

ΒΕΡΟΙΑΣ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

+500 ΒΕΡΟΙΑΣ

Αριθ. 2079

Αριθ. εις 1550

Εξ αγοράς Ζωρεά

2α φάρα 1979

1979

GR YER 00400

Καὶ τοῦ
ἐν τῷ
ἐκ. γ. γαίον
καὶ οὐ
Μαθητὸς τοῦ Ἀδελφοῦ
ἐν Θεσσαλονίκῃ
Ἰω 18 7/8
1881.



ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

κατὰ τὸ πρόγραμμα τοῦ Ἰπουργείου τῆς
Δημοσίας Ἐκπαιδεύσεως

ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΕΚ ΤΟΙΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΙΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΝ

ΣΥΝΤΑΧΘΕΙΣΑ

ΥΠΟ

Β. ΛΑΚΩΝΟΣ,

Τεχνητοῦ καθηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν ἐν τῇ
ἐθνικῇ Πανεπιστημίῳ.

Τί θαί; τότε ἤδη ἐπεσκέψω ὡς οὔτε
φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθη-
ματα ὡς ἔπος εἰπεῖν ὀξεῖς φύονται,
οὔτε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευ-
θῶσι καὶ γυμνάσωνται, καὶ μὴδὲν
ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἰς γὰρ τὸ ὀξύ-
τεροι αὐτοὶ αὐτῶν γίγνεσθαι πάντες
ἐπιδιδόσκει; (ΠΛΑΤ. Πολιτ. Ζ΄.)

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΚΤΗ

διεσκευασμένη.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΤΥΠΟΙΣ ΙΩ. ΚΟΥΒΕΛΟΥ ΚΑΙ Α. ΤΡΙΜΗ

44—Ὁδὸς Πραξιτέλους—44

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βέροιας

1879.

$$16 = 3 \times 5 + 1$$

$$16 \times 5 = 3 \times 6 \times 5 + 6$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 5 \end{array}$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

κατὰ τὸ πρόγραμμα τοῦ Ὑπουργείου τῆς
Δημοσίας Ἐκπαιδεύσεως

ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΕΝ ΤΟΙΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΙΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΝ

ΣΥΝΤΑΧΘΕΙΣΑ

ΥΠΟ

Β. ΛΑΚΩΝΟΣ,

Τακτικοῦ καθηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν ἐν τῷ
ἐθνικῷ Πανεπιστημίῳ.

Τί δαί; τότε ἤδη ἐπισκέψω ὥς οὔτε
φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθή-
ματα ὡς ἔπος εἰπεῖν ὀξεῖς φύονται,
οὔτε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδεύ-
θωσι καὶ γυμνάσωνται, καὶ μὴδὲν
ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἰς γὰρ τὸ ὀξύ-
τεροι αὐτοὶ αὐτῶν γίγνεσθαι πάντες
ἐπιδιδόασιν; (ΠΛΑΤ. Πολιτ. Ζ'.)

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΚΤΗ

διεσκευασμένη.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΤΥΠΟΙΣ ΙΩ. ΚΟΥΒΕΛΟΥ ΚΑΙ Α. ΤΡΙΜΗ

44—Ὁδὸς Πραξιτέλους—44

1879.

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΑΡΧΙΜΗΤΗΚΗ

Τῆς τοιαύτης τῆς τῆς ἀναγραφῆς τῆς τῆς
προσέχουσας τῆς τῆς ἀναγραφῆς

ΤΑΥΤΑΤΑ ΟΥΚ ΕΙΝΑΙ Τῆς τῆς ἀναγραφῆς

ΤΑΥΤΑΤΑ ΟΥΚ ΕΙΝΑΙ Τῆς τῆς ἀναγραφῆς

Πάν ἄρτιυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφήν μου θεωρεῖται
προερχόμενον ἐκ τυποκλοπίας.

ὅτι τὴν ἀναγραφὴν τῆς τῆς ἀναγραφῆς

ἀναγραφῆς τῆς τῆς ἀναγραφῆς

Β. Λάσας

ΤΑΥΤΑΤΑ ΟΥΚ ΕΙΝΑΙ Τῆς τῆς ἀναγραφῆς

ΤΑΥΤΑΤΑ ΟΥΚ ΕΙΝΑΙ Τῆς τῆς ἀναγραφῆς

ΤΑΥΤΑΤΑ ΟΥΚ ΕΙΝΑΙ Τῆς τῆς ἀναγραφῆς

ΤΑΥΤΑΤΑ ΟΥΚ ΕΙΝΑΙ Τῆς τῆς ἀναγραφῆς

ΤΑΥΤΑΤΑ ΟΥΚ ΕΙΝΑΙ Τῆς τῆς ἀναγραφῆς

ΤΑΥΤΑΤΑ ΟΥΚ ΕΙΝΑΙ Τῆς τῆς ἀναγραφῆς

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βέροιας



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΤΗΣ ΕΚΤΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ.

Καὶ ἐν ταύτῃ τῇ ἐκδόσει ἐγένοντο βελτιώσεις τινὲς καὶ μεταβολαί, ὧν κυριώτερα εἶναι ἡ ἄνευ τῆς βοηθείας τῶν ἀναλογιῶν ἢ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ἀπόδειξις τῶν τὴν μέθοδον τῶν τριῶν ἀπλῆν τε καὶ σύνθετον ἀποτελούντων κανόνων, καὶ ἡ ὑπὸ μορφήν ἀπλῆν καὶ εὐμνημόνευτον διατύπωσις τῶν κανόνων τούτων. Οὕτω δὲ οὐ μόνον συντομία ἐπετεύχθη, ἀλλὰ καὶ σαφήνεια μείζων, διότι ἡ ἀπόδειξις στηριζομένη ἀμέσως εἰς τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀναλόγων ποσῶν εἶναι ἀπλουστάτη. Τὸ δὲ περὶ ἀναλογιῶν κεφάλαιον ὡς περιττὸν καταστὰν ἡδύνατο νὰ λείψῃ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς. Ἐτέθη ὅμως καὶ τοῦτο ἐν τῷ τέλει τοῦ βιβλίου ὡς χρήσιμον ἐν τῇ γεωμετρίᾳ. Ἀλλὰ καταλληλότερα θέσις θὰ ἦτο ἐκεῖ, ἔνθα πρόκειται νὰ γείνη χρῆσις αὐτοῦ, καὶ δύναται νὰ ἐκτεθῇ τελειότερον μετὰ τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν καὶ ἀριθμῶν.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 11 Ἰουνίου 1879.

Β. Λάκων.

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ.

Ἀριθμητικὴ τῶν Γυμνασίων.

1. Προκαταρκτικαὶ ἐννοιαὶ, δηλονότι ἐννοιαὶ τοῦ ποσοῦ, τῆς μονάδος, τοῦ ἀριθμοῦ κτλ.
- 2,3. Περὶ ἀριθμήσεως.—Δήλωσις ὅτι εἶναι δυνατὰ διάφορα συστήματα ἀριθμήσεως.
- 4,5,6,7,8,9. Ὅρισμός καὶ ἐκθεσις τῶν τεσσάρων πράξεων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μετὰ τῶν εἰς αὐτὰς ἀναγομένων θεωρημάτων.
- 10,11. Περὶ διαιρετότητος.—Χαρακτῆρες διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ 2 καὶ 3, 4 καὶ 25, 8 καὶ 125, 3 καὶ 9 καὶ 11.
- 12,13. Περὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἢ καὶ πλειοτέρων ἀριθμῶν.
- 14,15. Περὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἢ καὶ πλειοτέρων ἀριθμῶν.
- 16,17,18,19,20. Περὶ πρώτων ἀριθμῶν.—Ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.—Εὗρεσις πάντων τῶν διαιρετῶν δεδομένου ἀριθμοῦ. Εὗρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας.
- 21,22,23,24. Περὶ τῶν κοινῶν κλασμάτων.—Αἱ τέσσαρες πράξεις αὐτῶν.
- 25,26,27. Περὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν.—Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς κλασματικὸν καὶ τάνάπαλιν.—Αἱ τέσσαρες πράξεις αὐτῶν.
- 28,29,30,31,32,33. Περὶ δεκαδικῶν κλασμάτων.—Αἱ τέσσαρες πράξεις αὐτῶν.
- * Πολλαπλασιασμός καὶ διαίρεσις αὐτῶν κατὰ προσέγγισιν.—Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.—Περὶ περιδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.—Τροπὴ οἰουδήποτε δεκαδικοῦ κλάσματος εἰς κοινόν.
34. Περὶ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῶν μέτρων καὶ σταθμῶν.
- 35,36,37,38. Περὶ τετραγωνικῆς καὶ κυβικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν.
- 39,40,41,42,43,44,45,46. Περὶ ἀναλογιῶν καὶ μεθόδων.—Ἀπλὴ καὶ σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.—Μέθοδος τοῦ ἀπλοῦ τῆκος, τῆς ὑφαιρέσεως, τῆς ἐταιρίας, τῆς μίξεως καὶ τῆς ἀλύσεως.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΠΡΩΤΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ. ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ.

Πρώται ἔννοιαι.

1. Πράγματα, τὰ ὅποια κάμνουσιν ἐφ' ἡμῶν τὴν αὐτὴν. ἐντύπωσιν, ἢ ἐντυπώσεις, ὧν τὰς διαφορὰς παραβλέπομεν, γεννῶσιν ἐν ἡμῖν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἐνὸς καὶ τῶν πολλῶν ἢ τοῦ πλήθους.

Πλήθος τι εἶναι ὠρισμένον, ὅταν εἶναι γνωστὸν πόσα εἶναι τὰ πράγματα, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται. Ἡ τὸ πλήθος ὀρίζουσα ἔννοια καλεῖται ἀριθμός. Παραδείγματος χάριν ὅταν λέγωμεν ὅκτῳ ἄνθρωποι, τρεῖς πόλεις, αἱ λέξεις ὅκτῳ καὶ τρεῖς ἐκφράζουσιν ἀριθμούς.

Τὸ ἐν τῶν πραγμάτων, ὧν τὸ πλήθος ὀρίζει ὁ ἀριθμός, καλεῖται μονάς.

Ἀριθμητικὴ καλεῖται ἡ ἐπιστήμη ἡ πραγματευομένη περὶ τῶν ἀριθμῶν.

Ἀρίθμησις.

2. Ἀρίθμησις πλήθους τινὸς εἶναι ἡ εὕρεσις τοῦ ὀρίζοντος αὐτὸ ἀριθμοῦ. Καλεῖται ὅμως ἀρίθμησις καὶ ἡ ἐξήγησις τοῦ τρόπου, καθ' ὃν ἐδόθησαν ὀνόματα εἰς τοὺς διαφόρους ἀριθμούς, περιλαμβάνουσα καὶ τὴν δι' ἰδιαιτέρων σημείων γραφὴν αὐτῶν.

Ὁνοματολογία τῶν ἀριθμῶν.

3. Ἡ μονάς ὡς ἀριθμὸς θεωρουμένη καλεῖται εἰς. Ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς δύο. Ἐὰν εἰς τὸν δύο προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς σχηματίζεται ἀριθμὸς, ὅστις ἐκλήθη τρία. Ἐξακολουθοῦντες δὲ οὕτω νὰ προσθέτωμεν τὴν μονάδα σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς τέσσαρα, πέντε, ἕξι, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα, δέκα· οὕτω δὲ προχωροῦντες δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ὅσους θελήσωμεν ἀριθμούς. Ἀλλ' ἐὰν ἐξεφράζομεν ἕκαστον ἀριθμὸν δι' ἰδίας λέξεως, ὅπως ἐκάμομεν διὰ τοὺς πρώτους δέκα ἀριθμούς, μέχρι τοῦ ἑκατομμυρίου θὰ ἐχρειαζόμεθα ἐν ἑκατομμύριον λέξεις διαφόρους, ὧν καὶ ὁ σχηματισμὸς θὰ ἦτο δυσχερέστατος καὶ ἡ ἀπομνημόνευσις ἀδύνατος. Ὑπάρχει ὅμως τρόπος, καθ' ὃν δι' ὀλίγων διαφόρων λέξεων ὀνομάζεται μέγιστος πληθὸς ἀριθμῶν. Ἡ μέθοδος, δι' ἧς τοῦτο κατορθοῦται, στηρίζεται, ἐπὶ τῶν ἐξῆς δύο ἀρχῶν·

α.) Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ οὐ μόνον ὡς μονάδων ἄθροισμα, ἀλλὰ καὶ ὡς ἄθροισμα διαφόρων ἄλλων ἀριθμῶν, οὓς λαμβάνομεν ἐνοῦντες τινὰς τῶν μονάδων του, ἔπειτα ἄλλας τινὰς, καὶ οὕτω καθέξῃς μέχρι οὗ ληφθῶσι πᾶσαι· εἶναι ἤτις ὁ ἀριθμὸς ἐντελὼς γνωστὸς, ὅταν εἶναι γνωστοὶ οἱ συναποτελοῦντες αὐτὸν ἀριθμοί.

β.) Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς μονάς. Παραδείγματος χάριν τὸν δέκα ἀριθμὸν θεωροῦμεν ὡς μονάδα ἣν καλοῦμεν δεκάδα, τὸν δώδεκα δωδεκάδα, τὸν ἑκατὸν ἑκατοττάδα, καὶ οὕτω καθέξῃς.

Τούτων τεθέντων, ἀφοῦ ἐν τῇ ὀνοματολογίᾳ τῶν ἀριθμῶν φθάσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν δέκα θεωροῦμεν αὐτὸν ὡς μονάδα, ἣν καλοῦμεν δεκάδα, ἔπειτα τὸν ἐκ δέκα δεκάδων συγκείμενον ἀριθμὸν θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα, ἣν καλοῦμεν ἑκατοττάδα. Οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦντες νὰ σχηματίζομεν ἐκ δέκα μονάδων μίαν νέαν μονάδα, ἔχομεν τὰς ἐξῆς μονάδας.

μονάς (ἀπλῇ)
 δεκάς
 ἑκατοντάς
 χιλιάς
 δεκάς χιλιάδος
 ἑκατοντάς χιλιάδος
 μονάς ἑκατομμυρίου
 δεκάς ἑκατομμυρίου
 ἑκατοντάς ἑκατομμυρίου
 μονάς δισεκατομμυρίου
 δεκάς δισεκατομμυρίου
 ἑκατοντάς δισεκατομμυρίου
 μονάς τρισεκατομμυρίου
 κ. τ. λ.

Ἡ ἀπλῇ μονάς καλεῖται καὶ μονάς πρώτης τάξεως, ἡ δεκάς καλεῖται μονάς δευτέρας τάξεως, ἡ ἑκατοντάς τρίτης, ἡ χιλιάς τετάρτης, καὶ οὕτω καθεξῆς.

4. Μετὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν μονάδων διαφόρων τάξεων δεικνύομεν ὅτι πάντα ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς συγκείμενον ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων, ἐξ ἑκάστης δὲ τούτων νὰ μὴ ὑπάρχωσι περισσότεραι τῶν ἐνεία.

Διότι ἐνοῦντες δέκα μονάδας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ σχηματίζομεν μίαν δεκάδα, ἔπειτα ἄλλας δέκα μονάδας μίαν νέαν δεκάδα, καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις οὗ ὑπολειφθῶσι μονάδες ὀλιγώτεραι τῶν δέκα.

Ποιοῦντες ἔπειτα ἐπὶ τῶν δεκάδων ὅ,τι καὶ ἐπὶ τῶν ἀπλῶν μονάδων, δηλονότι ἐνοῦντες αὐτάς ἀνὰ δέκα, θέλομεν σχηματίσει ἑκατοντάδας τινάς, αἱ δὲ δυνάμεναι νὰ ὑπολειφθῶσι δεκάδες θὰ εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν δέκα. Ἐπειτα πράττομεν ἐπὶ τῶν ἑκατοντάδων τὸ αὐτὸ, ἔπειτα ἐπὶ τῶν χιλιάδων, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς μονάδας τάξεως τινος ὀλιγωτέρας τῶν δέκα. Τοῦτο δὲ ἀναγκαιῶς θέλει

μυθῇ, διότι ἐκάστης τάξεως αἱ μονάδες εἶναι ὀλιγώτεραι ὢν τῆς προηγουμένης.

Τὸν ἀριθμὸν οὕτω συγκείμενον ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων ἐκφράζομεν δηλοῦντες πόσας μονάδας ἐκάστης τάξεως περιέχει.

Παραδείγματος χάριν ἐντελῶς ὠρισμένος εἶναι ὁ ἀριθμὸς συγκείμενος ἐκ τέττερις χιλιάδων, ἐπτὰ ἑκατοντάδων, ὀκτὼ δεκάδων, καὶ ἑξ μονάδων.

Βλέπομεν δὲ ὅτι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν πάντας τοὺς μέχρι τοῦ ἑκατομμυρίου ἀριθμοὺς μόνον διὰ δεκαπέντε λέξεων ἥτοι τῶν ὀνομάτων τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν καὶ τῶν λέξεων, μονάς, δεκάς, ἑκατοντάς, χιλιάς, δεκάς χιλιάδος, ἑκατοντάς χιλιάδος.

Β. Ἐν τοῖς ἀνωτέρω ἐξεθέσαμεν τὴν θεμελιώδη τῆς ἀριθμῆσεως ἀρχὴν· ὑπολείπονται ὅμως καὶ λεπτομέρειαι τινες πρὸς συμπλήρωσιν τῶν περὶ ὀνοματολογίας τῶν ἀριθμῶν. Οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ τῶν δεκάδων ἀπὸ δύο μέχρις ἐννέα δεκάδων ἐκφράζονται διὰ τῶν λέξεων· εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πενήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐννεήκοντα.

Ἰνα δὲ ἐκφράσωμεν τοὺς μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἑκατὸν ἀριθμοὺς, ἀπαγγέλλομεν κατὰ πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων, καὶ ἔπειτα τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀπλῶν μονάδων, αἱ περιέχουσιν· οἷον ὁ ἀριθμὸς ὁ περιέχων ἐπτὰ δεκάδας καὶ τρεῖς μονάδας ἀπαγγέλλεται ἑβδομήκοντα τρία. Ὡσαύτως δὲ ὁ περιέχων τέσσαρας δεκάδας καὶ ἐννέα μονάδας ἀπαγγέλλεται τεσσαράκοντα ἐννέα.

Μικρά τις ἀνωμαλία ὑπάρχει διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς συγκειμένους ἐκ μιᾶς δεκάδος καὶ μιᾶς ἢ δύο μονάδων, αἵτινες ἀντὶ δέκα ἐν, δέκα δύο, ἀπαγγέλλονται ἐνδεκα, δώδεκα.

Οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ τῶν ἑκατοντάδων ἀπὸ δύο μέχρις ἐννέα ἑκατοντάδων ἐκφράζονται διὰ τῶν λέξεων·

ΠΕΡΙ ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ.

διακόσια, τριακόσια, τετρακόσια. πεντακόσια, ἑξακόσια, ἑπτακόσια, ὀκτακόσια, ἑννακόσια.

Ἴνα δὲ ἐκφράσωμεν τοὺς μεταξὺ τοῦ ἑκατὸν καὶ τοῦ χίλια περιεχομένους ἀριθμοὺς ἀπαγγέλλομεν κατὰ πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοντάδων ἃς περιέχουσιν, ἔπειτα δὲ τὸν μικρότερον τοῦ ἑκατὸν ἀριθμὸν τὸν συμπληροῦντα αὐτούς· οἷον ἀριθμὸς ὁ συγκεῖμενος ἐκ τριῶν ἑκατοντάδων, ἑπτὰ δεκάδων καὶ ἕξ μονάδων, ἀπαγγέλλεται τριακόσια ἑβδομήκοντα ἕξ.

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ περιεχόμενοι μεταξὺ τοῦ χίλια καὶ τοῦ ἐνὸς ἑκατομμυρίου δύνανται νὰ περιέχωσιν ἑκατοντάδας χιλιάδος δεκάδας χιλιάδος, μονάδας χιλιάδος, ἔτι δὲ ἑκατοντάδας δεκάδας καὶ μονάδας. Ἐκφράζομεν δὲ αὐτοὺς ἀπαγγέλοντες πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν χιλιάδων, ἃς περιέχουσιν, ἔπειτα δὲ τὸν μικρότερον τοῦ χίλια ἀριθμὸν τὸν συμπληροῦντα αὐτούς. Οἷον ὁ ἀριθμὸς ὁ περιέχων ἑπτὰ ἑκατοντάδας χιλιάδος, τρεῖς δεκάδας χιλιάδος, πέντε μονάδας χιλιάδος, ὀκτὼ ἑκατοντάδας, δύο δεκάδας, ἕξ μονάδας, ἀπαγγέλλεται ἑπτακόσια τριάκοντα πέντε χιλιάδες, καὶ ὀκτακόσια εἴκοσι ἕξ. Ὁμοίως ἐκφράζομεν τοὺς μεταξὺ τοῦ ἐνὸς ἑκατομμυρίου καὶ τοῦ ἐνὸς δισεκατομμυρίου ἀριθμοὺς, ἀπαγγέλλοντες πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατομμυρίων, ἃ περιέχουσιν, ἔπειτα τὸν ἀριθμὸν τὸν μικρότερον τοῦ ἐνὸς ἑκατομμυρίου τὸν συμπληροῦντα αὐτούς· οἷον ὁ ἀριθμὸς ὁ περιέχων τέσσαρας ἑκατοντάδας ἑκατομμυρίου, τρεῖς δεκάδας ἑκατομμυρίου, ἑπτὰ μονάδας ἑκατομμυρίου, ἔτι δὲ ὀκτακοσίας πενήκοντα ἕξ χιλιάδας καὶ τριακοσίας εἴκοσι ὀκτὼ μονάδας, ἀπαγγέλλεται, τετρακόσιαι τριάκοντα ἑπτὰ ἑκατομμύρια, ὀκτακόσιαι πενήκοντα ἕξ χιλιάδες καὶ τριακόσια εἴκοσι ὀκτὼ.

Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι ἐξακολουθοῦντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς περιεχομένους μεταξὺ τοῦ ἐνὸς δισεκατομμυρίου καὶ τοῦ ἐνὸς τρισεκατομμυρίου, τοῦ ἐνὸς τρισεκατομμυρίου καὶ τοῦ ἐνὸς τετρακισεκατομμυρίου, καὶ.

ΠΕΡΙ ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον τοῦ ἐκφράζειν τοὺς ἀριθμοὺς
 θεωροῦμεν αὐτοὺς συγκειμένους ἐκ μερῶν ἀποτελουμένων ἐκ
 μονάδων τῆς πρώτης, τῆς τετάρτης, τῆς ἐβδόμης, τῆς δεκάτης
 κτλ. τάξεως. Αἱ μονάδες αὗται, ἧτοι οἱ ἀριθμοὶ *ἕν, χίλια,*
κατομμύριον, δισεκατομμύριον κτλ. καλοῦνται κύριαι
 μονάδες· χίλια δι' ἐκάστης τούτων ἀποτελοῦσι τὴν ἀμέ-
 νως ἐπομένην.

Γραφή τῶν ἀριθμῶν.

6. Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἐν ἐδαφίῳ 4 θεμελιώδη ἀρχὴν
 θυνάμεθα νὰ γράψωμεν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς διὰ δέκα μό-
 νον σημείων. Τὰ σημεία ταῦτα καλοῦνται *ψηφία* ἢ *ἀραβικοὶ*
ἀρακτῆρες· καὶ τὰ μὲν ἐννέα ἐξ αὐτῶν χρησιμεύουσιν εἰς
 παράστασιν τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν, καὶ εἶναι τὰ ἐξῆς·

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἐπτά, ὀκτώ, ἐννέα,
 τὸ δὲ δέκατον ψηφίον εἶναι τὸ 0, τὸ ὅποion καλεῖται *μηδὲν*
 ἢ *μηδενικόν* καὶ χρησιμεύει εἰς τὸ δεικνύειν τὴν ἔλλειψιν
 μονάδων. Κατ' ἀντίθεσιν δὲ πρὸς τοῦτο τὰ ἐννέα πρώτα
 ψηφία καλοῦνται *σημαντικά*.

7. Ἵνα γράψωμεν διὰ ψηφίων ἀριθμὸν μείζονα τοῦ 9,
 πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν αὐτὸν ἀναλελυμένον εἰς μονάδας δια-
 φόρων τάξεων. Τότε δὲ γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸ ψηφίον
 τὸ παριστῶν τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως· πρὸς τὰ
 δεξιὰ αὐτοῦ γράφομεν ἔπειτα τὸ ψηφίον τὸ παριστῶν τὰς μο-
 νάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς
 περιέχῃ τοιαύτας· ὅταν δὲ τοῦτο δὲν ὑπάρχῃ, γράφομεν ἐν
μηδενικόν· ἐξακολουθοῦμεν δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μέ-
 χρις οὗ γράψωμεν καὶ τὸ ψηφίον τὸ παριστῶν τὰς ἀπλᾶς
 μονάδας. Βλέπομεν δὲν ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη τῆς γραφῆς τῶν
 ἀριθμῶν συνίσταται εἰς τὸ νὰ γράψωμεν ἐφεξῆς ἀπὸ τῶν
 ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τὰ ψηφία τὰ παριστῶντα τὰς ἐν
 τῷ ἀριθμῷ περιεχομένας διαφόρων τάξεων μονάδας, ἀρχά-

μενοι ἀπὸ τοῦ τῆς ἀνωτάτης, καὶ φροντίζοντες νὰ γράφω-
μεν ἐν μηδενικόν, ὅσakis μονάδες τάξεώς τινος ἐλλείπωσι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. α.) Ὁ ἀριθμὸς ὁ συγκείμενος ἐκ
τεσσάρων ἑκατοσιῶν, πέντε δεκάδων, ἑπτὰ μονάδων
γράφεται 475

β.) Ὁ ἀριθμὸς ὁ συγκείμενος ἐξ
ἑπτὰ δεκάδων χιλιάδος, πέντε ἑκατοσιῶν, τριῶν μονάδων,
γράφεται 70503

γ.) Ὁ ἀριθμὸς ὁ συγκείμενος ἐξ
ἑπτὰ δεκάδων ἑκατομμυρίων
γράφεται 70000000

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται ὅτι ἡ διὰ τῶν ψηφίων
γραφὴ τῶν ἀριθμῶν στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ ἑδαφίου
4 καὶ τῆς ἐξῆς συνθήκης·

*Pār ψηφίον γεγραμμένον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου πα-
ριστᾷ μονάδας τάξεως ἀμέσως ἀνωτέρας τῶν τοῦ ἄλλου
τούτου ψηφίου.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων γράφονται
4, 40, 400, 4000, 40000, κτλ.

Εὐκάλως νοεῖται πόσον ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις ὑπερτερεῖ τῆς
προφορικῆς· διότι διὰ δέκα μόνον ψηφίων δυνάμεθα νὰ γρά-
ψωμεν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς, ἐν ᾧ κατὰ τὴν προφορικὴν
ἀρίθμησιν μόνον μέχρις ὀρίου τινὸς δυνάμεθα νὰ ἐκφράσω-
μεν τοὺς ἀριθμοὺς διὰ πεπερασμένου ἀριθμοῦ λέξεων.

8. Ἡ ἀρχὴ τοῦ ἑδαφίου 4 μετὰ τῆς συνθήκης τοῦ ἑδα-
φίου 7 ἀποτελοῦσι τὸ καλούμενον σύστημα ἀριθμῆσεως. Ὁ
ἀριθμὸς δέκα, ὅστις δεικνύει πόσαι μονάδες τάξεώς τινος ἀπο-
τελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, καλεῖται βᾶσις τοῦ συ-
στήματος, τὸ ὁποῖον διὰ τοῦτο καλεῖται δεκαδικὸν σύστημα.

**Κανόνες πρὸς ἀνάγνωσιν ἀριθμοῦ γεγραμ-
μένου διὰ ψηφίων.**

9. **ΚΑΝΩΝ ΠΡΩΤΟΣ.** *Ἦνα ἀπαγγέλλωμεν ἀριθμὸν ἐ-*

χορτα ὄχι περισσότερα τῶν τριῶν ψηφίων, ἀπαγγέλλομεν ἑφεξῆς ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον αὐτοῦ, ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν, προσαρτῶντες καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ἕκαστον παριστᾷ.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ἀπαγγέλλομεν τὸν ἀριθμὸν 547 λέγοντες,

πέντε ἑκατοντάδες, τέσσαρες δεκάδες, ἑπτὰ μονάδες
ἢ ἀπλούστερον κατὰ τὰ ἐν τῷ ἑδαφίῳ ὃ εἰρημένα,
πεντακόσια τεσσαράκοντα ἑπτὰ.

10. ΚΑΝΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΣ. Ἴνα ἀπαγγέλλωμεν ἀριθμὸν ἔχορτα ὑπὲρ τὰ τρία ψηφία, ἀναλύομεν αὐτὸν ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν εἰς τμήματα τριψήφια, ὧν τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ δύναται νὰ ἔχη καὶ ἔν ἢ δύο ψηφία· ἔπειτα ἀπαγγέλλομεν διαδοχικῶς ἕκαστον τμήμα, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ πρώτου πρὸς ἀριστερὰν, ὡς ἔὰν ἦτο μεμονωμένον, προσαρτῶντες καὶ τὸ ὄνομα τῆς μονάδος τοῦ τελευταίου ἐκάστου τῶν τμημάτων ψηφίου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὁ ἀριθμὸς 437045608 ἀπαγγέλλεται τετρακόσια τριάκοντα ἑπτὰ ἑκατομύρια, τεσσαράκοντα πέντε χιλιάδες, ἑξακόσια ὀκτώ.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον τῆς εἰς τριψήφια τμήματα διαιρέσεως τοῦ ἀπαγγελτέου ἀριθμοῦ ἕκαστον τμήμα ἐκφράζει κυρίας μονάδας τάξεώς τινος, ἥτοι τὸ μὲν πρῶτον ἐκ δεξιῶν ἀπλᾶς μονάδας, τὸ δεύτερον χιλιάδας, τὸ τρίτον ἑκατομύρια κτλ.

Κανὼν πρὸς γραφὴν διὰ ψηφίων ἀπαγγελλομένου ἀριθμοῦ.

41. Ἴνα γράψωμεν διὰ ψηφίων ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον κατὰ τὸν δεύτερον τῶν ἀνωτέρω κανόνων, γράφομεν ἑφεξῆς τοὺς ἀριθμοὺς ἐκάστης τῶν κυρίων μονάδων προχωρουντες ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ, προσέχοντες ὅμως, ἔὰν μὲν ἐλλείπωσι κύριαι μονάδες τάξεώς τινος, τὰ πλη-

ρῶμεν τὴν θέσιν αὐτῶν διὰ τριῶν μηδενικῶν, εἰς δὲ ὁ ἀριθμὸς κυρίας τινὸς μονάδος ἔχη ἐν ἡ δύο ψηφία, τὰ προτάσσωμεν αὐτοῦ δύο ἢ ἐν μηδενικόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. α.) Ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ἀπαγγέλλεται πεντακόσια ἑξῆς εκατομμύρια, τριάκοτα δύο, γράφεται 506000032,

ἥτοι γράφονται τρία μηδενικά εἰς τὴν θέσιν τῶν ἐλλειπουσῶν χιλιάδων, καὶ προτάσσεται 0 τοῦ ἀριθμοῦ 32 τῶν μονάδων, ἵνα καὶ τὸ τμήμα τοῦτο ἔχη τρία ψηφία.

β.) Ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ἀπαγγέλλεται, τριάκοτα δύο τρισεκατομμύρια, πενήκοτα ὀκτὼ εκατομμύρια, ἑπτὰ μονάδες, γράφεται 32000058000007.

42. Ἐὰν λάβωμεν ἀριθμὸν τινα γεγραμμένον διὰ ψηφίων, οἷον τὸν 54387, ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον 7 παριστᾷ οὐχὶ ἀπλᾶς μονάδας, ἀλλὰ μονάδας ἀνωτέρας τάξεως, π. γ. εκατοντάδας, κατὰ τὴν ἐν τῷ ἐδαφίῳ 7 συνθήκην, τὸ ψηφίον 8 θὰ παριστᾷ δεκάδας εκατοντάδων, τὸ 3 εκατοντάδας εκατοντάδων, τὸ 4 χιλιάδας εκατοντάδων, τὸ 5 δεκάδας χιλιάδας εκατοντάδων, ὥστε ὁ ὅλος ἀριθμὸς δύνανται νὰ ἀπαγγελθῇ, πενήκοτα τέσσαρες χιλιάδες καὶ τριακόσιαι ὀγδοήκοτα ἑπτὰ, **EKATONTAΔΕΣ.**

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν τὸν ἐξῆς κανόνα·

Ἢνα ἀπαγγελλόμεν ἀριθμὸν γεγραμμένον διὰ ψηφίων, ὦν τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ παριστᾷ οὐχὶ ἀπλᾶς μονάδας, ἀλλ' ἄλλης τινὸς τάξεως, ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν ὡς εἰς παρίστα ἀπλᾶς μονάδας, προσαρτῶντες ἐν τέλει καὶ τὸ ὄνομα τῆς μονάδος τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ὁ ἀριθμὸς 43857, οὗ τὸ τελευταῖον ψηφίον 7 ὑποτίθεται παριστῶν χιλιάδας, θέλει ἀπαγγελθῇ, τεσσαράκοτα τρεῖς χιλιάδες καὶ ὀκτακόσιαι πενήκοτα ἑπτὰ **XIIIAΔΕΣ.**

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν προσέτι ὅτι, ὁ ὀλικὸς ἀριθμὸς τῶν μονάδων τάξεώς τινος, τῶν περιεχομένων ἐν δοθέντι ἀριθμῷ, εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ προκύπτων ἐκ τῆς παραλείψεως τῶν μετὰ τὸ ψηφίον τῆς τάξεως ταύτης γεγραμμένων ψηφίων.

Οἷον ἐν τῷ ἀριθμῷ 4753962 περιέχονται 475396 δεκάδες, 47539 ἑκατοντάδες, 4753 χιλιάδες, 475 δεκάδες χιλιάδος κτλ.

Περὶ διαφορῶν συστημάτων ἀριθμῆσεως.

13. Εἶδομεν ὅτι τὸ ἐκτεθὲν σύστημα ἀριθμῆσεως συνίσταται κυρίως εἰς τοῦτο, ὅτι ἀφοῦ φθάσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν δέκα, θεωροῦμεν αὐτὸν ὡς μονάδα δευτέρας τάξεως, ἔπειτα λαμβάνομεν δέκα πάλιν ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ σχηματίζομεν νέαν μονάδα, τὴν τῆς τρίτης τάξεως, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἀφοῦ δὲ δεῖξωμεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μέρη, ἑκαστον τῶν ὁποίων νὰ περιέχῃ μονάδας τάξεώς τινος μὴ περισσότερας τῶν ἐννέα, εἶναι φανερόν ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν πάντα ἀριθμὸν, δεικνύοντες πόσας μονάδας ἐκάστης τάξεως ὁ ἀριθμὸς οὗτος περιέχει. Διὰ τὴν γραφὴν δὲ παραδεχόμεθα ἐννέα σημεῖα πρὸς παράστασιν τῶν ἐννέα πρώτων ἐφεξῆς ἀριθμῶν καὶ κάμνομεν τὴν συνθήκην ὅτι τὸ αὐτὸ ψηφίον δύναται νὰ παριστᾷ μονάδας διαφορῶν τάξεων κατὰ τὴν θέσιν αὐτοῦ, πρώτης μὲν τάξεως, ὅταν κατέχῃ τὴν πρώτην πρὸς τὰ δεξιὰ θέσιν, δευτέρας δὲ, ὅταν τὴν δευτέραν καὶ οὕτω καθεξῆς. Τότε δὲ εἶναι φανερόν ὅτι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν πάντα ἀριθμὸν, γράφοντες κατὰ πρῶτον τὸ ψηφίον τῶν τῆς ἀνωτάτης τάξεως μονάδων, πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τῶν τῆς ἀμέσως κατωτέρας, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων· ἐπειδὴ ὅμως μονάδες τάξεώς τινος εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ ὑπάρχωσιν ἐν τινι ἀριθμῷ, διὰ τοῦτο χρειάζεται καὶ ἑκατον σημεῖον τὸ 0, τὸ ὁποῖον γράφεται εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑλλειπουσῶν μονάδων.

Ἄλλ' εἶναι φανερόν ὅτι δυνάμεθα νὰ πράξωμεν καὶ μετ' ἄλλου ἀριθμοῦ μικροτέρου ἢ μεγαλειτέρου τοῦ δέκα, ὅ,τι ἐπράξαμεν καὶ μετ' αὐτοῦ.

Δυνάμεθα, παραδείγματος χάριν, ἀφοῦ φθάσωμεν μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ ἕξ, νὰ θεωρήσωμεν αὐτὸν ὡς νέαν μονάδα, καὶ νὰ σχηματίσωμεν μονάδας διαφόρων τάξεων, ἐκάστη τῶν ὁποίων νὰ περιέχῃ ἑξάκις τὴν προηγουμένην. Δυνάμεθα δὲ νὰ δεῖξωμεν ὅπως καὶ ἐν τῷ ἑδαφίῳ 4, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ περιέχῃ μονάδας τάξεώς τινος ὀλιγωτέρας τῶν ἑξ. Τότε δὲ ἵνα ἐκφράσωμεν ἀριθμὸν τινα ἀρκεῖ νὰ δεῖξωμεν πόσας μονάδας ἐκάστης τάξεως περιέχει.

Διὰ δὲ τὴν γραφὴν παραδεχόμεθα τὴν αὐτὴν καὶ ἐν τῷ δεκαδικῷ συστήματι συνθήκην, ὅτι δηλαδὴ τὸ αὐτὸ ψηφίον ἐκφράζει μονάδας διαφόρων τάξεων, κατὰ τὴν ὑπ' αὐτοῦ κατεχομένην θέσιν. Τότε δὲ εἶναι φανερόν ὅτι διὰ τῶν ψηφίων 1, 2, 3, 4, 5, 0, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν πάντα ἀριθμόν.

Ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ὁ ἕξ θέλει γράφεσθαι 10, ὁ ἑξάκις ἕξ 100 ὁ ἑξαπλάσιος τούτου 1000, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Εὐκόλως εὐρίσκεται ὅτι ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ὁ διὰ τοῦ 432 παρισώμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἐν τῷ δεκαδικῷ διὰ τοῦ 164.

Εἶναι λοιπὸν δυνατόν νὰ ὑπάρξωσιν ἅπειρα συστήματα ἀριθμήσεως διακρινόμενα ἀπ' ἀλλήλων ἐκ τῆς βάσεως, ἥτοι τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει πόσαι μονάδες τάξεώς τινος ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας.

Ἐν παντὶ δὲ συστήματι ἀριθμήσεως πάντες οἱ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ γραφῶσι διὰ τῶν ψηφίων, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τῆς βάσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

Α'. Πρόσθεσις.

14. Ἡ πρόσθεσις εἶναι πράξις, δι' ἣς εὐρίσκεται ἀριθμὸς περιέχων πάσας τὰς μονάδας δύο ἢ περισσοτέρων δοθέντων ἀριθμῶν καὶ μόνως ταύτας.

Οἱ δοθέντες εἰς πρόσθεσιν ἀριθμοὶ καλοῦνται προσθετέοι, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως καλεῖται ἄθροισμα ἢ κεφάλαιον.

Τὸ ἄθροισμα ἀριθμῶν σημειοῦται γραφομένων τῶν ἀριθμῶν ἐφεξῆς καὶ μεταξὺ ἐκάστου αὐτῶν καὶ τοῦ ἐπομένου τοῦ σημείου +, τὸ ὅποῖον ἀναγινώσκεται σύν· οἷον $5+4+7$ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 4 καὶ 7, καὶ ἀναγινώσκεται πέντε σύν τέσσαρα σύν ἑπτά.

15. Τὸ ἄθροισμα δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς ἐντελὼς ὠρισμένος, διότι εἶναι δεδομέναι πᾶσαι αἱ μονάδες, αἵτινες ὅα ἀποτελέσωσι αὐτόν. Ἐκ τούτου καὶ τῆς ἐν ἑδαφίῳ 3 πρώτης ἀρχῆς ἔπονται αἱ ἐξῆς προτάσεις.

α'. Τὸ ἄθροισμα ἀριθμῶν μένει τὸ αὐτὸ ἂν τις τῶν προσθετέων ἀντικατασταθῇ ὑπ' ἀριθμῶν, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τὸν προσθετέον τοῦτον. (ἀπόδειξις) σελ. 25-K-α-

Παραδείγματος χάριν τὸ ἄθροισμα τοῦ 5 καὶ τοῦ 12 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ 5 καὶ τῶν ἀριθμῶν 6, 4, 2, ὧν ἄθροισμα εἶναι ὁ 12.

Ε'. Τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν μένει τὸ αὐτὸ, εἰάν τις τῶν προσθετέων ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν τὸ ἄθροισμα $5+7+4+9$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροισμα $5+16+4$, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἀντικαθιστῶντες τοὺς ἀριθμοὺς 7 καὶ 9 διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 16.

Πρόσθεσις κατὰ τὰς ἀπλουστάτας περιπτώσεις.

16. Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν προσθέτομεν εἰς τὸν ἕνα αὐτῶν ἐκάστην τῶν μονάδων τοῦ δευτέρου, τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην. Παραδείγματος χάριν διὰ νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 7 καὶ ὃ λέγομεν 7 καὶ 1 κάμνει 8, καὶ 1 . . 9 καὶ 1 . . 10 καὶ 1 . . 11, καὶ 1 . . 12.

Ἐάν δὲ κάμωμεν τὴν πρόσθεσιν ἄλλως, προσθέτόντες εἰς τὸν ὃ ἐκάστην τῶν μονάδων τοῦ 7, τὸ αὐτὸ ἄθροισμα 12 θὰ εὐρωμεν, διότι κατ' ἀμφοτέρους τοὺς τρόπους τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ συγκεείμενος ἐκ πάντων τῶν μονάδων τοῦ 7 καὶ τοῦ 5.

Οὕτως εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, καὶ τὰ ἐξαγόμενα ἀποστηθίζομεν. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν καὶ τὸ ἄθροισμα ἀριθμοῦ πολυψηφίου καὶ ἀριθμοῦ μονοψηφίου. Παραδείγματος χάριν διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ ἄθροισμα τοῦ 48 καὶ τοῦ 4 λέγομεν 48 καὶ 1 . . 49, καὶ 1 . . 50, καὶ 1 . . 51, καὶ 1 . . 52.

17. Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς μονοψηφίους ἀριθμοὺς προσθέτομεν τοὺς δύο πρῶτους, ἔπειτα τὸ ἄθροισμα τούτων καὶ τὸν τρίτον, ἔπειτα τὸ νέον ἄθροισμα καὶ τὸν τέταρτον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν διὰ νὰ προσθέσωμεν τοὺς μονοψηφίους ἀριθμοὺς 7, 5, 6, 8, 3, 9, λέγομεν 7 καὶ ὃ κάμνουν 12, καὶ 6 . . 18, καὶ 8 . . 26, καὶ 3 . . 29, καὶ 9 . . 38.

Οὕτω πράττοντες εὐρίσκομεν ἀριθμὸν περιέχοντα πάσας

τὰς μονάδας τῶν δεδομένων ἀριθμῶν καὶ μόνας ταύτας.
Ἐκ τούτου δὲ γίνεται καταφανὴς καὶ ἡ ἐξῆς πρότασις.

Τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν μένει τὸ αὐτὸ καθ' οἷαν
δῆποτε τάξιν καὶ ἂν προστεθῶσι.

**Πρόσθεσις ὁσωνδήποτε καὶ οἰωνδήποτε
ἀριθμῶν.**

18. Ἵνα προσθέσωμεν πολυψηφίους ἀριθμοὺς ἀρκεῖ νὰ
προσθέσωμεν τὰς ἀπλᾶς αὐτῶν μονάδας, ἔπειτα τὰς δεκά-
δας, ἔπειτα τὰς ἑκατοντάδας κ.τ.λ., καὶ νὰ ἐνώσωμεν τὰ
μερικὰ ταῦτα ἀθροίσματα.

Ἡ ὀρθότης τοῦ κανόνος τούτου στηρίζεται ἐκ τῶν ἐν ἐδα-
φίῳ 15 δύο προτάσεων.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ
προστεθῶσιν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ

8427, 956, 3048.

Πρὸς εὐκολίαν ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἐξῆς·

8427

956

3048

12431

Γράφομεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ὑπ' ἀλλήλους οὕτως, ὥ-
στε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ
κατακορύφῳ στήλῃ· ἄγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν τελευταῖον,
ὑπὸ ταύτην δὲ τὰ ψηφία τοῦ ἀθροίσματος, καθόσον εὐρίσκο-
μεν αὐτά.

Καὶ πρῶτον μὲν ἀρχόμεθα ἀπὸ τῆς προσθέσεως τῶν ἀ-
πλῶν μονάδων, καὶ λέγομεν· 8 καὶ 6 . . 14 καὶ 7 . . 21.
Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπλῶν μονάδων εἶναι 21· ἐπειδὴ δὲ ὁ
ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἀπὸ 2 δεκάδας καὶ μίαν μονάδα,
γράφομεν μόνον τὸ ψηφίον 1 εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων καὶ
κρατοῦμεν τὰς 2 δεκάδας, ἵνα ἐνώσωμεν αὐτὰς μετὰ τῶν

δεκάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων καὶ λέγομεν· 2 αἱ κρατούμεναι καὶ 4 κάμνουν 6, καὶ 5 . . 11, καὶ 2 . . 13· ἐπειδὴ δὲ 13 δεκάδες ἀποτελοῦσι 1 ἑκατοντάδα καὶ 3 δεκάδας, γράφομεν μόνον τὸ ψηφίον 3 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων, καὶ κρατοῦμεν τὴν 1 ἑκατοντάδα ἵνα προσθήσεωμεν αὐτὴν εἰς τὰς ἑκατοντάδας τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων καὶ λέγομεν· 4 ἡ κρατούμενη ἑκατοντάς καὶ 9 . . 10 καὶ 4 14. Ἐπειδὴ δὲ 14 ἑκατοντάδες ἀποτελοῦσι 1 χιλιάδα καὶ 4 ἑκατοντάδας γράφομεν μόνον τὸ ψηφίον 4 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων, καὶ κρατοῦμεν 1 χιλιάδα διὰ νὰ ἐνώσωμεν αὐτὴν μετὰ τῶν χιλιάδων τῆς ἐπομένης στήλης.

Τέλος δὲ μεταβαίνοντες εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων λέγομεν· 1 ἡ κρατούμενη χιλιάς καὶ 3 . . 4 καὶ 8 . . 12. Ἐπειδὴ δὲ αἱ 12 χιλιάδες σύγκεινται ἐκ μιᾶς δεκάδος χιλιάδος καὶ 2 χιλιάδων, γράφομεν τὸ 2 εἰς τὴν θέσιν τῶν χιλιάδων, καὶ ἔπειτα τὸ 4 πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ.

Οὕτω δὲ εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι 12431.

Κανὼν τῆς προσθέσεως.

19. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξάγεται ὁ ἐξῆς κανὼν τῆς προσθέσεως.

“Ἰνα προσθήσωμεν πολυψηφίους ἀριθμοὺς, γράφομεν αὐτοὺς ὑπ’ ἀλλήλους οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ, καὶ ἀγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν τελευταῖον. Ἐπειτα προσθέτομεν τὰ ψηφία ἐκάστης στήλης κατὰ διαδοχὴν, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς τῶν μονάδων· καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων στήλης τινὸς δὲν εἶναι μεῖζον τοῦ 9, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τῇ γραμμῇ ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ· κατὰ δὲ τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν γράφομεν μόνον τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος τοῦ-

τον, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὸ ἄθροισμα τῆς ἀμέσως ἐπομένης πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης. Ἐξακολουθοῦμεν δὲ πράττοντες τὸ αὐτὸ μέχρι τῆς τελευταίας πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης.

20. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἐκάστης στήλης δὲν ὑπερέβαινε τὸν 9, θὰ ἦτον ἀδιάφορον νὰ ἀρχώμεθα τῆς πράξεως ἀπὸ τῆς προσθέσεως τῶν ἀπλῶν μονάδων, καὶ νὰ προχωρῶμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ, ἢ ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ νὰ προχωρῶμεν πρὸς τὰ δεξιά. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ τὰ ἀθροίσματα ταῦτα ὑπερβαίνουν τὸν 9, ἐὰν ἠρχόμεθα ἐξ ἀριστερῶν, ἠθέλομεν εἶσθαι πολλάκις ὑποχρεωμένοι νὰ ἐπανορθώνομεν γεγραμμένον ψηφίον, αὐξάνοντες αὐτὸ κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας δεκάδας ἤθελε περᾶσχει τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς ἐπομένης στήλης. Διὰ τοῦτο ἀρχόμεθα τῆς προσθέσεως πάντοτε ἐκ δεξιῶν.

Βάσανος τῆς προσθέσεως.

21. Ἡ βάσανος πράξεώς τινος εἶναι δευτέρα πρᾶξις, ἥς σκοπὸς εἶναι νὰ δείξῃ, ἂν ἡ πρώτη ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Ἡ βάσανος τῆς προσθέσεως γίνεται ὡς ἐξῆς· ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρᾶξιν προσθέτοντες τὰ ψηφία ἐκάστης στήλης κατ' ἄλλην τάξιν, οἷον ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἐὰν προηγουμένως προσεβαίνομεν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω· ἢ καὶ γράφομεν τοὺς προσθετέους κατ' ἄλλην τάξιν καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρόσθεσιν. Ἐὰν κατὰ τοὺς διαφόρους τούτους τρόπους τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως εὐρωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, τοῦτο εἶναι ἐνδείξις ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

22. Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ὅταν εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς δις νοούμενος, ἢ ὑπὸ διαφόρους μορφάς. Παραδείγματός χάριν ὁ ἀριθμὸς 5 εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ 5, καὶ ὁ ἀριθμὸς 14 εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ $8+6$.

Ἵνα σημειώσωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι γράφομεν

μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον $=$, τὸ ὁποῖον καλεῖται σημεῖον
 ἰσότητος, καὶ ἀναγινώσκεται ἴσον. Παραδείγματος χάριν
 $7+5=12$ ἀναγινώσκεται ἐπτά σὺν πέντε ἴσον δώδεκα.

Ὅταν θεωρήσωμεν δύο ἀριθμοὺς, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος εἶναι
 ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ ἄλλου τινὸς ἀριθμοῦ,
 τότε ὁ πρῶτος λέγεται μεγαλειότερος τοῦ δευτέρου, καὶ ὁ
 δεύτερος μικρότερος τοῦ πρώτου. Παραδείγματος χάριν ὁ 8
 εἶναι μεγαλειότερος τοῦ 5 καὶ ὁ 5 μικρότερος τοῦ 8, διότι
 $8=5+3$.

Ἵνα σημειώσωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἄνιστοι, γράφομεν
 μεταξὺ αὐτοῦ τὸ σημεῖον $>$ ἢ $<$, ὧν τὸ πρῶτον ἀναγινώ-
 σκεται μεγαλειότερον τὸ δὲ δεύτερον μικρότερον. Παραδείγ-
 ματος χάριν $8>5$ καὶ $4<9$ εἶναι ἀνισότητες ἐκφράζουσαι
 ὅτι ὁ 8 εἶναι μεγαλειότερος τοῦ 5 καὶ ὁ 4 μικρότερος τοῦ 9.

Οἱ ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι γεγραμμένον τὸ ση-
 μεῖον τῆς ἰσότητος ἢ τῆς ἀνισότητος καλοῦνται μέλη τῆς
 ἰσότητος ἢ τῆς ἀνισότητος, τὸ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ πρῶ-
 τον μέρος, τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ δεύτερον μέρος.

Πρότασις α' ἐαυτῆς φανερὰ λέγεται ἀξιῶμα. Πρότασις
 δε', ἥτις στηρίζεται ἐπ' ἄλλων, καλεῖται θεώρημα. Ἀποδεί-
 ξεις τοῦ θεωρήματος λέγονται οἱ συλλογισμοί, δι' ὧν γίνε-
 ται καταφανὴς ἡ ἀλήθεια αὐτοῦ.

Ἰδιχίτερον λέγεται πόρισμα ἀλήθεια ἀμέσως ἀπορρέ-
 ουσιν ἐξ ἀποδειχθέντος θεωρήματος.

23. Ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, τὰ ἀθροί-
 σματα εἶναι ἴσα.

Ἡ πρότασις αὕτη ὑπάγεται εἰς τὸ ἐξῆς γενικὸν ἀξιῶμα.

Πράγματα κατ' οὐδὲν διαφέροντα εἰς ἐργασίας κατ' οὐδὲν
 ἀλλήλων διαφερούσας ὑποβαλλόμενα παρέχουσιν ἐξαχό-
 μενα κατ' οὐδὲν ἀλλήλων διαφέροντα.

24. Ἐὰν εἰς δύο ἀνίσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι
 ἀριθμοί, τὰ ἀθροίσματα θὰ εἶναι ἄρῃσι, καὶ μεγαλειότερον
 θὰ εἶναι τὸ περιέχον τὸν μεγαλειότερον ἀριθμόν.

Ἐστω $8 > 5$ · λέγω ὅτι θὰ εἶναι καὶ

$$8 + 4 > 5 + 4$$

Διότι

$$8 = 5 + 3$$

Ἐὰν δὲ εἰς τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς 8 καὶ $5 + 3$, προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 4, λαμβάνομεν

$$8 + 4 = 5 + 3 + 4$$

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει ὅτι ὁ ἀριθμὸς $8 + 4$ εἶνε μεγαλύτερος τοῦ $5 + 4$, ὡς ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τούτου καὶ τοῦ 3.

Β'. Ἀφαίρεσις.

25. Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντα ἀριθμὸν ἐλαττωμένῃ κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας περιέχει δεύτερος δοθεὶς ἀριθμὸς.

Ὁ πρῶτος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται μειωτέος, ὁ δεύτερος ἀφαιρετέος, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως καλεῖται ὑπόλοιπον, διαφορὰ, ἢ ὑπεροχή.

Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι ὁ μείζων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἥτοι ὁ μειωτέος, συνίσταται ἐκ τῶν μονάδων τοῦ μικροτέρου, ἥτοι τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ τῆς διαφορᾶς· ἐν ἄλλαις λέξεσιν ὁ μειωτέος εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς. Διὰ τοῦτο δὲ δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ὡς ἐξῆς.

* Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς, δοθέντος τοῦ ἄθροισματος δύο ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν, εὐρίσκεται ὁ ἕτερος.

Ἵνα δεῖξωμεν ὅτι ἀπ' ἀριθμοῦ τινος πρόκειται νὰ ἀφαιρηθῇ ἄλλος, γράφομεν τὸν μειωτέον, κατόπιν αὐτοῦ τὸν ἀφαιρετέον, καὶ μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον—, τὸ ὅποῖον ἀπαγγέλλεται π.λὴν. Π. χ. $12 - 7$ παριστᾷ τὴν διαφορὰν τοῦ 7 ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ 12.

26. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ πρώτου ἐκάστην τῶν μονάδων τοῦ δευτέρου τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην. Παραδείγματος χάριν διὰ νὰ

ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 12 τὸν ὅ λέγομεν· 12 πλὴν 1 εἶναι 11, 11 πλὴν 1 . . 10, 10 πλὴν 1 . . 9, 9 πλὴν 1 . . , 8, 8 πλὴν 1 . . 7. Ἡ διαφορὰ λοιπὸν εἶναι 7.

Ἡδυνάμεθα δὲ νὰ εὗρωμεν τὴν διαφορὰν καὶ ἄλλως, προσθέτοντες δηλαδὴ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ὅ ἀνὰ μίαν μονάδα μέχρις οὗ εὗρεθῇ ὁ μειωτέος 12.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον γίνεται ἡ ἀφαίρεσις, ὅταν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μονοψήφιος, ὁ δὲ μειωτέος δὲν ὑπερβαίνει αὐτὸν κατὰ περισσοτέρας τῶν 9 μονάδων.

Ἄλλ' ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μεγάλοι, ἡ τοιαύτη ἀφαίρεσις θὰ ἦτο μακρὰ καὶ ἐπίπονος· θέλομεν δὲ ἶδει κατωτέρω πῶς τότε ἡ ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται συντόμως καὶ εὐκόλως.

27. Ἐπὶ τῆς ἀφαιρέσεως ὑπάρχουσιν αἱ ἐξῆς προτάσεις, αἵτινες δύνανται πᾶσαι νὰ ἀποδειχθῶσι στηριζόμεναι ἐπὶ τῶν τῆς προσθέσεως προτάσεων, ὧν ὅμως ὡς ἱκανῶς φανερῶν παραλείπομεν τὰς ἀποδείξεις.

α.) Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀριθμῶν ἀφαιρεθῶσιν ἴσοι τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἴσα.

β.) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ἐὰν εἰς ἀμφοτέρους προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ἢ ἐξ ἀμφοτέρων ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς.

γ.) Διὰ τὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀριθμοῦ τὸ ἄθροισμα ἄλλων ἀριθμῶν, ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ ἕκαστον τούτων.

Παραδείγματος χάριν διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 23 τὸ ἄθροισμα $3+7+4$, ἦτοι τὸν ἀριθμὸν 14, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν 23 πρῶτον τὸν 3, ἀπὸ τὸ εὗρεθὲν ὑπόλοιπον 20 τὸν 7, καὶ ἀπὸ τὸ εὗρεθὲν ὑπόλοιπον 13 τὸν 4· τὸ ὑπόλοιπον 9 τῆς τελευταίας ἀφαιρέσεως εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ ἄθροισματος $3+7+4$ ἀπὸ τοῦ 23.

δ.) Δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἄθροισματος ἀριθμῶν ἄλλον ἀριθμὸν ἀφαιροῦντες αὐτὸν ἀπὸ τιτος τῶν προσθετέων τοῦ ἄθροισματος, ἐὰν ὑπάρχῃ τις οὐχὶ μικρότερος αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος $5+12+9$ τὸν ἀριθμὸν 8, ἀφαιροῦμεν αὐτὸν ἀπὸ τοῦ 12 καὶ εὐρίσκομεν τὴν διαφορὰν $5+4+9$. Ὁμοίως ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν $4+7+8$ καὶ 7 εἶνε $4+8$.

Ἀφαίρεσις δύο οἰωνδῆποτε ἀριθμῶν.

28. Ἴνα ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀριθμοῦ δεύτερον ἀριθμὸν, ἀρκεῖ καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τῶν μονάδων τοῦ πρώτου τὰς μονάδας τοῦ δευτέρου, ἀπὸ τῶν δεκάδων τὰς δεκάδας, ἀπὸ τῶν ἑκατοντάδων τὰς ἑκατοντάδας, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἡ ὁρθότης τῆς προτάσεως ταύτης στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων γ' καὶ δ'.

Ὅταν δὲ ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ψηφίου τῶν τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδων τοῦ μειωτέου, ἀυξάνομεν τοῦτο κατὰ 10, συγχρόνως δὲ καὶ κατὰ μίαν μονάδα τὸ τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ψηφίου τοῦ ἀφαιρετέου.

Διότι ἐὰν αὐξήσωμεν π, χ. κατὰ 10 ἑκατοντάδας τὸν μειωτέον, καὶ κατὰ 1 χιλιάδα τὸν ἀφαιρετέον, ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται (27 πρότασις 6'.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α'. Ζητεῖται νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 4052 ἀπὸ τοῦ 67097.

Ἡ πράξις διατάσσεται ὡς ἐξῆς·

$$\begin{array}{r} 67097 \\ 4052 \\ \hline 63045 \end{array}$$

Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον, ὑποκάτω ἄγομεν γραμμὴν ὀριζόντιον, καὶ ὑπὸ τὴν γραμμὴν ταύτην γράφομεν τὰ ψηφία τῆς διαφορᾶς, καθ' ὅσον εὐρίσκομεν αὐτά.

Ἀφαιροῦμεν κατὰ πρῶτον ἀπὸ τῶν 7 μονάδων τοῦ μειωτέου τὰς 2 μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ τὴν διαφορὰν 5 γράφομεν ἐν τῇ στήλῃ τῶν μονάδων. Πράττοντες δὲ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ λοιπὰ ψηφία εὐρίσκομεν τὴν διαφορὰν 63045.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β'. Ζητείται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 826874
ὁ 52693.

826874

52693

774181

Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῶν 4 μονάδων τοῦ μειωτέου τὰς 3 τοῦ ἀφαιρετέου εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον 1 μονάδα, ἣν γράφομεν ἐν τῇ στήλῃ τῶν μονάδων. Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὰς δεκάδας, βλέπομεν ὅτι ἀπὸ τῶν 7 δεκάδων τοῦ μειωτέου δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσιν αἱ 9 δεκάδες τοῦ ἀφαιρετέου. Διὰ τοῦτο αὐξάνομεν κατὰ 10 τὰς 7 δεκάδας τοῦ μειωτέου, ἐπιφυλαττόμενοι νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10 δεκάδας, ἥτοι 1 ἑκατοντάδα, ὅπερ γίνεται ἐὰν αὐξηθῇ κατὰ μονάδα τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου. Θέλομεν λοιπὸν εἶπει· 9 δεκάδες ἀπὸ 17 ἀφαιρούμεναι μᾶς δίδουσιν 8, καὶ γράφομεν 8 ἐν τῇ θέσει τῶν δεκάδων.

Ἐπειτα μεταβαίνοντες εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων λέγομεν· 1 καὶ 6 κάμνουν 7, ἀπὸ 8 δίδει 1, ὅπερ γράφομεν ἐν τῇ θέσει τῶν ἑκατοντάδων.

Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὴν τετάρτην στήλην λέγομεν· 2 ἀπὸ 6 . . 4, καὶ γράφομεν 4 εἰς τὴν θέσιν τῶν χιλιάδων.

Ἐν τῇ πέμπτῃ στήλῃ διὰ νὰ γείνη ἡ ἀφαίρεσις πρέπει νὰ αὐξήσωμεν κατὰ 10 τὸ ψηφίον τοῦ μειωτέου· τότε δὲ λέγομεν ὅ ἀπὸ 12 . . 7, καὶ γράφομεν 7 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων χιλιάδος.

Τέλος δὲ, ἐπειδὴ πρέπει νὰ αὐξήσωμεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ 1, καὶ ἐπειδὴ τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι 0, ἀφαιροῦμεν 1 ἀπὸ 8 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 7 γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων χιλιάδος.

Ἄρα τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι 774181.

Κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως.

29. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως.

"Ἰνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν τινα ἀφ' ἑτέρου, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ, καὶ ὑποκάτω ἀγομεν γραμμὴν ὀριζόντιον. "Επειτα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τοῦ μειωτέου.

Ἐὰν δὲ συμβῇ ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τοῦ μειωτέου, ἀνέχομεν τὸ τελευταῖον τοῦτο κατὰ 10 μονάδας, ἵνα καταστήσωμεν δυνατὴν τὴν ἀφαίρεσιν· ἀλλὰ τότε μεταβαίνοντες εἰς τὴν ἀκόλουθον στήλην ἀνέχομεν κατὰ μονάδα τὸ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου. Τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων εἶναι τὰ ψηφία τῆς ζητουμένης διαφορᾶς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὴν ἀφαίρεσιν ἀρχίζομεν ἐκ δεξιῶν διὰ τὴν αὐτὴν λόγον, δι' ὃν καὶ τὴν πρόσθεσιν.

Ἀφαίρεσις διαφορᾶς.

30. "Ἰνα ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀριθμοῦ τινος τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων, χωρὶς προηγουμένως νὰ εὗρωμεν αὐτήν, προσθέτομεν εἰς αὐτὸν τὸν ἀφαιρετέον, καὶ ἀπὸ τοῦ ἔξαγομένου ἀφαιροῦμεν τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς ταύτης.

Διότι ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορὰ 13—8 ἀπὸ τοῦ 12. Γνωρίζομεν ὅτι ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρους ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 8, ἡ διαφορὰ αὐτῶν δὲν μεταβάλλεται (27)· ἀλλὰ τότε ὁ μὲν πρῶτος γίνεται 13—8+8, ἥτοι 13, ὁ δὲ δεύτερος 12+8· ἡ διαφορὰ τούτων εἶναι 12+8—13· τοῦτο δὲ ἀποδεικνύει τὴν ἀνωτέρω πρότασιν.

Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι ἡ πρότασις εἶναι γενικὴ, διότι ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 12, 13, 8 ἡδυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἄλλους οἷοι οὐσδήποτε.

Βάσκανος τῆς ἀφαιρέσεως.

31. Ἡ βάσκανος τῆς ἀφαιρέσεως γίνεται διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς· ἐὰν εὗρεθῇ ἄθροισμα ὁ μειωτέος, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις ὅτι ἡ πράξις ἐγένετο ἄνευ λάθους (25).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

32. Ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, σχηματίζομεν τρίτον, ὅστις εἶναι ἄθροισμα τοσοῦτων ἀριθμῶν ἴσων τῷ πρώτῳ, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ δευτέρου.

Ὁ πρῶτος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται πολλαπλαστής, ὁ δεύτερος πολλαπλασιαστής, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως γινόμενον. Ὁ δὲ πολλαπλασιαστής καὶ πολλαπλασιαστής ὁμοῦ καλοῦνται παράγοντες τοῦ γινομένου.

Τὸ γινόμενον καλεῖται προσέτι πολλαπλάσιον τοῦ πολλαπλασιαστέου. Ἐν γένει δὲ πολλαπλάσιον ἀριθμοῦ εἶναι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπ' ἄλλον ἀριθμὸν οἷονδήποτε.

Ὁ πολλαπλασιασμός σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου $\times$, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται ἐπὶ οἷον 7×5 παριστᾷ γινόμενον, τοῦ ὁποῦ οὗ μὲν πολλαπλασιαστής εἶναι 7, ὁ δὲ πολλαπλασιαστής 5· ἀναγινώσκεται δὲ ἐπτά ἐπὶ πέντε.

Πολλαπλασιασμός μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον.

33. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πρόσθεσις πολλῶν ἴσων ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν αὐτὸν κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα τῆς προσθέσεως. Καὶ τῷ ὄντι οὕτως ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμός τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 7 ἐπὶ 5 λέγομεν 7 καὶ 7 .. 14, καὶ 7 .. 21, καὶ 7 .. 28, καὶ 7 .. 35. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν γινόμενον εἶναι ὁ 35.

Τὰ γινόμενα ταῦτα, τὰ ὅποια οἱ ἀρχαριοὶ πρέπει νὰ ἀποστηθίζωσι, διότι, ὡς θέλομεν ἶδει, δι' αὐτῶν δύνανται νὰ ἐκτελεσθῇ οἰοσδήποτε πολλαπλασιασμοὺς, εὐρίσκονται ἐν τῷ ἀκολουθῶν πίνακι, ὅστις καλεῖται πυθαγόρειος.

Πίναξ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ὁ πρῶτος ὀριζώντιος στίχος περιέχει κατὰ σειράν τοὺς ἐννέα μονοψηφίους ἀριθμοὺς.

Ἵνα σχηματίσωμεν τὸν δεῦτερον στίχον προσθέτομεν ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τοῦ πρώτου εἰς ἑαυτὸν, καὶ τὸ ἐξαγόμενον γράφομεν ὑποκάτω αὐτοῦ· ἐπομένως ὁ δεῦτερος οὗτος στίχος περιέχει τὰ διπλάσια τῶν ἐννέα μονοψηφίων ἀριθμῶν, ἥτοι τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 2.

Ἵνα σχηματίσωμεν τὸν τρίτον ὀριζώντιον στίχον προσθέτομεν ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τοῦ πρώτου, ταυτέστι μετ' ἐκείνου, ὅστις εὐρίσκεται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ, τὸ δ' ἐξαγόμενον γράφομεν ὑποκάτω· ἐπομένως ὁ τρίτος ὀριζώντιος στίχος περιέχει τὰ τριπλάσια τῶν ἐννέα μονοψηφίων ἀριθμῶν, ἥτοι τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 3.

Ὅμοιως Ἵνα σχηματίσωμεν τὸν τέταρτον ὀριζώντιον στίχον, προσθέτομεν ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τοῦ τρίτου μετὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τοῦ πρώτου, τὸ δ' ἐξαγόμενον γράφομεν

ὑποκάτω· ἐπομένως ὁ τέταρτος οὗτος στίχος περιέχει τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐπὶ 4.

Ὅμοίως σχηματίζομεν ἕκαστον τῶν ἐπομένων ὀριζοντίων στίχων μέχρι καὶ τοῦ ἐννάτου, προσθέτοντες ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ προηγουμένου ὀριζοντίου στίχου μετὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τοῦ πρώτου. Ἄρα οἱ ἐννέα ὀριζόντιοι στίχοι περιέχουσι τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐπὶ 1, 2, 3 . . . 9.

Ἰδοὺ δὲ πῶς γίνεται χρῆσις τοῦ πίνακος τούτου· ὡς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 5· κατὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ πίνακος τὸ γινόμενον τοῦτο πρέπει νὰ εὑρίσκηται ἐν τῇ ἐβδόμῃ κατακορύφῳ στήλῃ, ἥτις περιέχει τὰ γινόμενα τοῦ 7 ἐπὶ τοὺς ἐννέα μονοψηφίους ἀριθμούς· ἀλλὰ πρέπει νὰ εὑρίσκηται ἐπίσης ἐν τῷ πέμπτῳ ὀριζοντίῳ στίχῳ, ὅστις περιέχει τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐπὶ 5· τὸ ζητούμενον λοιπὸν γινόμενον εἶναι ὁ ἀριθμὸς 35, ὅστις εὑρίσκεται ἐν τε τῇ ἐβδόμῃ κατακορύφῳ στήλῃ καὶ ἐν τῷ πέμπτῳ ὀριζοντίῳ στίχῳ.

Θεωρήματα, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θεωρία.

34. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.** Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν, ἵνα εὐρωμεν τὸ γινόμενον πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν προουθετέων ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, καὶ προσθέτομεν τὰ ἐκ τῶν πολλαπλασιασμῶν τούτων γινόμενα.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ ἄθροισμα $8+6+5$ ἐπὶ 3. Τὸ γινόμενον, ὡς ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν ἴσων τῷ πολλαπλασιαστέῳ, εἶναι

$$-8+6+5+8+6+5+8+6+5.$$

Βλέπομεν δὲ ὅτι περιέχει τρία μέρη ἴσα τῷ 8, τρία μέρη ἴσα τῷ 6, καὶ τρία ἴσα τῷ 5· τουτέστιν εἶναι τὸ ἄθροισμα

τῶν γινομένων 8×3 , 6×3 , 5×3 · ταῦτα δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα παρίσταται διὰ τῆς ἰσότητος

$$(8+6+5) \times 3 = 8 \times 3 + 6 \times 3 + 5 \times 3.$$

Ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐκλείσθη ἐντὺς παρενθέσεως, καὶ τοῦτο πράττομεν ὁσάκις θέλωμεν νὰ σημειώσωμεν πρᾶξιν τινὰ ἐπ' ἀριθμοῦ, ὅστις εἶναι ἐξαγόμενον σεσημειωμένων πρᾶξεων καὶ μήπω ἐκτελεσθεισῶν. Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ 12—5 πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4, θέλωμεν γράψαι $(12-5) \times 4$. Ὁμοίως $17-(8-3)$ παριστᾷ ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 3 πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 17.

+ 35. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν, ἔρα εὖρωμεν τὸ γινόμενον πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ἐφ' ἕκαστον τούτων καὶ προσθέτομεν τὰ ἐκ τῶν πολλαπλασιασμῶν τούτων γινόμενα.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 9 ἐπὶ $7+5+3$, ἥτοι ἐπὶ 15. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν 9 ἐπὶ 15 πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα 15 ἀριθμῶν ἴσων τῷ 9· τὸ ἄθροισμα δὲ τοῦτο, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν 7 προσθετέους διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 9×7 , ἔπειτα 5 ἄλλους διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 9×5 , καὶ τοὺς λοιποὺς 3 διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 9×3 , μετασχηματίζεται εἰς τὸ ἄθροισμα

$$9 \times 7 + 9 \times 5 + 9 \times 3.$$

Ἄρα ἔχομεν

$$9 \times (7+5+3) = 9 \times 7 + 9 \times 5 + 9 \times 3.$$

36. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, μεταβαλλομένης τῆς τάξεως τῶν παραγόντων, ἥτοι λαμβανομένου ὡς πολλαπλασιαστοῦ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ τὰν ἀπ' αὐτῶν.

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι τὸ πενταπλάσιον τοῦ 7 εἶναι ἴσον τῷ ἐπταπλασίῳ τοῦ 5, ἥτοι ὅτι $7 \times 5 = 5 \times 7$.

Τὸ πενταπλάσιον τοῦ 7 εἶναι τὸ ἄθροισμα

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

Ἐὰν ἐξ ἑκάστου τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἀφαιρέσωμεν μίαν μονάδα, θέλομεν σχηματίσει τὸν ἀριθμὸν 5· διότι τόσοι εἶναι οἱ προσθετέοι. Ἐὰν δὲ ἐπαναλάβωμεν τὴν πρᾶξιν ταύτην ἐπτάκις, θέλουσι ληφθῇ πᾶσαι αἱ μονάδες τοῦ ἀθροίσματος, καὶ ἐξ αὐτῶν θέλει σχηματισθῇ ὁ ἀριθμὸς 5 ἐπτάκις· Ἄρα ἔχομεν

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5,$$

ἥτοι $7 \times 5 = 5 \times 7$. ὅπερ ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

37. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστικὸς ἢ ὁ πολλαπλασιαστέος λήγῃ εἰς μηδενικά, ἵνα εὗρωμεν τὸ γινόμενον, παραλείπομεν τὰ μηδενικά ταῦτα, πολλαπλασιάζομεν λαμβάνοντες ὡς παράγοντα τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν, καὶ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Παραδείγματος χάριν διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 578 ἐπὶ τὸν 63000, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 578 ἐπὶ 63, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψωμεν τρεῖς μηδενικά.

Διότι γνωρίζομεν (36) ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 578 ἐπὶ 63000, εἶναι ἴσον τῷ γινόμενῳ τοῦ 63000 ἐπὶ 578. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δὲ 63000 ἐπὶ 578, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὸν 63000 578 φορές, καὶ νὰ εὗρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν γραφέντων ἀριθμῶν, ὡς ἐξῆς·

63000

63000

63000

....

....

....

....

$$(63 \times 578) 000$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν ταύτην, θὰ ἔχωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινόμενου τρία μηδενικά, πρὸς τὰ ἀριστερὰ δὲ τῶν μηδενικῶν θὰ γραφῇ τὸ γινόμενον τοῦ 63 ἐπὶ 578, ὅπερ εἶναι καὶ γινόμενον τοῦ 578 ἐπὶ 63. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι-διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 578 ἐπὶ 63000, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 578 ἐπὶ 63, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινόμενου νὰ γράψωμεν τρία μηδενικά· ὅπερ ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἴσα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000, κτ.λ. ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ἓν, δύο, τρία κτ.λ. μηδενικά.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ὅταν καὶ ὁ πολλαπλασιαστής καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγωσιν εἰς μηδενικά, παραλείπομεν ταῦτα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς προκύπτοντας ἀριθμοὺς, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινόμενου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Παραδείγματός χάριν, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 57800 ἐπὶ 63000, πολλαπλασιάζομεν 578 ἐπὶ 63, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινόμενου γράφομεν πέντε μηδενικά.

Τῷ ὄντι διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 67800 ἐπὶ 63000 ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 57800 ἐπὶ 63, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινόμενου νὰ γράψωμεν τρία μηδενικά. Ἀλλὰ πάλιν διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 57800 ἐπὶ 63, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 578 ἐπὶ 63, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινόμενου νὰ γράψωμεν δύο μηδενικά.

Πολλαπλασιασμὸς πολυψήφιου πολλαπλασιαστέου ἐπὶ πολλαπλασιαστὴν μονοψήφιον.

38. Ἴσα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς μονάδας, τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας, κτ.λ. τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἡ ὁρθότης τοῦ κανόνα τούτου στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἐν ἑδαφίῳ 34 θεωρήματος.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 6058 ἐπὶ 7. Ἡ πράξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 6058 \\ \times 7 \\ \hline 42406 \end{array}$$

Ὁ πολλαπλασιαστὴς γράφεται ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ ὑπ' αὐτοὺς ἄγεται ὀριζόντιος γραμμὴ· ὑπὸ δὲ ταύτην γράφονται τὰ διάφορα ψηφία τοῦ γινομένου καθ' ὅσον εὐρίσκονται.

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 7 καὶ λέγομεν· 7 ἐπὶ 8 . . 56. Ἐπειδὴ δὲ 56 μονάδες παριέχουσι 5 δεκάδας καὶ 6 μονάδας, γράφομεν μόνον 6 εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων τοῦ γινομένου, καὶ κρατοῦμεν 5 δεκάδας, ἐπιφυλαττόμενοι νὰ προσθέσωμεν αὐτὰς εἰς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν.

Μεταβαίνοντες εἰς τὰς δεκάδας λέγομεν· 5 ἐπὶ 7 . . 35 καὶ 5 αἱ κρατούμεναι κάμνουσι 40. Ἐπειδὴ δὲ 40 δεκάδες ἀποτελοῦσι 4 ἑκατοντάδας καὶ 0 δεκάδας, γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων τοῦ γινομένου καὶ κρατοῦμεν 4 ἑκατοντάδας.

Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ προκειμένῳ παραδείγματι ὁ πολλαπλασιαστὴς δὲν ἔχει ἑκατοντάδας, τὸ γινόμενον θέλει περιέχει μόνον τὰς 4 ἑκατοντάδας, τὰς ὁποίας κρατοῦμεν.

Τέλος δὲ φθάνοντες εἰς τὰς χιλιάδας λέγομεν· 6 ἐπὶ 7 . . 42, καὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον γράφομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν εὑρημένων ψηφίων.

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν γινόμενον εἶναι 42406.

39. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν.

Ἦνα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς τὰ διάφορα ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, ἀρχόμε-

νοι ἐκ δεξιῶν· γράφομεν τὰς μονάδας τοῦ πρώτου μερικοῦ γινομένου, τὰς δὲ δεκάδας αὐτοῦ προσθέτομεν εἰς τὸ δευτέρου μερικὸν γινόμενον· γράφομεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ἀθροίσματος τούτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ γέγραμμένου πρώτου ψηφίου, τὰς δὲ δεκάδας αὐτοῦ κρατοῦμεν διὰ τὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ τρίτον μερικὸν γινόμενον· καὶ οὕτω καθέξῃς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ λόγος δι' ὃν ἐν τῇ ἀνωτέρω πράξει ἀρχόμεθα ἐκ δεξιῶν εἶναι ὁ αὐτός, δι' ὃν καὶ ἐν τῇ προσθέσει.

Πολλαπλασιασμὸς δύο οἰωνδῆποτε ἀριθμῶν.

40. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο οἰωνδῆποτε ἀριθμῶν δύναται εὐκόλως νὰ ἀναχθῇ εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 8057 ἐπὶ 496. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς 496 εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 6, 90, 400, δυνάμεθα κατὰ τὸ θεώρημα Β'. (35) νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐφ' ἑκάστον τούτων, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Γίνεται δὲ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ μὲν τὸν πρῶτον 6 κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 39, ἐπὶ δὲ τοὺς ἄλλους δύο κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 37.

Ἡ πράξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r}
 8057 \\
 496 \\
 \hline
 48342 \\
 725130 \\
 3222800 \\
 \hline
 3996272
 \end{array}$$

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν. Πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ 6 καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν. Ἐπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον

ἐπὶ 9, καὶ τὸ γινόμενον 72543 γράφομεν ὑπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ νὰ εὐρίσκηται ἐν τῇ στήλῃ τῶν δεκάδων.

Τέλος δὲ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ 4 καὶ τὸ γινόμενον 32228 γράφομεν ὑπὸ τὸ προηγούμενον οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ νὰ εὐρίσκηται ἐν τῇ στήλῃ τῶν ἑκατοντάδων.

Προσθέτοντες δὲ τὰ τρία μερικὰ γινόμενα εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι 3996272.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ δεύτερον καὶ τὸ τρίτον τῶν μερικῶν γινόμενων, ὅφ' ὧν τὸ ὅλικόν ἀποτελεῖται, εἶναι

725430, 3222800, καὶ ὅχι 72543, 32228· ἀλλ' ὅπως ἐγράφησαν τὰ τελευταῖα παρέχουσι τὸ αὐτὸ καὶ τὰ πρῶτα ἄθροισμα.

41. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἐξῆς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κανόνα.

Ἴνα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ ἑτερον πολυψήφιον, γράφομεν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον τὸν πολλαπλασιαστήν, ὑπὸ δὲ τοῦτον ἄγομεν γραμμὴν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον διαδοχικῶς ἐφ' ἑκάστον τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν· τὰ δὲ προκύπτοντα γινόμενα γράφομεν ἑκάστον ὑπὸ τὸ προηγούμενον οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ἐκάστου αὐτῶν ψηφίου νὰ εὐρίσκηται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ, ἐν ἣ καὶ τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐξ οὗ προῆλθε. Τέλος δὲ προσθέτομεν τὰ διάφορα ταῦτα ἐξαγόμενα, καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

3910756

704003

44732268

15643024

27375292

2753483956268

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

42. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν βάσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρᾶξιν, λαμβάνοντες τὸν πολλαπλασιαστὴν ὡς πολλαπλασιαστὴν, καὶ τὰνάπαλιν. Ἐὰν εὕρωμεν πάλιν τὸ αὐτὸ γινόμενον, τοῦτο εἶναι σημεῖον ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Στηρίζεται δὲ ὁ κανὼν οὗτος ἐπὶ τοῦ ἐν ἐδαφίῳ 36 θεωρήματος.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

43. Καλεῖται γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν ἡ πολλῶν παραγόντων, τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον τούτων ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $3 \times 5 \times 4 \times 7$, πολλαπλασιάζομεν 3 ἐπὶ 5, τὸ γινόμενον τούτων 15 ἐπὶ 4, τὸ νέον γινόμενον 60 ἐπὶ 7· τὸ δὲ τελευταῖον τοῦτο γινόμενον, τὸ ὁποῖον εἶναι 420, εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων τεσσάρων παραγόντων.

Περὶ δυνάμεων.

44. Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτὸν καλεῖται τετράγωνον ἢ δευτέρα δύναμις αὐτοῦ· οἷον 7×7 , ἥτοι 49, εἶναι τὸ τετράγωνον ἢ ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ 7.

Κύβος δὲ ἢ τρίτη δύναμις ἀριθμοῦ εἶναι τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων ἴσων αὐτῷ· οἷον $4 \times 4 \times 4$, ἥτοι 64, εἶναι ὁ κύβος ἢ ἡ τρίτη δύναμις τοῦ 4.

Γενικῶς τὸ γινόμενον τεσσάρων, πέντε, ἕξ κτλ. ἴσων παραγόντων καλεῖται τετάρτη, πέμπτη, ἕκτη κτλ. δύναμις τοῦ ἐνὸς τῶν παραγόντων.

Διὰ νὰ παραστήσωμεν δυνάμιν τινα ἀριθμοῦ γράφομεν πρὸ τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὑψηλότερα ἀριθμὸν δεικνύοντα τὸν

ἀριθμὸν τῶν ἴσων παραγόντων, ἢ τὸν βαθμὸν τῆς δυνάμεως· καλεῖται δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐκθέτης. Παραδείγματος χάριν, ἀντὶ 5×5 γράφομεν 5^2 , ἀντὶ $7 \times 7 \times 7 \times 7$ γράφομεν 7^4 .

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῷ δεκαδικῷ συστήματι ἀριθμήσεως αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων, ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ ἐφεξῆς, ἦτοι οἱ ἀριθμοὶ 10, 100, 1000, 10000, 100000, κτλ. εἶναι αἱ διάφοροι δυνάμεις τῆς βάσεως 10.

Διάφορα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θεωρήματα.

45. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ δευτέρον καὶ τὸ εὖρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τρίτον ἀριθμὸν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου.

Λέγω παραδείγματος χάριν ὅτι

$$8 \times 5 \times 7 = 8 \times 35.$$

Διότι ἐὰν τὸ πενταπλάσιον τοῦ 8 ἦτοι τὸ ἄθροισμα $8 + 8 + 8 + 8 + 8$ ἐπαναλάβωμεν ἐπτάκις, θὰ λάβωμεν ἄθροισμα περιέχον τὸν 8 τοσάκις, ὅσον εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 7, ἦτοι 35 φορές, ἐπομένως ἴσον τῷ 8×35 .

46. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Τὸ γινόμενον τριῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται μεταβαλλομένης τῆς τάξεως τῶν δύο τελευταίων παραγόντων.

Λέγω δηλαδὴ ὅτι $8 \times 5 \times 7 = 8 \times 7 \times 5$. Διότι κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ δευτέρον ἀριθμὸν καὶ τοῦ εὖρεθέντος γινομένου ἐπὶ τρίτον ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου. Τὸ δὲ γινόμενον δύο ἀριθμῶν μένει τὸ αὐτὸ, ἐὰν ἀλλάχθῃ ἡ τάξις αὐτῶν.

47. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀνταλλάχθῃ ἡ θέσις δύο ἐφεξῆς παραγόντων.

Λέγω δηλαδὴ ὅτι

$$5 \times 9 \times 7 \times 6 \times 8 \times 4 = 5 \times 9 \times 6 \times 7 \times 8 \times 4.$$

Διότι ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν παραγόντων, οἵτινες προηγούνται τῶν μεταβαλόντων θέσιν, θὰ εὗρωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν. Τὸν ἀριθμὸν δὲ τοῦτον θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐν μὲν τῷ πρώτῳ γινομένῳ ἐπὶ 7 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 6, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ πρώτον ἐπὶ 6 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 7. Οὕτω θέλομεν εὗρει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ὃν ἔπειτα θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς γινομένοις, ὥστε θὰ εὗρωμεν ὡς γινόμενον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν.

48. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν μένει τὸ αὐτὸ καθ' οἴανδῆποτε τάξιν καὶ ἂν ληφθῶσιν οἱ παράγοντες.

Λέγω παραδείγματος χάριν ὅτι

$$5 \times 8 \times 4 \times 9 \times 7 \times 3 = 4 \times 7 \times 5 \times 9 \times 3 \times 8$$

Διότι ἀνταλλάσσοντες τὴν θέσιν παραγόντος τινος καὶ τοῦ πρὸς τὰ δεξιά ἢ ἀριστερὰ αὐτοῦ, καὶ τοῦτο πράττοντες πολλάκις δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς αὐτὸν οἴανδῆποτε θελήσωμεν θέσιν. Παραδείγματος χάριν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τοὺς παράγοντας τοῦ ἀνωτέρω πρώτου γινομένου τὴν θέσιν ἣν ἔχουσιν ἐν τῷ δευτέρῳ, μετασχηματίζοντες τὸ πρῶτον εἰς γινόμενα, ὧν ἕκαστον διαφέρει τοῦ προηγουμένου μόνον κατὰ τὴν τάξιν δύο ἐφεξῆς παραγόντων, ὡς ἐξῆς:

$$5 \times 8 \times 4 \times 9 \times 7 \times 3$$

$$5 \times 4 \times 8 \times 9 \times 7 \times 3$$

$$4 \times 5 \times 8 \times 9 \times 7 \times 3$$

$$4 \times 5 \times 8 \times 7 \times 9 \times 3$$

$$4 \times 5 \times 7 \times 8 \times 9 \times 3$$

$$4 \times 7 \times 5 \times 8 \times 9 \times 3$$

$$4 \times 7 \times 5 \times 9 \times 8 \times 3$$

$$4 \times 7 \times 5 \times 9 \times 3 \times 8$$

49. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἐν γινομένῳ πολλῶν παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ὅσουςδῆποτε παράγοντας διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν.

Αέγω παραδείγματος χάριν ὅτι ἐν τῷ γινομένῳ

$$4 \times 7 \times 3 \times 5 \times 17 \times 9$$

δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 7, 5, 9, διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 315.

Πρὸς ἀποδείξιν τούτου δίδομεν τὰς πρώτας θέσεις εἰς τοὺς παράγοντας 7, 5, 9· οὕτω δὲ λαμβάνομεν τὸ ἴσον τῷ δεδομένῳ γινόμενον $7 \times 5 \times 9 \times 4 \times 3 \times 17$. Ἐὰν ἀρχίσωμεν τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἐν τῷ γινομένῳ τούτῳ σεσημειωμένων πολλαπλασιασμῶν, καὶ περιορισθῶμεν εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν τριῶν πρώτων παραγόντων, θὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον $315 \times 4 \times 3 \times 17$. Ἄρα ἔχομεν

$$4 \times 7 \times 3 \times 5 \times 17 \times 9 = 315 \times 4 \times 3 \times 17$$

τὴν ἰσότητα δὲ ταύτην ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

50. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἴνα πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπ' ἀριθμὸν τινα ἀρκεῖ τὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τούτου.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον $2 \times 5 \times 4 \times 7$ ἐπὶ 8.

Εἶναι φανερόν ὅτι

$$(2 \times 5 \times 4 \times 7) \times 8 = 2 \times 5 \times 4 \times 7 \times 8$$

Ἐὰν δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἰσότητος ταύτης ἀντικαταστήσωμεν τὸν παράγοντα 8 καὶ ἄλλον τινὰ, οἷον τὸ 5, διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν 40, λαμβάνομεν

$$(2 \times 5 \times 4 \times 7) \times 8 = 2 \times 40 \times 4 \times 7$$

ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

51. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Δυνάμεθα τὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν ἐπὶ τὸν πρῶτον παράγοντα, τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ οὕτω καθέξης μέχρι τοῦ τελευταίου παράγοντος.

Παραδείγματος χάριν διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 8 ἐπὶ τὸν 105, ὅστις εἶναι τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων 3,

5, 7, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 8 ἐπὶ 3, τὸ εὐ-
ρεθὲν γινόμενον ἐπὶ 5, καὶ τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ 7.

Λέγω δηλαδὴ ὅτι $8 \times 105 = 8 \times 3 \times 5 \times 7$.

Τῷ ὄντι ἐὰν ἐν τῷ γινομένῳ $8 \times 3 \times 5 \times 7$ ἀντικαταστή-
σωμεν τοὺς παράγοντας 3, 5, 7 διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γι-
νομένου αὐτῶν, εὐρίσκομεν 8×105 .

52. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ὧν ἐκά-
τερος εἶναι τὸ γινόμενον παραγόντων, εἶναι ἴσον τῷ γι-
νομένῳ τῶν παραγόντων τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, τοῦ 28 ὄντος γινομένου τῶν παρα-
γόντων 4, 7, καὶ τοῦ 120 γινομένου τῶν παραγόντων 3, 5, 8, τὸ
γινόμενον 28×120 εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ $4 \times 7 \times 3 \times 5 \times 8$.
Τῷ ὄντι, ἐὰν ἐν τῷ γινομένῳ $4 \times 7 \times 3 \times 5 \times 8$ ἀντικατα-
στήσωμεν τοὺς παράγοντας 4, 7 διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γι-
νομένου αὐτῶν 28, καὶ τοὺς 3, 5, 8 διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος
γινόμενου αὐτῶν 120, εὐρίσκομεν τὸ γινόμενον 28×120 .

53. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐ-
τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκ-
θέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ
πολλαπλασιάσωμεν 7^5 ἐπὶ 7^3 . Ἐπειδὴ ὁ μὲν πολλαπλασια-
στέος εἶναι γινόμενον 5 παραγόντων, ὁ δὲ πολλαπλασια-
στής 3, ἴσων πάντων τῷ 7, τὸ γινόμενον θέλει περιέχει 8
παράγοντας ἴσους τῷ 7, ἥτοι θὰ εἶναι 7^8 . Ἄρα ἔχομεν.

$$7^5 \times 7^3 = 7^{5+3} = 7^8.$$

54. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. Ἴνα πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμά
τι ἐφ' ἑτερον ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκα-
στον τῶν μερῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐφ' ἕκαστον τῶν
μερῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ νὰ προσθέσωμεν πάντα
τὰ εὐρεθέντα γινόμενα.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ
πολλαπλασιάσωμεν $4 + 5 + 7$ ἐπὶ $3 + 8$.

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἑδαφίου 35 ἔχομεν
 $(4+5+7) \times (3+8) = (4+5+7) \times 3 + (4+5+7) \times 8.$

Κατὰ δὲ τὸ τοῦ ἑδαφίου 34

$$(4+5+7) \times 3 = 4 \times 3 + 5 \times 3 + 7 \times 3,$$

$$(4+5+7) \times 8 = 4 \times 8 + 5 \times 8 + 7 \times 8.$$

Ἄρα τὸ γινόμενον $(4+5+7) \times (3+8)$ εἶναι ἴσον τῷ

$$4 \times 3 + 5 \times 3 + 7 \times 3 + 4 \times 8 + 5 \times 8 + 7 \times 8.$$

Τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

55. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤ΄. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τρίτον ἀριθμὸν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μειωτέον τε καὶ ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ἡ διαφορὰ $12-5$ ἐπὶ 4. Ἐκτελοῦντες τὴν τεσημειωμένην ἀφαίρεσιν εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον 7, ἐπομένως ἔχομεν $5+7=12$. Πολλαπλασιάζοντες δὲ ἐπὶ 4 ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης, λαμβάνομεν (34)

$$5 \times 4 + 7 \times 4 = 12 \times 4,$$

ἔθεν

$$7 \times 4 = 12 \times 4 - 5 \times 4.$$

Ἐὰν δὲ ἀντὶ 7 γράψωμεν $12-5$, λαμβάνομεν

$$(12-5) \times 4 = 12 \times 4 - 5 \times 4.$$

ἄπερ ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

α.) Ποίαν μεταβολὴν λαμβάνει τὸ γινόμενον, ἐὰν προσθῶμεν μίαν, δύο, τρεῖς, κτλ. μονάδας εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον ἢ τὸν πολλαπλασιαστήν;

β.) Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἐλαττωταί, ἐὰν ὁ μὲν μεγαλειότερος αὐξηθῇ, ὁ δὲ μικρότερος ἐλαττωθῇ κατὰ μονάδα.

γ.) Δειξαι ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν εἶναι ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

$$8+4 = 12 \times 4 = 48$$

$$64-16 = 48$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

56. Ἡ διαίρεσις εἶναι προᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὐρίσκεται τρίτος δεικνύων ποσάκις ὁ δεύτερος περιέχεται ἐν τῷ πρώτῳ.

Ὁ πρῶτος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται διαιρετέος, ὁ δεύτερος διαιρέτης, ὁ δὲ τρίτος ὁ ζητούμενος πηλίκον.

Ἰνα δεῖξωμεν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ἀριθμός τις δι' ἑτέρου γράφομεν πρῶτον τὸν διαιρετέον, μετ' αὐτὸν τὸν διαιρέτην, καὶ μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον : οἷον $12 : 3$ παριστᾷ ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ 12 διὰ 3· ἀπαγγέλλεται δὲ δώδεκα διαιρούμενος διὰ τρία, ἢ ἀπλούστερον δώδεκα διὰ τρία.

57. Δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ἀφαιροῦντες τὸν διαιρέτην ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ποσάκις, ὅσάκις εἶναι δυνατόν· τότε δὲ ἐπὶ τέλους θέλει συμβῇ ἓν ἐκ τῶν δύο, ἢ μηδὲν θέλει ὑπολειφθῇ, καὶ τότε λέγεται ὅτι ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς, ἢ θέλει ὑπολειφθῇ ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ διαιρέτου καλούμενος ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, καὶ τότε λέγεται ὅτι ἡ διαίρεσις δὲν γίνεται ἀκριβῶς. Κατ' ἀμφοτέρως δὲ τὰς περιστάσεις τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον τῷ ἀριθμῷ τῶν γενομένων ἀφαιρέσεων.

Ἄς υποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ 35 δι' 7· θέλομεν εἶπει·

$$35 - 7 = 28,$$

$$28 - 7 = 21,$$

$$21 - 7 = 14,$$

$$14 - 7 = 7,$$

$$7 - 7 = 0.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ 35 τοῦ 7 πεντάκις ἔμεινεν ὑπόλοιπον 0· ἄρα ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἀκριβῶς, καὶ τὸ πηλίκον αὐτῆς εἶναι 5. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τῆς γενομένης πράξεως εἰδείχθη ὅτι ὁ 35 εἶναι ἀθροισμα 5 ἀριθμῶν ἴσων τῷ 7, ἦται ὅτι $35 = 7 \times 5$, συνάγομεν ὅτι,

Ὅταν ἡ διαίρεσις γίνηται ἀκριβῶς, ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.

Ἐπειδὴ δὲ δύναται νὰ θεωρηθῇ τὸ πηλίκον ὡς πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ διαιρέτης ὡς πολλαπλασιαστῆς, ἔπεται ὅτι ἐν πάσῃ ἀκριβῶς γινομένη διαίρεσει ὁ διαιρετέος σύγκειται ἐκ τοσούτων μερῶν ἴσων τῷ πηλίκῳ ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ διαιρέτου. Οἷον ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι εἶναι

$$35 = 5 \times 7 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5.$$

Κατὰ τὴν περίστασιν δὲ ταύτην ἡ διαίρεσις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πρᾶξις, δι' ἧς δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρεῖται εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες δευτέρου δοθέντος ἀριθμοῦ, καὶ προσδιορίζεται τὸ ἓκ τῶν μερῶν. Ἐκ ταύτης μάλιστα τῆς ἐπόψεως προήλθον αἱ ὀνομασίαι διαίρεσις, διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκον.

Ἄς ὑποθέσωμεν πρὸς τούτοις ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ 38 δι' 7.

Ἐὰν πράξωμεν ὡς ἀνωτέρω, θέλομεν ἶδει ὅτι μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ 7 ἀπὸ τοῦ 38 πεντάκις, θέλει μείναι 3· ἐπομένως εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ἡ διαίρεσις δὲν γίνεται ἀκριβῶς, καὶ τὸ μὲν πηλίκον εἶναι 5 τὸ δὲ ὑπόλοιπον 3. Ἡ γενομένη δὲ πρᾶξις δεικνύει ὅτι

$$38 = 7 \times 5 + 3.$$

Δηλονότι ἐν πάσῃ μὴ ἀκριβῶς γινομένῃ διαίρεσει ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἠϋξημένῳ κατὰ τὸ ὑπόλοιπον.

Σημειωτέον δὲ ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ μέγιστον ἐν τῷ διαιρετέῳ περιεχόμενον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου. Ἐπὶ τῆς παρατηρήσεως ταύτης

σπτριζόμενοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον, πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην ἐπὶ 1, 2, 3, 4 . . . καὶ βλέποντες ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον τῶν γινομένων τούτων τὸ περιεχόμενον ἐν τῷ διαιρετέῳ· ὃ τὸ γινόμενον τοῦτο παρέχων πολλαπλασιαστικὴ εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ἄλλ' εἴτε δι' ἀφαιρέσεως, εἴτε διὰ σχηματισμοῦ τῶν διαφορῶν πολλαπλασίων τοῦ διαιρέτου θελήσωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἢ πρᾶξις ἀποβαίνει μακροτάτη, ὅταν ὁ διαιρετέος, ὁ διαιρέτης, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι μεγάλοι ἀριθμοί. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἐκθέσωμεν τὰ μέσα, ἃ ἐπεινοήθησαν πρὸς σύντομον καὶ εὐκόλον τῆς πράξεως ἐκτέλεσιν.

Διαίρεσις ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.

58. Ἵνα ἐκτελέσωμεν διαίρεσιν οἷανδὴποτε, πρέπει προηγουμένως νὰ γνωρίζωμεν πῶς εὐρίσκεται τὸ πηλίκον, ὅταν εἶναι μονοψήφιον.

Ἀναγνωρίζομεν δὲ ὅτι τὸ πηλίκον διαίρεσεώς τινος εἶναι μονοψήφιον, ὅταν γράφοντες ἐν μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ διαιρέτου λαμβάνωμεν ἀριθμὸν μεγαλειότερον τοῦ διαιρετέου. διότι τότε ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, ἐπομένως οὗτος περιέχεται ἥττον ἢ δεκάκις ἐν ἐκείνῳ.

Οἷον τὸ πηλίκον τοῦ 3478 διὰ 463 εἶναι μονοψήφιον, διότι ὁ 3478 εἶναι μικρότερος τοῦ 4630.

Τοῦ ἀνωτέρου ζητήματος διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.
α'.) Ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος.

Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην διὰ τοῦ πίνακος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εὐρίσκομεν ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου τὸ περιεχόμενον ἐν τῷ διαιρετέῳ καὶ ἐπομένως προσδιορίζομεν τὸ πηλίκον.

Οἷον διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαίρεσεως τοῦ 58 δι' 7 παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μέγιστον τῶν πολλαπλασίων τοῦ 7 τὸ περιεχόμενον ἐν τῷ 58 εἶναι ὁ 56, ὁ ὀκταπλάσιος τοῦ 7· ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι 8· τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι ἡ διαφορά τοῦ 58 καὶ 56, ἥτοι 2.

Ε'.) Ὁ διαιρέτης εἶναι πολυψήφιος.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ 6143 διὰ τοῦ 894. Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης εἶναι μείζων 8 ἑκατοντάδων, τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει ποσάκις 8 ἑκατοντάδες περιέχονται ἐν τῷ ἀριθμῷ 6143. Ἴνα δὲ εὗρωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐκείνον, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ὅσάκις εἶναι δυνατὸν 8 ἑκατοντάδας ἀπὸ 6143, ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ 8 ἑκατοντάδας ἀπὸ 61 ἑκατοντάδων, ἢ τέλος 8 ἀπὸ 61. Τὸ πηλίκον λοιπὸν εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ 61 διὰ 8, ἥτοι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ 7.

Ἴνα δοκιμάσωμεν ἐὰν τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι τῷ ὄντι 7, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ 7· ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον 6258 εἶναι μείζον τοῦ διαιρετέου βλέπομεν ὅτι τὸ 7 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πηλίκου. Δοκιμάζομεν λοιπὸν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον 6. Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν διαιρέτην εἶναι 5364, ἥτοι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρετέου, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι 6. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εὐρίσκεται ἀφαιρουμένου τοῦ 5364 ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 6143· εἶναι δὲ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο 779.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ἴνα εὗρωμεν τὸ πηλίκον διαιρέσεώς τινος, διακ εἶναι μονοψήφιον, διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου τοῦ διαιρέτου τὸν ὀλίγον ἀριθμὸν τῶν ἐν τῷ διαιρετέῳ περιεχομένων μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως. Οὕτω δὲ εὐρίσκομεν τὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου, ἢ ψηφίον μεγαλύτερον αὐτοῦ. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον καὶ ἐὰν μὲν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον δύναται γὰ ἀφαιρεθῆ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, τὸ ψηφίον αὐτὸ εἶναι τὸ ζητούμενον, εἰ δὲ μὴ, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

59. Συνήθως ἡ πράξις διατάσσεται ὡς ἐξῆς·

$$6143 \overline{) 894}$$

$$5364 \quad 6$$

$$779$$

Γράφομεν τὸν διαιρέτην πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ κατακορύφου γραμμῆς. Ἄγομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην γραμμὴν ὀριζόντιον, ὑπὸ δὲ ταύτην γράφομεν τὸ ἀκριβὲς ψηφίον ὅταν εὑρεθῇ. Ὑπὸ τὸν διαιρετέον γράφομεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ὑπὸ τοῦτο γραμμὴν, καὶ ὑπὸ τὴν γραμμὴν τὴν ὑπεροχὴν τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸ γινόμενον, ἥτις εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρέτου περιέχεται πλέον ἢ δεκάκις ἐν τῷ ἀριθμῷ τῶν τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδων ἐν τῷ διαιρετέῳ, ἀρχόμεθα τῶν δοκιμασιῶν ἀπὸ τοῦ ψηφίου 9. Ἐὰν π.χ. πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ 33173 διὰ 3987, κατὰ τὸ κανόνα πρέπει νὰ διαιρέσωμεν 36 διὰ 3· τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης δὲν εἶναι μονοψήφιον, διότι ὁ 36 εἶναι μείζων τοῦ δεκαπλασίου τοῦ 3· ἀλλ' ἐπειδὴ γνωρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι μονοψήφιον, ἀρχόμεθα τῶν δοκιμασιῶν ἀπὸ τοῦ 9.

60. Συνήθως δὲν γράφομεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον. Τότε δὲ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον, ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς τὰ γινόμενα τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὰς μονάδας, τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας κτλ. τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τῶν τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδων τοῦ διαιρετέου, καθ' ὅσον σχηματίζομεν τὰ γινόμενα ταῦτα. Διὰ νὰ καταστήσωμεν δὲ πάσας τὰς ἀφαιρέσεις ταύτας δυνατάς, προσθέτομεν εἰς ἕκαστον τοῦ διαιρετέου ψηφίον ἀριθμὸν δεκάδων ἱκανὸν νὰ καταστήσῃ δυνατὴν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν ἀφαίρεσιν, καὶ φροντίζομεν νὰ προσθέτωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μοράδων εἰς τὸ ἀφαιρετέον γινόμενον τῆς ἐπομένης ἀφαιρέσεως.

Ἡ πράξις τότε διατάσσεται ὡς ἐξῆς.

Βιβλιοθήκη Βεροίας

$$\begin{array}{r} 6143 \overline{) 894} \\ 779 \\ \hline 6 \end{array}$$

Λέγομεν δέ 6 ἐπὶ 4 .. 24 ἀπὸ 33 μένει 9 καὶ κρατοῦμεν 3· 6 ἐπὶ 9 .. 54 καὶ 3 .. 57 ἀπὸ 64 μένει 7 καὶ κρατοῦμεν 6· 6 ἐπὶ 8 .. 48 καὶ 6 54 ἀπὸ 61 μένει 7.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Γινομένης τῆς πράξεως ὡς ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ δοκιμάσωμεν τὸ ψηφίον χωρὶς νὰ γράψωμεν τι. Ἀρκεῖ δὲ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο πρῶτα πρὸς ἀριστεράν ψηφία τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον, καὶ νὰ συγκρίνωμεν τὸ γινόμενον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως τῶν περιχομένων ἐν τῷ διαιρετέῳ.

Διαίρεσις ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.

61. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον, ὁ διαιρετέος ὡς ἴσος τῷ γινόμενῳ τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸ πηλίκον ἠϋξημένῳ κατὰ τὸ ὑπόλοιπον, εἶναι ἄθροισμα τῶν γινόμενων τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὰ ψηφία τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων κτλ. τοῦ πηλίκου, ἐτι δὲ καὶ τοῦ ὑπολοίπου, ἐὰν ὑπάρχῃ. Δυνάμεθα δὲ νὰ εὗρωμεν διαδοχικῶς τὰ διάφορα τοῦ πηλίκου ψηφία διὰ τῶν ἐξῆς δύο θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ἐὰν χωρίσωμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου ἱκανὰ ψηφία, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ ἀριθμὸς ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου, μικρότερος ὅμως τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ (γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν ληθῶσι τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρετής, ἢ καὶ ἐν εἰσέτι), ἡ μὲν τάξις τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ οὕτως ἀποτελεσθέντος ἀριθμοῦ δεικνύει τὴν τάξιν τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου τοῦ πηλίκου, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ διαιρετέου εἶναι τὸ πρῶτον αὐτὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου.

Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ 614357

διὰ 894. Ἵνα σχηματισθῇ ἀριθμὸς οὐχὶ μικρότερος τοῦ διαιρέτου, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ, πρέπει νὰ χωρίσωμεν τέσσαρα ψηφία πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρέτου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μὲν τελευταῖον ψηφίον τοῦ οὕτως ἀποτελεσθέντος ἀριθμοῦ 6143 παριστᾷ ἐν τῷ διαιρέτῳ ἑκατοντάδας, τὸ δὲ πηλίκον αὐτοῦ διαιρουμένου διὰ τοῦ διαιρέτου εὐρισκόμενον κατὰ τὸ ἐδάφ. 58, εἶναι 6, λέγω ὅτι τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ πηλίκου εἶναι 6 ἑκατοντάδες.

Διότι τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 894 ἐπὶ 6 ἑκατοντάδας, ἦτοι ἐπὶ 600, εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τῶν 6143 ἑκατοντάδων τοῦ διαιρέτου, ἐπομένως καὶ αὐτοῦ τοῦ διαιρέτου. Τὸ δὲ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ 7 ἑκατοντάδας, ἦτοι ἐπὶ 700, εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῶν 6143 ἑκατοντάδων τοῦ διαιρέτου, ἐπομένως καὶ αὐτοῦ τοῦ διαιρέτου.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ 600 μὲν εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου, ἐπὶ 700 δὲ μεγαλύτερον αὐτοῦ, τὸ πηλίκον περιλαμβάνεται μετὰ 600 καὶ 700, ἦτοι ἔχει 6 ἑκατοντάδας. Τοῦτο δὲ ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

62. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἐὰν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ὑπολοίπου τῆς μερικῆς διαιρέσεως, δι' ἧς εὐρίσκεται τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ πηλίκου, προσγράψωμεν καὶ τὰ λοιπὰ τοῦ διαιρέτου ψηφία (ἐκείνα δηλαδή, ὧν δὲν ἐγένετο χρῆσις ἐν τῇ μερικῇ διαιρέσει), λαμβάνομεν ἀριθμὸν, ὅστις διαιρούμενος διὰ τοῦ διαιρέτου θέλει δώσει τὰ λοιπὰ ψηφία τοῦ πηλίκου.

Ἄς λάβωμεν πάλιν τὸ παράδειγμα τοῦ προηγουμένου ἑξαφίου. Διαιρέσαντες τὸν ὅλικόν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ διαιρέτου 614357 ἦτοι 6143 διὰ τοῦ διαιρέτου 894 εὕρομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 779· τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο παριστᾷ ἑκατοντάδας, διότι ἀπὸ τῶν 6143 ἑκατοντάδων ἀφηρέσαμεν 894 × 6 ἑκατοντάδας. Ἐὰν λοιπὸν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ὑπολοίπου τούτου 779 γράψωμεν καὶ τὰ ψηφία τῶν δεκάδων καὶ μονάδων τοῦ διαιρέτου, ἢ ἀριθμὸς 77957, ἔσται

λαμβάνομεν, παριστᾷ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ὁποῖον μένει, ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὰς ἑκατοντάδας τοῦ πηλίκου. Ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο περιέχει τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὰ ψηφία τῶν δεκάδων καὶ τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου, ἔτι δὲ καὶ τὸ ὑπόλοιπον, εἴαν ὑπάρχη. Ἵνα λοιπὸν συμπληρωθῇ ἡ πράξις, ὑπολείπεται νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 77957 διὰ τοῦ διαιρέτου.

63. Ἐπὶ τῶν προηγουμένων δύο θεωρημάτων στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον, ὅταν εἶναι πολυψηφίον· διότι κατὰ τὸ πρῶτον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου, κατὰ δὲ τὸ δεύτερον ἡ ἀναζήτησις τῶν λοιπῶν ἀνάγεται εἰς νέαν τινὰ διαίρεσιν. Ἐφαρμόζοντες δὲ τὰ αὐτὰ εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην, εὕρισκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, ἡ δὲ ἀναζήτησις τῶν λοιπῶν ἀνάγεται εἰς τρίτην τινὰ διαίρεσιν, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὑρεθῇ καὶ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου.

Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ 614357 διὰ τοῦ 894. Ἡ πράξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r}
 614357 \quad | \quad 894 \\
 \underline{5364} \\
 77957 \\
 \underline{7452} \\
 6437 \\
 \underline{6258} \\
 179
 \end{array}$$

Ὁ διαιρέτης γράφεται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, καὶ χωρίζεται ἀπ' αὐτοῦ διὰ κατακορύφου γραμμῆς, ἄγεται δὲ καὶ ὑπὸ τὸν διαιρέτην γραμμὴ ὀριζάντιος, ὑπὸ τὴν ὁποίαν γράφεται τὸ πηλίκον.

Χωρίζομεν κατὰ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τέσσαρα ψηφία, ὅσα ἀπαιτοῦνται ἵνα σχηματισθῇ ἀριθμὸς περιέχων μὲν τὸν διαιρέτην, μικρότερος ὅμως τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τελευταῖον ψηφίον 3 τοῦ ἀριθ-

μοῦ τούτου παριστᾷ ἑκατοντάδας, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ πρῶτον πρὸς ἀριστεράν ψηφίον τοῦ πηλίκου παριστᾷ ὡσαύτως ἑκατοντάδας. Διαιροῦμεν τὸν 6143 διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ τὸ μὲν πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης 6 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου· ἐὰν δὲ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ταύτης γράψωμεν, ἢ ὡς λέγεται καταβιβάσωμεν τὰ λοιπὰ ψηφία 5 καὶ 7 τοῦ διαιρετέου, ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς 77957 διαιρούμενος διὰ τοῦ διαιρέτου θέλει δώσει τὰ λοιπὰ ψηφία τοῦ πηλίκου. Εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρασιν ἐφαρμόζοντες τὰ αὐτὰ, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου αὐτῆς εἶναι 8 δεκάδες· ἐπομένως τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ζητουμένου πηλίκου εἶναι 8, καὶ γράφεται ἀμέσως μετὰ τὰς ἑκατοντάδας. Ἐὰν δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς δευτέρας ταύτης διαιρέσεως 643 καταβιβάσωμεν καὶ τὸ λοιπὸν ψηφίον 7 τοῦ διαιρετέου, ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς 6437 διαιρούμενος διὰ τοῦ διαιρέτου παρέχει τὰς μονάδας 7 τοῦ πηλίκου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 179 τῆς τελευταίας ταύτης διαιρέσεως εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ὅλης πράξεως.

64. Καλοῦνται μερικοὶ διαιρετέοι οἱ ἀριθμοί, οὓς διαιροῦντες διαδοχικῶς διὰ τοῦ διαιρέτου εὐρίσκομεν τὰ διάφορα ψηφία τοῦ πηλίκου· οἷον ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι μερικοὶ διαιρετέοι εἶναι οἱ ἀριθμοί 6143, 7795, 6437.

Ὁ πρῶτος τῶν μερικῶν τούτων διαιρετέων εἶναι ὁ ἀριθμὸς 6143 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ διαιρετέου, ὁ χρησιμεύσας εἰς τὴν εὑρεσιν τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου. Ὁ δεύτερος μερικὸς διαιρετέος 7795 σχηματίζεται, καταβιβαζομένου τοῦ ψηφίου 5 τῶν δεκάδων τοῦ διαιρετέου πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς πρώτης μερικῆς διαιρέσεως· ἐχρησίμευσε δὲ εἰς τὴν εὑρεσιν τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου.

Ὅμοίως ὁ τρίτος μερικὸς διαιρετέος σχηματίζεται καταβιβαζομένου τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τοῦ διαιρετέου πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς δευτέρας μερικῆς διαιρέσεως.

ἐχρησίμευσε δὲ εἰς τὴν εὔρεσιν τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου. Τὸ ὑπόλοιπον δὲ τῆς τελευταίας ταύτης μερικῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ὅλης πράξεως.

Συνήθως γράφονται ὑπὸ τὸν διαιρετέον μόνον οἱ διαφοροὶ μερικοὶ διαιρετέοι ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς, καὶ τότε ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἐξῆς.

$$\begin{array}{r}
 614357 \overline{) 894} \\
 \underline{5364} \\
 7795 \\
 \underline{7132} \\
 6437 \\
 \underline{6258} \\
 179
 \end{array}$$

Ἡ ἐκτελουμένων τῶν μερικῶν διαιρέσεων κατὰ τὰ εἰρημένα ἐν τῷ ἐδαφίῳ 60, ὡς ἐξῆς.

$$\begin{array}{r}
 614357 \overline{) 894} \\
 \underline{7795} \\
 6437 \\
 179
 \end{array}$$

Κανὼν τῆς διαιρέσεως.

65. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἐξῆς γενικὸν τῆς διαιρέσεως κανόνα.

Ἴτα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' ἑτέρου, ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον, γράφομεν τὸν διαιρέτην πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, χωρίζοντες αὐτοὺς διὰ κατακορύφου γραμμῆς ἄγομεν γραμμὴν ὀριζόντιον ὑπὸ τὸν διαιρέτην, ὑποκάτω δὲ ταύτης γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου, καθόσον εὐρίσκονται.

Χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ τὰ ἀποτελεσθῆ ἀριθμὸς ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου, μικρότερος ὅμως τοῦ δεκαπλάσιον αὐτοῦ· ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὁ πρῶτος μερικὸς διαιρετέος, καὶ τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον παριστᾷ ἐν τῷ διαιρετέῳ μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ τὸ πρῶτον ψηφίον

τοῦ πηλίκου. Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον διὰ τοῦ διαιρέτου· τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Καταβιβάζομεν ἔπειτα πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς πρώτης ταύτης διαιρέσεως τὸ μετὰ τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον ψηφίον τοῦ δεδομένου διαιρετέου, τὸ ὁποῖον ἐκγράφει μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου· οὕτω δὲ σχηματίζομεν τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον, τὸν ὁποῖον διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὐρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Ἐξακολουθοῦμεν δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μέχρις οὗ πάντα τὰ ψηφία τοῦ δοθέντος διαιρετέου καταβιβάσθῃσι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Ἐπειδὴ ἕκαστον ὑπόλοιπον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου, ἕκαστος μερικὸς διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου. Ἀλλὰ δύναται νὰ συμβῇ μερικὸς τις διαιρετέος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου· τότε τὸ ἀντιστοιχοῦν ψηφίον τοῦ πηλίκου εἶναι 0, τὸν δὲ ἀκόλουθον μερικὸν διαιρετέον σχηματίζομεν καταβιβάζοντες πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ προηγουμένου τὸ ἀμέσως ἐπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου.

Ὡς παράδειγμα τούτου ἔστω ἡ ἐξῆς διαίρεσις.

$$\begin{array}{r} 5486307547 \quad | \quad 7346 \\ 44107 \\ \hline 31547 \\ \hline 2463 \end{array}$$

66. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος συνήθως δὲν γράφονται οἱ μερικοὶ διαιρετέοι, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἐξῆς παράδειγμα.

$$\begin{array}{r} 34703 \quad | \quad 6 \\ 5 \\ \hline 5783 \end{array}$$

Ἐκτελοῦμεν τὴν πράξιν λέγοντες·

34	διὰ	6,	5·	5	ἐπὶ	6	30	ἀπὸ	34	4.
47	διὰ	6,	7·	6	ἐπὶ	7	42	ἀπὸ	47	5·
50	διὰ	6,	8·	6	ἐπὶ	8	48	ἀπὸ	50	2·
23	διὰ	6,	3·	3	ἐπὶ	6	18	ἀπὸ	23	5.

τὸ δὲ τελευταῖον ὑπόλοιπον 5 γράφομεν ἐν τῇ οἰκείᾳ θέσει.

67. Ὅταν τὸ πηλίκον μέλλῃ νὰ ἔχῃ μέγαν ἀριθμὸν ψηφίων, ὄντος καὶ τοῦ διαιρέτου πολυψηφίου, σχηματίζομεν κατὰ πρῶτον πῖνακα τῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς ἐννέα μονοψηφίους ἀριθμούς· δι' ἀπλῆς δὲ ἐπόψεως τοῦ πίνακος τούτου εὐρίσκομεν τὰ διάφορα ψηφία τοῦ πηλίκου, παρατηροῦντες ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου τὸ περιεχόμενον ἐν ἐκάστῳ μερικῷ διαιρετέῳ. Τοῦτο δὲ τὸ πολλαπλάσιον γράφομεν ὑπὸ τὸν ἀντιστοιχοῦντα μερικὸν διαιρετέον καὶ ἀφαιροῦμεν. Ὡς παράδειγμα ἔστω ἡ ἐξῆς διαίρεσις.

$$\begin{array}{r|l} 314159265358979323 & 3183098 \\ \hline 28647882 & 98696070733 \end{array}$$

27680445

25464784

22456613

19098588

30580255

28647882

19323738

19098588

22545097

22284686

23341193

22284686

10595072

9549294

10457783

9549294

908489

1 3183098

2 6366496

3 9549294

4 12732392

5 15915490

6 19098588

7 22284686

8 25464784

9 28647882

Σημειωτέον δὲ ὅτι εἶναι καλὸν νὰ γίνηται οὕτω ἡ πρᾶξις, ὅταν ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πολλὰς διαίρεσεις διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου· διότι τότε ὁ ἅπαξ σχηματισθεὶς πῖναξ τῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς χρησιμεύει εἰς πάσας τὰς διαίρεσεις ταύτας.

68. Ἐὰν ὁ διαιρέτης λήγῃ εἰς μηδενικά, παραλείπομεν αὐτὰ ὡς καὶ ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων πρὸς τὰ δεξιά τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιροῦμεν τοὺς προκύπτοντας ἀριθμούς· καὶ τὸ μὲν πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι τὸ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, γράφοιτες δὲ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ὑπολοίπου τὰ παραλειφθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου, ἔχομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Ἀσὺποθέσωμεν π.χ. ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ 5437628 διὰ 87000. Ἵνα εὗρωμεν τὸ πηλίκον ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ὁσάκις εἶναι δυνατὸν 87 χιλιάδας ἀπὸ τοῦ 5437628, ἥτοι 87 χιλιάδας ἀπὸ τῶν 5437 χιλιάδων τοῦ διαιρετέου, δηλονότι ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν 5437 δι' 87. Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι ἐὰν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ταύτης, ὅπερ παριστᾷ χιλιάδας, καταβιβάσωμεν τὰ λοιπὰ τοῦ διαιρετέου ψηφία, θέλομεν λάβει τὸ ὑπόλοιπον τῆς προτεθείσης διαιρέσεως.

Βάσανος τῆς διαιρέσεως.

69. Ἵνα ἐκτελέσωμεν τὴν βάσανον τῆς διαιρέσεως, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον, ἐὰν ὑπάρχῃ· ἐὰν δὲ τὸ ἐξαγόμενον εἶναι ἴσον τῷ διαιρετέῳ, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Θεωρήματα τῆς διαιρέσεως.

70. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.** Πολλαπλασιαζομένων διαιρετέου τε καὶ διαιρέτου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν.

Ὑποθεθῆσθω ὅτι ὁ διαιρετέος εἶναι 47 ὁ δὲ διαιρέτης 5. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὕρισκομεν πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 2· ὥστε ἔχομεν·

$$47 = 5 \times 3 + 2.$$

Λέγω δὲ ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ διαιρετέος τε καὶ διαιρέτης ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, οἷον ἐπὶ 6, τὸ μὲν πηλίκον δὲν θέλει μεταβληθῇ, τὸ δ' ὑπόλοιπον θέλει πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 6.

Διότι ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 6 ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος, ἐνθυμούμενοι (34) ὅτι πολλαπλαζόμεν ἄθροισμα, πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ, θέλομεν λάβει

$$17 \times 6 = 5 \times 3 \times 6 + 2 \times 6.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ γινομένῳ $5 \times 3 \times 6$ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 5 καὶ 6 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν, ἔχομεν

$$17 \times 6 = (5 \times 6) \times 3 + 2 \times 6.$$

Τοῦ 2 δὲ ὄντος ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ 17 διὰ 5, ἔπεται ὅτι τὸ γινόμενον 2×6 εἶναι μικρότερον τοῦ γινομένου 5×6 . Ἡ δὲ τελευταία ἰσότης δεικνύει ὅτι ἐὰν διαιρέσωμεν 17×6 διὰ 5×6 , θέλομεν λάβει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 2×6 . τοῦτο δὲ ἀποδεικνύει τὸ προκείμενον θεώρημα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν τῆς διαιρέσεως γινομένης ἀκριβῶς πολλαπλασιασθῶσι διαιρετέος τε καὶ διαιρέτης ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται καὶ ἡ διαιρέσις γίγνεται πάλιν ἀκριβῶς.

Παραδείγματος χάριν τοῦ 15 διαιρουμένου ἀκριβῶς διὰ 3, καὶ τοῦ πηλίκου ὄντος 5, τὸ γινόμενον 15×6 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3×6 , καὶ τὸ πηλίκον εἶναι πάλιν 5.

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος $15 = 3 \times 5$ λαμβάνομεν πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη αὐτῆς ἐπὶ 6, $15 \times 6 = 3 \times 5 \times 6$

$$\eta \quad 15 \times 6 = (3 \times 6) \times 5.$$

Ἡ ἰσότης δὲ αὕτη δεικνύει ὅτι 15×6 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 3×6 καὶ δίδει πηλίκον 5.

74. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον διὰ τιος τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτο.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ τὸ γι-

νόμενον $3 \times 5 \times 7$ διὰ 5. Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ἴσον τῷ
 $(3 \times 7) \times 5$,

τοῦ ὁποίου τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως διὰ 5 εἶναι 3×7 .
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ. "Ἰνα διαιρέσωμεν γινόμενόν τι διὰ δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τούτου ἓνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου, εἰς ὅμως ἡ διαίρεσις γίγνηται ἀκριβῶς.

"Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν διὰ 5 τὸ γινόμενον $6 \times 20 \times 7$. Ἐπειδὴ ὁ παράγων 20 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 5, διότι $20 = 4 \times 5$, τὸ δεδομένον γινόμενον εἶναι ἴσον τῷ

$$6 \times 4 \times 5 \times 7.$$

"Ἄλλ' ἵνα διαιρεθῇ τοῦτο διὰ 5, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλειφθῇ ὁ παράγων 5· ἄρα τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι

$$6 \times 4 \times 7.$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

72. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. "Ἰνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων, ὅταν ἡ διαίρεσις γίγνηται ἀκριβῶς, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ τοῦ πρώτου παραγόντος, τὸ εὐμεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ πάντες οἱ παράγοντες ληφθῶσιν ὡς διαιρεῖται.

Παραδείγματος χάριν τοῦ 240 διαιρουμένου ἀκριβῶς διὰ τοῦ 24, ὅστις εἶναι γινόμενον τῶν παραγόντων 2, 3, 4, λέγω ὅτι τὸ πηλίκον $240:24$ εἶναι ἴσον τῷ πηλίκῳ, τὸ ὁποῖον εὐρίσκομεν διαιροῦντες τὸν 240 διὰ 2, τὸ εὐμεθὲν πηλίκον διὰ 3, καὶ τὸ νέον πηλίκον διὰ 4.

Διότι τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ 240 διὰ 24 ὄντος 10, ἔχομεν,

$$240 = 24 \times 10,$$

ἢ

$$240 = 2 \times 3 \times 4 \times 10.$$

Τὰ πηλίκα τῶν δύο τούτων ἴσων ἀριθμῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 2 εἶναι ἴσα, ἄρα ἔχομεν (71)·

$$240:2 = 3 \times 4 \times 10.$$

Διαιροῦντες πάλιν τοὺς δύο τούτους ἴσους ἀριθμοὺς διὰ 3 λαμβάνομεν·

$$(240:2):3=4 \times 10,$$

ἢ ἀπλούστερον ἄνευ παρενθέσεων

$$240:2:3=4 \times 10.$$

Διαιροῦντες δὲ πάλιν τὰ δύο μέλη διὰ 4 λαμβάνομεν

$$240:2:3:4=10$$

ἔτσι

$$240:2:3:4=240:24 \text{ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.}$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

α.) Εὗρεῖν τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 986960707 διὰ 214159

β.) Διαίρεσαντες τὸν 6465864 διὰ τινος ἀριθμοῦ εὑρομεν πηλίκον 863 καὶ ὑπόλοιπον 265· τίς εἶναι ὁ διαιρέτης;

γ.) Εἰς ποίαν περίσταν τὸ πηλίκον διαιρέσεώς τινος μένει τὸ αὐτὸ, προστεθείσης μιᾶς, δύο, τριῶν κτλ. μονάδων εἰς τὸν διαιρέτην;

δ.) Ὑποθεσίσθω ὅτι μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν διαιρέσεώς τινος διαιροῦμεν τὸν διαιρετέον διὰ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου· ζητεῖται εἰς ποίαν περίσταν τὸ πηλίκον τὴν νέας ταύτης διαιρέσεως θὰ εἶναι ἴσον τῷ διαιρέτῃ τῆς πρώτης. Νὰ δευχθῇ προσέτι ὅτι τότε καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς δευτέρας διαιρέσεως θὰ εἶναι ἴσον τῷ ὑπολοίπῳ τῆς πρώτης.

ε.) Ποίαν μεταβολὴν πάσχουσι τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεώς τινος, ὅταν ὁ διαιρετέος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τινὰ ἀριθμόν;

ς.) Ὑποτίθεται γεγραμμένη ἡ φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν 1 2 3 4 . . . χωρὶς νὰ εἶναι ἀπ' ἀλλήλων κεχωρισμένα τὰ διάφορα ψηφία. Δείξαι ὅτι τὸ ψηφίον τῆς σειρᾶς ταύτης, οὗ τὴν τάξιν δεικνύει ὁ ἀριθμὸς 84652, εἶναι τὸ 1.

Ποῖον εἶναι τὸ ψηφίον, οὗ τὴν τάξιν δεικνύει ὁ ἀριθμὸς 523462;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ.

73. Όταν τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεώς τινος εἶναι μηδέν, λέγεται ὅτι ὁ διαιρέτης διαιρεῖ ἀκριβῶς ἢ καὶ ἀπλῶς διαιρεῖ τὸν διαιρετέον, καὶ ὅτι οὗτος διαιρεῖται ἀκριβῶς ἢ καὶ ἀπλῶς διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου.

Ἀριθμὸς διαιρῶν ἀκριβῶς ἄλλον καλεῖται διαιρέτης ἢ ὑποπολλαπλάσιον, ἢ παράγων αὐτοῦ· ὁ δ' ἀκριβῶς ὑπ' ἄλλου διαιρούμενος λέγεται διαιρετὸς δι' αὐτοῦ, ἢ πολλαπλάσιον αὐτοῦ.

Οἷον ὁ 7 εἶναι διαιρέτης τοῦ 35, ἢ παράγων ἢ ὑποπολλαπλάσιον αὐτοῦ· ὁ δὲ 35 εἶναι διαιρετὸς δι' 7, ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 7.

74. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄.** Πᾶς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ ἁθροίσματος αὐτῶν.

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι ὁ 7 διαιρέτης ὢν τῶν ἀριθμῶν, 14, 21, 35 θὰ εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ ἁθροίσματος αὐτῶν 70.

Διότι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 14, 21, 35 εἶναι ἁθροισμα ἀριθμῶν ἴσων τῷ 7· ἄρα καὶ τὸ ἁθροισμα αὐτῶν θὰ εἶναι ὡσαύτως ἁθροισμα ἀριθμῶν ἴσων τῷ 7, ἐπομένως θὰ εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' 7.

$$\begin{array}{l} \text{Δηλονότι} \quad 14 = 7 + 7 \\ \quad \quad \quad 21 = 7 + 7 + 7 \\ \quad \quad \quad 35 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \end{array}$$

$$14 + 21 + 35 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7.$$

75. **ΠΟΡΙΣΜΑ.** Πᾶς διαιρέτης ἀριθμοῦ τιнос εἶναι διαιρέτης καὶ τῶν πολλαπλασίων αὐτοῦ. Βιβλιοθήκη Βέροιας

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι ὁ 7 διαιρέτης ὢν τοῦ 35, θὰ εἶναι διαιρέτης καὶ παντὸς πολλαπλασίου τοῦ 35.

Διότι πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ 35 εἶναι ἄθροισμα ἀριθμῶν ἴσων τῷ 35· ὁ δὲ 7 ὡς διαιρῶν ἕκαστον αὐτῶν θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

76. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Πᾶς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Ἄς θεωρήσωμεν δύο ἀριθμοὺς διαιρετούς δι' 7, οἷον τοὺς 35 καὶ 14. Ἐπειδὴ ἕκαστος τούτων εἶναι ἄθροισμα ἀριθμῶν ἴσων τῷ 7, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν θὰ εἶναι ὡσαύτως ἄθροισμα ἀριθμῶν ἴσων τῷ 7, ἥτοι πολλαπλάσιον τοῦ 7.

$$\begin{array}{r} \text{Δηλονότι} \qquad 35 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \\ \qquad \qquad \qquad 14 = 7 + 7 \\ \hline 35 - 14 = 7 + 7 + 7. \end{array}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ ἄνωτέρω θεώρημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ἄλλως, ὡς ἐξῆς.

Πᾶς διαιρέτης τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ ἑτέρου.

Διότι ὁ ἕτερος τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τοῦ ἑτέρου.

77. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δὲν μεταβάλλεται, εἰὰν προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου.

Διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εὐρίσκεται, εἰὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ὁ διαιρέτης ὡσάκις εἶναι δυνατόν. Ὅταν λοιπὸν προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, μετὰ τινὰς ἀφαιρέσεις τούτου ἀπὸ τοῦ νέου διαιρετέου, ἀνευρίσκεται ὁ πρῶτος διαιρετέος, ἐπομένως καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. Ὅταν δὲ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, ἡ ἀφαίρεσις αὕτη εἶναι μέρος τῆς ἐργασίας, ἥτις πρέπει νὰ γείνη πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐκφράζεται καὶ ἄλλως, ὡς ἐξῆς: Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαφέρωσιν ἀλλήλων κατὰ πολλαπλάσιον τρίτου τινός, καὶ διαιρεθῶσιν ἀμφοτέρου διὰ τούτου, διδῶσιν ἴσα ὑπόλοιπα.

Υπόλοιπα τῆς διαιρέσεως διὰ τῶν διαιρετῶν 2 καὶ 5, 4 καὶ 25, 8 καὶ 125. Χαρακτηριστικὰ διαιρετότητος διὰ τῶν αὐτῶν.

78. Πολλὰκις εἶναι χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν ἐὰν ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς δι' ἑτέρου, καὶ ἐὰν δὲν εἶναι διαιρετὸς, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Ἐνταῦθα θέλομεν δείξει πῶς διὰ τινας διαιρέτας εὐρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον διὰ πράξεως ἀπλουστερίας ἢ τῆς ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως.

79. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 2 ἢ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων αὐτοῦ διὰ 2 ἢ 5.

* Ἀς λάβωμεν τυχόντα ἀριθμὸν, τὸν 53847.

* Ἐχομεν $53847 = 53840 + 7$.

Τὸ πρῶτον τῶν δύο μερῶν, εἰς 2 ἀνελύθη ὁ 53847, ἥτοι ὁ 53840, εἶναι 5384×10 ἥτοι πολλαπλάσιον τοῦ 10, ἐπομένως καὶ τῶν ἀριθμῶν, 2 καὶ 5, οἵτινες εἶναι διαιρέται τοῦ 10, διότι $10 = 2 \times 5$. Οἱ ἀριθμοὶ ἄρα 53847 καὶ 7, οἵτινες διαφέρουσι κατὰ τὸν 53840, πολλαπλάσιον ὄντα τοῦ 2 καὶ 5, διαιρούμενοι διὰ τούτων θὰ δώσωσιν ἴσα ὑπόλοιπα (77).

* Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως συμπεραίνομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι 0, 2, 4, 6, 8, διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2· ἐκεῖνοι δὲ, ὧν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι 1, 3, 5, 7, 9 δὲν διαιροῦνται διὰ τοῦ 2. Καλοῦνται δὲ οἱ μὲν διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2 ἀρτιοί, οἱ δὲ μὴ διαιρετοὶ περιττοί.

* Ἐκ τῆς αὐτῆς προτάσεως συμπεραίνομεν ὁμοίως ὅτι

* Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτοῦ εἶναι 0 ἢ 5.

80. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 4 ἢ 25 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 4 ἢ 25 τοῦ ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ.

Ἄς λάβωμεν τυχόντα ἀριθμὸν, τὸν 84537.

Ἐχομεν $84537 = 84500 + 37$.

Τὸ πρῶτον μέρος 84500 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 400· διότι $84500 = 845 \times 100$ · ὁ δὲ 100 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4 καὶ 25· διότι $100 = 4 \times 25$. Ἄρα ὁ 84500 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4 καὶ τοῦ 25. Οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν 84537 καὶ 37, ὡς διαφέροντες κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ 4 καὶ 25, διαιρούμενοι διὰ τούτων δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως συνάγομεν ὅτι·

Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25, ὅταν ὁ ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς διαιρῇται διὰ 4 ἢ 25.

81. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ δι' 8 ἢ 125 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως δι' 8 ἢ 125 τοῦ ὑπὸ τῶν τριῶν τελευταίων πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ.

Ἄς λάβωμεν τυχόντα ἀριθμὸν, τὸν 538432.

Ἐχομεν $538432 = 538000 + 432$.

Τὸ πρῶτον μέρος 538000 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 1000· διότι $538000 = 538 \times 1000$ · ὁ δὲ 1000 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 καὶ 125· διότι $1000 = 8 \times 125$. Ἄρα ὁ 538000 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 καὶ τοῦ 125. Οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν 538432 καὶ 432, ὡς διαφέροντες κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ 8 καὶ 125, διαιρούμενοι διὰ τούτων δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως συνάγομεν ὅτι·

Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς δι' 8 ἢ 125, ὅταν ὁ ὑπὸ τῶν τριῶν τελευταίων πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ψηφίων ἀποτελούμενος ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' 8 ἢ 125.

Ὶπόλοιπα τῆς διαιρέσεως δι' 9 καὶ 3, καὶ χαρακτηριστικὰ διαρετότητος διὰ τῶν αὐτῶν.

82. Ἡ εὗρεσις τοῦ ὑπολοίπου τῆς δι' 9 καὶ 3 διαιρέσεως στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἐξῆς προτάσεων.

α.) Ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ὑφ' ἐνός ἢ περισσοτέρων μηδενικῶν εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9 ἠὲ ὑξημένον κατὰ μονάδα.

Διότι ἐὰν διαιρέσωμεν δι' 9 ἀριθμὸν τοιοῦτον, πᾶσαι αἱ μερικαὶ διαιρέσεις θὰ δώσωσιν ὑπόλοιπον 1, ἐπομένως καὶ ἡ ὅλη διαίρεσις θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον 1.

$$\begin{array}{r}
 100000 \quad | 9 \\
 40 \\
 40 \\
 40 \\
 40 \\
 1
 \end{array}$$

β.) Πᾶς ἀριθμὸς ἀποτελούμενος ὑπὸ σημαντικοῦ ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9 ἠὲ ὑξημένον κατὰ τὸ σημαντικὸν ψηφίον.

Ἐστω ἀριθμὸς ἀποτελούμενος ὑπὸ σημαντικοῦ ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν ὁ 70000. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι γινόμενον τοῦ 10000 ἐπὶ 7. Ἀλλὰ κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν ἔχομεν

$$10000 = \text{πολλαπλάσιον τοῦ } 9 + 1.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ 7, καὶ ἐφαρμόζοντες τὸ ἐν ἐδαφίῳ 34 θεωρημα, λαμβάνομεν,

$$70000 = (\text{πολλαπλάσιον τοῦ } 9) \times 7 + 7.$$

Ἐπειδὴ δὲ πᾶν πολλαπλάσιον πολλαπλασίου τοῦ 9 εἶναι καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιον τοῦ 9 (75), ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γίνεται

$$70000 = \text{πολλαπλάσιον τοῦ } 9 + 7.$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ.) Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9 ἠὲ ὑξημένον κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ.

Ἄς λάβωμεν τυχόντα ἀριθμὸν, τὸν 578463· ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 500000, 70000, 8000, 400, 60 καὶ 3. Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην πρότασιν ἔχομεν.

$$500000 = \text{πολλαπλάσιον τοῦ } 9 + 5$$

$$70000 = \text{πολλαπλάσιον τοῦ } 9 + 7$$

$$8000 = \text{πολλαπλάσιον τοῦ } 9 + 8$$

$$400 = \text{πολλαπλάσιον τοῦ } 9 + 4$$

$$60 = \text{πολλαπλάσιον τοῦ } 9 + 6$$

$$3 = \quad \quad \quad 3$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, καὶ γνωρίζοντες (74) ὅτι τὸ ἄθροισμα πολλαπλάσιον τοῦ 9 εἶναι καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιον τοῦ 9, λαμβάνομεν·

$578463 = \text{πολλαπλάσιον τοῦ } 9 + (5 + 7 + 8 + 4 + 6 + 3)$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ ὁ 3 εἶναι διαιρέτης τοῦ 9, ἐπομένως καὶ πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ 9 εἶναι καὶ τοῦ 3 πολλαπλάσιον, ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν καὶ τοῦτο, ὅτι

Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3 ἢ ἑξήμερον κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ.

83. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὰ ἑξῆς·

α.) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ δι' 9 ἢ 3 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως δι' 9 ἢ 3 τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ.

β.) Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς δι' 9 ἢ 3 ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν δι' 9 ἢ 3.

Παραδείγματος χάριν ὁ ἀριθμὸς 75382946 δι' 9 ἢ 3 διαιρούμενος δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὅποιον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ 44, δηλαδή διὰ μὲν 9 δίδει ὑπόλοιπον 8, διὰ δὲ 3 ὑπόλοιπον 2.

Ὁ ἀριθμὸς 4379564043 διαιρεῖται δι' 9, ἐπομένως καὶ διὰ 3, διότι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ 45 διαιρεῖται δι' 9.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς τὸν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ προκύπτοντα ἀριθμὸν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ

ἢ αὐτὴ μέθοδος πρὸς εὗρεσιν τοῦ ὑπολοίπου τῆς δι' 9 διαιρέσεως. Δυνάμεθα δὲ νὰ ἐξακολουθῶμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς ἀριθμὸν ἔχοντα ἕν ψηφίον. Ἐάν τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι 9, ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' 9· ἐάν δὲ εἶναι ἄλλο τι ψηφίον, τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς δι' 9 διαιρέσεως τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, καὶ διαιρούμενον διὰ 3 δίδει τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 3 διαιρέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Παραδείγματος χάριν τοῦ ἀριθμοῦ 7884906738658 τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 79, τοῦ 79 τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 16, τούτου 7· ὥστε ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δι' 9 μὲν διαιρούμενος δίδει ὑπόλοιπον 7, διὰ δὲ 3 δίδει ὑπόλοιπον 1.

Τοῦ ἀριθμοῦ 567904864383 τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 63, τούτου 9· ὥστε ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 9.

ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δι' 11 καὶ χαρακτηριστικὸν διαιρετότητος διὰ τοῦ αὐτοῦ.

84. Ἡ εὗρεσις τοῦ ὑπολοίπου τῆς δι' 11 διαιρέσεως στήριζεται ἐπὶ τῶν ἐξῆς προτάσεων.

α.) Ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ὑπὸ μηδενικῶν εἶναι πολυπλασιασίων τοῦ 11 ἠϋξημέτερον μὲν κατὰ μονάδα, ἐάν ὁ ἀριθμὸς τῶν μηδενικῶν εἶναι ἄρτιος, ἡλαττωμένον δὲ κατὰ μονάδα, ἐάν περιττός.

Διότι ἐάν διαιρέσωμεν δι' 11 ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν,

$$\begin{array}{r} 4000000 \dots | 11 \\ 400 \\ 400 \\ 1 \\ \hline 90909 \dots \end{array}$$

βλέπομεν ὅτι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων θὰ εἶναι ἐναλλὰξ 1 καὶ 10· τὸ δὲ τελευταῖον ὑπόλοιπον θὰ εἶναι 1, ἐάν ὁ ἀριθμὸς τῶν μηδενικῶν εἶναι ἄρτιος, καὶ 10 ἐάν ὁ ἀριθμὸς τῶν

μηδενικῶν εἶναι περιττός. Κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 11 ὑψημένον κατὰ μονάδα, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν πολλαπλάσιον τοῦ 11 ὑψημένον κατὰ 10, ἥτοι πολλαπλάσιον τοῦ 11 ἡλαττωμένον κατὰ μονάδα.

β'.) Ἀριθμὸς ἀπασελούμενος ὑπὸ σηματικῶν ψηφίων ἀκολουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 11 ὑψημένον μὲν κατὰ τὸ σηματικὸν ψηφίον, εἰὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν μηδενικῶν εἶναι ἄρτιος, ἡλαττωμένον δὲ εἰὰν περιττός.

Ἄς λάβωμεν κατὰ πρῶτον τὸν ἀριθμὸν 70000, ὅστις ἔχει ἄρτιον ἀριθμὸν μηδενικῶν. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι γινόμενον τοῦ 10000 ἐπὶ 7. Ἀλλὰ $10000 = \text{πολλαπλ. } 11 + 1$.

Πολλαπλασιάζοντες δὲ ἐπὶ 7 τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης, λαμβάνομεν $70000 = \text{πολλαπλ. } 11 + 7$.

Ἄς λάβωμεν ἤδη τὸν ἀριθμὸν 800000, ὅστις ἔχει περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν. Ὁ ἀριθμὸς 800000 εἶναι γινόμενον τοῦ 100000 ἐπὶ 8. Ἀλλὰ

$$100000 = \text{πολλαπλ. } 11 - 1.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 8 τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης, καὶ γνωρίζοντες (55) ὅτι τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς πολλ. $11 - 1$ ἐπὶ 8 εἶναι πολλαπλ. $11 - 8$, λαμβάνομεν

$$800000 = \text{πολλαπλ. } 11 - 8.$$

γ'.) Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 11 ὑψημένον κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ τάξεως περιττῆς ἀπὸ τῶν δεξιῶν, καὶ ἡλαττωμένον κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως ἄρτιας.

Ἄς λάβωμεν τυχόντα ἀριθμὸν, τὸν 79854. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 70000, 9000, 800, 50, καὶ 4. Κατὰ δὲ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν

$$70000 = \text{πολλαπλ. } 11 + 7$$

$$9000 = \text{πολλαπλ. } 11 - 9$$

$$800 = \text{πολλαπλ. } 11 + 8$$

$$50 = \text{πολλαπλ. } 11 - 5$$

$$4 =$$

$$4$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων μελῶν τῶν ἰσοτήτων τούτων εἶναι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 79854, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δευτέρων μελῶν εἶναι ἄθροισμα πολλαπλασίων τοῦ 11, ἥτοι πολλαπλασίον τι τοῦ 11, ἠϋξημένον κατὰ 7, 8, 4, καὶ ἡλαττωμένον κατὰ 9 καὶ 5. Ἄρα ἔχομεν

$$79854 = \text{πολλαπλ. } 11 + 7 + 8 + 4 - 9 - 5$$

$$\eta \quad 79854 = \text{πολλαπλ. } 11 + (7 + 8 + 4) - (9 + 5) \cdot$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

85. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὰ ἑξῆς·

α.) Τὸ ὑπολοίπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ δι' 11 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως δι' 11 τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ἄθροίσματος τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς ἀπὸ τῶν δεξιῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας.

β.) Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς δι' 11, ἐὰν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἄθροίσματος τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας εἶναι 0 ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 11.

Σημειωτέον δὲ ὅτι ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς εἶναι μικρότερον τοῦ ἄθροίσματος τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας, προσθέτομεν εἰς τὸ πρῶτον ἄθροισμα 11 ἢ πολλαπλασίον τι τοῦ 11, ἵνα γείνη δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις· τὸ δὲ προστιθέμενον τοῦτο πολλαπλασίον τοῦ 11 λαμβάνομεν ἐκ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ ὅποῖον εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 11, καὶ τὸ ὅποῖον καὶ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ταύτην μένει πάλιν πολλαπλάσιον τοῦ 11.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. α.) Τοῦ ἀριθμοῦ 79854 τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς εἶναι 19, τὸ τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας εἶναι 14, ἡ διαφορὰ 19—14 ἢ 5 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς δι' 11 διαιρέσεως τοῦ 79854.

β.) Τοῦ ἀριθμοῦ 437694 τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς εἶναι 13, τὸ δὲ τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας 20. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον εἶναι μικρότερον τοῦ δευτέρου, προσθέτομεν εἰς αὐτὸ 11, καὶ ἀπὸ τοῦ ἄθροίσματος 24 ἀφ-

καιοῦντες 20, εὐρίσκομεν τὴν διαφορὰν 4· ὥστε 4 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς δι' 11 διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 437694.

γ'.) Οἱ ἀριθμοὶ 345279 καὶ 7492845 εἶναι διαιρετοὶ δι' 11, διότι ἐν μὲν τῷ πρώτῳ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων ἀξέως περιττῆς πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας· εἶναι 0, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ 22, ἥτοι πολλαπλάσιον τοῦ 11.

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 9 καὶ τοῦ 11.

86. Ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως, ἣν θέλομεν ἐκθέσει ἐνταῦθα, στήριζεται ἐπὶ τοῦ ἐξῆς θεωρήματος.

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν διαιρούμενον διὰ τινος ἀριθμοῦ δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ καὶ τὸ γινόμενον τῶν ὑπολοίπων τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τῶν παράγοντων τοῦ γινομένου.

Λέγω παραδείγματος χάριν ὅτι τὸ γινόμενον 24×60 διαιρούμενον δι' 7 θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ καὶ τὸ γινόμενον 3×4 τῶν ὑπολοίπων, αὐτὸ εὐρίσκομεν διαιροῦντες τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου 24 καὶ 60 διὰ τοῦ 7.

Διότι 3 ὄντος τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως δι' 7 τοῦ παράγοντος 24, ἔχομεν

$$24 = \text{πολλαπλ. } 7 + 3.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 60 τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης λαμβάνομεν $24 \times 60 = \text{πολλαπλ. } 7 + 3 \times 60$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης συνάγομεν ὅτι τὰ γινόμενα 24×60 , καὶ 3×60 , ὡς διαφέροντα κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ 7, διαιρούμενα δι' αὐτοῦ δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα (77).

Καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνύμεν ὅτι 4 ὄντος τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ 60 διὰ 7, τὸ γινόμενον 60×3 ἢ 3×60 , διαιρούμενον δι' 7 δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ καὶ τὸ γινόμενον 4×3 ἢ 3×4 .

Ἄρα τὰ γινόμενα 34×60 καὶ 3×4 διαιρούμενα δι' 7 διδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος καθίσταται φανερά ἡ ὀρθότης τοῦ ἐξῆς κανόνας.

87. Ἴνα κάμωμεν διὰ τοῦ 9 τὴν βάσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εὐρίσκομεν τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως δι' 9 τῶν δύο παραγόντων, καὶ τοῦ γινομένου τῶν ὑπολοίπων τούτων εὐρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δι' 9· ἐὰν δὲ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἶναι ἴσον τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως δι' 9 τοῦ γινομένου τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, τοῦτο εἶναι ἐνδειξίς ὅτι ἡ πράξις ἔγινε χωρὶς λάθος.

Ἄς υποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι πολλαπλασιάσαντες 2096 ἐπὶ 347 εὕρομεν γινόμενον 727312. Τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως δι' 9 τῶν δύο παραγόντων εἶναι 8 καὶ 5· τούτων τὸ γινόμενον 40 διαιρούμενον δι' 9 δίδει ὑπόλοιπον 4. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δι' 9 τοῦ γινομένου 727312 τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι 4, τοῦτο εἶναι ἐνδειξίς ὅτι ἡ πράξις ἔγινε χωρὶς λάθος.

88. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἐὰν ἡ πράξις ἔγινεν ἄνευ λάθους. Οὕτω δὲ ἡ βάσανος τῆς διαιρέσεως ἀνάγεται εἰς τὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ βάσανος δύναται νὰ γείνη, ὅπως διὰ τοῦ 9, οὕτω καὶ διὰ τοῦ 11 καὶ διὰ παντὸς ἄλλου διαιρετέου. Προτιμῶνται δὲ οἱ διαιρέται 9 καὶ 11 διὰ τὴν εὐκολίαν μεθ' ἧς εὐρίσκεται τὸ ὑπόλοιπον τῆς δι' αὐτῶν διαιρέσεως.

Ὅταν ἡ διὰ τοῦ 9 ἢ τοῦ 11 βάσανος δὲν ἐπιτυχάνῃ, βεβαίως ἐγένετο λάθος ἐν τῇ πράξει. Ἀλλ' ὅταν ἐπιτυχάνῃ, δὲν δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν μετὰ βεβαιότητος τὴν ὀρθότητα τῆς πράξεως· διότι ἐὰν ἐγένετο λάθος, ὅπερ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9 ἢ τοῦ 11, ἡ βάσανος δὲν ἐξελέγχει αὐτό. Ὅταν λοιπὸν ἐπιτυχάνωσιν ἀμφοτέραι αἱ βάσανοι, ἢ διὰ τοῦ 9 καὶ ἢ διὰ τοῦ 11, ἐὰν ἔγινε λάθος θὰ εἶναι ἐνταύτῳ πολλαπλάσιον τοῦ τε 9 καὶ τοῦ 11.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

α.) Δύο ἀριθμοὶ διαιρούμενοι διὰ τῆς διαφορᾶς των διδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα.

β.) Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ 4.

γ.) Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς δι' 8, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων, καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν δι' 8.

δ.) Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς δι' 6, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου ἑκάστου τῶν λοιπῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν δι' 6.

ε.) Πρὸς εὑρεσιν τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 37 χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα τριψήφια ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξίων (ἀλλὰ τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήμα δύναται νὰ ἔχῃ καὶ δύο ψηφία ἢ ἓν μόνον), ἀθροίζομεν τοὺς ἀποτελοῦντας τὰ τμήματα ταῦτα ἀριθμοὺς, καὶ τὸ ἄθροισμα διαιρούμεν διὰ 37. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ἴσον τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 37 τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀνωτέρω κανόνος στηρίζεται ἐπὶ τούτου, ὅτι ὁ 1000 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 37 ἠὺς ἡμέτερον κατὰ μονάδα.

ς.) Πρὸς εὑρεσιν τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 7 ἢ τοῦ 13, χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα τριψήφια ἀπὸ τῶν δεξίων, προσθέτομεν τοὺς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιττῆς τάξεως ἀποτελουμένους ἀριθμοὺς, ἔπειτα τοὺς ὑπὸ τῶν τμημάτων τάξεως ἀρτίας, ἀφαιροῦμεν τὸ δεύτερον ἄθροισμα ἀπὸ τοῦ πρώτου ἠὺς ἡμέτερον, ἐὰν εἶναι ἀνάγκη, κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 7 ἢ τοῦ 13, καὶ τέλος διαιρούμεν τὴν εὐρεθεῖσαν διαφορὰν δι' 7 ἢ διὰ 13.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀνωτέρω κανόνος στηρίζεται ἐπὶ τούτου, ὅτι ὁ 1000 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 7 καὶ τοῦ 13 ἡλαττωμένον κατὰ μονάδα.

ζ'.) Πῶς δύναται νὰ γείνη ἡ βάσανος τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως διὰ τοῦ 9 ἢ τοῦ 11 ;

η'.) Διατί εἰς τὴν βάσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι προτιμητέοι οἱ διαιρέται 9 καὶ 11 τῶν διαιρετῶν 2, 3, 4, 5, 8, 25 ;

θ'.) Ἐὰν τὸ ἐν τινι πολλαπλασιασμῷ γενόμενον λαθος προέρχεται ἐκ τούτου, ὅτι τὸ τελευταῖον ψηφίον μερικοῦ τινος γινομένου δὲν ἐγγράφη ὡς ἔπρεπεν, οὕτω δηλαδὴ, ὥστε νὰ παριστᾷ μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐξ οὗ προῆλθεν, ἡ διὰ τοῦ 9 βάσανος δὲν δύναται νὰ ἐξελέγξῃ τὸ λάθος. Νὰ ζητηθῇ ἐὰν ἡ διὰ τοῦ 11 βάσανος δύναται πάντοτε νὰ δείξῃ τὸ αὐτὸ λάθος.

ι'.) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ εἶναι διαιρετὸν δι' 7, ἐὰν ἐκάτερος τῶν ἀριθμῶν τούτων δὲν εἶναι διαιρετὸς δι' 7.

ια'.) Ἐὰν τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ ἡλαττωμένον κατὰ 13 εἶναι διαιρετὸν δι' 9, ὁ ἀριθμὸς ἐκεῖνος διαιρούμενος δι' 9 δίδει ὑπόλοιπον 2 ἢ 7. Καὶ ἡ ἀντίστροφος δὲ πρότασις εἶναι ἀληθής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ.

89. Ἀριθμὸς διαιρῶν ἀκριβῶς δύο ἢ περισσοτέρους ἄλλους ἀριθμοὺς καλεῖται κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Οἷον ὁ 6 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 24, 36, 48.

Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἔχωσι πολλοὺς κοινούς διαιρέτας, ὁ μέγιστος τούτων καλεῖται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Οἷον οἱ ἀριθμοὶ 24, 36 καὶ 48 ἔχουσι κοινούς διαιρέτας τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 6, 12, καὶ μόνους τούτους· ἄρα μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 24, 36, 48 εἶναι ὁ 12.

Ἀριθμοὶ λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐὰν δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην πλὴν τῆς μονάδος· τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 15, ὡσαύτως οἱ ἀριθμοὶ 6, 15, 28.

Ἀναζήτησις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν.

90. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν, ἐξ ὧν ὁ μικρότερος διαιρεῖ τὸν μεγαλείτερον, εἶναι αὐτὸς ὁ μικρότερος.

Ἀς λάβωμεν δύο ἀριθμοὺς, ἐξ ὧν ὁ μικρότερος διαιρεῖ τὸν μεγαλείτερον, τοὺς 40 καὶ 8· λέγω ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶναι ὁ μικρότερος 8.

Διότι ὡς διαιρῶν ἑαυτὸν καὶ τὸν 40 εἶναι κοινὸς διαιρέτης. Ἄλλος δὲ κοινὸς διαιρέτης μεγαλείτερος τοῦ 8 δὲν ὑπάρχει· διότι ἀριθμὸς μεγαλείτερος τοῦ 8 δὲν διαιρεῖ αὐτόν.

91. **ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.** Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν, ὧν ὁ μικρότερος δὲν διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν μεγαλύτερον, εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλύτερου διὰ τοῦ μικροτέρου.

Ἄς λάβωμεν δύο ἀριθμοὺς, ὧν ὁ μικρότερος δὲν διαιρεῖ τὸν μεγαλύτερον, οἷον τοὺς 312 καὶ 84. Τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου ὄντος 60, λέγω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 312 καὶ 84 ἔχουσι τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην καὶ οἱ ἀριθμοὶ 84 καὶ 60.

Διότι 3 ὄντος τοῦ πηλίκου καὶ 60 τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ 312 διὰ 84, ἔχομεν $312 = 84 \times 3 + 60$.

Πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 312 καὶ 84, διαιρῶν τὸ ἄθροισμα 312 καὶ τὸν ἕτερον τῶν προσθετέων αὐτοῦ 84×3 , ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 84, διαιρεῖ καὶ τὸν ἕτερον 60. Πᾶς δὲ κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 84 καὶ 60, διαιρῶν τὸν 84×3 , ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 84, καὶ τὸν 60, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 312· εἶναι ἄρα κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν ἀριθμῶν 312 καὶ 84.

Ἄρα οἱ ἀριθμοὶ 312 καὶ 84 καὶ οἱ ἀριθμοὶ 84 καὶ 60 ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας· ἄρα ἔχουσι καὶ τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

92. Κατὰ τὰ προηγούμενα δύο θεωρήματα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου. Καὶ ἐὰν μὲν δὲν μείνῃ ὑπόλοιπον, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Ἐὰν δὲ μείνῃ ὑπόλοιπον, τότε ἔχομεν νὰ ζητήσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ ὑπολοίπου τούτου καὶ τοῦ μικροτέρου τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Ἐπὶ τούτων πράττομεν τὰ αὐτὰ, καὶ ἐξακολουθοῦμεν μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς δύο ἀριθμοὺς, ἐξ ὧν ὁ μεγαλύτερος διαιρεῖται διὰ τοῦ μικροτέρου. Οὗτος δὲ ὁ μικρότερος θὰ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἐξῆς κανόνα.

Πρὸς εὐρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου, ἔπειτα τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως, καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω διαιροῦντες ἕκαστον διαιρέτην διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς αὐτὸν ὑπολοίπου μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν· ὁ δὲ διαιρέτης τῆς τελευταίας διαιρέσεως εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐφαρμόζοντες τὸν προηγουμένον κανόνα ἐξ ἅπαντος μετὰ τινας διαιρέσεις θέλομεν εὐρεῖ ὑπόλοιπον μηδέν. Διότι τὰ ὑπόλοιπα προβαίνουσιν ἐλαττούμενα· ἀριθμὸς δὲ ὅστις ἐξακολουθεῖ ἐλαττούμενος ἐπὶ τέλους μηδενίζεται, καὶ κατὰ μονάδα ἂν γίγνηται ἢ ἐλάττωσις.

93. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἐξῆς·

$$\begin{array}{r|l|l|l|l} & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 342 & 84 & 60 & 24 & 12 \\ 60 & 24 & 12 & 0 & \end{array}$$

Ἐκάστη διαιρέσις εἶναι διατεταγμένη κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν, ὅτι τὸ πηλίκον γράφεται ὑπεράνω τοῦ διαιρέτου, φυλασσομένης τῆς ὑποκάτω τούτου θέσεως διὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἐπομένης διαιρέσεως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δυνατὸν νὰ εὐρεθῇ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἢ μονάς· τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l} & 5 & 4 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 434 & 75 & 59 & 46 & 44 & 5 & 4 \\ 59 & 16 & 11 & 5 & 4 & 0 & \end{array}$$

94. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Πᾶς κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Ἄς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τοὺς ἀριθμοὺς 342 καὶ 84, ὧν εὐρέθη ἄνωτέρω ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 342 καὶ 84 εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ ὑπολοίπου 60 τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ

τοῦ δευτέρου (94)· διαιρῶν δὲ 84 καὶ 60 θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν 24· ὁμοίως διαιρῶν 60 καὶ 24 θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν 12, ὅστις εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 312 καὶ 84.

**Ἀναζήτησις τοῦ μεγίστου κοινοῦ
διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν.**

95. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικατασταθῶσι δύο τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Ἄς ληφθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, οἱ ἐξῆς·

432, 504, 324, 60.

Λέγω ὅτι ἐὰν ἀντικατασταθῶσι δύο ἐξ αὐτῶν, ὁ 432, καὶ ὁ 504, διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 72, οἱ ἀριθμοί
72, 324, 60,

θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν καὶ οἱ δεδομένοι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην. Διότι πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 432, 504, 324, 60, ὡς διαιρῶν τὸν 432 καὶ τὸν 504 θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τούτων 72· ἄρα θὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 72, 324, 60.

Ἀντιστρόφως δὲ πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 72, 324, 60, ὡς διαιρῶν τὸν 72 θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ 432 καὶ 504· ἄρα θὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 432, 504, 324, 60.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι οἱ ἀριθμοί 432, 504, 324, 60 ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινούς διαιρέτας καὶ οἱ ἀριθμοί 72, 324, 60· ἄρα ἔχουσι καὶ τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

96. Διὰ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ὅσωνδήποτε ἀριθμῶν. Διότι ἐφαρμόζοντες αὐτὸ ἐλαττοῦμεν κατὰ μονάδα τὴν πληθὺν τῶν ἀριθμῶν, ἐξακολουθοῦντες δὲ νὰ ἐφαρμόζωμεν αὐτὸ φθάνομεν ἐπὶ τέλους εἰς δύο ἀριθμούς, ὧν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ ὁ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Ὡς παράδειγμα ἅς ληφθῶσι πάλιν οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ
432, 504, 324, 60.

Εὐρίσκομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δύο πρώτων, τὸν 72· οὕτω δὲ ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν δεδομένων ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ἀριθμῶν

72, 324, 60.

Ζητοῦμεν ἔπειτα τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ 72 καὶ τοῦ 324, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι εἶναι ὁ 36. Ὑπολείπεται δὲ νὰ ζητήσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν 36, 60.

Τούτων ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 12· ἄρα καὶ τῶν τεσσάρων δοθέντων ἀριθμῶν μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 12.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν εὐρίσκομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δύο πρώτων· ἔπειτα τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ οὕτως εὐρεθέντος ἀριθμοῦ καὶ τοῦ τρίτου τῶν δεδομένων, καὶ ἔξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μέχρις οὔ γείνη ἡ χρήση πάντων τῶν ἀριθμῶν. Ὁ τελευταῖος τῶν οὕτως εὐρεθέντων ἀριθμῶν εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

97. ΘΕΩΡΗΜΑ. Πᾶς κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Ἄς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τοὺς ἀριθμοὺς

432, 504, 324, 60.

Πᾶς κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δύο πρώτων 72· ὡς διαιρῶν δὲ τὸν 72 καὶ τὸν 324 θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν 36· ὡς διαιρῶν δὲ τὸν 36 καὶ τὸν 60 θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν 12, ὅστις εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

**Περὶ χρήσεως τῶν γραμμάτων πρὸς παρά-
στασιν τῶν ἀριθμῶν.**

98. Εἰς πάντα τὰ μέχρι τοῦδε ἀποδειχθέντα θεωρήματα οἱ ἀριθμοὶ, ἐφ' ὧν ἐγένετο ἡ ἀπόδειξις, ἐλαμβάνοντο τυχαίως. Ἐπειδὴ λοιπὸν οἰοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ληφέντες ἀριθμοὶ, οἱ συλλογισμοὶ ἡμῶν γίνονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου Α, Β, Γ, α, β, γ. . .

Ἐν τῷ αὐτῷ ζητήματι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς παρίσταται πάντοτε διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος, διάφοροι δὲ ἀριθμοὶ διὰ διαφόρων γραμμάτων. Πολλὰκις ὅμως παριστῶμεν διαφόρους ἀριθμοὺς διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος φέροντες ἓνα ἢ πολλοὺς τόνους, οἷον Α, Α', Α'', Α''' παριστῶσιν ἀριθμοὺς διαφέροντας ἀλλήλων ἀναγινώσκονται δὲ ἄ.λφα, ἄ.λφα πρῶτον, ἄ.λφα δεύτερον, ἄ.λφα τρίτον κτλ. Ἀντὶ τῶν τόνων, ὅταν ἡ πληθὺς τῶν οὕτω παρισταμένων ἀριθμῶν εἶναι μεγάλη, γράφομεν δείκτας, ἥτοι ἀριθμητικὰ ψηφία γραφόμενα πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν γραμμάτων καὶ χαμηλότερα αὐτῶν οἷον Α₁, Α₂, Α₃, Α₄ κτλ. Παριστῶμεν δὲ διαφόρους ἀριθμοὺς διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος φέροντος τόνους ἢ δείκτας, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἔχωσι κοινόν τινα χαρακτήρα, οἷον ὅταν εἶναι πάντες ὑπόλοιπα διαιρέσεων, ἢ πάντες πηλίκαι, κτλ.

Ἀρχόμεθα δὲ τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τῶν ἐξῆς θεωρημάτων, εἰς τὰ δύο πρῶτα τῶν ὁποίων θέλομεν κάμει τὴν ἀπόδειξιν διπλῆν, καὶ ἐπὶ ὠρισμένων ἀριθμῶν καὶ ἐπὶ γραμμάτων, πρὸς ἐθισμόν τῶν ἀρχαρίων.

99. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.** Πολλαπλασιαζομένων δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, πολλαπλασιάζεται καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν.

Ἄς λάβωμεν δύο ἀριθμοὺς, τὸν 312, καὶ τὸν 84, καὶ ἄς εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν.

	3	4	2	2
312	84	60	24	12
60	24	12	0	

Λέγω ὅτι ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, οἷον τὸν 4, τὰ γινόμενα 312×4 , καὶ 84×4 , ἦτοι οἱ ἀριθμοὶ 1248 καὶ 336, θὰ ἔχωσι μέγ.στον κοινὸν διαιρέτην 12×4 ἦτοι 48.

Διότι ἂς ζητήσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν 1248 καὶ 336 κατὰ τὸν κανόνα.

$$\begin{array}{r|rr|rr|r} & 3 & 1 & 2 & 2 & \\ 1248 & 336 & 240 & 96 & 48 & \\ 240 & 96 & 48 & 0 & & \end{array}$$

Πολλαπλασιασθέντων τοῦ 312 καὶ τοῦ 84 ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 4, τὸ μὲν πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν 3 δὲν θὰ μεταβληθῇ, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 60 θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4 καὶ θὰ γείνη 240 (70). Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ τῶν λοιπῶν διαιρέσεων τὰ μὲν πηλίκα δὲν θὰ μεταβληθῶσι, τὰ δὲ ὑπόλοιπα θὰ πολλαπλασιασθῶσι πάντα ἐπὶ 4, καὶ τὸ τέταρτον ὑπόλοιπον θὰ εἶναι 0 (70 Σημ.), Ἄρα καὶ τὸ προτελευταῖον ὑπόλοιπον, ὅπερ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 1248 καὶ 336, θὰ εἶναι τὸ γινόμενον ἐπὶ 4 τοῦ προτελευταίου ὑπολοίπου 12, ἦτοι τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ἀριθμῶν 312 καὶ 84 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄς ἐπαναλάβωμεν ἤδη τὴν ἀπόδειξιν τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος παριστῶντες τοὺς ἀριθμοὺς διὰ γραμμάτων.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι A, B, καὶ ὅτι $A > B$. Ὁ πίναξ τῆς πράξεως πρὸς εὑρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ἀριθμῶν A, B, εἶναι ὁ ἑξῆς.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & \Pi & \Pi' & \Pi'' & \Pi''' \\ \hline A & B & \Upsilon & \Upsilon' & \Upsilon'' \\ \hline \Upsilon & \Upsilon' & \Upsilon'' & 0 & \end{array}$$

Παρεστάθησαν δὲ τὰ μὲν πηλίκα τῶν ἐφεξῆς διαιρέσεων διὰ Π, Π', Π'', Π''', τὰ δὲ ὑπόλοιπα διὰ Υ, Υ', Υ'', καὶ ὑπετέθη ὅτι τὸ τέταρτον ὑπόλοιπον εἶναι 0. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν A καὶ B θὰ εἶναι ὁ Υ''.

Ἄς πολλαπλασιάσωμεν ἤδη τοὺς ἀριθμοὺς Α καὶ Β ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν Ν, καὶ ἄς ζητήσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν γινομένων $A \times N$ καὶ $B \times N$ κατὰ τὸν κανόνα. Θέλει σχηματισθῇ τότε ὁ ἑξῆς πίναξ·

	Π	Π'	Π''	Π'''
$A \times N$	$B \times N$	$\Gamma \times N$	$\Gamma' \times N$	$\Gamma'' \times N$
$\Gamma \times N$	$\Gamma' \times N$	$\Gamma'' \times N$	0	

Πολλαπλασιασθέντων τοῦ Α καὶ τοῦ Β ἐπὶ Ν, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν Π δὲν θὰ μεταβληθῇ, τὸ δὲ ὑπόλοιπον Γ θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ Ν, καὶ θὰ εἶναι $\Gamma \times N$. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ τῶν λοιπῶν διαιρέσεων τὰ μὲν πηλίκα δὲν θὰ μεταβληθῶσι, τὰ δὲ ὑπόλοιπα θὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ Ν, καὶ τὸ τέταρτον ὑπόλοιπον θὰ εἶναι 0. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν $A \times N$ καὶ $B \times N$ εἶναι τὸ προτελευταῖον ὑπόλοιπον $\Gamma'' \times N$. Ἄρα τῶν ἀριθμῶν Α καὶ Β πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ Ν, ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ Ν καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν Γ'' ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ ἐπὶ δύο ἀριθμῶν ἀποδειχθὲν θεώρημα ἀληθεύει καὶ ἐπὶ πολλῶν· δηλοῦντι πολλαπλασιαζομένων πολλῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάζεται καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν.

Διότι τότε πάντες οἱ κατὰ τὸν κανόνα τῆς εὑρέσεως τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν διαδοχικῶς εὐρισκόμενοι ἀριθμοί, ὧν ὁ τελευταῖος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζονται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα.

100. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Διαιρουμένων δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, διαιρεῖται καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἄς λάβωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 60, 84, 108, οἵτινες ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 12. Λέγω ὅτι ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 3,

τὰ πηλίκαι τὰ ὅποια θὰ λάβωμεν, ἦτοι οἱ ἀριθμοὶ 20, 28, 36 θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 12 διὰ 3, ἦτοι τὸν 4.

Διότι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 20, 28, 36, ἐάν οὗτοι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 3, θὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ αὐτὸς ἐπὶ 3· πρέπει δὲ τότε νὰ γείνη 12· διότι τὰ γινόμενα 20×3 , 28×3 , 36×3 , εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ 60, 84, 108, οἵτινες ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 12. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 3 δίδει 12, εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 12 διὰ 3, ἦτοι ὁ 4.

Ἄς ἐπαναλάβωμεν ἤδη τὴν ἀπὸδειξιν τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος ἐπ' ἀριθμῶν παρισταμένων διὰ γραμμάτων.

Ἐστώσαν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ καὶ Μ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Λέγω ὅτι ἐάν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν Π, τὰ προκύπτοντα πηλίκαι Α', Β', Γ' θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Μ διὰ Π.

Διότι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α', Β', Γ', ὅταν οὗτοι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ Π, θὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ αὐτὸς ἐπὶ Π· πρέπει δὲ τότε νὰ γείνη Μ· διότι τὰ γινόμενα $A' \times \Pi$, $B' \times \Pi$, $\Gamma' \times \Pi$ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, οἵτινες ἔχουσι Μ μέγιστον κοινὸν διαιρέτην. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς, οὗ τὸ γινόμενον ἐπὶ Π εἶναι Μ, εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Μ διὰ Π. Ἀρα Μ ὄντος τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, τὰ πηλίκαι αὐτῶν διαιρουμένων διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου Π, ἦτοι οἱ ἀριθμοὶ Α', Β', Γ' θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην Μ : Π· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων δύναται ἐνίοτε νὰ ἀπλοποιηθῇ ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν. Διότι ἐάν γνωρίζωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην Π, διαιροῦντες αὐτοὺς διὰ τούτου, εὐρίσκοντες τῶν πηλίκων τὸν μέγιστον

κοινὸν διαιρέτην, καὶ πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν ἐπὶ Π εὐρίσκομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἐὰν π. γ. πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 50400 καὶ 43200, ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ 504 καὶ τοῦ 432, καὶ τούτου, 72 ὄντος, τὰ γινόμενον ἐπὶ 100, ἦτοι ὁ ἀριθμὸς 7200, θὰ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

101. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἐὰν διαιρεθῶσιν ἀριθμοὶ διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, τὰ πηλικά θὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐστωσαν ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, τούτων μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁ M, καὶ A', B', Γ' τὰ πηλικά τῆς διαιρέσεως διὰ M τῶν A, B, Γ· λέγω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ A', B', Γ' εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι διαιρεθέντων τῶν ἀριθμῶν A, B, Γ διὰ M, καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν M διηρέθη διὰ M, ἐπομένως ἐγένετο ἴσος τῇ μονάδι. Ἀρα οἱ ἀριθμοὶ A', B', Γ' ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα, ἦτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

102. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ἐὰν διαιρέσαντες ἀριθμοὺς διὰ τιος κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν εὐρώμεν πηλικά ἀριθμοὺς πρῶτους πρὸς ἀλλήλους, ὁ διαιρέτης, δι' οὗ διηρέθησαν οἱ ἀριθμοί, εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

Ἐστωσαν ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν ὁ M, καὶ A', B', Γ' τὰ πηλικά τῶν A, B, Γ διὰ M· λέγω ὅτι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ A', B', Γ' εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ M εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν A, B, Γ.

Διότι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν A', B', Γ' εἶναι ἡ μονάς. Ἐὰν δὲ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ M, τῶν γινόμενων $A' \times M$, $B' \times M$, $\Gamma' \times M$, ἦτοι τῶν ἀριθμῶν A, B, Γ, μέγιστος κοινὸς διαιρέτης θὰ εἶναι $1 \times M$, ἦτοι M· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου. Λέγεται δὲ θεώρημα ἀντίστροφον ἑτέρου, ὅταν ἡ ὑπόθεσις τοῦ ἑτέρου εἶναι συμπέρασμα ἐν τῷ ἑτέρῳ, καὶ τὰν ἀπαλιν.

103. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἀριθμὸς διαιρῶν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων, καὶ ὡν πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα αὐτῶν, διαιρεῖ τὸν ἕτερον.

Ἐστω ἀριθμὸς δ Π διαιρῶν τὸ γινόμενον $A \times B$ καὶ πρῶτος πρὸς τὸν A · λέγω ὅτι δ Π θὰ διαιρῇ τὸν B .

Διότι οἱ ἀριθμοὶ Π καὶ A ὡς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην 1 · ἄρα τὰ γινόμενα

$$\Pi \times B, \quad A \times B$$

ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην $1 \times B$ ἥτοι B . Ἐπειδὴ δὲ δ Π διαιρεῖ τὸ μὲν γινόμενον $\Pi \times B$, ὡς πολλαπλάσιον ἑαυτοῦ, τὸ δὲ γινόμενον $A \times B$ ἐξ ὑποθέσεως, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν (94), τὸν B · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

α.) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, πᾶς διαιρέτης τοῦ ἑτέρου αὐτῶν εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕτερον.

β.) Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ὁ ἕτερος αὐτῶν πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ δι' ἀριθμοῦ πρῶτου πρὸς τὸν ἕτερον.

γ.) Ἵνα εὗρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τριῶν ἀριθμῶν A, B, Γ , ἀρκεῖ νὰ εὗρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δ τοῦ A καὶ B , ἔπειτα τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δ' τοῦ B καὶ Γ , καὶ τέλος τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ δ καὶ δ' .

δ.) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ ἄσθροισμα αὐτῶν καὶ ἡ διαφορὰ ἢ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἶναι, ἢ ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 2 .

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

104. Πρώτος ἀριθμὸς καλεῖται ὁ μὴ ἔχων ἄλλους διαιρέτας ἢ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα.

Παραδείγματος χάριν οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5, 7, 11, 13 κτλ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι.

Σύνθετος δὲ ἀριθμὸς καλεῖται ὁ μὴ πρῶτος.

Θεωρήματα τῶν πρῶτων ἀριθμῶν.

105. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ὅτι ἅπας πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος πρὸς ἅπαντα ἀριθμοὺς μὴ διαιρούμενον ὑπ' αὐτοῦ.

Ἐστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Π μὴ διαιρῶν τὸν Α' λέγω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ Π καὶ Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι οἱ μόνοι διαιρέται τοῦ Π, ὡς πρῶτου, εἶναι ἡ μονὰς καὶ αὐτὸς ὁ Π. Ἄρα κοινοὶ διαιρέται τοῦ Π καὶ Α μόνοι οἱ ἀριθμοὶ Π καὶ 1 δύνανται νὰ εἶναι· ἀλλ' ὁ Π δὲν εἶναι κοινὸς διαιρέτης, διότι ἐξ ὑποθέσεως δὲν διαιρεῖ τὸν Α. Ἄρα ὁ μόνος κοινὸς διαιρέτης τοῦ Π καὶ τοῦ Α εἶναι ἡ μονὰς, ἥτοι οἱ ἀριθμοὶ Π καὶ Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

106. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ὅτι ἅπας σύνθετος ἀριθμὸς διαιρεῖται ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ.

Ἐστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α' λέγω ὅτι ὁ Α διαιρεῖται ὑπὸ πρῶτου τινος ἀριθμοῦ.

Διότι ὁ Α ὡς σύνθετος ἔχει ἓνα ἢ πολλοὺς διαιρέτας ἄλλους ἢ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα. Ἐστω δὲ Β ὁ ἐλάχιστος τῶν διαιρετῶν τοῦ Α' λέγω ὅτι ὁ Β εἶναι πρῶτος. Διότι ἐάν ὁ Β δὲν εἶναι πρῶτος, θὰ ἔχῃ διαιρέτην τινὰ Γ μικρότερον ἑαυτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ Γ διαιρεῖ τὸν Β, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ Α· ὁ Α θὰ ἔχῃ λοιπὸν διαιρέτην Γ μικρότερον τοῦ Β· ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Ἄρα ὁ Β εἶναι

πρώτος, καὶ ὁ σύνθετος ἀριθμὸς A διαιρεῖται ὑπὸ πρώτου ἀριθμοῦ τοῦ B ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς ἔχει διαιρέτην πρῶτον ἑαυτὸν, ἔχομεν τὸ ἐξῆς γενικώτερον θεώρημα.

"Ἄπας ἀριθμὸς, εἴτε πρῶτος εἴτε μὴ, διαιρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ.

107. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην πρῶτον ἀριθμόν.

Ἐστῶσαν ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, B, Γ · λέγω ὅτι οἱ A, B, Γ ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην πρῶτον ἀριθμόν.

Διότι οἱ ἀριθμοὶ A, B, Γ , ὡς μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην ἄλλον ἢ τὴν μονάδα, τὸν Δ . Καὶ ἐὰν μὲν ὁ Δ εἴναι πρῶτος, τὸ θεώρημα εἶναι ἀποδεδειγμένον· ἐὰν δὲ δὲν εἴναι πρῶτος, θὰ διαιρῇται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ Π (106). Οὗτος δὲ ὁ Π ὡς διαιρῶν τὸν Δ θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ A, B, Γ . Ἄρα οἱ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ A, B, Γ , ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην πρῶτον ἀριθμόν τὸν Π ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

108. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Ἐστῶσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, Δ · λέγω ὅτι ὑπάρχουσι περισσότεροι τῶν A, B, Γ, Δ πρῶτοι ἀριθμοί. Διότι ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν προτεθέντων πρώτων ἀριθμῶν A, B, Γ, Δ καὶ εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν μίαν μονάδα, τὸν δὲ παραχθέντα ἀριθμόν καλέσωμεν K , θὰ ἔχωμεν

$$A \times B \times \Gamma \times \Delta + 1 = K.$$

Ὁ ἀριθμὸς K διαιρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ, τοῦ Π (106). Λέγω δὲ ὅτι ὁ Π οὗτος δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς οὐδενὶ τῶν ἀριθμῶν A, B, Γ, Δ . Διότι ἐὰν ἦτον εἰς ἐξ αὐτῶν, ἤθελε διαιρεῖ τὸ γινόμενον αὐτῶν $A \times B \times \Gamma \times \Delta$ · ἐπειδὴ δὲ διαιρεῖ καὶ τὸν K , ἤθελε διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν τὴν μονάδα· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π δὲν εἶναι

ὁ αὐτός οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ· ὑπάρχουσιν ἄρα πρῶτοι ἀριθμοὶ περισσότεροι τῶν προτεθέντων Α, Β, Γ, Δ, οἱ Α, Β, Γ, Δ. Π· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

109. Δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν πίνακα τῶν πρῶτων ἀριθμῶν τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ ὀρισμένου τινὸς ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ 1010, κατὰ τὴν ἐξῆς μέθοδον, ἥτις καλεῖται κόσκινον τοῦ Ἑρατοσθένους.

Γράφομεν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν τάξιν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1010,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... 1010
καὶ διαγράφομεν πάντας τοὺς μὴ πρῶτους ἀριθμοὺς κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον.

Ἡ μονὰς καὶ ὁ 2 εἶναι προφανῶς πρῶτοι. Ἀρχόμενοι δὲ ἀπὸ τοῦ μετὰ τὸν 2 ἀριθμοῦ τοῦ 3 ἀριθμοῦμεν ἀνὰ δύο καὶ διαγράφομεν πάντοτε τὸν δεύτερον, ἥτοι τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6 κτλ. διότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι $2+2$, $2+2+2$ κτλ. ἥτοι πολλαπλάσια τοῦ 2.

Ὁ μετὰ τὸν 2 ἐρχόμενος ὁ 3 εἶναι πρῶτος, ὡς μὴ πολλαπλάσιον τοῦ 2. Ἀρχόμενοι δὲ ἀπὸ τοῦ μετὰ τὸν 3, τοῦ 4, ἀριθμοῦμεν ἀνὰ τρεῖς καὶ διαγράφομεν πάντοτε τὸν τρίτον· διότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι $3+3$, $3+3+3$ κτλ., ἥτοι πολλαπλάσια τοῦ 3. Οὕτω δὲ θέλουσι διαγραφῆ ἕκ δευτέρου καὶ τινες ἤδη διαγεγραμμένοι ἀριθμοί, ἀλλὰ τοῦτο οὐδόλως βλάπτει.

Δὲν εἶναι δὲ ἀνάγκη νὰ ἐξαλείψωμεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ μετὰ τὸν 3 ἀριθμοῦ, ἥτοι τοῦ 4· διότι ὁ 4 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2, διὰ τοῦτο δὲ πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ 4 εἶναι καὶ τοῦ 2 πολλαπλάσιον, καὶ εὐρίσκεται διαγεγραμμένον. Τὸ αὐτὸ δὲ δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν καὶ περὶ τῶν πολλαπλασίων παντὸς συνθέτου ἀριθμοῦ.

Ὁ μετὰ τὸν 3 πρῶτος τὴν τάξιν μὴ διαγεγραμμένος ἀριθμὸς ὁ 5 εἶναι πρῶτος, ὡς μὴ πολλαπλάσιον οὐδενὸς τῶν προηγουμένων. Ἀρχόμενοι δὲ ἀπὸ τοῦ μετὰ τὸν 5 ἀριθμοῦ, τοῦ 6, ἀριθμοῦμεν ἀνὰ πέντε, καὶ διαγράφομεν πάντοτε τὸν πέμπτον, διότι

οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι $5+5$, $5+5+5$, $5+5+5+5$, κτλ., ἥτοι πολλαπλάσια τοῦ 5.

Ὅμοίως ὁπρῶτος τὴν τάξιν τῶν μετὰ τῶν ὁμῆ διαγεγραμμένων ἀριθμῶν ὁ 7 εἶναι πρῶτος, ὡς μὴ ὢν πολλαπλάσιον οὐδενὸς τῶν προηγουμένων. Ἀρχόμενοι δὲ ἀπὸ τοῦ μετὰ τὸν 7, τοῦ 8, ἀριθμοῦμεν ἀνὰ ἑπτὰ καὶ διαγράφομεν πάντοτε τὸν ἑβδομον.

Σημειωτέον δὲ ὅτι ὅταν ἀρχίσωμεν νὰ διαγράφωμεν τὰ πολλαπλάσια πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ 7, τὸ πρῶτον μὴ διαγεγραμμένον ἤδη πολλαπλάσιον αὐτοῦ εἶναι τὸ τετράγωνον αὐτοῦ 7×7 ἥτοι ὁ 49. Διότι πολλαπλάσια τοῦ 7 καὶ μικρότερα τοῦ 49 εἶναι τὰ γινόμενα τοῦ 7 ἐπὶ 2, 3, 4, 5, 6· εἶναι ἄρα πολλαπλάσια τῶν μικροτέρων τοῦ 7 ἀριθμῶν καὶ εὐρίσκονται ἤδη διαγεγραμμένα.

Κατὰ τὴν παρατήρησιν ταύτην ἵνα εὐρωμεν πάντας τοὺς μεταξὺ ἐνὸς καὶ 1010 πρώτους ἀριθμοὺς ἀρκεῖ νὰ διαγράφωμεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον τὰ πολλαπλάσια πάντων τῶν πρώτων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ 37, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον 1369 ὑπερβαίνει τὸν 1010. Οὕτω δὲ εὐρίσκομεν ὅτι οἱ μεταξὺ 1 καὶ 1010 περιλαμβανόμενοι πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ γεγραμμένοι ἐν τῷ ἐξῆς πίνακι.

4	59	139	233	337	439	557	653	769	883
2	64	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	1009

110. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. Ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων διαιρεῖ τοῦλάχιστον τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων.

Ἐστω ἀριθμὸς πρῶτος ὁ Π διαιρῶν τὸ γινόμενον $A \times B$ · λέγω ὅτι ὁ Π διαιρεῖ τοῦλάχιστον τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων A, B . Διότι ἂν μὲν ὁ Π διαιρῇ τὸν A , τὸ θεώρημα εἶναι ἀποδεδειγμένον· ἐὰν δὲ δὲν διαιρῇ τὸν A , θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς αὐτὸν (105), καὶ τότε θὰ διαιρῇ τὸν B (103).

111. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤ'. Ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων διαιρεῖ τοῦλάχιστον ἓνα τῶν παραγόντων.

Ἐστω ἀριθμὸς πρῶτος ὁ Π διαιρῶν τὸ γινόμενον $A \times B \times \Gamma \times \Delta$ · λέγω ὅτι ὁ Π θὰ διαιρῇ τοῦλάχιστον ἓνα τῶν παραγόντων A, B, Γ, Δ . Διότι τὸ γινόμενον $A \times B \times \Gamma \times \Delta$, ἐὰν ὑποθέσωμεν τοὺς παράγοντας A, B, Γ ἀντικατασταθέντας διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν, τρέπεται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, τοῦ $A \times B \times \Gamma$ καὶ τοῦ Δ . Ἐὰν δὲ ὁ Π δὲν διαιρῇ τὸν Δ πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν $A \times B \times \Gamma$. Ἀλλὰ καὶ ὁ ἀριθμὸς $A \times B \times \Gamma$ δύναται νὰ θεωρηθῇ πάλιν ὡς γινόμενον δύο παραγόντων, τοῦ $A \times B$ καὶ τοῦ Γ . ὁ δὲ Π ἐὰν δὲν διαιρῇ τὸν Γ , θὰ διαιρῇ τὸν $A \times B$, ἑπομένως τὸν B ἢ τὸν A . Ἀρα ὁ Π διαιρεῖ τοῦλάχιστον ἓνα τῶν παραγόντων A, B, Γ, Δ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

112. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν τὸ γινόμενον παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσος τιρὶ ἐξ αὐτῶν.

Διότι ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον διαιρεῖ ἓνα τῶν παραγόντων (111). Ἀλλ' ὁ πρῶτος, ὃν πρῶτος διαιρεῖ εἶναι μόνος ὁ ἴσος αὐτῷ.

113. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν δύναμιν τινα ἀριθμοῦ, διαιρεῖ καὶ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν.

Ἐστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Π διαιρῶν A^3 · λέγω ὅτι ὁ Π διαιρεῖ καὶ τὸν A . Διότι A^3 εἶναι $A \times A \times A$ · ὁ δὲ Π ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον $A \times A \times A$, θὰ διαιρῇ καὶ ἓνα τῶν παραγόντων, τὸν A .

114. **ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'.** Ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ δυνάμεις εἶναι ὡσαύτως ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐστώσαν ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, B, Γ λέγω ὅτι καὶ αἱ δυνάμεις τούτων A^2, B^3, Γ^4 εἶναι ὡσαύτως ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι ἐάν οἱ A^2, B^3, Γ^4 δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην πρῶτον ἀριθμὸν (107) τὸν Π . Ὁ Π οὗτος ὡς διαιρῶν τὸν A^2 θὰ διαιρῇ καὶ τὸν A (113). διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ὡς διαιρῶν B^3 καὶ Γ^4 θὰ διαιρῇ καὶ τοὺς B, Γ . Ἀρα οἱ ἀριθμοὶ A, B, Γ , θὰ ἔχωσι κοινὴν διαιρέτην τὸν Π ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ A, B, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

115. **ΘΕΩΡΗΜΑ Η'.** Ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων γινομένου εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς αὐτὸ τὸ γινόμενον. Καὶ ἀντιστρόφως, ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς ἕκαστον τούτων.

α.) Ἐστω γινόμενον τὸ $A \times B \times \Gamma$, καὶ K ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων αὐτοῦ A, B, Γ λέγω ὅτι ὁ K καὶ τὸ γινόμενον $A \times B \times \Gamma$ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι ἐάν ὁ K καὶ τὸ γινόμενον $A \times B \times \Gamma$ δὲν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην πρῶτον ἀριθμὸν τὸν Π (107). Ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον $A \times B \times \Gamma$ θὰ διαιρῇ καὶ τινα τῶν παραγόντων αὐτοῦ (111), οἷον τὸν B . Ἀρα ὁ B καὶ ὁ K θὰ ἔχωσιν κοινὴν διαιρέτην τὸν Π ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

β.) Ἐστω τὸ γινόμενον $A \times B \times \Gamma$, καὶ ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς αὐτὸ ὁ K λέγω ὅτι ὁ K εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων A, B, Γ τοῦ γινομένου.

Διότι ἐάν ὁ K καὶ τις τῶν ἀριθμῶν A, B, Γ , οἷον ὁ B , δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην M . Ὁ M ὡς διαιρῶν τὸν B θὰ διαιρῇ καὶ τὸ πολλαπλάσιον

αὐτοῦ $A \times B \times \Gamma$ ἄρα τὸ γινόμενον $A \times B \times \Gamma$ καὶ ὁ K θὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην τὸν M ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

416. ΘΕΩΡΗΜΑ Θ'. Ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσα, πᾶς πρῶτος παράγων περιεχόμενος ἐν τῷ πρώτῳ περιέχεται καὶ ἐν τῷ δευτέρῳ, καὶ τοσάκις ἐν τῷ πρώτῳ ὡσάκις καὶ ἐν τῷ δευτέρῳ.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ τῶν δύο ἴσων γινομένων περιέχεται ὁ πρῶτος παράγων Γ λέγω ὅτι ὁ Γ θὰ περιέχεται καὶ ἐν τῷ δευτέρῳ.

Διότι ὡς παράγων τοῦ πρώτου διαιρεῖ αὐτό· ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὸ δεύτερον, ὡς ἴσον τῷ πρώτῳ. Ἀλλ' ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν τὸ γινόμενον πρώτων παραγόντων εἶναι ἴσος τινὶ ἐξ αὐτῶν. Ἄρα καὶ τὸ δεύτερον γινόμενον θὰ περιέχῃ τὸν παράγοντα Γ :

Λέγω ἤδη ὅτι ἐὰν ὁ Γ περιέχῃται τρίς ὡς παράγων ἐν τῷ πρώτῳ γινομένῳ θὰ περιέχεται καὶ ἐν τῷ δευτέρῳ τρίς. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐν μὲν τῷ πρώτῳ περιέχεται τρίς ὁ παράγων Γ , ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ πεντάκις. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ ἴσα γινόμενα τρίς διὰ τοῦ Γ , ὅπερ γίνεται ἐξαλειφομένου τρίς τοῦ παράγοντος Γ ἐξ ἑκάτερου αὐτῶν, θὰ λάβωμεν ἴσα γινόμενα. Ἀλλ' ἡ ἰσότης τῶν γινομένων τούτων εἶναι ἀδύνατος, διότι τὸ μὲν πρῶτον αὐτῶν δὲν θὰ περιέχῃ τὸν Γ , τὸ δὲ δεύτερον θὰ περιέχῃ αὐτὸν δίς. Ἄρα εἶναι ἀδύνατον νὰ μὴ περιέχῃται ἰσάκις ὁ Γ ἐν ἑκατέρῳ τῶν γινομένων.

Ἐδείχθη ἄρα ὅτι ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσα, δηλαδὴ παριστῶσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, πᾶς πρῶτος παράγων τοῦ πρώτου περιέχεται καὶ ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ τοσάκις ἐν τῷ πρώτῳ ὡσάκις καὶ ἐν τῷ δευτέρῳ· τὰ γινόμενα λοιπὸν ταῦτα δὲν δύνανται νὰ διαφέρωσιν ἀλλήλων ἢ κατὰ τὴν τάξιν τῶν παραγόντων.

Ἀνάλυσις ἀριθμοῦ συνθέτου εἰς πρώτους παραγόντας.

417. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ. Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον παραγόντων πρώτων· κὴ βιβλιοθήκῃ βέρου

Ἐστω ἀριθμὸς σύνθετος ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α εἶναι γινόμενον παραγόντων πρώτων.

Διότι ὁ Α διαιρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ Δ (107). Παριστῶντες δὲ διὰ Π τὸ πηλίκον Α : Δ θὰ ἔχωμεν

$$A = \Delta \times \Pi.$$

Ἐὰν μὲν ὁ Π εἴναι πρῶτος, τὸ θεώρημα εἶναι ἀποδεδειγμένον, διότι τότε ὁ Α θὰ εἶναι γινόμενον δύο πρώτων ἀριθμῶν. Ἐὰν δὲ ὁ Π δὲν εἶναι πρῶτος, θὰ ἔχῃ διαιρέτην τινὰ πρῶτον ἀριθμὸν τὸν Δ'. Παριστῶντες δὲ διὰ Π' τὸ πηλίκον Π : Δ, θὰ ἔχωμεν $\Pi = \Delta' \times \Pi'$. Ἀντικαθιστῶντες δὲ ἐν τῇ ἰσότητι $A = \Delta \times \Pi$ ἀντὶ Π τὸ ἴσον αὐτῷ Δ' × Π' λαμβάνομεν

$$A = \Delta \times \Delta' \times \Pi'.$$

Ἐὰν ὁ Π' εἶναι πρῶτος, τὸ θεώρημα εἶναι ἀποδεδειγμένον· διότι τότε ὁ Α θὰ εἶναι γινόμενον τριῶν παραγόντων πρώτων, τῶν Δ, Δ', Π'. Ἐὰν δὲ ὁ Π' δὲν εἶναι πρῶτος, θὰ εἶναι γινόμενον πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ Δ' ἐπ' ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν Π'', ἐπομένως θὰ εἶναι $A = \Delta \times \Delta' \times \Delta'' \times \Pi''$.

Δυνάμεθα δὲ νὰ ἐξακολουθήσωμεν οὕτω μέχρις οὗ καὶ ὁ τελευταῖος παράγων εὑρεθῇ πρῶτος. Τοῦτο δὲ ἀναγκαίως θέλει συμβῆ· διότι οἱ ἀριθμοὶ Π, Π', Π'' προβαίνουσι πάντοτε ἐλαττούμενοι. Ἐὰν δὲ ἡ πρᾶξις δὲν ἐλάβηκεν πέρας, ἔπρεπεν ἀριθμὸς τις ἐλαττούμενος πάντοτε μηδέποτε νὰ μηδενίζηται· ὅπερ ἀδύνατον.

Σημειωτέον δὲ ὅτι οἱ διὰ Δ, Δ', Δ'' κτλ. παριστάμενοι ἀριθμοὶ δὲν εἶναι ἀναγκαίως διάφοροι ἀλλήλων, ἀλλὰ δύνανται τινὲς αὐτῶν, ἢ καὶ πάντες νὰ εἶναι ἴσοι ἀλλήλοις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ἐδόθη ὁ ἀριθμὸς 469848. Παρατηροῦμεν (79) ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ 2, ἐκτελοῦντες δὲ τὴν διαίρεσιν εὐρίσκομεν πηλίκον 84924.

Ἄρα ἔχομεν $469848 = 2 \times 84924$,

Ὁ 84924 διαιρεῖται πάλιν διὰ τοῦ 2, καὶ εἶναι

$$84924 = 2 \times 42462.$$

Ἄρα $469848 = 2 \times 2 \times 42462$.

Ἄρα ὁ ἀριθμὸς 469848 εἶναι γινόμενον τριῶν ἀριθμῶν πρῶτων, τοῦ 2, τοῦ 2, καὶ τοῦ 42462.

Ὁ 42462 διαιρεῖται πάλιν διὰ τοῦ 2, καὶ εὐρίσκομεν

$$42462 = 2 \times 21231.$$

Ἄρα $469848 = 2 \times 2 \times 2 \times 21231.$

Ὁ 21231 δὲν διαιρεῖται πλέον διὰ τοῦ 2, ἀλλὰ διαιρεῖται διὰ 3. Ἐκτελοῦντες δὲ τὴν διαίρεσιν εὐρίσκομεν τὸ πηλίκον 7077· ὥστε ἔχομεν $21231 = 3 \times 7077.$

Ἄρα $469848 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7077.$

Ὁ 7077 διαιρεῖται πάλιν διὰ 3, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι 2359. Ὡστε ἔχομεν

$$469848 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2359.$$

Ὁ 2359 δὲν διαιρεῖται πλέον διὰ 3· δὲν διαιρεῖται δὲ οὔτε διὰ 5 (79). Δοκιμάζοντες τὸν μετὰ τὸν 5 ἐρχόμενον πρῶτον ἀριθμὸν τὸν 7, εὐρίσκομεν ὅτι οὗτος διαιρεῖ τὸν 2359 καὶ δίδει πηλίκον 337· ὥστε ἔχομεν

$$469848 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 337.$$

Πρὶν δοκιμάσωμεν ἂν ὁ 337 διαιρῇται διὰ τοῦ 7 ἢ τοῦ μετ' αὐτὸν πρώτου τοῦ 11, ζητοῦμεν ἂν ὁ 337 περιέχεται ἐν τῷ πίνακι τῆς σελίδος 84. Ἐπειδὴ δὲ εὐρίσκομεν αὐτὸν ἐκεῖ, ὁ 337 εἶναι πρῶτος, καὶ ἡ ἀνάλυσις τοῦ 469848 εἰς πρῶτους παράγοντας ἐγένετο. Ἐχομεν δηλαδὴ

$$469848 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 337.$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἐξῆς·

469848	2
84924	2
42462	2
21231	3
7077	3
2359	7
337	337
4	

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Πρέπει νὰ δοκιμάζωμεν τὸν αὐτὸν διαιρέτην πολλάκις κατὰ συνέχειαν, ὅπως ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι τὸν 2 καὶ τὸν 3, μέχρις οὗ παύσῃ νὰ εἶναι διαιρέτης. Ἐκτοτε δὲ δὲν δοκιμάζομεν πλέον τὸν αὐτόν. Διότι ἐκάστου πη-

λίκου ὄντος διαιρέτου τῶν προηγουμένων πηλίκων, ἀριθμὸς μὴ διαιρῶν ἐν ἐξ αὐτῶν δὲν δύναται νὰ διαιρῇ τὰ ἐπόμενα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ἐάν ὁ ἀριθμὸς, περιῶ δὲν γνωρίζομεν ἂν εἶναι πρῶτος ἢ μὴ, εἶναι μεγαλείτερος τῶν περιεχομένων ἐν τῷ ἀνὰ χεῖρας πίνακι τῶν πρώτων ἀριθμῶν, δοκιμάζομεν διαιροῦντες αὐτὸν διαδοχικῶς διὰ τῶν ἐν τῷ πίνακι ἀριθμῶν. Ἐάν δὲ φθάσωμεν εἰς πρῶτον ἀριθμὸν, οὗ τὸ τετράγωνον εἶναι μεγαλείτερον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, καὶ μηδεμίᾳ τῶν διαιρέσεων γίγνηται ἀκριβῶς, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ δοκιμαζόμενος ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος.

Ἐάν παραδείγματος χάριν μᾶς δοθῇ ὁ ἀριθμὸς 1217, ὅστις ὑπερβαίνει τοὺς ἐν τῷ ἡμετέρῳ πίνακι (σελ. 81) ἀριθμοὺς, διαιροῦμεν αὐτὸν κατὰ σειρὰν διὰ τῶν τοῦ πίνακος πρώτων ἀριθμῶν, μέχρι τοῦ 37, οὗ τὸ τετράγωνον 1269 εἶναι μεγαλείτερον τοῦ 1217. Ἐπειδὴ δὲ δι' οὐδενὸς τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῶν μέχρι τοῦ 37 διαιρεῖται, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ 1217 εἶναι πρῶτος. Διότι ἐὰν ἐσχηματίζομεν πίνακα τῶν πρώτων ἀριθμῶν κατὰ τὴν ἐν ἐδαφίῳ 109 μέθοδον, ἀφοῦ ἠθέλομεν ἔχει διαγεγραμμένα τὰ πολλαπλάσια τῶν πρώτων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ 37, ὁ 1217 δὲν θὰ ἦτο διαγεγραμμένος, ὥς μὴ πολλαπλάσιος οὐδενὸς αὐτῶν, ἐπομένως κατὰ τὰ ἐκεῖ εἰρημένα εἶναι πρῶτος. Ἐννοοῦμεν δὲ ὅτι ἐφθάσαμεν εἰς ἀριθμὸν, οὗ τὸ τετράγωνον ὑπερβαίνει τὴν δοθέντα, ὅταν τὸ πηλίκον γεῖνη μικρότερον τοῦ διαιρέτου. Οἷον τοῦ πηλίκου τοῦ 1217 διὰ 37 ὄντος 32, εἶναι φανερόν ὅτι ὁ 1217 εἶναι μικρότερος τοῦ 37×37 .

Κατὰ ταῦτα διὰ τοῦ ἐν σελίδι 81 πίνακος δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν εἰς πρώτους παράγοντας πάντα ἀριθμὸν, τοῦ ὁποῖου οὐδεὶς τῶν πρώτων παραγόντων ὑπερβαίνει τὸν 1009.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. Ἐάν ὁ ἀριθμὸς, ὅστις πρόκειται νὰ ἀναλυθῇ εἰς πρώτους παράγοντας, εἶναι γινόμενον γνωστῶν παραγόντων ἢ φαίνεται ἐκ πρώτης ὀψεως τοιοῦτος ὢν, ἀναλύομεν χωριστὰ ἕκαστον τῶν παραγόντων εἰς τοὺς πρώτους

αὐτοῦ παράγοντας, καὶ σχηματίζομεν τὸ γινόμενον πάντων τῶν πρώτων τούτων παραγόντων.

Οἷον ἐὰν πρόκειται νὰ ἀναλυθῇ εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παραγόντας ὁ ἀριθμὸς 4000000, ἐπειδὴ οὗτος εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ $40 \times 40 \times 40 \times 40 \times 40 \times 40$, ὁ δὲ $40 = 2 \times 5$, γινόμενον, ἴσον τῷ ὁποίῳ εἶναι ὁ 4000000, θὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5 ἑκάτερον ἑξάκις· ἄρα $4000000 = 2^6 \times 5^6$. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 72000 εἶναι 72×1000 . Εὐρίσκομεν δὲ

$$72 = 2^3 \times 3^2, \quad 1000 = 2^3 \times 5^3. \quad \text{Ἄρα}$$

$$72000 = 2^3 \times 3^2 \times 2^3 \times 5^3 = 2^6 \times 3^2 \times 5^3.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 446 πᾶς ἀριθμὸς καθ' ἓνα μόνον τρόπον ἀναλύεται εἰς πρώτους παραγόντας.

Πότε ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἑτέρου.

448. **ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΑ'.** Διὰ τὰ τὰ εἶναι ἀριθμὸς τις διαιρετὸς δι' ἑτέρου πρέπει ὁ διαιρετέος νὰ περιέχῃ πάντα τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου, ἑκαστον μετ' ἐκθέτου μὴ ἐλάσσονος τοῦ ἐν τῷ διαιρέτῃ· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.

Διότι ἔταν ἡ διαίρεσις γίγνηται ἀκριβῶς, ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἐπομένως εἶναι τὸ γινόμενον πάντων τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ διαιρέτου, καὶ πάντων τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ πηλίκου. Ἄρα ὁ διαιρετέος περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παραγόντας τοῦ διαιρέτου, ἑκαστον μετ' ἐκθέτου μὴ ἐλάσσονος τοῦ ἐν τῷ διαιρέτῃ.

Τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ· δηλονότι ἐὰν ὁ διαιρετέος περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου, ἑκαστον μετ' ἐκθέτου μὴ ἐλάσσονος τοῦ ἐν τῷ διαιρέτῃ, ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς. Διότι τότε δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν τὸν διαιρετέον εἰς δύο παράγοντας, ἐξ ὧν ὁ ἕτερος νὰ εἶναι τὸ γινόμενον πάντων τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ διαιρέτου, ὁ δὲ

ἕτερος τὸ γινόμενον πάντων τῶν λοιπῶν πρώτων παραγόντων.

$$\text{Οἷον } \delta \quad 2^4 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 17$$

διαίρεται διὰ τοῦ $2^2 \times 5 \times 7^2 \times 11$.

Διότι ὁ πρῶτος περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ δευτέρου καὶ προσέτι τοὺς παράγοντας $2^2, 5^2, 17$ εἶναι ἄρα γινόμενον τῶν ἀριθμῶν $2^2 \times 5 \times 7^2 \times 11$ καὶ $2^2 \times 5^2 \times 17$.

Ἄρα ὁ πρῶτος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν διαίρεται διὰ τοῦ δευτέρου καὶ δίδει πηλίκον $2^2 \times 5^2 \times 17$.

*** Εὗρεσις πάντων τῶν διαιρετῶν δοθέντος
ἀριθμοῦ.**

119. Ἄς ἴδωμεν νῦν πῶς δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν πάντας τοὺς διαιρέτας δοθέντος ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ 792. Ἐπειδὴ ἕκαστος διαιρέτης τοῦ 792 εἶναι γινόμενον πρώτων τινῶν παραγόντων αὐτοῦ, πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ ἀναλύσωμεν αὐτὸν εἰς πρώτους παράγοντας.

$$\text{Εὐρίσκομεν δὲ ὅτι } 792 = 2^3 \times 3^2 \times 11.$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι πᾶς διαιρέτης τοῦ 792, συμπεριλαμβανομένης καὶ τῆς μονάδος καὶ αὐτοῦ τοῦ 792, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γινόμενον τριῶν παραγόντων, ὧν ὁ μὲν πρῶτος εἶναι εἷς τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 2^2 , 2^3 , ὁ δὲ δεύτερος εἷς τῶν ἀριθμῶν 1, 3, 3^2 καὶ ὁ τρίτος εἷς τῶν ἀριθμῶν 1, 11.

Ἐπομένως θέλωμεν εὑρεῖ πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ 792 σχηματίζοντες τὸν ἐξῆς πίνακα.

$$1, \quad 2, \quad 2^2, \quad 2^3$$

$$1, \quad 3, \quad 3^2,$$

$$1, \quad 11,$$

καὶ λαμβάνοντες τὰ γινόμενα, τὰ ὁποῖα εὐρίσκομεν πολλὰπλασιάζοντες ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας, ἔπειτα πάλιν ἕκαστον τῶν ἐξαγομένων τούτων ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης σειρᾶς.

Πολλὰπλασιάζοντες κατὰ πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς τῆς πρώ-

της σειρᾶς ἐφ' ἑκάστον τῆς δευτέρας, σχηματίζομεν τὸν ἐξῆς

πίνακα	1,	2,	2^2 ,	2^3 ,
	3,	2×3 ,	$2^2 \times 3$,	$2^3 \times 3$,
	3^2 ,	2×3^2 ,	$2^2 \times 3^2$,	$2^3 \times 3^2$.

Ἐπειτα πολλαπλασιάζοντες πάντας τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ πίνακος τούτου ἐφ' ἑκάστον τῆς τρίτης σειρᾶς τοῦ πρώτου πίνακος, λαμβάνομεν τὸν ἐξῆς·

1,	2,	2^2	2^3
3,	2×3 ,	$2^2 \times 3$,	$2^3 \times 3$,
3^2 ,	2×3^2 ,	$2^2 \times 3^2$,	$2^3 \times 3^2$,
11,	2×11 ,	$2^2 \times 11$,	$2^3 \times 11$,
3×11 ,	$2 \times 3 \times 11$,	$2^2 \times 3 \times 11$,	$2^3 \times 3 \times 11$,
$3^2 \times 11$,	$2 \times 3^2 \times 11$,	$2^2 \times 3^2 \times 11$,	$2^3 \times 3^2 \times 11$.

Ὁ πίναξ δὲ οὗτος περιέχει πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ 792.

Ἐκτελοῦντες δὲ τοὺς σεσημειωμένους πολλαπλασιασμοὺς εὐρίσκομεν·

1,	2,	4,	8,
3,	6,	12,	24,
9,	18,	36,	72,
11,	22,	44,	88,
33,	66,	132,	264,
99,	198,	396,	792.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἐξῆς κανόνα.

Ἵνα εὐρωμεν πάντας τοὺς διαιρέτας δοθέντος ἀριθμοῦ ἀναλέομεν αὐτὸν εἰς πρώτους παράγοντας, καὶ σχηματίζομεν πίνακα σθηκείμενον ἐκ τεσσούτων ὀρίζοντίων σειρῶν, ὅσοι εἶναι οἱ διάφοροι πρώτοι παράγοντες, οὗς περιέχει ὁ δεδομένος ἀριθμός. Ἐκάστη δὲ τῶν σειρῶν τούτων ἀποτελεῖται ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ πασῶν τῶν δυνάμεων ἐνός τιος τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς ἐν τῷ ἀριθμῷ περιεχομένης.

Ἐπειτα π.λ.λ.π.λ.α.σ.ι.ά.ζ.ο.μ.ε.ν ἑ.π.α.ρ.τ.ι.α.ς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἑκάστον τῆς δευτέρας, ἔπειτα ἑκάστον τῶν γινόμενων τούτων ἐφ' ἑκάστον τῆς τρίτης, καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὰ τελευταῖα γινόμενα, τὰ ὅποια εὐρίσκομεν π.λ.λ.π.λ.α.σ.ι.ά.ζ.ο.ν.τ.ε.ς ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πίνακος, εἶναι πάντες οἱ ζητούμενοι διαιρέται.

Εὗρεσις τοῦ μεγίστου κοινου διαιρέτου ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.

120. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἴνα εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον πάντων τῶν πρώτων παραγόντων, οἵτινες εἶναι κοινοὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων, λαμβανομένων ἐκάστου μετὰ τοῦ ἐλαχίστου τῶν ἐκθειῶν, οὗς ἔχει ἐν ταῖς διαθόροις ἀριθμοῖς.

Ἐστωσαν ἀριθμοὶ ἀναλελυμένοι εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας οἱ

$$11088 = 2^4 \times 3^2 \times 7 \times 11,$$

$$26460 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7^2,$$

$$6552 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 13.$$

Κοινοὶ πρώτοι παράγοντες τῶν ἀριθμῶν τούτων βλέπομεν ὅτι εἶναι οἱ 2, 3, 7, καὶ ἐλαχίστη δύναμις τῶν μὲν 2 καὶ 3 ἡ δευτέρα, τοῦ δὲ 7 ἡ πρώτη. Λέγω ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ὁ $2^2 \times 3^2 \times 7$, ἥτοι ὁ ἀριθμὸς 252.

α.) Εἶναι κοινὸς διαιρέτης ὁ $2^2 \times 3^2 \times 7$ · διότι πάντες οἱ πρώτοι παράγοντες αὐτοῦ περιέχονται ἐν πᾶσι τοῖς δοθεῖσιν ἀριθμοῖς μετ' ἐκθέτου μὴ ἐλάττονος (148).

β.) Εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Διότι διὰ νὰ εἶναι ἀριθμὸς τις κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν δὲν πρέπει νὰ περιέχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας ἢ τοὺς κοινούς ἐν πᾶσι 2, 3, 7, τοὺς μὲν 2 καὶ 3 μετ' ἐκθέτου μὴ ὑπερβαίνοντος

τὸν 2, τὸν δὲ 7 μὲν ἐκθέτου μὴ ὑπερβαίνοντος τὴν μονάδα (118). Δὲν ὑπάρχει ἄρα κοινὸς διαιρέτης μεγαλείτερος τοῦ $2^2 \times 3^2 \times 7$ · διότι οὔτε ἄλλοι πρῶτοι παράγοντες πρὸς τοὺς 2, 3, 7 δύνανται νὰ προσληφθῶσιν, οὔτε τούτων μεγαλείτεραι δυνάμεις τῶν ἐν τῷ $2^2 \times 3^2 \times 7$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ ἐτέρου αὐτῶν δι' ἀριθμοῦ πρῶτου πρὸς τὸν ἕτερον.

Διότι οὕτως οὔτε εἰσάγεται κοινὸς τις πρῶτος παράγων, οὔτε ἐξαλείφεται.

Περὶ τοῦ ἐλάχιστου κοινοῦ πολλαπλασίου.

121. Ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ δύο ἢ πολλῶν ἄλλων ἀριθμῶν καλεῖται κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν· οἷον ὁ 48 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 3, 6, 8.

Εἶναι φανερόν ὅτι δοθέντων ἀριθμῶν, οἷον τῶν 3, 6, 8, ὑπάρχουσιν ἄπειρα τὸ πλῆθος κοινὰ πολλαπλάσια. Διότι τὸ γινόμενον αὐτῶν $3 \times 6 \times 8$, ἥτοι ὁ ἀριθμὸς 144, καὶ πᾶν τούτου πολλαπλάσιον εἶναι διαιρετὸν δι' αὐτῶν. Ἀλλ' οὐδὲν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 3, 6, 8 δύναται νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ μεγίστου τούτων τοῦ 8· ἄρα ὑπάρχει πολλαπλάσιόν τι κοινὸν μικρότερον πάντων τῶν λοιπῶν, καλεῖται δὲ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

122. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρῶτους αὐτῶν παράγοντας σχηματίζομεν τὸ γινόμενον πάντων τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς τούτοις περιεχομένων πρῶτων παραγόντων, λαμβανομένων ἐκάστου μετὰ τοῦ μεγίστου τῶν ἐκθετῶν αὐτοῦ.

Ἐστῶσαν ἀριθμοὶ ἀναλελυμένοι εἰς τοὺς πρῶτους αὐτῶν παράγοντας οἱ ἐξῆς·

$$38500 = 2^2 \times 5^3 \times 7 \times 11$$

$$35280 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$$

$$3640 = 2^3 \times 5 \times 7 \times 13$$

Λέγω ὅτι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶναι

$$2^1 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13.$$

α.) Εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ ἀριθμὸς οὗτος· διότι περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν μετ' ἐκθέτου μὴ ἐλάσσονος (118).

β'.) Εἶναι τὸ ἐλάχιστον τῶν κοινῶν πολλαπλασίων.

Διότι πᾶν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν πρέπει νὰ περιέχῃ τοὺς ἐν ἐκάστῳ αὐτῶν εὐρισκομένους πρώτους παράγοντας μετ' ἐκθέτου μὴ ἐλάσσονος, πρέπει λοιπὸν νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας, $2^1, 3^2, 5^3, 7^2, 11, 13$. Ἄρα τὸ γινόμενον μόνων τῶν παραγόντων τούτων, ὧν οὐδεὶς δύναται νὰ λείψῃ ἐκ παντὸς κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν.

123. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πᾶρ κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσότερων ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.

Διότι κατὰ τὰ ἀνωτέρω πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν περιέχει πάντας τοὺς παράγοντας, ὧν τὸ γινόμενον εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν, ἐπομένως εἶναι διαιρετὸν διὰ τούτου.

124. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Διότι οὐδεὶς τῶν πρώτων παραγόντων ἐκάστου τῶν ἀριθμῶν τούτων εὐρίσκεται καὶ ἐν ταῖς λοιπαῖς. Διὰ τοῦτο τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν θὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας ἐκάστου τῶν ἀριθμῶν μετὰ τῶν ἐκθετῶν οὓς ἔχουσιν. Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν πάντας τοὺς παράγοντας ἐκάστου τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν θὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν.

125. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' ἁλλῶν ἀριθμῶν

πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Ἐστω ἀριθμὸς ὁ K διαιρετὸς διὰ τῶν A, B, Γ , πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο· λέγω ὅτι ὁ K διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ $A \times B \times \Gamma$.

Διότι ὁ K ἔξ ὑποθέσεως εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν A, B, Γ · ἄρα θὰ εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τούτων $A \times B \times \Gamma$ (123), ἥτοι ὁ K θὰ εἶναι διαιρετὸς δι' $A \times B \times \Gamma$.

126. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ γινόμενον τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Ἐστω M ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης καὶ Π τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν A, B · λέγω ὅτι

$$M \times \Pi = A \times B.$$

Διότι ἐὰν ἀναλύσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς A καὶ B εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, καὶ σχηματίσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα (120 καὶ 122), τῶν κοινῶν τοῦ A καὶ B πρώτων παραγόντων ἡ μὲν μικροτέρα δύναμις θὰ περιέχεται ἐν τῷ M , ἡ δὲ μεγαλειτέρα ἐν τῷ Π · οἱ δὲ μὴ κοινοὶ παράγοντες θὰ περιέχωνται πάντες μετὰ τοῦ ἐκθέτου αὐτῶν ἐν τῷ Π . Ἄρα οἱ πρώτοι παράγοντες τῶν ἀριθμῶν A καὶ B εὐρίσκονται πάντες ἐν τοῖς M, Π , καὶ μόνοι αὐτοί.

Ἄρα $M \times \Pi = A \times B$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἀνάμεθα γὰρ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἀριθμῶν διαιροῦντες τὸ γινόμενον τούτων διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ, διαιροῦντες τὸν ἕτερον τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, καὶ πολλαπλασιάζοντες τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν ἕτερον.

Διότι ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ ἴσα γινόμενα $M \times \Pi$ καὶ $A \times B$ διὰ M θὰ λάβωμεν $\Pi = A \times B : M$. Ἐὰν δὲ καλέσωμεν A' τὸ πηλίκον $A : M$, θὰ ἔχωμεν $\Pi = A' \times B$ (68 Πόρ.).

125. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικαταστήθῃσι δύο οἰοιδήποτε ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ ἐλάχιστου κοινοῦ πολλαπλάσιου αὐτῶν.

Ἐστωσαν ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, Δ , καὶ Π τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δύο πρώτων· λέγω ὅτι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ τῶν ἀριθμῶν Π, Γ, Δ .

Διότι πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν A, B, Γ, Δ , ὡς πολλαπλάσιον τοῦ A καὶ B , εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τοῦ ἐλάχιστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν Π · εἶναι ἄρα κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Π, Γ, Δ . Ἀντιστρόφως πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Π, Γ, Δ , ὡς πολλαπλάσιον τοῦ Π , εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ A καὶ B , ὅτινες εἶναι διαιρέται αὐτοῦ· ἄρα εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν, A, B, Γ, Δ .

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ A, B, Γ, Δ ἔχουσι τὰ αὐτὰ καὶ οἱ Π, Γ, Δ κοινὰ πολλαπλάσια· ἄρα ἔχουσι καὶ τὸ αὐτὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

Ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν A, B, Γ, Δ ὡς ἐξ ἧς· εὐρίσκομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ A καὶ B , ἔστω δὲ Π · ἔπειτα τὸ τοῦ Π καὶ Γ , ὅπερ ἔστω P · τέλος δὲ τοῦ P καὶ Δ , ὅπερ ἔστω Σ · ὁ ἀριθμὸς Σ εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν A, B, Γ, Δ .

Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὕρεσις τοῦ ἐλάχιστου κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν ἀριθμῶν A καὶ B, Π καὶ Γ, P καὶ Δ , δύναται νὰ γείνη διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου ἄνευ τῆς ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας, βλέπομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν

τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ὅσωνδήποτε ἀριθμῶν διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

α.) Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς, ἐξαιρουμένου τοῦ 2, εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 4 ἢ ὑψημένον ἢ ἡλαττωμένον κατὰ μονάδα.

β.) Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς, ἐξαιρουμένων τοῦ 2 καὶ 3, εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 6 ἢ ὑψημένον ἢ ἡλαττωμένον κατὰ μονάδα.

γ.) Τὸ γινόμενον τριῶν ἐφεξῆς ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε διαιρετὸν δι' 6.

δ.) Τοῦ n παριστῶντος οἷονδήποτε ἀριθμὸν τὸ γινόμενον

$$n \times (n+1) \times (2n+1) =$$

εἶναι πάντοτε διαιρετὸν δι' 6.

ε.) Ἐὰν εἶναι γεγραμμένοι ἐφεξῆς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ στίχου πάντες οἱ διαίρεται ἀριθμοὺ κατὰ τὴν τάξιν τοῦ μεγέθους αὐτῶν, τὸ γινόμενον δύο διαιρετῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων θὰ εἶναι ἴσον τῷ ἀριθμῷ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι.

128. Καλεῖται ποσὸν πᾶν τὸ ἐπιδεχόμενον αὐξήσιν καὶ ἐλάττωσιν· οἷον τὰ μήκη, αἱ ἐπιφάνειαι, οἱ ὄγκοι, τὸ βάρος τῶν σωμάτων, ὁ χρόνος εἶναι ποσά.

Ἐάν ποσόν τι περιέχῃ δευτέρον τι ὁμοειδὲς ποσὸν ἀκριβῶς δις, τρίς, τετράκις κτλ., λέγομεν ὅτι τὸ πρῶτον εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ δεύτερον ὑποπολλαπλάσιον ἢ πολλοστὸν τοῦ πρῶτου.

Καλεῖται μονάς ποσόν τι αὐθαιρέτως λαμβανομενον, ἀλλ' ἐντελῶς γνωστὸν, δι' οὗ καταμετροῦμεν τὰ ὁμοειδῆ αὐτῷ ποσά.

Καταμετρῷ ποσὸν σημαίνει ζητῶ καὶ εὐρίσκω πόσας μονάδας καὶ πόσα μέρη πολλοστὰ τῆς μονάδος περιέχει τὸ ποσὸν τοῦτο. Ἡ δὲ τὸ ἐξαγόμενον τῆς καταμετρήσεως ἐκφράζουσα ἔννοια καλεῖται ἀριθμός.

Καὶ ὅταν μὲν τὸ ποσὸν εἶναι πολλαπλάσιον τῆς μονάδος, ὁ ἐκφράζων αὐτὸ ἀριθμὸς καλεῖται ἀκέραιος. Τοιοῦτοι δὲ εἶναι οἱ ἀριθμοί, περὶ ὧν ἐπραγματεύθημεν μέχρι τοῦδε, θεωροῦντες αὐτοὺς ὡς συλλογὴν ὁμοίων ἀλλὰ διακεκριμένων πραγμάτων.

Ὅταν δὲ τὸ ποσὸν εἶναι πολλαπλάσιον πολλοστοῦ τινος τῆς μονάδος, ὁ ἐκφράζων αὐτὸ ἀριθμὸς καλεῖται κλασματικός ἀριθμὸς ἢ κλάσμα. Οἷον ἐάν ποσόν τι περιέχῃ πεντάκις τὸ ἑβδομον τῆς μονάδος, τὸ ποσὸν τοῦτο ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ πέντε ἑβδομα (1).

(1) Δυνατὸν νὰ συμβῇ ποσόν τι νὰ μὴ εἶναι πολλαπλάσιον μήτε τῆς μονάδος, μήτε πολλοστοῦ αὐτῆς, οἷον ὅποτε πολλοστὸν καὶ ἂν

Μαθηματική καλεῖται ἡ περὶ τῶν ποσῶν πραγματευομένη ἐπιστήμη· ἡ δὲ ἀριθμητικὴ εἶναι τὸ πρῶτον αὐτῆς μέρος.

Περὶ τῶν κλασμάτων.

129. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα τὸ κλάσμα εἶναι πολλαπλάσιον πολλοστοῦ τινος τῆς μονάδος.

Ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅστις ἐκφράζει εἰς πόσα ἴσα μέρη διηρέθη ἡ μονάς, ὧν ἓν εἶναι τὸ πολλοστόν, καλεῖται παρονομαστής τοῦ κλάσματος· ὁ δὲ ἀκέραιος, ὅστις ἐκφράζει πόσων τοιούτων πολλοστῶν ἄθροισμα εἶναι τὸ κλάσμα, καλεῖται ἀριθμητής. Ὁ ἀριθμητής καὶ ὁ παρονομαστής καλοῦνται ὅροι τοῦ κλάσματος.

Γράφομεν δὲ κλάσμα γράφοντες τὸν παρονομαστήν ὑπὸ τὸν ἀριθμητήν, καὶ χωρίζοντες αὐτοὺς διὰ γραμμῆς ὀριζοντίου· οἷον $\frac{5}{7}$ εἶναι κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητής εἶναι 5 ὁ δὲ παρονομαστής 7.

Ἵνα ἀπαγγείλωμεν κλάσμα ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητήν ὡς ἀριθμητικὸν ἀπόλυτον ὄνομα, καὶ ἔπειτα τὸν παρονομαστήν ὡς τακτικόν· οἷον $\frac{5}{7}$ ἀναγινώσκεται πέντε ἑβδομα· $\frac{723}{423}$ ἀναγινώσκεται ἑβδομηκοντα δύο τετρακοσιοστά εἰκοστά τρίτα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἶναι φανερόν ὅτι κλάσματι εἶναι μικρότερον, ἢ ἴσον, ἢ μεγαλείτερον τῆς μονάδος, καθ' ὅσον ὁ ἀριθμητής αὐτοῦ εἶναι μικρότερος, ἢ ἴσος, ἢ μεγαλείτερος τοῦ παρονομαστοῦ.

130. Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται τὰ παρασταθῆ καὶ ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστήν δοθέντα ἀριθμόν.

Λέγω παραδείγματος χάριν ὅτι ὁ 5 δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ κλάσματος ἔχοντος παρονομαστήν τὸν 7. Διότι ἡ μονάς εἶναι ἴση μὲ 7 ἑβδομα· ἄρα 5 μονάδες εἶναι πεντάκις 7 ἑβδομα, ἦτοι 35 ἑβδομα· ἔχομεν λοιπὸν

$$5 = \frac{7 \times 5}{7} = \frac{35}{7}.$$

ληφθῆ. Ἐκ τῆς καταμετρήσεως τῶν τοιούτων ποσῶν γεννῶνται οἱ καλούμενοι ἀσύνθετοι ἀριθμοί, περὶ ὧν θὰ γένη λόγος ἀλλαγῆ (ἴδε γεωμετρίαν μου, τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου βιβλίου).



Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·
 "Ἴνα τρέψωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς κλασματικὸν ἔχοντα παρονομαστήν, δοθέντα τινα ἀριθμὸν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστὴν τὸν αὐτόν.

131. Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος εἶναι μεγαλείτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλείτερον τῆς μονάδος. Δυνάμεθα δὲ τότε νὰ ἐξαγάγωμεν τὸν ἐν τῷ κλασματικῷ περιεχόμενον ἀκέραιον, δηλαδή νὰ ἀναλύσωμεν τὸν κλασματικὸν εἰς ἀκέραιον καὶ εἰς κλάσμα μικρότερον τῆς μονάδος.

Ἄς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι ἔχομεν τὸν κλασματικὸν $\frac{26}{7}$. Ἐπειδὴ $\frac{7}{7}$ εἶναι μία ἀκεραία μονάς, ὁ $\frac{26}{7}$ περιέχει τόσας μονάδας, ὅσαςκις ὁ 7 περιέχεται ἐν τῷ 26. Ἐπειδὴ δὲ περιέχεται τρεῖς μετὰ τοῦ ὑπολοίπου 5, ἔχομεν

$$\frac{26}{7} = 3 + \frac{5}{7}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

"Ἴνα ἐξαγάγωμεν τὸν ἐν κλασματικῷ περιεχόμενον ἀκέραιον, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ εἰς τὸ εὔρεθὲν πηλίκον προσθέτομεν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης, καὶ παρονομαστὴν τὸν τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερόν ὅτι ὅταν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος διαιρῇται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον ἀκεραίῳ ἀριθμῷ· οἷον $\frac{28}{7} = 4$.

132. Ἀντιστρόφως, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν διὰ κλασματικοῦ ἀριθμὸν συγχείμενον ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος, ὅστις καλεῖται μικτὸς ἀριθμός. Ἄς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν μικτὸν $3 + \frac{5}{7}$. Ἐπειδὴ ὁ ἀκέραιος 3 εἶναι ἴσος μὲ $\frac{21}{7}$, 21 δὲ ἑβδόμα καὶ 5 ἑβδόμα ἀποτελοῦσι προφανῶς 26 ἑβδόμα, ἔχομεν $3 + \frac{5}{7} = \frac{21}{7} + \frac{5}{7} = \frac{26}{7}$.

*Αρα ἵνα τρέψωμεν μικτὸν εἰς κλάσματικὸν πολλαπλασιαζόμεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητὴν, καὶ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα γράφομεν παρονομαστήν τὸν τοῦ κλάσματος.

Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

133. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος γείνη δις, τρίς, τετράκις κτ.λ. μεγαλειότερος ἢ μικρότερος, τὸ κλάσμα γίνεται δις, τρίς, τετράκις κτ.λ. μεγαλειότερον ἢ μικρότερον.

*Ὡς λάβωμεν τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ λέγω ὅτι ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ᾖ γείνη τετράκις μεγαλειότερος, τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{20}{7}$ εἶναι τετράκις μεγαλειότερον τοῦ $\frac{5}{7}$.

Διότι ἀμφότερα τὰ κλάσματα ταῦτα συνίστανται ἐξ ἑβδόμων, καὶ τὸ μὲν πρῶτον περιέχει ὅσον αὐτῶν, τὸ δὲ δεύτερον ὅσον 4 ἥτοι τετραπλάσιον ἀριθμὸν· ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{20}{7}$ εἶναι τετράκις μεγαλειότερον τοῦ $\frac{5}{7}$.

Τοῦ κλάσματος $\frac{20}{7}$ ὄντος τετράκις μεγαλειότερου τοῦ $\frac{5}{7}$, τὸ $\frac{5}{7}$ εἶναι τετράκις μικρότερον τοῦ $\frac{20}{7}$. *Αρα τὸ κλάσμα $\frac{20}{7}$ διαιρουμένου τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ διὰ 4 γίνεται τετράκις μικρότερον.

134. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πᾶν κλάσμα εἶναι ἀριθμὸς τοσάκις μικρότερος τοῦ ἀριθμητοῦ, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ παρονομαστοῦ.

Λέγω παραδείγματος χάριν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ εἶναι ἀριθμὸς ἐπτάκις μικρότερος τοῦ 7, ἥτοι τὸ ἑβδόμον τοῦ 5.

Διότι ὁ ἀκέραιος 5 εἶναι ἴσος μὲν $\frac{35}{7}$ · ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ $\frac{35}{7}$ δι' 7, λαμβάνομεν τὸν ἐπτάκις μικρότερον ἀριθμὸν $\frac{5}{7}$. *Αρα ὁ $\frac{5}{7}$ εἶναι ἀριθμὸς ἐπτάκις μικρότερος τοῦ $\frac{35}{7}$ ἥτοι τοῦ 5· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

135. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἡ ἀξία κλάσματος δὲν μεταβάλλεται πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων ἀμφοτέρων τῶν ὄρων αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

*Ὡς λάβωμεν κατὰ πρῶτον κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὴν μονάδα, οἶον τὸ $\frac{1}{7}$ λέγω ὅτι ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὄροι αὐτοῦ πολ-

λαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 4, τὸ παραγόμενον κλάσμα $\frac{4}{28}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{1}{7}$, τουτέστι τὰ δύο ταῦτα κλάσματα εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα ἀναφερόμενα παριστῶσι ποσά ἴσα. Διότι τῆς μονάδος οὔσης διηρημένης εἰς 7 ἴσα μέρη, ἦτοι ἑβδομα, ἐὰν ἕκαστον τῶν ἑβδομῶν ὑποδιαιρεθῇ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, ἡ ὅλη μονὰς θὰ διαιρεθῇ εἰς 28 ἴσα μέρη, τὰ ὅποια θὰ εἶναι εἰκοστά ὄγδοα αὐτῆς· ἄρα τὸ ἑβδομον τῆς μονάδος ἰσοδυναμεῖ μετὰ τέσσαρα εἰκοστά ὄγδοα αὐτῆς, ἦτοι $\frac{1}{7} = \frac{4}{28}$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄς λάβωμεν ἤδη κλάσμα οἷον δὴ ποτε, τὸ $\frac{5}{7}$ · λέγω ὅτι $\frac{5}{7} = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = \frac{20}{28}$. Διότι κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\frac{1}{7} = \frac{4}{28}$. Ἄρα τὸ πενταπλάσιον τοῦ $\frac{1}{7}$ εἶναι ἴσον τῷ πενταπλάσιῳ τοῦ $\frac{4}{28}$. Ἀλλὰ τὸ πενταπλάσιον τοῦ μὲν $\frac{1}{7}$ εἶναι $\frac{5}{7}$, τοῦ δὲ $\frac{4}{28}$ εἶναι $\frac{20}{28}$.

Ἄρα $\frac{5}{7} = \frac{20}{28} = \frac{5 \times 4}{7 \times 4}$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄς λάβωμεν τέλος κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην, οἷον τὸ $\frac{5}{21}$. λέγω ὅτι ἐὰν οἱ ὅροι αὐτοῦ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν διαιρέτου 3, τὸ παραγόμενον κλάσμα $\frac{5}{7}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{5}{21}$.

Διότι ἐὰν ἀμφοτέρω οἱ ὅροι τοῦ $\frac{5}{21}$ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 3, θὰ παραχθῇ κλάσμα ἴσον τῷ $\frac{5}{21}$ · ἄρα $\frac{5}{21} = \frac{5}{7}$.

136. **ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.** Ἐὰν κάμωμεν τὸν παρονομαστήν κλάσματος δις, τρίς, τετράκις κτλ. μεγαλύτερον ἢ μικρότερον, τὸ κλάσμα γίνεται δις, τρίς, τετράκις κτλ. μικρότερον ἢ μεγαλύτερον.

Λέγω παραδείγματος χάριν ὅτι ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{5}{7}$ ἐπὶ 4, τὸ παραγόμενον κλά-

σμα $\frac{5}{7 \times 4}$, ἦτοι $\frac{5}{28}$ εἶναι τετράκις μικρότερον τοῦ $\frac{5}{7}$.

Διότι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα $\frac{5}{7} = \frac{5 \times 4}{7 \times 4}$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν διὰ 4 τὸν ἀριθμητὴν τοῦ $\frac{5 \times 4}{7 \times 4}$, θὰ λάβωμεν κλάσμα τετράκις μικρότερον τὸ $\frac{5}{7 \times 4}$. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ

$\frac{5}{7 \times 4}$ εἶναι τετράκις μικρότερον τοῦ $\frac{5 \times 4}{7 \times 4}$ ὅα εἶναι καὶ τοῦ ἴσου τούτῳ $\frac{5}{7}$ τετράκις μικρότερον.

Τοῦ κλάσματος $\frac{5}{7 \times 4}$ ὄντος τετράκις μικροτέρου τοῦ $\frac{5}{7}$, τὸ $\frac{5}{7}$ εἶναι τετράκις μεγαλείτερον τοῦ $\frac{5}{7 \times 4}$, ἐκ τοῦ ὁποίου παράγεται διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ παρονομαστοῦ διὰ 4.

Ἀπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

137. Ὅταν οἱ ὅροι κλάσματος ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην, διαιροῦντες αὐτοὺς διὰ τούτου λαμβάνομεν κλάσμα ἴσον καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους· ἡ τοιαύτη πράξις καλεῖται ἀπλοποίησης τοῦ κλάσματος.

Ἐὰν ἡ διαίρεσις τῶν ὁρῶν τοῦ κλάσματος γείνη διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, οἱ ὅροι τοῦ προκύπτοντος κλάσματος εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (104)· τὸ τοιοῦτα δὲ κλάσμα καλεῖται ἀνηγμένον εἰς τοὺς ἐλαχίστους ὅρους ἢ ἀνάγωγον, διότι δὲν ὑπάρχει κλάσμα ἴσον αὐτῷ καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους, ὡς δεικνύεται ἐν τῷ ἐξῆς θεωρήματι.

138. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι ἀνάγωγον, δη. λαδὴ δὲν ὑπάρχει ἄλλο κλάσμα ἴσον αὐτῷ καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους.

Ἐστω κλάσμα ἔχον τοὺς ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους τὸ $\frac{8}{15}$, καὶ κλάσμα ἴσον αὐτῷ τὸ $\frac{a}{6}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἄμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ 6, τοὺς δὲ τοῦ δευτέρου ἐπὶ 15, ἡ ἀξία τῶν κλασμάτων δὲν θέλει μεταβληθῇ, ἐπομένως τὰ κλάσματα

$$\frac{8 \times 6}{15 \times 6}, \quad \frac{a \times 15}{6 \times 15}$$

θὰ εἶναι ἴσα. Ἐπειδὴ δὲ ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἀναγκάως καὶ οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν εἶναι ἴσοι, δηλοῦσι

$$8 \times 6 = a \times 15.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 8 διαιρεῖ τὸ γινόμενον 8×6 , θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον αὐτῷ $\alpha \times 15$ · ὡς πρῶτος δὲ πρὸς τὸν παράγοντα 15 θὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον παράγοντα α (103). Καλοῦντες δὲ π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α δι' 8, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha = 8 \times \pi.$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ ἐν τῇ ἰσότητι $8 \times 6 = \alpha \times 15$ τὸν α διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $8 \times \pi$, λαμβάνομεν

$$8 \times 6 = 8 \times \pi \times 15.$$

Τέλος διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα γινόμενα δι' 8 εὐρίσκομεν

$$6 = \pi \times 15.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι παντὸς κλάσματος ἴσου τῷ $\frac{8}{15}$ αἱ ἄροι α , β εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιοι τῶν τοῦ $\frac{8}{15}$ · ἄρα δὲν δύνανται νὰ εἶναι μικρότεροι αὐτῶν. Ἄρα δὲν ὑπάρχει κλάσμα ἴσον τῷ ἔχοντι τοὺς ἄρους πρῶτους πρὸς ἀλλήλους κλάσματι $\frac{8}{15}$ καὶ ἔχον ὄρους μικροτέρους τῶν ἄρων τούτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

139. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶναι ἴσα, θὰ ἔχωσι καὶ τοὺς ὄρους αὐτῶν ἴσους, τὸν ἀριθμητὴν τῷ ἀριθμητῇ καὶ τὸν παρονομαστῇ τῷ παρονομαστῇ.

Διότι κατὰ τὰ ἀνωτέρω δειχθέντα πᾶν κλάσμα ἴσον τῷ ἀνάγωγῳ κλάσματι $\frac{8}{15}$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{8 \times \pi}{15 \times \pi}$. Διὰ νὰ

εἶναι δὲ καὶ τοῦτο ἀνάγωγον πρέπει ὁ π νὰ εἶναι ἴσος τῇ μονάδι· τότε δὲ τὸ δεύτερον κλάσμα ἔχει τοὺς αὐτοὺς καὶ τὸ πρῶτον ὄρους.

140. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Πάντα τὰ ἴσα ἀλλήλοις κλάσματα προέρχονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ὃ οἱ ὄροι ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν.

Ἀναγωγή τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

141. Ἀναγωγή κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν εἶναι ἡ εὕρεσις ἄλλων κλασμάτων ἴσων αὐτοῖς καὶ ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν.

Γίνεται δὲ ἡ ἀναγωγή αὕτη κατὰ τοὺς ἐξῆς κανόνας.

α.) "Ιτα ἀναγάγωμεν δύο κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, πολλαπλασιαζόμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκάτερου αὐτῶν ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ ἑτέρου.

Διότι τὰ οὕτω σχηματιζόμενα κλάσματα εἶναι ἴσα τοῖς δεδομένοις (135), ἔχουσι δὲ ἀμφοτέρω τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἦτοι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν δεδομένων κλασμάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἐφαρμόζοντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα εἰς τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$,

εὐρίσκομεν τὰ $\frac{5 \times 4}{7 \times 4}$, $\frac{3 \times 7}{4 \times 7}$, ἢ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πολλαπλασιασμῶν, $\frac{20}{28}$, $\frac{21}{28}$.

β.) "Ιτα ἀναγάγωμεν τρία ἢ περισσότερα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν πάντων τῶν λοιπῶν.

Διότι τὰ οὕτω σχηματιζόμενα κλάσματα εἶναι ἴσα τοῖς δεδομένοις (135), ἔχουσι δὲ καὶ παρονομαστήν τὸν αὐτὸν, τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν τῶν δεδομένων κλασμάτων.

Ἐφαρμόζοντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα εἰς τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{8}{11},$$

λαμβάνομεν τὰ

$$\frac{2 \times 7 \times 11}{3 \times 7 \times 11}, \quad \frac{5 \times 3 \times 11}{7 \times 3 \times 11}, \quad \frac{8 \times 3 \times 7}{11 \times 3 \times 7},$$

ἢ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πολλαπλασιασμῶν,

$$\frac{154}{231}, \quad \frac{165}{231}, \quad \frac{168}{231}.$$

γ.) Ἐὰν ἔχωμεν κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων, διαιροῦμεν αὐτὸ διαδοχικῶς διὰ τῶν παρονομαστῶν τούτων καὶ ἐπὶ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἑκάστον αὐτῶν πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ.

Ἐστῶσαν τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, καὶ κοινὸν
 πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν ὁ 48· διαιροῦντες
 τοῦτον διὰ τῶν παρονομαστῶν 8, 6, 12 καὶ ἐπὶ τὰ πη-
 λικά 6, 8, 4 πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους
 τῶν ἀντιστοιχοῦντων κλασμάτων λαμβάνομεν τὰ κλάσματα.

$$\frac{18}{48}, \quad \frac{40}{48}, \quad \frac{28}{48}.$$

Συμβαίνει δὲ νὰ ἔχῃσι πάντα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν,
 διότι ἕκαστος παρονομαστῆς ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸ εἰς
 αὐτὸν ὡς διαιρέτην ἀντιστοιχοῦν πηλίκον· πασῶν δὲ τῶν
 διαιρέσεων ὁ διαιρετέος εἶναι ὁ αὐτός, ὁ 48.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν εἷς τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων
 κλασμάτων εἶναι διαιρετὸς διὰ τῶν λοιπῶν, δυνάμεθα νὰ
 καταστήσωμεν αὐτὸν κοινὸν παρονομαστὴν κατὰ τὸν ἄνω-
 τέρῳ κανόνα (γ').

Παραδείγματος χάριν τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{11}{24},$$

ἐν οἷς ὁ παρονομαστῆς 24 διαιρεῖται διὰ τῶν λοιπῶν, τρέπονται

$$\text{εἰς τὰ } \frac{8}{24}, \quad \frac{9}{24}, \quad \frac{20}{24}, \quad \frac{11}{24}, \quad \frac{11}{24}.$$

* 142. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστῆς,
 εἰς ὃν δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν δοθέντα κλάσματα, εἶναι
 τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν
 τῶν κλασμάτων τούτων ἀναγῶν γεομέων.

Διότι ὁ παρονομαστῆς παντὸς κλάσματος ἴσου μὲ κλάσμα
 ἀνάγωγον εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ τούτου (140).
 Ἐὰν λοιπὸν καταστήσωμεν ἀνάγωγα τὰ δοθέντα κλάσματα,
 ὅταν ταῦτα ἀναχθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, οὗτος θὰ
 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον πάντων τῶν παρονομαστῶν τῶν
 ἀναγῶν κλασμάτων, ἐπομένως δὲν δύναται νὰ εἶναι μι-
 κρότερος τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν. Ἐὰν
 ἄρα δώσωμεν εἰς τὰ κλάσματα κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ἐ-

λάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν (γ'), οὗτος θὰ εἶναι ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής.

* Ἀς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι μᾶς ἐδόθησαν τὰ κλάσματα $\frac{4}{10}$, $\frac{9}{24}$, $\frac{35}{80}$, $\frac{7}{42}$.

Ἐὰν καταστήσωμεν αὐτὰ ἀνάγωγα λαμβάνομεν τὰ $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{1}{6}$.

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων τούτων εἶναι ὁ 240, καὶ ἀνάγοντες αὐτὰ εἰς τὸν παρονομαστὴν τοῦτον (γ') λαμβάνομεν τὰ κλάσματα $\frac{96}{240}$, $\frac{90}{240}$, $\frac{105}{240}$, $\frac{40}{240}$.

Ταῦτα δὲ εἶναι τὰ ἴσα μὲ τὰ δοθέντα καὶ ἔχοντα τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστὴν κλάσματα.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Α'. Πρόσθεσις.

143. Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς εὐρίσκομεν ἀριθμὸν περιέχοντα πάσας τὰς μονάδας καὶ τὰ πολλαπλά μέρη μονάδος δύο ἢ περισσοτέρων δοθέντων ἀριθμῶν.

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καλοῦνται προσθετέοι, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως καλεῖται ἄθροισμα ἢ κεφάλαιον.

Πρόσθεσις κλασμάτων.

144. Ἴνα προσθέσωμεν κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα ὡς ἀριθμητὴν γράφομεν παρονομαστὴν τὸν κοινόν.

* Ἀς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ κλάσματα, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{9}{7}$.

Εἶναι φανερόν ὅτι 2 ἑβδομα, καὶ 4 ἑβδομα, καὶ 9 ἑβδομα ἀποτελοῦσι 2 + 4 + 9 ἴτοι 15 ἑβδομα.

Ἄρα ἔχομεν

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{9}{7} = \frac{2+4+9}{7} = \frac{15}{7} = 2 + \frac{1}{7}.$$

6.) Ἴνα προσθέσωμεν κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὰς διαφόρους, ἀνάγωμεν κατὰ πρῶτον αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, καὶ ἔπειτα πράττομεν ὡς ἀνωτέρω.

Ἄς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ κλάσματα $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{16}$.

Ἀνάγοντες αὐτὰ εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν 48, εὐρίσκομεν τὰ $\frac{80}{48}$, $\frac{42}{48}$, $\frac{33}{48}$.

Ἐπομένως ἔχομεν

$$\frac{5}{3} + \frac{7}{8} + \frac{11}{16} = \frac{80}{48} + \frac{42}{48} + \frac{33}{48} = \frac{155}{48} = 3 + \frac{11}{48}.$$

Πρόσθεσις μικτῶν.

145. Ἴνα προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμοὺς, προσθέτομεν τοὺς ἀκεραίους, ἔπειτα τὰ κλάσματα, καὶ ἐροῦμεν τὰ δύο ταῦτα ἄθροισματα.

Ἄς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι πρόκειται νὰ προστεθῶσιν οἱ μικτοί,

$$4 + \frac{2}{3}, \quad 7 + \frac{5}{8}, \quad 9 + \frac{7}{16}.$$

Τῶν μὲν ἀκεραίων τὸ ἄθροισμα εἶναι $4+7+9$ ἥτοι 20· τῶν δὲ κλασμάτων $\frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16}$ ἥτοι $1 + \frac{35}{48}$.

Ἄρα τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι $20 + 1 + \frac{35}{48}$ ἥτοι $21 + \frac{35}{48}$.

Β'. Ἀφαίρεσις.

146. Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας καὶ πολλοστὰ μέρη μονάδος, ὅσα περιέχει δευτέρως τις δοθεὶς ἀριθμὸς.

Ὁ πρῶτος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται μειωτέος, ὁ δεύτερος ἀφαιρετέος, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ὑπόλοιπον, ἢ διαφορά, ἢ ὑπεροχή.

Ὡς δὲ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων, οὕτω καὶ ἐνταῦθα εἶναι φανερόν ὅτι ἐὰν προσθέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον καὶ τὴν διαφορὰν εὐρίσκομεν τὸν μειωτέον. Διὰ τοῦτο δὲ δυνάμεθα νῦν ὁρίσασθαι τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ὡς ἐξῆς·

Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πράξις, δι' ἧς, δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν, εὐρίσκεται ὁ ἕτερος.

Ἀφαίρεσις δύο κλάσμάτων.

147. α.) Ἴνα ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ κλάσματος ἔχοντος τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν γράφομεν παρονομαστήν τὸν κοινόν.

Ἄς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι ζητεῖται νῦν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{9}{7}$ τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$. Εἶναι φανερόν ὅτι ἐὰν ἀπὸ 9 ἑβδόμα ἀφαιρεθῶσι 4 ἑβδόμα, θὰ μείνωσιν 9—4, ἥτοι 5 ἑβδόμα· ἄρα ἔχομεν

$$\frac{9}{7} - \frac{4}{7} = \frac{9-4}{7} = \frac{5}{7}.$$

β.) Ἴνα ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ κλάσματος ἔχοντος παρονομαστήν διόφορον, ἀνάγομεν πρῶτον τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, καὶ ἔπειτα πράττομεν ὡς ἀνωτέρω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{21}{24} - \frac{16}{24} = \frac{5}{24}.$

Ἀφαίρεσις μικτοῦ ἀπὸ μικτοῦ.

148. Ἴνα ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτοῦ, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους, καὶ ἔπειτα ἐροῦμεν τὰς δύο διαφοράς.

Ἄς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι ζητεῖται νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ μικτὸς $3 + \frac{2}{5}$ ἀπὸ τοῦ $8 + \frac{6}{7}$. Ἀφαιροῦντες $\frac{2}{5}$ ἀπὸ $\frac{6}{7}$ εὐρίσκομεν τὴν διαφορὰν $\frac{16}{35}$, ἔπειτα 3 ἀπὸ 8 τὴν διαφορὰν 5· τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων διαφορῶν $5 + \frac{16}{35}$ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο δοθέντων μικτῶν.

Ἐὰν δὲ συμβῇ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου, ἵνα καταστήσωμεν δυνατὴν τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ἀνωτέρω κανόνος τρέπομεν μίαν τῶν μονάδων τοῦ μειωτέου εἰς κλάσμα.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ $4 + \frac{5}{6}$ ἀπὸ τοῦ $8 + \frac{2}{7}$, ἥτοι $4 + \frac{5}{6}$ ἀπὸ $8 + \frac{2}{7}$. Τρέποντες μίαν μονάδα τοῦ μειωτέου εἰς τεσσαρακοστὰ δευτέρα μετασχηματίζομεν αὐτὸν εἰς τὸν $7 + \frac{54}{72}$ ἀπὸ τούτου ἀφαιροῦντες τὸν ἀφαιρετέον $4 + \frac{5}{6}$ εὐρίσκομεν τὴν διαφορὰν $3 + \frac{13}{72}$.

Γ'. Πολλαπλασιασμός.

149. Ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν, σχηματίζομεν ἐκ τοῦ πρώτου τρίτον, ὅπως ὁ δεύτερος ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. *ἢ σχέσις μὲν*

Κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦτον ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{4}{5}$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 6 πρέπει νὰ εὐρωμεν τὸ ἄθροισμα 6 ἀριθμῶν ἴσων τῷ $\frac{4}{5}$ · διότι καὶ ὁ 6 εἶναι ἄθροισμα ἑξ μονάδων. Ἰνὰ δὲ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{6}{7}$ πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ λάβωμεν τὸ ἑβδόμον τοῦ $\frac{4}{5}$, καὶ τοῦτο ἔπειτα νὰ ἐπαναλάβωμεν πεντάκις· διότι καὶ ὁ $\frac{6}{7}$ εἶναι τὸ ἑβδόμον τῆς μονάδος εἰλημμένον πεντάκις.

Καλεῖται δὲ ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμὸς πολλαπλασιαστέος, ὁ δεύτερος πολλαπλασιαστής, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως γινόμενον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι φανερόν ὅτι τὸ γινόμενον εἶναι μεγαλύτερον, ἢ ἴσον, ἢ μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου, καθ' ὅσον ὁ πολλαπλασιαστής εἶναι μεγαλύτερος, ἢ ἴσος, ἢ μικρότερος τῆς μονάδος.

Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον.

150. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀκέραιον τοῦτον.

* Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ $\frac{5}{12}$ ἐπὶ 4. Κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει νὰ προστεθῶσι 4 ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ $\frac{5}{12}$, δηλονότι νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τετράκις μεγαλειότερος τοῦ $\frac{5}{12}$. τοῦτο δὲ γίνεται πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ ἐπὶ 4. Ἄρα ἔχομεν

$$\frac{5}{12} \times 4 = \frac{5 \times 4}{12} = \frac{20}{12}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀκεραίου πολλαπλασιαστοῦ, δυνάμεθα ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν νὰ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου. Παραδείγματός χάριν

$$\frac{5}{12} \times 4 = \frac{5}{12 : 4} = \frac{5}{3}.$$

Διότι τὸ κλάσμα γίνεται τετράκις μεγαλιότερον, ἢ πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ διαιρουμένου τοῦ παρονομαστοῦ διὰ 4 (136).

Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.

151. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος.

* Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ 6 ἐπὶ $\frac{5}{7}$. Κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ ληφθῇ τὸ ἕβδομον τοῦ 6, καὶ τοῦτο ἔπειτα νὰ ἐπαναληφθῇ πεντάκις. Καὶ τὸ μὲν ἕβδομον τοῦ 6 εἶναι $\frac{6}{7}$ (134), τὸ

δὲ πενταπλάσιον τούτου εἶναι $\frac{6 \times 5}{7}$. Ἄρα ἔχομεν

$$6 \times \frac{5}{7} = \frac{6 \times 5}{7} = \frac{30}{7}.$$

Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.

152. Ἰνα πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπ' ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστὴν, καὶ ὑπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον γράφομεν παρονομαστὴν τὸ δεύτερον.

Ἄς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ $\frac{9}{4}$ ἐπὶ $\frac{5}{7}$. Κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει νὰ εὗρωμεν τὸ ἔβδομον τοῦ $\frac{9}{4}$, καὶ τοῦτο νὰ ἐπαναλάβωμεν πεντάκις. Ἀλλὰ διὰ νὰ εὗρωμεν τὸ ἔβδομον τοῦ $\frac{9}{4}$, ἤτοι ἀριθμὸν ἐπτάκις μικρότερον αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ ἐπὶ 7 (136), καὶ οὕτως εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{9}{4 \times 7}$. τούτου δὲ τὸ πενταπλάσιον εἶναι $\frac{9 \times 5}{4 \times 7}$. Ἄρα ἔχομεν

$$\frac{9}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{9 \times 5}{4 \times 7} \cdot \text{ὅπερ ἔδει δεῖξαι.}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{9}{4}$ ἐπὶ $\frac{5}{7}$ εἶναι τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ $\frac{9}{4}$ διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων λέγεται ἐνίοτε καὶ κλάσμα κλάσματος.

Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ μικτόν.

153. Ἰνα πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ μικτὸν τρέπομεν ἀμφοτέρους εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς καὶ ἔπειτα πράττομεν ὡς ἀνωτέρω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

$$\left(2 + \frac{5}{7}\right) \times \left(5 + \frac{3}{4}\right) = \frac{19}{7} \times \frac{23}{4} = \frac{19 \times 23}{7 \times 4} = \frac{437}{28} = 15 + \frac{17}{28}.$$

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

154. Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ἐξ ὧν τινὲς ἢ καὶ πάντες εἶναι κλασματικοί, ὁρίζεται ὅπως καὶ ὅταν πάν-

τες οἱ παράγοντες εἶναι ἀκεραίοι, καὶ σημειοῦται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον (43). Εὐρίσκεται δὲ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων κατὰ τὸν ἐξῆς κανόνα.

Ἴνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων σχηματίζομεν τὸ γινόμενον πάντων τῶν ἀριθμητῶν τῶν κλασμάτων καὶ πάντων τῶν ἀκεραίων, καὶ ὑπ' αὐτὸ γράφομεν παρονομαστὴν τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων.

Ἄς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι ζητεῖται νὰ εὕρεθῃ τὸ γινόμενον $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times 4 \times \frac{3}{5} \times 9$.

Τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων παραγόντων εἶναι $\frac{2 \times 5}{3 \times 7}$.

Τοῦ κλάσματος τούτου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα 4 εἶναι $\frac{2 \times 5 \times 4}{3 \times 7}$. Τοῦ κλάσματος τούτου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον παράγοντα $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{2 \times 5 \times 4 \times 3}{3 \times 7 \times 5}$.

Τέλος δὲ τὸ γινόμενον τοῦ κλάσματος τούτου ἐπὶ τὸν πέμπτον παράγοντα 9 εἶναι $\frac{2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 9}{3 \times 7 \times 5}$. Ἐχομεν ἄρα

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times 4 \times \frac{3}{5} \times 9 = \frac{2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 9}{3 \times 7 \times 5} \text{ ὅπερ ἐδειδείξαί.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρὶν ἐκτελέσωμεν τοὺς πολλαπλασιασμοὺς, οὔτινες εἶναι σεσημειωμένοι ἐν τῷ ἀριθμητῇ καὶ τῷ παρονομαστῇ τοῦ ἴσου τῷ γινομένῳ πολλῶν παραγόντων κλάσματος, εἶναι καλὸν νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας τῶν ὅρων αὐτοῦ, ἐὰν ὑπάρχωσιν. Οἷον ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι ἐξαλείφομεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας 3 καὶ 5, οὔτινες ὑπάρχουσιν εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 9}{3 \times 7 \times 5}$, καὶ λαμβάνομεν τὸ ἀπλούστε-

ρον κλάσμα $\frac{2 \times 4 \times 9}{7}$. Ἐκτελοῦντες δὲ τοὺς ἐν τούτῳ σε-

σημειωμένους πολλαπλασιασμοὺς λαμβάνομεν τὸ κλάσμα $\frac{72}{7}$, ἥτοι $10 \frac{2}{7}$.

Δυνάμεις τῶν κλασμάτων.

155. Αἱ δυνάμεις τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὀρίζονται ἀπαραλλάκτως ὡς καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων (44).

Ἵνα σημειώσωμεν δυνάμιν τινα κλάσματος, γράφομεν αὐτὸ ἐντὸς παρενθέσεως, καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως, πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ ὀλίγον ὑψηλότερα· οἷον $\left(\frac{5}{7}\right)^2$, $\left(\frac{5}{7}\right)^3$ παριστῶσι τὸ τετράγωνον καὶ τὸν κύβον τοῦ $\frac{5}{7}$.

156. Ἵνα ὑψώσωμεν κλάσμα εἰς δυνάμιν τινα, ὑψοῦμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ εἰς τὴν δυνάμιν ταύτην.

Ἵς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ κλάσματος $\frac{5}{7}$. Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων εὐρίσκομεν

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{5 \times 5}{7 \times 7} = \frac{5^2}{7^2}.$$
 Ὁμοίως εὐρίσκομεν

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{5 \times 5 \times 5}{7 \times 7 \times 7} = \frac{5^3}{7^3}.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύομεν τὴν πρότασιν καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην δυνάμιν.

Θεωρήματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

157. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.** Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται μετατιθεμένῳ ὅπωςδὴποτε τῶν παραγόντων.

Διότι ὅπως καὶ ἂν μετατεθῶσιν οἱ παράγοντες, ἀριθμητῆς τοῦ γινομένου θὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἀκεραίων παραγόντων καὶ τῶν ἀριθμητῶν τῶν κλασμάτων, παρονομαστῆς δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομασῶν (154). Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον πολλῶν ἀκεραίων δὲν μεταβάλλεται καθ' οἷανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν, ἀριθμητῆς τοῦ γινομένου θὰ εἶναι πάντοτε ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ὡσαύτως δὲ καὶ παρονομαστῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τούτου στηρίζονται τὰ ἐξῆς πέντε θεωρήματα, ὧν ἡ ἀπόδειξις παραλείπεται, διότι γίνεται ἀπαραλλάκτως, ὅπως καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων.

Β'.) Ἐν γινομένῳ πολλῶν παραγόντων δυνάμεθα νῦν ἀντικαταστήσωμεν ὅσουςδὴποτε παράγοντας διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν.

Γ'.) Ἴνα πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπ' ἀριθμὸν τινα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Δ'.) Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν ἐπὶ τὸν πρῶτον παράγοντα, τὸ εὖρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸν δεῦτερον, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου παράγοντος.

Ε'.) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ὧν ἑκάτερος εἶναι τὸ γινόμενον παραγόντων, εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν παραγόντων τῶν ἀριθμῶν τούτων.

ΣΤ'.) Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων.

158. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν, ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐφ' ἕκαστον τούτων καὶ προσθέτομεν τὰ ἐκ τῶν πολλαπλασιασμῶν τούτων γινόμενα.

Ἄς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $\frac{5}{7}$ ἐπὶ $\frac{2}{3} + 6 + \frac{9}{4}$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ σχηματίσωμεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἀριθμὸν, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐσχηματίσθῃ ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλ' οὗτος σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος λαμβανομένων τῶν δύο τρίτων τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἑξαπλασίου καὶ τῶν ἐννέα τετάρτων καὶ προστιθεμένων πάν-

των τούτων ἄρα διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ δύο τρίτα τοῦ $\frac{5}{7}$ καὶ τὸ ἑξαπλάσιον αὐτοῦ καὶ τὰ ἑννέα τέταρτα καὶ νὰ προσθέσωμεν πάντα. Ἀλλὰ τὰ δύο τρίτα τοῦ $\frac{5}{7}$ εἶναι $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$, τὸ ἑξαπλάσιον αὐτοῦ εἶναι $\frac{5}{7} \times 6$ καὶ τὰ ἑννέα τέταρτα εἶναι $\frac{5}{7} \times \frac{9}{4}$.

Ἄρα ἔχομεν

$$\frac{5}{7} \times \left(\frac{2}{3} + 6 + \frac{9}{4} \right) = \frac{5}{7} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{7} \times 6 + \frac{5}{7} \times \frac{9}{4}.$$

159. ΘΕΩΡΗΜΑ Η'. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν, ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν καὶ προσθέτομεν τὰ ἐκ τῶν πολλαπλασιασμῶν τούτων γινόμενα.

Ἄς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ $\frac{2}{3} + 6 + \frac{9}{4}$ καὶ πολλαπλασιαστής ὁ $\frac{5}{7}$.

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχομεν

$$\frac{5}{7} \times \left(\frac{2}{3} + 6 + \frac{9}{4} \right) = \frac{5}{7} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{7} \times 6 + \frac{5}{7} \times \frac{9}{4}.$$

Ἐὰν ἐν πᾶσι τοῖς γινομένοις, τὰ ὅποια ὑπάρχουσιν εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης, λάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς πολλαπλασιαστήν καὶ ἀνάπαλιν, ὅπερ δὲν μεταβάλλει τὰ γινόμενα ταῦτα, εὕρισκομεν τὴν ἰσότητα, $\left(\frac{2}{3} + 6 + \frac{9}{4} \right) \times \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} + 6 \times \frac{5}{7} + \frac{9}{4} \times \frac{5}{7}$,

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ προκείμενον θεώρημα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω δύο θεωρημάτων στηρίζονται καὶ τὰ ἐξῆς δύο, ὧν τὰς ἀποδείξεις παραλείπομεν, διότι εἶναι ὅλως ὅμοιαι μὲ τὰς ἀποδείξεις τῶν ὁμοίων θεωρημάτων ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (54 καὶ 55).

160. **ΘΕΩΡΗΜΑ Θ'.** Ἴνα πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἀριθμῶν ἐφ' ἑτερον ἄθροισμα ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ νὰ προσθέσωμεν πάντα τὰ εὐρεθέντα γινόμενα.

Παραδείγματος χάριν,

$$\left(\frac{2}{3} + 5 + \frac{4}{9}\right) \times \left(\frac{6}{7} + \frac{8}{11}\right) =$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{6}{7} + 5 \times \frac{6}{7} + \frac{4}{9} \times \frac{6}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{8}{11} + 5 \times \frac{8}{11} + \frac{4}{9} \times \frac{8}{11}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω τρία θεωρήματα δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ μικτὸν, μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, καὶ μικτὸν ἐπὶ μικτόν.

161. **ΘΕΩΡΗΜΑ Ι'.** Ἐὰν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων γινομένου τινὸς εἶναι ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν τὸ γινόμενον πολλαπλασιάζοντες μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἕτερον παράγοντα, καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιροῦντες τὸ δεύτερον.

Παραδείγματος χάριν

$$\frac{5}{7} \times \left(\frac{9}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{7} \times \frac{9}{4} - \frac{5}{7} \times \frac{2}{3}. \text{ καὶ}$$

$$\left(\frac{9}{4} - \frac{2}{3}\right) \times \frac{5}{7} = \frac{9}{4} \times \frac{5}{7} - \frac{2}{3} \times \frac{5}{7}.$$

Δ'. Διαίρεσις.

162. Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντος τοῦ γινομένου δύο παραγόντων καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων εὐρίσκεται ὁ ἕτερος παράγων.

Τὸ δοθὲν γινόμενον καλεῖται διαιρετέος, ὁ δοθεὶς παράγων διαιρέτης, ὁ δὲ ζητούμενος παράγων πηλίκον.

Διαίρεσις ἀκεραίου δι' ἀκεραίου.

163. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου δι' ἑτέρου ἀ-

κεραίου εἶναι ἴσον κλάσματι ἔχοντι ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.

Λέγω παραδείγματος χάριν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 26 διὰ τοῦ 7 εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{26}{7}$.

Διότι κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως πρέπει νὰ εὗρεθῇ ἀριθμὸς, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 7 νὰ δίδῃ 26. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἑπταπλάσιον τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι ἴσον τῷ 26, αὐτὸ τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ἀριθμὸς ἐπτάκις μικρότερος τοῦ 26. Ἄλλ' ἀριθμὸς ἐπτάκις μικρότερος τοῦ 26 εἶναι ὁ $\frac{26}{7}$, ὥς ταῦτα ἐδείχθη ἐν τῷ ἐδαφίῳ 134.

Ἄρα ἔχομεν $26 : 7 = \frac{26}{7}$.

Ἐξάγοντες δὲ τὰς ἐν τῷ κλάσματι περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας εὐρίσκομεν $26 : 7 = 3 + \frac{5}{7}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Τὸ πηλίκον $26 : 7$ κατὰ μὲν τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τὸν ἐν ἐδαφίῳ 56 τεθέντα, εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3, ὅστις δεικνύει ποσάκις ὁ διαιρέτης περιέχεται ἐν τῷ διαιρετέῳ. Κατὰ δὲ τὸν ἀνωτέρω τεθέντα γενικώτερον ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως τὸ πηλίκον $26 : 7$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $3 + \frac{5}{7}$, ἐφ' ᾧ πολλαπλασιαζόμενος ὁ διαιρέτης δίδει

τὸν διαιρετέον. Βλέπομεν δὲ ὅτι ἵνα εὗρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων κατὰ τὸν νέον ὁρισμὸν, πρέπει εἰς τὸ κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἐκείνον εὐρισκόμενον πηλίκον νὰ προσθέσωμεν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην. Μόνον δὲ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι τὸ αὐτὸ κατ' ἀμφοτέρους τοὺς ὁρισμούς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων δύναται νὰ παρίσταται διὰ κλάσματος, τὸ δὲ πη-

λίκον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου διὰ τῆς μονάδος εἶναι αὐτὸς ὁ ἀκέραιος, διὰ τοῦτο πᾶς ἀκέραιος δύναται νὰ παρίσταται καὶ ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν ἑαυτὸν παρονομαστὴν δὲ τὴν μονάδα· οἷον ὁ ἀκέραιος 7 δύναται νὰ παρίσταται καὶ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{7}{1}$.

Διαιρέσεις κλάσματος δι' ἀκεραίου.

164. "Ἰνα διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου πολλαπλασιαζόμεν τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{15}{7}$ διὰ τοῦ 4. Πρέπει νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ 4 νὰ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{15}{7}$. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τετραπλάσιον τοῦ πηλίκου εἶναι ἴσον τῷ $\frac{15}{7}$, αὐτὸ τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς τετράκις μικρότερος τοῦ $\frac{15}{7}$. Ἄλλ' ἀριθμὸς τετράκις μικρότερος τοῦ $\frac{15}{7}$ εἶναι ὁ $\frac{15}{7 \times 4}$, ὃν εὕρισκόμεν πολλαπλασιάζοντες τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ ἐπὶ 7 (136).

Ἄρα ἔχομεν $\frac{15}{7} : 4 = \frac{15}{7 \times 4} = \frac{15}{28}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀκεραίου. Ἐὰν παραδείγματος χάριν πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ $\frac{12}{7}$ διὰ 4, ἐπειδὴ τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς τετράκις μικρότερος τοῦ $\frac{12}{7}$, τοιοῦτον δὲ ἀριθμὸν εὕρισκόμεν διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν 12 τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ 4 (133), ἔχομεν

$$\frac{12}{7} : 4 = \frac{12 : 4}{7} = \frac{3}{7}.$$

Διαιρέσεις κλάσματος διὰ κλάσματος.

165. "Ἴνα διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀνεστραμμένον.

"Ας ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ $\frac{9}{4}$ διὰ τοῦ $\frac{5}{7}$. Ζητεῖται ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ $\frac{5}{7}$ νὰ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{9}{4}$. ἀλλὰ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ $\frac{5}{7}$ εἶναι τὰ 5 ἑβδομα αὐτοῦ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ 5 ἑβδομα τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{9}{4}$, τὸ ἐν ἑβδομον τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι ἀριθμὸς πεντάκις μικρότερος τοῦ $\frac{9}{4}$, ἥτοι ὁ ἀριθμὸς $\frac{9}{4 \times 5}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ 1 ἑβδομον τοῦ πηλίκου εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{9}{4 \times 5}$, τὰ 7 ἑβδομα τοῦ πηλίκου, ἥτοι αὐτὸ τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ἀριθμὸς 7^{αι} μεγαλείτερος τοῦ $\frac{9}{4 \times 5}$, ἥτοι ὁ $\frac{9 \times 7}{4 \times 5}$.

"Αρα ἔχομεν $\frac{9}{4} : \frac{5}{7} = \frac{9 \times 7}{4 \times 5}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{9 \times 7}{4 \times 5}$ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων $\frac{9}{4}$ καὶ $\frac{7}{5}$, ἔχομεν $\frac{9}{4} : \frac{5}{7} = \frac{9}{4} \times \frac{7}{5}$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ ἀνωτέρω κανὼν περιλαμβάνει καὶ τὰς περιπτώσεις, καθ' ἃς ὁ διαιρετέος ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος. Διότι τὸν ἀκέραιον διαιρετέον ἢ διαιρέτην δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητήν μὲν αὐτὸν τὸν ἀκέραιον, παρονομαστήν δὲ τὴν μονάδα.

Διαιρέσεις μικτῶν.

166. "Όταν ὁ διαιρετέος ἢ ὁ διαιρέτης, ἢ καὶ ἀμφότεροι εἶναι μικτοί, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικὰς.

κοὺς, καὶ τότε ἔχομεν τὴν προηγουμένην περίπτωσιν τῆς διαιρέσεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

$$A'.) \left(5 + \frac{3}{4}\right) : \frac{5}{7} = \frac{23}{4} : \frac{5}{7} = \frac{23 \times 7}{4 \times 5} = \frac{161}{20} = 8 + \frac{1}{20}.$$

$$B'.) \quad \frac{4}{9} : \left(3 + \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{9} : \frac{17}{5} = \frac{4 \times 5}{9 \times 17} = \frac{20}{153}.$$

$$Γ'.) \left(12 + \frac{3}{4}\right) : \left(2 + \frac{5}{7}\right) = \frac{51}{4} : \frac{19}{7} = \frac{51 \times 7}{4 \times 19} = \frac{357}{76} = 4 + \frac{53}{76}.$$

Θεωρήματα τῆς διαιρέσεως.

167. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.** Ἴνα διαιρέσωμεν γινόμενον διὰ τινος τῶν παραγοριῶν αὐτοῦ ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγορτα τοῦτον.

Ἀέγω παραδείγματος χάριν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $\frac{2}{5} \times 4 \times \frac{7}{9} \times \frac{8}{11}$ διὰ τοῦ $\frac{7}{9}$ εἶναι $\frac{2}{5} \times 4 \times \frac{8}{11}$. Διότι τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{2}{5} \times 4 \times \frac{8}{11}$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{7}{9}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{5} \times 4 \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{9}$. οὗτος δὲ εἶναι ἴσος τῷ διαιρετέῳ, διότι δὲν διαφέρει αὐτοῦ ἢ κατὰ τὴν τάξιν τῶν παραγόντων.

168. **ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.** Ἴνα διαιρέσωμεν γινόμενον διὰ τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἓνα τῶν παραγόντων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον $\frac{2}{3} \times \frac{8}{11} \times 13 \times \frac{1}{9}$ διὰ τοῦ $\frac{5}{7}$. Ἴνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ $\frac{7}{5}$.

Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓνα τῶν παρα-

γόντων αὐτοῦ, οἷον τὸν $\frac{8}{11}$ ἐπὶ $\frac{7}{5}$. Τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{3} \times \left(\frac{8}{11} \times \frac{7}{5}\right) \times 13 \times \frac{1}{9}$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{8}{11} \times \frac{7}{5}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{8}{11}$ διὰ $\frac{5}{7}$, ἡ πρότασις ἀπεδείχθη.

169. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἴνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ πρώτου παραγόντος, τὸ προκείμενον πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου παραγόντος, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ πάντες οἱ παράγοντες ληφθῶσιν ὡς διαίρεται.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς $\frac{9}{4}$ διὰ τοῦ γινομένου $\frac{2}{3} \times 6 \times \frac{5}{7}$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὐρίσκομεν πηλίκον τὸν ἀριθμὸν $\frac{63}{80}$.

$$\text{Ἄρα ἔχομεν } \frac{9}{4} = \frac{2}{3} \times 6 \times \frac{5}{7} \times \frac{63}{80}.$$

Διαιροῦντες τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης πρῶτον διὰ $\frac{2}{3}$, ἔπειτα δι' 6, καὶ ἔπειτα διὰ $\frac{5}{7}$, λαμβάνομεν

$$\frac{9}{4} : \frac{2}{3} : 6 : \frac{5}{7} = \frac{63}{80} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{9}{4} : \frac{2}{3} : 6 : \frac{5}{7} = \frac{9}{4} : \frac{2}{3} \times 6 \times \frac{5}{7}.$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

170. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ἴνα διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα ἀριθμῶν διὰ τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἄθροισματος, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐκ πασῶν τῶν διαιρέσεων τούτων πηλικά.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα $\frac{9}{4} + 6 + \frac{9}{4}$ διὰ τοῦ $\frac{5}{7}$. Ἴνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ $\frac{7}{5}$ πρὸς τοῦτο

δὲ ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ
 ἐπὶ $\frac{7}{5}$ (159), ἥτοι νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν μερῶν
 αὐτοῦ διὰ $\frac{5}{7}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅμοίως δεικνύεται ὅτι ἵνα διαιρέσωμεν
 τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν διὰ τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ δι-
 αιρέσωμεν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου,
 καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου πηλίκου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.

171. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο
 ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀμφότεροι πολλαπλασια-
 σθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐστω διαιρετέος ὁ $\frac{4}{9}$ καὶ διαιρέτης ὁ $\frac{5}{7}$. λέγω ὅτι τὸ
 πηλίκον τοῦ πρώτου διαιρουμένου διὰ τοῦ δευτέρου δὲν θέ-
 λει μεταβληθῆ, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι ἐπὶ τὸν
 αὐτὸν ἀριθμὸν, οἷον τὸν $\frac{8}{3}$. Διότι ἐκτελοῦντες τὴν διαί-
 ρεσιν τοῦ $\frac{4}{9}$ διὰ $\frac{5}{7}$ εὐρίσκομεν πηλίκον $\frac{28}{45}$. Ἄρα ἔχομεν

$$\frac{4}{9} = \frac{5}{7} \times \frac{28}{45}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ
 $\frac{8}{3}$ λαμβάνομεν
$$\frac{4}{9} \times \frac{8}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{28}{45} \times \frac{8}{3}.$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τοὺς ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει παρὰ-
 $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{8}{3}$ διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν λαμβά-
 νομεν
$$\frac{4}{9} \times \frac{8}{3} = \left(\frac{5}{7} \times \frac{8}{3} \right) \times \frac{28}{45}.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ
 $\frac{4}{9} \times \frac{8}{3}$ διὰ τοῦ $\frac{5}{7} \times \frac{8}{3}$ εἶναι $\frac{28}{45}$, τὸ αὐτὸ δηλαδὴ μὲ
 τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{4}{9}$ διὰ $\frac{5}{7}$.

Καὶ ὅταν δὲ διαιρεθῶσι διαιρετέος καὶ διαιρέτης διὰ τοῦ

αὐτοῦ ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ $\frac{8}{3}$, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.
 Διότι ἡ διαιρέσις διὰ $\frac{8}{3}$ ἰσοδυναμεῖ τῷ πολλαπλασιασμῷ ἐπὶ $\frac{3}{8}$.

172. **ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤ'.** Ἴνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ πηλίκον δύο ἀλλω, ἀρκεῖ τὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸ γινόμενον τὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ διαιρέτου.

$$\text{Λέγω π. χ. ὅτι } \frac{5}{7} \times \left(\frac{9}{4} : \frac{3}{8} \right) = \left(\frac{5}{7} \times \frac{9}{4} \right) : \frac{3}{8}.$$

$$\begin{aligned} \text{Διότι } \frac{5}{7} \times \left(\frac{9}{4} : \frac{3}{8} \right) &= \frac{5}{7} \times \left(\frac{9}{4} \times \frac{8}{3} \right) = \\ &= \frac{5}{7} \times \frac{9}{4} \times \frac{8}{3} = \left(\frac{5}{7} \times \frac{9}{4} \right) : \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Περὶ κλασμάτων ἐχόντων κλασματικούς ὁρους.

173. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν οἷονδὴ ποτε σημειοῦται ἔχει μόνον διὰ τοῦ σημείου, ἀλλὰ καὶ γραφομένου τοῦ διαιρέτου ὑπὸ τὸν διαιρετέον καὶ χωριζομένου ἀπὸ τοῦτου

δι' ὀριζοντίου γραμμῆς· οἷον τὰ πηλίκια $\frac{2}{3} : 5, 4 : \frac{5}{7}, \frac{2}{3} : \frac{7}{5}$ σημειοῦνται καὶ οὕτω $\frac{\frac{2}{3}}{5}, \frac{4}{\frac{5}{7}}, \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}}$.

Ἐκλήθησαν δὲ καὶ αἱ τοιαῦται παραστάσεις κλάσματα. Ἐν τοῖς ἐξῆς δεικνύμεν ὅτι τὰ τοιαῦτα κλάσματα ἔχουσι τὰς αὐτὰς ιδιότητας καὶ τὰ ἔχοντα τοὺς ὁρους ἀκεραίους, καὶ ὅτι αἱ διάφοροι πράξεις ἐκτελοῦνται ἐπ' αὐτῶν κατὰ τοὺς αὐτοὺς κανόνας.

174. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.** Ἡ ἀξία κλάσματος δὲν μεταβάλλεται πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων ἀμφοτέρων τῶν ὁρῶν αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Διότι κλάσμα εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν ἀμφοτέροι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (171).

175. **ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.** Ἴνα προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, προσθέτομεν ἢ ἀφαιροῦμεν τοὺς ἀριθμητὰς, καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Λέγω δηλαδή ὅτι·

$$\frac{\alpha}{\mu} + \frac{\beta}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\mu}.$$

καὶ
$$\frac{\alpha}{\mu} - \frac{\beta}{\mu} = \frac{\alpha - \beta}{\mu}.$$

Διότι αἱ ἰσότητες αὗται ἐκφράζουσι τὰ ἀνωτέρω ἐν ἐδαφίῳ 170 καὶ τῇ προσηρτημένῃ σημειώσει θεωρήματα.

176. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἴνα πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπ' ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστὴν, καὶ ὑπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον γράψομεν παρονομαστὴν τὸ δεύτερον.

Ἐστώσαν κλάσματα τὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$. Καλοῦντες π καὶ ρ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ β καὶ τοῦ γ διὰ δ, ἔχομεν

$$\alpha = \beta \times \pi, \quad \gamma = \delta \times \rho.$$

Τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ γ θὰ εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ β × π ἐπὶ δ × ρ, ἥτοι α × γ = β × π × δ × ρ.

Διαιροῦντες δὲ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης διὰ β × δ, λαμβάνομεν $\frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \delta} = \pi \times \rho$, ἥτοι $\frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \delta} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων τούτων.

177. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ἴνα διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀνέστραμμένον.

Λέγω δηλαδή ὅτι $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \gamma}$. Διότι ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \gamma}$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{\gamma}{\delta}$, δίδει τὸ γινόμενον $\frac{\alpha \times \delta \times \gamma}{\beta \times \gamma \times \delta}$, ὅπερ εἶναι ἴσον τῷ διαιρετέῳ $\frac{\alpha}{\beta}$, ἐξ οὗ προέρχεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων ἐπὶ δ × γ.

**Ἐφαρμογὴ τῶν κλασμάτων εἰς λύσιν
π ρ ο β λ η μ ᾶ τ ω ν.**

178. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Εὐρεῖν ἀριθμὸν, τοῦ ὁποῖου τὸ ἡμισυ καὶ τὸ τρίτον καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τὰ ἀποτελῶσιν ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον ἐλαττούμενον κατὰ 175 τὰ παρέχῃ τὸν ἀριθμὸν 417.

Τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ζητούμενου ἀριθμοῦ ἀποτελοῦσι τὰ $\frac{37}{30}$ αὐτοῦ, διότι $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{37}{30}$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ $\frac{37}{30}$ τοῦ ἀριθμοῦ ἐλαττούμενα κατὰ 175 δίδουσι τὸν ἀριθμὸν 417, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ $\frac{37}{30}$ τοῦ ἀγνώστου ὑπερβαίνουσι κατὰ 175 τὸν 417, ἐπομένως εἶναι ἴσα τῷ ἀριθμῷ 592. Ἀλλὰ τὰ $\frac{37}{30}$ τοῦ ἀγνώστου εἶναι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ $\frac{37}{30}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι γνωστὸν καὶ ἴσον τῷ 592, ἵνα εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 592 διὰ τοῦ $\frac{37}{30}$. Ἐκτελοῦντες δὲ τὴν διαίρεσιν εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 480.

179. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Ῥάβδος εἶναι διηρημένη εἰς τέσσαρα μέρη, καὶ τοῦ μὲν πρώτου μέρους τὸ μῆκος εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὅλου μήκους τῆς ράβδου, τοῦ δὲ δευτέρου τὸ $\frac{1}{4}$, τοῦ δὲ τρίτου τὰ $\frac{2}{7}$, καὶ τὸ τέταρτον καταμετρηθὲν εὐρέθη ἔχον μῆκος $\frac{5}{11}$ τοῦ πῆχεως. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ράβδου;

Τὰ τρία πρῶτα μέρη ἀποτελοῦσι $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{7}$ ἤτοι τὰ $\frac{73}{84}$ τοῦ ὅλου μήκους. Ἀρα τὸ τέταρτον μέρος εἶναι τὰ $\frac{11}{84}$

$\frac{11}{84}$ τοῦ ὅλου μήκους, καὶ ἐπειδὴ ἔχει μῆκος $\frac{5}{44}$ τοῦ πῆ-
 χεως, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{11}{84}$ ἐπὶ τὸν ἀριθ-
 μὸν, ὅστις ἐκφράζει τὸ μῆκος τῆς ῥάβδου εἰς πῆχεις, εἶναι
 ἶσον τῷ ἀριθμῷ $\frac{5}{44}$. Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ πη-
 λίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{5}{44}$ διὰ $\frac{11}{84}$, ἥτοι ὁ ἀριθμὸς $3 + \frac{57}{124}$.

180. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Δεξαμενὴ δύναται νὰ πληρωθῇ
 διὰ τριῶν διαφόρων κρουῶν, ὑπὸ μὲν τοῦ πρώτου ἐν 5
 ὥραις, ὑπὸ δὲ τοῦ δευτέρου ἐν 9 καὶ ὑπὸ τοῦ τρίτου ἐν 12·
 εἰ δὲ ἀνοιχθῶσι καὶ οἱ τρεῖς κρουοὶ ἐπὶ 2 ὥρας, ἡ δεξα-
 μενὴ χρειάζεται 114 λίτρας ἵνα πληρωθῇ ἐξ ὀλοκλήρου.
 Πόσας λίτρας χωρεῖ ἡ δεξαμενὴ;

Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος κρουὸς εἰς 5 ὥρας πληροῖ τὴν δεξαμε-
 νήν, εἰς μίαν ὥραν πληροῖ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς. Ὅμοίως εὐρίσκεται
 ὅτι ὁ δεύτερος κρουὸς εἰς μίαν ὥραν πληροῖ τὸ $\frac{1}{9}$, ὁ δὲ τρί-
 τος τὸ $\frac{1}{12}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἄρα οἱ τρεῖς ὁμοῦ κρουοὶ πλη-
 ροῦσιν εἰς μίαν ὥραν τὸ $\frac{1}{5}$ καὶ τὸ $\frac{1}{9}$ καὶ τὸ $\frac{1}{12}$ τῆς δεξα-
 μενῆς, ἥτοι τὰ $\frac{71}{180}$ αὐτῆς. Εἰς δύο ὥρας λοιπὸν θὰ πληρώ-
 σωσι τὰ $\frac{142}{180}$ ἥτοι τὰ $\frac{71}{90}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἴνα πληρωθῇ ἡ
 δεξαμενὴ ἐξ ὀλοκλήρου ὑπολείπονται τὰ $\frac{19}{90}$ αὐτῆς. Ἐπειδὴ
 δὲ ταῦτα ἐξ ὑποθέσεως χωροῦσι 114 λίτρας, ἵνα εὕρωμεν
 τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ διαιρέσωμεν 114 διὰ $\frac{19}{90}$. Ἐκτε-
 λούντες δὲ τὴν διαίρεσιν εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 540. Ἄρα
 ἡ δεξαμενὴ χωρεῖ 540 λίτρας.

181. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς
 ὕψος ἶσον τοῖς $\frac{2}{9}$ ἐκείνου, ὅθεν πίπτει. Πέσοῦσα δὲ ἀπὸ

τινος ὕψους καὶ ἀναπηδήσασα τρίς, ὑψώθη κατὰ τὴν τρί-
την ἀναπήδησιν εἰς ὕψος $\frac{4}{5}$ τοῦ πηχέως. Ἐκ πόσου ὕψους
ἔπεσε τὸ πρῶτον;

Τὸ ὕψος ὅθεν ἡ σφαῖρα ἔπεσε τὸ πρῶτον πολλαπλασια-
σθὲν ἐπὶ $\frac{2}{9}$ τρίς, ἤτοι ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\frac{8}{729}$, γίνεται ἴσον
τῷ $\frac{4}{5}$. Ἀρα τὸ ὕψος τοῦτο εἶναι ἴσον τῷ πηλίκῳ τῆς διαιρέ-
σεως τοῦ $\frac{4}{5}$ διὰ τοῦ $\frac{8}{729}$, ἤτοι τῷ ἀριθμῷ $18 + \frac{9}{40}$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

α.) Εὐρεῖν ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ τὸ $\frac{4}{5}$ καὶ τὰ
 $\frac{4}{7}$ αὐξανόμενα κατὰ 73 νὰ παρέχῃσι τὸν ἀριθμὸν 375.

(Ἀπόκρ. 210.)

β.) Δεξαμενὴ δύναται νὰ πληρωθῇ διὰ τριῶν κρουνηῶν
καὶ ὑπὸ μὲν τοῦ πρώτου πληροῦται ἐν 5 ὥραις, ὑπὸ δὲ τοῦ
δευτέρου ἐν 6, καὶ ὑπὸ τοῦ τρίτου ἐν 9. Ἐὰν ἀνοιχθῶσι
καὶ οἱ τρεῖς κρουνοὶ συγχρότως, ἐν πόσαις ὥραις θὰ πλη-
ρωθῇ ἡ δεξαμενὴ;

$$\left(2 + \frac{4}{43}\right).$$

γ.) Ἐκ πίθου περιέχοντος 300 ὀκάδας οἴνου ἀφαιροῦνται
40 ὀκάδες καὶ ἀναπληροῦνται δι' ὕδατος· ἐκ τοῦ κράματος
ἀφαιροῦνται πάλιν 40 ὀκάδες καὶ ἀναπληροῦνται δι' ὕδα-
τος· τὸ αὐτὸ δὲ γίνεται καὶ τρίτην φορὰν. Πόσαι ὀκάδες
οἴνου θὰ περιέχωνται τότε ἐν τῷ κράματι;

$$\left(195 + \frac{23}{45}\right).$$

δ.) Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς ἀμφοτέρους τοὺς
ὅρους κλάσματος, τὸ κλάσμα ὅταν μὲν εἶναι μικρότερον τῆς
μονάδος αὐξάνει, ὅταν δὲ μεγαλείτερον ἐλαττοῦται.

ε.) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων, ὧν οἱ παρο-
νομασταὶ διαφέρουσι, δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

182. Καλοῦνται δεκαδικὰ μέρη τῆς μονάδος τὰ προερχόμενα ἐκ τῆς διαιρέσεως ταύτης εἰς 10, 100, 1000 κτλ. ἴσα μέρη. Εἶναι λοιπὸν τὰ μέρη ταῦτα δέκατα, ἑκατοστὰ, χιλιοστὰ κτλ. τῆς μονάδος.

Τὸ δέκατον, τὸ ἑκατοστὸν, τὸ χιλιοστὸν κτλ. τῆς μονάδος θεωροῦνται ὡς μονάδες καλούμενοι *μονάδες δεκαδικαί*· καὶ τὸ μὲν δέκατον εἶναι μονὰς δεκαδικὴ τῆς πρώτης τάξεως, τὸ ἑκατοστὸν τῆς δευτέρας, τὸ χιλιοστὸν τῆς τρίτης, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι ἓν δέκατον ἰσοδυναμεῖ μὲ δέκα ἑκατοστὰ, ἓν ἑκατοστὸν μὲ δέκα χιλιοστὰ, καὶ γενικῶς μία δεκαδικὴ μονὰς τάξεώς τινος ἰσοδυναμεῖ μὲ δέκα μονάδας τῆς ἀμέσως ἐπομένης.

Καλεῖται δεκαδικὸς ἀριθμὸς ὁ περιέχων μονάδας καὶ δεκαδικὰ μέρη τῆς μονάδος, ἢ μόνον δεκαδικὰ μέρη τῆς μονάδος. Ἐν τῷ δεκαδικῷ ἀριθμῷ διακρίνομεν λοιπὸν δύο μέρη, τὸ ἀκέραιον καὶ τὸ δεκαδικόν.

Δεικνύεται δὲ ἀπαραλλάκτως ὡς ἐπὶ τῶν ἀκεραίων (4) ὅτι πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων, ἐκάστης τῶν ὁποίων νὰ μὴ ὑπάρχωσι περισσότεραι τῶν ἐντέα.

Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

183. Ἡ γραφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν στηρίζεται ἐπὶ τῆς αὐτῆς συνθήκης, ἐφ' ἧς καὶ ἡ γραφὴ τῶν ἀκεραίων, ὅτι δηλαδή

ὅταν ψηφία εἶναι γεγραμμένα κατὰ σειράν, ἡ μονὰς ἐκάστου ψηφίου εἶναι δεκάκις μικροτέρα τῆς τοῦ ἀμέσως προηγουμένου.

Κατὰ τὴν συνθήκην ταύτην ψηφίον γεγραμμένον πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων θὰ παριστᾷ δέκατα, ψηφίον γεγραμμένον μετὰ τὰ δέκατα θὰ παριστᾷ ἑκατοστά, τὸ μετὰ ταῦτα χιλιοστά, καὶ οὕτω καθεξῆς. Εἶναι δὲ ἀνάγκη νὰ δεικνύηται ποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων. Πρὸς τοῦτο γράφεται μετ' αὐτὸ ὑποδιαστολή.

Παραδείγματος χάριν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς, ὅστις περιέχει 35 μονάδας, 7 δέκατα, 3 χιλιοστά, καὶ 8 δεκακισχιλιοστά, γράφεται

35,7038.

Ἐγράψαμεν δὲ 0 ἐν τῇ θέσει τῶν ἑκατοστών, διότι ὁ δεδομένος ἀριθμὸς δὲν περιέχει ἑκατοστά.

Ὅταν δεκαδικὸς τις ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀκέραιον μέρος, γράφομεν 0 πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς· οἷον ὁ ἀριθμὸς 4 δέκατα, 7 χιλιοστά, 3 δεκακισχιλιοστά, γράφεται 0,4073.

Τὰ ψηφία τὰ ἀποτελοῦντα τὸ δεκαδικὸν μέρος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ καλοῦνται δεκαδικὰ ψηφία.

184. Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται γραφομένην ὡςωνδήποτε μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ.

Διότι ἡ τάξις τῶν μονάδων ἐκάστου ψηφίου ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς θέσεως αὐτοῦ πρὸς τὴν ὑποδιαστολήν· ἡ θέσις δὲ αὕτη δὲν μεταβάλλεται διὰ τῆς γραφῆς μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιά τοῦ δεκαδικοῦ. Οἷον οἱ ἀριθμοὶ 3,78 καὶ 3,7800 παριστῶσιν ἀμφοτέρω 3 μονάδες, 7 δέκατα, 8 ἑκατοστά. Καὶ πᾶς ἀκέραιος δὲ δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς δεκαδικὸς ἔχων τὰ δεκαδικὰ αὐτοῦ ψηφία πάντα μηδενικά· οἷον ὁ 27 δύναται νὰ γραφῇ 27,000.

185. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἴσος κλάσματι ἔχοντι ἀριθμητὴν μὲν τὸν διὰ τῆς παραδείξεως τῆς ὑποδιαστολῆς προκύπτοντα ἀκέραιον, παρονομαστήν δὲ τὴν μονάδα ἀκολουθούμενην ὑπὸ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ.

Λέγω παραδείγματος χάριν ὅτι

$$27,5839 = \frac{275839}{10000}.$$

Διότι ὁ δεκαδικὸς 27,5839 εἶναι ἴσος τῷ ἀθροίσματι

$$\frac{27}{1} + \frac{5}{10} + \frac{8}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{9}{10000}.$$

Ἵνα ἀναχθῶσι πάντα τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς τὸν παρονομαστήν 10000 τοῦ τελευταίου, ἀρκεῖ νὰ γραφῇ ἐν 0 πρὸς τὰ

δεξιὰ ἀμφοτέρων τῶν ὄρων τοῦ $\frac{3}{1000}$, δύο 0 εἰς τοὺς τοῦ $\frac{8}{100}$, τρία 0 εἰς τοὺς τοῦ $\frac{5}{10}$, καὶ τέσσαρα 0 εἰς τοὺς τοῦ $\frac{27}{1}$.

Τότε δὲ τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα τρέπεται εἰς τὸ ἑξῆς·

$$\frac{270000}{10000} + \frac{5000}{10000} + \frac{800}{10000} + \frac{30}{10000} + \frac{9}{10000}.$$

Ἐκ τούτου τὸ κλάσμα $\frac{275839}{10000}$ εἶναι ἴσον τῷ ἀνωτέρω ἀθροίσματι.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Πᾶν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἢ μορὰς ἀκολουθουμένη ὑπὸ μηδενικῶν, δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ γραφῶμεν μόνον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ νὰ θέσωμεν ἐν αὐτῷ ὑποδιαστολὴν οὕτως, ὥστε πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῆς νὰ εἶναι τόσα ψηφία, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικά τοῦ παρονομαστοῦ.

Οἷον τὸ κλάσμα $\frac{73852}{4000}$ εἶναι ἴσον τῷ δεκαδικῷ 73,852.

Ὅταν δὲ τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι ὀλιγώτερα τῶν μηδενικῶν τοῦ παρονομαστοῦ, γράφομεν πρὸς τὰ ἀριστερά ἐκείνου τὰ ἀναγκαῖα μηδενικά.

Οἷον τὸ κλάσμα $\frac{73}{40000}$ εἶναι ἴσον τῷ δεκαδικῷ 0,0073.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ καλοῦνται καὶ δεκαδικὰ κλάσματα, ὡς ἴσοι μὲ κλάσματα, ὧν οἱ παρονομασταὶ εἶναι δυνάμεις τοῦ 10. Πρὸς διαστολὴν δὲ ἀπὸ τῶν δεκαδικῶν τὰ κλάσματα ἐν γένει καλοῦνται κοινὰ κλάσματα.

186. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δεκαδικὸς ἀριθμὸς πολλὰ π. λ. αὐξάνεται ἢ διαμεῖται διὰ 10, 100, 1000 κ.τ.λ. μετατιθεμένης τῆς ὑποδιαστολῆς μίαν, δύο, τρεῖς κ.τ.λ. θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ τὰ ἀριστερά.

Λέγω παραδ. χάριν ὅτι ἐὰν τοῦ δεκαδικοῦ 7,5328 μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 753,28 εἶναι ἑκατοντάκις μεγαλειότερος τοῦ πρώτου.

Διότι ἐὰν παραστήσωμεν ἀμφοτέρους διὰ κοινῶν κλασμάτων, ὁ παρονομαστής τοῦ δευτέρου θὰ ἔχῃ δύο μηδενικά ὀλιγώτερα ἢ ὁ τοῦ πρώτου, θὰ εἶναι δηλαδή ἑκατοντάκις μικρότερος. Ἄλλ' ὅταν ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος γείνη ἑκατοντάκις μικρότερος, τὸ κλάσμα γίνεται ἑκατοντάκις μεγαλειότερον.

Τοῦ ἀριθμοῦ 753,28 ὅντος ἑκατοντάκις μεγαλειότερου τοῦ 7,5328, αὗτος εἶναι ἑκατοντάκις μικρότερος τοῦ 753,28 ἐξ οὗ προέρχεται διὰ τῆς μεταθέσεως τῆς ὑποδιαστολῆς δύο θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἱκανὰ ψηφία πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν μηδενικά πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἢ πρὸς τὰ ἀριστερά τοῦ ἀκεραίου. Οἷον τὸ γινόμενον τοῦ 7,32 ἐπὶ 10000 εἶναι 73200, τὸ δὲ πηλίκον αὐτοῦ διὰ 10000 εἶναι 0,000732.

Πῶς ἀπαγγέλλεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς.

187. Ἦτα ἀπαγγέλλομεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν, ἀπαγγέλλομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος, ἐὰν ὑπάρχῃ, καὶ ἔπειτα τὸ δεκαδικόν, ὡς ἐὰν ἦτορ ἀκέραιος ἀριθμὸς, προσαρτῶντες καὶ τὸ ὄνομα τῆς μονάδας τοῦ τελευταίου ψηφίου.

Ἡ ὁρθότης τοῦ ἀνωτέρω κανόνος καταφαίνεται ἐὰν παραστήσωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ὡς κινὸν κλάσμα. Διότι τότε ὁ δεκαδικὸς 39,8047 τρέπεται εἰς

τὸν μικτὸν $39 + \frac{8047}{10000}$, ὅστις ἀπαγγέλλεται κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν, ἰδίως ὅταν ἔχη ὀλίγα ψηφία, δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν καὶ ἄλλως· ἀπαγγέλλομεν δηλαδὴ αὐτὸν ὡς ἐάν ὅλος ἦτον ἀκέραιος, παραβλέποντες τὴν ὑποδιαστολὴν, καὶ ἔπειτα προσαρτῶμεν τὸ ὄνομα τῆς μονάδος τοῦ τελευταίου ψηφίου.

Οἷον ὁ ἀριθμὸς 39,8047 δύναται νὰ ἀναγνώσθῃ, τριακόσιαι ἐρετρήκορτα δεκτὴ χιλιάδες καὶ τεσσαράκορτα ἐπτὰ δεκακίς χιλιοστά.

Διότι κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθειμένα ὁ 39,8047 εἶναι ἵσος τῷ κλάσματι
$$\frac{398047}{10000}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ὅταν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἔχη πολλὰ ψηφία, διαιροῦμεν αὐτὰ εἰς τμήματα τριψήφια ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ὑποδιαστολῆς. Ἐάν τὸ τελευταῖον τμήμα ἔχη ἐν ἢ δύο ψηφία, γράφομεν ἢ ὑποθέτομεν γεγραμμένα μηδενικὰ πρὸς συμπλήρωσιν αὐτοῦ. Ἀπαγγέλλομεν δὲ κατὰ πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος, ἔπειτα τὸ πρῶτον τριψήφιον τμήμα παριστῶν χιλιοστά, ἔπειτα τὸ δεύτερον παριστῶν ἑκατομμυριοστά, ἔπειτα τὸ τρίτον παριστῶν δισεκατομμυριοστά, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Οἷον ὁ ἀριθμὸς 3,1415926535897 ἀναγινώσκεται 3 μονάδες, 141 χιλιοστά, 592 ἑκατομμυριοστά, 653 δισεκατομμυριοστά, 589 τρισεκατομμυριοστά, 700 τετρακισεκατομμυριοστά.

Πρόσθεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

188. Ἴνα προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς, γράφομεν αὐτοὺς ὑπ' ἀλλήλους οὕτως, ὥστε τὰ ψηφία τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ· ἔπειτα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν προσθέτομεν τὰ ἐν ἑκάστη στήλῃ ψηφία, ἐκάστου δὲ ἄθροισματος τὰς μονάδας μόνον γράφομεν ὑπὸ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν στήλην, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς ἐπομένης πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης. Γράφομεν δὲ ἐν τῷ ἀ-

θροίσματι υποδιαστολὴν ἐκεί, ὅπου ἔχουσιν αὐτὴν καὶ οἱ προσθετέοι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

$$\begin{array}{r} 78,4532 \\ 0,947 \\ 652,08374 \\ 0,92 \\ \hline \end{array}$$

$$732,40394$$

Ἡ ὀρθότης τοῦ ἀνωτέρω κανόνος δεικνύεται ὡς καὶ ἐπὶ τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων, στηριζομένη ἐπὶ τούτου, ὅτι δέκα μονάδες ἐκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως προηγούμενης.

Ἀφαίρεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

189. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ δεκαδικοῦ, κάμνομεν ὥστε νὰ ἔχωσιν ἀμφοτέρω τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, γράφοντες, ἐὰν εἶναι ἀνάγκη, ἓν ἢ περισσότερα μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ἑτέρου αὐτῶν. Ἐπειτα γράφωμεν τὸν ἀφαιρέτεον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως ὥστε αἱ υποδιαστολαὶ νὰ ἀντιστοιχῶσι, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν ὡς ἐὰν προῦκειτο περὶ ἀκεραίων, φροντίζοντες νὰ γράψωμεν ἐν τῇ διαφορᾷ υποδιαστολὴν κατὰ τὴν θέσιν, ἐν ᾗ εὐρίσκονται αἱ υποδιαστολαὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Ἄς υποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ζητεῖται νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 97,673 ἀπὸ τοῦ 275,72. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r} 275,720 \\ 97,673 \\ \hline \end{array}$$

$$178,047$$

Ἡ ζητούμενη διαφορὰ εἶναι 178,047.

Ἀποδεικνύεται δὲ ὁ ἀνωτέρω κανὼν διὰ συλλογισμοῦ ὅλως ὁμοίου ἐκείνῳ, ὅστις γίνεται διὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ὁ ἀφαιρετέος ἔχῃ ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία ἢ ὁ μειωτέος, συνήθως παραλείπονται τὰ συμπληροῦντα τὰ δεκαδικὰ αὐτοῦ ψηφία μηδενικά. Οἷον, ἐὰν πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 83,97 ἀπὸ τοῦ 435,6253, ἡ πράξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r} 435,6253 \\ 83,97 \\ \hline 54,6553 \end{array}$$

Πολλαπλασιασμὸς τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

190. Ἴνα πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν ὡς ἐὰν δὲν ὑπῆρχον ὑποδιαστολαί, ἔπειτα δὲ χωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιά τοῦτου δι' ὑποδιαστολῆς τόσα ψηφία δεκαδικὰ, ὅσα ὑπάρχουσι καὶ εἰς τοὺς δύο παράγοντας ὁμοῦ.

Προτεθείσθω, παραδείγματος χάριν, νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 3,441 καὶ 9,86. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἴσοι τοῖς κλάσμασι $\frac{3441}{1000}$ καὶ $\frac{986}{100}$. Κατὰ δὲ τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχομεν,

$$\begin{aligned} 3,441 \times 9,86 &= \frac{3441}{1000} \times \frac{986}{100} = \frac{3441 \times 986}{1000 \times 100} = \\ &= \frac{3097026}{100000} = 30,97026. \end{aligned}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἵνα σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 3,441 καὶ 9,86 ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτοὺς μὴ θεωροῦντες τὴν ὑποδιαστολὴν, καὶ νὰ διαιρέσωμεν ἀκολούθως τὸ γινόμενον διὰ 100000, ὅπερ γίνεται χωρίζομένων πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ πέντε δεκαδικῶν ψηφίων, ἥτοι τοσούτων, ὅσα εἶναι τὰ τῶν δύο παραγόντων ὁμοῦ.

Ἡ πράξις διατάσσεται ὡς ἐξῆς.

$$\begin{array}{r}
 3,441 \\
 9,86 \\
 \hline
 48846 \\
 25128 \\
 28269 \\
 \hline
 30,97026
 \end{array}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἐφαρμόζεται προφανῶς καὶ ὅταν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς.

Διαιρέσεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

194. *Διαιρέσεις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.* — Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ 31,415 διὰ τοῦ 7. Πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως ταύτης ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 170, κατὰ τὸ ὅποιον ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι ἄθροισμα πολλῶν μερῶν, ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον διαιροῦμεν ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ ἀθροίζομεν τὰ πηλίκα πασῶν τῶν διαιρέσεων τούτων. Θέλομεν λοιπὸν ἐκτελέσει τὴν διαίρεσιν ὡς ἐξῆς.

$$\begin{array}{r|l}
 31,415 & 7 \\
 34 & 4,487 \\
 61 & \\
 55 & \\
 6 &
 \end{array}$$

Διαιροῦντες τὸ ἀκέραιον μέρος 31 τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ 7 εὕρισκομεν πηλίκον 4 ἀκεραίας μονάδας καὶ ὑπόλοιπον 3. Αἱ τρεῖς αὐται μονάδες ἀποτελοῦσι 30 δέκατα, τὰ ὅποια μετὰ τῶν 4 δεκάτων τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι 34 δέκατα. Διαιροῦντες ταῦτα διὰ τοῦ διαιρέτου εὕρισκομεν πηλίκον 4 δέκατα, τὰ ὅποια ἐπομένως γράφομεν ἀμέσως μετὰ τὰς ἀκεραίας μονάδας, ἀφοῦ μετὰ ταύτας γράψωμεν ὑποδιαστολὴν, καὶ ὑπόλοιπον 6 δέκατα. Ταῦτα ἰσοδυναμοῦσι μὲ 60 ἑκατοστὰ, τὰ

ὅποια μετὰ τοῦ ἐνὸς ἑκατοστοῦ τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι 61 ἑκατοστὰ. Ταῦτα διαιροῦντες διὰ τοῦ διαιρέτου εὐρίσκομεν πηλίκον 8 ἑκατοστὰ, τὰ ὅποια ἐπομένως γράφομεν ἀμέσως μετὰ τὰ 4 δέκατα τοῦ πηλίκου, καὶ ὑπόλοιπον ὃ ἑκατοστὰ. Ταῦτα μετὰ τῶν 5 χιλιοσῶν τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι 55 χιλιοστὰ, ταῦτα δὲ διαιρούμενα διὰ τοῦ διαιρέτου δίδουσι πηλίκον 7 χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 6 χιλιοστὰ. Τὸ πηλίκον λοιπὸν τῆς διαιρέσεως τοῦ 31,415 διὰ τοῦ 7 εἶναι 4,487 καὶ $\frac{6}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ. Ἐὰν παραλείψωμεν τὸ κλάσμα τοῦτο, λαμβάνομεν πηλίκον διαφέρον τοῦ ἀκριβοῦς ὀλιγώτερον 1 χιλιοστοῦ, καὶ τότε λέγομεν ὅτι τὸ πηλίκον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι 4,487 κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ. Ἐὰν δὲ ἀντὶ νὰ παραλείψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{6}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ ἀντικαταστήσωμεν αὐτὸ δι' ἐνὸς χιλιοστοῦ, τὸ λάθος τὸ ὅποιον θὰ κάμωμεν θὰ εἶναι ὡσαύτως μικρότερον 1 χιλιοστοῦ, ὃ δὲ ἀριθμὸς 4,488, ὃν θὰ λάβωμεν, θὰ εἶναι τὸ πηλίκον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν πάλιν κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς 4,487 λέγεται τιμὴ προσεγγίζουσα τοῦ πηλίκου κατ' ἑλλείψιν, ὃ 4,488 καθ' ὑπεροχὴν. Ἀποβλέποντες εἰς τὴν ἀνωτέρω γενομένην διαίρεσιν δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου συνάγομεν τὸν ἐξῆς κανόνα.

Ἴνα διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἔαν ἦτο καὶ ὁ διαιρετέος ἀκέραιος, φροντίζοντες μόνον νὰ γράψωμεν ἐποδιαστολὴν μετὰ τὸν ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου μέρος τοῦ διαιρετέου προσερχόμενον ἀκέραιον. Καὶ ἔαν μὲν τὸ ὑπόλοιπον τῆς γενομένης διαιρέσεως εἶναι 0, ἔχομεν τὸ πηλίκον ἀκριβῶς· εἰ δὲ μὴ, ἔχομεν τὸ πηλίκον κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου τοῦ διαιρετέου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος οἷασδῆποτε θέλωμεν τάξεως· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ γράψωμεν ἢ μᾶλλον νὰ ὑποθέσωμεν γεγραμμένα πρὸς τὰ δεξιά τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ διαιρετέου ὅσα μηδενικά μᾶς

χρειάζονται. Ἐάν παραδείγμ. χάριν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ 34,445, δι' 7 κατὰ προσέγγισιν ἑκατομμυριοστοῦ, ὑποθέτομεν γεγραμμένα τρία μηδενικά πρὸς τὰ δεξιά τοῦ διαιρετέου, καὶ ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω τῆς διαιρέσεως κανόνα. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r}
 34,445 \quad | \quad 7 \\
 34 \\
 \hline
 61 \\
 55 \\
 60 \\
 40 \\
 50 \\
 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4,487857
 \end{array}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν ἀκεραίου δι' ἀκεραίου· διότι ὁ ἀκέραιος διαιρετέος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικός, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι μηδενικά. Παραδείγματος χάριν τὸ πηλίκον τοῦ 23 δι' 7 κατὰ προσέγγισιν ἑκατομμυριοστοῦ εἶναι 3,285744, εὐρισκόμενον ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r}
 23 \quad | \quad 7 \\
 20 \\
 \hline
 60 \\
 40 \\
 50 \\
 40 \\
 30 \\
 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3,285744
 \end{array}$$

192. Διαίρεσις δεκαδικοῦ διὰ δεκαδικοῦ. — α) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ διαιρετέος ἔχει περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία ἢ ὁ διαιρέτης, παραδείγματος χάριν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ 7,53048 διὰ τοῦ 83,64. Ἐάν μεταθέσωμεν ἐν ἀμφοτέροις τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους ἐπὶ 100, τοῦτο δὲ δὲν μεταβάλλει τὸ

πηλίκον αὐτῶν (171). Ἀλλὰ τότε ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν 753,048 διὰ τοῦ ἀκεραίου 8364, ἡ δὲ πράξις γίνεται κατὰ τὸν κανόνα τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου.

Β'.) Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀμφότεροι ἔχουσιν ἰσάριθμα δεκαδικὰ ψηφία, ὅτι πρόκειται παραδείγματος χάριν νὰ διαιρέσωμεν 53,748 διὰ 7,256. Ἐὰν ἐξαλείψωμεν ἐξ ἀμφοτέρων τὴν ὑποδιαστολὴν, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ἐπὶ 1000, ἐπομένως τὸ πηλίκον αὐτῶν δὲν μεταβάλλεται· ἀλλὰ τότε ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀκεραῖον 53748 διὰ τοῦ ἀκεραίου 7256. Τὸ πηλίκον τούτων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μεθ' ὅσης θελήσωμεν προσεγγίσεως κατὰ τὸν κανόνα τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου. (Σημ. Β').)

γ'.) Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἔχῃ περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία ἢ ὁ διαιρετέος, γράφομεν πρὸς τὰ δεξιά τούτου ἱκανὰ μηδενικά, ὥστε νὰ ἔχωσιν ἀμφότεροι ἰσάριθμα δεκαδικὰ ψηφία, καὶ τότε ἔχομεν τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Παραδείγμ. χάριν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 75,84 διὰ τοῦ 9,6783 εἶναι ἴσον τῷ πηλίκῳ τοῦ 75,8400 διὰ τοῦ 9,6783, ἥτοι ἴσον τῷ πηλίκῳ τῶν ἀκεραίων 758400 καὶ 96783.

Τροπὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικά.

193. Εἶδομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις ὅτι αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἐκτελοῦνται ἀπαραλλάκτως ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων, ἐν ᾧ αἱ ἐπὶ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἶναι διλιγώτερον ἀπλᾶι. Διὰ τοῦτο αἱ πράξεις γίνονται συνήθως ἐπὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ὅταν δὲ παρουσιάζωνται καὶ κοινὰ κλάσματα, ταῦτα τρέπονται προηγουμένως εἰς δεκαδικά, εἴτε ἀκριβῶς εἴτε κατὰ προσέγγισιν, ὡς θέλομεν ἰδεῖ ἐνταῦθα.

Ἡ τροπὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικά οὐδόλως διαφέρει τῆς διαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Διότι πᾶν κοινὸν κλάσμα παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ

διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ δὲ πηλίκον τοῦτο ἐκφράζεται διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μὲ ὅσην θελήσωμεν προσέγγισιν (194 Σημ. Β').

Παραδείγματος χάριν τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 5 διὰ τοῦ 7. Τὸ πηλίκον τοῦτο δυνάμεθα νὰ εὐρώμεν κατὰ προσέγγισιν δεκάτου, ἑκατοστοῦ, χιλιοστοῦ κτλ., ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 191, ὡς ἐξῆς.

$$\begin{array}{r|l}
 50 & 7 \\
 40 & \hline
 30 & 0,7142 \\
 20 & \\
 6 & \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 \cdot &
 \end{array}$$

Βλέπομεν δὲ ὅτι αἱ προσεγγίζουσαι τιμαὶ τοῦ $\frac{5}{7}$ κατὰ προσέγγισιν δεκάτου, ἑκατοστοῦ, χιλιοστοῦ κτλ. εἶναι 0,7· 0,71· 0, 714 κτλ.

Ἐξακολουθοῦντες τὴν ἀνωτέρω πρᾶξιν φθάνομεν ἐνίοτε εἰς ὑπόλοιπον μηδέν· τότε δὲ ἡ πρᾶξις λαμβάνει πέρας καὶ τὸ δοθὲν κοινὸν κλάσμα τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ὁμῶς δὲν δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον μηδέν, ὅσον καὶ ἂν ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν, καὶ τότε τὸ δοθὲν κλάσμα δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, ἀλλὰ μετὰ προσεγγίσεως ὅσον θελήσωμεν μεγάλης. Ἐν τοῖς ἐξῆς θεωρήμασι δεικνύεται πότε τὸ κοινὸν κλάσμα δύναται νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, καὶ πότε τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν.

194. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ὅταν ὁ παρονομαστής κοινοῦ ἀναγωγῶν κλάσματος δὲν περιέχῃ ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλὴν τοῦ 2 καὶ 5, τὸ κοινὸν τοῦτο κλάσμα τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν αὐτοῦ ᾗ-

γίων εἶναι ἕως τῷ μείζονι τῶν ἐκθετῶν τῶν ἐν τῷ παρονομαστικῇ τοῦ κλάσματος παραγόντων 2 καὶ 5.

Ἐστω παραδείγματος χάριν τὸ κλάσμα $\frac{13}{8}$, τοῦ ὁποῦ
 ὁ παρονομαστής εἶναι ἡ τρίτη δύναμις τοῦ 2. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 10^3 , ἤτοι ἐπὶ $2^3 \times 5^3$, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ γινόμενον 13000 θὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 8, ἤτοι τοῦ 2^3 . Ἐὰν λοιπὸν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 191 εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 13,000 καὶ 8, ἡ διαίρεσις θέλει γείνει ἀκριβῶς. Ἀλλὰ δὲν ἤθελε συμβῇ τὸ αὐτὸ, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς ἐπολλαπλασιάζετο ἐπὶ μικροτέραν δύναμιν τοῦ 10, οἷον ἐπὶ 100· διότι τότε ὁ ἀριθμὸς 1300 ἤθελε περιέχει τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ 2, ἐν ᾧ ὁ διαιρέτης περιέχει τὴν τρίτην. Ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{13}{8}$ τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, καὶ τοῦτο ἔχει τρία δεκαδικὰ ψηφία.

$$\begin{array}{r} 13 \quad | \quad 8 \\ 50 \quad \quad 1,625 \\ 20 \quad \quad \quad \\ 40 \quad \quad \quad \\ 0 \end{array}$$

Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ἐφαρμόζεται προφανῶς καὶ ὅταν ὁ παρονομαστής περιέχῃ ἀμφοτέρους τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5.

195. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ὅταν ὁ παρονομαστής ἀναγῶντος κλάσματος περιέχῃ πρῶτον τιὰ παράγοντα διαγέγοντα τοῦ 2 καὶ 5, τὸ κλάσμα τοῦτο δὲν δύναται νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν.

Διότι πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ. εἰσάγομεν εἰς τὸ γινόμενον μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5, ἐπομένως οὐδὲν τῶν γινομένων τούτων δύναται νὰ διαιρεθῇ ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος. Εἰς τὴν περίστασιν λοιπὸν ταύτην δύναται τις νὰ ἐξακολουθήσῃ ἐπ' ἀόριστον τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τοῦ ἐδαφίου 191 χωρὶς ποτὲ νὰ φθάσῃ εἰς ὑπόλοιπον μηδέν.

Τοῦτο παραδείγματος χάριν συμβαίνει εἰς τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$, τὸ ὁποῖον ἐθεωρήσαμεν ἐν τῷ ἐδαφίῳ 193. Τότε δὲ λέγομεν ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἔχον ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία. Ἐάν ἐν τῷ δεκαδικῷ τούτῳ κλάσματι λάβωμεν ἐν δεκαδικὸν ψηφίον, ἔπειτα δύο, ἔπειτα τρία, καὶ οὕτω καθεξῆς, θέλομεν ἔχει τιμὰς ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον προσεγγιζούσας εἰς τὸ κοινὸν κλάσμα. Ἐπειδὴ δὲ λαμβανόμενου ἱκανοῦ ἀριθμοῦ ψηφίων ἡ διαφορὰ τοῦ κοινοῦ κλάσματος καὶ τοῦ δεκαδικοῦ δύναται νὰ γείνη μικροτέρα παντὸς δοθέντος κλάσματος, λέγεται ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ἀπεριορίστου δεκαδικοῦ κλάσματος, ὅταν λαμβάνηται ἐν τούτῳ ἀριθμὸς ψηφίων ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μέγας.

Περὶ τῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

196. Καλεῖται περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα τὸ ἔχον ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία δεκαδικὸν κλάσμα, ἐν ᾧ τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀποτελεῖται ἐκ τινων ψηφίων, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται ἐπ' ἄπειρον τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Τὸ σύνολον τῶν οὕτως ἐπαναλαμβανομένων ψηφίων καλεῖται περίοδος.

Τὸ περιοδικὸν δεκαδικὸν λέγεται ἀπλοῦν μὲν, ἐάν ἡ πρώτη περίοδος ἀρχῇται ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν, μικτὸν δὲ κατὰ τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν· τότε δὲ τὰ προηγούμενα τῆς πρώτης περιόδου δεκαδικὰ ψηφία ἀποτελοῦσι τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος. Οἶον 0,783783783...

εἶναι ἀπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα, τοῦ ὁποῦν ἡ περίοδος εἶναι 783.

Τὸ δὲ 0,54783783783...

εἶναι μικτὸν περιοδικὸν, τοῦ ὁποῦν ἡ περίοδος εἶναι 783, τὸ δὲ μὴ περιοδικὸν μέρος 54.

197. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ὅταν κοινὸν κλάσμα τρέπηται εἰς δεκαδικὸν ἔχον ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὸ δεκαδικὸν τοῦτο κλάσμα εἶναι περιοδικόν.

Ἐστω τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$. Ἵνα τρέψωμεν αὐτὸ εἰς δεκαδικὸν πρᾶττομεν ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r}
 50 \quad | \quad 7 \\
 40 \quad \hline
 30 \quad 0,71428571 \\
 20 \\
 60 \\
 40 \\
 50 \\
 10
 \end{array}$$

Διαιροῦμεν ὅ διὰ τοῦ 7, καὶ εὐρίσκομεν πηλίκον 0 καὶ ὑπόλοιπον 5. Γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 5, καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 50 διαιροῦμεν δι' 7· τὸ δὲ πηλίκον 7 εἶναι τὸ πρῶτον δεκαδικὸν ψηφίον. Γράφομεν ἔπειτα 0 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 1 καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 10 διαιροῦμεν δι' 7· τὸ πηλίκον 1 εἶναι τὸ δεύτερον δεκαδικὸν ψηφίον· ἐξακολουθοῦμεν δὲ οὕτω ἐπ' ἀόριστον. Ἀλλὰ κατὰ πάσας τὰς διαιρέσεις ταύτας ὁ διαιρέτης εἶναι πάντοτε 7, ἐπομένως τὰ εὐρισκόμενα ὑπόλοιπα εἶναι πάντα μικρότερα τοῦ 7· οὐδὲν δὲ ἐξ αὐτῶν εἶναι μηδέν, διότι τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ θὰ ἦτο τρεπτόν ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν. Ἄρα ἐν τῇ ἐξακολουθήσει τῆς πράξεως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὐρεθῶσιν, ἢ ἐξ τὸ πολὺ διάφορα ὑπόλοιπα, ἢτοι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ἐκ τούτου δὲ συμπεραίνομεν ὅτι ἀφοῦ γράψωμεν εἰς τὸ πηλίκον ἐξ τὸ πολὺ δεκαδικὰ ψηφία θέλομεν εὑρεῖ ὑπόλοιπον καὶ πρὶν εὐρεθέν. Τότε δὲ θέλομεν εὐρεθῇ εἰς τὰς αὐτὰς περιστάσεις, καὶ ὅτε κατὰ πρῶτον εὐρομεν τὸ ὑπόλοιπον ἐκεῖνο. Δηλονότι ἕκτοτε θὰ ἔχωμεν νὰ ἐκτελῶμεν τὴν αὐτὴν καὶ προηγουμένως σειρὰν πράξεων. Διὰ τοῦτο δὲ τὰ ὑπόλοιπα καὶ τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου θὰ ἐπανέρχωνται περιοδικῶς τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὅταν κοινὸν κλάσμα τρέπηται εἰς περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῶν ψη-

φίωρ τῆς περιόδου καὶ τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους εἶναι μικρότερον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κοινοῦ κλάσματος.

*** Ἀναζήτησις τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται ὁρθὲν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα.**

198. Ἡ πρότασις, ἐφ' ἧς θέλομεν στηριχθῇ ἐν τῇ ἀναζητήσει ταύτῃ, εἶναι ἡ ἐξῆς.

Ἐὰν δύο δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ διαφέρωσι μόνον κατὰ τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ ὁ ἕτερος τούτῳ προέρχεται ἐκ τῆς τροπῆς εἰς δεκαδικὸν κοινοῦ τιτος κλάσματος, ὁ ἕτερος θὰ προέρχεται ἐκ κλάσματος, τὸ ὅποσον εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἢ διαιροῦντες ἐκεῖνο διὰ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ τῶων μηδενικῶν, ὅσαι εἶναι αἱ θέσεις, καθ' ἃς διαφέρουσιν αἱ ὑποδιαστολαὶ τῶν δεκαδικῶν.

Παραδείγ. χάριν τοῦ περιοδικοῦ δεκαδικοῦ 28,351351...

$$\frac{1049}{37}$$

 προερχομένου ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{1049}{37}$, λέγω ὅτι τὸ δεκαδικὸν 0,28351351... προέρχεται ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{1049}{3700}$.

Διότι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 1049 διὰ 3700, εἶναι ἴσον τῷ πηλίκῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ 10,49 διὰ 37. Τοῦτο δὲ δὲν διαφέρει τοῦ πηλίκου 1049 : 37, ἢ καθ' ὅτι ἡ ὑποδιαστολή θὰ εἶναι ἐν τούτῳ δύο θέσεις περαιτέρω πρὸς τὰ δεξιά.

199. Ἄς λάβωμεν κατὰ πρῶτον ἀπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα ἄνευ ἀκεραίου μέρους, οἷον τὸ 0,873873... .

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦτο προέρχεται ἐκ τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{a}{b}$, τὸ δεκαδικὸν 873,873873... θὰ προέρχεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{a}{b} \times 1000$. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν προέρχεται προφανῶς καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ $873 + \frac{a}{b}$.

Ἐχομεν ἄρα $\frac{a}{b} \times 1000 = 873 + \frac{a}{b}$.

$$\delta\theta\epsilon\nu \quad \frac{\alpha}{\epsilon} \times 1000 - \frac{\alpha}{\epsilon} = 873$$

$$\eta\tau\omicron\iota \quad \frac{\alpha}{\epsilon} \times 999 = 873$$

$$\delta\theta\epsilon\nu \quad \frac{\alpha}{\epsilon} = \frac{873}{999}$$

Ὅτι δὲ ἀληθῶς τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $0,873873 \dots$

γίνεται ἐκ τοῦ κοινοῦ $\frac{873}{699}$ δεικνύεται ὡς ἐξῆς.

$$\text{Ἔχομεν} \quad 873000 = 873 \times 1000$$

$$\eta\tau\omicron\iota \quad 873000 = 873 \times 999 + 873.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει ὅτι ὁ 873000 διαιρούμενος δι' 999 δίδει τὸ πηλίκον 873 καὶ ὑπόλοιπον 873. Ἐὰν λοι-

πὸν τρέψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{873}{999}$ εἰς δεκαδικὸν κατὰ τὸν κα-

νόνα, αἱ τρεῖς πρώται μερικαὶ διαιρέσεις θὰ μᾶς δώσωσιν ἐν τῷ πηλίκῳ τὰ ψηφία 8, 7, 3, καὶ τῆς τρίτης διαιρέσεως τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι 873. Ἀρα ἐξακολουθοῦντες τὴν πράξιν θὰ εὐρίσκωμεν πάντοτε τὰ αὐτὰ ψηφία 8, 7, 3,

καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Ἀρα τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{873}{999}$

τρέπόμενον εἰς δεκαδικὸν δίδει τὸ $0,873873 \dots$,

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸ ἐξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ γίνεται ἀπλοῦν περιθιακὸν δεκαδικὸν κλάσμα ἄνεν ἀκεραίου μέρους, ἔχει ἀριθμητὴν μὲν μίαν περίοδον, παρονομαστὴν δὲ ἀριθμὸν συγκείμενον ἐκ τόσων ψηφίων 9, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα ἐὰν τὸ περιθιακὸν $0,999 \dots$ προσέρχηται ἐκ κοινοῦ τινος κλάσματος,

τοῦτο θὰ εἶναι $\frac{9}{9}$ ἢ $\frac{99}{99}$ κτλ. Ἀλλὰ ταῦτα εἶναι ἴσα τῇ

μονάδι, καὶ ἐπομένως δὲν δύνανται νὰ παραγάγῃσι περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα. Ἄρα τὸ περιοδικὸν 0,999... ἐξ οὐδενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγεται. Ἄλλ' ἔχει ὅριον τὴν μονάδα· διότι ὅταν ληφθῶσι ψηφία τινὰ αὐτοῦ, τὸ προκύπτον δεκαδικὸν κλάσμα διαφέρει τῆς μονάδος κατὰ μίαν δεκαδικὴν μονάδα τοῦ τελευταίου ψηφίου. Τοῦτο δὲ τὸ ὅριον δίδει καὶ ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

200. Ἐὰν τὸ ἀπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα ἔχῃ καὶ ἀκέραιον μέρος, εὐκόλως εὐρίσκεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ ἐξ οὗ γίνεται κοινὸν κλάσμα.

Οἷον τὸ δεκαδικὸν κλάσμα 46,873873 ... προέρχεται:

προφανῶς ἐκ τοῦ μικτοῦ ἀριθμοῦ $46 + \frac{873}{999}$. Εἶναι δὲ

$$46 + \frac{873}{999} = \frac{46 \times 999 + 873}{999} = \frac{46 \times 1000 - 46 + 873}{999},$$

$$\text{ἥτοι} \quad 46 + \frac{873}{999} = \frac{46873 - 46}{999}.$$

Ἄρα τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται ἀπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα μετ' ἀκεραίου μέρους, ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀποτελούμενον ἀριθμὸν ὑπὸ τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους καὶ τῶν ψηφίων μιᾶς περιόδου, ἡλτιτωμένον κατὰ τὸ ἀκέραιον μέρος, παρονομαστὴν δὲ συγκείμενον ἐκ τούτων ψηφίων 9, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου.

201. Τὸ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εὐρισκόμενον κοινὸν κλάσμα ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ δὲν εἶναι ἀνάγωγον. Ἄλλ' ὁ παρονομαστής αὐτοῦ ὡς λήγων εἰς 9 δὲν ἔχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5. Τὸ αὐτὸ δὲ θὰ ὑπάρχῃ προφανῶς, καὶ ὅταν τὸ κλάσμα γείνη ἀνάγωγον. Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης συνάγομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται ἀπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα, δὲν περιέχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5.

202. Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα, οἷον τὸ 8,57643643 . . .

Ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μετὰ τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος, λαμβάνομεν τὸ ἀπλοῦν περιοδικὸν μετ' ἀκεραίου μέρους δεκαδικὸν κλάσμα 857,643643 . . . Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο κατὰ τὰ ἀνωτέρω παράγεται ἐκ τοῦ κοινοῦ κλάσματος 857643—857

999

, τὸ δοθὲν 8,57643643.., ὅπερ μόνον κατὰ τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς διαφέρει ἐκείνου, παράγεται ἐκ τοῦ 857643—857

ἐκατοντάκις μικροτέρου κλάσματος

99900

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸ ἐξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται μικτὸν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα, ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀποτελούμενον ἀριθμὸν ὑπὸ τῶν πρὸ τῆς περιόδου ψηφίων καὶ τῶν ψηφίων μιᾶς περιόδου ἡλαττωμένον κατὰ τὸν ὑπὸ τῶν πρὸ τῆς περιόδου ψηφίων ἀποτελούμενον ἀριθμὸν, παρονομαστὴν δὲ ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ὑπὸ τοσούτων 9, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου, ἀκολουθουμένων ὑπὸ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία.

203. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Τὸ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εὐρισκόμενον κοινὸν κλάσμα ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ δὲν εἶναι ἀνάγωγον. Ἐὰν δὲ καταστήσωμεν αὐτὸ ἀνάγωγον, ὁ παρονομαστής θὰ ἀποβάλλῃ τὴν ἰδιάζουσαν αὐτοῦ μορφήν. Ἀλλὰ καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν ὁ παρονομαστής θὰ περιέχῃ τοῦλάχιστον τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 τοσάκις, ὡσάκις καὶ πρὸ τῆς ἀναγωγῆς, ὅσα δηλαδὴ εἶναι τότε τὰ μηδενικὰ αὐτοῦ. Τῷ ὄντι οἱ παράγοντες 2 καὶ 5 δὲν διαιροῦσι συγχρόνως τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος· διότι ἐὰν διήρουν αὐτὸν, οὗτος θὰ ἔλθην εἰς μηδενικόν, καὶ ἐπειδὴ προέρχεται ἐξ ἀφαιρέσεως, ἔπρεπε τὸ τελευταῖον ψηφίον τῶν ἀφαιρουμένων ἀριθμῶν νὰ εἶναι τὸ αὐτὸ, δηλαδὴ τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος νὰ λήγῃ εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον, εἰς 2 καὶ ἢ περιόδος, ὅπερ δὲν

συμβαίνει· διότι τότε ἡ περίοδος ἤθελεν ἄρχεσθαι ἐν ψηφίον πρότερον. Ἐὰν παραδείγματος χάριν ἀντικαταστήσωμεν τοῦ μικτοῦ περιοδικοῦ 0,57643643 . . . τὸ τελευταῖον μὴ περιοδικὸν ψηφίον 7 διὰ τοῦ τελευταίου τῆς περιόδου 3, λαμβάνομεν τὸ 0,53643643, ἐν ᾧ ἡ περίοδος εἶναι 364 ἀρχομένη μετὰ τὸ πρῶτον δεκαδικὸν ψηφίον. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος δὲν δύναται νὰ λήγῃ εἰς 0, καὶ ὅταν τὸ κλάσμα ἀναχθῇ εἰς τοὺς ἐλαχίστους ὅρους, ὁ παρονομαστής θέλει διατηρήσει τοῦλάχιστον τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 τοσάκις, ὅσα εἶναι τὰ πρὸς τὰ δεξιὰ μηδενικὰ αὐτοῦ, τουτέστιν ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία ἐν τῷ δεδομένῳ μικτῷ περιοδικῷ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται φανερόν τὸ ἐξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ὁ παρονομαστής τοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα, περιέχει τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 μετ' ἐκθέτου ἴσου τῷ ἀριθμῷ τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίων. Δύναται δὲ τὰ περιέχει καὶ τὸν ἕτερον μετ' ἐκθέτου ἴσου ἢ μικροτέρου.

204. Ἐκ τῶν θεωρημάτων Β'. καὶ Δ'. συνάγομεν καὶ τὰ ἐξῆς δύο.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. Ὅταν ὁ παρονομαστής κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν περιέχῃ μήτε τὸν παράγοντα 2 μήτε τὸν παράγοντα 5, τὸ κλάσμα τοῦτο παράγει ἀπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα.

Τῷ ὄντι τὸ κλάσμα τοῦτο δὲν δύναται νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν (195)· ἄρα παράγει περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο κατὰ τὸ θεώρημα Δ'. δὲν δύναται νὰ εἶναι μικτὸν, ὁὰ εἶναι ἀπλοῦν περιοδικόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤ'. Ὅταν ὁ παρονομαστής κοινοῦ κλάσματος ἀναγώγου περιέχῃ τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων 2 καὶ 5, ἢ καὶ ἀμφοτέρους, πρὸς δὲ τοῦτοις καὶ ἄλλους πρῶτους παράγοντας, τὸ κλάσμα τοῦτο παράγει μικτὸν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα, ἐν ᾧ ὁ ἀριθμὸς τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίων

φίων εἶναι ἴσος τῷ μείζονι τῶν ἐκθετῶν τῶν ἐν τῷ παρονομαστῇ τοῦ κοινοῦ κλάσματος περιεχομένων παραγόντων 2 καὶ 5.

Τῷ ὄντι τὸ τοιοῦτο κλάσμα δὲν δύναται νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν (195)· ἄρα παράγει περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο κατὰ τὸ θεώρημα Β'. δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀπλοῦν περιοδικὸν, θὰ εἶναι μικτόν. Κατὰ δὲ τὸ θεώρημα Δ'. ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους θὰ εἶναι ἴσος τῷ μείζονι τῶν ἐκθετῶν τῶν ἐν τῷ παρονομαστῇ τοῦ κοινοῦ κλάσματος περιεχομένων παραγόντων 2 καὶ 5.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν

α.) Τὸ γινόμενον δύο κοινῶν κλασμάτων τραπέν εἰς δεκαδικὸν μᾶς ἔδωκε τὸ ἀπλοῦν περιοδικὸν 1,2121 ... τὸ ἐν τῶν κοινῶν κλασμάτων εἶναι $\frac{8}{44}$ · ποῖον εἶναι τὸ ἕτερον;

β.) Τὸ περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα 0,375 375 375 ... προέρχεται ἐκ τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{375}{999}$. Τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν ἐὰν ἐν αὐτῷ θεωρηθῇ ἡ περίοδος ἴση μὲ 375375 προέρχεται ἐκ τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{375375}{999999}$. Νὰ δευχθῇ ἐκ

τῶν προτέρων ἡ ἰσότης τῶν δύο τούτων κοινῶν κλασμάτων.

γ.) Ἐὰν ἀνάγωγόν τι κλάσμα τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν δίδῃ περιοδικόν, πᾶν ἄλλο κλάσμα ἀνάγωγον ἔχον τὸν αὐτὸν καὶ ἐκεῖνο παρονομαστὴν δίδει περιοδικόν, οὗ ἡ περίοδος ἔχει ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων τῇ τοῦ πρώτου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

205. Διὰ τὴν καταμέτρησιν ἐκάστου εἶδους ποσοῦ παραδέχονται κατὰ συνθήκην ἐν ἐκάστη ἐπικρατεῖα διαφορὸς μονάδας, ἐξ ὧν ἐκάστη εἶναι ὠρισμένον πολλαπλάσιον ἢ πολλοστὸν τῆς ἀμέσως μικροτέρας ἢ μεγαλειτέρας, καὶ αἵτινες ἔχουσιν ἴδια ὀνόματα, ἐν οἷς συνήθως δὲν φαίνεται τί πολλαπλάσιον εἶναι ἐκάστη τῆς ἀμέσως μικροτέρας. Παραδείγματος χάριν διὰ τὰ βάρη παρ' ἡμῖν καὶ ἄλλοις τισὶ λαοῖς ὑπάρχουσι τρεῖς μονάδες διαφοροί, τὸ δράμιον, ἡ ὀκά, καὶ ὁ στατήρ (καντάριον). εἶναι δὲ τὸ μὲν δράμιον τὸ τετρακοστὸν τῆς ὀκάς, ἡ δὲ ὀκά τὸ τεσσαρακοστὸν τέταρτον τοῦ στατήρος.

Ἡ κατὰ πρῶτον ληφθεῖσα μονάς, ἐξ ἧς παρήχθησαν αἱ λοιπαὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ ὑποδιαίρέσεως, καλεῖται ἀρχικὴ μονάς.

Ἐχοντες τὰς διαφορὰς ταύτας μονάδας καταμετροῦμεν πόσον τι ὥς ἐξῆς. Εὐρίσκομεν κατὰ πρῶτον ποσάκις ἡ μεγίστη τῶν μονάδων περιέχεται ἐν αὐτῷ. Ἐὰν δὲ μείνη ὑπόλοιπον, εὐρίσκομεν ποσάκις ἡ ἀμέσως μικροτέρα μονάς περιέχεται ἐν τούτῳ, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἐὰν δὲ ἀποῦ κάμωμεν χρῆσιν καὶ τῆς ἐλαχίστης μονάδος μείνη ὑπόλοιπον, ἡ παραμελεῖται τοῦτο, διότι ἡ ἐλαχίστη μονάς λαμβάνεται ἱκανῶς μικρὰ, ἢ ἐκτιμᾶται διὰ κλάσματος αὐτῆς.

Ὁ ἐκ τῆς τοιαύτης καταμετρήσεως προσερχόμενος ἀριθμὸς καλεῖται συμμιγῆς ἀριθμὸς.

Τοιοῦτος εἶναι ὁ ἀριθμὸς

8 στατήρες, 32 ὀκάδες, 350 δράμια.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καλοῦνται ἀφ'ηρημένοι ἀριθμοὶ ἐκεῖνοι, ὧν ἡ μονάς εἶναι ἀόριστος, καὶ δύναται νὰ εἶναι οἷαδὴποτε· συγ-κεκριμένοι δὲ ἐκεῖνοι, ὧν ἡ μονάς εἶναι ὠρισμένη. Οἱ ἀκέ-ραιοι καὶ τὰ κλάσματα δύνανται νὰ εἶναι καὶ ἀφ'ηρημένοι ἀριθμοὶ καὶ συγκεκριμένοι, οἱ δὲ συμμιγεῖς εἶναι πάντοτε συγκεκριμένοι.

206. Πρὶν προβῶμεν εἰς τὰς ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν πράξεις εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκθέσωμεν πίνακα τῶν διαφορῶν μονάδων τῶν συνηθεστέρων ποσῶν. Ἐπειδὴ δὲ πλὴν τοῦ χρόνου καὶ τῆς περιφερείας, διὰ τὰ ὅποια εἶναι παραδεδεγ-μένοι αἱ αὐταὶ μονάδες ὑπὸ πάντων τῶν πεπολιτισμένων ἐθνῶν, διὰ τὰ λοιπὰ ποσὰ ὑπάρχουσι παρὰ τοῖς διαφοροῖς λαοῖς διαφοροὶ μονάδες, θὰ ᾔτο δὲ πολὺ μακρὸν καὶ ἀνω-φελὲς νὰ ἐκθέσωμεν νὰ διάφορα μετρικὰ συστήματα, ἐκθέ-τομεν δι' ἕκαστον ποσὸν τὰς καθ' ἑν μετρικὸν σύστημα μονάδας, προτιμῶντες τὰς ἐν χρήσει παρ' ἡμῖν. Αἱ δὲ ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν τῶν μονάδων τούτων πράξεις ἀρ-κοῦσι νὰ δεῖξωσι πῶς ἐκτελοῦνται αἱ αὐταὶ πράξεις καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου συμμιγοῦς.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΗΚΟΥΣ.

(Ἀρχαῖαι Γαλλικαί.)

$$\begin{aligned} & \text{Ὅργυιά, ἀρχικὴ μονάς. Πούς} = \frac{1}{6} \text{ τῆς ὀργυιάς, Δάκτυλος} \\ & = \frac{1}{12} \text{ τοῦ ποδός. Γραμμὴ} = \frac{1}{12} \text{ τοῦ δακτύλου. Ἐπομένως} \\ & \text{εἶναι} \quad 1 \text{ ὀργ.} = 6 \text{ πόδ.} = 72 \text{ δακ.} = 864 \text{ γραμ.} \\ & \quad \quad \quad 1 = 12 = 144. \\ & \quad \quad \quad 1 = 12. \end{aligned}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ ΒΑΡΟΥΣ.

(Τουρκικαί, ἐν χρήσει καὶ παρ' ἡμῖν.)

$$\begin{aligned} & \text{Ὅκα, ἀρχικὴ μονάς. Στατήρ} = 44 \text{ ὀκάδες. Δράμιον} = \\ & \frac{1}{400} \text{ τῆς ὀκάς. Ἐπομένως} \\ & 400 \quad 1 \text{ στατ.} = 44 \text{ ὀκ.} = 17600 \text{ δρ.} \\ & \quad \quad \quad 1 = 400. \end{aligned}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ ΧΡΟΝΟΥ.

Ἡμέρα, ἀρχικὴ μονάς. Ὡρα $= \frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας. Λεπτόν
 πρῶτον $= \frac{1}{60}$ τῆς ὥρας. Λεπτόν δεύτερον $= \frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου
 λεπτοῦ. Ἔτος $= 365$ ἡμέραι (ἢ 366, ὅταν τὸ ἔτος εἶναι
 δίσεκτον).

$$1 \text{ ἡμ.} = 24 \text{ ὥρ.} = 1440 \text{ λεπτ.} = 86400 \text{ δεύτ.}$$

$$1 = 60 = 3600.$$

$$1 = 60.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ.

(Ἑλληνικαί).

Δραχμή, ἀρχικὴ μονάς. Πεντάδραχμον $= 5$ δραχμαῖς.
 Εἰκοσάδραχμον $= 4$ πενταδράχμοις ἢ 20 δραχμαῖς. Λεπτόν
 $= \frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς. Ἐπομένως εἶναι

$$1 \text{ εἰκ.} = 4 \text{ πεντ.} = 20 \text{ δρ.} = 2000 \text{ λεπ.}$$

$$1 = 5 = 500.$$

$$1 = 400.$$

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ.

Πᾶσα περιφέρεια κύκλου διαιρεῖται εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ
 ὅποια καλοῦνται μοῖραι· ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη,
 τὰ ὅποια καλοῦνται λεπτὰ πρῶτα· ἕκαστον δὲ πρῶτον λε-
 πτόν διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὅποια καλοῦνται λε-
 πτὰ δεύτερα. Αἱ μοῖραι σημειοῦνται διὰ μηδενικοῦ γραφο-
 μένου ὡς ἐκθέτου, τὰ πρῶτα λεπτὰ δι' ἑνὸς τόνου, τὰ δὲ
 δεύτερα λεπτὰ διὰ δύο τόνων. Κατὰ ταῦτα λοιπὸν ὁ ἀριθ-
 μὸς $7^{\circ} 43' 58''$ παριστᾷ 7 μοίρας 43 πρῶτα λεπτὰ καὶ
 58 δεύτερα. Σημειωτέον δὲ ὅτι καὶ τῆς ὥρας τὰ πρῶτα καὶ

δεύτερα λεπτά σημειοῦνται δι' ἐνὸς καὶ δύο τόνων. Οἶον 7^{ὁρ}. 35' 42' παριστᾷ 7 ὥρας 35 λεπτά πρῶτα καὶ 42 δεύτερα.

**Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς κλασματικὸν
καὶ τὰν ἀπαλιν.**

207. Ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ζήτεται νὰ τραπῇ συμμιγῆς εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν τινὸς τῶν μονάδων αὐτοῦ, οἶον ὁ συμμιγῆς 13^{ὁρ}. 5^{ποδ}. 7^{δακ}. 9^{γραμ}. εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν τῆς ὀργυιᾶς.

Κατὰ πρῶτον τρέπομεν τὸν συμμιγῆ εἰς ἀριθμὸν μονάδων τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως, ἥτοι εἰς γραμμὰς, ὡς ἐξῆς.

Ἐπειδὴ 1 ὀργυιά δύναται 6 πόδας, 13 ὀργυιαὶ δύνανται 13 × 6 ἥτοι 78 πόδας· εἰς τούτους προσθέτομεν καὶ τοὺς 5 πόδας τοῦ συμμιγοῦς, καὶ οὕτως ἔχομεν 83 πόδας ἀντὶ 13^{ὁρ}. 5^{ποδ}. Πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν 83 πόδες ἐπὶ 12 μεταβάλλομεν αὐτὸν εἰς δακτύλους· διότι εἰς πόδες δύνανται 12 δακτύλους. Εἰς τὸ γινόμενον 996 προσθέτοντες τοὺς 7 δακτύλους τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς εὐρίσκομεν 1003 δακτύλους. Τέλος δὲ πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ 12, τρέπομεν αὐτὸν εἰς γραμμὰς, διότι 1 δάκτυλος δύνανται 12 γραμμὰς· εἰς τὸ γινόμενον δὲ 12036 προσθέτοντες τὰς 9 γραμμὰς τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς, εὐρίσκομεν 12045 γραμμὰς. Ἐπομένως εἶναι

$$13^{\text{ὁρ}}. 5^{\text{ποδ}}. 7^{\text{δακ}}. 9^{\text{γραμ}} = 12045^{\text{γραμ}}$$

Τρέποντες δὲ μίαν ὀργυιάν εἰς γραμμὰς εὐρίσκομεν 1^{ὁρ}. = $\frac{1}{864}$ 864^{γραμ}, ἐπομένως μία γραμμὴ εἶναι τὸ $\frac{1}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς, καὶ 12045 γραμμαὶ εἶναι $\frac{12045}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς. Ἄρα ὁ δεδομένος συμμιγῆς εἶναι ἴσος τῷ κλασματικῷ $\frac{12045}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς.

Ἐάν δ δεδομένος συμμιγῆς προέκειτο νὰ τραπῇ εἰς κλασμα-
τικὸν ἀριθμὸν τοῦ ποδός, ἐπειδὴ 1 ποὺς δύναται 144 γραμ-
μὰς, μία γραμμὴ εἶναι τὸ $\frac{1}{144}$ τοῦ ποδός, καὶ αἱ 12045
γραμμαὶ εἶναι $\frac{12045}{144}$ τοῦ ποδός.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἐξῆς.

$$\begin{array}{r}
 13^{\text{δργ}} \cdot 5^{\text{ποδ}} \cdot 7^{\text{δκκ}} \cdot 9^{\text{γρμ}} \\
 \hline
 6 \\
 \hline
 78 \\
 \hline
 5 \\
 \hline
 83^{\text{ποδ}} \cdot \\
 \hline
 42 \\
 \hline
 466 \\
 \hline
 83 \\
 \hline
 996 \\
 \hline
 7 \\
 \hline
 4003^{\text{δκκ}} \cdot \\
 \hline
 42 \\
 \hline
 2006 \\
 \hline
 4003 \\
 \hline
 42036 \\
 \hline
 9 \\
 \hline
 42045^{\text{γρμ}} \cdot
 \end{array}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀνωτέρω ρηθέντα δύνανται νὰ ἐφαρμοσθῶσι
κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς πάντα συμμιγῆ, συνάγομεν τὸν
ἐξῆς κανόνα.

Ἴνα τρέψωμεν δοθέντα συμμιγῆ εἰς ἰσοδύναμον κλασμα-
τικὸν μιᾶς οἰασθήποτε μονάδος αὐτοῦ, τρέπομεν κατὰ πρῶ-
τον τὸν συμμιγῆ εἰς ἀριθμὸν μονάδων τῆς ἐν αὐτῷ κατω-
τάτης ὑποδιαίρεσεως, καὶ ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὡς ἀριθ-
μητὴν γράφομεν παρονομαστήν τὸν ἀριθμὸν τὸν δεικνύοντα

πόσας τῆς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως μονάδας περιέχει ἡ μονάς, τῆς ὁποίας κλασματικὸς πρόκειται τὰ γείρη ὁ δοθεὶς συμμιγής.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὐρίσκεται ὅτι

$$7\sigma\tau\alpha\tau. \quad 23\acute{o}\rho. \quad 250\delta\rho\alpha\mu. = \frac{432650}{400} = \frac{2653}{8} \text{ τῆς } \acute{o}\kappa\alpha\varsigma.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἶναι δυνατόν ὁ συμμιγὴς νὰ περιέχῃ καὶ κλάσμα τῆς κατωτάτης ὑποδιαίρεσεως· τοιοῦτος π. χ. εἶναι ὁ συμμιγής

$$7\acute{o}\rho. \quad 5\pi\omicron\delta. \quad 7\lambda\alpha\kappa. \quad 9\gamma\rho. + \frac{5}{8}.$$

Τρέποντες αὐτὸν εἰς γραμμὰς εὐρίσκωμεν $6864\gamma\rho. + \frac{5}{8}$ ἢ $\frac{54893}{8}$ τῆς γραμ. Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ τρέψωμεν αὐτὸν

εἰς κλασματικὸν τῆς ὀργυῖας, θέλωμεν εἶπει· ἐπεὶδὴ 1 γραμμὴ εἶναι τὸ $\frac{1}{864}$ τῆς ὀργυῖας, $\frac{54893}{8}$ τῆς γραμμῆς εἶναι

$$\frac{54893}{8} \text{ τοῦ } \frac{1}{864} \text{ τῆς ὀργυῖας, ἥτοι } \frac{54893}{8 \times 864} \text{ τῆς ὀργυῖας.}$$

208. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι μᾶς ἐδόθη τὸ ἀντίστροφον ζήτημα, δηλαδὴ νὰ τρέψωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν ὠρισμένης μονάδος, οἷον $\frac{876}{95}$ τῆς ὀργυῖας, εἰς συμμιγῆ.

876	95
24	9\acute{o}\rho\gamma. \quad 1\pi. \quad 3\delta\alpha\kappa. \quad 10\gamma\rho\alpha\mu. + \frac{34}{95}
6	
126	
34	
42	
372	
87	
42	
4044	
94	

Κατὰ πρῶτον ἐξάγομεν τὸν ἐν τῷ κλασματικῷ περιεχόμενον ἀκέραιον, διαιροῦντες 876 δι' 95· εὐρίσκομεν δὲ πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 21· ἐπομένως ἔχομεν,

$$\frac{876}{95} \text{ τῆς ὀργυiᾶς } = 9^{\text{ἀρ.}} + \frac{21}{95} \text{ τῆς ὀργυiᾶς.}$$

Ὑπολείπεται δὲ νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{21}{95}$ τῆς ὀργυiᾶς εἰς πόδας, δακτύλους, καὶ γραμμάς.

Ἐπειδὴ δὲ 1 ὀργυiὰ δύναται 6 πόδας, ἄρα τὰ $\frac{21}{95}$ τῆς ὀργυiᾶς εἶναι $\frac{21}{95}$ τῶν 6 ποδῶν, ἥτοι $\frac{21 \times 6}{9}$ τοῦ ποδός.

Ἐὰν λοιπὸν πολλαπλασιάσωμεν 21 ἐπὶ 6, ὡς δεικνύει ὁ ἀνωτέρω πίναξ τῆς πράξεως, καὶ τὸ γινόμενον 126 διαιρέσωμεν διὰ 95, τὸ ἀκέραιον πηλίκον 1 παριστᾷ πόδας, τὸ δὲ συμπληροῦν τὸ πηλίκον κλάσμα $\frac{31}{95}$ εἶναι κλάσμα ποδός, τὸ πρέπει νὰ τραπῇ εἰς δακτύλους.

Συλλογιζόμενοι ὡς ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι, ἵνα τρέψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{31}{95}$ τοῦ ποδός εἰς δακτύλους, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 31 ἐπὶ 12 καὶ τὸ γινόμενον 372 νὰ διαιρέσωμεν διὰ 95· οὕτω δὲ εὐρίσκομεν πηλίκον 3 δακτύλους καὶ $\frac{87}{95}$ τοῦ δακτύλου.

Πολλαπλασιάζοντες ὁμοίως τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος $\frac{87}{95}$ τοῦ δακτύλου ἐπὶ 12, καὶ διαιροῦντες τὸ γινόμενον δι' 95 εὐρίσκομεν πηλίκον 10 γραμμάς καὶ $\frac{94}{95}$ τῆς γραμμῆς·

ὥστε $\frac{876}{95}$ τῆς ὀργυiᾶς = $9^{\text{ἀρ.}} 1^{\text{πο.}} 3^{\text{δακ.}} 10^{\text{γραμ.}} + \frac{94}{95}$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ πρᾶξις γίνεται καθ' ὅμοιον τρόπον οἶονδ' ἄποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ εἶδος τῆς μονάδος, πρὸς ἣν ἀναφέρεται ὁ κλασματικὸς, συνάγομεν τὸν ἐξῆς γενικὸν κανόνα.

Ἔστω τρέψωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν μονάδος τινὸς οἰασθῆποτε εἰς συμμιγῇ, ἐξάγομεν κατὰ πρῶτον τὸν ἐν τῷ κλασματικῷ περιεχόμενον ἀκέραιον, ἔαν οὗτος εἴναι μείζων τῆς μονάδος, τὸ δὲ πηλίκον παριστᾷ μονάδας τοῦ αὐτοῦ εἶδους τῇ μονάδι, εἰς ἣν ἀναφέρεται ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς.

Πολλαπλασιάζομεν ἀκολουθῶς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαίρέσεως περιέχει ἡ πρώτη μονάς, τὸ δὲ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ, καὶ οὕτως εὐρίσκομεν ἀριθμὸν τινα μονάδων τῆς πρώτης ὑποδιαίρέσεως, καὶ δευτέρου τι ὑπολοίπου.

Πολλαπλασιάζομεν ὁμοίως τὸ δεῦτερον τοῦτο ὑπόλοιπον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει πάσας μονάδας τῆς δευτέρας ὑποδιαίρέσεως περιέχει μία μονάς τῆς πρώτης ὑποδιαίρέσεως, τὸ δὲ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ· οὕτω δὲ εὐρίσκομεν πηλίκον παριστῶν μονάδας τῆς αὐτῆς ὑποδιαίρέσεως· ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου πράττομεν τὸ αὐτὸ, καὶ οὕτω καθ' ἐξῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

$$\frac{753}{83} \text{ τῆς ἡμέρας } = 9 \text{ ἡμ. } 1 \text{ ὥρ. } 44' \text{ } 5'' \frac{65}{83}$$

$$\frac{9576}{79} \text{ τῆς ὀκτῆς } = 2 \text{ στατ. } 33 \text{ ὀκ. } 86 \text{ δρᾶμ. } \frac{6}{79}$$

$$\frac{6937}{243} \text{ τοῦ πενταδράχμου } = 28 \text{ πεντ. } 2 \text{ δραχ. } 73 \text{ λεπ. } \frac{161}{243}, \text{ ἢ}$$

$$7 \text{ εἰκ. } 0 \text{ πεντ. } 2 \text{ δραχ. } 73 \text{ λεπ. } \frac{161}{243}.$$

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ.

209. Ἡ πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν (ἐννοεῖται δὲ ὅτι πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς οἱ προστιθέμενοι) γίνεται ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων· δηλονότι γράφομεν αὐτοὺς ὑπ' ἀλλήλων οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορυφῇ στήλῃ, καὶ ὑποκάτω ἄγομεν ὀριζόντιον γραμμὴν. Ἐπειτα προσθέτομεν τοὺς ἀριθμοὺς ἐκάστης τῶν μονάδων, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν· καὶ ἐὰν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν μονάδος τινὸς δὲν ὑπερβαίῃ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει πῶσαι μονάδες τῆς τάξεως ταύτης ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, γράφεται ὑπὸ τῇ γραμμῇ· ἐὰν δὲ ὑπερβαίῃ τοῦτον, τότε διαιρεῖται δι' αὐτοῦ καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν, τὸ δὲ πηλίκον προστίθεται εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῆς ἐπομένης στήλης, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

15 ^{ὅρυ}	4 ^{ποδ}	9 ^{δᾶκτ}	41 ^{γραμ}	18 ^{στατ}	43 ^π	175 ^{δραμ}
18	3	7	8	9	32	360
	8	0	9		23	190
49	0	6	7			
54	5	0	44	28	25	325
		13 ^{ῆμ}	49 ^{ῶρ}	18'	22''	
		9	21	35	43	
		24	8	45	54	
				23	47	
		48	2	3	46	

210. Καὶ ἡ ἀφαιρέσις δὲ τῶν συμμιγῶν γίνεται ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων· δηλονότι γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὐρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορυφῇ στήλῃ, καὶ ὑποκάτω ἄγομεν γραμμὴν. Ἐπειτα ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀρτιστοι-

χοῦντος τοῦ μειωτέου. Ἐὰν δὲ συμβῇ ἔν τινι τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων ὁ ἀφαιρετέος ἀριθμὸς γὰ εἶναι μεῖζων τοῦ ἀντιστοιχοῦντος μειωτέου, τότε αὐξάνομεν τοῦτον κατὰ μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, τραπεῖσαν εἰς μονάδας τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος μειωτέου, φροντίζοντες γὰ προσθέσωμεν μίαν μονάδα εἰς τὸν ἀκόλουθον ἀφαιρετέον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

25 ^{ὀργ.}	5 ^{ποδ.}	3 ^{δακτ.}	9 ^{γραμ.}	32 ^{στατ.}	15 ^{ὀκ.}	180 ^{δρ.}
19	4	8	11	24	29	250
6	0	6	10	7	29	330
		37 ^{ἡμ.}	8 ^{ὥρ.}	42'	37''	
		25	15	49	55	
		11	16	52	42	

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ
ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ.

Πολλαπλασιασμοὶ συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.

211. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγῆς 15^{ὀργ.} 4^{ποδ.} 7^{δακτ.} 10^{γραμ.} ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 9. Εἶναι προφανὲς ὅτι πρέπει νὰ ληφθῇ τὸ ἐννεαπλάσιον ἑκάστου τῶν μερῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ νὰ προστεθῶσι πάντα τὰ γινόμενα ταῦτα.

15^{ὀργ.} 4^{ποδ.} 7^{δακτ.} 10^{γραμ.}

9

144 5 10 6

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὰς 10^{γραμ.} ἐπὶ 9, καὶ τὸ γινόμενον 90 διαιροῦμεν διὰ 12, διότι 12 γραμμαὶ ἀποτελοῦσιν ἓνα δάκτυλον, εὐρίσκομεν δὲ πηλίκον 7 καὶ ὑπολοιπὸν 6· γράφομεν λοιπὸν 6 ὑπὸ τὰς γραμμάς. Πολλαπλασιάζομεν ἀκολούθως καὶ τὸν 7^{δακτ.} ἐπὶ 9 καὶ εἰς τὸ γινόμενον 63 προσθέτομεν τοὺς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν γραμμῶν προκύψαντας 7 δακτύλους, τὸ δὲ ἄθροισμα 70

διαιρούμενον διὰ 12 παρέχει 5 πόδας καὶ 10 δακτύλους· γράφομεν 10 ὑπὸ τοὺς δακτύλους. Πολλαπλασιάζομεν μετὰ ταῦτα τοὺς 4^{ποδ.} ἐπὶ 9 καὶ εὐρίσκομεν 36 πόδας· προσθέτοντες δὲ εἰς τούτους τοὺς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δακτύλων προκύψαντας 5 πόδας, λαμβάνομεν 41^{ποδ.} καὶ διαιροῦντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ 6, εὐρίσκομεν 6^{ὄργ.} καὶ 5^{ποδ.}, οὓς γράφομεν ὑπὸ τοὺς πόδας. Τελευταῖον δὲ πολλαπλασιάζομεν 15^{ὄργ.} ἐπὶ 9 καὶ εἰς τὸ γινόμενον 135 προσθέτοντες τὰς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ποδῶν προσελθούσας 6 ὀργυιάς, εὐρίσκομεν 141 ὀργυιάς, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς ὀργυιάς.

Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.

212. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ συμμιγὴς 245^{ὄργ.} 5^{ποδ.} 7^{δακ.} 9^{γραμ.} διὰ τοῦ ἀκεραίου 53. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ πεντηκοστὸν τρίτον ἐκάστου τῶν μερῶν τοῦ διαιρετέου.

245 ^{ὄργ.} 5 ^{ποδ.} 7 ^{δακτ.} 9 ^{γραμ.}	53
33	
6	
198	
5	
203	
44	
12	
88	
44	
7	
535	
5	
12	
60	
9	
69	
46	

$4^{\text{ὄργ.}} 3^{\text{ποδ.}} 10^{\text{δακ.}} 1^{\text{γρ.}} \frac{16}{53}$

Διαιροῦντες κατὰ πρῶτον 245^ῳ διὰ 53, εὐρίσκομεν πηλίκον 4^ῳ καὶ ὑπόλοιπον 33^ῳ. Τὰς ὀργυιάς ταύτας τρέποντες εἰς πόδας, καὶ προσθέτοντες καὶ τοὺς 5 πόδας τοῦ δεδομένου διαιρετέου, εὐρίσκομεν 203 πόδας, τῶν ὁποίων λαμβάνοντες τὸ πεντηκοστὸν τρίτον, εὐρίσκομεν 3^ῳ καὶ ὑπόλοιπον 44^ῳ. Τρέποντες τοὺς πόδας τούτους εἰς δακτύλους, καὶ προσθέτοντες τοὺς 7 δακτύλους τοῦ διαιρετέου, εὐρίσκομεν 535^ῳ, τῶν ὁποίων λαμβάνοντες τὸ πεντηκοστὸν τρίτον εὐρίσκομεν 10^ῳ καὶ ὑπόλοιπον 5^ῳ. Τέλος δὲ τρέπομεν τοὺς μελλαντας 5^ῳ εἰς γραμμὰς καὶ προσθέτομεν καὶ τὰς 9 γραμμὰς τοῦ διαιρετέου, οὕτω δὲ εὐρίσκομεν 63 γραμμὰς, αἷ διαιροῦντες διὰ 53 εὐρίσκομεν πηλίκον 1 γραμ. καὶ $\frac{16}{53}$ τῆς γραμμῆς.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις δὲν διαφέρει ἐκείνης, δι' ἧς τρέπεται κλασματικὸς εἰς συμμιγῆ, ἢ κατὰ τοῦτο ὅτι εἰς ἕκαστον ὑπόλοιπον τρεπόμενον εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως ἐνταῦθα προστίθενται μονάδες τινὲς τῆς αὐτῆς τάξεως ὑπάρχουσιν ἐν τῷ διαιρετέῳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος, ἡ διαιρέσις δύναται νὰ γείνη χωρὶς νὰ γράφωνται τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα, ἀλλὰ μόνον τὰ διάφορα μέρη τοῦ πηλίκου. Εἰς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ εἶναι ἐξησκημένοι οἱ μαθηταί, ὡς χρησιμεῖον εἰς τὴν ἐξῆς μέθοδον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Πολλαπλασιασμὸς κατὰ τὴν μέθοδον τῶν

ὑποπολλαπλασίων.

213. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι πολυψήφιος ἀριθμὸς, τότε ἡ πρᾶξις δύναται μὲν νὰ γείνη ὡς ἀνωτέρω (211), ἀλλ' εἶναι προτιμητέα ἡ ἐξῆς μέθοδος, ἥτις καλεῖται μέθοδος τῶν ὑποπολλαπλασίων μερῶν, ἢ ἀπλῶς, μέθοδος τῶν ὑποπολλαπλασίων.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ

27^ῳ 4^ῳ 8^ῳ 10^ῳ ἐπὶ 482.

	27 ὀργ.	4 πόδ.	8 δάκ.	10 γραμ.	
	482				
	54				
	216				
	108				
3 πόδ.	ἡμισυ τῆς ὀργυiᾶς	241			
1 πούς	τρίτον τῶν τριῶν ποδῶν	80	2		
6 δάκ.	ἡμισυ τοῦ ποδός	40	1		
2 δάκ.	τρίτον τῶν 6 δακτύλων	13	2	4	
6 γραμ.	τέταρτον τῶν 2 δακτ.	3	2	1	
3 γραμ.	ἡμισυ τῶν 6 γραμμῶν	1	4	0	6
4 γραμ.	τρίτον τῶν 3 γραμμῶν	0	3	4	2
	13394 ὀργ.	2 πόδ.	9 δάκ.	8 γραμ.	

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον 27 ὀργ. ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 482 κατὰ τὴν συνήθη μέθοδον, παραλείποντες ἐν τούτοις τὸ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἐπειτα ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τοὺς 4 πόδας ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν, ἀναλύομεν τοὺς 4 πόδας εἰς μέρη ὑποπολλαπλάσια τὸ μὲν πρῶτον τοῦ 6, ὅστις δεικνύει πόσοι πόδες ἀποτελοῦσι μίαν ὀργυiάν, τὰ δὲ λοιπὰ ἢ πάλιν τοῦ 6, ἢ ἕκαστον τοῦ προηγουμένου. Ἐνταῦθα ἀναλύομεν τοὺς 4 πόδας εἰς 3, τὸ ὅποιον εἶναι τὸ ἡμισυ τοῦ 6, καὶ εἰς 1, τὸ ὅποιον εἶναι τὸ τρίτον τοῦ 3. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ἐὰν εἴχομεν 6 πόδ. ἥτοι 1 ὀργ. νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 482, ἠθέλομεν εὑρεῖ γινόμενον 482 ὀργ. Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 3 πόδ., ἥτοι τὸ ἡμισυ τῆς ὀργυiᾶς, θέλομεν λάβει ὡς γινόμενον τὸ ἡμισυ τοῦ 482, ἥτοι 241 ὀργυiᾶς. Τὸ γινόμενον τοῦτο γράφομεν ὑπὸ τὰ προηγούμενα καταλλήλως.

Ἴνα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1 πόδ. λέγομεν 3 πόδες πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν παρέσχον γινόμενον 241 ὀργ. ἄρα 1 πούς θέλει δώσει τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν 241 ὀργ., ἥτοι 80 ὀργ. 2 πόδ., τὸ ὅποιον γράφομεν καταλλήλως ὑπὸ τὰ προηγούμενα.

ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τοὺς 8^{δακτ.} ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν, ἀναλύομεν τὸν 8 εἰς 6, ἥμισυ τοῦ 12, καὶ 2, τρίτον τοῦ 6. Λέγομεν δέ· πολλαπλασιάσαντες 4 πόδα, ἔσται 12 δακτύλους, ἐπὶ 482 εὗρομεν γινόμενον 80^{ῶργ.} 2^{πόδ.} Ἐάν λοιπὸν πολλαπλασιάσωμεν 6 δακτύλους ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, θέλομεν, εὗρει ὡς γινόμενον τὸ ἥμισυ τοῦ 80^{ῶργ.} 2^{πόδ.}, ἔσται 40^{ῶργ.} 1^{πόδ.}, τὸ ὁποῖον γράφομεν καταλλήλως ὑπὸ τὰ προηγούμενα.

Ὅμοίως πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 2 δακτύλους, οἵτινες εἶναι τὸ τρίτον τῶν 6^{δακτ.}, θέλομεν εὗρει ὡς γινόμενον τὸ τρίτον τοῦ προηγούμενου γινομένου 40^{ῶργ.} 1^{πόδ.}, ἔσται 13^{ῶργ.} 2^{πόδ.} 4^{δακτ.}

Τελευταῖον ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὰς 10^{γραμ.} ἐπὶ 482, ἀναλύομεν αὐτὰς εἰς 6, 3 καὶ 1, καὶ λέγομεν· πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ 2 δακτύλους εὗρομεν γινόμενον 13^{ῶργ.} 2^{πόδ.} 4^{δακτ.} ἔάν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1 δάκτυλον, ἔσται 12 γραμμᾶς, θέλομεν εὗρει τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τούτου, καὶ ἔάν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 6 γραμμᾶς θέλομεν εὗρει τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος, ἔσται τὸ τέταρτον τοῦ γινομένου 13^{ῶργ.} 2^{πόδ.} 4^{δακτ.} Λαμβάνομεν λοιπὸν τὸ τέταρτον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, τὸ ὁποῖον εἶναι 3^{ῶργ.} 2^{πόδ.} 1^{δακτ.} καὶ γράφομεν αὐτὸ καταλλήλως ὑπὸ τὰ προηγούμενα γινόμενα. Ἡδυνάμεθα δὲ νὰ πράξωμεν καὶ ὡς ἐξῆς· νὰ εὗρωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν δύο δακτύλων, καὶ τὸ βοηθητικὸν τοῦτο γινόμενον νὰ γράψωμεν ὑπὸ τὰ προηγούμενα, κλείοντες ὁμῶς αὐτὸ ἐντὸς παρενθέσεων, ἢ διαγράφοντες διὰ γραμμῆς, ἵνα μὴ προστεθῇ μετὰ τῶν ἄλλων γινομένων· ἔπειτα τοῦ βοηθητικοῦ τούτου γινομένου νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ.

Διὰ τὰς 3^{γραμ.} λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ τελευταίου γινομένου, καὶ εὗρίσκομεν 1^{ῶργ.} 4^{πόδ.} 0^{δακτ.} 6^{γραμ.}

Διὰ τὴν 1 γραμμὴν λαμβάνομεν τὸ τρίτον τοῦ προηγούμενου, καὶ εὗρίσκομεν 0^{ῶργ.} 3^{πόδ.} 4^{δακτ.} 2^{γραμ.}

Τελευταῖον προσθέτοντες τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα ἅπαντα, εὗρίσκομεν ὡς ὀλικὸν γινόμενον τὸν συμμιγῆ

13394^{ῶργ.} 2^{πόδ.} 9^{δακτ.} 8^{γραμ.}

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

	35 ^{ήμ.}	47 ^{ωρ.}	50'
	98		
	280		
	315		
42 ^{ωρ.}	49		
4	46	8	
4	4	2	
30'	2	4	
45	4	0	30
5	0	8	40
	3502 ^{ήμ.}	49 ^{ωρ.}	40'
	27 ^{στατ.}	36 ^{δκ.}	275 ^{δράμ.}
	682		
	54		
	246		
	462		
22 ^{δκ.}	344		
44	470	22	
2	34		
4	45	22	
200 ^{δράμ.}	7	33	
50	4	44	400
25	0	42	250
	48982	28	350.

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλασματικὸν καὶ μικτόν.

214. "Ἡ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῇ ἐπὶ κλασματικόν, πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.

Τοῦτο δὲ στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἐν τῷ ἐδαφίῳ 149 ὁρισμοῦ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Παραδείγματος χάριν ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῇ 18^{ήμ.} 9^{ωρ.} 40' 38'' ἐπὶ $\frac{7}{12}$, πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 7, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 12.

Ἐάν δὲ ὁ κλασματικὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μέρη, ὥν τὸ μὲν πρῶτον νὰ εἶναι ὑποπολλαπλάσιον τῆς μονάδος, τὰ δὲ λοιπὰ ὑποπολλαπλάσια τοῦ πρώτου, τότε ὁ πολλαπλασιασμός δύναται νὰ γείνη καὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

Ἄς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ συμμιγῆς τις ἐπὶ $\frac{1}{18}$. Ἀναλύομεν τὸν $\frac{1}{18}$ εἰς $\frac{6}{18}$ (τρίτον τῆς μονάδος), $\frac{3}{18}$ (ἥμισυ τοῦ $\frac{6}{18}$) καὶ $\frac{2}{18}$ (τρίτον τοῦ $\frac{6}{18}$). Ἴνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν δοθέντα συμμιγῆ ἐπὶ $\frac{6}{18}$, ἥτοι ἐπὶ $\frac{1}{3}$, λαμβάνομεν τὸ τρίτον αὐτοῦ. Ἴνα πολλαπλασιάσωμεν δὲ ἐπὶ $\frac{3}{18}$, ἥμισυ τοῦ προηγουμένου πολλαπλασιαστοῦ, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου γινομένου. Τέλος δὲ ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{2}{18}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{6}{18}$, λαμβάνομεν τὸ τρίτον τοῦ πρώτου γινομένου. Προσθέτοντες δὲ τὰ τρία ταῦτα γινόμενα λαμβάνομεν τὸ ὅλικόν γινόμενον.

215. Ἴνα πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῇ ἐπὶ μικτόν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ, ἔπειτα ἐπὶ τὸ κλάσμα, καὶ προσθέτομεν τὰ δύο ταῦτα γινόμενα.

Ἡ καὶ ἄλλως.

Τρέπομεν τὸν μικτόν εἰς κλασματικόν καὶ ἐπὶ τοῦτον πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῇ ὡς ἀνωτέρω.

Πολλαπλασιασμός συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῇ.

216. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ λύσωμεν τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Κτίσται τινὲς κτίζουσιν ἐν μιᾷ ὥρᾳ 15^{ὥρ} 4^π 8^{άκ}. τοίχον· οἱ αὐτοὶ ἐργάται πόσον θέλουσι κτίσει ἐν 12^{ὥρ} 35' 45" ;

Εἶναι προφανὲς ὅτι πρέπει ὁ συμμιγῆς 15^{ὥρ} 4^π 8^{άκ} νὰ ἐπαναληφθῇ κατὰ πρῶτον δωδεκάκις, ἔπειτα νὰ ληφθῇ κλάσμα τι αὐτοῦ ἴσον τῷ κλάσματι τῆς ὥρας, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ 35' 45", καὶ νὰ προστεθῶσι τὰ μερικὰ ταῦτα

γινόμενα. Ἄρα θὰ γείνη πολλαπλασιασμός, ἐν ᾧ πολλαπλασιαστέος θὰ εἶναι ὁ συμμιγῆς 15°ργ. κτλ., πολλαπλασιαστῆς δὲ ὁ 12°ρ. κτλ. Ἐπομένως τὸ γινόμενον ὡς ὁμοσιδὲς πάντοτε τῷ πολλαπλασιαστέῳ θέλει παριστᾶ ὀργυιάς καὶ ὑποδιαίρέσεις τῆς ὀργυιάς.

Ὁ πολλαπλασιασμός οὗτος δύναται νὰ γείνη διττῶς.

α). Τρέπεται ὁ πολλαπλασιαστής εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἀριθμὸν τῆς ὥρας, καὶ ἐπὶ τοῦτον πολλαπλασιάζεται ὁ πολλαπλασιαστέος, ὅπως πολλαπλασιάζεται συμμιγῆς ἐπὶ κλασματικὸν (214).

β'). Ὁ πολλαπλασιασμός γίνεται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων, ὡς ἐξῆς.

	15°ργ.	4°δ.	8°ἀκτ.	
	12°ρ.	$35'$	$45''$	
	30			
	15			
{	3°δ.	6		
{	4	2		
{	6°ἀκτ.	4		
{	2	0	2	
{	$30'$	7	5	4
{	5	4	4	40
	(4)	(0)	(4)	(6)
{	$30''$	0	0	9
{	15	0	0	4
	198°ργ.	4°δ.	4°ἀκτ.	$10^{\circ} \text{γραμ.} + \frac{2}{5}$

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ 12 κατὰ τὸ ἐδάφιον 213. Ἐπειτα ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $35'$, ἀναλύομεν αὐτὰ εἰς $30'$, ἡμισυ τῆς ὥρας, καὶ $5'$, ἕκτον τῶν $30'$. Λέγομεν δέ· ἐὰν εἶχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ 1 ὥραν, ἠθέλομεν λάβει ὡς γινόμενον τὸν πολλαπλασιαστέον· ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $30'$, ἦτοι τὸ ἡμισυ τῆς ὥρας, λαμβάνομεν τὸ ἡμισυ τοῦ πολλαπλασιαστέου. Διὰ

τὰ 5' λαμβάνομεν τὸ ἕκτον τοῦ προηγουμένου γινομένου. Εὐρίσκομεν δὲ καὶ τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 1', καὶ τοῦτο ὡς βοηθητικὸν μόνον κλείομεν ἐντὸς παρενθέσεων. Διὰ τὰ 30' λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ βοηθητικοῦ γινομένου· τέλος δὲ διὰ τὰ 15', τὸ ἥμισυ τοῦ προηγουμένου. Ὑπολείπεται ἤδη ἡ πρόσθεσις τῶν μερικῶν γινομένων, τῆς ὁποίας ἀρχόμεθα ἀπὸ τῆς προσθέσεως τῶν κλασμάτων τῆς γραμμῆς.

217. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Κτίστης τις κτίζει 1 ὀργυιὰν τοίχου ἐν 12^{ωρ}. 35' 45'' ζητεῖται ἐν πόσῳ χρόνῳ θέλει κτίσει 15 ὀργ. 4^{πὸδ}. 8^{δάκτ.} ;

Εἶναι προφανὲς ὅτι πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ ἐπαναληφθῇ ὁ συμμιγῆς 12^{ωρ}. 35' 45'' πεντάκις καὶ δεκάκις, δεύτερον νὰ ληφθῇ κλάσμα τι αὐτοῦ ἴσον τῷ κλάσματι τῆς ὀργυιάς, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν οἱ 4^{πὸδ}. 8^{δάκτ.}, καὶ ἔπειτα νὰ προσεθῶσι τὰ δύο ταῦτα γινόμενα.

	12 ^{ωρ} .	35'	45''	
	15 ὀργ.	4 ^{πὸδ} .	8 ^{δάκτ.}	
	60			
	12			
30	7	30		
5	1	15		
(1)	(0)	(15)	βοηθητικὸν γινόμενον	
30''	0	7	30	
15	0	3	45	
3 ^{πὸδ} .	6	17	52 + $\frac{1}{2}$	
1	2	5	57 + $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$	
6 ^{δάκτ.}	1	2	58 + $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$	
2	0	20	59 + $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36}$	
	198 ^{ωρ} .	44'	3'' + $\frac{1}{3}$.	

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἄν καὶ οἱ παράγοντες τοῦ ἀνωτέρω πολλαπλασιασμοῦ εἶναι οἱ αὐτοὶ τοῖς ἐν τῷ προηγουμένῳ ἐδαφίῳ, τὰ γινόμενα διαφέρουσιν, οὐχὶ μὲν κατὰ τὰς ἀρχικὰς μονάδας, ἀλλὰ κατὰ τὰς κατωτέρας. Ἵνα ἐννοήσωμεν πῶς

τοῦτο συμβαίνει, ἅς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀμφοτέρω οἱ συμμιγεῖς ἐτράπησαν εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς. Τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι τότε τὸ αὐτὸ οἷοσδήποτε καὶ ἂν ληφθῇ ὡς πολλαπλασιαστικὴ ἢ πολλαπλασιαστέος· ἀλλὰ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ εἶναι κλασματικὸς ἀριθμὸς ὀργυιᾶς, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν κλασματικὸς ἀριθμὸς ὥρας. Καὶ ὁ μὲν ἀκέραιος ὁ περιεχόμενος ἐν τῷ κλασματικῷ θὰ εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, οἷοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ μονάς, πρὸς ἣν οὗτος ἀναφέρεται· τὸ δὲ μένον κλάσμα κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ τραπῇ εἰς πόδας δακτύλους καὶ γραμμὰς, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν εἰς λεπτὰ πρῶτα καὶ δεύτερα, καὶ ἐπειδὴ αἱ ὑποδιαιρέσεις τῆς ὀργυιᾶς διαφέρουσι τῶν τῆς ὥρας, ἔπεται ἀναγκαιῶς ὅτι θέλομεν εὑρεῖ ἐξαγόμενα διαφέροντα ἀλλήλων.

Διαιρέσεις συμμιγοῦς διὰ κλασματικοῦ καὶ μικτοῦ.

218. Συμμιγῆς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ κλασματικοῦ, ὅπως καὶ πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ κλασματικοῦ (165), τουτέστι πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ κλασματικοῦ καὶ διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ.

Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι μικτός, τρέπεται προηγουμένως εἰς κλασματικόν, καὶ ἡ πράξις γίνεται ὡς ἀνωτέρω.

Διαιρέσεις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς.

219. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ Α'. Ὁ διαιρέτέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγεῖς ὁμοειδεῖς.

Ἀς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν ὅτι μᾶς ἐδόθη τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Κτίστης τις κτίζει ἐν 1 ὥρᾳ 2^{ὅργ.} 4^{πόδ.} 8^{δάκτ.} 9 γραμ. τοίχου· ἐν πόσαις ὥραις θέλει κτίσει 35^{ὅργ.} 5^{πόδ.} 10^{δάκτ.} 7 γραμ.;

Εἶναι προφανές ὅτι ὁ πρῶτος τῶν συμμιγῶν τούτων πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν ὥρων πρέπει νὰ νὰ δώσῃ τὸν δεύτερον· ἐπομένως ἵνα εὑρεθῶσιν αἱ ζητούμεναι ὥραι, πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ δεύτερος διὰ τοῦ πρώτου.

Πρὸς τοῦτο τρέπονται διαιρετέος τε καὶ διαιρέτης εἰς μονάδας τῆς κατωτάτης ἐν αὐτοῖς ὑποδιαιρέσεως, καὶ διαιρεῖται ὁ πρῶτος τῶν οὕτως εὑρεθέντων ἀκεραίων ἀριθμῶν διὰ τοῦ δευτέρου.

Οἷον ἐν τῷ ἡμετέρῳ παραδείγματι εὐρίσκομεν ὅτι ὁ μὲν διαιρετέος περιέχει 30799, ὁ δὲ διαιρέτης 2409 γραμμάς.

$$\frac{30799}{2409}$$

 Τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν τούτων ὥς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος εἶναι κλασματικός ἀριθμὸς ὥρας, ὅστις τρεπόμενος εἰς συμμιγῇ παρέχει $12^{\text{ωρ}} 47' 5'' \frac{2175}{2409}$.

Ἐὰν εἴχομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Ἔργου τιρος 2^{όρ}· 4^{ποδ}· 8^{δακτ}· 9^{γραμ}· τιμῶνται ἐν πεντάδραχμον· πόσα πεντάδραχμα τιμῶνται 35^{όρ}· 3^{ποδ}· 10^{δακτ}· 7^{γραμ}· τοῦ αὐτοῦ ἔργου;

Τὸ ζητούμενον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ δευτέρου διὰ τοῦ πρώτου, ἥτοι $\frac{30799}{2409}$ · ἀλλ' ἐνταῦθα ὁ κλασματικός εἶναι κλασματικός ἀριθμὸς πενταδράχμου, καὶ τρεπόμενος εἰς συμμιγῇ παρέχει $12^{\text{πεντ}} 3^{\text{δραχ}} 92^{\text{λεπτ}} \frac{1172}{2409}$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συμπεραίνομεν ὅτι ὅταν ὁ διαιρετέος τε καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ὁμοειδεῖς, τὸ εἶδος τοῦ ποσοῦ τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ πηλίκον, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος. Ἐπειδὴ δὲ ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς τῷ πολλαπλασιαστέῳ, κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην πολλαπλασιαστέος μὲν πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὁ διαιρέτης, πολλαπλασιαστῆς δὲ τὸ ζητούμενον πηλίκον.

220. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ Β'. Ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγεῖς ἑτεροειδεῖς.

Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην, οἷονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ πρόβλημα, τὸ πηλίκον πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδὲς τῷ διαιρετέῳ· διότι ὁ διαιρετέος ὥς γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδὲς τῷ διαιρέτῃ ἢ τῷ πη-

λίκω, καὶ ἐπεὶ δὲν εἶναι ὁμοειδῆς τῷ πρώτῳ, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδῆς τῷ δευτέρῳ.

Ἵνα ἐκτελεσθῇ δὲ ἡ διαίρεσις, τρέπεται ὁ διαιρέτης εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν καὶ διὰ τούτου διαιρεῖται ὁ διαιρετέος κατὰ τὸ ἐδάφιον 248.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἐργάτης τις ἐδαπάνησεν 685^{ῶρ}· 45' διὰ 75^{ῶρ}· 3^{πόδ}· 4^{δακτ}· 9^{γραμ}· ἔργου τινός· ζητεῖται πόσας ὥρας ἐδαπάνησε δι' ἐκάστην ὀργυιάν.

Ἐὰν ἐγνωρίζομεν πόσας ὥρας ἐδαπάνησε δι' ἐκάστην ὀργυιάν, πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν ταύτον ἐπὶ 75^{ῶρ}· 3^{πόδ}· 4^{δακτ}· 9^{γραμ}· ἠθέλομιν εὑρεῖ 685^{ῶρ}· 45'· ἄρα τὸ ζητούμενον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 685^{ῶρ}· 45' διὰ τοῦ 75^{ῶρ}· κτλ.

Ἵνα ἐκτελεσθῇ ἡ πράξις τρέπεται ὁ διαιρέτης εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὀργυιᾶς, τὸν $\frac{65289}{864}$, πολλαπλασιάζεται

ὁ διαιρετέος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν 864, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 65289. Οὕτω δὲ εὗρίσκεται ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι 9^{ῶρ}· 4' 29" + $\frac{30459}{65289}$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

α.) Σῶμά τι ὁμαλῶς κινούμενον διατρέχει ἐν μιᾷ ὥρᾳ 32^{ῶρ}· 4^{πόδ}· 8^{δακτ}· 9^{γραμ}· πόσον θέλει διανύσει τὸ αὐτὸ ἐν 7^{ῶρ}· 42' 48" ; (Ἀπόκρ. 252^{ῶρ}· 5^{πόδ}· 5^{δακτ}· 3^{γραμ}· + $\frac{1}{50}$).

β.) Μία μοῖρα κύκλου τινός ἔχει μῆκος 3^{δακτ}· 5^{γραμ}·. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος 17^ῶ· 42' τοῦ αὐτοῦ κύκλου ;

(Ἀπόκρ. 5^{πόδ}· 0^{δακτ}· 5^{γρ}·, 7).

γ.) 44 πήχεις $\frac{2}{3}$ ἡγοράσθησαν ἀντὶ 4^{πεντ}· 3^{δραχ}· 75^{λεπτ}· πόσον τιμᾶται ὁ πήχυς ; (Ἀπόκρ. 57^{λεπτ}·).

δ.) 12^{στατ}· 25^{ἀκ}· 250^{δραμ}· πράγματός τινος ἐτιμῆθησαν 19^{πεντ}· 4^{δραχ}· 60^{λεπτ}· πόσον τιμᾶται ὁ στατήρ ;

(Ἀπόκρ. 1^{πεντ}· 2^{δραχ}· 91^{λεπτ}· περίπου).

ε.) Κινητὸν τι ὁμαλῶς κινούμενον διέτρεξε 275^{ῶρ}· 4^{πόδ}· 8^{δακτ}· 10^{γραμ}· ἐν χρόνῳ 4^{ῶρ}· 48' 50"· πόσον διατρέχει ἐν μιᾷ ὥρᾳ ; (Ἀπόκρ. 57^{ῶρ}· 1^{πόδ}· 8^{δακτ}· 10^{γραμ}· + $\frac{1}{17\frac{2}{3}}$).

ς.) Κινητὸν ὁμαλῶς κινούμενον καὶ διατρέχον ἐν ἐνὶ δευτέρῳ λεπτῷ 3^{πόδ}· 6^{δακτ}· 9^{γραμ}·, ἐν πόσῳ χρόνῳ θέλει διατρέξει 28^{ῶρ}· 2^{πόδ}· 0^{δακτ}· 9^{γραμ}· ; (Ἀπόκρ. 47" + $\frac{1}{15}$).

Δημοσίη Κεντροκή Θιβαρχική Βιβλιοθήκη

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ'.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕΤΡΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΘΜΩΝ.

224. Ἡ χρῆσις διαφορῶν μονάδων διὰ τὸ αὐτὸ ποσὸν ἐν τοῖς διαφοροῖς τόποις φέρει εἰς τὰς πρὸς ἀλλήλους τῶν ἀνθρώπων σχέσεις καὶ ἰδίως τὰς ἐμπορικὰς πολλὰς δυσκολίας. Πρὸς ἄρσιν τούτων ἡ συντακτικὴ τῶν Γάλλων συνέλευσις ἐξέδωκε κατὰ τὸ 1790 ψήφισμα διατάσσον νὰ σχηματισθῇ νέον τι σύστημα μέτρων καὶ σταθμῶν κοινὸν διὰ πᾶσαν τὴν Γαλλίαν, καὶ εἰ δυνατόν διὰ πᾶσαν τὴν οἰκουμένην. Τοιοῦτο σύστημα ἐπραγματοποιήθη, καὶ αὐτοῦ γίνεται τανῦν ἀποκλειστικὴ χρῆσις ἐν Γαλλίᾳ καὶ ἐν Βελγίῳ· κατὰ μικρὸν δὲ εἰσάγεται καὶ εἰς ἄλλας ἐπικρατείας. Καὶ εἰς τὴν Ἑλλάδα δὲ εἰσήχθη διὰ βασιλικοῦ διατάγματος ἐκδοθέντος κατὰ τὸν Σεπτέμβριον τοῦ 1836 μετὰ τινων μεταρρυθμίσεων.

Τὰ πλεονεκτήματα τοῦ συστήματος τούτου εἶναι τὰ ἑξῆς δύο.

α.) Ἡ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους, ἡ ὑπὸ τῶν Γάλλων κληθεῖσα *mètre*, ἥτοι μέτρον, ἐξ ἧς ὀρίζονται καὶ αἱ διὰ τὰ λοιπὰ ποσὰ μονάδες, ἔχει σχέσιν πρὸς μέγεθος ἀμετάβλητον, τὸ τῆς γῆς· διότι εἶναι τὸ δεκάκις ἑκατομμυριοστὸν τῆς ἀποστάσεως τοῦ πόλου ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ, μετρομένης ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὠκεανοῦ. Διὰ τὴν σχέσιν ταύτην τὸ προκείμενον σύστημα δύναται νὰ διατηρηθῇ ἀναλλοίωτον ἐν τῷ μέλλοντι, διότι δύναται νὰ ἀνευρεθῇ κατὰ πάντα χρόνον.

Β'.) Αἱ ὑποδιαίρεσεις καὶ τὰ πολλαπλάσια ἐκάστης μονάδος εἶναι δεκαδικά· διὰ τοῦτο δὲ τὰ διάφορα ποσὰ δύνανται νὰ ἐκφράζωνται διὰ δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ἐφ' ὧν αἱ διαφοραὶ πράξεις ἐκτελοῦνται πολὺ εὐκολώτερον, ἢ ἐπὶ τῶν συμμιγῶν. Διὰ τὴν δεκαδικὴν ταύτην τῶν διαφορῶν μονάδων σχέσιν τὸ σύστημα τοῦτο καλεῖται *δεκαδικὸν σύστημα μέτρων καὶ σταθμῶν*. Ἐνταῦθα ἐκθέτομεν τὸ σύστημα τοῦτο, ὅπως μετεβιβασθῇ εἰσαχθὲν εἰς τὴν Ἑλλάδα.

Μονάδες μήκους.

Πήχυς (mètre), ἡ ἀρχικὴ μονάς, ἡ ὁρισθεῖσα ὡς ἐβρέθη ἀνωτέρω.

Παλάμη (décimètre), δέκατον τοῦ πήχεως.

Δάκτυλος (centimètre), δέκατον τῆς παλάμης, ἢ ἑκατοστὸν τοῦ πήχεως.

Γραμμὴ (millimètre), δέκατον τοῦ δακτύλου, ἢ ἑκατοστὸν τῆς παλάμης, ἢ χιλιοστὸν τοῦ πήχεως.

Στάδιον (kilomètre), χίλιοι πήχεις.

Σχοινίς (myriamètre), δέκα στάδια, ἥτοι δέκα χιλιάδες πήχεις.

Μονάδες ἐπιφανείας.

Τετραγωνικὸς πήχυς, ἥτοι τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι εἷς πήχυς.

Στρέμμα, χίλιοι τετραγωνικοὶ πήχεις. Ἐὰν δὲ τὸ στρέμμα νοηθῇ ὡς τετράγωνον, ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ἔχει μῆκος 31 πηχ. 622, κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

Λίτρα (litre = décimètre cube), οὕτως ἐκλήθη ἡ κυβικὴ παλάμη, ἥτοι κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση τῇ παλάμῃ.

Κοτύλη (décilitre), δέκατον τῆς λίτρας.

Μύστρον (centilitre), δέκατον -ῆς κοτύλης ἢ ἑκατοστὸν τῆς λίτρας.

Κύβος (centimètre cube), δέκατον τοῦ μύστρου, ἢ ἑκατοστὸν τῆς κοτύλης, ἢ χιλιοστὸν τῆς λίτρας.

Κοιλόν (hectolitre), ἑκατὸν λίτραι, ἤτοι δέκατον τοῦ κυβικοῦ πήχεως· γίνεται δὲ τούτου χρήσις ἰδίως διὰ τοὺς δημητριακοὺς καρπούς.

Μονάδες βάρους.

Δραχμή (gramme), ἀρχικὴ μονάς τοῦ βάρους. Εἶναι δὲ αὕτη τὸ βάρος κύβου, ἤτοι ἑνὸς χιλιοστοῦ τῆς λίτρας, ὕδατος ἀπεσταγμένου, καὶ θερμοκρασίας τεσσάρων βαθμῶν τοῦ ἑκατομβάθμου θερμομέτρου, ἐν ᾗ τὸ ὕδωρ ἔχει τὴν μεγίστην πυκνότητα.

Ὀβολός (décigramme), δέκατον τῆς δραχμῆς.

Κόκκος (centigramme), δέκατον τοῦ ὀβολου, ἢ ἑκατοστὸν τῆς δραχμῆς.

Μρά, 1500 δραχμαί. Δυστυχῶς ἐνταῦθα δὲν διετηρήθη ἡ δεκαδικὴ σχέσις.

Τάλαρτον, ἑκατὸν μναί.

Τόρος, δέκα τάλαντα, ἢ χίλιαι μναί.

Ἀπασαι αἱ μονάδες τοῦ ἀνωτέρω συστήματος καλοῦνται βασιλικαὶ ἐν Ἑλλάδι.

222. Ἐνεκα τῆς δεκαδικῆς σχέσεως εἶνας εὐκόλον νὰ παραστήσωμεν διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἀναφερομένου πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, ποσὸν ἐκφραζόμενον διὰ τῶν πολλαπλασίων ἢ ὑποπολλαπλασίων αὐτῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 7 *σχοινίδες*, 5 *στάδια*, 78 *πήχεις*, 6 *πάλαμαι*, 4 *δάκτυλοι* καὶ 9 *γραμμαί* δύναται νὰ γραφῇ οὕτω·
75078 *πήχ.* 649.

Ὅμοιως 27 *λίτραι*, 6 *κοτύλαι*, 3 *μύστρα* καὶ 9 *κύβοι* δύναται νὰ γραφῇ οὕτω· 27 *λίτρ.*, 639.

Ἀντιστρόφως δεκαδικὸς ἀριθμὸς παριστῶν ποσὸν ἀναφερόμενον εἰς μίαν τῶν μονάδων δύναται νὰ ἀναλυθῇ ἄνευ οὐδενὸς ὑπολογισμοῦ εἰς ἀριθμοὺς μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 98756 *πήχ.*, 034 δύναται νὰ ἀναγνωσθῇ οὕτω· 9 *σχοινίδες*, 8 *στάδια*, 756 *πήχεις*, 3 *δάκτυλοι*, καὶ 4

γραμμαί. Ὠσαύτως, 832 λίτρ., 453 δύναται νὰ ἀναγνωσθῇ ὡς ἐξῆς· 8 κοιλῶν, 32 λίτραι, 4 κοτύλαι, 5 μύστρα καὶ 3 κύβοι.
Σύγκρισις τῶν παλαιῶν μονάδων πρὸς τὰς νέας.

223. Αἱ σχέσεις τῶν παλαιῶν μονάδων πρὸς τὰς νέας κατὰ τὸ βασιλικὸν διάταγμα, δι' οὗ εἰσῆχθησαν εἰς Ἑλλάδα, εἶναι αἱ ἐξῆς.

Ὁ βασιλικὸς πῆχυς εἶναι 1,5432 τοῦ μικροῦ πῆχεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως (ἐνδεξέ). Ἀντιστρόφως δὲ ὁ μικρὸς πῆχυς τῆς Κωνσταντινουπόλεως εἶναι 0,648 τοῦ βασιλικοῦ πῆχεως.

Ὁ βασιλικὸς πῆχυς εἶναι 1,495 τοῦ μεγάλου πῆχεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως (ἀρσίν)· ἀντιστρόφως ὁ τελευταῖος εἶναι τὰ 0,669 τοῦ βασιλικοῦ.

Ὁ βασιλικὸς πῆχυς εἶναι 0,513 τῆς ὀργυῖας, κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ· ἡ δὲ ὀργυιά εἶναι 1,949 τοῦ πῆχεως, κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

Ἡ βασιλικὴ μνᾶ εἶναι 1,1719 τῆς ὀκάς, ἢ 468 $\frac{3}{4}$ δράμια· ἡ δὲ ὀκᾶ τὰ 0,8533 τῆς μνᾶς.

Ἡ βασιλικὴ λίτρα εἶναι 0,03015 τοῦ παλαιοῦ κοιλοῦ, ἐπομένως τὸ βασιλικὸν κοιλὸν εἶναι 3,015 τοῦ παλαιοῦ. Τὸ δὲ παλαιὸν κοιλὸν εἶναι 33 λίτρ., 166.

Ὁ βασιλικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς εἶναι 2,381 τοῦ τετραγωνικοῦ μικροῦ πῆχεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως· ὁ δὲ τελευταῖος τὰ 0,419 τοῦ βασιλικοῦ τετραγωνικοῦ πῆχεως.

Τὸ βασιλικὸν στρέμμα εἶναι τὰ 0,787 τοῦ παλαιοῦ πελοποννησιακοῦ, ὡς τετραγώνου πλευρᾶς 55 μικρῶν πῆχεων τῆς Κωνσταντινουπόλεως, ἐπομένως περιέχοντος 3025 τοιούτους τετραγωνικοὺς πῆχεις, τὸ δὲ παλαιὸν πελοποννησιακὸν στρέμμα εἶναι 1,27 τοῦ βασιλικοῦ.

Τροπὴ ἀριθμοῦ παλαιῶν μονάδων εἰς ἰσοδυναμὸν νέων καὶ τἀνάπαλιν.

224. Γνωρίζοντες ἐκ τοῦ προηγουμένου πίνακος τὰς σχέσεις τῶν παλαιῶν μονάδων πρὸς τὰς νέας, εὐκόλως δυνά-

μεθα νὰ τρέψωμεν ἀριθμὸν παλαιῶν μονάδων εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν νέων, καὶ τὰνάπαλιν. Ἵνα δείξωμεν δὲ πῶς τοῦτο γίνεται, φέρομεν παραδείγματα τινά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α'. Νὰ τραπῶσι $7 + \frac{5}{8}$ πήχεις μικροῦ τῆς Κωνσταντινουπόλεως εἰς βασιλικούς.

Ἐπειδὴ εἰς μικρὸς πῆχυς τῆς Κωνσταντινουπόλεως εἶναι 0,648 τοῦ βασιλικοῦ, $7 + \frac{5}{8}$ τοῦ πρώτους εἶδους εἶναι $7 \times 0,648$, καὶ $\frac{5}{8}$ τοῦ 0,648. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν 0,648 ἐπὶ $7 + \frac{5}{8}$ ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r}
 0,648 \\
 7 + \frac{5}{8} \\
 \hline
 4,536 \\
 0,324 \\
 0,081 \\
 \hline
 4,941
 \end{array}$$

Ἐπομένως $7 + \frac{5}{8}$ μικροὶ πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως δύνανται 4,941 βασιλικούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β'. Νὰ τραπῶσι 24 ὀκάδες $65 \frac{1}{2}$ δράμια εἰς μνᾶς.

Ἐπειδὴ μία ὀκά εἶναι 0,8533 τῆς μνᾶς, $24 \text{ ὀκάδες} \cdot 65 \frac{1}{2} \text{ δράμια} \cdot \frac{1}{4}$ εἶναι $24 \times 0,8533$, ἔτι δὲ κλάσμα τι τοῦ 0,8533 τοιοῦτο, ὅποιον κλάσμα τῆς ὀκάς εἶναι τὰ $65 \frac{1}{2} \text{ δράμια} \cdot \frac{1}{4}$. Τοῦτέστι πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ 0,8533 ἐπὶ $24 \text{ ὀκάδες} \cdot 65 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$. Τοῦτο δὲ γίνεται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r}
 0,8533 \\
 24 \text{ ὀκάδες} \cdot 65 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \\
 \hline
 34132 \\
 17066 \\
 50 \text{ δρ.} \quad 40666 \\
 10 \quad 2133 \\
 5 \quad 4066 \\
 \frac{1}{4} \quad 53 \\
 \hline
 20,61838
 \end{array}$$

Ἐπομένως $24^{\circ}\kappa \cdot 65^{\delta\rho\alpha\mu} \cdot \frac{1}{4}$ δύνανται $20^{\mu\nu}$, 6184, κατὰ προσέγγισιν δεκακισχιλιοστοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ'. Νὰ τραπῶσι 8 κοιλὰ καὶ 7 εἰκοστὰ εἰς βασιλικά κοιλὰ καὶ λίτρας.

$$\begin{array}{r}
 33,466 \\
 8 \frac{7}{20} \\
 \hline
 265,328 \\
 \frac{5}{20} \quad 8,2915 \\
 \frac{2}{20} \quad 3,3466 \\
 \hline
 276,9364
 \end{array}$$

Εὐρίσκομεν δὲ ὡς τὸ ζητούμενον $276^{\lambda\iota\tau\rho}$, 936, ἥτοι 2 κοιλὰ, $76^{\lambda\iota\tau\rho}$, 936.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δ'. Νὰ τραπῶσι 47 παλαιὰ στρέμματα εἰς βασιλικά.

Ἐπειδὴ ἓν παλαιὸν στρέμμα εἶναι 1,27 βασιλικά, ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 47 ἐπὶ 1,27· οὕτω δὲ εὐρίσκομεν 59,69 βασιλικά.

225. Ὅμοίως πράττομεν ἵνα τρέψωμεν ἀριθμὸν νέων μονάδων εἰς ἰσοδύναμον παλαιῶν. Πρὸς τοῦτο φέρομεν παραδείγματά τινα, ὧν οἱ τρεπτέοι ἀριθμοὶ εἶναι τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, καὶ τοῦτο δὲ πρὸς ἀμοιβαίαν τῶν λογισμῶν ἐπικύρωσιν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α'. Νὰ τραπῶσι 4,941 βασιλικοὶ πήχεις εἰς μικροὺς τῆς Κωνσταντινουπόλεως.

Ἐπειδὴ 1 βασιλικὸς πήχυς εἶναι 1,5432 τοῦ μικροῦ τῆς Κων/πόλεως, οἱ 4,941 βασιλικοὶ εἶναι $4,941 \times 1,5432$ τοῦ αὐτοῦ. Τὸ γινόμενον τοῦτο κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ εἶναι 7,625.

Ἐπομένως 4,941 βασιλικοὶ πήχεις ἀποτελοῦσι μικροὺς τῆς Κωνσταντινουπόλεως 7,625, κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ. Ἴνα τρέψωμεν δὲ τὰ 0,625 εἰς ὄγδοα, πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ ἐπὶ 8, διότι ἡ μονὰς εἶναι $\frac{8}{8}$ · οὕτω δὲ εὐ-

ρίσκομεν $\frac{5}{8}$. Ἄρα τὸ ζητούμενον εἶναι $7 + \frac{5}{8}$, ὅστις ἦτο ὁ τρεπτέος ἀριθμὸς τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ παρόντος παραδείγματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β'. *Νὰ τραπῶσιν 20,6184 μναῖ εἰς ὀκάδας.*

Ἐπειδὴ 1 μνα εἶναι 4,1719 τῆς ὀκάς, ἵνα εὗρωμεν τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 20,6184 ἐπὶ 4, 1719. Τὸ γινόμενον κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ καθ' ὑπεροχὴν εἶναι 24,463.

Ἄρα 20^{μν} δύνανται 24^{ὀκ.}, 463.

Ἴνα τρέψωμεν δὲ τὰ 0,463 τῆς ὀκάς εἰς δράμια, πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ ἐπὶ 400, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι δύνανται 63 δράμια καὶ κλάσμα τι τοῦ δραμίου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ'. *Νὰ τραπῶσι 2 βασιλικά κοιλὰ καὶ 76 λίτρ', 936, ἥτοι 276 λίτρ., 936 εἰς παλαιὰ κοιλὰ.*

Ἐπειδὴ 1 βασιλικὴ λίτρα εἶναι 0,03045 τοῦ παλαιοῦ κοιλοῦ, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 276,936 ἐπὶ 0, 03045. Εὐρίσκομεν δὲ ὡς ἐξαγόμενον 8,35 περίπου παλαιὰ κοιλὰ. Καὶ τρέποντες τὰ 0,35 εἰς ἑκατοστὰ λαμβάνομεν $8 + \frac{7}{20}$, ὅστις εἶναι ἀκριβῶς ὁ τρεπτέος ἀριθμὸς τοῦ παραδείγματος Γ'. τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δ'. *Νὰ τραπῶσι 59,69 βασιλικά στρέμματα εἰς παλαιὰ πελοποννησιακά.*

Ἐπειδὴ 1 βασιλικὸν στρέμμα εἶναι 0,787 τοῦ πελοποννησιακοῦ, ἵνα εὗρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 59,69 ἐπὶ 0,787· τούτου δὲ γενομένου εὐρίσκομεν ὡς τὸ ζητούμενον 56,976 παλαιὰ πελοποννησιακά στρέμματα, ὅστις ἀριθμὸς διαφέρει τοῦ τρεπτέου ἀριθμοῦ τοῦ παραδείγματος Δ'. τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου κατ' ὀλιγώτερον ἢ 3 ἑκατοστὰ. Προέρχεται δὲ ἡ διαφορὰ αὕτη ἐκ τούτου ὅτι ὁ ἀριθμὸς 0,787, ὁ δεικνύων τὸ μέρος τοῦ πελοποννησιακοῦ στρέμματος εἶναι τὸ βασιλικόν, ἐλήφθη κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν

α.) Πόσον τιμᾶται ὁ βασιλικὸς πῆχυς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου $9 + \frac{3}{8}$ μικροὶ πῆχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως ἐπωλήθησαν ἀντὶ δραχμῶν 83,60; ($13^{\text{δραχ}}, 76 \dots$)

β.) Πόσαι μναὶ σίτου χρειάζονται διὰ νὰ σπαρῶσι 76,38 βασιλικά στρέμματα, γνωστοῦ ὄντος ὅτι διὰ 52 παλαιὰ πελοποννησιακὰ ἀπαιτοῦνται 425 ὀκάδες; ($419^{\text{μν}}, 433 \dots$).

γ.) Ἐχομεν 48,752 βασιλικοὺς πῆχεις ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ μικρὸς πῆχυς τῆς Κωνσταντινουπόλεως τιμᾶται δραχμᾶς 8,75· πόσον τιμῶνται $32 + \frac{5}{8}$ μεγάλοι πῆχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως; ($294^{\text{δρ}}, 74 \dots$).

δ.) Ἐν ἴσῳ ὄγκῳ τὸ ὕδωρ εἶναι 773^{κις} βαρύτερον τοῦ ἀέρος· πόσον εἶναι τὸ βάρος 825^{λιτρ.}, 374 ἀέρος; ($0^{\text{μν}}, 7118 \dots$).

ε.) Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀέρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπὸ 1800 μῶν χαλκοῦ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ βάρος ὄγκου τινὸς τοῦ μετάλλου τούτου εἶναι 8,167 τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος; ($0^{\text{μν}}, 285 \dots$).

ς.) Πόσον εἶναι τὸ βάρος 32^{λιτρ.}, 542 ὕδατος θερμοκρασίας 30°, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 30° εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ ὄγκου, ὃν ἔχει ὑπὸ θερμοκρασίαν 4°, ἐπὶ τὸ κλάσμα 1,00437; ($21^{\text{μν}}, 6002 \dots$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ'.

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ.

Προτάσεις τινές περὶ τετραγώνων.

226. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.** Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου, τοῦ διπλασίου τοῦ γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου.

Ἐστωσαν α καὶ β δύο ἀριθμοὶ οἳοῦνδήποτε, ἀκέραιοι ἢ κλασματικοί. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $\alpha + \beta$ εἶναι τὸ γινόμενον $(\alpha + \beta) \times (\alpha + \beta)$. Ἐφαρμόζοντες εἰς τὸν σχηματισμὸν τοῦ γινομένου τούτου τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 160 λαμβάνομεν·

$$(\alpha + \beta) \times (\alpha + \beta) = \alpha \times \alpha + \beta \times \alpha + \alpha \times \beta + \beta \times \beta.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων ἀριθμῶν $\alpha \times \beta$ καὶ $\beta \times \alpha$ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ $\alpha \times \beta$, παριστάμενον διὰ $2 \alpha \times \beta$, καὶ ἐπειδὴ $(\alpha + \beta) \times (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)^2$, $\alpha \times \alpha = \alpha^2$, $\beta \times \beta = \beta^2$ ἢ ἀνωτέρω ἰσότης δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς·

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \alpha \times \beta + \beta^2$$

Ἐκφράζει δὲ ἡ ἰσότης αὕτη τὸ προκείμενον θεώρημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ μονάδα εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου ἡϋξημένον κατὰ μονάδα.

Διότι παρισταμένου δι' α τοῦ μικροτέρου τῶν δύο ἀριθμῶν, ὁ μεγαλείτερος θὰ εἶναι $\alpha + 1$. κατὰ δὲ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι $(\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + 2 \alpha + 1$.

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ $a+1$ ὑπερβαίνει τὸ τετράγωνον τοῦ a κατὰ $2a+1$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

227. **ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.** Τὸ τετράγωνον τοῦ γινομένου δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν τετραγώνων τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Ἐστω γινόμενον τὸ $\alpha \times \beta \times \gamma$. Τετράγωνον τοῦ γινομένου τούτου εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ $\alpha \times \beta \times \gamma$ ἐπὶ $\alpha \times \beta \times \gamma$. Ἐφαρμόζοντες δὲ τὸ θεώρημα Β' τοῦ ἐδαφίου 157, λαμβάνομεν

$$(\alpha \times \beta \times \gamma)^2 = \alpha \times \beta \times \gamma \times \alpha \times \beta \times \gamma.$$

Ἀντικαθιστώντες δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἰσότητος ταύτης τοὺς παράγοντας α καὶ α διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν α^2 , τοὺς β καὶ β διὰ β^2 , καὶ τοὺς γ καὶ γ διὰ γ^2 , λαμβάνομεν

$$(\alpha \times \beta \times \gamma)^2 = \alpha^2 \times \beta^2 \times \gamma^2.$$

228. **ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.** Τὸ τετράγωνον δυνάμεως ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην διπλάσιον.

Λέγω χάριν παραδείγματος ὅτι $(\alpha^5)^2 = \alpha^5 \times \alpha^5 = \alpha^{10}$.

Διότι $(\alpha^5)^2 = \alpha^5 \times \alpha^5 = \alpha^5 + 5 \quad (157 \text{ ς}')$

ἦτοι $(\alpha^5)^2 = \alpha^5 \times \alpha^5 = \alpha^{10}$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

229. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Ἐκ τῶν προηγουμένων δύο θεωρημάτων ἐπεταὶ ὅτι εἴνα εὐρόμεν τὸ τετράγωνον γινομένου δυνάμεων διπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας αὐτῶν.

Οἷον $(\alpha^3 \times \beta^2 \times \gamma^5)^2 = \alpha^6 \times \beta^4 \times \gamma^{10}$.

Ἡ πρότασις αὕτη ἀληθεύει καὶ ὅταν τινὲς τῶν παραγόντων δὲν ἔχωσιν ἐκθέτην, ἀρκεῖ νὰ ὑποτεθῇ ὅτι οἱ παράγοντες οὗτοι ἔχουσιν ἐκθέτην τὴν μονάδα.

230. **ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'.** Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ μὴ ἀκεραίου δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσον ἀκεραίῳ ἀριθμῷ.

Πᾶς μὴ ἀκεραῖος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ κλάσματος ἔχοντος τοὺς ὅρους ἀκεραίους, καὶ τὸ κλάσμα τοῦτο νὰ γείνη ἀνάγωγον. Ἐστω $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ ἀνάγωγον τοῦτο κλάσμα.

Τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β

εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν α^2 καὶ β^2 θὰ εἶναι ὡσαύτως ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (144).

ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ θὰ εἶναι ἀνάγωγον. Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι παντὸς μὴ ἀκεραίου ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον εἶναι ἴσον ἀναγωγῇ κλάσματι, ἐπομένως δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσον ἀκεραίῳ ἀριθμῷ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύεται ὅτι καὶ ὁ κύβος καὶ ἐν γένει οἰαδήποτε δύναμις ἀριθμοῦ μὴ ἀκεραίου δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴση ἀκεραίῳ ἀριθμῷ.

231. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. Διὰ νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς τετράγωνον ἄλλου ἀριθμοῦ, πρέπει οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων νὰ εἶναι πάντες ἄρτιοι· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.

Διότι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς μόνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ τετράγωνον δύναται νὰ εἶναι (230). Παντὸς δὲ ἀκεραίου ἀναλυμένου εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας τὸ τετράγωνον σχηματίζεται διὰ τοῦ διπλασιασμοῦ τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων (229), ἐπομένως ἔχει ἀναγκαίως πάντας τοὺς ἐκθέτας τῶν πρώτων παραγόντων ἄρτίους.

Ὅταν δὲ πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες ἀριθμοῦ ἔχωσιν ἐκθέτας ἄρτίους, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀριθμοῦ. Διότι διαιροῦντες τοὺς ἐκθέτας διὰ 2 λαμβάνομεν ἀριθμὸν, οὗ τὸ τετράγωνον εἶναι ἴσον τῷ δοθέντι· οἷον ὁ $2^4 \times 5^6 \times 7^2$ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ $2^2 \times 5^3 \times 7$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἀκέραιος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ π, μὴ διαιρετὸς δὲ καὶ διὰ π^2 δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀριθμοῦ.

Διότι ἐὰν ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς ἀναλυθῇ εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, θὰ περιέχῃ μόνον τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ π.

232. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤ'. Ἀκέραιος ἀριθμὸς λέγων εἰς ἐν τῶν ψηφίων 2, 3, 7, 8, ἢ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀριθμοῦ.

Ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν σχηματίζομεν τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, συνάγομεν ὅτι τὸ τετράγωνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον, εἰς ὃ καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων αὐτοῦ.

Τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
εἶναι 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Τὰ ψηφία εἰς 2 λήγουσι τὰ τετράγωνα ταῦτα εἶναι 1, 4, 9, 6, 5· οὐδὲν δὲ λήγει εἰς 2, ἢ 3, ἢ 7, ἢ 8. Ἐάν πρὸς τούτοις παρατηρήσωμεν ὅτι ἀριθμοῦ λήγοντος εἰς μηδενικὰ τὸ τετράγωνον θὰ λήγῃ εἰς διπλάσια τὸν ἀριθμὸν μηδενικὰ (37), συνάγομεν ὅτι οὐδενὸς ἀκεραίου τὸ τετράγωνον λήγει εἰς 2, 3, 7, 8 ἢ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν. Ἐκ τούτου δὲ καταφαίνεται ἡ ἀλήθεια τοῦ προκειμένου θεωρήματος.

233. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. Διὰ τὰ εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος, πρέπει ἐκάτερος τῶν ὄρων αὐτοῦ τὰ εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ.

Ἐστω κλάσμα ἀνάγωγον τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, ἴσον τῷ τετραγώνῳ ἀριθμοῦ τινος. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος· διότι παντὸς ἀκεραίου τὸ τετράγωνον εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος· θὰ εἶναι ἄρα κλάσμα, ὅπερ ἀνάγωγον γινόμενον ἔστω $\frac{\mu}{\nu}$.

Θὰ ἔχωμεν
$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\mu}{\nu} \right)^2 = \frac{\mu^2}{\nu^2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\mu^2}{\nu^2}$ θὰ εἶναι ἀνάγωγον (230), δύο δὲ ἀνάγωγα κλάσματα ἴσα ἔχουσιν ἀριθμητὰς καὶ παρονομαστὰς ἴσους (139), θὰ εἶναι $\alpha = \mu^2$, $\beta = \nu^2$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

234. Ἐκ τῶν προηγουμένων προτάσεων συνάγομεν ὅτι τινὲς μὲν ἀριθμοὶ εἶναι τετράγωνα ἄλλων ἀριθμῶν, ἄλλοι δὲ οὐδενὸς ἀριθμοῦ εἶναι τετράγωνα.

Πᾶς ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀριθμοῦ, λέγεται *τέλειον τετράγωνον*. Τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 49, 64, $\frac{4}{9}$ κτλ.

Ὁρισμὸς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

235. *Τετραγωνικὴ ρίζα* ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποῦ το τετράγωνον εἶναι ἴσον ἐκείνῳ· οἷον τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 49 εἶναι ὁ 7· διότι $7^2=49$. Ὁμοίως τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{4}{9}$ εἶναι ὁ $\frac{2}{3}$ · διότι $(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$.

Τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ σημειοῦμεν προτάσσοντες αὐτοῦ τὸ σημεῖον $\sqrt{}$, τὸ ὁποῖον καλεῖται *ρίζικόν*. Οἷον $\sqrt{49}$ $\sqrt{\frac{4}{9}}$ παριστῶσι τὰς τετραγωνικὰς ρίζας τῶν ἀριθμῶν 49 καὶ $\frac{4}{9}$, ἥτοι τοὺς ἀριθμοὺς 7 καὶ $\frac{2}{3}$. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀθροίσματος $a+b$ παρίσταται διὰ τοῦ $\sqrt{a+b}$, ἡ συνηθέστερον $\sqrt{a+b}$, τῆς προσηρημένης τῷ ρίζικῷ γραμμῆς ἐπεχούσης τόπον τῆς παρενθέσεως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν μόνον τὰ τέλεια τετράγωνα ἔχουσι τετραγωνικὴν ρίζαν. Θέλομεν δὲ ἴδει ἀλλαχοῦ (ἴδε Γεωμετρίαν μου ἐκδ. 6'. βιβλίον Γ'. σελ. 124) πῶς ὀρίζεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν μὴ τελείων τετραγώνων, καὶ τίνα ἔχει σημάσιαν.

236. *Τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος* τοῦ ἀριθμοῦ A καλεῖται ἐκάτερος τῶν δύο ἐφεξῆς ἀκεραίων ἀριθμῶν, μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ A. Οἷον τοῦ 43 τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 6 καὶ ὁ 7· διότι ὁ 43 περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν τετραγώνων τοῦ 6 καὶ τοῦ 7, ἥτοι τῶν ἀριθμῶν 36 καὶ 49. Ὡσαύτως τοῦ $\frac{5}{11}$ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 2 καὶ ὁ 3, τοῦ $\frac{4}{5}$ ὁ 3 καὶ ὁ 4.

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς ὑποθέτει ὅτι ἐὰν ὁ A εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ A κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{n}$

καλεῖται ἐκάτερον τῶν ἐφεξῆς πολλαπλασίων τοῦ $\frac{1}{v}$,
μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ A .

Ἐὰν δηλαδὴ εἶναι $\left(\frac{\mu}{v}\right)^2 < A < \left(\frac{\mu+1}{v}\right)^2$,

τότε ὁ $\frac{\mu}{v}$ καὶ ὁ $\frac{\mu+1}{v}$ λέγεται τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ A κατὰ
προσέγγισιν $\frac{1}{v}$.

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς ὑποθέτει ὅτι ὁ A , ἐὰν εἶναι ἀκέραιος
δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν δὲ κλασματικὸς ὅτι δὲν
εἶναι τετράγωνον κλάσματος ἔχοντος παρονομαστὴν v . Διότι
ἐὰν ὑποθέσωμεν $A = \frac{a^2}{v^2}$, τοῦ a ὄντος ἀκεραίου, ἐπειδὴ

$$a^2 = \frac{a^2 \times v^2}{v^2} \quad \text{θὰ εἶναι} \quad \left(\frac{\mu}{v}\right)^2 < \frac{a^2 \times v^2}{v^2} < \left(\frac{\mu+1}{v}\right)^2$$

$$\text{ὅθεν} \quad \frac{\mu}{v} < \frac{a \times v}{v} < \frac{\mu+1}{v}.$$

Ἐπομένως μεταξὺ τῶν ἀκεραίων μ καὶ $\mu+1$ θὰ περι-
λαμβάνεται ἀκέραιος ἀριθμὸς ὁ $a \times v$ ὅπερ ἀδύνατον. Ὁμοίως
δεικνύεται ἀδύνατος καὶ ἡ ὑπόθεσις ὅτι $A = \left(\frac{\pi}{v}\right)^2$.

Ἐν τοῖς ἐξῆς λέγοντες τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγ-
γισιν μονάδος ἢ $\frac{1}{v}$ τοῦ ἀριθμοῦ A θὰ ἐννοῶμεν τὸν μικρότερον
τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες διαφέρουσι κατὰ 1 ἢ $\frac{1}{v}$, μεταξὺ τῶν

τετραγώνων τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ A . Τότε δὲ δυ-
νάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τοὺς ὁρισμοὺς τῆς κατὰ προσέγγι-
σιν τετραγωνικῆς ρίζης ὡς ἐξῆς.

Τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ A
εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετρα-
γώνου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ A .

Τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ A κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{v}$ εἶναι τὸ μέγιστον τῶν ἔχόντων παρονομαστήν v κλασμάτων, ὧν τὰ τετράγωνα περιέχονται ἐν τῷ A .

237. Ἡ πράξις, δι' ἧς εὐρίσκεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τελείου τετραγώνου, ἢ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἢ $\frac{1}{v}$, καλεῖται ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

Κατὰ πρῶτον θέλομεν ἐκθέσει τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ ἀκεραίου, ἀκριβῶς μὲν ἐάν εἶναι τέλειον τετράγωνον, κατὰ προσέγγισιν δὲ μονάδος, ὅταν δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἡ διαφορὰ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἐν αὐτῷ περιεχομένου μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου λέγεται ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Τὸ ὑπόλοιπον δὲ τοῦτο δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίῃ τὸ διπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης· διότι ἐάν p εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ ἀριθμοῦ A , θὰ ἔχωμεν

$$p^2 < A < (p+1)^2.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τοῦ p^2 καὶ $(p+1)^2$ εἶναι $2p+1$, ἡ διαφορὰ τοῦ A καὶ p^2 θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ $2p+1$.

238. Ἐάν ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, εἶναι μικρότερος τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ρίζα θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 100, ἥτοι τοῦ ἀριθμοῦ 10, ἐπομένως θὰ εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ Πυθαγορείου πίνακος γνωρίζομεν τὰ τετράγωνα πάντων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, ἀμέσως εὐρίσκωμεν ἐκ μνήμης τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Παραδείγματος χάριν ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 49 εἶναι 7, διότι $7^2=49$. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 32 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 5, διότι ὁ 32 περιλαμβάνεται μεταξὺ 5^2 καὶ 6^2 , ἥτοι τῶν ἀριθμῶν 25 καὶ 36.

Ἐάν δὲ ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι μείζων τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ θὰ εἶναι οὐχὶ μικροτέρα τοῦ 10. Ἡ δὲ εὕρεσις αὐτῆς στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἐξῆς δύο θεωρημάτων.

239. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ὁ ὀλικὸς ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ μείζονος τοῦ 100 εἶναι ἴσος τῇ τετραγωνικῇ ρίζῃ τοῦ ἐν τῷ ὀλικῷ ἀριθμῷ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ τούτου περιεχομένου μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου.

Λέγω παραδείγματος χάριν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ ἀριθμοῦ 5429 εἶναι ἴσος τῇ τετραγωνικῇ ρίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ὀλικῷ ἀριθμῷ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ 5429, ἥτοι ἐν τῷ 54· ὅτι δηλαδὴ αἱ δεκάδες τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 5429 εἶναι 7.

Διότι τὸ τετράγωνον τῶν 7 δεκάδων, ἥτοι τοῦ 70, εἶναι 4900, ἥτοι 49 ἑκατοντάδες, καὶ περιέχεται ἐν τῷ ἀριθμῷ 5429, ὅστις ἔχει 54 ἑκατοντάδας· τὸ δὲ τετράγωνον 8 δεκάδων εἶναι 64 ἑκατοντάδες, καὶ ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν 5429. Ἀρα ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 5429 εἶναι ἀριθμὸς οὐχὶ μικρότερος τοῦ 70 καὶ μικρότερος τοῦ 80· ἄρα ἔχει 7 δεκάδας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄς ἐπαναλάβωμεν τὴν ἀπόδειξιν καὶ ἐπ' ἄλλου ἀριθμοῦ ἔχοντος περισσότερα ψηφία, οἷον τοῦ 34527. Ὁ ὀλικὸς ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων τούτου εἶναι 345, τοῦ δὲ 345 ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 18· διότι $18^2 = 324$, καὶ $19^2 = 361$. Λέγω ὅτι αἱ δεκάδες τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 34527 εἶναι 18. Διότι τὸ τετράγωνον 18 δεκάδων εἶναι 324 ἑκατοντάδες, καὶ περιέχεται ἐν τῷ ἀριθμῷ 34527, ὅστις ἔχει 345 ἑκατοντάδας· τὸ δὲ τετράγωνον 19 δεκάδων εἶναι 361 ἑκατοντάδες καὶ ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν 34527. Ἀρα ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 34527 εἶναι οὐχὶ μικροτέρα 18 δεκά-

δων καὶ μικροτέρα 49 δεκάδων· ἄρα ἔχει 48 δεκάδας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

240. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἐὰν ἀπ' ἀριθμοῦ τινος ἀφαιρεθῇ τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ρίζης, καὶ ὁ ὀλικὸς ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου διαιρεθῇ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ρίζης, τὸ προκύπτον πηλίκον εἶναι ἴσον ἢ μείζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ρίζης.

Ἄς ληφθῇ ὡς παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς 5429. Αἱ δεκάδες τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ρίζης εἶναι 7 κατὰ τὸ προηγουμένον θεώρημα. Ἐὰν τὸ τετράγωνον τῶν 7 δεκάδων, ὅπερ εἶναι 49 ἑκατοντάδες, ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 5429, θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον 529. Διαιροῦντες τὸν ὀλικὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τούτου 52 διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ρίζης, ἦτοι τοῦ 14, λαμβάνομεν πηλίκον 3· λέγω ὅτι αἱ μονάδες τῆς ρίζης θὰ εἶναι 3 ἢ ὀλιγότεραι τῶν 3.

Διότι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 226 τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων εἶναι ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων, τοῦ διπλασίου τοῦ γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, καὶ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων. Ἄρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ περιέχῃ 1^{ον}) τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ρίζης· 2^{ον}) τὸ διπλάσιον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας· 3^{ον}) τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων· καὶ 4^{ον}) τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Ἀφαιρέσαντος λοιπὸν τοῦ πρώτου τῶν τεσσάρων τούτων μερῶν ἀπὸ τοῦ 5429, τὸ ὑπόλοιπον 529 θὰ περιέχῃ τὰ λοιπὰ τρία. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον τῶν τριῶν τούτων μερῶν, ἦτοι τὸ διπλάσιον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, εἶναι ἀριθμὸς δεκάδων, θὰ περιέχῃται ὁλόκληρον εἰς τὰς 52 δεκάδας τοῦ 529. Ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν 52 διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων, ἦτοι διὰ 14, τὸ πηλίκον 3, ὅπερ εὗρισκομεν, δὲν δύναται νὰ εἶναι μικρότερον τῶν μονάδων τῆς

ρίζης. Δύναται ὁμως νὰ εἶναι μεγαλειότερον· διότι εἰς τὰς 52 δεκάδας τοῦ; 529 εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχωνται πλὴν τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ τινες δεκάδες προερχόμεναι ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων τῆς ρίζης, ἢ τοῦ ὑπολοίπου τῆς πράξεως.

241. Διὰ τῶν προηγουμένων δύο θεωρημάτων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 4219. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι μείζων τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ θὰ ἔχῃ δεκάδας. Κατὰ δὲ τὸ θεωρημα Α'. ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης εἶναι ἴσος τῇ τετραγωνικῇ ρίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται ἐν τῷ ἀριθμῷ 42 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ 4219. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἐν τῷ 42 περιεχομένου μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου εἶναι 6, αἱ δεκάδες τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 4219 εἶναι 6.

Ἄς ἀφαιρέσωμεν ἤδη ἀπὸ τοῦ 4219 τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ρίζης, ὅπερ εἶναι 36 ἑκατοντάδες. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ ἀπὸ τῶν 42 ἑκατοντάδων τοῦ 4219 νὰ ἀφαιρέσωμεν 36 καὶ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ὑπολοίπου 6 νὰ γράψωμεν τὴν δεκάδα καὶ τὰς μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ, ἥτοι τὸν ἀριθμὸν 19· οὕτω εὕρισκομεν ὑπόλοιπον 619. Ἐὰν τὸν ὀλικὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου τοῦτου, ἥτοι τὸν ἀριθμὸν 61, διαιρέσωμεν διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων τῆς ρίζης, ἥτοι τοῦ 12, τὸ πηλίκον 5 τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶναι μείζων ἢ ἴσον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ρίζης (240).

Ἵνα γνωρίσωμεν ἐὰν 5 εἶναι αἱ μονάδες τῆς ρίζης, πρέπει νὰ ἴδωμεν ἐὰν τὸ τετράγωνον τοῦ 65 δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν 4219. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ 65, ἥτοι τοῦ $60 + 5$ εἶναι τὸ ἄθροισμα

$$60^2 + 2 \times 60 \times 5 + 5^2, \text{ ἥτοι } 3600 + 120 \times 5 + 5^2.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἀφαιρέσαντες ἀπὸ τοῦ 4219 τὸ πρῶτον τῶν μερῶν τοῦ ἀθροίσματος τούτου, ἦτοι τὸν 3600, εὗραμεν ὑπόλοιπον 619, μένει νὰ ἴδωμεν ἐὰν ἀπὸ τοῦ 619 δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀθροισμα $120 \times 5 + 5^2$. Εἶναι δὲ

$$120 \times 5 + 5^2 = (120 + 5) \times 5 = 125 \times 5.$$

Βλέπομεν ἐκ τούτου ὅτι ἵνα δοκιμάσωμεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν αὐτὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ρίζης, καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον τῶν μονάδων, καὶ νὰ ἴδωμεν ἐὰν τὸ γινόμενον δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὅποιον εὐρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ρίζης.

Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι τὸ γινόμενον 125×5 ἦτοι 625 ὑπερβαίνει τὸ ὑπόλοιπον 619, αἱ μονάδες τῆς τετραγωνικῆς ρίζης εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν 5. Δοκιμάζοντες δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ ψηφίον 4, εὐρίσκομεν ὅτι 124×4 ἦτοι 496 ἀφαιρεῖται ἀπὸ 619 καὶ διδὲι ὑπόλοιπον 123. Ἄρα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδας εἶναι 64, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως εἶναι 123.

242. Τώρα θέλομεν δεῖξει πῶς γνωρίζοντες τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ τινος δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ, ὅστις παράγεται διὰ τῆς προσγραφῆς δύο ψηφίων πρὸς τὰ δεξιὰ ἐκείνου. Πῶς παραδείγματος χάριν γνωρίζοντες τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 4219, δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν τὴν τοῦ 421982.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 421982 εἶναι ἴσος τῇ τετραγωνικῇ ρίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ὀλικῷ ἀριθμῷ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ 421982, ἦτοι ἐν τῷ 4219. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τετραγωνικὴ αὕτη ρίζα εἶναι γνωστὴ καὶ ἴση μὲ 64, αἱ δεκάδες τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 421982 εἶναι 64.

Τὸ τετράγωνον τοῦ 64 ἀφαιρούμενον ἀπὸ 4249 δίδει ὑπόλοιπον 123. Ἵνα ἀφαιρέσωμεν δὲ τὸ τετράγωνον τῶν 64 δεκάδων ἀπὸ τοῦ 424982, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦτο θὰ παριστᾷ ἑκατοντάδας, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ 64² ἀπὸ 4249 καὶ πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ὑπολοίπου 123 νὰ γράψωμεν τὰ λοιπὰ δύο ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ. Οὕτω δὲ εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον 12382.

Ἐὰν τὸν ὀλικὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου τούτου, ἦτοι τὸν ἀριθμὸν 1238, διαιρέσωμεν διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων τῆς ρίζης, ἦτοι τοῦ ἀριθμοῦ 128, τὸ πηλίκον 9 τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶναι ἴσον ἢ μείζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ρίζης τοῦ 424982. Ἵνα δοκιμάσωμεν τὸ ψηφίον 9 ἀρκεῖ νὰ ἴδωμεν ἔαν 1289×9 δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ 12382. Ἐπειδὴ δὲ ἀφαιρεῖται καὶ δίδει ὑπόλοιπον 784, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 424982 εἶναι 649, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως 784.

243. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ. Παραδείγματός χάριν ἵνα εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 52746278 ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὴν τοῦ ἀριθμοῦ 527462, ὅστις προκύπτει διὰ τῆς ἀποκοπῆς τῶν δύο τελευταίων ψηφίων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 527462, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὴν τοῦ 5274. Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 5274 ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὴν τοῦ 52. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 52 εἶναι μικρότερος τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ρίζα εὐρίσκεται ἀμέσως ἐκ μνήμης.

244. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἐξῆς κανόνα τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μοῖρας), χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα διψήφια, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν· ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου

τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ πρώτῳ πρὸς ἀριστερὰν τμήματι, ὅπερ δένεται ἡ εἶναι διψήφιος ἢ μονοψήφιος, καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης. Τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τούτου ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου πρὸς ἀριστερὰν τμήματος, οὕτω δὲ λαμβάνομεν πρῶτόν τι ὑπόλοιπον, πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὁποίου καταβιβάζομεν τὸ δεύτερον διψήφιον τμήμα. Τοῦ οὕτως ἀποτελεσθέντος ἀριθμοῦ χωρίζομεν διὰ στιγμῆς τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον, καὶ τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς στιγμῆς ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης.

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης, καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ αὐτὸ πηλίκον. Καὶ ἐὰν μὲν τὸ γινόμενον δένεται ἡ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἀποτελεῖται ὑπὸ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου ἀκολουθουμένου ὑπὸ τοῦ δευτέρου τμήματος, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης· εἰ δὲ μὴ, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὑρωμεν ψηφίον παρέχον γινόμενον ὀνύμενον ἡ ἀφαιρεθῇ· τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης, ὅπερ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου. Ἐκτελεσθείσης δὲ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ εἰς τὸ ψηφίον τοῦτο ἀντιστοιχοῦντος γινομένου εὑρίσκομεν δευτέρον τι ὑπόλοιπον.

Πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δευτέρου τούτου ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ τρίτον διψήφιον τμήμα· τοῦ οὕτως ἀποτελεσθέντος ἀριθμοῦ χωρίζομεν τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον, καὶ τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τούτου ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ εὑρεθέντα δύο ψηφία τῆς ρίζης.

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου αὐτῆς, καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ αὐτὸ πηλίκον. Καὶ ἐὰν μὲν τὸ γινόμε-

μειον δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ἔστις ἀποτε-
 λείται ὑπὸ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου ἀκολουθουμένου ὑπὸ τοῦ
 τρίτου διψήφιου τμήματος, τὸ εὐρεθὲν πηλίκον εἶναι τὸ τρί-
 τον ψήφιον τῆς ρίζης· εἰ δὲ μὴ, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐ-
 τὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψήφιον, καὶ οὕτω
 καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ψήφιον δυνάμενον νὰ ἀφαιρεθῇ·
 τὸ ψήφιον τοῦτο εἶναι τὸ τρίτον ψήφιον τῆς ρίζης, ὅπερ
 γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δευτέρου.

Ἐξακολουθοῦμεν δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μέχρις οὗ
 πάντα τὰ διψήφια τμήματα καταβιθασθῶσι. Τὸ εἰς τὸ τε-
 λευαῖον τμήμα ἀντιστοιχοῦν ὑπόλοιπον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον
 τῆς πράξεως. Καὶ ἔαν μὲν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἶναι μηδὲν,
 ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον, καὶ ἔχομεν ἀκρι-
 βῶς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν αὐτοῦ· εἰ δὲ μὴ, ἔχομεν τὴν τε-
 τραγωνικὴν ρίζαν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν
 μονάδος.

245. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Δύναται νὰ συμβῇ ἐν τινι τῶν δι-
 αιρέσεων, ἃς ἐκτελοῦμεν πρὸς εὕρεσιν τῶν διαφόρων ψηφίων
 τῆς ρίζης, ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς, τὸ ἀκέραιον μέ-
 ρος τοῦ πηλίκου νὰ εἶναι μεγαλειότερον τοῦ 9. Τότε ἀρχό-
 μεθα τῶν δοκιμασιῶν ἀπὸ τοῦ 9.

246. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Δύναται ἐπίσης νὰ συμβῇ ἐν τινι
 τῶν διαιρέσεων, δι' ὧν εὐρίσκομεν τὰ διάφορα ψηφία τῆς
 ρίζης, ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ
 πηλίκου νὰ εἶναι 0. Τότε καὶ τὸ ἀντιστοιχοῦν ψηφίον τῆς
 ρίζης εἶναι 0. Τὸ δὲ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ψηφίον τοῦτο ὑπό-
 λοιπον εἶναι ὅλος ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ἀποκόψαντες τὸ
 τελευταῖον ψηφίον ἐσχηματίσαμεν τὸν διαιρετέον. Καταβι-
 θάζομεν ἔπειτα τὸ ἀκόλουθον τμήμα τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ἐξα-
 κολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν κανόνα.

247. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς τετρα-
 γωνικῆς ρίζης εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν διψηφίων τμημά-
 των εἰς 2 χωρίζεται ὁ ἀριθμὸς. Ἐὰν λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς ἔχη

ἄρτιον ἀριθμὸν ψηφίων, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ρίζα θὰ ἔχῃ τὸ ἥμισυ τῶν ψηφίων αὐτοῦ· ἐὰν δὲ περιττὸν τὸ ἥμισυ τοῦ κατὰ μονάδα μεγαλειτέρου ἀρτίου.

248. Ἐν τῷ ἐξῆς πίνακι δεικνύεται πῶς διατάσσεται ἡ πρᾶξις. Λαμβάνομεν δὲ ὡς παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 421982, ἐφ' οὗ ἐγένοντο ἀνωτέρω οἱ συλλογισμοὶ ἡμῶν.

42.19.82	649	
36	125	1289
64.9	5	9
496	625	11604
1238.2	124	
44604	4	
784	496	

Ἐὰν δὲ αἱ διάφοροι ἀφαιρέσεις γίνωνται καθ' ὅσον σχηματίζονται οἱ ἀφαιρετέοι ἀριθμοὶ, ὅπως γίνεται ἐν τῇ διαιρέσει τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἡ πρᾶξις διατάσσεται ἀπλούστερον ὡς ἐξῆς.

42.19.82	649	
64.9	125	1289
1238.2	5	9
784	124	
	4	

Καταχωρίζομεν ἐνταῦθα δύο ἄλλα παραδείγματα, ἐν οἷς γίνεται χρῆσις τῶν ἀνωτέρω ἐν ταῖς σημειώσεσι Α' καὶ Β' εἰρημένων.

15.87.23	398	
68.7	69	788
662.3	9	8
349		
7.30.96.87	2703	
33.0	48	54 5403
19.68.7	8	3
3478	47	
	7	

**Ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀριθμοῦ
κλασματικοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.**

249. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγι-
σιν μονάδος ἀριθμοῦ κλασματικοῦ εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ τοῦ ἀ-
κεραίου μέρους αὐτοῦ.

Λέγω παραδείγματος χάριν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ
προσέγγισιν μονάδος τοῦ ἀριθμοῦ $52 + \frac{3}{7}$ εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ
τετραγωνικῇ ρίζῃ τοῦ 52. Διότι ὁ ἐν τῷ $52 + \frac{3}{7}$ περιεχό-
μενος μέγιστος ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 52. Ἄρα τὸ μέ-
γιστον ἀκέραιον τετράγωνον τὸ περιεχόμενον ἐν τῷ $52 + \frac{3}{7}$
εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ μεγίστῳ ἀκεραίῳ τετραγώνῳ τῷ περιε-
χομένῳ ἐν τῷ 52. Ἐπομένως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ
 $52 + \frac{3}{7}$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ τετρα-
γωνικῇ ρίζῃ τοῦ 52.

Διὰ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἡ ἔξαγωγή τῆς κατὰ προσέγ-
γισιν μονάδος τετραγωνικῆς ρίζης ἀριθμοῦ κλασματικοῦ ἀνά-
γεται εἰς τὴν ἔξαγωγήν τετραγωνικῆς ρίζης ἀκεραίου κατὰ
προσέγγισιν μονάδος.

Παραδείγματος χάριν ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγ-
γισιν μονάδος τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{437}{8}$ ἔστω τοῦ $54 + \frac{5}{8}$ εἶναι
7 ἢ τοῦ $\frac{5786}{23}$, ἔστω τοῦ $254 + \frac{13}{23}$, εἶναι 15 κτλ.

**Ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ρίζης κατὰ
προσέγγισιν $\frac{1}{y}$.**

250. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅ-
ροι κλάσματός τινος εἶναι τέλεια τετράγωνα, εὐρίσκομεν
ἀκριβῶς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν αὐτοῦ, ἐξάγοντες τὴν τε-
τραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ.

Παραδείγματος χάριν ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{\mu^2}{\nu^2}$ εἶναι $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι μᾶς ἐδόθη κλάσμα, τοῦ ὅποιου

μόνος ὁ παρονομαστής εἶναι τέλειον τετράγωνον, τὸ $\frac{\alpha}{\nu^2}$.

Ἐὰν ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμητοῦ α κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ρ , τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\nu^2}$ θὰ περιλαμβάνεται μεταξύ $\frac{\rho^2}{\nu^2}$ καὶ $\frac{(\rho+1)^2}{\nu^2}$, ἐπομένως $\frac{\rho}{\nu}$ θὰ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{\alpha}{\nu^2}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$.

Ἄς λάβωμεν τώρα ἀριθμὸν τινα A , ἀκέραιον ἢ κλασματικόν. Ἐπειδὴ ὁ A εἶναι ἴσος τῷ $\frac{A \times \nu^2}{\nu^2}$, εἰν ρ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ $A \times \nu^2$, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{A \times \nu^2}{\nu^2}$, ἥτοι τοῦ A , κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ θὰ εἶναι $\frac{\rho}{\nu}$. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἐξῆς κανόνα.

Ἴρα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τοῦ ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ A , ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ γινομένου $A \times \nu^2$, καὶ ταύτην διαιροῦμεν διὰ ν .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α'. Ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 23 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα σχηματίζομεν τὸ γινόμενον $23 \times 7^2 = 1127$. τούτου ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 33· ταύτην διαιροῦντες δι' 7 εὐρίσκομεν $\frac{33}{7}$. Ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 23 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$ εἶναι $\frac{33}{7}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β'. Ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{38}{5}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{11}$. Κατὰ τὸν κανόνα πολλαπλασιάζομεν $\frac{38}{5}$ ἐπὶ 11^2 . τὸ γινόμενον εἶναι

$$\frac{38 \times 121}{5} = \frac{4598}{5} = 919 + \frac{3}{5}.$$

Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τούτου κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ τοῦ 949 (249), εἶναι 30. Ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{36}{5}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{11}$ εἶναι $\frac{30}{11}$.

**Ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ρίζης κατὰ
προσέγγισιν $\frac{1}{10^n}$.**

251. Ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ζητεῖται νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^n}$ ἀριθμοῦ ἀκεραίου, τοῦ Α. Πρὸς τοῦτο πρέπει κατὰ τὸν κανόνα τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου α.) νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν Α ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 10^n , ὅπερ εἶναι 10^{2n} . β.) νὰ ἐξαγάγωμεν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ γινομένου $A \times 10^{2n}$ καὶ γ.) νὰ διαιρέσωμεν ταύτην διὰ 10^n .

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ 10^{2n} , ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ 2n μηδενικά, καὶ ὅτι ἵνα διαιρέσωμεν ἀκέραιον διὰ 10^n , ἀρκεῖ νὰ χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ n δεκαδικὰ ψηφία, λαμβάνομεν τὸν ἐξῆς κανόνα.

Ἡ ἐξαγάγωμεν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^n}$ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ, γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ 2n μηδενικά, τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ χωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ρίζης ταύτης n δεκαδικὰ ψηφία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2, κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^4}$, ἥτοι 0,0004.

Γράφομεν ὀκτὼ μηδενικά πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 2, τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ 20000000 ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ εὐρίσκομεν τὸν

ἀριθμὸν 14142· ἐν ταύτῃ χωρίζομεν 4 δεκαδικὰ ψηφία, καὶ οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν 0,0004 εἶναι 1,4142.

252. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ὁ ἀριθμὸς A, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{40}$ εἶναι κλασματικός. Πρέπει (249 καὶ 250) α.) νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν A ἐπὶ 10^{2n} . β.) νὰ ἐξαγάγωμεν τὸν ἐν τῷ γινομένῳ περιεχόμενον ἀκέραιον· γ.) νὰ εὕρωμεν τοῦ ἀκεραίου τούτου τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος· δ.) νὰ διαιρέσωμεν ταύτην διὰ 10^n .

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ 10^{2n} καὶ νὰ ἐξαγάγωμεν τὸν ἐν τῷ γινομένῳ ἀκέραιον εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς νὰ τρέψωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικόν, λαμβάνοντες 2n δεκαδικὰ ψηφία, καὶ νὰ παραλείψωμεν ἔπειτα τὴν ὑποδιαστολὴν, συνάγομεν τὸν ἐξῆς κανόνα.

Ἔστω ἐξαγάγωμεν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{40}$ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ κλασματικοῦ, τρέπομεν αὐτὸν εἰς δεκαδικόν λαμβάνοντες 2n δεκαδικὰ ψηφία, ἐξαλείφωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν, τοῦ προκύπτοντος ἀκεραίου ἐξαγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ ἐν ταύτῃ χωρίζομεν n δεκαδικὰ ψηφία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α'. Ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{5}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{40}$, ἥτοι 0,001

Τρέποντες τὸν $\frac{5}{7}$ εἰς δεκαδικόν καὶ λαμβάνοντες 6 δεκαδικὰ ψηφία, εὐρίσκομεν 0,714285. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ 714285 εἶναι 845· ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{5}{7}$ κατὰ προσέγγισιν 0,001 εἶναι 0,845.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β'. Ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3,141 κατὰ προσέγγισιν 0,001.

Πρέπει κατὰ τὸν κανόνα νὰ ἐκφρασθῇ ὁ 3,141 μετὰ ἐξ

δεκαδικῶν, ὅπερ γίνεται διὰ τῆς προσγραφῆς τριῶν μηδε-
νικῶν πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ. Ἐξαλείφοντες ἔπειτα τὴν ὑπο-
διαστολὴν εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 3144000. Τοῦτου ἡ τε-
τραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εὐρίσκομεν ὅτι
εἶναι 1772· ἐπομένως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3,144 κατὰ
προσέγγισιν 0,001 εἶναι 1,772.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ζητεῖται νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ
ρίζα τοῦ 3,1415926536 κατὰ προσέγγισιν 0,001.

Πρέπει κατὰ τὸν κανόνα νὰ ἐκφρασθῇ ὁ 3,1415926536
μὲ 8 δεκαδικὰ ψηφία, ὅπερ γίνεται παραλειπομένων τῶν
τεσσάρων τελευταίων δεκαδικῶν αὐτοῦ ψηφίων. Ἐξαλείφον-
τες ἔπειτα τὴν ὑποδιαστολὴν, λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν
3141592· τοῦτου ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν
μονάδος εἶναι 1772. Ἐπομένως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ
δοθέντος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,001 εἶναι 1,772.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

α.) Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν
τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 5, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων
δὲν εἶναι 2· ἢ, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 6, τὸ ψη-
φίον τῶν δεκάδων εἶναι ἄρτιον· ἢ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων
ὄντος 1, 4, 9, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι περιττόν.

β.) Ἐὰν κλάσμα τι εἶναι τέλειον τετράγωνον, τὸ γινό-
μενον τῶν δύο αὐτοῦ ὅρων εἶναι ὡσαύτως τέλειον τετράγωνον.

γ.) Τὸ τετράγωνον παντὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πολ-
λαπλάσιον τοῦ 8 ἡυξημένον κατὰ μονάδα.

δ.) Πᾶς περιττὸς ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι ἄθροισμα δύο τετρα-
γώνων, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4 ἡυξημένον κατὰ μονάδα.

ε.) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν ὑπερβαί-
νει τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου αὐτῶν κατὰ τὸ τετράγω-
νον τῆς διαφορᾶς των.

* ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ'.

ΠΕΡΙ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ.

Προτάσεις τινές περὶ κύβων.

253. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.** Ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος τῷ ἀθροίσματι τοῦ κύβου τοῦ πρώτου, τοῦ τριπλασίου τοῦ γινομένου τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, τοῦ τριπλασίου τοῦ γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ κύβου τοῦ δευτέρου.

Ἐστωσαν α καὶ β δύο ἀριθμοὶ οἰοιδήποτε. Ἵνα σχηματίσωμεν τὸν κύβον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $\alpha + \beta$ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν $(\alpha + \beta)^2$ ἐπὶ $\alpha + \beta$. Εἶδομεν δὲ (226) ὅτι

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 2\alpha \times \beta + \beta^3.$$

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἰσότητος ταύτης ἀθροισμα ἐπὶ $\alpha + \beta$, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν τριῶν αὐτοῦ μερῶν ἐπὶ α , ἔπειτα ἐπὶ β , καὶ νὰ προσθέσωμεν πάντα τὰ γινόμενα· οὕτω δὲ εὐρίσκομεν

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 2\alpha^2 \times \beta + \alpha \times \beta^2 + \alpha^2 \times \beta + 2\alpha \times \beta^2 + \beta^3.$$

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι

$2\alpha^2 \times \beta + \alpha^2 \times \beta = 3\alpha^2 \times \beta$, καὶ $\alpha \times \beta^2 + 2\alpha \times \beta^2 = 3\alpha \times \beta^2$, λαμβάνομεν

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 \times \beta + 3\alpha \times \beta^2 + \beta^3.$$

Ἐκφράζει δὲ ἰσότης αὕτη τὸ προκείμενον θεώρημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ διαφορὰ τῶν κύβων δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ μονάδα εἶναι ἴση τῷ τριπλασίῳ τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου, σὺν τῷ τριπλασίῳ αὐτοῦ, σὺν τῇ μονάδι.

Διότι παρασταθέντος δι' α τοῦ μικροτέρου τῶν ἀριθμῶν, ὁ μεγαλειότερος θὰ εἶναι α+1. Κατὰ δὲ τὸ ἀνωτέρω θεωρημα εἶνα $(α+1)^3 = α^3 + 3α^2 + 3α + 1$.

Ἡ ἰσότης δὲ αὕτη δεικνύει ὅτι ὁ κύβος τοῦ α+1 ὑπερβαίνει τὸν κύβον τοῦ α κατὰ $3α^2 + 3α + 1$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

254. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ὁ κύβος γινομένου εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῶν κύβων τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Ἐστώ γινόμενον τὸ α×β×γ· ἔχομεν

$$(α×β×γ)^3 = α×β×γ×α×β×γ×α×β×γ.$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τοὺς ἴσους παράγοντας διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν λαμβάνομεν

$$(α×β×γ)^3 = α^3×β^3×γ^3· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.$$

255. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ὁ κύβος δυνάμεως ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τριπλάσιον.

Λέγω παραδείγματος χάριν ὅτι $(α^5)^3 = α^5×^3 = α^{15}$.

Διότι $(α^5)^3 = α^5×α^5×α^5 = α^{5+5+5} = α^5×^3 = α^{15}$.

256. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τῶν προηγουμένων δύο θεωρημάτων συνάγομεν ὅτι, ἵνα εὕρωμεν τὸν κύβον γινομένου δυνάμεων, τριπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας αὐτῶν.

Οἷον $(α^2×β^3×γ^4)^3 = α^6×β^9×γ^{12}$.

Ἡ πρότασις αὕτη ἀληθεύει καὶ ὅταν τινὲς τῶν παραγόντων εὐρίσκωνται ἐν τῇ πρώτῃ δυνάμει, ἀρκεῖ νὰ ὑποτεθῇ ὅτι οἱ παράγοντες οὗτοι ἔχουσιν ἐκθέτην τὴν μονάδα.

257. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ὁ κύβος ἀριθμοῦ μὴ ἀκεραίου δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσος ἀκεραίῳ ἀριθμῷ.

Ἡ ἀπόδειξις ὡς ὅλως ὁμοία τῇ ἐν ἐδαφίῳ 230 παραλείπεται.

258. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. Διὰ νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς κύβος ἄλλου ἀριθμοῦ, πρέπει οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων νὰ εἶναι πάντες πολλαπλάσια τοῦ 3· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.

Διότι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς μόνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ κύβος δύναται νὰ εἶναι (257). Παντὸς δὲ ἀκεραίου ἀναλελυμένου

εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας ὁ κύβος σχηματίζεται διὰ τοῦ τριπλασιασμοῦ τῶν ἐκθετῶν πάντων τῶν παραγόντων, ἐπομένως ἔχει ἀναγκαίως πάντας τοὺς ἐκθέτας τῶν πρώτων παραγόντων πολλαπλασίους τοῦ 3.

Ὅταν δὲ πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων ἀριθμοῦ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 3, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι κύβος ἄλλου ἀριθμοῦ. Διότι διαιροῦντες πάντας τοὺς ἐκθέτας τῶν πρώτων παραγόντων διὰ 3 λαμβάνομεν ἀριθμὸν, οὗ ὁ κύβος εἶναι ἴσος τῷ δοθέντι· οἷον ὁ $2^3 \times 5^6 \times 7^3$ εἶναι ὁ κύβος τοῦ $2^1 \times 5^2 \times 7^1$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἀκέραιος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ π, μὴ διαιρετὸς δὲ καὶ διὰ π^3 , δὲν εἶναι κύβος ἄλλου ἀριθμοῦ.

Διότι ἐὰν ἀριθμὸς τοιοῦτος ἀναλυθῇ εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, ὁ π θὰ περιέχεται ἐν αὐτῷ μετὰ τοῦ ἐκθέτου 1 ἢ 2, ἐπομένως ὁ ἐκθέτης τοῦ πρώτου τούτου παραγόντος δὲν θὰ εἶναι πολλαπλάσιος τοῦ 3.

259. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤ'. Ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγων εἰς μηδενικά, ὧν ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι πολλαπλάσιος τοῦ 3, δὲν εἶναι κύβος ἄλλου ἀριθμοῦ.

Διότι ἀκέραιος ἀριθμὸς μόνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ κύβος δύναται νὰ εἶναι. Ἐξ αὐτοῦ δὲ τοῦ κανόνος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων καταφαίνεται ὅτι τῶν μὲν εἰς σημαντικὸν ψηφίον ληγόντων ἀριθμῶν καὶ ὁ κύβος λήγει εἰς σημαντικὸν ψηφίον, ἀριθμοῦ δὲ λήγοντος εἰς μηδενικά ὁ κύβος ἔχει τριπλάσιον ἀριθμὸν μηδενικῶν, ἐπομένως ἀριθμὸν μηδενικῶν πολλαπλάσιον τοῦ 3. Ἐὰν ἄρα ἀριθμὸς λήγῃ εἰς μηδενικά, ὧν ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν εἶναι κύβος ἄλλου ἀριθμοῦ.

260. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. Διὰ τὰ εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον κύβος ἄλλου ἀριθμοῦ, πρέπει ἐκάτερος τῶν ὁρῶν αὐτοῦ νὰ εἶναι κύβος ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ.

Ἐστω κλάσμα ἀνάγωγον τὸ $\frac{\alpha}{\epsilon}$ ἴσον τῷ κύβῳ ἀριθμοῦ

τινος. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος· διότι παντὸς ἀκεραίου ὁ κύβος εἶναι ἀριθμὸς ὡσαύτως ἀκέραιος·

Θὰ εἶναι ἄρα κλάσμα, ὅπερ ἀνάγωγον γενόμενον ἔστω $\frac{\mu}{\nu}$.

$$\text{Θὰ ἔχωμεν} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^3 = \frac{\mu^3}{\nu^3}.$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\mu^3}{\nu^3}$ θὰ εἶναι ἀνάγωγον, δύο δὲ ἀνάγωγα κλάσματα ἴσα ἔχουσιν ἴσους καὶ τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τοὺς παρονομαστὰς (139), θὰ εἶναι $\alpha = \mu^3$, $\beta = \nu^3$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

264. Ἐκ τῶν προηγουμένων προτάσεων συνάγομεν ὅτι τινὲς μὲν ἀριθμοὶ εἶναι κύβοι ἄλλων ἀριθμῶν, ἄλλοι δὲ οὐχί. Οἱ ἀριθμοὶ οἵτινες εἶναι κύβοι ἄλλων ἀριθμῶν καλοῦνται τέλειοι κύβοι. Τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 27, 125, $\frac{8}{27}$, κτλ.

Ὁρισμὸς τῆς κυβικῆς ρίζης.

262. Κυβικὴ ρίζα ἀριθμοῦ τινος καλεῖται ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ὁ κύβος εἶναι ἴσος ἐκείνῳ· οἷον ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 64 εἶναι 4, διότι $4^3 = 64$. Ὁμοίως κυβικὴ ρίζα τοῦ $\frac{8}{125}$ εἶναι $\frac{2}{5}$, διότι $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$.

Τὴν κυβικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ σημειοῦμεν προτάσσοντες αὐτοῦ τὸ σημεῖον $\sqrt[3]{}$, ὅπερ διαφέρει τοῦ σημείου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης κατὰ τοῦτο, ὅτι ἔχει ὑπεράνω γεγραμμένον

τὸ ψηφίον 3· οἷον $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ παριστῶσι τὰς κυβικὰς ρίζας τῶν ἀριθμῶν 64 καὶ $\frac{8}{125}$, ἥτοι τοὺς ἀριθμοὺς

4 καὶ $\frac{2}{5}$. $\sqrt[3]{\alpha + \beta}$ παριστᾷ τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν α καὶ β .

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὀρισμὸν μόνοι οἱ τέλειοι κύβοι ἔχουσι κυβικὴν ρίζαν. Θέλομεν ἶδει ἀλλαχοῦ πῶς ὀρίζεται ἡ κυβικὴ ρίζα τῶν μὴ τελείων κύβων, (ἴδε Γεωμετρίαν μου ἐκδ. 6^η, βιβλίον Γ', σελ. 124).

263. Κυβική ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ ἀριθμοῦ A καλεῖται ἐκάτερος τῶν ἐφεξῆς δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, μεταξὺ τῶν κύβων τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ A . Οἷον κυβική ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ 53 εἶναι ὁ 3 καὶ ὁ 4· διότι ὁ 53 περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν κύβων τοῦ 3 καὶ τοῦ 4, ἥτοι τῶν ἀριθμῶν 27 καὶ 64. Ὅμοίως ἡ κυβική ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ $\frac{53}{4}$ εἶναι 2 καὶ 3· διότι $\frac{53}{4} = 13 + \frac{1}{4}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν κύβων τοῦ 2 καὶ 3, ἥτοι τοῦ 8 καὶ τοῦ 27.

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς ὑποθέτει ὅτι ἐὰν ὁ A εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, δὲν εἶναι τέλειος κύβος.

Κυβικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{v}$ τοῦ ἀριθμοῦ A καλεῖται ἐκάτερον τῶν δύο ἐφεξῆς πολλαπλασίων τοῦ $\frac{1}{v}$, μεταξὺ τῶν κύβων τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ A .

Ἐὰν δηλαδὴ εἶναι $\left(\frac{\mu}{v}\right)^3 < A < \left(\frac{\mu+1}{v}\right)^3$,

τότε ὁ $\frac{\mu}{v}$ καὶ ὁ $\frac{\mu+1}{v}$ καλεῖται κυβικὴ ρίζα τοῦ A κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{v}$.

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς ὑποθέτει ὅτι ὁ A , ἐὰν εἶναι ἀκέραιος, δὲν εἶναι τέλειος κύβος, ἐὰν δὲ κλασματικὸς ὅτι δὲν εἶναι κύβος κλάσματος ἔχοντος παρονομαστὴν v .

Ἐν τοῖς ἐξῆς λέγοντες κυβικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἢ $\frac{1}{v}$ τοῦ ἀριθμοῦ A θὰ ἐννοῶμεν τὸν μικρότερον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες διαφέρουσι κατὰ 1 ἢ $\frac{1}{v}$, μεταξὺ τῶν κύβων τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ A . Τότε δὲ δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τοὺς ὁρισμοὺς τῆς κατὰ προσέγγισιν κυβικῆς ρίζης ὡς ἐξῆς.

Κυβικὴ ρίζα τοῦ A κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ A .

Κυβική ρίζα τοῦ Α κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{v}$ εἶναι τὸ μέγιστον τῶν ἐχόντων παρονομαστήν v κλασμάτων, ὧν οἱ κύβοι περιέχονται ἐν τῷ Α.

264. Ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὐρίσκεται ἡ κυβική ρίζα τελείου κύβου, ἢ ἡ κυβική ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἢ $\frac{1}{v}$, καλεῖται ἐξαγωγή τῆς κυβικῆς ρίζης.

Κατὰ πρῶτον θέλομεν ἐκθέσει τὴν μέθοδον, καθ' ἣν ἐξάγεται ἡ κυβική ρίζα ἀριθμοῦ ἀκεραίου, ἀκριβῶς μὲν ἐὰν ὁ ἀριθμὸς εἶναι τέλειος κύβος, κατὰ προσέγγισιν δὲ μονάδος κατὰ τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν.

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειος κύβος, ἡ διαφορὰ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἐν αὐτῷ περιεχομένου μεγίστου ἀκεραίου κύβου καλεῖται ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Τὸ ὑπόλοιπον δὲ τοῦτο δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ρίζης σὺν τῷ τριπλασίῳ αὐτῆς. Διότι ἐὰν ρ εἶναι ἡ κυβική ρίζα τοῦ Α κατὰ προσέγγισιν μονάδος, θὰ ἔχωμεν $\rho^3 < A < (\rho+1)^3$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τοῦ $(\rho+1)^3$ καὶ τοῦ ρ^3 εἶναι $3\rho^2 + 3\rho + 1$ (253), ἡ διαφορὰ $A - \rho^3$ θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ $3\rho^2 + 3\rho + 1$.

265. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ κυβική ρίζα, εἶναι μικρότερος τοῦ 1000, ἡ κυβική αὐτοῦ ρίζα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς κυβικῆς τοῦ 1000, ἥτοι τοῦ ἀριθμοῦ 10, ἐπομένως θὰ εἶναι ἀριθμὸς μονοψηφίος. Ἀρκεῖ λοιπὸν πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ρίζης ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 1000 νὰ γνωρίζωμεν τοὺς κύβους τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

1, 2, 3, 4 5 6 7, 8, 9,
ὄντας 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Διὰ τοῦ πίνακος τούτου εὐρίσκομεν ὅτι ἡ κυβική ρίζα τοῦ 343 εἶναι 7, ἢ τοῦ 672 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 8 κτλ.

Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ κυβική ρίζα εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 1000, ἡ κυβική αὐτοῦ ρίζα θὰ

εἶναι οὐχὶ μικροτέρα τοῦ 10. Ἡ δὲ εὐρεσις αὐτῆς στήρι-
ζεται ἐπὶ τῶν ἐξῆς δύο θεωρημάτων.

266. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ὁ ὀλικὸς ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς
κυβικῆς ρίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ μεῖζονος τοῦ 1000 εἶναι
ἴσος τῇ κυβικῇ ρίζῃ τοῦ ἐν τῷ ὀλικῷ ἀριθμῷ τῶν χιλιάδων
τοῦ ἀριθμοῦ τούτου περιεχομένου μεγίστου ἀκεραίου κύβου.

Λέγω παραδείγματος χάριν ὅτι ὁ ὀλικὸς ἀριθμὸς τῶν δε-
κάδων τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ 47352 εἶναι ἴσος τῇ κυβικῇ
ρίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου, ὅστις περιέχεται ἐν τῷ
ὀλικῷ ἀριθμῷ τῶν χιλιάδων τοῦ 47352, ἥτοι ἐν τῷ 47· ὅτι
δηλαδὴ αἱ δεκάδες τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ 47352 εἶναι 3.

Διότι ὁ κύβος 3 δεκάδων, ἥτοι τοῦ 30, εἶναι 27000, ἥτοι
27 χιλιάδες, καὶ περιέχεται ἐν τῷ 47352, ὅστις ἔχει 47
χιλιάδας· ὁ δὲ κύβος τεσσάρων δεκάδων εἶναι 64 χιλιάδες,
καὶ ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν 47352. Ἄρα ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ
47352 εἶναι ἀριθμὸς οὐχὶ μικρότερος τοῦ 30 καὶ μικρότε-
ρος τοῦ 40· ἄρα ἔχει 3 δεκάδας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

267. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀκεραίου ἀριθ-
μοῦ ὁ κύβος τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ρίζης, καὶ
ὁ ὀλικὸς ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ὑπολοίπου διαι-
ρεθῇ διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων τῆς
ρίζης, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ἴσον ἢ μεῖ-
ζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ρίζης.

Ἄς ληφθῇ ὡς παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς 47352. Κατὰ τὸ
προηγούμενον θεώρημα αἱ δεκάδες τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ρίζης
εἶναι 3. Ἐὰν δὲ ὁ κύβος τῶν 3 δεκάδων, ὅστις εἶναι 27 χι-
λιάδες, ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 47352 θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον 20352.
Διαιροῦντες τὸν ὀλικὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ὑπο-
λοίπου τούτου, ἥτοι τὸν ἀριθμὸν 203, διὰ τοῦ τριπλασίου
τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων τῆς ρίζης, ἥτοι διὰ 27, εὐρί-
σκομεν πηλίκον 7· λέγω ὅτι αἱ μονάδες τῆς κυβικῆς ρίζης
τοῦ 47352 εἶναι 7 ἢ ὀλιγώτεραι τῶν 7.

Διότι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 253 ὁ κύβος ἀριθ-
μοῦ συγκεimenou ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων εἶναι ἄθροισμα

τοῦ κύβου τῶν δεκάδων, τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, τοῦ τριπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων, καὶ τοῦ κύβου τῶν μονάδων. Ἄρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ περιέχῃ 1^{ον}) τὸν κύβον τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ρίζης· 2^{ον}) τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας· 3^{ον}) τὸ τριπλάσιον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων· 4^{ον}) τὸν κύβον τῶν μονάδων· καὶ 5^{ον}) τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς δὲν εἴναι τέλειος κύβος. Ἀφαιρεθέντος δὲ τοῦ πρώτου τῶν πέντε τούτων μερῶν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 47352, τὸ ὑπόλοιπον 20352 θὰ περιέχῃ τὰ λοιπὰ 4 μέρη. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον τῶν τεσσάρων τούτων μερῶν, δηλαδὴ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, εἶναι ἀριθμὸς ἑκατοντάδων (διότι τὸ τετράγωνον δεκάδων εἶναι ἑκατοντάδες), θὰ περιέχηται ὁλόκληρον εἰς τὰς 203 ἑκατοντάδας τοῦ 20352. Ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν 203 διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων, ἤτοι διὰ 27, τὸ πηλίκον 7, ὅπερ εὐρίσκομεν, δὲν δύναται νὰ εἶναι μικρότερον τῶν μονάδων τῆς ρίζης. Δύναται ὅμως νὰ εἴναι μεγαλειότερον. Διότι εἰς τὰς 203 ἑκατοντάδας τοῦ 20352 εἶναι δυνατόν νὰ περιέχωνται πλὴν τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ τινες ἑκατοντάδες προσερχόμεναι ἐκ τοῦ τριπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων, ἢ ἐκ τοῦ κύβου τῶν μονάδων, ἢ ἐκ τοῦ ὑπολοίπου τῆς πράξεως.

268. Ἵνα γνωρίσωμεν ἐὰν τὸ κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεωρημα εὐρισκόμενον ψηφίον εἴναι τὸ τῶν μονάδων τῆς κυβικῆς ρίζης, σχηματίζομεν τὸν κύβον τοῦ ἐκ τῶν δεκάδων τῆς ρίζης καὶ τοῦ δοκιμαστέου ψηφίου τῶν μονάδων αποτελουμένου ἀριθμοῦ· καὶ ἐὰν μὲν ὁ σχηματισθεὶς κύβος δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι τὸ ζητούμενον, εἰ δὲ μὴ ἐλαττωῖμεν κατὰ μονάδα τὸ ψηφίον τοῦτο, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρεθῇ ψηφίον

ἀποτελοῦν μετὰ τῶν δεκάδων τῆς ρίζης ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου ὁ κύβος δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι διὰ νὰ δοκιμάσωμεν ἔαν τὸ ψηφίον 7 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ 47352 ὑποῦμεν τὸν 37 εἰς τὸν κύβον καὶ εὐρίσκομεν 50653, δηλαδὴ ἀριθμὸν μεγαλείτερον τοῦ 47352· ἄρα αἱ μονάδες εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν 7. Δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον 6, καὶ ἐπειδὴ ὁ κύβος τοῦ 36 εἶναι 46656 ἥτοι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 47352, ἡ κυβικὴ τούτου ρίζα εἶναι 36, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως εἶναι 47352—46656, ἥτοι 696.

269. Πρὸς συμπλήρωσιν τῶν περὶ ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ρίζης τῶν ἀκεραίων κατὰ προσέγγισιν μονάδος θέλομεν δεῖξει πῶς γνωρίζοντες τὴν κυβικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ τινος, εὐρίσκομεν τὴν τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις προέρχεται διὰ τῆς προσγραφῆς τριῶν νέων ψηφίων πρὸς τὰ δεξιὰ ἐκείνου· πῶς παραδείγματος χάριν γνωρίζοντες τὴν κυβικὴν ρίζαν 36 τοῦ 47352, εὐρίσκομεν τὴν τοῦ 47352409.

Κατὰ τὸ θεώρημα Α'. ὁ ὀλικὸς ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ 47352409 εἶναι ἴσος τῇ κυβικῇ ρίζῃ τοῦ ὀλικοῦ ἀριθμοῦ τῶν χιλιάδων τούτου, ἥτοι τοῦ 47352· εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως γνωστὸς καὶ ἴσος τῷ 36. Ἐὰν ἔπειτα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 47352409 τὸν κύβον τῶν 36 δεκάδων, ὅστις εἶναι 46656 χιλιάδες, θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον 696409, ἥτοι ὁ ἀριθμὸς ὅστις ἀπατελεῖται ἐκ τοῦ ὑπολοίπου τῆς ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ 47352 ἀκολουθουμένου ὑπὸ τῶν τριῶν τελευταίων ψηφίων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Ἐὰν δὲ τοῦ ὑπολοίπου 696409 ὁ ὀλικὸς ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων 6964 διαιρεθῇ διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων 3×36^2 , ἥτοι τοῦ 3888, τὸ πηλίκον 1 τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶναι ἴσον ἢ μείζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ρίζης. Ὑποῦντες 361 εἰς τὸν κύβον εὐρίσκομεν 47045881, ὅστις ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 47352409 καὶ δίδει

ὑπόλοιπον 306528. Ὡστε ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 47352409 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 364, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως 306528.

270. Κατὰ τὰ προηγούμενα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ρίζαν παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ. Διότι ἐὰν χωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα τριψήφια ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, τοῦ πρώτου πρὸς ἀριστερὰν τμήματος, ὅπερ δύναται νὰ εἶναι τριψήφιον ἢ διψήφιον ἢ μονοψήφιον, τὴν κυβικὴν ρίζαν ἐξάγομεν διὰ τοῦ πίνακος τῶν κύβων τῶν 9 μονοψηφίων ἀριθμῶν. Γνωρίζοντες τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου τμήματος, εὐρίσκομεν τὴν τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύο πρώτων τμημάτων ἀριθμοῦ, ἔπειτα τὴν τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν τριῶν τμημάτων, καὶ οὕτω καθεξῆς.

271. Ἐκ πάντων τῶν προηγούμενων συναγομεν τὸν ἐξῆς κανόνα τῆς ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ρίζης.

Ἴνα ἐξαγάγωμεν τὴν κυβικὴν ρίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα τριψήφια, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν· μόνον δὲ τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήμα δύναται νὰ εἶναι καὶ διψήφιον ἢ καὶ μονοψήφιον.

Ἐξάγομεν ἔπειτα τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, καὶ αὕτη εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ρίζης.

Τὸν κύβον τοῦ ψηφίου τούτου ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ δευτέρου τμήματος, καὶ τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης.

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης, καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ὑψοῦμεν εἰς τὸν κύβον. Ἐὰν ὁ κύβος οὗτος δὲν ὑπερβαίῃ τὸν ἐκ τῶν δύο πρώτων τμημάτων ἀποτελούμενον ἀριθμὸν, τὸ εὐρεθὲν πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον

τῆς ρίζης· εἰ δὲ μὴ, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρι οὗ εὐρωμεν ἀριθμὸν μὴ ὑπερβαίνοντα τὸν ὑπὸ τῶν δύο πρώτων τμημάτων ἀποτελούμενον.

Τὸν κύβον τοῦ ὑπὸ τῶν δύο εὐρεθέντων ψηφίων τῆς ρίζης ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύο πρώτων τμημάτων, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τρίτου τμήματος, τὸν δὲ σχηματισθέντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο ψηφία τῆς ρίζης.

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν δύο εὐρεθέντων ψηφίων τῆς ρίζης, καὶ τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν ὑψοῦμεν εἰς τὸν κύβον. Ἐὰν ὁ κύβος οὗτος δὲν ὑπερβαίῃ τὸν ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων τμημάτων ἀποτελούμενον ἀριθμὸν, τὸ πηλίκον εἶναι τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ρίζης· εἰ δὲ μὴ, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρι οὗ εὐρεθῇ τὸ ἀληθές ψηφίον. Ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μέχρι οὗ καταβιβασθῇ καὶ τοῦ τελευταίου τμήματος τὸ πρῶτον ψηφίον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Δύναται νὰ συμβῇ ἓν τινι τῶν διαιρέσεων, δι' ὧν εὐρίσκομεν τὰ ψηφία τῆς ρίζης, ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς, τὸ πηλίκον νὰ εἶναι μείζον τοῦ 9. Τότε ἀρχόμεθα τῶν δοκιμασιῶν ἀπὸ τοῦ 9.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Δύναται ὡσαύτως ἓν τινι τῶν διαιρέσεων, τὸ πηλίκον νὰ εἶναι 0. Τότε τὸ ἀντιστοιχοῦν ψηφίον τῆς ρίζης εἶναι 0.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. Τὰ ψηφία τῆς κυβικῆς ρίζης εἶναι τόσα, ὅσα εἶναι τὰ τριψήφια τμήματα, εἰς 2 χωρίζεται ὁ ἀριθμός. Ἐπομένως εἰάν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ 3ν ἢ 3ν—1 ἢ 3ν—2 ψηφία, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ρίζα ἔχει ν ψηφία.

272. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἐξῆς·

4 7 3 5 2 4 0 9	361	
27	$3 \times 3^3 = 27$	$36^3 = 46656$
203	$3 \times 36^3 = 3888$	$361^3 = 47045881$
4 7 3 5 2		
4 6 6 5 6		
6 9 6 4		
4 7 3 5 2 4 0 9		
4 7 0 4 5 8 8 4		
3 0 6 5 2 8		

**Ἐξαγωγή τῆς κυβικῆς ρίζης κλασματικοῦ
κατὰ προσέγγισιν μονάδος.**

273. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος κυβικὴ ρίζα ἀριθμοῦ κλασματικοῦ εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ κυβικῇ ρίζῃ τοῦ ἀκεραίου αὐτοῦ μέρους.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης ὡς ὅλως ὁμοία τῇ τῆς προτάσεως τοῦ ἐδαφίου 249 παραλείπεται.

Ἐξαγωγή τῆς κυβικῆς ρίζης κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{v}$

274. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν ἀμφοτέρω ὁῖ κλάσματός τινος εἶναι τέλειοι κύβοι, εὐρίσκομεν ἀκριβῶς τὴν κυβικὴν αὐτοῦ ρίζαν, ἐξάγοντες τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ. Παραδείγματος χάριν ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ $\frac{\mu^3}{v^3}$ εἶναι $\frac{\mu}{v}$.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι μᾶς ἐδόθη κλάσμα, τοῦ ὁποίου μόνος ὁ παρονομαστής εἶναι τέλειος κύβος, τὸ $\frac{a}{v^3}$. Ἐὰν ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμητοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ρ , τὸ κλάσμα $\frac{a}{v^3}$ θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ $\frac{\rho^3}{v^3}$ καὶ $\frac{(\rho+1)^3}{v^3}$, ἐπομένως $\frac{\rho}{v}$ θὰ εἶναι ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ρίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{v}$.

Ἐς λάβωμεν τώρα ἀριθμὸν τινα A , ἀκέραιον ἢ κλασμα-
κόν. Ἐπειδὴ ὁ A εἶναι ἴσος τῷ $\frac{A \times v^3}{v^3}$, ἐὰν v εἶναι ἡ κυβικὴ
ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ $A \times v^3$, κατὰ τὰ ἀνωτέρω
 $\frac{p}{v}$ θὰ εἶναι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ $\frac{A \times v^3}{v^3}$, ἥτοι τοῦ A , κατὰ
προσέγγισιν $\frac{1}{v}$. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἐξῆς κανόνα.

Ἐξαγάγωμεν τὴν κυβικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{v}$
τοῦ ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ A , ἐξάγομεν τὴν κυ-
βικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ γινόμενου
 $A \times v^3$, καὶ ταύτην διαιροῦμεν διὰ v .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α'. Ζητεῖται ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 49 κατὰ
προσέγγισιν $\frac{1}{7}$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα σχηματίζομεν τὸ
γινόμενον 49×7^3 καὶ εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 6517. Τούτου
ἡ κυβικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 18· ταύτην
διαироῦμεν δ' 7 καὶ εὐρίσκομεν $\frac{1}{7}$. Ἄρα ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ
49 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$ εἶναι $\frac{1}{7}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β'. Ζητεῖται ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ $\frac{73}{5}$ κατὰ
προσέγγισιν $\frac{1}{5}$. Κατὰ τὸν κανόνα πολλαπλασιάζομεν $\frac{73}{5}$
ἐπὶ τὸν κύβον τοῦ 5, ἥτοι ἐπὶ 343. Τὸ γινόμενον εἶναι
 $\frac{73 \times 343}{5} = \frac{25039}{5} = 5007 + \frac{4}{5}$. Ἡ κυβικὴ ρίζα τούτου
κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ τοῦ 5007, εἶναι
17. Ἄρα ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ $\frac{73}{5}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{5}$ εἶναι $\frac{1}{5}$.

Ἐξαγωγή τῆς κυβικῆς ρίζης κατὰ

προσέγγισιν $\frac{1}{10}$.

275. Ἐς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ζητεῖται νὰ ἐξα-
χθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ ἀριθμοῦ ἀκε-
ραίου, τοῦ A . Πρὸς τοῦτο πρέπει κατὰ τὸν κανόνα τοῦ προ-

ηγουμένου εδαφίου α.) νά πολλαπλασιάσωμεν τὸν Α ἐπὶ τὸν κύβον τοῦ 10^v , ὅστις εἶναι 10^{3v} . β.) νά ἐξαγάγωμεν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ γινομένου $A \times 10^{3v}$ καὶ γ.) νά διαιρέσωμεν ταύτην διὰ 10^v .

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ 10^{3v} ἀρκεῖ νά γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ 3ν μηδενικά, καὶ ὅτι ἵνα διαιρέσωμεν ἀκέραιον διὰ 10^v , ἀρκεῖ νά χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ν δεκαδικὰ ψηφία, λαμβάνομεν τὸν ἐξῆς κανόνα.

Ἴνα ἐξαγάγωμεν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^v}$ τὴν κυβικὴν ρίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ, γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ 3ν μηδενικά, τοῦ προκείμενου ἀριθμοῦ ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ χωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ρίζης ταύτης ν δεκαδικὰ ψηφία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ζητεῖται ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^2}$, ἔστω 0,01.

Γράφομεν ἐξ μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 2, τοῦ προκείμενου ἀριθμοῦ 2000000 ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 125· ἐν τούτῳ χωρίζομεν 2 δεκαδικὰ ψηφία, καὶ οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν 0,01 εἶναι 1,25.

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ὁ ἀριθμὸς Α, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ κυβικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^v}$, εἶναι κλασμα-

τικός· πρέπει (273 καὶ 274 α.) νά πολλαπλασιάσωμεν τὸν Α ἐπὶ 10^{3v} . β.) νά ἐξαγάγωμεν τὸν ἐν τῷ γινομένῳ περιεχόμενον ἀκέραιον· γ.) νά εὐρώμεν τοῦ ἀκεραίου τούτου τὴν κυβικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος· καὶ δ.) νά διαιρέσωμεν ταύτην διὰ 10^v . Παρατηροῦντες δὲ ὅτι τὸ νά πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ 10^{3v} , καὶ νά ἐξαγάγωμεν τὸν ἐν τῷ γινομένῳ ἀκέραιον εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς νά τρέψωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν λαμβάνοντες 3ν δεκαδικὰ ψηφία,

καὶ νὰ παραλείψωμεν ἔπειτα τὴν ὑποδιαστολὴν, συνάγομεν τὸν ἐξῆς κανόνα.

Ἴνα ἐξαγάγωμεν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^3}$ τὴν κυβικὴν ρίζαν

ἂν ἀριθμοῦ κλασματικοῦ, τρέπομεν αὐτὸν εἰς δεκαδικὸν, λαμβάνοντες 3ν δεκαδικὰ ψηφία, ἐξαλείφοντες τὴν ὑποδιαστολὴν, τοῦ προκύπτοντος ἀκεραίου ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ ἐν ταύτῃ χωρίζομεν τὴν δεκαδικὰ ψηφία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α'. Ζητεῖται ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ $\frac{4}{10^3}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^3}$, ἥτοι 0,001.

Τρέποντες τὸν $\frac{4}{10^3}$ εἰς δεκαδικὸν καὶ λαμβάνοντες 9 δεκαδικὰ ψηφία, εὐρίσκομεν 0,714285714. Ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 714285714 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 893. Ἐπομένως ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ $\frac{4}{10^3}$ κατὰ προσέγγισιν 0,001 εἶναι 0,893.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β'. Ζητεῖται ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 3,14 κατὰ προσέγγισιν 0,01.

Πρέπει κατὰ τὸν κανόνα νὰ ἐκφρασθῇ ὁ 3,14 μὲ ἐξ δεκαδικὰ ψηφία, ὅπερ γίνεταί γραφομένων τεσσάρων μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ. Ἐξαλείφοντες ἔπειτα τὴν ὑποδιαστολὴν, εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 3140000. Τούτου ἡ κυβικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 145. Ἐπομένως ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 3,14 κατὰ προσέγγισιν 0,01 εἶναι 1,45.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

α.) Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν δύναται νὰ εἶναι τέλειος κύβος, ἐὰν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὂντος 2 ἢ 6, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι ἄρτιον.

β.) Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν δύναται νὰ εἶναι τέλειος κύβος, ἐὰν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὂντος 4 ἢ 8, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι περιττόν.

γ.) Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν δύναται νὰ εἶναι τέλειος κύβος, ἐὰν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὂντος 5, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων δὲν εἶναι μήτε 2 μήτε 7.

δ.) Πῶς δυνάμεθα νὰ γνωρίσωμεν ἐὰν δοθεῖς τις ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κύβων δύο ἐφεξῆς ἀκεραίων ἀριθμῶν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ΄.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ ΚΑΙ ΠΟΣΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ.

Λόγος δύο ποσών.

276. Λόγος ποσοῦ πρὸς ἕτερον ποσὸν ὁμοειδὲς καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὃ ἐκφράζων τὸ πρῶτον, ὅταν τὸ δεύτερον ληφθῇ ὡς μονάς. Ὁ λόγος εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, ὅταν τὸ πρῶτον ποσὸν εἴναι πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου, κλασματικὸς δὲ, ὅταν τὸ πρῶτον εἴναι πολλαπλάσιον πολλοστοῦ τινος τοῦ δευτέρου. Ἐὰν παραδείγματος χάριν τὸ πρῶτον ποσὸν εἴναι πενταπλάσιον τοῦ δευτέρου, ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον εἶναι ὁ ἀριθμὸς 5. Ἐὰν δὲ τὸ πρῶτον ποσὸν εἴναι πενταπλάσιον τοῦ ἐξῆδόμου τοῦ δευτέρου, ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$ (α).

277. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ὁ λόγος δύο ποσῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἐκφράζουσι τὰ ποσὰ ταῦτα μετρηθέντα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Ἐστώσαν Α καὶ Β δύο ποσὰ ὁμοειδῆ, τὰ ὅποια μετρηθέντα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα Μ ἔδωκαν τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{2}{4}$. Λέγω ὅτι ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β θὰ εἴναι ἴσος μὲ τὸ πηλίκον $\frac{5}{7} : \frac{2}{4}$, ἥτοι $\frac{20}{63}$:

$$\text{Διότι ἔχομεν} \quad \frac{5}{7} = \frac{9}{4} \times \frac{20}{63}.$$

(α) Εἶναι δυνατόν νὰ συμβῇ τὸ ἕτερον τῶν ποσῶν νὰ μὴ εἶναι πολλαπλάσιον οὔτε ὀλοκλήρου τοῦ δευτέρου οὔτε οὐδενὸς πολλοστοῦ τοῦ αὐτοῦ. Τῶν ποιούτων ποσῶν τὸν λόγον θέλομεν ἐξατάσει ἀλλαχοῦ (ἴδε Γεωμετρίαν μου, ἔκδοσιν δευτέραν, σελίδ. 428).

Ἡ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει ὅτι τὰ εἴκοσι ἐξηκοστὰ τρίτα τῶν $\frac{2}{3}$ μονάδος οἷας δὴ ποτε εἶναι ἴσα μὲ τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς αὐτῆς μονάδος. Ἀλλ' ὅταν μονὰς ληφθῇ ἡ M, τὰ $\frac{9}{4}$ καὶ τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς μονάδος ταύτης εἶναι ἐξ ὑποθέσεως τὰ ποσὰ A καὶ B. Ἀρα τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ B εἶναι ἴσα τῷ A. Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ τὸ B ὡς μονὰς, τὸ A θὰ ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{2}{3}$, ἥτοι ὁ λόγος τοῦ A πρὸς τὸ B ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{2}{3}$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λόγος δύο ἀριθμῶν.

278. Λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἕτερον ἀριθμὸν καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου· οἷον ὁ λόγος τοῦ 5 πρὸς τὸν 7 εἶναι $\frac{5}{7}$, ὁ τοῦ $\frac{3}{4}$ πρὸς τὸν $\frac{1}{2}$ εἶναι $\frac{3}{2}$. Ἐκλήθη δὲ λόγος τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν, διότι τὸ πηλίκον τοῦτο εἶναι κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ποσῶν, αἱ παριστῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ἀναφερόμενοι εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα.

Σημειοῦται δὲ ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, δι' οὗ καὶ τὸ πηλίκον αὐτῶν. Οἷον ὁ λόγος τοῦ $\frac{5}{7}$ πρὸς τὸν $\frac{3}{4}$ σημειοῦται $\frac{5}{7} : \frac{3}{4}$. Καὶ ὁ λόγος δὲ δύο μεγεθῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου σημειοῦται.

Λόγοι ἀντίστροφοι.

279. Ἐχοντες δύο ποσὰ ὁμοειδῆ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸν λόγον τοῦ A πρὸς τὸ B, καὶ τὸν λόγον τοῦ B πρὸς τὸ A· οἱ δύο οὗτοι λόγοι λέγονται ἀντίστροφοι ἀλλήλων. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ περὶ τοῦ λόγου δύο ἀριθμῶν· οἷον ὁ λόγος $\frac{5}{7} : \frac{3}{4}$ εἶναι ἀντίστροφος τοῦ λόγου $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$. Ἐκφράζονται δὲ οἱ ἀντίστροφοι λόγοι ὑπὸ δύο κλασμάτων, ὧν τὸ ἕτερον προέρχεται ἐκ τοῦ ἑτέρου διὰ τῆς ἀναστροφῆς τῶν ὅρων· οἷον οἱ ἀντίστροφοι λόγοι $\frac{5}{7} : \frac{3}{4}$ καὶ $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$ εἶναι ἴσοι ὁ μὲν μὲ τὸ κλάσμα $\frac{20}{21}$, ὁ δὲ μὲ τὸ κλάσμα $\frac{21}{20}$.

Τὸ αὐτὸ ἀληθεύει καὶ ἐπὶ τῶν ἀντιστρόφων λόγων A : B καὶ B : A τῶν ποσῶν A καὶ B· καθ' ὅτι ὁ λόγος δύο ποσῶν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ λόγου δύο ἀριθμῶν.

Περὶ ποσῶν ἀναλόγων.

280. Ὑπάρχουσι ποσὰ ἐξαρτώμενα ἀπ' ἀλλήλων οὕτως, ὥστε εἰς ἐκάστην τιμὴν τοῦ ἑτέρου αὐτῶν νὰ ἀντιστοιχῇ μία καὶ ὠρισμένη τιμὴ τοῦ ἑτέρου. Οἷον ὁ μισθὸς ἐργάτου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρόνου, ἐφ' ὃν εἰργάσθῃ. Ὁμοίως ἡ τιμὴ τεμαχίου ὑφάσματος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὥρων, αἵτινες χρειάζονται διὰ νὰ ἐκτελεσθῇ ἔργον τι, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εἰς τοῦτο ἐργαζομένων ἐργατῶν.

Δύο ποσὰ λέγονται ἀνάλογα, ὅταν πολλαπλασιαζομένης ἢ διαιρουμένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑτέρου αὐτῶν δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ οἷονδὴποτε, πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρῇται καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ ἑτέρου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

Ἀντιστρόφως δὲ ἀνάλογα λέγονται δύο ποσὰ, ὅταν πολλαπλασιαζομένης ἢ διαιρουμένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑτέρου αὐτῶν δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ οἷονδὴποτε, ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ ἑτέρου διαιρῇται ἢ πολλαπλασιάζεται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἀναλόγων ποσῶν ἔπεται ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλασματικὸν ἀριθμὸν οἷονδὴποτε, οἷον ἐπὶ $\frac{5}{7}$, καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ ἑτέρου πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν κλασματικὸν ἀριθμόν. Διότι ἐάν ὁ ἀριθμὸς α ἐκφράζῃ τὴν τιμὴν τοῦ ἑτέρου τῶν ποσῶν ὁ δὲ β τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ ἑτέρου, εἰς τὴν τιμὴν $\alpha \times \frac{5}{7}$ τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ $\beta \times \frac{5}{7}$ τοῦ δευτέρου. Διαιρουμένως δὲ τῆς τιμῆς $\alpha \times \frac{5}{7}$ δι' $\frac{5}{7}$, θὰ διαيرهθῇ καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ $\beta \times \frac{5}{7}$ τοῦ δευτέρου δι' $\frac{5}{7}$ ὥστε εἰς τὴν τιμὴν $\frac{\alpha \times \frac{5}{7}}{\frac{5}{7}}$ ἦτοι $\alpha \times \frac{\frac{5}{7}}{\frac{5}{7}}$ θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ $\frac{\beta \times \frac{5}{7}}{\frac{5}{7}}$ ἦτοι $\beta \times \frac{\frac{5}{7}}{\frac{5}{7}}$. Ἐκ δὲ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων

ποσῶν ἔπεται ὅτι ὅταν ἡ τιμὴ α τοῦ ἑτέρου αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλασματικὸν ἀριθμὸν οἷονδὴποτε, οἷον ἐπὶ $\frac{5}{7}$, ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ β τοῦ δευτέρου θὰ πολλαπλασια-

σθῇ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦτο ἀνεστραμμένοι, ἤτοι ἐπὶ $\frac{2}{5}$. Διότι εἰς τὴν τιμὴν $\alpha \times 5$ τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ $\frac{6}{5}$ τοῦ δευτέρου. Διαιρουμένης δὲ τῆς τιμῆς $\alpha \times 5$ δι' 7, ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ $\frac{6}{5}$ θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 7, ὥστε εἰς τὴν τιμὴν $\frac{\alpha \times 5}{7}$, ἤτοι $\alpha \times \frac{5}{7}$, τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ $\frac{\alpha}{5} \times 7$, ἤτοι $\alpha \times \frac{7}{5}$, τοῦ δευτέρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

284. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ α ποσοῦ τινος καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ β δευτέρου ποσοῦ ἀναλόγου πρὸς τὸ πρῶτον· ζητεῖται εἰς νέαν τιμὴν α_1 τοῦ πρώτου ποσοῦ ποία τιμὴ τοῦ δευτέρου ἀντιστοιχεῖ.

Ἄς παραστήσωμεν διὰ χ τὴν ἄγνωστον τιμὴν.

Εἰς τὴν τιμὴν α ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ β

Εἰς τὴν τιμὴν α_1 ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ χ .

Ὁ λόγος τῆς τιμῆς α_1 πρὸς τὴν τιμὴν α τοῦ πρώτου ποσοῦ εἶναι τὸ πηλίκον $\alpha_1 : \alpha$ ἢ $\frac{\alpha_1}{\alpha}$, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α_1 καὶ α ἀναφέρονται εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα.

Ἐὰν ἡ τιμὴ α τοῦ πρώτου ποσοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\frac{\alpha_1}{\alpha}$, καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ β τοῦ δευτέρου θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν· ὥστε εἰς τὴν τιμὴν $\alpha \times \frac{\alpha_1}{\alpha}$ ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\beta \times \frac{\alpha_1}{\alpha}$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha \times \frac{\alpha_1}{\alpha}$ εἶναι ἴσον μὲ α_1 , βλέπομεν ὅτι εἰς τὴν τιμὴν α_1 ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\beta \times \frac{\alpha_1}{\alpha}$. ἄρα ἔχομεν $\chi = \beta \times \frac{\alpha_1}{\alpha}$.

Δηλαδή ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἡ ἄγνωστος τιμὴ τοῦ ἐτέρου τῶν ποσῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς δεδομένης τιμῆς τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέ-

σεως τῆς εἰς τὸν ἄγνωστον ἀντιστοιχοῦσης τιμῆς τοῦ πρώτου ποσοῦ διὰ τῆς ἐτέρας τιμῆς τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ.

282. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Ὁ λόγος τοῦ $\beta \times \frac{\alpha_1}{\alpha}$ πρὸς τὸ β εἶναι $\frac{\alpha_1}{\alpha}$. Ἄρα ὅταν δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, δύο οἰαιδήποτε τιμαὶ τοῦ πρώτου ποσοῦ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὅν καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ δευτέρου.

Ἡ ιδιότης αὕτη τῶν ἀναλόγων ποσῶν λαμβάνεται καὶ ὡς ὁρισμὸς αὐτῶν.

283. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ α ποσοῦ τινος καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ β δευτέρου ποσοῦ, τὸ ὅποῖον εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὸ πρῶτον· ζητεῖται εἰς ῥέαν τιμὴν α_1 τοῦ πρώτου ποσοῦ, ποία τιμὴ τοῦ δευτέρου ἀντιστοιχεῖ.

Εἰς τὴν τιμὴν α ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ β

Εἰς τὴν τιμὴν α_1 ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ χ .

Ὁ λόγος τῆς τιμῆς α_1 πρὸς τὴν α τοῦ πρώτου ποσοῦ εἶναι τὸ πηλίκον $\alpha_1 : \alpha$, ἢ $\frac{\alpha_1}{\alpha}$, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α_1 καὶ α ἀναφέρονται εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα.

Ἐὰν ἡ τιμὴ α τοῦ πρώτου ποσοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\frac{\alpha_1}{\alpha}$, ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ β τοῦ δευτέρου θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{\alpha}{\alpha_1}$, διότι ἐὰν τὸ πηλίκον $\frac{\alpha_1}{\alpha}$ ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ ἀκεραίου ὅρου ἔχοντος κλάσματος $\frac{\pi}{\alpha}$, τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\alpha_1}$ θὰ ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{\rho}{\alpha_1}$ · ὥστε εἰς τὴν τιμὴν $\alpha \times \frac{\alpha_1}{\alpha}$ ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\beta \times \frac{\alpha}{\alpha_1}$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha \times \frac{\alpha_1}{\alpha}$ εἶναι ἴσον μὲ α_1 , βλέπομεν ὅτι εἰς τὴν τιμὴν α_1 ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\beta \times \frac{\alpha}{\alpha_1}$.

Ἄρα ἔχομεν $\chi = \beta \times \frac{\alpha}{\alpha_1}$.

Δηλαδή ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἡ ἄγνωστος τιμὴ τοῦ ἐτέρου τῶν ποσῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς δεδομένης τιμῆς τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως διὰ τῆς εἰς τὸν ἄγνωστον ἀντιστοιχοῦσης τιμῆς τοῦ ἐτέρου ποσοῦ τῆς ἐτέρας τιμῆς τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ.

284. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ λόγος τοῦ $\beta \times \frac{\alpha}{\alpha_1}$ πρὸς τὸ β εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha_1}$, δηλαδή ἀντίστροφος τοῦ λόγου $\frac{\alpha_1}{\alpha}$.

Ἄρα ὅταν δύο ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, δύο οἰαυδήποτε τιμαὶ τοῦ πρώτου ποσοῦ ἔχουσι λόγον ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοιχοῦσων τιμῶν τοῦ δευτέρου.

Ἡ ἰδιότης αὕτη τῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων ποσῶν λαμβάνεται καὶ ὡς ὁρισμὸς αὐτῶν.

285. Εἶναι δυνατόν ποσόν τι νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ πολλῶν ἄλλων. Τότε δὲ λέγεται ἀνάλογον ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τινὸς ἐξ αὐτῶν, ὅταν τούτου μόνου μεταβαλλομένου, τῶν δὲ λοιπῶν μενόντων ἀμεταβλήτων, τὸ ποσὸν εἶναι ἀνάλογον ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ μεταβληθέντος.

Παραδείγματος χάριν ἡ τιμὴ τεμαχίου ὑφάσματος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ πλάτους καὶ τῆς τιμῆς τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως. Εἶναι δὲ ἡ τιμὴ ἀνάλογος τοῦ μήκους. Διότι τῶν ἄλλων μενόντων ἀμεταβλήτων τεμάχιον διπλασίου μήκους ἔχει διπλασίαν τιμὴν, τριπλασίου τριπλασίαν κτλ.

Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι δύναται τὸ ποσὸν νὰ εἶναι ἀνάλογον πάντων τῶν ποσῶν, ἐξ ὧν ἐξαρτᾶται, ἢ τινῶν μὲν ἀνάλογον, ἄλλων δὲ ἀντιστρόφως ἀνάλογον. Ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι ἡ τιμὴ τοῦ ὑφάσματος εἶναι ἀνάλογος καὶ τοῦ μήκους καὶ τοῦ πλάτους καὶ τῆς τιμῆς τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως. Ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν, οἵτινες χρειά-

ζονται ἵνα σκάψωσι τάφρον, εἶναι πρὸς μὲν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν ὥρων τῆς ἡμερησίας ἐργασίας ἀντιστρόφως ἀνάλογος, πρὸς δὲ τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος καὶ τὸ βάθος τῆς τάφρου ἀνάλογος.

Μέθοδος τῶν τριῶν.

286. Εἶδομεν ἀνωτέρω (281 καὶ 283) πῶς ὅταν δοθῶσι δύο ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφως ἀναλόγων, εὐρίσκομεν τὴν εἰς νέαν τιμὴν τοῦ ἐτέρου αὐτῶν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ ἐτέρου. Ὁ τρόπος καθ' ὃν τὰ τοιούτου εἶδους προβλήματα λύονται λέγεται μέθοδος τῶν τριῶν. Συνίσταται δὲ αὕτη εἰς τὸν ἐξῆς εὐμνημόνευτον κανόνα.

Γράφομεν εἰς τὸν αὐτὸν στίχον τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τῶν δύο ποσῶν, ἔπειτα εἰς δεύτερον στίχον τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ἐνὸς ποσοῦ καὶ τὸ γράμμα χ παριστῶν τὴν εἰς ταύτην ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ δευτέρου ποσοῦ, ἑκατέρωθεν ὑπὸ τὴν ὁμοειδή της. Τούτου γενομένου διὰ τὰ εὐρωμεν τὸν ἄγνωστον χ πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐὰν αἱ τιμαὶ τοῦ πρώτου ποσοῦ χωρισθῶσι διὰ γραμμῆς, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἢ ἐπὶ τὸ ῥηθὲρ κλάσμα ἀνεστραμμένον, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

Παραδείγματος χάριν διὰ νὰ λύσωμεν τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Πέντε πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται δραχμὰς 24, πόσον τιμῶνται 7 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

$$\begin{array}{rcc} \text{Γράφομεν} & 5\text{π}^{\chi} & 24^{\text{δρ}} \\ & 7 & \chi \\ & \chi = 24 \times \frac{7}{5} = 33^{\text{δρ}}, 60. \end{array}$$

Ὅμοίως διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα·

Εἰς $5\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας διέτρεξέ τις 20 στάδια· πόσα θὰ διατρέξῃ εἰς 8 ὥρας καὶ $\frac{1}{4}$;

Γράφομεν $5\frac{3}{4}$ ὥρ. 20 ατ.

$$\chi = 20 \times \frac{8\frac{1}{4}}{5\frac{3}{4}} = 20 \times \frac{\frac{33}{4}}{\frac{23}{4}} = \frac{20 \times 33}{23}$$

Καὶ ἐκτελουμένων τῶν πράξεων $\chi = 28 + \frac{16}{23}$.

Ὅμοίως διὰ νὰ λύσωμεν τὸ ἐξῆς προβλῆμα.

Ἐργαζόμενος τις καθ' ἑκάστην $5\frac{3}{4}$ ὥρας ἐχρειάσθη δι' ἐργασίαν τιὰ 12 ἡμέρας· ἐὰν εἰργάζετο $6\frac{1}{4}$ καθ' ἑκάστην, πόσας ἡμέρας ἤθελε χρειασθῇ;

$5\frac{3}{4}$ ὥρ. 12 ἡμ.

$$\chi = 12 \times \frac{5\frac{3}{4}}{6\frac{1}{4}} = 12 \times \frac{23}{4} : \frac{25}{4} =$$

$$12 \times \frac{23}{4} \times \frac{4}{25} = \frac{12 \times 23}{25} = 11\frac{1}{25} \text{ ἡμέρας.}$$

287. Πρὸς ἄσκησιν περὶ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἐξῆς προβλήματα.

α.) Βιβλίον σύγκειται ἐκ 16 τυπογραφικῶν φύλλων, ἐκάστη δὲ σελὶς περιέχει 40 στίχους. Ἐκ πόσων φύλλων θὰ σύγκειται νέα αὐτοῦ ἔκδοσις, ἐν ᾗ ἐκάστη σελὶς θὰ περιέχῃ 32 στίχους;

(20).

β.) Ὁρολόγιον ὑστεροῦν 8 λεπτὰ εἰς 24 ὥρας τίθεται ἐν συμφωνίᾳ μὲ ἀκριβὲς ὥρολόγιον, ὅταν τοῦτο δεικνύῃ μεσημβρίαν. Ὅταν τὸ πρῶτον ὥρολόγιον θὰ δεικνύῃ 3 ὥρας καὶ λεπτὰ 40 μετὰ τὸ μεσονύκτιον τοῦ τρίτου νυχθημέρου, λογιζομένου ἀπὸ τῆς μεσημβρίας, καθ' ἣν ἐτέθησαν ἐν συμφωνίᾳ τὰ δύο ὥρολόγια, τίς θὰ εἶναι ἡ ἀληθὴς ὥρα;

(4 ὥρ. $1'$ $20'' + \frac{80}{175}$ μετὰ τὸ μεσονύκτιον).

γ.) Φρουρὰ 600 ἀνδρῶν ἔχουσα τροφάς διὰ 36 ἡμέρας λαμβάνει ἐπικουρίαν 200 ἀνδρῶν μὴ φερόντων τροφάς. Πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκα-

στος στρατιώτης, ἵνα αἱ τροφαὶ ἐπαρκέσωσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἡμερῶν ; $(\frac{3}{4})$.

δ'.) Δύο ὥρολόγια, ὧν τὸ μὲν ὕστερεῖ 5 λεπτὰ τὸ δὲ προτερεῖ 7 λεπτὰ εἰς 24 ὥρας, τίθενται νὰ δεικνύωσιν ἀκριβῶς τὴν μεσημβρίαν· τίς εἶναι ἡ ἀληθὴς ὥρα, ὅταν ἡ διαφορὰ τῶν ὥρῶν, ἀς δεικνύουσι τὰ δύο ταῦτα ὥρολόγια, εἶναι 5' 20'' ; $(10^{\text{ῳ}} \cdot 40' \text{ μετὰ μεσημβρίαν})$.

ε'.) Δι' ἐνδυμὰ τι ἐχρειάσθησαν 4 πήχεις ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος $1 + \frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως ; Πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὸ αὐτὸ ἐνδυμα ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος $1 + \frac{4}{8}$ τοῦ πήχεως ; (3 πήχεις) .

ς'.) Βιβλιοπώλης ἠγόρασε παρ' ἐκδότου ἀντίτυπα βιβλίου τινὸς λαμβάνων εἰς 12 ἀντίτυπα τὸ δέκατον τρίτον δωρεάν· πόση ἐκπτώσις ἐγένετο ; $(60 \text{ λεπτὰ δι' ἕκαστον ἀντίτυπον})$.

ζ'.) Ἔργον πρέπει νὰ περατωθῇ ἐντὸς 24 ἡμερῶν. Ἐμίσθωσαν δὲ πρὸς τοῦτο 10 ἐργάται, οἵτινες ἐξετέλεσαν τὸ τρίτον τοῦ ἔργου εἰς 9 ἡμέρας. Δύνανται οὗτοι μόνοι νὰ περατώσωσι τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς τεταγμένης προθεσμίας ; καὶ ἐὰν δὲν δύνανται, πόσοι ἐργάται πρέπει νὰ προστεθῶσιν, ὅπως γείνη τοῦτο ; (5) .

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

288. Ὅταν μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ ποσοῦ καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ ἄλλων ποσῶν, πρὸς τὰ ὅποια ἐκεῖνο εἶναι ἀνάλογον ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογον, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ποσοῦ ἐκείνου τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς ἄλλας τιμὰς τῶν ποσῶν ἐξ ὧν ἐξαρτᾶται, ἐφαρμόζοντες κατ' ἐπανάληψιν τὴν μέθοδον τῶν τριῶν.

ᾧ παράδειγμα ἔστω τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

25 ἐργάται ἐργαζόμενοι 12 ὥρας καθ' ἐκάστην ἔσκαψαν εἰς 18 ἡμέρας τάφρον 120 πήχεων μήκους, 6 πλάτους καὶ 3 βάθους. Ἐν πόσαις ἡμέραις 32 ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρας καθ' ἐκάστην θέλουσιν σκάψαι τάφρον 150 πήχεων μήκους, 4 πλάτους, καὶ 5 βάθους ;

Κατατάσσομεν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἰς δύο ὀριζοντίους στίχους οὕτως, ὥστε αἱ δύο τιμαὶ ἐκάστου ἑξήδους ποσοῦ νὰ εὐρίσκηται ἡ μία ὑπὸ τὴν ἑτέραν, παριστῶντες τὴν ἄγνωστον διὰ χ , ὡς ἑξῆς:

25 ἔργ. 12 ὥρ. 18 ἡμ. 120 μῆκ. 6 πλάτ. 3 βάθ.

32 40 χ 150 4 5

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἡμέραι εἶναι πρὸς μὲν τοὺς ἐργάτας καὶ τὰς ὥρας ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, πρὸς δὲ τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος τῆς τάφρου ἀνάλογοι.

ὑποθέτομεν κατὰ πρῶτον ὅτι οἱ ἐργάται ἀπὸ 25 γίνονται 32, πάντα δὲ τὰ ἄλλα μένουσι τὰ αὐτά· τότε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν

ἀπὸ 18 θὰ γείνη $18 \times \frac{25}{32}$. Ἐὰν ἔπειτα ὁ ἀριθμὸς τῶν

ὥρῶν ἀπὸ 12 γείνη 40, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλα-

πλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{12}{40}$ καὶ θὰ γείνη $18 \times \frac{25}{32} \times \frac{12}{40}$. Ἐὰν ἔ-

πειτα τὸ μῆκος ἀπὸ 120 γείνη 150, καὶ ἔπειτα τὸ πλάτος ἀπὸ 6 γείνη 4, καὶ τὸ βάθος ἀπὸ 3 γείνη 5, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ πρῶτον ἐπὶ $\frac{150}{120}$, ἔπειτα ἐπὶ $\frac{4}{6}$ καὶ τέλος ἐπὶ $\frac{5}{3}$ · ὥστε θὰ ἔχωμεν

$$\chi = 18 \times \frac{25}{32} \times \frac{12}{40} \times \frac{150}{120} \times \frac{4}{6} \times \frac{5}{3}.$$

Παραβάλλοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ πρὸς τὰ ὡς ἀνωτέρω κατατεταγμένα δεδομένα τοῦ προβλήματος συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Ἴνα εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν ἐπὶ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ἐὰν δι' ὀριζοντίου γραμμῆς χωρισθῶσιν αἱ δύο τιμαὶ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ, διὰ τὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὸ ζητούμενον ποσοῦ, καὶ ἐπὶ τὰ κλάσματα ἀνέστραμμένα διὰ τὰ ἀνάλογα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ εἰς τὸν ἀνωτέρω κανόνα συνισταμένη μέθοδος λέγεται σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν· διότι εἰς τὸν κανόνα ἐκείνον φθάνομεν ἐφαρμόζοντες κατ' ἐπανάληψιν τὴν μέθοδον τῶν τριῶν. Αὕτη δὲ κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τὴν σύνθετον καλεῖται ἀπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν.

289. Πρὸς ἀσκήσιν περὶ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν προτείνομεν εἰς λύσιν τὰ ἑξῆς προβλήματα.

α.) Ταχυδρόμος βαδίζων 12 ὥρας τὴν ἡμέραν διανύει ἐν 9 ἡμέραις 648 στάδια· ἵνα διανύσῃ 750 στάδια ἐν 11 ἡμέραις, πόσας ὥρας τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ βαδίζῃ;

$$(11^{\text{ῳ}} \cdot 21' \cdot 49'' + \frac{1}{11}).$$

β.) 12 ἵπποι τρώγουσι 350 ὀκάδας κριθῆς ἐν 7 ἡμέραις· ἐπὶ πόσας ἡμέρας θέλουσιν ἐξαρκέσει 1000 ὀκάδες κριθῆς εἰς 15 ἵππους; (16 ἡμ.).

γ.) Ἐκ δύο ταπήτων τὰς αὐτῆς ποιότητος, ὧν ὁ μὲν ἔχων 7 πήχεων μῆκος καὶ 5 πλάτος τιμᾶται 420 δραχμᾶς, ὁ δὲ ἔχων μῆκος $6\frac{3}{4}$ καὶ πλάτος $5\frac{1}{2}$ τιμᾶται 360 δραχμᾶς, τίς εἶναι ὁ εὐθηνότερος, καὶ κατὰ πόσον; (Τοῦ δευτέρου ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς εἶναι κατὰ 2 δραχ. εὐθηνότερος ἢ ὁ τοῦ πρώτου).

δ.) Φρουρά 400 στρατιωτῶν πολιορκουμένη εἶχε τὴν 2 Ἀπριλίου τροφὰς δι' ὅλον τὸν μῆνα τοῦτον. Τὴν νύκτα τῆς 9ης Ἀπριλίου ἔφθασεν εἰς αὐτὴν ἐπικουρία 120 στρατιωτῶν ἐχόντων τροφὰς 5 ἡμερῶν δι' ἑαυτούς. Ἐὰν ἐνώσωσι οὗτοι τὰς τροφὰς αὐτῶν μετὰ τῶν τροφῶν τῶν πρώτων στρατιωτῶν, πόσον μέρος τοῦ ὀρισμένου σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος στρατιώτης ὥπως ἐπαρκέσωσιν εἰς αὐτοὺς αἱ τροφαὶ μέχρι τέλους τοῦ μηνός; (τὰ $\frac{7}{9}\frac{5}{11}$).

ε.) Ταχυδρόμος τις διατρέχων 42 στάδια ἐν 5 ὥραις ἀναχωρεῖ εἰς πόλιν ἀπέχουσαν 280 στάδια· μετὰ $9^{\text{ῳ}} \cdot 40'$ ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου διευθυνόμενος πρὸς τὴν αὐτὴν πόλιν ἕτερος ταχυδρόμος, διατρέχων 40 στάδια ἐν $3^{\text{ῳ}} \cdot 5'$ · τίς θέλει φθάσει πρῶτος εἰς τὴν πόλιν ταύτην, καὶ πόσας ὥρας πρὸ τοῦ ἑτέρου; (Ὁ δεύτερος θέλει φθάσει $2^{\text{ῳ}} \cdot 5'$ πρὸ τοῦ πρώτου).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ'.

ΛΥΣΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ.

Προβλήματα τόκου.

290. Τόκος καλεῖται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον ὁ δανεῖζων χρήματα ἀπολαμβάνει ἐξ αὐτῶν. Ἐξαρτᾶται δὲ τὸ κέρδος τοῦτο ἐκ τῆς δανειζομένης ποσότητος, ἥτις καλεῖται κεφάλαιον, ἐκ τοῦ χρόνου, ἐφ' ὃν τὸ κεφάλαιον μένει εἰς δάνειον, καὶ ἐκ τοῦ ἐπιτοκίου, ἥτοι τοῦ τόκου ὃν φέρουσιν 100 δραχμαὶ ἐν τῇ μονάδι τοῦ χρόνου, συνήθως ἐν ἐνὶ ἔτει. Ὅριζεται δὲ τὸ ἐπιτόκιον κατὰ συνθήκην.

Ὁ τόκος λέγεται ἀπλοῦς μὲν, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένη τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου, σύνθετος δὲ ὅταν ἐν τέλει ἐκάστης μονάδος τοῦ χρόνου, συνήθως τοῦ ἔτους, ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον, τὸ δ' οὕτω παραγόμενον νέον κεφάλαιον τοκίζηται τὴν ἐπομένην τοῦ χρόνου μονάδα. Τὸ οὕτω τοκιζόμενον κεφάλαιον λέγεται ὅτι ἀνατοκίζεται.

Ἐνταῦθα θέλομεν πραγματευθῆ μόνον περὶ τοῦ ἀπλοῦ τόκου.

291. Ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος τοῦ κεφαλαίου· διότι προφανῶς διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. κεφάλαιον παράγει διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. τόκον. Ὡσαύτως δὲ δεικνύεται ὅτι ὁ τόκος εἶναι καὶ τοῦ χρόνου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου ἀνάλογος. Πᾶν λοιπὸν πρόβλημα, ἐν ᾧ ζητεῖται ὁ τόκος, λύεται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν.

292. Εἰς πᾶν πρόβλημα τόκου εἰσέρχονται τέσσαρες πο-
 σότητες, τὸ κεφάλαιον, ὁ τόκος, ὁ χρόνος, καὶ τὸ ἐπιτό-
 κιον. Ὑπάρχουσι λοιπὸν καὶ τέσσαρα εἶδη προβλημάτων
 τόκου, καθ' ὅσον μία τῶν τεσσάρων τούτων ποσοτήτων ζη-
 τεῖται, τῶν λοιπῶν τριῶν οὐσῶν γνωστῶν. Ἐν τοῖς ἐξῆς
 λύομεν ἓν πρόβλημα ἐξ ἑκάστου εἴδους.

293. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Πόσον τόκον φέρουσι 4800 δραχμαὶ
 εἰς δύο ἔτη καὶ 5 μῆνας, ἥτοι εἰς 29 μῆνας, πρὸς 8 τοῖς
 ἑκατὸν κατ' ἔτος; (Ἀντὶ 8 τοῖς ἑκατὸν γράφεται διὰ συν-
 τομίαν 8 $\frac{2}{100}$)

400 ^{κεφ.}	1 ^{ἔτ.}	8 ^{τοκ.}
4800	$\frac{29}{12}$	χ

Ἐπειδὴ ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος καὶ τοῦ κεφαλαίου καὶ
 τοῦ χρόνου ἔχομεν

$$\chi = 8 \times \frac{4800}{100} \times \frac{29}{12}$$

$$\text{ἥτοι} \quad \chi = \frac{4800 \times 8 \times \frac{29}{12}}{100} = 928.$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω τιμῆς τοῦ χ συνάγομεν ὅτι·

Πρὸς εὑρεσιν τοῦ τόκου σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τοῦ
 κεφαλαίου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τοῦ χρόνου καὶ διαιροῦ-
 μεν αὐτὸ δι' 100.

294. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Εἰς πόσον χρόνον 2400 δραχμαὶ
 τοκίζονται πρὸς 9 $\frac{1}{100}$ φέρουσι τόκον δρ. 306;

100 ^{κεφ.}	1 ^{ἔτ.}	9
2400	χ	306

Ἐπειδὴ ὁ χρόνος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ κεφα-
 λαίου, καὶ ἀνάλογος τοῦ τόκου, ἔχομεν

$$\chi = \frac{100}{2400} \times \frac{306}{9} = \frac{306 \times 100}{2400 \times 9} = 1\frac{1}{2} \text{ ἔτ. } 6 \text{ μῆν.}$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω τιμῆς τοῦ χ συνάγομεν ὅτι

Πρὸς εὐρεσιν τοῦ χρόνου πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.

295. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Ποῖον κεφάλαιον τοκίζομενον πρὸς 8^ο/₁₂ φέρει εἰς 11 μῆνας τόκον δραχ. 127,60;

$$\begin{array}{ccc} 100 \text{ κεφ.} & 1 \text{ ἔτ.} & 8 \text{ τόκ.} \\ \chi & \frac{11}{12} & 127,60 \end{array}$$

Παρατηροῦντες ὅτι τὸ κεφάλαιον εἶναι τοῦ μὲν χρόνου ἀντιστρόφως ἀνάλογον, τοῦ δὲ τόκου ἀνάλογον, εὐρίσκομεν κατὰ τὸν κανόνα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν

$$\chi = 100 \times \frac{1}{\frac{11}{12}} \times \frac{127,60}{8}.$$

$$\text{ἦτοι} \quad \chi = \frac{100 \times 127,60}{\frac{11}{12} \times 8} = 1740.$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω τιμῆς τοῦ χ συνάγομεν ὅτι

Πρὸς εὐρεσιν τοῦ κεφαλαίου πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.

296. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Πρὸς τί ἐπιτόκιον τοκίζόμεναι 350 δραχμαὶ φέρουσι τόκον δραχ. 393,75 εἰς 1 ἔτος καὶ μῆνας, ἦτοι $\frac{15}{12}$ τοῦ ἔτους;

$$\begin{array}{ccc} 3500 \text{ κεφ.} & \frac{15}{12} \text{ ἔτ.} & 393,75 \\ 400 & 1 & \chi \end{array}$$

Παρατηροῦντες ὅτι ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος τοῦ τε κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου εὐρίσκομεν

$$\chi = 393,75 \times \frac{100}{3500} \times \frac{1}{\frac{15}{12}} = \frac{393,75 \times 100}{3500 \times \frac{15}{12}} = 9.$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω τιμῆς τοῦ χ συνάγομεν ὅτι

Πρὸς εὐρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον.

297. Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν καὶ τὰ ἐξῆς προβλήματα.

α.) Πόσον τόκον φέρουσιν 2570,50 δραχμαὶ πρὸς 9⁰/₀ κατ' ἔτος, εἰς 1 ἔτος καὶ 8 μῆνας; (385,57).

β.) Ἐν πόσῳ χρόνῳ κεφάλαιον 960 δραχμῶν τοκίζομενον πρὸς 9⁰/₀ φέρει τόκον δραχ. 244,80; (2^ετ. 10μην.)

γ.) Ἐμπορος ἡγόρασε σῖτον ἀντὶ 3480 δραχμῶν· πωλήσας δὲ αὐτὸν μετὰ 7 μῆνας ἔλαβε δραχμὰς 3960· πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος ἐκέρδησε; (23,64..)

δ.) Ἠγόρασέ τις ἀντὶ δραχμῶν 5800 κτῆμα, τοῦ ὁποίου τὸ ἐτήσιον εἰσόδημα εἶναι δραχμαὶ 410· πόσον τοῖς ἑκατὸν φέρουσι τὰ χρήματα αὐτοῦ; (7,06..)

ε.) Ἐν πόσῳ χρόνῳ κεφάλαιον τοκίζόμενον πρὸς 12⁰/₀ διπλασιάζεται; (8^ετ. 4μην.).

ς.) Οἰνοπώλης ἡγόρασε 5900 ὀκάδας οἴνου πρὸς 40 λεπ. τὴν ὀκᾶν· ἐκ τούτων 1500 μετεβλήθησαν εἰς ὄζος. Μετὰ 8 δὲ μῆνας ἐπώλησε τὸν μὲν οἶνον πρὸς 60 λεπτά, τὸ δὲ ὄζος πρὸς 9 τὴν ὀκᾶν. Ζητεῖται ἐὰν ἐκέρδησε, καὶ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησε. (ἐκέρδησε 26,37⁰/₀)

Προβλήματα ὑφαιρέσεως.

298. Καλεῖται ὑφαίρεσις ἡ ποσότης, καθ' ἣν ἐλαττοῦται ἡ ἀξία γραμματίου ἐξοφλουμένου πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ.

Διακρίνονται δὲ δύο ὑφαιρέσεως εἶδη, ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ἡ ἐσωτερικὴ.

α. Ὑφαίρεσις ἐξωτερικὴ.

299. Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς ἐν τῷ γραμματίῳ γεγραμμένης ποσότητος ἐν τῷ χρόνῳ, ὅστις θέλει παρέλθαι ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως αὐτοῦ. Ἐπομένως τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἶναι προβλήματα τόκου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Γραμμάτιον 1800 δραχμῶν προεξοφλεῖται 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 8⁰/₀. Πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις αὐτοῦ;

Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις θὰ εἶναι κατὰ τὸν ὀρισμὸν ὁ τόκος τῶν 1800 δραχμῶν διὰ 5 μῆνας, ὅστις εἶναι (293)

$$\frac{1800 \times 8 \times \frac{5}{12}}{100} = 60 \text{ δραχμαί.}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ προεξοφλὼν τὸ γραμματίον καταβάλλει ποσότητα μικροτέραν ἐκείνης, ἥς τὸν τόκον κρατεῖ· οἷον ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι ὁ προεξοφλὼν καταβάλλει 1800—60 ἥτοι 1740 δραχμάς, καὶ ἐν τούτοις κρατεῖ τὸν τόκον 1800 δραχμῶν. Ἡ ἐξωτερικὴ λοιπὸν ὑφαίρεσις δὲν εἶναι δικαία. Ἐν τούτοις κατὰ συνθήκην ταύτης κάμνουσι χρῆσιν πάντες οἱ τραπεζίται.

β'. Ὑφαίρεσις ἐσωτερικῇ.

300. Ὅταν ἡ ἀξία γραμματίου προεξοφλουμένου ἐλαττώται οὕτως, ὥστε ἡ παροῦσα αὐτοῦ ἀξία μετὰ τοῦ τόκου αὐτῆς μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου νὰ ἀποτελῇ τὴν ἐν τούτῳ ποσότητα, ἡ ἐλάττωσις λέγεται *ὑφαίρεσις ἐσωτερικῇ*.

Ἐσωτερικὴ λοιπὸν ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς πρὸς προεξόφλησιν τοῦ γραμματίου καταβαλλομένης ποσότητος ἐν τῷ χρόνῳ τῷ ἀπὸ τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως.

Ἄς δεῖξωμεν ἐφ' ἐνὸς παραδείγματος πῶς εὐρίσκεται ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.

Γραμμάτιον 840 δραχμῶν προεξοφλεῖται 4 μῆνας πρὸς τῆς λήξεως αὐτοῦ, πρὸς 9 %· πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις;

Κατὰ πρῶτον ζητοῦμεν πόσον τόκον φέρουσιν αἱ 400 δραχμαὶ εἰς 4 μῆνας πρὸς 9%, καὶ εὐρίσκομεν 3 δραχμάς. Ὡστε κεφάλαιον 100 δραχμῶν μετὰ παρέλευσιν 4 μηνῶν γίνεται 103 δραχμαί. Ἄρα κεφάλαιον 103 δραχμῶν πληρωτέον μετὰ 4 μῆνας ἀπὸ τῆς σήμερον ἔχει τὴν σήμερον ἀξίαν 100 δραχμῶν, ἐπομένως ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις αὐτοῦ εἶναι 3 δραχμαί. Τὸ δοθὲν λοιπὸν πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἐξῆς.

Εἰς ποσότητα 103 δραχμῶν πληρωτέον μετὰ 4 μῆνας

γίνεται ὑφαίρεσις 3 δραχμῶν· πόση ὑφαίρεσις πρέπει νὰ γείνη εἰς ποσότητα 840 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ τὸν αὐτὸν χρόνον;

Ἐπειδὴ ἡ ὑφαίρεσις ποσότητός τινος εἶναι ἀνάλογος αὐτῆς, διότι εἶναι φανερόν ὅτι εἰς διπλασίαν, τριπλασίαν κτλ. ποσότητα γίνεται καὶ διπλασία, τριπλασία κτλ. ὑφαίρεσις, τὸ πρόβλημα λύεται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν.

$$103 \text{ κεφ.} \quad 3 \text{ ὑφ.}$$

$$840 \quad \chi$$

$$\chi = 3 \times \frac{840}{103} = 24,46$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω τιμῆς συνάγομεν ὅτι

Πρὸς εὐρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαίρεσεως πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸν τόκον τῶν 100 δραχμῶν διὰ τὸν ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου χρόνον, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ 100 καὶ τοῦ ρηθέντος τόκου τοῦ 100.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Ἵνα εὐρωμεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν τοῦ γραμματίου πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 840 τὴν ὑφαίρεσιν 24,46, καὶ οὕτως εὐρίσκομεν 815,54.

Ἦδυνάμεθα δὲ νὰ εὐρωμεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν τοῦ γραμματίου καὶ ἀμέσως, λύοντες τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Ποσότητος 103 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ 5 μῆνας ἡ παροῦσα ἀξία εἶναι 100 δραχμαὶ· πόση εἶναι ἡ παροῦσα ἀξία ποσότητος 840 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ τὸν αὐτὸν χρόνον;

Καλοῦντες ψ τὴν παροῦσαν ἀξίαν τῶν 840 δραχμῶν θὰ ἔχωμεν

$$103 \text{ κεφ.} \quad 100 \text{ παρ. ἀξ.}$$

$$840 \quad \psi$$

$$\text{ἔθεν} \quad \psi = 100 \times \frac{840}{103} = \frac{840 \times 100}{103} = 815,54.$$

$$\begin{aligned} \text{Παρατηρητέον δὲ ὅτι} \\ \chi + \psi &= \frac{840 \times 3}{403} + \frac{840 \times 100}{403} = \frac{840 \times 3 + 840 \times 100}{403} = \\ &= \frac{840 \times (3 + 100)}{403} = \frac{840 \times 103}{403} = 840. \end{aligned}$$

Τουτέστι τὸ ἄθροισμα τῆς ὑφαίρεσεως καὶ τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου εἶναι ἴσον τῇ ἐν τούτῳ γεγραμμένη ποσότητι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι μὲν ἀνάλογος τοῦ κεφαλαίου, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἀνάλογος οὔτε τοῦ χρόνου, οὔτε τοῦ ἐπιτοκίου. Διότι διπλασιαζομένου, τριπλασιαζομένου κτλ. τοῦ χρόνου ἢ τοῦ ἐπιτοκίου, ἡ ὑφαίρεσις γίνεται μικροτέρα ἢ διπλασία, τριπλασία κτλ. Τῷ ὄντι εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἡ ὑφαίρεσις διὰ 4 μῆνας εἶναι $\frac{840 \times 3}{403}$ δι' 8 δὲ μῆνας θὰ εἶναι $\frac{840 \times 6}{406}$. ὁ δεύτερος δὲ τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι μικρότερος τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου.

301. Τὰ προβλήματα, ἐν οἷς εἶναι γνωστὴ ἡ ὑφαίρεσις, ζητεῖται δὲ ὁ χρόνος, ἢ τὸ ἐπιτόκιον, ἢ τὸ κεφάλαιον, ἀναγόνται εὐκόλως εἰς προβλήματα τόκου. Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Εἰς γραμμάτιον 540 δραχμῶν ἐγένετο ὑφαίρεσις δραχμῶν 32, πρὸς 8%· πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ προεξωφλήθη τὸ γραμμάτιον;

Ἡ ὑφαίρεσις 32 δραχμαὶ εἶναι ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου, ἥτις εἶναι 540—32, ἥτοι 508 δραχμαί. Ἐπομένως τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἐξῆς.

Ἐν πόσῳ χρόνῳ 508 δραχμαὶ τοκίζονται πρὸς 8%, φέρουσι τόκον 32 δραχμάς;

Εἶναι δὲ τοῦτο πρόβλημα τόκου.

302. Πρὸς ἄσκησιν τῶν μαθητῶν προτείνομεν τὰ ἐξῆς προβλήματα.

α.) Πόση εἶναι ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου δραχμῶν 940,60, προξεοφλουμένου 1 ἔτος καὶ 7 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ, πρὸς $9\frac{0}{10}$; (447,31).

β.) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου 1240 δραχμῶν ἐξαργυρωθέντος διὰ 4435 δραχμῶν 7 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ; (45,85).

γ.) Πόσων δραχμῶν εἶναι τὸ γραμματίον, τὸ ὁποῖον προξεωφλήθη πρὸς $8\frac{0}{10}$ διὰ 710 δραχμῶν 9 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ; (752,60).

δ.) Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμματίον δραχμῶν 4462, τὸ ὁποῖον προξεοφλεῖται πρὸς $9\frac{0}{10}$ διὰ δραχμῶν 4420; (5μην.).

ε.) Ἐμπορὸς ἔχει τρία γραμμάτια, τὸ μὲν 620 δραχμῶν πληρωτέον μετὰ 8 μῆνας, τὸ δὲ 940 πληρωτέον μετὰ 14 μῆνας, τὸ δὲ 1410 πληρωτέον μετὰ 20 μῆνας. Ἐὰν θέλῃ νὰ ἀνταλλάξῃ τὰ τρία ταῦτα γραμμάτια ἀνθ' ἑνὸς μόνου πληρωτέου μετὰ 17 μῆνας, πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ φέρῃ τὸ γραμματίον τοῦτο, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος $9\frac{0}{10}$; (3004,97).

Μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα.

303. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ μερισθῇ θοθεῖς ἀριθμοὶ, οἷον ὁ 300, εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 8, 5, 2.

Ζητεῖται δηλαδὴ νὰ μερισθῇ ὁ 300 εἰς τόσα μέρη, ὅσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 8, 5, 2, τὰ δὲ μέρη ταῦτα νὰ ἔχωσι πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, ὅν καὶ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, ἥτοι τὸ πρῶτον μέρος νὰ ἔχῃ πρὸς τὸ δεῦτερον τὸν λόγον 8 : 5, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον τὸν λόγον 8 : 2 καὶ τὸ δεῦτερον πρὸς τὸ τρίτον τὸν λόγον 5 : 2.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν γνωρίζωμεν νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν K εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 8, 5, 2, τὰ δὲ μέρη ταῦτα παραστήσωμεν δι' α, β, γ, ὁ διπλάσιος τοῦ K ἀριθμὸς μεριζόμενος εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν 8, 5, 2 ὁ δώσειν τὰ μέρη 2α, 2β, 2γ· διότι

ταῦτα προστιθέμενα δίδουσιν ἀριθμὸν διπλάσιον τοῦ Κ, πρὸς ἄλληλα δὲ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὅν καὶ οἱ ἀριθμοὶ 7, 5, 2· διότι ὁ λόγος ἀριθμῶν πολλαπλασιασθέντων ἢ διαιρεθέντων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται. Ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι τριπλάσιος τοῦ Α ἀριθμὸς μεριζόμενος εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 8, 5, 2 θὰ δώσῃ τὰ μέρη 3α, 3β, 3γ. Ἄρα τὰ μέρη τοῦ μεριστέου ἀριθμοῦ εἶναι ἀνάλογα τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἄλλ' ὅταν μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 8, 5, 2 ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 15, τὰ μέρη εἶναι προφανῶς 8, 5, 2. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λύσωμεν τὸ προτεθὲν πρόβλημα κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν.

μερις. ἀριθ.	πρῶτ. μέρος
15	8
300	χ

$$\chi = 8 \times \frac{300}{15} = \frac{300 \times 8}{15} = 160.$$

Ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι τὸ δεῦτερον μέρος εἶναι $\frac{300 \times 5}{15}$
 ἤτοι 100, καὶ τὸ τρίτον $\frac{300 \times 2}{15} = 40.$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι

Ἴνα μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐφ' ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων, καὶ ἕκαστον γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, ἀναλόγως τῶν δ-ποιῶν πρόκειται νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς Κ πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι πάντες διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὰ μέρη τοῦ Κ δὲν μεταβάλλονται. Διότι πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων τῶν ἀριθμῶν α, β, γ διὰ μ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ μ· τότε δὲ οἱ ἀριθ-

μοὶ $\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$, $\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$, $\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$, ἐφ' οὗς πολλαπλα-
σιαζόμενος ὁ Κ δίδει τὰ ζητούμενα μέρη, μένουσιν ἀμετά-
βλητοι· ἐπομένως καὶ τὰ μέρη ταῦτα μένουσι τὰ αὐτά.

Κατὰ τὰ ἄνωτέρω ἐὰν ἔχωμεν νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν
τινα εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 50, 20, 30 μερίζομεν
αὐτῶν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 5, 2, 3. Ὅμοίως ἐὰν
ἔχωμεν νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν τινα ἀναλόγως τῶν κλασμά-
των $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, μερίζομεν αὐτῶν ἀναλόγως τῶν ἀκεραίων 16,
15, 14 οὗς εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὰ κλάσματα
ἐκεῖνα ἐπὶ τὸ κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐ-
τῶν 24.

Προβλήματα εταιρίας.

304. Τὰ προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται νὰ μερισθῇ κέρ-
δος ἢ ζημία μεταξὺ τῶν συνεταίρων εταιρίας τινὸς, καλοῦν-
ται προβλήματα εταιρίας.

Τὰ μερίδια τῶν συνεταίρων κατὰ συνθήκην λαμβάνονται
ἀνάλογα τῆς χρηματικῆς καταβολῆς ἐκάστου, καὶ τοῦ χρό-
νου, ἐφ' ὃν ἡ καταβολὴ ἐκάστου ἔμεινεν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει.
Θέλομεν δὲ δείξει ὅτι πᾶν πρόβλημα εταιρίας εἶναι πρό-
βλημα μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.

305. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.** Τρεῖς συνέταιροι κατέβαλον εἰς
ἐμπορικὴν τινα ἐπιχείρησιν, ὁ μὲν 5600 δραχμὰς, ὁ δὲ
4800, ὁ δὲ 6400. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως δὲ ταύτης ἐκέρδη-
σαν 3780 δραχμὰς. Πόσον μέρος τοῦ κέρδους πρέπει νὰ
λάβῃ ἕκαστος;

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ αἱ καταβολαὶ τῶν συνεταίρων
ἔμειναν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει ἐπὶ τὸν αὐτὸν χρόνον, ἐπομένως
τὰ μερίδια αὐτῶν θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν καταβολῶν. Κα-
λοῦντες χ , ψ , ω τὰ μερίδια ταῦτα θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν
κανόνα τοῦ ἐδαφίου 303,

$$\chi = \frac{3780 \times 5600}{5600 + 4800 + 6400} = \frac{3780 \times 5600}{16800} = 1260$$

$$\psi = \frac{3780 \times 4800}{5600 + 4800 + 6400} = \frac{3780 \times 4800}{16800} = 1080$$

$$\omega = \frac{3780 \times 6400}{5600 + 4800 + 6400} = \frac{3780 \times 6400}{16800} = 1440.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἦδυνάμεθα πρὸς ἀπλοποίησιν νὰ διαιρέσωμεν πάσας τὰς καταβολὰς δι' 100, καὶ ἔπειτα νὰ μερίσωμεν τὸν 3780 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 56, 48, 64, ἢ, ἐπειδὴ καὶ οὗτοι διχίροῦνται δι' 8, ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 7, 6, 8.

306. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Ἐμπορος κατέβαλεν εἰς ἐπιχειρήσιν τινα 12000 δραχμὰς· μετὰ τρεῖς δὲ μῆνας προσλαμβάνει συνέταιρον, ὅστις καὶ αὐτὸς καταβάλλει τὸ αὐτὸ κεφάλαιον, ἥτοι 12000 δραχμὰς· τέσσαρας δὲ μῆνας μετὰ τῆς πρόσληψιν τούτου προσλαμβάνει καὶ τρίτον συνέταιρον, ὅστις καταβάλλει καὶ αὐτὸς ἴσον κεφάλαιον. Μετὰ δύο ἔτη ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως εὐρέθη ὅτι ἐκέρδησαν δραχμὰς 5300. Πόσον ἐκ τοῦ κέρδους πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν συνεταίρων;

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ παρατηροῦμεν ὅτι καὶ οἱ τρεῖς συνέταιροι κατέβαλον ἴσα κεφάλαια, ἀλλὰ τοῦ μὲν πρώτου τὰ χρήματα ἔμειναν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει 24 μῆνας, τοῦ δευτέρου 21, καὶ τοῦ τρίτου 17. Πρέπει λοιπὸν το κέρδος νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 24, 21, 17. Τούτου γενομένου εὐρίσκομεν ὅτι ὁ μὲν πρῶτος θὰ λάβῃ δραχμὰς 2051,61 ὁ δὲ δεύτερος 1795,16, καὶ ὁ τρίτος 1453,23.

307. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Ἀνθρώπος τις καταβάλλει εἰς ἐπιχειρήσιν τινα 8000 δραχμὰς· μετὰ ἓν ἔτος δὲ προσλαμβάνει συνέταιρον, ὅστις καταβάλλει 9000 δραχμὰς· ἐν δὲ ἔτος μετὰ ταῦτα προσλαμβάνεται καὶ τρίτος συνέται-

ρος, ὅστις καταβάλλει 12000 δραχμὰς 4 ἔτη μετὰ τὴν ἐξαρχὴν τῆς ἐπιχειρήσεως εὐρέθη ὅτι ἐκέρδησαν ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης δραχμὰς 6200. Πόσον μέρος τοῦ κέρδους πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ τὰ μερίδια τῶν συνεταίρων πρέπει νὰ εἶναι ἀνάλογα καὶ τῶν καταβολῶν καὶ τοῦ χρόνου, ἐφ' ὃν ἡ καταβολὴ ἑκάστου ἔμεινεν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει.

Θέλομεν δὲ δείξει γενικῶς ὅτι κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην τὰ μερίδια θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν γινομένων τῶν καταβολῶν ἐπὶ τοὺς ἀντιστοιχοῦντας χρόνους.

Τῷ ὄντι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκ δύο συνεταίρων ὁ μὲν κατέβαλε κ δραχμὰς ἐπὶ χρόνον μ, ὁ δὲ κ' δραχμὰς ἐπὶ χρόνον μ'. Ἄς καλέσωμεν δὲ θ τὸ κέρδος τοῦ πρώτου καὶ θ' τὸ τοῦ δευτέρου.

$$\begin{array}{ccc} \text{Θκέρδ.} & \text{κατ.} & \text{μ.χρ.} \\ \theta' & \kappa' & \mu' \end{array}$$

Ἐπειδὴ τὸ κέρδος εἶναι ἀνάλογον τῆς τε καταβολῆς καὶ τοῦ χρόνου, κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν ἔχομεν

$$\theta' = \theta \times \frac{\kappa'}{\kappa} \times \frac{\mu'}{\mu}$$

διακροῦντες δὲ τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς διὰ θ λαμβάνομεν

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{\kappa' \times \mu'}{\kappa \times \mu}$$

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει ὅτι τὰ μερίδια θ' καὶ θ τῶν δύο συνεταίρων ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὰ γινόμενα τῶν καταβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τοὺς ἀντιστοιχοῦντας χρόνους. Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ προβλήματι ἡ καταβολὴ 8000 τοῦ πρώτου ἔμεινεν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει 4 ἔτη, ἡ τοῦ δευτέρου 9000 3 ἔτη, καὶ ἡ τοῦ τρίτου 12000 2 ἔτη, τὸ κέρδος 6200 θὰ μερισθῇ ἀναλόγως τῶν γινομένων 8000×4, 9000×3, 12000×2, ἥτοι τῶν ἀριθμῶν 32000, 27000, 24000, ἡ ἀπλοῦστερον τῶν ἀριθμῶν 32, 27, 24. Γενομένων δὲ τῶν πράξεων εὐρίσκομεν ὅτι

ὁ πρῶτος θὰ λάβῃ δραχμὰς 2390,36 ὁ δὲ δεύτερος 2016,86 καὶ ὁ τρίτος 1792,77.

308. Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν καὶ τὰ ἐξῆς προβλήματα.

α.) Εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς πυρίτιδος λαμβάνονται συνήθως 16 μέρη νίτρου, 3 μέρη ἄνθρακος, καὶ 2 θείου· πόσαι ὀκάδες ἐκάστης τῶν ὕλων τούτων ἀπαιτοῦνται πρὸς κατασκευὴν 600 ὀκάδων πυρίτιδος;

($457 + \frac{1}{7}$ νίτρου, $85 + \frac{5}{7}$ ἄνθρακος, καὶ $57 + \frac{1}{7}$ θείου).

β.) Ἐμπορὸς ἀναλαμβάνει ἐπιχειρήσιν τινα, εἰς ἣν καταβάλλει 12600 δραχμὰς· μετὰ 8 μῆνας προσλαμβάνει καὶ συνέταιρον, ὅστις καταβάλλει 14800 δραχμὰς· 9 δὲ μῆνας μετὰ τὴν πρόσληψιν τούτου προσλαμβάνει καὶ ἄλλον, ὅστις καταβάλλει δραχμὰς 18700· μετὰ 34 μῆνας ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως εὑρέθη ὅτι ἐκέρδησαν δραχμὰς 16200· πόσον μέρος τοῦ κέρδους πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

(6135, 69· 5544,23· 4553,07).

γ.) Διέταξέ τις ἐν τῇ διαθήκῃ αὐτοῦ νὰ μερισθῶσι τὴν περιουσίαν του συγκειμένην ἐκ δραχμῶν 5580 οἱ τέσσαρες αὐτοῦ υἱοὶ ὡς ἐξῆς· ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς μερίδος τοῦ πρώτου· ὁ τρίτος τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μερίδων τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου· καὶ ὁ τέταρτος τὰ $\frac{1}{5}$ τῶν μερίδων τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου· πόσον θέλει λάβει ἕκαστος;

(12000, 9000, 14000, 20800.)

δ.) Ἐμπορὸς ἐχρεωκόπησεν ἔχων μὲν 18000 δραχμὰς, ὀφείλων δὲ εἰς μὲν τὸν Α δραχμὰς 7200, εἰς δὲ τὸν Β 9400, εἰς δὲ τὸν Γ 12400, καὶ εἰς τὸν Δ 15600· πόσας ἐκ τῶν 18000 πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῶν ὀφειλομένων αὐτῶν; (2905,83· 3793,72· 5004,48· 6295,97.)

ε.) Τέσσαρες ἐργάται, ὧν ὁ πρῶτος εἰργάσθη 5 ἡμέρας πρὸς 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὁ δεύτερος 4 ἡμέρας πρὸς 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὁ τρίτος 6 ἡμέρας πρὸς 7 ὥρας τὴν ἡμέραν, καὶ ὁ τέταρτος 8 ἡμέρας πρὸς 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἔλαβον διὰ τοῦτο δραχμὰς 124· πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

(25,05· 22,55· 26,30· 50,10).

Προβλήματα ἀναμίξεως.

309. Προβλήματα ἀναμίξεως ὑπάρχουσι δύο εἰδῶν·

α.) Ἐκεῖνα, ἐν οἷς ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος πραγμάτων, ὧν καὶ ἡ ποσότης καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἐκάστου εἶναι δεδομένη.

β.) Ἐκεῖνα ἐν οἷς ζητεῖται κατὰ ποῖον λόγον πρέπει νὰ ἀναμιχθῶσι πράγματα, ἐκάστου τῶν ὁποίων ἡ μονὰς ἔχει δεδομένην τιμὴν, ὥστε ἡ μονὰς τοῦ μίγματος νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμὴν.

Προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους.

310. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Ἀνemiχθησαν οἶνοι διαφόρου ἀξίας, τουτέστιν 90 λίτραι τῶν 40 λεπτῶν ἡ λίτρα, 75 λίτραι τῶν 32 λεπτῶν, καὶ 85 λίτραι τῶν 50 λεπτῶν· πόσον πρέπει νὰ τιμηθῇ ἡ λίτρα τοῦ μίγματος;

$$90 \times 40 = 3600$$

$$75 \times 32 = 2400$$

$$85 \times 50 = 4250$$

$$\begin{array}{r} 250 \qquad 40250 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν λιτρῶν ἐκάστου εἴδους ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς μονάδος αὐτοῦ, καὶ λαμβάνοντες τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τούτων, εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ὅλου μίγματος. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μίγμα περιέχει $90 + 75 + 85$ ἴτοι 250 λίτρας, διαιροῦντες τὴν ὅλικήν τιμὴν 40250 διὰ 250 εὐρίσκομεν ὡς τιμὴν τῆς μονάδος τοῦ μίγματος 41 λεπτά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Συνεχωνεύθησαν 18 δραχμαὶ ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἶναι 0,900, 12 δραχμαὶ τῶν 0,820, καὶ 25 δραχμαὶ τῶν 0,840· ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ μεταλλικοῦ τούτου κράματος;

Λέγοντες δὲ ὅτι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἴδους τινὸς ἀργύρου εἶναι 0,900, ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς χίλια μέρη τοῦ εἰ-

δους τούτου τοῦ ἀργύρου τὰ 900 εἶναι ἄργυρος καθαρὸς, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι ἄλλα μέταλλα, ἢ, ὅπερ τὸ αὐτὸ, εἰς 4 μονάδα τοῦ ἀργύρου τούτου τὰ 0,900 μόνον εἶναι ἄργυρος καθαρὸς.

Πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος πράττομεν ὡς ἐξῆς·

$$\begin{array}{r} 48 \times 0,900 = 16,200 \\ 12 \times 0,820 = 9,840 \\ 25 \times 0,840 = 21,000 \\ \hline 55 \qquad \qquad 47,040 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν 48 ἐπὶ 0,900, τὸ δὲ γινόμενον 16,200 δεικνύει ὅτι εἰς 48 δραχμὰς τοῦ ἀργύρου τοῦ εἵδους τούτου καθαρὸς ἄργυρος εἶναι αἱ 16,200. Πράττοντες τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ λοιπὰ εἶδη, καὶ προσθέτοντες τὰ τρία γινόμενα εὐρίσκομεν ὅτι εἰς τὰς $48 + 12 + 25$, ἥτοι 55 λίτρας τοῦ κράματος καθαρὸς ἄργυρος εἶναι αἱ 47,040· ἄρα 1 λίτρα τοῦ κράματος περιέχει $\frac{47,040}{55}$ ἥτοι 0^α,855 καθαροῦ ἀργύρου. Ἐπομένως ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ κράματος εἶναι 0,855 κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον λύονται καὶ τὰ ἐξῆς προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Τοῦ σελινίου τὸ βάρος εἶναι δραχμαὶ 5,65 ὁ δὲ βαθμὸς τῆς καθαρότητος 0,925· τοῦ φράγκου τὸ βάρος εἶναι δραχμαὶ 5 βαθμὸς δὲ καθαρότητος 0,900· τοῦ δὲ διστήλου δραχμαὶ 27,045, καὶ βαθμὸς καθαρότητος 0,903· ἐὰν συγχωνεύσωμεν 3 σελίνια, 7 φράγκα καὶ 2 διστήλα, πόσον θὰ εἶναι τὸ βάρος τοῦ μεταλλικοῦ τούτου κράματος, καὶ ποῖος ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος αὐτοῦ; (τὸ βάρος δραχμαὶ 106,040, ὁ δὲ τῆς καθαρότητος βαθμὸς 0,905...)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Ἐὰν συγχωνεύσωμεν 9 δραχμὰς ἀργύρου τῶν 0,900, 17 τῶν 0,860, καὶ 2 δραχμὰς χαλκοῦ, ποῖος θὰ εἶναι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ μεταλλικοῦ τούτου κράματος; (0,844...)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. Ἐχομεν ὅδεκάδας ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,900· πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ συγχω-
νεύσωμεν μετὰ τοῦ ἀργύρου τούτου, ὥστε ὁ βαθμὸς τῆς κα-
θαρότητος τοῦ κράματος νὰ εἶναι 0,840 ; ($142 + \frac{6}{7}$ δράμ.)

Προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους.

311. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Κατὰ ποῖον λόγον πρέπει νὰ ἀνα-
μίξωμεν οἶνον τῶν 80 λεπτῶν ἢ λίτρα μετ' οἴνου τῶν 50
λεπτῶν, ἵνα σχηματίσωμεν 120 λίτρας κράματος τῶν 60
λεπτῶν ἢ λίτρα ;

Δι' ἐκάστην λίτραν τῶν 50 λεπτῶν πωλουμένην 60 προσ-
γίνεται κέρδος λεπτῶν 10.

Δι' ἐκάστην δὲ λίτραν τῶν 80 πωλουμένην 60 γίνεται
ζημία λεπτῶν 20. Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν χ καὶ ψ τὰς πο-
σότητας, ἃς θέλομεν λάβει ἐξ ἑκατέρου εἴδους οἴνου, ἵνα μὴ
υπάρξῃ μήτε κέρδος μήτε ζημία, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἰσό-
της

$$\chi \times 10 = \psi \times 20.$$

Διαιροῦντες τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης διὰ $10 \times \psi$,
λαμβάνομεν

$$\frac{\chi}{\psi} = \frac{20}{10}.$$

Ἵνα προσδιορισθῶσι δὲ τὰ μέρη χ καὶ ψ , πρέπει νὰ με-
ρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 120 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 20 καὶ 10·
τούτου δὲ γενομένου, εὐρίσκεται ὅτι τὰ μέρη ταῦτα εἶναι
80 καὶ 40.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν δὲν ὠρίζετο ἡ ποσότης τοῦ ζητουμένου
μίγματος, τότε τὸ πρόβλημα ἤθελεν εἶναι ἀόριστον· τουτέ-
στι δὲν ἤθελεν εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ ἀπόλυ-
τοι ποσότητες, αἵτινες πρέπει νὰ ληφθῶσιν ἐξ ἑκατέρου εἴ-
δους, ἀλλὰ μόνον ὁ λόγος αὐτῶν ὀριζόμενος ἐκ τῆς ἰσότη-
τος

$$\chi : \psi = 20 : 10.$$

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι 20 εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς ἀνωτέρας
τιμῆς καὶ τῆς μεσαίας, 10 δὲ ἡ τῆς κατωτέρας καὶ τῆς με-
σαίας, συνάγομεν ὅτι ἡ ποσότης, ἣτις πρέπει νὰ ληφθῇ ἐκ

τοῦ κατωτέρου εἶδους, εἶναι πρὸς τὴν ποσότητα, ἣτις πρέπει νὰ ληφθῇ ἐκ τοῦ ἀνωτέρου, ὡς ἡ διαφορά τῆς τιμῆς τοῦ ἀνωτέρου καὶ τοῦ μεσαίου πρὸς τὴν διαφοράν τῆς τοῦ κατωτέρου καὶ τοῦ μεσαίου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Ἐχομεν δύο ὄγκους ἀργύρου, καὶ τοῦ μὲν πρώτου ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἶναι 0,960, τοῦ δὲ δευτέρου 0,875· πόσον πρέπει νὰ ληφθῇ ἐξ ἑκατέρου αὐτῶν, ὅπως σχηματισθῇ 1 μνᾶ ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος νὰ εἶναι 0,900 ;

Ἐκάστη δραχμὴ ἀργύρου τῶν 0,960 εἰσάγει εἰς τὸ κρᾶμα 0,060 ἀργύρου περισσότερον, ἢ ὅσον ἀπαιτεῖται ὅπως ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἶναι 0,900. Τοῦναντίον δὲ ἐκαστὴ δραχμὴ τῶν 0,875 εἰσάγει 0,025 ἀργύρου ὀλιγώτερον, ἢ ὅσον ἀπαιτεῖται ὅπως σχηματισθῇ ὁ ἀπαιτούμενος βαθμὸς καθαρότητος. Ἐάν λοιπὸν καλέσωμεν χ καὶ ψ τὰς ποσότητας ἀργύρου, ἃς θέλομεν λάβει ἐξ ἑκατέρου εἶδους, θέλει ὑπάρξει ἀντιστήκωσις, ἐὰν

$$\chi \times 0,060 = \psi \times 0,025,$$

ἥτοι ἐὰν $\chi : \psi = 0,025 : 0,060$.

Ἵνα εὐρεθῇ λοιπὸν τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ μερισθῇ μία μνᾶ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 0,025 καὶ 0,060, ἢ ἀπλούστερον τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 12.

Περὶ τῆς συνεζευγμένης μεθόδου.

312. Κατὰ τὴν συνεζευγμένην μέθοδον λύονται προβλήματα οἷον τὸ ἐξῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Ζητεῖται πόσα ῥωσικὰ ρούβλια δύναται 2500 γράγκα, γνωστοῦ ὄντος ὅτι

48 γράγκα	δύνανται	39 ἀγγλικά σελίνια
13 σελίνια	»	8 γιορίνια γερμανικά
50 γιορίνια	»	9 δουκάτα τοῦ Ἀμβούργου
15 δουκάτα	»	43 ρούβλια.

Ἐν τοῖς προβλήμασι δηλαδὴ τῆς συνεζευγμένης μεθόδου δίδεται ὁ παριστῶν ποσὸν τι ἀριθμὸς (2500 γράγκα), καὶ

ζητεῖται τίς ἀριθμὸς θὰ παριστᾷ τὸ αὐτὸ ποσὸν, ὅταν λη-
φθῇ ἄλλη μονάς (τὸ ροῦβλιον). Δίδονται δὲ πολλὰ ζεύγη
ἀριθμῶν ἰσοδυνάμων, ἥτοι ἀριθμῶν ἀναφερομένων εἰς δια-
φόρους μονάδας καὶ παριστάντων ἀνὰ δύο ποσὰ ἴσα (43
φράγκα=39 σελίνια κτλ.), καὶ εἶναι τόσα τὰ ζεύγη ταῦτα,
συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τοῦ ἀγνώ-
στου καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου αὐτῷ, καὶ τοιαύτην πρὸς ἄλληλα
ἔχουσι σχέσιν, ὥστε ἐκάτερος τῶν ἀριθμῶν παντὸς ζεύγους
ἔχει τὴν αὐτὴν μονάδα ἐνὶ τῶν ἀριθμῶν ἄλλου τινὸς ζεύ-
γους:

Ἵνα λύσωμεν τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι
ἐξετιμήσαμεν πάντα τὰ ἐν αὐτῷ νομίσματα μὲ τὴν αὐτὴν
μονάδα, οἷον τὴν δραχμὴν, καὶ ὅτι τὸ μὲν ροῦβλιον δύνα-
ται α δραχμάς, τὸ φράγκον β, τὸ σελίνιον γ, τὸ φιορίνιον
δ, καὶ τὸ δουκάτον ε. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ τὸν ζητού-
μενον ἀριθμὸν ρομβλίων, τὰ χ ταῦτα ρομβλία θὰ δύνανται
χ×α δραχμάς, τὰ 2500 φράγκα θὰ δύνανται 2500×β
δραχμάς, τὰ 48 φράγκα 48×β, τὰ 39 σελίνια 39×γ κτλ.

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς ἑξῆς ἰσότητας:

$$\chi \times \alpha = 2500 \times \beta$$

$$48 \times \beta = 39 \times \gamma$$

$$13 \times \gamma = 8 \times \delta$$

$$50 \times \delta = 9 \times \epsilon$$

$$15 \times \epsilon = 43 \times \alpha.$$

Ἐφροντίσαμεν δὲ νὰ γράψωμεν τὰς ἰσότητας ταύτας
οὕτως, ὥστε τὸ πρῶτον μέλος ἐκάστης νὰ εἶναι ἀριθμὸς ἀνα-
φερόμενος εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα, εἰς ἣν καὶ τὸ δεῦτερον μέ-
λος τῆς προηγουμένης.

Ἐὰν μετὰ τὴν τοιαύτην διάταξιν πολλαπλασιάσωμεν
τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας κατὰ μέλη, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσότης:

$$\begin{aligned} \chi \times \alpha \times 48 \times \beta \times 13 \times \gamma \times 50 \times \delta \times 15 \times \epsilon &= \\ &= 2500 \times \beta \times 39 \times \gamma \times 8 \times \delta \times 9 \times \epsilon \times 43 \times \alpha. \end{aligned}$$

Ἐξαλείφοντες δὲ τοὺς κοινούς τῶν δύο μελῶν ταύτης παράγοντας α, β, γ, δ, ε, λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα

$$\chi \times 48 \times 13 \times 50 \times 15 = 2500 \times 39 \times 8 \times 9 \times 43.$$

Ἐκ ταύτης δὲ λαμβάνομεν

$$\chi = \frac{2500 \times 39 \times 8 \times 9 \times 43}{48 \times 13 \times 50 \times 15} = 645.$$

313. Ἐκ τῶν προηγουμένων πορίζομεθα τὸν ἐξῆς κανόνα πρὸς λύσιν τῶν τῆς συνεζευγμένης μεθόδου προβλημάτων.

Γράφομεν γραμμὴν κατακόρυφον, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ μὲν αὐτῆς γράφομεν τὸ παριστῶν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν γράμμα χ , πρὸς τὰ δεξιὰ δὲ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὀριζοντίου γραμμῆς τὸν ἰσοδύναμον τῷ ἀγνώστῳ. Ὑποκάτω γράφομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πάντα τὰ δεδομένα ζεύγη τῶν ἰσοδυνάμων ἀριθμῶν, ἕκαστον ἐν ἐνὶ στίχῳ, φροντίζοντες ὥστε ὁ πρὸς ἀριστερὰν ἀριθμὸς ἐκάστου ζεύγους νὰ εἶναι ὁ ὁμοειδὴς τῷ πρὸς δεξιὰν τοῦ ἀμέσως προηγουμένου. Συμβαίνει δὲ τότε, ἐὰν πᾶσαι αἱ ἀπαιτούμεναι πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος σχέσεις εἶναι δεδομέναι, ὁ πρὸς τὰ δεξιὰ ἀριθμὸς τοῦ τελευταίου στίχου νὰ εἶναι ὁμοειδὴς τῷ πρὸς ἀριστερὰν τοῦ πρώτου, ἥτοι τῷ χ . Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς γραμμῆς ἀριθμούς, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτῆς. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦτον εἰς τὸ ἀνωτέρω λυθὲν πρόβλημα, θὰ γράψωμεν,

ρούβλια	χ	2500	φράγκα
φράγκα	48	39	σελίνια
σελίνια	13	8	φιορίνια
φιορίνια	50	9	δουκάτα
δουκάτα	15	43	ρούβλια

Καὶ ἐντεῦθεν θὰ λάβωμεν
$$\chi = \frac{2500 \times 39 \times 8 \times 9 \times 43}{48 \times 13 \times 50 \times 15}.$$

Πρὸς ἄσκησιν ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα καὶ εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξῆς δύο προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Πόσας δραχμὰς δύναται 87 ρούβλια ῥωσικὰ, δοθέντος ὅτι 50 ρούβλια δύναται 17 δίστηλα, 25 δίστηλα 26 γερμανικὰ τάλληρα, 24 γερμανικὰ τάλληρα 5 λίρας, καὶ 100 λίραι 2812 δραχμαί;

δραχμαί	χ	87	ρούβλια
ρούβλια	50	17	δίστηλα
δίστηλα	25	26	Γερμ. τάλληρα
Γερμ. τάλληρα	24	5	λίραι
λίραι	100	2812	δραχμαί.

$$\chi = \frac{87 \times 17 \times 26 \times 5 \times 2812}{50 \times 25 \times 24 \times 100} = 180,22.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Πόσας δραχμὰς δύναται 1200 λίραι ἀγγλικάι, γινώσκοντος ὅτι 26 λίραι δύναται 165 ρούβλια, 75 ρούβλια 26 δουκάτα τοῦ Ἀμβούργου, 20 δουκάτα 42 τάλληρα Ἰσπανικά, τὸ δὲ Ἰσπανικὸν τάλληρον 6 δραχμαί;

δραχμαί	χ	1200	λίραι
λίραι	26	165	ρούβλια
ρούβλια	75	26	δουκάτα
δουκάτα	20	42	τάλληρα Ἰσπ.
τάλληρα Ἰσπαν.	4	6	δραχμαί.

$$\chi = \frac{1200 \times 165 \times 26 \times 42 \times 6}{26 \times 75 \times 20} = 33264.$$

314. Κατὰ τὴν συνεζευγμένην μέθοδον λύονται καὶ ἄλλα τινὰ τοῦ ἐμπορίου προβλήματα, πολυπλοκώτερα ἢ τὰ ἀνωτέρω λυθέντα. Τοιοῦτον πρόβλημα εἶναι τὸ ἐξῆς:

Ἡ ἔμπορος ἠγόρασεν ἐν Ἑλλάδι Κορινθιακὴν σταγίδαν πρὸς 190 δραχμὰς τὰς 1000 λίτρας· ἀπέστειλε δὲ αὐτὴν εἰς Τεργέστην πληρώσας ἔξοδα διὰ μὲν τὸν δασμὸν καὶ τὸν ναύλον $23\frac{0}{100}$, εἰς δὲ τὸν παραγγελιοδόχον $2\frac{0}{100}$. Ζητεῖται πόσα φορινία θὰ τιμᾶται ὁ στατῆρ τῆς σταγίδος ἐν Τεργέστη, γνωστοῦ ὄντος ὅτι 1000 λίτραι δύνανται 375 ὀκάδας, 44 ὀκάδες 1 στατῆρα, 35 φορινία 17 γερμανικὰ τάλληρα, τὸ δὲ τάλληρον δραχμὰς 5,78.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ὡς ἑξῆς· νὰ εὗρωμεν πρῶτον πόσους στατῆρας δύνανται αἱ 1000 λίτραι, δεύτερον πόσα φορινία αἱ 190 δραχμαὶ, ἀμφοτέρω κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἑδαφίου 313, ἔπειτα νὰ ἀυξήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν φορινίων κατὰ $23\frac{0}{100}$, τὸ δὲ ἐξαγόμενον νὰ ἀυξήσωμεν πάλιν κατὰ $2\frac{0}{100}$, καὶ τέλος νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν φορινίων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στατῆρων.

Ἀλλὰ καὶ ἀπλούστερον δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὅπως δηλαδὴ τὰ τῶν προηγουμένων ἑδαφίων. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μονὰς τοῦ βάρους πράγματός τινος παριστᾷ χρηματικὴν τινα ἀξίαν, καὶ δύναται νὰ ἐκτιμηθῇ μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα, μὲ τὴν ὁποίαν καὶ τὰ νομίσματα τοῦ προβλήματος. Ὡς πρὸς τὰ γενόμενα δὲ ἔξοδα παρατηροῦμεν ὅτι ἕνεκα τῶν ἐξόδων $23\frac{0}{100}$ 100 μονάδας νομίσματος πρὸ τῶν ἐξόδων δύνανται 123 μονάδες τοῦ αὐτοῦ νομίσματος μετὰ τὰ ἔξοδα. Τῶντι πρᾶγμα 100 φορινίων μετὰ τὰ ἔξοδα θὰ τιμᾶται 123 φορινία. Τὸ νὰ ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι αὐξάνει ἡ τιμὴ τοῦ πράγματος εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἐλαττοῦται ἡ ἀξία τῆς μονάδος τοῦ νομίσματος. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον 100 μονάδες νομίσματος ἐκ τῶν μετὰ τὰ πρῶτα ἔξοδα θὰ δύνανται 102 μετὰ τὰ νέα ἔξοδα πρὸς $2\frac{0}{100}$.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν ἐν ἑδαφίῳ 313 κανόνα, ὡς ἑξῆς·

ἐν Τεργέστη φιορίνια	χ	4	στατήρ
στατήρ	1	44	οκάδες
οκάδες	375	1000	λίτραι
λίτραι	1000	190	δραχμαί
δραχμαί	578	100	γερμ. τάλληρα
γερμ. τάλληρα	17	35	φιορίνια
πρὸ τῶν ἐξόδων φιορ.	100	123	μετὰ τὰ ἐξοδα 23 ^ο / _ο
ἐκ τῶν τελευταίων	100	102	μετὰ τὰ νέα ἐξοδα 2 ^ο / _ο

$$\chi = \frac{44 \times 1000 \times 190 \times 100 \times 35 \times 123 \times 102}{375 \times 1000 \times 578 \times 17 \times 100 \times 100} = 9,96.$$

345. Πρὸς ἄσκησιν καταχωρίζομεν καὶ τὰ ἐξῆς προβλήματα.

α.) Πόσους βασιλικούς πήχεις δύνανται 27 ἀγγλικοὶ πόδες, δοθέντος ὅτι 1,3 βασιλικοὶ πήχεις δύνανται 4 γαλλικοὺς πόδας, καὶ 15 γαλλικοὶ πόδες 16 ἀγγλικούς; (8πῆχ., 226).

β.) Ἐμπορὸς ἠγόρασε 5 στατήρας πράγματός τινος ἀντὶ 4920 φράγκων· πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὁκᾶν, ἵνα ὠφεληθῇ 20^ο/_ο; (29δ., 94).

γ.) Ἐμπορὸς ἠγόρασεν ἐν Πάτραις Κορινθιακὴν σταφίδα πρὸς 25³/₄ δίστηλα τὰς 1000 ἀγγλικὰς λίτρας· πληρώσας δὲ 20^ο/_ο διὰ δασμὸν καὶ ναῦλον ἀπέστειλεν αὐτὴν εἰς Τεργέστην, ὅπου ἐγένοντο νέα ἐξοδα 5^ο/_ο. Ζητεῖται πόση θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ στατήρος ἐν Τεργέστη εἰς φιορίνια, γνωστοῦ ὄντος ὅτι 160 λίτραι ἀγγλικαὶ δύνανται 57 οκάδας, 25 δίστηλα 26 γερμανικὰ τάλληρα, τὸ δὲ γερμανικὸν τάλληρον 2 φιορίνια. (8φ., 335).

δ.) Ἐμπορὸς ἠγόρασεν ἐν Ἀθήναις μέταξαν πρὸς 70 δραχμὰς τὴν ὁκᾶν· ἐγένοντο δὲ ἐξοδα μέχρι μὲν τῆς Μασσαλίας, ὅπου ἔστειλε τὴν μέταξαν, 9^ο/_ο, ἐκεῖ δὲ νέα ἐξοδα 2^ο/_ο. Ζητεῖται ἡ τιμὴ εἰς φράγκα τοῦ χιλιογράμμου ἐν Μασσαλίᾳ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι 5 φράγκα δύνανται δραχμὰς 5,58, τὸ δὲ χιλιόγραμμον 312¹/₂ δράμια. (54φ., 48).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΣΤ'.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ.

316. Ἀναλογία καλεῖται ἡ ισότης δύο λόγων.

Παραδείγματος χάριν τοῦ λόγου 12 : 4 ὄντος ἴσου τῷ λόγῳ 21 : 7 ἀποτελεῖται ἡ ἀναλογία

$$12 : 4 = 21 : 7.$$

Καὶ γενικῶς ἵνα παραστήσωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, γράφομεν

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta.$$

Ἀπαγγέλεται δὲ ἡ ἀναλογία ὡς ἐξῆς·

ὡς α πρὸς β οὕτω γ πρὸς δ.

Οἱ τὴν ἀναλογίαν ἀποτελοῦντες ἀριθμοὶ λέγονται ὅροι τῆς ἀναλογίας· καὶ ὁ μὲν πρῶτος καὶ ὁ τέταρτος καλοῦνται ἄκροι τῆς ἀναλογίας, ὁ δὲ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μέσοι.

Ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ τρίτος, ἦτοι ὁ α καὶ ὁ γ, καλοῦνται ἡγούμενοι, διότι ὁ μὲν ἡγεῖται τῶν ὅρων τοῦ πρώτου λόγου, ὁ δὲ τῶν τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ δεύτερος καὶ ὁ τέταρτος, ἦτοι ὁ β καὶ ὁ δ, ἐπόμενοι, διότι ἔπονται τοῖς αὐτοῖς ὅροις.

Ἀναλογία, τῆς ὁποίας οἱ δύο μέσοι εἶναι ἴσοι, καλεῖται συνεχῆς, ἐκάτερος δὲ τῶν ἴσων μέσων καλεῖται μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄκρων. Οἷον ἡ ἀναλογία 12 : 6 = 6 : 3 εἶναι συνεχῆς, καὶ ὁ 6 εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 3.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀναλογία θεωρεῖται καὶ μεταξὺ ποσῶν οἷον ἐάν ὁ λόγος τοῦ ποσοῦ Α πρὸς τὸ ὁμοειδὲς αὐτῷ Β εἶναι

ἴσος τῷ λόγῳ τοῦ ποσοῦ Γ πρὸς τὸ ὁμοειδὲς αὐτῷ Δ, ὑπάρχει ἡ ἀναλογία,

$$A : B = \Gamma : \Delta.$$

Ἄλλ' ἐν τῇ ἀριθμητικῇ θεωροῦμεν μόνον τὰς μεταξὺ ἀριθμῶν ἀναλογίας. Εἰς τὰς τοιαύτας δὲ ἀναλογίας τρέπονται καὶ αἱ μεταξὺ ποσῶν ἀναλογίαι, ἐὰν καταμετρήσωμεν τὰ δύο πρῶτα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα, καὶ τὰ δύο τελευταῖα μὲ μονάδα, ἥτις δύναται νὰ διαφέρῃ τῆς πρώτης (277).

Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

317. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.** Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν μέσων.

Ἄς λάβωμεν τὴν ἀναλογίαν

$$a : b = \gamma : \delta.$$

Πολλαπλασιάζομεν τὸν πρῶτον λόγον $a : b$ ἐπὶ τὸ γινόμενον $b \times \delta$. Πρὸς τοῦτο δὲ πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον ἐπὶ b καὶ ἔπειτα ἐπὶ δ (157, Δ'). Καὶ τὸ μὲν ἐπὶ b γινόμενον τοῦ λόγου $a : b$ ἔστω τοῦ πηλίκου a διὰ b εἶναι α . τούτου δὲ τὸ γινόμενον ἐπὶ δ εἶναι $\alpha \times \delta$. Ὀμοίως πολλαπλασιάζοντες τὸν λόγον $\gamma : \delta$ ἐπὶ $b \times \delta$ λαμβάνομεν γινόμενον $\gamma \times b$. Ἐπειδὴ δὲ δύο ἴσους ἀριθμοὺς, τοὺς λόγους $a : b$ καὶ $\gamma : \delta$, ἐπολλαπλασιάσαμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $b \times \delta$, τὰ εὐρεθέντα γινόμενα εἶναι ἴσα, ἔστω

$$a \times \delta = b \times \gamma \quad \text{ὅπερ ἔδει δεῖξαι.}$$

318. **ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.** Ἐὰν τεσσάρων ἀριθμῶν ἐφεξῆς γεγραμμένων τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν μέσων, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καθ' ἣν τάξιν εὐρίσκονται ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.

Ἐστώσαν ἀριθμοὶ τέσσαρες ἐφεξῆς γεγραμμένοι οἱ

$$a, b, \gamma, \delta.$$

καὶ ἂς υποθέσωμεν ὅτι $\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$ · λέγω ὅτι τότε θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία,

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta.$$

Διότι ἂς διαιρέσωμεν τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $\alpha \times \delta$ καὶ $\beta \times \gamma$ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $\beta \times \delta$, ὅπερ γίνεται ἐὰν διαιρέσωμεν πρῶτον διὰ τοῦ ἐτέρου τῶν παραγόντων τοῦ $\beta \times \delta$ καὶ ἔπειτα διὰ τοῦ ἐτέρου (169). Τότε λαμβάνομεν τὰ ἴσα πηλίκα $\alpha : \beta$ καὶ $\gamma : \delta$ · ἡ δὲ ἰσότης τῶν πηλίκων τούτων ὡς λόγων θεωρουμένων εἶναι ἡ ἀναλογία, ἥς τὴν ὑπαρξιν ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

349. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ὅταν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ δύο ἄλλων ἀριθμῶν, οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ γραφόμενοι ἐν τοιαύτῃ τάξει, ὥστε οἱ παράγοντες τοῦ ἐτέρου τῶν γινομένων νὰ εἶναι ἄκροι, οἱ δὲ τοῦ ἐτέρου μέσοι, ἀποτελοῦσιν ἀναλογία.

Ἐὰν παραδείγματος χάριν εἶναι $\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$, ἐκ τῶν ἀριθμῶν α , β , γ , δ , δύνανται νὰ σχηματισθῶσιν αἱ ἐξῆς ἑκτὼ ἀναλογίαι·

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$

$$\alpha : \gamma = \beta : \delta$$

$$\delta : \beta = \gamma : \alpha$$

$$\delta : \gamma = \beta : \alpha$$

$$\beta : \alpha = \delta : \gamma$$

$$\beta : \delta = \alpha : \gamma$$

$$\gamma : \alpha = \delta : \beta$$

$$\gamma : \delta = \alpha : \beta$$

Ἐπειδὴ δὲ τῆς πρώτης τούτων ὑπαρχούσης, καὶ διὰ τοῦτο ὄντος $\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$, ὑπάρχουσι καὶ αἱ λοιπαὶ, καὶ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς προσερχόμεναι ἐξ ἐκείνης διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν ὄρων, συνάγομεν ὅτι ἐὰν ἀναλογίας μεταθέσωμεν τοὺς μέσους, ἢ τοὺς ἄκρους, ἢ κάμωμεν τοὺς ἄκρους μέσους καὶ τὰν ἀπαιρῶν, ἡ ἀναλογία ἐξακολουθεῖ ὑπάρχουσα.

320. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Πολλαπλασιάζοντες ἢ διαιροῦντες ἐν ταύτῳ ἕνα ἄκρον καὶ ἕνα μέσον ἀναλογίας διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, λαμβάνομεν πάλιν ἀναλογίαν.

Διότι οὕτω τὰ γινόμενα τῶν ἄκρων καὶ τῶν μέσων πολλαπλασιάζονται ἢ διαιροῦνται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ἐπομένως μένουσι πάλιν ἴσα.

321. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δοθέντων τῶν τριῶν ὅρων ἀναλογίας, εὐρεῖν τὸν τέταρτον.

Ἐπειδὴ ἵνα ὑπάρχῃ ἀναλογία ἀρκεῖ τὸ γινόμενον τῶν μέσων νὰ εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν ἄκρων, ἐὰν ὁ ἄγνωστος εἶναι ἄκρος, τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν γνωστὸν ἄκρον θὰ εἶναι ἴσος τῷ γνωστῷ γινομένῳ τῶν μέσων. Ἄρα ὁ ἄγνωστος ἄκρος θὰ εἶναι ἴσος τῷ πηλίκῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τῶν μέσων διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου.

Ἐὰν δὲ ὁ ἄγνωστος εἶναι μέσος ὁμοίως δεικνύεται ὅτι εἶναι ἴσος τῷ πηλίκῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τῶν ἄκρων διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου.

Παραδείγματος χάριν διὰ τὴν ἀναλογίαν

$$5 : 7 = 3 : \chi,$$

ἧς ὁ τέταρτος ὅρος εἶναι ἄγνωστος, σημειούμενος διὰ χ ,

$$\text{εὐρίσκομεν} \quad \chi = \frac{7 \times 3}{5} = \frac{21}{5} = 4 + \frac{1}{5}.$$

Ὡσαύτως διὰ τὴν ἀναλογίαν

$$6 : \chi = 8 : 12.$$

ἧς εἶναι ἄγνωστος ὁ δεύτερος ὅρος, εὐρίσκομεν

$$\chi = \frac{6 \times 12}{8} = 9.$$

322. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δύο ἀναλογίαι ἔχουσι τοὺς τρεῖς ὁμοταγεῖς ὅρους ἴσους, ἔχουσιν ἴσους καὶ τοὺς λοιποὺς δύο ὅρους.

323. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὐρεῖν τὸν μέσον ἀνάλογον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β.*

Καλοῦντες χ τὸν ζητούμενον μέσον ἀνάλογον, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{aligned} \alpha : \chi &= \chi : \beta, \\ \text{"Οθεν} \quad \chi^2 &= \alpha \times \beta. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ $\alpha \times \beta$, αὐτὸς ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ εἶναι ἴσος τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ $\alpha \times \beta$, ἥτοι

$$\chi = \sqrt{\alpha \times \beta}.$$

"Αρα ὁ μέσος ἀνάλογος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ ἐν τοῖς περὶ τετραγωνικῆς ῥίζης μόνων τῶν τελείων τετραγώνων ὠρίσθη ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, διὰ τοῦτο κατὰ τὸ παρὸν τὸν μέσον ἀνάλογον δύο ἀριθμῶν εὐρίσκομεν ἀκριβῶς μόνον ὅταν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι τέλειον τετράγωνον.

324. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *"Όταν δύο ἀναλογίαι ἔχωσιν ἓνα λόγον τὸν αὐτὸν, οἱ δύο ἄλλοι λόγοι ἀποτελοῦσιν ἀναλογία.*

Ἔστωσαν αἱ δύο ἀναλογίαι

$$\begin{aligned} \alpha : \beta &= \gamma : \delta \\ \epsilon : \zeta &= \gamma : \delta. \end{aligned}$$

Οἱ δύο λόγοι $\alpha : \beta$ καὶ $\epsilon : \zeta$ ὡς ἴσοι ἀμφοτέρω τῷ αὐτῷ λόγῳ $\gamma : \delta$ εἶναι καὶ ἀλλήλοις ἴσοι, ἥτοι ἔχομεν

$$\alpha : \beta = \epsilon : \zeta. \quad \text{ὅπερ ἔδει δεῖξαι.}$$

325. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. *"Όταν δύο ἀναλογιῶν οἱ ἡγούμενοι ἢ οἱ ἐπόμενοι εἶναι οἱ αὐτοί, οἱ ἐπόμενοι ἢ οἱ ἡγούμενοι ἀποτελοῦσιν ἀναλογία.*

Ἐστῶσαν αἱ ἀναλογίαι

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta,$$

$$\alpha : \varepsilon = \gamma : \zeta,$$

αἵτινες ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς ἡγουμένους.

Μεταθέτοντες τοὺς μέσους ἀμφοτέρων λαμβάνομεν

$$\alpha : \gamma = \beta : \delta$$

$$\alpha : \gamma = \varepsilon : \zeta.$$

Ἐκ τούτων δὲ, ἔχουσιν κοινὸν τὸν λόγον $\alpha : \gamma$, λαμβάνομεν $\beta : \delta = \varepsilon : \zeta$.

326. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἡγουμένων ὁσωνδὴποτε ἴσων λόγων ἔχει πρὸς τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἐπομένων τὸν αὐτὸν λόγον, ὅν καὶ οἷοςδὴποτε τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸν ἐπόμενον αὐτοῦ.

Ἐστῶσαν οἱ λόγοι

$$\alpha : \beta, \gamma : \delta, \varepsilon : \zeta, \text{ κτλ.}$$

ἴσοι πάντες τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ π . Θὰ ἔχωμεν

$$\alpha = \beta \times \pi, \quad \gamma = \delta \times \pi, \quad \varepsilon = \zeta \times \pi.$$

ἄρα $\alpha + \gamma + \varepsilon = \beta \times \pi + \delta \times \pi + \zeta \times \pi.$

Ἀλλὰ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης εἶναι ἴσον μὲ $(\beta + \delta + \zeta) \times \pi, (159).$

Ἄρα εἶναι $\alpha + \gamma + \varepsilon = (\beta + \delta + \zeta) \times \pi.$

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει ὅτι ὁ λόγος $\alpha + \gamma + \varepsilon : \beta + \delta + \zeta$ εἶναι π , ἥτοι ἴσος ἐκάστῳ τῶν δοθέντων λόγων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

327. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπομένων τὸν αὐτὸν λόγον, ὅν καὶ ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἐπόμενον αὐτοῦ.

Διότι ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εἰς τὴν ἀναλογίαν

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta, \quad \text{δίδει}$$

$$\alpha + \gamma : \beta + \delta = \alpha : \beta.$$

328. **ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤ'.** Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων ἔχει πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐπομένων τὸν αὐτὸν λόγον, ὅν καὶ ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἐπόμενον αὐτοῦ.

Καλοῦντες π' ἐκάτερον τῶν ἴσων λόγων τῆς ἀναλογίας

$$α : β = γ : δ,$$

ἔχομεν $α = β \times π$, $γ = δ \times π$, ἄρα $α - γ = β \times π - δ \times π$

$$\text{Ἄλλὰ} \quad α \times π - δ \times π = (β - δ) \times π \quad (161)$$

ἔχομεν λοιπὸν $α - γ = (β - δ) \times π$

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει ὅτι ὁ λόγος $α - γ : β - δ$ εἶναι ἴσος τῷ $π$, ἥτοι ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

$$α - γ : β - δ = α : β$$

329. **ΠΟΡΙΣΜΑ.** Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δειχθεισῶν ἀναλογιῶν

$$α + γ : β + δ = α : β$$

$$α - γ : β - δ = α : β$$

ποριζόμεθα (324)

$$α + γ : β + δ = α - γ : β - δ.$$

330. **ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'.** Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὄρων ἔχει πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν δύο τελευταίων τὸν αὐτὸν λόγον, ὅν καὶ ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἐπόμενον αὐτοῦ.

Ἄς λάβωμεν τὴν ἀναλογίαν $α : β = γ : δ$. Ἐὰν εἰς τὴν ἐκ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων ταύτης προσερχομένην ἀναλογίαν $α : γ = β : δ$, ἐφαρμόσωμεν τὰ ἀνωτέρω δύο θεωρήματα (327 καὶ 328), λαμβάνομεν

$$α + β : γ + δ = α : γ \quad \text{ἢ} \quad β : δ$$

$$α - β : γ - δ = α : γ \quad \text{ἢ} \quad β : δ$$

Ἐκ δὲ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων τῶν ἀναλογιῶν τούτων λαμβάνομεν τὰς ἀναλογίας

$$α + β : α \quad \text{ἢ} \quad β = γ + δ : γ \quad \text{ἢ} \quad δ$$

$$α - β : α \quad \text{ἢ} \quad β = γ - δ : γ \quad \text{ἢ} \quad δ,$$

ὧν τὴν ὑπαρξιν ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

331. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν

$$\alpha + \beta : \alpha = \gamma + \delta : \gamma$$

$$\alpha - \beta : \alpha = \gamma - \delta : \gamma$$

ποριζόμεθα κατὰ τὴν ἐν ἐδαφίῳ 325 πρότασιν

$$\alpha + \beta : \gamma + \delta = \alpha - \beta : \gamma - \delta.$$

332. ΘΕΩΡΗΜΑ Η'. Τὰ γινόμενα τῶν ὁμοταγῶν ὄρων ὁσωνδήποτε ἀναλογιῶν ἀποτελοῦσιν ἀναλογία.

Ἄς λάβωμεν τὰς ἀναλογίας

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$

$$\varepsilon : \zeta = \eta : \theta$$

$$\iota : \kappa = \lambda : \mu.$$

Καλοῦντες π τὸν λόγον τῆς πρώτης ἀναλογίας, ρ τὸν τῆς δευτέρας καὶ σ τὸν τῆς τρίτης ἔχομεν

$$\alpha = \beta \times \pi,$$

$$\varepsilon = \zeta \times \rho,$$

$$\iota = \kappa \times \sigma,$$

Ἄρα $\alpha \times \varepsilon \times \iota = \beta \times \pi \times \zeta \times \rho \times \kappa \times \sigma$

ἤτοι $\alpha \times \varepsilon \times \iota = (\beta \times \zeta \times \kappa) \times (\pi \times \rho \times \sigma).$

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει ὅτι ὁ λόγος $\alpha \times \varepsilon \times \iota : \beta \times \zeta \times \kappa$ εἶναι $\pi \times \rho \times \sigma$. Ἀλλὰ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύεται ὅτι καὶ ὁ λόγος $\gamma \times \eta \times \lambda : \delta \times \theta \times \mu$ εἶναι $\pi \times \rho \times \sigma$. Ἄρα ὑπάρχει ἡ ἀναλογία,

$$\alpha \times \varepsilon \times \iota : \beta \times \zeta \times \kappa = \gamma \times \eta \times \lambda : \delta \times \theta \times \mu.$$

333. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν εἰς τὴν ἀναλογίαν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, ἐπαναληφθεῖσαν δις, τρις, καὶ γενικῶς μ φοράς, ἐφαρμόσωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, λαμβάνομεν

$$\alpha^2 : \beta^2 = \gamma^2 : \delta^2$$

$$\alpha^3 : \beta^3 = \gamma^3 : \delta^3$$

$$\alpha^\mu : \beta^\mu = \gamma^\mu : \delta^\mu$$

Ἄρα ὅταν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελῶσιν ἀναλογία, καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν καὶ οἱ κύβοι, καὶ γενικῶς οἱ αἰδηήποτε δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ἀποτελοῦσιν ἀναλογία.

334. **ΘΕΩΡΗΜΑ Θ'.** Ὅταν ἀριθμῶν αἱ δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ἀποτελῶσιν ἀναλογία, τότε καὶ αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσιν ἀναλογία.

Ἐὰν δηλαδή ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία

$$\alpha^3 : \beta^3 = \gamma^3 : \delta^3$$

θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ ἀναλογία

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta.$$

Διότι ἔστω χ ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας, ἧς οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι εἶναι α , β , γ . Ὑπαρχούσης τῆς ἀναλογίας $\alpha : \beta = \gamma : \chi$, θὰ ὑπάρχῃ κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα καὶ ἡ ἀναλογία

$$\alpha^3 : \beta^3 = \gamma^3 : \chi^3$$

Ἐὰν παραβάλωμεν ταύτην τὴν ἀναλογίαν πρὸς τὴν δοθεῖσαν, συνάγομεν $\chi^3 = \delta^3$, ὅθεν $\chi = \delta$. Ἀρα ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta.$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

α.) Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ δυνάμεθα νὰ πορίσθωμεν τὴν ἐξῆς·

$$\alpha \times \beta : \gamma \times \delta = (\alpha + \beta)^2 : (\gamma + \delta)^2.$$

β.) Προσθέτοντες τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους δύο ἀναλογιῶν λαμβάνομεν νέαν ἀναλογίαν, ἐὰν οἱ λόγοι τῶν δύο ἀναλογιῶν εἶναι ἴσοι, ἢ ἂν ὁ λόγος τῶν ἡγουμένων ἢ τῶν ἐπομένων τῆς πρώτης εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν ἡγουμένων ἢ τῶν ἐπομένων τῆς δευτέρας.

γ.) Τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὅρου πάσης ἀναλογίας εἶναι μείζον τοῦ ἄθροισματος τῶν λοιπῶν δύο ὁρῶν.

ΤΕΛΟΣ.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ.

Κεφάλαιον Α'.	σελ.
Πρώται ἔννοιαι. Ἀρίθμησις	1—11
Κεφάλαιον Β'.	
Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως	12—22
Κεφάλαιον Γ'.	
Περὶ πολλαπλασιασμοῦ	23—37
Κεφάλαιον Δ'.	
Περὶ διαιρέσεως	38—53
Κεφάλαιον Ε'.	
Περὶ διαιρετότητος	54—66
Κεφάλαιον ΣΤ'.	
Περὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου	67—77
Κεφάλαιον Ζ'.	
Περὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν	78—96
Κεφάλαιον Η'.	
Περὶ τῶν κλασμάτων	97—127
Κεφάλαιον Θ'.	
Περὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν	128—148
Κεφάλαιον Ι'.	
Περὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν	149—169

Κεφάλαιον ΙΑ'.

σελ.

Περὶ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος μέτρ. καὶ σταθμ. 170—177

Κεφάλαιον ΙΒ'.

Περὶ τετραγωνικῆς ρίζης 178—185

Κεφάλαιον ΙΓ'.

Περὶ κυβικῆς ρίζης 198—211

Κεφάλαιον ΙΔ'.Περὶ λόγου καὶ ποσῶν ἀναλόγων. Μέθοδος τῶν
τριῶν ἀπλῇ τε καὶ σύνθετος 213—222**Κεφάλαιον ΙΕ'.**Δύσιν διαφόρων προβλημάτων, ἥτοι προβλήματα
τόκου καὶ ὑφαιρέσεως, μερισμὸς εἰς μέρη
ἀνάλογα, προβλήματα ἐταιρίας, συνεζευγ-
μένη μέθοδος 224—237**Κεφάλαιον ΙΣΤ'.**

Περὶ ἀναλογιῶν 246—255



50 mata

152

76

228

100

128

400000

100

10

900

10

800

38

54

Ἔργα τοῦ αὐτοῦ συγγραφέως.

35 **ΕΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ**, ἐγκριθεῖσα ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου τῆς Δημοσίας Ἐκπαιδεύσεως ὡς τὸ καταλληλότετον βιβλίον διὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς ἀριθμητικῆς ἐν τοῖς Ἑλληνικοῖς σχολείοις. Ἐκδοσις ἐννάτη μετὰ βελτιώσεων καὶ προσθηκῶν 1878. δραχ. 2,50.

ΕΤΟΙΧΕΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ, Ἐκδοσις πέμπτη διεσκευασμένη, 1878. » 6,75.

ΕΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ, ἐγκρίσει τοῦ Ὑπουργείου τῆς Δημοσίας Ἐκπαιδεύσεως. Ἐκδοσις δευτέρα μετὰ βελτιώσεων καὶ προσθηκῶν, 1877. » 5.

ΕΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ, πρὸς τὴν ἐν τοῖς Γυμνασίοις διδασκαλίαν κτλ. Ἐκδοσις τετάρτη διεσκευασμένη, 1876. » 5.

ΕΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, πρὸς χρῆσιν τῶν Ἑλληνικῶν σχολείων, ἐγκριμένη ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου τῆς Δημοσ. Ἐκπαιδεύσεως 1873. » 2.

Τιμᾶται δραχ. 5.

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βεροίας

10. χρ. 2079



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΚΙΝΗΤΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΒΕΡΟΙΑΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΠΙΣΤΡΟΦΗΣ



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

500

ΛΑ

Λάκων, Β.

Α Ρ Ι Θ Μ Η Τ Ι Κ Η Ζ

ἀριθ. χρ. 2079

Ἡμερομηνία
ἐπιστροφῆς

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟΝ





ΔΗΜΟΣΙΑ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας