰/₀. Μετὰ 2 ἔτη καὶ 6 μῆνας πόσον τόκον θέλει λάβει;

(450 δραχμάς)—§ 255, 1ον.

34. Ἐδάνεισέ τις 175,75 δραχμάς πρὸς 5,25⁰/₀. Μετὰ 16 μῆνας πόσον τόκον θέλει λάβει;

(12,30 δραχμάς ὡς ἔγγιστα)—§ 255, 1ον.

35. Ἐτόκισέ τις 5600 δραχμάς καὶ μετὰ 14 μῆνας ἔλαβε τόκον 300 δραχμάς· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτόκισε τὰ χρήματά του;

(Πρὸς 5,14⁰/₀ ὡς ἔγγιστα)—§ 255, 2ον.

36. Μετὰ 26 μῆνας ἔλαβέ τις τόκον 175,25 δραχμάς ἐκ κεφαλαίου 1802,50 δραχμῶν· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτόκισε;

(Πρὸς 4,48⁰/₀ ὡς ἔγγιστα)—§ 255, 2ον.

37. Ἐδάνεισέ τις κεφάλαιόν τι πρὸς 7⁰/₀ καὶ μετὰ τρία ἔτη ἔλαβε τόκον 210 δραχμάς· ἐκ πόσων δραχμῶν συνέκειτο τὸ κεφάλαιον;

(Ἐκ 1000 δραχμῶν)—§ 255, 3ον.

38. Ἐλαβέ τις ἐκ κεφαλαίου 2000 δραχμῶν τοκισθέντος πρὸς 5,50⁰/₀ τόκον 165 δραχμάς· ἐπὶ πόσον χρόνον ἔμεινε τὸ κεφάλαιον εἰς τόκον;

(Ἐπὶ 18 μῆνας)—§ 255, 4ον.

39. Γραμμάτιον 1500 δραχμῶν πληρωτέον μετὰ 9 μῆνας προεξοφλεῖται μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 8⁰/₀· πόσας δραχμάς πρέπει νὰ ἀφῇσωμεν εἰς τὸν προεξοφλητὴν;

(84,90 ὡς ἔγγιστα)—§ 259.

40. Γραμμάτιον 2000 δραχμῶν πληρωτέον μετὰ 18 μῆνας προεξοφλεῖται πρὸς 9⁰/₀· πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ αὐτοῦ ὑφαίρεσις;

(237,88 δραχμαὶ ὡς ἔγγιστα)—§ 259.

41. Ὑπεγράψαμεν γραμμάτων 2150 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ 8 μῆνας, καὶ μετὰ 4 μῆνας ἐπληρώσαμεν ἀπέναντι αὐτοῦ 1500 δραχ-

μάς· πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πληρώσωμεν εἰς τὸ τέλος τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας, τοῦ ἐπιτοκίου λογιζομένου πρὸς 12 $\frac{0}{10}$;

(590 δραχμὰς)—§§ 255, 1ον, 33.

42. Ἐμπορὸς τις ἐχρεώσται εἰς τινα 110000 δραχμὰς, εἰς δεῦτερον 50000 καὶ εἰς τρίτον 40000. Οὗτος ἐκηρύχθη εἰς κατάστασιν πτωχεύσεως καὶ τῷ εὐρέθησαν μόνον 40000 δραχμαί· πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν ἀνωτέρω τριῶν δανειστῶν του;

(22000 ὁ α', 10000 ὁ β', καὶ 8000 ὁ γ')—§ 261, 1ον.

43. Τρεῖς ἐνοφίασαν οἰκίαν τινα ἀντὶ 220 δραχμῶν τὸ ἔτος. Ὁ α' κατώκησεν ἐν αὐτῇ 3 μῆνας καὶ ἔπειτα ἀνεχώρησεν, ὁ δὲ δεῦτερος 7 καὶ ὁ τρίτος μέχρι τέλους τοῦ ἔτους. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πληρῶσῃ ἕκαστος ἀναλόγως τοῦ χρόνου τῆς ἐν τῇ οἰκίᾳ διαμονῆς του;

(Ὁ α' 30 δραχμὰς, ὁ β' 70 καὶ ὁ γ' 120)—§ 261, 1ον.

44. Τρεῖς ἐργάται ἀνέλαβον τὴν κατασκευὴν ἔργου τινὸς εἰς ἓν ἔτος. Ὁ πρῶτος εἰργάσθη μετὰ τῶν δύο ἄλλων μόνον 7 μῆνας, ὁ δὲ δεῦτερος μετὰ τοῦ τρίτου 9 μῆνας. Εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους τὸ ἔργον ἔτελειώσε, καὶ ἔλαβον ὁμοῦ 2800 δραχμὰς. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

(700 ὁ α', 900 ὁ β', καὶ 1200 ὁ γ')—§ 261, 1ον.

45. Δύο ποιμένες ἐνοφίασαν λειβάδιόν τι ἀντὶ 1300 δραχμῶν. Ὁ μὲν εἶχεν 100 πρόβατα, ἅτινα ἐδόσκησεν 3 μῆνας, ὁ δὲ 200, ἅτινα ἐδόσκησεν 5 μῆνας. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πληρῶσῃ ἕκαστος ἐνοίκιον;

(Ὁ πρῶτος 300 καὶ ὁ δεῦτερος 1000)—§ 261, 2ον.

