



ΒΕΡΟΙΑΣ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΒΕΡΟΙΑΣ

4500

Αριθ. τ. 3515/63

ΔΟΥΛΑ Γεωργίου
Ακωνίδου



119
Αντ. Τσιμπάνος.

τι προ-
ον και
ον και
ταυτην.
ον περι
ον υπαρ-
αποδει-
αυτερον.

μεν οτι
λαιρον-
ας πα-
ον απο-
και οτι,
ον. 'Ε-
προσγι-
ως εδι-
ει ριον

ραμμα-
ρασις
μετων

ἀποδείξεων. Ὅταν, θέλοντες ἴσως τὰ ἐπιδείξωμεν πολὺν μεταχειριζόμεθα γλῶσσαν ἄλλης ἐποχῆς· ὅταν, ἐπειδὴ ἢ συγγράφοιτες δυνάμεθα καὶ συμπληρώσωμεν εὐκόλως τὰ τῶν ἀποδείξεων, νομίζωμεν ὅτι δύναται καὶ οἱ μαθηταὶ τοῦ ξωσι τοῦτο μετὰ τῆς αὐτῆς εὐκολίας, τότε οὗτοι, ἀφ' ἑνὸς μὲν κολευόμενοι εἰς τὴν καταρτίσειν τῆς γλῶσσης, ἀφ' ἑτέρου δὲ τυγχάνοντες συνήθως εἰς τὴν συμπλήρωσιν τῶν παραλειπομένων μόνον δὲν μαρθάνουσι τὰ διδασκόμενα, ἀλλὰ καὶ σὺλλέγουσι δυστυχῶς τὴν ἰδέαν, ὅτι δὲν ἔχουσι δῆθεν τὴν ἀπαιτοῦσαν διαφορικὴν ἱκανότητα εἰς τὸ καὶ ἐννοήσωσι θεωρίας τὸσφ' ἡμεῖς καὶ τὰ μάθωσι ἀληθείας τὸσφ' δυσκόλους. Ἀπειράκις ἡκοῦμα μαθητὰς λέγοντας στερεοτύπως αὐτὰ ἐν ὁρὰ μεθ' ἡμῶν μαθηματικὰ, δὲν ἐγγεγνήθημεν δὲ ἐν ὁρᾷ μετὰ τοιαῦτα, καὶ ἡ ἰδέα αὕτη κατέστη εὐκόλως τὸσφ' κοινὴ καὶ νομίζεται τὸσφ' ἀλάνθαστος, ὥστε θίγῃς ὡς δικαιολόγησις ἀποχρῶσα. Ἀλλ' ἔχει ἄρα γε τὸ πᾶν βεβαίως ὅχι· καὶ λέγομεν τοῦτο ἐν πεποιθήσει καὶ ἐκ τῆς ἡμετέρας. Ἄν δὲν ἐφοδούμεθα μήπως νομισθῶμεν ὅτι θέλομεν καὶ περιλογίσωμεν, ἠθέλομεν ἀναφέρει πλεῖστα ὅσα ὀνόματα μαθημάτων οὐ μόνον ἐξέμαθον ἐν βραχεὶ διαστήματι χρόνου καὶ μεγάλης μάλιστα εὐκολίας ὅλην σχεδὸν τὴν ἐν τοῖς γυμνασίοις διδασκόμενὴν σειρὰν τῶν μαθηματικῶν, ἀλλὰ καὶ, ἐν ᾧ περὶ ἐφαίνοντο ἀποστρεφόμενοι ταῦτα ἐξ ἀνάγκης μόνον καταγεγραμμένοι, ἔλαβον κατόπιν τοσαύτην εἰς αὐτὰ κλίσην, ὥστε οἱ μὲν τῶν ἐπεδόθησαν ἀκολούθως εἰς τὴν σπουδὴν τῶν Φυσικομαθηματικῶν ἐπιστημῶν, οἱ δὲ ὑποστάντες εὐδοκίμως τὰς ἐν τῇ Στοιχειᾷ τῶν Εὐκλείδους Σχολῇ ἐξετάσεις ἐγένοντο δεκτοὶ τῶν πρώτων.

Οὐδέως λοιπὸν παράδοξον ἂν βλέπωμεν τοὺς μαθητὰς, σπανιωτάτων ἐξαιρέσεων, ἀποστρεφόμενους τὰ μαθηματικὰ, ὅποια θυσιάζουσιν ἀνωφελῶς τὸσας ὥρας καὶ τὸσους κόπους, γίνηται χρῆσις βιβλίων γεγραμμένων εἰς γλῶσσαν ἀσυνήτου, ὅταν αἱ ἐν αὐτοῖς ἀποδείξεις ἐκτίθονται συντετμημέναι καὶ ὅταν ἐπιβαρύνηται ὁ νοῦς αὐτῶν διὰ θεωριῶν καὶ θεωρημάτων οὐδ' ἐπὶ τοῦ θέλοναι ἀισθανθῆναι τὴν ἀνάγκην καθ' ὅλην διάρκειαν τῶν γυμνασιακῶν αὐτῶν σπουδῶν.

Τούτου ἔνεκα κατεβάλομεν πᾶσαν δυνατὴν προσπάθειαν, ἵνα καὶ ἐν τῇ παρουσίᾳ ἐκδόσῃ, ὥς καὶ εἰς πᾶν ὅ,τι μέχρι τοῦδε ἐγράψαμεν, πρῶτον μὲν γείνωμεν ὅσον ἔρεστιν ἡμῖν σαφεῖς καὶ εὐληπτοί, δεύτερον δὲ ἐκθέσωμεν τὰς ἀποδείξεις ἄνευ δυσροήτων συντομιῶν, καὶ τρίτον ἀποφύγωμεν πᾶν ὅ,τι ἢ δὲν ἦτο ἀπολύτως ἀναγκαῖον πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ ὅλου ἢ ἡδύνατο τὰ παραλειφθῆναι χωρὶς οἱ ἐν Γυμνασίοις σπουδάζοντες τὰ λάβωσιν οὐδεμίαν ἀνάγκην τούτου. Ἐχόντες δὲ ὑπ' ὄψιν τὰς ἐπὶ τῶν προηγουμένων ἐκδόσεων καὶ τῶν ἄλλων ἡμῶν ἔργων ἐπιδοκιμασίας τοσοῦτων σπουδῶν συναδέλφων, νομίζομεν ὅτι μᾶς εἶναι ἐπιτετραμμένον τὰ φρονῶμεν ὅτι καὶ ἡ παροῦσα θέλει τύχει τῆς αὐτῆς ὑποδοχῆς.

Ἐν Ἀθήναις, τῇ 4 Ὀκτωβρίου 1870.

A. B. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΣ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας



ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Ὁ τόπος, ὁ ἐν τῷ ἀπροσδιορίστῳ διαστήματι ὑπὸ σώματος τινος κατεχόμενος, καλεῖται ὄγκος τοῦ σώματος.
2. Τὸ ὄριον, ὅπερ χωρίζει σῶμά τι ἀπὸ τοῦ περικυκλοῦντος αὐτὸ διαστήματος, καλεῖται ἐπιφάνεια τοῦ σώματος.
3. Γραμμὴ καλεῖται ὁ τόπος, ἐνθα αἱ ἐπιφάνειαι δύο σωμάτων συαπαντῶνται.
4. Σημεῖον καλεῖται ὁ τόπος, ἐνθα δύο γραμμαὶ τέμνονται.
5. Οἱ ὄγκοι, αἱ ἐπιφάνειαι καὶ αἱ γραμμαὶ ἐννοοῦνται ἀνεξαρτήτως τῶν εἰς αὐτὰ ἀνήκονσι σωμάτων.
6. Ὀνομάζουσιν ἀδιαφόρως σχήματα τοὺς ὄγκους, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰς γραμμάς.
7. Ἀντικείμενον τῆς Γεωμετρίας εἶναι ἡ καταμέτρησις τῆς ἐκτάσεως τῶν σχημάτων καὶ ἡ σπουδὴ τῶν ιδιοτήτων αὐτῶν.
8. Εὐθεῖα γραμμὴ καλεῖται ἀπροσδιόριστός τις γραμμὴ, ἥτις εἶναι συντομωτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς, ἐνούσης δύο ὁποιαδήποτε τῶν σημείων αὐτῆς.
9. Πᾶσα γραμμὴ μὴ εὐθεῖα, ἀλλὰ συντεθειμένη ἐξ εὐθειῶν γραμμῶν, καλεῖται τεθλασμένη ἢ πολύγωνος γραμμὴ.
10. Πᾶσα γραμμὴ, ἥτις δὲν εἶναι εὐθεῖα οὐδὲ σύγκειται ἐξ εὐθειῶν γραμμῶν, καλεῖται καμπύλη γραμμὴ.
11. Ἐπιφάνειά τις καλεῖται ἐπίπεδον, ὅταν ᾖναι τοιαύτη ὥστε, ἐὰν ληφθῶσιν ἐπ' αὐτῆς δύο κατ' ἀρέσκειαν σημεία καὶ ἐνωθῶσι ταῦτα

δι' εὐθείας γραμμῆς, ἡ ἐνόνουσα τὰ σημεῖα ταῦτα εὐθεῖα νὰ κῆται ὁλόκληρος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

12. Πᾶσα μὴ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, μὴδ' ἐξ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν συντεθειμένη, καλεῖται καμπύλη ἐπιφάνεια.

13. Γωνία καλεῖται τὸ σχηματιζόμενον σχῆμα ΒΑΓ ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ΒΑ, ΓΑ, περατομένων εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν Α.

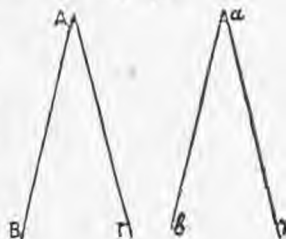
Τὸ μὲν κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς Α καλεῖται κορυφή τῆς γωνίας, αἱ δὲ εἰς αὐτὸ περατούμεναι εὐθεῖαι ΒΑ, ΓΑ πλευραὶ τῆς γωνίας.

Ἡ γωνία σημειοῦται ἄλλοτε μὲν διὰ μόνου τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς αὐτῆς Α, ἄλλοτε δὲ διὰ τῶν τριῶν γραμμάτων ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ, ἀλλὰ τότε τὸ γράμμα Α τῆς κορυφῆς αὐτῆς τίθεται πάντοτε ἐν τῇ μέσῳ τῶν δύο ἄλλων. Μεταχειριζόμεθα τὰ τρία γράμματα, ὅταν πολλαὶ γωνίαι ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφήν.

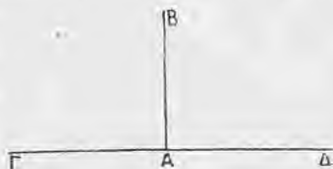
14. Ὄταν δύο γωνίαι Α καὶ α ἐπιτιθέμεναι ταυτίζωνται, τότε λέγονται ἴσαι. Ἵνα ἴδωμεν ἂν δύο γωνίαι Α καὶ α ἐπιτιθέμεναι ταυτίζωνται, φέρομεν τὴν πλευρὰν αβ τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΔΒ τῆς ἑτέρας οὕτως, ὥστε ἡ κορυφή α τῆς πρώτης νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Α τῆς δευτέρας, καὶ παρατηροῦμεν ἂν καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ αγ τῆς πρώτης λάβῃ τὴν διεύθυνσιν ΑΓ τῆς δευτέρας. Ὄταν τοῦτο συμβαίῃ, τότε αἱ δύο γωνίαι Α καὶ α ταυτίζονται, καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσαι.

15. Δύο γωνίαι ΑΓΔ, ΒΓΕ λέγονται κατὰ κορυφήν, ὅταν ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφήν Γ καὶ αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΓΔ τῆς μιᾶς εἶναι αἱ προεκβολαὶ τῶν πλευρῶν ΓΒ, ΓΕ τῆς ἄλλης.

16. Γωνία τις Α λέγεται διπλασία, τριπλασία, τετραπλασία. . . . ἑτέρα; τινὸς γωνίας Δ, ὅταν ἐμπεριέχῃ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς δύο, τρεῖς, τέσσαρες γωνίας ἴσας τῇ Δ. Αἱ γωνίαι λοιπὸν συγκρίνονται πρὸς ἀλλήλας ὡς καὶ τὰ λοιπὰ μεγέθη.



17. Ὄταν εὐθεῖα τις AB συναπαντᾷ ἄλλην τινὰ εὐθεῖαν $ΓΔ$ οὕτως, ὥστε αἱ δύο προσκείμεναι γωνίαι $ΓAB$, $BAΔ$ νὰ ᾖναι ἴσαι, τότε ἡ μὲν εὐθεῖα AB λέγεται *κάθετος* ἐπὶ τῆς $ΓΔ$, αἱ δὲ προσκείμεναι ἴσαι γωνίαι $ΓAB$, $BAΔ$ καλοῦνται *ὀρθαὶ γωνίαι*.
Θέλομεν ἀποδείξει μετ' ὀλίγον ὅτι ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (πρότ. 1, πόρ.).



18. Πᾶσα γωνία μικροτέρα τῆς ὀρθῆς καλεῖται *ὀξεῖα γωνία*, πᾶσα δὲ γωνία μεγαλειτέρα τῆς ὀρθῆς καλεῖται *ἀμβλεία*.

19. Δύο γωνίαι λέγονται *συμπληρωματικαί*, ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ᾖναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθὴν, καὶ *παραπληρωματικαί*, ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΟΡΩΝ ΤΙΝΩΝ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΩΝ.

Ἀξίωμα καλεῖται πᾶσα πρότασις ἀφ' ἑαυτῆς φανερά.

Θεώρημα λέγεται ἀλήθεια, καθισταμένη φανερά διὰ τινος συλλογισμοῦ, ὅστις καλεῖται *ἀπόδειξις* τοῦ θεωρήματος.

Πρόβλημα ὀνομάζεται πᾶσα πρότασις, ἐν ᾗ μᾶς ζητεῖται τι ἢ τινὰ ἐξαρτώμενα ἐκ τῶν ἐν αὐτῇ δεδομένων. Ἡ εὕρεσις τῶν ζητούμενων καλεῖται *λύσις* τοῦ προβλήματος.

Λήμμα λέγεται πᾶσα δευτερεύουσα πρότασις, ἐπιβοηθητικῶς λαμβανομένη πρὸς ἀπόδειξιν θεωρήματός τινος ἢ πρὸς λύσιν προβλήματος τινος.

Πρότασις εἶναι κοινὴ λέξις, ἀποδιδομένη ἀδιαφόρως εἰς τὰ θεωρήματα, προβλήματα καὶ λήμματα.

Πόρισμα καλεῖται ἡ ἐκ μιᾶς ἢ καὶ ἐκ πλειοτέρων προτάσεων ἀπορρέουσα συνέπεια.

Σχόλιον λέγεται ἡ ἐπὶ μιᾶς ἢ καὶ ἐπὶ πλειοτέρων προτάσεων γενομένη παρατήρησις πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦ νὰ καταδειχθῇ ὁ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχων σύνδεσμος, ἢ ἡ ὠφέλεια, ἢ ὁ περιαρισμὸς, ἢ ἡ ἔκτασις αὐτῶν.

Ἵσότητες ὀνομάζεται τὸ σύνολον τῶν δεδομένων, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ ἀπόδειξις, ἢ ἡ ψευδὴς καὶ ἄτοπος θέσις, ἣν πρὸς καιρὸν παραδεχόμεθα πρὸς ἑμμεσον προτάσεώς τινος ἀπόδειξιν.

Τὸ σημεῖον $=$ ἀπαγγέλλεται ἴσον, καὶ σημαίνει ὅτι τὰ δι' αὐτοῦ συνδεόμενα μέρη εἶναι ἴσα. Παραδείγματός χάριν, ἡ παράστασις $A=B$

σημαίνει ὅτι τὸ A εἶναι ἴσον τῷ B . Τὰ μέρη A καὶ B , τὰ διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος συνδεόμενα, καλοῦνται *μέλη* τῆς ἰσότητος.

Ὅταν θέλωμεν νὰ παράστήσωμεν ὅτι ποσότης τις A εἶναι μεγαλειτέρα ἢ μικροτέρα τῆς B , γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον $>$ ἢ τὸ $<$ οὕτως, ὥστε ἡ μεγαλειτέρα ποσότης νὰ εὐρίσκηται εἰς τὸ ἄνοιγμα τῆς ὑπὸ τοῦ σημείου σχηματιζομένης γωνίας. Παραδείγματος χάριν, ἡ μὲν παράστασις $A > B$ σημαίνει ὅτι τὸ A εἶναι *μεγαλειτερον* τοῦ B , ἡ δὲ παράστασις $A < B$, ὅτι τὸ A εἶναι *μικρότερον* τοῦ B . Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται διὰ τοῦτο σημεῖον *ἀριστέτης*.

Τὸ σημεῖον $+$ ἀπαγγέλλεται *σὺν* ἢ *πλέον* καὶ σημαίνει πρόσθεσιν. Π. χ. ἡ παράστασις $A + B$ ἀπαγγέλλεται A *σὺν* B ἢ A *πλέον* B , καὶ σημαίνει ὅτι ἡ ποσότης B προστίθεται εἰς τὴν A .

Τὸ σημεῖον $-$ ἀπαγγέλλεται *πλήρ* ἢ *μείον* καὶ σημαίνει ἀφαίρεσιν. Π. χ. ἡ παράστασις $A - B$ ἀπαγγέλλεται A *πλήρ* B ἢ A *μείον* B , καὶ σημαίνει ὅτι ἀπὸ τῆς ποσότητος A ἀφαιρεῖται ἡ ποσότης B . Ἡ παράστασις $A + B - \Gamma$ ἀπαγγέλλεται A *πλέον* B *πλήρ* Γ , καὶ σημαίνει ὅτι ἡ ποσότης Γ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσοτήτων A καὶ B .

Τὸ σημεῖον $\times$ ἀπαγγέλλεται *ἐπὶ* καὶ σημαίνει πολλαπλασιασμόν. Π. χ. ἡ παράστασις $A \times B$ ἀπαγγέλλεται A *ἐπὶ* B , καὶ παριστᾷ τὸ γινόμενον τῆς ποσότητος A *ἐπὶ* τὴν ποσότητα B . Ἀντὶ τοῦ σημείου $\times$ μεταχειριζόμεθα πολλάκις μίαν μόνην στιγμὴν. Π. χ. αἱ παραστάσεις $A \times B$ καὶ $A \cdot B$ σημαίνουσιν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πρᾶγμα.

Ἡ παράστασις $A \times (B + \Gamma - \Delta)$ σημαίνει τὸ γινόμενον τῆς ποσότητος A *ἐπὶ* τὴν $B + \Gamma - \Delta$. Μεταχειριζόμεθα τὴν παρένθεσιν $()$, ἵνα δείξωμεν ὅτι ἡ ἐντὸς αὐτῆς ποσότης $B + \Gamma - \Delta$ θεωρεῖται ὡς μία καὶ μόνη, τουτέστιν ὡς ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου. Ὡσαύτως $(A + B) \times (\Gamma - \Delta + E)$ παριστᾷ τὸ γινόμενον τῆς ποσότητος $A + B$, *ἐπὶ* τὴν ποσότητα $\Gamma - \Delta + E$, τῶν ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ποσοτήτων θεωρουμένων ὡς ἀποτελουσῶν μίαν καὶ μόνην ποσότητα.

Ὁ πρό τιнос γραμμῆς ἡ ποσότητος γραφόμενος ἀριθμὸς καλεῖται *συντελεστής*, καὶ δεικνύει ποσάκις ἡ γραμμὴ αὕτη ἡ ἡ ποσότης πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ. Παραδείγματος χάριν, ἡ παράστασις $4AB$ σημαίνει ὅτι γραμμὴ AB ἐπαναλαμβάνεται τετράκις ἢ ὅτι πολλαπλασιάζεται

ἐπὶ 4. Ἡ παράστασις $\frac{2}{3}AB$ σημαίνει ὅτι λαμβάνονται τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς

γραμμῆς AB ἡ παράστασις $3A$ ὅτι ἡ ποσότης A λαμβάνεται τρίς.
Οἱ ἀριθμοὶ $4, \frac{2}{3}, 3$ εἶναι οἱ συντελεσταί.

Τὸ τετράγωνον τῆς γραμμῆς AB παρίσταται οὕτως $\overline{AB^2}$, ὁ δὲ κύβος, οὕτως $\overline{AB^3}$. Ἐν οἰκείῳ τόπῳ θέλομεν ἐξηγήσει τί σημαίνει τὸ τετράγωνον ἢ ὁ κύβος γραμμῆς τινος.

Τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ καλεῖται *ρίζικόν* καὶ παριστᾷ ἐξαγωγὴν ρίζης τινὸς τῆς ὑπ' αὐτὸ γεγραμμένης ποσότητος, ἥτις καλεῖται διὰ τοῦτο *ὑπέρ-ρίζος*. Ἵνα δείξωσι ποία ρίζα πρέπει νὰ ἐξαχθῇ, γράφουσιν εἰς τὸ ἀνοιγμὰ τοῦ ρίζικοῦ τὸν δεικνύοντα τὸν βαθμὸν τῆς ρίζης ἀριθμὸν, ὅστις καλεῖται *δείκτης* τῆς ρίζης· οὕτως ἡ παράστασις $\sqrt[2]{A}$ ἢ ἀπλῶς $\sqrt{A}$ σημαίνει ὅτι πρόκειται νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῆς ποσότητος A · ἡ παράστασις $\sqrt[3]{A \times B}$ σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ γινομένου $A \times B$. Οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 3 εἶναι οἱ δείκται τῶν ἐξαχθομένων ριζῶν.

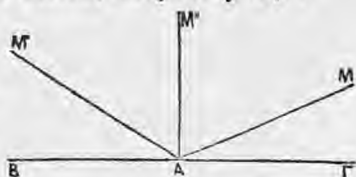
ΑΞΙΩΜΑΤΑ

1. Δύο ποσότητες ἴσαι μὲ τρίτην· τινὰ εἶναι καὶ πρὸς ἀλλή-
λας ἴσαι.
2. Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλύτερον μέρος τινὸς αὐτοῦ.
3. Τὸ ὅλον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν αὐτοῦ.
4. Ἐξ ἐνὸς σημείου εἰς ἄλλο μίαν μόνην εὐθεῖαν γραμμὴ ἄγεται.
5. Δύο ὁποιαδήποτε μερεθῇ, γραμμαί, ἐπιγάνηαι, στερεά, εἶναι
ἴσα, ὅταν ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζωνται καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἑκτασιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ.

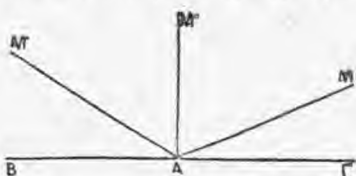
Ἐξ ἐνὸς σημείου A , κειμένου ἐπὶ τινος εὐθείας $BΓ$, δυνάμεθα
νὰ ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας καὶ μίαν μόνην.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἃς ἄξωμεν
ἐκ τοῦ σημείου A πρὸς τὸ μέρος $ΑΓ$
εὐθεῖαν τινὰ $ΑΜ$. Αὕτη σχηματίζει
δύο προσκειμένας γωνίας $ΜΑΓ$, $ΜΑΒ$
ἐξ ὧν ἡ πρώτη εἶναι προφανῶς μι-



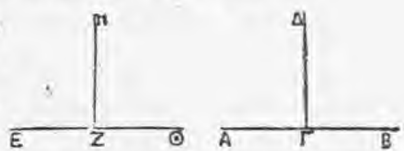
κροτέρα τῆς δευτέρας. Ἄν ὑποθέσωμεν ἔπειτα ὅτι ἡ εὐθεῖα $ΑΜ$ στρέ-
φεται περὶ τὸ σημεῖον A πρὸς τὸ μέρος $ΑΒ$, εἶναι φανερόν ὅτι ἡ μὲν
μικροτέρα γωνία $ΜΑΓ$ θέλει βαίνει συνεχῶς αὐξανόμενη, ἡ δὲ μεγα-

λειτέρα MAB θέλει συνεχῶς ἐλαττωθῆναι. Ὄταν διαρκούσης τῆς περιστροφῆς ἡ εὐθεΐα AM λάβῃ τὴν θέσιν AM' , ἡ μὲν γωνία MAG θέλει γίνεαι $M'AG$, ἡ δὲ MAB θέλει γίνεαι $M'AB$, καὶ εἶναι φανερόν ὅτι ἡ $M'AG$ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς $M'AB$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ πρότερον μικροτέρα γωνία, συνεχῶς αὐξανομένη, κατέστη μεγαλειτέρα τῆς πρότερον μεγαλειτέρας, συνεχῶς ἐλαττουμένης, ἔπεται ὅτι ὑπάρχει θέσις τις AM'' , μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων AM , AM' κειμένη, καὶ μία μόνη, ἐν ᾗ αἱ δύο προσκείμεναι γωνίαι $M''AG$, $M''AB$ εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ τότε κατὰ τὸν ὀρισμὸν 17 ἡ εὐθεΐα AM'' εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς BG . Λοιπὸν ἐξ ἑνὸς σημείου A , κειμένου ἐπὶ τινος εὐθείας BG κτλ.



Πόρισμα. Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐστω AG κάθετος ἐπὶ τῆς AB , καὶ HZ κάθετος ἐπὶ τῆς EO . λέγω ὅτι ἡ ὀρθὴ γωνία AGD εἶναι ἴση τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ EZH . Διότι,

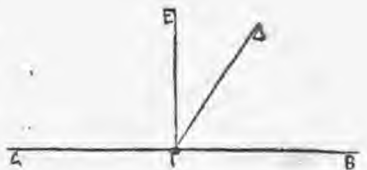


ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεΐαν EO ἐπὶ τῆς AB οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Z νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ G , ἡ εὐθεΐα ZH θέλει λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς GD , διότι, ἂν ἐλάμβανε διάφορον διεύθυνσιν, ἠθέλομεν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου G ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας AB δύο κάθετους, τὴν εὐθεΐαν GD καὶ τὴν εὐθεΐαν, ἐφ' ἧς ἠθελε καθ' ὑπόθεσιν πέσει ἡ ZH , τοῦθ' ὅπερ ἀδύνατον κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα εὐθεΐα GD , συναπαρτιῶσα ἄλλην τινὰ AB , σχηματίζει μετ' αὐτῆς δύο προσκείμενας γωνίας AGD , DGB , τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

Ἐκ τοῦ σημείου G ἄς ὑψώσωμεν ἐπὶ τῆς AB τὴν κάθετον GE . Ἐπειδὴ προφανῶς ἡ γωνία AGD εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν AGE καὶ EGD , θέλομεν ἔχει



$$AGD + DGB = AGE + EGD + DGB.$$

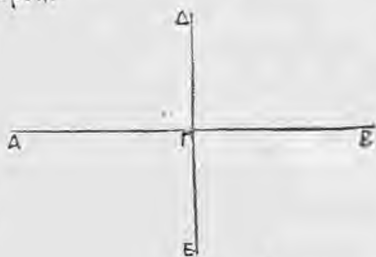
Ἀλλ' ἡ γωνία AGE εἶναι ὀρθή, τὸ δὲ ἄθροισμα $EGD + DGB$ εἶναι ἴσον τῇ γωνίᾳ EGB , ἥτις εἶναι ὡσαύτως γωνία ὀρθή. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα

Δημοσίον Κέντρον Ἑκδόσεων

σμα τῶν τριῶν γωνιῶν $\Delta Γ Ε$, $Ε Γ Δ$, $\Delta Γ Β$, καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν προσκειμένων γωνιῶν $\Delta Γ Δ$ καὶ $\Delta Γ Β$, εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα δύο προσκειμένων κτλ.

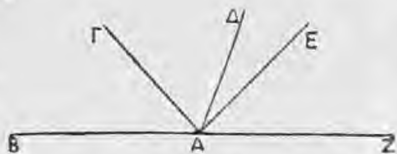
Πόρισμα 1. Ἐάν ἡ μία τῶν γωνιῶν $\Delta Γ Δ$, $\Delta Γ Β$ ᾗτο ὀρθή, καὶ ἡ ἑτέρα ᾗθελεν εἶναι ὡσαύτως γωνία ὀρθή.

Πόρισμα 2. Ἐάν ἡ εὐθεΐα $\Delta Β$ ᾗναι κάθετος ἐπὶ τῆς $\Delta Β$, ἀντιστρόφως, ἡ $Α Β$ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς $\Delta Ε$.



Διότι, ἐπειδὴ ἡ $\Delta Ε$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς $Α Β$, ἡ γωνία $\Delta Γ Δ$ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία $\Delta Γ Δ$ εἶναι ὀρθή, ἡ προσκειμένη ταύτῃ $\Delta Γ Ε$ θέλει εἶναι ὡσαύτως ὀρθή, ἐπομένως ἡ $Α Β$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς $\Delta Ε$.

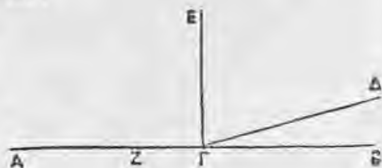
Πόρισμα 3. Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν $Β Α Γ$, $Γ Α Δ$, $\Delta Α Ε$, $Ε Α Ζ$, τῶν σχηματιζομένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας $Β Ζ$ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Διότι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἄθροισμα εἶναι προφανῶς ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν $Β Α Γ$ καὶ $Γ Α Ζ$, ὅπερ ἰσοῦται μὲ δύο γωνίας ὀρθάς.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐάν δύο εὐθεΐαι ἔχωσι δύο σημεῖα κοινά, αἱ εὐθεΐαι αὗται συμπίπτουσι καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἑκτασιν.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $Α$ καὶ $Ζ$ εἶναι τὰ κοινὰ εἰς τὰς περὶ ὧν ὁ λόγος εὐθείας σημεῖα. Ἐν πρώτοις κατὰ τὸ 4 ἄξιωμα τὰ μεταξὺ τούτων μέρη τῶν εὐθειῶν ταυτίζονται.



Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι αἱ εὐθεΐαι αὗται ἀποχωρίζονται ἀπὸ τινος σημείου $Γ$, καὶ ἡ μὲν λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν $Γ Β$, ἡ δὲ τὴν $Γ Δ$. Ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ $\Delta Γ Β$ εἶναι εὐθεΐα, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν $\Delta Γ Ε$, $Ε Γ Β$ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς (πρότ. 2), καὶ ἐπειδὴ ἡ $\Delta Γ Δ$ ὑποτίθεται εὐθεΐα, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν $\Delta Γ Ε$, $Ε Γ Δ$ θέλει εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἰσότητα

$$\Delta Γ Ε + Ε Γ Β = \Delta Γ Ε + Ε Γ Δ,$$

ἐξ ἧς, ἀφαιροῦντες ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὴν αὐτὴν γωνίαν $\Delta Γ Ε$, πορίζομεθα $\text{ΕΓΒ} = \text{ΕΓΔ}$, τουτέστι τὸ ὅλον ἴσον μὲ τὸ μέρος αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον (ἀξ. 2). Λοιπὸν ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἔχωσι κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΑΓΔ , ΔΓΒ ᾖται ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, αἱ ἐξωτερικαὶ αὐτῶν πλευραὶ ΑΓ , ΓΒ θέλουσι κεῖσθαι ἐπ' εὐθείας.

Διότι, ἐὰν ἡ πλευρὰ ΓΒ δὲν ᾖται ἢ προεκβολὴ τῆς ΑΓ , ἢ ὑποθέσωμεν ὅτι ΓΕ εἶναι ἡ προεκβολὴ αὐτῆς. Ἐπειδὴ τότε ἡ γραμμὴ ΑΓΕ εἶναι εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΑΓΔ , ΔΓΕ θέλει εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς (προτ. 2). Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΑΓΔ , ΔΓΒ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\text{ΑΓΔ} + \text{ΔΓΕ} = \text{ΑΓΔ} + \text{ΔΓΒ}.$$

Ἀφαιροῦντες ἐξ ἑκατέρου μέλους τῆς ἰσότητος τὴν αὐτὴν γωνίαν ΑΓΔ , θέλομεν ἔχει $\text{ΔΓΕ} = \text{ΔΓΒ}$, τουτέστι τὸ ὅλον ἴσον μὲ τὸ μέρος, ὅπερ ἄτοπον (ἀξ. 2). Λοιπὸν ΓΒ θέλει εἶναι ἡ προεκβολὴ τῆς ΑΓ , ἐπομένως αἱ ἐξωτερικαὶ πλευραὶ ΑΓ , ΓΒ κείνται ἐπ' εὐθείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ

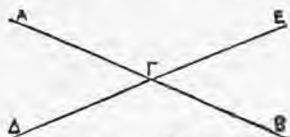
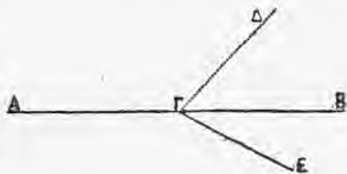
Ὅλαι αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἐστῶσαν π. χ. αἱ δύο κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΓΔ , ΕΓΒ . Ἐπειδὴ κατὰ τὸν ὀρισμὸν τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν (ὅρ. 15) αἱ γραμμαὶ ΑΓΒ , ΔΓΕ εἶναι εὐθεῖαι, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΑΓΕ , ΕΓΒ , καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων προσκειμένων ΑΓΕ , ΑΓΔ , θέλει εἶναι ἑκάτερον ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\text{ΑΓΕ} + \text{ΕΓΒ} = \text{ΑΓΕ} + \text{ΑΓΔ},$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως ἀφαιροῦντες τὴν κοινὴν γωνίαν ΑΓΕ τὴν ἰσότητα $\text{ΕΓΒ} = \text{ΑΓΔ}$. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἡθέλομεν ἀποδείξει ὅτι καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΓΕ , ΔΓΒ εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν ὅλαι αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

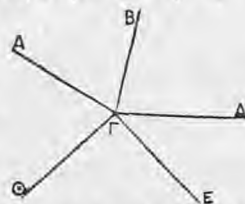
Σχόλιον. Τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων γωνιῶν ΑΓΔ , ΔΓΒ , ΒΓΕ , ΕΓΑ , τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ΑΒ , ΔΕ , ἰσοῦται



μέ τεσσαρας ὀρθάς. Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων, καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων, ἰσοῦται ἐκάτερον με δύο ὀρθάς.

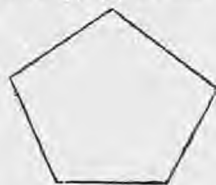
Καὶ ἐν γένει, τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδο-
χικῶν γωνιῶν $\Delta\Gamma\text{B}$, $\text{B}\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma\text{E}$, $\text{E}\Gamma\Theta$, $\Theta\Gamma\Delta$,
τῶν σχηματιζομένων ἐξ ὁσωνδήποτε εὐθειῶν
 $\Delta\Gamma$, $\text{B}\Gamma$, $\Delta\Gamma$, κτλ. εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ πε-
ρατουμένων, ἰσοῦται με τεσσαρας ὀρθάς.

Διότι, ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Δ σχηματίσωμεν τεσσαρας γωνίας ὀρθάς
ἄγοντες δύο καθέτους ἐπ' ἀλλήλων εὐθείας, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ
ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν θέλει εἶναι ἴσον με τὸ ἄθροι-
σμα τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.



ΟΡΙΣΜΟΙ

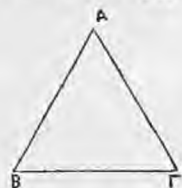
1. Σχήμα ἐπίπεδον καλεῖται μέρος ἐπιπέδου ὑπὸ γραμμῶν παν-
ταχόθεν περατούμενον. Ἐὰν αἱ περατούσαι τὸ
ἐπίπεδον γραμμαὶ ᾖναι εὐθεῖαι, τὸ μὲν σχῆμα
καλεῖται εὐθύγραμμον ἢ πολὺγωνον, αἱ δ' εὐ-
θεῖαι γραμμαὶ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου.



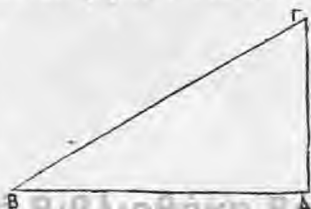
2. Περίμετρος τοῦ πολυγώνου καλεῖται τὸ
ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀποτελούμενον μέγεθος, ἢ τὸ ἄθροισμα
αὐτῶν.

3. Τὸ ἐκ τριῶν πλευρῶν συνιστάμενον πολὺγωνον καλεῖται τρί-
γωνον καὶ εἶναι τὸ ἀπλούστερον πάντων τῶν πολυγώνων. Τετρά-
πλευρον καλεῖται τὸ ἐκ τεσσάρων πλευρῶν ἀποτελούμενον πεντά-
πλευρον ἢ πεντάγωνον τὸ ἔχον πέντε πλευράς, καὶ οὕτω καθεξῆς.

4. Τὸ ἔχον καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ
πλευράς ἴσας τρίγωνον καλεῖται ἰσό-
πλευρον. Τὸ ἔχον τὰς δύο μόνον
πλευράς ΔB , $\Delta\Gamma$ ἴσας καὶ τὴν τρίτην
ἄνισον καλεῖται ἰσοσκελές. Τὸ ἔχον
καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ πλευράς ἄνισους καλεῖται τρίγωνον σκαληνόν.



5. Τὸ ἔχον μίαν γωνίαν Δ ὀρθὴν τρί-
γωνον καλεῖται ὀρθογώνιον. Ἡ ἀπέ-
ναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας Δ πλευρὰ $\text{B}\Gamma$
καλεῖται ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου
τριγώνου.



6. Διαγώνιος πολυγώνου τινός ΑΒΓΔΑΔ, ΓΕ κτλ., ἐνόησεν τὰς κορυφὰς δύο προσκειμένων γωνιών. Εἰς τὰ πολύγωνα προσκειμέναι γωνίαι καλοῦνται αἱ ἔχουσιν τὰς κορυφὰς αὐτῶν εἰς τὰ ἄκρα τῆς αὐτῆς τοῦ πολυγώνου πλευρᾶς. Παραδείγματός χάριν, γωνίαι Α καὶ Β, Β καὶ Γ, Ε καὶ Δ, εἰς τὰς προσκειμέναι, διότι αἱ κορυφαὶ αὐτῶν Α, Β, Β καὶ Γ, Ε καὶ Δ κεῖνται ἀνὰ δύο ἐπὶ τῶν ἁκρῶν τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΕΔ τοῦ πολυγώνου.

7. Ἰσοπλευρον πολύγωνον καλεῖται τὸ ὅπου πλεωρὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας, καὶ ἰσογώνον γωνίας ἴσας.

8. Δύο πολύγωνα λέγονται ἰσοπλευρὰ εἰς αὐτῶν ἴσας ἐκάστην ἐκάστη καὶ ὁμοίως ἀναχωρῶν τις ἀπὸ δύο ἴσας πλευρᾶς, καὶ τῶν πολυγώνων κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν, τοῦ ἑνὸς ἴσην τῇ δευτέρᾳ τοῦ ἑτέρου, τῇ τρίτῃ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτω καθεξῆς. Πολύγωνα, ὅταν ἀντὶ τῶν πλευρῶν ἔχῃ ἐκάστην ἐκάστη καὶ ὁμοίως κειμένας.

Αἱ ἴσαι πλευραὶ ἢ αἱ ἴσαι γωνίαι καλεῖται ὁμοίαι.

9. Πολύγωνόν τι καλεῖται κυρτόν, ὅπου καὶ ὁλόκληρον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος μιᾶς τοῦ ποιοσδὴποτε τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, προεκβληθείσης. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ΑΒΓΔΕ, ὅπερ καὶ ὁλόκληρον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς προεκβληθείσης μιᾶς ὁποιοσδὴποτε πλευρᾶς αὐτοῦ ΑΒ.

Ἡ περίμετρος παντός κυρτοῦ πολυγώνου ἐστὶν ἡ ἀθροῖσα τῶν πλευρῶν. Ἐάν τις ἀναπαύσῃ τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἕως τοῦ τέλους τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔΕ εἰς περισσότερα τῶν σημείων Μ, Ν, Η, Κ, τότε, ἐπεὶ τὰ σημεῖα Μ, Ν, Η, Κ, τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΔΕ κεῖνται ἐπὶ αὐτῶν, ὁ κύκλος διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ν, δι' οὗ διέρχεται ἡ εὐθεῖα ΓΒ, ἢ πρὸς ἀλλοῦ ἢ ἀπὸ τῆς, θὰ ὑπάρχωσι πρὸς τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἕως τοῦ τέλους τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔΕ.

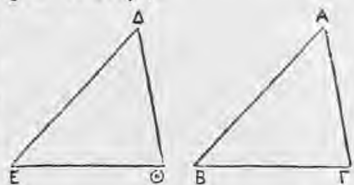
νῶς μέρη τοῦ σχήματος $\Delta\text{ΒΓ}$ κείμενα ἑκατέρωθεν τῆς προεκβολῆς αὐτῆς, ἐπομένως τὸ πολυγώνον δὲν θέλει εἶναι κυρτόν.

Εἰς τὰ τέσσαρα πρῶτα βιβλία τῆς Γεωμετρίας, ὅπου περὶ ἐπιπέδων μόνον σχημάτων γίνεται λόγος, δὲν θέλομεν κάμει λόγον εἰμὴ περὶ τῶν κυρτῶν μόνον πολυγώνων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχοῦσας αὐτὴν πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρῳ.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὰ δύο τρίγωνα $\Delta\text{ΒΓ}$, $\Delta\text{ΕΘ}$, ἡ γωνία Λ εἶναι ἴση τῇ Δ , ἡ πλευρὰ $\Delta\text{Β}=\Delta\text{Ε}$ καὶ ἡ πλευρὰ $\Delta\Gamma=\Delta\Theta$. Λέγω ὅτι τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος τρίγωνα εἶναι ἴσα.



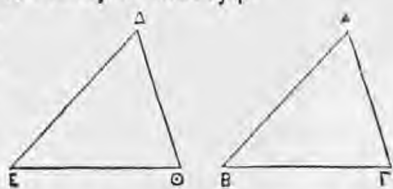
Διότι, ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὸ τρίγωνον $\Delta\text{ΒΓ}$ ἐπὶ τοῦ $\Delta\text{ΕΘ}$ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ $\Delta\text{Β}$ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ $\Delta\text{Ε}$, ἐπειδὴ ἡ γωνία Λ εἶναι ἴση τῇ Δ , ἡ πλευρὰ $\Delta\Gamma$ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς $\Delta\Theta$, καὶ ἐπειδὴ $\Delta\Gamma=\Delta\Theta$, τὸ σημεῖον Γ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Θ . Λοιπὸν τότε καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ τοῦ ἐνὸς θέλει πέσει ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς ΕΘ τοῦ ἐτέρου (ἄξ. 4), καὶ τὰ τρίγωνα θέλουσι ταυτίσθῃ. Ἄρα εἶναι ἴσα (ἄξ. 5). Λοιπὸν κτλ.

Πόρισμα. Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχωσι τρία τῶν μερῶν αὐτῶν ἴσα, τουτέστι τὴν γωνίαν $\Lambda=\Delta$, τὴν πλευρὰν $\Delta\text{Β}=\Delta\text{Ε}$ καὶ τὴν πλευρὰν $\Delta\Gamma=\Delta\Theta$, ἔχουσι καὶ τὰ λοιπὰ τῶν τρία ἄλλα μέρη ἴσα, ἥτοι τὴν γωνίαν $\text{Β}=\text{Ε}$, τὴν $\Gamma=\Theta$ καὶ τὴν πλευρὰν $\text{ΒΓ}=\text{ΕΘ}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ.

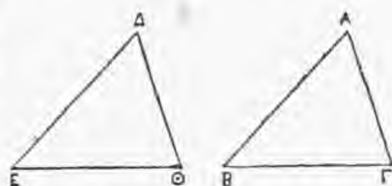
Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς δύο προσκειμένας αὐτῇ γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρῳ.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα $\Delta\text{ΒΓ}$, $\Delta\text{ΕΘ}$ ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ἴση τῇ ΕΘ , ἡ γωνία $\text{Β}=\text{Ε}$ καὶ ἡ $\Gamma=\Theta$. Λέγω ὅτι τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος τρίγωνα εἶναι ἴσα.



Διότι, ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὸ τρίγωνον $\Delta\text{ΒΓ}$ ἐπὶ τοῦ $\Delta\text{ΕΘ}$ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΕΘ , ἐπειδὴ ἡ γωνία Β εἶναι ἴση τῇ Ε , ἡ πλευρὰ ΒΑ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΕΔ , καὶ τὸ σημεῖον Λ θέλει πέσει εἰς τι σημεῖον αὐτῆς. Ἐπειδὴ ἀφ' ἐτέρου ἡ γωνία

Γ εἶναι ἴση τῇ Θ, ἡ πλευρὰ ΓΑ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΔΘ, τὸ δὲ σημεῖον Α θέλει πέσει εἰς τι σημεῖον αὐτῆς. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Α πρέπει νὰ κῆται καὶ ἐπὶ τῆς ΕΔ καὶ ἐπὶ τῆς ΔΘ, θέλει ἀναγκαστικῶς πέσει ἐπὶ τῆς κοίτης τομῆς αὐτῶν Δ. Ἀλλὰ τότε τὰ δύο τρίγωνα ταυτίζονται. Ἀρα εἶναι ἴσα, λοιπὸν κτλ.

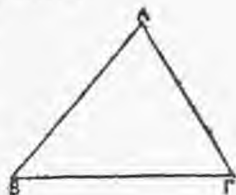


Πόρισμα. Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχωσι τρία τῶν μερῶν αὐτῶν ἴσα, τουτέστι τὴν πλευρὰν $ΒΓ = ΕΘ$, τὴν γωνίαν $Β = Ε$ καὶ τὴν $Γ = Θ$, ἔχουσι καὶ τὰ λοιπὰ τῶν μέρη ἴσα, ἥτοι $ΑΒ = ΔΕ$, $ΑΓ = ΔΘ$ καὶ $Α = Δ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα πλευρὰ τριγώνου τινὸς εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Διότι κατὰ τὸν ὀρισμὸν 8 ἡ εὐθεῖα γραμμὴ, ἡ ΑΒ π. χ., εἶναι ὁ συντομώτερος δρόμος με-
παξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β. λοιπὸν ἡ ΑΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ΑΓ καὶ ΒΓ, τουτέστιν ἔχομεν $ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ$.



Ἀφαιροῦντες ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος ΑΓ ἢ ΒΓ, θέλομεν ἔχει τὰς ἐξῆς νέας ἀνισότητας

$$ΑΒ - ΑΓ < ΒΓ, \quad ΑΒ - ΒΓ < ΑΓ,$$

δι' ὧν ἀποδεικνύεται ὅτι πᾶσα πλευρὰ ΒΓ, ΑΓ ὁποιοῦνδήποτε τριγώνου εἶναι μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἐντὸς τριγώνου τινὸς ΑΒΓ λάβωμεν σημειῶν τι Ο, καὶ ἐνῶσωμεν αὐτὸ μὲ τὰ ἄκρα μιᾶς ὁποιασδήποτε τοῦ τριγώνου πλευρᾶς ΒΓ διὰ τῶν εὐθειῶν ΟΒ καὶ ΟΓ, τὸ ἄθροισμα $ΟΒ + ΟΓ$ αὐτῶν θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος $ΑΒ + ΑΓ$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου προεκβάλομεν τὴν ΒΟ μέχρι οὗ συναπαντήσῃ τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΟΓ θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα

$$ΟΓ < ΓΔ + ΟΔ.$$



Προσθέτοντες εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος OB, θέλομεν ἔχει

$$OG + OB < GA + OA + OB, \text{ ἢ } OG + OB < GA + BA. \quad (1)$$

Ἄλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ABA ἔχομεν τὴν ἀνισότητα

$$BA < AB + AA,$$

ἥτις γίνεται, προσθεμένης εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη αὐτῆς τῆς εὐθείας ΔΓ,

$$BA + ΔΓ < AB + AA + ΔΓ, \text{ ἢ } BA + ΔΓ < AB + ΑΓ. \quad (2)$$

Ἀπεδείχθη λοιπὸν διὰ τῶν ἀνισότητων (1) καὶ (2) ὅτι $OG + OB$ εἶναι μικρότερον τοῦ $GA + BA$, ὅπερ εἶναι μικρότερον τοῦ $AB + ΑΓ$. Λοιπὸν κατ' ἰσχυρότερον λόγον $OG + OB$ θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ $AB + ΑΓ$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ περίμετρος παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου $ABΓΔ$ εἶναι μικρότερα πάσης ἄλλης $MEΘΖ$, περικυκλώσης αὐτὴν παταχύθεν.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου προεκβάλλομεν τὰς πλευρὰς AB , $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$ τοῦ ἐσωτερικοῦ πολυγώνου $ABΓΔ$ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ συναπαντήσωσιν ἐκάστη τὴν περικυκλούσαν περίμετρον $MEΘΖ$ εἰς τὰ σημεία H , I , K , $Λ$. Ἐκ τῶν σχηματισθέντων οὕτω σχημάτων $AHEΛ$, $BIΘH$, $ΓΚZI$, $ΔΑΜΚ$ πορίζομεθα τὰς ἐξῆς ἀνισότητας

$$AB + BH < AL + AE + EH,$$

$$BG + GI < BH + HΘ + ΘI,$$

$$GD + ΔK < GI + IZ + ZK,$$

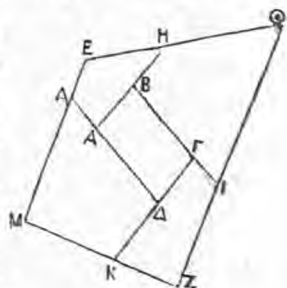
$$ΔA + AL < ΔK + KM + ML.$$

Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη, ἐξαλείφοντες ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὰ κοινὰ μέρη BH , GI , $ΔK$, AL καὶ παριστῶντες διὰ μιᾶς γραμμῆς τὰ ἀθροίσματα τῶν ἐπ' εὐθείας κειμένων μερῶν, θέλομεν ἔχει τὴν ἀνισότητα

$$AB + BG + ΓΔ + ΔA < EΘ + ΘZ + ZM + ME,$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι ἡ περίμετρος παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερα πάσης ἄλλης, περικυκλώσης αὐτὴν καὶ ἐχούσης τὰ αὐτὰ ἄκρα.

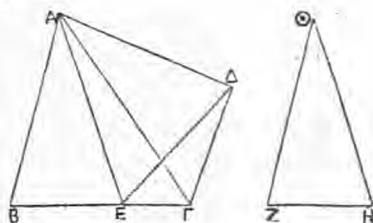


Παρατήρησις. Εὐλόως παρατηρεῖ τις ὅτι τὸ ἐν τῇ προηγουμένῃ προτάσει ἀποδειχθὲν θεώρημα εἶναι μερικωτάτη περίπτωσις τοῦ προαποδειχθέντος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ ἡ ἐν τῶν δύο πλευρῶν τοῦ ἑνὸς περιεχομένη γωνία ᾖ μὲν γαλειτέρα τῆς ἐπὶ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ ἑτέρου περιεχομένης, λέγω ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ πρώτου τριγώνου θέλει εἶναι μεγαλύτερα τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ ἑτέρου.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα $\Delta B\Gamma$, ΘZH ἔχομεν $AB = \Theta Z$, $AG = \Theta H$ καὶ τὴν γωνίαν BAG μεγαλύτεραν τῆς $Z\Theta H$. Λέγω ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ $B\Gamma$ τοῦ πρώτου θέλει εἶναι μεγαλύτερα τῆς τρίτης πλευρᾶς ZH τοῦ δευτέρου.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου σχηματίζομεν τὴν γωνίαν $\Gamma A\Delta$ ἴσην τῇ Θ , λαμβάνομεν $A\Delta = \Theta Z$ καὶ ἄγομεν τὴν ΓA . Τὰ δύο τρίγωνα $\Gamma A\Delta$, ΘZH , θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας $\Gamma A\Delta$, $Z\Theta H$ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὰς πλευρὰς ὡσαύτως ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ (προτ. 6), ἐπομένως ἡ ΓA θέλει εἶναι ἴση τῇ ZH . Τὸ θεώρημα λοιπὸν ἀποδεικνύεται, ἂν ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ $B\Gamma$ εἶναι μεγαλύτερα τῆς ΓA .

Ἄς διαιρέσωμεν τὴν γωνίαν BAG εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῆς εὐθείας AE , καὶ ἂς ἄζωμεν τὴν EA . Ἐπειδὴ ἡ γωνία BAG εἶναι μεγαλύτερα τῆς $\Gamma A\Delta$, ἥτις κατασκευάσθη ἴση τῇ Θ , ἡ διχοτομοῦσα τὴν ὅλην γωνίαν BAG εὐθεῖα AE θέλει ἀναγκαιῶς πέσει ἐντὸς τῆς μεγαλύτερας γωνίας BAG . Τὰ δύο τρίγωνα BAE , EAG θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν AE κοινὴν, τὰς πλευρὰς AB καὶ AG ἴσας, καὶ τὰς περιεχομένας ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίας BAE , EAG ἴσας ἐκ κατασκευῆς. Λοιπὸν $BE = EA$. Ἄλλ' εἰς τὸ τρίγωνον EAG ἔχομεν

$$\Gamma A < GE + EA, \text{ ἢ } \Gamma A < GE + BE, \text{ ἢ } \Gamma A < BG.$$

Λοιπὸν ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι μεγαλύτερα τῆς πλευρᾶς ZH τοῦ δευτέρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἀντιστρόφως, ἔὰν δύο πλευραὶ τριγώνου τινὸς ᾖ ἴσαι μετὰ τὰς

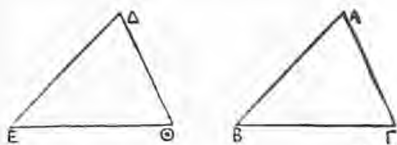
δύο πλευρὰς ἑτέρου τριγώνου ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ πρώτου ἦται μεγαλειτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ δευτέρου, ἢ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου περιεχομένη γωνία θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἴσων αὐταῖς πλευρῶν τοῦ δευτέρου.

Διότι, ἂν ἡ γωνία τοῦ πρώτου ἦτο ἴση μὲ τὴν γωνίαν τοῦ δευτέρου, τὰ τρίγωνα ἤθελον εἶναι ἴσα (πρότ. 6), ἐπομένως καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ πρώτου ἤθελεν εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ δευτέρου, τοῦθ' ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Ἄν δὲ ἡ γωνία τοῦ πρώτου ἦτο μικροτέρα τῆς γωνίας τοῦ δευτέρου, τότε, κατὰ τὸ προαποδείχθην θεώρημα, ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ πρώτου ἔπρεπε νὰ ᾖται μικροτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ δευτέρου, ὅπερ ἐπίσης ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν ἀναγκασίως ἡ ὑπὸ τῶν δύο πλευρῶν περιεχομένη γωνία τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ὑπὸ τῶν ἴσων αὐταῖς πλευρῶν περιεχομένης γωνίας τοῦ δευτέρου, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἐκάστην ἐκάστη.

*Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$, $\triangle E\Theta$ ἡ πλευρὰ $AB = AE$, ἡ $\Delta\Gamma = \Delta\Theta$ καὶ ἡ $B\Gamma = E\Theta$. Ἀέγω ὅτι θέλωμεν ἔχει τὴν γωνίαν $A = \Delta$, τὴν $B = E$ καὶ τὴν $\Gamma = \Theta$.



Διότι, ἐὰν ἡ γωνία A ὑποτεθῇ μεγαλειτέρα τῆς Δ , ἐπειδὴ αἱ περιέχουσιν τὰς γωνίας ταύτας πλευραὶ AB , $\Delta\Gamma$, AE , $\Delta\Theta$ εἶναι ἴσαι, ἡ τρίτη πλευρὰ $B\Gamma$ τοῦ πρώτου ἔπρεπε νὰ ᾖται μεγαλειτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς $E\Theta$ τοῦ δευτέρου (πρότ. 11). Ἐὰν δὲ ἡ γωνία A ὑποτεθῇ μικροτέρα τῆς Δ , τότε, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἔπρεπεν ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ νὰ ᾖται μικροτέρα τῆς $E\Theta$. Ἄλλ' αἱ πλευραὶ $B\Gamma$ καὶ $E\Theta$ ὑπετέθησαν ἴσαι. Ἄρα καὶ αἱ γωνίαι A καὶ Δ θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ἐπομένως καὶ τὰ δύο τρίγωνα θέλουσιν εἶναι ἴσα (πρότ. 6). Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλωμεν ἀπ' εὐθείας ἀποδείξει, ὅτι ἡ γωνία $B = E$ καὶ ἡ $\Gamma = \Theta$.

Σχόλιον. Ἐκ τοῦ ἀποδείχθέντος θεωρήματος βλέπομεν ὅτι εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αἱ ἴσαι γωνίαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν, καὶ ἀντιστρόφως, αἱ ἴσαι πλευραὶ κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν. Οὗ-

τω, π. χ. αἱ ἴσαι γωνίαι A καὶ Δ κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν $B\Gamma$, $E\Theta$, κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΘΕΩΡΗΜΑ

Εἰς πᾶν ἰσοσκελὲς τρίγωνον αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἐὰς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἡ πλευρὰ AB εἶναι ἴση τῇ AG , λέγω ὅτι ἡ ἀπέναντι τῆς AB γωνία Γ θέλει εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ B , τῇ ἀπέναντι τῆς ἴσης τῇ AB πλευρᾷ AG .

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦτου ἐνόημεν τὴν κορυφὴν A μὲ τὸ μέσον Δ τῆς ἀπέναντι πλευρᾷ $B\Gamma$. Τὰ δύο σχηματισθέντα τρίγωνα $AB\Delta$, $AG\Delta$ θέλουσιν εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὴν πλευρὰν $A\Delta$ κοινήν, τὰς πλευρὰς BA , AG ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς πλευρὰς AB , AG ἴσας ἐξ ὑποθέσεως (προτ. 13). Δοιπὸν αἱ ἀπέναντι τῆς αὐτῆς πλευρᾷ $A\Delta$ γωνίαι B καὶ Γ θέλουσιν εἶναι ἴσαι, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. Τοῦ ἰσοπλευροῦ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὥς κείμεναι ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν τοῦ αὐτοῦ τριγώνου.

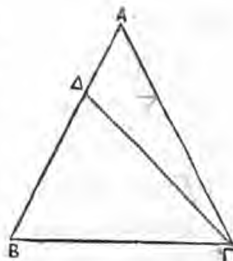
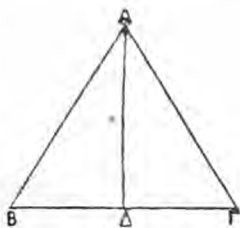
Σχόλιον. Ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωνα $AB\Delta$, $AG\Delta$ ἀπεδείχθησαν ἴσα, θέλομεν ἔχει γωνίαν $B\Delta A = \Delta A \Gamma$ καὶ $A\Delta B = A\Delta \Gamma = \text{μιᾶ ὀρθῇ}$ (ὅρισμ. 17). Δοιπὸν ἡ εὐθεῖα $A\Delta$, ἡ ἐνόησεν τὴν κορυφὴν τῆς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν AB , AG ἰσοσκελοῦς τινος τριγώνου σχηματιζομένης γωνίας A μὲ τὸ μέσον Δ τῆς ἀπέναντι πλευρᾷ $B\Gamma$, εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτῆς, καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν A εἰς δύο ἴσα μέρη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἀντιστρόφως, εἰν δύο γωνίαι τριγώνου τινὸς ἦναι ἴσαι, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ θέλουσιν εἶναι ἴσαι καὶ τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐὰς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἡ γωνία B εἶναι ἴση τῇ Γ , λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ AG θέλει εἶναι ἴση τῇ AB , καὶ ἐπομένως ὅτι τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελές.

Διότι, ἂν αἱ πλευραὶ AB καὶ AG δὲν ἦσαν ἴσαι, ἡ μία τούτων, ἡ AB π. χ., θέλει εἶναι μεγαλύτερα. Ἐὰς λάβωμεν ἐπ' αὐτῆς $BA = AG$ καὶ ἂς ἀξωμεν τὴν AG . Τὰ δύο τρίγωνα $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ θέλουσιν ἔχει τὴν πλευ-



ρὰν ΒΓ κοινήν, τὰς πλευρὰς ΒΔ, ΑΓ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς περιχομένας ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίας Β καὶ ΑΓΒ ἴσας, ἐξ ὑποθέσεως. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουσιν εἶναι ἴσα (πρότ. 6), ὅπερ ἄτοπον· διότι τὸ μέρος ΒΓΔ δὲν δύναται νὰ ᾖ ἴσον μὲ τὸ ὅλον ΑΒΓ (ἄξ. 2). Λοιπὸν αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσαι, καὶ ἐπομένως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐκ δύο πλευρῶν τριγώνου τινὸς μεγαλειτέρα εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλειτέρας γωνίας, καὶ ἀντιστρόφως, ἐκ δύο γωνιῶν μεγαλειτέρα εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλειτέρας πλευρᾶς.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΒΓ· λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ, ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας ΑΓΒ, θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΓ, τῆς ἀπέναντι τῆς μικροτέρας γωνίας ΑΒΓ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἃς κατασκευάσωμεν τὴν γωνίαν ΒΓΔ = τῇ Β. Ἐπειδὴ κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα τὸ τρίγωνον ΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, θέλομεν ἔχει ΓΔ = ΔΒ. Ἄλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἔχομεν ΑΓ < ΑΔ + ΔΓ, ἢ, ἐπειδὴ ΔΓ εἶναι ἴση τῇ ΔΒ, ΑΓ < ΑΔ + ΔΒ, ἢ, ὅπερ ταῦτό, ΑΓ < ΑΒ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.



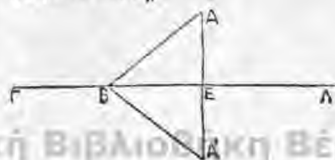
Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ γωνία Γ, ἡ ἀπέναντι τῆς ΑΒ, θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς γωνίας Β, τῆς ἀπέναντι τῆς ΑΓ.

Διότι, ἂν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ ᾖσαν ἴσαι, ἠθέλομεν ἔχει ΑΓ = ΑΒ, ἂν δὲ ἡ γωνία Β ᾖ τοῦ μεγαλειτέρα τῆς Γ, τότε κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἡ πλευρὰ ΑΓ ἔπρεπε νὰ ᾖ μεγαλειτέρα τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ κατὰ τὰ ὑποθεθέντα ἡ ΑΒ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΓ. Λοιπὸν καὶ γωνία Γ θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐξ ἐνὸς σημείου, ἐκτὸς εὐθείας τινὸς κειμένου, μία μόνη κάθετος ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας δυνατὸν νὰ καταβιβασθῇ.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Α δυνάμεθα νὰ καταβιβάσωμεν δύο κάθετους ΑΕ, ΑΒ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ.

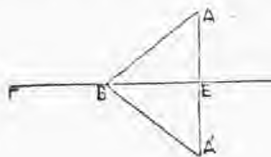


Ἄς προσεβάλλωμεν τὴν μίαν τούτων,

Βιβλιοθήκη Βέροιας

τὴν AB π. χ ., καί, ἀφοῦ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς αὐτῆς λάβωμεν E AE , ὥς ἄξωμεν τὴν εὐθείαν BA' .

Τὰ δύο τρίγωνα ABE , $A'BE$ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὥς ἔχοντα τὴν πλευρὰν BE κοινήν, τὰς πλευρὰς AE , $A'E$ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς περιεχομένας γωνίας AEB , $A'EB$ ἴσας ὡς ὀρθάς. Ἡ γωνία λοιπὸν ABE θέλει εἶναι ἴση τῇ $A'BE$. Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν ἡ εἶναι ὀρθή. Λοιπὸν καὶ ἡ $A'BE$ θέλει εἶναι ὀρθή. Ἀλλὰ τότε, ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $ABE + EBA'$ τῶν δύο διαδοχικῶν γωνιῶν ABE , $A'BE$ ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, αἱ ἐξωτερικαὶ αὐτῶν πλευραὶ AB , $A'B$ καὶ ἐπ' εὐθείας (πρότ. 4). Ἐξ ἑνὸς λοιπὸν σημείου A εἰς ἄλλο A' ἔχοντες ἔχει δύο εὐθείας AA' , ABA' , ὅπερ ἀδύνατον (ἄξ. 4). Λοιπὸν



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου A , ἐκτὸς εὐθείας τινὸς DE κειμένου ταβιδάσωμεν ἐπ' αὐτῆς τὴν κάθετον AB , καὶ ἄξωμεν καὶ ὁποῦντοὺς πλάγιας AE , AF , AD , λέγω ὅτι

1^{ον}. Ἡ κάθετος AB εἶναι μικροτέρα πάσης πλάγιας.

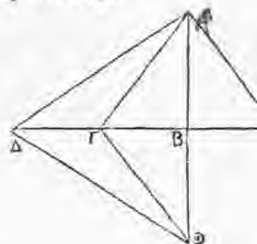
2^{ον}. Αἱ πλάγιαι AF , AE , αἱ εἰς ἴσας ἀποστάσεις BF , BE τοῦ ποδὸς B τῆς καθέτου ἀγόμεναι, εἶναι ἴσαι.

3^{ον}. Ἐκ δύο πλάγιων AF , AD , ἡ εἰς μεγαλειτέραν ἀπὸ τῆς ὁδοῦ B ἀπέστανται BD ἡγμένη εἶναι μεγαλειτέρα

Πρὸς ἀπόδειξιν τῶν ἀνωτέρω λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς καθέτου AB τὴν ἀπόστασιν $B\Theta = AB$, καὶ ἄγομεν τὰς εὐθείας $\Theta\Gamma$, $\Gamma\Delta$.

1^{ον}. Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Gamma B\Theta$ εἶναι ἴσα, ὥς ἔχοντα τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ κοινήν, τὰς AB καὶ $B\Theta$ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας $\Gamma B\Theta$ ἴσας ὡς ὀρθάς. Λοιπὸν ἔχομεν $AG = \Gamma\Theta$. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον $\Delta\Gamma\Theta$ ἔχομεν $\Delta\Theta < \Delta\Gamma + \Gamma\Theta$, ἢ, ὅπερ ταῦτό, $2AB < 2\Delta\Gamma$. Ἀρ. AB , ἡμισυ τῆς $2AB$, θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς $\Delta\Gamma$, ἡμίσεως τῆς $2\Delta\Gamma$. Λοιπὸν 1^{ον}, ἡ κάθετος AB εἶναι μικροτέρα πάσης πλάγιας AD .

2^{ον}. Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι $BE = BF$. Τότε τὰ δύο τρίγωνα ABE , ABF θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὥς ἔχοντα τὴν πλευρὰν AB κοινήν, τὰς BE καὶ BF ἴσας ἐκ



ἴσας ἐξ ὑποθέσεως, καὶ τὰς περιεχομένας ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίας $AB\Gamma$, ABE ἴσας ὡς ὀρθάς· ἐπομένως θέλομεν ἔχει $A\Gamma = AE$. Λοιπὸν 2^{ov} , αἱ πλάγιοι $A\Gamma$, AE , αἱ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ ποδὸς B τῆς καθέτου ἀγόμεναι, εἶναι ἴσαι.

3^{ov} . Ἐστω $BA < B\Gamma$. Εἰς τὸ τρίγωνον $\Delta A\Theta$, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 9 προτάσει, ἔχομεν τὴν ἀνισότητα $A\Gamma + \Gamma\Theta < A\Delta + \Delta\Theta$. Ἐπειδὴ δὲ ἀπεδείχθη προηγουμένως ὅτι $A\Gamma = \Gamma\Theta$, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι $A\Delta = \Delta\Theta$, ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω $2A\Gamma < 2A\Delta$, ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ, διαιρούντες διὰ 2 τὰ δύο μέλη αὐτῆς, $A\Gamma < A\Delta$. Λοιπὸν 3^{ov} , ἐκ δύο πλάγιων $A\Gamma$, $A\Delta$ ἡ εἰς μεγαλειτέραν ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ἀπόστασιν ἡγμένη $A\Delta$ εἶναι μεγαλειτέρα.

Πόρισμα 1. Ἐπειδὴ ἡ ἐκ τινος σημείου A ἐπὶ τινος εὐθείας AE καταβιβαζομένη κάθετος AB εἶναι μικροτέρα πάσης πλάγιας, τὸ μέγεθος αὐτῆς λαμβάνεται ὡς τὸ ἀληθὲς μέτρον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου A ἀπὸ τῆς εὐθείας AE .

Πόρισμα 2. Ἐξ ἑνὸς σημείου, ἐκτὸς εὐθείας τινὸς κειμένου, δύο μόνον ἴσαι πρὸς ἀλλήλας πλάγιοι δυνατόν νὰ ἀχθῶσι. Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἦτο δυνατόν νὰ ἀχθῶσι τρεῖς ἴσαι, τότε ἀναγκαίως αἱ δύο τούτων ἦθελον εὐρίσκεισθαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τῆς εὐθείας καταβιβαζομένης καθέτου καὶ εἰς ἀνίσους ἀπὸ τοῦ ποδὸς αὐτῆς ἀποστάσεις, ὅπερ ἀδύνατον.

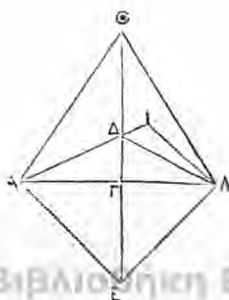
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Γ , κειμένου εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας AA , ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ ταύτης, λέγω ὅτι

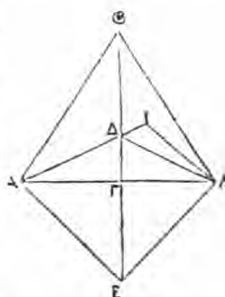
1^{ov} . Πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου $E\Theta$ θέλει ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἄκρων A καὶ A τῆς εὐθείας AA .

2^{ov} . Πᾶν σημεῖον, ἐκτὸς τῆς καθέτου κειμένου, θέλει ἀπέχει ἀνισάκις ἀπὸ τῶν αὐτῶν ἄκρων.

Διότι, ἂν ἐνώσωμεν σημεῖον τι Θ τῆς καθέτου μὲ τὰ ἄκρα A καὶ A τῆς εὐθείας AA , αἱ εὐθεῖαι ΘA , ΘA θέλουσιν εἶναι πλάγιοι, ἰσάκις ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς Γ τῆς καθέτου, καὶ ἐπομένως κατὰ τὰ προαποδειχθέντα θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν 1^{ov} , πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου $E\Theta$ ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἄκρων A καὶ A .



2^{ον}. Ἐστω σημείον τι I, ἐκτὸς τῆς καθέτου BE κείμενον. Ἐὰν ἄξωμεν τὰς εὐθείας AI, IA, ἡ μία τούτων ἀναγκαίως θέλει συναπαντήσῃ τὴν κάθετον εἰς τι σημείον Δ, ὅπερ θέλει ἀπέχει ἰσάκεις τῶν ἄκρων Α καὶ Α. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΙ ἔχουμεν $IA < ID + DA$, ἢ, ἐπειδὴ $DA = AD$, $IA < ID + AD$. Ἀλλὰ $ID + AD = IA$. Λοιπὸν $IA < IA$. Λοιπὸν 2^{ον}, πᾶν σημείον I, ἐκτὸς τῆς καθέτου κείμενον, ἀπέχει ἀνισάκεις τῶν ἄκρων Α καὶ Α.



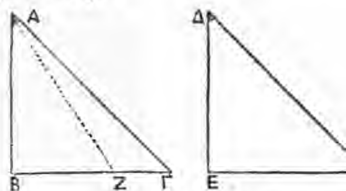
Παρατήρησις. Οἱ μαθηματικοὶ καλοῦσι γεωμετρικὸν τόπον πᾶσαν εὐθείαν ἢ πᾶσαν ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεία ἔχουσι κοινὴν τινα ιδιότητα, ἣν οὐδὲν τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ ἐφοῦ κεῖται ἢ εὐθεῖα ἐπιπέδου, ἢ τοῦ διαστήματος, δύναται ν' ἔχῃ.

Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν BE, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ἔχόντων τὴν κοινὴν ιδιότητα τοῦ ἀπέχων ἰσάκεις ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Α τῆς εὐθείας ΑΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τὰς ὑποτείνουσας τῶν ἴσας καὶ μὴν ἄλλην πλευρὴν ἴσην.

Ἐστωσαν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ABΓ, ΔΕΘ, ἅτινα καθ' ὑπόθεσιν ἔχουσι τὰς ὑποτείνουσας τῶν ΑΓ, ΔΘ ἴσας, καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΔΕ ἴσας. Λέγω ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.

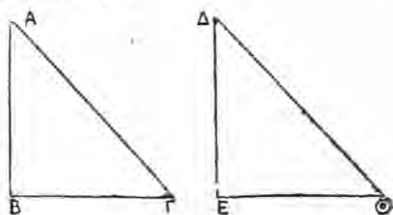


Ἡ ἰσότης τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος τριγώνων ἤθελεν εἶναι καταφανὴς ἂν καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ τοῦ ἑνὸς ἦτο ἴση τῇ τρίτῃ πλευρᾷ ΕΖ τοῦ ἐτέρου (πρότ. 13). Ἀς υποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι αἱ πλευραὶ ΒΓ, ΕΘ δὲν εἶναι ἴσαι, καὶ ἔστω ΒΓ ἡ μεγαλειτέρα τούτων. Ἀν λάβωμεν $BZ = E\Theta$, καὶ ἄξωμεν τὴν ΑΖ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΖ, ΔΕΘ θλουσιν εἶναι ἴσα (πρότ. 6), καὶ θέλομεν ἔχει $AZ = D\Theta$. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $AG = D\Theta$. Ἀρα καὶ $AG = AZ$, ὅπερ ἄτοπον, διότι αἱ εὐθεῖαι ΑΖ, ΑΓ ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΑΒ εἶναι πλάγιαι ἡγμένοι εἰς ἀνίσσας ἀπὸ τοῦ ποδὸς Β τῆς καθέτου ἀποστάσεις. Λοιπὸν αἱ δύο πλευραὶ ΒΓ, ΕΘ εἶναι ἀναγκαίως ἴσαι, ἐπομένως καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΘ εἶναι ἴσα. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τὰς ὑποτείνουσας τῶν ἴσας καὶ μίαν τῶν ἄλλων γωνιῶν ἴσην.

Ἐστῶσαν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Delta E\Theta$, ἅτινα καθ' ὑπόθεσιν ἔχωσι τὰς ὑποτείνουσας τῶν $\Delta\Gamma$, $\Delta\Theta$ ἴσας, καὶ τὰς γωνίας A καὶ Δ ἴσας. Λέγω ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.

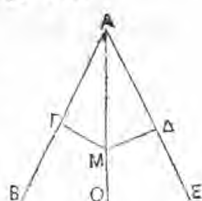


Διότι, ἂν ἐπιθέσωμεν τὸ τρίγωνον $\Delta E\Theta$, ἐπὶ τοῦ $AB\Gamma$ οὕτως, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα $\Delta\Theta$ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ $\Delta\Gamma$, ἐπειδὴ ἡ γωνία Δ εἶναι ἴση τῇ A , ἡ πλευρὰ ΔE θέλει πέσει ἐπὶ τῆς AB , τὸ δὲ σημεῖον E θέλει ἀναγκαιῶς πέσει ἐπὶ τοῦ B . Διότι, ἂν τοῦτο ἐπιπτεν εἰς τι σημεῖον τῆς AB , διάφορον τοῦ B , ἐπειδὴ τὸ ἐπιτιθέμενον τρίγωνον $\Delta E\Theta$ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ θέσις, ἣν τότε ἤθελε λάβει ἐπὶ τοῦ σχήματος $AB\Gamma$ ἡ εὐθεῖα $E\Theta$, ἤθελεν εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς AB καὶ διάφορος τῆς καθέτου ΓB . Ἡθέλομεν λοιπὸν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Γ δύο καθέτους ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας AB , ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 17).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν διὰ τινος εὐθείας AO διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη γωνίαν τινὰ A , πᾶρ σημείον M τῆς διχοτομοῦσης AO θέλει ἀπέχει ἰσάκεις τῶν πλευρῶν AB , AE τῆς γωνίας, καὶ ἀντιστρόφως, πᾶρ σημείον, ἐντὸς τῆς γωνίας BAE κείμενον καὶ ἰσάκεις ἀπέχον τῶν πλευρῶν αὐτῆς, θέλει κεῖσθαι ἐπὶ τῆς διχοτομοῦσης AO .

Ἐκ τοῦ σημείου M ἂς καταβιβάζωμεν τὰς καθέτους $ΜΓ$, $ΜΔ$. Τὰ οὕτω σχηματισθέντα δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $ΜΑΓ$, $ΜΑΔ$ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν $ΑΜ$ κοινὴν καὶ τὰς γωνίας $ΜΑΓ$, $ΜΑΔ$ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως (πρότ. 21). Λοιπὸν καὶ $ΜΓ=ΜΔ$.



Ἀντιστρόφως ἂν αἱ κάθετοι $ΜΓ$ καὶ $ΜΔ$ ὑποτεθῶσιν ἴσαι, καὶ ἄξωμεν τὴν $ΑΜ$, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $ΜΑΓ$, $ΜΑΔ$ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν $ΑΜ$ κοινὴν καὶ τὰς πλευρὰς $ΜΓ$, $ΜΔ$ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως (πρότ. 20). Λοιπὸν καὶ ἡ γωνία $ΜΑΓ=ΜΑΔ$. Τὸ σημεῖον λοιπὸν M κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομοῦσης τὴν γωνίαν A .

Πόρισμα. Πᾶν σημεῖον, κείμενον ἐντὸς τῆς γωνίας BAE καὶ ἰσάκεις ἀπέχον

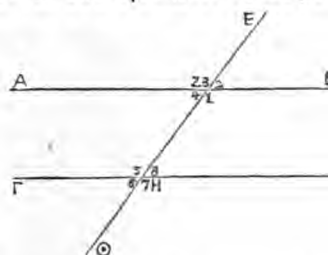
τῆς διχοτομοῦσης αὐτὴν ΑΟ, ἀπέχει ἀνισάκεις τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.

Ἡ διχοτομοῦσα λοιπὸν γωνίαν τινὰ εὐθεῖα εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ἰσάκεις ἀπέχόντων τῶν πλευρῶν αὐτῆς σημείων.

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ λέγονται *παράλληλοι*, ὅταν κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου δὲν συναπαντῶνται ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσιν ἐκατέρωθεν.

2. Ὅταν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ τέμνωνται ὑπὸ τρίτης τινὸς ΕΘ, εἰς τὰ σημεία Ζ καὶ Η τῆς κοινῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν τούτων σχηματίζονται ὀκτὼ γωνίαι, αἱ παριστῶμεν πρὸς συντομίαν διὰ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.



Αἱ μὲν τέσσαρες γωνίαι 1, 4, 5, 8, αἱ μεταξὺ τῶν τεμνομένων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ περιλαμβανόμεναι καλοῦνται *ἐσωτερικαί*, αἱ δὲ λοιπαὶ 2, 3, 6, 7 *ἐξωτερικαί*.

Αἱ ἐσωτερικαὶ καὶ μὴ προσκείμεναι γωνίαι 1 καὶ 5 ἢ 4 καὶ 8, αἱ ἐκατέρωθεν τῆς διατεμνοῦσης ΕΘ κείμεναι, καλοῦνται *ἐκτός ἐναλλάξ*.

Αἱ ἐξωτερικαὶ καὶ μὴ προσκείμεναι 2 καὶ 6, ἢ 3 καὶ 7, αἱ ἐκατέρωθεν τῆς διατεμνοῦσης ΕΘ κείμεναι, καλοῦνται *ἐκτός ἐναλλάξ*.

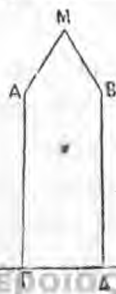
Αἱ μὴ προσκείμεναι γωνίαι 8 καὶ 2, ἢ 3 καὶ 5, ἢ 1 καὶ 7, ἢ 4 καὶ 6, αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διατεμνοῦσης κείμεναι, ἐξ ὧν ἡ μία εἶναι ἐσωτερικὴ, ἡ δὲ ἄλλη ἐξωτερικὴ, καλοῦνται *ἀρτιστοιχοῦσαι*.

Αἱ ἐσωτερικαὶ γωνίαι 1 καὶ 8, ἢ 4 καὶ 5, αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διατεμνοῦσης κείμεναι, καλοῦνται *παρακείμεναι*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τρίτης τινὸς εἶναι καὶ παράλληλοι.

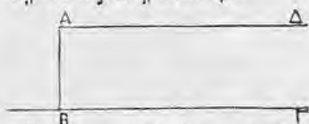
Ἐστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ κάθετοι ἐπὶ τῆς ΓΔ· λέγω ὅτι αὗται εἶναι καὶ παράλληλοι. Διότι, ἂν προεκβληθῶσιν συνηντῶντο εἰς τι σημεῖον Μ, ἡθέλομεν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ δύο εὐθείας ΜΑΓ, ΜΒΔ κάθετους ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΓΔ, ὅπερ ἀπεδείχθη ἀδύνατον (πρότ. 17).



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐξ ἑνὸς σημείου A , ἑκτὸς εὐθείας τινὸς $BΓ$ κειμένου, δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν πάντοτε εὐθεῖαν παράλληλον τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ.

Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ σημείου A καταβιβάζομεν τὴν AB κάθετον ἐπὶ τῆς $BΓ$, καὶ εἰς τὸ σημεῖον A ὑψοῦμεν τὴν $ΔA$ κάθετον ἐπὶ τῆς AB . Ἡ εὐθεῖα $ΔA$ θέλει εἶναι παράλληλος τῇ $BΓ$, διότι ἀμφοτέραι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας AB . (πρότ. 23). Λοιπὸν ἐξ ἑνὸς σημείου A κτλ.

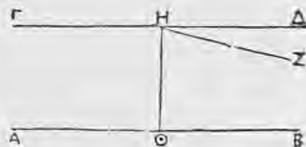


Θέλουμεν πρὸς τούτοις παραδεχθῇ ὡς πρότασιν φανεράν, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου A μία μόνη παράλληλος τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ $BΓ$ ἄγεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι AB , $ΓΔ$ ᾗται παράλληλοι, πᾶσα εὐθεῖα $HΘ$ κάθετος ἐπὶ τῆς μιᾶς τούτων AB θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας $ΓΔ$.

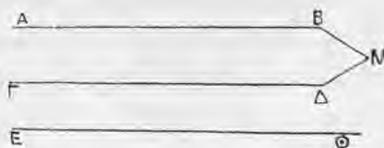
Ἐν πρώτοις εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἐπὶ τῆς AB κάθετος $ΘH$ συναπαντᾷ τὴν παράλληλὸν τῆς $ΓΔ$, διότι ἄλλως ἤθελεν εἶναι καὶ αὕτη παράλληλος τῇ $ΓΔ$, καὶ τότε ἤθελομεν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου $Θ$ δύο παραλλήλους τῇ $ΓΔ$, τὴν AB καὶ τὴν $ΘH$, ὅπερ κατὰ τὰ προλεχθέντα ἀδύνατον. Λέγω δεύτερον ὅτι εἶναι καὶ κάθετος ἐπὶ τῆς $ΓΔ$ · διότι, ἂν ἡ $ΓΔ$ δὲν ᾗτο κάθετος ἐπὶ τῆς $HΘ$, δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν τὴν HZ τοιαύτην. Ἀλλὰ τότε ἡ HZ ἤθελεν εἶναι παράλληλος τῇ AB (πρότ. 23), καὶ ἤθελομεν πάλιν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου H δύο εὐθείας $HΔ$, HZ παραλλήλους τῇ AB , ὅπερ ἄτοπον. Λοιπὸν ἡ $HΘ$ εἶναι κοινὴ κάθετος ἐπὶ τῶν παραλλήλων AB καὶ $ΓΔ$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο εὐθεῖαι, παράλληλοι πρὸς τρίτην τινὰ, εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι AB , $ΓΔ$ εἶναι παράλληλοι τῇ $ΕΘ$. λέγω ὅτι αὗται θέλουσιν εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι. Διότι, ἂν δὲν ᾗσαν παράλληλοι, προεκβαλλόμεναι ἤθελον συναπαντηθῇ εἰς τὸ ἐξ ἑνὸς σημείου δύο εὐθείαι, ὅπερ ἀδύνατον.



σημείον Μ, ἐξ οὗ τότε ἠθέλομεν ἔχει δύο εὐθείας ΜΒΑ, ΜΔΓ παράλληλους τῇ ΕΘ, ὅπερ ἀδύνατον. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης τινὸς, σχηματίζουσι

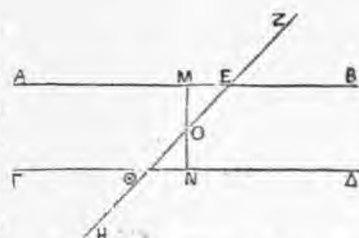
1^{ον}. Τὰς ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας.

2^{ον}. Τὰς ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας.

3^{ον}. Τὰς ἀντιστοιχοῦσας γωνίας ἴσας.

4^{ον}. Ἐσωτερικὰς παρακειμένας γωνίας, ἀποτελούσας ἄθροισμα δύο ὀρθῶν γωνιῶν.

1^{ον}. Ἐς ὧσαν ΑΒ, ΓΔ δύο παράλληλοι τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς διατεμνούσης ΗΖ. Πρὸς ἀπόδειξιν τῶν ἀνωτέρω ἐκ τοῦ σημείου Ο, μέσου τῆς ΕΘ, καταβιβάζομεν τὴν ΟΝ κάθετον ἐπὶ τῆς ΓΔ, καὶ προσεχάλλομεν αὐτὴν μέχρις οὗ



συναπαντήσῃ καὶ τὴν παράλληλὸν τῆς ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ. Ἐπειδὴ ἡ ΜΝ εἶναι κοινὴ κάθετος ἐπὶ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ (πρότ. 25), τὰ δύο τρίγωνα ΟΜΕ, ΟΝΘ εἶναι ὀρθογώνια, εἶναι δὲ καὶ ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτείνουσας ΟΘ, ΟΕ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς γωνίας ΜΟΕ, ΝΟΘ ἴσας ὡς κατὰ κορυφὴν (πρότ. 5). Αἱ ἐντὸς ἐναλλάξ λοιπὸν γωνίαι ΟΕΜ, ΟΘΝ εἶναι ἴσαι, ἐπομένως καὶ αἱ ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι ΒΕΘ, ΕΘΓ εἶναι ἴσαι, ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν ΟΕΜ, ΟΘΝ. Λοιπὸν 1^{ον}, αἱ ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

2^{ον}. Αἱ ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίαι ΖΕΒ, ΓΘΗ εἶναι ἴσαι ὡς κατὰ κορυφὴν τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΕΘ, ΕΘΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ αἱ γωνίαι ΑΕΖ, ΔΘΗ εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν 2^{ον}, αἱ ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

3^{ον}. Αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι ΖΕΒ, ΕΘΔ εἶναι ἴσαι, διότι ἡ ΖΕΒ εἶναι ἴση τῇ ΑΕΘ, ἥτις ἀπεδείχθη ἴση τῇ ΕΘΔ. Λοιπὸν 3^{ον}, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

4^{ον}. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΑΕΘ, ΒΕΘ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Ἀλλὰ ΑΕΘ = ΕΘΔ, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν παρακειμένων γωνιῶν ΕΘΔ, ΒΕΘ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Λοιπὸν 4^{ον}, τὸ ἄθροισμα τῶν παρακειμένων γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἀντιστρόφως, ἂν δύο εὐθεῖαι, τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης τινὸς, σχηματίζωσιν

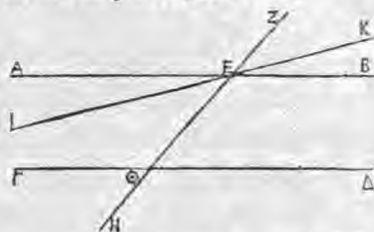
**Ἡ τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας,*

**Ἡ τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας,*

**Ἡ τὰς ἀντιστοιχοῦσας γωνίας ἴσας.*

**Ἡ τὸ ἄθροισμα τῶν παρακειμένων γωνιῶν ἴσον μὲ δύο ὀρθάς,*
λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται θέλουσιν εἶναι παράλληλοι.

1^{ον}. Ἐστῶσαν $AB, \Gamma A$ αἱ ὑπὸ τῆς διατεμνούσης $ΗΖ$ τεμνόμεναι εὐθεῖαι, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν 1^{ον} ὅτι αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι $\angle AEO, \angle O\Delta$ εἶναι ἴσαι. Λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι $AB, \Gamma A$ θέλουσιν εἶναι παράλληλοι.



Διότι, ἂν ἡ AB δὲν ᾦτο παράλληλος τῇ ΓA , ἐκ τοῦ σημείου E δυνατόμεθα νὰ ἀξῶμεν τὴν IK τοιαύτην, καὶ τότε, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι $\angle IEO, \angle EOA$ θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν $\angle AEO = \angle EOA$. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει $\angle IEO = \angle AEO$, τουτέστι τὸ μέρος ἴσον μὲ τὸ ὅλον, ὅπερ ἀδύνατον. Λοιπὸν 1^{ον}, ὅταν αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ᾦναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι $AB, \Gamma A$ εἶναι παράλληλοι.

2^{ον}. Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι $\angle ZEB, \angle O\Gamma H$ εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐτῶν γωνίαι $\angle AEO, \angle EOA$ θέλουσιν εἶναι ὡσαύτως ἴσαι, καὶ αὗται ὡς πρὸς τὰς εὐθείας $AB, \Gamma A$ εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι, ἔπεται κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ὅτι αἱ εὐθεῖαι $AB, \Gamma A$ εἶναι παράλληλοι. Λοιπὸν 2^{ον}, ὅταν αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ᾦναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι $AB, \Gamma A$ εἶναι παράλληλοι.

3^{ον}. Ἄς ὑποθέσωμεν τρίτον ὅτι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι $\angle ZEB, \angle EOA$ εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ ἔχομεν $\angle ZEB = \angle AEO$, θέλομεν ἔχει $\angle AEO = \angle EOA$, καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι $\angle AEO, \angle EOA$ εἶναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι $AB, \Gamma A$ εἶναι παράλληλοι. Λοιπὸν 3^{ον}, ὅταν αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι ᾦναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι AB καὶ ΓA εἶναι παράλληλοι.

4^{ον}. Ἄς ὑποθέσωμεν τελευταῖον ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν παρακειμένων γωνιῶν $\angle BEO, \angle EOA$ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Ἐπειδὴ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν προσκειμένων γωνιῶν $\angle BEO, \angle EOA$ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, θέλομεν ἔχει $\angle EOA = \angle AEO$. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι $\angle AEO,$

$ΕΘΔ$ εἶναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι $ΑΒ, ΓΔ$ εἶναι παράλληλοι. Λοιπὸν 4^{ov} , ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν παρακειμένων γωνιῶν ᾖναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο γωνίαι, ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

Τρεῖς περιπτώσεις δυνατὸν νὰ συμβῶσι·

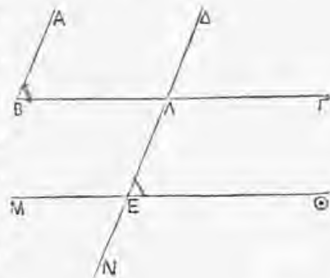
1^{ov} . Ὅταν αἱ δύο πλευραὶ τῆς μιᾶς διευθύνωνται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὰς παραλλήλους αὐταῖς πλευρὰς τῆς ἑτέρας.

2^{ov} . Ὅταν καὶ αἱ δύο πλευραὶ τῆς μιᾶς ἔχωσιν ἀντίθετον φορὰν τῶν παραλλήλων αὐταῖς πλευρῶν τῆς ἑτέρας.

3^{ov} . Ὅταν ἡ μία ἔχῃ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἡ ἑτέρα ἀντίθετον.

Ἄς ὑποθέσωμεν 1^{ov} ὅτι πρόκειται

περὶ τῶν γωνιῶν $ΑΒΓ, ΔΕΘ$, ὧν αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν φορὰν. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ $ΑΒ, ΕΔ$ εἶναι παράλληλοι, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι $ΑΒΓ, ΔΑΓ$ εἶναι ἴσαι. Ὡστόχως, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ $ΒΓ, ΕΘ$ εἶναι παράλληλοι, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι $ΔΑΓ, ΔΕΘ$ εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν αἱ γωνίαι $ΑΒΓ, ΔΕΘ$,



αἱ ἀποδειχθεῖσαι ἴσαι τῇ $ΔΑΓ$, θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν 1^{ov} , ὅταν αἱ δύο πλευραὶ τῆς μιᾶς διευθύνωνται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὰς παραλλήλους αὐταῖς πλευρὰς τῆς ἑτέρας, αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἄς ὑποθέσωμεν 2^{ov} ὅτι πρόκειται περὶ τῶν γωνιῶν $ΑΒΓ, ΜΕΝ$, ὧν αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἔχουσιν ἀντίθετον φορὰν. Ἐπειδὴ ἡ γωνία $ΜΕΝ$ εἶναι ἴση τῇ $ΔΕΘ$, ἥς αἱ πλευραὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὰς παραλλήλους αὐταῖς πλευρὰς τῆς $ΑΒΓ$, αἱ γωνίαι $ΑΒΓ, ΜΕΝ$ θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν 2^{ov} , ὅταν καὶ αἱ δύο πλευραὶ τῆς μιᾶς ἔχωσιν ἀντίθετον φορὰν τῶν παραλλήλων αὐταῖς πλευρῶν τῆς ἑτέρας, αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἄς ὑποθέσωμεν 3^{ov} ὅτι πρόκειται περὶ τῶν γωνιῶν $ΑΒΓ, ΜΕΔ$, ὧν αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ $ΒΑ, ΕΔ$ ἔχουσι τὴν αὐτὴν φορὰν, αἱ δὲ ἄλλαι δύο $ΒΓ, ΕΜ$ ἀντίθετον. Ἐπειδὴ ἡ $ΜΕΔ$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῇ προσκειμένῃ αὐτῇ $ΔΕΘ$, ἥς αἱ πλευραὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν φο-

ρὰν μὲ τὰς παραλλήλους αὐταῖς πλευρὰς τῆς $ABΓ$, αἱ γωνίαι $ABΓ$, $MEΔ$ θέλουσιν εἶναι παραπληρωματικάι. Λοιπὸν 3° , ὅταν ἡ μία ἔχη τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἡ ἑτέρα ἀντίθετον, αἱ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικάι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 30. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο γωνίαι ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους ἐκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικάι.

Ἔστω $ΔΕ$ κάθετος ἐπὶ τῆς AB καὶ $ΘΕ$ κάθετος ἐπὶ τῆς $ΔΓ$, λέγω ὅτι ἡ γωνία $ΔΕΘ$ θέλει εἶναι ἢ ἴση ἢ παραπληρωματικὴ τῆς $ΒΑΓ$.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦτου ἄγομεν εἰς τὸ σημεῖον A τὴν $ΑΗ$ κάθετον ἐπὶ τῆς $ΔΓ$, καὶ τὴν $ΑΙ$ κάθετον ἐπὶ τῆς AB . Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $ΗΑΓ$, $ΙΑΒ$ εἶναι ὀρθαί, θέλουσιν εἶναι ἴσαι, καὶ θέλομεν ἔχει

$$ΗΑΓ = ΙΑΒ.$$

Ἀλλὰ $ΗΑΓ = ΗΑΒ + ΒΑΓ$ καὶ $ΙΑΒ = ΙΑΗ + ΗΑΒ$. Ἄρα θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$ΗΑΒ + ΒΑΓ = ΙΑΗ + ΗΑΒ,$$

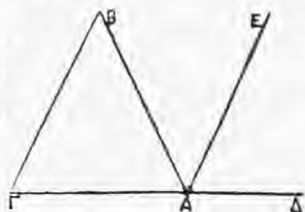
ἐξ ἧς, ἀφαιροῦντες ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὴν γωνίαν $ΗΑΒ$, λαμβάνομεν $ΒΑΓ = ΙΑΗ$. Τοῦτου τεθέντος, ἐπειδὴ $ΔΕ$ καὶ $ΑΙ$ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας AB , θέλουσιν εἶναι καὶ παράλληλοι (πρότ. 23). Ὁσαύτως, ἐπειδὴ $ΘΕ$ καὶ $ΑΗ$ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας $ΔΓ$, θέλουσιν εἶναι καὶ παράλληλοι. Λοιπὸν αἱ δύο γωνίαι $ΙΑΗ$, $ΔΕΘ$ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, καὶ ἐπομένως, κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικάι. Ἄρα, ἐπειδὴ ἡ $ΙΑΗ$ εἶναι ἴση τῇ $ΒΑΓ$, καὶ αἱ ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους γωνίαι $ΒΑΓ$, $ΔΕΘ$ θέλουσιν εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικάι, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἐὰν αἱ ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους ἑκατέραν ἑκατέρᾳ γωνίαι ᾖναι ἢ καὶ αἱ δύο ὀξεῖαι ἢ καὶ αἱ δύο ἀμβλείαι, ἐπειδὴ τότε δὲν δύνανται νὰ ᾖναι παραπληρωματικάι, ὡς ἀποτελοῦσαι ἄθροισμα μικρότερον ἢ μεγαλύτερον δύο ὀρθῶν, θέλουσιν εἶναι ἀναγκαίως ἴσαι. Ἐὰν δὲ ἡ μία τούτων εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἑτέρα ἀμβλεία, ἐπειδὴ δὲν δύνανται νὰ ᾖναι ἴσαι, θέλουσιν ἀναγκαίως εἶναι παραπληρωματικάι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 31. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

*Εστω $\triangle AB\Gamma$ τρίγωνόν τι ὅποιονδήποτε. Προεκβάλλομεν μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐκ τοῦ σημείου A ἄγομεν τὴν AE παράλληλον τῇ GB .



Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΓAB , BAE , EAD εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς (πρότ.

2, πόρ. 3). Ἄλλ' ἐκ τούτων ἡ μὲν γωνία ΓAB εἶναι γωνία τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, ἡ δὲ γωνία BAE εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ $AB\Gamma$ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ ὡς πρὸς τὰς παραλλήλους AE , GB , καὶ ἡ τρίτη γωνία EAD εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ γωνίᾳ $\Lambda\Gamma B$ τοῦ τριγώνου, ὡς ἀντιστοιχοῦσα ταύτῃ ὡς πρὸς τὰς αὐτὰς παραλλήλους. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΓAB , $AB\Gamma$, $\Lambda\Gamma B$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΓAB , BAE , EAD , ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ δύο γωνίας ὀρθάς. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

Πόρισμα 1. Πᾶν τρίγωνον μίαν γωνίαν ὀρθὴν δύναται νὰ ἔχῃ καὶ κατ' ἰσχυρότερον λόγον μίαν ἀμβλείαν. Διότι, ἂν εἶχε δύο ὀρθάς, ἡ τρίτη αὐτοῦ γωνία ἤθελεν εἶναι μηδέν, ἐπομένως δὲν θὰ ὑπῆρχε τρίγωνον· ἂν δὲ εἶχε δύο ἀμβλείας, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἤθελεν εἶναι μεγαλειότερον δύο ὀρθῶν, ὅπερ ἀδύνατον.

Πόρισμα 2. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξείων γωνιῶν παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθήν.

Πόρισμα 3. Ὅταν γνωρίζωμεν τὰς δύο γωνίας τριγώνου τινὸς ἢ μόνον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, εὐρίσκομεν τὴν τρίτην ἀφαιροῦντες ἀπὸ δύο ὀρθάς τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων γωνιῶν ἢ τὸ γνωστὸν ἄθροισμα.

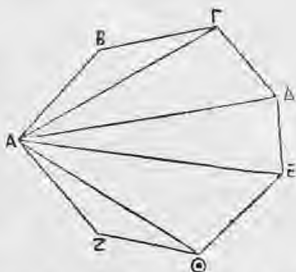
Πόρισμα 4. Ἡ γωνία $B\Lambda\Delta$, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τινος πλευρᾶς AB τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ τῆς προεκβολῆς $\Lambda\Delta$ τῆς ἑτέρας ΓA , καλεῖται ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου, καὶ εἶναι κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐσωτερικῶν καὶ ἀπέναντι γωνιῶν $AB\Gamma$, $\Lambda\Gamma B$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 32. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου

ισοῦται μὲ τοσάκις δύο γωνίας ὀρθάς, ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον μείον δύο.

Ἔστω $ABΓΔΕΘΖ$ ὁποιοιδήποτε κυρτὸν πολύγωνον, ἑπτὰ π. χ. πλευρῶν. Λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν τοῦ γωνιῶν $ABΓ$, $BΓΔ$, $ΓΔΕ$, $ΔΕΘ$, κτλ. ἰσοῦται μὲ πεντάκις δύο γωνίας ὀρθάς, ἥτοι μὲ δέκα ὀρθάς. Διότι, ἂν ἐνώσωμεν μίαν ὁποιοιδήποτε τῶν γωνιῶν τοῦ A μὲ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς διὰ τῶν διαγωνίων $ΑΓ$, $ΑΔ$, $ΑΕ$, $ΑΘ$, τὸ πολύγωνον θέλει ἀποσυντεθῇ εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσας πλευρὰς ἔχει μείον δύο. Διότι τὰ διάφορα ταῦτα τρίγωνα περιέχουσιν ἕκαστον μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἐκτὸς τῶν δύο ἐξωτερικῶν, οὕτως εἰπεῖν, τριγώνων $ABΓ$, $AΖΘ$, ὧν ἑκάτερον περιέχει δύο. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι προφανῶς ἰσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν εἰς ἃ ἀποσυντεθῇ τριγώνων. Λοιπὸν ἰσοῦται μὲ τοσάκις δύο ὀρθάς, ὅσα εἶναι τὰ τρίγωνα, τουτέστιν ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον μείον δύο.

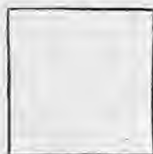


Ἄν παρὰστήσωμεν διὰ a τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν αὐτοῦ θέλει περιέχει τόσας ὀρθάς, ὅσας ἢ μονὰς περιέχεται ἐν τῷ γινομένῳ $2 \times (a-2)$, ἥτοι $2a-4$ γωνίας ὀρθάς.

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ὡνομάσαμεν τετράπλευρον τὸ ἔχον τέσσαρας πλευρὰς πολύγωνον. Μεταξὺ τῶν διαφόρων τετραπλεύρων διακρίνονται μερικώτερον τὰ ἑξῆς πέντε εἶδη·

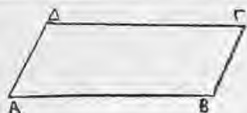
1^{ον}. Τὸ τετράπλευρον, τὸ ἔχον τὰς πλευρὰς του ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὅλας αὐτοῦ τὰς γωνίας ὀρθάς. Τὸ τοιοῦτο καλεῖται τετράγωνον.



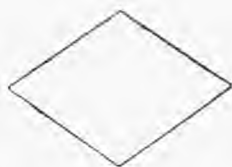
2^{ον}. Τὸ ἔχον ὅλας αὐτοῦ τὰς γωνίας ὀρθάς, τὰς δὲ πλευρὰς ἀνίσους. Τὸ τοιοῦτο καλεῖται ὀρθογώνιον.



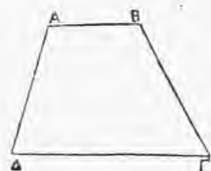
3^{ον}. Τὸ ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ παραλλήλους καὶ καλούμενον παραλληλόγραμμον. Τοιοῦτον εἶναι τὸ $ABΓΔ$, ἂν ἡ AB ᾖναι παράλληλος τῇ $ΓΔ$ καὶ ἡ $ΑΓ$ παράλληλος τῇ $ΒΔ$.



4^η. Τὸ ἔχον καὶ τὰς τέσσαρας αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας, τὰς δὲ γωνίας αὐτοῦ ἀνίσους. Τὸ τοιοῦτο καλεῖται *ῥόμβος* ἢ συνηθέστερον *ῥόμβοειδές*.



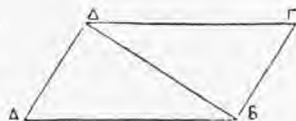
5^η. Τὸ ἔχον δύο μόνον πλευρὰς παραλλήλους καὶ καλούμενον *τραπέζιον*. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ, ἂν ἡ ΑΒ ᾖναι παράλληλος τῇ ΔΓ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 33. ΘΕΩΡΗΜΑ

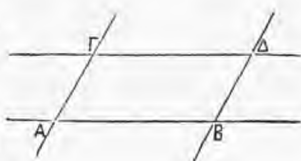
Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ὑπέναντι πλευραὶ καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἐστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμόν τι. Λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση τῇ ἀπέναντι αὐτῆς ΔΓ, ἡ πλευρὰ ΑΔ ἴση τῇ ΒΓ, ἡ γωνία Α ἴση τῇ ἀπέναντι αὐτῆς Γ καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ ἴση τῇ ΑΔΓ.



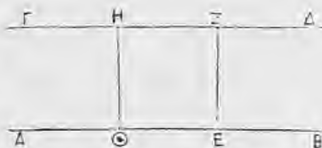
Πρὸς ἀπόδειξιν τῶν ἀνωτέρω ἄγομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ. Τὰ οὕτω σχηματισθέντα δύο τρίγωνα ΑΔΒ, ΔΒΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΒΔ κοινὴν, τὰς γωνίας ΑΔΒ, ΔΒΓ ἴσας, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ, καὶ τὰς γωνίας ΑΒΔ, ΒΔΓ ἴσας, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ (πρότ. 27) Ἀλλ' εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ εἶναι ἴσαι καθὼς καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι (πρότ. 13, σχόλ). Λοιπὸν θέλομεν ἔχει $\Delta\Gamma = \Delta\Delta$, $\Delta\Delta = \Delta\Gamma$, γωνία $\Delta = \Gamma$ καὶ γωνία $\Delta\Delta\Gamma = \Delta\Delta\Gamma$ διότι $\Delta\Delta\Gamma = \Delta\Delta\Gamma$ καὶ $\Delta\Delta\Gamma = \Delta\Delta\Gamma$, ἄρα καὶ $\Delta\Delta + \Delta\Delta\Gamma = \Delta\Delta\Gamma + \Delta\Delta\Gamma$, ἢ $\Delta\Delta\Gamma = \Delta\Delta\Gamma$. Λοιπὸν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ γωνίαι παντὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα 1. Τὰ μέρη ΑΓ, ΒΔ δύο παραλλήλων ΑΓ καὶ ΒΔ, τὰ μεταξὺ δύο ἄλλων παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ περιεχόμενα, εἶναι ἴσα, διότι τὸ προκύπτον σχῆμα ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον.



Πόρισμα 2. Δύο παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ ἰσάκεις ἀπέχουσι καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἑκτασιν, τοῦτέστιν, ἐὰν ἐξ ἑνὸς οἰποῦνδῆποτε σημείου Η

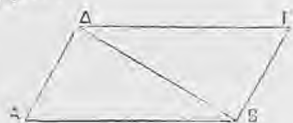
τῆς μιᾶς καταβιβάζωμεν κάθετον $\Pi\Theta$ ἐπὶ τῆς ἐτέρας, τὸ μέγεθος ταύτης τῆς καθέτου θέλει εἶναι τὸ αὐτό, ὅποιονδήποτε καὶ ἂν ᾖ τὸ σημεῖον Π τῆς $\Gamma\Delta$. Διότι, ἐὰν ἄξωμεν καὶ ἐξ ἐτέρου τινὸς σημείου Z τὴν κάθετον ZE ἐπὶ τῆς AB , αἱ δύο κάθετοι $\Pi\Theta$, ZE θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ὡς παράλληλοι (πρότ. 23) μεταξύ παραλλήλων περιεχόμεναι (πρότ. 33, πρότ. 1).



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 34. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τετραπλεύρου τινὸς ᾖται ἴσαι, αἱ ἴσαι πλευραὶ θέλουσιν εἶναι καὶ παράλληλοι, καὶ ἐπομένως τὸ τετράπλευρον θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ ἔχομεν $AB = \Gamma\Delta$ καὶ $AD = B\Gamma$. λέγω ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

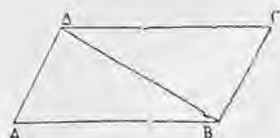


Διότι, ἐὰν ἄξωμεν τὴν διαγώνιον BD , τὰ δύο σχηματισθησόμενα τρίγωνα ABD , $B\Gamma D$ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν BD κοινὴν, τὰς πλευρὰς AB καὶ $\Delta\Gamma$, AD καὶ $B\Gamma$ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως. Λοιπὸν αἱ γωνίαι ABD , $B\Gamma D$, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν AD , $B\Gamma$, εἶναι ἴσαι, ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι ADB , $\Delta B\Gamma$, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν AB , $\Gamma\Delta$. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ABD , $B\Gamma D$ εἶναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι AB , $\Delta\Gamma$ εἶναι παράλληλοι. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ADB , $\Delta B\Gamma$ εἶναι ἴσαι, αἱ πλευραὶ AD , $B\Gamma$ εἶναι παράλληλοι. Τὸ σχῆμα λοιπὸν $AB\Gamma\Delta$, ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παράλληλους, εἶναι παραλληλόγραμμον, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

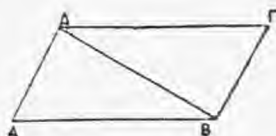
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 35. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν δύο ἀπέναντι πλευραὶ τετραπλεύρου τινὸς ᾖται ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ αἱ ἄλλαι δύο πλευραὶ αὐτοῦ θέλουσιν εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἐπομένως τὸ τετράπλευρον θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ ἡ πλευρὰ AB εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $\Gamma\Delta$. λέγω ὅτι ἡ AD θέλει εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $B\Gamma$, καὶ τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον.



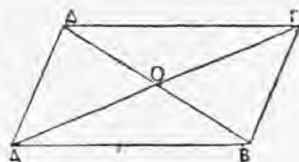
Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν τὴν διαγώνιον ΒΑ. Τὰ δύο σχήμα-
τισθέντα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΔΓ θέλουσιν εἶ-
ναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΒΔ κοινὴν, τὰς
πλευρὰς ΑΒ, ΓΔ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως, καὶ
τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας
ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας ΑΒΔ, ΒΔΓ ἴσας,
διότι ΑΒ ὑπετέθη παράλληλος τῇ ΓΔ. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει $ΑΔ=ΒΓ$,
καὶ τὴν γωνίαν $ΑΔΒ=ΔΒΓ$. Ἀλλ' αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΔΒ, ΔΒΓ ὡς πρὸς
τὰς εὐθείας ΑΔ, ΒΓ εἶναι ἐντὸς ἐναλλάξ. Ἀρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ
εἶναι καὶ παράλληλοι, καὶ τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 36. ΘΕΩΡΗΜΑ.

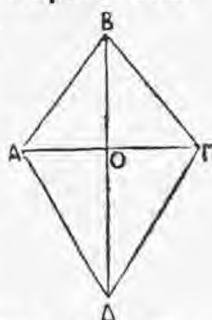
Αἱ δύο διαγώνιοι παντὸς παραλληλογράμμου τέμνονται ἰσο-
βαίως εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἐστωσαν ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοι παραλ-
ληλογράμμου τινὸς ΑΒΓΔ. Λέγω ὅτι θέ-
λομεν ἔχει $ΑΟ=ΟΓ$ καὶ $ΔΟ=ΟΒ$.



Διότι τὰ δύο κατὰ κορυφὴν τρίγωνα
 $ΑΟΔ$, $ΒΟΓ$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς
πλευρὰς ΑΔ, ΒΓ ἴσας, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου,
τὰς γωνίας $ΑΔΟ$, $ΟΒΓ$ ἴσας, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ ὡς πρὸς τὰς παραλ-
λῆλους ΑΔ, ΒΓ, καὶ τὰς γωνίας $ΑΟΟ$, $ΟΓΒ$ ἴσας διὰ τὸν αὐτὸν λό-
γον. Λοιπὸν καὶ ἡ πλευρὰ ΑΟ, ἀπέναντι τῆς γωνίας $ΑΔΟ$, εἶναι ἴση
τῇ ΟΓ, ἀπέναντι τῆς γωνίας $ΟΒΓ$, ἴσης τῇ ΑΟ· καὶ ἡ πλευρὰ ΔΟ
εἶναι ἴση τῇ ΟΒ δι' ὁμοίον τινα λόγον. Λοιπὸν αἱ διαγώνιοι κτλ.

Σχόλιον. Ἄν ἀντὶ παραλληλογράμμου εἴχο-
μεν τὸ ῥομβοειδὲς ΑΒΓΔ, εἰς τοῦτο τὰ παρακεί-
μενα τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς
ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἐκά-
στην ἐκάστη, τουτέστι τὴν ΒΟ κοινὴν, τὰς ΑΟ,
ΟΓ ἴσας, ὡς τὰ ἡμίση τῆς διαγωνίου ΑΓ, καὶ τὰς
πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ ἴσας, ὡς πλευρὰς τοῦ ῥομβοειδοῦς.
Λοιπὸν ἡ γωνία $ΑΟΒ=ΒΟΓ=1^{\circ}$ (ἢ 17.) Λοι-
πὸν αἱ δύο διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ τοῦ ῥομβοειδοῦς ΑΒΓΔ εἶναι κάθετοι
ἐπ' ἀλλήλων, ἢ, ὡς συνήθως λέγουσι, τέμνονται κατ' ὀρθὰς γωνίας.



ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΚΥΚΛΟΥ ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Καλεῖται περιφέρεια κύκλου καμπύλη τις γραμμή ΑΗΒΔ, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἰσάκεις ἀπὸ τινος ἐντὸς αὐτῆς σημείου Γ, ὃπερ καλεῖται κέντρον τῆς περιφερείας.

2. Κύκλος καλεῖται τὸ χωρίον ἢ τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὑπὸ τῆς περιφερείας πανταχόθεν περιοριζόμενον.

3. Ἀκτὶς τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη εἰς τὴν περιφέρειαν. Τοιαῦται εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΓΔ, ΓΕ, ΓΑ κτλ.

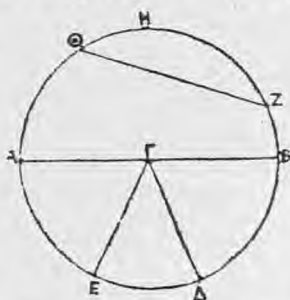
4. Διάμετρος καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη ἐκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν. Τοιαύτη εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Γ καὶ περατοῦται ἐκατέρωθεν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β τῆς περιφερείας.

Ἐκ τοῦ δοθέντος ὀρίσμου τοῦ κύκλου ἔπεται 1^{ον}, ὅτι ὅλαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι, καὶ 2^{ον} ὅτι ὅλαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι καὶ διπλάσαι τῶν ἀκτίνων.

5. Τόξον ὀνομάζεται μέρος τι ΖΗΘ τῆς περιφερείας.

6. Χορδὴ καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα ΖΘ, ἐνόνουσα τὰ ἄκρα τόξου τινὸς ΖΗΘ.

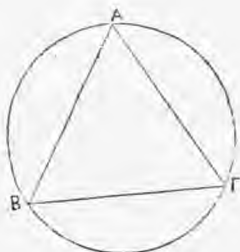
7. Τμήμα καλεῖται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου, τὸ μεταξὺ τόξου τινὸς καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ περιεχόμενον. Τοιοῦτον εἶναι τὸ μέρος ΖΗΘ τοῦ κύκλου, τὸ μεταξὺ τοῦ τόξου ΖΗΘ καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ ΘΖ περιεχόμενον.



Ἡ αὐτὴ χορδὴ ΘZ ὑποτείνει δύο τόξα ΘHZ , ΘEZ , καὶ ἐπομένως καὶ δύο τμήματα. Ἐν τοῖς ἐπομένοις θέλομεν ἐννοεῖ ὅτι πρόκειται πάντοτε περὶ τοῦ μικροτέρου τόξου ἢ τμήματος, ἐκτὸς ὅταν ἐκφράζωμεν ῥητῶς τὸ ἐναντίον.

8. Τομεὺς καλεῖται τὸ μέρος $E\Gamma\Delta$ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τόξου τινὸς $E\Delta$ καὶ τῶν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἡγμένων ἀκτίνων ΓE καὶ $\Gamma\Delta$.

9. Γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον καλεῖται πᾶσα γωνία $B\Lambda\Gamma$, ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς Λ ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ σχηματιζομένη ὑπὸ δύο χορδῶν ΛB καὶ $\Lambda\Gamma$.

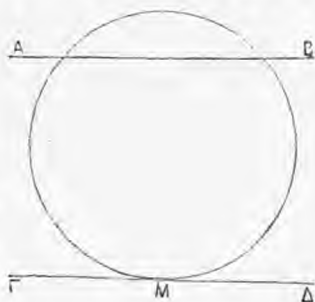


10. Καλεῖται τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον πᾶν τρίγωνον $\Delta B\Gamma$, ἔχον τὰς κορυφὰς τῶν τριῶν αὐτοῦ γωνιῶν Λ , B , Γ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Καλεῖται ἐν γένει σχῆμα ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον πᾶν σχῆμα, ἔχον τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Ὁ κύκλος, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ὁποίου κεῖνται αἱ κορυφαὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, καλεῖται περιγεγραμμένος εἰς τὸ σχῆμα.

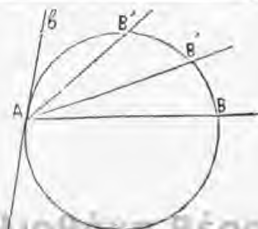
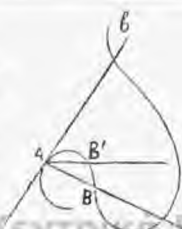
11. Πᾶσα γωνία $E\Gamma\Delta$, ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καλεῖται κεντρικὴ γωνία. (ὄρα τὸ ἐν σελίδι 41 σχῆμα).

12. Τέμνουσα κύκλου τινὸς καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ δύο ὀποιωνδήποτε σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ. Τοιαύτη εἶναι ἡ AB .



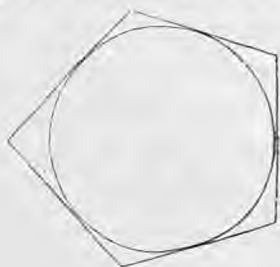
13. Καλεῖται ἐφαπτομένη εἰς τὸν κύκλον πᾶσα εὐθεῖα $\Gamma\Delta$ ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον M μετὰ τῆς περιφερείας ἔχουσα. Τὸ κοινὸν δὲ τοῦτο σημεῖον M καλεῖται σημεῖον τῆς ἐπαφῆς (*).

(*) Καλοῦσιν ἐν γένει ἐφαπτομένην εἰς τι σημεῖον Λ καμπύλης τινὸς τὸ ὄριον $\Lambda\beta$ τῶν θέσεων, ἃς λαμβάνει τέμνουσά τις ΛB , στρεφομένη περὶ τὸ ση-



14. Δύο περιφέρειαι λέγονται *ἐφαπτόμεναι*, ὅταν ἔν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχωσι. Τοιαῦται εἶναι αἱ ὑπὸ τῶν σχημάτων τῆς 14 καὶ 15 προτάσεως παριστώμεναι.

15. Πολύγωνόν τι καλεῖται *περιγεγραμμένον* εἰς τινὰ κύκλον, ὅταν ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ᾗναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Τότε ὁ κύκλος καλεῖται *ἐγγεγραμμένος* εἰς τὸ πολύγωνον.

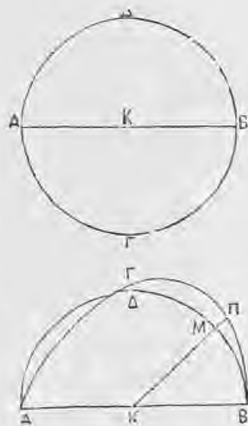


ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειάν του εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἐστω AB διάμετρος τις τοῦ κύκλου. Λέγω ὅτι τὰ δύο μέρη ΔGB , $\Lambda \Delta B$ τῆς περιφέρειας εἶναι ἴσα, ὡσαύτως καὶ τὰ δύο μέρη $\Lambda \Delta B A$, $\Delta G B A$ τοῦ κύκλου.

Διότι, ἔαν στρέψωμεν τὸ σχῆμα ΔGB περὶ τὴν διάμετρον AB μέχρις οὗ τὸ ἐπίπεδόν του πέσῃ ἐπὶ τοῦ σχήματος $\Lambda \Delta B$, ἡ καμπύλη γραμμὴ ΔGB θέλει πέσει ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς $\Lambda \Delta B$, ἄλλως ἢθελον ὑπάρχει ἐπὶ τῆς περιφέρειας $\Lambda \Delta B \Gamma$ σημεῖα ἀνίσχυς ἀπέχοντα τοῦ κέντρου K , ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸν ὅρισμὸν τοῦ κύκλου. Ἄν π.χ. ἐλάβμεθα τὴν θέσιν, ἣν παριστᾷ τὸ δεύτερον σχῆμα, τότε τὰ σημεῖα Π καὶ M τῆς περιφέρειας,



μετὼν Λ μέχρις οὗ ἑξωτερὸν τι σημεῖον B τῆς τομῆς ταύτισθῃ μὲ τὸ πρῶτον.

Ὅταν ἡ καμπύλη ᾗναι γραμμὴ κεκλεισμένη καὶ δὲν ᾗναι δυνατόν νὰ τμηθῇ ὑπ' εὐθείας τινὸς εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα, ὡς π.χ. ὁ κύκλος, εἶναι φανερόν ὅτι, ὅταν τὸ δεύτερον σημεῖον τῆς τομῆς ταύτισθῃ μὲ τὸ πρῶτον, ἡ εὐθεῖα δὲν θέλει ἔχει τότε ἢ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς καμπύλης. Δυνάμεθα λοιπόν, ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, νὰ ὀνομάσωμεν ἐφαπτομένην πᾶσαν εὐθεῖαν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς καμπύλης ἔχουσαν. Ἀλλὰ μόνον ὁ ἀνωτέρω δοθεὶς γενικὸς ὁρισμὸς ἐφαρμόζεται εἰς ὅλας τὰς καμπύλας γραμμὰς, καὶ ἔχει τὸ πλεονέκτημα νὰ καθιστᾷ ἐπαίσθητός, καὶ ἐπὶ τοῦ κύκλου αὐτοῦ ἐφαρμοζόμενος, ἀξιοπαρατηρήτους ἀναλογίας ὑπαρχούσας μεταξὺ πολλῶν θεωρημάτων φαινομένων ἐκ πρώτης ὕψεως διαφορῶν.

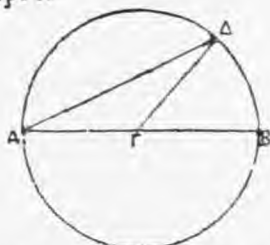
τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀκτίνος ΚΠ κείμενα, ἤθελον προφανῶς ἀπέχει ἀνισάκις τοῦ κέντρου Κ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πᾶσα χορδὴ εἶναι μικρότερα τῆς διαμέτρου.

Ἐστω ΑΔ χορδὴ τις. Λέγω ὅτι εἶναι μικρότερα τῆς διαμέτρου ΑΒ.

Διότι, ἂν ἀξῶμεν τὴν ἀκτὶνα ΓΔ, εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ θέλομεν ἔχει, κατὰ τὰ ἐν τῇ προτάσει 8 τοῦ Α' βιβλίου ἀποδειχθέντα, $ΑΔ < ΑΓ + ΓΔ$. Ἀλλὰ $ΓΔ = ΓΒ$, ὡς ἀκτίνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἀρα $ΑΔ < ΑΓ + ΓΒ$ ἢ $< ΑΒ$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

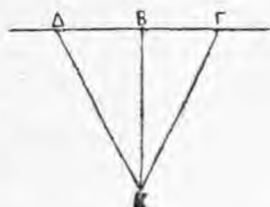


Πόρισμα. Ἡ μεγαλειτέρα λοιπὸν εὐθεΐα, ἡ μεταξὺ δύο σημείων τῆς περιφερείας κύκλου τινὸς ἀγομένη, εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ

Περιφέρεια κύκλου δὲν δύναται γὰρ συναπαντηθῇ ὑπ' εὐθείας τινος εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεία

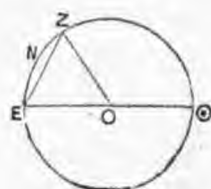
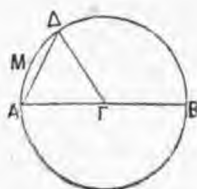
Ἄς ὑποθέσωμεν, εἰ δυνατόν, ὅτι ἡ εὐθεΐα ΑΓ συναπαντᾷ τὴν ἔχουσαν Κ κέντρον περιφέρειαν εἰς τρία τινὰ σημεία Δ, Β, Γ. Τότε αἱ εὐθεΐαι ΚΔ, ΚΒ, ΚΓ, ὡς ἀκτίνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, θέλουσιν εἶναι ἴσαι, καὶ ἡθέλωμεν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΓ τρεῖς ἴσας πλαγίας ΚΔ, ΚΒ, ΚΓ, ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 18, πόρ. 2, Α').



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΘΕΩΡΗΜΑ

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνουσιν ἴσας χορδὰς, καὶ ἀντιστρόφως, αἱ ἴσαι χορδαὶ ὑποτείνουσιν ἴσα τόξα.

Ἐστω ἡ ἀκτὶς ΑΓ ἴση τῇ ἀκτίνι ΕΟ, καὶ τὸ τόξον ΑΜΔ ἴσον τῷ τόξῳ ΕΝΖ, λέγω ὅτι ἡ χορδὴ ΑΔ θέλει εἶναι ἴση τῇ χορδῇ ΕΖ.



Διότι, ἐπειδὴ ἡ διάμετρος AB εἶναι ἴση τῇ EO , ἂν τὸ ἡμικύκλιον EZO ἐπιτεθῇ ἐπὶ τοῦ $ΔAB$, αἱ ἡμιπεριφέρειαι $ΔAB$, EZO θέλουσι ταῦτι-
σθῇ (πρότ. 1), καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον $ΑΜΔ$ εἶναι ἴσον τῷ $ΕΝΖ$, τὸ ση-
μεῖον Z θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ $Δ$, ἐπομένως ἡ χορδὴ EZ θέλει πέσει ἐπὶ
τῆς $ΔΔ'$ · διότι κατὰ τὸ 4^{ον} ἀξίωμα ἐξ ἐνὸς σημείου $Δ$ εἰς ἄλλο $Δ$ μία
μόνη εὐθεῖα ἄγεται. Λοιπὸν 1^{ον}, τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνουσιν ἴσας χορδὰς.

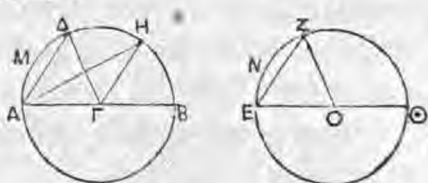
*Ἀντιστρόφως, ἂν ἡ χορδὴ $ΔΔ'$ ὑποτεθῇ ἴση τῇ EZ , καὶ τὰ ὑποτεί-
νόμενα ὑπ' αὐτῶν τόξα $ΑΜΔ$, $ΕΝΖ$ θέλουσιν εἶναι ἴσα.

Διότι, ἐὰν ἀξωμεν τὰς ἀκτῖνας $ΓΔ$, $ΟΖ$, τὰ δύο τρίγωνα $ΑΓΔ$, $ΕΟΖ$
θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἐκάστην ἐκά-
στη, τουτέστιν $ΑΔ=ΕΖ$, $ΑΓ=ΕΟ$, καὶ $ΓΔ=ΟΖ$. Λοιπὸν ἡ γωνία
 $ΕΟΖ=ΑΓΔ$. Τούτου δὲ τεθέντος, ἂν ἐπιτεθῇ τὸ ἡμικύκλιον EZO ἐπὶ
τοῦ ἴσου αὐτῷ $ΔAB$, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι, $ΑΓΔ$, $ΕΟΖ$ εἶναι ἴσαι, ἡ πλευ-
ρὰ $ΟΖ$ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς $ΓΔ$, καὶ ἐπειδὴ $ΟΖ=ΓΔ$, τὸ σημεῖον Z
θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ $Δ$, καὶ ἐπομένως τὰ δύο τόξα $ΑΜΔ$, $ΕΝΖ$ θέλουσι
ταῦτισθῇ. Ἄρα εἶναι ἴσα. Λοιπὸν 2^{ον}, αἱ ἴσαι χορδαὶ $ΔΔ'$, EZ ὑποτεί-
νουσιν ἴσα τόξα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ

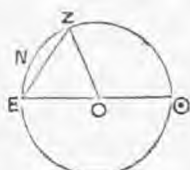
Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους τὸ μεγαλειότερον τό-
ξον ὑποτείνει μεγαλειτέραν χορδὴν, καὶ ἀντιστρόφως, ἡ μεγαλει-
τέρα χορδὴ ὑποτείνει μεγαλειότερον τόξον, ἐὰν τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος
τόξα ᾖναι μικρότερα ἡμιπεριφερείας.

*Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκτίς
 $ΑΓ$ εἶναι ἴση τῇ $ΕΟ$ καὶ τὸ τό-
ξον $ΑΜΗ$ μεγαλειότερον τοῦ
 $ΕΝΖ$. Λέγω ὅτι ἡ χορδὴ $ΑΗ$
τοῦ πρώτου τόξου θέλει εἶναι
μεγαλειτέρα τῆς χορδῆς EZ τοῦ δευτέρου.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς λάβωμεν τὸ τόξον $ΑΜΔ=ΕΝΖ$, καὶ ἂς
ἀξωμεν τὴν χορδὴν $ΔΔ'$. Κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, ἡ χορδὴ $ΔΔ'$ θέλει
εἶναι ἴση τῇ EZ . Ἀλλὰ τὰ δύο τρίγωνα $ΑΓΔ$, $ΑΓΗ$ ἔχουσι τὰς πλευ-
ρὰς $ΑΓ$, $ΓΔ$, $ΑΓ$, $ΓΗ$, τὰς περιχούσας τὰς γωνίας $ΑΓΔ$, $ΑΓΗ$, ἴσας,
καὶ ἐπειδὴ προφανῶς ἡ γωνία $ΑΓΗ$ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς $ΑΓΔ$, ἡ
τρίτη πλευρὰ $ΑΗ$ τοῦ τριγώνου $ΑΓΗ$ θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς τρί-
της πλευρᾶς $ΔΔ'$ τοῦ τριγώνου $ΑΓΔ$ (πρότ. 11. Α'). Ἀλλ' $ΔΔ'=ΕΖ$.
Ἄρα $ΑΗ > ΕΖ$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Ἄς ὑποθέσωμεν 2^{ον} ὅτι ἡ χορδὴ ΑΗ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΕΖ. Λέγω ὅτι καὶ τὸ τόξον ΑΜΗ θέλει εἶναι μεγαλειτερον τοῦ ΕΝΖ.



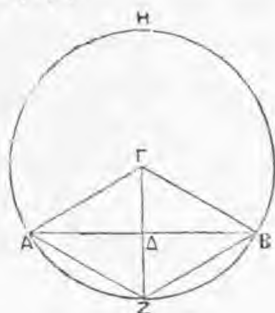
Διότι, ἂν τὰ τόξα ΑΜΗ, ΕΝΖ ἦσαν ἴσα, αἱ χορδαὶ ΑΗ, ΕΖ ἤθελον εἶναι ἴσαι, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως· ἂν δὲ τὸ τόξον ΑΜΗ ᾖτο μικρότερον τοῦ ΕΝΖ, τότε καὶ ἡ χορδὴ ΑΗ ἤθελαν εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΖ, ὅπερ εἶναι ὡσαύτως ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν τὸ τόξον ΑΜΗ εἶναι ἀναγκαίως μεγαλειτερον τοῦ ΕΝΖ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχῆμα. Ὑποθέσαμεν ῥητῶς ὅτι πρόκειται περὶ τόξων μικροτέρων ἡμιπεριφερείας. Ἄν ἐπρόκειτο περὶ τόξων μεγαλειτέρων ἡμιπεριφερείας, τότε ἡ μεγαλειτέρα χορδὴ ἤθελαν ὑποτείνειν μικρότερον τόξον, καὶ ἀντιστρόφως, τὸ μικρότερον τόξον ἤθελαν ὑποτείνειν μεγαλειτέραν χορδὴν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πᾶσα ἀκτίς, κάθετος ἐπὶ τίνος χορδῆς, διαιρεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὸ ὑπ' αὐτῆς ὑποτεινόμενον τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκτίς ΓΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ. Λέγω ὅτι διαιρεῖ ταύτην καὶ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ΑΖΒ εἰς δύο ἴσα μέρη, τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει $ΑΔ=ΔΒ$ καὶ τόξον $ΑΖ=$ τόξον $ΖΒ$.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν τὰς ἀκτῖνας ΓΑ, ΓΒ καὶ τὰς χορδὰς ΑΖ, ΖΒ. Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ, ΓΔΒ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτείνουσας τῶν

ΓΑ, ΓΒ ἴσας καὶ τὴν πλευρὰν ΓΔ κοινὴν (πρότ. 20, Α'). Λοιπὸν καὶ ἡ πλευρὰ ΑΔ=ΔΒ. Ἄλλ' ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΑΒ, πᾶν σημεῖον Ζ τῆς καθέτου ἰσάκις ἀπέχει τῶν ἄκρων Α καὶ Β (πρότ. 19, Α'). Λοιπὸν ἡ χορδὴ ΑΖ=τῇ χορδῇ ΖΒ. Ἄλλ' ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΑΖ, ΖΒ εἶναι ἴσαι, τὰ ὑπ' αὐτῶν ὑποτεινόμενα τόξα ΑΖ, ΖΒ θέλουσιν εἶναι ἴσα (πρότ. 4). Λοιπὸν πᾶσα ἀκτίς, κάθετος ἐπὶ τίνος χορδῆς, διαιρεῖ ταύτην καὶ τὸ ὑποτεινόμενον ὑπ' αὐτῆς τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Σχόλιον. Ἡ εὐθεῖα ΓΖ ἐκπληροῖ τὰς ἐξῆς τέσσαρας συνθήκας.

1^{ov} Διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Γ.

2^{ov} Εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ.

3^{ov} Διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς χορδῆς ΑΒ.

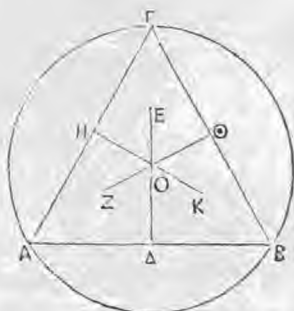
4^{ov} Διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ζ τοῦ ὑποτετινομένου τόξου ΑΖΒ.

Ἄλλ' ἐπειδὴ ἐξ ἑνὸς σημείου εἰς ἄλλο μία μόνη εὐθεῖα ἄγεται, δύο μόνον συνθῆκαι εἶναι ἐπαρκεῖς διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς θέσεως εὐθεΐας τινός. Ἐπεται λοιπὸν ὅτι πᾶσα εὐθεῖα, ἐκπληροῦσα δύο τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων συνθηκῶν, ἐκπληροῖ ἀναγκαίως καὶ τὰς ἄλλας δύο. Παραδείγματος χάριν, ἂν μᾶς δοθῇ ὅτι εὐθεΐα τις διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ τοῦ μέσου Ζ τοῦ ὑπ' αὐτῆς ὑποτετινομένου τόξου ΑΖΒ, θέλομεν ἀμέσως συμπεράνει ὅτι εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς καὶ ὅτι διέρχεται καὶ διὰ τοῦ κέντρου Γ τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ

Διὰ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων σημείων διέρχεται πάντοτε περιφέρεια κύκλου καὶ μία μόνη.

Ἔστωσαν Α, Β, Γ τρία μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα σημεία. Ἄς ἄξωμεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, καὶ εἰς τὰ μέσα Δ καὶ Θ αὐτῶν ἅς ὑψώσωμεν τὰς καθετοὺς ΔΕ, ΘΖ. Λέγω 1^{ov} ὅτι αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται εἰς τι σημεῖον Ο, ὅπερ θέλει εἶναι τὸ κέντρον τῆς διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ διερχομένης περιφερείας.



Ἐν πρώτοις αἱ κάθετοι ΔΕ, Ζ συναπαντῶνται. Διότι, ἂν δὲν συνηντῶντο, ἤθελον εἶναι παράλληλοι. Ἀλλὰ τότε ἡ ΒΑ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τῆς ΔΕ, θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῇ ΘΖ (πρότ. 25, Α'). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΘΒ. Λοιπὸν αἱ εὐθεΐαι ΒΑ, ΒΓ ἤθελον ἀποτελεῖ μίαν μόνην εὐθεΐαν (πρότ. 17, Α'). Ἀλλὰ τότε τὰ τρία σημεία Α, Β, Γ ἤθελον κεῖσθαι ἐπ' εὐθείας, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν αἱ κάθετοι ΔΕ, ΘΖ τέμνονται εἰς τι σημεῖον Ο.

Δεύτερον, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς εὐθείας ΑΒ ὑψώσεως καθετοῦ ΔΕ, ἀπέχει ἰσάκεις τῶν ἄκρων Α καὶ Β αὐτῆς (πρότ. 19, Α'), καὶ ἐπειδὴ κεῖται ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ

6). Λοιπὸν καὶ ἡ ΓΖ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΓΘ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

*Ὡς ὑποθέσωμεν 2^{ον} ὅτι ἡ χορδὴ ΑΠ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΔΕ. Λέγω ὅτι ἡ κάθετος ΓΖ θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς καθέτου ΓΙ.

Διότι, ἂν λάβωμεν τὸ τόξον ΑΚΒ ἴσον τῷ ΔΜΕ καὶ ἄξωμεν τὴν χορδὴν ΑΒ, ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΔΕ, ΑΒ εἶναι ἴσαι, ἡ κάθετος ΓΖ θέλει εἶναι ἴση τῇ καθέτῳ ΓΘ. Ἀλλὰ ΓΘ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΓΟ, ἥτις ὡς πλαγία εἶναι μεγαλειτέρα τῆς καθέτου ΓΙ. Λοιπὸν κατ' ἰσχυρότερον λόγον ἡ ΓΘ, ἢ ἡ ἴση ταύτῃ ΓΖ, θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΓΙ. Λοιπὸν 2^{ον}, ἐκ δύο ἀνίσων χορδῶν ἡ μικροτέρα ἀπέχει περισσότερον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. ΘΕΩΡΗΜΑ.

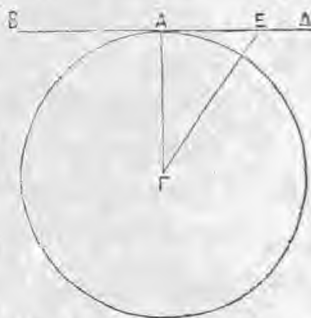
Πᾶσα εὐθεῖα, κάθετος εἰς τὸ ἄκρον ἀκτίνος τιῆς, εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν, καὶ ἀντιστρόφως, πᾶσα ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἀγομένης ἀκτίνος.

*Ὡς ὑποθέσωμεν 1^{ον} ὅτι ἡ ΒΔ ἤχθη κάθετος εἰς τὸ ἄκρον Α τῆς ἀκτίνος ΓΑ. Ἐπειδὴ πᾶσα πλαγία ΓΕ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς καθέτου ΓΑ, ἔπεται ὅτι πᾶν σημεῖον Ε τῆς εὐθείας ΒΔ, ἐκτὸς τοῦ σημείου Α, θέλει κεῖσθαι ἐκτὸς τῆς περιφέρειας. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΒΔ ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον Α μετὰ τῆς περιφέρειας ἔχει.

*Ἄρα εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν (ὁρ. 13). Λοιπὸν 1^{ον} κατλ.

*Ὡς ὑποθέσωμεν 2^{ον} ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς περιφέρειας. Λέγω ὅτι θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἀγομένης ἀκτίνος ΓΑ.

Διότι, ἐπειδὴ πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας ΒΔ, πλὴν τοῦ Α, καίται ἐκτὸς τῆς περιφέρειας, ἡ ἀκτὶς ΓΑ εἶναι μικροτέρα πάσης εὐθείας, ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Γ εἰς τι ὅποιονδήποτε σημεῖον τῆς ΒΔ. Λοιπὸν ΓΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΔ (πρότ. 18, πόρ. 1, Α'), τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὰ μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν περιχόμενα τόξα περιφέρειας τινὸς εἶναι ἴσα.

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις περιλαμβάνει τὰς ἐξῆς τρεῖς περιπτώσεις·

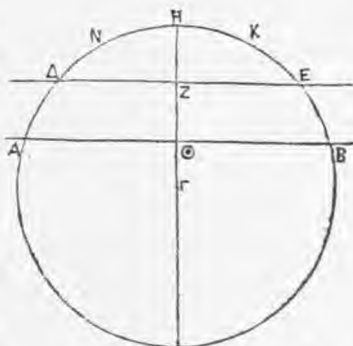
Ἡ καὶ αἱ δύο παράλληλοι θέλουσιν εἶναι τέμνουσαι,

Ἡ ἡ μία τέμνουσα καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη,

Ἡ καὶ αἱ δύο ἐφαπτόμεναι.

Ἄς ὑποθέσωμεν 1^{ον} ὅτι καὶ αἱ δύο εἶναι τέμνουσαι, καὶ ἔστωσαν AB, DE αὗται. Λέγω ὅτι τὰ τόξα AD, BE , τὰ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενα, εἶναι ἴσα.

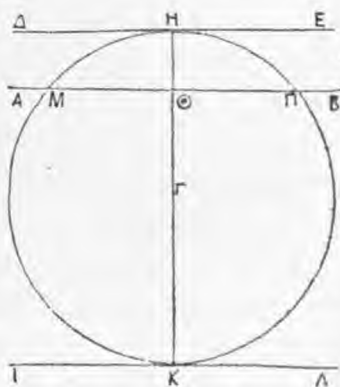
Διότι, ἂν ἐκ τοῦ κέντρου Γ καταβιβάσωμεν τὴν $\Gamma\Theta$ κάθετον ἐπὶ τῆς AB , αὕτη θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῇ DE (πρότ. 25, A'), καὶ θέλει διαιρεῖ τὰ τόξα AHB, AHE εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὸ σημεῖον H (πρότ. 6). Θέλωμεν λοιπὸν ἔχει τόξον $AH = τ\phi HB$ καὶ τόξον $AD = τ\phi BE$. Ἐπομένως ἡ διαφορὰ AD τῶν τόξων AH καὶ AH θέλει εἶναι ἴση τῇ διαφορᾷ BE τῶν ἴσων αὐτοῖς τόξων HB καὶ HE , τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδειξωμεν.



Ἄς ὑποθέσωμεν 2^{ον} ὅτι ἡ μία AB εἶναι τέμνουσα καὶ ἡ ἑτέρα DE ἐφαπτομένη. Λέγω ὅτι τὰ τόξα MH, HP , τὰ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενα, εἶναι ἴσα.

Διότι, ἂν ἄξωμεν τὴν ἀκτῖνα ΓH εἰς τὸ σημεῖον H τῆς ἐπαφῆς, αὕτη θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης DE (πρότ. 9), ἐπομένως κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῇ AB .

Ἀλλὰ τότε, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 6 προτάσει, διαιρεῖ τὸ τόξον MHP εἰς δύο ἴσα μέρη. Λοιπὸν τὸ τόξον $MH = τ\phi HP$.



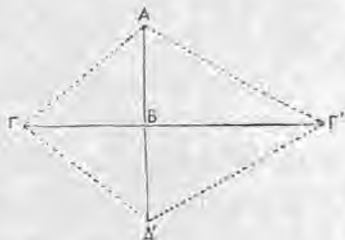
Ἄς ὑποθέσωμεν 3^{ον} ὅτι καὶ αἱ δύο IA, DE εἶναι ἐφαπτόμεναι. Λέγω ὅτι τὰ τόξα HK, HPK εἶναι ἴσα.

Διότι, ἂν ἄξωμεν τὰς ἀκτῖνας $\Gamma H, \Gamma\Theta$, αὗται θέλουσι κεῖσθαι ἐπ' εὐθείας, ὡς κάθετοι ἀμφοτέρω ἐπὶ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν DE καὶ IA (πρότ. 25, A'). Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν HK εἶναι διάμετρος, ἐπομένως τὰ τόξα HK, HPK εἶναι ἴσα, ὡς ἡμιπεριφέρειαι. Λοιπὸν 3^{ον} κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἔχωσιν ἐν κοινὸν σημεῖον A , κείμενον ἐκτὸς τῆς ἐνορούσης τὰ κέντρα αὐτῶν Γ καὶ Γ' εὐθείας $\Gamma\Gamma'$, αὗται θέλουσιν ἔχει καὶ δευτέρον τι κοινὸν σημεῖον A' , κείμενον ἐπὶ τῆς AB , καθέτου ἐπὶ τῆς $\Gamma\Gamma'$, καὶ ἀπέχον τῆς $\Gamma\Gamma'$ ὅσον καὶ τὸ σημεῖον A .

Διότι, ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν $A'B = AB$, αἱ πλάγιοι GA, GA' καθὼς καὶ αἱ $\Gamma'A, \Gamma'A'$ εἶναι ἴσαι, (πρότ. 18, 2^ο, Δ'). Λοιπὸν αἱ μὲ κέντρα Γ καὶ Γ' καὶ ἀκτῖνας $GA, \Gamma'A$ γραφόμεναι περιφέρειαι θέλουσι διέλθει καὶ διὰ τοῦ σημείου A' , ὅπερ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς καθέτου AB καὶ ἀπέχει τῆς $\Gamma\Gamma'$, ὅσον καὶ τὸ σημεῖον A . Λοιπὸν κτλ.



Πόρισμα 1. Ἡ εὐθεῖα $\Gamma\Gamma'$, ἡ ἐνόνουσα τὰ κέντρα Γ καὶ Γ' δύο τεμνομένων περιφερειῶν, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς αὐτῶν χορδῆς AA' , καὶ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη.

Πόρισμα 2. Ὅταν δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων, τὸ κοινὸν τῆς ἐπαφῆς αὐτῶν σημεῖον κεῖται ἀναγκαίως ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν κέντρων. Διότι, ἂν ἔκειτο ἐκτὸς, αἱ περιφέρειαι ἤθελον ἔχει, κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, καὶ δευτέρον σημεῖον κοινόν, ἐπομένως ἤθελον τέμνεσθαι.

Σχόλιον. Αἱ πρὸς ἀλλήλας διάφοροι θέσεις δύο περιφερειῶν εἶναι αἱ ἑξῆς πέντε·

Ἐσωτερικαί, ὅταν ἡ μία κῆται ἐντὸς τῆς ἄλλης.

Ἐξωτερικαί, ὅταν ἡ μία κῆται ἐκτὸς τῆς ἄλλης.

Ἐγαπτόμεναι ἐσωτερικῶς, ὅταν συνεφάπτονται ἀλλήλων καὶ ᾗναι ἐσωτερικαί.

Ἐγαπτόμεναι ἐξωτερικῶς, ὅταν συνεφάπτονται ἀλλήλων καὶ ᾗναι ἐξωτερικαί.

Τεμνόμεναι, ὅταν τέμνωνται.

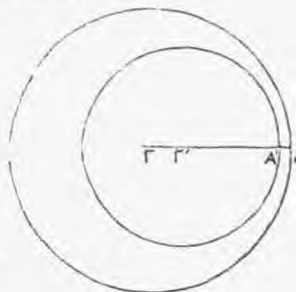
Δι' ἐκάστην δὲ τῶν ἀνωτέρω πέντε διαφορῶν πρὸς ἀλλήλας τῶν περιφερειῶν θέσεων ὑπάρχει ἰδιαιτέρως τις σχέσις μεταξὺ τῶν ἀκτῶν καὶ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων αὐτῶν. Ἐκάστην τῶν σχέσεων τούτων ἀποδεικνύομεν διὰ τῶν ἀκολουθῶν θεωρημάτων.

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βέροιας

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ὅταν δύο περιφέρειαι ᾗναι ἐσωτερικαί, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων.

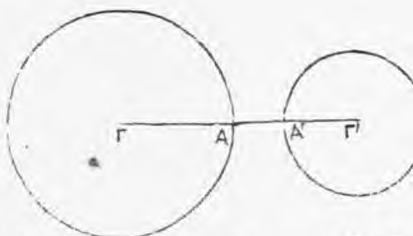
Ἐστώσαν Γ καὶ Γ' τὰ κέντρα καὶ $\Gamma\Lambda$, $\Gamma'\Lambda'$ αἱ ἀκτῖνες τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος δύο ἐσωτερικῶν περιφερειῶν. Θέλομεν ἔχει προφανῶς $\Gamma\Gamma' = \Gamma\Lambda - \Gamma'\Lambda' = \Lambda\Lambda'$, ἐπομένως $\Gamma\Gamma' < \Gamma\Lambda - \Gamma'\Lambda'$. Λοιπὸν, ὅταν δύο περιφέρειαι ᾗναι ἐσωτερικαί, ἡ ἀπόστασις $\Gamma\Gamma'$ τῶν κέντρων εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς $\Gamma\Lambda - \Gamma'\Lambda'$ τῶν ἀκτίνων.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ὅταν δύο περιφέρειαι ᾗναι ἐξωτερικαί, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων.

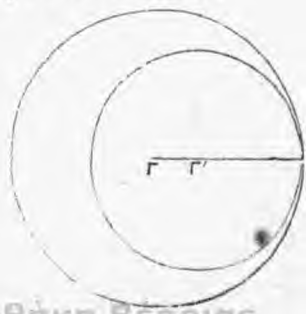
Ἐστώσαν Γ καὶ Γ' τὰ κέντρα τῶν δύο ἐξωτερικῶν περιφερειῶν καὶ $\Gamma\Lambda$, $\Gamma'\Lambda'$ αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν. Θέλομεν ἔχει προφανῶς $\Gamma\Gamma' = \Gamma\Lambda + \Lambda\Lambda' + \Lambda'\Gamma'$, ἐπομένως $\Gamma\Gamma' > \Gamma\Lambda + \Gamma'\Lambda'$. Λοιπὸν, ὅταν αἱ περιφέρειαι ᾗναι ἐξωτερικαί, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων $\Gamma\Gamma'$ εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ ἀθροίσματος $\Gamma\Lambda + \Gamma'\Lambda'$ τῶν ἀκτίνων.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ὅταν δύο περιφέρειαι ᾗναι ἐφαπτόμεναι ἐσωτερικῶς, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι ἴση μετὰ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων.

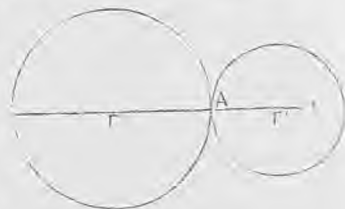
Ἐστώσαν Γ καὶ Γ' τὰ κέντρα τῶν δύο ἐσωτερικῶς ἐφαπτομένων περιφερειῶν. Ἐπειδὴ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Λ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας $\Gamma\Gamma'$ τῶν κέντρων (πρότ. 11, πρότ. 2), θέλομεν ἔχει προφανῶς $\Gamma\Gamma' = \Gamma\Lambda - \Gamma'\Lambda$, τοῦδ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΘΕΩΡΗΜΑ

*Όταν δύο περιφέρειαι ἦναι ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίων.

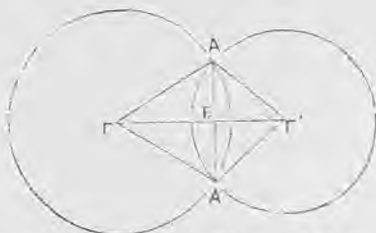
*Εστωσαν Γ καὶ Γ' τὰ κέντρα τῶν δύο ἐξωτερικῶς ἐφαπτομένων περιφερειῶν. Ἐπειδὴ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Α κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΓ' τῶν κέντρων, θέλομεν ἔχει προφανῶς $ΓΓ' = ΓΑ + Γ'Α$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΘΕΩΡΗΜΑ

*Όταν δύο περιφέρειαι ἦναι τεμνόμεναι, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μικροτέρα τοῦ ἁθροίσματος τῶν ἀκτίων καὶ μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

*Εστωσαν Γ καὶ Γ' τὰ κέντρα τῶν δύο τεμνομένων περιφερειῶν καὶ Α ἓν τῶν σημείων τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς. Ἄν ἄξωμεν τὰς ἀκτῖνας ΓΑ, Γ'Α, θέλομεν σχηματίσει τὸ τρίγωνον ΑΓΓ', ἐν ᾧ, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 8 προτάσει τοῦ Α' βιβλίου, θέλομεν ἔχει τὰς ἀνισότητας $ΓΓ' < ΓΑ + Γ'Α$ καὶ $ΓΓ' > ΓΑ - Γ'Α$. Λοιπὸν, ὅταν δύο περιφέρειαι τέμνωνται, ἡ ἀπόστασις κτλ.



Σχόλιον. Δι' ἀντίστροφου τῶν ἀνωτέρω ἀποδειχθεισῶν πέντε προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς καὶ ἀποδεικνύονται ὅλοι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς ἐξῆς. Ἄν ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἡ τῶν κέντρων ἀπόστασις εἶναι μικροτέρα τοῦ ἁθροίσματος τῶν ἀκτίων καὶ μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, αἱ περιφέρειαι θέλουσιν εἶναι τεμνόμεναι. Διότι, ἂν ἦσαν ἐσωτερικαὶ ἢ ἐξωτερικαὶ, ἡ τῶν κέντρων ἀπόστασις ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς ἢ μεγαλειτέρα τοῦ ἁθροίσματος τῶν ἀκτίων, ἂν δὲ ἦσαν ἐφαπτόμεναι ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς, ἡ τῶν κέντρων ἀπόστασις ἤθελεν εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν ἢ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΘΕΩΡΗΜΑ

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους αἱ ἴσαι κεντρικαὶ γωνίαι

γίαι χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἴσα τόξα, καὶ ἀντιστρόφως, εἰς ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦσιν ἴσαι κεντρικαὶ γωνίαι.

* Ἀς ὑποθέσωμεν 1^{ον} ὅτι αἱ κεντρικαὶ γωνίαι $\Delta Γ Β$, $\Delta Γ Ε$ εἶναι ἴσαι εἰς τοὺς ἔχοντας ἴσας ἀκτίνας $Γ Α$, $Γ Δ$ κύκλους. Λέγω ὅτι τὰ χωριζόμενα ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῶν τόξα $Α Β$, $Δ Ε$ θέλουσιν εἶναι ἴσα.



Διότι, ἂν ἐπιθέσωμεν τὰς ἴσας γωνίας $\Delta Γ Β$, $\Delta Γ Ε$, ἐπειδὴ $Γ Α = Γ Δ$ καὶ $Γ Β = Γ Ε$, τὸ σημεῖον $Α$ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ $Δ$ καὶ τὸ σημεῖον $Β$ ἐπὶ τοῦ $Ε$. Ἀλλὰ τότε καὶ τὸ τόξον $Α Β$ θέλει ταυτισθῇ μὲ τὸ τόξον $Δ Ε$, διότι ἄλλως ἤθελον ὑπάρχει εἰς τοὺς ἴσους κύκλους σημεῖα ἀνισάκεις ἀπέχοντα τοῦ κέντρου, ὅπερ ἀδύνατον. Λοιπὸν τὸ τόξον $Α Β = τῷ Δ Ε$. Λοιπὸν 1^{ον}, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους αἱ ἴσαι κεντρικαὶ γωνίαι χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἴσα τόξα.

* Ἀς ὑποθέσωμεν 2^{ον} ὅτι εἰς τοὺς ἴσους κύκλους τὰ τόξα $Α Β$, $Δ Ε$ εἶναι ἴσα. Λέγω ὅτι καὶ αἱ εἰς ταῦτα ἀντιστοιχοῦσαι κεντρικαὶ γωνίαι $\Delta Γ Β$, $\Delta Γ Ε$ θέλουσιν εἶναι ἴσαι.

Διότι, ἂν δὲν ᾗσαν ἴσαι, ἔστω $\Delta Γ Β$ ἡ μεγαλειτέρα. * Ἀς κατασκευάσωμεν τότε τὴν $Β Γ Ι$ ἴσην τῇ $\Delta Γ Ε$. Ἐπειδὴ αἱ κεντρικαὶ γωνίαι $\Delta Γ Ε$, $Β Γ Ι$ εἶναι ἴσαι, τὰ τόξα $Δ Ε$, $Β Ι$, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, θέλουσιν εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ τὸ τόξον $Δ Ε = τῷ Α Β$. Ἀρα καὶ τὸ $Β Ι = τῷ Α Β$ τουτέστι τὸ μέρος ἴσον τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀτοπον. Λοιπὸν καὶ κεντρικαὶ γωνίαι $\Delta Γ Β$, $\Delta Γ Ε$ εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν 2^{ον}, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους εἰς τὰ ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦσιν ἴσαι κεντρικαὶ γωνίαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΘΕΩΡΗΜΑ

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους δύο ὁποιαυδήποτε κεντρικαὶ γωνίαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν λόγον, ὅν καὶ τὰ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῶν περιχρόμενα τόξα.

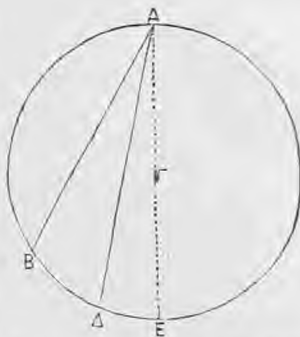
* Ἐστῶσαν $\Delta Γ Β$, $\Delta Γ Ε$ αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος δύο κεντρικαὶ γωνίαι λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\gamma\omega\nu. \Delta \Gamma Β : \gamma\omega\nu. \Delta \Gamma Ε = \text{τόξ. } Α Β : \text{τόξ. } Δ Ε \quad (\alpha)$$

Δύο τινὰ δυνατὸν νὰ ὑποτεθῶσιν ἢ ὅτι τὰ τόξα $Α Β$, $Δ Ε$ ἔχουσιν τὸν αὐτὸν μέτρον, ἢ ὅτι εἶναι μεγέθη ἀσύμμετρα.

διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο τόξων BE καὶ EA, ἥτοι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου BA, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

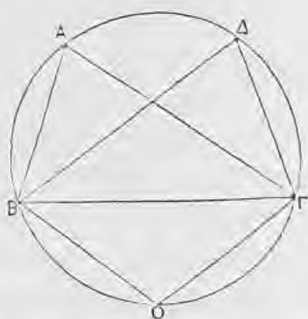
Ἄς ὑποθέσωμεν 2^{ον} ὅτι τὸ κέντρον Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος γωνίας BAE. Ἐὰν ἀξώμεν τὴν διάμετρον AE, ἡ γωνία BAE θέλει ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου BE, καὶ ἡ γωνία ΔAE τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔE. Ἀλλ' ἡ δεδομένη BAE εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν BAE καὶ ΔAE. Ἄρα θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων BE καὶ ΔE, τουτέστι τὸ ἥμισυ τοῦ BA, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.



Λοιπὸν πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου τόξου.

Πόρισμα 1. Ὅλαι αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τμήμα BAE ἐγγεγραμμέναι γωνίαι BAG, BAE εἶναι ἴσαι, διότι ἐκάστη ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ τόξου BE.

Πόρισμα 2. Πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι γωνία ὀρθή, διότι θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἥτοι τὸ τέταρτον τῆς ὅλης περιφερείας.



Πόρισμα 3. Πᾶσα γωνία BAG, ἐγγεγραμμένη εἰς τμήμα μεγαλύτερον ἡμικυκλίου εἶναι γωνία ὀξεῖα, διότι ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τόξου BE μικροτέρου ἡμιπεριφερείας, πᾶσα δὲ γωνία BOE, ἐγγεγραμμένη εἰς τμήμα μικρότερον ἡμικυκλίου, εἶναι γωνία ἀμβλεία, διότι ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τόξου BAE μεγαλύτερου ἡμιπεριφερείας.

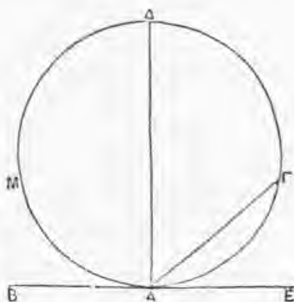
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πᾶσα γωνία, ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ σχηματιζομένη ἀπὸ μίαν ἐφαπτομένην καὶ μίαν χορδὴν, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου τόξου.

*Εστω ΒΑΓ ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος γωνία. Λέγω ὅτι αὕτη ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου τόξου ΑΜΔΓ.

Διότι, ἂν ἄξωμεν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τὴν διάμετρον ΑΔ, ἡ μὲν γωνία ΒΑΔ, ὡς ὀρθή (πρότ. 9), ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΜΔ, ἡ δὲ ἐγγεγραμμένη ΔΑΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔΓ. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ΒΑΔ + ΔΑΓ, ἥτοι ἡ γωνία ΒΑΓ, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἄθροισματος τῶν τόξων ΑΜΔ καὶ ΔΓ, τουτέστι τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΜΔ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

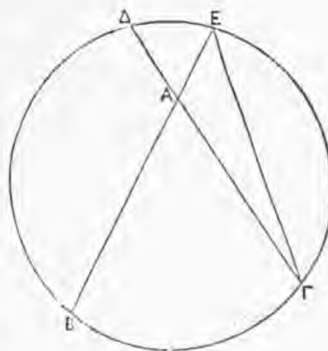
*Ἄν ἐπρόκειτο περὶ τῆς γωνίας ΕΑΓ, ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν γωνιῶν ΔΑΕ καὶ ΔΑΓ, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων ΑΓΔ καὶ ΔΓ, τῶν μετρούντων τὰς γωνίας ταύτας, ἥτοι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΓ. Λοιπὸν πᾶσα γωνία κτλ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πᾶσα γωνία, ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς ἐντὸς τῆς περιφερείας, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἄθροισματος τῶν τόξων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς καὶ τῶν προεκβολῶν αὐτῶν.

*Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται περὶ τῆς γωνίας ΒΑΓ, ἧς ἡ κορυφή Α κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας. Λέγω ὅτι αὕτη ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἄθροισματος τῶν τόξων ΒΓ καὶ ΔΕ, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τῆς γωνίας καὶ τῶν προεκβολῶν αὐτῶν ΔΕ καὶ ΑΔ.

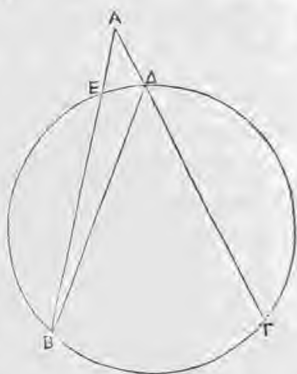


Διότι, ἂν ἄξωμεν τὴν χορδὴν ΓΕ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΓΕ, θέλομεν ἔχει, γωνία ΒΑΓ = ΔΕΓ + ΑΓΕ. Ἄλλ' ἡ μὲν ΑΕΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΓ, ἡ δὲ ΑΓΕ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔΕ. Λοιπὸν ἡ ΒΑΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἄθροισματος τῶν τόξων ΒΓ καὶ ΔΕ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πᾶσα γωνία ΒΑΓ, ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς ἐκτὸς τῆς περιφέρειας καὶ σχηματιζομένη ὑπὸ δύο τεμνουσῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς ΒΓ—ΕΔ τῶν μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιχομένων τόξων ΒΓ καὶ ΕΔ.

Διότι, ἂν ἄξωμεν τὴν χορδὴν ΒΔ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΔΑΒ καὶ ΑΒΔ, ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ΒΑΓ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν ΒΔΓ καὶ ΑΕΔ. Ἀλλ' ἡ ΒΔΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΓ, ἡ ΑΒΔ καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΕΔ. Λοιπὸν ἡ ΒΑΓ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιχομένων τόξων ΒΓ καὶ ΕΔ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

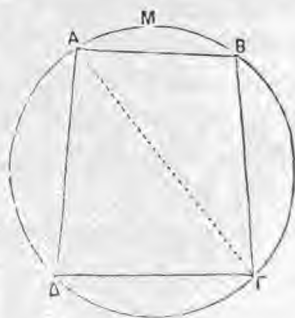


Σχόλιον. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις εἶναι ἀληθὴς καὶ ὅταν ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ἢ καὶ αἱ δύο ᾖναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν, ἡ δὲ ἀπόδειξις τοῦτου γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν παρὶς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν τετραπλεύρου τινὸς ᾖναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον.

Ἐστω ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον τι τετράπλευρον. Ἡ γωνία ΑΒΓ, ὡς ἐγγεγραμμένη, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΔΓ, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία ΑΔΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΒΓ. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν ἀπέναντι γωνιῶν ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ, τοῦτέστι τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης περιφερείας. Λοιπὸν εἶναι ἴσον μὲ δύο γωνίας ὀρθάς.



Ἀντιστρόφως, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν $ΑΒΓ + ΑΔΓ = 2^{\circ}$, λέγω ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον.

Διότι, ἂν διὰ τῶν τριῶν σημείων A, B, Γ ἄξωμεν περι-
θέλει ἀναγκαίως διέλθει καὶ διὰ τοῦ τε-
τάρτου Δ . Διότι, ἂν δὲν διήρχετο καὶ διὰ
τούτου, τὸ σημεῖον Δ ἢ ἐκείτο ἢ ἐντὸς
τῆς περιφερείας ἢ ἐκτός. Ἄν ἐκείτο ἐντὸς,
ἡ γωνία $\Lambda\Delta\Gamma$ ἤθελεν ἔχει διὰ μέτρον τὸ
ἥμισυ τόξου μεγαλειτέρου τοῦ $\Lambda B\Gamma$ (πρότ.
21), ἂν δ' ἐκείτο ἐκτός, ἡ γωνία $\Lambda\Delta\Gamma$ ἤ-
θελεν ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τόξου μι-
κροτέρου τοῦ $\Lambda B\Gamma$ (πρότ. 22). Ἀλλὰ μό-
νον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου $\Lambda B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἡ-
μίσεως τοῦ μετροῦντος τὴν γωνίαν $\Lambda B\Gamma$ τόξου $\Lambda\Delta\Gamma$ με-
γωνιῶν $\Lambda\Delta\Gamma$ καὶ $\Lambda B\Gamma$ ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Λοιπὸν ἀναγκα-
στῶς τριῶν σημείων A, B, Γ διερχομένη περιφέρεια διέρχεται
τετάρτου Δ , ἐπομένως τὸ τετράπλευρον $\Lambda B\Gamma\Delta$ εἶναι ἐγ-



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ ΕΙΣ ΤΑ ΔΥΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΒΙΒΛΙΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.

Νὰ διαιρεθῇ δεδομένη εὐθεῖα εἰς δύο ἴσα μέρη.

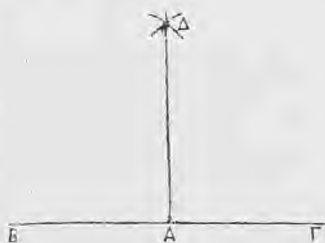
Ἐστω AB ἡ δεδομένη εὐθεῖα. Ἐκ
τῶν ἄκρων A καὶ B , ὡς κέντρων, καὶ
μὲ ἀκτῖνα κατ'ἀρέσκειαν, ἀλλὰ μεγα-
λειτέραν τοῦ ἡμίσεως τῆς AB , διαγρά-
φομεν δύο τόξα, ἃτινα θέλουσι τέμνε-
σθαι εἰς τι σημεῖον Δ , ὅπερ, ἐκ κατα-
σκευῆς, θέλει ἀπέχει ἰσάκεις τῶν κέν-
τρων A καὶ B . Κατὰ τὸν αὐτὸν τρό-
πον προσδιορίζομεν καὶ δευτέρον τι
σημεῖον E , ἀπέχον ἰσάκεις ἀπὸ τῶν
ἄκρων A καὶ B τῆς δεδομένης εὐ-
θείας AB . Ἐὰν ἄξωμεν τὴν εὐθεῖαν ΔE , λέγω ὅτι αὕτη
τὴν δεδομένην εὐθεῖαν AB εἰς δύο ἴσα μέρη $\Delta\Gamma$ καὶ ΓE .

Διότι, ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Δ καὶ E ἀπέχουσιν ἰσάκεις ἀπὸ τῶν σημείων A καὶ B , εὐρίσκονται κατὰ τὸ 19 θεώρημα τοῦ A' βιβλίου ἐπὶ τῆς εἰς τὸ μέσον τῆς AB ὑψουμένης καθέτου. Ἡ εὐθεΐα λοιπὸν ΔB εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς AB , τουτέστι διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη AG καὶ GB , τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδειχθῇ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.

Ἐκ τινος δεδομένου σημείου εὐθείας τινὸς γὰ ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας.

Ἐστω A σημείον τι τῆς δεδομένης εὐθείας. Λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν αὐτοῦ τὰ σημεῖα B καὶ Γ οὕτως, ὥστε $AB = AG$, καὶ ἐκ τῶν σημείων B καὶ Γ , ὡς κέντρων, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μεγαλειτέραν τῆς AB , διαγράφομεν δύο τόξα, ἅτινα θέλουσι τέμνεσθαι εἰς τι σημεῖον Δ . Ἀγομεν τὴν ΔA , καὶ λέγω ὅτι ἡ εὐθεΐα αὕτη εἶναι ἡ ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ζητούμενη κάθετος.



Διότι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ ἀπέχει ἰσάκεις ἀπὸ τῶν ἄκρων B καὶ Γ τῆς εὐθείας $B\Gamma$, εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς εἰς τὸ μέσον αὐτῆς A ὑψουμένης καθέτου (πρότ. 19, A'). Λοιπὸν ΔA εἶναι ἡ ἐπὶ τῆς εὐθείας $B\Gamma$ ζητούμενη κάθετος.

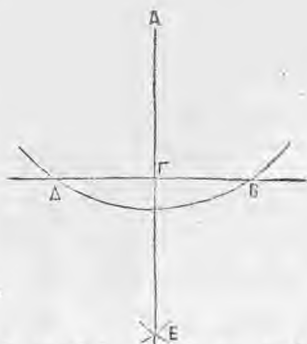
Σχόλιον. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν κατασκευάσει ὀρθὴν γωνίαν BAD εἰς τι σημεῖον A δεδομένης τινὸς εὐθείας $B\Gamma$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.

Ἐξ ἐνὸς σημείου A , ἐκτὸς εὐθείας τινὸς BD κειμένου, γὰ καταβιασθῇ κάθετος ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας.

Ἐκ τοῦ σημείου A , ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἀρκούντως μεγάλην διαγράφομεν τόξον, τέμνον τὴν δεδομένην εὐθεΐαν εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ B , καὶ προσδιορίζομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τρόπον σημείον τι E , ἀπέχον ἰσάκεις τῶν σημείων B καὶ Δ . Λέγω ὅτι ἡ εὐθεΐα AE θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ σημεῖα A καὶ E ἀ-



πέχουσιν, ἐκ κατασκευῆς, ἰσάκεις ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Α τῆς δεδομένης εὐθείας, ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΔ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.

Εἷς τι σημείον Α εὐθείας τινὸς ΑΒ τὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση μὲ δεδομένην τινὰ γωνίαν Κ.

Ἐκ τῆς κορυφῆς Κ τῆς δεδομένης γωνίας, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν γράφομεν τὸ μετροῦν τὴν δεδομένην γωνίαν τόξον ΙΑ, καὶ ἐκ τοῦ δεδομένου σημείου Α, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα $AB=KI$ γράφομεν ἀπρὸςδιόριστόν τι τόξον ΒΟ. Μὲ κέντρον ἀκολουθῶς Β καὶ μὲ ἀκτῖνα ΒΔ ἴσην τῇ χορδῇ ΙΑ γράφομεν ἕτερον τόξον, τέμνον τὸ ΒΟ εἰς τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἄγομεν τὴν ΑΔ. Λέγω ὅτι ἡ οὕτω κατασκευαζομένη γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν δεδομένην Κ.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΙΑ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσαι, τὰ τόξα ΙΑ καὶ ΒΔ θέλουσιν εἶναι ἴσα, καὶ ἐπειδὴ ταῦτα ἀνήκουσιν εἰς ἴσους κύκλους, αἱ κεντρικαὶ γωνίαι Κ καὶ Α θέλουσιν εἶναι ἴσαι (πρότ. 17).

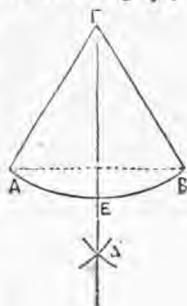
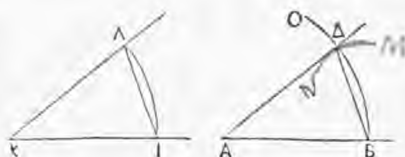
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.

Νὰ διαιρεθῇ δεδομένην τόξον ἢ διδομένη γωνία εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἔστω 1^η ΑΒ τὸ πρὸς διαίρεσιν τόξον καὶ Γ τὸ κέντρον τοῦ εἰς ὃν ἀνήκει κύκλου. Ἐκ τῶν ἄκρων αὐτοῦ Α καὶ Β, ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γράφομεν δύο τεμνόμενα εἰς τι σημεῖον Δ τόξα, καὶ ἄγομεν τὴν ΓΔ, ἣτις, λέγω, θέλει τέμνει τὸ τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΕ καὶ ΕΒ.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ σημεία Γ καὶ Δ ἀπέχουσιν ἰσάκεις ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς χορδῆς ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΓΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ ταύτης, ἐπομένως διαιρεῖ ταύτην καὶ τὸ ὑποτενιζόμενον τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΕ καὶ ΕΒ (πρότ. 6).

Ἄς ὑποθέσωμεν 2^η ὅτι προτιθέμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν γωνίαν ΑΓΒ εἰς δύο ἴσα μέρη. Πρὸς τοῦτο ἐκ τῆς κορυφῆς Γ, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν γράφομεν τὸ μετροῦν τὴν γωνίαν Γ τόξον ΑΒ, ὅπερ διαιροῦμεν, ὡς ἀνωτέρω ἐξετάσαμεν, εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ



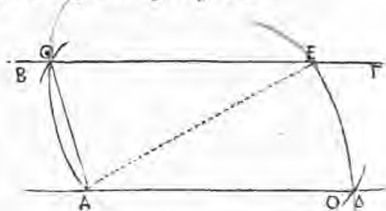
τῆς εὐθείας ΓΔ. Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ εὐθεῖα αὕτη θέλει διαιρεῖ καὶ τὴν γωνίαν ΔΓΒ εἰς δύο ἴσα μέρη ΔΓΕ καὶ ΕΓΒ (πρότ. 17).

Σχόλιον. Δυνάμεθα διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου νὰ διαιρέσωμεν ἑκάτερον τῶν ἴσων τόξων ΑΕ καὶ ΕΒ, ἢ ἑκατέραν τῶν ἴσων γωνιῶν ΔΓΕ καὶ ΕΓΒ, ἐκ δευτέρου εἰς δύο ἴσα μέρη, καὶ ἕκαστον πάλιν τούτων εἰς ἕτερα δύο, καὶ οὕτω καθεξῆς. Λοιπὸν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν δεδομένον τόξον ἢ δεδομένην γωνίαν εἰς 2, 4, 8, 16, κτλ. ἴσα μέρη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.

Ἐξ ἐνὸς δεδομένου σημείου Α, ἐκτὸς εὐθείας τινὸς ΓΒ κειμένου, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΑΔ παράλληλος τῇ δεδομένῃ ΒΓ.

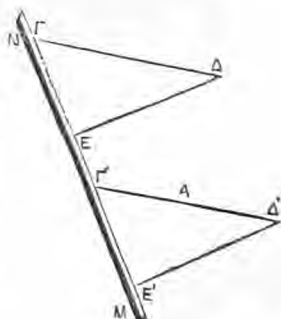
Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ σημείου Α, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ'ἀρέσκειαν γράφομεν ἀπροσδιόριστόν τι τόξον ΕΟ, τέμνον τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΒΓ εἰς τι σημεῖον Ε. Ἐκ τοῦ σημείου Ε, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ΑΕ γράφομεν τὸ τόξον ΑΘ, καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ τόξου ΕΟ τὸ τόξον ΕΔ ἴσον τῷ ΑΘ. Λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΔ θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη παράλληλος.



Διότι, ἐπεὶ δὴ τὰ τόξα ΑΘ καὶ ΕΔ εἶναι ἴσα καὶ ἀνήκουσιν εἰς ἴσους κύκλους, αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ΔΕΘ καὶ ΕΑΔ θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' αὐταὶ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΒΓ καὶ ΑΔ εἶναι ἐντὸς ἐναλλάξ. Ἀρα αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ ΑΔ εἶναι παράλληλοι (πρότ. 28, Α'). Λοιπὸν κτλ.

Σχόλιον. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα λύουσι συνηθέστερον διὰ τοῦ γνώμονος ὡς ἑξῆς:

Στηρίζουσι τὴν μίαν τῶν πλευρῶν ΓΕ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΓΕΔ τοῦ γνώμονος ἐπὶ τινος κανόνα ΝΜ οὕτως, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ΓΔ νὰ ταυτίζεται μετὰ τῆς εὐθείας, ἧς παράλληλον ἐκ τοῦ δεδομένου σημείου Α προτιθένται νὰ ἄξωσι. Τούτου δὲ γενομένου, διατηροῦσι τὸν κανόνα ΝΜ ἀκίνητον, καὶ σύρουσιν ἐπ' αὐτοῦ τὸν γνώμονα ΓΕΔ μέχρις οὗ ἡ ὑποτείνουσά του ΓΔ διέλθῃ διὰ



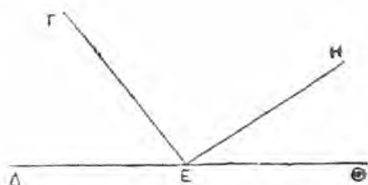
τοῦ δεδομένου σημείου Α. Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ νέα αὕτη θέσις Γ'Α' τῆς ὑποτείνουσας ΓΔ θέλει παριστᾶ τὴν ἐκ τοῦ σημείου Α ζητούμε-

νην παράλληλον τῇ ΓΔ, διότι προφανῶς τότε αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι ΔΓΕ καὶ Δ'Γ'Ε' εἶναι ἴσαι. (πρότ. 28, Α').

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7.

Δεδομένων τῶν δύο γωνιῶν Α καὶ Β τριγώνου τινὸς ΑΒΓ νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη αὐτοῦ γωνία Γ.

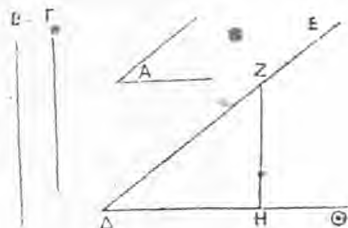
*Αγομεν τὴν ἀπροσδιόριστον εὐθεῖαν ΘΔ καὶ εἰς τι σημεῖον αὐτῆς Ε κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΔΕΓ $\equiv$ Α, καὶ τὴν γωνίαν ΓΕΒ $\equiv$ Β. Ἀέγω ὅτι ἡ μένουσα γωνία ΗΕΘ θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη Γ. Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΔΕΓ, ΓΕΗ, ΗΕΘ καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, καὶ ἐπειδὴ ΔΕΓ $\equiv$ Α καὶ ΓΕΗ $\equiv$ Β, ἔπεται ἀναγκαίως ὅτι καὶ ἡ ΗΕΘ θέλει εἶναι ἴση τῇ Γ. Λοιπὸν κτλ.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8.

Δεδομένων τῶν δύο πλευρῶν Β καὶ Γ τριγώνου τινὸς καὶ τῆς ἐκ αὐτῶν περιεχομένης γωνίας Α νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

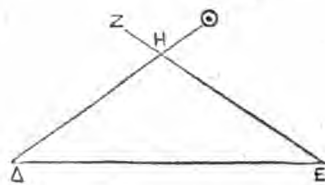
Εἰς τι σημεῖον Δ τῆς ἀπροσδιορίστου εὐθείας ΔΘ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΕΘΔ ἴσην τῇ δεδομένῃ Α, λαμβάνομεν ΔΗ $\equiv$ τῇ πλευρᾷ Γ καὶ ΔΖ $\equiv$ τῇ πλευρᾷ Β, καὶ ἄγομεν τὴν ΖΗ. Εἶναι προφανές ὅτι τὸ οὕτω σχηματισθὲν τρίγωνον ΖΔΗ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9.

Δεδομένων τῶν δύο γωνιῶν καὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τριγώνου τινὸς νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

Δύο περιπτώσεις ὑπάρχουσιν· ἡ καὶ αἱ δύο δεδομέναι γωνίαι εἶναι προσκειμεναι εἰς τὴν δεδομένην πλευράν, ἡ ἢ μία τούτων εἶναι προσκειμένη καὶ ἡ ἑτέρα ἀπέναντι. Ἡ δευτέρα αὕτη περίπτωση ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην ἂν ζητήσωμεν διὰ τῶν δύο δεδομένων γωνιῶν τὴν τρίτην γωνίαν τοῦ τριγώνου (πρὶν βλ. 7), ἥτις τότε θέλει εἶναι προσκειμένη εἰς τὴν δεδομένην πλευράν.

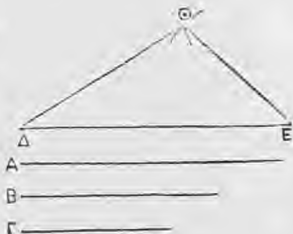


Τούτου τεθέντος, ἐπὶ τινος ἀπροσδιορίστου εὐθείας λαμβάνομεν ΔΕ ἴσην τῇ δεδομένη πλευρᾷ, καὶ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε κατασκευάζομεν διὰ τῶν εὐθειῶν ΔΘ καὶ ΕΖ τὰς γωνίας ΘΔΕ καὶ ΖΕΔ ἀμοιβαίως ἴσας μὲ τὰς δύο δεδομένας, ἢ ἀμοιβαίως ἴσας μὲ τὴν μίαν τῶν δεδομένων καὶ μὲ τὴν εὐρεθείσαν τρίτην. Αἱ δύο εὐθεῖαι ΔΘ καὶ ΖΕ θέλουσι τμηθῇ εἰς τι σημεῖον Η, τὸ δὲ οὕτω προκύπτει τρίγωνον ΗΔΕ θέλει εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10.

Δεδομένων τῶν τριῶν πλευρῶν Α, Β, Γ τριγώνου τινὸς ΑΒΓ ἡ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

Ἐπὶ τινος ἀπροσδιορίστου εὐθείας λαμβάνομεν ΔΕ = τῇ πλευρᾷ Α, ἐκ τοῦ σημείου Δ, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα = τῇ πλευρᾷ Β γράφομεν τόξον, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ε, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα = τῇ τρίτῃ πλευρᾷ Γ γράφομεν ἕτερον τόξον, ὑπὲρ θέλει τμηθεῖν τὸ πρῶτον εἰς τι σημεῖον Θ. Ἀγομεν τὰς εὐθείας ΔΘ καὶ ΘΕ, τὸ δὲ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον ΘΔΕ θέλει εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.



Σχόλιον. Ἵνα τὸ πρόβλημα ᾖ δυνατόν, πρέπει αἱ ἐκ τῶν σημείων Δ καὶ Ε, ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ ἀκτῖνας ἴσας ἀμοιβαίως μὲ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς γραφόμεναι περιφέρειαι νὰ τέμνωνται, καὶ πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΔΕ, τουτέστιν ἡ μία τῶν δεδομένων πλευρῶν, νὰ ᾖ μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν (πρότ. 16).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11.

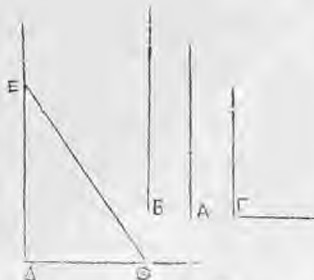
Δεδομένων τῶν δύο πλευρῶν Α καὶ Β τριγώνου τινὸς καὶ τῆς γωνίας Γ, τῆς ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς Β, ἡ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

Δύο περιπτώσεις ὑπάρχουσι·

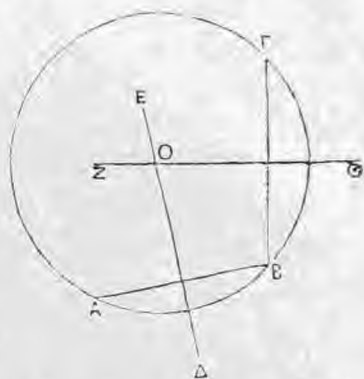
1^{ον} Ὄταν ἡ δεδομένη γωνία Γ ᾖ ὀρθή ἢ ἀμβλεία.

2^{ον} Ὄταν ἡ δεδομένη γωνία Γ ᾖ ὀξεῖα.

Ἐς ὑποθέσωμεν 1^{ον} ὅτι ἡ δεδομένη γωνία Γ εἶναι ὀρθή, ἢ ἀμβλεία, καὶ ἂς κα-



Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ δεδομένου κύκλου ἢ ἐπὶ τοῦ δεδομένου τόξου τρία κατ'ἄρᾶςκειαν σημεῖα A, B, Γ , ἄγομεν τὰς χορδὰς AB καὶ $B\Gamma$, καὶ διαιροῦμεν αὐτὰς εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῶν καθέτων DE καὶ ΘZ . Τὸ σημεῖον O , ἐνθα αἱ κάθετοι DE καὶ ΘZ τέμνονται θέλει εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον κέντρον (πρότ. 7).

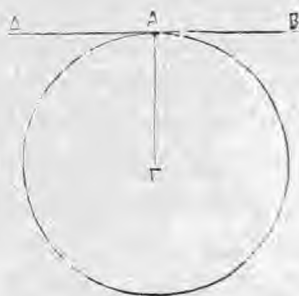


Σχόλιον. Τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ἠθέλομεν κάμει χρῆσιν, ἂν ἐπρόκειτο νὰ περιγράψωμεν κύκλον εἰς δεδομένον τρίγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 13.

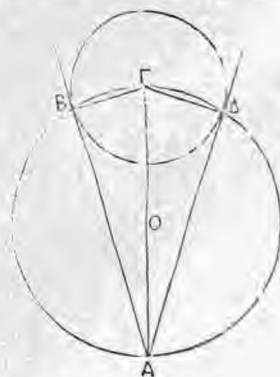
Ἐξ ἐνὸς δεδομένου σημείου A νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς δεδομένον κύκλον.

Τὸ δεδομένον σημεῖον A δυνατὸν νὰ κῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐκτὸς αὐτῆς. Ὅταν κῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἄγομεν τὴν ἀκτῖνα $ΓA$, καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς A ὀψοῦμεν τὴν $ΔB$ κάθετον ἐπ' αὐτῆς (πρόβλ. 2). Ἡ κάθετος αὕτη θέλει προφανῶς εἶναι ἡ ζητούμενη ἐφαπτομένη (πρότ. 9).



Ἄν τὸ δεδομένον σημεῖον A κῆται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἐνόμομεν αὐτὸ μὲ τὸ κέντρον αὐτοῦ Γ , καὶ ἐπὶ τῆς $ΓA$ ὡς διαμέτρου γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, ἥτις θέλει τμήσει τὴν περιφέρειαν τοῦ δεδομένου εἰς δύο σημεῖα B καὶ Δ . Ἄγομεν τὰς εὐθείας AB καὶ $A\Delta$, αἵτινες, λέγω, θέλουσιν εἶναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὸν κύκλον Γ .

Διότι, ἐπειδὴ ἡ $ΓA$ εἶναι διάμετρος, αἱ γωνίαι $ΓBA$, $Γ\Delta A$ εἶναι ὀρθαί, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμικύκλια. Λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $A\Delta$ εἶναι κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα B καὶ Δ τῶν ἀκτίνων GB καὶ $Γ\Delta$, ἐπομένως εἶναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὸν κύκλον Γ .

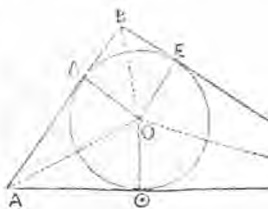


Σχόλιον. Ὅταν λοιπὸν τὸ σημεῖον A κῆται ἐκτὸς τοῦ ὑπάρχουσι δύο ἀντιμῆς ἐφαπτόμεναι, αἵτινες πρὸς τούτοις ἴσαι. Διότι τὰ δύο ὀρθογώνια $\Delta B\Gamma$ καὶ $\Lambda\Gamma\Delta$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντες κοινὴν τὴν ὑποτεινουσάν των $\Lambda\Gamma$ κοινὴν καὶ τὰς πλευρὰς ΓB καὶ $\Gamma\Delta$ ἴσας ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Λοιπὸν $AB = \Lambda\Delta$, καὶ ἡ γωνία $B\Lambda\Gamma$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 14.

Δεδομένου τριγώνου τινὸς $AB\Gamma$ νὰ ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ

Πρὸς τοῦτο διχοτομοῦμεν τὰς γωνίας A καὶ B τοῦ τριγώνου διὰ τῶν εὐθειῶν AO καὶ BO , αἵτινες συναπαντῶνται εἰς τι σημεῖον O , ὅπερ, λέγω, θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ κύκλου.

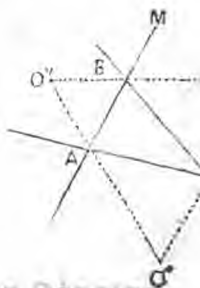


Διότι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον O κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης γωνίαν A , αἱ κάθετοι OA καὶ OD εἶναι ἴσαι (πρότ. 22, Α'). Ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ σημεῖον O κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτομούσης γωνίαν B , αἱ κάθετοι OB καὶ OE εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν, αἱ τρεῖς OA , OB , OC εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Λοιπὸν, ἂν μὲ κέντρον O ἀκτῖνα ἴσην μὲ μίαν τούτων γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θά εἴη ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, διότι αἱ πλευραὶ AB , $B\Gamma$, ΓA θέλουσιν εἶναι ἐφαπτόμεναι εἰς ταύτην, ὡς κάθετος ἐκ τοῦ ἑκάστου ἄκρου A , B , C τῶν ἀκτίνων.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον O ἀπέχει ἰσάκις τῶν πλευρῶν καὶ $B\Gamma$ τῆς γωνίας Γ , ἡ εὐθεῖα OG διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν Γ . Λοιπὸν αἱ τρεῖς διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Σχόλιον. Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς δύο ἐξωτερικὰς γωνίας εὐθεῖαι τέμνονται εἰς τι σημεῖον O' , ὅπερ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τοῦ ἐφαπτομένου τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ καὶ τῶν προεκτεθειμένων BM καὶ ΓN τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου εὐρίσκονται τὰ κέντρα O'' καὶ O''' τῶν κύκλων, τῶν ἐφα-

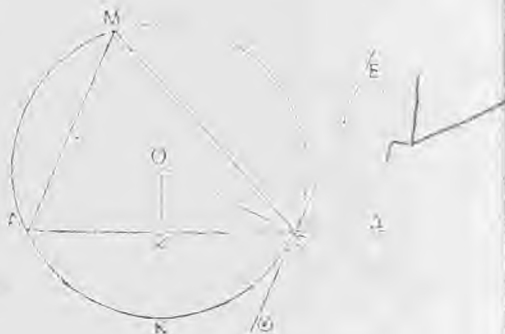


ποταμένων μιᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ τῶν προεκβολῶν τῶν ἄλλων. Λοιπὸν ὑπάρχουσιν ἐν γένει τέσσαρες κύκλοι O, O', O'', O''' ἐραπτόμενοι τριῶν δεδομένων εὐθειῶν, ἐξ ὧν μόνος ὁ ἔχων κέντρον τὸ O εἶναι ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων σχηματιζόμενον τρίγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 15.

Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας τινὸς AB τὰ κατασκευασθῇ τμήμα κύκλου τοιοῦτον, ὥστε πᾶσα εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένη γωνία νὰ ἴηται ἰση μὲ δεδομένην τινὰ γωνίαν Γ .

Πρὸς τοῦτο προεκβάλλομεν τὴν AB , καὶ εἰς τὸ σημεῖον B κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΔBE ἴσην μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν Γ . Ἀγομεν τὴν BO κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας OE , καὶ τὴν ZO κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς AB . Αἱ κάθετοι αὗται θέλουσι συναπαντηθῇ εἰς τι σημεῖον O , τὸ δὲ τμήμα AMB τοῦ μὲ κέντρον O καὶ ἀκτίνᾳ OB γραφομένου κύκλου θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον.



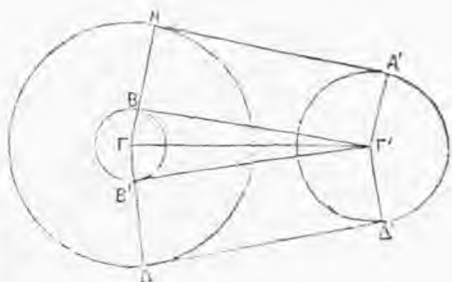
Διότι, ἐπειδὴ ἡ OE εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος OB , εἶναι καὶ ἐραπτομένη εἰς τὴν γραφομένην μὲ ἀκτίνᾳ OB περιφέρειαν, ἐπομένως ἡ γωνία ABO , ἢ ἡ ἴση αὐτῇ ΔBE , θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου AKB (πρότ. 20). Ἀλλ' ἡ ΔBE κατεσκευάσθη ἴση τῇ δεδομένῃ Γ . Λοιπὸν πᾶσα γωνία, ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τμήμα AMB , θέλει εἶναι ἴση τῇ Γ , τοῦθ' ὅπερ ἐπρίκειτο ν' ἀποδειξωμεν.

Σχόλιον. Ἐὰν ἡ δεδομένη γωνία Γ ᾖ το ὀρθή, τὸ ζητούμενον τμήμα ἠθέλει εἶναι τὸ ἡμικύκλιον, τὸ ἔχον διάμετρον τὴν δεδομένην εὐθεῖαν AB .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 16.

Δεδομένων δύο περιφερειῶν τὰ κατασκευασθῇ κοινὴ τις ἐραπτομένη εἰς ταύτας.

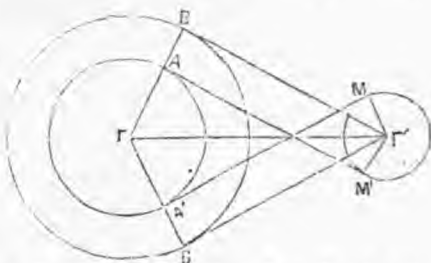
Ἄς ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λεγόμενον, καὶ ἔστω 1^{ον} AA' κοινὴ τις ἐξωτερικὴ εἰς τὰς δύο δεδομένας περιφερείας ἐφαπτομένη. Ἀγομεν τὰς ἀκτῖνας $GA, G'A'$, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου I' τῆς μικροτέρας περιφερείας ἄγομεν τὴν $G'B$ παράλληλον τῇ AA' . Ἐπειδὴ αἱ ἀκτῖνες GA καὶ $G'A'$ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης AA' (πρότ. 9), θέλουσιν εἶναι κάθετοι καὶ ἐπὶ τῆς παράλλου αὐτῇ $G'B$. Τὸ σχῆμα λοιπὸν $ABG'A'$ θέλει εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ θέλομεν ἔχει $GB = GA - AB = GA - G'A'$. Ἀφ' ἐτέρου, ἐπειδὴ ἡ $G'B$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς GB , θέλει εἶναι καὶ ἐφαπτομένη εἰς τὴν μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα GB ($= GA - G'A'$) γραφομένην περιφέρειαν. Ἄν λοιπὸν, ἀντιστρόφως, μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα GB , ἴσῃ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτῖνων GA καὶ $G'A'$, γράψωμεν περιφέρειαν, ἐκ τοῦ κέντρου Γ' φέρωμεν τὴν $G'B$ ἐφαπτομένην εἰς ταύτην, καὶ ἄξωμεν τὴν $G'BA$ καὶ τὴν $G'A'$ παράλληλον ταύτῃ, ἡ εὐθεΐα AA' θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη.



Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ σημείου Γ' ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι $G'B$ καὶ $G'B'$ εἰς τὴν περιφέρειαν GB , ὑπάρχει καὶ ἑτέρα κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη $\Delta\Delta'$ προσδιοριζομένη καθ' ὅν τρόπον καὶ ἡ AA' .

Τὸ πρόβλημα εἶναι προφανῶς ἀδύνατον, ὅταν αἱ περιφέρειαι GA καὶ $G'A'$ ᾖναι ἐσωτερικαί, τουτέστιν ὅταν $IG' < GA - G'A'$ (πρότ. 12).

Ἄς ὑποθέσωμεν 2^{ον} ὅτι προτιθέμεθα νὰ ἄξωμεν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην, καὶ ἔστω AM' αὕτη. Ἀγομεν πάλιν τὰς ἀκτῖνας GA καὶ $G'M'$, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου Γ' ἄγομεν τὴν $G'B$ παράλληλον τῇ κοινῇ ἐσωτερικῇ ἐφαπτομένῃ AM' . Τὸ σχῆμα $ABG'M'$ θέλει εἶναι δι' οὗς λόγους ἄνωτέρω ἐξέθεσamen ὀρθογώνιον, καὶ θέλομεν ἔχει $GB = GA + AB = GA + G'M'$. Ἀφ' ἐτέρου, ἐπειδὴ ἡ $G'B$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς GB εἰς τὸ σημεῖον B , θέλει εἶναι καὶ ἐφαπτομένη εἰς τὴν μὲ κέντρον Γ καὶ



ἀκτίνα GB ($=GA + G'M'$) γραφομένην περιφέρειαν. Ἐν λοιπόν, ἀντιστρόφως, με κέντρον Γ καὶ ἀκτίνα GB , ἔσται μετὰ τὸ ἀθροισμα τῶν ἀκτίνων GA καὶ $G'M'$, γράψωμεν περιφέρειαν, ἐκ τοῦ κέντρου Γ φέρωμεν τὴν $G'B$ ἐραπτομένην εἰς ταύτην, καὶ ἄξωμεν τὴν GAB καὶ τὴν $G'M'$ παράλληλον ταύτῃ, ἡ εὐθεῖα AM' θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐραπτομένη.

Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ σημείου Γ' ἄγονται δύο ἐραπτόμεναι $\Gamma'B$ καὶ $\Gamma'B'$ εἰς τὴν μετὰ ἀκτίνῃ GB γραφομένην περιφέρειαν, ὑπάρχει καὶ ἑτέρα κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐραπτομένη $A'M$ προσδιοριζομένη ὅπως καὶ ἡ AM' .

Τὸ πρόβλημα εἶναι προφανῶς ἀδύνατον, ὅταν τὸ κέντρον Γ κῆται ἐντὸς τῆς μετὰ κέντρον Γ καὶ ἀκτίνῃ GB γραφομένης περιφερείας, τουτέστιν, ὅταν $GB > \Gamma\Gamma'$. Διότι τότε αἱ δεδομέναι περιφέρειαι εἶναι τεμνόμεναι (πρότ. 16, Β'). Ὅταν δὲ $GB = \Gamma\Gamma'$, τότε ὑπάρχει μίᾳ μόνῃ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐραπτομένη, διότι κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 15 προτάσει τοῦ Β' βιβλίου αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος περιφέρεται ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐξωτερικῶς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 17.

Δεδομένων δύο εὐθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, νὰ εὑρεθῇ τὸ μεγαλειότερον αὐτῶν μέτρον καὶ ὁ ἀριθμητικὸς αὐτῶν λόγος.

Ἐπειδὴ τὸ μεγαλειότερον κοινὸν μέτρον τῶν δύο δεδομένων εὐθειῶν δὲν δύναται προφανῶς νὰ ᾖ τὸ μεγαλειότερον τῆς μικροτέρας $\Gamma\Delta$, ἂν αὕτη ἐμπεριείχeto ἀκριβῶς ἀριθ-

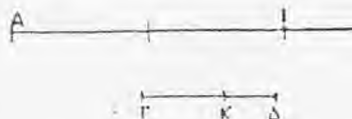


μὸν τινα φορῶν εἰς τὴν μεγαλειτέραν AB , εἶναι φανερόν ὅτι ἤθελε παριστᾶν τὸ ζητούμενον μέγιστον κοινὸν μέτρον.

Ἄς φέρωμεν λοιπόν τὴν $\Gamma\Delta$ ἐπὶ τῆς AB ὥσῳς τοῦτο εἶναι δυνατόν, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐμπεριέχεται δις μετὰ τινος ὑπολοίπου IB . Θέλομεν τότε ἔχει $AB = 2\Gamma\Delta + IB$. Λέγω δὲ ὅτι τὸ μεγαλειότερον κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων εὐθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι τὸ αὐτὸ μετὰ τὸ μεγαλειότερον κοινὸν μέτρον τῆς μικροτέρας $\Gamma\Delta$ καὶ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου IB .

Διότι 1^{ον}, πᾶν κοινὸν μέτρον τῶν εὐθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, ἐπειδὴ διαιρεῖ τὴν $\Gamma\Delta$, θέλει διαιρεῖ καὶ τὸ διπλάσιον αὐτῆς $2\Gamma\Delta$ ἢ AI . Ἀλλ' ἐπειδὴ διαιρεῖ τὴν ὅλην εὐθεῖαν AB καὶ τὸ μέρος αὐτῆς AI , ἀναγ-

καίως πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $AB - AI$, ἥτοι IB .
 Λοιπὸν θέλει εἶναι κοινὸν μέτρον καὶ
 τῶν εὐθειῶν GA καὶ IB .



2^α. Πᾶν κοινὸν μέτρον τῶν εὐ-
 θειῶν GA καὶ IB εἶναι καὶ κοινὸν
 μέτρον τῶν δεδομένων εὐθειῶν AB
 καὶ GA . Διότι, ἐπειδὴ τοῦτο διαιρεῖ τὴν GA , θέλει διαιρεῖ καὶ τὸ δι-
 πλάσιον αὐτῆς $2GA$ ἢ AI . Ἀλλὰ διαιρεῖ καθ' ὑπόθεσιν καὶ τὴν IB .
 Ἄρα θέλει διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $AI + IB$, ἥτοι AB . Λοι-
 πὸν θέλει εἶναι κοινὸν μέτρον καὶ τῶν εὐθειῶν AB καὶ GA .

Ἐπειδὴ τῶρα ἀπεδείχθη ὅτι αἱ εὐθεῖαι AB καὶ GA ἔχουσι τὰ αὐτὰ
 κοινὰ μέτρα μὲ τὰς εὐθείας GA καὶ IB , καὶ ἀντιστρόφως, αἱ GA καὶ
 IB ἔχουσι τὰ αὐτὰ κοινὰ μέτρα μὲ τὰς εὐθείας AB καὶ GA , ἔπειτα
 ὅτι τὸ μεγαλύτερον κοινὸν μέτρον τῶν πρώτων AB καὶ GA θέλει
 εἶναι ἴσον μὲ τὸ μεγαλύτερον κοινὸν μέτρον τῶν δευτέρων GA καὶ
 IB . Ἄν λοιπὸν ἡ IB , φερομένη ἐπὶ τῆς GA , περιέχεται ἀριθμὸν τι-
 νῶν φορῶν, αὕτη θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον μεγαλύτερον κοινὸν μέτρον.
 ἂν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι περιέχεται ἅπαξ μετὰ τινος ὑπολοίπου KI ,
 τότε δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, σκεπτόμενοι ὡς προηγουμένως, ὅτι
 τὸ μεγαλύτερον κοινὸν μέτρον τῶν εὐθειῶν GA καὶ IB εἶναι τὸ αὐ-
 τὸ μὲ τὸ μεγαλύτερον κοινὸν μέτρον τῶν εὐθειῶν IB καὶ KI .

Ἄς φέρωμεν λοιπὸν τὴν KI ἐπὶ τῆς IB , καὶ ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι
 περιέχεται δις ἄνευ ὑπολοίπου. Κατὰ τὰ προλεχθέντα KI θέλει εἶ-
 ναι τὸ ζητούμενον μεγαλύτερον κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων εὐ-
 θειῶν AB καὶ GA .

Πρὸς εὐρεσιν δὲ τοῦ ἀριθμητικοῦ αὐτῶν λόγου ἀντικαθιστῶμεν
 εἰς τὰς εὐρεθείσας προηγουμένως ἰσότητας

$$AB = 2GA + IB, \quad GA = IB + KI,$$

ἀντὶ τῆς IB τὸ ἴσον αὐτῇ $2KI$, καὶ ἀντὶ τῆς GA τὸ ἴσον αὐτῇ $3KI$.
 καὶ θέλομεν ἔχει

$$AB = 8KI, \quad GA = 3KI.$$

Ἐπομένως ὁ λόγος τῶν εὐθειῶν AB καὶ GA ἴσουςται τῷ λόγῳ τῶν
 ἴσων αὐταῖς $8KI$ καὶ $3KI$, ὅστις εἶναι προφανῶς $\frac{8}{3}$.

Παρατήρησις 1. Εὐκόλως παρατηρεῖ τις ὅτι ὁ τρόπος, δι' οὗ εὐ-
 ρίσκουμεν τὸ μεγαλύτερον κοινὸν μέτρον δύο δεδομένων εὐθειῶν, εἶναι

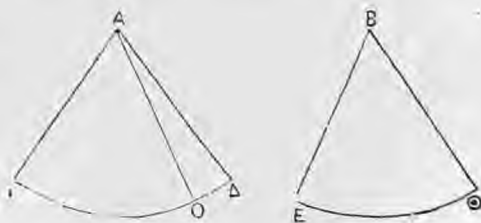
ἀπαρλλάκτως ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τρόπον, ὅν μεταχειρίζομεθα πρὸς εὐρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο δεδομένων ἀριθμῶν, καὶ ὅτι στηρίζεται ἐπὶ ὁμοίων θεωρημάτων, ὁμοιοτρόπως ἀποδεικνυομένων.

Παρατήρησις 2. Τὰ θεωρήματα, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ εὕρεσις τοῦ μεγαλειτέρου κοινοῦ μέτρου δύο δεδομένων εὐθειῶν, καὶ ὁ τρόπος καθ' ὃν ἐκτελεῖται αὕτη, πείθουσιν ἡμᾶς ὅτι, ἂν αἱ δεδομένοι εὐθεῖαι ἔχωσιν τι κοινὸν μέτρον, θέλομεν ἀναγκαίως μετὰ τινα ἀριθμὸν διαδοχικῶν ἐπιθέσεων εὐρεῖ ὑπόλοιπον μηδέν, καὶ ὅτι ἂν αὗται ἦναι μεγέθη ἀσύμμετρα, ἐπειδὴ τὰ μένοντα ἐκάστοτε ὑπόλοιπα βαίνουνσιν ἐλαττούμενα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μετὰ ἐπαρκῆ παράτασιν τῶν διαδοχικῶν ἐπιθέσεων ὑπόλοιπα μικρότερα παντὸς δεδομένου ποσοῦ. Ἐπομένως, ἂν παραλείψωμεν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον ἐπιθέσεως τινος, τὸ προηγούμενον ὑπόλοιπον θέλει εἶναι τὸ μεγαλειότερον κοινὸν μέτρον μιᾶς τῶν δεδομένων εὐθειῶν καὶ τῆς ἑτέρας, ἐλαττωθείσης κατὰ τὸ παραλειφθὲν ὑπόλοιπον. Ὁ ἀριθμητικὸς λοιπὸν λόγος τούτων θέλει εἶναι ἴσος τῷ ζητούμενῳ κατὰ τινα προσέγγισιν, ἣτις ἐξαρτᾶται προφανῶς ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προγενομένων διαδοχικῶν ἐπιθέσεων μέχρις ἐκείνης, καθ' ἣν ἐγένετο ἡ παράλειψις τοῦ τελευταίου ὑπολοίπου. Ὅταν λοιπὸν δύο δεδομένοι εὐθεῖαι ἦναι μεγέθη ἀσύμμετρα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμητικὸν αὐτῶν λόγον μεθ' ὅτις θέλομεν προσεγγίσεως, ἀρκεῖ νὰ παρατείνωμεν ἐπαρκῶς τὰς διαδοχικὰς αὐτῶν ἐπιθέσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 18.

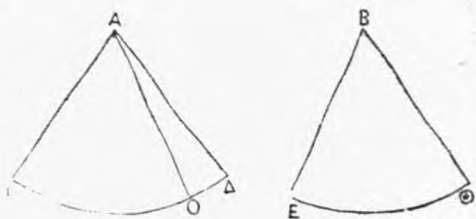
Δεδομένων δύο γωνιῶν *A* καὶ *B*, νὰ εὕρεθῇ τὸ μεγαλειότερον κοινὸν αὐτῶν μέτρον, δι' ἔχῃσι τοιοῦτο, καὶ ὁ ἀριθμητικὸς αὐτῶν λόγος.

Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν *A* καὶ *B*, ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γράψωμεν τὰ τόξα *ΓΔ* καὶ *ΕΘ*, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι *A* καὶ *B* εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ



τόξα *ΓΔ* καὶ *ΕΘ*, τὰ δὲ τόξα ταῦτα ἐπιτίθενται τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου μετὰ τῆς αὐτῆς εὐκολίας, μεθ' ἧς καὶ εὐθεῖα τις φέρεται ἐπὶ ἄλλης εὐθείας, ἀρκεῖ προφανῶς πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγαλειτέρου κοινοῦ μέτρου τῶν γωνιῶν *A* καὶ *B* νὰ ζητήσωμεν, ὡς προσεθεσόμεν, τὸ μεγαλει-

τερον κοινὸν μέτρον τῶν τόξων $\Gamma\Delta$ καὶ $\text{E}\Theta$. Λοιπὸν, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ τόξον $\text{O}\Delta$ παριστᾷ τὸ μεγαλύτερον κοινὸν μέτρον τῶν τόξων $\Gamma\Delta$ καὶ $\text{E}\Theta$, ἡ ἀντιστοιχοῦσα κεντρικὴ γωνία $\text{O}\Delta\Delta$ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον μεγαλύτερον κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων γωνιῶν A καὶ B , καὶ ὁ ἀριθμητικὸς λόγος τῶν τόξων $\Gamma\Delta$ καὶ $\text{E}\Theta$ θέλει εἶναι ἴσος μὲ τὸν ζητούμενον ἀριθμητικὸν λόγον τῶν γωνιῶν A καὶ B .



*Ἄν τὰ τόξα $\Gamma\Delta$ καὶ $\text{E}\Theta$ ᾗσαν μεγέθη ἀσύμμετρα, καὶ αἱ δεδομέναι γωνίαι A καὶ B ᾗθελον εἶναι ἀσύμμετροι, ὁ δὲ ἀριθμητικὸς αὐτῶν λόγος δὲν ἠδύνατο νὰ εὑρεθῇ εἰμὴ κατὰ προσέγγισιν, ᾗτις δύναται νὰ κατασταθῇ ὅσον θέλομεν μικρά.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

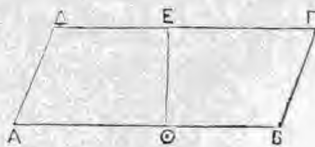
ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Ἐμβαδὸν σχήματος τινος καλεῖται ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ἑτέρου σχήματος, λαμβανομένην ὡς μονάδα. Ἄν π. χ. ληφθῇ ὡς μονὰς ἡ ἐπιφάνεια τετραγώνου τινός, τὸ ἔμβαδόν ἑτέρου τινός σχήματος παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει ποσάκις ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ περιέχει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὡς μονάδος ληφθέντος τετραγώνου.

2. Ἰσοδύναμα σχήματα ὀνομάζονται τὰ τὸ αὐτὸ ἔμβαδὸν ἔχοντα. Π. χ. ἂν κύκλος τις ἔχη τὸ αὐτὸ ἔμβαδὸν μὲ τι τρίγωνον, ἢ τετράγωνον, ἢ παραλληλόγραμμον κτλ., ὁ κύκλος λέγεται ἰσοδύναμος μὲ τὸ τρίγωνον, ἢ μὲ τὸ τετράγωνον, ἢ μὲ τὸ παραλληλόγραμμον κτλ. Λοιπὸν δύο σχήματα δύνανται νὰ ᾖναι ἰσοδύναμα ἂν καὶ κατὰ πολλὰ ἀνόμοια.

3. Ἰσα σχήματα ὀνομάζονται ἐκεῖνα, ἃτινα ἐπιτιθέμενα ταυτίζονται καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἔκτασιν, π. χ. δύο κύκλοι ἔχοντες τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα· δύο τρίγωνα ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἐκάστην ἐκάστη, κτλ.

4. Ὅψος παραλληλογράμμου τινός ΑΒΓΔ ὀνομάζεται ἡ κάθετος ΕΘ, ἡ ἀγομένη ἐπὶ τῶν δύο ἀπέναντι παραλλήλων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΔΓ, λαμβανομένων ὡς βάσεων τοῦ παραλληλογράμμου. Ἡ κάθετος αὕτη ΕΘ μετρεῖ τὴν πραγματικὴν αὐτῶν ἀπόστασιν (πρότ. 18, πόρ. 1, Α').

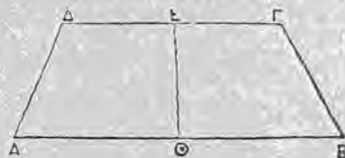
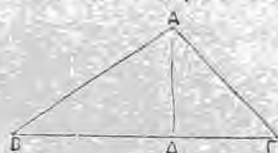


5. Ὅψος τριγώνου τινός ΑΒΓ καλεῖται ἡ κάθετος ΑΔ, ἡ καταβι-

βαζομένη ἐκ τινος κορυφῆς αὐτοῦ A ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς $BΓ$, λαμβανομένης ὡς βάσεως τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος τριγώνου.

Εἰς πᾶν τρίγωνον λαμβάνεται ὡς βάση κατ' ἀρέσκειαν μία ὁποιαδήποτε τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, εἰς δὲ τὸ ἰσοσκελές τρίγωνον λαμβάνεται κατὰ προτίμησιν ὡς βάσις ἡ ἄνισος αὐτοῦ πλευρά.

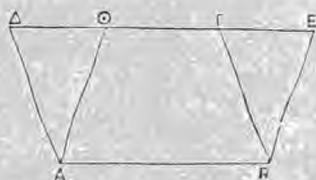
6. Ὑψος τραπεζίου τινὸς $ABΓΔ$ ὀνομάζεται ἡ κάθετος $ΕΘ$, ἡ μετροῦσα τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν AB καὶ $ΓΔ$, λαμβανομένων πάντοτε ὡς βάσεων τοῦ τραπεζίου.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ

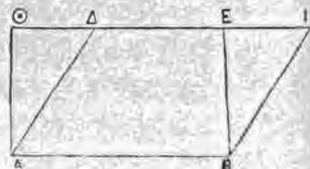
Τὰ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους παραλληλόγραμμα εἶναι σχήματα ἰσοδύναμα.

Ἐστώσαν $ABΓΔ$ καὶ $ABEΘ$ δύο παραλληλόγραμμα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσην AB καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἐπειδὴ τὰ παραλληλόγραμμα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, αἱ ἄνω αὐτῶν βάσεις $ΓΔ$ καὶ $ΕΘ$ θέλουσι κείσθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας $ΔΕ$, παραλλήλου τῇ AB (πρότ. 33, πόρ. 2, A').



Τούτου τεθέντος, τὰ δύο τρίγωνα $ΑΔΘ$ καὶ $ΒΓΕ$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς πλευρὰς $ΑΔ$ καὶ $ΒΓ$ ἴσας, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ (πρότ. 33, A'), τὰς πλευρὰς $ΑΘ$ καὶ $ΒΕ$ ἴσας διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας $ΔΑΘ$ καὶ $ΓΒΕ$ ἴσας, ὡς ἐχούσας τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ διευθυνομένας κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν (πρότ. 29, A'). Ἄν λοιπὸν ἀπὸ τοῦ ὅλου σχήματος $ABEΔ$ ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς ἑκάτερον τῶν ἴσων τριγώνων $ΑΔΘ$ καὶ $ΒΓΕ$, τὰ μένοντα παραλληλόγραμμα $ABEΘ$ καὶ $ABΓΔ$ θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμα. Λοιπὸν τὰ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη κτλ.

Πόρισμα. Πᾶν παραλληλόγραμμον $ABΓΔ$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον $ABEΘ$, τὸ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσην AB καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος BE .



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ

Παρ τρίγωνον ABF εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου $ABFA$ τῆς αὐτῆς βάσεως BF καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους AO .

Διότι τὸ παραλληλογράμμου $BGDA$ σύγκειται ἐκ δύο τριγώνων ABF , AFD , ἅτινα ἀπεδείχθησαν ἐν τῇ 33 προτάσει τοῦ A' βιβλίου ἴσα. Λοιπὸν τὸ ἐν τούτων ABF εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου $ABFA$.



Πέρισμα 1. Πάν τρίγωνον ABF εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου $BFEΘ$ τῆς αὐτῆς βάσεως BF καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους AO . Διότι τὸ ὀρθογώνιον $BFEΘ$ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ παραλληλογράμμῳ $ABFA$, ὅπερ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ABF .

Πέρισμα 2. Τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, ἀν δὲν ᾖναι ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο ἰσοῦν ὀρθογώνια εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

Ἐστώσαν $ABFA$ καὶ $AEΘA$ δύο ὀρθογώνια τοῦ αὐτοῦ ὕψους AA' λέγω ὅτι θέλουσιν εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν AB καὶ AE , τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει



$$ABFA : AEΘA = AB : AE \quad (1).$$

Ἄς υποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι αἱ βάσεις αὐτῶν AB καὶ AE ἔχουσι κοινόν τι μέτρον, περιεχόμενον, παραδείγματος χάριν, 7κις εἰς τὴν AB καὶ 4κις εἰς τὴν AE . Θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$AB : AE = 7 : 4 \quad (1).$$

Ἄν διαιρέσωμεν τὴν AB εἰς 7 ἴσα μέρη, ἡ AE θέλει περιέχει τέσσαρα τοιαῦτα, καὶ ἂν ἀπὸ τῶν σημείων τῶν διαιρέσεων ὑψώσωμεν καθέτους ἐπὶ τῆς AB , τὸ μὲν ὀρθογώνιον $ABFA$ θέλει διαιρεθῇ εἰς 7 μερικὰ ὀρθογώνια ἴσα πρὸς ἀλλήλα, ὡς ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, τὸ δὲ $AEΘA$ θέλει περιέχει τέσσαρα τούτων. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει ὡσαύτως

$$ABFA : AEΘA = 7 : 4 \quad (2).$$

Ἐκ δὲ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), ἔνθα τοῦ κοινοῦ αὐτῶν λόγου 7 : 4, πορίζομεθα τὴν ἐξῆς:

$$ABΓΔ : AEΘΔ = AB : AE,$$

ἥς τὸ ἀληθὲς ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Ἄν αἱ θάσεις AB καὶ AE ὑποτεθῶσι μεγέθη ἀσύμμετρα, ἡθέλωμεν ἀποδείξει ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία $(α)$ εἶναι ἀληθὲς μεταχειριζόμενοι τοὺς αὐτοὺς ἀπαραλλάκτως συλλογισμοὺς, οὓς καὶ ἐν τῇ 18 προτάσει τοῦ Β' βιβλίου. Λοιπὸν δύο ἰσοϋψῆ ὀρθογώνια εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ θάσεις αὐτῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο οποιαδήποτε ὀρθογώνια εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων τῶν ἐπὶ τὰ ὕψη αὐτῶν.

Τουτέστιν, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι O εἶναι τὸ ἐν ὀρθογώνιον, B ἡ θάσις αὐτοῦ καὶ Γ τὸ ὕψος, καὶ o τὸ ἕτερον ὀρθογώνιον, ἔχον θάσιν β καὶ ὕψος ν , λέγω ὅτι θέλωμεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$O : o = B \times \Gamma : \beta \times \nu \quad (\alpha).$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου φανταζόμεθα τρίτον ὀρθογώνιον O' , ἔχον θάσιν B καὶ ὕψος ν . Ἐπειδὴ ἀφ' ἑνὸς τὰ δύο ὀρθογώνια O καὶ O' ἔχουσι τὴν αὐτὴν θάσιν B , θέλουσιν εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν Γ καὶ ν , τουτέστι θέλωμεν ἔχει

$$O : O' = \Gamma : \nu \quad (1).$$

Καὶ ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώνια O' καὶ o ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ν , θέλουσιν εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ θάσεις αὐτῶν B καὶ β , τουτέστι θέλωμεν ἔχει

$$O' : o = B : \beta \quad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) καὶ ἐξαλείφοντες ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου λόγου τῆς προκυπτούσης ἀναλογίας τὸν κοινὸν παράγοντα O' , θέλωμεν ἔχει

$$O : o = B \times \Gamma : \beta \times \nu,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ.

Ἡ καταμέτρησις ὀρθογωνίου τινὸς O συνίσταται εἰς τὴν εὑρεσιν τοῦ λόγου τῆς ἐκτάσεως αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐκτασιν ἑτέρου τινὸς ὀρθογωνίου o , ληφθέντος ὡς μονάδος. Ἀλλ' ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως ἀναλογίας $(α)$ βλέπομεν ὅτι ὁ ζητούμενος λόγος $\frac{O}{o}$ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τοῦ γινομένου $B \times \Gamma$ πρὸς τὸ γινόμενον $\beta \times \nu$, τουτέστι μὲ τὸ πηλίκον

τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τῶν ἐν ταῖς γραμμαῖς Β καὶ Γ περιεχομένων γραμμικῶν μονάδων διὰ τοῦ γινομένου τῶν γραμμικῶν μονάδων, τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς τὰς γραμμάς β καὶ υ. Ἄν ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι $B=6$ μέτρα, $\Gamma=4$ μέτρα, $\beta=3$ μέτρα καὶ $\nu=2$ μέτρα, θέλομεν ἔχει

$$O : o = 6 \times 4 : 3 \times 2,$$

ἐπομένως $\frac{O}{o} = \frac{6 \times 4}{3 \times 2} = 4$, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου O περιέχει τετράκις τὴν τοῦ ὀρθογωνίου o , ληφθεῖσαν ὡς μονάδα.

Συνήθως λαμβάνουσιν ὡς μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τετραγώνου, οὗτινος ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν γραμμικὴν μονάδα. Τότε οἱ παριστῶντες τὰ μεγέθη τῶν γραμμῶν β καὶ υ ἀριθμοὶ θέλουσιν εἶναι ἴσοι μὲ τὴν μονάδα, ἐπομένως καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν, ἡ δὲ ἀναλογία (α) μεταβάλλεται εἰς τὴν ἑξῆς:

$$O : o = B \times \Gamma : 1$$

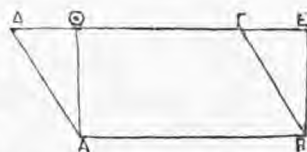
ἐξ ἧς $\frac{O}{o} = B \times \Gamma$. Λοιπὸν ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὸ ἐμβαδὸν ὀρθο-

γωνίου τινὸς O ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν γραμμικῶν μονάδων τῶν περιεχομένων εἰς τὴν βάσιν αὐτοῦ B καὶ εἰς τὸ ὕψος Γ . Ὄταν λοιπὸν λέγωμεν ἐν τοῖς ἐπομένοις ὅτι τὸ ἐμβαδὸν σχήματός τινος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον δύο τινῶν γραμμῶν, ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ περιέχει τοσάκις τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἔχοντος πλευρὰν ἴσην μὲ τὴν γραμμικὴν μονάδα, ὡσάκις ἡ μονὰς περιέχεται ἐν τῷ γινόμενῳ τῶν γραμμικῶν μονάδων, τῶν περιεχομένων εἰς τὰς περὶ ὧν ὁ λόγος γραμμάς. Ἄν ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι τὸ μέτρον λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν μηκῶν καὶ ὅτι ἡ βᾶσις B ὀρθογωνίου τινὸς εἶναι ἴση μὲ 3,53 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ Γ ἴσον μὲ 2,25, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον $3,53 \times 2,25$, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ θέλει περιέχει 7,9425 τετραγωνικά μέτρα, ἧτοι 7 τετραγωνικά μέτρα, 94 τετραγωνικά δεκάμετρα καὶ 25 τετραγωνικά ἑκατοστόμετρα διότι τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, τὸ δὲ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον εἶναι τὸ χιλιοστὸν τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ ἐμβαδὸν παραλλелоγράμμου τινὸς ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Διότι τὸ παραλληλόγραμμον $\Lambda\text{Β}\Gamma\Lambda$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον $\Lambda\text{Β}\text{Ε}\Theta$, τὸ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν $\Lambda\text{Β}$ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος $\Lambda\Theta$ (πρότ. 1, πόρ. 1). Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου $\Lambda\text{Β}\text{Ε}\Theta$ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον $\Lambda\text{Β} \times \Lambda\Theta$. Λοιπὸν καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλογράμμου θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ αὐτὸ γινόμενον $\Lambda\text{Β} \times \Lambda\Theta$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.



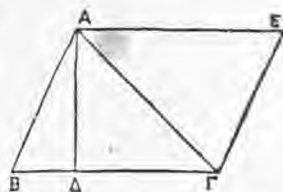
Πόρισμα. Ἐνεσθέν ἐπεταὶ ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν τῆς αὐτῆς θάσεως παραλληλογράμμων εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως, τὰ ἐμβαδὰ τῶν τοῦ αὐτοῦ ὕψους παραλληλογράμμων εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ θάσεις αὐτῶν. Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ Λ τὴν κοινὴν θάσιν τῶν παραλληλογράμμων καὶ διὰ Β καὶ Γ τὰ ὕψη αὐτῶν, τὰ γινόμενα $\Lambda \times \text{Β}$, $\Lambda \times \Gamma$ θέλουσι παριστᾶν τὰ ἐμβαδὰ τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος παραλληλογράμμων, καὶ θέλομεν ἔχει προφανῶς τὴν ἀναλογίαν $\Lambda \times \text{Β} : \Lambda \times \Gamma = \text{Β} : \Gamma$.

Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν ἠθέλομεν ἔχει, ἂν Λ παρίστα τὸ κοινὸν τῶν παραλληλογράμμων ὕψος, Β δὲ καὶ Γ τὰς θάσεις αὐτῶν. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Διότι πᾶν τρίγωνον $\Lambda\text{Ε}\Gamma$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου $\Lambda\text{Β}\Gamma\text{Ε}$ τῆς αὐτῆς θάσεως $\text{Β}\Gamma$ καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους $\Lambda\Delta$. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου $\Lambda\text{Β}\Gamma\text{Ε}$ ἰσοῦται κατὰ τὰ προαποδειχθέντα μὲ τὸ γινόμενον $\text{Β}\Gamma \times \Lambda\Delta$. Ἄρα τὸ τοῦ τριγώνου $\Lambda\text{Β}\Gamma$ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀνωτέρω γινομένου, τοιούτεστι μὲ $\frac{1}{2} \text{Β}\Gamma \times \Lambda\Delta$, ἢ, ὅπερ ταῦτό, μὲ $\text{Β}\Gamma \times \frac{1}{2} \Lambda\Delta$. Λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν κτλ.

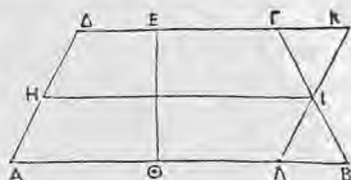


Πόρισμα. Τὰ τῆς αὐτῆς θάσεως τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως, τὰ τοῦ αὐτοῦ ὕψους τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ θάσεις αὐτῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπέζιου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο παραλλήλων βάσεών του.

Ἐστω ΑΒΓΔ τραπέζιον τι, ἔχον βάσεις τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΓΔ καὶ ὕψος τὴν ἐπ' αὐτῶν κάθετον ΕΘ. Λέγω ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ΕΘ $\left(\frac{ΑΒ+ΓΔ}{2} \right)$



Πρὸς ἀποδείξιν τούτου ἐκ τοῦ σημείου Ι, μέσου τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ἄγομεν τὴν ΚΑ παράλληλον τῇ ἀπέναντι πλευρᾷ ΑΔ, καὶ προεκβάλομεν τὴν ΔΓ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν ΑΚ. Οὕτω σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔΚΔ, ὅπερ λέγω ὅτι εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωνα ΙΒΑ, ΙΓΚ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς ΙΒ, ΙΓ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, τὰς γωνίας ΑΙΒ, ΓΙΚ ἴσας ὡς κατὰ κορυφὴν, καὶ τὰς γωνίας ΙΒΑ, ΙΓΚ ἴσας ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ ὡς πρὸς τὰς παραλλήλους ΑΒ, ΔΓ, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ὅλου σχήματος ΑΒΙΚΔ ἀφαιρέσωμεν τὸ τρίγωνον ΙΑΒ, μένει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔΚΔ, ἐὰν δ' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σχήματος τὸ τρίγωνον ΙΓΚ, μένει τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ. Λοιπὸν τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔΚΔ.

Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΔΚΔ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον ΕΘ $\times ΑΛ$, ὅπερ δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτως $\frac{ΕΘ \times 2ΑΛ}{2}$, ἥ ὅπερ ταῦτό, $\frac{ΕΘ (ΑΛ + ΔΚ)}{2}$, ἢ $\frac{ΕΘ (ΑΛ + ΓΚ + ΔΓ)}{2}$, ἢ $\frac{ΕΘ (ΑΛ + ΑΒ + ΔΓ)}{2}$, ἢ $\frac{ΕΘ (ΑΒ + ΔΓ)}{2}$. Λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπέζιου ΑΒΓΔ ἰσοῦται τῷ γινόμενῳ $\frac{ΕΘ (ΑΒ + ΔΓ)}{2}$, ἢ τῷ ΕΘ $\left(\frac{ΑΒ + ΔΓ}{2} \right)$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Ι τῆς ΒΓ ἄξωμεν τὴν ΙΗ παράλληλον τῇ ΑΒ, τὰ σχήματα ΑΛΙΗ, ΙΗΔΚ θέλουσιν εἶναι παραλληλόγραμμα, ὡς ἔχοντα τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευρὰς παραλλήλους. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει ΙΑ=ΔΗ καὶ ΙΚ=ΗΔ. Ἀλλὰ ΙΑ=ΙΚ. Ἄρα καὶ

$\Lambda\text{H}=\text{H}\Delta$. Τὸ σημεῖον λοιπὸν H εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $\Lambda\Delta$ τοῦ τραπεζίου.

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\text{IH}=\Lambda\Delta$, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$, ὅπερ εὐρέθη ἀνωτέρω ἶσον μὲ τὸ γινόμενον $\text{E}\Theta \times \Lambda\Delta$, θέλει εἶναι ὡσαύτως ἶσον καὶ μὲ τὸ γινόμενον $\text{E}\Theta \times \text{IH}$. Λοιπὸν δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου $\text{A}\text{B}\Gamma\Delta$ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτοῦ $\text{E}\Theta$ ἐπὶ τὴν εὐθείαν IH , τὴν ἐνδύουσαν τὰ μέσα I καὶ H τῶν δύο μὴ παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν $\text{B}\Gamma$ καὶ $\Lambda\Delta$.

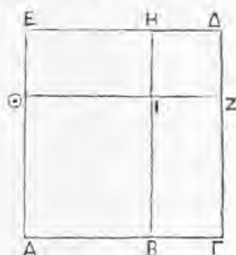
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν εὐθεῖα τις $\text{A}\Gamma$ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη AB καὶ $\text{B}\Gamma$, λέγω ὅτι ἐὰν ἐπὶ τῆς ὕλης εὐθείας $\text{A}\Gamma$ κατασκευαζόμενον τετράγωνον $\text{A}\Gamma\Delta\text{E}$ θέλει περιέχει τὰ ἐπὶ τῶν μερῶν AB καὶ $\text{B}\Gamma$ κατασκευαζόμενα τετράγωνα, πλέον δύο ὀρθογώνια ἔχοντα βάσεις τὴν AB καὶ ὕψος τὴν $\text{B}\Gamma$, τοῦθ' ὅπερ παρίσταται διὰ τῶν γνωστῶν σημείων ὡς ἐξῆς·

$$\overline{\text{A}\Gamma}^2 = (\text{AB} + \text{B}\Gamma)^2 = \overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{B}\Gamma}^2 + 2\text{AB} \times \text{B}\Gamma.$$

Πρὸς ἀποδείξιν τούτου, ἀπὸ τοῦ κατασκευάσωμεν τὸ τετράγωνον $\text{A}\Gamma\Delta\text{E}$, λαμβάνομεν $\text{A}\Theta=\text{AB}$, καὶ ἄγομεν τὴν μὲν ΘZ παράλληλον τῇ $\Delta\Gamma$, τὴν δὲ BH παράλληλον τῇ AE .

Διὰ τῶν εὐθειῶν ΘZ καὶ BH τὸ τετράγωνον $\text{A}\Gamma\Delta\text{E}$ διαιρεῖται εἰς τὰ μέρη $\text{AB}\text{I}\Theta$, $\text{I}\Delta\text{H}$, $\text{B}\Gamma\text{ZI}$, $\text{I}\text{H}\text{E}\Theta$. Τὸ πρῶτον μέρος $\text{AB}\text{I}\Theta$ εἶναι προ-



φανῶς τὸ ἐπὶ τῆς AB κατασκευαζόμενον τετράγωνον, διότι ἐλάβομεν $\text{A}\Theta=\text{AB}$ καὶ ἤχαμεν τὴν ΘZ παράλληλον τῇ $\Delta\Gamma$ καὶ τὴν BH παράλληλον τῇ AE . Τὸ δεύτερον μέρος $\text{I}\Delta\text{H}$ εἶναι τὸ ἐπὶ τῆς $\text{B}\Gamma$ κατασκευαζόμενον τετράγωνον, διότι ἡ μὲν IZ εἶναι προφανῶς ἴση μὲ τὴν $\text{B}\Gamma$, ἡ δὲ IH εἶναι ἴση τῇ ΘE , ἥτις εἶναι ὡσαύτως ἴση μὲ τὴν $\text{B}\Gamma$, διότι $\text{AE}=\Delta\Gamma$, $\text{A}\Theta=\text{AB}$, ἐπομένως $\text{AE}-\text{A}\Theta=\Delta\Gamma-\text{AB}$, ἥτοι $\Theta\text{E}=\text{B}\Gamma$. Τὰ λοιπὰ δύο μέρη $\text{B}\Gamma\text{ZI}$ καὶ $\text{I}\text{H}\text{E}\Theta$ εἶναι προφανῶς ὀρθογώνια, ἔχοντα βάσεις IB καὶ $\text{I}\Theta$ ἴσας τῇ AB , καὶ ὕψη $\text{B}\Gamma$ καὶ $\text{E}\Theta$ ἴσα τῇ $\text{B}\Gamma$. Λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν ἑκατέρου τούτων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον $\text{AB} \times \text{B}\Gamma$. Λοιπὸν ἔχομεν

$$\text{A}\Gamma\Delta\text{E} = \text{AB}\text{I}\Theta + \text{I}\Delta\text{H} + \text{B}\Gamma\text{ZI} + \text{I}\text{H}\text{E}\Theta,$$

$$\eta \quad (AB+BG)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 + 2AB \times BG,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ a καὶ b τοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς μετροῦντας τὰ μέρη AB καὶ BG τῆς εὐθείας AG , θέλομεν ἔχει κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας τοῦ ἀλγεβρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὴν ἰσότητα

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

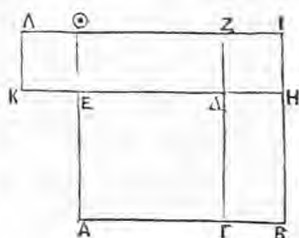
δι' ἧς ἀποδεικνύεται ἐπίσης τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, ἂν ὑποτεθῇ γνωστόν ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου παρίσταται διὰ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα AG εἶται ἴση μὲ τὴν διαφορὰν $AB-BG$ τῶν εὐθειῶν AB καὶ BG , λέγω ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς AG κατασκευαζόμενον τετράγωνον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν AB καὶ BG , μείον δύο ὀρθογώνια ἔχοντα βάσιν τὴν AB καὶ ὕψος τὴν BG , τοῦθ' ὅπερ παρίσταται διὰ τῶν γνωστῶν σημείων ὡς ἐξῆς.

$$(AB-BG)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 - 2AB \times BG.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἀφοῦ κατασκευάσωμεν τὸ τετράγωνον $ABIO$, λαμβάνομεν $AE=AG$, ἄγομεν τὴν EH παράλληλον τῇ AB καὶ τὴν GZ παράλληλον τῇ AO , καὶ ἐπὶ τῆς EO κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον $EOAK$, ὅπερ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐπὶ τῆς BG κατασκευαζόμενον, διότι ἀπεδείχθη ἀνωτέρω



ὅτι $EO=BG$. Οὕτω τὸ μὲν ὅλον σχῆμα $ABIAKE$ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων $ABIO$, $OKAE$, ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν τὰ δύο ὀρθογώνια $GBIZ$ καὶ $ZAKG$, ἅτινα ἔχουσι βάσεις IB καὶ AK προφανῶς ἴσας τῇ AB , καὶ ὕψη BG , AZ ἴσα τῇ BG , θέλει μείνει τὸ τετράγωνον $AGAE$ τῆς εὐθείας AG . Λοιπὸν ἔχομεν

$$AGAE = ABIO + OKAE - GBIZ - ZAKG,$$

$$\eta \quad (AB-BG)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 - 2AB \times BG,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἐάν ὑποθέσωμεν, ὡς ἂνωτέρω, ὅτι a καὶ b παριστῶσι τὰ μέτρα τῶν εὐθειῶν AB καὶ $BΓ$, θέλωμεν ἔχει κατὰ τοὺς γνωστοὺς ἀλγεβρικοὺς κανόνας τὴν ἰσότητά

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab,$$

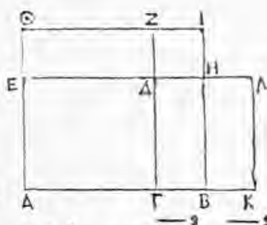
ἣτις δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς δευτέρα ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ἔχον βάσιν τὸ ἄθροισμα $AB+BΓ$ δύο εὐθειῶν AB καὶ $BΓ$ καὶ ὕψος τὴν διαφορὰν αὐτῶν $AB-BΓ$, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων κατασκευασμένων τετραγώνων, τοῦθ' ὅπερ παρίσταται διὰ τῶν γνωστῶν σημείων ὡς ἑξῆς.

$$(AB+BΓ) \times (AB-BΓ) = \overline{AB}^2 - \overline{BΓ}^2.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς AB καὶ τῆς διαφορᾶς $AB-BΓ$, ἥτοι $ΑΓ$, τὰ τετράγωνα $ΑΒΙΘ$ καὶ $ΑΓΔΕ$, προσεβάλλομεν τὴν AB εἰς τινὰ ἀπόστασιν $BK=$
 $BΓ$ καὶ κατασκευάζομεν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ὀρθογώνιον $ΑΚΛΕ$, ὅπερ λέγωμεν εἶναι ἴσον τῇ



διαφορᾷ τῶν τετραγώνων $ΑΒΙΘ$ καὶ $ΔΗΖ$, ἥτοι τῇ διαφορᾷ $AB-BΓ$.

Διότι τὸ ὀρθογώνιον $ΑΚΛΕ$ σύγκειται ἐκ δύο μερῶν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου $ΑΒΗΕ$ καὶ τοῦ $ΗΒΚΛ$. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον $ΗΒΚΛ$ εἶναι ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ $ΕΔΖΘ$, διότι αἱ βάσεις αὐτῶν $ΗΒ$ καὶ $ΕΔ$ εἶναι προφανῶς ἴσαι, καθὼς καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν BK καὶ $ΕΘ$. Ἀρα τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ὀρθογώνιον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σχῆμα $ΑΒΗΔΖΘ$, ὅπερ προφανῶς εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων $ΑΒΙΘ$ καὶ $ΙΖΔΗ$.
Λοιπὸν θέλωμεν ἔχει $AK \times AE = \overline{AB}^2 - \overline{BΓ}^2$. Ἀλλ' $AK=AB+BΓ$, καὶ $AE=AB-BΓ$. Λοιπὸν

$$(AB+BΓ) \times (AB-BΓ) = \overline{AB}^2 - \overline{BΓ}^2,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἡ ἂνωτέρω πρότασις ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τοῦ ἀλγεβρικοῦ τύπου

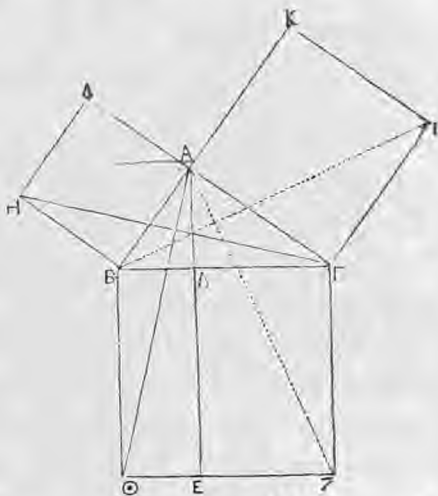
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

ἐν ᾧ a καὶ b παριστῶσι τὰ μέτρα τῶν γραμμῶν AB καὶ $BΓ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἐπὶ ὑποτείνουσας ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν.

Ἐστω Λ ἡ κορυφή τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου $\Lambda\text{ΒΓ}$. Λέγω ὅτι τὸ τετράγωνον ΒΓΖΘ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΑΒΗΛ , ΑΓΙΚ , τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ΑΒ , ΑΓ .



Πρὸς ἀποδείξιν τούτου ἐκ τῆς κορυφῆς Λ καταβιβάζομεν ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ τὴν κάθετον ΑΔ , προεκβάλλομεν αὐτὴν μέχρις Ε καὶ ἄγομεν τὰς διαγωνίους ΑΘ καὶ ΗΓ . Τὰ δύο σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΘ καὶ ΗΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς πλευράς αὐτῶν ΒΘ καὶ ΒΓ ἴσας, ὡς πλευράς τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου ΒΓΖΘ , τὰς πλευράς ΑΒ καὶ ΒΗ ἴσας, ὡς πλευράς τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου ΑΒΗΛ , καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ΑΒΘ καὶ ΗΒΓ ἴσας, διότι ἡ γωνία ΑΒΘ σύγκειται ἀπὸ μίαν ὀρθὴν ΓΒΘ καὶ ἀπὸ τὴν γωνίαν ΑΒΓ , καὶ ἡ ΗΒΓ σύγκειται ὡσαύτως ἀπὸ μίαν ὀρθὴν ΑΒΗ καὶ ἀπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ΑΒΓ . Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΘ καὶ ΗΒΓ εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΔΕΘ , διότι ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΘ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΔ , τὸ δὲ τρίγωνον ΗΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου ΑΒΗΛ , διότι ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΠΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΒ (πρότ. 2, πόρ. 1). Λοιπὸν, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΘ καὶ ΗΒΓ εἶναι ἴσα, τὸ τετράγωνον ΑΒΗΛ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΕΘ θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμα.

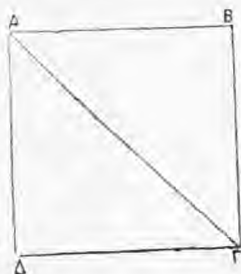
Ὁμοιοτρόπως σκεπτόμενοι ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΓΖ καὶ ΒΓΙ εἶναι ἴσα, καὶ ἐπομένως ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΓΔΕΖ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον ΑΓΙΚ . Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΒΔΕΘ καὶ

ΓΑΕΖ. Ἄρα θέλει εἶναι ἴσον καὶ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΑΒΗΛ καὶ ΑΓΙΚ. Λοιπὸν τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ τετράγωνόν τι ἔχει διὰ μέτρον τὸ τετράγωνον τοῦ περιπτώσαντος τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀνωτέρω ἀποδειχθεῖσα πρότασις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τῆς ἰσότητος $\overline{ΒΓ}^2 = \overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΑΓ}^2$.

Πόρισμα 1. Ἐν τῇ ἀνωτέρω ἰσότητι πορίζομεθα $\overline{ΑΒ} = \overline{ΒΓ} - \overline{ΑΓ}$, καὶ $\overline{ΑΓ} = \overline{ΒΓ} - \overline{ΑΒ}$, τουτέστι τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας πλὴν τοῦ τετραγώνου τῆς ἄλλης πλευρᾶς.

Πόρισμα 2. Ἐστω ΑΓ ἡ διαγώνιος τετραγώνου τινὸς ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές, θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα τὴν ἰσότητα $\overline{ΑΓ}^2 = \overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 = 2\overline{ΑΒ}^2$, τουτέστι, τὸ ἐπὶ τῆς διαγωνίου τετραγώνου τινὸς κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἔχει ἐμβαδὸν διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ.



Πόρισμα 3. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος $\overline{ΑΓ}^2 = 2\overline{ΑΒ}^2$ πορίζομεθα τὴν ἀναλογίαν $\overline{ΑΓ} : \overline{ΑΒ} = \sqrt{2} : 1$, ἐξ ἧς διὰ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἐκάστου αὐτῆς ὅρου πορίζομεθα $\overline{ΑΓ} : \overline{ΑΒ} = \sqrt{2} : 1$. Λοιπὸν ἡ διαγώνιος ΑΓ τετραγώνου τινὸς ΑΒΓΔ ἔχει λόγον πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΑΒ, ὅν λόγον ἔχει ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 πρὸς τὴν μονάδα. Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ διαγώνιος τετραγώνου τινὸς καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι μέγεθη ἀσύμμετρα.

Πόρισμα 4. Τὰ δύο ὀρθογώνια ΒΔΕΘ καὶ ΑΓΖΕ καὶ τὸ τετράγωνον ΒΓΖΘ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΔΕ. Ἄρα, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 3 προτάσει, θέλουσιν εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, καὶ θέλομεν ἔχει τὰς ἀναλογίας

$$\overline{ΒΓΖΘ} : \overline{ΒΔΕΘ} = \overline{ΒΓ} : \overline{ΒΔ} \quad (1)$$

$$\overline{ΒΓΖΘ} : \overline{ΑΓΖΕ} = \overline{ΒΓ} : \overline{ΑΓ} \quad (2)$$

$$\overline{ΒΔΕΘ} : \overline{ΑΓΖΕ} = \overline{ΒΔ} : \overline{ΑΓ} \quad (3)$$

Ἀλλ' ἀπεδείξαμεν προηγουμένως ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΕΘ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον ΑΒΗΛ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΓΖΕ ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον ΑΓΙΚ. Λοιπὸν, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀναλογίας ἀντὶ τῶν ὀρθογωνίων τὰ ἰσοδύναμα αὐτοῖς τετράγωνα θέλομεν ἔχει

$$\frac{ΒΓ^2}{ΑΒ} = \frac{ΒΓ^2}{ΒΔ} \quad (1)$$

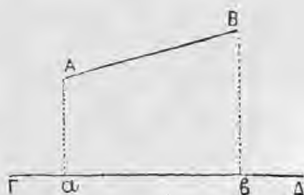
$$\frac{ΒΓ^2}{ΑΓ} = \frac{ΒΓ^2}{ΔΓ} \quad (2)$$

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΒΔ}{ΔΓ} \quad (3)$$

Εἰς πᾶν λοιπὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας, ὡς ἡ ὑποτείνουσα πρὸς τὸ προσκείμενον τῇ πλευρᾷ τμήμα (*), καὶ τὰ τετράγωνα τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ προσκείμενα εἰς ταύτας τμήματα τῆς ὑποτείνουσας.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

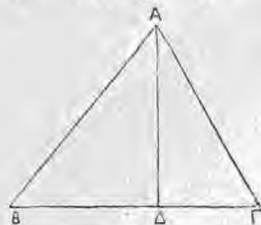
Προβολὴ εὐθείας τινὸς ΑΒ ἐπὶ ἑτέρας ΓΔ καλεῖται τὸ μέρος αβ τῆς δευτέρας, τὸ περιεχόμενον μεταξύ τῶν ποδῶν α καὶ β τῶν ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ΓΔ καταβιβασζομένων καθέτων Αα καὶ Ββ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΘΕΩΡΗΜΑ

Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι ὀξείας τινὸς γωνίας πλευρᾶς ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν, μείον δις τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ἔχον βάσιν τὴν μίαν τοῦτω καὶ ὕψος τὴν προβολὴν τῆς ἐτέρας ἐπὶ τῆς πρώτης.

Ἐστω ΑΒ ἡ ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας Γ πλευρὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἄν καταβιβάσωμεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ΒΓ, κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὀρισμὸν ΓΔ θέλει εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ΑΓ ἐπὶ τῆς ΒΓ, καὶ λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα.



(*) Προσκείμενον τμήμα εἷς τινὰ πλευράν ΑΒ καλεῖται τὸ μέρος ΑΒ τῆς ὑποτείνουσας, τὸ περιεχόμενον μεταξύ τῆς πλευρᾶς ταύτης καὶ τῆς καθέτου ΑΔ, τῆς καταβιβασζομένης ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ.

$$\overline{AB}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{AG}^2 - 2BG \times GA.$$

Δύο περιπτώσεις ὑπάρχουσι 1^η. Ἐάν ἡ κάθετος ΑΔ πίπτῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει $\overline{BD} = \overline{BG} - \overline{GD}$, καὶ ἐπομένως κατὰ τὸ θεώρημα τῆς ἐνάτης προτάσεως

$$\overline{BD}^2 = (\overline{BG} - \overline{GD})^2 = \overline{BG}^2 + \overline{GD}^2 - 2BG \times GD.$$

Προσθέτοντες δὲ εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος ΑΔ, ἔχομεν τότε,

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{GD}^2 + \overline{AD}^2 - 2BG \times GD \quad (1)$$

Ἀλλ', ἐπεὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνια, ἔχομεν $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$ καὶ $\overline{GD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AG}^2$. Ἀντικαθιστώντες λοιπὸν εἰς τὴν ἰσότητα (1) ἀντὶ τῶν ἀθροισμάτων $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$, $\overline{GD}^2 + \overline{AD}^2$ τὰ ἴσα τούτοις τετράγωνα $\overline{AB}^2$ καὶ $\overline{AG}^2$ θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς

$$\overline{AB}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{AG}^2 - 2BG \times GA,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

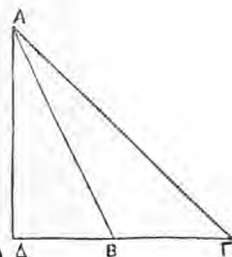
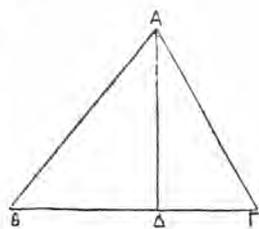
2^η. Ἐάν ἡ κάθετος ΑΔ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει $\overline{BD} = \overline{GD} - \overline{BG}$, καὶ ἐπομένως $\overline{BD}^2 = \overline{GD}^2 + \overline{BG}^2 - 2BG \times GD$ (πρότ. 9). Προσθέτοντες εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος ΑΔ, ἔχομεν τότε,

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{GD}^2 + \overline{BG}^2 - 2BG \times GD. \quad (1)$$

Ἀλλ' ἔχομεν $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$ καὶ $\overline{AD}^2 + \overline{GD}^2 = \overline{AG}^2$. Ἀρα ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν ἰσότητα (1) ἀντὶ τῶν ἀθροισμάτων $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$, $\overline{AD}^2 + \overline{GD}^2$ τὰ ἴσα τούτοις τετράγωνα $\overline{AB}^2$ καὶ $\overline{AG}^2$, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς

$$\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 - 2BG \times GA,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν. Λοιπὸν εἰς πᾶν τρίγωνον κτλ.



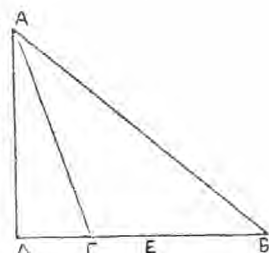
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΘΕΩΡΗΜΑ

Εἰς πᾶν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας πλευρᾶς ἰσοῦται μὲ τὸ ἀθροισμα τῶν τετρα-

γῶγων τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν, πλέον δις τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ἔχον βάσιν τὴν μίαν τούτων καὶ ὕψος τὴν προβολὴν τῆς ἐτέρας ἐπὶ τῆς πρώτης.

Ἐστω AB ἡ ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας Γ πλευρὰ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Ἐὰν καταβιβάσωμεν τὴν κάθετον AA ἐπὶ τῆς $B\Gamma$, ἡ προβολὴ τῆς $A\Gamma$ ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ θέλει εἶναι $\Gamma\Delta$, καὶ λέγω ὅτι θελομεν ἔχει

$$\overline{AB}^2 = \overline{A\Gamma}^2 + \overline{B\Gamma}^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta.$$



Ἡ κάθετος AA δὲν δύναται νὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ ἀμβλυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ διότι ἂν ἐπιπτε λόγου χάριν εἰς E , τὸ σχηματισθησόμενον τρίγωνον $A\Gamma E$ ἔθελεν ἔχει μίαν ὀρθὴν γωνίαν E καὶ μίαν ἀμβλείαν Γ , ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 31, A'). Λοιπὸν πίπτει πάντοτε ἐκτὸς, καὶ ἐπομένως ἔχομεν $B\Delta = B\Gamma + \Gamma\Delta$. Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος εἰς τὸ τετράγωνον, θελομεν ἔχει κατὰ τὸ θεωρήμα τῆς 8 προτάσεως τὴν ἰσότητα

$$\overline{B\Delta}^2 = \overline{B\Gamma}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta. \quad (1)$$

Προσθέτοντες δὲ $\overline{A\Delta}^2$ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1) καὶ ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τῶν ἀθροισμάτων $\overline{A\Delta}^2 + \overline{B\Delta}^2$, $\overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{A\Delta}^2$ τὰ ἴσα τούτοις τετράγωνα $\overline{AB}^2$ καὶ $\overline{A\Gamma}^2$, ἔχομεν τότε,

$$\overline{AB}^2 = \overline{A\Gamma}^2 + \overline{B\Gamma}^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν. Λοιπὸν εἰς πᾶν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας πλευρᾶς ἰσοῦται μὲ τὸ ἀθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν κτλ.

Σχόλιον. Ἐκ τῶν προαποδειχθέντων δύο θεωρημάτων βλέπομεν ὅτι εἰς μόνον τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἀθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΘΕΩΡΗΜΑ

Εἰς πᾶν τρίγωνον $AB\Gamma$, εἰὰν ἐνῶσωμεν τὴν κορυφὴν αὐτοῦ A μὲ τὸ μέσον τῆς βάσεώς του $B\Gamma$ διὰ τῆς εὐθείας AE , λέγω ὅτι θελομεν ἔχει

$$\overline{AB}^2 + \overline{A\Gamma}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2BE^2.$$

Διότι, εὖν καταβιβάσωμεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τῇ θέλωμεν ἔχει εἰς μὲν τὸ ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΕΓ (πρότ. 12)

$$\overline{ΑΓ}^2 = \overline{ΑΕ}^2 + \overline{ΕΓ}^2 - 2ΕΓ \times ΕΔ, \quad (1)$$

εἰς δὲ τὸ ἀμβλυγώνιον ΑΒΕ (πρότ. 13)

$$\overline{ΑΒ}^2 = \overline{ΑΕ}^2 + \overline{ΒΕ}^2 + 2ΒΕ \times ΕΔ \quad (2)$$

Προσθέτοντες δὲ κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) ροῦντες ὅτι ΒΕ=ΕΓ ἐκ κατασκευῆς, θέλωμεν ἔχει τὴν

$$\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΑΓ}^2 = 2\overline{ΑΕ}^2 + 2ΒΕ^2,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΘΕΩΡΗΜΑ

Εἰς πᾶρ τετράπλευρον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων σάρων αὐτοῦ πλεονῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετῶν διαγωνίων, πλεον τετράκις τὸ τετράγωνον τῆς ἐκροῦσης τὰ μέσα αὐτῶν.

Ἐστωσαν ΑΓ καὶ ΒΔ αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου τῶν Ο καὶ Ζ τὰ μέσα αὐτῶν. Λέγω ὅτι θέλωμεν ἔχει

$$\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2 + \overline{ΔΑ}^2 = \overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΒΔ}^2 + 4ΟΖ^2.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγωμεν πᾶς εὐθείας ΒΟ, ΟΔ καὶ ΟΖ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐπειδὴ ἡ ΒΟ ἐνόνει τὴν κορυφὴν Β μὲ τὸ μέσον Ο τῆς βάσεως ΑΓ, θέλωμεν ἔχει κατὰ τὸ προαποδείχθὲν θεώρημα

$$\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 = 2ΒΟ^2 + 2ΑΟ^2. \quad (1)$$

Ὡσαύτως εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, ἐπειδὴ ἡ ΔΟ ἐνόνει τὴν κορυφὴν Δ μὲ τὸ μέσον Ο τῆς βάσεως ΑΓ

$$\overline{ΓΔ}^2 + \overline{ΔΑ}^2 = 2ΔΟ^2 + 2ΑΟ^2.$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) θ

$$\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2 + \overline{ΔΑ}^2 = 4ΑΟ^2 + 2ΒΟ^2 + 2ΔΟ^2$$

Ἄλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΒΟΔ, ἐπειδὴ ἡ ΟΖ ἐνόνει τὴν κορυφὴν Β μὲ τὸ μέσον Ζ τῆς βάσεως ΒΔ, ἔχομεν κατὰ τὸ ἀνωτέρω θε

$$\overline{ΒΟ}^2 + \overline{ΟΔ}^2 = 2ΒΖ^2 + 2ΟΖ^2, \text{ ἐπομένως } 2ΒΟ^2 + 2ΟΔ^2 = 4ΒΖ^2 + 4ΟΖ^2$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (3) ἀντὶ τοῦ ἄθροισματος $2\overline{BO} + 2\overline{OA} = \overline{4BZ} + \overline{4OZ}$, ἔχομεν

$$\overline{AB} + \overline{BG} + \overline{GA} + \overline{AA} = \overline{4AO} + \overline{4BZ} + \overline{4OZ},$$

ἢ, ὅπερ ταύτό,

$$\overline{AB} + \overline{BG} + \overline{GA} + \overline{AA} = \overline{AG} + \overline{BA} + \overline{4OZ},$$

διότι, ἐπειδὴ ἐκ κατασκευῆς ἔχομεν $2AO = AI$ καὶ $2BZ = BA$, πορίζομεθα $4AO = AG$ καὶ $4BZ = BA$. Λοιπὸν ἡ ἰσότης (α) εἶναι ἀληθής, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. Ἄν τὸ τετράπλευρον ᾖ το παραλληλόγραμμον, ἡ εὐθεῖα OZ ἤθελεν εἶναι μηδὲν (πρότ. 36, Α'). Λοιπὸν, εἰς πᾶν παραλληλόγραμμον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων αὐτοῦ πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων. Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν τετραπλείρου τινὸς ᾖ ἰσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων αὐτοῦ, τὸ τετράπλευρον θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον. Διότι, ἂν δὲν ᾖ το παραλληλόγραμμον, κατὰ τὸ προαποδειχθέν θεώρημα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων αὐτοῦ πλευρῶν ἤθελεν εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἄθροισματος τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων αὐτοῦ, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΘΕΩΡΗΜΑ

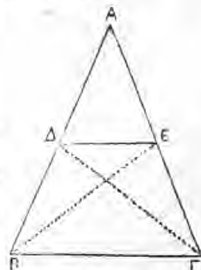
Πᾶσα εὐθεῖα, παράλληλος μὲ τῶν πλευρῶν τριγώνου τινός, διαιρεῖ τὰς δύο ἄλλας αὐτοῦ πλευρὰς εἰς μέρη ἀνάλογα.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ AE εἶναι παράλληλος τῇ $BΓ$. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει:

$$AA : AB = AE : EG. \quad (\alpha)$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν τὰς εὐθείας BE καὶ AG . Τὰ οὕτω σχηματισθέντα δύο τρίγωνα BAE καὶ GAE θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἑξῆς AE καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ αὐτῶν B καὶ G κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας $BΓ$, παραλλήλου τῇ AE (πρότ. 33, πόρ. 2, Α').

Τούτου τεθέντος, τὰ δύο τρίγωνα AAE καὶ EAB , ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν



αὐτὴν κορυφὴν Ε καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΔ καὶ ΔΒ ἐπ'εὐθείας, ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, ἐπομένως εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν (πρότ. 6, πόρ.), ἥτοι θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\Lambda \Delta \epsilon : \epsilon \Delta \beta = \Lambda \Delta : \Delta \beta \quad (1)$$

Ἵσταύτως, τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΔΕΓ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν Δ καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΕ καὶ ΕΓ ἐπ'εὐθείας, ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, ἐπομένως εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, ἥτοι θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\Lambda \Delta \epsilon : \epsilon \Delta \gamma = \Lambda \epsilon : \epsilon \Gamma. \quad (2)$$

Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΔΒ καὶ ΕΔΓ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἀρὰ οἱ πρῶτοι λόγοι τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἴσοι, ἐπομένως καὶ οἱ δεύτεροι θέλουσιν εἶναι ἴσοι, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\Lambda \Delta : \Delta \beta = \Lambda \epsilon : \epsilon \Gamma, \quad (\alpha)$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα 1. Ἐκ τῆς ἀποδείξεως ἀναλογίας (α) πορίζομεθα κατὰ γνωστὰ ἀριθμητικὰ θεωρήματα τὰς ἐξῆς

$\Lambda \Delta + \Delta \beta : \Lambda \Delta = \Lambda \epsilon + \epsilon \Gamma : \Lambda \epsilon$ καὶ $\Lambda \Delta + \Delta \beta : \Delta \beta = \Lambda \epsilon + \epsilon \Gamma : \epsilon \Gamma$
ἢ, ὅπερ ταῦτό,

$$\Lambda \beta : \Lambda \Delta = \Lambda \Gamma : \Lambda \epsilon \text{ καὶ } \Lambda \beta : \Delta \beta = \Lambda \Gamma : \epsilon \Gamma.$$

Πόρισμα 2. Τὰ μέρη ΑΕ, ΓΘ, ΕΖ, ΘΗ, ΖΒ καὶ ΗΔ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ΟΒ καὶ ΟΔ, τὰ χωριζόμενα ὑπὸ τῶν παράλληλων ΑΓ, ΕΘ, ΖΗ καὶ ΒΔ εἶναι ἀνάλογα, ἥτοι θέλομεν ἔχει

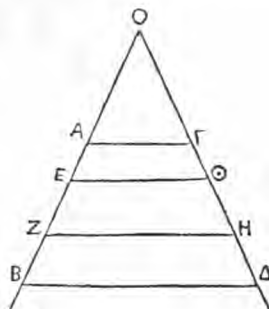
$$\Lambda \epsilon : \Gamma \Theta = \epsilon \Gamma : \Theta \eta = \epsilon \eta : \beta \Delta \quad (\alpha)$$

Διότι εἰς τὸ τρίγωνον ΟΕΘ, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΕΘ, θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα

$$\Lambda \epsilon : \Theta \Theta = \Lambda \epsilon : \Gamma \Theta. \quad (1)$$

Ἵσταύτως, εἰς τὸ τρίγωνον ΟΖΗ, ἐπειδὴ ἡ ΕΘ εἶναι παράλληλος τῇ ΖΗ, θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ προαποδείχθέν θεωρήμα

$$\Lambda \epsilon : \Theta \Theta = \epsilon \eta : \Theta \eta, \quad (2)$$



καὶ ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τὸν λόγον $OE : O\Theta$ κοινόν, θέλομεν ἔχει

$$AE : \Gamma\Theta = EZ : \Theta H. \quad (3)$$

Δι' ὁμοίου τρόπου θέλομεν ἀποδείξει ὅτι

$$EZ : \Theta H = ZB : H\Delta \quad (4)$$

καὶ ἐκ τῶν ἀναλογιῶν (3) καὶ (4) θέλομεν συμπεράνει ὅτι ἡ ἀνωτέρω σειρά τῶν ἴσων λόγων (α) εἶναι ἀληθής.

*Αν αἱ ὑπὸ τῶν παραλλήλων τεμνόμεναι εὐθεῖαι ἦσαν παράλληλοι, τὰ μέρη $AE, \Gamma\Theta, EZ, \Theta H, ZB$ καὶ $H\Delta$ ἤθελον εἶναι ἀνὰ δύο ἴσα (πρότ. 33, πόρ. 1, Α'), ἐπομένως ἡ ἀνωτέρω σειρά τῶν ἴσων λόγων (α) ἤθελον εἶναι αὐταπόδεικτος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΘΕΩΡΗΜΑ

*Ἀρτιστρέφως, ἐὰν αἱ πλευραὶ AB καὶ AG τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνῳνται ἀναλόγως ὑπὸ τῆς εὐθείας AE , τουτέστιν οὕτως, ὥστε τὰ ἔχῳμεν τὴν ἀναλογίαν $AD : AB = AE : EF$, λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα AE θέλει εἶναι παράλληλος τῇ βάσει $B\Gamma$ τοῦ τριγώνου.

Διότι, ἐὰν ἡ AE δὲν ᾖναι παράλληλος τῇ $B\Gamma$, ἔστω AO τοιαύτη. Τότε κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, ἐπειδὴ AO εἶναι παράλληλος τῇ $B\Gamma$, θέλομεν ἔχει

$$AD : AB = AO : OF. \quad (1)$$

*Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $AD : AB = AE : EF$.

*Ἀρα, ἔνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου $AD : AB$, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

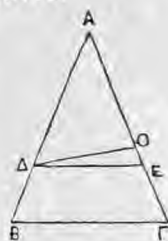
$$AO : OF = AE : EF,$$

ἥτις εἶναι ἀδύνατος, διότι ἐνῶ ὁ πρῶτος ἡγούμενος AO εἶναι μικρότερος τοῦ δευτέρου ἡγουμένου AE , ὁ πρῶτος ἐπόμενος OF εἶναι μεγαλύτερος τοῦ δευτέρου ἐπομένου EF . Λοιπὸν ἡ ἐκ τοῦ σημείου A ἀγομένη παράλληλος τῇ $B\Gamma$ δὲν δύναται νὰ διαφέρῃ τῆς AE . Λοιπὸν, ἐὰν αἱ πλευραὶ AB καὶ AG τοῦ τριγώνου κτλ.

Σχόλιον. *Αν ἀντὶ τῆς δοθείσης ἀναλογίας $AD : AB = AE : EF$ μᾶς ἐδίδετο ἡ ἐξῆς $AD : AB = AE : AG$, ἐκ ταύτης ἡθέλομεν πορισθῇ τὴν πρώτην, διότι γνωρίζομεν ὅτι $AD : AB = AD : AG = AE : AG$, καὶ ἡθέλομεν συμπεράνει καὶ πάλιν ὅτι ἡ εὐθεῖα AE εἶναι παράλληλος τῇ $B\Gamma$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΘΕΩΡΗΜΑ

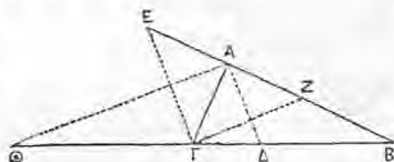
1^{ον}. Ἡ εὐθεῖα AD , ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν A τοῦ τριγώνου



του $AB\Gamma$, διαιρεί τὴν βάσιν αὐτοῦ $B\Gamma$ εἰς δύο τμήματα BA καὶ AG ἀνάλογα πρὸς τὰς προσκειμένας εἰς ταῦτα πλευρὰς AB καὶ AG , τουτέστιν οὕτως, ὥστε $BA : AG = AB : AG$.

2^{ον}. Ἡ εὐθεῖα $A\Theta$, ἡ διχοτομοῦσα τὴν ἑξωτερικὴν γωνίαν $ΓAE$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, συναπαρτιᾷ τὴν προεκβολὴν τῆς βάσεως $B\Gamma$ εἰς τι σημεῖον Θ τοιοῦτον, ὥστε τὰ τμήματα $B\Theta$ καὶ $\Gamma\Theta$ εἶναι ὡσαύτως ἀνάλογα πρὸς τὰς προσκειμένας εἰς ταῦτα πλευρὰς AB καὶ AG .

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ 1^{ου} ἐκ τοῦ σημείου Γ ἄγωμεν τὴν $ΓE$ παράλληλον τῇ διχοτομοῦσῃ AA , καὶ ἔχομεν εἰς τὸ τρίγωνον $B\Gamma E$, ἐπειδὴ ἡ AA εἶναι παράλληλος τῇ $ΓE$,



$$BA : AG = AB : AE \quad (1)$$

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον $ΓAE$ εἶναι ἰσοσκελές, διότι, ἔνεκα τῶν παραλλήλων AA καὶ $ΓE$, ἡ γωνία $AGE = ΓAA$ καὶ ἡ γωνία $AEΓ = BAA$. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $ΓAA = BAA$. Ἄρα καὶ $AGE = AEG$, ἐπομένως $AE = AG$, Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν (1) AG ἀντὶ τῆς AE , θέλομεν ἔχει

$$BA : AG = AB : AG$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο κατὰ πρῶτον νὰ ἀποδείξωμεν.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ 2^{ου} ἄγωμεν τὴν $ΓZ$ παράλληλον τῇ διχοτομοῦσῃ $A\Theta$, καὶ ἔχομεν εἰς τὸ τρίγωνον $BA\Theta$, ἐπειδὴ ἡ $ΓZ$ εἶναι παράλληλος τῇ $A\Theta$,

$$B\Theta : \Gamma\Theta = AB : AZ. \quad (2)$$

Ἀλλ' $AZ = AG$, διότι τὸ τρίγωνον AGZ , εἶναι ἰσοσκελές, ὥς ἔχον τὰς γωνίας αὐτοῦ AGZ καὶ AZG ἴσας· διότι ἔνεκα τῶν παραλλήλων $A\Theta$ καὶ $ΓZ$ ἡ μὲν AGZ εἶναι ἴση τῇ $ΓA\Theta$, ἡ δὲ AZG εἶναι ἴση τῇ ΘAE , καὶ αἱ γωνίαι $ΓA\Theta$ καὶ ΘAE ὑπετέθησαν ἴσαι, ἐπομένως καὶ αἱ ἴσαι ταύταις AGZ καὶ AZG θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν (2) AG ἀντὶ τῆς AZ , θέλομεν ἔχει

$$B\Theta : \Gamma\Theta = AB : AG$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο κατὰ δεῦτερον λόγον νὰ ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. Ἐάν αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου A ἀπὸ τῶν σημείων B καὶ Γ μεταβάλλωνται οὕτως, ὥστε ὁ λόγος αὐτῶν $\frac{AB}{AG}$ νὰ μένη στα-

θερὸς καὶ ἴσος δεδομένῳ τινὶ λόγῳ $\frac{\mu}{\nu}$, αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας ΒΑΓ καὶ ΓΑΕ θέλουσιν ἀναγκαίως διέρχεσθαι διὰ τῶν αὐτῶν πάντοτε σημείων Δ καὶ Θ τῆς βάσεως ΒΓ, διότι οἱ λόγοι $\frac{ΒΔ}{ΓΔ} \cdot \frac{ΒΘ}{ΓΘ}$ πρέπει νὰ ᾔ-
ναι ἴσοι τῷ λόγῳ $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$, ὅστις ὑποτίθεται σταθερὸς καὶ ἴσος τῷ $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἄρ' ἑτέρου, αἱ διχοτομοῦσαι ΑΔ καὶ ΑΘ δύο προσκειμένας γωνίας ΒΑΓ καὶ ΓΑΕ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΔΑΓ καὶ ΓΑΘ εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθήν. Λοιπὸν τὸ σημεῖον Α θέλει εἶναι πάντοτε ἡ κορυφή τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ΔΑΘ ἔχοντος σταθερὰν ὑποτείνουσαν ΔΘ. Λοιπὸν θέλει κεῖσθαι πάντοτε ἐπὶ τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης διάμετρον ΔΘ, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Α, ὧν αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων Β καὶ Γ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον τιτὰ σταθερὸν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$, εἶναι περιφέρεια κύκλου ὀριζομένη ὡς προελέχθη.

ΟΡΙΣΜΟΙ

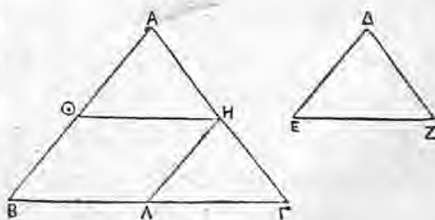
Δύο τρίγωνα λέγονται ὅμοια, ὅταν ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἐκάστην ἐκάστη καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους. Ὁμολογοὶ δὲ πλευραὶ λέγονται αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν.

Καὶ ἐν γένει δύο πολύγωνα λέγονται ὅμοια, ὅταν ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἐκάστην ἐκάστη καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους. Εἰς τὰ ὅμοια δὲ πολύγωνα ὁμολογοὶ πλευραὶ καλοῦνται αἱ εἰς ἴσας γωνίας προσκειμέναι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἐκάστην ἐκάστη, ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους, καὶ ἐπομένως εἶναι ὅμοια.

Ἐστώσαν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος τριγώνων, ἐν οἷς ἡ γωνία Α=Δ, ἡ γωνία Β=Ε καὶ ἡ γωνία Γ=Ζ. Λέγω ὅτι καὶ αἱ ὁμολογοὶ αὐτῶν πλευραὶ θέλουσιν εἶναι ἀνάλο-



γοι, τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν σειράν τῶν ἴσων λόγων

$$ΑΒ : ΔΕ = ΑΓ : ΔΖ = ΒΓ : ΕΖ.$$

Πρὸς ἀποδείξιν τούτου λαμβάνομεν $\Lambda\Theta = \Delta E$, $\Lambda H = \Delta Z$ καὶ μεν τὴν ΘH . Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον $\Lambda\Theta H$ θέλει εἶναι ἴσον τῷ $\Delta E Z$, διότι ταῦτα ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην ($\Lambda = \Delta$) περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων ἐκ κατασκευῆς. Λοιπὸν $\Theta H = E Z$ καὶ ἡ γωνία $\Lambda\Theta H$ ἴση τῇ E . Ἀλλὰ $E = B$. Ἀρα καὶ $\Lambda\Theta H = B$. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ἀντιχούσαι γωνίαι $\Lambda\Theta H$, $\Delta B \Gamma$ εἶναι ἴσαι, ἡ ΘH εἶναι παράλληλος τῇ $B \Gamma$ (πρότ. 28, A'). Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΘH εἶναι παράλληλος τῇ $B \Gamma$, μεν ἔχει κατὰ πρῶτον πόρισμα τῆς 16 προτάσεως

$$\Delta B : \Lambda\Theta = \Delta \Gamma : \Lambda H. \quad (1)$$

Ἀγομεν τελευταῖον τὴν $H \Lambda$ παράλληλον τῇ ΔB , καὶ ἔχομεν

$$\Delta \Gamma : \Lambda H = B \Gamma : B \Lambda \quad \eta \quad \Theta H, \quad (2)$$

διότι αἱ εὐθεῖαι $B \Lambda$ καὶ ΘH εἶναι ἴσαι, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παράλληλων περιεχόμεναι.

Ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι ἓνα λόγον $\Delta \Gamma : \Lambda H$ νόν, θέλομεν ἔχει τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$\Delta B : \Lambda\Theta = \Delta \Gamma : \Lambda H = B \Gamma : \Theta H$$

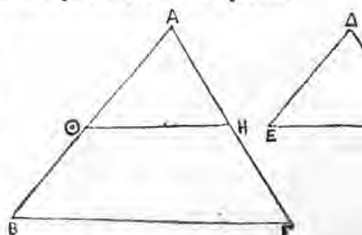
ἢ, ὅπερ ταῦτό, $\Delta B : \Delta E = \Delta \Gamma : \Delta Z = B \Gamma : E Z$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. Διὰ νὰ ᾖναι δύο τρίγωνα ὅμοια ἀρκεῖ νὰ ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, διότι τότε ἀναγκαίως καὶ ἡ τρίτη τοῦ ἑνὸς θέλει εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ τοῦ ἑτέρου, καὶ τὰ τρίγωνα λουσιν εἶναι ἰσογώνια (πρότ. 31, A').

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, ἔχοντες καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, καὶ ἐπομένως εἶναι ὅμοια.

Ἐστωσαν $\Delta B \Gamma$ καὶ $\Delta E Z$ δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, ἥτοι $\Delta B : \Delta E = \Delta \Gamma : \Delta Z = B \Gamma : E Z$. Λέγω ὅτι θέλουσιν ἔχει καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν ἀναλόγων πλευρῶν γωνίας



ἴσας, ἥτοι $A = \Delta$, $B = E$, $\Gamma = Z$, καὶ ἐπομένως θέλουσιν εἶναι ὅμοια.

Πρὸς ἀποδείξιν τούτου λαμβάνομεν $\Lambda\Theta = \Delta E$, $\Lambda\Pi = \Delta Z$ καὶ ἄγομεν τὴν ΘH , ἥτις, λέγω, θέλει εἶναι παράλληλος τῇ $B\Gamma$. Διότι ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$AB : \Delta E = \Lambda\Gamma : \Delta Z$$

ἢ, ὅπερ ταυτὸ, $AB : \Lambda\Theta = \Lambda\Gamma : \Lambda H$.

Ἄρα ἡ ΘH εἶναι παράλληλος τῇ $B\Gamma$ (πρότ. 17, πόρ. 1), ἐπομένως τὸ τρίγωνον $\Lambda\Theta H$ θέλει εἶναι ὅμοιον τῷ $\Delta B\Gamma$, καὶ θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ προαποδειχθέν θεώρημα τὴν ἀναλογίαν

$$AB : \Lambda\Theta = B\Gamma : \Theta H$$

Ἄλλ' ἐξ ὑποθέσεως $AB : \Delta E = B\Gamma : EZ$.

Ἄρα, ἐπειδὴ $\Lambda\Theta = \Delta E$, ἵνα ἡ δεδομένη ἀναλογία ᾖ ἀληθής, πρέπει καὶ $\Theta H = EZ$. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα $\Lambda\Theta H$, ΔEZ ἔχουσι τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἐκάστην ἐκάστη, ἐπομένως εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον $\Lambda\Theta H$ εἶναι ὅμοιον τῷ $\Delta B\Gamma$. Ἄρα καὶ τὸ ΔEZ θέλει εἶναι ὅμοιον τῷ $\Delta B\Gamma$. Λοιπὸν ἡ γωνία $A = \Delta$, ἡ $B = E$ καὶ ἡ $\Gamma = Z$.

Σχόλιον 1. Ἐκ τῶν ἀποδειχθεῖσων δύο προηγουμένων προτάσεων ἐξάγομεν ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν συνεπάγει τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, καὶ ἀντιστρόφως, ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν συνεπάγει τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν· ἐπομένως μία τῶν ἀνωτέρω δύο συνθηκῶν ἦτο ἐπαρκὴς πρὸς βεβαίωσιν τῆς ὁμοιότητος δύο τριγώνων. Ἐπερπε λοιπὸν νὰ ὀρίσωμεν ἀνωτέρω ὅτι ὅμοια τρίγωνα καλοῦνται ἢ τὰ ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, ἢ τὰ ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους. Ἀλλ' ἐπειδὴ τοῦτο μόνον εἰς τὰ τρίγωνα συμβαίνει· διότι ἂν ἐπρόκειτο π. χ. περὶ τετραπλευρῶν, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι κατὰ μονάδα μεγαλειότερος τοῦ τῶν τριγώνων, ἠδυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν τὰς γωνίας αὐτῶν χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν ποσῶς τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν των, καὶ ἀντιστρόφως, νὰ μεταβάλωμεν τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν αὐτῶν χωρὶς ποσῶς νὰ ἀλλάξωμεν τὰς γωνίας αὐτῶν, ἐπομένως, ἵνα δύο τετράπλευρα ᾖσιν ὅμοια, πρέπει νὰ ἔχωσι καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἐκάστην ἐκάστη καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους. Ὁ πλεονάζων λοιπὸν ὀρισμὸς τῶν ὁμοίων τριγώνων ἐδόθη, ἵνα συμπαραλαμβάνηται εἰς τὸν γενικὸν καὶ πλήρη ὀρισμὸν τῶν ὁμοίων πολυγώνων, εἰς τὴν τάξιν τῶν ὁμοίων καὶ τὰ τρίγωνα ἀνήκουσιν.

Εὐκόλως δὲ δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ἀνωτέρω περὶ τετραπλεύρου εἵπομεν. Ἐστω, π. χ. τὸ τετράπλευρον $ABΓΔ$. Ἄν ἄξωμεν τὴν EZ παράλληλον τῇ $BΓ$, τὰ δύο τετράπλευρα $ABΓΔ$ καὶ $AEZΔ$ θέλουσιν εἶναι προφανῶς ἰσογώνια, ἀλλὰ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευράς ἀναλόγους. Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ $A'D'$ τὴν πλευρὰν AD τοῦ τετραπλεύρου $AEZΔ$, τὴν ὁμολογον τῇ AD τοῦ τετραπλεύρου $ABΓΔ$, ἔπρεπε νὰ ἔχωμεν τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$AD : A'D' = AB : AE = BΓ : EZ = ΓΔ : ΔZ.$$

Ἀλλὰ $AD = A'D'$. Ἄρα καὶ $AB = AE$, $BΓ = EZ$, κτλ., ἰσότητες προφανῶς ἄστοιχοι.

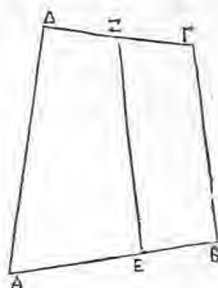
Ἄφ' ἐτέρου δυνάμεθα, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὰς πλευράς AB , $BΓ$, $ΓΔ$ καὶ AD τοῦ τετραπλεύρου $ABΓΔ$, νὰ μεταβάλωμεν τὰς γωνίας αὐτοῦ A , B , $Γ$ καὶ $Δ$ πλησιάζοντες ἢ ἀπομακρύνοντες τὰς κορυφὰς δύο ἀντιθέτων γωνιῶν B καὶ $Δ$ ἢ A καὶ $Γ$. ἐπομένως, ἂν αἱ πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου $ABΓΔ$ ἦσαν ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευράς ἐτέρου τινὸς ὁμοίου τῷ $ABΓΔ$, μεταβαλλομένων τῶν γωνιῶν, ἤθελον εἶναι καὶ πάλιν ἀνάλογοι μὲ τὰς πλευράς τοῦ αὐτοῦ τετραπλεύρου, πρὸς ὃ δὲν ἠδύνατο προφανῶς νὰ ᾖναι ὅμοιον. Λοιπὸν διὰ τὰ πολύγωνα εἶναι ἀναγκαῖα καὶ αἱ δύο συνθῆκαι, ὅπως ἀποφανθῶμεν ὅτι ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Σχόλιον 2. Αἱ δύο προηγούμεναι προτάσεις, αἵτινες κυρίως ἀπὸ τῶν τελοῦσι μίαν, καὶ ἡ περὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτείνουσας εἶναι αἱ σημαντικώτεραι καὶ γονιμώτεραι προτάσεις τῆς Γεωμετρίας, διότι μόναι σχεδὸν ἄρκοῦσιν εἰς ὅλας τὰς ἐφαρμογὰς καὶ εἰς τὴν λύσιν ὅλων σχεδὸν τῶν προβλημάτων, ὃ δὲ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Διότι πᾶν πολύγωνον ἀποσυντίθεται διὰ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ εἰς τρίγωνα, καὶ πᾶν τρίγωνον δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ὀρθογώνια διὰ τινος καθέτου, ἀγομένης ἐκ τινος αὐτοῦ κορυφῆς ἐπὶ τῆς βάσεως. Αἱ γενικαὶ λοιπὸν τῶν τριγώνων ιδιότητες περιλαμβάνουσιν ἀρρήτως πῶς τὰς τῶν λοιπῶν εὐθυγράμμων σχημάτων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο τρίγωνα, ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην καὶ δύο ὁποιασδήποτε πλευράς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια

1^η. Ἐὰν αἱ ἴσαι γωνίαι ᾖναι ὀρθαὶ ἢ ἀμβλείαι·



2^{ον}. Ἐὰν αἱ ἀναλόγαι πλευραὶ περιέχωσι τὰς ἴσας γωνίας·

3^{ον}. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν, τῶν μὴ περιεχομένων ὑπὸ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν, ᾗται μικρότερον ἢ μεγαλύτερον δύο ἑρθῶν.

1^{ον}. Ἐστωσαν $\Lambda\text{ΒΓ}$ καὶ $\Delta\text{ΕΖ}$ δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὰς ὀρθὰς ἢ ἀμβλείας γωνίας Λ καὶ Δ ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς $\Lambda\text{Β}$, ΒΓ , $\Delta\text{Ε}$, ΕΖ ἀναλόγους, ἥτοι $\Lambda\text{Β} : \Delta\text{Ε} = \text{ΒΓ} : \text{ΕΖ}$. Λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα $\Lambda\text{ΒΓ}$ καὶ $\Delta\text{ΕΖ}$ θέλουσιν εἶναι ὅμοια.

Πρὸς ἀποδείξιν τούτου λαμβάνομεν $\Lambda\Theta = \Delta\text{Ε}$, $\Delta\text{Η} = \Delta\text{Ζ}$ καὶ ἄγομεν τὴν $\Theta\text{Η}$. Λέγω ὅτι ἡ $\Theta\text{Η}$, ἣτις εἶναι ἴση τῇ ΕΖ (πρότ. 6, Α'), θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ .

Διότι, ἐὰν ἡ $\Theta\text{Η}$ δὲν εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ , ἔστω $\Theta\text{Ο}$ ἡ ταύτη παράλληλος. Τότε τὰ δύο τρίγωνα $\Lambda\text{ΒΓ}$ καὶ $\Lambda\Theta\text{Ο}$ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὡς ἰσογώνια, καὶ θέλομεν ἔχει

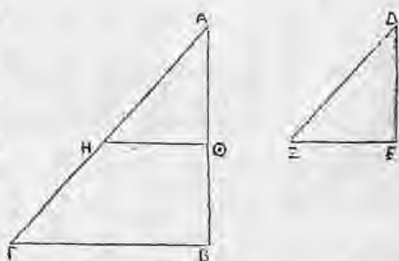
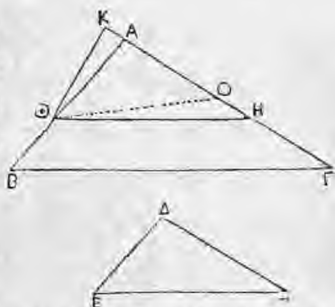
$$\Lambda\text{Β} : \Lambda\Theta = \text{ΒΓ} : \Theta\text{Ο}. \quad (1).$$

Ἄλλ' ἐξ ὑποθέσεως $\Lambda\text{Β} : \Delta\text{Ε} = \text{ΒΓ} : \text{ΕΖ}$,
 ἢ, ὅπερ ταυτὸ, $\Lambda\text{Β} : \Lambda\Theta = \text{ΒΓ} : \Theta\text{Η}. \quad (2).$

Ἄρα, ἐπεὶ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τοὺς τρεῖς πρώτους αὐτῶν ὅρους ἴσους, $\Theta\text{Ο} = \Theta\text{Η}$, ὅπερ ἄτοπον. Διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Θ καταβιβάσωμεν τὴν $\Theta\text{Κ}$ κάθετον ἐπὶ τῆς $\Lambda\Gamma$, ἐπεὶ ἡ γωνία Λ ὑπετέθη ὀρθή ἢ ἀμβλεία, ἡ κάθετος $\Theta\text{Κ}$ θέλει κείσθαι πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς $\Theta\Lambda$, καὶ ἡθέλομεν τότε ἔχει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου $\Theta\text{Κ}$ δύο ἴσας πλαγίας $\Theta\text{Ο}$ καὶ $\Theta\text{Η}$ (πρότ. 18, Α'), ὅπερ ἀδύνατον. Λοιπὸν ἡ $\Theta\text{Η}$ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ , καὶ τὸ τρίγωνον $\Lambda\Theta\text{Η}$, ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ $\Delta\text{ΕΖ}$, εἶναι ὅμοιον τῷ $\Lambda\text{ΒΓ}$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

2^{ον}. Ἐστω ἡ γωνία $\Lambda = \Delta$ καὶ αἱ περιλαμβανούσαι τὰς ἴσας ταύτας γωνίας πλευραὶ ἀνάλογοι, ἥτοι $\Lambda\text{Β} : \Delta\text{Ε} = \Lambda\Gamma : \Delta\text{Ζ}$. Λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα $\Lambda\text{ΒΓ}$, $\Delta\text{ΕΖ}$ εἶναι ὅμοια.

Διότι, ἐὰν λάβωμεν $\Lambda\Theta = \Delta\text{Ε}$ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Θ ἀξώμεν τὴν $\Theta\text{Η}$ παράλληλον τῇ ΒΓ , τὸ προ-



κύπτον τρίγωνον $\Lambda\Theta\text{Η}$ θέλει εἶναι ὁμοιον τῷ $\Lambda\text{Β}\Gamma$ καὶ θέλομεν ἔχει

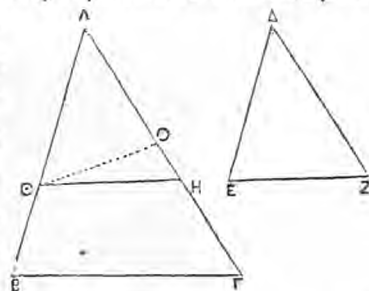
$$\Lambda\text{Β} : \Lambda\Theta = \Lambda\Gamma : \Lambda\text{Η}. \quad (1)$$

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $\Lambda\text{Β} : \Delta\text{Ε} = \Lambda\Gamma : \Delta\text{Ζ}$

ἢ, ὅπερ ταῦτό, $\Lambda\text{Β} : \Lambda\Theta = \Lambda\Gamma : \Delta\text{Ζ}. \quad (2)$

Ἄρα, ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τοὺς τρεῖς πρώτους αὐτῶν ὅρους ἴσους, $\Lambda\text{Η} = \Delta\text{Ζ}$. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα $\Lambda\Theta\text{Η}$ καὶ $\Delta\text{Ε}\text{Ζ}$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον $\Lambda\Theta\text{Η}$ εἶναι ὁμοιον τῷ $\Lambda\text{Β}\Gamma$. Λοιπὸν καὶ τὸ ἴσον αὐτῷ $\Delta\text{Ε}\text{Ζ}$ θέλει εἶναι ὁμοιον τῷ $\Lambda\text{Β}\Gamma$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

3^{ον}. Ἐστῶσαν $\Lambda\text{Β}\Gamma$ καὶ $\Delta\text{Ε}\text{Ζ}$ δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς ὀξείας γωνίας Λ καὶ Δ ἴσας, τὰς πλευράς $\Lambda\text{Β}$, $\text{Β}\Gamma$ $\Delta\text{Ε}$, $\text{Ε}\text{Ζ}$ ἀναλόγους, ἥτοι $\Lambda\text{Β} : \Delta\text{Ε} = \text{Β}\Gamma : \text{Ε}\text{Ζ}$, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν Γ καὶ Ζ , τῶν μὴ περιεχομένων ὑπὸ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν, μικρότερον ἢ μεγαλύτερον δύο ὀρθῶν. Δέγω ὅτι τὰ περὶ τῶν ὁ λόγος τρίγωνα $\Lambda\text{Β}\Gamma$ καὶ $\Delta\text{Ε}\text{Ζ}$ θέλουσιν εἶναι ὅμοια.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν $\Lambda\Theta = \Delta\text{Ε}$, $\Lambda\text{Η} = \Delta\text{Ζ}$ καὶ ἄγομεν τὴν $\Theta\text{Η}$, ἥτις, λέγω, ὅτι θέλει εἶναι παράλληλος τῇ $\text{Β}\Gamma$.

Διότι, ἐὰν ἡ $\Theta\text{Η}$ δὲν ᾖναι παράλληλος τῇ $\text{Β}\Gamma$, ἔστω $\Theta\text{Ο}$ ἡ ταύτη παράλληλος. Τότε τὰ δύο τρίγωνα $\Lambda\text{Β}\Gamma$ καὶ $\Lambda\Theta\text{Ο}$ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\Lambda\text{Β} : \Lambda\Theta = \text{Β}\Gamma : \Theta\text{Ο}. \quad (1)$$

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $\Lambda\text{Β} : \Delta\text{Ε} = \text{Β}\Gamma : \text{Ε}\text{Ζ}$,

ἢ, ὅπερ ταῦτό, $\Lambda\text{Β} : \Lambda\Theta = \text{Β}\Gamma : \Theta\text{Η}. \quad (2)$

Ἄρα, ἐνεκα τῆς ἰσότητος τῶν τριῶν πρώτων ὄρων τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), $\Theta\text{Ο} = \Theta\text{Η}$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν $\Theta\text{Η}\text{Ο}$ θέλει εἶναι ἰσοσκελές, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν $\Theta\text{Η}\text{Ο}$ ἴσην τῇ $\Theta\text{Ο}\text{Η}$. Ἀλλ', ἐνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων $\Lambda\Theta\text{Ο}$ καὶ $\Lambda\text{Β}\Gamma$, ἡ γωνία $\Lambda\text{Ο}\Theta$ εἶναι ἴση τῇ $\Lambda\Gamma\text{Β}$. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν $\Lambda\Gamma\text{Β}$ καὶ $\Theta\text{Ο}\text{Η}$ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων αὐταῖς προσκειμένων γωνιῶν $\Lambda\text{Ο}\Theta$ καὶ $\Theta\text{Ο}\text{Η}$ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Ἀλλ' ἡ γωνία $\Theta\text{Ο}\text{Η}$, οὕσα ἴση τῇ $\Theta\text{Η}\text{Ο}$, εἶναι ἴση καὶ τῇ $\Delta\text{Ζ}\text{Ε}$. Ἄρα $\Lambda\Gamma\text{Β} + \Delta\text{Ζ}\text{Ε} = 2\text{ῶν}$, τοῦθ' ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν ἡ $\Theta\text{Η}$ εἶναι παράλληλος τῇ $\text{Β}\Gamma$, καὶ ἐπομένως

τὸ τρίγωνον $\Lambda\Theta\text{Η}$, ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ $\Delta\text{ΖΕ}$, εἶναι ὁμοιον τῷ $\Lambda\text{ΒΓ}$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἢ καθέτους εἶναι ὅμοια.

Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ $\Lambda, \text{B}, \Gamma$ τὰς γωνίας τοῦ ἑνὸς καὶ διὰ $\Lambda', \text{B}', \Gamma'$ τὰς ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἢ καθέτων πλευρῶν σχηματιζομένας γωνίας τοῦ ἑτέρου, ἐπειδὴ δύο γωνίαι ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἢ καθέτους εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί, τέσσαρά τινα δυνατὸν νὰ ὑποθεθῶσι.

1^η. Ἡ ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ πρώτου εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν ἀντιστοίχων γωνιῶν τοῦ δευτέρου, ἥτοι

$$\Lambda + \Lambda' = 2^{\circ}, \text{B} + \text{B}' = 2^{\circ}, \Gamma + \Gamma' = 2^{\circ}.$$

2^η. Ἡ ὅτι αἱ δύο γωνίαι τοῦ πρώτου εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν δύο ἀντιστοίχων γωνιῶν τοῦ δευτέρου καὶ ἡ τρίτη τοῦ πρώτου ἴση τῇ τρίτῃ τοῦ δευτέρου, ἥτοι

$$\Lambda + \Lambda' = 2^{\circ}, \text{B} + \text{B}' = 2^{\circ}, \Gamma = \Gamma'.$$

3^η. Ἡ ὅτι ἡ μία γωνία τοῦ πρώτου εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀντιστοίχου γωνίας τοῦ δευτέρου καὶ αἱ δύο ἄλλαι ἴσαι ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, ἥτοι

$$\Lambda + \Lambda' = 2^{\circ}, \text{B} = \text{B}', \Gamma = \Gamma'.$$

4^η. Ἡ τελευταῖον ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ πρώτου εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἀντιστοίχους τρεῖς γωνίας τοῦ δευτέρου, ἥτοι

$$\Lambda = \Lambda', \text{B} = \text{B}', \Gamma = \Gamma'.$$

Ἀλλ' ἡ πρώτη τῶν ὑποθέσεων εἶναι ἄτοπος, διότι κατ' αὐτὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξ γωνιῶν $\Lambda, \Lambda', \text{B}, \text{B}', \Gamma, \Gamma'$ τῶν δύο τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ ἐξ ὀρθῶν, ὅπερ ἀδύνατον.

Ἡ δευτέρα εἶναι ὡσαύτως ἄτοπος, διότι κατ' αὐτὴν τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων γωνιῶν $\Lambda, \Lambda', \text{B}, \text{B}'$ εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθῶν, καὶ ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξ θέλει εἶναι μεγαλύτερον τεσσάρων ὀρθῶν, ὅπερ πάλιν ἀδύνατον.

Ἡ τρίτη ὑπόθεσις εἶναι ἀσυμβίβαστος, διότι, ὅταν δύο γωνίαι τοῦ ἑνὸς ᾖναι ἴσαι μὲ τὰς δύο τοῦ ἑτέρου, ἀναγκαίως καὶ ἡ τρίτη τοῦ πρώτου θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην τοῦ δευτέρου.

Μᾶς μένει λοιπὸν ἡ τετάρτη ὑπόθεσις ὡς δυνατὴ. Λοιπὸν τὰ περὶ

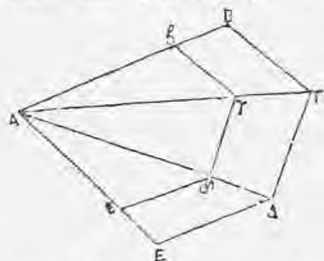
ὧν ὁ λόγος τριγώνων, ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἐκάστην ἐκάστη, εἶναι ὅμοια.

Παρατήρησις. Ἐάν κατασκευάσωμεν δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἢ καθετοὺς, θέλομεν εὐκόλως παρατηρήσει ὅτι ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ παράλληλοι ἢ αἱ κάθετοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δεδομένου πολυγώνου τιπὸς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν πάντοτε δεύτερον πολύγωνον οὕτως, ὥστε τὰ δύο πολύγωνα νὰ σύγκηνται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Ἐστω πολύγωνόν τι $ΑΒΓΔΕ$. Ἄν ἀπὸ τίνος αὐτοῦ κορυφῆς $Α$ ἄξωμεν τὰς διαγωνίους $ΑΓ$ καὶ $ΑΔ$, καὶ ἐξ ἑνὸς σημείου $β$, κατ' ἀρέσκειαν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $ΑΒ$ ληφθέντος, ἄξωμεν τὴν $βγ$ παράλληλον τῇ $ΒΓ$, ἔπειτα τὴν $γδ$ παράλληλον τῇ $ΓΔ$, καὶ τελευταίαν τὴν $δε$ παράλληλον τῇ $ΔΕ$. Τὰ τρίγωνα $Αβγ$, $Αγδ$, $Αδε$ θέλουσιν εἶναι ἀμοιβαίως ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα $ΑΒΓ$, $ΑΓΔ$, $ΑΔΕ$, καὶ τὰ δύο πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ$, $Αβγδε$, ὧν ἡ πρὸς ἄλληλα θέσις ἡδύνατο νὰ ᾖ ὅποια θέλομεν, θέλουσι σύγκεισθαι ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων ἑκαστον ἐκάστω καὶ ὁμοίως κειμένων.

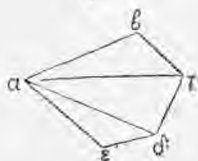
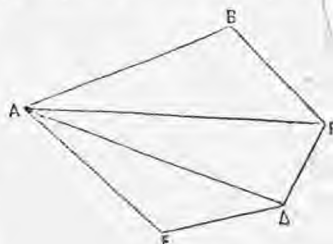


ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ$ καὶ $αβγδε$, συγκείμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων, ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἐκάστην ἐκάστη καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους, καὶ ἐπομένως εἶναι ὅμοια.

Διότι ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων $ΑΒΓ$, $αβγ$ ἔπεται ὅτι ἡ γωνία $ΑΒΓ = αβγ$ καὶ ἡ γωνία $ΒΓΑ = βγα$. Ὡσαύτως, ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων $ΑΓΔ$, $αγδ$ ἔπεται ὅτι ἡ γωνία $ΑΓΔ = αγδ$. Λοιπὸν $ΒΓΑ + ΑΓΔ = βγα + αγδ$, ἢ $ΒΓΔ = βγδ$.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἡθέλομεν ἀποδείξει ὅτι ἡ γωνία $ΓΔΕ = γδε$ κτλ. Λοιπὸν τὰ δύο πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ$,



αβγδε ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἐκάστην ἐκάστη. Προσέτι ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους· διότι, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, κτλ. εἶναι ἀμοιβαίως ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα αβγ καὶ αγδ, κτλ. ἔχομεν τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

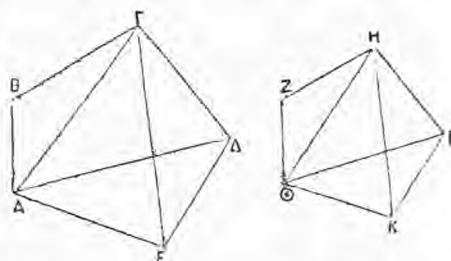
$AB : \alpha\beta = BG : \beta\gamma = AG : \alpha\gamma = \Gamma\Delta : \gamma\delta = \Delta\Lambda : \alpha\delta = \Delta E : \delta\varepsilon = AE : \alpha\varepsilon$
 ἔξ ἧς $AB : \alpha\beta = BG : \beta\gamma = \Gamma\Delta : \gamma\delta = \Delta E : \delta\varepsilon = AE : \alpha\varepsilon$.

Λοιπὸν δύο πολύγωνα, συγκείμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἀντιστρόφως, δύο ὅμοια πολύγωνα ἀποσυντίθενται εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα ὅμοια ἕκαστον ἐκάστῳ καὶ ὁμοίως κείμενα.

Ἐστῶσαν ΑΒΓΔΕ καὶ ΘΖΗΚ τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος ὅμοια πολύγωνα. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἄγομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΑΔ, καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Θ, ὁμολόγου τῇ Α, τὰς διαγωνίους ΘΗ καὶ ΘΙ.



Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια, αἱ ὁμολόγοι γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΘΖΗ εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ περιέχουσαι αὐτὰς πλευραὶ ἀνάλογοι, τουτέστιν ἔχομεν

$$AB : \Theta Z = BG : ZH.$$

Ἐντεῦθεν ἔπεται, ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΘΖΗ εἶναι ὅμοια, ὥς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων. Λοιπὸν καὶ ἡ γωνία ΒΓΔ = ΖΗΘ. Ἀλλὰ, ἔνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων, ἡ γωνία ΒΓΔ = ΖΗΙ. Ἀρα καὶ ΒΓΔ — ΒΓΑ = ΖΗΙ — ΖΗΘ, ἥτοι ΑΓΔ = ΘΗΙ. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΘΖΗ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$AG : \Theta H = BG : ZH.$$

Ἀλλὰ

$$BG : ZH = \Gamma\Delta : \text{HI}.$$

Ἀρα

$$AG : \Theta H = \Gamma\Delta : \text{HI}.$$

Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΘΗΙ εἶναι ὅμοια, ὥς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων.

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΓΔ καὶ ΘΗΙ ἠθέλομεν ἀεὶ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΔΕ καὶ ΘΙΚ, ὥς ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΘΖΗ ἀπεδείξαμεν τὴν τῶν τριγώνων ΑΓΔ καὶ ΘΗΙ.

καὶ οὕτω καθεξῆς ὅσαιδήποτε καὶ ἂν ᾖναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου. Λοιπὸν δύο ὅμοια πολύγωνα ἀποσυντίθενται εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα, ὅμοια ἕκαστον ἑκάστῳ καὶ ὁμοίως κείμενα.

Παρατήρησις. Δύο ὅμοια πολύγωνα δύνανται ν' ἀποσυντεθῶσι κατὰ πολλοὺς τρόπους εἰς τρίγωνα, ἀγομένων τῶν διαγωνίων ἐκ δύο ὑποινυθέντες ὁμόλογον κορυφῶν. Ἐντεῦθεν ἔπεται, ὅτι εἰς δύο ὅμοια πολύγωνα δύο ὁμόλογοι διαγώνιοι ΓΕ καὶ ΗΚ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς δύο ὁμόλογοι πλευραὶ· διότι αἱ διαγώνιοι ΓΕ καὶ ΗΚ θέλουσιν εἶναι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΔΕ καὶ ΗΗΚ, ἅτινα ἀποτελοῦσι μέρος τῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αἱ ἐκ τῆς κορυφῆς τριγώνου τινὸς ΑΒΓ ἀγόμεναι κατ'ἀρῆσκειαν εὐθεῖαι ΑΘ καὶ ΑΖ,... διαιροῦσι τὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ ΔΕ εἰς μέρη ἀνάλογα· τουτέστιν οὕτως, ὥστε

$$ΑΙ : ΒΘ = ΙΚ : ΘΖ = ΚΛ : ΖΗ = \dots$$

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΔΙ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΘ, τὰ τρίγωνα ΑΔΙ καὶ ΑΒΘ εἶναι ἰσογώνια, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$ΑΙ : ΒΘ = ΑΙ : ΑΘ. \quad (1)$$

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ἡ ΙΚ εἶναι παράλληλος τῇ ΖΘ, τὰ δύο τρίγωνα ΔΙΚ καὶ ΑΟΖ εἶναι ὅμοια, καὶ θέλομεν ἔχει

$$ΑΙ : ΑΘ = ΙΚ : ΟΖ. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν ἀναλογιών (1) καὶ (2), ἔνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου ΑΙ : ΑΘ, πορίζομεθα τὴν ἐξῆς

$$ΑΙ : ΒΘ = ΙΚ : ΟΖ.$$

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι $ΙΚ : ΟΖ = ΚΛ : ΖΗ$, κτλ. Λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΔΕ διηρέθη εἰς τὰ σημεῖα Ι, Κ, Λ, κτλ. ὡς ἡ βᾶσις ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Θ, Ζ, Η, κτλ.

Πόρισμα. Λοιπὸν, ἂν ἡ βᾶσις ΒΓ ᾖ το διηρημένη εἰς ἴσα μέρη εἰς τὰ σημεῖα Θ, Ζ, Η, κτλ. ἡ παράλληλος αὐτῇ ΔΕ ἤθελε διαιρεθῇ ὡσαύτως εἰς ἴσα μέρη εἰς τὰ σημεῖα Ι, Κ, Λ, κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27. ΘΕΩΡΗΜΑ

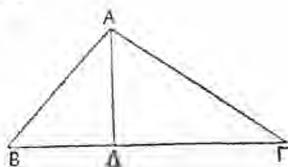
Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ καταβιβασθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ.

1^η. Τὰ δύο μερικὰ τρίγωνα $ABΔ$ καὶ $ΑΔΓ$ θέλωσιν εἶναι ὅμοια πρὸς ἀλλήλα καὶ πρὸς τὸ ὅλον τρίγωνον $ABΓ$

2^η. Ἐκάστη πλευρὰ AB ἢ $ΑΓ$ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτείνουσας $BΓ$ καὶ τοῦ προσκειμένου τῇ πλευρᾷ τμήματος $BΔ$ ἢ $ΔΓ$

5^η. Ἡ κάθετος $ΑΔ$ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων $BΔ$ καὶ $ΔΓ$ τῆς ὑποτείνουσας $BΓ$.

1^η. Διότι τὰ δύο τρίγωνα $BΑΔ$ καὶ $BΑΓ$ ἔχουσι τὴν γωνίαν B κοινὴν καὶ τὰς γωνίας $ΑΒΔ$ καὶ $BΑΓ$ ἴσας, ὡς ὀρθάς. Λοιπὸν καὶ ἡ τρίτη γωνία $BΑΔ$ τοῦ πρώτου εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ γωνίᾳ $BΓΑ$ τοῦ δευτέρου.



Ἄρα τὰ τρίγωνα $BΑΔ$ καὶ $BΑΓ$ εἶναι ὅμοια, ὡς ἰσογώνια. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ τρίγωνον $ΑΔΓ$ εἶναι ὅμοιον τῷ $BΑΓ$. Λοιπὸν τὰ τρία τρίγωνα $ABΓ$, $ΑΒΔ$ καὶ $ΑΓΔ$ εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια πρὸς ἀλλήλα.

2^η. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον $BΑΔ$ εἶναι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ $BΑΓ$, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι· τουτέστι $BΔ$ (πλευρὰ τοῦ πρώτου τριγώνου ἀπέναντι τῆς γωνίας $BΑΔ$) εἶναι πρὸς AB (πλευρὰν τοῦ δευτέρου τριγώνου ἀπέναντι τῆς γωνίας $BΓΑ=BΑΔ$), ὡς AB (ὑποτείνουσα τοῦ πρώτου τριγώνου) πρὸς $BΓ$ (ὑποτείνουσαν τοῦ δευτέρου), ἥτοι

$$BΔ : AB = AB : BΓ. \quad (1)$$

Ἐπ' αὐτῷ, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $ΑΔΓ$ καὶ $BΑΓ$ εἶναι ὅμοια, θέλωμεν ἔχει

$$ΔΓ : ΑΓ = ΑΓ : BΓ. \quad (2)$$

Λοιπὸν ἐκάστη τῶν πλευρῶν AB καὶ $ΑΓ$ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτείνουσας καὶ τοῦ προσκειμένου αὐτῇ τμήματος.

3^η. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $ΑΒΔ$ καὶ $ΑΔΓ$ εἶναι ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι, τουτέστι

$$BΔ : ΑΔ = ΑΔ : ΔΓ. \quad (3)$$

Λοιπὸν ἡ κάθετος $ΑΔ$ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων $BΔ$ καὶ $ΔΓ$ τῆς ὑποτείνουσας $BΓ$.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν μέσων εἶναι ἶσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων, ἐκ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) πορίζομεθα τὰς ἰσότητας

$$\overline{AB} = BΔ \times BΓ \text{ καὶ } \overline{ΑΓ} = ΔΓ \times BΓ, \quad (4)$$

ὡς προσθέντες κατὰ μέλη θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητά

$$\overline{AB} + \overline{AG} = \overline{BA} \times \overline{BG} + \overline{AG} \times \overline{BG} = \overline{BG} \times (\overline{BA} + \overline{AG}) = \overline{BG}^2,$$

τουτέστι τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Οὕτως εὐρέθη ἀπροσδοκῆτως πως καὶ δι' ἄλλως διαφορετικοῦ τρόπου ἡ περὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτείνουσας ἀποδειχθεῖσα προηγουμένως πρότασις, καὶ δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν ὅτι ἡ πρότασις αὕτη εἶναι κυρίως συνέπεια, προκύπτουσα ἐκ τῆς ἀναλογίας τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν ὁμοίων τριγώνων.

Πόρισμα 1. Ἐν συγκρίνωμεν ἑκατέραν τῶν ἀνωτέρω δύο ἰσοτήτων (4) μὲ τὴν ταυτότητα $\overline{BG} = \overline{BG}^2$ καὶ πρὸς ἀλλήλας, πορίζομεθα τὰς ἑξῆς τρεῖς ἀναλογίας

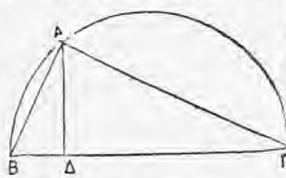
$$\overline{BG} : \overline{AB} = \overline{BG} : \overline{BA} \times \overline{BG}, \quad \text{ἢ} \quad \overline{BG} : \overline{AB} = \overline{BG} : \overline{BA},$$

$$\overline{BG} : \overline{AG} = \overline{BG} : \overline{GA} \times \overline{BG}, \quad \text{ἢ} \quad \overline{BG} : \overline{AG} = \overline{BG} : \overline{GA},$$

$$\overline{AB} : \overline{AG} = \overline{BA} \times \overline{BG} : \overline{GA} \times \overline{BG}, \quad \text{ἢ} \quad \overline{AB} : \overline{AG} = \overline{BA} : \overline{GA},$$

δι' ὧν ἀποδεικνύονται ἐκ νέου τὰ ἐν τῷ τετάρτῳ πορίσματι τῆς 11 προτάσεως ἀποδειχθέντα.

Πόρισμα 2. Ἐὰν ἐκ τινος σημείου Α τῆς περιφερείας ἀζώμεν εἰς τὰ ἄκρα Β καὶ Γ διαμέτρου τινὸς ΒΓ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ τὴν κάθετον ΑΔ, ἐπειδὴ τὸ προκύπτον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Α, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα 1^{ον} ἡ κάθετος ΑΔ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΒΔ καὶ ΔΓ τῆς διαμέτρου, ἐν ἄλλαις λέξεσι, τὸ τετράγωνον ΑΔ θέλει εἶναι ἴσον τῷ ὀρθογώνῳ ΒΔ × ΔΓ. 2^{ον} ἑκατέρα τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΑΓ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ καὶ τοῦ προσκειμένου αὐτῇ τμήματος ΒΔ καὶ ΔΓ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο τρίγωνα, ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας ἢ παραπληρωματικάς, εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς τὰ ὀρθογώνια τῶν πλευρῶν, τῶν περιεχόντων τὰς ἴσας ἢ τὰς παραπληρωματικάς γωνίας.

1^η. Ἐστώσαν $\triangle AB\Gamma$ καὶ $\triangle A\Delta E$ δύο τρίγωνα ἔχοντα τὴν γωνίαν A κοινὴν, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\text{τρίγ. } \triangle AB\Gamma : \text{τρίγ. } \triangle A\Delta E = AB \times \Delta\Gamma : \Delta\Delta \times \Delta E \quad (\alpha)$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν τὴν BE . Ἐπει-
δὴ τὰ δύο τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ καὶ $\triangle ABE$ ἔχουσι τὴν αὐτὴν
κορυφὴν B καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν $\Delta\Gamma$ καὶ ΔE ἐπ'
εὐθείας, εἶναι ἰσοϋψῆ, ἐπομένως εἶναι πρὸς ἄλλη-
λα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν (πρότ. 6, πόρ.), ἥτοι

$$\text{τρίγ. } \triangle AB\Gamma : \text{τρίγ. } \triangle ABE = \Delta\Gamma : \Delta E. \quad (1)$$

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωνα $\triangle ABE$ καὶ
 $\triangle A\Delta E$ ἔχουσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν E καὶ τὰς βάσεις $B\Delta$
αὐτῶν ἐπ' εὐθείας, θέλομεν ἔχει

$$\text{τρίγ. } \triangle ABE : \text{τρίγ. } \triangle A\Delta E = AB : \Delta\Delta. \quad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὁμοταγεῖς ὄρους τῶν δύο ἀναλογιῶν (1)
καὶ (2) καὶ ἐξαλείφοντες ἐκ τῶν δύο ὁρῶν τοῦ πρώτου λόγου τὸν
κοινὸν παράγοντα τρίγ. $\triangle ABE$, θέλομεν ἔχει

$$\text{τρίγ. } \triangle AB\Gamma : \text{τρίγ. } \triangle A\Delta E = AB \times \Delta\Gamma : \Delta\Delta \times \Delta E,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

2^η. Ἐστώσαν $\triangle AB\Gamma$ καὶ $\triangle A\Delta E$ δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὰς γωνίας
 $\angle B\Delta\Gamma$ καὶ $\angle E\Delta\Delta$ παραπληρωματικὰς, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει καὶ πάλιν

$$\text{τρίγ. } \triangle AB\Gamma : \text{τρίγ. } \triangle A\Delta E = AB \times \Delta\Gamma : \Delta\Delta \times \Delta E.$$

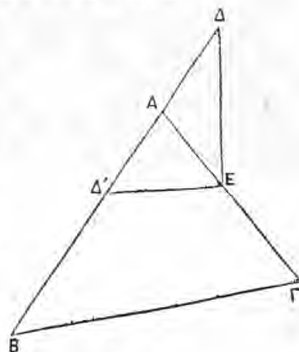
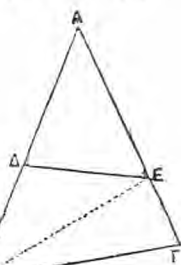
Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν
 $\Delta\Delta' = \Delta\Delta$ καὶ ἄγομεν τὴν $\Delta'E$. Τὰ δύο
τρίγωνα $\triangle A\Delta E$ καὶ $\triangle A\Delta'E$ θέλουσιν εἶναι
ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν κορυφὴν
καὶ βάσεις $\Delta\Delta$ καὶ $\Delta\Delta'$ ἴσας καὶ ἐπ' εὐ-
θείας κειμένους (πρότ. 4, Α'). Ἀλλὰ κατὰ
τὰ προαποδειχθέντα, ἐπειδὴ τὰ δύο τρί-
γωνα $\triangle AB\Gamma$ καὶ $\triangle A\Delta'E$ ἔχουσι μίαν γωνίαν
 A κοινὴν, θέλομεν ἔχει

$$\text{τρίγ. } \triangle AB\Gamma : \text{τρίγ. } \triangle A\Delta'E = AB \times \Delta\Gamma : \Delta\Delta' \times \Delta E$$

ἢ ὅπερ ταυτὸ, ἐπειδὴ $\triangle A\Delta'E \approx \triangle A\Delta E$ καὶ $\Delta\Delta' = \Delta\Delta$,

$$\text{τρίγ. } \triangle AB\Gamma : \text{τρίγ. } \triangle A\Delta E = AB \times \Delta\Gamma : \Delta\Delta \times \Delta E,$$

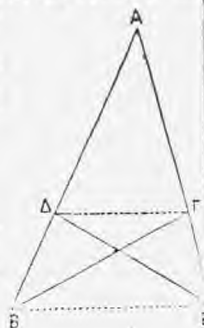
τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.



Πόρισμα. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $AB \times \Lambda\Gamma = \Lambda\Delta \times \Lambda E$, θέλομεν πο-
ρισθῇ ἐκ τῆς ἀναλογίας (α) ὅτι τὸ τρίγωνον $\Lambda B\Gamma$
εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ $\Lambda\Delta E$. Ἀλλ' ἐκ τῆς
ἰσότητος $AB \times \Lambda\Gamma = \Lambda\Delta \times \Lambda E$ προκύπτει καὶ ἡ
ἀναλογία

$$AB : \Lambda\Delta = \Lambda E : \Lambda\Gamma.$$

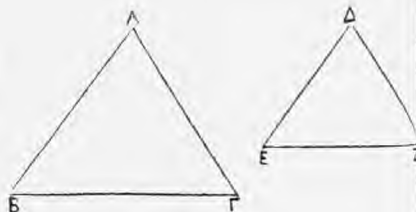
Λοιπὸν τὸ τρίγωνον $\Lambda B\Gamma$ θέλει εἶναι ἰσοδύνα-
μον τῷ $\Lambda\Delta E$, ἂν ἡ εὐθεῖα $\Lambda\Gamma$ ᾖναι παράλληλος
τῇ BE .



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο ὅμοια τρίγωνα εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς τὰ τετράγωνα δὲ
ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.

Ἐστωσαν $\Lambda B\Gamma$ καὶ ΔEZ
δύο ὅμοια τρίγωνα, ἐν οἷς ἡ
γωνία $\Lambda = \Delta$, ἡ $B = E$ καὶ ἡ
 $\Gamma = Z$. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει



$$\text{τρίγ. } \Lambda B\Gamma : \text{τρίγ. } \Delta EZ = \overline{AB} : \overline{\Delta E}.$$

Διότι, ἐπεὶ τὰ δύο τρίγωνα $\Lambda B\Gamma$ καὶ ΔEZ ἔχουσι τὰς γωνίας Λ
καὶ Δ ἴσας, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα τὴν ἀναλογίαν

$$\text{τρίγ. } \Lambda B\Gamma : \text{τρίγ. } \Delta EZ = \overline{AB} \times \overline{\Lambda\Gamma} : \overline{\Delta E} \times \overline{\Delta Z}$$

ἣν, ὡς γνωστὸν, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ οὕτω

$$\frac{\text{τρίγ. } \Lambda B\Gamma}{\text{τρίγ. } \Delta EZ} = \frac{\overline{AB}}{\overline{\Delta E}} \times \frac{\overline{\Lambda\Gamma}}{\overline{\Delta Z}}. \quad (1)$$

Ἀλλ' ἐπεὶ τὰ δύο τρίγωνα $\Lambda B\Gamma$ καὶ ΔEZ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν

$$\overline{AB} : \overline{\Delta E} = \overline{\Lambda\Gamma} : \overline{\Delta Z} \quad \eta \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{\Delta E}} = \frac{\overline{\Lambda\Gamma}}{\overline{\Delta Z}}$$

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν (1)

τὸν λόγον $\frac{\overline{\Lambda\Gamma}}{\overline{\Delta Z}}$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $\frac{\overline{AB}}{\overline{\Delta E}}$, καὶ θέλομεν ἔχει

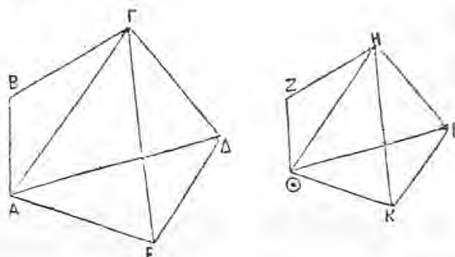
$$\text{τρίγ. } \Lambda B\Gamma : \text{τρίγ. } \Delta EZ = \overline{AB} : \overline{\Delta Z},$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 30. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αἱ μὲν περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς δύο ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραί, αἱ δὲ ἐπιγάνειαι αὐτῶν ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμόλογων πλευρῶν.

1^η. Ἐστωσαν ΑΒΓΔΕ καὶ ΘΖΗΚ δύο τινὰ ὅμοια πολύγωνα, Π ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου καὶ Π' ἡ περίμετρος τοῦ δευτέρου, καὶ ΑΒ καὶ ΘΖ δύο ὁποιαυδήποτε ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραί. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει



$$\Pi : \Pi' = \text{ΑΒ} : \Theta\text{Ζ}.$$

Διότι, ἐπειδὴ τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος πολύγωνα εἶναι ὅμοια, ἔχομεν τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$\text{ΑΒ} : \Theta\text{Ζ} = \text{ΒΓ} : \text{ΖΗ} = \text{ΓΔ} : \text{ΗΙ} = \text{ΔΕ} : \text{ΙΚ} = \text{ΕΑ} : \text{ΚΘ},$$

ἐξ ἧς κατὰ γνωστὸν Ἀριθμητικὸν θεώρημα πορίζομεθα τὴν ἀναλογίαν

$$\text{ΑΒ} + \text{ΒΓ} + \text{ΓΔ} + \text{ΔΕ} + \text{ΕΑ} : \Theta\text{Ζ} + \text{ΖΗ} + \text{ΗΙ} + \text{ΙΚ} + \text{ΚΘ} = \text{ΑΒ} : \Theta\text{Ζ}$$

$$\text{Π} : \Pi' = \text{ΑΒ} : \Theta\text{Ζ},$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο κατὰ πρῶτον νὰ ἀποδείξωμεν.

2^η. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΘΖΗ εἶναι ὅμοια, θέλομεν ἔχει (πρότ. 29).

$$\text{τρίγ. ΑΒΓ} : \text{τρίγ. ΘΖΗ} = \overline{\text{ΑΓ}}^2 : \overline{\Theta\text{Η}}^2. \quad (1)$$

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΘΗΙ εἶναι ὅμοια, θέλομεν ἔχει

$$\text{τρίγ. ΑΓΔ} : \text{τρίγ. ΘΗΙ} = \overline{\text{ΑΓ}}^2 : \overline{\Theta\text{Η}}^2. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), ἔνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου $\overline{\text{ΑΓ}}^2 : \overline{\Theta\text{Η}}^2$, πορίζομεθα τὴν ἀναλογίαν

$$\text{τρίγ. ΑΒΓ} : \text{τρίγ. ΘΖΗ} = \text{τρίγ. ΑΓΔ} : \text{τρίγ. ΘΗΙ}. \quad (3)$$

Δι' ὁμοίων συλλογισμῶν ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι

$$\text{τρίγ. ΑΓΔ} : \text{τρίγ. ΘΗΙ} = \text{τρίγ. ΑΔΕ} : \text{τρίγ. ΘΙΚ}, \quad (4)$$

καὶ ἐκ τῶν ἀναλογιῶν (3) καὶ (4) ἠθέλομεν πορισθῇ τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$\text{τρίγ. ΑΒΓ} : \text{τρίγ. ΘΖΗ} = \text{τρίγ. ΑΓΔ} : \text{τρίγ. ΘΗΙ} = \text{τρίγ. ΑΔΕ} : \text{τρίγ. ΘΙΚ},$$

ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ τὴν ἀναλογίαν

$$ΑΒΓ + ΑΓΔ + ΑΔΕ : ΘΖΗ + ΘΗΙ + ΘΙΚ = ΑΒΓ : ΘΖΗ.$$

Ἄλλ'

$$ΑΒΓ : ΘΖΗ = \overline{ΑΒ}^2 : \overline{ΘΖ}^2.$$

Ἄρα

$$ΑΒΓ + ΑΓΔ + ΑΔΕ : ΘΖΗ + ΘΗΙ + ΘΙΚ = \overline{ΑΒ}^2 : \overline{ΘΖ}^2.$$

ἤ

$$Ε : Ε' = \overline{ΑΒ}^2 : \overline{ΘΖ}^2,$$

παριστῶντες δι' Ε τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ καὶ δι' Ε' τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΘΖΗΙΚ. Λοιπὸν αἱ ἐπιφάνειαι Ε καὶ Ε' τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΘΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 31. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὰ μέρη δύο χορδῶν, τεμνομένων ἐντὸς κύκλου τινός, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ἐστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ δύο χορδαί, τεμνόμεναι εἰς τι σημεῖον Ο, ἐντὸς τοῦ κύκλου κείμενον, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$ΑΟ : ΟΔ = ΟΓ : ΟΒ.$$

Διότι, ἂν ᾤξωμεν τὰς χορδὰς ΑΓ καὶ ΒΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΟ καὶ ΒΟΔ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ ἴσας, τὰς γωνίας ΑΓΟ καὶ ΟΒΔ ὡσαύτως ἴσας, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τμήμα ΑΓΒΔ, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$ΑΟ : ΟΔ = ΟΓ : ΟΒ,$$

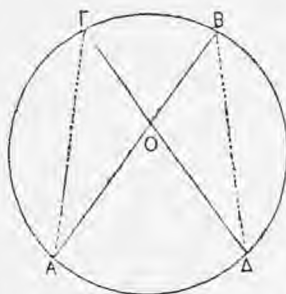
ἥτις ἀποδεικνύει τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος θεωρήμα.

Πόρισμα. Ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης προκύπτει ἡ ἐξῆς ἰσότης $ΑΟ \times ΟΒ = ΔΟ \times ΓΟ$ · τοῦτέστι τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο μερῶν τῆς μιᾶς τῶν χορδῶν ἰσοῦται τῷ ὀρθογώνιῳ τῶν δύο μερῶν τῆς ἐτέρας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 32. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Ο, ἐκτὸς τοῦ κύκλου ληφθέντος, ἀχθῶσιν αἱ τέμνουσαι ΟΒ καὶ ΟΓ, περατούμεναι εἰς τὸν κύκλον τὸξον ΒΓ, λέγω ὅτι αἱ ὀλικαὶ τέμνουσαι θέλουσιν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἐξωτερικὰ αὐτῶν μέρη, τοῦτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει

$$ΟΒ : ΟΓ = ΟΔ : ΟΑ.$$

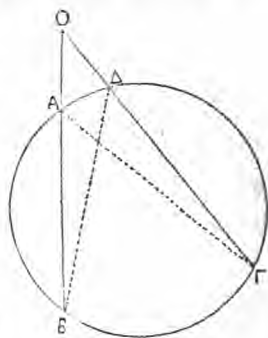


Διότι, ἐὰν ἀξωμεν τὰς χορδὰς ΑΓ καὶ ΒΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΟΒΑ καὶ ΟΑΓ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν Ο κοινὴν, τὰς γωνίας ΑΓΟ καὶ ΟΒΔ ἴσας, ὡς ἐγγεγραμμέναις εἰς τὸ αὐτὸ τμήμα ΑΒΓΔ καὶ θέλομεν ἔχει

$$OB : OG = OA : OA.$$

Πόρισμα. Λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $OB \times OA$ ἰσοῦται τῷ ὀρθογώνιῳ $OG \times OA$.

Σχόλιον. Εὐκόλως δύναται τις νὰ παρατηρήσῃ τὴν μεταξὺ τῆς προτάσεως ταύτης καὶ τῆς προηγουμένης σχέσιν, καὶ ὅτι δὲν διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων εἰμὴ καθόσον εἰς τὴν προηγουμένην πρότασιν τὸ σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν ἔκειτο ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἐνῶ εἰς τὴν παρούσαν κεῖται ἐκτὸς.



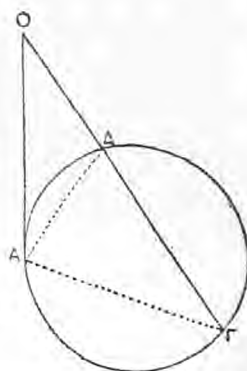
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 33. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν ἐκ τινος σημείου Ο ἐκτὸς τοῦ κύκλου ληφθέντος, ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΟΑ καὶ τέμνουσά τις ΟΓ, ἡ ἐφαπτομένη θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς τεμνούσης ΟΓ καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ αὐτῆς μέρους ΟΔ· τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$OG : OA = OA : OD.$$

Διότι, ἐὰν ἀξωμεν τὰς χορδὰς ΑΔ καὶ ΑΓ τὰ δύο τρίγωνα ΟΑΔ καὶ ΟΑΓ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν Ο κοινὴν, τὰς γωνίας ΑΓΟ καὶ ΟΑΔ ἴσας, ὡς ἐκρῦσας διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΔ (πρότ. 20, Β'), καὶ θέλομεν ἔχει

$$OG : OA = OA : OD.$$



Πόρισμα. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον OA^2 ἰσοῦται τῷ ὀρθογώνιῳ $OG \times OD$.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς προηγουμένης· διότι ἡ ἐφαπτομένη ΟΑ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ὅριον τῶν θέσεων, ἃς ἤθελε λάβει τέμνουσά τις ΟΓ στρεφομένη περίξ τοῦ σημείου Ο, μέχρις οὗ τὰ δύο σημεία Δ καὶ Γ τῆς τομῆς ταυτισθῶσιν εἰς Α (ὄρα βιβλ. Β', ὁρίσμ. 13, σημ.).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 34. ΘΕΩΡΗΜΑ

Εἰς πᾶν τρίγωνον $AB\Gamma$ τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο πλευρῶν AB καὶ $A\Gamma$ ἰσοῦται μὲ τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ τῆς διαμέτρου GE τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου καὶ τῆς καθεύτου AD , τῆς καταβιβαζομένης ἐπὶ τῆς τρίτης αὐτοῦ πλευρᾶς $B\Gamma$.

Διότι, ἐὰν ἄξωμεν τὴν χορδὴν DE , τὰ δύο τρίγωνα ABD καὶ AEG θέλουσιν εἶναι ὁμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ADB καὶ EAG ἴσας, ὡς ὀρθάς, τὰς γωνίας ABD καὶ AEG ἴσας, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τμήμα $AEB\Gamma$, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$AB : GE = AD : AG,$$

$$\text{ἔξ ἧς} \quad AB \times AG = GE \times AD.$$

Λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο πλευρῶν AB καὶ AG ἰσοῦται κτλ.

Πόρισμα. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἐπὶ $B\Gamma$, θέλομεν ἔχει

$$AB \times AG \times B\Gamma = B\Gamma \times AD \times GE. \quad (1)$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $B\Gamma \times AD$ παριστᾷ τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ (πρότ. 6). Ἄρα ἀντικαθιστώντες εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος (1) ἀντὶ τοῦ γινομένου $B\Gamma \times AD$ τὸ ἴσον αὐτῷ $2AB\Gamma$, θέλομεν ἔχει

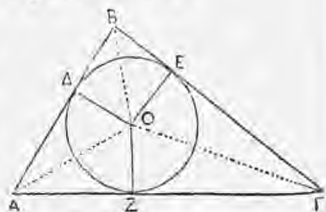
$$AB \times AG \times B\Gamma = 2AB\Gamma \times GE = AB\Gamma \times 2GE, \quad (2)$$

τουτέστι, τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου τινὸς ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ διπλάσιον τῆς διαμέτρου GE τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου.

Σχόλιον. Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (2) μᾶς παρέχει τὴν μεταξὺ τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου τινὸς, τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ καὶ τῆς ἀκτίνος τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου ὑπάρχουσας σχέσιν, δυνάμεθα δὲ νὰ πορισθῶμεν εὐκόλως ἑτέραν ἰσότητα, παριστῶσαν τὴν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεταξὺ τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου, τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ καὶ τῆς ἀκτίνος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.

Διότι εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, ἐν ᾧ O εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου, θέλομεν προφανῶς ἔχει

$$\Delta B\Gamma = \Delta O\Gamma + \Delta O\Gamma + \Delta O\Gamma.$$



$$\text{Ἄλλ' } \angle O\Gamma = \Delta\Gamma \times \frac{1}{2} OZ, \angle O\Gamma = B\Gamma \times \frac{1}{2} OE \text{ καὶ } \angle O\Gamma = AB \times \frac{1}{2} OA.$$

$$\text{Ἄρα } \angle B\Gamma = \Delta\Gamma \times \frac{1}{2} OZ + B\Gamma \times \frac{1}{2} OE + AB \times \frac{1}{2} OA,$$

ἢ, ἐπειδὴ $OZ = OE = OA$

$$\angle B\Gamma = (\Delta\Gamma + B\Gamma + AB) \times \frac{1}{2} OZ,$$

τούτεστι, τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου $AB\Gamma$ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 35. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν ἡ γωνία A τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῆς εὐθείας AD , τὸ ὀρθογώνιον τῶν πλευρῶν AB καὶ AG θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων BD καὶ GD , πλέον τὸ τετράγωνον τῆς διχοτομύσης AD .

Διότι, ἐὰν περιγράψωμεν κύκλον εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, προεκτείνωμεν τὴν διχοτομοῦσαν AD μέχρι τῆς περιφερείας καὶ ἄζωμεν τὴν GE , τὰ δύο τρίγωνα ABD καὶ AEG θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας BAD καὶ EAG ἴσας, ἐκ κατασκευῆς, τὰς γωνίας ABD καὶ AEG ἴσας, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τμήμα $ABEG$, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$AB : AE = AD : AG,$$

ἔξ ἧς

$$AB \times AG = AE \times AD.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητά ἀντὶ τοῦ AE τὸ ἴσον αὐτῷ ἄθροισμα $AD + DE$, θέλομεν ἔχει

$$AB \times AG = (AD + DE) \times AD = AD^2 + AD \times DE.$$

Ἄλλ' ἐπειδὴ $AD \times DE = BD \times DG$ (πρότ. 31), θέλομεν ἔχει

$$AB \times AG = AD^2 + BD \times DG,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 36. ΘΕΩΡΗΜΑ

Εἰς πᾶν ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον τὸ ὀρθογώνιον τῶν δια-

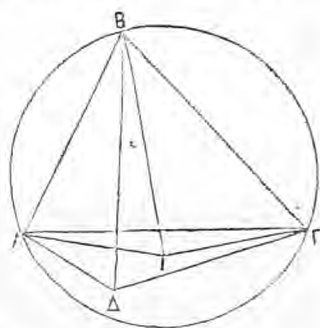
8*

μένου ἐπὶ τῆς περιφέρειας, ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι διάφορος τῆς ΒΑΓ (πρότ. 21, 22, Β'). Τελευταῖον ἄς ἀχθῇ καὶ ἡ ΙΓ.

Τὰ δύο τρίγωνα ΔΒΙ καὶ ΒΔΓ, ἰσογώνια ἐκ κατασκευῆς, εἶναι ὁμοία καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$AB : AI = BD : \Delta\Gamma, \text{ ἐξ ἧς } AI \times BD = AB \times \Delta\Gamma. \quad (1)$$

Τὰ δύο τρίγωνα ΔΒΔ καὶ ΙΒΓ εἶναι ὡσαύτως ὅμοια. Διότι, ἐὰν ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν ΔΒΙ καὶ ΔΒΓ ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν μέρος ΔΒΙ, αἱ μένουσαι γωνίαι ΔΒΔ καὶ ΙΒΓ θέλουσιν εἶναι ἴσαι, καὶ ἀφ' ἐτέρου αἱ ἴσαι αὐταὶ γωνίαι περιέχονται μετὰξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, ἔνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΔΒΙ καὶ ΒΔΓ, ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν ἀναλογίαν $AB : BA = BI : B\Gamma$. Ἀρτιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΔΒΔ καὶ ΙΒΓ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μετὰξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν



$$\Delta\Delta : \Gamma\Gamma = BD : B\Gamma, \text{ ἐξ ἧς } \Gamma\Gamma \times BD = \Delta\Delta \times B\Gamma. \quad (2)$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) θέλομεν ἔχει

$$BA \times (AI + \Gamma\Gamma) = AB \times \Gamma\Delta + \Delta\Delta \times B\Gamma.$$

Ἀλλὰ $AI + \Gamma\Gamma > \Delta\Gamma$. Ἄρα

$$BA \times \Delta\Gamma < AB \times \Gamma\Delta + \Delta\Delta \times B\Gamma.$$

Σχόλιον. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι, ἐὰν εἰς τετράπλευρόν τι τὸ ὀρθογώνιον τῶν διαγωνίων ᾗναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, τὸ τετράπλευρον θέλει εἶναι ἐγγράψιμον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 38. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αἱ διαγώνιοι ἐγγεγραμμένου τινὸς τετραπλεύρου εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ἄθροισματα τῶν ὀρθογωνίων τῶν πλευρῶν, τῶν περαιομένων εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν· τουτέστιν

$$AG : BD = AB \times AD + BG \times GD : AB \times BG + AD \times \Delta\Gamma.$$

Πρὸς ἀποδείξιν τούτου ἄς παρστήσωμεν δι' α τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος τετράπλευρον κύκλου. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῷ πορίσματι τῆς 34 προτάσεως τοῦ παρόντος βιβλίου θέλομεν ἔχει εἰς μὲν τὸ τρίγωνον ΔΒΓ τὴν ἰσότητα

$$AB \times BG \times AG = 4\alpha \times ABG, \quad (1)$$

εἰς δὲ τὸ τρίγωνον $\Lambda\Delta\Gamma$

$$\Lambda\Delta \times \Delta\Gamma \times \Lambda\Gamma = 4\alpha \times \Lambda\Delta\Gamma. \quad (2)$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2)
κατὰ μέλη ἔχομεν, ἐξαγομένου ἐκτὸς πα-
ρενθέσεως τοῦ κοινοῦ παράγοντος $\Lambda\Gamma$,

$$\Lambda\Gamma \times (AB \times BG + \Lambda\Delta \times \Delta\Gamma) = 4\alpha \times (ABG + \Lambda\Delta\Gamma) = 4\alpha \times AB\Gamma\Delta \quad (3)$$

Κατὰ τὸ αὐτὸ πῶρισμα θέλομεν ὡσαύτως ἔχει εἰς τὰ τρίγωνα $\Lambda B\Delta$
καὶ $B\Gamma\Delta$ τὰς ἰσότητας

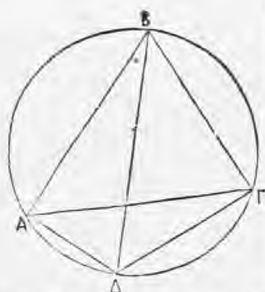
$AB \times \Lambda\Delta \times B\Delta = 4\alpha \times \Lambda B\Delta$, καὶ $B\Gamma \times \Gamma\Delta \times B\Delta = 4\alpha \times B\Gamma\Delta$,
ὡς προσθέτοντες κατὰ μέλη πορίζομεθα τὴν ἐξῆς

$$B\Delta \times (AB \times \Lambda\Delta + B\Gamma \times \Gamma\Delta) = 4\alpha \times AB\Gamma\Delta \quad (4)$$

Καὶ ἐπειδὴ τὰ δευτέρα μέλη τῶν ἰσοτήτων (3) καὶ (4) εἶναι ἴσα, θέ-
λομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$\Lambda\Gamma \times (AB \times BG + \Lambda\Delta \times \Delta\Gamma) = B\Delta \times (AB \times \Lambda\Delta + B\Gamma \times \Gamma\Delta)$
ἐξ ἧς κατὰ γνωστὸν Ἀριθμητικὸν θεώρημα πορίζομεθα τὴν ἀναλογίαν

$\Lambda\Gamma : B\Delta = AB \times \Lambda\Delta + B\Gamma \times \Gamma\Delta : AB \times BG + \Lambda\Delta \times \Delta\Gamma$,
τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.



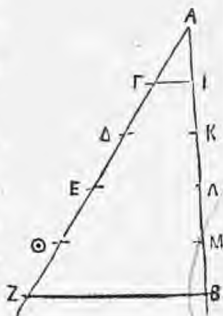
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ ΕΙΣ ΤΟ Γ' ΒΙΒΛΙΟΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.

Νὰ διαιρεθῇ δεδομένη εὐθεῖα εἰς ἀριθμὸν τινα ἴσων μερῶν ἢ εἰς
μέρη ἀνάλογα δεδομένων εὐθειῶν.

Ἄς ὑποθέσωμεν 1^{ον} ὅτι προτιθέμεθα νὰ διαι-
ρέσωμεν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΛB εἰς πέντε
ἴσα μέρη.

Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ ἄκρου αὐτῆς Λ ἄγωμεν
τὴν ἀπροσδιόριστον εὐθεῖαν ΛZ , λαμβάνομεν
ἐπ' αὐτῆς $\Lambda\Gamma$ κατ' ἀρέσκειαν καὶ φέρομεν τὴν
 $\Lambda\Gamma$ πεντάκις ἐπὶ τῆς ΛZ . Ἐνόνομεν ἀκολουθῶς
τὸ τελευταῖον σημεῖον τῆς διαιρέσεως Z μετὰ τὸ Z



ἄκρον Β τῆς δεδομένης εὐθείας διὰ τῆς ΖΒ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ ἄγομεν τὴν ΓΙ παράλληλον τῇ ΖΒ. Λέγω ὅτι ΑΙ θέλει εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς δεδομένης εὐθείας ΒΑ, καὶ ἐπομένως, ἐὰν ἡ ΑΙ φερθῇ πεντάκις ἐπὶ τῆς ΑΒ, αὕτη διαιρεῖται οὕτως εἰς πέντε ἴσα μέρη.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΓΙ εἶναι παράλληλος τῇ ΖΒ, αἱ πλευραὶ ΑΖ καὶ ΑΒ τῆς γωνίας ΖΑΒ τέμνονται ἀναλόγως εἰς τὰ σημεία Γ καὶ Ι (πρότ. 16), τοιούτῳι θέλομεν ἔχει

$$AZ : AB = AG : AI.$$

Ἄλλ' ἡ ΑΓ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς ΑΖ. Λοιπὸν καὶ ἡ ΑΙ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς ΑΒ.

2^{ον}. Ἄ: ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ἡ δεδομένη εὐθεῖα ΑΒ εἰς ἀνάλογα μέρη τῶν δεδομένων εὐθειῶν Μ, Κ, Ρ.

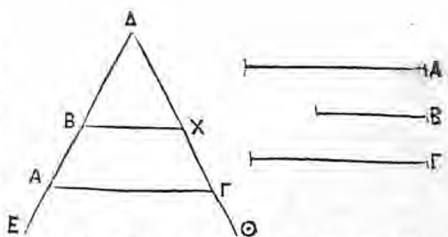
Ἐκ τοῦ ἄκρου Α ἄγομεν κατ' ἄρέσκειαν τὴν ἀπροσδιόριστον εὐθεῖαν ΑΖ, καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ΑΓ=Π, ΓΔ=Κ καὶ ΔΕ=Ρ, ἐνόνομεν τὰ ἄκρα Β καὶ Ε διὰ τῆς εὐθείας ΒΕ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Γ καὶ Δ ἄγομεν τὰς εὐθείας ΓΙ καὶ ΔΚ παρὰλληλους τῇ ΒΕ. Λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ θέλει διαιρεθῇ οὕτως εἰς μέρη ΑΙ, ΙΚ καὶ ΚΒ ἀνάλογα τῶν εὐθειῶν Π, Κ καὶ Ρ.

Διότι, ἔνεκα τῶν παρὰλληλῶν ΓΙ, ΔΚ καὶ ΒΕ, τὰ μέρη ΑΙ, ΙΚ καὶ ΚΒ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ μέρη ΑΓ, ΓΔ καὶ ΔΕ (πρότ. 16, πρότ. 2). Ἄλλ' ἐκ κατασκευῆς ΑΓ=Π, ΓΔ=Κ καὶ ΔΕ=Ρ. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.

Νὰ εὐρεθῇ τετάρτη ἀνάλογος τριῶν δεδομένων εὐθειῶν Α, Β καὶ Γ, τοιούτῳι εὐθεῖα τις Χ, ἥτις νὰ σχηματίξῃ μετὰ τῶν τριῶν δεδομένων τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν $A : B = \Gamma : X$.

Ἐξ ἐνὸς σημείου Δ ἄγομεν κατ' ἄρέσκειαν δύο ἀπροσδιόριστους εὐθείας ΔΕ καὶ ΔΘ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς πρώτης ΔΑ=Α καὶ ΔΒ=Β, καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας ΔΓ=Γ, ἐνόνομεν τὰ σημεία Α καὶ Γ διὰ τῆς ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β ἄγομεν τὴν ΒΧ παράλληλον τῇ ΑΓ. Λέγω



ὅτι ἡ εὐθεία ΔΧ θέλει παριστᾶ τὴν ζητούμενην τετάρτην ἀνάλογον Χ.
Διότι, ἔνεκα τῶν παραλλήλων ΒΧ καὶ ΑΓ, ἔχομεν

$$\Delta A : \Delta B = \Delta \Gamma : \Delta X,$$

$$\eta, \delta\pi\epsilon\rho\ \tau\alpha\upsilon\tau\acute{o}, \quad A : B = \Gamma : \Delta X.$$

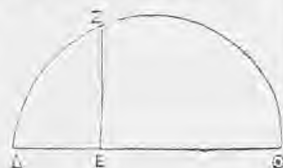
Ἄρα $\Delta X = X$.

Πόρισμα. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου εὐρίσκομεν τρίτην ἀνάλογον δύο δεδομένων εὐθειῶν Α καὶ Β, διότι ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ζητήσωμεν, ὡς προεξεθέσαμεν, τετάρτην ἀνάλογον τῶν τριῶν εὐθειῶν Α, Β καὶ Γ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.

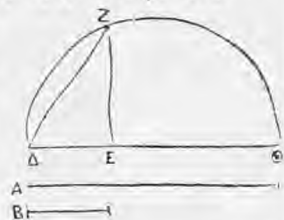
Νὰ εὐρεθῇ μέση ἀνάλογος δύο δεδομένων εὐθειῶν Α καὶ Β.

Ἐπὶ τινος ἀπροσδιορίστου εὐθείας ΔΘ λαμβάνομεν ΔΕ=Α καὶ ΕΘ=Β καὶ ἐπὶ τῆς ΔΘ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν ΔΖΘ. Εἰς τὸ σημεῖον Ε ὑψώνομεν κάθετον ἐπὶ τῆς ΔΘ, καὶ προεκβάλλομεν αὐτὴν μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Κατὰ τὸ πόρισμα 1 τῆς 27 προτάσεως ΕΖ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξύ τῶν δύο τμημάτων ΔΕ καὶ ΕΘ τῆς διαμέτρου. Ἀλλὰ ΔΕ=Α καὶ ΕΘ=Β. Ἄρα ΕΖ εἶναι ἡ ζητούμενη μέση ἀνάλογος.

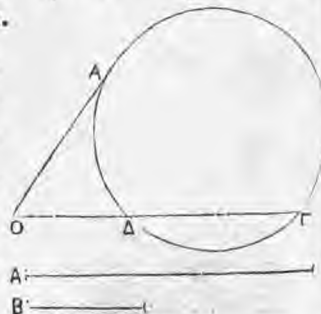


Τὸ αὐτὸ πρόβλημα λύεται καὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους.

1^{ος}. Ἐπὶ τινος ἀπροσδιορίστου εὐθείας λαμβάνομεν ΔΘ=Α, ΔΕ=Β, καὶ ἐπὶ τῆς ΔΘ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν. Εἰς τὸ σημεῖον Ε ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τῆς ΔΘ, προεκβάλλομεν αὐτὴν μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, καὶ ἄγομεν τὴν ΔΖ, ἥτις θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη μέση ἀνάλογος, κατὰ τὸ προαναφερθὲν πόρισμα τῆς 27 προτάσεως.



2^{ος}. Λαμβάνομεν ΟΓ=Α καὶ ΟΔ=Β, γράφομεν περιφέρειάν τινα διερχομένην διὰ τῶν σημείων Δ καὶ Γ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ο ἄγομεν τὴν ΟΑ ἑφαπτομένην εἰς τὴν γραφεῖσαν περιφέρειαν. Λέγω ὅτι ἡ ἑφαπτομένη ΟΑ θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη μέση ἀνάλογος τῶν δεδομένων

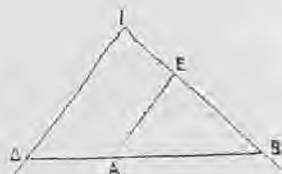


θειῶν A καὶ B . Διότι αὕτη κατὰ τὴν 33 πρότασιν τοῦ παρόντος ἐλλοιβεῖται μέσση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν OG καὶ OD , καὶ ἐλήφθη $OG = A$ καὶ $OD = B$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.

Ἐξ ἐνὸς σημείου A , ἐντὸς τῆς γωνίας $BΓΔ$ κειμένου, ῥ' ἀχθῇ εὐθεῖα BA οὕτως, ὥστε τὰ μέρη αὐτῆς AB καὶ AA , τὰ μεταξὺ τοῦ σημείου A καὶ τῶν δύο τῆς γωνίας πλευρῶν περιεχόμενα, νὰ γαί ἴσα.

Ἐκ τοῦ δεδομένου σημείου A ἄγομεν τὴν AE παράλληλον τῇ $ΓΔ$, λαμβάνομεν πρὸς τῆς πλευρᾶς $ΓB$ τὴν ἀπόστασιν $EB = ΓE$, καὶ διὰ τῶν σημείων A καὶ B ἄγομεν τὴν $BAΔ$, ἣτις θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη εὐθεῖα.



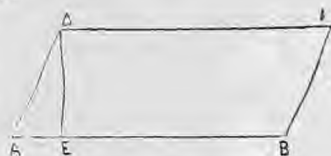
Διότι, ἔνεκα τῶν παραλλήλων AE καὶ $ΓΔ$, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $BE : EF = BA : ΔΔ$.

Ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς $BE = EF$. Ἀρα καὶ $BA = ΔΔ$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.

Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον παραλληλόγραμμον ἢ μὲ δεδομένον τρίγωνον.

1^{ον}. Ἐστω AB ἡ βάσις τοῦ δεδομένου παραλληλογράμμου, $ΔE$ τὸ ὕψος αὐτοῦ καὶ X ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. Διὰ νὰ ᾖναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον παραλληλόγραμμον, πρέπει τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν νὰ ᾖναι ἴσα, ταυτέστι πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν δεδομένων AB , $ΔE$ καὶ τῆς ζητουμένης πλευρᾶς X τοῦ τετραγώνου ἡ ἐξῆς ἰσότης



$X^2 = AB \times ΔE$, ἐξ ἧς παρὶζόμεθα τὴν ἀναλογίαν $AB : X = X : ΔE$. Λοιπὸν ἡ πλευρὰ X τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι μέσση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς βάσεως AB καὶ τοῦ ὕψους $ΔE$ τοῦ δεδομένου παραλληλογράμμου, καὶ εὐρίσκεται ὡς προεξετέθη ἐν τῷ 3 προβλήματι.

2^{ον}. Ἄν παραστήσωμεν διὰ B τὴν βάσιν τοῦ δεδομένου τριγώνου, διὰ $Γ$ τὸ ὕψος αὐτοῦ καὶ διὰ X τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, θέλομεν ἔχει, διὰ νὰ ᾖναι τὸ τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον τρίγωνον, τὴν ἰσότητα

$X^2 = B \times \frac{1}{2} \Gamma$, ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν ἀναλογίαν $B : X = X : \frac{1}{2} \Gamma$,
 τουτέστιν ἡ πλευρὰ X τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι μέση ἀνάλο-
 γος μεταξὺ τῆς βάσεως B καὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὕψους Γ τοῦ δεδο-
 μένου τριγώνου.

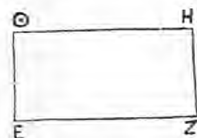
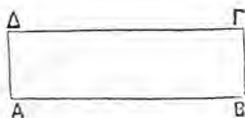
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.

Νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ δεδομένης εὐθείας AB ὀρθογώνιος ἰσοδύ-
 ναμος μὲ δεδομένον ὀρθογώνιον $EZH\Theta$.

Ἐστω $\Lambda\Delta$ τὸ ἄγνωστον ὕψος τοῦ ζητουμέ-
 νου ὀρθογώνιου $AB\Gamma\Delta$. Ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώ-
 νια πρέπει νὰ ᾖναι ἰσοδύναμα, ἔχομεν τὴν ἰ-
 σότητα

$$AB \times \Lambda\Delta = EZ \times E\Theta, \text{ ἐξ ἧς } AB : EZ = E\Theta : \Lambda\Delta.$$

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν εὐθεῖα $\Lambda\Delta$ εἶναι τετάρτη
 ἀνάλογος τῶν τριῶν εὐθειῶν AB , EZ καὶ $E\Theta$.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7.

Νὰ εὐρεθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν λό-
 γον, ὅν καὶ αἱ ἐπιγάνειαι δύο δεδομένων ὀρθογωνίων.

Ἐπὶ τῶν A καὶ B ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων,
 Γ καὶ Δ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἑτέρου. Ἐπειδὴ ἡ μία τῶν ζητου-
 μένων εὐθειῶν δύναται νὰ ᾖναι ὅποιαδήποτε, λαμβάνομεν αὐτὴν ἴσην
 μὲ τὴν βάσιν A τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου, καὶ καλοῦμεν X τὴν δευ-
 τέραν εὐθεῖαν. Θέλομεν ἔχει κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος
 τὴν ἐξ ἧς ἀναλογίαν

$$A \times B : \Gamma \times \Delta = A : X, \text{ ἐξ ἧς } X = \frac{\Gamma \times \Delta \times A}{A \times B} = \frac{\Gamma \times \Delta}{B},$$

τουτέστιν ἡ ζητουμένη δευτέρα εὐθεῖα X μετὰ τῶν τριῶν δεδομένων
 εὐθειῶν Γ , Δ καὶ B πρέπει νὰ ἀποτελῇ τὴν ἐξ ἧς ἀναλογίαν

$$B : \Gamma = \Delta : X,$$

ἥτοι νὰ ᾖναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν B , Γ καὶ Δ , ἐπομένως
 εὐρίσκεται κατὰ τὸν ἐν τῷ δευτέρῳ προβλήματι ἐκτεθέντα τρόπον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8.

Νὰ εὐρεθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν λό-
 γον, ὅν καὶ τὰ δύο δεδομένα γινόμενα $A \times B \times \Gamma$, $P \times K \times P$.

Ἐστω X ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν εὐθειῶν Π , A , B , καὶ Υ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν εὐθειῶν Γ , K , P . Λέγω ὅτι τὰ δύο δεδομένα γινόμενα $A \times B \times \Gamma$ καὶ $\Pi \times K \times P$ θέλουσιν εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ εὐθεῖαι X καὶ Υ .

Διότι, ἐπεὶδὴ $\Pi : A = B : X$, ἔχομεν $A \times B = \Pi \times X$ καὶ πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ Γ θέλομεν ἔχει

$$A \times B \times \Gamma = \Gamma \times \Pi \times X. \quad (1)$$

Ὡσαύτως, ἐπεὶδὴ $\Gamma : K = P : \Upsilon$, ἔχομεν $K \times P = \Gamma \times \Upsilon$ καὶ πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ Π , θέλομεν ἔχει

$$\Pi \times K \times P = \Gamma \times \Pi \times \Upsilon. \quad (2)$$

Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) πορίζομεθα τὴν ἀναλογίαν

$$A \times B \times \Gamma : \Pi \times K \times P = \Gamma \times \Pi \times X : \Gamma \times \Pi \times \Upsilon$$

ἥτις, διαιρουμένου τοῦ τελευταίου αὐτῆς λόγου διὰ $\Gamma \times \Pi$, γίνεται

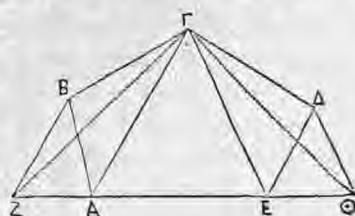
$$A \times B \times \Gamma : \Pi \times K \times P = X : \Upsilon,$$

τοῦθ' ὅπερ προϋτιθέμεθα νὰ ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9.

Νὰ κατασκευασθῇ τριγωνοῖς ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον πολύγωνον.

Ἐστω $ABΓΔΕ$ τὸ δεδομένον πολύγωνον. Ἀγομεν ἐν πρώτοις τὴν διαγώνιον $ΓΕ$, ἐκ τοῦ σημείου Δ τὴν $\Delta\Theta$ παράλληλον τῇ $ΓΕ$, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν προσεκβολὴν τῆς $ΑΕ$ εἰς τὸ σημεῖον Θ , καὶ ἐνόνομεν $Γ\Theta$. Λέγω ὅτι τὸ πολύγωνον $ABΓΔΕ$ εἶναι



ἰσοδύναμον τῷ $ABΓ\Theta$, ὅπερ ἔχει μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον.

Διότι τὰ δύο τρίγωνα $ΓΔΕ$, $ΓΘΕ$ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βᾶσιν $ΓΕ$ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (διότι αἱ κορυφαὶ αὐτῶν Δ καὶ Θ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας $\Delta\Theta$ παράλληλου τῇ $ΓΕ$), ἥτοι $ΓΔΕ = ΓΘΕ$ (*) ἂν δὲ προσθέσωμεν εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης τὸ αὐτὸ σχῆμα $ABΓΕ$, θέλομεν ἔχει ἂν' ἐνὸς τὸ πολύγωνον $ABΓΔΕ$ καὶ ἂν' ἐτέρου τὸ πολύγωνον $ABΓ\Theta$. Λοιπὸν τὰ δύο πολύγωνα $ABΓΔΕ$ καὶ $ABΓ\Theta$ εἶναι ἰσοδύναμα.

(*) Τὸ σημεῖον $\approx$ σημαίνει, ὅτι τὸ τρίγωνον $ΓΔΕ$ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ $ΓΘΕ$.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δυνάμεθα ν' ἀφανίσωμεν καὶ τὴν γωνίαν B , ἀντεισάγοντες ἀντὶ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ $AZ\Gamma$, καὶ οὕτω τὸ πεντάγωνον $AB\Gamma A E$ θέλει τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον.

Ὁ αὐτὸς τρόπος ἐφαρμόζεται εἰς πᾶν σχῆμα· διότι, ἐλαττούντες διαδοχικῶς κατὰ μονάδα τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, θέλομεν καταστήσει εἰς τὸ τρίγωνον, τὸ ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον πολύγωνον.

Σχόλιον. Εἶδομεν προηγουμένως ὅτι πᾶν τρίγωνον δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον, ἐπειδὴ δὲ πᾶν πολύγωνον δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον, ἄρα πᾶν πολύγωνον δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον. Τοῦτο δὲ καλεῖται *τετραγωνισμὸς τοῦ πολυγώνου*.

Τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τετραγώνου ἰσοδυνάμου μὲ δεδομένον κύκλον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10.

Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο δεδομένων τετραγώνων.

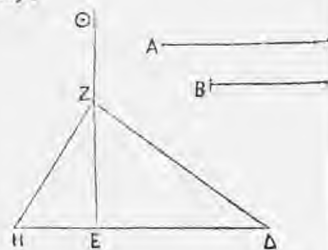
Ἐστώσαν A καὶ B αἱ πλευραὶ τῶν δύο δεδομένων τετραγώνων.

1^{ον}. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἰσοδυνάμου μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεδομένων, ἄγομεν δύο ἀπροσδιορίστους εὐθείας EA , $E\Theta$ καθέτους ἐπ' ἀλλήλων, λαμβάνομεν

$BA = A$ καὶ $EZ = B$. Λέγω ὅτι ἡ ὑποτείνουσα ZA τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ZEA θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι κατὰ τὸ σχόλιον τοῦ 11 θεωρήματος τοῦ παρόντος βιβλίου ἔχομεν τὴν ἰσότητά $ZA^2 = EA^2 + EZ^2$, ἢ $ZA^2 = A^2 + B^2$.

2^{ον}. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἰσοδυνάμου μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο δεδομένων τετραγώνων, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς $E\Theta$ τὴν ἀπόστασιν EZ ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν B τοῦ μικροτέρου τετραγώνου, καὶ μὲ κέντρον Z καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ πλευρᾷ A γράφομεν τόξον, ὅπερ θέλει τμήσει τὴν πλευρὰν EH τῆς ὀρθῆς γωνίας ZEH εἰς τι σημεῖον H . Λέγω δὲ ὅτι HE θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.



Διότι ἔχομεν προφανῶς κατὰ τὸ 1 πόρισμα τῆς 11 προτάσεως
 $\overline{HE} = \overline{HZ} - \overline{ZE} = A^2 - B^2$.

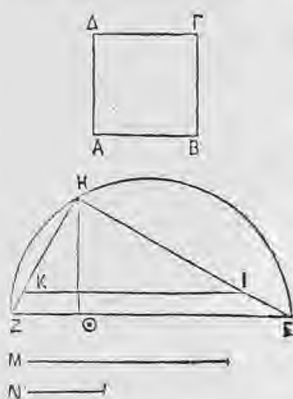
Σχόλιον. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ ὅσαδήποτε τετραγώνον. Διότι διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, δι' ἧς ἀνάγονται τὰ δύο τετράγωνα εἰς ἓν, ἀνάγονται τὰ τρία εἰς δύο, καὶ ταῦτα πάλιν εἰς ἓν. Οὕτω τὰ τέσσαρα ἀνάγονται εἰς τρία, τὰ τρία εἰς δύο, καὶ τὰ δύο εἰς ἓν, καὶ οὕτω καθεξῆς, ἐὰν ὑπάρχωσι τετράγωνα περισσώτερα τῶν τεσσάρων.

Ἄν τινα τῶν τετραγώνων ἔπρεπε νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ ἄθροισματος τῶν ἄλλων, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἢ θέλομεν κατασκευάσει τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν προσθετέων τετραγώνων, καὶ ἕτερον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀφαιρετέων, καὶ τελευταῖον τρίτον ἰσοδύναμον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο εὐρεθέντων. Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ τρίτον τοῦτο τετράγωνον θέλει εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δεδομένων τετραγώνων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11.

Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, ἔχον λόγον πρὸς δεδομένον, ὡς λόγον ἔχει δεδομένη τις εὐθεΐα Μ πρὸς δεδομένην εὐθεΐαν Ν.

Ἐστω AB ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου τετραγώνου. Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς τοῦ ζητουμένου λαμβάνομεν ἐπὶ τινος ἀπροσδιορίστου εὐθείας ΕΘ = Μ καὶ ΘΖ = Ν καὶ ἐπὶ τῆς ΖΕ (= ΕΘ + ΘΖ), ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν. Εἰς τὸ σημεῖον Θ ὑψοῦμεν τὴν ΘΗ κάθετον ἐπὶ τῆς ΖΕ, ἀγομεν τὰς χορδὰς ΖΗ καὶ ΗΕ καὶ ἐπὶ τῆς ΖΗ λαμβάνομεν ΗΚ ἴσιν τῇ πλευρᾷ AB τοῦ δεδομένου τετραγώνου. Ἄν ἐκ τοῦ σημείου Κ ἀξώμεν τὴν ΚΙ παράλληλον τῇ ΖΕ, λέγω ὅτι ΗΙ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.



Διότι, ἔνεκα τῶν παραλλήλων ΚΙ καὶ ΖΕ, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν.

$$HI : HK = HE : HZ$$

Ἐξ ἧς, ὑψοῦντες τοὺς ὁρους αὐτῆς εἰς τετράγωνον, πορίζομεθα

$$\overline{HI} : \overline{HK} = \overline{HE} : \overline{HZ}$$

(1)

Ἄλλ' εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΖΗΕ, κατὰ τὴν ἀναλογίαν (3) τοῦ 4 πορίσματος τῆς 11 προτάσεως, ἔχομεν

$$\overline{HE}^2 : \overline{HZ}^2 = \Theta E : \Theta Z \quad \eta \quad M : N. \quad (2)$$

Ἄρα, ἐπεὶ δὴ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τὸν λόγον $\overline{HE}^2 : \overline{HZ}^2$ κοινόν, θέλομεν ἔχει

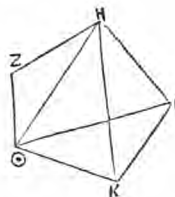
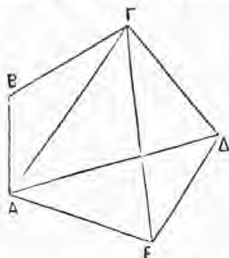
$$\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 = M : N.$$

Ἀλλὰ $HK = AB$. Ἄρα τὸ ἐπὶ τῆς ΗΙ κατασκευαζόμενον τετράγωνον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι εἶναι πρὸς τὸ δεδομένον ὡς ἡ εὐθεῖα Μ πρὸς τὴν εὐθεῖαν Ν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12.

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΘΖ, λαμβανόμενης ὡς ὁμολόγου τῇ ΑΒ, τὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον μὲ τὸ δεδομένον ΑΒΓΔΕ.

Ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἄγομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΑΔ, καὶ εἰς μὲν τὸ σημεῖον Θ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν $\angle Z\Theta H = \angle B\Gamma$, εἰς δὲ τὸ Ζ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν $\angle Z\Theta H = \angle A\Gamma$. Τὸ προκύπτον



τρίγωνον ΘΖΗ ἐκ τῆς συναπαντήσεως τῶν εὐθειῶν ΘΗ καὶ ΖΗ θέλει εἶναι προφανῶς ὅμοιον τῷ ΑΒΓ (πρότ. 19, πόρ.). Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ΘΗ, ὁμολόγου τῇ ΑΓ, κατασκευάσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ τρίγωνον ΘΗΙ ὅμοιον τῷ ΑΓΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΘΙ, ὁμολόγου τῇ ΑΔ, κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον ΘΙΚ, ὅμοιον τῷ ΑΔΕ, τὸ οὕτω σχηματιζόμενον πολύγωνον ΘΖΗΙΚ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον ὅμοιον μὲ τὸ δεδομένον ΑΒΓΔΕ, διότι σύγκειται, ἐκ κατασκευῆς, ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων (πρότ. 24).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 13.

Δεδομένων δύο ὁμοίων σχημάτων τὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον καὶ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ μὲ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Ἄς παραστήσωμεν διὰ Π καὶ Κ τὰς ἐπιφανείας τῶν δύο δεδομένων ὁμοίων σχημάτων, δι' Α πλευράν τινα τοῦ πρώτου καὶ διὰ Β τὴν ὁμολόγον ταύτῃ πλευράν τοῦ δευτέρου. Ἐστω πρὸς τούτοις Χ ἡ ἴση

μέ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἐπιφάνεια τοῦ ζητουμένου πολυγώνου καὶ χ ἡ ζητούμενη ὁμόλογος τῇ A ἢ τῇ B πλευρᾷ αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δεδομένων ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων πλευρῶν, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\Pi : K = A^2 : B^2$$

ἐξ ἧς, κατὰ γνωστὸν Ἀριθμητικὸν θεώρημα, πορίζομεθα τὴν ἐξῆς

$$\Pi : \Pi + K = A^2 : A^2 + B^2. \quad (1)$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τὰ πολύγωνα Π καὶ X εἶναι ὅμοια, θέλομεν ἔχει

$$\Pi : X = A^2 : \chi^2. \quad (2)$$

Ἄρα, ἐπειδὴ $X = \Pi + K$, οἱ τέταρτοι ὄροι τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) θέλουσιν εἶναι ἴσοι, τουτέστι θέλομεν ἔχει $\chi^2 = A^2 + B^2$.

Ἐπειτα ἐντεῦθεν ὅτι ἡ ζητούμενη ὁμόλογος τῇ A ἢ τῇ B πλευρᾷ τοῦ πολυγώνου X εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου, τοῦ ὁποίου A καὶ B εἶναι αἱ σχηματίζουσαι τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ γωνίαν πλευραί.

Κατασκευάζοντες ὡς προεξετέθη ἐπὶ τῆς οὕτως εὐρεθείσης πλευρᾶς χ πολύγωνον ὅμοιον μὲ ἐν τῶν δεδομένων, θέλομεν σχηματίσει πολύγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεδομένων ὁμοίων πολυγώνων.

Ἐάν δ' ὑποθέσωμεν X ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν $\Pi - K$ τῶν δύο δεδομένων πολυγώνων, ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας (1) πορίζομεθα τὴν ἐξῆς

$$\Pi : \Pi - K = A^2 : A^2 - B^2. \quad (3)$$

Ἀλλ' ἔχομεν ὡσαύτως

$$\Pi : X = A^2 : \chi^2. \quad (4)$$

Ἄρα, ἐπειδὴ $X = \Pi - K$, οἱ τέταρτοι ὄροι τῶν ἀναλογιῶν (3) καὶ (4) θέλουσιν εἶναι ἴσοι, τουτέστι θέλομεν ἔχει $\chi^2 = A^2 - B^2$. Ἡ ζητούμενη λοιπὸν πλευρὰ χ εἶναι ἡ μίξ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗτινος ἡ ὑποτείνουσα εἶναι ἴση μὲ τὴν A καὶ ἡ ἄλλη αὐτοῦ πλευρὰ ἴση μὲ τὴν B .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 14.

Νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον μὲ δεδομένον καὶ ἔχον πρὸς αὐτὸ τὸν αὐτὸν λόγον, ὅτ' δεδομένη τις εὐθεῖα μ πρὸς δεδομένην τιὰ εὐθεῖαν ν .

Ἐστω Π ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δεδομένου σχήματος καὶ A μία ὁποια-

δήποτε τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Ὡς παραστήσωμεν διὰ X τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ζητουμένου σχήματος καὶ διὰ χ τὴν ὁμόλογον τῇ A πλευρὰν αὐτοῦ.

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θέλομεν ἔχει

$$X : \Pi = \mu : \nu. \quad (1)$$

Ἀλλ', ἐπειδὴ τὰ σχήματα X καὶ Π εἶναι ὅμοια, θέλομεν ἔχει

$$X : \Pi = \chi^2 : A^2. \quad (2)$$

Ἀρα, ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τὸν λόγον $X : \Pi$ κοινόν, θέλομεν ἔχει

$$\chi^2 : A^2 = \mu : \nu.$$

Ἡ πλευρὰ λοιπὸν χ τοῦ ζητουμένου σχήματος, ἡ ὁμόλογος τῇ A εὐρίσκεται διὰ τοῦ 11 προβλήματος, τὸ δὲ ζητούμενον πολυγώνον κατασκευάζεται διὰ τοῦ 12.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 15.

Νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον μὲ δεδομένον καὶ ἰσοδύναμον μὲ ἕτερον, ἐπίσης δεδομένον.

Ἐστω Π ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δεδομένου σχήματος, πρὸς ὃ τὸ ζητούμενον πρόκειται νὰ ᾖ ὅμοιον, καὶ A πλευρὰ τις αὐτοῦ. Ὡς παραστήσωμεν διὰ K τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐτέρου δεδομένου σχήματος καὶ διὰ χ τὴν ὁμόλογον τῇ A πλευρὰν τοῦ ζητουμένου.

Ἐνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων, αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν Π καὶ K θέλουσιν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν A καὶ χ , τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$\Pi : K = A^2 : \chi^2. \quad (2)$$

Ἄν παραστήσωμεν διὰ M τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἔχοντος ἐπιφάνειαν Π , καὶ διὰ N τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἔχοντος ἐπιφάνειαν K (πρόβλ. 9, σχόλ.), θέλομεν ἔχει $M^2 = \Pi$ καὶ $N^2 = K$. Ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὴν ἀναλογίαν (1) ἀντὶ τοῦ Π καὶ K τὰ ἴσα αὐτοῖς M^2 καὶ N^2 , αὕτη γίνεται

$$M^2 : N^2 = A^2 : \chi^2,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα κατὰ γνωστὸν Ἀριθμητικὸν θεώρημα

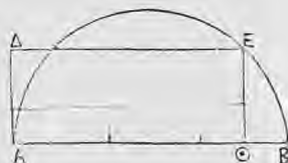
$$M : N = A : \chi.$$

Ἡ ζητούμενη λοιπὸν πλευρὰ χ , ἡ ὁμόλογος τῇ A , εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν εὐθειῶν M , N , A , καὶ τὸ ἐπ' αὐτῆς κατασκευαζόμενον ὅμοιον μὲ τὸ Π σχῆμα θέλει εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἔχον ἐπιφάνειαν K .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 16.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον τετράγωνον Γ καὶ τοῦ ὁποῖου τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν νὰ ἰσοῦται μὲ δεδομένην εὐθεΐαν AB .

Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῆς AB , ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμιπερίφερειαν, εἰς τὸ σημεῖον A ἄγομεν τὴν AD κάθετον ἐπὶ τῆς AB καὶ λαμβάνομεν AD ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου τετραγώνου Γ . Ἐκ τοῦ ἄκρου D τῆς AD ἄγομεν τὴν DE παράλληλον τῇ AB καὶ ἐκ τοῦ σημείου E , ἐνθα ἡ ἄγομένη παράλληλος τέμνει τὴν ἡμιπερίφερειαν, καταβιβάζομεν τὴν EO κάθετον ἐπὶ τῆς AB .



Λέγω ὅτι AO καὶ OB θέλουσιν εἶναι αἱ δύο προσκειμέναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

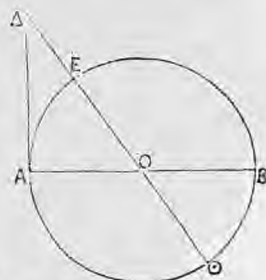
Διότι ἔχομεν ἀφ' ἑνὸς $AO + OB = AB$, καὶ ἀφ' ἑτέρου, κατὰ τὸ πόρισμα 2 τῆς 27 προτάσεως, $AO \times OB = EO^2 = AD^2 = \Gamma$.

Σχόλιον. Διὰ νὰ ᾖναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει ἡ ἄγομένη τῇ AB παράλληλος DE νὰ συναπαντᾷ τὴν περίφερειαν, ἢ τοῦλάχιστον νὰ ἐφάπτεται αὐτῆς, τουτέστιν ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου τετραγώνου Γ δὲν πρέπει νὰ ᾖναι μεγαλειτέρα τοῦ ἡμίσους τῆς AB .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 17.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον τετράγωνον καὶ τοῦ ὁποῖου ἡ διαφορά τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν νὰ ἰσοῦται μὲ δεδομένην εὐθεΐαν AB .

Ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας AB , ὡς διαμέτρου, γράφομεν περίφερειαν, εἰς τὸ ἄκρον A αὐτῆς ἄγομεν τὴν AD κάθετον ἐπὶ τῆς AB , λαμβάνομεν AD ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου τετραγώνου Γ , καὶ ἐνώνομεν τὸ A μὲ τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου διὰ τῆς τεμνύσεως ΔO . Λέγω ὅτι ΔO καὶ OE θέλουσιν εἶναι αἱ προσκειμέναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.



Διότι ἔχομεν ἀφ' ἑνὸς ἐκ κατασκευῆς $\Delta O - OE = EO = AB$, καὶ ἀφ' ἑτέρου κατὰ τὴν 33 πρότασιν $\Delta O \times OE = AD^2 = \Gamma$.

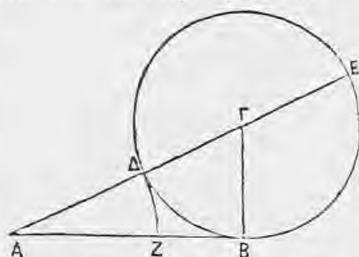
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 18.

Νὰ διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα AB εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον· τουτέστιν εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεγαλύτερον τούτων τὰ ἦναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης εὐθείας AB καὶ τοῦ ἑτέρου μέρους.

Εἰς τὸ ἄκρον B τῆς δεδομένης εὐθείας AB ὑψώνομεν $B\Gamma$ κάθετον ἐπ'

αὐτῆς, λαμβάνομεν $B\Gamma = \frac{1}{2}AB$, καὶ

ἐκ τοῦ σημείου Γ , ὡς ἐκ κέντρου, καὶ με ἀκτῖνα ΓB γράφομεν περιφέρειαν. Ἀγομεν τὴν $A\Gamma$, ἥτις τέμνει



τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Δ , καὶ λαμβάνομεν $AZ = A\Delta$. Λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα AB διαιρεῖται εἰς τὸ σημεῖον Z εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει $AB : AZ = AZ : ZB$.

Πρὸς ἀποδείξιν τούτου προσεβάλλομεν τὴν $A\Gamma$ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ ἐκ δευτέρου τὴν περιφέρειαν. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα AB εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον B τῆς ἀκτίνος $B\Gamma$, εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν (προτ. 33).

$$AE : AB = AB : A\Delta$$

ἐξ ἧς κατὰ γινωστὸν Ἀριθμητικὸν θεώρημα πορίζομεθα

$$AE - AB : AB = AB - A\Delta : A\Delta. \quad (1)$$

Ἀλλ' ἔχομεν ἐκ κατασκευῆς $A\Delta = 2B\Gamma = AB$. Ἀρα $AE - AB = AE - A\Delta = A\Delta = AZ$. Ὡταύτως $AB - A\Delta = AB - AZ = ZB$. Ἀντιστάγοντες λοιπὸν εἰς τὴν ἀναλογίαν (1) ἀντὶ τῶν $AE - AB$ καὶ $AB - A\Delta$ τὰ ἴσα τούτοις AZ καὶ ZB θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$AZ : AB = ZB : AZ,$$

ἥτις διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν ὄρων αὐτῆς γίνεται $AB : AZ = AZ : ZB$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἄν παραστήσωμεν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν AB δι' α , θέλομεν ἔχει $A\Gamma = \sqrt{AB^2 + B\Gamma^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4}} = \sqrt{\frac{5\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{5}$, καὶ ἐ-

πομένως $AZ = A\Delta = A\Gamma - \Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}\sqrt{5} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Λοιπὸν

τὸ μεγαλύτερον μέρος AZ τῆς εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον διαιρέσεως εὐθείας α παρίσταται διὰ τύπου $\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΟΥ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ.

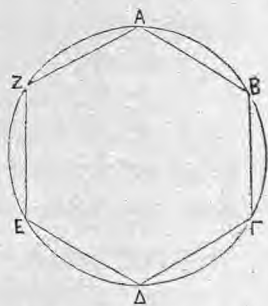
ΟΡΙΣΜΟΙ.

Πᾶν ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον πολύγωνον καλεῖται *κανονικόν πολύγωνον*.

Ἐπάρχουσι κανονικὰ πολύγωνα παντός ἀριθμοῦ πλευρῶν.

Διότι, ἐὰν φαντασθῶμεν περιφέρειάν τινα διηρημένην εἰς μ ἴσα μέρη, καὶ ἐνώσωμεν δι' εὐθειῶν τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως A, B, Γ , κτλ. θέλομεν σχηματίσει τὸ ἔχον μ πλευρὰς κανονικὸν πολύγωνον. Τὸ πολύγωνον θέλει ἔχει μ πλευρὰς, διότι μ σημεῖα ἐλήφθησαν ἐπὶ τῆς περιφερείας· θέλει εἶναι κανονικόν, διότι ἔχει τὰς πλευρὰς αὐτοῦ $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ κτλ. ἴσας, ὡς ὑποτείνουσαι τόξα ἴσα, καὶ τὰς γωνίας αὐτοῦ A, B, Γ , κτλ. ἴσας, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς ἴσα τμήματα.

Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι τὸ ἐκ τριῶν πλευρῶν συνιστάμενον κανονικὸν πολύγωνον, τὸ τετράγωνον, τὸ ἐκ τεσσάρων, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν κανονικὰ πολύγωνα εἶναι σχήματα ὅμοια.

Ἐστῶσαν παραδείγματα
 $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$. Τὸ ἄθροισμα τῶν
 γωνιῶν ἑκατέρου εἶναι τὸ
 αὐτὸ καὶ ἴσον μὲ ὀκτὼ
 ὀρθὰς (πρότ. 30, Α'). Ἡ
 γωνία λοιπὸν Λ εἶναι τὸ
 ἕκτον μέρος ὀκτὼ ὀρθῶν
 γωνιῶν, ὡσαύτως καὶ ἡ
 γωνία α . Λοιπὸν αἱ δύο
 γωνίαι Λ , α εἶναι ἴσαι,
 $\Delta = \delta$, κτλ.

Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ
 αἱ $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta E$, κτλ.
 $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta, \delta\epsilon$, κτλ., ἐπομένως

$$AB : \alpha\beta = BG : \beta\gamma$$

Τὰ περὶ τῶν ὁ λόγος λόγος
 καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν

Πόρισμα. Αἱ περίμετροι
 αριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς
 αἱ δὲ ἐπιφάνειαι τῶν ὡς

Σχόλιον. Ἡ γωνία
 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν
 γώνου (πρότ. 32, Α').

ΠΡΟ

*Ἡ δὲ κανονικὴ πολύγωνος
 γράφη εἰς κύκλον.*

Ἐστῶ $AB\Gamma\Delta E$ κτλ. τῶν
 φαντασθῶμεν περιφέρειαν
 Ἐστῶ O τὸ κέντρον αὐτῆς
 βαζομένην κάθετος. Ἀγορεύω

(*) Εἰς τὰ ὅμοια κανονικὰ
 ῥιμετροὶ αὐτῶν εἶναι πρὸς
 καὶ αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ὡς
 ὅποιαδήποτε πλευρὰ τοῦ ἐν
 λόγος πλευρὰ μιᾶς ὁποιασδήποτε

εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ 4° . Ἄρα ἡ τιμὴ ἐκάστης εὐρίσκεται διαιρουμένων 4° διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Σχόλιον 2. Δὲ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν πολύγωνον ἄριθμος τίνος πλευρῶν εἰς δεδομένην περιφέρειαν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας πλευρὰς πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ ἐγγραφισόμενον πολύγωνον (ὄρα βιβλ. Δ', ὅρ.).

Σχόλιον 3. Ἐὰν εἰς τόξον τι ἐγγράψωμεν σειρὰν ἴσων χορδῶν τὸ οὕτως αποτελούμενον σχῆμα καλεῖται μέρος κανονικοῦ πολυγώνου, ἢ προτιμότερον κανονικῶς τετρασμένη εὐθεῖα, διότι ἔχει τὰς κορυφὰς τῶν κανονικῶν πολυγώνων ιδιότητας, τουτέστιν ἔχει τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας, εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον· ἀλλὰ δὲν ἀποτελεῖ μέρος κανονικοῦ πολυγώνου, εἰμὴ ὅταν τὸ ὑπομείξῃ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ὑποτεινόμενον τόξον ᾗναι πολλοστὸν μέρος τῆς περιφερείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δεδομένην περιφέρειαν τετράγωνον.

Ἀγομεν τὰς διαμέτρους ΑΓ καὶ ΒΔ καθέτους ἐπ' ἀλλήλων, καὶ ἐνόνομεν τὰ ἄκρα αὐτῶν Α, Β, Γ καὶ Δ. Λέγω ὅτι τὸ οὕτω σχηματιζόμενον σχῆμα ΑΒΓΔ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον ἐγγεγραμμένον τετράγωνον.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ, κτλ. εἶναι ἴσαι, αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΒΓ κτλ. εἶναι ἴσαι· πρὸς τούτοις αἱ γωνίαι Α, Β, Γ καὶ Δ εἶναι ὀρθαί, διότι ἐκάστη τούτων εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμιπερίφειραν. Λοιπὸν τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον τετράγωνον.

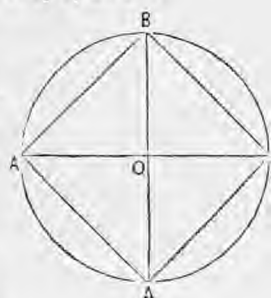
Σχόλιον. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΟΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα $\overline{ΒΓ}^2 = 2\overline{ΟΓ}^2$, ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν ἀναλογίαν

$$\overline{ΒΓ}^2 : \overline{ΟΓ}^2 = 2 : 1,$$

ἐξ ἧς

$$\overline{ΒΓ} : \overline{ΟΓ} = \sqrt{2} : 1.$$

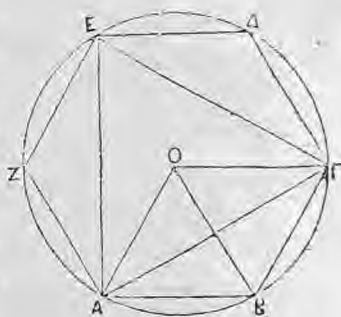
Λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ὥς ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 πρὸς τὴν 1· τουτέστι μεγέθυς ἀτόμμετρα.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δεδομένην περιφέρειαν κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ τρίγωνον ἰσοπλευρον.

* Ἀξιοϋθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον, καὶ ἔστω AB μία τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου. Ἐὰν ἀξωμεν τὰς ἀκτῖνας AO καὶ OB , λέγω ὅτι τὸ προκύπτον τρίγωνον AOB θέλει εἶναι ἰσοπλευρον.



Διότι ἡ γωνία AOB εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν, ἥτοι ἔχομεν $AOB = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς, ἐπο-

μένως αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι ABO καὶ BAO τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἰσοῦνται μὲ $2^{\circ} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς, καὶ ἐπειδὴ εἶναι

ἴσαι, ἑκατέρα τούτων $= \frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ABO εἶναι ἰσογώνιον καὶ ἐπομένως ἰσοπλευρον. Λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα.

Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι διὰ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν, πρέπει νὰ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ἑξάκις ἐπὶ τῆς περιφέρειας, οὕτω δὲ θέλομεν ἐπανέλθει εἰς τὸ ἐξ οὗ ἀνεχωρήσαμεν σημεῖον.

Ἐὰν ἐνώσωμεν ἐναλλάξ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου $ABΓΔΕΖ$, θέλομεν σχηματίσει τὸ ἰσοπλευρον τρίγωνον $ΑΓΕ$.

Σχόλιον. Τὸ τετράπλευρον $ΑΒΓΟ$ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ μάλιστα ῥομβοειδές, διότι $AB = BΓ = ΓΟ = ΑΟ$. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων $ΑΓ$ καὶ $ΟΒ$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν (πρότ. 15, Γ'. πόρ.), τουτέστιν ἔχομεν

$$\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΒΟ}^2 = \overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 + \overline{ΓΟ}^2 + \overline{ΑΟ}^2 = 4\overline{ΑΒ}^2 = 4\overline{ΒΟ}^2.$$

Ἀφαιροῦντες δ' ἑκατέρωθεν $\overline{ΒΟ}^2$ θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\overline{ΑΓ}^2 = 3\overline{ΒΟ}^2,$$

εξ ἧς $\overline{ΑΓ} : \overline{ΒΟ} = 3 : 1$, ἐπομένως $ΑΓ : ΒΟ = \sqrt{3} : 1$.

Λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλευροῦ τριγώνου εἶναι πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου, ὡς ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3 πρὸς τὴν 1.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δεδομένον κύκλον κανονικὸν δεκάγωνον.

Ἐς ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον, καὶ ἔστω $ΑΒ$ μία τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου. Ἡ κεντρικὴ αὐτοῦ γωνία $ΑΟΒ$ θέλει εἶναι ἴση μετὰ $\frac{4}{10}$ ἢ μετὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς (πρώτ. 2, σχόλ.

1), ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου $ΟΑΒ$ θέλει εἶναι ἴσον

μετὰ 2° ἢ μετὰ $\frac{8}{5}$ τῆς ὀρθῆς, καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον $ΟΑΒ$ εἶναι ἰσοσκελὲς, ἑκάτερά τῶν πρὸς τὴν βᾶσιν γωνιῶν $ΟΑΒ$ καὶ $ΟΒΑ$ θέλει εἶναι ἴση μετὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς, τουτέστι διπλασία τῆς κεντρικῆς $ΑΟΒ$.

Ἐὰν τῶρα διὰ τῆς εὐθείας $ΒΜ$ διαιρέσωμεν τὴν γωνίαν $ΟΒΑ$ εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ προκύπτοντα δύο τρίγωνα $ΟΜΒ$ καὶ $ΒΜΑ$ θέλουσιν εἶναι ἰσοσκελῆ, τὸ μὲν $ΟΜΒ$, διότι ἑκατέρω τῶν γωνιῶν $ΜΟΒ$ καὶ $ΟΒΜ$ εἶναι ἴση μετὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς, τὸ δὲ $ΒΜΑ$, διότι ἑκατέρω τῶν γωνιῶν $ΒΜΑ$ καὶ $ΜΑΒ$ εἶναι ἴση μετὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει $ΟΜ = ΜΒ = ΑΒ$.

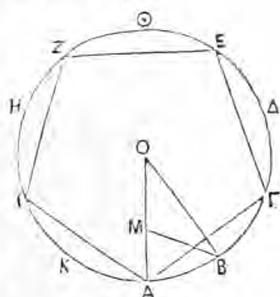
Ἄλλ' ἐπειδὴ ἡ $ΒΜ$ διαιρεῖ τὴν γωνίαν $ΟΒΑ$ εἰς δύο ἴσα μέρη, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 18 προτάσει τοῦ Γ' βιβλίου,

$$ΟΒ : ΑΒ = ΟΜ : ΜΑ$$

ἢ, ὅπερ ταὐτὸν, $ΟΑ : ΟΜ = ΟΜ : ΜΑ$,

τουτέστιν ἡ ζητούμενη πλευρὰ $ΑΒ$ ἢ $ΟΜ$ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι ἴση μετὰ τὸ μεγαλύτερον μέρος $ΟΜ$ τῆς ἀκτίνος $ΟΑ$ διαιρεθείσης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Παρατήρησις. Ἄν παραστήσωμεν δι' α τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου κατὰ τὰ

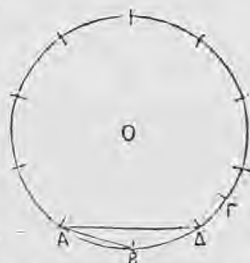


ἐν τῷ σχολίῳ τοῦ 18 προβλήματος τοῦ Γ' βιβλίου εὐρεθέντα θέλει εἶναι ἴση μὲ

$$\frac{\alpha}{2} (\sqrt{5}-1).$$

Πρόσμα 1. Ἐάν ἐνώσωμεν ἐναλλάξ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου, θέλομεν σχηματίσει τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πεντάγωνον ΑΓΕΖΙ.

Πρόσμα 2. Ἐπὶ AB ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου, καὶ ΑΔ ἡ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου. Τὸ τόξον AB θέλει εἶναι τὸ δέκατον τῆς ὅλης περιφερείας, τὸ δὲ τόξον ΑΔ τὸ ἑκτον, ἐπομένως τὸ τόξον ΒΔ = ΑΔ - ΑΒ = $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ μέρος τῆς



περιφερείας. Ἡ χορδὴ λοιπὸν ΒΔ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαπενταγώνου.

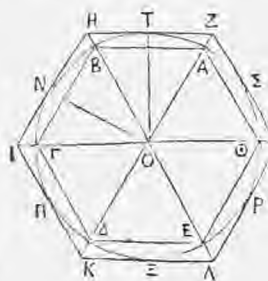
Σχόλιοι. Ἐάν διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη τὰ ὑπὸ τῶν πλευρῶν ἐγγεγραμμένου τινὸς κανονικοῦ πολυγώνου ὑποτεινόμενα τόξα, καὶ ἀζώμεν τὰς χορδὰς τῶν ἡμιτόξων, θέλομεν σχηματίσει νέον κανονικὸν πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Τὸ τετράγωνον λοιπὸν δύναται νὰ χρησιμεύσῃ πρὸς ἐγγράφην τῶν κανονικῶν πολυγώνων τῶν 8, 16, 32, κτλ. πλευρῶν. Ὡσαύτως διὰ τοῦ ἑξαγώνου δύναμεθα νὰ ἐγγράψωμεν τὰ 12, 24, 48, κτλ. πλευρὰς ἔχοντα κανονικὰ πολύγωνα· διὰ τοῦ δεκαγώνου τὰ 20, 40, 80, κτλ. πλευρῶν, διὰ τοῦ δεκαπενταγώνου τὰ 30, 60, 120, κτλ. πλευρῶν (*).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δεδομένου κανονικοῦ τριῶς ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ΑΒΓΔΕΘ νὰ περιγράψωμεν εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν πολύγωνον ὁμοιον.

(*) Ἐπὶ πολὺν χρόνον ἐνόμιζον, ὅτι τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι τὰ μόνα πολύγωνα, ἅτινα δύναται τις νὰ ἐγγράψῃ διὰ τῶν τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας μέσων, ἢ, ὅπερ ταῦτό, διὰ τῆς λύσεως πρωτοβαθμίων καὶ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων· ἀλλ' ὁ Κ. Γάους (Gauss) ἀπέδειξεν, ὅτι δύναται τις νὰ ἐγγράψῃ δι' ὁμοίων μέσων τὸ ἐκ δεκαεπτὰ πλευρῶν συντιθέμενον κανονικὸν πολύγωνον, καὶ ἐν γένει τὸ ἐκ $2^n + 1$ πλευρῶν, ἀρκεῖ μόνον ὁ ἀριθμὸς $2^n + 1$ νὰ ᾖ ἀριθμὸς πρῶτος.

Εἰς τὰ σημεῖα Η, Ν, Τ, Σ, κτλ. μέσα τῶν τόξων ΔΓ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΘ, κτλ. ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένης ΙΚ, ΙΗ, ΗΖ, ΖΜ, κτλ. Αὗται θέλουσιν εἶναι κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 10 προτάσει τοῦ Β' βιβλίου, ἀμοιβαίως παράλληλοι ταῖς χορδαῖς ΓΔ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΘ, κτλ., τὸ δὲ ἐκ τῆς συναπαντήσεως αὐτῶν σχηματιζόμενον πολύγωνον ΖΗΙΚΛΜ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον περιγεγραμμένον, τὸ ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ ΑΒΓΔΕΘ.



Διότι ἐν πρώτοις, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΙΚ, ΙΗ, ΗΖ, ΖΜ, κτλ. ναι ἀμοιβαίως παράλληλαι μὲ τὰς πλευρὰς ΓΔ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΘ, κτλ. καὶ ἔχουσι καὶ τὴν αὐτὴν φορὰν, αἱ γωνίαι ΚΙΗ, ΙΗΖ, ΗΖΜ, κτλ. τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου ΚΙΗΖΜΑ, θέλουσιν εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας γωνίας τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ΑΒΓΔΕΘ.

Δεύτερον, ἐὰν ἀξῶμεν τὴν ΟΗ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΙΗ, ΟΗΤ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ΟΗ κοινὴν καὶ τὰς πλευρὰς ΗΝ καὶ ΗΤ ἴσας, ὡς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐξωτερικοῦ σημείου Η ἀχθείσας (πρόβλ. 13, σχόλιον, Β'). Λοιπὴ γωνία ΗΟΝ εἶναι ἴση τῇ ΗΟΤ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΝΟΒ γωνία εἶναι ἴση τῇ ΒΟΤ, διότι τὰ τόξα ΝΒ καὶ ΒΤ εἶναι ἴσα, ὡς τὰ ἡμισὴ τῶν τόξων ΓΒ καὶ ΒΑ. Ἀρα αἱ δύο εὐθεῖαι ΟΒ καὶ ΟΗ ταυτίζονται τοι τὸ σημεῖον Β κεῖται ἐπὶ τῆς ΟΗ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ σημεῖα Γ, Α, Θ, κτλ. κεῖνται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΟΙ, ΟΖ, ΟΜ, κτλ. τοῦ δὲ τεθέντος, εἰς τὰ τρίγωνα ΟΙΗ, ΟΗΖ, ΟΖΜ, κτλ. ἕνεκα παραλλήλων ΓΒ, ΒΑ, ΑΘ, κτλ. θέλομεν ἔχει τὰς ἀναλογίας

$$ΙΗ : ΒΓ = ΟΗ : ΟΒ \text{ καὶ } ΟΗ : ΟΒ = ΗΖ : ΒΑ, \text{ κτλ.}$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα, ἕνεκα τῶν κοινῶν λόγων ΟΗ : ΟΒ καὶ ΟΖ : ΟΒ

$$ΙΗ : ΒΓ = ΗΖ : ΒΑ = ΖΜ : ΑΘ = \text{κτλ.}$$

Ἀλλὰ ΒΓ = ΒΑ = ΑΘ = κτλ. Ἀρα καὶ ΙΗ = ΗΖ = ΖΜ = κτλ. πὸν τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ἔχει καὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ πρὸς ἀλλήλας. Λοιπὸν εἶναι κανονικὸν καὶ ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.

Πόρισμα 1. Ἀντιστρόφως, ἂν μᾶς ἐδίδοτο τὸ περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον ΖΗΙΚ, κτλ. καὶ μᾶς ἐζητεῖτο νὰ ἐγγράψωμεν δὲ τοῦ τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ΑΒΓΔ, κτλ., ἡθέλομεν πρὸς τὸ

ἑνώσει τὸ κέντρον O μὲ τὰς κορυφὰς Z, H, I , κτλ. τοῦ δεδομένου πολυγώνου διὰ τῶν εὐθειῶν OZ, OH, OI , κτλ. αἵτινες συναπαντῶσι τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ , κτλ. καὶ ἀκολουθῶς ἑνώσει τὰ σημεῖα ταῦτα διὰ τῶν χορδῶν $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$, κτλ. Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ οὕτω σχηματιζόμενον πολύγωνον $AB\Gamma\Delta$ κτλ. θέλει εἶναι κανονικόν καὶ ὁμοιον τῷ περιγεγραμμένῳ $ZHIK$ κτλ. Ἡδυνάμεθα ὡσαύτως νὰ ἐγγράψωμεν τὸ ζητούμενον πολύγωνον ἐνόνοντες τὰ σημεῖα τῆς ἐπαρχῆς T, N, Π , κτλ. διὰ τῶν χορδῶν $TN, \Pi H$, κτλ.

Πόρισμα 2. Λοιπὸν δύναται τις νὰ περιγράψῃ εἰς δεδομένον κύκλον τόσα κανονικὰ πολύγωνα, ὅσα καὶ νὰ ἐγγράψῃ, καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὰ ἐμβαδὸν παρὶς κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.

Ἐστω, π. χ. τὸ κανονικόν πολύγωνον $ZHIK$ κτλ. καὶ O τὸ κέντρον αὐτοῦ. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ κέντρον O μὲ τὰς κορυφὰς Z, H, I , κτλ. τοῦ δεδομένου πολυγώνου, θέλουσι σχηματισθῇ τόσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα ZHO καὶ HOI , κτλ. ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον. Ἐκαστον δὲ τῶν τριγώνων τούτων ZOH καὶ HOI , κτλ. θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὴν βάσιν αὐτοῦ ZH καὶ HI κτλ. ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους τοῦ TO καὶ ON κτλ. Ἀλλὰ $TO = ON = \kappa\tau\lambda.$ Ἀρα τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριγώνων, ἥτοι ὁλόκληρον τὸ κανονικόν πολύγωνον, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων ZH καὶ HI , κτλ. ἥτοι τὴν περίμετρον αὐτοῦ, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ $\frac{1}{2} OT$, τουτέστιν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου, ἥτοι

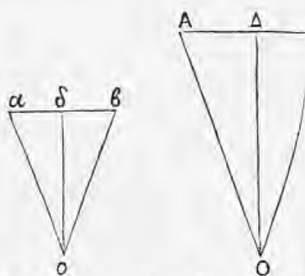
$$\text{ἐμβ. πολυγ. } ZHIK \text{ κτλ.} = (ZH + HI + \kappa\tau\lambda.) \times \frac{1}{2} OT.$$

Σχόλιον. Ἡ ἀκτίς OT τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου δὲν εἶναι ἄλλο τι, εἰμὴ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καταβιβαζομένη κάθετος. Ἡ ἀκτίς αὕτη καλεῖται ἐνίοτε καὶ ἀπόστημα τοῦ πολυγώνου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αἱ μὲν περίμετροι τῶν ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων ἢ τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς αὐτὰ κύκλων, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν αὐτῶν ἀκτίνων.

Ἐστῶσαν AB καὶ $αβ$ δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος κανονικῶν ὁμοίων πολυγώνων, O δὲ καὶ ο τὰ κέντρα αὐτῶν. Ἄν ἄξωμεν τὰς εὐθείας OA , OB , $οα$, $οβ$ καὶ τὰς κάθετους OD , $οδ$, αἱ μὲν OA , $οα$ θέλουσιν εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων εἰς τὰ πολύγωνα κύκλων, αἱ δὲ κάθετοι OD , $οδ$ αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων.



Τούτων τεθέντων, ἂς παραστήσωμεν διὰ Π καὶ E τὴν περίμετρον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἔχοντος AB πλευρὰν κανονικοῦ πολυγώνου, καὶ διὰ π καὶ e τὴν περίμετρον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἔχοντος $αβ$ πλευρὰν ὁμοίου κανονικοῦ πολυγώνου. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ προτάσει τοῦ Γ' βιβλίου θέλομεν ἔχει τὰς ἀναλογίας

$$\Pi : \pi = AB : αβ \quad (1)$$

$$E : e = AB^2 : αβ^2 \quad (2)$$

Ἄλλ', ἐπειδὴ τὰ δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα AOB καὶ $αοβ$, ὡς καὶ τὰ ὀρθογώνια OAD καὶ $οαδ$ εἶναι ὅμοια, διότι αἱ κεντρικαὶ αὐτῶν γωνίαι AOB καὶ $αοβ$ εἶναι ἴσαι (πρότ. 2, σχόλ. 1), θέλομεν ἔχει τὰς ἀναλογίας

$$AB : αβ = OA : οα, \quad (3)$$

$$AB : αβ = OA : οδ, \quad (4)$$

ἐξ ὧν τοριζόμεθα

$$AB : αβ = OA : οα \quad (5)$$

$$AB : αβ = OA : οδ. \quad (6)$$

Ἄν παραβάλλωμεν τὰς ἀναλογίας (1), (3) καὶ (4), ἔνεκα τοῦ κοινοῦ αὐτῶν λόγου $AB : αβ$, θέλομεν ἔχει

$$\Pi : \pi = OA : οα = OA : οδ$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως.

Ἐν δὲ παραβάλλωμεν τὰς ἀναλογίας (2), (5) καὶ (6), ἕνεκα τοῦ κοινοῦ αὐτῶν λόγου $\overline{AB} : \overline{αβ}^2$, θέλωμεν ἔχει

$$E : \varepsilon = \overline{OΛ}^2 : \overline{οα}^2 = \overline{OΔ}^2 : \overline{οδ}^2$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως. Λοιπὸν κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. Καλεῖται μεταβλητὴ ποσότης πᾶσα ποσότης, ἥτις λαμβάνει θεωρουμένη κατὰ τινὰ τρόπον διαρόρους καταστάσεις μεγέθους.

2. Ὅριον μεταβλητῆς τινος ποσότητος καλεῖται ποσότης τις σταθερά, ἀμετάβλητος, ἥς ἡ μεταβλητὴ δύναται νὰ προσεγγίσῃ ὅσον τις θέλει, χωρὶς ποτε νὰ δυνήθῃ νὰ τὴν φθάσῃ ἢ νὰ κατασταθῇ ἴση μὲ αὐτήν.

Εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ Γεωμετρίαν ἀπαντῶμεν πολυάρθμα παρδείγματα μεταβλητῶν ποσοτήτων, τῶν ὁποίων δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὑρωμεν τὰ ὅρια, πρὸς ἃ αὐταὶ τείνουσι.

Γνωρίζομεν π. χ. ὅτι ἡ τιμὴ μιᾶς τῶν γωνιῶν κανονικοῦ τινος πολυγώνου μ πλευρῶν εὐρίσκεται διαιρουμένου τοῦ ἄθροίσματος τῶν ἐσωτερικῶν αὐτοῦ γωνιῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ μ πλευρᾶς ἔχοντος πολυγώνου εἶναι, κατὰ τὴν 32 πρότασιν τοῦ Α' βιβλίου, 2 (μ—2), ἐπομένως ἡ τιμὴ μιᾶς τούτων Α θέλει εἶναι

$$\frac{2(\mu-2)}{\mu}, \text{ ἢ } \frac{2\mu}{\mu} - \frac{4}{\mu}, \text{ ἢ } 2 - \frac{4}{\mu}.$$

Ἀλλ', ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς μ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου αὐξάνει, βλέπομεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{4}{\mu}$ ἐλαττούται, καὶ ἐπομένως ἡ τιμὴ

$2 - \frac{4}{\mu}$ τῆς γωνίας Α τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου αὐξάνει. Ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν μ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου

ἀρκούντως μέγαν, ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{4}{\mu}$ νὰ κατασταθῇ μικρότερον παντὸς δεδομένου ποσοῦ, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ὅριον τῶν διαδοχικῶν τιμῶν, ἃς ἡ γωνία κανονικοῦ τινος πολυγώνου λαμβάνει, αὐξανόμενου ἐπ' ἄπειρον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, εἶναι ἴσον μὲ 2.

Ὡσαύτως, ἐὰν λάβωμεν τὸ μέσον

γ εὐθείας τινὸς ΑΒ, ἔπειτα τὸ μέσον



γ' τῆς γΒ, ἀκολούθως τὸ μέσον γ'' τῆς γ'Β, καὶ οὕτω καθεξῆς, εἶναι

φανερὸν ὅτι ἡ ὅλη εὐθεία AB θέλει εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει μεταβλητὴ ποσότης $A\gamma, A\gamma', A\gamma''$ κτλ. διότι ἡ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς AB διαφορὰ δύναται νὰ κατασταθῇ μικρότερα παντὸς δεδομένου μεγέθους, ὅσον μικρὸν καὶ ἀν' ὑποθεθῇ, ἀλλ' οὐδέποτε μηδὲν διότι, ἀν' τὸ ἥμισυ ὑπολοίπου τινὸς ἦτο μηδὲν, καὶ τὸ ἄλλο ἥμισυ αὐτοῦ θὰ ἦτο μηδὲν, ἐπομένως διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὅλον τὸ πρὸ αὐτοῦ ὑπόλοιπον, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς ὅλης εὐθείας AB ἥτις ἔπρεπε νὰ ἦναι μηδὲν, ὅπερ προφανῶς ἄτοπον.

Ἠδυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν καὶ ἄλλα οὐκ ὀλίγα παραδείγματα πρὸς ἀκριβεστέραν κατάληψιν τῆς ἐννοίας τοῦ ὁρίου μεταβλητῆς τιμῆς ποσότητος, ἀλλὰ νομιζόμεν τοῦτο περιττὸν ἐνταῦθα, καθότι θέλει μὲν ἀπαντήσῃ μετ' ὀλίγον ἐπαρκῆ τοιαῦτα.

3. Ἐάν ἡ ποσότης A ἔχῃ δι' ὄριον τὴν A , ἡ B τὴν B , ἡ γ τὴν Γ εἶναι φανερόν ὅτι τὸ γινόμενον $A \times B \times \gamma$ θέλει ἔχει δι' ὄριον αὐτὸ τὸ γινόμενον $A \times B \times \Gamma$, τοῦθ' ὅπερ γράφεται ὡς ἑξῆς

$$\text{ὅρ. } A \times B \times \gamma = A \times B \times \Gamma.$$

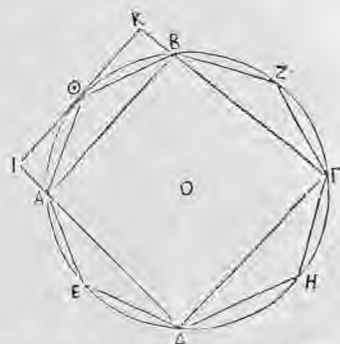
Διότι, ἀν' τὸ γινόμενον $A \times B \times \gamma$ εἴχῃ δι' ὄριον γινόμενόν τι Π μικρότερον τοῦ γινομένου $A \times B \times \Gamma$, δυνάμεθα ν' ἀποσυνθίσωμεν τὸ γινόμενον Π εἰς τρεῖς παράγοντας A', B', Γ' ταιούτους, ὥστε $A' < A, B' < B, \Gamma' < \Gamma$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ποσότης A ἔχει δι' ὄριον τὴν A , αὕτη τείνουσα πρὸς τὸ ὄριον αὐτῆς θέλει κατασταθῇ ἀναγκαίως μεγαλειτέρα τῆς A' ὡσάυτως καὶ ἡ B , τείνουσα πρὸς τὸ ὄριον αὐτῆς B , θέλει κατασταθῇ ἀναγκαίως μεγαλειτέρα τῆς B' , καὶ ἡ γ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον μεγαλειτέρα τῆς Γ' , ἐπομένως καὶ τὸ γινόμενον $A \times B \times \gamma$, τείνων πρὸς τὸ ὄριον αὐτοῦ, θέλει γίνεαι μεγαλιέτερον τοῦ $A' \times B' \times \Gamma'$. Ἀδύνατον λοιπὸν τὸ ὄριον τοῦ γινομένου $A \times B \times \gamma$ τῶν ποσοτήτων A, B, γ ἦναι μικρότερον τοῦ γινομένου $A \times B \times \Gamma$ τῶν ὁρίων αὐτῶν A, B, Γ . Ἀλλὰ δὲν δύναται νὰ ἦναι οὔτε μεγαλιέτερον, διότι τότε ἡθελήμεν ἔχει $A' > A, B' > B, \Gamma' > \Gamma$, καὶ ἐπειδὴ αἱ ποσότητες A, B, γ ἐξελθούσιν ἀμοιβαίως δι' ὄρια A, B, Γ , αὗται, τείνουσαι πρὸς τὰ ὄρια αὐτῶν, θέλουσιν ἀναγκαίως κατασταθῇ μικρότεραι τῶν A', B', Γ' ἐπομένως καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν, τείνων πρὸς τὸ ὄριον αὐτοῦ, θέλει γίνεαι μικρότερον τοῦ γινομένου $A' \times B' \times \Gamma'$. Ἐπεταί λοιπὸν ἐκ τῶν προαποδείχθέντων ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\text{ὅρ. } A \times B \times \gamma = A \times B \times \Gamma.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 31. ΛΗΜΜΑ

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένου τινὸς πολυγώνου, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.

*Εστω $ΑΒΓΔ$ ἐγγεγραμμένον τι πολύγωνον. Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἐπιφανεία αὐτοῦ εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ἥ δε διαφύρα τῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κυκλικῶν τμημάτων $ΑΘΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΕΑ$. Ἐάν δ' ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ διαφύρα αὕτη δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου ποσοῦ, ἀνεκτιμώμενου ἄρκούντως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, θέλωμεν συμπεράνει, ὅτι ὁ κύκλος, ἡ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένου τινὸς πολυγώνου, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν τὰ σημεῖα $Θ$, $Ζ$, $Π$, $Ε$, μέτα τῶν τόξων $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$, καὶ ἄγομεν τὰς χορδὰς $ΑΘ$, $ΘΒ$, $ΕΖ$, κτλ. ἔγω δτι τὸ ἄθροισμα τῶν οὕτως εἰς τὴν ἐπιφανείαν τοῦ πολυγώνου $ΒΓΔ$ προσθετομένων τριγώνων εἶναι μεγαλειότερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ θροίσματος τῶν κυκλικῶν τμημάτων $ΑΘΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΕΑ$, τοῦ ἀριστῶντος τὴν μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου $ΑΒΓΔ$ διαφύραν, ἢ, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ νέα διαφύρα τῶν ἐμβαδῶν τοῦ κύκλου καὶ τοῦ δευτέρου ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς πρώτης.

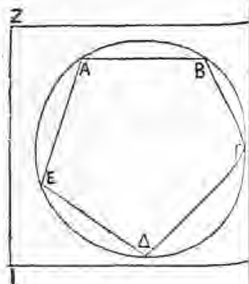
Διότι, ἐάν ἀξωμεν εἰς τὸ σημεῖον $Θ$ τὴν ἑξαπτομένην $ΙΚ$, καὶ εἰς τὰ σημεῖα $Α$ καὶ $Β$ ὑψώσωμεν τὰς καθέτους $ΑΙ$ καὶ $ΒΚ$ ἐπὶ τῆς $ΑΒ$ τὸ ῥέγωνον $ΑΘΒ$ θέλει εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου $ΑΒΚΙ$, τῆς αὐτῆς ἡμέσεως $ΑΒ$ καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους $ΙΑ$. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒΚΙ$ εἶναι μεγαλειότερον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος $ΑΒΘ$. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον $ΑΘΒ$, ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου $ΑΒΚΙ$, εἶναι μεγαλειότερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυκλικοῦ τμήματος $ΑΒΘ$. Δι' ὁμοίου τρόπου ἠθέλωμεν ἀποδείξει ὅτι καὶ τῶν τριγώνων $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$ καὶ $ΔΕΑ$ εἶναι μεγαλειότερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἀντιστοιχοῦντος κυκλικοῦ τμήματος. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν προστεθέντων εἰς τὸ πολύγωνον $ΑΒΓΔ$ τριγώνων εἶναι μεγαλειότε-

ρον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν τὴν πρώτην διαφορὰν παριστά-
των κυκλικῶν τμημάτων.

Ἐάν ἐκ δευτέρου ἐνώσωμεν τὰ μέσα τῶν ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ δε-
τέρου ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ὑποτεινομένων τόξων, θελομεν σχι-
ματίσει τρίτον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, διαφέρον τοῦ περιγεγραμ-
μένου κύκλου ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεως τῆς διαφορᾶς τοῦ προηγουμένου.
Ἐκ τοῦ τρίτου τούτου ἐγγεγραμμένου πολυγώνου θελομεν μετα-
εἰς τὸ τέταρτον, ὅπως ἐκ τοῦ δευτέρου εἰς τὸ τρίτον, καὶ οὕτω κα-
θεξῆς, ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου
τοῦ πολυγώνου θέλει μηδενισθῆ, ἐάν ἐπ' ἄπειρον παραταθῇ ἡ μετα-
βάσις αὕτη. Διότι, ἐάν ἀπὸ μέγεθός τι ἢ ποσόν τι, ὅσον μέγα καὶ
ὑποτεθῇ, ἀλλήλωρισμένον, ἀφαιρέσωμεν πρῶτον πλεόν τοῦ ἡμίσεως
τοῦ, ἔπειτα πλεόν τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὑπολοίπου, καὶ οὕτω καθεξῆς,
διαδοχικὰ ταῦτα ὑπόλοιπα βαίνουνσιν ἐλαττούμενα ἐπὶ μᾶλλον καὶ
μᾶλλον, καὶ τείνουσι πρὸς τὸ μηδὲν (ὄρισμ. 2). Λοιπὸν τὸ τοῦ
κύκλου ἐμβαδὸν εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμέ-
νους πολυγώνου, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.

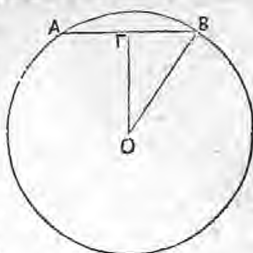
Πόρισμα 1. Ἐντεῦθεν ἔπεται, ὅτι ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια εἶναι
τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ περίμετρος ἐγγεγραμμένου τινὸς πολυγώνου
οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.

Πόρισμα 2. Πᾶσα ιδιότης τῆς περιμέ-
τρου ἢ τῆς ἐπιφανείας ἐγγεγραμμένου τινὸς
πολυγώνου, ὑπάρχουσα ὅσον μέγας καὶ ἂν
ὑποτεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυ-
γώνου, ἐφαρμόζεται καὶ ἐπὶ τῆς περιφε-
ρείας ἢ ἐπιφανείας τοῦ κύκλου. Οὕτω π.
χ. τῆς περιμέτρου παντὸς ἐγγεγραμμένου
πολυγώνου ΑΒΓΔΕ εὐςθης μικροτέρας τῆς
περιμέτρου πολυγώνου τινὸς ΖΗΘΙ, περικυκλοῦντος τὴν περιφέρειαν
ἔπεται ὅτι καὶ τὸ μήκος τῆς περιφερείας εἶναι μικρότερον τῆς περι-
μέτρου παντὸς περικυκλοῦντος αὐτὴν πολυγώνου.



Πόρισμα 3. Ὄταν ἐγγράφωμεν εἰς δεδομένον κύκλον κανονικὰ
πολύγωνα, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν βαίνει αὐξάνων, τὰ ἀποστήματα
αὐξάνουσι, διότι αἱ πλευραὶ τῶν πολυγώνων, καθιστάμεναι μικρότε-
ραι, ἀπέχουσι περισσότερον τοῦ κέντρου. Πρὸς τούτοις τὰ ἀποστή-
ματα ταῦτα θέλουσιν ἔχει δι' ὅριον τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

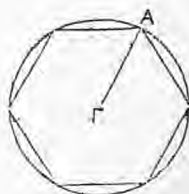
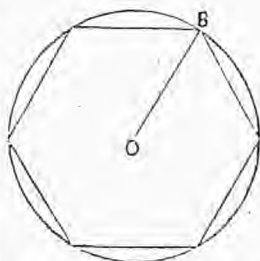
Διότι ἔστω AB ἡ πλευρὰ ἐγγεγραμμένου τινὸς πολυγώνου, OG τὸ ἄποστημα, καὶ OB ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου. Θέλωμεν ἔχει εἰς τὸ τρίγωνον OGB , τὴν ἀνισότητα $OB - OG < GB$. Ἄλλ' ἡ GB , ἥμισυ τῆς AB , δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου ποσοῦ, αὐξανομένου ἀρκούντως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου. Ἀρα, κατ' ἰσχυρότερον λόγον, ἡ διαφορά $OB - OG$, ἡ μικροτέρα τῆς GB , καὶ ἐπειδὴ ἡ OB μένει ἀμετάβλητος, ἔπεται ὅτι ἡ OG θέλει ἔχει δι' ὄριον τὴν OB .



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι τῶν κύκλων ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτῶν αὐτῶν.

1^η. Ἄς ἐγγράψωμεν εἰς τοὺς κύκλους, τοὺς ἔχοντας ἀκτῖνας OB καὶ GA , δύο ὁποιαδήποτε ὅμοια κανονικὰ πολύγωνα, καὶ παραστήσωμεν διὰ Π



καὶ π τὰς περιμέτρους αὐτῶν, διὰ P τὴν ἀκτῖνα OB καὶ διὰ ρ τὴν ἀκτῖνα GA . Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 8 προτάσει τοῦ παρόντος βιβλίου θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\Pi : \pi = P : \rho \quad (1)$$

Ἀλλ' ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία (1) εἶναι ἀληθής, ὅσον μέγας καὶ ἂν ὑποθεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν ἐγγεγραμμένων ὁμοίων πολυγώνων. Ἀρα ὑπάρχει καὶ ἐπὶ τῶν ὀρίων αὐτῶν, τοιούτεστι θέλομεν ἔχει

$$\delta\rho. \Pi : \delta\rho. \pi = P : \rho. \quad (2)$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν (πρότ. 9, πρότ. 1) ὅτι $\delta\rho. \Pi =$ περιφέρεια OB , καὶ $\delta\rho. \pi =$ περιφέρεια GA . Ἀρα, παριστῶντες διὰ Γ τὴν περιφέρειαν OB καὶ διὰ γ τὴν περιφέρειαν GA , καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀναλογίαν (2) ἀντὶ τῶν $\delta\rho. \Pi$ καὶ $\delta\rho. \pi$ τὰ ἴσα αὐτοῖς Γ καὶ γ , θέλομεν ἔχει

$$\Gamma : \gamma = P : \rho \quad (3)$$

τοῦτο ὅπερ ἐπρόκειτο κατὰ πρῶτον νὰ ἀποδείξωμεν.

2^{ον}. "Αν παραστήσωμεν δι' Ε καὶ ε τὰς ἐπιφανείας τῶν ἐγγεγραμμένων ὁμοίων πολυγώνων, καὶ διὰ Κ καὶ κ τὰς ἐπιφανείας τῶν ἀντιστοιχοῦντων κύκλων, θέλομεν ἔχει κατὰ τὴν αὐτὴν πρότασιν 8,

$$E : \varepsilon = P^2 : p^2. \quad (4)$$

"Ἄλλ' ἡ ἀναλογία (4) ὑπάρχει, ὅσον μέγας καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν ἐγγεγραμμένων ὁμοίων πολυγώνων. "Ἀρα εἰς ἀληθείας καὶ ἐπὶ τῶν ὁρίων αὐτῶν, τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$\delta\rho. E : \delta\rho. \varepsilon = P^2 : p^2. \quad (5)$$

"Ἀλλ' ἀπεδείξαμεν ἀνωτέρω (πρότ. 9) ὅτι $\delta\rho. E = K$ καὶ $\delta\rho. \varepsilon =$
"Ἀρα θέλομεν ἔχει

$$K : \kappa = P^2 : p^2. \quad (6)$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο κατὰ δεύτερον λόγον νὰ ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον 1. Ἡ ἀναλογία (3) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$\Gamma : P = \gamma : p, \quad \eta \quad \frac{\Gamma}{P} = \frac{\gamma}{p},$$

ἐπομένως

$$\frac{\Gamma}{2P} = \frac{\gamma}{2p} \quad (\alpha)$$

"Ἀλλὰ τὰ πηλίκια $\frac{\Gamma}{2P}$ καὶ $\frac{\gamma}{2p}$ παριστῶσι τοὺς λόγους τῶν περιφερειῶν πρὸς τὰς διαμέτρους αὐτῶν, καὶ ἐπειδὴ οἱ λόγοι οὗτοι εἶναι ἴσοι ποιαὶδήποτε καὶ ἂν ᾖναι αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων, ἔπεται ὅτι ὁ λόγος περιφερείας τινὸς πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς εἶναι ἀριθμὸς σταθερὸς.

Ὁ σταθερὸς οὗτος ἀριθμὸς παρίσταται συνθῆως διὰ τοῦ γράμματος π , καὶ ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, ἐπομένως δύναται νὰ ὑπολογισθῇ εἰμὴ κατὰ προσέγγισιν. Ἡ δεκαδικὴ αὐτῆς τιμὴ εἶναι μέχρι τοῦ 16^{ου} δεκαδικοῦ ψηφίου

$$\pi = 3, 1415926535897932 \dots$$

Μετ' ὀλίγον θέλομεν δώσῃ στοιχειώδη τινὰ μέθοδον διὰ τὸν κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμὸν τῆς τιμῆς τοῦ π .

Σχόλιον 2. Διὰ τῆς τιμῆς τοῦ π εὐρίσκομεν εὐκόλως τὸ μέτρον τῆς περιφερείας δεδομένης ἀκτίνος. Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\frac{\Gamma}{2P} = \pi \text{ πορίζομεθα } \Gamma = 2\pi P.$$

"Αν π . χ. ὑποθέσωμεν $P = 18''$, 35 καὶ λάβωμεν $\pi = 3, 14$, ἔσται ὁ ἀριθμὸς ὁποῦνδήποτε ἀκτίνος θέλωμεν ἔχει

περιφ. $P=2\pi R=2 \times 3,14 \times 18'',35=115'',2380$.

τὸν τὸ μήκος τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης ἀκτῖνα $18'',35$, εἶ-
 $115'',2380$ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ τῆς διαμέτρου
 περιφερείας.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ἐὰν εἰς ἴσας κεντρικὰς γωνίας ἀντιστοιχοῦντα τόξα, τομεῖς ὁποίων-
 οὔτε κύκλων καλοῦνται τόξα ὅμοια, τομεῖς ὅμοιοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ

1^η. Τὰ ὅμοια τόξα AB , AE εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ ἀκτῖνες
 τῶν AI , AO .

2^η. Οἱ ὅμοιοι τομεῖς AIB , AOE εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ
 τράγωνα τῶν ἀκτῖνων τῶν εἰς οὓς ἀνήκουν κύκλων.

3^η. Κατὰ τὰ περὶ μέτρου τῶν κεντρικῶν γωνιῶν ἐν τῷ B' βι-
 σίῳ λεχθέντα θέλομεν ἔχει τὰς ἐξῆς ἀναλογίας

$$\text{γων. } I : 4^{\circ} = \text{τόξ. } AB : \text{περιφ. } IA, \quad (1)$$

$$\text{γων. } O : 4^{\circ} = \text{τόξ. } AE : \text{περιφ. } OA. \quad (2)$$

Ἄλλ', ἐπεὶ δὴ τὰ τόξα AB καὶ
 AE ὑπετέθησαν ὅμοια, ἡ γω-
 νία I εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ O .
 Αἱ ἀναλογίαι λοιπὸν (1) καὶ
 (2) ἔχουσι τοὺς πρώτους αὐ-
 τῶν λόγους ἴσους, ἐπομένως

οἱ δεῦτεροι αὐτῶν λόγοι σχηματίζουσιν ἀναλογίαν, τουτέστι θέλομεν
 ἔχει

$$\text{τόξ. } AB : \text{περιφ. } IA = \text{τόξ. } AE : \text{περιφ. } OA$$

, μετατιθεμένων τῶν μέσων,

$$\text{τόξ. } AB : \text{τόξ. } AE = \text{περιφ. } IA : \text{περιφ. } OA. \quad (3)$$

Ἄλλ' ἀπεδείχθη προηγουμένως ὅτι

$$\text{περιφ. } IA : \text{περιφ. } OA = IA : OA, \quad (4)$$

Ἄρα, ἔνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου περιφ. $IA : \text{περιφ. } OA$ τῶν ἀναλογιῶν
 (3) καὶ (4), θέλομεν ἔχει

$$\text{τόξ. } AB : \text{τόξ. } AE = IA : OA,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο κατὰ πρῶτον ν' ἀποδείξωμεν.

2^η. Ἐπειδὴ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους οἱ τομεῖς
 εἶναι ἴσοι, ὅταν τὰ τόξα αὐτῶν ᾗναι ἴσα, θέλομεν ἔχει προφανῶς

$$\text{τομ. } AIB : \text{κύκλ. } IA = \text{γων. } I : 4^{\circ} \quad (1)$$

$$\text{τομ. } \Delta O E : \text{κύκλ. } \Delta O = \gamma \omega \nu. O : 4^{\text{η}}. \quad (2)$$

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $\gamma \omega \nu. I = \gamma \omega \nu. O$. Ἄρα θέλομεν ἔχει

$$\text{τομ. } \Delta I B : \text{κύκλ. } I A = \text{τομ. } \Delta O E : \text{κύκλ. } \Delta O$$

$$\text{ἢ} \quad \text{τομ. } \Delta I B : \text{τομ. } \Delta O E = \text{κύκλ. } I A : \text{κύκλ. } \Delta O. \quad (3)$$

Ἀλλ' ἀπεδείχθη προηγουμένως ὅτι

$$\text{κύκλ. } I A : \text{κύκλ. } \Delta O = I A^2 : \Delta O^2. \quad (4)$$

Ἄρα, ἔνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου τῶν ἀναλογιῶν (3) καὶ (4), θέλομεν ἔχει

$$\text{τομ. } \Delta I B : \text{τομ. } \Delta O E = I A^2 : \Delta O^2,$$

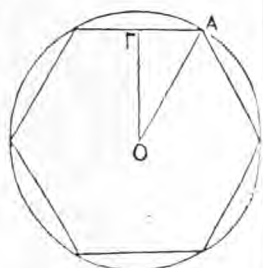
τοῦθ' ὅπερ κατὰ δεύτερον λόγον προϋτιθέμεθα ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ ἐμβαδὸν παρὶς κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφέρειας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτὺς αὐτοῦ.

Ἄς ἐγγράψωμεν κανονικόν τι πολύγωνον εἰς τὸν ἔχοντα $O A$ ἀκτῖνα κύκλον, καὶ ἄς παραστήσωμεν διὰ Π τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου καὶ διὰ E τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ. Θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἀποδείχθέντα ἐν τῇ 7 προτάσει τοῦ παρόντος βιβλίου

$$E = \Pi \times \frac{1}{2} O \Gamma.$$



Ἀλλ', ἐπειδὴ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης εἶναι ἀληθής, ὅσον μέγας καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, θέλομεν ἔχει ὡσαύτως καὶ τὴν ἰσότητα

$$\delta\rho. E = \delta\rho. (\Pi \times \frac{1}{2} O \Gamma).$$

Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι $\delta\rho. E = \text{κύκλος } O A$, καὶ πρὸς τούτοις ὅτι τὸ ὅριον γινόμενον τινὸς $\Pi \times \frac{1}{2} O \Gamma$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων τῶν

παραγόντων αὐτοῦ Π καὶ $\frac{1}{2} O \Gamma$ (πρότ. 9 καὶ ὁρισμ. 3). Ἄρα, ἐπειδὴ

$$\delta\rho. \Pi = \text{περιφ. } O A \text{ καὶ } \delta\rho. \frac{1}{2} O \Gamma = \frac{1}{2} O A, \text{ θέλομεν ἔχει}$$

$$\text{κύκλ. } O A = \text{περιφ. } O A \times \frac{1}{2} O A. \quad (1)$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Παρατήρησις. *Αν παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα OA' διὰ P , θέλομεν
 εἶ, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῷ σχολίῳ 2 τῆς 10 προτάσεως,
 κφ. $OA = 2\pi P$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (1)
 τὰ τῶν παραγόντων περιφ. OA καὶ $\frac{1}{2} OA$ τὰ ἴσα τούτοις $2\pi P$ καὶ
 P , θέλομεν ἔχει

$$\text{κύκλος } OA = 2\pi P \times \frac{1}{2} P = \pi P^2,$$

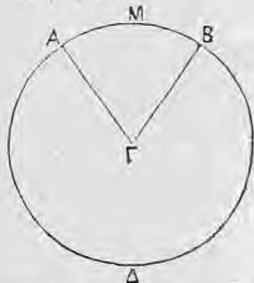
ὥστε, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται πρὸς τούτοις μὲ τὸ τε-
 τράγωνον τῆς ἀκτίνος αὐτοῦ P ἐπὶ τὸν λόγον π τῆς περιφερείας
 πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἐφαρμογή. *Ἄς ὑποθέσωμεν $P = 3$ μέτρα. *Αν ὑποθέσωμεν ὅτι $\pi =$
 1415, θέλομεν ἔχει

$$\text{κύκλ. } P = 3,1415 \times 3^2 = 28,2735 \text{ τετρ. μέτρ.}$$

Πόρισμα. Τὸ ἐμβαδὸν τομῆως τινὸς εἶναι
 ὅσον μὲ τὸ τόξον τοῦ τομῆως τούτου ἐπὶ τὸ
 μισοῦ τῆς ἀκτίνος.

Ὡςὅτι ὁ τομῆς AGB εἶναι πρὸς ὁλόκληρον
 τὸν κύκλον ὡς τὸ τόξον AMB πρὸς τὴν ὅλην
 περιφέρειαν $AB\Delta$ (πρότ. 18, Β'), ἥτοι



$$\text{τομ. } AGB : \text{κύκλ. } AG = \text{τόξ. } AMB : \text{περιφ. } AG,$$

πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο ὁρῶν τοῦ δευτέρου λόγου ἐπὶ $\frac{1}{2} AG$

$$\text{τομ. } AGB : \text{κύκλ. } AG = \text{τόξ. } AMB \times \frac{1}{2} AG : \text{περιφ. } AG \times \frac{1}{2} AG.$$

Ἀλλ' ἀπεδείχθη ἀνωτέρω ὅτι $\text{περιφ. } AG \times \frac{1}{2} AG = \text{κύκλ. } AG$. Ἄρα

$$\text{καὶ τόξ. } AMB \times \frac{1}{2} AG = \text{τομ. } AGB.$$

Ἐφαρμογή. *Ἐστω $AG = 12''$, τόξ. $AMB = 60''$. Πρὸς εὐρέσιν τοῦ
 μήκους τοῦ τόξου τούτου σχηματίζομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\text{τόξ. } AMB : 2\pi P = 60'' : 360''$$

$$\text{ἢ } \text{τόξ. } AMB = \frac{2\pi P \times 60''}{360''} = \frac{\pi P}{3} = \frac{\pi \times 12}{3} = 4\pi.$$

$$\text{Ἄρα τὸν τομ. } AMB = 4\pi \times 6 = 24\pi = 75,3960 \text{ τετρ. μέτρα.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ
ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΔΙΑΜΕΤΡΟΝ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Γνωστῆς οὐσῃς τῆς πλευρᾶς AB ἐγγεγραμμένου τινὸς κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἀκτίνος OG τοῦ κύκλου, τὰ ὑπολογισθῆναι πλευρὰ AG τοῦ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν ἔχοντος κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου.

Ἐστώσαν $AB = \alpha$, $OG = P$ καὶ $AG = \gamma$.

Ἀγομεν τὰς εὐθείας AD καὶ AO .

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον GAD ἔχομεν (πρότ. 27, σχόλιον, G')

$$AG^2 = GA \times GI, \text{ ἢ } \gamma^2 = 2P \times GI$$

Ἀλλὰ $GI = GO - OI = P - OI$, καὶ ἀφ' ἑτέρου, εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον AOI , ἔχομεν

$$OI = \sqrt{P^2 - \frac{\alpha^2}{4}} = \sqrt{P^2 - \frac{\alpha^2}{4}}$$

Ἀρα $GI = P - \sqrt{P^2 - \frac{\alpha^2}{4}}$, καὶ ἐπομένως.

$$\gamma^2 = 2P \times \left(P - \sqrt{P^2 - \frac{\alpha^2}{4}} \right). \quad (1)$$

Ἀντιστρέφως, ἂν μᾶς ἐζητεῖτο ἡ πλευρὰ α τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, γνωστῆς οὐσῃς τῆς πλευρᾶς γ τοῦ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν ἔχοντος κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ τῆς ἀκτίνος P τοῦ κύκλου, ἠθέλομεν διὰ τῶν αὐτῶν συλλογισμῶν εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν (1), ἐξ ἧς ἠθέλομεν πορισθῆναι τὴν τιμὴν τοῦ

$$\alpha = \sqrt{\frac{\gamma^2 \cdot (4P^2 - \gamma^2)}{P^2}} = \frac{\gamma}{P} \sqrt{4P^2 - \gamma^2} \quad (2)$$

Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου (1), ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι α παριστᾷ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἐξαγώνου, ἥτοι $\alpha = P$. Θέλωμεν εὑρεῖν τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δωδεκαγώνου ἀντὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

σάγοντες εἰς τὸν τύπον (1) ἀντὶ α τὴν ἀκτῖνα P· οὕτω δὲ θέλομεν ἔχει

$$\gamma = \sqrt{2P \left(P - \sqrt{P^2 - \frac{P^2}{4}} \right)} = \sqrt{2P \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = P \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου (2) ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι γ παριστᾷ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου, ἥτοι $\gamma = \frac{P(\sqrt{5}-1)}{2}$

(πρότ. 5). Ἀντισταθόντες εἰς τὸν τύπον (2) ἀντὶ γ τὴν τιμὴν αὐτῆς, θέλομεν ἔχει

$$\alpha = \frac{\sqrt{\frac{P^2(6-2\sqrt{5})}{4} \left[4P^2 - \frac{P^2(6-2\sqrt{5})}{4} \right]}}{P} = \sqrt{\frac{P^2}{4} (10-2\sqrt{5})}$$

$= \frac{P}{2} \sqrt{10-2\sqrt{5}} = \mu\epsilon$ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου.

Παρατήρησις. Προσθέτοντες εἰς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτίνος P τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου θέλομεν ἔχει δι' ἄθροισμα

$$P^2 + \frac{P^2(6-2\sqrt{5})}{4} = \frac{P^2}{4} (10-2\sqrt{5}),$$

ἥτοι τὸ τετράγωνον τῆς ἀνωτέρω εὐρεθείσης πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου. Λοιπὸν,

Ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗτος πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἡ ἀκτίς καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Γνωστῆς οὗσης τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ τινος πολυγώνου καὶ τῆς ἀκτίνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τὰ εὐρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου ὁμοίου πολυγώνου.

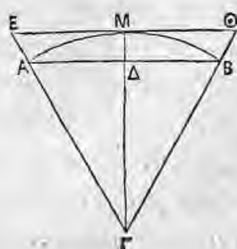
Ἐστωσαν $AB = \alpha$, $GA = P$ καὶ $EO = \chi$.

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων $EG\Theta$, AGB προκύπτει ἡ ἀναλογία

$$EO : AB = GE : GA.$$

Ἀλλ' ἔχομεν ὡσαύτως $GE : GA = GM : GA$.

Ἀρα, ἔνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου $GE : GA$,



$$EO : AB = \Gamma M : \Gamma \Delta,$$

ἤτοι

$$\chi : \alpha = P : \Gamma \Delta.$$

Ἀφ' ἑτέρου, εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\Lambda \Gamma \Delta$, ἔχομεν

$$\Gamma \Delta = \sqrt{\overline{\Gamma \Lambda^2} - \overline{\Lambda \Delta^2}} = \sqrt{P^2 - \frac{\alpha^2}{4}}.$$

Λοιπὸν

$$\chi : \alpha = P \cdot \sqrt{P^2 - \frac{\alpha^2}{4}}$$

ἔξ ἧς

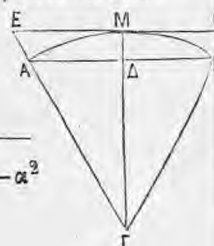
$$\chi = \frac{2\alpha P}{\sqrt{4P^2 - \alpha^2}}$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Γνωστῆς οὕσης τῆς πλευρᾶς AB κανονικοῦ τινος πολυγώνου, πλευρῶν καὶ τῆς ἀκτῆος ΓA τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ πολ. γωνορ κύκλου, τὰ εὐρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου τούτου.

Ἐστῶσαν $AB = \alpha$, $\Gamma A = P$ καὶ E ἡ ζητούμενη ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 7 προτάσει ἔχομεν

$$E = \mu \alpha \times \frac{\Gamma \Delta}{2}, \text{ Ἀλλὰ } \Gamma \Delta = \sqrt{P^2 - \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4P^2 - \alpha^2}$$



Ἀρα

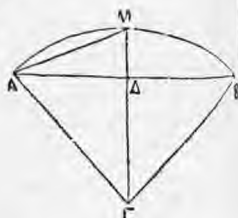
$$E = \frac{\mu \alpha \sqrt{4P^2 - \alpha^2}}{4} \quad (1)$$

Ἐφαρμογή. Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου. Πρὸς τοῦτο εἰς τὸν τύπον (1) πρέπει νὰ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ μ τὴν τιμὴν αὐτοῦ 6 καὶ ἀντὶ τοῦ α τὴν τιμὴν αὐτοῦ P , καὶ θέλωμεν ἔχει

$$E = \frac{6P \sqrt{4P^2 - P^2}}{4} = \frac{3P^2 \sqrt{3}}{2}$$

Παρατήρησις. Ἡδυνάμεθα ὡσαύτως διὰ τῶν αὐτῶν δεδομένων νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν, ἤτοι 2μ .

Διότι, ἐὰν ἀξίωμεν εἰς τὸ μέσον M τοῦ τόξου AB τὴν χορδὴν AM , ἡ ζητούμενη τοῦ πολυγώνου ἐπιφάνεια (ἣν παριστῶμεν δι' E') συντίθεται ἐκ 2μ τριγώνων ἴσων τῷ $\Lambda \Gamma M$.



$$\S \quad P'^2 = P \times p' \text{ ὅθεν } P' = \sqrt{P \times p'} = \sqrt{P \times \frac{(P+p)}{2}} \quad (2)$$

Σχόλιον. Εὐκόλως παρατηρεῖ τις, εἴτε ἐκ τοῦ σχήματος εἴτε ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2), ὅτι p' εἶναι μεγαλείτερον τοῦ p , καὶ ὅτι τοῦναντίον P' εἶναι μικρότερον τοῦ P . Λοιπὸν, εἰς τὸ νέον κανονικὸν πολύγωνον, ἡ μεταξὺ τῆς ἀκτίνος καὶ τοῦ ἀποστήματος διαφορά εἶναι μικροτέρα τῆς ἀντιστοίχου διαφορᾶς εἰς τὸ πρῶτον.

Ἐὰν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου μετατρέψωμεν τὸ δεύτερον τοῦτο πολύγωνον εἰς τρίτον, ἔπειτα τὸ τρίτον εἰς τέταρτον, καὶ οὕτω καθεξῆς, θέλομεν καταστήσει εἰς πολύγωνόν τι, ἐν ᾧ ἡ μεταξὺ τῆς ἀκτίνος καὶ τοῦ ἀποστήματος διαφορά θέλει εἶναι μικροτέρα παντὸς δεδομένου μεγέθους.

Διότι εἰς τὸ τρίγωνον $\Delta B \Gamma$ ἔχομεν

$$B \Gamma - \Gamma \Delta < B \Delta, \quad \eta \quad P - p < \Delta B.$$

Ἀλλὰ $B \Delta$ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, ἡ δὲ πλευρὰ αὕτη δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου μεγέθους, διπλασιαζομένου ἀρκούντως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν. Ἄρα κατὰ μείζονα λόγον ἡ διαφορά $P - p$ δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου μεγέθους.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ εὑρεθῇ προσεγγιζουσά τις τιμὴ τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, ἥτοι τοῦ π .

$$\text{Ἔχομεν (πρότ. 10, σχόλιον)} \quad \pi = \frac{\text{περιφ. } P}{2P}, \quad (1)$$

$$\text{καὶ ἀπεδείχθη προσέτι (πρότ. 12) ὅτι } \pi = \frac{\text{κύκλ. } P}{p^2}. \quad (2)$$

Ἐντεῦθεν πηγάζουσι τέσσαρες μέθοδοι πρὸς εὑρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ π . Ἀότι, ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (1), δυνάμεθα, γνωστοῦ ὄντος τοῦ μήκους τῆς περιφερείας, νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀκτῖνα, καὶ ἀντιστρόφως, γνωστῆς οὗσης τῆς ἀκτίνος, νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν μῆκος τῆς περιφερείας· ἐὰν δὲ μεταχειρισθῶμεν τὸν τύπον (2), δυνάμεθα, γνωστῆς οὗσης τῆς ἀκτίνος, νὰ εὑρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου, ἢ, γνωστοῦ ὄντος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀκτῖνα.

Θέλομεν ἐκθέσει ἐνταῦθα τὰς δύο πρώτας μεθόδους, καὶ θέλομεν

ἐν πρώτοις ὑπολογίσει τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης μῆκος 4.

Ἄς κατασκευάσωμεν πρὸς τοῦτο τετράγωνόν τι, καὶ ἃς λάβωμεν τὴν τοῦ τετραγώνου τούτου πλευρὰν ὡς μονάδα. Ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου θέλει εἶναι ἴση μὲ 4.

Ἐστω P καὶ ρ ἡ ἀκτίς καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ τετραγώνου τούτου. Θέλομεν ἔχει (πρότ. 3).

$$P = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ καὶ } \rho = \frac{1}{2}.$$

Τώρα τὸ τετράγωνον τοῦτο δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς κανονικὸν ὀκτάγωνον τῆς αὐτῆς περιμέτρου, οὗτινος θέλομεν εὑρεῖ τὴν ἀκτῖνα P_1 καὶ τὸ ἀπόστημα ρ_1 διὰ τῶν τύπων (2) καὶ (1) τοῦ προηγουμένου προβλήματος καὶ θέλομεν ἔχει, ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς προηγουμένους τύπους (1) καὶ (2) ἀντὶ τοῦ P τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ ἀντὶ τοῦ ρ τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{1}{2}$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις,

$$P_1 = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{8}}, \quad \rho_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}.$$

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν ὑπολογίσει τὰς ἀκτῖνας P_n καὶ ρ_n τοῦ ἰσοπεριμέτρου κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος 16 πλευρὰς, καὶ ἐξακολουθοῦντες οὕτως ἠθέλομεν φθάσει εἰς κανονικὸν τι πολύγωνον, οὗτινος ἡ μὲν περίμετρος ἠθελεν εἶναι πάντοτε 4, ἡ δὲ διαφορά $P_n - \rho_n$ τῶν ἀκτίνων αὐτοῦ, ὅσον θέλομεν μικρὰ.

Ἀλλὰ τὸ μῆκος τῆς ἐχούσης P_n ἀκτῖνα περιφερείας εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 4, τὸ δὲ μῆκος τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης ρ_n ἀκτῖνα εἶναι μικρότερον τοῦ 4. Ἡ ἀκτίς λοιπὸν τῆς ἐχούσης μῆκος 4 περιφερείας περιλαμβάνεται μεταξὺ P_n καὶ ρ_n , καὶ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ μεθ' ὅσης θέλομεν προσεγγίσεως· διότι ἀπεδείχθη ὅτι ἡ διαφορά $P_n - \rho_n$ δύναται νὰ κατασταθῇ ὅσω θέλομεν μικρὰ, αὐξανομένου ἀρκούντως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ ἰσοπεριμέτρου πολυγώνου.

Ἄν αἱ τιμαὶ τῶν ἀκτίνων P_n , ρ_n ὑπολογίσθησαν εἰς δεκαδικὰ, εἶναι φανερόν ὅτι τὰ κοινὰ εἰς ταύτας δεκαδικὰ ψηφία θέλουσιν ἀνήκει εἰς τὴν τιμὴν τῆς ζητουμένης ἀκτίνος.

Παραθέτομεν ἀμέσως κατωτέρω πίνακα τῶν διαδοχικῶν τιμῶν

Δημόσια Κεντρικὴ Βιβλιοθήκη Βεροῦνης

τῶν ἀκτίνων καὶ τῶν ἀποστημάτων τῶν κανονικῶν πολυγώνων, τῶν ἔχόντων 4, 8, 16, 32.... 8192 πλευράς.

ΑΡΙΘΜΟΣ τῶν πλευρῶν.	ΑΠΟΣΤΗΜΑΤΑ, ἢ ἀκτίνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων.	ΑΚΤΙΝΕΣ τῶν περιγεγραμμένων κύκλων.
4	$p_1 = 0.5000000$	$P_1 = 0.7071068$
8	$p_2 = 0.6035534$	$P_2 = 0.6532815$
16	$p_3 = 0.6284174$	$P_3 = 0.6407289$
32	$p_4 = 0.6345734$	$P_4 = 0.6376435$
64	$p_5 = 0.6361083$	$P_5 = 0.6368754$
128	$p_6 = 0.63634919$	$P_6 = 0.6366836$
256	$p_7 = 0.6365878$	$P_7 = 0.6366357$
512	$p_8 = 0.6366117$	$P_8 = 0.6366237$
1024	$p_9 = 0.6366177$	$P_9 = 0.6366207$
2048	$p_{10} = 0.6366192$	$P_{10} = 0.6366199$
4096	$p_{11} = 0.6366195$	$P_{11} = 0.6366197$
8192	$p_{12} = 0.6366196$	$P_{12} = 0.6366196$

Λοιπὸν ἡ ἀκτίς τῆς ἐχούσης μῆκος 4 περιφέρειας $= 0.6366196...$, ἐπομένως ὁ λόγος τῆς περιφέρειας πρὸς τὴν διάμετρον ἰσοῦται μὲ

$$\frac{40000000}{12732392} = 3.1415926....$$

Ὁ Ἀρχιμήδης εὗρεν $\frac{22}{7}$ ὡς προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ π, ὁ δὲ

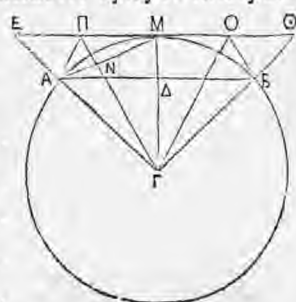
Μέτιος διὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὴν μᾶλλον προσεγγίζουσιν. $\frac{355}{113}$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δεδομένης τῆς περιμέτρου μ ἐγγεγραμμένου τινὸς κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τῆς περιμέτρου M τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου, καὶ ὑπολογισθῶσιν αἱ περίμετροι μ' , M' τοῦ τε ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου, τῶν ἔχόντων διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Ἐστῶσαν AB καὶ EO αἱ πλευραὶ τῶν ἔχόντων μ καὶ M περιμέτρους πολυγώνων, καὶ ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν.

Ἀγομεν τὴν χορδὴν AM , καὶ εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B τὰς ἐφαπτομένας AN καὶ BO , καὶ ἐνόνομεν $ΓΠ$ καὶ $ΓΟ$. Ἡ χορδὴ AM θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος 2ν πλευ-



ράς καὶ μ' περιμέτρον, καὶ ἡ ΠΟ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος 2ν πλευράς καὶ Μ' περιμέτρον. Τούτων δὲ τεθέντων, ἔχομεν (πρότ. 8),

$$M : \mu = GE : GA \text{ ἢ } GM. \quad (1)$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΠ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΕΓΜ τοῦ τριγώνου ΕΓΜ, ἔχομεν κατὰ τὴν 18 πρότασιν τοῦ Γ' βιβλίου

$$ΠΕ : PM = GE : GM. \quad (2)$$

Ἄρα, ἔνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου GE : GM τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$M : \mu = ΠΕ : PM. \quad (3)$$

ἔξ ἧς προκύπτει $M + \mu : 2\mu = EM : 2PM$ ἢ ΠΟ.

Ἄλλ' αἱ εὐθεῖαι EM καὶ ΠΟ περιέχονται 2ν φορὰς εἰς τὰς περιμέτρους Μ καὶ Μ'. Ἄρα θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$M + \mu : 2\mu = M : M', \text{ ἔξ ἧς } M' = \frac{2\mu M}{M + \mu} \quad (4)$$

Πρὸς εὐρυσιν τῆς περιμέτρου μ' παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΠNM καὶ ΜΔΔ εἶναι ὅμοια, ὥς ἔχοντα τὰς γωνίας ΠNM καὶ ΔΔM ἴσας, ὥς ὀρθάς, καὶ τὰς γωνίας ΠMN καὶ ΔΔM ἴσας, ὥς ἐχούσας διὰ μέτρον ἡ μὲν τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου MB, ἡ δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔM = MB. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\Delta M : \Delta\Delta = PM : MN \text{ ἢ } = 2PM : 2MN \text{ ἢ } = PO : \Delta M.$$

Ἄλλ' αἱ εὐθεῖαι ΔM καὶ ΔΔ περιέχονται 2ν φορὰς εἰς τὰς περιμέτρους μ' καὶ μ, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΠΟ καὶ ΔM ὡσαύτως 2ν φορὰς εἰς τὰς περιμέτρους Μ' καὶ μ'. Ἄρα θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\mu' : \mu = M' : \mu', \text{ ἔξ ἧς } \mu' = \sqrt{M' \cdot \mu},$$

$$\mu' = \sqrt{\frac{2\mu M}{M + \mu}} \cdot \mu = \sqrt{\frac{2\mu^2 M}{M + \mu}}. \quad (5)$$

Πόρισμα. Διὰ τῶν τύπων (4) καὶ (5) δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ π μεθ' ὅσης θέλομεν προσεγγίσεως. Διότι, ἐὰν εἰς τὸν ἔχοντα ἀκτῖνα τὴν γραμμικὴν μονάδα κύκλον ἐγγράψωμεν καὶ περιγράψωμεν τετράγωνον, ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου περίμετρος $= 4\sqrt{2}$, ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου $= 8$, διὰ δὲ τῶν τύπων (4) καὶ (5) δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν τὰς περιμέτρους τοῦ τε ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου. Διὰ τῶν περιμέτρων τῶν ὀκ-

ταγώνων θέλομεν εὑρει, μεταχειριζόμενοι τοὺς αὐτοὺς τύπους, τὰς περιμέτρους τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου δεκαεξαγώνου, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι, αὐξανόμενου ἀρκούντως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον πολυγώνου, ἡ μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ περιγεγραμμένου πολυγώνου διαφορά δύναται νὰ κατασταθῇ ὅσῳ θέλομεν μικρά. Λοιπὸν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας μεθ' ὅσης θέλομεν προσεγγίσειως, καὶ διαιροῦντες αὐτὸ διὰ 2, θέλομεν εὑρει τὸν ἀριθμὸν π. Διαιροῦμεν διὰ 2, διότι π παριστᾷ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ οὐχὶ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἐν ᾧ ὁ διὰ τῆς ἀνωτέρω μεθόδου εὑρεθισόμενος ἀριθμὸς θέλει παριστᾷ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, ἧς ἡ ἀκτίς=1 καὶ ἐπομένως ἡ διάμετρος=2.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΕΝ Τῷ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙ ΘΕΩΡΟΥΜΕΝΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Εὐθεΐα τις λέγεται *κάθετος ἐπὶ ἐπιπέδῳ τινὶ*, ὅταν ᾗναι κάθετος ἐπὶ πασῶν τῶν εὐθειῶν, τῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ διερχομένων διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς. Ἀντιστρόφως τὸ ἐπίπεδον λέγεται κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας.

Ποῦς τῆς καθέτου καλεῖται τὸ σημεῖον, ἔνθα ἡ κάθετος συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον.

2. Εὐθεΐα τις λέγεται *παράλληλος ἐπιπέδῳ τινὶ*, ὅταν δὲν δύναται νὰ συναπαντήσῃ αὐτὸ, ὅσῳ καὶ ἂν προεκβληθῶσιν ἡ τε εὐθεΐα καὶ τὸ ἐπίπεδον. Ἀντιστρόφως τὸ ἐπίπεδον λέγεται *παράλληλον* τῇ εὐθείᾳ.

3. Δύο ἐπίπεδα εἶναι *παράλληλα*, ὅταν δὲν συναπαντῶνται ὅσῳ καὶ ἂν προεκβληθῶσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ

Διὰ δύο τεμνομένων εὐθειῶν διέρχεται πάντοτε ἐπίπεδόν τι καὶ ἓν μόνον.

Ἐστώσαν ΑΒ καὶ ΑΓ δύο τεμνόμεναι εὐθεΐαι.

Ἄς φαντασθῶμεν ἐπίπεδόν τι διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἐὰν στρέψωμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο περὶ τὴν ΑΒ μέχρις οὗ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ σημείου Γ, εἶναι φανερόν ὅτι ἡ εὐθεΐα ΑΓ θελεῖ καεῖσθαι ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ὡς ἔχουσα δύο τῶν σημείων αὐτῆς Α καὶ Γ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ δὲ θέσις τοῦ ἐπιπέδου θέλει εἶναι ἔντελῶς ὠρισμένη ἐν τῷ διαστήματι.

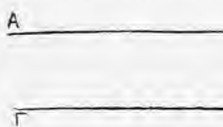


Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν τὴν περὶ τὴν AB στροφὴν τοῦ ἐπὶ εἶναι φανερόν ὅτι δὲν θέλει περιλαμβάνει πλέον τὸ σημεῖον Γ , μένως μὴτε τὴν εὐθεῖαν $ΑΓ$. Λοιπὸν διὰ δύο τερνομένων εὐθειῶν καὶ $ΑΓ$ ἐν μόνον ἐπίπεδον διέρχεται.

Πόρισμα 1. Ἐκ τοῦ ἀποδειχθέντος θεωρήματος ἔπεται ὅτι πᾶν τρίγωνον $ΑΒΓ$, ἢ τρία σημεῖα A, B, Γ , μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα, προσδιορίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ ἑνὸς μόνου.



Πόρισμα 2. Δύο παράλληλοι AB καὶ $\Gamma Δ$ προσδιορίζουσιν ὡς τὴν θέσιν ἑνὸς μόνου ἐπιπέδου. Διότι κατὰ τὸν ἐν τῷ A' βιβλίῳ δοθέντα περὶ παραλλήλων εὐθειῶν ὁρισμόν, αὗται κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, δεύτερον δὲ ἐπίπεδον, διάφορον τοῦ ἐπ' οὗ κεῖνται, δὲν δύναται νὰ διέλθῃ δι' αὐτῶν, δύο ὅποιαδήποτε σημεῖα τῆς AB καὶ ἐν τῆς $\Gamma Δ$ δὲν εἶναι δύναται νὰ κῆνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ κοινὴ δύο ἐπιπέδων τομὴ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ.

Διότι, ἂν τρία σημεῖα τῆς κοινῆς τῶν ἐπιπέδων τομῆς εἴεναι κειντο ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος ἐπίπεδα ἢ διέρχονται τότε διὰ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων σημείων, καὶ μένως, κατὰ τὰ ἐν τῇ προηγουμένῃ προτάσει ἀποδειχθέντα, ἢ ταυτιζέσθαι, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

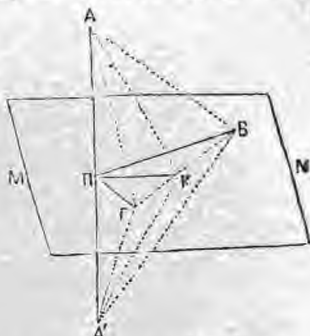
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν εὐθεῖα τις $ΑΠ$ ᾗται κάθετος ἐπὶ δύο ἄλλων $ΠΒ$ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ΜΝ$ κειμένων καὶ διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς $Π$ χομένων, λέγω ὅτι θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πάσης ἄλλης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένης καὶ διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς διερχομένης, ἐπομένως κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ΜΝ$ εὐθεῖαν $ΒΓ$ συναπαντῶσαν τὰς τρεῖς εὐθείας $ΠΒ$, $ΠΚ$ καὶ $ΠΓ$, λαμβάνει ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς $ΑΠ$ τὴν ἀπόστασιν $ΠΑ'$ ἴσην τῇ $ΠΑ$ ἐνόνομεν τὰ σημεῖα A καὶ A' μὲ τὰ σημεῖα B, K καὶ Γ .

Ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν ἡ $ΠΓ$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς $ΑΠ$ καὶ

πέσον Π τῆς εὐθείας AA' , αἱ πλάγιοι $ΓΑ$ καὶ $ΓΑ'$ εἶναι ἴσαι (πρότ. 19, A'). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ πλάγιοι $ΒΑ$ καὶ $ΒΑ'$ εἶναι ἴσαι. Ἐπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι τὰ δύο τρίγωνα $ΒΓΑ$ καὶ $ΒΓΑ'$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν $ΒΓ$ κοινὴν καὶ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς αὐτῶν ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρα. Ἐὰν λοιπὸν στραφῇ τὸ τρίγωνον $ΒΓΑ'$ περὶ τὴν $ΒΓ$ μέχρις οὗ ἐπιτεθῇ ἐπὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ $ΑΒΓ$, τὸ σημεῖον A' θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ A , καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον K δὲν μεταβάλλει θέσιν, ἡ εὐθεῖα KA' θέλει πέσει ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς KA .



Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν $ΠΚ$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς AA' , διότι δύο τῶν σημείων αὐτῆς $Π$ καὶ K ἀπέχουσιν ἰσάκεις τῶν ἄκρων A καὶ A' τῆς AA' . Λοιπὸν ἡ $ΑΠ$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐξ ἐκδὸς δεδομένου σημείου δυνατόμεθα πάντοτε νὰ ἀξώμεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τινος ἐπιπέδου καὶ μίαν μόνην.

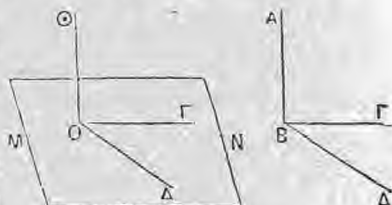
1^η. Ὡς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις, ὅτι τὸ δεδομένον σημεῖον O κεῖται ἐπὶ τοῦ δεδομένου ἐπιπέδου MN .

Λαμβάνομεν εὐθεῖαν $ΑΒ$, κοινὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων $ΑΒΑ$ καὶ $ΑΒΓ$, καὶ εἰς τι σημεῖον B

τῆς $ΑΒ$ ὑψόνομεν τὰς κάθετους $ΒΓ$ καὶ $ΒΔ$ ἐπὶ τῆς εὐθείας $ΑΒ$ οὕτως, ὥστε $ΒΓ$ νὰ κῆται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ΑΒΓ$ καὶ $ΒΔ$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ΑΒΔ$. Κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, ἡ εὐθεῖα $ΑΒ$, κάθετος οὖσα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν $ΒΓ$ καὶ $ΒΔ$, εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν $ΓΒΔ$.

Τοῦτου γενομένου, μεταφέρομεν τὸ σχῆμα $ΑΒΓΑ$ οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον B νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου O , καὶ στρέφομεν ἀκολουθῶς τὸ ἐπίπεδον $ΓΒΔ$ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ταύτισθῇ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου MN . Αἱ εὐθεῖαι $ΒΓ$ καὶ $ΒΔ$ θέλουσι λάβει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN τὰς θέσεις $ΟΓ$ καὶ $ΟΔ$, ἡ δὲ εὐθεῖα $ΑΒ$ θέσιν τινὰ $ΟΘ$, ἥτις θέλει εἶναι προφανῶς κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN (πρότ. 3).

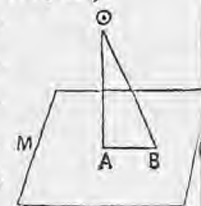
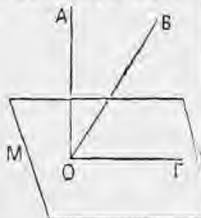
Ὡς ὑποθέσωμεν δευτέρον ὅτι τὸ δεδομένον σημεῖον $Θ$ κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου MN .



Κατασκευάζομεν ὡς προηγουμένως τὸ σχῆμα $AB\Gamma\Delta$, μεταφέροντες αὐτὸ εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἐπίπεδον $B\Gamma\Delta$ νὰ ταύτισθῇ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου MN , καὶ ἀκολουθῶς, τοῦ ἐπιπέδου $B\Gamma\Delta$ κειμένου πάντοτε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN , μεταβάλλομεν τὴν θέσιν αὐτοῦ οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα BA νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Θ . Ἡ εὐθεῖα AB θέλει λάβει θέσιν τινὰ $O\Theta$, ἥτις θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN .

2^ο. Ἐξ ἐνὸς σημείου O , κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN , μίαν μόνην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου κάθετον δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν. Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν δύο OA καὶ OB , αἱ εὐθεῖαι αὗται κάθετοι οὖσαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN , θέλουσιν εἶναι κάθετοι ἐπὶ πάσης εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ ποδός τινος O , καὶ ἐπὶ μένως κάθετοι καὶ ἐπὶ τῆς OG , κοινῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων MN καὶ AOB , εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον O , καὶ θέλουσι προσέτι κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ABO , ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 4, A').

Ὡσαύτως, ἐξ ἐνὸς σημείου Θ , ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου MN κειμένου, μίαν μόνην κάθετον δυνάμεθα νὰ καταβιβάσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ καταβιβάσωμεν δύο ΘA καὶ ΘB , τὸ τρίγωνον ΘAB ἔχεν ἐξ ἑξ ἑκὼν δύο γωνίας ὀρθάς, ὅπερ ἀδύνατον.

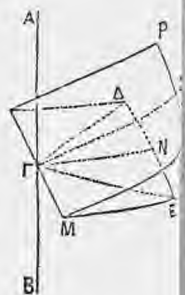


ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐκ τινος δεδομένου σημείου Γ δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν πάντοτε ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δεδομένης εὐθείας AB καὶ ἕρ' ἓν μόνον.

1^ο. Ἄς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ δεδομένον σημεῖον Γ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας AB .

Διὰ τῆς AB ἄγομεν δύο ὁποιαδήποτε ἐπίπεδα $\Lambda\Gamma\Delta$ καὶ $\Lambda\Gamma E$ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Γ ὑψώσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda\Gamma\Delta$ τὴν $\Gamma\Delta$ κάθετον ἐπὶ τῆς $\Lambda\Gamma$, καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda\Gamma E$ τὴν ΓE κάθετον ὡσαύτως ἐπὶ τῆς $\Lambda\Gamma$. Τὸ ἐπίπεδον $\Delta\Gamma E$ τῶν κάθετων $\Gamma\Delta$ καὶ ΓE θέλει εἶναι προφανῶς κάθετον ἐπὶ τῆς AB (πρότ. 3).

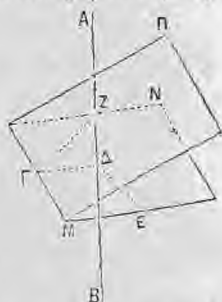


Εὐκόλως δὲ δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι οὐδὲν ἄλλο ἐπίπεδον

ἂ τοῦ σημείου Γ διερχόμενον δύναται νὰ ᾖναι κάθετον ἐπὶ τῆς AB .
 ὅτι, ἂν τοῦτο ᾖτο δυνατόν, αἱ κοιναὶ τομαὶ ΓN καὶ ΓZ τῶν ἐπιπέ-
 δων $\Gamma \Delta E$ καὶ $M \Pi$ μεθ' ἑνὸς τρίτου $\Lambda \Gamma N$, διὰ τῆς εὐθείας AB διερχομένου,
 θέλον εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς AB εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ καὶ ᾗθελον
 εἶσθαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου $\Lambda \Gamma Z N$, ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 4, Λ').

2^α. Ὡς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι τὸ δεδο-
 μένον σημεῖον Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας AB .

Διὰ τῆς εὐθείας AB καὶ τοῦ σημείου Γ ἄγο-
 ρεν τὸ ἐπίπεδον $AB\Gamma$, καὶ δεύτερόν τι ἐπίπε-
 δον $\Lambda \Delta E$ διὰ μόνης τῆς εὐθείας AB διερχόμε-
 νον. Ἐκ τοῦ σημείου Γ καταβιβάζομεν τὴν $\Gamma \Delta$
 κάθετον ἐπὶ τῆς AB , καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου
 $\Lambda \Delta E$ ὑψοῦμεν εἰς τὸ σημεῖον Δ τὴν ΔE κάθετον

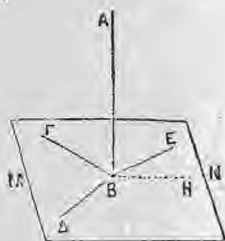


ἐπὶ τῆς AB . Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ ἐπίπεδον MN τῶν εὐθειῶν $\Gamma \Delta$
 καὶ ΔE θέλει εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς AB (πρότ. 3).

Τελευταῖον, πᾶν ἐπίπεδον $M \Pi$, διὰ τοῦ σημείου Γ διερχόμενον
 καὶ διάφορον τοῦ MN , δὲν δύναται νὰ ᾖναι κάθετον ἐπὶ τῆς AB .
 Διότι, ἂν τοῦτο ᾖτο δυνατόν, αἱ κοιναὶ τομαὶ $\Gamma \Delta$ καὶ ΓZ (*) τοῦ
 ἐπιπέδου $AB\Gamma$ μετὰ τῶν ἐπιπέδων MN καὶ $M \Pi$ ᾗθελον εἶναι κά-
 θετοι ἐπὶ τῆς AB , ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 17, Λ').

Πόρισμα. Ὅσαι αἱ κάθετοι $B\Gamma$, $B\Delta$, BE ,
 κτλ, αἱ εἰς σημεῖον τι B τῆς εὐθείας AB ὑψοῦ-
 μεναι, κενταὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ δὲ
 ἐπίπεδον αὐτὸ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς AB .

Διότι, ἐπειδὴ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, τὸ
 ἐπίπεδον MN τῶν δύο εὐθειῶν $B\Gamma$ καὶ $B\Delta$ εἶναι
 κάθετον ἐπὶ τῆς AB , πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ πορίσματος.



τος ἀρκεῖ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον MN περιέχει καὶ ὅλας τὰς
 ἄλλας καθέτους. Ἄλλ', ἐὰν ᾗ BE κῆται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου MN , τὸ
 ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν AB καὶ BE θέλει τεμῆσαι τὸ ἐπίπεδον MN κατὰ
 τινα εὐθεῖαν BH , ᾗτις θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς AB , καὶ ᾗθέλουμεν
 ἔχει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου $\Lambda B E$ δύο καθέτους BH καὶ BE ἐπὶ τῆς
 αὐτῆς εὐθείας AB καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου B , ὅπερ ἀδύνατον.

(*) Ἡ εὐθεῖα ΓZ θέλει εἶναι διάφορος τῆς $\Gamma \Delta$, διότι ἀπεδείχθη προη-
 γουμένως ὅτι ἐξ ἑνὸς σημείου Δ , ἐπ' εὐθείας τινὸς AB κειμένου, ἔν μόνον
 ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης δύναμεθα νὰ ᾤζωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν ἐξ ἐνὸς σημείου A , ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου MN κειμένου, καταβιβάζωμεν ἐπ' αὐτοῦ τὴν κάθετον $ΑΠ$, καὶ ἄξωμεν καὶ διαφόρους πλαγίας $ΑΔ$, $ΑΓ$ καὶ $ΑΕ$. λέγω ὅτι

1^η. Ἡ κάθετος $ΑΠ$ θέλει εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας.

2^η. Αἱ πλαγαί $ΑΓ$ καὶ $ΑΔ$, αἱ εἰς ἴσας ἀποστάσεις $ΠΓ$ καὶ $ΠΔ$ ἀπὸ τοῦ ποδὸς $Π$ τῆς καθέτου ἀγόμεναι, θέλουσιν εἶναι ἴσαι.

3^η. Ἐκ δύο πλαγίων $ΑΓ$ καὶ $ΑΕ$ ἡ εἰς μεγαλειτέραν ἀπόστασιν $ΠΕ$ ἀπὸ τοῦ ποδὸς $Π$ ἡγμένη εἶναι μεγαλειτέρα.

4^η. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον $ΑΠΓ$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ σημεῖον $Π$, ἡ πλαγία $ΑΓ$, ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας $ΑΠΓ$, εἶναι μεγαλειτέρα τῆς καθετοῦ $ΑΠ$, ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας $ΑΠΓ$, μικροτέρας τῆς ὀρθῆς $ΑΠΓ$.

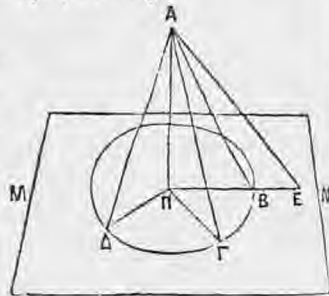
2^η. Ἐπειδὴ ἡ $ΠΓ$ ὑποτίθεται ἴση τῇ $ΠΔ$, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $ΑΠΓ$ καὶ $ΑΠΔ$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. λοιπὸν καὶ $ΑΓ = ΑΔ$.

3^η. Ἐπειδὴ ἡ $ΠΕ$ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς $ΠΓ$, ἂν λάβωμεν $ΠΒ = ΠΓ$ καὶ ἄξωμεν τὴν $ΑΒ$, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα $ΑΒ = ΑΓ$. Ἀλλ' ἡ $ΑΒ$ εἶναι μικροτέρα τῆς $ΑΕ$ (πρότ. 18. Α'). Ἀρα καὶ ἡ $ΑΓ$, ἴση τῇ $ΑΒ$, θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς $ΑΕ$.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ αἱ πλαγαί $ΑΒ$, $ΑΓ$ καὶ $ΑΔ$ εἶναι ἴσαι, τὰ σημεία $Β$, $Γ$ καὶ $Δ$ ἀπέχουσιν ἰσάκεις ἀπὸ τοῦ ποδὸς $Π$ τῆς καθέτου, ἐπομένως κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας $ΒΓΔ$, τῆς ἐχούσης κέντρον τὸν πόδα $Π$ τῆς καθέτου $ΑΠ$. λοιπὸν, ἂν μὲ κέντρον $Α$ καὶ ἀκτῖνα ἀρκούντως μεγάλην προσδιορίσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN τρία διάφορα σημεία $Β$, $Γ$ καὶ $Δ$, καὶ εὕρωμεν τὸ κέντρον $Π$ τῆς διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων $Β$, $Γ$ καὶ $Δ$ διερχομένης περιφερείας, τὸ εὕρεθὲν σημεῖον $Π$ θέλει εἶναι ὁ ποὺς τῆς ἐκ τοῦ σημείου $Α$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN καταβιβάζομένης καθέτου $ΑΠ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ

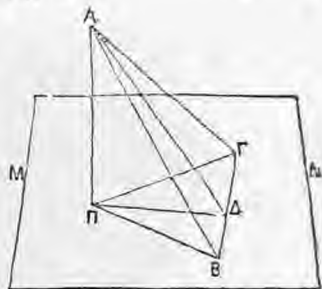
Ἐστω $ΑΠ$ κάθετος τις ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN καὶ $ΒΓ$ εὐθεΐα τις κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Ἐὰν ἐκ τοῦ ποδὸς $Π$ τῆς καθέτου



καταβιβάζωμεν τὴν $ΑΠ$ κάθετον ἐπὶ τῆς $ΒΓ$ καὶ ἐνώσωμεν $ΑΔ$, λέγω ὅτι ἡ $ΑΔ$ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς $ΒΓ$.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν $ΒΔ = ΔΓ$ καὶ ἄγομεν τὰς εὐθείας $ΠΒ$, $ΠΓ$, $ΑΒ$ καὶ $ΑΓ$. Ἐπειδὴ ἡ $ΒΔ$ εἶναι ἴση τῇ $ΔΓ$, ἡ πλαγία $ΠΒ$ θέλει εἶναι ἴση τῇ $ΠΓ$ (πρότ. 18. Α') καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΠΒ$ εἶναι ἴση τῇ $ΠΓ$, ἡ πλαγία $ΑΒ$ θέλει εἶναι ἴση τῇ $ΑΓ$ (πρότ. 6). Τὰ δύο λοιπὸν σημεία $Α$ καὶ $Δ$ τῆς εὐθείας $ΑΔ$ ἀπέχουσιν ἰσάκεις ἀπὸ τῶν ἄκρων $Β$ καὶ $Γ$ τῆς εὐθείας $ΒΓ$. Ἀρα ἡ $ΑΔ$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς $ΒΓ$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ ἡ $ΒΓ$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῶν εὐθειῶν $ΠΔ$ καὶ $ΑΔ$, θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν $ΑΠΔ$ (πρότ. 3).



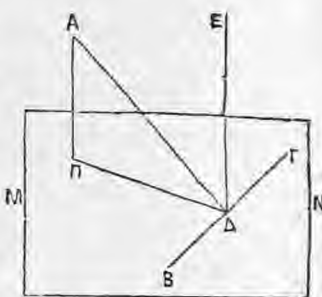
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν ἡ εὐθεΐα $ΑΠ$ ᾖναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN , πᾶσα εὐθεΐα $ΔΕ$, παράλληλος τῇ $ΑΠ$, θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου MN .

Ἐστω $ΠΔ$ ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου MN μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῶν παραλλήλων $ΑΠ$ καὶ $ΔΕ$. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN ἄγομεν τὴν $ΒΓ$ κάθετον ἐπὶ τῆς $ΠΔ$, καὶ ἐνόημεν $ΑΔ$.

Κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἡ $ΒΓ$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ΑΠΔΕ$. Ἡ γωνία λοιπὸν $ΕΔΒ$ εἶναι ὀρθή. Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία $ΕΔΠ$ εἶναι ὀρθή, διότι $ΑΠ$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς $ΠΔ$, καὶ $ΔΕ$ εἶναι παράλληλος τῇ $ΑΠ$ (πρότ. 25. Α'). λοιπὸν ἡ εὐθεΐα $ΔΕ$, κάθετος οὖσα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν $ΠΔ$ καὶ $ΒΓ$, θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν MN .

Πόρισμα 1. Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ εὐθεΐαι $ΑΠ$ καὶ $ΕΔ$ ᾖναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN , αἱ εὐθεΐαι αὗται θέλουσιν εἶναι καὶ παράλληλοι. Διότι ἄλλως ἢ ἐκ τοῦ σημείου $Δ$ ἀγομένη παράλληλος τῇ $ΑΠ$ ἤθελεν εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN , καὶ ἡθέλομεν ἔχει εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον $Δ$ τοῦ ἐπιπέδου MN δύο κάθετους, ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 4).



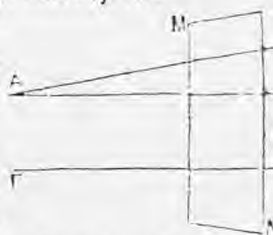
Πόρισμα 2. Δύο εὐθεῖαι A καὶ B παράλληλοι τρίτῃ τινὶ Γ καὶ πρὸς ἄλλήλας παράλληλοι. Διότι, ἐὰν φαντασθῶμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας Γ , ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι A καὶ B εἶναι παράλληλοι τῇ καθετῇ Γ , θέλουσιν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Λοιπὸν, κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα, εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐξ ἑνὸς σημείου A μίαν καὶ μόνην παράλληλον δεδομένην εὐθείαν $\Gamma\Delta$ δύναμεθα τὰ ἄξωμεν ἐν τῷ διαστήματι.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι δυνατόν νὰ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι: AE καὶ AB παράλληλοι τῇ $\Gamma\Delta$, καὶ ἃς ἄξωμεν ἐπίπεδόν τι MN κάθετον ἐπὶ τῆς $\Gamma\Delta$.

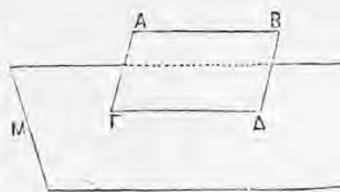
Τὸ ἐπίπεδον MN , ὡς κάθετον ἐπὶ τῆς $\Gamma\Delta$, θέλει εἶναι κατὰ τὰ προαποδειχθέντα κάθετον ἐπὶ τῆς AE καὶ ἐπὶ τῆς AB , παραλλήλων τῇ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπομένως ἡθέλωμεν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου A δύο ἑνὸς καὶ τοὺς AE καὶ AB ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου MN , ὅπερ ἀδύνατον. πὼν ἐξ ἑνὸς σημείου A μίαν κατλ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα AB ᾖναι παράλληλος τῇ $\Gamma\Delta$, τῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN κειμένη, λέγω ὅτι θέλει εἶναι παράλληλος καὶ τῇ πύτῃ τούτῃ.

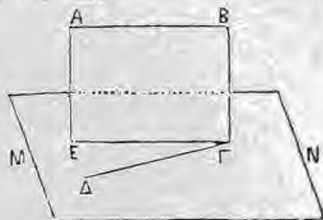
Διότι, ἂν ἡ εὐθεῖα AB συνήντα τὸ ἐπίπεδον MN εἰς τι σημεῖον O , τὸ σημεῖον O θέλει κεῖσθαι ἢ ἐπὶ τῆς εὐθείας $\Gamma\Delta$ ἢ ἐκτὸς αὐτῆς. Ἀλλὰ δὲν δύναται νὰ κῆται ἐπὶ τῆς εὐθείας $\Gamma\Delta$, διότι AB καὶ $\Gamma\Delta$ ὑπετέθησαν παράλληλοι ἐκτὸς, διότι τότε ἡδυνάμεθα ἐκ τοῦ σημείου τούτου νὰ ἄξωμεν τοῦ ἐπιπέδου MN ἑτέραν εὐθεῖαν OP παράλληλον τῇ $\Gamma\Delta$, καὶ ἡθέλωμεν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου O δύο εὐθείας OA καὶ OP παράλληλους τῇ $\Gamma\Delta$, ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 9).



Πόρισμα 1. Ἐὰν εὐθεῖα τις AB ᾖναι παράλληλος ἐπιπέδῳ MN , ἡ κοινὴ τομὴ $\Gamma\Delta$ τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τινος ἐπιπέδου $\Gamma\Delta$ διερχομένου, θέλει εἶναι παράλληλος τῇ AB .

Διότι, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $ΓΔ$ κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου $ABΓΔ$, ἐὰν ἡ εὐθεῖα AB συνήντα τὴν $ΓΔ$, ἤθελε συναπαντήσῃ καὶ τὸ ἐπίπεδον MN , ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Πόρισμα 2. Ἐὰν ἐκ τινος σημείου $Γ$ τοῦ ἐπιπέδου MN , παραλλήλου τῇ εὐθεῖα AB , ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα $ΓΕ$ παράλληλος τῇ AB , ἡ εὐθεῖα αὕτη θέλει κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN .

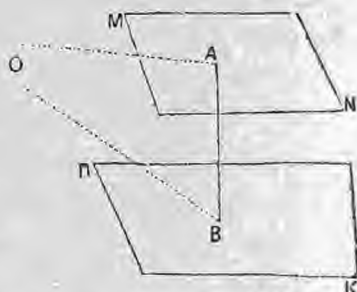


Διότι ἄλλως τὸ διὰ τῆς AB καὶ τοῦ σημείου $Γ$ διερχόμενον ἐπίπεδον ἤθελε τμήσῃ τὸ ἐπίπεδον MN κατὰ τινα εὐθεῖαν $ΓΔ$, ἥτις θέλει εἶναι παράλληλος τῇ AB , καὶ ἠθέλομεν ἔχει ἐξ ἑνὸς σημείου $Γ$ δύο εὐθείας $ΓΕ$ καὶ $ΓΔ$, παραλλήλους τῇ αὐτῇ εὐθεῖα AB , ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο ἐπίπεδα MN καὶ $ΠΚ$, κάθετα ἐπ' εὐθείας τινὸς AB , εἶναι παράλληλα πρὸς ἀλλήλα.

Διότι ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι συναπαντῶνται, καὶ ἔστω O ἐν τῶν σημείων τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς. Ἐὰν ἄξωμεν τὰς εὐθείας OA καὶ OB , ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN , θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας OA , ἥτις κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ

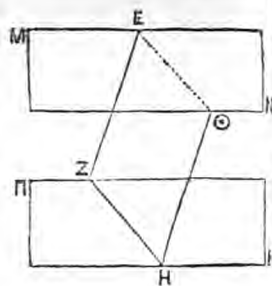


διέρχεται διὰ τοῦ ποδὸς A τῆς καθέτου BA . Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ἡ AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ΠΚ$, θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας OB , ἥτις κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ διέρχεται διὰ τοῦ ποδὸς B τῆς καθέτου AB . Λοιπὸν OA καὶ OB θέλουσιν εἶναι δύο κάθετοι, καταβιβασζόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου O ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας AB , ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 17, Δ'). Τὰ ἐπίπεδα λοιπὸν MN καὶ $ΠΚ$ δὲν δύνανται νὰ συναπαντηθῶσι. Λοιπὸν εἶναι παράλληλα, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αἱ κοινὰί τομαὶ EO καὶ ZH δύο παραλλήλων ἐπιπέδων MN καὶ $ΠΚ$ μεθ' ἑνὸς τρίτου EO εἶναι παράλληλοι.

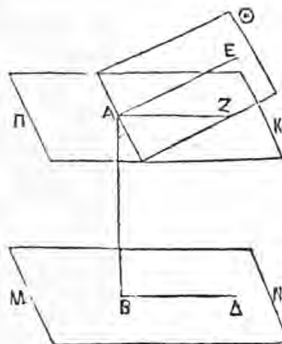
Διότι, ἂν αἱ εὐθεῖαι $ΕΘ$ καὶ $ΖΗ$, αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου $ΖΘ$ κείμεναι, δὲν ᾗσαν παράλληλοι, προσεκτεινόμεναι ἤθελον συναπαντηθῇ. Λοιπὸν καὶ τὰ ἐπίπεδα MN καὶ $ΠΚ$, ἐφ' ὧν αὗται κεῖνται, ἤθελον ὡσαύτως συναπαντηθῇ, ἐπομένως δὲν ἤθελον εἶναι παράλληλα, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13 ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐξ ἐνὸς σημείου A δυναμέθα πάντοτε νὰ ἀξωμεν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ MN καὶ ἐν μόνον.

1^η. Ἐκ τοῦ σημείου A καταβιβάζομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN τὴν κάθετον AB καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον A ἄγομεν τὸ ἐπίπεδον $ΠΚ$ κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας AB . Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ ἐπίπεδον $ΠΚ$ θέλει εἶναι παράλληλον τῷ MN .

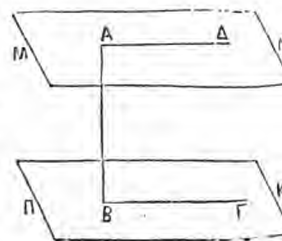


2^η. Ἄν ὑπῆρχε καὶ δευτέρον τι ἐπίπεδον $ΛΘ$, διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου A καὶ παράλληλον τῷ MN , αἱ κοιναὶ τομαὶ $ΒΔ$, $ΑΖ$ καὶ $ΑΕ$, τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων MN , $ΠΚ$ καὶ $ΛΘ$ μεθ' ἐνὸς τρίτου, διὰ τῆς AB διερχομένου, ἤθελον εἶναι παράλληλοι (πρότ. 12), καὶ ἠθέλομεν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου A δύο εὐθεῖαι $ΑΖ$ καὶ $ΑΕ$ παράλληλους τῇ $ΒΔ$, ὅπερ ἄτοπον (πρότ. 9).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα AB ᾗται κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN , λέγεται ὅτι θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ΠΚ$, παραλλήλου τῷ MN .

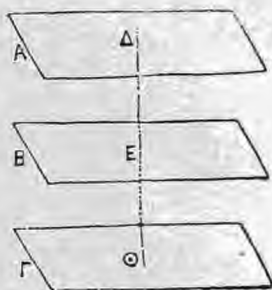
Διότι, ἂν ἡ AB δὲν ᾗτο κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ΠΚ$, τὸ διὰ τοῦ σημείου B ἄγόμενον κάθετον ἐπὶ τῆς AB ἐπίπεδον ἤθελον εἶναι παράλληλον τῷ MN (πρότ. 13) καὶ τότε ἠθέλομεν ἔχει ἐξ ἐνὸς σημείου B δύο ἐπίπεδα παράλληλα τῷ MN , ὅπερ προαπεδείχθη ἀδύνατον. Λοιπὸν κτλ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο ἐπίπεδα A καὶ B , παράλληλα τρίτῳ τινὶ Γ , εἶναι καὶ πρὸς ἄλληλα παράλληλα.

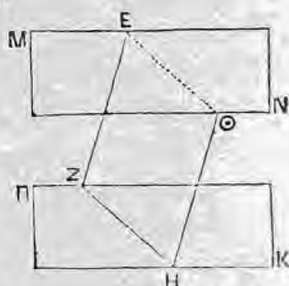
Διότι, ἐὰν ἄξωμεν τὴν $\Delta\Theta$ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Γ , αὕτη θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῶν παραλλήλων αὐτῶν ἐπιπέδων A καὶ B , καὶ ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα A καὶ B εἶναι κάθετα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας $\Delta\Theta$, θέλουσιν εἶναι παράλληλα (πρότ. 11). Λοιπὸν δύο ἐπίπεδα A , καὶ B , παράλληλα τρίτῳ τινὶ Γ , εἶναι καὶ πρὸς ἄλληλα παράλληλα.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων MN καὶ PK περιέχονται παράλληλοι EZ καὶ ΘH εἶναι ἴσαι.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν διὰ τῶν παραλλήλων EZ καὶ ΘH τὸ ἐπίπεδον $EZH\Theta$. Αἱ κοιναὶ τομαὶ $E\Theta$ καὶ ZH τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων MN καὶ PK θέλουσιν εἶναι παράλληλοι (πρότ. 12). Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν $ZH\Theta E$ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὥς ἔχον τὰς ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰς παραλλήλους. Λοιπὸν κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 33 προτάσει τοῦ Α' βιβλίου θέλομεν ἔχει $EZ = H\Theta$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.



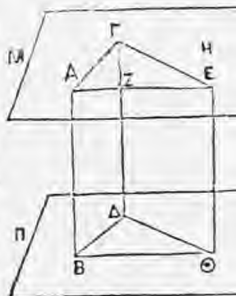
Πέρισμα. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι ἡ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀπόστασις εἶναι καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἑκτασίαν ἡ αὐτή. Διότι, ἂν αἱ εὐθεῖαι EZ καὶ ΘH ᾗσαν κάθετοι ἐπὶ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων MN καὶ PK , ᾗθελον εἶναι καὶ παράλληλοι, καὶ ἐπομένως κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν δύο γωνίαι $\Gamma A E$ καὶ $\Delta B \Theta$, μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κείμεναι, ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, ἑκατέραν ἑκατέρῃ, καὶ διευθυνομένας κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν, αἱ γωνίαι αὗται θέλουσιν εἶναι ἴσαι, τὰ δ' ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα.

Ἄς λάβωμεν $ΑΓ=ΒΔ$, $ΑΕ=ΒΘ$, καὶ ἄς ἀξωμεν τὰς εὐθείας $ΔΘ$, $ΑΒ$, $ΓΔ$ καὶ $ΕΘ$.

Ἐπειδὴ ἡ $ΑΓ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΒΔ$, τὸ σχῆμα $ΑΒΔΓ$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Λοιπὸν ἡ $ΓΔ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΑΒ$. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ἡ $ΑΕ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΒΘ$, ἡ $ΕΘ$ θέλει εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΑΒ$. Λοιπὸν καὶ ἡ $ΓΔ$ θέλει εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΕΘ$. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν $ΓΕΘΔ$ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἐπομένως ἡ $ΓΕ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΔΘ$. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα $ΓΑΕ$ καὶ $ΒΔΘ$ εἶναι ἰσοσκελῆ, ἐπομένως καὶ ἰσογώνια. Ἡ γωνία ἄρα $ΓΑΕ=ΔΒΘ$.



Λέγω πρὸς τούτοις, ὅτι τὸ ἐπίπεδον $ΑΓΕ$ εἶναι παράλληλον ἐπὶ τῷ ἐπίπεδῳ $ΒΔΘ$. Διότι, ἂν τὸ ἐπίπεδον $ΑΓΕ$ δὲν ᾗτο παράλληλον τῷ ἐπίπεδῳ $ΒΔΘ$, ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐκ τοῦ σημείου $Α$ ἀγόμενον παράλληλον τῷ ἐπίπεδῳ $ΒΔΘ$ ἐπίπεδον συναπαντᾷ τὰς εὐθείας $ΓΔ$ καὶ $ΕΘ$ ἐν δύο σημείois $Ζ$ καὶ $Η$ διάφορα τῶν σημείων $Γ$ καὶ $Ε$. Τότε, κατὰ ἀποδείχθέντα (πρότ. 16), αἱ τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι $ΑΒ$, $ΖΔ$, καὶ $ΕΘ$ θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' αἱ τρεῖς εὐθεῖαι $ΑΒ$, $ΓΔ$ καὶ $ΕΘ$ δεῖχθησαν ἴσαι. Ἀρα θέλομεν ἔχει $ΓΔ=ΖΔ$ καὶ $ΕΗ=ΕΘ$, ὅπερ ἐστὶν ἄντιστοιχον. Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν $ΑΓΕ$ εἶναι παράλληλον τῷ $ΒΔΘ$.

Πόρισμα. Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα $ΜΝ$ καὶ $ΠΚ$ συναπαντῶσιν ὑπὸ δύο ἄλλων ἐπιπέδων $ΓΑΒΔ$ καὶ $ΕΑΒΘ$, αἱ ὑπὸ κοινῶν τομῶν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων $ΜΝ$ καὶ $ΠΚ$ σχηματίζονται γωνίας $ΓΑΕ$ καὶ $ΒΔΘ$ θέλουσιν εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὰ μεταξὺ τριῶν παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμενα μέτρα εὐθειῶν $ΑΒ$ καὶ $ΓΔ$ εἶναι ἀνάλογα.

Ἐστώσαν $Α$, $Ε$, $Β$ τὰ σημεία, ἐνθα ἡ εὐθεῖα $ΑΒ$ συναπαντᾷ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα $ΜΝ$, $ΠΚ$, $ΡΣ$, καὶ $Γ$, $Θ$, $Δ$ τὰ σημεία, ἐνθα ἡ εὐθεῖα $ΓΔ$ συναπαντᾷ τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$ΑΕ : ΓΘ = ΕΒ : ΘΔ.$$

Διότι, ἐὰν ἀξωμεν τὴν εὐθεῖαν $ΑΔ$, ᾗτις



συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον ΠΚ εἰς τι σημεῖον Ζ, καὶ ἐνώσωμεν ΑΓ, ΕΖ, ΘΖ, ΒΔ, ἐπειδὴ αἱ κοιναὶ τομαὶ ΕΖ καὶ ΒΔ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΠΚ καὶ ΡΣ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ εἶναι παράλληλοι, θέλομεν ἔχει

$$ΑΕ : ΕΒ = ΑΖ : ΖΔ. \quad (1)$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἐπειδὴ αἱ τομαὶ ΑΓ καὶ ΖΘ εἶναι παράλληλοι, θέλομεν ἔχει

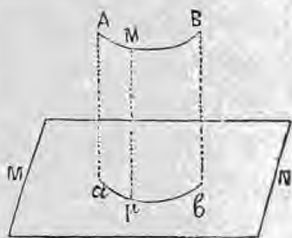
$$ΑΖ : ΖΔ = ΓΘ : ΘΔ. \quad (2)$$

*Αρξ ἔνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου ΑΖ : ΖΔ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), θέλομεν ἔχει

$$ΑΕ : ΕΒ = ΓΘ : ΘΔ, \quad \eta \quad ΑΕ : ΓΘ = ΕΒ : ΘΔ.$$

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Ὁ πῶς τῆς ἑκ τινος σημείου ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς καταβιβαζομένου καθέτου καλεῖται *προβολή* τοῦ σημείου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* π. χ. τὸ σημεῖον α, πῶς τῆς ἑκ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ καταβιβαζομένης καθέτου Αα, καλεῖται *προβολή* τοῦ σημείου Α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ.

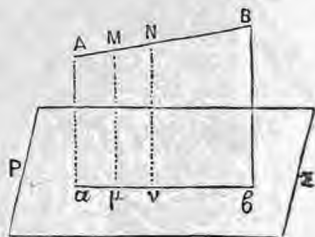


Ἡ προβολὴ γραμμῆς τινος ΑΜΒ ἐπὶ τινος ἐπιπέδου ΜΝ εἶναι ἡ γραμμὴ αμβ, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν προβολῶν τῶν σημείων τῆς γραμμῆς ΑΜΒ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ προβολὴ εὐθείας γραμμῆς ἐπὶ τινος ἐπιπέδου εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ἐκ τινος σημείου Α τῆς εὐθείας ΑΒ καταβιβάζομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΡΣ τὴν κάθετον Αα, καὶ ἄγομεν διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Αα ἐπίπεδον, ὅπερ θέλει τμηθεῖν τὸ ἐπίπεδον ΡΣ κατὰ τὴν εὐθεῖαν αβ. Λέγω δτι ἡ εὐθεῖα αβ θέλει εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΡΣ προβολὴ τῆς ΑΒ.



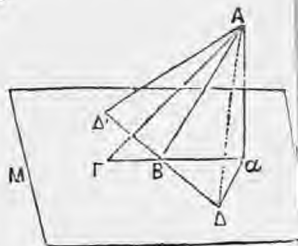
Διότι, ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Μ, Ν, ... τῆς εὐθείας ΑΒ καταβιβάσωμεν καθετούς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΡΣ, αἱ κάθετοι αὗται θέλουσιν εἶναι παράλληλοι τῇ Αα, καὶ θέλουσι κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΑα (πρότ.

1, πόρ. 2), ἐπομένως δὲν δύνανται νὰ συναπαντήσωσι τὸ ἐπίπεδον $\Pi\Sigma$ εἰμὴ εἰς σημεῖα ἐπὶ τῆς εὐθείας $\alpha\beta$ κείμενα. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ ὀξεῖα γωνία $\angle B\alpha$, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς εὐθείας AB καὶ τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN προβολῆς αὐτῆς Ba , εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης $\angle B\Delta$, σχηματιζομένης ὑπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας AB καὶ ἑτέρας τινὸς $B\Delta$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN κειμένης καὶ διὰ τοῦ σημείου τῆς συναπαντήσεως B διερχομένης.

Διότι, ἐὰν λάβωμεν $B\Delta = Ba$ καὶ ἐνώσωμεν AD , τὰ δύο τρίγωνα $\triangle B\alpha$ καὶ $\triangle B\Delta$ θέλουσιν ἔχει τὴν πλευρὰν AB κοινὴν, τὰς πλευρὰς $B\alpha$ καὶ $B\Delta$ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ $A\alpha$ τοῦ πρώτου θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς τρίτης πλευρὰς $A\Delta$ τοῦ δευτέρου· διότι ἡ μὲν $A\alpha$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN , ἡ δὲ $A\Delta$ πλαγία. Λοιπὸν ἡ γωνία $\angle B\alpha$ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας $\angle B\Delta$ (πρότ. 12, Α').



Πόρισμα. Ἐπειδὴ ἡ ὀξεῖα γωνία $\angle B\alpha$ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης $\angle B\Delta$, ἔπεται ὅτι ἡ παραπληρωματικὴ αὐτῆς $\angle AB\Gamma$ εἶναι μεγαλύτερα πάσης ἄλλης $\angle A\beta\Delta'$ · διότι θέλομεν ἔχει πάντοτε τὴν ἰσότητα $\angle B\alpha + \angle AB\Gamma = \angle B\Delta + \angle A\beta\Delta' = 2^{\circ}$, καὶ ἐπειδὴ ἡ $\angle B\alpha < \angle B\Delta$, ἔπεται ὅτι ἡ $\angle AB\Gamma > \angle A\beta\Delta'$.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ ἡ ὀξεῖα γωνία $\angle B\alpha$, ἡ ὡς ἀνωτέρω ἐρρέθη σχηματιζομένη, εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης, ὠνομάσθη γωνία τῆς εὐθείας μετὰ τοῦ ἐπιπέδου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δεδομένων δύο εὐθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων,

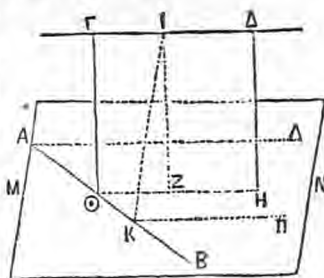
1^η. Δυνάμεθα νὰ ἀξώμεν ἐπ' αὐτῶν κοινὴν τινα κάθετον.

2^η. Μία μόνη κοινὴ κάθετος δυνάττω νὰ ὑψῇ.

3^η. Ἡ κοινὴ αὕτη κάθετος μετρεῖ τὴν ἐλάχιστην τῶν δύο εὐθειῶν ἀποστάσιν.

1^η. Ἐξ ἐνὸς σημείου A τῆς εὐθείας AB ἄγωμεν τὴν AA παράλληλον τῇ $\Gamma\Delta$. Τὸ ἐπίπεδον MN τῶν εὐθειῶν AB καὶ AA θέλει εἶναι παράλληλον τῇ εὐθείᾳ $\Gamma\Delta$ (πρότ. 10).

Ἐκ τοῦ σημείου Δ, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ κατ' ἄρέσκειαν ληφθέντος, ταβιβάζομεν τὴν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Π, ὁδὸς τῆς καθέτου ΔΗ, ἄγομεν τὴν ΠΘ παράλληλον τῇ ΓΔ, καὶ τελευταῖον, ἐκ τοῦ σημείου Θ ἄγομεν τὴν ΘΓ παράλληλον τῇ ΗΔ. Λέγω ὅτι ΘΓ θέλει εἶναι εὐθεὶν ἰσὺς κάθετος ἐπὶ τῶν δύο δεδομένων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.



Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΘΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΔΗ, θέλει εἶναι κάθετος πρὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ (πρότ. 8), ἐπομένως εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ΘΗ. Ἀλλ' οὕσα κάθετος ἐπὶ τῆς ΘΗ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΓΔ, παραλλήλου τῇ ΘΗ. Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΘΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Λοιπὸν 1^{ον} δυνάμεθα κτλ.

2^{ον}. Μία μόνη κοινὴ κάθετος δυνατὸν ἔχει. Διότι, ἐὰν ὑποθεθῇ ὅτι εὐθεῖαι τις ΙΚ, διάφορος τῆς ΓΘ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, αὕτη (δηλ. ἡ ΙΚ) θέλει εἶναι ὡσαύτως κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΗΚ, παραλλήλου τῇ ΓΔ, ἐπομένως ἤθελεν εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. Ἀφ' ἑτέρου ἡ ΙΖ παράλληλος τῇ ΔΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. Ἡθέλομεν λοιπὸν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ι δύο καθέτους ΙΚ καὶ ΙΖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ὅπερ ἄτοπον.

3^{ον}. Ἡ ΓΘ μετρεῖ τὴν ἐλάχιστην τῶν δύο τούτων εὐθειῶν ἀπόστασιν. Διότι, ἂν ΓΘ δὲν ᾗτο ἡ ἐλάχιστη, ἔστω ΙΚ τοιαύτη. Ἀγομεν τὴν ΙΖ παράλληλον τῇ ΓΘ. Ἡ ΙΖ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΓΘ καὶ μικρότερα τῆς ΙΚ, διότι ἡ μὲν ΙΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἡ δὲ ΙΚ πλαγία. Ἀρα ΓΘ < ΙΚ. Λοιπὸν 3^{ον} κτλ.

ΓΩΝΙΑΙ ΥΠὸ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΜΕΝΑΙ.

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Ὄταν δύο ἐπίπεδα τέμνονται, τὸ σχηματιζόμενον σχῆμα ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων, περατουμένων εἰς τὴν κοινὴν αὐτῶν τομὴν, καλεῖται διέδρος γωνία.

Ἡ κοινὴ τῶν δύο ἐπιπέδων τομὴ καλεῖται κόρυς τῆς διέδρου γωνίας, τὰ δὲ σχηματίζοντα τὴν διέδρον γωνίαν ἐπίπεδα καλοῦνται ὅροι αὐτῆς.

Ἡ διέδρος γωνία παρίσταται διὰ τεσσάρων γραμμῶν· τὰ δύο

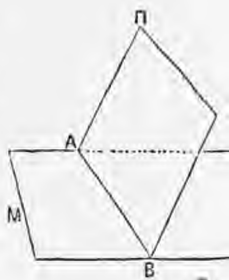
τούτων, τιθέμενα εἰς τὸ μέσον, παριστῶσι τὴν κόψιν, ἐκάτε-
 τῶν δύο ἄλλων μετὰ τῶν τὴν κόψιν παριστάντων παριστῶσι
 δύο αὐτῆς ἑδρας. Οὕτω π. χ. $\Gamma\Lambda\text{ΜΒ}$ παριστᾷ τὴν διέ- 
 δρον γωνίαν, τὴν ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΜΠ σχη-
 ματιζομένην καὶ $\Gamma\Lambda\text{Μ}$ καὶ $\Lambda\text{ΜΒ}$ τὰς ἑδρας αὐτῆς. Ἐ-
 νίοτε παριστῶσι τὴν διέδρον γωνίαν $\Gamma\Lambda\text{ΜΒ}$ μόνον διὰ
 τῶν τὴν κόψιν παριστάντων γραμμῶν Λ καὶ Μ , οὕ-
 τως $\Lambda\text{Μ}$ ἀλλὰ τότε μόνον, ὅταν οὐδεμία ἄλλη διέ-
 δρος γωνία ἔχη τὴν αὐτὴν κόψιν $\Lambda\text{Μ}$.

2. Δύο διέδροι γωνίαι λέγονται ἴσαι, ὅταν αἱ ἑδραι αὐτῶν ἐ-
 θέμεναι ταυτίζωνται.

3. Ἐν εἰς τι σημεῖον Λ τῆς κόψεως $\Lambda\text{Μ}$ ἄξωμεν ἐπὶ τοῦ ἐ-
 δρου τῆς ἑδρας $\Lambda\text{ΜΓ}$ τὴν $\Lambda\text{Ν}$ κάθετον ἐπὶ τῆς κόψεως $\Lambda\text{Μ}$, καὶ
 τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἑδρας $\Lambda\text{ΜΒ}$ τὴν $\Lambda\text{Π}$ κάθετον ἐπὶ τῆς αὐτῆς
 θείας $\Lambda\text{Μ}$, ἡ οὕτω σχηματιζομένη γωνία $\Pi\Lambda\text{Ν}$ καλεῖται ἡ τι-
 δρω γωνία $\Lambda\text{Μ}$ ἀντιστοιχοῦσα ἐπίπεδος γωνία.

Ἡ οὕτω σχηματιζομένη ἐπίπεδος γωνία $\Pi\Lambda\text{Ν}$ εἶναι ἡ αὐ-
 τοιοιόδηποτε σημεῖον τῆς κόψεως $\Lambda\text{Μ}$ καὶ ἂν ἀχθῶσιν αἱ κά-
 διότι, ἐάν εἰς τὸ σημεῖον Μ σχηματισθῇ ὁμοιοτρόπως ἡ ἐπίπεδος
 γωνία $\Gamma\text{ΜΒ}$, αἱ εὐθεῖαι ΜΓ καὶ $\Lambda\text{Ν}$ θέλουσιν εἶναι παράλληλοι, ὡ-
 θετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας $\Lambda\text{Μ}$ καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου
 κείμεναι· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΜΒ θέλει εἶναι παράλληλος τῇ
 $\Lambda\text{Π}$. Λοιπὸν ἡ γωνία $\Gamma\text{ΜΒ} = \Pi\Lambda\text{Π}$ (πρότ. 17).

4. Ἐν προεκβληθῇ μία τῶν ἐδρῶν
 διέδρου τινὸς γωνίας $\Pi\Lambda\text{ΒΝ}$, π. χ. ἡ
 $\Pi\Lambda\text{Β}$, θέλει σχηματισθῇ δευτέρα τις διέ-
 δρος γωνία $\Pi\Lambda\text{ΒΜ}$ προσκειμένη τῇ πρῶ-
 τη. Ἐάν αἱ προσκείμεναι αὗται διέδροι
 γωνίαι $\Pi\Lambda\text{ΒΝ}$ καὶ $\Pi\Lambda\text{ΒΜ}$ ᾗναι ἴσαι, τὸ
 ἐπίπεδον $\Pi\text{Β}$ λέγεται κάθετον ἐπὶ τοῦ
 ἐπιπέδου ΜΝ , αἱ δὲ ἴσαι διέδροι γωνίαι
 καλοῦνται ὀρθαὶ διέδροι γωνίαι.

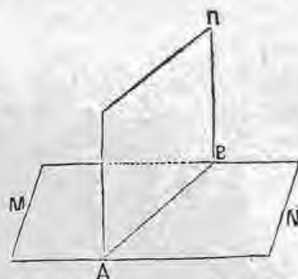


ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δι' εὐθείας τινὸς $\Lambda\text{Β}$, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κειμένης,
 πάντοτε δυνατόν τὰ διέλθῃ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπι-
 ΜΝ , καὶ εἶναι μόνον.

Πόρισμα. Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ διέδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἐπειδὴ ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου, ὡς καὶ ἡ τοῦ πορίσματος, εἶναι κατὰ πάντα ὁμοία τῇ δοθείσῃ ἐν τῇ 1 προτάσει τοῦ Α' Βιβλίου, ἐνομίσαμεν περιττὸν νὰ ἐπαναλάβωμεν αὐτὴν ἐκ δευτέρου, πεπεισμένοι ὅτι ὁ ἀναγνώστης εἶναι ἤδη εἰς κατάστασιν νὰ τὴν ἐφαρμόσῃ ἀφ' ἑαυτοῦ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πᾶν ἐπίπεδον συναπαντῶν δευτέρῳ τι σχηματίζει μετ' αὐτοῦ δύο προσκειμένας διέδρους γωνίας, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς διέδρους γωνίας.

Πόρισμα. Ἐὰν ἐπίπεδόν τι ᾗναι κάθετον ἐπὶ ἑτέρου, τὸ δεύτερον τοῦτο ἐπίπεδον θέλει εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ πρώτου. (Ὁρα πρότ. 2, Α').

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο προσκειμένων διέδρων γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς διέδρους γωνίας, αἱ ἐξωτερικαὶ αὐτῶν ἑδραι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. (Ὁρα πρότ. 4, Α').

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25. ΘΕΩΡΗΜΑ

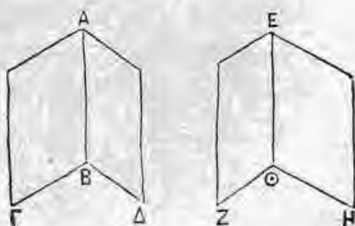
Ὅταν δύο ἐπίπεδα τέμνῳνται, αἱ κατὰ κορυφὴν διέδροι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. Τὸ ἄθροισμα κτλ. (Ὁρα πρότ. 5, Α').

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν δύο διέδραι γωνίαι $\Gamma A B \Delta$ καὶ $Z E \Theta H$ ᾗναι ἴσαι, αἱ ἐπίπεδοι αὐτῶν γωνίαι $\Gamma B \Delta$ καὶ $Z \Theta H$ θέλουσιν εἶναι ὡσαύτως ἴσαι.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου φέρομεν τὴν δευτέραν διέδρον γωνίαν ἐπὶ τῆς πρώτης οὕτως, ὥστε $E \Theta$ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς AB , τὸ σημεῖον Θ ἐπὶ τοῦ B καὶ τὸ ἐπίπεδον $E \Theta Z$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $AB \Gamma$. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $E \Theta Z$ καὶ $\Lambda B \Gamma$ εἶναι ὀρθαί, ΘZ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς $B \Gamma$. Ἀφ' ἑτέρου, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων γωνιῶν, τὸ ἐπὶ



πεδον ΕΘΗ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ , καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΕΘΗ καὶ ΑΒΔ εἶναι ὀρθαί, ΘΗ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΒΔ . Λοιπὸν ἡ γωνία ΓΒΔ εἶναι ἴση τῇ ΖΘΗ .

Πόρισμα. Ἡ τῆς ὀρθῆς διέδρου γωνίας ἐπιπέδου γωνία εἶναι ὀρθή.

Διότι, ὅταν ἐπιπέδον τι ᾖ καὶ κάθετον ἐπὶ ἑτέρου, αἱ προσκείμεναι διέδροι γωνία εἶναι ἴσαι, ἐπομένως καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι αὐτῶν γωνία. Ἄλλ' αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνία εἶναι προσκείμεναι. Ἄρα εἶναι ὀρθαί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο διέδροι γωνία ΓΑΒΔ καὶ ΖΕΘΗ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἐπίπεδοι αὐτῶν γωνία ΓΒΔ καὶ ΖΘΗ , τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$\text{ΓΑΒΔ} : \text{ΖΕΘΗ} = \text{ΓΒΔ} : \text{ΖΘΗ}.$$

* Ἄς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι αἱ διέδροι αὗται γωνία ἔχουσιν κοινόν τι μέτρον, ἐμπεριεχόμενον π. χ. τρίς εἰς τὴν διέδρον γωνίαν ΓΑΒΔ καὶ τετράκις εἰς τὴν ΖΕΘΗ . Θέλομεν ἔχει

$$\text{ΓΑΒΔ} : \text{ΖΕΘΗ} = 3 : 4.$$

Αἱ κοιναὶ τομαὶ ΒΜ , ΒΝ , ..., ΘΠ , ΘΡ , ΘΣ , ... τῶν ἐπιπέδων ΓΒΔ καὶ ΖΘΗ μετὰ τῶν ἑδρῶν τῶν ἐπιπέδων τῆς διαιρέσεως (*) θέλουσιν εἶναι ἀμοιβαίως κάθετοι ἐπὶ τῶν κόψεων ΑΒ καὶ ΕΘ , διότι αἱ κόψεις ΑΒ καὶ ΕΘ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων ΓΒΔ , ΖΘΗ (ὁρισμός 3). Ἐπειδὴ δ' ἀφ' ἑνὸς αἱ ἐπίπεδοι γωνία ΓΒΜ , ΜΒΝ , ..., ΖΘΠ , ΠΘΡ , ... εἶναι ἴσαι, ὡς ἀντιστοιχοῦσαι εἰς ἴσας διέδρους γωνίας, καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ μὲν ΓΒΔ περιέχει 3 τοιαύτας, ἡ δὲ ΖΘΗ τέσσαρας, θέλομεν ἔχει

$$\text{ΓΒΔ} : \text{ΖΘΗ} = 3 : 4.$$

* Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν $\text{ΓΑΒΔ} : \text{ΖΕΘΗ} = 3 : 4.$

* Ἄρα $\text{ΓΑΒΔ} : \text{ΖΕΘΗ} = \text{ΓΒΔ} : \text{ΖΘΗ}.$

* Ἄν αἱ δύο διέδροι γωνία δὲν εἶχον κοινόν τι μέτρον, ἢ, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἦσαν ἀσύμμετροι, ἠθέλομεν ἀποδείξει διὰ τῆς μιᾶς ἢ διὰ τῆς

(*) Τὰ χωρίζοντα τὰς διέδρους γωνίας ΓΑΒΔ καὶ ΖΕΘΗ εἰς ἴσα μέρη ἐπίπεδα ἐκάλεσα, πρὸς συντομίαν, ἐπίπεδα διαιρέσεως.

ἑτέρας τῶν ἐν τῇ προτάσει 18 τοῦ Β' βιβλίου ἀποδείξεων ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία εἶναι ἀληθὴς καὶ κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην.

Σχόλιον. Ἐκ τοῦ ἀποδειχθέντος θεωρήματος ἔπεται ὅτι πρὸς καταμέτρησιν διέδρου τινὸς γωνίας Α , τουτέστι πρὸς εὑρεσιν τοῦ λόγου τῆς διέδρου γωνίας Α πρὸς διέδρον τινα γωνίαν, ληφθεῖσαν ὡς μονάδα, π. χ. πρὸς τὴν ὀρθὴν διέδρον γωνίαν, ἀρκεῖ νὰ εὗρωμεν τὸν λόγον τῆς ἐπιπέδου γωνίας τῆς Α πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ἥτις μετρεῖ τὴν ὀρθὴν διέδρον γωνίαν (πρότ. 26, πόρ.).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28. ΘΕΩΡΗΜΑ

* Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΠ ᾖ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ , πᾶν ἐπίπεδον διὰ τῆς ΑΠ διερχόμενον θέλει εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

* Ἐστω ΒΓ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒ καὶ ΜΝ . Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ὀξωμεν τὴν ΠΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ΠΒ , ἡ εὐθεῖα ΑΠ , κάθετος οὖσα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ , θέλει εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέρᾳ τῶν εὐθειῶν ΒΓ καὶ ΠΔ . Ἄλλ' ἡ γωνία ΑΠΔ , ὑπὸ δύο καθετῶν ΑΠ καὶ ΠΔ ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΒΓ σχηματιζομένη, μετρεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒ καὶ ΜΝ . Λοιπὸν, ἐπειδὴ ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀρθή, τὰ δύο ἐπίπεδα ΑΒ καὶ ΜΝ εἶναι κάθετα τὸ ἐν ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Σχόλιον. * Ὅταν τρεῖς εὐθεῖαι, οἷαι αἱ ΑΠ , ΒΠ καὶ ΠΔ , ᾖναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλων, ἐκάστη τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο ἄλλων, τὰ δὲ σχηματιζόμενα τρία ἐπίπεδα ΑΠΒ , ΑΠΔ , ΔΠΒ εἶναι κάθετα ἑκαστον ἐφ' ἑκατέρου τῶν δύο ἄλλων.

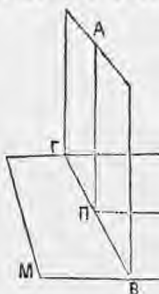
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29. ΘΕΩΡΗΜΑ

* Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ᾖ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ , καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΠ κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒ καὶ ΜΝ τομῆς ΒΓ , λέγω ὅτι ἡ ΑΠ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ . (* Ὅρα τὸ προηγούμενον σχῆμα).

Διότι, ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ἀχθῇ ἡ ΠΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΒ , ἡ γωνία ΑΠΔ θέλει εἶναι ὀρθή, διότι τὰ ἐπίπεδα ΑΒ καὶ ΜΝ ὑπέστησαν κάθετα τὸ ἐν ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΠ εἶναι κάθε-

τος ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΠΒ καὶ ΠΔ, ἐπομένως εἶναι κάθετος καὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν ΜΝ.

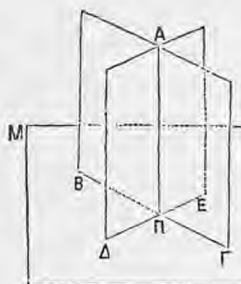
Πόρισμα. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ᾖναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ ἐξ ἑνὸς σημείου Α τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ καταβιβασθῇ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, λέγω ὅτι ἡ κάθετος αὕτη θέλει κείσθαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ. Διότι, ἐὰν ἔκειτο ἐκτός, ἡδυνάμεθα νὰ ἀξώμεν ἐκ τοῦ σημείου Α τὴν ΑΠ κάθετον ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΠΒ, καὶ ἡ κάθετος αὕτη κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἦθελεν εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. Λοιπὸν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α ἠθέλομεν ἔχει τότε δύο κάθετους ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ὅπερ ἀδύνατον.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 30. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ΑΒ καὶ ΑΔ ᾖναι κάθετα ἐπὶ τρίτῳ ΜΝ, ἡ κοινὴ τῶν δύο πρώτων τομὴ ΑΠ θέλει εἶναι κάθετος τοῦ τρίτου τούτου ἐπιπέδου.

Διότι, ἐὰν ἐκ τινος σημείου Α τῆς κοινῆς τομῆς ΑΠ καταβιβάσωμεν κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἡ κάθετος αὕτη πρέπει νὰ κῆται συγχρόνως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΔ. Λοιπὸν ἡ κοινὴ τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒ καὶ ΑΔ τομὴ ΑΠ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ.



ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. Στερεὰ ἢ πολύεδρος γωνία καλεῖται τὸ γωνιώδες χωρίον περιεχόμενον μεταξὺ πολλῶν ἐπιπέδων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου χοιμένων.

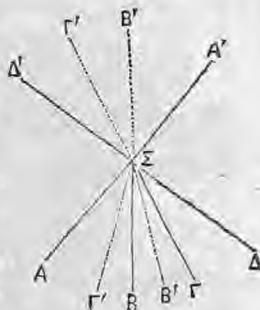
2. Αἱ μὲν κοιναὶ τῶν ἐπιπέδων τομαὶ ὀνομάζονται κόψεις στερεᾶς γωνίας, τὸ δὲ σημεῖον, δι' οὗ αἱ κόψεις διέρχονται, καλεῖται κορυφὴ τῆς στερεᾶς γωνίας.

Τὸ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν κόψεων περιεχόμενον ἐπίπεδον καλεῖται ἔδρα ἢ ἐπίπεδος γωνία τῆς στερεᾶς γωνίας.

3. Γωνία τρίεδρος καλεῖται ἡ τρεῖς ἔδρας ἔχουσα.

4. Εἰς τὰ ἐπόμενα δὲν θέλει γίνει λόγος εἰμὴ περὶ τῶν κυρτῶν στερεῶν γωνιῶν. Κυρταὶ δὲ στερεαὶ γωνίαι καλοῦνται αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος μιᾶς ὁποιασδήποτε τῶν ἑδρῶν τῶν, προεκβαλλομένης, κείμεναι.

5. Δεδομένης στερεᾶς τινος γωνίας ΣΑΒΓΔ, εἰν προεκβάλλωμεν τὰς κόψεις ΛΣ, ΒΣ, ΓΣ, κτλ, θέλομεν σχηματίσει νέαν στερεάν γωνίαν ΣΑ'Β'Γ'Δ', ἥτις καλεῖται *συμμετρικὴ* τῆς πρώτης.



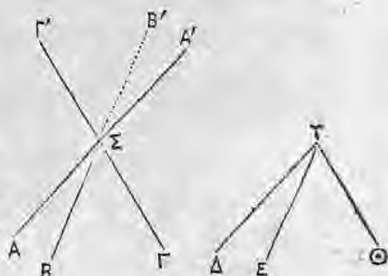
Εἶναι φανερόν ὅτι αἱ ἐπίπεδοι καὶ διέδροι γωνίας τῆς νέας στερεᾶς γωνίας ΣΑ'Β'Γ'Δ' εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἐπιπέδους καὶ διέδρους γωνίας τῆς ΣΑΒΓΔ, ἀλλ' αὗται ἐπιτιθέμεναι δὲν ταυτίζονται. Διότι, εἰν ἡ ἑδρα Δ'ΣΑ' τεθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΔΣΑ οὕτως, ὥστε αἱ κόψεις τῶν δύο στερεῶν γωνιῶν νὰ κῆνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς ἑδρας ΔΣΑ, βλέπομεν ὅτι ἡ στερεὰ γωνία ΣΑ'Β'Γ'Δ' θέλει λάβει τὴν θέσιν ΣΑΒ'Γ'Δ, τῆς δὲ τελευταίας ταύτης στερεᾶς γωνίας αἱ ἐπίπεδοι καὶ διέδροι γωνίαὶ κατέχουσι τὰξιν ἀντίστροφον ὡς πρὸς τὰς ἴσας αὐταῖς ἐπιπέδους καὶ διέδρους γωνίας τῆς ΣΑΒΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 31. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν δύο τριέδροι γωνίαι ἔχωσι μίαν διέδρον γωνίαν ἴσην, καὶ τὰς περιεχούσας τὴν διέδρον ταύτην γωνίας ἑδρας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ τριέδροι αὗται γωνίαι θέλουσιν εἶναι ἴσαι καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη.

Ἐστω $\Delta\Sigma\text{B} = \Delta\text{T}\text{E}$, $\text{B}\Sigma\Gamma = \text{E}\text{T}\Theta$, καὶ ἡ διέδρος γωνία ΣΒ ἴση τῇ διέδρῳ γωνία ΤΕ.

Ἐπιθέτομεν τὴν ἑδραν ΔΤΕ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΛΣΒ. Ἐνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων γωνιῶν ΣΒ καὶ ΤΕ, τὸ ἐπίπεδον ΕΤΘ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΣΤ, καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνία ΒΣΓ καὶ ΕΤΘ εἶναι ἴσαι, ἡ κόψις ΤΘ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΣΓ. Ἀλλὰ τότε αἱ δύο τριέδροι γωνίαὶ ταυτίζονται. Ἀρα ἔχουσι καὶ τὰ λοιπὰ αὐτῶν μέρη ἴσα. Δοιπὸν δύο τριέδροι γωνίαὶ, ἔχουσαι μίαν διέδρον γωνίαν ἴσην περιεχομένην κτλ.



Ἄν αἱ ἴσαι ἔδραι τῶν δύο τριέδρων γωνιῶν ᾗσαν ἀντιστρόφως διατεταγμέναι ὥς πρὸς τὰς ἴσας διέδρους γωνίας, ἡθέλομεν ἐπιθέσειν τριέδρον γωνίαν T ἐπὶ τῆς $\Sigma A' B' \Gamma'$, συμμετρικῆς τῆς $\Sigma A B \Gamma$, καὶ ἡθέλομεν καταστήσειν εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 32. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο τριέδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη, ὅταν ἔχωσι μίαν ἔδραν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ διέδρους γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ.

Ἐστω $\Sigma A \Gamma = \Delta T \Theta$, ἡ διέδρος γωνία ΣA ἴση τῇ ΔT καὶ ἡ διέδρος γωνία $\Sigma \Gamma$ ἴση τῇ $T \Theta$.

Ἐπιθέτομεν τὴν ἔδραν $T \Delta \Theta$ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ $\Sigma A \Gamma$. Ἐνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων γωνιῶν ΣA καὶ ΔT , $\Sigma \Gamma$ καὶ $T \Theta$, τὰ ἐπίπεδα $\Delta T E$ καὶ $\Theta T E$ θέλουσι πέσει ἀμφοτερώς ἐπὶ τῶν $\Delta S B$ καὶ $\Gamma S B$. Λοιπὸν ἡ κόψις $T E$ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς κόψεως $S B$, καὶ οἱ δύο τριέδροι γωνίαι θέλουσι ταυτίσθῃ. Λοιπὸν κτλ.

Ἄν αἱ ἴσαι διέδροι γωνίαι ᾗσαν ἀντιστρόφως διατεταγμέναι πρὸς τὰς ἴσας ἔδρας, ἡθέλομεν ἐπιθέσειν τὴν τριέδρον γωνίαν T ἐπὶ τῆς $\Sigma \Gamma' B' A'$, συμμετρικῆς τῆς $\Sigma A B \Gamma$, καὶ ἡθέλομεν καταστήσειν τὸ αὐτὸ συμπέρασμα.

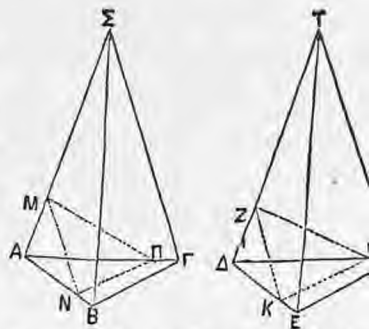
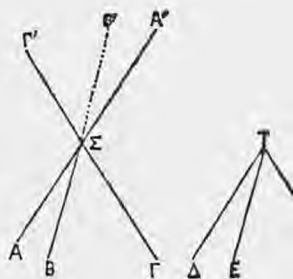
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 33. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο τριέδροι γωνίαι ἔχωσι τὰς ἔδρας αὐτῶν ἴσας, ἐκάστη, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων ἐδρῶν διέδροι γωνίαι θέλουσιν εἶναι ἴσαι.

Ἐστω $\Delta S B = \Delta T E$, $\Delta \Sigma \Gamma = \Delta T \Theta$, $\Delta B \Gamma = \Delta E \Theta$.

Λαμβάνομεν ΣA κατ' ἀρέσκειαν, καὶ $S B$, $\Sigma \Gamma$, $T \Delta$, $T E$, $T \Theta$ ἴσας τῇ ΣA καὶ ἄγομεν τὰς εὐθείας ΔB , $B \Gamma$, $\Delta \Gamma$, $E \Delta$, $E \Theta$, $\Delta \Theta$.

Τὰ δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα $\Sigma A B$ καὶ $T \Delta E$ εἶναι ἴσα, ὥς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξύ ἴσων πλευρῶν. Διὰ τὸν



τὸν λόγον τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΣΒΓ καὶ ΤΕΘ εἶναι ἴσα, ὡσαύτως καὶ τὰ ἰσοσκελῆ ΣΑΓ καὶ ΤΔΘ. Ἐκ τῆς ἀνὰ δύο ἰσότητος τῶν ἐξ τούτων ἰσοσκελῶν τριγώνων ἔπεται ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΘ εἶναι ἴσα, διότι $AB=DE$, $BΓ=ΕΘ$, $ΑΓ=ΔΘ$.

Τούτου τεθέντος, ἔκ τινος σημείου Μ τῆς κόψεως ΣΑ ἄγομεν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν ΣΑΒ καὶ ΣΑΓ τὰς εὐθείας ΜΝ καὶ ΜΠ καθέτους ἐπὶ τῆς ΣΑ. Αἱ κάθετοι αὗται θέλουσι συναπαντήσαι τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, διότι αἱ πρὸς τὴν βᾶσιν γωνίαι ΣΑΒ καὶ ΣΑΓ εἶναι ὀξείαι. Τελευταῖον ἐνόνομεν τὰ σημεῖα Ν καὶ Π διὰ τῆς εὐθείας ΝΠ.

Λαμβάνομεν ἀκολουθῶς $ΔΖ=ΑΜ$ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ζ ἄγομεν τὰς καθέτους κτλ., ὡς προηγουμένως.

Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜΝ καὶ ΔΖΚ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς ΑΜ καὶ ΔΖ καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΜΑΝ καὶ ΔΖΚ ἴσας. Ἄρα $AN=ΔK$ καὶ $MN=ZK$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜΠ καὶ ΔΖΗ εἶναι ἴσα, ἐπομένως $ΑΠ=ΔΗ$ καὶ $ΜΠ=ΖΗ$.

Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΝΑΠ καὶ ΚΔΗ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην (τὴν $ΝΑΠ=ΚΔΗ$), περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ἄρα $ΝΠ=ΚΗ$. Τελευταῖον τὰ δύο τρίγωνα ΝΜΠ καὶ ΚΖΗ εἶναι ἴσα ὡς ἰσόπλευρα. Λοιπὸν ἡ γωνία ΝΜΠ, ἡ τὴν διέδρον γωνίαν ΣΑ μετροῦσα, εἶναι ἴση τῇ ΚΖΗ, ἥτις μετρεῖ τὴν διέδρον γωνίαν ΤΔ. Λοιπὸν αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων ἑδρῶν ΣΒΓ καὶ ΕΤΘ διέδρου γωνίαι ΣΑ καὶ ΤΔ εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. Ἄν πρὸς τούτοις αἱ ἑδραὶ τῶν δύο τριέδρων γωνιῶν ἦσαν ὁμοίως διατεταγμέναι, αἱ δύο τριέδρου γωνίαι ἤθελον εἶναι ἴσαι (*), εἰ δὲ μὴ, συμμετρικαί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 34. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Θ, ἐπὶ τῆς κόψεως ΑΒ τῆς διέδρου γωνίας ΑΒΓ ληθῇντος, ὑψώσωμεν ἐπὶ τῆς ἑδρας ΑΓ τὴν κάθετον ΘΖ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, πρὸς δὲ καὶ ἡ ἑδρα ΑΒΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ἑδρας ΑΔ τὴν κάθετον ΘΕ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ, πρὸς δὲ καὶ ἡ ἑδρα ΑΒΓ, λέγω δὲ ἡ ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων σχηματιζομένη γωνία ΕΘΖ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, τῆς μετρούσης τὴν διέδρον γωνίαν ΓΑΒΔ.

(*) Δύο ὁποιαδήποτε στερεαὶ γωνίαι λέγονται ἴσαι, ὅταν ἐπιτιθέμεναι ἐπ' αὐτῶνται.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ AB εἶναι ἐκ κατασκευῆς κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου EOZ (πρότ. 3), αἱ καιναὶ τομαὶ IO καὶ $OΠ$ τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τῶν ἐπιπέδων $ABΓ$ καὶ $ΑΒΔ$ θέλουσιν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς AB εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον O , καὶ ἐπομένως κατὰ τὸν ὁρισμὸν 3 ἡ γωνία $IOΠ$ μετρεῖ τὴν διέδρον γωνίαν $ΓΑΒΔ$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ OZ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ABΓ$, ἡ γωνία $IOZ = 1^{\circ}$. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ἡ OE εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ΑΒΔ$, ἡ γωνία $EOΠ = 1^{\circ}$. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει

$$IOZ + EOΠ = 2^{\circ}.$$

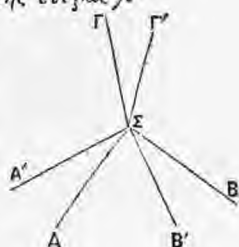
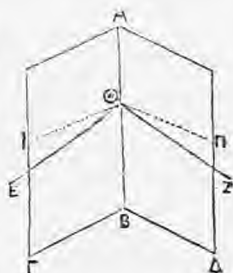
Ἀλλ' $IOZ + EOΠ = IOE + IOZ + EOZ + ZOΠ = EOZ + IOΠ$. Ἄρα $EOZ + IOΠ = 2^{\circ}$. Λοιπὸν ἡ γωνία EOZ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς $IOΠ$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 34. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Σ τριέδρου τιδὲς γωνίας $\Sigma ABΓ$ ὑψώσωμεν ἐφ' ἑκάστης ἑδρας κάθετον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἑδρας ταύτης, πρὸς ὃ καὶ ἡ τρίτη κόψις, ἡ τριέδρος γωνία $\Sigma A'B'Γ'$ ἢ ἔχουσα διὰ κόψεις τὰς τρεῖς ταύτας καθέτους, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς δεδομένης τριέδρου γωνίας $\Sigma ABΓ$, καὶ ἀντιστρόφως. (Δύο τριέδροι γωνίαι λέγονται παραπληρωματικαί, ὅταν αἱ ἐπιπέδου γωνίαι τῆς μιᾶς εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν μετρουσῶν τὰς διέδρους γωνίας τῆς ἑτέρας).

Ἐστὼ $\Sigma Γ'$ κάθετος ἐπὶ τῆς ἑδρας $\Lambda \Sigma B$, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda \Sigma B$, πρὸς ὃ καὶ ἡ κόψις $\Sigma Γ$. $\Sigma B'$ κάθετος ἐπὶ τῆς ἑδρας $\Lambda \Sigma Γ$, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda \Sigma Γ$, πρὸς ὃ καὶ ἡ κόψις ΣB , καὶ $\Sigma A'$ κάθετος ἐπὶ τῆς ἑδρας $\Sigma B Γ$, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου $\Sigma B Γ$, πρὸς ὃ καὶ ἡ κόψις ΣA .

1^{ου}. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα $\Sigma Γ'$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda \Sigma B$, κειμένη πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἑδρα $\Gamma \Sigma B$, καὶ ἡ εὐθεῖα $\Sigma A'$ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Gamma \Sigma B$, κειμένη πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἑδρα $\Lambda \Sigma B$, ἡ γωνία $\Gamma \Sigma A'$, κατὰ τὰ προαποδείχθέντα, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπι-



πέδου γωνίας, τῆς μετρούσης τὴν διέδρον γωνίαν $\Lambda\Sigma\text{ΒΓ}$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γωνία $\Gamma'\Sigma\text{Β}'$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, τῆς μετρούσης τὴν διέδρον γωνίαν $\Gamma\Sigma\text{ΑΒ}$, καὶ ἡ γωνία $\Lambda'\Sigma\text{Β}'$ παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, τῆς μετρούσης τὴν διέδρον γωνίαν $\Lambda\Sigma\text{ΒΓ}$. Λοιπὸν $1^{\text{ον}}$ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς τριέδρου γωνίας $\Sigma\Lambda'\text{Β}'\Gamma'$ εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν μετρούσων τὰς διέδρους γωνίας τῆς τριέδρου $\Sigma\text{ΑΒΓ}$.

$2^{\text{ον}}$. Ἡ εὐθεῖα $\Sigma\Lambda'$, ἐπειδὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΣΓ , εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς $\Sigma\Gamma$. ὡσαύτως ἡ εὐθεῖα $\Sigma\text{Β}'$, ἐπειδὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda\Sigma\Gamma$, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς $\Sigma\Gamma$. Λοιπὸν ἡ $\Sigma\Gamma$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda'\Sigma\text{Β}'$, ὡς κάθετος ἐπὶ τῶν εὐθειῶν $\Sigma\Lambda'$ καὶ $\Sigma\text{Β}'$. Πρὸς τοῦτοις, ἐπειδὴ $\Sigma\Gamma'$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda\Sigma\text{Β}$ καὶ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου, πρὸς ὃ καὶ ἡ κόψις $\Sigma\Gamma$, ἡ γωνία $\Gamma\Sigma\Gamma'$ εἶναι ὀξεία. Καὶ ἐπειδὴ $\Sigma\Gamma$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda'\Sigma\text{Β}'$ καὶ σχηματίζει μετὰ τῆς $\Sigma\Gamma'$ ὀξείαν γωνίαν, συμπεραίνομεν ὅτι $\Sigma\Gamma'$ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda'\Sigma\text{Β}'$, πρὸς ὃ καὶ ἡ κόψις $\Sigma\Gamma'$.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν ἀποδείξει, ὅτι $\Sigma\text{Β}$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda'\Sigma\Gamma'$ καὶ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου, πρὸς ὃ καὶ ἡ κόψις $\Sigma\text{Β}'$, καὶ ὅτι $\Sigma\Lambda$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Gamma'\Sigma\text{Β}'$ καὶ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου, πρὸς ὃ καὶ ἡ κόψις $\Sigma\Lambda'$. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ τριέδρος γωνία $\Sigma\text{ΑΒΓ}$ εὐρίσκειται κατεσκευασμένη διὰ τῆς $\Sigma\Lambda'\text{Β}'\Gamma'$, ὥπως ἡ τριέδρος αὐτῇ γωνία κατεσκευάσθη διὰ τῆς $\Sigma\text{ΑΒΓ}$. Λοιπὸν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς $\Sigma\text{ΑΒΓ}$ εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς $\Sigma\Lambda'\text{Β}'\Gamma'$. Λοιπὸν κτλ.

Πόρισμα Ἄν αἱ διέδροι γωνίαι τῆς τριέδρου γωνίας $\Sigma\text{ΑΒΓ}$ ᾗσαν ἴσαι, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς $\Sigma\Lambda'\text{Β}'\Gamma'$, παραπληρωματικῆς τῆς $\Sigma\text{ΑΒΓ}$, ᾗθελον εἶναι ἴσαι, καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 36. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν δύο τριέδροι γωνίαι ἔχωσι τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας ἐκάστην ἐκάστη, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ἢ αἱ ἔδραι τῶν δύο τούτων τριέδρων γωνιῶν θέλουσιν εἶναι ἴσαι.

Ἔστωσαν Σ καὶ Σ' αἱ δύο δεδομέναι τριέδροι γωνίαι, T δὲ καὶ T' αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν.

Ἐπειδὴ αἱ διέδροι γωνίαι τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν Σ καὶ Σ'

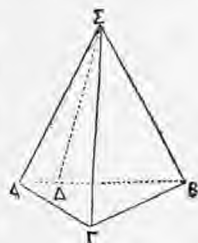
εἶναι ἴσαι, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν παραπληρωματικῶν Γ καὶ Γ' θέλουσιν εἶναι ἴσαι (πρότ. 35). Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν τριέδρων γωνιῶν Γ καὶ Γ' εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ διέδροι αὐτῶν γωνίαι, κατὰ τὰ ἀποδείχθέντα ἐν τῇ 33 προτάσει, θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Τελευταῖον, ἐπειδὴ ἀπεδείχθη ὅτι αἱ διέδροι γωνίαι τῶν στερεῶν γωνιῶν Γ καὶ Γ' εἶναι ἴσαι, ἔπεται κατὰ τὰ προαποδείχθέντα, ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν παραπληρωματικῶν αὐτοῖς Σ καὶ Σ' θέλουσιν εἶναι ἴσαι, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἐάν αἱ ἴσαι ἑδραι τῶν δύο τριέδρων γωνιῶν Σ καὶ Σ' ᾖναι ὁμοίως διατεταγμέναι, αἱ τριέδροι αὐταὶ γωνίαι θέλουσιν εἶναι ἴσαι, εἰ δὲ μὴ, συμμετρικαί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 37. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ ἄθροισμα δύο ὁποιονδήποτε ἐπιπέδων γωνιῶν τριέδρου τινὸς γωνίας εἶναι μεγαλύτερον τῆς τρίτης.

Ἡ μόνη περίπτωσις, καθ' ἣν τὸ θεώρημα χρήζει ἀποδείξεως, εἶναι, ὅταν ἡ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων συγκρινομένη γωνία ᾖναι μεγαλύτερα ἑκατέρας αὐτῶν. Ἐστω λοιπὸν ἡ στερεὰ γωνία Σ , ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν $\Lambda\Sigma\text{B}$, $\Lambda\Sigma\Gamma$, $\text{B}\Sigma\Gamma$, καὶ ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γωνία $\Lambda\Sigma\text{B}$ εἶναι ἡ μεγαλύτερα. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει $\Lambda\Sigma\text{B} < \Lambda\Sigma\Gamma + \Gamma\Sigma\text{B}$.



Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda\Sigma\text{B}$ σχηματίζομεν τὴν γωνίαν $\text{B}\Sigma\Delta = \text{B}\Sigma\Gamma$, ἄγομεν κατ' ἀρέσκειαν τὴν εὐθείαν $\Lambda\Delta\text{B}$, λαμβάνομεν $\Sigma\Gamma = \Sigma\Delta$, καὶ ἐνόνομεν $\Delta\Gamma$ καὶ $\text{B}\Gamma$.

Τὰ δύο τρίγωνα $\text{B}\Sigma\Delta$, $\text{B}\Sigma\Gamma$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, ἐκ κατασκευῆς, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν, ἐπομένως $\text{B}\Delta = \text{B}\Gamma$. Ἀλλ' ἔχομεν $\text{A}\text{B} < \Delta\Gamma + \text{B}\Gamma$, ἀφαιροῦντες δὲ ἀφ' ἐνὸς μέρους $\text{B}\Delta$ καὶ ἀφ' ἑτέρου $\text{B}\Gamma$, ἥτις εἶναι ἴση τῇ $\text{B}\Delta$, θέλομεν ἔχει $\Lambda\Delta < \Delta\Gamma$. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα $\Lambda\Sigma\Delta$ καὶ $\Lambda\Sigma\Gamma$ ἔχουσι τὴν πλευρὰν $\Lambda\Sigma$ κοινὴν, τὰς πλευρὰς $\Sigma\Delta$ καὶ $\Sigma\Gamma$ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ $\Lambda\Delta$ τοῦ πρώτου εἶναι μικροτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς $\Delta\Gamma$ τοῦ δευτέρου. Ἀρα ἡ γωνία $\Lambda\Sigma\Delta$ εἶναι μικροτέρα τῆς $\Lambda\Sigma\Gamma$ (πρότ. 12, Α'), ἥτοι $\Lambda\Sigma\Delta < \Lambda\Sigma\Gamma$, ἐπομένως καὶ

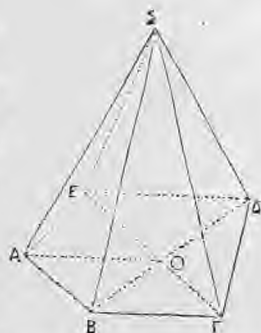
$$\Lambda\Sigma\Delta + \Delta\Sigma\text{B} \text{ ἥτοι } \Lambda\Sigma\text{B} < \Lambda\Sigma\Gamma + \Gamma\Sigma\text{B},$$

διότι ἀπεδείχθη ὅτι $\Lambda\Sigma\text{B} = \Gamma\Sigma\text{B}$. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 38. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν σχηματιζουσῶν στερεὰν τινα γωνίαν, εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν.

* Ἀς τμήσωμεν τὴν στερεὰν γωνίαν Σ διὰ τινος ἐπιπέδου ΑΒΓΔΕ, συναπαντῶντος ὅλας αὐτῆς τὰς κόψεις ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ΣΔ, κτλ., πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κορυφῆς Σ, καὶ ἐξ ἐνὸς ὁποιοῦδήποτε σημείου Ο, ἐντὸς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ ληφθέντος, ὡς ἄνωμεν εἰς ὅλας τῶν γωνιῶν τὰς κορυφὰς τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, κτλ.



Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ θέλει οὕτω διαιρεθῇ εἰς τόσα μερικὰ τρίγωνα, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται καὶ ἡ στερεὰ γωνία Σ. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ, κτλ., εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ΑΣΒ, ΒΣΓ, κτλ.

* Ἐστω Α τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Ο τριγώνων, καὶ Β τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὸ σημεῖον Ο γωνιῶν τῶν αὐτῶν τριγώνων. * Ἐστώσαν πρὸς τούτοις Α' καὶ Β' τὰ ἀνάλογα ἄθροισματα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ. Κατὰ τὰ προλεχθέντα θέλομεν ἔχει

$$Α + Β = Α' + Β'. \quad (1)$$

* Ἀλλ' $Α < Α'$. Διότι ἡ γωνία ΑΒΓ τῆς τριέδρου γωνίας, τῆς ἐχούσης κορυφὴν τὸ σημεῖον Β, εἶναι μικρότερα τοῦ ἄθροίσματος $ΑΒΣ + ΣΒΓ$ τῶν δύο ἄλλων, τουτέστιν

$$ΑΒΓ < ΑΒΣ + ΣΒΓ.$$

Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον $ΒΓΔ < ΒΓΣ + ΣΓΔ$,

$$ΓΔΕ < ΓΔΣ + ΕΔΣ, \text{ κτλ.}$$

Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν $ΑΒΓ + ΒΓΔ + ΓΔΕ + \text{κτλ.}$ τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Ο, ἥτοι Α, εἶναι μικρότερον τοῦ ἄθροίσματος $ΑΒΣ + ΣΒΓ + ΒΓΣ + \text{κτλ.}$ τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ, ἥτοι μικρότερον τοῦ Α'. * Ἀρα $Β < Β'$. * Ἀλλὰ $Β = 4^{\circ}$. * Ἀρα $Β' < 4^{\circ}$. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΔ, ΔΣΕ κτλ., τῶν σχηματιζουσῶν κτλ. εἶναι μικρότερον 4 ὀρθῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 39. ΘΕΩΡΗΜΑ

1^η. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διέδρων γωνιῶν τριέδρου τιτὸς γωνίας περιέχεται μεταξὺ 2 καὶ 6 ὀρθῶν.

2^η. Ἐὰν εἰς τὴν μικροτέραν διέδρον γωνίαν προσθέσωμεν δύο γωνίας ὀρθάς, ἀποτελεῖται ἄθροισμα μεγαλειτερον τοῦ ἄθροίσματος τῶν δύο ἄλλων διέδρων γωνιῶν.

1^η. Ἐστωσαν α, β, γ αἱ τρεῖς διέδροι γωνίαι τῆς δεδομένης τριέδρου γωνίας, καὶ Α, Β, Γ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῆς τριέδρου γωνίας.

Θέλομεν ἔχει κατὰ τὸν ὀρισμὸν τῶν παραπληρωματικῶν τριέδρων γωνιῶν τὰς ἰσότητας

$$\alpha = 2^{\circ} - A, \beta = 2^{\circ} - B, \gamma = 2^{\circ} - \Gamma,$$

ἃς προσθέτοντες κατὰ μέλη πορίζομεθα τὴν ἐξῆς

$$\alpha + \beta + \gamma = 6^{\circ} - (A + B + \Gamma).$$

Ἀλλ' ἀπεδείχθη προηγουμένως ὅτι τὸ ἄθροισμα $A + B + \Gamma$ εἶναι μεγαλειτερον τοῦ μηδενὸς καὶ μικρότερον 4 ὀρθῶν (πρότ. 38). Λοιπὸν ἡ διαφορὰ $6^{\circ} - (A + B + \Gamma)$, ἥτοι τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$, εἶναι μικρότερον 6 καὶ μεγαλειτερον 2 ὀρθῶν.

2^η. Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι α παριστᾷ τὴν μικροτέραν διέδρον γωνίαν τῆς δεδομένης τριέδρου γωνίας. Αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῆς τριέδρου θέλουσιν εἶναι $2^{\circ} - \alpha$, $2^{\circ} - \beta$, $2^{\circ} - \gamma$, καὶ ἐκ τούτων μεγαλειτέρα θέλει εἶναι προφανῶς ἡ $2^{\circ} - \alpha$. Ἀλλὰ κατὰ τὰ ἀποδείχθέντα ἐν τῇ 37 προτάσει ἔχομεν τὴν ἀνισότητα

$$2^{\circ} - \alpha < 2^{\circ} - \beta + 2^{\circ} - \gamma,$$

ἐξ ἧς, προσθέτοντες εἰς ἀμφοτέρω αὐτῆς τὰ μέλη $\alpha + \beta + \gamma$, πορίζομεθα τὴν ἐξῆς

$$2^{\circ} - \alpha + \alpha + \beta + \gamma < 2^{\circ} - \beta + 2^{\circ} - \gamma + \alpha + \beta + \gamma,$$

ἢ

$$2^{\circ} + \beta + \gamma < 4^{\circ} + \alpha,$$

ἀφαιροῦντες δὲ ἐκ τῶν δύο μελῶν τῆς τελευταίας 2° , θέλομεν ἔχει

$$\beta + \gamma < 2^{\circ} + \alpha.$$

Λοιπὸν, ἐὰν εἰς τὴν μικροτέραν διέδρον γωνίαν α προσθέσωμεν 2° , προκύπτει ἄθροισμα $2^{\circ} + \alpha$ μεγαλειτερον τοῦ ἄθροίσματος $\beta + \gamma$ τῶν δύο ἄλλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 40. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πρὸς σχηματισμὸν τριέδρου στερεᾶς γωνίας μὲ τρεῖς δεδομέ-
 νας ἐπιπέδους γωνίας, πρέπει καὶ ἄρκει τὸ ἄβητοςμα τῶν τριῶν
 ἐπιπέδων γωνιῶν καὶ ἦναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν καὶ ἡ με-
 γαλειτέρα τούτων καὶ ἦναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο
 ἄλλων.

Γνωρίζομεν ἐκ τῶν προηγουμένων ὅτι αἱ συνθῆκαι αὗται εἶναι ἀναγκαῖαι, μᾶς μένει λοιπὸν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι καὶ ἐπαρκεῖς.

Ἐστῶσαν ΒΣΓ, ΑΣΒ, ΔΣΓ αἱ τρεῖς δεδομένοι ἐπίπεδοι γωνίαι, ἃς ὑποθέτομεν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένης, καὶ ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΒΣΓ εἶναι ἡ μεγαλύτερα.

Ἐκ τοῦ σημείου Σ, ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ'ἀρέσκειαν Σχ, γράφομεν περιφέρειαν, καὶ ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Δ καταδιβάζομεν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΣΒ καὶ ΣΓ τὰς καθέτους Αα καὶ Δδ.

Τὸ σημεῖον α κεῖται μεταξύ τῶν σημείων B καὶ Γ , διότι τὸ τόξον $B\alpha$ εἶναι ὕσον τῷ τόξῳ AB , τὸ δὲ τόξον $B\Gamma$, μέτρον τῆς γωνίας $B\Sigma\Gamma$, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τόξου AB , μέτρου τῆς γωνίας $A\Sigma B$, ἥτις ὑπέ-
 τέθη μικροτέρα τῆς $B\Sigma\Gamma$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ σημεῖον δ κεῖται
 μεταξύ τῶν σημείων B καὶ Γ .

Πρὸς τούτοις τὸ σημεῖον α καὶται μετὰ τῶν σημείων Γ καὶ δ.
Διότι, ἐξ ὑποθέσεως

$$B\Sigma\Gamma < A\Sigma B + \Gamma\Sigma\Delta,$$

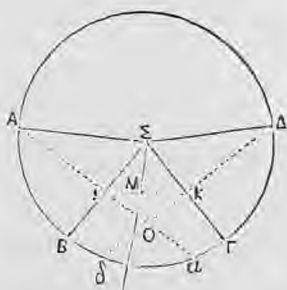
καὶ ἐπομένως $\text{τόξ. } \text{ΒΓ} < \text{τόξ. } \text{ΑΒ} + \text{τόξ. } \text{ΓΔ},$

$$B\alpha + \alpha\Gamma < AB + \Gamma\Delta,$$

Ἄλλὰ $BA=AB$ καὶ $GA=GD$. Ἄρα $\alpha\Gamma<\delta\Gamma$. Τὸ σημεῖον λοιπὸν α κεῖται μεταξύ τῶν σημείων δ καὶ Γ , ἐπομένως, κατὰ μείζονα λόγον, μεταξύ τῶν σημείων δ καὶ Δ .

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ σημεῖον δ κεῖται με-
ταξὺ τῶν σημείων α καὶ B , ἐπομένως, κατὰ μείζονα λόγον, μεταξὺ
τῶν σημείων α καὶ A . Δι' χορδαὶ λοιπὸν $A\alpha$ καὶ $A\delta$ τέμνονται ἐντὸς
τῆς περιφερείας εἰς τι σημεῖον O .

Τούτου τεθέντος, ἃς ὑψώσωμεν εἰς τὸ σημεῖον Ο τῇ γ ΟΜ κάθετον ἐπὶ



ἐπιπέδους γωνίας $2^{\circ\alpha}$ — α , $2^{\circ\beta}$ — β , $2^{\circ\gamma}$ — γ , τὰς ἐκπληρούσας τὰς ἐκνισότητος (1) καὶ (2), ἥτοι τὰς συνθήκας τοῦ ἀποδειχθέντος θεωρήματος, ἢ παραπληρωματικὴ τῆς τριέδρου ταύτης στερεᾶς γωνίας τριέδρος γωνία θέλει ἔχει διὰ διέδρους γωνίας τὰς δεδομένας α , β , γ . Λοιπὸν μὲ τρεῖς δεδομένα διέδρους γωνίας α , β , γ , ἐκπληρούσας τὰς ἀνωτέρω συνθήκας, δυνάμεθα πάντοτε νὰ κατασκευάσωμεν τριέδρον στερεάν γωνίαν.

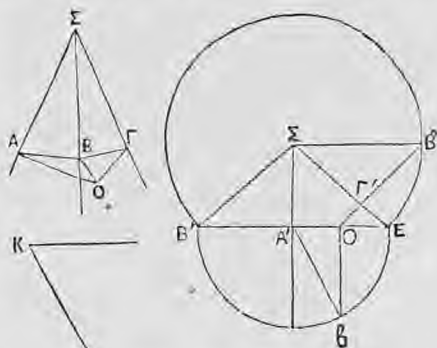
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 41. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δεδομένων τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τριέδρου τινὲς στερεᾶς γωνίας, νὰ εὑρεθῇ δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς ἡ ἀμοιβαία δύο ὑποχωρηθῆποτε ἐδρῶν αὐτῆς κλίσις, ἢ ὅπερ ταῦτ', ἡ ἐπίπεδος γωνία μᾶς ὁποιασδήποτε διέδρου γωνίας.

Ἐστωσαν $\Delta\Sigma\text{B}$, $\Delta\Sigma\Gamma$ καὶ $\text{B}\Sigma\Gamma$ αἱ τρεῖς δεδομέναι ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς τριέδρου γωνίας Σ , καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται ἡ ἀμοιβαία κλίσις τῶν δύο ἐδρῶν $\Delta\Sigma\text{B}$ καὶ $\Delta\Sigma\Gamma$, ἡ ἢ ἐπίπεδος γωνία, ἡ μετροῦσα τὴν διέδρου γωνίαν $\Sigma\Lambda$.

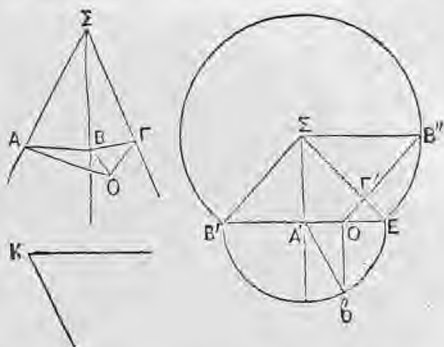
Ἐκ τινος σημείου B τῆς κόψεως ΣB ἄς καταβιβάσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Delta\Sigma\Gamma$ τὴν κάθετον BO , ἐκ τοῦ ποδὸς αὐτῆς O ἄς ἀξώμεν τὴν OA κάθετον ἐπὶ τῆς κόψεως $\Sigma\Lambda$, καὶ ἄς ἐνώσωμεν AB . Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 7 προτάσει ἡ AB θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς $\Sigma\Lambda$, ἐπομένως ἡ γωνία OAB , ἡ σχηματιζομένη ἐκ δύο καθετῶν ἐπὶ τῆς κόψεως $\Sigma\Lambda$ καὶ κειμένων ἐφ' ἑκατέρας τῶν ἐδρῶν αὐτῆς, θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη ἐπίπεδος γωνία. Πρόκειται τώρα νὰ εὑρεθῇ ἡ αὐτὴ γωνία δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς, τοῦτέστι διὰ κατασκευῆς ἐπὶ ἐπιπέδου ἐκτελουμένης.

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ἐπὶ τινος ἐπιπέδου τὰς γωνίας $\text{B}'\Sigma\Lambda'$, $\Lambda'\Sigma\Gamma'$ καὶ $\Gamma'\Sigma\text{B}'$ ἴσας ἀμοιβαίως μὲ τὰς δεδομένας $\Delta\Sigma\text{B}$, $\Delta\Sigma\Gamma$ καὶ $\text{B}\Sigma\Gamma$, καὶ μὲ κέντρον Σ καὶ ἀκτῖνα $\Sigma\text{B}' = \Sigma\text{B}$ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὰς εὐθείας $\Sigma\text{B}'$ καὶ $\Sigma\text{B}''$ εἰς τὰ σημεία B' καὶ B'' . Ἐκ τῶν σημείων B' καὶ B'' καταβιβάζομεν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν $\Sigma\Lambda'$ καὶ $\Sigma\Gamma'$



Ἐστῶσαν $\Lambda'\Sigma\text{B}'$ καὶ $\Lambda'\Sigma\Gamma'$ αἱ δύο δεδομέναι ἐπίπεδοι γωνίαι, καὶ K ἡ ἀμοιβαία αὐτῶν κλίσις.

Λαμβάνομεν $\Sigma\text{B}'$ κατ'ἀρέσκειαν, καὶ ἐκ τοῦ σημείου B' καταβιβάζομεν ἐπὶ τῆς $\Sigma\Lambda'$ τὴν ἀπροσδιόριστον κάθετον $\text{B}'\Lambda'$. Ἐκ τοῦ σημείου Λ' ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσῃν τῇ $\Lambda'\text{B}'$ γράφομεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν $\text{B}'\Theta\text{E}$, καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Λ' κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν $\text{E}\Lambda'\Theta = \tau\eta \text{K}$. Ἐκ τοῦ σημείου Θ καταβιβάζομεν ἐπὶ τῆς $\text{B}'\text{E}$ τὴν κάθετον ΘO , καὶ ἐκ τοῦ σημείου O τὴν $\text{O}\Gamma'$ κάθετον ἐπὶ τῆς $\Sigma\Gamma'$. Πρὸς ἑξῆς ἀλλομεν ἀκολουθῶς τὴν κάθετον $\text{O}\Gamma'$ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν μὲ κέντρον Σ καὶ ἀκτῖνα $\Sigma\text{B}'$ γραφομένην περιφέρειαν εἰς τι σημεῖον B'' , καὶ ἐνόνομεν $\Sigma\text{B}''$. Λέγω ὅτι ἡ γωνία $\Gamma'\Sigma\text{B}''$ θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη τρίτη ἐπίπεδος γωνία.

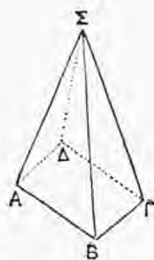


Διότι, ἐὰν σχηματίζομεν τριέδρον στερεὰν γωνίαν μὲ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας $\text{B}'\Sigma\Lambda'$, $\Lambda'\Sigma\Gamma'$ καὶ $\Gamma'\Sigma\text{B}''$, ἡ ἀμοιβαία τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν $\text{B}'\Sigma\Lambda'$ καὶ $\Lambda'\Sigma\Gamma'$ τῆς τριέδρου ταύτης στερεᾶς γωνίας κλίσις, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ προηγουμένη προτάσει, θέλει εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ $\text{E}\Lambda'\Theta$, ἥτις κατασκευάσθη ἴση τῇ δεδομένῃ K .

Σχόλιον. Ὁ γινώσκων τῶν τεσσάρων ἐπιπέδων γωνιῶν $\Lambda\Sigma\text{B}$, $\text{B}\Sigma\Gamma$, $\Gamma\Sigma\Delta$ καὶ $\Delta\Sigma\Lambda$, ἐξ ὧν ἡ τετραπλῆ στερεὰ γωνία $\Sigma\text{AB}\Gamma\Delta$ σχηματίζεται, δὲν ἀρκεῖ πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀμοιβαίας δύο ὁποιοῦνδ' ἂν τῶν ἐδρῶν αὐτῆς κλίσεως· διότι δυνάμεθα, αὐξάνοντες ἢ ἐλαττοῦντες τὴν γωνίαν δύο ἀντικειμένων κόψεων, π. χ. τὴν γωνίαν $\Lambda\Sigma\Gamma$, νὰ μεταβάλλωμεν τὴν ἀμοιβαίαν τῶν ἐδρῶν αὐτῆς κλίσιν, χωρὶς αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς στερεᾶς τετραπλῆς γωνίας νὰ μεταβληθῶσιν. Ἀλλ' ἂν προσετίθετο καὶ ἐτέρα τις συνθήκη, παραδείγματος χάριν, ἂν μᾶς ἐδίδετο καὶ ἡ κλίσις τῶν δύο ἐδρῶν $\Lambda\Sigma\text{B}$ καὶ $\text{B}\Sigma\Gamma$, τότε ἡ τετραπλῆ στερεὰ γωνία ἤθελεν εἶναι ἐντελὴς ὡρισμένη, καὶ ἡδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν κλίσιν δύο ὁποιοῦνδ' ἂν τῶν ἐδρῶν αὐτῆς. Διότι, ἐὰν φαντασθῶμεν τριέδρον στερεὰν γωνίαν, σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν $\Lambda\Sigma\text{B}$, $\text{B}\Sigma\Gamma$ καὶ $\Lambda\Sigma\Gamma$,



τῆς τριέδρου ταύτης γωνίας, ἠθέλομεν γνωρίζει τὰς δύο ἐπιπέδους γωνίας $\Lambda\Sigma\text{B}$ καὶ $\text{B}\Sigma\Gamma$, καὶ τὴν ἀμοιβαίαν αὐτῶν κλίσιν, καὶ ἠδυνάμεθα διὰ τοῦ λυθέντος προβλήματος νὰ εὗρωμεν τὴν τρίτην ἐπίπεδον γωνίαν $\Lambda\Sigma\Gamma$. Γνωστῆς δὲ γενομένης τῇ, ἐπιπέδου γωνίας $\Lambda\Sigma\Gamma$, ἠθέλομεν γνωρίζει τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας τῆς ἐτέρας τριέδρου γωνίας $\Sigma\Lambda\Gamma\Delta$, ἐπομένως ἡ στερεὰ γωνία $\Sigma\Lambda\Gamma\Delta$ ἤθελεν εἶναι ἐντελῶς γνωστὴ. Ἀλλὰ ἡ τετραπλῆ στερεὰ γωνία $\Sigma\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$ ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ἐνώσεως τῶν δύο τριέδρων γωνιῶν $\Sigma\Lambda\text{B}\Gamma$ καὶ $\Sigma\Lambda\Gamma\Delta$. Λοιπὸν, ἐπειδὴ αἱ μερικαὶ αὗται τριέδρου γωνίαι εἶναι γνωσταὶ καὶ ὠρισμέναι, ἡ ὅλική τετραέδρου γωνία $\Sigma\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$ θέλει εἶναι ὡσαύτως γνωστὴ καὶ ὠρισμένη.



Ἡ κλίσις τῶν δύο ἐδρῶν $\Lambda\Sigma\Delta$ καὶ $\Delta\Sigma\Gamma$ εὐρίσκεται ἀμέσως διὰ τῆς δευτέρας μερικῆς τριέδρου γωνίας. Πρὸς εὐρεσιν δὲ τῆς κλίσεως τῶν δύο ἐδρῶν $\text{B}\Sigma\Gamma$ καὶ $\Gamma\Sigma\Delta$, πρέπει νὰ εὗρωμεν πρῶτον τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐδρῶν $\text{B}\Sigma\Gamma$ καὶ $\Lambda\Sigma\Gamma$ τῆς μερικῆς τριέδρου γωνίας $\Sigma\Lambda\text{B}\Gamma$, ἔπειτα τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐδρῶν $\Lambda\Sigma\Gamma$ καὶ $\Gamma\Sigma\Delta$ τῆς μερικῆς τριέδρου γωνίας $\Sigma\Lambda\Gamma\Delta$. Τὸ ἄθροισμα τῶν οὕτως εὐρεθησομένων γωνιῶν θέλει εἶναι ἡ κλίσις τῶν ἐδρῶν $\text{B}\Sigma\Gamma$ καὶ $\Gamma\Sigma\Delta$ τῆς τετραπλῆς στερεᾶς γωνίας $\Sigma\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον συλλογιζόμενοι ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι πενταπλῆ τις στερεὰ γωνία εἶναι ἐντελῶς γνωστὴ, ὅταν ἐκτὸς τῶν πέντε ἐπιπέδων αὐτῆς γωνιῶν, ἐξ ὧν συντίθεται, μᾶς δίδωνται καὶ δύο ἀμοιβαῖαι αὐτῶν κλίσεις. Τρεῖς κλίσεις ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἐξαπλῆν στερεάν γωνίαν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Στερεὸν πολυέδρον ἢ ἀπλῶς πολυέδρον καλεῖται πᾶν στερεὸν ὑπὸ ἐπιπέδων ἐδρῶν περατούμενον (ἀναγκαίως τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἢ αἱ ἑδραι περατοῦνται ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν). Ἰδίως δὲ καλεῖται τετράεδρον, τὸ ἔχον τέσσαρας ἑδρας στερεόν· ἑξάεδρον, τὸ ἔχον ἑξ· οκτάεδρον, τὸ ἔχον ὀκτώ· δωδεκάεδρον, τὸ ἔχον δώδεκα· εἰκοσάεδρον, τὸ ἔχον εἴκοσι, κτλ.

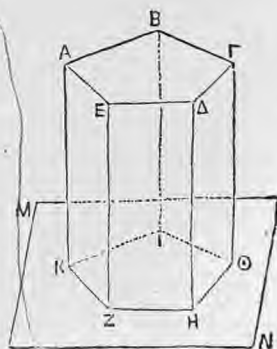
Τὸ τετράεδρον εἶναι τὸ ἀπλούστερον τῶν πολυέδρων· διότι τρία τοῦλάχιστον ἐπίπεδα ἀπαιτοῦνται πρὸς σχηματισμὸν στερεᾶς γωνίας, τὰ δ' ἐπίπεδα ταῦτα ἀφίνουσιν ἀνοιγμά τι, ὅπερ, ἵνα κλεισθῇ, ἀπαιτεῖ τοῦλάχιστον τέταρτον ἐπίπεδον.

2. Ἡ κοινὴ δύο προσκειμένων ἐδρῶν πολυέδρου τινὸς τομὴ καλεῖται πλευρὰ ἢ κόψις τοῦ πολυέδρου.

3. Κατασκευὴ πολυέδρου καλεῖται ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἑδραι εἶναι κανονικὰ ἴσα πολύγωνα, καὶ ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Τὰ πολυέδρα ταῦτα εἶναι πέντε τὸν ἀριθμόν. (Ὅρα παράρτημα τῶν βιβλίων Δ' καὶ Ζ').

4. Πρίσμα καλεῖται τὸ περιεχόμενον στερεὸν μεταξὺ πολλῶν παραλληλογράμμων ἐπιπέδων, περατούμενων ἀμφοτέρωθεν ὑπὸ δύο ἴσων καὶ παραλλήλων πολυγώνων.

Πρὸς κατασκευὴν τοῦ στερεοῦ τούτου λαμβάνομεν πολύγώνον τι ΑΒΓΔΕ καὶ ἐπίπεδόν τι ΜΝ παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓΔΕ. Ἐκ τοῦ σημείου Α ἄγομεν κατ'ἀρέσκειαν εὐθεϊάν τινα ΑΚ, συναπαντῶσαν τὸ



ἐπίπεδον MN εἰς τι σημεῖον K , καὶ ἐκ τῶν σημείων B, Γ, Δ καὶ E εὐθείας παραλλήλους τῇ AK , αἵτινες θέλουσι συναπαντήσῃ τὸ ἐπίπεδον MN εἰς τὰ σημεῖα I, Θ, H καὶ Z . Τελευταῖον ἐνόημεν $KI, I\Theta, \Theta H$, κτλ. τὸ δὲ οὕτω μεταξὺ τῶν πολυγώνων $AB\Gamma\Delta B, K I \Theta H Z$ καὶ τῶν παραλληλογράμμων ἐπιπέδων AZ, EH καὶ $\Delta\Theta$, κτλ. περιεχόμενον στερεὸν θέλει εἶναι πρίσμα.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι KA καὶ EZ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (πρότ. 16, E'), τὸ σχῆμα $A E Z K$ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ αἱ λοιπαὶ παράπλευραι ἑδραὶ εἶναι παραλληλόγραμμα. Καθόσον δ' ἀφορᾷ τὰ πολύγωνα $AB\Gamma\Delta E$ καὶ $K I \Theta H Z$, εὐκόλως παρατηρεῖ τις ὅτι ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας καὶ παραλλήλους. Λοιπὸν εἶναι ἴσα.

5. Τὰ ἴσα καὶ παράλληλα πολύγωνα $AB\Gamma\Delta E$ καὶ $K I \Theta H Z$ καλοῦνται βάσεις τοῦ πρίσματος. Τὰ λοιπὰ παραλληλόγραμμα ἐπίπεδα, ὁμοῦ λαμβανόμενα, ἀποτελοῦσι τὴν παράπλευρον ἢ κυρίην τοῦ πρίσματος ἐπιφάνειαν. Αἱ ἴσαι εὐθεῖαι AK, BI καὶ $\Gamma\Theta$, κτλ. λέγονται πλευραὶ ἢ κόψεις τοῦ πρίσματος.

6. Ὅψος πρίσματος τινος ὀνομάζεται ἡ τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων ἀπόστασις, ἡ ἢ ἐκ τινος σημείου τῆς ἄνω βάσεως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς κάτω καταβιβαζομένη κάθετος.

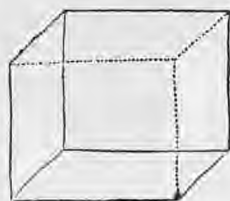
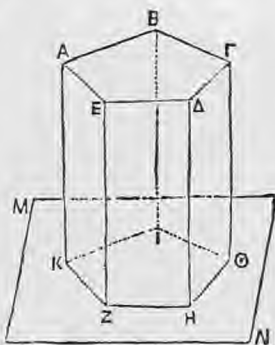
7. Ὀρθὸν πρίσμα καλεῖται τὸ ἔχον τὰς πλευρὰς AK, BI κτλ. κάθετους ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν βάσεων αὐτοῦ. Λοιπὸν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος παριστᾷ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

8. Πᾶν μὴ ὀρθὸν πρίσμα ὀνομάζεται πλάγιον. Εἶναι δὲ προφανές ὅτι τὸ ὕψος παντὸς πλαγίου πρίσματος εἶναι μικρότερον μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

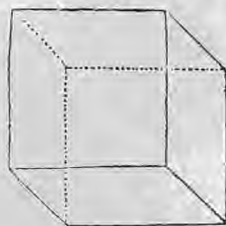
9. Πρίσμα τι λέγεται τριγωνικόν, τετραγωνικόν, κτλ., ὅταν ἡ βάσις αὐτοῦ ᾖ τριγώνον, τετράγωνον, κτλ.

10. Τὸ πρίσμα, τὸ ἔχον βάσεις παραλληλόγραμμα, ἔχει ὅλας αὐτοῦ τὰς ἑδρας παραλληλογράμμους καὶ καλεῖται παραλληλεπίπεδον.

Τὸ παραλληλεπίπεδον λέγεται ὀρθόν, ὅταν αἱ κόψεις αὐτοῦ ᾖναι κάθετοι ἐπὶ τῆς βάσεως.

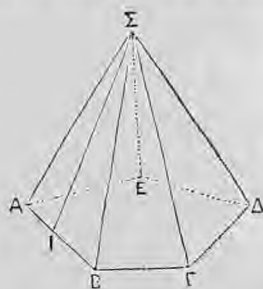


Ἐὰν δὲ πρὸς τούτοις αἱ βάσεις αὐτοῦ ᾖναι ὀρθογώνια, τὸ παραλληλεπίπεδον ὀνομάζεται τότε ὀρθογώνιον, ὡς ἔχον ὅλας αὐτοῦ τὰς ἑδρας ὀρθογωνίους.



11. Μεταξὺ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπίπεδων διακρίνεται ὁ κύβος, ἢ τὸ κανονικὸν ἑξάεδρον, ὡς περιεχόμενον μεταξὺ ἑξ ἴσων τετραγώνων.

12. Πυραμὶς ὀνομάζεται τὸ σχηματιζόμενον στερεὸν ΣΑΒΓΔΕ ἐκ τῆς ἐνώσεως σημείου τινὸς Σ, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου πολυγώνου τινὸς ΑΒΓΔΕ κειμένου, μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου τούτου.



Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καλεῖται βᾶσις τῆς πυραμίδος, τὸ σημεῖον Σ κορυφὴ αὐτῆς, τὸ δὲ σύνολον τῶν τριγώνων ΑΣΒ καὶ ΒΣΓ, κτλ., ἀποτελεῖ τὴν παράπλευρον ἢ κυρτὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.

13. Ὅψος τῆς πυραμίδος λέγεται ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως καταβιβαζομένη κάθετος.

14. Ἡ πυραμὶς ὀνομάζεται τριγωνικὴ, τετραγωνικὴ, κτλ., ὅταν ἡ βᾶσις αὐτῆς ᾖναι τρίγωνον, τετράγωνον κτλ.

15. Ἡ πυραμὶς ὀνομάζεται κανονικὴ, ὅταν ἡ μὲν βᾶσις αὐτῆς ᾖναι κανονικὸν πολύγωνον, ἡ δὲ ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως αὐτῆς καταβιβαζομένη κάθετος διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἡ κάθετος αὕτη καλεῖται τότε καὶ ἄξων τῆς πυραμίδος.

16. Ἡ κάθετος ΣΙ, ἡ καταβιβαζομένη ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ΑΒ τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ, ὀνομάζεται ἀπόστημα τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

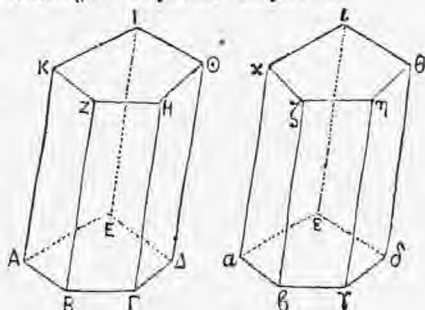
17. Διαγώνιος πολυέδρου τινὸς ὀνομάζεται ἡ ἐνόηστος τὰς κορυφὰς δύο μὴ προσκειμένων στερεῶν γωνιῶν εὐθεῖα.

18. Ἐν τοῖς ἐπομένοις δὲν θέλει γίνεαι λόγος, εἰμὴ περὶ τῶν κυρτῶν πολυέδρων. Κυρτὸν δὲ πολυέδρον καλεῖται τὸ κείμενον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος μιᾶς ὁποιασδήποτε τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ, προσκλιθεῖσας. Αἱ τῶν κυρτῶν πολυέδρων ἐπιφάνειαι καλοῦνται ὡσαύτως κυρταὶ ἐπιφάνειαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο πρίσματα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τρεῖς ἑδρας, ἀποτελούσας στερεὰν γωνίαν, ἴσας ἐκάστην ἐκάστη καὶ ὁμοίως κειμένης.

Ἐστω ἡ βάσις $ΑΒΓΔΕ$ ἴση τῇ βάσει $αβγδε$, τὸ παραλληλόγραμμον $ΑΒΖΚ$ ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ $αβζκ$, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον $ΒΓΗΖ$ ἴσον τῷ $βγηζ$. Λέγω ὅτι τὰ δύο πρίσματα $ΑΒΘΙ$ καὶ $αβθι$ θέλουσιν εἶναι ἴσα.



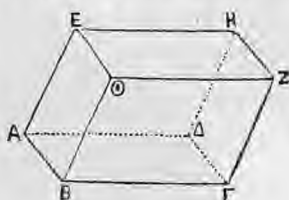
Διότι, ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ$ καὶ $αβγδε$ ὑπετέθησαν ἴσα, αἱ βάσεις τῶν δύο τούτων πρισμάτων ἐπιτιθέμεναι ταυτίζονται· καὶ ἐπειδὴ αἱ τὴν στερεὰν γωνίαν $Β$ σχηματίζουσαι ἑδραι ὑπετέθησαν ἴσαι μὲ τὰς τὴν στερεὰν γωνίαν $β$ σχηματίζουσας καὶ ὁμοίως κείμεναι, αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι $ΑΒΓ$, $ΑΒΖ$ καὶ $ΖΒΓ$, αἱ τὴν στερεὰν γωνίαν $Β$ σχηματίζουσαι, εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς ἐπίπεδους γωνίας $αβγ$, $αβζ$, $ζβγ$, τὰς τὴν στερεὰν γωνίαν $β$ σχηματίζουσας, καὶ ὁμοίως διατεταγμέναι. Λοιπὸν αἱ στερεαὶ γωνίαι $Β$ καὶ $β$ εἶναι ἴσαι (πρότ. 33, σχόλ. Ε'). ἐπομένως ἡ πλευρὰ $ΒΖ$ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ $βζ$. Ὡσαύτως, ἔνεκα τῶν ἴσων παραλληλογράμμων $ΑΒΖΚ$ καὶ $αβζκ$, ἡ πλευρὰ $ΖΚ$ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ $ζκ$. Ἡ ἄνω λοιπὸν βάση $ΚΖΗΘΙ$ θέλει ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἴσης αὐτῇ $κζηθι$, καὶ τὰ δύο στερεὰ $ΑΒΘΙ$ καὶ $αβθι$ θέλουσιν ἀποτελέσει ἓν μόνον.

Πόρισμα. Δύο ὀρθὰ πρίσματα, ἔχοντα βάσεις ἴσας καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἴσα. Διότι, ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ $ΑΒ$ εἶναι ἴση τῇ $αβ$ καὶ τὸ ὕψος $ΒΖ = βζ$, τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒΖΚ$ εἶναι ἴσον τῷ ὀρθογώνιῳ $αβζκ$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ ὀρθογώνια $ΒΖΗΓ$, $βζηγ$ εἶναι ἴσα. Λοιπὸν αἱ τρεῖς ἑδραι, αἱ τὴν στερεὰν γωνίαν $Β$ σχηματίζουσαι, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς ἑδρας, τὰς τὴν στερεὰν γωνίαν $β$ ἀποτελούσας, κτλ. Λοιπὸν τὰ δύο πρίσματα εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αἱ ἀπέναντι ἑδραι παντὸς παραλληλεπίπεδου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Κατὰ τὸν τοῦ παραλληλεπιπέδου ὅρισμὸν αἱ βάσεις $ΑΒΓΔ$ καὶ $ΕΘΖΗ$ εἶναι παραλληλόγραμμα ἴσα, καὶ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους. Μᾶς μένει λοιπὸν ν' ἀποδείξωμεν ὅτι δύο ὅποιοιδήποτε ἀντικείμενοι ἔδραι, π. χ. αἱ $ΔΕΗΔ$ καὶ $ΒΘΖΓ$, ἔχουσι τὰς αὐτὰς τῶν βάσεων ιδιότητας.



Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα $ΑΒΓΔ$ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ $ΑΔ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΒΓ$ δι' ὅμοιον δὲ τινὰ λόγον ἡ $ΑΕ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΒΘ$. Λοιπὸν ἡ γωνία $ΔΑΕ$ εἶναι ἴση τῇ $ΓΒΘ$ (πρότ. 17, Ε'), καὶ τὸ ἐπίπεδον $ΔΑΕ$ παράλληλον τῷ $ΓΒΘ$. Τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν $ΔΑΕΗ$ εἶναι ἴσον καὶ παράλληλον τῷ παραλληλογράμμῳ $ΓΒΘΖ$. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὰ ἀντικείμενα παραλληλόγραμμα $ΑΒΘΕ$ καὶ $ΔΓΖΗ$ εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα.

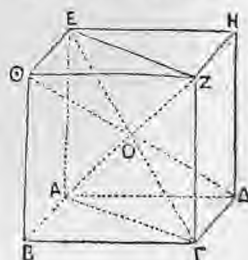
Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὸ παραλληλεπίπεδον περιέχεται μεταξὺ ἑξ ἑδρῶν, ἑξ ὧν αἱ ἀπέναντι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἔπεται ὅτι δύο ὅποιοιδήποτε ἀντικείμενοι ἔδραι δύνανται νὰ ληρθῶσιν ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Σχόλιον. Ἐπὶ τριῶν δεδομένων εὐθειῶν $ΑΒ$, $ΑΕ$ καὶ $ΑΔ$, μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων, ἀλλὰ διὰ τοῦ αὐτοῦ διερχομένων σημείου $Α$ καὶ δεδομένης πρὸς ἀλλήλας ἀποτελουσῶν γωνίας, δύναμεθα νὰ κατασκευάσωμεν παραλληλεπίπεδον, ἄγοντες ἐκ τοῦ ἀκροῦ ἐκάστης τῶν δεδομένων εὐθειῶν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῶν δύο ἄλλων· δηλ. ἐκ τοῦ σημείου $Β$ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ $ΔΑΕ$, ἐκ τοῦ σημείου $Δ$ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ $ΒΑΕ$ καὶ ἐκ τοῦ σημείου $Ε$ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ $ΒΑΔ$. Εἶναι προφανές ὅτι αἱ ἀμοιβαίαι τῶν ἐπιπέδων τούτων τομαὶ θέλουσι σχηματίσει τὸ ζητούμενον παραλληλεπίπεδον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αἱ διαγώνιοι παντὸς παραλληλεπιπέδου τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἄς φαντασθῶμεν τὰς διαγωνίους $ΕΓ$ καὶ $ΑΖ$, ὧν ἐκάτερα διέρχεται διὰ δύο ἀντικείμενων στερεῶν γωνιῶν. Ἐπειδὴ ἡ $ΑΕ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΓΖ$, τὸ σχῆμα $ΑΓΖΕ$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Λοιπὸν αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ $ΕΓ$ καὶ $ΑΕ$ τέμνονται ἀμοιβαίως

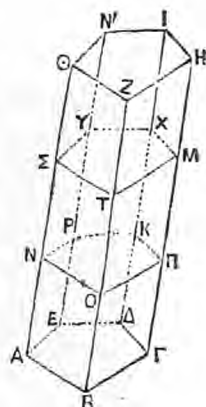


εἰς δύο ἴσα μέρη. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ διαγώνιος ΕΓ καὶ ἑτέρα τις ΔΘ τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη. Λοιπὸν αἱ τέσσαρες τοῦ παραλληλεπιπέδου διαγώνιοι τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη, ἐπομένως διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, ὅπερ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΘΕΩΡΗΜΑ

Εἰς πᾶν πρίσμα αἱ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων γερόμεναι τομαὶ ΝΟΠΚΡ καὶ ΣΤΜΧΥ' εἶναι πολύγωνα ἴσα.

Διότι αἱ πλευраὶ ΝΟ καὶ ΣΤ, κοινὰ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων μεθ' ἑνὸς τρίτου ΑΒΖΘ, εἶναι παράλληλοι. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΤΜ εἶναι παράλληλος τῇ ΟΠ, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Αἱ πλευραὶ λοιπὸν ΝΟ καὶ ΟΠ, κτλ. τῆς τομῆς ΝΟΠΚΡ εἶναι παράλληλοι τῶν πλευρῶν ΣΤ καὶ ΤΜ, κτλ. τῆς τομῆς ΣΤΜΧΥ. Λοιπὸν αἱ γωνίαι ΝΟΠ καὶ ΟΠΚ, κτλ. τοῦ πολυγώνου ΝΟΠΚΡ εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μετὰς τὰς γωνίας ΣΤΜ καὶ ΤΜΧ κτλ. τοῦ πολυγώνου ΣΤΜΧΥ. Ἀλλὰ πρὸς τούτοις $ΝΟ = ΣΤ$, διότι τὸ σχῆμα ΣΝΟΤ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ $ΟΠ = ΤΜ$, κτλ. διότι τὰ σχήματα ΟΠΤΜ, κτλ. εἶναι παραλληλόγραμμα. Λοιπὸν τὰ δύο πολύγωνα ΝΟΠΚΡ καὶ ΣΤΜΧΥ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας, ἐκάστην ἐκάστη, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας. Ἀρα τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

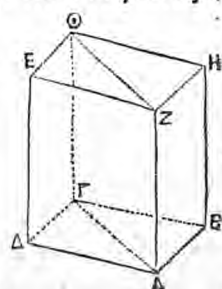
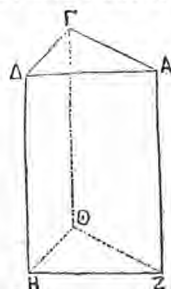


Πήρισμα. Αἱ παραλλήλως τῇ βάσει πρίσματός τινος γερόμεναι τομαὶ εἶναι ἴσαι μετὰ τὴν βάσιν τοῦ πρίσματος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ διὰ δύο ἀπέναντι κόρυων ΑΖ καὶ ΘΓ παραλληλεπιπέδου τινὸς ΑΘ διερχόμενον ἐπίπεδον διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΑΔΓΘΕΖ καὶ ΑΒΓΘΖΗ ἔν γε μὴ ἐπιθέσιμα.

Ἐν πρώτοις εἶναι φανερόν ὅτι τὰ δύο μερικὰ στερεὰ ΑΔΓΘΕΖ καὶ ΑΒΓΘΖΗ εἶναι πρίσματα διότι ἔχουσι βάσεις ΑΔΓ καὶ ΕΘΖ, ΑΒΓ καὶ ΘΖΗ ἴσας, ὡς τὰ ἡμίσια ἴσων παραλληλογράμμων



ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ, καὶ αἱ παράπλευροι αὐτῶν ἔδραι ΑΔΕΖ, ΔΓΕΘ, κτλ, ΑΒΗΖ ΒΓΘΗ, κτλ. εἶναι παραλληλόγραμμα.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὰ τριγωνικὰ ταῦτα πρίσματα δὲν δύνανται ἐν γένει νὰ ταῦτισθῶσιν ἐπιτιθέμενα. Διότι αἱ τρεῖς ἔδραι ΑΔΓ, ΑΔΕΖ καὶ ΓΔΕΘ, αἱ τὴν στερεάν γωνίαν Δ ἀποτελοῦσαι, εἶναι μὲν ὁμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς ἔδρας ΖΗΘ, ΒΓΘΗ καὶ ΑΒΗΖ, τὰς τὴν στερεάν γωνίαν Η ἀποτελοῦσας, ἀλλ' εἶναι καὶ ἀντιστρόφως διατεταγμένοι ὡς εὐκόλως παρατηρεῖ τις τοῦτο ἐπὶ τοῦ παρακειμένου σχήματος, ὅπερ παριστᾷ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΘΖΗ διατεθειμένον οὕτως, ὥστε ἡ στερεὰ αὐτοῦ γωνία Η νὰ κῆται ὁμοιοτρόπως μὲ τὴν ὑπὸ ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν ἀποτελουμένην στερεάν γωνίαν Δ.

Ἐξαιρεῖται ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν αἱ ἑσῶσαι ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ ἤθελον εἶναι ῥομβοειδῆ, καὶ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΔΕ καὶ ΓΔΕ ἴσαι. Διότι τότε αἱ τὴν στερεάν γωνίαν Δ περιέχουσαι τρεῖς ἔδραι, ἤθελον εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τὴν στερεάν γωνίαν Η περιεχούσας καὶ ὁμοίως κείμεναι. Λοιπὸν κτλ.

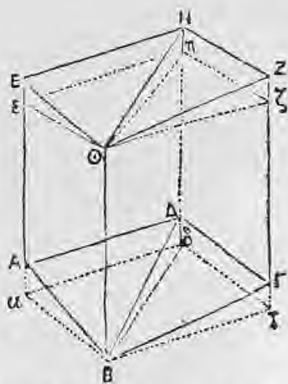
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὰ διὰ δύο ἀπέναντι κορυφῶν ΒΘ καὶ ΔΗ παραλληλεπιπέδου πρὸς ΑΖ διερχόμενον ἐπίπεδον διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἰσοδύναμα.

Διὰ τῶν κορυφῶν Β καὶ Θ ἄγομεν καθεῖως ἐπὶ τῆς κορυφῆς ΘΒ τὰ ἐπίπεδα Βαγδ καὶ Θεηζ, ἃτινα συναπαντῶσι τὰς τρεῖς ἄλλας κορυφάς ΔΕ, ΔΗ καὶ ΓΖ εἰς σημεῖα α, δ, γ, ε, η, ζ.

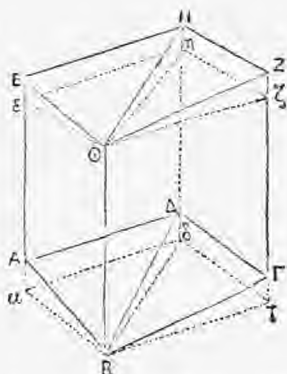
Αἱ τομαὶ Βαδγ καὶ Θεηζ θέλουσι εἶναι πολύγωνα ἴσα, ὡς τομαὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΖ, γενόμεναι ὑπὸ δύο ἐπιπέδων, καθέτων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΒΘ, καὶ ἐπομένως παραλλήλων (πρότ. 4). Εἶναι δὲ πρὸς τούτοις καὶ παραλληλόγραμμα· διότι δύο ἀπέναντι πλευραὶ αβ καὶ δγ τῆς αὐτῆς τομῆς Βαγδ εἶναι παράλληλοι, ὡς κοινὰι τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΘΕ καὶ ΔΓΖΗ μετὰ τοῦ τρίτου Βαγδ.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ σχῆμα ΒηεΘ εἶναι παραλληλόγραμμον· ὥς καὶ αἱ λοιπαὶ παράπλευροι ἔδραι ΒΘζγ, γδηζ καὶ αδηε τοῦ στερεοῦ



ΒαδγΘεηζ. Λοιπὸν τὸ στερεὸν τοῦτο εἶναι πρίσμα (ὄρισμ. 4). Τὸ πρίσμα δὲ τοῦτο εἶναι προσέτι καὶ ὀρθόν, διότι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ΒΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως Βαδγ.

Τούτων τεθέντων, ἐὰν διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΒΘΗΔ διαιρέσωμεν τὸ ὀρθὸν πρίσμα Εη εἰς δύο ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα αβδγΘε καὶ βδγζηΘ, λέγω ὅτι τὸ πλάγιον τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΔΗΕΘ θέλει εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ τριγωνικῷ πρίσματι αβδγθεΘ.



Διότι, ἐπειδὴ τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος πρίσματα ἔχουσι τὸ μέρος ΑΒΔγθεΘ κοινόν, ἀρκεῖ πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ ζητουμένου ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ μένοντα μέρη ΒαΑΔδ καὶ ΘεΕΗη εἶναι ἴσα.

Ἄλλ', ἐπειδὴ αἱ ἑδραὶ ΑΒΘΕ καὶ αβθε εἶναι παραλληλόγραμμα, αἱ πλευραὶ ΑΕ καὶ αε, ἴσιν τῇ παραλλήλῳ αὐταῖς ΒΘ, εἶναι ἴσαι, ἥτοι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητά ΑΕ=αε, ἐξ ἧς πορίζομεθα, ἀφαιρούντες ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς τὸ κοινὸν μέρος Αε, τὴν ἐξῆς Αα=Εε. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι καὶ Δδ=Πη.

Ἐὰν λοιπὸν ἐπιθέσωμεν τὴν βᾶσιν Θεη ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Βαδ, τὸ σημεῖον ε θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ σημείου α καὶ τὸ σημεῖον η ἐπὶ τοῦ δ, αἱ δὲ πλευραὶ ΕΕ καὶ ηΠ θέλουσι πέσει ἐπὶ τῶν ἴσων αὐταῖς ΑΑ καὶ Δδ, διότι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Βαδ. Τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος λοιπὸν στερεὰ θέλουσι ταυτίσθῃ ἐντελῶς. Λοιπὸν τὸ πλάγιον πρίσμα ΒΑΔΗΕΘ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ πρίσματι ΒαδγθεΘ.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι καὶ τὸ πλάγιον πρίσμα ΒΑΓΘΗΖ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ πρίσματι βδγθεηζ. Ἄλλὰ τὰ δύο ὀρθὰ πρίσματα Βαδθεη καὶ βδγθεηζ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΘ καὶ βάσεις Βαδ καὶ βδγ ἴσας (πρότ. 1, πρόβ.). Λοιπὸν τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΒΑΔΘΗΗ καὶ ΒΑΓΘΠΖ, ἰσοδύναμα ἴσοις πρίσμασιν, εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμα πρὸς ἄλληλα (πρότ. 5).

Πόρισμα. Πᾶν τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΔΗΕΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΖ, τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας Α καὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν κόψεων ΑΒ, ΑΔ καὶ ΑΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὰ δύο παραλληλεπίπεδα AZ καὶ AL , τὰ ἔχοντα μίαν τῶν βάσεων αὐτῶν $ABΓΔ$ κοινήν, καὶ τὰς ἄνω αὐτῶν βάσεις $EΘZH$ καὶ $IKAM$ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένης καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων HL καὶ EK περιχομένης, εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐν πρώτοις λέγω ὅτι τὸ τριγωνικὸν πρίσμα $ΔΕΙΜΗΔ$ εἶναι ἴσον τῷ τριγωνικῷ πρίσματι $ΒΘΚΑΖΓ$.

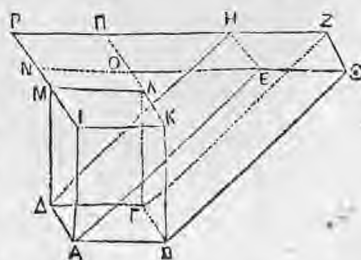
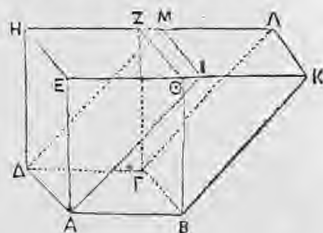
Διότι $ΔΕ$ καὶ $ΒΘ$ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου $ΔΕΘΒ$: διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $ΔΙ=ΒΚ$. Τελευταῖον αἱ γωνίαι $ΕΔΙ$ καὶ $ΘΒΚ$ εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν διευθυνομένης φοράν. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα $ΕΔΙ$ καὶ $ΘΒΚ$ εἶναι ἴσα. Ἀφ' ἑτέρου τὰ παραλληλόγραμμα $ΔΗ$ καὶ $ΒΖ$ εἶναι ὡσαύτως ἴσα, ὡς ἀπέναντι ἑδραὶ τοῦ παραλληλεπίπεδου AZ , τὰ δὲ παραλληλόγραμμα IH καὶ KZ εἶναι ἴσα, διότι $EH=ΘΖ$, $EΙ=ΘΚ$ καὶ ἡ γωνία $HEI=ZOK$. Αἱ τρεῖς λοιπὸν ἑδραὶ $ΔΕΙ$, $ΔΕΗΔ$ καὶ $ΙΕΗΜ$, αἱ τὴν στερεάν γωνίαν $Ε$ σχηματίζουσαι, εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς ἑδρας $ΒΘΚ$, $ΒΓΖΘ$ καὶ $ΖΟΚΛ$, τὰς τὴν στερεάν γωνίαν $Θ$ σχηματίζουσας, καὶ ὁμοίως κείμεναι. Λοιπὸν τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα $ΔΕΙΜΗΔ$ καὶ $ΒΘΚΑΖΓ$ εἶναι ἴσα (πρότ. 1).

Ἄλλ' ἐάν ἀπὸ τοῦ ὅλου στερεοῦ $ΑΔΛΚ$ ἀφαιρεθῇ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα $ΔΜ$, θέλει μείνει τὸ παραλληλεπίπεδον AL , ἐάν δὲ ἐκ τοῦ αὐτοῦ στερεοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα $ΒΛ$, θέλει μείνει τὸ παραλληλεπίπεδον AZ . Λοιπὸν τὰ δύο παραλληλεπίπεδα AL καὶ AZ εἶναι ἰσοδύναμα.

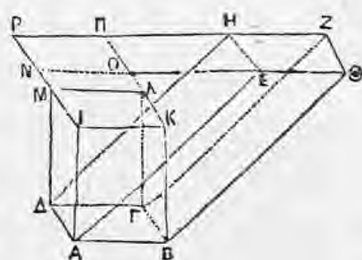
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὰ τὴν αὐτὴν βῆσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὄψος ἔχοντα παραλληλεπίπεδα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐστω $ΑΒΓΔ$ ἡ κοινὴ τῶν δύο παραλληλεπίπεδων AZ καὶ AL βῆσις. Ἐπειδὴ τὰ παραλληλεπίπεδα ταῦτα ὑπετέθησαν ἰσοῦσῃ, αἱ ἄνω αὐτῶν βάσεις $EΘZH$ καὶ $IKAM$ θέλουσι κείσθαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπι-



πέδου. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ $ΕΘ$ καὶ $ΙΚ$ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι τῇ $ΑΒ$, ἔπεται ὅτι $ΕΘ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΙΚ$. Δι' ὅμοιον δέ-
τινα λόγον καὶ ἡ $ΖΘ$ εἶναι ἴση καὶ
παράλληλος τῇ $ΑΚ$.

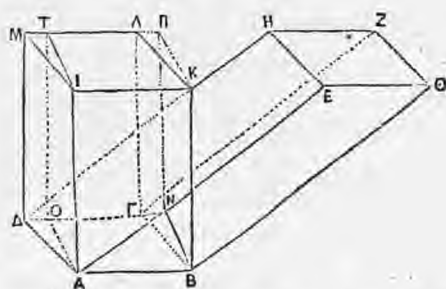


*Ὡς προεκβάλωμεν τώρα τὰς
πλευρὰς $ΘΕ, ΖΗ$, ὡς καὶ τὰς $ΚΛ, ΙΜ$,
μέχρις οὗ διὰ τῆς κοινῆς αὐτῶν συν-
αντήσεως σχηματίσωσι τὸ παραλ-
ληλόγραμον $ΝΟΠΡ$, ὅπερ προφανῶς θέλει εἶναι ἴσον μὲ ἑκατέραν τῶν
βάσεων $ΕΘΖΗ, ΙΚΑΜ$, καὶ ἃς φαντασθῶμεν τρίτον τι παραλληλεπί-
πεδον, ἔχον διὰ κάτω βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον $ΑΒΓΔ$ καὶ δι' ἄνω
βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον $ΝΟΠΡ$. Κατὰ τὸ προαποδειχθέν θεώ-
ρημα, τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο θέλει εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὰ
παραλληλεπίπεδα $ΑΖ$ καὶ $ΑΛ$. Λοιπὸν τὰ δύο παραλληλεπίπεδα
 $ΑΖ$ καὶ $ΑΛ$, τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι
ἰσοδύναμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. ΘΕΩΡΗΜΑ

*Πᾶν παραλληλεπίπεδον $ΑΖ$ δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς ἰσοδύ-
ναμον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ βάσεως
ἰσοδυνάμου.*

Εἰς τὰ σημεῖα $Α, Β, Γ$ καὶ
 $Δ$ ὑψώνομεν τὰς εὐθείας $ΑΙ,$
 $ΒΚ, ΓΛ$ καὶ $ΔΜ$ καθέτους ἐπὶ
τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως
 $ΑΒΓΔ$, καὶ σχηματίζομεν τὸ
παραλληλεπίπεδον $ΑΛ$, ἰσο-
δύναμον τῷ παραλληλεπι-
πέδῳ $ΑΖ$. Εἶναι φανερόν ὅτι



αἱ παρά πλευραι ἔδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου $ΑΛ$ θέλουσιν εἶναι ὀρθο-
γώνιαι. *Ἄν δὲ πρὸς τούτοις καὶ ἡ βᾶσις $ΑΒΓΔ$ ᾗτο ὀρθογώνιον, $ΑΛ$
ἤθελεν εἶναι τὸ ἰσοδύναμον τῷ παραλληλεπιπέδῳ $ΑΖ$ ὀρθογώνιον
παραλληλεπίπεδον.

*Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι $ΑΒΓΔ$ δὲν εἶναι ὀρθογώνιον. *Ἀγομεν $ΑΟ$ καὶ
 $ΒΝ$ καθέτους ἐπὶ τῆς $ΓΔ$, καὶ ἐκ τῶν σημείων $Ο$ καὶ $Ν$ τὰς εὐθείας
 $ΟΓ$ καὶ $ΝΗ$ καθέτους ἐπὶ τῆς βάσεως $ΑΒΓΔ$. Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον

στερεὸν ΑΒΝΟΤΗΚΙ θέλει εἶναι τὸ ἰσοδύναμον τῷ παραλληλεπίπεδῳ ΑΖ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Διότι ἐκ κατασκευῆς ἡ βάση ΑΒΝΟ καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ΙΚΠΤ εἶναι ὀρθογώνια ὡς καὶ αἱ παράπλευροι ἑδραι ΑΟΙΤ, κτλ, διότι αἱ κόψεις ΑΙ, ΟΤ, κτλ. εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Λοιπὸν τὸ στερεὸν ΑΠ εἶναι παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον. Ἀλλὰ τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΠ καὶ ΑΛ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάση ΑΒΚΙ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΟ, τὸ δὲ παραλληλεπίπεδον ΑΛ κατεσκευάσθη ἰσοδύναμον τῷ ΑΖ. Λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΠ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ΑΖ, καὶ ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΙ καὶ βάση τὴν ΑΒΝΟ, ἰσοδύναμον τῇ βάσει ΑΒΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὰ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΒΓΔ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΖ καὶ ΑΛ εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν ΑΕ καὶ ΑΙ.

*Ὡς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις, ὅτι τὰ ὕψη ΑΕ καὶ ΑΙ ἔχουσιν τι κοινὸν μέτρον, π. χ. εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς 15 πρὸς 4. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ὕψος ΑΕ εἰς 15 ἴσα μέρη, καὶ ἐκ τῶν σημείων χ, υ, ζ, κτλ. τῆς διαιρέσεως ἀξώμεν ἐπίπεδα παράλληλα τῇ κοινῇ βάσει ΑΒΓΔ, τὰ ἐπίπεδα ταῦτα θέλουσι διαιρέσει τὸ μὲν στερεὸν ΑΖ εἰς 15 μερικὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ἴσα πρὸς ἀλλήλα, ὡς ἔχοντα βάσεις ἴσας (πρότ. 4) καὶ ὕψη ἴσα, τὸ δὲ ΑΛ εἰς 4 τοιαῦτα. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει



ὁρθ. παραλ. ΑΖ : ὁρθ. παραλ. ΑΛ = 15 : 4.

*Ἀλλὰ καὶ $ΑΕ : ΑΙ = 15 : 4$.

*Ἀρα ὁρθ. παραλ. ΑΖ : ὁρθ. παραλ. ΑΛ = ὕψ. ΑΕ : ὕψ. ΑΙ.

*Ἄν τὰ ὕψη ΑΕ καὶ ΑΙ ᾔταν ἀσύμμετρα, εὐκόλως ᾔθέλομεν ἀποδείξει τὸ ἀληθὲς τῆς προτάσεως ταύτης μεταχειριζόμενοι τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην τῶν δύο γνωστῶν ἀποδείξεων (πρότ. 18, Β').

Παρατήρησις. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' α, β, γ τὰς τρεῖς συνεχεῖς κόψεις ὀρθογωνίου τινὸς παραλληλεπίπεδου, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι μία τούτων, ἡ α παραδείγματος χάριν, παριστᾷ τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ, αἱ μένουσαι δύο ἄλλαι β καὶ γ θέλουσι παριστᾶν τὰς δύο τῆς βάσεως αὐτοῦ διαστάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π' , ἔχοντα μίαν τῶν τριῶν αὐτῶν διαστάσεων κοινὴν, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν δύο ἄλλων, ἢ, ἐν ἄλλαις λέξεσι, δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

Ἔστωσαν α , β καὶ γ αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου Π , καὶ α , β' , γ' αἱ τοῦ Π' .

Ἀφ' οὗτων κατασκευάσωμεν τρίτον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον Π'' κατασκευασμένον ἐπὶ τῶν τριῶν συνεχῶν κόψων α , β καὶ γ' .

Τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π'' , ἔχοντα δύο τῶν διαστάσεων αὐτῶν α καὶ β κοινάς, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν γ καὶ γ' , τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$\Pi : \Pi'' = \gamma : \gamma'$$

Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχομεν

$$\Pi'' : \Pi' = \beta : \beta'.$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους τῶν ἀνωτέρω δύο ἀναλογιῶν καὶ διαιρούντες διὰ Π'' τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου λόγου τῆς νέας ἀναλογίας, θέλομεν ἔχει

$$\Pi : \Pi' = \beta \times \gamma : \beta' \times \gamma'. \quad (1)$$

Ἀλλ', ἂν παραστήσωμεν διὰ B τὴν θάσιν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου Π καὶ διὰ B' τὴν τοῦ Π' , θέλομεν ἔχει $B = \beta \times \gamma$ καὶ $B' = \beta' \times \gamma'$. Ἀρα, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν (1) ἀντὶ τῶν γινομένων $\beta \times \gamma$ καὶ $\beta' \times \gamma'$ τὰς θάσεις B καὶ B' , θέλομεν ἔχει

$$\Pi : \Pi' = B : B'. \quad (2)$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π' εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων των ἐπὶ τὰ ὕψη αὐτῶν, ἢ ὡς τὰ γινόμενα τῶν τριῶν αὐτῶν διαστάσεων.

Ἔστω H τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ Π , α δὲ καὶ β αἱ δύο τῆς θάσεως αὐτοῦ B διαστάσεις. Ἔστω ὡσαύτως Π' τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ Π' α' δὲ καὶ β' αἱ δύο τῆς θάσεως αὐτοῦ B' διαστάσεις. Ἔστω πρὸς ταύτης Π'' τρίτον τι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἔχον ὕψος H καὶ θάσιν B' .

Τὰ στερεὰ Π καὶ Π', ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος Η, εἶναι πρὸς ἀλλήλας αἱ βάσεις αὐτῶν Β καὶ Β', τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$\Pi : \Pi' = B : B'.$$

Τὰ στερεὰ Π' καὶ Π', ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν Β', εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν Η καὶ Η', τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$\Pi' : \Pi = H : H'.$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ἐμοταγεῖς ὄρους τῶν δύο τούτων ἀναλογιών καὶ διαιροῦντες διὰ Π' τοὺς δύο ὄρους τοῦ πρώτου λόγου τῆς ροκυπτούσης ἀναλογίας, θέλομεν ἔχει

$$\Pi : \Pi' = B \times H : B' \times H'. \quad (1)$$

Ἀλλὰ $B = a \times \epsilon$, καὶ $B' = \alpha \times \epsilon'$.

$$\text{Ἄρα} \quad \Pi : \Pi' = a \times \epsilon \times H : \alpha \times \epsilon' \times H', \quad (2)$$

οὕθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν

ΜΕΤΡΟΝ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ.

Γνωρίζομεν ὅτι πρὸς καταμέτρησιν ποσοῦ τινος ἡ μεγέθους λαμβάνομεν ὠρισμένον τι ποσὸν ἢ μέγεθος ὡς μονάδα, καὶ ζητοῦμεν ἔπειτα ποσάκις ἡ μονὰς αὕτη ἐμπεριέχεται εἰς τὸ πρὸς καταμέτρησιν δοθὲν ποσὸν ἢ μέγεθος, ἢ, ἐν ἀλλαίς λέξεσι, ζητοῦμεν τὸν λόγον τοῦ δεδομένου ποσοῦ ἢ μεγέθους πρὸς τὸ ὡς μονάδα ληθὲν ποσὸν ἢ μέγεθος. Πρὸς καταμέτρησιν λοιπὸν ὀρθογωνίου τινὸς παραλληλεπίπεδου Π ἀρκεῖ νὰ εὗρωμεν τὸν λόγον αὐτοῦ πρὸς τι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον Π', ληθὲν ὡς μονὰς.

Ἄλλ' ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας (2), ἥτις γράφεται καὶ ὡς ἐξῆς

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{a \times \epsilon \times H}{\alpha \times \epsilon' \times H'},$$

ποριζόμεθα ὅτι πρὸς εὗρεσιν τοῦ λόγου τούτου πρέπει νὰ ἐκτιμήσωμεν $a, \epsilon, H, \alpha, \epsilon', H'$ διὰ τινος γραμμικῆς μονάδος, καὶ νὰ διαιρέσωμεν ἀκολουθῶς τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων ἀριθμῶν διὰ τοῦ γινομένου τῶν τριῶν ἄλλων.

Ὁ ὑπολογισμὸς ἀπλοποιεῖται ἐπακισθητῶς, ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα τῶν ὀγκῶν τὸν κύβον, οὗτινος ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση τῇ γραμμικῇ μονάδι· διότι τότε οἱ παριστῶντες τὰς διαστάσεις $a, \epsilon, H, \alpha, \epsilon', H'$ ἀριθμοὶ θέλουσιν εἶναι ἴσοι τῇ μονάδι, ἐπομένως καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν, ἢ δι' ἀναλογία (2) ἀπλοποιουμένη γίνεται

$$\Pi : \Pi' = \alpha \times \beta \times \text{H} : 1,$$

$$\text{ἐπομένως} \quad \frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\alpha \times \beta \times \text{H}}{1} = \alpha \times \beta \times \text{H},$$

ἤτοι τὸ μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν παριστῶντων τὰς τρεῖς αὐτοῦ διαστάσεις ἀριθμῶν. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\alpha \times \beta$ εἶναι τὸ μέτρον τῆς βάσεως Β τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου Π, ἤτοι ἐκφράζει ποσάκις ἡ βάση Β ἐμπεριέχει τὸ ἐπὶ τῆς γραμμικῆς μονάδος κατασκευασθὲν τετράγωνον. Ἀρα τὸ μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ὡσαύτως ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ (λαμβανομένου ὡς μονάδος ἐπιφανείας τοῦ ἐπὶ τῆς γραμμικῆς μονάδος κατασκευαζομένου τετραγώνου, καὶ ὡς μονάδος τῶν ὀγκῶν τοῦ ἐπὶ τῆς αὐτῆς μονάδος κατασκευαζομένου κύβου).

Ἐφαρμογὰ. Ἐστῶσαν $\alpha = 2''$, 51, $\beta = 3''$, 25, $\text{H} = 2''$, 45. Τὸ μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου θέλει εἶναι

$$2,51 \times 3,25 \times 2,45 \quad \eta \quad 19,985875.$$

Ὁ ὀγκος λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου θέλει περιέχει 19 κυβικὰ μέτρα, καὶ 985875 ἑκατομμυριοστὰ τοῦ κυβικοῦ μέτρου, ἢ, ὅπερ ταῦτό, 19 κυβικὰ μέτρα, 985 κυβικὰ δέκατα τοῦ μέτρου, καὶ 875 κυβικὰ ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου. Διότι τὸ κυβικὸν δέκατον τοῦ μέτρου εἶναι τὸ χιλιοστὸν μέρος τοῦ κυβικοῦ μέτρου, καὶ τὸ κυβικὸν ἑκατοστὸν εἶναι τὸ ἑκατομμυριοστὸν μέρος αὐτοῦ.

Ἐστῶ πρὸς τούτοις $\text{B} = 25$ τετρ. μέτρ., 51 καὶ $\text{H} = 12$ μέτρ., 5. Τὸ μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου τούτου παραλληλεπιπέδου θέλει εἶναι

$$25,51 \times 12,5 \quad \eta \quad 318 \text{ κυβ. μετρ.}, 875.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ μέτρον παντὸς παραλληλεπιπέδου, καὶ ἐν γένει τὸ μέτρον παντὸς πρίσματος, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Διότι 1^{ον} πᾶν παραλληλεπίπεδον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ βάσεως ἰσοδυνάμου (πρότ. 9). Ἀλλὰ τὸ μέτρον τούτου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἀρα τὸ μέτρον τοῦ πρώτου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του.

2^{ον}. Πᾶν τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ ἔχοντος τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν διπλασίαν (πρότ. 6). Ἀλλὰ τὸ μέτρον τούτου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἀρα τὸ τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος μέτρον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἡμισείας τῆς τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἐπὶ τὸ ὕψος του.

3^{ον}. Πᾶν πρίσμα ἀποσυντίθεται εἰς τόσα τριγωνικὰ πρίσματα, εἰς ὅσα τρίγωνα ἀποσυντίθεται καὶ τὸ πολύγωνον τῆς βάσεως αὐτοῦ. Ἀλλὰ τὸ μέτρον ἐκάστου τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του, καὶ ἐπειδὴ τὸ ὕψος εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλα τὰ τριγωνικὰ πρίσματα, ἔπεται ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ἁθροίσματος ὅλων τῶν μερικῶν τριγωνικῶν πρισμάτων θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἁθροισμα ὅλων τῶν τριγώνων, τῶν ἀποτελούντων τὰς βάσεις τῶν τριγωνικῶν τούτων πρισμάτων, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ κοινὸν ὕψος. Λοιπὸν τὸ μέτρον πολυγωνικοῦ τινος πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Πόρισμα. Τὰ τῆς αὐτῆς βάσεως πρίσματα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως.

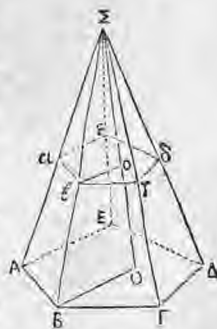
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν πυραμὶς τις $\Sigma AB\Gamma\Delta E$ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς $\alpha\beta\gamma$ παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς

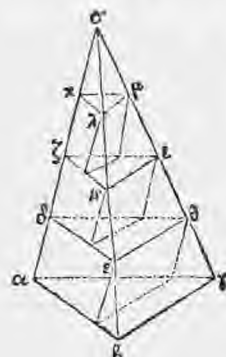
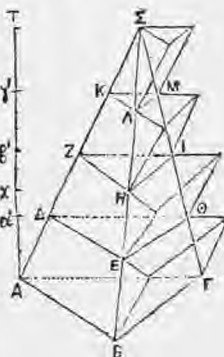
1^{ον}. Αἱ πλευραὶ ΣA , ΣB , $\Sigma \Gamma$, κτλ. καὶ τὸ ὕψος ΣO θέλουσι διαιρεθῇ ἀναλόγως εἰς τὰ σημεῖα α , β , γ , κτλ. καὶ o .

2^{ον}. Ἡ τομὴ $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ θέλει εἶναι πολύγωνον ὅμοιον τῇ βάσει $AB\Gamma\Delta E$.

1^{ον}. Διότι, ἐπειδὴ αἱ κοιναὶ τομαὶ AB καὶ $\alpha\beta$ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων $AB\Gamma$ καὶ $\alpha\beta\gamma$ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣAB εἶναι παράλληλοι (πρότ. 12, Β'), τὰ τρίγωνα ΣAB καὶ $\Sigma \alpha\beta$ εἶναι ὅμοια, καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $\Sigma A : \Sigma \alpha = \Sigma B : \Sigma \beta$. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον $\Sigma B : \Sigma \beta = \Sigma \Gamma : \Sigma \gamma$ καὶ οὕτω καθεξῆς. Λοιπὸν ὅλαι αἱ κόψεις ΣA , ΣB , $\Sigma \Gamma$, κτλ. τέμνονται ἀναλόγως εἰς τὰ σημεῖα α , β καὶ γ ,... Πρὸς τούτοις τὸ ὕψος ΣO τέμνεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν εἰς τὸ σημεῖον o · διότι, ἐπειδὴ BO καὶ βo εἶναι παράλληλοι, θέλομεν ἔχει



* Ἄς διαιρέσωμεν τὸ ὕψος AT εἰς μέρη ἴσα μικρότερα τοῦ $\Delta\chi$, καὶ ἔστω ν ἐν τῶν μερῶν τούτων. Διὰ τῶν σημείων α' , β' , γ' , κτλ. τῆς διαίρεσεως ἃς ἄξωμεν ἐπίπεδα παράλληλα τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων $AB\Gamma$ καὶ $\alpha\beta\gamma$. Αἱ ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων γενόμεναι τομαὶ $\Delta E\Theta$ καὶ $\delta\epsilon\theta$, ZHI καὶ $\zeta\eta\iota$, κτλ. θέλουσιν



εἶναι ἰσοδύναμοι (πρότ. 14, πρό.). Τούτων δὲ τεθέντων, ἐὰν κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῶν τριγώνων $AB\Gamma$, $\Delta E\Theta$, ZHI κτλ., ὡς βάσεων ληφθέντων, ἐξωτερικὰ πρίσματα ἔχοντα διὰ κόψεις τὰ τμήματα $\Delta\Delta$, ΔZ , ZK , κτλ. τῆς πλευρᾶς SA , καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων $\delta\epsilon\theta$, $\zeta\eta\iota$, κλμ, κτλ. ὡς βάσεων ληφθέντων, ἐσωτερικὰ πρίσματα, ἔχοντα διὰ κόψεις τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς πλευρᾶς $σα$, ἅπαντα τὰ μερικὰ ταῦτα πρίσματα, ἐσωτερικὰ τε καὶ ἐξωτερικὰ, θέλουσιν ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος ν .

* Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν πρισματῶν εἶναι μεγαλειότερον τῆς πυραμίδος $\Sigma AB\Gamma$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν πρισματῶν εἶναι μικρότερον τῆς πυραμίδος $\sigma\alpha\beta\gamma$. Ἄρα διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους ἡ διαφορὰ τοῦ ἄθροισματος τῶν ἐσωτερικῶν πρισματῶν ἀπὸ τοῦ τῶν ἐξωτερικῶν πρέπει νὰ ᾖ μεγαλειτέρα τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, τοῦ παριστῶντος τὴν διαφορὰν τῶν δύο τριγωνικῶν πυραμίδων $\Sigma AB\Gamma$ καὶ $\sigma\alpha\beta\gamma$.

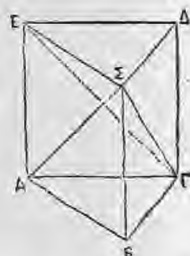
* Ἀλλὰ τὸ δεύτερον ἐξωτερικὸν πρίσμα $\Delta E\Theta Z$ καὶ τὸ πρῶτον ἐσωτερικὸν $\delta\epsilon\theta\alpha$ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα βάσεις $\Delta E\Theta$ καὶ $\delta\epsilon\theta$ ἰσοδύναμους καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ν . Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ τρίτον ἐξωτερικὸν πρίσμα $ZHIK$ καὶ τὸ δεύτερον ἐσωτερικὸν $\zeta\eta\iota\delta$ εἶναι ἰσοδύναμα, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου ἐξωτερικοῦ τε καὶ ἐσωτερικοῦ. Λοιπὸν ὅλα τὰ ἐξωτερικὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος $\Sigma AB\Gamma$, ἐξαιρουμένου τοῦ πρώτου $AB\Gamma\Delta$, ἔχουσι τὰ ἰσοδύναμά των μεταξὺ τῶν ἐσωτερικῶν τῆς πυραμίδος $\sigma\alpha\beta\gamma$. Ἄρα τὸ πρίσμα $AB\Gamma\Delta$ παριστᾷ τὴν διαφορὰν τοῦ ἄθροισματος τῶν ἐσωτερικῶν πρισματῶν τῆς πυραμίδος $\sigma\alpha\beta\gamma$ ἀπὸ τοῦ τῶν ἐξωτερικῶν τῆς πυραμίδος $\Sigma AB\Gamma$. Ἄλλ' ἡ διαφορὰ τῶν δύο τού-

των ἄθροισμάτων πρέπει νὰ ᾖναι μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο πυραμίδων. Τὸ πρίσμα λοιπὸν $ΑΒΓΔ$ πρέπει νὰ ᾖναι μεγαλειτέραν τοῦ πρίσματος $ΑΒΓΧ$ (ἥτοι τοῦ ἔχοντος βάσιν $ΑΒΓ$ καὶ ὕψος $ΔΧ$), ὅπερ ἄτοπον. Διότι τὰ δύο πρίσματα $ΑΒΓΔ$ καὶ $ΑΒΓΧ$ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν $ΑΒΓ$ καὶ τὸ ὕψος $ν$ τοῦ πρώτου ἐλήφθη ἐκ κατασκευῆς μικρότερον τοῦ ὕψους $ΔΧ$ τοῦ δευτέρου. Λοιπὸν ἡ ὑπόθεσις, ἐξ ἧς ἀνεχωρήσαμεν, εἶναι ἄτοπος, ὡς ἄγουσα εἰς ἄτοπον ἐξαγόμενον. Λοιπὸν αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες $ΣΑΒΓ$ καὶ $σαβγ$, αἱ βάσεις ἰσοδύναμοις καὶ ὕψη ἴσα ἔχουσαι, εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους τριγωνικοῦ πρίσματος.

Ἐστω $ΣΑΒΓ$ τριγωνικὴ τις πυραμὶς, καὶ $ΑΒΓΔΕΣ$ τὸ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους τριγωνικὸν πρίσμα. Λέγω ὅτι ἡ πυραμὶς $ΣΑΒΓ$ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος $ΑΒΓΔΕΣ$.



Διότι ἐὰν ἐκ τοῦ πρίσματος ἀφαιρεθῇ ἡ πυραμὶς $ΣΑΒΓ$, θέλει μείνει τὸ στερεὸν $ΣΑΓΔΕ$, ὅπερ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τετραγωνικὴ τις πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον $ΑΓΔΕ$ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον $Σ$. Λέγω τώρα ὅτι ἡ τετραγωνικὴ αὕτη πυραμὶς εἶναι διπλασία τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος $ΣΑΒΓ$.

Διότι, ἐὰν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος $ΕΓ$, τὸ ἐπίπεδον $ΣΕΓ$ θέλει διαιρέσει τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικάς πυραμίδας $ΣΑΓΕ$ καὶ $ΣΕΓΔ$ ἰσοδύναμους, διότι ἔχουσι βάσεις $ΑΓΕ$ καὶ $ΕΓΔ$ ἴσας, ὡς τὰ ἡμίση τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου, καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ σημείου $Σ$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ΑΓΔΕ$ καταβιβαζομένην κάθετον. Λοιπὸν πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος ἀρκεῖ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι μία τούτων, ἡ $ΣΕΑΓ$ π. χ., εἶναι ἰσοδύναμος τῇ $ΣΑΒΓ$.

Καὶ τῷ ὄντι, ἡ πυραμὶς $ΣΕΓΔ$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα βάσιν τὸ τρίγωνον $ΕΣΔ$ ($=$ τῷ $ΑΒΓ$) καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον $Γ$, ἐπομένως ὕψος τὴν ἐκ τοῦ σημείου $Γ$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ΕΣΔ$ καταβιβαζομένην κάθετον. Ἀλλ' ἡ κάθετος αὕτη μετρεῖ τὴν τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων $ΣΕΔ$ καὶ $ΑΒΓ$ ἀπόστασιν. Ἄρα εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐκ τοῦ σημείου $Σ$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ΑΒΓ$ καταβιβαζομένην (πρότ. 16, πόρ. Ε'). Λοιπὸν αἱ

δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες $\Sigma\Lambda\Gamma$ καὶ $\Sigma\epsilon\Delta\Gamma$ ἔχουσι βάσεις $\Lambda\Gamma$ καὶ $\Sigma\epsilon\Delta$ ἴσας καὶ ὕψη ἴσα, ἐπομένως εἶναι ἰσοδύναμοι.

Αἱ τρεῖς λοιπὸν τριγωνικαὶ πυραμίδες $\Sigma\Lambda\Gamma$, $\Sigma\Delta\Gamma\epsilon$ καὶ $\Sigma\epsilon\Delta\Gamma$, αἱ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα $\Lambda\Gamma\epsilon\Delta\Sigma$ ἀποτελοῦσαι, εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς ἀλλήλας. Ἡ μία λοιπὸν τούτων, ἡ $\Sigma\Lambda\Gamma$ π. χ., εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος $\Lambda\Gamma\epsilon\Delta\Sigma$, τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους.

Πόρισμα. Τὸ μέτρον τριγωνικῆς τινος πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πᾶσα πυραμὶς $\Sigma\Lambda\Gamma\epsilon\Delta\epsilon$ ἔχει διὰ μέτρον τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ ὕψος της.

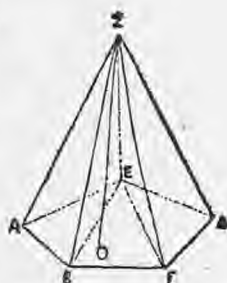
Διότι τὰ ἐπίπεδα $\Sigma\epsilon\epsilon$ καὶ $\Sigma\epsilon\Gamma$, τὰ διὰ τῆς κορυφῆς Σ καὶ τῶν διαγωνίων $\epsilon\epsilon$ καὶ $\epsilon\Gamma$ διερχόμενα, διαιροῦσι τὴν πολυγωνικὴν πυραμίδα $\Sigma\Lambda\Gamma\epsilon\Delta\epsilon$ εἰς τόσας τριγωνικὰς πυραμίδας τοῦ αὐτοῦ ὕψους $\Sigma\Theta$, εἰς ὅσα τρίγωνα ἀποσυντίθεται τὸ πελύγωνον $\Lambda\Gamma\epsilon\Delta\epsilon$ τῆς βάσεως αὐτῆς.

Ἀλλὰ, κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, ἐκάστη τῶν τριγωνικῶν τούτων πυραμίδων ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς της $\Lambda\epsilon\epsilon$, $\epsilon\Gamma\epsilon$ καὶ $\epsilon\Gamma\Delta$ ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους αὐτῆς $\Sigma\Theta$. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν τούτων πυραμίδων, ἡ ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς $\Sigma\Lambda\Gamma\epsilon\Delta\epsilon$, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων $\Lambda\epsilon\epsilon$, $\epsilon\Gamma\epsilon$ καὶ $\epsilon\Gamma\Delta$, ἡ τὸ πέλυνον $\Lambda\Gamma\epsilon\Delta\epsilon$, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους $\Sigma\Theta$. Λοιπὸν κτλ.

Πόρισμα 1. Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους πρίσματος.

Πόρισμα 2. Αἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως, αἱ τῆς αὐτῆς βάσεως πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

Σχόλιον. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τοῦ ὅγκου παντὸς πολυεδρικοῦ σώματος ἀποσυνθέτοντες αὐτὸ εἰς πυραμίδας, ἡ δ' ἀποσύνθεσις αὕτη δύναται νὰ γείνη κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ὁ ἀπλούστερος τούτῳ συνίσταται εἰς τὸ ν' ἀχθῶσι τὰ τῆς διαιρέσεως ἐπίπεδα ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας. Οὕτω θέλουσι σχηματισθῇ τόσαι μερικαὶ πυραμίδες, ὅσας ἑδρας ἔχει τὸ πολύεδρον, ἐξαιρουμένων



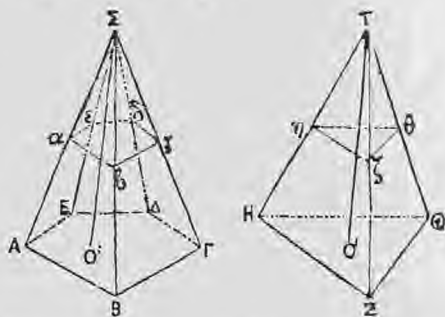
τῶν ἐδρῶν, τῶν σχηματίζουσῶν τὴν στερεάν γωνίαν, ἐξ ἧς ἄγονται τὰ τῆς διαιρέσεως ἐπίπεδα, καὶ ἐκάστης τούτων τὸ μέτρον εὐκόλως εὐρίσκεται.

Αἱ μερικαὶ αὗται πυραμίδες δύνανται ν' ἀποσυντεθῶσιν εἰς τετραέδρους διὰ τῆς αὐτῆς ἀποσυνθέσεως τῶν βάσεων αὐτῶν εἰς τρίγωνα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν πυραμὶς τις τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, ὁ μένων κορυφὴ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς μικρᾶς πυραμίδος, εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἔχουσῶν κοινὸν μὲν ὕψος τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, βάσεις δὲ, ἡ μὲν τὴν κάτω βάσιν τοῦ κορμοῦ, ἡ δὲ τὴν ἄνω βάσιν τοῦ κορμοῦ, καὶ ἡ τρίτη τὴν μεταξὺ τῶν δύο τούτων βάσεων μέσσην ἀνάλογον.

Ἐστω ΣΑΒΓΔΕ πυραμὶς τις τμηθεῖσα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αβγ, παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως αὐτῆς ΑΒΓΔΕ. Λέγω ὅτι ὁ κορμὸς ΑΒΓΔΕαβγδε θέλει εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἔχουσῶν κοινὸν μὲν ὕψος τὴν τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ καὶ αβγ ἀπόστασιν, ἥτοι τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, βάσεις δὲ, ἡ μὲν τὴν κάτω αὐτοῦ βάσιν ΑΒΓΔΕ, ἡ δὲ τὴν ἄνω αβγδε, καὶ ἡ τρίτη βάσιν τινὰ, μέσσην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο βάσεων ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε.

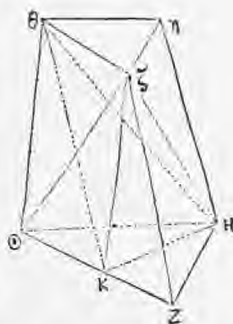


Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν τριγωνικὴν τινα πυραμίδα ΤΗΖΘ, ἔχουσαν βάσιν τὸ τρίγωνον ΗΖΘ, ἰσοδύναμον μὲ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ ὕψος ΤΟ' = ΣΟ'. Ἐὰν ὑποθέσωμεν πρὸς τούτοις ὅτι αἱ βάσεις τῶν δύο τούτων πυραμίδων κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ ἐπίπεδον αβγ, προεκβληθέν, θέλει τμήσει τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΤΗΖΘ, ἡ δ' αὕτω γενομένη τομὴ ηζ θέλει εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ πολύγωνον αβγδε (πρότ. 14, πόρ.).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω κατασκευῶν ἔπεται ὅτι ὁ κορμὸς ΑΒΓΔΕαβγδε εἶναι ἰσοδύναμος τῷ κορμῷ ΗΖΘηζθ. Διότι αἱ πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ καὶ ΤΗΖΘ εἶναι ἰσοδύναμοι, ὥς ἔχουσαι βάσεις ἰσοδύναμους καὶ ὕψη ἴσα.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ αἱ πυραμίδες Σαβγδε καὶ Τηζθ εἶναι ἰσοδύναμοι. Λοιπὸν ὁ κορμὸς ΑΒΓδε, ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο πυραμίδων ΣΑΒΓΔΕ καὶ Σαβγδε, θέλει εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν κορμὸν ΗΖΘηζθ, ὅστις εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο πυραμίδων ΤΗΖΘ καὶ Τηζθ, αἵτινες εἶναι ἀμοιβαίως ἰσοδύναμοι μὲ τὰς πρώτας. Ἀρκεῖ λοιπὸν ν' ἀποδειχθῇ ἡ ἐκφωνηθεῖσα πρότασις διὰ μόνην τὴν περίπτωσιν τοῦ κορμοῦ τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος.

Ἐστω λοιπὸν ΖΗΘηζ κορμὸς τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος. Ἦν δὲ διὰ τῶν τριῶν σημείων Θ, Η καὶ ζ ἄξωμεν τὸ ἐπίπεδον ΘζΖ, καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ κορμοῦ τὴν προκύπτουσαν τριγωνικὴν πυραμίδα ζΘΖΗ, ἡ πυραμὶς αὕτη ἔχει βάσιν τὴν κάτω βάσιν ΘΖΗ τοῦ κορμοῦ, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ· διότι ἡ κορυφή αὐτῆς ζ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΘζΖ, παραλλήλου τῷ ΘΖΗ.



Παρομοίως, ἐὰν διὰ τῶν τριῶν σημείων Θ, ζ καὶ Η ἄξωμεν τὸ ἐπίπεδον ΘζΗ, ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ζΘΗηθ, ἡ μένουσα μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ζΘΖΗ, θέλει ἀποσυντεθῇ εἰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ζΗηθ καὶ ζΘΗθ, ἐξ ὧν ἡ πρώτη ἔχει βάσιν τὴν ἄνω βάσιν ΘζΗ τοῦ κορμοῦ, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, διότι ἡ κορυφή αὐτῆς Η εὐρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΘζΗ παραλλήλου τῷ ΘζΖ. Οὕτω λοιπὸν εὗρομεν δύο τῶν πυραμίδων, ἐξ ὧν εἴπομεν ὅτι ὁ κορμὸς συντίθεται.

Μένει πρὸς ἐξέτασιν ἡ τρίτη πυραμὶς ζΘΠθ. Ἀλλ' ἐὰν ἀχθῇ ἡ ζΚ παράλληλος τῇ Θθ, καὶ λάβωμεν τὸ σημεῖον Κ ὡς κορυφὴν πυραμίδος, ἐχούσης βάσιν τὸ τρίγωνον ΘΠθ, ἡ πυραμὶς αὕτη, ἥτοι ἡ ΚΘΠθ, καὶ ἡ ζΘΠθ θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμοι, ὡς ἔχουσιν τὴν αὐτὴν βάσιν ΘΠθ τὰς δὲ κορυφὰς αὐτῶν Κ καὶ ζ ἐπὶ τῆς εὐθείας Κζ, παραλλήλου τῇ Θθ, καὶ ἐπομένως παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ ΘΠθ (πρότ. 10, Ε'). Ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΘΠΚ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα κορυφὴν τὰ σημεῖον Θ καὶ βάσιν τὸ τρίγωνον ΘΠΚ, ἐπομένως ὡς ἔχουσα ὕψος τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ. Καθόσον δ' ἀφορᾷ τὴν βάσιν ΘΠΚ, λέγω ὅτι αὕτη εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν βάσεων ΘΖΗ καὶ ΘζΖ.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΘΠΚ καὶ θηζ ἔχουσι τὰς γωνίας Θ καὶ θ καὶ τὰς πλευρὰς ΘΚ καὶ θζ ἴσας, θέλομεν ἔχει (πρότ. 28, Γ').

τρίγ. $\Theta ΗΚ$: τρίγ. $\theta ζ η = \Theta Η : \theta η$.

"Εχομεν ὡσαύτως τρίγ. $\Theta ΗΖ$: τρίγ. $\Theta ΗΚ = \Theta Ζ : \Theta Κ$ ἢ $\theta ζ$.

"Αλλ', ἔνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων $\Theta ΖΗ$ καὶ $\theta ζ η$,

$$\Theta Ζ : \theta ζ = \Theta Η : \theta η.$$

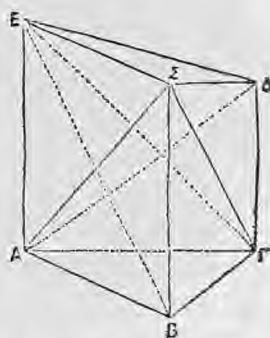
"Αρα καὶ $\Theta ΗΖ : \Theta ΗΚ = \Theta ΗΚ : \theta ζ η$.

Λοιπὸν ἀπεδείχθη ὅτι ἡ βάσις $\Theta ΗΚ$ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν βάσεων $\Theta ΗΖ$ καὶ $\theta η ζ$. Λοιπὸν πᾶς κορυμὸς τριγωνικῆς πυραμίδος, βάσεις ἔχων παραλλήλους, ἀποσυντίθεται εἰς τρεῖς πυραμίδας, ἐχούσας ὕψος μὲν τὸ ὕψος τοῦ κορυμοῦ, βάσεις δὲ, ἡ μὲν τὴν κάτω βάσιν τοῦ κορυμοῦ, ἡ δὲ τὴν ἄνω βάσιν τοῦ κορυμοῦ, καὶ ἡ τρίτη μέσση τινὰ ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο τούτων βάσεων. Λοιπὸν ὡσαύτως πᾶς κορυμὸς ὅποιασδήποτε πυραμίδος κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19 ΘΕΩΡΗΜΑ

"Εὰν τριγωνικόν τι πρίσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς $ΔΕΣ$, κεκλιμένου πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ $ΑΒΓ$, τὸ ἐκ ταύτης τῆς τομῆς προκύπτειν στερεὸν $ΑΒΓΔΕΣ$ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν κοινὴν βάσιν τὴν βάσιν $ΑΒΓ$ τοῦ πρίσματος καὶ κορυφὰς τὰ σημεῖα $Δ$, $Ε$ καὶ $Σ$.

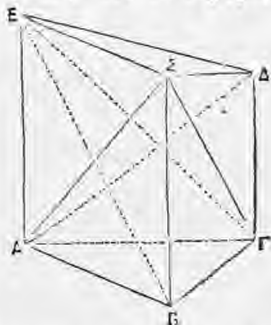
Διὰ τῶν τριῶν σημείων $Σ$, $Δ$ καὶ $Γ$ ἄγωμεν τὸ ἐπίπεδον $ΣΔΓ$, δι' οὗ ἀποκόπτεται ἀπὸ τοῦ κολοβοῦ πρίσματος $ΑΒΓΔΕΣ$ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς $ΣΑΒΓ$. Ἡ πυραμὶς αὕτη ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ$ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον $Σ$.



Μετὰ τὴν ἀπὸ τοῦ κολοβοῦ πρίσματος ἀφαίρεσιν τῆς πυραμίδος ταύτης, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς $ΣΑΓΔΕ$, ἔχουσα κορυφὴν τὸ σημεῖον $Σ$ καὶ βάσιν τὸ τραπέζιον $ΑΓΔΕ$. Ἐὰν διὰ τῶν τριῶν σημείων $Σ$, $Ε$ καὶ $Γ$ ἄξωμεν προσέτι τὸ ἐπίπεδον $ΣΕΓ$, ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς $ΣΑΓΔΕ$ θέλει διαιρεθῇ εἰς δύο τριγωνικάς πυραμίδας $ΣΑΓΕ$ καὶ $ΣΓΔΕ$.

Ἡ πυραμὶς $ΣΑΕΓ$, ἥς βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον $ΑΕΓ$, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον $Σ$, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν πυραμίδα $ΒΑΕΓ$, ἥτις ἔχει βάσιν τὸ αὐτὸ τρίγωνον $ΑΕΓ$ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον $Β$. Διότι αἱ

δύο αὗται πυραμίδες ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΓ, τὰς δὲ κορυφὰς αὐτῶν Σ καὶ Β κειμένας ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΣ παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ ΑΓΕ (πρότ. 10, Ε'). Λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΑΕΓ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ΒΑΕΓ, ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Ε.



Ἡ τρίτη πυραμὶς ΣΕΔΓ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΔΑΒΓ. Διότι ἡ πυραμὶς ΣΕΔΓ, ἔχουσα κορυφὴν τὸ σημεῖον Ε καὶ βάσιν τὸ τρίγωνον ΣΔΓ, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΑΣΓΔ, ἥτις ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΣΔΓ, τὴν δὲ κορυφὴν αὐτῆς Α κειμένην ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΣ, παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ ΣΔΓ. Ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ πυραμὶς ΑΣΓΔ, ἔχουσα κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ καὶ βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΔΓ, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΓΑΔΓ, ἥτις ἔχει βάσιν τὸ αὐτὸ τρίγωνον ΑΔΓ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Β, κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΣ, παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ ΑΔΓ. Λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΕΔΓ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΔΑΒΓ, ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Δ.

Λοιπὸν τὸ κολοβὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΣ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἔχουσῶν κοινὴν μὲν βάσιν τὴν βάσιν ΑΒΓ τοῦ πρίσματος, κορυφὰς δὲ τὰ τρία σημεῖα Δ, Ε καὶ Σ.

Πόρισμα. Ἄν αἱ κόψεις ΑΕ, ΒΣ καὶ ΓΔ ᾗσαν κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ἤθελον παριστᾶ συγχρόνως τὰ ὕψη τῶν τριῶν μερικῶν πυραμίδων, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ τὸ κολοβὸν πρίσμα. Τὸ μέτρον λοιπὸν τοῦ κολοβοῦ πρίσματος ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ θέλει εἶναι

$$\frac{1}{3} \text{ΑΒΓ} \times \text{ΑΕ} + \frac{1}{3} \text{ΑΒΓ} \times \text{ΒΣ} + \frac{1}{3} \text{ΑΒΓ} \times \text{ΓΔ}$$

ἢ, ἐξαγομένου ἐκτὸς παρενθέσεως τοῦ κοινοῦ παράγοντος $\frac{1}{3} \text{ΑΒΓ}$,

$$\frac{1}{3} \text{ΑΒΓ} \times (\text{ΑΕ} + \text{ΒΣ} + \text{ΓΔ}).$$

ΠΕΡΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ.

Δύο σημεῖα λέγονται *συμμετρικά* ὡς πρὸς ἐπίπεδόν τι, ὅταν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ᾗναι κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ἐκγονούσης τὰ δύο ταῦτα σημεῖα εὐθείας.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καλεῖται ἐπίπεδον τῆς συμμετρίας.

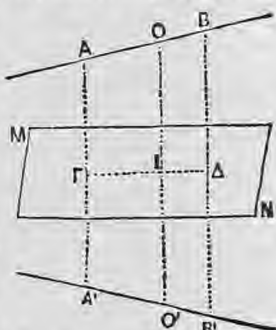
Δύο ὁποιαδήποτε σχήματα λέγονται συμμετρικά ὡς πρὸς ἐπίπεδόν τι, ὅταν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον ἐκάστου σημείου τοῦ ἑνὸς κηται ἐπὶ τοῦ ἑτέρου σχήματος.

Εἰς δύο συμμετρικά πολύεδρα αἱ συμμετρικαὶ ἑδραί, καθὼς καὶ αἱ συμμετρικά σημεῖα διὰ κορυφᾶς ἔχουσαι στερεαὶ γωνίαι, καλοῦνται ὁμόλογοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ συμμετρικὴ γραμμὴ εὐθείας τινὸς AB εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ.

Ἄς λάβωμεν ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας AB δύο ὁποιαδήποτε σημεία A καὶ B , καὶ ἄς προσδιορίσωμεν τὰ συμμετρικά αὐτῶν A' καὶ B' λαμβάνοντες ἐπὶ τῶν προεκβολῶν τῶν καθέτων, τῶν καταδιβαζομένων ἐκ τῶν σημείων A καὶ B ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN , μὴν ἀμοιβαίως ἴσα τοῖς τῶν καθέτων, τουτέστι $GA' = GA$ καὶ $GB' = GB$. Ἐν ἄξωμεν τὰς εὐθείας $A'B'$ καὶ GA , λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα $A'B'$ θέλει εἶναι ἡ συμμετρικὴ γραμμὴ τῆς δεδομένης εὐθείας AB .



Πρὸς ἀποδείξιν τούτου ἀρκεῖ θεθαίως ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ συμμετρικὸν σημεῖον ἑνὸς ὁποιοῦδήποτε σημείου O τῆς εὐθείας AB κεῖται ἐπὶ τῆς $A'B'$.

Ἄς καταδιβάσωμεν τὴν OI κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς συμμετρίας MN καὶ προεκβάλωμεν αὐτὴν μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν AB , στρέψωμεν ἀκολουθῶς τὸ τραπέζιον $AGAB$ περὶ τὴν εὐθεῖαν GA , μέχρις οὗ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $GA'B'D$. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι AGA καὶ $A'GA$ εἶναι ὀρθαί, GA θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν GA' , καὶ ἐπειδὴ $GA = GA'$, τὸ σημεῖον A θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ A' . Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον B θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν $B'D$, καὶ τὸ σημεῖον B θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ B' . Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν AB θέλει πέσει ἐπὶ τῆς $A'B'$. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι OIG καὶ $O'IG$ εἶναι ὀρθαί, OI θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν $O'I$ καὶ τὸ σημεῖον O θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ σημείου τῆς κοινῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν $A'B'$ καὶ IO' , ἥτοι ἐπὶ τοῦ σημείου O' . Λοιπὸν $IO = IO'$. Ἄρα O' εἶναι τὸ συμμετρικὸν σημεῖον τοῦ σημείου O . Λοιπὸν ἡ συμμετρικὴ γραμμὴ εὐθείας τινὸς AB εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ.

Πόρισμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι $AB = A'B'$, τουτέστιν ἡ

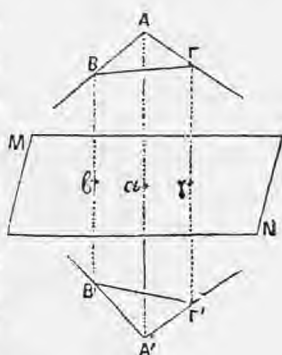
εὐθεΐα AB , ἡ ἐνόησεν δύο σημεῖα A καὶ B , εἶναι ἴση μὲ τὴν εὐθεΐαν $A'B'$, τὴν ἐνόησαν τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν A' καὶ B' .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ γωνία BAG τῶν δύο εὐθειῶν AB καὶ AG εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν $B'A'G'$, τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν συμμετρικῶν αὐτῶν $A'B'$ καὶ $A'G'$.

Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ σημεῖον A τῆς κοινῆς τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν AB καὶ AG ἔχει διὰ συμμετρικὸν τὸ σημεῖον A' , διότι τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου A σημεῖον πρέπει νὰ εὑρίσκειται συγχρόνως ἐπὶ τῆς $A'B'$ καὶ ἐπὶ τῆς $A'G'$.

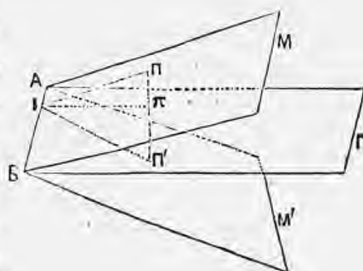
Τούτου τεθέντος, ἃς λάβωμεν ἐπὶ τῆς AB καὶ AG δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα B καὶ G , καὶ ἐνώσωμεν BG , ἔστωσαν δὲ B' καὶ G' τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν. Ἐὰν ἄξωμεν τὴν $B'G'$, θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος $BG = B'G'$, $AB = A'B'$ καὶ $AG = A'G'$. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ABG καὶ $A'B'G'$ θέλουσιν εἶναι ἴσα, καὶ ἐπομένως ἡ γωνία $BAG = B'A'G'$, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ συμμετρικὴ ἐπιφάνεια ἐπιπέδου τινὸς εἶναι ἐπίπεδος ἐπιγάνεια, σχηματίζουσα μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τούτου διεδρὸν τινα γωνίαν, διαιρουμένην εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς συμμετρίας.

Ἐστω AB ἡ κοινὴ τοῦ ἐπιπέδου MAB μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς συμμετρίας ABG τομῇ, καὶ ἃς ἄλθῃ διὰ τῆς AB ἐπίπεδόν τι ABM' , σχηματίζον μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς συμμετρίας ABG τὴν αὐτὴν γωνίαν, ἣν καὶ τὸ ἐπίπεδον MAB . Λέγω ὅτι τὸ ἐπίπεδον ABM' θέλει εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ ἐπιπέδου ABM .



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ βεβαίως ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ συμμετρι-

κὸν σημεῖον ἑνὸς ὁποιοῦδήποτε σημείου Π τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΜ καίται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΜ'.

Πρὸς τοῦτο καταβιβάζομεν τὴν Ππ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ καὶ προσκβάλλομεν αὐτὴν μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΜ' εἰς τὸ σημεῖον Π'. Ἐκ τοῦ ποδὸς π τῆς καθέτου ἄγομεν τὴν πι κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ τελευταίον ἄγομεν τὰς εὐθείας Πι καὶ Π'Ι, αἵτινες θέλουσιν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ (πρότ. 7, Ε').

Τὰ σχηματισθέντα δύο ὀρθογώνια τρίγωνα Ππι καὶ Π'πι εἶναι ἴσα, ὥς ἔχοντα τὴν Ιπ κοινὴν, καὶ τὰς γωνίας Πιπ καὶ Π'Ιπ, τὰς μετρούσας τὰς ἴσας διέδρους γωνίας ΜΑΒΓ καὶ Μ'ΑΒΓ ἴσας. Ἄρα Ππ = Π'π. Λοιπὸν Π' εἶναι τὸ συμμετρικὸν σημεῖον τοῦ σημείου Π. Λοιπὸν ἡ συμμετρικὴ ἐπιφάνεια ἐπιπέδου τινὸς ΑΒΜ εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΑΒΜ', σχηματίζουσα μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς συμμετρίας ΑΒΓ διέδρον γωνίαν Μ'ΑΒΓ ἴσην μετὰ τὴν διέδρον γωνίαν ΜΑΒΓ, ἣν κτλ.

Παρατήρησις. Ἄν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἐπίπεδον ᾗτο παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῆς συμμετρίας ΑΒΓ, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ᾗθελεν εἶναι ἕτερον ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΑΒΓ καὶ ἀπέχον τούτου, ὅσον καὶ τὸ πρῶτον.

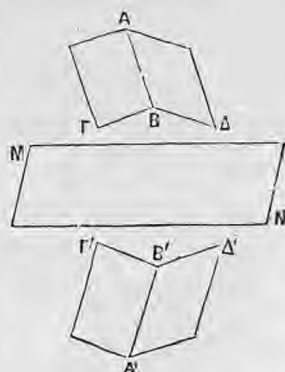
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ ὑπὸ δύο ἐπιπέδων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ σχηματιζομένη διέδρος γωνία ΓΑΒΔ εἶναι ἴση μετὰ τὴν διέδρον γωνίαν Γ'Α'Β'Δ', τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν συμμετρικῶν αὐτῶν Α'Β'Γ' καὶ Α'Β'Δ'.

Παρατηροῦμεν ἐν πρῶτοις ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ, κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ, ἔχει διὰ συμμετρικὴν τὴν εὐθεῖαν Α'Β', κοινὴν τομὴν τῶν συμμετρικῶν αὐτοῖς ἐπιπέδων Α'Β'Γ' καὶ Α'Β'Δ'.

Τούτου τεθέντος, εἰς τὸ σημεῖον Β ἃς σχηματίζωμεν τὴν μετροῦσαν τὴν διέδρον γωνίαν ΓΑΒΔ ἐπίπεδον γωνίαν ΓΒΔ. Παρομοίως εἰς τὸ σημεῖον Β', συμμετρικὸν τοῦ Β, ἃς σχηματίζωμεν τὴν μετροῦσαν τὴν διέδρον γωνίαν Γ'Α'Β'Δ' ἐπίπεδον γωνίαν Γ'Β'Δ'.

Ἡ εὐθεῖα ΒΔ, κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ, θέλει ἔχει διὰ συμμετρικὴν εὐθεῖαν τινὰ, διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Β' καὶ ἐπὶ τοῦ ἐ-



πιπέδου $A'B'D'$ κειμένην. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ ἡ BA εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς AB , ἡ συμμετρικὴ αὐτῆς θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς $A'B'$ (πρότ. 21). Ἀλλὰ $B'D'$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $A'B'D'$ καὶ ἤχθη κάθετος ἐπὶ τῆς $A'B'$. Ἄρα $B'D'$ εἶναι ἡ συμμετρικὴ τῆς BA . Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι $B'I'$ εἶναι ἡ συμμετρικὴ τῆς BI . Λοιπὸν ἡ γωνία $\Gamma BA = \Gamma'B'D'$ (πρότ. 21). Λοιπὸν ἡ ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων $AB\Gamma$ καὶ ABA σχηματιζομένη διέδρος γωνία ΓABA εἶναι ἴση κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδόν τι πολυέδρα ἔχουσι

1^η. Τὰς ἑδρας αὐτῶν ἴσας ἐκάστην ἐκάστη.

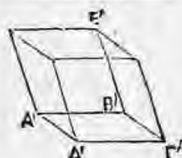
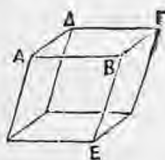
2^η. Τὰς ὁμόλογους αὐτῶν στερεὰς γωνίας συμμετρικάς.

1^η. Ἐστώσαν A, B, Γ καὶ Δ αἱ κορυφαί

μίας τῶν ἐδρῶν τοῦ ἐνὸς πολυέδρου. Γνωρίζομεν ἤδη ὅτι αἱ συμμετρικαὶ αὐτῶν A', B', Γ' καὶ Δ' εὐρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (πρότ. 22). Πρὸς τούτοις τὰ πολύγωνα $AB\Gamma\Delta$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς πλευράς αὐτῶν ἴσας καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, ἐκάστην ἐκάστη (πρότ. 20, 21). Λοιπὸν 1^η δύο συμμετρικὰ πολυέδρα ἔχουσι τὰς ἑδρας αὐτῶν ἴσας, ἐκάστην ἐκάστη.

2^η. Δύο ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι B καὶ B' ἔχουσι τὰς ἑδρας αὐτῶν ἴσας καὶ τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας, ἐκάστην ἐκάστη (πρότ. 21, 23). Ἀλλ', ἐὰν θέσωμεν τὴν ἑδραν $A'B'E'$ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ABE οὕτως, ὥστε αἱ λοιπαὶ τῶν δύο στερεῶν γωνιῶν κόψεις νὰ κῆνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς ἑδρας, εὐκόλως παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν δύο στερεῶν γωνιῶν εἶναι ἀντιστρόφως διατεταγμέναι. Λοιπὸν ἡ στερεὰ γωνία B' εἶναι συμμετρικὴ τῆς B . Λοιπὸν 2^η αἱ ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων εἶναι συμμετρικαί.

Πόρισμα 1. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι πολυέδρον τι Π ἐν μόνον συμμετρικὸν Π' ἔχει, ἢ ἐν ἄλλαις λέξεσι, δύο πολυέδρα Π' καὶ Π'' , συμμετρικὰ τρίτου τινὸς Π , εἶναι ἴσα πρὸς ἀλλήλα. Διότι αἱ μὲν ἑδραι τῶν δύο τούτων πολυέδρων εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οὔσαι ἀμοιβαίως ἴσαι



μέ τας ἑδρας τοῦ πολυέδρου Π, αἱ δὲ στερεαὶ αὐτῶν γωνίαι, οὔσαι συμμετρικαὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου Π, εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, διότι μία στερεὰ γωνία μίαν μόνην συμμετρικὴν δύναται νὰ ἔχῃ. Λοιπὸν τὰ πολυέδρα Π' καὶ Π'' θέλουσιν εἶναι ἐπιθέσιμα, καὶ ἐπομένως ἴσα.

Πόρισμα 2. Ἐὰν πολυέδρὸν τι Π ἀποσυντεθῇ εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, ἐχούσας κοινὴν κορυφὴν τὴν κορυφὴν στερεᾶς τινος αὐτοῦ γωνίας, ἐκάστη τῶν τριγωνικῶν τούτων παραμίδων θέλει ἔχει τὴν συμμετρικὴν αὐτῆς ἐντὸς τοῦ πολυέδρου Π', συμμετρικοῦ τοῦ Π.

Δύο λοιπὸν συμμετρικὰ πολυέδρα ἀποσυντίθενται εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τετραέδρων, συμμετρικῶν ἑκάστον ἐκάστῳ.

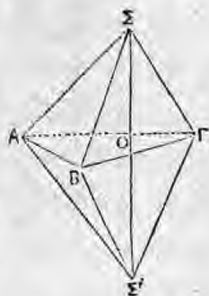
Σχόλιον. Δύο πολυέδρα, ἔχοντα τὰς ἑδρας αὐτῶν ἴσας, ἐκάστην ἐκάστη, καὶ τὰς στερεὰς αὐτῶν γωνίας συμμετρικὰς, λέγονται πάντοτε συμμετρικὰ, ὅποιαδήποτε καὶ ἂν ᾖται ἡ ἀμοιβαία αὐτῶν θέσις. Ἀλλὰ παρατηρητέον ὅτι ἡ συμμετρία δὲν ὑπάρχει πλέον εἰμὴ καθόσον ἀφορᾷ τὴν μορφήν τῶν στερεῶν καὶ οὐχὶ τὴν ὡς πρὸς ἐπίπεδόν τι συμμετρίαν θέσιν αὐτῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο συμμετρικὰ πολυέδρα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐπειδὴ, κατὰ τὰ λεχθέντα ἐν τῷ πόρισματι 2 τῆς προαποδειχθείσης προτάσεως, δύο συμμετρικὰ πολυέδρα ἀποσυντίθενται εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν συμμετρικῶν τετραέδρων, ἀρκεῖ πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος ν' ἀποδειχθῇ ὅτι δύο ὅποιαδήποτε συμμετρικὰ τετραέδρα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐστω λοιπὸν ΣΑΒΓ τετραέδρὸν τι, καὶ ἄς κατασκευάσωμεν ἐπὶ μιᾶς ὅποιασδήποτε τῶν ἐδρῶν αὐτοῦ ΑΒΓ, ὡς ἐπίπεδον τῆς συμμετρίας ληφθείσης, τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ Σ'ΑΒΓ. Τὰ δύο τετραέδρα ΣΑΒΓ καὶ Σ'ΑΒΓ θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΓ καὶ ὕψη ΣΟ καὶ Σ'Ο ἴσα. Λοιπὸν δύο συμμετρικὰ πολυέδρα εἶναι ἰσοδύναμα.

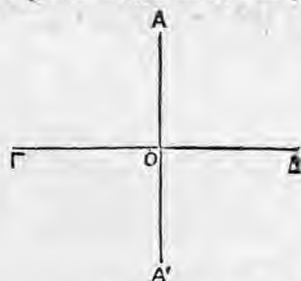


ΟΡΙΣΜΟΙ.

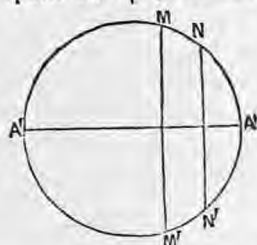
Δύο σημεῖα Α καὶ Α' λέγονται συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖαν τινὰ

ΓΑ, όταν ἡ εὐθεῖα αὕτη ᾖ καθετος εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΑ'; τῆς ἐνοούσης τὰ δύο ταῦτα σημεῖα. Ἡ εὐθεῖα ΓΑ καλεῖται εὐθεῖα τῆς συμμετρίας.

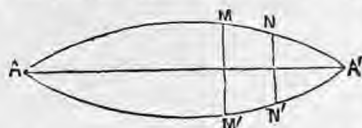
Δύο σχήματα ὀνομάζονται συμμετρικά ὡς πρὸς εὐθείαν τινα, όταν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον ἐκάστου σημείου τοῦ ἑνὸς κῆται ἐπὶ τοῦ ἐτέρου σχήματος.



Ὅταν τὰ μέρη σχήματός τινος ᾖναι συμμετρικά ὡς πρὸς εὐθείαν τινα, ἡ εὐθεῖα αὕτη καλεῖται τότε ἄξων τοῦ σχήματος, ἢ ἀπλῶς ἄξων. Οὕτω, π. χ. ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος ΑΑ', διαιροῦσα τὰς καθέτως ἐπ' αὐτῆς ἀγομένας χορδὰς ΜΜ', ΝΝ', κτλ. εἰς δύο ἴσα μέρη, καλεῖται ἄξων τοῦ κύκλου.

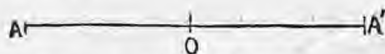


Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἔπεται ὅτι πᾶς ἄξων ΑΑ' ἐπιπέδου τινὸς σχήματος ΑΜΑ'Μ' διαιρεῖ τὴν περίμετρον τοῦ σχήματος τούτου καὶ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη. Διότι, ἐὰν στραφῇ τὸ σχῆμα ΑΜ'Ν'Α' περὶ τὴν ΑΑ' μέχρις οὗ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΜΝΑ', ἕκαστον σημεῖον Μ' τοῦ πρώτου θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ αὐτοῦ Μ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτω τὰ δύο σχήματα θέλουσι ταυτίσθῃ.



Ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὁρισμοῦ ἔπεται ὅτι ὁ ἄξων στερεοῦ τινος σχήματος διαιρεῖ τὴν περίμετρον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν πάσης δι' αὐτοῦ διερχομένης τομῆς τοῦ στερεοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Δύο σημεῖα Α καὶ Α' λέγονται συμμετρικά ὡς πρὸς σημεῖον



τι Ο, κέντρον τῆς συμμετρίας καλούμενον, όταν ἡ ἐνόουσα τὰ δύο ταῦτα σημεῖα εὐθεῖα διαιρῆται εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὸ σημεῖον Ο.

Δύο ὁποιαδήποτε σχήματα λέγονται συμμετρικά ὡς πρὸς σημεῖον τι Ο, όταν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον ἐκάστου σημείου τοῦ ἑνὸς κῆται ἐπὶ τοῦ ἐτέρου σχήματος.

Περὶ τῶν ὥς πρὸς εὐθειάν τινα καὶ σημείον τι συμμετρικῶν σχημάτων δύναται τις ν' ἀποδείξῃ εὐκόλως θεωρήματα περίπου ὅμοια μετὰ τὰ ὥς πρὸς ἐπίπεδόν τι προαποδειχθέντα, ἀλλ' ἀφίνομεν εἰς τὸν ἀναγνώστην, ἐὰν ἔχῃ καιρόν, τὴν φροντίδα τοῦ νὰ ζητήσῃ τὰς ἀποδείξεις τούτων.

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ.

Δύο πολύεδρα λέγονται ὅμοια, ὅταν ἔχωσι τὰς ἑδρας αὐτῶν ὅμοιας, ἐκάστην ἐκάστη, καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν στερεάς γωνίας ἴσας. Ὁμολόγοι δὲ στερεαὶ γωνίαι λέγονται αἱ ἐξ ὁμοίων ἐδρῶν ἀποτελούμεναι.

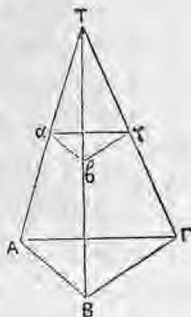
Αἱ ἐνόνουσαι τὰς ὁμολόγους κορυφὰς δύο ὁμοίων πυλυέδρων εὐθεῖαι λέγονται ὁμολόγοι εὐθεῖαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν ἐπὶ τῶν κόψεων TA , TB καὶ TF τοῦ τετραέδρου $TAB\Gamma$ λάβωμεν τὰ σημεία α , β καὶ γ οὕτως, ὥστε οἱ λόγοι $\frac{T\alpha}{TA}, \frac{T\beta}{TB}, \frac{T\gamma}{TF}$ νὰ ᾔηται ἴσοι, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῆς ἐνώσεως τῶν σημείων α , β καὶ γ τετράεδρον $T\alpha\beta\gamma$ θέλει εἶναι ὅμοιον τῷ τετραέδρῳ $TAB\Gamma$.

Διότι τὰ τρίγωνα $T\alpha\beta$ καὶ TAB εἶναι ὅμοια, ὥς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ τρίγωνον $T\beta\gamma$ εἶναι ὅμοιον τῷ TBG , καὶ τὸ $T\alpha\gamma$ ὅμοιον τῷ TAG . Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ $\alpha\beta$ εἶναι παράλληλος τῇ AB καὶ $\beta\gamma$ τῇ BG , τὸ ἐπίπεδον $\alpha\beta\gamma$ εἶναι παράλληλον τῷ ἐπίπεδῳ $AB\Gamma$, ἐπομένως τὸ τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$ εἶναι ὅμοιον τῷ $AB\Gamma$ (πρότ. 14). Τελευταῖον, δύο ὁποιαδήποτε ὁμολόγοι στερεαὶ γωνίαι B καὶ β εἶναι ἴσαι. Διότι αὐταί, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν ἐδρῶν, ἔχουσι τὰς ἐπίπεδους αὐτῶν γωνίας ἴσας, ἐκάστην ἐκάστη καὶ ὁμοίως διατεταγμένας. Λοιπὸν τὰ περὶ ὧν ὁλόγος τετράεδρα ἔχουσι τὰς ἑδρας αὐτῶν ὅμοιας, ἐκάστην ἐκάστη, καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν στερεάς γωνίας ἴσας. Λοιπὸν εἶναι ὅμοια.

Σχόλιον. Παρατηρητέον ὅτι δύο ὅμοια τετράεδρα ἔχουσι τὰς ὁμολόγους αὐτῶν κόψεις ἀναλόγους.



Ἀντιστρόφως, δύο τετράεδρα, ἔχοντα τὰς κόψεις αὐτῶν ἀναλόγους καὶ ὁμοίως διατεταγμένας εἶναι ὅμοια. Διότι ἐκ τῆς ἀναλογίας τῶν κόψεων ἔπεται ἀμέσως ἡ ὁμοιότης τῶν ἐδρῶν, ἐκ τῆς ὁμοιότητος δὲ τῶν ἐδρῶν καὶ τῆς ὁμοίας αὐτῶν διατάξεως ἡ ἰσότης τῶν ὁμολόγων στερεῶν γωνιῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο τετράεδρα $\Sigma A B \Gamma$ καὶ $T \Delta E \Theta$, ἔχοντα μίαν διέδρον γωνίαν ἴσην, περιχομένην μεταξὺ δύο ἐδρῶν ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων, εἶναι ὅμοια.

Ἐστω ἡ διέδρος γωνία ΣB ἴση μὲ τὴν διέδρον γωνίαν $T E$, τὸ τρίγωνον $\Sigma A B$ ὅμοιον τῷ $T \Delta E$, καὶ τὸ τρίγωνον $\Sigma B \Gamma$ ὅμοιον τῷ $T E \Theta$.

Αἱ στερεαὶ γωνίαι Σ καὶ T εἶναι ἴσαι, ὥς ἔχουσιν μίαν διέδρον γωνίαν ἴσην περιχομένην μεταξὺ δύο ἐδρῶν ἴσων καὶ ὁμοίως κειμένων (πρότ. 31, Ε'). Λοιπὸν ἡ γωνία $\Lambda \Sigma \Gamma$ εἶναι ἴση τῇ $\Delta T \Theta$. Πρὸς τοῦτοις, ἔνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων $\Lambda \Sigma B$ καὶ $\Delta T E$, $\Sigma B \Gamma$ καὶ $T E \Theta$, ἔχομεν τὰς ἀναλογίας

$$\Sigma B : T E = \Lambda \Sigma : \Delta T,$$

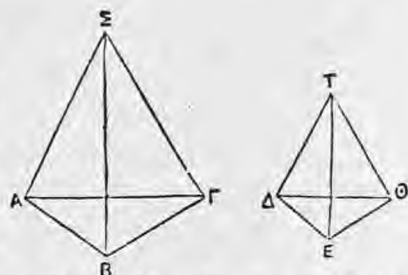
$$\Sigma B : T E = \Sigma \Gamma : T \Theta,$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα, ἔνεκα τοῦ κοινοῦ αὐτῶν λόγου $\Sigma B : T E$, τὴν ἀκόλουθον

$$\Lambda \Sigma : \Delta T = \Sigma \Gamma : T \Theta.$$

Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα $\Lambda \Sigma B$, $\Delta T \Theta$ εἶναι ὅμοια, ὥς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων.

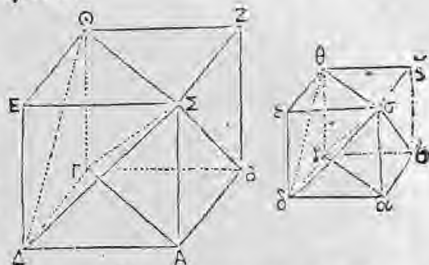
Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι B καὶ E εἶναι ἴσαι, καὶ ὅτι τὸ τρίγωνον $A B \Gamma$ εἶναι ὅμοιον τῷ $\Delta E \Theta$. Τελευταῖον, αἱ στερεαὶ γωνίαι Λ καὶ Θ εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς στερεὰς γωνίας Δ καὶ Θ , ὥς ἔχουσιν τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας, ἐκάστην ἐκάστη, καὶ ὁμοίως διατεταγμένας. Τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος λοιπὸν τετράεδρα εἶναι ὅμοια.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο ὅμοια πολύεδρα ἀποσυντίθενται εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τετραέδρων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

*Ας ἀποσυνθέσωμεν εἰς τρίγωνα τὰς μὴ προσκειμένας τῇ κορυφῇ Σ ἑδρας τοῦ πολυέδρου ΣΕΘΖΒΑΔΓ. Τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουσιν εἶναι αἱ βάσεις τῶν τετραέδρων, τῶν ἔχόντων κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ, καὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα θέλει ἀποτελεῖ τὸ πρῶτον πολύεδρον.



Παρομοίως, ἐὰν ἀποσυνθέσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τρίγωνα τὰς μὴ προσκειμένας τῇ κορυφῇ σ, ὁμολόγῳ τῇ Σ, ἑδρας τοῦ πολυέδρου σεθζσαδγ, καὶ ἐνώσωμεν τὸ σημεῖον σ μετὰ τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων τούτων, τὸ δεύτερον τοῦτο πολύεδρον θέλει ἀποσυντεθῇ οὕτως εἰς τετραέδρα, ἅτινα πρόκειται ν' ἀποδειχθῶσιν ὁμοειδέως ὅμοια μετὰ τὰ ἀποτελοῦντα τὸ πρῶτον πολύεδρον.

Διότι, ἐὰν συγκρίνωμεν τὰ τετραέδρα ΣΔΓΑ καὶ σδγα, βλέπομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΣΔΑ καὶ ΓΔΑ εἶναι ὁμοειδέως ὅμοια μετὰ τὰ τρίγωνα σδα καὶ γδγ, τὰ μὲν ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν ἑδρῶν ΕΔΑΣ καὶ εδασ, τὰ δὲ ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν ἑδρῶν ΓΔΑΒ καὶ γδαβ. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ αἱ στερεαὶ γωνίαι Δ καὶ δ εἶναι ἴσαι, αἱ διέδροι γωνίαι Δα καὶ δα εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν τὰ δύο τετραέδρα ΣΔΓΑ καὶ σδγα εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα μίαν διέδρον γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξύ δύο ἑδρῶν ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων (πρότ. 27).

Ἐὰν τώρα μεταβῶμεν εἰς τὰ τετραέδρα ΣΔΓΘ καὶ σδγθ, βλέπομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΣΔΓ καὶ σδγ εἶναι ὅμοια, ὡς ὁμόλογοι ἑδραι τῶν ὁμοίων τετραέδρων ΣΔΓΑ καὶ σδγα, ὅτι τὸ τρίγωνον ΘΔΓ εἶναι ὁμοιον τῷ θδγ, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων ΔΓΚΘ καὶ δγθ. Ἀπ' ἐτέρου δὲ αἱ διέδροι γωνίαι ΘΔΓΣ καὶ θδγσ, αἱ μεταξύ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν ΣΔΓ καὶ ΔΓΘ, σδγ καὶ δγθ περιεχόμεναι, εἶναι ἴσαι διότι ἐπειδὴ αἱ δύο διέδροι γωνίαι ΘΔΓΑ καὶ θδγα εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως, καὶ αἱ διέδροι γωνίαι ΣΔΓΑ καὶ σδγα εἶναι ἴσαι, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τετραέδρων ΣΔΓΑ καὶ σδγα, αἱ διέδροι γωνίαι ΘΔΓΣ (=ΘΔΓΑ—ΣΔΓΑ) καὶ θδγσ(=θδγα—σδγα) θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ὡς

διαφοραί ἴσων διέδρων γωνιῶν. Λοιπὸν τὰ τετράεδρα $\Sigma\Delta\Gamma\Theta$ καὶ $\sigma\delta\gamma\theta$ εἶναι ὅμοια, καὶ οὕτω καθεξῆς περὶ τῶν λοιπῶν. Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι δύο ὅμοια πολύεδρα ἀποσυντίθενται εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τετραέδρων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Παρατήρησις 1. Παρατηρητέον ὅτι ἡδυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὰ πολύεδρα λαμβάνοντες ὡς κοινὰς κορυφὰς τῶν ὁμοίων τετραέδρων δύο ὅποιασδήποτε ὁμολόγους κορυφὰς τῶν ὁμοίων πολυέδρων.

Παρατήρησις 2. Ἐκ τοῦ προαποδείχθέντος θεωρήματος ἔπεται ὅτι εἰς δύο ὅμοια πολύεδρα δύο ὁμολόγοι εὐθεῖαι Λ καὶ α εἶναι ἀνάλογοι δύο ὁμολόγων κόψεων B καὶ β τῶν δύο πολυέδρων.

Διότι αἱ εὐθεῖαι Λ καὶ α θέλουσιν εἶναι αἱ ὁμολόγοι κόψεις δύο ὁμοίων τετραέδρων, ἀποτελούντων μέρος τῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων, καὶ τὰ τετράεδρα ταῦτα θέλουσι περιέχει ἀναγκαίως δύο ὁμολόγους κόψεις Γ καὶ γ τῶν δύο πολυέδρων. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει

$$\Lambda : \alpha = \Gamma : \gamma.$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ εἰς τὰ ὅμοια πολύεδρα αἱ ἔδραι εἶναι ὅμοιαι, αἱ ὁμολόγοι κόψεις εἶναι ἀνάλογοι, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\Gamma : \gamma = B : \beta.$$

Λοιπὸν, ἔνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου $\Gamma : \gamma$, θέλομεν ἔχει

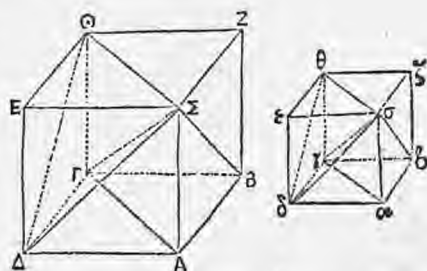
$$\Lambda : \alpha = B : \beta.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἀντιστρόφως, δύο πολύεδρα συντιθέμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τετραέδρων ὁμοίων καὶ ὁμοίως διατεταγμένων, ἔχουσι τὰς ἔδρας αὐτῶν ὅμοιαι, ἐκάστην ἐκάστη, καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν στερεὰς γωνίας ἴσας, καὶ ἐπομένως εἶναι ὅμοια.

Ἐστώσαν $\Sigma\Delta\Gamma\Theta$, $\Sigma\Delta\Delta\Gamma$ καὶ $\Sigma\Gamma\Delta\Theta$,... αἱ τὸ πρῶτον πολύεδρον ἀποτελοῦσαι τριγωνικαὶ πυραμίδες, καὶ $\sigma\delta\gamma\theta$, $\sigma\delta\delta\gamma$ καὶ $\sigma\gamma\delta\theta$,... αἱ ὅμοιαι τούτοις, αἱ τὸ δεύτερον πολύεδρον ἀποτελοῦσαι.

1^{ον}. Ἐπειδὴ τὰ τετράεδρα $\Sigma\Delta\Delta\Gamma$ καὶ $\Sigma\Gamma\Delta\Theta$ εἶναι ἀμοιβαίως ὅμοια μὲ τὰ τετράεδρα $\sigma\delta\delta\gamma$ καὶ



σβαγ, τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΓΑΒ, τὰ ἀποτελοῦντα μίαν ἑδραν τοῦ πρώτου πολυέδρου, εἶναι ἀμοιβαίως ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα αδγ καὶ γαβ, τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ δευτέρου πολυέδρου κείμενα. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΔΓΑ καὶ ΓΑΒ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, λέγω ὅτι καὶ τὰ ἀμοιβαίως ὅμοια αὐτοῖς δγα καὶ γαβ θέλουσιν ὡσαύτως κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

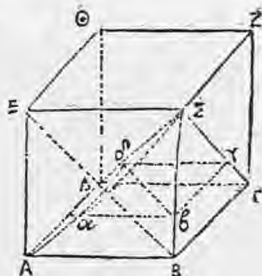
Διότι ἔνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τετραέδρων ΣΓΑΔ καὶ σγαδ, ΣΑΒΓ καὶ σαβγ, αἱ διέδροι γωνίαι ΣΓΑΔ καὶ ΣΓΑΒ εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς διέδρους γωνίας σγαδ καὶ σαβ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ΣΓΑΔ καὶ ΣΓΑΒ ἴσούται μὲ δύο ὀρθάς, ἔπεται ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων αὐταῖς σγαδ καὶ σαβ θέλει εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, ἐπομένως αἱ ἑδραι γαδ καὶ γαβ τῶν τετραέδρων σγαδ καὶ σαβ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἄρα τὰ πολύγωνα ΔΓΒΔ καὶ δγβα εἶναι ὅμοια, ὡς συντιθέμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν ἐποδείξει ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ ἑδραι, ληφθεῖσαι ἀνὰ δύο, εἶναι πολύγωνα ὅμοια. Λοιπὸν τὰ πολυέδρα, τὰ ἀποτελούμενα ἐκ τῶν ὁμοίων καὶ ὁμοίως διατεταγμένων τετραέδρων, ἔχουσι τὰς ἑδρας αὐτῶν ὁμοίας, ἐκάστην ἐκάστη.

2^η. Βλέπομεν πρὸς τούτοις ὅτι ἡ διέδρος γωνία ΣΑ, ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν ΓΣΑΔ καὶ ΓΣΑΒ, εἶναι ἴση μὲ τὴν διέδρον γωνίαν σα, ἥτις ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἄθροίσματος τῶν διέδρων γωνιῶν γσαδ καὶ γσαβ, τῶν ἀμοιβαίως ἴσων μὲ τὰς ΓΣΑΔ καὶ ΓΣΑΒ. Καὶ ἐν γένει δύο ὁμολογοὶ διέδροι γωνίαι τῶν δύο πολυέδρων εἶναι ἴσαι, ὡς οὖσαι ἄθροίσματα ὁμολόγων διέδρων γωνιῶν ὁμοίων τετραέδρων. Ἐπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι δύο ὁμολογοὶ στερεαὶ γωνίαι Δ καὶ α εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουσι τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας, ἐκάστην ἐκάστη, ὁμοίως κειμένας, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν σχηματιζόμενας διέδρους γωνίας ἴσας. Λοιπὸν δύο πολυέδρα συντιθέμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τετραέδρων ὁμοίων καὶ ὁμοίως διατεταγμένων ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν στερεὰς γωνίας ἴσας. Λοιπὸν εἶναι ὅμοια.

Σχόλιον. Ἐπὶ τοῦ προαποδειχθέντος θεωρήματος στηριζόμενοι δυνάμεθα εὐκόλως νὰ κατασκευάσωμεν πολυέδρον ὅμοιον μὲ δεδομένον.

Ἐστω π. γ. ΑΒΓΔΘΕΣΖ δεδομένον τι πολυέδρον. Ἐὰν ἀποσυνθέσωμεν αὐτὸ εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας ΣΑΒΔ, ΣΒΔΓ καὶ ΣΔΔΕ, . . .

ἔχουσας κοινὴν κορυφὴν μίαν τῶν κορυφῶν Σ τοῦ πολυέδρου, καὶ λαβόμεν ἐπὶ τῶν κόψεων $\Sigma\Lambda$, $\Sigma\beta$, $\Sigma\Gamma$ καὶ $\Sigma\Delta$,... τῶν διερχομένων διὰ τοῦ σημείου Σ , τὰ σημεία α , β , γ καὶ δ ,... οὕτως, ὥστε ὁ λόγος τῶν δύο μερῶν, εἰς ἃ ἐκάστη κόψις διαιρεῖται, νὰ ᾖ ἡ αὐτὸς δι' ὅλας τὰς κόψεις, ἥτοι $\frac{\Sigma\Lambda}{\alpha\Lambda} = \frac{\Sigma\beta}{\beta\beta} = \frac{\Sigma\gamma}{\gamma\Gamma} = \dots$, τὰ ἐκ τῆς



ἐνώσεως τῶν σημείων α , β , γ καὶ δ ,...

προκύπτοντα τετράεδρα $\Sigma\beta\delta\gamma$ καὶ $\Sigma\alpha\delta\beta$,...

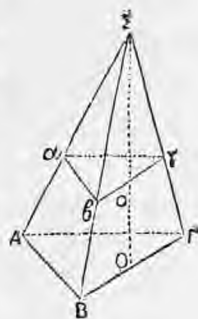
θέλουσιν εἶναι ἀμοιβαίως ὅμοια μὲ τὰ τετράεδρα $\Sigma\beta\Delta\Gamma$ καὶ $\Sigma\Lambda\Delta\beta$,... (πρότ. 26) καὶ ὁμοίως καίμενα. Τὸ ἄθροισμὰ των λοιπὸν θέλει ἀποτελέσει δευτέρον τι πολυέδρον, ὅπερ κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, θέλει εἶναι ὅμοιον τῷ πρώτῳ.

Δυνάμεθα μετὰ ταῦτα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν σχετικὴν ὡς πρὸς τὸ πρῶτον θέσιν τοῦ δευτέρου τούτου πολυέδρου χωρὶς ἢ πρὸς ἄλληλα ὁμοιότης αὐτῶν νὰ μεταβληθῇ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 30. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο ὅμοια τετράεδρα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ κύβει δύο ὁμοίων λόγων κόψεων.

Ἐπειδὴ τὰ τετράεδρα εἶναι ὅμοια, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὸ μικρότερον ἐντὸς τοῦ μεγαλύτερου οὕτως, ὥστε αἱ ἵσαι στερεαὶ γωνίαι Σ καὶ σ νὰ ταυτισθῶσι, καὶ τότε αἱ βάσεις αὐτῶν $\Lambda\beta\Gamma$ καὶ $\alpha\beta\gamma$ θέλουσιν εἶναι παράλληλοι· διότι αἱ κόψεις $\Sigma\Lambda$, $\Sigma\beta$ καὶ $\Sigma\Gamma$ διαιροῦνται εἰς τὰ σημεία α , β καὶ γ εἰς δύο μέρη, ἔχοντα πρὸς ἄλληλα σταθεράν τινα λόγον.



Ἐστὼ πρὸς τούτοις $\Sigma\mathcal{O}$ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως $\Lambda\beta\Gamma$.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $\Lambda\beta\Gamma$ καὶ $\alpha\beta\gamma$ εἶναι ὅμοια, θέλομεν ἔχει

$$\Lambda\beta\Gamma : \alpha\beta\gamma = \overline{AB}^2 : \overline{\alpha\beta}^2 \quad (1)$$

Ἄλλ'

$$AB : \alpha\beta = \Sigma\Lambda : \Sigma\alpha,$$

καὶ

$$\Sigma\Lambda : \Sigma\alpha = \Sigma\mathcal{O} : \Sigma\alpha,$$

Ἄρα, ἔνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου $\Sigma\Lambda : \Sigma\alpha$,

$$\Sigma\mathcal{O} : \Sigma\alpha = AB : \alpha\beta, \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) καὶ διαιροῦντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου λόγου διὰ 3, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν

$$AB\Gamma \times \frac{\Sigma O}{3} : \alpha\beta\gamma \times \frac{\Sigma \rho}{3} = \overline{AB}^3 : \overline{\alpha\beta}^3.$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $AB\Gamma \times \frac{\Sigma O}{3}$ μετρεῖ τὸν ὄγκον τοῦ τετραέδρου

$\Sigma AB\Gamma$, καὶ τὸ $\alpha\beta\gamma \times \frac{\Sigma \rho}{3}$ τὸν τοῦ ὁμοίου αὐτῷ $\Sigma \alpha\beta\gamma$. Λοιπὸν τὰ ὅμοια τετράεδρα $\Sigma AB\Gamma$ καὶ $\Sigma \alpha\beta\gamma$ εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς οἱ κύβοι δύο ὁμολόγων κόψεων AB καὶ $\alpha\beta$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 31. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὅμοια πολύεδρα Π καὶ π εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς οἱ κύβοι δύο ὁμολόγων κόψεων.

Γνωρίζομεν ὅτι δύο ὅμοια πολύεδρα ἀποσυντίθενται εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὁμοίων τετραέδρων.

Ἐστῶσαν λοιπὸν $T, T', T'', \dots$ τὰ τὸ πολύεδρον Π ἀποτελοῦντα τετράεδρα, καὶ $\tau, \tau', \tau'', \dots$ τὰ τὸ ὅμοιον αὐτῷ π σχηματίζοντα.

Ἐστῶσαν πρὸς τούτοις $A, A', A'', \dots$ αἱ κόψεις τῶν τετραέδρων $T, T', T'', \dots$, καὶ $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ αἱ ὁμολογοὶ αὐτῶν εἰς τὰ τετράεδρα $\tau, \tau', \tau'', \dots$. Κατὰ τὰ προαποδειχθέντα θέλομεν ἔχει τὰς ἀναλογίας

$$T : \tau = A^3 : \alpha^3, \quad (1)$$

$$T' : \tau' = A'^3 : \alpha'^3, \quad (2)$$

$$T'' : \tau'' = A''^3 : \alpha''^3, \quad (3)$$

$$\dots\dots\dots, \quad ()$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ ὁμολογοὶ τῶν ὁμοίων πολυέδρων εὐθεταὶ εἶναι ἀνάλογοι, ἔχομεν τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$A : \alpha = A' : \alpha' = A'' : \alpha'' = \dots$$

Ἐξ ἧς ποριζόμεθα κατὰ γνωστὸν ἀριθμητικὸν θεώρημα τὴν ἐξῆς

$$A^3 : \alpha^3 = A'^3 : \alpha'^3 = A''^3 : \alpha''^3 = \dots$$

Οἱ δεῦτεροι λοιπὸν λόγοι τῶν ἀναλογιῶν (1), (2), (3), ... εἶναι ἴσοι,

Ἄρα καὶ οἱ πρῶτοι θέλουσιν εἶναι ἴσοι, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἐξ ἧς
σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$T : \tau = T' : \tau' = T'' : \tau'' = \dots$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν ἀναλογίαν

$$T + T' + T'' + \dots : \tau + \tau' + \tau'' + \dots = T : \tau = A^3 : \alpha^3.$$

Ἀλλὰ $T + T' + T'' + \dots =$ πολυέδρον Π , καὶ $\tau + \tau' + \tau'' + \dots =$
πολυέδρον π .

Ἄρα

$$\Pi : \pi = A^3 : \alpha^3.$$

Λοιπὸν δύο ὅμοια πολυέδρα εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς οἱ κύβοι δύο ὁμο-
λόγων κόψεων A καὶ α .

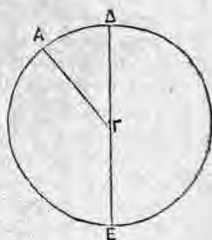
ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Σφαῖρα ὀνομάζεται τὸ στερεόν, τὸ περατούμενον ὑπὸ κυρτῆς τινος ἐπιφανείας, ἧς ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἰσάκεις ἀπὸ τινος ἐσωτερικοῦ σημείου, καλουμένου κέντρου.

Δύναται τις νὰ φαντασθῇ ὅτι ἡ σφαῖρα παράζεται ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἡμικυκλίου ΔΑΕ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ΔΕ. Διότι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς παραγομένης ἐπιφανείας ἐκ περιστροφικῆς ταύτης κινήσεως τῆς ἡμιπεριφέρειας ΔΑΕ ἀπέχουσιν ἰσάκεις ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ.



Ὁ ἔχων διάμετρον τὴν ΔΕ κύκλος καλεῖται μέγιστος.

2. Ἀκτὺς τῆς σφαίρας λέγεται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἀγομένη εὐθεῖα. Διάμετρος δὲ ἡ ἄξων τῆς σφαίρας λέγεται ἡ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη καὶ ἐκατέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς περατούμενη εὐθεῖα.

Κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς σφαίρας ὅλαι αἱ ἀκτῖνες αὐτῆς εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ διάμετροι ἴσαι καὶ διπλάσιαι τῶν ἀκτίνων.

3. Ἐπίπεδόν τι λέγεται ἐφαπτόμενον σφαίρας τινός, ὅταν ἔν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἔχῃ.

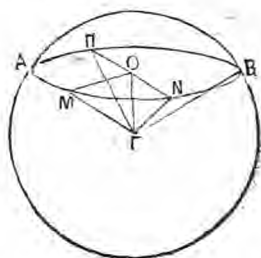
4. Δύο σφαῖραι λέγονται ἐφαπτόμεναι, ὅταν ἔν μόνον κοινὸν σημεῖον αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ἔχωσι.

Τὸ κοινὸν τοῦτο σημεῖον καλεῖται σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πᾶσα τομὴ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς γενομένη εἶναι κύκλος.

Ἐστω Γ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ ΛMB ἡ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου γενομένη τομὴ. Ἐάν ἐκ τοῦ σημείου Γ καταβιβάσωμεν τὴν ΓO κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΛMB , καὶ ὄξωμεν καὶ τὰς εὐθείας ΓM , ΓN καὶ ΓB εἰς διαφόρα σημεῖα τῆς περατούσης τὴν τομὴν καμπύλης ΛMB , αἱ εὐθεῖαι αὐταί, ὡς ἀκτῖνες τῆς σφαίρας, θέλουσιν εἶναι ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΓO ἴσαι πλάγιοι. Θέλουσι λοιπὸν ἀπέχει ἰσάκεις τοῦ ποδὸς O τῆς κάθετου ΓO (πρότ. 6, Ε'). Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν OM , ON καὶ OB εἶναι ἴσαι. Πᾶν λοιπὸν σημεῖον M , N καὶ B , τῆς καμπύλης ΛMB ἀπέχει ἰσάκεις τοῦ σημείου O . Λοιπὸν ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι κύκλος ἔχων κέντρον τὸν πόδα O τῆς κάθετου ΓO , τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.



Πόρισμα 1. Ἐάν τὸ τὴν τομὴν παράγων ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἡ ἀκτίς τῆς παραγομένης κυκλικῆς τομῆς θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν τῆς σφαίρας. Ἡ τομὴ λοιπὸν θέλει εἶναι μέγιστος κύκλος (ὁρ. 1). Λοιπὸν ὅλοι οἱ μέγιστοι κύκλοι εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους.

Πόρισμα 2. Δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνονται πάντοτε εἰς δύο ἴσα μέρη· διότι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ, ἐπειδὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν, εἶναι διάμετρος, καὶ πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Πόρισμα 3. Πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν καὶ τὴν ἐπιφανείαν αὐτῆς εἰς δύο ἴσα μέρη. Διότι ἐάν, ἀφοῦ πρῶτον χωρίσωμεν τὰ δύο μέρη, ἐπιθέσωμεν αὐτὰ οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωσι τὴν αὐτὴν κοινὴν βάσιν καὶ τὴν κυρτότητα αὐτῶν ἐστραμμέναν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, αἱ ἐπιφανεῖαι αὐτῶν θέλουσι ταύτισθῃ, διότι ἄλλως ἦθελον ὑπάρχει ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν σημεῖα ἀνισάκεις ἀπέχοντα τοῦ κέντρου, ὅπερ ἀδύνατον.

Πόρισμα 4. Ἡ τὸ κέντρον μικροῦ τινος κύκλου καὶ τὸ τῆς σφαίρας περιέχοντα εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μικροῦ τούτου κύκλου.

Πόρισμα 5. Ἐκ τῶν μικρῶν κύκλων αἱ μᾶλλον ἀπέχοντες τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εἶναι μικρότεροι. Διότι ἡ πλευρὰ OH τῆς ὀρθῆς γωνίας

πρὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΟΠ, οὗτινος ἡ ὑποτείνουσα ΓΠ εἶναι σταθερά, ἐλαττωταὶ ἀύξανόμενης τῆς ἑτέρας ΓΟ, καὶ ἀντιστρόφως.

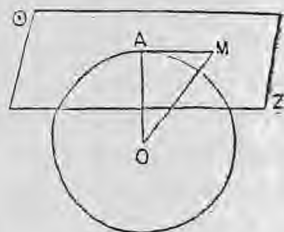
Πόρισμα 6. Διὰ δύο ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τινὸς δεδομένων σημείων διέρχεται πάντοτε τόξον μεγίστου κύκλου καὶ ἐνὸς μόνου. Διότι, ἐὰν διὰ τῶν δύο δεδομένων σημείων καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέλθῃ ἐπίπεδον, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ ἐνόνον τὰ δύο ταῦτα σημεῖα τόξον θέλει εἶναι τόξον μεγίστου κύκλου. Ἀλλὰ διὰ τριῶν σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων ἐν μόνον ἐπίπεδον διέρχεται. Ἄρα ἐνὸς μόνου μεγίστου κύκλου τόξον διὰ τῶν δύο δεδομένων σημείων διέρχεται. Ἐξαιρεῖται ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν τὰ δύο δοθέντα σημεῖα εἶναι τὰ ἄκρα διαμέτρου τινός· διότι τότε τὰ δύο ταῦτα σημεῖα καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἤθελον κεῖσθαι ἐπ' εὐθείας, καὶ διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἄπειρα ἐπίπεδα διέρχονται.

Πόρισμα 7. Τρία σημεῖα, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τινὸς κείμενα, προσδιορίζουσι τὴν θέσιν κύκλου τινὸς τῆς σφαίρας ταύτης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πάν ἐπίπεδον, κάθετον εἰς τὸ ἄκρον ἀκτίνος τινος τῆς σφαίρας, εἶναι ἐφαπτόμενον εἰς ταύτην.

Ἐστω $\Theta\Lambda Z$ ἐπίπεδόν τι κάθετον εἰς τὸ ἄκρον Λ τῆς ἀκτίνος $Ο\Lambda$. Λέγω ὅτι μόνον τὸ σημεῖον Λ ἔχει κοινὸν μετὰ τῆς σφαίρας, ἢ, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὅτι ἐφάπτεται αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Λ .



Διότι, ἐὰν ἐνώσωμεν ἐν ὁποιοδήποτε σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ πῶν σημείων O καὶ Λ διὰ τῶν εὐθειῶν OM καὶ AM , ἡ γωνία OAM τοῦ προκύπτοντος τριγώνου MOA θέλει εἶναι ὀρθή (πρότ. 3, Ε'), ἐπομένως $OM > OA$. Τὸ σημεῖον λοιπὸν M , ληρθὲν κατ' ἀρέσκειαν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Theta\Lambda Z$, κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας. Ἄρα ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον Λ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἔχει κοινὸν μετὰ τῆς σφαίρας. Λοιπὸν ἐφάπτεται ταύτης εἰς τὸ σημεῖον Λ .

Ἀντιστρόφως, πᾶν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον $\Theta\Lambda M$ εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος, τῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἀγομένης.

Διότι, ἐὰν ἡ $Ο\Lambda$ δὲν ᾔναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Theta\Lambda Z$, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου O ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καταβιβαζομένη κάθετος θέλει

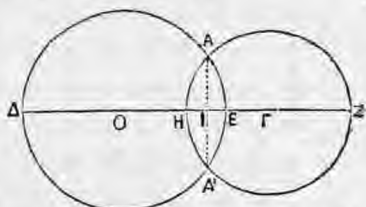
εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας $ΟΔ$, ἐπομένως ὁ πούς τῆς καθέτου ταύτης θέλει κείσθαι ἐντὸς τῆς σφαίρας. Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν $ΘΑΖ$, διὰ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ταύτης διερχόμενον, τέμνει ἀναγκαίως τὴν σφαῖραν, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Πόρισμα. Ἐξ ἑνὸς σημείου, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τινὸς κειμένου, ἔν μόνον ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἄγεται (πρότ. 5, E').

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ ἀμοibaία δύο σφαιρῶν τομὴ εἶναι κύκλος, οὗτινος τὸ κέντρον κείται ἐπὶ τῆς ἐνορούσης τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν εὐθείας, τὸ δ' ἐπίπεδον αὐτοῦ εἶναι κάθετον ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας.

Ἐστῶσαν O καὶ Γ τὰ κέντρα τῶν δύο τεμνομένων σφαιρῶν, καὶ διὰ τῆς εὐθείας $ΟΓ$ ἃς φαντασθώμεν ἐπίπεδόν τι. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θέλει τμήσει τὰς δύο σφαῖρας κατὰ δύο μεγίστους κύκλους $\Lambda\Delta\Lambda'$, $\Lambda\Ζ\Lambda'$ (ὁρ. 1), ὧν τὰ σημεῖα Λ καὶ Λ' τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς θέλουσιν εἶναι συμμετρικά ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν $ΟΓ$ (πρότ. 11, B').



Τούτου τεθέντος, ἂν περιστραφῶσι τὰ δύο ἡμικύκλια $\Delta\Lambda E$, $\Lambda\Ζ H$ περὶ τὴν $ΟΓ$, τὰ παραγόμενα ἐκ τῆς περιστροφῆς ταύτης στερεὰ θέλουσιν εἶναι αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος σφαῖραι, ἡ δὲ ὑπὸ τοῦ σημείου Λ παραγομένη γραμμὴ θέλει εἶναι ἡ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς. Ἀλλὰ διαρκούσης τῆς περιστροφῆς ἡ εὐθεῖα $ΑΙ$ δὲν μεταβάλλει μέγεθος, καὶ εἶναι πάντοτε κάθετος ἐπὶ τῆς $ΟΓ$. Λοιπὸν ἡ κοινὴ τῶν δύο σφαιρῶν τομὴ εἶναι κύκλος, ἔχων κέντρον τὸ σημεῖον I , ἀκτῖνα τὴν $ΑΙ$, καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς $ΟΓ$ (πρότ. 5, πόρ. E).

Παρατήρησις. Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι $\Delta\Lambda\Lambda'$ καὶ $\Lambda\Ζ\Lambda'$ ᾖναι ἐξωτερικοὶ ἢ ἐσωτερικοὶ, ἐφαπτόμενοι ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς, ἡ τέμνωνται, αἱ ἐκ τῆς περιστροφῆς αὐτῶν περὶ τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων $ΟΓ$ παραγόμεναι σφαῖραι θέλουσιν εἶναι ἐξωτερικαὶ ἢ ἐσωτερικαὶ, ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς, ἡ θέλουσι τέμνεσθαι.

Αἱ σχέσεις λοιπὸν, αἱ ὑπάρχουσαι μεταξύ τῶν ἀκτίνων τῶν σφαιρῶν καὶ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων αὐτῶν δι' ἐκάστην τῶν θέσεων τούτων, εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς σχέσεις τὰς ὑπάρχουσας μεταξύ τῶν

ἀκτίνων καὶ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων τῶν παραγόντων αὐτὰς κύκλων.

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. *Τρίγωνον σφαιρικόν* καλεῖται τὸ μεταξὺ τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων περιεχόμενον μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Τὰ τόξα ταῦτα, ἅτινα *πλευραὶ* τοῦ τριγώνου καλοῦνται, ὑποτίθενται πάντοτε μικρότερα ἡμιπεριφερείας.

Γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι αἱ διέδροι γωνίαι, αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν τὰ τόξα κεῖνται.

2. Τὸ σφαιρικόν τρίγωνον λέγεται ὀρθογώνιον, ἰσοσκελές, ἰσόπλευρον εἰς τὰς αὐτὰς περιστάσεις, εἰς ἃς καὶ τὸ εὐθύγραμμον.

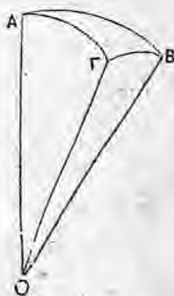
3. *Σφαιρικὸν πολύγωνον* καλεῖται τὸ μεταξὺ πολλῶν τόξων μεγίστων κύκλων περιεχόμενον μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Ἐν τοῖς ἐπομένοις δὲν θέλει γίνεαι λόγος εἰμὴ μόνον περὶ τῶν κυρτῶν σφαιρικῶν πολυγώνων. *Κυρτὸν* δὲ σφαιρικόν πολύγωνον ὀνομάζεται τὸ κείμενον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος μιᾶς ὁποιασδήποτε πλευρᾶς αὐτοῦ, προεκβαλλομένης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΘΕΩΡΗΜΑ

Μία ὁποιαδήποτε πλευρὰ σφαιρικοῦ τινος τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Ἐστω O τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Ἐὰν ἀξώμεν τὰς ἀκτίνας OA , OB καὶ OG , τὰ ἐπίπεδα AOB , $AO\Gamma$ καὶ GOB τῶν εὐθειῶν AO καὶ OB , AO καὶ OG , OB καὶ OG θέλουσι σχηματίσει εἰς τὸ σημεῖον O στερεάν τινα γωνίαν, ἥς αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι AOB , $AO\Gamma$ καὶ $BO\Gamma$ θέλουσιν ἔχει μέτρον τὰς πλευρὰς AB , $A\Gamma$ καὶ $B\Gamma$ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι ἐκάστη τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν σχηματιζουσῶν στερεάν τινα τριέδρον γωνίαν, εἶναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων (πρότ. 37. Ε'). Ἀρα μία ὁποιαδήποτε πλευρὰ σφαιρικοῦ τινος τριγώνου εἶναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ ἀθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερον περιφερείας μεγίστου κύκλου.

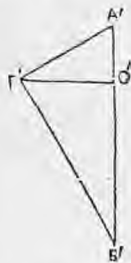
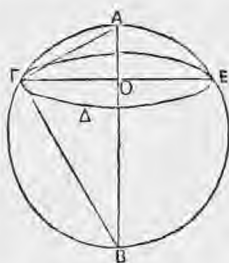
ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τόξα κύκλων μετὰ τῆς αὐτῆς εὐκουλίας, μεθ' ἧς καὶ ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς ἐπιφανείας. Πρὸς τοῦτο μεταχειρίζομεθα διαβήτην τινὰ, σφαιρικὸν καλούμενον, ὡς ἔχοντα τὰ σκέλη αὐτοῦ κυρτὰ εἰς τρόπον ὥστε τὰ ἄκρα αὐτοῦ νὰ δύνανται νὰ τεθῶσι συγχρόνως ἐπὶ δύο ὁποιοῦνδήποτε σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Εἶναι φανερόν ὅτι, ἐὰν θέσωμεν τὸ ἓν τῶν ἄκρων τοῦ διαβήτου τούτου ἐπὶ τοῦ σημείου Π καὶ τὸ ἕτερον ἐπὶ τοῦ σημείου Θ, καὶ στρέψωμεν αὐτὸν περὶ τὸ σημεῖον Π, τὸ ἄκρον αὐτοῦ Θ θέλει διαγράφει τὴν περιφέρειαν ΘΝΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ εἰρεθῇ δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς ἡ ἀκτίς δεδομένης σφαίρας.

*Εκ τινος σημείου Α τῆς σφαίρας, ὡς πάλου, καὶ μὲ ἀκτίνα κατ'ἀρέσκειαν ΑΓ γράφομεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς δεδομένης σφαίρας περιφέρειαν κύκλου ΓΔΕ, λαμβάνομεν ἀκολούθως ἐπὶ τῆς περιφέρειας ταύτης τρία κατ'ἀρέσκειαν



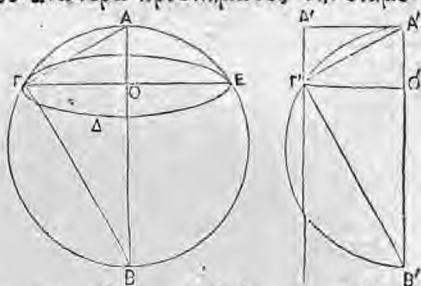
σημεῖα Γ, Δ καὶ Ε, ὧν μετροῦμεν διὰ τοῦ διαβήτου τὰς εὐθυγράμμους ἀποστάσεις ΓΔ, ΓΕ καὶ ΔΕ, καὶ κατασκευάζομεν ἐπὶ τινος ἐπιπέδου τρίγωνον, ἔχον τὰς τρεῖς ταύτας ἀποστάσεις ὡς πλευράς. Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο κύκλου θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ κύκλου ΓΔΕ τῆς δεδομένης σφαίρας.

Τούτου τεθέντος, ἂς φαντασθῶμεν μέγιστον κύκλον ΑΓΒΕ διερχόμενον διὰ τῆς διαμέτρου ΑΒ τῆς σφαίρας, καὶ τὰς εὐθείας ΓΑ, ΓΒ καὶ ΓΟ. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΑΟ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΓΑ καὶ τὴν πλευράν ΓΟ. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τινος ἐπιπέδου τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον Γ'Α'Ο' ἴσον μὲ τὸ ΑΓΟ. Πρὸς τοῦτοίς, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΑ, ἐὰν ἀξωμεν τὴν Γ'Β' κάθετον ἐπὶ τῆς Α'Γ', ἡ εὐθεῖα Α'Β' θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ καὶ θέλει παριστᾶ τὴν ζητούμενην διάμετρον τῆς δεδομένης σφαίρας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ γραφῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δεδομένης σφαίρας περιφέρεια κύκλου δεδομένης ἀκτίνος.

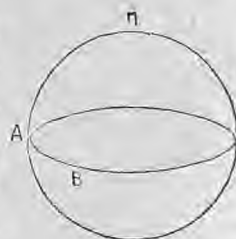
Εὐρίσκομεν ἐν πρώτοις διὰ τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος τὴν διάμετρον $A'B'$ τῆς δεδομένης σφαίρας, ἐπὶ τῆς $A'B'$ γράφομεν τὴν ἡμιπερίφειραν $A'I'B'$, καὶ ἄγομεν εἰς τὸ σημεῖον A' τὴν κάθετον $A'D'$, ἐφ' ἧς λαμβάνομεν $A'D' =$ μὲ τὴν δεδομένην ἀκτῖνα. Ἐκ τοῦ σημείου A' ἄγομεν τὴν $A'I'$ παράλληλον τῇ $A'B'$, καὶ ἐνόνομεν $A'I'$ καὶ $I'B'$. Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς δεδομένης σφαίρας γραφομένη ἐκ τινος σημείου A , ὡς πόλου, καὶ μὲ ἀκτῖνα $A'I'$ ἢ $I'B'$ περιφέρεια θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη (*).



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ γραφῇ ἐπὶ δεδομένης σφαίρας μέγιστος κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δεδομένων σημείων A καὶ B .

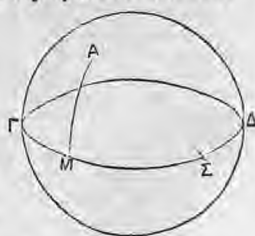
Ἐκ τῶν σημείων A καὶ B , ὡς πόλων, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσῃ μὲ τὴν χορδὴν τοῦ τεταρτημορίου γράφομεν δύο τόξα μεγίστων κύκλων τεμνόμενα εἰς τι σημεῖον Π . Τὸ σημεῖον Π θέλει εἶναι ὁ πόλος τοῦ διὰ τῶν σημείων A καὶ B διερχομένου μεγίστου κύκλου (πρότ. 7, πόρ.), ἐπομένως ἡ ἐκ τοῦ σημείου Π , ὡς πόλου, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γραφομένη περιφέρεια θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ διέλθῃ ἐκ τινος σημείου A τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τινὸς μέγιστος κύκλος, κάθετος ἐπὶ ἐτέρῳ δεδομένῳ μεγίστῳ κύκλῳ.

Ἐκ τοῦ σημείου A , ὡς πόλου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσῃ μὲ τὴν χορδὴν τοῦ τεταρτημορίου γράφομεν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου, ἥτις θέλει τμήσῃ εἰς τι σημεῖον Σ τὸν δεδομένον μέγιστον κύκλον $\Gamma\Delta$. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Σ , ὡς πόλου, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γράψωμεν τὸν μέγιστον κύκλον AM , οὗτος θέλει



(*) Διὰ τῆς λέξεως ἀκτίνος ἐννοοῦμεν ἐνταῦθα τὴν τῶν δύο ἄκρων τοῦ σφαιρικοῦ διαδύτου ἀπόστασιν, καὶ τοῦτο συντομίας ἕνεκα.

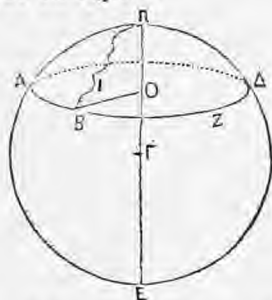
εἶναι προφανῶς κάθετος ἐπὶ τοῦ δεδομένου $\Delta\text{ΜΓ}$. Διότι, τοῦ σημείου Σ ὅτος πόλος τοῦ μεγίστου κύκλου ΑΜ , πᾶς μέγιστος κύκλος $\Gamma\text{Μ}\Sigma$, διερχόμενος διὰ τοῦ πόλου Σ , εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ μεγίστου κύκλου ΑΜ , καὶ ἀντιστρόφως (πρότ. 7, πόρ. 1).

Σχόλιον. Ἐν ἐπρόκειτο ν' ἀχθῇ ἐκ τινος δεδομένου σημείου Α τόξον μεγίστου κύκλου, κάθετον ἐπὶ τινος δεδομένου μικροῦ κύκλου, ἠθέλομεν πρῶτον εὑρεῖν διὰ τοῦ ὀγδόου προβλήματος τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, καὶ διὰ τοῦ ἐνάτου τὸν πόλον Π τοῦ μικροῦ τούτου κύκλου. Εἶναι φανερόν ὅτι ὁ διὰ τῶν σημείων Α καὶ Π διερχόμενος μέγιστος κύκλος θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος (πρότ. 7, πόρ. 1).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΛΗΜΜΑ 1.

Ὁ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας συντομώτερος δρόμος μεταξὺ τοῦ πόλου Π κύκλου τινὸς ΑΒΔ καὶ τῶν διαφόρων σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἶναι ὁ αὐτός δι' ὅλα αὐτοῦ τὰ σημεία.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κειμένη γραμμὴ $\Pi\text{ΙΒ}$ παριστᾷ τὸν συντομώτερον δρόμον μεταξὺ τοῦ πόλου Π καὶ τινος σημείου Β τῆς περιφερείας ΑΒΔ . Λέγω ὅτι οὗτος εἶναι ὁ αὐτός καὶ διὰ πᾶν σημεῖον Ζ τῆς αὐτῆς περιφερείας.



Διότι, ἐάν τὸ σχῆμα $\Pi\text{ΙΒΟ}$ ὑποτεθῇ ἀμετάβλητον καὶ περιστραφῇ περὶ τὴν διάμετρον $\Pi\text{Ε}$, πᾶν σημεῖον Ι τῆς γραμμῆς $\Pi\text{ΙΒ}$ θέλει κεῖσθαι, διαρκούσης τῆς περιστροφῆς, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ δὲ σημεῖον Β θέλει προφανῶς διαγράψῃ τὸν κύκλον ΑΒΖΔ . Οἰκπὸν ὁ συντομώτερος δρόμος $\Pi\text{ΙΒ}$ διὰ πᾶν σημεῖον Ζ τῆς περιφερείας ΑΒΔ εἶναι ὁ αὐτός.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΛΗΜΜΑ 2.

Ἐστωσαν ΑΒ καὶ ΑΓ δύο τόξα μεγίστων κύκλων μικρότερα ἢ μιστοπεριφερείας, καὶ ἔστω πρὸς τούτοις $\text{ΑΓ} < \text{ΑΒ}$. Λέγω ὅτι ὁ συντομώτερος δρόμος μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Γ εἶναι μικρότερος τοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β συντομωτέρου δρόμου.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἐκ τοῦ σημείου Α , ὡς πόλου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ΑΓ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Αὕτη θέλει συναπαντῆσαι τὸ τόξον

Β εἰς τι σημεῖον Ι, ὅπερ θέλει προφανῶς κείσθαι μεταξύ τῶν σημείων Α καὶ Β. Ἐάν δ' ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΜΒ ἀριστὰ τὴν μεταξύ τῶν σημείων Α καὶ Β συντομώτεραν ἀπόστασιν, αὕτη θέλει συναπαντήσῃ τὴν πεμφέρειαν ΓΙ εἰς τι σημεῖον Μ, καὶ τὸ μέρος αὐτῆς ΑΜ θέλει παριστᾶ τὸν συντομώτερον μεταξύ τῶν σημείων Α καὶ Μ δρόμον. Διότι, ἐάν ὑπῆρχε βραχυτέρα ἰς γραμμὴ μεταξύ τῶν σημείων Α καὶ Μ, ἡ γραμμὴ ΑΜΒ δὲν ἤθελεν εἶναι ὁ μεταξύ τῶν σημείων Α καὶ Β συντομώτερος δρόμος, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως, φ' ἐτέρου δέ, κατὰ τὸ προηγούμενον λήμμα ὁ μεταξύ τῶν σημείων Α καὶ Μ, Α καὶ Γ συντομώτερος δρόμος εἶναι ὁ αὐτός. Λοιπὸν ὁ μεταξύ τῶν σημείων Α καὶ Γ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας συντομώτερος δρόμος εἶναι βραχύτερος τοῦ μεταξύ τῶν σημείων Α καὶ Β.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ὁ μεταξύ δύο σημείων Α καὶ Β, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας κειμένων, συντομώτερος δρόμος εἶναι τὸ μικρότερον ἡμιπεριφερείας τόξον μεγίστου κύκλου ΑΒ, τὸ ἐνδόν τὰ δύο ταῦτα σημεῖα.

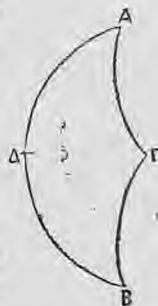
Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μεταξύ τῶν σημείων Α καὶ Β συντομώτερος δρόμος διέρχεται διὰ τινος σημείου Γ ἐκτὸς τοῦ τόξου ΑΒ κειμένου. Ἐάν ἄξωμεν τὰ τῶν μεγίστων κύκλων τόξα ΑΓ καὶ ΒΓ, καὶ λάβωμεν ΑΔ = ΑΓ, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 4 προτάσει

$$AB < AG + GB$$

Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος ΑΔ καὶ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ΑΓ, ὅπερ ὑπέθη ἴσον μὲ τὸ τόξον ΑΔ, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς

$$BA < GB$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ λήμμα 1 οἱ μεταξύ τῶν σημείων Α καὶ Δ, Α καὶ Γ συντομώτεροι δρόμοι εἶναι οἱ αὐτοί. Λοιπὸν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Γ ἀνήκει εἰς τὴν μεταξύ τῶν σημείων Α καὶ Β συντομωτέραν γραμμὴν, ἔπρεπεν ἡ μεταξύ τῶν σημείων Β καὶ Γ συντομωτέρα γραμμὴ νὰ ᾔῃαι βραχυτέρα τῆς μεταξύ τῶν σημείων Β καὶ Δ, ὅπερ κατὰ τὸ λήμμα 2 εἶναι ἄτοπον, διότι τὸ τόξον ΒΓ εἶναι μεγαλειότερον τοῦ τόξου ΒΔ. Λοιπὸν οὐδὲν σημεῖον τῆς μεταξύ τῶν σημείων Α καὶ Β βραχυτέρας

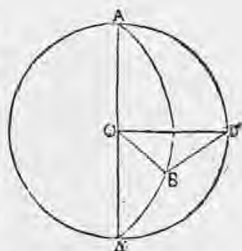


ἀποστάσεως δύναται νὰ κῆται ἐκτὸς τοῦ τόξου AB . Ἄρα τὸ τόξον AB εἶναι ἡ βραχυτέρα τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα A καὶ B ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἔχουσων γραμμῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ γωνία BAG , ἡ ὑπὸ δύο τόξων μεγίστων κύκλων σχηματιζομένη, ἔχει διὰ μέτρον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχόμενον τόξον BF τοῦ ἐκ τοῦ σημείου A , ὡς πόλου, γραγομένου μεγίστου κύκλου.

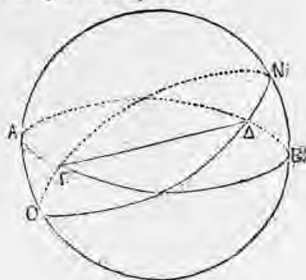
Διότι, ἐὰν ἄζωμεν τὰς ἀκτῖνας OB καὶ OF , τὰ τόξα AG καὶ AB θέλουσιν εἶναι τεταρτημόρια, ἐπομένως αἱ γωνίαι AOB καὶ AOF θέλουσιν εἶναι ὀρθαί. Λοιπὸν BOF εἶναι ἡ μετρούσα τὴν διεδρον γωνίαν $BOAG$ ἐπίπεδος γωνία. Ἄλλ' ἡ κεντρικὴ γωνία BOF ἔχει διὰ μέτρον τὸ τόξον BF . Λοιπὸν τὸ τόξον τοῦτο μετρεῖ τὴν διεδρον γωνίαν $BOAG$, ἥτις εἶναι κατὰ τὸν ὅρισμόν 1 ἡ γωνία BAG τῶν δύο τόξων AB καὶ AG τῶν μεγίστων κύκλων.



Πόρισμα. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι σφαιρικοῦ τινος τριγώνου εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τόξα τῶν μεγίστων κύκλων, τὰ ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτῶν, ὡς πόλων, γραφόμενα καὶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῶν περιεχόμενα. Εὐκόλως ἄρα δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας γωνίαν ἴσην μὲ δεδομένην.

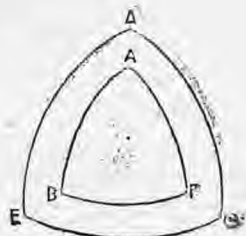
Σχόλιον. Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι AGO καὶ BGN εἶναι ἴσαι· διότι αἱ κατὰ κορυφὴν διεδροι γωνίαι τῶν ἐπιπέδων ABG καὶ ONG εἶναι ἴσαι.

Βλέπομεν ὡσαύτως ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ONB καὶ BGN εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

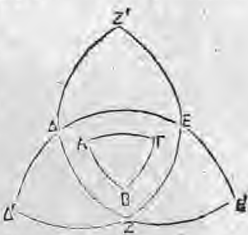


ΟΡΙΣΜΟΙ

Δεδομένου σφαιρικοῦ τινος τριγώνου ABG , ἐὰν ἐκ τῶν σημείων A , B καὶ G , ὡς πόλων, γράψωμεν τὰ τῶν μεγίστων κύκλων τόξα EA , BA καὶ AE , τὸ ἐκ τῶν τόξων τούτων σχηματιζόμενον σφαιρικὸν τρίγωνον $ΔΕΘ$ καλεῖται **περικλινὲς τρίγωνον** τοῦ ABG .



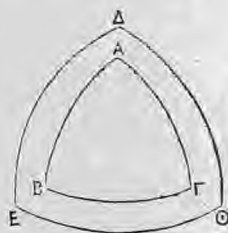
Ἡ ὁμόλογος κορυφή τοῦ σημείου Λ προσδιορίζεται ἐκ τῆς συναντήσεως τῶν ἐκ τῶν σημείων B καὶ Γ , ὡς πόλων, γραφομένων τόξων. Τὰ τόξα ταῦτα, εἶναι ἀληθές, τέμνονται εἰς δύο σημεία Δ καὶ E' , ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ λαμβάνηται εἰμὴ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς Δ , τὸ κεῖμενον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς $B\Gamma$, πρὸς ὃ καὶ τὸ σημεῖον A . Ὅμοιως τρόπως προσδιορίζονται καὶ αἱ λοιπαὶ κορυφαὶ E καὶ Z .



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν τὸ τρίγωνον $\Delta E\Theta$ ᾖ τὸ πολικὸν τοῦ τριγώνου $\Delta B\Gamma$, ἀντιστρόφως τὸ τρίγωνον $\Delta B\Gamma$ θέλει εἶναι τὸ πολικὸν τοῦ $\Delta E\Theta$.

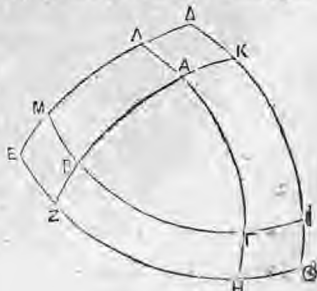
Διότι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Λ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου $E\Theta$, ἡ ἀπόστασις ΛE εἶναι τεταρτημόριον. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Γ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΔE , ἡ ἀπόστασις ΓE εἶναι τεταρτημόριον. Ἀρα αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου E ἀπ' ἑκατέρου τῶν σημείων Λ καὶ Γ εἶναι τεταρτημόρια. Λοιπὸν τὸ σημεῖον E εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου $\Delta\Gamma$, καὶ πρὸς τούτοις κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς πλευρᾶς $\Lambda\Gamma$, πρὸς ὃ καὶ ἡ κορυφή B . Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ σημεῖον Δ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου $B\Gamma$, καὶ Θ ὁ τοῦ τόξου ΔB , καὶ κείνται ὡς πρὸς τὰ τόξα $B\Gamma$ καὶ ΔB ὅπως καὶ τὸ σημεῖον E ὡς πρὸς τὸ τόξον $\Lambda\Gamma$. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον $\Delta B\Gamma$ εἶναι τὸ πολικὸν τοῦ τριγώνου $\Delta E\Theta$.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΘΕΩΡΗΜΑ

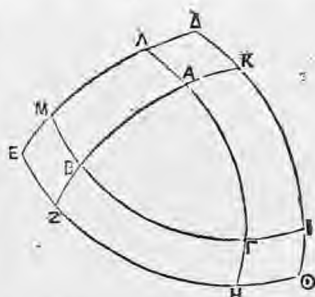
Δεδομένων δύο πολικῶν τριγώνων $\Delta B\Gamma$ καὶ $\Delta E\Theta$, ἐκάστη γωνία τοῦ ἑνὸς τούτων ἔχει διὰ μέτρον τὸ μέτρον τόξου, ἀφοῦ ἀγραιβῇ ἀπὸ ἡμιπεριφέρειαν ἢ ἀπέναντι τῆς γωνίας ταύτης πλευρὰ τοῦ ἑτέρου τριγώνου.

Ἄς προσεκόλωμεν, ἐὰν ᾖ ἀνάγκη, τὰς πλευρὰς ΔB καὶ $\Delta\Gamma$ μέχρις οὗ συναπαντήσωσι τὴν $E\Theta$ εἰς τὰ σημεία Z καὶ H . Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Λ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ZH , ἡ γωνία Λ ἔχει διὰ μέτρον τὸ τόξον ZH (πρότ. 15). Ἀλ-



λὰ τὰ τόξα EH καὶ $Z\Theta$ εἶναι τεταρτημόρια· διότι τὸ σημεῖον E εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου AH , καὶ τὸ σημεῖον

Θ ὁ πόλος τοῦ τόξου KZ . * Ἀρα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $EH + \Theta Z$ εἶναι ἴσον μὲ μίαν ἡμιπεριφέρειαν. Ἀλλ' $EH + \Theta Z = EH + H\Theta + HZ = E\Theta + ZH$. * Ἀρα $ZH = EH + \Theta Z - E\Theta = \frac{1}{2} \text{ περιφ. } - E\Theta$,



ἤτοι τὸ τόξον ZH , τὸ τὴν γωνίαν A μετροῦν, εἶναι ἴσον μὲ μίαν ἡμιπεριφέρειαν, ἡλαττωμένην κατὰ τὴν πλευρὰν $E\Theta$. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλωμεν ἀποδείξει ὅτι ἡ γωνία B ἔχει μέτρον $\frac{1}{2} \text{ περιφ. } - \Delta\Theta$ καὶ ἡ γωνία Γ $\frac{1}{2} \text{ περιφ. } - \Delta E$.

Ἐφαρμόζοντες κατὰ γράμμα τὴν προηγηθεῖσαν ἀπόδειξιν καὶ ἐπὶ τῶν γωνιῶν Δ, E καὶ Θ τοῦ τριγώνου $\Delta E\Theta$, θέλωμεν εὑρεῖν ὅτι αἱ γωνίαι αὗται ἔχουσιν ἀμοιβαίως διὰ μέτρα τὰ τόξα $\frac{1}{2} \text{ περιφ. } - B\Gamma, \frac{1}{2} \text{ περιφ. } - \Delta\Gamma, \frac{1}{2} \text{ περιφ. } - AB$. Εὐκόλως δὲ ἠδύνατό τις νὰ προΐδῃ ὅτι ἡ ἰδιότης αὕτη ἔπρεπε νὰ ᾖ ἀντίστροφος, διότι τὸ τρίγωνον $\Delta B\Gamma$ γράφεται διὰ τοῦ τριγώνου $\Delta E\Theta$, ὅπως τὸ τρίγωνον $\Delta E\Theta$ διὰ τοῦ πρώτου.

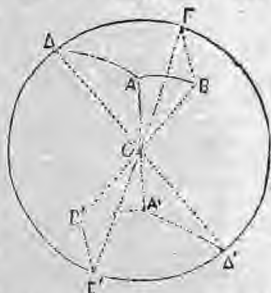
Σχόλιον. Ἐὰν ἐνώσωμεν τὸ κέντρον O τῆς σφαίρας μὲ τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων $\Delta B\Gamma$ καὶ $\Delta E\Theta$, θέλωμεν σχηματίσει δύο τριέδρους γωνίας $O\Delta B\Gamma$ καὶ $O\Delta E\Theta$, ὧν αἱ μὲν ἐπίπεδοι γωνίαι $\Delta O B, \Delta O \Gamma, \dots \Delta O E$ κτλ. θέλουσιν ἔχει διὰ μέτρα τὰς πλευρὰς $AB, \Delta\Gamma, \dots \Delta E$ κτλ. τῶν τριγώνων $\Delta B\Gamma$ καὶ $\Delta E\Theta$, αἱ δὲ διέδροι γωνίαι $B O \Delta \Gamma$ καὶ $\Delta O B \Gamma, \dots \Delta O E \Theta$ κτλ. θέλουσιν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς γωνίας $A, B, \dots E$ κτλ. τῶν αὐτῶν τριγώνων.

* Ἀλλὰ, κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, ἡ γωνία A , ἢ ἡ διέδρος $B O \Delta \Gamma$, ἔχει διὰ μέτρον $\frac{1}{2} \text{ περιφ. } - E\Theta = 2^{\circ} - \text{γωνία } E O \Theta$. Λοιπὸν ἡ διέδρος γωνία $B O \Delta \Gamma$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας $E O \Theta$, τῆς ἐχούσης μέτρον τὸ τόξον $E\Theta$, καὶ οὕτω καθεξῆς περὶ τῶν λοιπῶν γωνιῶν B καὶ Γ . Λοιπὸν αἱ διέδροι γωνίαι τῆς μιᾶς τῶν τριέδρων γωνιῶν $O\Delta B\Gamma$ καὶ $O\Delta E\Theta$ εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν ἐπιπέδων

γωνιῶν τῆς ἐτέρας, καὶ ἀντιστρόφως. Λοιπὸν αἱ τριεδροὶ αὗται γωνίαι εἶναι παραπληρωματικάι.

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ἐστωσαν $\Delta\text{ΒΓΔ}$ σφαιρικόν τι πολύγωνον. Ἐν ἐνώσωμεν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας Ο μὲ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ καὶ Δ τοῦ πολυγώνου $\Delta\text{ΒΓΔ}$ διὰ τῶν ἀκτίνων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καὶ ΟΔ , προσεβάλλωμεν αὐτάς μέχρις οὗ συναπαντήσωσιν ἐκ δευτέρου τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν εἰς τὰ σημεία Α', Β', Γ' καὶ Δ' , καὶ ἄξωμεν τὰ τόξα Α'Β', Β'Γ', ΓΔ' καὶ $\Delta'\text{Α'}$, αἱ εἰς τὸ σημεῖον Ο σχηματισθεῖσαι στερεαὶ γωνίαι θέλουσιν εἶναι συμμετρικαί, ἐπομένως θέλουσιν ἔχει τὰς ἐπιπέδους καὶ τὰς διεδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας. Λοιπὸν ὡσαύτως τὰ σφαιρικά πολύγωνα $\Delta\text{ΒΓΔ}$ καὶ Α'Β'Γ'Δ' θέλουσιν ἔχει ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη ἴσα, ἥτοι $\text{ΑΒ}=\text{Α'Β'}$, $\text{ΒΓ}=\text{Β'Γ'}$, $\text{ΓΔ}=\text{Γ'Δ'}$, $\Delta\text{Α}=\Delta'\text{Α'}$, γωνία $\text{Α}=\text{Α'}$, $\text{Β}=\text{Β'}$, $\text{Γ}=\text{Γ'}$ καὶ $\Delta=\Delta'$. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ταῦτα δὲν δύνανται νὰ ἐπιτεθῶσι, διότι, ἐὰν τεθῇ ἡ πλευρὰ Γ'Δ' ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΓΔ οὕτως, ὥστε ὅλαι αἱ λοιπαὶ πλευραὶ τῶν πολυγώνων νὰ κῆνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΓΔ , τὸ σημεῖον Δ' θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Γ καὶ τὸ σημεῖον Γ' ἐπὶ τοῦ Δ , αἱ δὲ λοιπαὶ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν θέλουσι κατέχει τάξιν ἀντίστροφον.

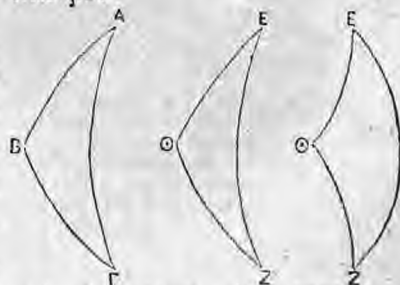


Τὰ σφαιρικά ταῦτα πολύγωνα, ὅποιαδήποτε καὶ ἂν ᾖναι ἢ πρὸς ἄλληλα αὐτῶν θέσις, καλοῦνται *συμμετρικά*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο τρίγωνα, ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη, ὅταν ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν.

Ἐστω ἡ πλευρὰ $\text{ΑΒ}=\text{ΕΘ}$, ἡ πλευρὰ $\text{ΑΓ}=\text{ΕΖ}$, καὶ ἡ γωνία $\text{ΒΑΓ}=\text{ΘΕΖ}$. Τὸ τρίγωνον ΕΘΖ δύναται νὰ ἐπιτεθῇ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ , ὅπως ἐπιτίθενται δύο εὐθύγραμμα τρίγωνα, ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Λοιπὸν ὅλα τὰ μέρη τοῦ τριγώνου ΕΘΖ εἶναι



ἴσα μὲ τὰ τοῦ τριγώνου $ABΓ$, δηλ. ἐκτὸς τῶν τριῶν μερῶν, ἄτινα ὑπετέθησαν ἴσα, θέλομεν ἔχει προσέτι τὴν πλευρὰν $BΓ=OZ$, τὴν γωνίαν $ABΓ=EOZ$ καὶ τὴν γωνίαν $ΛΓE=EZΘ$.

Ἄν αἱ ἴσαι πλευραὶ τῶν δύο τριγώνων ἦσαν ἀντιστρόφως διατεταγμέναι ὡς πρὸς τὰς ἴσας γωνίας, ἠθέλομεν ἐπιθέσει τὸ τρίγωνον EOZ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ τριγώνου $ABΓ$, καὶ ἠθέλομεν φθάσει, κατὰ τὰ ἐν τῷ προηγουμένῳ ὀρίσμῳ λεχθέντα, εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19. ΘΕΩΡΗΜΑ

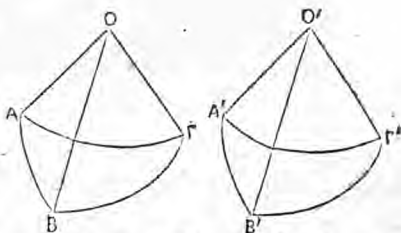
Δύο τρίγωνα, ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη, ὅταν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας ἴσας, ἐκατέραν ἐκατέρᾳ.

Διότι ἐν τῶν τριγώνων τούτων δύναται νὰ ἐπιτεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐτέρου ἢ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ αὐτοῦ, ὅπως εἰς τὴν αὐτὴν περίπτωσιν ἐπιτίθενται δύο εὐθύγραμμα τρίγωνα. (Ὅρα πρότ. 7, Α').

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα ἦναι ἰσοπλευρά πρὸς ἁ.λ.η.λ., θέλουσιν εἶναι καὶ ἰσογώνια, αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι θέλουσι κεῖσθαι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν.

Διότι, ἐὰν ἐνώσωμεν τὰ κέντρα O καὶ O' τῶν δύο σφαιρῶν μὲ τὰς κορυφὰς τῶν δύο τριγώνων, θέλομεν σχηματίσει δύο τριέδρους γωνίας, ὧν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι, αἵτινες ἔχουσιν ὡς μέτρον τὰς πλευρὰς τῶν τριγώνων, θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ἐκάστη ἐκάστη. Ἄλλ' ἀπεδείχθη ὅτι, ὅταν δύο τριέδροι γωνίαι ἔχωσι τὰς ἐπίπεδους αὐτῶν γωνίας ἴσας, ἐκάστην ἐκάστη, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων ἐπίπεδων γωνιῶν διέδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι (πρότ. 23, Ε'). Λοιπὸν αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι τῶν ἰσοπλεύρων σφαιρικῶν τριγώνων εἶναι ἴσαι.

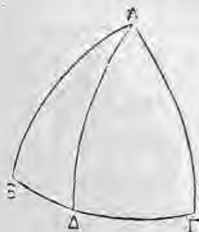


ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἄν ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσαι.

*Εστω ἡ πλευρὰ $AB=AG$. Λέγω ὅτι ἡ γωνία $B=G$.

Διότι, ἐάν ἐνώσωμεν τὴν κορυφὴν A μετὰ τὸ μέσον Δ τῆς βάσεως BG διὰ τοῦ τόξου AD , τὰ δύο προκύπτοντα σφαιρικά τριγώνω $AB\Delta$ καὶ $AG\Delta$ θέλουσιν ἔχει τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, ἐκάστην ἐκάστη, δηλ. τὴν AD κοινὴν, τὴν $BA=AG$ ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὴν $AB=AG$ ἐξ ὑποθέσεως. Λοιπὸν κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίας ἴσας, ἥτοι τὴν $B=G$, τὴν $BAD=AG\Delta$ καὶ τὴν $ADB=ADG$.



Σχόλιον 1. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν BAD καὶ $AG\Delta$, BAD καὶ $AG\Delta$ ἔπεται ὅτι τὸ τόξον AD , τὸ ἐνὸς τὴν κορυφὴν A μετὰ τὸ μέσον Δ τῆς βάσεως BG σφαιρικοῦ τριγώνου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ABG , εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς βάσεως ταύτης καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.

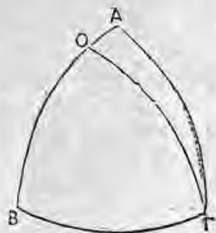
Σχόλιον 2. Ἐκ τοῦ ἀποδειχθέντος θεωρήματος ἔπεται προσέτι ὅτι δύο σφαιρικά ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ἐάν ᾖσι συμμετρικά, εἶναι καὶ ἴσα ἐξ ἐπιθέσεως, ἢ ἐπιθέσιμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἄν ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

*Εστω ἡ γωνία $B=G$. Λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ $AG=AB$.

Διότι, ἂν αἱ πλευραὶ AB καὶ AG ᾖσαν ἄνιστοι, ἔστω AB ἡ μεγαλειτέρα, καὶ ἂς λάβωμεν $BO=AG$, καὶ ἄξωμεν τὸ τόξον GO . Τὰ δύο τρίγωνα BOG καὶ BAG θέλουσιν ἔχει ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν BG κοινὴν, τὰς πλευρὰς BO, AG ἴσας ἐκ κατασκευῆς καὶ τὰς γωνίας BGO καὶ ABG ἴσας, ἐξ ὑποθέσεως. Λοιπὸν αἱ γωνίαι BGO καὶ ABG θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν BO καὶ AG . Ἀλλ' ὅ γων-

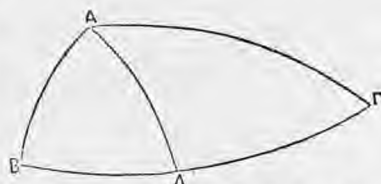


νία $\Delta B\Gamma$ ὑποτεθή ἴση τῇ $\Delta\Gamma B$. Ἄρα $\Delta B\Gamma = B\Gamma\Delta$, ὅπερ ἀδύνατον. Λοιπὸν ΔB δὲν δύναται νὰ ὑποτεθῇ μεγαλειτέρα τῆς $\Delta\Gamma$. Λοιπὸν αἱ πλευраὶ ΔB καὶ $\Delta\Gamma$, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν Γ καὶ B κείμεναι, εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν ἡ γωνία A τοῦ τριγώνου $\Delta B\Gamma$ ᾖται μεγαλειτέρα τῆς B , ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας A πλευρὰ $B\Gamma$ θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ἀπέναντι τῆς γωνίας B πλευρᾶς $\Delta\Gamma$, καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ ᾖται μεγαλειτέρα τῆς $\Delta\Gamma$, ἡ γωνία A ἀπέναντι τῆς $B\Gamma$, θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς γωνίας B , τῆς ἀπέναντι τῆς $\Delta\Gamma$.

1^η. Ἐστω ἡ γωνία $A > B$. Ἐὰν κατασκευάσωμεν τὴν γωνίαν $\Delta A\Delta = B$, θέλομεν ἔχει $\Delta\Delta = \Delta B$ (πρότ. 22). Ἀλλ' $\Delta\Delta + \Delta\Gamma > \Delta\Gamma$. Ἄρα καὶ $\Delta B + \Delta\Gamma > B\Gamma$, διότι $\Delta\Delta = \Delta B$.



2^η. Ἐστω ἡ πλευρὰ $B\Gamma > \Delta\Gamma$. Λέγω ὅτι ἡ γωνία A θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς B . Διότι, ἂν ἡ γωνία A ᾖτο ἴση μὲ τὴν B , ἔπρεπε καὶ ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ νὰ ᾖται ἴση μὲ τὴν $\Delta\Gamma$, ἂν δὲν ᾖτο μικροτέρα τῆς B , ἔπρεπε ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ νὰ ᾖται μικροτέρα τῆς $\Delta\Gamma$. Ἀλλ' ἀμφοτέρω ταῦτα τὰ ἐξαγόμενα εἶναι ἐναντία τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν ἡ γωνία A , ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, εἶναι μεγαλειτέρα τῆς B , τῆς ἀπέναντι τῆς $\Delta\Gamma$, ἥτις καθ' ὑπόθεσιν εἶναι μικροτέρα τῆς $B\Gamma$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο ἰσογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα, ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, εἶναι καὶ ἰσόπλευρα.

Ἐστώσαν A καὶ B τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος σφαιρικὰ τρίγωνα, Π δὲ καὶ K τὰ πολικὰ αὐτῶν. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων A καὶ B εἶναι ἴσαι, αἱ πλευραὶ τῶν πολικῶν αὐτῶν Π καὶ K θέλουσιν εἶναι ἴσαι (πρότ. 17). Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα Π καὶ K εἶναι ἰσόπλευρα, εἶναι καὶ ἰσογώνια (πρότ. 20). Λοιπὸν τὰ πολικὰ αὐτῶν A καὶ B θέλουσιν εἶναι ἰσόπλευρα. Λοιπὸν κτλ.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη δὲν ἐφαρμόζεται εἰς τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα, ἐν οἷς ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ἔπεται μόνον ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν. Ἀλλ' εὐκόλως ἐξηγεῖται ἡ διαφορὰ αὕτη, ἡ μεταξὺ

τῶν εὐθυγράμμων καὶ σφαιρικῶν τριγώνων ὑπάρχουσα. Εἰς τὴν παροῦσαν πρότασιν, ὡς καὶ εἰς τὰς προτάσεις 18, 19, 20, ἐν αἷς γίνεται λόγος περὶ παραβολῆς τριγώνων, ἐλέχθη ῥητῶς ὅτι τὰ τρίγωνα πῦτα κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν, καὶ ἐπειδὴ τὰ ὅμοια τόξα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀκτῖνας τῶν εἰς οὗς ἀνήκουσι κύκλων, ἔπεται ὅτι δύο σφαιρικὰ τρίγωνα, ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ἢ ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας κείμενα, δὲν δύνανται νὰ ᾖναι ὅμοια χωρὶς νὰ ᾖναι ἴσα. Οὐδόλως λοιπὸν παράδοξον, ἐὰν ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν συνεπάγῃ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν.

Ἦθελεν ἔχει ἄλλως τὸ πρᾶγμα, ἂν τὰ τρίγωνα ἔκειντο ἐπὶ ἀνίσων σφαιρῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὰ ἰσογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα ἤθελον εἶναι ὅμοια, αἱ δὲ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἤθελον εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν εἰς αὐτὰ ἀνήκουσι σφαιρῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25. ΘΕΩΡΗΜΑ

1^η. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερον ἕξ καὶ μεγαλείτερον δύο ὀρθῶν γωνιῶν.

2^η. Ἡ μικροτέρα γωνία, ἀνῆλθεισα κατὰ δύο ὀρθὰς, ἀποτελεῖ ἄθροισμα μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

1^η. Ἐστώσαν Α, Β καὶ Γ αἱ γωνίαι σφαιρικοῦ τινος τριγώνου καὶ Α', Β' καὶ Γ' αἱ πλευραὶ τοῦ πολικοῦ αὐτοῦ.

Κατὰ τὰ ἐν τῇ 17 προτάσει ἀποδειχθέντα θέλομεν ἔχει

$$Α + Β + Γ = \frac{1}{2} \text{ περιφ. } - Α' + \frac{1}{2} \text{ περιφ. } - Β' + \frac{1}{2} \text{ περιφ. } - Γ',$$

$$\text{ἢ} \quad Α + Β + Γ = \frac{3}{2} \text{ περιφ. } - (Α' + Β' + Γ').$$

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα Α' + Β' + Γ' τῶν τριῶν πλευρῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μεγαλείτερον τοῦ μηδενὸς καὶ μικρότερον περιφερείας. Ἀρα τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν Α, Β καὶ Γ εἶναι μικρότερον ἕξ ὀρθῶν (διότι ἐκάστη $\frac{1}{2}$ περιφ. = 2^ο) καὶ μεγαλείτερον δύο ὀρθῶν.

2^η. Ὡς παραστήσωμεν δι' Α, Β καὶ Γ τὰς γωνίας σφαιρικοῦ τινος τριγώνου, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἡ μικροτέρα. Κατὰ τὰ ἐν τῇ 17 προτάσει ἀποδειχθέντα αἱ πλευραὶ τοῦ πολικοῦ αὐτοῦ θέλουσιν εἶναι 180° - Α, 180° - Β, 180° - Γ.

Ἀλλὰ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 4 προτάσει ἔχομεν
180° - Α < 180° - Β + 180° - Γ.

Προσθέτοντες δὲ εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης
 $A + B + \Gamma$ καὶ ἀφαιροῦντες ἐκατέρωθεν 180° , θέλομεν ἔχει

$$B + \Gamma < 180^\circ + A.$$

Λοιπὸν ἡ μικροτέρα γωνία A , αὐξηθεῖσα κ.τ. (*).

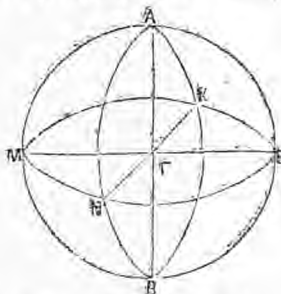
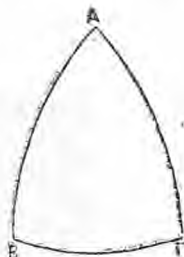
Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τινος
 τριγώνου περιέχεται μεταξὺ ἐξ καὶ δύο ὀρθῶν, ἔπεται ὅτι τὸ σφαι-
 ρικὸν τρίγωνον δύναται νὰ ἔχῃ δύο καὶ τρεῖς γωνίας ὀρθάς, δύο καὶ
 τρεῖς ἀμβλείας.

Τὸ ἔχον δύο γωνίας ὀρθὰς τρίγωνον $AB\Gamma$ καλεῖ-
 ται **δισορθογώνιον**. Κατὰ δὲ τὰ λεχθέντα ἐν τῷ
 2 πορίσματι τῆς 7 προτάσεως ἡ κορυφή A θέλει
 εἶναι ὁ πόλος τῆς βάσεως $B\Gamma$, καὶ αἱ πλευραὶ
 AB καὶ $A\Gamma$ ἴσαι μὲ τεταρτημόρια.

Ἐὰν πρὸς τούτοις ἡ γωνία A ᾖ ὀρθή, τὸ τρί-
 γωνον $AB\Gamma$ καλεῖται **τρισορθογώνιον**. Τοῦ τρισορθογωνίου λοιπὸν
 σφαιρικοῦ τριγώνου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι
 ὀρθαὶ καὶ αἱ τρεῖς αὐτοῦ πλευραὶ ἴσαι μὲ
 τεταρτημόρια.

Τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον περιέχεται
 ὁκτάκις ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας,
 τοῦτο δὲ γίνεται ὁλὸν ἐκ τοῦ παρακει-
 μένου σχήματος, ἐν ᾧ τὰ ἀτὰρ MN , AM
 καὶ AN ὑποτίθενται ἴσα μὲ τεταρτημόριον.

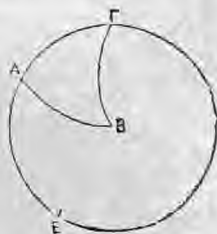
Σχόλιον 1. Μὲ τρεῖς δεδομένας γωνίας A , B καὶ Γ , ἐκπληροῦσας
 τὰς συνθήκας τοῦ ἀποδειχθέντος θεωρήματος, δυνάμεθα πάντοτε νὰ
 σχηματίσωμεν σφαιρικὸν τρίγωνον· διότι αὗται εἶναι αἱ ἀναγκαῖαι
 καὶ ἐπαρκεῖς συνθήκαι πρὸς σχηματισμὸν τριέδρου στερεῶς γωνίας,
 ἔχουσας διὰ διέδρους τὰς δεδομένας A , B καὶ Γ .



(*) Ἡ πρότασις αὕτη ἡδύνατο νὰ ἀποδειχθῇ συντομωτάτα ὡς ἑξῆς.

Αἱ γωνίαι σφαιρικοῦ τινος τριγώνου δὲν εἶναι ἄλλο τι εἰμὴ αἱ διέδροι γωνί-
 ναι τῆς τριέδρου γωνίας, τῆς ἔχουσας βάσιν τὸ σφαιρικὸν τοῦτο τρίγωνον.
 Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διέδρων γωνιῶν τριέδρου τινὸς
 στερεῶς γωνίας εἶναι μικρότερον 360° καὶ μεγαλύτερον 270° , καὶ ὅτι ἡ μικρο-
 τέρα τούτων, αὐξηθεῖσα κατὰ δύο ὀρθάς, ἀποτελεῖ ἄθροισμα μεγαλύτερον
 τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Ἄρα κ.τ.

Σχόλιον 2. Ὑποθέσαμεν ἐν τοῖς προηγουμένοις ὅτι αἱ πλευραὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἶναι μικρότεραι ἡμιπεριφερείας. Παρατηροῦμεν ἐν τούτοις ὅτι ὑπάρχουσι καὶ σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχοντά τινες τῶν πλευρῶν αὐτῶν μεγαλειτέρας ἡμιπεριφερείας, καὶ τινες τῶν γωνιῶν αὐτῶν μεγαλειτέρας δύο ὀρθῶν. Διότι, ἐάν προεκβάλωμεν τὴν πλευρὰν ΑΓ μέχρι οὗ συμπληρωθῇ ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια ΑΓΕ, τὸ μὲν μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἡμισφαίριου, ἀφοῦ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἶναι νέον τρίγωνον, ὁπερ δυνατόν ἐστι νὰ παραστήσωμεν ὡσαύτως διὰ ΑΒΓ, καὶ τὸ ὅποιον ἔχει διὰ πλευρὰς τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ καὶ ΑΕΓ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΕΓ εἶναι μεγαλειτέρα ἡμιπεριφερείας, καὶ ἡ ἀντικειμένη εἰς τὴν πλευρὰν ταύτην γωνία Β εἶναι μεγαλειτέρα δύο ὀρθῶν γωνιῶν.



Ἄλλ' εὐκόλως παρατηρεῖ τις ὅτι ὅλα τὰ μέρη τοῦ νέου τούτου τριγώνου γίνονται γνωστά, ὅταν ᾖναι γνωστά τὰ μέρη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἡ γωνία Β, παραδείγματος χάριν, τοῦ νέου τριγώνου εὐρίσκεται ἀφοῦ ἀπὸ 4 ὀρθῶν ἀφαιρεθῇ ἡ γωνία Β τοῦ πρώτου τριγώνου, ἡ πλευρὰ ΑΕΓ, ἀφοῦ ἀπὸ περιφέρειαν ἀφαιρεθῇ ἡ πλευρὰ ΑΓ τοῦ πρώτου, κ.τ.λ. Τούτου ἕνεκα ἐξήρέθησαν τοῦ ὁρισμοῦ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τὰ τρίγωνα, ὧν αἱ πλευραὶ εἶναι μεγαλειτέρας ἡμιπεριφερείας, καὶ αἱ γωνίαι μεγαλειτέρας δύο ὀρθῶν.

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Καλεῖται *ἄτρακτος* τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμιπεριφερειῶν μεγίστων κύκλων, ἔχόντων τὰ αὐτὰ ἀκρα.

2. Τὸ μέρος τοῦ ὅγκου τῆς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμιμεγίστων κύκλων, ἔχόντων τὴν αὐτὴν διάμετρον, καλεῖται *σφήκ* ἢ *ὀνυξ σφαιρικός*.

3. *Σφαιρικὴ πυραμὶς* ὀνομάζεται τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐδρῶν στερεῶ, τινος γωνίας, ἐχούσης τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Τὸ ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων χωριζόμενον σφαιρικὸν τρίγωνον καλεῖται *βάσις* τῆς πυραμίδος.

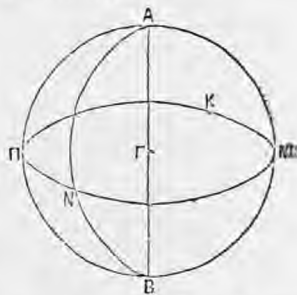
Ἐάν δύο σφαιρικὰ πολύγωνα ταυτίζωνται, καὶ αἱ ἔχουσαι βάσεις τὰ πολύγωνα ταῦτα πυραμίδες θέλουσι ταυτίζεσθαι.

4. Αἱ συμμετρικὰς ἔχουσαι βάσεις σφαιρικαὶ πυραμίδες ὀνομάζονται συμμετρικαί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ ἄτρακτος $AMBNA$ εἶναι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὡς ἡ γωνία αὐτοῦ MAN πρὸς 4 ὀρθὰς, ἢ ὡς τὸ τόξον MN , τὸ μετροῦν τὴν γωνίαν ταύτην, πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἐν πρώταις ὅτι τὸ τόξον MN καὶ ἡ περιφέρεια $MNPK$ ἔχουσι κοινόν τι μέτρον, καὶ ὅτι τὸ κοινόν τοῦτο μέτρον περιέχεται 48κις παραδείγματος χάριν, εἰς τὴν περιφέρειαν $MNPK$ καὶ 25κις εἰς τὸ τόξον MN , ἢ ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ τόξου MN πρὸς τὴν περιφέρειαν εἶναι ὡς 25 πρὸς 48.



Ἐὰν διὰ τῆς διαμέτρου AB καὶ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἀξῶμεν ἐπίπεδα, τὰ ἐπίπεδα ταῦτα θέλουσι διαιρέσει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς 48 ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἀτράκτους, καὶ 25 τούτων θέλουσι περιέχεσθαι ἐν τῇ ἀτράκτῳ $AMBNA$. Ὁ λόγος λοιπὸν τῆς ἀτράκτου $AMBNA$ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας θέλει εἶναι ὡς 25 πρὸς 48. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως

$$\text{τόξ. } MN : \text{περιφ.} = 25 : 48.$$

Ἄρα, ἔνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου 25 : 48, θέλομεν ἔχει

$$\text{ἄτρ. } AMBNA : \text{ἐπιφ. σφαίρ.} = \text{τόξ. } MN : \text{περιφ.}$$

ἢ, ὅπερ ταῦτό,

$$\text{ἄτρ. } AMBNA : \text{ἐπιφ. σφαίρ.} = \text{γῶν. } NAM : 4^{\circ}.$$

Ἄν τὸ τόξον MN καὶ ἡ περιφέρεια $MNPK$ δὲν εἶχον κοινόν τι μέτρον, εὐκόλως ἠδυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν διὰ τῶν γνωστῶν συλλογισμῶν, ὅτι ἡ ἄτρακτος εἶναι πάντοτε πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὡς τὸ τόξον MN πρὸς τὴν περιφέρειαν, ἢ ὡς ἡ γωνία NAM πρὸς 4 ὀρθὰς.

Μέτρον τῆς ἀτράκτου. Ἐστώσαν Θ καὶ Θ' αἱ γωνίαι δύο ὁποίων-δήποτε ἀτράκτων A καὶ A' . Κατὰ τὰ προαποδειχθέντα θέλομεν ἔχει

$$A : \text{ἐπιφ. σφαίρ.} = \Theta : 4^{\circ}. \quad (1)$$

$$A' : \text{ἐπιφ. σφαίρ.} = \Theta' : 4^{\circ}. \quad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τοὺς ἐπομένους αὐτῶν ἴσους, θέλομεν ἔχει

$$A : A' = \Theta : \Theta', \quad (3)$$

τουτέστιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν δύο όποιαιδύποτε ἄτρακτοι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ γωνίαι αὐτῶν. Ἐπομένως ἡ ἄτρακτος A θέλει περιέχει τοσάκις τὴν ἄτρακτον A', ληφθεῖσαν ὡς μονάδα, ὡσάκις ἡ γωνία Θ περιέχει τὴν Θ', ἥτοι ὁ λόγος $\frac{\Theta}{\Theta'}$ θέλει παριστᾷ τὸ μέτρον τῆς ἀτράκτου A, τῆς A' ληφθείσης ὡς μονάδος.

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γωνία Θ' τῆς ὡς μονάδος ληφθείσης ἀτράκτου A' εἶναι ὀρθή, ἡ ἀναλογία (3) μετατρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς

$$A : A' = \Theta : 1^{\circ},$$

ἢ, ὅπερ τοῦτό,

$$\frac{A}{A'} = \frac{\Theta}{1^{\circ}}. \quad (4)$$

Ὁ λόγος λοιπὸν ἀτράκτου τινὸς πρὸς τὴν ὀρθὴν ἀτρακτον ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς γωνίας αὐτοῦ πρὸς τὴν ὀρθήν, καὶ τοῦτο ἐννοοῦσιν, ὅταν συντομίας χάριν λέγωσιν ὅτι ἡ ἀτρακτος ἔχει διὰ μέτρον τὴν γωνίαν αὐτῆς.

Ἐάν ἐλαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον T, ὅπερ εἶναι τὸ ἡμισυ τῆς ὀρθῆς ἀτράκτου A', ἡθέλομεν ἔχει, ἀντείσάγοντες εἰς τὴν ἰσότητά (4) 2T ἀντὶ τοῦ A',

$$\frac{A}{2T} = \frac{\Theta}{1^{\circ}}, \quad \text{ἢ, ὅπερ αὐτό, } \frac{A}{T} = \frac{2\Theta}{1^{\circ}}.$$

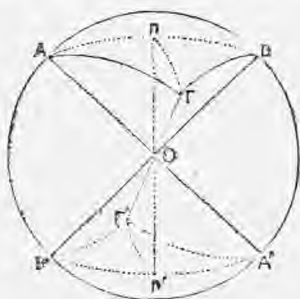
Λοιπὸν ὁ λόγος ἀτράκτου τινὸς πρὸς τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τοῦ διπλασίου τῆς γωνίας αὐτῆς πρὸς τὴν ὀρθήν, ἢ, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ ἀτρακτος ἔχει διὰ μέτρον τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας αὐτῆς.

Σχόλιον. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ εἶναι πρὸς τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας ὡς ἡ γωνία αὐτοῦ πρὸς τέσσαρας ὀρθάς, καὶ ὅτι ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ ἔχει διὰ μέτρον τὴν γωνίαν αὐτοῦ, ἢ τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας αὐτοῦ, ὅταν ὁ ὀρθὸς ὄνυξ ἢ ἡ τρισορθογώνιος πυραμὶς, ἥτις εἶναι τὸ ἡμισυ τοῦ ὀρθοῦ ὄνυχος, λαμβάνηται ὡς μονὰς τῶν ὄγκων καὶ ἡ ὀρθὴ γωνία ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27. ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο σφαιρικά συμμετρικά τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ισόδυναμα.

*Εστω $AB\Gamma$ σφαιρικόν τι τρίγωνον, και $A'B'\Gamma'$ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ. *Εστω πρὸς τούτοις Π ὁ πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου, τοῦ διερχομένου διὰ τῶν τριῶν σημείων A, B , και Γ (*). Τὰ τόξα τῶν μεγίστων κύκλων ΠA , ΠB και $\Pi \Gamma$, θέλουσιν εἶναι ἴσα (πρότ. 7). *Ὡς ἄξωμεν τελευταῖον τὴν διάμετρον $\Pi O \Pi'$ και τὰ τῶν μεγίστων κύκλων τόξα $\Pi'A'$, $\Pi'B'$ και $\Pi'\Gamma'$.



*Επειδὴ αἱ γωνίαι $\Pi O A$ και $\Pi O A'$ εἰναι ἴσαι, ὡς κατὰ κορυφὴν, τὸ τόξον ΠA εἶναι ἴσον τῷ $\Pi'A'$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $\Pi B = \Pi'B'$, και $\Pi \Gamma = \Pi'\Gamma'$. *Ἀλλὰ $\Pi A = \Pi B = \Pi \Gamma$. *Ἀρα και $\Pi'A' = \Pi'B' = \Pi'\Gamma'$.

Τούτου θεθέντος, τὰ δύο τρίγωνα $\Delta \Pi \Gamma$ και $\Delta'\Pi'\Gamma'$ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἐκάστην ἐκάστη, και εἶναι πρὸς τούτοις ἰσοσκελῆ. Λοιπὸν εἶναι ἐπιθέσιμα. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ τρίγωνα $\Gamma \Pi B$ και $\Gamma'\Pi'B'$, ὡς και τὰ $\Delta \Pi B$ και $\Delta'\Pi'B'$, εἶναι ἐπιθέσιμα. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον $\Delta B \Gamma$, ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων $\Delta \Pi \Gamma$, $\Gamma \Pi B$ και $\Delta \Pi B$, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τρίγωνον $\Delta'B'\Gamma'$, ὅπερ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἴσων ἀμοιβαίως αὐτοῖς $\Delta'\Pi'\Gamma'$, $B'\Pi'\Gamma'$ και $\Delta'\Pi'B'$.

Παρατήρησις 1. *Ἄν ὁ πόλος Π ἔκειτο ἐκτὸς τοῦ τριγώνου $\Delta B \Gamma$, τότε τὸ τρίγωνον $\Delta B \Gamma$ ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ ἐνὸς τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ἀπὸ τοῦ ἁθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. *Ἀλλ' ἐπειδὴ τοῦτ' αὐτὸ ἤθελε συμβῆναι και διὰ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ $\Delta'B'\Gamma'$, τὸ συμπέρασμα ἤθελεν εἶναι τὸ αὐτό.

Παρατήρησις 2. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι και δύο

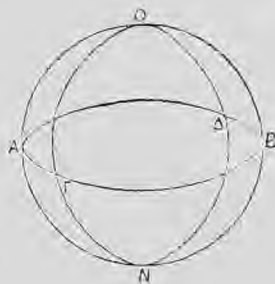
(*) *Ὁ διὰ τῶν τριῶν σημείων A, B και Γ διερχόμενος κύκλος, ἢ ὁ περιγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον $\Delta B \Gamma$, δὲν δύναται νὰ ᾖναι εἰμὴ μικρὸς τις τῆς σφαίρας κύκλος. Διότι, ἂν ᾖτο μέγιστος κύκλος, αἱ τρεῖς πλευραὶ ΔB , $B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ τοῦ τριγώνου $\Delta B \Gamma$ ἤθελον καθεστῆναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, και τὸ τρίγωνον $\Delta B \Gamma$ ἤθελε τότε ἀποτελεῖσθαι ἐκ μιᾶς μόνον πλευρᾶς.

σφαιρικαὶ πυραμίδες, βάσεις ἔχουσαι συμμετρικάς, εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι AOB καὶ $ΓΟΔ$ τέμνωνται κατ'ἀγέ-
κκιαν ἐν τῷ ἡμισφαίριῳ $ΟΑΓΒΔ$, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κατὰ κο-
ρυφὴν τριγώνων $ΑΟΓ$ καὶ $ΒΟΔ$ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἄτρακτον,
ἣν ἔχουσιν γωνίαν τὴν $ΒΟΔ$.

Διότι, ἐὰν προεκβάλωμεν τὰ τόξα OB
καὶ OD μέχρις οὗ συναπαντηθῶσιν ἐκ νέου
ἐν τῷ σημείῳ N , τὸ τόξον OBN θέλει εἶ-
ναι ἡμιπερίφεια, ὥς καὶ τὸ AOB . Ἄρα
 $AOB = OBN$. Ἀφαιροῦντες δὲ ἐκατέρωθεν
 OB , θέλωμεν ἔχει $NB = AO$. Ὡταύτως, ἐ-
πειδὴ τὰ τόξα $ΓΟΔ$ καὶ $ΟΔΝ$ εἶναι ἴσα ὡς
ἡμιπερίφεια, αἱ διαφοραὶ $ΓΟΔ - OD$ καὶ



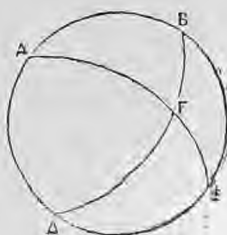
$ΟΔΝ - OD$, ἥτοι τὰ τόξα $ΓΟ$ καὶ $ΔΝ$ θέλουσιν εἶναι ἴσα. Δι'ὅμοιον
ἐστὶν ἄρα λόγον καὶ $ΒΔ = ΔΓ$. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα $ΑΟΓ$ καὶ $ΒΔΝ$,
ἔχουσι τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευράς ἴσας, ἐκάστην ἐκάστη. Ἄλλ' ἐπειδὴ
καὶ εὐθεῖαι $ΓΔ$, AB καὶ ON εἶναι διάμετροι, τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος τρί-
γωνων $ΑΟΓ$ καὶ $ΒΔΝ$ εἶναι συμμετρικά (πρότ. 17 ὅρισμ.). Ἄρα εἶναι
καὶ ἰσοδύναμα. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν κατὰ κορυφὴν τριγώνων
 $ΑΟΓ$ καὶ $ΔOB$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων $ΟΔB$
καὶ $NΔB$, τοῦτέστι μὲ τὴν ἄτρακτον, τὴν ἔχουσαν γωνίαν τὴν $ΔOB$.

Σχόλιον. Εἶναι ὡσαύτως φανερόν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο σφαι-
ρικῶν πυραμίδων, τῶν ἔχουσιν βάσεις τὰ τρίγωνα $ΑΟΓ$ καὶ $ΒΟΔ$, εἶ-
ναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν σφαιρικὸν ὄγκον, τὸν ἔχοντα γωνίαν τὴν $ΒΟΔ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τριγώνου ἔχει διὰ μέτρον τὴν
γωνίαν, τὴν παριστῶσαν τὴν μεταξὺ τοῦ ἄθροίσματος τῶν τριῶν
αὐτοῦ γωνιῶν καὶ δύο ὀρθῶν διαφοράν.

Ἐστω $ABΓ$ τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος σφαιρικὸν
τρίγωνον. Ἄς συμπληρώσωμεν τὸν μέγιστον
κύκλον AB , καὶ προεκβάλωμεν τὰ τόξα $BΓ$
καὶ $ΔΓ$ μέχρις οὗ συναπαντήσῃσι τὸν μέγι-
στον τοῦτον κύκλον. Θέλωμεν ἔχει προφανῶς
τὰς ἰσότητας

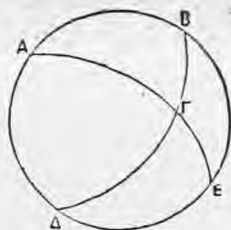


$$ABΓ + BΓE = \text{ἀτράκτῳ } A$$

$\Delta ΒΓ + \Delta ΓΑ = \acute{\alpha}\tau\rho\acute{\alpha}\kappa\tau\omega Β,$
 καί, κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, τὴν
 ἐξῆς,

$$\Delta ΒΓ + \Delta ΓΕ = \acute{\alpha}\tau\rho\acute{\alpha}\kappa\tau\omega Γ.$$

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη, καὶ παρα-
 τηροῦντες ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξ τριγῶνων
 τοῦ πρώτου μέλους ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμισφαί-
 ριον πλέον δις τὸ τρίγωνον $\Delta ΒΓ$, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα



$$2\Delta ΒΓ + \frac{1}{2} \text{σφαῖριον} = \acute{\alpha}\tau\rho. Α + \acute{\alpha}\tau\rho. Β + \acute{\alpha}\tau\rho. Γ.$$

Ἀφαιροῦντες ἑκατέρωθεν $\frac{1}{2}$ σφαῖριον καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ
 μέλη αὐτῆς διὰ 2, θέλομεν ἔχει

$$\Delta ΒΓ = \frac{\acute{\alpha}\tau\rho. Α + \acute{\alpha}\tau\rho. Β + \acute{\alpha}\tau\rho. Γ - \frac{1}{2} \text{σφαῖριον}}{2} \quad (1)$$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος
 (1) διὰ τῆς ἐπιφανείας T τοῦ τρισσορθωνίου τριγώνου, θέλομεν ἔχει

$$\frac{\Delta ΒΓ}{T} = \frac{\acute{\alpha}\tau\rho. Α}{2T} + \frac{\acute{\alpha}\tau\rho. Β}{2T} + \frac{\acute{\alpha}\tau\rho. Γ - \frac{1}{2} \text{σφαῖριον}}{2T}$$

Ἀλλὰ κατὰ τὰ ἐν τῇ 26 προτάσει περὶ μέτρου τῶν ἀτράκτων λεχ-
 θέντα,

$$\frac{\acute{\alpha}\tau\rho. Α}{2T} = \frac{Α}{1^{\circ\rho}}, \quad \frac{\acute{\alpha}\tau\rho. Β}{2T} = \frac{Β}{1^{\circ\rho}}, \quad \frac{\acute{\alpha}\tau\rho. Γ}{2T} = \frac{Γ}{1^{\circ\rho}};$$

$$\frac{\frac{1}{2} \text{σφαῖριον}}{2T} = 2.$$

καὶ

$$\therefore \Delta ΒΓ = \frac{Α + Β + Γ}{1^{\circ\rho}} - 2 = \frac{Α + Β + Γ - 2^{\circ\rho}}{1^{\circ\rho}}$$

Ὁ λόγος λοιπὸν σφαιρικοῦ τινος τριγώνου πρὸς τὸ τρισσορθώνιον
 τρίγωνον ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς ὑπεροχῆς ἀπὸ δύο ὀρθῶς τοῦ ἄ-
 θροίσματος τῶν γωνιῶν αὐτοῦ πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Λοιπὸν πᾶν
 σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχει διὰ μέτρον τὴν ἀπὸ δύο ὀρθῶς ὑπεροχὴν
 τοῦ ἄθροίσματος τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Σχόλιον. Ἐάν αἱ γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ᾗναι δεδομέ-
ναι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μοιρῶν τῶν μετρούντων αὐτὰς τόξων, πρὸς
εὗρεσιν τοῦ μέτρου αὐτοῦ ἀφαιροῦμεν 180° ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν
μοιρῶν τῶν τόξων, καὶ διαίροῦμεν τὴν διαφορὰν διὰ 90° . Τὸ πηλί-
κον τῆς διαιρέσεως ταύτης θέλει παριστᾶ τὸ μέτρον τοῦ σφαιρικοῦ
τριγώνου.

Ἐφαρμογή. Ὡς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἡ γωνία $A=70^\circ 10'$, ἡ
 $B=60^\circ 20'$, καὶ ἡ $\Gamma=79^\circ 30'$, καὶ ὥς παρστήσωμεν δι' E τὴν
ἐπιφάνειαν τοῦ δεδομένου σφαιρικοῦ τριγώνου. Θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ
ἀνωτέρω ἀποδειχθέντα

$$\frac{E}{T} = \frac{A+B+\Gamma-2^\circ}{1^\circ} = \frac{70^\circ 10' + 60^\circ 20' + 79^\circ 30' - 180^\circ}{90^\circ} = \frac{4}{3}$$

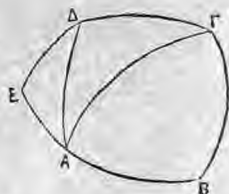
τουτέστιν ἡ ζητούμενη ἐπιφάνεια E εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τρισορθογώ-
νιου τριγώνου T .

Σχόλιον 2. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι σφαιρική τις
τριγωνική πυραμὶς ἔχει διὰ μέτρον τὴν ἀπὸ δύο ὀρθῶς ὑπεροχὴν τοῦ
ἄθροίσματος τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως αὐτῆς, τῆς τρισορθογωνίου πυ-
ραμίδος λαμβανομένης ὡς μονάδος τῶν ὀγκων καὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας
ὡς μονάδος τῶν γωνιῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 30. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τινοῦ πολυγώνου ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἄ-
θροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, μείον τοσάκις δύο ὀρθάς, ὅσας πλευράς
ἔχει τὸ πολύγωνον μείον δύο.

Διότι, ἐάν ἐνώσωμεν τὴν αὐτὴν κορυφὴν A με-
τὰς ἀπέναντι κορυφῶν Δ καὶ Γ διὰ τῶν διαγώ-
νιων $A\Gamma$ καὶ $A\Delta$, τὸ πολύγωνον $\Delta B \Gamma \Delta E$ θέλει
διαιερεθῆ οὕτως εἰς τόσα σφαιρικά τρίγωνα,
ὅσας πλευράς ἔχει μείον δύο. Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια
ἐκάστου τριγώνου ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἄθροι-
σμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ μείον δύο ὀρθάς, εἶναι δὲ φανερόν ὅτι τὸ ἄ-
θροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα
τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. Λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου ἔχει
διὰ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ μείον τοσάκις δύο ὀρθάς,
ὅσας πλευράς ἔχει τὸ πολύγωνον μείον δύο.



Σχόλιον. Ἐστω σ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τινος πολυγώνου καὶ ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου, τῆς ὀρθῆς γωνίας ὑποτεθείσης ἴσης μὲ τὴν μονάδα, θέλει ἔχει διὰ μέτρον

$$\sigma - 2(\nu - 2), \quad \text{ἢ} \quad \sigma - 2\nu + 4,$$

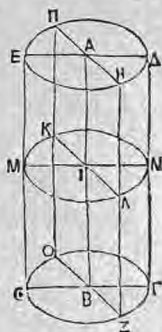
τουτέστι θέλει περιέχει τοσάκις τὸ τρισσορθογώνιον τρίγωνον, ὅσάκις ἡ παράστασις $\sigma - 2\nu + 4$ περιέχει τὴν μονάδα,

ΒΙΒΛΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΣΤΡΟΓΓΥΛΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. *Κυλινδρος* καλεῖται τὸ παραγόμενον στερεὸν ἐκ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου τινὸς $\Delta\text{ΒΓΔ}$ περὶ τινὰ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ $\Delta\text{Β}$, τῆς πλευρᾶς $\Delta\text{Β}$ μενούσης ἀμεταβλήτου τὴν θέσιν καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς περιστροφῆς. Ἐν τῇ περιστροφικῇ ταύτῃ κινήσει αἱ ἴσαι πλευραὶ $\Delta\text{Α}$ καὶ ΒΓ , οὔσαι πάντοτε κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ , παράγουσιν ἴσα κυκλικά ἐπίπεδα $\Delta\text{ΠΗ}$ καὶ ΓΟΖ , ἃ τινὰ βάσεις τοῦ κυλίνδρου καλοῦνται. Ἡ πλευρὰ ΓΔ καλεῖται *γεννήτρια* καὶ παράγει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου.



Ἡ ἀκίνητος εὐθεῖα ΑΒ καλεῖται *ἄξων* ἢ *ὑψος* τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶσα κυλινδρική τομὴ ΚΜΑ , ὑπὸ καθέτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδου γενομένη, εἶναι κύκλος ἴσος μὲ ἑκατέραν τῶν βάσεων. Διότι ἐνῶ τὸ ὀρθογώνιον στρέφεται πρὸς τὴν ΑΒ , ἡ εὐθεῖα ΙΝ , κάθετος οὔσα ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ἴση μὲ τὴν ΒΓ , παράγει κυκλικὸν ἐπίπεδον ἴσον μὲ τὴν βάση, τὸ δὲ κυκλικὸν τοῦτο ἐπίπεδον δὲν εἶναι ἄλλο τι εἰμὴ ἡ καθέτως ἐπὶ τοῦ ἄξονος εἰς τὸ σημεῖον Ι γενομένη τομὴ.

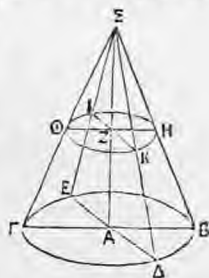
Πᾶσα κυλινδρική τομὴ ΟΖΗΠ , διὰ τοῦ ἄξονος ΑΒ διερχομένης, εἶναι ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ γεννήτορος ΑΒΓΔ .

2. *Κῶνος* ὀνομάζεται τὸ παραγόμενον στερεὸν ἐκ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου $\Sigma\text{ΔΒ}$ περὶ τινὰ τῶν πλευρῶν $\Sigma\text{Δ}$ τῆς ὀρθῆς αὐτοῦ γωνίας Δ .

Ἐν τῇ περιστροφικῇ ταύτῃ κινήσει ἡ μὲν πλευρὰ AB παράγει κυκλικὸν ἐπίπεδον $BEΓΔ$, ὕπερ βάσις τοῦ κώνου καλεῖται, ἡ δ' ὑποτείνουσα $ΣΒ$ παράγει τὴν παράπλευρον ἢ κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου.

Τὸ σημεῖον $Σ$ καλεῖται κορυφὴ τοῦ κώνου, ἡ εὐθεῖα $ΣΑ$ ἄξων ἢ ὕψος τοῦ κώνου, καὶ ἡ ὑποτείνουσα $ΣΒ$ πλευρὰ ἢ ἀπόστημα τοῦ κώνου.

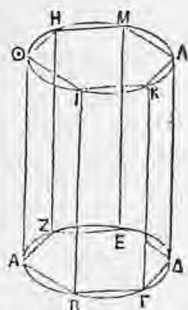
Πᾶσα κωνικὴ τομὴ, ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος γενομένη, εἶναι κύκλος, καὶ πᾶσα κωνικὴ τομὴ $ΣΙΒ$ διὰ τοῦ ἄξονος διερχομένη εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον διπλάσιον τοῦ γεννήτορος $ΣΑΒ$.



3. Ἐάν ἀπὸ τοῦ κώνου $ΣΓΔΒ$ ἀφαιρεθῇ ὁ προκύπτων κῶνος $ΣΘΚΗ$ διὰ τινος παραλλήλου τῇ βάσει $ΒΓΔΕ$ τομῆς, τὸ μένον στερεὸν $ΓΒΗΘ$ καλεῖται κοίλοδς κῶνος ἢ κορμὸς κώνου.

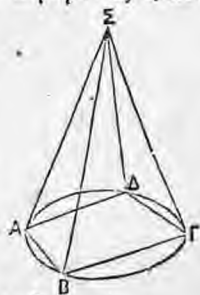
Ὁ τοῦ κώνου κορμὸς $ΓΒΗΘ$ παράγεται ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τραπεζίου $ΑΒΗΖ$ περὶ τὴν πλευρὰν $ΑΖ$, τὴν κάθετον ἐπὶ τῶν δύο παραλλήλων αὐτοῦ βάσεων $ΑΒ$ καὶ $ΖΗ$. Ἡ ἀκίνητος εὐθεῖα $ΑΖ$ καλεῖται ἄξων ἢ ὕψος τοῦ κορμοῦ, οἱ κύκλοι $ΒΔΓ$ καὶ $ΗΘΚ$ βάσεις τοῦ κορμοῦ καὶ ἡ $ΒΗ$ πλευρὰ τοῦ κορμοῦ.

4. Ἐάν ἐπὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν βᾶσιν κυλίνδρου τινὸς πολυγώνου $ΑΒΓΔΕΖ$ κατασκευάσωμεν ὁρθὸν πρίσμα $ΑΒΓΔΕΖΗΜΑΚΙΘ$ ἰσοῦψές μὲ τὸν κύλινδρον, τὸ πρίσμα τοῦτο λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον, ὁ δὲ κύλινδρος περιγεγραμμένος εἰς τὸ πρίσμα.



Ἐάν δὲ ἐπὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν βᾶσιν κώνου τινὸς πολυγώνου $ΑΒΓΔ$ κατασκευάσωμεν πυραμίδα $ΣΑΒΓΔ$, ἔχουσαν κορυφὴν τὴν τοῦ κώνου κορυφὴν $Σ$, ἡ πυραμὶς αὕτη καλεῖται ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κῶνον, ὁ δὲ κῶνος περιγεγραμμένος εἰς τὴν πυραμίδα.

Εἶναι φανερόν ὅτι αἱ κόψεις $ΑΘ$, $ΒΙ$, $ΓΚ$, κτλ. τοῦ πρίσματος, οὔσαι κάθετοι ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως, περιέχονται ἐν τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. Τὸ πρίσμα λοιπὸν καὶ ὁ κύλινδρος ἄπτονται ἀλλήλων κατὰ τὰς κόψεις $ΑΘ$, $ΒΙ$, $ΓΚ$, κτλ.



Εἶναι ὡσαύτως φανερόν ὅτι αἱ κόψεις ΣΑ, ΣΒ, κτλ. τῆς πυρραμίδος ΣΑΒΓΔ, αἱ ἐνόησαι τὴν κορυφὴν Σ μὲ τὰ σημεῖα Α, Β, κτλ. τῆς βάσεως, περιέχονται ἐν τῇ κυρτῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. Ἡ πυρραμὶς λοιπὸν καὶ ὁ κῶνος ἄπτονται ἀλλήλων κατὰ τὰς κόψεις ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, κτλ..

5. Δύο κύλινδροι ἢ δύο κῶνοι λέγονται ὅμοιοι, ὅταν οἱ ἄξονες ἢ τὰ ὕψη αὐτῶν ᾖναι ἀνάλογοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων αὐτῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΛΗΜΜΑ

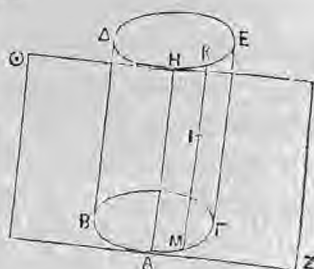
Τὸ ἐπίπεδον ΖΑΗ, τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου ΑΖ καὶ τῆς γεννήτριας ΑΗ, ἐφάπτεται τοῦ κυλίνδρου κατὰ τὴν γεννήτριαν ταύτην.

Διότι, ἂν τὸ ἐπίπεδον ΑΗΖ εἶχε καὶ ἕτερόν τι σημεῖον Ι, ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΗ κείμενον, κοινὸν μετὰ τοῦ κυλίνδρου, ἢ ἐκ τοῦ σημείου Ι ἀγομένη παράλληλος τῇ ΑΗ ἔθελε περιέχεσθαι ἐν τῇ κυρτῇ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. Πρὸς τοῦτοίς, ἐπεὶ δὲ τὸ σημεῖον Ι κεῖται καθ' ὑπόθεσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΗΖ καὶ ἡ εὐθεῖα ΙΜ ἦχθη παράλληλος τῇ ΑΗ, ἡ εὐθεῖα αὕτη ΙΜ ἔθελε κεῖσθαι καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΗΖ (πρότ. 1, πόρ. 2. Ε'). Τὸ σημεῖον λοιπὸν Μ, ἐνθα ἡ εὐθεῖα ΙΜ συναπαντᾷ τὴν βάσιν ΒΑΓ τοῦ κυλίνδρου, ἔπρεπε νὰ κῆται ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΑΖ τοῦ ἐπιπέδου ΑΗΖ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως ΑΒΓ, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἡ ΑΖ ὡς ἐφαπτομένη ἐν μόνον σημεῖον Α ἔχει κοινὸν μετὰ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ΑΒΓ τοῦ κυλίνδρου.

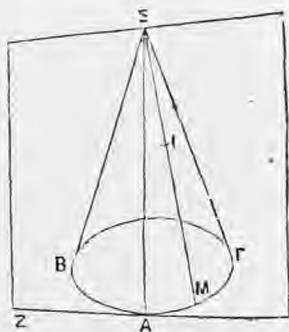
Λοιπὸν πᾶν σημεῖον τοῦ κυλίνδρου, ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΗ κείμενον, κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΑΗΖ. Λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον ΑΗΖ ἐφάπτεται τοῦ κυλίνδρου κατὰ τὴν γεννήτριαν ΑΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΛΗΜΜΑ

Τὸ ἐπίπεδον ΣΑΖ, τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου ΒΖ καὶ τῆς πλευρᾶς ΣΑ αὐτοῦ, ἐφάπτεται τοῦ κώνου καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν τῆς πλευρᾶς ταύτης.



Διότι, ἂν τὸ ἐπίπεδον $\Sigma\Delta\text{Z}$ εἶχε καὶ ἕτερόν τι σημεῖον I , ἐκτὸς τῆς εὐθείας $\Delta\text{Σ}$ κείμενον, κοινὸν μετὰ τοῦ κώνου, ἢ τὰ σημεῖα I καὶ Σ ἐνόνουσα εὐθεῖα ΣI ἔθελε κείσθαι ἐν τῇ κυρτῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Sigma\Delta\text{Z}$. Τὸ σημεῖον λοιπὸν M , ἐνθα ἡ πλευρὰ ΣI συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον $\text{B}\Delta\Gamma$ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἔπρεπε νὰ κῆται ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΔZ τοῦ ἐπιπέδου $\Sigma\Delta\text{Z}$ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως $\text{B}\Delta\Gamma$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἡ ΔZ ὡς ἐφαπτομένη ἐν μόνον σημεῖον Δ ἔχει κοινὸν μετὰ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως $\text{A}\text{B}\Gamma$ τοῦ κώνου.

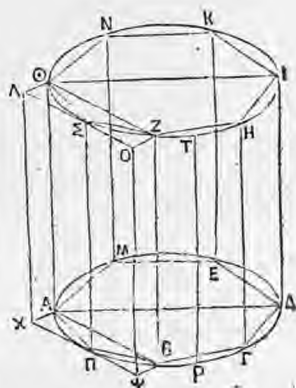


Λοιπὸν πᾶν σημεῖον τοῦ κώνου, ἐκτὸς τῆς εὐθείας $\Delta\text{Σ}$ κείμενον, κείται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου $\Sigma\Delta\text{Z}$. Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν $\Delta\text{Σ}\text{Z}$ ἐφάπτεται τοῦ κώνου κατὰ τὴν πλευρὰν $\Sigma\Delta$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΑΗΜΜΑ

Ὁ ὄγκος παντὸς κυλίνδρου εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ὄγκος ἐγγεγραμμένου τινὸς πρίσματος, ὅστινος ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐδρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.

Ἄς ἐγγράψωμεν εἰς τὸν κύκλον $\text{A}\Gamma\Delta$, τὸν τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου ἀποτελοῦντα, πολυγώνον τι $\text{A}\text{B}\Gamma\Delta\text{E}\text{N}$, καὶ ἐπ' αὐτοῦ ἅς κατασκευάσωμεν ὀρθὸν πρίσμα $\text{A}\text{B}\Gamma\text{I}\text{K}\text{N}$ ἰσοῦς μὲ τὸν κύλινδρον. Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ μεταξὺ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀγκῶν $\text{ΓB}\text{H}\text{Z}$, $\text{ΓΔ}\text{H}\text{I}$, κτλ. τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν ἐδρῶν τοῦ πρίσματος, τῶν κυκλικῶν τμημάτων τῶν βάσεων καὶ τῆς κυρτῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. Ἐάν λοιπὸν ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ αὕτη δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου ποσοῦ, αὐξανόμενου ἀρκούντως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐδρῶν τοῦ πρίσματος, ἢ, ὅπερ ταῦτό, τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν βάσιν αὐτοῦ πολυγώνου, ἡ πρότασις προφανῶς ἀποδεικνύεται.



Πρὸς τοῦτο ἐκ τῶν σημείων H , P , κτλ. μέσων τῶν τόξων AB , $\text{B}\Gamma$,

κτλ. ὑφόνομεν τὰς καθέτους ΠΣ καὶ ΡΤ, κτλ. ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. Εἶναι φανερόν ὅτι αἱ κάθετοι αὗται θέλουσιν εἶναι παράλληλαι τῶν κόψεων ΑΘ καὶ ΒΖ, κτλ. τοῦ πρίσματος καὶ θέλουσι περιέχεσθαι ἐν τῇ κυρτῇ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. Ἐὰν ἄξωμεν τελευταῖον τὰ ἐπίπεδα ΑΠΣΘ καὶ ΒΠΣΖ, κτλ. θέλομεν σχηματίσει νέον ὀρθὸν πρίσμα ΑΠΒΡΘΣΖΤ ἐγγεγραμμένον καὶ μεγαλείτερον τοῦ πρώτου. Λέγω τώρα ὅτι ἡ μεταξὺ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ νέου τούτου πρίσματος διαφορὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς μεταξὺ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ πρώτου πρίσματος διαφορᾶς.

Πρὸς ἀποδείξιν τούτου ἄγομεν διὰ τῆς κόψεως ΠΣ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ ἑδρᾷ ΑΒΖΘ, ὅπερ θέλει ἐφάπτεσθαι τοῦ κυλίνδρου κατὰ τὴν κόψιν ΠΣ, καὶ διὰ τῶν κόψεων ΑΘ καὶ ΒΖ ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τῆς ἑδρας ΑΒΖΘ. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα θέλουσι σχηματίσει διὰ τῶν ἀμειβιζίων αὐτῶν τομῶν τὸ ὀρθογώνιον παράλληλεπίπεδον ΑΟ, ὅπερ θέλει εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἐμπεριεχομένου κυρτεπιπέδου, οὕτως εἰπεῖν, ὄγκου ΑΠΣΖ. Ἀλλὰ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΠΒΖΣΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου παράλληλεπιπέδου ΑΟ, ὡς ἔχον τὸ αὐτὸ ὕψος ΠΣ καὶ βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΠΒ, ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΧΥΒ. Λοιπὸν τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΠΒΘΣΖ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυρτεπιπέδου ὄγκου ΑΠΣΖ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΒΡΓΖΤΗ, κτλ. εἶναι μεγαλείτερα τοῦ ἡμίσεως τῶν ἀντιστοιχούντων κυρτεπιπέδων ὄγκων. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν τριγωνικῶν τούτων πρίσματος, τῶν προστιθεμένων εἰς τὸ πρῶτον ἐγγεγραμμένον πρίσμα πρὸς σχηματισμὸν τοῦ δευτέρου ἐγγεγραμμένου πρίσματος, εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἡμίσεως τῆς διαφορᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ πρώτου ἐγγεγραμμένου πρίσματος.

Ἐὰν διὰ τοῦ δευτέρου ἐγγεγραμμένου πρίσματος κατασκευάσωμεν τρίτον, ὅπως κατασκευάσωμεν διὰ τοῦ πρώτου τὸ δεύτερον καὶ οὕτω καθεξῆς, ἠθέλομεν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδείξει ὅτι ἡ μεταξὺ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ τρίτου ἐγγεγραμμένου πρίσματος διαφορὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς μεταξὺ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ δευτέρου ἐγγεγραμμένου πρίσματος διαφορᾶς, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἀλλ', ἐὰν ἀπὸ ὠρίσμένον τι ποσὸν, ὅσῳ μέγα καὶ ἂν ὑποθεθῇ, ἀφαιρεθῇ πλέον τοῦ ἡμίσεως αὐτοῦ, ἐκ τοῦ ὑπολοίπου πλέον τοῦ ἡμίσεως αὐτοῦ καὶ οὕτω καθεξῆς, εἶναι φανερόν ὅτι μετ' ἄρκετάς τοιαύτας ἀφαιρέσεις τὸ μένον ὑπόλοιπον δύναται νὰ κατασταθῇ μικρότερον παν-

τὸς δεδομένου ποσοῦ. Λοιπὸν ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ὄγκος κτλ.

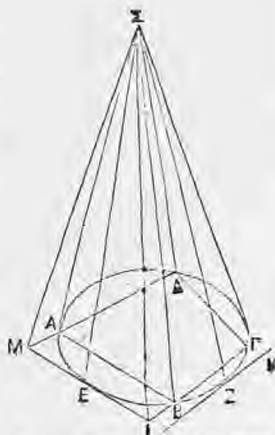
Πόρισμα. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι ἡ κυρτὴ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἐγγεγραμμένου τινὸς πρίσματος, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐδρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΛΗΜΜΑ

Ὁ ὄγκος παρτὸς κώνου εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ὄγκος ἐγγεγραμμένης τινὸς πυραμίδος, ἥς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐδρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.

Ἐστω $ΑΒΓΔ$ ἐγγεγραμμένον τι εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου πολύγωνον. Εἶναι φανερόν ὅτι μεταξὺ τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου καὶ τοῦ τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδος $ΣΑΒΓΔ$ διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κυρτεπιπέδων ὀγκων $ΣΑΒ$, $ΣΒΓ$, κτλ.

Ἀγομεν εἰς τὰ σημεῖα $Ε$, $Ζ$, κτλ. μέσας τῶν τόξων $ΑΒ$, $ΒΓ$, κτλ. τὰς ἐφαπτομένας $ΕΙ$, $ΚΖ$, κτλ., ἐνόνομεν $ΣΕ$, $ΣΖ$, κτλ., καὶ διὰ τῶν κόψεων $ΣΕ$, κτλ. καὶ τῶν ἀντιστοιχοῦσων εἰς ἐκάστην κόψιν ἐφαπτομένων $ΕΙ$, κτλ. ἄγομεν τὰ ἐπίπεδα $ΣΕΙ$ κτλ., ἅτινα θέλουσιν ἐφάπτεσθαι τοῦ κώνου κατὰ τὰς κόψεις $ΣΕ$, κτλ. Τελευταῖον, ἐὰν ἀξωμεν διὰ τῶν κόψεων $ΣΑ$ καὶ $ΣΒ$, κτλ. ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τῶν ἐδρῶν, εἰς ἃς αἱ κόψεις αὗται ἀνήκουσι, τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα μετὰ τῶν ἀντιστοιχοῦντων καθέτων ἐπιπέδων θέλουσι σχηματίσει διὰ τῶν ἀμοιβαίων αὐτῶν τομῶν τὰς τετραγωνικὰς πυραμίδας $ΣΑΜΙΒ$, κτλ., αἵτινες προφανῶς θέλουσιν εἶναι μεγαλείτεραι τῶν ἐμπεριεχymένων κυρτεπιπέδων ὀγκων $ΣΑΕΒ$, κτλ.



Ἄλλ' αἱ τριγωνικαὶ πυραμίδες $ΣΑΕΒ$, κτλ. εἶναι τὰ ἡμίση τῶν τετραγωνικῶν πυραμίδων $ΣΑΜΙΒ$, κτλ. ὥς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσεις τὰ τρίγωνα $ΔΕΒ$, κτλ., ἡμίση τῶν ἀντιστοιχοῦντων ὀρθογωνίων $ΔΜΙΒ$, κτλ. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, τῶν προστιθεμένων εἰς τὴν ἀρχικὴν ἐγγεγραμμένην πυραμίδα $ΣΑΒΓΔ$ πρὸς σχηματισμὸν τῆς δευτέρας ἐγγεγραμμένης πυραμίδος $ΣΑΕΒΖ$ κτλ., εἶναι

μεγαλείτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν κυρτεπιπέδων ὀγκῶν ΣΑΒ, κτλ.

Ἐξακολουθοῦντες αὐτῷ θέλωμεν ἀποδείξει ὡς ἀνωτέρω ὅτι ἡ μεταξὺ τοῦ ὀγκοῦ τοῦ κώνου καὶ τοῦ τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδος, ἥς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐδρῶν αὐξάνει ἀρκούντως, διαφορά δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου ποσοῦ. Λοιπὸν ὁ ὀγκος κώνου τινὸς εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει κτλ.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι ἡ κυρτὴ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἐγγεγραμμένης τινὸς πυραμίδος, ἥς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐδρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.

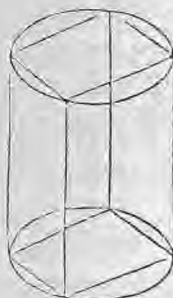
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ὁ ὀγκος παντὸς κυλίνδρου ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἄς ἐγγράψωμεν εἰς τὴν βάση τοῦ κυλίνδρου κανονικὸν τι πολύγωνον, καὶ ἃς κατασκευάσωμεν ἐπὶ τοῦ πολυγώνου τούτου ἐρθρὸν πρίσμα, ἰσοῦπές μὲ τὸν κύλινδρον.

Ἐστω Β ἡ βάση τοῦ πρίσματος, Ο ὁ ὀγκος αὐτοῦ καὶ Η τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ προτάξει 13 τοῦ ε' βιβλίου ἔχομεν

$$O = B \times H.$$



Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὀγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ὀγκος Ο τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος, οὕτως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐδρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, καὶ ὄριον τοῦ ὀγκοῦ Ο εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ γινόμενον $B \times H$, ἔπεται ὅτι ὁ ὀγκος τοῦ κυλίνδρου ἔχει διὰ μέτρον τὸ ὄριον τοῦ γινομένου $B \times H$. Ἀλλὰ τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον πολύγωνον Β ἔχει δι' ὄριον τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ὁ δὲ παράγων Η εἶναι ἀμετάβλητος. Ἄρα

$$\text{ὄγκ. κυλίνδρου} = \text{κύκλ. βάσεως} \times H.$$

Πόρισμα 1. Οἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, οἱ δὲ τῆς αὐτῆς βάσεως ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

Πόρισμα 2. Οἱ ὅμοιοι κύλινδροι Κ καὶ κ εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν ὕψων αὐτῶν ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων αὐτῶν. Διότι, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Β καὶ β τὰς βάσεις τῶν ὁ-

μοίων κυλίνδρων, διὰ Δ καὶ δ τὰς διαμέτρους αὐτῶν καὶ διὰ Υ καὶ υ τὰ ὕψη, θέλομεν ἔχει ἀπ' ἐνὸς (πρότ. 10, Δ').

$$B : \epsilon = \Delta^2 : \delta^2 \quad (1)$$

καὶ ἀπ' ἑτέρου, ἔνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν κυλίνδρων (ὁρισμ. 8)

$$\Upsilon : \upsilon = \Delta : \delta. \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες δὲ τοὺς ὁμοταγεῖς ὄρους τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) θέλομεν ἔχει

$$B \times \Upsilon : \epsilon \times \upsilon = \Delta^3 : \delta^3,$$

ἢ, ὅπερ ταὐτὸ

$$K : \kappa = \Delta^3 : \delta^3.$$

$$\text{Ἀλλὰ καὶ} \quad \Delta^3 : \delta^3 = \Upsilon^3 : \upsilon^3.$$

$$\text{Ἄρα καὶ} \quad K : \kappa = \Upsilon^3 : \upsilon^3.$$

Σχόλιον. Ἐστω P ἡ ἄκτις τῆς βάσεως κυλίνδρου τινὸς καὶ H τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ θέλει εἶναι πP^2 , τὸ δὲ μέτρον τοῦ ὅγκου αὐτοῦ $\pi P^2 \times H$, ἢ $\pi P^2 H$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ

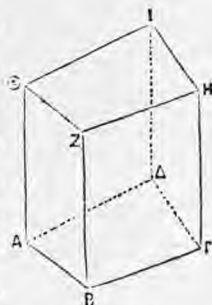
Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ὀρθοῦ τινος πρίσματος ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Διότι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΘZBA , $ZHB\Gamma$, κτλ., ἐξ ὧν συντίθεται. Ἀλλὰ τὰ μὲν ὕψη $\Lambda\Theta$, BZ , κτλ. τῶν ὀρθογωνίων εἶναι ἴσα μὲ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος, αἱ δὲ βάσεις αὐτῶν ΛB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, κτλ. ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἀποτελοῦσι τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τούτων, ἢ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

Πόρισμα. Αἱ παράπλευροι ἐπιφάνειαι δύο ὀρθῶν πρισμάτων τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ περιμέτροι τῶν βάσεων αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ κυρτὴ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.



*Ὡς ἐγγράψωμεν εἰς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου κανονικόν τι πολύγωνον, καὶ ὥς κατασκευάσωμεν ἐπ' αὐτοῦ ὀρθὸν πρίσμα ἰσοῦψές μὲ τὸν κύλινδρον.

*Ἐστω Π ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος, Ε ἡ παράπλευρος αὐτοῦ ἐπιφάνεια καὶ Η τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Κατὰ τὰ προαποδειχθέντα θέλομεν ἔχει

$$E = \Pi \times H.$$

*Ἐπειδὴ δὲ ἄφ' ἑνὸς ἡ κυρτὴ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια Ε τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐδρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, καὶ ὄριον τῆς ἐπιφανείας Ε εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ γινόμενον $\Pi \times H$, καὶ ἄφ' ἑτέρου ἡ μὲν περίμετρος Π τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἔχει δι' ὄριον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὃ δὲ παράγων Η εἶναι σταθερὸς, θέλομεν ἔχει

$$\text{κυρ. ἐπιφ. κυλίνδρου} = \text{περιφ. βάσεως} \times H.$$

Πόρισμα. Αἱ κυρταὶ δύο κυλίνδρων τοῦ αὐτοῦ ὕψους ἐπιφάνειαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ περιφέρειαι τῶν βάσεων αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως.

Σχόλιον. *Ἐστω Ρ ἡ ἀκτὺς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ Η τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως αὐτοῦ θέλει εἶναι $2\pi R$, ἡ δὲ κυρτὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια $2\pi R \times H$, ἢ $2\pi RH$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΘΕΩΡΗΜΑ

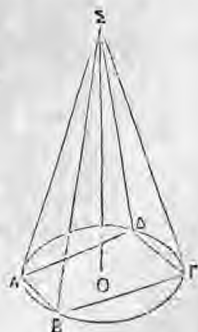
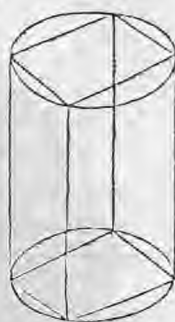
*Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

*Ὡς ἐγγράψωμεν εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου κανονικόν τι πολύγωνον, καὶ ὥς κατασκευάσωμεν ἐπ' αὐτοῦ πυραμίδα, ἔχουσαν κορυφὴν τὴν τοῦ κώνου κορυφὴν Σ.

*Ἐστω Β ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, Ο ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος καὶ Η τὸ ὕψος τοῦ κώνου. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ προτάσει 16 τοῦ Ζ' βιβλίου θέλομεν ἔχει

$$O = B \times \frac{H}{3}.$$

*Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ὄγκος Ο



τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδος, ἥς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐδρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, καὶ ὄριον τοῦ ὄγκου Ὄ εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ γινόμενον $B \times \frac{H}{3}$, ἔπεται ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἔχει διὰ μέτρον τὸ

ὄριον τοῦ γινομένου $B \times \frac{H}{3}$. Ἀλλὰ ἡ μὲν ἐπιφάνεια B τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἔχει δι' ὄριον τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου, ὃ δὲ παράγων $\frac{H}{3}$ εἶναι ἀμετάβλητος. Ἄρα

$$\text{ὄγκ. κώνου} = \text{κύκλ. βάσεως} \times \frac{H}{3}.$$

Πόρισμα. Πᾶς κώνος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κυλίνδρου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους. Ὅθεν ἔπεται

1^η. Ὅτι οἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους κῶνοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

2^η. Ὅτι οἱ τῆς αὐτῆς βάσεως κῶνοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

3^η. Ὅτι δύο ὅμοιοι κῶνοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων αὐτῶν, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν ὕψων αὐτῶν (πρότ. 5, πόρ. 2).

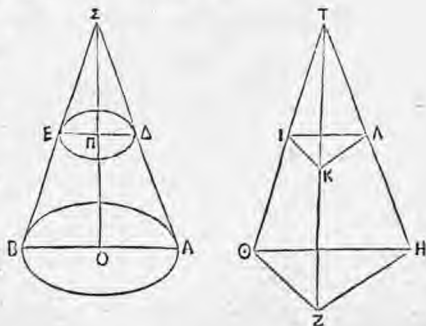
Σχόλιον. Ἐστω P ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως κώνου τινὸς καὶ H τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τὸ μέτρον τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου θέλει εἶναι $\pi P^2 \times \frac{1}{3} H$, ἢ $\frac{1}{3} \pi P^2 H$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ὁ κολῶδες κῶνος $ΑΔΕΒ$, ὁὔτινος $ΑΟ$ καὶ $ΔΠ$ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων καὶ $ΠΟ$ τὸ ὕψος, ἔχει διὰ μέτρον

$$\frac{1}{3} \pi. ΟΠ (\overline{ΑΟ}^2 + \overline{ΔΠ}^2 + ΑΟ \times ΔΠ).$$

Ἐστω $ΤΘΖΗ$ τριγωνική τις πυραμὶς ἔχουσα ὕψος τὸ τοῦ κώνου $ΣΑΒ$ καὶ βάσιν τὸ τρίγωνον $ΖΘΗ$, ὅπερ ὑποθέτομεν ἰσοδύναμον μὲ τὸν κύκλον $ΑΟ$ τῆς βάσεως τοῦ κώνου $ΣΑΒ$. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ βάσεις τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος



καῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ κορυφαὶ αὐτῶν Σ καὶ Τ θέλουσιν ἀπέχει ἰσάκεις τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων, τὸ δ' ἐπίπεδον ΕΠΔ προεκβαλλόμενον θέλει τμήσει τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΤΘΖΠ κατὰ τὸ τρίγωνον ΙΚΛ, ὅπερ θέλει εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὴν ἄνω βάσιν ΔΕ τοῦ κολοβοῦ κῶνου ΑΔΕΒ. Διότι αἱ βάσεις ΑΒ καὶ ΔΕ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ΑΟ καὶ ΔΠ, ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὑψῶν ΣΟ καὶ ΣΠ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΘΖΠ καὶ ΙΚΛ εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς τετράγωνα τῶν αὐτῶν ὑψῶν (πρότ. 14, πόρ. 5'). Ἄρα
 κύκλ. ΑΟ : κύκλ. ΔΠ = τρίγ. ΘΖΠ : τρίγ. ΙΚΛ.

Ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, τὸ τρίγωνον ΘΖΠ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν κύκλον ΑΟ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΙΚΛ θέλει εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν κύκλον ΠΔ.

Τούτου τεθέντος, λέγω ὅτι ὁ κολοβὸς κῶνος ΑΒΕΔ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν κορυμνὸν ΘΖΠΙΚΙ τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΤΘΖΠ. Διότι ἀφ' ἑνὸς ἔχομεν

$$\text{κολ. κῶν. ΑΒΕΔ} = \text{κῶν. ΣΑΒ} - \text{κῶν. ΣΔΕ.}$$

$$= \text{κύκλ. ΑΟ} \times \frac{1}{3} \text{ΣΟ} - \text{κύκλ. ΔΠ} \times \frac{1}{3} \text{ΣΠ,}$$

καὶ ἀφ' ἑτέρου

$$\text{κορ. ΘΖΠΙΚΙ} = \text{πυρ. ΤΖΠΘ} - \text{πυρ. ΤΙΚΛ}$$

$$= \text{ΖΗΘ} \times \frac{1}{3} \text{ΣΟ} - \text{ΙΚΛ} \times \frac{1}{3} \text{ΣΠ.}$$

Ἀλλὰ κατὰ τὰ προϋποτεθέντα κύκλ. ΑΟ $\times \frac{1}{3} \text{ΣΟ} = \text{ΖΗΘ} \times \frac{1}{3} \text{ΣΟ}$ καὶ κύκλ. ΔΠ $\times \frac{1}{3} \text{ΣΠ} = \text{ΙΚΛ} \times \frac{1}{3} \text{ΣΠ}$. Ἄρα ὁ κολοβὸς κῶνος ΑΒΕΔ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν κορυμνὸν ΖΗΘΙΚΛ.

Ἀλλὰ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ προτάσει 18 τοῦ 5' βιβλίου

$$\text{κορ. ΘΖΠΙΚΙ} = \text{ΖΗΘ} \times \frac{1}{3} \text{ΠΟ} + \text{ΙΚΛ} \times \frac{1}{3} \text{ΠΟ} + \frac{1}{3} \text{ΠΟ} \sqrt{\text{ΖΘΗ} \times \text{ΙΚΛ.}}$$

Ἄρα

$$\text{κολ. κῶν. ΑΒΕΔ} = \pi \cdot \overline{\text{ΑΟ}}^2 \times \frac{1}{3} \text{ΠΟ} + \pi \cdot \overline{\text{ΔΗ}}^2 \times \frac{1}{3} \text{ΠΟ} + \frac{1}{3} \text{ΠΟ} \times \text{ΑΟ} \times \text{ΔΠ,}$$

ἢ, ὅπερ ταύτό,

$$\text{κολ. κῶν. ΑΒΕΔ} = \frac{1}{3} \pi \cdot \text{ΠΟ} (\overline{\text{ΑΟ}}^2 + \overline{\text{ΔΗ}}^2 + \text{ΑΟ} \times \text{ΔΠ}).$$

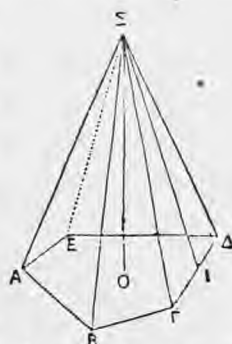
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ παράπλευρος κανονικῆς τινος πυραμίδος $\Sigma\text{ΑΒΓΔΕ}$ ἐπιφάνεια ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως τῆς ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος $\Sigma\text{Ι}$.

Τῷ ὄντι, ἡ παράπλευρος τῆς κανονικῆς πυραμίδος $\Sigma\text{ΑΒΓΔΕ}$ ἐπιφάνεια συντίθεται ἐξ ἴσων ἰσοσκελῶν τριγώνων $\Sigma\Delta\Gamma$, $\Sigma\text{Β}\Gamma$, $\Sigma\text{ΑΒ}$ κτλ., ὧν ἕκαστον ἔχει διὰ μέτρον τὴν βάσιν αὐτοῦ $\Gamma\Delta$, $\text{Β}\Gamma$, ΑΒ , κτλ. ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους αὐτοῦ $\Sigma\text{Ι}$ πολλαπλασιασθεῖσαν, ἥτοι $\Sigma\Gamma\Delta = \Gamma\Delta \times \frac{\Sigma\text{Ι}}{2}$,

$\Sigma\text{Β}\Gamma = \text{Β}\Gamma \times \frac{\Sigma\text{Ι}}{2}$, $\Sigma\text{ΑΒ} = \text{ΑΒ} \times \frac{\Sigma\text{Ι}}{2}$, κτλ. Λοιπὸν

τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\Sigma\Gamma\Delta + \Sigma\text{Β}\Gamma + \Sigma\text{ΑΒ} + \text{κτλ.}$, ἢ ἡ παράπλευρος τῆς κανονικῆς πυραμίδος ἐπιφάνεια, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον $(\Gamma\Delta + \text{Β}\Gamma + \text{ΑΒ} + \text{κτλ.}) \times \frac{\Sigma\text{Ι}}{2}$, ἥτοι τὴν περιμέτρον τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος $\Sigma\text{Ι}$.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ

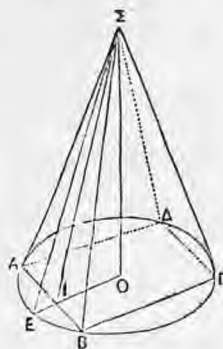
Ἡ κυρτὴ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἔχει διὰ μέτρον τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ πολλαπλασιασθεῖσαν.

Ἄς ἐγγράψωμεν εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου κανονικὸν τι πολύγωνον, καὶ ἄς κατασκευάσωμεν τὴν κανονικὴν πυραμίδα, τὴν ἔχουσαν βάσιν τὸ ἐγγεγραφέν κανονικὸν πολύγωνον καὶ κορυφὴν τὴν τοῦ κώνου κορυφὴν Σ .

Ἐστω Π ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, Ε ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος καὶ $\Sigma\text{Ι}$ τὸ ἀπόστημα αὐτῆς. Θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα.

$$\text{Ε} = \Pi \times \frac{\Sigma\text{Ι}}{2}.$$

Ἄλλ' Ε ἔχει δι' ὅριον τὴν κυρτὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν, Π τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου, καὶ $\Sigma\text{Ι}$ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ $\Sigma\text{Β}$.



Διότι $\Sigma\Xi - \Sigma\Gamma < \Xi\Gamma$, καὶ εἰδομεν ἐν τῷ πορίσματι 3 τῆς 9^{ης} προτάσεως τοῦ Δ' βιβλίου ὅτι $\Xi\Gamma$ δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου ποσοῦ, αὐξανομένου ἀρκούντως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. Ἄρα

$$\text{κυρ. ἐπιφ. κών.} = \text{περιφ. } \text{OE} \times \frac{\Sigma\Gamma}{2}.$$

Πόρισμα. Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι δύο κώνων τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ πλευραὶ αὐτῶν καὶ ἀντιστρόφως.

Σχόλιον. Ἐστω Π ἡ τοῦ κώνου πλευρὰ καὶ P ἡ ἀκτὺς τῆς βάσεως αὐτοῦ. Ἡ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια θέλει ἔχει διὰ μέτρον $2\pi P \times \frac{1}{2}\Pi$, ἢ $\pi P\Pi$.

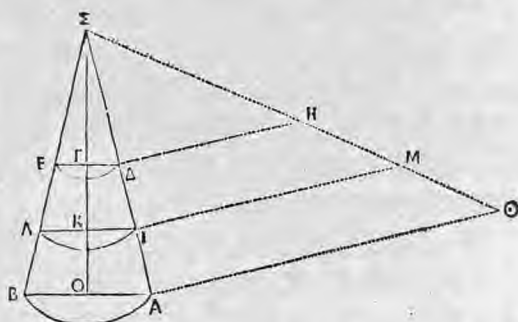
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ κυρτὴ τοῦ κολοβοῦ κώνου $\Delta\Delta\text{EB}$ ἐπιφάνεια ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ $\Delta\Delta$ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ AB καὶ ΔE , ἥτοι

$$\Delta\Delta \times \left(\frac{\text{περιφ. } \text{AO} + \text{περιφ. } \Delta\Gamma}{2} \right).$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν διὰ τοῦ ἄξονος ΣO τὸ ἐπίπεδον $\Sigma\text{O}\Delta\Theta$ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Λ τὴν $\Lambda\Theta$ κάθετον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $\Sigma\Delta$ τοῦ κώνου,

καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τὴν ἀπόστασιν $\Lambda\Theta = \text{περιφ. } \text{AO}$. Ἐνόννομεν ἀκολουθῶς $\Sigma\Theta$ καὶ ἄγομεν τὴν ΔH παράλληλον τῇ $\Lambda\Theta$.



Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $\Sigma\Lambda\text{O}$ καὶ $\Sigma\Delta\Gamma$ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν

$$\Lambda\text{O} : \Delta\Gamma = \Sigma\Lambda : \Sigma\Delta, \quad (1)$$

καὶ, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $\Sigma\Lambda\Theta$ καὶ $\Sigma\Delta\text{H}$ εἶναι ὅμοια,

$$\Lambda\Theta : \Delta\text{H} = \Sigma\Lambda : \Sigma\Delta. \quad (2)$$

Λοιπὸν, ἔνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου $\Sigma\Lambda : \Sigma\Delta$ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), θέλομεν ἔχει

$$\Lambda\Theta : \Delta\text{H} = \Lambda\text{O} : \Delta\Gamma, \quad \eta = \text{περιφ. } \text{AO} : \text{περιφ. } \Delta\Gamma,$$

Διότι, ἐὰν προεκβληθῇ ἡ $\Lambda\Delta$ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὸν ἄξονα $ΟΓ$ εἰς τὸ σημεῖον Σ , εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ὑπὸ τῆς $\Lambda\Delta$ παραγομένη ἐπιφάνεια θέλει εἶναι ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου, οὔτινος $\Lambda Ο$ καὶ $\Delta Γ$ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων καὶ Σ ἡ κορυφή τοῦ εἰς $\delta\eta$ ἀνίσκει κώνου. Λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἄνωτέρω γινόμενον.

Ἄν τὸ σημεῖον Δ συνέπιπτε μὲ τὸ σημεῖον Σ , ἢ ἂν ἡ $\Lambda\Delta$ ᾗτο παράλληλος τῇ $ΟΓ$, ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς τῆς $\Lambda\Delta$ περὶ τὸν ἄξονα $ΟΓ$ παραγομένη ἐπιφάνεια ἤθελεν εἶναι εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐπιφάνεια κώνου, εἰς δὲ τὴν δευτέραν ἐπιφάνεια κυλίνδρου. Εἰς ἀμφο-

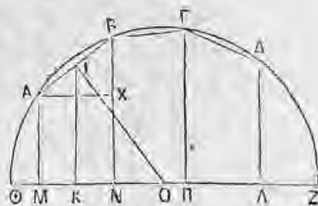
τέρας δὲ τὰς περιπτώσεις ὁ τύπος $\Lambda\Delta \times \left(\frac{\text{περιφ. } \Lambda Ο + \text{περιφ. } \Delta Γ}{2} \right)$

μᾶς δίδει πάντοτε τὸ μέτρον τῆς ὑπὸ τῆς $\Lambda\Delta$ παραγομένης ἐπιφάνειας, ἀρκεῖ μόνον νὰ δώσωμεν εἰς τὴν κάθετον $\Delta Γ$ τὰς ἀνηκούσας εἰς ἑκατέραν τῶν περιπτώσεων τιμὰς, αἵτινες προφανῶς εἶναι εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν μηδὲν, εἰς δὲ τὴν δευτέραν $\Lambda Ο$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ παραγομένη ἐπιφάνεια ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ μέρους $ΑΒΓΔ$ κανονικοῦ τυοῦ πολυγώνου περὶ τὴν διάμετρον $ΘΖ$ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ κανονικὸν πολύγωνον περιφερείας ἐπὶ τὴν προβολὴν $ΜΑ$ τῆς περιμέτρου $ΑΒΓΔ$ ἐπὶ τῆς διαμέτρου $ΖΘ$.

Διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου $Ι$, μέσου τῆς πλευρᾶς $ΑΒ$, καταβιβάσωμεν τὴν $ΙΚ$ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἄξονος $ΖΘ$, καὶ ἄξωμεν τὴν ἀκτῖνα $ΟΙ$ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα



$$(*) \text{ ἐπιφ. } \Lambda\Delta = \Lambda\Delta \times \text{περιφ. } ΙΚ.$$

Ἀλλ' $\Lambda\Delta \times \text{περιφ. } ΙΚ = ΜΝ \times \text{περιφ. } ΟΙ$. Διότι, ἐὰν ἀχθῇ ἡ $ΑΧ$ παράλληλος τῇ $ΜΝ$, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $\Lambda ΒΧ$ καὶ $ΟΙΚ$ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὥς ἔχοντα προφανῶς τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθετους, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

(*) Διὰ τῶν συντεταγμένων ἐκφράσεων ἐπιφ. $\Lambda\Delta$, ἐπιφ. $ΒΓ$ κτλ. ἐννοοῦμεν τὰς ἐν τῇ περιστροφικῇ κινήσει ὑπὸ τῶν εὐθειῶν $\Lambda\Delta$ καὶ $ΒΓ$ παραγομένας ἐπιφάνειας.

$AB : AX \text{ ἢ } MN = OI : IK \text{ ἢ } = \text{περιφ.}OI : \text{περιφ.}IK,$
 ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν ἰσότητά $AB \times \text{περιφ.}IK = MN \times \text{περιφ.}OI$. Λοιπὸν
 $\text{ἐπιφ.} AB = MN \times \text{περιφ.} OI.$ (1)

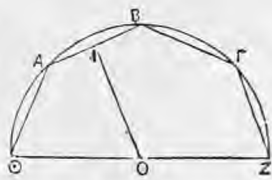
Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν ἀποδείξει, ὅτι

$$\text{ἐπιφ.} B\Gamma = N\Pi \times \text{περιφ.} OI, \quad (2)$$

καὶ $\text{ἐπιφ.} \Gamma\Delta = \Pi\Lambda \times \text{περιφ.} OI. \quad (3)$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1), (2) καὶ (3) ἔχομεν
 $\text{ἐπιφ.} AB\Gamma\Delta = (MN + N\Pi + \Pi\Lambda) \times \text{περιφ.} OI = M\Lambda \times \text{περιφ.} OI,$
 τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. Ἐάν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος κα-
 νονικὸν πολύγωνον ἔχη ἄρτιον ἀριθμὸν
 πλευρῶν καὶ ὁ ἄξων ΘZ διέρχηται διὰ δύο
 ἀντικειμένων κορυφῶν Θ καὶ Z , ἡ ἐκ τῆς
 περιστροφῆς τοῦ ἡμιπολυγώνου $\Theta AB\Gamma Z$
 περὶ τὴν διάμετρον ΘZ παραγομένη ἐπιφάνεια θέλει ἔχει διὰ μέτρον
 τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον
 κύκλου ἐπὶ τὴν διάμετρον ΘZ τοῦ περιγεγραμμένου.

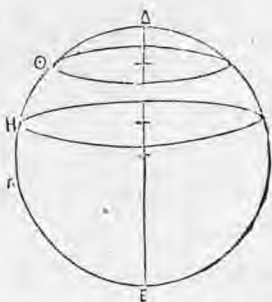


ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Σφαιρικὴ ζώνη καλεῖται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας,
 τὸ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων πε-
 ριεχόμενον. Αἱ κυκλικαὶ τομαὶ τῶν παραλ-
 λήλων ἐπιπέδων καλοῦνται βάσεις τῆς ζώ-
 νης, ἡ δ' ἀπ' ἑλλήλων ἀπόστασις ὕψος αὐτῆς.

Ἄν τὸ ἕτερον τῶν ἐπιπέδων τούτων
 ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, ἡ ζώνη τότε θέ-
 λει ἔχει μίαν μόνην βάση.

2. Ἐάν φαντασθῶμεν ὅτι ἡ ἡμιπεριφέ-
 ρεια $\Delta A E$, περιστρεφομένη περὶ τὴν διάμε-
 τρον, παράγει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, τόξον τι αὐτῆς ΘH θέ-
 λει παραγάγει συγχρόνως σφαιρικὴν ζώνην.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΘΩΡΗΜΑ

Τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς τινος ζώνης ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ
 ὕψους αὐτῆς ἐπὶ τὴν περιμέτρου μεγίστου κύκλου.

Ἐστω ἡ σφαιρικὴ ζώνη, ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τόξου AB περὶ τὴν διάμετρον MN παραγομένη.

Ἐὰν ἐγγράψωμεν εἰς τὸ τόξον AB μέρος κανονικοῦ πολυγώνου AΔΓB, καὶ παραστήσωμεν δι' E τὴν ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ μέρους AΔΓB περὶ τὴν διάμετρον MN παραγομένην ἐπιφάνειαν, θελομένη ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα

$$E = \text{περιφ. OI} \times \text{EO}.$$

Ἀλλὰ τὸ τόξον AB εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου μέρους AΔΓB, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον. Λοιπὸν ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ζώνη εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ ἐπιφάνεια E, ἡ τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ γινόμενον περιφ. OI $\times$ EO.

Ἀλλ' ἡ μὲν περιφ. OI ἔχει δι' ὄριον περιφ. OM, ὃ δὲ παράγων EO εἶναι σταθερός. Ἄρα

$$\text{ζώνη AB} = \text{περιφ. OM} \times \text{EO},$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα 1. Αἱ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἢ εἰς ἴσας σφαῖρας ἀνήκουσαι ζῶναι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

Πόρισμα 2. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ζώνη ἔχουσα ὕψος τὴν διάμετρον αὐτῆς. Λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ.

Ἐστω P ἡ τῆς σφαίρας ἀκτίς. Ἡ τοῦ μεγίστου κύκλου περιφέρεια θέλει εἶναι $2\pi P$, ἐπομένως τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας $2\pi P \times 2P$ ἢ $4\pi P^2$. Ἀλλὰ πP^2 παριστᾷ τὴν ἐπιφάνειαν μεγίστου κύκλου. Λοιπὸν ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους, ἐπομένως δύναται νὰ συγκριθῇ μὲ ἐπιπέδους ἐπιφανείας, π. χ. μὲ τὸ ἐπὶ τῆς γραμμικῆς μονάδος κατασκευαζόμενον τετράγωνον, ὡς καὶ ὁ κύκλος, τὰ πολύγωνα κτλ.

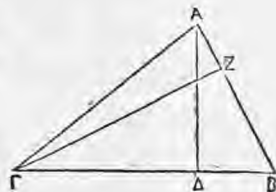
Πόρισμα 3. Γνωστοῦ ὄντος τοῦ λόγου τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς γραμμικῆς μονάδος κατασκευαζόμενον τετράγωνον, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὑρωμεν τὸν λόγον τῶν ἀτράκτων, τῶν σφαιρικῶν τριγώνων καὶ πολυγώνων πρὸς τὸ αὐτὸ τετράγωνον, διότι εὑρωμεν ἐν τῷ Z' βιβλίῳ τὸν λόγον αὐτῶν πρὸς τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον, ὅπερ εἶναι τὸ ὄγδοον μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ἐὰν ὑποθέ-

σωμεν π. χ. ὅτι ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς γραμμικῆς μονάδος κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι 11 καὶ ὁ λόγος τῆς ἀτράκτου πρὸς τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον $\frac{1}{2}$, ἡ ἀτράκτος, οὖσα τὸ ἥμισυ τρισορθογωνίου τριγώνου, θέλει εἶναι $\frac{1}{16}$ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἢ τὰ $\frac{11}{16}$ τοῦ τετραγώνου. Ὁ λόγος λοιπὸν τῆς ἀτράκτου πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς γραμμικῆς μονάδος κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι $\frac{11}{16}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ὁ παραγόμενος ὄγκος ἐκ τῆς περιστροφῆς τριγώνου τινὸς περὶ τινὰ εὐθεΐαν, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου τούτου κειμένην καὶ διὰ τινος τῶν κορυφῶν αὐτοῦ διερχομένην, ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τῆς παραγομένης ἐπιφανείας ὑπὸ τῆς ἀπέναντι τῆς κορυφῆς ταύτης πλευρᾶς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς καθέτου, τῆς καταβιβαζομένης ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ἐπὶ τῆς ἀντικειμένης αὐτῇ πλευρᾶς.

1^{ον}. Ἄς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ στρέφεται περὶ τινὰ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΒΓ. Ὁ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΓΑΒ παραγόμενος ὄγκος ἴσουςται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κώνων, τῶν παραγομένων ἐκ τῆς περιστροφῆς τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΓΑΔ καὶ ΑΔΒ. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει



$$(*) \text{ ὄγκ. ΓΑΒ} = \frac{1}{3} \pi \cdot \overline{ΑΔ} \cdot \overline{ΓΔ} + \frac{1}{3} \pi \cdot \overline{ΑΔ} \cdot \overline{ΒΔ} = \frac{1}{3} \pi \cdot \overline{ΑΔ} \cdot \overline{ΓΒ}. \quad (1)$$

Ἀλλ', ἐὰν καταβιβασθῇ ἡ ΓΖ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΖΒ καὶ ΑΔΒ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\overline{ΓΖ} : \overline{ΑΔ} = \overline{ΓΒ} : \overline{ΑΒ},$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα

$$\overline{ΓΖ} \times \overline{ΑΒ} = \overline{ΑΔ} \times \overline{ΒΓ}.$$

(*) Παρίστωμεν πρὸς συντομίαν διὰ τῆς συντέτμημένης παραστάσεως ὄγκ. ΓΑΒ τὸν ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΓΑΒ περὶ τὴν ΓΒ παραγόμενον ὄγκον.

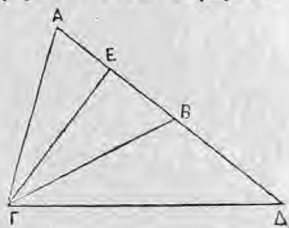
Ἀντιστάγοντες εἰς τὴν ἰσότητα (1) $\Gamma Z \times AB$ ἀντὶ τοῦ $AA \times BG$, θέλομεν ἔχει

$$\text{ὄγκ. } \Gamma AB = \frac{1}{3} \pi. AA. \Gamma Z. AB = \frac{1}{3} \Gamma Z \times \pi. AA. AB.$$

Ἀλλὰ $\pi. AA. AB$ μετρεῖ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐκ τῆς περιστροφῆς τῆς AB παραγομένου κώνου (πρότ. 11, σχόλ.). Ἄρα

$$\text{ὄγκ. } \Gamma AB = \text{ἐπιφ. } AB \times \frac{1}{3} \Gamma Z.$$

2^α. Ὡς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι τὸ τρίγωνον ΓAB στρέφεται περὶ τινὰ εὐθεῖαν $\Gamma\Delta$, διερχομένην διὰ τινος τῶν κορυφῶν αὐτοῦ Γ . Ἐάν προσεβάλωμεν τὴν AB , μέχρῃς οὗ συναπαντήσῃ τὸν ἄξονα $\Gamma\Delta$, καὶ καταβιβάσωμεν ἐκ τῆς κορυφῆς Γ τὴν ΓE κάθετον ἐπὶ τῆς AB , θέλομεν προφανῶς ἔχει



$$\text{ὄγκ. } \Gamma AB = \text{ὄγκ. } \Gamma A\Delta - \text{ὄγκ. } \Gamma B\Delta.$$

Ἀλλὰ κατὰ τὰ προκποδειχθέντα ἔχομεν

$$\text{ὄγκ. } \Gamma A\Delta = \text{ἐπιφ. } A\Delta \times \frac{1}{3} \Gamma E,$$

καὶ

$$\text{ὄγκ. } \Gamma B\Delta = \text{ἐπιφ. } B\Delta \times \frac{1}{3} \Gamma E.$$

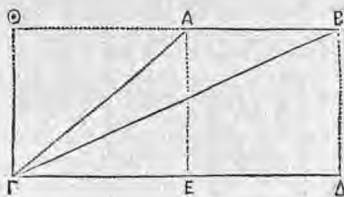
Ἄρα

$$\begin{aligned} \text{ὄγκ. } \Gamma AB &= (\text{ἐπιφ. } A\Delta - \text{ἐπιφ. } B\Delta) \times \frac{1}{3} \Gamma E \\ &= \text{ἐπιφ. } AB \times \frac{1}{3} \Gamma E. \end{aligned}$$

3^α. Ἡ προηγηθεῖσα ἀπόδειξις ὑποθέτει ὅτι ἡ πλευρὰ AB προσεβαλλομένη συναπαντᾷ τὸν ἄξονα $\Gamma\Delta$.

Ὡς ἐξετάσωμεν τώρα καὶ τὴν περίπτωσηιν, καθ' ἣν αἱ δύο εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλοι.

Ἐάν καταβιβάσωμεν AE καὶ BD καθέτους ἐπὶ τοῦ ἄξονος $\Gamma\Delta$ καὶ $\Gamma\Theta$ κάθετον ἐπὶ τῆς AB , θέλομεν ἔχει προφανῶς



$$\text{ὄγκ. } \Gamma AB = \text{ὄγκ. } \Gamma AE + \text{ὄγκ. } ABDE - \text{ὄγκ. } \Gamma B\Delta.$$

Ἀλλὰ

$$\text{ὄγκ. } \Gamma AE = \frac{1}{3} \pi. AE. \Gamma E.$$

$$\text{ὅγκ. } AB\Delta E = \pi \cdot \overline{AE}^2 \cdot E\Delta,$$

$$\text{ὅγκ. } \Gamma B\Delta = \frac{1}{3} \pi \cdot \overline{AE}^2 \cdot \Gamma\Delta.$$

$$\begin{aligned} \text{Ἄρα } \text{ὅγκ. } \Gamma A B &= \frac{1}{3} \pi \cdot \overline{AE}^2 \cdot \Gamma E + \pi \cdot \overline{AE}^2 \cdot E\Delta - \frac{1}{3} \pi \cdot \overline{AE}^2 \cdot \Gamma\Delta \\ &= \pi \cdot \overline{AE}^2 \times \left(\frac{1}{3} \Gamma E + E\Delta - \frac{1}{3} \Gamma\Delta \right). \end{aligned}$$

Καὶ ἐπειδὴ $\Gamma\Delta = \Gamma E + E\Delta$, ἡ προηγουμένη ἰσότης τρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς

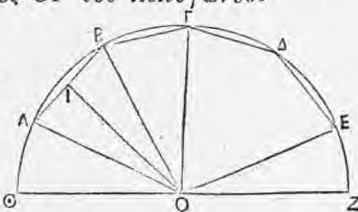
$$\begin{aligned} \text{ὅγκ. } \Gamma A B &= \pi \cdot \overline{AE}^2 \times \frac{2}{3} E\Delta = \frac{1}{3} \pi \cdot \overline{AE}^2 \cdot 2\pi \cdot A E \cdot E\Delta \\ &= \text{ἐπιφ. } AB \times \frac{1}{3} \Gamma\Theta. \end{aligned}$$

Λοιπὸν καθ' ὅλας τὰς περιπτώσεις ὁ παραγόμενος ὅγκος ἐκ τῆς περιστροφῆς κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐστω $AB\Gamma\Delta E$ μέρος τι κατοικοῦ πολυγώνου. Ὁ παραγόμενος ὅγκος ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως AOE περὶ τινα ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένην διάμετρον $Z\Theta$ ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ὑπὸ τῆς περιμέτρου $AB\Gamma\Delta E$ παραγομένης ἐπιφανείας ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀποσιδήματος OI τοῦ πολυγώνου.

Διότι ὁ ὑπὸ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως AOE παραγόμενος ὅγκος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀγκων, τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν ἴσων ἰσοσκελῶν τριγώνων $\Delta OB, BO\Gamma, \Gamma O\Delta, \Delta OE$. Ἀλλὰ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα



$$\text{ὅγκ. } \Delta OB = \text{ἐπιφ. } AB \cdot \frac{1}{3} OI,$$

$$\text{ὅγκ. } BO\Gamma = \text{ἐπιφ. } B\Gamma \cdot \frac{1}{3} OI,$$

$$\text{ὅγκ. } \Gamma O\Delta = \text{ἐπιφ. } \Gamma\Delta \cdot \frac{1}{3} OI,$$

$$\text{ὅγκ. } \Delta OE = \text{ἐπιφ. } \Delta E \cdot \frac{1}{3} OI.$$

$$\begin{aligned} \text{Ἄρα } \text{ὅγκ. } AOE &= \frac{1}{3} OI \times (\text{ἐπιφ. } AB + \text{ἐπιφ. } B\Gamma + \text{ἐπιφ. } \Gamma\Delta + \text{ἐπιφ. } \Delta E) \\ &= \frac{1}{3} OI \times \text{ἐπιφ. } AB\Gamma\Delta E. \end{aligned}$$

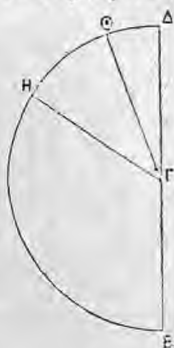
ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Ἐνῷ τὸ ἡμικύκλιον ΔΓΕ περιστρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρον ΔΕ παράγει τὴν σφαῖραν, πᾶς κυκλικὸς τομεὺς ΘΓΗ παράγει στερεόν τι, καλούμενον σφαιρικὸς τομεὺς.

Ὁ σφαιρικὸς τομεὺς περατοῦται ὑπὸ τῆς ζώνης, τῆς ὑπὸ τοῦ τόξου ΘΗ παραγομένης.

2. Τὸ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμενον μέρος τοῦ ὅγκου τῆς σφαίρας ὀνομάζεται σφαιρικὸν τμήμα.

Ἡ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀπόστασις καλεῖται ὕψος τοῦ τμήματος.



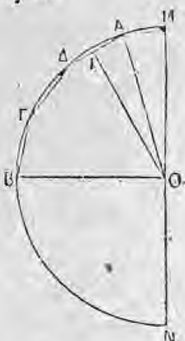
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πᾶς σφαιρικὸς τομεὺς ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ὕψ' ἥς περατοῦται ζώνης ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτίδος τῆς σφαίρας.

*Ἐστω ΑΟΒ ὁ κυκλικὸς τομεὺς, ὅστις περὶ τὸν ἀξόνα ΜΝ στρεφόμενος παράγει τὸν σφαιρικὸν τομέα.

*Ἄς ἐγγράψωμεν εἰς τὸ τόξον ΑΒ μέρος κανονικοῦ πολυγώνου ΑΔΓΒ, καὶ παραστήσωμεν δι' Ο τὸν ὑπὸ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως ΑΔΓΒΟ παραγόμενον ὅγκον. Κατὰ τὰ προαποδειχθέντα θέλομεν ἔχει,

$$O = \text{ἐπιφ. } \Delta\Gamma\text{Β} \cdot \frac{1}{3} \text{ΟΙ.}$$



*Ἀλλὰ τὸ τόξον ΑΒ εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ μέρος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΔΓΒ, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον. Ἀρα ὁ ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΟΒ παραγόμενος σφαιρικὸς τομεὺς εἶναι τὸ ὄριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ὑπὸ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως ΑΔΓΒΟ παραγόμενος ὅγκος Ο. Ἀλλὰ τὸ ὄριον τοῦ ὅγκου Ο εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὄριον τοῦ γινομένου ἐπιφ. ΑΔΓΒ $\times \frac{1}{3}$ ΟΙ, καὶ τὸ μὲν ὄριον τῆς ἐπιφ. ΑΔΓΒ εἶναι ἡ ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒ παραγομένη ζώνη, τὸ δὲ ὄριον τοῦ παράγοντος $\frac{1}{3}$ ΟΙ εἶναι $\frac{1}{3}$ ΟΜ. Ἀρα

$$\text{ὅγκ. σφαιρικοῦ τομέως} = \text{ζώνην } \text{ΑΒ} \times \frac{1}{3} \text{ΟΜ,}$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον 1. Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ παράγων τὸν σφαιρικὸν τομέα κυκλικὸς τομεὺς εἶναι ἴσος μὲ ἡμικύκλιον, ὃ ὑπ' αὐτοῦ παραγόμενος ὄγκος ἤθελεν εἶναι ὁ τῆς σφαίρας ὄγκος. Ἀλλὰ τότε ἡ ζώνη, ἡ τὸν σφαιρικὸν τομέα περατούσα, ἤθελεν εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Λοιπὸν ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτίνος.

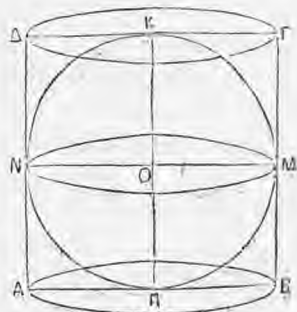
Σχόλιον 2. Ἐστω Ρ ἡ τῆς σφαίρας ἀκτίς καὶ Η τὸ ὕψος τῆς ζώνης, τῆς περατούσης τὸν σφαιρικὸν τομέα. Ἡ ζώνη ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον $2\pi P \cdot H$. Ὁ σφαιρικὸς λοιπὸν τομεὺς θέλει ἔχει διὰ μέτρον $2\pi P \cdot H \cdot \frac{1}{3} P$, ἢ $\frac{2}{3} \pi P^2 H$, ἡ δὲ σφαῖρα $4\pi P^2 \cdot \frac{1}{3} P$, ἢ $\frac{4}{3} \pi P^3$.

Ἐάν παραστήσωμεν διὰ Δ τὴν τῆς σφαίρας διάμετρον, θέλομεν ἔχει $P = \frac{\Delta}{2}$, ἐπομένως $P^3 = \frac{\Delta^3}{8}$, ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὴν παράστασιν $\frac{4}{3} \pi P^3$ ἀντὶ τοῦ P^3 τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{\Delta^3}{8}$ θέλομεν ἔχει διὰ μέτρον τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας $\frac{4}{3} \pi \frac{\Delta^3}{8}$ ἢ $\frac{1}{6} \pi \Delta^3$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς ὁλόκληρον τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κυλίνδρου (συμπεριλαμβανομένων ὀθ. καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων) ὡς 2 πρὸς 3. Οἱ ὄγκοι τῶν δύο τούτων σωμάτων ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους τὸν αὐτὸν λόγον.

1^{ον}. Ἐστω ΜΗΝΚ ὁ μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος καὶ ΑΒΓΔ τὸ περιγεγραμμένον εἰς αὐτὸν τετράγωνον. Ἐάν συγκρίνωμεν τὸ ἡμικύκλιον ΠΝΚ καὶ τὸ ἡμιτετράγωνον ΠΑΔΚ περιστραφῶσι περὶ τὴν διάμετρον ΠΚ, τὸ μὲν ἡμικύκλιον θέλει παραγάγει τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ ἡμιτετράγωνον τὸν περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν κύλινδρον.



Τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ κυλίνδρου εἶναι προφανῶς ἴσον μὲ τὴν διάμετρον ΠΚ, καὶ ἡ βάση αὐτοῦ εἶναι ἴση μὲ τὸν μέγιστον κύκλον ΠΝΚΜ, διότι ἔχει διάμετρον τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, καὶ

$AB=MN=PK$. Λοιπὸν ἡ κυρτὴ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ, τουτέστιν εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους, ὡς καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια (πρότ. 14, πρό. 2). Λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κυλίνδρου.

Ἄλλ' ἡ ὅλική τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας καὶ τῆς τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων, τουτέστιν εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἕξ μεγίστους κύκλους, ἐνῷ ἡ τῆς σφαίρας εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους. Λοιπὸν ὅλ. ἐπιφ. περιγ. κυλίνδρου : ἐπιφ. ἐγγεγ. σφαίρας $= 6 : 4 = 3 : 2$.

2^η. Τὸ μέτρον τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Λοιπὸν ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν κυλίνδρου ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ τὴν βάσιν αὐτοῦ ἀποτελοῦντος μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας. Ἄλλ' ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τεσσάρων μεγίστων κύκλων ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτίνος αὐτῆς (πρότ. 17, σχόλ. 1), ἢ ὅπερ ταῦτό, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὰ $\frac{4}{3}$ τῆς ἀκτίνος ἢ ἐπὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέτρου αὐτῆς. Λοιπὸν ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι πρὸς τὸν ὄγκον τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸν σφαίρας ὡς 1 πρὸς $\frac{2}{3}$, ἢ ὡς 3 πρὸς 2.

Σχόλιον. Ἐὰν φαντασθῶμεν πολυέδρον, οὗτινος ὅλαι αἱ ἑδραὶ ἐφάπτονται τῆς σφαίρας, τὸ εἰς τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον τοῦτο πολυέδρον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελούμενον ἐκ πυραμίδων, ἔχουσῶν κοινὴν κορυφὴν τὸ τῆς σφαίρας κέντρον καὶ βάσεις τὰς τοῦ πολυέδρου ἑδρας. Ἐκάστη τῶν πυραμίδων τούτων θέλει ἔχει ὕψος τὴν τῆς σφαίρας ἀκτῖνα (πρότ. 2, Ζ'), ἐπομένως διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἑδρας τοῦ πολυέδρου, ἣτις χρησιμεύει εἰς αὐτὴν ὡς βάσις, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτίνος τῆς σφαίρας. Λοιπὸν ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν πολυέδρου ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτίνος τῆς σφαίρας. Ἀλλὰ καὶ ὁ τῆς σφαίρας ὄγκος ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτίνος. Ἄρα ὁ ὄγκος παντὸς περιγεγραμμένου εἰς τινὰ σφαῖραν πολυέδρου εἶναι πρὸς τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας, ὡς ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Ἡ διὰ τὸν περιγεγραμμένον λοιπὸν κύ-

λινδρον προαποδειχθεῖσα ιδιότης εἶναι κοινὴ καὶ εἰς ἄπειρα ἄλλα σώματα.

Βλέπομεν πρὸς τούτοις ὅτι οἱ ὄγκοι δύο περιγεγραμμένων εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἢ εἰς ἴσας σφαίρας πολυέδρων εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν.

Παρομοίως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου εἰς κύκλον τινὰ πολυγώνου εἶναι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου, ὡ, ἡ περίμετρος αὐτοῦ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους περιγεγραμμένων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ περίμετροι αὐτῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19. ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ παραγόμενον στερεὸν ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος BMA περὶ τὴν ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένην διάμετρον AGZ ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ ἔκτου μέρους τοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν χορδὴν BA τοῦ τμήματος BMA , ἐπὶ τὴν προβολὴν EO τῆς χορδῆς BA ἐπὶ τοῦ ἄξονος AZ .

Διότι ἔχομεν προφανῶς

$$\text{ὄγκ. } BMA = \text{ὄγκ. } \Gamma AMB - \text{ὄγκ. } \Gamma AB.$$

$$\text{Ἄλλ' } \text{ὄγκ. } \Gamma AMB = \frac{2}{3} \pi \cdot \overline{GB}^2 \cdot EO,$$

$$\text{καὶ } \text{ὄγκ. } \Gamma AB = \frac{1}{3} \Gamma I \cdot \text{ἐπιφ. } BA,$$

$$\text{πρὸς τούτοις } \text{ἐπιφ. } BA = 2\pi \cdot \Gamma I \cdot EO.$$

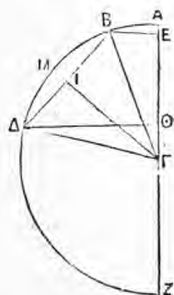
$$\begin{aligned} \text{Ἄρα } \text{ὄγκ. } BMA &= \frac{2}{3} \pi \cdot \overline{GB}^2 \cdot EO - \frac{1}{3} \Gamma I \cdot 2\pi \cdot \Gamma I \cdot EO \\ &= \frac{2}{3} \pi \cdot EO \times (\overline{GB}^2 - \overline{\Gamma I}^2). \end{aligned}$$

Ἄφ' ἑτέρου εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓIB ἔχομεν

$$\frac{\overline{GB}^2 - \overline{\Gamma I}^2}{\overline{GB} - \overline{\Gamma I}} = BI = \frac{\overline{AB}^2}{4}.$$

$$\text{Λοιπὸν ὄγκ. } BMA = \frac{2}{3} \pi \cdot EO \cdot \frac{\overline{BA}^2}{4} = \frac{1}{6} \pi \cdot \overline{BA}^2 \cdot EO.$$

Λοιπὸν τὸ παραγόμενον στερεὸν κτλ.

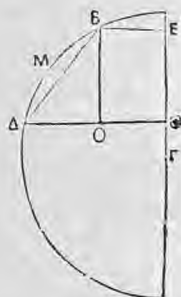


Ἐχέμεν. Τὸ ὑπὸ τοῦ τμήματος ΒΜΔ παραγόμενον στερεὸν εἶναι πρὸς τὴν σφαῖραν, τὴν ἔχουσαν διάμετρον τὴν χορδὴν ΒΔ, ὡς $\frac{1}{6}$ π. ΒΔ $\overline{ΕΘ}$ πρὸς $\frac{1}{6}$ π. ΒΔ, ἢ ὡς ΕΘ : ΒΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πᾶν τμήμα σφαίρας μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων περιχόμενον ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ ἡμισφαίριου αὐτοῦ πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους τῆς σφαίρας, τῆς ἔχουσας διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ τμήματος.

Ἐστώσαν ΒΕ καὶ ΔΘ αἱ τῶν βάσεων τοῦ τμήματος ἀκτῖνες καὶ ΕΘ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος σφαιρικὸν τμήμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παραγόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ χωρίου ΒΜΔΘΕ περὶ τὸν ἄξονα ΕΘ. Λοιπὸν



$$\delta\gamma\kappa. \text{ΒΜΔΕΘ} = \delta\gamma\kappa. \text{ΕΜΔ} + \delta\gamma\kappa. \text{ΒΔΘΕ}.$$

$$\text{Ἄλλ' } \delta\gamma\kappa. \text{ΒΜΔ} = \frac{1}{6} \pi. \text{ΒΔ. } \overline{ΕΘ},$$

$$\text{καὶ } \delta\gamma\kappa. \text{ΒΔΘΕ} = \frac{1}{3} \pi. \text{ΕΘ} \times (\overline{ΒΕ} + \overline{ΔΘ} + \overline{ΒΕ. ΔΘ}).$$

$$\text{Ἄρα } \delta\gamma\kappa. \text{ΒΜΔΕΘ} = \frac{1}{6} \pi. \text{ΕΘ} \times (\overline{2ΒΕ} + \overline{2ΔΘ} + \overline{2ΒΕ. ΔΘ} + \overline{ΒΔ}). \quad (1)$$

Ἄλλ', ἐὰν ᾄζωμεν τὴν ΒΟ παράλληλον τῇ ΕΘ, θέλομεν ἔχει

$$\Delta\Theta = \Delta\Theta - \text{ΒΕ καὶ } \overline{\Delta\Theta} = \overline{\Delta\Theta} + \overline{ΒΕ} - \overline{2\Delta\Theta \times \text{ΒΕ}},$$

$$\text{ἔπομένως } \overline{ΒΔ} = \overline{ΒΟ} + \overline{\Delta\Theta} = \overline{ΕΘ} + \overline{\Delta\Theta} + \overline{ΒΕ} - \overline{2ΒΕ \times \Delta\Theta}.$$

Ἀντικαθίστατες εἰς τὴν ἰσότητά (1) ἀντὶ τοῦ ΒΔ τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν αὐτοῦ τιμὴν καὶ ἀπλοποιοῦντες, θέλομεν ἔχει

$$\delta\gamma\kappa. \text{ΒΜΔΕΘ} = \frac{1}{6} \pi. \text{ΕΘ} (\overline{3ΒΕ} + \overline{3\Delta\Theta} + \overline{ΕΘ}),$$

$$\text{ἢ, ὅπερ ταυτό, } \delta\gamma\kappa. \text{ΒΜΔΕΘ} = \frac{1}{6} \pi. \text{ΕΘ} + \text{ΕΘ} \times \left(\frac{\pi. \overline{ΒΕ} + \pi. \overline{\Delta\Theta}}{2} \right).$$

Λοιπὸν πᾶν τμήμα σφαίρας μεταξὺ δύο παραλλήλων κτλ.

Πόρισμα. Ἄν ἡ μία τῶν βάσεων αὐτοῦ ᾗτο μηδέν, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος σφαιρικὸν τμήμα ᾗθελεν ἔχει μίαν μόνην βάσιν. Λοιπὸν πᾶν τμήμα σφαίρας, μίαν μόνην ἔχον βάσιν, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τῆς σφαίρας, τῆς ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ τμήματος.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΟΓΔΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΤΟΥ Δ' ΒΙΒΛΙΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. *Μέγιστον* καλεῖται τὸ ποσὸν ἢ μέγεθος, τὸ παντὸς ἄλλου τοῦ αὐτοῦ εἶδους μεγαλειότερον, *ἐλάχιστον* δὲ τὸ μικρότερον. Οὕτω π.χ. ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος εἶναι μεγαλειτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, τὰς ἐκ τῆς ἐκείνης δύο ὁποιαδήποτε σημεία τῆς περιφέρειας, ἡ δὲ ἐκ τινος σημείου ἐπὶ τινος δεδομένης εὐθείας καταβιβαζομένη κάθετος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, τὰς ἐκείνης δύο ὁποιαδήποτε σημείων τῆς δεδομένης εὐθείας. Ἡ τοῦ κύκλου λοιπὸν διάμετρος εἶναι τι μέγιστον, ἡ δ' ἐκ τινος σημείου ἐπὶ τινος εὐθείας καταβιβαζομένη κάθετος ἐλάχιστον.

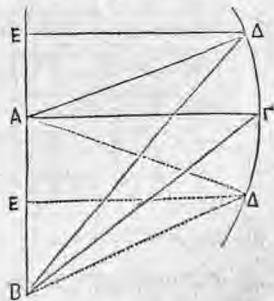
2. *Ἰσοπερίμετρα σχήματα* ὀνομάζονται τὰ ἴσας περιμέτρους ἔχοντα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐξ ὅλων τῶν σχηματιζομένων τριγώνων μετὰ δύο δεδομένας πλευρὰς καὶ τρίτην κατ' ἀρέσκειαν λαμβανομένην μέγιστον εἶναι ἐκεῖνο, ἐν ᾧ αἱ δεδομέναι πλευραὶ σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἐστῶσαν ΒΑΓ καὶ ΒΑΔ δύο τρίγωνα ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινὴν καὶ τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΔ ἴσας. Ἐὰν ἡ γωνία ΒΑΓ ᾖ ὀρθή, λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι μεγαλειότερον τοῦ τριγώνου ΒΑΔ, οὗτινος ἡ ἔχουσα κορυφὴν τὸ σημεῖον Α γωνία εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεία.

Διότι τὰ τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ ἔχοντα τρίγωνα ΒΑΓ καὶ ΒΑΔ εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν ΑΓ καὶ ΑΔ.



Ἄλλ' ἡ κάθετος ΔΕ εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας ΑΔ, ἢ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΓ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΑΓ. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΑΓ, τὸ ἔχον τὴν γωνίαν Α, τὴν ὑπὸ τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ σχηματιζομένην, ὀρθήν, εἶναι μέγιστον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ

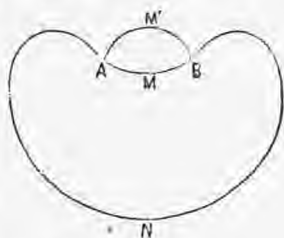
Ἐξ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων ὁ κύκλος εἶναι μεγαλύτεροι.

1^η. Ἐν πρώτοις εἶναι φανερόν ὅτι ὑπάρχουσιν ἄπειρα ἰσοπερίμετρα σχήματα διαφόρων μορφῶν καὶ ἐμβαδῶν, καὶ ὅτι τὰ ἐμβαδὰ ταῦτα δὲν δύνανται νὰ αὐξάνωσιν ἐπ' ἄπειρον.

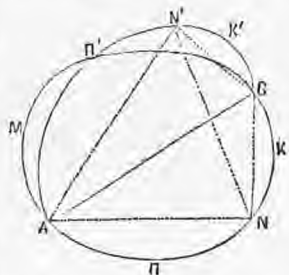
Μεταξὺ λοιπὸν τῶν σχημάτων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν περίμετρον, ὑπάρχουσιν ἓν ἢ πλείοτερα μέγιστα.

2^η. Πᾶν μέγιστον σχῆμα δεδομένης περιμέτρου εἶναι κυρτόν.

Διότι ἔστω ΑΜΒΝ κεκλεισμένη τις γραμμὴ μὴ κυρτή. Ἐάν στρέψωμεν τὸ εἰσέχον μέρος ΑΜΒ περὶ τὴν διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β διερχομένην εὐθεῖαν μέχρις οὗ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΜΒ, συμμετρικὴν τῆς ΑΜΒ, τὸ σχῆμα ΑΜ'ΒΝ θέλει ἔχει τὴν αὐτὴν περίμετρον μὲ τὸ πρῶτον, τὸ δ' ἐμβαδὸν αὐτοῦ θέλει εἶναι προφανῶς μεγαλειότερον τοῦ ΑΜΒΝ.



3^η. Ἐστω ΑΜΒΝ μέγιστον τι σχῆμα δεδομένης περιμέτρου. Λέγω ὅτι πᾶσα εὐθεῖα ΑΒ, διαιροῦσα τὴν περίμετρον αὐτοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη, διαιρεῖ ὡσαύτως καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα. Διότι, ἂν τὸ μέρος ΑΝΒ ᾖτο μεγαλειότερον τοῦ ΑΜΒ, τὸ σχῆμα ΑΝ'ΒΝΠ, τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τοῦ σχήματος ΑΝΒ καὶ τοῦ συμμετρικοῦ αὐτοῦ ΑΝ'Β, ἥθελεν ἔχει τὴν αὐτὴν μὲ τὸ ΑΜΒΝ περίμετρον καὶ ἐμβαδὸν μεγαλειότερον. Λοιπὸν ΑΜΒΝ δὲν ἥθελεν εἶναι μέγιστον. Λοιπὸν πᾶσα εὐθεῖα ΑΒ, διαιροῦσα τὴν περίμετρον κτλ. Ἐντεῦθεν ἔπεται πρὸς τούτοις ὅτι, ἔάν ΑΜΒΝ ᾖναι μέγιστον, ΑΝ'ΒΝ θέλει εἶναι ὡσαύτως μέγιστον.



Ἐστω τώρα Ν' τὸ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ συμμετρικὸν τοῦ σημείου Ν σημείον. Εἶναι φανερόν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΝ'Β καὶ ΑΝΒ θέλουσιν εἶναι ἴσα.

αὐτοῦ δὲ τεθέντος, ἐὰν αἱ γωνίαι $\Delta N B$ καὶ $\Delta N B$ δὲν ᾖναι ὀρθαί, ἀνάμειθα ν' αὐξήσωμεν ταῦτοχρόνως τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων $\Delta N B$ καὶ $\Delta N' B$, χωρὶς νὰ μεταβάλλωμεν τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν αὐτῶν $N B, B N, \Delta N'$ καὶ $B N'$, οὔτε τὸ τῶν τμημάτων $\Delta P N, \Delta P' N', B K N, K' N'$ μεταβάλλοντες τὴν κοινὴν αὐτῶν βάσιν ΔB οὕτως, ὥστε αἱ $\Delta N B, \Delta N' B$ νὰ κατασταθῶσιν ὀρθαί. Ἀλλὰ τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος θέλει αὐξήσῃ χωρὶς ἡ περίμετρος αὐτοῦ νὰ μεταβῇ, τοῦθ' ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν αἱ γωνίαι N καὶ N' εἶναι ὀρθαί. Ἀλλ' ἂρ' ἐτέρου τὸ σημεῖον N ἐλήφθη κατ' ἀρέσκειαν ἐπὶ τῆς καμπύλης $\Delta P B$. Λοιπὸν ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι ἡμιπερίφεια, ἐπομένως ἡ ὅλη καμπύλη $\Delta N' B N'$ θέλει εἶναι περιφέρεια κύκλου. Λοιπὸν ἐξ ὧν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ

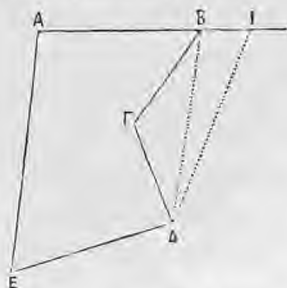
Ἐξ ὁλῶν τῶν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν ἔχόντων ἐπιπέδων σχημάτων κύκλος ἔχει τὴν μικροτέραν περίμετρον.

Διότι, ἂν ἡ περίμετρος σχήματός τινος, οὔτενος τὸ ἐμβαδὸν A εἶναι ἴσον μὲ τὸ τοῦ κύκλου, ἤτοι μικροτέρα τῆς τοῦ κύκλου, ἡδυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν αὐτὴν εἰς περιφέρειαν κύκλου, καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ B ἤθελεν εἶναι τότε κατὰ τὰ προαποδειχθέντα μεγαλύτερον τοῦ A . Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ δευτέρου τούτου κύκλου ἤθελεν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πρώτου, ἢ δὲ περίμετρος αὐτοῦ μικροτέρα τῆς τοῦ πρώτου, ὅπερ ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΛΗΜΜΑ

Ἦν πολύγωνον $ABΓΔΕ$, ἔχον μίαν εἰσέχουσαν γωνίαν, δύναιται νὰ μεταβληθῇ εἰς κυρτὸν πολύγωνον, ἔχον τὴν αὐτὴν περίμετρον, μεγαλύτεραν ἐπιφάνειαν καὶ μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον.

Διότι, ἐὰν προεκβάλωμεν τὴν AB καὶ ἐνώσωμεν ὅλα τὰ σημεῖα τῆς προεκβολῆς ταύτης μετὰ τοῦ σημείου Δ , τὸ ἄθροισμα $BI + ID$, κατ' ἀρχὰς ἴσον μὲ τὴν BA , θέλει αὐξάνεσθαι βαθμηδὸν μέχρι τοῦ ἀπείρου. Ὑπάρχει λοιπὸν σημείον τι I τοιοῦτον, ὥστε $BI + ID = BG + ΓΔ$. Τὸ πολύγωνον λοιπὸν $ABIDΕ$ εἶναι προφανῶς μεγαλύτερον τοῦ $ABΓΔΕ$, ἔχει τὴν αὐτὴν περίμετρον καὶ μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον. Λοιπὸν κτλ.

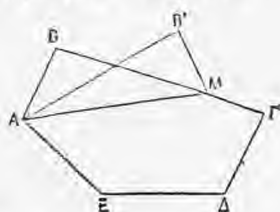


ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐξ ὅλων τῶν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων τὸ κατ'οικὸν πολύγωνον εἶναι τὸ μεγαλειότερον.

Ἐπειδὴ πᾶν κανονικὸν πολύγωνον ἔχει τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ἴσας, ἀρκεῖ πρὸς ἀποδείξιν τοῦ θεωρήματος ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν πολυγώνον τι δὲν ἔχῃ ὅλας αὐτοῦ τὰς πλευρὰς καὶ ὅλας αὐτοῦ τὰς γωνίας ἴσας, δὲν δύναται νὰ ᾖναι μέγιστον μεταξὺ τῶν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων.

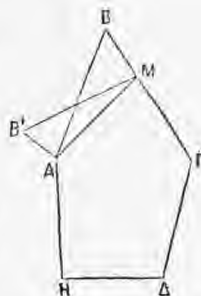
1^η. Ἐστω μὲν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου $ΑΒΓΔΕ$, καὶ ἄς ὑποθέσωμεν $ΑΒ < ΒΓ$. Ἄς λάβωμεν ἐπὶ τῆς $ΒΓ$ σημείον τι $Μ$ ἀρκετὰ πλησίον τοῦ σημείου $Γ$, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἀκόμη ἡ ἀνισότης $ΑΒ < ΒΜ$, ἄς κατασκευάσωμεν τὴν γωνίαν $ΑΜΒ' = ΒΑΜ$, ἄς λάβωμεν $ΜΒ' = ΑΒ$ καὶ ἄς ἄξωμεν τὴν $ΑΒ'$.



Τὸ τρίγωνον $ΑΒΜ$ εἶναι προφανῶς ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον $ΑΒ'Μ$. Τὸ πολύγωνον λοιπὸν $ΑΒ'ΜΓΔΕ$ ἔχει τὸ αὐτὸ μὲ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ ἐμβαδόν, τὴν αὐτὴν περίμετρον, μίαν πλευρὰν περισσότερον καὶ μίαν γωνίαν εἰσέχουσαν· διότι, ἐπειδὴ ἡ $ΑΒ$ εἶναι μικροτέρα τῆς $ΒΜ$, ἡ γωνία $ΒΜΑ$ εἶναι μικροτέρα τῆς $ΒΑΜ$ ἢ τῆς ἴσης αὐτῇ $Β'ΜΑ$. Ἀλλὰ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα τὸ πολύγωνον τοῦτο δύναται νὰ μεταβληθῇ εἰς ἕτερον ἰσοπερίμετρον πολύγωνον μὲ ἀριθμὸν πλευρῶν καὶ μεγαλειτέρας ἐπιφανείας. Λοιπὸν τὸ πολύγωνον $ΑΒΓΔΕ$ διὰ νὰ ᾖναι μέγιστον πρέπει 1^η νὰ ἔχῃ ὅλας αὐτοῦ τὰς πλευρὰς ἴσας.

2^η. Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι εἰς τὸ μὲν πλευρὰς ἔχον πολύγωνον $ΑΒΓΔΗ$ ἡ γωνία $Α$ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς $Β$, καὶ ἄς λάβωμεν σημείον τι $Μ$ ἀρκετὰ πλησίον τοῦ σημείου $Β$, ὥστε ἡ γωνία $ΜΑΗ$ νὰ ᾖναι μεγαλειτέρα τῆς $ΑΜΓ$.

Ἐὰν κατασκευάσωμεν ὡσαύτως τὴν γωνίαν $ΜΑΒ' = ΑΜΒ$, λάβωμεν $ΑΒ' = ΑΒ$ καὶ ἄξωμεν τὴν $Β'Μ$, τὸ τρίγωνον $ΑΒΜ$ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ $ΑΒ'Μ$. Τὸ πολύγωνον λοιπὸν $ΑΒ'ΜΓΔΗ$ ἔχει τὴν αὐτὴν μὲ τὸ πολύγωνον $ΑΒΜΓΔΗ$ ἐπιφανείαν, τὴν αὐτὴν περίμετρον, μίαν πλευρὰν περισσότερον καὶ μίαν γωνίαν εἰσέχουσαν· διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $ΑΜΓ$ καὶ $ΑΜΒ$ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν



ΜΑΗ καὶ ΜΑΒ' θέλει ἀναγκαίως εἶναι μεγαλειότερον δύο ὀρθῶν, διότι ἡ γωνία ΑΜΗ ὑπετέθη μεγαλειτέρα τῆς ΑΜΓ.

Ἀλλὰ τὸ πολύγωνον τοῦτο δύναται νὰ μεταβληθῇ εἰς ἕτερον ἰσοπερίμετρον πολύγωνον, ἔχον μ. πλευρὰς καὶ μεγαλειτέραν ἐπιφανείαν. Λοιπὸν διὰ νὰ ᾖναι μέγιστον τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΗ πρέπει 2^{ον} νὰ ἔχη ὅλας αὐτοῦ τὰς γωνίας ἴσας.

Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι ἐξ ὅλων τῶν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων τὸ κανονικὸν πολύγωνον εἶναι τὸ μεγαλειότερον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ

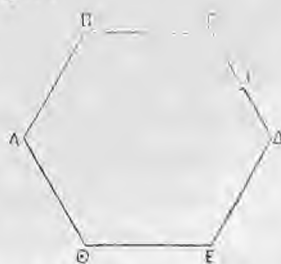
Ἐξ ὅλων τῶν πολυγώνων, τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, τὸ κανονικὸν πολύγωνον ἔχει τὴν μικροτέραν περίμετρον.

Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι πολύγωνόν τι, ἔχον μ. πλευρὰς καὶ ἐμβαδὸν Α, ἔχει μικροτέραν περίμετρον τῆς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν, δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν αὐτὸ εἰς ἰσοπερίμετρον κανονικὸν πολύγωνον μ. πλευρῶν, καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ Β ᾗθελεν εἶναι, κατὰ τὰ προαποδείχθέντα, μεγαλειότερον τοῦ Α. Τὸ δεύτερον λοιπὸν τοῦτο κανονικὸν πολύγωνον ᾗθελεν ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν μὲ τὸ πρῶτον, μικροτέραν περίμετρον καὶ ἐμβαδὸν μεγαλειότερον, ὅπερ ἄτοπον. Λοιπὸν ἐξ ὅλων τῶν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν ἐχόντων πολυγώνων τὸ κανονικὸν πολύγωνον ἔχει τὴν μικροτέραν περίμετρον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐκ δύο κανονικῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων τὸ ἔχον μεγαλειότερον ἀριθμὸν πλευρῶν εἶναι μεγαλειότερον.

Ἐστω ΑΒΓΔΕΘ κανονικόν τι ἐξάγωνον. Ἐὰν λάβωμεν σημείον τι Ι ἐπὶ μιᾷς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ κανονικὸν τοῦτο ἐξάγωνον ὡς ἐπτάπλευρον πολύγωνον, ἐν ᾧ αἱ πλευραὶ ΙΓ καὶ ΙΔ σχηματίζουσι δύο γωνίας ὀρθάς. Ἀλλὰ τὸ μὴ κανονικὸν τοῦτο ἐπτάγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ ἰσοπεριμέτρου κανονικοῦ ἐπταγώνου



(πρότ. 6). Λοιπὸν τὸ κανονικὸν ἑπτάγωνον, τὸ ἰσοπερίμετρον τῶ κανονικῷ ἑξαγώνῳ, εἶναι μεγαλείτερον. Λοιπὸν ἐκ δύο ἰσοπεριμέτρων κανονικῶν πολυγώνων τὸ ἔχον μεγαλείτερον ἀριθμὸν πλευρῶν εἶναι μεγαλείτερον.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΤΟΥ ΣΤ' ΚΑΙ Ζ' ΒΙΒΛΙΟΥ

ΠΕΡΙ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πέντε μόνον κανονικά πολυέδρα δυνατόν νά ἐπάρξωσι.

Διότι κανονικά πολυέδρα ὠνομάσαμεν ἐκεῖνα, ὧν ὅλαι αἱ ἔδραι εἶναι κανονικά ἔτα πολύγωνα καὶ ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Ἄλλ' αἱ συνθῆκαι αὗται εἰς τινας μόνον περιπτώσεις δυνατόν νά ἐκπληρωθῶσι.

1^η. Ἐάν αἱ ἔδραι ᾗναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἐκάστη στερεὰ γωνία τοῦ πολυέδρου δυνατόν νά σχηματισθῇ μὲ τρεῖς, ἢ μὲ τέσσαρας ἢ μὲ πέντε γωνίας τῶν ἰσοπλεύρων τούτων τριγώνων. Ἐντεῦθεν προκύπτουσι τρία κανονικά πολυέδρα, ταῦτα δὲ εἶναι τὸ τετράεδρον, τὸ ὀκτάεδρον καὶ τὸ εἰκοσάεδρον. Δὲν δυνάμεθα δὲ νά σχηματίσωμεν πλείότερα κανονικά πολυέδρα μὲ ἰσόπλευρα τρίγωνα, διότι δύο ἐπίπεδοι γωνίαι δὲν σχηματίζουνσι στερεὰν γωνίαν, καὶ ἕξ γωνίαι ἰσοπλεύρων τριγώνων ἰσοδυναμοῦσι μὲ τέσσαρας ὀρθάς, ἐπομένως δὲν δύνανται νά σχηματίσωσι στερεὰν γωνίαν (πρότ. 38, Ε').

2^η. Ἐάν αἱ ἔδραι ᾗναι τετράγωνα, ἐκάστη στερεὰ γωνία τοῦ πολυέδρου δύναται νά σχηματισθῇ μὲ τρεῖς ἐπίπεδους γωνίας τετραγώνων· ἐντεῦθεν προκύπτει τὸ κανονικὸν ἑξάεδρον ἢ ὁ κύβος. Τέσσαρες γωνίαι τῶν τετραγώνων ἰσοδυναμοῦσι μὲ τέσσαρας ὀρθάς, ἐπομένως δὲν δύνανται ν' ἀποτελέσωσι στερεὰν γωνίαν.

3^η. Τελευταῖον, ἐάν αἱ ἔδραι ᾗναι κανονικά πεντάγωνα, ἐκάστη στερεὰ γωνία τοῦ πολυέδρου δύναται νά σχηματισθῇ μὲ τρεῖς γωνίας τῶν πενταγώνων τούτων· ἐντεῦθεν προκύπτει τὸ κανονικὸν δωδεκάεδ-

δρου. Τέσσαρες γωνίαι τῶν κανονικῶν πενταγώνων ἰσοδυναμοῦσι μὲ $4 \times \frac{6}{5}$ τῆς ὀρθῆς, ἤτοι μὲ 4 ὀρθὰς πλέον $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς, ἐπομένως δὲν δύνανται ν' ἀποτελέσωσι στερεὰν γωνίαν.

Δὲν δυνάμεθα νὰ προβῶμεν περαιτέρω, διότι τρεῖς γωνίαι κανονικῶν ἐξαγώνων ἰσοδυναμοῦσι μὲ 4 ὀρθὰς, τρεῖς δὲ κανονικῶν ἑπταγώνων μὲ ἑπὶ περισσοτέρας.

Λοιπὸν πέντε μόνον κανονικὰ πολύεδρα δυνατόν νὰ ὑπάρξωσι, τρία ἀποτελούμενα ἐξ ἰσοπλεύρων τριγώνων, ἔν ἐξ ἴσων τετραγώνων καὶ ἔν ἐξ ἴσων κανονικῶν πενταγώνων.

Σχόλιον. Ἐν τῇ ἐπομένῃ προτάσει θέλομεν ἀποδείξει ὅτι τὰ πέντε ταῦτα κανονικὰ πολύεδρα ὑπάρχουσι πραγματικῶς, καὶ ὅτι δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ὅλας αὐτῶν τὰς διαστάσεις, ὅταν γνωρίζωμεν μίαν μόνην ἑδραν αὐτῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ

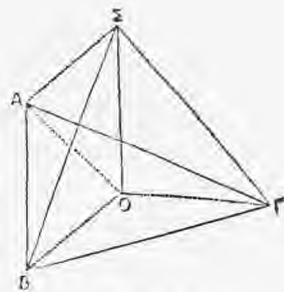
Λεγόμενης μιᾶς τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ τινος πολυέδρου ἢ μόνου τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, νὰ κατασκευάσωμεν τὸ πολυέδρον.

Ἐπειδὴ ὑπάρχουσι πέντε κανονικὰ πολύεδρα, πέντε λύσεις ἐπιδέχεται τὸ γενικὸν τοῦτο πρόβλημα, τὰς ἐξῆς.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΥ.

Ἐστω $\triangle AB\Gamma$ τὸ δεδομένον ἰσόπλευρον τρίγωνον, ὅπερ πρόκειται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ἑδρα τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου.

Εἰς τὸ σημεῖον O , κέντρον τοῦ τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, ὑψόνομεν τὴν OS κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\triangle AB\Gamma$, προσεκβάλλομεν αὐτὴν μέχρι τοῦ σημείου Σ εἰς τρόπον ὥστε $\Sigma A = AB$, καὶ ἐνόνομεν ΣB καὶ $\Sigma \Gamma$. Λέγω ὅτι ἡ οὕτω σχηματιζομένη πυραμὶς $\Sigma AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν τετραέδρον.

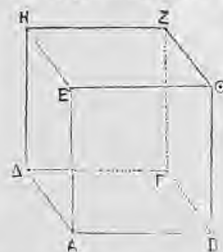


Διότι, ἔνεκα τῶν ἴσων ἀποστάσεων OA , OB καὶ OG , αἱ πλάγιαί ΣA , ΣB καὶ $\Sigma \Gamma$ εἶναι ἴσαι (πρότ. 6, Ε'). Ἀλλ' ἡ μία τούτων, ἡ ΣA , ἐλήφθη ἴση μὲ τὴν AB . Ἄρα αἱ τέσσαρες τῆς πυραμίδος $\Sigma AB\Gamma$ ἑδραὶ εἶναι τρίγωνα ἴσα μὲ τὸ δεδομένον $\triangle AB\Gamma$. Ἀρ' ἑτέρου αἱ στερεαὶ γωνίαι τῆς πυραμίδος αὐτῆς εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, διότι ἕκαστη τούτων ἀποτελεῖται

ἐκ τριῶν ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν. Λοιπὸν ἡ πυραμὶς αὕτη εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν τετράεδρον.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΕΞΑΕΔΡΟΥ

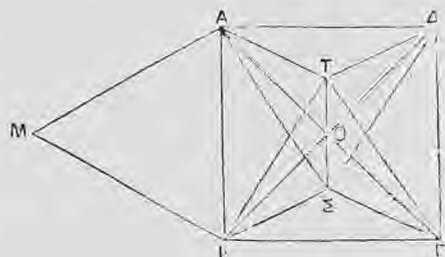
*Εστω $ΑΒΓΔ$ τὸ δεδομένον τετράγωνον. Ἐάν ἐπὶ τῆς βάσεως $ΑΒΓΔ$ κατασκευάσωμεν ὀρθὸν πρίσμα, ἔχον ὕψος $ΑΕ$ ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν $ΑΒ$ τοῦ δεδομένου τετραγώνου, λέγω ὅτι τὸ ὀρθὸν τοῦτο πρίσμα θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν ἑξάεδρον.



Διότι εἶναι φανερόν ὅτι ὅλαι αἱ ἑδραι αὐτοῦ εἶναι τετράγωνα ἴσα καὶ ὅλαι αἱ στερεαὶ αὐτοῦ γωνίαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὥς αποτελούμεναι ἐκ τριῶν ὀρθῶν γωνιῶν. Λοιπὸν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πρίσμα εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν ἑξάεδρον, ὅπερ ἐκαλέσαμεν καὶ κύβον.

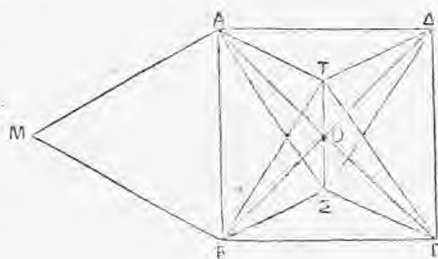
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΟΚΤΑΕΔΡΟΥ

*Εστω $ΔΜΒ$ τὸ δεδομένον ἰσόπλευρον τρίγωνον. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $ΑΒ$ κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον $ΑΒΓΔ$ · εἰς τὸ σημεῖον $Ο$, κέντρον τοῦ τετραγώνου τούτου, ὑψόνομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ τὴν κάθετον $ΣΤ$, καὶ προεκβάλλομεν αὐτὴν ἐκατέρωθεν μέχρι τῶν σημείων $Τ$ καὶ $Σ$ εἰς τρόπον ὥστε $ΤΟ=ΣΟ=ΑΟ$. Ἐάν μετὰ ταῦτα ἄξωμεν τὰς εὐθείας $ΣΑ$, $ΣΒ$, $ΣΓ$, $ΣΔ$, $ΤΑ$, $ΤΒ$, κτλ., θέλομεν οὕτω σχηματίσει στερεὸν τι $ΣΑΒΓΔΤ$, συντιθέμενον ἐκ δύο τετραγωνικῶν πυραμίδων $ΣΑΒΓΔ$, $ΤΑΒΓΔ$, ἔχουσῶν τὴν αὐτὴν βάσιν $ΑΒΓΔ$. Λέγω δὲ ὅτι τὸ στερεὸν τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν ὀκτάεδρον.



Διότι, ἐπεὶ δὲ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $ΑΟΣ$ καὶ $ΑΟΔ$ εἶναι ἴσα, ὥς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην ($ΑΟΔ=ΑΟΣ=1^{\circ}$) περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων ($ΑΟ=ΟΔ=ΟΣ$), ἡ πλευρὰ $ΑΣ$ εἶναι ἴση μὲ τὴν $ΑΔ$ ἢ $ΑΒ$. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $ΑΟΤ$, $ΒΟΣ$, $ΓΟΤ$, κτλ. εἶναι ἴσα μὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΑΟΔ$. Λοιπὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ $ΑΒ$, $ΑΣ$, $ΒΣ$, $ΑΤ$, $ΒΤ$, κτλ. εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ἐπομένως τὸ στερεὸν $ΣΑΒΓΔΤ$ περατοῦται ὑπὸ ὁμοίων

ἰσοπλεύρων τριγώνων, ἴσων μὲ τὸ δεδομένον ΛMB . Λέγω πρὸς τοῦτοις ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι τοῦ πολυέδρου τούτου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, παραδείγμα-
τος χάριν, ἡ στερεὰ γωνία Σ εἶναι ἴση μὲ τὴν B .



Διότι, ἐπειδὴ προφανῶς τὸ τρίγωνον $\Sigma\Delta\Gamma$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον $\Delta\Lambda\Gamma$, ἡ γωνία $\Lambda\Sigma\Gamma$ εἶναι ὀρθή, καὶ ἐπομένως τὸ σχῆμα $\Sigma\Lambda\Gamma\Gamma$ εἶναι τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$. Τούτου τεθέντος, ἐὰν παρατάλλωμεν τὰς δύο τετραγωνικὰς πυραμίδας $\Sigma\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$ καὶ $\text{B}\Lambda\Sigma\Gamma\Delta$, ἡ βάσις $\Lambda\Sigma\Gamma\Gamma$ τῆς δευτέρας δύναται νὰ ἐπιτεθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$ βάσεως τῆς πρώτης, καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον O εἶναι κοινὸν κέντρον τῶν δύο βάσεων $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$ καὶ $\Lambda\Sigma\Gamma\Gamma$, τὸ ὕψος OB τῆς δευτέρας θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ ὕψους OS τῆς πρώτης, καὶ ἐπειδὴ $\text{OB} = \text{OS}$, τὸ σημεῖον B θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ σημείου Σ . Λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες θέλουσι ταυτίσθῃ. Ἄρα ἡ στερεὰ γωνία B εἶναι ἴση μὲ τὴν Σ . Λοιπὸν τὸ στερεὸν $\Sigma\Lambda\text{B}\Gamma\Delta\Gamma$ εἶναι κανονικὸν ὀκτάεδρον.

Σχῆμα. Ἐὰν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι $\Lambda\Gamma$, $\text{B}\Delta$ καὶ $\Sigma\Gamma$ ᾖναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλων καὶ τέμνονται εἰς τὸ μέσον αὐτῶν, τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων θέλουσιν εἶναι αἱ κορυφαὶ κανονικοῦ τινος ὀκταέδρου.

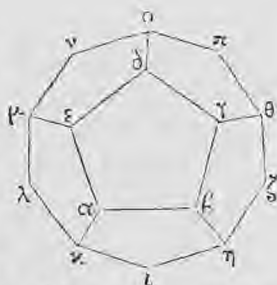
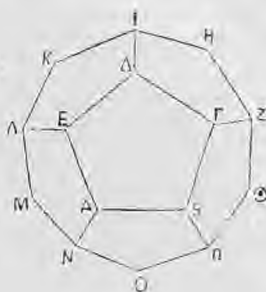
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ὈΚΤΑΕΔΡΟΥ

Ἐστω $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta\text{E}$ τὸ δεδομένον κανονικὸν πεντάγωνον· ἔστωσαν προσ-
έτι $\Lambda\text{B}\Pi$ καὶ $\Gamma\text{B}\Pi$, δύο ἐπίπεδοι γωνίαι ἴσαι μὲ τὴν γωνίαν $\Lambda\text{B}\Gamma$. Μὲ
τὰς τρεῖς ταύτας ἐπιπέδους γωνίας ὥς σχηματίζωμεν τὴν στερεὰν γω-
νίαν B , καὶ ἔστω K ἡ ἀμοιβαία κλίσις δύο τῶν ἐπιπέδων τούτων, ἢ,
ὅπερ ταυτό, τὸ μέτρον μιᾶς τῶν διέδρων γωνιῶν $\Lambda\text{B}\Pi\Gamma$, $\Pi\text{B}\Gamma\Delta$ καὶ
 $\Gamma\text{B}\Lambda\Pi$. Ἄς σχηματίζωμεν ὡσαύτως εἰς τὰ σημεῖα Γ , Δ , E καὶ Λ στε-
ρεὰς γωνίας ἴσας μὲ τὴν στερεὰν γωνίαν B καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ
ἐπιπέδου $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta\text{E}$ κειμένας, πρὸς ὃ καὶ ἡ B . Ἐπειδὴ αἱ διέδροι γωνίαι
 $\Pi\text{B}\Gamma\Delta$ καὶ $\text{Z}\Gamma\text{B}\Delta$ εἶναι ἴσαι, τὰ δύο ἐπίπεδα $\Gamma\text{B}\Pi$ καὶ $\text{B}\Gamma\text{Z}$ ἀποτελοῦσιν
ἐν καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Δυνάμεθα λοιπὸν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Pi\text{B}\Gamma\text{Z}$ νὰ
κατασκευάσωμεν τὸ πεντάγωνον $\text{B}\Gamma\text{Z}\Theta\text{H}$ ἴσον μὲ τὸ δεδομένον $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta\text{E}$.
Ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων $\text{Z}\Gamma\Delta$, $\text{I}\Delta\text{E}$, κτλ. κατασκευάσωμεν πεν-

τάγωνα ἴσα μὲ τὸ δεδομένον $\Delta\text{ΒΓΔΕ}$, θέλομεν σχηματίσει οὕτω κυρτὴν
τινα ἐπιφάνειαν $\Pi\Theta\text{ΖΗΚ}...$ $\Delta\text{ΒΓΔΕ}$ συνι-
σταμένην ἐξ ἐξ ἴσων κανονικῶν πενταγώ-
νων, ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν Κ .

Ἐστω πρὸς τούτοις $\Pi\Theta\text{ΖΗΚ}...$ αὖθις
δευτέρα τις ἐπιφάνεια ἴση μὲ τὴν $\Pi\Theta\text{ΖΗΚ}...$
 $\Delta\text{ΒΓΔΕ}$. Λέγω ὅτι αἱ δύο αὗται ἐπιφά-
νεια δύνανται νὰ ἐνωθῶσιν εἰς τρόπον
ὥστε ν' ἀποτελέσωσι μίαν μόνην κυρτὴν
καὶ συνεχῆ ἐπιφάνειαν.

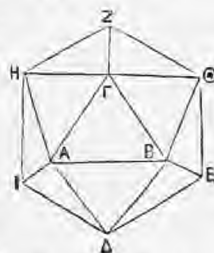
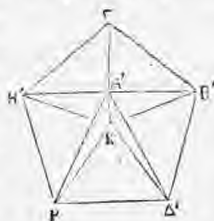
Διότι ἡ γωνία $\sigma\theta$, παραδείγματος χά-
ριν, δύνανται νὰ ἐνωθῇ μετὰ τῶν δύο ἐπι-
πέδων γωνιῶν ΟΠΒ καὶ ΒΠΘ καὶ ν' ἀποτε-
λέσῃ στερεάν τινα γωνίαν Π ἴσην μὲ τὴν
 Β , ἡ δὲ τοιαύτη ἔνωσις οὐδ' ὅλως μετα-
βάλλει τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν τῶν δύο ἐπι-
πέδων ΒΠΘ καὶ ΒΠΟ , διότι τὰ δύο ταῦτα
ἐπίπεδα ἔχουσι τὴν ἀπαιτουμένην ἀμοιβαίαν κλίσιν πρὸς σχηματι-
σμὸν τῆς στερεᾶς γωνίας. Ἀλλ' ἐνθ' ἡ στερεὰ γωνία Π σχηματίζεται,
ἡ πλευρὰ $\pi\theta$ θέλει ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ $\Pi\Theta$, εἰς δὲ τὸ σημεῖον
 Θ θέλουσι συνέλθει τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι $\Pi\Theta\text{Ζ}$, $\pi\theta\gamma$ καὶ $\gamma\theta\zeta$, αἵτινες
θέλουσι σχηματίσει στερεάν τινα γωνίαν ἴσην μὲ ἐκάστην τῶν ἤδη σχη-
ματισμένων, καὶ εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἔνωσις αὕτη δὲν θέλει μεταβάλλει
ποσῶς οὔτε τὴν γωνίαν Π οὔτε τὴν ἐπιφάνειαν $\gamma\theta\zeta\eta\kappa\tau\lambda$, διότι τὰ ἤδη
ἐνωθέντα εἰς τὸ σημεῖον Π ἐπίπεδα ΠΒΘ , ΟΠΒ καὶ $\gamma\theta\pi$ ἔχουσι πρὸς
ἄλληλα τὴν ἀπαιτουμένην κλίσιν Κ , ὡς καὶ τὰ ἐπίπεδα $\gamma\theta\zeta$ καὶ $\gamma\theta\pi$.
Ἐξακολουθόντες οὕτω, βλέπομεν ὅτι αἱ δύο κυρταὶ ἐπιφάνεια θέλουσι
συναρμοσθῇ καὶ ἀποτελέσει μίαν μόνην συνεχῆ ἐπιφάνειαν. Τὸ ὑπὸ τῆς
ἐπιφανείας δὲ ταύτης περατούμενον στερεὸν θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον
κανονικὸν δωδεκάεδρον, ὡς συντιθέμενον ἐκ δώδεκα κανονικῶν ἴσων
πενταγώνων, καὶ ἔχον τὰς στερεὰς αὐτοῦ γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας.



ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΕΙΚΟΣΑΕΔΡΟΥ

Ἐστω $\Delta\text{ΒΓ}$ μία τῶν ἐδρῶν αὐτοῦ. Πρέπει ἐν πρώτοις νὰ σχηματί-
σωμεν στερεάν γωνίαν μὲ πέντε τρίγωνα ἴσα μὲ τὸ $\Delta\text{ΒΓ}$, καὶ τῆς ὁ-
ποίας αἱ διέδροι γωνίαι νὰ ᾖναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Πρὸς τοῦτο ἐπὶ
τῆς πλευρᾶς ΒΓ , ἴσης μὲ τὴν ΒΓ , κατασκευάζομεν τὸ κανονικὸν πεντά-

γωνον $B'Γ'Η'Ι'Δ'$, εἰς τὸ σημεῖον K , κέντρον τοῦ πενταγώνου, ὑψόνο-
μεν τὴν $ΚΑ'$ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $B'Γ'Δ'$,
προεκβάλλομεν αὐτὴν μέχρι τοῦ σημείου A' , εἰς
τρόπον ὥστε $A'B' = B'Γ'$, καὶ ἐνόνομεν $A'Γ'$, $A'Η'$,
 $A'Ι'$ καὶ $A'Δ'$. Ἡ ὑπὸ τῶν πέντε ἐπιπέδων $B'Α'Γ'$,
 $Γ'Α'Η'$, κτλ. σχηματιζομένη στερεὰ γωνία A'
θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη. Διότι αἱ πλάγιοι $A'Η'$,
 $A'Γ'$, κτλ. εἶναι ἴσαι, ἡ δὲ μία τούτων, ἡ $A'B'$,
εἶναι ἴση μὲ τὴν $B'Γ'$. Ὅλα λοιπὸν τὰ τρίγωνα
 $B'Α'Γ'$, $Γ'Α'Η'$, κτλ. εἶναι ἴσα πρὸς ἀλλήλα
καὶ μὲ τὸ δεδομένον $ΔΒΓ$.



Ἐὰν ἑτέρου εἶναι φανερόν ὅτι αἱ διέδροι γω-
νίας τῆς στερεᾶς γωνίας A' εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλή-
λας. Διότι αἱ στερεαὶ γωνίαι B' , $Γ'$, κτλ. εἶναι
ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς ἀποτελουμένη ἐκάστη ἐκ δύο γωνιῶν ἴσα-
πλευρῶν τριγώνων καὶ μιᾶς κανονικοῦ πενταγώνου. Ἐὰν δὲ καλέ-
σωμεν Π τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν αἱ ἴσαι γωνίαι κείν-
ται, ἡ γωνία Π θέλει παριστᾶ συγχρόνως τὴν κλίσιν δύο προσκειμέ-
νων ἑδρῶν τῆς στερεᾶς γωνίας A' .

Τούτων τεθέντων, ἐὰν εἰς τὰ σημεῖα A , B καὶ $Γ$ κατασκευάσωμεν
στερεὰς γωνίας ἴσας μὲ τὴν A' , θέλομεν οὕτω σχηματίσει κυρτὴν
τινα ἐπιφάνειαν $ΔΕΘΖΗΙΑΒΓ$, ἀποτελουμένην ἐκ δέκα ἰσοπλευρῶν
τριγώνων, ἐξ ὧν ἕκαστον κλίνει ἐπὶ τοῦ προσκειμένου κατὰ τὴν αὐ-
τὴν ποσότητα Π , καὶ παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰς κορυφὰς $Δ$, $Ε$, $Θ$,
κτλ. τῆς τεθλασμένης, οὕτως εἰπεῖν, γραμμῆς $ΔΕΘΖΗΙ$ συνέρχονται
ἐναλλάξ τρεῖς καὶ δύο γωνίαι ἰσοπλευρῶν τριγώνων.

Ἐὰν φαντασθῶμεν τώρα δευτέραν τινὰ ἐπιφάνειαν ἴσην μὲ τὴν
 $ΔΕΘΖΗΙΑΒΓ$, καὶ ἐνώσωμεν ἐκάστην τριπλῆν γωνίαν τῆς μιᾶς μὲ
ἐκάστην διπλῆν τῆς ἐτέρας, αἱ περίμετροι τῶν δύο τούτων ἐπιφα-
νειῶν θέλουσι ταύτισθῃ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν γωνιῶν αὐτῶν
ἔχουσιν ἤδη πρὸς ἀλλήλα τὴν ἀπαιτουμένην κλίσιν Π πρὸς σχημα-
τισμὸν πενταπλῆς στερεᾶς γωνίας ἴσης μὲ τὴν A , ἡ τοιαύτη αὐτῶν
ἐνωσις οὐδόλως θέλει μεταβάλλει τὴν θέσιν οὐδεμιᾶς τῶν περὶ ὧν ὁ
λόγος ἐπιφανειῶν, ἐπομένως αἱ ἐπιφάνειαι αὗται θέλουσιν ἀποτελέ-
σει μίαν μόνην συνεχῆ ἐπιφάνειαν, ἀποτελουμένην ἐξ εἰκισιν ἰσοπλευ-
ρῶν τριγώνων. Τὸ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας λοιπὸν ταύτης περατούμενον

στερεὸν θέλει εἶναι τὸ κανονικὸν εἰκοσάεδρον, διότι σύγκειται ἐξ εἰκοσιν ἴσων ἐδρῶν, καὶ ἔχει ὅλας αὐτοῦ τὰς στερεὰς γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἐδρῶν κακοῦ τινος πολυέδρου.

Ἐκ τῆς προηγουμένως δοθείσης κατασκευῆς τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων καὶ τῆς 41 προτάσεως τοῦ πέμπτου βιβλίου πορίζομεθα εὐκόλως τὴν ζητούμενην κλίσιν. Οὕτω π. χ.

Εἰς τὸ τετραέδρον ἐκάστη στερεὰ γωνία σχηματίζεται ἐκ τριῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων. Πρέπει λοιπὸν διὰ τῆς 41 προτάσεως τοῦ πέμπτου βιβλίου νὰ εὕρωμεν τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν δύο τῶν τριῶν ἐπιπέδων, τῶν σχηματιζόντων τὴν τριέδρον στερεὰν γωνίαν. Ἡ οὕτως εὑρεθησομένη γωνία θέλει παριστᾶ τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν δύο ὁποιωνδήποτε προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ τετραέδρου.

Εἰς τὸ ἐξάεδρον ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἐδρῶν εἶναι γωνία ὀρθή.

Εἰς τὸ ὀκτάεδρον πρὸς εὑρεσιν τῆς ζητούμενης κλίσεως πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν στερεὰν γωνίαν ἐκ δύο γωνιῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μιᾶς ὀρθῆς. Ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν αἱ ἴσαι αὗται γωνίαι κεῖνται, θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη κλίσις δύο προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ ὀκταέδρου.

Εἰς τὸ δωδεκάεδρον ἐκάστη στερεὰ γωνία σχηματίζεται ἐκ τριῶν γωνιῶν κανονικῶν πενταγώνων. Ἡ κλίσις λοιπὸν τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν δύο τῶν γωνιῶν τούτων κεῖνται, θέλει εἶναι ἡ ἀμοιβαία κλίσις δύο προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ δωδεκαέδρου.

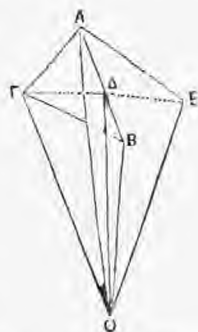
Εἰς τὸ εἰκοσάεδρον πρὸς εὑρεσιν τῆς ζητούμενης κλίσεως πρέπει νὰ σχηματίσωμεν στερεὰν γωνίαν ἐκ δύο γωνιῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μιᾶς κανονικοῦ πενταγώνου. Ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν αἱ τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων γωνίαι κεῖνται, θέλει παριστᾶ τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν δύο ὁποιωνδήποτε προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ εἰκοσαέδρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δεδομένης τῆς πλευρᾶς κακοῦ τινος πολυέδρου, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης εἰς τὸ πολυέδρον σφαῖρας.

Πρέπει ἐν τούτοις ν' ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν κανονικὸν πολυέδρον ἐγγράφεται καὶ περιγράφεται εἰς σφαῖραν.

Ἐστω AB ἡ κοινὴ πλευρὰ δύο προσκειμένων ἐδρῶν, Γ καὶ Β τὰ κέντρα αὐτῶν, καὶ $\Gamma\Delta$ καὶ $\text{Ε}\Delta$ αἱ ἐκ τῶν κέντρων τούτων ἐπὶ τῆς κοινῆς πλευρᾶς AB καταβιβαζόμεναι κάθετοι, αἵτινες συναπαντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Δ , μέσον τῆς πλευρᾶς AB . Ἡ ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων σχηματιζομένη γωνία $\Gamma\Delta\text{Ε}$ εἶναι γνωστὴ καὶ ἴση μὲ τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν δύο προσκειμένων ἐδρῶν (πρότ. 3).



Τούτων τεθέντων, ἐὰν ᾄξωμεν εἰς τὸ ἐπίπεδον $\Gamma\Delta\text{Β}$, τὸ ἐπὶ τῆς AB κάθετον, τὰς εὐθείας $\Gamma\text{Ο}$ καὶ $\text{Ε}\text{Ο}$ καθέτως ἐπὶ τῶν εὐθειῶν $\Gamma\Delta$ καὶ $\text{Ε}\Delta$ καὶ προεκβάλωμεν αὐτάς μέχρις οὗ συναντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Ο , λέγω ὅτι τὸ σημεῖον Ο θέλει εἶναι τὸ κέντρον τῆς τε ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης εἰς τὸ πολυέδρον σφαίρας, $\text{Ο}\Gamma$ ἡ ἀκτὶς τῆς πρώτης καὶ $\text{Ο}\Delta$ ἡ τῆς δευτέρας.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ ἀποστήματα $\Gamma\Delta$ καὶ $\text{Ε}\Delta$ εἶναι ἴσα καὶ ἡ ὑποτείνουσα $\Delta\text{Ο}$ εἶναι κοινὴ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $\Gamma\Delta\text{Ο}$ καὶ $\text{Ε}\Delta\text{Ο}$ εἶναι ἴσα, ἐπομένως $\Gamma\text{Ο} = \text{Ε}\text{Ο}$. Ἀλλ', ἐπειδὴ AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Gamma\Delta\text{Ε}$, τὸ δι' αὐτῆς διερχόμενον ἐπίπεδον $AB\Gamma$ θέλει εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Gamma\Delta\text{Ε}$ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ ἡ $\Gamma\text{Ο}$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς $\Gamma\Delta$ τῶν καθέτων ἐπιπέδων $AB\Gamma$ καὶ $\Gamma\Delta\text{Ε}$ καὶ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τούτων, τοῦ $\Gamma\Delta\text{Ε}$, αὕτη θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $AB\Gamma$ (πρότ. 29, Ε'). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $\text{Ε}\text{Ο}$ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $AB\text{Ε}$. Λοιπὸν αἱ δύο κάθετοι $\Gamma\text{Ο}$ καὶ $\text{Ε}\text{Ο}$, αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο προσκειμένων ἐδρῶν ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν ὑψούμεναι, συναπαντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο καὶ εἶναι ἴσαι.

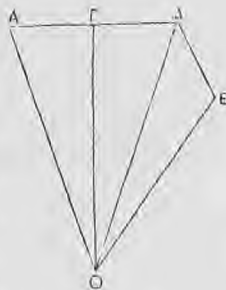
Ἐὰν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι $AB\Gamma$ καὶ $AB\text{Ε}$ παριστῶσι δύο ἄλλας ὁποιασδήποτε προσκειμένας τοῦ πολυέδρου ἑδρας, τὸ ἀπόστημα $\Gamma\Delta$ θέλει εἶναι τὸ αὐτὸ, καθὼς καὶ ἡ γωνία $\Gamma\Delta\text{Ο}$, ἥμισυ τῆς ἐπιπέδου γωνίας $\Gamma\Delta\text{Ε}$, τῆς μετρούσης τὴν διέδρον γωνίαν AB τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου. Τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν τρίγωνον $\Gamma\Delta\text{Ο}$ θέλει εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλας τὰς τοῦ πολυέδρου ἑδρας, ἐπομένως ἡ πλευρὰ αὐτοῦ $\Gamma\text{Ο}$ θέλει εἶναι σταθερὰ τὸ μέγεθος. Λοιπὸν, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ο , ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα $\text{Ο}\Gamma$ γράψωμεν σφαῖραν, ἡ σφαῖρα αὕτη θέλει ἄπτεσθαι ὅλων τῶν ἐδρῶν τοῦ πολυέδρου εἰς τὰ κέντρα αὐτῶν

Γ, Ε κ.τ.λ., διότι ἀπεδείχθη ὅτι ἐκάστη τούτων εἶναι κάθετος εἰς τὰ ἄκρα Γ καὶ Ε κ.τ.λ. τῶν ἀκτίνων αὐτῆς ΟΓ καὶ ΟΕ, κ.τ.λ. Ἡ σφαῖρα λοιπὸν αὕτη θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολυέδρον καὶ τὸ πολυέδρον περιγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν.

Ἄς ἄξωμεν δεύτερον τὰς εὐθείας ΟΑ καὶ ΟΒ. Ἐπειδὴ $ΓΑ = ΓΒ$, αἱ δύο πλάγιοι ΟΑ καὶ ΟΒ θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ὡς ἰσάκεις ἀφιστάμεναι τοῦ ποδὸς Γ τῆς καθέτου ΟΓ. Καὶ ἐπειδὴ ΟΓ καὶ ΓΒ εἶναι ποσὰ σταθερά τὸ μέγεθος, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΓΒ θέλει εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλας τὰς ἑδρας τοῦ πολυέδρου, ἐπομένως καὶ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ΟΒ θέλει εἶναι ἡ αὐτὴ τὸ μέγεθος, ὅποιαδήποτε καὶ ἂν ᾖναι ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ πολυέδρου. Ἐὰν λοιπὸν μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ ἢ ΟΒ γράψωμεν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει διέλθει δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου. Ἡ σφαῖρα λοιπὸν αὕτη θέλει εἶναι περιγεγραμμένη εἰς τὸ πολυέδρον καὶ τὸ πολυέδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν.

Τούτων ἀποδειχθέντων, ἡ λύσις τοῦ προταθέντος προβλήματος εἶναι εὐκολωτάτη καὶ ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς·

Ἐπὶ τῆς δεδομένης πλευρᾶς ΑΒ τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου κατασκευάζομεν τὴν ἑδραν ταύτην, καὶ ἔστω ΓΔ τὸ ἀπόστημα αὐτῆς. Εὐρίσκομεν ἀκολουθῶς διὰ τοῦ προβλήντος προβλήματος τὴν ἀμειβίαν κλίσιν δύο προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ πολυέδρου, κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΓΔΕ ἴσην μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν κλίσιν, λαμβάνομεν $ΔΕ = ΓΔ$ καὶ ἄγομεν ΟΓ καὶ ΟΕ



καθέτως ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΔΕ. Αἱ δύο αὗται κάθετοι θέλουσι συναπαντηθῆ εἰς τὸ σημεῖον Ο, καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι ΟΓ ἢ ΟΕ θέλει εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ πολυέδρον σφαίρας.

Πρὸς εὑρεσιν τῆς ἀκτίνος τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ πολυέδρον σφαίρας λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προβολῆς τῆς ΔΓ τὴν ἀπόστασιν ΓΑ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ ἐπὶ τῆς δεδομένης πλευρᾶς ΑΒ κατασκευασθὲν κανονικὸν πολύγωνον καὶ ἐνόνομεν ΟΑ. Εἶναι φανερὸν ὅτι ΟΑ θέλει εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ πολυέδρον σφαίρας.

Σχόλιον. Ἐκ τῆς ἀποδειχθείσης προτάσεως ἀπορρέουσι πλείστοι συνέπειαι.

1^{ον}. Πᾶν κανονικὸν πολυέδρον ἀποσυντίθεται εἰς τόσας κανονικὰς πυραμίδας, ὅσας ἑδρας ἔχει. Κοινὴ κορυφὴ τῶν πυραμίδων τούτων εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης ἢ περιγεγραμμένης σφαίρας, ὅπερ καὶ κέντρον τοῦ πολυέδρου καλεῖται.

2^{ον}. Ὁ ὅγκος κανονικοῦ τινος πολυέδρου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτίνος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας.

3^{ον}. Δύο κανονικὰ τοῦ αὐτοῦ ὀνόματος πολυέδρα εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν διαστάσεις ἀνάλογοι. Αἱ ἀκτῖνες λοιπὸν τῶν ἐγγεγραμμένων ἢ περιγεγραμμένων εἰς τὰ πολυέδρα σφαιρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ πλευραὶ τῶν ὁμοίων πολυέδρων.

4^{ον}. Ἐὰν ἐγγράψωμεν ἢ περιγράψωμεν κανονικὸν εἰς σφαῖραν πολυέδρον, τὰ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῶν διαφόρων τοῦ πολυέδρου πλευρῶν διερχόμενα ἐπίπεδα θέλουσι διαιρέσει τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν εἰς τόσα σφαιρικὰ ἴσα πολύγωνα, ὅσας ἑδρας ἔχει τὸ πολυέδρον.

ΣΥΛΛΟΓΗ

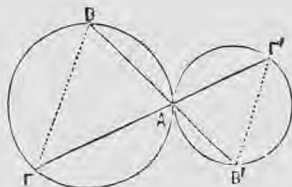
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΙΝΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ ΚΑΙ ΛΥΣΙΝ

1. Τὸ ἐκ τῆς ἐνώσεως τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου τινὸς προκύπτον σχήμα εἶναι παραλληλόγραμμον.

2. Τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων, τῶν καταβληζομένων ἐκ τινος ὁποιουδήποτε ἐντὸς ἰσοπλεύρου τινὸς τριγώνου κειμένου σημείου ἐπὶ τῶν τριῶν αὐτοῦ πλευρῶν, εἶναι σταθερόν.

3. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου A τῆς ἐπαφῆς δύο κύκλων ἄξωμεν δύο κατ' ἀρέσκειαν τεμνοῦσας BB' καὶ $ΓΓ'$, καὶ τὰς χορδὰς $ΓΒ$ καὶ $Γ'Β'$, αἱ χορδαὶ αὗται θέλουσιν εἶναι παράλληλοι.

4. Τὰ ἄθροίσματα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν περιγεγραμμένου τινὸς εἰς κύκλον τετραπλεύρου εἶναι ἴσα.

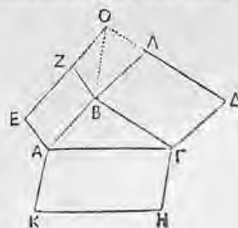
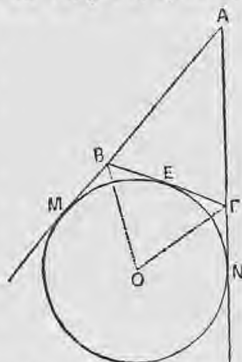


5. Ἐστω ὁ κύκλος O ἐφαπτομένης τῶν πλευρῶν AM καὶ AN τῆς γωνίας A , καὶ ἂς ἄξωμεν τὴν $ΒΕΓ$ ἐφαπτομένην εἰς τι σημεῖον E τοῦ τόξου MN . ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου $ABΓ$ εἶναι σταθερὰ, ὁποιοῦδήποτε καὶ ἂν ᾖ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς E τοῦ τόξου MN , καὶ 2ον ὅτι καὶ ἡ γωνία $ΒΟΓ$ εἶναι σταθερά.

6. Δοθέντος τετραπλεύρου τινὸς, ἐὰν κατασκευάσωμεν κύκλους ἐφαπτομένους τριῶν διαδοχικῶν τοῦ τετραπλεύρου πλευρῶν, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τέσσαρα αὐτῶν κέντρα εὐρίσκονται ἐπὶ περιφερείας κύκλου.

7. Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἐγγεγραμμένου τινὸς τετραπλεύρου τέμνονται κατ' ὀρθὴν γωνίαν.

8. Ἐπὶ τῶν δύο πλευρῶν AB καὶ $ΒΓ$ τριγώνου τινὸς $ABΓ$ κατασκευάζομεν δύο ὁποιοδήποτε παραλληλόγραμμα $ΑΕΖΒ$ καὶ $ΒΓΔΛ$, προσεκτάμεν τὰς πλευρὰς $ΕΖ$ καὶ $ΔΛ$ μέχρις οὗ συναντηθῶσιν εἰς τι σημεῖον O , ἄξωμεν τὴν $ΒΟ$, καὶ κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρῆς $ΑΓ$ τοῦ τριγώνου $ABΓ$ παραλληλόγραμμον $ΑΓΗΚ$, οὗτινος ἡ προσκειμένη τῇ $ΑΓ$ πλευρᾷ $ΑΚ$ νὰ ᾖ ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΟΒ$. ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο.



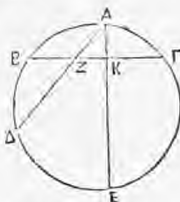
9. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ἐνόησαι τὰς κορυφὰς μὲ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τριγώνου τινός, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

40. Ἐὰν ἐξ ἑκάστης κορυφῆς τριγώνου τινός καταβιβάσωμεν κάθετον ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς καὶ ἐνώσωμεν ἀνὰ δύο τοὺς πόδας τῶν τριῶν καθέτων, τὸ οὕτω προκύπτον τρίγωνον θέλει ἔχει διὰ διχοτομοῦσας τὰ ὕψη τοῦ πρώτου τριγώνου.

41. Τὰ τρία ὕψη τριγώνου τινός τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

42. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου A , μέσου τοῦ τόξου BI , ᾧ ὥμεν κατ' ὁρίσκειαν δύο τεμνύσας AZ , AK , τὰ τέσσαρα σημεῖα E , K , Z , Δ θέλουσι καίεσθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

43. Ἐὰν ἐκ τινος σημείου, ἐντὸς κύκλου τινός, κειμένου, ᾧ ὥμεν κατ' ὁρίσκειαν δύο καθέτους ἐπ' ἀλλήλων εὐθείας, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων τοῦ κύκλου χορδῶν θέλει εἶναι σταθερόν.



44. Ἐὰν εὐθεῖα τις ᾖ καθετός ἐπὶ τινος ἐπιπέδου, πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον τῇ καθετῷ εὐθείᾳ θέλει εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

45. Ἐὰν δύο τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τριέδρου τινός γωνίας ᾖ ἴσαι, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν διέδρου γωνίαί θέλουσιν εἶναι ἴσαι, καὶ ἀντιστρόφως.

46. Εἰς πᾶσαν τριέδρον γωνίαν ἢ ἀπέναντι τῆς μεγαλειτέρας διέδρου γωνίας ἐπίπεδος γωνία εἶναι μεγαλειτέρα, καὶ ἀντιστρόφως.

47. Τὰ διὰ τῶν τριῶν διχοτομοῦσων τὰς ἐπιπέδους γωνίας τριέδρου τινός γωνίας ἀγόμενα κάθετα ἐπὶ τῶν ἀντιστοιχοῦσων ἐδρῶν ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

48. Τὰ διὰ τῶν τριῶν κόψεων τριέδρου τινός γωνίας ἐπὶ τῶν ἀπέναντι ἐδρῶν καθετῶς ἀγόμενα ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

49. Τὰ διὰ τῶν τριῶν κόψεων καὶ τῶν διχοτομοῦσων τὰς ἀπέναντι ἐδρας τριέδρου τινός γωνίας διερχόμενα ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

20. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ἐνόησαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι κόψεων τετραέδρου τινός, τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη.

21. Τὰ ἔχοντα μίαν στερεάν γωνίαν ἴσην τετραέδρου εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν περιχουσῶν τὰς ἴσας στερεάς γωνίας κόψεων.

22. Τὰ ἔχοντα μίαν διέδρον γωνίαν ἴσην τετραέδρου εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν περιχουσῶν τὰς ἴσας διέδρους γωνίας ἐδρῶν.

23. Τὸ διχοτομοῦν διέδρον τινὰ γωνίαν τριγωνικῆς τινος πυραμίδος ἐπίπεδον διαίρει τὴν ἀπέναντι τῆς διέδρου γωνίας ἐδραν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν προσκειμένων αὐτῇ ἐδρῶν τῆς διχοτομηθείσης διέδρου γωνίας.

24. Πᾶν ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τῶν μέσων δύο ἀντικειμένων κόψεων τετραέδρου τινός, διαίρει τὸ τετραέδρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

25. Διὰ τεσσάρων μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων σημείων διέρχεται πάντοτε ἐπιφάνεια σφαίρας καὶ μία μόνη.

26. Ἐν παντὶ τετραέδρῳ ἐγγράφεται σφαῖρά τις καὶ μία μόνη.

27. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ ἀπὸ δύο δεδομένων καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων εὐθειῶν ἀποστάσεις νὰ ἔχωσι δεδομένον ἄθροισμα.

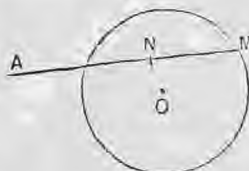
28. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ ἀπὸ δύο δεδομένων καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων εὐθειῶν ἀποστάσεις νὰ ἔχωσι δεδομένην διαφοράν.

29. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν διερχομένων διὰ δύο δεδομένων σημείων.

30. Νά εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διερχομένων χορδῶν κύκλου τινός.

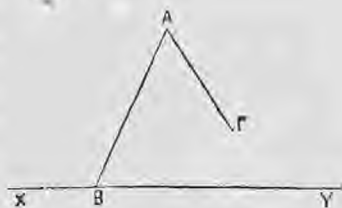
31. Νά εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ ἀπὸ δύο δεδομένων εὐθειῶν ἀποστάσεις νά ἔχωσι δεδομένον τιτὰ λόγον.

32. Ἐκ τινος σημείου A ἄγομεν εὐθεῖαν AM περπατομένην εἰς τὴν περιφέρειαν O , καὶ διακεκομμένην τὴν εὐθεῖαν ταύτην εἰς τὸ σημεῖον N οὕτως, ὥστε νά ὑπάρχῃ πάντοτε ἡ ἑξῆς ἀναλογία $AM : AN = \mu : \nu$. Νά εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων N .



33. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας AM λαμβάνομεν τὸ σημεῖον N οὕτως, ὥστε τὸ γινόμενον $AM \times AN$ νά ᾖται σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ δεδομένον τετράγωνον K^2 . Νά εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων N .

34. Ἐκ τινος σημείου A ἄγομεν εὐθεῖαν AB , περπατομένην ἐπὶ τινι, δεδομένης εὐθείας XY , καὶ τὴν AG οὕτως, ὥστε ἡ μὲν γωνία BAG νά ᾖται ἴση μὲ δεδομένην τιτὰ γωνίαν K , τὸ δὲ μέγεθος τῆς AG τοιοῦτον, ὥστε $AB : AG = \mu : \nu$, ἢ $AB \times AG = K^2$. Ποῖος θέλει εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων G , κατὰ τὴν πρώτῃν περίπτωσιν, καὶ ποῖος κατὰ τὴν δευτέραν;



35. Νά εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀφ' ὧν δύο δεδομένοι κύκλοι φαίνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

36. Νά εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἰσάκεις ἀπεχόντων ἀπὸ δύο δεδομένων ἐπιπέδων.

37. Νά εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ἰσάκεις ἀπεχόντων ἀπὸ τριῶν δεδομένων ἐπιπέδων.

38. Νά εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ διαστήματος, τῶν ἰσάκεις ἀπεχόντων ἀπὸ δύο δεδομένων καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων εὐθειῶν.

39. Νά εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ ἀπὸ δύο δεδομένων ἐπιπέδων ἀποστάσεις νά ἔχωσιν ἄθροισμα ἢ διαφορὰν σταθεράν.

40. Δοθέντων δύο σημείων A καὶ B καὶ τινος εὐθείας ST , νά εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας σημείοντι P τοιοῦτον, ὥστε αἱ γωνίαι APS καὶ BPT νά ᾖται ἴσαι.



41. Ἐκ τινος σημείου νά ἀχθῇ εὐθεῖα συναπαντῶσα δύο δεδομένας παραλλήλους καὶ οὕτως, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον μέρος αὐτῆς νά ᾖται ἴσον μὲ δεδομένην εὐθεῖαν.

42. Νά κατασκευάσωμεν τετράγωνον γνωρίζοντες τὴν μεταξὺ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου διαφορὰν.

43. Νά κατασκευάσωμεν τρίγωνον δεδομένων τῆς βάσεως αὐτοῦ, τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίας καὶ τοῦ ἁθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν.

44. Νά κατασκευάσωμεν κύκλον δεδομένης ἀκτίνος 1° διερχόμενον διὰ δύο δεδομένων σημείων· 2° διερχόμενον διὰ δεδομένου σημείου καὶ ἐφαπτόμενον εἰς δεδομένην εὐθεῖαν· 3° ἐφαπτόμενον εἰς δύο δεδομένας εὐθείας· 4° ἐφαπτόμενον εἰς εὐθεῖαν καὶ κύκλον δεδομένον· 5° διερχόμενον διὰ δεδομένου σημείου καὶ ἐφαπτόμενον εἰς δεδομένον κύκλον· 6° ἐφαπτόμενον εἰς δύο δεδομένους κύκλους.

45. Ἐκ τινος δεδομένου σημείου νά ἀξωμεν εἰς τινα κύκλον εὐθεῖαν τοιαύτην, ὥστε ἡ ἐν τῷ κύκλῳ περιλαμβανομένη χορδὴ νά ᾖται ἴση μὲ δεδομένην εὐθεῖαν.

KINHTE BIBLIOΘΗΚΗ ΒΕΡΟΙΑΣ

[illegible]

No 3

500

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

αριθ. χρ. 3515

Ημερομηνία
επιστροφής

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟΝ





Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Βέροιας