46. Ἐμπορὸς ἔχει τριῶν ποιότητων σταφίδα. Ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος ἔχει 10000 λίτρας ἀξίας 28 ταλήρων ἢ χιλιάς, ἐκ τῆς δευτέρας 7000 ἀξίας 22 ταλήρων ἢ χιλιάς, καὶ ἐκ τῆς τρίτης 50000 ἀξίας 17 ταλήρων. Ἐὰν ἀναμίξῃ τὰς ποσότητας τῶν τριῶν ποιότητων, πόσον πρέπει νὰ τιμῇσῃ τὴν χιλιάδα τοῦ μίγματος;

20τάλ. 2δραχ. 70λεπ. περίπου)—§ 262.



ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΠΙΣΤΡΟΦΗΣ



No 3

No 3

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

50
10

500

ΔΑ Δαμασκηνός, Αντώνιος.

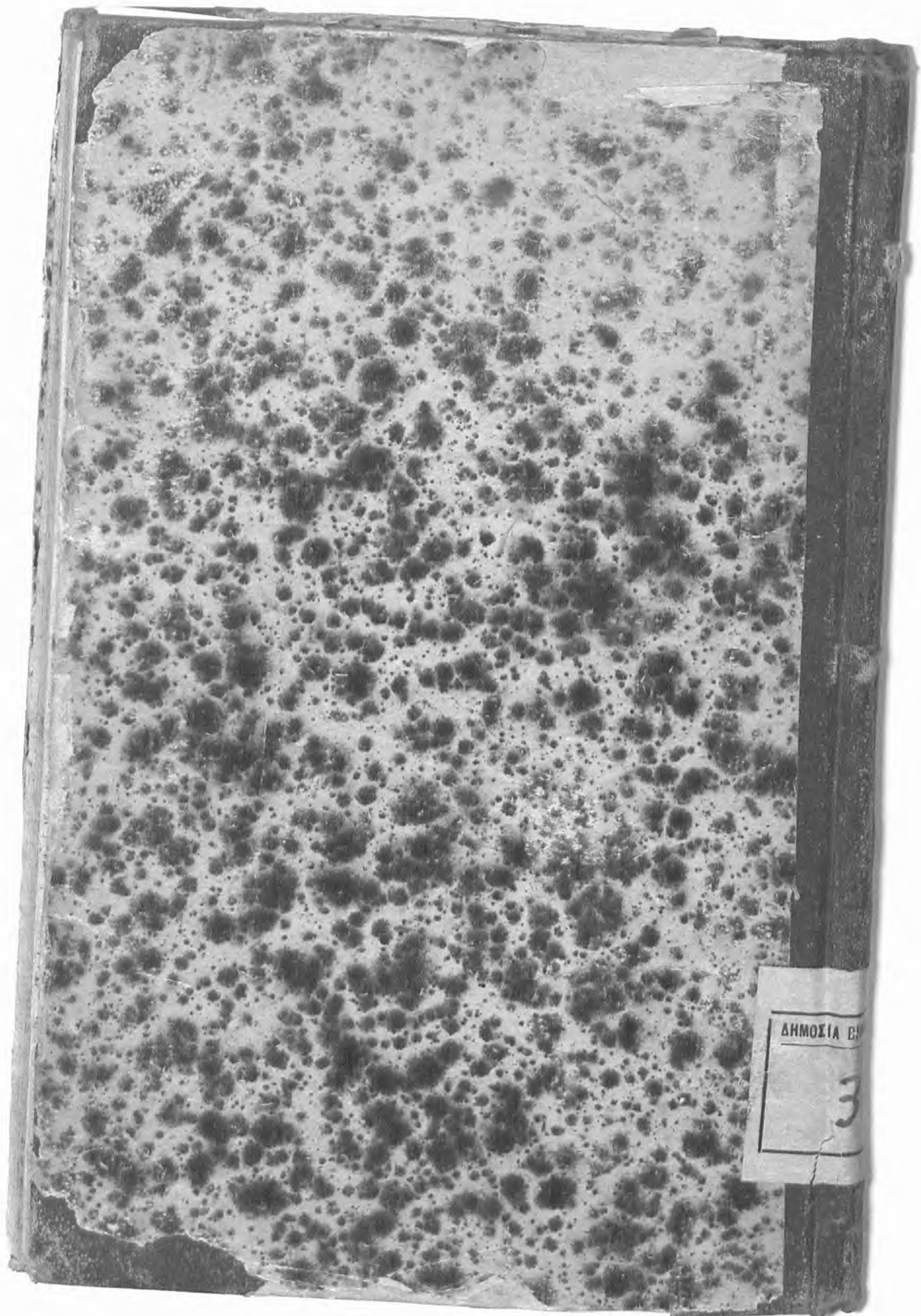
ΣΤΕΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΔΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ἀριθ. 3811
χρ.

Ἡμερομηνία
ἐπιστροφῆς

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟΝ

ΟΣΙΑ ΚΕΝ



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας